NOTAS DE ESTUDO EM ANÁLISE I (ANÁLISE REAL) UM GUIA DE TEOREMAS, RESULTADOS IMPORTANTES E EXERCÍCIOS

Gil S. M. Neto
Graduando em Matemática Aplicada - UFRJ
gilsmneto@gmail.com, gil.neto@ufrj.br
http://mirandagil.github.io

Criado em 07 de Agosto de 2019

Atualizado em August 23, 2019

Contents

1 Teoria Ingênua dos Conjuntos

Definição 1.1 (Informal de conjuntos)**.** *Um conjunto é uma coleção não ordenada de objetos. Se x é um objeto do conjunto A, dizemos $x \in A$, caso contrário dizemos $x \notin A$.*
Exemplo: $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\};\ 7 \notin \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Axioma 1.1 (Conjuntos são objetos)**.** *Se A é um conjunto, então A também é um objeto, ou seja, se existe outro conjunto B, então faz sentido inferir $A \in B$ ou $A \notin B$*

Exemplo. Seja $B = \{1, 3, \{4, 5\}, 8\};\ A = \{4, 5\}$, então $A \in B$
Seja $C = \{1, 3, 4, 5, 8\};\ D = \{4, 5\}$, então $C \subset D$
é importante notar que apesar de $4 \in A, 5 \in A$, é verdade que $4 \notin B, 5 \notin B$ (verificar)

Definição 1.2 (Subconjuntos)**.** $A \subset B \iff x \in A \implies x \in B, \forall x \in A$

Definição 1.3 (Igualdade de Conjuntos)**.** *Definimos dois conjuntos $A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$*
Ou seja, $x \in A \implies x \in B, \forall x \in A \wedge y \in B \implies y \in A, \forall y \in B$

Axioma 1.2 (Conjunto Vazio)**.** *Existe um conjunto ao qual nenhum objeto pertence. A este grupo denominamos $\emptyset$. Para qualquer objeto x, temos $x \notin \emptyset$.*

Lema 1.1 (O Conjunto vazio é subconjunto de todo conjunto)**.** *Seja A um conjunto qualquer, então $\emptyset \subset A$*

Proof. Suponha que $\emptyset \not\subset A$, para qualquer conjunto A. Para negar a Definição 1.2 teremos: $A \not\subset B \iff \exists x \in A; x \notin B$
Logo, para termos $\emptyset \not\subset A$, deve existir um objeto em $\emptyset$ que não está contido em A, mas não há nenhum objeto em $\emptyset$, logo uma contradição, e temos $\emptyset \subset A, \forall A$ ∎

Lema 1.2 (O conjunto vazio é único)**.** *Proof.* Seja $\emptyset, \emptyset'$ conjuntos vazios, então do Lema 1.1 temos $\emptyset \subset \emptyset'$ e $\emptyset' \subset \emptyset$, e pela Definição 1.3 $\emptyset = \emptyset'$. ∎

Lema 1.3 (Escolha única)**.** *Seja A um conjunto não vazio, então existe ao menos um x tal que $x \in A$*

Proof. Suponha que não exista nenhum objeto x pertencente a A, então: $x \notin A, \forall x$, mas isso implicaria que A é um conjunto vazio, o que contraria a hipótese. ∎

Este lema nos permite escolher algum elemento de A. Ainda mais, dado uma família finita de Conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, podemos escolher um elemento de cada conjunto $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Para o caso infinito cairá no Axioma da Escolha, assunto a ser desenvolvido em outro momento.

Axioma 1.3 (Singleton)**.** *Dado um objeto a, então existe um conjunto de apenas um elemento $\{a\}$. Ou seja, para todo objeto $x, x \in \{a\} \iff y = a$. Ainda mais, para todo objeto a, b existe um conjunto $\{a, b\}$ onde $\forall y, y \in \{a, b\} \iff y = a \vee y = b$*

2 A construção dos números

2.1 Números Naturais $\mathbb{N}$

2.1.1 Axiomas de Peano

Axioma 2.1. *0 é um número natural*

Axioma 2.2. *Se n é natural, então $n{+}{+}$ também é natural*

Proposição 1. *3 é um número natural*
$((0{+}{+}){+}{+}){+}{+} = 3$, como 0 é natural pelo axioma 2.1, então pelo axioma 2.2, $0{+}{+} = 1$ também é natural. Como 1 é natural, $1{+}{+} = 2$ também o é, como 2 é natural, $2{+}{+} = 3$ também o é.

∎

Axioma 2.3. *0 não é sucessor de nenhum natural. Ou seja, $n{+}{+} \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$*

Proposição 2. $4 \neq 0$
Sem o axioma 2.3 poderíamos ter $4 = 0$ caso os naturais se restringissem ao conjunto $0, 1, 2, 3$, mas com a introdução deste axioma previnimos este comportamento.
$3{+}{+} = 4$, como pelo axioma 2.3, $3{+}{+} \neq 0 \implies 4 \neq 0$ ∎

Axioma 2.4. *$n++ = m++ \iff m = n$, ou seja, naturais diferentes possuem sucessores diferentes.*

Este axioma previne comportamentos bizarros como o conjunto dos naturais se limitar a $0, 1, 2, 3$, pois sem ele poderíamos ter $3++ = 4 = 4++ = 5 = 5++ = \dots$ In this section, we list some analytic statements regarding the convergence of Dirichlet series. We omit the proof of most theorems in this section; they generally reduce to extensive computation. Still, they make good exercises for the reader.

Proposição 3. *Let*

$$f(n) = \sum_{n \geq 1} \frac{a(n)}{n^s}$$

be a Dirichlet series and let $S(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$, and suppose there exist constants a and b such that $|S(x)| \leq ax^b$ for all large x. Then, $f(s)$ converges uniformly for s in

$$D(b, \delta, \epsilon) = \{\Re(s) \geq b + \delta, \arg(s - b) \leq \pi/2 - \epsilon\}$$

for all $\delta, \epsilon \geq 0$, and it converges to an analytic function on the half plane $\Re(s) > b$. (Note that $\Re(s)$ denotes the real part of s.)

Lema 2.1. *The Riemann zeta function $\zeta(s)$ has a meromorphic continuation to the half plane $\Re(s) > 0$ with a simple pole at $s = 1$.*

Lema 2.2. *For s real and $s > 1$,*

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$$

Hence, $\zeta(s)$ has a simple pole at $s = 1$ and

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \text{function holomorphic near } 1$$

Proof. This is left as an exercise to the reader. (Hint: Look at the graph of $y = x^{-s}$ and relate $\zeta(s)$ to the area under the curve.) ■

Armed with this fact, we can look at other interesting Dirichlet series.

Proposição 4. *Let $f(n)$ be a Dirichlet series for which there exists constants C, a, and $b < 1$ such that $|S(n) - an| \leq Cx^b$. Then, f extends to a meromorphic function on $\Re(s) > b$ with a simple pole at $s = 1$ with residue a.*

Proof. For the Dirichlet series $f(s) - a\zeta(s)$, $|S(n)| \leq Cx^b$, so by Proposition 3, this series converges for $\Re(s) > b$. The result readily follows. ■

Before we move on, we encounter one last lemma that will prove to be useful soon.

Lema 2.3. *Let $u_1, u_2, \cdots$ be a sequence of real numbers ≥ 2 for which*

$$f(s) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - u_j^{-s}}$$

is uniformly convergent on each region $D(1, \delta, \epsilon)$ (with $\delta, \epsilon > 0$). Then,

$$\log f(s) \sim \sum \frac{1}{u_j^s}$$

as $s \to 1^+$ (i.e., from the right side of the plane).

Proof. This is a simple exercise in manipulating sums. (Hint: use the Maclaurin series for $\log(1 - x)$ and then break the double sum apart.) ■

Bibliografia

References

[1] Tao, T.: *Analysis I*. 1st ed. Hindustan Book Agency (2006)