Misura del coefficiente di restituzione

Ali Matteo,
Broggi Diana, Cantarini Giulia

Introduzione

L'obiettivo dell'esperimento era quello di calcolare il coefficiente di restituzione relativo a più coppie pallina-superficie, ovvero il parametro che misura l'elasticità del rimbalzo. Esso si definisce come il rapporto tra le velocità prima e dopo l'urto della pallina sulla superficie. Per la misura del coefficiente di restituzione sono stati adoperati due metodi.
Il primo metodo consiste nel misurare l'altezza massima raggiunta dopo il primo rimbalzo dalla pallina. Questa è stata lasciata cadere con velocità iniziale nulla da una altezza h_0 progressivamente maggiore.
Il secondo prevede la misura dell'intervallo di tempo che intercorre tra un rimbalzo ed il sucessivo.

Pallina da ping pong su parquet

metodo 1

Elenchiamo i dati rilevati per l'altezza massima raggiunta in centimentri.
Altezza di partenza : $h_0 = 5$cm

h_1	4.40	4.50	4.40	4.60	4.60	4.30	4.50	4.60	4.50	4.70

Altezza di partenza : $h_0 = 7.5$cm

h_1	6.60	6.70	6.70	6.90	6.70	6.90	6.90	6.80	6.90	6.80

Altezza di partenza : $h_0 = 8$ cm

h_1	7.40	7.50	7.40	7.50	7.50	7.30	7.40	7.50	7.40	7.30

Altezza di partenza : $h_0 = 10$cm

h_1	8.80	9.00	8.90	8.70	8.90	8.90	8.70	8.90	8.70	9.00

Altezza di partenza : $h_0 = 18$ cm

h_1	15.7	15.8	15.8	15.6	16.0	15.4	15.9	15.5	16.0	16.1

Altezza di partenza : $h_0 = 30$ cm

h_1	24.8	24.8	25.0	24.9	24.9	25.0	24.9	25.1	25.1	25.1

Abbiamo calcolato la media di ogni altezza massima h1 e l'errore su tale stima, di sotto riportiamo una tabella riassuntiva:

h_0 (cm)	media h_1 (cm)	σ_m (cm)
5	4.51	0.04
7.5	6.79	0.03
8	7.42	0.02
10	8.85	0.04
18	15.78	0.07
30	24.96	0.04

La rappresentazione delle altezze raggiunte dopo il primo rimbalzo in funzione dell'altezza di partenza è riportata nella Figura1:

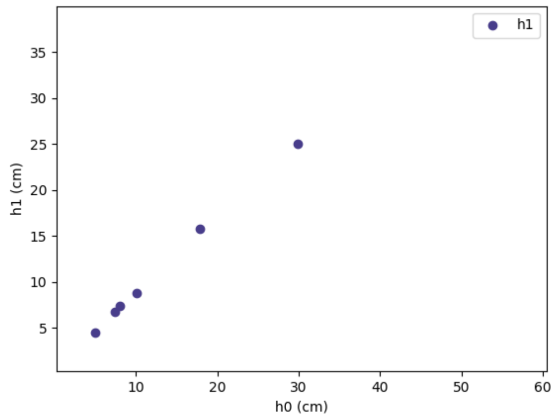


Figura1: $h1_{(h0)}$ - pallina da ping pong su parquet

Procediamo con l'interpolazione di tutti i punti al fine di ricavare il grafico della retta che meglio rappresenta questa distribuzione.

Utilizzando il metodo dei minimi quadrati pesati abbiamo calcolato il coefficiente angolare e l'intercetta della retta:

$$con \quad \Delta = N(\sum \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2}) - (\sum \frac{x_i}{\sigma_{y_i}^2})^2$$

$$B = \frac{N(\sum \frac{x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2}) - \sum \frac{x_i}{\sigma_{y_i}^2} \sum \frac{y_i}{\sigma_{y_i}^2}}{\Delta} \qquad \sigma_B = \sqrt{\frac{\sum \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}}{\Delta}} \qquad \Rightarrow \qquad B = 0.814 \pm 0.002$$

$$A = \frac{\sum \frac{(x_i)^2}{\sigma^2_{y_i}} \sum \frac{(y_i)^2}{\sigma^2_{y_i}} - \sum \frac{x_i}{\sigma^2_{y_i}} \sum \frac{x_i y_i}{\sigma^2_{y_i}}}{\Delta} \qquad \sigma_A = \sqrt{\frac{\sum \frac{x^2}{\sigma^2_{y_i}}}{\Delta}} \qquad \Rightarrow \qquad A = (0.75 \pm 0.03) cm$$

Riportiamo di sotto il grafico della retta interpolata per i dati relativi alla prima coppia pallina-superficie.

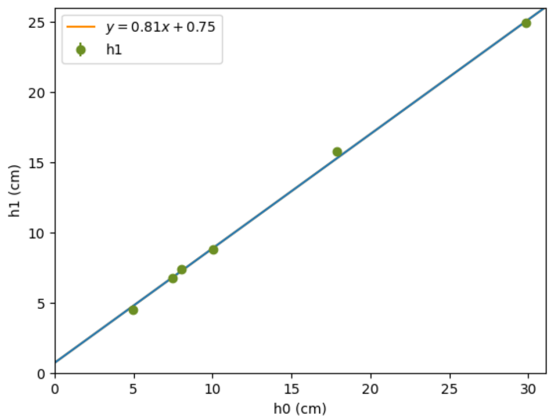


Figura2: interpolazione dei dati - pallina da ping pong su parquet

Poichè sappiamo che il coefficiente di restituzione ev è definito come $\frac{v_1}{v_0}$, se trascuriamo l'attrito dell'aria il rapporto tra le due velocità può essere scritto in funzione solo delle altezze h_1 e h_0:

$$\frac{h_1}{h_0} = (\frac{v_1}{v_0})^2$$

da tale espressione ricaviamo una prima stima del coefficiente di restituzione con i dati in nostro possesso, attraverso l'ugualianza:

$$ev = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} \rightarrow ev = \sqrt{B}$$

dove B è il coefficiente angolare della retta $h_1(h_0)$

Svolgendo il calcolo e ricavando σ_{ev} con la propagazione degli errori come $\sigma_{ev} = \frac{\sigma_B}{2\sqrt{B}}$, abbiamo ottenuto $ev = 0.902 \pm 0.001$.
Abbiamo eseguito il test del chi quadro per verificare che la distribuzione delle misure potesse effettivamente essere descritta da una retta:

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{y_i - A - BX_i}{\sigma_i} \right)^2 = 14$$

considerando 4 gradi di libertà $\tilde{\chi}^2 = 3.5$; riscontriamo una probabilità pari a 0.7% che le sei misure possano essere descritte da una distribuzione lineare.

Poichè tale percentuale è al di sotto del 5%, abbiamo deciso di scartare l'ipotesi.

Tale disaccordo con la distribuzione attesa ci porta a supporre di aver commesso degli errori sistematici. Ad esempio, non è stato considerato l'effetto dell'attrito dell'aria, che diventa significativo all'aumentare di h_0. Il contributo relativo all'attrito dell'aria una volta superata una determinata altezza limite si può stimare attraverso il rapporto:

$$\frac{F_{attrito \quad aereo}}{F_{peso}} = \frac{\rho_{aria}\pi \cdot 0.4d^2}{4m} h_{lim}$$

considerando $h_{lim} = 10cm$, la massa della pallina come 0.0027Kg ed il diametro d =0.055 metri, tale rapporto equivale a: 0.043.
Dunque l'effetto dell'accelerazione di gravità sulla pallina, a causa dell'attrito, è ridotto del 4.3%. Abbiamo corretto l'errore riducendo la regione di interpolazione al di sotto dei 10 cm:

$$B = 0.944 \pm 0.015$$

$$A = (-0.18 \pm 0.11)cm$$

dai risultati della interpolazione corretta possiamo stimare nuovamente il coeffieciente di restituzione come $ev = 0.971 \pm 0.008$

$$\chi^2 corretto = 0.697$$

nel caso con soli 3 punti possiamo considerare l'ipotesi vera, con una sicurezza, per 1 solo grado di libertà, del 37 %.

metodo 2

Attraverso un sistema di rilevamento sonoro, l'applicazione Pyphox ci ha permesso di acquisire gli intervalli di tempo che intercorrevano tra i rimbalzi successivi della pallina. L'applicazione permetteva di creare un file excel su cui ognuno di noi ha salvato i dati ricavati dai 5 lanci effetuati per ogni altezza.

Intervalli misurati da 8cm in secondi:

numero rimbalzo	lancio1	lancio2	lancio3	lancio4	lancio5
1	0.255	0.253	0.251	0.250	0.249
2	0.242	0.239	0.238	0.237	0.236
3	0.226	0.233	0.226	0.225	0.223
4	0.217	0.213	0.213	0.214	0.212
5	0.207	0.202	0.203	0.203	0.201
6	0.196	0.191	0.193	0.193	0.192
7	0.183	0.182	0.183	0.183	0.182
8	0.174	0.173	0.175	0.174	0.174

.

Intervalli misurati da 10cm in secondi:

numero rimbalzo	lancio1	lancio2	lancio3	lancio4	lancio5
1	0.277	0.273	0.275	0.277	0.274
2	0.262	0.258	0.263	0.259	0.261
3	0.247	0.245	0.245	0.247	0.244
4	0.235	0.235	0.231	0.234	0.231
5	0.223	0.223	0.218	0.222	0.219
6	0.205	0.211	0.205	0.211	0.207
7	0.201	0.200	0.194	0.200	0.197
8	0.190	0.190	0.185	0.190	0.187

Intervalli misurati da 15cm in secondi:

numero rimbalzo	lancio1	lancio2	lancio3	lancio4	lancio5
1	0.339	0.341	0.339	0.340	0.337
2	0.318	0.319	0.319	0.319	0.317
3	0.298	0.299	0.299	0.299	0.297
4	0.281	0.282	0.282	0.281	0.280
5	0.265	0.266	0.266	0.266	0.268
6	0.250	0.253	0.251	0.251	0.251
7	0.233	0.237	0.236	0.236	0.237
8	0.219	0.225	0.224	0.224	0.224

Intervalli misurati da 18cm in secondi: .

numero rimbalzo	lancio1	lancio2	lancio3	lancio4	lancio5
1	0.363	0.368	0.367	0.368	0.362
2	0.339	0.342	0.341	0.344	0.338
3	0.318	0.320	0.320	0.323	0.318
4	0.298	0.301	0.300	0.302	0.298
5	0.282	0.283	0.282	0.285	0.281
6	0.261	0.265	0.269	0.269	0.264
7	0.247	0.251	0.251	0.255	0.251
8	0.233	0.237	0.232	0.238	0.238

Intervalli misurati da 30cm in secondi:

numero rimbalzo	lancio1	lancio2	lancio3	lancio4	lancio5
1	0.462	0.459	0.460	0.463	0.460
2	0.425	0.424	0.425	0.422	0.424
3	0.394	0.390	0.395	0.391	0.392
4	0.365	0.364	0.368	0.364	0.365
5	0.344	0.340	0.339	0.340	0.340
6	0.323	0.320	0.323	0.318	0.320
7	0.299	0.299	0.304	0.298	0.298
8	0.286	0.282	0.281	0.280	0.281

Sfruttando la relazione $log(t_n) = log(\frac{2v_0}{g}) + nlog(e_v)$, che evidenzia la dipendenza lineare del $log(t_n)$ dal numero di rimbalzi n, abbiamo rappresentato i dati ricavati con Pyphox nel grafico in Figura 3. Il grafico riassume i dati relativi a diverse altezze di partenza per la stessa pallina.

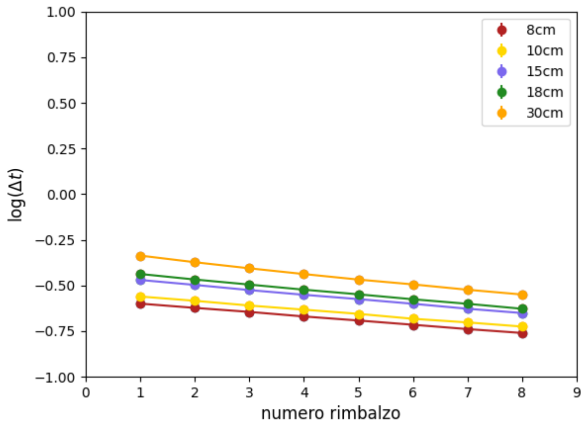
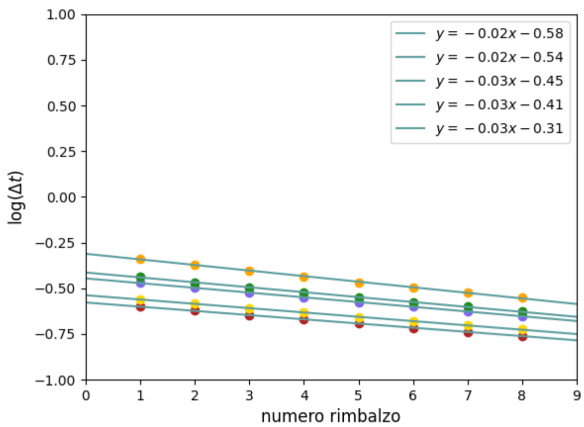


Figura3: log$\Delta t_{(n)}$ - pallina da ping pong su parquet

.

Abbiamo ricavato il coefficiente angolare di ciascuna delle 5 rette tramite il metodo dei minimi quadrati.



Così facendo si ottengono 5 stime del coefficiente di restituzione:

$$e_v = 10^B \pm 10^B ln(10)\sigma_B$$

che possono essere combinate in una media pesata come $\bar{e_v} = \frac{\sum \frac{e_{vi}}{\sigma_i}}{\sum \frac{1}{\sigma_i}} \pm \sqrt{\frac{1}{\sum \frac{1}{\sigma_i}}}$.

$$\begin{array}{rl} \text{8cm:} & ev = 0.9754 \pm 0.0002 \\ \text{10cm:} & ev = 0.9716 \pm 0.0003 \\ \text{15cm:} & ev = 0.9620 \pm 0.0002 \\ \text{18cm:} & ev = 0.9589 \pm 0.0004 \\ \text{30cm:} & ev = 0.9426 \pm 0.0003 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \bar{e_v} = 0.9625 \pm 0.0001$$

Notiamo che questa stima è molto più precisa di quella ottenuta con il metodo 1. Confrontiamo le stime ottenute con i due metodi attraverso il test della compatibilità:

$$t = \frac{|ev_{metodo1} - ev_{metodo2}|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = 1,06$$

Secondo i valori tabulati, la probabilità che la differenza sia dovuta solo ad errori casuali è del 27%, in quanto maggiore di 5% la consideriamo accettabile.

pallina da tennis su gres porcellanato

metodo 1

Di seguito riportiamo le misure delle altezze raggiunte dopo il primo rimbalzo in centimetri.

Altezza di partenza : $h_0 = 65$cm

h_1	33.0	33.5	32.0	32.8	32.1	33.1	32.7	33.6	33.1	32.1

Altezza di partenza : $h_0 = 55$cm

h_1	28.5	29.9	28.2	28.6	29.0	30.0	29.5	28.6	28.5	30.0

Altezza di partenza : $h_0 = 45$cm

h_1	25.0	25.2	24.6	25.1	24.8	25.0	25.4	24.8	24.7	25.5

Altezza di partenza : $h_0 = 35$cm

h_1	19.5	20.5	19.4	19.8	19.0	20.4	19.4	19.8	20.3	19.5

Altezza di partenza : $h_0 = 25$cm

h_1	12.2	12.8	13.0	12.7	12.5	13.1	13.2	13.2	13.0	13.0

Abbiamo calcolato la media di ogni altezza massima h1 e l'errore su tale stima, di sotto riportiamo una tabella riassuntiva:

h_0 (cm)	media h_1 (cm)	σ_m (cm)
25	12.87	0.102
35	19.76	0.157
45	25.01	0.094
55	29.05	0.222
65	32.8	0.182

.

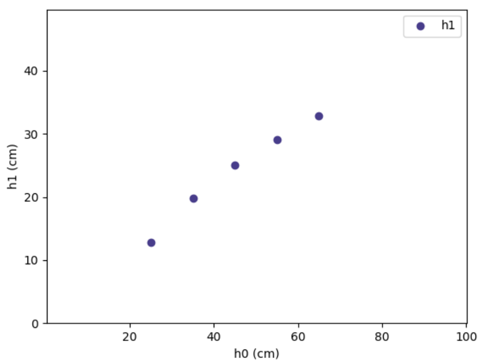


Figura4: $h1_{(h0)}$ - pallina da tennis su gres porcellanato

Utilizzando il metodo dei minimi quadrati pesati abbiamo calcolato il coefficiente angolare e l'intercetta della retta interpolata:

$$con \quad \Delta = N(\sum \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2}) - (\sum \frac{x_i}{\sigma_{y_i}^2})^2$$

$$B = \frac{N(\sum \frac{x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2}) - \sum \frac{x_i}{\sigma_{y_i}^2} \sum \frac{y_i}{\sigma_{y_i}^2}}{\Delta} \qquad \sigma_B = \sqrt{\frac{\sum \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}}{\Delta}} \qquad \Rightarrow \qquad B = 0.524 \pm 0.005$$

$$A = \frac{\sum \frac{(x_i)^2}{\sigma_{y_i}^2} \sum \frac{(y_i)^2}{\sigma_{y_i}^2} - \sum \frac{x_i}{\sigma_{y_i}^2} \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2}}{\Delta} \qquad \sigma_A = \sqrt{\frac{\sum \frac{x^2}{\sigma_{y_i}^2}}{\Delta}} \qquad \Rightarrow \qquad A = (0.559 \pm 0.2) cm$$

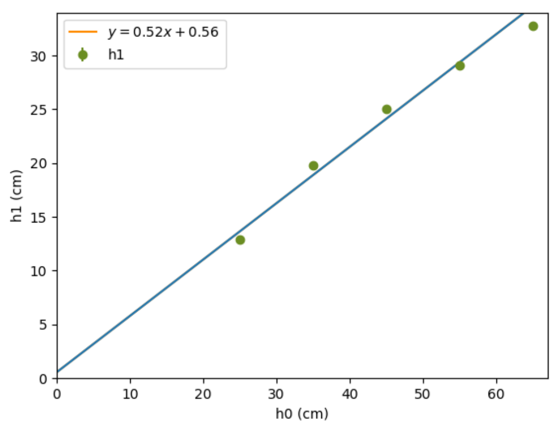


Figura5: interpolazione dei dati - pallina da tennis su gres porcellanato

Ricaviamo il coefficiente di restituzione da:

$$ev = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} \rightarrow ev = \sqrt{B}$$

dove B è il coefficiente angolare della retta $h_1(h_0)$

Eseguendo il calcolo e ricavando σ_{ev} attraverso la propagazione degli errori come $\sigma_{ev} = \frac{\sigma_B}{2\sqrt{B}}$ abbiamo ottenuto $ev = 0.724 \pm 0.003$.
Tramite il calcolo del chi quadro abbiamo testato l'ipotesi che la distribuzione fosse effettivamente lineare

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{y_i - A - BX_i}{\sigma_i} \right)^2 = 27.8$$

considerando 3 gradi di libertà $\tilde{\chi}^2 = 9.27$ la probabilità che l'ipotesi sia corretta è inferiore al 5%.
Poichè non possiamo considerare valida l'ipotesi che le misure effettuate si distribuiscano in maniera lineare, abbiamo calcolato anche per questa pallina il contributo dell'attrito aereo; considerando $h_{lim} = 50cm$, la massa della pallina come 0.056Kg ed il diametro d = 0.202 metri risulta:

$$\frac{F_{attrito \quad aereo}}{F_{peso}} = \frac{\rho_{aria}\pi \cdot 0.4d^2}{4m} h_{lim} = 0.14$$

poichè al di sopra dei 50cm la pallina da tennis viene trattenuta da una forza pari al 14 % del suo peso, abbiamo ridotto la regione di interpolazione al di sotto dei 50 cm, escludendo i primi due punti (con h_0 65cm e 55cm).
I parametri della retta interpolata corretta sono

$$B = 0.606 \pm 0.007$$

$$A = (-2.13 \pm 0.26)cm$$

e ci portano a stimare il coefficiente di restituzione corretto come: $ev = 0.778 \pm 0.004$. Poichè $\chi^2 corretto = 2.28$, nel caso con soli 3 punti possiamo considerare l'ipotesi vera con una sicurezza del 14 %.
.

metodo 2

gli intervalli misurati da 65cm in secondi:

numero rimbalzo	lancio1	lancio2	lancio3	lancio4	lancio5
1	0.547	0.510	0.535	0.535	0.533
2	0.412	0.383	0.402	0.398	0.404
3	0.314	0.306	0.315	0.303	0.306
4	0.245	0.225	0.231	0.242	0.234

gli intervalli misurati da 55cm in secondi:

numero rimbalzo	lancio1	lancio2	lancio3	lancio4	lancio5
1	0.496	0.505	0.504	0.500	0.499
2	0.384	0.386	0.375	0.375	0.382
3	0.290	0.293	0.284	0.293	0.286
4	0.230	0.233	0.226	0.235	0.228

gli intervalli misurati da 45cm in secondi:

numero rimbalzo	lancio1	lancio2	lancio3	lancio4	lancio5
1	0.453	0.459	0.456	0.458	0.458
2	0.354	0.343	0.351	0.345	0.348
3	0.263	0.256	0.264	0.276	0.270
4	0.199	0.206	0.212	0.190	0.210

gli intervalli misurati da 35cm in secondi:

numero rimbalzo	lancio1	lancio2	lancio3	lancio4	lancio5
1	0.411	0.407	0.408	0.410	0.407
2	0.305	0.309	0.308	0.311	0.311
3	0.242	0.240	0.235	0.236	0.240
4	0.178	0.183	0.177	0.177	0.186

gli intervalli misurati da 25cm in secondi: .

numero rimbalzo	lancio1	lancio2	lancio3	lancio4	lancio5
1	0.350	0.349	0.352	0.347	0.355
2	0.267	0.268	0.271	0.268	0.272
3	0.203	0.215	0.209	0.203	0.206
4	0.153	0.144	0.146	0.150	0.160

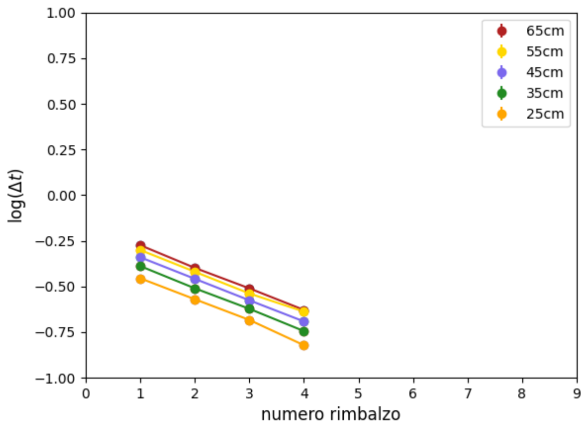
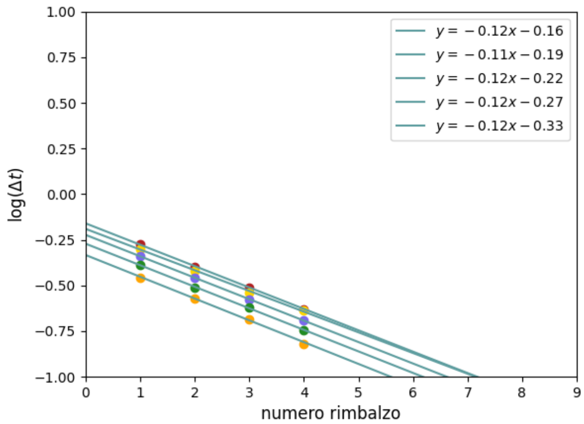


Figura6: log$\Delta t_{(n)}$ - pallina da tennis su gres porcellanato

Abbiamo ricavato il coefficiente angolare di ciascuna delle 5 rette tramite il metodo dei minimi quadrati.



Abbiamo ottenuto le 5 stime del coefficiente di restituzione con la formula già utilizzata:

$$e_v = 10^B \pm 10^B ln(10)\sigma_B$$

e calcolato la media pesata dei coefficienti anche per la pallina da tennis

$$\begin{array}{ll} \text{25cm:} & ev = 0.854 \pm 0.002 \\ \text{35cm:} & ev = 0.832 \pm 0.001 \\ \text{45cm:} & ev = 0.81 \pm 0.002 \\ \text{55cm:} & ev = 0.81 \pm 0.001 \\ \text{65cm:} & ev = 0.805 \pm 0.004 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \bar{e_v} = 0.8267 \pm 0.0007$$

Notiamo che questa stima è molto più precisa di quella ottenuta con il metodo 1. Confrontiamo le due misure per assicurarci che siano in accordo tra di loro:

$$t = \frac{|ev_{metodo1} - ev_{metodo2}|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = 12$$

La probabilità che la differenza sia dovuta solo ad errori casuali è inferiore al 5%. Non possiamo accettare tale discrepanza, per cui supponiamo di aver commesso errori sistematici che non siamo in grado di stimare.

pallina da golf su marmo

metodo 1

Riportiamo in centimetri le altezze massime raggiunte.

Altezza di partenza : $h_0 = 80\text{cm}$

h_1	63.7	64.6	63.2	64.1	63.8	63.5	63.7	64.2	64.3	63.2

Altezza di partenza : $h_0 = 90\text{cm}$

h_1	72.2	72.0	71.3	72.2	72.5	72.4	72.1	71.5	71.4	72.2

Altezza di partenza : $h_0 = 100\text{cm}$

h_1	78.5	79.2	79.4	80.2	79.0	79.2	78.7	79.1	79.5	77.4

Altezza di partenza : $h_0 = 110\text{cm}$

h_1	87.7	86.7	86.1	86.5	87.0	87.9	85.8	86.5	86.6	86.9

Abbiamo calcolato la media di ogni altezza massima h1 e l'errore su tale stima, di sotto riportiamo una tabella riassuntiva:

h_0 (cm)	media h_1 (cm)	σ_m (cm)
80	63.83	0.148
90	71.98	0.135
100	79.02	0.232
110	86.77	0.205

.

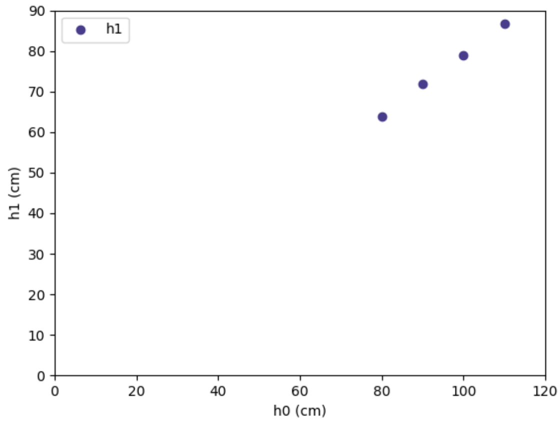


Figura7 : $h1_{(h0)}$ - pallina da golf su marmo

Utilizzando il metodo dei minimi quadrati pesati abbiamo calcolato il coefficiente angolare e l'intercetta della retta:

$$B = 0.761 \pm 0.008$$

$$A = (3.161 \pm 0.735)cm$$

le formule utilizzate sono state indicate precedentemente

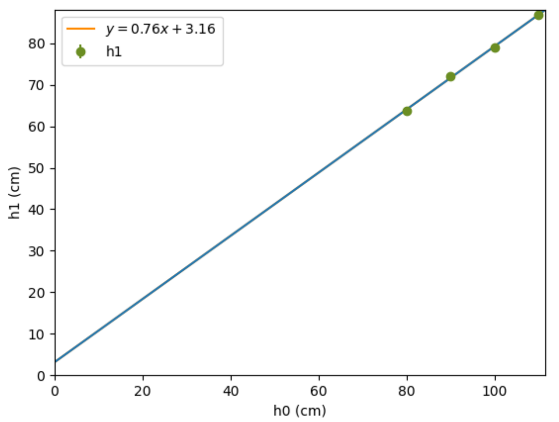


Figura8: interpolazione dei dati - pallina da golf su marmo

.

Ricaviamo il coefficiente di restituzione da:

$$ev = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} \rightarrow ev = \sqrt{B}$$

Eseguendo il calcolo e ricavando σ_{ev} attraverso la propagazione degli errori come $\sigma_{ev} = \frac{\sigma_B}{2\sqrt{B}}$ abbiamo ottenuto $ev = 0.872 \pm 0.005$.

Il test del chi quadro riporta il seguente risultato:

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{y_i - A - BX_i}{\sigma_i} \right)^2 = 0.931$$

considerando 2 gradi di libertà possiamo considerare l'ipotesi vera, con una sicurezza del 37 %. Concludiamo che su questa pallina l'attrito dell'aria non ha avuto effetti considerevoli nella caduta. Difatti considerando $h_{lim} = 110cm$

$$\frac{F_{attrito \quad aereo}}{F_{peso}} = 0.018$$

con una massa di 0.0415Kg ed un diametro di 0.042 metri, abbiamo perso solo l'1,8% dell'accelerazione data dalla gravità.

metodo 2

gli intervalli misurati da 80cm in secondi:

numero rimbalzo	lancio1	lancio2	lancio3	lancio4	lancio5
1	0.649	0.723	0.724	0.722	0.723
2	0.584	0.642	0.649	0.647	0.649
3	0.523	0.577	0.588	0.584	0.576
4	0.523	0.518	0.532	0.525	0.513
5	0.464	0.469	0.479	0.471	0.459
6	0.407	0.422	0.436	0.421	0.411
7	0.364	0.384	0.391	0.376	0.366
8	0.328	0.349	0.350	0.337	0.326

gli intervalli misurati da 90cm in secondi:

numero rimbalzo	lancio1	lancio2	lancio3	lancio4	lancio5
1	0.675	0.762	0.759	0.764	0.763
2	0.604	0.682	0.680	0.683	0.683
3	0.533	0.612	0.606	0.609	0.614
4	0.478	0.551	0.544	0.545	0.558
5	0.432	0.494	0.489	0.479	0.505
6	0.386	0.439	0.437	0.426	0.458
7	0.349	0.391	0.388	0.378	0.416
8	0.316	0.345	0.349	0.338	0.378

.

gli intervalli misurati da 100cm in secondi:

numero rimbalzo	lancio1	lancio2	lancio3	lancio4	lancio5
1	0.794	0.811	0.804	0.791	0.804
2	0.716	0.725	0.718	0.710	0.716
3	0.637	0.643	0.644	0.638	0.645
4	0.562	0.580	0.580	0.574	0.581
5	0.504	0.518	0.501	0.518	0.525
6	0.452	0.460	0.450	0.468	0.473
7	0.403	0.421	0.401	0.425	0.429
8	0.367	0.359	0.356	0.386	0.391

gli intervalli misurati da 110cm in secondi:

numero rimbalzo	lancio1	lancio2	lancio3	lancio4	lancio5
1	0.845	0.838	0.838	0.832	0.845
2	0.760	0.751	0.746	0.742	0.753
3	0.682	0.673	0.666	0.665	0.675
4	0.608	0.607	0.594	0.591	0.609
5	0.543	0.547	0.528	0.527	0.549
6	0.488	0.492	0.465	0.472	0.493
7	0.421	0.438	0.417	0.423	0.441
8	0.377	0.388	0.372	0.365	0.396

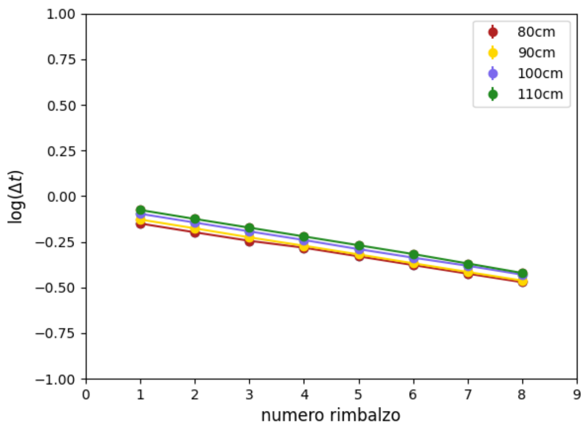
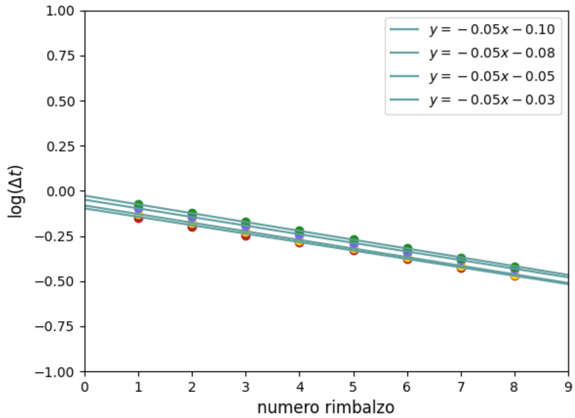


Figura9: $\log\Delta t_{(n)}$ - pallina da golf su marmo

.

Abbiamo ricavato il coefficiente angolare di ciascuna delle 5 rette tramite il metodo dei minimi quadrati.



Le 5 stime del coefficiente di restituzione possono essere combinate in una media pesata.

$$\begin{array}{rl} \text{80cm:} & ev = 0.894 \pm 0.002 \\ \text{90cm:} & ev = 0.882 \pm 0.004 \\ \text{100cm:} & ev = 0.865 \pm 0.001 \\ \text{110cm:} & ev = 0.855 \pm 0.001 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{e_v} = 0.8646 \pm 0.0008$$

Questa stima è molto più precisa di quella ottenuta con il metodo 1; il confronto con la prima misura risulta:

$$t = \frac{|ev_{metodo1} - ev_{metodo2}|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = 1.46$$

la probabilità che la differenza sia dovuta solo ad errori casuali è del 13,4%, consideriamo l'ipotesi valida.

La scrittura di un apposito programma Python ha permesso lo svolgimento dell'analisi dati e la generazione dei grafici esposti