קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"

תאריך הבחינה: 13.2.2014 (סמסטר א 2014 - מועד א4 / 84)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.
כל השאלות זהות במשקלן.
בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפים: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

שאלה 1 (25 נקודות)

נתונים 10 כדים.

כל כד מכיל 8 כדורים המסומנים במספרים 1, 2, ... , 8 .

מוציאים באקראי כדור אחד מכל כד .

(6 נק') א. מהי ההסתברות שהמספר 1 יוצא בדיוק שלוש פעמים והמספר 4 יוצא בדיוק פעמיים?

(6 נק') ב. אם ידוע שהמספר 1 הוצא בדיוק 3 פעמים,
מהי תוחלת מספר הפעמים שהמספר 4 הוצא מהכדים?

(7 נק') ג. אם ידוע שהמספר 1 הוצא בדיוק 3 פעמים,
מהי ההסתברות שהפעם השלישית שהוא הוצא היתה מהכד השמיני (שממנו הוצא כדור)?

(6 נק') ד. מהי ההסתברות ש- 6 הוא המספר הגדול ביותר שהוצא מהכדים? (פעם אחת או יותר.)

שאלה 2 (25 נקודות)

מטילים מטבע תקין 50 פעמים.

נגדיר שלושה מאורעות: A = בכל 4 הטלות המטבע האחרונות התקבל H;

B = בכל 4 הטלות המטבע הראשונות התקבל H;

C = בסך-הכל H התקבל 20 פעמים (ב- 50 ההטלות).

(4 נק') א. האם המאורעות A ו- B זרים זה לזה? נמק את תשובתך.

(6 נק') ב. האם שלושת המאורעות A , B ו- C בלתי-תלויים זה בזה? נמק את תשובתך.

(15 נק') ג. חשב את ההסתברויות שלהלן:

1. $P(A \cup B)$
2. $P(A^C \cap B \cap C)$
3. $P(A \mid B \cup C)$

שאלה 3 (25 נקודות)

מטילים מטבע תקין 50 פעמים.

יהיו X = מספר ה- H שהתקבלו ב-50 הטלות המטבע;

Y = מספר ה- H שהתקבלו ב-20 ההטלות הראשונות של המטבע.

(8 נק') א. האם X ו- Y בלתי-מתואמים?

(8 נק') ב. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של Y בהינתן $X=i$, לכל $i=0,1,\ldots,50$.
זהה את ההתפלגות המותנית שקיבלת. רשום את שמה ואת הפרמטרים המתאימים לה.

(9 נק') ג. 1. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $Y=j$, לכל $j=0,1,\ldots,20$.

2. חשב את $E[X \mid Y=j]$, לכל $j=0,1,\ldots,20$.

הערה: בסעיפים ב ו- ג, הקפד לכתוב את תחומי הערכים אפשריים של ההתפלגויות המותנות.

שאלה 4 (25 נקודות)

אורך-החיים (בשנים) של מנוע מסוג מסוים הוא משתנה מקרי רציף X , שפונקציית הצפיפות שלו היא:

$$f_X(x) = cx^2(10-x) \qquad , \qquad 0 < x < 10$$

(6 נק') א. חשב את הערך של c .

(6 נק') ב. חשב את תוחלת אורך-החיים של המנוע.

(7 נק') ג. ידוע שמנוע מסוים, מהסוג שלעיל, פועל כבר 7 שנים.
מהי ההסתברות שיפעל עוד שנתיים לפחות?

(6 נק') ד. אדם קנה 20 מנועים מהסוג שלעיל.
בהנחה שאין תלות בין אורכי-החיים של מנועים שונים,
חשב **קירוב** להסתברות ש<u>ממוצע</u> אורכי-החיים של 20 מנועים אלה יעלה על 5.5 שנים.

שאלה 5 (25 נקודות)

(13 נק') א. <u>הוכח</u>: אם N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים אי-שליליים,
ואם $X_1, X_2, \ldots$ הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב- N,
אז מתקיים:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\,\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\,\mathrm{Var}(N)$$

(12 נק') ב. נתונה קופסה ובה 10 כדורים ממוספרים מ-1 עד 10.
מוציאים באקראי כדור אחד מהקופסה.
נסמן ב- X את המספר הרשום על הכדור שהוצא.

לאחר מכן, מטילים מטבע תקין, שוב ושוב, עד שמקבלים בסך-הכל X פעמים H (לאו דווקא ברציפות); מפסיקים להטיל את המטבע מייד עם קבלת H בפעם ה- X .

נסמן ב- Y את מספר ההטלות שנעשות במטבע.
מהן התוחלת והשונות של Y?

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z)=P\{Z\le z\}=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt \qquad ; \qquad \Phi(-z)=1-\Phi(z) \qquad ; \qquad Z\sim N(0,1)$$

נוסחת האינטרפולציה: $\Phi(z)\approx\Phi(z_1)+\frac{z-z_1}{z_2-z_1}[\Phi(z_2)-\Phi(z_1)]$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1}\cdot p \quad , \quad i=1,2,\dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i! \quad , \quad i=0,1,\dots$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,\dots$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,\dots,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,\dots,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a\le x\le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\,,\,t\neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad -\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,\dots,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r} \quad , \quad \sum n_i=n\,,\,\sum p_i=1$			

נוסחת הבינום

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$$

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$$

כלל ההכלה וההפרדה

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

הסתברות מותנית

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

נוסחת הכפל

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n\mid A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})$$

נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i) \quad , \quad \{B_i\}$$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(A\mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)} \quad , \quad \{B_i\}$$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת

$$E[X]=\sum_x x\,p_X(x)=\int x\,f(x)dx$$

תוחלת של פונקציה של מ"מ

$$E[g(X)]=\sum_x g(x)\,p_X(x)=\int g(x)f(x)dx$$

שונות

$$\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית

$$E[aX+b]=aE[X]+b$$

$$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון

$$P\{X>s+t\mid X>t\}=P\{X>s\} \quad , \quad s,t\ge 0$$

תוחלת מותנית

$$E[X\mid Y=y]=\sum_x x\,p_{X|Y}(x\mid y)=\int x\,f_{X|Y}(x\mid y)dx$$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X \mid Y=y) = E[X^2 \mid Y=y] - (E[X \mid Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] = E[E[X \mid Y]] = \sum_y E[X \mid Y=y]p_Y(y)$

(טענה מתרגיל ת26, עמוד 430) $E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X \mid Y]]$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) \big/ \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t) = E[e^{tX}]$; $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$

כאשר X_i מ״מ ב״ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X]$

(כאשר X_i מ״מ ב״ת ש״ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X) + (E[X])^2 \mathrm{Var}(N)$

$$M_Y(t) = E\left[\left(M_X(t)\right)^N\right]$$

אי-שוויון מרקוב X מ״מ אי-שלילי , $a>0$, $P\{X \ge a\} \le E[X]/a$

אי-שוויון צ׳בישב $\mu, \sigma^2 < \infty$, $a>0$, $P\{|X-\mu| \ge a\} \le \sigma^2/a^2$

משפט הגבול המרכזי X_i מ״מ ב״ת וש״ה , $\mu, \sigma^2 < \infty$, $P\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) \Big/ \sqrt{n\sigma^2} \le a \right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(a)$

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב״ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ״מ בינומיים (גיאומטריים) ב״ת עם אותו הפרמטר p הוא מ״מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ״מ פואסוניים ב״ת הוא מ״מ פואסוני.
- סכום של מ״מ נורמליים ב״ת הוא מ״מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ״מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב״ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1<x<1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \tfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \ne -1 \quad ; \quad \int \tfrac{1}{ax+b} dx = \tfrac{1}{a}\ln(ax+b)$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים:

$$\int e^{ax} dx = \tfrac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \tfrac{1}{a \ln b} b^{ax} \quad ; \quad \boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

$$\log_n a = \log_m a / \log_m n \quad ; \quad \log_n(a^b) = b \cdot \log_n a \quad ; \quad \log_n(ab) = \log_n a + \log_n b$$