Gil Sales Miranda Neto
DRE: 118037119

Prova de Repescagem CVGA

CVGA 2018
June 15, 2019

Questão 1

Dados do problema

$O(t)$ tem velocidade constante $\vec{v}$, ou seja $\dot{O}(t) = \vec{v}$ e $\vec{v}(t) = (v, 0)$
$P(t) = (x(t), y(t))$

Solução

Como $O(t)$ se move sob o eixo horizontal apenas, temos $O(t) = (vt, 0); v \in \mathbb{R}$.
Dessa forma $\dot{O}(t) = (v, 0)$ como queremos.
Como o vetor $P(t)$ tem como origem o ponto $O(t)$ então este é dado na verdade por:

$$P(t) = O(t) + (x^*(t), y^*(t))$$

Onde as funções que queremos $(x(t), y(t)) = O(t)+(x^*(t), y^*(t))$, e portanto $\begin{cases} x(t) = vt + x^*(t) \\ y(t) = 0 + y^*(t) \end{cases}$

O problema agora se reduz a encontrar $x^*(t)$ e $y^*(t)$, que podemos pensar como o movimento de $P(t)$ quando $O(t)$ é constante, mas este movimento é apenas um círculo de raio r, e a parametrização de um circulo $c(t) = (rcos(t), rsen(t)), r \in \mathbb{R}$.
Da física sabemos que a velocidade angular é a variação do ângulo t, portanto $c(t) = (rcos(\omega t), rsen(\omega t))$, mas $c(0) = (r, 0)$ e como queremos que $P(0) = (0, 0)$, devemos ter $c(t) = (rcos(\omega t) - r, rsen(\omega t))$, portanto:

$$\begin{cases} x^*(t) = rcos(\omega t) - r \\ y^*(t) = rsen(\omega t) \\ x(t) = (vt - r) + rcos(\omega t) \\ y(t) = rsen(\omega t) \end{cases}$$

E a parametrização do ponto $P(t)$ é dada por:

$$P(t) = (vt - r + rcos(\omega t), rsen(\omega t))$$

Deixo uma animação da parametrização criada no Geogebra, que condiz com a animação do Youtube: https://www.geogebra.org/m/skn6pzzm

Questão 3

A demonstração para este exercício consistirá em construir γ de forma a possuir todos os elementos de α e ir 'inserindo' no conjunto também os elementos de β que sejam L.I. com α, dessa maneira chegará um momento em que não há mais elementos em β que sejam L.I. com α e então γ será um conjunto gerador de $\mathbb{V}$ e $\alpha \subset \gamma \subset \beta \cup \alpha$

Lema 1. *Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial, e $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \mathbb{V}$, com X linearmente independente de modo que $X \cup \{w\}$ é linearmente dependente, $\forall w \in \mathbb{V}$. Ou seja, X é um conjunto L.I. maximal, que possui o máximo de elementos LI de um dado espaço vetorial. Então X gera $\mathbb{V}$.*

Demonstração. Seja $w \in \mathbb{V}$, então por hipotese $\{w, x_1, \ldots, x_n\}$ é L.D., ou seja $\exists\, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ com ao menos um dos $a_i \neq 0$ de forma que

$$a_0 w + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

De fato, $a_0 \neq 0$, caso contrário $a_0 = 0 \implies a_i \neq 0, i \neq 0$ mas isso contradiz o fato de X ser L.I.
Portanto podemos reescrever

$$w = \frac{-a_1 x_1}{a_0} + \cdots + \frac{-a_n x_n}{a_0}$$

Ou seja, w é uma combinação linear dos elementos de X, como estamos assumindo $\forall w \in \mathbb{V}$, então X gera $\mathbb{V}$ ∎

Agora partindo para a solução do problema, $\mathbb{V}$ é gerado por β e α é L.I.
$n \leq m$, pois caso contrário $n > m$, então haveria um elemento de α que não é gerado por β, logo não pertenceria a $\mathbb{V}$. Então com $n \leq m$ existe ao menos um elemento de β que é L.I. com o conjunto α, caso contrário teriamos: $a_0 v_i + a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n = 0$, com $a_0 \neq 0$ e poderíamos escrever $v_i = \frac{-a_1 u_1}{a_0} + \cdots + \frac{-a_n u_n}{a_0}$, ou seja, β seria combinação linear de α.
Logo $\alpha \cup \{v_i\}$ é L.I. para algum $v_i \in \beta$.
Repetimos o processo de encontrar algum v_j que seja L.I. ao novo conjunto $\alpha \cup \{v_i\}, j \neq i$ um número finito de vezes k, de forma que $m = n + k$, teremos então o conjunto $\alpha \cup \{v_1\} \cup \cdots \cup \{v_k\}$ L.I. de modo que $\alpha \cup \{v_1, \ldots, v_k\} \cup \{v_p\}$ é L.D. $\forall v_p \in \beta$.
Seja $\gamma = \alpha \cup \{v_1, \ldots, v_k\}$ e tomando $\{u_1, \ldots, u_n\} = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ e $v_1, \ldots, v_k = \varepsilon_{n+1}, \ldots, \varepsilon_m$, teremos o conjunto

$$\gamma = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$$

γ satisfaz $\alpha \subset \gamma \subset \beta \cup \alpha$, e aplicando o Lema 1 a γ temos que γ gera $\mathbb{V}$.

Questão 4

Dada a hipérbole h

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Podemos fazer a seguinte mudança de variaveis: $\begin{cases} x = au \\ y = bv \end{cases}$

Então teremos:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ &= \frac{\cancel{a^2}u^2}{\cancel{a^2}} - \frac{\cancel{b^2}v^2}{\cancel{b^2}} \\ &= u^2 - v^2 \end{aligned}$$

Então a transformação linear T_1 que leva a hipérbole h na nova hipérbole h_1, e: $T_1 \cdot (x, y) = (u, v)$
Observando agora que em h_1 temos uma diferença de quadrados, e que em $xy = 1$ temos um produto de dois termos, podemos então pensar na seguinte mudança de variaveis: $\begin{cases} u = \frac{1}{2}(p-q) \\ v = \frac{1}{2}(p+q) \end{cases}$

Dessa maneira:

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 &= 1 \\ &= \frac{1}{4}(p-q)^2 - \frac{1}{4}(p+q)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\cancel{p^2} - 2pq + \cancel{q^2} - \cancel{p^2} - 2pq \cancel{- q^2}\right) \\ &= pq \end{aligned}$$

Sendo esta $pq = 1$ a hipérbole h_2. Então há uma transformação linear T_2 que leva h_1 em h_2, de forma que $T_2 \cdot (u, v) = (p, q)$
Para encontrar a transformação linear que leva h_0 em h_2 basta:

$$\begin{aligned} T_1 \cdot (x, y) &= (u, v) \\ T_2 \cdot (u, v) &= (p, q) \\ &\text{logo:} \\ &(p, q) = T_1 \cdot T_2 \cdot (x, y) \end{aligned}$$

Sendo $D = T_1 \cdot T_2$, esta é a matriz procurada. Para saber quais são as matrizes T_1, T_2, podemos fazer a matriz jacobiana da mudança de variável:

$$T_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

E a matriz T_2

$$T_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial u}{\partial q} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

E finalmente $D = T_1 \cdot T_2$

$$D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} \\ \\ \frac{b}{2} & \frac{b}{2} \end{bmatrix}$$

Verificando:

$$\begin{bmatrix} \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} \\ \\ \frac{b}{2} & \frac{b}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix} = \left[\frac{ax}{2} - \frac{ay}{2} \quad , \frac{bx}{2} + \frac{by}{2} \right]$$

Usando essas novas coordenadas em h

$$\frac{\left(\frac{ax}{2} - \frac{ay}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{bx}{2} + \frac{by}{2}\right)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2\left(\frac{a^2x^2}{4} - \frac{2a^2xy}{4} + \frac{a^2y^2}{4}\right) - a^2\left(\frac{b^2x^2}{4} + \frac{2b^2xy}{4} + \frac{b^2y^2}{4}\right) = b^2a^2$$

$$\cancel{a^2b^2}xy = \cancel{a^2b^2}$$

$$y = \frac{1}{x}$$

Questão 5

Item a

Lema 2. *Seja $X(t)$ um vetor, se $\|X(t)\| = c, \forall t \in \mathbb{R}, c \neq 0$, ou seja, vetor de módulo constante não nulo, então:*

$$\langle X(t), X'(t)\rangle = 0$$

Demonstração.

$$\langle X(t), X(t)\rangle = c^2$$

Como vale para todo t, podemos derivar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle X(t), X(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c^2 = 0$$

Aplicando a regra da cadeia

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle X(t), X(t)\rangle &= \langle X(t)', X(t)\rangle + \langle X(t), X'(t)\rangle \\ &= 2\langle X(t), X'(t)\rangle = 0\end{aligned}$$

e $2\langle X(t), X'(t)\rangle = 0 \implies \langle X(t), X'(t)\rangle = 0$ ■

Seja então $c(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ a posição da particula no tempo t_0 dada pela função $c : I \to \mathbb{R}^3$, sabemos que velocidade mede a variação da posição, portanto $\dot{c}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))$ é o vetor velocidade no ponto t_0 que é um vetor tangente a curva descrita por $c(t)$ no ponto t_0. Como $\dot{c}(t_0)$ é não nulo, então $|\dot{c}(t_0)| \neq 0$, podemos então definir um vetor unitário que é tangente a curva:

$$T(t_0) = \frac{\dot{c}(t_0)}{\|\dot{c}(t_0)\|}$$

Então $T(t_0)$ é o vetor que nos dá a direção da velocidade.
Se olharmos para a variação de $T(t)$, temos $T'(t)$ e como $\|T(t)\| = 1$, então pela Lema 2

$$\langle T(t), T'(t)\rangle = 0$$

Tomamos então o vetor unitário na direção de $T'(t_0)$, que continua sendo ortogonal a $T(t_0)$

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

E este é o vetor na direção Normal.
Aceleração é a variação da velocidade, temos então que aceleração é dada por $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{c}(t) = \ddot{c}(t)$. Como temos dois vetores ortogonais $T(t_0)$ e $N(t_0)$, podemos decompor as componentes de $\ddot{c}(t_0)$ nestes vetores, de forma que a aceleração será um combinação linear desses vetores

ortogonais.
Sendo x_T a componente aceleração tangencial, e x_N a componente aceleração normal, ambos escalares, temos então definido o vetor de aceleração normal de c em t_0: $\ddot{c}_N(t_0)$

$$\begin{aligned}
\ddot{c}(t_0) &= x_T(t_0)T(t_0) + x_N(t_0)N(t_0) \\
\ddot{c}_T(t_0) &= \frac{\langle \ddot{c}(t_0), T(t_0)\rangle}{\|T(t_0)\|^2}T(t_0) = x_T(t_0)T(t_0) \\
\ddot{c}_N(t_0) &= \frac{\langle \ddot{c}(t_0), N(t_0)\rangle}{\|N(t_0)\|^2}N(t_0) = x_N(t_0)N(t_0)
\end{aligned}$$

Item b

Vamos olhar para a velocidade e aceleração de c_1, aplicando regra da cadeia e derivando em relação a s

$$\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c_1(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c(\alpha(s)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c(\alpha(s))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha(s) \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}c_1(s) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}c(\alpha(s)) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}c(\alpha(s))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha^2(s) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c(\alpha(s))\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\alpha(s)
\end{cases}$$

Como $\alpha(s_0) = t_0$, podemos reescrever:

$$\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c_1(s_0) = \dot{c}(t_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha(s_0) \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}c_1(s_0) = \ddot{c}(t_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha^2(s_0) + \dot{c}(t_0)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\alpha(s_0)
\end{cases}$$

Mas $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha(s_0)$ e $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\alpha(s_0)$ são escalares, podemos então encontrar a aceleração normal para $c_1(s_0)$

$$\begin{aligned}
c''_{1N}(s_0) &= \frac{\langle {\alpha'}^2(s_0)\ddot{c}(t_0) + \alpha''(s_0)\dot{c}(t_0), N(t_0)\rangle}{\|N(t_0)\|^2}N(t_0) \\
&= \frac{\langle {\alpha'}^2(s_0)\ddot{c}(t_0), N(t_0)\rangle + \cancelto{0,\text{pelo Lema 2}}{\langle \alpha''(s_0)\dot{c}(t_0), N(t_0)\rangle}}{\|N(t_0)\|^2}N(t_0) \\
&= {\alpha'}^2(s_0)\frac{\langle \ddot{c}(t_0), N(t_0)\rangle}{\|N(t_0)\|^2}N(t_0) \\
&= {\alpha'}^2(s_0)\ddot{c}_N(t_0)
\end{aligned}$$

E a norma da aceleração normal

$$\|c''_{1N}(s_0)\| = |{\alpha'}^2(s_0)| \cdot \|\ddot{c}_N(t_0)\|$$

E Vamos calcular o módulo da velocidade de $c_1(s_0)$

$$\|c'_1(s_0)\| = |\alpha'(s_0)| \cdot \|\dot{c}_N(t_0)\|$$

Podemos agora comparar a razão entre norma da aceleração normal e norma da velocidade para c_1 e c

$$\frac{\|\ddot{c}_N(t_0)\|}{\|\dot{c}(t_0)\|^2} = \frac{\|c''_{1N}(s_0)\|}{\|c'_1(s_0)\|^2}$$

$$\frac{\|\ddot{c}_N(t_0)\|}{\|\dot{c}(t_0)\|^2} = \frac{\cancel{|\alpha'^2(s_0)|} \cdot \|\ddot{c}_N(t_0)\|}{\cancel{|\alpha'(s_0)|^2} \cdot \|\dot{c}(t_0)\|^2}$$

$$\frac{\|\ddot{c}_N(t_0)\|}{\|\dot{c}(t_0)\|^2} = \frac{\|\ddot{c}_N(t_0)\|}{\|\dot{c}(t_0)\|^2}$$