פתרון שאלה 5

(א) נפריד לשני מקרים:

- $k > \lg n$: במקרה זה נוכל לפתור את הבעיה בזמן $\Theta(n\lg n)$ באופן זהה לפתרון של סעיף א' בשאלה 4 בממ"ן 11.
  מכיוון ש- $k > \lg n$, זמן זה שווה ל- $\Theta(n \cdot min(k, \lg n))$, כנדרש.
- $k \le \lg n$: במקרה זה הפתרון יתבסס על הרעיון החלופי המתואר בפתרון שאלה 4 בממ"ן 11 – מיון המערך והפעלת השגרה Check-Sum.
  מכיוון ש- $k \le \lg n$ נוכל למיין את המערך באופן יעיל יותר מאשר מיון-מיזוג, ולקבל חסם נמוך מ- $\Theta(n\lg n)$.
  נשים לב לתכונה הבאה: כל מספר בתחום $\left[0..n^k - 1\right]$ ניתן לייצג בבסיס n ע"י מספר בן k ספרות לכל היותר. בנוסף, הזמן הנדרש להמרה של כל מספר כזה לבסיס n (ובחזרה לבסיס עשרוני) הוא פרופורציונאלי למספר הספרות שלו בבסיס זה, כלומר $\Theta(k)$. לפיכך נמיין את המספרים הנתונים באופן הבא:
  ⇦נמיר את כל המספרים לבסיס n בזמן $n \cdot \Theta(k) = \Theta(nk)$
  ⇦נמיין את n המספרים באמצעות מיון בסיס (עם מיון-מנייה בתור מיון הביניים). יש לנו n מספרים בעלי k ספרות, וכל ספרה הינה בתחום $\left[0..n-1\right]$. לכן, זמן הריצה של מיון בסיס יהיה $\Theta(d(n+k)) = \Theta(k(n+n)) = \Theta(nk)$.
  ⇦נמיר חזרה את המספרים הממוינים לבסיס עשרוני בזמן $n \cdot \Theta(k) = \Theta(nk)$.
  כעת, נוכל להשתמש בשגרה Check-Sum בכדי לחפש במערך הממוין שני איברים שסכומם z. זמן הריצה של שגרה זו הינו $\Theta(n)$, כמוסבר בפתרון של ממ"ן 11. זמן הריצה הכולל הוא לפיכך $\Theta(nk)$.
  מכיוון ש- $k \le \lg n$ זמן זה שווה ל- $\Theta(n \cdot min(k, \lg n))$, כנדרש.

ראו בעמוד 164 בספר, פיסקה לפני אחרונה.

(ג) בדומה לפתרון סעיף ג' בשאלה 4 בממ"ן 11, ניצור מן המספרים מערך A_2 שיכיל את סכומי כל זוגות האיברים (x, y).
אם $k > \lg n$ נפתור את הבעיה באופן זהה לפתרון סעיף ג' בשאלה 4 בממ"ן 11.
אחרת, נמיין את המערך בשיטה המתוארת בסעיף (א). זמן הריצה של המיון יהיה $\Theta(n^2k)$. לאחר שנקבל מערך ממוין נחפש בו זוג מספרים העונה על דרישות השאלה.

בסעיפים (ב), (ד) הפתרון זהה לפתרון בשאלה 4 בממ"ן 11. במקרים אלה אין פתרון טוב יותר מהפתרון של ממ"ן 11, מפני שהמיון איננו המרכיב הדומיננטי בפתרון.