ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20585

מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חוברת הקורס - סתיו 2020א

כתב: אלעזר בירנבוים

נובמבר 2019 - סמסטר סתיו - תש"פ

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

אני מקדם את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים.
בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.
פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:

http://telem.openu.ac.il

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

שעות הייעוץ בקורס מתקיימות בימי ראשון בשעות 00 :18-00 :20 בטלפון 04-6850321.
אבקש מאוד לא להתקשר לטלפון הזה בשעות לא סבירות ובשבתות.
ניתן לפנות גם בדואר אלקטרוני: elazar@openu.ac.il

אני מאחל לכם הצלחה בלימודים.

לתשומת לב הסטודנטים הלומדים בחו"ל:
למרות הריחוק הפיסי הגדול, נשתדל לשמור אתכם על קשרים הדוקים ולעמוד לרשותכם ככל האפשר. הפרטים החיוניים על הקורס נכללים בחוברת הקורס וכן באתר הקורס. מומלץ מאוד להשתמש באתר הקורס ובכל אמצעי העזר שבו, וכמובן, לפנות אלינו במידת הצורך.

בברכה,

אלעזר בירנבוים

מרכז ההוראה

1. **לוח זמנים ופעילויות** (20585 / 2020א)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ״ן (למנחה)
1	8.11.2019-3.11.2019	פרק 1		
2	15.11.2019-10.11.2019	פרק 1 פרק 2	מפגש ראשון	ממ״ן 11 15.11.2019
3	22.11.2019-17.11.2019	פרק 2		
4	29.11.2019-24.11.2019	פרק 3	מפגש שני	
5	6.12.2019-1.12.2019	פרק 3		ממ״ן 12 6.12.2019
6	13.12.2019-8.12.2019	פרק 4	מפגש שלישי	
7	20.12.2019-15.12.2019	פרק 4		
8	27.12.2019-22.12.2019 (ב-ו חנוכה)	פרק 4	מפגש רביעי	

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

לוח זמנים ופעילויות – המשך

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
9	3.1.2020-29.12.2019 (א-ב חנוכה)	פרק 4		ממ"ן 13 3.1.2020
10	10.1.2020-5.1.2020	פרק 5	מפגש חמישי	
11	17.1.2020-12.1.2020	פרק 5 פרק 6		ממ"ן 14 17.1.2020
12	24.1.2020-19.1.2020	פרק 6	מפגש שישי	
13	31.1.2020-26.1.2020	פרק 7		
14	7.2.2020-2.2.2020	פרק 7	מפגש שביעי	ממ"ן 15 7.2.2020

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

2. תיאור המטלות

קראו היטב עמודים אלו לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס - הבנה מעמיקה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. המטלות תיבדקנה על-ידי המנחה ותוחזרנה בצירוף הערות המתייחסות לתשובות.

המטלות מלוות את יחידות הלימוד בקורס. להלן פירוט המטלות, היחידות שאליהן מתייחסת כל מטלה ומשקלה היחסי. בחלק מהמטלות תופענה גם שאלות המתייחסות ליחידות שכבר נלמדו.

ממ"ן 11 - פרק 1 - 6 נקודות
ממ"ן 12 - פרקים 2, 3 - 6 נקודות
ממ"ן 13 - פרק 4 - 8 נקודות
ממ"ן 14 - פרק 5 - 4 נקודות
ממ"ן 15 - פרקים 6, 7 - 6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל של 24 נקודות לפחות.
שימו לב שחובה להגיש את ממ"ן 13.

ללא צבירת 24 נקודות בהגשת מטלות לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

למען הסר ספק, יודגש שחל איסור על הכנה משותפת והעתקה של מטלות או חלקי מטלות.
(הנושא מפורט בתקנון משמעת לסטודנטים - נספח 1 של ידיעון האו"פ).

לתשומת לבכם!
כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן: אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלה** בציון הנמוך ביותר, שציונה נמוך מציון הבחינה, לא תילקח בחשבון בעת שקלול הציון הסופי. זאת בתנאי שמטלה זו **אינה חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס.
סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון שמספרו 09-7782222, או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא http://www.openu.ac.il/sheilta קורסים ⇦ ציוני מטלות ובחינות ⇦ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.
יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות

שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של ציוני המטלות והבחינה יהיה נמוך מ-60).

<u>כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.</u>

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל כולל של 24 נקודות לפחות.

ב. ציון של לפחות 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2020א **מועד אחרון להגשה:** 15 נוב' 19

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות: • שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס • שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה **הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"**

שאלה 1 (10%)

בנו מכונת טיורינג **המכריעה** את השפה של תרגיל 3.8 סעיף a $(\{w \in \{0, 1\}^* \mid \#_0(w) = \#_1(w)\})$.

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, \sqcup, x\}$.

למכונה יהיו **לא יותר משבעה מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה בעזרת איור מלא (כמו איור 3.8 בספר).
הקפידו על כך שהאיור יהיה גדול, בהיר, וללא קשתות נחתכות.

הסבירו היטב את פעולת המכונה, ולמה היא אכן מכריעה את השפה הדרושה.

שאלה 2 (20% סעיף א - 15%; סעיף ב - 5%)

א. בנו מכונת טיורינג, שכאשר היא מקבלת כקלט מילה w מעל האלפבית $\{0,1\}$, היא מסיימת במצב q_{accept} ועל הסרט רשומה המילה $w\#w$.
אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, x, \#, \sqcup\}$.
למכונה יהיו **לא יותר משלושה עשר מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{reject} וכל הקשתות שנכנסות אליו).
הקפידו על כך שהאיור יהיה גדול, בהיר, וללא קשתות נחתכות.
הסבירו היטב את פעולת המכונה, ולמה היא אכן מבצעת את הנדרש.
זִכְרוּ לטפל נכון גם במקרה ש-w היא המילה הריקה.

ב. מהי **הפונקציה** שמחשבת המכונה שבניתם בסעיף א?
הגדירו את הפונקציה בשלמות (תחום, טווח וכלל העתקה).

שאלה 3 (25% סעיף א - 18%; סעיף ב - 7%)

פונקציית המעברים של מכונת טיורינג הוגדרה כך (הגדרה 3.3 בספר):

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\mathrm{L,R}\}$$

הפונקציה קובעת, לכל מצב שבו המכונה נמצאת ולכל סמל סרט שנמצא תחת הראש הקורא-כותב, איזה סמל סרט ייכתב, לאיזה כיוון ינוע הראש הקורא-כותב, ולאיזה מצב המכונה תעבור.

ב**מכונת טיורינג מילולית** פונקציית המעברים מוגדרת כך:

$$\delta : Q \times \Gamma^* \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\mathrm{L,R}\}$$

הצעד של המכונה נקבע לפי המצב שבו המכונה נמצאת ולפי **המילה** שכתובה על הסרט מהסמל שבריבוע השמאלי ביותר של הסרט ועד הריבוע שעליו נמצא הראש הקורא-כותב.

למשל, אם תוכן הסרט הוא $a \sqcup ab \sqcup \$\$a$, והראש נמצא על ה-\$ השמאלי, אזי הצעד הבא של המכונה נקבע לפי המצב שבו המכונה נמצאת ולפי המילה $a \sqcup ab \sqcup \$$.

א. הוכיחו: אפשר לבנות מכונות טיורינג מילוליות לזיהוי שפות **שאינן מזוהות-טיורינג**.

הדרכה: הוכיחו שאפשר לבנות מכונת טיורינג מילולית **לכל שפה שהיא**.

ב. מדוע אין בקיומן של מכונות טיורינג מילוליות סתירה לתזה של צ'רץ' וטיורינג (סעיף 3.3 בספר)? **הסבירו היטב**.

שאלה 4 (15%)

תארו מכונת טיורינג **דטרמיניסטית בעלת שני סרטים** שמכריעה את השפה D הבאה:

$$D = \{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

אלפבית הקלט של המכונה הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; את אלפבית הסרט אתם יכולים לבחור כרצונכם.

עליכם לתאר מכונה (בעלת שני סרטים) שמספר הצעדים שהיא מבצעת **לינארי** בגודל הקלט. (על מילת קלט באורך n, מספר הצעדים צריך להיות $O(n)$).

תיאור המכונה צריך להיות ברמת הפירוט של המכונה M_3 מדוגמה 3.11 בספר.

הסבירו היטב, למה מספר צעדי החישוב הוא $O(n)$, כאשר n הוא אורך מילת הקלט.

שאלה 5 (15%)

בנו מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית** להכרעת השפה D משאלה 4.

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, \sqcup, x\}$; למכונה יהיו **לא יותר מ-12 מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{reject} וכל הקשתות שנכנסות אליו).

הסבירו היטב את פעולת המכונה, את התפקיד של כל מצב, את נקודות האי-דטרמיניזם, ולמה המכונה אכן מכריעה את D.

שאלה 6 (15%)

הוכיחו: שפה A היא מזוהה-טיורינג, אם, ורק אם, יש מונה (enumerator) שמפיק את A, וכל מילה ב-A מודפסת על-ידי המונה **פעם אחת ויחידה**. (כלומר, מילה ששייכת ל-A מודפסת פעם אחת; מילה שלא שייכת ל-A לא מודפסת אף פעם).

(ההבדל בין משפט 3.21 למה שאתם צריכים להוכיח בשאלה הוא הדרישה שכל מילה בשפה תודפס רק פעם אחת).

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2020א **מועד אחרון להגשה:** 6 דצמ' 19

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

נתון התיאור של המכונה M הבאה:

M = "On input <G>, where G is a CFG:

1. Go through all possible w's in the standard string order.
2. For each w check whether <G, w> $\in A_{\text{CFG}}$.
3. If for some w it is found that <G, w> $\in A_{\text{CFG}}$, accept."

א. מהי השפה שהמכונה M **מכריעה**? הצדיקו את תשובתכם.

ב. מהי השפה שהמכונה M **מזהה**? הצדיקו את תשובתכם.

שאלה 2 (10%)

נסמן על-ידי $\mathbb{N}_0$ את קבוצת המספרים הטבעיים עם 0: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

הוכיחו שהפונקציה g הבאה היא **התאמה** (correspondence) של $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ו-$\mathbb{N}_0$:

$$g(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$$

(להגדרת התאמה עיינו בספר בהגדרה 4.12).

שאלה 3 (15%)

הוכיחו: אם יימצא אלגוריתם פֶּלאי להכרעת השפה A_{TM}, אז יהיה אפשר להיעזר בו כדי להכריע את השפה $HALT_{\text{TM}}$ המוגדרת בעמוד 216 בספר.

שאלה 4 (15% סעיף א - 5%, סעיף ב - 10%)

נגדיר את השפה L הבאה:

$L = \{<M> \mid$ M היא מכונת טיורינג;

כאשר M רצה על $<M>$, היא מגיעה למצב q_{accept}, ועל הסרט כתובה המילה הריקה$\}$

L היא שפת המחרוזות שמתארות מכונות טיורינג M בעלות התכונה הבאה:

כש-M רצה על $<M>$ כקלט, היא מסיימת במצב q_{accept}, ואז הסרט של המכונה מכיל רק סמלי רווח.

א. הוכיחו: השפה L **מזוהה-טיורינג**.

ב. הוכיחו **בעזרת שיטת האלכסון** שהשפה L **איננה כריעה**.

הדרכה: הניחו בשלילה, שיש מכונה H שמכריעה את L. בנו מכונה D שתפעל הפוך מכל מכונה M שהיא.

שאלה 5 (18%)

ביחס לכל שפה שלהלן, קבעו האם אפשר להוכיח שהיא לא כריעה **בעזרת משפט Rice** (ראו בעיה 5.16 בספר). אם קבעתם שכן, כתבו את ההוכחה. אם קבעתם שלא, **הסבירו היטב** למה לא.

א. $A = \{<M> \mid M \text{ is a TM and } |L(M)| > 50\}$

(A היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג שמקבלות יותר מ-50 מילים).

ב. $B = \{<M> \mid M \text{ is a TM that does not accept any word } w \text{ within 500 steps}\}$

(B היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג שלא מקבלות אף מילה w בתוך 500 צעדים).

ג. $DECIDABLE_{TM} = \{<M> \mid M \text{ is a TM and } L(M) \text{ is a decidable language}\}$

(זוהי שפת התיאורים של מכונות טיורינג שהשפה שהן מזהות היא שפה כריעה).

שאלה 6 (12%)

במשפט 5.10 הוכח שהשפה E_{LBA} איננה כריעה.

א. האם E_{LBA} היא שפה **מזוהה-טיורינג**? **הוכיחו** את תשובתכם.

ב. האם השפה **המשלימה** (השפה $\overline{E_{LBA}}$) היא שפה **מזוהה-טיורינג**? **הוכיחו** את תשובתכם.

שאלה 7 (20%)

נגדיר את השפה $DEC\text{-}HALT_{\mathrm{TM}}$:

$DEC\text{-}HATL_{\mathrm{TM}}$ = {<M> | M is a TM and the set of words w such that M halts on w is decidable}

מילה <M> שייכת לשפה, אם M היא מכונת טיורינג, שקבוצת המילים שעליהן היא עוצרת היא **שפה כריעה**.

הוכיחו : השפה $DEC\text{-}HALT_{\mathrm{TM}}$ **איננה מזוהה-טיורינג**.

הדרכה : אפשר להראות רדוקציה דומה לזו של הוכחת משפט Rice (בעיה 5.16 בספר הלימוד ותרגיל 3.1 במדריך הלמידה).

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 8 נקודות

סמסטר: 2020א **מועד אחרון להגשה:** 3 ינו' 20

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (15%)

תהי w מחרוזת סמלים. מסמנים על-ידי w^R את המחרוזת המתקבלת מ-w על-ידי היפוך סדר הסמלים ב-w. דוגמה: $11001^R = 10011$.

מילה w נקראת **פלינדרום** אם $w=w^R$. דוגמה: 1100011 היא פלינדרום; 110001 איננה פלינדרום.

נגדיר את השפה PAL:

$$PAL = \{w \in \{0,1\}^* \mid w=w^R\}$$

(זוהי שפת הפלינדרומים מעל האלפבית $\{0,1\}$).

מצאו פונקציה $t(n)$ מינימלית, כך ש- $PAL \in \mathrm{TIME}(t(n))$

א. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד.

ב. במכונה דטרמיניסטית עם שני סרטים.

ג. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד, שיש לו שני ראשים קוראים-כותבים.

הסבירו את תשובותיכם.

שאלה 2 (14%)

הוכיחו שהשפות הבאות שייכות **למחלקה P**:

א. $INFINITE_{\mathrm{NFA}} = \{\langle B\rangle \mid B \text{ is an NFA and } L(B) \text{ is infinite}\}$

ב. $STRONGLY\text{-}CONNECTED = \{\langle G\rangle \mid G$ is a **directed** strongly connected graph$\}$

מילה $\langle G\rangle$ שייכת לשפה, אם G הוא גרף מכוון קשיר חזק (יש בגרף מסלול מכל צומת לכל צומת).

שאלה 3 (12%)

נתון שלשפה B יש מאמת (verifier) בעל זמן ריצה אקספוננציאלי. (זמן הריצה שלו על קלט בגודל n הוא $O\left(2^{n^k}\right)$ עבור k טבעי כלשהו).

האם אפשר להסיק מכך ש-B היא שפה **כריעה**? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 4 (12%)

האם השפה C שלהלן שייכת למחלקה NP? הוכיחו את תשובתכם.

$C = \{<n, m>\ |\ m$-מספר הראשוניים השונים בפירוק לגורמים ראשוניים של n איננו גדול מ$\}$

(למשל, $<3276, 4>\in C$ ‏($3276 = 2^2\cdot3^2\cdot7\cdot13$), ‏$<3276, 3>\notin C$).

שאלה 5 (8%)

למה שווה **מספר ההשמות המספקות** של הנוסחה הבוליאנית המתקבלת על-ידי הרדוקציה של הוכחת משפט 7.37? **הסבירו היטב** את תשובתכם.

שאלה 6 (14%)

בעיית הקבוצות הנחתכות (XS) היא הבעיה הבאה:

הקלט: n קבוצות סופיות ומספר טבעי k ‏($k\leq n$).

השאלה: האם יש ב-n הקבוצות הסופיות k קבוצות, **שכל שתים מהן אינן זרות זו לזו** (החיתוך של כל שתיים מהן איננו ריק)?

נציג את הבעיה כשפה:

$XS = \{<S_1, S_2, \ldots, S_n, k>\ |$ הן קבוצות סופיות; יש מהן k קבוצות, שכל שתיים לא זרות זו לזו $S_1, \ldots, S_n\}$

הוכיחו: XS היא **NP-שלמה.**

הדרכה: הוכיחו שהיא שייכת ל-NP, והראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של $CLIQUE$.

שאלה 7 (25% סעיף א - 5 נקודות; סעיף ב - 10 נקודות; סעיף ג - 10 נקודות)

נתון גרף מכוון $G = (V, E)$.

רוצים למצוא קבוצת קשתות E' קטנה ביותר, כך שבגרף G, ללא הקשתות של E', אין מעגלים.

כלומר, הגרף $G' = (V, E-E')$ הוא גרף מכוון חסר מעגלים.

נגדיר את השפה $ACYCLIC$:

$ACYCLIC = \{<G, k>\ |\ G=(V, E)$ is a directed graph. There is a set E' ($E'\subseteq E$) of k edges ($|E'|=k$) such that $G'=(V, E-E')$ is acyclic$\}$

א. הוכיחו שהשפה *ACYCLIC* שייכת ל-NP.

ב. כדי להוכיח ש-*ACYCLIC* היא NP-שלמה, מוצעת הרדוקציה הבאה של *3SAT*:

"על קלט $<\phi>$ כאשר ϕ היא נוסחה בוליאנית ב-3CNF מעל n משתנים בוליאניים, שיש בה m פסוקיות (בכל פסוקית שלושה ליטרלים):

1. בנה את הגרף המכוון הבא:

הצמתים: לכל משתנה בוליאני x, הגדר שני צמתים, x_1 ו-x_2.

הקשתות: לכל משתנה בוליאני x, הגדר את הקשתות (x_1, x_2) ו-(x_2, x_1). (מגדירים מעגל בגודל 2 לכל משתנה בוליאני x. כדי להגיע לגרף חסר מעגלים, חייבים למחוק לפחות אחת משתי הקשתות האלה. מחיקת הקשת (x_1, x_2) תתאים להשמת ערך 1 ל-x. מחיקת הקשת (x_2, x_1) תתאים להשמת ערך 0 ל-x.)

בכל פסוקית של ϕ יש שלושה ליטרלים. לכל פסוקית כזו, הוסף לגרף קשתות של מעגל בין הצמתים של שלושת הליטרלים, באופן שמחיקת כל אחת מהקשתות שמתאימות להצבת 1 לליטרלים של הפסוקית תבטל את המעגל.

למשל, אם הליטרלים של הפסוקית הם x, $\neg y$ ו-z, אז מוסיפים לגרף את הקשתות (x_2, y_2), (y_1, z_1) ו-(z_2, x_1). יחד עם הקשתות (x_1, x_2), (y_2, y_1) ו-(z_1, z_2) נוצר מעגל בגודל 6. אפשר לבטל את המעגל הזה באמצעות מחיקת הקשת (x_1, x_2) (שמתאימה להצבת 1 ב-x), או באמצעות מחיקת הקשת (y_2, y_1) (שמתאימה להצבת 1 ב-$\neg y$, כלומר, הצבת 0 ב-y), או באמצעות מחיקת הקשת (z_1, z_2) (שמתאימה להצבת 1 ב-z), אבל לא באמצעות מחיקת הקשתות שמתאימות להצבת 0 ב-x, 1 ב-y ו-0 ב-z.

2. החזר את $<G, n>$, כאשר G הוא הגרף שבנינו, ו-n הוא מספר המשתנים בנוסחה ϕ."

מה **לא נכון** ברדוקציה המוצעת?

עליכם להסביר איזו נקודה בדיוק ברדוקציה שגויה, ומה השגיאה.

ג. הציעו רדוקציה נכונה של *3SAT* ל-*ACYCLIC*. הציגו את הרדוקציה, והוכיחו שהיא תקפה ושהיא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2020א **מועד אחרון להגשה:** 17 ינו' 20

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

הוכיחו שהשפה *SUBSET-SUM* שייכת ל-SPACE(n).
הציגו אלגוריתם להכרעת השפה, הסבירו היטב כיצד הוא ימומש, והוכיחו שהמקום הדרוש הוא $O(n)$.

שאלה 2 (10%)

נתונה השפה *#SAT*

$\#SAT = \{<\phi, k> \mid \phi$ is a Boolean formula with **at least** k different satisfying assignments$\}$

א. האם אפשר להוכיח ששפה זו שייכת ל- SPACE(n)?
אם עניתם שכן, כתבו את ההוכחה. אם עניתם שלא, הסבירו למה לא.

ב. האם התשובה לסעיף א תשתנה, אם נחליף בהגדרת השפה את המילים "at least" במילים "at most"? הסבירו את תשובתכם.

ג. האם התשובה תשתנה, אם נחליף את המילים "at least" במילה "exactly"?
הסבירו את תשובתכם.

שאלה 3 (20%)

א. הוכיחו: $EQ_{DFA} \in \mathrm{SPACE}(n^2)$. (השפה EQ_{DFA} מוגדרת לפני משפט 4.5 בספר)

ב. הוכיחו: $EQ_{NFA} \in \mathrm{SPACE}(n^2)$. ($EQ_{NFA} = \{<A, B> \mid A$ and B are NFAs and $L(A)=L(B)\}$)

שאלה 4 (15%)

תזכורת: השפה שמפיק מונה (enumerator) E היא קבוצת המילים שהוא מדפיס.

נגדיר: **מונה במקום פולינומיאלי** הוא מונה שמשתמש במקום פולינומיאלי בסרט העבודה שלו. כלומר, יש מספר טבעי k, כך שלכל מילה w ששייכת לשפה, המקום שבו משתמש המונה בסרט העבודה שלו **מתחילת הריצה שלו** ועד ההדפסה של w הוא $O(|w|^k)$.

האם **לכל** שפה C ב-PSPACE יש מונה במקום פולינומיאלי שמפיק את C?

הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 5 (25%)

נגדיר את השפה D:

$D = \{<G, v> \mid G$ is a directed graph and no directed cycle of G contains the vertex $v\}$

מילה $<G, v>$ שייכת ל-D, אם G הוא גרף מכוון ו-v הוא צומת של G שלא שייך לאף מעגל מכוון ב-G.

הוכיחו: D היא שפה **NL- שלמה**.

שאלה 6 (20%)

בשאלה זו נניח כי L≠NL.

האם השפה הבאה היא NL-שלמה? **הוכיחו** את תשובתכם!

$\{<G> \mid G$ is a directed graph with a simple 20-length path$\}$

מילה $<G>$ שייכת לשפה, אם G הוא גרף מכוון, ויש ב-G מסלול פשוט באורך 20.

(מסלול בגרף מכוון הוא פשוט, אם אין בו מעגלים.

אורך של מסלול הוא מספר הקשתות שבמסלול.)

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: סעיפים 9.1, 10.1 ו-10.2 בספר

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2020א **מועד אחרון להגשה:** 7 פבר' 20

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20%)

נגדיר סוג חדש של רדוקציה: **רדוקציה במקום** לוג-לוגריתמי. לשם כך נגדיר **מתמר מקום לוג-לוגריתמי**: מתמר כזה זהה למתמר מקום לוגריתמי (הגדרה 8.21 בספר), פרט לכך שסרט העבודה שלו יכול להכיל $O(\log(\log n))$ סמלים ולא $O(\log n)$ סמלים.

נאמר ששפה A **ניתנת לרדוקציה במקום לוג-לוגריתמי** לשפה B, ונסמן $A \leq_{\mathrm{LL}} B$, אם קיים מתמר מקום לוג-לוגריתמי המיישם רדוקצית מיפוי של A ל-B.

שפה C תיקרא **P-שלמה ביחס לרדוקציה במקום לוג-לוגריתמי**, אם

- C שייכת למחלקה P.
- לכל שפה A ב-P יש רדוקציה במקום לוג-לוגריתמי ל-C. ($A \leq_{\mathrm{LL}} C$).

הוכיחו: **לא קיימת** שפה P-שלמה ביחס לרדוקציה במקום לוג-לוגריתמי.

הדרכה: כמה קונפיגורציות שונות יכולות להיות למתמר לוג-לוגריתמי על מילה באורך n?
השתמשו במשפטי היררכיה.

שאלה 2 (20%)

לִמדו את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה.
הניחו שמחירי הקשתות בבעיית הסוכן הנוסע הם **חיוביים**.

א. הוכיחו שעלות המסלול של הסוכן הנוסע שמוצא אלגוריתם הקירוב לבעיית הסוכן הנוסע המטרית **קטנה** מפעמיים עלות המסלול האופטימלי.
הדרכה: אם מורידים קשת אחת ממעגל המילטוני, מקבלים עץ פורש של הגרף.

ב. כזכור, הוכח שאלגוריתם זה הוא בעל יחס קירוב ≥ 2.
הוכיחו שיחס הקירוב 2 הוא **הדוק** ביחס לאלגוריתם (כלומר, אי אפשר להצביע על חסם קטן יותר).

הדרכה: לכל n אי-זוגי גדול מ-5, התבוננו בגרף מלא בעל n צמתים, $x_1, x_2, ..., x_n$, שהמחירים של הקשתות שלו הם כדלקמן: המחיר של כל קשת שנוגעת ב-x_1 הוא 1; המחיר של כל הקשתות מהצורה (x_i, x_{i+1}) הוא 1; המחיר של כל שאר הקשתות הוא 2.
הוכיחו שבגרף זה מתקיים אי-שוויון המשולש.
הוכיחו שהקירוב שהאלגוריתם משיג על גרף כזה הוא $2-2/n$.
הסיקו את התוצאה הנדרשת.

שאלה 3 (20% סעיף א - 5%; סעיף ב - 15%)

תזכורת: **כיסוי בצמתים** (vertex cover) בגרף לא מכוון $G=(V, E)$ הוא קבוצת צמתים U, כך שלכל קשת ב-E יש לפחות קצה אחד ב-U.
נגדיר את הפונקציה הבאה:

$f(G, v) =$ גודל הכיסוי בצמתים המינימלי ש-v שייך אליו

הקלט לפונקציה הוא גרף לא מכוון G וצומת v של G.
הפונקציה מחזירה מספר טבעי. המספר שהיא מחזירה הוא הגודל של הכיסוי בצמתים הקטן ביותר ב-G ש-v שייך אליו.

א. הוכיחו: אם אפשר לחשב את הפונקציה f בזמן פולינומיאלי, אז P=NP.

ב. הוכיחו: אם אפשר לקרב את הפונקציה f בקבוע חיבורי 5 בזמן פולינומיאלי, אז P=NP.
עליכם להוכיח, שאם אפשר לחשב בזמן פולינומיאלי פונקציה $g(G, v)$, ומובטח ש-
$f(G, v)-5 \le g(G, v) \le f(G, v)+5$,
אז P=NP.

שאלה 4 (20%)

עיינו במטלה 13 בשאלה 7.
הוכיחו: אם קיים אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי להכרעת השייכות לשפה *ACYCLIC*, אזי קיים אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי, שמחזיר קבוצה של k קשתות, כך שהגרף המתקבל ממחיקת k הקשתות האלה הוא חסר מעגלים (אם יש קבוצה של k קשתות כאלה).
האלגוריתם מקבל כקלט גרף מכוון G ומספר טבעי k. אם אין ב-G קבוצה של k קשתות כנדרש, האלגוריתם מחזיר "לא". אם יש ב-G קבוצה של k קשתות כנדרש, האלגוריתם מחזיר רשימה של k קשתות, כך שהגרף המתקבל ממחיקת k הקשתות האלה הוא חסר מעגלים.
האלגוריתם יכול להשתמש באלגוריתם להכרעת השייכות לשפה *ACYCLIC*. אסור לו להשתמש באלגוריתמים לבעיות NP-שלמות אחרות. זמן הריצה שלו חייב להיות פולינומיאלי בגודל הקלט.

שאלה 5 (20%)

עיינו במטלה 14 בשאלה 2.

הוכיחו: אם השפה A שייכת למחלקה BPP, אז $A \leq_P \#SAT$.

הדרכה: התבוננו בנוסחה שבונים בהוכחת משפט Cook-Levin (משפט 7.37).