תשובה 1

א. נשים לב שעבור מספר התווים בפסוק מתקיימים בדיוק 3 התנאים שבשאלה:

(*i*) בפסוק יסודי יש תו אחד ;

(*ii*) אם α פסוק כלשהו (**לאו דווקא יסודי !**) אז בפסוק $\sim(\alpha)$ יש בדיוק 3 תוים יותר מאשר ב- α (נוספו זוג סוגרים וסימן השלילה) ;

(*iii*) בדומה מתקיים התנאי השלישי בשאלה.

מכיוון ששתי פונקציות בעלות אותו תיאור רקורסיבי מתלכדות, הרי הפונקציה שהוגדרה בשאלה מביעה את מספר התווים בפסוק !

ב. חישוב רקורסיבי, או בעזרת ספירת התוים, נותן: $f[\varphi] = 34$.

ג. הוכחה:

(*i*) לפסוק יסודי $f[P]=1$ והתנאי מתקיים.

(*ii*) נניח ש- α הוא פסוק (**לאו דווקא יסודי !**) ו- $f[\alpha]$ נותן שארית 1 בחילוק ב- 3.

מהגדרת f, $f[\sim(\alpha)] = f[\alpha] + 3$ ולכן גם הוא נותן שארית 1 בחילוק ב- 3.

(*iii*) יהיו α, β פסוקים שכל אחד מהם מקיים את ההנחה.

נסמן אפוא $f[\alpha]=3n+1$, $f[\beta]=3m+1$.

מהגדרת f ,

$$f[(\alpha)\to(\beta)] = f[\alpha]+f[\beta] + 5 = 3n+1+3m+1+5 = 3(n+m+2)+1$$

וקיבלנו שגם $f[(\alpha)\to(\beta)]$ נותן שארית 1 בחילוק ב- 3.

בכך הוכחה הטענה, באינדוקציה על בניית פסוק.

תשובה 2

הפסוק $P_0 \to P_0$ שבסוף הפסוק הנתון הוא טאוטולוגיה. קל לראות שאם נסלק אותו נקבל פסוק **שקול טאוטולוגית** לפסוק המקורי. לכן די לתת צורות נורמליות לפסוק הזה - כל צורה נורמלית שלו היא בהכרח גם צורה נורמלית לפסוק המקורי.

נסתכל בפסוק שנותר: $(\sim(P_0 \to P_1)) \vee (\sim(P_0 \to P_2))$.

הפסוק $P_0 \to P_1$ שקרי אםם P_0 אמיתי ו- P_1 שקרי.

לכן $\sim(P_0 \to P_1)$ אמיתי אםם P_0 אמיתי ו- P_1 שקרי.

בדומה $\sim(P_0 \to P_2)$ אמיתי אםם P_0 אמיתי ו- P_2 שקרי.

מכאן לא קשה לרשום את לוח האמת של $(\sim(P_0 \to P_1)) \vee (\sim(P_0 \to P_2))$.

בעזרת הלוח שנרשום או בעזרת מה שנאמר כאן, אנו רואים שהפסוק הנ"ל אמיתי ב- 3 מתוך 8 השורות של לוח האמת:

כל השורות בהן P_0 אמיתי, פרט לשורה בה P_0, P_1, P_2 אמיתיים כולם.

מכאן לפי האלגוריתם 2.30 בספר, **צורה דיסיונקטיבית נורמלית (צד"נ)** לפסוק היא:

$(P_0 \wedge P_1 \wedge (\sim P_2)) \vee (P_0 \wedge (\sim P_1) \wedge P_2) \vee (P_0 \wedge (\sim P)_1 \wedge (\sim P_2))$.

צד"נ של פסוק אינה יחידה: ייתכנו צורות רבות כאלה !

צד"נ אחרת אפשרית לפסוק זה, שניתן לקבל אותה ישירות מהפסוק הנתון היא:

(*) $(P_0 \wedge (\sim P_1)) \;\vee\; (P_0 \wedge (\sim P_2))$

בצורה זו לא כל הפסוקים היסודיים הנתונים מופיעים בכל מרכיב - זה לגיטימי !

צורה קוניונקיטיבית נורמלית (צק"נ) לפסוק: לפי המתכון שבתשובה לשאלה 2.33 נקבל צורה אחת אפשרית, שהיא קוניונקציה של 5 פסוקים שכל אחד מהם מכיל את כל 3 הפסוקים היסודיים, עם הופעות שונות של סימני שלילה על חלק מהם.

נדגים כאן דווקא צק"נ אחרת לפסוק המקורי: $P_0 \wedge ((\sim P_1) \vee (\sim P_2))$!

הגענו לפסוק זה על-ידי שימוש בחוק הפילוג על הפסוק (*) ופישוט הפסוק שהתקבל בעזרת שקילויות שונות.

תשובה 3

א. נסמן: L: לוגיקה היא מקצוע קשה. S: רוב הסטודנטים אוהבים לוגיקה.

D: דיסקרטית הוא קורס קל .

אנו רואים את L,S,D כפסוקים יסודיים. תרגום הטענות בשאלה:

(i) $L \vee S$ (ii) $D \to (\sim L)$ (iii) $(\sim S) \to (\sim D)$

ב. ניתן לענות על השאלה בעזרת לוח אמת בעל 8 שורות.

למען העניין, נראה דרך אחרת:

עלינו לבדוק אם בכל אינטרפרטציה שבה (i)+(ii) אמיתיים, גם (iii) אמיתי.

נבדוק אם קיימת אינטרפרטציה J שבה (i)+(ii) אמיתיים ו- (iii) שקרי.

נתבונן ב- (iii) . לפי הלוח של "חץ",

פסוק "חץ" הוא **שקרי** ב- J כלשהי אםם המרכיב השמאלי שלו אמיתי ב- J והימני שקרי ב- J.

במקרה שלנו זה אומר: $\sim S$ אמיתי ב- J ו- $\sim D$ שקרי ב- J .

כלומר $J(S) = \mathrm{F}$, $J(D) = \mathrm{T}$.

הנחנו ש- (ii) אמיתי ב- J , ויחד עם התוצאה $J(D) = \mathrm{T}$, נקבל מהלוח של "חץ" שגם $J(\sim L) = \mathrm{T}$. כלומר $J(L) = \mathrm{F}$.

קיבלנו $J(L)=\mathrm{F}$ וקודם קיבלנו $J(S)=\mathrm{F}$. מהלוח של "או" יוצא שגם פסוק *(i)* שקרי ב- J, בסתירה להנחתנו !

הגענו לסתירה, לכן לא קיימת J שבה *(i)*+*(ii)* אמיתיים ו- *(iii)* שקרי.

כלומר בכל אינטרפרטציה שבה *(i)* +*(ii)* אמיתיים, גם *(iii)* אמיתי.

משמע - התוצאה *(iii)* **נובעת טאוטולוגית** מההנחות *(i)* + *(ii)* !

תשובה 4

א. לא נכון. דוגמא נגדית: יהיו α,β פסוקים **יסודיים** (!) שונים, למשל $\alpha=P_1$, $\beta=P_2$.
מובן שאף אחד מהם אינו גורר טאוטולוגית את השני, כי אפשר לתת לכל אחד מהם ערך אמת שונה. מצד שני, אפשר לתת לשניהם אותו ערך אמת, כלומר יש שורה בלוח האמת המשותף בה שניהם מקבלים T.

ב. לא נכון. דוגמא נגדית: ניקח $\alpha=P_1$, $\beta=P_2$, $\gamma=P_1\wedge P_2$.
מתקיים $\alpha\wedge\beta \models \gamma$, כי $\alpha\wedge\beta=\gamma$, וכמובן $\gamma\models\gamma$.
אבל אף אחד מהפסוקים α,β לבדו אינו גורר טאוטולוגית את γ (נמקו מדוע).

ג. לא נכון. דוגמא נגדית: יהי $\alpha=P_1$, פסוק יסודי.
באינטרפרטציה $J[\alpha]=\mathrm{F}$ מתקיים $J[\alpha\to(\sim\alpha)]=\mathrm{T}$, לכן $\alpha\to(\sim\alpha)$ אינו סתירה.

ד. לא נכון. דוגמא נגדית: יהי $\alpha=P_1$, פסוק יסודי.
באינטרפרטציה $J[\alpha]=\mathrm{F}$ מתקיים $J[(\alpha\to\alpha)\to(\sim\alpha)]=\mathrm{T}$,
לכן $(\alpha\to\alpha)\to(\sim\alpha)$ אינו סתירה.

ה. נכון. אפשר להראות ע"י לוח אמת. אפשר גם מהר יותר ע"י הסתכלות בלוח האמת של "חץ" ובדיקה מה זה אומר לגבי הפסוק הנתון. נעשה זאת בפורום אם יהיה עניין.

ו. נכון, למרות שנראה אולי מפתיע. אפשר להוכיח בעזרת לוח אמת, נסו לתת דרך קצרה יותר, ונמשיך בפורום אם יהיה עניין.

איתי הראבן