<u>פתרון ממ"ן 12</u>

שאלה 1.

יהיו $e_1,...,e_m$ קשתות הגרף כאשר אנו מניחים בלי הגבלת הכלליות כי $e_{n-m+1},...,e_m$ הם קשתות העץ הפורש T . נסמן ב- δ את ההפרש המינימלי בין שתי קשתות בשקל שונה בעץ. נחסיר כעת מהקשת ה- i את $\frac{\delta i}{n^3}$ (n הוא מספר קודקודי הגרף). לאחר צעד זה כל משקלי הקשתות שונים זה מזה. יתרה מזאת הסדר המושרה על ידי המשקלות כעת הוא סדר תקף (מדוע?). יתרה מזאת, מבין כל העצים הפורשים של הגרף המקורי עם המשקלים המקוריים מ- T יורד המשקל הגדול ביותר. לכן זהו העץ הפורש המינימלי היחיד בגרף החדש. האלגוריתם של קרוסקל ימצא את העץ T בגרף החדש. אבל מכאן נובע שאלגוריתם קרוסקאל ימצא את T גם בגרף **המקורי** כאשר הוא ירוץ על הסדר **התקף** הנדון. מכאן נובעת הטענה.

הערה: קיימות הוכחות אחרות לטענה.

שאלה 2.

ראשית, אפשר להניח כי בגרף אין קשתות בעלות משקל שלילי. אם יש קשתות כאלה הן לעולם לא ישתתפו בפתרון ולכן אפשר להתעלם מהן. אפשר להניח גם כי הגרף קשיר-אחרת מריצים את האלגוריתם המתואר על כל רכיב קשיר בנפרד. כעת, לכל קשת e נשנה את משקלה ל- $M-w(e)$ כאשר M קבוע גדול מספיק. עץ פורש מינימלי בגרף עם משקלות הללו הוא יער מקסימלי בגרף המקורי: בשל הנחת הקשירות והאי שליליות הפתרון לבעיה המקורית הוא תמיד עץ: ועץ בעל משקל מקסימלי יתרגם ל"ירידה מקסימלית" בעץ פורש בגרף החדש-כלומר לעץ פורש מינימלי. מש"ל.

הערה-מה צריך להיות ערכו של M ? 1? סכום כל הקשתות הלא שליליות בגרף המקורי? נסו למצוא ערך קטן ככל האפשר של M .

שאלה 3.

ב. לא קימת רשימת שכיחויות כנ"ל-יש מילה שהיא תחילית של מילה אחרת.

ג. לא קיימת רשימה כזו. דרך אחת לראות זאת היא שהקידוד בבירור אינו אופטימלי. אם נמחק את 0 מסוף המילה הראשונה נקבל קידוד חוקי קצר יותר.

שאלה 4.

נבנה מ- G גרף חדש G' כדלקמן. כל קודקוד s נוסיף קודקוד s' . לקודקוד s' נחבר בקשת את כל הקודקודים v שיש מהם קשת מכוונת ל- s (משקל הקשת (v,s') יהיה זהה למשקל הקשת (v,s)).

כעת נמצא את המסלול הקצר ביותר בין s ל- s' בגרף החדש. קל לוודא שמעגל פשוט המכיל s ב- G מתרגם למסלול בין s ל- s' ב- G' בדיוק באותו משקל. להפך, מסלול בין s ל- s' ב- G' מתרגם למעגל ב- G המכיל את s בדיוק באותו משקל. כעת כל שעלינו לעשות, הוא לחשב את המסלול הקצר ביותר בין s ל- s' בגרף החדש עבור כל $s\in V$. זמן הריצה הוא $O(|V|(|E|\lg|V|))$.

שאלה 5.

לצורך נוחות הסימון נסמן את המשקלים של הפריטים ב- w_i ואת הרווח שלהם ב- c_i . נמיין את הפריטים לפי יחס עלות-תועלת $\frac{c_1}{w_1}\geq\frac{c_2}{w_2}...\geq\frac{c_n}{w_n}$. יהי k האינדקס המינימלי עבורו $\sum_{i=1}^{k}w_i>1$. נבחר את הפתרון כך: לכל $i<k$, $x_i=1$. $x_k=\frac{1-\sum_{i=1}^{k-1}w_i}{w_k}$. ברור כי מדובר בפתרון חוקי. ברור גם כי ניתן למצוא אותו בזמן $O(n\lg n)$.

אנו טוענים כי מדובר בפתרון אופטימלי. נניח לשלילה שקיים פתרון אופטימלי עבורו ישנם אינדקסים $i<j$ עם $x_i<x_j$ וגם $\frac{c_i}{w_i}>\frac{c_j}{w_j}$. מכאן נובע שניתן לקבל פתרון חדש בו $y_i=x_i+\varepsilon$,

$y_j = x_j + \varepsilon'$ כאשר $\varepsilon > 0$ קטן דיו ועבור $k \neq i, j$, $y_k = x_k$ וכמו כן $\sum w_i y_i = 1$ (זהו למעשה טיעון החלפה). מכיוון ש $\sum w_i y_i - \sum w_i x_i = 0$ (שימו לב כי בפתרון אופטימלי בהכרח $\sum w_i x_i = 1$) מקבלים כי $\varepsilon = \varepsilon' \frac{w_j}{w_i}$. נסמן את הרווחים של שני הפתרונות, המקורי והחדש ב- $\sum w_i x_i = opt$ ו- $\sum w_i y_i = opt'$ בהתאמה. אז $opt' - opt = \varepsilon c_i - \varepsilon' c_j = \varepsilon' \frac{c_i w_j - c_j w_i}{w_i} > 0$ לפי הנתון כי $\frac{c_i}{w_i} > \frac{c_j}{w_j}$ וזו סתירה למקסימליות של $\sum w_i x_i = opt$. לכן אם $\frac{c_i}{w_i} > \frac{c_j}{w_j}$, $x_i \ge x_j$. קל לוודא כי מכאן נובע כי הפתרון החמדני הוא אופטימלי.