

תשובה 1

בחלק מהסעיפים בשאלה זו קל לטעות. אם טעיתם נסו להבין את הסיבה.

- | | |
|--------------------|----------------------------------|
| א. $x \subseteq y$ | ב. $x \in y$ |
| ג. $x \in y$ | ד. אף אחד משניהם |
| ה. $x \subseteq y$ | ו. $x \subseteq y$ |
| ז. $x \subseteq y$ | ח. $x \subseteq y$ וגם $x \in y$ |

תשובה 2

- א. **נכון.** לפי הגדרת חיסור קבוצות $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.
מכאן, שוב לפי אותה הגדרה: $(A - B) - B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin B\}$.
מתכונות הקשר הלוגי "וגם", אפשר לוותר באגף ימין על ההופעה השנייה של $x \notin B$.
קיבלנו: $(A - B) - B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\} = A - B$.
- ב. **נכון.** אפשר להוכיח על ידי שימוש בהגדרות ובלוגיקה, בדומה לסעיף הקודם.
כדי לגוון, נציג הוכחה אחרת – הוכחה אלגברית.
ניעזר בטענה שבשורה השנייה בעמ' 21 בספר: $A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
נציב $B - A$ במקום B :

$$(*) \quad A - (B - A) = A \Leftrightarrow A \cap (B - A) = \emptyset$$

מהגדרת חיתוך קבוצות יחד עם הגדרת הפרש קבוצות, מתקיים תמיד $A \cap (B - A) = \emptyset$.
לכן מהשקילות (*) נקבל $A - (B - A) = A$.

- ג. **לא נכון.** דוגמא נגדית:
נקח $x \neq \emptyset$ כלשהו, ותהי $A = \{x\}$, קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא x .
אז $P(A) = \{\emptyset, A\}$.
כעת $x \in A$, אבל $x \notin P(A)$ כי $x \neq \emptyset$ ו- $x \neq \{x\}$.
הראינו איבר של A שאינו ב- $P(A)$, לכן A אינה חלקית ל- $P(A)$.

תשובה 3

בהתאם להצעה, נסמן $B = B_1 \cap B_2$.

נפתח את אגף שמאל הנתון בשאלה, תוך הצבת B ובעזרת ההדרכה לשאלה:

$$(A_1 \cup A_2) - B = (A_1 \cup A_2) \cap B'$$

ניעזר בפילוג החיתוך מעל האיחוד (סעיף 1.3.4 בספר):

$$= (A_1 \cap B') \cup (A_2 \cap B')$$

מהגדרת B , לפי דה-מורגן: $B' = B_1' \cup B_2'$. נציב זאת:

$$= (A_1 \cap (B_1' \cup B_2')) \cup (A_2 \cap (B_1' \cup B_2'))$$

ניעזר בפילוג האיחוד מעל החיתוך (סעיף 1.3.4 בספר):

$$= ((A_1 \cap B_1') \cup (A_1 \cap B_2')) \cup ((A_2 \cap B_1') \cup (A_2 \cap B_2'))$$

שוב בעזרת ההדרכה לשאלה:

$$= ((A_1 - B_1) \cup (A_1 - B_2)) \cup ((A_2 - B_1) \cup (A_2 - B_2))$$

מהקיבוציות של האיחוד (אסוציאטיביות, עמ' 10 בספר), ניתן לסלק כאן שני זוגות סוגרים:

$$= (A_1 - B_1) \cup (A_1 - B_2) \cup (A_2 - B_1) \cup (A_2 - B_2)$$

תשובה 4

$$A_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \leq x \leq 4\} = \{4\}, \quad A_0 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \leq x \leq 2\} = \emptyset \quad \text{א.}$$

$$A_3 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \leq x \leq 8\}, \quad A_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \leq x \leq 6\}$$

$$B_0 = A_1 - A_0 = \{4\} - \emptyset = \{4\}$$

$$B_1 = A_2 - A_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 < x \leq 6\}$$

$$B_2 = A_3 - A_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 6 < x \leq 8\}$$

ב. עבור $0 < n$ כלשהו

$$B_n = A_{n+1} - A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \leq x \leq 2n+4\} - \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \leq x \leq 2n+2\}$$

$$= \{x \in \mathbf{R} \mid 2n+2 < x \leq 2n+4\}$$

נשים לב שהמעבר לשורה השניה (ולכן גם הביטוי המתקבל) אינו נכון כאשר $n = 0$.

התשובה המלאה היא אפוא:

$$B_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 2n+2 < x \leq 2n+4\} \text{ מתקיים } n > 0 \text{ ועבור } B_0 = \{4\}.$$

ג. נוכיח: $\bigcup_{2 \leq n \in \mathbf{N}} B_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 6 < x\}$.

הכלה בכיוון אחד: יהי $x \in \bigcup_{2 \leq n \in \mathbf{N}} B_n$. משמע x שייך לפחות לאחת הקבוצות B_n .

מהנוסחה שרשמנו עבור B_n ומההנחה $2 \leq n$ נובע בפרט $6 < x$.

הכלה בכיוון שני: יהי $6 < x$. יהי k המספר הטבעי הגדול ביותר שקטן ממש מ- $\frac{x-2}{2}$.

מתקיים $2k+2 < x \leq 2k+4$, וכן $2 \leq k$.

מהנוסחה שרשמנו עבור B_n , נובע $x \in B_k$.

מצאנו $2 \leq k$ כך ש- $x \in B_k$. לכן, מהגדרת איחוד כללי של קבוצות, $x \in \bigcup_{2 \leq n \in \mathbf{N}} B_n$.

משתי ההכלות יחד מתקבל השוויון המבוקש.

$$\bigcap_{i \in I} (A_i)' = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)', \quad \bigcup_{i \in I} (A_i)' = \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)'. \quad \text{ד.}$$

נמקו בעזרת כללי דה מורגן לכמתים ולא אחרת (הוכחה בלעדיהם תהיה בהכרח שגויה).

ה. ניקח את \mathbf{R} כקבוצה אוניברסלית. אז $D_n = B_n'$. מכאן ומהסעיפים הקודמים:

$$\bigcap_{2 \leq n \in \mathbf{N}} D_n = \bigcap_{2 \leq n \in \mathbf{N}} (B_n)' = \left(\bigcup_{2 \leq n \in \mathbf{N}} B_n \right)' = \mathbf{R} - \{x \in \mathbf{R} \mid 6 < x\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 6\}$$

איתי הראבן