תשובה 2

א.

נסמן (על פי הגדרה 5.19):

$$A_1 = R^N \quad , \quad A_2 = A_1^N \quad , \quad A_3 = A_2^N$$

על פי 5.21

$$|A_1| = |R^N| = |R|^{|N|} = C^{\aleph_0}$$

על פי 5.15 ($\aleph_0 * \aleph_0 = \aleph_0$) ועל פי ממ"ן 14 ($C^{\aleph_0} = C$):

$$|A_2| = |A_1^N| = |A_1|^{|N|} = (C^{\aleph_0})^{\aleph_0} = C^{\aleph_0 * \aleph_0} = C^{\aleph_0} = C$$

על פי 5.15 ($\aleph_0 * \aleph_0 = \aleph_0$) ועל פי ממ"ן 14 ($C^{\aleph_0} = C$):

$$|A_3| = |A_2^N| = |A_2|^{|N|} = (C)^{\aleph_0} = C^{\aleph_0} = C$$

ב.

כמו בסעיף א בדיוק.

מגיעים ל $|B_1| = |B_2| = |B_3| = 2^C$.

תשובה 3

א. מספר הדרכים לסדר 9 ספרות בשורה הוא תמורה של 9 אברים - !9.
מכיוון שיש חזרות של ספרות מסוימות יש לחלק את המספר הזה בתמורות של הספרות הללו :
1 מופיע פעמיים ולכן !2
2 מופיע פעמיים ולכן !2
3 מופיע פעמיים ולכן !2
4 מופיע פעמיים ולכן !2
כלומר המספר הוא :

9! / (2! * 2! * 2! * 2!) = 22680

ב. אם שתי הספרות 1 מופיעות צמודות ניתן להסתכל על הבעיה כך : יש לסדר את האברים הבאים בשורה :

11 , 2 , 2 , 3 , 3 , 4 , 4 , 5

כלומר יש לנו 8 אברים ומספר הדרכים הוא !8 (שוב תמורה של 8 אברים).
כעת יש לבטל את התמורות של הספרות 2 , 3 , 4 – כלומר לחלק ב !2 * !2 * !2
ולכן מספר הדרכים הוא 5040

ג.

U – קבוצת כל הסידורים של המחרוזת. על פי א' - $|U| = 22{,}680$.

A_i (1<=i<=4) - קבוצת כל הסידורים בהם מופיעה המחרוזת ii.
על פי סעיף ב' כל קבוצה כזו כוללת 5040 אברים.
יש 4 קבוצות כאלה (4 מעל 1)

$A_i \cap A_j$ (קבוצת כל הסידורים בהם מופיעות המחרוזות ii ו jj) :
נחשב כמה איברים יש בכל זוג קבוצות כזה :
יש לנו 7 אברים (2 אברים שמכילים 2 תווים) ומספר הדרכים הוא !7.
כעת יש לבטל את התמורות של 2 הספרות הנותרות שמופיעות בצורה כפולה – כלומר לחלק ב !2 * !2
ולכן מספר הדרכים הוא 1260.
יש 6 קבוצות כאלה (4 מעל 2 – בוחרים 2 תווים כל פעם מתוך הארבע ומרכיבים את קבוצת החיתוך).

$A_i \cap A_k \cap A_j$ (קבוצת כל הסידורים בהם מופיעות המחרוזות ii , jj , kk) :
נחשב כמה איברים יש בכל זוג קבוצות כזה :
יש לנו 6 אברים (3 אברים שמכילים 2 תווים) ומספר הדרכים הוא !6.
כעת יש לבטל את התמורות של הספרה הנותרת שמופיעה בצורה כפולה – כלומר לחלק ב!2
ולכן מספר הדרכים הוא 360.
יש 4 קבוצות כאלה (4 מעל 3– בוחרים 3תווים כל פעם מתוך הארבע ומרכיבים את קבוצת החיתוך).

$A_i \cap A_k \cap A_j \cap A_m$ (קבוצת כל הסידורים בהם מופיעות המחרוזות ii , jj , kk , mm) :
נחשב כמה איברים יש בכל זוג קבוצות כזה :
יש לנו 5 אברים (4 אברים שמכילים 2 תווים) ומספר הדרכים הוא !5.
כאן אין צורך לבטל תמורות של אבר במחרוזת כי כל אבר מופיע פעם אחת ולכן 120 = !5.
יש קבוצה אחת כזו (4 מעל 4).

ולכן :
הקבוצה המשלימה של A_1 היא קבוצת כל המחרוזות בהן לא מופיע המחרוזת 11. לכן אם נעשה חיתוך של הקבוצות המשלימות של A_1, A_2, A_4, A_4 נקבל קבוצה המכילה את המחרוזות המבוקשות :

$| A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4' | = 1 * 22680 – 4 * 5040 + 6 * 1260 – 4 * 360 + 1 * 120 = 8760$

תשובה 4

א. יש רק דרך אחת לבנות מחרוזת בת 0 תווים.
אם המחרוזת היא בת תו אחד הוא יכול להיות כל אחד מהשבעה.
אם המחרוזת בת שני תווים אז :

1. אם התו הראשון הוא אות (אחד מארבעה) אז התו השני יכול להיות כל אחד מהשבעה.
2. אם התו הראשון הוא מספר (אחד משלושה) אז התו השני יכול להיות רק אות (אחד מארבעה).

$a_0 = 1$
$a_1 = 7$
$a_2 = 4*7 + 3*4 = 40$

וכעת ליחס הנסיגה. נניח כי התו האחרון (במחרוזת בת n תווים) הוא אחד מארבעת האותיות. אזי אין הגבלה על n-1 התווים שקדמו לו.
אם התו האחרון הוא אחד משלושת הספרות אזי התו שלפניו חייב להיות אחד מארבעת האותיות ועל n-2 התווים האחרונים אין הגבלה.
לפיכך :

$A_n = 4*A_{n-1} + 3*4*A_{n-2}$

קל לראות כי הצבת ערכי ההתחלה מקיימת את המשוואה.

ב. נעבור למשוואה אופיינית :

$A^n = 4A^{n-1} + 12A^{n-2}$
$A^n - 4A^{n-1} - 12A^{n-2} = 0$
$A^2 - 4A - 12= 0$
$(A – 6) * (A + 2) = 0$

נציב בחזרה את השורשים בצירוף הליניארי:
$A_n = A * (6)^n + B * (-2)^n$
כעת על פי ערכי התחלה ($n=0$, $a_0 = 1$; $n=1$, $a_1 = 7$) נמצא את A ו B :
$1 = A * 1 + B * 1$
$7 = 6A - 2B$

ומכאן ש $A=9/8$ ו $B=-1/8$.

כלומר (נציב את A , B בצירוף הליניארי)
$A_n = 9/8*6^n - 1/8*(-2)^n$