פתרונות לממ"ן 15 בקורס "אלגוריתמים", סמסטר ב' 2002
(הוכן בשיתוף עם יואב גיורא)

בחלק מהמקרים כתבנו רק סקיצות של הפתרונות. תשובות אלו מסומנות בברור, ואין לראות בהם תשובה מלאה.

שאלה 1

נדון בבעיה הבאה. בהינתן שתי קבוצות A,B שכל אחת מהן היא תת-קבוצה בגודל n של הקבוצה $U=\{1,2,3,...,10n\}$, יש למצוא את קבוצת כל הסכומים האפשריים של איבר מ-A ואיבר מ-B, כלומר $A+B=\{a+b: a\in A, b\in B\}$.

דוגמה: אם $B=\{3,7,10\}$ $A=\{1,5,8\}$ אזי $A+B=\{4,8,11,12,15,18\}$.

א. הראה כי גודל קבוצת הפלט הוא $O(n)$.

ב. כתוב אלגוריתם הפותר את הבעיה הנ"ל בסיבוכיות $O(n\cdot\log n)$. הוכח את נכונות האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

תשובה

א. הקבוצה $A+B$ מוכלת בקבוצה $\{2, 3, …, 20n\}$ ולכן גודלה חסום ע"י $20n-1$ והוא לפיכך $O(n)$.

ב. נגדיר עבור הקבוצה A פולינום $p_A(x)=\sum_{j=1}^{10n}a_jx^j$ כאשר מקדמיו a_j נקבעים כך: אם $j\in A$ אז $a_j=1$, אחרת $a_j=0$. בדומה נגדיר פולינום $p_B(x)$. נחשב את פולינום המכפלה של שני הפולינומים האלו ע"י FFT בסיבוכיות $O(n\cdot\log n)$. הפלט יהיה כל האינדקסים j כך של-j מקדם שונה מ-0 בפולינום המכפלה. כדי להוכיח את נכונות האלגוריתם יש להראות כי המקדם של x^j בפולינום המכפלה מתאר את מספר הזוגות של איבר מ-A ואיבר מ-B שסכומם j (וודא כי הינך יודע להוכיח זאת).

שאלה 2

כתוב אלגוריתם יעיל ככל שתוכל לבעיה הבאה. הקלט הוא גרף לא-מכוון $G=(V,E)$ ושני צמתים x,y בגרף. יש למצוא, עבור כל זוג צמתים u,v בגרף, את מספר המסלולים מ-u ל-v שאורכם הוא לכל היותר $\sqrt{|V|}$ ושהם עוברים דרך אחד הצמתים x או y (אך לא דרך שניהם). הוכח את נכונות האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

הערה: לשם פשטות, הניחו כי הצמתים u,v נבחרים מתוך $V-\{x,y\}$.

תשובה

תהי A_y מטריצת השכנויות של G שבה מאופסות השורה והעמודה של y. תהי A_x מטריצת השכנויות של G שבה מאופסות השורה והעמודה של x. תהי $A_{x,y}$ מטריצת השכנויות של G שבה מאופסות השורות והעמודות של x ושל y.

כזכור, A^i היא המטריצה שבה בכל כניסה נמצא מספר המסלולים באורך i שישנם בין הצמתים המתאימים לכניסה זו. בדומה, A_y^i היא המטריצה השומרת את מספר מסלולים באורך i שאינם עוברים דרך y (אך אולי עוברים דרך x), ו-A_x^i היא המטריצה השומרת את מספר מסלולים באורך i שאינם עוברים דרך x (אך אולי עוברים דרך y), ו-$A_{x,y}^i$ היא המטריצה ששומרת מספר מסלולים באורך i שאינם עוברים דרך x וגם דרך y. מכאן נקבל כי $A_y^i-A_{x,y}^i$ היא המטריצה השומרת את מספר המסלולים באורך i שעוברים דרך x ולא דרך y, ובאופן סימטרי $A_x^i-A_{x,y}^i$ היא המטריצה ששומרת את מספר המסלולים באורך i שעוברים דרך y ולא דרך x. מטריצת הסכום $(A_x^i-A_{x,y}^i)+(A_y^i-A_{x,y}^i)$ שומרת את מספר המסלולים באורך i שעוברים דרך x או דרך y, אך לא דרך שניהם.). מאחר שאורכי המסלולים המעניינים אותנו חסומים ע"י $\sqrt{|V|}$ התשובה הנכונה נמצאת במטריצה $\sum_{i=1}^{\sqrt{|V|}}(A_x^i-A_{x,y}^i)+(A_y^i-A_{x,y}^i)=\sum_{i=1}^{\sqrt{|V|}}(A_x^i+A_y^i-2A_{x,y}^i)$. אם כך, האלגוריתם פשוט יחשב את המטריצה. הסיבוכיות: את המטריצות הנדרשות ניתן לחשב ע"י $\sqrt{|V|}$ מכפלות מטריצה. ולכן העלות היא $O(|V|^{0.5+\log 7})$. חישוב ההפרש בכל שלב הוא ריבועי בגודל המטריצה, וכך גם הסכימה, ולכן העלות הכוללת של ההפרש והסכימה היא $O(|V|^{2.5})$. לכן העלות הכוללת של האלגוריתם היא $O(|V|^{0.5+\log 7})$.

שאלה 3

כתוב אלגוריתם יעיל ככל שתוכל לבעיה הבאה. בהינתן כקלט גרף לא-מכוון $G=(V,E)$, קשת (x, y) בגרף ומספר שלם k, יש למצוא עבור כל זוג צמתים u,v בגרף את <u>מספר</u> המסלולים מ-u ל-v שאורכם בדיוק k והם עוברים דרך הקשת (x, y) בדיוק פעם אחת. הוכח את נכונות האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

תשובה

תהי $A_{x,y}$ מטריצת השכנויות של G אשר מאופסות בה שתי הכניסות המתאימות לצמתים x ו-y (כלומר, לקשת בין x ו-y). האלגוריתם יחשב את המטריצה אשר הכניסה $[u, v]$ בה מוגדרת באופן הבא:

$$ans[u,v] = \sum_{i=0}^{k-1} A_{x,y}^{i}[u,x] * A_{x,y}^{k-i-1}[y,v] \text{ .}$$

עבור כל זוג צמתים u ו-v התשובה המבוקשת היא הערך $ans[u, v]+ans[v, u]$.

נימוק לנכונות האלגוריתם (זו אינה הוכחה פורמלית ומלאה): ברור שכל המסלולים הנספרים במטריצה $A_{x,y}$ ובחזקותיה אינם כוללים את הקשת (x, y). מסלול בין u ל-v העובר דרך הקשת (x, y) בדיוק פעם אחת מורכב ממסלול מ-u ל-x שאינו עובר בקשת זו, ואז מעבר דרך הקשת והמשך מ-y ל-v ללא מעבר בקשת, או באופן סימטרי ממסלול מ-u ל-y שאינו עובר בקשת זו, ואז מעבר דרך הקשת והמשך מ-x ל-v ללא מעבר בקשת. מאחר שהגרף אינו מכוון ניתן לתאר מסלול מהצורה השניה גם כמסלול מ-v ל-x שאינו עובר בקשת זו, ואז מעבר דרך הקשת והמשך מ-y ל-u ללא מעבר בקשת. אורכי חלקי המסלולים לפני ואחרי הקשת יכולים להיות כלשהם אך בכל מסלול אורך החלק שלפני הקשת ואורך החלק שאחריו צריכים להסתכם ל-k-1. כלומר, אם אורך החלק שלפני הקשת הוא i אז אורך החלק שאחרי הקשת צריך להיות k-1-i ואז יחד עם הקשת עצמה מתקבל מסלול באורך k. כדי לקבל את כל המסלולים האפשריים יש להכפיל, עבור i מסויים את מספר כל המסלולים המתאימים באורך i במספר כל המסלולים המתאימים באורך k-1-i כי כל צירוף אפשרי מגדיר מסלול. הכנסת i=0 לסכימה נועדה לטפל במקרי הקצה בהם u או v שווים ל-x או y. וודא כי הינך יודע להוכיח נכונות גם עבור מקרי הקצה.

סיבוכיות האלגוריתם: יש לבצע k-2 מכפלות מטריצה כדי לקבל את כל החזקות של $A_{x,y}$ עד חזקה k-1. אחר כך יש לבצע k שלבים, כאשר בכל שלב מחושב ערך בזמן קבוע. לכן סה"כ הסיבוכיות היא $O(k*|V|^{\log 7})$.

שאלה 4

תהי B מטריצה מסדר $km\times km$ כמו באיור, כאשר $k<\sqrt{m}$. כלומר, B מורכבת מ-m גושים $B_1,B_2,\dots,B_m$ מסדר $k\times k$ כל אחד, הממוקמים על האלכסון הראשי, ושאר האיברים הם 0.

$$B=\underbrace{\begin{pmatrix} B_1 & & \cdots & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & \cdots & & B_m \end{pmatrix}}_{km} km$$

תהי A מטריצה מסדר $km\times km$ **כלשהי**.

א. הצע אלגוריתם, יעיל ככל שתוכל, המחשב את המכפלה $A\cdot B$.

ב. האם תוכל להציע אלגוריתם יעיל יותר מזה שב-(א) אם ידוע כי כל הגושים B_i זהים, והם מהצורה:

$$B_i=\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{k-1} \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{k-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{pmatrix}$$

בכל אחד מהמקרים הסבר את הנכונות ונתח את הסיבוכיות.

תשובה

א. המטריצות A ו-B הן מסדר $km\times km$ ולכן עלות מכפלה ישירה שלהן בעזרת האלגוריתם של שטראסן היא $O((km)^{\log 7})=O((m^{0.5}\cdot m)^{\log 7})=O(m^{1.5\cdot\log 7})=O(m^{\log 7+0.5\cdot\log 7})$. אבל אם נתאר את המטריצה A כמטריצה

המורכבת מ- m^2 גושים מסדר $k\times k$: $A=\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix}}_{km} km$, ניתן לראות כי המטריצה $A\cdot B$ היא

המטריצה $A\cdot B=\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11}B_1 & A_{12}B_2 & \cdots & A_{1m}B_m \\ A_{21}B_1 & A_{22}B_2 & \cdots & A_{2m}B_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B_1 & A_{m2}B_2 & \cdots & A_{mm}B_m \end{pmatrix}}_{km} km$. כלומר, ניתן לחשבה על-ידי m^2 מכפלות של מטריצות בגודל $k\times k$. לכן העלות היא $O(m^2(k^{\log 7}))=O(m^2\cdot(m^{0.5})^{\log 7})=O(m^{2+0.5\cdot\log 7})$ והיא טובה יותר מעלות האלגוריתם הישיר.

ב. במקרה זה ניתן לתאר את מטריצת המכפלה כך: $A\cdot B=\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11}B_i & A_{12}B_i & \cdots & A_{1m}B_i \\ A_{21}B_i & A_{22}B_i & \cdots & A_{2m}B_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B_i & A_{m2}B_i & \cdots & A_{mm}B_i \end{pmatrix}}_{km} km$. בכל זאת, על פי תיאור זה עדיין צריך לבצע m^2 מכפלות של מטריצות בגודל $k\times k$ ולכן נראה כי לא ניתן לשפר את העלות אם עובדים בדרך של מכפלת מטריצות. אבל, מסתבר שאת כל אחת מ- m^2 המכפלות ניתן לבצע באופן יעיל יותר בגלל צורת המטריצה B_i . נתמקד באחת מ- m^2 המכפלות, כלומר במכפלת מטריצה כללית מגודל $k\times k$ במטריצה B_i . נתאר את המטריצה הכללית כך:

$$A'=\underbrace{\begin{pmatrix} a_{0,0} & & \cdots & a_{0,k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,0} & & \cdots & a_{k-1,k-1} \end{pmatrix}}_{k} k$$

תהי $C=A'\cdot B_i$. אז מתקיים $C_{i,j}=\sum_{l=0}^{j}a_{i,l}\cdot b_{j-l}$ (הוכח!), כלומר, אם נסתכל על איברי השורה ה-i ב-A' ועל איברי הוקטור $(b_0,\ldots b_{k-1})$ כאל מקדמים של פולינומים ממעלה k, אז האיבר $C_{i,j}$ במטריצה C הוא בדיוק המקדם של x^j במכפלת שני הפולינומים ולכן השורה C_i במטריצה C היא מקדמי פולינום המכפלה של שני הפולינומים האלו. אם כך, ניתן לחשב את השורה ה-i במטריצה בסיבוכיות $O(k\log k)$ ע״י FFT ואת מטריצת המכפלה כולה בסיבוכיות $O(k^2\log k)$, וזה יעיל יותר מ- $O(k^{\log 7})$.

<u>הערה</u>: מהדיון באתר נראה כי היו סטודנטים שפנו בכיוון ביצוע ״חכם״ יותר של האלגוריתם של שטראסן ע״י הורדת מספר המכפלות, ואכן, לכאורה ניתן במקרה פרטי זה של סעיף ב׳ להגיע לכל המטריצות הדרושות ע״י ביצוע של 6 מכפלות ולא 7, אבל, תכונה זו אינה רקורסיבית! היא מסתמכת על כך ששני הרבעים סביב האלכסון זהים ושהרבע השמאלי התחתון שווה ל-0, ומבנה זה לא נשמר בפירוק הרקורסיבי של המטריצה לרבעים משום שהרבע הימני העליון לא מקיים זאת (בו אין רבע ששווה ל-0). לפיכך, רק את ארבעה משששת הכפלים ניתן להמשיך לבצע רקורסיבית ע״י 6 מכפלות אך עבור שני כפלים נדרש ביצוע רגיל ולכן בסה״כ אין שיפור בסיבוכיות ביחס לאלגוריתם של שטראסן.

<u>שאלה 5</u>

בהינתן שתי מטריצות בגודל $n\times n$ A ו-B, **הקומוטטור** של A ו-B, המסומן ב-$[A, B]$ הוא: $[A, B]=AB-BA$.
יהיו A ו-B מטריצות בגודל $n\times n$. יהי $S(n)$ הזמן הדרוש לחישוב הקומוטטור $[A, B]$. הראה כי ניתן לכפול שתי מטריצות X ו-Y בגודל $n\times n$ בזמן $S(2n)$ לכל היותר.

<u>תשובה</u>

בהינתן שתי מטריצות X ו-Y בגודל $n\times n$ נגדיר שתי מטריצות חדשות A ו-B בגודל $2n\times 2n$: $A=\begin{bmatrix} X & -Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. נחשב את הקומוטטור $[A, B]$. המטריצה המתקבלת היא $\begin{bmatrix} 0 & 2XY \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ולכן ניתן ממנה לקבל את מכפלת שתי המטריצות X ו-Y. עלות חישוב הקומוטטור היא כאמור $S(2n)$. עלות בניית המטריצות A ו- B היא $O(n^2)$. ברור כי עלות חישוב הקומוטטור היא לפחות $O(n^2)$ ולכן העלות הכוללת היא $O(S(2n))$.