

פרק 6: התפלגות משותפת של משתנים מקריים (תרגילים) (20425 / 21.7.11)

1. בארגז גדול יש 10 נעליים שחורות מאותו דגם: 7 מהן ימניות והשאר שמאליות. מוציאים מהארגז נעל אחת נעל, ללא החזרה, עד שמתקבל זוג. (כלומר, עד שלראשונה יש מחוץ לארגז לפחות נעל אחת ימנית ולפחות נעל אחת שמאלית). יהיו X = מספר הנעליים הימניות שהוצאו; Y = מספר הנעליים השמאליות שהוצאו.
 - א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y ואת פונקציות ההסתברות השולית של X ו- Y .
 - ב. חשב את $F_{X,Y}(2,2)$.
 - ג. האם X ו- Y בלתי-תלויים?
 - ד. מצא את פונקציית ההסתברות של $X+Y$.
 - ה. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $Y=2$.
 - ו. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של Y בהינתן $X=1$.
2. מטיילים שתי קוביות תקינות. יהיו X = מספר הקוביות שבהן התקבלה התוצאה 4; Y = מספר התוצאות הזוגיות שהתקבלו. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .
3. עידו הזמין למסיבה 20 אורחים – 10 גברים ו-10 נשים. כל גבר יגיע למסיבה בהסתברות 0.8 וכל אישה תגיע למסיבה בהסתברות 0.9. אין תלות בין האנשים המוזמנים למסיבה. מהי ההסתברות ש-18 אורחים יגיעו למסיבה?
4. יהיו X ו- Y משתנים מקריים בלתי-תלויים, כך של- X יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- p , ול- Y יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים m ו- p . האם גם המשתנים המקריים X ו- $W = X + Y$ בלתי-תלויים זה בזה?
5. בחצר יש שני כלובים. בכלוב 1 – תרנגול אחד ותרגולת אחת, ובכלוב 2 – שני תרנגולים ושתי תרגולות. בוחרים אחד מן הכלובים באופן מקרי ומוציאים ממנו באקראי שני עופות ללא החזרה. יהיו N = מספר הכלוב שנבחר; Z = מספר התרנגולים (הזכרים) שהוצאו.
 - א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של N ו- Z .
 - ב. האם N ו- Z בלתי-תלויים?
6. יהיו X_1 ו- X_2 משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם פונקציית ההסתברות $p_X(k) = p(1-p)^k$, עבור $k=0,1,\dots$ ו- $0 < p < 1$, ויהי $Y = X_1 + X_2$. מצא את פונקציית ההסתברות של Y .

7. יהיו X_1, X_2, \dots, X_r משתנים מקריים בעלי פונקציית התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים p_1, p_2, \dots, p_r .

- מהי לדעתך ההתפלגות השולית של X_i , לכל $i = 1, 2, \dots, r$? אין צורך להוכיח את טענתך.
- מהי לדעתך ההתפלגות של $X_i + X_j$ ($i \neq j$)? אין צורך להוכיח את טענתך.
- האם לדעתך המשתנים המקריים X_i ו- X_j ($i \neq j$) בלתי-תלויים זה בזה?
- מהי ההתפלגות המותנית של X_1 בהינתן $X_2 = j$, לכל $j = 0, 1, \dots, n$? נמק את תשובתך.
- יהי Y משתנה מקרי המוגדר על-ידי מספר הימים החולפים החל מה-1.1 (בכל שנה) ועד ליום הראשון בשנה שבו יורד גשם. פונקציית ההסתברות של Y נתונה על-ידי: $P\{Y=j\} = 2^{-(j+1)}$ לכל $j = 0, 1, \dots, 10$; $P\{Y > 10\} = 2^{-11}$.
- הנח שאין תלות בין שנים שונות, וחשב את ההסתברות שבמהלך 20 השנים הבאות יהיו 13 שנים שבהן הגשם הראשון יהיה בין ה-2.1 ל-5.1, 5 שנים שבהן הגשם הראשון יהיה ב-1.1 וביתר השנים ירד הגשם הראשון רק לאחר ה-5.1.

8. בסניף דואר מסוים יש שלושה אשנבים (1 ו-2 ו-3). מספר האנשים הפונים לאשנב 1 במשך דקה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 2, מספר האנשים הפונים לאשנב 2 במשך דקה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 3 ומספר האנשים הפונים לאשנב 3 במשך דקה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 4. אין תלות בין אנשים הנכנסים לסניף בדקות שונות, ואין תלות בין מספרי האנשים שפונים לאשנבים השונים.

- מהי ההסתברות שבין 8:00 ל-8:01 ייכנסו תשעה אנשים לסניף הדואר?
- אם ידוע שבין 8:00 ל-8:01 נכנסו תשעה אנשים לסניף הדואר, מהי ההסתברות ששלושה מהם פנו לאשנב 1?
- אם ידוע שבין 8:00 ל-8:01 נכנסו לסניף הדואר שלושה אנשים שפנו לאשנב 1, מהי ההסתברות שבסך-הכל נכנסו לסניף הדואר באותה הדקה תשעה אנשים?
- אם ידוע שבין 8:00 ל-8:01 נכנסו תשעה אנשים לסניף הדואר, מהי ההסתברות ששלושה מהם פנו לאשנב 1, שלושה לאשנב 2 ושלושה לאשנב 3?
- אם אדם הפונה לאשנב 1 קונה בו בולים בהסתברות 0.6, מהי ההסתברות שבין האנשים הפונים לאשנב 1 מ-8:00 עד 8:05 יהיו 5 שיקנו בולים?

9. יהיו X_1, X_2, \dots, X_{100} משתנים מקריים בלתי-תלויים, ונניח כי לכל $i = 1, \dots, 100$, ההתפלגות של המשתנה המקרי X_i היא פואסונית עם הפרמטר $i/50$.

- מצא את ההתפלגות המותנית של $\sum_{i=1}^{100} X_i$ בתנאי $X_{100} = n$.
- מצא את ההתפלגות המותנית של X_{100} בתנאי $\sum_{i=1}^{100} X_i = n$.

10. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n_X ו- p ויהי Y משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n_Y ו- p . אם X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה, מהי ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X + Y = n$?

11. יהיו X_1, X_2, \dots, X_n משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכולם התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר p ($0 < p < 1$).

א. חשב את $P\left\{\max_{i=1,\dots,n} X_i \leq j\right\}$, לכל $j = 1, 2, \dots$.

מצא את פונקציית ההסתברות של $\max_{i=1,\dots,n} X_i$.

ב. זוהי את ההתפלגות של $\min_{i=1,\dots,n} X_i$.

12. נניח כי $Y \sim Po(\lambda)$ וכי $X|Y=j \sim B(j, p)$ ונניח שמגדירים $P\{X=0 | Y=0\} = 1$.

א. מהם הערכים של i ו- j , שבהם פונקציית ההסתברות המשותפת, דהיינו $P\{X=i, Y=j\}$, מקבלת ערכים חיוביים?

ב. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .

ג. מצא את פונקציית ההסתברות השולית של X ,

וזוהי את ההתפלגות של X .

ד. הוכח כי המשתנים המקריים X ו- $Y-X$ בלתי-תלויים זה בזה, וזוהי את ההתפלגות של $Y-X$.

13. מטילים 10 כדורים באופן אקראי לתוך 3 תאים ממוספרים. אחר-כך, מוציאים את הכדורים שנפלו לתא מספר 1, ומטילים אותם באופן אקראי לתוך 4 תאים ממוספרים אחרים.

יהיו $X =$ מספר הכדורים שנפלו לתוך תא מספר 1 בשלב הראשון;

$Y =$ מספר הכדורים שנפלו לתוך תא מספר 2 בשלב השני.

א. זוהי את ההתפלגות של X ואת ההתפלגות של Y בהינתן $X=i$.

ב. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .

ג. מצא את ההתפלגות השולית של Y .

הערה: זכור כי $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} = e^a$