NOTAS DE ESTUDO EM ÁLGEBRA LINEAR
UM GUIA DE TEOREMAS, RESULTADOS IMPORTANTES E EXERCÍCIOS

Gil S. M. Neto
Graduando em Matemática Aplicada - UFRJ
gilsmneto@gmail.com, gil.neto@ufrj.br
http://mirandagil.github.io

Criado em 07 de Agosto de 2019

Atualizado em August 7, 2019

Contents

1 Fundamentos

1.1 O Espaço Vetorial

Um espaço vetorial $\mathbb{V}$ é um objeto matemático, dizemos $\mathbb{V}$ é um E.V. sobre um corpo $\mathbb{K}$, onde são definidas duas operações:

- Soma (+): $u + v = z \ \forall u, v, z \in \mathbb{V}$
- Multiplicação por escalar (·): $k \cdot v = z \ \ \forall k \in \mathbb{K}, v, z \in \mathbb{V}$

Axiomas de Espaços Vetoriais

1. Soma é comutativa: $u + v = v + u$
2. Soma é associativa $u + (v + z) = (u + v) + z$
3. Existe um elemento $E \in \mathbb{V}$, chamando elemento neutro tal que $v + E = v, \forall\, v \in \mathbb{V}$
4. Para todo $v \in \mathbb{V} \ \exists - v$, tal que: $v + (-v) = E$
5. Multiplicação por escalar é associativa: $a(bu) = (ab)u \ \forall \ a, b \in \mathbb{K}, u \in \mathbb{V}$
6. Multiplicação por escalar é distributiva: $(a + b)u = au + bu$ e $a(u + v) = au + av$
7. $1 \cdot v = v, \forall \ v \in \mathbb{V}$

Consequência dos Axiomas

- O Elemento neutro é único

  Proof. Vamos supor que exista outro elemento neutro: E e E' logo: $E + v = v = E' + v$ utilizando o inverso da soma

  $$\begin{aligned} E + v &= E' + v \\ E + v - v &= E' + v - v \\ E + E &= E' + E' \\ E &= E' \end{aligned}$$

  ■

- Lei do cancelamento: $w + v = w + u \implies v = u, \forall\, w, v, u \in \mathbb{V}$

  Proof.

  $$\begin{aligned} w + v &= w + u \\ &\text{Utilizando existência do inverso} \\ w + v - w &= w + u - w \\ v + E &= u + E \\ &\text{Utilizando o elemento neutro} \\ v &= u \end{aligned}$$

  ■

- $0 \cdot v = E \ \ \forall\, v \in \mathbb{V}$

  Proof.

  $$\begin{aligned} &\text{Usando distributividade} \\ (0 + 0)v &= 0v \\ 0v + 0v &= 0v \\ &\text{Usando existência do inverso} \\ 0v + 0v - 0v &= 0v - 0v \\ 0v &= E \end{aligned}$$

  ■

- $a \neq 0, v \neq E \implies av \neq E,\ \forall\, v \in \mathbb{V}, a \in \mathbb{K}$

  Proof.

$$\begin{aligned} av &= E \\ 1v &= v \\ &= (a \cdot a^{-1})v \\ &= a^{-1}(av) \\ &= a^{-1}E \\ v &= E \end{aligned}$$

■

- $-1 \cdot v = -v, \forall\, v \in \mathbb{V}$

  Proof.

$$\begin{aligned} v + -1v &= 1v + -1v \\ \text{Utilizando distributividade da multiplicação} v + -1v &= (1-1)v \\ v + -1v &= 0v \\ \text{Propriedade de elemento neutro} \\ v + -1v &= E \\ v - v + -1v &= E - v \\ E + -1v &= -v \\ -1v &= -v \end{aligned}$$

■

- E = (0,0,. . . ,0)

  Proof. $z = (0, 0, \ldots, 0), v = (v_1, \ldots, v_n)$

$$\begin{aligned} v + z &= (v_1 + 0, v_2 + 0, \ldots, v_n + 0) \\ v + z &= (v_1, v_2, \ldots, v_n) \\ v + z &= v \\ &\text{z tem então propriedade de elemento neutro, mas o elemento neutro é único, logo} \\ z &= E \end{aligned}$$

■

1.2 Isomorfismo

Isomorfismo é um mapa que preserva as estruturas de grupo entre dois conjuntos.
Dois espaços lineares são isomorfos se são homeomorfos e se há uma bijeção entre eles. Espaços lineares isomorfos são indistiguiveis pelas operações definidas neles.
Se temos dois espaços vetoriais isomorfos $\mathbb{V}, \mathbb{U}$ com $a, b, c \in \mathbb{V}$ e $x, y, z \in \mathbb{U}$ e temos $a = x, b = yec = z$, então:

$$a + b = c \implies x + y = z$$

Bibliografia

References

[1] Peter D. Lax: *Linear Algebra and it's applications*. 2nd ed. Wiley (2007)