תשובה 1

א. ראשית נשים לב שהפונקציה אכן מוגדרת היטב ומעבירה כל ממשי חיובי לממשי חיובי :

אם $x > 0$ אז $\sqrt{1+2x} > 1$ ולכן $\sqrt{1+2x} - 1 > 0$.

(תזכורת: שורש ריבועי במתמטיקה הוא תמיד השורש האי-שלילי - ראו הסבר בעניין זה בעמוד הדרכה למטלות באתר הקורס) .

הפונקציה **חד-חד-ערכית**:

אם $f(x_1) = f(x_2)$, משמע $\sqrt{1+2x_1} - 1 = \sqrt{1+2x_2} - 1$;

מכאן $\sqrt{1+2x_1} = \sqrt{1+2x_2}$;

פונקציית השורש הריבועי היא חד-חד-ערכית (ר' להלן), לכן $1+2x_1 = 1+2x_2$,

ומכאן $x_1 = x_2$.

הפונקציה היא **על** $\mathbb{R}^+$:

יהי $y > 0$. נחפש פתרון למשוואה $\sqrt{1+2x} - 1 = y$.

אחרי העברת אגפים והעלאה בריבוע נקבל $1+2x = (1+y)^2$,

ומכאן $x = \frac{(1+y)^2 - 1}{2} = \frac{y^2}{2} + y$.

נשים לב שעבור $y > 0$, קיבלנו $x > 0$, כלומר בתחום הנדרש.

עלינו לבצע עוד בדיקה: מכיון שבמהלך הפתרון העלינו בריבוע את שני האגפים, עלינו לבדוק שהפתרון שמצאנו אכן פותר את המשוואה המקורית (מדוע יש לבדוק אחרי העלאה בריבוע ? למשל מהמשוואה $x = -2$ נקבל אחרי העלאה בריבוע את המשוואה $x^2 = 4$. למשוואה זו יש גם פתרון $x = 2$, שאינו פתרון של המשוואה המקורית. זה קרה כי פונקציית ההעלאה בריבוע אינה חד-חד-ערכית. אחרי העלאה בריבוע של שני אגפים במשוואה יש לבדוק שהפתרונות שקיבלנו אכן פותרים את המשוואה שלפני ההעלאה בריבוע).

נציב אפוא את הפתרון שקיבלנו $x = \frac{(1+y)^2 - 1}{2}$ במשוואה $\sqrt{1+2x} - 1 = y$.

לאחר צמצומים נקבל: $\sqrt{(1+y)^2} = 1 + y$.

שימו לב **שלא תמיד נכון** ש $\sqrt{z^2} = z$: למשל $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$.

אבל במקרה שלנו נתון $y > 0$, לכן $1 + y > 0$, כלומר השוויון שעלינו לבדוק הוא

מהצורה $\sqrt{z^2} = z$ כאשר $1 + y = z > 0$, ולכן השוויון אכן מתקיים.

הערה: מדוע לא נזקקנו לבדיקה כזו בהוכחת חד-חד-ערכיות, למרות שגם שם נפתרנו משורש ריבועי? ראשית שם היה נתון שכל אחד מהאגפים הוא שורש ריבועי, כלומר הארגומנט שבתוך השורש הוא מספר אי-שלילי. שנית, **למרות שבשני המקרים העלינו בריבוע, כיוון הטיעון היה הפוך**: בהוכחת חד-חד-ערכיות יצאנו **מההנחה** $f(x_1) = f(x_2)$, והתקדמנו צעד צעד כדי להראות **שמתוך זה נובע** $x_1 = x_2$. בדרך העלינו בריבוע, כלומר השתמשנו בטענה מהצורה:

אם $a = b$ אז $a^2 = b^2$. **טענה זו ודאי נכונה!**

לעומת זאת כשניסינו למצוא פתרון למשוואה $\sqrt{1+2x} - 1 = y$, יצאנו מהשוויון **שאנו רוצים שיתקיים**, והתקדמנו צעד-צעד לפתרון. מנין לנו שהפתרון אכן פותר את המשוואה? כללית, בפתרון משוואה כל צעד צריך להיות **שקילות**, כלומר תקף הן "קדימה" והן "אחורה", כי בסופו של דבר אנו רוצים לומר: *(i)* אם x שווה לערך או הערכים שמצאנו אז המשוואה מתקיימת; *(ii)* אלה הם **כל** הערכים שפותרים את המשוואה. גם כאשר מספיק לנו למצוא רק פתרון אחד, כמו כאן, עדיין הכיוון שבו החישוב צריך להיות תקף הוא "אחורה", בניגוד לכיוון שבו אנו מתקדמים במציאת הפתרון. הטענה שאנו טוענים לגבי הפתרון היא: אם x שווה לערך שמצאנו, אז מתקיימת המשוואה. במהלך הפתרון הלכנו בכיוון הפוך לזה.

לכן כאשר מעלים בריבוע **במהלך פתרון משוואה**, אנו בעצם אומרים: עלינו לקיים $a = b$, נניח לרגע $a^2 = b^2$ ונראה אם נוכל לחזור אחורה. מכיון שמתוך $a^2 = b^2$ לא נובע $a = b$, עלינו לבדוק את הפתרון.

ב. הפונקציה אינה חד-חד-ערכית: למשל $\lfloor 0.5 \rfloor = \lfloor 0.1 \rfloor = 0$.

הפונקציה היא **על**: לכל $n \in \mathbf{Z}$ מתקיים $\lfloor n \rfloor = n$, לכן n שייך לתמונה של f - הוא התמונה של עצמו.

ג. הפונקציה **אינה חד-חד-ערכית**: למשל $f(\{1, 17\}) = f(\varnothing) = \mathbf{N}$.

הפונקציה אינה **על** $P(\mathbf{R})$:

לכל קבוצה של ממשיים שאינה מכילה את כל הטבעיים (למשל $\varnothing$) אין מקור.

ד. הפונקציה **חד-חד-ערכית**: נניח $f(X_1) = f(X_2)$, כלומר $X_1 \oplus \mathbf{N} = X_2 \oplus \mathbf{N}$.

נבצע בשני האגפים הפרש סימטרי עם $\mathbf{N}$: $(X_1 \oplus \mathbf{N}) \oplus \mathbf{N} = (X_2 \oplus \mathbf{N}) \oplus \mathbf{N}$.

מכאן בעזרת שלוש תכונות שונות של הפרש סימטרי שהוכחו בשאלה 1.22 בעמ' 27 בספר, נקבל $X_1 = X_2$ (השלימו!).

הפונקציה היא **על** $P(\mathbf{R})$: תהי $Y \in P(\mathbf{R})$, נוכיח שקיים $X \in P(\mathbf{R})$ כך ש- $f(X) = Y$:

נקח $X = Y \oplus \mathbf{N}$. אז

$$f(X) = f(Y \oplus \mathbf{N}) = (Y \oplus \mathbf{N}) \oplus \mathbf{N} = Y \oplus (\mathbf{N} \oplus \mathbf{N}) = (Y \oplus \varnothing) = Y.$$

נעזרנו שוב בתכונות שונות של הפרש סימטרי שהוכחו בשאלה 1.22.

תשובה 2

א. תהי $g:P(A)\to \mathbf{N}$ הפונקציה המתאימה לכל קבוצה ב- $P(A)$ את עוצמתה:

$g(X) = |X|$. מכיון ש- A קבוצה סופית, הערכים ש- g מחזירה הם אכן מספרים טבעיים.

היחס E המוגדר בשאלה הוא בדיוק **יחס השקילות המושרה** ב- $P(A)$ ע"י g,

כמתואר בהפניה שבשאלה - באתר הקורס ובספר. לכן הוא יחס שקילות.

ב. שתי התכונות נובעות מהזהות $(X')' = X$ (עמ' 22 בספר):

f היא **על** $P(A)$: תהי $X \in P(A)$, אז $f(f(X)) = X$, כלומר מצאנו קבוצה $Y = f(X)$ המקיימת $f(Y) = X$.

f היא **חח"ע**: תהיינה $X,Y \in P(A)$ כך ש- $f(X) = f(Y)$.

נפעיל f בשני האגפים ונקבל $f(f(X)) = f(f(Y))$ כלומר $X = Y$.

ג. הטענה נכונה - שוב בזכות הנתון ש- A סופית. נסמן $|A| = n$. אז לכל $X \in P(A)$,

מתקיים $|X'| = n - |X|$. מכאן נובעת הטענה באופן מיידי.

שימו לב שאם היה מדובר על A שאינה דווקא סופית, סעיפים א,ב היו עדיין נכונים,

אבל סעיף ג - לא.

תשובה 3

א. D אינו סדר-מלא, כי הוא אינו משווה בין כל שני איברים:

למשל $(2,3) \notin D$ וגם $(3,2) \notin D$, כי אף אחד מהם אינו מתלק בשני.

ב. לפי שאלה 2.34ב בעמוד 55 בספר, הסגור הסימטרי של D הוא $D \cup D^{-1}$.

נראה שיחס זה אינו טרנזיטיבי. מתקיים: $(3,6) \in D$, ולכן $(6,3) \in D^{-1}$.

בנוסף, $(2,6) \in D$.

לכן באיחוד $D \cup D^{-1}$ נמצאים הן $(2,6)$ והן $(6,3)$.

אבל כאמור בסעיף הקודם, $(2,3) \notin D$. לכן $D \cup D^{-1}$ אינו טרנזיטיבי.

ג. מכיוון ש D הוא יחס מעל A, מובן ש- $D \cdot D^{-1} \subseteq A \times A$.

נוכיח ש- $A \times A \subseteq D \cdot D^{-1}$:

יהי $(a,b) \in A \times A$. נסמן $c = ab$ (כפל רגיל של מספרים טבעיים).

c גם הוא מספר טבעי שונה מ- 0 , כלומר איבר של A.

מתקיים: $(a,c) \in D$, וכן $(b,c) \in D$ ולכן $(c,b) \in D^{-1}$.

מהגדרת כפל יחסים, מכך ש- $(a,c) \in D$ ו- $(c,b) \in D^{-1}$, נובע $(a,b) \in D \cdot D^{-1}$.

ד. דומה מאד להוכחת הסעיף הקודם, כאשר ה"איבר המתווך" שנבחר הוא 1, ללא תלות בערכים של a,b (השלימו הפרטים).

תשובה 4

(i) **בדיקה** עבור $n = 0$ (אפשר להתחיל מ- $n = 1$ אבל נוח להתחיל כאן מאפס) :

כל מספר טבעי מתחלק ללא שארית ב- $3^0 = 1$,

ובפרט, מספר טבעי בעל ספרה אחת מתחלק ב- 1 ....

(ii) **מעבר** : נניח שכל מספר טבעי שבנוי מ- 3^n ספרות זהות, מתחלק ב- 3^n .

יהי a מספר טבעי שבנוי מ- 3^{n+1} ספרות זהות, נוכיח שהוא מתחלק ב- 3^{n+1} .

נסמן $3^n = k$.

נסמן ב- b את המספר בעל 3^n ספרות זהות , שכולן הן אותה ספרה שממנה בנוי a .

קל לראות ש- $a = b \cdot (1 + 10^k + 10^{2k})$ (ראו רמז שהופיע בעמוד הבית של הקורס).

כעת, המספר $1 + 10^k + 10^{2k}$ מכיל בכתיב עשרוני בדיוק 3 הופעות של הספרה 1 (נשים לב שלכל n טבעי, כולל 0, מתקיים $k = 3^n > 0$) והשאר - אפסים.

לכן סכום הספרות שלו הוא 3, ולכן הוא מתחלק ב- 3.

מצד שני, לפי הנחת האינדוקציה, b מתחלק ב- 3^n .

לכן מכפלתם מתחלקת ב - 3^{n+1} .

מ- $(i) + (ii)$, לפי עקרון האינדוקציה בטבעיים, הטענה נכונה לכל n טבעי.

איתי הראבן