



UNIVERSIDAD MICHOCANNA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ ”

**Topología de Espacios de Parámetros
de Cuadriláteros Módulo Semejanza
Orientada**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

PRESENTA:

Gilberto González Arroyo
gil_chess@hotmail.com

ASESOR:

DR. JUAN AHTZIRI GONZÁLEZ LEMUS
ahtziri@cimat.mx



MORELIA MICH.

JULIO, 2017

*Dedicado a
mi familia*

Agradecimientos

Primero y más importante quiero agradecer a mi madre por todo el apoyo que me brindó de muchas formas, a lo largo de la carrera y en la vida, también por su paciencia, cariño y por mucho más.

Agradezco a mi asesor y amigo Ahtziri por sus enseñanzas, su paciencia, así como el apoyo que me brindo de muchas maneras para poder consumar este logro. De igual manera agradezco a mis sinodales y profesores: Jorge, Fernando, Malú, Armando y Petr por el tiempo que me dedicaron, además del buen trato que siempre tuvieron conmigo; también por ser excelentes profesores que me han hecho optar por estudiar matemáticas. Agradezco también al Profesor Jesús Muciño, por haberme dado trabajo, además de facilitarme el software con el que realicé la mayoría de las figuras de esta tesis.

A mis hermanos: Lenin, que de cierta forma trazo el camino que me llevó a estudiar mi carrera y me dio un buen ejemplo; Perla, por su buen ejemplo de estar siempre aprendiendo y no tomar los caminos fáciles; Estefania, que me ayudó siempre que pudo y que confió en mi; Diana por los buenos momentos que hemos pasado. A mi Padre, por sentirse orgulloso de mi y motivarme a ser mejor. A mis tíos Fernando y Alvaro; y abuelos Nina y Alvaro que me apoyaron con consejos y regaños, haciéndome una mejor persona.

A Sofía, por su compañía, el amor y el apoyo que me ha brindado.

A todos mis amigos de Fismat, con los que viví grandes experiencias, en especial a las “Princesas”: Uziel, Sofía, Rubas, Pablo, Eve, Eva y Ada; también a Jean y Atziri. También a Chucho. En general agradezco a toda la comunidad Fismat por la confianza que se siente dentro de la facultad.

A la UMSNH por brindarme los recursos y espacios necesarios para forjarme como profesional; también agradezco al personal que realiza con em-

peño y de buena manera su trabajo, en especial a los empleados de mi facultad.

En lo que respecta a mi formación profesional tengo a demasiadas personas que agradecer, por lo que sólo he mencionado algunas de ellas, pero estoy realmente agradecido con cada una.

Índice general

Introducción	IX
1. Espacios de cuadriláteros	1
1.1. Cuadriláteros como puntos de \mathbb{C}^4	1
1.2. Semejanza Orientada de Cuadriláteros	6
1.3. Cartas para $\mathbb{P}(4)$	8
1.4. Triángulos Módulo Semejanza Orientada	11
1.5. Triángulos Módulo Semejanza	13
2. Cuadriláteros simples y convexos	17
2.1. Resultados Preliminares	17
2.2. Interior del Espacio de Cuadriláteros Convexos	20
2.3. Frontera del Espacio de Cuadriláteros Convexos	23
2.4. Espacio de Cuadriláteros Simples	31
3. Espacios de Cuadriláteros Especiales	35
3.1. Rectángulos, Rombos y Paralelogramos	35
3.2. Deltoides	38
3.3. Cuadriláteros Cíclicos	40
3.4. Trapecios	45
A. Fórmula de Schwarz-Christoffel	51
A.1. Preliminares	51
A.2. Schwarz-Christoffel	54

Introducción

Un trabajo común que se realiza en matemáticas es la clasificación de abstractos, según un tipo de relación entre éstos; por ejemplo, se pueden clasificar todas las superficies cerradas salvo homeomorfismo o también se pueden clasificar todos los grupos finitos salvo isomorfismo. En esta tesis nos interesa hacer una clasificación de objetos salvo una relación de equivalencia definida para los objetos. El objetivo es obtener una “lista” en la que estén todas las clases de equivalencia de tal manera que no se repitan; es decir, queremos una correspondencia biyectiva entre las clases de objetos y nuestra lista. Aún más, queremos que dicha lista tenga una estructura de espacio topológico, a esto se le conoce comúnmente como *espacio de parámetros*.

Uno de los ejemplos más usados para introducir los espacios de parámetros, es la clasificación de todas las circunferencias contenidas en el plano (\mathbb{R}^2 o bien \mathbb{C}). Es claro que podemos clasificarlas de varias maneras dependiendo de como definamos nuestra relación de equivalencia, por ejemplo si decimos que dos circunferencias están relacionadas si y sólo si son iguales (como subconjuntos del plano), entonces podemos asignar a cada circunferencia su centro y su radio, por lo que nuestro espacio de parámetros esta conformado por dos valores reales que definirán su centro y un valor real positivo que definirá su radio, por lo tanto el espacio de parámetros obtenido será $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$. Si por otro lado definimos la relación de tal manera que dos circunferencias estén relacionadas si y solamente si tienen el mismo radio, sin importar en que lugar del plano se encuentren, entonces obtenemos que el espacio de parámetros es solamente \mathbb{R}^+ . En general el espacio obtenido dependerá tanto de los objetos a clasificar como de la relación de equivalencia que se defina.

El hecho de que nuestra lista tenga una estructura de espacio topológico tiene varias ventajas, por ejemplo si nuestro espacio topológico es metrizable obtenemos de manera directa una forma de medir distancias (dada por la métrica) entre dos de nuestros objetos. Los espacios de parámetros tienen

una gran relación con otras teorías encargadas de clasificar objetos, como los espacios *moduli*, que también resuelven problemas de clasificación y suelen tener una estructura algebraica y no sólo el hecho de tener una topología. Dichos espacios han sido objeto de gran estudio en la geometría algebraica a partir los años 60's, pero requieren de herramientas un poco más técnicas para su estudio, en particular el espacio de *triángulos módulo semejanza*, que calcularemos en la Sección 1.4 resulta ser un espacio moduli, no obstante, no enfatizaremos mucho en este hecho ya que no es el propósito de esta tesis; el lector interesado puede consultar más acerca de los espacios moduli en [8].

En esta tesis estaremos interesados en clasificar cuadriláteros con una cierta relación de equivalencia bajo la cual dos cuadriláteros serán equivalentes si tienen la misma forma geométrica y difieren por una composición de rotación, traslación y homotecia, al espacio de parámetros obtenido lo llamamos el *espacio de parámetros de cuadriláteros módulo semejanza orientada*, pero de aquí en adelante, la mayoría de las veces omitiremos la palabra *parámetros*. Se puede extender el estudio a polígonos generales de $n - lados$ obteniendo el espacio de polígonos modulo semejanza orientada que resulta ser biholomorfo a \mathbb{CP}^n como puede verse en [4].

El estudio de polígonos tiene varios antecedentes importantes. En [14] W. Thurston utiliza un espacio de *polígonos módulo semejanza orientada* para estudiar desdoblados de poliedros con singularidades cónicas con ángulos menores que 2π , resulta que ciertos poliedros pueden obtenerse pegando dos copias de polígonos con ángulos interiores iguales a la mitad de los ángulos cónicos. También en [15] Kapovich y Millson estudian los espacios de polígonos con longitud de sus lados fija para el número de lados $n = 4, 5, 6$. En el presente trabajo queremos estudiar el *espacio de cuadriláteros módulo semejanza*, en particular, estudiamos el subconjunto de cuadriláteros *simples* y *convexos*. Desde la educación elemental nos hemos encontrado con estos objetos, además nos han enseñado que existen varios tipos de ellos, por ejemplo: *cuadrados*, *rombos*, *rectángulos*, *trapecios*, y otros más. En esta tesis estudiamos los subespacios asociados a los cuadriláteros antes mencionados. Para ello hemos dividido el texto de la siguiente manera.

En el Capítulo 1, en las dos primeras secciones, definimos los cuadriláteros que estudiamos y la relación de equivalencia entre estos cuadriláteros; también, en la segunda sección se calculará el cociente bajo dicha relación. En la tercera sección dotamos con un sistema de coordenadas a la variedad

obtenida en la segunda sección al realizar el cociente. En la cuarta sección resolveremos el problema análogo para triángulos. Por último, en la quinta sección compararemos el espacio obtenido en la cuarta sección con otro espacio de triángulos obtenido a partir de las longitudes de sus lados.

En el Capítulo 2 estudiamos el espacio de cuadriláteros simples y convexos, en particular encontramos la cerradura topológica del espacio de cuadriláteros convexos. Este capítulo brindará la mayoría de las herramientas para estudiar los subconjuntos asociados a los diferentes tipos de cuadriláteros que se estudian en el siguiente capítulo.

En el Capítulo 3 se encuentran los aportes originales de esta tesis, aquí estudiamos los subespacios correspondientes a los rectángulos, rombos, paralelogramos, deltoides (también conocidos como cometas), cuadriláteros cíclicos y trapecios. Además se analizan las relaciones que existen entre los espacios antes mencionados; por ejemplo, el espacio de rombos se podrá ver como un subespacio del espacio de paralelogramos, ya que todo rombo es un paralelogramo.

A parte de la Fórmula de Schwarz-Christoffel que se utiliza en el Capítulo 2 y se explica en el Apéndice A, los resultados de esta tesis no requieren gran herramienta teórica y la mayoría de ellos pueden ser bien entendidos con algo de intuición geométrica. Aún así se espera que el lector este familiarizado con conceptos de topología, topología algebraica, análisis y geometría euclídea.

Capítulo 1

Espacios de cuadriláteros

El objetivo de este capítulo es introducir al lector al problema que deseamos resolver. Nos interesa calcular el espacio de cuadriláteros bajo una cierta relación de equivalencia, como se mencionó en la introducción la topología del espacio obtenido dependerá de esta relación. En la primera sección definimos lo que para nosotros es un cuadrilátero, luego definimos los distintos tipos de cuadriláteros que se estudian en esta tesis. En la segunda sección definimos una relación de equivalencia sobre el espacio de cuadriláteros y calculamos el cociente por dicha relación. En la tercera sección dotamos con un sistema de coordenadas a la variedad obtenida al realizar el cociente. En la cuarta sección explicamos el problema análogo para el caso de triángulos, en tal caso el espacio de parámetros de triángulos es homeomorfo a la esfera S^2 . En la última sección del capítulo, analizamos la relación que existe entre el espacio de triángulos que se calcula en la tercera sección y el espacio de triángulos módulo semejanza calculado a partir de las longitudes de sus lados.

1.1. Cuadriláteros como puntos de \mathbb{C}^4

Dados $p, q \in \mathbb{C}$, denotamos con \overline{pq} al segmento de recta que va de p a q . Si a cada punto $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$ le asociamos el conjunto $\mathbf{c}(Z) = \overline{z_1z_2} \cup \overline{z_2z_3} \cup \overline{z_3z_4} \cup \overline{z_4z_1}$, entonces podemos pensar a los puntos de \mathbb{C}^4 como cuadriláteros contenidos en \mathbb{C} . De esta manera \mathbb{C}^4 es el espacio de *cuadriláteros etiquetados*. A los segmentos $\overline{z_1z_2}, \overline{z_2z_3}, \overline{z_3z_4}, \overline{z_4z_1}$ les llamamos aristas y a los puntos z_1, z_2, z_3, z_4 les llamamos vértices. De la asociación anterior tenemos las siguientes consecuencias.

- i) Cada $Z \in \mathbb{C}^4$ es un cuadrilátero contenido en \mathbb{C} y tiene sus vértices eti-

quetados.

- II Los vértices tienen un orden natural dado por las coordenadas; *i.e.*, si $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$, entonces z_1 es el primer vértice, z_2 es el segundo vértice, etcétera.
- III Dotamos con la topología usual de \mathbb{C}^4 al conjunto de cuadriláteros con vértices etiquetados (enumerados).
- IV Si $Z, W \in \mathbb{C}^4$ con $Z \neq W$, entonces no necesariamente se tiene que $\mathbf{c}(Z) \neq \mathbf{c}(W)$.
- V Existen cuadriláteros en los que se repiten vértices y existen cuadriláteros en los que sus aristas tienen intersecciones entre sí (Figura 1).

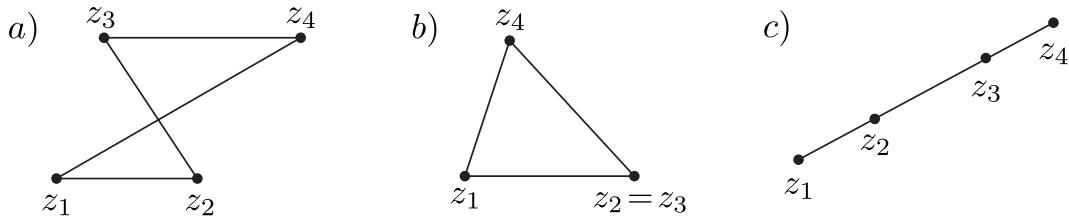


Figura 1: a) Cuadrilátero con autointersecciones. b) Cuadrilátero con vértices repetidos. c) Cuadrilátero formado por 4 puntos colineales.

Al dotar al espacio de cuadriláteros con la topología usual de \mathbb{C}^4 obtenemos de forma natural una noción de cercanía entre cuadriláteros, *i.e.*, dado el cuadrilátero $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ las vecindades alrededor de Z son de la forma $\prod_{k=1}^4 \mathbb{B}(z_k; r_k)$, donde $\mathbb{B}(z_k; r_k) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_k| < r_k\}$ (Figura 2).

La Figura 1 muestra que en \mathbb{C}^4 existen cuadriláteros con características “extrañas”, en esta tesis nos concentraremos en estudiar cuadriláteros *simples*, estos los definimos a continuación.

Definición 1.1.1. Si $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, decimos que Z es un *cuadrilátero simple* si tiene todos sus vértices distintos y $\mathbf{c}(Z)$ es una curva de Jordan. Al conjunto de cuadriláteros simples lo denotaremos con $S(4)$.

Si Z es un cuadrilátero simple, entonces por el Teorema de la Curva de Jordan (Teorema 4. p.34 de [2]) $\mathbb{C} \setminus \mathbf{c}(Z)$ tiene dos componentes conexas, una

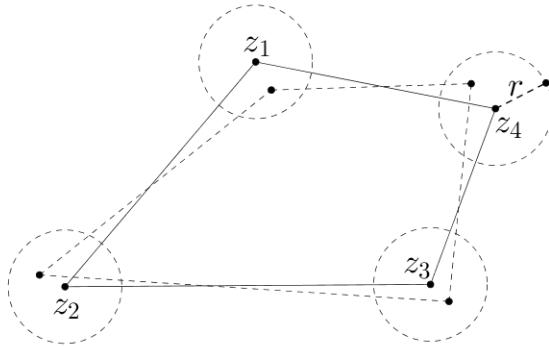


Figura 2: Una vecindad de $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ y otro cuadrilátero dentro de ella.

acotada y la otra no acotada. Llamamos *interior de Z* a la componente acotada de $\mathbb{C} \setminus \mathfrak{c}(Z)$ y la denotamos con $\text{int}(Z)$. Al conjunto $\mathfrak{c}(Z) \cup \text{int}(Z)$ lo denotamos con $\mathfrak{p}(Z)$.

Definición 1.1.2. Si $Z \in \mathbb{C}^4$ es un cuadrilátero, entonces decimos que Z es un cuadrilátero *convexo* si es simple y si las diagonales $\overline{z_1 z_3}, \overline{z_2 z_4}$ están contenidas en $\mathfrak{p}(Z)$. Denotaremos con $K(4)$ al conjunto conformado por los cuadriláteros convexos.

Definición 1.1.3. Si Z es un cuadrilátero simple y al recorrer sus vértices en orden creciente el interior de Z siempre se encuentra a la izquierda, entonces decimos que Z es un cuadrilátero *positivamente orientado*. Si por el contrario al recorrer los vértices en orden creciente el interior de Z se encuentra a la derecha, entonces decimos que Z es un cuadrilátero *negativamente orientado*. Denotaremos con S^+ y S^- a los subconjuntos de $S(4)$ conformados por los cuadriláteros positivamente orientados y negativamente orientados respectivamente, así mismo denotaremos con K^+ y K^- a los subconjuntos de $K(4)$ conformados por los cuadriláteros convexos positivamente orientados y negativamente orientados respectivamente.

Ejemplo 1.1.1.

- a) El cuadrilátero $Z = (0, 1, 1 - i, 2 + i)$ es un cuadrilátero simple y positivamente orientado.
- b) El cuadrilátero $W = (0, 1, 2 - i, -3i)$ es un cuadrilátero convexo y negativamente orientado.

Definición 1.1.4. Si $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ es un cuadrilátero simple, entonces el *ángulo interior* en el vértice z_i es el ángulo formado entre las aristas $\overline{z_{i-1}z_i}$ y $\overline{z_iz_{i+1}}$ que está contenido en el interior de Z . Escribimos θ_i o $\theta_i(Z)$ (específicando que hablamos del cuadrilátero Z) para referirnos al i -ésimo ángulo interior del cuadrilátero.

Notación: En este texto, tomamos los subíndices módulo 4 cuando nos referimos a los vértices de un cuadrilátero, por ejemplo, para nosotros $z_1 = z_5$ y $z_0 = z_4$.

Observación 1.1.1. La suma de los 4 ángulos internos de un cuadrilátero simple siempre es igual a 2π ; esto se debe a que un cuadrilátero siempre se puede dividir en dos triángulos trazando una diagonal.

Definición 1.1.5. Definimos la *rama principal de la función argumento*¹ como la función $\text{Arg}(z) : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (0, 2\pi]$ tal que $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(|z|e^{i\theta}) = \theta$ que satisface $0 < \theta \leq 2\pi$.

Proposición 1.1.1. Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, la función $\theta_i : S(4) \rightarrow (0, 2\pi)$ tal que a cada $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ le asigna el valor de su ángulo interior en el vértice z_i , es continua.

Demuestração. Haremos la demostración para la función θ_2 , los demás casos son análogos. Consideremos el conjunto $\mathcal{R}_0 := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Note que la función argumento restringida a $\mathbb{C} \setminus \mathcal{R}_0$ es continua. Luego es claro que el valor de los ángulos interiores es invariante bajo rotaciones y traslaciones, por lo tanto basta demostrar la afirmación para el conjunto de cuadriláteros $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ tales que $z_2 = 0$ y $z_1, z_3 \notin \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}_0$, para dichos cuadriláteros $\theta_2(Z) = |\text{Arg}|_{\mathbb{C} \setminus \mathcal{R}_0}(z_3 - z_2) - \text{Arg}|_{\mathbb{C} \setminus \mathcal{R}_0}(z_1 - z_2)|$, por lo que en tal caso θ_2 es una composición de funciones continuas y por lo tanto es continua. \square

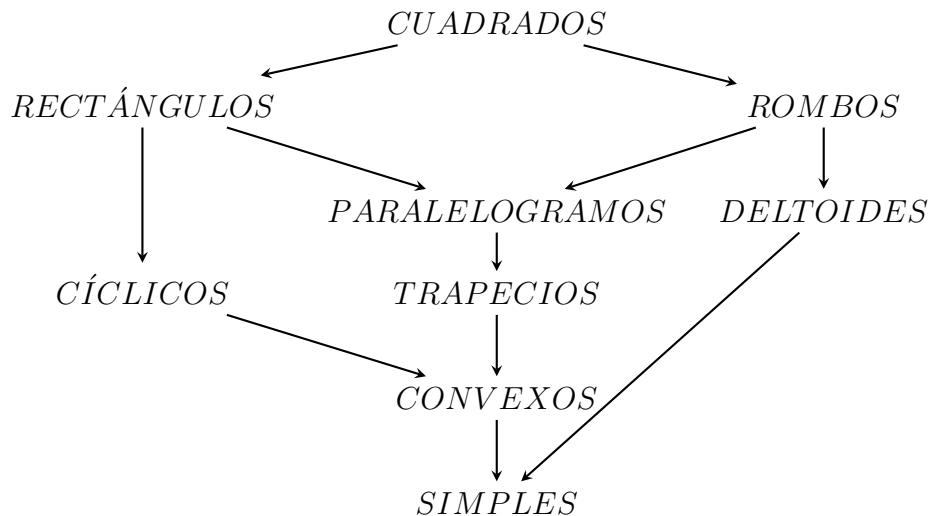
Algunos tipos de cuadriláteros en los que estamos interesados cumplen ciertas propiedades especiales (simetrías o aristas paralelas) la mayoría de estos cuadriláteros los conocemos desde la educación básica, a continuación los definimos formalmente.

Definición 1.1.6. Supongamos que $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ es un cuadrilátero simple, entonces decimos que Z es

¹Ésta no es la manera estándar en la literatura de definir la rama principal de la función argumento, la forma usual es pedir $-\pi < \theta \leq \pi$

- a) un *cuadrado*, si todas sus aristas son de la misma magnitud y todos sus ángulos interiores tienen el mismo valor.
- b) un *rombo*, si todas sus aristas tienen la misma magnitud.
- c) un *rectángulo* si todos sus ángulos interiores tienen el mismo valor.
- d) un *deltoide* si tiene dos pares disjuntos de aristas adyacentes con la misma longitud.
- e) un *paralelogramo* si $\overline{z_1z_2}$ es paralela a $\overline{z_3z_4}$ y $\overline{z_2z_3}$ es paralela a $\overline{z_4z_1}$.
- f) un *cuadrilátero cíclico* si existe una circunferencia en el plano complejo que contiene a todos sus vértices.
- g) un *trapecio* si $\overline{z_1z_2}$ es paralela a $\overline{z_3z_4}$, o $\overline{z_2z_3}$ es paralela a $\overline{z_4z_1}$.

Existen cuadriláteros que satisfacen más de una de las definiciones anteriores, por ejemplo, todo rectángulo es un paralelogramo y por lo tanto el conjunto de rectángulos es un subconjunto del conjunto de paralelogramos. El siguiente diagrama muestra algunas de estas relaciones de contención, las flechas indican que un conjunto está contenido en el otro.



Por último definimos el siguiente tipo de cuadrilátero, cuyo concepto es útil en el cálculo de la cerradura de los espacios anteriores.

Definición 1.1.7. Un *4-segmento* es un cuadrilátero $Z \in \mathbb{C}^4$ tal que todos sus vértices son colineales.

1.2. Semejanza Orientada de Cuadriláteros

En esta sección definimos una relación de equivalencia sobre el espacio de cuadriláteros (\mathbb{C}^4); bajo dicha relación dos cuadriláteros serán equivalentes si difieren por una composición de traslación, rotación y homotecia.

Definición 1.2.1. Decimos que dos cuadriláteros (z_1, z_2, z_3, z_4) y (w_1, w_2, w_3, w_4) son *semejantes módulo semejanza orientada*, si existe una transformación afín compleja $f(z) = az + b$ tal que $f(z_i) = w_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Denotamos con $Afín(\mathbb{C}) := \{f(z) = az + b \mid a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}\}$ al grupo afín complejo y diremos que cada uno de sus elementos es una *semejanza orientada*.

Es claro que la relación de ser semejantes módulo semejanza orientada es una relación de equivalencia. Debido a que las semejanzas orientadas son transformaciones conformes, si dos cuadriláteros son semejantes, entonces tienen ángulos iguales en sus vértices correspondientes y además tienen lados proporcionales, por lo tanto podemos decir que están relacionados si ambos cuadriláteros tienen la misma forma geométrica. Sin embargo, notemos que nuestra definición no permite reflexiones a través de rectas (Ejemplo 1.2.1 c)).

Ejemplo 1.2.1.

- Los cuadriláteros $Z = (0, 1, i, i - 1)$ y $W = (0, 2, 2i, 2i - 2)$ son semejantes módulo semejanza orientada, ya que la función $f(z) = 2z$ (homotecia) es una semejanza orientada que los relaciona.
- Los cuadriláteros $Z = (0, 1, 2 + i, 1 + i)$ y $W = (1, 2 + i, 1 + i, 0)$ no son semejantes módulo semejanza orientada. Aunque $c(Z) = c(W)$, no existe ninguna semejanza orientada que mande los vértices de Z en los vértices de W en el orden adecuado.
- Los cuadriláteros $Z = (0, 2, 2+i, 1+i)$ y $W = (0, 2, 1+i, i)$ no son semejantes módulo semejanza orientada, a pesar de que $c(W)$ se obtenga al reflejar $c(Z)$ por la recta $Re(z) = \frac{1}{2}$. Esto es porque $\theta_3(W) \neq \theta_3(Z)$.

Procedamos a calcular el cociente de \mathbb{C}^4 bajo la relación de equivalencia de ser semejantes orientadamente, a dicho cociente lo llamamos el espacio de cuadriláteros módulo semejanza orientada y lo denotamos con $\mathbb{P}(4)$.

Proposición 1.2.1. Si $D = \{(z, z, z, z) \in \mathbb{C}^4 \mid z \in \mathbb{C}\}$, entonces el cociente $\mathbb{P}(4) := \mathbb{C}^4 \setminus D / Afín(\mathbb{C})$ es homeomorfo (biholomorfo) a \mathbb{CP}^2

Demostración. Consideremos el subespacio $V = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \setminus D \mid z_1 = 0\}$. Nótese que cualquier cuadrilátero $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \setminus D$ está relacionado con algún $Z' \in V$ a través de la semejanza orientada $f(z) = z - z_1$. Es claro que $\phi : V \rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tal que $\phi(0, z_2, z_3, z_4) = (z_2, z_3, z_4)$ es un homeomorfismo (biholomorfismo). Luego, notemos que si $Z, W \in V$, entonces Z es semejante a W si y sólo si $\phi(Z) = a\phi(W)$ con $a \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, por lo tanto

$$\mathbb{C}^4 \setminus D /_{Afín(\mathbb{C})} = V /_{Afín(\mathbb{C})} \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} /_{\{z \mapsto az \mid a \in \mathbb{C}^*\}} =: \mathbb{CP}^2.$$

□

Observación 1.2.1. En la Proposición 1.2.1 no consideramos la diagonal D . Esto se debe a que para obtener una variedad al proyectivizar \mathbb{C}^n , se debe quitar el origen; y notemos que bajo nuestra relación el origen de \mathbb{C}^3 corresponde al subconjunto D de \mathbb{C}^4 .

En adelante a la clase de equivalencia del cuadrilátero (z_1, z_2, z_3, z_4) la denotamos con $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ y nos referimos a esta clase como un cuadrilátero de $\mathbb{P}(4)$, aunque represente una clase de cuadriláteros semejantes en \mathbb{C}^4 . Si un cuadrilátero $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ en \mathbb{C}^4 cumple con una de las definiciones 1.1.1, 1.1.2 o 1.1.6; entonces cualquier cuadrilátero en su clase de equivalencia $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ también la cumple, de manera que en $\mathbb{P}(4)$ podemos hablar de cuadriláteros simples, convexos, rectángulos, etc. Consideremos la proyección al cociente $\eta : \mathbb{C}^4 \setminus D \rightarrow \mathbb{P}(4)$ dada por $\eta(z_1, z_2, z_3, z_4) = [z_1, z_2, z_3, z_4]$.

Observación 1.2.2. Notemos que las funciones θ_i de los ángulos interiores pueden definirse en el subconjunto $\mathcal{S} := \eta(S(4)) \subset \mathbb{P}(4)$ correspondiente a los cuadriláteros simples, ya que si $Z \in S(4)$, entonces para todo Z' semejante a Z se tiene que $\theta_i(Z') = \theta_i(Z)$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, por lo que *las funciones bajan al cociente*, y por la Proposición 1.1.1 se puede concluir que tales funciones vuelven a ser continuas (vea el diagrama comutativo abajo). Abusamos de la notación y a ambas funciones las denotamos como θ_i , independientemente del dominio en el que trabajemos.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^4 & \xrightarrow{\theta_i} & (0, 2\pi) \\ \downarrow \eta & \nearrow \theta_i & \\ \mathbb{P}(4) & & \end{array}$$

Proposición 1.2.2. *La proyección al cociente η es una función abierta.*

Demuestração. Basta demostrar que si $U \subset \mathbb{C}^4 \setminus D$ es un abierto básico de la topología producto de \mathbb{C}^4 , entonces $\pi(U)$ es abierto de $\mathbb{P}(4)$. Un abierto básico de \mathbb{C}^4 es de la forma $U = U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4$ con $U_i \in \mathbb{C}$. Se tiene que $\eta^{-1}(\eta(U)) = \bigcup_{f \in \text{Afín}(\mathbb{C})} f(U_1) \times f(U_2) \times f(U_3) \times f(U_4)$, es decir, $\eta^{-1}(\eta(U))$ es la órbita del conjunto U por la acción grupo afín complejo en \mathbb{C}^4 . Como las transformaciones afines son funciones abiertas se sigue que $\eta^{-1}(\eta(U))$ es la unión de abiertos y por lo tanto $\eta(U)$ es abierto. \square

1.3. Cartas del Espacio de Cuadriláteros Módulo Semejanza

Por la sección anterior sabemos que $\mathbb{P}(4)$ es biholomorfo a \mathbb{CP}^2 . Las cartas clásicas sobre \mathbb{CP}^2 están dadas por parejas (\mathcal{U}_1, ϕ_1) , (\mathcal{U}_2, ϕ_2) y (\mathcal{U}_3, ϕ_3) , donde $\mathcal{U}_1 = \{[z_1, z_2, z_3] \mid z_1 \neq 0\}$ y $\phi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ es un homeomorfismo dado por $\phi_1(z_1, z_2, z_3) = \left(\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}\right)$, las cartas (\mathcal{U}_2, ϕ_2) y (\mathcal{U}_3, ϕ_3) se definen de manera análoga. En esta sección damos cartas sobre $\mathbb{P}(4)$ similares a éstas y explicamos sus cambios de coordenadas.

Proposición 1.3.1. *Si $\mathcal{U}_{1,2} := \{[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{P}(4) \mid z_1 \neq z_2\}$ y la función $\phi_{1,2} : \mathcal{U}_{1,2} \rightarrow \mathbb{C}^2$ es tal que $\phi_{1,2}[z_1, z_2, z_3, z_4] = \left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}, \frac{z_4-z_1}{z_2-z_1}\right)$, entonces la pareja $(\mathcal{U}_{1,2}, \phi_{1,2})$ es una carta sobre $\mathbb{P}(4)$.*

Demuestração. Cualquier cuadrilátero $Z = [z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathcal{U}_{1,2}$ tiene un representante de la forma $[0, 1, w, z]$ (basta aplicarle a $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ la semejanza orientada $f(z) = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$), por lo que $\mathcal{U}_{1,2} = \{[0, 1, w, z] \in \mathbb{P}(4) \mid w, z \in \mathbb{C}\}$; además en estos representantes $\phi_{1,2}$ se ve como la proyección en sus últimas dos coordenadas, por lo que es claro que $\phi_{1,2}$ es un homeomorfismo. Más aún es un biholomorfismo.

También se tiene que $\mathcal{U}_{1,2} \subset \mathbb{P}(4)$ es abierto puesto que $\mathcal{U}_{1,2} = \eta(U_{1,2})$ donde $U_{1,2} = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid z_1 \neq z_2\}$ y $U_{1,2}$ es abierto ya que si $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in U_{1,2}$, entonces el polidisco $\Pi_{i=1}^4 \mathbb{B}(z_i; r)$ donde $2r = |z_2 - z_1|$ es una vecindad contenida en $U_{1,2}$, luego usando el hecho de que η es una función abierta se tiene que $\mathcal{U}_{1,2}$ es un abierto contenido en $\mathbb{P}(4)$. Por lo tanto $(\mathcal{U}_{1,2}, \phi_{1,2})$ es una carta de $\mathbb{P}(4)$. \square

Análogamente a la Proposición 1.3.1 para $i \neq j$, se definen las cartas $(\mathcal{U}_{i,j}, \phi_{i,j})$ donde $\mathcal{U}_{i,j} := \{[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{P}(4) \mid z_i \neq z_j\}$ y $\phi_{i,j}$ se define siguiendo la definición de $\phi_{1,2}$. De esta manera definimos en total 12 cartas sobre $\mathbb{P}(4)$. Puesto que todo cuadrilátero en $\mathbb{P}(4)$ tiene al menos dos vértices diferentes, es claro que los dominios de estas 12 cartas forman una cubierta.

Procedamos a calcular el cambio de coordenadas entre $(\mathcal{U}_{1,2}, \phi_{1,2})$ y $(\mathcal{U}_{2,3}, \phi_{2,3})$ (los otros cambios de coordenadas se realizan de manera análoga). Como señalamos en la demostración de la Proposición 1.3.1 en los representantes de la forma $[0, 1, w, z]$ la función $\phi_{1,2}$ se ve como la proyección en sus dos primeras coordenadas, de manera similar en los representantes de la forma $[z, 0, 1, w]$ la función $\phi_{2,3}$ se ve como la proyección en la segunda y tercera coordenada, ya que $\phi_{1,2}^{-1}(w, z) = [0, 1, w, z] = [\frac{1-w}{z-w}, 0, 1, \frac{-w}{z-w}]$, el cambio de coordenadas $\phi_{2,3} \circ \phi_{1,2}^{-1} : \phi_{1,2}(\mathcal{U}_{1,2} \cap \mathcal{U}_{2,3}) \rightarrow \phi_{2,3}(\mathcal{U}_{1,2} \cap \mathcal{U}_{2,3})$, está dado por

$$(w, z) \mapsto \left(\frac{-w}{z-w}, \frac{1-w}{z-w} \right).$$

Estos cambios de coordenadas son útiles en los siguientes capítulos.

Observación 1.3.1. Por la definición de cuadrilátero simple tenemos que $\mathcal{S} \subset \mathcal{U}_{i,j}$ para todos $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $i \neq j$. De esta manera cada una de las cartas $(\mathcal{U}_{i,j}, \phi_{i,j})$ nos permite ver al conjunto de cuadriláteros simples como subconjunto de \mathbb{C}^2 .

Lema 1.3.1. *Dados X, Y espacios topológicos localmente compactos y Hausdorff. Si X_∞ y Y_∞ denotan las compactificaciones por un punto de X y Y respectivamente y si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y propia², entonces $f_\infty : X_\infty \rightarrow Y_\infty$ la extensión de f tal que $f_\infty(\infty) = \infty$, es continua.*

Demostración. Debido a que los espacios X y Y son localmente compactos y Hausdorff, se sigue que sus compactificaciones por un punto existen³, son únicas y además son Hausdorff.

Supongamos que $U \subset Y_\infty$ es un abierto. Si $\infty \notin U$ es claro que $f_\infty^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ es un abierto en X y por lo tanto es un abierto en X_∞ . Si $\infty \in U$, entonces $U = \{\infty\} \cup (Y \setminus K)$ donde $K \subset Y$ es un compacto; por lo tanto $f_\infty^{-1}(U) = \{\infty\} \cup (f_\infty^{-1}(Y) \setminus f_\infty^{-1}(K)) = \{\infty\} \cup (X \setminus f_\infty^{-1}(K))$. Además, $f_\infty^{-1}(K) = f^{-1}(K)$ es compacto porque f es propia y entonces $f_\infty^{-1}(Y \setminus K)$ es el

²Una función $f : X \rightarrow Y$ es propia si para todo subconjunto compacto $K \subset Y$, su preimagen $f^{-1}(K)$ es un compacto en X .

³En el sentido de que X es un abierto denso de X_∞ .

complemento de un compacto en X , por lo que $f_\infty^{-1}(U)$ es un abierto en X_∞ ; y así, f_∞ es continua. \square

Proposición 1.3.2. *La proyección al cociente η es un haz fibrado sobre $\mathbb{P}(4)$ con fibra $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.*

Demuestra. Daremos trivializaciones locales de $\mathbb{P}(4)$ usando los dominios $\mathcal{U}_{i,j}$ de las cartas definidas en esta sección, recordemos que dichos dominios forman una cubierta abierta de $\mathbb{P}(4)$. Aquí sólo demostramos que $\eta^{-1}(\mathcal{U}_{1,2})$ es homeomorfo a $\mathcal{U}_{1,2} \times (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$, para el resto de los dominios se procede de manera análoga.

Si $Z = [z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathcal{U}_{1,2}$ y para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ se tiene que $z_i \neq 0$, entonces $\eta^{-1}(Z) = \{(az_1 + b, az_2 + b, az_3 + b, az_4 + b) \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$, es decir, $\eta^{-1}(Z)$ es la órbita de (z_1, z_2, z_3, z_4) bajo el grupo $Afín(\mathbb{C})$ y $\eta^{-1}(\mathcal{U}_{1,2}) = U_{1,2} := \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid z_1 \neq z_2\}$.

Probaremos que la función $\psi_{1,2} : U_{1,2} \rightarrow \mathcal{U}_{1,2} \times (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$ dada por $\psi_{1,2}(z_1, z_2, z_3, z_4) = ([0, 1, \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}, \frac{z_4-z_1}{z_2-z_1}], (z_2-z_1, z_1))$ es un homeomorfismo. Para esto, probamos las siguientes tres propiedades.

- Biyectividad: Primero veamos que si $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in U_{1,2}$, entonces se tiene que $0 \neq z_2 - z_1 \in \mathbb{C}^*$; por lo tanto $\psi_{1,2}$ está bien definida. Luego dado $\zeta = ([0, 1, w, z], (a, b)) \in \mathcal{U}_{1,2} \times (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$, el cuadrilátero $Z = (b, a+b, aw+b, az+b)$ es tal que $\psi_{1,2}(Z) = \zeta$ y, por lo tanto, $\psi_{1,2}$ es suprayectiva. Por último la inyectividad se sigue fácilmente de la definición de $\psi_{1,2}$.
- Continuidad: Recordemos que una función hacia un espacio producto es continua si y sólo si cada función coordenada es continua. En este caso $\psi_{1,2} = (\psi_{1,2}^1, \psi_{1,2}^2) = ([z_1, z_2, z_3, z_4], (z_2 - z_1, z_1))$; por un lado $\psi_{1,2}^1$ es la restricción de proyección al cociente η al conjunto $U_{1,2}$ y, por lo tanto, es continua. Luego, $\psi_{1,2}^2 : U_{1,2} \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ también es continua, ya que es restricción de la función lineal $\lambda : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dada por $\lambda(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_2 - z_1, z_1)$, la cual es continua.
- Propia: Sea $K \subset \mathcal{U}_{1,2} \times (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$. Probaremos que $\phi_{1,2}^{-1}(K) \subset \mathbb{C}^4$ es un compacto, para ello basta probar que toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \phi_{1,2}^{-1}(K)$ tiene una subsucesión convergente puesto que \mathbb{C}^4 es un espacio métrico. Supongamos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\phi_{1,2}^{-1}(K)$, entonces $\phi_{1,2}(x_n)$ es una sucesión en K ; luego, como K es compacto existe una subsucesión $\phi_{1,2}(x_{n_k})$ que converge a $f(p)$, afirmamos que la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{N}}$ converge a p . Para esto, supongamos lo contrario, entonces existe una vecindad compacta V contenida en $\phi_{1,2}^{-1}(K)$ (puesto que \mathbb{C}^4 es localmente

compacto) alrededor de p que no contiene ninguna cola de la sucesión x_{n_k} , *i.e.*, no existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > n_0$ implique $x_{n_k} \in V$. Luego, como $\phi_{1,2}$ es una biyección continua y su codominio es un espacio Hausdorff, concluimos que $\phi_{1,2}$ restringida al compacto V es un homeomorfismo, por lo tanto $\phi_{1,2}(V)$ es una vecindad compacta de $f(p)$ que no contiene ninguna cola de la sucesión $\phi_{1,2}(x_{n_k})$. Esto es una contradicción puesto que $\phi_{1,2}(x_{n_k})$ converge a $f(p)$; concluimos que x_{n_k} converge a p , y así, $\phi_{1,2}^{-1}(K)$ es un compacto.

Tenemos que $\psi_{1,2}$ es una función continua, biyectiva y propia, además tanto \mathbb{C}^4 como $\mathcal{U}_{1,2} \times (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$ son localmente compactos y Hausdorff, entonces por el Lema 1.3.1, la extensión de $\psi_{1,2}$ hacia la compactificación por un punto de $U_{1,2} \subset \mathbb{C}^4$, es una función continua y biyectiva, y dado que está definida en un compacto hacia un espacio Hausdorff es un homeomorfismo, por lo tanto su $\psi_{1,2}$ es un homeomorfismo y el siguiente diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} U_{1,2} & \xrightarrow{\psi_{1,2}} & \mathcal{U}_{1,2} \times (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}) \\ \eta \downarrow & \nearrow \text{proj}_1 & \\ \mathcal{U}_{1,2} & & \end{array}$$

Para cada dominio $\mathcal{U}_{i,j}$ se puede proceder de manera similar, además, se tiene que $\mathbb{P}(4) = \bigcup_{i \neq j} \mathcal{U}_{i,j}$, por lo tanto todo punto de $\mathbb{P}(4)$ tiene una trivialización local y se concluye el resultado deseado. □

1.4. Triángulos Módulo Semejanza Orientada

De forma análoga al caso de cuadriláteros, pensamos a los triángulos como puntos de \mathbb{C}^3 (triángulos con vértices etiquetados), además decimos que los triángulos $(z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$ son equivalentes módulo semejanza orientada si existe $f \in \text{Afín}(\mathbb{C})$ tal que $f(z_i) = w_i$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Procediendo de manera similar a la Proposición 1.2.1, se puede demostrar que el cociente de \mathbb{C}^3 bajo esta relación de equivalencia es biholomorfo a \mathbb{CP}^1 (el cual a su vez es homeomorfo a \mathbb{S}^2). Denotaremos al cociente con $\mathbb{P}(3)$ y con $[z_1, z_2, z_3]$ a la clase de equivalencia del triángulo (z_1, z_2, z_3) .

La pareja $(\mathcal{U}_{1,2}, \phi_{1,2})$ donde $\mathcal{U}_{1,2} := \{[z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{P}(3) \mid z_1 \neq z_2\}$ y $\phi_{1,2} : \mathcal{U}_{1,2} \rightarrow \mathbb{C}$ está dada por $\phi_{1,2}[z_1, z_2, z_3] = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$, es una carta de $\mathbb{P}(3)$; además su dominio contiene al conjunto de triángulos simples. Por lo tanto, con dicha

carta podemos visualizar a los triángulos simples como subconjunto de \mathbb{C} . Notemos que todo triángulo en $\mathcal{U}_{1,2}$ tiene un único representante en la línea $L = \{(0, 1, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z \in \mathbb{C}\}$. En L existen los siguientes 3 tipos de triángulos dependiendo del valor de z en esta línea, estos son

- I $Im(z) > 0$ correspondientes a triángulos simples positivamente orientados.
- II $Im(z) = 0$ correspondientes a triángulos degenerados a un segmento, a dichos triángulos los llamamos *3-segmentos*.
- III $Im(z) < 0$ correspondientes a triángulos simples negativamente orientados.

Es claro que el eje real \mathbb{R} es la frontera de los triángulos simples tanto positiva como negativamente orientados. El triángulo $[0, 0, 1]$ es el único triángulo en $\mathbb{P}(3)$ que no pertenece a $\mathcal{U}_{1,2}$, no obstante, dicho triángulo es el límite de $[0, 1, z]$ cuando z tiende a ∞ . Además, $[0, 0, 1]$ también es un 3-segmento. Concluimos que $\mathbb{P}(3)$ es homeomorfo a una esfera, la cual es dividida por una circunferencia $(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ correspondiente a los 3-segmentos en dos hemisferios abiertos, que corresponden al conjunto de triángulos simples positivamente y negativamente orientados como lo sugiere la Figura 3.

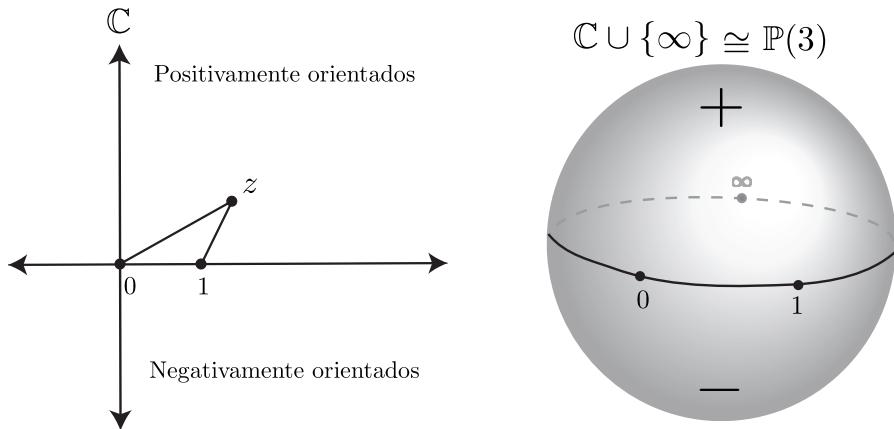


Figura 3: El eje real (correspondiente a los 3-segmentos) divide a \mathbb{C} en dos componentes que corresponden a triángulos positivamente (+) y negativamente (-) orientados. A la derecha se muestra la esfera que es dividida por los 3-segmentos en dos discos.

Finalmente, analizamos los subconjuntos de \mathbb{C} relacionados a distintos tipos de triángulos; por ejemplo, los subconjuntos de $\mathbb{P}(3)$ que corresponden a triángulos isósceles (triángulos con dos ángulos iguales) son: $\mathcal{C}_0 =$

$\{[0, 1, z] \in \mathbb{P}(3) \mid |z| = 1\}$, $\mathcal{C}_1 = \{[0, 1, z] \in \mathbb{P}(3) \mid |z - 1| = 1\}$ y $\mathcal{L}_{1/2} = \{[0, 1, z] \in \mathbb{P}(3) \mid \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}\}$. Es claro que \mathcal{C}_0 y \mathcal{C}_1 determinan circunferencias en \mathbb{C} bajo el homeomorfismo $\phi_{1,2}$, dichas circunferencias se cruzan en dos puntos que corresponden a los triángulos equiláteros positivamente y negativamente orientados, además el conjunto $\mathcal{L}_{1/2}$ define una recta en \mathbb{C} .

Los triángulos rectángulos (aquellos con un ángulo recto en algún vértice) definen los subconjuntos de \mathbb{C} dados por las rectas $\operatorname{Re}(z) = 0$, $\operatorname{Re}(z) = 1$ junto con la circunferencia $|z - \frac{1}{2}| = 1$.

En el segundo y tercer capítulo realizamos una descripción del espacio de cuadriláteros similar a la realizada en esta sección para el caso de triángulos.

1.5. Triángulos Módulo Semejanza

Desde la educación básica nos enseñan que dos triángulos contenidos en el plano son semejantes si la magnitud de sus lados correspondientes son proporcionales, sin importar la dirección en la que estén acomodados sus lados, a este criterio comúnmente se le conoce como criterio de semejanza lado-lado-lado. Este criterio resulta ser una relación de equivalencia, ayudándonos de esto y del hecho de que dichas longitudes deben satisfacer la desigualdad del triángulo, calculamos el espacio de parámetros de triángulos (sin etiquetas) bajo esta relación. Dicho espacio es

$$M(3) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y \leq z, z \leq x + y, x + y + z = 3\}.$$

Aquí hemos fijado el perímetro de los triángulos igual a 3, pero es obvio que todo triángulo es semejante a uno de estos. Además, al permitir la igualdad en la desigualdad triangular, admitimos en $M(3)$ a los 3-segmentos. El conjunto $M(3)$ es una región triangular como se muestra en Figura 4; también se muestra que el triángulo equilátero corresponde con el vértice $(1, 1, 1)$ y que la arista izquierda corresponde a triángulos isósceles con lado desigual menor, la arista derecha corresponde a triángulos con lado desigual menor y la base corresponde con los 3 – segmentos.

El objetivo de esta sección es mostrar que podemos obtener el espacio $M(3)$ de triángulos módulo semejanza, como cociente del espacio de triángulos módulo semejanza orientada $\mathbb{P}(3)$; para ello basta identificar los triángulos en $\mathbb{P}(3)$ que se relacionan módulo semejanza.

Como en la sección anterior, trabajamos en el conjunto de representantes tomados en la línea L . Notemos que dos triángulos en $\mathbb{P}(3)$ definen el mismo

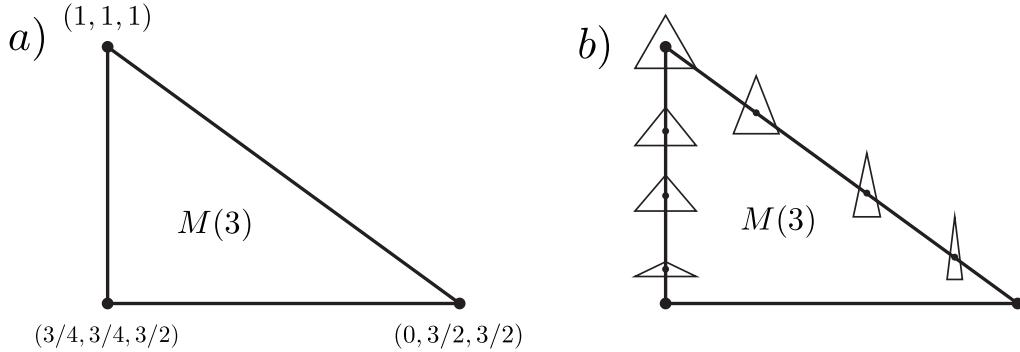


Figura 4: a) Se muestran los vértices de la región de \mathbb{R}^3 que corresponde a $M(3)$.
b) Se ilustran algunos triángulos isósceles parametrizados por $M(3)$.

triángulo módulo semejanza si y sólo si difieren por algunas composiciones de las siguientes funciones.

- 1 $\delta[0, 1, z] = [0, 1, \frac{1}{1-z}]$. Esta función es una reenumeración cíclica de vértices; por ejemplo $[0, 1, i]$ es semejante a $[1, i, 0] = [0, 1, \frac{1}{1-i}]$.
- 2 $\gamma[0, 1, z] = [0, 1, 1 - \bar{z}]$. Esta función corresponde a reflejar el tercer vértice por la mediatrix de la arista $\overline{01}$; por ejemplo $[0, 1, i]$ es semejante a $[0, 1, 1+i]$.
- 3 $\sigma[0, 1, z] = [0, 1, z]$. Esta función revierte la orientación del triángulo; por ejemplo $[0, 1, i]$ es un triángulo positivamente orientado y es semejante al triángulo $[0, 1, -i]$ el cual es negativamente orientado.

Las funciones δ, σ y γ , inducen funciones de \mathbb{C} en \mathbb{C} , explícitamente las funciones inducidas son $\tilde{\delta}(z) = \frac{1}{1-z}$, $\tilde{\gamma}(z) = 1 - \bar{z}$, $\tilde{\sigma}(z) = \bar{z}$.

Observación 1.5.1. $\tilde{\delta}, \tilde{\sigma}, \tilde{\gamma}$ no actúan en el triángulo $[0, 0, 1]$. Dicho triángulo está asociado al punto al ∞ . Podemos extender las funciones de manera continua pensando que $\frac{1}{0} = \infty$ y $\frac{1}{\infty} = 0$. De esta manera podemos actuar en todo $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{P}(3)$ con estas funciones. Además, es claro que

$$\mathbb{P}(3) / \langle \delta, \gamma, \sigma \rangle \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\} / \langle \tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\sigma} \rangle.$$

Notemos que al actuar con $\tilde{\sigma}$ en \mathbb{C} , se identifican el semiplano superior y el semiplano inferior; es decir, el cociente por la acción de $\tilde{\gamma}$ “elimina la orientación”, además $\tilde{\delta}$ y $\tilde{\gamma}$ fijan el semiplano superior. Por lo tanto para obtener el cociente basta considerar la acción de $\tilde{\delta}$ y $\tilde{\gamma}$ en $\overline{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \{\infty\}$.

El grupo generado por las funciones $\tilde{\delta}$ y $\tilde{\gamma}$, $G = \langle \tilde{\delta}, \tilde{\gamma} \rangle$, es un grupo isomorfo al grupo diédrico de orden 6, es decir, G representa las simetrías del triángulo equilátero. Esta es la razón por la cual con dichas operaciones se pueden identificar todos los triángulos positivamente orientados de $\mathbb{P}(3)$ que son semejantes. Por lo tanto tenemos que el espacio de triángulos módulo semejanza es homeomorfo a $\overline{\mathbb{H}}/G$.

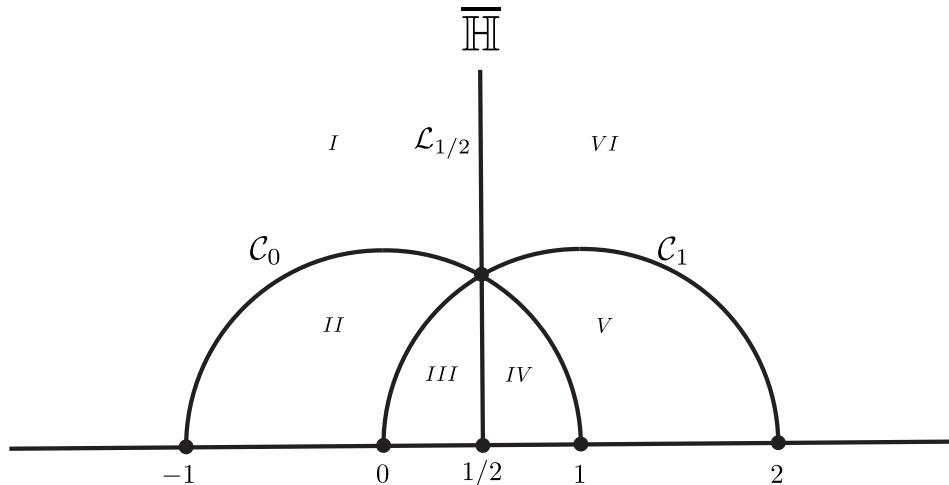


Figura 5: Plano dividido por la acción del grupo G

Para encontrar el cociente de $\overline{\mathbb{H}}$ bajo G consideremos las curvas en $\overline{\mathbb{H}}$ definidas por los conjuntos C_0, C_1 y $L_{1/2}$ como se muestra en la Figura 5. Como se comentó en la sección anterior, dichas curvas corresponden al subespacio de triángulos isósceles y dividen al semiplano superior en seis regiones. Notemos que $\tilde{\delta}$ intercambia estas curvas (de hecho $\tilde{\delta}$ es una rotación hiperbólica de orden 3 y centro en el punto $e^{i\frac{\pi}{3}}$ correspondiente al triángulo equilátero) y también manda las regiones I, II, III, IV, V, VI , de la Figura 5 en las regiones III, IV, V, VI, I, II respectivamente; en particular, la órbita de las regiones III y IV bajo $\langle \tilde{\delta} \rangle$ es todo $\overline{\mathbb{H}}$. Además $\tilde{\delta}$ no identifica dos triángulos en el interior de dichas regiones, por lo que para obtener el cociente sólo es necesario actuar en las regiones III y IV con la función $\tilde{\gamma}$, la cual es una reflexión por el eje $Re(z) = \frac{1}{2}$ de esta manera se identifican estas dos regiones. Finalmente, tenemos que el cociente $\overline{\mathbb{H}}/G$ es homeomorfo a la región III denotada \mathfrak{R}_{III} .

La función $\phi : \mathfrak{R}_{III} \rightarrow M(3)$ definida por

$$\phi(z) = \frac{3}{1 + |1 - z| + |z|} (1, |1 - z|, |z|)$$

es un homeomorfismo entre \mathfrak{R}_{III} y $M(3)$. Hemos recuperado a $M(3)$ como cociente de $\mathbb{P}(3)$.

Capítulo 2

Cuadriláteros simples y convexos

En este capítulo se estudian los espacios topológicos de cuadriláteros convexos y simples módulo semejanza orientada. En la primera sección introducimos algunos resultados que son utilizados para calcular la topología de los conjuntos $\mathcal{K} = \eta(K(4))$ y $\mathcal{S} = \eta(S(4))$, como el hecho de que el conjunto $S(4)$ tiene dos componentes conexas. En la segunda sección demostramos que el conjunto de cuadriláteros convexos como subconjunto de $\mathbb{P}(4)$ es topológicamente una bola cerrada de dimensión 4. Además, en la tercera sección analizamos el espacio de simples. Cabe mencionar que los resultados aquí expuestos están basados en [5].

2.1. Resultados Preliminares

En esta sección damos algunos resultados preliminares, como una caracterización de los cuadriláteros en el interior de $K(4)$ y explicamos cuáles son algunos de los cuadriláteros de su frontera. También, entre otras cosas, se demuestra que $S(4)$ tiene dos componentes conexas.

Observación 2.1.1. Un cuadrilátero simple es convexo si y sólo si sus ángulos interiores son menores o iguales a π .

Aquí hemos permitido que un vértice tenga ángulo interior igual a π , esto no es lo más común cuando se piensa en un cuadrilátero convexo, sin embargo note que $(0, 1, 2, i)$ es un ejemplo de un cuadrilátero que cumple la Definición 1.1.2, pero tiene un ángulo igual a π en su segundo vértice.

Proposición 2.1.1. Si $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in S(4)$ y si θ_i es el ángulo interior del vértice z_i , entonces Z pertenece al interior de $K(4)$ si y sólo si $\theta_i < \pi$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

*Demuestra*ción. (\Rightarrow) Procederemos por contradicción. Supongamos que $\theta_1(Z) = \pi$, entonces es claro que toda bola abierta alrededor de z_1 contiene puntos z' tales que si $Z' = (z', z_2, z_3, z_4)$, entonces $\theta_1(Z') > \pi$ ya que las vecindades básicas de \mathbb{C}^4 son producto de bolas, se sigue que toda vecindad de Z contiene cuadriláteros no convexos, por lo que Z no estaría en el interior del espacio de convexos, lo cual es una contradicción. Procediendo de manera similar para los demás casos concluimos que $\theta_i(Z) < \pi$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. (\Leftarrow) Si Z es tal que $\theta_i(Z) < \pi$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Definimos el conjunto abierto $\bigcap_{i \in \{1, 2, 3, 4\}} \theta_i^{-1}((0, \pi))$, es claro que los conjuntos de la intersección son abiertos ya que son preimagen del intervalo abierto $(0, \pi)$, entonces se tiene que

1. Z pertenece a $\bigcap_{i \in \{1, 2, 3, 4\}} \theta_i^{-1}((0, \pi))$.
2. $\bigcap_{i \in \{1, 2, 3, 4\}} \theta_i^{-1}((0, \pi))$ es un conjunto abierto y por la Observación 2.1.1 este está contenido en $K(4)$.

Por lo tanto Z está en el interior de $K(4)$. □

El siguiente corolario es inmediato si recordamos que todo cuadrilátero tiene suma de ángulos interiores igual a 2π .

Corolario 2.1.1. Si $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in K(4)$ y si Z pertenece a la frontera de cuadriláteros convexos ∂K , entonces se tiene que $\theta_i(Z) = \pi$ para exactamente un subíndice $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

A continuación explicamos un hecho que es útil para calcular el interior del espacio de cuadriláteros convexos, así como el espacio de cuadriláteros simples. Empezamos considerando el subconjunto $\mathcal{U}_{1,2} = \{[0, 1, w, z] \in \mathbb{P}(4) \mid w, z \in \mathbb{C}\}$; aquí hemos fijado los representantes de la forma $[0, 1, w, z]$. Luego notemos que al fijar $w = w_0 \in \mathbb{C}$, el plano determinado por $\{[0, 1, w_0, z] \in \mathbb{P}(4) \mid z \in \mathbb{C}\}$ se divide en varias regiones correspondientes a distintos tipos de cuadriláteros según el valor de $z \in \mathbb{C}$ como se muestra en la Figura 6; por ejemplo, para que $Z = [0, 1, w_0, z]$ sea convexo, z debe pertenecer a la región más oscura. En general para el cuadrilátero $[0, 1, w, z]$ el valor de w restringe los posibles valores de z para que el cuadrilátero resulte ser de algún tipo específico de cuadrilátero.

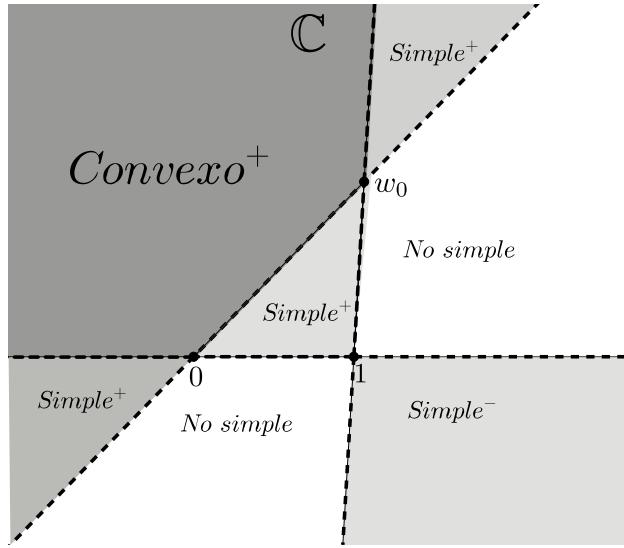


Figura 6: Tipos de cuadriláteros según la región a la que pertenezca z para un w dado. Los superíndices $^+$, $^-$ indican si el cuadrilátero obtenido es positivamente o negativamente orientado.

En este capítulo también se estudian los cuadriláteros simples, en el caso de triángulos, el espacio de triángulos simples; era la unión de dos componentes conexas (los triángulos positivamente orientados y los triángulos negativamente orientados). En el caso de triángulos, el conjunto de simples y el de convexos son el mismo. Para cuadriláteros esto no sucede; aun así, el espacio de cuadriláteros simples resulta ser nuevamente la unión de dos componentes conexas, como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 2.1.2. *El espacio de cuadriláteros simples $S(4)$ es un conjunto abierto con dos componentes conexas.*

Demostración. Si $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in S(4)$, entonces para cada vértice z_i definimos $d_i := \min\{\delta(z_i, \overrightarrow{z_{i-1}z_{i-2}}), \delta(z_i, \overrightarrow{z_{i+1}z_{i+2}})\}$, donde $\delta(z_i, \overrightarrow{z_{i+1}z_{i+2}})$ denota la distancia de z_i a la recta $\overleftrightarrow{z_{i+1}z_{i+2}}$ que pasa por z_{i+1} y z_{i+2} . Luego, definimos $d := \min_{i \in \{1,2,3,4\}} \{d_i\}$ y entonces el polidisco $\Pi_{i=1}^4 B(z_i, \frac{d}{2})$ es una vecindad de Z contenida en $S(4)$, por lo tanto $S(4)$ es un conjunto abierto.

Las dos componentes conexas corresponden a los cuadriláteros simples positivamente orientados S^+ y a los cuadriláteros simples negativamente orientados

S^- , realizando una construcción análoga a la anterior es claro que son abiertos, y también es claro que son conjuntos disjuntos y su unión es $S(4)$. \square

Observación 2.1.2. La función $h : S^+ \rightarrow S^-$ dada por $h(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_4, z_3, z_2, z_1)$ es un homeomorfismo, ya que es equivalente a hacer un cambio en la base de \mathbb{C}^4 .

Con lo anterior estamos listos para avanzar a las siguientes secciones de este capítulo.

2.2. Interior del Espacio de Cuadriláteros Convexos

En esta sección calculamos el interior del espacio de cuadriláteros convexos módulo semejanza orientada; comenzamos estudiando el caso de cuadriláteros convexos positivamente orientados. Por la Observación 2.1.2, el espacio de negativamente orientados es homeomorfo.

Teorema 2.2.1. *El interior del espacio de cuadriláteros convexos positivamente orientados $\mathring{\mathcal{K}}^+ \subset \mathbb{P}(4)$ es difeomeomorfo a \mathbb{R}^4 .*

Demostración. Observe que si $Z = [0, 1, w, z] \in \mathring{\mathcal{K}}(4)^+$, por la Proposición 2.1.1 para que se cumpla la convexidad de Z , el ángulo en su segundo vértice debe ser menor que π , por lo tanto se tiene que $w \in \mathbb{H}$ y si $z = x + iy$, entonces z debe pertenecer a una región específica determinada por $w = a + ib$ a la cual llamamos Δ_w (ver Sección 1.3); explícitamente, esta región es $\Delta_w = \mathbb{H} \cap \{x + iy \in \mathbb{C} \mid bx - ay < 0\} \cap \{x + iy \in \mathbb{C} \mid bx + (1-a)y < b\}$ (Figura 7). La región Δ_w representa todos los cuadriláteros convexos que tienen como tercer vértice a w , por lo tanto notemos que $\mathring{\mathcal{K}}^+ = \bigsqcup_{w \in \mathbb{H}} \{[0, 1, w, z] \mid z \in \Delta_w\}$.

Construiremos un difeomorfismo $F : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathring{\mathcal{K}}(4)^+$ de la forma $F(w, z) = [0, 1, w, f_w(z)]$ donde $f_w : \mathbb{H} \rightarrow \Delta_w$ es un difeomorfismo para cada $w \in \mathbb{H}$. Esto lo hacemos notando que Δ_w es una región triangular (infinita), entonces podemos usar las transformaciones de Schwarz-Christoffel, cuya explicación se encuentra en el Anexo A. Recordemos que dada una región poligonal $\Delta \subset \mathbb{C}$ existe una transformación de Schwarz-Christoffel que mapea \mathbb{H} en Δ en de manera difeomorfa, explícitamente la función que usaremos es

$$f_w(z) = w \int_0^z \zeta^{\alpha-1}(\zeta - 1)^{\beta-1} d\zeta / \int_0^1 \zeta^{\alpha-1}(\zeta - 1)^{\beta-1} d\zeta$$

donde $\alpha\pi$ y $\beta\pi$ son los ángulos interiores de Δ_w como se muestra en la Figura 7.

Aquí hemos fijado 0 y 1 como las preimágenes de 0 y w respectivamente, de esta manera dichas funciones sólo dependerán de w y z ; como se menciona en el Anexo A podemos hacer esta elección a conveniencia. Es claro que F definida de esta manera es una biyección pues para cada w , f_w es una biyección de \mathbb{H} con Δ_w y $\mathring{\mathcal{K}}^+ = \bigsqcup_{w \in \mathbb{H}} \{[0, 1, w, z] \mid z \in \Delta_w\}$.

Usando la carta $(\mathcal{U}_{1,2}, \phi_{1,2})$ podemos ver a los convexos como un subconjunto de \mathbb{C}^2 , puesto que \mathcal{K}^+ está contenido en el dominio $\mathcal{U}_{1,2}$. Notemos que $\phi_{1,2} \circ F$ es una función entre $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ y \mathbb{C}^2 , ya que $\phi_{1,2}$ es un biholomorfismo, por lo tanto para demostrar que F es un difeomorfismo, basta demostrar que $\phi_{1,2} \circ F$ pensada como una función entre subespacios de \mathbb{R}^4 es un difeomorfismo, (*i.e.* $\phi_{1,2} \circ F$ es función de los parámetros a, b, x y y), esto es $\phi_{1,2} \circ F(a, b, x, y) = (a, b, \operatorname{Re}(f_w(z)), \operatorname{Im}(f_w(z)))$. Veamos que dicha función tiene todas sus derivadas parciales y estas son continuas.

Para las primeras dos funciones no hay nada que hacer, ya que resulta obvio que sus derivadas parciales existen. La diferenciabilidad de $\operatorname{Re}(f_w(z))$ y $\operatorname{Im}(f_w(z))$ con respecto de x y y es clara pues es una función diferenciable en el sentido complejo con respecto a z , más aún se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann $\frac{\partial \operatorname{Re}(f_w(z))}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im}(f_w(z))}{\partial y}$ y $\frac{\partial \operatorname{Im}(f_w(z))}{\partial x} = -\frac{\partial \operatorname{Re}(f_w(z))}{\partial y}$.

Ahora resta por mostrar que las derivadas parciales de $\operatorname{Re}(f_w(z))$ y $\operatorname{Im}(f_w(z))$ con respecto a a y b existen y son continuas. Notemos que las funciones de los ángulos α, β están dadas por $\alpha(a, b) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\frac{-a}{b})$ y $\beta(a, b) = \pi - \operatorname{arctg}(\frac{-a}{b}) - \operatorname{arctg}(\frac{1-a}{b})$, éstas son funciones diferenciales con respecto de a y b y, por la regla de la cadena, basta probar la diferenciabilidad con respecto a los parámetros α y β .

Luego, notemos que la integral $\int_0^1 \zeta^{\alpha-1} (\zeta-1)^{\beta-1} d\zeta$ tiene una gran similitud con la función de Euler del primer tipo, $B(\alpha, \beta) := \int_0^1 \zeta^{\alpha-1} (1-\zeta)^{\beta-1} d\zeta$ mejor conocida como la función Beta. La función Beta cumple la relación

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

donde $\Gamma(z) := \int_0^\infty \zeta^{\alpha-1} e^{-\zeta} d\zeta$ es conocida como la función Gamma. La diferenciabilidad de la función Gamma pueden consultarse en la Sección 17.3 de [7], con esto podemos concluir la diferenciabilidad de la integral $\int_0^1 \zeta^{\alpha-1} (\zeta-1)^{\beta-1} d\zeta$ con respecto a α y β .

Falta probar la suavidad de $\int_0^z \zeta^{\alpha-1} (\tau-1)^{\beta-1} d\zeta$ con respecto a α y β . Puesto que consideramos curvas ζ tales que nunca pasan por 1, es fácil ver que la parcial con respecto de β ; $\frac{\partial}{\partial \beta} \zeta^{\alpha-1} (\zeta-1)^{\beta-1} = \zeta^{\alpha-1} (\zeta-1)^{\beta-1} \ln(\zeta-1)$

existe y es continua para todo punto de ζ , luego, por la fórmula de Leibniz (ver Sección 17.1.3 de [7]) es claro que

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^z \zeta^{\alpha-1}(\zeta-1)^{\beta-1} d\zeta = \int_0^z \frac{\partial}{\partial \beta} \zeta^{\alpha-1}(\zeta-1)^{\beta-1} d\zeta$$

Las funciones $\zeta^{\alpha-1}(\zeta-1)^{\beta-1}$ y $\frac{\partial}{\partial \alpha} \zeta^{\alpha-1}(\zeta-1)^{\beta-1}$ son continuas con respecto de α y β . Por lo tanto para probar la diferenciabilidad de $\int_0^z \zeta^{\alpha-1}(\zeta-1)^{\beta-1} d\zeta$ con respecto de α , debemos verificar la convergencia uniforme con respecto al parámetro $\alpha > 0$ de la siguiente integral impropia en un conjunto compacto que contenga a la curva ζ (Sección 17.2.3 de [7])

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^z \zeta^{\alpha-1}(\zeta-1)^{\beta-1} d\zeta = \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^z \zeta^{\alpha-1}(\zeta-1)^{\beta-1} \log \zeta d\zeta. \quad (2.1)$$

En una vecindad lo suficientemente pequeña de 0, tenemos que

$$\left| \int_0^z \zeta^{\alpha-1}(\zeta-1)^{\beta-1} \log \zeta d\zeta \right| \leq \int_0^z |\zeta^{\alpha-1}(\zeta-1)^{\beta-1} \log \zeta| |d\zeta| \leq C \int_0^z \left| \frac{\log \zeta}{\zeta^{1-\alpha}} \right| |d\zeta|$$

donde $|(\zeta-1)^{\beta-1}| \leq C$ para todo punto en la vecindad. Además tenemos que en dicha vecindad se cumple la desigualdad

$$\int_0^z |\zeta^{\alpha-1} \log \zeta| |d\zeta| \leq - \int_0^1 \frac{\log r}{r^{1-\alpha}} dr = - \lim_{\epsilon^+ \rightarrow 0} \left[\frac{r^\alpha}{\alpha^2} (\alpha \log r - 1) \right]_{r=e}^1 = \frac{1}{\alpha^2}$$

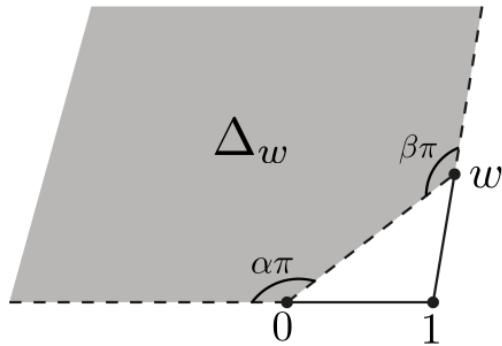
con lo que la convergencia uniforme del parámetro α queda demostrada; por lo tanto concluimos (2.1). De esta manera hemos probado que $\phi_{1,2} \circ F$ tiene todas sus derivadas parciales y estas son continuas; por lo tanto $\phi_{1,2} \circ F$ es diferenciable.

La matriz Jacobiana asociada a $\phi_{1,2} \circ F$ es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial a} \operatorname{Re}(f_w) & \frac{\partial}{\partial b} \operatorname{Re}(f_w) & \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re}(f_w) & \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re}(f_w) \\ \frac{\partial}{\partial a} \operatorname{Im}(f_w) & \frac{\partial}{\partial b} \operatorname{Im}(f_w) & \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im}(f_w) & \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im}(f_w) \end{pmatrix}$$

el determinante de J es $(\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re}(f_w))^2 + (\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im}(f_w))^2 \neq 0$, por lo que usando el Teorema de la Función Inversa [12], podemos concluir $\phi_{1,2} \circ F$ tiene inversa y esta es diferenciable. Entonces, F es un difeomorfismo.

□

Figura 7: La región Δ_w definida por el punto $w \in \mathbb{H}$

2.3. Frontera del Espacio de Cuadriláteros Convexos

Ahora procedemos, a estudiar la frontera de los cuadriláteros convexos. Debido a que \mathbb{C}^4 es un espacio secuencial toda su topología está dada por sucesiones. Dado que hemos dotado al espacio de cuadriláteros con la topología de \mathbb{C}^4 , pensamos a una sucesión de cuadriláteros simplemente como una sucesión de puntos en \mathbb{C}^4 ; de igual manera en $\mathbb{P}(4)$. Por ejemplo la sucesión dada por $Z_n = [0, 1, 1 + \frac{i}{n}, \frac{i}{n}]$ es una sucesión de rectángulos que converge al 4-segmento $[0, 1, 1, 0]$.

Para calcular el espacio correspondiente a la frontera de los convexos $\partial\mathcal{K}$, empezaremos con un lema que nos dice cómo son los cuadriláteros en la frontera de $K(4)$.

Lema 2.3.1. *Existen tres tipos de cuadriláteros en la frontera de los cuadriláteros convexos $\partial K(4) \subset \mathbb{C}^4$:*

- I. *Un cuadrilátero convexo tal que $z_k \in \overline{z_{k-1}z_{k+1}}$ para algún $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.*
- II. *Un cuadrilátero $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ tal que $z_k = z_{k+1}$ para algún $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.*
- III. *Un 4-segmento límite de cuadriláteros convexos.*

Demostración. Si $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ es un cuadrilátero simple, entonces consideramos los siguientes dos casos.

Caso 1. Si las diagonales $\overline{z_1z_3}$ y $\overline{z_2z_4}$ están contenidas en el interior de Z a excepción de sus puntos finales, entonces definimos $r = \min_{k=1,2,3,4}\{\delta(z_k, \overline{z_{k-1}z_{k+1}})\}$, donde $\delta(z_k, \overline{z_{k-1}z_{k+1}})$ denota la distancia del

vértice z_k al segmento de recta $\overline{z_{k-1}z_{k+1}}$, entonces si $r' = \frac{r}{2}$ el polidisco $\prod_{k=1}^4 B_{r'}(z_k)$ es una vecindad abierta del cuadrilátero Z contenida en $K(4)$, y por lo tanto Z no pertenece a la frontera de los convexos.

Caso 2. Si para algún k se tiene que $\overline{z_{k-1}z_{k+1}} \cap (\mathfrak{p}(Z)) = \{z_{k-1}, z_{k+1}\}$ entonces análogamente como en el caso anterior volvemos a definir r' y entonces $\prod_{k=1}^4 B_{r'}(z_k)$ es una vecindad del Z contenida en $\mathbb{C}^4 \setminus K(4)$ y por lo tanto Z no pertenece a la frontera de los convexos.

De los dos casos anteriores concluimos que si $Z \in \partial K(4)$, entonces $\overline{z_{k-1}z_{k+1}} \subset \mathfrak{c}(Z)$ para exactamente un subíndice $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ y por lo tanto es del tipo I, estos son cuadriláteros con ángulo π en el k -ésimo vértice (Corolario 2.1.1). Ahora si Z no es un cuadrilátero simple pero $\mathfrak{c}(Z)$ es una curva de Jordan, entonces Z es del tipo II. Por último si Z no es un cuadrilátero simple ni $\mathfrak{c}(Z)$ es una curva de Jordan entonces Z tiene que ser del tipo III. \square

Notemos que no todos los 4-segmentos son límites de cuadriláteros convexos por ejemplo $[0, 1, \frac{1}{2}, 1]$ es un cuadrilátero que no se puede aproximar por convexos, intuitivamente el tercer vértice tiene un ángulo igual a 2π por lo que no puede ser convexo.

Teorema 2.3.1. *La frontera de cuadriláteros positivamente orientados $\partial\mathcal{K}^+$ es homeomorfa a \mathbb{S}^3 .*

*Demuestra*ón. Comenzamos analizando los cuadriláteros positivamente orientados del tipo I según el lema anterior; estos cuadriláteros tienen ángulo interior igual a π en exactamente un vértice. Para fijar ideas comenzamos analizando el caso en el que el ángulo igual a π está en el segundo vértice, los demás casos serán analógicos. Por sencillez pensamos en los representantes de estos cuadriláteros de la forma $[0, r, 1, z]$ con $r \in (0, 1)$ y $z \in \mathbb{H}$. Para $r \in (0, 1)$ fijo y variando $z \in \mathbb{H}$ obtenemos un conjunto homeomorfo al interior de un triángulo $\overset{\circ}{t}_r$ (homeomorfo a \mathbb{H}), cuya frontera ∂t_r se obtiene al variar $z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Para $z \in \mathbb{R}$ se obtienen cuadriláteros del tipo III y además notemos que el $\lim_{z \rightarrow \infty} [0, r, 1, z] = \lim_{z \rightarrow \infty} [0, \frac{r}{z}, \frac{1}{z}, 1] = [0, 0, 0, 1]$ es otro cuadrilátero del tipo III. Para $r = 0$ o $r = 1$ si variamos $z \in \mathbb{H}$ obtenemos nuevamente el interior de un triángulo que representan cuadriláteros del tipo II, en este caso si variamos $z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ obtenemos cuadriláteros del tipo III, concluimos que para todo $r \in [0, 1]$ si variamos $z \in \overline{\mathbb{H}}$ obtenemos un triángulo (relleno) t_r . Notemos que para todo triángulo t_r , el punto al infinito representa el mismo cuadrilátero $[0, 0, 0, 1]$, entonces al identificar los triángulos t_r por tal punto obtenemos una pirámide T_2 , como se muestra en la Figura 8. De esta manera tenemos que todos los cuadriláteros en la frontera de los convexos de la forma $[0, r, 1, z]$ están en $T_2 = \{[0, r, 1, z] \mid r \in [0, 1], z \in \overline{\mathbb{H}}\}$.

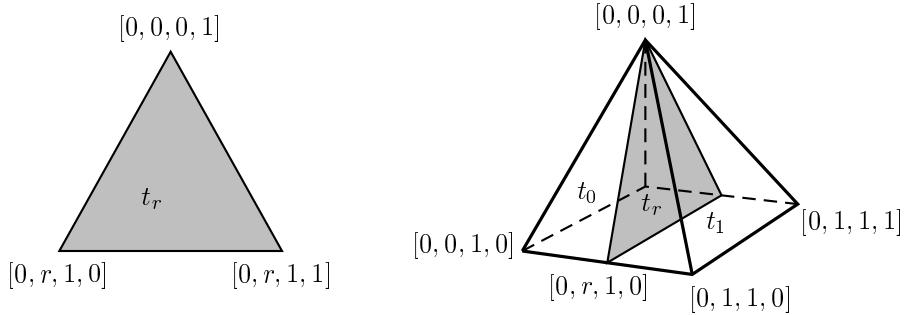


Figura 8: a) t_r correspondiente a cuadriláteros de la forma $[0, r, 1, z]$ obtenido fijando $r \in [0, 1]$ y variando $z \in \overline{\mathbb{H}}$. La arista izquierda representa los cuadriláteros con $z \leq 0$, la arista derecha representa los cuadriláteros con $z \geq 1$ y la arista de abajo representa los cuadriláteros con $z \in [0, 1]$ el vértice de arriba corresponde al cuadrilátero $[0, 0, 0, 1]$ representa al punto $z = \infty$. b) La pirámide T_2 obtenida a partir de la unión de cada t_r para $r \in [0, 1]$ en la cual se han identificado todos los puntos representando $z_4 = \infty$. El interior de las caras t_0 y t_1 representan cuadriláteros del tipo III.

Podemos visualizar la frontera de la pirámide T_2 en el plano si mandamos el vértice correspondiente al cuadrilátero $[0, 0, 0, 1]$ al punto al infinito, dividiendo al plano en varias regiones, correspondientes a las caras de la pirámide como se muestra en la Figura 9, esta figura es clave para entender la construcción anterior. La cara izquierda corresponde a cuando $r = 0$ y contiene todos los cuadriláteros (en $\partial\mathcal{K}^+$) $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ tales que $z_1 = z_2$, mientras que la cara derecha corresponde a $r = 1$, contiene a todos los cuadriláteros tales que $z_2 = z_3$. El resto de las caras corresponden a 4-segmentos convexos, note que la base de la pirámide T_2 correspondiente al conjunto $\{[0, r, 1, z] \in \mathbb{P}(4) \mid r \in [0, 1], z \in [0, 1]\}$, se divide en dos triángulos por la línea $r = z$, dichos triángulos corresponden a 4-segmentos esencialmente diferentes.

Repetimos la construcción anterior para los casos en los que el ángulo π está en los otros tres vértices y así obtenemos otras tres pirámides $T_1 = \{[r, 1, z, 0] \mid 0 \leq r \leq 1, z \in \overline{\mathbb{H}}\}$, $T_3 = \{[z, 0, r, 1] \mid 0 \leq r \leq 1, z \in \overline{\mathbb{H}}\}$ y $T_4 = \{[1, z, 0, r] \mid 0 \leq r \leq 1, z \in \overline{\mathbb{H}}\}$ como se muestra en la Figura 10. En tales pirámides están representados todos los cuadriláteros de la frontera (*i.e.* $\partial\mathcal{K}^+ = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$). Por como se construyeron es fácil ver que en el interior de dichas pirámides no se identifican puntos; sin embargo, entre las fronteras de estas pirámides, existen puntos que representan el mismo cuadrilátero. Por ejemplo el cuadrilátero $[0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}]$ de la frontera de T_2 se identifica con $[-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1]$ de la frontera de T_3 , por lo tanto para obtener $\partial\mathcal{K}^+$ sólo debemos hacer un cociente identificando estos elementos. A continuación explicamos tales identificaciones.

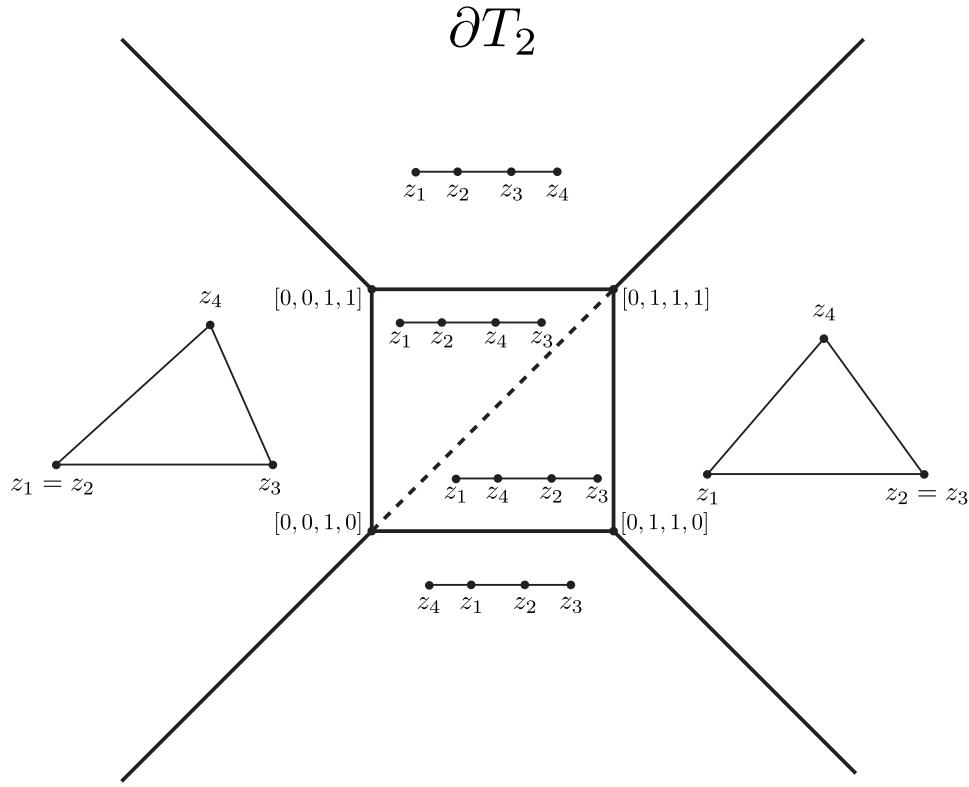


Figura 9: La imagen corresponde a la frontera de la pirámide T_2 mandando el vértice $[0, 0, 0, 1]$ a infinito. La línea punteada corresponde a $r = z$.

La base de T_1 es el conjunto $\{[r, 1, z, 0] \in \mathbb{P}(4) \mid r \in [0, 1], z \in [0, 1]\}$ y la base de T_3 es el conjunto $\{[z, 0, r, 1] \in \mathbb{P}(4) \mid r \in [0, 1], z \in [0, 1]\}$, notemos que $[r, 1, z, 0] = [-r, -1, -z, 0] = [1 - r, 0, 1 - z, 1] = [z', 0, r', 1]$, por lo tanto dichas bases se identifican y así obtenemos un octaedro relleno al cual denotaremos $O_{1,3}$. Análogamente las bases de T_2 y T_4 se identifican y obtenemos otro octaedro relleno $O_{2,4}$ (Figura 11).

El último paso es ver cómo los octaedros $O_{1,3}$ y $O_{2,4}$ se identifican por sus fronteras, estas identificaciones se explican a continuación. En lo que sigue, denotaremos con z_i al i -ésimo vértice de los cuadriláteros, para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

- La cara $\{[0, r, 1, z] \in \mathbb{P}(4) \mid r = 0, z \in \overline{\mathbb{H}}\}$ de T_2 se identifica con la cara $\{[r, 1, z, 0] \in \mathbb{P}(4) \mid r = 1, z \in \mathbb{H}\}$ de T_1 . Estas dos caras se identifican ya que corresponden a todos los cuadriláteros tales que $z_1 = z_2$.
- La cara $\{[0, r, 1, z] \in \mathbb{P}(4) \mid r = 1, z \in \overline{\mathbb{H}}\}$ de T_2 se identifica con la cara

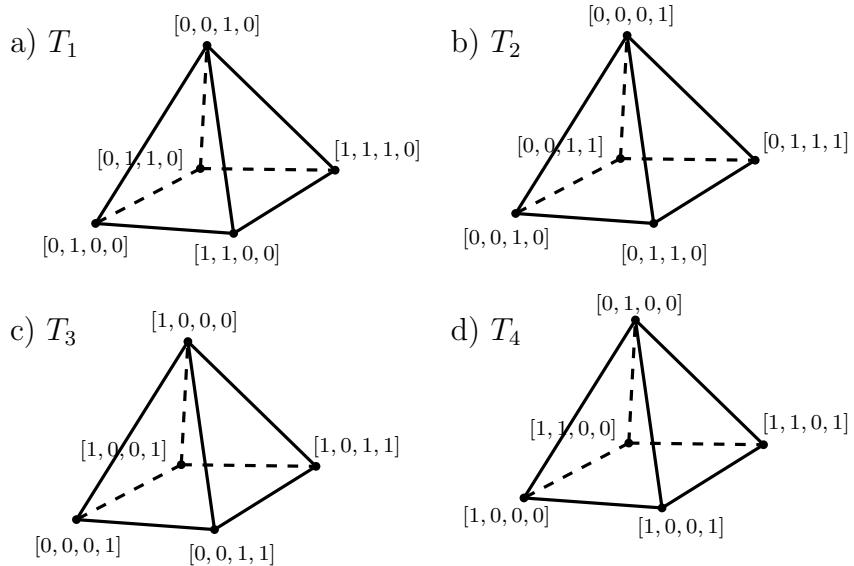


Figura 10: Pirámides correspondientes a cada una de las construcciones.

$\{[z, 0, r, 1] \in \mathbb{P}(4) \mid r = 0, z \in \overline{\mathbb{H}}\}$ de T_3 . Estas dos caras se identifican ya que ambas caras corresponden a todos los cuadriláteros tales que $z_2 = z_3$.

- La cara $\{[0, r, 1, z] \in \mathbb{P}(4) \mid 0 \leq r \leq 1, z \leq 0\}$ de T_2 se identifica con la cara $\{[r, 1, z, 0] \in \mathbb{P}(4) \mid 0 \leq r \leq 1, z \geq 1\}$ de T_1 . Estas dos caras corresponden a los 4-segmentos tales que $z_1 \in \overline{z_4 z_2}, z_2 \in \overline{z_1 z_3}$ y $z_1, z_2 \in \overline{z_4 z_3}$.
- La cara $\{[0, r, 1, z] \in \mathbb{P}(4) \mid 0 \leq r \leq 1, z \geq 1\}$ de T_2 se identifica con la cara $\{[z, 0, r, 1] \in \mathbb{P}(4) \mid 0 \leq r \leq 1, z \leq 0\}$ de T_3 . Estas dos caras corresponden a los 4-segmentos tales que $z_2 \in \overline{z_1 z_3}, z_3 \in \overline{z_2 z_4}$ y $z_2, z_3 \in \overline{z_1 z_4}$.
- La cara $\{[1, z, 0, r] \in \mathbb{P}(4) \mid r = 0, z \in \mathbb{H}\}$ de T_4 se identifica con la cara $\{[z, 0, r, 1] \in \mathbb{P}(4) \mid z = 1, z \in \overline{\mathbb{H}}\}$ de T_3 . Ambas caras corresponden a los cuadriláteros tales que $z_3 = z_4$, por lo tanto se identifican.
- La cara $\{[1, z, 0, r] \in \mathbb{P}(4) \mid r = 1, z \in \overline{\mathbb{H}}\}$ de T_4 se identifica con la cara $\{[r, 1, z, 0] \in \mathbb{P}(4) \mid r = 0, z \in \overline{\mathbb{H}}\}$ de T_1 . Ambas caras corresponden a los cuadriláteros tales que $z_1 = z_4$, por lo tanto se identifican.
- La cara $\{[1, z, 0, r] \in \mathbb{P}(4) \mid 0 \leq r \leq 1, z \leq 0\}$ de T_4 se identifica con la cara $\{[z, 0, r, 1] \in \mathbb{P}(4) \mid 0 \leq r \leq 1, z \geq 1\}$ de T_3 . Ambas caras

corresponden a 4-segmentos tales que $z_3 \in \overline{z_2 z_4}$, $z_4 \in \overline{z_3 z_1}$ y $z_3, z_4 \in \overline{z_2 z_1}$, por lo tanto deben identificarse.

- La cara $\{[1, z, 0, r] \in \mathbb{P}(4) \mid 0 \leq r \leq 1, z \geq 1\}$ de T_4 se identifica con la cara $\{[r, 1, z, 0] \in \mathbb{P}(4) \mid 0 \leq r \leq 1, z \leq 0\}$ de T_1 . Ambas caras corresponden a 4-segmentos tales que $z_4 \in \overline{z_3 z_1}$, $z_1 \in \overline{z_4 z_2}$ y $z_4, z_1 \in \overline{z_3 z_2}$, por lo tanto deben identificarse.

Para que el pegado de los octaedros corresponda con un homeomorfismo basta ver que triángulos del octaedro $O_{1,3}$, se identifican con triángulos del octaedro $O_{2,4}$ y, que se respeta la adyacencia de caras; es decir, triángulos que comparten una arista en alguno de los octaedros se pegan con triángulos que comparten una arista en el otro octaedro, tales identificaciones se ilustran en la Figura 11, en donde las caras del mismo color se identifican. Con esto podemos concluir que $\partial \mathcal{K}^+$ es homeomorfo a \mathbb{S}^3 .

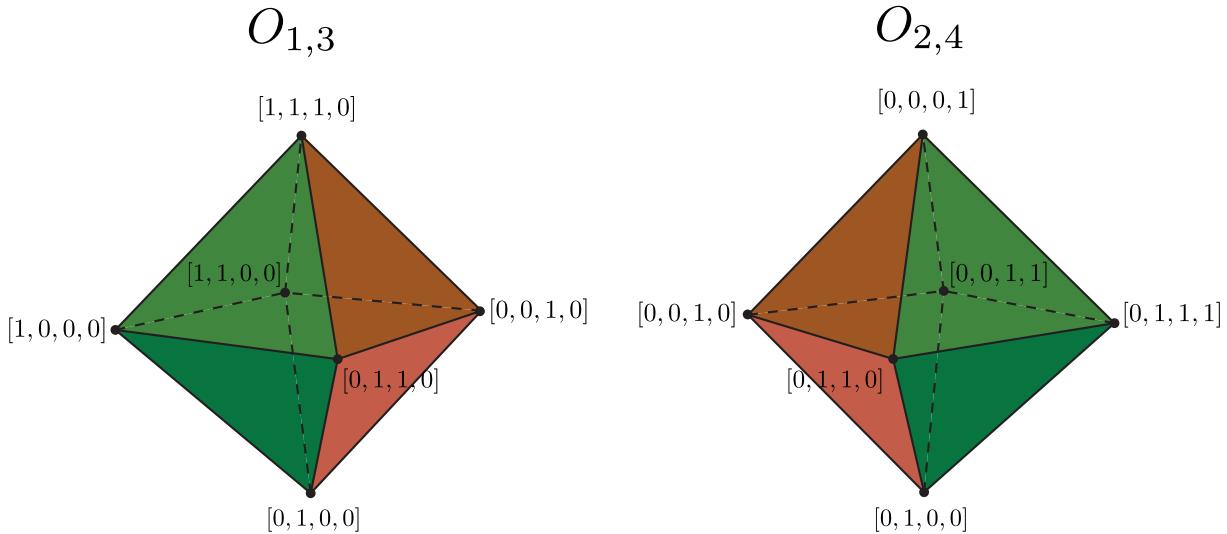


Figura 11: Los octaedros $O_{1,3}$ y $O_{2,4}$ se identifican con un homeomorfismo.

□

En la sección anterior probamos que el interior del espacio de cuadriláteros positivamente orientados es difeomorfo a \mathbb{R}^4 , aquí probamos que la frontera de tal espacio es homeomorfa a \mathbb{S}^3 . La Figura 12 muestra que las vecindades de los puntos en la frontera de \mathcal{K}^+ son homeomorfas a $\mathbb{H}^4 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in$

$\mathbb{R}^4 \mid x_4 \geq 0\}$, podemos concluir que la cerradura del espacio de cuadriláteros convexos $\overline{\mathcal{K}}^+$ es una variedad con frontera. De los hechos anteriores concluimos que $\overline{\mathcal{K}}$ es homeomorfa a la bola cerrada $\mathbb{D}^4 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| \leq 1\}$, la demostración de este hecho es bastante técnica y se sale del objetivo de esta tesis, el lector podrá verificarla viendo la nota 371 de [3].

Nuestro objetivo es calcular la cerradura de todos los cuadriláteros convexos, no sólo de los positivamente orientados. Ya estamos muy cerca de este resultado, consecuencia de los dos hechos siguientes. El primero de ellos nos dice que los 4-segmentos convexos (4-segmentos límites de cuadriláteros convexos) son los únicos cuadriláteros que están en la intersección de la cerradura del espacio de cuadriláteros positivamente orientados y la cerradura del espacio de cuadriláteros negativamente orientados. Al espacio de 4-segmentos convexos como subconjunto de \mathbb{C}^4 lo denotaremos con Q y denotamos con \mathcal{Q} a la proyección $\eta(Q) \subset \mathbb{P}(4)$. El segundo resultado nos muestra cual es el espacio asociado a \mathcal{Q} .

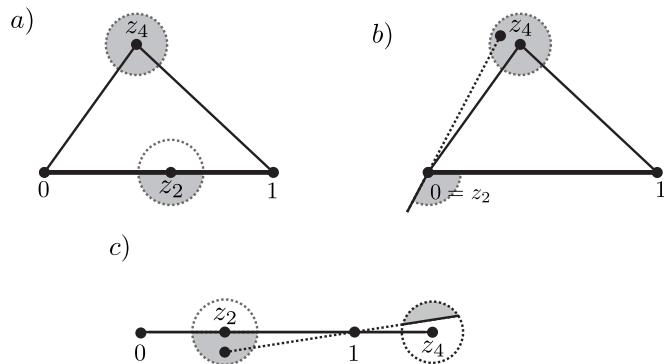


Figura 12: Los distintos tipos de vecindades de cuadriláteros en la frontera de los convexos. Note que dichas vecindades se han tomado en el cociente, por lo que se han fijado dos puntos.

Definición 2.3.1. Definimos la función de *área con signo* como la función $\mathcal{A} : S(4) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{A}(Z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \det \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z_k) & \operatorname{Re}(z_{k+1}) \\ \operatorname{Im}(z_k) & \operatorname{Im}(z_{k+1}) \end{pmatrix}$$

para cada $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in S(4)$.

Intuitivamente la función de área con signo, asigna a cada cuadrilátero el área que éste encierra en el plano, el signo varía dependiendo si el cuadrilátero está positiva o negativamente orientado.

Proposición 2.3.1. *La intersección $\partial K^+ \cap \partial K^-$ es igual al espacio de 4-segmentos convexos \mathcal{Q} .*

Demostración. Observe que bajo el homeomorfismo $h(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_4, z_3, z_2, z_1)$ que relaciona los cuadriláteros positivamente orientados con los cuadriláteros negativamente orientados, la función de área \mathcal{A} conserva su magnitud pero cambia su signo, pues recordemos que al intercambiar un renglón o una columna en una matriz corresponde cambiar de signo el valor de su determinante. Por otro lado, notemos que la función de área es una función continua, puesto que el determinante es continuo; luego, si $Z \in \partial K^+ \cap \partial K^-$, entonces tenemos una sucesión de cuadriláteros positivamente orientados y otra de negativamente orientados que convergen a Z , podemos concluir que Z debe tener área cero pues lo hemos aproximado por cuadriláteros con área positiva y negativa; de esta manera obtenemos que los únicos cuadriláteros en la intersección son 4-segmentos convexos. \square

Corolario 2.3.1. *El espacio de 4-segmentos convexos \mathcal{Q} es una banda de Möbius.*

Demostración. Los 4-segmentos convexos corresponden a las caras marcadas en la Figura 13, las cuales se identifican formando una banda de Möbius. \square

El siguiente corolario es un resultado directo del corolario anterior.

Corolario 2.3.2. *La cerradura del espacio de cuadriláteros convexos $\overline{\mathcal{K}} = \overline{\mathcal{K}^+} \cup \overline{\mathcal{K}^-}$ es homeomorfa a dos bolas cerradas \mathbb{D}^4 , identificadas por una banda de Möbius en la frontera de las bolas.*

Corolario 2.3.3. *El espacio $\overline{K^+} = \eta^{-1}(\overline{\mathcal{K}^+})$ es homeomorfo a $\mathbb{D}^4 \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.*

Demostración. Se sigue de que η es un fibrado sobre $\mathbb{P}(4)$ y del hecho \mathbb{D}^4 es contraíble, ya que cualquier fibrado sobre un espacio contraíble es trivial (esto es un corolario del Teorema 9.9 p. 52 de [11]). \square

En el siguiente capítulo usaremos la construcción de la frontera de los convexos para ayudarnos a calcular la frontera de otros subespacios de cuadriláteros convexos.

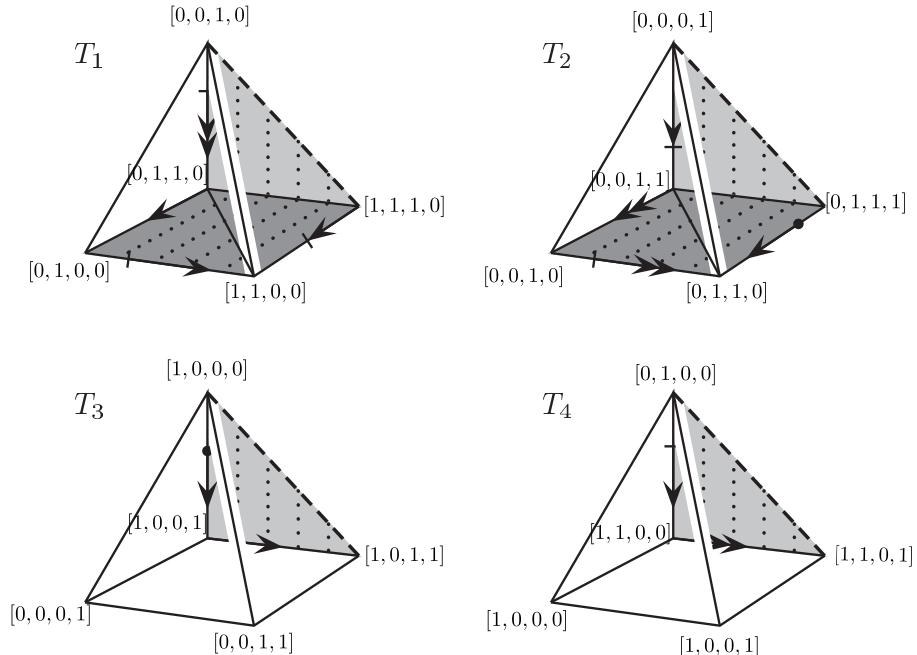


Figura 13: Se muestran los triángulos correspondientes a 4-segmentos convexos. Una banda de Möbius se obtiene haciendo las identificaciones marcadas.

2.4. Espacio de Cuadriláteros Simples

Esta sección está dedicada al cálculo del espacio de cuadriláteros simples, como mostramos antes el espacio de cuadriláteros simples es la unión de dos componentes conexas homeomorfas correspondientes a los cuadriláteros positivamente y negativamente orientados, aquí estudiaremos el caso de positivamente orientados.

Teorema 2.4.1. *El espacio de cuadriláteros simples positivamente orientados \mathcal{S}^+ , es homeomorfo a \mathbb{R}^4 .*

Demostración. Consideramos nuevamente el cuadrilátero $Z = [0, 1, w, z]$, para que Z sea simple una condición necesaria es que $w \notin (-\infty, 1]$, de lo contrario $c(Z)$ no sería curva de Jordan o no tendría todos sus vértices distintos. Luego, si $w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$, entonces $z = x + iy$ debe pertenecer a una región específica Δ_w determinada por $w = a + ib$ de la siguiente manera

- I Si $b < 0$, entonces $\Delta_w = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid bx + (1 - a)y < b \wedge y > 0\}$
- II Si $b = 0$, entonces $\Delta_w = \mathbb{H}$

III Si $b > 0$, entonces $\Delta_w = \{x+iy \in \mathbb{C} \mid bx-ay < 0\} \cup \text{int}(0, 1, w) \cup \overline{0w} \setminus \{0, w\}$

Notemos que $\mathcal{S}^+ = \bigsqcup_{w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]} \{[0, 1, w, z] \mid z \in \Delta_w\}$. Como hicimos antes en la demostración del Teorema 2.3.1 construimos un homeomorfismo entre $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1] \times \mathbb{H}$ y \mathcal{S} de la forma $F(w, z) = [0, 1, w, f_w(z)]$ donde $f_w : \mathbb{H} \rightarrow \Delta_w$ es un homeomorfismo para cada $w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$. Estas funciones las definimos dependiendo de w de la siguiente manera:

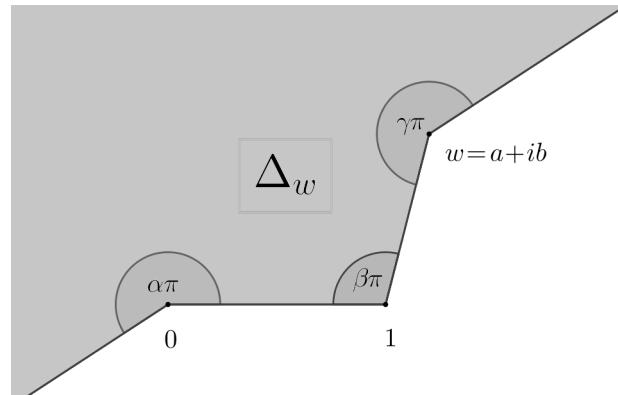
- I Si $b < 0$, entonces $f_w(z) := (z - 1)^{\frac{1}{\theta}} + 1$ donde $\theta\pi$ es el ángulo entre la recta real y la recta $bx + (1 - ay) = b$; y escogemos la rama de $(z - 1)^{\frac{1}{\theta}}$ tal que $-\pi < \arg(z - 1) < \pi$
- II Si $b = 0$, entonces $f_w(z) := id(z)$ es la identidad.
- III Si $b > 0$, entonces $f_w(z)$ es una transformación de Schwarz-Christoffel definida como sigue

$$f_w(z) = \int_0^z \zeta^{\alpha-1}(\zeta - 1)^{\beta-1}(\zeta - \tau)^{(\gamma-1)} d\zeta / \int_0^1 \zeta^{\alpha-1}(\zeta - 1)^{\beta-1}(\zeta - \tau)^{(\gamma-1)} d\zeta$$

donde $\tau > 1$ y $\alpha\pi, \beta\pi$ y $\gamma\pi$ son los ángulos interiores de Δ_w Figura 14.

Haremos ver que la función $F(w, z)$ definida con ayuda de las funciones $f_w(z)$ es un homeomorfismo. De la definición de F y las construcciones de $f_w(z)$ es claro que F es una biyección. Ahora para ver que F es continua debemos verificar que es f_w es continua respecto de w , basta observar que en el primer y tercer caso cuando $b \rightarrow 0$ la función $f_w(z)$ converge puntualmente a la función $id(z)$, con esto concluimos que F es continua.

Ahora falta ver que F^{-1} también es continua. Sea $U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1] \times \mathbb{H}$ y supongamos que F^{-1} no es continua, entonces existe Z y una sucesión $\{Z_n\} \subset \mathcal{S}^+$ tal que Z_n converge a Z pero que $F^{-1}(Z_n)$ no converge a $p = F^{-1}(Z) = (w, z)$, entonces existe una subsucesión $\{Z_{n_k}\} \subset \{Z_n\}$ que converge a p y una bola abierta $B_\rho(p)$ alrededor de p tal que $F^{-1}(\{Z_{n_k}\}) \subset U \setminus \overline{B_\rho(p)}$. Notemos ahora que $\partial B_\rho(p) \cong \mathbb{S}^3$ es un compacto, F es una biyección continua y \mathcal{S}^+ es Hausdorff, entonces $F|_{\partial B_\rho(p)}$ es un homeomorfismo en su imagen y $F(\partial B_\rho(p))$ es un \mathbb{S}^3 , que por el Teorema de Jordan (ver Sec. 2.2.B [9]) separa a \mathbb{C}^2 en dos componentes conexas, y por lo tanto también a U . Además, como $\{Z_{n_k}\} \subset U \setminus \overline{B_\rho(p)}$ converge a $Z = F(p)$ (no existe un abierto que separe a Z de la sucesión), entonces $F(U \setminus \overline{B_\rho(p)})$ y $F(\partial B_\rho(p))$ pertenecen a la misma componente conexa, esto es una contradicción pues $F|_{\{w\} \times \mathbb{H}} \rightarrow \Delta_w$ es una biyección continua. Concluimos que F^{-1} es continua. \square

Figura 14: La región Δ_w definida para el caso $b > 0$.

En este caso no calculamos la frontera de los cuadriláteros simples, debido a que su cálculo es un poco largo y complicado, aparte que no aporta mucho para el desarrollo de esta tesis, como sí lo hace la frontera de los convexos. El lector interesado podrá ver este resultado en [5].

Capítulo 3

Espacios de Cuadriláteros Especiales

En este capítulo se estudian los subespacios de $\mathbb{P}(4)$ correspondientes a los diferentes tipos de cuadriláteros: rectángulos, rombos, paralelogramos, deltoídes, cuadriláteros cíclicos y trapecios. Además se explican las relaciones entre estos espacios. Empezamos con los tipos de cuadriláteros más sencillos hasta llegar al espacio de los trapecios.

Cabe mencionar que la mayoría de los resultados que demostramos aquí, son nuevos y conforman la parte original de esta tesis.

3.1. Rectángulos, Rombos y Paralelogramos

Para calcular los espacios de rectángulos, rombos y paralelogramos trabajamos con el conjunto $\mathcal{U}_{1,2} = \{[0, 1, w, z] \in \mathbb{P}(4) \mid w, z \in \mathbb{C}\}$, fijando los representantes $[0, 1, w, z]$ ya que en este conjunto en particular resulta sencillo visualizar estos espacios.

Proposición 3.1.1. *La cerradura del espacio de rectángulos $\overline{\mathfrak{Re}}$ es homeomorfa a \mathbb{S}^1 .*

Demostración. Si $Z = [0, 1, w, z]$ es un rectángulo, entonces Z tiene ángulo interior igual a $\frac{\pi}{2}$ en el segundo vértice, por lo tanto w pertenece a las semirrectas $L^+ = \{w \in \mathbb{C} \mid Re(w) = 1, Im(w) < 0\}$ y $L^- = \{w \in \mathbb{C} \mid Re(w) = 1, Im(w) > 0\}$; además, se tiene que $z = w - 1$ y, el rectángulo queda completamente determinado por $w \in L^+ \cup L^-$, es decir, el espacio de rectángulos es

$$\mathfrak{Re} = \{[0, 1, w, w - 1] \in \mathbb{P}(4) \mid w \in L^+\} \cup \{[0, 1, w, w - 1] \in \mathbb{P}(4) \mid w \in L^-\}$$

notemos que si $w \in L^+$ se obtiene un rectángulo positivamente orientado, mientras que si $w \in L^-$ se obtiene un rectángulo negativamente orientado.

La frontera de \mathfrak{Re} se obtiene cuando w tiende a 1 e ∞ sobre $L^+ \cup L^-$, es claro que cuando w tiende a 1 obtenemos el cuadrilátero $[0, 1, 1, 0]$. Para calcular el límite cuando w tiende a ∞ realizamos un cambio en los representantes, con una traslación por -1 y dividiendo por $w - 1$ (homotecia), se tiene que $[0, 1, w, w - 1] = [-1, 0, w - 1, w - 2] = [\frac{1}{1-w}, 0, 1, \frac{w-2}{w-1}]$, en este último representante es claro que al tender w a ∞ se obtiene el cuadrilátero $[0, 0, 1, 1]$, entonces $\overline{\mathfrak{Re}}$ se obtiene de pegar L^+ y L^- por 1 e ∞ , con lo que se concluye la proposición. \square

Para el espacio de rombos \mathfrak{Ro} tenemos un resultado similar al de la proposición anterior.

Proposición 3.1.2. *La cerradura del espacio de rombos $\overline{\mathfrak{Ro}}$, es homeomorfa a \mathbb{S}^1 .*

Demostración. Si $Z = [0, 1, w, z]$ es un rombo, entonces todos sus lados tienen longitud 1 y por lo tanto $|w - 1| = 1$. Además, se cumple que $z = w - 1$; luego, el rombo queda determinado por w y la cerradura del espacio de rombos es

$$\overline{\mathfrak{Ro}} = \{[0, 1, w, w - 1] \in \mathbb{P}(4) \mid |w - 1| = 1\}.$$

Notemos que cuando w pertenece a la semicircunferencia en el semiplano superior se obtienen rombos positivamente orientados y cuando w pertenece al semiplano inferior se obtienen rombos negativamente orientados, también notemos que los cuadriláteros correspondientes a $w = 0$ o $w = 2$ son *4-segmentos* y constituyen la frontera de los rombos.

Es claro que el conjunto anterior es homeomorfo a \mathbb{S}^1 por lo tanto proposición se concluye inmediatamente. \square

Observación 3.1.1. Los únicos cuadriláteros en $\overline{\mathfrak{Re}} \cap \overline{\mathfrak{Ro}}$ son los *cuadrados* $R_4^+ = [0, 1, 1+i, +]$, $R_4^- = [0, 1, 1-i, -i]$.

Teorema 3.1.1. *La cerradura del espacio de paralelogramos positivamente orientados $\overline{\mathcal{P}^+}$ es homeomorfa a \mathbb{D}^2 .*

Demostración. Si $Z = [0, 1, w, z]$ es un paralelogramo positivamente orientado, entonces $w \in \mathbb{H}$, además se debe cumplir que $z = w - 1$, por lo tanto el paralelogramo queda determinado por w , luego, el espacio de paralelogramos positivamente orientados es

$$\mathcal{P}^+ = \{[0, 1, w, w - 1] \in \mathbb{P}(4) \mid w \in \mathbb{H}\}.$$

De aquí es claro que \mathcal{P}^+ es homeomorfo a \mathbb{H} , a continuación procedemos a calcular su frontera. La frontera de este espacio corresponde a $w \in \mathbb{R}$ o cuando w tiende a ∞ , obteniendo 4-segmentos de la forma $[0, 1, r, r - 1]$ con r real, y como se ve en la demostración de la Proposición 3.1.1 al punto al infinito le corresponde el cuadrilátero $[0, 0, 1, 1]$. Por lo tanto tenemos que

$$\overline{\mathcal{P}^+} = \{[0, 1, w, w - 1] \in \mathbb{P}(4) \mid w \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}\} \cup \{[0, 0, 1, 1]\}.$$

Del hecho de que $\overline{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{D}^2$ la proposición queda demostrada. \square

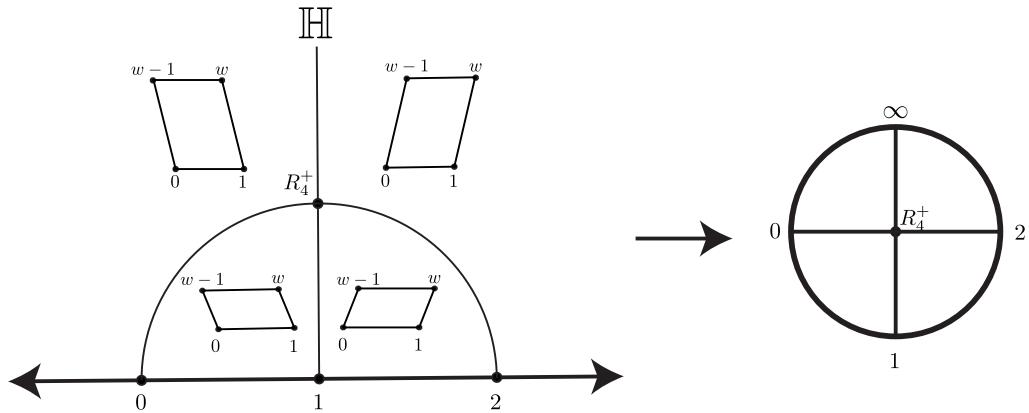


Figura 15: El semiplano superior \mathbb{H} es dividido en 4 componentes por $\Re e^+$ y $\Re o^+$. Se muestran ejemplos representativos de los cuadriláteros de cada región.

Corolario 3.1.1. *La cerradura del espacio de paralelogramos $\overline{\mathcal{P}} \subset \mathbb{P}(4)$ es un espacio homeomorfo a \mathbb{S}^2 . Además, las circunferencias correspondientes a $\Re e$ y $\Re o$ dividen a \mathbb{S}^2 en 4 componentes conexas.*

Demostración. Notemos primero que $\overline{\mathcal{P}^+}$ es dividido por $\overline{\Re e^+}$ y $\overline{\Re o^+}$ en 4 componentes (Figura 15), de manera similar $\overline{\mathcal{P}^-}$ es dividido por $\overline{\Re e^-}$ y $\overline{\Re o^-}$ en 4 componentes. Al realizar la unión $\overline{\mathcal{P}^+} \cup \overline{\mathcal{P}^-}$ obtenemos un espacio homeomorfo a \mathbb{S}^2 ya que es equivalente a unir dos copias de \mathbb{D}^2 e identificarlas por su frontera (4-segmentos). Además, $\overline{\Re e^+}$ se identifica con $\overline{\Re e^-}$ por su frontera formando un \mathbb{S}^1 , de la misma forma $\overline{\Re o^+}$ y $\overline{\Re o^-}$ se identifican formando otro \mathbb{S}^1 . \square

3.2. Deltoides

Recordemos que un deltoide es un cuadrilátero con dos pares disjuntos de aristas adyacentes con la misma longitud, por lo tanto si $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$ es un deltoide, tenemos los siguientes 2 casos.

$$\text{I } |\overline{z_4z_1}| = |\overline{z_1z_2}| \text{ y } |\overline{z_2z_3}| = |\overline{z_3z_4}| \text{ o}$$

$$\text{II } |\overline{z_4z_1}| = |\overline{z_3z_4}| \text{ y } |\overline{z_1z_2}| = |\overline{z_2z_3}|.$$

Por la Observación 2.1.2 basta calcular la topología del espacio de deltoides positivamente orientados, ya que el espacio de negativamente orientados será homeomorfo a este. Al espacio de deltoides positivamente orientados (en el cociente) correspondientes al caso I lo denotamos con \mathcal{D}_1^+ , mientras que al del caso II lo denotamos con \mathcal{D}_2^+ .

Observación 3.2.1. *La función $\delta : \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathcal{D}_1$ tal que $\delta[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z_2, z_3, z_4, z_1]$ es un homeomorfismo.*

Teorema 3.2.1. *El espacio de deltoides positivamente orientados \mathcal{D}^+ es homeomorfo a la unión dos copias de \mathbb{R}^2 , tales que se intersecan en una copia de \mathbb{R} correspondiente al espacio de rombos \mathfrak{Ro}^+ que divide a cada una en 2 componentes conexas.*

Demostración. Probamos primero que el espacio de deltoides positivamente orientados de primer caso \mathcal{D}_1^+ , es homeomorfo a \mathbb{R}^2 , por la Observación 3.2.1 el espacio \mathcal{D}_2^+ será homeomorfo.

Consideramos $Z = [0, 1, w, z] \in \mathbb{P}(4)$, para que Z pertenezca a \mathcal{D}_1^+ , es necesario que $w \in \mathbb{H}$ y una vez elegido w , $z = e^{2i\text{Arg}(w)}$ es el único $z \in \mathbb{C}$ que hace que Z sea un deltoide del primer caso, z es de hecho la imagen de 1 bajo la reflexión por la recta determinada por 0 y w . Por lo tanto tenemos que

$$\mathcal{D}_1^+ = \{[0, 1, w, e^{2i\text{Arg}(w)}] \in \mathbb{P}(4) \mid w \in \mathbb{H}\}.$$

De lo anterior es claro que $\mathcal{D}_1^+ \cong \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^2$. Con argumentos análogos y considerando $Z = [z, 0, 1, w]$ obtenemos que

$$\mathcal{D}_2^+ = \{[e^{2i\text{Arg}(w)}, 0, 1, w] \in \mathbb{P}(4) \mid w \in \mathbb{H}\}$$

de nuevo es claro que $\mathcal{D}_2^+ \cong \mathbb{R}^2$. Además es claro que Z es un cuadrilátero positivamente orientado en la intersección $\mathcal{D}_1^+ \cap \mathcal{D}_2^+$ si y sólo si tiene todas

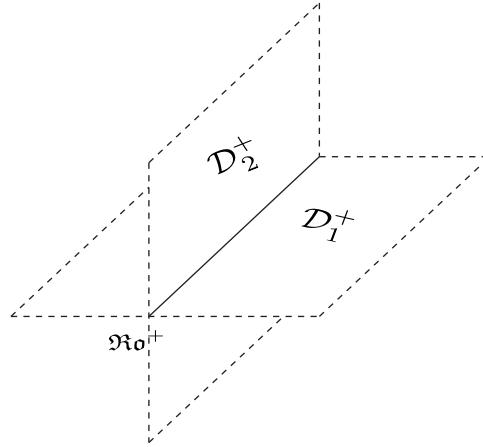


Figura 16: Bosquejo del espacio de deltoides positivamente orientados \mathcal{D}^+ . La línea continua representa la intersección de los espacios \mathcal{D}_1^+ y \mathcal{D}_2^+ , es decir, el espacio de rombos \mathfrak{Ro}^+ .

sus aristas de la misma longitud, por lo tanto $\mathcal{D}_1^+ \cap \mathcal{D}_2^+ = \mathfrak{Ro}^+$ y por la sección anterior sabemos que el espacio de rombos positivamente orientados es homeomorfo a \mathbb{R} , con esto concluimos la demostración (Figura 16). \square

Proposición 3.2.1. *La frontera de deltoides del primer tipo $\partial\mathcal{D}_1^+$ es homeomorfa a dos copias de \mathbb{S}^1 identificadas por un punto.*

Demostración. En la proposición anterior se mostró que si $Z = [0, 1, w, z] \in \mathcal{D}_1^+$, de esta manera Z queda completamente determinado por $w \in \mathbb{H}$ ya que z es la reflexión por la única recta que pasa por 0 y w , es decir, $z = e^{2i\text{Arg}(w)}$. Es intuitivamente obvio que los puntos de \mathcal{D}_1^+ corresponden a cuando hacemos tender w hacia la frontera de \mathbb{H} , es decir, a los puntos $w \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como hemos comentado antes, la función Arg es una función continua, por lo que cuando w tiende a algún punto de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $z = e^{2i\text{Arg}(z)}$ tiende a 1, para calcular el límite cuando $w \rightarrow \infty$ simplemente dividimos por w esto equivale a realizar una homotecia, *i.e.*, calculamos el límite de $[0, \frac{1}{w}, 1, \frac{e^{2i\text{Arg}(z)}}{w}]$ cuando w tiende a ∞ , este límite corresponde al *4-segmento* $[0, 0, 1, 0]$. Sin embargo la función Arg no está definida en $w = 0$ y también notemos que existen muchas rectas que pase por 0, de hecho tenemos una recta por cada punto de \mathbb{RP}^1 ,

la consecuencia de esto es que z puede ser cualquier punto de \mathbb{S}^1 obteniendo cuadriláteros de la forma $[0, 1, 0, e^{i\theta}]$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, una forma de ver esto es aproximar w a 0 por todos los diferentes rayos que parten del origen, con esto concluimos que

$$\partial\mathcal{D}_1^+ = \{[0, 1, w, 1] \in \mathbb{P}(4) \mid w \in \mathbb{R}\} \cup \{[0, 0, 1, 0]\} \cup \{[0, 1, 0, z] \in \mathbb{P}(4) \mid z \in \mathbb{S}^1\}.$$

Notemos que el cuadrilátero $[0, 1, 0, 1]$ está en ambos lados de la unión y también que $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^1$. Concluimos que $\partial\mathcal{D}_1^+$ es homeomorfo a dos copias de \mathbb{S}^1 que se intersecan en un punto. \square

El espacio de deltoides \mathcal{D}_1^+ es un espacio un poco extraño, ya que \mathcal{D}_1^+ es homeomorfo a $\mathbb{H} \cong \mathbb{B}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ y su frontera de alguna forma es homeomorfa a la figura de un infinito ∞ . Un resultado análogo se tiene para \mathcal{D}_2^+ .

3.3. Cuadriláteros Cílicos

En esta sección calculamos la cerradura del espacio de cuadriláteros cílicos módulo semejanza. Aquí usamos fuertemente la construcción dada en el capítulo anterior para el cálculo de la frontera del espacio de cuadriláteros convexos.

Lema 3.3.1. *Si $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ es un cuadrilátero simple y θ_i es el ángulo interno en el vértice z_i , entonces Z es cíclico si y sólo si $\theta_i + \theta_{i+2} = \pi$ para $i = 1, 2$.*

Demuestra. Supongamos que Z es cíclico y tracemos la circunferencia en \mathbb{C} que pasa por sus 4 vértices. Recordemos que un ángulo inscrito en la circunferencia tiene amplitud igual a la mitad del arco que subtien. Tenemos que entre θ_i y θ_{i+2} se subtien una circunferencia completa (2π), por lo tanto $\theta_i + \theta_{i+2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Ahora supongamos $\theta_i + \theta_{i+2} = \pi$ para $i = 1, 2$ y tracemos la circunferencia \mathfrak{C} que pasa por sus primeros 3 vértices (ésta siempre existe pues (z_1, z_2, z_3) es un triángulo), tracemos una semirrecta \mathfrak{l} de z_2 hacia z_4 , sea z'_4 el punto de intersección de \mathfrak{l} con \mathfrak{C} sea $\theta'_4 = \angle z_3 z'_4 z_1$, para cada punto p de \mathfrak{l} , $p \neq z_2$ consideramos θ_p como el ángulo interno en el vértice p del cuadrilátero (z_1, z_2, z_3, p) y notemos que θ_p es una función continua estrictamente decreciente al recorrer p desde z_2 en dirección a z_4 por la semirrecta \mathfrak{l} , entonces tenemos que $\theta_2 + \theta'_4 = \pi$ y también $\theta_2 + \theta_4 = \pi$. Por lo tanto se debe tener que $z_4 = z'_4$ y así Z es cíclico.

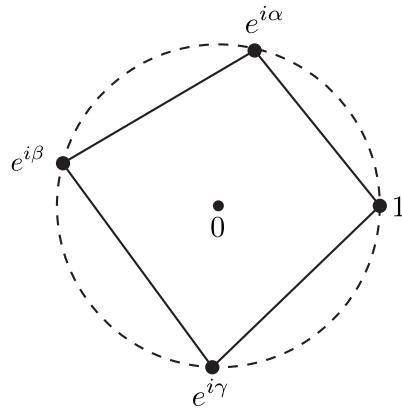


Figura 17: Ejemplo de un cuadrilátero cíclico determinado por los parámetros α, β y γ .

□

Teorema 3.3.1. *La cerradura del espacio de cuadriláteros cíclicos positivamente orientados $\overline{\mathcal{C}}^+$, es homeomorfa a una bola cerrada \mathbb{D}^3 .*

Demostración. Primero probaremos que \mathcal{C}^+ es homeomorfo a \mathbb{R}^3 , posteriormente demostraremos que su frontera $\partial\mathcal{C}^+$, es homeomorfa a \mathbb{S}^2 y con ello concluiremos el teorema.

Si $Z = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ es un cuadrilátero cíclico, pensamos en el representante de la forma $[1, e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}]$, es decir, pensamos que la circunferencia inscrita es la unitaria, además fijamos su primer vértice igual a 1. De esta manera el cuadrilátero cíclico queda determinado por 3 parámetros reales (Figura 17), estos parámetros son α, β y γ (los argumentos respectivos de z_2, z_3 y z_4), por lo tanto

$$\mathcal{C}^+ = \{[1, e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}] \in \mathbb{P}(4) \mid 0 < \alpha < \beta < \gamma < 2\pi\}.$$

Es fácil ver que dicho espacio es homeomorfo a la región de \mathbb{R}^3 acotada por los planos $\alpha = 0$, $\alpha = \beta$, $\beta = \gamma$ y $\gamma = 2\pi$, el cual es claramente homeomorfo a \mathbb{R}^3 .

Mostraremos ahora que $\partial\mathcal{C}^+$ es homeomorfa a \mathbb{S}^2 , para ello observemos que $\partial\mathcal{C}^+ \subset \partial\mathcal{K}^+$, ya que cualquier cuadrilátero cíclico es convexo, además recordemos que la frontera de los cuadriláteros convexos positivamente orientados se obtuvo al unir dos octaedros llenos $O_{1,3}$ y $O_{2,4}$ e identificarlos por su frontera ($\partial O_{1,3} = \partial O_{2,4}$, ver Sección 2.3). Probaremos que la frontera de los cuadriláteros convexos, es de hecho, la frontera del octaedro $O_{1,3}$ (*i.e.* $\partial\mathcal{C}^+ = \partial O_{1,3}$), que es claramente homeomorfa a \mathbb{S}^2 para ello recordemos que $O_{1,3}$ es la unión de las

pirámides T_1 y T_3 identificadas por sus bases, y que los puntos en el interior de T_1 representan cuadriláteros de la forma $[r, 1, z, 0]$ tal que $r \in (0, 1)$ y $z \in \mathbb{H}$, es claro que dichos cuadriláteros no son cílicos pues una circunferencia que pase por los puntos $0, 1, z$ no puede contener al punto r .

También recordemos que los cuadriláteros del interior de la base de T_1 son de la forma $[r, 1, z, 0]$ con $r, z \in (0, 1)$, a continuación veremos porqué ningún cuadrilátero de estos pertenece a la frontera de los cílicos. Por el Lema 3.3.1 un cuadrilátero es cílico si sus ángulos opuestos suman π , pero notemos que todos los cuadriláteros convexos que se aproximan a $[r, 1, z, 0]$ son tales que los ángulos en $z_4 = 0$ y $z_2 = 1$ ambos tienden a 0 ya que r y z están en el intervalo $(0, 1)$, por lo tanto la suma de los ángulos tiende a $0 \neq \pi$, esta es la razón por la que ningún cuadrilátero del interior de la base de T_1 esté en $\partial\mathcal{C}^+$.

Por último veamos que las otras caras de la pirámide T_1 sí están en la frontera de los cuadriláteros convexos.

1. Las caras de T_1 : $\{[r, 1, z, 0] \in \mathbb{P}(4) \mid r = 0, z \in \overline{\mathbb{H}}\}$ y $\{[r, 1, z, 0] \in \mathbb{P}(4) \mid r = 0, z \in \mathbb{H}\}$, determinan cuadriláteros en los que por lo menos dos vértices son iguales, es claro que dichos cuadriláteros pueden ser aproximados por cílicos ya que siempre existe una circunferencia que pase por 3 puntos no alineados, por lo tanto estas dos caras pertenecen a la frontera de \mathcal{C}^+ .
2. Las otras dos caras de T_1 : $\{[r, 1, z, 0] \in \mathbb{P}(4) \mid r \in [0, 1], z \leq 0\}$ y $\{[r, 1, z, 0] \in \mathbb{P}(4) \mid r \in [0, 1], z \geq 1\}$, determinan 4 –segmentos cílicos. Definiremos una sucesión de cuadriláteros en \mathcal{C}^+ que se aproxima a un cuadrilátero de la primera cara, para la otra cara es completamente análogo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq \lceil |z| \rceil = n_0$ consideremos la circunferencia \mathfrak{C}_n con centro en $(0, in)$ y tal que es tangente al origen, definimos Z_n , una sucesión de cuadriláteros dada por $Z_n = [p_r(n), p_1(n), p_z(n), 0]$ donde $p_x(n) x \in \{r, 1, z\}$ es el punto de intersección de la recta $Re(w) = x$ (donde w es la variable) con la circunferencia \mathfrak{C}_n . Es claro que a medida que n crece, $p_x(n)$ tiende a x por lo que $\{Z_n\}_{n > n_0}$ converge a $[r, 1, z, 0]$. De esta manera concluimos que estas dos caras también pertenecen a $\partial\mathcal{C}^+$.

Concluimos que $T_1 \cap \partial\mathcal{C}^+ = \partial T_1 \setminus \dot{B}$ donde \dot{B} denota el interior de la base de T_1 (que a su vez es la base de T_3). Podemos proceder análogamente con las demás pirámides, en particular tenemos que $T_3 \cap \partial\mathcal{C}^+ = \partial T_3 \setminus \dot{B}$ y así $\mathbb{S}^3 \cong \partial O_{1,3} = (\partial T_1 \setminus \dot{B}) \cup (\partial T_3 \setminus \dot{B}) = \partial\mathcal{C}^+$. \square

Corolario 3.3.1. *El espacio $\overline{\mathcal{C}^+} := \eta^{-1}(\overline{\mathcal{C}^+})$ es homeomorfo a $\mathbb{D}^3 \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.*

Demostración. Se sigue de que η es un fibrado sobre el cociente con fibra $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ y de que \mathbb{D}^3 es contraíble. \square

Corolario 3.3.2. *El espacio de 4 – segmentos cílicos \mathcal{Q}_c son 4 caras de un octaedro tales que comparten un sólo vértice dos a dos.*

Demostración. El espacio de 4 – segmentos cílicos corresponde a las 4 caras del octaedro $O_{1,3}$ que sólo comparten un vértice dos a dos como se muestra en la Figura 18. \square

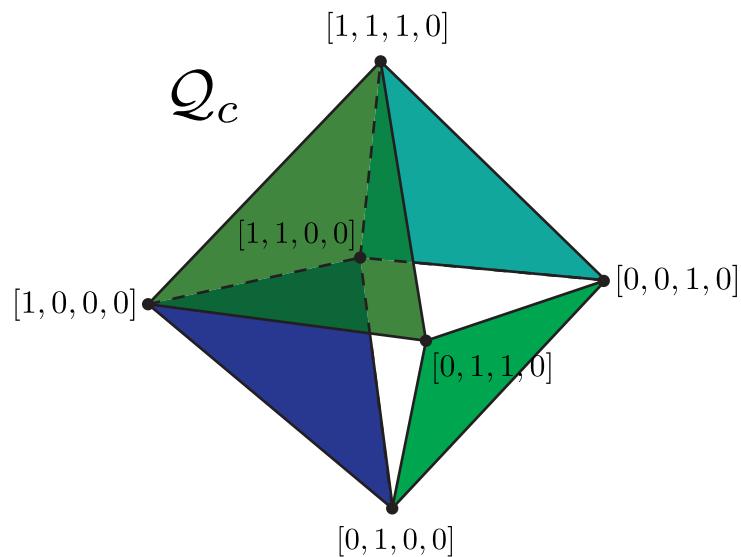


Figura 18: Subespacio \mathcal{Q}_c correspondiente a los 4-segmentos cílicos.

De la proposición anterior y su demostración se concluyen los siguientes corolarios.

Corolario 3.3.3. *La cerradura del espacio de cuadriláteros cílicos $\bar{\mathcal{C}}$ es homeomorfa a la unión de dos bolas cerradas \mathbb{D}^3 que se identifican por un espacio homeomorfo a \mathcal{Q}_c en la frontera de las bolas.*

Demostración. Las dos bolas \mathbb{D}^3 corresponden a los cuadriláteros cílicos positivamente y negativamente orientados, que sólo se intersecan en el espacio de 4-segmentos. \square

Recordemos que la cerradura del espacio de cuadriláteros convexos positivamente orientados $\bar{\mathcal{K}}^+$ es un espacio homeomorfo a \mathbb{D}^4 el siguiente resultado nos habla de como el espacio de cuadriláteros cílicos esta metido en tal espacio.

Proposición 3.3.1. *El espacio de cuadriláteros cíclicos positivamente orientados divide al espacio de cuadriláteros simples positivamente orientados en 4 componentes conexas, i.e., $\overline{\mathcal{S}^+ \setminus \mathcal{C}^+}$ tiene 2 componentes conexas.*

Demostración. Como en la Observación 1.2.2, usaremos las funciones θ_i definidas en \mathcal{S}^+ . Por el Lema 3.3.1, si $Z \in \mathcal{S}^+ \setminus \mathcal{C}^+$, entonces existen dos casos

$$\text{I } \theta_1(Z) + \theta_3(Z) < \pi \text{ o}$$

$$\text{II } \theta_1(Z) + \theta_3(Z) > \pi.$$

Probaremos que los espacios definidos por cada uno de los dos tipos, son abiertos ajenos y su unión es $\mathcal{S}^+ \setminus \mathcal{C}^+$.

Si Z es del tipo I, entonces por continuidad de las funciones θ_1 y θ_3 , existe un abierto $V_Z \subset \mathcal{S}^+ \setminus \mathcal{C}^+$ vecindad de Z , tal que para todo $Z' \in V_Z$, se tenga que $\theta_1(Z') + \theta_3(Z') < \pi$, por lo que el espacio definido por los cuadriláteros del tipo I forma un abierto. Análogamente, los cuadriláteros del tipo II forman un abierto, además es obvio que ningún cuadrilátero del tipo I puede ser del tipo II, con esto concluimos el resultado deseado. \square

Terminamos la sección calculando la intersección de los cuadriláteros cílicos con los deltoides, para ello ocupamos la siguiente.

Proposición 3.3.2. *Un cuadrilátero (z_1, z_2, z_3, z_4) pertenece a la intersección $C^+ \cap D_1^+$ si y sólo si $\theta_1 = \theta_4 = \frac{\pi}{2}$ y $|\overline{z_1 z_2}| = |\overline{z_1 z_4}|$, donde $C^+ = \eta^{-1}(\mathcal{C}^+)$ y $D_1^+ = \eta^{-1}(\mathcal{D}_1^+)$.*

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in C^+ \cap D_1^+$. Tracemos la diagonal interior $\overline{z_1 z_3}$, entonces por el criterio de semejanza lado-lado-lado, el triángulo $\triangle z_1 z_2 z_3$ es semejante con el triángulo $\triangle z_1 z_4 z_3$ y por lo tanto $\theta_1 = \theta_4$. Además como Z es cíclico $\theta_1 + \theta_4 = \pi$. Concluimos $\theta_1 = \theta_4 = \frac{\pi}{2}$ y como $Z \in D_1^+$ tenemos que $|\overline{z_1 z_2}| = |\overline{z_1 z_4}|$.

(\Leftarrow) Supongamos que $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ es tal que $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ y $|\overline{z_1 z_2}| = |\overline{z_1 z_4}|$. Es claro que Z es un cuadrilátero cíclico. Luego, tracemos la diagonal $\overline{z_1 z_3}$, entonces por el criterio lado-lado-ángulo para triángulos rectángulos concluimos que el triángulo $\triangle z_1 z_2 z_3$ es semejante con el triángulo $\triangle z_1 z_4 z_3$ y así $|\overline{z_2 z_3}| = |\overline{z_3 z_4}|$ y por lo tanto $Z \in D_1^+$. \square

Corolario 3.3.4. *La intersección $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{D}_1^+$ es homeomorfa a \mathbb{R} .*

Demostración. Supongamos que Z es un cuadrilátero en la intersección, entonces podemos considerar los representantes de la forma $[0, 1, w, e^{i2\text{Arg}(w)}]$, luego notemos que en todo rayo que emana del origen $\mathcal{R}_\theta = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Arg}(z) = \theta\}$, con $\theta \in (0, \pi)$, existe un único punto $w_\theta \in \mathcal{R}_\theta$ tal que el cuadrilátero $[0, 1, w_0, e^{i2\text{Arg}(w_0)}]$ tiene ángulo $\frac{\pi}{2}$ en su segundo y cuarto vértice, es decir, existe un único punto que lo hace cíclico, entonces todo cuadrilátero en la intersección lo podemos identificar según su cuarta coordenada, y notemos que al variar w_θ el valor de $e^{i2\text{Arg}(w_\theta)}$ en el plano dibuja una semicircunferencia. Concluimos que

$$\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{D}_1^+ = \{[0, 1, w_\theta, e^{i2\text{Arg}(w_\theta)}] \mid \text{Arg}(w_\theta) \in (0, \pi)\}$$

donde w_θ es el descrito anteriormente. Y observe que dicho espacio es claramente homeomorfo a $(0, \pi) \cong \mathbb{R}$. \square

3.4. Trapecios

En esta sección calculamos la topología del espacio de trapecios como subconjunto de $\mathbb{P}(4)$, en particular empezaremos calculando el espacio de trapecios positivamente orientados. En esta sección como en la anterior también utilizaremos la construcción de la frontera de cuadriláteros convexos dada en la Sección 2.3. Denotamos al espacio de trapecios módulo semejanza con \mathcal{T} .

Si $Z = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ es un trapecio, entonces tenemos dos casos:

I La arista $\overline{z_1 z_2}$ es paralela a la arista $\overline{z_3 z_4}$.

II La arista $\overline{z_2 z_3}$ es paralela a la arista $\overline{z_4 z_1}$.

Al subespacio correspondiente a los trapecios del tipo I lo denotaremos \mathcal{T}_1 , mientras que al subespacio de trapecios correspondientes a los del tipo II lo denotaremos con \mathcal{T}_2 .

Observación 3.4.1. La función $\delta : \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_1$ tal que $\delta[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z_2, z_3, z_4, z_1]$ es un homeomorfismo.

Teorema 3.4.1. *El espacio de trapecios positivamente orientados \mathcal{T}^+ , es homeomorfo a la unión de dos copias de \mathbb{R}^3 identificadas por un \mathbb{R}^2 , dicho \mathbb{R}^2 corresponde al espacio de paralelogramos \mathcal{P}^+ .*

Demostración. Para calcular el espacio de trapecios positivamente orientados, \mathcal{T}^+ , consideramos primero el subespacio de trapecios del tipo I al cual denotaremos \mathcal{T}_1^+ , para el espacio trapecios del tipo II (\mathcal{T}_2^+), se puede proceder de forma

análoga. La idea de la demostración es usar el hecho de que $\mathcal{T}^+ = \mathcal{T}_1^+ \cup \mathcal{T}_2^+$ y ver que ambos espacios de esta unión son homeomorfos a \mathbb{R}^3 , luego mostrar que $\mathcal{T}_1^+ \cap \mathcal{T}_2^+ \cong \mathbb{R}^2$. Para ello si $Z = [0, 1, w, z] \in \mathcal{T}_1^+$, entonces tenemos que $w \in \mathbb{H}$ y $z \in \mathfrak{R}_w := \{\tau \in \mathbb{C} \mid Im(w) = Im(\tau), Re(w) > Re(\tau)\}$, por lo que Z es de la forma $[0, 1, w, w - d]$, de esta manera el trapecio Z queda completamente determinado por $w \in \mathbb{H}$ y $d \in \mathbb{R}^+$, por lo tanto concluimos que

$$\mathcal{T}_1^+ = \{[0, 1, w, w - d] \in \mathbb{P}(4) \mid w \in \mathbb{C}, d \in \mathbb{R}^+\}.$$

Procediendo de manera análoga para los del tipo II obtenemos que

$$\mathcal{T}_2^+ = \{[w - d, 0, 1, w] \in \mathbb{P}(4) \mid w \in \mathbb{C}, d \in \mathbb{R}^+\}.$$

Es fácil observar que \mathcal{T}_1^+ y \mathcal{T}_2^+ son homeomorfos a $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+ \cong \mathbb{R}^3$ y es claro que $\mathcal{T}_1^+ \cap \mathcal{T}_2^+ = \mathcal{P}^+$, i.e., un trapecio Z es del tipo I y del tipo II si y sólo si Z es un paralelogramo, en la Proposición 3.1.1 se demostró que \mathcal{P}^+ es homeomorfo a $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^2$, con esto concluimos el resultado deseado. \square

Para calcular la frontera de \mathcal{T}^+ , primero calcularemos la frontera de trapecios del primer tipo $\partial\mathcal{T}_1^+$.

Observación 3.4.2. Si $Z \in \mathbb{P}(4)$, entonces $Z \in \mathcal{T}_1$ si y sólo si $\theta_1(Z) + \theta_4(Z) = \pi$ (equivalentemente $\theta_2 + \theta_3 = \pi$). Este hecho es una consecuencia trivial de las propiedades de dos rectas paralelas y una recta secante, análogamente $Z \in \mathcal{T}_2$ si y sólo si $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ (equivalentemente $\theta_3 + \theta_4 = \pi$).

Teorema 3.4.2. *La frontera del espacio de trapecios positivamente orientados del tipo I, $\partial\mathcal{T}_1^+$, es homeomorfa \mathbb{S}^2 .*

Demostración. Tenemos que $\partial\mathcal{T}_1^+ \subset \partial\mathcal{K}^+$, como hicimos antes en la demostración de la Proposición 3.3.1 consideraremos la pirámide $T_1 \subset \partial\mathcal{K}^+$.

Primero veamos que ningún cuadrilátero del interior de T_1 pertenece a $\partial\mathcal{T}_1^+$. Si $Z = [r, 1, z, 0]$ esta en el interior de T_1 y si $\theta_1(Z)$ y $\theta_4(Z)$ son los ángulos internos en r y 0 respectivamente, entonces tenemos que $\theta_1(Z) + \theta_4(Z) > \pi$ y por la continuidad de las funciones θ_1 y θ_4 esta suma varía continuamente con $Z \in S^+$ por lo que existe $V_Z \subset S^+$ vecindad de Z tal que si $Z' \in V_Z$, entonces $\theta_1(Z') + \theta_4(Z') < \pi$, y por la proposición anterior $V_Z \subset S \setminus \mathcal{T}_1$, por lo tanto $Z \notin \partial\mathcal{T}_1^+$, el mismo argumento prueba que ningún cuadrilátero en el interior de las otras pirámides (T_2, T_3 y T_4) pertenece a $\partial\mathcal{T}_1^+$.

A continuación veremos qué partes de la frontera de T_1 están en $\partial\mathcal{T}_1^+$.

- I La cara $\{[r, 1, z, 0] \in \mathbb{P}(4) \mid r = 1, z \in \overline{\mathbb{H}}\}$ está contenida en $\partial\mathcal{T}_1^+$. Esto es porque dicha cara corresponde a los cuadriláteros tales que $z_1 = z_2$, es decir, son de la forma $[1, 1, z, 0]$. Luego, la sucesión definida por $Z_n = [1, \frac{z}{n} + 1, z, 0]$ es tal que $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_1^+$ y $Z_n \rightarrow [1, 1, z, 0]$ cuando $n \rightarrow \infty$.
- II La cara $\{[r, 1, z, 0] \in \mathbb{P}(4) \mid r \in [0, 1], z \geq 1\}$ está contenida en $\partial\mathcal{T}_1^+$. Esto es porque la sucesión definida por $Z_n = [r, 1, z + \frac{i}{n}, \frac{i}{n}]$ es tal que $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_1^+$ y $Z_n \rightarrow [r, 1, z, 0]$ cuando $n \rightarrow \infty$.
- III La cara $\{[r, 1, z, 0] \in \mathbb{P}(4) \mid r \in [0, 1], z \in [0, 1]\}$ está contenida en \mathcal{T}_1^+ . Esto es porque nuevamente la sucesión definida por $Z_n = [r, 1, z + \frac{i}{n}, \frac{i}{n}]$ es tal que $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_1^+$ y $Z_n \rightarrow [r, 1, z, 0]$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Las caras restantes no están contenidas en $\partial\mathcal{T}_1^+$. Este hecho lo explicamos a continuación.

- V La intersección de la cara $\{[r, 1, z, 0] \in \mathbb{P}(4) \mid z \leq 0, r \in [0, 1]\}$ con $\partial\mathcal{T}_1^+$ es vacía esto es porque si $Z = [z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathcal{T}_1$ entonces $|Arg(z_2 - z_1) - Arg(z_4 - z_3)| = \pi$, pero los cuadriláteros de esta cara corresponden a 4 – segmentos tales que $|Arg(z_2 - z_1) - Arg(z_4 - z_3)| = 0$, debido a que el módulo y la función argumento son funciones continuas concluimos que dichos 4 – segmentos no pueden ser límite de una sucesión en \mathcal{T}_1 .
- VI La intersección de la cara $\{[r, 1, z, 0] \in \mathbb{P}(4) \mid z \in \mathbb{H}, r = 0\}$ con $\partial\mathcal{T}_1^+$ es vacía. aquí solo tomamos en cuenta el interior de la cara, ya que por las partes I, II y IV, hemos visto que de esta cara sólo dos aristas pertenecen a la frontera de los trapecios. El interior de esta cara corresponde a los cuadriláteros tales que $z_1 = z_4 = 0$, $z_2 = 1$ y $z_3 \in \mathbb{H}$, pero como los trapecios de \mathcal{T}_1 son tales $|Arg(z_2 - z_1) - Arg(z_4 - z_3)| = \pi$, esta relación no se cumple para ningún cuadrilátero del interior de dicha cara puesto que $z_3 \notin \mathbb{R}$ y por lo tanto ninguno pertenece $\partial\mathcal{T}_1$.

Si procedemos de manera análoga para la pirámide T_2 obtenemos que las únicas caras contenidas en $\partial\mathcal{T}_1^+$ son

- I* La cara de T_2 $\{[0, r, 1, z] \in \mathbb{P}(4) \mid r = 0, z \in \overline{\mathbb{H}}\}$ está contenida en $\partial\mathcal{T}_1^+$.
- II* La cara de T_2 $\{[0, r, 1, z] \in \mathbb{P}(4) \mid r \in [0, 1], z \geq 1\}$ está contenida en $\partial\mathcal{T}_1^+$.
- III* La cara de T_2 $\{[0, r, 1, z] \in \mathbb{P}(4) \mid r \in [0, 1], z \in [0, 1]\}$ está contenida en $\partial\mathcal{T}_1^+$

Hemos mostrado que 3 caras de T_1 y 3 caras de T_2 están contenidas en $\partial\mathcal{T}_1^+$, y ningún cuadrilátero del interior de alguna pirámide está en $\partial\mathcal{T}_1^+$, además $(\partial T_1) \cup (\partial T_2) = (\partial T_3) \cup (\partial T_4)$, por lo que estas 6 caras conforman por completo $\partial\mathcal{T}_1^+$. Al hacer las identificaciones correspondientes de estas 6 caras, se obtiene un espacio homeomorfo a \mathbb{S}^2 (Figura 19). \square

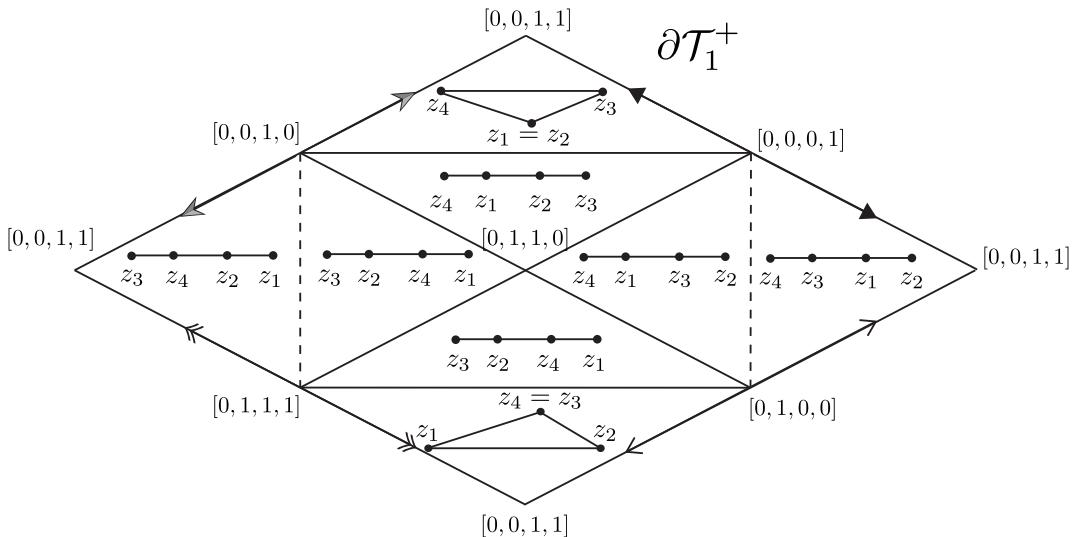


Figura 19: La frontera de los trapecios del tipo I $\partial\mathcal{T}_1^+$ se obtiene al hacer las identificaciones indicadas en la figura. Al hacer las identificaciones se obtiene un espacio homeomorfo a \mathbb{S}^3 .

Corolario 3.4.1. *La cerradura del espacio de trapecios positivamente orientados del tipo I, $\overline{\mathcal{T}_1^+}$, es homeomorfa a \mathbb{D}^3 .*

Corolario 3.4.2. *$\overline{\mathcal{T}^+}$ es la unión de 2 copias de \mathbb{D}^3 identificadas por un disco cerrado \mathbb{D}^2 .*

Demuestra. Las dos bolas \mathbb{D}^3 corresponden a los trapecios del tipo I y II, que sólo se intersecan en la cerradura del espacio de paralelogramos (positivamente orientados) que por el Teorema 3.1.1, es homeomorfo a un disco \mathbb{D}^2 . \square

Proposición 3.4.1. *El espacio $S^+ \setminus \mathcal{T}^+$ tiene 4 componentes conexas.*

Demuestra. Probaremos primero que $S^+ \setminus \mathcal{T}_1^+$ tiene 2 componentes. Por la Observación 3.4.2 si $Z \in S^+ \setminus \mathcal{T}_1^+$ entonces Z pertenece a alguno de los

conjuntos disjuntos $U_1 = \{Z \in S^+ \mid \theta_1(Z) + \theta_4(Z) < \pi\}$ o $V_1 = \{Z \in S^+ \mid \theta_1(Z) + \theta_4(Z) > \pi\}$, es obvio que estos conjuntos son abiertos ya que $U_1 = (\theta_1 + \theta_4)^{-1}((0, \pi))$ y $V_1 = (\theta_1 + \theta_4)^{-1}((\pi, 2\pi))$ y la función $\theta_1 + \theta_4$ es una función continua. De esta manera hemos probado que $S^+ \setminus \mathcal{T}_1^+$ tiene 2 componentes conexas.

Análogamente se tiene que $S^+ \setminus \mathcal{T}_2^+$ tiene 2 componentes correspondientes a los conjuntos $U_2 = \{Z \in S^+ \mid \theta_1(Z) + \theta_2(Z) < \pi\}$ y $V_2 = \{Z \in S^+ \mid \theta_1(Z) + \theta_2(Z) > \pi\}$. Podemos concluir que $S^+ \setminus \mathcal{T}^+$ tiene 4 componentes conexas correspondientes a los conjuntos $U_1 \cap U_2, U_1 \cap V_2, U_2 \cap V_1$ y $V_1 \cap V_2$. \square

Terminamos analizando la intersección de los cuadriláteros cílicos con los trapecios.

Definición 3.4.1. Un trapecio $Z \in \mathcal{T}_1^+$ es *isósceles* si $\theta_3(Z) = \theta_4(Z)$ (equivalentemente si $\theta_1(Z) = \theta_2(Z)$).

Lema 3.4.1. *Un cuadrilátero Z pertenece a la intersección $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{T}_1^+$ si y sólo si Z es un trapecio isósceles.*

Demostración. Por el Lema 3.3.1 y 3.4.2, tenemos que $Z \in \mathcal{C}^+ \cap \mathcal{T}_1^+$ si y sólo si $\theta_1 + \theta_3 = \pi$ y $\theta_1 + \theta_4 = \pi$; y esto se cumple si y sólo si $\theta_3(Z) = \theta_4(Z)$ y si Z es trapecio. \square

Proposición 3.4.2. *El espacio de trapecios isósceles del tipo I, $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{T}_1^+$, es homeomorfo a \mathbb{R}^2 .*

Demostración. Consideramos $Z = [0, 1, w, z]$. Si $Z \in \mathcal{C}^+ \cap \mathcal{T}_1^+$, entonces para que se cumpla la condición $\theta_3(Z) = \theta_4(Z)$, que z debe ser la reflexión de w por la recta $Re(z) = \frac{1}{2}$, formando así un trapecio isósceles. Concluimos que para todo punto $w \in \mathbb{H}$ existe un único punto $z \in \mathbb{H}$ que lo hace trapecio isósceles, de esta manera la intersección $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{T}_1^+$ es homeomorfa a $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^2$. \square

El lector no tendrá problema en concluir un resultado análogo para los trapecios del tipo II, en particular por definición, todo rectángulo es trapecio isósceles, y se tiene que $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{T}_1^+ \cap \mathcal{T}_2^+ = \mathfrak{Re}^+ \cong \mathbb{R}$.

Apéndice A

Fórmula de Schwarz-Christoffel

Análogamente a como hicimos para cuadriláteros en la Sección 1.1, podemos pensar a un polígono de n -lados como un punto $W \in \mathbb{C}^n$. También decimos que W es simple si sus vértices son distintos y el conjunto $\mathfrak{c}(W) = \overline{z_1 z_2} \cup \overline{z_2 z_3} \cup \dots \cup \overline{z_n z_1}$ es una curva de Jordan.

Por el Teorema del Mapeo de Riemann [6] sabemos que existe un biholomorfismo $\omega : \mathbb{H} \rightarrow \text{int}(W)$, donde $\text{int}(W)$ es la componente simplemente conexa¹ acotada de $\mathbb{C} \setminus \mathfrak{c}(W)$. La expresión explícita de ω fue calculada por primera vez por los matemáticos alemanes Elwin Bruno Christoffel y Hermann Amandus Schwarz quienes la descubrieron a la par de manera independiente. En este apéndice explicamos la deducción de dicha expresión, nuestros argumentos están basados en el texto [1].

A.1. Preliminares

Si $W \in \mathbb{C}$ es polígono simple y si $\omega : \mathbb{H} \rightarrow \text{int}(W)$ es el biholomorfismo dado por el Teorema del Mapeo de Riemann, entonces por continuación analítica, ω se puede extender a través de la frontera del semiplano superior $\mathbb{R} \cup \{\infty\} =: \overline{\mathbb{R}}$ hacia $\mathfrak{c}(W)$. De manera que existen números reales $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ tales que $w_i = F(x_i)$, aquí consideraremos el caso $w_n = \infty$. A continuación analizaremos el comportamiento de la función ω en tales puntos.

Definición A.1.1. Si $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ es un polígono, definimos para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ el *ángulo exterior* en el vértice w_i como el número $\vartheta_i = \pi - \theta_i$, donde θ_i es el ángulo interior del vértice w_i .

¹Un espacio X se dice simplemente conexo si su grupo fundamental es trivial, *i.e.*, $\pi_1(X) = \{0\}$.

Notemos que los ángulos exteriores toman valores entre $-\pi$ y π ya que los ángulos interiores toman valores entre 0 y 2π . Si ϑ_i es el i -ésimo ángulo exterior, entonces dicho ángulo está midiendo el cambio del argumento del vector tangente a la curva $c(W)$ en el i -ésimo vértice, aunque el vector tangente no está bien definido en tal vértice podemos acercarnos continuamente por las dos aristas que lo contienen obteniendo valores diferentes en su argumento (Figura 20).

En general si γ es una curva en el plano complejo y si $t(z_0)$ denota el vector tangente en el punto z_0 de γ , entonces dada una función $f(z)$ holomorfa se cumple la relación

$$\arg(\tau(w_0)) = \arg(t(z_0)) + \arg(f'(z_0)) \quad (\text{A.1})$$

donde $w_0 = f(z_0)$ y $\tau(w_0)$ denota el vector tangente en el punto w_0 de la curva imagen de γ . Luego, sea $\tilde{\omega} : \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \mathfrak{p}(W)$ la extensión de ω donde $\mathfrak{p}(W) = \mathfrak{c}(W) \cup \text{int}(W)$ y denotemos con $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{c}(W)$ a la restricción de $\tilde{\omega}$ a la frontera de \mathbb{H} . Si x_1, x_2, \dots, x_{n-1} son las preimágenes del los $n - 1$ primeros vértices de W , entonces por la Ecuación (A.1) podemos observar que el argumento de ω' permanece constante en las componentes de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ y, en estos puntos cambia tanto como los ángulos exteriores a W en los respectivos vértices (Figura 20). De esta manera concluimos que el argumento de la función $\omega'(z)$ está dado por

$$\arg \omega'(z) = \arg A - k_1 \arg(z - x_1) - k_2 \arg(z - x_2) - \cdots - k_{n-1} \arg(z - x_{n-1})$$

para constantes reales $k_i = \frac{\vartheta_i}{\pi}$ y $A \in \mathbb{C}^*$. Notemos que si $x < x_1$, entonces $\arg(x - x_1) = \arg(x - x_2) = \dots = \arg(x - x_{n-1}) = \pi$. Cuando la variable z cruza el valor x_1 entonces $\arg(z - x_1) = 0$, por lo tanto el argumento aumenta tanto como $k_1\pi$, i.e., tanto como ϑ_1 . En general si $x_j < x < x_{j+1}$, se tendrá que

$$\arg(x - x_i) = \begin{cases} 0, & \text{para } 1 \leq i \leq j \\ \pi, & \text{para } j+1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

Concluimos que el argumento de la función $\omega'(z)$ aumenta por la cantidad $\vartheta_i = k_i\pi$ mientras x atraviesa el punto x_i en sentido positivo. Por la manera en que se definió el ángulo exterior es claro que $-1 < k_i < 1$ para toda i , además las constantes k_i también cumplen la relación $k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} + k_n = 2$, entonces $\arg \omega'(z)$ cambia exactamente como los ángulos exteriores de W . Podemos conjutar que

$$\omega'(z) = A(z - x_1)^{-k_1}(z - x_2)^{-k_2} \dots (z - x_{n-1})^{-k_{n-1}}$$

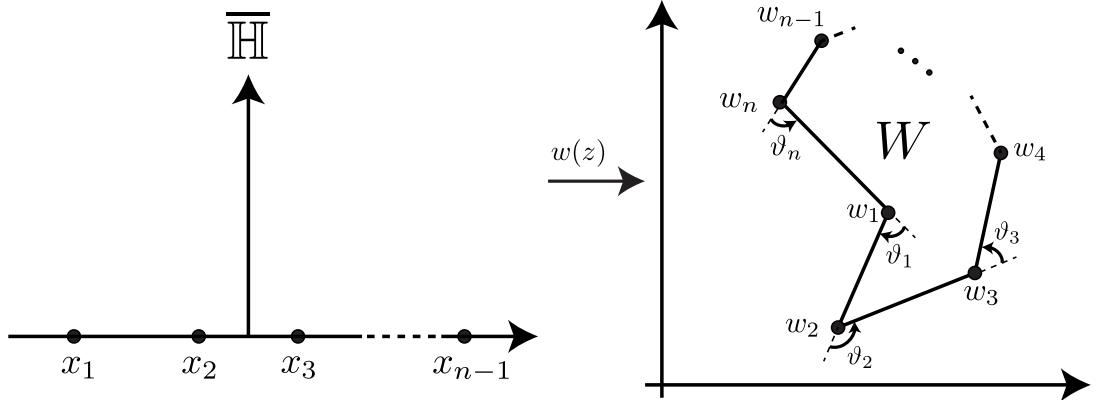


Figura 20: El semiplano superior se mapeará al polígono W bajo la función $\omega(z)$. Se muestran algunos de los ángulos exteriores de W .

donde definimos las ramas de las funciones $(z - x_i)^{-k_i} := |z - x_i|^{-k_i} e^{\alpha_i z}$ tal que $-\frac{\pi}{2} < \alpha_i < \frac{3\pi}{2}$ donde $\alpha_i = \arg(z - x_i)$, por lo que ω' es analítica en todo $\overline{\mathbb{H}}$ excepto en los $n - 1$ puntos x_i . Por lo tanto $\tilde{\omega}$ sería de la forma

$$\tilde{\omega}(z) = A \int_{z_0}^z (\zeta - x_1)^{-k_1} (\zeta - x_2)^{-k_2} \dots (\zeta - x_{n-1})^{-k_{n-1}} d\zeta + B \quad (\text{A.2})$$

donde A y B son constantes complejas apropiadas y z_0 es un punto fijo en \mathbb{H} .

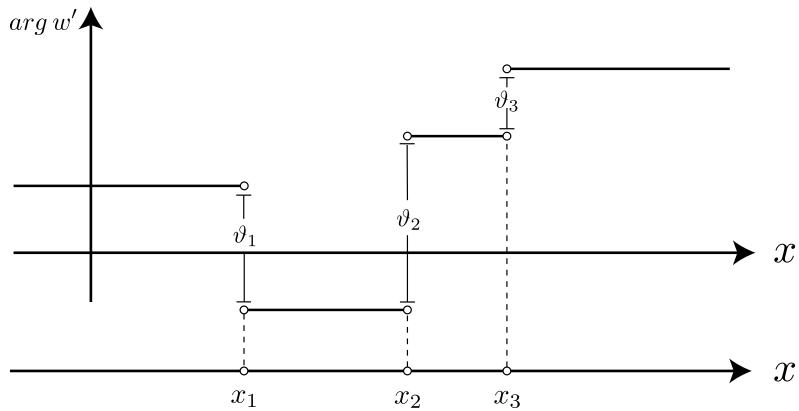


Figura 21: La figura representa la gráfica de la función $\arg \omega'$

Del hecho de que $\prod_{i=1}^{n-1} (z - x_i)$ es una función analítica en el semiplano superior y el Teorema de Cauchy-Goursat (p. 106 [1]) se sigue que $\tilde{\omega}(z)$ esta

bien definida ya que el valor de la integral no depende del la curva por la que se integre. Además también es claro que $\tilde{\omega}(z)$ es analítica en todo el semiplano superior excepto en los $n - 1$ puntos x_i porque es la primitiva de una función analítica.

A.2. Schwarz-Christoffel

En esta sección haremos ver que la función dada por la Ecuación A.2 es continua y que además es un biholomorfismo entre \mathbb{H} y el interior de W . Es claro que tal función es holomorfa en todo H , entonces para probar que es biholomorfismo basta probar que es una biyección, ya que toda función holomorfa y biyectiva tiene inversa holomorfa, note que en el caso real esto no es cierto (existen funciones diferenciables con inversa no diferenciable). Empezaremos dejando clara la continuidad $\tilde{\omega}$ en las puntos x_i que son preimágenes de los vértices de W .

Probaremos primero la continuidad de $\tilde{\omega}$ en el punto x_1 , para hacer esto notemos que el único término en la definición de ω' que no es analítico es $(z - x_1)^{-k_1}$, por lo que en una vecindad lo suficientemente pequeña de x_1 tenemos que $\omega'(z) = (z - x_1)\phi(z)$ donde $\phi(z)$ es una función analítica en la vecindad. Por lo tanto

$$\omega'(z) = (z - x_1)^{-k_1}\phi(x_1) + \phi'(x_1)(z - x_1)^{1-k_1} + \phi''(x_1)(z - x_1)^{2-k_1} + \dots$$

en dicha vecindad. Luego $\omega'(z) = (z - x_1)^{-k_1}\phi(x_1) + (z - x_1)^{1-k_1}\psi(z)$ donde $\psi(z)$ es una función analítica en la vecindad. Como $1 - k_1 > 0$ si z_1 es un punto en dicha vecindad, entonces es claro que la integral $\int_{z_1}^z (\zeta - x_1)^{1-k_1}\psi(\zeta)d\zeta$ es continua en el punto x_1 , también la integral $\int_{z_1}^z (\zeta - x_1)^{1-k_1}d\zeta = \frac{1}{1-k_1}[(z - x_1)^{1-k_1} - (z_1 - x_1)^{1-k_1}]$ es continua en el punto x_1 si se define como el límite continuo cuando z tiende a x_1 , de aquí se sigue fácilmente la continuidad de $\omega(z)$ en x_1 un argumento similar muestra la continuidad en los demás puntos x_j , $j \neq 1$.

Ahora verificaremos la existencia del $\lim_{z \rightarrow \infty} \int_{z_0}^z \prod_{i=1}^{n-1} (\zeta - x_i)^{-k_i} d\zeta$, para ello notemos que para $R > 0$ lo suficientemente grande tenemos que si $|z| > R$, entonces $|z - z_i| < 2|z|$ por lo que el producto

$$\prod_{i=1}^{n-1} |z - x_i|^{-k_i} < \prod_{i=1}^{n-1} (2|z|)^{-k_i} = (2|z|)^{-(k_1+k_2+\dots+k_{n-1})} = \frac{M}{z^{2-k_n}} \quad (\text{A.3})$$

luego como $2 - k_n > 0$ entonces $|\omega'(z)| < \frac{M}{|z|^{2-k_n}} < \epsilon$ para $|z| > R$, por el criterio de Cauchy (p. 415 [7]), podemos concluir la convergencia de la integral

impropia cuando $z \rightarrow \infty$, es decir, $\lim_{z \rightarrow \infty} \int_{z_0}^z (\zeta - x_1)^{-k_1}(\zeta - x_2)^{-k_2} \dots (\zeta - x_{n-1})^{-k_{n-1}} d\zeta = W_n$ con $W_n \in \mathbb{C}$.

Procedemos a probar la biyectividad de $\omega(z)$, para ello usaremos el *Principio del Argumento* (p. 271 [1]), que establece que si f es una función meromorfa en el interior de una curva cerrada simple γ , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)dz}{f(z)} = N_0(f, \gamma) - N_p(f, \gamma)$$

donde $N_0(f, \gamma)$ y $N_p(f, \gamma)$ son el número de ceros y polos de f dentro de la región acotada por γ respectivamente y γ es recorrida en sentido positivo.

Consideramos la función $\omega(z) - w_0$ tal que $w_0 \notin \mathfrak{c}(W)$ y veremos que dicha función tiene exactamente un cero si $w_0 \in \text{int}(W)$ y con esto se probará la biyectividad de la función ω . Ya que $\omega(z)$ es analítica en \mathbb{H} la función $\omega(z) - w_0$ no tiene polos, por lo tanto utilizando el principio del argumento tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\omega'(z)}{\omega(z) - w_0} dz = N_0(\omega(z) - w_0, \Gamma)$$

donde $\Gamma = \Gamma_0 + R_0 + \Gamma_1 + R_1 + \dots + \Gamma_{n-1} + R_{n-1}$ es un contorno como el de la Figura 22; Γ_0 es una semicircunferencia de radio R recorrido en el sentido positivo (contrario de las manecillas del reloj) y las Γ_i , $0 < i < n$ son semicircunferencias de radio $\epsilon > 0$ centradas en x_i .

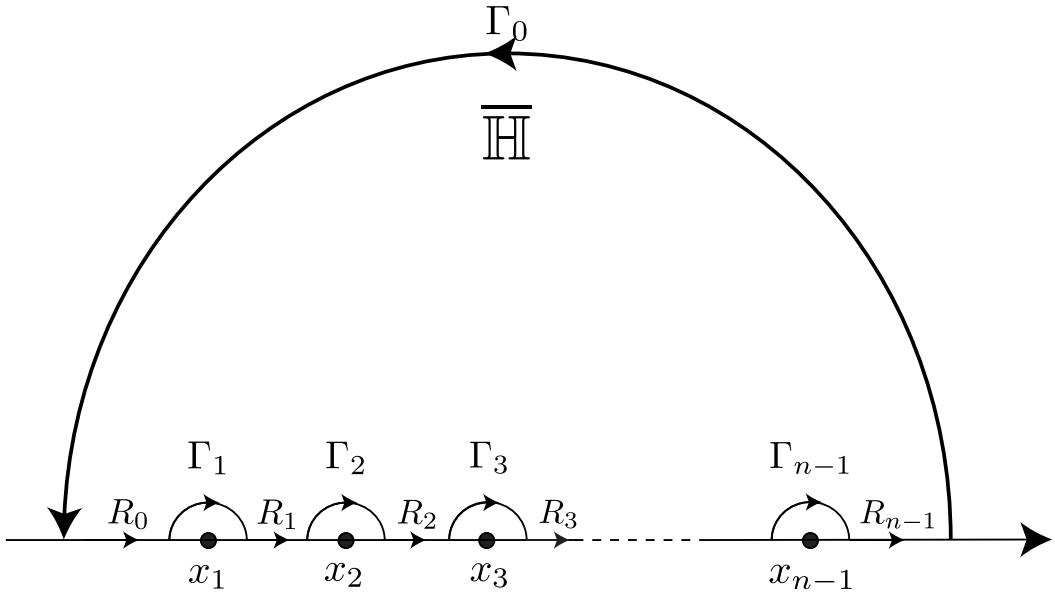
Haciendo el cambio de variable $z = Re^{i\theta}$ y de la Ecuación A.3 tenemos que la integral a lo largo de Γ_0 esta acotada de la siguiente manera

$$\left| \int_{\Gamma_0} \frac{\omega'(Re^{i\theta})}{\omega(Re^{i\theta}) - w_0} Re^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\omega'(re^{i\theta})}{\omega(re^{i\theta}) - w_0} Re^{i\theta} \right| |d\theta| \leq \frac{M}{2R^{1-k_n}}$$

y como $1 - k_n > 0$ se sigue que cuando $R \rightarrow \infty$ la integral tiende a 0.

A continuación mostraremos que las integrales a lo largo de Γ_i , $0 < i < n$ también son cero cuando el radio de la semicircunferencia ρ tiende a 0. Explicaremos este hecho para la integral a lo largo de Γ_1 pero las demás serán análogas. Primero, notemos que a lo largo de Γ_1 se tiene que $|\omega'(z)| \leq M\rho^{-k_1}$ con $M > 0$, luego dado que $\omega(x_1) \neq w_0$ en una vecindad lo suficientemente pequeña de x_1 tenemos que $|\omega(z) - w_0| \geq D$ con $D > 0$, además la longitud de Γ_1 es $\pi\rho$, por lo tanto para ρ lo suficientemente pequeño tenemos que

$$\left| \int_{\Gamma_1} \frac{\omega'(z)}{\omega(z) - w_0} dz \right| \leq \frac{M\rho^{-k_1}}{D} \pi\rho = B\rho^{1-k_1}$$

Figura 22: Contorno Γ

y así vemos que cuando ρ tiende a 0 la integral sobre Γ_1 tiende a 0 ya que $1 - k_1 > 0$. De manera análoga previsto que $\omega(x_i) \neq w_0$ se prueba que las integrales a lo largo de Γ_i , $1 < i < n$ tienden a 0 cuando ρ tiende a 0.

Por lo anterior tomando los límites $\rho \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$ en la definición de la curva Γ se tendrá que $R_1 + R_2 + \dots + R_{n-1} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y en tal caso $\int_{\Gamma} \frac{\omega'(z)}{\omega(z) - w_0} dz = \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega'(z)}{\omega(z) - w_0} dz$. Luego, haciendo el cambio de variable $\zeta = \omega(z)$ tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega'(z)}{\omega(z) - w_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega(W)} \frac{d\zeta}{\zeta - w_0}$$

note que $\omega(W) = \omega(\Gamma)$ es la curva imagen de Γ bajo $\omega(z)$. Por último notemos que el lado derecho de la igualdad anterior es 1 si $w_0 \in \text{int}(W)$ y es 0 si está en el exterior del polígono W , con esto hemos probado que $\omega : \mathbb{H} \rightarrow \text{int}(W)$ es una biyección y concluimos que ω es un biholomorfismo.

Por la discusión anterior casi hemos probado el siguiente teorema.

Teorema A.2.1. (*Fórmula de Schwarz-Christoffel*) Si $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ es un polígono simple con ángulos exteriores $k_1\pi, k_2\pi, \dots, k_n\pi$, entonces existen x_1, x_2, \dots, x_{n-1} valores reales tales que la función $\omega : \mathbb{H} \rightarrow \text{int}(W)$ dada por

$$\omega(z) = A \int_{z_0}^z (\zeta - x_1)^{-k_1} (\zeta - x_2)^{-k_2} \dots (\zeta - x_{n-1})^{-k_{n-1}} d\zeta + B \quad (\text{A.4})$$

es un biholomorfismo, donde A y B son constantes complejas escogidas de manera adecuada y $k_i\pi$ son los valores de los ángulos exteriores. Más aún ω puede extenderse continuamente a todo $\bar{\mathbb{H}}$ tal que $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se mapee a Γ_w y se cumplan las condiciones $\omega(z_i) = w_i$ y $\omega(\infty) = w_n$.

La prueba formal de que todo biholomorfismo de \mathbb{H} en el interior de W es de la forma (A.4) puede ser encontrada en la p. 65 de [10], este hecho y el Teorema del Mapeo de Riemann aseguran la existencia de las constantes x_i , sin embargo la elección adecuada de estas constantes dado un polígono en general sigue siendo un problema abierto, aun así en muchos casos esta elección puede darse de manera explícita para ciertos polígonos, a continuación hablaremos un poco de la elección de tales contantes.

Si hacemos $A = 1$ y $B = 0$ en la fórmula de Schwarz-Christoffel podemos pedir que \mathbb{H} se mapee en un polígono W' semejante a W (en el sentido de la Definición 1.2.1) y después con una semejanza orientada podemos enviar W' hacia W . Las constantes k_i de la fórmula quedan determinadas completamente por los ángulos exteriores de W' . Si $\omega(z)$ mapea el eje real en $\mathfrak{c}(W')$ a W , entonces $n - 2$ de los lados de W' deben tener una razón proporcional a los lados correspondientes de W esta condición se expresa por medio de $n - 3$ ecuaciones con $n - 1$ variables reales (x_i , $0 < i < n - 1$), entonces **dos de las $n - 1$ constantes x_i pueden elegirse de manera arbitraria**, por otro lado si como preimagen de w_n elegimos $x_n \in \mathbb{R}$ en lugar de ∞ entonces la fórmula de Schwarz-Cristoffel toma la forma

$$\tilde{\omega}(z) = A \int_{z_0}^z (\zeta - x_1)^{-k_1} (\zeta - x_2)^{-k_2} \dots (\zeta - x_{n-1})^{-k_{n-1}} (\zeta - x_n)^{-k_n} d\zeta + B$$

en cuyo caso se tendrá que las n constantes x_i deberán satisfacer $n - 3$ ecuaciones por lo tanto **tres de las n constantes x_i pueden elegirse de manera arbitraria**.

Además, siguiendo un razonamiento análogo al aquí expuesto, el teorema anterior puede extenderse a regiones simplemente conexas no necesariamente finitas cuya frontera es la unión de segmentos de recta como la región de la Figura 7 pues la frontera de dicho espacio forma una curva cerrada en la esfera de Riemann. En tal caso también podremos fijar tres valores reales en la fórmula, esta es una propiedad muy importante que se usa fuertemente en el Capítulo 2.

Bibliografía

- [1] RUEL V. CHURCHILL, & JAMES W. BROWN, *Complex variables and applications*. McGraw-Hill, New York. 1960.
- [2] EDWIN E. MOISE *Geometric topology in dimensions 2 and 3*. Springer Science & Business Media, Vol. 47. 2013.
- [3] M.H. FREEDMAN, *The topology of four-dimensional manifolds*. J. Diff. Geom., Vol. 17 , no. 3, p. 357–453, 1982.
- [4] A. GONZÁLEZ, *Propiedades Topológicas de los Espacios de Polígonos Simples y Convexos Módulo Semejanza Orientada*. Tesis Doctoral, CIMAT, 2014.
- [5] A. GONZÁLEZ, & JORGE L. LOPÉZ-LOPÉZ, *Compactness of Spaces of Convex and Simple Quadrilaterals*. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2016.
- [6] C. CARATHÉDORY, *Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten*. Math. Ann. 72 no.1 p.107-142, 1992.
- [7] V.A. ZORICH, *Mathematical Analysis II*. Universitext, Springer-Verlag, 2004.
- [8] K. BEHREND, *Introduction to algebraic stacks*. Vol. 411 Moduli Spaces, 2014.
- [9] A. HATCHER, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [10] G.-C. WEN, *Conformal Mappings and Boundary Value Problems*. American Mathematical So., 1992.
- [11] D. HUSEMOLLER, *Fiber Bundles*. Graduate Texts in Mathematics 20. Springer-Verlag, Third Edition, 1993.

- [12] KRANTZ, STEVEN G., AND HAROLD R. PARKS, *A primer of real analytic functions* Second Edition Springer Science & Business Media, 2002.
- [13] HARVEY COHN, *Conformal Mapping on Riemann Surfaces*, Courier Corporation, 2014.
- [14] W. P. THURSTON, Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere. The Epstein Birthday Shrift. Geom. Topol. Monogr., vol 1. p. 511-549.
- [15] M. KAPOVICH & J. MILLSON, On the Moduli Space of Polygons in the Euclidean Plane. Journal of Differential Geometry, Walterde Gruyter, Second Edition, 1995.