Primitivation

LANTONRINA Sendrasoa Laurence

14 juin 2022

Chapitre 1

La Primitivation

1.1 Définitions

Définition 1.1 *Primitive*
Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une fonction définie sur I. F est dite une primitive de f sur I si :

— *F est dérivable sur I*
— *$\forall x \in I, F'(x) = f(x)$*

Exemple 1.2 *La fonction sinus est une primitive de la fonction cosinus sur I.*

Définition 1.3 *Intégrale définie*
Soient f la fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$. On appelle intégrale définie de a à b de f la valeur (réelle) notée : $\int_a^b f(x)dx$ telle que $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Exemple 1.4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosxdx = [sinx]_0^{\frac{\pi}{2}} = sin\frac{\pi}{2} - sin0 = 1.$

Remarque 1.5 *Si F et G sont deux primitives de f sur un intervalle I, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I \quad G(x) = F(x) + c$.*

Preuve 1.6 *Soient F et G deux primitives de f sur un intervalle I, alors $G'(x) = f(x)$, de même $F'(x) = f(x)$. Posons $H(x) = G(x) - F(x)$, par conséquent*

$$\begin{aligned} H'(x) =& G'(x) - F'(x) \\ =& f(x) - f(x) \qquad (1.1) \\ D'où\ \forall x \in I \quad H'(x) =& 0 \end{aligned}$$

Alors H est une fonction constante sur I. On en déduit qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = c$. Donc $\forall x \in I \quad G(x) - F(x) = c$, autrement dit $\forall x \in I, G(x) = F(x) + c$.

Remarque 1.7 *Une fonction continue sur un intervalle admet une infinité de primitive sur I et ses primitives sont égales à une constantes près. On note $\int f(x)dx$ les primitives de f sur un intervalle I.*

Remarque 1.8 *L'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ ne dépend pas de la primitive F de f pour définir $\int_a^b f(x)dx$. (çad si on prend une primitive, on obtient la même valeur)*

Remarque 1.9 *Si x_0 est un point de I et $y_0 \in \mathbb{R}(x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R})$ alors il existe un et un seul primitive F de f tel que $F(x_0) = y_0$.*

Exemple 1.10 *la fonction logarithme ln est la primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ prenant la valeur 0 quand $x = 1$.*

$$\begin{aligned} ln(1) &= 0 \\ ln'(x) &= \frac{1}{x} \quad \forall x \quad \in \quad]0, +\infty[\end{aligned} \tag{1.2}$$

1.2 Propriétés

(i) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

(iv) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

(v) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(vi) Si $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

(vii) Si $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Preuve 1.11 *Supposons qu'on a $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ et posons $h(x) = f(x) - g(x)$. Par hypothèse $h(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, d'après (vi) $\int_a^b h(x)dx \geq 0 \cdots$*

1.3 Primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$\int f(x)dx$
0	c
x^r avec $r \neq -1$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$
$\dfrac{1}{x}$ avec $x \neq 0$	$ln\|x\| + c$
$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$	$\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \dfrac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots + \dfrac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + c$
e^x	e^x+c
$cos(x)$	$sin(x) + c$
$sin(x)$	$-cos(x) + c$
$ln(x)$	$xln(x) - x + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsin(x) + c$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arccos(x) + c$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$arctan(x) + c$

1.4 Méthode de primitivation

1 **Primitive par parties**
$(U \times V)'(x) = U'(x) \times V(x) + V'(x) \times U(x)$

$U'(x) \times V(x) = (U \times V)'(x) - V'(x) \times U(x)$
$\int U'(x) \times V(x) = \int (U \times V)'(x) - \int V'(x) \times U(x)$
$\boxed{\int U'(x) \times V(x) = U(x) \times V(x) - \int V'(x) \times U(x)}$
Exemple 1.12 *Calculer* $I = \int x^2 e^{2x} dx$

2 **Changement de variable**
Soient :
(i) φ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ (une fonction dérivable et de dérivée continue) définie sur $[a, b]$;
(ii) f une fonction continue sur $\varphi([a, b])$.
Alors $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt.$
Exemple 1.13 *Calculer* I
$I = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx.$

Posons $t = \sqrt{x}$ *alors* $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *ou* $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2t}$ *donc* $dx = 2tdt$.
Maintenant changeons les bornes, pour $x = 0, t = 0$ *et pour* $x = 1, t = 1$, *donc* $I = \int_0^1 e^t 2tdt = \int_0^1 2te^t dt = \cdots = 2.$

1.5 Différents types de primitives

1 **Fonctions rationnelles**

Définition 1.14 *On appelle fonction rationnelle tout rapport de deux polynômes*
Exemple 1.15 $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$
Définition 1.16 *Soient* $A(x)$ *et* $B(x)$ *deux polynômes. Faire la division euclidienne de* $A(x)$ *par* $B(x)$ *équivaut à déterminer les deux polynômes* $Q(x)$ *et* $R(x)$ *telles que* $A(x) = Q(x) \times B(x) + R(x)$ *où deg* $(R(x)) <$ *deg* $(B(x)), Q(x)$ *est appelé polynôme quotient et* $R(x)$ *est appelé polynôme reste.*
Exemple 1.17 $\dfrac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 2}{x^2 - 2x + 4}$

2 **Décomposition en éléments simples**
Définition 1.18 *Eléments simples*
Un élément simple dans l'ensemble des polynômes à coefficients réels est soit un polynômes du premier degré soit un polynômes du second degré à discriminant négatif. C'est à dire $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ *avec* $P(x) = ax^2 + bx + c$ *où* $a \in \mathbb{R}^*, \quad b \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}$.
Proposition 1.19 *Soit* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, *où* $a_n \in \mathbb{R}^*, \quad a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n-1$. *Nous pouvons décomposer* $P(x)$ *sous la forme*

$$P(x) = c \prod_{i=1}^{k_1} (x + \alpha_i)^{r_i} \prod_{j=1}^{k_2} (x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^{s_j}$$

où $\alpha_i \in \mathbb{R}$, *pour* $1 \leq i \leq k_1$ *et* $\beta_j \in \mathbb{R}, \gamma_j \in \mathbb{R}$, *pour* $1 \leq j \leq k_2$ *avec* $\Delta_j = \beta_j - 4\gamma_j < 0$,

$$\begin{array}{llll} r_i \in \mathbb{N} & 1 \leq i \leq k_1 & k_1 \in \mathbb{N} & c \in \mathbb{R} \\ s_j \in \mathbb{N} & 1 \leq j \leq k_2 & k_2 \in \mathbb{N} & \end{array} \tag{1.3}$$

Exemple 1.20 *Décomposer en élément simple* $P(x)$
$P(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$

Définition 1.21 *Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples*
On entend par élément simple en fraction rationnelle toute fraction rationnelle de la forme $\dfrac{c}{ax+b}$ *ou* $\dfrac{\alpha x+\beta}{a'x^2+b'x+c'}$ *avec*

$$\begin{aligned} a &\in \mathbb{R}^* \quad b, c \in \mathbb{R} \\ a' &\in \mathbb{R}^* \quad b' \in \mathbb{R}, \quad c' \in \mathbb{R} \\ {b'}^2 - 4a'c' &< 0 \\ \alpha &\in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Proposition 1.22 *Soit* $R(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ *où* $A(x)$ *et* $B(x)$ *sont des polynômes à coefficients réels avec* $deg(A(x)) < deg\ (B(x))$. *Alors*

$$B(x) = c\prod_{i=1}^{k_1}(x+\alpha_i)^{r_i}\prod_{j=1}^{k_2}(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^{s_j} \ \textit{avec}\ \beta_j^2 - 4\gamma_j < 0 \ \textit{et}$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \sum_{i=1}^{k_1}\sum_{m=1}^{r_i}\frac{a_{i,m}}{(x+\alpha_i)^m} + \sum_{j=1}^{k_2}\sum_{n=1}^{s_j}\frac{b_{j,n}x+c_{j,n}}{(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^n}$$

$a_{i,m} \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N},$ *et* $b_{j,n}, c_{j,n} \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$

Exemple 1.23 $\dfrac{x^2+2}{(x+1)^3(x-1)^2(x^2+1)^3} = \dfrac{a_1}{x+1} + \dfrac{a_2}{(x+1)^2} + \dfrac{a_3}{(x+1)^3} + \dfrac{b_1}{(x-1)} + \dfrac{b_2}{(x-1)^2} + \dfrac{c_1x+d_1}{x^2+1} + \dfrac{c_2x+d_2}{(x^2+1)^2} + \dfrac{c_3x+d_3}{(x^2+1)^3}$

3 <u>Primitive d'une fonction rationnelle</u>

$$\begin{aligned} \int \frac{A(x)}{B(x)}dx &= \int \left(\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{m=1}^{r_i}\frac{a_{i,m}}{(x+\alpha_i)^m} + \sum_{j=1}^{k_2}\sum_{n=1}^{s_j}\frac{b_{j,n}x+c_{j,n}}{(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^n}\right)dx \\ \int \frac{A(x)}{B(x)}dx &= \sum_{i=1}^{k_1}\sum_{m=1}^{r_i}\int\frac{a_{i,m}}{(x+\alpha_i)^m}dx + \sum_{j=1}^{k_2}\sum_{n=1}^{s_j}\int\frac{b_{j,n}x+c_{j,n}}{(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^n}dx \end{aligned} \tag{1.5}$$

Alors, nous avons à calculer $\displaystyle\int \frac{a_{i,m}}{(x+\alpha_i)^m}dx$ et $\displaystyle\int \frac{b_{j,n}x+c_{j,n}}{(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^n}dx$, donc

$$\begin{aligned} \int \frac{a_{i,m}}{(x+\alpha_i)^m}dx &= a_{i,m}\int(x+\alpha_i)^{-m}dx = \frac{a_{i,m}}{-m+1}(x+\alpha_i)^{-m+1} \quad \text{si } m \neq 1; \\ \int \frac{a_{i,m}}{(x+\alpha_i)^m}dx &= a_{i,m}\ln|x+\alpha_i| \quad \text{si } m = 1 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Calculons ensuite $K = \displaystyle\int \frac{b_{j,n}x+c_{j,n}}{(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^n}dx$.

La forme canonique de $x^2+\beta_j x+\gamma_j$ est :

$$\begin{aligned} x^2+\beta_j x+\gamma_j &= x^2+2x\frac{\beta_j}{2}+\gamma_j \\ &= x^2+2x\frac{\beta_j}{2}+\left(\frac{\beta_j}{2}\right)^2-\left(\frac{\beta_j}{2}\right)^2+\gamma_j \\ &= \left(x+\frac{\beta_j}{2}\right)^2-\frac{\beta_j^2-4\gamma_j}{4} \\ &= \left(x+\frac{\beta_j}{2}\right)^2-\frac{\Delta_j}{4} \text{ avec } \Delta_j=\beta_j^2-4\gamma_j<0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Comme $\Delta_j=\beta_j^2-4\gamma_j<0$ alors $\dfrac{-\Delta_j}{4}>0$. Posons $a^2=\dfrac{-\Delta_j}{4}$. Donc

$$\begin{aligned} x^2+\beta_j x+\gamma_j &= \left(x+\frac{\beta_j}{2}\right)^2+a^2 \\ &= a^2\left[\frac{1}{a^2}\left(x+\frac{\beta_j}{2}\right)^2+1\right] \\ &= a^2\left[\left(\frac{1}{a}x+\frac{\beta_j}{2a}\right)^2+1\right] \end{aligned} \tag{1.8}$$

Alors $K=\displaystyle\int\frac{b_{j,n}x+c_{j,n}}{(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^n}dx=\int\frac{b_{j,n}x+c_{j,n}}{a^2\left[\left(\frac{1}{a}x+\frac{\beta_j}{2a}\right)^2+1\right]^n}dx.$

Posons

$$\begin{aligned} X=\frac{1}{a}x+\frac{\beta_j}{2a} \quad &\text{alors} \quad x=aX-\frac{\beta_j}{2} \\ \text{et } dX=\frac{1}{a}dx \quad &\text{alors} \quad dx=adX \end{aligned} \tag{1.9}$$

Par suite

$$\begin{aligned} K=\int\frac{b_{j,n}x+c_{j,n}}{(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^n}dx &= \int\frac{b_{j,n}(aX-\frac{\beta_j}{2})+c_{j,n}}{a^2(X^2+1)^n}adX \\ =\int\frac{b_{j,n}XdX}{(X^2+1)^n} &+ \int\frac{-b_{j,n}\frac{\beta_j}{2}+c_{j,n}}{a(X^2+1)^n}dX \end{aligned} \tag{1.10}$$

Soient $K_1=\displaystyle\int\frac{b_{j,n}XdX}{(X^2+1)^n}$ et $K_2=\displaystyle\int\frac{D}{(X^2+1)^n}dX$ où $D=\dfrac{1}{a}\left(-b_{j,n}\dfrac{\beta_j}{2}+c_{j,n}\right)$ <u>Calcule de $K_1=\displaystyle\int\frac{b_{j,n}XdX}{(X^2+1)^n}$</u>
$K_1=\dfrac{b_{j,n}}{2}\displaystyle\int\frac{2XdX}{(X^2+1)^n}$ alors

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{b_{j,n}}{2}\ln(X^2+1) \quad \text{si} \quad n=1 \\ K_1 &= \frac{b_{j,n}}{2(-n+1)}(X^2+1)^{-n+1} \quad \text{si} \quad n\neq 1 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Calcule de $K_2 = \int \frac{D}{(X^2+1)^n} dX$

Cas 1 $n = 1$ $K_2 = \int \frac{D}{(X^2+1)} dX = D \arctan X$

Cas 2 $n \neq 1$ $K_2 = \int \frac{D}{(X^2+1)^n} dX$

Pour cela, on pose $X = \tan t$ alors $dX = (1 + \tan^2 t)dt$,

par conséquent $K_2 = \int \frac{D(1+\tan^2 t)dt}{(\tan^2 t + 1)^n} = D \int \frac{1}{(\tan^2 t + 1)^{n-1}} dt$

et enfin, comme on a la formule trigonométrique $\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + tan^2\theta}$ alors

$K_2 = D \int \cos^{2(n-1)} t dt$ et on linéarise $\cos^{2(n-1)} t$.

Exemple 1.24 *Calculer* $I = \int \frac{(x^2+2)dx}{(x+1)^2(x-1)(x^2+1)}$

4 **Primitive d'une fonction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$**

On se propose de calculer $I = \int R(\cos x, \sin x)dx$ où R est une fonction rationnelle. On alors besoin des formules trigonométriques suivantes :

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} \quad \text{avec} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Pour calculer I, on effectue le changement de variable en posant

$$\begin{aligned} t = \tan\frac{x}{2} \quad & \text{donc} \quad dt = \frac{1}{2}(1 + \tan^2\frac{x}{2})dx \\ \text{par suite} \quad dt = \frac{1}{2}(1+t^2)dx \quad & \text{alors} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \text{d'où} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad & \text{et} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \text{et} \quad I \quad \text{devient} \quad & I = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Exemple 1.25 *Calculer* $I = \int \frac{1}{\cos x + \sin x} dx$

4 **Primitive d'une fonction rationnelle en $\cosh x$ et $\sinh x$**

On rappelle que :

$$\begin{aligned} \cosh \quad & \text{désigne la fonction cosinus hyperbolique avec } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh \quad & \text{désigne la fonction sinus hyperbolique avec } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \tanh \quad & \text{désigne la fonction sinus hyperbolique avec } \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \end{aligned} \tag{1.13}$$

On se propose de calculer $I = \int R(\cosh x, \sinh x)dx$ où R est une fonction rationnelle. On a alors besoin des formules suivantes :

$$\cosh x = \frac{1 + \tanh^2(\frac{x}{2})}{1 - \tanh^2(\frac{x}{2})} \quad \text{et} \quad \sinh x = \frac{2\tanh(\frac{x}{2})}{1 - \tanh^2(\frac{x}{2})} \quad \text{avec} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Pour calculer I, on effectue le changement de variable en posant

$$\begin{aligned} t = \tanh\frac{x}{2} \quad &\text{donc} \quad dt = \frac{1}{2}(1-\tanh^2\frac{x}{2})dx \\ \text{par suite} \quad dt = \frac{1}{2}(1-t^2)dx \quad &\text{alors} \quad dx = \frac{2dt}{1-t^2} \\ \text{d'où} \quad \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad &\text{et} \quad \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} \\ \text{et} \quad I \quad \text{devient} \quad &I = \int R\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right)\frac{2dt}{1-t^2} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Exemple 1.26 *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{1}{\cosh x + \sinh x}dx$

1.6 Somme de Riemann

Définition 1.27 *On appelle subdivision d'un intervalle* $[a, b]$ *toute suite* $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ *strictement croissante telle que* $x_0 = a$ *et* $x_n = b$.

Posons $h = \dfrac{b-a}{n}$ *et* $x_{i+1} = x_i + h, h$ *est appelé pas de la subdivision. Soit* f *une fonction numérique définie et continue sur* $[a, b]$.

Considérons la somme $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(x_i)h = h\sum_{i=0}^{n} f(x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)$ *somme des aires de largeur* $f(x_i)$ *et de longueur* h*, c'est la somme de Riemann. Alors*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx, \text{ avec } x_i = a + k\frac{b-a}{n}, \text{ ou encore}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple 1.28

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \ln(1+\frac{k}{n}) = \int_0^1 \ln(1+x)dx = 2\ln 2 - 1$$

1.7 Exercices

Calculer les intégrales ou les primitives suivantes :

1.7.1 Recherche d'une primitive

$$\int \frac{1}{4+t^2}dt, \int \frac{t}{\sqrt{a+t^2}}dt \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}_*^+, \quad \int \sin t\cos^2 t dt, \int \frac{1}{a+e^t}dt \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}_*^+$$

1.7.2 Changement de variable

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2 t}dt, \int \frac{\cos(\ln(t))}{t}dt, \int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$$

1.7.3 Par parties

$$\int e^{2t}\cos t dt, \int t^n \ln t dt, \forall n \in \mathbb{N}, \int \arctan t dt$$

1.7.4 Fonctions rationnelles

$$\int \frac{t+2}{(t^2+1)(t+1)^2}dt, \int \frac{t^5+t^4+t+2}{t^4+1}dt, \int \frac{t^4}{(t^2+1)^2(t+1)}dt$$

1.7.5 Fonctions rationnelles en $\sin, \cos, \tan, \sinh, \cosh, \tanh$

$$\int \frac{1}{\sin x}dx, \int \frac{1}{\tan^2 x}dx, \int \frac{1}{\cosh x}dx, \int \frac{1}{\tanh^2(x)}dx$$

1.7.6 Intégrales abéliennes

$$\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{1+x}dx, \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$$

1.7.7 Calculer les intégrales suivantes

$$I_n = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx, \quad J_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}dx$$

1.7.8 Somme de Riemann

Déterminer les limites suivantes

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2n+k}{n^2}, Y_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}$$

1.7.9 Exercices suivantes

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b](a<b)$. Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \quad \forall x \in [a,b]$$

Chapitre 2

Réduction d'une matrice

2.1 Matrices

Définition 2.1 *On appelle matrice* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ *d'ordre* $m \times n$ *à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *un tableau possédant* m *lignes et* n *colonnes.* $a_{ij} \in \mathbb{R}$ *désigne ainsi l'élément de* A *se qui se trouvent dans la* $i-$*ème ligne et* $j-$*ème colonne.*

Opérations dans l'ensemble des matrices
On désigne par $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soient

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$$

1- Somme
La somme $A + B$ n'est défini que si $m = p$ et $n = q$ et dans ce cas, $A + B$ est la matrice$(c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

2- Produit
Le produit AB n'est défini que si $n = p$ et dans ce cas, AB est la matrice $(c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$ avec

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

3- Multiplication par un scalaire
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. on a $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Définition 2.2 *Si* $m = n$*, on parle d'une matrice carrée d'ordre* n*. On note* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *au lieu de* $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. On dit que* A *est :*

1- diagonale i $a_{ij} = 0$ *si* $i \neq j$ *;*

2- triangulaire supérieure (resp. inférieure) si tous les coefficients au dessous (resp. au dessus) de la diagonale sont nuls, c'est à dire, $a_{ij} = 0$ *si* $i > j$ *(resp.*$i < j$*) ;*

3- triangulaire si elle est triangulaire supérieure ou inférieure.

Définition 2.3 *On appelle matrice transposée de la matrice* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$*, la matrice notée* $A^t = (b_{ij})$ *avec* $b_{ij} = a_{ji}$.
Et si A *est une matrice carrée d'ordre* n*, on dit que* A *est une matrice symétrique si* $A^t = A$.

2.2 Calcul du déterminant d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathbb{R}$, on calcul le déterminant de A noté $det(A) =\mid A \mid$. Si A est d'ordre 2,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad det(A) = ad - cb$$

Si A est d'ordre 3, alors

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{pmatrix},$$

$det(A)$ se calcul par la méthode de Sarrus

$$det(A) = \begin{vmatrix} a^+ & b^+ & c^+ & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g_- & h_- & l_- & g & h \end{vmatrix} = +(ael + bfg + cdh) - (gec + hfa + ldb).$$

On peut aussi appliquer appliquer la méthode des cofacteurs, on écrit

$$A = \begin{pmatrix} a^+ & b^- & c^+ \\ d^- & e^+ & f^- \\ g^+ & h^- & l^+ \end{pmatrix}$$

Les règles de signes sur chaque élément de cette matrice est $(-1)^{i+j}$ où l'élément en question est à la $i-$ème ligne et $j-$ème colonne. On choisit alors une ligne ou une colonne pour le développement du déterminant, par exemple par la première ligne. Ainsi,

$$det(A) = +adet(A_{11}) - bdet(A_{12}) + cdet(A_{13}) \text{ où}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} e & f \\ h & l \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} d & f \\ g & l \end{pmatrix}, A_{13} = \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}, \text{appelée matrice adjointe à A.}$$

Le cofacteur de la $i-$ème ligne $j-$ème colonne est $(-1)^{i+j}det(A_{ij})$. En général, si $A = (a_{ij})$ est une matrice carrée d'ordre quelconque, la méthode des cofacteurs est toujours applicable et on a

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$$

si on développe suivant la $i-$ème ligne, ou encore

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$$

si on développe suivant la $j-$ème colonne. Par contre, la méthode de Sarrus, elle est seulement applicable pour une matrice d'ordre 3.
Le déterminant ne change pas si on ajoute à une ligne (ou une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (ou des autres colonnes). On a la transformation suivante : $L_i = L_i + \lambda \sum L_j$
Si on multiplie une ligne ou une colonne par une constante, le déterminant est multiplié par cette même constante.

Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux. Une matrice carrée d'ordre n est inversible si et seulement si elle admet un déterminant non nul. Ainsi, pour une matrice d'ordre n inversible, son inverse est

$$A^{-1} = \frac{(comA)^t}{det(A)}, \text{ où}$$

$com(A) = ((-1)^{i+j} det(A_{ij}))$.

2.3 Applications linéaires

Définition 2.4 *Un corps est un ensemble $\mathbb{K}$ muni de deux loi $+$ et $\times$ vérifiant :*
1- $(\mathbb{K}, +)$ *est un groupe commutatif dont l'élément neutre est noté* 0.
2- $(\mathbb{K} \setminus 0, \times)$ *est un groupe.*
3- La multiplication est distributive par rapport à l'addition : pour tous (a, b, c) *de* $\mathbb{K}^3$, *on a :*
(i) $a \times (b \times c) = a \times b \times c$
(ii) $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$

Définition 2.5 *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, on appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}-$espace vectoriel tout ensemble E muni d'une opération (loi) interne notée $+$ et d'une opération (loi) externe notée . tels que : $\forall x, y, z \in E$*
1- $\forall x, y \in E, x + y \in E$
2- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda.x$ *noté simplement* $\lambda x \in E$
3- $(E, +)$ *est un groupe commutatif, c'est à dire :*
a- $(x + y) + z = x + (y + z)$
b- il existe un élément neutre(unique) 0_E *tel que* $x + 0_E = x$
c- chaque $x \in E$ *a un opposé(unique) noté* $-x \in E$ *tel que* $-x + x = 0_E$
d- le groupe est commutatif au sens que $x + y = y + x$
4- et la loi externe vérifie : $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
a- $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
b- $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
c- $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$
d- $1_{\mathbb{K}}.x = x$ *($A_{\mathbb{K}}$ désigne l'élément unité dans $\mathbb{K}$)*

Définition 2.6 *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Une partie F de E est un $\mathbb{K}-$sous-espace vectoriel de E si :*
(i) F non vide
(ii) $\forall x, y \in F$ *alors* $x + y \in F$
(iii) $\forall x \in F$ *et* $\forall a \in \mathbb{K}$ *(scalaire)* $ax \in F$

Définition 2.7 *Soit $F_1, F_2, \cdots, F_n, n$ sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $E, n \geq 2$, tels que $F_i \cap F_j = 0$ pour $i \neq j$.*
On appelle somme directe de $F_1, F_2, \cdots, F_n$ le sous-espace vectoriel F noté $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$ qui est la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$. C'est à dire que chaque $x \in F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ avec $x_i \in F_i$ pour $i = 1, n$.
Par exemple, si $B = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est un système de vecteurs libre, le sous-espace vectoriel $F =< e_1, e_2, \cdots, e_n >$ est égal à $\mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}e_n$.
Lorsque $E = F \oplus G$, on dit que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires. Tout $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = f + g$ avec $f \in F$et $g \in G$.

Définition 2.8 *Soient E, F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ et f une application de E dans F. On dit que f est une application linéaire si elle vérifie les conditions suivantes :*

1- $\forall a \in E, b \in E, f(a+b) = f(a) + f(b)$

2- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall a \in E, f(\lambda a) = \lambda f(a)$

ou simplement si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}, \forall a \in E, \forall b \in E, f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$$

Exemple 2.9

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) = (2x + y + z, x - y - z) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Définition 2.10 *Soient E, F deux $\mathbb{K}-$ev, f une application linéaire, on appelle image de f et l'on note Imf l'ensemble*

$$f(E) = \{y \in F / \exists x \in E / f(x) = y\}$$

et noyau de f l'ensemble noté

$$Kerf = \{x \in E / f(x) = 0_F\} = f^{-1}(0_F)$$

Exemple 2.11 *Reprenons l'exemple 2.9.*

$$Kerf = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y + z = 0 \text{ et } x - y - z = 0\right\}$$

on a le système de

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = -z \\ x - y = z \end{cases}$$

la somme de deux équations nous donne $3x = 0 \Longrightarrow x = 0$ et donc $y = -z$. c'est à dire on a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ z = z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors $Ker\, f$ est la droite vectorielle engendrée par $e_1 = (0, -1, 1)^t$ ou encore, on écrit ker $f =< e_1 >$

$$Imf = \left\{(x', y') \in \mathbb{R}^2 / \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x', y')\right\}$$

On a $f(x, y, z) = (2x + y + z, x - y - z)$ alors

$$\begin{cases} 2x + y + z = x' \\ x - y - z = y' \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alors les deux vecteurs $(2, 1)^t, (1, -1)^t$ forment une base de Imf.

Remarque 2.12 *(i) Une application linéaire de E dans F est encore appelée homomorphisme de E dans E dans F.*

(ii) Si $E = F$, l'application linéaire de E dans E est dite endomorphisme de E.

(iii) Un homomorphisme bijectif est appelé isomorphisme.

(iv) Et un endomorphisme bijectif est appelé automorphisme.

Propriété(s) 2.13 *Soit f un homomorphisme de E dans F alors $f(0_E) = 0_F$. En effet, soit $a \in E$ alors*

$$\begin{aligned} f(0_E + a) = f(0_E) + f(a) &\iff f(a) = f(0_E) + f(a) \\ &\iff f(a) - f(a) = f(0_E) \iff 0_F = f(0_E). \end{aligned}$$

Espace vectoriel de dimension finie

Définition 2.14 *Soient E et F deux $\mathbb{K}-ev$ et f une application linéaire de E dans F. On suppose que E et F sont de dimension finies. On appelle rang de f le nombre entier noté rang(f) = dim(Im f).*

Propriété(s) 2.15 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, f une application linéaire. Alors on a $dimE = rangf + dim(Kerf)$.*
Si de plus $dim(E) = dimF$ alors les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f est injective
(ii) f est surjective
(iii) f est bijective

Matrice d'une application linéaire

Définition 2.16 *Soit E un $\mathbb{K}-ev$. Une famille $B = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est un base de E si et seulement si :*

$$\forall x \in E, \exists!(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}/x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, f une application linéaire de E dans F. Soient $B_1 = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ une base de E et $B_2 = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ une base de F.

Alors, $\forall x \in E, x = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j \Longleftrightarrow f(x) = f(\sum_{j=1}^{n} x_j a_j)$, comme f linéaire alors on a $f(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j a_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(a_j)$.

$$\text{Comme} \quad B_2 = (b_1, b_2, \cdots, b_m) \text{ une base de } F, \text{alors} f(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i.$$

Donc $f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_j \alpha_{ij} b_i$.

Comme $\mathbb{K}$ est un corps commutatif $f(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} x_j b_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j b_i$

c'est à dire $f(x) = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \cdots + \alpha_{in} x_n) b_i$.

Posons

$$\begin{array}{rl} X_1 = & \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \cdots + \alpha_{1n} x_n \\ X_2 = & \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \cdots + \alpha_{2n} x_n \\ \vdots & \\ X_m = & \alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \cdots + \alpha_{mn} x_n \end{array}$$

Alors $f(x) = \sum_{i=1}^{m} X_i b_i = X_1 b_1 + X_2 b_2 + \cdots + X_m b_m$.

Et la matrice M de f dans les bases B_1 et B_2 est la matrice à m lignes et n colonnes dont la

$j-$ème colonne est constitué par les coordonnées de $f(a_j)$ dans la base B_2.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(a_1) & \ldots & f(a_n) \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} b_1 \\ \\ b_m \end{array} \end{array}$$

Exemple 2.17 *Soit*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = (x+y, x-y, 2x+y) \end{array}$$

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ *est* $B_E = (i,j)$ *avec* $i = (1,0), j = (0,1)$
La base canonique de $\mathbb{R}^3$ *est* $B_F = (e_1, e_2, e_3)$ *avec* $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,0,1), e_3 = (0,0,1)$.
Calculons :
$f(i) = f(1,0) = (1,1,2) = (1,0,0) + (0,1,0) + 2(0,0,1) = e_1 + e_2 + e_3$
$f(j) = f(0,1) = (1,-1,1) = e_1 - e_2 + e_3$. *Soit* M *la matrice de* f *relative aux bases* B_E, B_F

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} f(i) & f(j) \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

Changement de base

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $B_0 = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$.
Soit $V = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ un vecteur de E.
Soit $B_1 = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ une nouvelle base de E définie par

$$\forall i \quad u_i = p_{1i}e_1 + p_{2i}e_2 + \cdots + p_{ni}e_n.$$

Dans la nouvelle base B_1 V s'écrira $V = x'_1u_1 + x'_2u_2 + \cdots + x'_nu_n$ ou encore
$V = x'_1(p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \cdots + p_{n1}e_n) + x'_2(p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \cdots + p_{n2}e_n) + \cdots + x'_n(p_{12}e_1 + p_{2n}e_2 + \cdots + p_{nn}e_n)$.
En développant on obtient :

$$V = (p_{11}x'_1+p_{12}x'_2+\cdots+p_{1n}x'_n)e_1+(p_{21}x'_1+p_{22}x'_2+\cdots+p_{2n}x'_n)e_2+\cdots+(p_{n1}x'_1+p_{n2}x'_2+\cdots+p_{nn}x'_n)e_n \tag{2.2}$$

De l'unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base on en déduit :

$$\begin{cases} x_1 = p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2 + \cdots + p_{1n}x'_n \\ x_2 = p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2 + \cdots + p_{2n}x'_n \\ \ \vdots \qquad \vdots \\ x_n = p_{n1}x'_1 + p_{n2}x'_2 + \cdots + p_{nn}x'_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

P est la matrice de passage de B_0 à B_1 dont la $j-$ème colonne est formé des coordonnées de u_j dans la base B_0.
Pour avoir les coordonnées d'un vecteur V de E dans la nouvelle base B_1 en fonction des coordonnées de V dans l'ancienne base B_0, il faut calculer P^{-1}(inverse de P), et on a :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemple 2.18 $\mathbb{R}^3$ *un espace vectoriel muni de la base canonique* $B_0 = (i, j, k)$. *On munit* $\mathbb{R}^3$ *d'une nouvelle base* $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$ *définie par :*

$$\begin{aligned} u_1 &= i + j + k \\ u_2 &= i + j \\ u_3 &= i - j \end{aligned}$$

On retrouve les coordonnées des vecteurs de B_1 *exprimées par rapport à la base* B_0 *dans les colonnes de la matrice de passage* P*, et on a :*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P *est la matrice de passage de* B_0 *à* B_1.
Et si on a un vecteur $V = (1, 2, 3)$ *dans la* $B_0 = (i, j, k)$. *Alors* $V = x'_1 u_1 + x'_2 u_2 + x'_3 u_3$ *dans la base* B_1, *où* x'_1, x'_2, x'_3 *sont déterminés par le système :*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 = 1 \\ x'_1 + x'_2 - x'_3 = 2 \\ x'_1 = 3 \end{cases}$$

et on trouve $x'_1 = 3, x'_2 = -\frac{3}{2}, x'_3 = -\frac{1}{2}$, *d'où* $V = 2u_1 - \frac{3}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3$.

Exemple 2.19 *Reprenons l'exemple* 2.17

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = (x + y, x - y, 2x + y) \end{array}$$

Si nous munissons $\mathbb{R}^2$ *d'une nouvelle base* $B'_E = (u_1, u_2)$ *définie par :*

$$\begin{cases} u_1 = -j \\ u_2 = i \end{cases}$$

Si nous munissons $\mathbb{R}^3$ *d'une nouvelle base* $B'_F = (w_1, w_2, w_3)$ *définie par :*

$$\begin{cases} w_1 = e_3 \\ w_2 = e_1 \\ w_3 = e_2 \end{cases}$$

$$f(u_1) = f(-j) = f(0,-1) = (-1, 1-1) = -w_1 - w_2 + w_3 \tag{2.3}$$
$$f(u_2) = f(i) = f(1,0) = (1,1,2) = 2w_1 + w_2 + w_3 \tag{2.4}$$

La matrice de f relative aux nouvelles bases B'_E, B'_F est :

$$M' = \begin{array}{cc} f(u_1) & f(u_2) \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

Matrice d'un endomorphisme dans un changement de base

Soit E un $\mathbb{K}-$ev de dimension n muni d'une base $B_0 = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$.
Soit f un endomorphisme de E et M la matrice de f dans la base B_0.
Soit $B_1 = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ une nouvelle base de E.
On note P la matrice de passage de B_0 à B_1, et M' la matrice de f dans la nouvelle base B_1.
$\forall x \in E$, la relation $y = f(x)$ s'écrit sous la forme matricielle :
$Y = MX$ dans la base B_0
$Y' = M'X'$ dans la base B_1
Les relations de changement de base nous permettent d'écrire :

$$X = PX' \Longleftrightarrow X' = P^{-1}X \text{ et } Y = PY' \Longleftrightarrow Y' = P^{-1}Y$$

On peut écrire :

$$\begin{cases} Y = MX = MPX' \\ Y' = P^{-1}Y = P^{-1}MPX' \end{cases} \Longrightarrow M' = P^{-1}MP$$

D'où la matrice de f dans la nouvelle base B_1 est $M' = P^{-1}MP$ avec :
M est la matrice de f dans l'ancienne base B_0,
P la matrice de passage de B_0 à B_1.

Matrice d'une application linéaire dans un changement de base

Soit E un $\mathbb{K}-$ev de dimension n muni d'une base $B_{0E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$.
Soit F un $\mathbb{K}-$ev de dimension p muni d'une base $B_{0F} = (v_1, v_2, \cdots, v_p)$ Soit f une application linéaire de E dans F.
Appelons M la matrice de f relative aux base B_{0E} et B_{0F}.
Soit $B_{1E} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ une nouvelle base de E, et $B_{1F} = (w_1, w_2, \cdots, w_p)$ une nouvelle base de F
On note P la matrice de passage de B_{0E} à B_{1E},
On note Q la matrice de passage de B_{0F} à B_{1F},
On notera M' la matrice de f relative aux nouvelles bases B_{1E}, B_{1F}.
$\forall x \in E$, la relation $y = f(x)$ s'écrit sous la forme matricielle :
$Y = MX$ par rapport aux bases B_{0E}, B_{0F}
$Y' = M'X'$ dans la base B_{1E}, B_{1F}
Les relations de changement de base nous permettent d'écrire :

$$X = PX' \Longleftrightarrow X' = P^{-1}X \text{ et } Y = QY' \Longleftrightarrow Y' = Q^{-1}Y$$

On peut écrire :

$$\begin{cases} Y = MX = MPX' \\ Y' = Q^{-1}Y = Q^{-1}MPX' \end{cases} \Longrightarrow M' = Q^{-1}MP$$

D'où la matrice de f relative aux nouvelles bases B_{1E}, B_{1F} est $M' = Q^{-1}MP$ avec :
M est la matrice de f dans les anciennes bases B_{0E}, B_{0F}.
P la matrice de passage de B_{0E} à B_{1E}.
Q la matrice de passage de B_{0F}, B_{1F}.

2.4 Polynôme caractéristique, valeurs propres et vecteurs propres

Définition 2.20 *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'elles sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$*

Définition 2.21 *1- Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle polynôme caractéristique de A et on note $\chi_A(x) = det(A - xI)$.*
2- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$.Un tel vecteur est appelé vecteur propre de A associé à λ.

Si λ est valeur propre de A, on note $Ker(A - \lambda I)$ l'ensemble de tous les vecteurs Xtels que $AX = \lambda X$.

Théorème 2.22 *Soit λ une valeur propre de A. Alors $ker(A - \lambda I)$ est un sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associé à λ. En outre, $\forall X \in ker(A - \lambda I), \quad AX \in ker(A - \lambda I)$.*

Preuve 2.23 *Soit $X, Y \in ker(A - \lambda I)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $A(\alpha X) = \alpha AX = \alpha\lambda X = \lambda(\alpha X)$ et $A(X + Y) = AX + AY = \lambda X + \lambda Y = \lambda(X + Y)$. Ce qui prouve que $ker(A - \lambda I)$ est un sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, $A[AX] = A(\lambda X) = \lambda AX$.*

Proposition 2.24 *λ est une valeur propre de A si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0$.*

Proposition 2.25 *Si A est d'ordre n, alors A a au plus n valeurs propres.*

Définition 2.26 *Soit λ une valeur propre de A. λ est dit une racine d'ordre de multiplicité égal à $m \in \mathbb{N}$ si $(x - \lambda)^m$ divise $\chi_A(x)$ et $(x - \lambda)^{m+1}$ ne divise plus $\chi_A(x)$.*

Proposition 2.27 *Soit λ une valeur propre de A d'ordre de multiplicité m. Alors $1 \leq dim\ ker(A - \lambda I) \leq m$.*

Définition 2.28 *On dit que χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$ si χ_A a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$.*

2.5 Diagonalisation et trigonalisation

Définition 2.29 *On dit qu'une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale B semblable à A.*

Théorème 2.30 *Une matrice carrée A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$ et $dim\ Ker(A - \lambda I) = m$ pour toute racine λ de χ_A d'ordre de multiplicité m.*

Définition 2.31 *une matrice carrée A est trigonalisable (ou triangularisable) dans $\mathbb{R}$ s'il existe une matrice triangulaire B semblable à A.*

Théorème 2.32 *Si χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$, alors A est trigonalisable. De plus, si B est une matrice triangulaire semblable à A, les éléments diagonaux de B sont les valeurs propres de A.*

Théorème 2.33 *Théorème de Cayley Hamilton*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\chi_A(A) = 0$

2.6 Recherche d'une base de $E_\lambda = \mathbf{Ker}(A - \lambda I)^m$ par la méthode de Gauss

avec λ est une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'ordre de multiplicité m.

Chapitre 3

Équations différentielles

3.1 Définition

Définition 3.1 *Nous appelons fonctions numériques de 3 variables réelles toute fonction*

$$\begin{aligned} f : A \times B \times C &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z), \ \text{où } A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}, C \subset \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Exemple 3.2

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

Définition 3.3 *Nous appelons équations différentielles du premier ordre toute équation différentielle de la forme $F(x, y, y') = 0$ où F est une fonction numérique de 3 variables réelles, y est une fonction numérique de variable réelle x et y' la dérivée par rapport à x donc $y' = \dfrac{dy}{dx}$.*

Exemple 3.4 $xy' + y + 2x = 0$

3.2 Équations différentielles du premier ordre à variables séparables

Définition 3.5 *Nous appelons équations différentielles du premier ordre à variables séparables toute équation différentielle de la forme $a(x)y' + b(x)y = 0$*

Résolution 3.6 $(E) : a(x)y' + b(x)y = 0, \quad a(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} a(x)y' &= -\,b(x)y \\ \frac{y'}{y} &= -\,\frac{b(x)}{a(x)} \\ \frac{dy}{dx} \times \frac{1}{y} &= -\,\frac{b(x)}{a(x)} \\ \frac{dy}{y} &= -\,\frac{b(x)}{a(x)}dx \\ \int \frac{dy}{y} &= \int -\frac{b(x)}{a(x)}dx \end{aligned} \tag{3.3}$$

Résoudre (E) revient à calculer les deux primitives.

Exemple 3.7 *Résoudre $(E) : xy' + 2y = 0$ où la condition initiale est $y(1) = 2$.*

3.3 Équations différentielles du premier ordre homogènes

Définition 3.8 *Une fonction numérique de 3 variables*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto F(x, y, z) \end{aligned} \tag{3.4}$$

est dite homogène d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ par rapport à x et y si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad F(\lambda x, \lambda y, z) = \lambda^n F(x, y, z)$$

Exemple 3.9 *$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + xyz$ est homogène d'ordre 2 par rapport à x et y. En effet, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $F(\lambda x, \lambda y, z) = \lambda^2 F(x, y, z)$*

Définition 3.10 *Nous appelons équations différentielles du premier ordre homogène toute équation différentielle de la forme $F(x, y, y') = 0$ où F est une fonction numérique de 3 variables homogène par rapport à x et y.*

Exemple 3.11 $(E) : x^2 + y^2 + xyy' = 0$

Résolution 3.12 *Soit (E) : $F(x, y, y') = 0$ une équation différentielle du premier ordre homogène.*
Nous posons $y = tx$ où t est une fonction numérique de variable x dérivable par rapport à x.
On calcule la dérivée : $y = tx$ alors $y' = t'x + t$ par suite, on a $F(x, tx, t'x + t) = 0$.
Puisque F est homogène par rapport à x, on a $x^n F(1, t, t'x + t) = 0$ avec $x \neq 0$, donc il reste à résoudre l'équation (E_1) : $F(1, t, t'x + t) = 0$. Elle est maintenant une équation équation différentielle du premier ordre à variables séparables.

Exemple 3.13 *Résoudre $(E) : x^2 + y^2 + xyy' = 0$*
Posons $y = tx$ donc $y' = t'x + t$. Alors l'équation (E) devient
$x^2(1 + t^2 + t(t'x + t)) = 0 \cdots$ *D'où*

$$x = \frac{\lambda}{\sqrt[4]{1 + 2t^2}} \quad et \quad y = tx = \frac{t\lambda}{\sqrt[4]{1 + 2t^2}} \quad avec \quad t \in \mathbb{R}.$$

C'est une solution paramétrique de paramètre t.

3.4 Équations différentielles du premier ordre linéaire

Définition 3.14 *Nous appelons équations équations différentielles du premier ordre linéaire toute équation différentielle de la forme* $(E) : a(x)y' + b(x)y = f(x)$ *où* a, b, f *sont des fonctions numériques d'une variable réelle avec* $a \neq 0$.

Exemple 3.15 $(E) : 2xy' + y = x + 1$

Résolution 3.16 *On a deux étapes à faire*

1^{er} *étape Résolution de l'équation sans second membre (ESSM)*

$(E) : a(x)y' + b(x)y = 0, \quad a(x) \neq 0$ *alors*

$$\begin{aligned}
a(x)y' &= -\,b(x)y\\
\frac{y'}{y} &= -\,\frac{b(x)}{a(x)}\\
\frac{dy}{dx}\times\frac{1}{y} &= -\,\frac{b(x)}{a(x)}\\
\frac{dy}{y} &= -\,\frac{b(x)}{a(x)}dx\\
\int\frac{dy}{y} &= \int -\frac{b(x)}{a(x)}dx\\
ln|y| &= \varphi(x) + K \, où \quad \varphi(x) \quad \textit{est une primitive de} \quad -\frac{b(x)}{a(x)}\\
|y| &= e^{\varphi(x)+K}\\
|y| &= e^{\varphi(x)}e^{K}\\
y &= \lambda e^{\varphi(x)} \quad où \quad \lambda = \pm e^{k}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Donc la solution générale de l'ESSM est $y = \lambda e^{\varphi(x)}$.

$2^{ème}$*étape Méthode de variations de la constante*

Nous supposons que λ *varie en fonction de* x.

$$\begin{aligned}
y &= \lambda e^{\varphi(x)}\\
y' &= \lambda' e^{\varphi(x)} + \lambda\varphi(x)' e^{\varphi(x)}\\
y' &= \lambda' e^{\varphi(x)} - \lambda\frac{b(x)}{a(x)}e^{\varphi(x)}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
(E) : a(x)\left(\lambda' e^{\varphi(x)} - \lambda\frac{b(x)}{a(x)}e^{\varphi(x)}\right) + b(x)\lambda e^{\varphi(x)} &= f(x)\\
a(x)\lambda' e^{\varphi(x)} &= f(x)\\
\lambda' &= \frac{f(x)}{a(x)e^{\varphi(x)}}\\
\frac{d\lambda}{dx} &= \frac{f(x)}{a(x)}e^{-\varphi(x)}\\
d\lambda = \frac{f(x)}{a(x)}e^{-\varphi(x)}dx
\end{aligned} \tag{3.7}$$

et on calcule les deux primitives

$$\begin{aligned}\int d\lambda =& \int \frac{f(x)}{a(x)} e^{-\varphi(x)} dx \\ \lambda =& \zeta(x) + K \quad \text{où} \quad \zeta(x) \text{ est une primitive de } \quad \frac{f(x)}{a(x)} e^{-\varphi(x)}\end{aligned} \tag{3.8}$$

La solution générale est de la forme $y = (\zeta(x) + K)\, e^{\varphi(x)}$.

Exemple 3.17 $(E) xy' + y = x + 1$ *où* $y(1) = 1$

Remarque 3.18 ① *Si* $f(x)$ *est un polynôme* $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a(x) = \alpha$ *et* $b(x) = \beta, \quad \alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R}$
Alors (E) *admet une solution particulière* $\varphi_2(x) = b_k x^k + \cdots + b_1 x + b_0$ *avec deg* $\varphi_2(x) =$*deg* $f(x)$
② *Si* $f(x) = P(x)e^{\mu x}$, (E) *est toujours de la forme* $(E) : \alpha y' + \beta y = f(x)$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R}$. *Donc*

- *(i) Si* μ *n'est pas racine de* $\alpha y' + \beta y = 0$ *alors la solution particulière de* (E) *est* $\varphi_2(x) = Q(x)e^{\mu x}$ *où deg* $Q(x) =$ *deg* $P(x)$.
- *(ii) Si* μ *est racine de* $\alpha y' + \beta y = 0$ *alors la solution particulière de* (E) *est* $\varphi_2(x) = xQ(x)e^{\mu x}$ *où deg* $Q(x) =$ *deg* $P(x)$.

D'où la solution générale de l'équation complète de (E) *est* $y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ *où* $\varphi_1(x)$ *est la solution de l'ESSM*

Exemple 3.19 *Trouver la solution de* $(E) : y' - 2y = (x + 1)e^{2x}$ *avec* $y(0) = 1$.

3.5 Équation de Bernoulli

Définition 3.20 *On appelle équation différentielle du premier ordre de Bernoulli toute équation différentielle de la forme :*

$$(E) : a(x)y' + b(x)y = f(x)y^p \text{ où } p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Résolution 3.21 *Comme* $(E) : a(x)y' + b(x)y = f(x)y^p$ *alors on divise l'équation* (E) *par* y^p *et on obtient :*

$$\begin{aligned} a(x)\frac{y'}{y^p} + b(x)\frac{y}{y^p} =& f(x) \\ (E_1) : a(x)\frac{y'}{y^p} + \frac{b(x)}{y^{p-1}} =& f(x) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Alors on effectue le changement de variable

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{y^{p-1}} = y^{-p+1} \quad & \text{alors} \quad \frac{du}{dx} = (-p+1)y'y^{-p} \\ \text{par suite} \quad \frac{du}{dx} = (-p+1)\frac{y'}{y^p} \quad & \text{donc} \quad \frac{y'}{y^p} = \frac{1}{-p+1}u' \end{aligned} \tag{3.10}$$

D'où $(E_1) : a(x)\dfrac{1}{-p+1}u' + b(x)u = f(x)$, *c'est une équation différentielle du premier ordre linéaire en* u' *et* u.

Exemple 3.22 $y' - 3y = (x + 1)y^2$ *avec* $y(0) = 1$

3.6 Équation différentielle du premier ordre de Riccati

Définition 3.23 *On appelle équation différentielle du premier ordre de Riccati toute équation différentielle de la forme* $(E) : a(x)y'+b(x)y+c(x)y^2 = f(x)$ *où* $a(x), b(x), c(x)$ *sont des fonctions numériques d'une variable réelle avec* $a(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

On connait une solution particulière y_p donc (E)devient

$$a(x)y_p' + b(x)y_p + c(x)y_p^2 = f(x)$$

Résolution 3.24 *On a deux méthodes trouver la solution générale de l'équation* (E)

(i) On effectue le changement de variable $y = \dfrac{1}{z} + y_p$ *où* z *est une solution numérique de variable réelle* x. *Donc* $y' = -\dfrac{z'}{z^2} + y_p'$. *D'où l'équation* (E) *devient*

$$\begin{aligned}
-a(x)\frac{z'}{z^2} + a(x)y_p' + b(x)\frac{1}{z} + b(x)y_p + c(x)\frac{1}{z^2} + c(x)y_p^2 + 2c(x)\frac{y_p}{z} &= f(x)\\
\textit{or} \quad a(x)y_p' + b(x)y_p + c(x)y_p^2 &= f(x)\\
\textit{donc} \quad -a(x)\frac{z'}{z^2} + b(x)\frac{1}{z} + c(x)\frac{1}{z^2} + 2c(x)\frac{y_p}{z} &= 0\\
\textit{par suite} \quad -a(x)\frac{z'}{z^2} + (b(x) + 2c(x)y_p)\frac{1}{z} + c(x)\frac{1}{z^2} &= 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

En multipliant chaque membre par z^2, *On a :*

$$-a(x)z' + (b(x) + 2c(x)y_p)\, z + c(x) = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

(ii) On effectue le changement de variable $y = z - y_p$ *et on obtient une équation différentielle de Bernoulli.*

Exemple 3.25 *Résoudre* $(E) : y'sinx - ycosx + y^2 + sin^2x = 0$ *sachant que* $y_p = cosx$

3.7 Équations différentielles du premier ordre de Lagrange

Définition 3.26 *On appelle équation différentielle du premier ordre de Lagrange toute équation différentielle de la forme :*

$(E) : y = x\varphi(y') + \psi(y)$ *où* φ *et* ψ *sont des fonctions numériques d'une variable réelle.*

Exemple 3.27 $y = xy'^2 + 2y'$

Résolution 3.28 $(E) : y = x\varphi(y') + \psi(y')$

1^{er} *cas Si* $\varphi(y') = y'$ *c'est à dire* $y = xy' + \psi(y')$
alors on pose $p = y'$
donc on a $y = xp + \psi(p)$ *et* $y' = p + xp' + p'\psi'(p)$
mais comme $y' = p$ *alors on a* $p = p + xp' + p'\psi'(p)$
ou encore $0 = p'(x + \psi'(p))$ *c'est à dire* $p' = 0$ *ou* $x + \psi'(p) = 0$ *donc* $p =$ *constante ou* $x = -\psi'(p)$.
Et si $p = y'$ *est une constante alors* $y = Cx + K, K \in \mathbb{R}$, *ou si* $x = -\psi'(p)$ *alors* $y = -p\psi'(p) + \psi(p)$ *(car* $y = xp + \psi(p)$*)*

2^{eme} cas Si $\varphi(y') \neq y'$ c'est à dire $y = x\varphi(y') + \psi(y')$
alors on pose $p = y'$
donc on a $y = x\varphi(p) + \psi(p)$ et $y' = \varphi(p) + xp'\varphi'(p) + p'\psi'(p)$
mais comme $y' = p$ alors on a $p = \varphi(p) + xp'\varphi'(p) + p'\psi'(p)$
ou encore $p - \varphi(p) = p'\left(x\varphi'(p) + \psi'(p)\right)$
or on a $p' = \frac{dp}{dx}$
donc $p - \varphi(p) = \frac{dp}{dx}\left(x\varphi'(p) + \psi'(p)\right)$
ou encore $(p - \varphi(p))\frac{dx}{dp} = \left(x\varphi'(p) + \psi'(p)\right)$
ou encore $(p - \varphi(p))\frac{dx}{dp} - x\varphi'(p) = \psi'(p)$
c'est une équation différentielle du première ordre linéaire dont l'inconnu est x et p devient la variable.

Exemple 3.29 *Soit $(E) : y = x(y')^2 + y'$*
Posons $p = y'$ on a $y = xp^2 + p$ et $y' = p^2 + 2xp'p + p'$
ou encore $p - p^2 = \frac{dp}{dx}(2xp + 1)$
ou encore $p(1-p)\frac{dx}{dp} - 2xp = 1$ c'est une équation différentielle du première ordre linéaire dont l'inconnu est x.
Donc on résout l'ESSM $p(1-p)\frac{dx}{dp} - 2xp = 0 \cdots$

3.8 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

Définition 3.30 *On appelle équation différentielle du second ordre à coefficients constants toutes équations différentielles de la forme :*

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{3.12}$$

$$\text{où} \quad a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f \quad \text{une fonction d'une variable réelle}$$

Résolution 3.31 *Soit $(E) : ay'' + by' + cy = f(x)$*
Étape 1 C'est la résolution de l'équation sans second membre(ESSM) : $(E_1) : ay'' + by' + cy = 0$
on a l'équation caractéristique (K) associée à (E_1)

$$(K) : ar^2 + br + c = 0 \tag{3.13}$$

on calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$
$\rightarrow$ $\underline{Si \Delta > 0}$, (K) admet deux racines réelles distinctes

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

alors la solution de l'équation sans second membre est :

$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

$\rightarrow$ $\underline{Si \Delta = 0}$, (K) admet une racine double $r = \frac{-b}{2a}$,
alors la solution de l'équation sans second membre est :

$$y = (Ax + b)e^{rx}$$

→ *Si* $\Delta < 0$, (K) *admet deux racines complexes conjuguées*

$$r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta,$$

alors la solution de l'équation sans second membre est :

$$y = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$$

D'une manière générale, la solution de l'ESSM est de la forme $y = Au(x) + Bv(x)$, *et on remarque que* $au''(x) + bu'(x) + cu(x) = 0$ *et* $av''(x) + b'v(x) + cv(x) = 0$

Étape 2 *C'est la résolution de l'équation complète* $(E) : ay'' + by' + cy = f(x)$. *On a deux méthodes pour résoudre* (E).

Méthode 1 *Méthode de la variation des constantes (MVC) : soit*

$$y = Au(x) + Bv(x), \tag{3.14}$$

on suppose que A *et* B *varient en fonction de* x, *alors*

$$y' = A'u(x) + Au'(x) + B'v(x) + Bv'(x).$$

Et on impose la condition suivante

$$A'u(x) + B'v(x) = 0 \tag{3.15}$$

ainsi

$$y' = Au'(x) + Bv'(x) \tag{3.16}$$

alors

$$y'' = A'u'(x) + Au''(x) + B'v'(x) + Bv''(x). \tag{3.17}$$

En rapportant (3.14), (3.16) *et* (3.17) *dans* (E), *on a*

$$a(A'u'(x) + Au''(x) + B'v'(x) + Bv''(x)) + b(Au'(x) + Bv'(x)) + c(Au(x) + Bv(x)) = f(x)$$

ou encore

$$A(\underbrace{au''(x) + bu'(x) + cu(x)}) + B(\underbrace{av''(x) + bv'(x) + cv(x)}) + (aA'u'(x) + aB'v'(x)) = f(x)$$

alors

$$aA'u'(x) + aB'v'(x) = f(x). \tag{3.18}$$

On a alors deux équations (3.15) *et* (3.18) *pour trouver* A' *et* B' *et ainsi* A *et* B.

$$\begin{cases} A'u(x) + B'v(x) & = & 0 & (3.15) \\ aA'u'(x) + aB'v'(x) & = & f(x) & (3.18) \end{cases}$$

En faisant la différence entre $(3.15) \times av'(x)$ *avec* $(3.18) \times v(x)$ *on a :*

$$A' = \frac{v(x)f(x)}{a(u'(x)v(x) - u(x)v'(x))}$$

ou encore

$A = h_1(x) + k_1$ *où* h_1 *est une primitive de* $\dfrac{v(x)f(x)}{a(u'(x)v(x) - u(x)v'(x))}$ *et* k_1 *une constante*

En faisant la différence entre (3.15) $\times au'(x)$ avec (3.18) $\times u(x)$ on a :

$$B' = \frac{u(x)f(x)}{a(u(x)v'(x) - u'(x)v(x))}$$

ou encore

$B = h_2(x) + k_2$ *où* h_2 *est une primitive de* $\dfrac{u(x)f(x)}{a(u(x)v'(x) - u'(x)v(x))}$ *et* k_2 *une constante*

Or $y = Au(x) + Bv(x)$ *alors*

$$y = (h_1(x) + k_1)u(x) + (h_2(x) + k_2)v(x) \text{ est la solution de l'équation } (E)$$

ou encore

$$y = k_1u(x) + k_2v(x) + h_1(x)u(x) + h_2(x)v(x) \tag{3.19}$$

Méthode 2 c'est la recherche d'une solution particulière. On distingue deux formes de $f(x)$
$\to$ *Si* $f(x) = P_n(x)e^{\delta x}$*, alors la solution particulière de* (E) *est :*
(i) $y_p = H_n(x)e^{\delta x}$ *si* δ *n'est pas solution de* (K) : 3.13*,*
(ii) $y_p = xH_n(x)e^{\delta x}$ *si* δ *est solution simple de* (K) : 3.13
(iii) $y_p = x^2H_n(x)e^{\delta x}$ *si* δ *est solution double de* (K) : 3.13
P_n, H_n *sont des polynômes de degré* n*.*
$\to$ *Si* $f(x) = P_n(x)\cos(\gamma x) + Q_m(x)\sin(\gamma x)$*, alors la solution particulière de* (E) *est :*

(i) $y_p = H_l(x)\cos(\gamma x) + G_l(x)\sin(\gamma x)$ *si* $i\gamma$ *n'est pas solution de* (K) : 3.13*,*
(ii) $y_p = x(H_l(x)\cos(\gamma x) + G_l(x)\sin(\gamma x))$ *si* $i\gamma$ *est solution simple de* (K) : 3.13
P_n, Q_m, H_l, G_l *sont des polynômes de degré respectif* $n, m, l,$ *et* $l = max(m, n)$*.*

Généralement $f(x)$ *est de la forme* $f(x) = e^{\delta x}(P_n(x)\cos(\gamma x) + Q_m(x)\sin(\gamma x))$*, alors la solution particulière de* (E) *est :*

(i) $y_p = e^{\delta x}(H_l(x)\cos(\gamma x) + G_l(x)\sin(\gamma x))$ *si* $\delta + i\gamma$ *n'est pas solution de* (K) : 3.13*,*
(ii) $y_p = xe^{\delta x}(H_l(x)\cos(\gamma x) + G_l(x)\sin(\gamma x))$ *si* $\delta + i\gamma$ *est solution simple de* (K) : 3.13*,*
(iii) $y_p = x^2e^{\delta x}(H_l(x)\cos(\gamma x) + G_l(x)\sin(\gamma x))$ *si* $\delta + i\gamma$ *est solution double de* (K) : 3.13*.*
P_n, Q_m, H_l, G_l *sont des polynômes de degré respectif* $n, m, l,$ *et* $l = max(m, n)$*.*
Dans tous les cas, on trouve les constantes coefficients des polynômes H_n, H_l, G_l *en rapportant* y_p, y_p', y_p'' *dans* (E)*. D'où la solution générale de* (E) *est* $y = y_0 + y_p$ *où* y_0 *est la solution de l'ESSM.*

Dans le cas où $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdot + f_n(x)$, alors