פתרונות לממ"ח 02 - 2019ב - 20425

1. נסמן ב- X את מספר הכדורים הלבנים שייבחרו. לפי נתוני השאלה: $X \sim B(n=7, p=10/18)$

לכן: $\binom{7}{4}\cdot\left(\frac{10}{18}\right)^4\cdot\left(\frac{8}{18}\right)^3=0.2927$

2. בהמשך לשאלה הקודמת: $\text{Var}(X)=7\cdot\frac{10}{18}\cdot\frac{8}{18}=1.7284$

3. נסמן ב- X את מספר הכדורים הלבנים שייבחרו. לפי נתוני השאלה: $X \sim HG(N=18, m=10, n=7)$

לכן: $\dfrac{\binom{10}{4}\binom{8}{3}}{\binom{18}{7}}=\dfrac{11{,}760}{31{,}824}=0.3695$

4. בהמשך לשאלה הקודמת: $\text{Var}(X)=\frac{18-7}{18-1}\cdot 7\cdot\frac{10}{18}\cdot\frac{8}{18}=1.1184$

5. מספר נסיונות הלכידה של לוכד-הנמרים עד לתפיסת 3 הנמרים הוא משתנה מקרי בינומי-שלילי עם הפרמטרים 3 ו- 0.4. נסמן משתנה מקרי זה ב- X.

$$P\{X\le 5\}=0.4^3+3\cdot 0.4^3\cdot 0.6+\binom{4}{2}\cdot 0.4^3\cdot 0.6^2=0.31744$$

6. בסימוני השאלה הקודמת: $P\{X=5\mid X\le 5\}=\dfrac{P\{X=5\}}{P\{X\le 5\}}=\dfrac{\binom{4}{2}\cdot 0.4^3\cdot 0.6^2}{0.31744}=\dfrac{0.13824}{0.31744}=0.4355$

7. בסימוני שאלה 5: $E[X]=\dfrac{3}{0.4}=7.5\quad ;\quad \text{Var}(X)=\dfrac{3\cdot 0.6}{0.4^2}=11.25$

8. נסמן ב- Y את הזמן שהלוכד משקיע בתפיסת הנמרים וב- X את מספר נסיונות הלכידה שלו.

מתקיים: $Y=3\cdot 30+(X-3)\cdot 15=15X+45$

ולכן: $E[Y]=E[15X+45]=15E[X]+45=15\cdot 7.5+45=157.5$

9. נסמן ב-A את המאורע שנבחר מטבע תקין וב-B את המאורע שהמטבע הנבחר מוטל בדיוק 4 פעמים עד לקבלת ה-H הראשון. לפי נוסחת ההסתברות השלמה מתקיים:

$$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|A^C)P(A^C)=0.5^4\cdot\frac{38}{50}+0.75^3\cdot 0.25\cdot\frac{12}{50}=0.0728125$$

10. נסמן ב- X את מספר הביצים שהחרקים מטילים על עלה אחד. ל- X יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 3.

מנתוני הבעיה נובע שאין תלות בין עלים שונים, לכן נוכל לכפול את ההסתברויות שנוגעות לכל עלה בנפרד. מכיוון שיש 3 אפשרויות לבחור את העלה שעליו יהיו 4 ביצים, מקבלים את ההסתברות:

$$3\cdot\left(e^{-3}\cdot\frac{3^4}{4!}\right)\cdot\left(e^{-3}\cdot\frac{3^3}{3!}\right)^2=\frac{3^{11}}{4!(3!)^2}\cdot e^{-9}=\frac{3^{11}}{864}\cdot e^{-9}$$

11. לכל $i=2,3,\ldots$, מתקיים: $P\{X=i\mid X\ge 2\}=\dfrac{P\{X=i\}}{P\{X\ge 2\}}=\dfrac{e^{-3}\cdot\frac{3^i}{i!}}{1-e^{-3}-e^{-3}\cdot 3}=\dfrac{3^i\cdot e^{-3}}{i!(1-4e^{-3})}$

12. מספר הביצים שמהן בוקע חרק צעיר הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $n = 1{,}500$ ו-$p = 0.01$. זוהי התפלגות בינומית עם מספר ניסויים גדול והסתברות להצלחה קטנה. לכן, אפשר להשתמש בקירוב הפואסוני להתפלגות הבינומית, ולהניח, שמספר הביצים שמהן בוקע חרק צעיר הוא בקירוב משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\lambda = 1{,}500 \cdot 0.01 = 15$. לפיכך, אם נסמן ב-X את מספר הביצים שמהן בוקע חרק צעיר, נקבל כי :

$$P\{X = 11\} \cong e^{-15}\tfrac{15^{11}}{11!} = 0.0662874$$

13. המאורע $\{X = i\}$ מתרחש אם בבחירות הכדורים ה- i וה- $i-1$ הוצא בדיוק אותו הכדור, ובבחירות הקודמות להן לא היו שתי בחירות זהות של כדורים. כלומר, עבור i גדול מספיק, בבחירה הראשונה יכול להיבחר כל כדור ; בבחירה השנייה – כדור שונה מאשר בבחירה הראשונה (9 אפשרויות) ; בבחירה השלישית – כדור שונה מהכדור השני (9 אפשרויות) ; ... ; בבחירה ה- $i-1$ כדור שונה מאשר בבחירה ה- $i-2$ (9 אפשרויות) ; בבחירה ה- i כדור זהה לכדור ה- $i-1$ (אפשרות אחת).

לפיכך, לכל $i = 2,3,\ldots$, מתקיים :
$$P\{X = i\} = \frac{10 \cdot 9^{i-2} \cdot 1}{10^i} = 0.9^{i-2} \cdot 0.1$$

14.
$$E[X] = \sum_{i=2}^{\infty} iP\{X = i\} = \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot 0.1 \cdot 0.9^{i-2} = \sum_{i=1}^{\infty} (i+1) \cdot 0.1 \cdot 0.9^{i-1}$$
$$= E[Y+1] = E[Y] + 1 = 10 + 1 = 11 \qquad [Y \sim Geo(0.1)]$$

הערה: שימו לב, שמתקיים $X = Y + 1$, עבור $Y \sim Geo(0.1)$, כלומר, $P\{X = i\} = P\{Y + 1 = i\} = P\{Y = i - 1\}$ לכל $i = 2,3,\ldots$. לפיכך :
$$E[X] = E[Y] + 1 = 10 + 1 = 11$$

15.
$$E[X^2] = \sum_{i=2}^{\infty} i^2 P\{X = i\} = \sum_{i=2}^{\infty} i^2 \cdot 0.1 \cdot 0.9^{i-2} = \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)^2 \cdot 0.1 \cdot 0.9^{i-1}$$
$$= E[(Y+1)^2] = \mathrm{Var}(Y+1) + (E[Y+1])^2 \qquad [Y \sim Geo(0.1)]$$
$$= \mathrm{Var}(Y) + (E[Y]+1)^2 = \tfrac{0.9}{0.1^2} + 11^2 = 211$$

ומכאן כי :
$$\mathrm{Var}(X) = 211 - 11^2 = 90$$

הערה: גם כאן נוכל לנצל את הקשר $X = Y + 1$, עבור $Y \sim Geo(0.1)$, ולקבל :
$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y+1) = \mathrm{Var}(Y) = \tfrac{0.9}{0.1^2} = 90$$

16. הערכים האפשריים של X הם 0, 1 ו-2. את חישוב ההסתברויות של כל אחד מן הערכים נפריד לשני מקרים – אבי יושב בקצה השורה ואבי אינו יושב בקצה השורה. לכן, כל חישוב מורכב משני מחוברים, שהם ההסתברויות של המאורעות הזרים שאיחודם הוא המאורע $\{X = i\}$.

מקבלים :
$$P\{X = 1\} = \frac{2}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} + \frac{n-2}{n} \cdot 2 \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-2}{n-2} = \frac{4(n-2)}{n(n-1)}$$

17. בסימוני השאלה הקודמת :
$$P\{X = 2\} = \frac{2}{n} \cdot 0 + \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} = \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}$$

18. נשלים את חישוב ההסתברויות:
$$P\{X=0\}=\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n-1}+\frac{n-2}{n}\cdot 0=\frac{2}{n(n-1)}$$

ואכן מתקיים:
$$\sum_{i=0}^{2}P\{X=i\}=\frac{2+4(n-2)+(n-2)(n-3)}{n(n-1)}=\frac{n^2-n}{n(n-1)}=1$$

כעת, עבור $n=6$ מקבלים:

$$P\{X=0\}=\tfrac{2}{30}=\tfrac{1}{15}\quad;\quad P\{X=1\}=\tfrac{16}{30}=\tfrac{8}{15}\quad;\quad P\{X=2\}=\tfrac{12}{30}=\tfrac{6}{15}$$

ולכן:
$$E[X]=0\cdot\tfrac{1}{15}+1\cdot\tfrac{8}{15}+2\cdot\tfrac{6}{15}=\tfrac{20}{15}=\tfrac{4}{3}$$

$$E[X^2]=0^2\cdot\tfrac{1}{15}+1^2\cdot\tfrac{8}{15}+2^2\cdot\tfrac{6}{15}=\tfrac{32}{15}=2.1\overline{3}$$

$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\tfrac{32}{15}-\tfrac{16}{9}=\tfrac{96-80}{45}=\tfrac{16}{45}=0.3\overline{5}$$

19. נסמן את המשתנה המקרי המוגדר על-ידי עלות ביצוע הניסוי ב-Y. פונקציית ההסתברות של Y היא:
$$P\{Y=200\}=P\{X<15\}=5\cdot\tfrac{1}{11}=\tfrac{5}{11}\qquad;\qquad P\{Y=300\}=P\{X\geq 15\}=6\cdot\tfrac{1}{11}=\tfrac{6}{11}$$

והשונות של Y היא:
$$E[Y]=200\cdot\tfrac{5}{11}+300\cdot\tfrac{6}{11}=254.\overline{54}$$

$$E[Y^2]=200^2\cdot\tfrac{5}{11}+300^2\cdot\tfrac{6}{11}=67{,}272.\overline{72}$$

$$\mathrm{Var}(Y)=67{,}272.\overline{72}-254.\overline{54}^{\,2}=2{,}479.339$$

20. פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה המקרי Y, שהוגדר בשאלה הקודמת היא:

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & , \quad y<200\\ \tfrac{5}{11} & , \quad 200\leq y<300\\ 1 & , \quad y\geq 300\end{cases}$$

ומתקיים:
$$F_Y(150)=0\quad;\quad F_Y(200)=F_Y(225)=F_Y(250)=\tfrac{5}{11}\quad;\quad F_Y(325)=1$$