Esercitazione 2: Media, varianza, deviazione standard

1) ***Convertire gli errori percentuali dati per le seguenti misure in incertezze assolute e riscrivere i risultati, opportunamente arrotondati, nella forma*** $x_{best} \pm \delta x$***:***
$l_{best} = 543.2\,\mathrm{m}$, $\delta l/|l_{best}| = 4\%$
$v_{best} = 65.9\,\mathrm{m/s}$, $\delta v/|v_{best}| = 8\%$.

$$\frac{\delta l}{|l_{best}|} = 0.04 \to \delta l = 0.04 \cdot 543.2\,\mathrm{m} = 21.728\,\mathrm{m}$$
$$\to l = l_{best} \pm \delta l = (540 \pm 22)\,\mathrm{m}$$
$$\frac{\delta v}{|v_{best}|} = 0.08 \to \delta v = 0.08 \cdot 65.9\,\mathrm{m/s} = 5.272\,\mathrm{m/s}$$
$$\to v = v_{best} \pm \delta v = (66 \pm 5)\,\mathrm{m/s}$$

2) ***La mia calcolatrice fornisce il risultato*** x_{best}***=6.1234, ma io so che x ha un'incertezza relativa del 2%. Riscrivere il risultato opportunamente arrotondato nella forma*** $x_{best} \pm \delta x$***.***

$$\frac{\delta x}{|x_{best}|} = 0.02 \to \delta x = 0.02 \cdot 6.1234 = 0.122$$
$$\to x = x_{best} \pm \delta x = (6.12 \pm 0.12)$$

3) ***Il tempo impiegato da una palla per cadere da una finestra al secondo piano viene misurato tre volte, con risultati*** $t_1 = 1.1\,\mathrm{s}$, $t_2 = 1.3\,\mathrm{s}$ ***e*** $t_3 = 1.2\,\mathrm{s}$. ***Calcolare la media, la deviazione standard e l'errore standard della media.***

Il valor medio del tempo di caduta è

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N} = \frac{1.1 + 1.3 + 1.2}{3} = 1.2\,\mathrm{s}$$

La deviazione standard del campione è

$$s_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(t_i - \bar{t})^2}{N}} = \sqrt{\frac{(1.1-1.2)^2 + (1.3-1.2)^2 + (1.2-1.2)^2}{3}\mathrm{s}^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{(-0.1)^2 + 0.1^2}{3}\mathrm{s}^2} = 0.082\,\mathrm{s}$$

Per ottenere una stima imparziale della deviazione standard della popolazione si applica la correzione di Bessel:

$$\sigma_t^2 = s_t^2 \frac{N}{N-1} \to \sigma_t^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(t_i - \bar{t})^2}{N} \frac{N}{N-1} \to$$

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(t_i - \overline{t})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{(-0.1)^2 + 0.1^2}{2}s^2} = 0.1\ \mathrm{s}$$

L'errore standard della media è

$$\sigma_{\overline{t}} = \frac{\sigma_t}{\sqrt{N}} = \frac{0.1\ \mathrm{s}}{\sqrt{3}} = 0.0577\ \mathrm{s}$$

Accordando le cifre significative, $t = \overline{t} \pm \sigma_t = (1.20 \pm 0.06)$ s.

4) ***Per calcolare la varianza*** s_x^2 ***di un campione di*** N ***misure*** $\{x_i\}_{i=1\ldots N}$ ***di una quantità*** x ***occorre calcolare*** $s_x^2 = (\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2)/N$. **Dimostrare che** s_x^2 **può anche essere riscritta e calcolata come** $s_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$.

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 + \overline{x}^2 - 2x_i\overline{x})}{N} =$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{N} \overline{x}^2}{N} - 2\overline{x}\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \overline{x^2} + \frac{N\overline{x}^2}{N} - 2\overline{x}\overline{x} =$$
$$= \overline{x^2} + \overline{x}^2 - 2\overline{x}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

5) ***Uno studente usa un sensore di moto per misurare l'accelerazione con cui un carrello lasciato cadere lungo un piano inclinato rimbalza all'indietro dopo aver urtato contro un respingente gommoso, ottenendo i seguenti risultati (N=10):***

a [m/s^2]	***2.17***	***2.34***	***2.21***	***2.28***	***2.12***	***2.25***	***2.40***	***2.36***	***2.32***	***2.43***

a) Determinare la precisione del sistema di misura e la migliore stima per l'accelerazione del carrello.
b) Quante misure dovrebbe ripetere lo studente per poter determinare l'accelerazione media con una precisione relativa dell'1%?

a) La migliore stima per l'accelerazione del carrello si ottiene dalla media aritmetica:

$$\overline{a} = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_i}{N} = 2.288\ \mathrm{m/s^2}$$

La varianza del campione di 10 misure è data da

$$s_a^2 = \overline{a^2} - \overline{a}^2$$

Calcoliamo quindi il valor medio delle accelerazioni al quadrato:

a [m/s^2]	2.17	2.34	2.21	2.28	2.12	2.25	2.40	2.36	2.32	2.43
a^2[m^2/s^4]	4.709	5.476	4.884	5.198	4.454	5.063	5.760	5.570	5.382	5.905

$$\rightarrow \overline{a^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_i^2}{N} = \frac{52.4408}{10} = 5.244\,\mathrm{m^2/s^4}$$

$$\rightarrow s_a^2 = \overline{a^2} - \overline{a}^2 = (5.244 - 2.288^2)\,\mathrm{m^2/s^4} = 9.056 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2/s^4}$$

Con la correzione di Bessel per la dimensione finita del campione,

$$\sigma_a^2 = s_a^2 \frac{N}{N-1} = \frac{10}{9} \cdot 9.056 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2/s^4} = 1.006 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m^2/s^4}$$

$$\rightarrow \sigma_a = \sqrt{\sigma_a^2} = 0.1\,\mathrm{m/s^2}$$

La deviazione standard σ_a fornisce una stima della precisione del sistema di misura. L'errore standard del valore medio si trova da σ_a come

$$\sigma_{\overline{a}} = \frac{\sigma_a}{\sqrt{N}} = 0.032\,\mathrm{m/s^2}$$

$$\rightarrow a = a_{best} \pm \sigma_{\overline{a}} = (2.29 \pm 0.03)\,\mathrm{m/s^2}$$

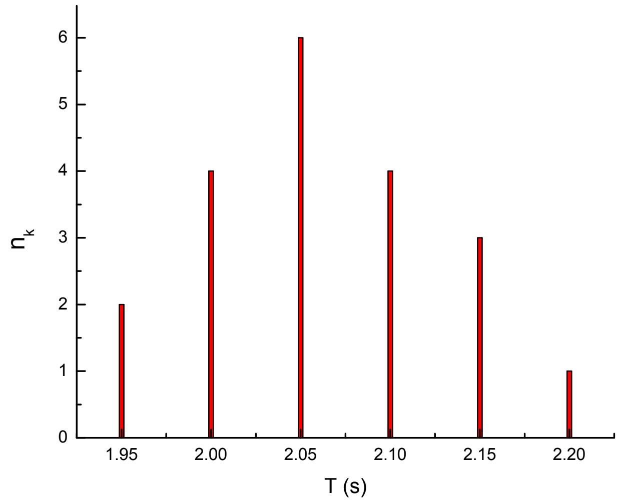
b) Per avere una precisione relativa dell'1% sull'accelerazione media occorre che

$$\frac{\sigma_{\overline{a}}}{\overline{a}} = 0.01 \rightarrow \frac{\sigma_a}{\sqrt{N}} \frac{1}{\overline{a}} = 0.01 \rightarrow N = \left(\frac{0.1}{2.29 \cdot 0.01}\right)^2 \simeq 19$$

6) Uno studente effettua N=20 misure del periodo T di un pendolo semplice, ottenendo {2.05, 2.10, 2.00, 2.20, 2.15, 2.10, 2.05, 1.95, 2.15, 2.05, 2.00, 2.10, 2.05, 2.15, 2.05, 2.00, 2.10, 1.95, 2.05, 2.00} (in secondi).
a) Rappresentare le misure con un istogramma.
b) Calcolare il valore medio del periodo, la deviazione standard e l'errore standard del valore medio.

Per rappresentare le misure con un istogramma a barre, calcoliamo per ciascuno dei valori distinti T_k (k=1...6) la frequenza assoluta n_k e la frequenza relativa $F_k = n_k/N$:

k	T_k [s]	n_k	F_k
1	1.95	2	0.10
2	2.00	4	0.20
3	2.05	6	0.30
4	2.10	4	0.20
5	2.15	3	0.15
6	2.20	1	0.05



Il valor medio del periodo di oscillazione è

$$\overline{T} = \frac{\sum_{i=1}^{N} T_i}{N} = \frac{\sum_{k=1}^{6} n_k T_k}{N} = \sum_{k=1}^{6} F_k T_k = 2.062\,\mathrm{s}$$

La deviazione standard della popolazione e l'errore standard del valor medio sono rispettivamente

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{6} n_k (T_k - \overline{T})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{0.0893}{19}}\,\mathrm{s} = 0.069\,\mathrm{s}$$

$$\sigma_{\overline{T}} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{N}} = \frac{0.069}{\sqrt{20}}\,\mathrm{s} = 0.015\,\mathrm{s}$$

$$\rightarrow T = \overline{T} \pm \sigma_{\overline{T}} = (2.06 \pm 0.02)\,\mathrm{s}$$

7) ***Una nave scandaglia il fondale marino con un sonar a ultrasuoni e misura le profondità in tabella:***

p [m]	***840***	***850***	***860***	***870***	***880***	***890***	***900***
frequenza	***10***	***22***	***30***	***39***	***27***	***15***	***7***

Rappresentare le misure con un istogramma, determinare la migliore stima della profondità e l'errore corrispondente.

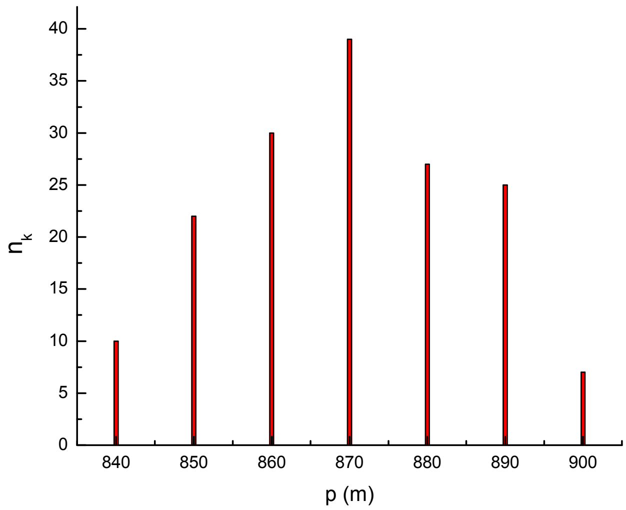
Il numero totale di misure è $N = \sum_{i=k}^{7} n_k = 10 + 22 + 30 + 39 + 27 + 15 + 7 = 150$. Il valore medio della profondità è

$$\overline{p} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i}{N} = \frac{\sum_{k=1}^{7} n_k p_k}{N} = 868.27\,\mathrm{m}$$

La deviazione standard delle misure e l'errore standard della media sono

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (p_i - \overline{p})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{7} n_k (p_k - \overline{p})^2}{N-1}} = 15.40\,\mathrm{m}$$

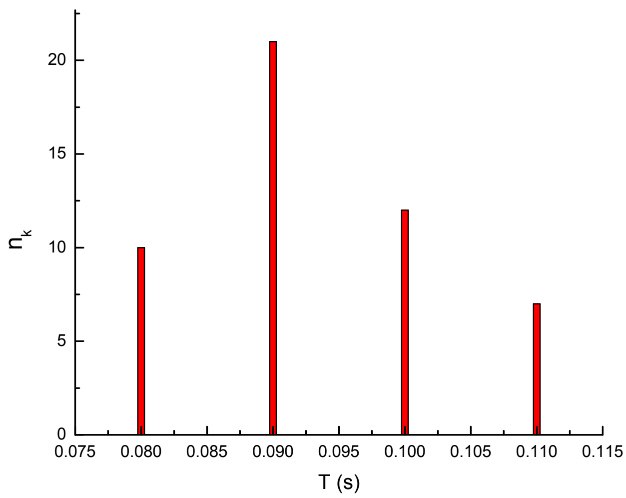
$$\sigma_{\overline{p}} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{N}} = \frac{15.40}{\sqrt{150}}\,\mathrm{m} = 1.26\,\mathrm{m}$$
$$\rightarrow p = \overline{p} \pm \sigma_{\overline{p}} = (868.3 \pm 1.3)\,\mathrm{m}$$



8) ***Uno studente effettua N=50 misure del periodo T di oscillazione di una molla sospesa a un estremo, ottenendo***

T [s]	***0.08***	***0.09***	***0.10***	***0.11***
frequenza	***10***	***21***	***12***	***7***

Rappresentare le misure con un istogramma e calcolare il valore medio del periodo, la deviazione standard e l'errore standard del valore medio.



$$\overline{T} = \frac{\sum_{i=1}^{N} T_i}{N} = \frac{\sum_{k=1}^{4} n_k T_k}{N} = 9.32 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}$$
$$\sigma_T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(T_i - \overline{T})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{4} n_k (T_k - \overline{T})^2}{N-1}} = 9.57 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$$

$$\sigma_{\overline{T}} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{N}} = \frac{9.57 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{50}}\,\mathrm{s} = 1.35 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$$
$$\to T = \overline{T} \pm \sigma_{\overline{T}} = (9.32 \pm 0.14) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}$$

9) ***Uno studente ripete N=30 volte la misura dell'allungamento di una molla sottoposta a una trazione di 1 N:***

l [m]	***2.5***	***2.6***	***2.7***	***2.8***	***2.9***	***3.0***	***3.1***
frequenza	***2***	***5***	***8***	***6***	***5***	***3***	***1***

Stimare la precisione dello studente nella misura a partire dai dati raccolti, e calcolare il valore medio dell'allungamento e il suo errore.

$$\bar{l} = \frac{\sum_{k=1}^{7} n_k l_k}{N} = 2.76\,\mathrm{m}$$
$$\sigma_l = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{7} n_k (l_k - \bar{l})^2}{N-1}} = 0.15\,\mathrm{m}$$
$$\sigma_{\bar{l}} = \frac{\sigma_l}{\sqrt{N}} = 0.028\,\mathrm{m}$$
$$\to l = \bar{l} \pm \sigma_{\bar{l}} = (2.76 \pm 0.03)\,\mathrm{m}$$