מועד 87    28.6.01

**מבנה הבחינה**:

* עליך לענות על 4 מתוך 6 השאלות, כאשר בין 4 השאלות שבחרת, **חייבת להופיע שאלה מס׳ 3 או שאלה מס׳ 4 או שתיהן**.
* משקל כל שאלה 25% .
* אם תשיב על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

**משך המבחן:** 3 שעות.

**חומר עזר:** כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

---

**שימו לב:**

* **יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס,**
**כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת ״אוסף תרגילים פתורים״.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, או מהפתרונות למטלות - עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

---

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

**אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !**

**שאלה 1**

תהי $A$ קבוצה **לא-ריקה**, $R$ יחס (רלציה) מעל $A$.

נסמן ב- $R'$ את **המשלים** של $R$ ב- $A \times A$ .

בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצא את הטענה הנכונה **ונמק בקיצור**. אין צורך בהוכחה מלאה.

(6 נק׳) א. אם $R$ יחס רפלקסיבי אז $R'$ :

(1) רפלקסיבי (2) אינו רפלקסיבי

(3) יכול להיות רפלקסיבי ויכול לא להיות רפלקסיבי.

(6 נק׳) ב. אם $R$ סימטרי אז $R'$ :

(1) סימטרי (2) אנטי-סימטרי

(3) לא חייב להיות סימטרי ולא חייב להיות אנטי-סימטרי.

(7 נק׳) ג. אם $R$ אנטי-סימטרי אז $R'$ :

(1) סימטרי (2) אנטי-סימטרי

(3) לא חייב להיות סימטרי ולא חייב להיות אנטי-סימטרי.

(6 נק׳) ד. נתבונן בשוויון $\mathrm{Domain}(R) \cap \mathrm{Domain}(R') = \varnothing$ .

(1) שוויון זה מתקיים תמיד

(2) שוויון זה מתקיים אם ורק אם $R = \mathrm{Domain}(R) \times A$

(3) אם $R$ אנטי-סימטרית אז השוויון הנ״ל מתקיים.

הערה: $\mathrm{Domain}(R)$ הוגדר בכרך ״תורת הקבוצות״ בעמ׳ 35.

**שאלה 2**

(13 נק׳) א. האם ניתן לקחת את אינסוף הנקודות הנמצאות בקטע (מתימטי דמיוני) שאורכו 1 ס״מ ולפזר אותן כך <u>**שימלאו**</u> ריבוע של 1 סמ״ר ? הוכח בלי לצייר ציורים, על-סמך טענות ידועות.

(12 נק׳) ב. האם קיימת דרך לקודד את כל **הקבוצות** של מספרים ממשיים ע״י מספרים ממשיים? כלומר: האם יש דרך להתאים **לכל קבוצה** (סופית או אינסופית) של מספרים ממשיים – מספר ממשי, באופן שלקבוצות שונות יותאמו מספרים ממשיים שונים? הוכח.

**הערה**: בשני הסעיפים, אם קיימת דרך לעשות את הנדרש – **אינך** חייב לתאר מהי הדרך, אלא רק להוכיח **שקיימת** דרך. אם לא קיימת דרך – הוכח שלא קיימת.

**שאלה 3 (25 נק')**

נתון $k \neq 0$. סדרה מסוימת מקיימת את יחס הנסיגה (יחס רקורסיה):

$a_{n+2} = 2ka_{n+1} + 3k^2 a_n$ עם תנאי התחלה: $a_0 = 0$, $a_1 = k$.

פתור את יחס הנסיגה ורשום ביטוי מפורש עבור $a_n$.

את הביטוי הסופי עליך להביא לצורה: $a_n = (\text{משהו}) \cdot k^n$,

כאשר הביטוי שבסוגרים תלוי ב- $n$ אך אינו תלוי ב- $k$.

**שאלה 4 (25 נק')**

ברשותנו 30 כדורים אדומים, 40 כדורים כחולים ו- 50 כדורים ירוקים.

בכמה דרכים ניתן לבחור מתוכם 70 כדורים, ללא חשיבות לסדר הבחירה?

כדורים בעלי אותו צבע נחשבים זהים.

**יש להגיע לתשובה סופית מספרית**, ולא ע"י חישוב סכום של עשרות גורמים...

אפשר להיעזר בפונקציה יוצרת (צרף את המכנים ופתח את מה שמתקבל לפי זהות ידועה).

**שאלה 5**

תהי $L$ שפה חלקית לשפת תחשיב הפרדיקטים, ובה בין השאר סימני משתנים $x,y,z$, סימן פרדיקט דו-מקומי $A_1^2$ וסימן פונקציה דו-מקומית $f_1^2$. תהי $J$ אינטרפרטציה של $L$, שתחומה הוא **N** (המספרים הטבעיים), ובה $f_1^2$ מתפרש כפונקציה min, כלומר $f_1^2(x,y)$ מתפרש כקטן מבין $x,y$. $A_1^2$ מתפרש כרגיל כשוויון.

תהי $\varphi$ התבנית: $\forall x(A_1^2(f_1^2(x,y),y))$, ותהי $\psi$ התבנית $\exists y(\varphi)$.

(4 נק') א. האם $\varphi$ היא פסוק? האם $\psi$ היא פסוק? נמק.

(7 נק') ב. האם $\varphi$ אמיתית ב- $J$? האם $\varphi$ שקרית ב- $J$?
נמק בפירוט, תוך שימוש בהגדרה 3.17 ("לוגיקה" עמ' 117).
בנוסף אפשר להסתמך על הדיון בסעיף 3.7.3.

(7 נק') ג. האם $\psi$ אמיתית ב- $J$? האם $\psi$ שקרית ב- $J$?
נמק בפירוט כנ"ל.

(7 נק') ד. הוכח ש- $\psi$ **אינה** אמיתית לוגית ("לוגיקה" הגדרה 3.18 בעמ' 119).
($A_1^2$ חייב להתפרש כשוויון בכל אינטרפרטציה שתבחר).

**שאלה 6**

תהי $A$ קבוצה לא-ריקה. נסמן ב- $K$ את קבוצת כל רלציות השקילות מעל $A$.

לפי "**תורת הקבוצות**" עמ' 66 שאלה 2.40 א, חיתוך שני איברים של $K$ גם הוא איבר של $K$.

לכן $(K, \cap)$ הוא גרופואיד.

(2 נק') א. הסבר מדוע הרלציה הריקה **אינה** איבר של $K$.

(8 נק') ב. הוכח ש- $(K, \cap)$ הוא מונואיד. ציין מיהו איבר היחידה.
הקפד לציין בפירוש משפטים או טענות עליהם אתה מסתמך (לא רק "ידוע ש..").

(8 נק') ג. בכרך "**מבנים אלגבריים**" עמ' 66 שאלה 2.28 מוגדר המושג "איבר אפס"
(שים לב שההגדרה שונה מהגדרת איבר יחידה).
הראה כי ב- $(K, \cap)$ יש איבר אפס - מיהו?

(7 נק') ד. נניח $A = \{1,2,3,4,5\}$. תן דוגמא לשני איברים של $K$, **השונים** מאיבר האפס
שמצאת בסעיף הקודם, וחיתוכם הוא איבר האפס. **בסעיף זה אין צורך לנמק.**
את שני האיברים של $K$ שבחרת בסעיף זה אתה יכול לרשום כרלציות או אם
זה נוח יותר, פשוט לרשום עבור כל אחד מהם את **החלוקה** של $A$ שהוא מגדיר.

**בהצלחה!**