

Computação Científica I

Lista 1: Newton e Secante, Simetrias e Análise

Professor: Bernardo Costa

Monitores: Gabriela Lewenfuss, Rodrigo Lima e Vitor Luiz

22 de agosto de 2017... para 4 de Setembro

*“[...] about 97% of the time[,] premature optimization is the root of all evil.
Yet we should not pass up our opportunities in that critical 3%.”*

Donald E. Knuth, 1974

A primeira parte desta lista é uma preparação. Ela contém algumas considerações comuns a todos os métodos que exploram, de alguma forma, a primeira (e implicitamente, a segunda) derivada da função. Em seguida, analisamos as iterações do método de Newton e da secante, mostrando que, em determinadas circunstâncias, os pontos são gerados entre o atual e a raiz.

1 Simetrias e sinais das derivadas

A maior parte dos métodos vai usar, implícita ou explicitamente, as derivadas de f - se não na construção da recorrência, no mínimo ao fazer a análise de convergência do método. Assim, para simplificarmos a nossa vida, vamos reduzir todos os problemas a uma mesma “situação padrão”.

Para ficar mais concreto, vamos analisar o método de Newton. Também supomos que a derivada $f'(z)$ no zero de f não se anula.

1. Seja $g(x) = -f(x)$. Mostre que o método de Newton para g e para f produz a mesma sequência de pontos. Conclua que podemos supor que a derivada de f em sua raiz z é positiva.
2. Mais geralmente, o que acontece com o método de Newton se $g(x) = Cf(x)$, para uma constante C ? Conclua que também podemos supor que $f'(z) = 1$. (Lembre que supomos $f'(z) \neq 0$.)
3. A segunda derivada, em z , só tem três possibilidades: pode ser maior, igual ou menor do que zero. Supondo $f'(z) = 1$, faça um esboço de três funções, cada uma delas numa das situações acima.
4. Mostre que o método de Newton é “invariante por translação”. Ou seja, se $g(x) = f(x + b)$ (ou seja, g é uma translação de f), os pontos obtidos pela iteração de Newton para g são transladados dos iterados para f .

5. Se z é uma raiz de f , que translação produz uma função g com raiz em zero? Conclua que podemos supor, ao analisar o método de Newton, que a raiz é $z = 0$.
6. Supomos $z = 0$ do caso anterior. Seja $g(x) = -f(-x)$. Mostre que $z = 0$ ainda é uma raiz de g , e que a derivada de g neste ponto tem o mesmo sinal que a de f . Agora, mostre que o sinal da segunda derivada de g é oposto ao da segunda derivada de f . Enfim, explique qual é a relação entre o método de Newton aplicado a g e a f .
7. De forma mais geral, considere a mudança de variáveis e funções dada por $g(x) = Cf(ax + b)$. Se z é uma raiz de f , e $f''(z) \neq 0$, como escolher a , b e C para que $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ e $g''(0) = 1$?
Como relacionar a iteração de Newton para f com a de g ?
8. A mesma modificação pode ser usada para a bisseção, e o método da secante. Como cada um deles se comporta?

2 Análise local

Depois de “reduzir” o nosso estudo à situação padrão dada ao final da seção anterior, em que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 1$, podemos começar a analisar a convergência dos métodos com mais facilidade!

Vamos supor que $f \in \mathcal{C}^2$ é duas vezes derivável, com segunda derivada contínua.

1. Use a continuidade das derivadas de f para mostrar que existe um intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ onde $1/2 < f'(x) < 3/2$ e $1/2 < f''(x) < 3/2$ para todo x no intervalo.
2. Suponha agora que $0 < x < \varepsilon$ está neste intervalo. Usando a fórmula de Taylor centrada em z , mostre que $f(x) > 0$. Conclua que $N_f(x) < x$.
3. Mostre que $N_f(x) = \frac{f''(\xi)}{2f'(x)}x^2$. Usando os sinais das derivadas, conclua que a iteração de Newton gera um ponto entre 0 e x , e portanto também no intervalo.
4. Que estimativa podemos usar para a velocidade de convergência do método de Newton, nestas condições?
5. Aplicação análoga ao método da secante. Suponha que ambos os pontos iniciais são positivos e estão no intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Para fixar a notação, suponha portanto $0 < x < y < \varepsilon$. Mostre que, analogamente, o método vai gerar sempre pontos positivos, cada vez mais próximos da raiz.

Comece mostrando que $S_f(x, y) = x - \frac{f(x)}{f'(\xi)}$, para algum $x < \xi < y$.

6. Bônus. Mostre que o método de Newton, partindo de $-\varepsilon$ como acima, gera um ponto entre 0 e ε . Para isso, use que $N_f(a) = \frac{f'(a)a - f(a)}{f'(a)}$, e escreva $f(a) = \int_0^a f'(u)du$. Como f' é monótona em $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (porquê?), e $f'(0) = 1$, conclua que $N_f(-\varepsilon) \leq \frac{\int_{-\varepsilon}^0 [1 - f'(-\varepsilon)]dt}{f'(-\varepsilon)}$. Agora, use que $f' > 1/2$ e termine.

O que isso diz sobre o método da secante, no mesmo intervalo?