FODASE

Curso ministrado por Prof. Marco Cabral - UFRJ 2019.1

Gil Sales Miranda Neto

Gil Sales Miranda Neto, Aluno de Graduação no Bacharelado em Matemática Aplicada - UFRJ
Imagem da capa por Unsplash: https://unsplash.com/photos/R9OueKOtGGU
Última atualização April 9, 2019

1 Definindo termos

Definição 1. ***Não Arbitragem*** *Em um mercado que esteja tudo ocorrendo nos conforme, uma pessoa não encontrar uma oportunidade que seja sem risco e que pague mais do que a poupança. Esta é a teoria da não arbitragem. Arbitragem significa que você consegue encontrar uma oportunidade que é de baixissimo risco e altissima remuneração. Esse tipo de oportunidade não existe pois caso contrário, todo o mercado a usaria.*
Ou seja, é uma estratégia de investimento com zero probabilidade de perda e probabilidade positiva de lucro. Um modelo matemático que permite arbitragem não pode ser usado para análise.

Definição 2. ***Preço de opções no modelo binomial*** *O inicio do periodo é chamado de tempo zero. No tempo zero temos uma ação onde o preço por parte é dado por $S_0 > 0 \in \mathbb{R}$. Ao avançar o período para o tempo um, teremos um dos dois valores: $S_1(H)$ ou $S_1(T)$, onde H e T se referem a Head e Tails, do lançamento de moedas. Assumingo a probabilide de H: $p > 0$ e de T: $1 - p > 0$*
$S_0 \to S_1(H) = uS_0$ *ou* $S_0 \to S_1(T) = dS_0$

Definição 3. ***Up & Down factors e Taxa de Juros***
Definimos os números positivos

$$u = \frac{S_1(H)}{S_0}$$

$$d = \frac{S_1(T)}{S_0}$$

Como os fatores de subida e descida do valor da ação. Obviamente por definição temos $d < u$. Caso $d = u$, o valor da ação não é aleatório e o modelo não nos interessa.
A taxa de juros r significa que um dinheiro aplicado na poupança no tempo zero, irá render $1 + r$ no tempo um. Obviamente definimos $r \geq 0$
Para não haver arbitragem devemos assumir $0 < d < 1 + r < u$

Teorema 1. *Principio Fundamental da Contagem*
Considere dois experimentos A_1 e A_2, supondo que A_1 tenha a_1 possíveis resultados e A_2 tenha a_2 possíveis resultados, então o número de modos que os eventos A_1 e A_2 podemos ocorrem sucessivamente é $a_1 \cdot a_2$
inserir tree diagram e prova

Teorema 2. *Amostragem com reposição Considere n objetos e o evento de tomar k dentre estes n, onde se n_i for tomado, pode ser tomado novamente num próximo experimento. Então há n^k possíveis resultados.*
inserir prova

Teorema 3. *Amostragem sem repetição Considere n objetos e o experimento de tomar k dentre estes n objetos, onde se n_i for resultado de um experimento, no próximo ele não pode ser tomado como resultado. Então há $n(n-1)\dots(n-k+1)$, com $n \geq k$*

1.1 O problema do aniversário

Suponha que há k pessoas em uma sala. Assumindo que o aniversário de cada uma é equiprovavel para todos os 365 do ano. Qual a probabilidade de duas ou mais fazerem aniversário no mesmo dia?
Pelo teorema 2, há 365^k combinações diferentes para distribuir os aniversários para k pessoas.
Como queremos que ao menos 2 pessoas compartilhem um dia de aniversário, vamos calcular o caso onde NINGUÉM compartilha nenhum aniversário, dai tomamos o complementar deste conjunto de eventos. Ou seja, se alguém faz aniversário em um dia, este dia não pode mais se repetir, aplicamos

aqui o Teorema 2. $365 \cdot 364 \ldots (365 - k + 1)$
Tomando a probabilidade do evento A *de ninguém compartilhar aniversário teremos*

$$P(A) = \frac{365 \cdot 364 \ldots (365 - k + 1)}{365^k}$$

E a probabilidade do evento B*, onde ao menos duas pessoas compartilham um aniversário*

$$P(B) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \ldots (365 - k + 1)}{365^k}$$

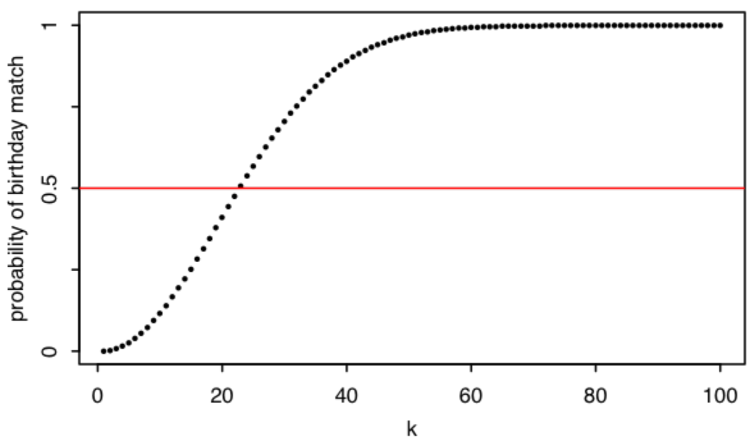

Figure 1: Probabilidade de que em uma sala com k pessoas, ao menos 2 tenham nascido no mesmo dia.