מטלת מנחה (ממ"ן) 19

הקורס: **20283 - מתמטיקה דיסקרטית**

חומר הלימוד למטלה: לוגיקה פרק 3.1-3.10

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2008א **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 18.1.08

אנא שים לב: מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (24 נקודות)

קבע לכל אחד מהביטויים הבאים אם הוא שם-עצם, תבנית אטומית, תבנית שאינה אטומית, פסוק, או שאינו עונה על אף אחת מהגדרות אלו. כתיב מקוצר - מותר. שים לב שביטוי יכול להתאים ליותר מהגדרה אחת: פסוק יכול להיות תבנית אטומית או תבנית לא אטומית.

א. $f_1^3(x_1\,,\,f_1^1(x_1)\,,\,a_1)$ ב. $\sim A_1^3(x_1,x_2,a_1)$

ג. $A_1^3(f_1^3(x_1,x_2,a_1)\,,\,x_2\,,\,f_1^1(a_1))$ ד. $f_1^3(A_1^3(x_1\,,x_2,a_1),x_2,a_1)$

ה. $(\exists x_1 A_1^3(x_1\,,a_2,a_1)) \to \forall x_2 A_1^3(x_1\,,x_2,a_1)$

ו. $\forall x_1\, f_1^3(a_1,a_2,x_1)$ ז. $\forall x_1 A_1^3(a_1,a_2,x_2)$

ח. $\forall x_1 \left(A_1^3(x_1,a_2,a_1) \to \exists x_2 A_1^3(x_1,x_2,a_1) \right)$

שאלה 2 (24 נקודות)

תהי L שפה חלקית לשפת תחשיב הפרדיקטים, ובה סימנים אלה: קשרים לוגיים, סוגרים, סימני משתנים $x_1,x_2,\ldots$, סימן פרדיקט דו-מקומי R, סימן פרדיקט דו-מקומי A_1^2 המתפרש כרגיל **כשוויון** וסימני הכמתים $\forall,\exists$. אין סימני פונקציות או פרדיקטים נוספים ואין סימני קבועים אישיים.

א. רשום 4 פסוקים, $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4$ בשפה זו, כך שהפסוק $\psi_1\wedge\psi_2\wedge\psi_3\wedge\psi_4$ מביע את הטענה ש- R הוא יחס **סדר-מלא** ("תורת הקבוצות" עמ' 87) מעל עולם האינטרפרטציה.

ב. נוסיף לשפה סימן קבוע a_1. לשפה החדשה נקרא $L\cup\{a_1\}$. רשום פסוק בשפה זו, אשר בנוכחות $\psi_1\wedge\psi_2\wedge\psi_3\wedge\psi_4$ יביע את הטענה ש- a_1 הוא האיבר **הקטן ביותר** לגבי הסדר המלא R.

שאלה 3 (28 נקודות)

נתבונן בשפה של תחשיב הפרדיקטים, שבה סימני משתנים x,y,z , סימן קבוע a ,
סימן פונקציה דו-מקומית f וסימן פרדיקט דו-מקומי E .
בשפה נמצאים כרגיל גם הקשרים הלוגיים : $\sim, \leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge$, הכמתים $\exists, \forall$,
הסוגריים והסימן "," (פסיק) . **פרט לסימנים הללו אין עוד סימנים בשפה**.

תהי J אינטרפרטציה של השפה, שתחומה (העולם שלה) הוא $\mathbf{N}-\{0\}$ (הטבעיים ללא 0),
ובה a מתפרש כמספר 1 , $f(x,y)$ מתפרש כמכפלה $x \cdot y$,
E מתפרש כיחס השוויון : $E(x,y)$ פירושו $x=y$.

עבור כל אחד מהסעיפים, **כתבו תבנית** בשפה הנ"ל, המביעה באינטרפרטציה J את הטענה שבסעיף. שימו לב שלא כל התבניות הנדרשות הן פסוקים. בכל סעיף, **ציינו אם התבנית שרשמתם היא פסוק או לא**.

א. כל שני מספרים השונים מ- 1, מכפלתם אינה שווה לאף אחד משניהם.

ב. x מתחלק ללא שארית ב- y.

ג. x הוא מספר ראשוני.

תזכורת : ראשוני הוא מספר טבעי **השונה מ- 1**, ומתחלק רק בעצמו וב- 1 .

ד. האיבר היחיד בעולם, שמכפלתו בעצמו שווה לו עצמו, הוא המספר 1
(כלומר 1 הוא כזה, ואין אף איבר אחר בעולם בעל תכונה זו).

* אין להוסיף סימנים לשפה - יש להביע את המבוקש בעזרת הסימנים הנתונים !
* כתיב מקוצר - מותר. הקפידו על סוגריים שיאפשרו קריאה חד-משמעית של כל ביטוי.

שאלה 4 (24 נקודות)

תהי ψ התבנית $A_1^1(x_1)$ ותהי φ התבנית $A_2^1(x_1)$.

נתבונן בפסוקים הבאים : הפסוק $\exists x_1(\psi \wedge \varphi)$ והפסוק $(\exists x_1\psi) \wedge (\exists x_1\varphi)$.

א. הראה בעזרת אינטרפרטציה מתאימה כי שני הפסוקים **אינם** שקולים לוגית זה לזה.

ב. הראה כי אחד מהם (איזה?) גורר לוגית את השני.

יש לנמק את התשובות. הוכחה פורמלית לגמרי של סעיף ב תסתמך על סעיף 4 של הגדרה 3.14.
סעיף זה אינו קל להבנה והשימוש בו בהוכחה מסורבל למדי.
נסתפק גם בנימוק פחות פורמלי, אך הנימוק חייב להיעזר במושגים **אינטרפרטציה והשמה**.