



UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO

Um estudo sobre métodos simpléticos

.....

Solução Numérica do problema dos n-corpos

Gil Sales M. Neto

Trabalho Final de ANEDO

O Problema dos N-Corpos

O problema dos dois, três ou n -corpos é um problema de mecânica clássica que modela o movimento de n partículas. O movimento é calculado utilizando as Leis de Movimento de Newton, e a Lei da Gravitação Universal de Newton.

One Equation to rule them all

One Equation to *find* them all

A segunda lei de Newton

$$F = ma$$

A Lei da Gravitação Universal

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

The One Differential equation

$$m_1 a = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \implies \ddot{r} = G \cdot \frac{m_2}{\|r\|^2}$$

Redução de ordem da EDO e sistema de Equações

A equação diferencial

$$\ddot{r}_i = G \cdot \sum_{j=0}^n \frac{m_j}{\|r_{i,j}\|^2}$$

Reduzindo a um sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{dr_i}{dt} = v_i \\ \frac{dv_i}{dt} = G \cdot \sum_{j=0}^n \frac{m_j}{\|r_{i,j}\|^2} \end{cases}$$

E resolvendo esse sistema de equações podemos determinar a posição do corpo i

As leis físicas que regem o movimento dos planetas

As 3 leis de Kepler

1. Planetas se movem ao redor do Sol em órbitas Elípticas, com o Sol em um dos focos
2. Um planeta varre a mesma área em um mesmo período de tempo
3. Os quadrados dos períodos de revolução dos planetas são diretamente proporcionais aos cubos dos raios médios de suas órbitas

As leis físicas que regem o movimento dos planetas

Hamiltoniano e Momento Angular

- $U = G \sum_{i,j}^n \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|},$ Self Potential Energy
- $p_i = m_i \dot{q}_i$ Momento Linear
- $H = \sum_{i=1}^n \frac{\|p_i\|^2}{2m_i} - U,$ Hamiltoniano
- $L = q \times p,$ Momento Angular
- $\|L\| = \sqrt{\|q\|^2 \|p\|^2 (\sin(\theta))^2} = \sqrt{\|q\|^2 \|p\|^2 - \langle q, p \rangle^2}$

Discretização da EDO

O Método de Euler

Podemos discretizar a nossa equação diferencial com base no método de Euler, que é um método de passo explícito.

A discretização é feita com a expansão em Série de Taylor das equações diferenciais

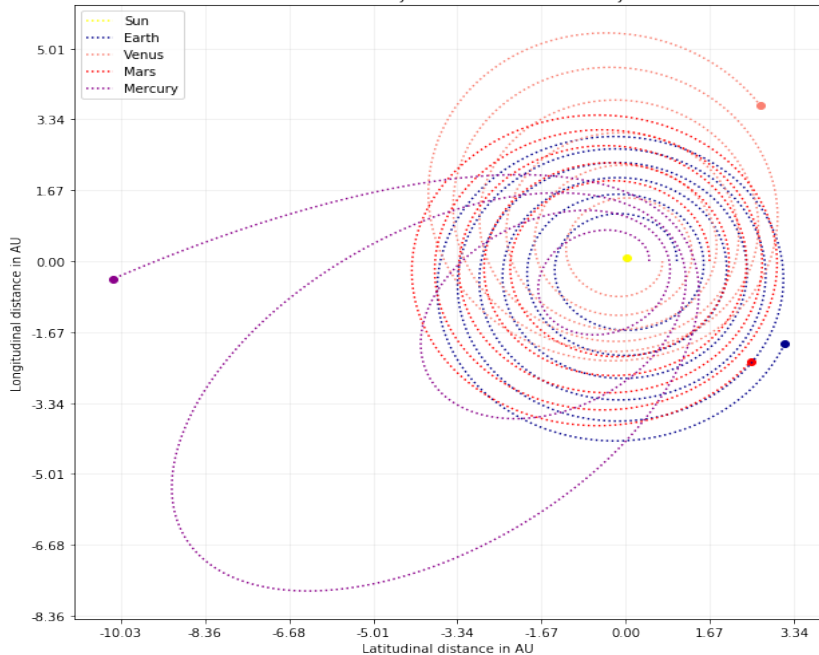
$$\begin{cases} r_{t+1} = r_t + \Delta t \cdot v_t \\ v_{t+1} = v_t + \Delta t \cdot a_t \end{cases}$$

Definindo valores iniciais

$$\left\{ \begin{array}{l} r_x(0) = \text{Afélio} \\ r_y(0) = 0 \\ v_x(0) = 0 \\ v_y(0) = \text{Velocidade orbital média} \end{array} \right.$$

<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/>

The Inner Solar System - euler - $h = 3.00$ days



O que deu errado?

Integradores Simpléticos

O método de Euler explícito conserva apenas aproximadamente a energia do sistema.

Metódos simpléticos conservam exatamente uma quantia que aproximadamente é a Energia do sistema.

Integradores Simpléticos

- Euler-Cromer
- Velocity-Verlet
- 7 Step Verlet (Leapfrog)

Integradores Simpléticos

Vantagens

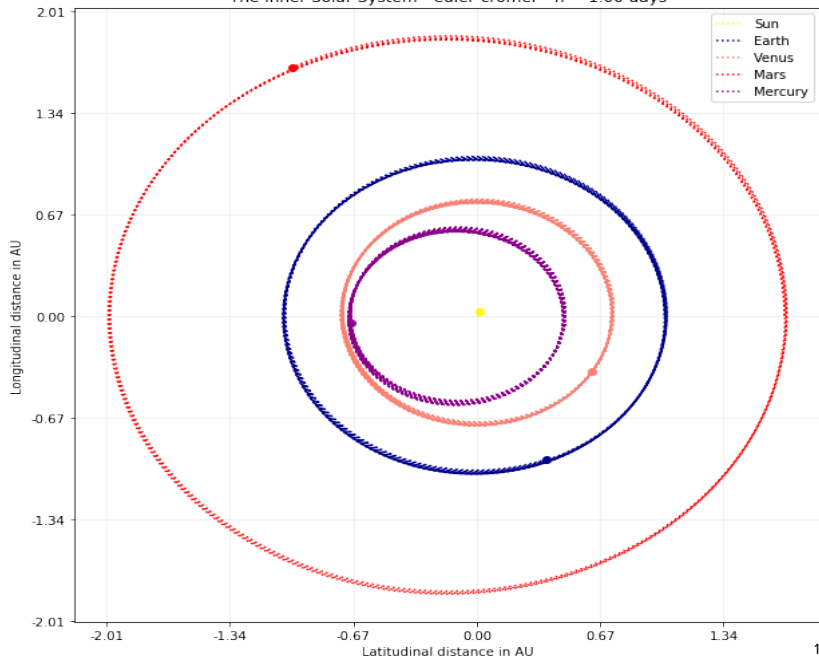
- Podem 'voltar no tempo'
- Conservam momento Angular
- Simpléticos (presevam área)

Euler-Cromer

Verlet-Stormer (Euler semi-implicit 1ª ordem)

$$\begin{cases} v_{t+1} = v_t + \Delta t \cdot a_t \\ r_{t+1} = r_t + \Delta t \cdot v_{t+1} \end{cases}$$

The Inner Solar System - euler-cromer - $h = 1.00$ days

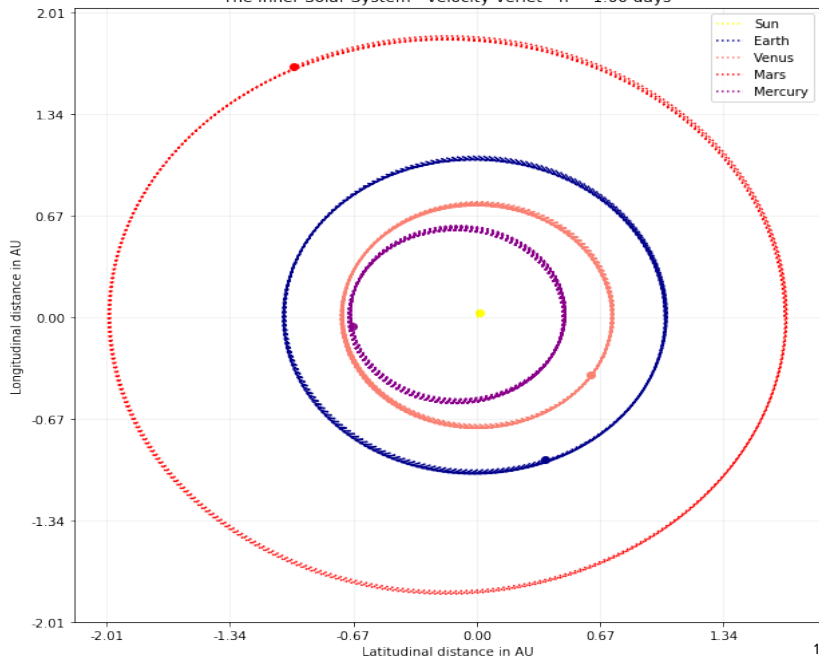


Integrador de Verlet de 3 passos

Velocity Verlet (2ª ordem)

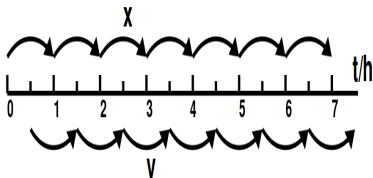
$$\begin{cases} v_{t+\frac{1}{2}} = v_t + \frac{1}{2}\Delta t \cdot a_t \\ r_{t+1} = r_t + \Delta t \cdot v_{t+\frac{1}{2}} \\ v_{t+1} = v_{t+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta t \cdot A(r_{t+1}) \end{cases}$$

The Inner Solar System - velocity-verlet - $h = 1.00$ days



Integrador de Verlet de 7 passos

Leapfrog

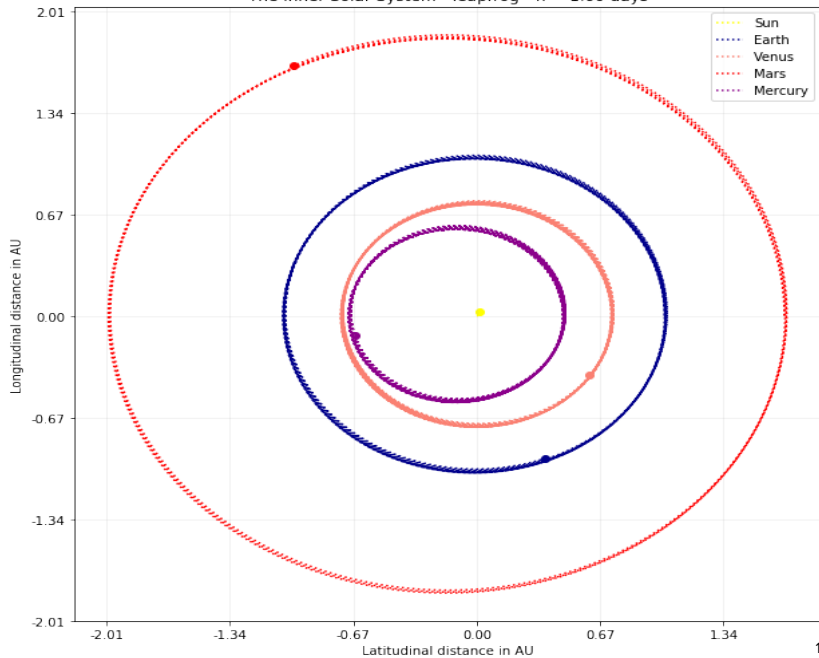


Integrador de Verlet de 7 passos

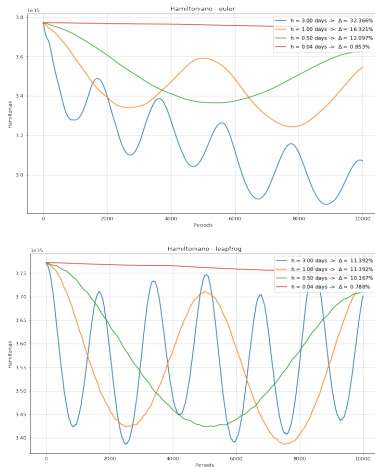
Leapfrog

$$\left\{ \begin{array}{ll} w &= \sqrt[3]{2} \\ f &= 2 - w \\ leap_1 = leap_7 &= \frac{h}{2f} \\ leap_2 = leap_6 &= \frac{h}{f} \\ leap_3 = leap_5 &= (1 - w) \frac{h}{2f} \\ leap_4 &= -h \frac{w}{f} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1 &= x_t + leap_1 \cdot v_t \\ v_2 &= v_t + leap_2 \cdot A(x_1) \\ x_3 &= x_1 + leap_3 \cdot v_2 \\ v_4 &= v_2 + leap_4 \cdot A(x_3) \\ x_5 &= x_3 + leap_5 \cdot v_4 \\ v_{t+1} &= v_4 + leap_6 \cdot A(x_5) \\ x_{t+1} &= x_5 + leap_7 \cdot v_{t+1} \end{array} \right.$$

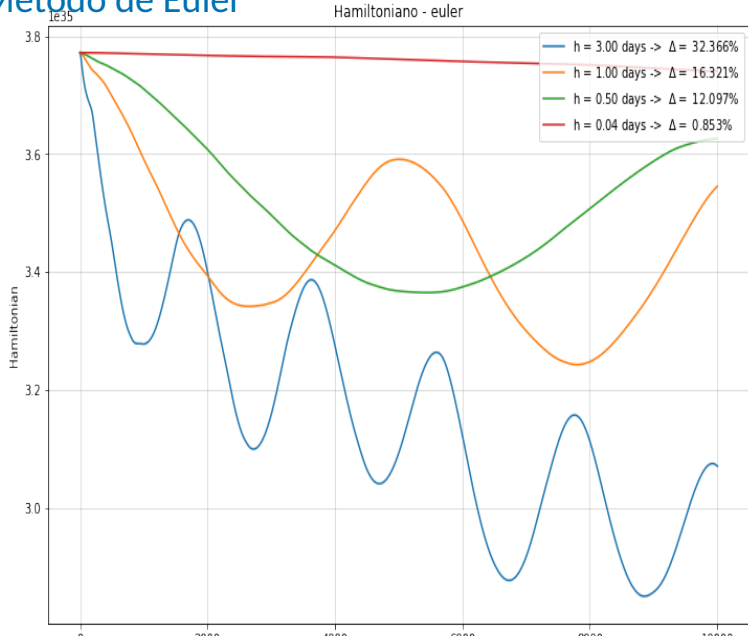
The Inner Solar System - leapfrog - $h = 1.00$ days



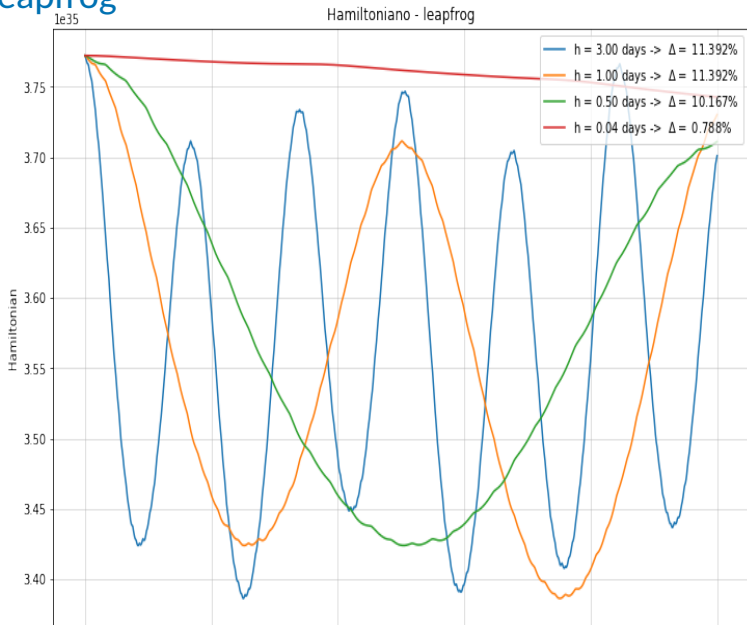
Conservação do Hamiltoniano



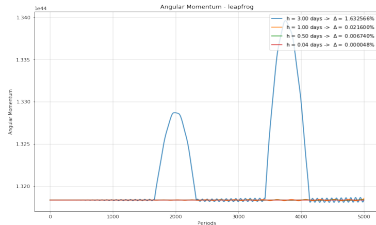
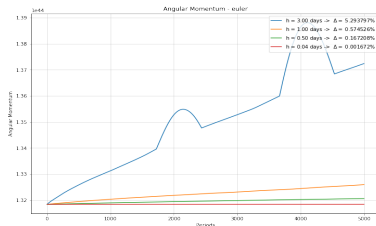
Metódo de Euler



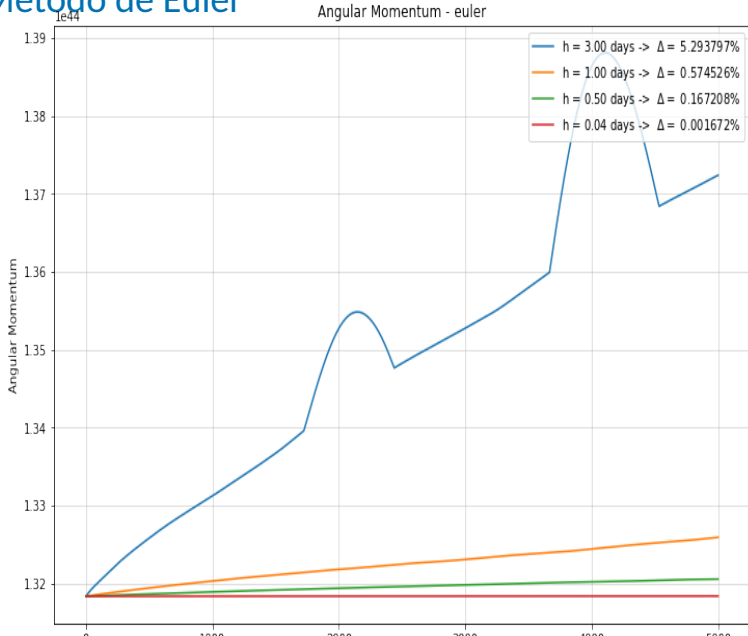
Leapfrog



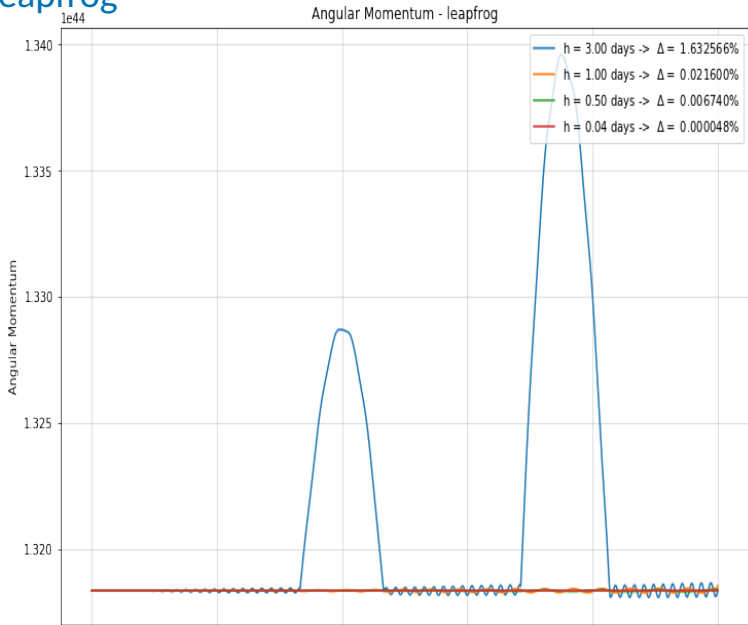
Conservação do Momento Angular



Metódo de Euler

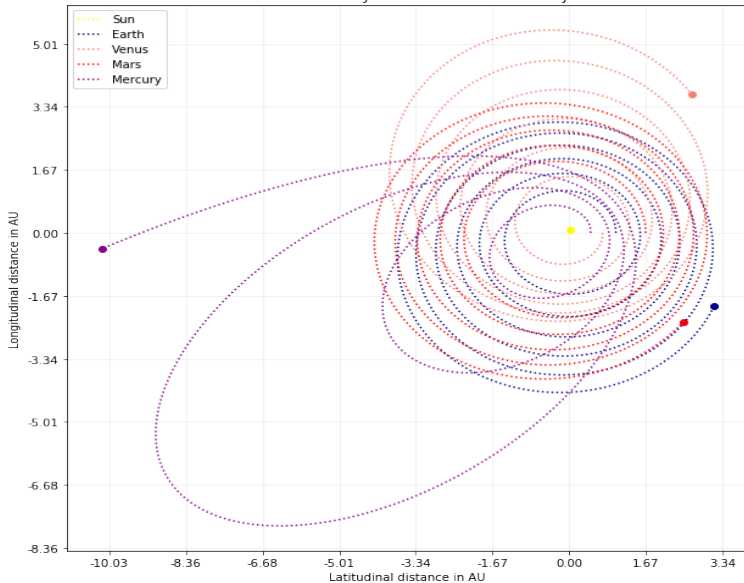


Leapfrog

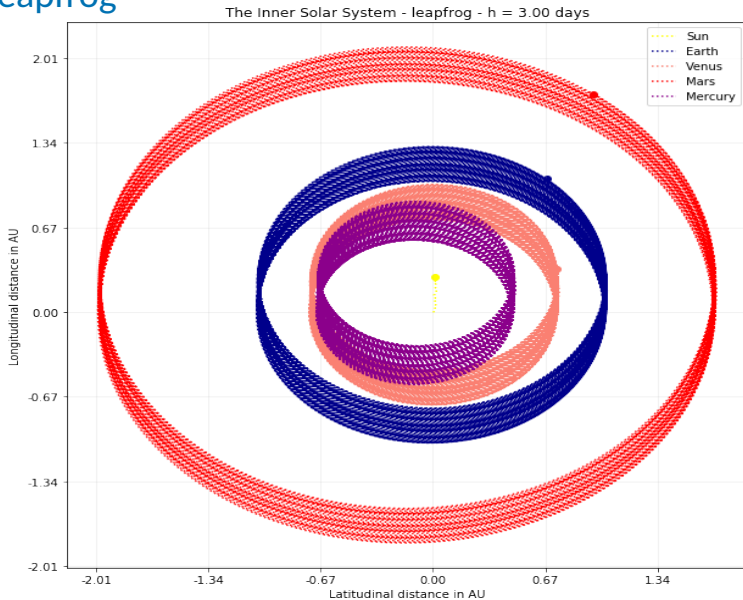


Metódo de Euler

The Inner Solar System - euler - $h = 3.00$ days

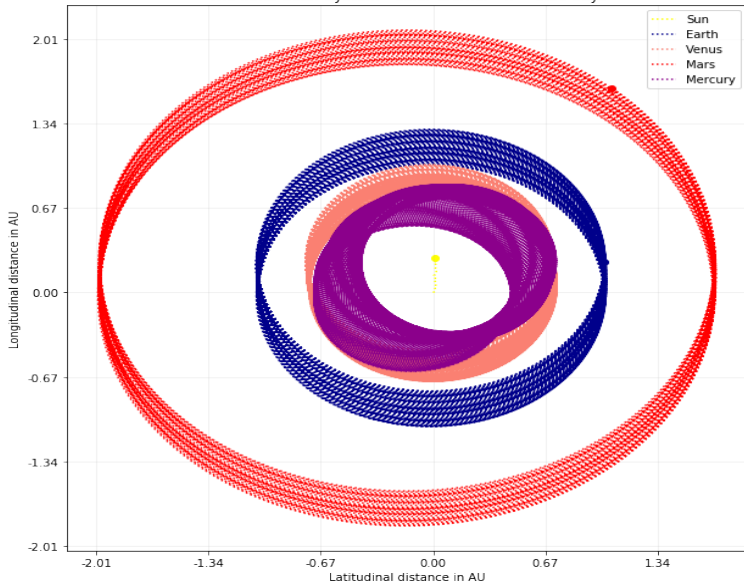


Leapfrog



Euler-Cromer

The Inner Solar System - euler-cromer - $h = 3.00$ days



Velocity Verlet

The Inner Solar System - velocity-verlet - $h = 3.00$ days

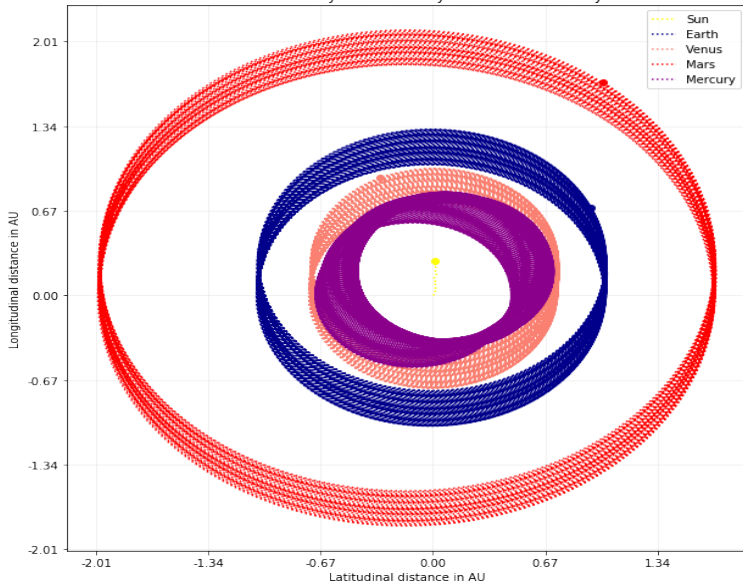
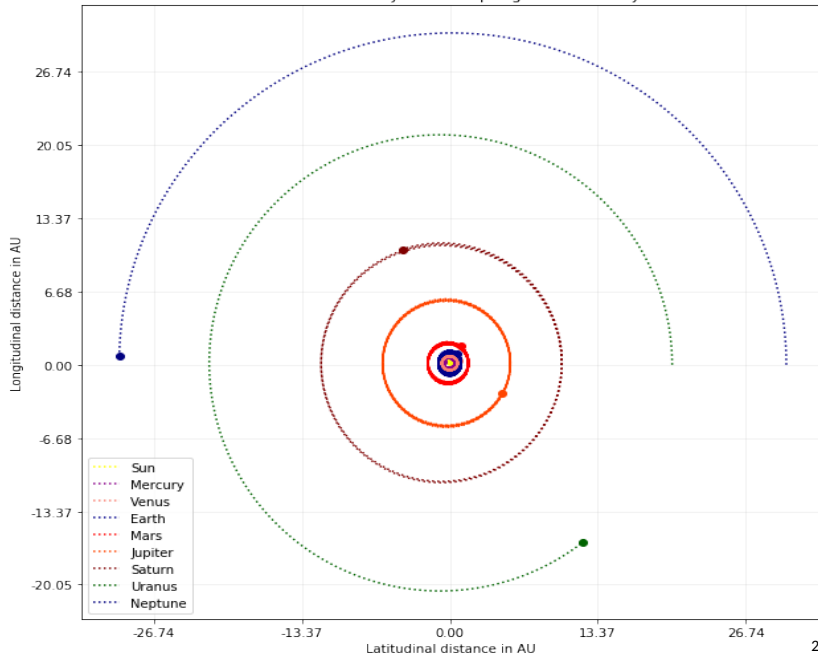


Table: Comparação da ecentricidade das órbitas

	Leapfrog Value	NASA Data
Mercury	0.196	0.206
Venus	0.018	0.007
Earth	0.0164	0.017
Mars	0.09	0.093
Jupiter	0.05	0.048

The Inner Solar System - leapfrog - $h = 3.00$ days



Muito Obrigado!

Carl Sagan

Diante da vastidão do tempo e da imensidão do universo, é um prazer para mim dividir um planeta e uma época com vocês.