שאלה 1

נסמן ב- A_i את המאורע שמתג i סגור, לכל $i = 1,\ldots,6$, וב- B את המאורע שעובר זרם מ-A ל-B.

א.
$$P(B) = P((A_1 \cup A_4) \cap (A_2 \cup A_5) \cap (A_3 \cup A_6))$$
$$= P(A_1 \cup A_4)P(A_2 \cup A_5)P(A_3 \cup A_6)) = (1-0.2^2)^3 = 0.96^3 = 0.884736$$

ב. נסמן ב- O_2 את המאורע שבדיוק שני מתגים פתוחים.

$$P(O_2 \mid B) = \frac{P(O_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(O_2) - P(O_2 \cap B^C)}{P(B)} = \frac{\binom{6}{2} \cdot 0.8^4 \cdot 0.2^2 - 3 \cdot 0.8^4 \cdot 0.2^2}{0.884736} = \frac{2}{9} = 0.\overline{2}$$

ג.
$$P(B \mid A_1^C \cup A_2^C) = \frac{P((A_1^C \cup A_2^C) \cap B)}{P(A_1^C \cup A_2^C)} = \frac{P(B) - P(B \cap A_1 \cap A_2)}{P(A_1^C \cup A_2^C)}$$
$$= \frac{P(B) - P(A_1 \cap A_2 \cap (A_3 \cup A_6))}{1 - P(A_1 \cap A_2)} = \frac{0.884736 - 0.8^2 \cdot (1-0.2^2)}{1-0.8^2} = 0.7509$$

פתרון נוסף:

$$P(B \mid A_1^C \cup A_2^C) = \frac{P(B|A_1^C \cap A_2^C)P(A_1^C \cap A_2^C) + P(B|A_1^C \cap A_2)P(A_1^C \cap A_2) + P(B|A_1 \cap A_2^C)P(A_1 \cap A_2^C)}{1 - P(A_1 \cap A_2)}$$
$$= \frac{0.8^2 \cdot 0.96 \cdot 0.2^2 + 2 \cdot 0.8 \cdot 0.96 \cdot 0.8 \cdot 0.2}{1-0.8^2} = 0.7509$$

שאלה 2

נסמן ב- A את המאורע שהזוג האדום הוא זוג שלם, וב- B את המאורע שהזוג הצהוב הוא זוג שלם.

א.
$$P(A \cap B) = \frac{\binom{96}{16} + 2 \cdot \binom{96}{18} + \binom{96}{20}}{\binom{100}{20}} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 + 2 \cdot 80 \cdot 79 \cdot 20 \cdot 19 + 80 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97} = 0.4556$$

דרך נוספת:

$$P(A \cap B) = 1 - P(A^C \cup B^C) = 1 - P(A^C) - P(B^C) + P(A^C \cap B^C)$$
$$= 1 - 2 \cdot \frac{\binom{2}{1}\binom{98}{19}}{\binom{100}{20}} + \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{96}{18}}{\binom{100}{20}} = 1 - 2 \cdot \frac{32}{99} + \frac{48,032}{470,547} = 1 - 2 \cdot 0.\overline{32} + 0.10208 = 0.4556$$

ב. נסמן ב- X_i את המאורע שזוג i הוא זוג שלם, לכל $i = 1,\ldots,50$.

נסמן ב- X את מספר זוגות הנעליים שנותרים שלמים לאחר החלוקה. מתקיים : $X = \sum_{i=1}^{50} X_i$

מהסעיף הקודם מקבלים :
$$P\{X_i = 1\} = P(A) = 1 - \frac{\binom{2}{1}\binom{98}{19}}{\binom{100}{20}} = 1 - \frac{32}{99} = \frac{67}{99}$$

ומכאן :
$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{50} X_i\right] = \sum_{i=1}^{50} E[X_i] = \sum_{i=1}^{50} P\{X_i = 1\} = 50 \cdot \frac{67}{99} = 33.\overline{83}$$

ג. מתקיים:
$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{50}X_i\right)=\sum_{i=1}^{50}\mathrm{Var}(X_i)+\sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

כאשר:
$$\mathrm{Var}(X_i)=P\{X_i=1\}P\{X_i=0\}=P(A)P(A^C)=\frac{67}{99}\cdot\frac{32}{99}=0.21875$$

$$\mathrm{Cov}(X_i)=P\{X_i=X_j=1\}-P\{X_i=1\}P\{X_j=1\}=P(A\cap B)-[P(A)]^2=0.4556-\left(\frac{67}{99}\right)^2=-0.002414$$

ומכאן כי:
$$\mathrm{Var}(X)=50\cdot 0.21875-50\cdot 49\cdot 0.002414=5.0232$$

שאלה 3

נתון כי X ו-Y משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות מעריכית עם הפרמטר λ $(\lambda>0)$.

א. הערכים האפשריים של המשתנה המקרי R נמצאים בקטע $(0,1)$. לפיכך, לכל $0<a<1$ מתקיים:

$$P\{R\le a\}=P\left\{\frac{X}{X+Y}\le a\right\}=P\{X\le(X+Y)a\}=P\{\tfrac{1}{a}X-X\le Y\}=P\{(\tfrac{1}{a}-1)X\le Y\}$$
$$=\int_0^\infty\int_{(1/a-1)x}^\infty \lambda e^{-\lambda y}\lambda e^{-\lambda x}dydx=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\underbrace{\int_{(1/a-1)x}^\infty \lambda e^{-\lambda y}dy}_{1-F_Y((1/a-1)x)}dx=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}e^{-\lambda(1/a-1)x}dx$$
$$=\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda/a)x}dx=a\underbrace{\int_0^\infty \tfrac{\lambda}{a}e^{-(\lambda/a)x}dx}_{=1}=a$$

ומכאן כי:
$$f_R(a)=\tfrac{d}{da}F_R(a)=\tfrac{d}{da}[a]=1$$

כלומר, למשתנה המקרי R יש התפלגות אחידה על הקטע $(0,1)$.

ב. נמצא תחילה את פונקציית הצפיפות המותנית של המשתנה המקרי X בהינתן המאורע $\{X<0.5\}$.

מתקיים:
$$F_{X|X<0.5}(a)=P\{X\le a\mid X<0.5\}=\begin{cases}0 & , \quad a\le 0\\ \dfrac{F_X(a)}{F_X(0.5)}=\dfrac{1-e^{-2a}}{1-e^{-1}} & , \quad 0<a<0.5\\ 1 & , \quad a\ge 0.5\end{cases}$$

ומכאן:
$$f_{X|X<0.5}(a)=\tfrac{d}{da}F_{X|X<0.5}(a)=\begin{cases}\dfrac{2e^{-2a}}{1-e^{-1}} & , \quad 0<a<0.5\\ 0 & , \quad a\le 0\ \cup\ a\ge 0.5\end{cases}$$

ולכן:
$$E[X\mid X<0.5]=\int_0^{0.5}\frac{2ae^{-2a}}{1-e^{-1}}da=\frac{1}{1-e^{-1}}\int_0^{0.5}2ae^{-2a}da\underset{\substack{u=a\\ v'=2e^{-2a}}}{\overset{\downarrow}{=}}\frac{1}{1-e^{-1}}\left(-ae^{-2a}\Big|_0^{0.5}+\int_0^{0.5}e^{-2a}da\right)$$
$$=\frac{1}{1-e^{-1}}\left(-0.5e^{-1}-0.5e^{-2a}\Big|_0^{0.5}\right)=\frac{-0.5e^{-1}-0.5e^{-1}+0.5}{1-e^{-1}}=\frac{0.5-e^{-1}}{1-e^{-1}}=\frac{e-2}{2e-2}=0.209$$

דרך נוספת:
$$E[X]=E[X\mid X<0.5]P\{X<0.5\}+E[X\mid X\ge 0.5]P\{X\ge 0.5\}$$

נחשב את $E[X\mid X\ge 0.5]$. מתכונת חוסר הזיכרון מקבלים, כי לכל $a\le 0.5$ מתקיים:

$$P\{X<a\mid X\ge 0.5\}=1-P\{X\ge(a-0.5)+0.5\mid X\ge 0.5\}$$
$$=1-P\{X\ge a-0.5\}=P\{X<a-0.5\}=F_X(a-0.5)$$

לפיכך: $$f_{X|X\ge 0.5}(a)=f_X(a-0.5) \qquad , \qquad a\ge 0.5$$

$$E[X \mid X\ge 0.5]=\int_{0.5}^{\infty} a\, f_{X|X\ge 0.5}(a)\,da=\int_{0.5}^{\infty} a\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda(a-0.5)}\,da=\int_{0}^{\infty}(t+0.5)\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda t}\,dt=E[X]+0.5=1$$

ומכאן כי: $$E[X]=0.5=E[X \mid X<0.5](1-e^{-1})+1\cdot e^{-1}$$

ולכן: $$E[X \mid X<0.5]=\frac{0.5-e^{-1}}{1-e^{-1}}$$

שאלה 4

נתון כי למשתנה המקרי X יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר ⅓ וכי למשתנה המקרי Y יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 3. כמו כן, אין תלות בין X ל- Y.

א. $$P\{X+Y=4\}=\sum_{i=1}^{4}P\{X=i,Y=4-i\}=\sum_{i=1}^{4}P\{X=i\}P\{Y=4-i\}=\sum_{i=1}^{4}\tfrac{1}{3}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^{i-1}\cdot e^{-3}\cdot\tfrac{3^{4-i}}{(4-i)!}$$

$$=e^{-3}\cdot 3^4\sum_{i=1}^{4}\tfrac{2^{i-1}}{9^i\cdot(4-i)!}=e^{-3}\cdot 3^4\cdot\left(\tfrac{1}{54}+\tfrac{2}{162}+\tfrac{4}{729}+\tfrac{8}{6{,}561}\right)=e^{-3}\cdot\left(\tfrac{3}{2}+1+\tfrac{4}{9}+\tfrac{8}{81}\right)=0.1515$$

ב. $$P\{X=Y\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=i,Y=i\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=i\}P\{Y=i\}=\sum_{i=1}^{\infty}\tfrac{1}{3}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^{i-1}\cdot e^{-3}\cdot\tfrac{3^i}{i!}=e^{-3}\sum_{i=1}^{\infty}\tfrac{2^{i-1}}{i!}$$

$$e^{-3}\sum_{i=1}^{\infty}\tfrac{2^{i-1}}{i!}=\tfrac{1}{2}e^{-3}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{2^i}{i!}-1\right)=\tfrac{1}{2}e^{-3}(e^2-1)=\tfrac{e^2-1}{2e^3}$$

לפיכך, התפלגות מספר הסיבובים במשחק היא גיאומטרית עם הפרמטר $1-\frac{e^2-1}{2e^3}=\frac{2e^3-e^2+1}{2e^3}$, ומכאן שהתוחלת המבוקשת היא $\frac{2e^3}{2e^3-e^2+1}=1.189$.

ג. ההסתברות ששחקן A ינצח במשחק היא ההסתברות שיקבל ערך גדול מאשר שחקן B, בהינתן שקיבלו ערכים שונים. לפיכך, אם נסמן ב- A את המאורע ששחקן A ינצח במשחק, נקבל:

$$P(A)=P\{X>Y \mid X\ne Y\}=\frac{P\{X>Y\}}{P\{X\ne Y\}}=e^{-1}\cdot\frac{2e^3}{2e^3-e^2+1}=\frac{2e^2}{2e^3-e^2+1}=0.4375$$

כאשר: $$P\{X>Y\}=\sum_{j=0}^{\infty}P\{Y=j,X>j\}=\sum_{j=0}^{\infty}P\{Y=j\}P\{X>j\}=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-3}\cdot\tfrac{3^j}{j!}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^j$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-3}\cdot\tfrac{3^j}{j!}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^j=e^{-3}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\tfrac{2^j}{j!}=e^{-3}\cdot e^2=e^{-1}$$

או לחלופין בדרך חישוב ישירה:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}(P\{X=Y\})^{i-1}\cdot P\{X>Y\}=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\tfrac{e^2-1}{2e^3}\right)^{i-1}\sum_{j=0}^{\infty}P\{Y=j,X>j\}=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\tfrac{e^2-1}{2e^3}\right)^{i}\sum_{j=0}^{\infty}P\{Y=j\}P\{X>j\}$$

$$=\tfrac{2e^3}{2e^3-e^2+1}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}e^{-3}\cdot\tfrac{3^j}{j!}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^j=\tfrac{2}{2e^3-e^2+1}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\tfrac{2^j}{j!}=\frac{2\cdot e^2}{2e^3-e^2+1}=\frac{2e^2}{2e^3-e^2+1}$$

שאלה 5

נסמן ב-X את האורך (בק"מ) של נסיעה מקרית ; $X \sim N(13, 6^2)$.

א. נסמן ב-Y את ההכנסה (בש"ח) של החברה מנסיעה מקרית, ונמצא את פונקציית ההסתברות של Y.

$$P\{Y=10\} = P\{X \le 3\} = \Phi\left(\tfrac{3-13}{6}\right) = \Phi(-1.66\bar{6}) = 1-0.9522 = 0.0478$$

$$P\{Y=20\} = P\{3 < X \le 10\} = \Phi\left(\tfrac{10-13}{6}\right) - \Phi\left(\tfrac{3-13}{6}\right) = \Phi(-0.5) - \Phi(-1.66\bar{6})$$
$$= \Phi(1.66\bar{6}) - \Phi(0.5) = 0.9522 - 0.6915 = 0.2607$$

$$P\{Y=30\} = P\{10 < X \le 20\} = \Phi\left(\tfrac{20-13}{6}\right) - \Phi\left(\tfrac{10-13}{6}\right) = \Phi(1.16\bar{6}) - \Phi(-0.5)$$
$$= 0.8783 - 0.3085 = 0.5698$$

$$P\{Y=50\} = P\{X > 20\} = 1 - \Phi(1.16\bar{6}) = 1 - 0.8783 = 0.1217$$

1. תוחלת הכנסות החברה (בש"ח) מנסיעה אחת היא :

$$E[Y] = 10\cdot 0.0478 + 20\cdot 0.2607 + 30\cdot 0.5698 + 50\cdot 0.1217 = 28.871$$

ותוחלת ההכנסות (בש"ח) מ-60 נסיעות מקריות היא : $28.871 \cdot 60 = 1{,}732.26$

שונות הכנסות החברה מנסיעה אחת היא :

$$E[Y^2] = 10^2\cdot 0.0478 + 20^2\cdot 0.2607 + 30^2\cdot 0.5698 + 50^2\cdot 0.1217 = 926.13$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 92.59536$$

ושונות ההכנסות מ-60 נסיעות מקריות (וכמובן, בלתי-תלויות זו בזו) היא :

$$92.59536 \cdot 60 = 5{,}555.72$$

2. 60 הנסיעות בלתי-תלויות זו בזו ולכולן אותה התפלגות אורך-נסיעה. לכן, נוכל להשתמש בפונקציית ההתפלגות של משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N=60$, $m=20$ ו- $n=30$. הערך של פונקציית ההסתברות בנקודה 10 הוא ההסתברות המבוקשת, דהיינו :

$$\frac{\binom{20}{10}\binom{40}{20}}{\binom{60}{30}} = 0.21535$$

ב. ל-X ול-Y יש התפלגות משותפת דו-נורמלית. לכן, לכל אחד מהם יש התפלגות שולית נורמלית עם הפרמטרים הנתונים בשאלה (ראה תרגיל ת22 בעמוד 337 בספר הקורס). ההתפלגות המותנית של Y, בהינתן $X=x$, גם היא נורמלית (ראה דוגמה 5ד בעמוד 392 בספר הקורס) והפרמטרים שלה הם :

$$E[Y \mid X=x] = E[Y] + \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)}\cdot(x - E[X])$$

$$\mathrm{Var}(Y \mid X=x) = \mathrm{Var}(Y)\left(1 - \frac{[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2}{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}\right)$$

כלומר, אם $X=15$, אז : $E[Y \mid X=15] = 20 + \frac{38}{36}\cdot(15-13) = 22.11\bar{1}$

$$\mathrm{Var}(Y \mid X=15) = 81\cdot\left(1 - \frac{38^2}{36\cdot 81}\right) = 40.88\bar{8}$$

לכן : $P\{Y>25 \mid X=15\} = 1 - \Phi\left(\frac{25-22.11\bar{1}}{\sqrt{40.88\bar{8}}}\right) = 1 - \Phi(0.45178) = 0.32576$