

# Algoritmos e Estruturas de Dados

Tecnólogo em Análise e Desenvolvimento de Sistemas

Prof. Dr. Waldeyr Mendes Cordeiro da Silva

2019

## **Material didático para Algoritmos e Estruturas de Dados**

Versão 0.1

### **Autor: Waldeyr Mendes Cordeiro da Silva**

- Formação:
  - Técnico em Processamento de Dados
  - Bacharelado em Sistemas de Informação
  - Licenciatura em Ciências Biológicas
  - Complementação Pedagógica em Matemática
  - Especialização em Engenharia de Software
  - Especialização em Segurança da Informação
  - Mestrado em Informática
  - Doutorado em Ciências Biológicas (Bioinformática)
-  Lattes: <http://lattes.cnpq.br/2391349697609978>
-  ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8660-6331>
-  Scopus: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57190660358>
-  Google Acadêmico: <https://scholar.google.com.br/citations?user=5gh-liIAAAAJ>

# Sumário

<b>1</b>	<b>Prefácio</b>	5
<b>2</b>	<b>Introdução</b>	6
<b>2.1</b>	<b>Análise de Algoritmos</b>	7
2.1.1	Elementos de Notação Assintótica	7
<b>3</b>	<b>Programação</b>	10
3.1	Primeiros Passos em Programação	11
3.2	Trabalhando com Variáveis	12
3.3	Estruturas de Decisão	15
3.3.1	If/Else	15
<b>4</b>	<b>Estruturas de Dados</b>	18
4.1	Estruturas de Dados Homogêneas e Heterogêneas	19
4.2	Listas Encadeadas	22
4.3	Pilhas	26
4.4	Filas	26
4.5	Algoritmos de Ordenação	26
4.6	Árvores	34
4.7	Tabelas Hashing	35

<b>4.8</b>	<b>Grafos</b>	<b>35</b>
4.8.1	Grafos Simples . . . . .	36
4.8.2	Subgrafo e Subgrafo Gerador . . . . .	36
4.8.3	Grau de um Vértice . . . . .	36
4.8.4	Grafo Direcionado ou Orientado . . . . .	36
4.8.5	Representação de Grafos . . . . .	37
4.8.6	Busca em Grafos . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Aplicações</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>6</b>	<b>Apêndice</b> . . . . .	<b>41</b>



# 1. Prefácio

Este livro destina-se aos acadêmicos e demais interessados em iniciar os estudos em algoritmos e estruturas de dados.



## 2. Introdução

*Um bonita citação...*

Um algoritmo é um procedimento computacional bem definido que processa um dado ou um conjunto de dados (entrada) e produz algum novo dado ou conjunto de dados (saída) (CORMEN et al., 2009). Os algoritmos existem há muito tempo, mas estão presentes na sociedade moderna de uma forma nunca experimentada nestes cerca de 2,5 milhões de anos da história humana. Quase tudo que se produz, sejam produtos ou serviços, tem alguma influência de algoritmos. O comércio eletrônico utiliza tanto algoritmos clássicos como ordenações, quanto algoritmos modernos de recomendação de produtos baseado no histórico de visitas. A segurança das senhas em sistemas *Web* ou bancários é baseada em algoritmos de criptografia. Imagens de satélite, dados genômicos, reconhecimento de faces, previsão do tempo, quase tudo que se possa imaginar atualmente é influenciado direta ou indiretamente por algum algoritmo.

O estudo de algoritmos é uma demanda crescente frente aos novos desafios trazidos pelo grande volume de dados que as tecnologias modernas proporcionaram. A análise de algoritmos é uma área com questões importantes em aberto, como é o caso dos *Millennium Prize Problems*, com sete problemas matemático-computacionais, cujo prêmio é de 1 milhão de dólares pela solução de cada problema.

## 2.1 Análise de Algoritmos

O propósito da análise de um algoritmo é prever seu comportamento quanto ao tempo de execução ou ao espaço em memória que irá ocupar mesmo antes de ser executado em um computador específico (MANBER, 1989). Muitos fatores, especialmente o tamanho e a variedade dos dados de entrada, influenciam o comportamento do algoritmo utilizando suas principais características. Portanto, a análise de algoritmos provê uma aproximação, o que em muitos casos é bastante significante. As possibilidades de entradas diferentes, ainda que de mesmo tamanho são muito vastas e por isso um algoritmo não se comportará da mesma maneira para diferentes entradas de um mesmo tamanho. Por esta razão a análise de algoritmos se concentra primordialmente em predizer o tempo aproximado de execução baseada no tamanho da entrada, tirando da equação elementos como o hardware, por exemplo. Assim, ainda que haja uma variação no tempo de execução dependente da variabilidade da entrada, essa variação tem menor importância do que o tamanho da entrada.

Para entradas de tamanho ( $n$ ) pequeno, qualquer algoritmo custa pouco para ser executado, portanto, a análise de algoritmos concentra-se em valores grandes de  $n$  (ZIVIANI, 2007). O comportamento assintótico de uma função  $f(n)$  representa o limite do comportamento do custo quando  $n$  cresce.

### 2.1.1 Elementos de Notação Assintótica

#### Notação Big O

A notação  $O$  denota um limite assintótico superior, ou seja, o pior caso, aquele que toma mais tempo de execução. É importante ressaltar que existem notações para outros limites assintóticos, como médios ou inferiores. Porém, aqui veremos a notação  $O$ , por ser uma das mais utilizadas para estimar o tempo de execução como limite superior. Vejamos um exemplo. Tomando os valores 7, 2, 5, 4, 9 dispostos desta maneira e lendo-os em ordem, encontrariamos o número 9 em cinco passos. Em outra entrada de mesmo tamanho, mas com os valores dispostos de outra maneira, 5, 9, 7, 4, 2, encontrariamos o número 9 em dois passos. Independente das permutações possíveis, encontrariamos o número procurado em no máximo 5 passos, que é o pior caso, tomando entradas de mesmo tamanho e procurando desta exata maneira.

Na análise de algoritmos, as constantes, associadas ou não ao tamanho da entrada, têm baixa representatividade no tempo de execução (MANBER, 1989). Por exemplo, se um algoritmo executa em  $2n^2 + 50$ , dizemos que o algoritmo executa em  $n^2$  pois as constantes 2 e 50 não interferem significativamente no crescimento assintótico da função. O tempo de execução em função do tamanho da entrada está relacionado às várias classes de problemas que têm as seguintes funções de complexidade:

- $f(n) = O(1)$   $\mapsto$  Complexidade constante. O tempo de execução independe do tamanho ( $n$ ) da entrada.
- $f(n) = O(\log n)$   $\mapsto$  Complexidade logarítmica. Tempo de execução menor do que o de uma constante grande. Tipicamente são alcançados por algoritmos que dividem o problema em problemas menores.
- $f(n) = O(n)$   $\mapsto$  Complexidade linear. Tempo de execução linear ao tamanho da entrada. São, em geral algoritmos que realizam pequenos trabalhos nos dados de entrada.
- $f(n) = O(n \log n)$   $\mapsto$  Essa complexidade ocorre normalmente em algoritmos que quebra o problema em partes menores, solucionam-as de forma independente juntando em seguida essas sub-soluções.
- $f(n) = O(n^2)$   $\mapsto$  Complexidade quadrática. O crescimento quadrático significa que o tempo de execução crescerá rapidamente, pois será o quadrado do tamanho da entrada. Ou seja, para entradas grandes, o algoritmo levará muito tempo para ser executado.
- $f(n) = O(n^3)$   $\mapsto$  Complexidade cúbica. Assim como o algoritmo de complexidade

quadrática, o tempo será o cubo do tamanho da entrada. Algoritmos desse tipo são úteis apenas para pequenas tarefas.

- $f(n) = O(2^n) \rightarrow$  Complexidade exponencial. Algoritmos desse tipo geralmente não são úteis do ponto de vista prático. Geralmente são soluções baseadas em abordagens de “força bruta”.
- $f(n) = O(n!) \rightarrow$  Complexidade factorial. São ainda piores em termos de tempo de execução do que os algoritmos exponenciais.

Geralmente não é uma tarefa trivial determinar se uma certa função  $g(n)$  é  $O(f(n))$ . Uma função  $g(n)$  domina assintoticamente outra função  $f(n)$  se existem constantes positivas  $c$  e  $n_0$  em que  $n \geq n_0$  e  $c|g(n)| \geq |f(n)|$ . Ou seja, uma função é  $O(g(n))$  se, para todos os valores de  $n$  maiores que  $n_0$ , o valor da função  $f(n)$  está abaixo de  $g(n)$ . Para ilustrar melhor o domínio assintótico de uma função, considere as funções  $g(n) = 6n^2$  e  $f(n) = 5n^2 + 15$ , onde  $n \geq 4$ . É possível ver que  $g(n) \geq f(n)$  para  $n \geq 4$  na Figura 2.1.

$$g(n) = \begin{cases} n=1 & 6 \cdot 1^2 = 6 \\ n=2 & 6 \cdot 2^2 = 24 \\ n=3 & 6 \cdot 3^2 = 54 \\ n=4 & 6 \cdot 4^2 = 96 \\ n=5 & 6 \cdot 5^2 = 150 \\ n=6 & 6 \cdot 6^2 = 216 \\ n=7 & 6 \cdot 7^2 = 294 \\ \dots & \end{cases}$$

$$f(n) = \begin{cases} n=1 & 5 \cdot 1^2 + 15 = 20 \\ n=2 & 5 \cdot 2^2 + 15 = 35 \\ n=3 & 5 \cdot 3^2 + 15 = 60 \\ n=4 & 5 \cdot 4^2 + 15 = 95 \\ n=5 & 5 \cdot 5^2 + 15 = 140 \\ n=6 & 5 \cdot 6^2 + 15 = 195 \\ n=7 & 5 \cdot 7^2 + 15 = 260 \\ \dots & \end{cases}$$

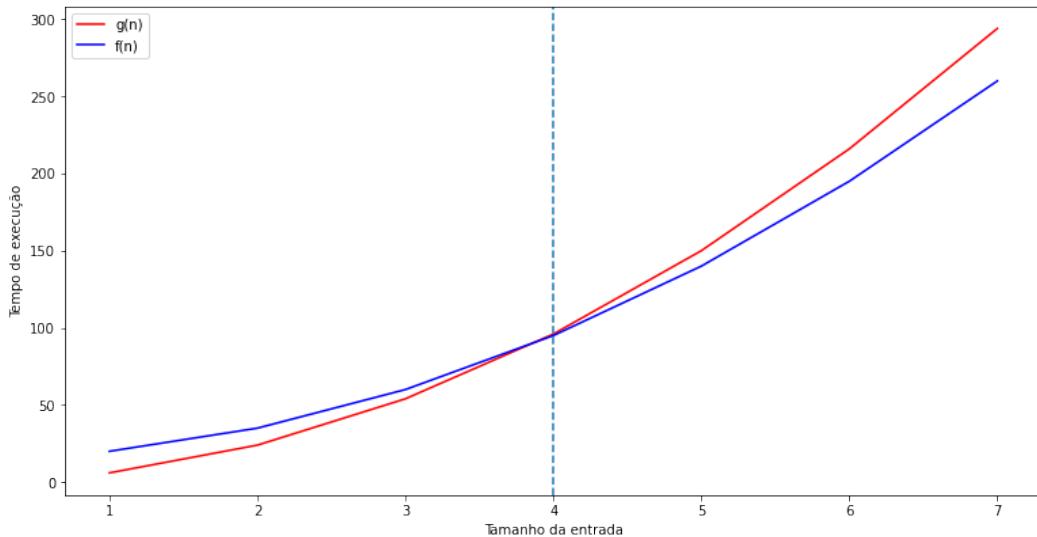


Fig. 2.1: Domínio assintótico da função  $g(n)$  sobre a função  $f(n)$  quando  $n \geq 4$ .

Diz-se que uma função  $f(n)$  cresce monotonamente se  $n_1 \geq n_2$ , e portanto  $f(n_1) \geq f(n_2)$ . Funções exponenciais crescem mais rápido do que funções polinomiais, ou seja, para as constantes  $c > 0$  e  $a > 1$ , e para todas as funções  $f(n)$  de crescimento monótono:

$$(f(n))^c = O(a^f(n))$$

Esta regra pode ser usada para comparar várias funções. Por exemplo, substituindo  $f(n)$  por  $n$

temos:

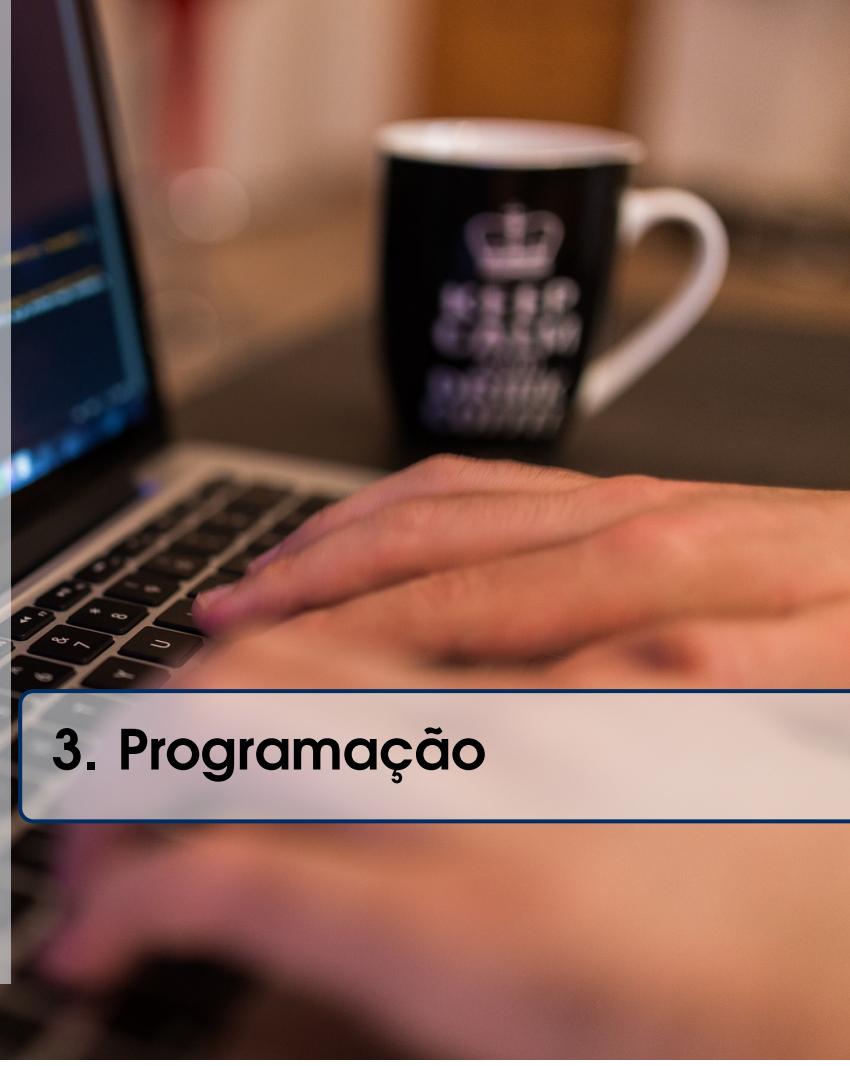
$$n^c = O(a^n)$$

A Tabela 2.1 ilustra os tempos de execução para diferentes tamanhos de entrada em cada uma das complexidades exponenciais e polinomiais.

Table 2.1: Comparação de tempos de execução polinomiais e exponenciais assumindo que 0,000001s é o tempo gasto para um  $n = 1$ . Adaptado de [Garey and Johnson \(1979\)](#).

Complexidade	Tamanho da entrada (n)					
	10	20	30	40	50	60
$n$	0,00001s	0,00002s	0,00003s	0,00004s	0,00005s	0,00006s
$n^2$	0,0001	0,0004s	0,0009s	0,0016s	0,0025s	0,0036s
$n^3$	0,001s	0,008s	0,027s	0,064s	0,125s	0,216s
$2^n$	0,001	1,0s	17,9 min	12,7 dias	35,7 anos	366 séculos

```
if (attachment_id > 0) {  
    $attachment = Attachment::find($attachment_id);  
  
    if ($attachment->columns == 1) {  
        $attachment->url = $attachment->attachment_url;  
    } else {  
        $attachment->url = $attachment->attachment_url . $attachment->title;  
    }  
}  
  
if ($attachment->url != '') {  
    $attachment->url .= '&single=1';  
}
```



### 3. Programação

### 3.1 Primeiros Passos em Programação

Dennis Ritchie criou a linguagem “C” em 1972 quando trabalhava nos laboratórios da Bell Telephone. A linguagem C foi criada para desenvolver uma nova versão do sistema operacional Unix que utilizava Assembly até então. Inicialmente, a cada nova implementação de Unix para um tipo de máquina, um novo compilador C devia ser desenvolvido para essa máquina. Nos anos 80, C tornou-se popular fora do ambiente Unix, criando a demanda por compiladores comerciais. Desde então, C é considerada uma linguagem de propósito geral, com instruções de alto nível e capaz de gerar programas rápidos em tempo de execução. Além disso, C influenciou de forma direta a sintaxe e estruturas de linguagens modernas como C++, Java, C#, Objective C, e muitas outras.

A linguagem C começou a ser padronizada pela *American National Standards Institute* (ANSI) para garantir a compatibilidade e a portabilidade da linguagem. Este padrão foi atualizado ao longo do tempo e posteriormente reconhecido pela ISO, dando origem ao padrão ANSI/ISO.

Um código escrito em linguagem C funciona com comandos, que são normalmente palavras em inglês (sintaxe) e são organizados em determinadas estruturas. Uma vez escritos em um arquivo, os comandos são então lidos pelos compiladores e convertidos para a linguagem de máquina que corresponde a ação pretendida. O Programa 3.1 mostra um exemplo de programa em C.

Programa 3.1: Meu primeiro programa em C.

---

```

1 #include <stdio.h>
2 void main() {
3     printf("Meu primeiro programa em C!\n\n");
4 }
```

---

Após escrito, o programa precisa ser compilado. Se o programa tiver sido escrito corretamente (sintaxe e estrutura), o compilador gera um executável. É importante perceber, que compiladores não verificam erros lógicos, ou seja de concepção do código. É justamente aí que reside o valor do trabalho humano como programador: combinar sintaxe e estruturas de forma que solucionem um dado problema do mundo real. Caso o compilador encontre algum erro no código dois tipos de mensagens podem ser emitidas:

1. Erro (*error*): Quando o código tem um problema que impede o compilador de gerar um executável
2. Aviso (*warning*): Quando o problema no código não impede de gerar um executável, mas requer algum tipo de atenção.

Para compilar o Programa 3.1 em Linux com o compilador C (Veja aqui como instalar) basta o seguinte comando no terminal:

```
gcc prog001.c -o prog001.sh
```

Após esta ação, será gerado o arquivo executável `prog001.sh`, o qual poderá ser executado com o comando:

```
./prog001.sh
```

No Programa 3.1 é impressa uma mensagem na tela. O caractere especial representado por “\n” identifica uma quebra de linha. Essa mensagem é representada como uma cadeira de caracteres (*string*) limitada pelas aspas. Se for necessário representar as aspas em uma *string*, será necessário escapá-las usando a barra “\”. O Programa 3.2 mostra como fazer isso.

Programa 3.2: Escapando aspas.

---

```

1 #include <stdio.h>
2 void main() {
3     printf("Que lindo dia para aprender \"C\"\n");
4 }
```

---

### 3.2 Trabalhando com Variáveis

Uma variável é um objeto capaz de guardar e representar um valor ou expressão em memória. As variáveis são associadas a nomes ou identificadores e sua existência é limitada por um espaço e um tempo na memória do computador, o qual frequentemente é igual ao tempo de execução do programa em que elas foram criadas.

Nas linguagens de programação é comum existirem tipos de dados pré-definidos, chamados tipo primitivos. Em C, os tipos primitivos são:

- char: caractere
- int: inteiro
- float: real de precisão simples
- double: real de alta precisão
- void: vazio ou sem valor

Há ainda os modificadores que alteram o tamanho, e consequentemente sua capacidade, dos tipos em memória. São eles:

- signed
- unsigned
- long
- short

Combinando os tipos e os modificadores temos:

Table 3.1:

Palavra chave	Tipo	Tamanho (Bytes)	Intervalo
char	Caractere	1	-128 a 127
signed char	Caractere com sinal	1	-128 a 127
unsigned char	Caractere sem sinal	1	0 a 255
int	Inteiro	4	-32.768 a 32.767
signed int	Inteiro com sinal	4	-32.768 a 32.767
unsigned int	Inteiro sem sinal	4	0 a 65.535
short int	Inteiro curto	2	-32.768 a 32.767
signed short int	Inteiro curto com sinal	2	-32.768 a 32.767
unsigned short int	Inteiro curto sem sinal	2	0 a 65.535
long int	Inteiro longo	8	-2.147.483.648 a 2.147.483.647
signed long int	Inteiro longo com sinal	8	-2.147.483.648 a 2.147.483.647
unsigned long int	Inteiro longo sem sinal	8	0 a 4.294.967.295
float	Ponto flutuante com precisão simples	4	3.4 E-38 a 3.4E+38
double	Ponto flutuante com precisão simples	8	1.7 E-308 a 1.7E+308
long double	Ponto flutuante com precisão dupla longo	16	3.4E-4932 a 1.1E+4932

O Programa 3.3 mostra um exemplo de variável representando o valor inteiro 10 e em seguida a impressão de uma mensagem com seu valor. Na impressão, é importante notar que a mensagem é formatada para que em um determinado ponto (\d) apareçam os dígitos correspondentes ao valor de a que é a variável abrigando o valor 10.

Programa 3.3: Trabalhando com variáveis.

---

```

1 #include <stdio.h>
2 void main() {
3     int a = 10;
4     printf("O valor de a = %d\n", a);
5 }
```

---

As formas de declarar variáveis podem ser diversas. O Programa 3.4 mostra a declaração de variáveis n1 e n2 atribuindo imediatamente os valores, enquanto a variável soma é criada sem que seu valor seja atribuído imediatamente. No Programa 3.5, as variáveis n1 e n2 são declaradas na mesma linha, separadas por vírgula, uma vez que são do mesmo tipo int.

---

Programa 3.4: Trabalhando com variáveis.

```

1 #include <stdio.h>
2 void main() {
3     int n1 = 37;
4     int n2 = -37;
5     int soma;
6     soma = n1 + n2;
7     printf("%d + %d = %d \n", n1, n2, soma);
8 }
```

---



---

Programa 3.5: Trabalhando com variáveis.

```

1 #include <stdio.h>
2
3 void main() {
4     int n1 = 1, n2 = 2;
5     int soma = n1 + n2;
6     printf("%d + %d = %d \n", n1, n2, soma);
7 }
```

---

Quanto à atribuição de valores à uma variável, ela pode ser direta ou indireta, ou seja, um valor pode ser diretamente atribuído à uma variável ou o valor de uma variável pode ser atribuído a outra, como no exemplo do Programa 3.6, onde *n1* recebe o valor de *n2* que recebe o valor de *n3* que recebe 10. Nesse caso, *n1*, *n2* e *n3* terão valor = 10.

---

Programa 3.6: Trabalhando com variáveis.

```

1 #include <stdio.h>
2
3 void main() {
4     int n1;
5     int n2;
6     int n3;
7     n1 = n2 = n3 = 10;
8     printf("n1 = %d \n", n1);
9     printf("n2 = %d \n", n2);
10    printf("n3 = %d \n", n3);
```

---

Dependendo do tipo primitivo de dados da variável, diferentes formatações podem ser usadas para a função printf() conforme pode ser visto na Tabela 3.2. O Programa 3.7 ilustra um exemplo de impressão de um float com 2 casas decimais.

---

Programa 3.7: Trabalhando com variáveis.

```

1 #include <stdio.h>
2 void main() {
3     float pi = 3.1415;
4     printf("Pi = %.2f\n", pi);
5 }
```

---

O Programa 3.8 mostra algumas variáveis e seus respectivos tamanhos em *Bytes* com sua saída formatada.

---

Programa 3.8: Trabalhando com variáveis.

```

1 #include <stdio.h>
2 void main() {
3     signed char v1 = 'A';
4     int v2 = 2147483647;
5     short v3 = 32767;
6     long int v4 = 2147483647;
7     float v5 = 3.4E38;
8     double v6 = 1.7E+308;
9     long double v7 = 1.79769e+308;
10    printf("Tamanho de %c = %d bytes \n", v1, sizeof(v1) );
```

Table 3.2: Formatação da saída de dados com a função printf().

Formatação	Significado
%c	caráter
%d	inteiro base 10
%e	exponencial ponto flutuante
%f	ponto flutuante
%i	integer (base 10)
%o	octal (base 8)
%s	string
%u	unsigned inteiro
%x	hexadecimal (base 16)
%%	caráter de porcentagem

```

11 printf("Tamanho de %d = %d bytes \n", v2, sizeof(v2) );
12 printf("Tamanho de %d = %d bytes \n", v3, sizeof(v3) );
13 printf("Tamanho de %d = %d bytes \n", v4, sizeof(v4) );
14 printf("Tamanho de %.1f = %d bytes \n", v5, sizeof(v5) );
15 printf("Tamanho de %.1f = %d bytes \n", v6, sizeof(v6) );
16 printf("Tamanho de %.1f = %d bytes \n", v7, sizeof(v7) );
17 }
```

### Operadores Aritméticos

Os operadores aritméticos usados em C são mostrados na Tabela 3.3. O Programa 3.9 ilustra o

Table 3.3: Operadores aritméticos.

Operador	Sintaxe
Adição unária	+a
Adição	a + b
Incremento pré-fixado	++a
Incremento pós-fixado	a++
Atribuição por adição	a += b
Subtração unária	-a
Subtração	a - b
Decremento pré-fixado	-a
Decremento pós-fixado	a-
Atribuição por subtração	a -= b
Multiplicação	a * b
Atribuição por multiplicação	a *= b
Divisão	a / b
Atribuição por divisão	a /= b
Módulo (resto)	a % b
Atribuição por módulo (resto)	a %= b

uso do operador *mod*, que retorna o resto da divisão inteira.

Programa 3.9: Trabalhando com variáveis.

```

1 #include <stdio.h>
2
3 void main() {
```

Table 3.4: Precedência de operadores.

Prioridade	Operadores
1º	Parênteses internos
2º	potência (^) e raiz (quando a linguagem oferece esses operadores)
3º	* / div e mod
4º	+ e -

```

4 // Operators
5 // + soma
6 // - subtracao
7 // * multiplicacao
8 // / divisao
9 // % modulo (divisao inteira)
10 int n1 = 21;
11 int m = 21 % 4;
12 printf("Modulo de %d = %d \n", n1, m);
13 }
```

### Entrada de Dados

A maneira mais clássica de um programa em C obter dados digitados pelo usuário através do *prompt* é usando a função *scanf()*. O Programa 3.10 mostra um exemplo onde os valores das variáveis *a* e *b* são informados pelo usuário e depois somados.

Programa 3.10: Trabalhando com a função *scanf()* para entrada de dados em C.

```

1 #include <stdio.h>
2 void main() {
3     int a, b, soma;
4
5     printf("Digite um numero inteiro: ");
6     scanf("%d", &a);
7
8     printf("Digite um numero inteiro: ");
9     scanf("%d", &b);
10
11    soma = a + b;
12    printf("O valor da soma: %d\n", soma);
13 }
```

## 3.3 Estruturas de Decisão

### 3.3.1 If/Else

O *if* é utilizado para testar uma proposição lógica. A proposição é escrita entre parênteses. Caso o resultado seja verdadeiro, o bloco de instruções subordinadas ao *if* será executado. O bloco é delimitado por “{” e “}”. Se houver apenas uma instrução subordinada, não há necessidade das chaves.

O *else* é utilizado para capturar a condição não atendida no teste do *if*, o “caso contrário”. O Programa 3.11 mostra um exemplo onde o valor da variável *x* é testado para saber se é maior ou igual a zero. Através deste teste é possível identificar se o valor é positivo (*if* verdadeiro  $\rightarrow$  *valor*  $\geq 0$ ), ou é negativo (*else*  $\rightarrow$  *valor*  $< 0$ ).

Programa 3.11: Trabalhando com o *if* em C.

```

1 #include <stdio.h>
2 void main() {
3     int x;
```

---

```

4     printf("Informe um valor inteiro: ");
5     scanf("%d", &x);
6     if (x>=0){
7         printf("%d: positivo.\n", x);
8     }
9     else{
10        printf("%d: negativo.\n", x);
11    }
12 }
```

---

Há ainda a possibilidade verificar múltiplas condições com o *else if*. O uso do *else if* é demonstrado no Programa 3.12 que verifica se um valor inteiro informado pelo usuário é = 10, 20 ou 30.

Programa 3.12: Trabalhando com o *if, else if, else* em C.

---

```

1 #include <stdio.h>
2 void main() {
3     int x;
4     printf("Informe um valor inteiro: ");
5     scanf("%d", &x);
6     if (x==10){
7         printf("%d.\n", x);
8     }
9     else if (x==20){
10        printf("%d.\n", x);
11    }
12     else if(x==30){
13        printf("%d.\n", x);
14    }
15     else{
16         printf("Diferente de 10, 20 ou 30.\n");
17     }
18 }
```

---

Um exemplo onde caracteres podem ser usados é mostrado no Programa 3.13. Neste programa uma questão apresenta alternativas *a, b, c, d* e *e*. O usuário escolhe a letra correspondente à resposta correta e o programa diz se ele acertou ou não. Além disso, reporta se a opção escolhida é inválida.

Programa 3.13: Trabalhando com o *if, else if, else* em C.

---

```

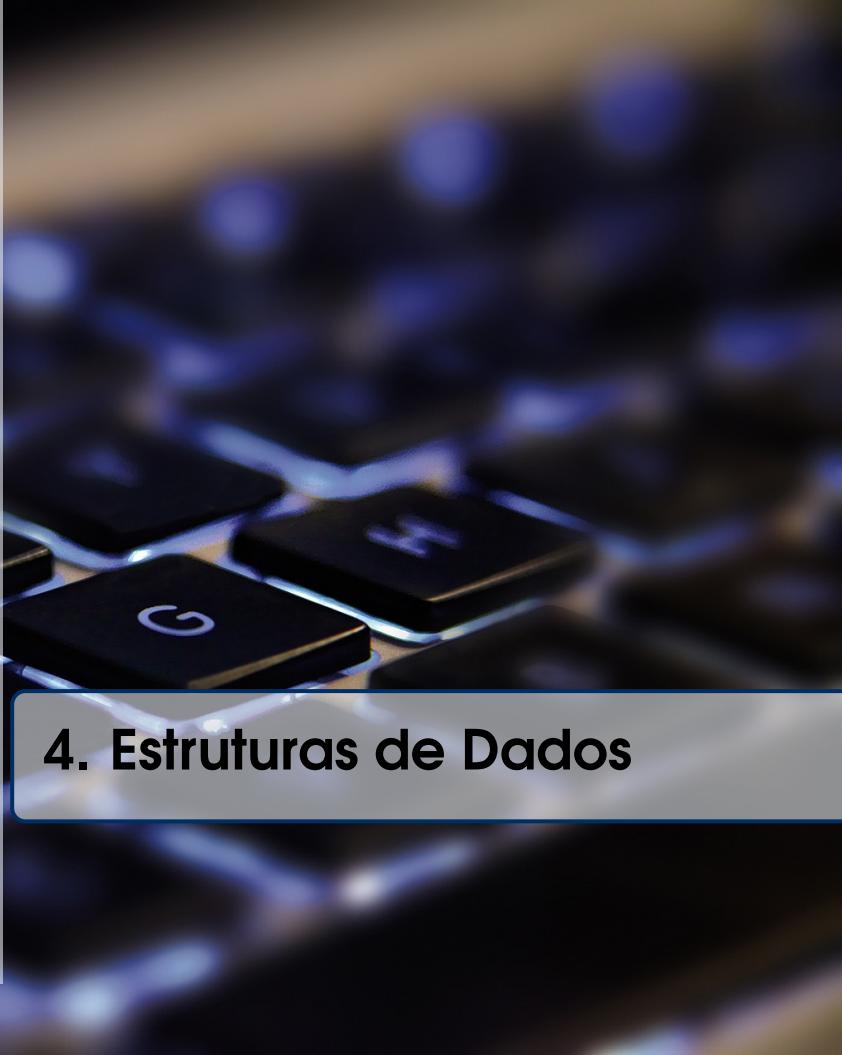
1 #include <stdio.h>
2 void main() {
3     printf ("Quem descobriu o Brasil?\n\n");
4     printf ("a) Cabral\n");
5     printf ("b) Cabrel\n");
6     printf ("c) Cabril\n");
7     printf ("d) Cabrol\n");
8     printf ("e) Cabrul\n\n");
9     char resposta;
10    printf("Resposta (a,b,c,d ou e): ");
11    scanf("%c", &resposta);
12    if (resposta=='a'){
13        printf("Certo.\n");
14    }
15    else if (resposta=='b'){
16        printf("Errado.\n");
17    }
18    else if(resposta=='c'){
19        printf("Errado.\n");
20    }
21    else if(resposta=='d'){
22        printf("Errado.\n");
23    }
24    else if(resposta=='e'){
25        printf("Errado.\n");
26    }
}
```

---

```
27     else{
28         printf("Opcao invalida.\n");
29     }
30 }
```

---

Estruturas de Dados Homogêneas e Heterogêneas  
Listas Encadeadas  
Pilhas  
Filas  
Algoritmos de Ordenação  
Árvores  
Tabelas Hashing  
**Grafos**  
Grafos Simples  
Subgrafo e Subgrafo Gerador  
Grau de um Vértice  
Grafo Direcionado ou Orientado  
Representação de Grafos  
Busca em Grafos



## 4. Estruturas de Dados

Tipos abstratos de dados são conjuntos de valores sobre os quais é possível aplicar funções de forma homogênea através de um algoritmo. Funções e valores em conjunto, constituem um modelo matemático que pode ser empregado em problemas do mundo real (ASCENCIO; ARAÚJO, 2010). Os algoritmos são projetados em função de um tipo abstrato de dados. A representação computacional de um tipo abstrato de dados com seus tipos e operações permitidas pode ser entendida como uma **estrutura de dados**. Uma estrutura de dados é um meio para armazenar e processar dados com vistas à sua organização, acesso e modificações (CORMEN et al., 2009).

## 4.1 Estruturas de Dados Homogêneas e Heterogêneas

### Vetores

Primeiro, uma revisão sobre vetores. Em C uma variável que represente um vetor é um ponteiro. Portanto, quando um vetor é parâmetro para uma função o que é passado é a sua referência, ou seja, o endereço base do vetor. Vetores podem ser bi-, tri-, ou multi-dimensionais, mas abrigam o mesmo tipo de dados. O programa 4.1 mostra o vetor sendo passado para uma função que retorna o valor do meio do vetor.

Programa 4.1: Em C, vetores são passados para funções por referência.

---

```

1 #include <stdio.h>
2 #define TAMANHO 100
3 int getValorDoMeio(int *vetor, int tamanho);
4
5 void main(){
6     int vetor[TAMANHO];
7     int valorDoMeio;
8     for(int i=0; i<TAMANHO;i++){
9         vetor[i] = i+1;
10    }
11    valorDoMeio = getValorDoMeio(vetor,TAMANHO);
12    printf("Valor do meio: %d \n", valorDoMeio);
13 }
14
15 int getValorDoMeio(int *vetor, int tamanho){
16     printf("Valores no vetor:\n");
17     for(int i=0; i<tamanho;i++){
18         printf("%d\t",vetor[i]);
19     }
20     printf("\n");
21     return vetor[tamanho/2];
22 }
23 // Valores no vetor:
24 // 1   2   3   4   5   6   7   8   9   10
25 // 11  12  13  14  15  16  17  18  19  20
26 // 21  22  23  24  25  26  27  28  29  30
27 // 31  32  33  34  35  36  37  38  39  40
28 // 41  42  43  44  45  46  47  48  49  50
29 // 51  52  53  54  55  56  57  58  59  60
30 // 61  62  63  64  65  66  67  68  69  70
31 // 71  72  73  74  75  76  77  78  79  80
32 // 81  82  83  84  85  86  87  88  89  90
33 // 91  92  93  94  95  96  97  98  99  100
34 // Valor do meio: 51

```

---

Programa 4.2: Um vetor de duas dimensões mostrando apenas valores da diagonal principal.

---

```

1 #include <stdio.h>
2 #define TAMANHO 4
3 void main(){
4     int vetor[TAMANHO][TAMANHO];
5     for (int l=0; l<TAMANHO; l++){
6         for (int c=0; c<TAMANHO; c++){
7             printf("Valor [%d][%d]: ", l,c);
8             scanf("%d", &vetor[l][c]);
9         }
10    }
11
12    for (int l=0; l<TAMANHO; l++){
13        for (int c=0; c<TAMANHO; c++){
14            if(l == c){
15                printf("[%d][%d]:%d\t",l,c,vetor[l][c]);
16            }
17        }
18        printf("\n");
19    }
20 }

```

---

---

```

21 // Valor [0][0]: 1
22 // Valor [0][1]: 2
23 // Valor [0][2]: 2
24 // Valor [0][3]: 2
25 // Valor [1][0]: 2
26 // Valor [1][1]: 1
27 // Valor [1][2]: 2
28 // Valor [1][3]: 2
29 // Valor [2][0]: 2
30 // Valor [2][1]: 2
31 // Valor [2][2]: 1
32 // Valor [2][3]: 2
33 // Valor [3][0]: 2
34 // Valor [3][1]: 2
35 // Valor [3][2]: 2
36 // Valor [3][3]: 1
37 // [0][0]:1
38 // [1][1]:1
39 // [2][2]:1
40 // [3][3]:1

```

---

## Strings em C

Em C, uma *string* é um vetor de caracteres e cada *string* termina com um caractere *NULL*. Uma constante *string* é definida dentro de aspas em que o caractere *NULL* é automaticamente incluído. Por exemplo, a string "IFG" é um vetor de 4 elementos. O programa 4.1 mostra um exemplo de *string* em C.

Programa 4.3: Em C, *strings* são vetores de caracteres..

---

```

1 #include <stdio.h>
2 #define TAMANHO 100
3 void main(){
4     char vetor[TAMANHO] = "Aqui vai uma frase bastante longa para servir de exemplo!";
5     int qtd_de_letras_a_na_string = 0;
6     for (int i=0; i<TAMANHO; i++){
7         if (vetor[i] == 'a' || vetor[i] == 'A'){
8             qtd_de_letras_a_na_string++;
9         }
10    }
11    printf("Quantidade de letras '\\'a\' ou '\\'A\' na string: %d\n",
12           qtd_de_letras_a_na_string);
13 }

```

---

## Structs

Em C, uma *struct* é uma forma de criar novos tipos heterogêneos. O programa 4.1 mostra um exemplo de *struct* em C.

## Programa 4.4: Structs em C.

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <string.h>
3 #include <math.h>
4 #define CPF_TAM 14
5 #define NOME_TAM 100
6
7 typedef struct { // cria um novo tipo como struct
8     float peso; // campo peso
9     int idade; // campo idade
10    float altura; // campo altura
11    char cpf[CPF_TAM]; //campo cpf
12    char nome[NOME_TAM]; //campo nome
13 } Pessoa; // nome do novo tipo criado
14
15 /*Funcao para calcular o IMC*/
16 float calcularIMC(Pessoa p){
17     return p.peso / (p.altura*p.altura);
18 }
19
20 /*Funcao para imprimir dados da pessoa (parametro por valor)*/
21 void imprimirPessoa(Pessoa p) {
22     printf("CPF: %s\nNome: %s\nIdade: %d\nPeso: %.2f\nAltura: %.2f\n", p.cpf, p.nome,
23           p.idade, p.peso, p.altura);
24     printf("IMC: %.2f\n", calcularIMC(p));
25 }
26 /*Funcao para "preencher" uma pessoa (parametro por referencia)*/
27 void setPessoa(Pessoa* p, int idade, float peso, float altura, char cpf[], char nome
28                 []) {
29     // Quando usando ponteiros, o campo pode ser acessado de 2 formas:
30     // a) (*nome_do_ponteiro).nome_do_campo
31     // b) nome_do_ponteiro->nome_do_campo
32     (*p).idade = idade; //exemplo a)
33     p->peso = peso; //exemplo b)
34     p->altura = altura;
35     for (int i=0;i<CPF_TAM;i++)
36         p->cpf[i] = cpf[i];
37     for (int i=0;i<NOME_TAM;i++)
38         p->nome[i] = nome[i];
39 }
40
41 void main() {
42     Pessoa pessoa01;
43     char cpf[CPF_TAM] = "111.111.111-11";
44     char nome[NOME_TAM] = "Pessoa da Silva";
45     setPessoa(&pessoa01, 37, 70, 1.75, cpf, nome);
46     imprimirPessoa(pessoa01);
```

O programa 4.1 mostra um exemplo de composição de *struct* em C.

Programa 4.5: Composição de Structs em C.

---

```

1 #include <stdio.h>
2 #include <string.h>
3 #define TAM 100
4 typedef struct { // cria um novo tipo como struct
5     char nome[TAM]; //nome da marca
6     char nacionalidade[TAM]; //nacionalidade da marca
7 } Marca; // nome do novo tipo criado
8
9 typedef struct { // cria um novo tipo como struct
10    char modelo[TAM]; //modelo do carro
11    float motor; //motorizacao
12    Marca marca;
13 } Carro; // nome do novo tipo criado
14
15 void setMarca(Marca* marca, char nome[], char nacionalidade[]) {
16     for (int i=0;i<TAM;i++)
17         marca->nome[i] = nome[i];
18     for (int i=0;i<TAM;i++)
19         marca->nacionalidade[i] = nacionalidade[i];
20 }
21
22 void setCarro(Carro* carro, char modelo[], float motor, Marca marca) {
23     for (int i=0;i<TAM;i++)
24         carro->modelo[i] = modelo[i];
25     carro->motor = motor;
26     carro->marca = marca;
27 }
28
29 void printCarro(Carro carro){
30     printf("%s\n",carro.modelo);
31     printf("%.2f\n",carro.motor);
32     printf("%s\n",carro.marca.nacionalidade);
33     printf("%s\n",carro.marca.nome);
34 }
35
36 void main(){
37     Marca ford;
38     Marca vw;
39     setMarca(&ford, "Ford", "EUA");
40     setMarca(&vw, "VW", "Alemanha");
41     Carro gol;
42     setCarro(&gol, "Gol", 1.0, vw);
43     printCarro(gol);
44 }
```

---

## 4.2 Listas Encadeadas

Uma lista encadeada é uma estrutura de dados que permite um crescimento sob demanda, limitado à capacidade de memória disponível no computador. Ela é composta de “nós” que tem suas posições de memória ligadas através de ponteiros. Cada nó da lista, além de guardar dados em si, aponta o próximo nó. Os dados em um nó também podem ser heterogêneos. A Figura 4.1 ilustra essa ideia. Apesar da figura dar a impressão de que os nós estão distribuídos contiguamente na memória, eles estão na verdade espalhados em endereços aleatórios de memória. Por isso o encadeamento funciona com ponteiros apontando o endereço de memória do próximo nó da lista. O programa 4.2 apresenta uma implementação em C de uma lista encadeada.

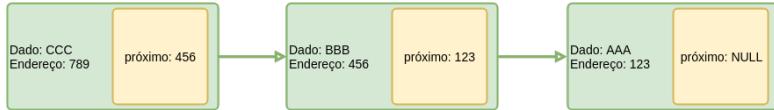


Fig. 4.1: Representação de uma Lista Encadeada.

Programa 4.6: Implementação em C de lista encadeada.

```

1 #include <stdio.h>
2 #include <string.h>
3 #include <stdlib.h>
4
5 // Define o tipo No contendo
6 typedef struct No{
7     int dado;
8     struct No *link;
9 } No;
10
11 void printFormat01(No* no);
12 void printFormat02(No* no);
13 //Define o ultimo No da lista
14 No* cabeca = NULL;
15
16 //Funcao que adiciona dados
17 void inserir(int dado) {
18     No* no;
19     no = (No *) malloc(sizeof(No));
20     no->dado = dado;
21     no->link = NULL;
22     if (cabeca == NULL)
23         cabeca = no;
24     else {
25         no->link = cabeca;
26         cabeca = no;
27     }
28 }
29
30
31 //Funcao que imprime a lista
32 void imprimirLista() {
33     No* no;
34     if (cabeca == NULL) {
35         printf("Lista vazia.\n");
36         return;
37     }
38     no = cabeca;
39     while (no != NULL) {
40         if (no->link != NULL){
41             printFormat01(no);
42         }else{
43             printFormat02(no);
44         }
45         no = no->link;
46     }
47 }
48 }
49
50 void printFormat01(No* no){
51     printf("[%d(%p)|%p]\n", no->dado, no, no->link);
52     printf("                |\\n");
53     printf("                V\\n");
54     printf("                -----\\n");
55     printf("                |\\n");
56     printf("                V\\n");
57 }
58 void printFormat02(No* no){
59     printf("[%d(%p)|%p]\n", no->dado, no, no->link);
60     printf("                |\\n");

```

```
61     printf("V\n");
62     printf("NULL\n");
63 }
64
65 void buscarDado(int dado) {
66     No* no;
67     if (cabeca == NULL) {
68         printf("Lista vazia.\n");
69         return;
70     }
71     no = cabeca;
72     while (no != NULL) {
73         if (no->dado == dado)
74             printf("[%d(%p)]\n", no->dado, no);
75         no = no->link;
76     }
77 }
78
79 void removerDado(int dado) {
80     No *no, *anterior;
81     if (cabeca == NULL) {// lista vazia
82         return;
83     } else { // lista NAO vazia
84         no = cabeca;
85         anterior = cabeca;
86         while (no != NULL) {
87             if (no->dado == dado){
88                 if (no == cabeca){// removendo o primeiro
89                     cabeca = cabeca->link;
90                     free(no); // libera memoria
91                     return;
92                 }
93                 else{ // removendo do meio
94                     anterior->link = no->link;//refaz links
95                     free(no); // libera memoria
96                     return;
97                 }
98             }
99             else{ // continua procurando na lista
100                 anterior = no;
101                 no = no->link;
102             }
103         }
104     }
105 }
106
107
108 void main() {
109     // Insere na lista os numeros de 1 a 3
110     for (int i = 1; i <= 4; i++)
111         inserir(i);
112     imprimirLista();
113     removerDado(2);
114     printf("-----\n");
115     imprimirLista();
116     buscarDado(3);
117 }
```

---

As listas encadeadas podem conter ponteiros para outro nós além do próximo. É possível criar uma lista com *links* simultâneos para o próximo nó e para o nó anterior. Essas listas são conhecidas como listas duplamente encadeadas. O programa 4.2 apresenta uma implementação em C de uma duplamente encadeada.

Programa 4.7: Implementação em C de lista duplamente encadeada.

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <string.h>
3 #include <stdlib.h>
4
5 // Define o tipo No contendo
6 typedef struct No{
7     struct No *proximo;
8     struct No *anterior;
9     int dado;
10 } No;
11
12 //Define o ultimo No da lista
13 No* cabeca = NULL;
14
15 //Funcao que adiciona dados
16 void inserir(int dado) {
17     No* no = (No *) malloc(sizeof (no));
18     no->dado = dado;
19     if (cabeca == NULL){//lista vazia
20         cabeca = no;
21         no->proximo = NULL;
22         no->anterior = NULL;
23     }
24     else {
25         no->proximo = cabeca;
26         cabeca->anterior = no;
27         no->anterior = NULL;
28         cabeca = no;
29     }
30 }
31
32 //Funcao que imprime a lista
33 void imprimirLista() {
34     if (cabeca == NULL) {
35         printf("Lista vazia.\n");
36         return;
37     }
38     No* no = cabeca;
39     while (no != NULL) {
40         printf("%p|%d(%p)|%p|\n", no->anterior, no->dado, no, no->proximo);
41         no = no->proximo;
42     }
43     printf("\n");return;
44 }
45
46 void main() {
47     // Insere na lista os numeros de 1 a 3
48     for (int i = 1; i <= 5; i++)
49         inserir(i);
50     imprimirLista();
51 }
```

### 4.3 Pilhas

### 4.4 Filas

### 4.5 Algoritmos de Ordenação

#### Bubble Sort

O algoritmo da bolha (*Bubble Sort*) é um algoritmo de ordenação onde cada elemento de uma posição  $i$  é comparado com o elemento de posição  $i + 1$ , os quais trocam de posição, se for o caso, para atender à ordenação procurada (crescente ou decrescente). O programa 4.5 apresenta uma implementação em C do algoritmo *Bubble Sort*, enquanto a Figura 4.2 ilustra seu funcionamento para um vetor de tamanho 4.

Programa 4.8: Implementação em C do algoritmo de ordenação BubbleSort.

---

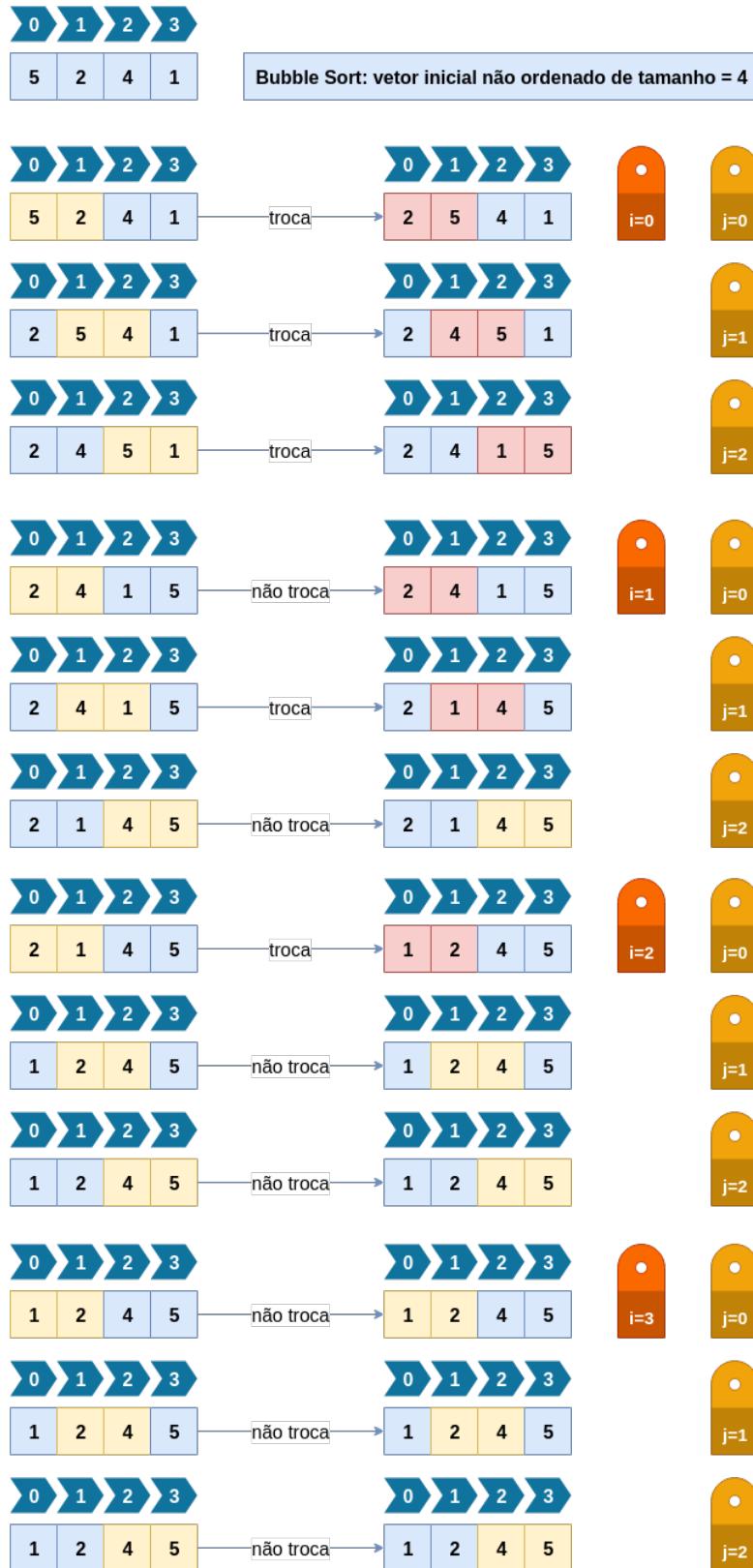
```

1 #include <stdio.h>
2 #include <time.h>
3 #include <stdlib.h>
4 #define TAMANHO 4
5 void main() {
6     int vetor[TAMANHO]; //vetor com tamanho definido
7     int aux = 0; //variável para ser usada na troca
8     clock_t tempoInicial, tempoFinal; //Variáveis para guardar o tempo de execução
9     srand(time(NULL)); //Cria uma semente para números aleatórios
10    tempoInicial = clock(); //inicia contagem do tempo
11    for (int i = 0; i < TAMANHO; i++) {
12        vetor[i] = rand() % 10; //Atribui um inteiro aleatório entre 0 e 9
13    }
14    //Mostra valores do vetor não ordenado
15    for (int i = 0; i < TAMANHO; i++) {
16        printf("%d\t", vetor[i]);
17    }
18    printf("\n");
19    //Ordena vetor pelo método da bolha
20    for (int i = 1; i < TAMANHO; i++) {
21        for (int j = 0; j < TAMANHO - 1; j++) {
22            if (vetor[j] > vetor[j + 1]) {
23                aux = vetor[j];
24                vetor[j] = vetor[j + 1];
25                vetor[j + 1] = aux;
26            }
27        }
28    }
29    //Mostra valores do vetor ordenado
30    for (int i = 0; i < TAMANHO; i++) {
31        printf("%d\t", vetor[i]);
32    }
33    printf("\n");
34    tempoFinal = clock(); //finaliza contagem do tempo
35    //calcula e mostra o tempo total de execução
36    printf("Tempo: %f s\n", (double) (tempoFinal - tempoInicial) / CLOCKS_PER_SEC);
37 }
```

---

#### Exercícios

1. Atualizar a implementação do *Bubble Sort* para executar as seguinte tarefa:
  - executar o algoritmo com três vetores de entrada:
    - (a) um vetor ordenado crescente de tamanho 100000 (cem mil)
    - (b) um vetor com números aleatórios de tamanho 100000 (cem mil)
    - (c) um vetor ordenado decrescente de tamanho 100000 (cem mil)
  - criar variáveis para contar a quantidade de comparações e quantidade de trocas;
2. Criar gráficos para as três execuções comparando quantidade de comparações e quantidade de trocas e o tempo de execução;

Fig. 4.2: Algoritmo *Bubble Sort* para um vetor de tamanho 4.

### Selection Sort

No algoritmo de ordenação por seleção (*Selection Sort*) cada número do vetor, a partir do primeiro, é eleito e comparado com o menor número<sup>1</sup> entre aqueles que estão à direita do eleito. O programa 4.5 apresenta uma implementação em C do algoritmo *Selection Sort* para um vetor de tamanho 4.

**Programa 4.9:** Implementação em C do algoritmo de ordenação Selection.

```

1 #include <stdio.h>
2 #include <time.h>
3 #include <stdlib.h>
4 #define TAMANHO 4
5 void main() {
6     int vetor[TAMANHO]; //vetor com tamanho definido
7     int aux = 0; //varivel para ser usada na troca
8     int eleito, menor, posicaoDoMenor;
9     clock_t tempoInicial, tempoFinal; //Variaveis para guardar o tempo de execucao
10    srand(time(NULL)); //Cria uma semente para numeros aleatorios
11    tempoInicial = clock(); //inicia contagem do tempo
12    for (int i = 0; i < TAMANHO; i++) {
13        vetor[i] = rand() % 10; //Atribui um inteiro aleatorio entre 0 e 9
14    }
15    //Mostra valores do vetor nao ordenado
16    for (int i = 0; i < TAMANHO; i++) {
17        printf("%d\t", vetor[i]);
18    }
19    printf("\n");
20    //Ordena vetor pelo metodo da da selecao
21    for (int i = 0; i < TAMANHO-2; i++) { // 0 -> penultima posicao
22        eleito = vetor[i];
23        menor = vetor[i+1];
24        posicaoDoMenor = i+1;
25        for (int j = i+1; j < TAMANHO; j++) {
26            if (vetor[j] < menor) {
27                menor = vetor[j];
28                posicaoDoMenor = j;
29            }
30        }
31        if( menor < eleito ){
32            vetor[i] = vetor[posicaoDoMenor];
33            vetor[posicaoDoMenor] = eleito;
34        }
35    }
36    //Mostra valores do vetor ordenado
37    for (int i = 0; i < TAMANHO; i++) {
38        printf("%d\t", vetor[i]);
39    }
40    printf("\n");
41    tempoFinal = clock(); //finaliza contagem do tempo
42    //calcula e mostra o tempo total de execucao
43    printf("Tempo: %f s\n", (double) (tempoFinal - tempoInicial) / CLOCKS_PER_SEC);
44 }
```

### Exercícios

1. Atualizar a implementação do *Selection Sort* para executar as seguinte tarefa:
  - executar o algoritmo com três vetores de entrada:
    - (a) um vetor ordenado crescente de tamanho 100000 (cem mil)
    - (b) um vetor com números aleatórios de tamanho 100000 (cem mil)
    - (c) um vetor ordenado decrescente de tamanho 100000 (cem mil)
  - criar variáveis para contar a quantidade de comparações e quantidade de trocas;
2. Criar gráficos para as três execuções comparando quantidade de comparações e quantidade de trocas e o tempo de execução;

<sup>1</sup>Ou maior dependendo da ordenação desejada.

### Insertion Sort

O algoritmo de ordenação por inserção (*Insertion Sort*), funciona como uma mão de baralho onde você ordena suas cartas começando a comparação entre as duas primeiras. No *Insertion Sort*, é eleito o segundo elemento do vetor para iniciar a comparação. É percorrido o vetor de forma a garantir que todos os números à esquerda do eleito sejam menores que ele. O programa 4.5 apresenta uma implementação em C do algoritmo *Insertion Sort* para um vetor de tamanho 4.

Programa 4.10: Implementação em C do algoritmo de ordenação Insertion Sort.

---

```

1 #include <stdio.h>
2 #include <time.h>
3 #include <stdlib.h>
4 #define TAMANHO 4
5 void main() {
6     int vetor[TAMANHO]; //vetor com tamanho definido
7     int eleito = 0;
8     int j = 0;
9     clock_t tempoInicial, tempoFinal; //Variaveis para guardar o tempo de execucao
10    srand(time(NULL)); //Cria uma semente para numeros aleatorios
11    tempoInicial = clock(); //inicia contagem do tempo
12    for (int i = 0; i < TAMANHO; i++) {
13        vetor[i] = rand() % 10; //Atribui um inteiro aleatorio entre 0 e 9
14    }
15    //Mostra valores do vetor nao ordenado
16    for (int i = 0; i < TAMANHO; i++) {
17        printf("%d\t", vetor[i]);
18    }
19    printf("\n");
20    //Ordena vetor pelo metodo da selecao
21    for (int i = 1; i < TAMANHO; i++) {
22        eleito = vetor[i];
23        j = i - 1;
24        while (j >= 0 && vetor[j] > eleito) {
25            vetor[j + 1] = vetor[j];
26            j--;
27        }
28        vetor[j + 1] = eleito;
29    }
30    //Mostra valores do vetor ordenado
31    for (int i = 0; i < TAMANHO; i++) {
32        printf("%d\t", vetor[i]);
33    }
34    printf("\n");
35    tempoFinal = clock(); //finaliza contagem do tempo
36    //calcula e mostra o tempo total de execucao
37    printf("Tempo: %f s\n", (double) (tempoFinal - tempoInicial) / CLOCKS_PER_SEC);
38 }
```

---

### Exercícios

1. Atualizar a implementação do *Insertion Sort* para executar as seguinte tarefa:
  - executar o algoritmo com três vetores de entrada:
    - (a) um vetor ordenado crescente de tamanho 100000 (cem mil)
    - (b) um vetor com números aleatórios de tamanho 100000 (cem mil)
    - (c) um vetor ordenado decrescente de tamanho 100000 (cem mil)
  - criar variáveis para contar a quantidade de comparações e quantidade de trocas;
2. Criar gráficos para as três execuções comparando quantidade de comparações e quantidade de trocas e o tempo de execução;

## Merge Sort

O algoritmo de ordenação *Merge Sort* é a técnica de divisão e conquista, ou seja, o problema é dividido em subproblemas menores até que a solução para o subproblema seja simples. As soluções dos subproblemas são combinadas para prover a solução do problema original.

No *Merge Sort*, o vetor é dividido em partes iguais recursivamente até que haja apenas um elemento. Por exemplo se um vetor tem  $n$  elementos, ele é dividido em  $n/2$ , o resultado é novamente dividido por 2 até que o vetor não seja mais divisível. Os pares da última divisão são ordenados entre si assim como na volta recursiva montando o vetor original que estará então ordenado. O programa 4.5 apresenta uma implementação em C do algoritmo *Merge Sort* para um vetor de tamanho 4.

Programa 4.11: Implementação em C do algoritmo de ordenação Merge Sort.

---

```

1 #include<stdlib.h>
2 #include <stdio.h>
3 #include <time.h>
4 #include <stdlib.h>
5 #define TAMANHO 4
6 void merge(int vetor[], int inicio, int meio, int fim);
7 void mergeSort(int vetor[], int inicio, int meio);
8
9 void main() {
10     int vetor[TAMANHO]; //vetor com tamanho definido
11     clock_t tempoInicial, tempoFinal; //Variaveis para guardar o tempo de execucao
12     srand(time(NULL)); //Cria uma semente para numeros aleatorios
13     tempoInicial = clock(); //inicia contagem do tempo
14     for (int i = 0; i < TAMANHO; i++) {
15         vetor[i] = rand() % 10; //Atribui um inteiro aleatorio entre 0 e 9
16     }
17     //Mostra valores do vetor nao ordenado
18     for (int i = 0; i < TAMANHO; i++) {
19         printf("%d\t", vetor[i]);
20     }
21     printf("\n");
22     //Chama a função passando o vetor como parametro
23     mergeSort(vetor, 0, TAMANHO - 1);
24     //Mostra valores do vetor ordenado
25     for (int i = 0; i < TAMANHO; i++) {
26         printf("%d\t", vetor[i]);
27     }
28     printf("\n");
29     tempoFinal = clock(); //finaliza contagem do tempo
30     //calcula e mostra o tempo total de execucao
31     printf("Tempo: %f s\n", (double) (tempoFinal - tempoInicial) / CLOCKS_PER_SEC);
32 }
33
34 void merge(int vetor[], int inicio, int meio, int fim) {
35     int i, j, k;
36     int n1 = meio - inicio + 1;
37     int n2 = fim - meio;
38     int vetorEsquerda[n1], vetorDireita[n2];
39     for (i = 0; i < n1; i++)
40         vetorEsquerda[i] = vetor[inicio + i];
41     for (j = 0; j < n2; j++)
42         vetorDireita[j] = vetor[meio + 1 + j];
43     i = 0;
44     j = 0;
45     k = inicio;
46     while (i < n1 && j < n2) {
47         if (vetorEsquerda[i] <= vetorDireita[j]) {
48             vetor[k] = vetorEsquerda[i];
49             i++;
50         }
51         else {//troca
52             vetor[k] = vetorDireita[j];
53             j++;
54         }
55     }
56 }
```

```
55         k++;
56     }
57     while (i < n1) {
58         vetor[k] = vetorEsquerda[i];
59         i++;
60         k++;
61     }
62
63     while (j < n2) {
64         vetor[k] = vetorDireita[j];
65         j++;
66         k++;
67     }
68 }
69
70 void mergeSort(int vetor[], int inicio, int fim) {
71     if (inicio < fim) { //condicao de parada
72         int m = inicio + (fim - inicio) / 2; //posicao para dividir o vetor
73         mergeSort(vetor, inicio, m); //chamada recursiva para a metade esquerda
74         mergeSort(vetor, m + 1, fim); //chamada recursiva para a metade direita
75         merge(vetor, inicio, m, fim);
76     }
77 }
```

---

## Exercícios

1. Atualizar a implementação do *Merge Sort* para executar as seguinte tarefa:
  - executar o algoritmo com três vetores de entrada:
    - (a) um vetor ordenado crescente de tamanho 100000 (cem mil)
    - (b) um vetor com números aleatórios de tamanho 100000 (cem mil)
    - (c) um vetor ordenado decrescente de tamanho 100000 (cem mil)
  - criar variáveis para contar a quantidade de comparações e quantidade de trocas;
2. Criar gráficos para as três execuções comparando quantidade de comparações e quantidade de trocas e o tempo de execução;

### Quick Sort

O algoritmo de ordenação *Quick Sort* também utiliza a técnica de divisão e conquista. No *Quick Sort*, o vetor é dividido em duas partes recursivamente a partir de um pivô escolhido, até que não seja possível dividir mais. Os pares da última divisão são ordenados entre si assim na volta recursiva colocando todos os valores menores que o pivô no vetor à sua esquerda e todos os valores maiores que o pivô no vetor à sua direita. Após esse procedimento o pivô estará ordenado em sua posição com relação os demais números. O programa 4.5 apresenta uma implementação em C do algoritmo *Quick Sort* para um vetor de tamanho 4.

Programa 4.12: Implementação em C do algoritmo de ordenação Quick Sort.

```

1 #include<stdlib.h>
2 #include <stdio.h>
3 #include <time.h>
4 #define TAMANHO 4
5 void trocar(int *x, int *y);
6 void quickSort(int vetor[], int inicio, int fim);
7
8 void main() {
9     int vetor[TAMANHO]; //vetor com tamanho definido
10    clock_t tempoInicial, tempoFinal; //Variaveis para guardar o tempo de execucao
11    srand(time(NULL)); //Cria uma semente para numeros aleatorios
12    tempoInicial = clock(); //inicia contagem do tempo
13    for (int i = 0; i < TAMANHO; i++) {
14        vetor[i] = rand() % 10; //Atribui um inteiro aleatorio entre 0 e 9
15    }
16    //Mostra valores do vetor nao ordenado
17    for (int i = 0; i < TAMANHO; i++) {
18        printf("%d\t", vetor[i]);
19    }
20    printf("\n");
21    //Chamada da funcao
22    quickSort(vetor, 0, TAMANHO - 1);
23    //Mostra valores do vetor ordenado
24    for (int i = 0; i < TAMANHO; i++) {
25        printf("%d\t", vetor[i]);
26    }
27    printf("\n");
28    tempoFinal = clock(); //finaliza contagem do tempo
29    //calcula e mostra o tempo total de execucao
30    printf("Tempo: %f s\n", (double) (tempoFinal - tempoInicial) / CLOCKS_PER_SEC);
31 }
32
33 void trocar(int *x, int *y) {
34     int aux; aux = *x; *x = *y; *y = aux;
35 }
36
37 void quickSort(int vetor[], int inicio, int fim) {
38     int pivo, i, j;
39     if(inicio < fim) {//condicao de parada
40         pivo = inicio;
41         i = inicio;
42         j = fim;
43         while (i < j) {
44             while(vetor[i] <= vetor[pivo] && i < fim)
45                 i++;
46             while(vetor[j] > vetor[pivo])
47                 j--;
48             if(i < j) {
49                 trocar(&vetor[i], &vetor[j]);
50             }
51         }
52         trocar(&vetor[pivo], &vetor[j]); //troca os valores usando ponteiros
53         quickSort(vetor, inicio, j - 1);
54         quickSort(vetor, j + 1, fim);
55     }
56 }
```

**Exercícios**

1. Atualizar a implementação do *Quick Sort* para executar as seguinte tarefa:
  - executar o algoritmo com três vetores de entrada:
    - (a) um vetor ordenado crescente de tamanho 100000 (cem mil)
    - (b) um vetor com números aleatórios de tamanho 100000 (cem mil)
    - (c) um vetor ordenado decrescente de tamanho 100000 (cem mil)
  - criar variáveis para contar a quantidade de comparações e quantidade de trocas;
2. Criar gráficos para as três execuções comparando quantidade de comparações e quantidade de trocas e o tempo de execução;

## 4.6 Árvores

O programa 4.6 apresenta uma implementação em C de uma árvore binária. A representação gráfica da árvore é feita usando a biblioteca Graphviz (ELLSON et al., 2003).

Programa 4.13: Implementação em C de lista duplamente encadeada.

```

1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <time.h>
4
5 typedef struct No{
6     int dado;
7     struct No* direita;
8     struct No* esquerda;
9 } No;
10
11 No* criarArvore(){ return NULL; }
12
13 int ArvoreVazia(No* raiz){ // 1 se a arvore vazia, 0 caso contrario
14     return raiz == NULL;
15 }
16
17 int getValor(No** no){
18     if ((*no) != NULL){
19         return (*no)->dado;
20     }
21 }
22
23 void mostrarArvore(No* raiz){
24     if (!ArvoreVazia(raiz)){ //No nao vazio
25         printf("%p<-%d(%p)->%p\n", raiz->esquerda, raiz->dado, raiz, raiz->direita);
26         printf("%d", getValor(&raiz->esquerda));
27         mostrarArvore(raiz->esquerda); //esquerda (subNo)
28         mostrarArvore(raiz->direita); //direita (subNo)
29     }
30 }
31
32 void buscarDado(No** raiz, int dado){
33     if (!ArvoreVazia(*raiz)){ //No nao vazio
34         if (dado == (*raiz)->dado){
35             printf("%d encontrado.\n", dado);
36             return;
37         }
38         else{
39             if (dado < (*raiz)->dado){ //dado menor? vai pra esquerda
40                 buscarDado(&(*raiz)->esquerda, dado);
41             }
42             if (dado > (*raiz)->dado){ //dado maior? vai pra direita
43                 buscarDado(&(*raiz)->direita, dado);
44             }
45         }
46     }
47 }
48
49 void inserirDado(No** raiz, int dado){
50     if (*raiz == NULL){
51         *raiz = (No*)malloc(sizeof(No));
52         (*raiz)->esquerda = NULL;
53         (*raiz)->direita = NULL;
54         (*raiz)->dado = dado;
55     }
56     else {
57         if (dado < (*raiz)->dado){ //dado menor? vai pra esquerda
58             //percorrer subNo da esquerda
59             inserirDado(&(*raiz)->esquerda, dado);
60         }
61         if (dado > (*raiz)->dado){ //dado maior? vai pra direita
62             //percorrer subNo da direita
63             inserirDado(&(*raiz)->direita, dado);
64     }
65 }
```

```

64     }
65 }
66
67 int getAltura(No* raiz) {
68     if (raiz == NULL) return -1;
69     else {
70         int hEsquerda = getAltura(raiz->esquerda);
71         int hDireita = getAltura(raiz->direita);
72         return (hEsquerda < hDireita) ? hDireita + 1 : hEsquerda + 1;
73     }
74 }
75
76 void main() {
77     No* raiz = criarArvore();
78     srand(time(0));
79     for (int i = 0; i < 50; i++) {
80         inserirDado(&raiz, rand() % 100);
81     }
82     buscarDado(&raiz, 7);
83     printf("Altura: %d\n", getAltura(raiz));
84     free(raiz);
85 }
```

---

## 4.7 Tabelas Hashing

## 4.8 Grafos

Grafos são estruturas de dados muito poderosas para encontrar soluções para diversos problemas. Exemplos disso, são os algoritmos de localização e rotas para endereços, como o aparelho de GPS de um carro, ou ainda a montagem de genomas a partir de fragmentos de DNA sequenciados. É na verdade muito expressiva a quantidade de problemas do mundo real que podem ser computacionalmente modelados como grafos.

Um grafo  $G = (V, E)$  é formado por dois conjuntos  $V$  e  $E$ , onde:

- $V$  é um conjunto finito e não vazio de vértices de  $G$
- $E$  é um conjunto finito de arestas de  $G$ .

Uma aresta  $e \in E(G)$  é representada por  $e = (v_1, v_2)$  ligando os vértices  $v_1$  e  $v_2$ . Vejamos um exemplo. Seja o conjunto  $V = a, b, c, d, e$ . Seja o conjunto  $E = (a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (d, e)$ . Uma representação gráfica deste grafo pode ser visto na Figura 4.3.

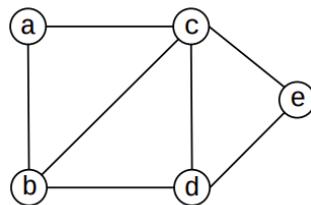


Fig. 4.3: Exemplo de grafo. Fonte: <https://www.ic.unicamp.br/zanoni/teaching/>

Dada uma aresta  $e = (a, b)$ , os vértices  $a$  e  $b$  são ao mesmo tempo “extremos”<sup>2</sup> e incidentes à aresta  $e$ . Os vértices  $a$  e  $b$  são também vértices adjacentes. Além disso, a aresta  $e$  é incidente aos vértices  $a$  e  $b$ .

Denota-se por  $|V|$  e  $|E|$  a cardinalidade dos conjuntos de  $V(G)$  e  $E(G)$ . No exemplo da Figura 4.3, a teríamos:  $|V| = 5$  e  $|E| = 7$ . O tamanho do grafo é dado por  $|V| + |E|$ .

<sup>2</sup> $a$  e  $b$  estão nas extremidades de  $e$ .

#### 4.8.1 Grafos Simples

Um grafo é dito simples, se não possui laços ou arestas múltiplas. Um laço é uma aresta com extremos idênticos. Arestas múltiplas são duas ou mais arestas com os mesmos extremos. A Figura 4.4 mostra um exemplo de laço e arestas múltiplas.

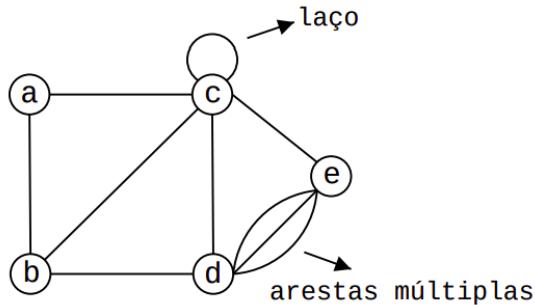


Fig. 4.4: Exemplo de grafo com laços e arestas múltiplas. Fonte: <https://www.ic.unicamp.br/~zanoni/teaching/>

#### 4.8.2 Subgrafo e Subgrafo Gerador

Um subgrafo  $G' = (V', E')$  de um grafo  $G = (V, E)$  é um grafo tal que  $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ . Diz-se que um subgrafo  $G' = (V', E')$  de um grafo  $G = (V, E)$  é gerador, se  $V' = V$ . A Figura 4.5 mostra exemplos de subgrafo e subgrafo gerador.

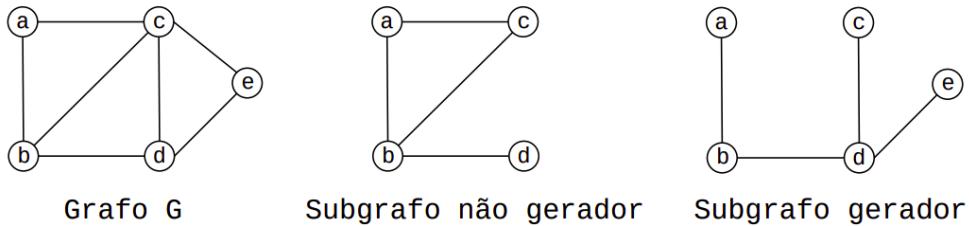


Fig. 4.5: Exemplo de grafo, subgrafo e subgrafo gerador. Fonte: <https://www.ic.unicamp.br/~zanoni/teaching/>

#### 4.8.3 Grau de um Vértice

O grau (*degree*) de um vértice  $v \in V(G)$ , denotado por  $d(v)$ , é igual ao número de arestas incidentes a  $v$ . Laços são contados em dobro. A Figura 4.6 traz um exemplo para graus de vértices de um grafo. Uma interessante propriedade - *Handshaking lemma* - depreende-se de  $d(v)$ . A soma dos graus dos vértices é igual a duas vezes a cardinalidade do conjunto de arestas:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

#### 4.8.4 Grafo Direcionado ou Orientado

Um grafo  $G = (V, E)$  é orientado, ou direcionado (digrafo) quando as arestas do conjunto  $E$  estão dispostas em “pares ordenados”, ou seja, existe a conotação de direção em suas extremidades. Por exemplo, seja a aresta  $e_1 = (v_1, v_2)$ . Se  $e_1$  sai de  $v_1$  e entra em  $v_2$ , temos uma direção definida de  $V_1$  para  $v_2$ . A Figura 4.7 mostra um exemplo de grafo orientado.

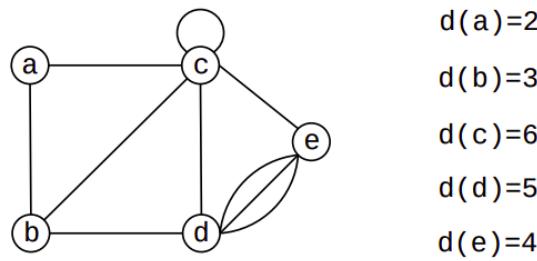


Fig. 4.6: Exemplo de graus de vértices em um grafo. *Fonte:* <https://www.ic.unicamp.br/zanoni/teaching/>

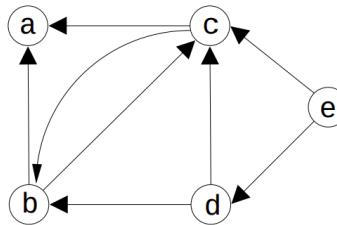


Fig. 4.7: Exemplo de grafo orientado. *Fonte:* <https://www.ic.unicamp.br/zanoni/teaching/>

#### 4.8.5 Representação de Grafos

Apesar da representação visual da informação ser uma das vantagens dos grafos, armazenar computacionalmente os grafos como figuras limita a aplicação dos algoritmos em grafos. Portanto, outras maneira de abstrair os grafos foram pensadas. As mais largamente utilizadas são as listas e as matrizes de adjacência.

Suponha que um grafo tenha  $n$  vértices numerados  $n_1, n_2, \dots, n_n$  de forma que eles estejam assim ordenados para fins de identificação apenas (não implica que são vértices ordenados e portanto um grafo ordenado). Uma matriz de adjacência é uma matriz  $nxn$  onde o elemento  $i, j$  é o número de arestas entre os nós  $n_i$  e  $n_j$ . Tomando como exemplo o grafo da Figura 4.3, a matriz de adjacência seria uma matriz  $5x5$ , já que temos nele o conjunto  $V = \{a, b, c, d, e\}$  e o conjunto  $E = \{(a,b), (a,c), (b,c), (b,d), (c,d), (c,e), (d,e)\}$ . A matriz de adjacência para este grafo está abaixo representada.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

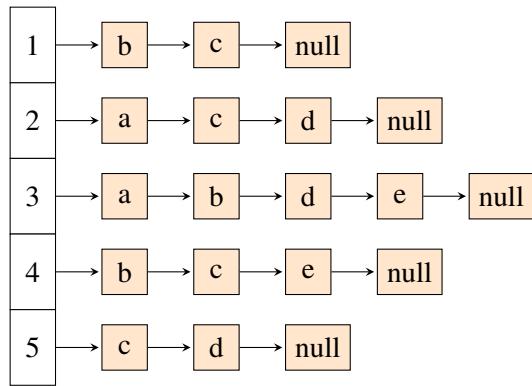
Para grafos não-orientados, a matriz de adjacência é simétrica, de forma que nesses casos apenas é necessário o armazenamento dos elementos da diagonal principal e os elementos abaixo dela, por exemplo.

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

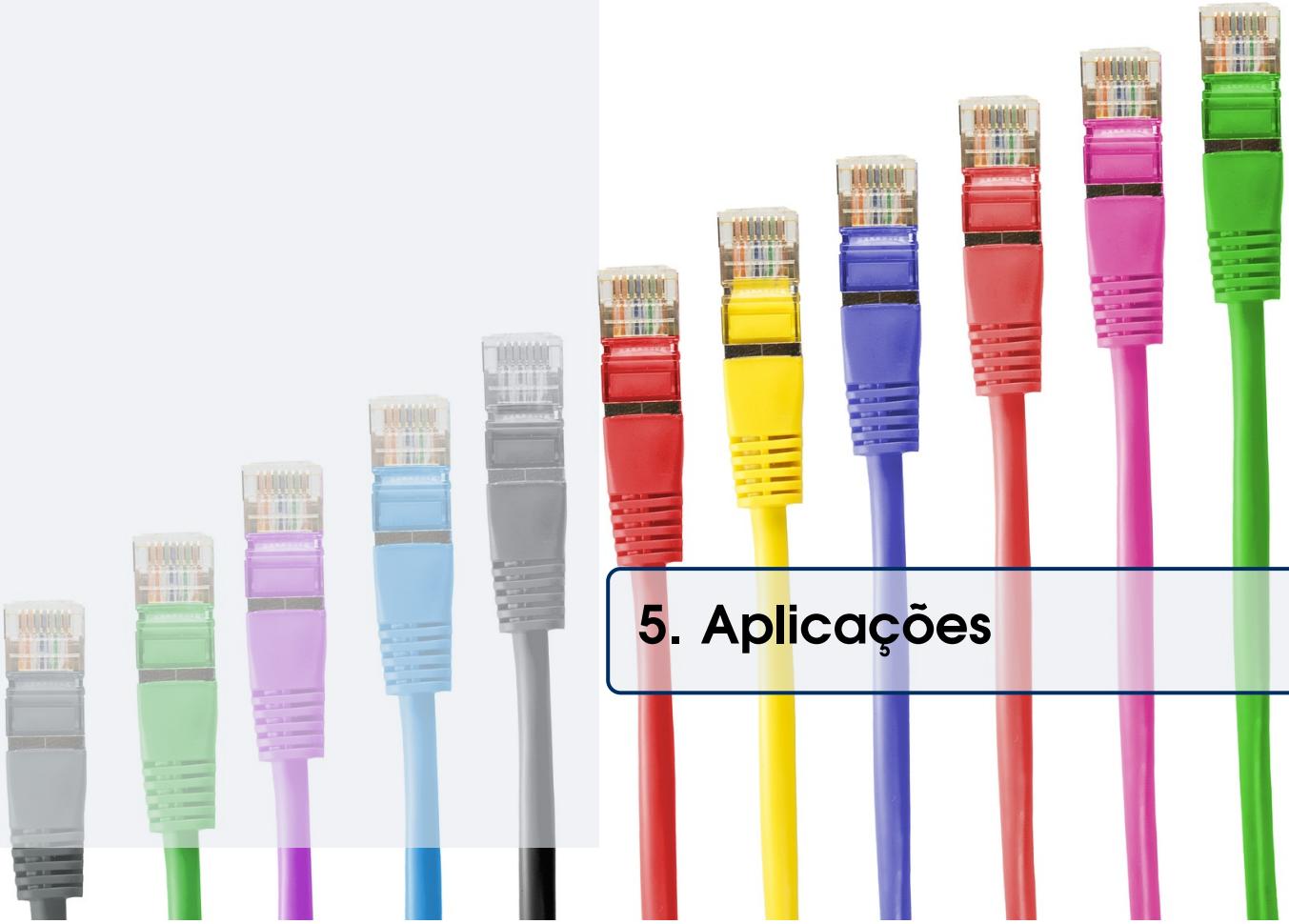
Já a matriz de um grafo direcionado não será simétrica por a existência de uma aresta de  $n_i$

para  $n_j$  não implica na existência de uma aresta de  $n_j$  para  $n_i$ . Os valores da matriz podem ser os pesos das arestas.

Quando um grafo tem muitos vértices, mas relativamente poucas arestas, a matriz de adjacências torna-se esparsa. Em casos assim, serão necessários  $n^2$  dados para representar um grafo com  $n$  vértices. Consequentemente o algoritmo para percorrer toda a matriz precisará “olhar”  $n^2$  elementos da matriz. Em casos assim, o grafo pode ser melhor representado usando uma lista de adjacências. Em listas de adjacência são usados ponteiros para ir de um item na lista para outro usando uma lista encadeada. Tomando o mesmo exemplo do grafo da Figura 4.3, teríamos:



#### 4.8.6 Busca em Grafos



## 5. Aplicações

## Referências Bibliográficas

- ASCENCIO, Ana Fernanda G.; ARAÚJO, Graziela S. de. Estruturas de Dados: algoritmos, análise da complexidade e implementações em JAVA e C/C++. São Paulo: Pearson Prentice Hall, v. 3, 2010.
- CORMEN, Thomas H. et al. **Introduction to algorithms**. [S.l.]: MIT press, 2009.
- ELLSON, John et al. Graphviz and dynagraph – static and dynamic graph drawing tools. In: GRAPH DRAWING SOFTWARE. [S.l.]: Springer-Verlag, 2003. p. 127–148.
- GAREY, Michael R; JOHNSON, David S. Computers and intractability. **A Guide to the**, 1979.
- MANBER, Udi. **Introduction to algorithms: a creative approach**. [S.l.]: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1989.
- ZIVIANI, Nivio. Projeto de Algoritmos com implementação e C++ e Java. **THOMPSON Learning, São Paulo, 1st edição**, 2007.

# 6. Apêncice