

Interferometro

Broggi, Cantarini, Falconelli

Laboratorio di fisica II

1 Introduzione

L'interferenza è un fenomeno che si osserva quando due o più onde generate da sorgenti distinte ma coerenti si sovrappongono.

In laboratorio abbiamo avuto modo di creare figure d'interferenza ed effettuare misure e verifiche sperimentali con le configurazioni di Fabry-Perot e di Michelson ed un righello metallico impiegato come reticolo utilizzando un laser He-Ne. Virtualmente abbiamo calibrato il micrometro in configurazione Fabry-Perot con una lunghezza d'onda conosciuta al fine di determinare una stima di 3 diverse lunghezze d'onda ignote.

2 Configurazione Fabry-Perot virtuale

Per queste misure abbiamo variato la distanza tra gli specchi di intervalli $\Delta d_m \simeq 10$ e contato le frange che attraversavano il segno di riferimento. Il simulatore assume un angolo di incidenza θ pari a 30° . Considerando ΔN il numero di frange contate per l'intervallo Δd_m vale la relazione

$$2\Delta d_m \cos \theta = \Delta N \lambda$$

Le prime misurazioni, essendo nota la lunghezza d'onda $\lambda = 0.632\mu m$ del rosso, sono servite per calibrare l'intervallo Δd_m scelto. Le successive, noto l'intervallo e la sua unità di misura, ci hanno permesso di calcolare λ diverse da quella di partenza.

2.1 Calibrazione dell'interferometro

Abbiamo effettuato più misure partendo ogni volta da $d = 8[?]$ e terminando in posizioni distinte per poter apprezzare le fluttuazioni casuali della misura e al tempo stesso calibrare un range per Δd_m significativamente ampio. Successivamente, usando la formula

$$\frac{\Delta d_r}{\Delta d_m} = \frac{\Delta N \lambda}{2 \cos(30^\circ) \Delta d_m}$$

abbiamo ricavato il rapporto di calibrazione per ogni misura effettuata

il $[?]$ indica che l'unità di misura è da determinare

$\Delta d_m [?]$	ΔN	rapporto di calibrazione $[\mu m]$
8.98	29	1.17
9.15	30	1.20
9.46	31	1.20
10.00	32	1.19
10.41	34	1.18
10.50	33	1.15

$$\lambda = 0.632 \mu m \text{ nota}$$

La stima finale per il rapporto di calibrazione è stata effettuata calcolando la media e la deviazione standard sulla media: $R = 1.18 \pm 0.008 \mu m$

2.2 Misura delle lunghezze d'onda ignote

Per questa parte abbiamo proceduto contando, per variazioni di d_m pari a 9.70, 10.00, 10.30, il numero di frange ΔN , in modo da poter interpolare i dati con una retta ed ottenere una stima di λ .

2.2.1 Dati raccolti

scorrimento delle frange verdi

$\Delta d_m [?]$	misure ΔN			
9.70	42	41	42	42
10.0	43	44	44	45
10.30	45	44	45	46

scorrimento delle frange blu

$\Delta d_m[?]$	misure		ΔN	
9.70	37	37	39	37
10.0	38	40	38	38
10.30	39	40	39	41

scorrimento delle frange gialle

$\Delta d_m[?]$	misure		ΔN	
9.70	34	33	34	34
10.0	35	35	36	36
10.30	37	37	36	36

2.2.2 Analisi dati

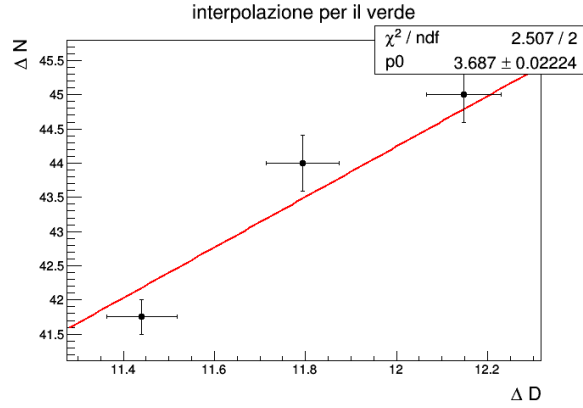
Al fine di riportare i dati raccolti per ogni lunghezza d'onda in un grafico a punti significativo abbiamo calcolato l'effettiva variazione per la distanza tra gli specchi moltiplicando ogni misura di Δd_m per il rapporto di calibrazione R e calcolato media e deviazione standard per ogni ΔN .

$\Delta d_m \cdot R [\mu m]$	ΔN
11.44 ± 0.08	41.75 ± 0.3
11.79 ± 0.08	44 ± 0.4
12.15 ± 0.08	45 ± 0.4

Abbiamo calcolato il coefficiente di correlazione lineare per accertarci che l'andamento di ΔN in funzione di Δd_r fosse soddisfacente:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}} = 0.976 \approx 1$$

concludiamo che la probabilità che le due grandezze non siano correlate linearmente è prossima allo 0% quindi ci aspettiamo che il grafico rappresenti una retta come da teoria.



equazione usata per l'interpolazione: $p_0 x$

il fit eseguito con ROOT stima il coefficiente angolare della retta a $p_0 = 3.69 \pm 0.02 \frac{1}{\mu m}$, abbiamo calcolato lambda come

$$\lambda = \frac{2 \cos(30^\circ)}{p_0} \quad \sigma_\lambda = \frac{2 \cos(30^\circ) \sigma_{p_0}}{p_0^2}$$

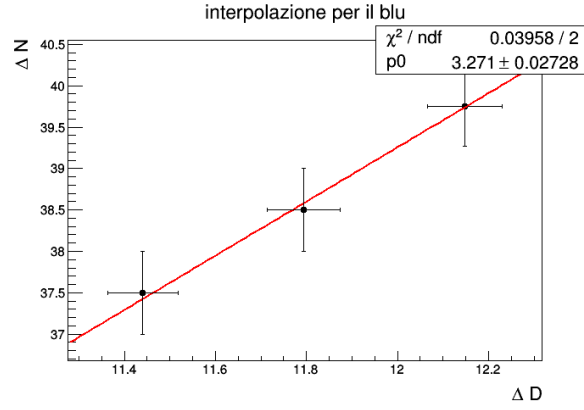
il risultato ottenuto è $\lambda_{verde} = 0.470 \pm 0.003 \mu m$, mentre l'intervallo di riferimento in cui ci aspettiamo la stima ricada è $0.520-0.565 \mu m$.

Trattandosi di dati virtuali la possibilità di aver commesso imprecisioni durante la raccolta dati è bassa, per spiegare dunque l'incompatibilità della stima con i valori attesi per il verde abbiamo per prima cosa eseguito gli stessi passaggi di analisi dati per le altre lunghezze d'onda. Il caso in cui le prossime stime risultassero accettabili, ci porterà a concludere che il valore per λ utilizzato per programmare il simulatore potrebbe non essere quello corretto.

L'analisi dati per il blu è stata svolta analogamente, sempre partendo a contare Δd_m da 8.

$\Delta d_m \cdot R [\mu m]$	ΔN
11.44 ± 0.08	37.5 ± 0.5
11.79 ± 0.08	38.5 ± 0.5
12.15 ± 0.08	39.75 ± 0.5

anche qui abbiamo calcolato il coefficiente di correlazione lineare $r = 0.981 \approx 1$, concludiamo che la correlazione è soddisfacente anche in questo caso, essendo 1 il valore atteso per r.



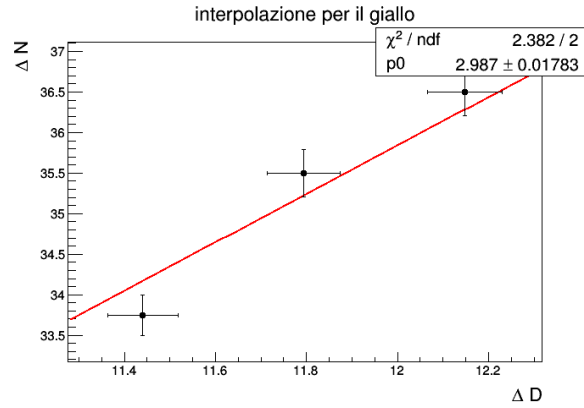
equazione usata per l'interpolazione: $p_0 x$

il coefficiente angolare risulta $p_0 = 3.27 \pm 0.03 \frac{1}{\mu m}$, quindi la stima per lambda è $\lambda_{blu} = 0.530 \pm 0.004 \mu m$. L'intervallo di riferimento per il blu è 0.435-0.500 μm , dunque consideriamo la stima accettabile.

Eseguendo i medesimi calcoli per il giallo abbiamo ottenuto:

$\Delta d_m \cdot R [\mu m]$	ΔN
11.44 ± 0.08	33.75 ± 0.25
11.80 ± 0.08	35.5 ± 0.29
12.15 ± 0.08	36.5 ± 0.29

per tali punti il coefficiente di correlazione risulta: $r = 0.981 \approx 1$, quindi anche per il giallo l'ipotesi che le nostre misure siano distribuite linearmente è corretta, con una probabilità approssimabile al 100%.



equazione usata per l'interpolazione: $p_0 x$

l'ultimo coefficiente angolare vale $p_0 = 2.99 \pm 0.02 \frac{1}{\mu m}$ e la lunghezza d'onda $\lambda_{giallo} = 0.580 \pm 0.003 \mu m$; siccome l'intervallo di riferimento per questo colore è di $0.565-0.590 \mu m$, ci riteniamo soddisfatti anche dei risultati di questo esperimento.

3 Configurazione Fabry-Perot

Prima di effettuare le misure abbiamo montato tutti gli elementi sul banco ottico ed allineato con cura il fascio emesso dal laser con l'onda riflessa.

La lunghezza d'onda del laser He-Ne utilizzato è nota e vale $\lambda=0.6328 \mu m$.

3.1 Verifica della legge dei massimi di interferenza

La nostra figura di interferenza presentava diversi cerchi concentrici la cui luminosità diminuiva con l'aumentare del raggio, mentre la nitidezza aumentava. La prima parte dell'esperienza in laboratorio consisteva nella verifica sperimentale della seguente legge dell'ottica ondulatoria:

$$\delta_r \frac{\lambda}{2\pi} + 2d \cos(\theta) = k\lambda$$

k è l'indice del massimo di interferenza considerato e θ la sua posizione angolare rispetto al centro della figura, centrata in linea con la sorgente, mentre d è la larghezza della cavità di Fabry-Perot, che andremo a stimare con una interpolazione lineare.

3.1.1 Dati raccolti

In questa parte, come in tutta l'esperienza, abbiamo usato come schermo il muro frontale al laser per una misurazione più agevole.

La sorgente dei fasci divergenti è il fuoco della lente che, trovandosi a 0.018 cm dal centro dell'oggetto, ha distanza dal muro approssimabile a quella della lente stessa: $L = 173.9 \pm 0.1 \text{ cm}$. La distanza della lente dal muro è stata misurata con un metro di sensibilità 1 mm a partire dal punto più lontano della lente e sottraendo la metà del suo spessore, riportato sulla scheda Pasco:

$(173.9 \text{ cm} \pm 0.1) \text{ cm} - 0.003 \text{ cm} = 173.9 \pm 0.1 \text{ cm}$.

Le misure del diametro di quelle frange circolari che potevamo osservare più chiaramente sono riportate, in centimetri, nella tabella sottostante

k	misure[cm]					media[cm]
5	2.8	2.3	2.4	2.6	2.5	2.52 ± 0.09
4	4.7	4.4	4.3	4.6	4.5	4.50 ± 0.07
3	6.0	5.9	5.7	5.8	5.8	5.84 ± 0.05
2	7.0	6.9	6.9	6.9	6.9	6.92 ± 0.02
1	7.9	7.8	7.9	7.8	7.8	7.84 ± 0.02

3.1.2 Analisi dati

Siccome l'incertezza stimata per la media delle nostre misure è inferiore alla sensibilità del metro utilizzato, consideriamo come errore sulla stima di ogni diametro quest'ultimo: $\sigma_\mu = 0.1\text{cm}$.

L'angolo relativo a ciascun massimo è stato ricavato come segue, utilizzando la propagazione degli errori sul raggio e sulla distanza L dal muro:

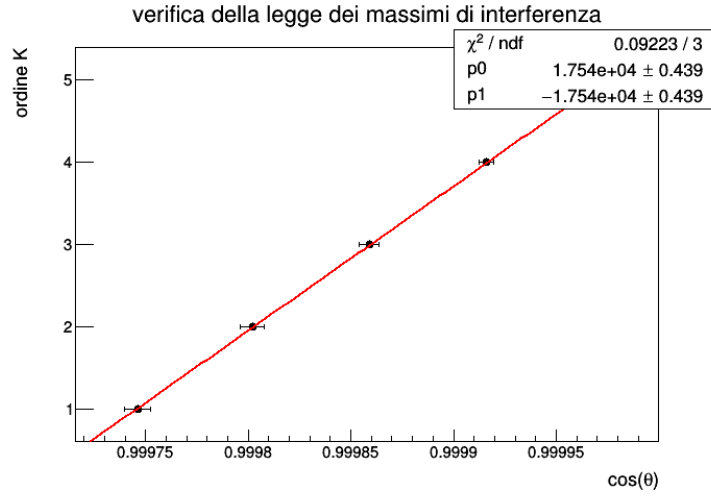
$$\theta = \text{atan}\left(\frac{r}{L}\right) \quad \sigma_\theta = \sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{L(1 + (\frac{r}{L})^2)}\right)^2 + \left(\frac{r\sigma_L}{L^2(1 + (\frac{r}{L})^2)}\right)^2}$$

k	media corretta[cm]	raggio[cm]	cos(theta)
5	2.5 ± 0.1	1.26 ± 0.05	$0.999974 \pm 2 \cdot 10^6$
4	4.5 ± 0.1	2.25 ± 0.05	$0.999916 \pm 4 \cdot 10^6$
3	5.8 ± 0.1	2.92 ± 0.05	$0.999859 \pm 5 \cdot 10^6$
2	6.9 ± 0.1	3.46 ± 0.05	$0.999802 \pm 6 \cdot 10^6$
1	7.8 ± 0.1	3.92 ± 0.05	$0.999746 \pm 6 \cdot 10^6$

Abbiamo calcolato il coefficiente di correlazione lineare tra l'ordine del massimo associato a ogni θ e $\cos(\theta)$

$$r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}} = 0.999989 \approx 1$$

il valore è così vicino ad 1 che possiamo considerare l'ipotesi di linearità verificata al 100%, di sotto riportiamo il grafico prodotto con questi dati



equazione usata per l'interpolazione: $p_0x + p_1$

i risultati del fit per il coefficiente angolare e l'intercetta sono:
 $p_0 = 1.8 \cdot 10^4 \pm 0.4$ e $p_1 = -1.8 \cdot 10^4 \pm 0.4$ da cui abbiamo ricavato

$$\hat{d} = \frac{\lambda p_0}{2} \quad \sigma_{\hat{d}} = \frac{\lambda \sigma_{p_0}}{2}$$

la larghezza cavità di Fabry-Perot quindi risulta: $5550.8 \pm 0.1 \mu m$,
ovvero $\simeq 5.5 \pm 0.0001 mm$, notiamo la grande precisione con cui le misure relative
agli effetti ottici permettono di determinare la stima desiderata.

Dai risultati di questa interpolazione si può ricavare anche una stima per δ_r
che rappresenta lo sfasamento medio tra i raggi uscenti dalla cavità dovuto alla
riflessione $\delta_r = -1.8 \cdot 10^4 \pm 0.4 \cdot 2\pi$ ovvero $-0.8 \cdot 2k\pi$.

3.2 Calibrazione del micrometro

Per la calibrazione del micrometro abbiamo sfruttato la relazione: $2\Delta d = \Delta N \lambda$
($\cos(\theta) \approx 1$ come abbiamo potuto calcolare nell'analisi precedente) misurando
più volte il passaggio di circa 20 frange attraverso un segno praticato su un foglio
attaccato al muro, e segnando il relativo spostamento del micrometro dalla sua
posizione iniziale.

Siccome la scheda PASCO indicava che al centro dell'area di movimento si ha
una precisione sugli spostamenti massima del 1%, abbiamo svolto le nostre mis-
urazioni a partire dal segno del 3 su un range ampio 10.

Prima di ogni conteggio ruotavamo la manopola facendo un giro completo nella
stessa direzione in cui volevamo muoverci per evitare errori dovuti al backlash
del sistema meccanico.

$\Delta d_m[?]$	ΔN	$\Delta d_r/\Delta d_m[\mu m]$
7 ± 1	21	0.9 ± 0.1
7 ± 1	22	1.0 ± 0.1
8 ± 1	25	1.0 ± 0.1
9 ± 1	28	1.0 ± 0.1
10 ± 1	29	0.9 ± 0.1
10 ± 1	30	0.9 ± 0.1
8 ± 1	24	0.9 ± 0.1
9 ± 1	26	0.9 ± 0.1

sensibilità del micrometro = 1[?]

$$\Rightarrow \text{media} : \bar{R} = 0.95 \pm 0.04 \mu m$$

Abbiamo notato che l'attività di conteggio diventava più ardua all'aumentare di ΔN per via della difficoltà a ruotare con continuità la manopola, per questo motivo ci siamo fermati solo a venti frange, comunque sufficienti per ottenere una precisione sul rapporto $\frac{\Delta d_r}{\Delta d_m}$ del 10%. Raddoppiando l'intervallo da calibrare avremmo potuto dimezzare la precisione siccome il rapporto sensibilità dello strumento-intervallo sarebbe diminuito. Tuttavia, poichè abbiamo effettuato più misurazioni, la precisione sul valore finale è del 4%.

4 Configurazione Michelson

L'interferometro di Michelson si presta all'esecuzione di esperimenti interessanti come la stima dell'indice di rifrazione dell'aria o del vetro. Ponendo una cella a vuoto, oppure una lastra di vetro, tra il beam splitter e lo specchio mobile, abbiamo potuto studiare gli effetti della variazione del percorso dei raggi al loro interno sulla figura riprodotta.

4.1 Verifica della calibrazione

Abbiamo rapidamente calibrato il medesimo intervallo anche con la configurazione di Michelson per poter effettuare un confronto tra la precisione dei due metodi.

$\Delta d_m[?]$	ΔN	$\Delta d_r/\Delta d_m \mu m$
6 ± 1	21	1.1 ± 0.2
7 ± 1	22	1.0 ± 0.1
6 ± 1	21	1.1 ± 0.2

sensibilità del micrometro = 1[?]

$$\Rightarrow \text{media} : \bar{R} = 1.1 \pm 0.1 \mu m$$

La precisione per ogni misura effettuata, rispetto al 10% ottenuto con Fabry-Perot, è del 18%, ma si riduce a 9% sulla la media. Questa differenza era prevedibile osservando l'immagine ottenuta con Michelson che presentava frange più larghe.

4.2 Indice di rifrazione dell'aria

Per effettuare la misura dell'indice di rifrazione dell'aria abbiamo utilizzato una cella a vuoto, dallo spessore di 3 cm, in cui era possibile variare a piacere la pressione. Poiché l'indice di rifrazione ha un andamento lineare in funzione della pressione atmosferica, lo abbiamo ricavato dalla relazione

$$n_{aria} = mP_{atm} + 1 \quad \text{con} \quad m = \frac{\Delta N \lambda}{2d\Delta P}$$

dove ΔN è il numero delle frange contate, λ la lunghezza d'onda del laser nota, d lo spessore della cella a vuoto e ΔP è il modulo della differenza di pressione rispetto a quella iniziale.

4.2.1 Dati raccolti

La pompa utilizzata ha una sensibilità di 2kPa, che abbiamo riportato come stima per l'errore sulle letture.

Nel raccogliere i dati, dopo aver riscontrato qualche difficoltà nel passare lentamente da P_{gauge} a P_{atm} , abbiamo deciso di contare le frange quando il sistema varia da P_{atm} a P_{gauge} quindi mentre l'aria esce. In questo modo il cambiamento di pressione risultava meno brusco e il movimento della figura più lento, di conseguenza il conteggio più semplice.

Di seguito i dati raccolti a differenti variazioni di pressioni (si noti che la pressione iniziale nel nostro caso è sempre uguale a 0 rispetto a P_{atm} , per cui in tabella viene segnata solo la pressione finale, da cui è facilmente deducibile ΔP)

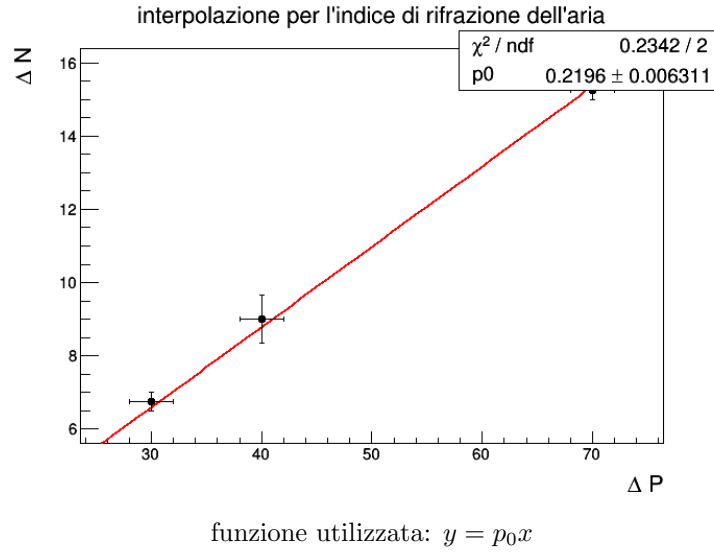
Pressione finale [kPa]	ΔN				media
-30 ± 2	7	6	7	7	6.7 ± 0.25
-40 ± 2	10	9	9	8	9 ± 0.7
-70 ± 2	15	15	15	16	15.25 ± 0.25

la pressione finale è intesa come pressione al di sotto del valore di P_{atm} , da cui il -

4.2.2 Analisi dati

Poiché abbiamo preso misure a differenti pressioni finali, cerchiamo una retta che dimostri la legge sopra descritta per cui l'andamento del numero di frange contate è lineare rispetto alla ΔP applicata.

Si noti che nonostante la ΔP da noi applicata sia in realtà negativa siccome andavamo a diminuire la pressione, il grafico riporta il modulo di ogni ΔP poichè è ciò che ci interessa per ricavare m .



il risultato del fit eseguito con ROOT ha determinato un coefficiente angolare pari a $p_0 = 0.220 \pm 0.006 \frac{1}{kPa}$, da cui abbiamo ricavato m :

$$m = \frac{p_0 \lambda}{2d} = 2.3210^{-6} \pm 7 \cdot 10^{-8} \frac{1}{kPa}$$

sostituendo m nell'equazione iniziale in cui abbiamo supposto $P_{atm} = 101.3250 kPa$ otteniamo $n_{aria} = 1.000230 \pm 7 \cdot 10^{-6}$.

Abbiamo fatto un test t-Student per verificare la compatibilità della nostra stima con il valore tabulato per n_{aria} , ovvero 1.000294:

$$t = \frac{|\hat{n} - n_{aria}|}{\sigma_{\hat{n}}} = \frac{|1.000230 - 1.000294|}{7 \cdot 10^{-6}} = 9$$

Il test dà un risultato insoddisfacente che ci porta a concludere di aver sottostimato le incertezze, probabilmente la precisione con cui riuscivamo a selezionare il valore di P_{gauge} non era affatto inferiore alla sua sensibilità; sospettiamo un errore di parallasse dovuto alla posizione laterale del nostro occhio rispetto alla lancetta e allo spessore del vetro che copriva la lancetta. Immaginiamo di aver

sbagliato a stimare l'errore sulla Pressione finale della met : questa correzione porterebbe ad aumentare l'errore su n_{aria} del 75 % (la stima per n_{aria} ponendo $\sigma = 4kPa$   di $1.00024 \pm 1 \cdot 10^{-5}$).

Si osservi che concludere che $n_{aria} \simeq 1$ era necessario per giustificare l'assunzione effettuata nell'utilizzare la formula $2\Delta d = \Delta N\lambda$ con $\lambda = \lambda_0 =$ lunghezza d'onda del nostro laser nel vuoto (l'approssimazione si ripeter  anche nelle formule per il calcolo di n_{vetro} e passo del righello).

4.3 Indice di rifrazione del vetro

Attraverso un braccio rotante fissato alla lastra di vetro, abbiamo potuto modificare lentamente l'inclinazione di quest'ultima rispetto al cammino della luce e leggere lo spostamento con una sensibilit  strumentale di 1° .

Se la variazione della posizione angolare   $\theta = \theta_{finale}$, considerando un $\theta_{iniziale}$ di 0° perch  siamo partiti da una posizione perpendicolare al fascio, l'indice di rifrazione del vetro   stato calcolato usando la formula:

$$n_{vetro} = \frac{(2d - \Delta N\lambda)(1 - \cos\theta)}{2d \cdot (1 - \cos\theta) - \Delta N\lambda}$$

4.3.1 Dati raccolti

La larghezza della piastra di vetro utilizzata   $t = 6 \cdot 10^3 \pm 10^3 \mu m$.

misure effettuate per il calcolo di n_{vetro}

θ finale [gradi]	2.6	2.8	2.7	2.6	3.2
ΔN	10				

Abbiamo fatto l'infelice scelta di contare il passaggio di sole 10 frange durante questi spostamenti, che corrispondono a un angolo medio di $2.8^\circ \pm 0.1^\circ$ la cui incertezza risulta essere il 10% di quella dello strumento.

Per ottenere una stima per n accurata oltre che precisa saremmo tentati di usare 1° come incertezza su θ , tuttavia questa scelta ci porterebbe ad avere una stima tutt'altro che precisa, per via del nostro errore di giudizio iniziale: $\theta = 2.8^\circ \pm 1^\circ \xrightarrow{\text{precisione}} 36\%$.

Per correggere l'errore commesso nella prima giornata abbiamo preso nuovamente le misure la volta successiva, stando attenti ad arrivare fino ai 10° di inclinazione:

θ finale [gradi]	10 ± 1				
ΔN	31	33	30	32	30

qui abbiamo utilizzato da subito la sensibilità dello strumento

4.3.2 Analisi Dati

Utilizzando la formula sottostante abbiamo eseguito i nostri calcoli del caso.

$$n_{\text{vetro}} = \frac{(2d - \Delta N \lambda)(1 - \cos \theta)}{2d \cdot (1 - \cos \theta) - \Delta N \lambda} \quad \sigma_n = \left| \frac{(2t - \Delta N \lambda) \sin \bar{\theta} \Delta N \lambda}{(2t(1 - \cos \bar{\theta}) - \Delta N \lambda)^2} \right| \sigma_{\bar{\theta}}$$

Come accennato, la stima per n utilizzando $\bar{\theta} = 2.8^\circ \pm 1^\circ$ è sicuramente molto accurata ma poco significativa per via della scarsa precisione:

$$n = 1.8 \pm 1.1.$$

La stima per n ottenuta con $\theta = 2.8^\circ \pm 0.1^\circ$ è di 1.8 ± 0.1 è invece precisa al 5% ma ci aspettiamo sia poco accurata. Di fronte all'incertezza che quello trovato sia effettivamente vicino al valore di n per quel vetro abbiamo pensato di eseguire, invece di una media su θ , una media pesata sugli indici ricavati per ogni θ , che ci aspettiamo poco precisi, contiamo però sulla media pesata per abbassare il grado di incertezza sulla misura finale.

θ finale [gradi]	stima per n	precisione
2.6 ± 1	2.0 ± 1.7	85%
2.8 ± 1	1.8 ± 1.0	56%
2.7 ± 1	1.9 ± 1.3	68%
2.6 ± 1	2.0 ± 1.7	85%
3.2 ± 1	1.5 ± 0.5	33%

$$\Rightarrow \bar{n} = 1.65 \pm 0.39$$

Come atteso la precisione della media pesata si riduce a un 25%, consideriamo questa la nostra stima migliore per accuratezza e precisione.

Consideriamo come valore di confronto l'indice di rifrazione del vetro Flint, quello più utilizzato in ottica; per la lunghezza d'onda del rosso $n_{\text{flint}} = 1.61$.

Il test t-Student effettuato per la stima ottenuta:

$$t = \frac{\hat{n} - n_{\text{flint}}}{\sigma_{\hat{n}}} = \frac{1.65 - 1.61}{0.39} = 0.1 \Rightarrow P\text{Value} = 92\%$$

Nella seconda giornata in laboratorio abbiamo tentato di svolgere la raccolta dati in modo più accorto prendendo più misure di ΔN per una variazione angolare di 10° circa.

La media su ΔN osservato è di 31.2 ± 0.6 , consideriamo un $\theta_{\text{finale}} = 10^\circ \pm 1^\circ$ per ogni misura e un $\theta_{\text{iniziale}} = 0^\circ$ perchè partivamo sempre dalla posizione perpendicolare al fascio luminoso. Per ottenere una stima per n_{vetro} abbiamo usato le seguenti formule per la propagazione degli errori

$$n_{vetro} = \frac{(2d - \Delta N \lambda)(1 - \cos\theta)}{2d \cdot (1 - \cos\theta) - \Delta N \lambda} \quad \sigma_n = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial \Delta N} \sigma_N\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial \theta} \sigma_\theta\right)^2}$$

$$\frac{\partial n}{\partial \Delta N} = \frac{\Delta N 2t(1 - \cos\theta)\lambda \cos\theta}{(2t(1 - \cos\theta) - \Delta N \lambda)^2} \quad \frac{\partial n}{\partial \theta} = \frac{(\lambda \Delta N - 2t)\lambda \Delta N \sin\theta}{(2t(1 - \cos\theta) - \Delta N \lambda)^2}$$

Il risultato ottenuto è $n_{vetro} = 1.12 \pm 0.03$ che si discosta molto di quello atteso per il vetro Flint di 1.61: $t = \frac{|1.12 - 1.61|}{0.03} = 16.3$ la probabilità che le due misure siano compatibili è approssimabile allo 0%.

Attribuiamo questo insuccesso del test a gravi errori di allineamento della strumentazione; abbiamo avuto, durante la procedura di montaggio e allineamento degli strumenti ottici, una notevole difficoltà ad ottenere una figura chiara e centrata come quella dell'esperienza precedente.

La figura presentava una distorsione che attribuiamo alla orientazione non perfettamente perpendicolare dello specchietto mobile rispetto al fascio, infatti abbiamo notato che lo specchio non era perfettamente in linea con la base ad incastro danneggiata.

5 Misure con righello metallico

Lo scopo di questa esperienza era di osservare le proprietà del righello come reticolo di diffrazione e di ottenere una stima del suo passo (1mm).

Per questa parte abbiamo utilizzato un righello metallico posizionandolo in modo che sporgesse dal tavolo di 3.5cm. Puntando il laser radente alle scanalature del righello siamo stati in grado di visualizzare sul muro la figura di interferenza, caratterizzata da punti più luminosi in cui abbiamo riconosciuto i massimi di interferenza.

5.0.1 Dati raccolti

Abbiamo effettuato le seguenti misure:

$h_s = 3.8 \pm 0.1$ cm altezza del foro del laser rispetto al tavolo.

$d_i = 72.5 \pm 0.1$ cm distanza tra sorgente e primo punto della regione illuminata.

$d_r = 127 \pm 0.1$ cm distanza tra il primo punto della regione illuminata e il muro.

Alla base della serie di punti abbiamo notato un cerchio i cui punti estremi sulla verticale erano più luminosi rispetto al resto: il raggio indeviato P_t ed il raggio riflesso P_r (massimo di ordine 0). Abbiamo misurato la loro distanza e calcolato il raggio del cerchio

misure per calcolare il raggio

$P_r - P_t[cm]$					media[cm]	raggio[cm]
7.8	7.7	7.7	7.8	7.8	7.8 ± 0.02	3.88 ± 0.01

misure per calcolare le posizioni dei massimi di interferenza

ordine massimo	altezza[cm]					media[cm]
0	0					0
1	2.5	2.5	2.5	2.4	2.5	2.48 ± 0.02
2	4.2	4.1	4.1	4.0	4.1	4.10 ± 0.03
3	5.5	5.5	5.4	5.4	5.5	5.46 ± 0.02
4	6.6	6.6	6.5	6.5	6.5	6.54 ± 0.02
5	7.5	7.6	7.5	7.4	7.5	7.50 ± 0.03
6	8.5	8.5	8.4	8.4	8.5	8.46 ± 0.02
7	9.3	9.8	9.3	9.2	9.3	9.38 ± 0.1

l'altezza è riferita al massimo di ordine 0

Useremo la sensibilità dello strumento per eseguire i calcoli, essendo questa maggiore di ogni fluttuazione casuale delle misure che siamo stati in grado di apprezzare: sensibilità del metro = 0.1cm.

5.0.2 Analisi dati

Per prima cosa abbiamo calcolato l'angolo di incidenza tenendo conto dell'incertezza su d_i e h_s

$$\theta_{Inc} = \text{atan}\left(\frac{h_s}{d_i}\right) = 0.052 \text{rad} \quad \sigma_\theta = \sqrt{\left(\frac{\frac{h_s \sigma_{d_i}}{d_i^2}}{1 + \left(\frac{h_s}{d_i}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{\sigma_{h_s}}{d_i}}{1 + \left(\frac{h_s}{d_i}\right)^2}\right)^2} = 0.001 \text{rad}$$

ordine del massimo	media corretta[cm]	+ raggio[cm]	distanza dal centro[cm]
0	0	$+ 3.88 \pm 0.1$	3.88 ± 0.1
1	2.48 ± 0.1	$+ 3.88 \pm 0.1$	6.4 ± 0.1
2	4.10 ± 0.1	$+ 3.88 \pm 0.1$	8.0 ± 0.1
3	5.46 ± 0.1	$+ 3.88 \pm 0.1$	9.3 ± 0.1
4	6.54 ± 0.1	$+ 3.88 \pm 0.1$	10.4 ± 0.1
5	7.50 ± 0.1	$+ 3.88 \pm 0.1$	11.4 ± 0.1
6	8.46 ± 0.1	$+ 3.88 \pm 0.1$	12.3 ± 0.1
7	9.38 ± 0.1	$+ 3.88 \pm 0.1$	13.3 ± 0.1

attraverso le formule:

$$\theta_N = \text{atan}\left(\frac{h_c}{d_r}\right) \quad \sigma_{\theta_N} = \sqrt{\left(\frac{\partial\theta_N}{\partial d_r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta_N}{\partial h_c}\right)^2}$$

$$\frac{\partial\theta_N}{\partial d_r} = \frac{\frac{\sigma_{d_r} h_c}{d_r^2}}{1 + \left(\frac{h_c}{d_r}\right)^2} \quad \frac{\partial\theta_N}{\partial h_c} = \frac{\frac{\sigma_h}{d_r}}{1 + \left(\frac{h_c}{d_r}\right)^2}$$

abbiamo ricavato θ_N , la posizione angolare del massimo N rispetto al centro della figura.

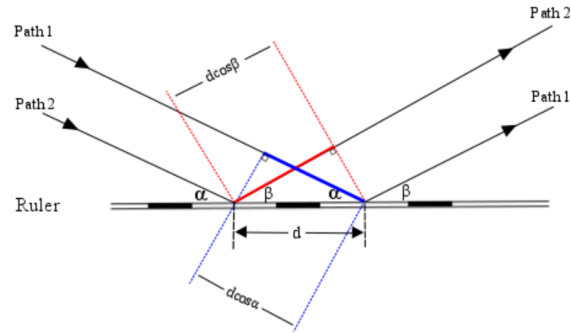
ordine del massimo	θ_N [rad]	$\cos(\theta_{Inc}) - \cos(\theta_N)$
0	0.030 ± 0.001	$-0.00090 \pm 8 \cdot 10^{-5}$
1	0.050 ± 0.001	$-0.00012 \pm 9 \cdot 10^{-5}$
2	0.0628 ± 0.001	$0.0006 \pm 1 \cdot 10^{-4}$
3	0.0734 ± 0.001	$0.0013 \pm 1 \cdot 10^{-4}$
4	0.082 ± 0.001	$0.0020 \pm 1 \cdot 10^{-4}$
5	0.089 ± 0.001	$0.0026 \pm 1 \cdot 10^{-4}$
6	0.097 ± 0.001	$0.0033 \pm 1 \cdot 10^{-4}$
7	0.104 ± 0.001	$0.0040 \pm 1 \cdot 10^{-4}$

Il calcolo per il coefficiente di correlazione lineare per il passo ha riportato un valore di 0.999666, il che ci da una certezza approssimabile al 100% sulla correttezza dell'ipotesi che le misure siano guidate da una legge lineare.

Infatti la teoria sui fenomeni di interferenza nei reticoli e dei ragionamenti geometrici sul nostro caso ci hanno portati a ricavare la seguente formula per ricavare d, dove la lunghezza d'onda del laser è $\lambda = 0.6328 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$.

$$d(\cos\theta_{Inc} - \cos\theta_N) = k\lambda$$

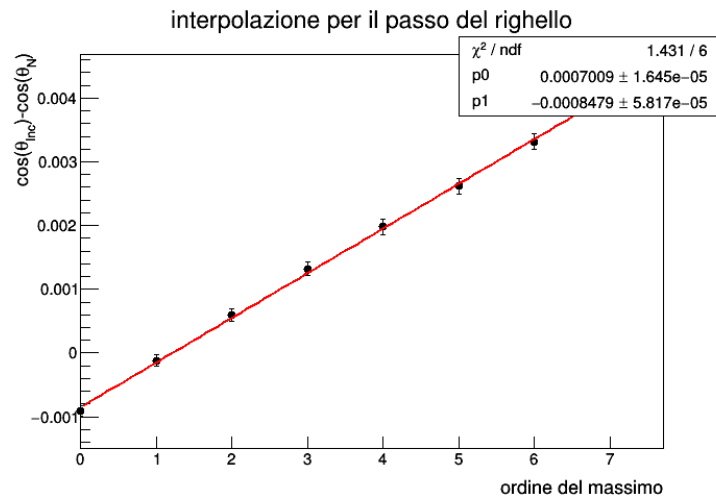
La formula si dimostra considerando che i massimi di interferenza si presentano laddove la differenza di cammino di due raggi provenienti da sorgenti distinte ma coerenti (le scanature del righello) è pari a $k\lambda$, dove k è un intero. La differenza di cammino tra due raggi consecutivi si ricava attraverso un disegno simile a quello sottostante:



α è l'angolo di incidenza mentre β è l'angolo d'uscita del raggio riflesso, il quale produrrà, interferendo con gli altri raggi riflessi, il massimo di interferenza alla posizione che abbiamo chiamato θ_N .

Attribuiamo segno positivo al tratto blu e segno negativo al tratto rosso perchè appartengono a cammini differenti e otteniamo la formula riportata in alto.

Abbiamo utilizzato tale formula per eseguire un'interpolazione lineare dei nostri dati



Il coefficiente angolare $m = \frac{\lambda}{d}$ vale $7.0 \cdot 10^{-4} \pm 2 \cdot 10^{-5}$ mentre l'intercetta $c = -8.5 \cdot 10^{-4} \pm 6 \cdot 10^{-5}$ come previsto dai dati.

Il passo del righello e la rispettiva incertezza si possono calcolare come:

$$passo_{righello} = \frac{\lambda}{m} \quad \sigma_{passo} = \frac{\lambda \sigma_m}{m^2}$$

pertanto risulta $passo_{righello} = 0.090 \pm 0.002 \text{ cm}$.

Confrontando la stima ottenuta con il valore atteso di $1 \text{ mm} = 0.1 \text{ cm}$ abbiamo ottenuto una probabilità di compatibilità approssimabile a 0%.

$$t = \frac{|\hat{d} - d_{atteso}|}{\sigma_d} = \frac{|0.090 - 0.1|}{0.002} = 5$$

La scarsa compatibilità è in gran parte dovuta alla grande precisione con cui questo metodo ci ha permesso di produrre una stima per d (precisione del 3%). Tuttavia una fonte di errore sistematico da tenere in considerazione è il metodo di determinazione di θ_{Inc} (si noti che con θ_{Inc} più grande avremmo ottenuto una stima più accurata); siccome la regione del righello illuminata dal laser era piuttosto ampia, trovando un modo per ridurla e considerando il suo punto medio invece dell'estremo iniziale avremmo ottenuto una stima per l'angolo di incidenza più accurata.

Concludiamo osservando che anche lavorando con reticoli di passo dell'ordine dei cm (grandezza macroscopica distinguibile ad occhio nudo) è ancora possibile apprezzare la precisione delle misure ottiche, anche se rimane difficoltoso ottenere una stima accurata poichè i fattori che possono modificare le immagini di interferenza sono parecchi e a volte impercettibili a occhio nudo.