Pendolo reversibile - Caduta libera

Broggi Diana, Cantarini Giulia

pendolo di Kater

Lo scopo di questa esperienza era quello di calcolare una stima dell'accelerazione di gravità mediante l'osservazione dei periodi relativi ai due coltelli del pendolo di Kater per diverse configurazioni delle posizioni delle masse. Per misurare i periodi abbiamo impiegato una fotocellula che registrava il passaggio del pendolo collegata ad un cronometro.
Si può dimostrare che, osservato un certo periodo T*, vale la relazione:

$$T^* = 2\pi\sqrt{\frac{D}{g}}$$

dove T* corrisponde ai periodi T1 (periodo di una oscillazione rispetto al coltello 1) e T2 (rispetto al coltello 2) in una configurazione (posizione delle masse relativa ai coltelli) del pendolo tale per cui essi si equivalgono.

procedura sperimentale e misurazioni

Per ricavare T* abbiamo eseguito le misure di T1 e T2 più volte per ogni posizione in cui la massa B veniva spostata, la massa A è rimasta fissa durante tutto l'esperimento. Nel corso di questa procedura i valori venivano inseriti in un programma per generare il grafico dei periodi medi T1 e T2 in funzione della distanza della massa B dal coltello 2

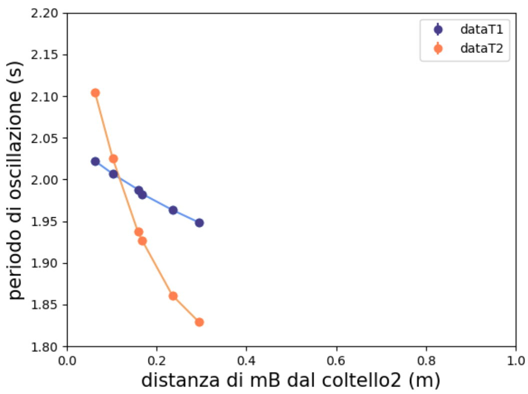


Figure 1: misure dei periodi

l'osservazione dello sviluppo di questo grafico ci ha aiutato ad individuare la direzione corretta per muovere la massa B al fine di ottenere delle misure vicine al punto di intersezione tra la curva del T1 e quella del T2.
Di seguito esponiamo le misure effettuate per ogni distanza di B dal coltello 2:

distanza 1:

0.294	0.294	0.293	0.294	0.295

Periodo 1	1.9485	1.9483	1.9488	1.9489	1.9483	1.9484	1.9487	1.9487	1.9482	
Periodo 2	1.8306	1.83	1.8295	1.8286	1.8292	1.8298	1.8288	1.8287	1.829	1.8289

distanza 2:

0.235	0.235	0.235	0.236	0.234

Periodo1	1.9637	1.9638	1.9636	1.9636	1.9635	1.9633	1.9632	1.963	1.9634	
Periodo2	1.8614	1.8612	1.861	1.8612	1.8608	1.8606	1.8608	1.8611	1.8612	1.8612

distanza 3:

0.168	0.169	0.168	0.168	0.168

Periodo1	1.9827	1.9824	1.9826	1.9822	1.9828	1.9825	1.9826	1.9828	1.9825	
Periodo2	1.9264	1.9274	1.9264	1.9263	1.927	1.9258	1.9258	1.9257	1.9271	1.927

distanza 4:

0.158	0.159	0.158	0.158	0.159

Periodo1	1.9884	1.9887	1.9879	1.9877	1.9877	1.9876	1.9876	1.9876	1.988	
Periodo2	1.9378	1.9381	1.9369	1.9379	1.9366	1.9386	1.9374	1.9357	1.9357	1.9367

distanza 5:

0.102	0.103	0.102	0.102	0.103

Periodo1	2.0279	2.0265	2.0271	2.0256	2.0244	2.0251	2.0241	2.0232	2.0226	2.0226
Periodo2	2.0075	2.0074	2.0071	2.0061	2.0065	2.0063	2.0065	2.0061	2.0061	

.

distanza 6:

0.063	0.062	0.064	0.062	0.063

Periodo1	2.0227	2.0222	2.0221	2.0228	2.0221	2.0217	2.0218	2.0217	2.0217	
Periodo2	2.1072	2.1046	2.1035	2.1046	2.1032	2.1034	2.1043	2.1025	2.1039	2.1024

il calcolo dell'accelerazione di gravità

In seguito all'acquisizione di questi dati abbiamo selezionato le misure osservate per T1 e T2 più vicine (sia da destra che da sinistra) all'intersezione delle curve, la cui ordinata rappresenta il T* cercato. Le posizioni di B che ci hanno portate più vicino all'intersezione sono state la distanza 4 e la distanza 5.
Se inseriamo i valori medi dei periodi per queste due posizioni all'interno della fomula:

$$T^* = \frac{T_2(x_4)T_1(x_5) - T_1(x_4)T_2(x_5)}{T_1(x_5) - T_2(x_5) - T_1(x_4) + T_2(x_4)}$$

dove $T_1(x_4) = 1.988$, $T_2(x_4) = 1.937$, $T_1(x_5) = 2.007$, $T_2(x_5) = 2.0249$

otteniamo $T* = 2.0017 \pm 0.0002$. L'incertezza su T* è stata calcolata come

$$\sigma_{T^*} = \sqrt{\left(\frac{\partial T^*}{\partial T_2(x_4)}\right)^2 + \left(\frac{\partial T^*}{\partial T_2(x_5)}\right)^2 + \left(\frac{\partial T^*}{\partial T_1(x_4)}\right)^2 + \left(\frac{\partial T^*}{\partial T_1(x_5)}\right)^2}$$

Questo risultato ci permette di calcolare g con estrema precisione, difatti l'accelerazione di gravità risulta:

$$g = \frac{4\pi^2 D}{(T^*)^2} \qquad \sigma_g = \frac{4\pi^2 D}{(T^*)^3}\sigma_T$$

$$g = 9.794 \pm 0.002$$

stima degli errori sistematici

Questo primo risultato per g può essere già considerato soddisfacente, considerando il valore atteso di 9.81; tuttavia è stato interessante scoprire il valore che avremmo ottenuto se i nostri calcoli non fossero stati così approssimativi. Non possiamo difatti escludere la presenza di errori sistematici nel nostro procedimento.
Per quanto riguarda la formula utilizzata, essa è una semplificazione del caso reale in quanto assume un angolo di oscillazione massimo infinitesimo e l'assenza dell'attrito dell'aria sul pendolo.
Abbiamo calcolato nuovamente g considerando un angolo di 4.93° come θ_{max}. In questo caso la relazione tra T* e g è la seguente:

$$T^* = 2\pi\sqrt{\frac{D}{g}}(1+\frac{\theta^2}{16})$$

con θ in radianti

usando questa formula con la g attesa risulta T* pari a 2.00097, il che ci porta a concludere che $\sigma_{sistematico} = T_{osservato} - T_{vero} = 0.0007$. Per completare la trattazione abbiamo dunque calcolato g e σ_g tramite lo stesso metodo ma utilizzando T*=2.00097 e $\sigma_{Ttotale} = \sqrt{\sigma^2_{Tcasuale} + \sigma^2_{Tsistematico}}$.

Questi calcoli hanno riscontrato un valore per g talmente accurato da portarci a trascurare l'effetto di qualsiasi altro errore sistematico: $g = 9.801 \pm 0.004$.

caduta libera

Un altro metodo per misurare g è osservare la caduta di un grave. L'esperimento prevedeva l'utilizzo di una struttura che lascia cadere una sferetta metallica e rileva il tempo di caduta tramite un sensore presente sul luogo di atterraggio.

procedura sperimentale e misurazioni

A causa di un guasto del cronometro dell'apparato siamo state costrette a rilevare l'intervallo di tempo attraverso un procedimento aletrnativo. Abbiamo fissato una fotocellula e, sotto di essa, allineato una seconda fotocellula libera di scorrere lungo un'asta verticale per poter regolare la distanza fra i due gates. La caduta del grave consiste in un moto uniformemente accelerato, descritto dalla legge oraria:

$$y(t) = y(0) + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

dove y(0) corrisponde all'altezza di partenza, ovvero alla posizione della fotocellula superiore. y(t) rappresenta invece l'altezza raggiunta al tempo t, in corrispondenza della fotocellula inferiore. Se la misurazione del tempo parte dall'istante in cui la pallina viene lasciata cadere la componente $v_0 t = 0$.

Riportiamo le misure effettuate per le diverse altezze di partenza in metri e i relativi tempi di caduta in secondi:

altezza 1:

0.603	0.602	0.602	0.603

0.316	0.307	0.320	0.315	0.323	0.318	0.315	0.308	0.310	0.318

.

altezza 2:

0.584	0.583	0.583	0.584

0.310	0.323	0.307	0.311	0.317	0.311	0.309	0.308	0.294	0.303

altezza 3:

0.556	0.557	0.558	0.557

0.296	0.304	0.299	0.304	0.289	0.275	0.301	0.294	0.294	0.297

altezza 4:

0.504	0.505	0.504	0.505

0.290	0.287	0.298	0.290	0.280	0.290	0.278	0.289	0.281	0.291

altezza 5:

0.450	0.451	0.450	0.451

0.267	0.263	0.281	0.279	0.280	0.262	0.268	0.268	0.261	0.272

altezza 6:

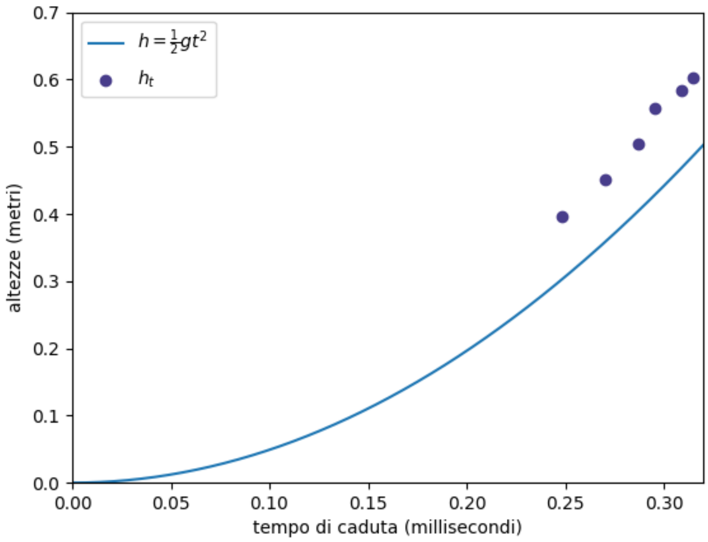
0.395	0.396	0.397	0.395

0.257	0.238	0.253	0.243	0.249	0.249	0.258	0.249	0.240	0.245

.

Tabella1

altezza (m)	tempo di caduta (s)
1: 0.603 ± 0.0003	0.315 ± 0.002
2: 0.584 ± 0.0003	0.309 ± 0.002
3: 0.557 ± 0.0004	0.295 ± 0.003
4: 0.505 ± 0.0003	0.287 ± 0.002
5:0.451 ± 0.0003	0.270 ± 0.002
6: 0.396 ± 0.0005	0.248 ± 0.002



La funzione $h = \frac{1}{2}gt^2$ in azzurro ricavata con $v_0 = 0$ esprime una relazione lineare tra l'altezza di partenza ed il quadrato del tempo di caduta; perciò abbiamo eseguito l'interpolazione dei dati in Tabella 2.a al fine di stimare il valore del coefficiente $\frac{1}{2}g$

Tabella2.a

y: altezza (m)	x: tempo di caduta^2 (s^2)
1: 0.603 ± 0.0003	0.099 ± 0.001
2: 0.584 ± 0.0003	0.096 ± 0.001
3: 0.557 ± 0.0004	0.087 ± 0.002
4: 0.505 ± 0.0003	0.083 ± 0.001
5: 0.451 ± 0.0003	0.073 ± 0.001
6: 0.396 ± 0.0005	0.062 ± 0.001

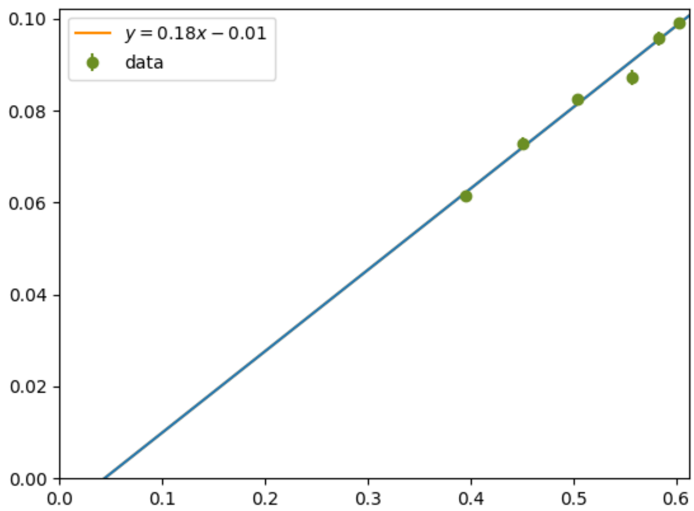
$$\sigma_{t^2} = 2t\sigma_t$$

stime dei parametri della retta ricavati dall'interpolazione con il metodo dei minimi quadrati pesati:

$$B = \frac{\sum w_i \sum w_i x_i y_i - \sum w_i y_i \sum w_i x_i}{\Delta} \pm \sqrt{\frac{\sum w_i}{\Delta}} = 0.177 \pm 0.006$$

$$A = \frac{\sum w_i y_i^2 \sum w_i x_i - \sum w_i y_i \sum w_i x_i y_i}{\Delta} \pm \sqrt{\frac{w_i y_i^2}{\Delta}} = -0.008 \pm 0.003$$

$$\Delta = \sum (w_i y_i^2) \sum w_i - (\sum w_i y_i)^2 \qquad w_i = \frac{1}{\sigma_{xi}^2} \text{ poichè } \sigma_{xi} >> \sigma_{yi}$$

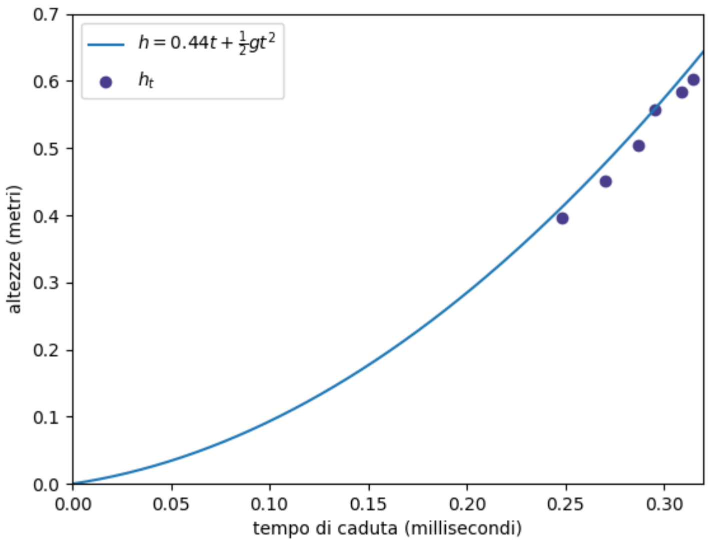


Infine, abbiamo calcolato l'accelerazione di gravità come $g = \frac{2}{B} \pm \frac{2}{B^2}\sigma_B = 11.3 \pm 0.4$.

stima degli errori sistematici

La stima di g ottenuta non è particolamente accurata, come ci aspettavamo dal grafico di $h_{(t)}$. La causa di questo errore sistematico potrebbe essere l'ipotesi di $v_0 = 0$. La tecnica di misurazione eseguita, a differenza dello strumento che avremmo dovuto utilizzare inizialmente, non permetteva di rilevare l'istante in cui la pallina cominciava a cadere: la partenza veniva effettuata leggermente al di sopra della prima fotocellula. Supponiamo un sollevamento Δh pari a 1cm, durante il quale la pallina ha acquistato una $v = \sqrt{2g\Delta h} = 0.44\frac{m}{s}$.

Queste considerazioni ci hanno portato a tracciare un grafico atteso (sempre in azzurro) differente dal precedente:



la funzione che descrive il fenomeno è stata corretta per $v_0 \neq 0$

notiamo che i dati si accordano molto meglio con la parabola che rappresenta $h = 0.44t + \frac{1}{2}gt^2$.
Nella tabella seguente correggiamo i valori di h di un fattore $-v_0 t$

Tabella2.b

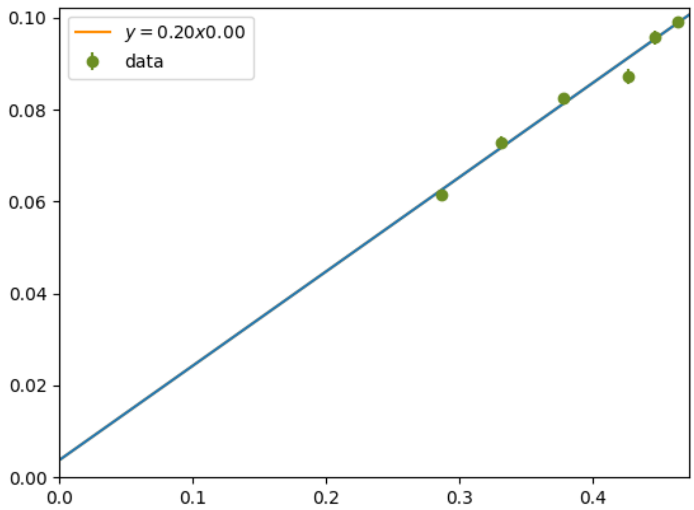
y: altezza-v_0t (m)	x: tempo di caduta^2 (s^2)
1: 0.4639 ± 0.0003	0.099 ± 0.001
2: 0.4474 ± 0.0003	0.096 ± 0.001
3: 0.4270 ± 0.0004	0.087 ± 0.002
4: 0.3781 ± 0.0003	0.083 ± 0.001
5: 0.3317 ± 0.0003	0.073 ± 0.001
6: 0.2865 ± 0.0005	0.062 ± 0.001

con $v_0 = 0.44\frac{m}{s}$

L'interpolazione dei dati che considerano una velocità iniziale diversa da 0 porta ai seguenti risultati (le formule adoperate sono le stesse, abbiamo usato i dati della Tabella2.b):

$$B = 0.205 \pm 0.007 \qquad A = 0.004 \pm 0.003$$

Stimiamo un errore sistematico sul calcolo di B pari a $|B_{osservato} - B_{corretto}| =$



$0.205 - 0.177 = 0.028$, propagando questo errore su g si ottiene $\sigma_{gsistematico} = \frac{2}{B^2}\sigma_{Bsistematico} = 1.33$. La stima finale di g risulta dunque $9.759 \pm 0.348 - 1.33\frac{m}{s^2}$.