פתרונות לממ"ן 13 - 2020ב - 20425

1. נסמן ב- X את מספר הלקוחות הנכנסים לחנות במשך שעה אחת , $X \sim Po(50)$.

א. $X_1 \sim Po(25)$ = מספר הלקוחות הנכנסים לחנות במשך חצי-שעה , לכן :

$$P\{X_1 = 20\} = e^{-25}\frac{25^{20}}{20!} = 0.05192$$

ב. אם מספר הלקוחות הנכנסים לחנות במשך שעתיים הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 100, ואם כל לקוח הנכנס לחנות קונה בה מוצר כלשהו בהסתברות 0.16, אז מספר הלקוחות הנכנסים לחנות במשך שעתיים **וקונים בה מוצר כלשהו** הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $16 = 0.16 \cdot 100$. נסמן את המשתנה המקרי האחרון ב- X_2 , ונקבל כי :

$$P\{X_2 = 20\} = e^{-16}\frac{16^{20}}{20!} = 0.05592$$

ג. אם ידוע שבמשך שעה אחת **נכנסו** לחנות 40 לקוחות, ואם כל לקוח הנכנס לחנות קונה בה מוצר כלשהו בהסתברות 0.16, אז מספר הלקוחות (מתוך ה-40) שייקנו בה מוצר כלשהו הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $n = 40$ ו- $p = 0.16$. נסמן את המשתנה המקרי הבינומי ב- Y , ונקבל כי :

$$P\{Y = 5\} = \binom{40}{5} 0.16^5 \cdot 0.84^{35} = 0.1544$$

2. א. למשתנה המקרי המותנה N בהינתן $X = i$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 20 ו- $\frac{i+1}{20}$.

לכן, כאשר $X = 6$, דהיינו $\frac{i+1}{20} = \frac{6+1}{20} = 0.35$, מתקיים $N \mid X = 6 \sim B(20, 0.35)$, ומכאן כי :

$$P\{N = 8 \mid X = 6\} = \binom{20}{8} \cdot 0.35^8 \cdot 0.65^{12} = 0.1614$$

ב. למשתנה המקרי X יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 10 ו- 0.5 ; ולמשתנה המקרי המותנה N בהינתן $X = i$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 20 ו- $\frac{i+1}{20}$. הואיל ולכל $i = 0,1,\ldots,10$, מקבלים כי $0 < \frac{i+1}{20} < 1$, ההסתברות המשותפת שלהלן חיובית לכל $i = 0,1,\ldots,10$ ו- $n = 0,1,\ldots,20$, ומתקיים :

$$P\{N = n, X = i\} = P\{N = n \mid X = i\}P\{X = i\} = \binom{20}{n} \cdot \left(\frac{i+1}{20}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{(i+1)}{20}\right)^{20-n} \cdot \binom{10}{i} \cdot 0.5^{10}$$

3. א. הערכים האפשריים של X ושל Y הם 0, 1, 2 ו-3. ההסתברויות המשותפות לקבלת ערכים אלו הן :

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=1,Y=3\}=P\{X=2,Y=2\}=P\{X=2,Y=3\}$$
$$=P\{X=3,Y=1\}=P\{X=3,Y=2\}=P\{X=3,Y=3\}=0$$

$$P\{X=0,Y=1\}=\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{3}{84}$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{6}{84}$$

$$P\{X=0,Y=3\}=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{9}{3}}=\frac{1}{84}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{4}{84}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{24}{84}$$

$$P\{X=1,Y=2\}=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{12}{84}$$

$$P\{X=2,Y=0\}=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{12}{84}$$

$$P\{X=2,Y=1\}=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{18}{84}$$

$$P\{X=3,Y=0\}=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}=\frac{4}{84}$$

X \ Y	**0**	**1**	**2**	**3**	p_X
0	0	$\frac{3}{84}$	$\frac{6}{84}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{10}{84}$
1	$\frac{4}{84}$	$\frac{24}{84}$	$\frac{12}{84}$	0	$\frac{40}{84}$
2	$\frac{12}{84}$	$\frac{18}{84}$	0	0	$\frac{30}{84}$
3	$\frac{4}{84}$	0	0	0	$\frac{4}{84}$
p_Y	$\frac{20}{84}$	$\frac{45}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{1}{84}$	

ב. המשתנים המקריים X ו- Y תלויים זה בזה, מכיוון שתנאי אי-התלות אינו מתקיים.

למשל: $P\{X=3,Y=3\}=0 \quad \neq \quad P\{X=3\}P\{Y=3\}=\frac{4}{84}\cdot\frac{1}{84}$

ג. למשתנה המקרי המותנה Y בהינתן $X=1$ יש שלושה ערכים אפשריים : 0, 1 ו- 2., ומתקיים :

$$P\{Y=0\mid X=1\}=\tfrac{4}{84}\Big/\tfrac{40}{84}=0.1$$

$$P\{Y=1\mid X=1\}=\tfrac{24}{84}\Big/\tfrac{40}{84}=0.6$$

$$P\{Y=2\mid X=1\}=\tfrac{12}{84}\Big/\tfrac{40}{84}=0.3$$

4. א. הואיל ואין תלות בין התאים שאליהם מוכנסים הכדורים, וכי הם מוכנסים בהסתברויות שוות לכל התאים, ל- X_i-ים יש התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $\underline{p}=(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n})$.

לפיכך : $P\{X_1=2,X_2=1\}=\dfrac{n!}{2!1!(n-3)!}\cdot\left(\dfrac{1}{n}\right)^3\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^{n-3}=\dfrac{n(n-1)(n-2)^{n-2}}{2n^n}$

ב. ההתפלגות המשותפת של ה-X_i-ים מולטינומית. לפיכך, ההתפלגות המותנית של X_4 בהינתן $X_3 = 2$ היא בינומית עם הפרמטרים $n-2$ ו- $p = \frac{1}{n}\Big/\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n-1}$.

מכאן כי: $P\{X_4 = 1 \mid X_3 = 2\} = \binom{n-2}{1} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-3} = \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-2}$

5. א.

$$P\{X_1 > m\} = P\{\text{ב-}m\text{ הניסויים הראשונים התקבלו רק כשלונות}\} = (1-p)^m$$

ב. סכום של משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים שלכולם אותו הפרמטר p הוא משתנה מקרי בינומי שלילי. הפרמטר r של המשתנה המקרי הבינומי שלילי נקבע לפי מספר המשתנים המקריים שבסכום, והפרמטר p שווה לזה של המשתנים המקריים הגיאומטריים. לכן, $X_1 + X_2 \sim NB(2, p)$ ומתקיים $\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \frac{2(1-p)}{p^2}$.

ג. 1. לכל $m = 1,2,\ldots$ מתקיים:

$$P\{Z \le m\} = P\{X_1 \le m, X_2 \le m\} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{כי } X_1 \text{ ו- } X_2 \\ \text{בלתי-תלויים}}}{=} P\{X_1 \le m\}P\{X_2 \le m\} = \left[1-(1-p)^m\right]^2$$

ואם $m \le 0$ אז $F_Z(m) = 0$.

2. נפריד את חישוב ההסתברות המשותפת לשלושה מקרים.

א) אם $m < n$ או $m \le 0$ או $n \le 0$: $P\{X_1 = n, Z = m\} = 0$

ב) אם $1 \le m = n$: $P\{X_1 = n, Z = m\} = P\{X_1 = m\}P\{Z = m \mid X_1 = m\}$

$= P\{X_1 = m\}P\{X_2 \le m\}$ [בגלל האי-תלות בין ה- X_i-ים]

$= (1-p)^{m-1}p \cdot \left[1-(1-p)^m\right] \quad , \quad m = 1,2,\ldots$

ג) אם $m > n \ge 1$: $P\{X_1 = n, Z = m\} = P\{X_1 = n\}P\{Z = m \mid X_1 = n\}$

$= P\{X_1 = n\}P\{X_2 = m\}$ [בגלל האי-תלות בין ה- X_i-ים]

$= (1-p)^{n+m-2}p^2 \quad , \quad n = 1,2,\ldots \quad , \quad m = n+1, n+2, \ldots$