שיעור 2

תורת הקבוצות

הגדרות ומושגים בסיסיים
פעולות על קבוצות

מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

סימון קבוצות:

נהוג לסמן את המספרים הטבעיים ב $\mathbf{N} = \{0,1,2,3,4, \dots\}$

נהוג לסמן את המספרים השלמים ב $\mathbf{Z} = \{\dots -2, -1,0,1,2, \dots\}$

ואת המספרים הממשיים ב $\mathbf{R}$

הרציונליים $\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$

קבוצות כלשהן יסומנו באמצעות **צומדיים**, לדוגמא:

$\{1,1,1\} = \{1\}$

$\{1,2\} = \{2,1\}$

$2 \in B$

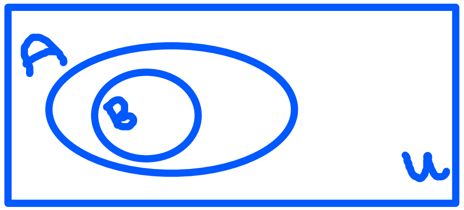
- $A = \{0, \{0,1\}, 1, f\}$
- $B = \{x \in \boldsymbol{N} \mid x \text{ זוגי}\}$ הסימון $\in$ מייצג שייכות איבר לקבוצה. כך למשל נסמן $-2 \notin B$
- $C = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \text{ זוגי}\}$ נשים לב ש $B \subseteq C$ כלומר B תת קבוצה של C.

$A = \{N\}$ $A = N$

הגדרת תת קבוצה/קבוצה חלקית/הכלה

נניח A ו B קבוצות. נאמר ש B תת קבוצה של A (או נאמר ש B מוכלת ב A) אם ורק אם כל איברי B הם גם איברים של הקבוצה A .

ובשפה מתמטית: $\boxed{A \subseteq B \text{ אם"ם לכל } B \ni x \text{ מתקיים } A \ni x.}$



עבור הכלה ממש מסמנים $A \subset B$.

נדגים את ההבדל בין מוכל $\subseteq$ ל מוכל ממש $\subset$.

$\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$

$\{1,2\} \subset \{1,2\}$ X טעות

$\not\subset \subseteq$

$\{1,2\}=\{1,2\}$ ✓

$\{1,2\}\subseteq\{1,2\}$ ✓

$\{1,2\}\subseteq\{1,2,3\}$ ✓

נסמן: את **הקבוצה הריקה** $\emptyset=\{\ \ \}$

את **מספר איברי הקבוצה** מסמנים ב $|\ \ |$.

$|\{3\}|=1$

$\left.\begin{array}{l}|\{\phi\}|=1\\ |\phi|=0\end{array}\right\}\Rightarrow\{\phi\}\neq\phi$

- כך למשל עבור $A=\{0,\{0,1\},1,\sqrt{2}\}$

מתקיים $|A|=4$.

תרגיל

בכל אחד מהסעיפים קבעו אם $\in$ וקבעו אם $\subseteq$

א. $\{1\} \ldots \overset{\notin}{\subseteq} \ldots \{1\}$

ב. $\varnothing \ldots \overset{\notin}{\subseteq} \ldots \{\{\varnothing\},1\}$

ג. $\{\{\varnothing\}\} \ldots \overset{\notin}{\subseteq} \ldots \{\{\varnothing\},1\}$

ד. $\{\{\varnothing,1\}\} \ldots \overset{\notin}{\nsubseteq} \ldots \{\{\varnothing\},1\}$

$B \subseteq A$

$\varnothing \in \{\varnothing, 1\}$

$\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}, 1\}$

$|\varnothing| = 0$

$|\{\varnothing\}| = 1$

שאלה 1 כמו 1 בממן 11

1. $\{3\} \in \{3, \{3\}\}$ ✓
2. $2 \in \{\{2\}\}$ ✗
3. $\{5\} \subseteq \{1, \{1\}, \{5\}\}$ ✗
4. $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ ✗
5. $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ✓
6. $\{-1\} \in \{\mathbb{Z}\}$ ✗
7. $|\{\mathbb{R}, \mathbb{Z}\}| = |\{1,2\}|$ ✓

$=2 \qquad =2$

$-1 \in \mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\{-1\} \subseteq \mathbb{Z}$

$\{\phi\} \subseteq \{\phi\}$ ✓

$\phi \subseteq \{\{\phi\}\}$ ✓

$\{\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$

$|\phi| = 0$

$\{-1\} \in \{\mathbb{Z}\} = \{\underbrace{\{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}}_{\{-1\}}\}$

$\mathbb{Z} \in \{\mathbb{Z}\}$

<u>הגדרה של קבוצת החזקה:</u> $\boxed{X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subseteq A}$

כלומר $\mathcal{P}(A)$ היא אוסף **כל** תתי הקבוצות של A .

<u>משפט:</u> לכל קבוצה A מתקיים $\emptyset \subseteq \mathrm{A}$ ולכן $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ לכל A

<u>משפט:</u> $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

$|P(A)| = 2^{|A|} = 2^2 = 4$

<u>דוגמא</u> רשום את קבוצת החזקה של $\mathrm{A} = \{\emptyset, \{0, \emptyset\}\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0, \emptyset\}\}, A\}$

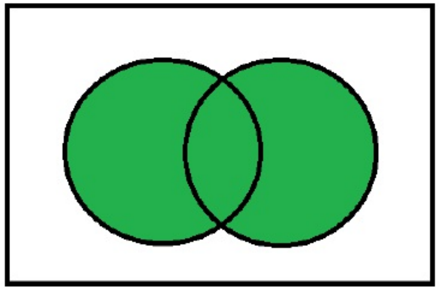
<u>שאלה</u>

תהי $A = \{\emptyset, 0, \{0\}\}$ קבוצה

בדוק אילו מבין הטענות הבאות נכונות :

1. $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(A)$
2. $\{\{0\}\} \in \mathcal{P}(A)$
3. $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A)$
4. $\mathcal{P}(\emptyset) \subseteq \mathcal{P}(A)$

פעולות על קבוצות



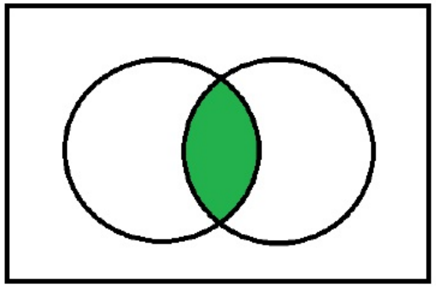
הגדרת איחוד קבוצות

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ או } x \in B\}$$

תכונות

1. קומוטטיביות (חילופיות) $A \cup B = B \cup A$
2. אידמפוטנטיות (בליעה) $A \cup A = A \ , \ A \cup \emptyset = A$
3. $B \subseteq A \cup B \quad , \quad A \subseteq A \cup B$
4. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$
5. $B \subseteq C$ וגם $A \subseteq C \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B \subseteq C$

הגדרת חיתוך קבוצות



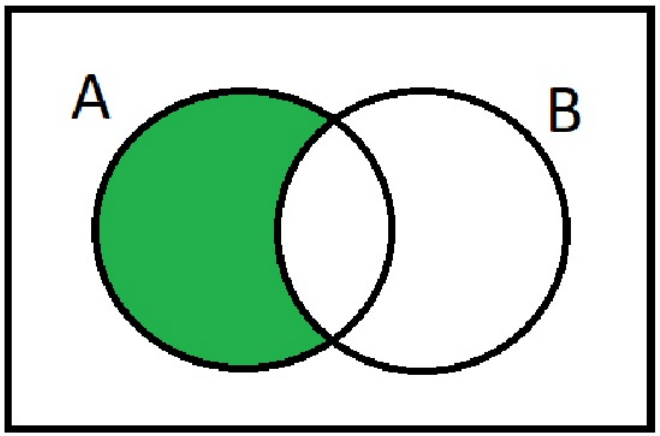
$A \cap B = \{x: \ x \in A$ וגם $x \in B\}$

תכונות

1. קומוטטיביות (חילופיות) $A \cap B = B \cap A$
2. אידמפוטנטיות (בליעה) $A \cap A = A \ , \ A \cap \emptyset = \emptyset$
3. $A \cap B \subseteq A \ , \ A \cap B \subseteq B$
4. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$
5. $C \subseteq A$ וגם $C \subseteq B \Leftrightarrow C \subseteq A \cap B$

<u>הגדרת הפרש קבוצות</u>

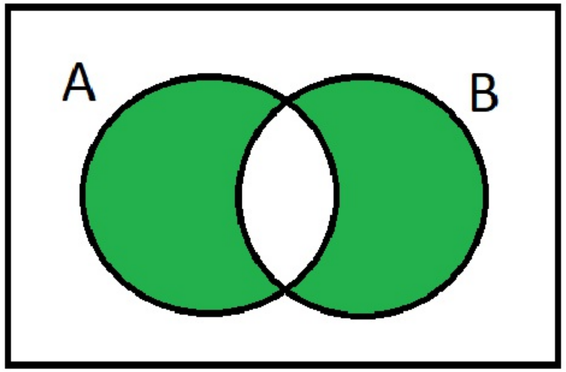
$$A \setminus B = \left\{x \middle| x \in A \text{ וגם } x \notin B\right\}$$



זהויות אלגבריות בהמשך...

הגדרת הפרש סימטרי

$$A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$$

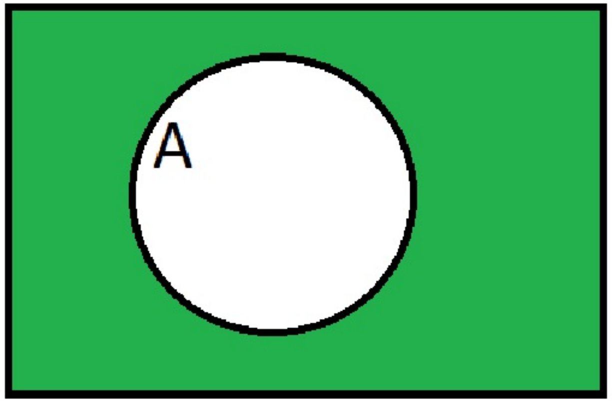


ניתן להגדיר גם כך :

$$A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

הגדרת המשלים

$$A^C = \{x \in U | x \notin A\}$$



<u>אלגברה של קבוצות</u>:

- $A \setminus B = A \cap B^C$

- כללי דה מורגן

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C \quad (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

- דיסטרבטיביות (= חוקי פילוג) של איחוד וחיתוך

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- חוקי בליעה (עקרון הדואליות מתקיים בהם).

$$A \cup \varnothing = A \ , \ A \cap \varnothing = \varnothing \ , \ A \cup A = A \ , \ A \cap A = A$$

- המשלים של המשלים

$$(A^C)^C = A$$

<u>תרגיל</u> כמו 2 ו 3 ממן 11

תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו שמתקיים

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

תרגיל כמו 2 ו- 3 ממן 11

הוכיחו את הטענה הבאה:

תהיינה A, B ו C קבוצות חלקיות לקבוצה אוניברסילית U.

אם $A\Delta B = C^C \Delta B^C$ אז $A^C = C^C$

<u>תרגיל</u> כמו 2 ו- 3 ממן 11

הוכיחו את הטענה הבאה:

תהיינה A, B ו C קבוצות חלקיות לקבוצה אוניברסילית U.

הוכח $(A \cup B) \setminus (B \cap C) \subseteq (A \cup C^C)$

<u>תרגיל</u> כמו 2 ו- 3 ממן 11

הוכיחו את הטענה הבאה:

אם $x \in A\Delta B\Delta C$ אז x מופיע כאיבר רק במספר אי זוגי מבין הקבוצות A, B, C . כלומר בקבוצה אחת בלבד מבין השלוש או בכל שלושת הקבוצות.

<u>תרגול עבור חיתוכים ואיחודים עבור קבוצה כלשהי I</u>

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \,(i \in I \wedge x \in A_i)$$

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \,(i \in I \rightarrow x \in A_i)$$

<u>תרגיל</u> כמו שאלה 4 ממן 11

תהי $\mathbb{N}$ קבוצת המספרים הטבעיים, היא הקב' האוניברסלית.

לכל $k \in \mathbb{N}$ תהי $A_k = \{nk \ \mid n \in \mathbb{N}\}$

א. חשבו את A_0, A_1, A_2

ב. מיצאו $k \in \mathbb{N}$ כך ש הקבוצה $\bigcap_{k=1}^{6} A_k$ שווה ל A_k

ג. מיצאו $k \in \mathbb{N}$ כך ש הקבוצה $\{x + 4 | x \in A_8\}$ $A_8 \cup$ שווה ל A_k

תרגיל כמו 10 ממח 02

חשבו את $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\right)$

प्रश्न र परीक्षा को संग्रह

א. תהיינה X,Y קבוצות המוכלות בקבוצה אוניברסלית כלשהי.

הוכיחו: $(X \oplus Y)' = (X \cap Y) \cup (X' \cap Y')$.

בסימונים החדשים יש להוכיח ש

$$(X \Delta Y)^c = (X \cap Y) \cup (X^c \cap Y^c)$$

שאלה 2

(12 נק') **א.** תהיינה B,X,Y קבוצות. הוכיחו :

$X \cup B = Y \cup B$ **אם ורק אם** $X - B = Y - B$.

הצעה לארגון ההוכחה:

תהי U **קבוצה אוניברסלית המכילה את** B,X,Y .

(i) נניח $X \cup B = Y \cup B$. **נבצע בשני האגפים פעולה...**

(ii) נניח $X - B = Y - B$. **נבצע בשני האגפים פעולה....**