Esercitazione 12: Argomenti vari

1) ***Uno studente effettua N=50 misure del periodo T di oscillazione di una molla che è sospesa a un estremo ed ha una massa m_s=200 g fissata all'altro estremo, ottenendo i seguenti risultati:***

T [s]	*0.08*	*0.09*	*0.10*	*0.11*
frequenza	*10*	*21*	*12*	*7*

a) Calcolare il valore medio del periodo, la deviazione standard e l'errore standard del valore medio.
b) Calcolare il valore della costante elastica della molla e il suo errore.
c) Sapendo che nel caso di una molla di massa m_m=60 g la relazione tra periodo e costante elastica va riscritta come $T = 2\pi\sqrt{(m_s + m_m/3)/k'}$, calcolare l'errore sistematico che si è compiuto avendo trascurato m_m nel calcolo precedente della costante elastica.
d) Un secondo studente misura per la stessa molla, ma in modo completamente indipendente, una costante elastica pari a $k'' = (920 \pm 12)\,N/m$. Calcolare la migliore stima della costante elastica che gli studenti possono fornire insieme.

a) Il valore medio $\overline{T}$ del periodo, la deviazione standard σ_T delle misure e l'errore standard del valor medio $\sigma_{\overline{T}}$ sono dati da

$$\overline{T} = \frac{\sum_{k=1}^{4} n_k T_k}{N} = 9.32 \cdot 10^{-2}\,s$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(T_i - \overline{T})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{4} n_k (T_k - \overline{T})^2}{N-1}} = 9.57 \cdot 10^{-3}\,s$$

$$\sigma_{\overline{T}} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{N}} = \frac{9.57 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{50}}\,s = 1.35 \cdot 10^{-3}\,s$$

$$\rightarrow T = \overline{T} \pm \sigma_{\overline{T}} = (9.32 \pm 0.14) \cdot 10^{-2}\,s$$

b) Il periodo di oscillazione e la costante elastica k sono legati dalla relazione $\overline{T} = 2\pi\sqrt{m_s/k}$, da cui

$$k = (2\pi)^2 \frac{m_s}{\overline{T}^2} \rightarrow$$

$$k = (2\pi)^2 \frac{0.2\,kg}{(9.32 \cdot 10^{-2}\,s)^2} = 909\,N/m$$

Propagando l'errore del periodo, l'errore su k è

$$\sigma_k = |k|\sqrt{\left(2\frac{\sigma_{\overline{T}}}{\overline{T}}\right)^2} = 909\,N/m \cdot 2 \cdot \frac{1.35 \cdot 10^{-3}\,s}{9.32 \cdot 10^{-2}\,s} = 26\,N/m$$

c) Se si considera la massa della molla, la costante elastica diventa

$$k' = (2\pi)^2 \frac{m_s + m_m/3}{\overline{T}^2}$$

L'errore compiuto è quindi

$$\epsilon = \frac{k' - k}{k} = \frac{m_s + m_m/3 - m_s}{m_s} = \frac{m_m}{3m_s} = \frac{60\,\text{g}}{3 \cdot 200\,\text{g}} = 0.1$$

Si è compiuto un errore sistematico del 10%.
d) La migliore stima della costante elastica che i due studenti possono fornire è la media pesata delle due misure:

$$k_{best} = \frac{\frac{k}{\sigma_k^2} + \frac{k''}{\sigma_{k''}^2}}{\frac{1}{\sigma_k^2} + \frac{1}{\sigma_{k''}^2}} = \frac{\frac{909}{26^2} + \frac{920}{12^2}}{\frac{1}{26^2} + \frac{1}{12^2}}\,\text{N/m} = 918.07\,\text{N/m}$$

L'errore corrispondente è

$$\sigma_{k_{best}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{26^2} + \frac{1}{12^2}}}\,\text{N/m} = 10.9\,\text{N/m}$$

$$\rightarrow k_{best} = (918 \pm 11)\,\text{N/m}$$

2) ***In un albergo si utilizzano un totale di 500 lampadine uguali. Ogni mese di bruciano in media 3 lampadine. Calcolare la probabilità che in un mese si brucino più di 5 lampadine. Ogni quanti giorni bisogna controllare tutte le lampadine se si vuole avere una probabilità maggiore del 50% di trovarne almeno una da sostituire?***

Utilizziamo una distribuzione di Poisson $P_\mu(\nu)$ con valor medio uguale al numero medio di lampadine bruciate in un mese: μ=3. La probabilità P che in un mese il numero di lampadine bruciate sia maggiore di 5 è

$$P = 1 - P_3(0) - P_3(1) - P_3(2) - P_3(3) - P_3(4) - P_3(5) =$$

$$= 1 - e^{-3}\left(1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!}\right) = 0.084$$

Per trovare dopo quanti giorni si devono controllare le lampadine per avere una probabilità maggiore del 50% di trovarne almeno una bruciata, utilizziamo una Poissoniana con valor medio μ incognito e imponiamo

$$1 - P_\mu(0) = 0.5$$

Otteniamo per μ

$$1 - e^{-\mu}\mu^0/0! = 0.5 \rightarrow \mu = 0.69$$

Se in 30 giorni si bruciano in media 3 lampadine, la probabilità di trovarne almeno una bruciata è del 50% dopo

$$\Delta t = 30 \cdot 0.69/3 = 6.9\,\text{giorni}$$

3) ***Il teorema di Torricelli prevede che la velocità di efflusio di un liquido da un piccolo foro praticato in un recipiente sia data da $v = \sqrt{2gh}$, dove h è il dislivello tra il foro e la superficie libera del liquido. Per verificare sperimentalmente il teorema si misurano le velocità di fuoriuscita del liquido in corrispondenza di diverse altezze. Si raccolgono i dati in tabella come segue:***

v [m/s]	***3.10***	***3.80***	***4.50***	***4.90***	***5.35***
h [m]	***0.50***	***0.75***	***1.00***	***1.25***	***1.50***

L'incertezza nelle misure di velocità è di 5 cm/s, quella sulle misure di dislivello risulta trascurabile.
a) Rappresentare graficamente la relazione tra velocità e dislivello.
b) Interpolare i dati usando il metodo dei minimi quadrati.
c) Valutare l'adattamento della funzione ai dati usando il test del chi-quadro.
d) Confrontare il valore dell'accelerazione di gravità ottenuto dal fit con quello previsto g=9.81 m/s ^{2}***.***

a, b) Per poter interpolare con una retta è necessario linearizzare la relazione tra velocità e dislivello. Poniamo $y = v$ e $x = \sqrt{h}$, in modo da interpolare con una retta del tipo $y = A + Bx$ con pendenza $B = \sqrt{2g}$.

$x = \sqrt{h}\,[m^{1/2}]$	y=v [m/s]	x^2 [m]	xy [$m^{3/2}/s$]
0.707	3.10	0.50	2.1917
0.866	3.80	0.75	3.2909
1.000	4.50	1.00	4.5000
1.118	4.90	1.25	5.4782
1.225	5.35	1.50	6.5538

$\sum_{i=1}^{N=5} x_i = 4.916 \quad \sum_{i=1}^{N=5} y_i = 21.65 \quad \sum_{i=1}^{N=5} x_i^2 = 5.00 \quad \sum_{i=1}^{N=5} x_i y_i = 22.0146$

$$\Delta = N\sum_{i=1}^{N=5} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N=5} x_i\right)^2 = (5 \cdot 5.00 - 4.916^2)\,m = 0.8329\,m$$

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{N=5} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{N=5} y_i - \sum_{i=1}^{N=5} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N=5} x_i y_i}{\Delta} = \frac{(5.00 \cdot 21.65 - 4.916 \cdot 22.0146)\,m^2/s}{0.8329\,m} = 0.0315\,m/s$$

$$B = \frac{N\sum_{i=1}^{N=5} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N=5} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N=5} y_i}{\Delta} = \frac{(5 \cdot 22.0146 - 4.916 \cdot 21.65)\,m^{3/2}/s}{0.8239\,m} = 4.3722\,m^{1/2}/s$$

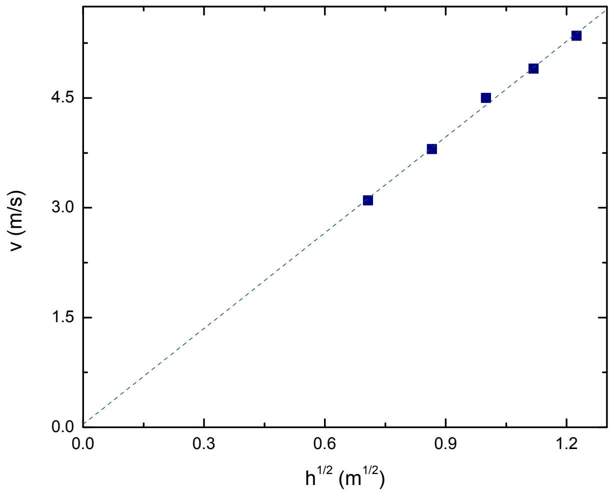
Le incertezze sui parametri A e B sono

$$\sigma_A = \sigma_y\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N=5} x_i^2}{\Delta}} = 0.05\,m/s\sqrt{\frac{5.00\,m}{0.8329\,m}} = 0.123\,m/s$$

$$\sigma_B = \sigma_y\sqrt{\frac{N}{\Delta}} = 0.05\,m/s\sqrt{\frac{5}{0.8329\,m}} = 0.123\,m^{1/2}/s$$

Quindi la migliore retta che descrive i dati è

$$y = (0.03 \pm 0.12)\,m/s + (4.37 \pm 0.12)\,\frac{m^{1/2}}{s}x$$



c) Per valutare la bontà dell'adattamento della retta ottenuta mediante il metodo dei minimi quadrati alle misure calcoliamo il χ_0^2:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{N=5} \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_y^2}$$

x $[m^{1/2}]$	y $[m/s]$	$y - A - Bx$ $[m/s]$	$(y - A - Bx)^2/\sigma_y^2$
0.707	3.10	-0.0226	0.2051
0.866	3.80	-0.0178	0.1271
1.000	4.50	0.0963	3.7095
1.118	4.90	-0.0196	0.1540
1.225	5.35	-0.0374	0.5609

$$\rightarrow \chi_0^2 = 4.76$$

Il corrispondente chi-quadro ridotto $\widetilde{\chi}_0^2$ è

$$\widetilde{\chi}_0^2 = \frac{\chi_0^2}{d} = \frac{4.76}{3} = 1.59$$

con un numero di vincoli ν=2 e un numero di gradi di libertà $d = N - \nu = 3$. La probabilità di ottenere un valore di χ^2 ridotto maggiore di quello ottenuto è $p_3(\widetilde{\chi}^2 \geq \widetilde{\chi}_0^2)$=0.19, che conferma un buon accordo tra i dati e la retta ricavata prima.

d) Dalla pendenza $B = \sqrt{2g}$ ricaviamo l'accelerazione di gravità:

$$g = \frac{B^2}{2} = 9.56\, m/s^2$$

La corrispondente incertezza è

$$\sigma_g = B\sigma_B = 0.54\, m/s^2$$

$$\rightarrow g = (9.6 \pm 0.5)\, m/s^2$$

Calcoliamo quindi

$$t = \frac{|g_{misurato} - g_{atteso}|}{\sigma_g} = 0.46$$

La probabilità di ottenere un valore dell'accelerazione di gravità fuori dall'intervallo $[g_{atteso} - 0.46\sigma_g, g_{atteso} + 0.46\sigma_g]$ è 1-0.3545=0.65, pertanto il valore ottenuto per l'accelerazione g a partire dall'interpolazione dei dati risulta compatibile con quanto atteso.