

מטלת מנחה (ממ"ן)

18

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: לוגיקה פרקים 1-2

משקל המטלה: 3 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: יום ו' 30.6.06

סמסטר: 2006

אנא שים לב:
מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל

שאלה 1 (24 נק')

יהי $f[\alpha]$ מספר ההופעות של פסוקים יסודיים בפסוק α (אם פסוק יסודי מופיע מספר פעמים ב- α , הוא נספר כמספר ההופעות שלו).

א. תן הגדרה רקורסיבית של f :

(i) עבור פסוק יסודי $f[P] = \dots$ (ii) $P, f[\alpha] = \dots$ לכל פסוק α , $f[\sim(\alpha)] = \dots$

(iii) לכל שני פסוקים β, α , $f[(\alpha) \rightarrow (\beta)] = \dots$

ב. חשב את $f[\phi]$ כאשר ϕ הוא הפסוק המתואר בעץ שבראש עמוד 45 בספר הלימוד.

הראה את החישוב הן ע"י ספירת הפסוקים היסודיים, והן ע"י התהליך הרקורסיבי.

ג. איזה גודל המתייחס לעץ הבנייה של α מביעה הפונקציה $f[\alpha]$? במלים אחרות, תאר איך

לקבוע את $f[\alpha]$ מתוך השלד של עץ הבנייה של α , אם נתון לנו רק השלד, ללא מידע על הפסוקים שבצמתים. נמק.

שאלה 2 (24 נק')

נתון הפסוק (בכתיב מקוצר): $P_0 \rightarrow (P_1 \rightarrow P_2)$ ϕ :

א. רשום פסוק בצורה דיסיונקטיבית נורמלית השקול ל- ϕ .

ב. רשום פסוק בצורה קוניונקטיבית נורמלית השקול ל- ϕ .

(הגדרת הצורות הנורמליות - בעמ' 62 בספר הלימוד)

שאלה 3 (28 נק')

שאלה זו עוסקת בתחשיב הפסוקים, בשפה שבה נמצאים הקשרים הלוגיים $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \vee, \wedge$.
נניח כי בשפה יש רק 3 פסוקים יסודיים: A_1, A_2, A_3 . כתיב מקוצר - מותר.

(12 נק') א. מהו הגודל המקסימלי האפשרי עבור קבוצת פסוקים $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ בשפה זו, כך שאין ב- S שני פסוקים השקולים טאוטולוגית זה לזה? הסבר.

(16 נק') ב. יהי φ הפסוק: $((\neg A_1) \wedge A_2 \wedge (\neg A_3)) \vee (A_1 \wedge (\neg A_2) \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$.
רשום פסוק ψ שמקיים את 3 התנאים הבאים:

$$(i) \quad \psi \models \varphi$$

$$(ii) \quad \varphi \text{ אינו שקול טאוטולוגית ל-} \psi$$

$$(iii) \quad \text{לכל פסוק } \theta, \text{ אם } \theta \models \psi \text{ ו- } \theta \models \varphi$$

אז או ש- θ שקול טאוטולוגית ל- φ או ש- θ שקול טאוטולוגית ל- ψ .

הסבר בקצרה את תשובתך.

יש פסוקים שונים המקיימים את הנדרש מ- ψ , כל תשובה נכונה תתקבל.

שאלה 4 (24 נק')

השאלה עוסקת בתחשיב הפסוקים. הפסוקים היסודיים הם הסימנים P_i , לכל $i \in \mathbb{N}$.
בכל הסעיפים, α, β, γ הם פסוקים, לא בהכרח שונים זה מזה, ולא בהכרח פסוקים יסודיים.
אין קשר בין הסעיפים - α, β, γ יכולים להיות שונים מסעיף לסעיף.
כתיב מקוצר - מותר.

א. תן דוגמא לפסוקים α, β, γ בשפה הני"ל, כך שמתקיים:

$$\gamma \models \alpha \wedge \beta, \text{ אך } \alpha \text{ אינו שקול טאוטולוגית ל-} \gamma.$$

הוכח שהדוגמא שלך מקיימת את הדרישות הללו.

ב. הוכח או הפרד: אם $\gamma \models \alpha \wedge \beta$, אז $\gamma \models \alpha$ וגם $\gamma \models \beta$.

ג. הוכח או הפרד בלי לרשום לוח אמת בעל 8 שורות:

אם α, β, γ פסוקים כלשהם, אז הפסוק $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\gamma \rightarrow \alpha))$ הוא טאוטולוגיה.