

אלגוריתמים - תרגיל 7

8 בדצמבר 2003

תאריך אחרון להגשה: יום ה' 18.12

1. כפל יעיל של מספרים מרוכבים.

(א) ברצונינו להכפיל שני מספרים מרוכבים $(a + bi), (c + di)$. התוצאה היא $(ac - bd) + (ad + bc)i$. מהנוסחה נראה כי צריך לבצע 4 פעולות כפל במ-משיים כדי להכפיל שני מספרים מרוכבים. הראו כיצד ניתן להגיע לתוצאה עם 3 פעולות כפל בממשיים בלבד ומספר קבוע של חיבורים בממשיים.

(ב) עתה ברצונינו להכפיל שני מספרים שלמים. המספרים נתונים בייצוג עשר-וני והם בעלי n ספרות. הפעולות האטומיות (לוקחות זמן 1) הן פעולות אר-יתמטיות על ספרות בודדות. ניתן לחבר, להכפיל, לחלק, ולחשב \bmod של שני מספרים בעלי ספרה אחת בזמן קבוע. האלגוריתם הפשוט ביותר לכפל שלומדים בבי"ס (כפל בתור) הוא בעל סיבוכיות $O(n^2)$. תארו אלגוריתם בסיבוכיות $O(n^{\log_2 3})$.

רמז: כיתבו את המספר השלם בעל n הספרות כסכום של שני מספרים בעלי $n/2$ ספרות (כמובן, לא בדיוק כך). השתמשו בטריק דומה לסעיף א' בשביל לחשב את המכפלה בעזרת 3 מכפלות בלבד של מספרים בעלי $n/2$ ספרות.

2. נסמן ב- $D(n)$ את סיבוכיות החישוב של דטרמיננטה של מטריצה בגודל $n \times n$ וב- $L(n)$ את סיבוכיות הפרוק LUP של מטריצה $n \times n$. הראו כי $D(n) = O(L(n))$.

3. מצאו את הפונקציה $F(x)$ מהצורה $F(x) = c_1 + c_2 x \lg x + c_3 e^x$ שהיא הקירוב הטוב ביותר בריבועים הפחותים לנקודות $(1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 8)$.

4. תהי A מטריצה ממשית $n \times n$ כלשהי. הראו ש

$$\max_{\|x\|_\infty \leq 1} \|Ax\|_1 = \max_{\|x\|_\infty, \|y\|_\infty \leq 1} y^t Ax$$

כאשר x ו- y הם וקטורים במרחב האוקלידי ה- n מימדי.