20425 - תאריך הבחינה: 13.2.2014 (סמסטר 2014א - מועד א4 / 84)

שאלה 1

א. $\frac{10!}{3!2!5!} \cdot \frac{1^5 \cdot 6^5}{8^{10}} = 0.01825$

ב. בהינתן שהמספר 1 הוצא בדיוק 3 פעמים, מספר הפעמים שהמספר 4 יוצא הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 7 ו- 1/7. לפיכך, התוחלת של משתנה מקרי זה היא 1.

ג. נסמן ב-A את המאורע ש-1 הוצא בדיוק שלוש פעמים וב-B את המאורע ש-1 הוצא בפעם השלישית מהכד השמיני. נחשב את ההסתברות המותנית המבוקשת :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\binom{7}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^3\left(\frac{7}{8}\right)^7}{\binom{10}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^3\left(\frac{7}{8}\right)^7} = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{120} = 0.175$$

ד. נסמן ב- X את המספר הגדול ביותר שהוצא מהכדים.

$$P\{X = 6\} = P\{X \le 6\} - P\{X \le 5\} = \left(\frac{6}{8}\right)^{10} - \left(\frac{5}{8}\right)^{10} = 0.05631 - 0.00909 = 0.04722$$

שאלה 2

א. $P(A \cap B) = \frac{1^4 \cdot 2^{42} \cdot 1^4}{2^{50}} = 0.5^8 = 0.003906 > 0$

הסתברות חיתוך שני המאורעות חיובית, ולכן שני המאורעות אינם זרים.

ב. $P(A \cap C) = \binom{46}{16} 0.5^{46} \cdot 0.5^4 = \binom{46}{16} 0.5^{50}$

$P(A)P(C) = 0.5^4 \cdot \binom{50}{20} 0.5^{50} = \binom{50}{20} 0.5^{54}$

קיבלנו שתנאי אי-התלות אינו מתקיים למאורעות A ו- C. לכן, שני המאורעות תלויים, ומכאן ששלושת המאורעות תלויים.

ג1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 2 \cdot 0.5^4 - 0.5^8 = 0.1211$

ג2. **דרך I:** $P(A^C \cap B \cap C) = P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) = \binom{46}{16} 0.5^{50} - \binom{42}{12} 0.5^{50} = 0.0008708$

דרך II: $P(A^C \cap B \cap C) = P(B)P(C \mid B)P(A^C \mid B \cap C) = P(B)P(C \mid B)[1 - P(A \mid B \cap C)]$

$$= 0.5^4 \cdot \binom{46}{16} 0.5^{46} \left[1 - \binom{42}{12} \Big/ \binom{46}{16}\right] = 0.0008708$$

ג3. $P(A \mid B \cup C) = \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)} = \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(B \cup C)}$

$$= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(B) + P(C) - P(B \cap C)}$$

$$= \frac{0.5^8 + \binom{46}{16} 0.5^{50} - \binom{42}{12} 0.5^{50}}{0.5^4 + \binom{50}{20} 0.5^{50} - \binom{46}{16} 0.5^{50}} = \frac{0.00478}{0.10348} = 0.0462$$

שאלה 3

נסמן ב- Y_1 את מספר ה- H שמתקבלים ב- 30 ההטלות האחרונות. מתקיים: $Y + Y_1 = X$

כמו כן, המשתנים המקריים Y ו- Y_1 בלתי-תלויים זה בזה, ולשניהם התפלגות בינומית, ומתקיים:

$$X \sim B(50,0.5) \quad ; \quad Y \sim B(20,0.5) \quad ; \quad Y_1 \sim B(30,0.5)$$

א. **דרך I:** $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y+Y_1,Y) = \mathrm{Var}(Y) + \underbrace{\mathrm{Cov}(Y_1,Y)}_{=0} = \mathrm{Var}(Y) = 20\cdot 0.5^2 = 5$

קיבלנו שהשונות המשותפת שונה מ- 0, כלומר, שני המשתנים מתואמים.

דרך II: $E[XY] = E[E[XY\,|\,Y]] = E[YE[X\,|\,Y]] = E[Y(Y+30\cdot 0.5)] = E[Y^2] + 15E[Y]$

$$=\mathrm{Var}(Y) + (E[Y])^2 + 15E[Y] = 5 + 10^2 + 150 = 255$$

לפיכך: $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 255 - 25\cdot 10 = 5$

והמשתנים מתואמים.

ב. לכל $i = 0,\ldots,50$ מתקיים:

$$P\{Y=j\,|\,X=i\} = \frac{P\{X=i,Y=j\}}{P\{X=i\}} = \frac{P\{Y_1=i-j\}P\{Y=j\}}{P\{X=i\}}$$

$$= \frac{\binom{30}{i-j}0.5^{30}\binom{20}{j}0.5^{20}}{\binom{50}{i}0.5^{50}} = \frac{\binom{30}{i-j}\binom{20}{j}}{\binom{50}{i}} \quad , \quad j = \max\{0,i-30\},\ldots,\min\{20,i\}$$

לפיכך, ההתפלגות המותנית היא היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N = 50$, $m = 20$ ו- $n = i$.

ג1. לכל $j = 0,\ldots,20$ מתקיים:

$$P\{X=i\,|\,Y=j\} = \frac{P\{X=i,Y=j\}}{P\{Y=j\}} = \frac{P\{Y_1=i-j\}\cancel{P\{Y=j\}}}{\cancel{P\{Y=j\}}}$$

$$= P\{Y_1=i-j\} = \binom{30}{i-j}0.5^{30} \quad , \quad i = j, j+1,\ldots, j+30$$

ג2. **דרך I:** $E[X\,|\,Y=j] = E[Y+Y_1\,|\,Y=j] = E[j+Y_1\,|\,Y=j]$

$$= j + E[Y_1\,|\,Y=j] = j + E[Y_1] = j + 30\cdot 0.5 = j+15$$ [Y ו- Y_j בלתי-תלויים]

דרך II:

לכל $j = 0,\ldots,20$ מתקיים: $E[X\,|\,Y=j] = \sum_{i=j}^{j+30} i\,P\{X=i\,|\,Y=j\} = \sum_{i=j}^{j+30} i\binom{30}{i-j}0.5^{30}$

$$= \sum_{i=0}^{30}(i+j)\binom{30}{i}0.5^{30} = E[Y_1+j] = 30\cdot 0.5 + j = 15+j$$

שאלה 4

א. $c\int_0^{10} x^2(10-x)dx = c\left[\frac{10x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = c\cdot\frac{10{,}000}{12} = c\cdot\frac{2{,}500}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3}{2{,}500} = 0.0012$

ב. $E[X] = \frac{3}{2{,}500}\int_0^{10} x^3(10-x)dx = \frac{3}{2{,}500}\cdot\left[\frac{10x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^{10} = \frac{3}{2{,}500}\cdot\frac{100{,}000}{20} = 6$

ג. תחילה, נמצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X :

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=\tfrac{3}{2{,}500}\int_0^x t^2(10-t)dt=\tfrac{3}{2{,}500}\cdot\left[\tfrac{10t^3}{3}-\tfrac{t^4}{4}\right]_0^x$$

$$=\tfrac{3}{2{,}500}\cdot\tfrac{x^3}{12}\cdot(40-3x)=0.004x^3-0.0003x^4 \qquad , \qquad 0<x<10$$

ומכאן :

$$P\{X\ge 9\mid X\ge 7\}=\frac{P\{X\ge 9\}}{P\{X\ge 7\}}=\frac{1-F_X(9)}{1-F_X(7)}=\frac{1-\tfrac{3}{2{,}500}\cdot\tfrac{9^3}{12}\cdot(40-27)}{1-\tfrac{3}{2{,}500}\cdot\tfrac{7^3}{12}\cdot(40-21)}=\frac{1-0.9477}{1-0.6517}=0.1502$$

ד. נחשב את הקירוב המבוקש בעזרת משפט הגבול המרכזי. לשם כך, יש לחשב את השונות של X .

$$E[X^2]=\tfrac{3}{2{,}500}\int_0^{10}x^4(10-x)dx=\tfrac{3}{2{,}500}\cdot\left[\tfrac{10x^5}{5}-\tfrac{x^6}{6}\right]_0^{10}=\tfrac{3}{2{,}500}\cdot\tfrac{1{,}000{,}000}{30}=40$$

$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2=40-6^2=4 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Var}(\overline{X}_{20})=\tfrac{4}{20}=0.2$$

ומכאן כי :

$$P\{\overline{X}_{20}>5.5\}\cong P\left\{Z>\tfrac{5.5-6}{\sqrt{0.2}}\right\}=P\{Z>-1.118\}=\Phi(1.118)=0.86818$$

שאלה 5

א. הוכחת הטענה מובאת באתר הקורס.

ב. לפי נתוני הבעיה, למשתנה המקרי X יש התפלגות אחידה בדידה בין 1 ל- 10.

לכן :

$$E[X]=\tfrac{1+10}{2}=5.5 \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(X)=\tfrac{10^2-1}{12}=8.25$$

דרך I:

למשתנה המקרי המותנה Y בהינתן $X=i$, לכל $i=1,2,\ldots,10$, יש התפלגות בינומית-שלילית עם הפרמטרים i ו- 0.5. לכן :

$$E[Y\mid X=i]=\tfrac{i}{0.5}=2i \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(Y\mid X=i)=\tfrac{0.5i}{0.5^2}=2i$$

לפיכך :

$$E[Y]=E[E[Y\mid X]]=E[2X]=2E[X]=2\cdot 5.5=11$$

$$\mathrm{Var}(Y)=E[\mathrm{Var}(Y\mid X)]+\mathrm{Var}(E[Y\mid X])=E[2X]+\mathrm{Var}(2X)=2E[X]+4\mathrm{Var}(X)=11+4\cdot 8.25=44$$

דרך II:

יהיו Y_i, לכל $i=1,2,\ldots$, משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלכולם הפרמטר 0.5 ;

ויהי X המשתנה המקרי המוגדר בתחילת הסעיף. אז מתקיים :

$$Y=\sum_{i=1}^{X}Y_i$$

לפיכך :

$$E[Y]=E\left[\sum_{i=1}^{X}Y_i\right]=E[X]E[Y_1]=5.5\cdot 2=11$$

$$\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{X}Y_i\right)=E[X]\mathrm{Var}(Y_1)+(E[Y_1])^2\mathrm{Var}(X)=5.5\cdot 2+2^2\cdot 8.25=44$$