

## פתרון שאלות בממ"ן 12 סמסטר 2016א

### שאלה 2

המכונה תגיע למצב  $q_{\text{reject}}$ .

**הסבר :** הקלט למכונה  $U$  הוא תיאור של מכונת טיורינג וקלט למכונה הנתונה. במקרה שלנו, התיאור הוא של המכונה  $U$  והקלט הוא התיאור של  $U$ . המכונה  $U$  מבצעת סימולציה של הרצת המכונה שהיא קיבלה על הקלט הנתון. במקרה שלנו היא תבצע סימולציה של  $U$  על  $\langle U \rangle$ . המכונה  $U$  של הסימולציה מצפה לקבל תיאור של מכונה וקלט למכונה. אך במקרה שלנו היא מקבלת כקלט רק תיאור של מכונה. לכן הקלט לא תקין, והיא תדחה. לכן גם ההרצה "החיצונית" של  $U$  תסתיים בדחייה.

### שאלה 3

כדי להוכיח שהשפה  $C$  מזוהה-טיורינג, נתאר מכונת טיורינג שמזהה אותה :

"על קלט  $\langle M, w \rangle$  כאשר  $M$  היא מכונת טיורינג ו- $w$  היא מחרוזת סמלים :

1. הרץ את  $M$  על  $w$ . אם  $M$  דחתה, דחה.
2. בדוק את אורך המילה שכתובה על הסרט של  $M$ . אם הוא גדול מ- $|w|$ , דחה. אחרת, קבל."

כדי להוכיח ש- $C$  איננה כריעה, נשתמש בשיטת האלכסון :

נניח בשלילה ש- $C$  כריעה. אז יש מכונה  $H$  שמכריעה שייכות ל- $C$ . נבנה את המכונה  $D$  הבאה :

"על קלט  $\langle M \rangle$  כאשר  $M$  היא מכונת טיורינג :

1. הרץ את המכונה  $H$  על  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ .
2. אם  $H$  הכריעה ש- $\langle M, \langle M \rangle \rangle$  שייכת ל- $C$ , דחה.
3. אם  $H$  הכריעה ש- $\langle M, \langle M \rangle \rangle$  לא שייכת ל- $C$ , מחק את תוכן הסרט, כתוב על הסרט את  $\langle M \rangle$  וקבל."

המכונה  $D$  מתנהגת באופן הבא : אם  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$  שייכת ל- $C$ ,  $D$  דוחה את  $\langle M \rangle$ . אם  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$  לא שייכת ל- $C$ ,  $D$  מקבלת את  $\langle M \rangle$ , ובסיום ריצתה של  $D$  על  $\langle M \rangle$  רשומה על הסרט מילה שאינה ארוכה מ- $\langle M \rangle$ .

מה יקרה כאשר נריץ את  $D$  על הקלט  $\langle D \rangle$ ?

אם  $\langle D, \langle D \rangle \rangle$  שייכת ל- $C$ , כלומר, המכונה  $D$  מקבלת את  $\langle D \rangle$  ובסיום ריצתה רשומה על הסרט מילה שאינה ארוכה מ- $\langle D \rangle$ , אז  $D$  תדחה את  $\langle D \rangle$ . כלומר,  $\langle D, \langle D \rangle \rangle$  לא שייכת ל- $C$ .

אם  $\langle D, \langle D \rangle \rangle$  לא שייכת ל- $C$ , אז  $D$  תקבל את  $\langle D \rangle$ , ובסיום ריצתה תהיה רשומה על הסרט מילה שאינה ארוכה מ- $\langle D \rangle$ . כלומר  $\langle D, \langle D \rangle \rangle$  כן שייכת ל- $C$ .

בכל מקרה הגענו לסתירה.

#### שאלה 4

מה שלא נכון ב"הוכחה" הוא ההנחה שאם  $M$  לא קיבלה את  $x$  אז  $M_1$  בהכרח כן תקבל את  $x$ .  
לא לוקחים בחשבון את האפשרות ש- $M$  לא עוצרת על  $x$ . במקרה כזה גם  $M$  וגם  $M_1$  לא מקבלות את  $x$ .

#### שאלה 5

א. הרדוקציה של הוכחת משפט 5.10 (עמוד 224 בספר) היא רדוקצית מיפוי של המשלימה של  $A_{TM}$  ל- $E_{LBA}$ .

המשלימה של  $A_{TM}$  איננה מזוהה-טיורינג, לכן גם  $E_{LBA}$  איננה מזוהה-טיורינג.

ב. המשלימה של  $E_{LBA}$  מזוהה-טיורינג. להלן מכונה לא דטרמיניסטית שמזהה אותה:  
"על קלט  $\langle A \rangle$  כאשר  $A$  הוא אוטומט חסום ליניארית:

1. בחר באופן לא דטרמיניסטי מילה  $w$  מעל האלפבית של  $A$ .

2. הרץ את  $A$  על  $w$ . אם  $A$  קיבל את  $w$ , קבל. אחרת, דחה."

**הערה לסעיף א:** הרדוקציה של הוכחת משפט 5.10 כפי שהיא מנוסחת בספר איננה רדוקצית מיפוי, אבל אפשר לתרגם אותה לרדוקצית מיפוי. אז זו תהיה רדוקצית מיפוי של המשלימה של  $A_{TM}$  ל- $E_{LBA}$ . לא תמיד אפשר להפוך רדוקציה נתונה לרדוקצית מיפוי. אם זה אפשרי, צריך לשים לב היטב בין אלו שפות יש רדוקצית מיפוי. למשל, במקרה שלנו, אין רדוקצית מיפוי של  $A_{TM}$  ל- $E_{LBA}$ , רק של המשלימה של  $A_{TM}$  ל- $E_{LBA}$ . (למה?)

**הערה לסעיף ב:** המכונה הלא דטרמיניסטית שהוצעה בפתרון היא מכונה מזוהה אך לא מכונה מכריעה. (אין בכלל מכונה מכריעה לשפה הזו. השפה לא כריעה). זו איננה מכונה מכריעה, משום שהיא בוחרת באופן לא דטרמיניסטי מילה. הבחירה הלא דטרמיניסטית הזו יוצרת אפשרות למסלולי חישוב שאינם מסתיימים - בחירת מילה באופן לא דטרמיניסטי נעשית על-ידי כתיבה של סמלים מהאלפבית של  $A$ . מכיוון שאורך המילה לא חסום יש אפשרות לכתיבת סמלים ללא סוף.

#### שאלה 7

הרדוקציה של הוכחת משפט 5.3 (עמוד 219 בספר) היא רדוקציית מיפוי של  $A_{TM}$  ל- $REGULAR_{TM}$ .  
זו גם רדוקציית מיפוי של המשלימה של  $A_{TM}$  למשלימה של  $REGULAR_{TM}$ .  
זה מוכיח שהמשלימה של  $REGULAR_{TM}$  איננה מזוהה-טיורינג (כי המשלימה של  $A_{TM}$  איננה מזוהה-טיורינג).

נראה רדוקציית מיפוי של  $A_{TM}$  למשלימה של  $REGULAR_{TM}$ .

זו גם רדוקציית מיפוי של המשלימה של  $A_{TM}$  ל- $REGULAR_{TM}$ .

זה מוכיח ש- $REGULAR_{TM}$  איננה מזוהה-טיורינג.

"על קלט  $\langle M, w \rangle$  כאשר  $M$  היא מכונת טיורינג ו- $w$  היא מחרוזת:

1. בנה את המכונה  $M_3$  הבאה :

$$M_3 = \text{"על קלט } x :$$

1. אם  $x$  הוא מהצורה  $0^n 1^n$ , דחה.

2. אם  $x$  איננו מהצורה הזו, הרץ את  $M$  על  $w$  וקבל (את  $x$ ) אם  $M$  קיבלה את  $w$ .

2. החזר את  $\langle M_3 \rangle$ .

אם  $M$  לא מקבלת את  $w$ , אז  $M_3$  לא מקבלת אף מילה. כלומר,  $M_3$  מזהה את השפה הריקה שהיא שפה רגולרית.

אם  $M$  מקבלת את  $w$ , אז  $M_3$  מקבלת כל מילה שאיננה מהצורה  $0^n 1^n$ . זוהי שפה לא רגולרית (כי המשלימה שלה לא רגולרית).