20416 - תאריך הבחינה: 5.7.2012 (סמסטר 2012ב - מועד 2א / 84)

שאלה 1

נסמן ב-X את הגובה (בס"מ) של צמח מקרי, $X \sim N(30, \sigma^2)$.

כמו כן, נתון כי $P\{19.15 \le X \le 40.85\} = 0.97$.

א. נשתמש בהסתברות הנתונה כדי למצוא את סטיית-התקן.

$$P\{19.15 \le X \le 40.85\} = \Phi\left(\tfrac{40.85-30}{\sigma}\right) - \Phi\left(\tfrac{19.15-30}{\sigma}\right) = \Phi\left(\tfrac{10.85}{\sigma}\right) - \Phi\left(\tfrac{-10.85}{\sigma}\right)$$
$$= 2\Phi\left(\tfrac{10.85}{\sigma}\right) - 1 = 0.97$$

כלומר: $\Phi\left(\tfrac{10.85}{\sigma}\right) = 0.985 = \Phi(2.17)$

ומכאן שסטיית-התקן היא: $\sigma = \tfrac{10.85}{2.17} = 5$

ב. נסמן את הגובה של הצמחים שנבחרים ב- $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$. המשתנים המקריים הללו בלתי- תלויים ולכל אחד מהם יש התפלגות נורמלית עם תוחלת 30 ושונות 5^2. לכן, לממוצע שלהם יש גם התפלגות נורמלית עם תוחלת 30 ושונות השווה ל- $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{25}{10} = 2.5$ (ראה בספר הקורס טענה 7.1 בעמוד 406). כלומר:

$$P\{\overline{X}_{10} > 33.89\} = P\left\{Z > \frac{33.89-30}{\sqrt{2.5}}\right\} = 1 - \Phi(2.46025) = 1 - 0.9931 = 0.0069$$

ג. נסמן את הגובה של הצמחים שנבחרים ב- $X_1, X_2, \ldots, X_{101}$. המשתנים המקריים הללו בלתי- תלויים זה בזה ולכל אחד מהם יש התפלגות נורמלית עם תוחלת 30 ושונות 5^2. לכן, הממוצע שלהם, המוגדר על-ידי $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, בלתי-תלוי בשונות שלהם, המוגדרת על-ידי $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ (ראה בספר הקורס טענה 7.1 בעמוד 406), ומתקיים: $P\{S^2 > 26 \mid \overline{X} < 30.1\} = P\{S^2 > 26\}$

כמו כן, למשתנה המקרי $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{100S^2}{25}$ יש התפלגות חי-בריבוע עם 100 דרגות חופש, שהיא התפלגות גמא עם הפרמטרים $t = \frac{n-1}{2} = 50$ ו- $\lambda = \frac{1}{2}$. לכן, אפשר לבטא את המשתנה המקרי $4S^2$ כסכום של 50 משתנים מעריכיים בלתי-תלויים, שלכולם הפרמטר $\frac{1}{2}$, ולמצוא קירוב להסתברות המבוקשת באמצעות משפט הגבול המרכזי. מקבלים:

$$P\{S^2 > 26\} = P\left\{4S^2 > 104\right\} \cong P\left\{Z > \tfrac{104-50\cdot 2}{\sqrt{50\cdot 4}}\right\} = 1 - \Phi(0.2828) = 1 - 0.611364 = 0.388636$$

ד. לפי הגדרת המשתנה המקרי Y, מתקיים הקשר $Y = 3X$. לכן, כדי למצוא את הפונקציה יוצרת המומנטים של Y, נוכל להשתמש בזו של X. למשתנה המקרי X יש התפלגותו נורמלית עם הפרמטרים 30 ו- 5^2, לפיכך לכל t ממשי מתקיים:

$$M_Y(t) = M_{3X}(t) = E[e^{t3X}] = M_X(3t) = \exp\left\{30\cdot 3t + \tfrac{5^2\cdot(3t)^2}{2}\right\} = \exp\left\{90t + 112.5t^2\right\}$$

שאלה 2

א. נסמן ב- A_i את המאורע שאפשר לפרוץ מקטע i , לכל $i = 1,2,3$.

בסימונים אלו, ההסתברות שאפשר יהיה לפרוץ את הגדר היא: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה לחישוב ההסתברות שלעיל, ונקבל:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$
$$= 3 \cdot 0.2^2 - 2 \cdot 0.2^3 - 0.2^4 + 0.2^4 = 0.104$$

ב. אם ידוע ש בדיוק 2 גלאים מקולקלים, אפשר לפרוץ את הגדר רק אם שני הגלאים האלו סמוכים זה לזה , ונמצאים בשני הקצוות של אותו הקטע.

מספר אפשרויות המיקום של שני הגלאים הוא: $\binom{n}{2}$

מספר אפשרויות המיקום של הגלאים בקצוות של אותו הקטע הוא: $n-1$

ומכאן שההסתברות המבוקשת היא: $\dfrac{n-1}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2(n-1)}{n(n-1)} = \dfrac{2}{n}$

ג. נגדיר: $X_i = \begin{cases} 1 & \text{אפשר לפרוץ את הגדר דרך קטע } i \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$, לכל $i = 1,2,\ldots,n-1$.

כאשר $X = \sum_{i=1}^{n-1} X_i =$ הוא מספר הקטעים בגדר שאפשר לפרוץ דרכם.

1. המאורע $X_i = 1$, לכל $i = 1,\ldots,n-1$, מתרחש אם ורק אם שני הגלאים שבשני צדדיו מקולקלים.

לכן: $P\{X_i = 1\} = 0.2^2 = 0.04 \qquad , \qquad i = 1,2,...,n-1$

ומכאן, שמתקיים: $E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n-1} E[X_i] = (n-1)\cdot 0.04$

2. מהסעיף הקודם נקבל כי:

$$\text{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = 0.04 \cdot 0.96 = \tfrac{15}{256} = 0.0384 \qquad , \qquad i = 1,2,...,n-1$$

כמו כן, לכל $i \neq j$, כך ש- $i, j = 1,\ldots,n-1$, מתקיים:

$$E[X_iX_j] = P\{X_i = 1, X_j = 1\} = \begin{cases} 0.2^3 & , \ |i-j| = 1 \\ 0.2^4 & , \ |i-j| > 1 \end{cases}$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E[X_iX_j] - E[X_i]E[X_j] = \begin{cases} 0.2^3 - 0.04^2 = 0.0064 & , \ |i-j| = 1 \\ 0.2^4 - 0.04^2 = 0 & , \ |i-j| > 1 \end{cases}$$

ולכן: $\text{Var}(X) = (n-1)\cdot 0.0384 + 2\cdot(n-2)\cdot 0.0064 + 0 = 0.0512n - 0.064$

שאלה 3

נסמן ב- N את מספר הליקויים שנמצאו בכביש. ידוע כי: $N \sim Po(20)$

כעת, כל ליקוי מתוקן על-ידי החברה בהסתברות ⅔ ובאופן בלתי- תלוי בליקויים אחרים. לכן, אם נסמן ב- X את מספר הליקויים שיתוקנו בכביש, אז: $X \sim Po(20\cdot\frac{2}{3} = 13\frac{1}{3})$

$N - X \sim Po(20\cdot\frac{1}{3} = 6\frac{2}{3})$

וכן, המשתנים המקריים X ו- $N-X$ בלתי-תלויים זה בזה. לפיכך:

א.
$$P\{X = 15\} = e^{-40/3}\cdot\frac{(\frac{40}{3})^{15}}{15!} = 0.0927$$

ב.
$$P\{N = 25 \mid X = 15\} = P\{X + (N - X) = 25 \mid X = 15\} = P\{N - X = 10 \mid X = 15\}$$
$$= P\{N - X = 10\} = e^{-20/3}\cdot\frac{(\frac{20}{3})^{10}}{10!} = 0.0608$$

ג. נחשב את מקדם המתאם, תוך ניצול אי-התלות בין שני המשתנים שלעיל:

$$\rho(N, N-X) = \frac{\text{Cov}(N, N-X)}{\sqrt{\text{Var}(N)\text{Var}(N-X)}} = \frac{\text{Cov}(X + N - X, N - X)}{\sqrt{\text{Var}(N)\text{Var}(N-X)}}$$

$$= \frac{\overbrace{\text{Cov}(X, N-X)}^{=0} + \text{Var}(N-X)}{\sqrt{\text{Var}(N)\text{Var}(N-X)}} = \sqrt{\frac{\text{Var}(N-X)}{\text{Var}(N)}} = \sqrt{\frac{6\frac{2}{3}}{20}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

דרך נוספת

נחשב את מקדם המתאם באופן ישיר:

$$\rho(N, N-X) = \frac{\text{Cov}(N, N-X)}{\sqrt{\text{Var}(N)\text{Var}(N-X)}} = \frac{\text{Var}(N) - \text{Cov}(N, X)}{\sqrt{\text{Var}(N)[\text{Var}(N) + \text{Var}(X) - 2\text{Cov}(N, X)]}}$$

נתחיל בחישוב השונויות: $\text{Var}(N) = 20 \quad , \quad \text{Var}(X) = 13\frac{1}{3}$

וכעת, נחשב את השונות המשותפת.

נשים לב כי: $X \mid N = n \sim B(n, \frac{2}{3})$

ולכן:
$$E[NX] = E[E[NX \mid N]] = E[NE[X \mid N]] = E[N\cdot\tfrac{2}{3}N]$$
$$= \tfrac{2}{3}[\text{Var}(N) + (E[N])^2] = \tfrac{2}{3}\cdot(20 + 20^2) = 280$$

ומכאן:
$$\text{Cov}(N, X) = E[NX] - E[N]E[X] = 280 - 20\cdot 13\tfrac{1}{3} = 13\tfrac{1}{3}$$

כלומר:
$$\rho(N, N-X) = \frac{20 - 13\frac{1}{3}}{\sqrt{20\cdot(20 + 13\frac{1}{3} - 2\cdot 13\frac{1}{3})}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

שאלה 4

א. נמצא תחילה את פונקציית הצפיפות המשותפת של X ו- Y :

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y\mid x) = 1\cdot\tfrac{1}{1-x} = \tfrac{1}{1-x} \qquad , \qquad 0<x<1 \quad ; \quad x<y<1$$

כעת, נמצא את פונקציית הצפיפות השולית של Y :

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^y \tfrac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x)\Big|_0^y = -\ln(1-y) \qquad , \qquad 0<y<1$$

ב. תחילה, נשים לב כי הנקודות A ו- B, הנתונות בבעיה, הן משתנים מקריים בלתי- תלויים שהתפלגות כל אחד מהם אחידה (רציפה). הנקודה A היא משתנה מקרי אחיד על הקטע [0,5] ואילו הנקודה B היא משתנה מקרי אחיד על הקטע [1,6]. לפיכך, פונקציית הצפיפות המשותפת שלהן קבועה על הרי בוע שמרכזו בנקודה (3,3.5) ואורך צלעו 5, ושווה בריבוע זה ל- 1/25.

$$P\left(\int_{\sqrt{B}}^{A} x\,dx > \frac{3}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2}x^2\Big|_{\sqrt{B}}^{A} > \frac{3}{2}\right) = P\left(\frac{A^2}{2}-\frac{B}{2} > \frac{3}{2}\right) = P\{A^2 > B+3\}$$

$$= P\{A > \sqrt{B+3}\} + \underbrace{P\{A < -\sqrt{B+3}\}}_{=0} = P\{\sqrt{B+3} < A < 5\}$$

$$= \int_1^6 \int_{\sqrt{b+3}}^{5} f_{A,B}(a,b)\,da\,db = \int_1^6 \int_{\sqrt{b+3}}^{5} \left(\tfrac{1}{5}\right)^2 da\,db = \int_1^6 \tfrac{5-\sqrt{b+3}}{25}\,db$$

$$= \left[\tfrac{5b-\frac{2}{3}(b+3)^{1.5}}{25}\right]_1^6 = \tfrac{30-18-5+5\frac{1}{3}}{25} = \tfrac{37}{75} = 0.49\bar{3}$$

שאלה 5

א. $$P\{X=1\mid A\} = \frac{P(S,F,\ldots,F)}{P(S)} = \frac{p(1-p)^9}{p} = (1-p)^9 \qquad (\text{F = Failure ,S = Success})$$

ב. לפי נתוני הבעיה, למשתנה המקרי X יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 10 ו- p . לפיכך :

$$P\{X=1\mid B\} = P\{X=1\mid X\ge 1\} = \frac{P\{X=1\}}{P\{X\ge 1\}} = \frac{P\{X=1\}}{1-P\{X=0\}} = \frac{10p(1-p)^9}{1-(1-p)^{10}}$$

ג. כדי לחשב את התוחלת המותנית, נתחיל בחישוב $P\{X=i\mid A\}$, לכל $i = 1,2,\ldots,10$:

$$P\{X=i\mid A\} = \frac{p\cdot\binom{9}{i-1}\cdot p^{i-1}(1-p)^{9-(i-1)}}{p} = \binom{9}{i-1}\cdot p^{i-1}(1-p)^{10-i}$$

הסבר: חיתוך המאורעות מתרחש אם ורק אם בניסוי הראשון מתקבלת הצלחה ואחר- כך מתקבלות בדיוק $i-1$ הצלחות נוספות.

נחשב עתה את התוחלת:

$$E[X\mid A] = \sum_{i=1}^{10} iP\{X=i\mid A\}$$

$$= \sum_{i=1}^{10} i\cdot\binom{9}{i-1}\cdot p^{i-1}(1-p)^{10-i} = \sum_{i=0}^{9}(i+1)\cdot\binom{9}{i}\cdot p^{i}(1-p)^{9-i} = E[Y+1]$$

כאשר Y הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 9 ו- p .

לכן:

$$E[X \mid A] = E[Y+1] = E[Y]+1 = 9p+1$$

ד. בדומה לסעיף ב נקבל, כי לכל $i = 1,2,\ldots,10$, מתקיים:

$$P\{X = i \mid B\} = P\{X = i \mid X \geq 1\} = \frac{P\{X = i\}}{P\{X \geq 1\}} = \frac{P\{X = i\}}{1 - P\{X = 0\}}$$

לכן:

$$E[X \mid B] = \sum_{i=1}^{10} iP\{X = i \mid B\} = \sum_{i=1}^{10} \frac{i \cdot P\{X = i\}}{1 - P\{X = 0\}}$$

$$= \frac{1}{1 - P\{X = 0\}} \cdot \sum_{i=1}^{10} iP\{X = i\} = \frac{E[X]}{1 - P\{X = 0\}} = \frac{10p}{1 - (1-p)^{10}}$$