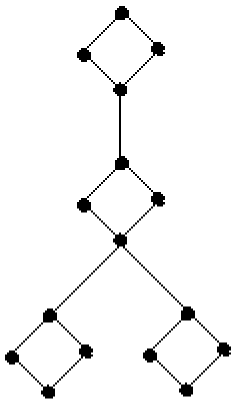
תשובה 1



נקבע $a \in A$, ונתבונן בקבוצה $\{a\} \times B = \{(a,b) \mid b \in B\}$, החלקית ל- $A \times B$.

מהגדרת הסדר המילוני השמאלי, הקבוצה הסדורה-חלקית $(\{a\} \times B \,,\, \le)$ איזומורפית (כלומר נמצאת בהתאמה חח"ע ועל **השומרת** על הסדר החלקי) לקבוצה הסדורה-חלקית $(B \,,\, \le_B)$.
טענה זו נכונה עבור כל $a \in A$.

בנוסף, מהגדרת הסדר המילוני השמאלי, אם $a_1 <_A a_2$ ($a_1 <_A a_2$ הוא סימון מקוצר ל: $a_1 \le_A a_2$ וגם $a_1 \ne a_2$) אז כל אבר של $\{a_1\} \times B$ עומד ביחס $\le$ עם כל איבר של $\{a_2\} \times B$.

מכאן שדיאגרמת הסה של $\le$ מתקבלת ע"י הצבת העתק של דיאגרמת B במקום כל קדקד בדיאגרמת A, כבאיור משמאל.

תשובה 2

א. נכון. בדיקה ישירה של 3 התכונות המגדירות יחס סדר חלקי מראה, כי מתוך קיומן עבור R ב- A נובע קיומן עבור $R|_B$ ב- B.

ב. לא נכון. דוגמא נגדית: $A = \{1,2\}$, $R = I_A$ (יחס הזהות על A), $B = \{1\}$.

כללית, אם R סדר חלקי שאינו מלא על A, תהי B תת-קבוצה של A בת איבר אחד.
אז $R|_B = I_B$ הוא סדר מלא על B. לא קשה לתת דוגמאות אחרות, בהן $|B| > 1$.

ג. לא נכון. דוגמא נגדית: $A = \{1,2\}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \{1\}$.

במקרה זה $R|_B = \varnothing$, והקבוצה הריקה אינה פונקציה של B ל- B (כאשר B אינה ריקה).

תשובה 3

א. $f(1) = f(-1)$, לכן f אינה חד-חד-ערכית.

מכיוון שלכל x , $f(x)$ הוא שורש ריבועי של מספר ממשי, בפרט $0 \le f(x)$ (שורש ריבועי במתמטיקה הוא תמיד השורש הלא-שלילי. אם לפעולת השורש היו שתי תוצאות, היא לא היתה פונקציה). המספרים הממשיים השליליים אינם אפוא בתמונת f , ולכן f אינה **על** $\mathbf{R}$.

למעשה, לכל x ממשי, $x^2 \ge 0$, לכן $x^2 + 1 \ge 1$, ולכן $f(x) = \sqrt{x^2+1} \ge 1$.

ג. אם $x \neq 0$ אז $x^2 > 0$ לכן $x^2+1>1$ ו- $f(x)=\sqrt{x^2+1}>1$.

לכן ניתן לראות את f כפונקציה מהממשיים החיוביים אל הממשיים הגדולים מ- 1 .

כאמור בשאלה נסמן פונקציה זו ב- g .

נבדוק את תכונות g :

חד-חד-ערכיות: אם $x,y>0$ ו- $g(x)=g(y)$,

משמע $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}$. מכאן $x^2+1=y^2+1$, כלומר $x^2=y^2$.

מכיוון ש- $x,y>0$ (!) נובע מכאן $x=y$. לכן f חח"ע (חד-חד-ערכית).

על: יהי $z>1$. נחפש x המקיים $g(x)=z$.

לשם כך נפתור את המשוואה $g(x)=z$ ונבדוק אם יש פתרון בתחום ההגדרה של g .

מתוך $z=\sqrt{x^2+1}$ נקבל אחרי חילוץ $x=\pm\sqrt{z^2-1}$.

כעת, מכיוון ש- $z>1$ גם $z^2>1$, לכן $z^2-1>0$ ולכן קיים שורש ריבועי ממשי.

נבחר את השורש החיובי (הוא גדול ממש מ-0) וקיבלנו פתרון בתחום המבוקש.

מכיוון שהעלינו בריבוע במהלך החילוץ, **יש לבדוק שאכן הפתרון פותר את המשוואה המקורית** $z=\sqrt{x^2+1}$ (נסו $z=-1$ במשוואה זו ותראו מה הבעיה) .

ע"י בדיקה, הפתרון $x=\sqrt{z^2-1}$ הוא אכן פתרון למשוואה המקורית, בזכות ההנחה $z>1$.

לכן g היא **על** קבוצת הממשיים הגדולים מ- 1.

תשובה 4

(i) **בדיקה** עבור $n=1$: $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{\sqrt{k}}=1=\sqrt{1}$.

(ii) **מעבר**: נניח שהטענה נכונה עבור n, כלומר נניח ש- $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$,

נוכיח שהיא נכונה עבור $n+1$, כלומר נוכיח ש- $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n+1}$. לשם כך נפתח:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

בהצבה של הנחת האינדוקציה, נקבל שאגף ימין גדול/שווה מ-

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\sqrt{n}$$

נפתח את הסכום הזה (הצעד הראשון הוא פשוט מכנה משותף):

$$= \frac{1+\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1+\sqrt{n}\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$$

וקיבלנו את אי-השוויון המבוקש, כלומר הוכחנו שהטענה נכונה עבור $n+1$.

מ- (i) + (ii), לפי עקרון האינדוקציה בטבעיים, הטענה נכונה לכל n טבעי חיובי.

איתי הראבן