האוניברסיטה הפתוחה

20476

מתמטיקה בדידה

חוברת הקורס סתיו 2014א

כתב: איתי הראבן

אוקטובר 2013- סמסטר סתיו תשע"ד

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מתמטיקה בדידה".
אנא קראו בעיון את כל הסעיפים לפני שתתחילו בלימודיכם. פרטים לגבי נהלים המקובלים באוניברסיטה הפתוחה מפורטים בידיעון האקדמי. תיאורי הקורסים מופיעים בקטלוג הקורסים.

<u>הערה:</u> על חלק מספרי הלימוד וחלק מחומרי העזר של הקורס מופיעים מספרי קורס 20276, 20283. חומרים אלה הועברו לקורס שלנו מקורס שפעל באו"פ בשנים קודמות.

קורס זה מתוקשב במסגרת הפעילות של מחלקת תלם (תקשוב ללימוד מרחוק).
קורס מתוקשב כולל, נוסף על יחידות הלימוד הכתובות, גם פעילות באתר הקורס באינטרנט.
פעילות זו כוללת: אינטראקציה בין הסטודנטים לצוות ההוראה באמצעות קבוצות דיון ודואר אלקטרוני, הפניות למאגרי מידע ולאתרים ברשת האינטרנט, חומרי לימוד והעשרה. הפעילות באתר הקורס אינה חובה אך האתר יכול לסייע מאוד בלימוד הקורס.
כתובת אתרי הקורסים: **http://telem.openu.ac.il**.
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מרכז ההוראה בקורס הוא איתי הראבן.
ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון **02-6733210** בימי ד', בין השעות 19:00 - 20:00.
- דרך אתר הקורס.
- בדואר אלקטרוני itaiha@openu.ac.il
- פקס: **09-7780631**, לרשום "עבור איתי"

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה ,
צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20476 /2014א)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח	
				ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
1	18.10.2013-13.10.2013	החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"			
2	25.10.2013-20.10.2013	תורת הקבוצות פרק 1		ממ"ח 01 יום ו' 25.10.2013	
3	1.11.2013-27.10.2013	תורת הקבוצות סעיפים 2.1 -2.4			ממ"ן 11 יום ה' 31.10.2013
4	8.11.2013-3.11.2013	תורת הקבוצות סעיפים 2.5 -3.1		ממ"ח 02 יום ו' 8.11.2013	
5	15.11.2013-10.11.2013	תורת הקבוצות סעיפים 3.2- 3.5		ממ"ח 03 יום ו' 15.11.2013	
6	22.11.2013-17.11.2013	תורת הקבוצות סעיף 4.1			ממ"ן 12 יום ו' 22.11.2013
7	29.11.2013-24.11.2013 (ה-ו חנוכה)	תורת הקבוצות פרק 5 (חוברת נפרדת)			
8	6.12.2013-1.12.2013 (א-ה חנוכה)	חזרה על החומר			
9	13.12.2013-8.12.2013	קומבינטוריקה סעיפים 1.1- 2.3			ממ"ן 13 יום ג' 10.12.2013

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	 ממ"ן (למנחה)
10	20.12.2013-15.12.2013	קומבינטוריקה סעיפים 2.4 - 3.2		ממ"ח 04 יום ו' 20.12.2013	
11	27.12.2013-22.12.2013	קומבינטוריקה פרקים 4 - 5			
12	3.1.2014-29.12.2013	קומבינטוריקה פרקים 6 - 7			ממ"ן 14 יום א' 29.12.2013
13	10.1.2014-5.1.2014	תורת הגרפים פרקים 1-2			ממ"ן 15 יום ה' 9.1.2014
14	17.1.2014-12.1.2014	תורת הגרפים פרקים 3-4			
15	24.1.2014-19.1.2014	תורת הגרפים פרקים 5-6		ממ"ח 05 יום ו' 24.1.2014	ממ"ן 16 יום ג' 28.1.2014

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

מטלות הקורס

קראו היטב עמודים אלה לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס. הבנה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. מטלות המנחה (ממ"ים) יבדקו על-ידי המנחה ויוחזרו לכם בצירוף הערות המתייחסות לתשובות. על מטלות המחשב (ממ"חים) תקבלו רק פירוט תשובות נכונות ולא נכונות.

מבנה המטלות

כל מטלה מורכבת מכמה שאלות. משקל כל השאלות זהה אלא אם כן צוין אחרת.
את הפתרונות לממ"ן עליכם לרשום על דף בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. לחילופין ניתן להגיש את המטלות מודפסות במעבד תמלילים, בתנאי שכל הסימונים המתמטיים ברורים. אין להשתמש בסימונים שאינם מופיעים ביחידות.

ניקוד המטלות

בקורס 6 מטלות מנחה (ממ"נים) ו- 5 מטלות מחשב (ממ"חים).
משקלי המטלות: משקל כל ממ"ן הוא 3 נקודות, פרט לממ"ן 12 שמשקלו 4 נקודות.
משקל כל ממ"ח הוא 2 נקודות, פרט לממ"ח 05 שמשקלו 3 נקודות.
בהגשת כל המטלות ניתן אפוא לצבור 30 נקודות.

דרישות חובה בהגשת המטלות

חובה להגיש מטלות במשקל של 20 נקודות לפחות.
בין המטלות שתגישו חייבות להיות לפחות ארבע מטלות מנחה (ממ"נים)

התנאים לקבלת נקודות זכות

א. להגיש מטלות במשקל של 20 נק' לפחות. כאשר מתוכן **לפחות ארבע מטלות מנחה (ממ"נים)**

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.

ג. לקבל בציון הסופי 60 נקודות לפחות.

הערות חשובות לתשומת לבך!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ״ח) 01

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה**: החוברת ״מבוא מהיר ללוגיקה״

מספר השאלות: 13 **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2014א **מועד אחרון להגשה:** יום ו׳ 25.10.2013

את התשובות לממ״ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת״א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ״ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ״ח למנחה!

בשאלות המסומנות בסולמית (#) מופיעות שתי טענות. בשאלות אלה סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה ב - אם רק טענה 2 נכונה

ג - אם שתי הטענות נכונות ד - אם שתי הטענות אינן נכונות

שאלה 1

1. האמירה הכבשה דולי היא היצור החי הראשון ששובּט היא פסוק.
2. הביטוי המתמטי $(1+2)-(3+4)$ הוא פסוק.

שאלה 2

1. **שלילת** הפסוק הכד נמצא על השולחן
   היא הפסוק הכד נמצא מתחת לשולחן
2. **שלילת** הפסוק איציק שפך את המים מהכד
   היא הפסוק איציק מילא את הכד במים

שאלה 3

1. הפסוק $1+1=4$ **וגם** $2+3=5$ הוא אמת.
2. הפסוק $1+1=2$ **או** $3+3>2$ הוא אמת.

שאלה 4 #

1. הפסוק **אם** $3 = 2$ **אז** בעולם חיים כיום יותר ממיליארד בני אדם הוא אמת.

2. הפסוק **אם** $3 = 2$ **אז** בעולם חיים כיום פחות ממיליארד בני אדם הוא אמת.

שאלה 5 #

1. לוח האמת של הפסוק הפורמלי $(p \to q) \wedge (q \to r)$ הוא :

p	q	r	$(p \to q) \wedge (q \to r)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**F**
F	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**T**

2. הפסוק הפורמלי $(\neg p) \wedge \neg(p \to q)$ הוא סתירה.

שאלה 6 #

1. הפסוק הפורמלי $\neg(p \to q)$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $p \wedge \neg q$.

2. הפסוק הפורמלי $p \leftrightarrow q$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $(p \wedge q) \vee \big((\neg p) \wedge (\neg q)\big)$.

שאלה 7 #

1. $\neg\big((p \vee q) \wedge r\big)$ שקול טאוטולוגית ל- $\big((\neg p) \wedge (\neg q)\big) \vee \neg r$.

2. $p \wedge \neg(p \wedge q)$ שקול טאוטולוגית ל- $p \wedge \neg q$.

שאלה 8 #

1. **שלילת** הפסוק **השולחן לבן והכסא שחור**
שקולה לפסוק **השולחן לא לבן והכסא לא שחור**

2. **שלילת** הפסוק **זה יקרה מחר או מחרתיים**
שקולה לפסוק **זה לא יקרה מחר וזה לא יקרה מחרתיים**

שאלה 9 #

1. מתוך הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p$ נובע טאוטולוגית הפסוק r .

2. מתוך הפסוק r נובע טאוטולוגית הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p$.

שאלה 10 #

נתבונן בפסוק: **כל מספר הגדול מ- 100, השורש הריבועי שלו גדול מ- 10.**

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x\left(x > 100 \wedge \sqrt{x} > 10\right)$

2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x\left(x > 100 \to \sqrt{x} > 10\right)$

שאלה 11 #

נתבונן שוב בפסוק: **כל מספר הגדול מ- 100, השורש הריבועי שלו גדול מ- 10.**

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\left(\forall x\ (x > 100)\right) \wedge \sqrt{x} > 10$

2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\left(\forall x\ (x > 100)\right) \to \forall x(\sqrt{x} > 10)$

בשאלות 12, 13 אין זוגות של טענות, פשוט בחרו את התשובה הנכונה.

שאלה 12

1. את **שלילת** הפסוק

לכל x קיים y שהוא השורש הריבועי של x

ניתן לנסח כך:

א. לכל x לא קיים y שהוא השורש הריבועי של x .

ב. קיים x כך שלכל y , y אינו השורש הריבועי של x .

ג. קיים x כך שקיים y שאינו השורש הריבועי של x .

ד. לכל x קיים y שאינו השורש הריבועי של x .

ה. לא לכל y קיים x כך ש- y הוא השורש הריבועי של x .

שאלה 13

נתבונן בטענות הבאות:

A: **לכל סנדלר קיים אדם, שכל הנעלים שלו עברו תיקון אצל הסנדלר הזה.**

P: לכל אדם קיים סנדלר, שלא תיקן אף נעל של אותו אדם.

Q: לכל סנדלר קיים אדם, שאף אחת מהנעלים שלו לא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

R: לכל סנדלר קיים אדם, שלפחות נעל אחת שלו לא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

S: קיים סנדלר כך שלכל אדם יש לפחות נעל אחת שלא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

T: קיים סנדלר שמעולם לא תיקן שתי נעלים של אותו אדם.

מבין הטענות P,Q,R,S,T , הטענה השקולה **<u>לשלילת</u>** A היא:

א. P ב. Q ג. R ד. S ה. T

מטלת מנחה (ממ״ן) 11

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 1

מספר השאלות: 4

משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2014א

מועד אחרון להגשה: יום ה׳ 31.10.2013

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (20 נק׳)

שאלה זו נועדת לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות ולחדד כמה נקודות שכדאי להבינן בשלב מוקדם:

* ההבדל בין A לבין $\{A\}$ (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא A).
 * מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה $\varnothing$ לבין $\{\varnothing\}$.
* ההבדל בין "x איבר של y" לבין "x חלקי ל- y".

נתונות הקבוצות $A = \{\text{David}\}$, $B = \{\varnothing, A\}$. מצאו אילו מהטענות הבאות נכונות.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק - די לתת את רשימת הסעיפים הנכונים.

א. $\varnothing \in A$ ב. $\varnothing \subseteq A$ ג. $\varnothing \in B$

ד. $\{\varnothing\} \in B$ ה. $P(A) = B$ ו. $A \subseteq B$

ז. $A \cap B = \varnothing$ ח. $B = A \cup \{\varnothing\}$ ט. $B = \{A\} \cup \{\varnothing\}$

י. $P(B) = \{\varnothing , \{A\}, \{\varnothing\} , B\}$

שאלה 2 (28 נק׳)

א. הוכיחו: אם $X \subseteq Y$ אז $P(X) \subseteq P(Y)$.

ב. הוכיחו: $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$. נמקו היטב כל שלב בהוכחה.

לגבי **איחוד** לא מתקיימת טענה כללית הדומה לזו שבסעיף ב׳: ר׳ החוברת ״אוסף תרגילים פתורים״ עמ׳ 1 שאלה 2 . בסעיפים הבאים נבדוק מתי בדיוק כן מתקיים שוויון כזה עבור איחוד .

ג. הוכיחו **שאם** $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$ **אז** $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

ד. הוכיחו את הכיוון ההפוך לטענה שבסעיף ב׳, כלומר הוכיחו
שאם $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ **אז** $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$.

הדרכה: נוח להוכיח סעיף זה בדרך השלילה. מהי בדיוק הנחת השלילה במקרה זה?

שאלה 3 (24 נק')

תנו **שתי הוכחות** לשוויון $A \oplus B = A' \oplus B'$. הוכחה אחת מהצורה "יהי x איבר של אגף ימין, נראה שהוא איבר של אגף שמאל ... ולהיפך...", והוכחה שניה בעזרת אלגברה של קבוצות, ללא שימוש במושג "איבר". בהוכחה הראשונה היעזרו בטענות שלמדנו בתחשיב הפסוקים כדי לעבור מביטוי לביטוי שקול. בהוכחה השניה היעזרו בטענות מפרק 1 בתורת הקבוצות.

הסימן $\oplus$ (הפרש סימטרי) מוגדר בשאלה 1.22 בכרך "תורת הקבוצות".

שאלה 4 (28 נק')

איחוד של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בהגדרה 1.6 בעמוד 12 בספר.

במלים פשוטות ההגדרה היא:

$x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ אםם x שייך **לפחות** לאחת הקבוצות A_i, כאשר i מקבל ערכים ב- I.

במלים אחרות:

$$\boxed{x \in \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{אםם} \quad \exists i\left(i \in I \ \wedge \ x \in A_i\right)}$$

חיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בעמוד 16 בספר. במלים פשוטות ההגדרה היא:

$x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ אםם x שייך **לכל** הקבוצות A_i, כאשר i מקבל ערכים ב- I.

במלים אחרות:

$$\boxed{x \in \bigcap_{i \in I} A_i \quad \text{אםם} \quad \forall i\left(i \in I \ \rightarrow \ x \in A_i\right)}$$

השאלה שלפניכם מתרגלת את השימוש בשני מושגים האלה.

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbf{N} = \{0,1,2,...,\}$ (ר' עמ' 3 בספר הלימוד).

לכל $n \in \mathbf{N}$, תהיינה: $A_n = \{x \in \mathbf{N} \mid 3 \le x < 2n\}$, $B_n = A_{n+1} - (A_n \cup \{2n\})$,

חשבו מיהן הקבוצות הבאות, כלומר מצאו ביטוי מפורש לכל אחת מהן, כגון $\{x \in \mathbf{N} \mid x < 100\}$.

הוכיחו.

א. $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$.

ב. $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n$

ג. $\bigcap_{\substack{n \in \mathbf{N} \\ n > 4}} A_n$

ד. $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_n$

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרק 2
מספר השאלות: 11 | **משקל המטלה:** 2 נקודות
סמסטר: 2014א | **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 8.11.2013

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

"רלציה" בעברית: **יחס**.

בשאלות המסומנות בסולמית (#) מופיעות שתי טענות. בשאלות אלה סמנו:
א - אם רק טענה 1 נכונה   ב - אם רק טענה 2 נכונה
ג - אם שתי הטענות נכונות   ד - אם שתי הטענות אינן נכונות

בשאלות ללא סימון סולמית בחרו את התשובה הנכונה מתוך האפשרויות.

שאלה 1

יהי $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(2,2)\}$. נתבונן בשוויון $R=X\times Y$.

א. אם $X=\{1\}$, $Y=\{1,2,3\}$ אז $R=X\times Y$.
ב. אם $X=\{1,2\}$, $Y=\{1,2,3\}$ אז $R=X\times Y$.
ג. השוויון $R=X\times Y$ מתקיים עבור X,Y מסוימים, שאינם אלה שהוצגו בתשובות א, ב.
ד. לא קיימות קבוצות X,Y כך ש- $R=X\times Y$.

שאלה 2

תהי $A=\{1,2,3,4\}$ ויהי R היחס הבא מ- A ל- A: $R=\{(1,4),(2,1),(3,3),(3,4),(4,3)\}$.

$Domain(R)\cap Range(R)$ הוא:

א. $\{1\}$ ב. $\{1,3,4\}$ ג. $\varnothing$ ד. $\{3,4\}$ ה. A

שאלה 3

R ,A הם אלה שהוגדרו בשאלה 2. S הוא יחס מעל A המקיים $SR=RS$. מכאן **נובע**(!):

א. $S=\varnothing$ ב. $S=I_A$ ג. $S=R$
ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 4 #

R,A הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

טענה (*i*) : $RR^{-1} = I_A$. טענה (*ii*) : $R^{-1}R = I_A$.

שאלה 5

R ,A הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

א. $R = R^2$. ב. $R \neq R^2$ אבל $R^2 = R^3$.

ג. $R^2 \neq R^3$ אבל $R^3 = R^4$. ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 6 #

R ,A הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

טענה (*i*) : $R \cup R^2$ הוא רפלקסיבי.

טענה (*ii*) : $R \cup R^2$ הוא אנטי-סימטרי.

שאלה 7 #

R ,A הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

טענה (*i*) : $R \cup R^2$ הוא סימטרי.

טענה (*ii*) : $R \cup R^2$ הוא טרנזיטיבי.

שאלה 8

היחס $R = \{(1,1),(2,2)\}$ מעל $A = \{1,2,3\}$ הוא :

א. רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

ב. סימטרי ורפלקסיבי אך לא טרנזיטיבי.

ג. סימטרי וטרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי.

ד. רפלקסיבי וטרנזיטיבי אך לא סימטרי.

ה. טרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי ולא סימטרי.

שאלה 9 #

R,S הם יחסים מעל קבוצה A ומתקיים $R \subseteq S$.

טענה (*i*) : אם S סימטרי אז R סימטרי.

טענה (*ii*) : אם S אנטי-סימטרי אז R אנטי-סימטרי

שאלה 10

R הוא יחס טרנזיטיבי מעל קבוצת הטבעיים **N**. ידוע שב- R יש לפחות שני זוגות סדורים.

מכאן ניתן להסיק:

א. ב- R יש לפחות 3 זוגות סדורים.

ב. ב- R יש אינסוף זוגות סדורים.

ג. $R^2 = R$.

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 11

R הוא יחס מעל קבוצה כלשהי, וידוע ש- R **אינו** טרנזיטיבי.

מכאן ניתן להסיק:

א. ב- R יש לפחות שני זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש R כזה שבו בדיוק שני זוגות.

ב. ב- R יש לפחות 3 זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש R כזה שבו בדיוק 3 זוגות.

ג. ב- R יש לפחות 4 זוגות סדורים.

ד. מהנתון נובע ש- A אינסופית וב- R יש אינסוף זוגות סדורים.

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: 20476 **מתמטיקה בדידה** | **חומר הלימוד למטלה**: "תורת הקבוצות" פרקים 2-3
מספר השאלות: 12 | **משקל המטלה:** 2 נקודות
סמסטר: 2014א | **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 15.11.2013

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

"רלציה" בעברית: יחס.

שאלה 1

יהיו: $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $R=\{(1,2),(1,3),(2,3),(5,6)\}$, $E=I_A\cup R\cup R^{-1}$.

החלוקה שיחס השקילות E משרה ב- A היא:

א. $\{\{1,2,3\},\{5,6\}\}$ ב. $\{\{1,2,3\},\{4\},\{5,6\}\}$

ג. $\{\{1,2,3,5,6\}\}$ ד. $\{\{1,2,3,4,5,6\}\}$

ה. $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{5,6\}\}$

ו. E אינו יחס שקילות מעל A ולכן אינו משרה חלוקה של A.

שאלה 2

נגדיר יחס M מעל קבוצת המספרים השלמים $\mathbf{Z}$:

עבור n,m שלמים, $(n,m)\in M$ אם $7n-7m$ מתחלק ב- 3.

מספר מחלקות השקילות ש- M משרה ב- $\mathbf{Z}$ הוא:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. יש אינסוף מחלקות שקילות.

ה. M אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

שאלה 3

נגדיר יחס L מעל $\mathbf{Z}$: $(n,m)\in L$ אם $n-2m$ מתחלק ב- 3.

מספר מחלקות השקילות ש- L משרה ב- $\mathbf{Z}$ הוא:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. יש אינסוף מחלקות שקילות.

ה. L אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

הבהרה לשאלות 2, 3:

המושג "מתחלק" מוגדר גם עבור שלמים שליליים, למשל -12 מתחלק ב- 3.

ההגדרה היא: n מתחלק ב- m אם ורק אם קיים מספר שלם k כך ש- $n=km$.

שאלה 4

מספר יחסי השקילות השונים מעל הקבוצה $\{1,2,3,4\}$, בהם 3 ו- 4 **אינם** באותה מחלקת שקילות הוא:

א. 6 ב. 7 ג. 8 ד. 9 ה. 10

שאלה 5

Z היא קבוצת המספרים השלמים. נגדיר פונקציה f מ- $\mathbf{Z}$ ל- $\mathbf{Z}$: $f(k)=(k-1)(k+2)$.

f היא:

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbf{Z}$ ל- $\mathbf{Z}$.

שאלה 6

נסמן $\mathbf{R}^+=\{x\in\mathbf{R} \mid x>0\}$. תהי $g(x)=\dfrac{1+x}{1+5x}$, $g:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$.

g היא:

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbf{R}^+$ ל- $\mathbf{R}^+$.

שאלה 7

תהי $f(X)=X-\mathbf{N}$, $f:P(\mathbf{R})\to P(\mathbf{R})$.

f היא:

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $P(\mathbf{R})$ ל- $P(\mathbf{R})$.

שאלה 8

תהי $U=\{1,2,3,4,5\}$ ותהיינה $A,B\subseteq U$.

בעמ' 85 בכרך "תורת הקבוצות" מוגדרת φ_A, **הפונקציה האופיינית** של A ב- U.

נניח שלכל $x\in U$ מתקיים $\varphi_A(x)+\varphi_B(x)\le 1$. מכאן נובע:

א. $A\cup B=U$, אבל ייתכן ש- $A\cap B\neq\varnothing$.

ב. $A\cap B=\varnothing$, אבל ייתכן ש- $A\cup B\neq U$.

ג. $A'=B$, כלומר $A\cup B=U$ **וגם** $A\cap B=\varnothing$.

ד. $A\subseteq B$ או $B\subseteq A$.

שאלה 9

יהיו $X,Y \subseteq \mathbf{N}$. נאמר ש- $(X,Y) \in D$ **אסם (אם ורק אם)** $X \subseteq Y$. היחס D הוא:

א. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$ ואינו סדר-מלא מעל $P(\mathbf{N})$.

ב. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$, שהוא גם סדר-מלא מעל $P(\mathbf{N})$.

ג. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$, שהוא גם יחס שקילות מעל $P(\mathbf{N})$.

ד. אינו סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$.

שאלה 10

יהיו $X,Y \subseteq \mathbf{N}$. נאמר ש- $(X,Y) \in D$ **אסם (אם ורק אם)** $X \subseteq Y$ או $Y \subseteq X$.

היחס D הוא:

א. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$ ואינו סדר-מלא מעל $P(\mathbf{N})$.

ב. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$, שהוא גם סדר-מלא מעל $P(\mathbf{N})$.

ג. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$, שהוא גם יחס שקילות מעל $P(\mathbf{N})$.

ד. אינו סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$.

שאלה 11

R הוא סדר-חלקי על קבוצה כלשהי A.

a,b הם שני אברים שונים של A, ושניהם אברים מקסימליים לגבי R . מכאן נובע:

א. $|A| = 2$.

ב. R הוא סדר מלא מעל A .

ג. R אינו סדר מלא מעל A.

ד. A היא אינסופית.

ה. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

שאלה 12

R הוא סדר-חלקי על קבוצה כלשהי A.

a,b הם שני אברים שונים של A, ושניהם אברים גדולים ביותר לגבי R . מכאן נובע:

א. $|A| = 2$.

ב. R הוא סדר מלא מעל A .

ג. R אינו סדר מלא מעל A.

ד. A היא אינסופית.

ה. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרקים 2- 3

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2014א **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 22.11.2013

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

"רלציה" בעברית: **יחס**

שאלה 1 (24 נקודות)

תהי $A=\{1,2,3\}$ ותהי M קבוצת כל היחסים מעל A.

תהי $s:M\to M$ הפונקציה המתאימה לכל $R\in M$ את הסגור הסימטרי שלו.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. s היא חד-חד-ערכית ב. s היא **על** M

ג. לכל $R\in M$, $s(R^2)=\left(s(R)\right)^2$ ד. לכל $R\in M$, $s(s(R))=s(R)$

שאלה 2 (30 נקודות)

הגדרה: מספר טבעי חיובי נקרא **ראשוני** (prime) אם הוא שונה מ- 1, ומתחלק ללא שארית רק בעצמו וב- 1. כבר ליוונים היה ידוע שקבוצת המספרים הראשוניים היא אינסופית.

שימו לב ש- 1 אינו נחשב ראשוני. קבוצת הראשוניים "מתחילה" כך: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

משפט ידוע קובע שכל מספר טבעי הגדול מ- 1 ניתן להצגה כמכפלה של מספרים ראשוניים, ויש רק דרך אחת להציג אותו כך, עד כדי החלפת סדר הגורמים במכפלה (מה היה מתקלקל במשפט זה אילו 1 היה נחשב ראשוני?).

נסמן $\mathbf{N}^*=\mathbf{N}-\{0\}$. תהי $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$ הפונקציה המתאימה לכל טבעי n הגדול מאפס את **מספר** המספרים הטבעיים החיוביים (לאו דווקא ראשוניים!) שבהם n מתחלק ללא שארית.

למשל 12 מתחלק ב- 6 מספרים שונים: $1,2,3,4,6,12$ ולכן $f(12)=6$.

1 מתחלק רק בעצמו ולכן $f(1)=1$.

א. האם f היא חד-חד-ערכית?

ב. האם f היא **על** $\mathbf{N}^*$? הדרכה: יהי p מספר ראשוני. הסתכלו בחזקות של p.

(המשך השאלה בעמ' הבא)

(המשך שאלה 2)

הפונקציה f מחלקת את $\mathbf{N}^*$ למחלקות שקילות, בעזרת התנאי: n,m שייכים לאותה מחלקה אםם $f(n)=f(m)$. ראו הסעיף "העתק טבעי" בעמ' 84 בספר, וראו הסבר מפורט יותר באתר הקורס, מאגר המשאבים, עזרים ללמידה - "יחס שקילות המושרה על-ידי פונקציה".
המשך השאלה מתייחס לחלוקה זו.

ג. מיהם כל המספרים הנמצאים באותה מחלקה עם המספר 5 ?

ד. מיהם כל המספרים הנמצאים באותה מחלקה עם המספר 4 ?

ה. האם מספר מחלקות השקילות ש- f משרה ב- $\mathbf{N}^*$ הוא סופי או אינסופי ?

ו. הוכיחו שפרט למחלקה שבה נמצא 1 , כל אחת ממחלקות השקילות מכילה אינסוף איברים.
יש לנמק כל תשובה.

שאלה 3 (24 נקודות)

בכרך "תורת הקבוצות" בעמ' 94, שאלה 3.25א, מוכח שיחס ההכלה $\subseteq$ הוא סדר-חלקי מעל כל קבוצה של קבוצות. תהי $A=\{1,2,3,4\}$ ותהי K קבוצת כל היחסים **האנטי-סימטריים** מעל A.
מכיון שיחס הוא סוג מסוים של קבוצה (קבוצה של זוגות סדורים), מתקבל מהאמור למעלה שיחס ההכלה $\subseteq$ הוא סדר-חלקי מעל K . השאלה מתייחסת לסדר-חלקי זה.

א. הראה שיש ב- K איבר קטן ביותר - מיהו? הוכח שהוא הקטן ביותר.

ב. מצא איבר מקסימלי ב- K. הוכח שהוא מקסימלי.

ג. הוכח שאין ב- K איבר גדול ביותר.

שאלה 4 (22 נקודות)

פונקציה $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ מוגדרת ברקורסיה כך:

$f(0)=1$, ולכל $k\in\mathbf{N}$: $f(k+1)=(k+1)\cdot f(k)$

(בהמשך הקורס נחזור לפונקציה זו ונקרא לה בשם "עצרת").

(5 נק') א. חשבי את $f(5)$.

(17 נק') ב. הוכיחי באינדוקציה: $1\cdot f(1)+2\cdot f(2)+3\cdot f(3)+\ldots+n\cdot f(n)=f(n+1)-1$

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרקים 4-5

מספר השאלות: 5 | **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2014א | **מועד אחרון להגשה:** יום ג' 10.12.2013

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

חלק מהממ"ן מסתמך על החוברת "פרק 5" שנמצאת בידיכם.

חוברת זו משלימה את פרק 4 בתורת הקבוצות ומחליפה חלק ממנו.

שאלה 1 (27 נק')

$\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים, $\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים.

בכל סעיף מצא את עוצמת הקבוצה הרשומה בו. הוכח את תשובותיך.

(9 נק') א. $K = \{x \in \mathbf{R} \mid 0.17 + 3x \in \mathbf{Z}\}$

(9 נק') ב. $L = \{ (x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 4x - y = 5 \}$

(9 נק') ג. $M = \{ (x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x + y \in \mathbf{Z}$ וגם $4x - y = 5 \}$

שאלה 2 (10 נק')

נתונות 100 קבוצות $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$, שכולן חלקיות לקבוצת הממשיים $\mathbf{R}$.

נתון שלכל i ($1 \le i \le 100$), **<u>המשלים</u>** של A_i ב- $\mathbf{R}$ הוא קבוצה בת-מניה.

נסמן $A = \bigcap_{1 \le i \le 100} A_i$. נסמן ב- B את **<u>המשלים</u>** של A ב- $\mathbf{R}$.

עוצמת B היא:

[1] 0 **[2]** מספר טבעי כלשהו שאינו 0 **[3]** $\aleph_0$

[4] C **[5]** התשובה תלויה בבחירת הקבוצות $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$.

מצאו את התשובה הנכונה **ונמקו**.

את שתי השאלות הקודמות ניתן (וכדאי) לפתור רק בעזרת פרק 4, עמ' 116 – 128.
שלוש השאלות הבאות מסתמכות על פרק 5 .

שאלה 3 (18 נק')

תהיינה A,B,C קבוצות **בנות מניה**, החלקיות לקבוצת הממשיים $\mathbf{R}$.

נסמן: $D = A' \cap B' \cap C'$ (המשלימים הם יחסית ל- $\mathbf{R}$). עוצמת D היא:

[1] 0 **[2]** מספר טבעי כלשהו שאינו 0 **[3]** $\aleph_0$

[4] C **[5]** התשובה תלויה בבחירת הקבוצות A,B,C .

מצאו את התשובה הנכונה **ונמקו**.

שאלה 4 (20 נק')

(8 נק') א. הוכיחי שקבוצת היחסים (רלציות) מעל הקבוצה $\mathbf{N}$, עוצמתה C .
הדרכה: כדאי להיזכר בהגדרה של רלציה מעל קבוצה.

(12 נק') ב. הוכיחי שקבוצת היחסים **האנטי-סימטריים** מעל $\mathbf{N}$, עוצמתה C .

שאלה 5 (25 נק')

(12 נק') א. תהיינה k_1,k_2,m עוצמות. נתון $k_1 \le k_2$. הוכח: $k_1^m \le k_2^m$.

(13 נק') ב. הוכח: $\aleph_0^{\aleph_0} = C$. כדאי להיעזר בסעיף א.

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: "קומבינטוריקה" פרקים 1-2
מספר השאלות: 11 | **משקל המטלה:** 2 נקודות
סמסטר: 2014א | **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 20.12.2013

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בשאלות 1 – 4 A,B הן קבוצות סופיות, $|A|=5$, $|B|=3$.

שאלה 1

מספר הפונקציות של B ל- A הוא:

א. 8 ב. 10 ג. 15 ד. 125 ה. 243

שאלה 2

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של B ל- A הוא:

א. 3 ב. 8 ג. 60 ד. 120 ה. 240

שאלה 3

מספר היחסים הסימטריים מעל A הוא:

א. 25 ב. 32 ג. 2^{15} ד. 2^{25} ה. 5^{25}

שאלה 4

נניח ש- $A=\{1,2,3,4,5\}$.

מספר יחסי הסדר המלא מעל A , שבכל אחד מהם 5 הוא האבר הגדול ביותר, הוא:

א. 16 ב. 24 ג. 32 ד. 120 ה. 256

שאלות 5- 7 עוסקות בדרכים שונות לסדר את המחרוזת abbccddd (להלן: "המחרוזת").

שאלה 5

מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת הוא:

א. 8 ב. 11 ג. 1,680 ד. 40,309 ה. 40,320

שאלה 6

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת כאשר צמד האותיות cc חייב להופיע ברצף?

א. 7 ב. 420 ג. 5,030 ד. 5,040 ה. 12,520

שאלה 7

בנוסף לדרישה שבשאלה 6, נדרוש גם **שלא** יופיע הרצף ddd.

מספר הסידורים האפשריים כעת קטן ממספר הסידורים שמצאתם בשאלה 6. **בכמה הוא קטן?**

א. 5 ב. 60 ג. 120 ד. 410 ה. 5,030

שאלות 8 – 10 עוסקות בחמש משפחות שיצאו יחד למנגל והכינו 9 סטֵייקים **זהים** ו- 12 שיפודים **זהים**. המשפחות **אינן** נחשבות זהות. כמו כן, סטייק **אינו** זהה לשיפוד.

שאלה 8

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לחלק את 12 השיפודים בין המשפחות?

יש לחלק את כל השיפודים. ייתכן שמשפחה לא רוצה שיפודים כלל.

א. $D(5,12)=\binom{16}{11}$ ב. $D(5,12)=\binom{16}{4}$ ג. 792 ד. 5^{12} ה. $D(12,5)$

שאלה 9

נסמן את התשובה לשאלה הקודמת ב- x. בכמה דרכים ניתן לחלק את כל האוכל בין המשפחות?

יש לחלק את כל השיפודים ואת כל הסטייקים. ייתכן שמשפחה לא רוצה אוכל כלל.

א. $x+1,287$ ב. $x+715$ ג. $x\cdot 1,287$ ד. $x\cdot 715$

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 10

בכמה דרכים ניתן לחלק רק את 12 השיפודים בין המשפחות, אם משפחת כהן חייבת לקבל לפחות 3 שיפודים, וכל משפחה אחרת חייבת לקבל שיפוד אחד לפחות?

א. 1 ב. 126 ג. 261 ד. 612 ה. 621

שאלה 11

מהו מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+6x_5=12$?

תזכורת: בקורס זה, 0 הוא מספר טבעי.

הדרכה: במחובר האחרון בצד שמאל אפשר לטפל ע"י הפרדה למקרים.

א. 45 ב. 54 ג. 450 ד. 540 ה. 4,500

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה — **חומר הלימוד למטלה**: קומבינטוריקה פרקים 3-4

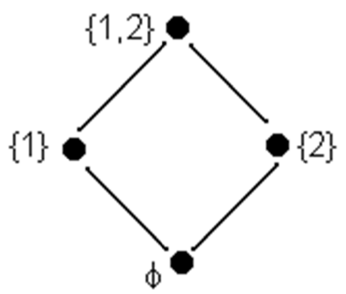
מספר השאלות: 4 — **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2014א — **מועד אחרון להגשה:** יום א' 29.12.2013

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונות (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (27 נקודות)



באיור מופיעה דיאגרמת הסה ("תורת הקבוצות" עמ' 88) של יחס ההכלה $\subseteq$ מעל $P(\{1,2\})$.

אנו רואים כי בדיאגרמה 4 קטעים.

תהי A קבוצה בת n איברים $(n > 0)$. מצאי את מספר הקטעים בדיאגרמת הסה של יחס ההכלה מעל $P(A)$.

את הביטוי המתקבל סכמי לביטוי פשוט שאינו מכיל סכומים, בעזרת נוסחה המופיעה באחת השאלות בספר הלימוד.

שאלה 2 (27 נקודות)

נתבונן בסדרות באורך 6, שהאברים שלהן לקוחים מהקבוצה $\{1,2,3,4,5,6\}$.

דוגמאות לסדרות כאלה: *(i)* 113124 *(ii)* 464612 *(iii)* 222666.

(5 נק') א. כמה סדרות כאלה יש?

(22 נק') ב. מיצאו בכמה מהסדרות האלה נמצאות שלוש הספרות 1,2,3.

הספרות 4,5,6 יכולות אבל לא חייבות להימצא.

דוגמא *(i)* למעלה מקיימת תנאי זה, דוגמאות *(ii)*, *(iii)* לא מקיימות אותו.

בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

את סעיף ב' כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה.

שאלה 3 (27 נקודות)

ששה חברים טסו לטיול בגאורגיה.

המקומות שלהם במטוס היו: שורות 1, 2, 3, בכל שורה כסאות A,B (כסאות סמוכים זה לזה).
בטיסה חזרה הם קיבלו בדיוק אותם מקומות, אבל אף אחד לא היה מוכן לשבת ליד (כלומר באותה שורה עם) מי שישב לידו בדרך הלוך.

בכמה דרכים הם יכולים להתיישב בטיסה חזרה לארץ?

כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה. הבהרות:

* את סידור הישיבה בטיסה מישראל לגאורגיה אפשר לקחת כנתון שאין בו בחירה.
* יש חשיבות למושבים: מצב בו דינה יושבת בכסא A1 שונה ממצב בו היא יושבת בכל כסא אחר.
* אין דרישה שכל אחד יישב בכסא שונה מהכסא בו הוא ישב בטיסה לגאורגיה.

שאלה 4 (19 נקודות)

לטקס בוגרים של האוניברסיטה הגיעו 700 אנשים (בוגרים ואורחים שונים).

במהלך הערב חלק מהאנשים לחצו ידים זה לזה.

הוכח שיש לפחות שני אנשים שלחצו בדיוק אותו מספר ידים.

הבהרות: אדם לא לוחץ יד לעצמו ☺

שני אנשים אינם לוחצים יד זה לזה יותר מפעם אחת.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20476 מתמטיקה דיסקרטית **חומר הלימוד למטלה**: קומבינטוריקה פרקים 6-7

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2014א **מועד אחרון להגשה:** יום ה' 9.1.2014

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"): • במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א • על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה • על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1

יהי a_n מספר הסדרות באורך n, שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0,1,2\}$,
ואין בהן הופעות של הרצף 22 ואין בהן הופעות של הרצף 12.
דוגמאות לסדרות **מותרות** באורך 5: 00211 (הרצף 21 מותר), 11111 (אין בעיה).
דוגמאות לסדרות **אסורות** באורך 5: 00221 (יש הופעה של 22), 00121 (יש הופעה של 12).

(10 נק') א. רשמי בעזרת חישוב ישיר את a_0, a_1, a_2. רשמי יחס נסיגה עבור a_n (יש לנמק.
הצעה: נוח לנתח את מבנה הסדרה מהקצה הימני שלה ולא מהקצה השמאלי).
בדקי שהערכים שרשמת עבור a_0, a_1, a_2 מתאימים ליחס הנסיגה.

(15 נק') ב. פתרי את יחס הנסיגה וקבלי נוסחה מפורשת עבור a_n.
בדקי את הנוסחה שקיבלת ע"י השוואה עם הערך של a_2 שקיבלת בסעיף א.
ביטויים כגון $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ יש להשאיר כפי שהם.
ביטויים כגון $\sqrt{12}$ יש להעביר לצורה $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$.

שאר הממ"ן עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בסוף הממ"ן רשימה של נוסחאות שימושיות.

שאלה 2

מצאו את מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$,
כאשר 3 מהמשתנים הם מספרים טבעיים **זוגיים**,
3 המשתנים האחרים הם מספרים טבעיים **אי-זוגיים**,
ואף אחד מהמשתנים אינו שווה 0 ואינו שווה 1.
לא נתון איזה מהמשתנים הם זוגיים ואיזה אי-זוגיים.
אפשר לפתור בעזרת פונקציה יוצרת ואפשר בדרך אחרת. **יש להגיע לתשובה סופית מספרית**.

שאלה 3

ארבעה רועים שונים אחראים לעדר של n כבשים זהות. ביציאה למרעה הרועים מחלקים ביניהם את העדר, כך שכל רועה ייקח איתו **לכל הפחות 5 כבשים ולכל היותר 25 כבשים**. הרועים נחשבים שונים זה מזה, הכבשים נחשבות זהות.

(8 נק׳) א. רשום פונקציה יוצרת עבור מספר הדרכים לחלק את n הכבשים הזהות בין ארבעת הרועים השונים.

(17 נק׳) ב. אם מספר הכבשים הוא 70, חשב בעזרת סעיף א׳ (ולא בדרך אחרת) את מספר הדרכים לחלק אותן בין הרועים. תן תשובה סופית מספרית.

שאלה 4

דוגמא לתרגיל מסוג זה נמצאת בסוף הקובץ ״מבוא לפונקציות יוצרות״ שבאתר הקורס.

פתח לטורים את שני אגפי הזהות $(1+x)^n = (1+x)^{2n} \cdot \left(\frac{1}{1+x}\right)^n$

וקבל ע״י השוואת המקדמים בשני האגפים זהות מהצורה:

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i D(?\ ,\ ?)\binom{?}{?} = \binom{n}{k}$$

בדוק את הזהות שקיבלת עבור המקרה $n = 4$, $k = 3$.

להלן כמה נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות:

(i)! סכום טור הנדסי סופי: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ואינסופי: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

(ii)! כפל פונקציות יוצרות:

אם $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, ו- $f(x)\cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

אז $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד).

(iii)! $\sum_{k=0}^{\infty} D(n,k)x^k = (1+x+x^2+\ldots)^n = \frac{1}{(1-x)^n}$.

במלים אחרות: המקדם של x^k בפיתוח הביטוי $\frac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$.

ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ׳ 129 בספר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה
חומר הלימוד למטלה: "תורת הגרפים" פרקים 1- 3
מספר השאלות: 11
משקל המטלה: 3 נקודות
סמסטר: 2014א
מועד אחרון להגשה: יום ו' 24.1.2014

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

שאלה 1

נתאר לעצמנו גרף על 7 צמתים, שדרגותיהם : 2,2,3,3,4,4,5.

א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.
ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.
ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.
ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.
ה. לא קיים גרף כזה.

שאלה 2

G הוא גרף (לא חייב להיות פשוט) על 55 צמתים, מתוכם :
20 צמתים בעלי דרגה 1, 15 צמתים בעלי דרגה 2,
10 צמתים בעלי דרגה 3, 10 צמתים בעלי דרגה 4.
מספר הקשתות ב- G הוא :

א. 54 ב. 60 ג. 120 ד. 240
ה. אין די נתונים כדי לקבוע את מספר הקשתות.

שאלה 3

G הוא גרף דו-צדדי. סכום דרגות הצמתים השייכים לצד אחד של G הוא 36
וסכום דרגות הצמתים השייכים לצד השני של G הוא 32.

א. יש גרף דו-צדדי כזה, פשוט וקשיר.
ב. יש גרף דו-צדדי כזה, קשיר אבל לא פשוט.
ג. יש גרף דו-צדדי כזה, פשוט אבל לא קשיר.
ד. יש גרף דו-צדדי כזה, לא פשוט ולא קשיר.
ה. לא ייתכן גרף דו-צדדי כזה.

שאלה 4

הגרף G מוגדר כך: הצמתים של G הם הקבוצות בנות בדיוק 3 אברים מתוך $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

למשל הקבוצה $\{1,4,7\}$ היא צומת של G. מספר הצמתים של G הוא אפוא $\binom{7}{3}$.

בין שני צמתים שונים A,B יש קשת אם ורק אם $|A \cap B| = 1$.

למשל יש קשת בין $\{1,4,7\}$ לבין $\{2,3,4\}$.

דרגת כל צומת ב- G היא:

א. 6 ב. 18 ג. 35 ד. 36

ה. G אינו גרף רגולרי - לא לכל הצמתים אותה דרגה.

שאלה 5

בהתייחס לגרף מהשאלה הקודמת, מספר הקשתות בגרף הוא:

א. 34 ב. 35 ג. 108 ד. 153 ה. 315

שאלה 6

השאלה עוסקת באיזומורפיזם של גרפים שאינם מתויגים ("תורת הגרפים" הגדרה 2.7).

נזכור שלכל גרף G, המשלים שלו ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4) מסומן $\overline{G}$.

C_n הוא גרף שהוא מעגל פשוט על n צמתים.

א. $\overline{C_5}$ איזומורפי ל- C_5 ו- $\overline{C_4}$ איזומורפי ל- C_4.

ב. $\overline{C_5}$ איזומורפי ל- C_5 אבל $\overline{C_4}$ אינו איזומורפי ל- C_4.

ג. $\overline{C_5}$ אינו איזומורפי ל- C_5 אבל $\overline{C_4}$ איזומורפי ל- C_4.

ד. $\overline{C_5}$ אינו איזומורפי ל- C_5 ו- $\overline{C_4}$ אינו איזומורפי ל- C_4.

שאלה 7

G הוא **יער** על 14 צמתים, ובו בדיוק 11 קשתות.

א. G הוא עץ.

ב. ל- G יש בדיוק שני רכיבי קשירות.

ג. ל- G יש בדיוק שלשה רכיבי קשירות.

ד. נחוץ מידע נוסף כדי לקבוע כמה רכיבי קשירות יש ל- G.

ה. לא ייתכן יער כזה.

שאלה 8

G הוא עץ מתויג על 8 צמתים (התגים הם כמקובל המספרים $1,2,3,\dots,8$).

סדרת Prüfer של G היא $(3,7,2,2,x,2)$ כאשר $x \in \{1,2,3,\dots,8\}$.

לפיכך:

א. $x = 2$

ב. $x \neq 2$

ג. לא ייתכן: זה לא האורך המתאים עבור סדרת Prüfer של G.

ד. אורך הסדרה מתאים אבל אף ערך של x לא נותן סדרת Prüfer חוקית.

ה. x יכול להיות כל מספר שנרצה בקבוצה $\{1,2,3,\dots,8\}$.

שאלה 9

G הוא גרף פשוט וקשיר על קבוצת הצמתים $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. נתון ש- G הוא **אוילרי**.

עוד נתון שאין ב- G קשת בין 1 ל- 2, אין קשת בין 2 ל- 3 ואין קשת בין 1 ל- 3.

נוסיף ל- G את 3 הקשתות הללו. הגרף שנקבל הוא:

א. אוילרי.

ב. אינו אוילרי, אבל יש בו מסלול אוילר שאינו מעגל.

ג. אינו אוילרי, ואין בו מסלול אוילר שאינו מעגל.

ד. ייתכן שהוא אוילרי וייתכן שלא – תלוי בגרף המקורי G.

ה. יש סתירה בנתונים: לא ייתכן ש- G המקורי הוא פשוט, קשיר ואוילרי.

שאלה 10

G הוא גרף אוילרי (כלומר יש בו מעגל אוילר), ויש ב- G גם מסלול אוילר שאינו מעגל.

א. זה לא מעניין, בכל גרף אוילרי יש גם מסלול אוילר שאינו מעגל.

ב. טענה א' אינה נכונה, אבל יש גרף פשוט המקיים את הדרישות הללו.

ג. יש גרף כזה, אבל לא גרף פשוט.

ד. לא ייתכן גרף כזה.

שאלה 11

G הוא גרף המילטוני (כלומר יש בו מעגל המילטון), ויש ב- G גם מסלול המילטון שאינו מעגל.

א. זה לא מעניין, בכל גרף המילטוני יש גם מסלול המילטון שאינו מעגל.

ב. טענה א' אינה נכונה, אבל יש גרף פשוט המקיים את הדרישות הללו.

ג. יש גרף כזה, אבל לא גרף פשוט.

ד. לא ייתכן גרף כזה.

מטלת מנחה (ממ״ן) 16

הקורס: 20476 – מתמטיקה בדידה

חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים – כל היחידה

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2014א **מועד אחרון להגשה:** יום ג׳ 28.1.2014

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (15 נקודות)

יהיו $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ שני עצים על אותה קבוצת צמתים V.

לכל $v\in V$ תהי $d_1(v)$ הדרגה של v ב- G_1 ותהי $d_2(v)$ הדרגה של v ב- G_2.

הוכיחו כי קיים $v\in V$ עבורו $d_1(v)+d_2(v)\le 3$.

הדרכה: חשבו את סכום כל הדרגות בשני העצים.

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי $A=\{1,2,3\}$. גרף G מוגדר כך:

קבוצת הצמתים של G היא $V=A\times A$. למשל הזוג הסדור $(2,1)$ הוא צומת של G.

הקשתות של G: בין צומת (a,b) לצומת (c,d) יש קשת אם ורק אם $a+b\ne c+d$.

למשל **יש** קשת בין $(2,1)$ לבין $(2,2)$, **ואין** קשת בין $(2,2)$ ל- $(1,3)$.

(5 נק׳) א. הוכח ש- G קשיר.

(6 נק׳) ב. מה דרגת הצומת $(1,1)$ ומה דרגת הצומת $(2,3)$?

(7 נק׳) ג. כמה קשתות יש ב- G ? הוכח.

(7 נק׳) ד. הוכח שאין ב- G מסלול אוילר (לא מסלול אוילר פתוח ולא מעגל אוילר).

שאלה 3 (16 נקודות)

בגרף הדו-צדדי המלא $K_{6,6}$ קיימות $6!$ דרכים שונות ליצור זיווג מושלם.

(6 נק׳) א. נזרוק מהגרף $K_{6,6}$ קשת אחת (הצמתים שבקצות הקשת נשארים בגרף).
כמה זיווגים מושלמים ניתן להגדיר בגרף שהתקבל? הוכיחו.

(10 נק׳) ב. מהגרף שהתקבל בסעיף א נזרוק עוד קשת. כמה זיווגים מושלמים ניתן להגדיר בגרף שנקבל? הוכיחו. שימו לב שייתכן שלקשת שזרקנו כעת יש צומת משותפת עם הקשת שזרקנו בסעיף א, וייתכן שלא. התייחסו לשני המקרים.

שאלה 4 (16 נקודות)

יהי G גרף פשוט בעל שני רכיבי קשירות. בכל אחד מרכיבי הקשירות יש לפחות 3 צמתים.
הוכיחי שהגרף **המשלים** של G (״תורת הגרפים״ הגדרה 1.4) אינו מישורי.

שאלה 5 (28 נקודות)

על קבוצת צמתים V מוגדרים חמישה גרפים שונים G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, שכל אחד מהם הוא גרף **דו-צדדי**. החלוקה של V לשני צדדים **אינה** בהכרח אותה חלוקה בחמשת הגרפים:
הצדדים של G_1 הם A_1, B_1, הצדדים של G_2 הם A_2, B_2, וכן הלאה.
כמובן לכל $1 \le i \le 5$, $A_i \cup B_i = V$, $A_i \cap B_i = \varnothing$.
נסמן ב- G את האיחוד של חמשת הגרפים: קבוצת הצמתים של G היא V, וקבוצת הקשתות של G היא איחוד קבוצות הקשתות של הגרפים G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 (כדי ש- G יהיה פשוט, אם קיבלנו בין שני צמתים יותר מקשת אחת, נזרוק את הכפילויות ונשאיר קשת יחידה).

(8 נק׳) א. לכל $v \in V$ נתאים **סדרה** של חמש אותיות A,B. נדגים את ההתאמה:
אם v שייך לקבוצות A_1, B_2, B_3, A_4, A_5, אז הסדרה המותאמת לו תהיה $ABBAA$.
כללית: במקום ה- i בסדרה של v תופיע האות A אם $v \in A_i$, ותופיע האות B אם $v \in B_i$.
הוכיחו: אם לצמתים $v, w \in V$ מותאמת אותה סדרה של אותיות, אז **אין** ב- G קשת בין v ל- w.

(10 נק׳) ב. מהסעיף הקודם נובע שמספר הצביעה של G הוא לכל היותר:
2 / 5 / 120 / 10 / 25 / 32. מצאו את התשובה הנכונה **והוכיחו אותה בפירוט.**

(10 נק׳) ג. תנו דוגמא לגרף המקיים את תנאי השאלה, כלומר הוא איחוד של 5 גרפים דו-צדדיים שונים, ושמספר הצביעה שלו הוא בדיוק המספר שמצאתם בסעיף הקודם.
הוכיחו שהדוגמא שנתתם אכן עונה על הדרישות.