בחינה 1

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות:

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* **בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק') **א.** נתבונן בטענות הבאות:

A: **לכל סנדלר קיים אדם, שכל הנעלים שלו עברו תיקון אצל הסנדלר הזה.**

P: לכל אדם קיים סנדלר, שלא תיקן אף נעל של אותו אדם.

Q: לכל סנדלר קיים אדם, שאף אחת מהנעלים שלו לא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

R: לכל סנדלר קיים אדם, שלפחות נעל אחת שלו לא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

S: קיים סנדלר כך שלכל אדם יש לפחות נעל אחת שלא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

T: קיים סנדלר שמעולם לא תיקן שתי נעלים של אותו אדם.

מבין הטענות P,Q,R,S,T, הטענה השקולה **לשלילת** A היא:

[1] P **[2]** Q **[3]** R **[4]** S **[5]** T

(7 נק') **ב.** תהי $A=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbf{R},\ \ x-y=7.25\ ,\ \ x+y\in\mathbf{N}\}\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

עוצמת A היא:

[1] 0 **[2]** מספר סופי כלשהו שאינו 0 **[3]** $\aleph_0$

[4] C **[5]** אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק') **ג.** G הוא גרף פשוט וקשיר על קבוצת הצמתים $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

נתון ש- G הוא **אוילרי**.

עוד נתון שאין ב- G קשת בין 1 ל- 2, אין קשת בין 2 ל- 3 ואין קשת בין 1 ל- 3.

נוסיף ל- G את 3 הקשתות הללו. הגרף שנקבל הוא:

[1] אוילרי.

[2] אינו אוילרי, אבל יש בו מסלול אוילר שאינו מעגל.

[3] אינו אוילרי, ואין בו מסלול אוילר שאינו מעגל.

[4] ייתכן שהוא אוילרי וייתכן שלא – תלוי בגרף המקורי G.

[5] כלל לא ייתכן ש- G המקורי הוא אוילרי, כי לפי הנתון הוא לא קשיר.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו : 81 נקודות

שאלה 2

נסמן $A=\{1,2,3,\ldots,10\}$. תהי $M = P(A)-\{\varnothing\} = \{ X \mid X \subseteq A,\ X \neq \varnothing\}$.

להלן שני יחסים (רלציות) מעל M.

היחס T מוגדר כך : $(X,Y)\in T$ אם ורק אם $\{X,Y\}$ היא **חלוקה** של A.

היחס K מוגדר כך : $(X,Y)\in K$ אם ורק אם $\min(X) \geq \max(Y)$.

(6 נק') א. האם T הוא יחס שקילות מעל M ?

(7 נק') ב. האם K רפלקסיבי ?

(7 נק') ג. האם K אנטי-סימטרי ?

(7 נק') ד. האם K טרנזיטיבי ?

הוכח את תשובותיך.

הבהרה : $\min(X)$ הוא האיבר הקטן ביותר ב- X , $\max(Y)$ הוא האיבר הגדול ביותר ב- Y.

שאלה 3

חמשה אנשים מוכשרים (נקרא להם א,ב,ג,ד,ה) נדרשו לבצע ארבע משימות שונות (להלחין שיר, לפתֵח אפליקציה לאייפון, לנהל משא ומתן עם האוצר, לחדֵש את סימון השביל הכחול בנחל ערוגות). הם סיכמו שכל משימה תבוצע על ידי צוות של שני אנשים.

(5 נק') א. בכמה דרכים ניתן להגדיר צוותים לביצוע כל המשימות?
אין דרישה שכולם יעבדו.
למשל, לגיטימי שהצוות {א,ב} יבצע את כל המשימות.

(20 נק') ב. בכמה דרכים ניתן להגדיר צוותים לביצוע כל המשימות, כאשר אסור שמישהו יתחמק לגמרי מעבודה? כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה.

בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 4

תהי A קבוצה בת 12 איברים. נתבונן בפונקציות של A ל- A שיש להן התכונה הבאה :

לכל $a \in A$, $f(f(f(a)))=a$ אך $f(f(a)) \neq a$.

(6 נק') א. הוכיחו שפונקציה f כזו היא חד-חד-ערכית ועל.

(21 נק') ב. כמה פונקציות כאלה קיימות? הגיעו לתשובה מספרית.

שאלה 5

יהי G גרף פשוט בעל שני רכיבי קשירות. בכל אחד מרכיבי הקשירות יש לפחות 3 צמתים.

הוכיחי שהגרף **המשלים** של G ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4) אינו מישורי.

בהצלחה!

תקציר פתרון בחינה 1

תשובה 1

א: [4] S

ב: [3] $\aleph_0$

ג: [1] נשאר אוילרי, כי לכל אחד מ- 3 הצמתים הוספנו בדיוק 2 קשתות.

תשובה 2

א. לא (אינו רפלקסיבי ואינו טרנזיטיבי)

ב. לא

ג. כן: אם $(X,Y)\in K$ וגם $(Y,X)\in K$ אז בהכרח יש ב- X רק איבר אחד, ו- $X=Y$.

ד. כן

תשובה 3

א. לכל משימה יש $\binom{5}{2}=10$ דרכים לבחור צוות. לארבע המשימות: 10^4 דרכים.

ב. A_i: קבוצת הבחירות של צוותים בהן אדם i מתחמק מעבודה.

הכלה והפרדה: $\binom{5}{2}^4-5\cdot\binom{4}{2}^4+\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}^4-\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}^4$

תשובה 4

תשובה

א. f היא על מפני שלכל $a\in A$ קיים $x\in A$ כך ש- $f(x)=a$ (פשוט ניקח $x=f(f(a))$).
פונקציה מקבוצה סופית לעצמה שהיא על חייבת להיות גם חד-חד- ערכית (שכן אם f לא חד-חד ערכית אז לפחות לשניים מאיברי A יש אותה תמונה, ואז מספר האיברים ב- $f(A)$ יהיה 11 לכל היותר. אבל אז f לא על!)

ב. נשים לב שאם פונקציה המקיימת את התנאי הנתון אז לכל $a\in A$, $f(f(f(a)))=a$ ו- $f(f(a))\neq a$. אז $f(a)\neq a$ וגם $f(f(a))\neq f(a)$ (אחרת נקבל סתירה לתנאי הנתון)
נניח ש- f אחת הפונקציות המקיימות את תנאיי השאלה. נסתכל $a\in A$. מאחר ש- $f(a)\neq a$, הרי שיש בדיוק 11 אפשרויות לבחור את התמונה של a (את $f(a)$)
ומאחר ש- $f(f(a))\neq f(a),a$, נותרו בדיוק 10 אפשרויות לבחירת התמונה של $f(a)$ (כלומר של $f(f(a))$. אבל על פי תנאי השאתה, לתמונה של $f(f(a))$ יש רק אפשרות אחת (שכן $f(f(f(a)))=a$). סיכום ביניים: יש $11\cdot 10$ אופציות להגדיר את f על שלושת האיברים $a, f(a), f(f(a))$.
נותרו עוד 9 איברים בקבוצה. נבחר איבר b מתוכם. שיקול דומה מראה שיש $8\cdot 7$ אפשרויות להגדיר את f על שלושת האיברים $b, f(b), f(f(b))$.

באופן דומה, עם נבחר איבר c מתוך 6 האיברים הנותרים נקבל שיש $5\cdot 4$ אפשרויות להדיר את f על שלושת האיברים $c, f(c), f(f(c))$, ולבסוף אם נבחר איבר c מתוך 3 האיברים האחרונים, נקבל עוד $2\cdot 1$ אפשרויות להגדיר את f על $d, f(d), f(f(d))$.

מפני שבכל אחד מהשלבים, היו פתוחות לבחירה כל האופציות של השלב הבא, נקבל שמספר האפשרויות לבחירת f הוא מכפלת כל האפשרויות שהיו בכל שלב כלומר:

$(11\cdot 10)\cdot(8\cdot 7)\cdot(5\cdot 4)\cdot(2\cdot 1)=246,400$.

שיקול אחר, המסתמך על אותו רעיון של בניית פונקציה f על-ידי חלוקת הקבוצה ל- 4 שלשות מהסוג $a, f(a), f(f(a))$ מוביל לתוצאה $\frac{12!}{(3!)^4 4!}\cdot 2^4=\frac{12!}{3^4 4!}=246,400$

(יש לשים לב בכל שלשה יש שתי אופציות סידור שונות אך אין חשיבות לסדר שבין השלשות השונות).

תשובה 5

יהיו x,y,z צמתים שונים ברכיב קשירות אחד ויהיו a,b,c צמתים שונים ברכיב הקשירות השני.

במשלים של G, כל אחד מהצמתים x,y,z מחובר בקשת לכל אחד מהצמתים a,b,c.

המשלים מכיל אפוא עותק של הגרף הדו-צדדי $K_{3,3}$.

לפי שאלה בחוברת, $K_{3,3}$ אינו מישורי.

גרף שמכיל אותו אינו יכול להיות מישורי.

בחינה 2

מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* **בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א׳: שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק׳) **א.** נתבונן בטענה: אם לאברהם יש שכל, אז אם אברהם שותה הוא לא נוהג.

טענה זו שקולה לטענה:

[1] אם לאברהם אין שכל אז אם אברהם שותה הוא נוהג.

[2] אם לאברהם אין שכל אז הוא שותה ונוהג.

[3] אם אברהם שותה ונוהג – אין לו שכל.

[4] אם אברהם שותה ולא נוהג – יש לו שכל.

[5] אם אברהם נוהג ולא שותה – יש לו שכל.

(7 נק׳) **ב.** כזכור אנו מסמנים $C = |\mathbf{R}|$. נסמן $d = |P(\mathbf{R})|$.

d^C שווה ל-

[1] $\aleph_0$

[2] C

[3] d

[4] 2^d

[5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

(6 נק׳) **ג.** בגרף המלא K_6 קיימות דרכים שונות ליצור זיווג מושלם.

כמה דרכים כאלה יש, כלומר כמה זיווגים מושלמים ניתן להגדיר ב- K_6 ?

[1] 3

[2] 6

[3] 15

[4] 36

[5] 64

[6] 720

חלק ב׳: ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב׳ כולו : 81 נקודות

שאלה 2

R הוא יחס מעל קבוצה A , ונתון $RR^{-1}=I_A$.

כידוע, במצב כזה $R^{-1}R$ אינו חייב להיות שווה ל- I_A .

בשאלה זו נבדוק איזה תכונות יש במצב כזה ל- $R^{-1}R$. בשני הסעיפים נתון $RR^{-1}=I_A$.

(18 נק׳) א. הוכיחו ש- $R^{-1}R$ הוא סימטרי וטרנזיטיבי.

הדרכה : נוח להוכיח סעיף זה בעזרת תכונות אלגבריות של יחסים.

(9 נק׳) ב. בנוסף לנתון $RR^{-1}=I_A$, נתון כעת גם ש- $Range(R)=A$.

הוכיחו ש- $R^{-1}R$ הוא יחס שקילות מעל A.

שאלה 3

תהיינה $X=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

(6 נק׳) א. כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של X ל- Y קיימות ?

(21 נק׳) ב. מצאו כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של X ל- Y מקיימות את התנאי הבא :

לכל $i\in X$, $f(i)\neq i$. הדרכה : הכלה והפרדה.

שאלה 4

נתון $p \neq 0$.

סדרה מסוימת מקיימת את יחס הנסיגה (יחס רקורסיה) : $a_{n+2} = 6p \cdot a_{n+1} - 5p^2 \cdot a_n$

עם תנאי התחלה : $a_0 = 0$, $a_1 = 8p$.

פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור a_n .

את הביטוי שקיבלתם עליכם להביא לצורה : $a_n =$ (משהו) $\cdot\ p^n$,

כאשר הביטוי שבסוגרים תלוי ב- n אך **אינו** תלוי ב- p .

שאלה 5

יהי G גרף פשוט, שקבוצת הצמתים שלו היא V.

נניח שצבענו את G צביעה נאותה, בצבעים הלקוחים מקבוצת צבעים A .

$\bar{G}$ הוא הגרף המשלים של G (הגדרה 1.4, עמ' 12 בחוברת "תורת הגרפים").

בלי קשר לצביעה של G, צבענו את $\bar{G}$ צביעה נאותה, בצבעים הלקוחים מקבוצת צבעים B.

(10 נק') א. לכל $v \in V$ נתאים **זוג סדור** של צבעים : הראשון בזוג הוא הצבע של v בצביעה של G והשני בזוג הוא הצבע של v בצביעה של $\bar{G}$.
הוכיחו שבהתאמה זו, אין שני צמתים שונים שמותאם להם אותו זוג סדור של צבעים.

(7 נק') ב. נסחו את הטענה של סעיף א כטענה על **חד-חד-ערכיות** של פונקציה (פונקציה מהיכן להיכן?)

(10 נק') ג. יהי $n = |V|$. מהסעיפים הקודמים נובעת אחת הטענות הבאות. מצאו איזו, והוכיחו אותה.

(1) $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \le n$

(2) $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \ge n$

(3) $\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \le n$

(4) $\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \ge n$

צביעה נאותה ומספר הצביעה, $\chi(G)$, הוגדרו שניהם בפרק 6 בחוברת "תורת הגרפים".

בהצלחה!

פתרון בחינה 2

תשובה 1

א: [3]

הסבר: נסמן

ב- α את הפסוק " לאברהם יש שכל "

ב- β את הפסוק " אברהם שותה "

וב- γ את הפסוק " אברהם נוהג "

הפסוק המביע את הטענה "אם לאברהם יש שכל, אז אם אברהם שותה הוא לא נוהג" הוא:

$$\varphi = \alpha \to (\beta \to (\neg\gamma))$$

על-ידי שימוש בשקילות $p \to q \equiv (\neg p) \vee q$ ובכללי דה מורגן נקבל:

$$\varphi \equiv (\neg\alpha) \vee (\beta \to (\neg\gamma)) \equiv (\neg\alpha) \vee (\neg\beta) \vee (\neg\gamma) \equiv \neg(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)$$

נרשום כעת את הפסוקים הרשומים כתשובות אפשריות:

[1] אם לאברהם אין שכל אז אם אברהם שותה הוא נוהג:

$$(\neg\alpha) \to (\beta \to \gamma) \equiv \alpha \vee (\beta \to \gamma) \equiv \alpha \vee (\neg\beta) \vee \gamma$$

[2] אם לאברהם אין שכל אז הוא שותה ונוהג.

$$(\neg\alpha) \to (\beta \wedge \gamma) \equiv \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$$

[3] אם אברהם שותה ונוהג – אין לו שכל.

$$(\beta \wedge \gamma) \to (\neg\alpha) \equiv (\neg(\beta \wedge \gamma)) \vee (\neg\alpha) \equiv (\neg\beta) \vee (\neg\gamma) \vee (\neg\alpha)$$

[4] אם אברהם שותה ולא נוהג – יש לו שכל.

$$((\beta \wedge (\neg\gamma)) \to \alpha \equiv (\neg(\beta \wedge (\neg\gamma)) \vee \alpha \equiv (\neg\beta) \vee \gamma \vee (\alpha)$$

[5] אם אברהם נוהג ולא שותה – יש לו שכל.

$$(\gamma \wedge (\neg\beta)) \to \alpha \equiv (\neg(\gamma \wedge (\neg\beta)) \vee \alpha \equiv (\neg\gamma) \vee \beta \vee (\alpha).$$

מכאן ברור שהתשובה הנכונה היא **[3]**

ב: $d^C = |P(\mathbf{R})|^{|\mathbf{R}|} = (2^{|\mathbf{R}|})^{|\mathbf{R}|} = 2^{|\mathbf{R}||\mathbf{R}|} = 2^{|\mathbf{R}\times\mathbf{R}|} = 2^{|\mathbf{R}|} = d$ ולכן התשובה היא [3]

ג: [3] כמספר החלוקות של קבוצה בת 6 אברים לשלוש מחלקות של שני אברים כל אחת.

תשובה 2

א. סימטרי: נכון כללית $(R^{-1}R)^{-1} = R^{-1}R$

טרנזיטיבי: תנאי לטרנזיטיביות של יחס T הוא: $(T)^2 \subseteq T$.

אצלנו $(R^{-1}R)^2 = R^{-1}RR^{-1}R = R^{-1}I_A R = R^{-1}R$

ב. נותר רק להראות ש- $R^{-1}R$ רפלקסיבי.

יהי $x \in A$. מהנתון על הטווח, קיים y כך ש- $(y,x) \in R$.

מתקיים אפוא גם $(x,y) \in R^{-1}$. משני אלה יחד, לכן $(x,x) \in R^{-1}R$.

תשובה 3 (השאלה הופיעה במספרים אחרים לפני כמה מועדים)

א. $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

ב. תהי U קבוצת הפונקציות החד-חד-ערכיות של X ל- Y. $|U| = 840$.

לכל $i \in X$, תהי A_i קבוצת הפונקציות החד-חד-ערכיות של X ל- Y המקיימות $f(i) = i$.

המספר שאנו נדרשים לחשב הוא $|A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4'|$.

או במלים אחרות $|(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)'|$.

נכין נתונים לשימוש בהכלה והפרדה. נתחיל בחישוב $|A_1|$.

אם התמונה של 1 חייבת להיות 1, אז כדי לקבוע פונקציה חד-חד-ערכית של X ל- Y נותר לנו לבחור תמונות עבור 2,3,4. תמונות אלה צריכות להבחר מתוך הקבוצה $Y - \{1\}$, והן צריכות להיות שונות זו מזו. מספר האפשרויות לעשות זאת הוא כמספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של קבוצה בת 3 איברים לקבוצה בת 6 איברים, כלומר $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

מובן כי אותה תוצאה נכונה לא רק ל- A_1 אלא לכל אחת מהקבוצות A_i.

משמע: $|A_i| = 120$, ויש לנו 4 קבוצות A_i.

בצורה דומה, $|A_i \cap A_j| = 5 \cdot 4 = 20$ $(i \neq j)$. יש לנו 6 חיתוכים כאלה.

בדומה, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 4$ i,j,k שונים זה מזה). יש לנו 4 חיתוכים כאלה.

ולבסוף, יש פונקציה אחת ויחידה השולחת כל איבר ב- X לעצמו: $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$.

מעקרון ההכלה וההפרדה, מספר הפונקציות המבוקש הוא

$$840 - 4 \cdot 120 + 6 \cdot 20 - 4 \cdot 4 + 1 = 465$$

תשובה 4

יחס הנסיגה לינארי הומוגני. המשוואה האופיינית: $\lambda^2 - 6p\lambda + 5p^2 = 0$.

פתרונותיה: $\lambda = p, 5p$. פתרון כללי ליחס הנסיגה: $a_n = Ap^n + B(5p)^n$.

תנאי התחלה: $0 = A + B$, $k = A \cdot p + B \cdot 5p = 8p \;\; => \;\; A + 5B = 8$.

מכאן: $B = 2$, $A = -2$. כלומר $a_n = 2(5^n - 1) \cdot p^n$

תשובה 5 (המקור הוא הספר של שי גירון ושוני דר)

א. נניח ש- $v_1,v_2 \in V$ צמתים שונים בגרף. מתאימים להם שני זוגות של צבעים $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ כאשר $a_1,a_2 \in A$ ו- $b_1,b_2 \in B$. אם v_1,v_2 סמוכים ב- G אז הם נצבעים שצבעים שונים כלומר $a_1 \neq a_2$. ואם v_1,v_2 אינם סמוכים ב- G אז הם סמוכים ב- $\overline{G}$, לכן הם נצבעים שם בצבעים שונים כלומר $b_1 \neq b_2$. מכאן שבכל מקרה $(a_1,b_1) \neq (a_2,b_2)$ ולכן ההתאמה הנתונה היא חד-חד-ערכית.

ב. נגדיר $f: V \to A\times B$ כך: לכל $v \in V$, $f(v)=(a,b)$ כאשר $a \in A$ הוא הצבע שבו נצבע v בגרף G ו- $b \in B$ הוא הצבע v בגרף שבו נצבע $\overline{G}$. הטענה שהוכחנו בסעיף א׳ היא ש- f היא פונקציה חד-חד-ערכית.

ג. מאחר ש- $f: V \to A\times B$ היא חד-חד-ערכית, נובע שהעוצמה של V אינה גדולה מזו של $A\times B$ במילים אחרות $|A\times B| \geq |V|$. זה מבטיח ש- $|A|\cdot|B| \geq n$ ומאחר שמספר הצביעה של G הוא $|A|$ ומספר הצביעה של $\overline{G}$ הוא $|B|$ נקבל ש- $\chi(G)\cdot\chi(\overline{G}) \geq n$.

בחינה 3 (במתכונת ישנה !)

מבנה הבחינה :

* יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
* משקל כל שאלה 25% .
* אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* **<u>יש לנמק כל תשובה</u>, גם אם זה לא נאמר במפורש בשאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
* **אפשר גם להסתמך על טענות מהמדור "עזרים ללמידה" באתר הקורס.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קראו בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

תהי M קבוצת היחסים (הרלציות) מעל $A = \{1,2,3\}$.

(7 נק') א. מהי $|M|$?

(18 נק') ב. נגדיר יחס S מעל M (שימו לב, מעל M ולא מעל A):

עבור $R_1, R_2 \in M$: $(R_1, R_2) \in S$ אסם $R_1R_2 = R_2R_1$.

הוכיחו ש- S <u>אינו</u> יחס שקילות מעל M.

שאלה 2

בעמ' 27 בכרך "תורת הקבוצות" הגדרנו פעולה של הפרש סימטרי בין שתי קבוצות.
להלן נסיון לא מוצלח להגדיר הפרש סימטרי בין **עוצמות**.
מצאו מה לא תקין בהגדרה הבאה.

בהנתן עוצמות k,m (לא בהכרח שונות זו מזו),

תהיינה A,B קבוצות המקיימות $|A| = k$, $|B| = m$.

נגדיר: $k \oplus m = |A \oplus B|$.

הגדרה כזו אינה אפשרית. עליכם להסביר מה הבעיה בהגדרה, ולהראות ע"י דוגמא שההגדרה אינה תקינה. הדרכה: ראו ההגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות.

שאלה 3

ברשותנו כדורים אדומים, כדורים כחולים, כדורים ירוקים וכדורים לבנים, מכל צבע בדיוק 10 כדורים. בכמה דרכים ניתן לבחור מתוכם 24 כדורים, ללא חשיבות לסדר הבחירה?
כדורים בעלי אותו צבע נחשבים זהים.
יש להגיע לתשובה סופית מספרית, ולא ע"י חישוב סכום של עשרות גורמים.
אפשר להיעזר בפונקציה יוצרת, אפשר בעזרת הכלה והפרדה, כל דרך נכונה תתקבל.

שאלה 4

תהי $A=\{1,2,3,4,5\}$.

נסמן $A^3 = A\times A\times A$, קבוצת הסדרות באורך 3 שאבריהן לקוחים מ- A.

(3 נק׳) א. כמה פונקציות של A^3 לקבוצה $\{0,1\}$ קיימות?

(11 נק׳) ב. נגדיר יחס שקילות מעל A^3: שתי שלשות סדורות ייקראו שקולות אם הן שוות, או נבדלות רק בסידור האיברים בשלשה. דוגמאות:

$(1,2,3)$ שקולה ל- $(2,1,3)$.

$(1,2,2)$ שקולה ל- $(2,1,2)$, אך **אינה** שקולה ל- $(1,1,2)$.

כמה מחלקות שקילות יש? נמקו.

(11 נק׳) ג. לכמה פונקציות של A^3 לקבוצה $\{0,1\}$ יש התכונה הבאה:

לכל $a,b,c\in A$ (a,b,c לאו דווקא שונים זה מזה) מתקיים:

$$f(a,b,c) = f(a,c,b) = f(b,a,c) = f(b,c,a) = f(c,a,b) = f(c,b,a)$$

הדרכה לסעיף ג׳: היעזרו בסעיף ב׳. יש לנמק.

אפשר גם להיעזר במושג ״פונקציה אופיינית״, שהוגדר בעמ׳ 85 בכרך ״תורת הקבוצות״.

שאלה 5

יהיו $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ שני עצים על אותה קבוצת צמתים V.

לכל $v\in V$ תהי $d_1(v)$ הדרגה של v ב- G_1 ותהי $d_2(v)$ הדרגה של v ב- G_2.

הוכיחו כי קיים $v\in V$ עבורו $d_1(v)+d_2(v)\le 3$.

הדרכה: חשבו את סכום כל הדרגות בשני העצים.

בהצלחה!

פתרון בחינה 3

שאלה 1

א. $2^9 = 512$

ב. היחס רפלקסיבי וסימטרי אבל אינו טרנזיטיבי.

כדי להראות שאינו טרנזיטיבי מוצאים R_1, R_2, R_3 כך ש- R_1, R_2 מתחלפות

(כלומר $R_1R_2 = R_2R_1$), R_2, R_3 מתחלפות, אבל R_1, R_3 לא מתחלפות.

דרך נוחה לעשות זאת:

מוצאים R_1, R_3 **כלשהן שאינן מתחלפות** ובוחרים את R_2 להיות I_A או להיות $\varnothing$.

אפשר כמובן גם אחרת.

שאלה 2

הבעיה בהגדרה היא שתוצאת הפעולה תלויה בבחירת הנציגים (הקבוצות A, B).

את הבעיה אפשר להראות אפילו בקבוצות סופיות:

נחשב את $1 \oplus 1$ בשתי דרכים:

נבחר $A = B = \{1\}$. מתקיים $|A| = |B| = 1$. לכן ניתן לחשב בעזרת A, B את $1 \oplus 1$.

מההגדרה שבשאלה(!) נקבל: $1 \oplus 1 = |A \oplus B| = |\varnothing| = 0$.

מצד שני, נבחר $A = \{1\}$, $B = \{2\}$.

מתקיים $|A| = |B| = 1$. לכן ניתן לחשב בעזרת A, B את $1 \oplus 1$:

מההגדרה שבשאלה(!) נקבל: $1 \oplus 1 = |A \oplus B| = |\{1,2\}| = 2$.

קיבלנו שתי תוצאות שונות, משמע הגדרת הפעולה תלויה בנציגים ולכן אינה חוקית.

אפשר כמובן גם להביא דוגמאות מסובכות יותר, כולל כאלה בהן כל הקבוצות שונות זו מזו, וכולל דוגמאות בקבוצות אינסופיות.

המפתח להבנת השאלה הוא הבנת ההגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות, כולל ההערה שמופיעה מיד אחרי כל אחת מהן. מי שלא קרא והבין לפחות אחת או שתים מההגדרות הללו, סביר שלא ענה נכון. על מה ירדו נקודות:

מי שכתב: "לא ניתן להגדיר פעולה על עוצמות בעזרת בחירה של קבוצות"

- לא נכון, הרי חיבור, כפל וחזקה הוגדרו בדיוק בצורה כזו. על כך ירדו הרבה נקודות.

מי שכתב: "בעצם ההגדרה בשאלה היא $k \oplus m = (k-m) + (m-k)$ "

- לא נכון, זו ממש לא ההגדרה. על כך ירדו הרבה נקודות.

מי שהביא דוגמא אחת ובמקום דוגמא שניה אמר שמצד שני "ברור" ש- $k \oplus k = 0$, בלי שהוכיח זאת מתוך ההגדרה שבשאלה

- זה לא ברור מאליו, זה דורש הוכחה מתוך ההגדרה כמו כאן למעלה. על כך ירדו מעט נקודות.

שאלה 3

נחשוב על הצבעים הנתונים כמיוצגים על ידי 4 תאים שונים. נפזר 24 מקלות זהים.

מספר המקלות שנופלים בתא של הצבע הירוק הוא מספר הכדורים הירוקים מתוך ה- 24 וכו'

לכן השאלה הופכת למציאת מספר הפיזורים של 24 מקלות זהים ב- 4 תאים שונים כאשר מספר המקלות בכל תא לא יעלה על 10. במילים אחרות מדובר במספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24$ כאשר $x_1, x_2, x_3, x_4 \le 10$

מספר כל הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24$ הוא $D(4,24)$

לכל $1 \le i \le 4$ נסמן ב- A_i את קבוצת הפתרונות שבהם $x_i > 10$.

פתרון בעזרת עקרון ההכלה וההפרדה:

מספר הפתרונות האלה שווה למספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$.

לכן $|A_i| = D(4,13)$

לכל $1 \le i \ne j \le 4$, מספר הפתרונות השייכים ל- $A_i \cap A_j$ שווה למספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ לכן $|A_i \cap A_j| = D(4,2)$.

ברור שהחיתוך של שלוש קבוצות שונות מהסוג A_i הוא ריק ולכן לפי עקרו ההכלה וההפרדה מקבלים שמספר הפתרונות המבוקש (וגם מספר הבחירות שעליו נשאלנו בשאלה הזו) הוא:

$$D(4,24) - \binom{4}{1}D(4,13) + \binom{4}{2}D(4,2) = D(4,24) - 4D(4,13) + 6D(4,2) = 745$$

פתרון בעזרת פונקציה יוצרת:

הפונקציה היוצרת המתאימה לפתרון השאלה היא $f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})^4$ ועלינו למצוא את המקדם של x^{24}.

לשם ככך נרשום:

$$f(x) = \left(\frac{1 - x^{11}}{1 - x}\right)^4 = (1 - x^{11})^4 \frac{1}{(1 - x)^4}$$

לפי בינום ניוטון עבור $(1 - x^{11})^4$ ולפי הנוסחה $\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} D(n,k)x^k$ עבור $n = 4$ נקבל:

$$f(x) = \left[1 - \binom{4}{1}x^{11} + \binom{4}{2}x^{22} - \binom{4}{3}x^{33} + \binom{4}{4}x^{44}\right]\left(\sum_{k=0}^{\infty} D(4,k)x^k\right).$$

המקדם של x^{24} הוא:

$$D(4,24) - \binom{4}{1}D(4,13) + \binom{4}{2}D(4,2).$$

שאלה 4

יש שאלה זהה כמעט לגמרי בחוברת "אוסף תרגילים פתורים" , עמ' 9 שאלה 4.
מי שראה זאת ונעזר בפתרון ששם, כמובן זה מקובל.

א. 2^{125}

ב. $D(5,3) = \binom{7}{3} = 35$

ג. פונקציה מקיימת את הדרישה בסעיף זה **אם ורק אם** היא מקבלת ערך קבוע בתוך כל מחלקת שקילות. לכן מספר הפונקציות המקיימות את התנאי הוא כמספר הפונקציות של **קבוצת מחלקות השקילות** לקבוצה $\{0,1\}$: 2^{35} .

שאלה 5

נסמן $|V| = n$.

$$\sum_{v\in V}\left(d_1(v) + d_2(v)\right) = \sum_{v\in V} d_1(v) + \sum_{v\in V} d_2(v)$$

$$= 2E_1 + 2E_2 = 2(n-1) + 2(n-1) = 4n - 4$$

(השלימו נימוקים).

כעת, אילו לכל v היה $d_1(v) + d_2(v) \geq 4$ אז הסכום $\sum_{v\in V}\left(d_1(v) + d_2(v)\right)$ היה לפחות $4n$.

מכיון שהוא פחות מ- $4n$, חייב להיות לפחות צומת אחד עבורו $d_1(v) + d_2(v) \leq 3$.

בחינה 4 (מתכונת ישנה!)

מבנה הבחינה:

* יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
* משקל כל שאלה 25% .
* אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* ***יש לנמק כל תשובה***, **גם אם זה לא נאמר במפורש בשאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
* **אפשר גם להסתמך על טענות מהמדור "עזרים ללמידה" באתר הקורס.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קראו בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

נגדיר שני יחסים (רלציות) S,T מעל $P(\mathbf{N})$: עבור $X,Y \subseteq \mathbf{N}$,

$(X,Y) \in S$ אם ורק אם $1 \in X \oplus Y$ או $X = Y$.

$(X,Y) \in T$ אם ורק אם $1 \notin X \oplus Y$.

(הסימן $\oplus$ מציין הפרש סימטרי, הוא הוגדר בכרך "תורת הקבוצות", שאלה 1.22 בעמ' 27)

(8 נק') א. הראו כי S אינו יחס שקילות מעל $P(\mathbf{N})$.

(9 נק') ב. הראו כי T הוא יחס שקילות מעל $P(\mathbf{N})$.

(8 נק') ג. לכמה מחלקות שקילות מחלק T את $P(\mathbf{N})$? הוכיחו. תארו את המחלקות.

שאלה 2

(12 נק') א. כידוע, קבוצת המספרים הרציונליים היא בת-מניה.
הוכיחו שקבוצת המספרים הממשיים **שאינם** רציונליים, עוצמתה C.

(13 נק') ב. תהי A קבוצת כל אותם מספרים ממשיים אשר הריבוע או החזקה השלישית
שלהם הם מספרים טבעיים : $A = \{x \in \mathbf{R} \mid (x^2 \in \mathbf{N}) \vee (x^3 \in \mathbf{N})\}$.
מהי עוצמת A ? הנה דוגמאות לאיברים של A : 1, -17 , $-\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$.

שאלה 3

חמשה אנשים מוכשרים (נקרא להם א,ב,ג,ד,ה) נדרשו לבצע ארבע משימות שונות (להלחין שיר, לפתֵּח אפליקציה לאייפון, לנהל משא ומתן עם האוצר, לחדֵּש את סימון השביל הכחול בנחל ערוגות). הם סיכמו שכל משימה תבוצע על ידי צוות של שני אנשים.

(5 נק') א. בכמה דרכים ניתן להגדיר צוותים לביצוע כל המשימות?
אין דרישה שכולם יעבדו.
למשל, לגיטימי שהצוות {א,ב} יבצע את כל המשימות.

(20 נק') ב. בכמה דרכים ניתן להגדיר צוותים לביצוע כל המשימות, כאשר אסור שמישהו יתחמק לגמרי מעבודה? כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה.

בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 4

תהי B קבוצת המחרוזות באורך 5 , הבנויות בעזרת האותיות a,b,c,d,e (לא כל האותיות חייבות להופיע). למשל $aaeeb \in B$.

נגדיר יחס שקילות מעל B : שתי מחרוזות ייקראו שקולות אם **קבוצת** האותיות המופיעות במחרוזת האחת **שווה** לקבוצת האותיות המופיעות במחרוזת השניה.

למשל $aeeee$ שקולה ל- $aaeee$ ושקולה ל- $eaaae$,

מכיון שלכל אחת מהמחרוזות האלה, קבוצת האותיות המופיעות בה היא $\{a,e\}$.

סעיפים ב,ג,ד,ה עוסקים ביחס השקילות הזה. אינכם נדרשים להוכיח שזהו יחס שקילות.

(4 נק׳) א. כמה אברים יש ב- B ?

(6 נק׳) ב. כמה מחלקות שקילות יש ?

(5 נק׳) ג. כמה אברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת $abcde$?

(5 נק׳) ד. כמה אברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת $aaaab$?

(5 נק׳) ה. כמה אברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת $aabcd$?

הוכיחו את תשובותיכם.

שאלה 5

G הוא גרף פשוט **ולא קשיר** על n צמתים ($n \geq 2$).

יש ב- G בדיוק שני צמתים בעלי דרגה זוגית.

הוכיחו שבגרף **המשלים** של G יש מסלול אוילר שאינו מעגל.

נמקו **בצורה מדויקת** כל צעד בהוכחה.

הגרף המשלים הוגדר בחוברת ״תורת הגרפים״, הגדרה 1.4 בעמ׳ 12 .

בהצלחה!

תקציר פתרון בחינה 4

שאלה 1

א. S אינו טרנזיטיבי (הוא כן רפלקסיבי וסימטרי).

ב. לגבי T : רפלקסיבי וסימטרי קל להראות.

הוכחה שהוא טרנזיטיבי: נניח $1 \notin X \oplus Y$ וגם $1 \notin Y \oplus Z$.

ההנחה $1 \notin X \oplus Y$ פירושה: $1 \notin X \cup Y$ **או** $1 \in X \cap Y$ (מדוע?)

בדומה נפרק את ההנחה $1 \notin Y \oplus Z$.

הנתון $1 \notin X \oplus Y$ וגם $1 \notin Y \oplus Z$ מתפרק אפוא ל- 4 אפשרויות.

נבדוק כל אחת מהן בנפרד, ונגלה שבכל אחת מהן $1 \notin X \oplus Z$ (השלימו).

לפיכך T טרנזיטיבי.

ג. בדיוק שתי מחלקות: במחלקה אחת נמצאות כל הקבוצות של מספרים טבעיים ש- 1 הוא אבר שלהן ובמחלקה השניה כל הקבוצות של מספרים טבעיים ש- 1 לא אבר שלהן.

שאלה 2

א. מתקבל מיידית מתוך משפט 5.13ב בחוברת "פרק 5 בתורת הקבוצות".

ב. $\aleph_0$ (לכל מספר טבעי יש שני שורשים ריבועיים ושורש שלישי יחיד).

שאלה 3

א. לכל משימה יש $10 = \binom{5}{2}$ דרכים לבחור צוות. לארבע המשימות: 10^4 דרכים.

ב. A_i : קבוצת הבחירות של צוותים בהן אדם i מתחמק מעבודה.

הכלה והפרדה: $\binom{5}{2}^4 - 5\cdot\binom{4}{2}^4 + \binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}^4 - \binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}^4$

שאלה 4

א. יש 5^5 מחרוזות כאלה מפני שבכל מחרוזת יש 5 מקומות ובכל מקום יכולה להופיע כל אחת מן האותיות a,b,c,d,e.

ב. כל מחלקה נקבעת לחלוטין על ידי קבוצת האותיות אחת מתוך a,b,c,d,e (כל המילים שבהן מופיעות אך ורק האותיות מאותה קבוצה הן באותה מחלקה). לכן מספר המחלקות שווה למספר הקבוצות **הלא ריקות** של אותיות מתוך a,b,c,d,e (כי בכל מחרוזת חייבים להשתמש באות אחת לפחות.

מספר כל הקבוצות הלא ריקות שחלקיות לקבוצה בעלת 5 איברים הוא $2^5 - 1 = 31$.

ג. במחלקת השקילות של המחרוזת $abcde$ מופיעות אך ורק המחרוזות באורך 5 שבהן מופיעות כל האותיות a,b,c,d,e לכן מספר המחרוזות במחלקה זו שווה למספר כל התמורות על 5 עצמים, כלומר שווה ל- $5!$.

ד. במחלקת השקילות של $aaaab$ נמצאות אך ורק המחרוזות שבהן מופיעות שתי האותיות a,b (כאשר כל אחת משתי האותיות מופיעה לפחות פעם אחת).

מספר המילים באורך 5 הכתובות באותיות a,b הוא 2^5 אך בתוכן יש שתי מילים שבהן אחת האותיות לא מופיעה כלל ($aaaaa$ ו- $bbbbb$).

לכן מספר המחרוזות במחלקה של $aaaab$ הוא $2^5 - 2 = 30$.

ה. במחלקה של $aabcd$ נמצאות כל המחרוזות שבהן כל אחת מהאותיות a,b,c,d מופיעה לפחות פעם אחת. הדרישה הזו מחייבת אות אחת מבין הארבע להופיע פעמיים ואת שלוש אחרות להופיע פעם אחת. מספר המחרוזות שבהן a מופיעה פעמיים ושאר האותיות פעם אחת הוא כמספר התמורות עם חזרות של a,a,b,c,d וזה שווה ל- $\frac{5!}{2!}$.

יש 4 אפשרויות לבחירת האות שתופיע פעמיים לכן מספר החרוזות במחלקה של $aabcd$ הוא: $4 \cdot \frac{5!}{2!} = 2 \cdot 5! = 240$

שאלה 5

G אינו קשיר , לכן $\overline{G}$ קשיר (שאלה 4 בפרק 1 בתורת הגרפים).

מהנתון, ב- G יש בדיוק $n-2$ צמתים בעלי דרגה אי-זוגית.

מספר הצמתים בעלי דרגה אי-זוגית בגרף הוא זוגי (שאלה 1 בפרק 1 בתורת הגרפים).

לכן $n-2$ הוא זוגי.

לפיכך $n-1$ הוא אי-זוגי.

בכל גרף, לכל צומת v, $\deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) = n-1$.

מכאן ומכיוון ש- $n-1$ הוא אי-זוגי, נקבל שהזוגיות של דרגת צומת ב- G הפוכה מהזוגיות של הדרגה שלו ב- $\overline{G}$ (כלומר אם האחד זוגי השני אי-זוגי ולהיפך).

לכן ב- $\overline{G}$ יש בדיוק שני צמתים בעלי דרגה אי-זוגית.

הראינו ש- $\overline{G}$ מקיים את תנאי שאלה 1 בפרק 3 בתורת הגרפים, לכן יש בו מסלול אוילר לא סגור.

בחינה 5

מבנה הבחינה:
בבחינה שני חלקים.
חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.
בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות:
שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.
אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* **בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה.
מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק') **א.** להלן ציטוט משיר ישן של אילן ואילנית:

P: **לכל אדם, כוכב יש בשמיים, כוכב המתגלה עם רדת יום.**

איזה מהטענות הבאות שקולה ל**שלילת** P ?

[1] לכל אדם כוכב יש בשמיים, כוכב שאינו מתגלה עם רדת יום.

[2] לכל אדם, אם יש לו כוכב בשמיים אז הכוכב הזה לא מתגלה עם רדת יום.

[3] לאף אדם אין בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום.

[4] יש בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום אבל אינו שייך לאף אדם.

[5] יש אדם שאין לו בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום.

(7 נק') **ב.** נסמן $A=\{(x,n) \mid x\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{N}\} \cup \{(n,x) \mid n\in\mathbf{N},\ x\in\mathbf{R}\}$.

ונסמן $B=(\mathbf{R}\times\mathbf{R})-A$.

עוצמת B היא:

[1] 0 **[2]** $\aleph_0$ **[3]** C **[4]** 2^C

[5] עוצמה כלשהי שנמצאת בין $\aleph_0$ ל- C.

(6 נק') **ג.** G הוא עץ מתויג על 8 צמתים (התגים הם כמקובל המספרים $1,2,3,\ldots,8$).

סדרת Prüfer של G היא $(3,7,2,2,x,2)$ כאשר $x\in\{1,2,3,\ldots,8\}$.

לפיכך:

[1] $x=2$

[2] $x\neq 2$

[3] לא ייתכן: זה לא האורך המתאים עבור סדרת Prüfer של G.

[4] אורך הסדרה מתאים אבל אף ערך של x לא נותן סדרת Prüfer חוקית.

[5] x יכול להיות כל מספר שנרצה בקבוצה $\{1,2,3,\ldots,8\}$.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו : 81 נקודות

שאלה 2

(7 נק') א. יהיו R, R_1, S, S_1 יחסים (רלציות) מעל קבוצה A.

הוכיחו כי אם $R_1 \subseteq R$ ו- $S_1 \subseteq S$ אז $R_1S_1 \subseteq RS$.

(14 נק') ב. הוכיחו כי אם R, S הם יחסים טרנזיטיביים מעל A, המקיימים $RS = SR$,

אז גם RS טרנזיטיבי. נמקו בפירוט כל צעד. סעיף א יכול לסייע.

נוח להוכיח סעיף זה בעזרת תכונות אלגבריות של יחסים, ללא התבוננות באברי היחס.

(6 נק') ג. תהי $A = \{1, 2\}$. תנו דוגמה ליחסים R, S מעל A, כך שארבעת היחסים

R, S, RS, SR הם טרנזיטיביים אבל $RS \neq SR$.

שאלה 3

נסמן $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3\}$.

(5 נק') א. מהו מספר הפונקציות של B לקבוצה $A \times A$?

(22 נק') ב. מהו מספר הפונקציות f של B לקבוצה $A \times A$, המקיימות :

לכל $a \in A$ קיים $x \in B$ כך ש- a מופיע (כאיבר הימני או כאיבר השמאלי)

בזוג הסדור $f(x)$?

דוגמאות :

הפונקציה f המוגדרת כך : $f(1) = (1,2)$, $f(2) = (3,4)$, $f(3) = (1,1)$

מקיימת את הדרישה.

הפונקציה g המוגדרת כך : $g(1) = (1,2)$, $g(2) = (2,1)$, $g(3) = (1,1)$

אינה מקיימת את הדרישה,

כי 3, 4 אינם נמצאים באף אחד מהזוגות $(1,2), (2,1), (1,1)$.

בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 4

יהי a_n מספר הסדרות באורך n, שאבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,\ldots,7\}$, והמקיימות את התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים **זוגיים** זה בסמוך לזה.

למשל, עבור $n=5$, הסדרה $(1,1,2,6,3)$ **אינה** מקיימת את התנאי, כי 2 מופיע ליד 6.

גם הסדרה $(1,1,2,2,3)$ אסורה, כי יש שתי הופעות צמודות של 2.

(10 נק׳) א. רשום את $a_0,\ a_1,\ a_2$. מצא יחס נסיגה (יחס רקורסיה) עבור a_n.
בדוק ש- $a_0,\ a_1,\ a_2$ שרשמת מתיישבים עם יחס הנסיגה שמצאת.

(17 נק׳) ב. פתור את יחס הנסיגה וקבל ביטוי מפורש עבור a_n.
בדוק את הביטוי שקיבלת, עבור $n=2$.

שאלה 5

יהי G גרף פשוט, שיכול להיות קשיר או לא קשיר.

a,b הם צמתים שונים ב- G, שהמסלול **הקצר ביותר** ביניהם הוא באורך 3 או יותר

(תזכורת: אורך מסלול הוא מספר הקשתות במסלול). ייתכן שאין כלל מסלול בין a,b.

$\overline{G}$ הוא הגרף **המשלים** של G ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4).

(6 נק׳) א. הוכיחי שב- $\overline{G}$, הצמתים a,b נמצאים באותו רכיב קשירות.

(21 נק׳) ב. הוכיחי ש- $\overline{G}$ הוא קשיר.

בהצלחה!

תקציר פתרון בחינה 5

תשובה 1

א. [5]   ב. [3]   ג. [5]

תשובה 2

א. יהי $(a,b) \in R_1S_1$. משמע קיים $c \in A$ כך ש- $(a,c) \in R_1$ $(c,b) \in S_1$.

$R_1 \subseteq R$, לכן $(a,c) \in R$. $S_1 \subseteq S$, לכן $(c,b) \in S$.

שוב מהגדרת כפל יחסים, קיבלנו $(a,b) \in RS$.

ב. הוכחת טענה זו ע"י התבוננות באיברי היחסים אינה קלה.

ההוכחה האלגברית פשוטה למדי: לפי עמ' 52 בספר, T טרנזיטיבית אסם $T^2 \subseteq T$.

עלינו להוכיח אפוא כי $(RS)^2 \subseteq RS$. נחשב:

(הגדרת חזקה של רלציה)	$(RS)^2 = (RS)(RS)$
(כפל רלציות הוא אסוציאטיבי: משפט 2.8)	$= R(SR)S$
(נתון $RS = SR$)	$= R(RS)S$
(שוב אסוציאטיביות והגדרת חזקה)	$= R^2S^2$
(סעיף א, בצירוף העובדה שהיחסים הטרנזיטיביים R,S מקיימים $R^2 \subseteq R$, $S^2 \subseteq S$)	$\subseteq RS$

ג. דוגמה 1: $R = \{(1,2)\}$, $S = \{(2,1)\}$.   דוגמה 2: $R = \{(1,2)\}$, $S = \{(1,1)\}$.

תשובה 3 (השאלה הופיעה במטלה בסמסטר קודם. היא דומה לשאלה ממועד א2 אבל אחרת: שם התמונות היו זוגות לא סדורים)**.**

א. $(4 \cdot 4)^3 = 16^3 = 4{,}096$

ב. תהי U קבוצת **כל** הפונקציות של B ל- $A \times A$. מהסעיף הקודם $|U| = 4{,}096$.

עבור $i = 1,2,3,4$, תהי F_i קבוצת הפונקציות f השייכות ל- U, אשר i **אינו** נמצא כאיבר ימני ואינו נמצא כאיבר שמאלי **באף אחד** מהזוגות שבתמונת f.

למשל הפונקציה g בדוגמא שבגוף השאלה שייכת ל- F_3 וגם ל- F_4.

אנו מחפשים את גודל הקבוצה $U - \bigcup_{i=1}^{4} F_i$.

את F_1 ניתן לראות כקבוצת הפונקציות של B לקבוצה $\{2,3,4\} \times \{2,3,4\}$.

לכן, בדומה לסעיף א, $|F_1| = (3 \cdot 3)^3 = 729$.

בדומה מובן כי עבור $i = 1,2,3,4$, $|F_i| = 729$.

חיתוכים בזוגות:

את $F_1 \cap F_2$ ניתן לראות כקבוצת הפונקציות של B לקבוצה $\{3,4\} \times \{3,4\}$.

לכן $|F_1 \cap F_2| = (2 \cdot 2)^3 = 64$.

מובן כי לכל $i \neq j$ זהו גם $|F_i \cap F_j|$. יש 6 חיתוכים בזוגות

חיתוכים משולשים:

כל חיתוך כזה הוא קבוצת הפונקציות של B לקבוצה בת איבר אחד. יש בדיוק פונקציה אחת השולחת את כל אברי B לאיבר קבוע. לכן עבור i,j,k שונים זה מזה, $|F_i \cap F_j \cap F_k| = 1$.

יש 4 חיתוכים משולשים.

החיתוך $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$ הוא ריק.

מעקרון ההכלה וההפרדה,

$$\left| U - \bigcup_{i=1}^{4} F_i \right| = |U| - 4|F_i| + 6|F_1 \cap F_2| - 4|F_1 \cap F_2 \cap F_3|$$

$$= 4{,}096 - 4 \cdot 729 + 6 \cdot 64 - 4 \cdot 1 = 1{,}560$$

תשובה 4 (השאלה הופיעה במטלה בסמסטר קודם עם המספרים 1 – 8 במקום 1 - 7**)**.

א. נבדוק כיצד בנויה סדרה באורך n המקיימת את הנדרש.

נתבונן באיבר האחרון של הסדרה:

* אם הוא אי-זוגי (4 אפשרויות), אז קטע הסדרה הקודם לו הוא **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-1$ (a_{n-1} אפשרויות).
* אם הוא זוגי (3 אפשרויות) אז לפניו בא מספר אי-זוגי (4 אפשרויות), ולפניו **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-2$ (a_{n-2} אפשרויות).

קיבלנו: $a_n = 4a_{n-1} + 12a_{n-2}$.

תנאי התחלה:

$a_0 = 1$ (הסדרה הריקה מקיימת את התנאים),

$a_1 = 7$,

$a_2 = 7^2 - 3^2 = 40$ (כל הזוגות פחות זוגות של מספרים זוגיים),

לבדיקה, מיחס הנסיגה: $a_2 = 4a_1 + 12a_0 = 4 \cdot 7 + 12 = 40$.

ב. המשוואה האפיינית: $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$. פתרונותיה: 6, -2.

לפיכך $a_n = A\cdot 6^n + B\cdot(-2)^n$.

בהצבת תנאי ההתחלה: $A + B = 1$, $6A - 2B = 7$.

מכאן $B = -1/8$, $A = 9/8$.

כלומר $a_n = \frac{9}{8}\cdot 6^n - \frac{1}{8}\cdot(-2)^n$.

בדיקה: $a_2 = \frac{9}{8}\cdot 6^2 - \frac{1}{8}\cdot(-2)^2 = \frac{9\cdot 36 - 4}{8} = 40$

תשובה 5

א. מכיון שאין ביניהם קשת ב- G, יש ביניהם קשת ב- $\overline{G}$.

ב. יהי x צומת השונה מ- a,b.

לא ייתכן שב- G קיימת קשת ax **וגם** קשת xb, כי זהו מסלול באורך 2 בין a ל- b.

כלומר ב- G, או שאין קשת ax או שאין קשת xb.

לכן ב- $\overline{G}$ יש קשת ax או שיש קשת xb.

משמע x הוא באותו רכיב קשירות עם a או עם b. אבל לפי א' זהו אותו רכיב קשירות.

בחינה 6

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות:

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* **בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א׳: שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק׳) **א.** הפסוקים הבאים עוסקים ביחס (רלציה) R מעל קבוצה כלשהי.
איזה מהפסוקים מביע את הטענה ש- R הוא יחס טרנזיטיבי?

[1] $\forall x \forall y \exists z \left(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z) \right)$

[2] $\forall x \forall y \forall z \left((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z) \right)$

[3] $\left(\exists x \exists y R(x,y) \wedge \exists y \exists z R(y,z) \right) \;\to\; \exists x \exists z R(x,z)$

[4] $\left(\forall x \forall y R(x,y) \wedge \forall y \forall z R(y,z) \right) \;\to\; \forall x \forall z R(x,z)$

[5] $\left(\exists x \exists y \exists z (R(x,y) \wedge R(y,z)) \right) \;\to\; R(x,z)$

(7 נק׳) **ב.** $\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים, $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.
תהי B קבוצת כל הפונקציות של $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{R}$. עוצמת B היא:

[1] מספר סופי כלשהו **[2]** $\aleph_0$ **[3]** C

[4] 2^C **[5]** אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק׳) **ג.** G הוא גרף קשיר על 8 צמתים. **דרגות** הצמתים הן: $2,2,3,4,4,5,6,6$.
מכאן נובע:

[1] **יש** ב- G מעגל אוילר. **יש** ב- G גם מסלול אוילר שאינו מעגל.

[2] **יש** ב- G מעגל אוילר. **אין** ב- G מסלול אוילר שאינו מעגל.

[3] **אין** ב- G מעגל אוילר. **יש** ב- G מסלול אוילר שאינו מעגל.

[4] **אין** ב- G מעגל אוילר. **אין** ב- G מסלול אוילר שאינו מעגל.

[5] כדי לדעת איזה מהאפשרויות 1 – 4 מתקיימת נדרש עוד מידע על G.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2
בסעיפים א, ב: R הוא יחס סדר-חלקי מעל הקבוצה $A=\{1,2,3,4,5\}$.

עוד נתון ש- 1 הוא אבר מינימלי ביחס R **ויחד עם זה** 1 הוא גם אבר מקסימלי ביחס R.

(8 נק') א. **תנו דוגמא** ליחס סדר חלקי R מעל A הנ"ל, המקיים תנאים אלה.
כתשובה אפשר לתאר את היחס מילולית או לשרטט דיאגרמת הסה שלו
או לרשום את כל הזוגות העומדים ביחס.
אינכם נדרשים להוכיח שהיחס שהבאתם הוא סדר חלקי ושהוא עומד
בתנאים (אבל כמובן אם משהו מאלה לא מתקיים יאבד הניקוד בסעיף זה).

(11 נק') ב. **הוכיחו כללית** (לא רק עבור הדוגמא שהבאתם בסעיף הקודם) שאם R מקיים
את התנאים שבתחילת השאלה, אין ב- R אבר גדול ביותר ואין ב- R אבר קטן
ביותר.

(8 נק') ג. האם קיים יחס סדר-חלקי S מעל $A=\{1,2,3,4,5\}$, כך ש- 1 הוא
אבר גדול ביותר ביחס S **ויחד עם זה** 1 הוא גם אבר קטן ביותר ביחס S ?
אם יש יחס כזה – תנו דוגמא. אם אין – הוכיחו שאין.

שאלה 3
במערכת מחשב מסוימת, סיסמת משתמש היא באורך של **לפחות 3 תוים ולכל היותר 100 תוים**.
התוים המותרים: a-z, A-Z, 0-9 (יש אפוא $26+26+10=62$ תוים מותרים).
סיסמא חייבת להכיל **לפחות אות קטנה אחת, לפחות אות גדולה אחת ולפחות ספרה אחת**.

ביום מסוים, באג מוזר בתהליך בדיקת הסיסמא גרם לכך שבכניסה למערכת **לא היתה התייחסות לסדר התוים ולא היתה התייחסות לחזרות**. למשל, המערכת לא הבחינה בין הסיסמאות BA1Aa11, aAB1, 1AAAABBBaa, כי בשלושתן מופיעים בדיוק אותם תוים.
עוד דוגמאות: נניח שהסיסמא של משה היא **abAB122**. באותו יום מוזר:
אם משה הקליד בטעות 22aAaBb1b , המערכת קיבלה אותו.
אם משה הקליד בטעות abAB123, המערכת לא קיבלה אותו, כי התו 3 לא נמצא בסיסמא שלו.
אם משה הקליד בטעות abAB11, המערכת לא קיבלה אותו, כי חסר התו 2 שנמצא בסיסמא שלו.

כמה סיסמאות שונות היו אפשריות **בפועל** באותו יום? "אפשריות בפועל" משמע **סיסמאות שהמערכת לא מבחינה ביניהן נחשבות כאותה סיסמא**.
מדובר רק על סיסמאות חוקיות, המקיימות את הדרישות שבתחילת השאלה.
כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה. אין הכרח להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 4

(8 נק') א. נרשום את הפיתוחים הבאים :

$$f(x) = (1-x)^9 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \qquad g(x) = \frac{1}{(1-x)^{10}} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

מצאו את a_i ואת b_i, לכל i טבעי.

(16 נק') ב. נשים לב ש- $\frac{1}{1-x} = f(x)\cdot g(x)$ (*)

יהי $k \in \mathbf{N}$. את המקדם של x^k בפונקציה $f(x)\cdot g(x)$ אפשר לחשב בשתי דרכים :

- מתוך אגף שמאל של (*), ע"י כפל פונקציות יוצרות.
- מתוך אגף ימין של (*), בפיתוח הידוע של $\frac{1}{1-x}$.

השוו את שתי התוצאות וקבלו זהות מהצורה $? \;=\; \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{?}{?}\cdot D(?\,,?)$.

(3 נק') בדקו את הזהות שקיבלתם עבור המקרה $k=1$.

שאלה 5

גרף T הוא **עץ** על שמונה צמתים.

הוסיפו ל- T שתי קשתות (לא הוסיפו צמתים).

אחרי הוספת שתי הקשתות התקבל גרף פשוט, שכמובן אינו עץ. נקרא לו G .

הוכיחו שהגרף **המשלים** של G אינו מישורי

("גרף משלים" הוגדר בחוברת "תורת הגרפים", הגדרה 1.4) .

בהצלחה!

תקציר פתרון בחינה

שאלה 1

א. [2] ב. [3] ג. [3]

שאלה 2

א. למשל יחס הזהות. כללית, כל יחס שבו 1 עומד ביחס רק עם עצמו.

ב. 1 אינו גדול ביותר: אילו 1 היה גדול ביותר הוא היה גדול מ- 2, כלומר 2 היה קטן מ- 1, ואז 1 לא היה מינימלי.

אף אבר **אחר** בקבוצה אינו גדול ביותר: אילו היה כזה, הוא היה גדול מ- 1, ואז 1 לא היה מקסימלי.

בדומה לגבי קטן ביותר.

ג. גדול ביותר הוא בפרט מקסימלי, קטן ביותר הוא בפרט מינימלי.

לכן מסעיף ב׳ נובע מיד שלא ייתכן S כזה.

שאלה 3

באותו יום מה שנבדק הוא בעצם **קבוצת** התוים בסיסמא. מכיון שאורך סיסמא הוא עד 100, כל קבוצה של תוים מתוך 62 התוים אפשרית, ובלבד שתכיל אות קטנה, אות גדולה וספרה.

מכאן בהכלה והפרדה: $2^{62}-(2\cdot 2^{36}+2^{52})+(2\cdot 2^{26}+2^{10})-1$

שאלה 4

א. $a_i=(-1)^i\binom{9}{i}$, $b_i=D(10,i)=\binom{9+i}{i}$.

ב. $1 = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{9}{i}\binom{9+k-i}{9} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{9}{i}D(10,k-i)$

עבור $k=1$ מקבלים $10-9=1$.

שאלה 5

מכיון ש- T הוא עץ, מספר הקשתות שלו הוא $8-1=7$.

מספר קשתות G הוא אפוא 9.

מספר הקשתות בגרף המשלים של G הוא $\binom{8}{2}-9=28-9=19$.

מסקנה 5.4 בתורת הגרפים אומרת שמספר הקשתות בגרף מישורי הוא לכל היותר $3n-6=18$.

לכן המשלים של G אינו מישורי.

בחינה 7

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות:

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* **בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק') א. הפסוק $\forall x \forall y \forall z \big((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z) \big)$ מביע את הטענה ש- R הוא יחס טרנזיטיבי.

איזה מהפסוקים הבאים מביע את הטענה ש- R **<u>אינו</u>** טרנזיטיבי?

[1] $\forall x \forall y \forall z \big(\neg R(x,y) \wedge \neg R(y,z) \wedge \neg R(x,z) \big)$

[2] $\forall x \forall y \forall z \big((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow \neg R(x,z) \big)$

[3] $\forall x \forall y \exists z \big(R(x,y) \wedge R(y,z) \wedge \neg R(x,z) \big)$

[4] $\exists x \exists y \exists z \big((\neg R(x,y) \wedge \neg R(y,z)) \rightarrow \neg R(x,z) \big)$

[5] $\exists x \exists y \exists z \big(R(x,y) \wedge R(y,z) \wedge \neg R(x,z) \big)$

(7 נק') **ב.** $\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים, $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

תהי B קבוצת כל הפונקציות של $P(\mathbf{N})$ ל- $P(\mathbf{R})$. עוצמת B היא:

[1] אפס (אין פונקציות כאלה) **[2]** C **[3]** 2^C

[4] עוצמה גדולה מ- 2^C **[5]** אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק') **ג.** G הוא יער על קבוצה של 10 צמתים, ויש לו בדיוק שני רכיבי קשירות.

x,y הם צמתים השייכים לרכיבי קשירות **שונים** של G. ניצור גרף חדש על-ידי כך ש"נדביק" את x ל- y: שניהם ייחשבו כעת כצומת אחד; קבוצת הקשתות השכנות לצומת זה היא איחוד קבוצת הקשתות שהיו שכנות ל- x עם קבוצת הקשתות שהיו שכנות ל- y. הצמתים של G פרט ל- x,y והקשתות של G שאינן שכנות ל- x או ל- y נשארים כולם ללא שינוי בגרף החדש. קיבלנו גרף חדש על 9 צמתים. גרף זה הוא:

[1] יער שאינו עץ **[2]** עץ **[3]** K_9, גרף מלא על 9 צמתים

[4] גרף שאינו יער (ובפרט אינו עץ) ואינו K_9

[5] כדי לדעת איזה מהאפשרויות 1 – 4 מתקיימת נדרש עוד מידע על G.

חלק ב׳: ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב׳ כולו : 81 נקודות

שאלה 2

בכל סעיפי השאלה A היא קבוצה סופית לא ריקה ו- f היא פונקציה של A ל- A המקיימת :
לכל $x \in A$, $f(f(x)) = x$.

(7 נק׳) א. הוכיחו ש- f היא **על** A .

(7 נק׳) ב. הוכיחו ש- f היא חד-חד-ערכית.

(13 נק׳) ג. באותם נתונים, המופיעים לפני סעיף א, נגדיר מעל A יחס E , כך :
$(x,y) \in E$ אם ורק אם $x = y$ **או** $f(x) = y$.
הוכיחו ש- E הוא יחס שקילות מעל A.

שאלה 3

יהי n מספר טבעי כלשהו ותהי $A = \{1,2,3,\dots,n+3\}$.
נתבון בקבוצות X המקיימות $\{1,2,3\} \subseteq X \subseteq A$.

(6 נק׳) א. חשבו בצורה פשוטה וקלה, ללא שימוש בהכלה והפרדה או כלים מתוחכמים אחרים, כמה קבוצות X כאלה קיימות. התשובה היא ביטוי התלוי ב- n.
כמובן - נמקו.

(17 נק׳) ב. חשבו מחדש את מספר הקבוצות הללו בדרך שונה : בעזרת הכלה והפרדה.
התחילו במספר **כל** הקבוצות החלקיות של A והמשיכו משם בחיסור וחיבור של ביטויים מתאימים.

(4 נק׳) ג. הראו שהתשובה שקיבלתם בסעיף ב מתלכדת עם התשובה שקיבלתם בסעיף א.

שאלה 4

בכל סעיפי השאלה, **כל המשתנים** x_i **הם מספרים טבעיים**.

בשני הסעיפים **יש להגיע לתשובה מספרית**. תזכורת: בקורס זה 0 הוא מספר טבעי.

(5 נק׳) א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 12$.

(22 נק׳) ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24$ (*)
כאשר נתון: $x_1 + x_2 + x_3 > x_4 + x_5 + x_6$.

הדרכה לסעיף ב: פתרון של המשוואה (*) מקיים בדיוק אחד משלושת התנאים הבאים:

$$x_1 + x_2 + x_3 > x_4 + x_5 + x_6$$

$$x_4 + x_5 + x_6 > x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6$$

שאלה 5

G הוא גרף פשוט על קבוצת הצמתים $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

בין כל שני צמתים שונים i,j המקיימים $1 \le i \le 4$ וגם $1 \le j \le 4$ יש קשת של G.

בין כל שני צמתים שונים i,j המקיימים $5 \le i \le 9$ וגם $5 \le j \le 9$ יש קשת של G.

בנוסף על כל הקשתות הללו יש ב- G **עוד בדיוק חמש קשתות**.

יהי $H = \bar{G}$ הגרף המשלים של G.

א. הוכיחי ש- H הוא דו-צדדי.

ב. חשבי את מספר הקשתות של H .

ג. בהנחה ש- H קשיר, הוכיחי ש- H אינו מישורי.

בהצלחה!

פתרון בחינה 7

שאלה 1

א. [5] ב. [3] ג. [2]

שאלה 2

א. יהי $x \in A$. עלינו להראות שיש לו מקור. נסמן $y = f(x)$.

בשל הנתון $f(f(x)) = x$ מתקיים $f(y) = x$.

מצאנו אבר ב- A (האבר $y = f(x)$) שתמונתו היא x .

ב. יהיו $x_1, x_2 \in A$ כך שמתקיים $f(x_1) = f(x_2)$.

נפעיל את f בשני האגפים ונקבל $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$.

מהנתון $f(f(x)) = x$, קיבלנו $x_1 = x_2$.

ג. לפי הנתון, לכל $x, y \in A$, כדי שיתקיים xEy מספיק שיתקיים **לפחות אחד מבין שני התנאים:** $x = y$ או $f(x) = y$ **.**

לכן לכל $x \in A$ מתקיים xEx (מפני ש- $x = x$) ולכן היחס **רפלקסיבי**.

נניח כעת ש- xEy . לפי הגדרת היחס E קיימות שתי אפשרויות:

1. $x = y$ ואז ברור שמתקיים גם yEx .
2. $f(x) = y$ ואז $f(f(x)) = f(y)$. אבל $f(f(x)) = x$. לכן $f(y) = x$ ולכן yEx .

מכאן שלכל $x, y \in A$ אם xEy אז yEx לכן E **סימטרי**

וכעת נניח ש- xEy ו- yEz .

1. אם $x = y$ או $y = z$ אז ברור שמתקיים xEz .
2. אם x, y, z שונים זה מזה אז לפי הגדרת E חייב להתקיים $f(x) = y$ ו- $f(y) = z$ לכן $f(f(x)) = f(y) = z$ ומאחר ש- $f(f(x)) = x$ נקבל ש- $x = z$ ולכן xEz .

כך קיבלנו שלכל $x, y, z \in E$, אם xEy ו- yEz אז xEz לכן E **טרנזיטיבי.**

לכן E יחס שקילות.

שאלה 3

א. 2^n

ב. $2^{n+3} - 3 \cdot 2^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} - 2^n$

ג. חישוב

שאלה 4

א. מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3=12$ שווה למספר הפיזורים של 12 עצמים זהים ב- 3 תאים שונים ולכן שווה ל- $D(3,12)$.

ב. כל פתרון $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=24$ מקיים בדיוק אחד משלושת התנאים הבאים:

1. $x_1+x_2+x_3>x_4+x_5+x_6$
2. $x_4+x_5+x_6>x_1+x_2+x_3$
3. $x_1+x_2+x_3=x_4+x_5+x_6$

אנו רוצים לספור את מספר הפתרונות המקיים את תנאי (1). נסמן אותו ב- x.

נשים לב שמספר הפתרונות המקיימים את תנאי (2) שווה למספר הפתרונות המקיימים את תנאי (1) (כי זה אותו אי-שוויון עם שמות אחרים לנעלמים).

כל פתרון $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ המקיים תנאי (3) הוא בעצם פתרון של המערכת

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=12 \\ x_4+x_5+x_6=12 \end{cases}.$$

עבור שלושת המקומות הראשונים (x_1,x_2,x_3) יש $D(3,12)$ אפשרויות (כמספר פתרונות המשוואה $x_1+x_2+x_3=12$).

גם עבור שלושת המקומות האחרונים (x_4,x_5,x_6) יש $D(3,12)$ אפשרויות (כמספר פתרונות המשוואה $x_4+x_5+x_6=12$).

לכן מספר הפתרונות המקיימים תנאי (3) הוא $D(3,12)^2$.

מספר הפתרונות המקיימים אחד משלושת התנאים הנ״ל שווה למספר כל הפתרונות של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=24$ שהוא $D(6,24)$.

לסיכום, מאחר שהתנאים (1), (2) ו- (3) מתארים את קבוצת פתרונות המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=24$ כאיחוד של שלוש קבוצות זרות זו לזו נקבל:

$$D(6,24)=2x+D(3,12)^2.$$

לפיכך שהתשובה לסעיף זה היא:

$$x=\frac{D(6,24)-\left(D(3,12)\right)^2}{2}=\frac{1}{2}\left[\binom{29}{5}-\binom{14}{2}^2\right]=\frac{118,755-8281}{2}=55237$$

שאלה 5

א. הצדדים של H הם $\{5,6,7,8,9\}$, $\{1,2,3,4\}$.

ב. ב- G יש $\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+5=6+10+5=21$ קשתות.

לכן ב- H יש $\binom{9}{2}-21=36-21=15$ קשתות.

המשפט של מועד א' אינו עוזר כאן כי $3n-6=21$ כך ש- **15** קשתות לא מתנגש עם חסם זה. אבל בהמשך הפרק בתורת הגרפים (שאלה 3) מראים שלגרף מישורי פשוט, קשיר **ודו-צדדי** מספר הקשתות הוא לכל היותר $2n-4$, משמע אצלנו **14**.

בחינה 8

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות:

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- **בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
- **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
- **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
- **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק') **א.** α,β הם פסוקים. נתון שהפסוק $\alpha \wedge \beta$ הוא סתירה. מכאן נובע:

[1] α הוא סתירה ו- β הוא סתירה.

[2] בדיוק אחד משני הפסוקים α,β הוא סתירה.

[3] התשובות הקודמות אינן נכונות,
אבל לפחות אחד משני הפסוקים α,β הוא סתירה.

[4] התשובות הקודמות אינן נכונות,
אבל הפסוק α שקול לשלילתו של הפסוק β.

[5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

(7 נק') ב. A היא קבוצת הפונקציות של **N** לקבוצה $\{0,1\}$, המקיימות את התנאים הבאים:

לכל מספר **אי-זוגי** n, $f(n)=1$.

לכל n המתחלק ב- 4, $f(n)=0$.

עבור שאר המספרים אין הגבלה לגבי הערך של f. עוצמתה של A היא:

[1] מספר סופי **[2]** $\aleph_0$ **[3]** C

[4] גדולה מ- C **[5]** לא ניתן לקבוע מהנתונים את עוצמת A

(6 נק') **ג.** G הוא גרף פשוט על 32 צמתים, המוגדר כך:

צומת של G הוא מחרוזת באורך 5 הבנויה מהאותיות a,b.

למשל, המחרוזת $aabab$ היא צומת של G. גם $aaaaa$ היא צומת של G.

צמתים x,y מחוברים בקשת אם ורק אם המחרוזות x,y מתלכדות (כלומר זהות) **פרט למקום אחד בלבד במחרוזת.**

למשל, יש קשת בין הצומת $aabab$ לצומת $abbab$, כי המחרוזות הללו נבדלות זו מזו רק במקום אחד (האות השניה במחרוזת).

מספר **הקשתות** של G הוא:

[1] 64 **[2]** 80 **[3]** 128 **[4]** 144 **[5]** 160

חלק ב׳: ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב׳ כולו : 81 נקודות

שאלה 2

בכל אחד מהסעיפים, קבעו אם קיים יחס (רלציה) כזה מעל הקבוצה $\{1,2,3,4\}$.

אם קיים – הביאו דוגמא. אם לא קיים – **הוכיחו** שלא קיים.

(6 נק׳) א. סימטרי, טרנזיטיבי, לא רֵיק ולא רפלקסיבי.

(7 נק׳) ב. טרנזיטיבי, לא סימטרי ולא אנטי-סימטרי.

(7 נק׳) ג. יחס רפלקסיבי R המקיים : $R \cap R^2 \neq R$.

(7 נק׳) ד. סדר חלקי שבו קיים אבר **קטן ביותר** וקיימים **בדיוק** שני אברים מקסימליים.

שאלה 3

מצאי את מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ בטבעיים,

כאשר אף אחד מהמשתנים אינו שווה ל- 4 ואף אחד מהמשתנים אינו שווה ל- 5 .

0 הוא מספר טבעי. כדאי לפתור בעזרת הפרדה והכלה. יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 4

א. (5 נק׳) מהו מספר המחרוזות באורך 11 הבנויות מ- 7 הופעות של 0

ו- 4 הופעות של 1 ? למשל 11000100001 היא מחרוזת כזו.

ב. (11 נק׳) בכמה מהמחרוזות שבסעיף א אין הופעות צמודות של 1, כלומר אין הופעה של

המחרוזת ״11״ ? הדרכה לפתרון מהיר : חשבו על ספרות 0 כעל מחיצות.

ג. (11 נק׳) מצאו כמה קבוצות X מקיימות : $X \subseteq \{1,2,3\ldots,11\}$, $|X| = 4$,

וב- X **לא נמצאים אף שני מספרים שההפרש ביניהם הוא 1**

(במלים אחרות, לכל i טבעי, אם $i \in X$ אז $i+1 \notin X$).

הדרכה : היעזרו בסעיפים הקודמים. אפשר להיעזר במושג ״פונקציה אופיינית״

(״תורת הקבוצות״ עמ׳ 85).

שאלה 5

בגרף פשוט G קיים מעגל אוילר, וקיים ב- G גם מעגל המילטון.

האם בהכרח קיים ב- G מסלול שהוא בעת ובעונה אחת מעגל אוילר ומעגל המילטון?

אם כן – הוכיחי בפירוט. אם לא – תני דוגמא נגדית מנומקת.

בהצלחה!

תקציר פתרון בחינה 8

שאלה 1

א. [5] . מי שענה [4] יקבל קצת נקודות...

ב. [3].

ג. [2] . דרגת כל צומת היא 5, לכן מספר הקשתות $32 \cdot 5 / 2 = 80$.

שאלה 2

א. כן : $\{(1,1)\}$

ב. כן : $\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(3,4)\}$

ג. לא : לפי טענה המופיעה יחד עם הגדרת רפלקסיביות, יחס רפלקסיבי מקיים $R \subseteq R^2$.

ד. כן : V עם נקודה באמצע אחת הצלעות.

שאלה 3

פתרונות ללא הגבלה : $220 = \binom{12}{3} = D(4,9)$.

A_i : קבוצת הפתרונות בהם $x_i = 5$. B_i : קבוצת הפתרונות בהם $x_i = 4$.

* $15 = \binom{6}{2} = |A_i| = D(3,4)$, יש 4 כאלה.

* $|A_i \cap A_j| = \varnothing$ $i \neq j$.

* $21 = \binom{7}{2} = |B_i| = D(3,5)$, יש 4 כאלה.

* $2 = \binom{2}{1} = |B_i \cap B_j| = D(2,1)$ $i \neq j$ (ברור גם ללא הנוסחה) . יש 6 כאלה.

* חיתוך 3 B-ים שונים הוא ריק.

* $|A_i \cap B_j| = 1$, $i \neq j$, **יש 12 כאלה**.
טעות מקובלת – לומר שאין צורך כי הם נכללים בקבוצות הקודמות...

פרט לאלה אין עוד חיתוכים.

תשובה : $220 - 4 \cdot (15+21) + 6 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 100$

שאלה 4

א. $\binom{11}{4}$

ב. 7 המחיצות מגדירות 8 תאים,

עלינו לבחור 4 מתוכם בלי חזרות ובלי חשיבות לסדר: $\binom{8}{4}$

ג. הפונקציה האפיינית של קבוצה חוקית X בתוך $\{1,2,3...,11\}$ היא בדיוק מחרוזת חוקית מסעיף ב, ולהיפך. לכן זו אותה תשובה.

שאלה 5

דוגמא נגדית: בגרף המלא K_5 כל הדרגות זוגיות, לכן יש מעגל אוילר.

ברור שיש מעגל המילטון.

אבל מעגל אוילר לא יכול להיות מעגל המילטון, כי מסלול באורך 10 לא יכול לעבור דרך כל צומת פעם אחת בלבד (או כי האורך של מעגל המילטון הוא 5).

בחינה 9

מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* **בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק') א. להלן ציטוט משיר ישן של אילן ואילנית:

P: **לכל אדם, כוכב יש בשמיים, כוכב המתגלה עם רדת יום.**

(להסיר ספק, הביטוי "כוכב יש בשמיים" הוא דרך פואטית לומר "יש כוכב בשמיים")

איזה מהטענות הבאות שקולה ל**שלילת** P ?

[1] לכל אדם כוכב יש בשמיים, כוכב שאינו מתגלה עם רדת יום.

[2] לכל אדם, אם יש לו כוכב בשמיים אז הכוכב הזה לא מתגלה עם רדת יום.

[3] לאף אדם אין בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום.

[4] יש אדם שאין לו בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום.

[5] יש בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום אבל אינו שייך לאף אדם.

(7 נק') **ב.** $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים, $\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים.

נסמן $A=(\mathbf{R}\times\mathbf{Z})\cup(\mathbf{Z}\times\mathbf{R})$, ויהי B **המשלים** של A ב- $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

עוצמת B היא:

[1] 0   [2] מספר סופי כלשהו שאינו 0

[3] $\aleph_0$ [4] C

[5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק') **ג.** בגרף פשוט G, מסלול מסוים הוא בעת ובעונה אחת מעגל אוילר ומעגל המילטון.

מכאן נובע:

[1] G הוא מעגל פשוט.

[2] G הוא מעגל, אבל הוא לא חייב להיות מעגל פשוט.

[3] G הוא גרף פשוט, אבל הוא לא חייב להיות מעגל.

[4] G הוא גרף בעל מספר זוגי של צמתים.

[5] לא ייתכן גרף כזה.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו : 81 נקודות

שאלה 2

השאלה מתייחסת לפעולת ההפרש הסימטרי $\oplus$, שהוגדרה בכרך "תורת הקבוצות" בשאלה 1.22 בעמ' 27 .

(5 נק') א. תהיינה X,Y קבוצות המוכלות בקבוצה אוניברסלית כלשהי.

הוכיחו : $(X \oplus Y)' = (X \cap Y) \cup (X' \cap Y')$.

(15 נק') ב. נגדיר יחס β מעל $P(\mathbf{N})$:

עבור $X, Y \subseteq \mathbf{N}$: $(X, Y) \in \beta$ אםם $1 \notin X \oplus Y$.

הוכיחו ש- β הוא יחס שקילות מעל $P(\mathbf{N})$.

(7 נק') ג. לכמה מחלקות שקילות מחלק β את $P(\mathbf{N})$? הוכיחו. תארו את המחלקות.

שאלה 3

תהי $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. מיצאו כמה פונקציות $f : A \to A$ מקיימות את התנאי :

שלושת המספרים 1,2,3 נמצאים בתמונה של f

(במלים אחרות, כל אחד מהמספרים 1,2,3 מתקבל על-ידי הפעלת f על אבר כלשהו של A).

ייתכן בהחלט שאברים נוספים ב- A מתקבלים גם הם.

דוגמאות :

(i) הפונקציה השולחת את כל אברי A ל- 1 **אינה** מקיימת את התנאי.

(ii) פונקציית הזהות, השולחת כל אבר לעצמו, מקיימת את התנאי.

(iii) הפונקציה f המוגדרת כך : $f(6) = 3$, $f(5) = 2$, $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$

מקיימת את התנאי.

כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה. אין הכרח להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 4

יהי a_n מספר הסדרות (או המחרוזות) באורך n, שאבריהן לקוחים מהקבוצה $\{a,b,c,1,2\}$

והמקיימות בעת ובעונה אחת את כל התנאים הבאים:

לא מופיע בסדרה הרצף $a1$, לא מופיע הרצף $b2$, ולא מופיע רצף של שתי סִפרות.

דוגמאות לסדרות חוקיות באורך 4:

$aaaa$, $abb1$, $1aaa$ (הרצף $1a$ מותר).

דוגמאות לסדרות **לא חוקיות** באורך 4:

$aaa1$ (הופעה של $a1$), $11cc$ (רצף של סִפרות), $c121$ (רצף של סִפרות).

(10 נק') א. מצאו יחס נסיגה עבור a_n (נמקו!) ומצאו תנאי התחלה מספיקים.

(13 נק') ב. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור a_n.

(4 נק') ג. חשבו בשתי דרכים את a_4.

שאלה 5

תהי $A=\{1,2,3,4\}$. G הוא גרף פשוט המוגדר כך: קבוצת הצמתים של G היא $P(A)$.

למשל הקבוצה $\{1,3,4\}$ היא צומת של G והקבוצה הריקה היא צומת אחרת של G.

בין צמתים X,Y של G יש קשת אם ורק אם

$X \subseteq Y$ ו- $1 \le |Y-X| \le 2$ **או** $Y \subseteq X$ ו- $1 \le |X-Y| \le 2$.

למשל, יש קשת (אחת ויחידה) בין $\{1\}$ ל- $\{1,3\}$,

יש קשת (אחת ויחידה) בין $\{1\}$ ל- $\{1,2,3\}$

אין קשת בין $\{1\}$ ל- $\{1,2,3,4\}$ **ואין** קשת בין $\{1\}$ ל- $\{2,3\}$.

(5 נק') א. לכל אחד מחמשת הצמתים הבאים, חשבו את הדרגה שלו:

$\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2\}$, $\{1\}$, $\varnothing$.

(8 נק') ב. חשבו את מספר הקשתות ב- G.

(7 נק') ג. הוכיחו ש- G **אינו** גרף דו-צדדי.

(7 נק') ד. הוכיחו ש- G **אינו** מישורי.

הערה:

מטעמי סימטריה מובן שאם X,Y הם צמתים ב- G ו- $|X|=|Y|$ אז $\deg(X)=\deg(Y)$.

ניתן להסתמך על טענה זו ללא הוכחה.

בהצלחה!

שאלה 1

א. [4]   ב. [4] C ג. [1] G הוא מעגל פשוט.

שאלה 2

א. אלגברה של קבוצות. הגדרת ההפרש הסימטרי בספר היא $(X-Y)\cup(Y-X)$.

ב. רפלקסיבי וסימטרי: קל. טרנזיטיבי: נניח $(X,Y)\in\beta$ וגם $(Y,Z)\in\beta$.
לפי סעיף א, $1\in(X\cap Y)\cup(X'\cap Y')$ וגם $1\in(Y\cap Z)\cup(Y'\cap Z')$.
מכאן בהפרדה למקרים או בתמרון אלגברי, $1\in(X\cap Z)\cup(X'\cap Z')$.

ג. שתי מחלקות: הקבוצות ש- 1 שייך אליהן והקבוצות ש- 1 לא שייך אליהן.

שאלה 3

נסמן ב- U את קבוצת כל הפונקציות מ- A ל- A ועבור $1\le i\le 3$ נסמן ב- B_i את קבוצת כל הפונקציות מ- A ל- $A-\{i\}$.

אז $B_1\cup B_2\cup B_3$ היק קבוצת כל הפונקציות אשר **לפחות** אחד מבין המספרים $1,2,3$ לא נמצא בתמונה שלהן ולכן

$U-(B_1\cup B_2\cup B_3)$ היא קבוצת כל הפונקציות אשר כל המספרים $1,2,3$ נמצאים בתמונה שלהן.

נשים לב ש- $|U|=6^6$, $|B_i|=5^6$, שעבור $i\ne j$, $B_i\cap B_j$ היא קבוצת כל הפונקציות מ- A ל- $A-\{i,j\}$ לכן

$|B_i\cap B_j|=4^6$ ובאופן דומה, $|B_1\cap B_2\cap B_3|=3^6$.

לכן לפי עקרון ההכלה וההפרדה התשובה היא: $|U-(B_1\cup B_2\cup B_3)|=6^6-3\cdot 5^6+3\cdot 4^6-3^6$

שאלה 4

א. משמעות התנאים: לפני אות יכול לבוא כל תו, לפני 1 יכול לבוא רק b או c , לפני 2 יכול לבוא רק a או c.

נסתכל בסדרה באורך $n+1$.

אם התו האחרון הוא אות (3 אפשרויות) אז לפניו יכולה להיות כל סדרה חוקית באורך n.

אם התו האחרון הוא 1 אז לפניו.... ולפני זה כל סדרה חוקית.... אם התו האחרון הוא 2....

יחס נסיגה: $a_{n+1}=3a_n+2\cdot 2a_{n-1}$.

תנאי התחלה: $a_0=1$ (הסדרה הריקה עומדת בתנאים) , $a_1=5$.

מי שלא בטוח לגבי a_0 יחשב: $a_2=25-6=19$.

ב. משוואה אפיינית: $\lambda^2-3\lambda-4=0$. פתרונותיה: $\lambda=4,-1$.

לכן פתרון יחס הנסיגה הוא מהצורה $a_n=A\cdot 4^n+B\cdot(-1)^n$. נציב תנאי התחלה וכו׳...

ג. מחשבים בעזרת יחס הנסיגה הנתון ופעם נוספת על ידי הצבת $n=4$ בנוסחה שמצאנו בסעיף ב׳

שאלה 5

א. נמיין את הצמתים לפי גודל: קבוצה ריקה, 4 קבוצות בגודל 1, 6 קבוצות בגודל 2, 4 קבוצות בגודל 3 , והקבוצה A.
בהתאם, $\deg(\varnothing)=\deg(A)=4+6=10$, $\deg(\{1\})=\deg(\{1,2,3\})=1+6=7$, $\deg(\{1,2\})=3+3=6$.

ב. $(2\cdot 10+2\cdot 4\cdot 7+6\cdot 6)/2=50$

ג. הצמתים $\{1,2\}$, $\{1\}$, $\varnothing$ מהווים משולש בגרף , לכן הוא לא יכול להיות דו-צדדי

ד. מסקנה 5.4 בפרק ״תורת הגרפים״ אומרת שבגרף מישורי פשוט על n צמתים יש לכל היותר $3n-6$ קשתות.
זה לא מתקיים כאן.

בחינה 10

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות:

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* **בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א׳: שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. <u>רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס</u>.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר : כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק׳) **א.** הסימון $K(x)$ פירושו "ל- x יש תכונה מסוימת, הנקראת K".

הסימון $L(x)$ פירושו "ל- x יש תכונה מסוימת, הנקראת L".

יהי p הפסוק $\forall x\big(K(x) \to L(x)\big)$.

לאיזה מהפסוקים הבאים שקולה **שלילת** p ?

[1] $\exists x\big(K(x) \to \neg L(x)\big)$

[2] $\forall x \neg \big(K(x) \to L(x)\big)$

[3] $\exists x\big((\neg L(x)) \to (\neg K(x))\big)$

[4] $\exists x\big(K(x) \wedge \neg L(x)\big)$

[5] $\exists x(\neg K(x)) \to \exists x(\neg L(x))$

(7 נק׳) **ב.** לכל $n \in \mathbf{N}$ יהי $I_n = \{x \in \mathbf{R} \mid n < x < n + 0.5\}$.

נסמן $A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} I_n$. עוצמת A היא:

[1] מספר סופי כלשהו **[2]** $\aleph_0$ **[3]** C

[4] 2^C **[5]** אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק׳) **ג.** גרף G הוא יער בעל 3 רכיבי קשירות. הצמתים x,y,z נמצאים ברכיבי קשירות שונים של G (כל אחד מהם ברכיב קשירות אחר).

נוסיף ל- G קשת בין x ל- y וקשת בין y ל- z. הגרף המתקבל הוא:

[1] גרף לא קשיר שאינו יער

[2] יער שאינו עץ

[3] גרף קשיר שאינו עץ

[4] עץ

[5] יש יותר מתשובה אחת אפשרית, כדי לענות נדרש מידע נוסף.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו : 81 נקודות

שאלה 2

להלן יחסים (רלציות) שונים המוגדרים מעל $P(\mathbf{N})$.

בכל אחד מהסעיפים א- ג, קבעו אם היחס המוגדר באותו סעיף הוא :

(i) רפלקסיבי? ***(ii)*** סימטרי? ***(iii)*** טרנזיטיבי? **נמקו בקצרה כל תשובה**.

(9 נק') א. היחס R המוגדר כך : $(X,Y)\in R$ אםם $1\in X\cap Y$.

(9 נק') ב. היחס S המוגדר כך : $(X,Y)\in S$ אםם $1\in X-Y$.

(9 נק') ג. היחס T המוגדר כך : $(X,Y)\in T$ אםם $\{X,Y\}$ היא **חלוקה** של $\mathbf{N}$.

שאלה 3

נסמן $B=\{5,6,7,8,9\}$, $A=\{1,2,3,4\}$. תהי $K\subseteq A\times B$ ויהי $a\in A$.

נאמר ש- a **מופיע** ב- K אם ורק אם קיים $b\in B$ כך ש- $(a,b)\in K$.

למשל בקבוצה $K=\{(2,5),(2,6),(3,5),(4,9)\}$, מופיעים 2,3,4 בעוד ש- 1 אינו מופיע.

(7 נק') א. בכמה קבוצות K החלקיות ל- $A\times B$ **לא מופיע** המספר 1 ?

(20 נק') ב. בכמה קבוצות K החלקיות ל- $A\times B$ **מופיעים** שלושת המספרים 1,2,3 ?

כדאי להיעזר בהכלה והפרדה. אין הכרח להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 4

בכל סעיפי השאלה $A=\{1,2,3,4,5,6\}$.

(8 נק׳) א. מצאי כמה פונקציות f של A ל- A הן בעלות התכונה הבאה:

לכל $x \in A$, $x + f(x)$ הוא מספר **זוגי** .

(8 נק׳) ב. מצאי כמה פונקציות f של A ל- A הן בעלות התכונה הבאה:

לכל $x \in A$, $x \cdot f(x)$ מתחלק ב- 3 ללא שארית.

(3 נק׳) ג. כמה פונקציות של A ל- A מקיימות בעת ובעונה אחת את התכונה של סעיף א והתכונה של סעיף ב ?

(6 נק׳) ד. כמה פונקציות של A ל- A מקיימות לפחות אחת מהתכונות שבסעיפים א, ב?

יש לנמק את התשובות. בכל הסעיפים יש להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 5

תהי $A=\{1,2,3,4,5\}$. G הוא גרף פשוט המוגדר כך:

קבוצת הצמתים של G היא $P(A)$.

למשל הקבוצה $\{1,3,5\}$ היא צומת של G והקבוצה הריקה היא צומת אחרת של G.

בין צמתים X, Y של G יש קשת אם ורק אם

$X \subseteq Y$ ו- $|Y-X|=1$ **או** $Y \subseteq X$ ו- $|X-Y|=1$.

למשל, יש קשת (אחת ויחידה) בין $\{1,3,5\}$ ל- $\{1,3,4,5\}$,

אין קשת בין $\{1,3,5\}$ ל- $\{1,2,3,4,5\}$ **ואין** קשת בין $\{1,3,5\}$ ל- $\{2,3,4,5\}$.

(7 נק׳) א. הוכיחו שלכל הצמתים ב- G אותה דרגה.

(7 נק׳) ב. חשבו את מספר הקשתות ב- G .

(6 נק׳) ג. הוכיחו ש- G הוא גרף דו-צדדי (הציגו חלוקה של הצמתים לשני צדדים).

(7 נק׳) ד. הוכיחו ש- G אינו מישורי (כדאי להיעזר בסעיפים הקודמים).

הערה: קל לראות ש- G קשיר. ניתן להסתמך על כך ואינכם נדרשים להוכיח זאת.

בהצלחה!

תקציר פתרון בחינה 10

שאלה 1

א. [4] $\exists x\big(K(x) \wedge \neg L(x)\big)$

ב. [3] C

ג. [4] עץ.

שאלה 2

אתם מוזמנים לפתור בפורום – לא קשה.

שאלה 3

א. כמספר הקבוצות החלקיות ל- $(A-\{1\})\times B$, כלומר 2^{15} .

ב. הכלה והפרדה: $2^{20}-3\cdot 2^{15}+3\cdot 2^{10}-2^{5}$

שאלה 4

א. $3^3\cdot 3^3=27^2$

ב. $6^2\cdot 2^4=36\cdot 16$

ג. לכל מספר יש כעת מעט מאד תמונות אפשריות. על ידי בדיקה ישירה: $1\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 1\cdot 3=18$

ד. א + ב פחות ג .

שאלה 5

א. אם X הוא צומת ו- $|X|=k$ אז מ- X יוצאות k קשתות "כלפי מטה" ו- $5-k$ קשתות "כלפי מעלה", בסה"כ 5 קשתות.

ב. 80

ג. יש קשת רק בין צומת שהיא קבוצה בגודל זוגי לבין צומת שהיא קבוצה בגודל אי-זוגי.

ד. שאלה 3א בפרק "תורת הגרפים" אומרת שבגרף מישורי פשוט וקשיר על n צמתים יש לכל היותר $2n-4$ קשתות. זה לא מתקיים כאן.