

תורת החישוביות והסיבוכיות – פתרון מבחן 2020ב

שם: מיתר ברונר

השאלות שנפתרו: 2,3,4,5,6 (ללא 1).

שאלה 2 – פתרון

א.

נראה רדוקציית מיפוי של A_{TM} ל- $UNION_{TM}$:

1. בנה מכונה M'_1 שמקבלת מילה אחת ויחידה w_1 .

2. בנה מכונה M'_2 שמקבלת מילה אחת ויחידה w_2 .

3. הרץ את M על w , אם היא מקבלת, בנה מכונה M'_3 אשר מקבלת את המילים w_1, w_2 .

אחרת, בנה מכונה M'_3 שמקבלת רק את המחרוזת הריקה כלומר $L(M'_3) = \{\varepsilon\}$.

4. החזר את $\langle M'_1, M'_2, M'_3 \rangle$.

$\langle M, w \rangle$ שייכת ל- A_{TM} אם ורק אם $\langle M'_1, M'_2, M'_3 \rangle$ שייכת ל- $UNION_{TM}$.

ב.

נשתמש באותו אלגוריתם מסעיף א', רק נהפוך את התנאי בשלב 3, כלומר אחרי הרצת M על w , אם היא מקבלת את w , נחזיר את המכונה שמקבלת כשפה רק את המחרוזת הריקה, ואם M לא מקבלת את w , את המכונה שמקבלת את w_1, w_2 .

שאלה 3 – פתרון

אם $P=NP$ אז SAT מחזירה תשובה בזמן פולינומי. נראה שבעזרת אופציה זו, ניתן לבנות אלגוריתם שמכריע את $USAT(UNIQUE-SAT)$ בזמן פולינומי גם כן.

פעולת האלגוריתם שמכריע את USAT בהינתן קלט ϕ :

1. הרץ $SAT(\phi)$. אם חוזר false, החזר false.

2. אם SAT מחזיר true, קיימת לפחות השמה מספקת אחת. רץ בלולאה כל כל המשתנים הבוליאניים:

א. עבור משתנה i , שים את הערך 1 והרץ SAT על הנוסחא – שמור את התוצאה.

ב. עבור עבור אותו משתנה i , שים את הערך 0 והרץ SAT על הנוסחא – שמור את התוצאה.

3. בסוף האיטרציה, אם התגלה כי עבור משתנה כלשהו גם השמה של 0 וגם השמה של 1 SAT מניבה כי יש פתרון, אזי מספר הפתרונות הוא גדול מ-1 ולכן החזר false. אחרת, החזר true.

ניתן לראות כי כיוון שSAT פועלת בסיבוכיות מקום פולינומיאלית, הפעלה שלה $2n + 1$ פעמים עדין משאירה א הבעיה בסיבוכיות פולינומיאלית ולכן USAT ב-P.

שאלה 4 – פתרון

א.

נראה רדוקצייה פולינומיאלית מ- $3COLOR$ ל- $CONN - COLOR$.

על קלט $< G(U, V) >$ כאשר G הוא גרף לא מכוון 3 צביע, בנה את המכונה F הבאה:

פעולת F :

1. עבור על כל הצמתים והוסף $n=|V|$ צמתים v'_1, v'_2, \dots, v'_n כלומר צומת "אח" לכל צומת.

2. חבר בקשתות כל צומת לצומת ה"אח" שלה.

3. הוסף צומת נוספת v^* .

4. חבר את כל צמתי ה"טאג" לצומת v^* .

5. בחר 2 צבעים מתוך ה-3, וצבע את כל צמתי ה"טאג" בצבע באחד מהשניים, כך שאם צומת האח שאליו חיברת אותו צבועה כבר בצבע אחד מהשניים, בחר בשני.

6. צבע את v^* בצבע השלישי שנותר.

פולינומיאליות הרדוקציה:

הוספת הצמתים היא ליניארית ביחס לקלט, חיבור הקשתות ליניארי ביחס לקלט, הוספת הצומת הכוכב הוא ב- $O(1)$ והצביעה הנוספת ליניארית באורך הקלט לכן רדוקציה זו פולינומיאלית.

תקפות הרדוקציה:

אם גרף הקלט היה 3 צביע אך לא היה קשיר, צומת הכוכב הופכת אותו לקשיר והוספת "שכבת הביניים" של צמתי "האחים" שומרת על כך שישאר 3-צביע.

אם גרף הקלט אינו היה 3-צביע, הוספת צמתים וקשתות בוודאי שלא יהפכו אותו להיות 3 צביע כיוון שעדין בפלט יהיה תת הגרף המקורי שאינו 3 צביע.

ב.

כיוון ש $3COLOR \leqslant CONN - 3COLOR$ ניתן לבנות רדוקציה שפשוט תחזיר כפלט את גרף הקלט עצמו G .

פולינומיאליות הרדוקציה:

למעשה אין חישוב, $O(1)$.

תקפות הרדוקציה:

אם הגרף היה 3 צביע וקשיר הוא ישאר 3 צביע ואם אינו היה 3 צביע הוא ישאר אינו 3 צביע

שאלה 5 – פתרון

נרצה להוכיח שהשפה A_{2DFA} כלומר שפה המכילה את כל הזוגות של אס"ד דו-ראשיים עם הקלטים שהם מקבלים, היא ב $L = SPACE(\log(n))$.

נבנה מ"ט בעלת סרט קריאה וסרט עבודה, שתכריע את A_{2DFA} , מכונה זו תקבל כקלט את M , שהינו 2DFA ומחרוזת x . המכונה תסמלץ את פעולת M כך שבכל שלב תשמור בתא אחד את האות עליה הראש הראשון נמצא, בתא אחר את האות עליה הראש השני נמצא ובתא שלישי את המצב הנוכחי, כאשר בכל שלב המכונה תעדכן את הערכים על פי פונקציית המעברים של M ותעבור למצב מקבל כאשר M עוברת למצב מקבל.

סיבוכיות המקום היא ב- $O(1)$ ולכן זה חסם נמוך יותר מסיבוכיות מקום $O(\log n)$ מכאן ש- $A_{2DFA} \in L$.

שאלה 6 – פתרון

א.

נניח שקיימת b ששייכת ל B לפי ההגדרה ו- P רדוקציה פולינומיאלית מ A ל B שנתונה בשאלה. בנוסף, r מכונה המכריעה את A .

נריך את P על b ועליו נפעיל את r , נקבל הכרעה בזמן פולינומיאלי לכן גם b שייכת ל- RP .

הראנו שעבור b ששייכת ל B המקיימת את השאלה ישנה מכונה דטרמיניסטית בעלת זמן ריצה פולינומיאלי, לכן B שייכת ל- RP .

ב.

תהי A שפה ב- RP , נגדיר את C להיות $HALT$. הרדוקציה הפולינומית הבאה קיימת (גנרית מ- RP ל- RE).
אם a שייך ל- A נחזיר a (נבדוק ע"י הרצת התוכנית הרי נתון שהבעיה a ב- RP). אחרת, נחזיר $loopforever$ (סרט שלא עוצר).

הרדוקציה היא פולינומיאלית כי היא מוודאת בעייה פולינומיאלית ולכן היא פולינומילית.

בנוסף, הרדוקציה עוצרת ומחזירה את a או סרט אין סופי.

הרדוקציה נכונה כי כל a שייך ל- $HALT$. אם a לא שייך ל- A הפלט לא יהיה שייך ל- $HALT$.

מכאן, בגלל שקיימת רדוקציה פולינומיאלית בין שפה כלשהי ב- RP ל- $HALT$, ו- $halt$ שייכת ל- RE/R אז היא בהכרח לא ב- RP ולכן הלא ניתן שתמיד C שייכת ל- RP .