20407 - מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

שאלה 1

נניח שהסדרה $(a_1, a_2, ..., a_n)$ של מספרים ממשיים מקיימת את התנאי

$$a_1 < ... < a_m > ... > a_n$$

עבור m כלשהו, $1 \le m \le n$.

עליך לכתוב אלגוריתם למציאת ערך אינדקס m בזמן $\Theta(\cancel{n})$ lgn.

שאלה 2 (10 נק' לכל סעיף)

בהינתן סדרה S של מספרים ממשיים ומספר ממשי נוסף z, $z \neq 0$:

א. בהנחה ש-S ממויינת, כתבו אלגוריתם שזמן ריצתו $\Theta(n)$, הקובע האם קיימים ב-S שני איברים שמכפלתם בדיוק z.

ב. ההנחה ש-S איננה ממויינת, כתבו אלגוריתם שתוחלת זמן ריצתו $\Theta(n)$, הקובע האם קיימים ב-S שני איברים שמכפלתם בדיוק z.

אזהרה: שימו לב, הסדרה יכולה להכיל מספרים חיוביים ושליליים.

שאלה 3

נתונה סדרה של n תת-קטעים

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n]$$

של הקטע [0, 1].

עליך לכתוב אלגוריתם המחזיר מספר ממשי x, כך ש-x שייך למספר מקסימלי של קטעים $[a_i, b_i]$.

הערה: האלגוריתם חייב לרוץ בזמן $O(n \cdot \lg n)$ במקרה הגרוע.

שאלה 4 (10 נק' לכל סעיף)

מערך $A[1..n]$ נקרא "כמעט ממויין עם שגיאה בגודל k $(k < n)$" אם $A[j] \ge A[i]$ לכל j,i המקיימים $j - i > k$; במלים אחרות, המערך לא חייב להיות ממויין, אבל כל שני אברים הנמצאים בסדר הפוך לא יכולים להיות רחוקים זה מזה יותר מ-k מקומות.

א. איך אפשר לשנות את האלגוריתם מיון-מהיר כך שיהפוך כל קלט לפלט כמעט ממויין עם שגיאה בגודל k? האלגוריתם החדש חייב להיות יעיל יותר מאשר האלגוריתם המקורי. מהו זמן הריצה האסימפטוטי של האלגוריתם החדש במקרה **הטוב** היותר?

ב. נצמצם את האלגוריתם מיון-הכנסה לקלטים כמעט ממויינים עם שגיאה בגודל k. מהו זמן הריצה של האלגוריתם במקרה **הגרוע** ביותר?

שאלה 5 (15 נק' סעיף א', 5 נק' סעיף ב')

בהינתן מערך $A[1..n]$, אנו מבקשים להחזיר בסדר ממויין (לא יורד) את k האיברים הקטנים ביותר של A (n ו-k משתנים בלתי-תלויים, $1 \le k \le n$).

א. איך אפשר לשנות את שגרת האלגוריתם מיון-ערימה כך שהיא תפתור את הבעיה? האלגוריתם המוצע חייב לרוץ בזמן הסימפטוטי טוב יותר מאשר האלגוריתם המקורי. מהו הזמן הזה במקרה הגרוע?

ב. עבור אלו ערכים של k (כפונקציה של n) מתקבל פתרון בסיבוכיות $\Theta(n)$?

שאלה 6

הוכיחו שזמן הריצה של השגרה BUILD-HEAP הינו $O(n)$, תוך שימוש בשיטת החיובים (ניתוח לשיעורין).

סוף!