

מבנה הבחינה :

- * יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- * משקל כל שאלה 25% .
- * אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- * **יש לנמק כל תשובה**, גם אם זה לא נאמר במפורש בשאלה.
 - * **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
 - * **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
 - * **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**
-

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

- (5 נק') א. הוכח שלא קיימת קבוצה סופית A ויחס R מעל A , המקיים:
לכל שני שלמים חיוביים i, j , אם $i \neq j$ אז $R^i \neq R^j$.
- (10 נק') ב. נתון היחס הבא מעל \mathbb{N} : $R = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
הוכח: לכל $k, 1 \leq k$, $R^k = \{(n, n+k) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- (10 נק') ג. יהי T הסגור הטרנזיטיבי של היחס R מסעיף ב'. השלם את האמירה שלהלן:
יהיו $n, m \in \mathbb{N}$. $(n, m) \in T$ אם ורק אם ?
את התשובה יש לרשום לא בעזרת איחוד של יחסים, ולא בעזרת שרשרות של זוגות:
עליך לתת תנאי ברור ופשוט מתי $(n, m) \in T$, תנאי ש- R לא מופיע בו.
הוכח את תשובתך. שים לב שבטענת "אם ורק אם" עליך להוכיח שני כיוונים.

שאלה 2

- השאלה מתייחסת לפעולה של הפרש סימטרי, ר' עמ' 27 בכרך "תורת הקבוצות".
- (5 נק') א. תנו דוגמא לקבוצות A, B המקיימות:
 $|A \oplus B| = \aleph_0$, $|A| = |B| = \aleph_0$, $A \neq B$.
- (5 נק') ב. תנו דוגמא לקבוצות A, B המקיימות:
 $|A \oplus B| \neq \aleph_0$, $|A| = |B| = \aleph_0$, $A \neq B$.
- בסעיפים א, ב, כמובן יש להראות שהדוגמאות שלכם מקיימות את הנדרש.
- (15 נק') ג. נתון: $|B| = \aleph_0$, $|A| > \aleph_0$. הוכיחו: $|A \oplus B| = |A|$.

שאלה 3

- (3 נק') א. מהו מספר הדרכים לסדר את המחרוזת 1223334444 ?
- (4 נק') ב. מהו מספר הדרכים לסדר את המחרוזת הנ"ל כך שיופיע הרצף 333 ?
- (18 נק') ג. חשב את מספר הדרכים לסדר את המחרוזת הנ"ל כך שלא תופיע המחרוזת 22, לא תופיע המחרוזת 333, ולא 4444 (אפשר שיופיעו 33, 444)
הדרכה: עקרון ההכלה וההפרדה.

בכל הסעיפים בשאלה זו יש להגיע לתשובה סופית מספרית. נמק את תשובותיך.

שאלה 4

(ניקוד: סעיפים א, ב, ג: 5 נק' לכל סעיף. סעיף ד: 10 נקודות)

סעיפים א, ב, ג מתייחסים לסיפור הבא:

לקורס במדעי המחשב רשומים בקבוצה מסוימת 12 תלמידים. במהלך הקורס יש להגיש

עבודה אחת בצוותים, בכל צוות 3 סטודנטים. כל הצוותים מקבלים אותה עבודה להכין.

בכל סעיף מצאי בכמה דרכים יכולים התלמידים להתחלק לצוותים.

יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

א. תלמידים א, ב, ג חייבים להיות באותו צוות.

ב. אף זוג מבין שלושת התלמידים א, ב, ג אינו יכול להיות באותו צוות (אסור גם ששלושתם

יהיו באותו צוות).

ג. לכל צוות יש ראש צוות (במלים אחרות, ההגדרה של "צוות" כוללת כעת תפקיד שנקרא

"ראש צוות", אותו ממלא אחד מחברי הצוות).

ד. בקבוצת מעבדה בקורס אחר יש 50 תלמידים. המדריך ביקש שהכנת העבודה הראשונה

תהיה בצוותים, ויהיו לא יותר מ- 6 צוותים. מתוך בלבול, הוא לא הגביל את גודלו של צוות.

למשל, אפשר שיהיה צוות אחד של 45 תלמידים ועוד 5 "צוותים" שבכל אחד מהם תלמיד בודד.

לגבי העבודה השנייה בקורס, המדריך אמר שהפעם יכולים להיות לכל היותר 8 צוותים.

גם הפעם הוא לא הגביל את גודלו של צוות, אבל דרש שהצוותים בשתי העבודות יהיו שונים

לגמרי: כל שני תלמידים שהיו באותו צוות בעבודה הראשונה, חייבים להיות בצוותים שונים

(כלומר לא להיות יחד בצוות) בעבודה השנייה.

הוכיחי שלא ניתן לקיים את דרישותיו של המדריך המבולבל.

שאלה 5

תהי L שפה חלקית לשפת תחשיב הפרדיקטים, ובה בין השאר סימני משתנים x, y, z ,

סימן קבוע a וסימן פרדיקט דו-מקומי R .

לכל אחד מהפסוקים הבאים (הכתובים בכתוב מקוצר), קבע אם הוא:

(i) אמיתי לוגית (ii) שקרי לוגית (iii) אינו אמיתי לוגית ואינו שקרי לוגית.

במקרים (i), (ii) הסבר בקצרה את תשובתך באופן מילולי. אין צורך בהוכחה מלאה.

במקרה (iii) - תן דוגמא לאינטרפרטציה שבה הפסוק אמיתי ודוגמא לאינטרפרטציה שבה

הפסוק שקרי. בכל אינטרפרטציה, ציין מהו העולם (תחום האינטרפרטציה), מהו הפירוש של R

ומהו הפירוש של a .

8 נק' א. $\exists x(R(x, x))$

8 נק' ב. $(\exists z R(a, z)) \rightarrow (\exists x \exists y R(x, y))$

9 נק' ג. $(\exists x \exists y R(x, y)) \wedge (\forall z (\sim R(a, z)))$

מה? חנה!