# Questão 1

## Dados do problema

# Questão 3

A demonstração para este exercício consistirá em construir $\gamma$ de forma a possuir todos os elementos de $\alpha$ e ir 'inserindo' no conjunto também os elementos de $\beta$ que sejam L.I. com $\alpha$, dessa maneira chegará um momento em que não há mais elementos em $\beta$ que sejam L.I. com $\alpha$ e então $\gamma$ será um conjunto gerador de $\mathbb{V}$ e $\alpha \subset \gamma \subset \beta \cup \alpha$

**Lema 1** (Lema da lesma)**.** *Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial, e $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \mathbb{V}$, com $X$ linearmente independente de modo que $X \cup \{w\}$ é linearmente dependente, $\forall w \in \mathbb{V}$. Ou seja, $X$ é um conjunto L.I. maximal, que possui o máximo de elementos LI de um dado espaço vetorial. Então $X$ gera $\mathbb{V}$.*

*Demonstração.* Seja $w \in \mathbb{V}$, então por hipotese $\{w, x_1, \ldots, x_n\}$ é L.D., ou seja $\exists\, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ com ao menos um dos $a_i \neq 0$ de forma que

$$a_0 w + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

De fato, $a_0 \neq 0$, caso contrário $a_0 = 0 \implies a_i \neq 0, i \neq 0$ mas isso contradiz o fato de $X$ ser L.I.
Portanto podemos reescrever

$$w = \frac{-a_1 x_1}{a_0} + \cdots + \frac{-a_n x_n}{a_0}$$

Ou seja, $w$ é uma combinação linear dos elementos de $X$, como estamos assumindo $\forall w \in \mathbb{V}$, então $X$ gera $\mathbb{V}$ `q.e.d.`

# Questão 4

Dada a hipérbole $h$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Podemos fazer a seguinte mudança de variaveis: $\begin{cases} x = au \\ y = bv \end{cases}$

Então teremos:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ &= \frac{\cancel{a^2}u^2}{\cancel{a^2}} - \frac{\cancel{b^2}v^2}{\cancel{b^2}} \\ &= u^2 - v^2 \end{aligned}$$

Então a transformação linear $T_1$ que leva a hipérbole $h$ na nova hipérbole $h_1$, e: $T_1 \cdot (x, y) = (u, v)$

Observando agora que em $h_1$ temos uma diferença de quadrados, e que em $xy = 1$ temos um produto de dois termos, podemos então pensar na seguinte mudança de variaveis: $\begin{cases} u = \frac{1}{2}(p-q) \\ v = \frac{1}{2}(p+q) \end{cases}$

Dessa maneira:

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 &= 1 \\ &= \frac{1}{4}(p-q)^2 - \frac{1}{4}(p+q)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\cancel{p^2} - 2pq + \cancel{q^2} - \cancel{p^2} - 2pq \cancel{- q^2}\right) \\ &= pq \end{aligned}$$

Sendo esta $pq = 1$ a hipérbole $h_2$. Então há uma transformação linear $T_2$ que leva $h_1$ em $h_2$, de forma que $T_2 \cdot (u, v) = (p, q)$

Para encontrar a transformação linear que leva $h_0$ em $h_2$ basta:

$$\begin{aligned} T_1 \cdot (x, y) &= (u, v) \\ T_2 \cdot (u, v) &= (p, q) \\ &\text{logo:} \\ &(p, q) = T_1 \cdot T_2 \cdot (x, y) \end{aligned}$$

Sendo $D = T_1 \cdot T_2$, esta é a matriz procurada. Para saber quais são as matrizes $T_1, T_2$, podemos fazer a matriz jacobiana da mudança de varíavel:

$$T_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

E a matriz $T_2$

$$T_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial u}{\partial q} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

E finalmente $D = T_1 \cdot T_2$

$$D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} \\ \\ \frac{b}{2} & \frac{b}{2} \end{bmatrix}$$

Verificando:

$$\begin{bmatrix} \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} \\ \\ \frac{b}{2} & \frac{b}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ax}{2} - \frac{ay}{2} & , \frac{bx}{2} + \frac{by}{2} \end{bmatrix}$$

Usando essas novas coordenadas em $h$

$$\frac{\left(\frac{ax}{2} - \frac{ay}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{bx}{2} + \frac{by}{2}\right)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2 \left(\frac{a^2x^2}{4} - \frac{2a^2xy}{4} + \frac{a^2y^2}{4}\right) - a^2 \left(\frac{b^2x^2}{4} + \frac{2b^2xy}{4} + \frac{b^2y^2}{4}\right) = b^2a^2$$
$$\cancel{a^2b^2}xy = \cancel{a^2b^2}$$
$$y = \frac{1}{x}$$

# Questão 5

## Item a

**Lema 2.** *Seja $X(t)$ um vetor, se $\|X(t)\| = c, \forall t \in \mathbb{R}, c \neq 0$, ou seja, vetor de módulo constante não nulo, então:*

$$\langle X(t), X'(t) \rangle = 0$$

*Demonstração.*

$$\langle X(t), X(t) \rangle = c^2$$

Como vale para todo $t$, podemos derivar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle X(t), X(t) \rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c^2 = 0$$

Aplicando a regra da cadeia

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle X(t), X(t) \rangle &= \langle X(t)', X(t) \rangle + \langle X(t), X'(t) \rangle \\ &= 2\langle X(t), X'(t) \rangle = 0\end{aligned}$$

e $2\langle X(t), X'(t) \rangle = 0 \implies \langle X(t), X'(t) \rangle = 0$ `q.e.d.`

Seja então $c(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ a posição da particula no tempo $t_0$ dada pela função $c : I \to \mathbb{R}^3$, sabemos que velocidade mede a variação da posição, portanto $\dot{c}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))$ é o vetor velocidade no ponto $t_0$ que é um vetor tangente a curva descrita por $c(t)$ no ponto $t_0$. Como $\dot{c}(t_0)$ é não nulo, então $|\dot{c}(t_0)| \neq 0$ , podemos então definir um vetor unitário que é tangente a curva:

$$T(t_0) = \frac{\dot{c}(t_0)}{\|\dot{c}(t_0)\|}$$

Então $T(t_0)$ é o vetor que nos dá a direção da velocidade.
Se olharmos para a variação de $T(t)$, temos $T'(t)$ e como $\|T(t)\| = 1$, então pela Lema 2

$$\langle T(t), T'(t) \rangle = 0$$

Tomamos então o vetor unitário na direção de $T'(t_0)$, que continua sendo ortogonal a $T(t_0)$

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

E este é o vetor na direção Normal.
Aceleração é a variação da velocidade, temos então que aceleração é dada por $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{c}(t) = \ddot{c}(t)$.

Como temos dois vetores ortogonais $T(t_0)$ e $N(t_0)$, podemos decompor as componentes de $\ddot{c}(t_0)$ nestes vetores, de forma que a aceleração será um combinação linear desses vetores ortogonais.
Sendo $x_T$ a componente aceleração tangencial, e $x_N$ a componente aceleração normal, ambos escalares, temos então definido o vetor de aceleração normal de $c$ em $t_0$: $\ddot{c}_N(t_0)$

$$
\begin{aligned}
\ddot{c}(t_0) &= x_T(t_0)T(t_0) + x_N(t_0)N(t_0) \\
\ddot{c}_T(t_0) &= \frac{\langle \ddot{c}(t_0), T(t_0)\rangle}{\|T(t_0)\|^2}T(t_0) = x_T(t_0)T(t_0) \\
\ddot{c}_N(t_0) &= \frac{\langle \ddot{c}(t_0), N(t_0)\rangle}{\|N(t_0)\|^2}N(t_0) = x_N(t_0)N(t_0)
\end{aligned}
$$

## Item b

Vamos olhar para a velocidade e aceleração de $c_1$, aplicando regra da cadeia e derivando em relação a $s$

$$
\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c_1(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c(\alpha(s)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c(\alpha(s))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha(s) \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}c_1(s) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}c(\alpha(s)) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}c(\alpha(s))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha^2(s) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c(\alpha(s))\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\alpha(s)
\end{cases}
$$

Como $\alpha(s_0) = t_0$, podemos reescrever:

$$
\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c_1(s_0) = \dot{c}(t_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha(s_0) \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}c_1(s_0) = \ddot{c}(t_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha^2(s_0) + \dot{c}(t_0)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\alpha(s_0)
\end{cases}
$$

Mas $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha(s_0)$ e $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\alpha(s_0)$ são escalares, podemos então encontrar a aceleração normal para $c_1(s_0)$

$$
\begin{aligned}
c''_{1N}(s_0) &= \frac{\langle {\alpha'}^2(s_0)\ddot{c}(t_0) + \alpha''(s_0)\dot{c}(t_0), N(t_0)\rangle}{\|N(t_0)\|^2}N(t_0) \\
&= \frac{\langle {\alpha'}^2(s_0)\ddot{c}(t_0), N(t_0)\rangle + \cancelto{0,\text{pelo Lema 2}}{\langle \alpha''(s_0)\dot{c}(t_0), N(t_0)\rangle}}{\|N(t_0)\|^2}N(t_0) \\
&= {\alpha'}^2(s_0)\frac{\langle \ddot{c}(t_0), N(t_0)\rangle}{\|N(t_0)\|^2}N(t_0) \\
&= {\alpha'}^2(s_0)\ddot{c}_N(t_0)
\end{aligned}
$$

E a norma da aceleração normal

$$
\|c''_{1N}(s_0)\| = |{\alpha'}^2(s_0)| \cdot \|\ddot{c}_N(t_0)\|
$$

E Vamos calcular o módulo da velocidade de $c_1(s_0)$

$$\|c_1'(s_0)\| = |\alpha'(s_0)| \cdot \|\dot{c}_N(t_0)\|$$

Podemos agora comparar a razão entre norma da aceleração normal e norma da velocidade para $c_1$ e $c$

$$\frac{\|\ddot{c}_N(t_0)\|}{\|\dot{c}(t_0)\|^2} = \frac{\|c''_{1N}(s_0)\|}{\|c_1'(s_0)\|^2}$$

$$\frac{\|\ddot{c}_N(t_0)\|}{\|\dot{c}(t_0)\|^2} = \frac{\cancel{|\alpha'^2(s_0)|} \cdot \|\ddot{c}_N(t_0)\|}{\cancel{|\alpha'(s_0)|^2} \cdot \|\dot{c}(t_0)\|^2}$$

$$\frac{\|\ddot{c}_N(t_0)\|}{\|\dot{c}(t_0)\|^2} = \frac{\|\ddot{c}_N(t_0)\|}{\|\dot{c}(t_0)\|^2}$$