2061841178

מספר התלמיד הנבחן
רשום את כל תשע הספרות

ש N101410186

ת.ז: 206184178 מספר סידורי: 5

האוניברסיטה הפתוחה

א' בתמוז תשע"ט

מס' שאלון - 456

4

ביולי 2019

סמסטר 2019ב

20417 / 4

מס' מועד 85

שאלון בחינת גמר

20417 - אלגוריתמים

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה 7 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה חמש שאלות.

מתוכן יש לענות על ארבע שאלות.

25 נקודות לכל שאלה.

לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).

על שאלות שמסומנות בכוכב - יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה) ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות.

לשאלון זה מצורפים דפי עזר.

חומר עזר:

כל חומר עזר אסור בשימוש.

בהצלחה !!!

החזירו
למשגיח את השאלון
וכל עזר אחר שקיבלתם בתוך מחברת התשובות

מבחן אלגוריתמים 2019ב – תאריך 4/7

הנחיות: ענו על 4 מתוך 5 שאלות. לכל שאלה 25 נקודות. לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה.
על שאלות שמסומנות בכוכב – יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה), ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).
חומר עזר: אסור. דף נוסחאות מצ״ב. בהצלחה!

<u>שאלה 1 – בעיית הספיקות</u> (25 נק׳).

נתונה נוסחת 3-CNF, שבה כל אחד מהמשתנים $x_1,...,x_n$ מופיע **<u>בדיוק בשלוש</u>** פסוקיות שונות, וכל פסוקית כוללת **<u>בדיוק שלושה</u>** משתנים שונים. הוכיחו כי הנוסחה ספיקה. הציגו עבור נוסחאות כאלו אלגוריתם למציאת השמה מספקת. הדרכה: העזרו במשפט **Hall**.

(<u>תזכורת</u>: נוסחת 3-CNF היא נוסחה מהצורה $\varphi=\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge...\wedge\varphi_m$, כשלכל פסוקית הצורה $\varphi_i=(z_{i,1}\vee z_{i,2}\vee z_{i,3})$, וכל $z_{i,j}$ הינו אחד מהליטרלים $x_1,...,x_n,\neg x_1,...,\neg x_n$. כך למשל $\varphi=(x_1\vee\neg x_2\vee x_3)\wedge(x_2\vee x_4\vee\neg x_5)$ הינה נוסחת 3-CNF. השמה הינה פונקציה שמתאימה לכל משתנה x_i ערך ״אמת״ T או ״שקר״ F. בהינתן השמה מסוימת, אזי הליטרל x_i מסופק אמ״מ ההשמה מקיימת $x_i\leftarrow T$, והליטרל $\neg x_i$ מסופק אמ״מ $x_i\leftarrow F$. פסוקית $\varphi_i=(z_{i,1}\vee z_{i,2}\vee z_{i,3})$ מסופקת אמ״מ לפחות אחד מהליטרלים שבה $z_{i,1},z_{i,2},z_{i,3}$ מסופק. הנוסחא כולה $\varphi=\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ מסופקת אמ״מ כל הפסוקיות $\varphi_1,..,\varphi_m$ מסופקות. הנוסחא φ נקראת ספיקה, אמ״מ לפחות אחת מבין 2^n ההשמות האפשריות מספקת אותה).

<u>שאלה 2 – הרצת FFT</u> (25 נק׳).

נביט בפולינום $p(x)=3x^3-2x^2+x-4$. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) במסגרת הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום (22 נק׳). בדקו את תשובתכם ע״י <u>הצבה ישירה</u> של הערכים המתאימים בפולינום (3 נק׳).

נא לא לכתוב בשוליים

שאלה 3 – **מזעור סכום הדרגות במסלול** (25 נקי).

בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$ וצמד קדקודים $s,t\in V$, ברצוננו למצוא מסלול בין s ל-t, שבו סכום הדרגות של הקדקודים לאורך המסלול הינו מזערי. הציגו לבעיה **שני אלגוריתמים** שונים מהותית. כל אלגוריתם צריך להיות מבוסס על הגדרה/בנייה של גרף מתאים. ("עיקר טענת הנכונות" = ניסוח מדויק של הקשר בין גרף הקלט G לבין הגרפים שהגדרתם בהמשך G_1,G_2).

אלגוריתם ראשון – הגדרת הגרף G_1 (10 נקי): לכל קדקוד $v\in V-\{s,t\}$ ניצור קדקודים v_1,v_2. את הקדקודים s ו-t נעתיק כמו שהם. לכל קשת $(u,v)\in E$ ניצור קשת (u_2,v_1) במשקל 0. לכל קשת $(s,v)\in E$ ניצור קשת (s,v_1) ולכל $(v,t)\in E$ ניצור (v_2,t) במשקל 0. לכל $v_1,v_2\in V(G_1)$ ניצור קשת (v_1,v_2) במשקל $deg(v)$.

מה עושים עם G_1 (2 נקי): מריצים אלג׳ דייקסטרה ממקור s.

עיקר טענת הנכונות (2 נקי): המסלול המינימלי בין s ל-t שמצאנו דייקסטרה בגרף G_1, P_1, הוא רדוקציה למסלול בין s ל-t ב-G שבו סכום דרגות הקדקודים מינימלי. מכיוון שהמשקלים החיוביים היחידים בגרף הם על הקשתות מסוג (v_1,v_2) השווים לדרגת הצומת v הרי שע״פ נכונות דייקסטרה, מצאנו מסלול שממזער את סכום זה. כעת רק נותר לבצע רדוקציה כך שלכל זוג v_1,v_2 ב-P_1 נעבור בקדקוד v במסלול של גרף G.

זמן הריצה (1 נקי): בניית הגרף - $O(|E|+|V|)$, הרצת דייקסטרה - $O(|E|+|V|\log|V|)$, רדוקציה חזרה - $O(|E|)$. סה״כ: $O(|E|+|V|\log|V|)$.

אלגוריתם שני – הגדרת הגרף G_2 (5 נקי): לכל קדקוד $v\in V-\{s,t\}$ ניצור קדקודים v_i, $1\le i\le deg(v)+1$. את s ו-t נעתיק כמו שהם. לכל קשת $(u,v)\in E$ ניצור קשת $(u_{deg(u)+1},v_1)$, לכל קשת $(s,v)\in E$ ניצור קשת (s,v_1) ולכל קשת $(v,t)\in E$ ניצור קשת $(v_{deg(v)+1},t)$. בנוסף, ניצור את הקשתות (v_i,v_{i+1}) לכל $1\le i\le deg(v)$.

מה עושים עם G_2 (2 נקי): מריצים אלגוריתם BFS ממקור s.

עיקר טענת הנכונות (2 נקי): המסלול המינימלי שמצאנו BFS בין s ל-t בגרף (מק) הוא רדוקציה למסלול בין s ל-t ב-G שבו סכום דרגות הקדקודים מינימלי. כי מסלול בין s ל-t ב-G הוארכנו בגרף כמס׳ צלעות ששווה לסכום דרגות הקדקודים במסלול. לכן, ע״פ נכונות BFS, מצאנו את מס׳ הצלעות במסלול P_M וגם את הסכום. כעת נבצע רדוקציה - כאשר אם P_M עובר ב-v_1-...-$v_{deg(v)+1}$ אז P עובר ב-v.

זמן הריצה (1 נקי): מס׳ הצלעות שהוספנו ל-G_2: $\sum_{v\in V}deg(v)=|E|$. לכן, בניית הגרף - $O(|E|+|V|)$, הרצת BFS - $O(|E|+|V|)$, רדוקציה חזרה - $O(|E|)$. סה״כ: $O(|E|+|V|)$.

שאלון 456 85.20.4 M1

שאלה 4 – **כשלון החמדנות (צביעת-קדקודים בגרף)** (25 נק׳).

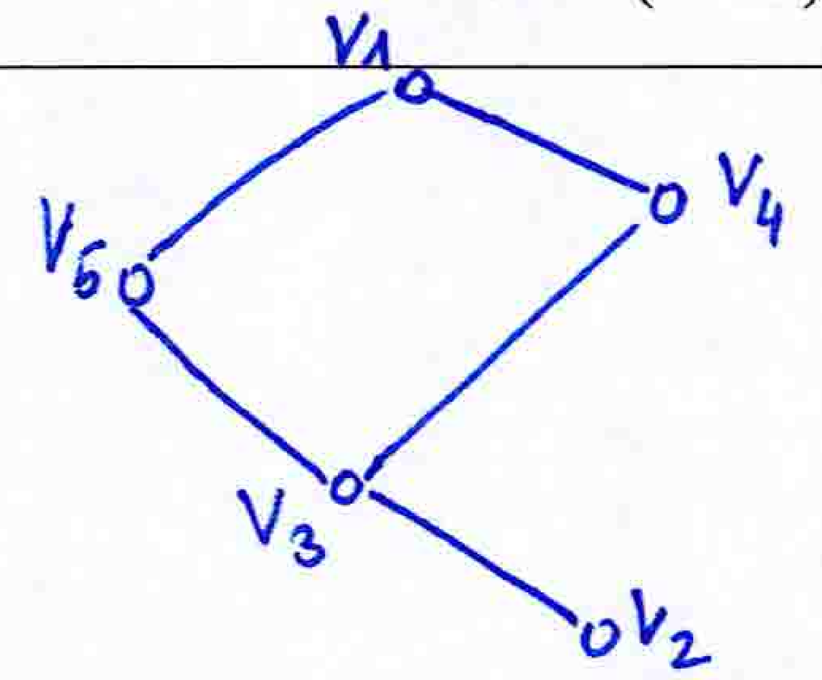
הגדרות: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ נקרא k-צביע, אם אפשר לצבוע כל אחד מהקדקודים שלו באחד מתוך k צבעים, תחת האילוץ שאסור להעניק לשני קדקודים שכנים את אותו הצבע. כלומר, קיימת פונקציית צביעה $f:V\to\{1,...,k\}$ המקיימת $f(u)\neq f(w)$ לכל צלע $\{u,w\}\in E$. פונקציה כזו נקראת ״צביעה חוקית של G ב- k צבעים״. קל למשל לוודא שהגרף המלא על n קדקודים איננו $(n-1)$-צביע, אבל הוא כן n-צביע (חייבים להעניק צבע שונה לכל קדקוד). קל גם לוודא שגרף הינו 1-צביע אמ״מ הגרף ריק. בבעיית צביעת-הקדקודים מחפשים צביעה חוקית באמצעות מספר מזערי של צבעים.

<u>האלגוריתם החמדן</u>. נביט באלגוריתם הבא: סורקים את כל הקדקודים $v_1,...,v_n$ בזה אחר זה, וצובעים כל קדקוד v_i בצבע המזערי, שבו טרם נצבע אף אחד מהשכנים של v_i. למשל, אם קבוצת השכנים של v_6 הינה $\{v_1,v_4,v_5,v_9\}$, וכשמטפלים ב-v_6 נבחרו כבר הצבעים $f(v_1)=f(v_4)=1, f(v_5)=3$ (אבל טרם נבחר צבע עבור v_9), אז הצבע המזערי שלא מופיע בקבוצה $\{1,3\}$ הוא 2, ולכן האלגוריתם החמדן צובע $f(v_6)=2$.

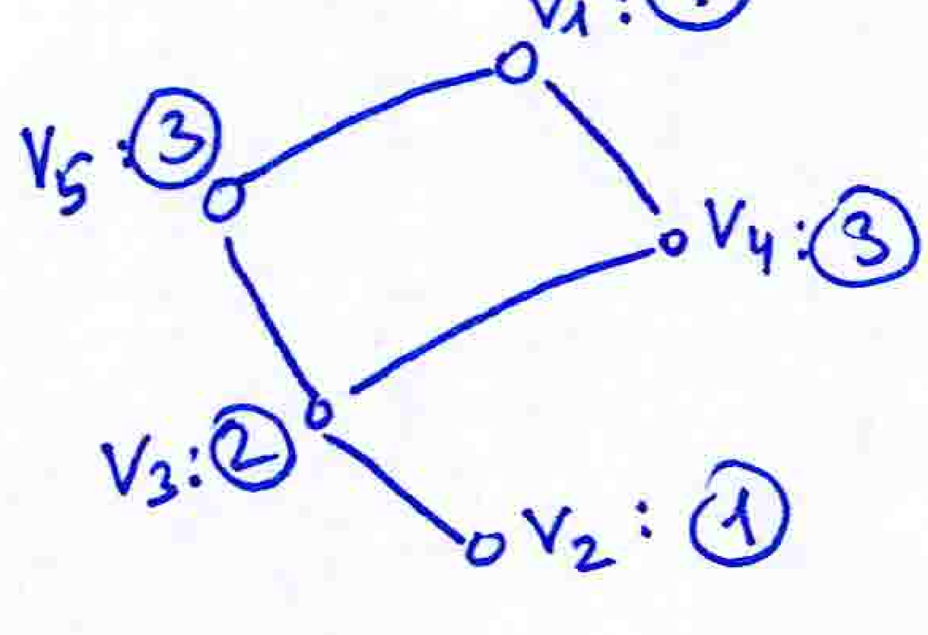
<u>השאלה</u>. הציגו קלט עליו **<u>האלגוריתם החמדן נכשל</u>**: הגרף G הינו k-צביע, אבל האלגוריתם מפיק צביעה חוקית שמשתמשת ב-$(k+1)$ צבעים.

ניתן לצבוע ב-2 צבעים אבל האלג׳ יצבע ב-3 צבעים.

ציור גרף הקלט:

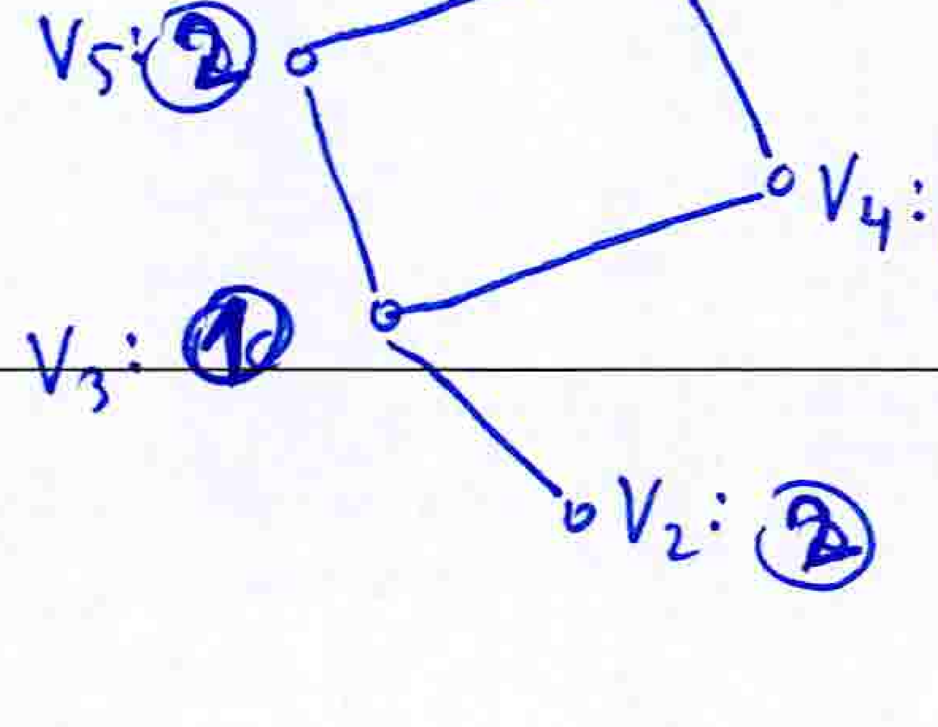


צביעה של האלגוריתם החמדן (k+1 צבעים):



v_1, v_2 - צבע 1.
v_3 - צבע 2.
v_4, v_5 - צבע 3.

צביעה אופטימלית (k צבעים בלבד):



v_1, v_3 - צבע 1.
v_2, v_4, v_5 - צבע 2.

שאלון 456

85.20.4 M1

****שאלה 5** – <u>תיכנון דינמי (גשרים לא נחצים)</u>** (25 נק').

נהר רחב זורם ממזרח למערב. על הגדה הצפונית של הנהר ממוקמות n ערים שהסדר שלהן ממערב למזרח הוא $C_1,...,C_n$. על הגדה הדרומית שוכנות n ערים נוספות שהסדר שלהן ממערב למזרח הוא $D_1,...,D_n$. לכל עיר C_i בגדה הצפונית משויכת עיר תאומה אחת ויחידה $D_{\pi(i)}$ בגדה הדרומית. ברצוננו **<u>לחבר מספר מרבי של ערים</u>** צפוניות לערים תאומות דרומיות באמצעות גשרים. כל זאת תחת האילוץ שאסור לגשרים שונים להחצות. למשל, אם $\pi(1)=4,\ \pi(2)=1,\ \pi(3)=5$ אז ניתן לבנות בו-זמנית את הגשרים בין C_1 לבין $D_{\pi(1)}=D_4$ ובין C_3 לבין $D_{\pi(3)}=D_5$ (גשרים אלו אינם נחצים). עם זאת אסור לבנות בו-זמנית את הגשרים בין C_1 לבין $D_{\pi(1)}=D_4$ ובין C_2 לבין $D_{\pi(2)}=D_1$ (גשרים אלו כן נחצים). הציגו אלגוריתם **<u>תכנון-דינמי</u>** שמוצא רשימה מרבית של גשרים לא נחצים בין הערים הצפוניות והדרומיות. יינתנו 20 נק' לאלגוריתם שרץ בזמן $\Theta(n^2)$ וניקוד מלא לאלגוריתם שרץ בזמן $\Theta(n\log n)$.

נוסחת הנסיגה (כולל נכונות) (17 נק')

הלולאות באלגוריתם וזמן ריצה (כולל אתחול) (3 נק')

תיקון לקבלת זמן משופר $\Theta(n\log n)$ (5 נק')

ב ה צ ל ח ה !

נא לא לכתוב בשוליים

אלגוריתמים 20417 – דף נוסחאות – גרפים

<u>סימונים</u>. ההגדרות הבאות מתאימות גם לגרפים לא מכוונים וגם לגרפים מכוונים. בגרף $G=(V,E)$ קבוצת הקדקודים (=צמתים) הינה V, וקבוצת הצלעות (=קשתות) הינה E. מסמנים $|V|=n, |E|=m$. כל הגרפים בקורס זה הם "פשוטים" במובן הבא: אין "לולאות עצמיות" (= אין צלע מקדקוד לעצמו) ואין "צלעות כפולות" (צלע יכולה להופיע או לא להופיע, אך לא יכולה להופיע מספר רב של פעמים).

<u>מסלולים</u>. מסלול (=מסילה) בגרף הוא סדרת קדקודים $(v_0,...,v_k)$ כך שיש בגרף צלע מ- v_{i-1} ל- v_i לכל $1\le i\le k$. אפשר לחשוב על אותו מסלול כסדרת צלעות $(e_1,...,e_k)$ שבה לכל $1\le i\le k$ הצלע e_i מחברת בגרף את v_{i-1} ל- v_i. מסלול פשוט הוא מסלול שאף קדקוד לא מופיע בו פעמיים (ומעלה). מעגל הוא מסלול שבו $v_0=v_k$. מעגל פשוט הוא מסלול שאף קדקוד לא מופיע בו פעמיים (ומעלה) למעט $v_0=v_k$. שני מסלולים נקראים זרים בקדקודים אם אין להם אף קדקוד משותף, ונקראים זרים בצלעות אם אין להם אף צלע משותפת. קדקוד t נקרא נגיש מקדקוד s אם קיים בגרף מסלול מ- s ל- t. גרף לא-מכוון נקרא קשיר (ובדומה גרף מכוון נקרא קשיר במובן החזק) אם כל זוג קדקודים נגישים האחד מהשני.

<u>משקלים</u>. בגרף ממושקל לכל צלע e מוגדר משקל $w(e)$ (=אורך $\ell(e)$, =מחיר $c(e)$). בגרף לא ממושקל אורך מסלול = מספר הצלעות במסלול. בגרף כן ממושקל אורך מסלול = סכום משקלי הצלעות במסלול. בגרף כן/לא ממושקל מסלול מזערי (=מינימלי) מ- s ל- t הינו מסלול מ- s ל- t שאורכו מזערי. עץ מרחקים מזעריים T עם שורש $s\in V$ הוא עץ פורש כך שלכל קדקוד $t\in V$, המרחק (=אורך מסלול מזערי) מ- s ל- t ב- T שווה למרחק מ- s ל- t ב- G. אבחנה מרכזית: בגרף כן/לא ממושקל: אם $s\longrightarrow u\longrightarrow v\longrightarrow t$ מסלול מזערי מ- s ל- t, אז תת-המסלול $u\longrightarrow v$ הינו מסלול מזערי מ- u ל- v (כאן $\longrightarrow$ מסמן תת-מסלול). עץ פורש מזערי (עפ"מ) בגרף ממושקל ולא-מכוון הוא עץ פורש, שסכום משקלי הצלעות שלו מזערי מבין כל העצים הפורשים.

<u>רשתות זרימה</u>. ברשת זרימה נתונים גרף מכוון $G=(V,E)$ עם קדקודי מקור $s\in V$ ויעד $s\neq t\in V$ וקיבולות אי-שליליות $c(e)\ge 0$ על הצלעות. זרימה חוקית הינה פונקציה $f:E\to\mathbb{R}$ שמכבדת את מגבלת הקיבולת: $f(e)\le c(e)$ לכל צלע e, ואת חוק שימור הזרימה: $f_{in}(v)=f_{out}(v)$ לכל קדקוד $v\neq s,t$. כאן $f_{in}(v)$ הינו סכום הזרימות בצלעות שנכנסות ל- v, ו- $f_{out}(v)$ הינו סכום הזרימות בצלעות שיוצאות מ- v. חתך $(S,T=V\setminus S)$ ברשת הינה חלוקה של קבוצת הקדקודים שבה $s\in S, t\in T$. קיבולת $c(S,T)$ של חתך הינה סכום הקיבולות של צלעות שיוצאות מ- S ונכנסות ל- T. זרימה $f(S,T)$ של חתך הינה ההפרש בין סכום הזרימות של צלעות שיוצאות מ- S ונכנסות ל- T לבין סכום הזרימות של צלעות שנכנסות ל- S ויוצאות מ- T. לכל חתך (S,T) גודלה של זרימה חוקית f הינו $val(f)=f_{out}(s)=f_{in}(t)=f(S,T)$. משפט מרכזי: גודל זרימה מרבית (max-flow) = גודל חתך מזערי (min-cut).

456 שאלון

85.20.4 M1

קלט		פלט	אלגוריתם + זמן ריצה	תכונות + הערות
גרף מכוון G קדקוד מקור $s \in V$		עץ פורש T של הקדקודים הנגישים מ- s	סריקה לרוחב BFS $\lvert E\rvert+\lvert V\rvert$	T הינו עץ מרחקים מזעריים מהמקור s
			סריקה לעומק DFS $\lvert E\rvert+\lvert V\rvert$	בגרף לא-מכוון: כל צלע של G שאינה ב- T בהכרח מחברת בין אב-קדמון לבין צאצא שלו ב- T. בגרף מכוון חסר מעגלים: מחשב מיון טופולוגי
גרף מכוון G ממושקל (עם/בלי מקור $s \in V$)	$w(e) \geq 0$	עץ T של מרחקים (ומסלולים) מזעריים מהמקור s לקדקודים הנגישים מ- s	דייקסטרה Dijkstra $\lvert E\rvert+\lvert V\rvert\lg\lvert V\rvert$	
	$w(e)$ כללי		בלמן-פורד Bellman-Ford $\lvert E\rvert\lvert V\rvert$	מדווחים על קיומם של מעגלים שמשקלם שלילי
		מרחקים (ומסלולים) מזעריים בין כל זוגות הקדקודים	פלויד-וורשאל Floyd-Warshall $\lvert V\rvert^3$	
גרף לא-מכוון G עם משקלים אי-שליליים $w(e) \geq 0$		עפ״מ של הגרף (עץ פורש מזערי)	פרים Prim $\lvert E\rvert+\lvert V\rvert\lg\lvert V\rvert$	אם e צלע שמשקלה מזערי מבין כל הצלעות שמחברות בין $S,V \setminus S$ אז יש עפ״מ שכולל את e.
			קרוסקאל Kruskal $\lvert E\rvert\lg\lvert V\rvert$	אם e צלע שמשקלה מרבי מבין כל הצלעות במעגל מסוים אז יש עפ״מ שלא כולל את e.
גרף מכוון G עם מקור $s \in V$ ויעד $t \in V$ $s \neq t$ קיבולות אי-שליליות $c(e) \geq 0$		זרימה חוקית מרבית	אדמונדס-קארפ Edmonds-Karp $\lvert E\rvert^2\lvert V\rvert$	וריאנט של פורד-פלקרסון Ford–Fulkerson
זוג ווקטורים $\vec{a}=(a_0,\ldots,a_{n-1})$ $\vec{b}=(b_0,\ldots,b_{n-1})$		הקונבולוציה הציקלית $\vec{a}\otimes\vec{b}=$ $(c_0,\ldots,c_{2n-2})$ שבה $c_k=\Sigma_{0\leq i\leq k}a_ib_{k-i}$	טרנספורם פורייה המהיר FFT $n\lg n$	מתאים לכפל פולינומים $(\sum_{0\leq i\leq n-1} a_ix^i)(\sum_{0\leq j\leq n-1} b_jx^j)$ $=(\sum_{0\leq k\leq 2n-2} c_kx^k)$ כאשר $c_k=\Sigma_{0\leq i\leq k}a_ib_{k-i}$