

מבנה הבחינה :

- * עליך לענות על 4 מתוך 6 השאלות, כאשר בין 4 השאלות שבחרת, **חייבת להופיע שאלה מס' 3 או שאלה מס' 4 או שתיהן.**
- * משקל כל שאלה 25% .
- * אם תשיב על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- * יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
 - * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
 - * אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
 - * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
-

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

תהי $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. תהי $M = P(A) - \{\emptyset\} = \{X \mid \emptyset \neq X \subseteq A\}$.
להלן יחסים (רלציות) שונים המוגדרים מעל M .
בכל סעיף, קבע אם היחס המוגדר באותו סעיף הוא:
(i) רפלקסיבי? (ii) סימטרי? (iii) אנטי-סימטרי? (iv) טרנזיטיבי? **נמק כל תשובה.**
(6 נק') א. היחס R המוגדר כך: $(X, Y) \in R$ אם $1 \in X \cap Y$.
(6 נק') ב. היחס S המוגדר כך: $(X, Y) \in S$ אם $1 \notin X \cap Y$.
(6 נק') ג. היחס T המוגדר כך: $(X, Y) \in T$ אם $\{X, Y\}$ היא חלוקה של A .
(6 נק') ד. היחס K המוגדר כך: $(X, Y) \in K$ אם $\min(X) = \max(Y)$.
(1 נקודה: בהירות הנימוקים).

תזכורות:

- * העובדה שיחס הוא סימטרי אינה מונעת ממנו להיות אנטי-סימטרי.
- * $\min(X)$ הוא האיבר הקטן ביותר ב- X , $\max(Y)$ הוא האיבר הגדול ביותר ב- Y .

שאלה 2

תהי K קבוצת המספרים הטבעיים הזוגיים.
תהי $P_\infty(\mathbb{N})$ קבוצת הקבוצות האינסופיות של מספרים טבעיים **כלשהם**.
(12 נק') א. מצא פונקציה חד-חד-ערכית של $P(K)$ לתוך $P_\infty(\mathbb{N})$.
הוכח שהיא חד-חד-ערכית. שים לב שב- $P(K)$ יש גם קבוצות סופיות.
(13 נק') ב. מהי עוצמת $P_\infty(\mathbb{N})$? הוכח.
מותר להסתמך על המשפט שהוכח במפגש אופק: אם $|X| = |Y|$ אז $|P(X)| = |P(Y)|$.

שאלה 3

- בכל סעיפי השאלה $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- (9 נק') א. מצא כמה פונקציות f של A ל- B הן בעלות התכונה הבאה :
לכל $x \in A$, $x + f(x)$ הוא מספר אי-זוגי .
- (9 נק') ב. מצא כמה פונקציות f של A ל- B הן בעלות התכונה הבאה :
לכל $x \in A$, $x \cdot f(x)$ הוא מספר זוגי .
- (7 נק') ג. כמה פונקציות f של A ל- B אינן מקיימות אף אחד משני התנאים הנ"ל, כלומר אינן מקיימות את התנאי של סעיף א וגם אינן מקיימות את התנאי של סעיף ב? הדרכה : התשובה פשוטה מאד, אין צורך להסתבך.

שאלה 4

- נתבונן בסדרות סופיות של סימנים, הלקוחים מתוך 6 סימנים אלה :
הספרות 0,1 וארבעה סימני פעולה : $+$, $-$, $*$, $/$.
ובכפוף לתנאים הבאים :
- א. הסדרה נפתחת ומסתיימת בספרה .
- ב. אין הופעות צמודות של סימני פעולה .
- דוגמאות של סדרות העונות על התנאים : $001+001-10/1000$, 011000 .
- דוגמאות של סדרות שאינן עונות על התנאים : -100 , $100+-10$, $10100*$.
- יהי a_n מספר הסדרות הללו שבהן בדיוק n סימנים .
- (12 נק') א. כתוב יחס נסיגה עבור a_n .
- מצא ללא שימוש ביחס הנסיגה את a_0, a_1, a_2, a_3 .
- בדוק בעזרת הערכים הללו את יחס הנסיגה שרשמת (שתי בדיקות).
- (13 נק') ב. פתור את יחס הנסיגה וקבל נוסחה מפורשת עבור a_n .
- בדוק את התוצאה בעזרת השוואה עם מספר ערכים מבין a_0, a_1, a_2, a_3 שחישבת.

שאלה 5

נתונה שפה של תחשיב הפרדיקטים, שבה שני סימני פונקציות חד-מקומיות f, m , סימן פרדיקט דו-מקומי S , סימן פרדיקט חד-מקומי C , ושני סימני קבועים: a, b . בנוסף נמצא בשפה סימן השוויון, שלמען הקיצור נרשום אותו פשוט כשוויון, כגון $f(x) = f(y)$ או כגון $\sim (x = y)$.
 אין בשפה עוד סימני פונקציות, פרדיקטים או קבועים.
 כרגיל, נמצאים בשפה הקשרים הלוגיים $\forall, \exists, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$, סוגריים, שני הכמתים \forall, \exists וסימני משתנים כגון x, y, z .
 נתונה אינטרפרטציה J של השפה, שעולמה הוא קבוצת בני-האדם, ובה:
 $f(x)$ מתפרש כאבא של x . $m(x)$ מתפרש כאימא של x .
 $S(x, y)$ אמיתי אם x הוא/היא אח או אחות של y .
 (הבהרות: מספיק הורה אחד משותף. אדם אינו נחשב אח של עצמו).
 $C(x)$ אמיתי אם x אוהב/ת אוכל סיני.
 a מתפרש כאדם מסוים ויחיד בעולם, ששמו אברהם.
 b מתפרש כאשה מסוימת ויחידה בעולם, ששמה בלהה.
 בכל סעיף, כתוב שם-עצם או תבנית בשפה הנ"ל המייצגים את הנאמר באותו סעיף.
 כתיב מקוצר - מותר. הקפד לשים סוגרים במקרה שייתכן ספק בקריאה.
אין צורך לנמק.

- 2) (נק') א. שם-עצם המייצג את הסבא של אברהם מצד אימו.
- 3) (נק') ב. תבנית שבה x מופיע חפשי, האומרת ש- x הוא נכד (או נכדה) של בלהה.
- 5) (נק') ג. פסוק האומר שאברהם הוא "בן-דוד" (*Cousin*, בן של דוד או בן של דודה) של בלהה.
- 5) (נק') ד. הגדרה של S בעזרת שאר הסימנים, כלומר תבנית φ שבה לא מופיע S , ואומרת ש- x הוא/היא אח או אחות של y .
 שים לב להבהרת המושג "אח או אחות" למעלה.
- 5) (נק') ה. פסוק האומר שלאברהם יש ילדים משתי נשים שונות.
- 5) (נק') ו. פסוק האומר שיש לאברהם בן או בת שאוהב/ת אוכל סיני.

שאלה 6

תהי $A = \{1,2,3\}$, ותהי M קבוצת כל היחסים (הרלציות) מעל A .

נחלק את M לשתי מחלקות:

במחלקה K_1 כל היחסים הרפלקסיביים, ובמחלקה K_2 כל שאר היחסים.

בכל אחד מהסעיפים א', ב', מתוארת דרך להפוך את M לגרופואיד.

בכל סעיף, קבע אם החלוקה $\{K_1, K_2\}$ היא חלוקה מותרת של הגרופואיד.

אם החלוקה מותרת – רשום את לוח הכפל של גרופואיד המנה.

(13 נק') א. הפעולה ב- M היא כפל יחסים (כפל רלציות).

(12 נק') ב. הפעולה ב- M היא חיתוך יחסים.

בהצלחה!