20416 - תאריך הבחינה: 18.7.2016 (סמסטר 2016ב - מועד א5 / 86)

שאלה 1

א. מכיוון שבוחרים בסך הכל 5 קלפים, המאורע שנבחרים קלפים בדיוק מ- 3 צורות יכול להתרחש באחד משני מקרים:

1) אם נבחרים 3 קלפים מאותה הצורה ועוד 2 קלפים מצורות אחרות (ששונות גם מהצורה הראשונה);

2) אם נבחרים 2 קלפים מצורה אחת, עוד 2 קלפים מצורה אחרת וקלף נוסף מצורה שלישית;

לפיכך, מקבלים:

$$\frac{4\cdot\binom{13}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 13^2+\binom{4}{2}\cdot\binom{13}{2}^2\cdot 2\cdot 13}{\binom{52}{5}}=\frac{580{,}008+949{,}104}{2{,}598{,}960}=0.5884$$

ב. הקלף הראשון יכול להיות כל אחד מ-52 הקלפים, ואילו הקלפים השלישי והחמישי יכולים להיות רק מהצורה של הקלף הראשון. לפיכך:

$$\frac{52\cdot 12\cdot 11}{52\cdot 51\cdot 50}=\frac{22}{425}=0.0518$$

ג. נסמן ב- A את המאורע שנבחרו קלפים משני הצבעים ונסמן ב- L את המאורע שנבחרו בדיוק 4 קלפים מצורת לב.

$$P(L\,|\,A)=\frac{P(L\cap A)}{P(A)}=\frac{\binom{13}{4}\binom{26}{1}}{\binom{52}{5}-2\cdot\binom{26}{5}}=\frac{18{,}590}{2{,}467{,}400}=0.00753$$

ד. **דרך I**

בוחרים 5 קלפים עם ערכים שונים ($52\cdot51\cdot50\cdot49\cdot48$ אפשרויות). הואיל ורק סדר אחד לבחירתם מקיים את המאורע שהם נבחרים בסדר עולה, מחלקים ב- !5 .

לפיכך, ההסתברות היא:

$$\frac{52\cdot 48\cdot 44\cdot 40\cdot 36/5!}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}=0.0042$$

דרך II

בוחרים 5 ערכים מתוך 13 אפשריים ($\binom{13}{5}$ אפשרויות), ובוחרים צורה לכל ערך (4^5 אפשרויות).

מקבלים:

$$\frac{\binom{13}{5}\cdot 4^5}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}=0.0042$$

שאלה 2

א. המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-תלויים, הואיל ואפשר להציג את פונקציית הצפיפות המשותפת שלהם כמכפלה של שתי פונקציות – האחת תלויה ב- x בלבד והשנייה רק ב- y . מתקיים:

$$f_{X,Y}(x,y)=\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}=\lambda e^{-\lambda x}\cdot\lambda e^{-\lambda x}\qquad,\qquad x>0\,,y>0$$

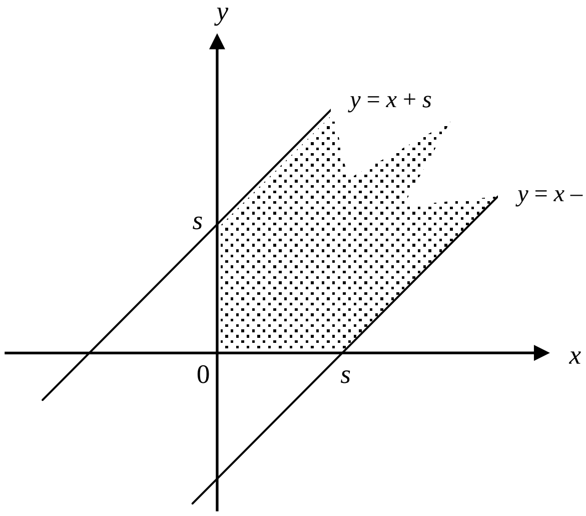
כמו כן, קל לראות, שלשני המשתנים המקריים הנתונים יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר λ , ומכיוון שהם בלתי-תלויים, לסכומם יש התפלגות גמא עם הפרמטרים $t=2$ ו- λ , ומתקיים:

$$f_W(w)=\tfrac{1}{\Gamma(2)}\cdot\lambda e^{-\lambda w}\cdot(\lambda w)^{2-1}=\lambda^2 w e^{-\lambda w}\qquad,\qquad w>0$$

ב. $F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{\frac{X+Y}{2} \le z\} = P\{X + Y \le 2z\} = F_{Gamma(2,\lambda)}(2z)$

$$f_Z(z) = \tfrac{d}{dz} F_Z(z) = f_{Gamma(2,\lambda)}(2z) \cdot 2 = 2\lambda^2 z e^{-2\lambda z} \cdot 2 = 4\lambda^2 z e^{-2\lambda z} \qquad , \qquad z > 0$$

ג.



לכל $s > 0$ מתקיים :

$$F_S(s) = P\{|X - Y| \le s\} = P\{-s \le X - Y \le s\} = P\{X - s \le Y \le X + s\}$$

$$= \int_0^s \int_0^{x+s} f_{X,Y}(x,y)dydx + \int_s^\infty \int_{x-s}^{x+s} f_{X,Y}(x,y)dydx$$

$$= \int_0^s f_X(x)\left(\int_0^{x+s} f_y(y)dy\right)dx + \int_s^\infty f_X(x)\left(\int_{x-s}^{x+s} f_Y(y)dy\right)dx$$

$$= \int_0^s f_X(x)F_Y(x+s)dx + \int_s^\infty f_x(x)[F_Y(x+s) - F_Y(x-s)]dx$$

$$= \int_0^s \lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda(x+s)})dx + \int_s^\infty \lambda e^{-\lambda x}(e^{-\lambda(x-s)} - e^{-\lambda(x+s)})dx$$

$$= \int_0^s (\lambda e^{-\lambda x} - \tfrac{1}{2}e^{-\lambda s} \cdot 2\lambda e^{-2\lambda x})dx + \tfrac{1}{2}(e^{\lambda s} - e^{-\lambda s})\int_s^\infty 2\lambda e^{-2\lambda x}dx$$

$$= F_{Exp(\lambda)}(s) - \tfrac{1}{2}e^{-\lambda s}F_{Exp(2\lambda)}(s) + \tfrac{1}{2}(e^{\lambda s} - e^{-\lambda s})[1 - F_{Exp(2\lambda)}(s)]$$

$$= 1 - e^{-\lambda s} - \cancel{\tfrac{1}{2}e^{-\lambda s}(1 - e^{-2\lambda s})} + \cancel{\tfrac{1}{2}(e^{\lambda s} - e^{-\lambda s})e^{-2\lambda s}} = 1 - e^{-\lambda s}$$

קיבלנו שלהפרש המוחלט של שני המשתנים המקריים הנתונים יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר λ .

לפיכך : $f_S(s) = \lambda e^{-\lambda s} \qquad , \qquad s > 0$

שאלה 3

א. נשים לב כי : $P\{X_1 + 2X_2 < 3X_3 + a\} = P\{X_1 + 2X_2 - 3X_3 < a\}$

כמו כן, לכל המשתנים המקריים התפלגות נורמלית סטנדרטית והם בלתי-תלויים. לכן, ההתפלגות של הסכום $X_1 + 2X_2 - 3X_3$ גם היא נורמלית עם הפרמטרים :

$$\mu = E[X_1 + 2X_2 - 3X_3] = E[X_1] + E[2X_2] - E[3X_3] = 0$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X_1 + 2X_2 - 3X_3) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(2X_2) + \text{Var}(-3X_3)$$

$$= \text{Var}(X_1) + 4\text{Var}(X_2) + 9\text{Var}(X_3) = 14$$

כעת, עלינו למצוא a שיקיים את המשוואה: $P\{X_1 + 2X_2 - 3X_3 < a\} = 0.953$

כאשר: $X_1 + 2X_2 - 3X_3 \sim N(0,14)$

כלומר a שיקיים את המשוואה: $P\left\{Z < \frac{a-0}{\sqrt{14}}\right\} = \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{14}}\right) = 0.953 = \Phi(1.675)$

ומכאן כי: $\frac{a}{\sqrt{14}} = 1.675 \quad \Rightarrow \quad a = 6.267$

ב. לכל המשתנים המקריים הנתונים יש התפלגות נורמלית סטנדרטית והם בלתי-תלויים זה בזה, לפיכך, למשתנים המקריים $X_1 + X_3$ ו- $X_2 + X_3$ יש התפלגות משותפת דו-נורמלית.

נסמן $(Y_1, Y_2) = (X_2 + X_3,\ X_1 + X_3)$. מתקיים:

$$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E[X_1+X_3]\\ E[X_2+X_3]\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Var}(X_1+X_3) & \text{Cov}(X_1+X_3, X_2+X_3)\\ \text{Cov}(X_1+X_3, X_2+X_3) & \text{Var}(X_2+X_3)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\text{Var}(X_1)+\text{Var}(X_3) & \text{Var}(X_3)\\ \text{Var}(X_3) & \text{Var}(X_2)+\text{Var}(X_3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

לפיכך, למשתנה המקרי המותנה $Y_1 = X_2 + X_3$ בהינתן $Y_2 = X_1 + X_3 = 0.5$ יש התפלגות נורמלית עם תוחלת $\mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(0.5 - \mu_2) = 0 + \frac{1}{2}\cdot 0.5 = 0.25$ ושונות $\sigma_1^2 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2} = 2 - \frac{1^2}{2} = 1.5$.

נותר לחשב את ההסתברות המבוקשת:

$$P\{X_2+X_3 > 0.517 \mid X_1+X_3 = 0.5\} = P\left\{z > \tfrac{0.517-0.25}{\sqrt{1.5}}\right\} = 1 - \Phi(0.218) = 1 - 0.58632 = 0.41368$$

ג. לכל המשתנים המקריים הנתונים יש התפלגות נורמלית סטנדרטית והם בלתי-תלויים זה בזה, לפיכך, לסכום ריבועיהם, דהיינו, למשתנה המקרי $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$, יש התפלגות חי-בריבוע עם n דרגות חופש, או לחלופין התפלגות גמא עם הפרמטרים $t = \frac{n}{2}$ ו- $\lambda = \frac{1}{2}$, שתוחלתה n ושונותה $2n$.

כעת, הואיל ומדובר בסכום של משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, נוכל להעזר במשפט הגבול המרכזי, כדי למצוא קירוב להסתברות המבוקשת. נקבל:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 > n + \sqrt{\tfrac{n}{2}}\right\} \cong P\left\{Z > \frac{\cancel{n} + \sqrt{\frac{n}{2}} - \cancel{\frac{n}{2}\big/\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{n}{2}\big/\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\right\} = P\left\{Z > \frac{\sqrt{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2n}}\right\}$$

$$= P\left\{Z > \sqrt{\frac{1}{4}}\right\} = P\{Z > 0.5\} = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

שאלה 4

A_1 , A_2 , A_3 , B ו- C הם חמישה מאורעות במרחב מדגם S .

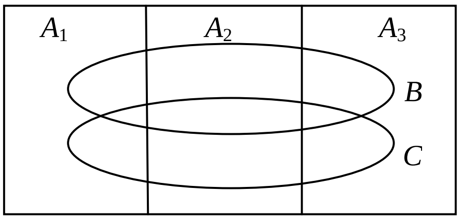
המאורעות A_1 , A_2 ו- A_3 הם מאורעות זרים, שאיחודם שווה למרחב המדגם והם מקיימים :

$$P(A_1) = P(A_2) = 2P(A_3)$$

ולכן :

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 5P(A_3) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad P(A_1) = P(A_2) = 0.4 \quad ; \quad P(A_3) = 0.4$$

ודיאגרמת ון שתתאים למקרה הזה היא :



כעת, נתון כי –

$$P(A_1 \cap B) = 2P(A_2 \cap B) = 6P(A_3 \cap B) \qquad P(B) = 0.6$$

$$P(C \mid A_2 \cap B) = \tfrac{1}{2} \qquad P(C \mid A_2 \cap B^C) = \tfrac{8}{11}$$

$$P(C \mid A_3) = 0.6 \qquad P(B \mid C \cap A_3) = \tfrac{1}{6}$$

$$P(B \cup C \mid A_1) = 0.95 \qquad P(B \cap C \mid A_1) = 0.15$$

לכן :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) = 10P(A_3 \cap B) = 0.6$$

$$\Rightarrow \qquad P(A_1 \cap B) = 0.36 \quad ; \quad P(A_2 \cap B) = 0.18 \quad ; \quad P(A_3 \cap B) = 0.06$$

$$\Rightarrow \qquad P(C \cap A_2 \cap B) = P(C \mid A_2 \cap B)P(A_2 \cap B) = 0.5 \cdot 0.18 = 0.09$$

$$\Rightarrow \qquad P(C^C \cap A_2 \cap B) = P(A_2 \cap B) - P(C \cap A_2 \cap B) = 0.18 - 0.09 = 0.09$$

כמו כן :

$$P(A_2 \cap B^C) = P(A_2) - P(A_2 \cap B) = 0.4 - 0.18 = 0.22$$

$$\Rightarrow \qquad P(C \cap A_2 \cap B^C) = P(C \mid A_2 \cap B^C)P(A_2 \cap B^C) = \tfrac{8}{11} \cdot 0.22 = 0.16$$

וגם :

$$P(B \cap C \cap A_3) = P(B \mid C \cap A_3)\underbrace{P(C \mid A_3)P(A_3)}_{=P(C \cap A_3)=0.12} = \tfrac{1}{6} \cdot 0.6 \cdot 0.2 = 0.02$$

$$P(B^C \cap C \cap A_3) = P(C \cap A_3) - P(B \cap C \cap A_3) = 0.12 - 0.02 = 0.1$$

$$P(B \cap C^C \cap A_3) = P(B \cap A_3) - P(B \cap C \cap A_3) = 0.06 - 0.02 = 0.04$$

וכן :

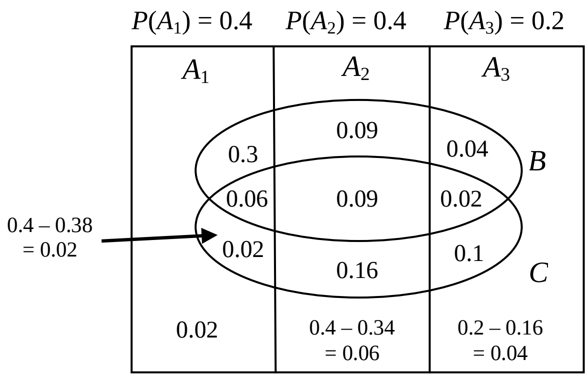
$$P(B \cap C \cap A_1) = P(B \cap C \mid A_1)P(A_1) = 0.15 \cdot 0.4 = 0.06$$

$$\Rightarrow \qquad P(C^C \cap A_1 \cap B) = P(A_1 \cap B) - P(C \cap A_1 \cap B) = 0.36 - 0.06 = 0.3$$

$$P((B \cup C) \cap A_1) = P(B \cup C \mid A_1)P(A_1) = 0.95 \cdot 0.4 = 0.38$$

$$\Rightarrow \qquad P(B^C \cap C^C \cap A_1) = P(A_1) - P((B \cup C) \cap A_1) = 0.4 - 0.38 = 0.02$$

נמלא את ההסתברויות שקיבלנו בדיאגרמת ון :



ומכאן :

א. $P(C) = 0.12 + 0.25 + 0.08 = 0.45$

ב. $P(A_1 \cap B^C \cap C^C) = 0.02$

ג. $P(A_2 \mid B \cup C) = \dfrac{P(A_2 \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)} = \dfrac{0.09 + 0.09 + 0.16}{1 - (0.02 + 0.06 + 0.04)} = \dfrac{0.34}{0.88} = 0.38\overline{63}$

ד. $P(B \cap C \mid A_3) = \dfrac{P(B \cap C \cap A_3)}{P(A_3)} = \dfrac{0.02}{0.2} = 0.1$

שאלה 5

א. הערכים האפשריים של המשתנה המקרי Y הם : 1, 2, ..., 30 , ופונקציית ההסתברות שלו היא :

$$P\{Y = i\} = P\{X = i\} = 0.01 \cdot 0.99^{i-1} \qquad , \qquad i = 1, 2, \ldots, 29$$

$$P\{Y = 30\} = P\{X \ge 30\} = P\{X > 29\} = 0.99^{29} = 0.74717$$

ופונקציית ההתפלגות המצטברת :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y < 1 \\ 1 - P\{Y > i\} = 1 - 0.99^i & , \quad i \le y < i+1 \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, 29 \\ 1 & , \quad y \ge 30 \end{cases}$$

ב. הערכים האפשריים של המשתנה המקרי W הם : 30, 31, ... , ופונקציית ההסתברות שלו היא :

$$P\{W = 30\} = P\{X \le 30\} = 1 - P\{X > 30\} = 1 - 0.99^{30} = 0.2603$$

$$P\{W = j\} = P\{X = j\} = 0.01 \cdot 0.99^{j-1} \qquad , \qquad j = 31, 32, \ldots$$

והתוחלת :

$$E[W] = 30 \cdot 0.2603 + \sum_{j=31}^{\infty} j \cdot 0.01 \cdot 0.99^{j-1} = 7.809 + 0.99^{30} \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} (j + 30) \cdot 0.01 \cdot 0.99^{j-1}}_{= E[Geo(0.01) + 30]}$$

$$= 7.809 + 0.7397 \cdot (\tfrac{1}{0.01} + 30) = 103.97$$

ג. מתקיים : $P\{Y = i, W = 30\} = P\{X = i\} = 0.01 \cdot 0.99^{i-1} \qquad , \qquad i = 1, 2, \ldots, 30$

$$P\{Y = 30, W = i\} = P\{X = i\} = 0.01 \cdot 0.99^{i-1} \qquad , \qquad i = 31, 32, \ldots,$$

ובכל מקרה אחר, ההסתברות המשותפת שווה ל- 0.

ד.
$$P\{W=Y+15\}=P\{Y=15,W=30\}+P\{Y=30,W=45\}$$

$$=P\{X=15\}+P\{X=45\}=0.01\cdot(0.99^{14}+0.99^{44})=0.0151$$