

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 4

משקל המטלה: 5 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 9.12.2012

סמסטר: א 2013

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
 - שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (26 נקודות)

- נתונה קבוצה של N אנשים, כאשר N הוא משתנה מקרי אחיד בדיד בין 1 ל-10. (כלומר, הערכים האפשריים של המשתנה המקרי N הם 1, 2, ..., 10, וכל אחד מתקבל בהסתברות 0.1). נותנים לכל אחד מאנשי הקבוצה קופסת גפרורים אחת. מספר הגפרורים בכל קופסה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 20, ואין תלות בין הקופסאות.
- 6 נק' א. מהי ההסתברות שבקופסה מקרית יהיו בדיוק 24 גפרורים?
- 6 נק' ב. בוחרים באקראי 10 קופסאות גפרורים.
- 6 נק' ג. מהי ההסתברות שתהיה ביניהן לפחות קופסה אחת שיש בה בדיוק 24 גפרורים?
- 6 נק' ד. בוחרים באקראי קופסאות גפרורים, בזו אחר זו, עד למציאת 5 קופסאות שיש בהן בדיוק 24 גפרורים.
- 8 נק' ד. מהי ההסתברות שתדרשנה לשם כך בדיוק 100 בחירות של קופסאות גפרורים? מחלקים לאנשי הקבוצה קופסאות גפרורים: לכל אחד – קופסה אחת.
- מהי ההסתברות שאף לא אחד מאנשי הקבוצה יקבל קופסת גפרורים שיש בה בדיוק 24 גפרורים?

שאלה 2 (16 נקודות)

יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p ($0 < p < 1$).

$$Y = \begin{cases} X & , X \leq 2 \\ X - 1 & , X \geq 3 \end{cases} \quad \text{נגדיר את המשתנה המקרי } Y \text{ על-ידי:}$$

8 נק' א. מצא את פונקציית ההסתברות של Y .

רשום אותה באופן מדויק.

8 נק' ב. הראה כי $E[Y] = p(2 - p) + \frac{1-p}{p}$.

שאלה 3 (12 נקודות)

נתונה קבוצה של 20 ילדים – 10 בנים ו-10 בנות.
מחלקים לילדים באקראי 20 כובעים צבעוניים – 10 אדומים, 5 כחולים ו-5 ירוקים.
כל אחד מהילדים מקבל כובע אחד, ואין הבדל בין כובעים מאותו הצבע.
יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הבנות שמקבלות כובעים אדומים.

(6 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות של X .

(6 נק') ב. חשב את השונות של X .

שאלה 4 (22 נקודות)

בתחרות קליעה למטרה, כדי לעבור את השלב הראשון, על כל משתתף להצליח בקליעותיו למטרה 5 פעמים. אולם, לפי כללי התחרות, המשתתף רשאי לנסות לקלוע למטרה לכל היותר 7 פעמים. כעת, אם הקליעה המוצלחת החמישית של משתתף בשלב הראשון מתרחשת לפני שביצע את כל 7 נסיונותיו – הוא מפסיק לנסות לקלוע ועובר לשלב השני. לעומת זאת, אם המשתתף בשלב הראשון צובר (בדיוק) 3 קליעות לא-מוצלחות (לא בהכרח רצופות) – אין סיכוי שיעבור לשלב הבא, ולכן הוא מפסיק מייד לנסות לקלוע ופורש מן התחרות. (נניח שאין אף משתתף שפורש מן התחרות בנסיבות אחרות.)

בשלב השני של התחרות, כל משתתף (שהגיע לשלב הזה) קולע למטרה רק עד להצלחה הראשונה. נניח שאין תלות בין קליעות שונות של משתתף, וכי כל נסיון קליעה למטרה של משתתף בתחרות מסתיים בהצלחה בהסתברות 0.75 בשלב הראשון ובהסתברות 0.6 בשלב השני.

(14 נק') א. נסמן ב- X את מספר הפעמים שמשתתף אקראי בתחרות מנסה לקלוע למטרה בשלב הראשון שלה.

1. מצא את פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X .

2. חשב את השונות של X .

(8 נק') ב. מהי ההסתברות שמשתתף אקראי בתחרות ינסה לקלוע למטרה בסך-הכל 7 פעמים במהלך התחרות?

שאלה 5 (24 נקודות)

נתונה קבוצה של n אנשים, וביניהם אסף.

כל שניים מחברי-הקבוצה לוחצים ידיים בהסתברות p ($0 < p < 1$).
אין תלות בין זוגות שונים של אנשים מהקבוצה.

(6 נק') א. מהי שונות מספר האנשים בקבוצה שאסף לוחץ להם יד?

(6 נק') ב. מהי שונות מספר לחיצות הידיים שמתבצעות בקרב חברי-הקבוצה?

ג. נניח כי $n = 1,001$ וכי $p = 0.005$.

ידוע שאסף לחץ יד עם חבר-קבוצה אחד לפחות.

(6 נק') 1. מהי ההסתברות שאסף לחץ יד עם 3 בדיוק מחברי-הקבוצה?

(6 נק') 2. חשב קירוב פואסוני להסתברות המותנית שאסף לחץ יד עם 3 בדיוק מחברי-הקבוצה?