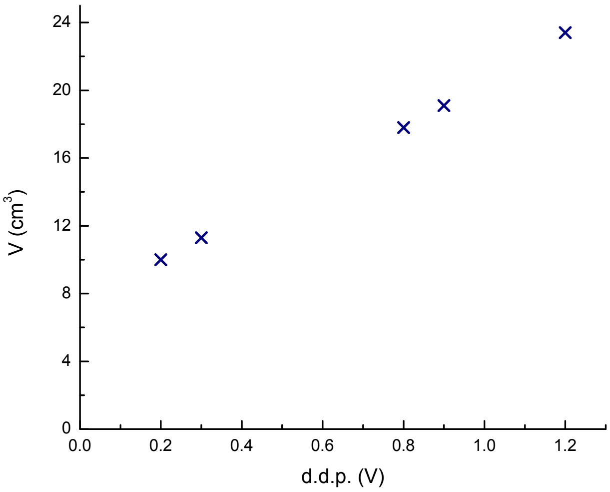
Esercitazioni 6-9: Minimi quadrati e test del chi-quadro

1) ***Uno studente deve tarare un sensore di volume basato sulla misura della differenza di potenziale ai capi di una resistenza in cui circola una corrente elettrica costante. Lo studente legge la differenza di potenziale in corrispondenza di 5 valori noti del volume e riporta in risultati in tabella:***

d.d.p. [V]	***0.2***	***0.3***	***0.8***	***0.9***	***1.2***
volume [cm^3]	***10.0***	***11.3***	***17.8***	***19.1***	***23.4***

L'incertezza con cui è misurato il volume è di 0.2 cm^3. L'incertezza con cui è misurata la differenza di potenziale è trascurabile.
a) Riportare i risultati in un grafico che rappresenti opportunamente la relazione esistente tra volume e differenza di potenziale.
b) Utilizzando il metodo dei minimi quadrati ricavare dai dati la retta di taratura del sensore di volume.
c) Lo studente vuole utilizzare il sensore per misurare volumi ignoti. Con che precisione può ricavare il volume corrispondente a una d.d.p. di 2 V?
d) Valutare la bontà dell'adattamento della retta ottenuta alle misure utilizzando il test del χ^2.

a) Poichè l'incertezza sulla d.d.p. è trascurabile, poniamo x = d.d.p. e $y = V$:



b) Utilizziamo il metodo dei minimi quadrati per ricavare la retta $y = A + Bx$ che meglio interpola i dati.

x=d.d.p. [V]	y=volume V [cm^3]	x^2 [V^2]	xy [$V \cdot cm^3$]
0.2	10.0	0.04	2.00
0.3	11.3	0.09	3.39
0.8	17.8	0.64	14.24
0.9	19.1	0.81	17.19
1.2	23.4	1.44	28.08
$\sum_{i=1}^{N=5} x_i = 3.4$	$\sum_{i=1}^{N=5} y_i = 81.6$	$\sum_{i=1}^{N=5} x_i^2 = 3.02$	$\sum_{i=1}^{N=5} x_i y_i = 64.90$

$$\Delta = N\sum_{i=1}^{N=5} x_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^{N=5} x_i\Big)^2 = (5\cdot 3.02 - 3.4^2)\,\mathrm{V}^2 = 3.54\,\mathrm{V}^2$$

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{N=5} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{N=5} y_i - \sum_{i=1}^{N=5} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N=5} x_i y_i}{\Delta} = \frac{(3.02\cdot 81.6 - 3.4\cdot 64.9)\,\mathrm{V^2 cm^3}}{3.54\,\mathrm{V}^2} = 7.2802\,\mathrm{cm}^3$$

$$B = \frac{N\sum_{i=1}^{N=5} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N=5} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N=5} y_i}{\Delta} = \frac{(5\cdot 64.9 - 3.4\cdot 81.6)\,\mathrm{Vcm^3}}{3.54\,\mathrm{V}^2} = 13.2938\,\mathrm{cm^3/V}$$

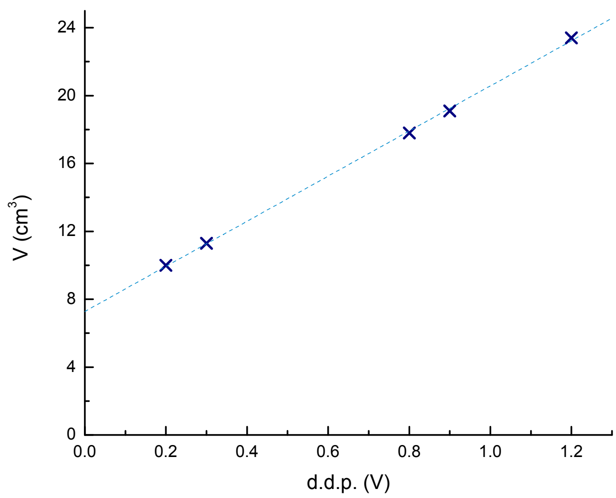
Le incertezze sui parametri A e B sono

$$\sigma_A = \sigma_y\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N=5} x_i^2}{\Delta}} = 0.2\,\mathrm{cm}^3\sqrt{\frac{3.02\,\mathrm{V}^2}{3.54\,\mathrm{V}^2}} = 0.1847\,\mathrm{cm}^3$$

$$\sigma_B = \sigma_y\sqrt{\frac{N}{\Delta}} = 0.2\,\mathrm{cm}^3\sqrt{\frac{5}{3.54\,\mathrm{V}^2}} = 0.2377\,\mathrm{cm^3/V}$$

Quindi la migliore retta che descrive i dati è

$$y = (7.3\pm 0.2)\,\mathrm{cm}^3 + (13.3\pm 0.2)\,\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{V}}x$$



c) Dalla retta di taratura, una differenza di potenziale x_0=2 V corrisponde a un volume

$$V_0 = A + Bx_0 = (7.2802 + 13.2938\cdot 2)\,\mathrm{cm}^3 = 33.87\,\mathrm{cm}^3$$

con un'incertezza

$$\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 + x_0^2\sigma_B^2 + 2x_0\sigma_{AB}}$$

dove

$$\sigma_{AB} = -\sigma_y^2\frac{\sum_{i=1}^{N=5} x_i}{\Delta} = -0.2^2\frac{3.4}{3.54}\,\mathrm{cm^6/V} = -0.0384\,\mathrm{cm^6/V}$$

$$\rightarrow \sigma = \sqrt{0.1847^2 + 2^2\cdot 0.2377^2 - 2\cdot 2\cdot 0.0384}\,\mathrm{cm}^3 = 0.33\,\mathrm{cm}^3$$

d) Per valutare la bontà dell'adattamento della retta ottenuta mediante il metodo dei minimi quadrati alle misure calcoliamo il χ_0^2:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{N=5} \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_y^2}$$

x [V]	y [cm^3]	$y - A - Bx$ [cm^3]	$(y - A - Bx)^2/\sigma_y^2$
0.2	10.0	0.0610	0.0932
0.3	11.3	0.0317	0.0251
0.8	17.8	-0.1152	0.3320
0.9	19.1	-0.1446	0.5229
1.2	23.4	0.1672	0.6992

$$\rightarrow \chi_0^2 = 1.67$$

Il corrispondente chi-quadro ridotto $\widetilde{\chi}_0^2$ è

$$\widetilde{\chi}_0^2 = \frac{\chi_0^2}{d} = \frac{1.67}{3} = 0.56$$

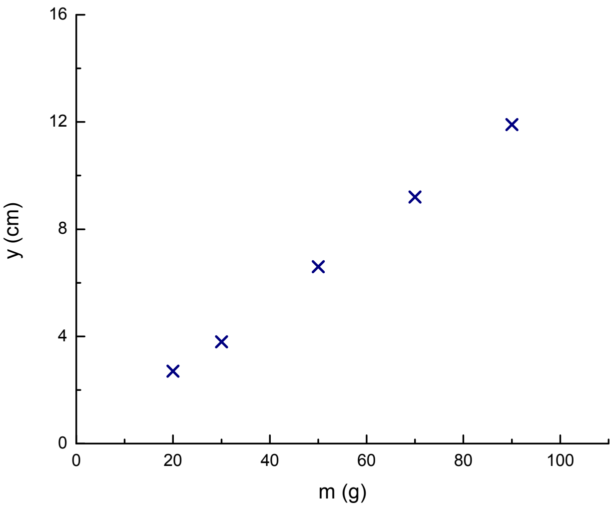
con un numero di vincoli ν=2 e un numero di gradi di libertà $d = N - \nu = 3$. La probabilità di ottenere un valore di χ^2 ridotto maggiore di quello ottenuto è $p_3(\widetilde{\chi}^2 \geq \widetilde{\chi}_0^2)$=0.65, che conferma un buon accordo tra i dati e la retta ricavata prima.

2) ***Per determinare la costante elastica di una molla si appendono ad essa masse diverse e si misurano gli allungamenti corrispondenti. I risultati delle misure sono riportati nella seguente tabella:***

massa [g]	***20***	***30***	***50***	***70***	***90***
allungamento [cm]	***2.7***	***3.8***	***6.6***	***9.2***	***11.9***

a) Rappresentare graficamente i dati. L'incertezza con cui sono misurati gli allungamenti è di 1 mm, mentre l'incertezza con cui sono misurate le masse è trascurabile.
b) Utilizzando il metodo dei minimi quadrati ricavare il valore della costante elastica della molla e il suo errore.
c) Calcolare il valore dell'allungamento previsto qualora si appenda alla molla una massa di 150 g, e l'incertezza su tale allungamento.
d) Se la molla viene lasciata libera di oscillare, compie oscillazioni armoniche. Calcolare il valore previsto per il periodo delle oscillazioni della molla, quando è appesa la massa di 150 g, e l'incertezza su tale periodo.

a) L'incertezza con cui sono misurati gli allungamenti è σ_y =0.1 cm, mentre l'incertezza con cui sono misurate le masse è trascurabile. Riportiamo quindi l'allungamento della molla in funzione della massa appesa:



b) Data la forza peso agente in presenza di una massa m,

$$mg = k(y - y_0) \rightarrow y = y_0 + \frac{g}{k}m$$

dove k è la costante elastica della molla e y è l'allungamento rispetto alla posizione iniziale y_0. Riportando in grafico l'allungamento y in funzione di $x = m$ ci aspettiamo un andamento lineare del tipo $y = A + Bx$, con intercetta $A = y_0$ e pendenza $B = g/k$. La migliore stima dei parametri A e B si ricava applicando il metodo dei minimi quadrati.

x [g]	y [cm]	x^2 [g^2]	xy [$g \cdot cm$]
20	2.7	400	54
30	3.8	900	114
50	6.6	2500	330
70	9.2	4900	644
90	11.9	8100	1071

$\sum_{i=1}^{N=5} x_i = 260 \quad \sum_{i=1}^{N=5} y_i = 34.2 \quad \sum_{i=1}^{N=5} x_i^2 = 16800 \quad \sum_{i=1}^{N=5} x_i y_i = 2213$

$$\Delta = N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2 = (5 \cdot 16800 - 260^2)\ g^2 = 16400\ g^2$$

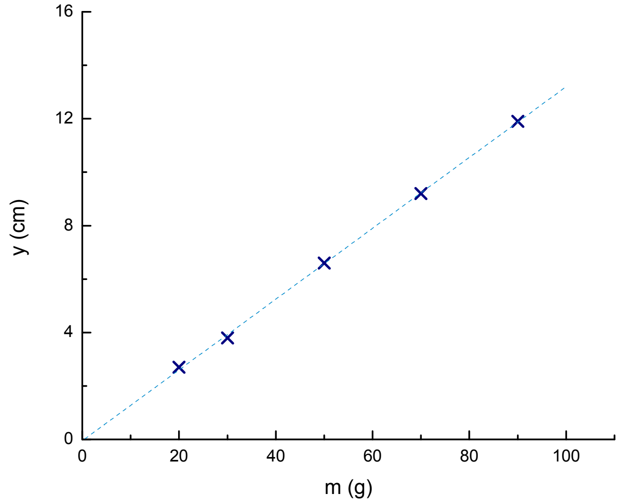
$$A = \frac{\sum_i x_i^2 \cdot \sum_i y_i - \sum_i x_i \cdot \sum_i x_i y_i}{\Delta} = \frac{(16800 \cdot 34.2 - 260 \cdot 2213)\ g^2 cm}{16400\ g^2} = -0.05\ cm$$

$$B = \frac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \cdot \sum_i y_i}{\Delta} = \frac{(5 \cdot 2213 - 260 \cdot 34.2)\ gcm}{16400\ g^2} = 0.1325\ cm/g$$

Le incertezze sui parametri A e B sono

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{\Delta}} = 0.1\ cm \sqrt{\frac{16800\ g^2}{16400\ g^2}} = 0.1012\ cm$$

$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}} = 0.1\ cm \sqrt{\frac{5}{16400\ g^2}} = 0.0017\ cm/g$$



La migliore retta che descrive i dati è quindi

$$y = (-0.1 \pm 0.1)\,\mathrm{cm} + (0.133 \pm 0.002)\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{g}}x$$

La costante elastica della molla si ricava dalla pendenza B come

$$k = \frac{g}{B} = \frac{9.81\,\mathrm{m/s^2}}{1.325\,\mathrm{m/kg}} = 7.40\,\mathrm{N/m}$$

Propagando l'errore su B si ottiene l'incertezza su k:

$$\sigma_k = \sqrt{\left(\frac{dk}{dB}\right)^2 \sigma_B^2} = \frac{g}{B^2}\sigma_B = 0.09\,\mathrm{N/m}$$

$$\rightarrow k = (7.40 \pm 0.09)\,\mathrm{N/m}$$

Notiamo che la stima ottenuta per A è compatibile con zero. Interpolare invece i dati con una retta passante per l'origine, del tipo $y = Bx$, fornisce come migliore stima per la pendenza il valore

$$B = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} = \frac{2213}{16800}\mathrm{cm/g} = 0.1317\,\mathrm{cm/g}$$

con incertezza

$$\sigma_B = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sum_i x_i^2}} = \frac{0.1}{\sqrt{16800}}\,\mathrm{cm/g} = 7.7 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm/g}$$

La corrispondente stima per la costante elastica è

$$k = \frac{g}{B} = \frac{9.81\,\mathrm{m/s^2}}{1.317\,\mathrm{m/kg}} = 7.45\,\mathrm{N/m}$$

con incertezza

$$\sigma_k = \sqrt{\left(\frac{dk}{dB}\right)^2 \sigma_B^2} = \frac{g}{B^2}\sigma_B = 0.04\,\mathrm{N/m}$$

$$\rightarrow k = (7.45 \pm 0.04)\,\mathrm{N/m}$$

I due valori per la costante elastica risultano giustamente compatibili. L'incertezza associata alla costante è minore quando i dati vengono interpolati con una retta passante per l'origine.
c) Il valore dell'allungamento L corrispondente ad una massa m_0=150 g è dato da

$$L = A + Bx_0 = (-0.05 + 0.1325 \cdot 150)\,\text{cm} = 19.825\,\text{cm}$$

con incertezza

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma_A^2 + x_0^2\sigma_B^2 + 2x_0\sigma_{AB}}$$

$$\sigma_{AB} = -\sigma_y^2 \frac{\sum_i x_i}{\Delta} = -0.1^2 \frac{260}{16400}\,\text{cm}^2/\text{g} = 1.585 \cdot 10^{-4}\,\text{cm}^2/\text{g}$$

$$\rightarrow \sigma_L = \sqrt{0.1012^2 + 150^2 \cdot 0.0017^2 - 2 \cdot 150 \cdot 1.585 \cdot 10^{-4}}\,\text{cm} = 0.166\,\text{cm}$$

$$\rightarrow L = (19.8 \pm 0.2)\,\text{cm}$$

Usando i risultati dell'interpolazione con una retta passante per l'origine, il valore dell'allungamento L corrispondente ad una massa m_0=150 g è dato da

$$L = Bx_0 = (0.1317 \cdot 150)\,\text{cm} = 19.755\,\text{cm}$$

con incertezza

$$\sigma_L = x_0\sigma_B = 0.116\,\text{cm}$$

$$\rightarrow L = (19.76 \pm 0.12)\,\text{cm}$$

d) Usando i risultati dell'interpolazione con una retta passante per l'origine, il periodo di oscillazione della molla è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.15\,\text{kg}}{7.45\,\text{N/m}}} = 0.892\,\text{s}$$

L'incertezza sul periodo è

$$\sigma_T = |T|\sqrt{(\frac{1}{2}\frac{\sigma_k}{k})^2} = 0.002\,\text{s}$$

3) ***Uno studente misura le frequenze di risonanza di una corda vibrante, fissata ai due estremi, in funzione della tensione della corda. La corda è lunga*** $L = (1.00 \pm 0.01)\,\text{m}$ ***ed è tenuta in tensione grazie a un sistema di pesi calibrati sospesi a una carrucola. Lo studente misura le frequenze corrispondenti alla seconda armonica ottenendo i risultati in tabella:***

frequenza [Hz]	***10.1***	***14.0***	***17.1***	***20.0***	***22.2***
massa sospesa [kg]	***0.1***	***0.2***	***0.3***	***0.4***	***0.5***

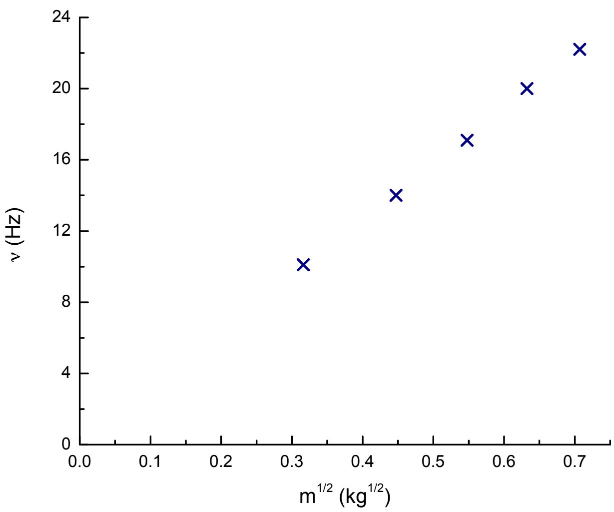
La precisione nelle misure delle frequenze è 0.1 Hz.
a) Riportare i risultati in un grafico che rappresenti opportunamente la relazione esistente tra frequenza e tensione. Si ricorda che la frequenza delle onde stazionarie su una corda tesa è $\nu = n/(2L)\sqrt{T/\mu}$, ***con*** T ***tensione della corda e*** n ***ordine dell'armonica.***
b) Utilizzando il metodo dei minimi quadrati ricavare il valore della massa lineare μ ***della corda e il suo errore. Verificare se la massa lineare ottenuta è compatibile con il valore previsto di 10 g/m.***
c) Valutare la bontà dell'adattamento della funzione ottenuta alle misure utilizzando il test

del χ^2**.**

a) Per l'armonica di ordine n=2 la frequenza è legata alla massa m sospesa alla corda dalla relazione

$$\nu = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{mg}{\mu}}$$

Ponendo $y = \nu$ e $x = \sqrt{m}$ si ottiene una relazione lineare del tipo $y = Bx$ con intercetta $A = 0$ e pendenza $B = \frac{1}{L}\sqrt{g/\mu}$.



x [kg$^{1/2}$]	y [Hz]	x^2 [kg]	xy [kg$^{1/2}\cdot$ Hz]
0.316	10.1	0.1	3.1916
0.447	14.0	0.2	6.2580
0.548	17.1	0.3	9.3798
0.632	20.0	0.4	12.6400
0.707	22.2	0.5	15.6954

$\sum_{i=1}^{N=5} x_i = 2.65$ $\quad\sum_{i=1}^{N=5} y_i = 83.4$ $\quad\sum_{i=1}^{N=5} x_i^2 = 1.5$ $\quad\sum_{i=1}^{N=5} x_i y_i = 47.1648$

b) Il coefficiente angolare della retta passante per l'origine è

$$B = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} = \frac{47.1648}{1.5}\mathrm{Hz/kg}^{1/2} = 31.44\,\mathrm{Hz/kg}^{1/2}$$

con incertezza

$$\sigma_B = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sum_i x_i^2}} = \frac{0.1}{\sqrt{1.5}}\,\mathrm{Hz/kg}^{1/2} = 0.0816\,\mathrm{Hz/kg}^{1/2}$$

A partire dal coefficiente angolare, la massa lineare μ della corda si ottiene come

$$\mu = \frac{g}{B^2L^2} = \frac{9.81}{31.44^2\cdot 1^2}\mathrm{kg/m} = 9.92\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/m} = 9.92\,\mathrm{g/m}$$

Propagando l'errore su B e su L, l'incertezza corrispondente è

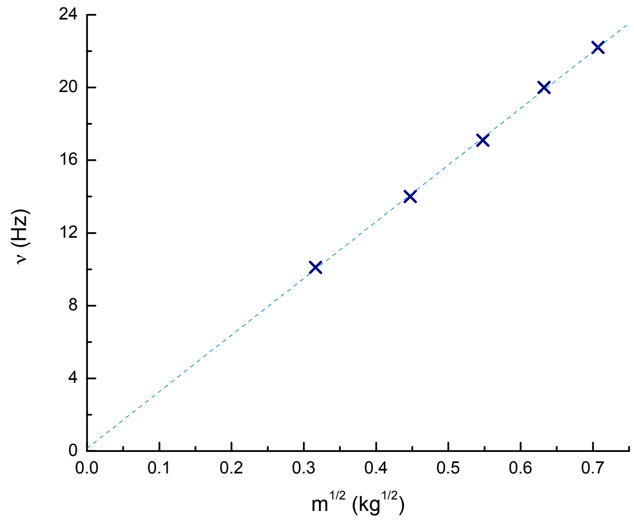
$$\sigma_\mu = |\mu|\sqrt{\left(2\frac{\sigma_B}{B}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_L}{L}\right)^2} = 0.199\ \mathrm{g/m}$$

$$\rightarrow \mu = (9.9 \pm 0.2)\ \mathrm{g/m}$$

Per determinare la compatibilità del risultato con il valore atteso $\mu_{atteso} = 10\ \mathrm{g/m}$, valutiamo

$$t = \frac{|\mu - \mu_{atteso}|}{\sigma_\mu} = 0.5$$

Dalla tabella dell'integrale normale degli errori, la probabilità di ottenere un risultato che disti dal valore atteso per almeno $0.5\sigma_\mu$ è $1 - p(\text{entro } 0.5\sigma_\mu)$=1-0.3829=0.62. Concludiamo che il risultato è compatibile con quanto atteso.



c) Per valutare la bontà dell'adattamento della retta ottenuta mediante il metodo dei minimi quadrati alle misure calcoliamo il χ_0^2:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{N=5} \frac{(y_i - Bx_i)^2}{\sigma_y^2}$$

$x\ [\mathrm{kg}^{1/2}]$	y [Hz]	$y - Bx$ [Hz]	$(y - Bx)^2/\sigma_y^2$
0.316	10.1	0.165	2.7212
0.447	14.0	-0.054	0.2882
0.548	17.1	-0.129	1.6672
0.632	20.0	0.130	1.6879
0.707	22.2	-0.028	0.0788

$$\rightarrow \chi_0^2 = 6.44$$

Il corrispondente chi-quadro ridotto $\tilde{\chi}_0^2$ è

$$\tilde{\chi}_0^2 = \frac{\chi_0^2}{d} = \frac{6.44}{4} = 1.61$$

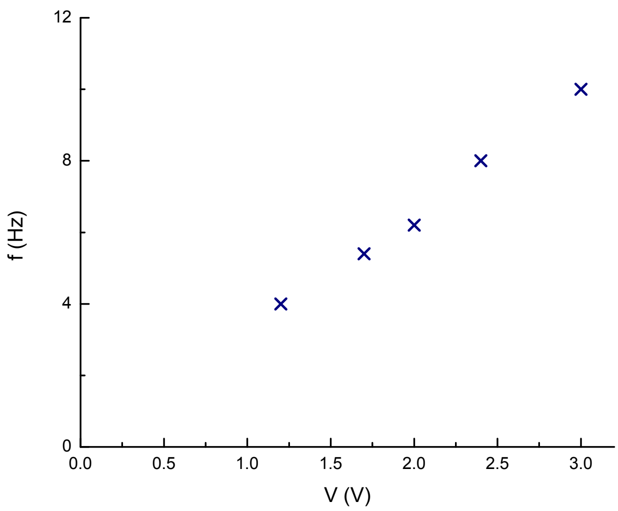
con un numero di vincoli ν=1 e un numero di gradi di libertà $d = N - \nu = 4$. La probabilità di ottenere un valore di χ^2 ridotto maggiore di quello ottenuto è $p_4(\tilde{\chi}^2 \geq \tilde{\chi}_0^2)$=0.17, che conferma un buon accordo tra i dati e la retta ricavata prima.

4) Un oscillatore meccanico è collegato ad un generatore di tensione variabile tra 0 e 6 V e la frequenza delle oscillazioni cresce proporzionalmente alla tensione. Per calibrare il sistema si misura la frequenza di oscillazione a diversi valori di tensione:

tensione V [V]	*1.2*	*1.7*	*2.0*	*2.4*	*3.0*
frequenza f [Hz]	*4.0*	*5.4*	*6.2*	*8.0*	*10.0*

L'incertezza con cui è misurata la tensione è trascurabile, mentre le misure di frequenza sono effettuate con un'incertezza di 0.2 Hz.
a) Riportare le misure in un grafico che rappresenti opportunamente la relazione esistente tra tensione e frequenza.
b) Utilizzando il metodo dei minimi quadrati ricavare dai dati i parametri della retta di taratura dell'oscillatore e la loro incertezza.
c) A che tensione bisogna regolare il generatore di tensione per ottenere una frequenza di oscillazione di 20 Hz? Con che incertezza si può stimare che l'oscillatore vibrerà a tale frequenza?
d) Valutare la bontà dell'adattamento della retta ottenuta alle misure mediante il test del χ^2.

a) Poichè l'incertezza sulla tensione è trascurabile e σ_f=0.2 Hz, poniamo $y = f$ e $x = V$.



b)

x [V]	y [Hz]	x^2 [V^2]	xy [V $\cdot$ Hz]
1.2	4.0	1.44	4.8
1.7	5.4	2.89	9.2
2.0	6.2	4.00	12.4
2.4	8.0	5.76	19.2
3.0	10.0	9.00	30.0

$\sum_i x_i = 10.3 \quad \sum_i y_i = 33.6 \quad \sum_i x_i^2 = 23.09 \quad \sum_i x_i y_i = 75.58$

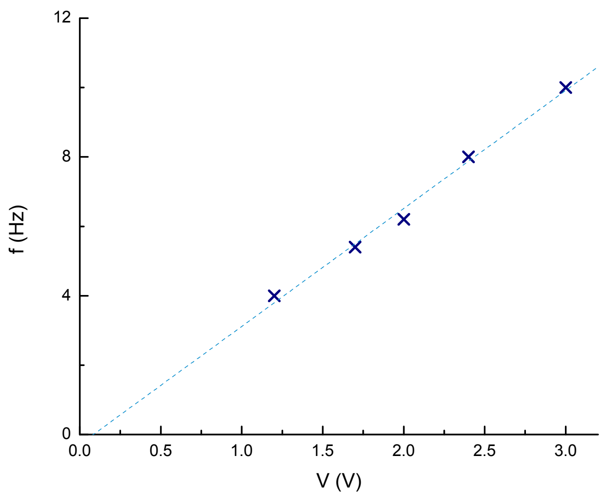
Il coefficiente angolare della retta $y = Bx$ passante per l'origine è

$$B = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} = \frac{75.58}{23.09}\mathrm{Hz/V} = 3.2733\,\mathrm{Hz/V}$$

con incertezza

$$\sigma_B = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sum_i x_i^2}} = \frac{0.2}{\sqrt{23.09}}\,\mathrm{Hz/V} = 0.0416\,\mathrm{Hz/V}$$

$$\rightarrow y = (3.27 \pm 0.04)\mathrm{Hz/V} \cdot x$$



c) Una frequenza di oscillazione $f_0 = 20\,\mathrm{Hz}$ corrisponde a una tensione

$$V_0 = \frac{f_0}{B} = \frac{20}{3.27}\mathrm{V} = 6.1\,\mathrm{V}$$

L'incertezza sulla frequenza è

$$\sigma_f = V_0 \sigma_B = 0.2\,\mathrm{Hz}$$

d) Avendo interpolato i dati con una retta del tipo $y = Bx$, calcoliamo il chi-quadro come

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{N=5} \frac{(y_i - Bx_i)^2}{\sigma_y^2}$$

x [V]	y [Hz]	$y - Bx$ [Hz]	$(y - Bx)^2/\sigma_y^2$
1.2	4.0	0.0720	0.1297
1.7	5.4	-0.1646	0.6774
2.0	6.2	-0.3466	3.0033
2.4	8.0	0.1441	0.5190
3.0	10.0	0.1801	0.8109

$$\rightarrow \chi_0^2 = 5.14$$

Il corrispondente chi-quadro ridotto $\tilde{\chi}_0^2$ è

$$\tilde{\chi}_0^2 = \frac{\chi_0^2}{d} = \frac{5.14}{4} = 1.29$$

con un numero di vincoli ν=1 e un numero di gradi di libertà $d = N - \nu = 4$. La probabilità di ottenere un valore di χ^2 ridotto maggiore di quello ottenuto è $p_4(\tilde{\chi}^2 \geq \tilde{\chi}_0^2) \sim 0.3$, che conferma un buon accordo tra i dati e la retta ricavata prima.

5) ***Si comprime un gas in equilibrio termico con l'ambiente alla temperatura T=300 K e si misurano la pressione e il volume del gas in diversi istanti:***

volume $[10^{-3}\,m^3]$	***25.0***	***12.5***	***8.0***	***5.0***
pressione $[10^3\,N/m^2]$	***105***	***190***	***320***	***495***

L'incertezza relativa sulla misura della pressione è del 5%, mentre quella sulla misura dei volumi risulta trascurabile.
a) Rappresentare graficamente i dati. Nell'ipotesi che si tratti di un gas perfetto, verificare se la trasformazione segue la legge prevista per le trasformazioni isoterme ($pV = nRT$, $R = 8.314\,J mol^{-1}K^{-1}$***) eseguendo un'interpolazione dei dati, dopo aver opportunamente linearizzato la relazione tra le variabili.***
b) Utilizzando il test del χ^2 ***valutare la bontà dell'adattamento ai dati delle retta appena ricavata.***
c) Calcolare il numero di moli presenti nel gas e l'incertezza relativa.

a) Dall'equazione di stato dei gas perfetti,

$$P = \frac{nRT}{V}$$

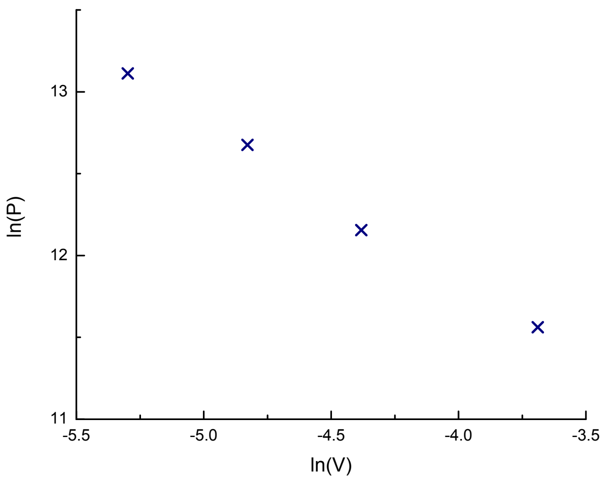
Sono quindi possibili due scelte per linearizzare la relazione tra pressione e volume. La prima consiste nel porre $y = P$ e $x = \frac{1}{V}$. In questo caso $y = A + Bx$ con intercetta $A = 0$ e pendenza $B = nRT$, ma gli errori sulla variabile y non sarebbero costanti: per ciascun valore y_i avremmo incertezza $\sigma_{y_i} = 0.05 y_i$. Alternativamente, sfruttiamo

$$\ln P = \ln(nRT) - \ln(V)$$

Il grafico del logaritmo della pressione in funzione del logaritmo del volume del gas è lineare con pendenza $B = -1$ e intercetta $A = \ln(nRT)$. Gli errori sulla variabile $y = \ln P$ sono tutti uguali:

$$\sigma_{y_i} = \frac{d\ln P_i}{dP_i}\sigma_{P_i} = \frac{1}{P_i}\sigma_{P_i} = 0.05$$

per ogni i. Riportiamo quindi $y = \ln P$ in funzione di $x = \ln V$.



V [m^3]	P [Pa]	$x = \ln V$	$y = \ln P$	x^2	xy
0.025	$105 \cdot 10^3$	-3.689	11.562	13.608	-42.650
0.0125	$190 \cdot 10^3$	-4.382	12.155	19.202	-53.263
0.008	$320 \cdot 10^3$	-4.828	12.676	23.313	-61.204
0.005	$495 \cdot 10^3$	-5.298	13.112	28.072	-69.473

$$\sum_i x_i = -18.197 \quad \sum_i y_i = 49.505 \quad \sum_i x_i^2 = 84.195 \quad \sum_i x_i y_i = -226.590$$

$$\Delta = N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2 = (4 \cdot 84.195 - 18.197^2) = 5.613$$

$$A = \frac{\sum_i x_i^2 \cdot \sum_i y_i - \sum_i x_i \cdot \sum_i x_i y_i}{\Delta} = \frac{(84.195 \cdot 49.505 - (-18.197) \cdot (-226.590))}{5.613} = 7.944$$

$$B = \frac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \cdot \sum_i y_i}{\Delta} = \frac{(4 \cdot (-226.590) - (-18.197) \cdot 49.505)}{5.613} = -0.974$$

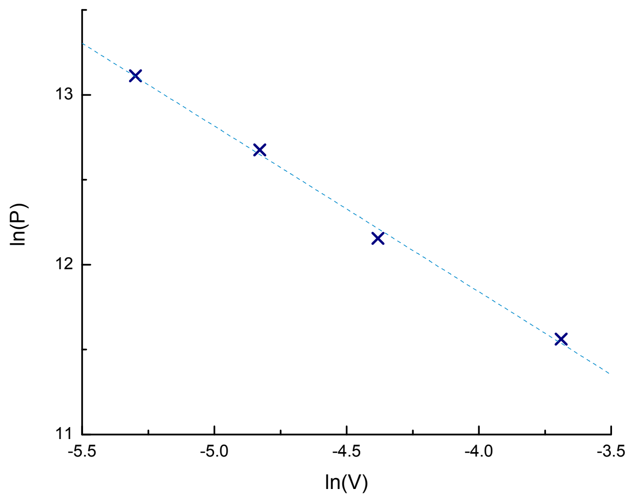
Le incertezze sui parametri A e B sono

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{\Delta}} = 0.05 \sqrt{\frac{84.195}{5.613}} = 0.194$$

$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}} = 0.05 \sqrt{\frac{4}{5.613}} = 0.042$$

$$\rightarrow \ln P = (7.9 \pm 0.2) + (-0.97 \pm 0.04) \ln V$$

Il valore di B è compatibile con il valore -1 previsto dall'equazione di stato dei gas perfetti.



b)

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{N=4} \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_y^2}$$

x	y	$y - A - Bx$	$(y - A - Bx)^2/\sigma_y^2$
-3.689	11.562	0.0249	0.2483
-4.382	12.155	-0.0571	1.3027
-4.828	12.676	0.0295	0.3488
-5.298	13.112	0.0078	0.0240

$$\rightarrow \chi_0^2 = 1.92$$

Il corrispondente chi-quadro ridotto $\widetilde{\chi}_0^2$ è

$$\widetilde{\chi}_0^2 = \frac{\chi_0^2}{d} = \frac{1.92}{2} = 0.96$$

con un numero di vincoli ν=2 e un numero di gradi di libertà $d = N - \nu = 2$. La probabilità di ottenere un valore di χ^2 ridotto maggiore di quello ottenuto è $p_2(\widetilde{\chi}^2 \geq \widetilde{\chi}_0^2)$=0.37, che conferma un buon accordo tra i dati e la retta ricavata prima.
c) Ricordando che l'intercetta A è uguale a $\ln(nRT)$, il numero di moli di gas si ottiene come

$$n = \frac{e^A}{RT} = \frac{e^{7.9}}{8.314 \cdot 300}\,\mathrm{mol} = 1.12\,\mathrm{mol}$$

L'incertezza su n è

$$\sigma_n = \sqrt{\left(\frac{dn}{dA}\sigma_A\right)^2} = \frac{e^A}{RT}\sigma_A = 1.12 \cdot 0.194\,\mathrm{mol} = 0.21\,\mathrm{mol}$$

$$\rightarrow n = (1.1 \pm 0.2)\,\mathrm{mol}$$

6) ***Uno scienziato di Monaco di Baviera studia le variazioni del volume di schiuma in un boccale di birra appena versata. Misura l'altezza dello strato di schiuma a diversi istanti di tempo ottenendo i risultati in tabella:***

altezza h [cm]	*14.0*	*10.5*	*8.5*	*6.5*	*3.5*
tempo t [s]	*0*	*30*	*60*	*105*	*210*

Il suo modello prevede che l'altezza diminuisca secondo la legge $h(t) = h_0 e^{-t/\tau}$***, con*** τ ***costante di tempo di decadimento, caratteristica del tipo di birra usato.***
a) Rappresentare graficamente i dati. L'errore relativo sulla misura delle altezze è del 5%, mentre quello sulla misura dei tempi risulta trascurabile.
b) Utilizzando il metodo dei minimi quadrati ricavare il valore della costante di tempo τ ***e la sua incertezza.***
c) Calcolare il valore dell'altezza prevista dopo 300 secondi, e l'incertezza associata.

a) La legge

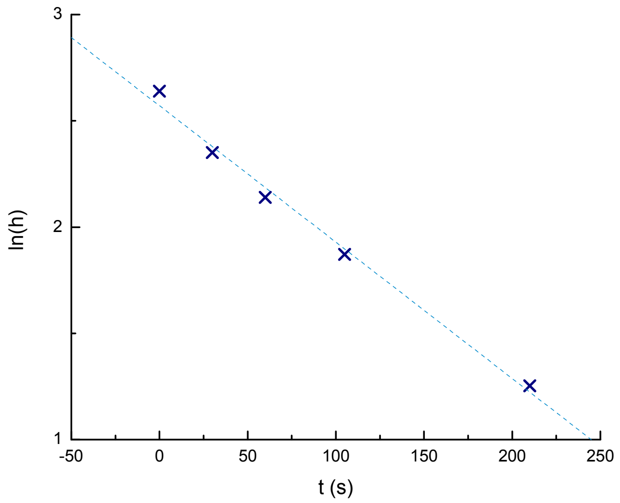
$$h = h_0 e^{-t/\tau}$$

può essere linearizzata:

$$\ln h = \ln h_0 - \frac{t}{\tau}$$

Ponendo $y = \ln h$ e $x = t$, otteniamo $y = A + Bx$ con intercetta $A = \ln h_0$ e pendenza $B = -1/\tau$. L'errore sui tempi risulta trascurabile, mentre l'errore sulle y risulta constante, poichè

$$\sigma_y = \frac{d \ln h}{dh} \sigma_h = \frac{\sigma_h}{h} = 0.05$$



b)

h [cm]	$x = t$ [s]	$y = \ln h$	x^2 [s^2]	xy [s]
14.0	0	2.639	0	0
10.5	30	2.351	900	70.53
8.5	60	2.140	3600	128.40
6.5	105	1.872	11025	196.56
3.5	210	1.253	44100	263.13

$\sum_i x_i = 405 \quad \sum_i y_i = 10.255 \quad \sum_i x_i^2 = 59625 \quad \sum_i x_i y_i = 658.62$

$$\Delta = N\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2 = (5 \cdot 59625 - 405^2)\,s^2 = 134100\,s^2$$

$$A = \frac{\sum_i x_i^2 \cdot \sum_i y_i - \sum_i x_i \cdot \sum_i x_i y_i}{\Delta} = \frac{(59625 \cdot 10.255 - 405 \cdot 658.62)\,s^2}{134100\,s^2} = 2.5706$$

$$B = \frac{N\sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \cdot \sum_i y_i}{\Delta} = \frac{(5 \cdot 658.62 - 405 \cdot 10.255)\,s}{134100\,s^2} = -0.0064\,s^{-1}$$

Le incertezze sui parametri A e B sono

$$\sigma_A = \sigma_y\sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{\Delta}} = 0.05\sqrt{\frac{59625\,s^2}{134100\,s^2}} = 0.0333$$

$$\sigma_B = \sigma_y\sqrt{\frac{N}{\Delta}} = 0.05\sqrt{\frac{5}{134100\,s^2}} = 3.05 \cdot 10^{-4}\,s^{-1}$$

Quindi la migliore retta che descrive i dati è

$$y = (2.57 \pm 0.03) + (-6.4 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{s}x$$

La costante di tempo τ è

$$\tau = -\frac{1}{B} = 156.25\,s$$

con incertezza

$$\sigma_\tau = \frac{1}{B^2}\sigma_B = 7.45\,s$$

$$\rightarrow \tau = (156 \pm 8)\,s$$

c) Il valore di $\ln h$ previsto dopo un tempo $t_0 = 300\,s$ è $(2.5706 - 0.0064 \cdot 300) = 0.6506$ con incertezza

$$\sigma_{\ln h} = \sqrt{\sigma_A^2 + x_0^2\sigma_B^2 + 2x_0\sigma_{AB}}$$

dove

$$\sigma_{AB} = -\sigma_y^2\frac{\sum_i x_i}{\Delta} = -0.05^2\frac{405}{134100}\,s^{-1} = 7.55 \cdot 10^{-6}\,s^{-1}$$

$$\rightarrow \sigma_{\ln h} = 0.118$$

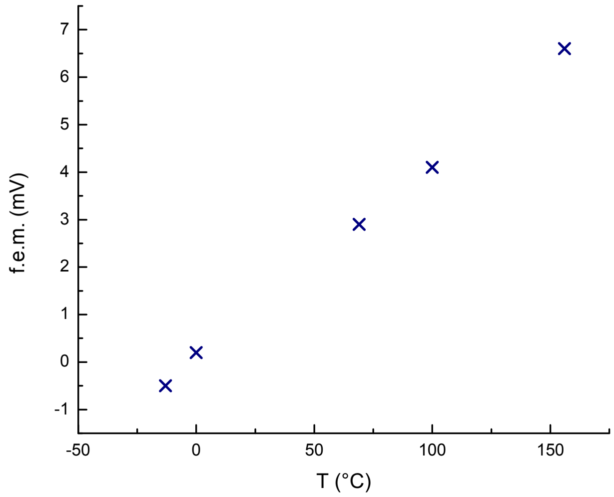
Da qui la corrispondente altezza è $e^{0.6506} = 1.9\,cm$ con incertezza $e^{0.6506} \cdot \sigma_{\ln h}$=0.2 cm.

7) *Per tarare una termocoppia, uno studente rileva la forza elettromotrice in funzione della temperatura della giunzione di misura, in corrispondenza di 5 punti fissi. I risultati sono raccolti in tabella:*

f.e.m. [mV]	***-0.5***	***0.2***	***2.9***	***4.1***	***6.6***
T [°C]	***-13***	***0***	***69***	***100***	***156***

L'errore attribuito alle misure della f.e.m. è di 0.1 mV.
a) Rappresentare graficamente i dati.
b) Nell'ipotesi che nella regione compresa tra -50°C e +180°C la dipendenza della f.e.m. dalla temperatura sia lineare, determinare i parametri della migliore retta che descrive i dati raccolti e il loro errore.

a) Poniamo $x = T$ e $y = f.e.m.$. Gli errori sulla variabile y sono costanti e pari a $\sigma_y = 0.1\,mV$.



x [°C]	y [mV]	x^2 [°C^2]	xy [mV ·° C]
-13	-0.5	169	6.5
0	0.2	0	0.0
69	2.9	4761	200.1
100	4.1	10000	410.0
156	6.6	24336	1029.6

$\sum_i x_i = 312 \quad \sum_i y_i = 13.3 \quad \sum_i x_i^2 = 39266 \quad \sum_i x_i y_i = 1646.2$

b)

$$\Delta = N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2 = (5 \cdot 39266 - 312^2)\,{}^\circ\mathrm{C}^2 = 98986\,{}^\circ\mathrm{C}^2$$

$$A = \frac{\sum_i x_i^2 \cdot \sum_i y_i - \sum_i x_i \cdot \sum_i x_i y_i}{\Delta} = \frac{(39266 \cdot 13.3 - 312 \cdot 1646.2)\,{}^\circ\mathrm{C}^2 \cdot \mathrm{mV}}{98986\,{}^\circ\mathrm{C}^2} = 0.087\,\mathrm{mV}$$

$$B = \frac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \cdot \sum_i y_i}{\Delta} = \frac{(5 \cdot 1646.2 - 312 \cdot 13.3)\,{}^\circ\mathrm{C} \cdot \mathrm{mV}}{98986\,{}^\circ\mathrm{C}^2} = 0.041\ \mathrm{mV}/{}^\circ\mathrm{C}$$

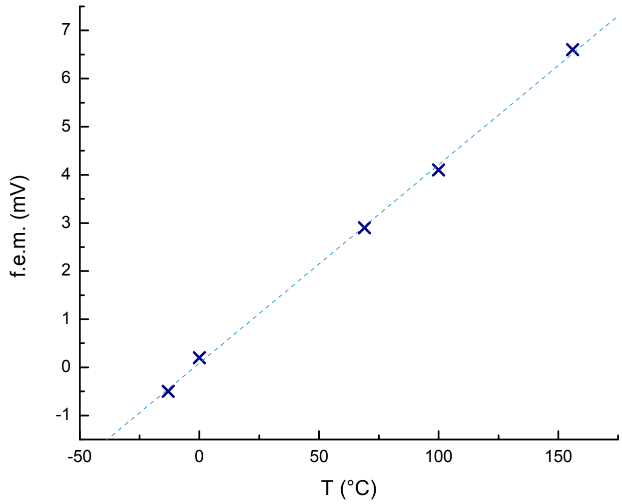
Le incertezze sui parametri A e B sono

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{\Delta}} = 0.1\,\mathrm{mV}\sqrt{\frac{39266\,{}^\circ\mathrm{C}^2}{98986\,{}^\circ\mathrm{C}^2}} = 0.063\,\mathrm{mV}$$

$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}} = 0.1\,\mathrm{mV}\sqrt{\frac{5}{98986\,{}^\circ\mathrm{C}^2}} = 7.11 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{mV}/{}^\circ\mathrm{C}$$

La migliore retta che descrive i dati è quindi

$$y = (0.09 \pm 0.06)\,\mathrm{mV} + (0.041 \pm 0.001)\,\frac{\mathrm{mV}}{{}^\circ\mathrm{C}} x$$



8) ***Una pasticceria misura la massa di N=20 panettoni prodotti, ottenendo i risultati (in kg) in tabella:***

1.33	*1.11*	*1.20*	*1.07*	*1.10*	*1.07*	*1.27*	*1.13*	*1.25*	*1.17*
1.39	*1.09*	*1.30*	*1.16*	*1.19*	*1.16*	*1.18*	*1.37*	*1.18*	*1.38*

Calcolare media e deviazione standard. Determinare la compatibilità delle misure raccolte con una distribuzione gaussiana mediante il test del χ^2.

La media delle masse è

$$\overline{m} = \frac{\sum_{i=1}^{N=20} m_i}{N} = 1.205\,\text{kg}$$

La deviazione standard delle misure è

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N=20}(m_i - \overline{m})^2}{N-1}} = 0.104\,\text{kg}$$

$$\rightarrow m = (1.2 \pm 0.1)\,\text{kg}$$

Per eseguire il test del chi-quadro le misure devono essere divise in M intervalli: il corrispondente χ_0^2 è dato da

$$\chi_0^2 = \sum_{k=1}^{M} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

dove O_k è il numero di misure osservate nell'intervallo k-esimo e E_k è il numero di misure attese nell'intervallo k-esimo. Ipotizzando che le misure siano distribuite secondo una pdf Gaussiana,

$$E_k = N \cdot p(m \in \text{intervallo } k)$$

La probabilità $p(m \in \text{intervallo } k)$ che una misura cada nel k-esimo intervallo è data dall'integrale della Gaussiana in tale intervallo, che viene ricavato usando i valori tabulati. Una scelta conveniente per semplificare il calcolo degli E_k consiste nell'usare gli intervalli $(-\infty, \overline{m} - \sigma_m)$, $(\overline{m} - \sigma_m, \overline{m})$, $(\overline{m}, \overline{m} + \sigma_m)$, $(\overline{m} + \sigma_m, +\infty)$. Infatti poichè $p(\overline{m} - \sigma_m < m < \overline{m} + \sigma_m)$=0.68, si ha

$$p(\overline{m} < m < \overline{m} + \sigma_m) = p(\overline{m} - \sigma_m < m < \overline{m}) = 0.68/2 = 0.34$$

e

$$p(-\infty < m < \overline{m} - \sigma_m) = p(\overline{m} + \sigma_m < m < +\infty) = (1 - 0.68)/2 = 0.16$$

Da qui,

intervallo	O_k	E_k	$\frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$
$(-\infty, 1.101)$	4	3.2	0.20
(1.101,1.205)	9	6.8	0.71
(1.205,1.309)	3	6.8	2.12
$(1.309, +\infty)$	4	3.2	0.20

$$\rightarrow \chi_0^2 = \sum_{k=1}^{M=4} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = 3.23$$

I gradi di libertà del sistema sono $d = M - \nu = 4 - 3 = 1$, dove ν=3 è il numero di vincoli (numero di parametri ricavati dai dati e usati per calcolare gli E_k: in questo caso N, $\overline{m}$ e σ_m). Il chi-quadro ridotto è quindi $\widetilde{\chi}_0^2 = \chi_0^2/1 = 3.23$. La probabilità $p_1(\widetilde{\chi}^2 \geq \widetilde{\chi}_0^2)$ di ottenere un chi-quadro ridotto maggiore o uguale a quello osservato è circa l'8.3%, che rende i dati compatibili con l'ipotesi di distribuzione Gaussiana.

9) ***Si effettuano N=160 misure del tempo di caduta di un grave da una data quota. I risultati (in secondi) sono raccolti in intervalli come in tabella:***

intervallo [s]	***53.5-55.0***	***55.0-56.5***	***56.5-58.0***	***58.0-59.5***	***59.5-61.0***	***61.0-62.5***
numero di misure	***3***	***11***	***75***	***54***	***15***	***2***

Mediante il test del χ^2, valutare il livello di confidenza con cui le misure possono essere descritte con una distribuzione gaussiana con $\bar{t} = 58\,\text{s}$, $\sigma_t = 1.2\,\text{s}$ ***e normalizzazione determinata dai dati.***

Il χ_0^2 è dato da

$$\chi_0^2 = \sum_{k=1}^{M=6} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

dove O_k è il numero di misure osservate nell'intervallo k-esimo (quindi O_k=frequenza assoluta n_k) e E_k è il numero di misure attese nell'intervallo k-esimo. Ipotizziamo che le misure siano distribuite secondo la pdf Gaussiana con valor medio $\bar{t} = 58\,\text{s}$ e deviazione standard $\sigma_t = 1.2\,\text{s}$:

$$G_{\bar{t},\sigma_t}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma_t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}1.2} e^{-\frac{(t-58)^2}{2 \cdot 1.2^2}}$$

Gli E_k devono essere calcolati a partire dai valori tabulati dell'integrale della pdf Gaussiana negli intervalli di tempo riportati in tabella nel testo.

$$E_k = N \cdot p(t \in \text{intervallo } k) = N \cdot \int_{\text{intervallo k-esimo}} G_{\bar{t},\sigma_t}(t)\,dt$$

Ad esempio per il primo intervallo $[53.5\,\text{s}, 55\,\text{s}] = [\bar{t} - 3.75\sigma_t, \bar{t} - 2.50\sigma_t]$ abbiamo

$$E_1 = 160 \cdot \int_{\bar{t}-3.75\sigma_t}^{\bar{t}-2.50\sigma_t} G_{\bar{t},\sigma_t}(t)\,dt = 160 \cdot \Big(\frac{1}{2}\int_{\bar{t}-3.75\sigma_t}^{\bar{t}+3.75\sigma_t} G_{\bar{t},\sigma_t}(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{\bar{t}-2.50\sigma_t}^{\bar{t}+2.50\sigma_t} G_{\bar{t},\sigma_t}(t)\,dt\Big) =$$

$$= 160 \cdot (\frac{0.9997}{2} - \frac{0.9876}{2}) = 0.97$$

Per il secondo intervallo $[55.0\,\mathrm{s}, 56.5\,\mathrm{s}] = [\bar{t} - 2.50\sigma_t, \bar{t} - 1.25\sigma_t]$,

$$E_2 = 160 \cdot \int_{\bar{t}-2.50\sigma_t}^{\bar{t}-1.25\sigma_t} G_{\bar{t},\sigma_t}(t)dt = 160 \cdot \Big(\frac{1}{2}\int_{\bar{t}-2.50\sigma_t}^{\bar{t}+2.50\sigma_t} G_{\bar{t},\sigma_t}(t)dt - \frac{1}{2}\int_{\bar{t}-1.25\sigma_t}^{\bar{t}+1.25\sigma_t} G_{\bar{t},\sigma_t}(t)dt\Big) =$$

$$= 160 \cdot (\frac{0.9876}{2} - \frac{0.7887}{2}) = 15.91$$

Ripetendo un simile procedimento per tutti gli intervalli,

intervallo	53.5,55.0	55.0,56.5	56.5,58.0	58.0,59.5	59.5,61.0	61.0,62.5
intervallo in σ_t	-3.75,-2.50	-2.50,-1.25	-1.25,0.00	0.00,1.25	1.25,2.50	2.50,3.75
O	3	11	75	54	15	2
E	0.97	15.91	63.10	63.10	15.91	0.97

$$\rightarrow \chi_0^2 = \sum_{k=1}^{M=6} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = 10.5$$

Con un vincolo (il numero totale delle misure - la media e la deviazione standard sono fornite nel testo, non ricavate dai dati), il chi-quadro ridotto è

$$\widetilde{\chi}_0^2 = \frac{10.5}{5} = 2.1$$

Con $p_5(\widetilde{\chi}^2 \geq \widetilde{\chi}_0^2) \simeq 7\%$ concludiamo che le misure possono essere descritte dalla Gaussiana con valor medio 58 s e deviazione standard 1.2 s al 7% di confidenza.