

אפשר לחשתמש בכל עובדה או תוצאה המופיעה בספר הלימוד או במדריך הלימוד, ללא חוכחה או הסבר. חובה להוכיח או לחסביר כל טענה אחרת.
אין צורך לכתוב פסידוקוד, אלא אם הדבר נדרש במפורש.

שאלה 1

נתון מערך של מספרים $A[1..2n]$. מתבצע עליו האלגוריתם הבא:

(1) הכנסת האיברים $A[1], A[2], \dots, A[n]$ (משמאל לימין) לעץ חיפוש בינרי T_1 ריק מלכתחילה;

(2) הכנסת האיברים $A[n+1], A[n+2], \dots, A[2n]$ (משמאל לימין) לעץ חיפוש בינרי T_2 ריק מלכתחילה;

(3) סריקה תוכית של שני העצים T_2, T_1 לתוך המערכים $A_1[1..n], A_2[1..n]$, בהתאמה;

(4) מיווג שני המערכים A_1 ו- A_2 לתוך המערך A .

5 (נק') א. הסבירו מדוע המערך A מתקבל ממוין.

10 (נק') ב. מהו זמן הריצה של האלגוריתם עבור מערך הקלט $A = [1, 2, \dots, 2n]$?

10 (נק') ג. מהו זמן הריצה של האלגוריתם עבור מערך הקלט $A = [1, 2, \dots, 2n]$ בהנחה שהעצים T_1 ו- T_2 הם עצים אדומים-שחורים?

שאלה 2

נתאר את הגרסה הבאה של שגרת החלוקה (PARTITION): נבחר מבין ערך המיקום $\lceil 2n/5 \rceil$ לבין ערך המיקום $\lceil 3n/5 \rceil$ אותו ערך שהוא קרוב יותר לערך החציון; לערך זה ניתן את תפקיד ציר החלוקה.

10 (נק') א. הסבירו איזה שינוי צריך לעשות בשגרת החלוקה החדשה בפסידוקוד. נתחו את זמן הריצה של השגרה.

15 (נק') ב. נשתמש בשגרת החלוקה החדשה באלגוריתם מיון-מהיר. כתבו את נוסחת הנסיגה עבור זמן הריצה של האלגוריתם. מצאו חסם הדוק עבור זמן הריצה במקרה הגרוע. הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 3

נתון מערך של מספרים שלמים $A[1..n]$. נסמן ב- M את השכיחות המכסימלית של איבר ב- A וב- k את מספר האיברים השונים בעלי השכיחות M . אנו מעוניינים לבצע עיבוד מקדים של הנתונים כך שיהיה אפשר למצוא את כל האיברים ב- A בעלי השכיחות M בזמן $O(k)$.

15 נק' א. כתבו אלגוריתם לבנייה בזמן $O(n \cdot \lg n)$ של מבנה נתונים S לאחסון השכיחות.

10 נק' ב. הראו כיצד ניתן למצוא באמצעות המבנה S בזמן $O(k)$ את האיברים ב- A בעלי שכיחות M .

שאלה 4

13 נק' א. נתונים סדרה של n מספרים ומספר שלם $m \leq n/\lg n$. כתבו אלגוריתם שזמן ריצתו לינארי, המוצא וממין את $2m+1$ האיברים שחם הקרובים ביותר לחציון הסדרה.

12 נק' ב. נתונה סדרה של n מספרים שלמים בתחום $[n^2..2n^2-1] \cup [3n..5n-1]$. כתבו אלגוריתם שזמן ריצתו לינארי, הממין את סדרת המספרים.

שאלה 5

נתונה קבוצת איברים בגודל N . נסמן ב- $key[x]$ את המפתח של האיבר x בקבוצה ונסמן ב- n את מספר המפתחות בקבוצה השונים זה מזה. הציעו מבנה נתונים S שבאמצעותו ניתן לממש כל אחת מהפעולות הבאות בסיבוכיות המבוקשת:

$BUILD(L, S)$: בניית המבנה S מתוך רשימה נתונה L של מפתחות; זמן הריצה: $O(N \cdot \lg n)$;

$INSERT(S, k)$: הכנסת איבר בעל המפתח k למבנה S ; זמן הריצה: $O(\lg n)$;

$MODE(S)$: החזרת ערך המפתח בעל השכיחות הגבוהה ביותר; זמן הריצה: $O(1)$;

$CHANGE(S, p, q)$: הצבת הערך $key[p]$ בשדה המפתח של כל איבר שערך המפתח שלו הוא

$key[q]$; זמן הריצה: $O(\lg n)$.

הערה: מבנה הנתונים S יכול להיות מורכב מכמה מבני נתונים יסודיים.

בהצלחה!