פתרון מטלת מנחה (ממ"ן) 15

שאלה 1

נתונים: A קבוצה לא ריקה בעלת n איברים, פונקציה $f: A \to A$ ואיבר $a \in A$.

נסמן $f^2(a) = f(f(a))$, $f^3(a) = f(f^2(a))$ ... $f^k(a) = f(f^{k-1}(a))$, לכל $k > 1$.

א. הוכיחו שקיימים מספרים i, j כך ש- $1 \le i < j \le n+1$ וכך ש- $f^i(a) = f^j(a)$.

ב. הוכיחו שאם f היא חד-חד- ערכית אז קיים $k > 1$ כך ש- $f^k(a) = a$.

תשובה

א. נחלק את הקבוצה $\{1, 2, ..., n, n+1\}$ למחלקות לפי הכלל הבא:

נאמר ששני מספרים $i, j \in \{1, 2, ..., n, n+1\}$ שייכים לאותה מחלקה אם $f^i(a) = f^j(a)$.

מאחר ש- $f^k(a) \in A$ לכל $k > 1$ הרי שמספר המחלקות הנ"ל הוא לכל היותר n (כמספר איברי A).

לכן לפי עקרון שובך היונים קיימת מחלקה אחת שבה מספר האיברים גדול מ- 1 כלומר קיימים i, j כך ש- $1 \le i < j \le n+1$ וכך ש- $f^i(a) = f^j(a)$.

ב. נבחר את המספרים i, j שמצאנו בסעיף א'. מהשוויון $f^i(a) = f^j(a)$ נובע ש- $f^i(a) = f^i(f^{j-i}(a))$. נסמן $k = j - i$ ו- $b = f^k(a) \in A$ ונקבל ש- $f^i(a) = f^i(b)$,

מאחר ש- f היא חד-חד- ערכית גם ההרכבה של f על עצמה i היא חד-חד-ערכית (וזאת כתוצאה של שימוש חוזר במשפט 3.21א).

לכן מן השוויון $f^i(a) = f^i(b)$ נובע ש- $a = b$ כלומר $a = f^k(a)$ כאשר $k = j - i > 1$.

שאלה 2

תהי A קבוצת כל המספרים הטבעיים שבהם מופיעות רק הספרות 1,2. נסמן:

ב- a_n את מספר האיברים ב- A שהם מספרים בעלי n ספרות ומתחלקים ב- 3.

ב- b_n את מספר האיברים ב- A שהם בעלי n ספרות ושארית החילוק שלהם ב- 3 היא 1

ב- c_n את מספר האיברים ב- A שהם בעלי n ספרות ושארית החילוק שלהם ב- 3 היא 2

א. מיצא את $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$.

ב. לכל $n \ge 2$ הביעו את a_n בעזרת b_{n-1} ו- c_{n-1}, את b_n בעזרת a_{n-1} ו- c_{n-1} ואת c_n בעזרת a_{n-1} ו- b_{n-1}.

ג. היעזרו בתוצאות של סעיף ב' כדי למצוא יחסי נסיגה עבור כל אחת מהסדרות a_n , b_n, c_n.

ד. פתרו את יחסי הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n , b_n, c_n.

ה. בדקו ש- $a_n + b_n + c_n$ שווה למספר האיברים של A שהם בעלי n ספרות.

תשובה

א. המספרים בעלי ספרה אחת השייכים ל- A הם $1,2$ לכן $a_1 = 0,\ b_1 = 1,\ c_1 = 1$.

המספרים בעלי שתי ספרות השייכים ל- A הם $11,12,21,22$ ולכן $a_2 = 2,\ b_2 = 1,\ c_2 = 1$.

ב. כידוע, מספר מתחלק ב- 3 אם ורק אם סכום הספרות שלו מתחלק ב- 3.

נתאר את a_n (מספר המספרים בעלי $n \ge 2$ ספרות השייך ל- A שמתחלקים ב- 3) על-יד הפרדה לשני מקרים:

1. הספרה השמאלית ביותר של המספר היא 1. זה מחייב את המספר הבנוי מ- $n-1$ הספרות הבאות לתת שארית 2 בחילוק ב- 3 ולזה יש בדיוק c_{n-1} אפשרויות.

2. הספרה השמאלית ביותר של המספר היא 2. זה מחייב את המספר הבנוי מ- $n-1$ הספרות הבאות לתת שארית 1 בחילוק ב- 3 ולזה יש בדיוק b_{n-1} אפשרויות.

נסכם את שתי התוצאות ונקבל ש- $a_n = b_{n-1} + c_{n-1}$ (1)

משיקולים דומים מקבלים ש- $b_n = a_{n-1} + c_{n-1}$ (2)

ו- $c_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ (3).

(מספרנו את היחסים כדי שנוכל להתיחס אליהם בקלות בהמשך).

ג. נחבר את (2) ו- (3) ונקבל: $b_n + c_n = b_{n-1} + c_{n-1} + 2a_{n-1}$ (4).

מהשוויון (1) ידוע ש- $b_{n-1} + c_{n-1} = a_n$ ולכן מתקיים גם $b_n + c_n = a_{n+1}$.

נציב ב- (4) ונקבל שלכל $n \ge 2$: $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$.

מאחר לשלוש הסדרות יש תקדים זהים לשלוש הנוסחאות מסעיף ב׳ נסיק בצורה דומה ש שלכל $n \ge 2$ מתקיים גם $b_{n+1} = b_n + 2b_{n-1}$ ו- $c_{n+1} = c_n + 2c_{n-1}$.

ד. לשלוש הסדרות יש נוסחת נסיגה עם אותה משוואה אופיינית: $x^2 - x - 2 = 0$.

פתרונות המשוואה הם -1 ו- 2.

לכן הנוסחה לאיבר ה- n בכל אחת משלוש הסדרות היא מהצורה $x \cdot 2^n + y \cdot (-1)^n$.

נמצא את x, y בעזרת שני האיברים הראשונים בכל סדרה.

$a_n = x \cdot 2^n + y \cdot (-1)^n$ כאשר $a_1 = 0,\ a_2 = 2$. מכאן מקבלים ש-

$2x - y = 0$ ו- $4x + y = 2$ ומכאן ש- $x = \frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3}$ ולכן $a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n + \frac{2}{3} \cdot (-1)^n$.

$b_n = x \cdot 2^n + y \cdot (-1)^n$ כאשר $b_1 = 1,\ b_2 = 1$. מכאן מקבלים ש-

$2x - y = 1$ ו- $4x + y = 1$ ומכאן ש- $x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{3}$ ולכן $b_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (-1)^n$.

לסדרה c_n יש אותם איברים ראשונים כמו ל- b_n לכן $c_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (-1)^n$.

ה. מסעיף ד' נובע ש-

$$a_n + b_n + c_n = \frac{1}{3}\cdot 2^n + \frac{2}{3}\cdot(-1)^n + \frac{1}{3}\cdot 2^n - \frac{1}{3}\cdot(-1)^n + \frac{1}{3}\cdot 2^n - \frac{1}{3}\cdot(-1)^n = 2^n$$

וזה אכן שווה למספר המחרוזות באורך n הכתובות בספרות $1,2$.

שאלה 3

א. כתבו פונקציה יוצרת עבור מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 20$$

ב. מיצאו את מספר הפתרונות של המשוואה מסעיף א'.

ג. מיצאו את מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 20$$

כאשר לפחות אחד מהנעלמים הוא אי-זוגי.

תשובה

א. לכל הופעה של $3x_i$ במשוואה נתאים את הטור $1 + x^3 + x^6 \cdots$ (יש 4 מקרים כאלה)

ולכל הופעה של $2x_i$ במשוואה נתאים את הטור $1 + x^2 + x^4 \cdots$ (יש 3 מקרים כאלה).

הפונקציה היוצרת המתאימה למציאת מספר הפתרונות של המשוואה היא:

$$f(x) = (1 + x^3 + x^6 \cdots)^4 (1 + x^2 + x^4 \cdots)^3 = \frac{1}{(1-x^3)^4} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^3}$$

מתוך הנוסחה $\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+k-1}{k-1} x^i$ (על ידי הצבת x^3 ו- x^2 במקום x)

נקבל ש- $\frac{1}{(1-x^3)^4} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+3}{3} x^{3i}$ ו- $\frac{1}{(1-x^2)^3} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+2}{2} x^{2j}$

לכן $f(x) = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+3}{3} x^{3i}\right]\left[\sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+2}{2} x^{2j}\right]$.

ב. מספר פתרונות המשוואה הוא המקדם של x^{20} בפיתוח של $f(x)$.

x^{20} מתקבל לאחר פתיחת סוגריים בביטוי של $f(x)$ בסעיף א', במקרים הבאים:

$i = 0\ ,\ j = 10\ ;\ i = 2\ ,\ j = 7\ ;\ i = 4\ ,\ j = 4$ ו- $i = 6\ ,\ j = 1$.

לכן המקדם של x^{20} הוא: $\binom{3}{3}\binom{12}{2} + \binom{5}{3}\binom{9}{2} + \binom{7}{3}\binom{6}{2} + \binom{9}{3}\binom{3}{2} = 1203$

וזו התשובה לסעיף הזה.

ג. נמצא קודם את מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה שבהם כל אחד מהנעלמים זוגי

כלומר $x_i = 2y_i$ כאשר $y_i \in \mathbf{N}$ לכל $1 \le i \le 7$.

מספר הפתרונות יהיה שווה במקרה זה למספר פתרונות המשוואה

$$3(2y_1) + 2(2y_2) + 3(2y_3) + 2(2y_4) + 3(2y_5) + 2(2y_6) + 3(2y_7) = 20$$

וזו בעצם המשוואה : $3y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 2y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 = 10$.

מספר הפתרונות שלה הוא המקדם של x^{10} בפיתוח של $f(x)$.

x^{10} מתקבל לאחר פתיחת סוגריים בביטוי של $f(x)$ בסעיף א׳, במקרים הבאים :

$i = 0\ ,\ j = 5$; ו- $i = 2\ ,\ j = 2$.

לכן המקדם של x^{10} הוא : $\binom{3}{3}\binom{7}{2} + \binom{5}{3}\binom{4}{2} = 81$

כדי למצוא את מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה המקורית שבהם לפחות אחד מהנעלמים הוא אי-זוגי נחסיר מהמספר הכולל של הפתרונות שמצאנו בסעיף ב׳ את מספר הפתרונות שבהם כל הנעלמים זוגיים. לפיכך התשובה לסעיף זה היא $1203 - 81 = 1122$.

שאלה 4

א. מיצאו את המקדם של- x^{19} בפיתוח של הפונקציה $\dfrac{(1-x^5)^5}{(1-x)^{10}}$

ב. כתבו פונקציה יוצרת עבור מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{15} = 19$$

כאשר $x_i \le 4$ לכל $1 \le i \le 10$ וכל חמשת הנעלמים האחרים הם מספרים המתחלקים ב- 5.

ג. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה מסעיף ב׳.

תשובה

א. מתוך הנוסחה $\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+k-1}{k-1}x^i = \dfrac{1}{(1-x)^k}$ נובע ש- $\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+9}{9}x^i = \dfrac{1}{(1-x)^{10}}$ ומנוסחת הבינום של ניוטון ידוע ש-

$$(1-x^5)^5 = \binom{5}{0} - \binom{5}{1}x^5 + \binom{5}{2}x^{10} - \binom{5}{3}x^{15} + \binom{5}{4}x^{20} - \binom{5}{5}x^{25} .$$

לכן

$$\frac{(1-x^5)^5}{(1-x)^{10}} = (1-x^5)^5 \cdot \frac{1}{(1-x)^{10}} =$$

$$= (1 - 5x^5 + 10x^{10} - 10x^{15} + 5x^{20} - x^{25})\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+9}{9}x^i$$

מכאן שהמקדם של- x^{19} בפיתוח של $\dfrac{(1-x^5)^5}{(1-x)^{10}}$ הוא :

$$1 \cdot \binom{19+9}{9} - 5 \cdot \binom{14+9}{9} + 10\binom{9+9}{9} - 10\binom{4+9}{9}$$

$$= \binom{28}{9} - 5 \cdot \binom{23}{9} + 10\binom{18}{9} - 10\binom{13}{9}$$

ב. מאחר שלכל $1 \le i \le 10$ מתקיים $x_i \le 4$, נתאים ל- x_i את $1+x+x^2+x^3+x^4$

(יש 10 מקרים כאלה).

ומאחר ש- x_i מתחלק ב- 5 לכל $11 \le i \le 15$, נתאים ל- x_i את הטור $1 + x^5 + x^{10} + \cdots$

(יש 5 מקרים כאלה).

לכן הפונקציה היוצרת המתאימה למציאת מספר הפתרונות של המשוואה היא :

$$f(x) = (1+x+x^2+x^3+x^4)^{10}(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)^5 .$$

מאחר ש- $1 + x + \cdots + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}$ ו- $1 + x^5 + x^{10} + \cdots = \frac{1}{1-x^5}$ נוכל לרשום :

$f(x) = \frac{(1-x^5)^{10}}{(1-x)^{10}} \cdot \frac{1}{(1-x^5)^5} = \frac{(1-x^5)^5}{(1-x)^{10}}$ - וזו הפונקציה מסעיף א'.

ג. מספר פתרונות המשוואה שווה למקדם של x^{19} בפיתוח של $f(x)$ לטור חזקות

ולפי מה שראינו בסעיף א' הוא שווה ל- $\binom{28}{9} - 5 \cdot \binom{23}{9} + 10\binom{18}{9} - 10\binom{13}{9}$.