Propagazione delle onde su una corda vibrante

Ali Matteo,
Broggi Diana, Cantarini Giulia

Lo scopo dell'esperienza

La propagazione di onde elastiche trasversali in un mezzo è un fenomeno fisico che coinvolge molte variabili; lo scopo dell'esperienza era verificare la dipendenza della frequenza a cui si instaurano le armoniche stazionarie dalle caratteristiche fisiche delle corde utilizzate e dalla tensione applicata.
L'apparato sperimentale a dispozione per lo svolgimento dell'esperienza permetteva di provocare una perturbazione periodica ad una corda tesa in regime stazionario.

1 frequenze e numero di armonica

Se la corda è fissata agli estremi (propagazione in regime stazionario), l'onda periodica che parte da un estremo interferisce con quella che ha invertito la sua direzione quando ha incontrato il vincolo all'altro estremo. La figura osservata risultata dall'interferenza di questi due fenomeni ondulatori può essere descritta dalla funzione di spazio e tempo $y(x,t) = 2Asin(kx)cos(\omega t)$.

La prima parte dell'esperimento consisteva nel verificare la dipendenza della frequenza a cui si instaura un'armonica, dal numero n relativo all'armonica stessa. Ci aspettiamo una dipendenza lineare perchè, fissata L, n determina una precisa λ ($kL = \pi n$ dalla condizione che in x=L y(x, t) = 0), quindi per ogni n si otterrà una specifica frequenza data da

$$\nu_n = \frac{1}{T_n} = \frac{1}{\frac{\lambda_n}{v}} = \frac{nv}{2L}$$

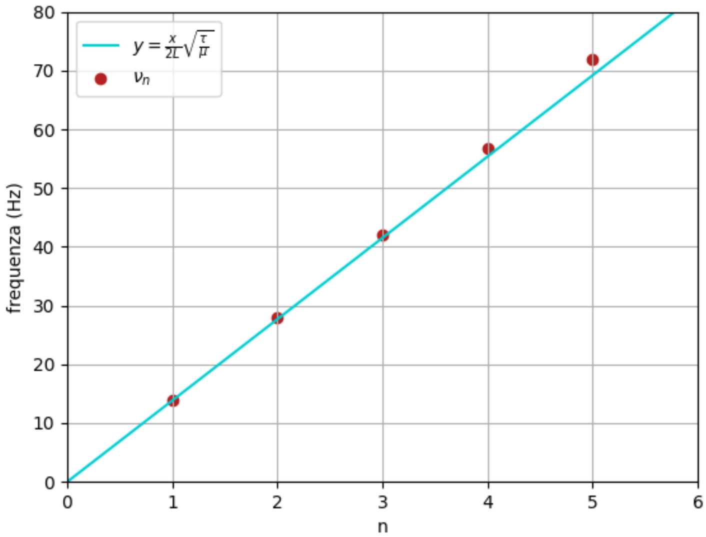
.

1.1 dati raccolti

L'oscillatore elettromeccanico era pilotato da un generatore di funzioni. Variando la frequenza con le manopole del generatore, siamo riusciti ad osservare l'instaurarsi dell'armonica secondaria e delle successive facilmente; la ricerca della frequenza per l'armonica fondamentale (figura priva di nodi) ha richiesto una previsione preventiva del valore approssimativo.

armonica	frequenza (Hz)
fondamentale	13.88
seconda	27.89
terza	42.13
quarta	56.85
quinta	71.87

riportando tali valori in un grafico otteniamo, come atteso, una retta passante per l'origine con coefficiente angolare postivo ($\frac{v}{2L}$).



Il grafico in azzurro rappresenta la funzione $y = \frac{x}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$ dove $x = n$ e le costanti sono $\mu = 0.0022$Kg/m la massa lineare $\tau = 1.962$ N la tensione ed L = 1.08 metri.

Verifichiamo l'ipotesi che le nostre misure siano in relazione lineare attraverso il calcolo del coefficiente di correlazione lineare:

$$r = \frac{\sum(n_i - \bar{n})(\nu_i - \bar{\nu})}{\sqrt{(\sum n_i - \bar{n})^2(\sum \nu_i - \bar{\nu})^2}} = 0.99989$$

Poichè la probabilità che 5 misure non correlate diano $|r| \geq 0.99996$ è$\simeq$ 0%(da valori tabulati) consideriamo accettabile l'ipotesi.

Utilizzando il metodo dei minimi quadrati è possibile stimare i parametri della retta che rappresenta al meglio questi dati al fine di ricavarvi una stima della velocità di propagazione v dell'onda sulla corda (altrimenti calcolabile attraverso la formula: $v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$).

τ rappresenta la tensione a cui è sottoposta la corda; nel nostro esperimento, coincide con la forza peso del pesetto agganciato all'estremità della corda opposta all'oscillatore elettromeccanico.

Il pesetto utilizzato corripondeva ad una massa di 0.201 kg,
le misure della massa in grammi ottenute con la bilancia sono:

m(g)	201.10	201.11	201.11	201.09	201.10

μ è invece la densità lineare della corda.

Per queste osservazioni abbiamo usato una corda di lunghezza 1.743 metri, e massa 0.00383 Kg,
le misure ottenute col metro a nastro per la corda viola sono:

l(m)	1.745	1.740	1.743	1.745	1.740

le misure della massa in grammi ottenute per la corda viola sono:

m(g)	3.82	3.83	3.83	3.82	3.84	3.83

1.2 stima della velocità di propagazione

Da questi dati siamo riusciti a calcolare un valore atteso per la velocità, che corrisponde a

$$v = \sqrt{\frac{gm_{peso}}{\frac{l_{corda}}{m_{corda}}}} = 29.967m/s$$

Invece la velocità risultata dall'interpolazione del grafico è:

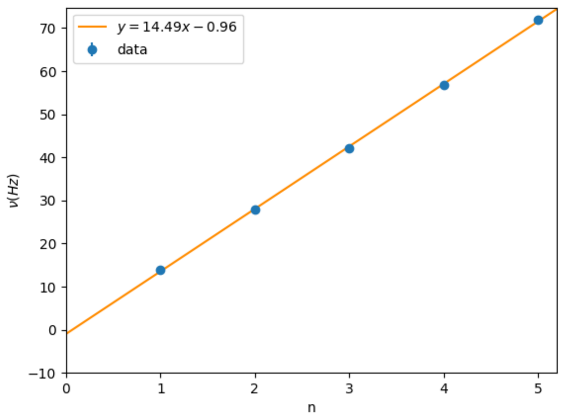
$$v = B2 \cdot L = 2B1.08 = 31.307m/s$$

dove B è il coefficiente angolare stimato attraverso l'interpolazione lineare

$$B = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \pm \sqrt{\frac{N}{\Delta}}\sigma_i = (14.494 \pm 0.003)Hz$$

$$A = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum y_i x_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \pm \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}}\sigma_i = (-0.958 \pm 0.01)Hz$$

l'incertezza $\sigma_i = 0.01Hz$ considerata è pari all'incertezza dello strumento e 1.08 m è la distanza tra i due nodi estremi.



Notiamo che, considerando solo l'incertezza dello strumento, l'incertezza su B risulta bassa e questo rende impedisce di considerare accettabile la discrepanza tra le velocità. Per questo motivo abbiamo stimato le σ_y a posteriori attraverso la formula:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum(y_i - A - Bx_i)^2}{N-2}} = 0.39Hz$$

questa stima effettuata a posteriori è giustificata dall'assunzione che le misure abbiano effettiamente una correlazione lineare e che gli errori sulle y siano tutti uguali e di tipo gaussiano.
Così facendo abbiamo ottenuto $B = (14.49 \pm 0.12)Hz$ e calcolato nuovamente v:

$$v = B2L \pm 2L\sigma_B = 31.3 \pm 0.3m/s$$

Il rapporto $\frac{|v_{attesa} - v_{osservata}|}{\sigma_v}$ risulta 4, quindi la differenza tra la v osservata e quella aspettata NON è accettabile se si considerano solo errori casuali (percentuale $< 0.3\%$).

2 frequenze e tensione

Durante la prima parte dell'esperimento la corda è stata sottoposta alla tensione costante dovuta al pesetto da 200g; aggiungendo altri pesetti, abbiamo potuto osservare come la tensione influenza i valori delle frequenze relative alle varie armoniche.
Per la seconda parte dell'esperimento abbiamo preso in considerazione esclusivamente la seconda armonica, e studiato come il valore della frequenza corrispondente varia al variare della tensione.

2.1 dati raccolti

Le masse dei pesetti sono state misurate più volte con una bilancia, i valori in grammi di cui è stata calcolata la media sono:

pesetto 1:

m(g)	201.10	201.11	201.11	201.09	201.10

pesetto 2:

m(g)	350.59	350.58	350.50	350.55	350.57

pesetto 3:

m(g)	450.96	450.95	450.96	450.96	450.97

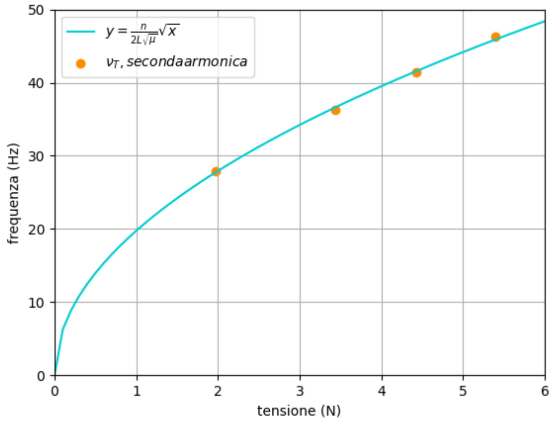
pesetto 4:

m(g)	550.50	550.51	550.50	550.50	550.51

Di sotto riportiamo una tabella riassuntiva con i valori ottenuti per le frequenze:

$tensione/(9.81m/s^2)$ (Kg)	frequenza (Hz)
0.201	27.89
0.351	36.29
0.451	41.46
0.551	46.23

Abbiamo riportato tramite i punti in arancione la distribuzione delle frequenze osservate in funzione tensione(massa del pesetto moltiplicata per g):



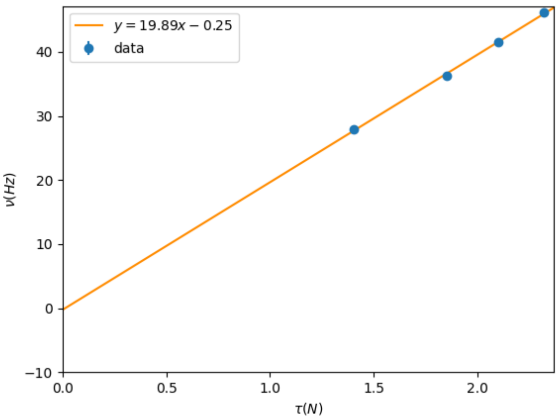
Il grafico in azzurro rappresenta la funzione $y = \frac{n}{2L\sqrt{\mu}}\sqrt{x}$ dove $x = \tau$ e le costanti sono $\mu = 0.0022$ Kg/m, la massa lineare della corda viola ed L = 1.08 metri come nella prima parte dell'esperimento.

Per verificare la relazione lineare tra ν e $\sqrt{\tau}$ abbiamo calcolato il coefficiente di correzione lineare:

$$r = \frac{\sum(\sqrt{\tau}_i - \bar{\sqrt{\tau}})(\nu_i - \bar{\nu})}{\sqrt{(\sum \sqrt{\tau}_i - \bar{\sqrt{\tau}})^2 (\sum \nu_i - \bar{\nu})^2}} = 0.9993$$

La probabilità che 4 misure non correlate diano $|r| \geq 0.9993$ è$\simeq 0\%$, consideriamo accettabile l'ipotesi.
I parametri della retta che descrive al meglio la relazione tra le misure osservate sono stati calcolati con il metodo dei minimi quadrati (formula riportata sopra):

$$B = 19.888 \pm 0.015 \frac{1}{\sqrt{mKg}}$$
$$A = -0.249 \pm 0.029 Hz$$



.

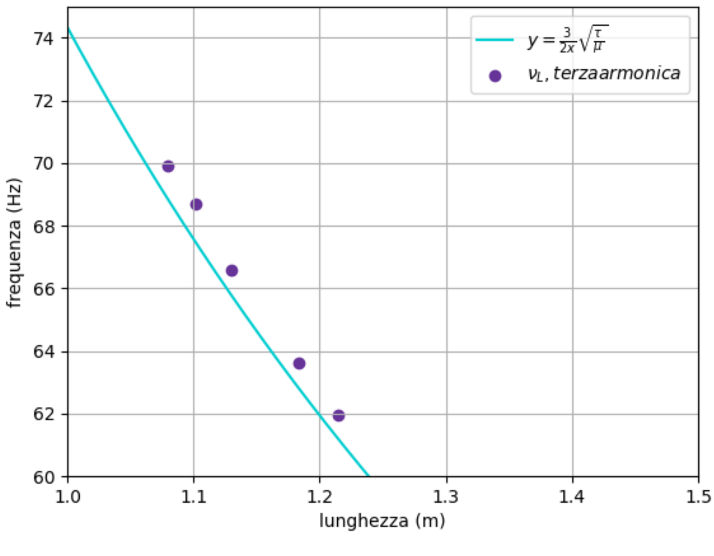
3 frequenze e lunghezza

Variando la distanza tra i nodi estremi, ovvero la lunghezza L della frazione di corda che oscilla, possiamo osservare un rapporto di proporzionalità inversa tra questa e la frequenza relativa a ciascuna armonica; nel nostro esperimento abbiamo ricercato la frequenza per la terza armonica per diversi valori di L.

3.1 dati raccolti

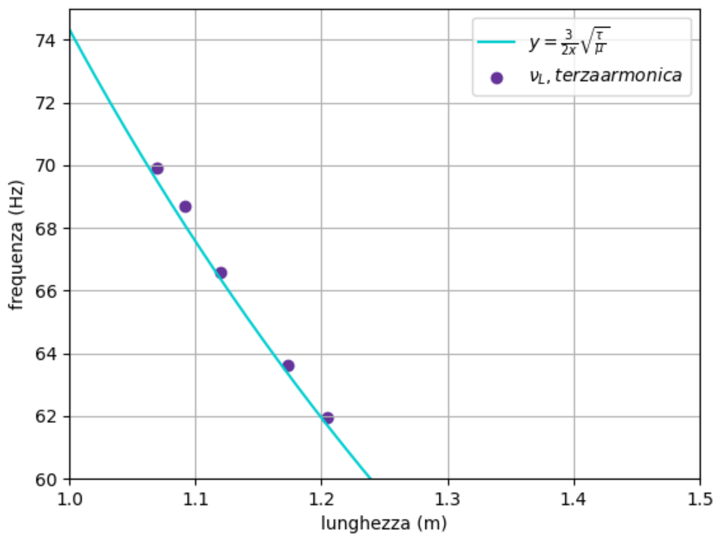
lunghezza (cm)	frequenza (Hz)
108.0	69.90
110.2	68.68
113.0	66.60
118.3	63.60
121.5	61.96

da tali dati osserviamo già che all'aumentare della lunghezza si ha una diminuzione della frequenza a cui si ottiene la terza armonica; ma vediamo come questi si accordano con la funzione prevista:



Notiamo che i punti non si posizionano correttamente sul grafico di $y = \frac{3}{2x}\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$, sono tutti spostati al di sopra. Questo mette in evidenza un errore sistematico probabilmente dovuto allo scivolamento dell'apparato sul piano durante l'esecuzione di questa parte dell'esperimento.

Se assumiamo un accorciamento di L, dovuto a questo fenomeno, di 1cm e correggiamo i dati modificando i valori delle ascisse si ottiene il grafico corretto:



Per verificare la relazione lineare tra ν e $\frac{1}{L}$ abbiamo calcolato il coefficiente di correzione lineare:

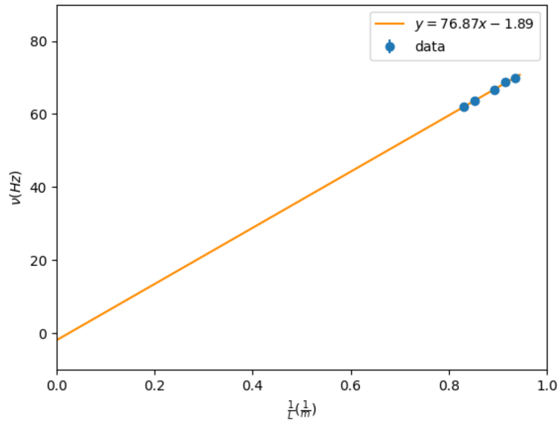
$$r = \frac{\sum(\frac{1}{L}_i - \bar{\frac{1}{L}})(\nu_i - \bar{\nu})}{\sqrt{(\sum \frac{1}{L}_i - \bar{\frac{1}{L}})^2(\sum \nu_i - \bar{\nu})^2}} = 0.9993$$

La probabilità che 5 misure non correlate diano $|r| \geq 0.9993$ è$\simeq 0\%$, consideriamo accettabile l'ipotesi.
I parametri della retta che descrive al meglio la relazione tra le misure osservate sono stati calcolati con il metodo dei minimi quadrati (formula riportata sopra):

$$B = 76.867 \pm 0.12\frac{Nm}{Kg}$$

$$A = -1.888 \pm 0.10Hz$$

.



4 frequenze e massa lineare

Il fenomeno di propagazione di un'onda meccanica lungo una corda dipende chiaramente anche dalle caratteristiche fisiche della corda stessa, ovvero del mezzo di propagazione. In particolare è interessante osservare come variano le frequenze caratteristiche fino ad ora considerate in funzione della massa della corda per unità di lunghezza.
Per questa ultima parte dell'esperimento abbiamo considerato due nuove corde oltre a quella viola, di cui abbiamo già riportato massa e lunghezza nel primo paragrafo.

4.1 dati raccolti

La corda bianca ha massa pari a 0.000725 Kg, le misure in grammi ottenute con la bilancia sono:

m(g)	0.73	0.73	0.72	0.72	0.73	0.72

tale è lunga 1.6012 metri, le misure in centimetri che abbiamo ricavato col metro a nastro sono:

l(cm)	160.0	160.5	160.2	159.9	160.0

La corda rosa invece pesa 0.0126 Kg, le misure in grammi che abbiamo ottenuto con la bilancia sono: .

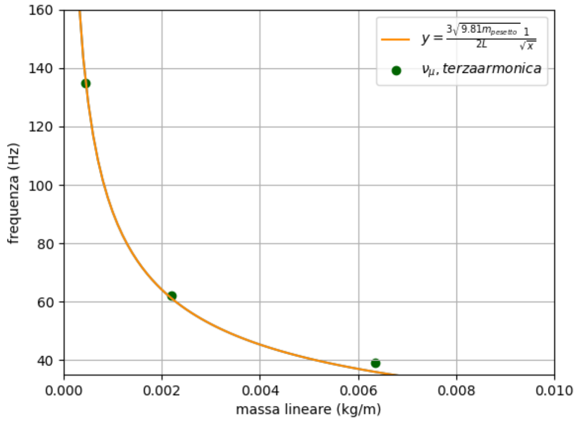
m(g)	12.56	12.57	12.56	12.56	12.58	12.57

l'ultima corda è lunga complessivamente 1.979 metri, le misure effettuate sono in centimetri:

l(cm)	197.5	198.3	198.0	197.7	198.0

Questi dati ci permettono di calcolare la massa lineare di ogni corda, così che sia possibile riportare il grafico che mostra la dipendenza di una frequenza caratteristica (noi abbiamo scelto quella che genera la terza armonica) da μ.

corda	μ (Kg/m)	frequenza (Hz)
bianca	0.00045279	134.9
viola	0.00219691	61.96
rosa	0.00635001	39.26



Il tratto in arancione coincide con la funzione $y = \frac{3\sqrt{9.81 m_{pesetto}}}{2L}\frac{1}{\sqrt{x}}$ dove le costanti sono L = 121.5 cm e $m_{pesetto} = 0.551$ Kg.
Per verificare la relazione lineare tra ν e $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ abbiamo calcolato il coefficiente di correzione lineare:

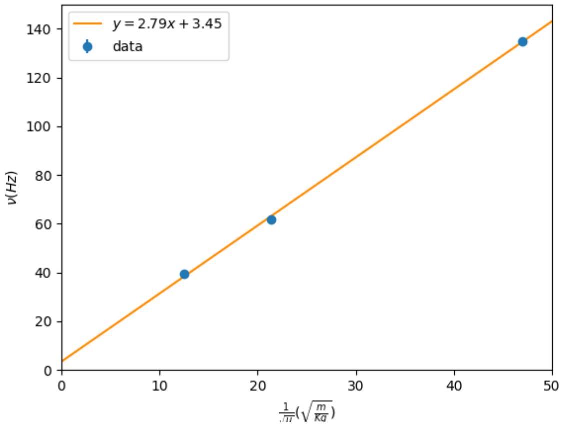
$$r = \frac{\sum(\frac{1}{\sqrt{\mu}}_i - \bar{\frac{1}{\sqrt{\mu}}})(\nu_i - \bar{\nu})}{\sqrt{(\sum \frac{1}{\sqrt{\mu}}_i - \bar{\frac{1}{\sqrt{\mu}}})^2 (\sum \nu_i - \bar{\nu})^2}} = 0.9998$$

La probabilità che 3 misure non correlate diano $|r| \geq 0.9998$ è$\simeq 0\%$, consideriamo accettabile l'ipotesi.
I parametri della retta che descrive al meglio la relazione tra le misure osservate sono stati calcolati con il metodo dei minimi quadrati (formula riportata sopra):

$$B = 2.7914 \pm 0.0004 \frac{\sqrt{N}}{m}$$

$$A = 3.452 \pm = 0.012 Hz$$

.



La scrittura di un apposito programma Python ha permesso lo svolgimento dell'analisi dati e la generazione dei grafici esposti