פתרון שאלות בממ"ן 13 סמסטר 2020ב

שאלה 3

א. לכל דקדוק חסר הקשר G השייך ל- $\overline{ALL_{\text{CFG}}}$, יש מילה c, שלא שייכת לשפה שהדקדוק יוצר.

המאמת V מקבל כקלט זוג $<G, c>$, ובודק (בעזרת אלגוריתם להכרעת A_{CFG}), האם המילה c נוצרת על-ידי הדקדוק G. אם לא, הוא מקבל; אחרת, הוא דוחה.

$$\overline{ALL_{\text{CFG}}} = \{G \mid V \text{ accepts } <G, c> \text{ for some string } c\}$$

ב. אי אפשר לחסום את גודל המילה c, שמוכיחה את השייכות של G ל- $\overline{ALL_{\text{CFG}}}$.

ג. במשפט 5.13 הוכח, ש- ALL_{CFG} איננה כריעה. מכאן נובע, שגם $\overline{ALL_{\text{CFG}}}$ איננה כריעה.

כל שפה ב-NP היא כריעה. לכן, $\overline{ALL_{\text{CFG}}}$ לא שייכת ל-NP.

שאלה 4

מסמך אישור קצר, שיכול לאמת שייכות של מילה לשפה B, הוא הפירוק של n לגורמים ראשוניים.
מספר הגורמים הראשוניים של n איננו גדול מ-$\log_2 n$. אורך הייצוג של כל אחד מהם איננו גדול מאורך הייצוג של n. לכן גודל מסמך האישור פולינומיאלי בגודל הייצוג של n. (גודל הייצוג של n הוא $O(\log n)$).

מאמת לשפה יקבל, בנוסף למילת הקלט, את מסמך האישור - הפירוק של n לגורמים ראשוניים.
המאמת יוודא שכל הגורמים בפירוק הם אכן ראשוניים. אם לא, הוא ידחה.
לאחר מכן הוא יוודא שמכפלתם שווה ל-n. אם לא, הוא ידחה.
לאחר מכן הוא יוודא שהראשוני ה-m בפירוק לגורמים ראשוניים גדול מ-k. אם כן, הוא יקבל. אם לא, הוא ידחה.
זמן הריצה של כל אחד מן השלבים פולינומיאלי בגודל הקלט.
הצגנו מאמת בעל זמן ריצה פולינומיאלי לשפה B. לכן B שייכת ל-NP.

שאלה 5

א. אפשר להסיק ש-A שייכת ל-TIME(n). להלן מכונה המכריעה את A בזמן $O(n)$:

"על קלט w:

1. חשב את $f(w)$.
2. בדוק האם $f(w)$ שייכת ל-B. אם כן, קבל (את w). אם לא, דחה (את w)."

זמן החישוב של $f(w)$ בשלב 1 לינארי ב-$|w|$. לכן גם האורך של $f(w)$ לינארי ב-$|w|$.

זמן החישוב של שלב 2 לינארי ב-$|f(w)|$, ולכן גם לינארי ב-$|w|$.

ב. אפשר להסיק ש-A שייכת ל-TIME(n^2). להלן מכונה המכריעה את A בזמן $O(n^2)$:

"על קלט w:

1. חשב את $f(w)$.
2. בדוק האם $f(w)$ שייכת ל-B. אם כן, קבל (את w). אם לא, דחה (את w)."

זמן החישוב של $f(w)$ בשלב 1 לינארי ב-$|w|$. לכן גם האורך של $f(w)$ לינארי ב-$|w|$.

זמן החישוב של שלב 2 ריבועי ב-$|f(w)|$, ולכן גם ריבועי ב-$|w|$.

ג. אי אפשר להסיק ש-A שייכת ל-$\mathrm{TIME}(n)$.

חישוב הרדוקציה דורש זמן ריבועי ב-$|w|$. לכן, האורך של $f(w)$ עשוי להיות ריבועי ב-$|w|$.

הזמן הדרוש להכרעת השייכות של $f(w)$ ל-B לינארי ב-$|f(w)|$. זמן זה עשוי להיות ריבועי ב-$|w|$.

לכן, הזמן הדרוש להכרעת השייכות של $|w|$ ל-A עלול להיות ריבועי ולא לינארי.

ד. אי אפשר להסיק ש-A שייכת ל-$\mathrm{TIME}(n^2)$.

חישוב הרדוקציה דורש זמן ריבועי ב-$|w|$. לכן, האורך של $f(w)$ עשוי להיות ריבועי ב-$|w|$.

הזמן הדרוש להכרעת השייכות של $f(w)$ ל-B ריבועי ב-$|f(w)|$. זמן זה איננו ריבועי ב-$|w|$.

לכן, הזמן הדרוש להכרעת השייכות של $|w|$ ל-A עלול להיות יותר מריבועי.

שאלה 7

"על קלט $<\varphi>$ כאשר φ נוסחה ב-3cnf:

1. בנה את הגרף הלא מכוון $G=(V,E)$ הבא:

   הצמתים: צומת לכל מופע של ליטרל ב-φ.

   הקשתות: כל שני ליטרלים באותה פסוקית מחוברים בקשת. ("משולש" לכל פסוקית).

   בנוסף, מחברים בקשת כל שני ליטרלים משלימים (גם מפסוקיות שונות).
2. החזר את $<G, m>$, כאשר m הוא מספר הפסוקיות ב-φ."

הרדוקציה תקפה: אם φ ספיק, אז יש השמה, שבה בכל פסוקית יש ליטרל שערכו 1. נבחר מכל "משולש" בגרף צומת שמתאים לליטרל שערכו 1. זו קבוצה של m צמתים. בין כל שני צמתים בקבוצה אין קשת, כי כל צומת שייך ל"משולש" אחר, ולא ייתכן ששני צמתים בקבוצה מתאימים לליטרלים משלימים. (אי אפשר להציב 1 בשני ליטרלים משלימים). לכן, זו קבוצה של m צמתים בלתי תלויים.

אם יש בגרף G קבוצה בלתי תלויה U של m צמתים, אז מכיוון ש-G בנוי מ-m "משולשים", יש ב-U צומת אחד מכל "משולש". אין ב-U שני צמתים שמתאימים לליטרלים משלימים, משום שבין שני צמתים של ליטרלים משלימים יש קשת. לכן, אם נקבע ערך 1 לליטרלים שמתאימים לצומתי U, נקבל הצבה שמספקת את φ.

הרדוקציה ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי: ייחדנו צומת לכל מופע של ליטרל בנוסחה. לכן, מספר הצמתים של G לינארי בגודל הקלט. מספר הקשתות של כל גרף לא מכוון בעל n צמתים הוא $O(n^2)$. הבנייה של הקשתות יכולה להתבצע בזמן פולינומיאלי במספר הצמתים. (לכל ליטרל, עוברים על כל הנוסחה, ומוצאים את כל המופעים של הליטרל המשלים שלו).

שאלה 8 סעיף א

a. תהי σ השמת-$\neq$. בכל פסוקית יש ליטרל שערכו 1 ויש ליטרל שערכו 0.
אם נהפוך את הערך שנתנו לכל משתנה, יהיה בכל פסוקית ליטרל שערכו 0 וליטרל שערכו 1.
לכן גם זו השמת-$\neq$.

b. הרדוקציה המוצעת תקפה:
נניח שהנוסחה המקורית ספיקה. נוכיח שלנוסחה שנבנתה על-ידי הרדוקציה יש השמת-$\neq$:
לנוסחה המקורית יש השמה שבה לפחות אחד מתוך y_1, y_2, y_3 מקבל ערך 1.
נקבע ל-b ערך 0. אם ל-y_1 או ל-y_2 נקבע ערך 1, אז נקבע ל-z_i ערך 0.
אם גם ל-y_1 וגם ל-y_2 נקבע ערך 0, אז בהכרח ל-y_3 נקבע ערך 1. במקרה זה נקבע ל-z_i ערך 1.
בכל מקרה יש לנוסחה שנבנתה השמת-$\neq$.

נניח שלנוסחה שנבנתה על-ידי הרדוקציה יש השמת-$\neq$, ונוכיח שהנוסחה המקורית ספיקה:
לפי מה שהראינו בסעיף a, אפשר להניח שבהשמת-$\neq$ של הנוסחה שנבנתה ערכו של b הוא 0.
אם ערכו של z_i הוא 0, אז אחד מתוך y_1, y_2 חייב לקבל ערך 1.
אם ערכו של z_i הוא 1, אז ערכו של y_3 חייב להיות 1.
בכל מקרה, לפחות אחד מתוך y_1, y_2, y_3 מקבל ערך 1. כלומר, הנוסחה המקורית ספיקה.
קל להראות, שהרדוקציה המוצעת ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

c. הרדוקציה של סעיף b ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי. לכן $3SAT \leq_P \neq SAT$.
הוכיחו ש- $\neq SAT$ שייכת ל-NP, ותקבלו ש- $\neq SAT$ היא NP-שלמה.

שאלה 8 סעיף ב

תהי ϕ קלט לבעיית $\neq SAT$. ϕ היא נוסחה ב-3cnf. נניח ש-ϕ היא נוסחה בוליאנית בעלת k פסוקיות $C_1, C_2, ..., C_k$ מעל n משתנים $x_1, x_2, ..., x_n$.
נבנה קלט לבעיית *SET-SPLITTING*:

$$C = \{\{x_1, \overline{x}_1\}, \cdots, \{x_n, \overline{x}_n\}, C_1, \cdots, C_k\} ; \ S = \{x_1, \overline{x}_1, \cdots, x_n, \overline{x}_n\}$$

כלומר, S היא קבוצת הליטרלים האפשריים של הנוסחה ϕ ; C מכילה לכל משתנה x_i את התת-קבוצה $\{x_i, \overline{x}_i\}$ וכן כל פסוקית של ϕ כקבוצה של שלושה ליטרלים.

אם נזהה צבע אדום עם קביעת ערך 0 לליטרל וצבע כחול עם קביעת ערך 1 לליטרל, אז התת-קבוצות מן הסוג הראשון ($\{x_i, \overline{x}_i\}$) מבטיחות, שהליטרל x_i והליטרל המשלים שלו ייצבעו בצבעים שונים (כלומר, יקבלו ערכי אמת הפוכים). התת-קבוצות מן הסוג השני (C_j) מבטיחות, שבכל פסוקית יהיה ליטרל שצבעו אדום (ערכו 0) ויהיה ליטרל שצבעו כחול (ערכו 1).
כדי להשלים את ההוכחה, הוכיחו באופן מפורט את התקפות של הרדוקציה ושהיא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.