ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

04101

אשנב למתמטיקה

חוברת הקורס- אביב ב2011

כתב: ישראל פרידמן

מרץ 2011 - סמסטר אביב - תשע"א

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

סטודנט יקר,

הקורס "אשנב למתמטיקה" כשמו כן הוא - אשנב אל עולם המתמטיקה המודרנית, מבעדו ניתן ללמוד טיפין מן הנעשה בעולם זה.

החומר הנכלל בקורס הינו מגוון והוא נועד להקנות ללומד מושגים מתמטיים בסיסיים, דרך מחשבה מתמטית וכן יכולת להשתמש בכלים מתמטיים הנלמדים בקורס. הקורס "אשנב למתמטיקה" יכול לשמש גם סטודנטים אשר אינם מתכוננים ללמוד מתמטיקה בעתיד.

בחוברת זו תמצאו הסברים על מרכיביו השונים של הקורס ועל כלל פעילויותיכם בו. הקריאה בה עשויה למנוע מכם טרדות רבות, ולסייע לכם בפתרון בעיות העלולות להתעורר תוך כדי לימוד. שמרו עליה כי היא תהיה לכם לעזר רב בהמשך לימוד הקורס.
בהמשך תמצאו את לוח הזמנים של הקורס ואת המטלות.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: http://telem.openu.ac.il .
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מרכז ההוראה בקורס הוא ישראל פרידמן. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 09-7781431, בימי א' בשעות 13:00 - 15:00 (ניתן גם לנסות בימים אחרים).
- דרך אתר הקורס.
- בפקס 09-7780631

אנו מאחלים לך הצלחה ולימוד פורה.

ב ב ר כ ה,
צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (מס' קורס : 04101 /ב2011)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
1	11.3.2011-6.3.2011	יחידה 1			
2	18.3.2011-13.3.2011	יחידות 1,2			ממ"ן 11 22.3.2011
3	25.3.2011-20.3.2011	יחידה 2		ממ"ח 01 27.3.2011	
4	1.4.2011-27.3.2011	יחידה 4			ממ"ן 12 4.4.2011
5	8.4.2011-3.4.2011	יחידה 4		ממ"ח 02 10.4.2011	
6	15.4.2011-10.4.2011	יחידות 5,4			ממ"ן 13 17.4.2011
7	22.4.2011-17.4.2011 (ג-ו פסח)	יחידה 5			
8	29.4.2011-24.4.2011 (א-ב פסח)	יחידה 6		ממ"ח 03 2.5.2011	
9	6.5.2010-1.5.2011 (ב יום הזכרון לשואה)	יחידות 7,6			ממ"ן 14 8.5.2011
10	13.5.2011-8.5.2011 *(ב יום הזכרון)* (ג יום העצמאות)	יחידה 7			
11	20.5.2011-15.5.2011	יחידה 7			ממ"ן 15 22.5.2011
12	27.5.2011-22.5.2011 (א ל"ג בעומר)	יחידות 8,9			
13	3.6.2011-29.5.2011 (ד יום ירושלים)	יחידות 8,9		ממ"ח 04 5.6.2011	
14	10.6.2011-5.6.2011 (ג-ד שבועות)	יחידה 10			ממ"ן 16 12.6.2011
15	17.6.2011-12.6.2011	יחידה 12		ממ"ח 05 19.6.2011	
16	26.6.2011-19.6.2011	יחידה 12			ממ"ן 17 30.6.2011

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים". אנא שבצו אותם בכתב ידכם. מרכז הלימוד ומספר הקבוצה מצויינים בהודעה ללומד שקיבלתם ממינהל שירותי הוראה.*

התנאים לקבלת נקודות זכות

להגיש במשך הקורס מטלות שמשקלן הכולל **לפחות 15 נקודות**, כאשר לפחות שתיים מהן חייבות להיות ממ״נים.

לקבל בבחינת הגמר ציון **60 לפחות**.

לקבל בציון הסופי **60 נקודות לפחות**.

תיאור המטלות

בקורס כלולות חמש מטלות מחשב ושבע מטלות מנחה. תאריכי הגשת המטלות מופיעים בלוח זמנים ופעילויות וכן על גבי המטלות עצמן. שימו לב כי תאריכים אלה הם תאריכים אחרונים למשלוח. מטלות שיישלחו לאחר המועד הסופי שנקבע בלוח הזמנים של הקורס, לא יילקחו בחשבון בחישוב הציון הסופי. המטלות ייבדקו על-ידי המנחים כדי שהסטודנטים יוכלו לקבל משוב על עבודתו. במקרים מיוחדים יכולים הסטודנטים לפנות אל מרכז ההוראה בקורס.

בחישוב הציון הסופי יהיה משקלן הכולל של כל העבודות לכל היותר 30 נקודות. כדי לגשת לבחינת הגמר, עליכם להגיש במשך הקורס מטלות שמשקלן לפחות 15 נקודות, כאשר שתיים מתוכן חייבות להיות ממ״נים.

להלן פירוט המשקלות לכל אחת מהעבודות השוטפות :

שם המטלה	משקל	שם המטלה	משקל
ממ״ח 01	2 נק׳	ממ״ן 11	2 נק׳
ממ״ח 02	2 נק׳	ממ״ן 12	3 נק׳
ממ״ח 03	2 נק׳	ממ״ן 13	3 נק׳
ממ״ח 04	2 נק׳	ממ״ן 14	3 נק׳
ממ״ח 05	2 נק׳	ממ״ן 15	3 נק׳
		ממ״ן 16	3 נק׳
		ממ״ן 17	3 נק׳

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.
כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:
בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.
זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה. אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: **04101 - אשנב למתמטיקה**

חומר הלימוד למטלה: **יחידות 1,2**

מספר השאלות: **4** **משקל המטלה:** **2 נקודות**

סמסטר: **ב2011** **מועד הגשה:** **22.3.2011**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

תהי $\mathbf{N}$ קבוצת המספרים הטבעיים.

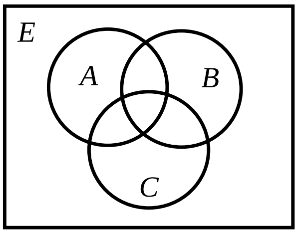
א. הוכח ש- $\mathbf{N}\setminus\{2001\}$ שקולה ל- $\mathbf{N}\setminus\{2000\}$.

ב. האם הוכחת בסעיף א' כי $\mathbf{N}\setminus\{2000\}$ קבוצה אינסופית?

ג. הוכח ש- $\mathbf{N}\setminus\{2001\}$ קבוצה אינסופית.

שאלה 2

באיור שלפניך דיאגרמת ון. קווקו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות (עשה זאת בדיאגרמות נפרדות).



א. $(A\setminus B)\setminus C$

ב. $A\setminus(B\setminus C)$

ג. $A\setminus(C\setminus B)$

ד. $(A\cap B^c(E))\cup(C\cap B^c(E))$

ה. $(A\cup B\cup C)\setminus[(A\setminus(B\cup C))\cup(B\setminus(C\cup A))\cup(C\setminus(A\cup B))]$

שאלה 3

יהיו A ו- B קבוצות ויהי x איבר של A. נניח ש- A שקולה ל- B, וגם ש- A שקולה ל- $B \setminus \{x\}$.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. B היא אינסופית.

ב. אם $A \subseteq B$ ו- $x \in B$, אז A היא אינסופית.

ג. אם $A \subseteq B$ ו- $x \notin B$, אז A היא אינסופית.

שאלה 4

יהיו A ו- B קבוצות. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $A = A \cup B$, אז $B \subseteq A$.

ב. אם A שקולה ל- $A \cup B$, אז $B \subseteq A$.

ג. אם $A \cup B$ סופית ו- A שקולה ל- $A \cup B$, אז $B \subseteq A$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 2,1

מספר השאלות: 24 **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: ב2011 **מועד הגשה: 27.3.2011**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מהשאלות בממ"ח זה מופיעים שני משפטים. סמן:

א - אם רק משפט 1 נכון. **ב** - אם רק משפט 2 נכון.
ג - אם שני המשפטים נכונים. **ד** - אם שני המשפטים אינם נכונים.

שאלה 1

1. $\{1,2\} \subseteq \{1,\{2\}\}$
2. $\{2\} \subseteq \{1,2\}$

שאלה 2

1. $\{1,\varnothing\} \subseteq \{1,2\}$
2. $\varnothing \in \{1,2\}$

שאלה 3

1. $\varnothing \in \{\varnothing\}$
2. $\{1\} \in \{1,2\}$

שאלה 4

1. אם $A \subset B$, אז $B \neq \emptyset$
2. אם קיים $x \in B$ כך ש- $x \notin A$, אז $A \subset B$.

שאלה 5

1. אם $A \neq B$, אז $A \subset B$ או $B \subset A$.
2. אם $A \setminus B = \emptyset$ וגם $B \setminus A = \emptyset$, אז $A = B$.

שאלה 6

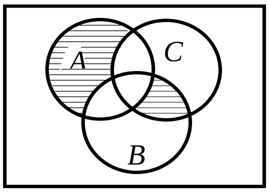
1. אם $A \in B$ אז $A \subseteq B$.
2. אם $A \cup B = A \cap B$, אז $A = B$.

שאלה 7

1. אם A אינסופית ו- $A \subseteq B$, אז B אינסופית.
2. אם A אינסופית ו- $B \subseteq A$, אז B אינסופית.

שאלה 8

השטח המקווקו מתאר את הקבוצה:



1. $(A \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C)$
2. $((B \cap C) \setminus A) \cup (A \setminus (B \cup C))$

שאלה 9

1. אם $x \notin A$ או $x \notin B$, אז $x \notin A \cup B$
2. אם $x \notin A$ או $x \notin B$, אז $x \notin A \cap B$

שאלה 10

1. אם $x \notin A$, אז $x \notin A \setminus B$
2. אם $x \notin B$, אז $x \notin A \setminus B$

שאלה 11

1. אם $A \not\subseteq B$ ו- $B \not\subseteq A$, אז $A \cap B = \emptyset$.
2. אם $A \setminus B \neq \emptyset$, אז $B \not\subseteq A$.

שאלה 12

1. $1 \in \{\mathbf{N}\}$

2. $\{1\} \subseteq \{\mathbf{N}\}$

שאלה 13

1. אם $A \subseteq B$ ו- A שקולה ל- B , אז $A = B$.

2. אם A שקולה לכל קבוצה חלקית שלה אז $A = \varnothing$.

שאלה 14

1. אם כל קבוצה ששקולה ל- A שווה ל- A , אז $A = \varnothing$.

2. אם קיימת קבוצה חלקית ל- A שאינה שקולה ל- A , אז A סופית.

שאלה 15

1. אם A אינסופית, אז A שקולה לכל קבוצה שחלקית לה ממש.

2. אם A סופית ו- B קבוצה חלקית שלה, ששקולה ל- A, אז $A = B$.

שאלה 16

1. אם $A \subseteq B$, אז לא יתכן ש- $A \subset B$.

2. אם $A \subset B$, אז לא יתכן ש- $A \cap B = A$.

שאלה 17

1. אם A סופית ו- $B \in A$, אז B סופית.

2. אם A ו- B אינסופיות, אז $A \cap B$ אינסופית.

שאלה 18

1. $\{\mathbf{N}, \{\mathbf{N}\}\}$ אינסופית.

2. $\{\mathbf{N}, \{\mathbf{N}\}\}$ שקולה ל- $\{\mathbf{N}, \varnothing\}$.

שאלה 19

1. אם $P(A) \neq \varnothing$, $A \neq \varnothing$.

2. אם $P(A) \neq \{\varnothing\}$, אז $A \neq \varnothing$.

שאלה 20

1. אם $P(A) \cap P(B) \neq \varnothing$, אז $A \cap B \neq \varnothing$.

2. לכל קבוצה A מתקיים $A \subseteq P(A)$.

שאלה 21

1. אם A ו- B קבוצות סופיות ושקולות ואם $A \subseteq B$, אז $A = B$.
2. אם A ו- B קבוצות סופיות שקולות ולא זרות, אז $A = B$.

שאלה 22

1. אם A ו- B קבוצות אינסופיות, אז A ו- B שקולות.
2. לכל קבוצה A קיימת קבוצה B שמכילה את A ואינה שקולה ל- A .

שאלה 23

1. אם A שקולה ל- $P(B)$, אז A אינה שקולה ל- B .
2. אם A קבוצת כל המספרים הטבעיים הזוגיים, אז $\mathbf{N}$ שקולה ל- $P(A)$.

שאלה 24

1. כדי להגדיר התאמה חד-חד-ערכית בין $\mathbf{N}$ לקבוצת הטבעיים הזוגיים, חייבים להתאים לכל מספר n את המספר $2n$.
2. אם $A \subset B$ ו- A לא שקולה ל- B, אז B אינסופית.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 1-2 ו- 4

מספר השאלות: 3 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: ב2011 **מועד הגשה: 4.4.2011**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (30 נקודות)

א. יהיו $A = \{1, \varnothing\}$, $B = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

ב. רשום את $P(A)$ ו- $P(B)$ בעזרת צומדיים.

ג. רשום את $P(A) \setminus P(B)$ ואת $P(B) \setminus P(A)$.

ד. רשום את $P(A) \setminus A$ ואת $P(A) \setminus \{A\}$.

שאלה 2 (40 נקודות)

א. יהיו A, B, C קבוצות. הוכח את הטענות הבאות:

ב. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

ג. אם $(C \setminus A) \cup (B \setminus C) \subseteq A \setminus B$, אז $B \subseteq A$

ד. $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

ה. אם $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$ (הכלה ממש), אז $A \not\subseteq B$ וגם $B \not\subseteq A$.

שאלה 3 (30 נקודות)

א. על קבוצת המספרים השלמים $\mathbf{Z}$ נגדיר פעולה בינרית Δ כך:

לכל $x, y \in \mathbf{Z}$, $x\Delta y = x + y + xy$.

קבע אלו מהתכונות שבהגדרת החבורה מתקיימות ב- $\mathbf{Z}$ ביחס לפעולה Δ .(נמק תשובתך).

האם קיימת קבוצה חלקית ממש ל- $\mathbf{Z}$ שהיא חבורה ביחס לפעולה Δ ?

ב. נגדיר פעולה בינרית על קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbf{N}$ באופן הבא:

לכל $x, y \in \mathbf{N}$, $x * y = x$ אם x זוגי ו- $x * y = y$ אם x אי-זוגי .

קבע אילו מהתכונות שבהגדרת מושג החבורה מקיימת הפעולה $*$, ואם היא חילופית.

נמק כל טענותיך.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידה 4

מספר השאלות: 24 | **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2011ב | **מועד הגשה: 10.4.2011**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מהשאלות בממ"ח זה מופיעים שני משפטים. סמן:

א - אם רק משפט 1 נכון. **ב** - אם רק משפט 2 נכון.

ג - אם שני המשפטים נכונים. **ד** - אם שני המשפטים אינם נכונים.

שאלה 1

1. הפעולה שמתאימה לכל זוג סדור של מספרים טבעיים $(m\ ,\ n)$ כל מספר טבעי שמתחלק גם ב- m וגם ב- n, היא פעולה בינרית על $\mathbf{N}$.
2. הפעולה שמתאימה לכל זוג סדור של המספרים טבעיים את $\sqrt{2}$ היא פעולה בינרית על $\mathbf{N}$.

שאלה 2

1. הפעולה שמתאימה לכל זוג מספרים טבעיים את מחצית מכפלתם היא פעולה בינרית על $\mathbf{N}$ שמקיימת את תכונת הסגירות.
2. הפעולה שמתאימה לכל זוג מספרים טבעיים זוגיים את מחצית מכפלתם היא פעולה בינרית על קבוצת המספרים האלה שמקיימת את תכונת הסגירות.

שאלה 3

1. הפעולה שמתאימה לכל זוג סדור של מספרים טבעיים את המספר -1 היא פעולה בינרית על $\mathbf{N}$ שמקיימת את תכונת הקיבוציות.
2. הפעולה שמתאימה לכל זוג סדור של מספרים שלמים את המספר -1 היא פעולה בינרית על $\mathbf{Z}$ שמקיימת את תכונת הקיבוציות.

בשאלות 5,4 נתייחס לקבוצה $A = \{a\}$ שעליה מוגדרת פעולה בינרית $*$ על-ידי $a * a = a$.

שאלה 4

1. A סגורה ביחס לפעולה $*$.
2. הפעולה אינה חילופית כי אין שני איברים ב- A .

שאלה 5

1. אין ב- A איבר ניטרלי ביחס לפעולה $*$.
2. A חבורה ביחס לפעולה $*$.

בשאלות 7,6 נתייחס לקבוצה $A = \{a, b\}$ ולפעולה $*$ שמוגדרת על-ידי הטבלה הבאה :

$*$	a	b
a	a	b
b	b	b

שאלה 6

1. A סגורה ביחס ל- $*$.
2. קיים ב- A איבר ניטרלי ביחס לפעולה $*$.

שאלה 7

1. הפעולה $*$ היא קיבוצית.
2. A חבורה ביחס לפעולה $*$.

בשאלות 8-11 נתייחס לקבוצה $A = \{a, b, c\}$ ולפעולה שמוגדרת על-ידי הטבלה הבאה :

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	b	a

שאלה 8

1. הפעולה $*$ מקיימת את תכונת הקיבוציות.
2. $*$ היא פעולה חילופית.

שאלה 9

1. קיים ב- A איבר ניטרלי ביחס לפעולה $*$.
2. לכל איבר של A קיים נגדי ביחס לפעולה $*$.

שאלה 10

1. c נגדי ל- b ביחס לפעולה $*$.
2. c נגדי ל- c ביחס לפעולה $*$.

שאלה 11

1. ב- A מתקיים חוק הצמצום השמאלי ביחס לפעולה $*$.
2. ב- A מתקיים חוק הצמצום הימני ביחס לפעולה $*$.

בשאלות 17-12 A היא קבוצה **לא ריקה** ולכל $B,C \in P(A)$ מגדירים: $B \oplus C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$.

שאלה 12

1. $P(A)$ סגורה ביחס לפעולת החיתוך בין קבוצות.
2. ב- $P(A)$ קיים איבר נטרלי ביחס לפעולת החיתוך בין קבוצות.

שאלה 13

1. לכל איבר ב- $P(A)$ יש נגדי ביחס לפעולת החיתוך.
2. קיים איבר ב- $P(A)$ שיש לו נגדי ביחס לפעולת החיתוך.

שאלה 14

1. קיים איבר נטרלי ב- $P(A)$ ביחס לפעולת האיחוד בין קבוצות.
2. קיים איבר נטרלי ב- $P(A)$ ביחס לפעולת ההפרש בין קבוצות.

שאלה 15

1. פעולת ההפרש בין קבוצות ב- $P(A)$ היא קיבוצית.
2. $P(A)$ חבורה ביחס לפעולת האיחוד בין קבוצות.

שאלה 16

1. $P(A)$ סגורה ביחס לפעולה $\oplus$.
2. הפעולה $\oplus$ חילופית.

שאלה 17

1. קיים ב- $P(A)$ איבר נטרלי ביחס לפעולה $\oplus$.
2. כל איבר ב- $P(A)$ נגדי לעצמו ביחס לפעולה $\oplus$.

שאלה 18

1. הקבוצה $\{1,3,7,9\}$ היא חבורה ביחס לפעולת הכפל מודולו 10.
2. הקבוצה $\{1,3,5,7,9\}$ היא חבורה ביחס לפעולת הכפל מודולו 10.

בשאלות 19-21, G היא חבורה ביחס לפעולה $*$, e הוא איבר ניטרלי, a,b,c הם איברים של G (ייתכנו גם איברים אחרים ב- G).

שאלה 19

1. אם $x \in G$ ואם $x * x = x$ אז $x = e$.
2. אם $x \in G$ ואם $x * x = e$ אז $x = e$.

שאלה 20

1. אם $a * b = b * a$ אז G חבורה חילופית.
2. אם a נגדי ל- b אז גם b נגדי ל- a.

שאלה 21

1. $(a * b * c)^{-1} = c^{-1} * b^{-1} * a^{-1}$.
2. אם $b * a = a * c$ אז $b = c$.

שאלה 22

תהי A קבוצה בת 3 איברים.

1. קיימת פעולה בינרית על A שמקיימת את התכונות שבהגדרת החבורה, פרט לקיבוציות.
2. קיימת פעולה בינרית לא קיבוצית על A שמקיימת את שלוש התכונות האחרות מהגדרת החבורה וגם את חוקי הצמצום.

שאלה 23

1. בטבלה של פעולת הכפל הרגיל ב- $\mathbf{N}$, כל מספר טבעי מופיע בדיוק פעם אחת בכל שורה ובכל עמודה.
2. אם A קבוצה עליה מוגדרת פעולה בינרית $*$ המקיימת את שלוש התכונות הראשונות שבהגדרת החבורה ואת חוקי הצמצום, אז A חבורה.

שאלה 24

תהי G חבורת פעולות הסימטריה על משולש שווה צלעות, כפי שהוגדרו ביחידה.

1. קיימים $x, y, z \in G$ כך ש- $x \circ y = y \circ z$ אך $x \neq z$.
2. לכל $x \in G$, אם $x \circ x \circ x \neq I$ אז $x \circ x = I$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידה 4

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2011ב **מועד הגשה: 17.4.2011**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

תהי G חבורה בת ארבעה איברים ביחס לפעולה $*$. נתון כי e איבר ניטרלי וכי $a \in G$ איבר שאינו נגדי לעצמו.

א. הוכח כי קיים $b \in G$, שונה מ- e ונגדי לעצמו.

בסעיפים הבאים, b הוא האיבר שמצאנו בסעיף א'.

ב. הוכח כי $a*b = b*a$.

ג. חשב את $a*b*a$ ואת $b*a*b$. נמק את טענותיך.

שאלה 2

נתונה הקבוצה $A = \{e, a, b, c\}$ (e, a, b ו- c עצמים שונים).

על A מוגדרת פעולה בינארית $*$ כך ש- e הוא איבר ניטרלי ביחס ל- $*$.

כמו כן, נתון כי $a*a = b$ ו- $b*b = c$.

הוכח כל אחת מהטענות הבאות:

א. e הוא האיבר הניטרלי היחיד ב- A.

ב. אם ב- A מתקיימים חוקי הצמצום אז לא ייתכן כי $a*b = c$.

ג. אם $*$ היא פעולה קיבוצית, אז לא ייתכן כי $a*b = e$.

ד. אי אפשר להשלים את לוח הפעולה של $*$ באופן שיתקבל לוח של חבורה.

שאלה 3

א. על קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbf{Q}$ מגדירים פעולה בינרית $*$ כך:

לכל $a,b\in\mathbf{Q}$, $a*b=a+b-\frac{1}{2}ab$.

בדוק אלו מן התכונות שבהגדרת החבורה מקיימת פעולה זה. נמק טענותיך.

ב. תהי A קבוצת כל המספרים הרציונליים השונים מ- 2 (כלומר, $A=\mathbf{Q}\setminus\{2\}$) ותהי $*$ פעולה בינרית על A המוגדרת כך: לכל $a,b\in A$, $a*b=a+b-\frac{1}{2}ab$.

הוכח כי A חבורה ביחס לפעולה $*$.

שאלה 4

ידוע כי קבוצה בת חמישה איברים $G=\{x,y,z,t,u\}$ היא חבורה ביחס לפעולה $*$. נתון כי $x*y=z$ ו- $z*t=y$ (ראה טבלה). השלם את טבלת הפעולה תוך שימוש בסעיפים שלהלן. נמק **כל** טענותיך!

$*$	x	y	z	t	u
x		z			
y					
z				y	
t					
u					

א. מצא את האיבר הנטרלי.

ב. מצא את $x*t$ ואת $t*x$.

ג. מצא את $t*y$ ואת $t*z$.

ד. השלם את מילוי שאר המשבצות.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 6,5

מספר השאלות: 24 **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2011ב **מועד הגשה: 2.5.2011**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**

בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א - אם רק טענה 1 נכונה **ב** - אם רק טענה 2 נכונה

ג - אם שתי הטענות נכונות **ד** - אם שתי הטענות לא נכונות

שאלה 1

1. השלשה $(\{1,2\},\{a,b,c\},\{(1,a),(2,a)\})$ מגדירה פונקציה מ- $\{1,2\}$ ל- $\{a,b,c\}$
2. השלשה $(\{1,2\},\{a,b,c\},\{(1,a),(b,2)\})$ מגדירה פונקציה מ- $\{1,2\}$ ל- $\{a,b,c\}$

שאלה 2

1. השלשה $(\{1,2,\emptyset\},\{a,b\},\{(1,a),(2,b)\})$ מגדירה פונקציה מ- $\{1,2\}$ ל- $\{a,b\}$
2. השלשה $(\{1,2\},\{a,b\},\{(1,b),(2,b),(1,a)\})$ מגדירה פונקציה מ- $\{1,2\}$ ל- $\{a,b\}$

שאלה 3

1. השלשות $(\{1,2\},\{1,2\},\{(1,2),(2,1)\})$, $(\{2,1\},\{1,2\},\{(2,1),(1,2)\})$ מגדירות פונקציות שוות
2. הנוסחות $f(n)=n$ ו- $g(n)=\dfrac{n^2-n}{n-2}-\dfrac{n}{n-2}$ מגדירות פונקציות שוות מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$

שאלה 4

1. אם לשתי פונקציות יש אותו תחום, אותו טווח ואותה תמונה, אז הן שוות.
2. אם $f,g\colon A\to B$ פונקציות ואם לכל $C\subseteq A$ מתקיים $f(C)=g(C)$ אז $f=g$

בשאלות 8-5 נדון בפונקציה $f:\{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$ שמוגדרת כך: $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = b$
(לפני קביעת נכונות הטענות כדאי לבדוק אם כל הביטויים מוגדרים היטב!)

שאלה 5

1. $f(\{1,3\}) = \{a,b\}$
2. $f(\varnothing) = \varnothing$

שאלה 6

1. $f(1,2) = \{a\}$
2. $f(\{1,2\}) = a$

שאלה 7

1. $f(\{2\}) = \{a\}$
2. $f^{-1}(\{a\}) = \{1,2\}$

שאלה 8

1. $f^{-1}(\{c\}) = \varnothing$
2. $f^{-1}(\{a,b\}) = \{2,3\}$

שאלה 9

תהי $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ פונקציה שמוגדרת על-ידי $f(x) = x^2 + 2x$ לכל $x \in \mathbf{R}$.

1. $f^{-1}(\{-1,-2\}) = \{-1\}$
2. $f^{-1}(\{3,-3\}) = \{-3,1\}$

בשאלות 12-10 נתונות פונקציות $f:\mathbf{R} \setminus \{2\} \to \mathbf{R}$, $g,h:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, שמוגדרות כך:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \ , \quad g(x) = x+1 \ , \quad h(x) = 2x-1$$

שאלה 10

1. $h \circ g$ מוגדרת מ- $\mathbf{R}$ ל- $\mathbf{R}$
2. $f \circ h$ מוגדרת מ- $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ ל- $\mathbf{R}$

שאלה 11

1. $h \circ f$ מוגדרת מ- $\mathbf{R} \setminus \{2\}$ ל- $\mathbf{R}$
2. $f \circ f$ מוגדרת מ- $\mathbf{R} \setminus \{5\}$ ל- $\mathbf{R}$

שאלה 12

1. f היא פונקציה חד-חד-ערכית
2. f היא פונקציה על

בשאלות 16-13 f היא פונקציה מקבוצה A לקבוצה B

שאלה 13

1. אם $A_1, A_2 \subseteq A$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, ו- f היא חד-חד-ערכית , אז $f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset$
2. אם קיימת $C \subseteq B$, $C \neq \emptyset$ כך ש- $f^{-1}(C) = \emptyset$ אז f אינה על

שאלה 14

1. f היא חד-חד-ערכית אם ורק אם לכל $x \in A$ קיים $y \in B$ יחיד, כך ש- $f(x) = y$
2. f היא חד-חד-ערכית אם לכל $x_1, x_2 \in A$ מתוך $f(x_1) \neq f(x_2)$ נובע ש- $x_1 \neq x_2$

שאלה 15

1. f היא חד-חד-ערכית אם ורק אם לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ יחיד, כך ש- $f(x) = y$
2. f היא על אם ורק אם לכל $y \in B$, קיים $x \in A$ יחיד, כך ש- $f(x) = y$

שאלה 16

1. f היא על אם ורק אם לכל תמונה של f ב- B יש מקור ב- A
2. f היא על אם ורק אם לכל $y \in B$, מתקיים $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$

שאלה 17

1. הרכבת פונקציות היא חילופית בכל מקרה שבו היא מוגדרת
2. הרכבת פונקציות היא קיבוצית בכל מקרה שבו היא מוגדרת

בשאלות 21-18 נתונות פונקציות $f: A \to B$, $g: B \to C$

שאלה 18

1. אם $g \circ f$ היא פונקצית על אז g היא פונקציה על
2. אם $g \circ f$ היא פונקציות חד-חד-ערכית אז g היא פונקציה חד-חד-ערכית

שאלה 19

1. אם $g \circ f$ היא פונקציה חד-חד-ערכית אז f היא פונקציה חד-חד-ערכית
2. אם f, g פונקציות על אז גם $g \circ f$ פונקציה על

שאלה 20

1. אם g, f הן פונקציות הפיכות אז גם $g \circ f$ הפיכה ומתקיים $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
2. אם f הפיכה ו- h פונקציה הפכית ל- f אז $f \circ h = h \circ f$

שאלה 21

1. אם B סופית ואם f היא חד-חד-ערכית אז A סופית
2. אם B אינסופית ואם f היא חד-חד-ערכית אז A אינסופית

שאלה 22

נתונות פונקציות $f, g: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ שמוגדרות כך:

לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = 2n$

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{אם } n \text{ זוגי} \\ \frac{n+1}{2} & \text{אם } n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

1. $f \circ g$ היא פונקצית הזהות על $\mathbf{N}$
2. $g \circ f$ היא פונקצית הזהות על $\mathbf{N}$

בשאלות 24-23 נתונות קבוצה A ופונקציות $f, g, h: A \to A$.

שאלה 23

1. אם f היא חד-חד-ערכית אז f היא בהכרח גם על
2. אם f על היא אז f היא בהכרח גם חד-חד-ערכית

שאלה 24

1. אם $f \circ g = f \circ h$ ואם f היא חד-חד-ערכית, אז $g = h$
2. אם $f \circ g = f \circ h$ אז $g = h$

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 6,5

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: ב2011 **מועד הגשה: 8.5.2011**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

נתונות הקבוצות $A = \{a, b\}$, $B = \{1,2,3,4\}$.

א. רשום את כל הפונקציות מ- A ל- B שאינן חד-חד-ערכיות.

ב. רשום את כל הפונקציות מ- B ל- A שאינן על.

ג. יהיו $f : A \to B$, $g : B \to A$ פונקציות. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(i) $g \circ f$ אינה הפיכה .

(ii) $f \circ g$ אינה הפיכה .

שאלה 2

תהי פונקציה $f : A \to B$ ותהי $C \subseteq B$.

א. הוכח ש: $f\ (\ f^{-1}(C)\ ) \subseteq C$.

ב. מצא דוגמה לקבוצות C,B,A ולפונקציה f שעבורן ההכלה מסעיף א' היא הכלה ממש.

ג. הוכח שאם f היא על אז $f\ (f^{-1}(C)\ ) = C$.

שאלה 3

א. תהי A קבוצה ויהיו $f\,,g\,,h$ פונקציות מ- A ל- A.

הוכח שאם f היא חד-חד-ערכית ואם $f\circ g = f\circ h$ אז $g = h$.

ב. עבור $A = \mathbf{N}$ (קבוצת המספרים הטבעיים) הדגם פונקציות $f\,,g\,,h$ מ- A ל- A כך ש- f תהיה פונקציה על, וכך שיתקיים $f\circ g = f\circ h$, אבל $g \neq h$.

שאלה 4

תהי G חבורה ביחס לפעולה בינרית $*$, שבה יש לפחות שני איברים שונים.

א. נסמן ב- $G\times G$ את המכפלה הקרטזית של G ב- G. תהי $f: G\times G \to G$ הפונקציה המוגדרת על-ידי: $f(a,b) = a*b$, לכל $(a,b)\in G\times G$.

הוכח כי f פונקציה על G אך אינה חד-חד-ערכית.

ב. נגדיר $h: G\to G$ כך: לכל $a\in G$; $h(a) = a^{-1}$.

הוכח כי h פונקציה חד-חד-ערכית ועל ושמתקיים $h^{-1} = h$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 7,6

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: ב2011 **מועד הגשה: 22.5.2011**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

א. יהיו f ו- g פונקציות מ- $\mathbf{Z}$ ל- $\mathbf{Z}$ המוגדרות כך: לכל $n \in \mathbf{Z}$,

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{אם } n \text{ אי זוגי} \\ 1 & \text{אם } n \text{ זוגי} \end{cases} \qquad g(n) = 2n+1$$

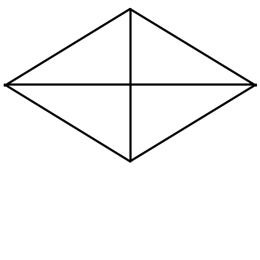
הוכח כי $f \circ g$ פונקציה על אך g אינה על.

ב. תהי A קבוצה ויהיו f, g פונקציה מ- A ל- A. נתון כי $f \circ g$ היא על וכי f היא פונקציה חד-חד-ערכית. הוכח כי g היא על.

(רמז: לכל $y \in A$, $f(y)$ נמצא בתמונה של $f \circ g$).

שאלה 2

תהי $M = \{A, B, C, D\}$ קבוצת הקדקודים של מעוין (ראה ציור) ותהי O נקודת המפגש של אלכסוניו. נתון ש- M קבוצה קבועה ביחס לאיזומטריה של המישור f.



א. הוכח כי O נקודת שבת של f.

ב. הוכח כי אם $f(A) = A$ ו- $f(B) = B$ אז f היא הזהות.

ג. תאר את f אם ידוע כי שומרת מגמת משולשים, אינה הזהות וכי המעוין אינו ריבוע. נמק את תשובתך.

שאלה 3

יהיו f, g איזומטריות על המישור. נתון כי $g \circ f = f \circ g$.

א. הוכח כי אם x נקודת שבת של f אז גם $g(x)$ נקודת שבת של f .

ב. הוכח כי אם f סיבוב לא טריוויאלי סביב נקודה x אז x נקודת שבת של g .

ג. הוכח כי אם f סיבוב בזוית שונה מ- 180^0 או 360^0 , אז g סיבוב או זהות.

(רמז: הוכח שאם g אינה סיבוב אז ל- g יש שלוש נקודות שבת לא קוויות.)

שאלה 4

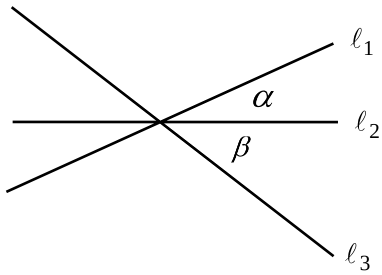
יהיו ℓ_3, ℓ_2, ℓ_1 שלושה ישרים שונים, הנחתכים בנקודה אחת.

תהי α הזווית שבין ℓ_1 ל- ℓ_2, ותהי β הזווית שבין ℓ_2 ל- ℓ_3 שבאיור.

א. הוכח כי אם $S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2} = S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ אז $\alpha = \beta$.

ב. הוכח כי אם $S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1} = S_{\ell_2}$ אז $\alpha = \beta$.

ג. הוכח כי $S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1} = S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_3}$.



מטלת מחשב (ממ"ח) 04

הקורס: אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 9,8,7

מספר השאלות: 24 **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2011ב **מועד הגשה: 5.6.2011**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א - אם רק טענה 1 נכונה **ב** - אם רק טענה 2 נכונה

ג - אם שתי הטענות נכונות **ד** - אם שתי הטענות לא נכונות

בשאלות 1-5, $\ell_4, \ell_3, \ell_2, \ell_1$ הם ישרים ו- $S_{\ell_4}, S_{\ell_3}, S_{\ell_2}, S_{\ell_1}$ הם שיקופים ביחס לישרים האלה
.

שאלה 1

נניח כי $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ ו- $S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2}$ מתארות אותה הזזה.

1. הישרים ℓ_1 ו- ℓ_3 הם מקבילים או זהים
2. יתכן כי $S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ הוא שיקוף מוזז

שאלה 2

נניח כי $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ הזזה ו- $S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2}$ סיבוב לא טריוויאלי.

1. $S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ שיקוף
2. $S_{\ell_3} \circ S_{\ell_1}$ סיבוב

שאלה 3

נניח כי $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ ו- $S_{\ell_4} \circ S_{\ell_3}$ מתארות אותו סיבוב, לא טריוויאלי.

1. הזווית בין הישרים ℓ_1 ו- ℓ_3 שווה לזווית שבין הישרים ℓ_2 ו- ℓ_4
2. לארבעת הישרים יש נקודה משותפת

שאלה 4

נניח כי ℓ_3, ℓ_2, ℓ_1 מקבילים זה לזה ו- ℓ_4 חותך אותם.

1. $S_{\ell_4} \circ S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ סיבוב
2. $S_{\ell_4} \circ S_{\ell_3} \circ S_{\ell_1}$ שיקוף מוזז

שאלה 5

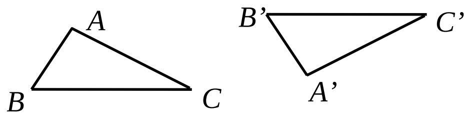
נניח כי בין הישרים ℓ_3, ℓ_2, ℓ_1 אין שניים מקבילים זה לזה וכי אין נקודה משותפת לשלושתם.

1. קיימים ישר ℓ שמקביל ל- ℓ_1 , וישר m, כך ש- $S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1} = S_m \circ S_\ell \circ S_{\ell_1}$
2. קיימים $\ell'_3, \ell'_2, \ell'_1$ כך ש- ℓ'_1 מאונך ל- ℓ'_2 ול- ℓ'_3 ו- $S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1} = S_{\ell'_3} \circ S_{\ell'_2} \circ S_{\ell'_1}$

שאלה 6

1. קיימת איזומטריה f כך ש- $f \circ f$ הזזה לא טריוויאלית
2. קיימת איזומטריה f כך ש- $f \circ f$ שיקוף מוזז

בשאלות 8-7 f היא איזומטריה שמתאימה את A ל- A' , את B ל- B' ואת C ל- C' כמו בציור :



שאלה 7

1. המשולשים ABC ו- $A'B'C'$ חופפים
2. קיימת איזומטריה g, ששונה מ- f שמתאימה את A ל- A' , את B ל- B' ואת C ל- C'

שאלה 8

1. f היא סיבוב
2. f היא שיקוף מוזז

בשאלות 13-9 f , g הן איזומטריות ו- M קבוצה לא ריקה, קבועה ביחס ל- f .

שאלה 9

1. f יכולה להיות הזזה לא טריוויאלית
2. קיימת $x \in M$ כך ש- $f(x) = x$

שאלה 10

1. אם M אינה קבוצת שבת של f אז M אינסופית
2. אם f סיבוב לא טריוויאלי אז M מכילה נקודה אחת בלבד

שאלה 11

1. אם לאיזומטריה f יש שלוש נקודות שבת קוויות אז f היא שיקוף או זהות
2. קיימת איזומטריה שיש לה בדיוק שתי נקודות שבת

שאלה 12

1. אם f הזזה ו- g שיקוף ואם ל- $f \circ g$ יש נקודת שבת אז $g \circ f$ שיקוף
2. אם f סיבוב ו- g שיקוף מוזז אז $f \circ g$ אינה הזזה

שאלה 13

1. אם x נקודת שבת של $f \circ g$ אז $g(x)$ נקודת שבת של $g \circ f$
2. אם $f \text{ o } g$ היא הזזה אז גם $g \circ f$ היא הזזה

שאלה 14

1. אם משמיטים אקסיומה ממערכת אקסיומות בעלת סתירה, מתקבלת מערכת חסרת סתירה
2. אם מוסיפים אקסיומה למערכת אקסיומות שלמה מתקבלת מערכת בעלת סתירה

שאלה 15

1. אם משמיטים אקסיומה ממערכת שלמה מתקבלת מערכת לא שלמה
2. אם מוסיפים אקסיומה למערכת שלמה מתקבלת מערכת שלמה או בעלת סתירה

שאלה 16

1. אם מוסיפים למערכת בלתי תלויה אקסיומה שאינה מתקיימת באחד המודלים של המערכת אך מתקיימת במודל אחר שלה, מתקבלת מערכת בלתי תלויה
2. אם מוסיפים למערכת חסרת סתירה אקסיומה שמתקיימת בכל מודל של המערכת מתקבלת מערכת חסרת סתירה ותלויה

בשאלות 17,18 נתונות אקסיומה α ומערכת אקסיומות A.

שאלה 17

ידוע שלאחר הוספת α ל- A מתקבלת מערכת חסרת סתירה וגם לאחר הוספת שלילת α ל- A מתקבלת מערכת חסרת סתירה.

1. α נובעת ממערכת האקסיומות A
2. המערכת A קטגורית

שאלה 18

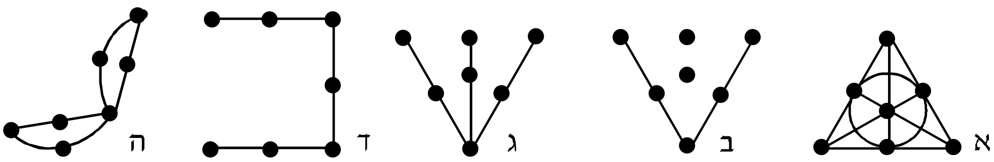
ידוע שלאחר הוספת α ל- A מתקבלת מערכת חסרת סתירה ולאחר הוספת שלילת α ל- A מתקבלת מערכת בעלת סתירה.

1. נובעת ממערכת אקסיומות A
2. $A \cup \{\alpha\}$ קטגורית

בשאלות 21-19 נעסוק במערכת האקסיומות הבאה, אשר מושגי היסוד שלה הם: "נקודה", "ישר" (כקבוצה של נקודות) והיחס "נמצאת על".

1. יש לפחות שני ישרים.
2. יש בדיוק שבע נקודות.
3. על כל ישר נמצאות בדיוק שלוש נקודות.
4. לכל שני ישרים יש נקודה אחת ויחידה הנמצאת על שניהם.

לפניך ההמחשות הבאות (קטעים, קשתות ומעגלים נחשבים לישרים, אך חלקים שלהם לאו):



שאלה 19

1. המחשה א מראה כי המערכת חסרת סתירה
2. המחשות ב, ג מראות כי המערכת אינה קטגורית

שאלה 20

1. המחשה ה מראה כי אקסיומה 4 אינה נובעת מן האקסיומות האחרות
2. המחשה ד מראה כי אקסיומה 4 אינה נובעת מן האקסיומות האחרות

שאלה 21

1. מההמחשות הנתונות נובע כי המערכת היא בלתי תלויה
2. המערכת היא בלתי תלויה

בשאלות 23-22 נתייחס למערכת האקסיומות הבאה:

1. יש בדיוק שתי נקודות.
2. על כל ישר יש לפחות נקודה אחת.

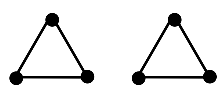
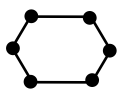
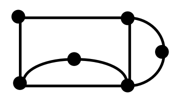
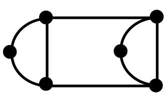
שאלה 22

1. המשפט: "יש לכל היותר שלושה ישרים" מתקיים בכל מודל של המערכת
2. המשפט: "לכל שני ישרים יש נקודה הנמצאת על שניהם" מתקיים בכל מודל של המערכת

שאלה 23

1. המערכת היא בלתי תלויה
2. המערכת היא שלמה

שאלה 24

1. ההמחשות  ו-  שקולות זו לזו
2. ההמחשות  ו-  שקולות זו לזו

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 9,8

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: ב2011 **מועד הגשה: 12.6.2011**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

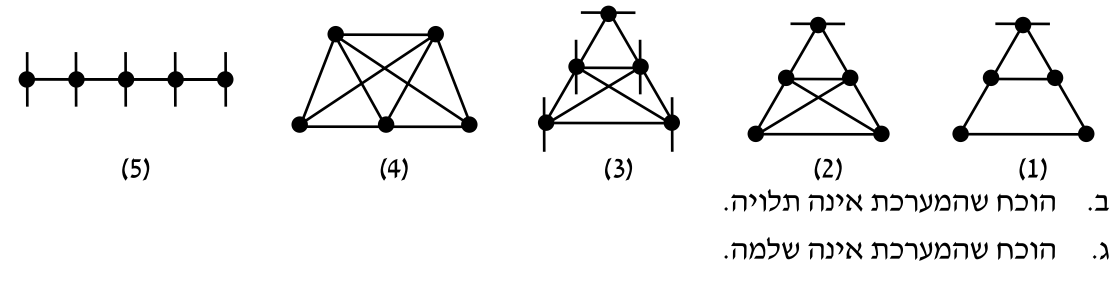
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (28 נקודות)

לפניך מערכת אקסיומות, אשר מושגי היסוד שלה הם "נקודה", "ישר" (כקבוצה של נקודות) והיחס "נמצאת על".

1. יש בדיוק חמש נקודות.
2. לכל שתי נקודות, קיים ישר אחד ויחיד אשר שתיהן נמצאות עליו.
3. לכל ישר ℓ ולכל נקודה P שאינה על ℓ, קיים **לפחות** ישר אחד, אשר P נמצאת עליו, ואין לו נקודה משותפת עם ℓ.
4. לכל ישר קיימת נקודה שאינה נמצאת עליו.

א. עבור כל אחת מן ההמחשות הבאות, קבע אם היא מגדירה מודל למערכת. אם לא - ציין לפחות אקסיומה אחת שאינה מתקיימת.



ב. הוכח שהמערכת אינה תלויה.

ג. הוכח שהמערכת אינה שלמה.

ד. הוכח או הפרך את הטענה הבאה: בכל מודל של המערכת הנתונה קיים ישר שעליו יש לפחות שלוש נקודות.

שאלה 2 (16 נקודות)

לפניך מערכת אקסיומות, אשר מושגי היסוד שלה הם "נקודה", "ישר" והיחס "נמצאת על".

1. יש לפחות שתי נקודות
2. יש לכל היותר שלושה ישרים.
3. לכל שתי נקודות שונות, קיימים לפחות שני ישרים שונים אשר הן נמצאות עליהם.

הוכח שהמערכת היא בעלת סתירה.

שאלה 3 (28 נקודות)

בשאלה זו נתייחס למערכת הכוללת את ארבע האקסיומות של החבורה כפי שהוגדרו בעמוד 45, יחידה 4. מושג היסוד שלה הוא פעולה בינרית.

א. הוכח כי מערכת האקסיומות היא חסרת סתירה.

ב. הוכח כי אקסיומה 3 אינה נובעת מזוג האקסיומות 1,2.

ג. נוסיף את אקסיומה 5: "יש בדיוק 4 איברים".

הוכח שהקבוצות הבאות הן מודלים למערכת (1,2,3,4,5): הקבוצה {2,4,6,8} ביחס לפעולת הכפל מודולו 10 והקבוצה {1,5,7,11} ביחס לפעולת הכפל מודולו 12. (בשני המקרים, אין צורך להוכיח קיבוציות).

ד. הוכח כי אקסיומה 4 אינה נובעת מן האקסיומות האחרות של המערכת (1,2,3,4,5).

ה. הוכח שהמערכת (1,2,3,4,5) אינה קטגורית.

שאלה 4 (28 נקודות)

נתונה מערכת אקסיומות שמושגי היסוד בה הם: "נקודה", "ישר" והיחס "נמצאת על".

1. יש לפחות שני ישרים.
2. כל נקודה נמצאת על ישר אחד לפחות.
3. לכל ישר ℓ ולכל נקודה P שאינה על ℓ קיים ישר אחד ויחיד אשר P נמצאת עליו ואין לו נקודה משותפת עם ℓ.

א. הוכח כי המערכת חסרת סתירה.

ב. הוכח כי המערכת אינה קטגורית.

ג. הוכח כי המערכת תלויה.

ד. הוכח כי במערכת מתקיים המשפט הבא: "אם נקודה A נמצאת על שני ישרים שונים אז קיימת נקודה נוספת, B הנמצאת אף היא על שני ישרים שונים".

מטלת מחשב (ממ״ח) 05

הקורס: אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 12,10

מספר השאלות: 24 **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: ב2011 **מועד הגשה: 19.6.2011**

את התשובות לממ״ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

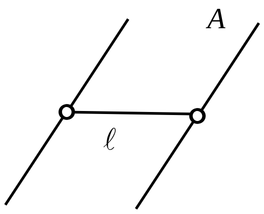
בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א - אם רק טענה 1 נכונה **ב** - אם רק טענה 2 נכונה

ג - אם שתי הטענות נכונות **ד** - אם שתי הטענות לא נכונות

בכל השאלות במטלה זו, כל הנקודות והישרים נמצאים באותו מישור.

בשאלות 1-3 נתייחס למודל אשר קבוצת הנקודות בו היא A, קבוצת כל הנקודות במישור הנמצאת בין שני ישרים מקבילים נתונים (לא כולל את נקודות הישרים עצמם). ישר ℓ במודל זה הוא חיתוך **לא ריק** של ישר במישור עם A (ראה איור).



שאלה 1

1. במודל זה מתקיימות כל אקסיומות החילה
2. המודל מדגים את האי-תלות של אקסיומת אוקלידס באקסיומות החילה

שאלה 2

1. במודל זה מתקיימות כל אקסיומות הסדר
2. המודל מדגים את האי-תלות של אקסיומת פאש בשאר אקסיומות הסדר

שאלה 3

1. במודל זה מתקיימות כל אקסיומות החפיפה
2. המודל מדגים את האי-תלות של אקסיומת החפיפה III-1 באקסיומות החפיפה האחרות

בשאלות 6-4 נתון המודל הבא: ממישור כלשהו נוציא נקודה שתיקרא P. קבוצת נקודות המודל היא A, קבוצת כל נקודות המישור הרגיל פרט ל- P , הישרים במודל הם חיתוכים של ישרים במישור הרגיל עם הקבוצה A. (שים לב שבמודל יתכנו גם ישרים שמורכבים משני חלקים זרים).

שאלה 4

1. במודל מתקיימות כל אקסיומות החילה
2. המודל מדגים את האי-תלות של אקסיומת אוקלידס באקסיומות החילה

שאלה 5

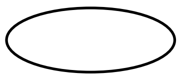
1. במודל זה מתקיימות כל אקסיומות הסדר
2. המודל מדגים את האי-תלות של אקסיומת פאש באקסיומות הסדר האחרות

שאלה 6

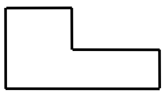
1. במודל זה מתקיימות כל אקסיומות החפיפה
2. המודל מדגים את האי-תלות של אקסיומת החפיפה III-1 באקסיומות החפיפה האחרות

בשאלות 10-7 נעסוק בהמחשות הבאות:

א



ב



הנקודות בכל המחשה הן הנקודות הפנימיות, ללא הנקודות שעל הקו המקיף,
ישר הוא אותו חלק של ישר רגיל הנמצא בתוך קבוצת הנקודות הנתונה.

שאלה 7

1. המחשה א מקיימת את כל אקסיומות החילה
2. המחשה ב מקיימת את כל אקסיומות החילה

שאלה 8

1. המחשה א מקיימת את אקסיומת פאש
2. המחשה ב מקיימת את אקסיומת פאש

שאלה 9

1. המחשה א מקיימת את אקסיומה III-1
2. המחשה ב מקיימת את אקסיומה III-2

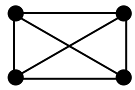
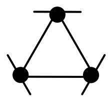
שאלה 10

1. המחשה א מקיימת את אקסיומה III-4
2. המחשה ב מקיימת את אקסיומה III-4

שאלה 11

1. מאקסיומות החילה נובע שקיימות לפחות ארבע נקודות שונות
2. מאקסיומות החילה ומאקסיומת אוקלידס נובע שקיימות לפחות ארבע נקודות שונות

שאלה 12

1. ההמחשה  מתארת מודל שמקיים את אקסיומות החילה ואקסיומת אוקלידס
2. ההמחשה  מתארת מודל שמקיים את אקסיומות החילה ואקסיומת אוקלידס

שאלה 13

1. בכל מודל שמקיים את אקסיומות הסדר ובו לפחות שתי נקודות חייבות להיות אינסוף נקודות
2. בכל מודל שמקיים את אקסיומות החילה והסדר יש לפחות שש נקודות

שאלה 14

1. מאקסיומות החילה ומאקסיומת אוקלידס נובע שעל כל ישר יש לפחות שתי נקודות
2. מאקסיומות החילה והסדר נובע שעל כל ישר יש לפחות שלוש נקודות

בשאלות 19-15 a,b,c הם מספרים טבעיים.

שאלה 15

1. אם $a|b$ ו- $b|c$ ו- $c|a$ אז $a = c$
2. אם $ab|c$ ו- $ac|b$ אז $b = c$

שאלה 16

1. אם $a|(b+c)$ אז $a|b$ ו- $a|c$
2. אם $(b+c)|a$ אז $b|a$ ו- $c|a$

שאלה 17

1. אם $a\,|\,bc$ אז $a\,|\,b$ או $a\,|\,c$
2. אם $a\,|\,c$ ו- $b\,|\,c$ אז $ab\,|\,c$

שאלה 18

1. a^2 יכול לתת שארית 2 בחלוקה ב- 4
2. a^2 יכול לתת שארית *3* בחלוקה ב- *5*

שאלה 19

1. אם a נותן שארית r בחלוקה ב- b אז $2a$ נותן שארית $2r$ בחלוקה ב- b
2. אם a נותן שארית 2 בחלוקה ב- 7 אז $3a$ נותן שארית 6 בחלוקה ב- 7

שאלה 20

1. בקבוצה הנוצרת מ- $\{2,5\}$ על-ידי חיבור נמצאים כל המספרים הטבעיים פרט ל- 1 ו- 3
2. בקבוצה הנוצרת מ- $\{6, 210, 209, 73241\}$ על-ידי כפל, נמצאים כל המספרים הטבעיים, למעט קבוצה סופית מתוכם

שאלה 21

1. הקבוצה הנוצרת מ- $\{2, -1/2\}$ על-ידי כפל היא חבורה ביחס לפעולת הכפל הרגיל
2. $10/3$ נמצא בקבוצה הנוצרת מ- $\{3, -1/3\}$ על-ידי כפל

שאלה 22

1. $\{2, 3\}$ היא קבוצת יוצרים של הקבוצה הנוצרת מ- $\{4,5\}$ על-ידי חיבור
2. $\{8,1/4\}$ היא קבוצת יוצרים מינימלית של הקבוצה הנוצרת מ- $\{2,1/2\}$ על-ידי כפל

שאלה 23

1. 1591 מספר ראשוני
2. אם a ,b מספרים טבעיים שונים לא זרים אז בקבוצה הנוצרת מ- $\{a, b\}$ על-ידי כפל יש לכל היותר מספר ראשוני אחד

שאלה 24

1. קיימים מספרים טבעיים m ו- n כך ש- $24n - 7 = 42m + 15$
2. קיימים מספרים שלמים m, n, k ש- $6^{2m-1} \cdot 10^n \cdot 5^k = 3^k \cdot 4^n \cdot 5^m$

מטלת מנחה (ממ"ן) 17

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 12,10

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: ב2011 **מועד הגשה: 30.6.2011**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

בשאלה זו נניח כי כל הנקודות נמצאות במישור אחד וכי מתקיימות אקסיומות החילה, הסדר אקסיומות החפיפה ואקסיומת המקבילים. נאמר כי שני קטעים ST ו- XY הם מקבילים אם הישר המכיל את הנקודות S,T מקביל לישר המכיל את הנקודות X,Y

א. הוכח כי קיימות 4 נקודות שונות A,B,C,D כך שהקטעים AB ו- CD חופפים.

ב. הוכח כי אם A,B,C,D הן הנקודות מסעיף א', אז קיימות נקודות E,F כך ש- $(ABE),(CDF)$ וכך ש- $AE \cong CF$.

שאלה 2

א. יהיו a,b,c מספרים טבעיים. נניח כי r היא שארית החילוק של b ב- a ו- s היא שארית החילוק של c ב- a. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

1. שארית החילוק של bc ב- a היא rs.
2. אם $r<\sqrt{a}$ אז שארית החילוק של b^2 ב- a היא r^2.

ב. הוכח באמצעות המשפט היסודי של האריתמטיקה כי $\sqrt{6}$ אינו מספר רציונלי (כלומר $\sqrt{6}$ אינו מנה של שלמים).

שאלה 3

א. נסמן ב- A^+ את הקבוצה הנוצרת על-ידי חיבור וב- A^* את הקבוצה הנוצרת על-ידי כפל מ- $A=\{2,3\}$. הוכח כי $A^* \subset A^+$ (הכלה ממש!)

ב. נסמן ב- B^+ את הקבוצה הנוצרת על-ידי חיבור וב- B^* את הקבוצה הנוצרת על-ידי כפל מ- $B=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$. הוכח כי $B^* \not\subseteq B^+$ וכי $B^+ \not\subseteq B^*$.

ג. נסמן ב- C^* את הקבוצה הנוצרת על-ידי הכפל מ- $C=\{6,15,35\}$.

הוכח כי כל מספר $n \in C^*$ מקיים את התכונה הבאה: אם $14|n$ אז גם $15|n$.

שאלה 4

א. הוכח באינדוקציה כי לכל מספר טבעי $n \ge 3$ מתקיים:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

ב. יהיו a מספר טבעי גדול מ- 1. הוכח באינדוקציה כי לכל מספר טבעי n:

1. המספר a^n-1 מתחלק ב- $a-1$.
2. המספר $a^{2n-1}+1$ מתחלק ב- $a+1$.