Esercitazioni 10-11: Distribuzione Binomiale e Poissoniana

1) ***La probabilità che una seggiovia si arresti durante il tempo di risalita è del 20%. Nell'ipotesi che gli arresti avvengano casualmente ed in modo indipendente l'uno dall'altro calcolare: a) la probabilità che si verifichino 3 arresti in 4 risalite; b) la probabilità che si verifichino meno di 2 arresti in 5 risalite; c) il numero di arresti atteso in una giornata, in cui si effettuano 500 risalite.***

Utilizziamo la distribuzione binomiale con p=0.2 e q=1-p=0.8.
a) Con un numero di prove n=4 e un numero di successi ν=3, la probabilità cercata è

$$B_{n,p}(\nu) = \binom{n}{\nu} p^{\nu}(1-p)^{n-\nu} \rightarrow$$

$$B_{4,0.2}(3) = \binom{4}{3} 0.2^3 \cdot 0.8 = \frac{4!}{3!1!} 0.2^3 \cdot 0.8 = 0.026$$

b) Con un numero di prove n=5 e un numero di successi minore di 2 (ν=0,1), la probabilità cercata è la somma $B_{5,0.2}(0) + B_{5,0.2}(1)$:

$$B_{5,0.2}(0) + B_{5,0.2}(1) = \binom{5}{0} 0.2^0 \cdot 0.8^5 + \binom{5}{1} 0.2 \cdot 0.8^4 = \frac{5!}{0!5!} 0.2^0 \cdot 0.8^5 + \frac{5!}{1!4!} 0.2 \cdot 0.8^4 =$$

$$= 0.328 + 0.410 = 0.738$$

c) Il numero di arresti atteso su un totale di n=500 prove è $\overline{\nu} = np = 500 \cdot 0.2 = 100$.

2) ***Per rivelare il passaggio di raggi cosmici si usa un rivelatore composto da 4 piani di camere a scintille sovrapposti. Ciascuna camera ha un'inefficienza dell'8% (probabilità di non fornire alcun segnale pur essendo attraversata da un raggio cosmico). Se si registrano solo gli eventi in cui si ha segnale da almeno tre camere, qual è la probabilità P di non registrare il passaggio di un raggio cosmico che ha attraversato le 4 camere?***

Consideriamo la distribuzione Binomiale con n=4 prove, p=0.92 e q=0.08. La probabilità P che non venga registrato un raggio cosmico che attraversa 4 camere si ottiene come somma delle probabilità di 1) non ottenere alcun segnale dalle 4 camere, 2) ottenere segnale da una sola camera, 3) ottenere segnale da sole 2 camere. Pertanto

$$P = B_{4,0.92}(0) + B_{4,0.92}(1) + B_{4,0.92}(2) = \frac{4!}{0!4!} 0.92^0 \cdot 0.08^4 + \frac{4!}{1!3!} 0.92^1 \cdot 0.08^3 + \frac{4!}{2!2!} 0.92^2 \cdot 0.08^2 =$$

$$= 0.00004 + 0.0019 + 0.0325 = 0.034$$

3) ***Una società di trasporti acquista dei treni dotati di 20 porte ciascuno. La probabilità che una porta si guasti in un anno di utilizzo è pari al 4%. Dopo un anno si controllano 100 treni e si osserva che 35 treni hanno tutte le porte funzionanti, 42 treni hanno una porta guasta, 18 treni hanno due porte guaste e i restanti hanno 3 porte guaste.***
a) Disegnare un istogramma che rappresenti la distribuzione del numero di treni osservati e di quelli previsti.

b) Confrontare le due distribuzioni mediante il test del χ^2.

a) Consideriamo la distribuzione Binomiale con n=20, p=0.04 e q=0.96. La probabilità che dopo un anno un treno non abbia alcuna porta guasta è

$$B_{20,0.04}(0) = \binom{20}{0} 0.04^0 \cdot 0.96^{20} = \frac{20!}{0!20!} 0.04^0 \cdot 0.96^{20} = 0.442$$

Su 100 treni, ci aspettiamo che il numero di treni con tutte le porte funzionanti sia $E_0 = 0.442 \cdot 100$=44.2.
La probabilità che un treno dopo un anno abbia una sola porta guasta è

$$B_{20,0.04}(1) = \binom{20}{1} 0.04^1 \cdot 0.96^{19} = \frac{20!}{1!19!} 0.04^1 \cdot 0.96^{19} = 0.368$$

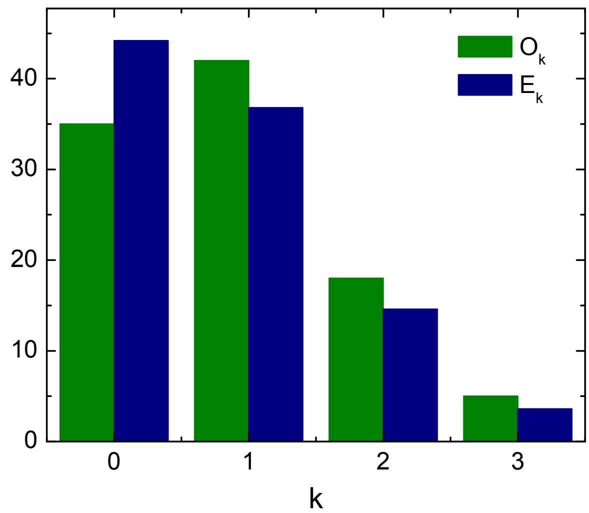
Su 100, il numero di treni attesi con una porta guasta è $E_1 = 0.368 \cdot 100 = 36.8$.
La probabilità che dopo un anno un treno abbia due porte guaste è

$$B_{20,0.04}(2) = \binom{20}{2} 0.04^2 \cdot 0.96^{18} = \frac{20!}{2!18!} 0.04^2 \cdot 0.96^{18} = 0.146$$

Su 100, il numero di treni attesi con due porte guaste è $E_2 = 0.146 \cdot 100 = 14.6$.
Infine, la probabilità che un treno dopo un anno abbia tre porte guaste è

$$B_{20,0.04}(3) = \binom{20}{3} 0.04^3 \cdot 0.96^{17} = \frac{20!}{3!17!} 0.04^3 \cdot 0.96^{17} = 0.036$$

Su 100, il numero di treni attesi con tre porte guaste è $E_3 = 0.036 \cdot 100 = 3.6$.
Usando i valori attesi E_k $(k = 0...3)$ appena calcolati e i valori osservati O_k $(k = 0...3)$ forniti nel testo si ottengono i due istogrammi:



b) Per calcolare il χ^2, accorpiamo i valori negli ultimi due intervalli in modo che il valore osservato e il valore atteso siano maggiori di 5. Calcoliamo quindi il χ^2 come

$$\chi_0^2 = \sum_{i=0}^{2} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(35 - 44.2)^2}{44.2} + \frac{(42 - 36.8)^2}{36.8} + \frac{((18 + 5) - (14.6 + 3.6))^2}{14.6 + 3.6} =$$

$$= 1.91 + 0.735 + 1.266 = 3.91$$

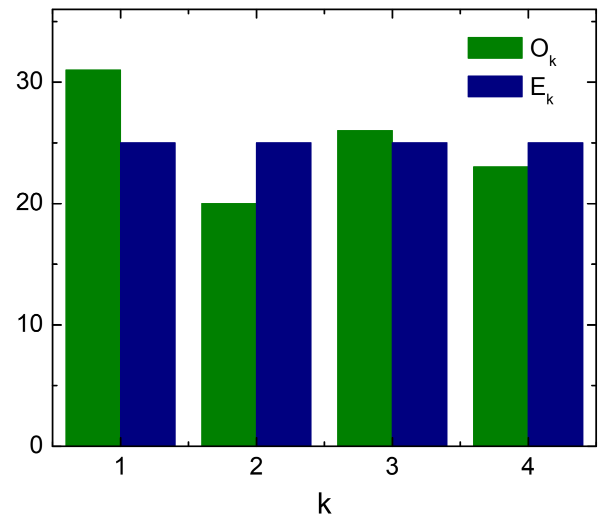
Con d=3-1 gradi di libertà, il chi-quadro ridotto è

$$\widetilde{\chi}_0^2 = 1.96$$

e $p_2(\widetilde{\chi}^2 \geq \widetilde{\chi}_0^2) = 0.15$, corrispondente a un buon accordo tra le due distribuzioni.

4) ***Sulla cima di una piramide a base quadrata viene posta una pallina, in equilibrio instabile. La pallina scivola lungo uno dei quattro lati e viene raccolta. Si ripete l'esperimento con 100 palline e si conta il numero di palline cadute lungo ciascuno dei lati, ottenendo 31, 20, 26 e 23.***
a) Disegnare un istogramma con il numero di palline osservato su ciascun lato e il numero di palline previsto.
b) Valutare l'accordo tra osservazione e previsione mediante il test del χ^2.
c) Qual è la probabilità che usando 18 palline se ne osservino scivolare meno di 2 su un determinato lato?
d) Qual è la probabilità che usando 200 palline se ne osservino scivolare meno di 40 su un determinato lato?

a) La probabilità che una pallina cada lungo un lato è uguale per tutti i lati della piramide e uguale a p=1/4=0.25. Con 100 palline il numero di palline attese E_k per ciascun lato è quindi 25.



b) Il chi-quadro è

$$\chi_0^2 = \sum_{k=1}^{4} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = 2.64$$

che con d=4-1 gradi di libertà corrisponde a un chi-quadro ridotto di

$$\widetilde{\chi}_0^2 = 0.88$$

La probabilità $p_3(\widetilde{\chi}^2 \geq \widetilde{\chi}_0^2) = 0.45$ conferma un buon accordo tra previsioni e osservazioni.
c) Considerando una Binomiale con n=18 e p=0.25, la probabilità P cercata si calcola come

$$P = B_{18,0.25}(0) + B_{18,0.25}(1) = 0.0056 + 0.0338 = 0.039$$

d) Il processo è descritto da una Binomiale con valor medio $\overline{\nu} = np = 200 \cdot 0.25 = 50$ e deviazione standard $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 6.12$. In tal caso la Binomiale è ben approssimata da una Gaussiana con uguali valor medio e deviazione standard. Calcoliamo quindi la differenza, in termini di sigma, tra i 50 eventi attesi e i 40 eventi osservati al massimo:

$$t = \frac{40 - 50}{6.12} = -1.64$$

La probabilità di osservare meno di 40 palline cadute lungo un lato corrisponde all'integrale della distribuzione di Gauss nell'intervallo $(-\infty, \overline{\nu} - 1.64\sigma)$, che dalle tabelle vale circa 0.05. La probabilità che su 200 palline meno di 40 cadano lungo un lato è quindi circa del 5%.

5) ***Un gruppo di amici vorrebbe organizzarsi per uscire insieme una sera. Ognuno dei 5 amici è libero 3 sere a settimana, casuali e diverse di settimana in settimana. Calcolare la probabilità che tutti gli amici siano liberi la stessa sera e la probabilità che almeno 4 siano liberi. Assumendo poi le stesse disponibilità settimanali per gli ex compagni di classe del liceo (n=30), con che probabilità almeno il 70% è disponibile una sera?***

Utilizziamo la distribuzione Binomiale con n=5, p=3/7=0.43 e q=1-p=0.57. La probabilità che tutti i 5 amici siano liberi la stessa sera è

$$B_{5,0.43}(5) = \binom{5}{5} 0.43^5 \cdot 0.57^0 = \frac{5!}{5!0!} 0.43^5 \cdot 0.57^0 = 0.015$$

La probabilità che almeno 4 amici siano liberi si ottiene come

$$B_{5,0.43}(4) + B_{5,0.43}(5) = \frac{5!}{4!1!} 0.43^4 \cdot 0.57^1 + \frac{5!}{5!0!} 0.43^5 \cdot 0.57^0 = 0.097 + 0.015 = 0.11$$

Per i 30 compagni di classe, vogliamo calcolare la probabilità che più di $0.7 \cdot 30 = 21$ di essi siano disponibili. Consideriamo la distribuzione Binomiale con valor medio atteso $\overline{\nu} = np = 30 \cdot 0.43 = 12.9$ e deviazione standard $\sigma = \sqrt{npq} = 2.7$. Approssimando la Binomiale con una Gaussiana con uguali valore medio e deviazione standard, calcoliamo

$$t = \frac{21 - 12.9}{2.7} = 3$$

La probabilità che più di 21 amici siano liberi è data dall'integrale della distribuzione di Gauss nell'intervallo $(\overline{\nu} + 3\sigma, +\infty)$, che dalle tabelle è circa lo 0.1%.

6) ***Un campione radioattivo subisce 0.2 decadimenti al secondo. a) Calcolare la probabilità di osservare più di 2 decadimenti al secondo. b) Dopo quanti secondi si ha una probabilità maggiore del 90% di osservare almeno un decadimento? c) Se si contano i decadimenti osservati in un'ora, qual è la probabilità di osservare più di 700 decadimenti?***

a) La probabilità di osservare ν eventi in un certo intervallo di tempo, noto il numero medio di eventi μ nell'intervallo, è fornita dalla distribuzione di Poisson $P_\mu(\nu)$:

$$P_\mu(\nu) = \frac{e^{-\mu}\mu^\nu}{\nu!}$$

Nel nostro caso $\mu = 0.2$. La probabilità di ottenere più di 2 decadimenti in un secondo è

$$1 - P_{0.2}(0) - P_{0.2}(1) - P_{0.2}(2) = 1 - \frac{e^{-0.2}0.2^0}{0!} - \frac{e^{-0.2}0.2^1}{1!} - \frac{e^{-0.2}0.2^2}{2!} =$$

$$= 1.156 \cdot 10^{-3}$$

b) Per una generica Poissoniana con un numero di eventi medio μ in un dato intervallo, la probabilità di osservare almeno un evento nell'intervallo è uguale a $1 - P_\mu(0)$. Troviamo il valore di μ per cui la probabilità è uguale al 90%:

$$1 - P_\mu(0) = 0.90 \rightarrow 1 - \frac{e^{-\mu}\mu^0}{0!} = 0.90$$

$$\rightarrow 1 - e^{-\mu} = 0.90 \rightarrow \mu = 2.3$$

Ricaviamo quindi il tempo in cui avvengono in media 2.3 decadimenti, sapendo che in un secondo se ne ottengono in media 0.2:

$$\Delta t = 2.3 \cdot 1\ \mathrm{s}/0.2 = 11.5\ \mathrm{s}.$$

c) Il numero medio di decadimenti attesi in un'ora è $\mu = 0.2 \cdot 60 \cdot 60 = 720$. In tal caso approssimiamo la distribuzione di Poisson con una distribuzione di Gauss con uguale valor medio e deviazione standard $\sigma = \sqrt{\mu} = 27$. Calcoliamo

$$t = \frac{700 - 720}{27} = -0.75$$

Dalla tabella dell'integrale normale degli errori, la probabilità di osservare meno di 700 decadimenti è $0.5(1 - p(\text{entro } 0.75\sigma))$=0.2266, da cui la probabilità di osservarne più di 700 è 1-0.2266=0.7734.

7) ***Nella notte di S. Lorenzo un gruppo di ragazzi osserva le stelle cadenti e un ragazzo sostiene di vederle cadere con una frequenza media di 1 stella ogni 10 minuti. Se l'osservazione è corretta e il fenomeno continua regolarmente, qual è la probabilità che vengano osservate almeno 2 stelle nei 5 minuti successivi?***

Utilizziamo la distribuzione di Poisson con un numero medio di stelle osservate in 5 minuti uguale a μ=0.5. La probabilità di osservare almeno 2 stelle in 5 minuti è

$$1 - P_\mu(0) - P_\mu(1) = 1 - e^{-0.5} - e^{-0.5}0.5 = 0.09$$

8) ***Un campione radioattivo è previsto decadere con un tasso medio di 30 disintegrazioni al minuto. Qual è la probabilità che non si conti alcun decadimento in un secondo? Con che errore relativo si misura il tasso di decadimento del campione se si contano i decadimenti in***

5 minuti?

Il tasso medio di 30 disintegrazioni al minuto corrisponde a una media di 0.5 disintegrazioni al secondo. Usiamo la distribuzione di Poisson con μ=0.5 e ν=0:

$$P_{0.5}(0) = e^{-0.5} = 0.61$$

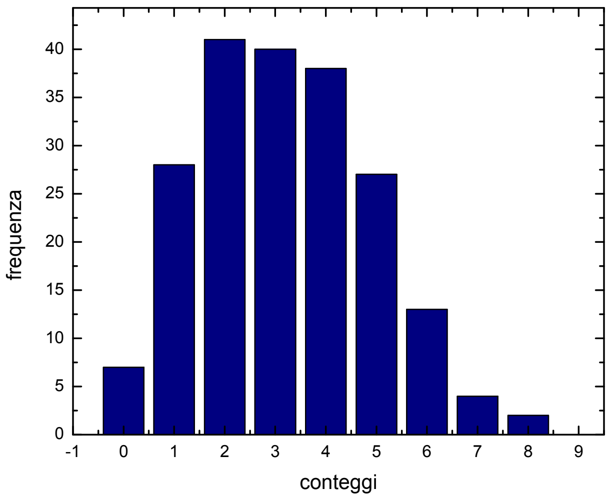
L'errore relativo in un esperimento di conteggio è $\sigma_N/N = 1/\sqrt{N}$. In 5 minuti il numero di conteggi attesi è $N = 30 \cdot 5 = 150$, da cui l'errore relativo è $\sigma_N/N = 1/\sqrt{150} = 0.08$.

9) ***Si è misurato il numero di conteggi fornito da una sorgente radioattiva in 200 intervalli ripetuti di 10 secondi, ottenendo:***

conteggi ν	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	≥ 8
frequenza osservata O	*7*	*28*	*41*	*40*	*38*	*27*	*13*	*4*	*2*

a) Rappresentare le misure in un istogramma. Qual è la distribuzione di probabilità attesa?
b) Calcolare il numero medio di conteggi in 10 secondi.
c) Usare il test del χ^2 ***per verificare se i dati seguono la distribuzione di probabilità prevista.***
d) Si misura infine l'attività del fondo, pari a A_f***=1.8 conteggi/min. Qual è l'attività della sorgente e qual è il suo errore?***

a) La distribuzione attesa è la Poissoniana.



b) Il numero medio di conteggi osservati in 10 secondi è

$$\mu = \frac{\sum_i O_i \cdot \nu_i}{\sum_i O_i} = 3.2$$

c) Dobbiamo calcolare la frequenza attesa per ciascun numero di conteggi. Su un intervallo di 10 secondi, data una Poissoniana con valor medio μ=3.2 la probabilità di non osservare alcun conteggio è $P_{3.2}(0) = e^{-3.2} = 0.041$. La frequenza attesa per un numero di conteggi uguale a zero su 200 intervalli da 10 secondi è quindi $E_0 = 200 \cdot P_{3.2}(0) = 8.15$. Analogamente,

$$E_1 = 200 \cdot P_{3.2}(1) = 200\frac{e^{-3.2} \cdot 3.2}{1!} = 26.09$$

$$E_2 = 200 \cdot P_{3.2}(2) = 200\frac{e^{-3.2} \cdot 3.2^2}{2!} = 41.74$$
$$E_3 = 200 \cdot P_{3.2}(3) = 200\frac{e^{-3.2} \cdot 3.2^3}{3!} = 44.52$$
$$E_4 = 200 \cdot P_{3.2}(4) = 200\frac{e^{-3.2} \cdot 3.2^4}{4!} = 35.62$$
$$E_5 = 200 \cdot P_{3.2}(5) = 200\frac{e^{-3.2} \cdot 3.2^5}{5!} = 22.80$$
$$E_6 = 200 \cdot P_{3.2}(6) = 200\frac{e^{-3.2} \cdot 3.2^6}{6!} = 12.16$$

Accorpiamo infine gli ultimi due intervalli, dove i conteggi risultano inferiori a 5:

$$E_{\geq 7} = 200 - \sum_{i=0}^{6} E_i = 8.92$$

$$O_{\geq 7} = O_7 + O_{\geq 8} = 4 + 2 = 6$$

Il chi-quadro si ottiene come

$$\chi_0^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 2.72$$

Il numero di gradi di libertà è uguale al numero di bin (8, perchè due sono stati accorpati) meno il numero di vincoli (2, cioè la media μ=3.2 e la somma delle frequenze assolute osservate).

$$\rightarrow \widetilde{\chi}_0^2 = \chi_0^2/6 = 0.45$$

La probabilità $P_6(\widetilde{\chi}^2 \geq \widetilde{\chi}_0^2)$=0.88 conferma un buon accordo tra i dati e la distribuzione Poissoniana.

d) Il numero medio di conteggi rivelati ogni 10 secondi è $\mu = 3.2 \pm \sqrt{3.2} = 3.2 \pm 1.8$, quindi l'attività totale è $A_t = (0.32 \pm 0.18)$ conteggi/s. Considerando l'attività del fondo $A_f = (1.8 \pm 1.34)$ conteggi/min=(0.03 ± 0.02) conteggi/s, l'attività della sorgente è $A_s = A_t - A_f = 0.29$ conteggi/s. Il corrispondente errore è

$$\sigma_{A_s} = \sqrt{\sigma_{A_t}^2 + \sigma_{A_f}^2} = 0.18\,\text{conteggi/s}$$

$$\rightarrow A_s = (0.29 \pm 0.18)\,\text{conteggi/s}$$