

מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.

* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.

* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי וידיאו, עליך לחזור ולהוכיחן.

* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(6 נק') א. נתבונן בטענה: אם לאברהם יש שכל, אז אם אברהם שותה הוא לא נוהג.

טענה זו שקולה לטענה:

[1] אם לאברהם אין שכל אז אם אברהם שותה הוא נוהג.

[2] אם לאברהם אין שכל אז הוא שותה ונוהג.

[3] אם אברהם שותה ונוהג – אין לו שכל.

[4] אם אברהם שותה ולא נוהג – יש לו שכל.

[5] אם אברהם נוהג ולא שותה – יש לו שכל.

(7 נק') ב. N היא קבוצת המספרים הטבעיים, R היא קבוצת המספרים הממשיים.

תהי $A = \{(x, n) \mid x \in R, n \in N\} \cup \{(n, x) \mid n \in N, x \in R\}$

ותהי $B = (R \times R) - A$. עוצמת B היא:

[1] 0 [2] \aleph_0 [3] C [4] 2^C

[5] עוצמה כלשהי שנמצאת בין \aleph_0 ל- C .

(6 נק') ג. G הוא גרף פשוט וקשיר על קבוצת הצמתים $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

נתון ש- G הוא אוילרי, כלומר יש בו מעגל אוילר.

עוד נתון שאין ב- G קשת בין 1 ל-2, אין קשת בין 2 ל-3 ואין קשת בין 1 ל-3.

נוסיף ל- G שתי קשתות: קשת בין 1 ל-2 וקשת בין 2 ל-3. הגרף שנקבל הוא:

[1] אוילרי.

[2] אינו אוילרי, אבל יש בו מסלול אוילר שאינו מעגל.

[3] אינו אוילרי, ואין בו מסלול אוילר שאינו מעגל.

[4] ייתכן שהוא אוילרי וייתכן שלא – תלוי בגרף המקורי G .

[5] לא ייתכן, יש סתירה בנתוני השאלה.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

נסמן $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. תהי $M = P(A) - \{\emptyset, A\} = \{X \mid X \subseteq A, X \neq \emptyset, X \neq A\}$. להלן שני יחסים (רלציות) מעל M .

היחס T מוגדר כך:

$(X, Y) \in T$ אם ורק אם $\{X, Y\}$ היא חלוקה של A (ר' תורת הקבוצות עמ' 58).

היחס K מוגדר כך: $(X, Y) \in K$ אם ורק אם $\max(X) \leq \min(Y)$.

6 נק' א. כמה זוגות סדורים יש ב- T ?

7 נק' ב. האם K רפלקסיבי?

7 נק' ג. האם K אנטי-סימטרי?

7 נק' ד. האם K טרנזיטיבי?

הוכיחו את תשובותיכם.

הבהרה: $\max(X)$ הוא האיבר הגדול ביותר ב- X , $\min(Y)$ הוא האיבר הקטן ביותר ב- Y .

שאלה 3

מצאו את מספר הפתרונות במספרים טבעיים של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = n \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3n \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 + 3x_7 + 3x_8 = 10n \end{cases}$$

התשובה היא ביטוי התלוי ב- n . שימו לב: מבוקש מספר הפתרונות של המערכת, לא מספרי

הפתרונות של כל משוואה בנפרד. במלים אחרות, השאלה היא כמה סדרות (x_1, x_2, \dots, x_8) של

מספרים טבעיים מקיימות בבת-אחת את שלוש הדרישות.

הדרכה: פרקו את הדרישות לדרישות נפרדות על קבוצות זרות של משתנים.

אין צורך בפונקציות יוצרות כדי לענות על השאלה.

תזכורת: בקורס זה 0 הוא מספר טבעי.

ארגון התשובה: תשובה סופית המכילה סכומים רגלי-איברים לא תתקבל.

אין להשאיר בתשובה ביטויים כגון $D(a, b)$. אפשר להשאיר ביטויים כגון $\binom{a}{b}$.

אם מתקבל הביטוי $\binom{a}{1}$ יש לפשט אותו.

שאלה 4

לפנינו שישה כדים שונים (ממוספרים 1, ..., 6) ו- 30 כדורים זהים. יש לשים את כל הכדורים בכדים, כאשר בכל כד חייב להיות לפחות כדור אחד, ויחד עם זה אסור שמספר הכדורים בכד יהיה בדיוק 7. במלים אחרות: אפשר שיהיו בכד יותר מ- 7 כדורים, אפשר פחות מ- 7, אבל לא בדיוק 7 ולא 0. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת? הדרכה: ראשית טפלו בדרישה שיש בכל כד כדור אחד לפחות. אחרי כן, באיסור על 7 כדאי לטפל בעזרת הכלה והפרדה.

שאלה 5

G הוא גרף מישורי על 11 צמתים. הוכיחו שהגרף המשלים שלו, \overline{G} , אינו מישורי. (גרף משלים הוגדר ב"תורת הגרפים" הגדרה 1.4).

בהצלחה!