מבנה הבחינה: בבחינה **חמש** שאלות.
עליך לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות.
כל שאלה מזכה ב- 25 נקודות.

הנחיות: כל תשובה תתחיל בעמוד **חדש**.
אין לכתוב בצבע אדום.
אין לכתוב בעיפרון.

שאלה 1

מצא חסמים אסימפטוטיים הדוקים עבור נוסחאות הנסיגה שלהלן :

(10 נק׳) א. $T(n) = 25T(n/5) + 125n^2$

(15 נק׳) ב. $T(n) = 16T(n^{1/4}) + (\lg n)^4 \cdot \lg\lg n$

התעלם משאלת שלמותם של הערכים ומשאלת תנאי השפה.

שאלה 2

נתון מערך $A[1..n]$ של מספרים. נגביל את האלגוריתם מיון-הכנסה ל- $(k-1)$ האיטרציות הראשונות של הלולאה החיצונית. כידוע, נקבל את התת-מערך $A[1..k]$ ממוין בסדר עולה (או לא-יורד).

(6 נק׳) א. כתוב שגרה (בפסֵידוקוד) המנצלת את תוצאת המיון החלקי כדי לבצע חיפוש של הערך z במערך $A[1..n]$.

(7 נק׳) ב. נסמן $m = n - k$ ונתייחס אל m כאל משתנה בלתי-תלוי ב-n $(0 \le m \le n)$. מהו זמן הריצה של השגרה שבסעיף א׳ במקרה הגרוע כפונקציה של n ושל m?

(6 נק׳) ג. עבור אילו ערכים של m כפונקציה של n (בסימון אסימפטוטי) ניתן לבצע את פעולת החיפוש בזמן $O(\lg n)$?

(6 נק׳) ד. כמה פעולות חיפוש (כפונקציה של n) ניתן לבצע בזמן כולל $O(n^2)$ כאשר :

$m = O(\lg n)$; $m = O(n/\lg n)$; $m = O(n)$?

שאלה 3

נתון מערך $A[1..n]$; נבחר איבר ציר x עבור שגרת החלוקה PARTITION ונסמן ב-m את מספר ההופעות של הערך x במערך A.

(7 נק׳) א. כתוב שגרת חלוקה חדשה M-PARTITION, המחלקת את המערך A לשלושה תת-מערכים המכילים : הראשון, את כל האיברים הקטנים מ-x; השני, את כל ההופעות של x; השלישי, את כל האיברים הגדולים מ-x. זמן הריצה של השגרה יישאר $O(n)$.

(3 נק׳) ב. כתוב גרסה חדשה של מיון-מהיר M-QUICKSORT, המשתמשת בגרסה החדשה של שגרת החלוקה.

(5 נק׳) ג. כתוב נוסחת נסיגה עבור זמן הריצה של M-QUICKSORT. אילו פתרונות מתקבלים במקרה הגרוע ובמקרה הטוב? תן הסבר קצר.

(10 נק׳) ד. כתוב נוסחת נסיגה עבור זמן הריצה של M-QUICKSORT, בהנחה שבכל שלב של הרקורסיה מתקבל ערך של m שווה בקירוב ל- $n/2$.

אילו פתרונות מתקבלים במקרה הגרוע ובמקרה הטוב?

הערה: מותר להתעלם מבעיית שלמותם של הביטויים השונים.

שאלה 4

נתונה טבלת גיבוב $T[1..m]$; כל תא של הטבלה מצביע אל מערך בגודל n. ברצוננו ליישם בכל אחד מ-m המערכים ערימה בינרית. ברצוננו להכניס לטבלת הגיבוב סדרה של n מפתחות בשתי שיטות.

(6 נקי) א. בשיטה הראשונה מכניסים את כל n המפתחות למבנה הנ״ל; אחרי שכולם הוכנסו, בונים את m הערימות. כתוב שגרה המבצעת את הפעולות האלה.

(6 נקי) ב. מהו זמן הריצה של השגרה בסעיף א׳, במקרה הגרוע?
האם יתכן שמתקבל זמן ריצה טוב יותר במקרה הממוצע?

(6 נקי) ג. בשיטה השניה מכניסים את n המפתחות למבנה הנ״ל; אחרי כל הכנסת מפתח, מתקנים את הערימה המתאימה. כתוב שגרה שמבצעת את הפעולות האלה.

(7 נקי) ד. מהו זמן הריצה של השגרה בסעיף ג׳, במקרה הגרוע ובמקרה הממוצע?

שאלה 5

נתון עץ אדום-שחור T המכיל n מפתחות מתוך הסדרה $S = \langle 0, 1, ..., 2^k - 1 \rangle$; נניח שמתקיים $n = O(2^k)$. כל מפתח מאוחסן בתוך מערך בינרי בן k סיביות. פעולת השוואה בין המפתחות מבצעת k פעולות השוואה בין סיביות (כל אחת בזמן קבוע).

(9 נקי) א. מהם זמני הריצה במקרה הגרוע של הפעולות הבאות (כפונקציות של n ושל k): הכנסה לעץ T של מפתח מהסדרה S; חיפוש מפתח מ-S בעץ T; מחיקת מפתח מ-T, בהינתן מצביע לצומת?

(8 נקי) ב. נניח עכשיו שמתקיים $n = 2^k$. מוסיפים לכל מפתח בעץ יחידה אחת (פעולת קידום כל המפתחות).
תאר (במילים) את אלגוריתם הקידום.

לתשומת לבך: המפתח $2^k - 1$ מקודם ל-0 בעץ החדש.

(8 נקי) ג. מהו זמן הריצה של פעולת קידום כל המפתחות?

סוף!