PROPAGAZIONE DELLE ONDE SU UNA CORDA VIBRANTE

Scopo dell'esperienza è lo studio della propagazione di onde elastiche trasversali su una corda, in particolare in regime di stazionarietà, sotto l'azione di una forzante periodica. Si verificherà sperimentalmente che l'instaurarsi delle onde stazionarie avviene solo per particolari valori della frequenza della forzante applicata alla corda e si studierà la dipendenza della frequenza dell'onda stazionaria dalle caratteristiche fisiche delle corde disponibili (lunghezza e massa lineare) e dalla tensione applicata.

INTRODUZIONE

Una perturbazione impulsiva o periodica di un mezzo si propaga in esso con velocità finita dando origine a un'onda elastica. Le vibrazioni di una corda tesa hanno luogo in direzione perpendicolare alla direzione di propagazione e danno luogo a un'onda di tipo trasversale.
Un'onda che si propaga su una corda tesa può essere descritta da una funzione monodimensionale $y(x,t)$ dello spazio x e del tempo t. Un'onda periodica di tipo armonico, progressiva, si può scrivere come:

$$y(x,t) = A \;\, sen\, (2\pi\, x/\lambda \; - \; 2\pi\, t/T\,)$$

con:
A ampiezza massima dell'onda
λ lunghezza d'onda (distanza tra due punti in cui la funzione assume lo stesso valore)
T periodo dell'onda (intervallo di tempo tra due istanti in cui la funzione assume lo stesso valore).

Si definiscono inoltre le grandezze:
$\nu = 1/\mathrm{T}$ frequenza dell'onda
$v = \lambda / \mathrm{T} = \lambda\nu$ velocità di fase dell'onda
$k = 2\pi/\lambda$ numero d'onda
$\omega = 2\pi\nu = kv$ pulsazione

Consideriamo un'onda che viaggia su una corda tesa di lunghezza L, fissata a entrambi gli estremi. Quando l'onda giunge a un estremo della corda essa si riflette e si propaga in direzione opposta. Se intanto sopraggiunge un'altra onda esse si

incontrano e lo spostamento totale del mezzo è dato dalla somma degli spostamenti dovuti alle singole onde (principio di sovrapposizione).
La somma di due onde periodiche sinusoidali di uguale ampiezza e uguale frequenza che viaggiano in direzioni opposte può dar luogo ad una vibrazione coerente di tutta la corda, se esiste tra la frequenza e la lunghezza della corda un rapporto ben definito. Si ha infatti:

$$y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\ sen\,(k\,x - \omega\,t) + A\ sen\,(k\,x + \omega\,t) = 2A\ sen\,(k\,x)\ cos(\omega\,t)$$

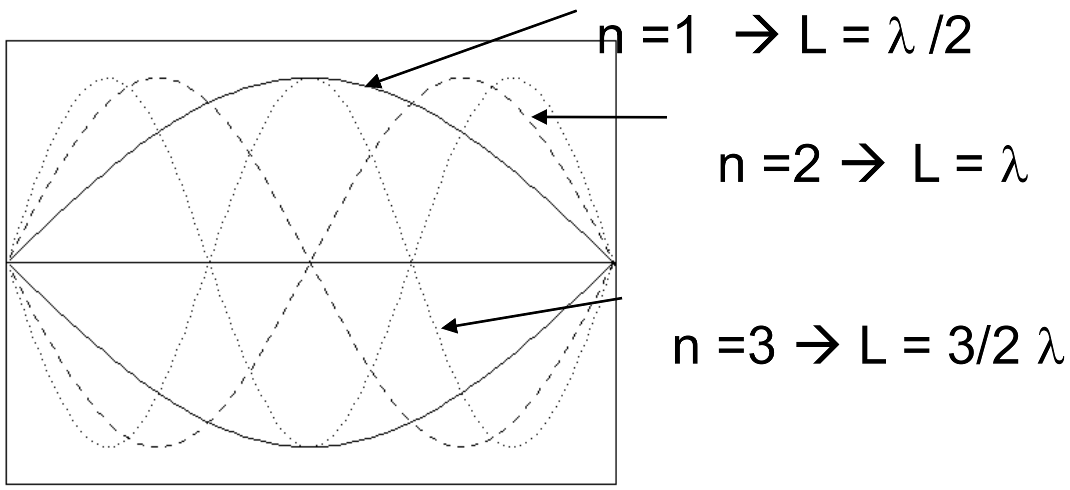
Quelle che si instaurano sono onde stazionarie, infatti la dipendenza dalla posizione è separata dalla dipendenza dal tempo. Affinché agli estremi della corda lo spostamento sia sempre nullo (la corda è vincolata) deve essere: $y(0, t) = y(L, t) = 0$ per ogni t, cioè:

$$y(0, t) = 2A\ sen\,(0)\ cos(\omega\,t) = 0$$
$$y(L, t) = 2A\ sen\,(kL)\ cos(\omega\,t) = 0$$

La seconda equazione implica: $k\,L = 2\pi\,L / \lambda = n\pi$, con n numero intero.
Perciò le onde sinusoidali stazionarie che si instaurano nella corda sono descritte da:

$$y(x,t) = A\ sen\,(2\pi\,x/\lambda_n)\ cos(2\pi\,\nu_n\,t) \qquad (1)$$
$$L = n\,\lambda_n / 2 \qquad n=1,2,3...$$
$$\nu_n = n\ v/2\,L \qquad (2)$$

Si vede ad esempio che per $n = 1$ l'onda stazionaria si instaura quando la lunghezza della corda è pari a mezza lunghezza d'onda ($L = \lambda/2$) e in generale è necessario che sulla corda ci stia un numero intero di semi-lunghezze d'onda.



Dalla (1) si vede che sulla corda ci sono punti, detti **nodi**, in cui ad ogni tempo la vibrazione risulta nulla, che corrispondono a:

$$sen\,(2\pi\,x/\lambda_n) = 0 \ \text{ cioè } \ x = n\,\lambda_n/2$$

e punti in cui la vibrazione raggiunge il valore massimo, detti **ventri** (o **antinodi**), dati da:

$$sen\,(2\pi x/\lambda_n) = 1 \quad \text{cioè} \quad x = (2n-1)\lambda_n/4$$

La (2) fornisce la frequenza *delle onde stazionarie.* Per $n = 1$ si ha la *frequenza fondamentale* di vibrazione della corda: $\nu_n = v\ /2\,L$.

La frequenza delle onde stazionarie dipende quindi dalla velocità di propagazione dell'onda. La **velocità di propagazione** di un'onda elastica in un mezzo materiale dipende dalle proprietà dinamiche e inerziali del mezzo. Per una corda tesa la velocità vale:

$$v = \sqrt{\tau / \mu}$$

dove τ e μ sono rispettivamente la *tensione* e la *massa per unità di lunghezza* della corda stessa. Pertanto la frequenza fondamentale può essere scritta come:

$$\nu_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \frac{1}{2rL}\sqrt{\frac{\tau}{\pi\rho}}$$

Nell'ultimo termine si è sostituito $\mu = \pi r^2\rho$, con r il raggio della corda e ρ densità volumetrica. Si vede che la frequenza fondamentale dipende dalla radice quadrata della tensione della corda e dall'inverso della radice quadrata della densità.
Le armoniche di ordine superiore hanno frequenze pari a:

$$\nu_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \tag{3}$$

OSCILLAZIONI FORZATE

La sorgente delle oscillazioni della corda è una forza periodica esterna, detta forzante. Se essa ha un andamento periodico del tipo $F_0 \cos \Omega t$ è possibile dimostrare che, dopo un regime transitorio, la corda si mette ad oscillare con una legge temporale del tipo:

$$B \cos \Omega t$$

con una ampiezza B che, trascurando gli effetti di smorzamento, risulta essere proporzionale a:

$$B \propto \frac{F_0}{\omega_n^{\ 2} - \Omega^2}$$

L'ampiezza di oscillazione della corda presenta quindi dei massimi (risonanze) quando la frequenza della forzante è pari alla frequenza propria della corda vibrante: alla sua fondamentale o alle armoniche successive. Pertanto le frequenze delle oscillazioni stazionarie che si possono osservare sulla corda tesa coincidono con le frequenze imposte dalla forzante. Solo in tali condizioni, è possibile osservare in maniera evidente l'instaurarsi delle onde stazionarie.

DESCRIZIONE DELL'APPARATO

L'apparato sperimentale consiste in diverse corde (con differenti masse lineari), dal sistema di sospensione delle stesse che permette di variarne la tensione (con l'uso di contrappesi) e da un oscillatore elettromeccanico pilotato da un generatore di funzioni. Si utilizzano onde sinusoidali, la cui frequenza può essere variata con continuità. Per la misura della lunghezza della corda si usa un metro a nastro, con la bilancia analitica si determinano le masse delle corde e quelle masse dei contrappesi che eserciteranno la tensione sulla corda.

DESCRIZIONE DELL'ESPERIENZA

Scelta una corda e misurata la sua massa lineare, si pone in tensione facendo uso delle masse appese alla carrucola posta a un estremo. Si misura la lunghezza L della corda tesa, cioè la distanza tra i due punti di sospensione, che devono essere punti fissi. Uno di essi *coincide* con il punto di applicazione della forzante, l'altro con il punto di tangenza sulla carrucola. Si procede al collegamento del vibratore alla corda, avendo l'accortezza di tenerlo il più vicino possibile all'estremità della stessa.

1) Variando lentamente la frequenza del generatore si cerca l'instaurarsi della risonanza della prima armonica (prestare attenzione al fatto che il punto di contatto con il vibratore sia un nodo). Si verifica poi che ai multipli interi della frequenza fondamentale si instaurino le armoniche superiori.
Si costruisca un grafico che rappresenti la dipendenza delle frequenze delle onde stazionarie in funzione del numero di armonica data dalla (3): $\nu_n = \mathrm{f}\,(n)$.
Interpolando i dati col metodo dei minimi quadrati si ricavino i parametri della funzione e si confrontino con i valori previsti a partire dalle misure di lunghezza, tensione e massa della corda. Si ricavi la velocità di propagazione delle onde sulla corda e si confronti con il valore previsto.

2) Per la stessa corda, e mantenendo fissata la sua lunghezza, si vari la tensione e si cerchino nuovamente le condizioni di risonanza; si ripeta l'esperienza per diversi valori di τ.
Si costruisca un grafico per la frequenza della seconda armonica (più facile da osservare rispetto alla prima) in funzione di τ e si verifichi l'esistenza della dipendenza prevista tra frequenza e tensione.

3) Per un dato valore di tensione fissato si ripetono le misure al variare della lunghezza della corda. Si costruisca un grafico per la frequenza di una data armonica in funzione di L e si verifichi la legge di proporzionalità inversa.

4) Ripetendo le misure per corde diverse si può verificare la dipendenza della frequenza dal valore della massa lineare μ.