Correção da P1 - Probabilidade 1 2019.1
Prof$^{\text{a}}$. Mária Eulália

Gil Sales M. Neto

May 12, 2019

Questão	Pontuação
1	a - 1.5 — b - 1
2	a - 1 — b - 0.5 — c - 1
3	2.5
4	a - 0.5 — b - 1 — c - 0.5 — d - 0.5

Table 1: Pontuação das questões

Questão 1

Letra a) X_i número observado na extração. $X_i \in 1, 2, \ldots, N$
$X = max\, X_i, 1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= P([x \leq k] \setminus [x \leq k-1]) \\
&= P(X \leq k) - P(X \leq k-1) \\
&= \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n \\
&= \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i}(k-1)}{N^n}
\end{aligned}$$

Letra b) Ela provou para caso geral $2 \leq n < N$, mas a prova pede apenas $n = 2$

$$\begin{cases}
P(Y \leq k) = \dfrac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}} \\
P(Y \leq x) = 0, \text{ se } x < n \\
P(Y = k) = \dfrac{\binom{k}{n} - \binom{k-1}{n}}{\binom{N}{n}}
\end{cases}$$

Para caso $n = 2$ $P(Y \leq k) = \begin{cases} 0, k < n \\ \frac{\binom{k}{2}}{\binom{N}{2}} = \frac{k(k-1)}{N(N-1)} = \frac{2(k-1)}{N(N-1)} \end{cases}$

Questão 2
V: Tem vírus
D: Envia Mensagem de vírus

$P(V) = 0.2$	$P(D\|V) = 0.9$	$P(D\|V^c) = 0.02$
$P(V^c) = 0.8$	$P(D^c\|V) = 0.1$	$P(D^c\|V^c) = 0.98$

Table 2: Informações dadas pelo exercicio

Letra a)

$$\begin{aligned} P(V^c|D) &= \frac{P(V^c \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{P(V^c)P(D|V^c)}{P(V^c)P(D|V^c) + P(V)P(D|V)} \\ &= \frac{0.8 * 0.02}{0.8 * 0.02 + 0.2 * 0.9} \\ &\approx \frac{81}{1000} \end{aligned}$$

Letra b)

$$\begin{aligned} P(V \cap D^c) &= P(V)P(D^c|V) \\ &= \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{2}{100} \end{aligned}$$

Letra c)

$$\begin{aligned} P(V|D^c) &= \frac{P(V \cap D^c)}{P(D^c)} \\ &= \frac{P(V)P(D^c|V)}{P(V^c)P(D^c|V^c) + P(V)P(D^c|V)} \\ &= \frac{0.2 * 0.1}{0.8 * 0.98 + 0.2 * 0.1} \\ &\approx \frac{25}{1000} \end{aligned}$$

Questão 3
Sejam X_1, X_2, variaveis aleatórias independentes.

$P(X_1 = k) = e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1}{k!}, P(X_2 = k) = e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} P(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) &= \frac{P(X_1 = k, X_1 + X_2 = n)}{P(X_1 + X_2 = n)} \\ &= \frac{P(X_1 = k, X_2 = n - k)}{P(X_1 + X_2 = n)} \\ &= \frac{P(X_1 = k)P(X_2 = n - k)}{P(X_1 + X_2 = n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_1, X_2 = n) &= \sum_{i=0}^{n} P(X_1 = i, X_2 = n - i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} P(X_1 = i)P(X_2 = n - i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^i}{i!} \cdot e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^i}{n - i!} \\ &= \frac{e^{-\lambda_1 + \lambda_2}}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \underbrace{\lambda_1^i \lambda_2^{n-i}}_{(\lambda_1 + \lambda_2)^n} \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{P(X_1 = k)P(X_2 = n - k)}{P(X_1 + X_2 = n)} &= \frac{\cancel{e^{-\lambda_1}} \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot \cancel{e^{-\lambda_2}} \frac{\lambda_2}{k!}}{\cancel{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k} \end{aligned}$$

Questão 4

Letra a $\mathrm{f}_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, z \in D \\ 0, z \notin D \end{cases}$

Letra b $\mathrm{F}_s = X + Y$
$d^2 + d^2 = (s+1)^2 \implies d = \frac{s+1}{\sqrt{2}}$
$\mathrm{P(X+Y} \in s) = \begin{cases} 0, s < -1 \\ \frac{s+1}{2}, -1 \leq s \leq 1 \\ 1, s \geq 1 \end{cases}$

Letra c $\mathrm{P(X} \geq x), -1 \leq x \leq 1$

Letra d Não, tome X = 2/3
$P(X \geq 2/3) > 0, P(Y \geq 2/3) > 0$
mas: $P(X \geq 2/3 \cap Y \geq 2/3) = 0$