Esercitazioni n° 6 e 7 - 22 e 24 maggio 2006

Elementi di teoria dei grafi

Definizione. Un *grafo* G è costituito da un insieme V, i cui elementi sono chiamati *vertici*, e da un insieme E composto da sottoinsiemi di ordine 2 di V, i cui elementi sono detti *archi* o *lati*. Si scrive usualmente $G = (V, E)$.

Abbiamo quindi che $E \subseteq \binom{V}{2}$ ricordando che con $\binom{V}{2}$ possiamo indicare l'insieme di tutti i sottoinsiemi di V costituiti da 2 elementi.

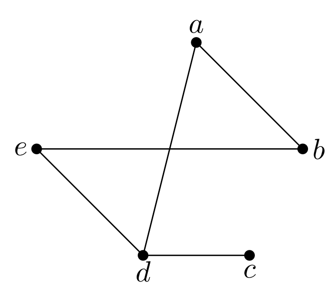
Osservazione. In questo contesto consideriamo solo grafi con un numero finito di vertici e tali che E non contenga elementi del tipo $\{u, u\}$ per ogni $u \in V$.

Se $\{u, v\} \in E$, vale a dire se esiste un arco che collega u e v Si dice allora che u e v sono *adiacenti* in G.

Esempio. Un esempio di grafo è il seguente

$$V = \{a, b, c, d, e\}, \qquad E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}.$$

La definizione risulta più chiara se si disegna il grafo. Un possibile disegno è il seguente:

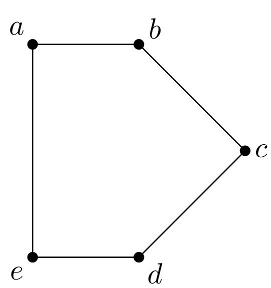


Grafo G_1

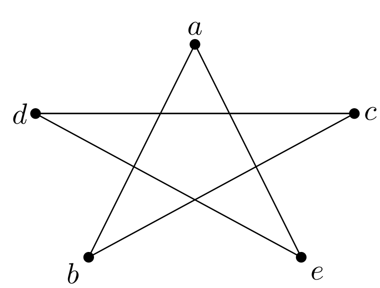
Osservazione. Il disegno di un grafo è importante ma occorre stare attenti in quanto lo stesso grafo può essere disegnato in modi diversi. Per esempio, se consideriamo il grafo così definito

$$V = \{a, b, c, d, e\}, \qquad E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{a, e\}\},$$

questo può essere rappresentato con i due seguenti disegni:



Grafo G_2



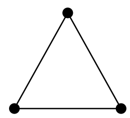
Grafo G_3

Definiamo ora alcuni importanti tipi di grafi.

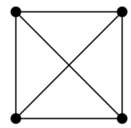
- *Grafi completi* K_n. Sono i grafi in cui

$$V = \{1, 2, \ldots, n\} \qquad \text{e} \qquad E = \binom{V}{2}.$$

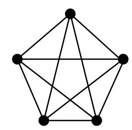
Per esempio si ha



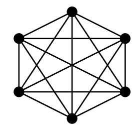
Grafo K_3



Grafo K_4



Grafo K_5

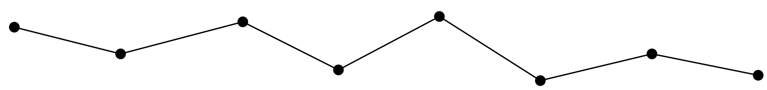


Grafo K_6

- *Percorsi o cammini* P_n. Sono i grafi in cui

$$V = \{0, 1, 2, \ldots, n\} \qquad \text{e} \qquad E = \{\{i-1, i\} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Per esempio

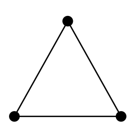


Grafo P_7

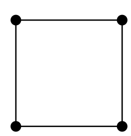
- *Cicli* C_n. Sono i grafi in cui

$$V = \{1, 2, \ldots, n\} \qquad \text{e} \qquad E = \{\{i, i+1\} \mid i = 1, 2, \ldots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\}.$$

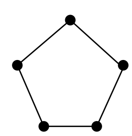
Per esempio si ha



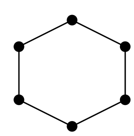
Grafo C_3



Grafo C_4



Grafo C_5



Grafo C_6

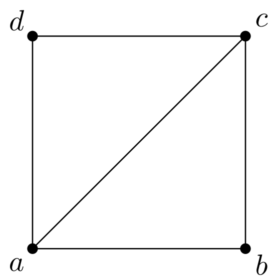
Grafi isomorfi

Definizione. Due grafi $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ sono detti *isomorfi* se esiste una bigezione f da V in V' tale che

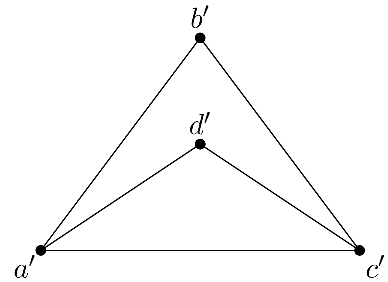
$$\{u, v\} \in E \qquad \Longleftrightarrow \qquad \{f(u), f(v)\} \in E'$$

per ogni $u, v \in V$ con $u \neq v$, e si scrive $G \cong G'$. La funzione f viene detta *isomorfismo* tra i grafi G e G'.

Esempio. I grafi in figura sono isomorfi.



Grafo G_4

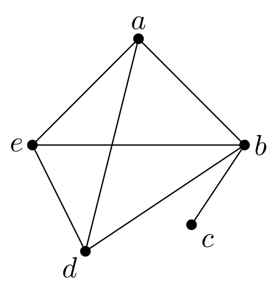


Grafo G_5

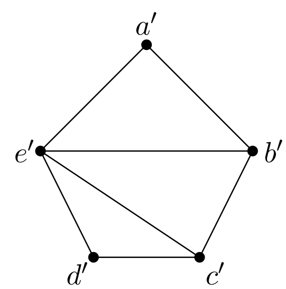
e un isomorfismo è dato da

$$\begin{array}{rcl} a & \longmapsto & a' \\ b & \longmapsto & b' \\ c & \longmapsto & c' \\ d & \longmapsto & d'. \end{array}$$

Al contrario, i due grafi nella seguente figura non sono isomorfi.



Grafo G_6

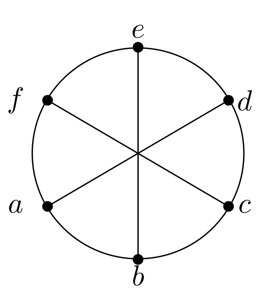


Grafo G_7

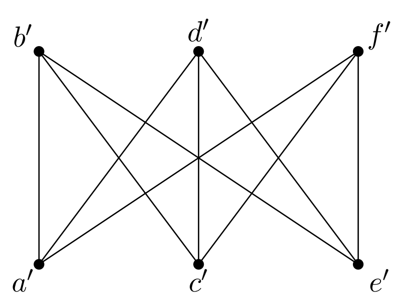
Entrambi hanno cinque vertici e sette lati ma questo non basta. Per vedere che non sono isomorfi si può osservare, ad esempio, che i vertici $\{a, b, d, e\}$ di G_6 formano un grafo completo K_4 mentre in G_7 non è contenuto alcun grafo completo K_4.

Nel seguito verranno analizzati nuovi metodi per verificare se due grafi sono tra loro isomorfi o meno.

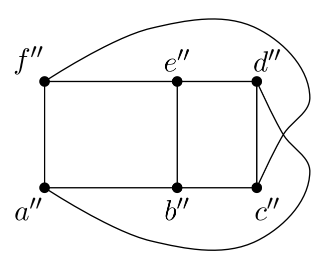
Esempio. La figura seguente mostra tre grafi isomorfi.



Grafo G_8



Grafo G_9

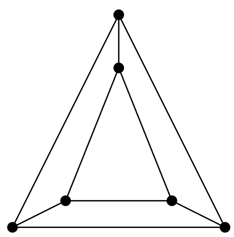


Grafo G_{10}

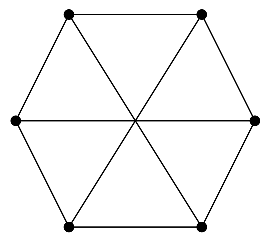
abbiamo gli isomorfismi

$$
\begin{array}{ccc}
a \longmapsto a' & a \longmapsto a'' & a' \longmapsto a'' \\
b \longmapsto b' & b \longmapsto b'' & b' \longmapsto b'' \\
c \longmapsto c' & c \longmapsto c'' & c' \longmapsto c'' \\
d \longmapsto d' & d \longmapsto d'' & d' \longmapsto d'' \\
e \longmapsto e' & e \longmapsto e'' & e' \longmapsto e'' \\
f \longmapsto f' & f \longmapsto f'' & f' \longmapsto f''.
\end{array}
$$

Esercizio (Per casa)**.** Stabilire se i grafi in figura sono o meno isomorfi tra loro.



Grafo G_{11}

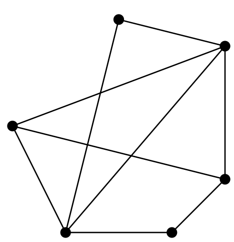


Grafo G_{12}

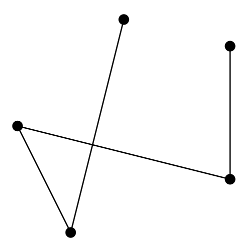
Sottografi e sottografi indotti

Definizione. Siano $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ due grafi. Si dice che G è un *sottografo* di G' se $V \subseteq V'$ e $E \subseteq E'$.

Esempio. La seguente figura mostra un esempio di sottografo di un grafo



Grafo G'_{13}

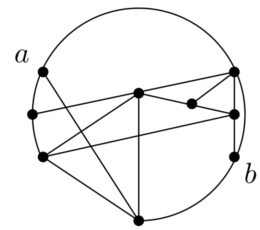


Grafo G_{13}

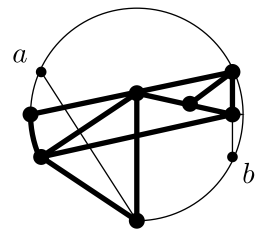
Definizione. Si dice che $G = (V, E)$ è un *sottografo indotto* di un grafo $G' = (V', E')$ se $V \subseteq V'$ e $E = E' \cap \binom{V}{2}$.

In altre parole, un sottografo indotto di un grafo G' è un grafo G che si ottiene cancellando alcuni vertici di G' e tutti gli archi che contengono il vertice cancellato.

Esempio. La seguente figura mostra un esempio di sottografo indotto di un grafo



Grafo G'_{14}



Grafo G_{14}

dove il grafo G_{14} è ottenuto facendo $G'_{14} \smallsetminus \{a, b\}$.

Score di un grafo

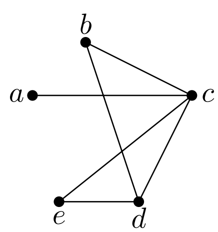
Sia G un grafo, e sia v un vertice di G. Il numero di archi di G contenenti il vertice v è denotato con $\deg_G(v)$ e chiamato *grado* di v nel grafo G.
Denotiamo i vertici di G con $v_1, v_2, \ldots, v_n$. La sequenza

$$d = (\deg_G(v_1), \deg_G(v_2), \ldots, \deg_G(v_n))$$

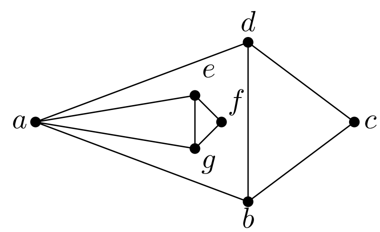
è detta *score* di G.

Scriviamo di solito lo score mettendo i numeri in ordine crescente (a meno di risistemarli).

Per esempio lo score dei seguenti grafici:



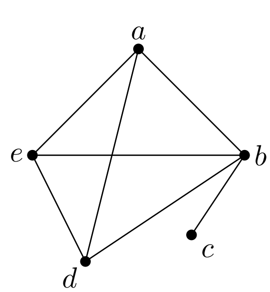
Grafo G_{15}



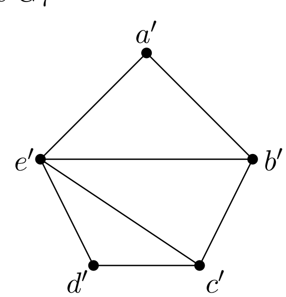
Grafo G_{16}

è rispettivamente $d_1 = (1, 2, 4, 3, 2) = (1, 2, 2, 3, 4)$ e $d_2 = (4, 3, 2, 3, 3, 2, 3) = (2, 2, 3, 3, 3, 3, 4)$.
E' facile vedere che due grafi isomorfi hanno lo stesso score, così come due grafi con differente score sono sicuramente non isomorfi.

Esempio. Abbiamo dimostrato che i grafi G_6 e G_7



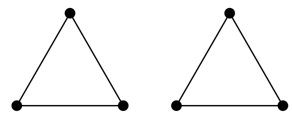
Grafo G_6



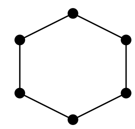
Grafo G_7

non sono isomorfi. Questo si può vedere anche considerando che lo score di G_6 è $d = (1, 2, 3, 3, 3)$ mentre quello di G_7 è $d = (1, 2, 3, 3, 4)$.

D'altra parte, grafi con lo stesso score non sono necessariamente isomorfi! Per esempio i grafi



Grafo G_{17}



Grafo G_{18}

hanno entrambi score $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$ ma non sono isomorfi perche uno di loro è connesso mentre l'altro non lo è.
Lo score quindi è un'importante caratteristica del grafo e può spesso aiutare a distinguere grafi non isomorfi nella pratica.

Si noti che non sempre una sequenza di numeri del tipo $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ rappresenta lo score di un grafo.
Se per esempio prendiamo

$$d = (1, 1, 1, 5, 6, 7, 7)$$

questa non rappresenta lo score di un grafo. Infatti se esistesse un tale grafo avrebbe 7 vertici e ognuno di questi avrebbe al massimo grado 6. Nella sequenza invece ci sono anche numeri superiori a 6 e quindi d non rappresenta lo score di alcun grafo.

Vale inoltre la seguente Proposizione.

Proposizione. *Per ogni grafo $G = (V, E)$ si ha*

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2\,|E|\,.$$

Da questo segue un importante Corollario.

Corollario (Lemma delle strette di mano)**.** *In ogni grafo, il numero di vertici di grado dispari è pari.*

Per esempio, il grafo G_{15} ha due vertici di grado dispari, mentre il grafo G_{16} ha quattro vertici di grado dispari.

Esempio. Per esempio

$$d = (1, 1, 1, 3, 5, 6, 7, 7),$$

non può essere lo score di un grafo perché non esiste un grafo con sette vertici di grado dispari.

Il Lemma delle strette di mano ed altre condizioni necessarie non sono però sufficienti a caratterizzare sequenze che possono essere score di grafi.

Il seguente Teorema invece permette di stabilire se una data sequenza di interi è lo score di una grafo oppure no e in caso affermativo fornisce un algoritmo che consente di costruire un grafo ad esso associato.

Teorema (Teorema dello score)**.** Sia $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ una sequenza di numeri naturali, $n > 1$. Supponiamo che $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$, e con il simbolo d' denotiamo la sequenza $(d'_1, d'_2, \ldots, d'_{n-1})$ dove

$$d'_i = \begin{cases} d_i, & \text{per } i < n - d_n; \\ d_i - 1, & \text{per } i \geqslant n - d_n. \end{cases}$$

Allora d è lo score di un grafo se e solo se d' è lo score di un grafo.

Facciamo ore due esercizi che mostrano come questo importante Teorema agisce.

Esercizio. Sia $d = (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 6)$. Provare che esiste un grafo G lo score di G è d e determinarne uno.

Soluzione. Innanzitutto notiamo che ci sono 4 vertici di grado dispari (e quindi un numero pari) e quindi possiamo andare avanti.
Applichiamo il teorema dello score. Avremo

$$d = (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 6)$$

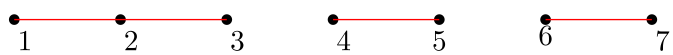
quindi $n = 9$ e $d_n = 6$. Poiché $n - d_n = 3$ avremo

$$d' = (2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 4) = (1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 4).$$

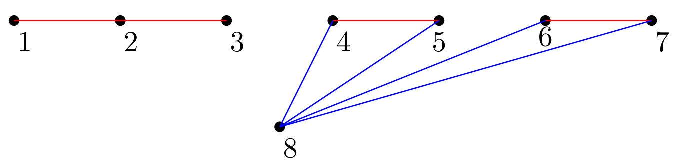
Il numero di vertici di grado dispari è ancora pari quindi possiamo andare avanti. Avremo $n = 8$, $d_n = 4$ quindi $n - d_n = 4$ e allora

$$d'' = (1, 1, 2, 1, 1, 1, 1) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)$$

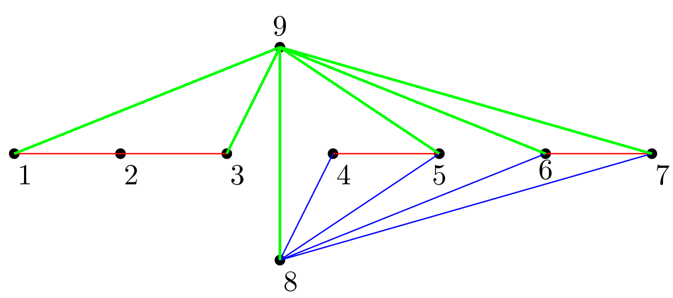
che rappresenta sicuramente lo score del seguente grafo



e quindi, per il teorema dello score, anche d è lo score di un grafo che può essere costruito a partire dal grafo relativo a d''. Infatti anche d' sarà lo score di un grafo che può essere ottenuto a partire da quello relativo a d'' considerando che va aggiunto un ottavo vertice che sarà adiacente a quattro dei sette vertici disegnati, in modo che due tra questi vertici rimangano di grado 1 e quello di grado 2 resti di grado 2. Uno dei possibili grafi è il seguente.



Infine da questo nuovo grafo possiamo ottenere un grafo con score d aggiungendo un vertice e collegandolo a sei dei precedenti otto vertici in modo che quello di grado 4 diventi di grado 5, i due vertici di grado 1 diventino di grado 2, e tre tra quelli di grado 2 diventino di grado 3. Uno dei possibili gradi ottenibili è il seguente.



♣

Esercizio. Sia $d = (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 8, 8)$. Provare che esiste un grafo G lo score di G è d e determinarne uno.

Soluzione. Innanzitutto notiamo che ci sono 4 vertici di grado dispari e quindi possiamo andare avanti.
Applichiamo il teorema dello score controllando che dopo ogni passo il numero di vertici dispari risulti sempre un numero pari. Per

$$d = (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 8, 8)$$

avremo

$$\left.\begin{array}{l} n = 10 \\ d_n = 8 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad n - d_n = 2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} d' & = & (2, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 7) \\ & = & (1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 7) \end{array}$$

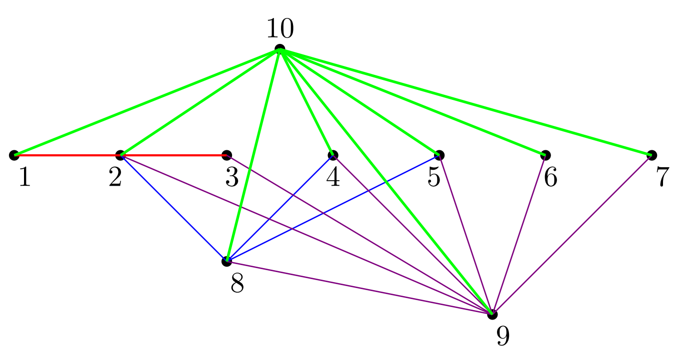
Il numero di vertici dispari è 4 quindi possiamo andare avanti. Avremo

$$\left.\begin{array}{l} n = 9 \\ d_n = 7 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad n - d_n = 2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} d'' & = & (1, 0, 0, 1, 1, 1, 3, 3) \\ & = & (0, 0, 1, 1, 1, 1, 3, 3) \end{array}$$

Il numero di vertici dispari è 6 quindi possiamo andare avanti. Avremo

$$\left.\begin{array}{l} n = 8 \\ d_n = 3 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad n - d_n = 5 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} d''' & = & (0, 0, 1, 1, 0, 0, 2) \\ & = & (0, 0, 0, 0, 1, 1, 2) \end{array}$$

Il numero di vertici dispari è 2, il grado massimo della sequenza è 2, quindi abbiamo finito e possiamo costruire un grafo.



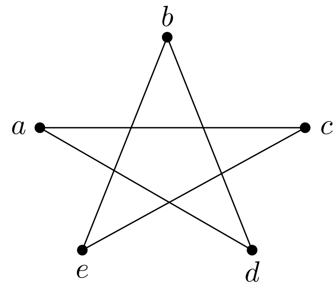
♣

Grafi connessi, 2-connessi ed Hamiltoniani

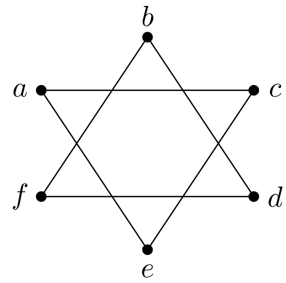
Diamo ora alcune definizioni che risulteranno utili per verificare se due grafi sono isomorfi o meno.

Definizione. Un grafo $G = (V, E)$ è detto *connesso* se per ogni coppia di vertici $u, v \in V$, G contiene un percorso da u a v.

Esempio. Si osservi la seguente figura.



Grafo G_{19}

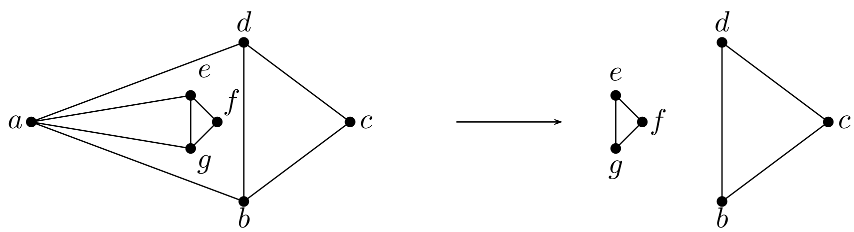


Grafo G_{20}

Si vede facilmente che il grafo G_{19} è connesso. Il grafo G_{20} invece non è connesso. Infatti, per esempio, non è possibile trovare in G_{20} alcun percorso che contenga i vertici a e b.

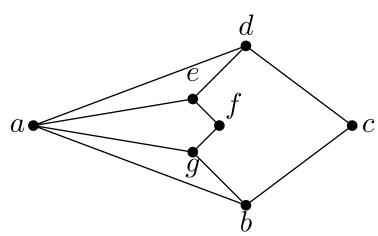
Definizione. Un grafo G è detto 2-*connesso* se ha almeno 3 vertici, e cancellando ogni singolo vertice otteniamo un grafo connesso.

Esempio. Il grafo G_{16} non è 2-connesso.
Infatti se si cancella il vertice $\{a\}$ si ottiene un grafo costituito da due cicli



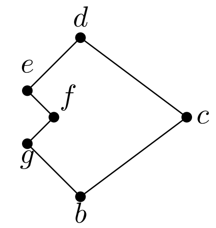
Grafo G_{16} Grafo $G_{16} \setminus \{a\}$

Esercizio. Dire se è 2-connesso il seguente grafo.

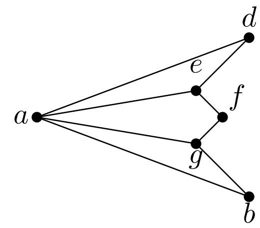


Grafo G_{21}

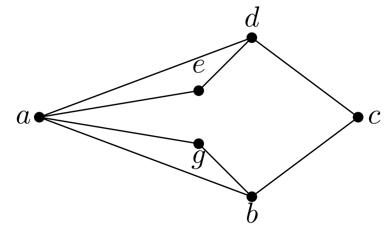
Soluzione. Verifichiamo se cancellando ogni singolo vertice otteniamo un grafo connesso. Avremo



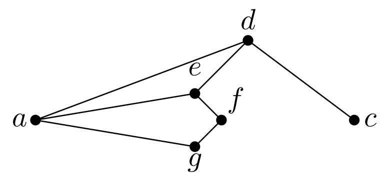
Grafo $G_{21} \setminus \{a\}$



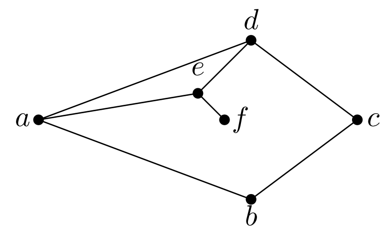
Grafo $G_{21} \setminus \{c\}$



Grafo $G_{21} \setminus \{f\}$



Grafo $G_{21} \setminus \{b\}$



Grafo $G_{21} \setminus \{g\}$

Il caso $G_{21} \setminus \{d\}$ è analogo al caso $G_{21} \setminus \{b\}$ mentre il caso $G_{21} \setminus \{e\}$ è analogo a quello di $G_{21} \setminus \{g\}$.
E quindi abbiamo analizzato ogni possibilità e abbiamo ottenuto in ogni caso dei sottografi indotti connessi. Segue che G_{21} è 2-connesso. ♣

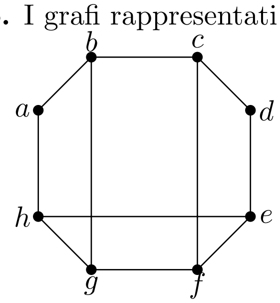
Diamo ora un'altra importante definizione.

Definizione. Un *ciclo Hamiltoniano* in un grafo G è un ciclo contenente tutti i vertici di G. Si dice in questo caso che il grafo è *Hamiltoniano*.

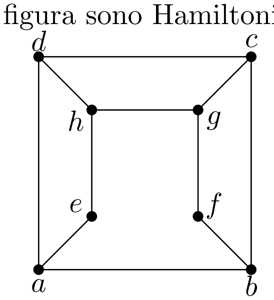
Esempio. Il grafo G_{27} è Hamiltoniano.
Infatti si può vedere dalla figura che contiene il ciclo

$$a \dashrightarrow b \dashrightarrow c \dashrightarrow d \dashrightarrow e \dashrightarrow f \dashrightarrow g \dashrightarrow a.$$

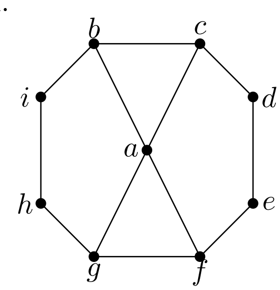
Esercizio. I grafi rappresentati in figura sono Hamiltoniani.



Grafo G_{22}



Grafo G_{23}



Grafo G_{24}

Indicare per ognuno di questi un ciclo che contenga tutti i vertici.

Soluzione.

- Il grafo G_{22} contiene sicuramente il ciclo completo

$$a \dashrightarrow b \dashrightarrow c \dashrightarrow d \dashrightarrow e \dashrightarrow f \dashrightarrow g \dashrightarrow h \dashrightarrow a$$

  ma anche il ciclo completo

$$h \dashrightarrow a \dashrightarrow b \dashrightarrow g \dashrightarrow f \dashrightarrow c \dashrightarrow d \dashrightarrow e \dashrightarrow h.$$

- Il grafo G_{23} contiene il ciclo completo

$$e \dashrightarrow a \dashrightarrow d \dashrightarrow c \dashrightarrow b \dashrightarrow f \dashrightarrow g \dashrightarrow h \dashrightarrow e.$$

- Il grafo G_{24} contiene il ciclo completo

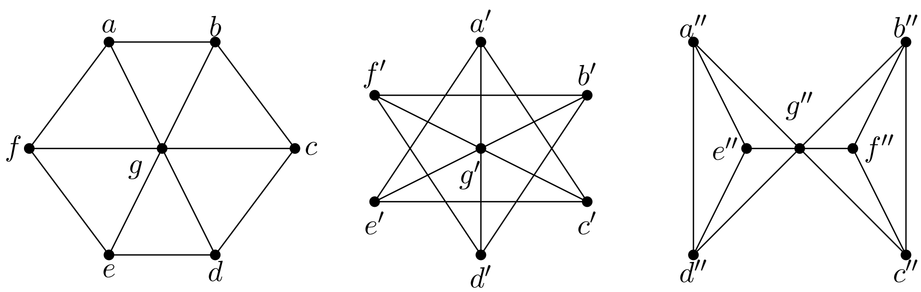
$$a \dashrightarrow c \dashrightarrow d \dashrightarrow e \dashrightarrow f \dashrightarrow g \dashrightarrow h \dashrightarrow i \dashrightarrow b \dashrightarrow a.$$

♣

Non potendo addentrarci troppo nei dettagli riportiamo solo alcuni utili risultati:

- Un grafo 2-connesso è anche connesso.
- Un grafo Hamiltoniano è 2-connesso.

Esercizio. Dei tre grafi rappresentati in figura



Grafo G_{25} Grafo G_{26} Grafo G_{27}

dire, motivando la risposta, quali sono tra loro isomorfi e quali no.

Soluzione.
Il grafo G_{25} è Hamiltoniano, infatti contiene il ciclo completo

$$a \dashrightarrow b \dashrightarrow c \dashrightarrow d \dashrightarrow e \dashrightarrow f \dashrightarrow g \dashrightarrow a$$

e quindi, in particolare, è 2-connesso.
Il grafo G_{27} non è 2-connesso. Infatti se a questo togliamo il vertice g'' otteniamo i due cicli $\{a'', d'', e''\}$ e $\{b'', c'', f''\}$. Lo stesso capita per il grafo G_{26} quando togliamo il vertice g'.
Quindi la prima conclusione è che G_{25} non è isomorfo né a G_{26} e né a G_{27}.
D'altra parte G_{26} e G_{27} sono tra loro isomorfi. Osservandoli si vede che g' gioca il ruolo di g'' rispettivamente, e si possono mettere in corrispondenza i triangoli di vertici $\{a', c', e'\}$ e $\{b', d', f'\}$ di G_{26} con i triangoli di vertici $\{a'', d'', e''\}$ e $\{b'', c'', f''\}$.
Un possibile isomorfismo è quindi il seguente:

$$\begin{array}{ccc}
a' & \longmapsto & a'' \\
c' & \longmapsto & d'' \\
e' & \longmapsto & e'' \\
b' & \longmapsto & b'' \\
d' & \longmapsto & c'' \\
f' & \longmapsto & f'' \\
g' & \longmapsto & g''.
\end{array}$$

♣