שאלה 1

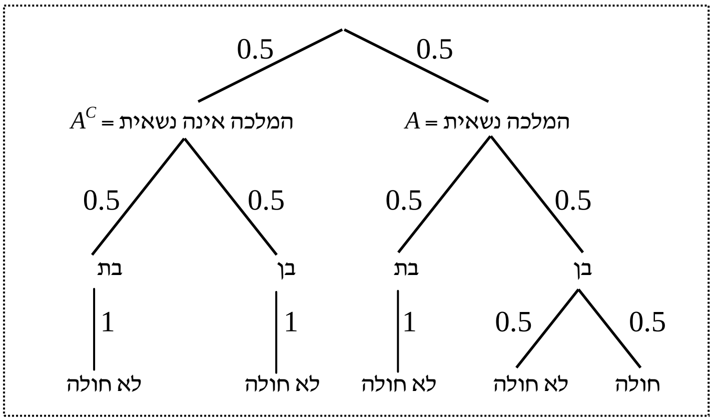
נסמן ב- A את המאורע שהמלכה נשאית ;

נסמן ב- BB_i את המאורע שהילד ה-i-י של המלכה הוא בן שאינו חולה, לכל $i = 1,2,3$;

נסמן ב- BH_i את המאורע שהילד ה-i-י של המלכה הוא בן חולה, לכל $i = 1,2,3$;

ונסמן ב- GB_i את המאורע שהילד ה-i-י של המלכה הוא בת לא חולה, לכל $i = 1,2,3$.

נצייר עץ הסתברות מתאים :



נתוני הבעיה הם :

$P(A)=0.5$ (מלכה)

$P(BB_i\mid A^C)=0.5$ $\quad$ $P(BH_i\mid A)=0.5^2=0.25$ $\quad$ $P(BB_i\mid A)=0.5^2=0.25$ (נסיכים)

$P(GB_i)=0.5$ (נסיכות)

א. $$P(BH_i)=P(BH_i\cap A)+\underbrace{P(BH_i\cap A^C)}_{=0}=P(BH_i\mid A)P(A)=0.5^2\cdot 0.5=0.125$$

ב. ידוע שלמלכה יש 3 ילדים. כדי שאחד מהם יהיה חולה היא צריכה להיות בהכרח נשאית (בהסתברות $P(A) = 0.5$), אחד מילדיה חייב להיות נסיך חולה והיתר נסיכים שאינם חולים או נסיכות.

לפי נתוני הבעיה , <u>בהינתן שהמלכה נשאית</u> אין תלות בין מצבם הבריאותי של 3 ילדיה. לכן, כל אחד מהם הוא נסיך חולה בהסתברות $P(BH_i\mid A)=0.5^2=0.25$, ואחרת הוא נסיך שאינו חולה או נסיכה בהסתברות $1-0.5^2=0.75$. לפיכך, אם למלכה יש 3 ילדים, ההסתברות שבדיוק אחד מהם חולה היא :

$$0.5\cdot 3\cdot 0.5^2\cdot(1-0.5^2)^2=0.2109$$

אפשר לפתור סעיף זה גם כך :

$$\underbrace{0.5}_{\text{המלכה נשאית}}\cdot(\underbrace{0.125\cdot 3\cdot 0.5^3}_{\text{3 בנים, אחד חולה}}+\underbrace{0.375\cdot 2\cdot 0.5^2}_{\text{2 בנים, אחד חולה + בת אחת בריאה}}+\underbrace{0.375\cdot 0.5}_{\text{בן אחד חולה + 2 בנות בריאות}})=0.2109$$

ג.

$$P(A \mid BB_1 \cap BB_2) = \frac{P(A \cap BB_1 \cap BB_2)}{P(BB_1 \cap BB_2)} = \frac{P(BB_1 \cap BB_2 \mid A)P(A)}{P(BB_1 \cap BB_2)}$$

$$= \frac{P(BB_1 \cap BB_2 \mid A)P(A)}{P(BB_1 \cap BB_2 \mid A)P(A) + P(BB_1 \cap BB_2 \mid A^C)P(A^C)}$$

$$= \frac{(0.5^2)^2 \cdot 0.5}{(0.5^2)^2 \cdot 0.5 + 0.5^2 \cdot 0.5} = \frac{0.03125}{0.15625} = 0.2$$

ד.

$$P(BH_3 \mid BB_1 \cap BB_2) = \frac{P(BB_1 \cap BB_2 \cap BH_3)}{P(BB_1 \cap BB_2)} =$$

$$= \frac{P(BB_1 \cap BB_2 \cap BH_3 \mid A)P(A) + P(BB_1 \cap BB_2 \cap BH_3 \mid A^C)P(A^C)}{P(BB_1 \cap BB_2)}$$

$$= \frac{(0.5^2)^3 \cdot 0.5 + 0}{0.15625} = 0.05$$

ואפשר לפתור את הסעיף הזה גם כך, תוך שימוש בתוצאת הסעיף הקודם :

$$P(BH_3 \mid BB_1 \cap BB_2) = \frac{P(BB_1 \cap BB_2 \cap BH_3 \mid A)P(A)}{P(BB_1 \cap BB_2)}$$

$$= \frac{P(BB_1 \cap BB_2 \mid A)P(BH_3 \mid A)P(A)}{P(BB_1 \cap BB_2)}$$

[בהינתן מצב המלכה, במקרה זה
"נשאית", אין תלות בין לידות שונות]

$$= \frac{P(BB_1 \cap BB_2 \mid A)P(A)}{P(BB_1 \cap BB_2)} \cdot P(BH_3 \mid A)$$

$$= P(A \mid BB_1 \cap BB_2) \cdot P(BH_3 \mid A) = 0.2 \cdot 0.5^2 = 0.05$$

שאלה 2

1. הערכים האפשריים של X ושל Y הם 0, 1 ו-2.

מספר אפשרויות הבחירה של 2 חולצות ו-2 זוגות מכנסיים הוא $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} = 100$. לכן, זהו המכנה של כל ההסתברויות המשותפות המופיעות ברשימה שלהלן.

הערכים של ההסתברויות המשותפות הם :

$$P\{X=0, Y=2\} = P\{X=2, Y=1\} = 0$$

$$P\{X=0, Y=0\} = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}}{100} = 0.06$$

[לא נבחרו חליפות ולא נבחר אף פריט אדום.
בוחרים שני זוגות מכנסיים
ואחר-כך שתי חולצות בצבעים אחרים (לא אדום).]

$$P\{X=0, Y=1\} = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot 2}{100} = 0.24$$

[לא נבחרו חליפות ונבחר פריט אדום אחד.
בוחרים שני זוגות מכנסיים וחולצה בצבעים שונים ולא אדומים
או שבוחרים שתי חולצות וזוג מכנסיים בצבעים שונים ולא אדומים]

$$P\{X=1, Y=0\} = \frac{4\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{100} = 0.24$$

[נבחרה חליפה אחת ולא נבחר אף פריט אדום.
בוחרים חליפה לא אדומה
ואח"כ חולצה ומכנסיים בצבעים שונים ולא אדומים]

$$P\{X=1, Y=1\} = \frac{2\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}}{100} = 0.24$$

[נבחרה חליפה אחת ונבחר פריט אדום אחד.
בוחרים פריט אדום ומשלימים אותו בפריט בצבע שונה;
אח"כ בוחרים חליפה בצבע שונה משני הפריטים שנבחרו.]

$$P\{X=1, Y=2\} = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}}{100} = 0.12$$

[נבחרה חליפה אחת ונבחרו שני פריטים אדומים.
בהכרח נבחרה חליפה אדומה,
לכן, צריך לבחור שני פריטים נוספים בצבעים שונים ולא אדומים]

[נבחרו שתי חליפות ולא נבחר אף פריט אדום.
בוחרים שתי חליפות לא אדומות.]

$$P\{X=2,Y=0\}=\frac{\binom{4}{2}}{100}=0.06$$

[נבחרו שתי חליפות ונבחרו שני פריטים אדומים
בהכרח נבחרה חליפה אדומה. לכן, בוחרים חליפה נוספת לא אדומה.]

$$P\{X=1,Y=2\}=\frac{\binom{4}{1}}{100}=0.04$$

נערוך את התוצאות שקיבלנו בטבלה:

X \ Y	0	1	2	p_X
0	0.06	0.24	0	0.3
1	0.24	0.24	0.12	0.6
2	0.06	0	0.04	0.1
p_Y	0.36	0.48	0.16	

ב. כדי לקבוע אם המשתנים המקריים X ו-Y בלתי-תלויים, נבדוק את תנאי האי-תלות. למשל:

$$P\{X=0,Y=2\}=0 \quad \neq \quad P\{X=0\}P\{Y=2\}=0.3\cdot 0.16 > 0$$

לכן, התנאי אינו מתקיים והמשתנים המקריים הללו תלויים.

ג. נראה שתי דרכים לפתרון הבעיה, שהן למעשה אותה הדרך רק בכתיבה שונה.

<u>דרך I</u>

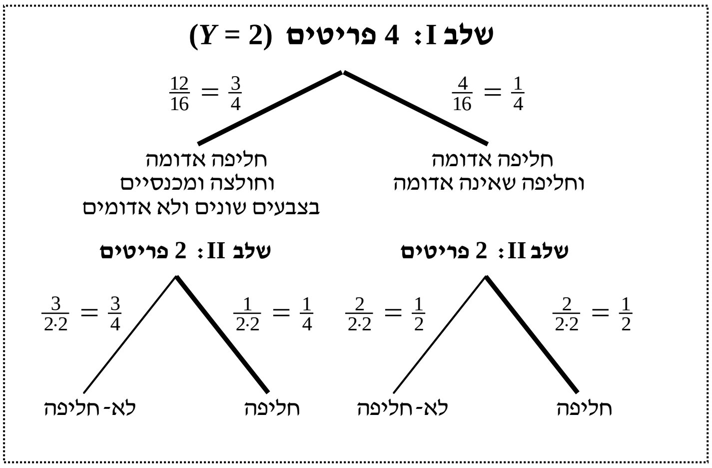
תחילה, בוחרים באקראי 2 חולצות ו-2 זוגות מכנסיים <u>ונתון</u> כי $Y=2$, לכן בהכרח $X=1$ או $X=2$.
כדי להקל על חישוב ההסתברות המותנית המבוקשת, שנבחרת חליפה מתוך 4 הפריטים שנבחרו לראשונה כאשר ידוע כי $Y=2$, נוכל להתנות בערך של X (1 או 2) מלבד ההתנייה במאורע $\{Y=2\}$.
נסמן ב-A את המאורע שנבחרת חליפה ולפי נוסחת ההסתברות השלמה <u>למאורעות מותנים</u> נקבל כי:

$$P\{A\,|\,Y=2\}=P\{A\,|\,Y=2,X=1\}P\{X=1\,|\,Y=2\}+P\{A\,|\,Y=2,X=2\}P\{X=2\,|\,Y=2\}$$
$$=\tfrac{1\cdot 1}{2\cdot 2}\cdot\tfrac{0.12}{0.16}+\tfrac{2\cdot 1}{2\cdot 2}\cdot\tfrac{0.04}{0.16}=\tfrac{3}{16}+\tfrac{1}{8}=\tfrac{5}{16}$$

<u>דרך II</u>

תחילה, נבחרים באקראי 2 חולצות ו-2 זוגות מכנסיים <u>ונתון</u> כי $Y=2$. לכן, בהכרח נבחרה החליפה האדומה ושני פריטים נוספים שאינם אדומים. כעת, יש 16 בחירות שונות שוות- הסתברות של 4 פריטים שבהן מתרחש המאורע $\{Y=2\}$. ב-4 מתוך 16 התוצאות הללו נבחרות 2 חליפות, שאחת מהן אדומה. בשאר התוצאות, שהן 12 תוצאות, נבחרת חליפה אדומה ושני פריטים נוספים (חולצה ומכנסיים) בצבעים שונים (וכמובן שאינם אדומים). לכן, בהינתן שהמאורע $\{Y=2\}$ מתרחש, ההסתברות המותנית שנבחרו 2 חליפות היא $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

נתאר את ההתרחשויות האפשריות לבחירת 2 הפריטים (מתוך ה-4) בעץ ההסתברות שלהלן :



ומכאן, נוכל לקבל את ההסתברות המבוקשת : $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{3}{16}=\frac{5}{16}$

שאלה 3

א.1. ההסתברות שבשורה מסוימת הסכום יהיה 3 היא : $\binom{5}{3}\cdot 0.5^5 = 0.3125$

ההסתברות שבכל השורות הסכום יהיה שונה מ-3 היא : $(1-0.3125)^5 = 0.1536$

לכן, ההסתברות שלפחות בשורה אחת הסכום יהיה 3 היא : $1-0.1536=0.8464$

א.2. השורות בלתי-תלויות זו בזו ובכל אחת מהן הסכום הוא 3 בהסתברות 0.3125. לכן, מספר השורות בלוח שסכום הספרות בהן הוא 3 הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 5 ו-0.3125. לפיכך, השונות המבוקשת היא : $5\cdot 0.3125\cdot 0.6875 = 1.07422$

ב.1. בכל השורות מתקבל בדיוק אותו סכום של ספרות , אם בכל שורה יש 2 דסקיות עם הספרה 1 (ו-3 דסקיות עם הספרה 0). לכן, ההסתברות המבוקשת היא :

$$\frac{\binom{5}{2}^5}{\binom{25}{10}}=\frac{10^5}{3,268,760}=0.03059$$

ב2. במקרה הזה נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה לחישוב ההסתברות.

נסמן ב- A_i את המאורע שבשורה i סכום הספרות בדיוק 3, לכל $i=1,2,...,5$, ונחשב את ההסתברות של איחוד המאורעות הללו.

מתקיים :

$$P(A_1)=\frac{\binom{5}{3}\binom{20}{7}}{\binom{25}{10}}=\frac{775,200}{3,268,760}=\frac{60}{253}=0.23715$$

$$P(A_1\cap A_2)=\frac{\binom{5}{3}^2\binom{15}{4}}{\binom{25}{10}}=\frac{136,500}{3,268,760}=\frac{6,825}{163,438}=0.041759$$

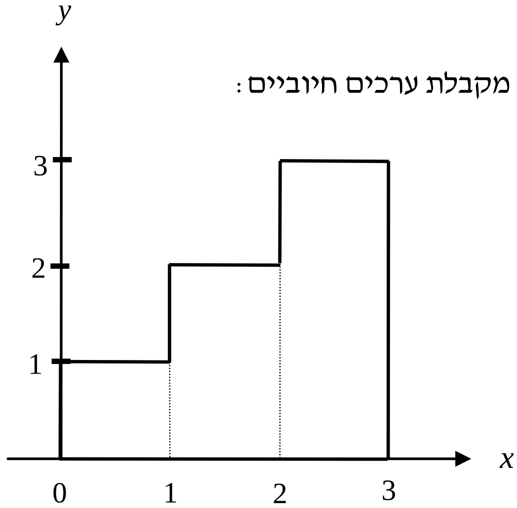
$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=\frac{\binom{5}{3}^3\binom{10}{1}}{\binom{25}{10}}=\frac{10,000}{3,268,760}=\frac{250}{81,719}=0.003059$$

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)=P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5)=0$$

ומכאן:
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right) = \binom{5}{1}\cdot\frac{60}{253} - \binom{5}{2}\cdot\frac{6,825}{163,438} + \binom{5}{3}\cdot\frac{250}{81,719} = 0.7988$$

שאלה 4

א. נצייר תחילה את התחום שבו הפונקציה הנתונה מקבלת ערכים חיוביים:



שנית, קל לראות שפונקציית הצפיפות המשותפת מקבלת ערכים אי-שליליים בלבד ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$ או 0).

נחשב עתה את הנפח הכלוא מתחת לפונקציית הצפיפות המשותפת. נשים לב, שמצורת הפונקציה נובע שלמעשה עלינו לחבר נפחים של 3 תיבות. מקבלים:
$$1\cdot 1\cdot\tfrac{1}{3} + 1\cdot 2\cdot\tfrac{1}{6} + 1\cdot 3\cdot\tfrac{1}{9} = 3\cdot\tfrac{1}{3} = 1$$

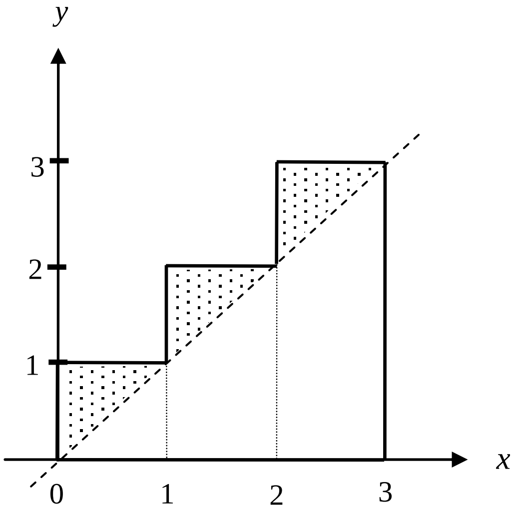
כלומר, הנפח הכולל שווה ל-1, כנדרש.

ב. נתחיל מפונקציית הצפיפות השולית של X:
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3} & , \quad 0 \le x < 1 \\ \int_0^2 \frac{1}{6}\,dy = \frac{1}{3} & , \quad 1 \le x < 2 \\ \int_0^3 \frac{1}{9}\,dy = \frac{1}{3} & , \quad 2 \le x \le 3 \\ 0 & , \quad x < 0\,;\, x > 3 \end{cases}$$

מהתוצאה שקיבלנו, נובע כי ל-X יש התפלגות אחידה על הקטע $[0,3]$.

נמצא עתה את פונקציית הצפיפות השולית של Y:
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{3}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{6}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{9}\,dx = \frac{11}{18} & , \quad 0 \le y < 1 \\ \int_1^2 \frac{1}{6}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{9}\,dx = \frac{5}{18} & , \quad 1 \le y < 2 \\ \int_2^3 \frac{1}{9}\,dy = \frac{2}{18} & , \quad 2 \le y \le 3 \\ 0 & , \quad y < 0\,;\, y > 3 \end{cases}$$

מהתוצאה שקיבלנו, נובע כי לפונקציית הצפיפות של Y יש צורה של פונקציית מדרגות.



ג. נסמן בנקודות את התחום שבו מתקיים המאורע $\{X < Y\}$. ההסתברות של מאורע זה שווה לנפח הכלוא מעל לתחום זה ומתחת לפונקציית הצפיפות המשותפת. לכן:

$$P\{X<Y\}=\underset{\text{שטח המשולשים}}{1\cdot 1\cdot \tfrac{1}{2}}\cdot\underbrace{\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{9}\right)}_{\text{גובה פוני הצפיפות}}=\tfrac{11}{36}$$

שאלה 5

א. למשתנה המקרי N יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר 0.5, לכן: $E[N]=\frac{1}{0.5}=2$

כמו כן, לכל $i=1,2,\ldots,N$, למשתנה המקרי X_i יש התפלגות אחידה בדידה בין 1 ל-6. לכן, מתקיים:

$$E[X_i]=\tfrac{1+6}{2}=3.5$$

ומכאן מקבלים כי:
$$E[S]=E\left[\sum_{i=1}^{N}X_i\right]=E[N]E[X_1]=2\cdot 3.5=7$$

ב. מהאמור בסעיף א נקבל כי:
$$\mathrm{Var}(N)=\tfrac{0.5}{0.5^2}=2$$

$$\mathrm{Var}(X_i)=\tfrac{6^2-1^2}{12}=2\tfrac{11}{12}=2.91\overline{6}$$

ומכאן:
$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)=E[N]\mathrm{Var}(X_1)+(E[X_1])^2\mathrm{Var}(N)=2\cdot 2.91\overline{6}+3.5^2\cdot 2=30.\overline{3}$$

ג. המאורע $\{S=4\cap \text{זוגי } N\}$ מתרחש בכמה מקרים:

2) $N=2$ ו- $(X_1,X_2)=(1,3)$, $(X_1,X_2)=(3,1)$ או $(X_1,X_2)=(2,2)$;

3) $N=4$ ו- $(X_1,X_2,X_3,X_4)=(1,1,1,1)$.

לכן:
$$P\{S=4\cap \text{זוגי } N\}=0.5^2\cdot 3\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^2+0.5^4\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^4=0.02088$$

נחשב כעת את ההסתברות שהמשתנה המקרי הגיאומטרי N יקבל ערך זוגי:

$$P\{\text{זוגי } N\}=\sum_{i=1}^{\infty}0.5^{2i}=\sum_{i=1}^{\infty}0.25^{i}=\tfrac{1}{1-0.25}-1=\tfrac{1}{3}$$

ומכאן:
$$P\{S=4\mid \text{זוגי } N\}=\tfrac{0.02088}{1/3}=0.0626$$

ד. כאשר הערך של N נתון, המשתנה המקרי S הוא סכום (לא מקרי) של משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות. לכן, במקרה זה נוכל להשתמש במשפט הגבול המרכזי לחישוב הקירוב להסתברות.

נקבל:

$$P\{S=170 \mid N=50\}=P\left\{\sum_{i=1}^{N} X_i=170 \middle| N=50\right\}=P\left\{\sum_{i=1}^{50} X_i=170 \middle| N=50\right\}$$ [N וה-X_i-ים בלתי-תלויים]

$$=P\left\{\sum_{i=1}^{50} X_i=170\right\} \underset{\uparrow}{=} P\left\{169.5 \le \sum_{i=1}^{50} X_i \le 170.5\right\}$$

תיקון רציפות

$$\cong \Phi\left(\frac{170.5-50\cdot 3.5}{\sqrt{50\cdot 2.91\overline{6}}}\right)-\Phi\left(\frac{169.5-50\cdot 3.5}{\sqrt{50\cdot 2.91\overline{6}}}\right)=\Phi(-0.3726)-\Phi(-0.4554)$$

$$=(1-0.6453)-(1-0.6755)=0.0302$$