פרק 6: התפלגות משותפת של משתנים מקריים (פתרונות)

1. א. לפי תיאור הניסוי, מוציאים נעליים, בזו אחר זו, עד שמתקבל זוג. לכן, בהכרח הנעל האחרונה שנבחרת שונה מכל קודמותיה. ומכאן נובע, כי $P\{X=i\,,\,Y=j\}=0$ כל אימת ש- i וגם j **גדולים** מ-1.

נחשב את יתר ההסתברויות המשותפות:

$P\{X=1,Y=1\}=\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{15}$

$P\{X=1,Y=2\}=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{120}$

$P\{X=1,Y=3\}=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot 1=\frac{1}{120}$

$P\{X=2,Y=1\}=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{7}{40}$

$P\{X=3,Y=1\}=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{8}$

$P\{X=4,Y=1\}=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{12}$

$P\{X=5,Y=1\}=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{20}$

$P\{X=6,Y=1\}=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{40}$

$P\{X=7,Y=1\}=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{120}$

X \ Y	1	2	3	p_X
1	$\frac{56}{120}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{64}{120}$
2	$\frac{21}{120}$	0	0	$\frac{21}{120}$
3	$\frac{15}{120}$	0	0	$\frac{15}{120}$
4	$\frac{10}{120}$	0	0	$\frac{10}{120}$
5	$\frac{6}{120}$	0	0	$\frac{6}{120}$
6	$\frac{3}{120}$	0	0	$\frac{3}{120}$
7	$\frac{1}{120}$	0	0	$\frac{1}{120}$
p_Y	$\frac{112}{120}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$	

סכום ההסתברויות המשותפות שווה כמובן ל-1.

ב. $F_{X,Y}(2,2)=P\{X\le 2,Y\le 2\}$

$$=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}+P\{X=2,Y=2\}$$

$$=\frac{56}{120}+\frac{7}{120}+\frac{21}{120}+0=\frac{84}{120}=0.7$$

ג. המשתנים המקריים X ו-Y תלויים, כי הם אינם מקיימים את תנאי האי-תלות. למשל:

$$P\{X=2,Y=2\}=0 \quad\neq\quad P\{X=2\}P\{Y=2\}=\frac{21}{120}\cdot\frac{7}{120}>0$$

ד. הערכים וההסתברויות של המשתנה המקרי $X+Y$, שנסמנו ב-W, נגזרים מפונקציית ההסתברות המשותפת של X ו-Y. מקבלים:

$P\{W=2\}=P\{X+Y=2\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{56}{120}$

$P\{W=3\}=P\{X+Y=3\}=P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{28}{120}$

$P\{W=4\}=P\{X+Y=4\}=P\{X=1,Y=3\}+P\{X=3,Y=1\}=\frac{16}{120}$

$P\{W=5\}=P\{X+Y=5\}=P\{X=4,Y=1\}=\frac{10}{120}$

$P\{W=6\}=P\{X+Y=6\}=P\{X=5,Y=1\}=\frac{6}{120}$

$P\{W=7\}=P\{X+Y=7\}=P\{X=6,Y=1\}=\frac{3}{120}$

$P\{W=8\}=P\{X+Y=8\}=P\{X=7,Y=1\}=\frac{1}{120}$

סכום ההסתברויות שווה כמובן ל-1.

ה. אם **נתון** שהמאורע $\{Y=2\}$ מתרחש, לא ייתכן ש-X מקבל ערך גדול מ-1. לפיכך, המשתנה המקרי **המותנה** X בהינתן $Y=2$ מקבל אך ורק את הערך 1 (בהסתברות 1, כמובן!).

ומכאן, שפונקציית ההסתברות המותנית היא: $P\{X=1|Y=2\}=1$

מתוצאה זו אפשר להסיק ש-X ו-Y תלויים, מכיוון שההתפלגות המותנית של X במאורע $\{Y=2\}$ אינה זהה להתפלגות השולית של X. (זהו תנאי מספיק לתלות בין שני משתנים מקריים.) כלומר, הנתון שהמאורע $\{Y=2\}$ מתרחש, משנה את ההתפלגות השולית של X.

ו. נחשב תחילה את ההסתברות של המאורע $\{X=1\}$. מקבלים: $P\{X=1\}=\frac{7}{15}+\frac{7}{120}+\frac{1}{120}=\frac{8}{15}$

כעת, נמצא את פונקציית ההסתברות המותנית של המשתנה המקרי Y בהינתן $X=1$. למשתנה מקרי מותנה זה יש שלושה ערכים אפשריים, 1, 2 ו-3, המתקבלים בהסתברויות:

$$P\{Y=1|X=1\}=\frac{P\{Y=1,X=1\}}{P\{X=1\}}=\frac{7}{15}\Big/\frac{8}{15}=\frac{7}{8}=\frac{56}{64}$$

$$P\{Y=2|X=1\}=\frac{P\{Y=2,X=1\}}{P\{X=1\}}=\frac{7}{120}\Big/\frac{8}{15}=\frac{7}{64}$$

$$P\{Y=3|X=1\}=\frac{P\{Y=3,X=1\}}{P\{X=1\}}=\frac{1}{120}\Big/\frac{8}{15}=\frac{1}{64}$$

סכום כל ההסתברויות המותנות באותו מאורע מַתְנֶה שווה ל-1.

גם מתוצאה זו אפשר להסיק ש-X ו-Y תלויים, מכיוון שההתפלגות המותנית של Y אינה זהה להתפלגות השולית שלו. כלומר, הנתון שהמאורע $\{X=1\}$ מתרחש, משנה את ההתפלגות השולית של Y.

2. א. תחילה, נמצא את כל ההסתברויות המשותפות ששוות ל-0.

$P\{X=1,Y=0\}=0$: כי אם מתקבל 4 אחד, אז יש לפחות תוצאה זוגית אחת, ולכן לא ייתכן ש- $Y=0$.

$P\{X=2,Y=0\}=P\{X=2,Y=1\}=0$: כי אם מתקבלים שני 4-ים, אז בהכרח $Y=2$.

כעת, נפנה לחישוב ההסתברויות המשותפות החיוביות:

[מתקבלות שתי תוצאות אי-זוגיות] $P\{X=0,Y=0\}=\frac{3\cdot3}{6\cdot6}=\frac{9}{36}$

[מתקבלות תוצאה זוגית, שאינה 4, ותוצאה אי-זוגית] $P\{X=0,Y=1\}=\frac{2\cdot(2\cdot3)}{6\cdot6}=\frac{12}{36}$

[מתקבלות שתי תוצאות זוגיות, שאינן 4] $P\{X=0,Y=2\}=\frac{2\cdot2}{6\cdot6}=\frac{4}{36}$

[מתקבלות התוצאה 4 ותוצאה אי-זוגית] $P\{X=1,Y=1\}=\frac{2\cdot(1\cdot3)}{6\cdot6}=\frac{6}{36}$

[מתקבלות התוצאה 4 ותוצאה זוגית נוספת, שאינה 4] $P\{X=1,Y=2\}=\frac{2\cdot(1\cdot2)}{6\cdot6}=\frac{4}{36}$

[מתקבלות שתי תוצאות 4] $P\{X=2,Y=2\}=\frac{1\cdot1}{6\cdot6}=\frac{1}{36}$

נערוך את התוצאות שקיבלנו בטבלה:

X \ Y	**0**	**1**	**2**	p_X
0	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	0	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$
2	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
p_Y	$\frac{9}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{9}{36}$	

3. נסמן ב- X_1 את מספר הגברים המגיעים למסיבה ; $X_1 \sim B(10,0.8)$,
 וב- X_2 את מספר הנשים המגיעות למסיבה ; $X_2 \sim B(10,0.9)$.

המשתנים המקריים X_1 ו- X_2 בלתי-תלויים זה בזה, מכיוון שאין תלות בין האנשים המוזמנים למסיבה. לפיכך, מקבלים :

$$P\{X_1+X_2=18\}=\sum_{i=8}^{10}P\{X_1=i\,,\,X_2=18-i\}=\sum_{i=8}^{10}P\{X_1=i\}P\{X_2=18-i\}$$
$$=\sum_{i=8}^{10}\binom{10}{i}0.8^i\,0.2^{10-i}\cdot\binom{10}{18-i}0.9^{18-i}\,0.1^{i-8}\cong 0.1053+0.1040+0.0208=0.2301$$

4. ההתפלגות של המשתנה המקרי W היא בינומית עם הפרמטרים $n+m$ ו- p (ראה דוגמה 3ב במדריך).
נראה שהמשתנים המקריים X ו-W תלויים בעזרת תנאי האי-תלות :

מצד אחד : $P\{X=n,W=0\}=P\{X=n,\,X+Y=0\}=0$

ומצד שני : $P\{X=n\}P\{W=0\}=p^n(1-p)^{n+m}>0$

5. א. בבעיה זו, נמצא את ההסתברויות המשותפות באמצעות התניה על הכלוב שנבחר. נתחיל מההסתברויות המשותפות שבהן $N=1$. נשים לב, שכאשר אנו מתנים במאורע $\{N=1\}$, פירוש הדבר שבוחרים בכלוב 1, המכיל רק תרנגול אחד ותרנגולת אחת. כלומר, אם כלוב זה נבחר מוציאים ממנו בהכרח את שניהם. ומכאן :

$P\{N=1,Z=0\}=P\{Z=0\,|\,N=1\}P\{N=1\}=0$ [לא ייתכן לבחור בכלוב 1 ולא להוציא ממנו אף תרנגול]

$P\{N=1,Z=1\}=P\{Z=1\,|\,N=1\}P\{N=1\}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ [בוחרים בכלוב 1 ומוציאים ממנו בהכרח תרנגול ותרנגולת]

$P\{N=1,Z=2\}=P\{Z=2\,|\,N=1\}P\{N=1\}=0$ [לא ייתכן לבחור בכלוב 1 ולהוציא ממנו 2 תרנגולים]

כעת, אם בוחרים בכלוב 2, מספר התרנגולים הזכרים שמוצאים ממנו, יכול להיות 0, 1 או 2.

לכן :

$$P\{N=2,Z=0\}=P\{Z=0\,|\,N=2\}P\{N=2\}=\frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

$$P\{N=2,Z=1\}=P\{Z=1\,|\,N=2\}P\{N=2\}=\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$P\{N=2,Z=2\}=P\{Z=2\,|\,N=2\}P\{N=2\}=\frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

ב. המשתנים המקריים N ו-Z תלויים, כי הם אינם מקיימים את תנאי האי-תלות. למשל :

$$P\{N=1,Z=0\}=0\quad\neq\quad P\{N=1\}P\{Z=0\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{24}$$

6. לכל $j=0,1,...$ מתקיים :

$$P\{Y=j\}=P\{X_1+X_2=j\}=\sum_{i=0}^{j}P\{X_1=i\,,\,X_2=j-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{j}P\{X_1=i\}P\{X_2=j-i\}$$ [ה-X_i-ים בלתי-תלויים]

$$=\sum_{i=0}^{j}p(1-p)^i\,p(1-p)^{j-i}=\sum_{i=0}^{j}p^2(1-p)^j=(j+1)p^2(1-p)^j$$

הערה: בדרך דומה אפשר להראות שסכום של שני משתנים גיאומטריים בלתי-תלויים עם הפרמטר p הוא משתנה מקרי בינומי שלילי עם הפרמטרים 2 ו-p. את הכללת הטענה ל- r משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, אפשר להוכיח באינדוקציה.

דרך נוספת

דרך זו נסמכת על הטענה, שלסכום של שני משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, עם אותו הפרמטר p, יש התפלגות בינומית-שלילית עם הפרמטרים $r = 2$ ו- p.

נסמן ב- G_1 וב- G_2 שני משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפרמטר p.

מנתוני הבעיה, נובע כי לכל $i = 1,2$, מתקיים השוויון $X_i = G_i - 1$, וזאת מכיוון שמתקיים שוויון-ההסתברויות $P\{X_i = k\} = P\{G_i - 1 = k\} = P\{G_i = k + 1\}$, לכל $k = 0,1,\ldots$. לפיכך, מתקיים גם השוויון $Y = X_1 + X_2 = G_1 + G_2 - 2$. עתה, לפי הטענה המובאת לעיל, לסכום המשתנים המקריים $G_1 + G_2$ יש התפלגות בינומית-שלילית עם הפרמטרים 2 ו-p, ומכאן שלכל $j = 0,1,\ldots$, מתקיים:

$$\begin{aligned}P\{Y = j\} &= P\{X_1 + X_2 = j\} = P\{G_1 + G_2 - 2 = j\} \\ &= P\{G_1 + G_2 = j + 2\} = P\{NB(2,p) = j + 2\} = \binom{j+1}{2-1} p^2 (1-p)^j = (j+1)p^2(1-p)^j\end{aligned}$$

7. א. אפשר להראות, שההתפלגות השולית של X_i, לכל $i = 1,2,\ldots,n$, היא בינומית עם הפרמטרים n ו- p_i.

תוצאה זו אינה מפתיעה כלל ועיקר, מכיוון שהמשתנה המקרי X_i מוגדר על-ידי מספר הניסויים שמסתיימים בתוצאה i, והרי כל אחד מ-n הניסויים הבלתי-תלויים מסתיים בתוצאה i בהסתברות p_i ואינו מסתיים בה בהסתברות $1 - p_i$, וזוהי בדיוק ההגדרה של ניסוי מקרי בינומי.

למרות שלא התבקשתם בתרגיל להוכיח את הרשום לעיל, נראה בכל זאת הוכחה לטענה זו.

פונקציית ההסתברות המשותפת של המשתנים המקריים $X_1, X_2, \ldots, X_r$ היא:

$$P\{\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{n}\} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot\ldots\cdot n_r!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r} \qquad , \qquad \text{כאשר } \sum_{i=1}^{r} n_i = n$$

נוכיח בלי הגבלת הכלליות, שההתפלגות השולית של המשתנה המקרי X_1 היא בינומית עם הפרמטרים n ו- p_1. לכל $j = 0,1,\ldots,n$, מתקיים:

$$\begin{aligned}P\{X_1 = j\} &= \sum_{\substack{n_2,\ldots,n_r: \\ n_2+\ldots+n_r = n-j}} P\{X_1 = j, X_2 = n_2, \ \ldots \ , X_r = n_r\} \\ &= \sum_{\substack{n_2,\ldots,n_r: \\ n_2+\ldots+n_r = n-j}} \frac{n!}{j! n_2! \cdot\ldots\cdot n_r!} \cdot p_1^j \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r} \\ &= \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot p_1^j \sum_{\substack{n_2,\ldots,n_r: \\ n_2+\ldots+n_r = n-j}} \frac{(n-j)!}{n_2! \cdot\ldots\cdot n_r!} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r} \\ &= \binom{n}{j} p_1^j (p_2 + \ldots + p_r)^{n-j} = \binom{n}{j} p_1^j (1-p_1)^{n-j} \qquad \text{[נוסחת המולטינום]}\end{aligned}$$

קיבלנו, אם כן, שההתפלגות השולית של X_1, היא בינומית עם הפרמטרים n ו- p_1.

ב. נשים לב, שהמשתנה המקרי $X_i + X_j$, לכל $i \neq j$, הוא למעשה מספר הניסויים שמסתיימים בתוצאות i או j. היות ש- n הניסויים בלתי-תלויים וההסתברות שניסוי יסתיים באחת משתי תוצאות אלו היא $p_i + p_j$, נובע שהתפלגות סכום זה היא בינומית עם הפרמטרים n ו- $p_i + p_j$.

גם במקרה זה אפשר להוכיח את הטענה שלעיל בעזרת פונקציית ההסתברות המשותפת המולטינומית, תוך שימוש בנוסחת המולטינום ובנוסחת הבינום.

ג. ברור שהמשתנים המקריים X_i ו- X_j תלויים. נוכיח זאת באמצעות תנאי האי-תלות :

מצד אחד : $P\{X_i = n, X_j = n\} = 0$

ומצד שני : $P\{X_i = n\}P\{X_j = n\} = p_i^n p_j^n > 0$

הוכחה נוספת לתלות בין שני משתנים מקריים אלו מובאת בספר בפרק 7, דוגמה 3ז בעמוד 370.

ד. נמצא את פונקציית ההסתברות המותנית של X_1 בהינתן $X_2 = j$, לכל $j = 1,2,...,n$.

לכל $i = 0,1,...,n-j$ מתקיים :

$$P\{X_1 = i \mid X_2 = j\} = \frac{P\{X_1 = i, X_2 = j\}}{P\{X_2 = j\}} = \frac{P\{X_1 = i, X_2 = j, X_3 + ... + X_r = n-i-j\}}{P\{X_2 = j, X_1 + X_3 + ... + X_r = n-j\}}$$

$$= \frac{\frac{n!}{i!\cdot j!\cdot (n-i-j)!}\cdot p_1^i \cdot p_2^j \cdot (1-p_1-p_2)^{n-i-j}}{\frac{n!}{j!\cdot (n-j)!}\cdot p_2^j \cdot (1-p_2)^{n-j}}$$

$$= \binom{n-j}{i}\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)^i \left(\frac{1-p_1-p_2}{1-p_2}\right)^{n-j-i}$$

ולכן, מצורת פונקציית ההסתברות המותנית, אנו מקבלים, שההתפלגות המותנית של X_1 בהינתן $X_2 = j$ היא התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n-j$ ו- $\frac{p_1}{1-p_2}$.

ה. נגדיר שלושה משתנים מקריים : X_1 = מספר השנים שבהן הגשם הראשון הוא ב-1.1 ;

X_2 = מספר השנים שבהן הגשם הראשון הוא בין ה-2.1 ל-5.1 ;

X_3 = מספר השנים שבהן הגשם הראשון הוא אחרי ה-5.1 .

בהנחה שהשנים בלתי-תלויות זו בזו, למשתנים המקריים X_1, X_2 ו- X_3 יש התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים $n = 20$ וְ –

$$p_1 = P\{Y = 0\} = 2^{-(0+1)} = \tfrac{1}{2}$$

$$p_2 = P\{1 \le Y \le 4\} = 2^{-(1+1)} + 2^{-(2+1)} + 2^{-(3+1)} + 2^{-(4+1)} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} = \tfrac{15}{32}$$

$$p_3 = P\{Y \ge 5\} = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{15}{32} = \tfrac{1}{32}$$

לפיכך : $P\{X_1 = 5, X_2 = 13, X_3 = 2\} = \frac{20!}{5!13!2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{15}{32}\right)^{13}\left(\frac{1}{32}\right)^2 = 0.002621$

8. נסמן ב- X_1 את מספר הפונים לאשנב 1 במשך דקה ; $X_1 \sim Po(2)$,
ב- X_2 את מספר הפונים לאשנב 2 במשך דקה ; $X_2 \sim Po(3)$,
וב- X_3 את מספר הפונים לאשנב 3 במשך דקה ; $X_3 \sim Po(4)$.

א. המשתנים המקריים X_1 , X_2 ו- X_3 בלתי-תלויים זה בזה, ומכאן שהתפלגות הסכום $X_1+X_2+X_3$ היא פואסונית עם הפרמטר $2+3+4=9$ (ראה במדריך דוגמה 3א בעמוד 141). ולכן :

$$P\{X_1+X_2+X_3=9\}=\tfrac{9^9}{9!}\cdot e^{-9}=0.1318$$

ב.
$$P\left\{X_1=3, X_2+X_3=6 \middle| \sum_{i=1}^{3} X_i=9\right\}=\frac{P\{X_1=3, X_2+X_3=6\}}{P\left\{\sum_{i=1}^{3} X_i=9\right\}}$$

$$=\frac{P\{X_1=3\}P\{X_2+X_3=6\}}{P\left\{\sum_{i=1}^{3} X_i=9\right\}}$$ [ה- X_i-ים בלתי-תלויים]

$$=\frac{\left(e^{-2}\cdot\frac{2^3}{3!}\right)\left(e^{-7}\cdot\frac{7^6}{6!}\right)}{\left(e^{-9}\cdot\frac{9^9}{9!}\right)}=\binom{9}{3}\left(\frac{2}{9}\right)^3\left(\frac{7}{9}\right)^6=0.2041$$

נשים לב, שההתפלגות המותנית של כל אחד מה- X_i-ים (X_1 , X_2 או X_3) בסכומם, דהיינו ב- $\sum_{i=1}^{3} X_i=n$, היא התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- $p_i=\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$. (ראה דוגמה 4ב במדריך, עמוד 145.)

ג.
$$P\left\{\sum_{i=1}^{3} X_i=9 \middle| X_1=3\right\}=\frac{P\{X_1=3, X_2+X_3=6\}}{P\{X_1=3\}}$$

$$=\frac{\cancel{P\{X_1=3\}}P\{X_2+X_3=6\}}{\cancel{P\{X_1=3\}}}$$ [ה- X_i-ים בלתי-תלויים]

$$=P\{X_2+X_3=6\}=\tfrac{7^6}{6!}\cdot e^{-7}=0.149$$

ד.
$$P\left\{X_1=3, X_2=3, X_3=3 \middle| \sum_{i=1}^{3} X_i=9\right\}=\frac{P\{X_1=3, X_2=3, X_3=3\}}{P\left\{\sum_{i=1}^{3} X_i=9\right\}}$$

$$=\frac{P\{X_1=3\}P\{X_2=3\}P\{X_3=3\}}{P\left\{\sum_{i=1}^{3} X_i=9\right\}}$$ [ה- X_i-ים בלתי-תלויים]

$$=\frac{\left(e^{-2}\cdot\frac{2^3}{3!}\right)\left(e^{-3}\cdot\frac{3^3}{3!}\right)\left(e^{-4}\cdot\frac{4^3}{3!}\right)}{\left(e^{-9}\cdot\frac{9^9}{9!}\right)}=\frac{9!}{(3!)^3}\left(\frac{2}{9}\right)^3\left(\frac{3}{9}\right)^3\left(\frac{4}{9}\right)^3=0.05995$$

מהתוצאה שקיבלנו, אפשר לראות, שההתפלגות המשותפת המותנית של X_1 , X_2 ו- X_3 בהינתן הסכום $\sum_{i=1}^{3} X_i=n$, היא התפלגות מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $(p_1,p_2,p_3)=\left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i},\frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i},\frac{\lambda_3}{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i}\right)$.
(תוצאה זו היא הכללה של דוגמה 4ב במדריך, עמוד 145.)

ה. נניח ששלושת ההנחות של תהליך פואסון מתקיימות, ונקבל שמספר האנשים הפונים לאשנב 1 במרווח זמן שאורכו 5 דקות הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $5\cdot 2=10$. נסמן ב-Y את מספר האנשים שקונים בולים באשנב 1 במשך 5 דקות; ההתפלגות של המשתנה המקרי Y היא פואסונית עם הפרמטר $10\cdot 0.6=6$ (ראה דוגמה 2ב, עמוד 138 במדריך הלמידה).

לכן, מקבלים: $P\{Y=5\}=\frac{6^5}{5!}\cdot e^{-6}=0.1606$

9. א. ראשית, נגדיר את תחום הערכים האפשריים של המשתנה המקרי הנתון. מכיוון שידוע כי $X_{100}=n$, סכום מאה המשתנים המקריים הנתונים יכול לקבל ערכים שלמים החל מ-n והלאה.

לפיכך, לכל $j=n,n+1,\ldots$ מתקיים:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i=j\,\middle|\,X_{100}=n\right\}=\frac{P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i=j\,,\,X_{100}=n\right\}}{P\{X_{100}=n\}}=\frac{P\left\{\sum_{i=1}^{99}X_i=j-n\,,\,X_{100}=n\right\}}{P\{X_{100}=n\}}$$

$$=\frac{P\left\{\sum_{i=1}^{99}X_i=j-n\right\}\cancel{P\{X_{100}=n\}}}{\cancel{P\{X_{100}=n\}}}\qquad\text{[כל המשתנים בלתי-תלויים]}$$

$$=e^{-99}\cdot\frac{99^{j-n}}{(j-n)!}\qquad\text{[לסכום יש התפלגות פואסונית עם } \lambda=99\text{ ; ראה הערה]}$$

הערה: המשתנה המקרי $\sum_{i=1}^{99}X_i$ הוא סכום של 99 משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים, ולכן התפלגותו גם היא פואסונית עם הפרמטר, שהוא סכום הפרמטרים של המשתנים שמרכיבים את הסכום, דהיינו, $\lambda=\sum_{i=1}^{99}\frac{i}{50}=\frac{99\cdot 100}{2\cdot 50}=99$. ראה דוגמה 3א במדריך בעמוד 141; אפשר להכליל באינדוקציה את הטענה המובאת בדוגמה.

ב. נשתמש בתוצאה של דוגמה 4ב (עמוד 145 במדריך), כדי למצוא את ההתפלגות המבוקשת. עלינו למצוא את ההתפלגות של המשתנה המקרי X_{100} בתנאי $\sum_{i=1}^{100}X_i=n$ או לחלופין את ההתפלגות של המשתנה המקרי X_{100} בתנאי $X_{100}+\sum_{i=1}^{99}X_i=n$. נשים לב, שהמשתנים המקריים X_{100} ו-$\sum_{i=1}^{99}X_i$ בלתי-תלויים זה בזה וכי לשניהם יש התפלגות פואסונית עם הפרמטרים $\frac{100}{50}=2$ ו-99, בהתאמה (ראה סעיף א).

לפיכך, התנאים הדרושים בדוגמה 4ב מתקיימים, ומכאן שההתפלגות של המשתנה המקרי X_{100} בתנאי $\sum_{i=1}^{100}X_i=n$ היא בינומית עם הפרמטרים n ו-$\frac{2}{2+99}=\frac{2}{101}$.

הערה: אפשר להראות את התוצאה שקיבלנו גם בדרך ישירה, באופן הבא. לכל $j=0,1,\ldots,n$ מתקיים:

$$P\left\{X_{100}=j\,\middle|\,\sum_{i=1}^{100}X_i=n\right\}=\frac{P\left\{X_{100}=j\,,\,\sum_{i=1}^{99}X_i=n-j\right\}}{P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i=n\right\}}=\frac{\frac{2^j}{j!}e^{-2}\cdot\frac{99^{n-j}}{(n-j)!}e^{-99}}{\frac{101^n}{n!}e^{-101}}=\binom{n}{j}\left(\frac{2}{101}\right)^j\left(\frac{99}{101}\right)^{n-j}$$

10. המשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X+Y=n$ יכול לקבל ערכים בין 0 ל- $\min\{n,n_X\}$. ייתכן שחלק מהערכים האלו מתקבלים בהסתברות 0, בהתאם לערכים המספריים של n , n_X , ו- n_Y .

לפיכך, לכל $i=0,1,\ldots,\min\{n,n_X\}$ מתקיים:

$$P\{X=i\mid X+Y=n\}=\frac{P\{X=i,X+Y=n\}}{P\{X+Y=n\}}=\frac{P\{X=i,Y=n-i\}}{P\{X+Y=n\}}$$

$$=\frac{P\{X=i\}P\{Y=n-i\}}{P\{X+Y=n\}}$$ [שני המשתנים בלתי-תלויים]

$$=\frac{\binom{n_X}{i}\cancel{p^i(1-p)^{n_X-i}}\binom{n_Y}{n-i}\cancel{p^{n-i}(1-p)^{n_Y-n+i}}}{\binom{n_X+n_Y}{n}\cancel{p^n(1-p)^{n_X+n_Y-n}}}=\frac{\binom{n_X}{i}\binom{n_Y}{n-i}}{\binom{n_X+n_Y}{n}}$$

ומכאן שההתפלגות של X בהינתן $X+Y=n$ היא היפרגיאומטרית עם $N=n_X+n_Y$, $m=n_X$ ו- $n=n$.

המקסימום של ה- X_i-ים קטן מערך נתון j,
רק אם כל ה- X_i-ים קטנים מערך זה.
(כי מספיק שאחד מה- X_i-ים יהיה גדול מ- j,
כדי שהמקסימום יהיה גדול מ- j.)

11. א. לכל $j=1,2,\ldots$ מתקיים:

$$P\left\{\max_{i=1,\ldots,n}X_i\le j\right\}\overset{\uparrow}{=}P\{X_1\le j,\ \ldots\ ,X_n\le j\}$$

$$=P\{X_1\le j\}\cdot\ \ldots\ \cdot P\{X_n\le j\}$$ [ה- X_i-ים בלתי-תלויים]

$$=[1-P\{X_1>j\}]\cdot\ \ldots\ \cdot[1-P\{X_n>j\}]$$

$$=\left[1-(1-p)^j\right]^n$$ [ה- X_i-ים שווי-התפלגות]

מכאן נוכל לקבל את פונקציית ההסתברות של $\max\limits_{i=1,\ldots,n}X_i$ באופן הבא –

לכל $j=1,2,\ldots$ מתקיים:

$$P\left\{\max_{i=1,\ldots,n}X_i=j\right\}=P\left\{\max_{i=1,\ldots,n}X_i\le j\right\}-P\left\{\max_{i=1,\ldots,n}X_i\le j-1\right\}$$

$$=\left[1-(1-p)^j\right]^n-\left[1-(1-p)^{j-1}\right]^n$$

דרך חישוב זו אפשרית, מכיוון שהערכים האפשריים של המקסימום הם המספרים השלמים החל מ-1.

ב. לכל $j=1,2,\ldots$ מתקיים:

$$P\left\{\min_{i=1,\ldots,n}X_i\ge j\right\}=P\{X_1\ge j,\ \ldots\ ,X_n\ge j\}$$

$$=P\{X_1\ge j\}\cdot\ \ldots\ \cdot P\{X_n\ge j\}=\left[(1-p)^{j-1}\right]^n=(1-p)^{n(j-1)}$$

ומכאן מקבלים את פונקציית ההסתברות של $\min\limits_{i=1,\ldots,n}X_i$. לכל $j=1,2,\ldots$ מתקיים:

$$P\left\{\min_{i=1,\ldots,n}X_i=j\right\}=P\left\{\min_{i=1,\ldots,n}X_i\ge j\right\}-P\left\{\min_{i=1,\ldots,n}X_i\ge j+1\right\}=(1-p)^{n(j-1)}-(1-p)^{nj}$$

$$=[(1-p)^n]^{j-1}[1-(1-p)^n]$$

כלומר, ההתפלגות של המשתנה המקרי $\min\limits_{i=1,\ldots,n}X_i$ היא גיאומטרית עם הפרמטר $1-(1-p)^n$.

12. א. ההתפלגות של המשתנה המקרי X בהינתן $Y=j$ היא בינומית עם הפרמטרים j ו-p. לכן, הערכים האפשריים של משתנה מקרי זה הם $0,\ 1,\ \ldots,\ j$. כלומר, קבוצת הערכים של i ו-j, שבהם פונקציית ההסתברות המשותפת מקבלת ערכים חיוביים היא: $\{(i,j):\ i=0,1,\ldots,j\ ;\ j=0,1,\ldots\}$

או לחלופין: $\{(i,j):\ i=0,1,\ldots\ ;\ j=i,\ i+1,\ i+2,\ldots\}$

ב. לכל $j=0,1,\ldots$ ולכל $i=0,1,\ldots,j$, מתקיים:

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\,|\,Y=j\}P\{Y=j\}=\binom{j}{i}p^i(1-p)^{j-i}\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}$$
$$=\frac{1}{i!(j-i)!}\cdot(\lambda p)^i[\lambda(1-p)]^{j-i}e^{-\lambda}$$

ג. נמצא את פונקציית ההסתברות השולית של X מתוך פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו-Y.

לכל $i=0,1,\ldots$, מתקיים:

$$P\{X=i\}=\sum_{j=i}^{\infty}P\{X=i,Y=j\}=\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{i!(j-i)!}\cdot(\lambda p)^i[\lambda(1-p)]^{j-i}e^{-\lambda}$$
$$=\frac{1}{i!}\cdot(\lambda p)^i e^{-\lambda}\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{(j-i)!}\cdot[\lambda(1-p)]^{j-i}=\frac{1}{i!}\cdot(\lambda p)^i e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}=\frac{1}{i!}\cdot(\lambda p)^i e^{-\lambda p}$$

קיבלנו פונקציית הסתברות של התפלגות פואסונית עם הפרמטר λp, ולכן זוהי ההתפלגות של המשתנה המקרי X.

ד. נמצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו-$Y-X$. מכיוון שבבעיה זו מתקיים אי-השוויון $X\le Y$, נובע מסעיף ב, שלכל $i=0,1,\ldots$ ולכל $k=0,1,\ldots$ מתקיים:

$$P\{X=i,Y-X=k\}=P\{X=i,Y=i+k\}=\underbrace{\frac{(\lambda p)^i}{i!}\cdot e^{-\lambda p}}_{=h(i)}\cdot\underbrace{\frac{[\lambda(1-p)]^k}{k!}\cdot e^{-\lambda(1-p)}}_{=g(k)}$$

קיבלנו אם כן, שמתקיים $P\{X=i,Y-X=k\}=h(i)g(k)$, לכל $i,k=0,1,\ldots$. לכן, לפי הטענה, המובאת במדריך הלמידה בעמוד 140, נקבל כי X ו- $Y-X$ בלתי-תלויים זה בזה. יתרה מזאת, קל לראות, מפונקציית ההסתברות המשותפת של שני המשתנים המקריים הללו, שלמשתנה המקרי $Y-X$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda(1-p)$.

13. א. למשתנה המקרי X יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 10 ו- ⅓.

כעת, אם ידוע שהמאורע $\{X=i\}$ מתרחש, אז לשלב השני עוברים i כדורים, ולכן למשתנה המקרי Y בהינתן $X=i$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים i ו- ¼.

ב. לכל $i=0,1,\ldots,10$ ולכל $j=0,\ldots,i$ מתקיים:

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\,|\,X=i\}=\binom{10}{i}\left(\tfrac{1}{3}\right)^i\left(\tfrac{2}{3}\right)^{10-i}\cdot\binom{i}{j}\left(\tfrac{1}{4}\right)^j\left(\tfrac{3}{4}\right)^{i-j}$$
$$=\frac{10!}{(10-i)!\,j!\,(i-j)!}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^{10-i}\left(\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{3}\right)^j\left(\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{3}\right)^{i-j}=\binom{10}{10-i,\ j,\ i-j}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^{10-i}\left(\tfrac{1}{12}\right)^j\left(\tfrac{1}{4}\right)^{i-j}$$

קיבלנו פונקציית הסתברות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים $n=10$, $p_1=\frac{2}{3}$, $p_2=\frac{1}{12}$ ו- $p_3=\frac{1}{4}$,

(ראה במדריך דוגמה 1ג בעמוד 136).

קל להבין את התוצאה שהתקבלה, כאשר מגדירים את המשתנים המקריים הבאים :

X_1 = מספר הכדורים שלא נפלו לתוך תא 1 בשלב הראשון ;

X_2 = מספר הכדורים שנפלו לתוך תא 1 בשלב הראשון ולתוך תא 2 בשלב השני ;

X_3 = מספר הכדורים שנפלו לתוך תא 1 בשלב הראשון ולא נפלו לתוך תא 2 בשלב השני.

ג. מהתוצאה שקיבלנו בסעיף הקודם, נובע שלמשתנה המקרי Y יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 10 ו- $\frac{1}{12}$. נוכיח את הטענה האחרונה.

לכל $j = 0,1,...,10$ מתקיים :

$$P\{Y=j\} = \sum_{i=j}^{10} P\{X=i, Y=j\} = \sum_{i=j}^{10} \binom{10}{10-i, j, i-j} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{10-i} \left(\tfrac{1}{12}\right)^{j} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{i-j}$$

$$= \frac{10!}{j!(10-j)!} \cdot \left(\tfrac{1}{12}\right)^{j} \sum_{i=j}^{10} \frac{(10-j)!}{(10-i)!(i-j)!} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{10-i} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{i-j} = \binom{10}{j} \left(\tfrac{1}{12}\right)^{j} \sum_{i=0}^{10-j} \frac{(10-j)!}{(10-j-i)!\,i!} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{10-j-i} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{i}$$

$$= \binom{10}{j} \left(\tfrac{1}{12}\right)^{j} \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4}\right)^{10-j} = \binom{10}{j} \left(\tfrac{1}{12}\right)^{j} \left(\tfrac{11}{12}\right)^{10-j}$$ [לפי נוסחת הבינום]

הערה: באופן כללי, אם ההתפלגות המשותפת של r משתנים מקריים, X_1, X_2, ..., X_r, היא מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $\underline{p}$, אפשר להראות, שלכל i, ההתפלגות השולית של המשתנה המקרי X_i היא בינומית עם הפרמטרים n ו- p_i.