

שאלה 1 (25 נקודות)

הגדרה: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ הוא **גרף דו-צדדי מלא** אם ורק אם קיימות שתי קבוצות לא ריקות V_1, V_2 כך ש:

$$V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

$$E = \{(u, v) \mid u \in V_1, v \in V_2\}$$

מסלול המילטוני בגרף לא מכוון הוא מסלול שבו מופיעים כל צמתי הגרף ואף צומת אינו מופיע יותר מפעם אחת.

הוכח כי בגרף דו-צדדי מלא לא מכוון יש מסלול המילטוני אם ורק אם $|n_1 - n_2| \leq 1$,

כאשר $n_1 = |V_1|$ ו- $n_2 = |V_2|$.

שאלה 2 (25 נקודות)

בגרף $G = (V, E)$ לא מכוון וקשיר עם משקלות חיוביים לקשתות נתון עץ פורש מינימלי T . תהי $e \in E$ קשת בגרף, ויהי $G' = (V, E')$ הגרף המתקבל מ- G על-ידי הורדת e (כלומר $E' = E - \{e\}$). נניח ש- G' קשיר ואנו רוצים למצוא אלגוריתם שיתקן את T כך שיתקבל ממנו T' שהוא עץ פורש מינימלי של G' .

- הצע אלגוריתם יעיל ככל שתוכל לתיקון T אם $e \notin T$. הוכח נכונות ונתח סיבוכיות הפתרון המוצע.
- הצע אלגוריתם יעיל ככל שתוכל לתיקון T אם $e \in T$. הוכח נכונות ונתח סיבוכיות הפתרון המוצע.

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר ולא מכוון. G נקרא **שרוכי** אם בכל חיפוש DFS עליו העץ המתקבל הוא מסלול פשוט המתחיל בצומת שבו החל החיפוש. G נקרא **שפיר** אם בכל חיפוש DFS על G , שבו מחושבים גם ערכי L (lowpoint) לכל צומת v מתקיים $L(v) = 1$.

- הוכח: אם $|V| \geq 2$ אז G שרוכי אם ורק אם G שפיר.
- הוכח: כל גרף שרוכי הוא לא פריק.

א. תהי f זרימה מקסימלית ברשת זרימה $G = (V, E)$ עם מקור s ובור t ופונקציית קיבול c .
תהי G_f הרשת השוורית של G המושרית על-ידי f .

תהי T הקבוצה $\{v \in V: \text{קיים מסלול מ-} s \text{ אל } t \text{ ב-} G_f\}$

ותהי $S = V - T$

הראה כי (S, T) הוא חתך וכי חתך זה מקיים $|f| = c(S, T)$

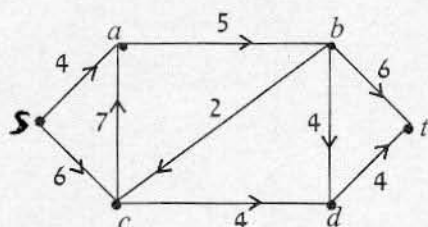
נרצה למצוא אלגוריתם המקבל כקלט רשת זרימה ומוצא קשת שהגדלת הקיבול שלה תגדיל את הזרימה ברשת.

ב. האם תמיד יש קשת כזו? הוכח.

ג. הצע אלגוריתם המוצא קשת כזו אם קיימת. הוכח את נכונותו ונתח את סיבוכיותו.

(רמז: העזר בין השאר בסעיף א').

הדגם את פעולת האלגוריתם על הרשת.



שאלה 5 (25 נקודות)

כתוב אלגוריתם יעיל ככל שתוכל אשר מקבל כקלט גרף מכוון $G = (V, E)$, כאשר $|V| = n$, מספר שלם $0 < k \leq n$ ושני צמתים $v_1, v_2 \in V$. האלגוריתם מוציא כפלט את מספר המסלולים בגרף G שעוברים גם דרך v_1 וגם דרך v_2 ושאורכם בדיוק k . הוכח את נכונות האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

סוף!