מטלה 1

שאלה 1

סעיף א

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{2, 3, 4\}$ $\quad (X = \{1, 4\})$

תשובה: 3

X	$X \in A = \alpha$	$X \in B$	$X \notin B = \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
1	T	F	T	T
2	T	T	F	F
3	T	T	F	F
4	F	T	F	T
5	F	F	T	F

סעיף ב

תשובה: 4 $\quad (2^c)$

$|B| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0} = c$ $\quad \mathcal{P}(\mathbb{N}) = B$ (סמן)

A המוגדר כל הקבוצות המכילות B $\Leftarrow A = \mathcal{P}(B)$

$|A| = |\mathcal{P}(B)| = 2^{|B|} = \boxed{2^c} \Leftarrow$

סעיף ג

תשובה: 1

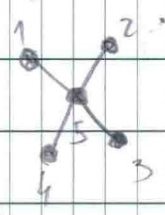
(a) - (G המילון) $\Leftarrow$ (H המילון)

שם G המילון, קיים P מסלול המילון.

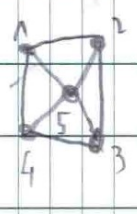
נוסף השינוי, נקבל ש-H. P אינו מסלול ב-H.

הסיבה היחיד לשינוי בשאלה:

G:



H:



יש מסלול המילון $\quad P = 1-2-3-4-5-1$

עמוד 22

שאלה 4

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

$f(x)\cdot g(x)=1=1+0x+0x^2+\dots$

לפי:
$a_0=1$
$a_1=3$
$a_2=-2$
$a_3=-10$

סעיף א' לסמן $g(x)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$. חשבו b_0,b_1,b_2,b_3

עבור לפי:

5 $f(x)\cdot g(x)=1\cdot x^0+0x+0x^2+0x^3+\dots$

6 (בכל אי־שוויון כפל בנוסף יוצרים (כמו בעמוד 122 בספר)

$$f(x)\cdot g(x)=(a_0\cdot b_0)\cdot x^0+(a_0\cdot b_1+a_1\cdot b_0)x^1$$
$$+(a_0\cdot b_2+a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_0)x^2$$
$$+(a_0\cdot b_3+a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1+a_3\cdot b_0)x^3$$

ולפי: (השוויון אין בנוסחאות 6,5)

1) $a_0\cdot b_0=1$
2) $a_0\cdot b_1+a_1\cdot b_0=0$
3) $a_0\cdot b_2+a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_0=0$
4) $a_0\cdot b_3+a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1+a_3\cdot b_0=0$

1 $b_0=\frac{1}{a_0}=\frac{1}{1}\Rightarrow \boxed{1=b_0}$

2 $1\cdot b_1+(3)\cdot 1=0\Rightarrow \boxed{b_1=-3}$

3 $1\cdot b_2+(3)\cdot(-3)+(-2)\cdot 1=0=b_2-9-2\Rightarrow \boxed{b_2=11}$

4 $(1\cdot b_3+(3)\cdot(11)+(-2)\cdot(-3)+(-10)\cdot(1)=b_3+33+6-10$
$=0=b_3+29\Rightarrow \boxed{b_3=-29}$

נקבל כלומר

$$\boxed{\begin{aligned}b_0&=1\\b_1&=-3\\b_2&=11\\b_3&=-29\end{aligned}}$$

סעיף ב' בעמוד הבא

120626

עמ' 3

לשימוש הבודק

שאלה 4

סעיף ב'

לפי הנתון:

ולכן

$$f(x)\cdot g(x)=1$$
$$f(x)=\frac{1}{g(x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}=f(x)\cdot f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}c_i\cdot x^i=c_0+c_0x+\dots$$

(מ"ש)

כדומה לפיתוח הקודם

מתקבל:

$$f(x)\cdot f(x)=(c_0)x^0+(c_1)x^1+(c_2)x^2+\dots$$
$$=(a_0\cdot a_0)x^0+(a_0\cdot a_1+a_1\cdot a_0)x^1+(a_0\cdot a_2+a_1\cdot a_1+a_2\cdot a_0)x^2$$

ולפיכך אנו מקבלים המשוואות:

$$\begin{cases}1\ \ a_0\cdot a_0=c_0\\ 2\ \ a_0\cdot a_1+a_1\cdot a_0=c_1\\ 3\ \ a_0\cdot a_2+a_1\cdot a_1+a_2\cdot a_0=c_2\end{cases}$$

1 $1\cdot 1=\boxed{c_0=1}$

2 $1\cdot 3+3\cdot 1=\boxed{6=c_1}$

3 $1\cdot(-2)+(3)\cdot(3)+(-2)\cdot 1=c_2=-2+9-2=\boxed{5=c_2}$

לסיכום, מצאנו את c_2 כדלקמן:

$$\boxed{c_2=5}$$

לשימוש הבודק

עמוד 4

שאלה ב

$A=\{1,2,3,4\}$

$K=\{R\subseteq A\times A \mid R$ טרנזיטיבי $\wedge R\neq\emptyset\}\subseteq P(A\times A)$

נסמן על היחס $X\subseteq Y$ מעל K.

סעיף א - האיבר הראשון ביחס ב-K הוא $A\times A$.

$A\times A$ הוא יחס הכולל ולכן לכל $x,y,z\in A$ כך ש-$(x,y)\in A\times A$ ו-$(y,z)\in A\times A \Rightarrow (x,z)\in A\times A$ [כי לכל $a,b\in A$ מתקיים $(a,b)\in A\times A$]

ולכן $A\times A$ טרנזיטיבי ומכאן - $A\times A\in K$.

לכן $A\times A$ הוא האיבר הראשון ביחס:

יהי $X\in K$ [רצה $X\subseteq A\times A$]

$X\in K$ ולכן גם הראנו $X\subseteq A\times A$.

מכאן $A\times A$ הוא האיבר הראשון ביחס.

סעיף ב -

$R_1=\{(1,1)\}$ הוא איבר מינימלי ב-K. (הוכחה:)

R_1 טרנזיטיבי כי לכל $x,y,z\in A$ מתקיים:

$(x,y)\in R_1 \wedge (y,z)\in R_1 \Rightarrow (x,z)\in R_1$

ואכן: $(1,1)\in R_1 \wedge (1,1)\in R_1 \Rightarrow (1,1)\in R_1$

$(1,1)$ איבר יחיד, ולכן R_1 טרנזיטיבי. ולכן $R_1\in K$.

(הוא R_1 מינימלי - יהי $X\in K$, נקח $X\subseteq R_1$. (רצה $X=R_1$)

$X\subseteq R_1$, לכן $X\in P(R_1)=\{\emptyset,\{(1,1)\}\}$.

$X\in K$ ולכן $X\neq\emptyset$, ולכן בהכרח $X=\{(1,1)\}=R_1$ כנדרש.

לכן R_1 הוא איבר מינימלי ב-K.

סעיף ג - בדומה לסעיף הקודם, נקח $R_2=\{(2,2)\}$

איבר מינימלי ב-K. ← [R_2 טרנזיטיבי, ולכל $X\subseteq R_2$ הוא

ברור כי $\{(1,1)\}=R_1\neq R_2=\{(2,2)\}$ [R_2 לא הקבוצה הריקה. ולכן

גם שאלה 1.3.3 בספר (עמ' 93). R_2 איבר מינימלי ב-K]

120626

יחידות האיבר המקסימלי ביחס. לא ייתכן שגם R_1 וגם R_2 מקיימים

תכונה זו. ולכן לא קיים איבר קטן ביחס ב-K.

(שניהם איברים הכי קטנים ב-K - לא יתכן)

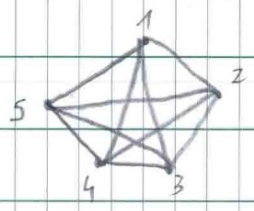
שאלה 5

לשימוש הבודק

לשימוש הבודק

שאלה 5

"גרף K_5:



סעיף א - נראה דוגמה נגדית לטענה,
הגרף K_5 הוא אוילר, אך לא מישורי.

הוכחה ש K_5 הוא אוילר:

דרגת כל צומת ב- K_5 הוא 4. (כי K_5 הוא רגולרי מדרגה 4)
5 צמתים, אם כל צומת מחוברת לכל הצמתים (חוץ מעצמו)
הוא יהיה מקושר ל- 4 צמתים. אם כן, דרגת כל צומת
ב K_5 הוא 4. 4 זוגי. כלומר, דרגת כל צומת ב K_5 זוגית.
K_5 קשיר. (לכל u,v צמתים שונים ב K_5. קיים מסלול u-v מ u ל v)
לפי משפט 3.1 (עמ' 35 בקורס הבסיס):
"גרף קשיר G הוא אוילרי $\Leftarrow$ דרגת כל צומת בו הוא זוגית"
K_5 קשיר, דרגת כל צומת בו זוגית $\Leftarrow$ K_5 אוילרי.

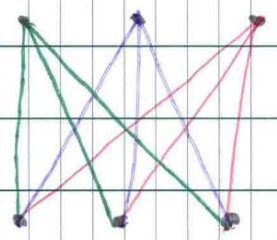
הוכחה ש K_5 לא מישורי:

K_5 הוא מגרף שלם של עצמו.
K_5 הוא הסדנה של עצמו.
לפי משפט קורטובסקי, "גרף G מישורי $\Leftrightarrow$ G לא מכיל
מינור שלו הסדנה של K_5"
K_5 מכיל מינור שלו הסדנה של K_5, ולכן K_5 לא מישורי.
הוכחנו שקיים גרף אוילרי ולא מישורי, ובכך סיימנו את הסעיף.

120626

עמוד 7

"גרף" $K_{3,3}$



שאלה 5
סעיף ב

נתון בדומה ובאין לדעתנו:
הגרף $K_{3,3}$ מקיים: $k \le 3n-6$
אך $K_{3,3}$ לא מישורי.

הוכחה ש- $K_{3,3}$ מקיים $k \le 3n-6$

מספר הצמתים (n) ב- $K_{3,3}$ הוא 6. $(n=6)$ 1

בגלל כל צומת ב- $K_{3,3}$ הוא 3.

לכן, סכום הדרגות ב- $K_{3,3}$ הוא $18 = 6 \cdot 3$ 2

לכן, מספר הקשתות ב- $K_{3,3}$ הוא $9 = \frac{18}{2}$. $(k=9)$

כלומר, $k = 9 \le 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n-6$ 1 2

הוא לכן: $\boxed{k \le 3n-6}$ 3

הוכחה ש- $K_{3,3}$ לא מישורי:

$K_{3,3}$ הוא גרף דו צדדי,
$K_{3,3}$ הוא הגרף הפשוט.
לפי משפט קורטובסקי: "גרף הוא מישורי $\Leftrightarrow$
הוא לא מכיל כגרף-תת הפשוט $K_{3,3}$"
כלומר, $K_{3,3}$ אינו מישורי. 4

הוכחנו שקיים גרף פשוט $G=K_{3,3}$, עם $n=6$ צמתים $(n=3)$
לפי $k=9$ קשתות. המקיים $k=9 \le 3n-6=12$ 3
אבל אינו מישורי. 4