

Circuiti 3

Diana Broggi, Giulia Cantarini, Paolo Falconelli

Laboratorio di fisica II

Indice

1	Introduzione	1
2	Strumentazione	2
3	Parte prima	2
3.1	Procedimento adottato	3
3.2	Circuito RC	4
3.2.1	Funzione di trasferimento su C	4
3.2.2	Funzione di trasferimento su R	7
3.2.3	Conclusioni sul circuito RC	10
3.3	Circuito RL	12
3.3.1	Funzione di trasferimento su L	12
3.3.2	Funzione di trasferimento su R	15
3.3.3	Conclusioni sul circuito RL	17
4	Parte seconda	18
4.1	Procedimento adottato	18
4.2	Circuiti LCR - RLC - RCL	19
4.2.1	Funzione di trasferimento su R	19
4.2.2	Funzione di trasferimento su C	23
4.2.3	Funzione di trasferimento su L	26
4.2.4	Conclusioni circuiti LCR - RLC - RCL	29

1 Introduzione

L'esperienza è volta allo studio delle funzioni di trasferimento¹ relative ai circuiti RC, RL ed RCL.

In un circuito lineare² una funzione di trasferimento si definisce in relazione

¹funzione che caratterizza il comportamento di un qualsiasi sistema dinamico mettendo in relazione ingresso e uscita

²circuito costituito solo da componenti la cui relazione costitutiva, algebrica o differenziale, è lineare

a due nodi, come il rapporto tra il segnale (nel nostro caso una tensione) nel nodo di uscita e il segnale dal nodo di ingresso. In generale essa dipende dalla frequenza del segnale di riferimento, perciò in laboratorio è stato adoperato il generatore di funzioni con un segnale di tipo sinusoidale a frequenza modificabile; per esprimere gli effetti del circuito sia sull'ampiezza che sulla fase del segnale trasferito, la funzione di trasferimento è una funzione a valori complessi.

$$\vec{H}(\omega) = \frac{\vec{V}_{in}(\omega)}{\vec{V}_{out}(\omega)}$$

dove \vec{V}_{in} e \vec{V}_{out} sono fasori³ che descrivono il segnale variabile con ω in ingresso e in uscita.

2 Strumentazione

La strumentazione adoperata per la realizzazione dei circuiti e la raccolta dati comprende:

- generatore di funzioni d'onda, utilizzato per produrre un segnale a tensione alternata di $V_{pp} = 20V$; resistenza interna di $671 \pm 1\Omega$.
- oscilloscopio, permette di visualizzare l'andamento temporale del segnale ricevuto dalle sonde, e di effettuare le misure necessarie del caso attraverso la funzione *Acquire*; resistenza interna $\approx 1 M\Omega$ e capacità di ingresso di 20pF.
- cavi coassiali, utilizzati per trasmettere il segnale dal generatore all'oscilloscopio; resistenza dell'ordine dei 50 Ω .
- sonde compensate a 10x, adoperate per misurare la tensione in determinati nodi del circuito e riferirla in ingresso all'oscilloscopio.
- *breadboard*.
- resistenze dell'ordine dei $k\Omega$.
- condensatori con capacità dell'ordine dei nF.
- induttori di induttanza che varia dell'ordine dei mH ad H.

3 Parte prima

Nella prima parte dell'esperienza abbiamo analizzato il trasferimento del segnale alternato attraverso i circuiti RC ed RL. Si osserva che in regimi di corrente

³vettori nel piano complesso utilizzati in elettrotecnica come notazione privilegiata per rappresentare un segnale sinusoidale. Es: $V(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

alternata, ad elementi circuitali quali C ed L è associata una reattanza X dovuta all'opposizione di tali elementi alla variazione di corrente nel circuito. In tali condizioni la legge di Ohm risulta estesa a $V = I \cdot Z$ dove Z è il numero complesso $Z := R + jX$ detto induttanza e tiene conto di entrambi i fenomeni di opposizione di un circuito al passaggio di corrente alternata: fenomeni di consumo di energia elettrica (passaggio attraverso R) e fenomeni di accumulo di energia elettromagnetica (passaggio per X).

Il calcolo delle induttanze si esegue a partire dalla relazione costitutiva dei relativi elementi

- impedenza capacitiva Z_C

da $I = C\dot{V}$, ponendo $V = V_0 e^{j\omega t}$ e $I = I_0 e^{j(\omega t + \phi)}$, otteniamo:

$$I_0 e^{j(\omega t + \phi)} = C j \omega V_0 e^{j\omega t} \rightarrow \frac{V}{I} = \frac{1}{C j \omega} = Z_C$$

- impedenza induttiva Z_L

da $V = L\dot{I}$, ponendo $V = V_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ e $I = I_0 e^{j\omega t}$, otteniamo:

$$V_0 e^{j(\omega t + \phi)} = L j \omega I_0 e^{j\omega t} \rightarrow \frac{V}{I} = L j \omega = Z_L$$

- impedenza resistiva Z_R

da $V = IR$ risulta facilmente $\frac{V}{I} = R = Z_R$

3.1 Procedimento adottato

La rappresentazione di \vec{H} in funzione di f richiede di realizzare due grafici: uno per il modulo ed uno per la fase; il modulo di H si ottiene tramite il rapporto dei moduli di \vec{V}_{out} e \vec{V}_{in} mentre la fase è pari alla differenza delle fasi. Tali misure sono state ottenute tramite la funzione *Acquire* dell'oscilloscopio selezionando ampiezza e sfasamento rispetto al segnale di entrata.

I circuiti interessati per questa prima parte corrispondono allo schema in Figura 1 in cui si può sostituire Z con C od L a seconda del caso in esame.

Grazie alla funzione *Math* dell'oscilloscopio abbiamo potuto osservare contemporaneamente sullo schermo i segnali rilevati in corrispondenza delle sonde e la loro differenza. Questa operazione permette di misurare nello stesso momento il potenziale in uscita ai capi di R e quello ai capi di Z senza dover invertire i due componenti, permette quindi di risparmiare del tempo.

Le misure per V_A , V_B e V_{AB} , che corrispondono rispettivamente alle ampiezze picco-picco di \vec{V}_{in} , \vec{V}_{out} ai capi di R e \vec{V}_{out} ai capi di Z, sono stati raccolti in tabella assieme alle relative fasi (che fanno riferimento a \vec{V}_{in}) ϕ_B e ϕ_{AB} . Abbiamo infine eseguito il fit per ogni grafico di $|H|$ e ϕ_H attraverso il software ROOT di CERN dopo aver ricavato l'andamento atteso secondo la teoria.

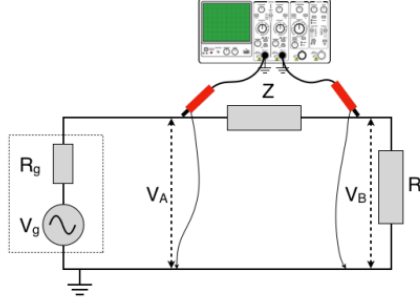


Figura 1: schema di un circuito ZR generico

3.2 Circuito RC

3.2.1 Funzione di trasferimento su C

Per ricavare \vec{H} su C dalla teoria sui circuiti in corrente alternata, è necessario conoscere l'andamento del potenziale ai capi di C, perciò applichiamo l'estensione della legge di Ohm come segue

$$\vec{V}_C(t) = \vec{I}(t) \cdot Z_C = \frac{\vec{V}_g}{1 + j\omega RC}$$

dove il simbolo di vettore su V_C ed I sta ad indicare semplicemente che si tratta di segnali sinusoidali, si ricorda che anche Z è un elemento del campo complesso quindi in caso di necessità può essere visto anche come vettore.

Siccome $\vec{H} = \frac{\vec{V}_C(t)}{\vec{V}_g(t)}$, la rappresentazione di H come elemento dello spazio vettoriale complesso è

$$\vec{H} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

riconosciamo infine modulo e fase nelle seguenti espressioni

$$\left| \vec{H} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad \phi_{\vec{H}} = 0 - \arctan(R\omega C)$$

le quali sono state considerate come modello funzionale per eseguire l'interpolazione dei punti ottenuti dalla raccolta dati.

Dati raccolti

Utilizzando l'oscilloscopio, abbiamo potuto visualizzare i segnali sinusoidali di $\vec{V}_{in}(t)$, $\vec{V}_{out}(t)$ ai capi di C e $\vec{V}_{out}(t)$ ai capi di R.

La raccolta dati è stata svolta registrando le misure ottenute per le relative ampiezze picco-picco e fasi dopo aver selezionato la funzione *Acquire* dell'oscilloscopio; per ogni misura abbiamo raccolto un solo valore in quanto era l'unico

ad essere rappresentato sullo schermo, tuttavia associamo a tali letture un errore strumentale dell'1% (dedotto in base al numero di cifre significative rappresentate dallo strumento).

Osservando spesso dei punti interrogativi associati alle misure per ϕ , abbiamo ritenuto ragionevole attribuire un errore casuale del 2% almeno ai valori più piccoli (inferiori a 10°), quelli per cui un errore dell'1% risulta piuttosto riduttivo rispetto ai limiti di costruzione dello strumento che riteniamo non trascurabili in questi casi.

L'errore associato al rapporto tra V_A e V_{AB} , è dato dalla propagazione degli errori tramite la formula:

$$\sigma_{\frac{V_{AB}}{V_A}} = \sqrt{\left(\sigma_{V_A} \cdot \frac{V_{AB}}{V_A^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{V_{AB}}}{V_A}\right)^2}$$

La seguente tabella racchiude solo i dati necessari all'analisi del potenziale ai capi di C, si noti che sia V_A che V_{AB} sono le ampiezze picco-picco delle relative funzioni sinusoidali.

RC - misure ai capi di C

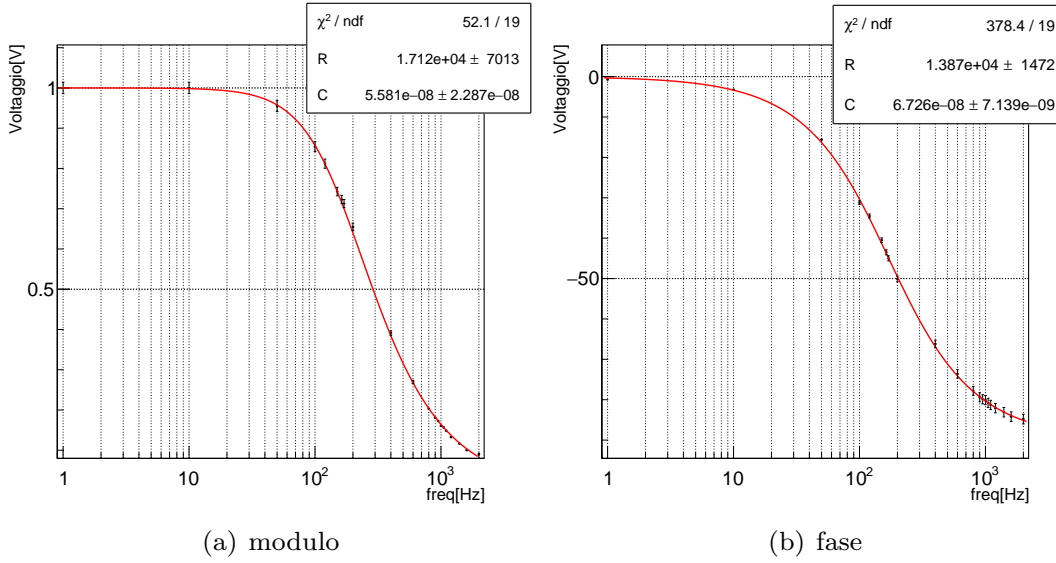
frequenza[Hz]	V_A [V]	V_{AB} [V]	V_{AB}/V_A	ϕ_{AB}
1	16.4±0.2	16.4±0.2	1.00 ± 0.01	-0.72 ± 0.02
10	20.3±0.2	20.3 ± 0.2	1.00 ± 0.01	-3.24 ± 0.09
50	20.1±0.2	19.2±0.2	0.96 ± 0.01	-15.6 ± 0.2
100	20.6±0.2	17.6±0.2	0.85 ± 0.01	-31.2 ± 0.4
120	20.2±0.2	16.4±0.2	0.81 ± 0.01	-34.5 ± 0.5
150	20.2±0.2	15.0±0.2	0.74 ± 0.01	-40.5 ± 0.6
163	20.2±0.2	14.6±0.1	0.72 ± 0.01	-43.5 ± 0.6
170	20.2±0.2	14.4±0.1	0.71 ± 0.01	-45.0 ± 0.6
200	20.0±0.2	13.1±0.1	0.655 ± 0.009	-50.1 ± 0.7
400	20.0±0.2	7.82±0.08	0.391 ± 0.006	-66.2 ± 0.9
600	20.0±0.2	5.40±0.05	0.270 ± 0.004	-74 ± 1
800	19.9±0.2	4.04±0.04	0.203 ± 0.003	-78 ± 1
900	19.9±0.2	3.60±0.04	0.181 ± 0.003	-79 ± 1
950	19.9±0.2	3.44±0.03	0.173 ± 0.002	-80 ± 1
1000	19.9±0.2	3.20±0.03	0.161 ± 0.002	-80 ± 1
1050	19.9±0.2	3.12±0.03	0.157 ± 0.002	-81 ± 1
1100	19.9±0.2	2.96±0.03	0.149 ± 0.002	-81 ± 1
1200	19.9±0.2	2.64±0.03	0.133 ± 0.002	-82 ± 1
1400	19.9±0.2	2.32±0.02	0.117 ± 0.002	-83 ± 1
1600	19.9±0.2	2.00±0.02	0.101 ± 0.001	-84 ± 1
2000	20.0±0.2	1.80±0.02	0.090 ± 0.001	-85 ± 1

errore strumentale: 1%

Analisi dati

Per osservare l'andamento del modulo abbiamo costruito i grafici dei punti ottenuti considerando $\frac{V_{AB}}{V_A}$ in funzione della frequenza, mentre per la fase è bastato rappresentare ϕ_{AB} in funzione della frequenza; abbiamo poi eseguito le due interpolazioni per i modelli attesi, sostituendo a $\omega = 2\pi f = 2\pi x$, ottenendo così:

Figura 2: RC - funzione di trasferimento ai capi di C



dal grafico in figura (a) si può riconoscere il ruolo di filtro passa basso ricoperto dalla capacità in un circuito RC, siccome per frequenze piccole $\frac{V_{AB}}{V_A} \approx 1$

Il test del chi quadro effettuato per constatare il livello di compatibilità dei dati con il modello atteso non è soddisfatto in maniera accettabile in nessuno dei due casi; dobbiamo questo insuccesso non tanto ad un errore sistematico nella determinazione del modello (i punti si dispongono come previsto attorno alla curva) quanto nella stima degli errori casuali, che riteniamo sottostimati in quanto $\frac{\chi^2}{\text{ndf}} > 1$ per entrambi i test.

Per quanto riguarda il modulo di H, possiamo supporre la presenza di un errore casuale dovuto al fatto che V_{AB} è il modulo di una funzione sinusoidale risultata dalla differenza (eseguita con *Math*) tra \vec{V}_{out} e \vec{V}_{in} , due segnali sinusoidali affetti da rumore elettronico. Nonostante in laboratorio si sia fatto uso della funzione *Get Mean* per ottenere un valore medio del segnale desiderato al fine di ridurre il rumore, questo non può essere ridotto a zero, perciò riconosciamo un $\sigma_{noise} \neq 0$ da associare a \vec{V}_{out} e \vec{V}_{in} e supponiamo che questo si propaghi

sulla loro differenza moltiplicato per $\sqrt{2} \rightarrow \sigma_{V_{out}-V_{in}} = \sqrt{2} \cdot \sigma_{noise}$. Dunque risulta che V_{AB} , ampiezza picco-picco di $\vec{V}_{out} - \vec{V}_{in}$, essendo la distanza tra un picco ed un ventre della funzione, viene intaccata da un errore casuale pari a $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_{noise}$; mentre l'ampiezza picco-picco V_A viene intaccata da un errore $\sqrt{2} \cdot \sigma_{noise}$.

I due errori si sommano come riportato nella formula di propagazione nel paragrafo precedente.

Per quanto riguarda la fase di H rispetto al segnale in entrata, il suo errore casuale dipende da σ_t (infatti $\Delta\phi = \Delta t\omega$), il quale risente dell'incertezza su V secondo: $\sigma_t = \frac{\sigma_V}{\frac{dV}{dt}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sigma_{noise}}{\frac{dV}{dt}}$; questo potrebbe spiegare, supponendo un rumore sufficiente, anche l'insuccesso del test per il secondo grafico.

La sorgente più comune di rumore negli apparati elettronici è il rumore termico, intrinseco di ogni elemento dissipativo.

Osserviamo i risultati numerici ricavati da queste due interpolazioni:

- C dall'interpolazione per il modulo: $C_1 = 5.581 \cdot 10^{-8} \pm 2.287 \cdot 10^{-8} \text{ F}$
- C dall'interpolazione per la fase: $C_2 = 6.726 \cdot 10^{-8} \pm 0.713 \cdot 10^{-8} \text{ F}$

poste a confronto con il test t-Student danno una probabilità di compatibilità del 61.7%:

$$t = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{\sigma_{C_1}^2 + \sigma_{C_2}^2}} = 0.5 \rightarrow PValue = 61.7\%$$

Sarà utile in seguito conoscere il valore medio di queste due stime, ricaviamo dunque C_{best} eseguendo la media pesata coi pesi $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$:

$$C_{capoC} = \frac{\sum C_i \cdot w_i}{\sum w_i} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} = 6.625 \cdot 10^{-8} \pm 0.681 \cdot 10^{-8} \text{ F}$$

Per completezza confrontiamo anche i valori ottenuti per R:

- R ottenuto dall'interpolazione per il modulo: $R_1 = 17120 \pm 7013 \Omega$
- R ottenuto dall'interpolazione per la fase: $R_2 = 13870 \pm 1472 \Omega$

risulta un valore per t pari a 0.5 che corrisponde ancora una volta ad una probabilità che le due stime siano compatibili del 61.7%. Abbiamo calcolato la media pesata tra le due stime per ottenere $R_{capoC} = 14007 \pm 1441 \Omega$.

3.2.2 Funzione di trasferimento su R

Applichiamo di nuovo la legge di Ohm, questa volta per ricavare \vec{V}_R :

$$\vec{V}_R(t) = \vec{I}(t) \cdot R = \frac{\vec{V}_g(t) \cdot R}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

⇓

$$\vec{H} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

il modulo e la fase di H ai capi di R sono dunque:

$$|\vec{H}| = \frac{R\omega C}{\sqrt{1 + R^2\omega^2 C^2}} \quad \phi_{\vec{H}} = \frac{\pi}{2} - \arctan(R\omega C)$$

Dati raccolti

La raccolta dati è stata effettuata in contemporanea a quella descritta nel paragrafo precedente, trattandosi dello stesso circuito. La valutazione di errori strumentali e casuali rimane dunque la medesima. Questa volta ci concentriamo però sui dati rilevati ai capi di R, dunque V_B e ϕ_B ; ancora una volta l'errore associato al rapporto tra V_A e V_B è dato dalla propagazione degli errori:

$$\sigma_{\frac{V_B}{V_A}} = \sqrt{\left(\sigma_{V_A} \cdot \frac{V_B}{V_A^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{V_B}}{V_A}\right)^2}$$

RC - misure ai capi di R

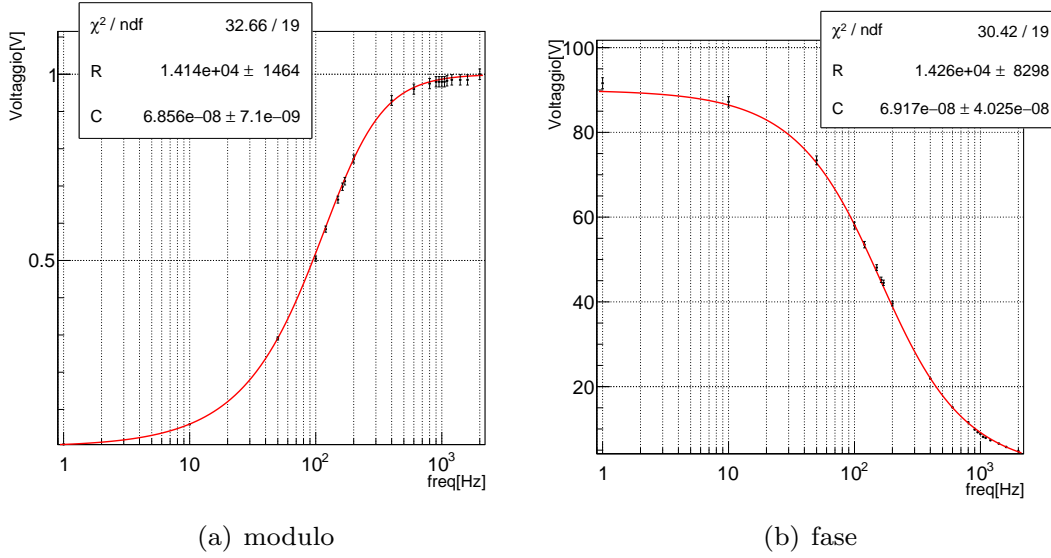
frequenza[Hz]	V_A [V]	V_B [V]	V_B/V_A	ϕ_B [gradi]
1	16.4 ± 0.2	0.107 ± 0.001	0.00652 ± 0.00009	92 ± 1
10	20.3 ± 0.2	1.22 ± 0.01	0.0601 ± 0.0008	87 ± 1
50	20.1 ± 0.2	5.84 ± 0.06	0.291 ± 0.004	73 ± 1
100	20.6 ± 0.2	10.4 ± 0.1	0.505 ± 0.007	58.0 ± 0.8
120	20.2 ± 0.2	11.8 ± 0.1	0.584 ± 0.008	53.5 ± 0.8
150	20.2 ± 0.2	13.4 ± 0.1	0.663 ± 0.009	48.1 ± 0.7
163	20.2 ± 0.2	14.1 ± 0.1	0.70 ± 0.01	45.2 ± 0.6
170	20.2 ± 0.2	14.4 ± 0.1	0.71 ± 0.01	44.5 ± 0.6
200	20.0 ± 0.2	15.5 ± 0.2	0.77 ± 0.01	39.6 ± 0.6
400	20.0 ± 0.2	18.6 ± 0.2	0.93 ± 0.01	21.9 ± 0.3
600	20.0 ± 0.2	19.2 ± 0.2	0.96 ± 0.01	15.1 ± 0.2
800	19.9 ± 0.2	19.4 ± 0.2	0.97 ± 0.01	11.6 ± 0.2
900	19.9 ± 0.2	19.5 ± 0.2	0.98 ± 0.01	8.2 ± 0.2
950	19.9 ± 0.2	19.5 ± 0.2	0.98 ± 0.01	9.9 ± 0.3
1000	19.9 ± 0.2	19.5 ± 0.2	0.98 ± 0.01	9.2 ± 0.3
1050	19.9 ± 0.2	19.5 ± 0.2	0.98 ± 0.01	8.8 ± 0.2
1100	19.9 ± 0.2	19.6 ± 0.2	0.98 ± 0.01	7.9 ± 0.2
1200	19.9 ± 0.2	19.6 ± 0.2	0.98 ± 0.01	7.3 ± 0.2
1400	19.9 ± 0.2	19.6 ± 0.2	0.98 ± 0.01	6.6 ± 0.2
1600	19.9 ± 0.2	19.6 ± 0.2	0.98 ± 0.01	5.8 ± 0.2
2000	20.0 ± 0.2	20 ± 0.2	1.00 ± 0.01	4.8 ± 0.1

errore strumentale: 1%

Analisi dati

Questa volta abbiamo costruito i grafici considerando $\frac{V_B}{V_A}$ in funzione della frequenza per osservare l'andamento del modulo e ϕ_B in funzione della frequenza per la fase, eseguendo le due interpolazioni per i modelli attesi abbiamo ottenuto:

Figura 3: RC - funzione di trasferimento ai capi di R



osservando la figura (a), notiamo dall'asintoto ad 1 per frequenze alte, che R in un circuito RC agisce da filtro passa alto.

Anche in questo caso il test del chi quadro ci permette di notare che abbiamo sottostimato le incertezze associate ai punti, stimiamo che l'errore effettivo sia dato da $\sqrt{\frac{\chi^2}{\text{Ndf}}} \cdot \sigma_V$ che corrisponde approssimativamente a $1.3 \cdot \sigma_V$ per entrambi i casi. Le due stime per C ottenute da questa analisi sono le seguenti:

- C dall'interpolazione per il modulo: $C_1 = 6.856 \cdot 10^{-8} \pm 0.710 \cdot 10^{-8} \text{ F}$
- C dall'interpolazione per la fase: $C_2 = 6.917 \cdot 10^{-8} \pm 4.025 \cdot 10^{-8} \text{ F}$

che confrontate danno una probabilità di compatibilità del 99.2%:

$$t = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{\sigma_{C_1}^2 + \sigma_{C_2}^2}} = 0.01 \rightarrow P\text{Value} = 99.2\%$$

Andiamo a calcolare la media pesata (pesi = $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$) tra le due per ottenere la miglior stima di C:

$$C_{capoR} = \frac{\sum C_i \cdot w_i}{\sum w_i} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} = 6.858 \cdot 10^{-8} \pm 0.699 \cdot 10^{-8} F$$

Per concludere, le stime per R ottenute sono:

- R dall'interpolazione per il modulo: $R_1 = 14140 \pm 1464 \Omega$
- R dall'interpolazione per la fase: $R_2 = 14260 \pm 8298 \Omega$

tali stime producono un $t = 0.01$ che corrisponde alla probabilità di 99.2%. La media pesata che ne abbiamo ricavato con la formula già riportata sopra è $R_{capoR} = 14144 \pm 1442 \Omega$.

3.2.3 Conclusioni sul circuito RC

Concludiamo l'analisi per questo circuito valutando la compatibilità dei risultati ottenuti ai capi di C ed ai capi di R; abbiamo inoltre effettuato una media pesata delle migliori stime per C ottenute nei paragrafi precedenti in quanto tale valore sarà utile per avviare lo studio del circuito RCL costruito nella seconda parte dell'esperienza.

- *conclusioni su C*
Date le stime per C: $C_{capoC} = (6.625 \pm 0.861) \cdot 10^{-8} F$ e $C_{capoR} = (6.858 \pm 0.699) \cdot 10^{-8} F$, otteniamo

$$t = \frac{|6.858 - 6.625|}{\sqrt{0.699^2 + 0.861^2}} = 0.2 \rightarrow PValue = 84.15\%$$

- *conclusioni su R*
Date le stime per R: $R_{capoC} = 14007 \pm 1441 \Omega$ e $R_{capoR} = 14144 \pm 1442 \Omega$, otteniamo

$$t = \frac{|14144 - 14007|}{\sqrt{1442^2 + 1441^2}} = 0.07 \rightarrow PValue = 94.4\%$$

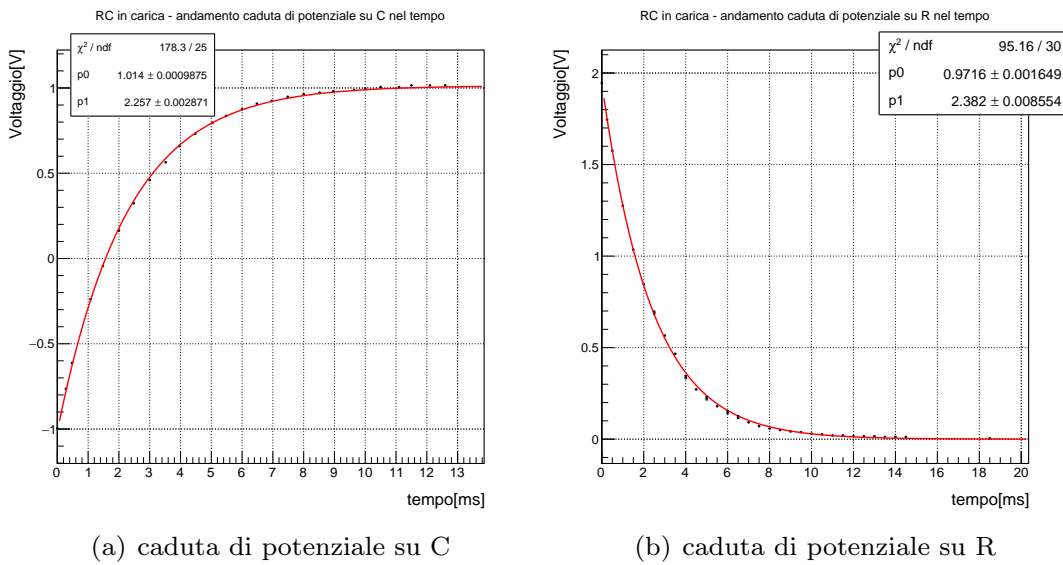
La miglior stima per C ricavata dall'esperimento con il circuito RC risulta, considerando $\omega_{capoC} = \frac{1}{\sigma_{capoC}^2}$ e $\omega_{capoR} = \frac{1}{\sigma_{capoR}^2}$

$$C_{RC} = \frac{C_{capoC} \cdot \omega_{capoC} + C_{capoR} \cdot \omega_{capoR}}{\omega_{capoC} + \omega_{capoR}} \pm \frac{1}{\sqrt{\omega_{capoC} + \omega_{capoR}}} = (6.738 \pm 0.488) 10^{-8} F$$

$$\Rightarrow C_{RC} \approx 67 \pm 5 nF$$

Abbiamo visto come C ed R abbiano, nel nostro caso, compiuto il ruolo rispettivamente di filtro passa basso e filtro passa alto, come annotato sotto le Figure 2 e 3; un acuto parallelismo tra il regime CA e le sollecitazioni a tensione quadra ci avrebbe permesso di riconoscere tale proprietà anche dal grafico ottenuto durante l'esperienza Circuiti2. Riportiamo di sotto i grafici della caduta di potenziale ai capi di C e ai capi di R quando il circuito è sollecitato da un'onda quadra:

Figura 4: ricordiamo da Circuiti2



Durante il fenomeno di carica il circuito era stato sollecitato inizialmente da un potenziale in rapido aumento, che poi è rimasto costante per tutto il processo. La situazione è analoga a un regime CA in cui la frequenza viene inizialmente impostata ad un valore alto e poi abbassata di colpo. Da questa osservazione è facile interpretare i due grafici sopra come:

- (a) la caduta di potenziale ai capi di un filtro passa basso (massimo per $t \gg \tau$, quindi a basse frequenze)
- (b) la caduta di potenziale ai capi di un filtro passa alto (massimo in $t = 0$, quindi ad alte frequenze)

3.3 Circuito RL

3.3.1 Funzione di trasferimento su L

Ancora una volta la funzione di trasferimento si ricava dall'applicazione della legge di Ohm estesa al regime in corrente alternata, che in questo caso scriviamo come:

$$\vec{V}_L(t) = \vec{I}(t) \cdot Z_L = \frac{\vec{V}_g(t) \cdot j\omega L}{r + j\omega L}$$

perciò siccome $\vec{H} = \frac{\vec{V}_L(t)}{\vec{V}_g(t)}$, la rappresentazione di \vec{H} come elemento del campo vettoriale complesso è

$$\vec{H} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

riconosciamo il suo modulo e la sua fase come:

$$\left| \vec{H} \right| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad (a) \quad \phi_{\vec{H}} = \frac{\pi}{2} - \text{atan} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \quad (b)$$

Dati raccolti

Per studiare questo circuito abbiamo visualizzato sull'oscilloscopio i potenziali $\vec{V}_{in}(t)$, $\vec{V}_{out}(t)$ ai capi di L e $\vec{V}_{out}(t)$ ai capi di R.

I dati sono stati raccolti analogamente a quanto già discusso per il circuito RC, con una medesima stima degli errori strumentali; in base ai risultati del test del chi quadro sulle interpolazioni saremo in grado di valutare l'eventuale presenza di altri errori casuali nel nostro sistema di raccolta. Riportiamo quindi i dati ottenuti per il nuovo circuito:

RL - misure ai capi di L

frequenza[Hz]	V_A [V]	V_{AB} [V]	V_{AB}/V_A	ϕ_{AB} [gradi]
625	20.0 ± 0.2	0.776 ± 0.008	0.0388 ± 0.0004	
1250	20.0 ± 0.2	1.10 ± 0.01	0.0550 ± 0.0006	86 ± 1
2500	20.0 ± 0.2	2.35 ± 0.02	0.118 ± 0.001	86 ± 1
5000	20.0 ± 0.2	4.70 ± 0.05	0.235 ± 0.003	75 ± 1
10000	20.0 ± 0.2	8.50 ± 0.09	0.425 ± 0.005	71 ± 1
20000	20.0 ± 0.2	13.5 ± 0.1	0.675 ± 0.008	50.5 ± 0.7
40000	20.0 ± 0.2	17.5 ± 0.2	0.88 ± 0.01	28.5 ± 0.4
80000	20.0 ± 0.2	19.4 ± 0.2	0.97 ± 0.01	15.2 ± 0.2
160000	20.2 ± 0.2	20 ± 0.2	0.99 ± 0.01	6.9 ± 0.1

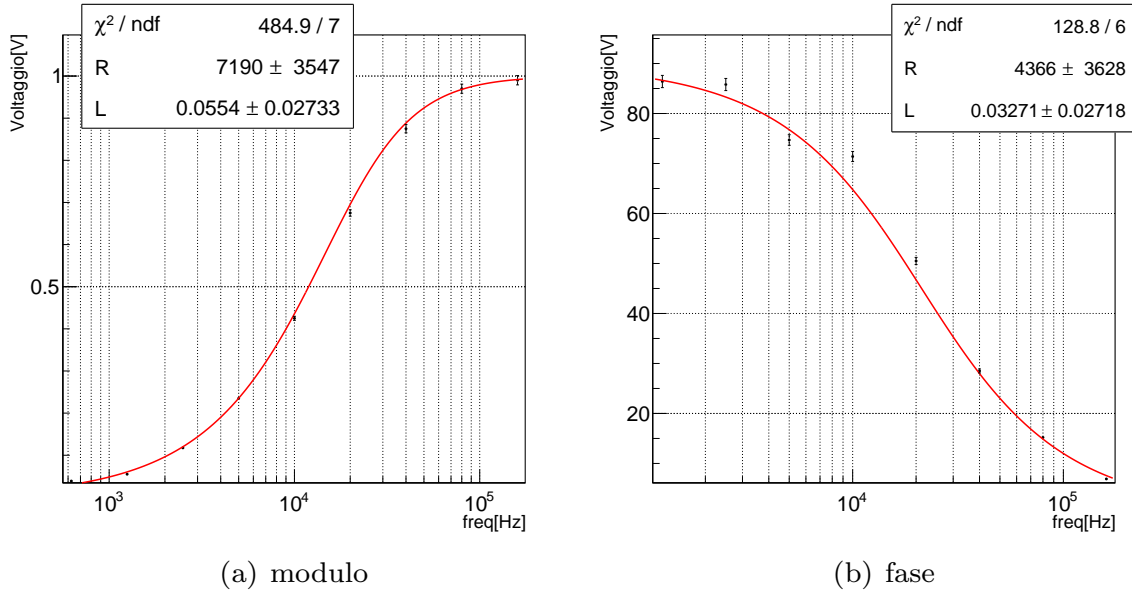
errore strumentale: 1%

Nota: le misure per ϕ_{AB} e ϕ_B relative a 625Hz non sono state riportate poichè lo strumento restituiva numerosi valori inconsistenti, quindi da noi ritenuti non significativi.

Analisi dati

Lo studio effettuato sui dati sopra riportati parte ancora una volta dall'esecuzione del fit con il modello atteso per il modulo di H e la sua fase. Di sotto riportiamo i grafici ottenuti dalle interpolazioni del caso.

Figura 5: RL - funzione di trasferimento ai capi di L



osservando la figura (a), dall'asintoto a 1 per frequenze alte si può notare come l'induttanza di un circuito RL compia il ruolo di filtro passa alto.

I dati rispettano gli andamenti attesi, tuttavia in entrambi i casi il test del chi quadro non restituisce risultato accettabile, il che porta a supporre di aver trascurato la presenza di ulteriori errori casuali che possono aver portato a maggiori fluttuazioni delle misure rispetto a quelle previste. Una possibilità che prendiamo in considerazione è che tale rumore sia di origine termica, quindi da associare alla resistenza interna dell'induttanza che essendo piuttosto piccola, almeno per frequenze basse, è soggetta all'attraversamento di grandi quantità di corrente.

Associamo quindi il fallimento del test sull'interpolazione del modulo ad una sottostima degli errori sulle prime misure, quelle affette maggiormente dal rumore termico.

Per quanto riguarda la fase notiamo ancora che le misure relative a frequenze basse sono molto meno accurate delle ultime, come potevamo aspettarci dal mo-

mento che il rumore sui tempi σ_t in un grafico $V(t)$ è proporzionale al rumore sul voltaggio σ_V secondo:

$$\sigma_t \propto \frac{\sigma_V}{\frac{dV}{dt}}$$

perciò ad errori maggiori su V corrispondono errori maggiori anche sui tempi, da cui la stima di ϕ dipende necessariamente.

Questo esperimento ci ha permesso di ricavare due stime per L che possiamo mettere a confronto con il test t-Student:

- L dall'interpolazione per il modulo: $L_1 = 0.0554 \pm 0.0273H$
- L dall'interpolazione per la fase: $L_2 = 0.0327 \pm 0.0272H$

$$t = \frac{|L_1 - L_2|}{\sqrt{\sigma_{L_1}^2 + \sigma_{L_2}^2}} = 0.6 \rightarrow PValue = 54.85\%$$

Dopo aver trovato due valori statisticamente compatibili fra loro abbiamo calcolato la loro media pesata come:

$$L_{capoL} = \frac{\sum L_i \cdot w_i}{\sum w_i} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} = 0.0440 \pm 0.0193H$$

Analizziamo anche le stime ottenute per R dalle due interpolazioni:

- R dall'interpolazione sul modulo: $R_1 = 7190 \pm 3547\Omega$
- R dall'interpolazione sulla fase: $R_2 = 4366 \pm 3628\Omega$

dal loro confronto tramite il test t-Student otteniamo:

$$t = \frac{|R_1 - R_2|}{\sqrt{\sigma_{R_1}^2 + \sigma_{R_2}^2}} = 0.6 \rightarrow PValue = 54.85\%$$

Abbiamo eseguito una media pesata con la formula già riportata sopra, ottenendo il valore di $R_{capoL} = 4378 \pm 2536\Omega$.

3.3.2 Funzione di trasferimento su R

Ricaviamo la funzione di trasferimento ai capi di R come segue:

$$\vec{V}_R(t) = \vec{I}(t) \cdot R = \frac{V_g(t) \cdot R}{R + j\omega L}$$

\Downarrow

$$\vec{H} = \frac{R}{R + j\omega L}$$

da cui riconosciamo il suo modulo e la sua fase:

$$\left| \vec{H} \right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad (a) \quad \phi_{\vec{H}} = 0 - \text{atan} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \quad (b)$$

Dati raccolti

Le misure ottenute per ampiezza e fase ai capi di R sono le seguenti:

RL - misure ai capi di R

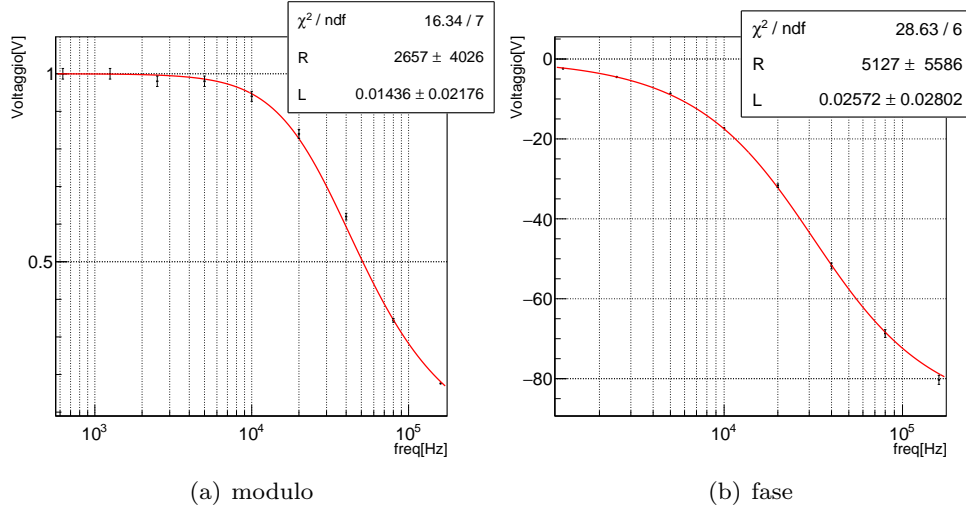
frequenza[Hz]	V_A [V]	V_B [V]	V_B/V_A	ϕ_B [gradi]
625	20.0 ± 0.2	20.0 ± 0.2	1.00 ± 0.01	
1250	20.0 ± 0.2	20.0 ± 0.2	1.00 ± 0.01	-3.60 ± 0.05
2500	20.0 ± 0.2	19.6 ± 0.2	0.98 ± 0.01	-4.50 ± 0.06
5000	20.0 ± 0.2	19.6 ± 0.2	0.98 ± 0.01	-8.6 ± 0.1
10000	20.0 ± 0.2	18.8 ± 0.2	0.94 ± 0.01	-17.3 ± 0.2
20000	20.0 ± 0.2	16.8 ± 0.2	0.84 ± 0.01	-31.7 ± 0.4
40000	20.0 ± 0.2	12.4 ± 0.1	0.620 ± 0.009	-51.8 ± 0.7
80000	20.0 ± 0.2	6.88 ± 0.07	0.344 ± 0.005	-69 ± 1
160000	20.2 ± 0.2	3.56 ± 0.04	0.176 ± 0.002	-81 ± 1

errore strumentale: 1%

Analisi dati

Abbiamo eseguito l'interpolazione dei grafici ottenuti similmente a come già spiegato e osservato il seguente risultato:

Figura 6: RL - funzione di trasferimento ai capi di R



si osservi la figura (a), dal passaggio per 1 a frequenze basse si deduce come la resistenza del circuito RL operi da filtro passa basso.

Osserviamo che questa volta per il modulo di H il test del chi quadro riporta una probabilità accettabile del 5% che il modello soggiacente al fenomeno osservato sia quello atteso, tuttavia essendo il rapporto $\frac{16.34}{7} = 2 > 1$ supponiamo di aver trascurato una fonte di errori casuali che ha portato ad aumentare l'incertezza effettiva sulle misure. Questa fonte è possibile sia il resistore stesso ai capi del quale stiamo misurando il potenziale in uscita che, scaldandosi, accentua il moto browniano dei portatori di carica al suo interno creando quello che chiamiamo rumore termico. Una situazione simile si riconosce anche nell'analisi delle misure per la fase, dove abbiamo $\chi^2 = 28.63$ e $\text{Ndf} = 6$, il test non restituisce un valore accettabile per la probabilità ma associamo a questo insuccesso la sotto-stima delle incertezze già precedentemente discussa.

Le due stime per L ottenute da questa analisi sono le seguenti:

- L dall'interpolazione per il modulo: $L_1 = 0.0144 \pm 0.0218H$
- L dall'interpolazione per la fase: $L_2 = 0.0257 \pm 0.0280H$

che confrontate danno una probabilità di compatibilità del 76.4%:

$$t = \frac{|L_1 - L_2|}{\sqrt{\sigma_{L1}^2 + \sigma_{L2}^2}} = 0.3 \rightarrow PValue = 76.4\%$$

Andiamo a calcolare la media pesata (pesi = $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$) tra le due per ottenere la miglior stima di ai capi di R:

$$L_{capoR} = \frac{\sum L_i \cdot w_i}{\sum w_i} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} = 0.0187 \pm 0.0172H$$

Controlliamo anche le stime per R che sono:

- R dall'interpolazione sul modulo: $R_1 = 2657 \pm 4026\Omega$

- R dall'interpolazione sulla fase: $R_2 = 5127 \pm 5586\Omega$

dal loro confronto tramite il test t-Student otteniamo:

$$t = \frac{|R_1 - R_2|}{\sqrt{\sigma_{R1}^2 + \sigma_{R2}^2}} = 0.4 \rightarrow PValue = 68.9\%$$

Abbiamo inoltre eseguito una media pesata tra i due valori per R ottenuti ai capi di R per ottenere, con la formula già riportata sopra, un valore di $R_{capoR} = 3501 \pm 580\Omega$.

3.3.3 Conclusioni sul circuito RL

Abbiamo notato che per il circuito RL i valori degli errori sulle stime ottenute di R ed L sono paragonabili o addirittura maggiori dei valori stessi delle stime. Questa mancanza di precisione è probabilmente dovuta alle poche misure effettuate in quanto, pur avendo raccolto il doppio dei dati in laboratorio, ci siamo accorti che le frequenze impostate per ricavare le misure finali erano fin troppo alte poichè hanno causato un comportamento anomalo del circuito. Infatti per frequenze alte l'induttanza tende a comportarsi come una resistenza e per la sua capacità di immagazzinare energia diventa sempre più trascurabile. Tenendo conto anticipatamente di questa considerazione avremmo potuto infittire il campionamento nel range di frequenze effettivamente significative.

Per concludere l'analisi dati relativa a questo circuito valutiamo la compatibilità delle due medie pesate per L ottenute nei paragrafi precedenti e in caso effettuiamo una media complessiva, sarà utile nel valutare le proprietà del circuito RCL che abbiamo costruito per la seconda parte.

- conclusioni su L

Date le stime per L: $L_{capoL} = 0.0440 \pm 0.0193H$ e $L_{capoR} = 0.0187 \pm 0.0172H$, otteniamo:

$$t = \frac{|0.0440 - 0.0187|}{\sqrt{0.0193^2 + 0.0172^2}} = 1 \rightarrow PValue = 31.73\%$$

- conclusioni su R

Date le stime per R: $R_{capoL} = 4378 \pm 2536\Omega$ e $R_{capoR} = 3501 \pm 580\Omega$, otteniamo:

$$t = \frac{|4378 - 3501|}{\sqrt{2563^2 + 580^2}} = 0.3 \rightarrow PValue = 76.42\%$$

La miglior stima per L ricavata dall'esperimento con il circuito RL risulta, considerando $w_{capoL} = \frac{1}{\sigma_{capoL}^2}$ e $w_{capoR} = \frac{1}{\sigma_{capoR}^2}$

$$L_{RL} = \frac{L_{capoL} \cdot w_{capoL} + L_{capoR} \cdot w_{capoR}}{w_{capoL} + w_{capoR}} \pm \frac{1}{\sqrt{w_{capoL} + w_{capoR}}} = 0.0327 \pm 0.0134H$$

$$\Rightarrow L_{RL} \approx 0.03 \pm 0.01H$$

Si osservi che è assolutamente lecito eseguire un parallelismo analogo a quello effettuato tra il circuito RC in corrente impulsata e quello in corrente alternata anche per il circuito RL, analisi che qui non riportiamo perchè potrebbe essere ripetitiva.

4 Parte seconda

Nella seconda giornata in laboratorio abbiamo studiato il trasferimento del segnale alternato attraverso circuiti che comprendono tutti i componenti studiati fin'ora: R, C ed L. Nonostante abbiamo cercato di selezionare componenti dai valori simili a quelli utilizzati per lo svolgimento della prima parte, non riteniamo ragionevole effettuare confronti con i parametri ottenuti in questa parte.

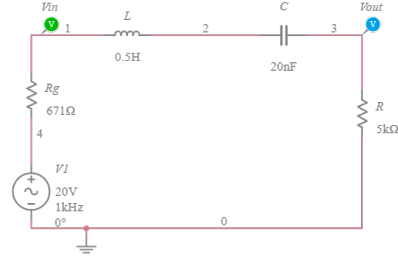
I valori attesi per le relative impedenze sono i medesimi già riportati nella Parte prima.

4.1 Procedimento adottato

Lo schema del circuito costruito ed una foto della sua realizzazione in laboratorio sono riportati in figura 7. Ai fini della rappresentazione di modulo e fase della funzione H ai capi di ciascun componente è stato necessario invertire ogni volta i componenti di modo che quello interessato si trovasse tra la sonda che misura l'uscita e la massa, quello rappresentato in figura è un esempio di circuito LCR, adoperato per studiare H ai capi di R.

Per questa parte è duque stato sufficiente visualizzare \vec{V}_{in} e \vec{V}_{out} ai capi del componente interessato per misurare le ampiezze picco-picco V_A e V_B e la fase ϕ_B di \vec{V}_{out} rispetto a \vec{V}_{in} .

Figura 7: esempio di un circuito LCR



(a) schema



(b) realizzazione in laboratorio

Per avere una stima in termini di ordini di grandezza delle frequenze attorno cui campionare il grafico abbiamo sfruttato il concetto di frequenza di risonanza⁴ ed adoperato le stime ottenute nella prima parte. Sappiamo infatti che il grafico del modulo della funzione H potrebbe presentare un picco in corrispondenza di $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 3550 \text{ Hz}$.

4.2 Circuiti LCR - RLC - RCL

4.2.1 Funzione di trasferimento su R

Anche per questa situazione, ci siamo ricavati la funzione di trasferimento partendo dalla legge di Ohm.

$$\vec{V}_R(t) = \vec{I}(t) \cdot R = \frac{R \cdot \vec{V}_g}{R + j\omega L - \frac{1}{j\omega C}}$$

↓

$$\vec{H} = \frac{R}{R + j\omega L - \frac{1}{j\omega C}}$$

scriviamo quindi modulo e fase come:

$$\left| \vec{H} \right| = \frac{R\omega C}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \quad (a) \quad \phi_{\vec{H}} = 0 - \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \quad (b)$$

funzioni che abbiamo utilizzato per eseguire le interpolazioni del caso sempre sostituendo $2\pi x$ a ω .

⁴frequenza alla quale le componenti reattive di Z si equivalgono in modulo e, pertanto, avendo segno opposto si annullano reciprocamente

Dati raccolti

Visualizzando sull'oscilloscopio \vec{V}_{in} e \vec{V}_{out} ai capi di R abbiamo raccolto il primo set di dati al variare della frequenza. Per i valori associati a V_B , ovvero l'ampiezza picco-picco di \vec{V}_{out} , V_A , ovvero l'ampiezza picco-picco di \vec{V}_{in} e ϕ_B , l'analisi degli errori strumentali eseguita nel paragrafo per il circuito RC rimane valida.

CLR - misure ai capi di R

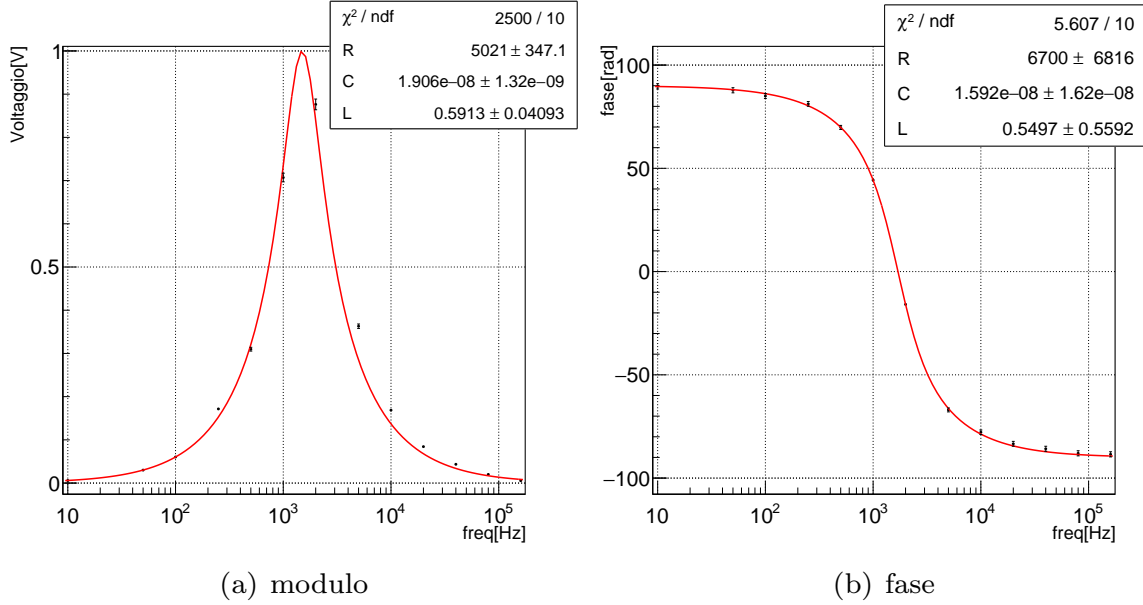
frequenza[Hz]	V_A [V]	V_B [V]	V_B/V_A	ϕ_B [gradi]
10	20.4 ± 0.2	0.124 ± 0.001	0.00608 ± 0.00009	90 ± 1
50	20.4 ± 0.2	0.612 ± 0.006	0.0300 ± 0.0004	88 ± 1
100	20.4 ± 0.2	1.23 ± 0.01	0.0603 ± 0.0009	85 ± 1
250	20.4 ± 0.2	3.50 ± 0.04	0.172 ± 0.002	81 ± 1
500	20.4 ± 0.2	6.32 ± 0.06	0.310 ± 0.004	70 ± 1
1000	19.8 ± 0.2	13.0 ± 0.1	0.657 ± 0.009	44.3 ± 0.6
2000	19.4 ± 0.2	17.0 ± 0.2	0.88 ± 0.01	-15.9 ± 0.2
5000	20.0 ± 0.2	7.26 ± 0.07	0.363 ± 0.005	-67.0 ± 0.9
10000	20.4 ± 0.2	3.44 ± 0.03	0.169 ± 0.002	-78 ± 1
20000	20.4 ± 0.2	1.72 ± 0.02	0.084 ± 0.001	-83 ± 1
40000	20.4 ± 0.2	0.886 ± 0.009	0.0434 ± 0.0006	-86 ± 1
80000	20.4 ± 0.2	0.408 ± 0.004	0.0200 ± 0.0003	-88 ± 1
160000	20.4 ± 0.2	0.112 ± 0.001	0.00549 ± 0.00008	-89 ± 1

errore strumentale: 1%

Analisi dati

Tramite i modelli riportati all'inizio del paragrafo abbiamo eseguito i fit sotto rappresentati:

Figura 8: LCR - funzione di trasferimento ai capi di R



dal grafico in figura (a) possiamo verificare il ruolo di R nel circuito come filtro passa banda.

Inanzitutto osserviamo che il test del chi quadro sul primo fit non da conclusioni accettabili, infatti risulta $\chi^2 = 2500$ mentre $\text{Ndf} = 10$. Questa incongruenza è dovuta ad una anomala disposizione dei punti che pare essere asimmetrica rispetto al picco. Normalmente la funzione di trasferimento ha modulo con andamento a campana la cui larghezza dipende dal valore di R.

Supponiamo che, per frequenze alte, il circuito abbia cominciato a comportarsi in maniera inattesa per via dell'attivazione della capacità e dell'induttanza parassite del resistore, le quali hanno aumentato l'entità dell'opposizione di R alla variazione di corrente. Questo fattore di cui R è stato aumentato ha intaccato maggiormente il modulo, ma notiamo che anche la fase dipende da R con andamento $-\arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$, quindi per alte frequenze ci aspettiamo di incontrare valori minori in modulo per ϕ di quelli attesi, come infatti è accaduto.

Il test del chi quadro sulla fase riporta un risultato comunque accettabile perchè grandi variazioni su x si traducono in piccole variazioni su $\arctan(x)$; la proba-

bilità associata al test in questo caso è dell'82%.

Dalle interpolazioni ricaviamo due stime per R, una data dal modulo, l'altra dalla fase della funzione di trasferimento.

- R dall'interpolazione per il modulo: $R_1 = 5021 \pm 347\Omega$

- R dall'interpolazione per la fase: $R_2 = 6700 \pm 6816\Omega$

Effettuiamo il test T di Student come segue

$$t = \frac{|R_1 - R_2|}{\sqrt{\sigma_{R1}^2 + \sigma_{R2}^2}} = 0.2 \rightarrow PValue = 84.15\%$$

Sempre dal grafico ricaviamo il valore di L e di C, utilizzando la stessa formula effettuiamo i dovuti test.

- L dall'interpolazione per il modulo: $L_1 = 0.5913 \pm 0.0409H$

- L dall'interpolazione per la fase: $L_2 = 0.5497 \pm 0.5592H$

per cui $t = 0.07 \rightarrow PValue = 94.42\%$

- C dall'interpolazione per il modulo: $C_1 = 1.906 \cdot 10^{-8} \pm 1.32 \cdot 10^{-9}F$

- C dall'interpolazione per la fase: $C_2 = 1.592 \cdot 10^{-8} \pm 1.62 \cdot 10^{-8}F$

per cui $t = 0.2 \rightarrow PValue = 84.15\%$

Osserviamo che le incertezze sulle stime ottenute con la fase sono sempre maggiori in percentuale di quelle ottenute con il modulo. Probabilmente prendendo più punti in prossimità del flesso (dove l'errore sulle fasi intacca poco l'andamento della funzione) avremmo ottenuto maggiore precisione nelle nostre stime. Effettuiamo infine le medie pesate (pesi $= w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$) tra le misure ottenute coi due metodi differenti:

$$R_{capoR} = \frac{\sum R_i w_i}{\sum w_i} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} = 5025 \pm 347\Omega$$

$$L_{capoR} = \frac{\sum L_i w_i}{\sum w_i} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} = 0.5907 \pm 0.0408H$$

$$C_{capoR} = \frac{\sum C_i w_i}{\sum w_i} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} = (1.904 \pm 0.132)10^{-8}F$$

4.2.2 Funzione di trasferimento su C

Ricaviamo la funzione di trasferimento

$$\vec{V}_C(t) = \vec{I}(t)Z_C = \frac{\vec{V}_g \cdot Z_C}{R + j(wL - \frac{1}{wC})}$$

\Downarrow

$$\vec{H} = \frac{Z_C}{R + j(wL - \frac{1}{wC})}$$

Abbiamo riconosciuto modulo e fase come:

$$\left| \vec{H} \right| = \frac{1}{wC \sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \quad (a) \quad \phi_{\vec{H}} = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{wL - \frac{1}{wC}}{R}\right) \quad (b)$$

Dati raccolti

Questa volta abbiamo visualizzato \vec{V}_{in} e \vec{V}_{out} ai capi di C, ottenendo le seguenti misure dalle letture sull'oscilloscopio:

RLC - misure ai capi di C

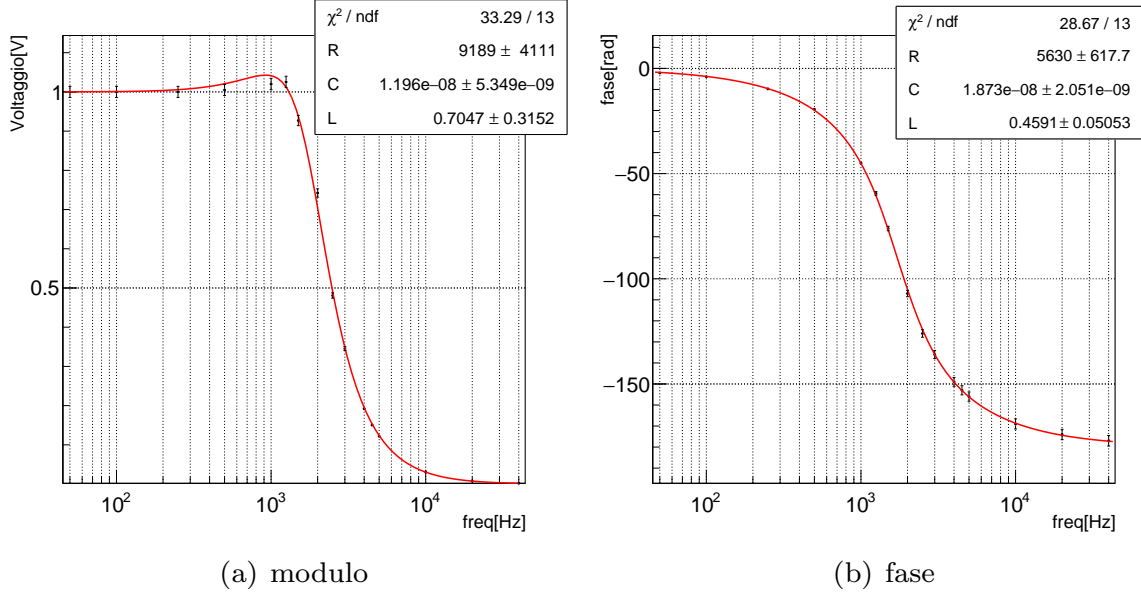
frequenza[Hz]	V_A [V]	V_B [V]	V_B/V_A	ϕ_B
50	20.2 ± 0.2	20.2 ± 0.2	1.00 ± 0.01	-2.16 ± 0.06
100	20.2 ± 0.2	20.2 ± 0.2	1.00 ± 0.01	-4.0 ± 0.1
250	20.2 ± 0.2	20.2 ± 0.2	1.00 ± 0.01	-9.7 ± 0.3
500	20.2 ± 0.2	20.3 ± 0.2	1.00 ± 0.01	-19.4 ± 0.3
1000	19.8 ± 0.2	20.2 ± 0.2	1.02 ± 0.01	-45.0 ± 0.6
1250	19.6 ± 0.2	20.1 ± 0.2	1.03 ± 0.01	-59.4 ± 0.8
1500	19.2 ± 0.2	17.8 ± 0.2	0.93 ± 0.01	-76 ± 1
2000	19.4 ± 0.2	14.4 ± 0.1	0.74 ± 0.01	-107 ± 2
2500	19.8 ± 0.2	9.5 ± 0.1	0.481 ± 0.007	-126 ± 2
3000	19.8 ± 0.2	6.84 ± 0.07	0.345 ± 0.005	-136 ± 2
4000	20.0 ± 0.2	3.84 ± 0.04	0.192 ± 0.003	-149 ± 2
4500	20.2 ± 0.2	3.04 ± 0.03	0.150 ± 0.002	-153 ± 2
5000	20.0 ± 0.2	2.44 ± 0.02	0.122 ± 0.002	-156 ± 2
10000	20.2 ± 0.2	0.616 ± 0.006	0.0305 ± 0.0004	-169 ± 2
20000	20.2 ± 0.2	0.152 ± 0.002	0.0075 ± 0.0001	-174 ± 2
40000	20.4 ± 0.2	0.04 ± 0.0004	0.00196 ± 0.00003	-177 ± 3

errore strumentale: 1%

Analisi dati

Di sotto riportiamo i grafici del caso:

Figura 9: RCL - funzione di trasferimento ai capi di C



Il test del chi quadro per il modulo restituisce un $\chi^2 = 33.3$ associato al numero di gradi di libertà = 13, che corrisponde ad una probabilità che il nostro modello sia corretto del 0.4%, accettabile secondo il limite del 0.05%. Associamo la discrepanza tra χ^2 ed Ndf ad una sottostima degli errori su V, che supponiamo fossero, più realisticamente, maggiori di un fattore $\sqrt{\frac{\chi^2}{Ndf}} = 1.6$.

Per quanto riguarda la fase otteniamo $\chi^2 = 28.67$ e Ndf = 13, perciò la probabilità risulta del 0.7% ed il fattore correttivo sulle σ_V è $\sqrt{\frac{\chi^2}{Ndf}} = 1.5$.

Dalle box nei grafici riconosciamo i valori per R, L e C e li analizziamo nel medesimo modo operando della funzione di trasferimento su R. Per brevità omettiamo il reinserimento delle formule e ci limitiamo a riportare i risultati.

- R dall'interpolazione per il modulo: $R_1 = 9189 \pm 4111\Omega$

- R dall'interpolazione per la fase: $R_2 = 5630 \pm 618\Omega$

da cui $t = 0.9 \rightarrow \text{PValue} = 36.8 \%$

- L dall'interpolazione per il modulo: $L_1 = 0.7047 \pm 0.3152H$

- L dall'interpolazione per la fase: $L_2 = 0.4591 \pm 0.0505H$

dove $t = 0.8 \rightarrow PValue = 36.8\%$

- C dall'interpolazione per il modulo: $C_1 = 1.196 \cdot 10^{-8} \pm 0.535 \cdot 10^{-8}F$

- C dall'interpolazione per la fase: $C_2 = 1.873 \cdot 10^{-8} \pm 0.205 \cdot 10^{-8}$

ca cui $t = 1.2 \rightarrow PValue = 23\%$

Ora effettuiamo media pesata tra le misure ottenute dai due diversi metodi:

$$R_{capoC} = \frac{\sum R_i w_i}{\sum w_i} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} = 5709 \pm 611\Omega$$

$$L_{capoC} = \frac{\sum L_i w_i}{\sum w_i} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} = 0.4652 \pm 0.0499H$$

$$C_{capoC} = \frac{\sum C_i w_i}{\sum w_i} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} = (1.786 \pm 0.191)10^{-8}F$$

4.2.3 Funzione di trasferimento su L

Scriviamo ancora la legge di Ohm e da qui ricaviamo la funzione di trasferimento su L

$$\vec{V}_L(t) = \vec{I}(t) \cdot Z_L = \frac{Z_L \cdot \vec{V}_g}{R + j(wL - \frac{1}{wC})}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{H} = \frac{Z_L}{R + j(wL - \frac{1}{wC})}$$

Identifichiamo modulo e fase con le seguenti formule:

$$|\vec{H}| = \frac{wL}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \quad (a) \quad \phi_{\vec{H}} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{wL - \frac{1}{wC}}{R}\right) \quad (b)$$

Dati raccolti

Visualizzando $\vec{V}_{in}(t)$ e $\vec{V}_{out}(t)$ ai capi di L siamo riusciti ad ottenere l'ultimo set di dati al variare della frequenza, che riportiamo di sotto:

RCL - misure ai capi di L

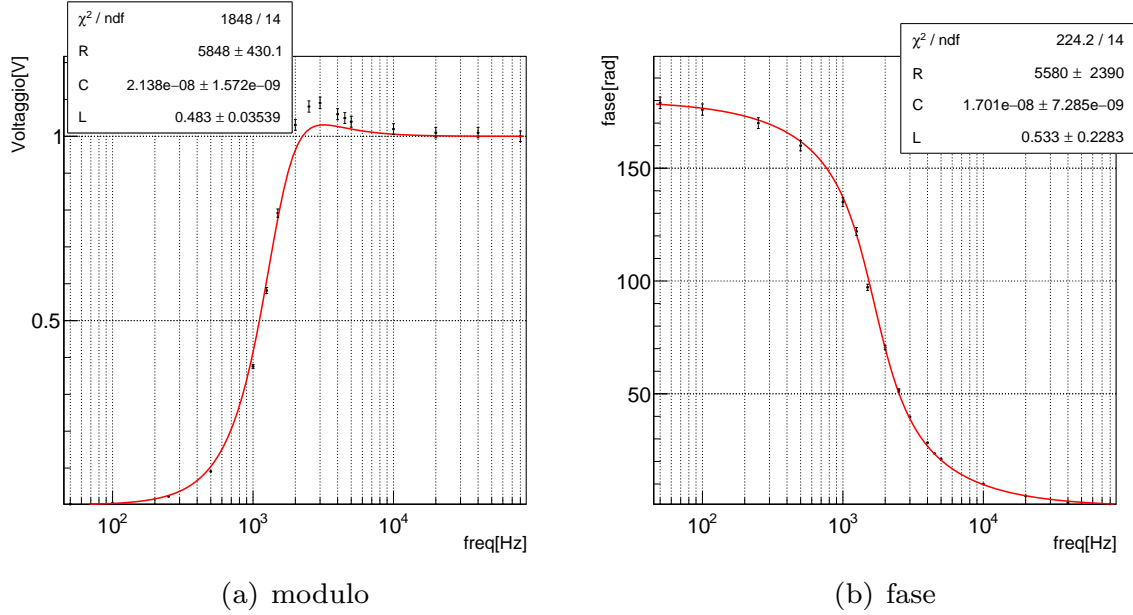
frequenza[Hz]	V_A [V]	V_B [V]	V_B/V_A	ϕ_B
50	20.4 ± 0.2	0.0440 ± 0.0004	$0.00216 \pm 3 \cdot 10^{-5}$	179 ± 3
100	20.4 ± 0.2	0.102 ± 0.001	$0.00500 \pm 7 \cdot 10^{-5}$	176 ± 2
250	20.4 ± 0.2	0.472 ± 0.005	0.0231 ± 0.0003	170 ± 2
500	20.2 ± 0.2	1.84 ± 0.02	0.091 ± 0.001	160 ± 2
1000	19.8 ± 0.2	7.44 ± 0.07	0.376 ± 0.005	135 ± 2
1250	19.6 ± 0.2	11.4 ± 0.1	0.582 ± 0.008	122 ± 2
1500	19.2 ± 0.2	15.2 ± 0.2	0.79 ± 0.01	97 ± 1
2000	19.4 ± 0.2	18.3 ± 0.2	0.94 ± 0.01	71 ± 1
2500	19.8 ± 0.2	20.5 ± 0.2	1.04 ± 0.01	51.5 ± 0.7
3000	19.8 ± 0.2	20.8 ± 0.2	1.05 ± 0.01	39.8 ± 0.6
4000	20.0 ± 0.2	20.8 ± 0.2	1.04 ± 0.01	28.3 ± 0.4
4500	20.2 ± 0.2	20.8 ± 0.2	1.03 ± 0.01	23.5 ± 0.3
5000	20.2 ± 0.2	20.6 ± 0.2	1.02 ± 0.01	21.0 ± 0.3
10000	20.2 ± 0.2	20.6 ± 0.2	1.02 ± 0.01	10.0 ± 0.1
20000	20.2 ± 0.2	20.4 ± 0.2	1.00 ± 0.01	4.7 ± 0.1
40000	20.2 ± 0.2	20.4 ± 0.2	1.01 ± 0.01	1.73 ± 0.05
80000	20.4 ± 0.2	20.4 ± 0.2	1.00 ± 0.01	1.18 ± 0.03

errore strumentale: 1%

Analisi dati

La funzione di trasferimento ai capi di L presentava gli andamenti riportati nei seguenti grafici:

Figura 10: RCL - funzione di trasferimento ai capi di L



Entrambi i test effettuati con ROOT non restituiscono risultati accettabili, è possibile che i modelli adoperati per l'interpolazione non fossero sufficientemente compatibili con la realtà. Avanziamo l'ipotesi che scegliendo una resistenza maggiore, tale da contrastare il valore della resistenza interna dell'induttanza il quale, variando con la frequenza, tende a causare anomalie nel circuito, avremmo ottenuto un comportamento più prevedibile.

Riportiamo le stime ottenute per i parametri del circuito:

- R dall'interpolazione per il modulo: $R_1 = 5848 \pm 430\Omega$
- R dall'interpolazione per la fase: $R_2 = 5580 \pm 2390\Omega$

da cui $t = 0.1 \rightarrow \text{PValue} = 92 \%$

- L dall'interpolazione per il modulo: $L_1 = 0.483 \pm 0.035H$
- L dall'interpolazione per la fase: $L_2 = 0.533 \pm 0.228H$

abbiamo ottenuto $t = 0.2 \rightarrow P\text{Value} = 84\%$

- C dall'interpolazione per il modulo: $C_1 = 2.138 \cdot 10^{-8} \pm 0.157 \cdot 10^{-8} F$

- C dall'interpolazione per la fase: $C_2 = 1.701 \cdot 10^{-8} \pm 0.729 \cdot 10^{-8}$

con $t = 0.6 \rightarrow P\text{Value} = 54.85 \%$

Abbiamo effettuato la media pesata tra le misure ottenute dai due diversi metodi:

$$R_{capoL} = \frac{\sum R_i w_i}{\sum w_i} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} = 5840 \pm 423 \Omega$$

$$L_{capoL} = \frac{\sum L_i w_i}{\sum w_i} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} = 0.4842 \pm 0.0346 H$$

$$C_{capoL} = \frac{\sum C_i w_i}{\sum w_i} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} = (2.119 \pm 0.153) 10^{-8} F$$

4.2.4 Conclusioni circuiti LCR - RLC - RCL

Una grandezza significativa per questo tipo di circuiti è la frequenza di risonanza. In corrispondenza di $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ si ha generalmente il picco per $|\vec{H}|$, andiamo a calcolare la frequenza di risonanza utilizzando le migliori stime dei i parametri del circuito ottenute per ogni caso.

- ai capi di R, $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{capoR}C_{capoR}}} = 1500 \pm 55Hz$

- ai capi di C, $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{capoC}C_{capoC}}} = 1746 \pm 132Hz$

- ai capi di L, $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{capoL}C_{capoL}}} = 1571 \pm 80Hz$

Concludiamo confrontando fra loro le stime ottenute per R, L e C in questa seconda parte.

Considerando una probabilità limite del 0.05%:

1. resistore:

(a) $R_{capoR} = 5025 \pm 347\Omega$

(b) $R_{capoC} = 5709 \pm 611\Omega \Rightarrow$ sono tutti compatibili, $\bar{R} = 5410 \pm 246\Omega$

(c) $R_{capoL} = 5840 \pm 423\Omega$

2. capacitore:

(a) $C_{capoR} = 19.04 \pm 1.32nF$

(b) $C_{capoC} = 17.86 \pm 1.91nF \Rightarrow$ sono tutti compatibili, $\bar{C} = 19.5 \pm 0.9nF$

(c) $C_{capoL} = 21.19 \pm 1.53nF$

3. induttanza:

(a) $L_{capoR} = 0.5907 \pm 0.0408H$

(b) $L_{capoC} = 0.4652 \pm 0.0499H \Rightarrow$ sono tutti compatibili, $\bar{L} = 0.54 \pm 0.02H$

(c) $L_{capoL} = 0.4842 \pm 0.0346H$