

מבנה הבחינה :

- * יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- * משקל כל שאלה 25% .
- * אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- * יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה, אלא אם נאמר בשאלה שאין צורך לנמק.
 - * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
 - * אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
 - * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
-

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

\mathbb{N} היא קבוצת המספרים הטבעיים (תזכורת: בקורס זה אפס הוא מספר טבעי).

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ היא קבוצת המספרים השלמים:

בכל סעיף קבעו אם היחס (הרלציה) שהוגדר בו הוא יחס שקילות. הוכיחו את תשובותיכם.

א. היחס J המוגדר מעל \mathbb{N} : (6 נק')

$$(x, y) \in J \text{ אם } x - y = 3n \text{ כך ש- } n \in \mathbb{N}$$

ב. היחס K המוגדר מעל \mathbb{Z} : (6 נק')

$$(x, y) \in K \text{ אם } x - y = 3n \text{ כך ש- } n \in \mathbb{Z}$$

ג. היחס M המוגדר מעל \mathbb{Z} : (6 נק')

$$(x, y) \in M \text{ אם } x + y = 3n \text{ כך ש- } n \in \mathbb{Z}$$

ד. היחס L המוגדר מעל \mathbb{Z} : (7 נק')

$$(x, y) \in L \text{ אם } x - y = 3n \text{ כך ש- } n \in \mathbb{Z} \text{ או } x - y = 5n \text{ כך ש- } n \in \mathbb{Z}$$

שאלה 2

טענה

אם k, m עוצמות גדולות מ-1 (סופיות או אינסופיות), אז $k + m \leq k \cdot m$.

הנה התחלה של הוכחה לטענה

תהי A קבוצה שעוצמתה k , ותהי B קבוצה זרה ל- A (!), שעוצמתה m

(יש קבוצות כאלה, משיקולים כללים שהוזכרו בפרק 5 בתורת הקבוצות).

מהנתון על k, m נובע בפרט ש- A, B אינן ריקות. יהי אפוא $a_1 \in A$ ויהי $b_1 \in B$.

נבנה פונקציה $f: A \cup B \rightarrow A \times B$.

המשיכו את ההוכחה מנקודה זו (ולא בדרך אחרת).

אין צורך להעתיק את החלק שרשום כאן.

במהלך ההוכחה שימו לב לבעיה בחד-חד-ערכיות שעשויה להיווצר, ותנו לבעיה מענה ע"י שיפוף

קטן בפונקציה שאתם בונים. שימו לב שנתון כי $k, m \geq 2$.

שאלה 3

בידינו 7 כדורים: 4 כדורים לבנים ו-3 כדורים כחולים אחד, כדור אדום אחד וכדור ירוק אחד. בכל סעיף, מצאו בכמה דרכים ניתן לחלק את כל 7 הכדורים לתאים, לפי המפורט בסעיף.

(4 נק') א. יש 7 תאים, לשים בדיוק כדור אחד בכל תא.

(7 נק') ב. יש 5 תאים, אפשר לשים כמה כדורים בתא, ייתכנו תאים ריקים.

(7 נק') ג. יש 5 תאים, אפשר לשים כמה כדורים בתא, ייתכנו תאים ריקים, בכל תא יהיה לכל היותר כדור לבן אחד.

(7 נק') ד. יש 5 תאים, אפשר לשים כמה כדורים בתא, ייתכנו תאים ריקים, בכל תא יהיה לכל היותר כדור צבעוני אחד.

בכל סעיפי השאלה: התאים נחשבים שונים זה מזה. אין חשיבות לסדר הכדורים בתוך תא. כדור צבעוני הוא כדור שאינו לבן. יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 4

יהי a_n מספר הסדרות באורך n , שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0,1,2\}$,

אשר אין בהן הופעה של 00 ואין בהן הופעה של 01 (מותרת הופעה של 10).

דוגמאות לסדרות מותרות באורך 5: 11110, 12211.

דוגמאות לסדרות אסורות באורך 5: 11100, 12011.

(10 נק') א. רשמי בעזרת חישוב ישיר את a_0, a_1, a_2 . רשמי יחס נסיגה עבור a_n .

בדקי שהערכים שרשמת עבור a_0, a_1, a_2 מתאימים ליחס הנסיגה.

(15 נק') ב. פתרי את יחס הנסיגה וקבלי נוסחה מפורשת עבור a_n .

ביטויים כגון $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ יש להשאיר כפי שהם.

ביטויים כגון $\sqrt{12}$ יש להעביר לצורה $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$.

שאלה 5 - מעבר לדף.

שאלה 5

הגרף G מוגדר כך :

הצמתים של G הם הקבוצות בנות בדיוק 3 אברים מתוך $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

למשל הקבוצה $\{1,4,7\}$ היא צומת של G .

בין שני צמתים שונים A, B יש קשת אם ורק אם $|A \cap B| = 1$.

למשל יש קשת בין $\{1,4,7\}$ לבין $\{2,3,4\}$.

(8 נק') א. הוכח ש- G קשיר. הדרכה: הפרד למקרים לפי גודל החיתוך בין שני צמתים.

(5 נק') ב. מהי דרגת כל צומת ב- G ? הוכח.

(7 נק') ג. כמה קשתות יש ב- G ? הוכח.

(5 נק') ד. הוכח ש- G הוא המילטוני.

בהצלחה!