Esercitazione 1: Probabilità

1) ***In un'urna ci sono palline gialle, rosse e verdi. Le gialle sono 45 e il numero delle rosse è il doppio del numero delle verdi. La probabilità che esca una pallina rossa o verde è 2/5. Quante sono le palline verdi?***

R=estrazione di una pallina rossa;
G=estrazione di una pallina gialla;
V=estrazione di una pallina verde.

Ad ogni estrazione gli eventi R, G e V sono mutuamente esclusivi, quindi

$$p(V+R) = p(V) + p(R) - p(R \cdot V) = p(V) + p(R)$$

Nel nostro caso $p(V+R) = p(V) + p(R) = 2/5$. Sappiamo inoltre che $p(V) + p(R) + p(G) = 1$. Detto N_{tot} il numero totale di palline nell'urna,

$$2/5 + p(G) = 2/5 + N_{gialle}/N_{tot} = 2/5 + 45/N_{tot} = 1 \to$$

$$N_{tot} = 5 \cdot 45/3 = 75$$

Sapendo che $N_{rosse} = 2N_{verdi}$, $N_{tot} = 45 + 2N_{verdi} + N_{verdi} \to$

$$N_{verdi} = (N_{tot} - 45)/3 = (75 - 45)/3 = 10$$

2) ***Un cassetto contiene 18 calze blu, 6 calze nere e 4 calze grigie. Calcolare la probabilità che, estraendone una a caso, la calza sia blu o grigia.***

B=estrazione di una calza blu;
G=estrazione di una calza grigia;
N=estrazione di una calza nera;
N_{tot}=numero totale di calze nel cassetto $= N_{blu} + N_{nere} + N_{grigie} = 18 + 6 + 4 = 28$.

Ad ogni estrazione gli eventi B, G e N sono mutuamente esclusivi, quindi $p(B \cdot G) = 0$ e

$$p(B+G) = p(B) + p(G) = \frac{N_{blu}}{N_{tot}} + \frac{N_{grigie}}{N_{tot}} = \frac{18}{28} + \frac{4}{28} = \frac{11}{14}$$

3) ***In un sacchetto ci sono 16 gettoni: 7 quadrati (3 rossi e 4 verdi) e 9 tondi (4 rossi e 5 verdi). Qual è la probabilità di estrarre a caso un gettone rosso oppure tondo?***

R=estrazione di un gettone rosso;
T=estrazione di un gettone tondo.

Gli eventi R e T non sono mutuamente esclusivi, quindi

$$p(R+T) = p(R) + p(T) - p(R \cdot T) = \frac{4+3}{16} + \frac{9}{16} - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}$$

4) ***In una sacca sportiva ci sono 10 magliette numerate da 1 a 10. Calcolare la probabilità che, estraendo una maglia a caso, questa abbia un numero dispari o maggiore di 5.***

E=estrazione di un numero dispari;
F=estrazione di un numero maggiore di 5.

Dal rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili,

$$p(E) = 5/10 = 1/2$$

$$p(F) = 5/10 = 1/2$$

$$p(E \cdot F) = 2/10 = 1/5$$

$$\rightarrow p(E + F) = p(E) + p(F) - p(E \cdot F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

5) ***Ci sono 30 gettoni rossi, 20 gettoni neri e 15 gettoni bianchi. Viene estratto un primo gettone, il gettone viene reimmesso nel sacchetto e viene estratto un secondo gettone. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:*** E_1***=estrazione di due gettoni rossi,*** E_2***=estrazione prima di un gettone nero e poi di un gettone bianco,*** E_3***=estrazione di un gettone nero e un gettone bianco in ordine qualsiasi.***

R=estrazione di un gettone rosso;
N=estrazione di un gettone nero;
B=estrazione di un gettone bianco;
$N_{tot} = N_{rossi} + N_{neri} + N_{bianchi} = 30 + 20 + 15 = 65.$

Poichè il primo gettone viene reimmesso nel sacchetto, la prima e la seconda estrazione sono eventi statisticamente indipendenti. Pertanto la probabilità $p(R_2|R_1)$ di estrarre un gettone rosso alla seconda estrazione avendo estratto un gettone rosso alla prima estrazione soddisfa $p(R_2|R_1) = p(R_2) = p(R)$.

$$\rightarrow p(E_1) = p(R_1)p(R_2|R_1) = p(R_1)p(R_2) = p(R)^2 = \frac{N_{rossi}}{N_{tot}} \cdot \frac{N_{rossi}}{N_{tot}} = \left(\frac{30}{65}\right)^2 = \frac{36}{169}$$

Analogamente, la probabilità di estrarre un gettone bianco avendone estratto e reimmesso uno nero è $p(B_2|N_1) = p(B)$.

$$\rightarrow p(E_2) = p(N_1)p(B_2|N_1) = p(N)p(B) = \frac{N_{neri}}{N_{tot}} \cdot \frac{N_{bianchi}}{N_{tot}} = \frac{20}{65} \cdot \frac{15}{65} = \frac{12}{169}$$

Se chiamiamo E_4 l'evento "estrazione di un gettone bianco e poi di un gettone nero",

$$p(E_3) = p(E_2 + E_4) = p(E_2) + p(E_4) = p(N)p(B) + p(B)p(N) = 2 \cdot \frac{20}{65} \cdot \frac{15}{65} = \frac{24}{169}$$

6) ***Un sacchetto contiene 30 gettoni rossi, 20 gettoni neri e 15 gettoni bianchi. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:*** E_1***=estrazione contemporanea di due gettoni rossi,***

E_2=***estrazione prima di un gettone nero e poi di un gettone bianco senza reimmissione del primo,*** E_3=***estrazione contemporanea di un gettone nero e un gettone bianco.***

R=estrazione di un gettone rosso;
N=estrazione di un gettone nero;
B=estrazione di un gettone bianco;
$N_{tot} = N_{rossi} + N_{neri} + N_{bianchi} = 30 + 20 + 15 = 65$.

In quanto contemporanee, le due estrazioni dell'evento E_1 non sono eventi statisticamente indipendenti. Il primo gettone rosso viene estratto con probabilità $P(R) = N_{rossi}/N_{tot}$, mentre il secondo gettone rosso viene estratto con probabilità $p(R_2|R_1) = (N_{rossi} - 1)/(N_{tot} - 1) \neq p(R)$.

$$\rightarrow p(E_1) = p(R_1)p(R_2|R_1) = \frac{N_{rossi}}{N_{tot}} \cdot \frac{(N_{rossi} - 1)}{(N_{tot} - 1)} = \frac{30}{65} \cdot \frac{29}{64} = \frac{87}{416}$$

Per l'evento E_2, diversamente dal caso dell'esercizio precedente il fatto che il primo gettone estratto non venga reimmesso nel sacchetto implica che

$$p(E_2) = p(N_1)p(B_2|N_1) = \frac{N_{neri}}{N_{tot}} \cdot \frac{N_{bianchi}}{(N_{tot} - 1)} = \frac{20}{65} \cdot \frac{15}{64} = \frac{15}{208}$$

Infine per l'evento E_3 abbiamo

$$p(E_3) = p(B_1)p(N_2|B_1) + p(N_1)p(B_2|N_1) = \frac{15}{65} \cdot \frac{20}{64} + \frac{20}{65} \cdot \frac{15}{64} = \frac{15}{104}$$

7) ***Un ragazzo ha 40 videocassette: 10 film vari, 12 cartoni animati e i rimanenti film gialli. Qual è la probabilità che estraendone due contemporaneamente si abbiano un cartone animato e un film giallo?***

G=estrazione di un film giallo;
F=estrazione di un film non giallo;
C=estrazione di un cartone animato;
$N_{tot} = N_{film} + N_{gialli} + N_{cartoni} = 40 \rightarrow N_{gialli} = 40 - 10 - 12 = 18$.

$$p(C \cdot G) = p(C_1)p(G_2|C_1) + p(G_1)p(C_2|G_1) = \frac{12}{40} \cdot \frac{18}{39} + \frac{18}{40} \cdot \frac{12}{39} = \frac{18}{65}$$

8) ***Un cassetto contiene 25 magliette. Quelle a manica corta sono 2/3 di quelle a manica lunga. Calcolare la probabilità che estraendone due contemporaneamente siano entrambe a manica lunga.***

$N_{tot} = 25 = N_{m.corta} + N_{m.lunga} = 2/3 N_{m.lunga} + N_{m.lunga} \rightarrow N_{m.lunga} = 15$

$$p(L \cdot L) = p(L_1)p(L_2|L_1) = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} = \frac{7}{20}$$

9) ***In una cesta di peluche ci sono 6 cani, 10 gatti e 4 papere. Qual è la probabilità di estrarre***

a caso un gatto e poi una papera con reimmissione del primo peluche nella cesta?

G=estrazione di un gatto;
P=estrazione di una papera;
$N_{tot} = N_{gatti} + N_{papere} + N_{cani} = 10 + 4 + 6 = 20.$

$$p(G \cdot P) = p(G_1)p(P_2|G_1) = \frac{10}{20} \cdot \frac{4}{20} = \frac{1}{10}$$

10) ***Ho due urne. La prima contiene 4 palline bianche e 6 palline rosse. La seconda ne contiene 3 bianche e 5 rosse. Estraendo una pallina da ciascuna urna, calcolare la probabilità che siano entrambe bianche (*** E_1 ***), bianca la pallina della prima urna e rossa la pallina della seconda urna (*** E_2 ***), una pallina bianca e una pallina rossa (*** E_3 ***).***

B_i=estrazione di una pallina bianca dall'urna *i*;
R_i=estrazione di una pallina rossa dall'urna *i*.

Due estrazioni in urne diverse sono eventi statisticamente indipendenti. Pertanto

$$p(E_1) = p(B_1 \cdot B_2) = p(B_1)p(B_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{20}$$
$$p(E_2) = p(B_1 \cdot R_2) = p(B_1)p(R_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$$
$$p(E_3) = p(B_1 \cdot R_2 + B_2 \cdot R_1) = p(B_1 \cdot R_2) + p(B_2 \cdot R_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{10} = \frac{19}{40}$$

11) ***Un costruttore viene fornito per gli stessi tipi di pezzi per l'80% dalla ditta A e per il 20% dalla ditta B. I pezzi vengono poi depositati insieme nello stesso magazzino. In passato è stato notato che i pezzi di A erano per il 5% difettosi, mentre quelli di B lo erano nella misura del 9%. Avendo scelto a caso un pezzo dal magazzino ed avendo riscontrato che è difettoso, qual è la probabilità che sia stato fornito da B?***

E=scelta di un pezzo difettoso;
F_1=B è il fornitore;
F_2=A è il fornitore.

$$p(F_1) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$
$$p(F_2) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$$
$$p(E|F_1) = \frac{9}{100}$$
$$p(E|F_2) = \frac{5}{100}$$

Applicando il teorema di Bayes,

$$p(F_1|E) = \frac{p(F_1)p(E|F_1)}{p(E)} = \frac{p(F_1)p(E|F_1)}{p(F_1)p(E|F_1) + p(F_2)p(E|F_2)} = \frac{9}{29} = 0.31$$

12) ***Tra i partecipanti a un concorso il 50% suona il pianoforte, il 30% il violino e il 20% la chitarra. Partecipano al concorso per la prima volta il 10% dei pianisti, il 33% dei violinisti e il 10% dei chitarristi. Qual è la percentuale di compositori alla prima esperienza? Sapendo che il primo ad esibirsi sarà alla prima esperienza, qual è la probabilità che sia un chitarrista?***

E=esibizione di un principiante;
C=esibizione di un chitarrista;
P=esibizione di un pianista;
V=esibizione di un violinista;
N_{tot}=numero totale di compositori in sala.

$$p(E) = p(C)p(E|C) + p(P)p(E|P) + p(V)p(E|V) = \frac{20}{100} \cdot \frac{10}{100} + \frac{50}{100} \cdot \frac{10}{100} + \frac{30}{100} \cdot \frac{33}{100} = \frac{169}{1000} \rightarrow$$

Il 16.9% dei compositori in sala è alla prima esperienza. Dal teorema di Bayes,

$$p(C|E) = \frac{p(C)p(E|C)}{p(E)} = \frac{\frac{20}{100} \cdot \frac{10}{100}}{\frac{169}{1000}} = \frac{20}{169} \sim 11.8\%$$

13) ***Lancio una moneta e osservo tre teste consecutive. Ho due monete: una normale e una truccata (con due teste). Qual è la probabilità che io abbia lanciato quella truccata?***

E=uscita di tre teste;
F_1=scelta della moneta truccata;
F_2=scelta della moneta normale;

$$p(F_1) = p(F_2) = \frac{1}{2}$$
$$p(E|F_1) = 1$$
$$p(E|F_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Dal teorema di Bayes,

$$p(F_1|E) = \frac{p(F_1)p(E|F_1)}{p(E)} = \frac{p(F_1)p(E|F_1)}{p(F_1)p(E|F_1) + p(F_2)p(E|F_2)} = 0.89$$

La probabilità di aver scelto una moneta normale è $1 - p(F_1|E)$=0.11.