

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1 ו-2

קומבינטוריקה; הסתברות במרחבי מדגם בעלי תוצאות שוות-הסתברות

מספר השאלות: 5 משקל המטלה: 5 נקודות

סמסטר: ב 2012 מועד אחרון להגשה: 1.4.2012

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
 - שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (28 נקודות)

נתונים 10 כדורים כחולים ממוספרים מ-1 עד 10 ו-10 כדורים אדומים ממוספרים אף הם מ-1 עד 10. מסדרים באקראי את 20 הכדורים בשורה.

- 7 נק' א. מה ההסתברות שבכל זוג של מקומות סמוכים, כלומר, 1 ו-2, 3 ו-4, ..., 19 ו-20, יהיו כדורים בעלי אותו מספר?
- 7 נק' ב. מה ההסתברות שלא יהיו במקומות סמוכים שני כדורים (או יותר) שעליהם כפולה של 3?
- 7 נק' ג. מה ההסתברות שבמקום 5 בשורה יהיה כדור שעליו הספרה 7?
- 7 נק' ד. מה ההסתברות שבמקומות הקיצוניים בשורה יהיו כדורים אדומים?

שאלה 2 (28 נקודות)

בבניין 8 קומות ובכל קומה 4 דירות: צפונית, דרומית, מערבית ומזרחית.

בוחרים ועד-בית, הכולל יו"ר, גזבר ו-2 נציגים נוספים שאינם בעלי תפקידים מוגדרים. בסך-הכל בוחרים 4 חברי-ועד מ-4 דירות שונות, כאשר ההנחה היא שלכל דירה קיים אדם שאפשר לבוחרו לוועד וכי הוא מתאים לכל תפקיד.

- 7 נק' א. מהו מספר הבחירות השונות האפשריות?
- 7 נק' ב. בכמה בחירות שונות לפחות אחד מ-2 הנציגים הנוספים (שאינם בעלי תפקידים) הוא דייר של דירה צפונית?
- 7 נק' ג. בכמה בחירות שונות היו"ר ובדיוק אחד מהנציגים הנוספים הם מאותה הקומה?
- 7 נק' ד. בכמה בחירות שונות היו"ר הוא דייר של אחת מקומות 6-8 והגזבר הוא דייר של אחת מקומות 4-6?

שאלה 3 (18 נקודות)

יהי S אוסף כל התמורות האפשריות של המספרים $\{1, 2, \dots, 6\}$.
נאמר שהמספר i נמצא במקום ה"נכון" בתמורה, אם הוא נמצא בה במקום i , לכל $i = 1, 2, \dots, 6$.
לדוגמה, בתמורה $(1, 3, 2, 5, 4, 6)$ יש שני מספרים במקום הנכון, שהם 1 ו-6.
בוחרים באופן מקרי תמורה כלשהי מתוך S .

- 6 נק' א. מהי ההסתברות שהתמורה הנבחרת היא תמורת הזהות (שבה כל המספרים במקומם הנכון)?
- 6 נק' ב. מהי ההסתברות שבתמורה הנבחרת יש בדיוק 3 מספרים במקומם הנכון?
- 6 נק' ג. מהי ההסתברות שבתמורה הנבחרת אין אף מספר במקומו הנכון?

שאלה 4 (8 נקודות)

נתון לוח שעליו 64 משבצות זהות בגודלן, המסודרות במבנה של 8 שורות כך שבכל שורה 8 משבצות.
מפזרים באקראי על הלוח 37 דסקיות זהות, כך שכל דסקית נמצאת בתחומה של משבצת אחת בלבד ועל כל משבצת יש לכל היותר דסקית אחת.
מהי ההסתברות שבפיזור שיתקבל תהיה לפחות דסקית אחת בכל שורה?

שאלה 5 (18 נקודות)

חוקר פרפרים מחליט לצוד 8 פרפרים לצורך מחקרו. לשם כך, הוא יוצא לצוד פרפרים באיזור המאוכלס ב- 4 סוגים שונים של פרפרים. הוא צד פרפר אחר פרפר, עד שברשותו 8 פרפרים. כל פרפר שניצוד יכול להיות מכל אחד מ- 4 הסוגים.

ענה על הסעיפים הבאים, בהנחה שכל התוצאות במרחב המדגם הן שוות-הסתברות.

- 6 נק' א. מהי ההסתברות ששמונת הפרפרים יהיו **בדיוק משני סוגים**? (לא פחות ולא יותר)
- ב. נניח שפרפרים מאחד הסוגים (ורק מסוג זה) הם ירוקים.
- 6 נק' 1. מהי ההסתברות שבין שמונת הפרפרים הניצודים יהיה לפחות אחד ירוק?
- 6 נק' 2. מהי ההסתברות שבין שמונת הפרפרים הניצודים יהיו בדיוק 3 ירוקים?

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 2 ו-3

דיאגרמת ון וטענות הסתברות בסיסיות; הסתברות מותנית

מספר השאלות: 5 משקל המטלה: 5 נקודות

סמסטר: ב 2012 מועד אחרון להגשה: 22.4.2012

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
 - שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

בחלק מהשאלות המופיעות בממ"ן זה מומלץ לצייר עצי-הסתברות.

שאלה 1 (20 נקודות)

בתחרות הרמת משקולות לכל אחד מהמשתתפים ניתנים שלושה ניסיונות להרים משקולת מסוימת. אבל, אם הוא נכשל בשני הניסיונות הראשונים, נשלל ממנו הניסיון האחרון, והוא נחשב עבורו ככישלון נוסף. בכל המקרים האחרים, מנצל המשתתף את כל הניסיונות שניתנים לו. ההסתברות שמשתתף יצליח בניסיון הראשון היא 0.6, בניסיון השני – 0.6, וגם בשלישי – 0.6. אם המשתתף מצליח בניסיון הראשון, ההסתברות שיצליח בניסיון השני היא $\frac{2}{3}$. ההסתברות שמשתתף יצליח רק בניסיון הראשון היא 0.1. ההסתברות שמשתתף יצליח בניסיון השני בהינתן שהצליח רק באחד מהניסיונות היא $\frac{1}{3}$. בוחרים באופן מקרי משתתף בתחרות.

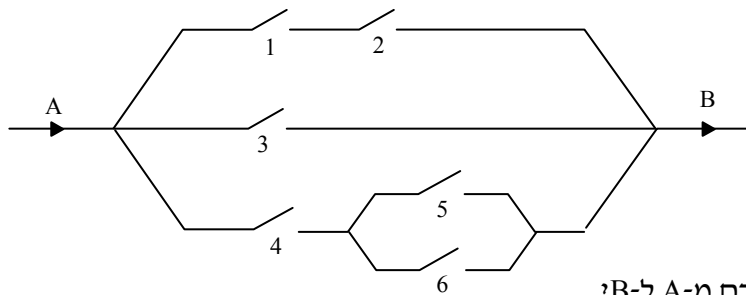
(10 נק') א. הגדר בדיוק 3 מאורעות המתאימים לבעיה ופרט באמצעותם את רשימת הנתונים שלעיל. צייר דיאגרמת ון מתאימה למאורעות שהגדרת, ורשום בה את כל ההסתברויות המתאימות לשטחים החלקיים שנוצרים בה.

הסבר בקצרה את דרך חישוב ההסתברויות הרשומות בדיאגרמה ונדא שסכומן הוא 1.

- (2 נק') ב. מהי ההסתברות שהמשתתף הנבחר יצליח בשלושת ניסיונותיו?
- (2 נק') ג. מהי ההסתברות שהמשתתף הנבחר יצליח לפחות בניסיון אחד?
- (3 נק') ד. אם המשתתף נכשל לפחות בניסיון אחד, מהי ההסתברות שנכשל בדיוק בשני ניסיונות?
- (3 נק') ה. אם המשתתף הצליח בניסיון השני, מהי ההסתברות שהצליח לפחות בניסיון נוסף?

שאלה 2 (32 נקודות)

במעגל שלהלן, כל אחד מן הממסרים 1, 2, 5 ו-6 סגור בהסתברות 0.7 וכל אחד מן הממסרים 3 ו-4 סגור בהסתברות 0.8. כל ממסר פועל באופן בלתי-תלוי באחרים וכשממסר סגור עובר בו זרם.



- 8 נק' א. מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?
- 8 נק' ב. אם עובר זרם מ-A ל-B, מהי ההסתברות שממסר 4 סגור?
- 8 נק' ג. אם עובר זרם מ-A ל-B, מהי ההסתברות שממסר 3 סגור?
- 8 נק' ד. אם ממסרים 3 ו-5 פתוחים, מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?

שאלה 3 (16 נקודות)

על מדף בחנות יש 20 חבילות של רכיבים אלקטרוניים. כל חבילה מכילה 10 רכיבים. 15 מהחבילות הן מסוג A ויש בהן רכיב אחד פגום ו-9 תקינים, ושאר החבילות הן מסוג B ויש בהן 3 רכיבים פגומים ו-7 תקינים.

- 8 נק' א. נניח שבחרים 10 מהחבילות וידוע שיש ביניהן לפחות 4 חבילות מסוג B. מהי ההסתברות שבין 10 חבילות אלו נמצאות כל 5 החבילות מסוג B?
- 8 נק' ב. נניח שבחרים באקראי 2 חבילות מבין ה-20 שעל המדף, ובודקים רכיב מקרי אחד מכל חבילה. בחבילה אחת מתגלה רכיב פגום ובחבילה השנייה הרכיב הנבדק תקין. מהי ההסתברות שנבחרו 2 חבילות מסוג A?

שאלה 4 (16 נקודות)

מטילים 4 קוביות תקינות.

- 8 נק' א. אם מתקבלות 4 תוצאות זוגיות, מהי ההסתברות שכולן גדולות מ-3?
- 8 נק' ב. אם מתקבלות לפחות 2 תוצאות זוגיות, מהי ההסתברות שבין 4 התוצאות שהתקבלו יש לפחות תוצאה אחת ששווה ל-6?

שאלה 5 (16 נקודות)

בכד יש n מטבעות, שמהם m תקינים ($m < n$) ובשאר מתקבלת התוצאה H בהסתברות $\frac{2}{3}$. מוציאים מהכד באופן מקרי מטבע, ומטילים אותו 3 פעמים.

- 8 נק' א. מהי ההסתברות שיתקבלו לפחות שני H-ים ב-3 ההטלות של המטבע שנבחר?
- 8 נק' ב. מהי ההסתברות שהמטבע שנבחר תקין, אם ידוע שהתקבלו לפחות שני H-ים ב-3 ההטלות?
- פשט את התוצאות עד כמה שאפשר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 4

משקל המטלה: 5 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 6.5.2012

סמסטר: ב 2012

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
 - שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (26 נקודות)

מפזרים 10 כדורים זהים ב-5 תאים ממוספרים, באופן כזה שכל הפיזורים האפשריים מתקבלים בהסתברויות שוות.

יהי X מספר התאים שיש בהם לפחות כדור אחד.

6 נק' א. מצא את פונקציית ההסתברות של X . זהה את ההתפלגות של X .

6 נק' ב. חשב את התוחלת והשונות של X .

ג. נניח שזוכים ב-5 ש"ח עבור כל תא שנותר ריק.

7 נק' 1. מהן תוחלת ושונות הפרס הכולל שמתקבל בפיזור אקראי של הכדורים בתאים?

7 נק' 2. נניח שחוזרים על הניסוי שוב ושוב.

מהי ההסתברות לקבל לראשונה פרס גבוה מ-5 ש"ח רק לאחר החזרה השישית?

שאלה 2 (21 נקודות)

משחק מזל מורכב משני שלבים:

בשלב הראשון, מטילים זוג קוביות 10 פעמים;

בשלב השני, מטילים את זוג הקוביות שוב ושוב עד שהמאורע "באף אחת מהקוביות לא מתקבלת התוצאה 4" מתרחש בדיוק בפעם העשירית (ואז מפסיקים להטיל את הקוביות).

7 נק' א. מהי ההסתברות שבשלב הראשון יתקבלו בדיוק 6 הטלות, שבכל אחת מהן לא יהיה אף 4?

7 נק' ב. השלב הראשון של המשחק נושא פרסים.

אם מתקבלות בדיוק i הטלות שאין בהן אף 4, זוכים ב- 3^i ש"ח, לכל $i = 0, 1, \dots, 10$.

מהי תוחלת הרווח בשלב הראשון?

7 נק' ג. מהן תוחלת ושונות מספר ההטלות שייעשו בשני השלבים יחד?

שאלה 3 (14 נקודות)

שני גברים, ששמותיהם אבי ובני, ו- $n-2$ נשים מתיישבים באקראי בשורה; נניח כי $n \geq 4$.
יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הנשים שיושבות ליד אבי.

(8 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות של X , עבור n כללי.

(6 נק') ב. חשב את השונות של X , עבור $n = 6$.

שאלה 4 (18 נקודות)

יהי X משתנה מקרי אחיד בדיד בין 10 ל-20.

בניסוי מסוים משתתפים $2X$ אנשים.

אם $X < 15$, עלות ביצוע הניסוי היא 200 ש"ח; אחרת, עלות ביצועו היא 300 ש"ח.

(6 נק') א. מהי השונות של עלות ביצוע הניסוי?

(6 נק') ב. מהי פונקציית ההתפלגות המצטברת של עלות ביצוע הניסוי?

רשום אותה באופן מלא ומדויק.

(6 נק') ג. מהי פונקציית ההסתברות של מספר האנשים שמתתפים בניסוי?

שאלה 5 (21 נקודות)

למספר הביצים, שמטילים חרקים מזון מסוים על כל אחד מן העלים של עץ-הדר, יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 3.

(7 נק') א. קוטפים באופן מקרי מן העץ 3 עלים. מהי ההסתברות שעל עלה אחד יהיו 4 ביצים ועל כל

אחד משני העלים האחרים יהיו 3 ביצים?

(8 נק') ב. נניח שידוע שעל עלה מסוים יש לפחות 2 ביצים:

1. מהי ההסתברות המותנית שיש עליו בדיוק i ביצים?

מהם ערכי i , שעבורם הסתברות זו חיובית? (כלומר, מהם הערכים האפשריים של i ?)

2. נסמן ב- Y את מספר הביצים שיש על העלה הזה.

חשב את התוחלת של Y .

רמז: השתמש בפונקציית ההסתברות (המותנית) שמצאת בסעיף ב1.

חרק מזון אחר מטיל ביצים בקבוצות גדולות מאוד, אך רק מחלק קטן מהן בוקע חרק צעיר.

נניח שחרק מסוג כזה הטיל 1,500 ביצים וכי ההסתברות שמכל אחת מהביצים שהטיל יבקע חרק צעיר היא 0.01.

(6 נק') ג. חשב קירוב להסתברות שמהביצים שחרק זה הטיל יבקעו בדיוק 11 חרקים צעירים.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 5

משקל המטלה: 5 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 20.5.2012

סמסטר: ב 2012

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
 - שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (24 נקודות)

מכונה מייצרת חישובי פלסטיק שקוטרם אינו קבוע.

ידוע שהתפלגות קוטר החישוב (בס"מ) היא נורמלית עם שונות השווה ל-1.21 ס"מ².

א. אם הקוטר של חישוב מקרי, שהמכונה מייצרת, גדול מ-31.111 ס"מ בהסתברות 0.1562,

מהי התוחלת של התפלגות הקוטר?

ב. מהי ההסתברות שהקוטר של חישוב מקרי יהיה גדול מ-29.2 ס"מ?

ג. נניח שדרוש חישוב שקוטרו בין 30.8 ס"מ ל-31.2 ס"מ.

מהי ההסתברות שיצטרכו למדוד בדיוק 10 חישובים עד שימצאו את החישוב המתאים?

ד. נניח שבזמן 6 חישובים שקוטרם גדול מ-30.5 ס"מ.

מהי ההסתברות שיהיו ביניהם לפחות שני חישובים שקוטרו בין 30.8 ס"מ ל-31.2 ס"מ?

הערה: בכל סעיפי השאלה החישובים צריכים להיות מדויקים, עד כמה שאפשר.

שאלה 2 (18 נקודות)

באיור שלהלן מתוארת פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי X :



א. מצא את c .

ב. חשב את $P\{1.25 \leq X \leq 2.5\}$.

ג. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X ורשום אותה באופן מדויק.

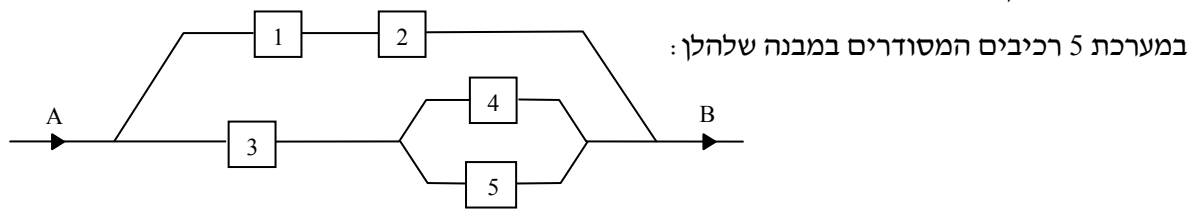
שאלה 3 (26 נקודות)

נתונה פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי X :

$$f_X(x) = \frac{4k^4}{x^5}, \quad x \geq 1$$

- (6 נק') א. מצא את ערכו של k .
 (6 נק') ב. חשב את התוחלת של X .
 (7 נק') ג. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X ורשום אותה באופן מדויק.
 (7 נק') ד. חשב את $E[2X^3 - 4]$.

שאלה 4 (14 נקודות)



- המערכת פועלת אם עובר זרם מנקודה A לנקודה B.
 נסמן ב- X_i את אורך-החיים (בשנים) של רכיב i , לכל $i = 1, 2, 3, 4, 5$. אין תלות בין רכיבים שונים.
 כמו כן, לכל אחד מהמשתנים המקריים X_1 ו- X_2 יש ההתפלגות נורמלית עם תוחלת 2.5 ושונות 1, ולכל אחד מהמשתנים המקריים X_3, X_4 ו- X_5 יש ההתפלגות אחידה בין 1 ל-3.
 מפעילים מערכת שכל הרכיבים בה חדשים. אין אפשרות להחליף במערכת רכיב שהתקלקל.
 (7 נק') א. מהי ההסתברות שהמערכת עדיין פועלת לאחר שנתיים מיום הפעלתה?
 (7 נק') ב. אם לאחר שנתיים המערכת עדיין פועלת, מהי ההסתברות שרכיב 4 תקין בזמן זה?

שאלה 5 (18 נקודות)

- יהי X_1 משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 1 ויהי X_2 משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 2.
 נגדיר את המשתנה המקרי Y באמצעות פונקציית הצפיפות:

$$f_Y(y) = 1.25e^{-y} - 0.5e^{-2y}, \quad y > 0$$

 (6 נק') א. הראה כי f_Y היא אכן פונקציית צפיפות.
 (6 נק') ב. חשב את התוחלת של Y , באמצעות נוסחת התוחלת של משתנה מקרי מעריכי.
 כלומר, זכור כי השוויון $E[X] = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$, מתקיים עבור $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.
 (6 נק') ג. חשב את השונות של Y , באמצעות נוסחאות התוחלת והשונות של משתנה מקרי מעריכי.
 כלומר, השתמש בנוסחה ל- $E[X^2]$, עבור $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, הנובעת מנוסחאות התוחלת והשונות של X .

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 6

משקל המטלה: 5 נקודות

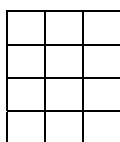
מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 3.6.2012

סמסטר: ב 2012

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
 - שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"



שאלה 1 (18 נקודות)

בקבוצת תלמידים יש 10 בנים ו-2 בנות.

כל התלמידים מסתדרים באקראי בשלוש באופן הבא:

יהי X מספר הבנות שמתמקמות בטור השמאלי ביותר ויהי Y מספר הבנים שמתמקמים בשתי השורות הראשונות (באיור – העליונות).

(10 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y ואת פונקציות ההסתברות השולית של X ו- Y . ערוך את תשובתך בטבלה.

(4 נק') ב. האם המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-תלויים? נמק את תשובתך.

(4 נק') ג. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $Y=6$.

שאלה 2 (14 נקודות)

יהיו X, Y ו- Z משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכולם התפלגות אחידה בדידה בין 0 ל-2.

(כלומר, הערכים האפשריים של ההתפלגות הם 0, 1, ו-2, וכל אחד מהם מתקבל בהסתברות $\frac{1}{3}$).

נגדיר: $W_1 = XYZ$

$W_2 = X(Y+Z)$

(8 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות של W_1 .

(6 נק') ב. האם המשתנים המקריים W_1 ו- W_2 בלתי-תלויים? נמק את תשובתך.

שאלה 3 (28 נקודות)

יהיו X_1, X_2, \dots, X_{10} משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכולם התפלגות אחידה בדידה בין 0 ל-10.

(7 נק') א. חשב את $P\left\{2 \leq \min_{i=1, \dots, 10} X_i \leq 4\right\}$.

(7 נק') ב. חשב את $P\left\{X_1 = 7, \max_{i=1, \dots, 10} X_i = 7\right\}$.

(7 נק') ג. חשב את $P\left\{X_1 = 3, \max_{i=1, \dots, 10} X_i = 8\right\}$.

(7 נק') ד. חשב את $P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i = 97\right\}$.

שאלה 4 (30 נקודות)

קלדנית מקלידה 40 עמודים, הממוספרים מ-1 עד 40, בזה אחר זה ולפי סדר המספרים שעליהם. התפלגות מספר טעויות-ההקלדה בכל עמוד היא פואסונית עם הפרמטר 1, ואין תלות בין עמודים שונים שהקלדנית מקלידה.

(6 נק') א. מהי ההסתברות שבחמשת העמודים הראשונים, שהקלדנית מקלידה, יש יותר משתי טעויות? (הכוונה לסך-כל הטעויות בעמודים אלו).

(6 נק') ב. מהי ההסתברות שיש לפחות עמוד אחד בין חמשת העמודים הראשונים שאין בו אף טעות-הקלדה?

(6 נק') ג. מהי ההסתברות שהטעות השנייה של הקלדנית נמצאת בעמוד 6?
רמז: חשוב היכן יכולה להיות הטעות הראשונה.

(6 נק') ד. נניח שבשני העמודים הראשונים יש בדיוק 4 טעויות-הקלדה.

מהי ההסתברות שבעמוד הראשון יש בדיוק טעות אחת (מתוך ה-4)?

(6 נק') ה. לאחר שהקלדנית מסיימת להקליד את 40 העמודים, היא קוראת את מה שהקלידה, כדי למצוא טעויות. היא מוצאת כל טעות בהסתברות 0.8.
מהי שונות מספר הטעויות שהקלדנית מוצאת?

שאלה 5 (10 נקודות)

יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p , ויהי Y משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ .

אם המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה, מהי ההסתברות ש- $X-1=Y$?

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

משקל המטלה: 5 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 17.6.2012

סמסטר: ב 2012

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
 - שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (18 נקודות)

בזה אחר זה הופכים את הקלפים בחפיסה רגילה של 52 קלפים טרופים, המונחים כשפניהם כלפי מטה.
הערה: בחפיסת קלפים רגילה יש קלפים מ-4 צורות – לב, תלתן, עלה ויהלום. מכל צורה יש 13 קלפים שונים – אס, 2, 3, ..., 10, נסיך, מלכה ומלך.
(8 נק') א. חשב את התוחלת של מספר הקלפים שיש להפוך עד שמתגלים כל קלפי המלכים והמלכות (בסה"כ 8 קלפים).
(10 נק') ב. חשב את השונות של מספר הקלפים שיש להפוך עד שמתגלים כל קלפי המלכים והמלכות (בסה"כ 8 קלפים).

שאלה 2 (24 נקודות)

מספר המקררים, שטכנאי מסוים מתקן במשך יום אחד, הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 12.
התפלגות זמן-התיקון (בשעות) של כל מקרר היא מעריכית עם הפרמטר 1.65.
אין תלות בין זמני התיקון של מקררים שונים ואין תלות בין מספר המקררים שהטכנאי מתקן ביום אחד לבין זמני-התיקון של המקררים באותו היום.
(8 נק') א. חשב את התוחלת של הזמן הכולל שהטכנאי מקדיש לתיקון מקררים ביום אחד.
(8 נק') ב. חשב את השונות של הזמן הכולל שהטכנאי מקדיש לתיקון מקררים ביום אחד.
(8 נק') ג. חשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של הזמן הכולל שהטכנאי מקדיש לתיקון מקררים ביום אחד.
בדוק את תשובתך לסעיף א, בעזרת התוצאה שקיבלת בסעיף ג.

שאלה 3 (12 נקודות)

כל אחד מ-6 אנשים מטיל בתורו קובייה תקינה.
אדם i , לכל $i = 1, 2, \dots, 6$, מטיל את קובייתו שוב ושוב עד שלראשונה הוא מקבל בה את התוצאה i .
נסמן ב- X_i את מספר ההטלות שאדם i מבצע, לכל $i = 1, 2, \dots, 6$.

(6 נק') א. חשב את $E\left[\sum_{i=1}^6 X_i\right]$ ואת $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^6 X_i\right)$.

(6 נק') ב. חשב את $E\left[\sum_{i=1}^6 X_i \mid X_1 + X_2 = 10\right]$.

שאלה 4 (16 נקודות)

יהיו X_1 ו- X_2 משתנים מקריים ברנוליים בלתי-תלויים עם הפרמטרים $\frac{1}{2}$ ו- $\frac{2}{3}$ בהתאמה.
(8 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של $Y_1 = X_1 + X_2$ ו- $Y_2 = X_1 - X_2$.
(8 נק') ב. חשב את מקדם המתאם בין Y_1 ל- Y_2 .

שאלה 5 (12 נקודות)

התפלגות המשקל (בגרמים) של תפוח ירוק היא נורמלית עם תוחלת 100 וסטיית-תקן 10.
התפלגות המשקל (בגרמים) של תפוח אדום היא נורמלית עם תוחלת 150 וסטיית-תקן 20.
יעל הולכת לירקן כדי לקנות 10 תפוחים – 5 תפוחים ירוקים ו-5 תפוחים אדומים. היא בוחרת באקראי את כל התפוחים: תחילה את התפוחים הירוקים ואחר-כך את האדומים, ושמה את כולם בשקית אחת. (תפוחים מצבעים שונים מסודרים בערמות שונות).
נניח שאין תלות בין משקלי תפוחים שונים וכי משקל השקית הריקה זניח, ונסמן ב- X את המשקל הכולל (בק"ג) של השקית המלאה.
(6 נק') א. חשב את $P\{X < 1.3\}$.
(6 נק') ב. מהי הפונקציה יוצרת המומנטים של X ?

שאלה 6 (18 נקודות)

יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p ;
ויהי Y בהינתן $X = i$ משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים i ו- p .
(8 נק') א. מהי ההסתברות ש- $X = Y$?
(10 נק') ב. חשב את התוחלת ואת השונות של Y .