

Misura del coefficiente di restituzione

INTRODUZIONE

Una pallina lasciata cadere liberamente su un piano rimbalza ad un'altezza minore di quella di partenza. Se la lunghezza della caduta è abbastanza breve, si può considerare trascurabile l'attrito con l'aria. In questo caso, la differenza di quota tra il punto di partenza h_0 e l'apice del primo rimbalzo h_1 è dovuta solo al cosiddetto *coefficiente di restituzione*, e_v , tra la pallina e la superficie, ovvero il rapporto fra la velocità v_1 del centro di massa della pallina immediatamente dopo l'urto e la velocità v_0 immediatamente prima dell'urto:

$$e_v = v_1/v_0 \quad (1)$$

Questo coefficiente è caratteristico della coppia pallina-superficie, a meno che non vi siano deformazioni permanenti sulla pallina.

SCOPO DELL'ESPERIMENTO

Si vuole misurare il valore del coefficiente e_v per alcune coppie superficie/pallina. In generale, questo è possibile utilizzando semplici relazioni matematiche, nel limite in cui l'impatto dell'attrito dell'aria sia trascurabile. Vi viene richiesto di:

- Utilizzare almeno 2 palline diverse, o 2 tipi diversi di superficie di rimbalzo per la stessa pallina. Per le palline una possibilità, se le avete a disposizione, potrebbe essere rappresentata da una pallina da tennis e una da ping pong. Per quanto riguarda le superfici, potreste per esempio confrontare i coefficienti di restituzione tra un pavimento in marmo e un tavolo in legno.
- Utilizzare per ogni coppia pallina-superficie due metodi differenti per la valutazione del coefficiente di restituzione (illustrati in seguito).
- Per ogni metodo di misura e per ogni coppia pallina-superficie, determinare in che intervalli di misura è valida l'approssimazione di attrito dell'aria trascurabile.
- Determinare il coefficiente di restituzione di ciascuna coppia pallina-superficie con i due metodi diversi e confrontare tra loro i risultati.

PARTE 1. METODO DEL PRIMO RIMBALZO

Il primo metodo di valutazione di e_v si basa sulla misura della quota raggiunta dalla pallina dopo il primo rimbalzo. Con riferimento alla figura 1, se consideriamo trascurabile l'attrito dell'aria, sappiamo che una pallina lasciata cadere da un'altezza h_0 raggiunge il suolo con una velocità v_0 tale da soddisfare la relazione

$$mgh_0 = 1/2 mv_0^2 \quad (2)$$

D'altra parte, per raggiungere la quota h_1 al primo rimbalzo, essa deve possedere una velocità iniziale v_1 immediatamente dopo l'urto con il suolo tale per cui

$$mgh_1 = 1/2 mv_1^2 \quad (3)$$

Dal rapporto tra le ultime due relazioni si ricava

$$\frac{h_1}{h_0} = \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 \quad (4)$$

$$e_v = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} \quad (5)$$

dalla misura delle quote h_0 e h_1 è quindi possibile stimare il coefficiente di restituzione tra e_v tra la pallina e la superficie di rimbalzo.

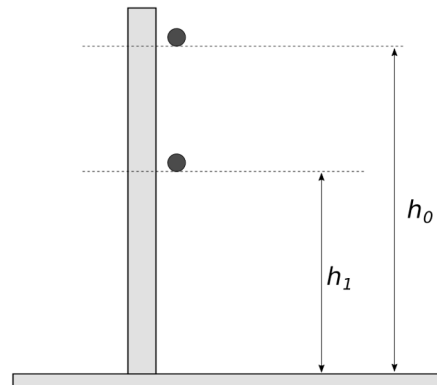


Figura 1. Definizione di h_0 e h_1

MATERIALE

Per effettuare la misura di e_v con questo primo metodo avrete bisogno di una pallina (da ping pong, da tennis, o simili), un metro, dello scotch, e, possibilmente, del vostro cellulare, se quest'ultimo è in grado di effettuare riprese in *slow motion*.

PREPARAZIONE APPARATO SPERIMENTALE

Individuate una superficie orizzontale, rigida e regolare su cui far rimbalzare la pallina (un tavolo, o semplicemente il pavimento), e una struttura sufficientemente perpendicolare ad essa. La struttura verticale deve essere possibilmente alta almeno un metro. In pratica, un muro, o un armadio in combinazione con un pavimento dovrebbero essere scelte praticabili. Controllate che la perpendicolarità sia effettivamente tale, per mezzo di una livella, o realizzando un semplice filo a piombo (con un filo da cucito a cui legare un peso, per esempio una graffetta).

Ora, utilizzate il metro per realizzare una scala graduata delle altezze, come in figura 2. Fate attenzione alla verticalità del metro stesso. Selezionate una certa quantità di quote di "lancio" h_0 , raffigurate in figura dai pezzi di scotch orizzontali. Posizionare dei riferimenti per ogni quota h_0 vi aiuterà ad essere più precisi nel momento in cui andrete a ripetere molte volte la stessa misura.

ESECUZIONE ESPERIMENTO

Per ciascuna altezza selezionata, posizionate la pallina in modo che la sua base sia allineata con il riferimento h_0 scelto e lasciatela cadere cercando di imprimere la minor rotazione possibile con le dita mentre la rilasciate.

Lo scopo della misura è di registrare l'altezza h_I raggiunta dalla base della pallina all'apice del primo rimbalzo. Per farlo, suggeriamo due possibilità:

1) Il metodo più efficace è di utilizzare il vostro smartphone, se questo è in grado di realizzare video in *slow motion*. Effettuate qualche lancio di prova dall'altezza selezionata per capire approssimativamente a che altezza si trova h_I , quindi posizionate il vostro cellulare di fronte alla scala graduata, in modo che l'obiettivo della telecamera si trovi all'incirca all'altezza h_I . Trovate un modo di fissarlo a quell'altezza per non doverlo spostare durante i lanci.



Figura 2

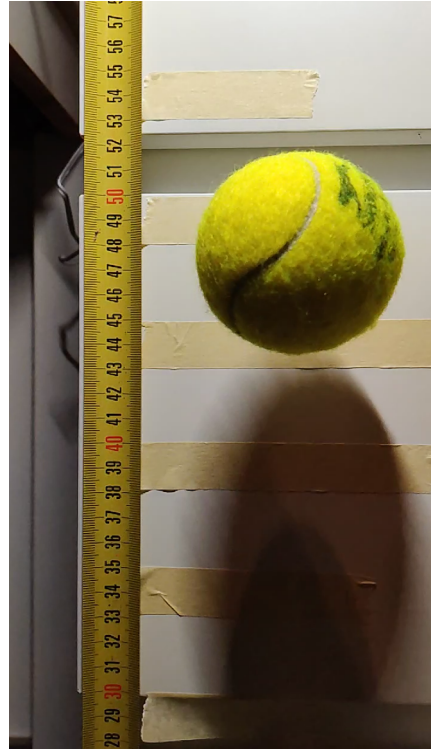


Figura 3

A questo punto, effettuate un lancio mentre registrate un video in *slow motion*. Fermate la registrazione, guardatela e cercate di fermare l'immagine nel momento in cui la pallina raggiunge l'apice del primo rimbalzo (come ad esempio in figura 3). Confrontate la posizione della sua base con la scala graduata, e avrete misurato h_I .

2) Se non disponete di un cellulare in grado di effettuare riprese in *slow motion*, dovrete valutare h_I con la procedura seguente. Sistemate un riferimento (per esempio un altro pezzo di scotch) sulla scala graduata, o vicino ad essa. Fate cadere la pallina e confrontate la posizione di questo riferimento con la quota raggiunta dalla base della pallina all'apice del primo rimbalzo. Molto difficilmente saranno allineati. Spostate quindi il riferimento per compensare il disallineamento, e ripetete il lancio. Ripetete la procedura fino a quando riferimento e quota del rimbalzo non appariranno allineati. La posizione del riferimento corrisponderà a h_I .

Ripetete le operazioni descritte al punto 1) o 2) almeno 10 volte per ciascuna quota h_0 , prendendo nota delle misure di h_I trovate.

ANALISI DATI

Per ciascuna quota di lancio h_0 , calcolate la miglior stima di h_1 come valor medio delle varie misure ripetute effettuate, e l'errore come deviazione standard della media. Valutate inoltre la precisione con cui misurate h_0 (ovvero, trovate una stima ragionevole di quanto siete in grado di allineare con precisione la pallina con il riferimento posto in h_0 , per ogni lancio).

Costruite poi un grafico di h_1 in funzione di h_0 . Essendo e_v come dicevamo una costante caratteristica della coppia pallina-superficie, ci si aspetta che i punti siano allineati su una retta, il cui coefficiente angolare sarà pari a e_v^2 .

In realtà, se siete riusciti ad effettuare lanci anche da altezze abbastanza grandi (indicativamente superiori ai 50 cm per una pallina da tennis, 10 cm per una da ping pong), noterete che per valori abbastanza grandi di h_0 la curva non ha più un andamento lineare. Questo fatto è dovuto all'attrito dell'aria. Infatti, fissata un'altezza di partenza h_0 , la velocità di impatto con il suolo v_0 calcolata con la conservazione dell'energia è certamente maggiore di quella effettiva, che possiamo chiamare V_0 . D'altra parte per arrivare ad un'altezza h_1 dopo il rimbalzo, la velocità iniziale V_1 deve essere maggiore di quella (precedentemente chiamata v_1) che basterebbe se non ci fosse dissipazione di energia per effetto dell'attrito dell'aria. Dunque il coefficiente effettivo di restituzione, che possiamo chiamare E_v risulta maggiore di quello stimato con la conservazione dell'energia essendo:

$$E_v = \frac{V_1}{V_0} > \frac{v_1}{v_0} = e_v \quad (6)$$

Al crescere di h_0 e h_1 , quindi, il coefficiente e_v stimato delle altezze risulterà progressivamente più piccolo di quello effettivo E_v , che si manterrebbe su una linea retta.

Osservate il grafico di h_1 in funzione di h_0 e individuate la zona in cui le misure fatte mostrano una relazione lineare.

Effettuate ora sui punti contenuti nella zona lineare del grafico un'interpolazione lineare con il metodo dei minimi quadrati pesati per stimare il coefficiente angolare della retta $y=A+Bx$, con $y=h_1$ e $x=h_0$. Dalla radice quadrata del coefficiente angolare $B=e_v^2$ ricavate il valore del coefficiente di restituzione della coppia pallina-superficie e dall'incertezza su B ricavate l'incertezza sulla misura di e_v .

Utilizzate il test del χ^2 per determinare la bontà dell'adattamento della retta alle misure ed eventualmente cambiare la regione scelta per l'interpolazione.

Potete infine ricavare una stima di quanto grande fosse il contributo relativo dell'attrito dell'aria nei lanci in cui il suo effetto risultava non trascurabile.

Per una sfera di diametro d e massa m , la forza di attrito in aria si può esprimere in funzione della velocità v come $F_{aereo} = \frac{\rho_{aria}\pi}{8} C_D d^2 v^2$, dove il coefficiente di attrito aerodinamico C_D può considerarsi costante e, per un oggetto sferico, pari a 0.4, e ρ_{aria} è la densità dell'aria.

Detta h_{lim} l'altezza massima oltre la quale la relazione tra h_1 e h_0 non è più lineare, potete ricavare il rapporto tra la forza di attrito aerodinamico e la forza peso per una caduta da tale quota dalla (2) come

$$\frac{F_{aero}}{F_{peso}} = \frac{\rho_{aria}\pi C_D d^2 v^2}{8mg} = \frac{\rho_{aria}\pi C_D d^2}{8mg} 2gh_{lim} = \frac{\rho_{aria}\pi C_D d^2}{4m} h_{lim} \quad (6)$$

PARTE 2. METODO DEI TEMPI DI RIMBALZO

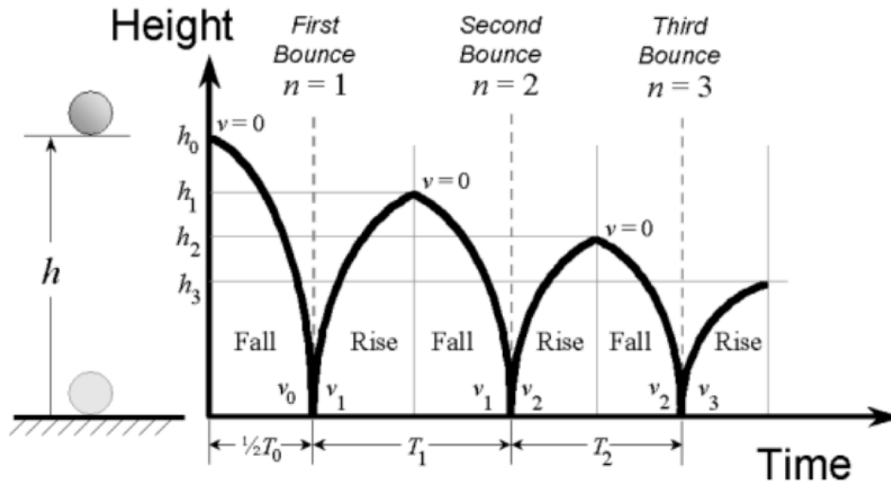


Figura 4

Il secondo metodo per valutare e_v è basato sulla distanza temporale tra rimbalzi successivi. Considerate la figura 4. Una pallina rimbalza n volte su una superficie piana. Ad ogni rimbalzo la sua velocità prima e dopo l'urto è regolata dalla relazione riportata nell'equazione (1). Inoltre, nell'approssimazione in cui l'attrito della pallina con l'aria è trascurabile, durante il rimbalzo "n" la velocità iniziale di salita v_n immediatamente dopo l'urto con il suolo e la velocità finale di discesa immediatamente prima dell'impatto successivo con il suolo sono uguali. Ne consegue che in generale per il rimbalzo n-esimo vale

$$v_n = e_v v_{n-1} \quad (7)$$

Questa relazione può essere espressa in funzione della velocità subito prima del primo impatto col suolo, v_0 , come

$$v_n = e_v^n v_0 \quad (8)$$

D'altra parte, è noto che, in assenza di attrito, se un corpo si stacca da terra con velocità iniziale v_n lungo l'asse verticale, impiegherà un tempo t_n per tornare al suolo pari a

$$t_n = \frac{2v_n}{g} \quad (9)$$

Dalle equazioni (9) e (10) si ricava quindi che

$$t_n = \frac{2e_v^n v_0}{g} \quad (10)$$

È possibile quindi ricavare e_v misurando gli intervalli di tempo tra rimbalzi successivi. Infatti, utilizzando i logaritmi in base 10, possiamo riscrivere questa relazione come

$$\log(t_n) = \log\left(\frac{2v_0}{g} e_v^n\right) \quad (11)$$

$$\log(t_n) = \log\left(\frac{2v_0}{g}\right) + n\log(e_v) \quad (12)$$

ovvero

$$T_n = A + nB \quad (13)$$

dove abbiamo definito

$$A = \log\left(\frac{2v_0}{g}\right) \quad (14)$$

$$B = \log(e_v) \quad (15)$$

$$T_n = \log(t_n) \quad (16)$$

e quindi

$$e_v = 10^B \quad (18)$$

Poiché ci aspettiamo $e_v < 1$ ci aspettiamo $B < 0$ cioè una retta con pendenza negativa.

MATERIALE

Per questo secondo metodo, avrete bisogno ovviamente della stessa pallina e della stessa superficie utilizzate per il metodo precedente. Inoltre, dovrete utilizzare l'applicazione per cellulari Phyphox¹ che potete installare gratuitamente attraverso Google Play o Apple Store.

ESECUZIONE ESPERIMENTO

Accedete all'applicazione Phyphox ed entrate nella sezione "Cronometro acustico". In questa modalità, l'applicazione utilizzerà il microfono del vostro cellulare per misurare la distanza tra rimbalzi successivi a partire dal rumore degli urti.

Selezionate la tab "Molti" e premete su tasto Play. A questo punto, lasciate cadere la pallina. L'applicazione misurerà gli intervalli tra urti (e li rappresenterà in un istogramma). Quando i rimbalzi sono finiti, fermate l'acquisizione e, utilizzando il menù delle opzioni in alto a destra, premete su "Esporta Dati". Scegliete il formato che preferite e salvatelo, in modo da potervi poi accedere da PC (per esempio, potreste inviarvelo via email). Nel file troverete una tabella di dati, contenente due colonne denominate "Event time (s)" e "Interval (s)". Ogni riga corrisponde a un rimbalzo. Ripetete la misura almeno 5 volte per ogni coppia pallina-superficie.

ANALISI DATI

Utilizzate ora i dati appena ricavati per costruire un grafico del logaritmo in base 10 di "Interval" contro il numero del rimbalzo corrispondente. Troverete una distribuzione lineare per un certo intervallo di rimbalzi.

¹ <https://phyphox.org/>

Come si confronta questo intervallo con la quota indicativa h_{lim} stimata precedentemente?

Eseguite un fit di questa porzione di dati, con il metodo dei minimi quadrati pesati, e ricavate i valori di A e B. A questo punto potete ricavare il valore del coefficiente di restituzione come $e_v = 10^B$.

Valutate correttamente la precisione di ciascuna delle 5 misure di e_v , che ottenete con questo metodo, e poi combinate le stesse tramite una media pesata, per ottenere la miglior stima di e_v col metodo 2.

Confrontate il valore così ottenuto con quello ricavato con il metodo 1. Sono compatibili? Quale metodo risulta più preciso?

SUGGERIMENTI

Come in qualsiasi esperimento, è fondamentale ridurre al minimo le fonti di errore. Essendo questo un esperimento “casalingo” le possibili fonti di errore sono molteplici, ma questo non significa che sia impossibile ottenere comunque delle misure sensate, con un po’ di attenzione. Prestate particolare attenzione agli allineamenti: la verticalità della scala graduata, la parallasse tra il vostro occhio e le varie quote da valutare (o tra la telecamera e la quota h_1 , nel caso usiate lo slow motion).

Se utilizzate il cellulare per il metodo 1, prendete sempre nota dell’altezza dal suolo della fotocamera per ogni misura. Potrete utilizzare questa informazione per correggere eventuali errori di parallasse. Inoltre, se avete modo di scaricare i filmati su un PC, avrete probabilmente a disposizione un video player migliore di quelli disponibili sul cellulare, che vi permetterà di trovare con più precisione l’apice del primo rimbalzo, procedendo frame per frame.

Per il metodo 2, fate attenzione alla sensibilità del microfono. in generale, cercate di scegliere una coppia pallina-superficie per cui il rimbalzo faccia abbastanza rumore. Per intenderci, una palla di gomma su un tappeto probabilmente non attiverebbe mai il sensore (e d’altra parte, probabilmente una combinazione del genere non vi garantirebbe neanche un rimbalzo sufficiente per una misura)

Inoltre, in modalità Cronometro Acustico l’applicazione vi permette di regolare il comportamento dello strumento di misura tramite due parametri: “Soglia” e “Ritardo minimo”. Potete accedere a questi due parametri tramite la Tab “Valori” quando siete nella modalità Cronometro Acustico. In particolare:

- 1) Soglia: questo parametro regola l’intensità sonora minima al di sotto della quale il cronometro acustico non reagisce. L’unità di misura del valore che l’utente può scegliere è arbitraria (a.u., ovvero arbitrary units). In pratica, corrisponde ad una frazione del range dinamico del microfono. Se ponete Soglia = 0, il Cronometro reagirà a qualsiasi rumore nella stanza, non solo al suono dei rimbalzi, e la vostra acquisizione risulterà quindi inutilizzabile. Al limite opposto, se dovete porla = 1, il Cronometro non reagirebbe mai. Dovete quindi trovare una soglia intermedia adatta alle vostre condizioni sperimentali, abbastanza alta da tagliare i rumori di fondo, ma abbastanza bassa per permettere di captare il rumore dei rimbalzi. Chiaramente, l’intensità del suono prodotto dai rimbalzi cambierà in base alla superficie e alla pallina, e dovrete quindi probabilmente adattare il valore di Soglia per ogni coppia studiata. Come suggerisce l’applicazione, potete utilizzare lo strumento Audioscopio per capire qual è l’ampiezza sonora tipica prodotta dai rimbalzi, in ciascuna configurazione. Inoltre, all’interno di uno stesso lancio l’intensità del suono prodotto diminuisce ad ogni rimbalzo. Regolate quindi la Soglia in modo da registrare un numero sufficiente di punti nel regime lineare, che vi permettano di interpolare una retta.

- 2) Ritardo minimo: questo parametro stabilisce un intervallo di tempo in cui il Cronometro, dopo aver registrato un rumore, rimane inerte ed ignora qualsiasi altro suono. In questo caso l'unità di misura sono i secondi. Come indicato dall'equazione 11, l'intervallo di tempo tra rimbalzi successivi diminuisce con n (numero del rimbalzo), essendo e_v minore di 1. Questo significa che impostando un Ritardo minimo elevato sarete in grado di registrare solo pochi rimbalzi, con n quindi abbastanza piccolo. Regolate questo parametro in modo da registrare un numero di punti sufficienti per la vostra analisi. Inoltre, nel momento in cui la distanza tra un rimbalzo e il successivo diventa minore del Ritardo minimo, il Cronometro acustico finirà per ignorare un rimbalzo ogni due, e vi fornirà quindi un intervallo di tempo più ampio dei precedenti rimbalzi. Nei grafici, vedrete chiaramente un "salto" rispetto all'andamento lineare (a meno che l'intensità del rumore prodotto da questi rimbalzi non sia già scesa sotto la Soglia impostata)