

Circuiti 1

Diana Broggi, Giulia Cantarini, Paolo Falconelli

Laboratorio di fisica II

Indice

1	Introduzione	2
2	Strumentazione	2
3	Parte prima	2
3.1	Stima resistenza interna del Voltmetro	2
3.2	Stima resistenza interna dell'Amperometro	4
3.3	Verifica della legge di Ohm	6
3.4	Misura di resistenze composite	8
4	Parte seconda	12
4.1	Partitore resistivo - configurazione senza carico	13
4.2	Partitore resistivo - configurazione con il carico	14
4.3	Partitore resistivo - trasferimento di potenza sul carico	15
5	Parte terza	18
5.1	Caratterizzazione corrente-tensione di un dispositivo non lineare	18

1 Introduzione

In questa esperienza abbiamo studiato i circuiti alimentati a corrente continua per verificare alcune leggi fondamentali che caratterizzano componenti quali resistori (conduttori Ohmici) e diodi (semiconduttori, non Ohmici).

2 Strumentazione

Per costruire i circuiti necessari abbiamo potuto usufruire di:

- un alimentatore, per fornire tensione al circuito.
- un multimetro da banco utilizzato come Amperometro per la misura delle correnti (data la sua alta sensibilità ai bassi amperaggi).
- un multimetro palmare per la misura della tensione applicata (sensibilità 0.001V per voltaggi compresi tra 0.1V e 10V) e delle resistenze (sensibilità variabile).
- una breadboard, munita di piste conduttive e di due boccole per l'alimentazione.
- dei cavetti con connettore a banana per collegare gli strumenti al circuito.
- dei resistori e una scatola delle resistenze variabili (con resistenza interna di 0.2Ω ed errore relativo dell'1% sul valore segnalato).
- un diodo.

3 Parte prima

Inizialmente abbiamo stimato le resistenze parassita di Voltmetro e Amperometro, dal momento che la risoluzione di ogni circuito deve comprendere l'analisi degli effetti degli strumenti di misura sulla corrente che scorre attraverso di essi. In seguito abbiamo eseguito la verifica della legge di Ohm e la misura caratteristica corrente-tensione di due resistori in parallelo ed in serie.

3.1 Stima resistenza interna del Voltmetro

Metodo adottato

Supponiamo che la resistenza del Voltmetro sia dell'ordine dei $M\Omega$, siccome un'alta resistenza interna è un requisito fondamentale per uno strumento di misura che va posto in parallelo al tratto di interesse; per stimarla abbiamo impostato la configurazione in Figura 1, scegliendo valori per R che fossero paragonabili a quello atteso per R_V .

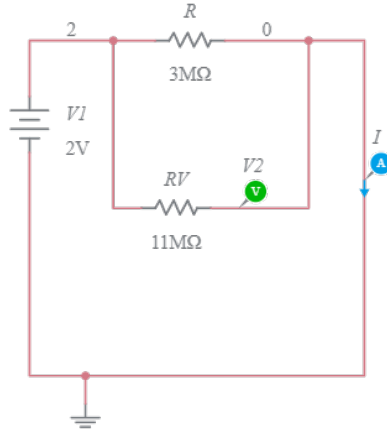


Figura 1

Abbiamo preferito non utilizzare la breadboard, la componente resistiva è stata rappresentata dalla scatola delle resistenze variabili.

Dati raccolti

Abbiamo variato R utilizzando valori di qualche $M\Omega$, misurato la corrente nel circuito e la tensione ai capi della resistenza, che abbiamo tenuto costante durante tutto il processo.

Per la tensione stimiamo un errore pari a $0.01V$, sebbene la sensibilità strumentale fosse dieci volte più piccola. Abbiamo infatti notato che l'ultima cifra variava significativamente durante una singola misurazione, dunque non riteniamo accurata la scelta di una misura eccessivamente precisa. Per l'intensità invece sono state effettuate 4 misure e poi eseguita una media. L'errore sulle resistenze è dato dall'errore strumentale pari all'1% della misura selezionata.

misure per la determinazione di R_V

n misura	Resistenza [$M\Omega$]	Intensità [μA]				Voltaggio [V]
#1	1.00 ± 0.01	2.475	2.478	2.476	2.477	2.29 ± 0.01
#2	4.00 ± 0.04	0.775	0.776	0.778	0.774	2.29 ± 0.01
#3	2.50 ± 0.03	1.104	1.107	1.106	1.105	2.29 ± 0.01
#4	3.30 ± 0.03	0.901	0.902	0.903	0.904	2.29 ± 0.01

Analisi dati

Abbiamo innanzitutto stimato la media e l'errore sulla media associati alle misure dell'intensità con

$$\bar{I} = \frac{\sum I_i}{N} \quad \sigma_{\bar{I}} = \frac{\sigma_I}{\sqrt{N}}$$

notando che l'incertezza risultava sempre inferiore alla sensibilità dello strumento (pari a $0.001\mu A$), abbiamo eseguito i calcoli successivi ponendo $\sigma_I = 0.001\mu A$.

Così facendo abbiamo stimato la resistenza equivalente del circuito grazie alla legge di Ohm

$$R_{eq} = \frac{V}{\bar{I}} \quad \sigma_{Req} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{\bar{I}}\right)^2 + \left(\frac{V \cdot \sigma_I}{\bar{I}^2}\right)^2}$$

Sfruttando la relazione per le resistenze in parallelo abbiamo ottenuto la resistenza parassita del voltmetro, il tutto per ognuna delle resistenze variata nel corso dell'esperimento.

$$\frac{1}{R_V} = \frac{1}{R_{eq}} - \frac{1}{R}$$

$$\sigma_{R_V} = \sqrt{\left(\left(\frac{R^2}{(R - R_{eq})^2} \cdot \sigma_{Req}\right)^2 + \left(\frac{R_{eq}^2}{(R_{eq} - R)^2} \sigma_R\right)^2\right)}$$

Riportiamo in tabella i risultati ottenuti:

n misura	I[μA]	$R_{eq}[V]$	$R_V[V]$
#1	2.4765 ± 0.0006	0.923 ± 0.004	12 ± 2
#2	0.7758 ± 0.0009	2.95 ± 0.01	11.3 ± 0.4
#3	1.1055 ± 0.0006	2.071 ± 0.009	12.1 ± 0.8
#4	0.9025 ± 0.0006	2.54 ± 0.01	11.0 ± 0.4

per i calcoli abbiamo utilizzato $\sigma_I = 0.001m\mu A$

Alla luce di questi risultati, ognuno affetto dalla sua incertezza, siamo riusciti a stimare la resistenza del voltmetro tramite una media pesata

$$R_V = \sum_i^4 \frac{R_{Vi}/\sigma_{R_{Vi}}^2}{1/\sigma_{R_{Vi}}^2} \quad \sigma_{R_V} = \sqrt{\frac{1}{\sum_i^4 1/\sigma_{R_{Vi}}^2}}$$

$$\Rightarrow \bar{R}_V = 11.26 \pm 0.06 M\Omega$$

3.2 Stima resistenza interna dell'Amperometro

Metodo adottato

Per stimare la resistenza parassita del multimetro da banco abbiamo cambiato la configurazione del circuito, collegando in serie la resistenza nota e l'amperometro. Questa volta le resistenze selezionate sono dell'ordine di pochi Ohm, per accordarsi con il valore che ci aspettiamo per R_A .

Sicché il valore indicato sulla resistenza variabile non è accurato in caso di resistenze dell'ordine degli Ω , ci siamo assicurati, in questi casi, di stimare la resistenza con il multimetro palmare, la cui sensibilità per i valori d'interesse è di 0.1Ω .

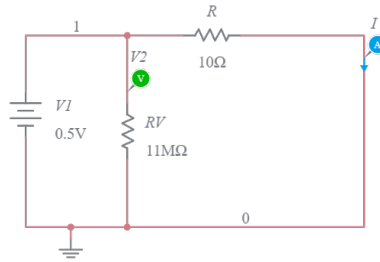


Figura 2

Dati raccolti

La raccolta dati è stata effettuata in maniera analoga all'esperimento precedente.

misure per la determinazione di R_A

n misura	Resistenza[Ω]	Intensità [mA]				Vtaggio [V]
#1	10.5 ± 0.1	42.871	42.871	42.869	42.870	0.55 ± 0.01
#2	23.7 ± 0.1	21.035	21.034	21.036	21.036	0.55 ± 0.01
#3	37.7 ± 0.1	13.677	13.678	13.677	13.678	0.54 ± 0.01
#4	3.5 ± 0.1	93.901	93.887	93.924	93.918	0.54 ± 0.01

Analisi dati

Usando la legge di Ohm, abbiamo calcolato la resistenza equivalente e stimato il suo errore

$$R_{eq} = \frac{V}{I} \quad \sigma_{Req} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{I}\right)^2 + \left(\frac{V \cdot \sigma_I}{I^2}\right)^2}$$

Sfruttando la relazione tra le resistenze collegate in serie, abbiamo potuto ricavare la resistenza parassita dell'ampmetro e la rispettiva incertezza.

$$R_A = R_{eq} - R$$

$$\sigma_{RA} = \sqrt{\sigma_{Req}^2 + \sigma_R^2}$$

Di seguito riportiamo i risultati ottenuti per ciascuna delle misure:

n misura	I[mA]	$R_{eq}[\Omega]$	$R_A[\Omega]$
#1	42.8702 \pm 0.0005	12.7 \pm 0.2	2.2 \pm 0.3
#2	21.0353 \pm 0.0005	26.0 \pm 0.5	2.3 \pm 0.5
#3	13.6775 \pm 0.0003	39.6 \pm 0.7	1.9 \pm 0.7
#4	93.908 \pm 0.008	5.8 \pm 0.1	2.3 \pm 0.1

per i calcoli abbiamo utilizzato $\sigma_I = 0.001mA$

La miglior stima di R_A è data dalla media pesata dei valori ottenuti e risulta:

$$R_A = \sum_i^4 \frac{R_{Ai}/\sigma_{R_{Ai}}^2}{1/\sigma_{R_{Ai}}^2} \quad \sigma_{R_A} = \sqrt{\frac{1}{\sum_i^4 1/\sigma_{R_{Ai}}^2}}$$

$$\Rightarrow \bar{R}_A = 2.25 \pm 0.01\Omega$$

3.3 Verifica della legge di Ohm

La legge di Ohm è una legge sperimentale che regola l'andamento della corrente-tensione caratteristica dei cosiddetti conduttori Ohmici:

$$V = R \cdot I$$

Metodo adottato

Mantenendo la configurazione adottata in precedenza per stimare R_V , si veda la Figura 1, variando la tensione per 20 volte abbiamo misurato l'intensità di corrente I. Con tale set di dati abbiamo potuto tracciare un grafico ed eseguire l'interpolazione necessaria a verificare l'andamento V(I) supposto.

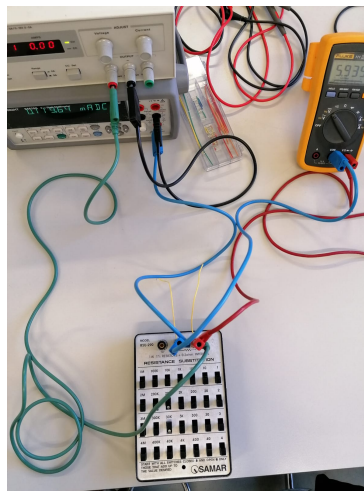


Figura 3: realizzazione in laboratorio del circuito

Come rappresentato in figura , il Voltmetro è stato posto in parallelo alla resistenza variabile, ipostata su $50k\Omega \ll R_V$, e la corrente è stata misurata tramite il collegamento in serie (cavo blu di sinistra) con l'Amperometro.

Dati raccolti

Per ogni valore di V impostato, abbiamo raccolto 4 misure di I , di cui abbiamo calcolato valor medio e rispettivo errore. Per V stimiamo invece un errore pari a $0.01V$, una scelta già discussa in precedenza.

dati raccolti per la verifica della legge di Ohm

Voltaggio[V]	Intensità $[\mu A]$				I media $[\mu A]$
1.50±0.01	30.140	30.139	30.138	30.140	30.1393 ± 0.0005
2.01±0.01	40.408	40.410	40.411	40.409	40.4095 ± 0.0006
2.50±0.01	50.376	50.375	50.373	50.376	50.375 ± 0.0007
2.98±0.01	60.073	60.074	60.075	60.071	60.0732 ± 0.0009
3.46±0.01	69.687	69.688	69.689	69.700	69.691 ± 0.003
3.98±0.01	80.098	80.097	80.096	80.098	80.0973 ± 0.0005
4.47±0.01	90.122	90.123	90.124	90.121	90.1225 ± 0.0006
4.95±0.01	99.796	99.797	99.794	99.793	99.795 ± 0.0009
5.48±0.01	110.353	110.354	110.355	110.357	110.355 ± 0.0009
5.94±0.01	119.64	119.63	119.63	119.64	119.635 ± 0.003
6.42±0.01	129.35	129.36	129.35	129.36	129.355 ± 0.003
6.95±0.01	139.90	139.89	139.90	139.89	139.895 ± 0.003
7.44±0.01	149.70	149.71	149.70	149.71	149.705 ± 0.003
7.94±0.01	159.63	159.62	159.63	159.62	159.625 ± 0.003
8.43±0.01	169.63	169.62	169.62	169.63	169.625 ± 0.003
8.93±0.01	179.60	179.61	179.60	179.61	179.605 ± 0.003
9.42±0.01	189.56	189.55	189.56	189.55	189.555 ± 0.003
9.91±0.01	199.26	199.27	199.26	199.27	199.265 ± 0.003
10.43±0.01	209.88	209.92	209.90	209.89	209.897 ± 0.009
11.01±0.01	219.45	219.46	219.45	219.46	219.455 ± 0.003

Analisi dati

Abbiamo costruito un grafico di V in funzione di I , eseguendo il fit con l'equazione $y = p_0x + p_1$.

Abbiamo tenuto in considerazione le incertezze sulle y , ma anche un errore pari a $0.001\mu A$ sulle x e propagato quest'ultimo sulle y con la formula $\sigma_y^2 = \sigma_y^2 + p_0^2\sigma_x^2$ (a seguito di una stima preliminare di p_0 , eseguita trascurando σ_x).

Si noti che non tutte le σ_I calcolate in precedenza corrispondono a $0.001\mu A$, ma rappresentano ad ogni modo un errore trascurabile rispetto a quello sulle y , quindi trascuriamo questa differenza.

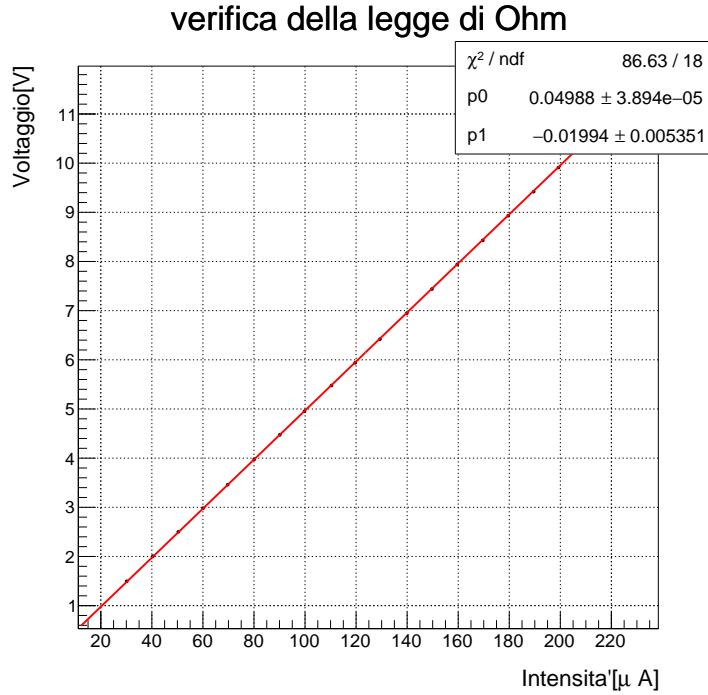


Figura 4: funzione utilizzata per l'interpolazione: $y = p_0x + p_1$

Il coefficiente angolare della retta risulta $p_0 = 49.897 \cdot 10^{-3} \pm 4 \cdot 10^{-6} M\Omega = 49.897 \pm 4 \cdot 10^{-3} k\Omega$; mentre l'intercetta è pari a $p_1 = -0.0211 \pm 0.0005 V$, quindi essendo $\simeq 0$, identifica una retta passante per l'origine, come previsto.

Dal momento che il test del chi quadro non permette di ottenere un risultato accettabile per questo fit, supponiamo di aver sottostimato le incertezze sulle y, possiamo però stimare a posteriori l'errore sulle y grazie alla formula seguente

$$\hat{\sigma}_y = \sigma_y \cdot \sqrt{\frac{\chi^2}{Ndf}} \Rightarrow \hat{\sigma}_y = 0.02V$$

Per concludere questa verifica, osserviamo che il coefficiente angolare stimato corrisponde alla resistenza impostata all'inizio, pari a $50k\Omega$, con una probabilità di successo pari all' 11%:

$$t = \frac{|p_0 - R|}{\sigma_{po}} = \frac{|49.897 - 50|}{4 \cdot 10^{-3}} = 1.6 \rightarrow PValue = 11\%$$

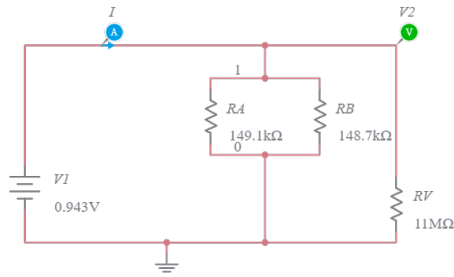
Una compatibilità accettabile, ma che sarebbe risultata più soddisfacente se avessimo stimato fin da subito le incertezze sulle y con un valore maggiore.

3.4 Misura di resistenze composite

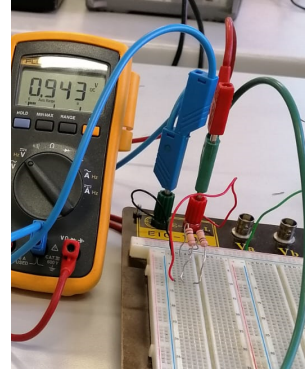
Al fine di verificare le ben note formule per il calcolo delle resistenze equivalenti di un circuito abbiamo costruito, con l'utilizzo della breadboard, 2 circuiti molto semplici, di cui riportiamo gli schemi in Figura 5 e in Figura 6.

Metodo adottato

Abbiamo scelto 2 resistenze tra quelle a disposizione da poter inserire nella breadboard; la scelta è stata dettata dalla necessità di ottenere una resistenza equivalente notevolmente inferiore rispetto a $R_V = \text{resistenza del Voltmetro}$, precedentemente stimata come $11.26 \pm 0.06 M\Omega$.

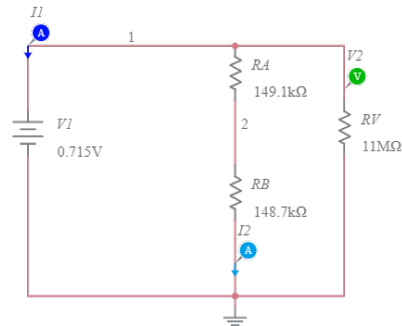


(a) schema circuito

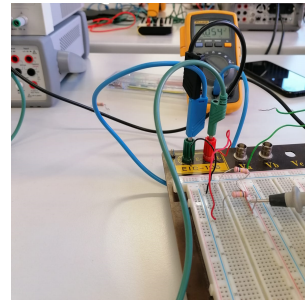


(b) realizzazione in laboratorio

Figura 5: resistenze in parallelo



(a) schema circuito



(b) realizzazione in laboratorio

Figura 6: resistenze in serie

Abbiamo operato variando il voltaggio del generatore e raccolto i diversi valori di corrente misurati, così da poter ricavare una stima per R_{eq} da poter confrontare con quella attesa ricavata tramite le formule:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} \quad (1)$$

$$R_{eq} = R_A + R_B \quad (2)$$

Dati raccolti

Le resistenze selezionate sono: $R_A = 149.1 \pm 0.1 k\Omega$ e $R_B = 148.7 \pm 0.1 k\Omega$, misurate tramite il multimetro palmare impostato temporaneamente sulla misura di una resistenza.

Riportando il multimetro palmare sull'impostazione per misurare il voltaggio e ruotando la manopola del generatore di tensione, abbiamo ricavato i seguenti valori:

misure per R_A e R_B in parallelo

Voltaggio[V]	Intensità $[\mu A]$				I media $[\mu A]$
0.94±0.01	12.745	12.747	12.746	12.742	12.745 ± 0.001
1.48±0.01	19.941	19.939	19.940	19.939	19.9397 ± 0.0005
2.01±0.01	27.201	27.202	27.203	27.200	27.2015 ± 0.0006
2.50±0.01	33.759	33.757	33.758	33.759	33.7583 ± 0.0005
3.10±0.01	41.858	41.856	41.854	41.857	41.8563 ± 0.0009
3.53±0.01	47.768	47.766	47.767	47.768	47.7672 ± 0.0005
4.18±0.01	56.544	56.545	56.546	56.542	56.5442 ± 0.0009
4.58±0.01	61.919	61.920	61.918	61.921	61.9195 ± 0.0006
5.16±0.01	69.768	69.770	69.769	69.771	69.7695 ± 0.0006

misure per R_A e R_B in serie

Voltaggio[V]	Intensità $[\mu A]$				I media $[\mu A]$
0.72±0.01	2.466	2.467	2.468	2.465	2.4665± 0.0006
1.26±0.01	4.339	4.336	4.337	4.336	4.3370± 0.0007
1.79±0.01	6.156	6.158	6.159	6.157	6.1575± 0.0006
2.32±0.01	7.995	7.998	7.994	7.996	7.9958± 0.0009
2.93±0.01	10.095	10.093	10.092	10.094	10.0935± 0.0006
3.30±0.01	11.374	11.373	11.375	11.376	11.3745± 0.0006
4.15±0.01	14.330	14.332	14.329	14.331	14.3305± 0.0006
4.69±0.01	16.164	16.165	16.163	16.163	16.1638± 0.0005
5.24±0.01	18.072	18.073	18.071	18.074	18.0725± 0.0006

Analisi dati

Per eseguire i calcoli abbiamo utilizzato $\sigma_I = 0.001 \mu A$ pari alla sensibilità dello strumento, dal momento che le fluttuazioni casuali sulle misure non hanno portato ad una stima di errore maggiore.

La resistenza equivalente sia per il parallelo che per la serie è stata ottenuta come:

$$\hat{R}_{eq} = \frac{V}{\bar{I}} \quad \sigma_{\hat{R}_{eq}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{\bar{I}}\right)^2 + \left(V \frac{\sigma_{\bar{I}}}{\bar{I}^2}\right)^2}$$

e poi confrontata con quella attesa attraverso un test t-Student con limite di accettabilità per PValue fissato a 0.05%.

La resistenza equivalente attesa per il parallelo è pari a:

$$R_{attesa} = \frac{1}{1/R_A + 1/R_B} = 74.45k\Omega$$

$$\sigma_{R_{attesa}} = \sqrt{\left(\frac{R_B^2}{(R_B^2 + R_A^2)^2}\right)^2 \sigma_{R_A}^2 + \left(\frac{R_A^2}{(R_B^2 + R_A^2)^2}\right)^2 \sigma_{R_B}^2} = 0.04k\Omega$$

confronto con $R_{eq} = 74.45 \pm 0.04k\Omega$

V/I[kΩ]	t	PVal
74.0 ± 0.8	0.6	54.9%
74.0 ± 0.5	0.9	36.8%
73.9 ± 0.4	1.4	16.2%
73.9 ± 0.3	1.8	7%
73.9 ± 0.2	2.7	0.7%
73.9 ± 0.2	2.7	0.7%
73.9 ± 0.2	2.7	0.7%
73.9 ± 0.2	2.7	0.7%
73.9 ± 0.1	5	NA

L'89% dei test effettuati danno risultato accettabile, quindi possiamo considerare la legge verificata.

Notiamo però che all'aumentare del voltaggio, e quindi dell'intensità che attraversa il circuito, la precisione della stima di R_{eq} aumenta, il che porta a risultati del test sempre meno soddisfacenti. Questo solo perchè la stima di R_{attesa} non è in realtà accurata: la resistenza equivalente del circuito risulta essere minore per via del parallelo con il voltmetro, che non è stato considerato nella formulazione della legge poichè supposto ininfluenza. Considerando infatti il contributo di $R_V = 11.26M\Omega$:

$$\frac{1}{R_{attesa}} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_V} \rightarrow R_{attesa} = 73.96 \pm 0.04k\Omega$$

otteniamo un valore di R_{attesa} per cui perfino l'ultimo test risulterebbe accettabile con una probabilità del 55%. In conclusione, la scelta di resistenze inferiori avrebbe ridotto l'influenza del voltmetro e permesso di ottenere una stima accurata con la prima formula, che comunque consideriamo corretta a seguito di questi ragionamenti.

La resistenza equivalente attesa per la configurazione in serie è:

$$R_{attesa} = R_A + R_B = 297.8k\Omega$$

$$\sigma_{R_{attesa}} = \sqrt{\sigma_{RA}^2 + \sigma_{RB}^2} = 0.1k\Omega$$

tuttavia, dopo quanto osservato precedentemente, ci aspettiamo risultati poco soddisfacenti dall'utilizzo di questa formula. Infatti sommando le resistenze A e B otteniamo un valore ancora più vicino a quello di R_V , dunque quest'ultima sarà ancora più influente nel determinare la stima per R_{eq} poichè una maggiore percentuale di corrente la attraverserà.

Questo disguido sarebbe stato evitabile non solo scegliendo delle resistenze minori come già suggerito ma anche andando a sondare il livello di corrente non in I_1 (riferimento a Figura 6), come eseguito da noi, ma in I_2 .

Stimiamo dunque nuovamente la resistenza attesa a capo di queste considerazioni, ponendo $R_1 = R_A + R_B$:

$$R_{attesa} = \frac{1}{1/R_V + 1/R_1} = 290k\Omega$$

$$\sigma_{R_{attesa}} = \sqrt{\left(\frac{R_V^2}{(R_V + R_1)^2}\right)^2 \sigma_{R_1}^2 + \left(\frac{R_1^2}{(R_V + R_1)^2}\right)^2 \sigma_{R_V}^2} = 0.1k\Omega$$

confronto con $R_{eq} = 290.1 \pm 0.1k\Omega$

V/I[kΩ]	t	PVal
289.9 ± 4	0.04	96.8%
290.1 ± 2	0.05	96%
289.9 ± 2	0.05	96%
289.8 ± 1	0.2	84.2%
289.9 ± 1	0.1	92%
289.9 ± 0.9	0.1	92%
289.9 ± 0.7	0.1	92%
289.9 ± 0.6	0.2	84.2%
289.8 ± 0.6	0.3	76.4%

Come vediamo, le aspettative sono soddisfatte: le misure rispondono meglio alla seconda formula per R_{attesa} perciò, sebbene l'esperimento non sia stato eseguito nel modo più convenzionale, abbiamo comunque potuto verificare la correttezza delle nostre assunzioni sulla composizione di resistori in un circuito CC.

4 Parte seconda

Per questa esperienza abbiamo costruito un partitore resistivo e analizzato le sue proprietà variando le resistenze in gioco.

4.1 Partitore resistivo - configurazione senza carico

Un partitore resistivo è un tipo di circuito costituito da due o più resistenze collegate in serie ai capi delle quali, se viene applicata una tensione, essa si ripartirà sulle stesse in base al loro valore.

Nel primo caso sono state utilizzate solo due resistenze, di sotto lo schema del circuito.

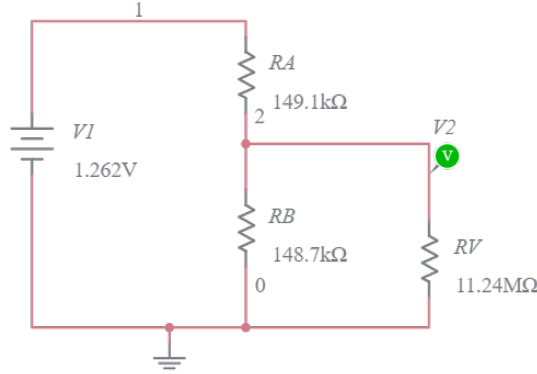


Figura 7

Metodo adottato

La scelta dei valori per R_A e R_B è stata determinata da due fattori: la necessità di porre $R_B \ll R_V$, al fine di poter misurare la caduta di potenziale su R_B certi che la maggior parte della corrente nel circuito la attraversa; e la richiesta che $V_{out} \approx 0.5 \cdot V_{in}$, soddisfatta risolvendo il circuito nel seguente modo: $V_{in} + R_A I + R_B I = 0$ con $I = \frac{-V_{out}}{R_B}$, allora la condizione da porre è $V_{in} - R_A \frac{V_{in}}{2 \cdot R_B} - R_B \frac{V_{in}}{2 \cdot R_B} = 0 \rightarrow R_A = -\frac{1}{2} R_B (-2) \rightarrow R_A = R_B$.

Abbiamo dunque scelto le resistenze con i valori più simili tra quelle che avevamo a disposizione, costruito il circuito in Figura 7 e utilizzato una sonda collegata al multimetro per misurare la caduta di potenziale su R_B , prevedendo di ottenere la metà di quella impostata regolando la manopola del generatore.

Dati raccolti e analisi

Le resistenze scelte sono: $R_A = 149.1 \pm 0.1 k\Omega$ e $R_B = 148.7 \pm 0.1 k\Omega$, il cui valore è stato valutato tramite il multimetro palmare.

Nella tabella sottostante riportiamo i valori letti per il voltaggio prima e dopo che la tensione venisse ripartita tra le due resistenze.

A fianco a ogni dato è riportato il risultato del test t-Student effettuato come segue:

$$t = \frac{|V_{in}/2 - V_{out}|}{\sqrt{\sigma_{in}^2 + \sigma_{out}^2}}$$

per il PValue associato al test impostiamo un valore minimo per l'accettabilità del 5%.

$$\text{Res A} = 149.1k\Omega ; \quad \text{Res B} = 148.7k\Omega$$

$V_{in}[V]$	$V_{out}[V]$	t	PVal
1.26 ± 0.01	0.63 ± 0.01	0.2	84.2%
1.72 ± 0.01	0.85 ± 0.01	0.4	68.9%
2.12 ± 0.01	1.05 ± 0.01	0.4	68.9%
2.48 ± 0.01	1.23 ± 0.01	0.7	48.4%
3.11 ± 0.01	1.53 ± 0.01	1.8	7.2%
4.02 ± 0.01	1.99 ± 0.01	1.4	16.2%

Si può osservare che, per le misure raccolte e le incertezze a loro assegnate la previsione era corretta per tutti i casi presi in esame.

La diminuzione della compatibilità all'aumentare del voltaggio si può spiegare considerando che la caduta di potenziale non è esattamente la stessa ai capi di R_A e di R_B , siccome le due resistenze non hanno lo stesso valore ed R_B è posta in parallelo ad un'altra resistenza. Infatti la caduta di potenziale su R_B è il 49.6% del potenziale fornito. All'aumentare della corrente complessiva che scorre nel circuito è ragionevole aspettarsi una discrepanza maggiore tra questo 49.6% ed il 50%, da cui la diminuzione del PValue osservata.

Per una partizione più equa avremmo potuto selezionare R_A ed R_B minori, così da ridurre l'effetto della presenza di R_V .

4.2 Partitore resistivo - configurazione con il carico

Per le misure successive abbiamo aggiunto al nostro partitore delle resistenze di carico, poste in parallelo a R_B , per osservare se e come cambiano le proprietà verificate nella prima parte.

Metodo adottato

Al fine di verificare che, nell'ipotesi che $R_{Load} \gg R_B$, la caduta di potenziale si spartisce equamente anche con l'aggiunta di resistenze di carico, abbiamo impostato il circuito come mostrato in Figura 8.

Abbiamo inoltre eseguito un confronto con i risultati ottenuti per una R_{Load} più piccola di R_B , per la quale ci aspettiamo che il partitore perda la sua proprietà.

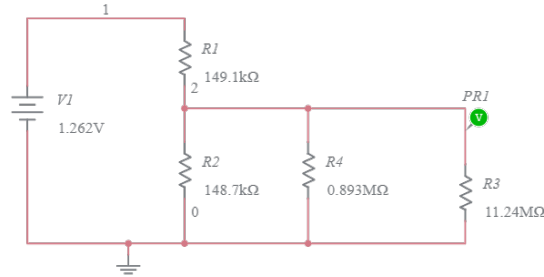


Figura 8

Dati raccolti e analisi

Riportiamo di sotto un confronto tra il caso $R_{Load} \gg R_B$ e $R_{Load} \ll R_B$:

Res A = $149.1k\Omega$; Res B = $148.7k\Omega$

R_{Load}	$V_{in}[V]$	$V_{out}[V]$	t	PVal
$0.893 \pm 0.001 M\Omega$	2.77 ± 0.01	1.27 ± 0.01	8	NA
$21.69 \pm 0.01 k\Omega$	2.77 ± 0.01	0.31 ± 0.01	78	NA

Notiamo che il test ha avuto un risultato non accettabile in ognuno dei due casi, questo perchè nel primo caso abbiamo scelto un rapporto $\frac{R_{Load}}{R_B} \approx 10$, evidentemente non sufficiente ad ottenere i risultati sperati. Con un rapporto ≈ 100 avremmo soddisfatto le nostre aspettative.

Nonostante la pessima scelta di R_A ed R_B , che avremmo potuto selezionare tra le resistenze dell'ordine dei 10Ω per ottenere risultati migliori, da questo esperimento possiamo comunque trarre la conclusione che un partitore è molto più funzionale nel caso $\frac{R_{Load}}{R_B} \gg 1$ rispetto al caso $\frac{R_{Load}}{R_B} \ll 1$ che riporta un valore per t 10 volte più grande del precedente.

4.3 Partitore resistivo - trasferimento di potenza sul carico

Sfruttando il software NI Multisim per la simulazione di circuiti elettronici, abbiamo approfondito la questione relativa al bilancio energetico quando si tratta con circuiti di partizione come quelli descritti fin'ora.

Metodo adottato

Per prima cosa abbiamo semplificato il sistema riducendo le resistenze a due sole: R_A e R_{Load} . Assumendo V_g ed R_A fisse, dal momento che stiamo modellizzando un sistema in cui quest'ultima è la resistenza della linea che fornisce corrente, non modificabile e V_g è la tensione applicata dal generatore. Assumendo di poter variare la resistenza di carico, l'obiettivo è di dimensionare il carico che permette il maggiore trasferimento di potenza su di esso.

Abbiamo calcolato P_{Load} , la potenza assorbita dal carico, nel modo seguente:
 $P_{Load} = I \cdot V_{Load} = I^2 \cdot R_{Load}$, stimando $I = \frac{V_g}{R_a + R_{Load}}$ siccome le resistenze sono in serie si ottiene:

$$P_{Load} = \frac{V_g^2}{(R_{Load} + R_A)^2} \cdot R_{Load}$$

tale funzione presenta un massimo al variare di R_{Load} in $R_{Load} = R_A$, quindi tale è la resistenza che supponiamo di dover imporre per avere Potenza massima sul carico.

Abbiamo impostato dunque il seguente circuito su Multisim e variato R_{Load} per accertarci che la potenza calcolata come $I \cdot V_{R_{Load}}$ avesse l'andamento atteso.

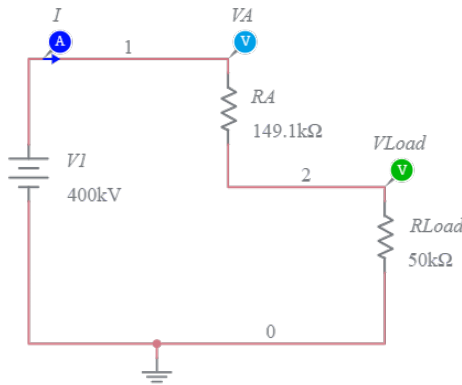


Figura 9

Dati raccolti e analisi

Di seguito i dati rilevati virtualmente:

Res A = 149.1 kΩ

R_{Load}	V_{Load}	I	P_{Load}	% P_g sul carico
10Ω	26.826 V	2.682 A	71.947 W	0.006%
50kΩ	100.45 kV	2.009 A	201.80kW	25%
149.1kΩ	199.93 kV	1.342 A	268.31kW	50%
500kΩ	308.12 kV	616.2 mA	189.88kW	77%
1MΩ	348.10 kV	348.1 mA	121.17kW	87%

Osserviamo che, come atteso, la potenza trasferita sul carico è massima quando $R_{Load} = R_A$. Non è invece vero che tale condizione corrisponde ad un rendimento massimo, poichè all'aumentare della resistenza sul carico la percentuale di potenza del generatore trasferita deve aumentare (rendimento alto per

$\frac{R_{Load}}{R_A} \gg 1$), a costo però di un aumento della resistenza complessiva del circuito, che abbassa il valore netto della potenza sul carico.

Nel caso reale, al fine di ridurre il costo complessivo del trasferimento della potenza del generatore P_g al carico, l'obiettivo delle compagnie elettriche è minimizzare la dispersione di potenza per effetto Joule. Siccome l'efficienza, come abbiamo visto, dipende dal rapporto $\frac{R_A}{R_{Load}}$:

$$\frac{P_{Load}}{P_g} = \frac{R_{Load}}{(R_{Load} + R_A)}$$

per massimizzarla la soluzione che si adotta è porre un trasformatore prima del carico in modo che ricuca V_{Load} di un fattore $a > 1$ e aumenti I_{Load} dello stesso fattore a , così la formula diventa

$$\frac{P_{Load}}{P_g} = \frac{1}{1 + \frac{R_A}{R_{Load}a^2}}$$

All'aumentare del fattore a^2 , caratteristico del trasformatore, la percentuale di P_g trasmessa tende al 100%. Per questo motivo vengono utilizzate alte tensioni per trasportare la corrente, più alto è il fattore di cui devo poi dividere, maggiore sarà l'efficienza della trasmissione.

5 Parte terza

5.1 Caratterizzazione corrente-tensione di un dispositivo non lineare

Il diodo è un conduttore la cui caratteristica corrente-tensione non è costante, segue anzi la legge di Shockley:

$$I = I_0 \cdot \left(e^{\frac{qV}{kT}} - 1 \right)$$

Lo scopo di questo esperimento è mostrare che la legge di Shockley è soddisfatta e ottenere la cosiddetta V_{soglia} , oltre la quale la corrente condotta dal diodo ha un comportamento lineare rispetto a V .

Metodo adottato

Per l'esecuzione di questo esperimento abbiamo deciso di adottare una configurazione come quella rappresentata nella figura sottostante

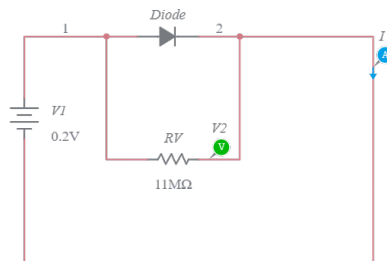


Figura 10

e raccogliere svariati punti del piano $V(I)$ al fine di poter eseguire un fit del modello sopracitato e di valutare fino a quale V_{soglia} quest'ultimo si addatta ai dati.

Dati raccolti

L'incertezza che stimiamo per il valore del voltaggio dipende dalla sensibilità del multimetro utilizzato: 0.001V, tuttavia l'errore effettivo potrebbe essere maggiore a causa di fattori che non abbiamo considerato.

Invece i valori per l'intensità sono stati rilevati più volte, il che ci porta a stimare le relative incertezze sulle medie come $\frac{\sigma_I}{\sqrt{N}}$.

misure effettuate con il diodo

tensione [V]	intensità [μ A]				
0.127 \pm 0.001	0.012	0.013	0.011	0.013	0.011
0.215 \pm 0.001	0.030	0.029	0.028	0.028	0.030
0.241 \pm 0.001	0.040	0.039	0.041	0.039	0.041
0.275 \pm 0.001	0.073	0.072	0.074	0.072	0.074
0.329 \pm 0.001	0.263	0.264	0.261	0.262	0.264
0.400 \pm 0.001	2.043	2.042	2.045	0.049	2.054
0.434 \pm 0.001	5.966	5.954	5.970	5.951	5.949
0.515 \pm 0.001	61.090	61.070	61.055	61.056	61.058
0.554 \pm 0.001	182.12	182.11	182.06	182.07	182.10
0.563 \pm 0.001	225.59	225.51	225.26	225.30	225.49
0.586 \pm 0.001	418.86	418.82	48.66	418.76	418.80
0.600 \pm 0.001	606.55	606.23	606.20	606.45	606.27
0.622 \pm 0.001	1077.72	1077.22	1076.67	1077.52	1077.25
0.722 \pm 0.001	12966	12981	12988	12983	12956
0.735 \pm 0.001	18492	18491	18490	18435	18408
0.744 \pm 0.001	22943	22946	22920	22906	22885
0.755 \pm 0.001	30398	30418	30441	30420	30383
0.765 \pm 0.001	38805	38888	38857	38863	38872
0.778 \pm 0.001	53312	53331	53330	53216	53210
0.782 \pm 0.001	66722	66700	66692	66681	66684
0.786 \pm 0.001	79431	79430	79466	79396	79420
0.792 \pm 0.001	95170	95320	95142	95206	95171
0.800 \pm 0.001	111119	111000	110929	111154	111128
0.806 \pm 0.001	152667	152740	152848	152850	152667
0.814 \pm 0.001	158450	157510	156330	157050	155300
0.825 \pm 0.001	185900	187220	187150	187540	187550
0.835 \pm 0.001	235290	236300	235870	236900	238020
0.846 \pm 0.001	283500	284400	284440	283350	284160
0.856 \pm 0.001	481220	481950	482600	482330	486220
0.862 \pm 0.001	620440	618750	618350	620350	621750
0.869 \pm 0.001	752660	754120	755260	756120	757280
0.879 \pm 0.001	851240	851100	850760	851230	852580
0.882 \pm 0.001	973491	974461	974463	989964	982340
0.884 \pm 0.001	1145290	1121903	1162771	1164579	1178664
0.901 \pm 0.001	1342800	1344200	1346700	1350200	1342100
0.907 \pm 0.001	1453022	1453122	1442400	1459300	1460112
0.917 \pm 0.001	1582034	1567890	1542786	1542768	1591439
0.942 \pm 0.001	1823300	1823000	1818300	1817300	1817700
0.956 \pm 0.001	2063900	2059000	2058000	2056000	2046600
0.966 \pm 0.001	2223460	2254901	2243450	2256790	2241721

Alcune misure sono state effettuate in giorni differenti a causa di alcune irregolarità riscontrate nel set di dati, per cui il parametro di temperatura T presente nella legge sopracitata potrebbe aver alterato, seppur in maniera minima la precisione dei dati.

Analisi dati

Abbiamo deciso di iniziare a raccogliere i dati a partire da una tensione di circa 0.1 V e di arrivare a circa 1 V, con l'accortezza di raccogliere maggiori misure dove ci aspettavamo di incontrare un incremento significativo della curva esponenziale:

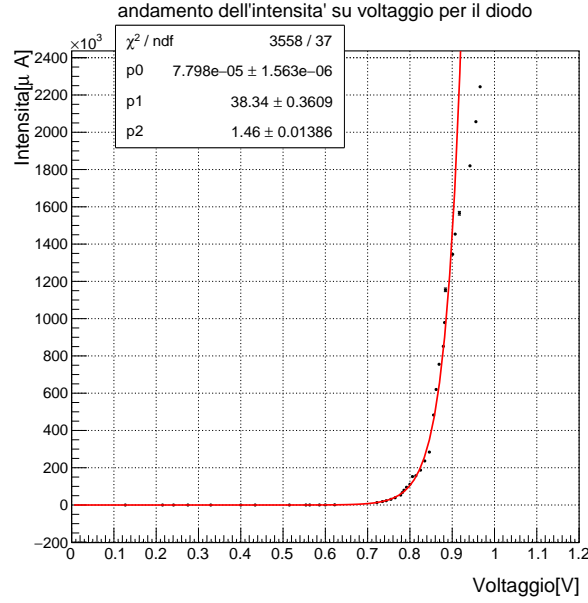


Figura 11: funzione utilizzata per l'interpolazione: $y = p_0 e^{\frac{p_1 x}{p_2}}$

come si può ben vedere dal grafico fino a circa 0.9 V si ha una buona approssimazione della legge di Shockley, infatti l'andamento esponenziale è soddisfatto; aumentando il voltaggio invece le misure si distanziano dalla curva per assumere un andamento lineare il che porta ad una stima del χ^2 eccessiva rispetto al numero di gradi di libertà del sistema.

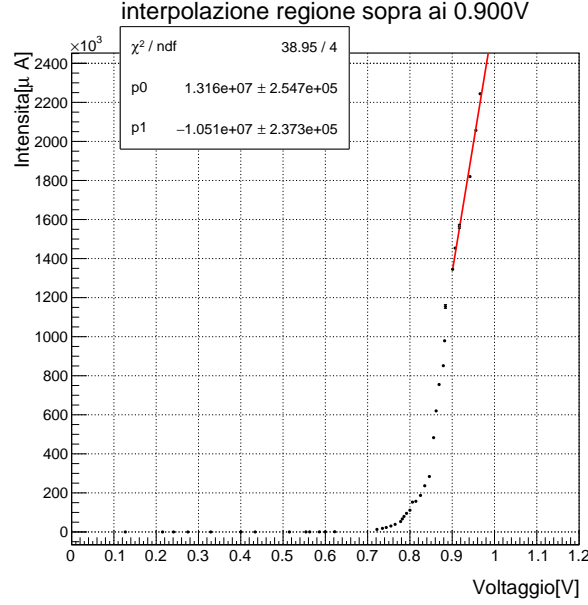
I parametri stimati attraverso il fit sono i seguenti:

$$p_0 = I_0 = 7.8 \cdot 10^{-5} \pm 2 \cdot 10^{-6} \mu A,$$

$$p_1 = \frac{q}{kT} = 38.3 \pm 0.4 V^{-1},$$

$$p_2 = g = \text{costante del diodo} = 1.46 \pm 0.01.$$

Applicando un'interpolazione lineare ai dati raccolti tra 0.90V e 1.00 V si ottiene una buona approssimazione dell'andamento lineare atteso:



funzione usata per l'interpolazione: $y = p_0x + p_1$

Per questa interpolazione parziale il χ^2 risulta 38.95, da confrontare con il numero dei gradi di libertà ovvero 4. Il PValue per questo risultato non è sufficiente per essere accettabile, attribuiamo questo insuccesso ad una stima degli errori sul voltaggio non veritiera. Infatti siccome il valore riportato come χ^2 corrisponde a:

$$Q_0^2 = \frac{(I - p_0V - p_1)^2}{\sigma_I^2 + p_0^2\sigma_V^2}$$

il fatto che la stima di Q_0^2 sia maggiore di 4 ci porta a supporre che il denominatore sia stato valutato in difetto rispetto al valore vero. Notiamo inoltre che il fattore predominante in $\sigma_I^2 + p_0^2\sigma_V^2$ sia quello dato da σ_V per via della notevole pendenza p_0 della retta. Quindi una stima a posteriori delle incertezze porterebbe a una valutazione più veritiera proprio dell'errore su V.

$$\sigma_{V_{posteriori}} = \sqrt{\frac{\chi^2}{Ndf}}\sigma_V = \sqrt{9.73} \cdot 0.001V = 0.003V$$

I parametri ottenuti per la retta sono:

p_0 = coefficiente angolare = $1.315 \cdot 10^7 \pm 3 \cdot 10^5 \mu\Omega^{-1}$

p_1 = intercetta = $-1.051 \cdot 10^5 \pm 2 \cdot 10^5 \mu A$.

Possiamo quindi determinare l'intersezione con l'asse delle ascisse ponendo

$$0 = p_0x_1 + p_1 \rightarrow x_1 = \frac{1.051 \cdot 10^7}{1.315 \cdot 10^7} = 0.7988V \pm \sigma_{x1} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{p1}}{p_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{p0}p_1}{p_0^2}\right)^2} = 0.02376V \rightarrow x_1 = 0.80 \pm 0.02V = \hat{V}_{soglia}.$$