Esercitazione 3: Densitá di probabilitá

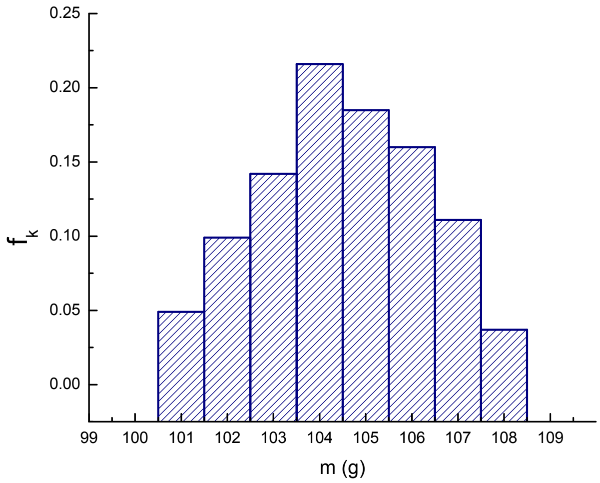
1) ***Uno studente pesa N=162 cubetti di legno, tagliati a mano, e raccoglie i risultati nella seguente tabella:***

massa [g]	*101*	*102*	*103*	*104*	*105*	*106*	*107*	*108*
frequenza	*8*	*16*	*23*	*35*	*30*	*26*	*18*	*6*

a) Rappresentare le misure con un istogramma.
b) Calcolare il valore medio della massa dei cubetti, la deviazione standard e l'errore standard del valore medio.
c) Scrivere la funzione densità di probabilità più adatta a descrivere questo insieme di misure e confrontarla graficamente con l'istogramma delle misure.

a) Rappresentiamo le misure con un istogramma a intervalli di larghezza Δ=1 g. Calcoliamo per ogni misura m_k ($k = 1...8$) la densità di frequenza relativa $f_k = F_k/\Delta = n_k/(N\Delta)$:

m_k [g]	101	102	103	104	105	106	107	108
n_k	8	16	23	35	30	26	18	6
f_k	0.049	0.099	0.142	0.216	0.185	0.160	0.111	0.037



b) Il valore medio $\overline{m}$ della massa dei cubetti, la deviazione standard σ_m e l'errore standard del valore medio $\sigma_{\overline{m}}$ sono dati da

$$\overline{m} = \frac{\sum_{k=1}^{8} n_k m_k}{N} = 104.50 \text{ g}$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{8} n_k (m_k - \overline{m})^2}{N-1}} = 1.78 \text{ g}$$

$$\sigma_{\overline{m}} = \frac{\sigma_m}{\sqrt{N}} = 0.14 \text{ g}$$

$$\rightarrow \overline{m} = (104.50 \pm 0.14) \text{ g}$$

c) Assumendo che le misure siano soggette ad errori casuali e che gli errori sistematici siano trascurabili, la funzione densità di probabilità più adatta a descrivere i dati è la distribuzione di Gauss centrata in $\overline{m}$ con deviazione standard σ_m:

$$G_{\overline{m},\sigma_m}(m) = \frac{1}{\sigma_m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-\overline{m})^2}{2\sigma_m^2}}$$

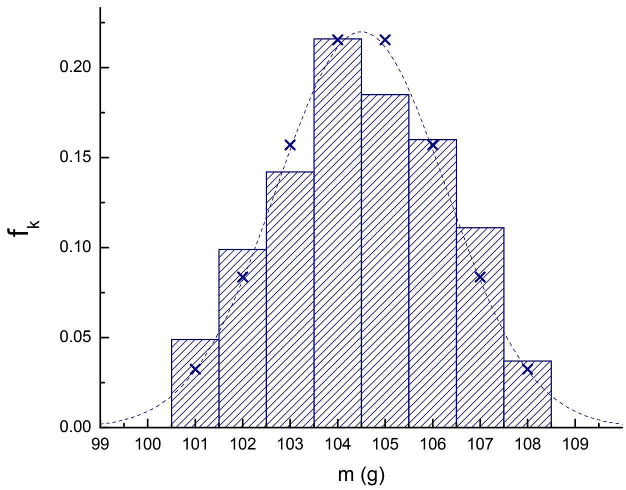
Per confrontare graficamente la distribuzione con l'istogramma delle misure, calcoliamo il valore della distribuzione di Gauss in corrispondenza dei valori di massa pesati dallo studente:

$$G_{\overline{m},\sigma_m}(m = 101) = \frac{1}{1.78\sqrt{2\pi}} e^{-(101-104.5)^2/(2\cdot 1.78^2)} = 0.0324 = G_{\overline{m},\sigma_m}(m = 108)$$

$$G_{\overline{m},\sigma_m}(m = 102) = 0.0836 = G_{\overline{m},\sigma_m}(m = 107)$$

$$G_{\overline{m},\sigma_m}(m = 103) = 0.1571 = G_{\overline{m},\sigma_m}(m = 106)$$

$$G_{\overline{m},\sigma_m}(m = 104) = 0.2155 = G_{\overline{m},\sigma_m}(m = 105)$$



2) ***Uno studente effettua N=140 misure del periodo di oscillazione di un pendolo semplice ottenendo i seguenti risultati:***

T [s]	***0.17***	***0.18***	***0.19***	***0.20***	***0.21***	***0.22***	***0.23***
frequenza	***5***	***10***	***18***	***32***	***40***	***24***	***11***

a) Calcolare il valor medio del periodo, la deviazione standard e l'errore standard del valore medio.
b) Scrivere la funzione densità di probabilità più adatta a descrivere questo insieme di misure e confrontarla graficamente con l'istogramma delle misure.

a) Il valore medio $\overline{T}$ del periodo di oscillazione, la deviazione standard σ_T e l'errore standard del valore medio $\sigma_{\overline{T}}$ sono dati da

$$\overline{T} = \frac{\sum_{k=1}^{7} n_k T_k}{N} = 0.205 \text{ s}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{7} n_k (T_k - \overline{T})^2}{N-1}} = 0.015\,\mathrm{s}$$

$$\sigma_{\overline{T}} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{N}} = 0.0013\,\mathrm{s}$$

$$\rightarrow \overline{T} = (0.2050 \pm 0.0013)\,\mathrm{s}$$

b) Assumendo che le misure siano soggette ad errori casuali e che gli errori sistematici siano trascurabili, la funzione densità di probabilità più adatta a descrivere i dati è la distribuzione di Gauss centrata in $\overline{T}$ con deviazione standard σ_T:

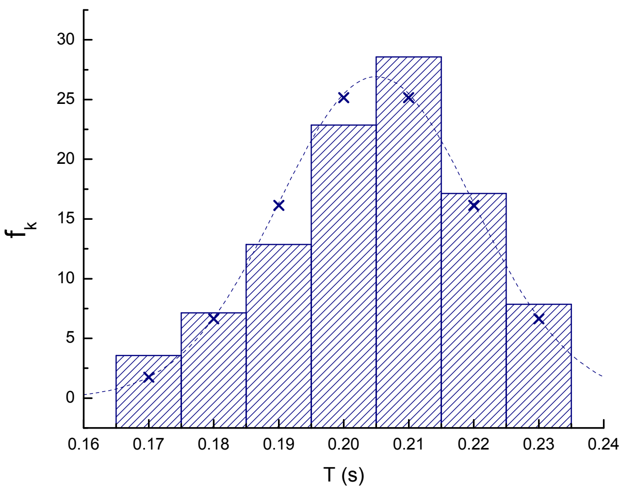
$$G_{\overline{T},\sigma_T}(T) = \frac{1}{\sigma_T\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(T-\overline{T})^2}{2\sigma_T^2}}$$

Per rappresentare le misure con un istogramma a intervalli e confrontarlo con la distribuzione di Gauss calcoliamo per ogni misura T_k (k=1...7) la densità di frequenza relativa $f_k = F_k/\Delta = n_k/(N\Delta)$, con Δ=0.01 s:

T_k [s]	0.17	0.18	0.19	0.20	0.21	0.22	0.23
n_k	5	10	18	32	40	24	11
f_k	3.571	7.143	12.857	22.857	28.571	17.143	7.857

In corrispondenza dei valori di periodo misurati dallo studente la distribuzione di Gauss assume i valori

$$G_{\overline{T},\sigma_T}(T = 0.17) = 1.7481$$
$$G_{\overline{T},\sigma_T}(T = 0.18) = 6.6318 = G_{\overline{T},\sigma_T}(T = 0.23)$$
$$G_{\overline{T},\sigma_T}(T = 0.19) = 16.1314 = G_{\overline{T},\sigma_T}(T = 0.22)$$
$$G_{\overline{T},\sigma_T}(T = 0.20) = 25.1589 = G_{\overline{T},\sigma_T}(T = 0.21)$$



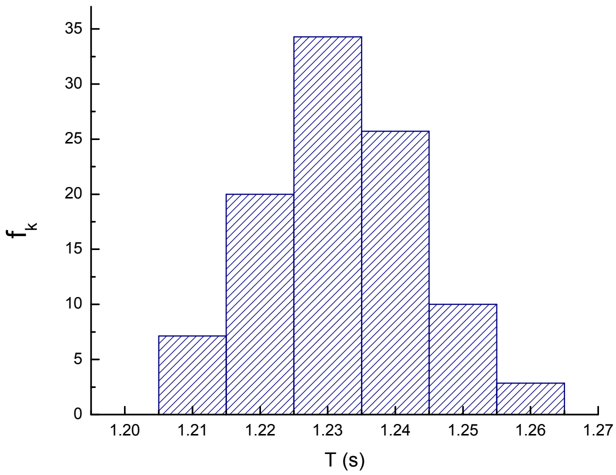
3) ***Uno studente misura per N=70 volte i tempi di caduta da una determinata altezza di una sferetta di acciaio e raccoglie i risultati nella seguente tabella:***

T [s]	***1.21***	***1.22***	***1.23***	***1.24***	***1.25***	***1.26***
frequenza	***5***	***14***	***24***	***18***	***7***	***2***

a) Rappresentare le misure con un istogramma.
b) Calcolare il valore medio del tempo di caduta, la deviazione standard e l'errore standard del valore medio.

a) Per rappresentare le misure con un istogramma a intervalli calcoliamo per ogni misura T_k (k=1...6) la densità di frequenza relativa $f_k = F_k/\Delta = n_k/(N\Delta)$, con Δ=0.01 s:

T_k[s]	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25	1.26
n_k	5	14	24	18	7	2
f_k	7.14	20.00	34.29	25.71	10.00	2.86



b) Il valore medio $\overline{T}$ del tempo di caduta, la deviazione standard σ_T e l'errore standard del valore medio $\sigma_{\overline{T}}$ sono dati da

$$\overline{T} = \frac{\sum_{k=1}^{6} n_k T_k}{N} = 1.232\,\mathrm{s}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{6} n_k (T_k - \overline{T})^2}{N-1}} = 0.0118\,\mathrm{s}$$

$$\sigma_{\overline{T}} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{N}} = 0.0014\,\mathrm{s}$$

$$\rightarrow \overline{T} = (1.2320 \pm 0.0014)\,\mathrm{s}$$

4) ***Una società di trasporti acquista dei treni dotati di 20 porte ciascuno. La probabilità che una porta si guasti in un anno di utilizzo è pari al 4%. Dopo un anno si controllano 100 treni e si osserva che 35 treni hanno tutte le porte funzionanti, 42 treni hanno una porta guasta, 18 treni hanno due porte guaste e i restanti hanno 3 porte guaste.***
Disegnare un istogramma che rappresenti la distribuzione del numero di treni osservati e di quelli previsti.

Consideriamo la distribuzione Binomiale con n=20, p=0.04 e q=0.96. La probabilità che dopo un anno un treno non abbia alcuna porta guasta è

$$B_{20,0.04}(0) = \binom{20}{0} 0.04^0 \cdot 0.96^{20} = \frac{20!}{0!20!} 0.04^0 \cdot 0.96^{20} = 0.442$$

Su 100 treni, ci aspettiamo che il numero di treni con tutte le porte funzionanti sia $E_0 = 0.442 \cdot 100 = 44.2$.
La probabilità che un treno dopo un anno abbia una sola porta guasta è

$$B_{20,0.04}(1) = \binom{20}{1} 0.04^1 \cdot 0.96^{19} = \frac{20!}{1!19!} 0.04^1 \cdot 0.96^{19} = 0.368$$

Su 100, il numero di treni attesi con una porta guasta è $E_1 = 0.368 \cdot 100 = 36.8$.
La probabilità che dopo un anno un treno abbia due porte guaste è

$$B_{20,0.04}(2) = \binom{20}{2} 0.04^2 \cdot 0.96^{18} = \frac{20!}{2!18!} 0.04^2 \cdot 0.96^{18} = 0.146$$

Su 100, il numero di treni attesi con due porte guaste è $E_2 = 0.146 \cdot 100 = 14.6$.
Infine, la probabilità che un treno dopo un anno abbia tre porte guaste è

$$B_{20,0.04}(3) = \binom{20}{3} 0.04^3 \cdot 0.96^{17} = \frac{20!}{3!17!} 0.04^3 \cdot 0.96^{17} = 0.036$$

Su 100, il numero di treni attesi con tre porte guaste è $E_3 = 0.036 \cdot 100 = 3.6$.
Usando i valori attesi E_k $(k = 0...3)$ appena calcolati e i valori osservati O_k $(k = 0...3)$ forniti nel testo si ottengono i due istogrammi: