20425 - תאריך הבחינה: 3.2.2016 (סמסטר 2016א - מועד א1 / 82)

שאלה 1

א. נסמן ב- W את מספר התלמידים שמקבלים ציון נמוך מ- 60. למשתנים המקריים (W,Y,X) יש התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים 15 ו- $(0.2,0.5,0.3)$. נשים לב, שהמשתנה המקרי W תלוי באופן מלא במשתנים X ו- Y, לפיכך, לכל $i,j=0,1,...,15$ המקיימים $0\le i+j\le 15$, מתקיים:

$$P\{X=i,Y=j,W=15-i-j\}=P\{X=i,Y=j\}$$

ומכאן כי:

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{15!}{i!j!(15-i-j)!}\cdot 0.2^{15-i-j}\cdot 0.5^{j}\cdot 0.3^{i}\qquad,\qquad i,j=0,1,...,15\quad;\quad 0\le i+j\le 15$$

ב. המשתנים המקריים X ו- Y תלויים זה בזה. למשל: $P\{X=15,Y=15\}=0$

אבל: $P\{X=15\}P\{Y=15\}=0.3^{15}\cdot 0.5^{15}>0$

ומכאן שתנאי אי-התלות אינו מתקיים.

ג. נעזר בתכונות ההתפלגות המולטינומית, ונקבל:

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}=\frac{-15\cdot 0.3\cdot 0.5}{\sqrt{(15\cdot 0.3\cdot 0.7)(15\cdot 0.5\cdot 0.5)}}=\frac{-2.25}{3.437}=-0.655$$

ד. הואיל וההתפלגות המשותפת של X ו- Y היא מולטינומית, נקבל כי $X\mid Y=1\sim B(14,\frac{0.3}{0.5}=0.6)$.

לפיכך $E[X\mid Y=1]=14\cdot 0.6=8.4$.

שאלה 2

א. מכיוון שבוחרים בסך הכל 4 קלפים, המאורע שנבחרים קלפים בדיוק מ- 3 צורות יכול להתרחש רק אם נבחרים 2 קלפים מאותה הצורה ועוד 2 קלפים שכל אחד מהם מצורה אחרת מקודמתה. לפיכך, נבחר צורה וממנה 2 קלפים, ואחר-כך 2 צורות נוספות ומכל אחת מהן קלף אחד. נקבל:

$$\frac{4\cdot\binom{13}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot 13^2}{\binom{52}{4}}=0.5873$$

ב. הקלף הראשון יכול להיות כל אחד מ-52 הקלפים, ואילו הקלף הרביעי יכול להיות רק מהצורה של הקלף הראשון. לפיכך $\frac{52\cdot 12}{52\cdot 51}=\frac{12}{51}=0.2353$.

ג. נסמן ב- A את המאורע שנבחרו 4 קלפים אדומים ונסמן ב- L את המאורע שנבחרו 4 קלפים מצורת לב.

$$P(L\mid A)=\frac{P(L\cap A)}{P(A)}=\frac{\binom{13}{4}}{\binom{26}{4}}=\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}=\frac{13!\cdot 22!}{26!\cdot 9!}=0.0478$$

ד. **דרך I**

בוחרים 4 קלפים עם ערכים שונים ($52\cdot 51\cdot 50\cdot 49$ אפשרויות). הואיל ורק סדר אחד לבחירתם מקיים את המאורע שהם נבחרים בסדר עולה, מחלקים ב- $4!$.

לפיכך, ההסתברות היא:

$$\frac{52\cdot 48\cdot 44\cdot 40/4!}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}=0.0282$$

דרך II

בוחרים 4 ערכים מתוך 13 אפשריים ($\binom{13}{4}$ אפשרויות), ובוחרים צורה לכל ערך (4^4 אפשרויות).

מקבלים: $$\frac{\binom{13}{4}\cdot 4^4}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}=0.0282$$

שאלה 3

א.1. מספר השיחות שלהן המוקדנית עונה במשך חצי שעה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 5.

לפיכך, $e^{-5}\cdot\frac{5^0}{0!}=0.0067$.

א.2. המאורע מתרחש אם המוקדנית תענה ל- 12 שיחות בשעה הראשונה ול- 23 שיחות בשעתיים שלאחריה.
הואיל ומדובר בפרקי זמן שאין ביניהם חפיפה, מספרי השיחות בשניהם בלתי-תלויים, וההסתברות המבוקשת היא: $$e^{-10}\cdot\frac{10^{12}}{12!}\cdot e^{-20}\cdot\frac{20^{23}}{23!}=0.0063$$

א.3. למספר השיחות שהמוקדנית מקבלת בחמש שעות יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 50. לפיכך, נוכל לחשב קירוב נורמלי להסתברות המבוקשת. נסמן ב- W את מספר השיחות הזה ונקבל:

$$P\{W>60\}=P\{W\geq 60.5\}=P\left\{Z\geq\tfrac{60.5-50}{\sqrt{50}}\right\}=1-\Phi(1.485)=1-0.9313=0.0687$$

ב. נשים לב, שהמשתנה המקרי Y מקבל ערכים בין 3 לבין 40, וכי מתקיים:

$$P\{Y=3\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}$$

$$P\{Y=i\}=P\{X=i\}\qquad,\qquad i=4,5,...,40$$

לפיכך:
$$\begin{aligned}E[Y]&=\sum_{i=3}^{40}iP\{Y=i\}=3P\{Y=3\}+\sum_{i=4}^{40}iP\{Y=i\}\\&=3(P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\})+\sum_{i=4}^{40}iP\{X=i\}\\&=3(P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\})+\sum_{i=3}^{40}iP\{X=i\}\\&=3P\{X=0\}+2P\{X=1\}+P\{X=2\}+\underbrace{\sum_{i=0}^{40}iP\{X=i\}}_{=E[X]}\\&=3\cdot 0.9^{40}+2\cdot 40\cdot 0.1\cdot 0.9^{39}+\binom{40}{2}\cdot 0.1^2\cdot 0.9^{38}+40\cdot 0.1=4.318\end{aligned}$$

שאלה 4

א. הפונקציה איננה פונקציית צפיפות, שכן היא מקבלת ערכים שליליים בתחום הגדרתה.

למשל $f_X(1)\ =\ -0.5$.

ב. הפונקציה איננה פונקציית צפיפות, שכן אינטגרציה על הפונקציה בתחום ההגדרה הנתון תניב תוצאה קטנה מ-1. מתקיים: $$\int_0^\infty \tfrac{1}{2}e^{-2x}dx\ =\ \tfrac{1}{4}\underbrace{\int_0^\infty 2e^{-2x}dx}_{=1}\ =\ 0.25$$

ג. הגורמים התלויים ב- x בפונקציה הנתונה שווים לגורמים התלויים ב- x בפונקציית צפיפות נורמלית עם הפרמטרים $\mu = 1$ ו- $\sigma^2 = ½$. אולם, הקבוע אינו מתאים לקבוע של הפונקציה הנורמלית הזו. לפיכך, אינטגרציה על הפונקציה הנתונה לא תניב את הערך 1 כנדרש, והפונקציה הנתונה איננה פונקציית צפיפות.

ד. הפונקציה הנתונה איננה פונקציית התפלגות מצטברת מכיוון ש- $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty \neq 1$

ה. הפונקציה הנתונה מקיימת את כל ארבע התכונות של פונקציית התפלגות מצטברת:

1. $F_X(0) = \frac{0}{1+0} = 0$

2. $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = 1$

3. הפונקציה עולה $\frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0 \quad , \quad x > 0$

4. והפונקציה רציפה הואיל ובתחום הגדרתה היא מנה של שני פולינומים חיוביים.

לפיכך, הפונקציה יכולה לשמש כפונקציית התפלגות מצטברת.

שאלה 5

א. הוכחת הטענה מובאת באתר הקורס.

ב. המשתנים בלתי-מתואמים, לכן השונות המשותפת של כל שניים מהם שווה ל-0. מכאן:

$$\rho(X+Y, Y+Z) = \frac{\text{Cov}(X+Y, Y+Z)}{\sqrt{\text{Var}(X+Y)\text{Var}(Y+Z)}} = \frac{\text{Var}(Y)}{\sqrt{[\text{Var}(X)+\text{Var}(Y)][\text{Var}(Y)+\text{Var}(Z)]}} = \frac{\sigma^2}{2\sigma^2} = 0.5$$