

קורס: 20416 "תורת ההסתברות"

תאריך הבחינה: 24.8.2015 (סמסטר 2015 ב - מועד ב' / 93)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי וספר הקורס בלבד.

מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפת: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

שאלה 1 (25 נקודות)

- (13 נק') א. במוקד טלפוני מתקבלות N שיחות ביום, כך ש- N הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר m ($m > 0$). האורך של כל שיחה שמתקבלת במוקד הוא משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ ($\lambda > 0$). אין תלות בין אורכי שיחות שונות, ובין לבין מספר השיחות שמתקבלות במוקד במשך היום. יהי Y האורך הכולל של השיחות שמתקבלות במוקד במשך יום אחד. הוכח כי $M_Y(t) = \exp\left\{\frac{mt}{\lambda-t}\right\}$ לכל $t < \lambda$.
- (12 נק') ב. יהיו X ו- Y שני משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות אחידה רציפה על פני הקטע $(0,1)$. נגדיר את שני המאורעות הבאים: $A = \{X \leq 2Y\}$ ו- $B = \{Y \leq 2X\}$. חשב את $P(A|B)$.

שאלה 2 (25 נקודות)

- מסדרים באקראי בשורה את הספרות $\{1,2,3,4,5,6\}$, כך שכל הסידורים מתקבלים באותה ההסתברות.
- (8 נק') א. מהי שונות סכום חמש הספרות הראשונות בשורה?
- יהי X מספר הספרות בשורה שבמקום שלימין יש ספרה גדולה יותר. לדוגמה: אם הסידור הוא $1, 3, 6, 2, 4, 5$, אז $X = 3$.
- (8 נק') ב. חשב את התוחלת של המשתנה המקרי X .
- (9 נק') ג. חשב את השונות של המשתנה המקרי X .

שאלה 3 (25 נקודות)

- פונקציית הצפיפות המשותפת של המשתנים המקריים X ו- Y נתונה על-ידי:
- $$f_{X,Y}(x,y) = 3xy^2, \quad x > 1; \quad 0 < y < \frac{1}{x}$$
- (9 נק') א. חשב את $F_{X,Y}(4, \frac{1}{2})$.
- (8 נק') ב. חשב את $E[Y|X=x]$ לכל $x > 1$.
- (8 נק') ג. נגדיר את המשתנים המקריים S ו- T על-ידי $S = 3X$ ו- $T = 2Y$, בהתאמה. מצא את פונקציית הצפיפות המשותפת של S ו- T .

שאלה 4 (25 נקודות)

פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי X נתונה על-ידי:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & -1 \leq x < 0 \\ \frac{2}{3} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

- (7 נק') א. חשב את השונות של X .
- (6 נק') ב. מהי פונקציית ההתפלגות המצטברת של X ? רשום אותה באופן מדויק.
- (12 נק') ג. יהיו X_1, \dots, X_{60} משתנים מקריים רציפים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות הזוהה לזו של המשתנה המקרי X ; ויהי $S = \sum_{i=1}^{60} X_i$ הסכום של משתנים מקריים אלו, כלומר,
- השתמש באי-שוויון צ'בישב החד-צדדי,
 - כדי למצוא חסם תחתון להסתברות של המאורע $\{S \leq 13\}$.
 - השתמש במשפט הגבול המרכזי, כדי להעריך את הסתברות המאורע $\{S \leq 13\}$.

שאלה 5 (25 נקודות)

- (12 נק') א. יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר 0.2.

נגדיר:

$$Y = \begin{cases} 4X & , X \leq 2 \\ 2X & , X > 2 \end{cases}$$

- חשב את $P\{Y < 20\}$.
 - חשב את התוחלת של Y .
- (13 נק') ב. לחמישה שחקנים, המסומנים בספרות 1 עד 5, מחלקים באקראי חמישה מספרים שונים. (אין חשיבות לערך המסוים של המספרים שהשחקנים מקבלים). בכל שלב של המשחק, שניים מהשחקנים משווים את המספרים שבידיהם, ובעל המספר הגדול יותר הוא המנצח. תחילה משווים השחקנים 1 ו-2 את מספריהם; אחר-כך, המנצח משווה את מספרו לזה של שחקן 3, וכן הלאה.
- יהי X מספר הפעמים ששחקן 1 מנצח עד לתום המשחק.
- מצא את פונקציית ההסתברות של X .
 - חשב את השונות של X .

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] \quad \text{נוסחת האינטרפולציה:}$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326