20425 - תאריך הבחינה: 4.2.2010 (סמסטר 2010א - מועד א/82)

שאלה 1

א. לכל $j = 2,3,...$ מתקיים:

$$\begin{aligned} P\{X+Y=j\} &= \sum_{i=1}^{j-1} P\{X=i\,,Y=j-i\} \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} P\{X=i\}P\{Y=j-i\} \qquad [\text{ בלתי-תלויים } Y \text{ ו- } X] \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} p(1-p)^{i-1}\,p(1-p)^{j-i-1} = \sum_{i=1}^{j-1} p^2(1-p)^{j-2} \\ &= (j-1)p^2(1-p)^{j-2} = P\{NB(2,p)=j\} \end{aligned}$$

ב1. המשתנה המקרי X_{10} מוגדר על-ידי המספר הסידורי של ההטלה שבה התקבלה התוצאה H בפעם העשירית. לכן, יש לו התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים 10 ו- p, ומכאן שההסתברות המבוקשת היא:

$$P\{X_{10}=30\} = \binom{29}{9} p^{10}(1-p)^{20}$$

ב2. המשתנה המקרי X_m מוגדר על-ידי המספר הסידורי של ההטלה שבה התקבלה התוצאה H בפעם ה-m-ית והמשתנה המקרי X_n, עבור $m < n$, מוגדר על-ידי המספר הסידורי של ההטלה שבה התקבלה התוצאה H בפעם ה-n–ית. לכן, לשניהם יש התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים m או n, בהתאמה, ו- p.

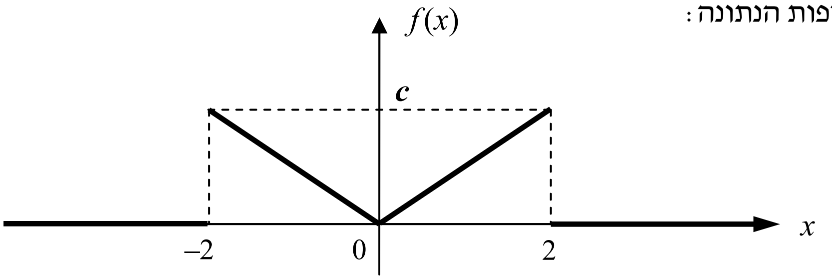
כעת, נציג את המשתנה המקרי X_n על-ידי הסכום $X_n = X_m + X_{n-m}$, כאשר המשתנה המקרי X_{n-m} מוגדר על-ידי מספר ההטלות שנערכות לאחר שהתוצאה H התקבלה בפעם ה-m-ית ועד לקבלתה בפעם ה-n-ית. באופן כזה, אנו מקבלים שהמשתנים המקריים X_m ו- X_{n-m}, שסכומם הוא X_n, בלתי-תלויים זה בזה, וכי מתקיים:

$$\mathrm{Cov}(X_m,X_n) = \mathrm{Cov}(X_m,X_m+X_{n-m}) = \mathrm{Var}(X_m) + \mathrm{Cov}(X_m,X_{n-m}) = \mathrm{Var}(X_m) = \tfrac{m(1-p)}{p^2}$$

$$\rho(X_m,X_n) = \frac{\mathrm{Cov}(X_m,X_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_m)\mathrm{Var}(X_n)}} = \frac{\frac{m(1-p)}{p^2}}{\sqrt{\frac{m(1-p)}{p^2}\cdot\frac{n(1-p)}{p^2}}} = \sqrt{\frac{m}{n}}$$

שאלה 2

א. נצייר תחילה את פונקציית הצפיפות הנתונה:



קל לראות, שהשטח הכלוא בין ציר ה-x לפונקציית הצפיפות הוא $2c$, ולכן מתקיים $c = 0.5$.

ב. מכיוון שפונקציית הצפיפות הנתונה סימטרית, מוגדרת על קטע סופי וחסומה מלעיל, נובע שהתוחלת של המשתנה המקרי X היא 0.

ג. לכל $-2 < x < 0$ מתקיים:
$$F_X(x) = P\{X \le x\} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cdot|x|\cdot\left|\tfrac{x}{4}\right| = \tfrac{1}{2} - \tfrac{x^2}{8}$$

ולכל $0 < x < 2$ מתקיים:
$$F_X(x) = P\{X \le x\} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot x\cdot\tfrac{x}{4} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{x^2}{8}$$

כלומר:
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le -2 \\ \frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} & , \quad -2 < x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} & , \quad 0 \le x < 2 \\ 1 & , \quad x \ge 2 \end{cases}$$

ד.
$$P\left\{X < 1 \,\middle|\, |X| > \tfrac{1}{2}\right\} = \frac{P\{X < 1 \cap |X| > \frac{1}{2}\}}{1 - P\{|X| \le \frac{1}{2}\}} = \frac{P\{X < -\frac{1}{2} \cup \frac{1}{2} < X < 1\}}{1 - P\{|X| \le \frac{1}{2}\}}$$
$$= \frac{P\{X < -\frac{1}{2}\} + P\{\frac{1}{2} < X < 1\}}{1 - P\{-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}\}}$$
$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{0.5^2}{8} + \left(\cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1^2}{8} - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{0.5^2}{8}\right)}{1 - \left(\cancel{\frac{1}{2}} + \frac{0.5^2}{8} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{0.5^2}{8}\right)} = \frac{0.5625}{0.9375} = 0.6$$

שאלה 3

א.
$$\frac{250\cdot 249\cdot 248\cdot 247\cdot 50}{300\cdot 299\cdot 298\cdot 297\cdot 296} = 0.08113$$

ב. מספר הממתקים הירוקים שייבחרו הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N = 300$, $m = 100$ ו- $n = 10$. לכן, השונות המבוקשת היא:
$$\frac{300-10}{300-1}\cdot 10\cdot\frac{100}{300}\cdot\frac{200}{300} = 2.1553$$

ג. נסמן ב- X_i את המחיר של הממתק ה-i-י שנבחר, לכל $i = 1,2,\ldots,10$. מתקיים:
$$P\{X_i = 1\} = \tfrac{150}{300} = \tfrac{1}{2} \quad ; \quad P\{X_i = 2\} = \tfrac{100}{300} = \tfrac{1}{3} \quad ; \quad P\{X_i = 3\} = \tfrac{50}{300} = \tfrac{1}{6}$$

לכן:
$$E[X_i] = 1\cdot\tfrac{1}{2} + 2\cdot\tfrac{1}{3} + 3\cdot\tfrac{1}{6} = 1\tfrac{2}{3} \qquad , \qquad i = 1,2,\ldots,10$$

עתה, המחיר הכולל עבור 10 הממתקים הנבחרים, שנסמנו ב- X, שווה לסכום של $X_1, \ldots, X_{10}$. לכן:
$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{10} X_i\right] = \sum_{i=1}^{10} E[X_i] = 10\cdot 1\tfrac{2}{3} = 16.67$$

ד. כדי לענות על השאלה, נחשב, למשל, את $P\{X_1 = 1, X_2 = 1\}$. מקבלים:
$$P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = \frac{150\cdot 149}{300\cdot 299} = \frac{149}{598}$$

לעומת זאת:
$$P\{X_1 = 1\}P\{X_2 = 1\} = \left(\frac{150}{300}\right)^2 = \frac{150}{600} = \frac{1}{4}$$

משני החישובים שלעיל, קל לראות שתנאי אי-התלות לא מתקיים, ולכן אפשר לקבוע שיש תלות בין מחירי 10 הממתקים הנבחרים.

שאלה 4

א. נסמן ב- A_i את המאורע שרכיב i תקין לאחר 10 חודשים מיום הפעלת המערכת, לכל $i = 1,2,3,4,5$.

מתקיים : $P(A_i) = P\{X_i \ge 10\} = 1 - \Phi(\frac{10-12}{\sqrt{5.5}}) = 1 - \Phi(-0.8528) = \Phi(0.8528) = 0.8031$

ולפי נתוני השאלה, חמשת המאורעות הללו בלתי-תלויים זה בזה.

עתה, נסמן ב-B את המאורע, שעובר זרם במערכת 10 חודשים מיום הפעלתה, ונקבל :

$$\begin{aligned} P(B) &= P((A_4 \cap A_5) \cup (A_2 \cap (A_1 \cup A_3))) \\ &= P(A_4 \cap A_5) + P(A_2 \cap (A_1 \cup A_3)) - P(A_4 \cap A_5 \cap A_2 \cap (A_1 \cup A_3)) \\ &= P(A_4)P(A_5) + P(A_2)[1 - P(A_1^C)P(A_3^C)] - P(A_4)P(A_5)P(A_2)[1 - P(A_1^C)P(A_3^C)] \quad \text{[המאורעות ב״ת]} \\ &= 0.8031^2 + 0.8031 \cdot [1 - 0.1969^2] - 0.8031^3[1 - 0.1969^2] = 0.919 \end{aligned}$$

קיבלנו שהמערכת פועלת לאחר 10 חודשים מיום הפעלתה בהסתברות 0.919.

ב.

$$\begin{aligned} P(B \mid A_1^C \cup A_2^C) &= \frac{P(B \cap (A_1^C \cup A_2^C))}{P(A_1^C \cup A_2^C)} \\ &= \frac{P(B) - P(B \cap (A_1 \cap A_2))}{1 - P(A_1 \cap A_2)} \overset{A_1 \cap A_2 \subset B}{=} \frac{P(B) - P(A_1 \cap A_2)}{1 - P(A_1 \cap A_2)} \\ &= \frac{0.919 - 0.8031^2}{1 - 0.8031^2} = \frac{0.274}{0.355} = 0.772 \end{aligned}$$

שאלה 5

א. לחישוב ההסתברות נתייחס למקומות שהחרוזים הצהובים ״תופסים״ בשורה אקראית של כל 20 החרוזים.

נקבל : $\dfrac{\binom{13}{2}}{\binom{20}{4}} = \dfrac{26}{1,615} = 0.0161$

ב. $$\frac{4 \cdot \overbrace{\binom{28}{3} \cdot 4^3 \cdot 16^{25}} \cdot 4}{20^{30}} = \binom{28}{3} \cdot 0.2^5 \cdot 0.8^{25} = 0.00396$$

ג1. ההסתברות שתהיינה 10 נקודות על חרוז מקרי היא : $e^{-10} \cdot \dfrac{10^{10}}{10!} = 0.1251$

וההסתברות שתהיינה 11 נקודות על חרוז מקרי היא : $e^{-10} \cdot \dfrac{10^{11}}{11!} = 0.1137$

לכן, ההסתברות שתהיינה על חרוז מקרי פחות מ-10 נקודות או יותר מ-11 נקודות היא 0.7612.

ומכאן, נקבל את ההסתברות המבוקשת : $\dfrac{20!}{3! \cdot 2! \cdot 15!} \cdot 0.1251^3 \cdot 0.1137^2 \cdot 0.7612^{15} = 0.0655$

ג2. מכיוון שאין תלות בין החרוזים, מספר הנקודות הכולל על 20 החרוזים הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $20 \cdot 10 = 200$, ונסמנו ב-X . כעת, נוכל לחשב את הקירוב המבוקש בעזרת משפט הגבול המרכזי.

נקבל : $P\{X \ge 190\} = P\{X \ge 189.5\} = P\left\{Z \ge \frac{189.5-200}{\sqrt{200}}\right\} = \Phi(0.7425) = 0.77115$