מטלת מנחה (ממ״ן) 11

הקורס: 20417 – **אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: מדריך הלמידה, פרקים א׳, ב׳

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: א-2009 **מועד אחרון להגשה:** 21.11.2008

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1 (20 נקודות)

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון ופשוט על n קודקודים. נניח כי מספר הקשתות בגרף, $|E|$ מקיים: $|E|>(n-1)(n-2)/2$. הוכיחו: G בהכרח גרף קשיר. (רמז- אינדוקציה).

שאלה 2 (20 נקודות)

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים ממשיים על הקשתות ושני קודקודים $s,t\in V$ הציעו אלגוריתם המחזיר מסלול **פשוט** בין s ל- t שמשקלו **גדול ממש** ממשקל המסלול הקצר ביותר בין s ל- t. במידה ולא קיים מסלול כנ״ל האלגוריתם שלכם צריך להחזיר ״לא קיים״. נתחו את סיבוכיות האלגוריתם שלכם והוכיחו את נכונותו.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתון גרף $G=(V,E)$ לא מכוון קשיר עם משקלות חיוביים על הקשתות. יהי $s\in V$ תהי פונקציה $l_s:V\rightarrow R$ (כלומר l_s מתאימה לכל קודקוד מספר ממשי) המקיימת:

1) $l_s(s)=0$

2) לכל $e=(u,v)\in E$, $l_s(v)\le l_s(u)+w(u,v)$

3) **לכל** פונקציה אחרת l' המקיימת את דרישות 1+2 מתקיים $l_s^{'}(t)\le l_s(t)$.

הוכיחו: $l_s(t)$ שווה **למשקלו של מסלול קצר ביותר** מ- s ל- t.

שאלה 4 (20 נקודות).

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון כך ש- $V=\{1,2,...,n\}$.

כתבו אלגוריתם בסיבוכיות $O(|E|+|V|)$ המחשב לכל $i \in V$ את ה-j הקטן ביותר שניתן להגיע אליו מ-i.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

(אלגוריתם בסיבוכיות פחות טובה מ- $O(|E|+|V|)$ יזכה בניקוד חלקי).

שאלה 5 (20 נקודות)

הסגור הטרנזיטיבי של גרף מכוון נתון $G = (V, E)$ הוא גרף מכוון $G^* = (V, E^*)$, כך שהקשת (u, v) נמצאת ב-E^* אם ורק אם קיים ב-G מסלול מכוון מ-u ל-v.

כתבו אלגוריתם אשר נעזר בחיפוש לרוחב של הגרף כדי לבנות את G^* עבור גרף נתון.

נתחו את סיבוכיות האלגוריתם והוכיחו את נכונותו.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20417 - אלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: מדריך הלמידה, פרק ג'+פרק 17 מכרך א' של ספר הלימוד

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: א-2009 **מועד אחרון להגשה:** 05.12.2008

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

בבעיית תרמיל הגב השברית, נתונים לנו n פריטים $a_1,...,a_n$. לכל פריט a_i מותאמים שני מספרים רציונליים אי שליליים: $\text{profit}(a_j)$ ו- $\text{size}(a_j)$. מטרתנו לבחור **מספרים רציונלי ים** $x_j \in [0,1]$, $1 \le j \le n$, על מנת להביא למקסימום את הביטוי $\sum_{j=1}^{n} x_j \text{profit}(a_j)$ בכפוף לדרישה כי $\sum_{j=1}^{n} x_j \text{size}(a_j) \le 1$.

א. הציעו אלגוריתם חמדן לבעיה. נתחו את סיבוכיות האלגוריתם שלכם.

ב. הוכיחו במדויק כי האלגוריתם החמדן פותר נכונה את הבעיה.

שאלה 2 (20 נקודות)

קבוצה בלתי תלויה בגרף לא מכוון היא קבוצת צמתים כך שבין כל שניים מהם אין קשת. כתבו אלגוריתם המוצא קבוצה בלתי תלויה מקסימלית בגודלה בגרף לא מכוון שהוא יער. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 3 (20 נקודות)

בהינתן גרף לא מכוון וקשיר $G=(V, E)$ עם פונקציית משקל $w: E \to R^+$. האלגוריתם הבא צובע את קשתותיו של G:

0. אתחל את קשתות הגרף כלא צבועות.

1. כל עוד קיים ב-G מעגל פשוט שכל קשתותיו לא צבועות

1.1 בחר מעגל פשוט C שכל קשתותיו לא צבועות

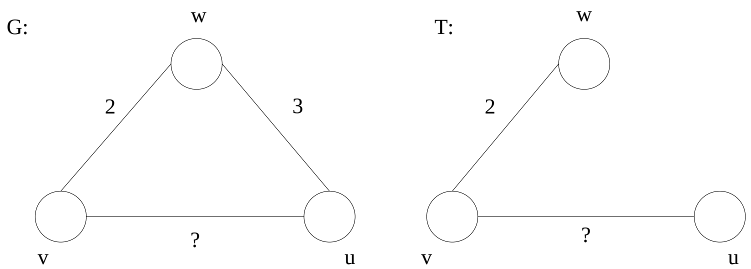
1.2 תהי e קשת עם משקל מקסימלי ב-C. צבע את e.

הוכיחו שבכל פעם שהאלגוריתם מגיע לתחילת צעד 1 קיים ב-G עץ פורש מינימלי שכל קשתותיו לא צבועות.

שאלה 4 (20 נקודות)

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל כקלט גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ עם פונקצית משקל $w : E \rightarrow R^{+}$ ועץ פורש מינימלי $T = (V, E')$ של G, כך שמשקלה של אחת הקשתות $e \in E'$ מוסתר, ומחשב את טווח הערכים האפשרי של $w(e)$ כך ש-T נשאר עץ פורש מינימלי.

למשל, עבור הקלט הבא:



טווח המשקלים האפשרי של הקשת $e=(u, v)$ הוא $[0, 3]$. אם משקלה של e יעלה על 3, העץ T כבר לא יהיה מינימלי.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 5 (20 נקודות)

נתון גרף לא מכוון קשיר, $G = (V, E)$, עבורו לכל קשת e מותאמת פונקציה מהצורה $f_e(x) = a_e x + b_e$ כאשר a_e, b_e מספרים ממשיים. לכל $t \in [0,1]$ משקלה של כל קשת e הוא $f_e(t) = a_e t + b_e$. תנו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המוצא $t \in [0,1]$ עבורו המשקל של עץ פורש מינימלי T, של G הוא הקטן ביותר. במילים אחרות: אם W הוא משקלו של עץ פורש כלשהו עבור $y \neq t, y \in [0,1]$ אזי משקלו של T קטן או שווה ל- W.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20417 - אלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: מדריך הלמידה, פרקים ד', ה'

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: א-2009 **מועד אחרון להגשה:** 02.01.2009

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

בכל הסעיפים הבאים $G = (V, E)$ הוא גרף לא-מכוון נתון.

א. הראו שאם צומת v ב-G הוא קדקוד הפרדה, אז בכל ריצת DFS על G, v לא יהיה עלה בעץ ה-DFS שיתקבל.

ב. הראו שאם קיים ב- G מסלול פשוט העובר דרך כל שכניו של צומת $v \in V$ באופן ש- v איננו על המסלול, אז קיימת ריצת DFS על G בה v הוא עלה.

ג. הראו שאם קיימת ריצת DFS על G בה צומת $v \in V$ הוא עלה, אז קיים ב- G מסלול פשוט העובר דרך כל שכניו של v באופן ש-v איננו על המסלול.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתון גרף לא-מכוון $G = (V, E)$ עם k רכיבים דו-קשירים. לכל רכיב $1 \leq i \leq k$ נתון מספר m_i, שהוא מספר צמתי ההפרדה ברכיב. מהו מספר צמתי ההפרדה בגרף כולו? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתון גרף **מכוון** $G = (V, E)$, המיוצג ע"י רשימות שכנות.

תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר, המוצא קבוצת צמתים לא ריקה $U \subseteq V$ מגודל מינימלי אפשרי, כך שאין שום קשת מכוונת היוצאת מצומת של U לצומת שאינו ב- U.

שאלה 4 (20 נקודות)

יהי $G = (V,E)$ גרף קשיר לא מכוון עם פונקצית משקל $w : E \to R^{+}$.

בכל רכיב דו-קשיר של G הופעל אלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי. יהי G' התת-גרף של G שהתקבל מאיחוד כל העצים הללו.

א. הוכיחו ש-G' הוא עץ פורש של G.

ב. האם G' הוא עץ פורש מינימלי של G? הוכיחו את טענתכם.

שאלה 5 (20 נקודות)

כתבו אלגוריתם יעיל אשר מקבל כקלט גרף G לא מכוון, ושני צמתים p ו-q בגרף, ומחזיר "כן" אם p ו-q נמצאים על מעגל פשוט בגרף, ו"לא" אחרת. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם ונתחו את סיבוכיותו.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: **20417 - אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: מדריך הלמידה, פרקים ד', ה'

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: א-2009 **מועד אחרון להגשה:** 16.01.2009

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (25 נקודות)

בשכבת כיתות א' בבי"ס מסוים יש k ילדים. ביה"ס מציע m חוגים לכיתות א'. כל ילד c_i $(1 \le i \le k)$ הכין רשימה L_i המכילה את כל החוגים בהם הוא מעוניין להשתתף. בנוסף, הוריו של כל ילד c_i $(1 \le i \le k)$ הגבילו את מספר החוגים שמותר לו להשתתף בהם ל- r_i.

בכל חוג a_i $(1 \le i \le m)$ יכולים להשתתף לכל היותר n_i תלמידים.

א. כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכל ו הבודק האם קיים שיבוץ של הילדים לחוגים כך שכל החוגים הם מלאים (כלומר, לא נשאר מקום פנוי באף חוג). הוכ יחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

ב. כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכל ו הבודק האם קיים שיבוץ של הילדים לחוגים כך שכל ילד משתתף בכל החוגים שהוא מעוניין בהם. הוכ יחו את נכונות האלגוריתם ונתח ו את סיבוכיותו.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונה רשת זרימה עם קיבולות שלמות על הקשתות. כמו כן, ידוע שברשת זרימה חוקית שערכה 1000. הוכיחו או הפריכו: קיימת זרימה חוקית ברשת שערכה שווה ל- 700.

שאלה 3 (25 נקודות)

נתון גרף לא מכוון דו-צדדי $G = (V, E)$ המיוצג ע"י רשימות שכנות.

תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המוצא ב- G תת גרף בעל מספר מירבי של קשתות, שבו לכל קודקוד דרגה לכל היותר 3. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 4 (25 נקודות)

גרף זרימה עצי מתקבל מעץ מכוון (עץ מושרש, המכוון מכיוון השורש אל הצאצאים), שנוסף לו צומת חדש ונוספה קשת מכל עלה בעץ אל הצומת החדש.

רשת זרימה עצית היא רשת זרימה המבוססת על גרף זרימה עצית, בתוספת פונקציית קיבול, כאשר המקור של הרשת הוא הצומת היחיד בגרף שדרגת הכניסה שלו 0 (כלומר, שורש העץ) והבור של הרשת הוא הצומת היחיד בגרף שדרגת היציאה שלו 0 (כלומר, הצומת החדש).

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל כקלט רשת זרימה עצית ומוצא בה זרימה מקסימלית. נמקו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו

שאלה 5 (25 נקודות)

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון עם קיבולים על הקשתות. עבור $a, b \in V$ F_{ab} היא הזרימה המקסימלית ברשת המוגדרת על-ידי $G = (V, E)$, כאשר a משמש מקור ו-b משמש בור.

הוכח או הפרך :

1. בכל רשת זרימה $G = (V, E)$ ולכל שלושה צמתים שונים $s, t, w \in V$ מתקיים $F_{st} \geq \min\{F_{sw}, F_{wt}\}$.

2. בכל רשת זרימה $G = (V, E)$ ולכל שלושה צמתים שונים $s, t, w \in V$ מתקיים

$$F_{st} \leq F_{sw} + F_{wt}$$

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: **20417 - אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: מדריך הלמידה, פרקים ד', ה'

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: א-2009 **מועד אחרון להגשה:** 06.02.2009

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

פתרו את בעיה 2-32 (ע"מ 376 -375) בספר הלימוד.

שאלה 2 (20 נקודות)

כתבו אלגוריתם המקבל כקלט גרף לא מכוון $G=(V, E)$, שתי קשתות $e_1, e_2 \in E$ ושלם k ומוצא את מספר כל המסלולים באורך k ב- G המתחילים ב- e_1 ומסתיימים ב- e_2. הניחו כי ארבעת הצמתים המגדירים את הקשתות e_1 ו-e_2 שונים זה מזה.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 3 (20 נקודות)

נזכיר כי עבור שני וקטורים $a=(a_0,\ldots,a_{n-1})$, $b=(b_0,\ldots,b_{n-1})$ $a\otimes b$ מסמן את הקונבולוציה של a ו-b.

א. מצאו וקטור e_k המקיים ש- $c=e_k\otimes b$ הוא ההזזה ימינה של b ב-k מקומות, כלומר לכל $k\le i\le n-1+k$ מתקיים $c_i=b_{i-k}$ ולכל $0\le i<k$ או $n+k\le i\le 2n-2$ מתקיים $c_i=0$.

ב. מצאו וקטור d כך ש- $c=d\otimes b$ מקיים: לכל $1\le i<n$, אם $b_{i-1}=b_i$ אז $c_i=0$ ואם $b_i\ne b_{i-1}$ אז $c_i\ne 0$; אין דרישה לגבי ערכי c_i עבור $i=0$ או $n\le i\le 2n-2$.

שאלה 4 (20 נקודות)

חשבו את הביטוי $DFT_{2n}(1,0,1,0,1,0,\ldots,1,0)$ (n חזקה של 2).

שאלה 5 (20 נקודות)

מטריצה ריבועית A מסדר n תקרא נילפוטנטית אם קיים k עבורו $A^k=0$.

הוכיחו כי אם A נילפוטנטית אזי $I-A$ מטריצה הפיכה. תנו אלגוריתם יעיל המוצא עבור מטריצה נילפוטנטית A, את המטריצה ההופכית של $I-A$. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.