

## פתרון שאלות בממ"ן 12 סמסטר 2014ב

### שאלה 2

א. ההוכחה לא טובה.  $D$  מקבלת את  $\langle M \rangle$  אם  $M$  לא מקבלת את  $\langle M^+ \rangle$ .  $D$  דוחה את  $\langle M \rangle$  אם  $M$  כן מקבלת את  $\langle M^+ \rangle$ . זה לא אומר ש- $D$  שונה מ- $M$ . ייתכן ששתיהן מקבלות את  $\langle M \rangle$  ולא מקבלות את  $\langle M^+ \rangle$ , או להפך (שתיהן דוחות את  $\langle M \rangle$  ומקבלות את  $\langle M^+ \rangle$ ).

ב. ההוכחה טובה.  $D$  מקבלת את  $\langle M \rangle$  אם  $M^+$  לא מקבלת את  $\langle M \rangle$ .  $D$  דוחה את  $\langle M \rangle$  אם  $M^+$  כן מקבלת את  $\langle M \rangle$ . זה אומר ש- $D$  שונה מ- $M^+$  לכל  $M$ . ברור ש- $D$  איננה המכונה הראשונה בסדר הלסקיגורפי של המכונות. לכן אם  $D$  קיימת, היא איזושהי מכונה  $M^+$ . אבל הראינו שהיא שונה מכולן.

### שאלה 3

א. להלן תיאור של מכונת טיורינג שמזהה את  $K$ :  
"על קלט  $\langle M \rangle$  כאשר  $M$  היא מכונת טיורינג:

1. הרץ את  $M$  על  $\langle M \rangle$  (בעזרת המכונה האוניברסלית  $U$  מעמוד 202 בספר).

2. אם  $M$  קיבלה את  $\langle M \rangle$ , קבל; אחרת, דחה."

ב. נניח בשלילה ש- $K$  כריעה.

נבנה מכונה  $D$ :

"על קלט  $\langle M \rangle$  כאשר  $M$  היא מכונת טיורינג:

1. בדוק האם  $\langle M \rangle$  שייכת ל- $K$ .

2. אם כן, דחה את  $\langle M \rangle$ ; אם לא, קבל את  $\langle M \rangle$ ."

מכיוון שלפי ההנחה, הבדיקה בסעיף 1 אפשרית בעזרת מכונת טיורינג, המכונה  $D$  שבנינו היא מכונה מכריעה - היא תמיד עוצרת.

כעת נשאל כיצד פועלת  $D$  על הקלט  $\langle D \rangle$ ?

אם  $\langle D \rangle$  שייכת ל- $K$ , אז לפי הגדרת השפה  $K$ ,  $D$  צריכה לקבל את  $\langle D \rangle$ . אבל לפי ההגדרה של פעולת המכונה  $D$ ,  $D$  דוחה את  $\langle D \rangle$ .

אם  $\langle D \rangle$  לא שייכת ל- $K$ , אז לפי הגדרת השפה  $K$ ,  $D$  צריכה לדחות את  $\langle D \rangle$ . אבל לפי ההגדרה של פעולת המכונה  $D$ ,  $D$  מקבלת את  $\langle D \rangle$ .  
בכל מקרה הגענו לסתירה.

## שאלה 5

השפה  $FIVE_{LBA}$  איננה כריעה.

הוכחה : נראה רדוקציה של  $A_{TM}$  :

נניח בשלילה שיש מכונה  $R$  שמכריעה את  $FIVE_{LBA}$ . להלן מכונה שמכריעה את  $A_{TM}$  :

"על קלט  $\langle M, w \rangle$  כאשר  $M$  היא מכונת טיורינג ו- $w$  מילה :

1. בנה את ה- $LBA$   $B_1$  הבא :

$B_1$  זהה ל- $B$  של הוכחת משפט 5.10, למעט ההבדל הבא :

לפני ש- $B_1$  בודק אם מתקיימים שלושת התנאים שמופיעים בתחילת עמוד 224, הוא בודק

האם מילת הקלט  $x$  היא אחת מהמילים  $\#, \#\#, \#\#\#, \#\#\#\#$ . אם כן, הוא מקבל את המילה ;

אחרת, הוא ממשיך לפעול בדיוק כמו  $B$ .

2. הרץ את המכונה  $R$  על הקלט  $\langle B_1 \rangle$  כדי לקבוע האם  $\langle B_1 \rangle$  שייכת ל- $FIVE_{LBA}$ .

אם כן, קבל ; אם לא, דחה."

## שאלה 6

א. אפשר להשתמש במשפט Rice :

$P$  תהיה השפה של כל התיאורים של מכונות טיורינג שיש בשפה שהן מזהות בדיוק 5 מילים.

יש מכונות טיורינג שהתיאור שלהן שייך ל- $P$  ויש מכונות שהתיאור שלהן לא שייך ל- $P$ .

אם שתי מכונות מזהות אותה השפה, אז או שהתיאורים של שתיהן שייכים ל- $P$  או

שהתיאורים של שתיהן לא שייכים ל- $P$ .

לפי משפט Rice,  $P$  איננה כריעה.  $P$  זהה לשפה  $A$ .

ב. אי אפשר להשתמש במשפט Rice, משום שתכונת השייכות ל- $B$  איננה תכונה של השפה

שמכונה מזהה, אלא תכונה של המכונה עצמה - ייתכנו שתי מכונות שמזהות אותה השפה,

ואחת מהן שייכת ל- $B$  ואילו השנייה איננה שייכת ל- $B$ .

דוגמה : תהייה  $M_1$  ו- $M_2$  שתי מכונות שמקבלות כל מילה מעל אלפבית נתון  $\Sigma$  - השפה של

שתיהן היא  $\Sigma^*$ .

$M_1$  נכנסת מיד למצב המקבל - על כל קלט היא מבצעת צעד אחד. לכן לכל מילה  $w$  באורך 1,

$M_1$  מקבלת את  $w$  לאחר בדיוק  $|w|$  צעדים. לכן  $\langle M_1 \rangle$  שייכת ל- $B$ .

$M_2$  קוראת את הקלט עד שהיא מגיעה לסמל הרווח שמימין למילת הקלט, ואז נכנסת למצב

המקבל. על כל מילה  $w$  היא מבצעת  $|w|+1$  צעדים. לכן  $\langle M_2 \rangle$  לא שייכת ל- $B$ .

ג. אפשר להשתמש במשפט Rice :

$P$  תהיה השפה של כל התיאורים של מכונות טיורינג שהשפה שהן מזהות היא שפה רגולרית.

יש מכונות טיורינג שהתיאור שלהן שייך ל- $P$  ויש מכונות שהתיאור שלהן לא שייך ל- $P$ .

אם שתי מכונות מזהות אותה השפה, אז או שהתיאורים של שתיהן שייכים ל- $P$  או

שהתיאורים של שתיהן לא שייכים ל- $P$ . לפי משפט Rice,  $P$  איננה כריעה.  $P$  זהה לשפה  $C$ .

## שאלה 7

א. רדוקצית מיפוי של  $A_{TM}$  ל- $ALL_{TM}$ :

"על קלט  $\langle M, w \rangle$  כאשר  $M$  היא מכונת טיורינג ו- $w$  היא מחרוזת:

1. בנה את המכונה  $M_1$  הבאה:

$M_1 = \text{"על קלט } x \text{"}$

1. אם  $x \neq w$ , קבל.

2. אם  $x = w$ , הרץ את  $M$  על  $w$  (את  $x$ ) וקבל (את  $x = w$ ) אם  $M$  קיבלה את  $w$ .

2. החזר את  $\langle M_1 \rangle$ .

ב. רדוקצית מיפוי של  $A_{TM}$  למשלימה של  $ALL_{TM}$ :

"על קלט  $\langle M, w \rangle$  כאשר  $M$  היא מכונת טיורינג ו- $w$  היא מחרוזת:

1. בנה את המכונה  $M_2$  הבאה:

$M_2 = \text{"על קלט } x \text{"}$

1. הרץ את  $M$  על  $w$   $|x|$  צעדים.

2. אם  $M$  קיבלה את  $w$  בתוך  $|x|$  צעדים, דחה (את  $x$ ); אחרת, קבל (את  $x$ ).

2. החזר את  $\langle M_2 \rangle$ .

**הסבר:** אם  $\langle M, w \rangle$  שייכת ל- $A_{TM}$ , אז יש מספר צעדים  $y$  כך שלאחר ש- $M$  רצה  $y$  צעדים, היא מקבלת את  $w$ . לכן על קלט  $x$  כך ש- $|x| \geq y$ ,  $M_2$  תדחה, ולכן  $M_2$  לא שייכת ל- $ALL_{TM}$ .

אם  $\langle M, w \rangle$  לא שייכת ל- $A_{TM}$ , אז לכל מספר צעדים  $y$ , לאחר ש- $M$  רצה  $y$  צעדים, היא לא מקבלת את  $w$ . לכן  $M_2$  תקבל כל קלט  $x$ , ולכן  $M_2$  שייכת ל- $ALL_{TM}$ .

ג.  $ALL_{TM}$  איננה מזוהה-טיורינג כי הרדוקציה של סעיף ב היא גם רדוקציה של המשלימה של

$A_{TM}$  ל- $ALL_{TM}$ . לכן אין רדוקצית מיפוי של  $ALL_{TM}$  ל- $A_{TM}$  (היא כן מזוהה-טיורינג).

ד. המשלימה של  $ALL_{TM}$  איננה מזוהה-טיורינג (הוכחה בעזרת הרדוקציה של סעיף א). לכן אין

רדוקצית מיפוי של המשלימה של  $ALL_{TM}$  ל- $A_{TM}$ .