

# Circuiti 2

Diana Broggi, Giulia Cantarini, Paolo Falconelli

Laboratorio di fisica II

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Strumentazione</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Parte prima</b>	<b>2</b>
3.1	Obiettivi e metodo adottato . . . . .	2
3.2	Circuito RC . . . . .	3
3.3	Circuito RL . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Parte seconda</b>	<b>13</b>
4.1	Obiettivi e metodo adottato . . . . .	13
4.2	regime sottosmorzato . . . . .	13
4.3	Regime critico . . . . .	17
4.4	regime sovrasmorzato . . . . .	20

## 1 Introduzione

Questa esperienza è stata svolta al fine di comprendere il funzionamento dei circuiti RC, RL e RCL sollecitati da corrente impulsata tramite la misura della differenza di potenziale ai capi dei suddetti elementi circuitali.

## 2 Strumentazione

Gli strumenti adoperati per la creazione ed il monitoraggio dei fenomeni interessati sono elencati di seguito

- generatore di funzioni d'onda, utilizzato per produrre un segnale di tensione ad onda quadra; resistenza interna di  $671 \pm 1 \Omega$ .
- oscilloscopio, permette di visualizzare l'andamento temporale del segnale ricevuto dalle sonde, e di effettuare le misure necessarie del caso attraverso i cursori sullo schermo; resistenza interna  $\approx 1 M\Omega$  e capacità di ingresso di 20pF.

- cavi coassiali con connettori VNC, utilizzati per trasmettere il segnale dal generatore all'oscilloscopio, la principale caratteristica è la schermatura contro fattori di disturbo esterni; resistenza dell'ordine dei  $50\Omega$ .
- sonde compensate a 10x con connettore VNC in coda, adoperate per misurare la tensione in determinati punti del circuito e riferirla in ingresso all'oscilloscopio.
- breadboard, munita di piste conduttive e di due boccole per l'alimentazione.
- multimetro palmare, strumento in grado di misurare diverse grandezze, abbiamo limitato il suo utilizzo alla valutazione delle resistenze di carico e alla stima della capacità dei condensatori; sensibilità variabile.
- scatola delle resistenze variabili; con resistenza interna di  $0.2\Omega$  ed errore relativo dell'1% sul valore segnalato.
- condensatori con capacità che variano dall'ordine dei nF ai  $\mu\text{F}$ .
- induttori di induttanza dell'ordine dei mH.

### 3 Parte prima

La prima parte dell'esperienza riguarda i fenomeni di carica e scarica nei circuiti RC e RL, l'alimentazione a corrente impulsata simula l'alternarsi della chiusura del circuito su un generatore di tensione e poi su un cortocircuito.

Il generatore è stato impostato su una frequenza di  $f = 10.000 \pm 0.001 \text{ Hz}$  e una differenza di potenziale picco-picco  $V_{pp} = 2.000 \pm 0.001 \text{ V}$  per tutta la durata dell'esperimento.

#### 3.1 Obiettivi e metodo adottato

L'obiettivo dell'esperienza consiste nell'osservare la risposta del circuito, in termini di intensità di corrente al suo interno, a seguito di un impulsivo aumento o diminuzione di tensione.

Il metodo applicato per RC è analogo anche per i circuiti successivi, con la differenza che questi possono presentare un L oppure L e C assieme.

Abbiamo posto le sonde collegate all'oscilloscopio ai capi della resistenza, poichè, per la legge di Ohm, la tensione ai capi di R è proporzionale alla corrente che scorre nel circuito tramite una costante a noi nota, ovvero R.

Per quanto riguarda RC ed RL, è interessante osservare anche l'andamento del potenziale ai capi del condensatore (o dell'induttore), oltre a quello della resistenza, per poter avere un quadro completo del fenomeno interessato; perciò abbiamo campionato nel tempo la ddp anche ai capi di C ed L.

Per studiare la carica del condensatore è necessario misurare l'andamento della corrente nel tempo a partire dal momento in cui comincia un picco dell'onda quadra che è in entrata nel circuito.

Per studiare la scarica basta posizionarsi in corrispondenza di un ventre, oppure impostare la tensione generata a  $-V_{pp}$  e procedere analogamente al caso

precedente. Ci aspettiamo che la scarica del circuito sia un fenomeno dettato da leggi simmetriche rispetto a quelle della carica; perciò, essendoci trovati in mancanza di tempo per eseguire tutte le misure richieste per l'esperienza, abbiamo deciso di concentrarci solo sul primo fenomeno.

### 3.2 Circuito RC

Abbiamo avviato l'esperienza costruendo un circuito RC alimentato da corrente impulsata adoperando una resistenza  $R = 0.989 \pm 0.001 k\Omega$  e un condensatore  $C = 2.42 \pm 0.01 \mu F$ .

Lo schema e la realizzazione del primo circuito sono riportati in Figura 1 e in Figura 2:

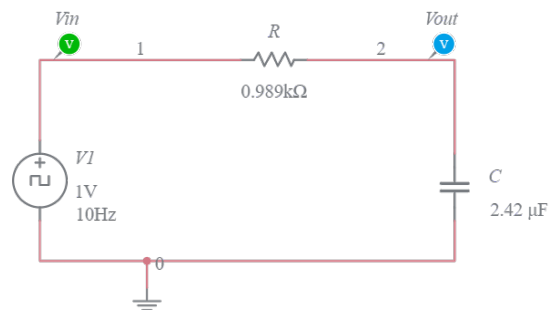
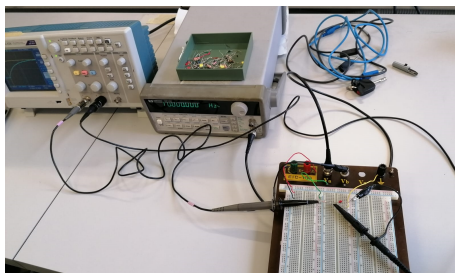
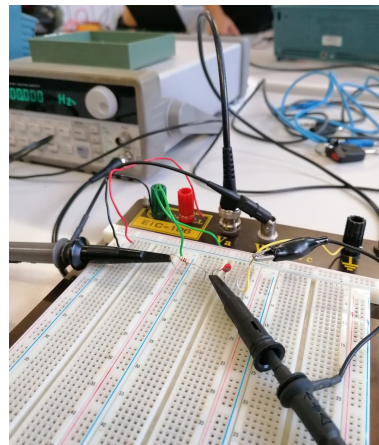


Figura 1: schema di un circuito RC



(a) collegamento del circuito a generatore e oscilloscopio



(b) misura ddp in entrata e ai capi del condensatore attraverso le sonde

Figura 2: realizzazione in laboratorio

La misura della differenza di potenziale ai capi di R è stata effettuata con un circuito CR, il cui schema corrispondente a quello in Figura 1 con R e C invertite.

### Dati raccolti

A partire dal tempo  $t = 0$  (primo picco della quadra), abbiamo campionato i grafici ottenuti per la tensione ai capi di R e di C nel tempo attraverso i cursori dell'oscilloscopio, il quale mostrava a schermo valori e unità di misura del segnale ricevuto nell'istante selezionato.

Per ogni punto abbiamo riportato le due misure per V tra cui il valore segnalato variava, si noti che l'incertezza dello strumento stimata è pari a 2mV per il voltaggio e 0.02 ms per i tempi.

Tabella1: circuiti RC e CR in carica

(a) ddp ai capi di C				(b) ddp ai capi di R			
t[ms]	V	[mV]	$V_{medio}$ [V]	t[ms]	V	[mV]	$V_{medio}$ [V]
0.00	-1000	-992	$-0.996 \pm 0.004$	0.00	1940	1950	$1.945 \pm 0.005$
0.28	-760	-768	$-0.764 \pm 0.004$	0.25	1750	1740	$1.745 \pm 0.005$
0.48	-608	-616	$-0.612 \pm 0.004$	0.50	1570	1580	$1.575 \pm 0.005$
1.08	-240	-238	$-0.239 \pm 0.001$	1.00	1280	1270	$1.275 \pm 0.005$
1.48	-48	-40	$-0.044 \pm 0.004$	1.50	1040	1030	$1.035 \pm 0.005$
2.00	168	160	$0.164 \pm 0.004$	2.00	840	852	$0.846 \pm 0.006$
2.48	328	320	$0.324 \pm 0.004$	2.50	684	700	$0.692 \pm 0.008$
3.00	456	464	$0.46 \pm 0.004$	3.00	572	560	$0.566 \pm 0.006$
3.52	568	560	$0.564 \pm 0.004$	3.50	472	460	$0.466 \pm 0.006$
3.96	656	664	$0.66 \pm 0.004$	4.00	348	330	$0.339 \pm 0.009$
4.48	736	728	$0.732 \pm 0.004$	4.50	266	278	$0.272 \pm 0.006$
5.04	792	800	$0.796 \pm 0.004$	5.00	214	232	$0.223 \pm 0.009$
5.48	840	832	$0.836 \pm 0.004$	5.50	186	174	$0.18 \pm 0.006$
6.00	880	872	$0.876 \pm 0.004$	6.00	138	156	$0.147 \pm 0.009$
6.48	904	912	$0.908 \pm 0.004$	6.50	112	128	$0.12 \pm 0.008$
6.96	928	920	$0.924 \pm 0.004$	7.00	98	86	$0.092 \pm 0.006$
7.48	944	952	$0.948 \pm 0.004$	7.50	64	78	$0.071 \pm 0.007$
8.00	968	960	$0.964 \pm 0.004$	8.00	64	52	$0.058 \pm 0.006$
8.52	976	968	$0.972 \pm 0.004$	8.50	56	44	$0.05 \pm 0.006$
8.96	984	976	$0.98 \pm 0.004$	9.00	48	36	$0.042 \pm 0.006$
9.64	992	984	$0.988 \pm 0.004$	9.50	44	32	$0.038 \pm 0.006$
10.0	992	1000	$0.996 \pm 0.004$	10.00	36	24	$0.03 \pm 0.006$
10.5	1000	1010	$1.005 \pm 0.005$	10.50	20	32	$0.026 \pm 0.006$
11.1	1000	1010	$1.005 \pm 0.005$	11.00	14	26	$0.02 \pm 0.006$
11.5	1010	1020	$1.015 \pm 0.005$	11.50	14	26	$0.02 \pm 0.006$
12.1	1010	1020	$1.015 \pm 0.005$	12.00	14	18	$0.016 \pm 0.002$
12.6	1010	1020	$1.015 \pm 0.005$	12.50	14	18	$0.016 \pm 0.002$
				13.00	14	18	$0.016 \pm 0.002$
				13.50	8	16	$0.012 \pm 0.004$
				14.00	8	16	$0.012 \pm 0.004$
				14.50	16	8	$0.012 \pm 0.004$
				18.50	8	0	$0.004 \pm 0.004$

### Analisi dati e commenti

Dai dati raccolti abbiamo tracciato un grafico a punti ed eseguito l'interpolazione per la forma funzionale attesa di  $V_C$  in fase di carica del condensatore nell'ipotesi per cui  $T \gg \tau$  siccome  $T \approx \frac{1}{10Hz} \approx 0.1$  s e  $\tau = R \cdot C \approx 0.0023$  s :

$$V_C(t) = V_0 \left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

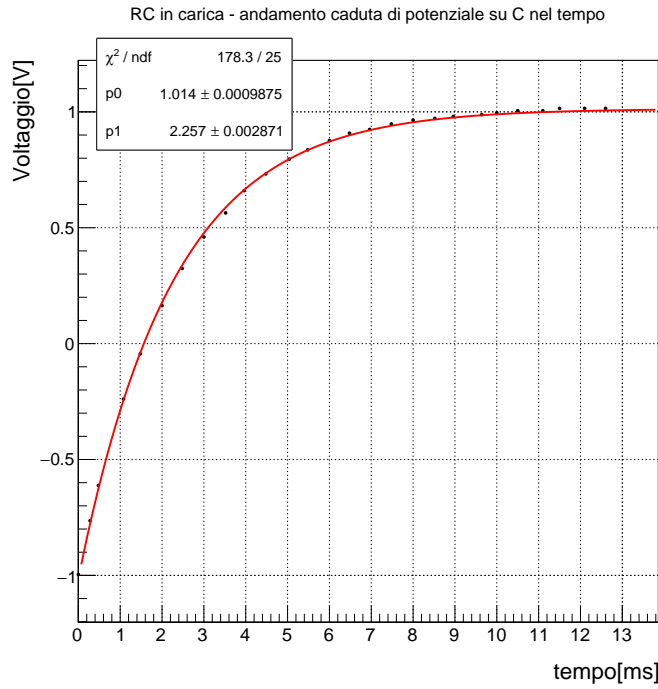


Figura 3: funzione usata per l'interpolazione:  $p_0(1 - 2e^{-\frac{t}{p_1}})$

Osserviamo una certa discrepanza tra il valore del  $\chi^2 = 178.3$  (ricavato dal programma ROOT di CERN) e il numero dei gradi di libertà  $Ndf = 25$ . Siccome l'andamento funzionale atteso sembra essere stato rispettato dai dati, associamo questa problematica ad una stima degli errori sul voltaggio scarsamente realistica, utilizzando quindi il risultato del test stimiamo  $\sigma_V$  a posteriori come  $\sigma_V \cdot \frac{\chi^2}{Ndf} = \sigma_V \cdot 7$  che in media corrisponde a circa 0.03 V di errore su ogni misura effettuata.

Eseguendo nuovamente l'interpolazione dopo aver corretto le incertezze otteniamo dei parametri con errori più veritieri:

$p_0 = V_0 = 1.014 \pm 0.007V$  da confrontare con il valore indicato sul generatore:  $1.00 \pm 0.01$  V  $\rightarrow$  t = 1.1, PValue = 27%;

$p_1 = \tau_{RC} = 2.26 \pm 0.02$  ms è il tempo caratteristico del sistema, quantifica la tempistica necessaria per completare la carica del nostro condensatore; da

tale dato, conoscendo  $R = 0.989 \pm 0.001 \text{ k}\Omega$  è possibile ricavare una stima della capacità  $C$ :

$$\hat{C} = \frac{\tau}{R} = \frac{2.26 \text{ ms}}{0.989 \text{ k}\Omega} = 2.28169 \mu\text{F} \quad \sigma_{\hat{C}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\tau}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\tau \sigma_R}{R^2}\right)^2} = 0.020451 \mu\text{F}$$

Dunque una prima stima per  $C$  risulta  $\hat{C} = 2.28 \pm 0.02 \mu\text{F}$ , da un confronto con il valore atteso  $C_{att} = 2.42 \pm 0.01 \mu\text{F}$  tramite il test t-Student risulta:

$$t = \frac{|C_{att} - \hat{C}|}{\sqrt{\sigma_{C_{att}}^2 + \sigma_{\hat{C}}^2}} = 6 \rightarrow P\text{Value} = NA$$

La probabilità che la nostra stima si distribuisca con andamento gaussiano attorno al valore supposto come valore vero è prossima allo 0%, avanziamo dunque due ipotesi: il valore vero non corrisponde a quello indicato dal multimetro, oppure degli errori non casuali ma di tipo sistematico sono subentrati durante lo svolgimento dell'esperimento. Procediamo con l'analisi del secondo set di dati per approfondire la questione.

I dati relativi alla ddp su  $R$  sono riportati nel grafico in Figura 4, completo di interpolazione eseguita seguendo il modello teorico

$$V_R(t) = 2 \cdot V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

che si ottiene applicando le leggi di Kirchoff al circuito CR esplicitando la corrente  $I(t)$  (ricordiamo che  $V_R(t) = I(t) \cdot R$ ).

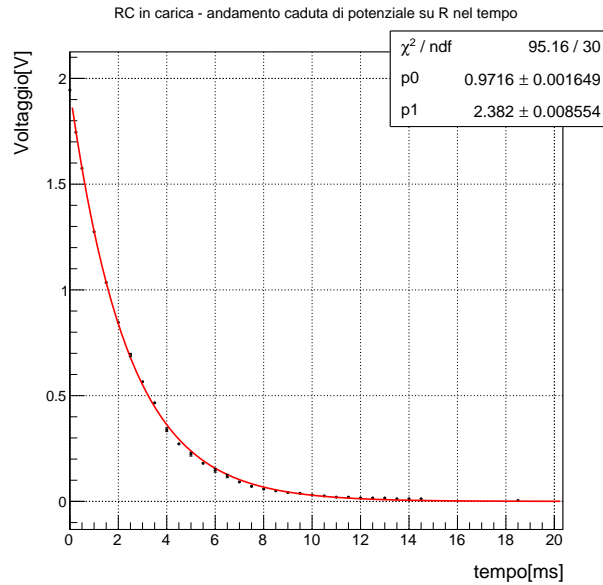


Figura 4: funzione usata per l'interpolazione:  $2p_0 e^{-\frac{x}{p_1}}$

Notiamo che anche in questo caso il chi quadro è 3 volte maggiore del suo valore di aspettazione  $Ndf = 30$ , perciò prima di cimentarci nei calcoli abbiamo scalato tutte le incertezze  $\sigma_V$  di un fattore 3, per poi ottenere i seguenti risultati:

$p_0 = V_0 = 0.972 \pm 0.005V$  da confrontare sempre con il valore impostato inizialmente:  $1.00 \text{ pm } 0.01 \text{ V} \rightarrow t = 2, PValue = 5\%$ ;

$p_1 = \tau_{RC} = 2.38 \pm 0.03ms$  da cui abbiamo calcolato nuovamente C:

$$\hat{C} = \frac{2.38ms}{0.989k\Omega} = 2.40816\mu F \quad \sigma_{\hat{C}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\tau}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_R \tau}{R^2}\right)^2} = 0.0260623\mu F$$

Perciò la seconda stima di C è  $\hat{C} = 2.41 \pm 0.03\mu F$ , confrontandola tramite il test t-Student con il valore atteso  $C_{att} = 2.42 \pm 0.01\mu F$  ottenuto con il multimetro otteniamo:

$$t = \frac{|C_{att} - \hat{C}|}{\sqrt{\sigma_{C_{att}}^2 + \sigma_{\hat{C}}^2}} = 0.3 \rightarrow PValue = 76.42\%$$

Data l'evidente concordanza tra la seconda stima per C ed il suo valore misurato direttamente con il multimetro, supponiamo di aver incontrato dei fattori di disturbo che hanno alterato svolgimento del primo esperimento.

### 3.3 Circuito RL

Per il circuito RL abbiamo adoperato la medesima resistenza  $R = 0.989 \pm 0.001k\Omega$  e una induttanza il cui valore è da determinare tramite l'analisi delle misure effettuate.

Il circuito costruito per la misura ai capi di  $L$  è un RL, come mostrato in figura; la misura della ddp ai capi di  $R$  è stata eseguita ancora una volta scambiando i due componenti.

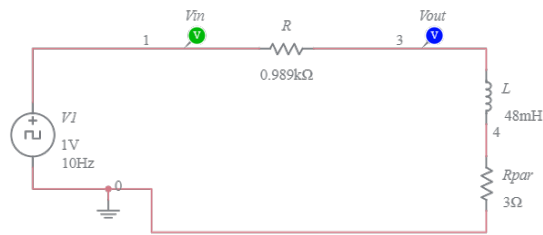


Figura 5: schema di un circuito RL

Affianco al componente  $L$  nello schema abbiamo aggiunto la resistenza parasita dovuta all'induttanza, solitamente dell'ordine di qualche  $\Omega$ , che potrebbe influire nelle misure ottenute quando ancora  $f$  è particolarmente alta, ovvero negli istanti dove comincia un picco dell'onda quadra.

#### Dati raccolti

Abbiamo proceduto analogamente alla raccolta dati relativa al circuito RC, campionando solo i grafici che corrispondono al fenomeno di carica dell'induttore. Si osservi che questa volta l'errore strumentale sui tempi varia da  $0.02 \mu s$  a  $2 \mu s$  seconda dell'ordine di grandezza della misura, mentre l'errore strumentale sul voltaggio è sempre  $2mV$ .



Tabella2: circuiti RL e LR in carica

(a) ddp ai capi di L				(b) ddp ai capi di R			
t[ $\mu$ s]	V	[mV]	$V_{medio}$ [V]	t[ $\mu$ s]	V	[mV]	$V_{medio}$ [V]
5.00	1760	1800	$1.78 \pm 0.02$	0.00	-794	-810	$-0.802 \pm 0.008$
10.0	1600	1580	$1.59 \pm 0.01$	6.00	-676	-684	$-0.680 \pm 0.004$
15.0	1440	1420	$1.43 \pm 0.01$	10.0	-548	-498	$-0.523 \pm 0.025$
20.0	1280	1300	$1.29 \pm 0.01$	16.0	-362	-348	$-0.355 \pm 0.007$
25.0	1140	1180	$1.16 \pm 0.02$	20.0	-252	-228	$-0.240 \pm 0.012$
30.0	1040	1060	$1.05 \pm 0.01$	26.0	-100	-80	$-0.09 \pm 0.01$
35.0	960	920	$0.94 \pm 0.02$	30.0	-20	2	$-0.009 \pm 0.011$
40.0	840	820	$0.83 \pm 0.01$	36.0	104	118	$0.111 \pm 0.007$
45.0	760	740	$0.75 \pm 0.01$	40.0	184	164	$0.174 \pm 0.01$
50.0	680	700	$0.69 \pm 0.01$	46.0	276	260	$0.268 \pm 0.008$
55.0	620	640	$0.63 \pm 0.01$	50.0	324	340	$0.332 \pm 0.008$
60.0	560	540	$0.55 \pm 0.01$	56.0	412	396	$0.404 \pm 0.008$
65.0	480	520	$0.50 \pm 0.02$	60.0	444	460	$0.452 \pm 0.008$
70.0	480	440	$0.46 \pm 0.02$	66.0	516	500	$0.508 \pm 0.008$
75.0	400	420	$0.41 \pm 0.01$	70.0	556	538	$0.547 \pm 0.009$
80.0	380	360	$0.37 \pm 0.01$	76.0	588	612	$0.6 \pm 0.012$
85.0	360	320	$0.34 \pm 0.02$	80.0	620	634	$0.627 \pm 0.007$
90.0	300	320	$0.31 \pm 0.01$	86.0	628	644	$0.636 \pm 0.008$
95.0	300	260	$0.28 \pm 0.02$	90.0	644	668	$0.656 \pm 0.012$
100.0	290	270	$0.28 \pm 0.01$	96.0	692	676	$0.684 \pm 0.008$
105.0	200	220	$0.21 \pm 0.01$	100	708	724	$0.716 \pm 0.008$
110.0	240	220	$0.23 \pm 0.01$	106	732	748	$0.74 \pm 0.008$
115.0	200	180	$0.19 \pm 0.01$	110	750	764	$0.757 \pm 0.007$
120.0	180	160	$0.17 \pm 0.01$	116	756	772	$0.764 \pm 0.008$
125.0	160	140	$0.15 \pm 0.01$	120	774	784	$0.779 \pm 0.005$
130.0	140	120	$0.13 \pm 0.01$	126	804	776	$0.79 \pm 0.01$
135.0	120	100	$0.11 \pm 0.01$	130	804	788	$0.796 \pm 0.008$
140.0	120	100	$0.11 \pm 0.01$	136	804	820	$0.812 \pm 0.008$
145.0	100	80	$0.09 \pm 0.01$	140	820	836	$0.828 \pm 0.008$
150.0	80	60	$0.07 \pm 0.01$	146	818	834	$0.826 \pm 0.008$
155.0	80	100	$0.09 \pm 0.01$	150	834	838	$0.836 \pm 0.002$
160.0	80	70	$0.075 \pm 0.005$	156	834	848	$0.841 \pm 0.007$
165.0	50	70	$0.06 \pm 0.01$	160	846	860	$0.847 \pm 0.007$
170.0	70	50	$0.06 \pm 0.01$	168	864	842	$0.853 \pm 0.007$
175.0	50	50	$0.05 \pm 0.002$	176	854	840	$0.853 \pm 0.011$
180.0	50	30	$0.04 \pm 0.01$	180	870	852	$0.861 \pm 0.009$
185.0	20	50	$0.035 \pm 0.015$	186	870	856	$0.863 \pm 0.007$
				190	880	856	$0.868 \pm 0.012$
				196	864	876	$0.87 \pm 0.006$
				206	868	882	$0.875 \pm 0.007$
				210	868	892	$0.88 \pm 0.012$
				216	892	868	$0.88 \pm 0.012$
				220	868	882	$0.875 \pm 0.007$
				226	868	886	$0.877 \pm 0.009$
				230	880	892	$0.886 \pm 0.006$

dove  $\sigma_V = 0V$  abbiamo usato l'incertezza dello strumento = 0.002 V

### Analisi dati e commenti

Eseguendo l'interpolazione dei dati in Tabella 2 (a) con la formula attesa per  $V_L$  nell'ipotesi  $T \gg \tau$  poichè  $T \approx 0.1s$  e  $\tau = \frac{L}{R} \approx 10^{-6}s$  :

$$V_L(t) = 2V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

otteniamo il seguente grafico.

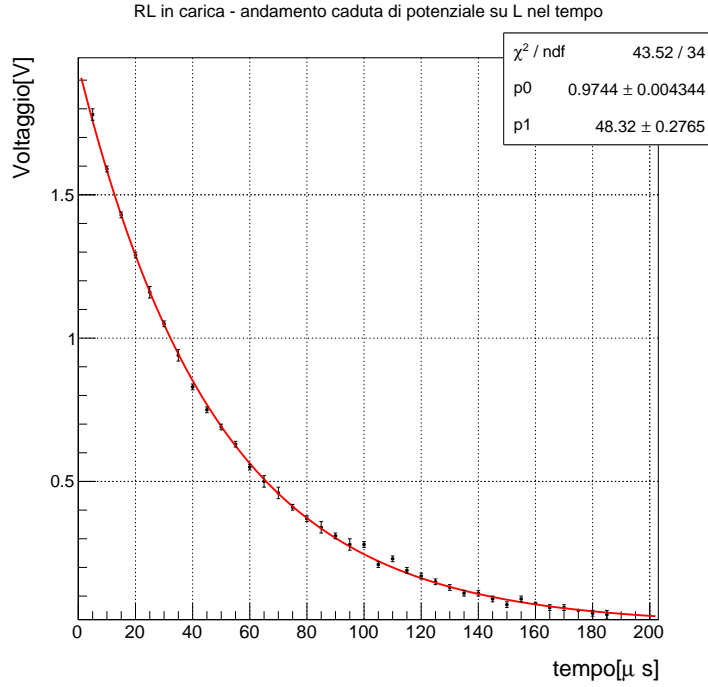


Figura 6: funzione usata per l'interpolazione:  $2p_0 e^{-\frac{x}{p_1}}$

Per prima cosa osserviamo che la risposta del circuito RL ad un aumento repentino di tensione come quello che avviene per  $t = 0$  richiede qualche istante in più rispetto al caso con C; abbiamo infatti cominciato a campionare il grafico di  $V_L$  a partire da  $5\mu s$  poichè in  $0s$  l'oscilloscopio riportava ancora un valore negativo. L'induttore infatti è tipicamente un componente che tende ad opporsi alla variazione di corrente nel circuito, e la sua resistenza parassita è massima all'inizio del fenomeno, dove notiamo che  $V_L$  non raggiunge il massimo potenziale ma si ferma  $1.78V <$  dei  $2V$  attesi nel caso ideale.

Osserviamo inoltre che il test del chi quadro riporta un valore di  $\chi^2 = 43.52$ , di poco superiore a  $Ndf = 34$ . Probabilmente le incertezze relative al voltaggio sono state sottostimate di un fattore  $\frac{\chi^2}{Ndf} = 1.28$ , quindi abbiamo eseguito nuovamente la ricerca dei parametri moltiplicando ogni  $\sigma_y$  per 1.28.

I parametri risultati dall'analisi eseguita con ROOT sono:

$p0 = V_g = 0.976 \pm 0.005V$ , da confrontare con  $1.000 \pm 0.001V$  impostato sul generatore  $\rightarrow t = 5, PValue = NA$ , il fatto che questo PValue non sia accettabile è probabilmente dovuto alla resistenza parassita di L;

$p1 = \tau_{RL} = 48.2 \pm 0.3 \mu s$ , da cui è possibile ricavare una stima di L conoscendo R come  $R = 0.989 \pm 0.001 k\Omega$ . Esprimendo  $\tau$  in  $\mu s$  e R in  $M\Omega$  si ottiene:

$$\hat{L} = \tau_{RL} \cdot R = 0.0477H$$

$$\sigma_L = \sqrt{(\sigma_\tau R)^2 + (\sigma_R \tau_{RL})^2} = 0.0003H$$

dunque  $\hat{L} = 47.7 \pm 0.3$ , mH che possiamo confrontare con la stima ottenuta dal secondo grafico.

Il voltaggio ai capi della resistenza R segue, secondo le leggi di Kirchoff, il seguente andamento temporale:

$$V_R(t) = I(t) \cdot R = V_0 \left(1 - 2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

l'interpolazione eseguita corrisponde al grafico in Figura 7, notiamo che il limite asintotico del nostro grafico non tende a  $1V = V_0$  ma a  $0.8V$ .

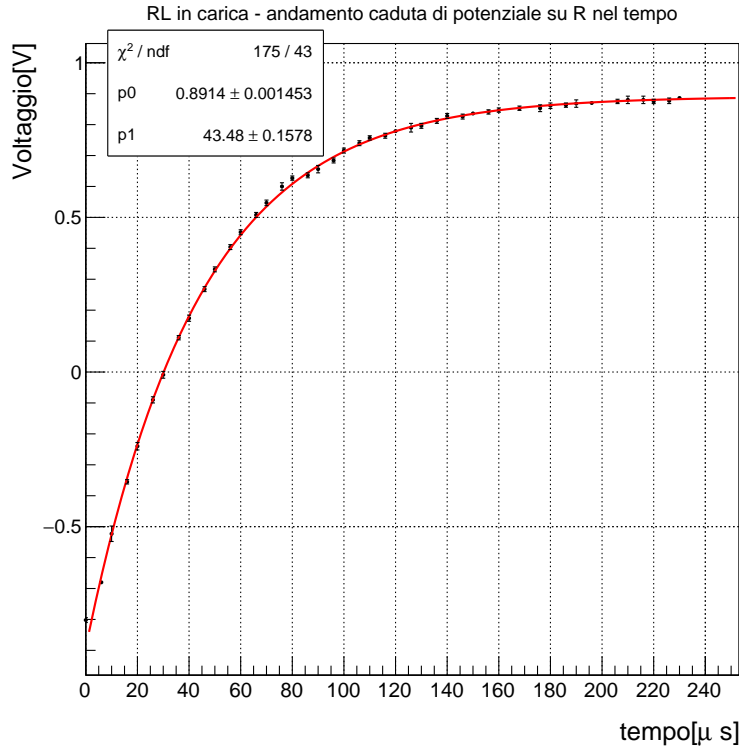


Figura 7: funzione usata per l'interpolazione:  $p_0(1 - 2e^{-\frac{t}{p_1}})$

Per comprendere il motivo di questa rappresentazione inaspettata del grafico, che parte da -0.80V e arriva ad un massimo di 0.89V, facciamo riferimento allo schema circuitale di un partitore di tensione. Avanziamo quindi l'ipotesi che la nostra resistenza di carico  $R$  non sia l'unica ad avere un valore considerevole, ma che siano presenti delle resistenze parassite  $R_{par}$ , dovute ad esempio a generatore e induttore, altrettanto notevoli. Attenzione, la  $R_{par}$  dovuta all'induttanza gioca un ruolo importante nel partitore solo all'avvio della carica, al tempo  $t = 0$ , dove la frequenza è particolarmente alta. Questo spiega la differenza dei valori misurati in partenza e in arrivo, che nel caso ideale dovrebbero essere uguali.

Nel caso del partitore di tensione, la misura del potenziale ai capi di un componente ( $R$ ) dipende dalla ripartizione della tensione di tutti i componenti che avviene in base ai loro valori relativi; quindi  $V_{R, reale}(t) = \frac{V_{R, ideale}(t) \cdot R}{R_{par} + R}$ .

Notiamo inoltre che il risultato del test del chi quadro mostra una certa discordanza tra misure e modello atteso, siccome l'andamento funzionale ipotizzato rimane valido, supponiamo che la discordanza sia dovuta ad incertezze stimate per difetto rispetto a quelle reali.

È nostro interesse effettuare una stima delle resistenze parassite che hanno influito sulla misura, guardiamo per esempio il regime asintotico, dove  $R_{par}$  dovuta a  $L \approx 0$ , e stimiamo il coefficiente  $\alpha$  di cui il voltaggio è stato attenuato prendendo in considerazione l'ultimo punto della nostra tabella; la sicurezza con cui conosciamo questo fattore dipende dalla precisione della misura effettuata, che abbiamo riscaldato di  $\frac{\chi^2}{Ndf} = 4$ .

$$\alpha = \frac{R}{R + R_{par}} = \frac{V_{real}}{V_0} = \frac{0.886V}{1V} \pm 0.03$$

da cui, considerando  $\sigma_R = 1\Omega$  e  $\sigma_\alpha = 0.03$ , otteniamo che

$$R_{par} = R \cdot \frac{1 - \alpha}{\alpha} = 127.3 \pm 30\Omega$$

Ora osserviamo i risultati dell'interpolazione tenendo in considerazione le resistenze parassite stimate. I parametri ottenuti dal fit sono  $p0 = V_0 = 0.891 \pm 0.001V$ , e  $p1 = \tau_{RL} = 43.5 \pm 0.2\mu s$  da cui calcoliamo di nuovo  $L$  considerando questa volta che la resistenza equivalente del circuito è  $R_{par} + R = 1.116 \pm 0.03k\Omega$ , nei calcoli abbiamo espresso  $R_{eq}$  in  $M\Omega$

$$\hat{L} = \tau_{RL} \cdot (R + R_{par}) = 0.049H$$

$$\sigma_L = \sqrt{(\sigma_\tau(R + R_{par}) \cdot 10^{-3})^2 + (\sigma_{Req} \cdot 10^{-3}\tau_{RL})^2} = 0.001H$$

perciò  $\hat{L} = 49 \pm 1$  mH da confrontare con quella precedentemente ottenuta tramite il test t-Student:

$$t = \frac{|L_1 - L_2|}{\sqrt{\sigma_{L1}^2 + \sigma_{L2}^2}} = 1.2 \rightarrow PValue = 23.01\%$$

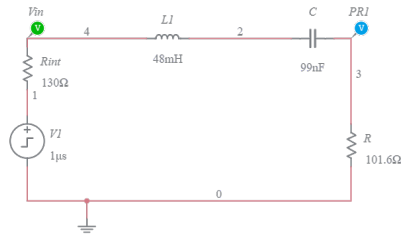
## 4 Parte seconda

Nella seconda parte dell'esperienza abbiamo studiato il comportamento di un circuito RCL nei regimi sottosmorzato, sovrasmorzato e di smorzamento critico.

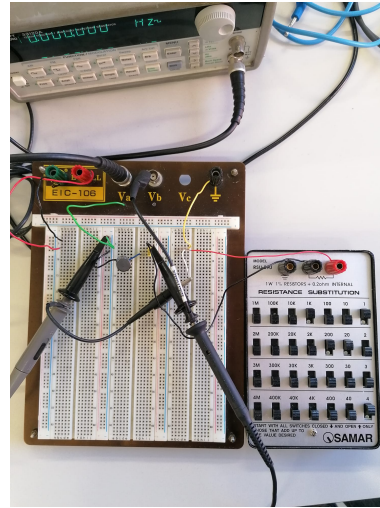
### 4.1 Obiettivi e metodo adottato

Questa parte dell'esperienza richiedeva di selezionare diverse resistenze a seconda del regime d'interesse, abbiamo perciò utilizzato la scatola delle resistenze variabili e selezionato in totale 3 diversi valori per  $R$ . Lo schema e la realizzazione del circuito sono rappresentati in Figura 8.

L'obiettivo era ancora una volta di verificare il modello per  $I(t)$  dedotto dalle leggi di Kirchhoff applicate al circuito, quando quest'ultimo è sottoposto ad una tensione impulsata. Il procedimento adottato consiste dunque nel rilevare l'andamento temporale del voltaggio ai capi di  $R$  nei 3 regimi, il quale è proporzionale, come ben sappiamo, alla corrente.



(a) schema di un circuito LCR



(b) realizzazione in laboratorio

Figura 8

### 4.2 regime sottosmorzato

Dal momento che, eseguendo una media pesata tra  $L_1$  ed  $L_2$ , la nostra stima per  $L$  risulta  $\hat{L} = 47.80734 \pm 8 \cdot 10^{-5}$  mH e che il nuovo condensatore ha  $C = 99 \pm 1$  nF, il circuito avrà un comportamento sottosmorzato per  $R < \sqrt{\frac{4 \cdot L}{C}} = 1.390 k\Omega$

#### Dati raccolti

La misura della capacità  $C = 99 \pm 1$  nF è stata effettuata con il multimetro palmare. La scelta di cambiare condensatore è stata dettata dal fatto che una

capacità dell'ordine dei  $\mu F$  risultava eccessiva; abbiamo infatti osservato una distorsione del grafico  $V(t)$  in sottosmorzamento, che era più simile all'andamento tipico del sovrasmorzamento. L'accumulo di elevata energia da parte del condensatore stava accentuando l'effetto delle resistenze interne dei componenti del circuito, disturbando il fenomeno ricercato in origine.

Dopo aver trovato il condensatore adatto ai nostri scopi, abbiamo scelto una resistenza pari a  $R = 101.6 \pm 0.1 \Omega$  dalla scatola delle resistenze variabili (misurazione effettuata con il multimetro palmare) e infine ricavato le misure per il voltaggio ai capi di  $R$  per ogni istante selezionato.

Tabella3: circuito LCR - regime sottosmorzato

$t[\mu s]$	V	[mV]	$V_{medio}[V]$
0	4.00	8.00	$0.006 \pm 0.002$
42	152	156	$0.154 \pm 0.002$
76	216	220	$0.218 \pm 0.002$
98	232	236	$0.234 \pm 0.002$
126	226	220	$0.223 \pm 0.003$
154	172	176	$0.174 \pm 0.002$
186	90.0	84.0	$0.087 \pm 0.003$
259	-84.0	-88.0	$-0.086 \pm 0.002$
330	-132	-136	$-0.134 \pm 0.002$
382	-88.0	-92.0	$-0.09 \pm 0.002$
448	20.0	24.0	$0.022 \pm 0.002$
535	92	88.0	$0.09 \pm 0.002$
607	52.0	56.0	$0.054 \pm 0.002$
666	-8.00	-4.00	$-0.006 \pm 0.002$
708	-40.0	-37.0	$-0.0385 \pm 0.0015$
775	-52.0	-48.0	$-0.05 \pm 0.002$
842	-16.0	-13.0	$-0.0145 \pm 0.0015$
912	28.0	24.0	$0.026 \pm 0.002$
953	36.0	40.0	$0.038 \pm 0.002$
1010	32.0	28.0	$0.03 \pm 0.002$
1060	16.0	14.0	$0.015 \pm 0.001$
1130	-12.0	-8.00	$-0.01 \pm 0.002$
1210	-16.0	-20.0	$-0.018 \pm 0.002$
1270	-8.00	-4.00	$-0.006 \pm 0.002$
1320	8.00	4.00	$0.006 \pm 0.002$
1400	8.00	12.00	$0.01 \pm 0.002$
1470	8.00	4.00	$0.006 \pm 0.002$

errore strumentale: sui tempi =  $2 \mu s$  e sul voltaggio =  $2mV$

### Analisi dati e commenti

L'interpolazione eseguita a partire dal modello atteso per  $I(t)$ , ovvero

$$I(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\beta t)$$

sui dati riportati in Tabella3 ha prodotto il seguente risultato

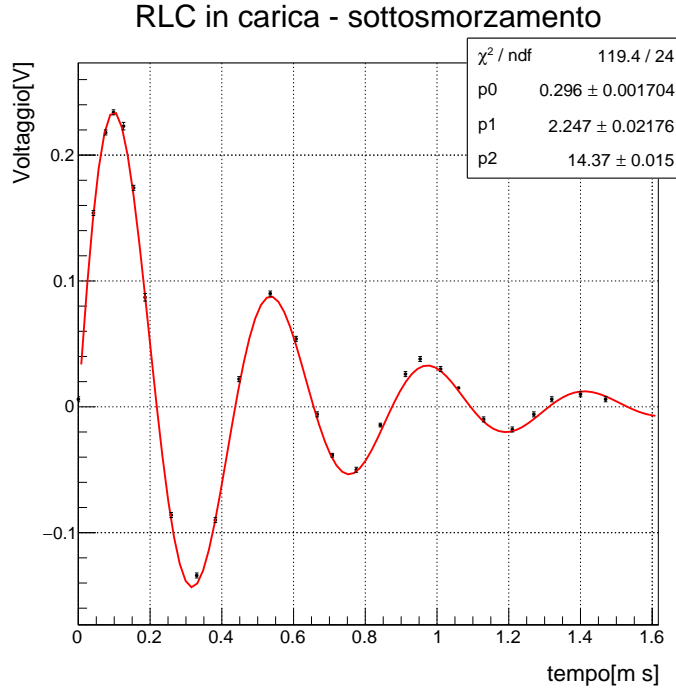


Figura 9: funzione usata per l'interpolazione:  $p_0 e^{-x p_1} \sin(x p_2)$

Il test del chi quadro suggerisce in questo caso una correzione negli errori associati alle misure di un fattore  $\frac{\chi^2}{N_{df}} = 5$ .

In termini di parametri, a seguito della correzione delle incertezze, abbiamo ottenuto

$p_0 = A \cdot R = 0.296 \pm 0.009V$ , che rappresenta la quota da cui l'esponenziale che domina il grafico comincia a decrescere;

$$p_1 = \gamma = \frac{R}{2 \cdot L} = 2.2 \pm 0.1 ms^{-1} \text{ e } p_2 = \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 14.37 \pm 0.07 ms^{-1}.$$

Osserviamo che il primo picco incontrato, il cui massimo corrisponde a  $\simeq 0.2V$ , non corrisponde al picco che un circuito con i nostri parametri produrrebbe idealmente (si fa riferimento al grafico ottenuto con il software per la simulazione di circuiti elettronici NI Multisim), è bensì più basso. Una attenta analisi dei parametri in gioco permette di notare un errore increscioso nella scelta della

resistenza, così piccola da essere paragonabile alle resistenze parassite del circuito di cui abbiamo effettuato una stima nella sezione Analisi dati e commenti relativa al Circuito RL. Dovremo dunque tenere conto, almeno per questa scelta di R, di una resistenza equivalente  $R_{eq} = R + R_{par} \neq R$ . Possiamo calcolare  $\tau = \frac{1}{\gamma \cdot 2} \pm \frac{\sigma_\gamma}{2\gamma^2}$  e ottenere un'altra stima di L per controllare che si accordi con la media pesata precedente. Con  $\tau$  in ms e  $R_{eq}$  in  $k\Omega$

$$L = \tau \cdot R_{eq} = 0.051H$$

$$\sigma_L = \sqrt{(\sigma_\tau R_{eq})^2 + (\sigma_{R_{eq}} \tau)^2} = 0.007H$$

dunque L risulta pari a  $51 \pm 7H$ . Abbiamo confrontato questo valore con la media pesata ottenuta per L tramite il test t-Student.

$$t = \frac{|L_3 - \bar{L}|}{\sqrt{\sigma_{L_3}^2 + \sigma_L^2}} = \frac{|51 - 47.80734|}{\sqrt{7^2 + 0.00008^2}} = 0.5 \rightarrow PValue = 61.71\%$$

Conoscendo  $\beta = 14.37 \pm 0.07ms^{-1}$  possiamo anche ricavare  $C = \frac{1}{L \cdot \omega_0^2}$ , tenendo in considerazione che  $\omega_0^2$  dipende anche da  $\gamma$  dunque la sua precisione dipende anche dalla correlazione tra le due  $\sigma_{\beta\gamma} = -9.122 \cdot 10^{-4}$ .

$$\omega_0^2 = (\beta)^2 + (\gamma)^2 = 211ms$$

$$\sigma_{\omega^2} = \sqrt{(2\beta\sigma_\beta)^2 + (2\gamma\sigma_\gamma)^2 + 2 \cdot 4\beta\gamma\sigma_{\beta\gamma}} = 2ms$$

se  $\omega_0^2 = 211.5 \pm 0.4ms$  allora:

$$\hat{C} = \frac{1}{L\omega_0^2} = 0.09\mu F$$

$$\sigma_{\hat{C}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L^2\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\omega^2}}{(\omega_0^2)^2 L}\right)^2} = 0.01\mu F$$

concludiamo che  $C = 90 \pm 10nF$ , confrontandola con i  $99 \pm 1nF$  attesi otteniamo.

$$t = \frac{|C_t - \hat{C}|}{\sqrt{\sigma_{\hat{C}}^2 + \sigma_{C_t}^2}} = \frac{|99 - 90|}{\sqrt{1 + 10^2}} = 0.9 \rightarrow PValue = 36.81\%$$



### 4.3 Regime critico

É possibile instaurare il cosiddetto regime critico di un circuito RCL nel caso in cui la scelta di  $R$  ricada in una buona approssimazione del valore  $\sqrt{\frac{4L}{C}}$  che noi siamo in grado di stimare a  $1.390 \pm 0.007 k\Omega$  per il nostro circuito.

#### Dati raccolti

Durante l'esperienza in laboratorio, la scelta di  $R$  è stata effettuata a partire da una stima preliminare per  $L$  che si è rivelata scarsamente accurata, difatti una resistenza di  $R = 1224.0 \Omega$  è alquanto inferiore rispetto al valore richiesto. Ci aspettiamo dunque che i dati raccolti, pur non presentando l'andamento tipico del regime in sottosmorzamento poichè  $R$  è dell'ordine di  $R_{critico}$ , non saranno nemmeno compatibili con la forma funzionale dettata dal regime critico.

Si noti che abbiamo effettuato solo una misura per il voltaggio poichè il valore segnalato dall'oscilloscopio non variava, abbiamo dunque considerato la sensibilità dello strumento come errore sui valori, pari a 2mV.

Tabella4: circuito LCR - regime "critico"

t[ $\mu$ s]	V [mV]	t[ $\mu$ s]	V [mV]
0.00	0 $\pm$ 2	...	...
4.00	176 $\pm$ 2	80	680 $\pm$ 2
10.0	424 $\pm$ 2	190	616 $\pm$ 2
20.0	752 $\pm$ 2	200	560 $\pm$ 2
26.0	904 $\pm$ 2	210	504 $\pm$ 2
32.0	1020 $\pm$ 2	220	448 $\pm$ 2
38.0	1120 $\pm$ 2	230	400 $\pm$ 2
44.0	1190 $\pm$ 2	240	360 $\pm$ 2
52.0	1260 $\pm$ 2	250	320 $\pm$ 2
56.0	1290 $\pm$ 2	260	280 $\pm$ 2
64.0	1310 $\pm$ 2	270	248 $\pm$ 2
72.0	1320 $\pm$ 2	280	224 $\pm$ 2
80.0	1310 $\pm$ 2	290	192 $\pm$ 2
86.0	1300 $\pm$ 2	320	136 $\pm$ 2
92.0	1270 $\pm$ 2	340	96.0 $\pm$ 2
100	1230 $\pm$ 2	360	72.0 $\pm$ 2
110	1180 $\pm$ 2	380	56.0 $\pm$ 2
120	1100 $\pm$ 2	400	40.0 $\pm$ 2
130	1040 $\pm$ 2	420	32.0 $\pm$ 2
140	968 $\pm$ 2	440	24.0 $\pm$ 2
150	888 $\pm$ 2	460	16.0 $\pm$ 2
160	816 $\pm$ 2	480	8.00 $\pm$ 2
170	752 $\pm$ 2	500	8.00 $\pm$ 2
...	...	540	0.00 $\pm$ 2

errore strumentale sui tempi: varia da  $\sigma_t = 0.02\mu$ s a  $2\mu$ s

### Analisi dati e commenti

L'interpolazione eseguita a partire dal modello atteso per  $I(t)$  in regime critico:

$$I(t) = Ate^{-\gamma t}$$

ha prodotto il seguente risultato:

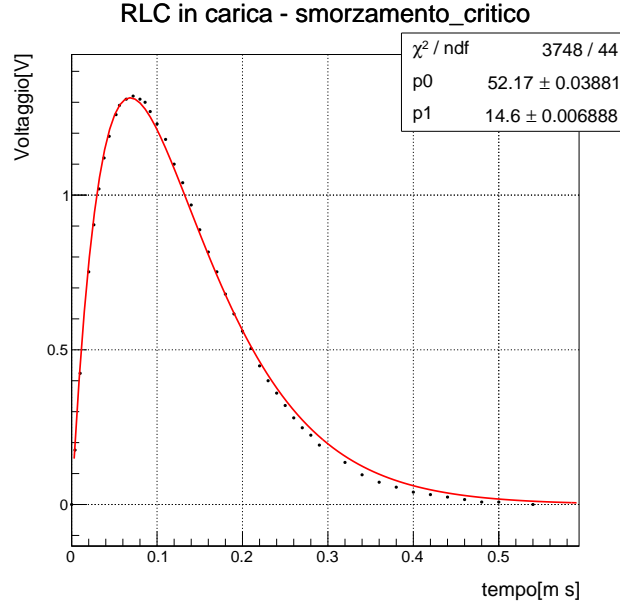


Figura 10: funzione usata per l'interpolazione:  $p_0 x e^{-(p_1 x)}$

Già dalla stima del  $\chi^2=3748$  a confronto con il numero dei gradi di libertà  $Ndf = 44$  possiamo notare che i dati non rispettano esattamente il modello atteso. Osserviamo infatti che l'andamento accenna l'instaurazione di un regime sottosmorzato, in cui la curva si abbassa rispetto all'asintoto a 0 per creare nuovi picchi. Per accertarci che la nostra ipotesi sia corretta abbiamo nuovamente eseguito il fit con la funzione attesa per il sottosmorzamento ed il chi quadro risulta in effetti  $\chi^2 = 150.7/43$  Ndf, un rapporto paragonabile a quello ottenuto già al paragrafo precedente.

I parametri riportati nella box assieme al grafico sono perciò poco significativi, li riportiamo di sotto per completezza

$$p_0 = A = 52.17 \pm 0.04V;$$

$$p_1 = \gamma = 14.600 \pm 0.007 ms^{-1}; \text{ mostriamo che se ricavassimo } \tau \text{ come}$$

$$\tau = \frac{1}{(2\gamma)} \pm \frac{\sigma_\gamma}{(2\gamma^2)}$$

tramite  $\tau$  in ms e R in k $\Omega$  L risulterebbe  $L = 0.04192 \pm 2 \cdot 10^{-5} H$ , la quale

si dimostra essere incompatibile con la media pesata ottenuta precedentemente poichè

$$t = \frac{|\bar{L} - L_3|}{\sqrt{\sigma_L^2 + \sigma_{L_4}^2}} \approx 300 \rightarrow PValue = NA$$

In conclusione, per ottenere buoni risultati da questi dati avremmo dovuto procedere con un'analisi dati del tutto analoga a quella vista per il regime sottosmorzato, che non riteniamo necessario riportare nuovamente.

#### 4.4 regime sovrasmorzato

Per ottenere un regime sovrasmorzato è stato necessario scegliere una resistenza  $R > 1.305k\Omega$ .

##### Dati raccolti

Abbiamo selezionato una  $R = 1499\Omega$  misurata tramite il multimetro palmare; i dati raccolti tramite il campionamento sono riassunti nella tabella sottostante, anche questa volta i valori per  $V$  sono stati presi solo una volta quindi  $\sigma_V = 2\text{mV}$  per ogni misura.

Tabella5: circuito LCR - regime sovrasmorzato

$t[\mu s]$	$V [\text{mV}]$	$t[\mu s]$	$V [\text{mV}]$
0.0	$0 \pm 2$	...	...
10.0	$504 \pm 2$	266	$392 \pm 2$
20.0	$872 \pm 2$	276	$360 \pm 2$
30.0	$1125 \pm 2$	286	$328 \pm 2$
40.0	$1280 \pm 2$	296	$304 \pm 2$
46.0	$1340 \pm 2$	306	$280 \pm 2$
52.0	$1380 \pm 2$	320	$248 \pm 2$
60.0	$1420 \pm 2$	336	$216 \pm 2$
66.0	$1420 \pm 2$	350	$192 \pm 2$
78.0	$1410 \pm 2$	366	$168 \pm 2$
88.0	$1370 \pm 2$	380	$152 \pm 2$
96.0	$1330 \pm 2$	396	$128 \pm 2$
106	$1270 \pm 2$	420	$104 \pm 2$
118	$1190 \pm 2$	438	$88 \pm 2$
126	$1140 \pm 2$	460	$72 \pm 2$
134	$1080 \pm 2$	480	$64 \pm 2$
146	$1000 \pm 2$	500	$56.0 \pm 2$
156	$936 \pm 2$	520	$48.0 \pm 2$
166	$872 \pm 2$	536	$40.0 \pm 2$
176	$808 \pm 2$	560	$32.0 \pm 2$
186	$744 \pm 2$	576	$24.0 \pm 2$
196	$688 \pm 2$	590	$24.0 \pm 2$
206	$640 \pm 2$	610	$24.0 \pm 2$
216	$592 \pm 2$	636	$16.0 \pm 2$
226	$544 \pm 2$	660	$16.0 \pm 2$
236	$504 \pm 2$	676	$8.00 \pm 2$
244	$464 \pm 2$	700	$8.00 \pm 2$
256	$424 \pm 2$	720	$0.00 \pm 2$
...	...		

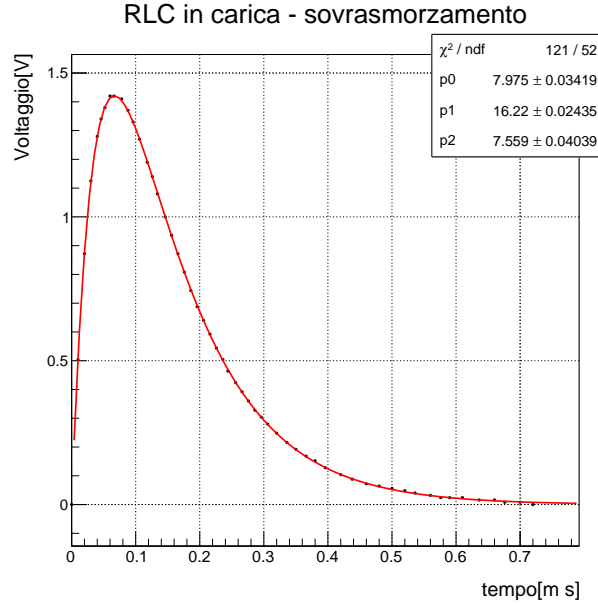
errore strumentale sui tempi: varia da  $\sigma_t = 0.2\mu s$  a  $2\mu s$

### Analisi dati e commenti

L'interpolazione eseguita a partire dal modello atteso per  $I(t)$ :

$$I(t) = Ae^{-\gamma t} \sinh(\beta t)$$

ha prodotto il risultato seguente:



funzione usata per l'interpolazione:  $p_0 e^{-(x p_1)} \sinh(x p_2)$

Sebbene ad un primo sguardo si noti che il grafico dei punti si adatta bene con il modello, il test del chi quadro rileva ancora una volta un errore nella stima delle incertezze: stimiamo che delle incertezze più realistiche per le nostre misure potrebbero essere pari a  $\sigma_V \cdot \frac{\chi^2}{N_{df}} = 4\text{mV}$ .

I risultati ricavati da ROOT per  $A$ ,  $\gamma$  e  $\beta$  dopo aver corretto le incertezze sono:

$p_0 = A = 7.97 \pm 0.07\text{V}$ , valore che regola l'altezza del picco della funzione;

$p_1 = \gamma = 16.22 \pm 0.05\text{ms}^{-1}$  e  $p_2 = \beta = 7.56 \pm 0.08\text{ms}^{-1}$ .

Possiamo ora calcolare  $\tau$  con  $\tau = \frac{1}{2 \cdot \gamma} \pm \frac{\sigma_\gamma}{2 \cdot \gamma^2} = 0.03082 \pm 5 \cdot 10^{-5}\text{ms}$

e ottenere, con  $\tau$  in ms e  $R$  in  $\text{k}\Omega$ ,

$$L = \tau \cdot R = 0.0462\text{H}$$

$$\sigma_L = \sqrt{(\sigma_\tau \cdot R)^2 + (\sigma_R \cdot \tau)^2} = 0.0001\text{H}$$

da cui segue la nostra miglior stima dell'induttanza:  $L = 46.2 \pm 0.1\text{mH}$ , la quale a confronto con la solita media pesata di  $\bar{L} = 47.80734 \pm 8 \cdot 10^{-5}\text{mH}$ ,

restituisce un  $t = 16$ , che corrisponde ad una probabilità di compatibilità così scarsa da essere inaccettabile. Per ottenere un risultato accettabile avremmo probabilmente dovuto stimare con più precisione gli errori sulle misure, che si dimostrano essere stati sottostimati.

Inoltre possiamo calcolare una nuova stima della capacità del condensatore: per farlo sostituiamo  $\beta = 7.56 \pm 0.08 ms^{-1}$  e  $\gamma = 16.22 \pm 0.05 ms^{-1}$  nelle seguenti formule al fine di trovare  $\omega$

$$\omega^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

$$\sigma_{\omega^2} = \sqrt{(2\beta\sigma_\beta)^2 + (2\gamma\sigma_\gamma)^2 + 2 \cdot 4\beta\gamma\sigma_{\beta\gamma}}$$

perciò se  $\omega^2 = 320 \pm 2ms$ , e usando l'induttanza ricavata in precedenza  $L = 46.2 \pm 0.1mH$ , la migliore stima per la capacità del condensatore sarà:

$$\hat{C} = \frac{1}{L\omega^2} = 0.0675694\mu F \quad \sigma_{\hat{C}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L^2 \cdot \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\omega^2}}{(\omega^2)^2 L}\right)^2} = 0.0005\mu F$$

Da cui la nostra misura:  $C = 67.6 \pm 0.5$  nF, che a confronto con  $99 \pm 1$  nF ricavata con il multimetro restituisce un  $t = 30$ , risultato ancora non accettabile. Osserviamo invece che questa stima per C risulta confrontabile con  $90 \pm 10$  nF ottenuto per il regime sottosmorzato per un  $t = 2 \rightarrow PValue = 4.6\%$ ; supponiamo quindi che il valore segnalato dal multimetro non fosse accurato, siccome entrambe le stime che abbiamo ottenuto dai dati riportano valori inferiori del 10-30 %.