Esercitazione 5: Propagazione degli errori

1) ***Una biglia di massa m=(0.30±0.01) kg, ferma su un piano liscio e privo di attrito, ad un certo istante viene colpita da una forza F_x=(0.45±0.03) N. Determinare la distanza dalla posizione iniziale percorsa dalla biglia dopo un tempo t=(5.0±0.1) s e la corrispondente incertezza.***

Sotto l'azione della forza F_x la biglia accelera con accelerazione

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

Poichè la biglia è inizialmente ferma, in un tempo t la distanza percorsa è

$$x - x_0 = d = \frac{1}{2}a_x t^2 = \frac{F_x}{2m}t^2 = 18.75\,\text{m}$$

Per calcolare l'incertezza su d, notiamo che $d = 0.5F_x m^{-1}t^2$ è una funzione del tipo $f(x, y, z) = kx^\alpha y^\beta z^\gamma$, con k costante, x, y e z indipendenti ed esponenti α, β e γ reali. In questo caso,

$$\left(\frac{\sigma_f}{f}\right)^2 = \left(\alpha\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\beta\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(\gamma\frac{\sigma_z}{z}\right)^2$$

$$\rightarrow \sigma_f = |f|\sqrt{\left(\alpha\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\beta\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(\gamma\frac{\sigma_z}{z}\right)^2}$$

Otteniamo quindi per la distanza percorsa che

$$\sigma_d = |d|\sqrt{\left(\frac{\sigma_{F_x}}{F_x}\right)^2 + \left(-\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_t}{t}\right)^2} = 18.75\,\text{m}\cdot\sqrt{\left(\frac{0.03}{0.45}\right)^2 + \left(-\frac{0.01}{0.3}\right)^2 + \left(2\frac{0.1}{5.0}\right)^2} = 1.59\,\text{m}$$

$$\rightarrow d = (19 \pm 2)\,\text{m}$$

2) ***Si consideri una corda di lunghezza L=(160±1) cm e massa lineare μ=(9.6±0.1) g/m, fissata agli estremi e tesa per l'applicazione di un peso di massa m=(400±5) g. Tutte le incertezze di misura sono di tipo casuale. Calcolare la frequenza prevista per la risonanza di ordine n=3 ed il suo errore.***

La tensione T dovuta alla presenza del peso si calcola come

$$T = m \cdot g = 0.4\,\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 = 3.92\,\text{N}$$

con incertezza $\sigma_T = g\sigma_m = 0.05\,\text{N}$. La frequenza della terza armonica è

$$f_3 = \frac{3}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{3}{2\cdot 1.6\,\text{m}}\sqrt{\frac{3.92\,\text{N}}{9.6\cdot 10^{-3}\,\text{kg/m}}} = 18.94\,\text{Hz}$$

con incertezza

$$\sigma_{f_3} = |f_3|\sqrt{\left(-\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\frac{\sigma_\mu}{\mu}\right)^2} = 0.196\,\text{Hz}$$

$$\rightarrow f_3 = (18.9 \pm 0.2)\,\mathrm{Hz}$$

3) ***Un corpo esplode in due frammenti di massa*** m_1***=(750±10) g e*** m_2 ***=(250±5) g. Per uno dei due si misura*** v_1***=(40±2) cm/s. Calcolare l'energia cinetica con cui si muove l'altro corpo e l'incertezza corrispondente. Si supponga che gli errori di misura siano tutti indipendenti e casuali.***

Dalla conservazione della quantità di moto,

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2}$$

L'energia cinetica del corpo 2 è quindi

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{(m_1 v_1)^2}{2m_2} = \frac{(0.75\,\mathrm{kg} \cdot 0.4\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 0.25\,\mathrm{kg}} = 0.18\,\mathrm{J}$$

L'incertezza sull'energia cinetica è

$$\sigma_{K_2} = |K_2| \sqrt{4\left(\frac{\sigma_{m_1}}{m_1}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_{v_1}}{v_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{m_2}}{m_2}\right)^2} = 0.02\,\mathrm{J}$$

$$\rightarrow K_2 = (0.18 \pm 0.02)\,\mathrm{J}$$

4) ***La velocitá limite é la massima velocitá che un corpo immerso in un fluido puó raggiungere quando é sottoposto ad una forza di attrito che si oppone al moto:*** $v_l = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C_d}}$***, dove*** m ***è la massa del corpo,*** $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ ***è l'accelerazione di gravitá,*** ρ ***è la densitá del fluido,*** A ***è l'area della sezione dell'oggetto ortogonale alla direzione del moto, e*** C_d ***è il coefficiente di resistenza aerodinamica. Si consideri un cubetto (***C_d***=1.05) di massa m=(2.00±0.01) g di lato l=(0.50±0.01) cm che cade nella glicerina (***$\rho = 1.26\,\mathrm{g/cm^3}$***). Calcolare la sua velocitá limite e l'incertezza su tale velocitá.***

La velocità limite è

$$v_l = \sqrt{\frac{2mg}{\rho l^2 C_d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}}{1.26 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0.5^2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2} \cdot 1.05}} = 1.089\,\mathrm{m/s}$$

L'incertezza sulla velocità limite si calcola propagando l'errore sul lato e sulla massa del cubo:

$$\sigma_{v_l} = |v_l| \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2} = 0.022\,\mathrm{m/s}$$

$$\rightarrow v_l = (1.09 \pm 0.02)\,\mathrm{m/s}$$

5) ***Per una sottile lente convergente la posizione del fuoco*** f***, quella dell'immagine*** q ***e quella della sorgente luminosa*** p ***sono legate dalla relazione***

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$$

Ricavare la distanza focale f***, con il suo errore, per una lente per la quale sono stati misurati p=(35.0±0.2) cm e q=(15.6±0.3) cm.***

La distanza focale è

$$f = \left(\frac{1}{15.6} + \frac{1}{35}\right)^{-1} \mathrm{cm} = 10.79\,\mathrm{cm}$$

Per calcolare l'incertezza su f, consideriamo che per una generica variabile x l'errore relativo del reciproco della variabile soddisfa

$$\frac{\sigma_{1/x}}{1/x} = \frac{\sigma_x}{x}$$

Da qui,

$$\sigma_{1/f} = \frac{\sigma_f}{f^2} \longrightarrow \sigma_f = f^2 \cdot \sigma_{1/f}$$

L'errore $\sigma_{1/f}$ si calcola come

$$\sigma_{1/f} = \sqrt{\sigma^2_{1/p} + \sigma^2_{1/q}}$$

con

$$\sigma_{1/p} = \frac{\sigma_p}{p^2} = 1.63 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^{-1}$$

e

$$\sigma_{1/q} = \frac{\sigma_q}{q^2} = 1.23 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{cm}^{-1}$$

$$\longrightarrow \sigma_{1/f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_p}{p^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_q}{q^2}\right)^2} = 1.24 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{cm}^{-1}$$

$$\longrightarrow \sigma_f = f^2 \cdot \sigma_{1/f} = 0.144\,\mathrm{cm}$$

$$\longrightarrow f = (10.79 \pm 0.14)\,\mathrm{cm}$$

6) ***Una massa di fluido di densitá*** ρ ***é contenuta in un recipiente cilindrico che ruota con velocitá angolare*** ω ***attorno al suo asse centrale verticale. La differenza di pressione rispetto al centro del cilindro, nella direzione radiale, é data da*** $\Delta p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$***. Calcolare la differenza di pressione prevista ad 1 cm dal centro del cilindro, sapendo che*** $\omega = (30 \pm 1)$ ***rad/s,*** $\rho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ ***e calcolare l'incertezza corrispondente. Come cambia l'incertezza nella stima della differenza di pressione se la distanza*** r ***é conosciuta con un'incertezza relativa del 5%?***

La differenza di pressione prevista a una distanza r=1 cm dal centro del cilindro è

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot (30\,\mathrm{rad/s})^2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 = 45\,\mathrm{Pa}$$

In presenza della sola incertezza su ω,

$$\sigma_{\Delta p} = |\Delta p| \cdot 2\frac{\sigma_\omega}{\omega} = 45\frac{2 \cdot 1}{30}\,\mathrm{Pa} = 3\,\mathrm{Pa}$$

$$\longrightarrow \Delta p = (45 \pm 3)\,\mathrm{Pa}$$

Assumendo che anche la distanza r sia affetta da errore, con incertezza relativa σ_r/r=0.05, l'incertezza sulla differenza di pressione diventa

$$\sigma_{\Delta p} = |\Delta p|\sqrt{4\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2} = 5.4\,\mathrm{Pa}$$

$$\rightarrow \Delta p = (45 \pm 5)\,\mathrm{Pa}$$

7) ***Misurando le dimensioni di una stanza si trovano i seguenti valori: altezza a=3 m (errore relativo percentuale=2%), larghezza b=4 m (errore relativo=0.01), lunghezza c=(5.0 ± 0.1) m. Determinare la superficie della stanza ed il suo volume, con le corrispondenti incertezze.***

La superficie A della stanza è

$$A = b \cdot c = 20\,\mathrm{m}^2$$

Gli errori assoluti su altezza e larghezza sono $\sigma_a = a \cdot 0.02 = 0.06\,\mathrm{m}$ e $\sigma_b = b \cdot 0.01 = 0.04\,\mathrm{m}$. Quindi l'incertezza sulla superficie è

$$\sigma_A = \sqrt{c^2\sigma_b^2 + b^2\sigma_c^2} = 0.45\,\mathrm{m}^2$$

$$\rightarrow A = (20.0 \pm 0.5)\,\mathrm{m}^2$$

Il volume della stanza è invece

$$V = a \cdot b \cdot c = 60\,\mathrm{m}^3$$

con incertezza

$$\sigma_V = \sqrt{(b \cdot c)^2\sigma_a^2 + (a \cdot c)^2\sigma_b^2 + (a \cdot b)^2\sigma_c^2}$$

o, più convenientemente,

$$\sigma_V = |V|\sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_c}{c}\right)^2} = 60\,\mathrm{m}^3\sqrt{(4+1+4)\cdot 10^{-4}} = 1.8\,\mathrm{m}^3$$

$$\rightarrow V = (60 \pm 2)\,\mathrm{m}^3$$

8) ***Viene acquistata una piccola botte di un whisky molto pregiato. La botte é di forma cilindrica, con diametro di base (60 ± 1) cm e altezza 80 cm (errore relativo=0.02). Trascurando lo spessore della botte, quante bottiglie da un litro sono necessarie per travasare tutto il whisky?***

Il volume della botte è

$$V = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \frac{\pi d^2 h}{4} = 0.226\,\mathrm{m}^3 = 226\,\mathrm{l}$$

con incertezza

$$\sigma_V = |V|\sqrt{4\left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2} = 0.009\,\mathrm{m}^3 = 9\,\mathrm{l}$$

Sono quindi necessarie (226 ± 9) bottiglie da un litro.

9) ***Un CD-ROM é in grado di immagazzinare una quantitá di dati pari a q=(700±10) MB. Con il vostro computer il tempo di duplicazione del disco é 3 minuti e 52 s, misurati con un orologio di sensibilitá 1 s. Qual é la velocitá di trasferimento dati del computer usato?***

La velocità di trasferimento dati è

$$v = \frac{700\,\mathrm{MB}}{(180+52)\,\mathrm{s}} = 3\,\mathrm{MB/s}$$

con incertezza

$$\sigma_v = |v|\sqrt{\left(\frac{\sigma_q}{q}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2}$$
$$\rightarrow \sigma_v = 3\sqrt{\left(\frac{10}{700}\right)^2 + \left(\frac{1}{232}\right)^2}\,\mathrm{MB/s} = 0.044\,\mathrm{MB/s}$$
$$v = (3.00 \pm 0.04)\,\mathrm{MB/s}$$

10) ***Per misurare la densità di un cilindretto di alluminio uno studente utilizza due metodi:***
1- Misura il diametro e l'altezza e pesa il cilindretto, ottenendo d***=(1.18±0.01) cm,*** h***=(1.02±0.01) cm e*** m=m_{aria}***=(3.105±0.002) g.***
2- Utilizza una bilancia idrostatica, pesa il cilindretto immerso in acqua distillata ottenendo m_{acqua}***=(1.962±0.002) g e ricava la densità come***

$$\rho_{Al} = \frac{\rho_{acqua} m_{aria}}{m_{aria} - m_{acqua}}$$

con $\rho_{acqua} = 0.997\,\mathrm{g/cm^3}$***. Determinare la densità del cilindretto ed il suo errore con i due metodi. I due risultati sono compatibili?***

Con il primo metodo, utilizzando la definizione di densità si ha

$$\rho_{Al,1} = \frac{m}{\pi(d/2)^2 h} = \frac{4m}{\pi d^2 h} = 2.78\,\mathrm{g/cm^3}$$

con incertezza

$$\sigma_{\rho_1} = |\rho_{Al,1}|\sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2} = 0.05\,\mathrm{g/cm^3}$$

Con il secondo metodo,

$$\rho_{Al,2} = \frac{0.997 \cdot 3.105}{3.105 - 1.962}\,\mathrm{g/cm^3} = 2.708\,\mathrm{g/cm^3}$$

L'incertezza è

$$\sigma_{\rho_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho_{Al,2}}{\partial m_{aria}}\right)^2 \sigma^2_{m_{aria}} + \left(\frac{\partial \rho_{Al,2}}{\partial m_{acqua}}\right)^2 \sigma^2_{m_{acqua}}}$$

con

$$\frac{\partial \rho_{Al,2}}{\partial m_{aria}} = \frac{\rho_{acqua}(m_{aria} - m_{acqua}) - \rho_{acqua} m_{aria}}{(m_{aria} - m_{acqua})^2} = \frac{-\rho_{acqua} m_{acqua}}{(m_{aria} - m_{acqua})^2}$$

e

$$\frac{\partial \rho_{Al,2}}{\partial m_{acqua}} = \frac{\rho_{acqua} m_{aria}}{(m_{aria} - m_{acqua})^2}$$
$$\rightarrow \sigma_{\rho_2} = 0.006\,\mathrm{g/cm^3}$$

La discrepanza tra i due valori è

$$\Delta\rho = |\rho_{Al,2} - \rho_{Al,1}| = 0.072\,\mathrm{g/cm^3}$$

e la corrispondente incertezza è

$$\sigma_{\Delta\rho} = \sqrt{\sigma^2_{\rho_1} + \sigma^2_{\rho_2}} = 0.06\,\mathrm{g/cm^3}$$

Da qui, $t = \Delta\rho/\sigma_{\Delta\rho} = 1.2$ e la probabilità che $\Delta\rho$ differisca da zero per più di $t\sigma_{\Delta\rho}$, dalla tabella dell'integrale normale degli errori, è del 23%. Le due misure risultano quindi compatibili.