Gil Sales M. Neto & João Victor de Fonseca

Projeto 2
MAE001 - Modelagem Mat. em Finanças I
Valor de Contrato e Discretização do Modelo Binomial e Metódo de Monte Carlo

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Bacharelado em Matemática Aplicada

Prof.: Marco Cabral

Brasil

Junho, 2019

Sumário

1 Os Algoritmos

Esta seção tem como objetivo apresentar todos os códigos utilizados nas simulações.

1.1 O modelo e valores de contrato

Utilizamos a linguagem Python3 para a implementação do algoritmo que discretiza o modelo binomial e calcula os valores de contrato.

```
In [3]: ## Entradas:
        ### s0 -> valor inicial
        ### sf -> array com 2 valores finais sf[0] = heads, sf[1] =
        ↪  tails
        ### t -> fração a ser dividida do tempo
        ### probs -> array com ptil e qtil
        ### r -> taxa de juros
        ### k -> valor de payoff do contrato
        ### tipo -> tipo do contrato: 0 = call, 1 = put
        def binomial(s0,sf,t,probs,r,k,tipo=0):
            # definindo u e d e neutra-riscos
            u = sf[0]/s0
            d = sf[1]/s0
            p_til = probs[0]
            q_til = probs[1]
            t_int = int(t**(-1))

            # esperança e desvio padrão do modelo
            mi = p_til*u + q_til * d
            sig = np.sqrt(p_til*q_til*(u-d)**2)

            # discretizando ainda mais o tempo para garantir não
            ↪  arbitragem
            M0 = 1+(sig/mi)**2
```

```python
M1 = ((1+r)/mi)
while (1-M1**t)**2 >= (M0**t-1): t = t/2

# esperança e desvio padrão discretizados
mi_t = mi**t
sig_t = np.sqrt((mi**2 + sig**2)**t - (mi**2)**t)
# up & down & taxa de juros discretizados
u_disc = mi_t + sig_t
d_disc = mi_t - sig_t
r_disc = (1+r)**t -1

# garantia de não arbitragem
assert(d_disc < 1+r_disc and 1+r_disc <  u_disc)

# gerando os valores finais da ação
Sf = []
for i in range(t_int):
    Sf.append(s0*u_disc**(t_int-i-1)*d_disc**(i))

# gerando os valores finais do contrato com payoff
def payoff(s):
    ## Faz um call
    if tipo == 0:
        aux = [i - k if i > k else 0 for i in Sf]
    ## Faz um put
    else:
        aux = [k - i if k > i else 0 for i in Sf]
    return aux

# metódo para calcular v_{n-1} a partir de v_{n}(H) e
↪   v_{n}(T)
def vprev(v_h,v_t):
    v_p = (1/(1+r_disc))*(p_til*v_h + q_til*v_t)
    return (v_p)

# Criando array de Valores do contrato
```

```python
Vf = payoff(Sf)
Vs = [Vf]

# percorrendo e preenchendo os valores de V até V_0
for j in range(t_int-1):
    aux = []
    for i in range(len(Vs[-1])-1):
        aux.append(vprev(Vs[-1][i],Vs[-1][i+1]))
    Vs.append(aux)

# retorna Todos os valores de contrato e os valores finais
↪  da ação
return Vs,Sf
```

Esse algoritmo tem depedência do pacote Numpy do Python, e os gráficos foram plotados com o pacote MatPlotLib.pyplot

1.1.1 Chamando o metódo

1.1.1.1 European Call

```
In [11]: binomial(4,[8,2],1/4,[1/2,1/2],1/4,5,0)[0]
```

```
Out[11]: [[4.979032264304619, 0.5807356147419425, 0, 0],
          [2.629051909806835, 0.27461291734574655, 0.0],
          [1.3730583228186053, 0.12985643115181125],
          [0.7106845088072969]]
```

1.1.1.2 European Put

```
In [12]: binomial(4,[8,2],1/4,[1/2,1/2],1/4,5,1)[0]
```

```
Out[12]: [[0, 0, 1.8789949589546282, 3.2545898715395354],
          [0.0, 0.8885218578953032, 2.427522388772923],
          [0.4201560457601976, 1.5680605106848662],
          [0.9401695625695541]]
```

1.1.2 Plots dos gráficos

1.1.2.1 Preparando os valores em 2^{12} momentos

```
In [8]: vs_call = []
vs_put = []
for n in                    range(1,13):
    vs_call.append(binomial(4,[8,2],1/2**n,[1/2,1/2],1/4,5,0)[0][-1])
    vs_put.append(binomial(4,[8,2],1/2**n,[1/2,1/2],1/4,5,1)[0][-1])
```

1.1.2.2 Plot European Call

```
In [9]: ns = np.linspace(1,12,12)
lbls = ['$2^{'+ str(i) + '}$' for i in range(1,13)]
plt.figure(figsize=(10,6))
plt.plot(ns,vs_call,marker='o')
plt.title('Modelo discretizado - Contrato Call')
plt.xticks(ns,labels=lbls)
plt.yticks()
plt.xlabel('Quantidade de tempos')
plt.ylabel('Valor ${V_0}$ do contrato')
plt.grid()
plt.show()
```

1.1.2.3 Plot European Put

```
In [10]: plt.figure(figsize=(10,6))
plt.plot(ns,vs_put,marker='o')
plt.title('Modelo discretizado - Contrato Put')
plt.xticks(ns,labels=lbls)
plt.yticks()
plt.xlabel('Quantidade de tempos')
plt.ylabel('Valor ${V_0}$ do contrato')
plt.grid()
plt.show()
```

1.2 Atividade 2

1.2.1 O algoritmo de Monte Carlo

In [8]:
```
def path_values(s0, t, u, d, probs):
    Si = s0
    S = []

    # definindo u e d e neutra-riscos
    p_til = probs[0]
    q_til = probs[1]
    t_int = int(t**(-1))

    # esperança e desvio padrão do modelo
    mi = p_til*u + q_til * d
    sig = np.sqrt(p_til*q_til*(u-d)**2)

    # esperança e desvio padrão discretizados
    mi_t = mi**t
    sig_t = np.sqrt((mi**2 + sig**2)**t - (mi**2)**t)
    # up & down & taxa de juros discretizados
    u_disc = mi_t + sig_t
    d_disc = mi_t - sig_t

    for i in range(t_int):
        rnd = np.random.rand()
        if rnd < p_til:
            Si *= u_disc
        else:
            Si *= d_disc
        S.append(Si)
    return S

def monte_carlo(s,k,tipo=0):
    def payoff(s):
    ## Faz um call
        if tipo == 0:
```

```
                aux = [i - k if i > k else 0 for i in s]
            ## Faz um put
            else:
                aux = [k - i if k > i else 0 for i in s]
            return aux
        return payoff(s)
```

1.2.2 Rodando com t = 1/4 - Call

```
In [9]: ## Exemplo de Monte Carlo com t = 1/4 Call
        vs_mc_call = []
        for i in range(5000):
                        vs_mc_call.append(monte_carlo(path_values(4,1/4,2,1/2,[1/
        v0_mc_call = np.mean([np.mean(i) for i in vs_mc_call])
        print(v0_mc_call)
```

```
0.7034103415047368
```

1.2.3 Rodando com t = 1/4 - Put

```
In [10]: ## Exemplo de Monte Carlo com t = 1/4 Put
         vs_mc_put = []
         for i in range(5000):

             ↪  vs_mc_put.append(monte_carlo(path_values(4,1/4,2,1/2,[1/2,1/2]),5,1))
         v0_mc_put = np.mean([np.mean(i) for i in vs_mc_put])
         print(v0_mc_put)
```

```
1.0787617878550155
```

1.2.4 Gráficos de comparação

1.2.4.1 Preparando os dados

```
In [11]: vs_mc_call = []
         vs_mc_put = []
```

```
v0_mc_call = []
v0_mc_put = []
for n in range(1,13):
    for i in range(10000):

        ↪ vs_mc_put.append(monte_carlo(path_values(4,1/2**n,2,1/2,[1/2,1/2]),5

        ↪ vs_mc_call.append(monte_carlo(path_values(4,1/2**n,2,1/2,[1/2,1/2]),
    v0_mc_call.append([np.mean(i) for i in vs_mc_call])
    v0_mc_put.append([np.mean(i) for i in vs_mc_put])
v0_med_mc_call = [np.mean(i) for i in v0_mc_call]
v0_med_mc_put = [np.mean(i) for i in v0_mc_put]
```

1.2.4.2 Plot dos valores V_0 para Monte Carlo Call

```
In [12]: plt.figure(figsize=(10,6))
         plt.plot(ns,v0_med_mc_call,marker='o')
         plt.title('Monte Carlo - Contrato Call')
         plt.xticks(ns,labels=lbls)
         plt.yticks()
         plt.xlabel('Quantidade de tempos')
         plt.ylabel('Valor ${V_0}$ do contrato')
         plt.grid()
         plt.show()
```

1.2.4.3 Erro entre Binomial e Monte Carlo

```
In [13]: erro_call = [abs(i-j) for (i,j) in zip(v0_med_mc_call,vs_call)]
         plt.figure(figsize=(10,6))
         plt.loglog(ns,erro_call,marker='o')
         plt.title('Erro Monte Carlo e Binomial - European Call')
         plt.xticks(ns,labels=lbls)
         plt.yticks()
         plt.xlabel('Quantidade de tempos')
         plt.ylabel('Valor ${V_0}$ do contrato')
         plt.grid()
         plt.show()
```

1.2.4.4 Plot dos valores V_0 para Monte Carlo Put

In [16]:
```
plt.figure(figsize=(10,6))
plt.plot(ns,v0_med_mc_put,marker='o')
plt.title('Monte Carlo - Contrato Put')
plt.xticks(ns,labels=lbls)
plt.yticks()
plt.xlabel('Quantidade de tempos')
plt.ylabel('Valor ${V_0}$ do contrato')
plt.grid()
plt.show()
```

1.2.4.5 Erro entre Binomial e Monte Carlo

In [14]:
```
erro_put = [abs(i-j) for (i,j) in zip(v0_med_mc_put,vs_put)]
plt.figure(figsize=(10,6))
plt.loglog(ns,erro_put,marker='o')
plt.title('Erro Monte Carlo e Binomial - European Put')
plt.xticks(ns,labels=lbls)
plt.yticks()
plt.xlabel('Quantidade de tempos')
plt.ylabel('Valor ${V_0}$ do contrato')
plt.grid()
plt.show()
```

1.3 Atividade 3

1.3.1 Monte Carlo com Call Asiático path dependent

In [32]:
```
def  path_values(s0,t, u, d, probs):
    Si = s0
    S = []
    # definindo u e d e neutra-riscos
    p_til = probs[0]
    q_til = probs[1]
    t_int = int(t**(-1))

    # esperança e desvio padrão do modelo
```

```
mi = p_til*u + q_til * d
sig = np.sqrt(p_til*q_til*(u-d)**2)

# esperança e desvio padrão discretizados
mi_t = mi**t
sig_t = np.sqrt((mi**2 + sig**2)**t - (mi**2)**t)
# up & down & taxa de juros discretizados
u_disc = mi_t + sig_t
d_disc = mi_t - sig_t

for i in range(t_int):
                rnd = np.random.rand()
                if rnd < p_til:
                                Si *= u_disc
                else:
                                Si *= d_disc
                S.append(Si)
return S

def monte_carlo_asian(s,k,tipo=0):
                def payoff(s):
                                soma = sum(s)
                                #print(soma)
                                ## Faz um call
                                if tipo == 0:
                                                aux =
                                                ↪   [1/len(s)*(soma)
                                                ↪  - k if
                                                ↪   (1/len(s)*(soma))
                                                ↪   > k else 0
                                                ↪   for i in s]
                                return aux
                return payoff(s)
```

1.3.2 Gerando dados para o gráfico

```
In [61]: ## Exemplo de Monte Carlo com path dependent
         vs_mc_call = []
         ts = np.linspace(100,20000,50)
         v0s = []
         for j in ts:
             #aux = []
             for i in range(int(j)):

                 ↪ vs_mc_call.append(monte_carlo_asian(path_values(4,1/4,2,1/2,[1/2,1/
             v0_mc_call = np.mean([np.mean(i) for i in vs_mc_call])
             v0s.append(v0_mc_call)
```

```
[0.4375963652392393, 0.5430647987100987, 0.5659954994665015,
↪ 0.5887257301647619, 0.6063966674512364, 0.6007000475802122,
↪ 0.59761603881015, 0.5999644474723044, 0.5976725740468002,
↪ 0.603708748419119, 0.5977466652728642, 0.5996175339288562,
↪ 0.6020554644317307, 0.602865690827988, 0.6024661399474587,
↪ 0.6000492886401212, 0.5983613964338844, 0.5979717109927528,
↪ 0.5975483331239534, 0.5959104950513261, 0.5963203347462082,
↪ 0.596151614168296, 0.5956277630799244, 0.5966015807360663,
↪ 0.595932506843876, 0.5955148715654366, 0.597069574112133,
↪ 0.5962722420278928, 0.5948332512707466, 0.5938287254192948,
↪ 0.5933789118258452, 0.5939371717689256, 0.5926664383095693,
↪ 0.5926750699858094, 0.5927138671174984, 0.5921893638611629,
↪ 0.5916076288860549, 0.5921668737877549, 0.5917103705536981,
↪ 0.5919960225949764, 0.5930161021609842, 0.5936357141924494,
↪ 0.5938755724718722, 0.5936678269710457, 0.5940933579439398,
↪ 0.593703826512015, 0.5937905229117144, 0.5936783432336281,
↪ 0.593402765992101, 0.5933350639634067]
```

1.3.3 Plotando o gráfico

```
In [66]: plt.figure(figsize=(10,6))
         plt.plot(ts,v0s)
```

```
plt.title('Convergência de Monte Carlo para Contratos que
↪  dependem do caminho')
plt.xlabel('Nº de simulações de caminho')
plt.ylabel('Valor de $V_0$')
plt.grid()
plt.show()
```

2 Atividade 1

Foi pedido para escolher dois exemplos de contrato europeu, um put e um call, os modelos escolhidos foram:

- Exemplo 1.1.1 - página 3

  S(0) = 4

  u = 2

  d = 1/2

  r = 1/4

  k = 5

  European Call

- Exemplo 1.3.1 - página 15

  S(0) = 4

  u = 2

  d = 1/2

  r = 1/4

  k = 5

  European Put

Os modelos foram discretizados em $\Delta t = 1/4$ e seus valores de contrato seguem:

2.0.1 European Call

Contrato no tempo	Valor do contrato
V (HHH)	4.98
V (HHT) = V (HTH)	0.58
V (HTT) = V (THH)	0
V (TTT)	0
V (HH)	2.63
V (HT) = V (TH)	0.28
V (TT)	0
V (H)	1.37
V (T)	0.13
V_0	0.71

$V_0 = 1.20$ no livro.

2.0.2 European Put

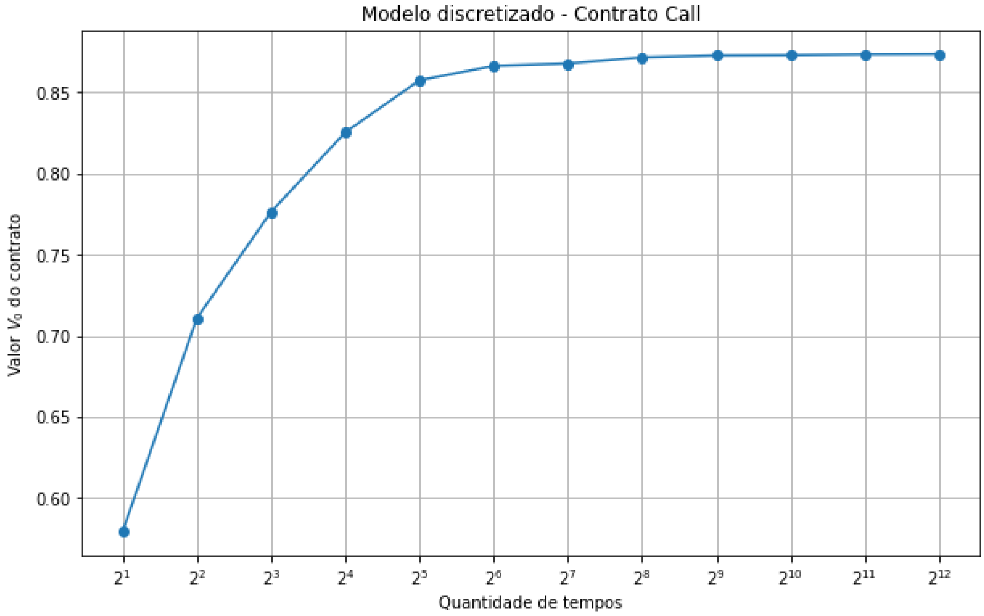
Contrato no tempo	Valor do contrato
V(HHH)	0
V(HHT) = V(HTH)	0
V(HTT) = V(THH)	1.88
V(TTT)	3.25
V(HH)	0
V(HT) = V(TH)	0.89
V(TT)	2.43
V(H)	0.42
V(T)	1.57
V_0	0.94

$V_0 = 0.864$ no livro.

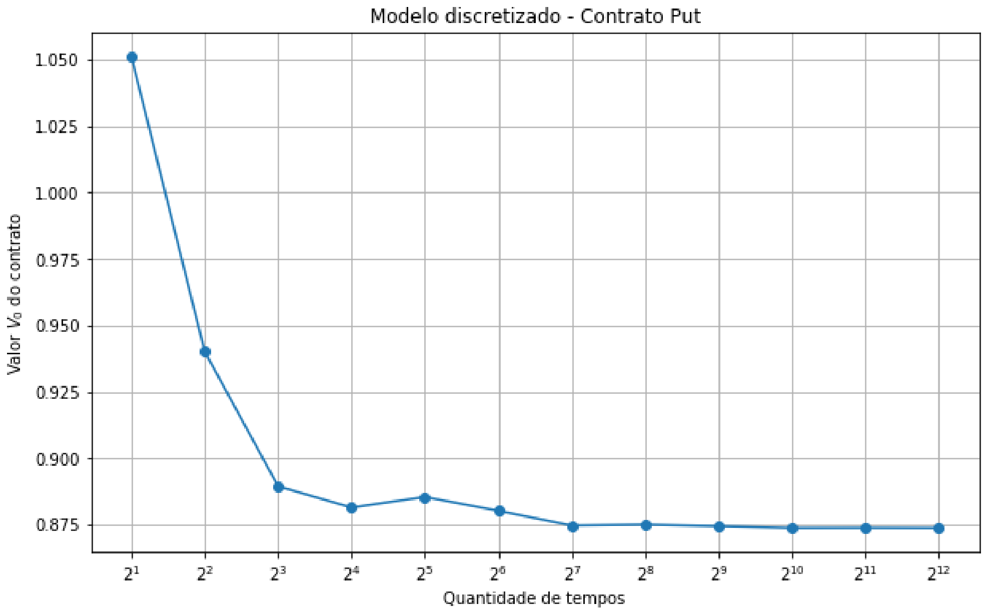
2.0.3 Gráficos de V_0 em função do número de valores finais

Foi gerado um gráfico para cada modelo de contrato, com discretização do tempo em $2^k, k = 1, \ldots, 12$ plotando o valor inicial V_0 de cada contrato em função da quantidade de tempos

2.0.3.1 European Call



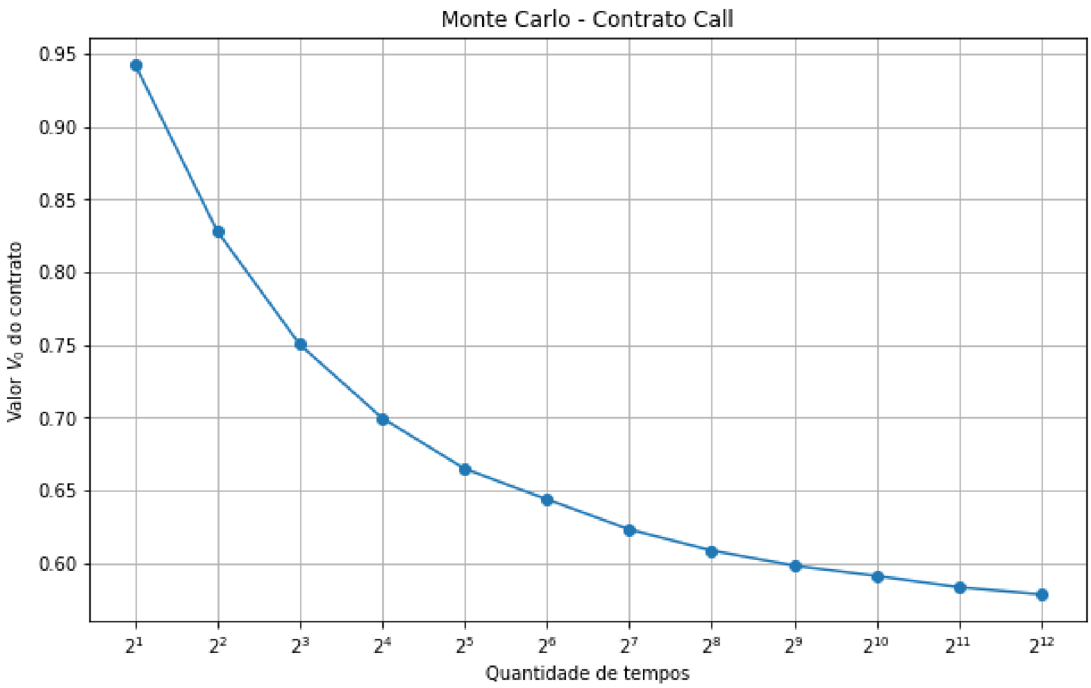
2.0.3.2 European Put



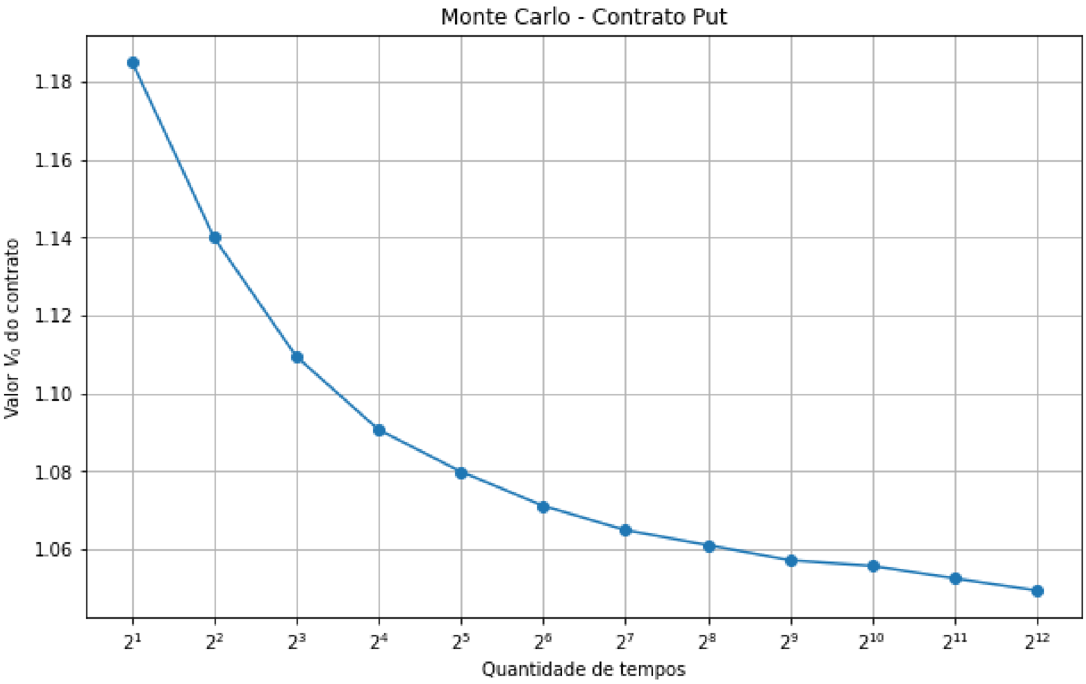
3 Atividade 2

3.1 Gráficos dos valores de contrato com Monte Carlo

3.1.1 European Call

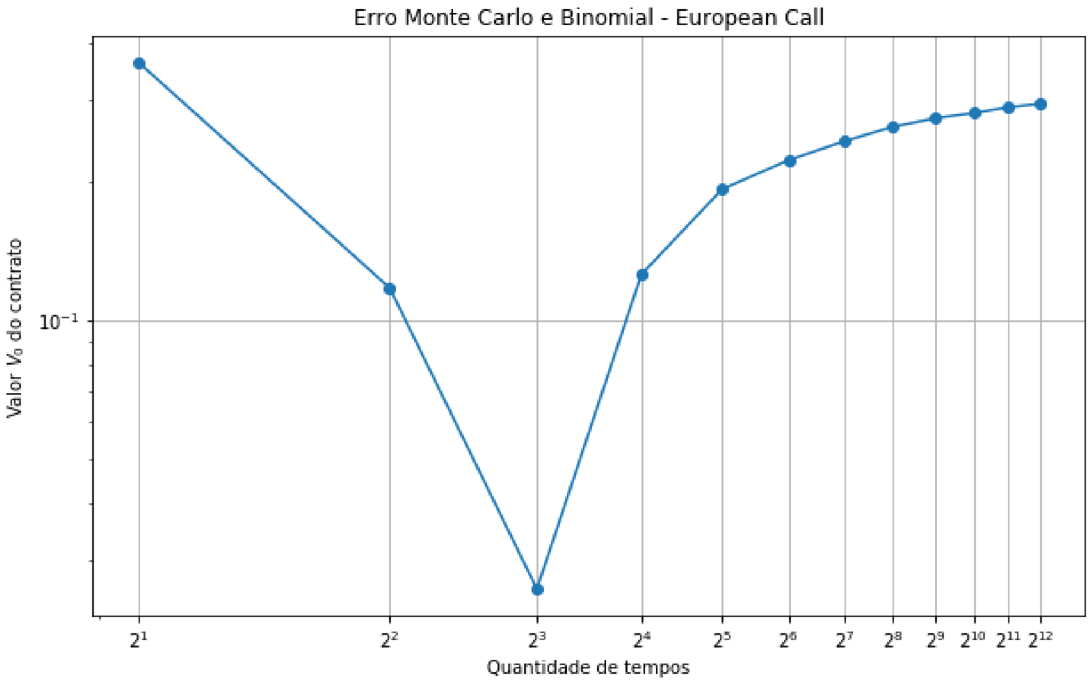


3.1.2 European Put

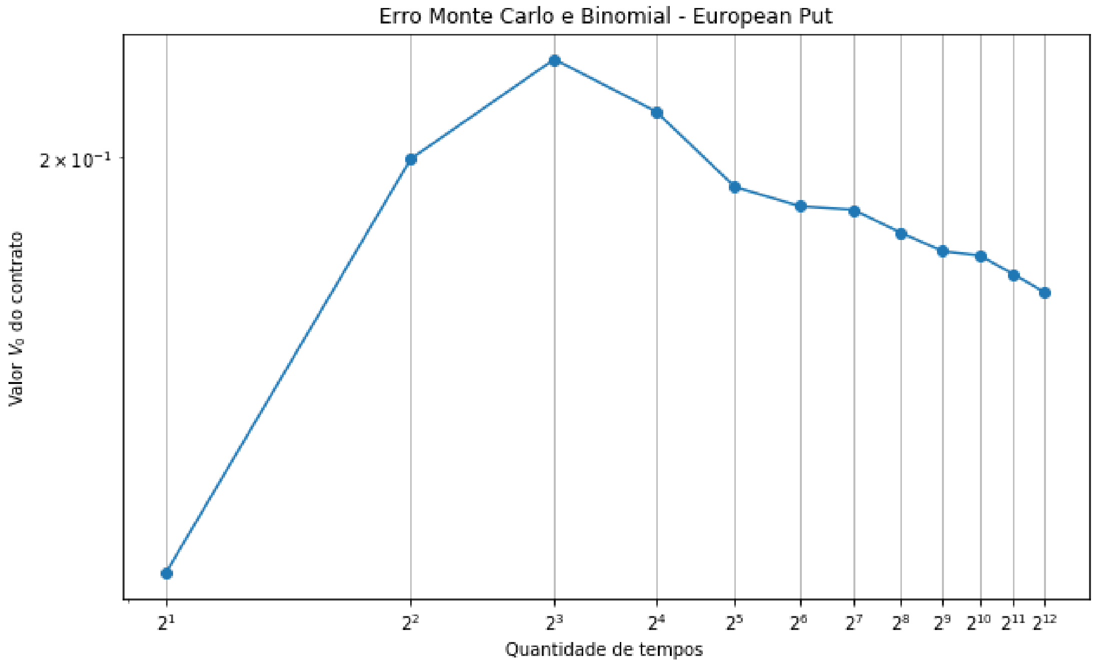


3.2 Gráficos de Comparação de erro entre Binomial e Monte Carlo

3.2.1 European Call



3.2.2 European Put



4 Atividade 3

Foi usado o modelo de Call Asiático do exercício 1.8 página 22 - Shreve e geramos um gráfico da convergência do metódo para essa opção, plotando valor V_0 por números de simulações, de 100 a 20000