## תשובה 1

צונזר

## תשובה 2

צונזרה

## תשובה 3

א. נכון. נניח בשלילה ש- $\varphi_1 \not\models \varphi_3$ .

משמע, מהגדרת גרירה טאוטולוגית, קיימת אינטרפרטציה $J$ כך ש- $J[\varphi_1]=\mathrm{T}$ ו- $J[\varphi_3]=\mathrm{F}$ .

מכך ש- $J[\varphi_3]=\mathrm{F}$ , יחד עם לוח האמת של $\vee$ ,

נובע ש- $J[A\to(C\wedge D)]=\mathrm{F}$ וגם $J[B\to(C\wedge D)]=\mathrm{F}$ .

כעת, מלוח האמת של ״חץ״,

פסוק ״חץ״ הוא שקרי רק כאשר ה״הנחה״ אמיתית וה״מסקנה״ שקרית.

לכן $J[A]=\mathrm{T}$ , $J[B]=\mathrm{T}$ , $J[C\wedge D]=\mathrm{F}$ .

אך מערכים אלה, נקבל כי $J[\varphi_1]=J[(A\vee B)\to(C\wedge D)]=\mathrm{F}$ , בסתירה להנחתנו.

לכן ההנחה היתה שגויה, כלומר $\varphi_1 \models \varphi_3$ .

ב. לא נכון. למשל באינטרפרטציה שבה $J[A]=\mathrm{T}$ ו- $J[B]=J[C]=J[D]=\mathrm{F}$

נקבל $J[\varphi_3]=\mathrm{T}$ ו- $J[\varphi_1]=\mathrm{F}$ , לכן $\varphi_3 \not\models \varphi_1$ .

ג. נכון. נוכיח מעט כללית יותר ש- $\psi\to(C\wedge D) \equiv (\psi\to C)\wedge(\psi\to D)$ (*)

כאשר $\psi$ פסוק כלשהו (בהצבת $\psi=A\wedge B$ נקבל את המקרה שלנו).

הפעם נדגים הוכחה בעזרת זהויות. ניעזר בשקילות $\alpha\to\beta \equiv (\sim\alpha)\vee\beta$ (**)

(הוכחה של שקילות זו: בעמ׳ 28 מוכח כי $\alpha\vee\beta \equiv (\sim\alpha)\to\beta$ . נציב $(\sim\alpha)$ במקום $\alpha$

וניעזר ב- $\sim(\sim\alpha)\equiv\alpha$ . הוכחה אחרת: בשאלה 1.12 ב בעמוד 22 מוכחת טאוטולוגיה

מסוימת, שהקשר המרכזי בה הוא $\leftrightarrow$ . לפי משפט 2.26 נוכל לקבל מכך שקילות טאוטולוגית

בין שני אגפי ה- $\leftrightarrow$ . זו בדיוק השקילות המבוקשת).

לענייננו: בביטוי (*) נחליף את כל החצים בעזרת השקילות (**) .

נקבל שאגף שמאל שקול ל- $((\sim\psi)\vee C)\wedge((\sim\psi)\vee D)$ ,

בעוד שאגף ימין שקול ל- $(\sim\psi)\vee(C\wedge D)$ .

שני פסוקים אלה שקולים טאוטולוגית זה לזה לפי שאלה 1.28 סעיף ו בעמ' 29 בספר הלימוד.

ד. לא נכון. באינטרפרטציה $J$ שהבאנו בתשובה לסעיף ב מתקיים
$J[\varphi_3] = \mathrm{T}$ ו- $J[\varphi_2] = \mathrm{F}$ , לכן שני הפסוקים אינם שקולים טאוטולוגית .

ה. נכון. בשאלה 1.12א בעמ' 22 בספר מוכח עיקרון ה- *Contrapositive* :
הפסוק $(\alpha \to \beta) \leftrightarrow ((\sim \beta) \to (\sim \alpha))$ הוא טאוטולוגיה .
לפי משפט 2.26, דרך אחרת לומר זאת היא: $\alpha \to \beta \;\equiv\; (\sim \beta) \to (\sim \alpha)$ .
ניישם זאת על $\varphi_1$ , נפעיל את חוקי דה-מורגן (שאלה 1.28 א, ב)
ונקבל כי $\varphi_1$ אכן שקול טאוטולוגית ל- $\varphi_4$ .

## תשובה 4

א. כן. קיימת אינטרפרטציה (למעשה אחת ויחידה) שבה כל הפסוקים היסודיים מקבלים $\mathrm{T}$ .

ב. לא. קבוצת כל הפסוקים מכילה פסוקים שהם סתירה כגון $A_1 \wedge \sim A_1$ , ולכן אינה עקבית.
הסבר דומה, קצת אחר: קבוצת כל הפסוקים מכילה את הפסוק $A_1$ ואת הפסוק $\sim A_1$ ,
ושניהם אינם יכולים לקבל יחד ערך $\mathrm{T}$ .

ג. נכון. מכיוון ש- $\Gamma$ עקבית, תהי $J$ אינטרפרטציה בה כל פסוקי $\Gamma$ אמיתיים.
מהגדרת גרירה טאוטולוגית, כל פסוק הנובע טאוטולוגית מ- $\Gamma$ אמיתי גם הוא ב- $J$.
לכן כל פסוקי $\Gamma^{\#}$ אמיתיים ב- $J$, לכן $\Gamma^{\#}$ עקבית.

ד. לא נכון. דוגמא נגדית: $\Gamma = \{A_1 , \sim A_1\}$ .

איתי הראבן