שאלה 1

נגדיר 3 מאורעות ונבטא באמצעותם את נתוני הבעיה.

הנתונים הם: A = לתושב יש השכלה אקדמית

B = התושב מתגורר בבית פרטי

C = לתושב יש חשבון חסכון

$P(A) = 0.4$

$P(A^C \cap C) = 0.4$

$P(C^C | A) = 0.3$

$P(A \cap B \cap C) = 0.1$

$P(A^C \cap B^C \cap C^C) = 0.18$

$P(A^C | B \cap C) = 0.5$

$P(B | A \cup C) = 0.2875$

$$P(C^C | A) = \frac{P(C^C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(C^C \cap A)}{0.4} = 0.3 \qquad \Rightarrow \qquad P(C^C \cap A) = 0.12$$

$$P(A \cap C) = P(A) - P(C^C \cap A) = 0.4 - 0.12 = 0.28$$

$$P(C) = P(A \cap C) + P(A^C \cap C) = 0.28 + 0.4 = 0.68$$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0.4 + 0.68 - 0.28 = 0.8$$

$$P(A \cap B^C \cap C) = P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) = 0.28 - 0.1 = 0.18$$

$$P(A^C | B \cap C) = \frac{P(A^C \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = 1 - \frac{0.1}{P(B \cap C)} = 0.5$$

$$\Rightarrow \qquad P(B \cap C) = 0.2$$

$$P(A^C \cap B \cap C) = P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) = 0.2 - 0.1 = 0.1$$

$$P(A^C \cap B^C \cap C) = \underbrace{P(C) - P(B \cap C)}_{=P(B^C \cap C)} - P(A \cap B^C \cap C) = 0.68 - 0.2 - 0.18 = 0.3$$

$$P(B | A \cup C) = \frac{P(B \cap (A \cup C))}{P(A \cup C)} = \frac{P(B \cap A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(A \cup C)} = \frac{P(B \cap A) + 0.2 - 0.1}{0.8} = 0.2875$$

$$\Rightarrow \qquad P(B \cap A) = 0.13$$

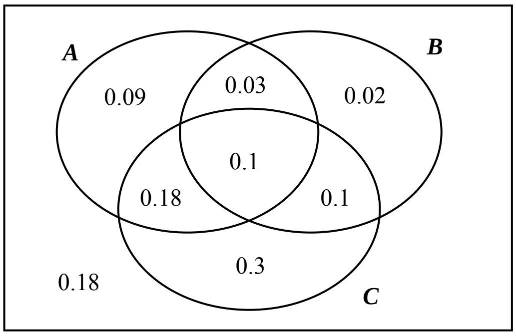
$$P(A \cap B \cap C^C) = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) = 0.13 - 0.1 = 0.03$$

$$P(A \cap B^C \cap C^C) = \underbrace{P(A) - P(A \cap B)}_{=P(A \cap B^C)} - P(A \cap B^C \cap C) = 0.4 - 0.13 - 0.18 = 0.09$$

$$P(A^C \cap B \cap C^C) = \underbrace{1 - P(A \cup C)}_{=P(A^C \cap C^C)} - P(A^C \cap B^C \cap C^C) = 1 - 0.8 - 0.18 = 0.02$$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C) = 0.13 + P(A^C \cap B \cap C) + P(A^C \cap B \cap C^C) = 0.13 + 0.1 + 0.02 = 0.25$$

כעת, נוכל לצייר דיאגרמת ון מתאימה לבעיה:



א. $P(A^C \cap B \cap C^C) = 0.02$

ב. $P(A^C \cap B^C \cap C) = 0.3$

ג. $P(A \cap B^C \cap C^C) = 0.09$

ד. $$P(A \cup C \mid B^C) = \frac{P(B^C \cap (A \cup C))}{1-P(B)} = \frac{P(B^C \cap A) + P(B^C \cap C) - P(A \cap B^C \cap C)}{1-P(B)}$$
$$= \frac{0.27+0.48-0.18}{0.75} = \frac{0.57}{0.75} = 0.76$$

שאלה 2

א. נגדיר: $X_i = \begin{cases} 1 & , \text{הוצא כדור לבן מכד } i \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$ לכל $i = 0,\ldots,n$

ונסמן ב- X את מספר הכדורים הלבנים שמוצאים מהכדים, כך שמתקיים: $X = \sum_{i=0}^{n} X_i$

עתה, לכל $i = 0,\ldots,n$ מתקיים: $E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \frac{i}{n}$

ומכאן: $E[X] = \sum_{i=0}^{n} E[X_i] = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$

לכל $i = 0,\ldots,n$ מתקיים: $\mathrm{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = \frac{i}{n} \cdot \frac{n-i}{n}$

ומנתוני הבעיה נובע כי אין תלות בין ה-X_i-ים. לפיכך:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + \underbrace{2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)}_{=0} = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{n-i}{n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} - \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2$$
$$= \frac{n(n+1)}{2n} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{n(n+1)(3n-2n-1)}{6n^2} = \frac{n^2-1}{6n}$$

ב. נחשב את ההסתברות לבחור כדור לבן בחזרה יחידה על התהליך. נעזר בנוסחת ההסתברות השלמה, כאשר אנו מתנים על הכד הנבחר ונקבל: $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{i}{n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{1}{2}$

לפיכך, אם חוזרים על התהליך $n+1$ פעמים, מקבלים ניסוי בינומי עם הפרמטרים $n+1$ ו- 0.5.

ומכאן, שתוחלת מספר הכדורים הלבנים שיוצאו מהכדים היא $\frac{n+1}{2}$ והשונות המתאימה היא $\frac{n+1}{4}$.

שאלה 3

א. לפי נתוני הבעיה, מספר הנכנסים לסניף הדואר במשך שעתיים הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 60 וכל אחד מן הנכנסים פונה לאשנב 1 בהסתברות ⅓. לפיכך, מספר הפונים לאשנב 1 במשך שעתיים הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $60\cdot\frac{1}{3} = 20$, ומכאן כי ההסתברות המבוקשת היא :

$$e^{-20}\cdot\frac{20^{23}}{23!}=0.0669$$

ב. לפי דוגמה 2ב במדריך הלמידה (עמוד 138), אין תלות בין מספר הפונים לאשנב 1 לבין אלו הפונים לאשנב 2, ומספר הפונים לאשנב 1 במשך שעה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 10.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא :
$$e^{-10}\cdot\frac{10^{8}}{8!}=0.1126$$

ג. בהינתן שבמשך שעתיים נכנסו לסניף הדואר 63 לקוחות, מספר אלה מתוכם שיפנו לאשנב 1 הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 63 ו- ⅓ (ראה דוגמה 4ב במדריך הלמידה, עמוד 145). לפיכך, ההסתברות המותנית שבדיוק 23 מהלקוחות שנכנסו פנו לאשנב 1 היא :

$$\binom{63}{23}\left(\frac{1}{3}\right)^{23}\left(\frac{2}{3}\right)^{40}=0.0903$$

ד. נוכל למצוא קירוב להסתברות המבוקשת באמצעות משפט הגבול המרכזי. נסמן ב- X את מספר הנכנסים לסניף במשך חמש שעות, כאשר למשתנה מקרי X יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 150.
נבצע תיקון רציפות ונקבל את הקירוב הבא :

$$P\{X>145\}=P\{X\ge145.5\}\cong P\{Z\ge\tfrac{145.5-150}{\sqrt{150}}\}=P\{Z\ge-0.3674\}=\Phi(0.3674)=0.6433$$

שאלה 4

א.
$$\int_0^\infty f_X(x)dx=\int_0^\infty\frac{2k}{(1+kx)^3}dx=\frac{2k}{-2k(1+kx)^2}\bigg|_0^\infty=0+1=1\qquad(k\ne0)$$

לפיכך, עלינו לבדוק מהם הערכים של k שעבורם $f(x)\ge0$ לכל $x>0$.
ברור כי הערך $k=0$ איננו אפשרי, שכן במקרה זה $f(x)=0$ לכל $x>0$
כעת, נשים לב כי עבור $k<0$ המונה של הפונקציה הנתונה שלילי, אך המכנה חיובי לכל $0<x<-1/k$.
כלומר, הפונקציה הנתונה איננה אי-שלילית לכל $x>0$, ולכן לא ייתכן כי k יהיה שלילי.
לעומת זאת, כאשר $k>0$ המונה והמכנה של הפונקציה חיוביים, ולכן כל ערך חיובי של k אפשרי.

ב. לכל $x>0$ מתקיים :
$$\int_0^x f_X(t)dt=\int_0^x\frac{2k}{(1+kt)^3}dt=\frac{-1}{(1+kt)^2}\bigg|_0^x=1-\frac{1}{(1+kx)^2}$$

ומכאן מקבלים :
$$F_X(x)=\begin{cases}0 & ,\quad x\le0\\ 1-\dfrac{1}{(1+kx)^2} & ,\quad x>0\end{cases}$$

ג.
$$P\{0<X<\tfrac{1}{k}\}=F_X(\tfrac{1}{k})-F_X(0)=1-\frac{1}{(1+k\cdot\frac{1}{k})^2}-0=1-0.25=0.75$$

ד. $$E[X]=\int_0^\infty xf_X(x)dx=\int_0^\infty \frac{2kx}{(1+kx)^3}dx \underset{\substack{u=x \quad v'=2k(1+kx)^{-3} \\ u'=1 \quad v=-(1+kx)^{-2}}}{\overset{\downarrow}{=}} \left.\frac{-x}{(1+kx)^2}\right|_0^\infty+\int_0^\infty \frac{1}{(1+kx)^2}dx=\left.\frac{-1}{k(1+kx)}\right|_0^\infty=\frac{1}{k}$$

שאלה 5

א. הוכחת הטענה מובאת באתר הקורס.

ב. לפי נתוני הבעיה מתקיים : $X \sim Geo(p) \qquad , \qquad Y\,|\,X=i \sim B(i,p)$

1. $$\mathrm{Var}(Y)=E[\mathrm{Var}(Y\,|\,X)]+\mathrm{Var}(E[Y\,|\,X])=E[Xp(1-p)]+\mathrm{Var}(Xp)$$

$$=p(1-p)E[X]+p^2\mathrm{Var}(X)]=p(1-p)\cdot\tfrac{1}{p}+p^2\cdot\tfrac{1-p}{p^2}=2(1-p)$$

2. $$P\{Y=0\}=\sum_{i=1}^\infty P\{Y=0\,|\,X=i\}P\{X=i\}=\sum_{i=1}^\infty (1-p)^i\cdot p(1-p)^{i-1}=p\sum_{i=1}^\infty (1-p)^{2i-1}$$

$$=p(1-p)\sum_{i=1}^\infty [(1-p)^2]^{i-1}=p(1-p)\sum_{i=0}^\infty [(1-p)^2]^i=\frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2}=\frac{1-p}{2-p}$$