NOTAS DE ESTUDO EM ANÁLISE I (ANÁLISE REAL) UM GUIA DE TEOREMAS, RESULTADOS IMPORTANTES E EXERCÍCIOS

Gil S. M. Neto
Graduando em Matemática Aplicada - UFRJ
gilsmneto@gmail.com, gil.neto@ufrj.br
http://mirandagil.github.io

Criado em 22 de Julho de 2019

Atualizado em September 24, 2019

Contents

1 Teoria Ingênua dos Conjuntos

Definição 1.1 (Informal de conjuntos)**.** *Um conjunto é uma coleção não ordenada de objetos. Se x é um objeto do conjunto A, dizemos $x \in A$, caso contrário dizemos $x \notin A$.*
Exemplo: $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $7 \notin \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Axioma 1.1 (Conjuntos são objetos)**.** *Se A é um conjunto, então A também é um objeto, ou seja, se existe outro conjunto B, então faz sentido inferir $A \in B$ ou $A \notin B$*

Exemplo. Seja $B = \{1, 3, \{4, 5\}, 8\}$; $A = \{4, 5\}$, então $A \in B$
Seja $C = \{1, 3, 4, 5, 8\}$; $D = \{4, 5\}$, então $C \subset D$
é importante notar que apesar de $4 \in A, 5 \in A$, é verdade que $4 \notin B, 5 \notin B$ (verificar)

Definição 1.2 (Subconjuntos)**.** $A \subset B \iff x \in A \implies x \in B, \forall x \in A$

Definição 1.3 (Igualdade de Conjuntos)**.** *Definimos dois conjuntos $A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$*
Ou seja, $x \in A \implies x \in B, \forall x \in A \wedge y \in B \implies y \in A, \forall y \in B$

Axioma 1.2 (Conjunto Vazio)**.** *Existe um conjunto ao qual nenhum objeto pertence. A este grupo denominamos $\emptyset$. Para qualquer objeto x, temos $x \notin \emptyset$.*

Lema 1.1 (O Conjunto vazio é subconjunto de todo conjunto)**.** *Seja A um conjunto qualquer, então $\emptyset \subset A$*

Proof. Suponha que $\emptyset \not\subset A$, para qualquer conjunto A. Para negar a Definição 1.2 teremos: $A \not\subset B \iff \exists x \in A; x \notin B$
Logo, para termos $\emptyset \not\subset A$, deve existir um objeto em $\emptyset$ que não está contido em A, mas não há nenhum objeto em $\emptyset$, logo uma contradição, e temos $\emptyset \subset A$, $\forall A$ ■

Lema 1.2 (O conjunto vazio é único)**.** *Proof.* Seja $\emptyset, \emptyset'$ conjuntos vazios, então do Lema 1.1 temos $\emptyset \subset \emptyset'$ e $\emptyset' \subset \emptyset$, e pela Definição 1.3 $\emptyset = \emptyset'$. ■

Lema 1.3 (Escolha única)**.** *Seja A um conjunto não vazio, então existe ao menos um x tal que $x \in A$*

Proof. Suponha que não exista nenhum objeto x pertencente a A, então: $x \notin A$, $\forall x$, mas isso implicaria que A é um conjunto vazio, o que contraria a hipótese. ■

Este lema nos permite escolher algum elemento de A. Ainda mais, dado uma família finita de Conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, podemos escolher um elemento de cada conjunto $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Para o caso infinito cairá no Axioma da Escolha, assunto a ser desenvolvido em outro momento.

Axioma 1.3 (Singleton)**.** *Dado um objeto a, então existe um conjunto de apenas um elemento $\{a\}$. Ou seja, para todo objeto $x, x \in \{a\} \iff y = a$. Ainda mais, para todo objeto a, b existe um conjunto $\{a, b\}$ onde $\forall y, y \in \{a, b\} \iff y = a \vee y = b$*

2 A construção dos números

2.1 Números Naturais e Inteiros $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$

2.2 Números Racionais $\mathbb{Q}$

2.3 Números Reais $\mathbb{R}$

3 Demonstrações sobre os Reais

3.1 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Vamos mostrar que a equação

$$p^2 = 2 \tag{1}$$

não tem solução nos racionais.
Primeiro vamos provar uma pequena proposição

Proposição (n^2 par $\iff$ n é par)**.** .

Proof. $\Leftarrow$
n par implica que podemos escrever $n = 2m$ para um dado m. Então

$$n^2 = (2m)^2 = 4m^2$$

e podemos reescrever $4m^2 = 2 \cdot (2m^2)$, logo n^2 é par.
$\Rightarrow$
Vamos assumir que n seja ímpar, então podemos escrever $n = 2m + 1$, logo

$$n^2 = (2m+1)^2 = (4m^2 + 4m + 1) = 2(2m^2 + 2m) + 1$$

O que nos daria que n^2 é ímpar contrariando a hipótese, logo n é par. ∎

Assumindo por hipótese que (1) tenha solução nos reais, podemos escrever $p = \frac{m}{n}$ com $mdc(m, n) = 1$, temos então

$$\frac{m^2}{n^2} = 2$$
$$m^2 = 2n^2$$

Mas isso nos dá m^2 que pela proposição implica em m par. Mas se m^2 é par, então $m^2 \geq 4$, o que nos diz que $2n^2$ é divísivel por 4, com uma manipulação chegamos que n^2 par implicando que n é par, então $mdc(n, m) \neq 1$ o que contraria a hipótese, logo $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Bibliografia

References

[1] Tao, T.: *Analysis I*. 1st ed. Hindustan Book Agency (2006)
[2] Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis*. 3rd ed. McGraw-Hill (1976)
[3] Lima, E.: *Curso de Análise vol I*. 14ª ed. IMPA (2016)
[4] Neri, C. & Cabral, M.: *Curso de Análise Real*. 2ª ed. (2011)