פרק 3: הסתברות מותנית ואי-תלות (סיכום) (20425 / 3.2.11)

הסתברות מותנית:

יהיו A ו- B שני מאורעות במרחב מדגם S, כך שמתקיים $P(B) > 0$.

ההסתברות שהמאורע A יתרחש, אם ידוע שהמאורע B מתרחש, נקראת ההסתברות (המותנית) של A בתנאי B, מסומנת ב- $P(A|B)$, ומוגדרת על-ידי –

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

לכן –

$$P(A \cap B) = P(A\,|\,B)P(B)$$

נוסחת הכפל:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2\,|\,A_1)P(A_3\,|\,A_1 \cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n\,|\,A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

נוסחת ההסתברות השלמה:

יהי A מאורע במרחב מדגם S ויהיו B_1, B_2, ..., B_n מאורעות זרים ב- S, המקיימים $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = S$,
אז –

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n)$$
$$= P(A\,|\,B_1)P(B_1) + P(A\,|\,B_2)P(B_2) + \ldots + P(A\,|\,B_n)P(B_n)$$

נוסחת בייס:

יהי A מאורע במרחב מדגם S ויהיו B_1, B_2, ..., B_n מאורעות זרים ב- S, המקיימים $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = S$,
אז –

$$P(B_j\,|\,A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A\,|\,B_j)P(B_j)}{P(A\,|\,B_1)P(B_1) + P(A\,|\,B_2)P(B_2) + \ldots + P(A\,|\,B_n)P(B_n)}$$

מאורעות בלתי-תלויים:

יהיו A ו- B מאורעות במרחב מדגם S.

A ו- B ייקראו בלתי-תלויים, אם מתקיים תנאי האי-תלות – $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

כאשר A ו- B מאורעות בלתי-תלויים ו<u>לא-ריקים</u> מתקיים: $P(A\,|\,B) = P(A)$ וגם $P(B\,|\,A) = P(B)$

יהיו A_1, A_2, ..., A_n מאורעות במרחב מדגם S.

A_1, A_2, ..., A_n ייקראו בלתי-תלויים, אם לכל תת-קבוצה A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{ir} שלהם מתקיים תנאי האי-תלות –

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ir}) = P(A_{i1})P(A_{i2})\cdot\ldots\cdot P(A_{ir})$$

יהיו A_1, A_2, ... מאורעות במרחב מדגם S.

A_1, A_2, ... ייקראו בלתי-תלויים, אם המאורעות בכל תת-קבוצה סופית שלהם בלתי-תלויים.

מאורעות בלתי-תלויים בתנאי:

יהיו A_1, A_2 ו- B מאורעות במרחב מדגם S.

A_1 ו- A_2 ייקראו בלתי-תלויים בתנאי B, אם מתקיים תנאי האי-תלות –

$$P(A_1 \cap A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B)P(A_2 \mid B)$$

טענות:

1. אם A ו- B בלתי-תלויים, אז A ו- B^C בלתי-תלויים, A^C ו- B בלתי-תלויים, ו- A^C ו- B^C בלתי-תלויים.
אפשר להכליל טענה זו ל- n מאורעות.

2. אם A ו- B מאורעות זרים של אותו ניסוי מקרי, אז בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה, המאורע A יתרחש לפני המאורע B, בהסתברות $\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$.

3. $P(\cdot \mid B)$, כאשר B מאורע במרחב מדגם S המקיים $P(B) > 0$, היא פונקציית הסתברות לכל דבר, כלומר היא מקיימת את שלושת אקסיומות ההסתברות:

א. לכל מאורע A במרחב המדגם S מתקיים $0 \le P(A|B) \le 1$

ב. $P(S|B) = 1$

ג. לכל סדרה של מאורעות זרים A_1, A_2, ... במרחב המדגם S מתקיים $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \middle| B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B)$

4. נוסחת ההסתברות השלמה למאורעות מותנים:

אם B_1, B_2, ..., B_n מאורעות זרים (כלומר, החיתוך שלהם הוא מאורע ריק) וכוללים (כלומר, האיחוד שלהם שווה למרחב המדגם) ואם C הוא מאורע המקיים $P(C) > 0$, אז –

$$P(A \mid C) = P(A \mid B_1 \cap C)P(B_1 \mid C) + P(A \mid B_2 \cap C)P(B_2 \mid C) + ... + P(A \mid B_n \cap C)P(B_n \mid C)$$