UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO

Um estudo sobre metódos simpléticos

Solução Númerica do problema dos n-corpos

Gil Sales M. Neto

Outline for Section 1

1. Light Frames
    1.1 Blind Text

O Problema dos N-Corpos

O problema dos dois, três ou n-corpos é um problema de mecânica clássica ou mecânica quântica que modela o movimento de n partículas. O movimento é calculado utilizando as Leis de Movimento de Newton, e a Lei da Gravitação Universal de Newton.

One Differential Equation to rule them all

One Differential Equation to FIND them all

A segunda lei de Newton

$$F = ma$$

A Lei da Gravitação Universal

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

The One Differential equation

$$\ddot{r} = G \cdot \frac{m_2}{||r||^2}$$

Redução de ordem da EDO e sistema de Equações

A equação diferencial

$$\ddot{r}_i = G \cdot \sum_{j=0}^{8} \frac{m_j}{\|r_{i,j}\|^2}$$

Reduzindo a um sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t} = v_i \\ \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = G \cdot \sum_{j=0}^{8} \frac{m_j}{\|r_{i,j}\|^2} \end{cases}$$

E resolvendo esse sistema de equações podemos determinar a posição do corpo *i*

As leis físicas que regem o movimento dos planetas

As 3 leis de Kepler

1. Planetas se movem ao redor do Sol em órbitas Elipticas, com o Sol em um dos focos
2. Um planeta varre a mesma área em um mesmo período de tempo
3. Os quadrados dos períodos de revolução dos planetas são diretamente proporcionais aos cubos dos raios médios de suas órbitas

Conservação de Energia Mecânica e Momento Angular

- $E = K_e + P_e$
- $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$
- $L = r \times p$
- $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0$

Discretização da EDO

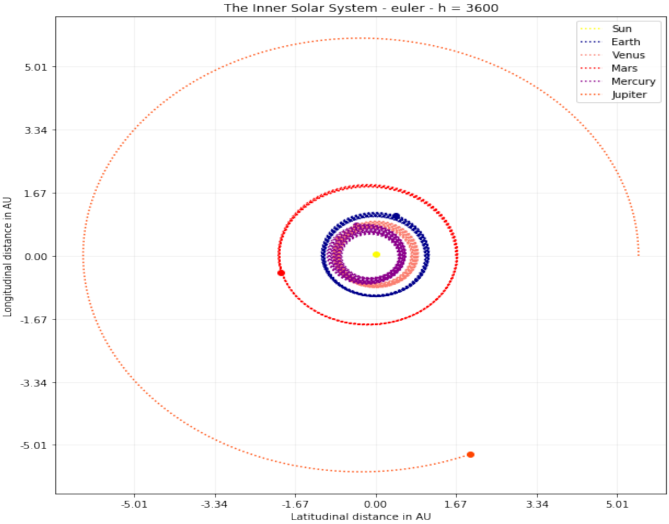
O Metódo de Euler

Podemos discretizar a nossa equação diferencial com base no metódo de Euler, que é um metódo de passo explicito.
A discretização é feita com a expansão em Série de Taylor das equações diferenciais

$$\begin{cases} r_{t+1} = r_t + \Delta t \cdot v_t \\ v_{t+1} = v_t + \Delta t \cdot a_t \end{cases}$$

Visualizando a solução

A órbita dos planetas



O que deu errado?

Integradores Simpléticos

O metódo de Euler explicito conserva apenas aproximadamente a energia do sistema.

Metódos simpléticos conservam exatamente uma quantia que aproximadamente é a Energia.

Leapfrog Integrators

- Euler-Cromer
- 3 Step Verlet
- 7 Step Verlet

Euler-Cromer

Verlet-Stormer

$$\begin{cases} v_{t+1} = v_t + \Delta t \cdot a_t \\ r_{t+1} = r_t + \Delta t \cdot v_{t+1} \end{cases}$$

Integrador de Verlet de 3 passos

Velocity Verlet

$$\begin{cases} v_{t_{\frac{1}{2}}} = v_t + \frac{1}{2}\Delta t \cdot a_t \\ r_{t+1} = r_t + \Delta t \cdot v_{t_{\frac{1}{2}}} \\ v_{t+1} = v_{t_{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\Delta t \cdot A(r_{t+1}) \end{cases}$$

Integrador de Verlet de 7 passos

Leapfrog

$$
\begin{cases}
w & = \sqrt[3]{2} \\
f & = 2 - w \\
leap_1 = leap_7 & = \frac{h}{2f} \\
leap_2 = leap_6 & = \frac{h}{f} \\
leap_3 = leap_5 & = (1 - w)\frac{h}{2f} \\
leap_4 & = -h\frac{w}{f}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
x_1 & = x_t + leap_1 \cdot v_t \\
v_2 & = v_t + leap_2 \cdot A(x_1) \\
x_3 & = x_1 + leap_3 \cdot v_2 \\
v_4 & = v_2 + leap_4 \cdot A(x_3) \\
x_5 & = x_3 + leap_5 \cdot v_4 \\
v_{t+1} & = v_4 + leap_6 \cdot A(x_5) \\
x_{t+1} & = x_5 + leap_7 \cdot v_{t+1}
\end{cases}
$$

Muito Obrigado!

Inspirado no texto de Carl Sagan

Diante da vastidão do tempo e da imensidão do universo, é um prazer para mim dividir um planeta, uma época e uma matéria com vocês.