Optimisation sans contraintes:Approche Analytique

L'optimisation sans contraintes concerne la recherche du minimum ou du maximum d'une fonction différentiable sans restriction sur les variables de décision. L'approche analytique repose sur le calcul du **gradient** et de la **matrice hessienne** pour caractériser et résoudre le problème.

1 Optimisation dans $\mathbb{R}$

L'optimisation dans $\mathbb{R}$ concerne la recherche du minimum ou du maximum d'une fonction réelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Cette discipline est essentielle en mathématiques appliquées et en sciences de l'ingénieur.

1.1 Conditions d'Optimalité

1.1.1 Condition de Premier Ordre

Un point x^* est un point critique de f si :

$$f'(x^*) = 0 \tag{1}$$

1.1.2 Condition de Second Ordre

La nature du point critique est déterminée par la dérivée seconde :

- Si $f''(x^*) > 0$, alors x^* est un minimum local.
- Si $f''(x^*) < 0$, alors x^* est un maximum local.
- Si $f''(x^*) = 0$, un test supplémentaire est nécessaire.

Example 1. *Considérons la fonction :*

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \tag{2}$$

1. *Calcul des Points Critiques*
   La dérivée première est :
   $$f'(x) = 3x^2 - 6x \tag{3}$$
   Résolvons $f'(x) = 0$:
   $$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2 \tag{4}$$

2. *Analyse de la Dérivée Seconde*
   Calculons $f''(x)$:
   $$f''(x) = 6x - 6 \tag{5}$$
   - $f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow x = 0$ *est un maximum local.*
   - $f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow x = 2$ *est un minimum local.*

2 Optimisation dans $\mathbb{R}^n$

2.1 Concepts Fondamentaux

2.1.1 Dérivée partielle

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables. La dérivée partielle de f par rapport à x est définie comme :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \tag{6}$$

De manière similaire, la dérivée partielle par rapport à y est :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \tag{7}$$

Example 2. *Considérons la fonction :*

$$f(x, y) = x^2 y + 3xy^2 \tag{8}$$

Les dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3y^2 \tag{9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6xy \tag{10}$$

2.1.2 Dérivées Partielles d'Ordre Supérieur

Les dérivées partielles d'ordre supérieur s'obtiennent en différenciant plusieurs fois :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 6y \tag{11}$$

2.1.3 Fonction Différentiable

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est **différentiable** si elle possède une **dérivée** en chaque point de son domaine. Cela signifie que l'on peut approximer localement $f(x)$ par une fonction linéaire à l'aide du gradient.

Formellement : f est différentiable en un point x_0 si le **gradient** $\nabla f(x_0)$ existe et satisfait :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot h}{\|h\|} = 0.$$

Exemple : - $f(x) = x^2$ est différentiable car $f'(x) = 2x$ existe partout. - $f(x) = |x|$ **n'est pas différentiable** en $x = 0$ car sa dérivée à gauche et à droite diffèrent (-1 et $+1$).

2.1.4 Matrice Définie Positive et Définie Négative

Une matrice **symétrique** A est **définie positive** si, pour tout vecteur $x \neq 0$, on a :

$$x^T A x > 0.$$

Cela signifie que A **induit toujours une valeur strictement positive** lorsqu'on applique une transformation quadratique $x^T A x$.

Critères pour qu'une matrice A soit définie positive : 1. **Toutes ses valeurs propres sont strictement positives.** 2. **Tous ses mineurs principaux ont un déterminant strictement positif.**

Une matrice **symétrique** A est **définie négative** si, pour tout vecteur non nul x, on a :

$$x^T A x < 0.$$

Cela signifie que la transformation quadratique $x^T A x$ produit toujours une valeur strictement négative.

Critères pour qu'une matrice A soit définie négative : 1. **Toutes ses valeurs propres sont strictement négatives.** 2. **Les mineurs principaux alternent en signe (-, +, -, +, ...).**

2.2 Gradient et Conditions d'Optimalité

2.2.1 Définition du Gradient

Le gradient d'une fonction différentiable $f(x)$ est défini comme :

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T \tag{12}$$

Il indique la direction de la plus forte augmentation de f. En optimisation, on cherche à minimiser f, donc on se déplace dans la direction opposée au gradient.

2.2.2 Condition de Premier Ordre (Stationnarité)

Un point x^* est un point critique si :

$$\nabla f(x^*) = 0 \tag{13}$$

2.3 Matrice Hessienne et Nature du Point Critique

2.3.1 Définition de la Matrice Hessienne

La matrice Hessienne $H_f(x)$ est définie comme :

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \tag{14}$$

2.3.2 Analyse des Points Critiques

La Hessienne permet d'analyser la nature d'un point critique x^* :

- Si $H_f(x^*)$ est définie positive, x^* est un minimum local.
- Si $H_f(x^*)$ est définie négative, x^* est un maximum local.
- Si $H_f(x^*)$ est indéfinie, x^* est un point selle.

Example 3. ***Exemple : Trouver les points critiques et leur nature pour*** $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13$.

Étape 1 : Calcul du Gradient

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 4 \\ 2y - 6 \end{bmatrix}.$$

On résout $\nabla f(x, y) = 0$ *:*

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2, \quad 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3.$$

Donc $(2, 3)$ *est un point critique.*

Étape 2 : Calcul de la Hessienne

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres sont 2 *et* 2 *(strictement positives), donc* $H_f(x, y)$ *est définie positive.*

Conclusion : $(2, 3)$ *est un* ***minimum local****.*