פתרונות לממ"ן 15 - 2013א - 20425

1. א. המשתנים המקריים X ו-Y תלויים זה בזה, מכיוון שמתקיים $X+Y\le n$ או לחילופין $Y\le n-X$. כלומר, הערכים האפשריים של Y, שהם בין 0 ל- n, משתנים בהינתן ערך של X. למשל, אם ידוע ש- $X=i$, לכל $i=1,2,\ldots,n$, אז הערך המקסימלי של Y הופך להיות $n-i$ במקום n.

אפשר גם להוכיח את התלות בעזרת תנאי האי-תלות. נמצא זוג ערכים של X ו-Y שלא מקיים את התנאי. נשים לב, שלכל אחד משני המשתנים המקריים הללו יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{1}{n}$, ונקבל כי, מצד אחד: $P\{X=n,Y=n\}=0$

ומצד שני: $P\{X=n\}P\{Y=n\}=\left(\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{1}{n}\right)^n>0$

כלומר, התנאי אינו מתקיים, ולכן המשתנים המקריים תלויים זה בזה.

ב. גם המשתנים המקריים X ו-W תלויים זה בזה, מכיוון שממספר הכדורים בתא 1 יכול להשפיע על המספר האפשרי של התאים הריקים. למשל, אם ידוע ש- $X=n$, אז בהכרח $W=n-1$, בעוד שהערכים האפשריים של W, ללא מידע זה, הם בין 0 ל- $n-1$.

נראה את התלות גם בעזרת תנאי האי-תלות. מצד אחד: $P\{X=1,W=n-1\}=0$

מכיוון שנתון ש- $n>2$.

ומצד שני: $P\{X=1\}P\{W=n-1\}=\underbrace{n\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}}\cdot\underbrace{n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{n}}>0$

כלומר, התנאי אינו מתקיים, ולכן המשתנים המקריים תלויים זה בזה.

ג. פיזור הכדורים אקראי והכדורים יכולים להיכנס לתא 1, לתא 2 או לאחד התאים האחרים. לכן, פונקציית ההסתברות המשותפת היא פונקציית הסתברות מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{n-2}{n}\right)$.

כלומר: $i,j=0,1,\ldots,n \quad ; \quad i+j\le n \quad , \quad P\{X=i,Y=j\}=\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{i+j}\cdot\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n-i-j}$

ד. $P\{XY=0\}=P\{X=0\cup Y=0\}=P\{X=0\}+P\{Y=0\}-P\{X=0,Y=0\}=2\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^n-\left(\frac{n-2}{n}\right)^n$

2. א. נתחיל בחישוב ההסתברויות שבהטלת 3 קוביות לא מתקבל אף 4, שמתקבל בדיוק 4 אחד, שמתקבלים בדיוק שני 4 ושבכל הקוביות מתקבל 4. ההסתברויות הן:

$P\{\text{אין אף 4}\}=\frac{5^3}{6^3}=\frac{125}{216}$ $\qquad$ $P\{\text{בדיוק 4 אחד}\}=\frac{3\cdot5^2}{6^3}=\frac{75}{216}$

$P\{\text{בדיוק שני 4}\}=\frac{3\cdot5}{6^3}=\frac{15}{216}$ $\qquad$ $P\{\text{הכל 4}\}=\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}$

ולכן: $P\{X=16,Y=11,Z=2\}=\frac{30!}{16!\cdot11!\cdot2!\cdot1!}\cdot\left(\frac{125}{216}\right)^{16}\left(\frac{75}{216}\right)^{11}\left(\frac{15}{216}\right)^{2}\left(\frac{1}{216}\right)^{1}=0.004962$

ב. נשתמש בהסתברויות שחושבו בסעיף א ונקבל שלכל $i, j = 0,1,2,\ldots,30$, כך ש- $i + j \leq 30$ מתקיים :

$$P\{X = i, Y = j\} = \frac{30!}{i!\cdot j!\cdot(30-i-j)!}\cdot\left(\frac{125}{216}\right)^{i}\left(\frac{75}{216}\right)^{j}\left(\frac{16}{216}\right)^{30-i-j}$$

ג. נסמן ב-W את מספר ההטלות שבהן התוצאה 4 מתקבלת בכל הקוביות. למשתנה המקרי W יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 30 ו- $\frac{1}{216}$. לכן :

$$\text{Var}(X+Y+Z) = \text{Var}(30-W) = \text{Var}(W) = 30\cdot\frac{1}{216}\cdot\frac{215}{216} = 0.13825$$

3. א. הערכים האפשריים של X הם 0, 1 ו-2. הערכים האפשריים של Y הם 0, 1, 2, 3 ו-4.

הערכים של ההסתברויות המשותפות הם :

$$P\{X=0,Y=3\} = P\{X=0,Y=4\} = P\{X=1,Y=4\} = P\{X=2,Y=1\} = P\{X=2,Y=3\} = 0$$

$$P\{X=0,Y=0\} = \frac{\binom{8}{4}\cdot 2^4}{\binom{20}{4}} = \frac{1{,}120}{4{,}845}$$ [אין זוגות ואין כדורים נושאי מספרים 1 או 2]

$$P\{X=0,Y=1\} = \frac{2\cdot\binom{8}{3}\cdot 2^4}{\binom{20}{4}} = \frac{1{,}792}{4{,}845}$$ [אין זוגות ויש כדור אחד הנושא את אחד המספרים 1 או 2]

$$P\{X=0,Y=2\} = \frac{2^2\cdot\binom{8}{2}\cdot 2^2}{\binom{20}{4}} = \frac{448}{4{,}845}$$ [אין זוגות ויש כדור אחד הנושא את המספר 1 וכדור אחד הנושא את המספר 2]

$$P\{X=1,Y=0\} = \frac{8\cdot\binom{7}{2}\cdot 2^2}{\binom{20}{4}} = \frac{672}{4{,}845}$$ [יש זוג אחד ואין כדורים נושאי מספרים 1 או 2]

$$P\{X=1,Y=1\} = \frac{8\cdot 4\cdot 14}{\binom{20}{4}} = \frac{448}{4{,}845}$$ [יש זוג אחד ויש כדור אחד הנושא את המספר 1 או 2]

$$P\{X=1,Y=2\} = \frac{2\cdot\binom{8}{2}\cdot 2^2 + 2^2\cdot 8}{\binom{20}{4}} = \frac{256}{4{,}845}$$ [יש זוג אחד ושני כדורים הנושאים את המספרים 1 או 2]

$$P\{X=1,Y=3\} = \frac{2\cdot 2\cdot 16}{\binom{20}{4}} = \frac{64}{4{,}845}$$ [יש זוג אחד ושלושה כדורים הנושאים את המספרים 1 או 2]

$$P\{X=2,Y=0\} = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{28}{4{,}845}$$ [יש שני זוגות ואין אף כדור הנושא את המספרים 1 או 2]

$$P\{X=2,Y=2\} = \frac{2\cdot 8}{\binom{20}{4}} = \frac{16}{4{,}845}$$ [יש שני זוגות ויש שני כדורים הנושאים את המספר 1 או שני כדורים הנושאים את המספר 2]

$$P\{X=2,Y=4\} = \frac{1}{\binom{20}{4}} = \frac{1}{4{,}845}$$ [יש שני זוגות הנושאים את המספרים 1 ו-2]

נערוך את התוצאות שקיבלנו בטבלה :

X \ Y	0	1	2	3	4	p_X
0	$\frac{1{,}120}{4{,}845}$	$\frac{1{,}792}{4{,}845}$	$\frac{448}{4{,}845}$	0	0	$\frac{3{,}360}{4{,}845} = \frac{224}{323}$
1	$\frac{672}{4{,}845}$	$\frac{448}{4{,}845}$	$\frac{256}{4{,}845}$	$\frac{64}{4{,}845}$	0	$\frac{1{,}440}{4{,}845} = \frac{96}{323}$
2	$\frac{28}{4{,}845}$	0	$\frac{16}{4{,}845}$	0	$\frac{1}{4{,}845}$	$\frac{45}{4{,}845} = \frac{3}{323}$
p_Y	$\frac{1{,}820}{4{,}845}$	$\frac{2{,}240}{4{,}845}$	$\frac{720}{4{,}845}$	$\frac{64}{4{,}845}$	$\frac{1}{4{,}845}$	

ב. כדי לקבוע אם המשתנים המקריים X ו-Y בלתי-תלויים, נבדוק את תנאי האי-תלות. למשל:

$$P\{X=0,Y=3\}=0 \quad \neq \quad P\{X=0\}P\{Y=3\}=\tfrac{224}{323}\cdot\tfrac{64}{4,845} \;>\; 0$$

ולכן, המשתנים המקריים הללו תלויים.

ג. נסמן ב-A את המאורע שנבחר בדיוק זוג כדורים אחד וב-B את המאורע שנבחר זוג כדורים הנושא את המספר 1 או 2.

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P\{X=1\}}=\frac{\frac{2\cdot\binom{9}{2}\cdot 2^2}{4,845}}{\frac{1,440}{4,845}}=\frac{288}{1,440}=\frac{1}{5}=0.2$$

הערה: המאורע $A\cap B$ מתרחש אם הרכב הכדורים הנבחרים הוא $\{1,1,m,n\}$ או $\{2,2,m,n\}$, כאשר $m\neq n$.

ד. נמצא את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $Y=2$. מכיוון ש: $P\{Y=2\}=\tfrac{720}{4,845}$

מקבלים כי: $P\{X=1\,|\,Y=2\}=\frac{\frac{256}{4,845}}{\frac{720}{4,845}}=\frac{256}{720}=\frac{16}{45}$; $P\{X=0\,|\,Y=2\}=\frac{\frac{448}{4,845}}{\frac{720}{4,845}}=\frac{448}{720}=\frac{28}{45}$

$$P\{X=2\,|\,Y=2\}=\frac{\frac{16}{4,845}}{\frac{720}{4,845}}=\frac{16}{720}=\frac{1}{45}$$

4. הערכים האפשריים של X_1 הם כמובן 1, 2, ו-3. הערכים האפשריים של Y גם הם 1, 2 ו-3.
פונקציית ההסתברות המשותפת של X_1 ו-Y מקבלת ערכים חיוביים רק כאשר $Y\le X_1$ ומתקיים:

$P\{X_1=1,Y=1\}=P\{X_1=1\}=\tfrac{1}{3}=\tfrac{27}{81}$ [אין חשיבות לערכים של ה-X_i-ים האחרים, כי בוודאות $Y=1$]

$P\{X_1=2,Y=1\}=\tfrac{1}{3}\cdot\left[1-\left(\tfrac{2}{3}\right)^3\right]=\tfrac{19}{81}$ [לפחות אחד מה-X_i-ים האחרים שווה ל-1]

$P\{X_1=2,Y=2\}=\tfrac{1}{3}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^3=\tfrac{8}{81}$ [אף אחד מה-X_i-ים האחרים אינו שווים ל-1]

$P\{X_1=3,Y=1\}=\tfrac{1}{3}\cdot\left[1-\left(\tfrac{2}{3}\right)^3\right]=\tfrac{19}{81}$ [לפחות אחד מה-X_i-ים האחרים שווה ל-1]

$P\{X_1=3,Y=2\}=\tfrac{1}{3}\cdot\left[\left(\tfrac{2}{3}\right)^3-\left(\tfrac{1}{3}\right)^3\right]=\tfrac{7}{81}$ [כל ה-X_i-ים האחרים גדולים מ-1 ולפחות אחד מהם שווה ל-2]

$P\{X_1=3,Y=3\}=\tfrac{1}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^3=\tfrac{1}{81}$ [כל ה-X_i-ים שווים ל-3]

בכל מקרה אחר, פונקציית ההסתברות המשותפת שווה לאפס.

5. א. נגדיר שני משתנים מקריים <u>בלתי-תלויים</u>, המתארים את מספר הנפגעים במהלך שנה אחת, בקטע הכביש המסוים:

X = מספר הנשים הנפגעות במהלך שנה אחת בקטע הכביש המסוים ; $X\sim Po(3)$

Y = מספר הגברים הנפגעים במהלך שנה אחת בקטע הכביש המסוים ; $Y\sim Po(4)$

ההתפלגות של $X+Y$ היא פואסונית עם הפרמטר $3+4=7$ (ראה דוגמה 3א במדריך, עמוד 141).

לכן: $P\{X+Y=9\}+P\{X+Y=10\}=e^{-7}\left(\tfrac{7^9}{9!}+\tfrac{7^{10}}{10!}\right)=0.17239$

ב. נסמן ב-S את המשתנה המקרי המוגדר על-ידי סך-כל הנפגעים במשך ארבע השנים בקטע הכביש הנתון. ההתפלגות של S היא פואסונית עם הפרמטר 28, מכיוון ש- $S=\sum_{i=1}^{4} X_i + \sum_{i=1}^{4} Y_i$, כאשר ה-$X_i$-ים וה-$Y_i$-ים הם משתנים מקריים בלתי-תלויים, המסמנים את מספר הנפגעים מכל מין בכל אחת מ-4 השנים.

עתה, נסמן ב-F_1 את המשתנה המקרי המוגדר על-ידי סך-כל הנשים שנפגעו בשנתיים הראשונות (מתוך ה-4) בקטע הכביש הנתון וב-F_2 את המשתנה המקרי המוגדר על-ידי סך-כל הנשים שנפגעו בשנתיים האחרונות באותו קטע כביש. ההתפלגות של F_1 היא פואסונית עם הפרמטר 6, מכיוון ש- $F_1 = X_1 + X_2$, ומאותם מניעים גם ההתפלגות של F_2 היא פואסונית עם הפרמטר 6. כמו כן, נסמן ב-M את מספר הגברים שנפגעו בקטע כביש זה במהלך אותן 4 שנים. ההתפלגות של M היא פואסונית עם הפרמטר 16.

כעת, נחשב את ההסתברות המשותפת המותנית המבוקשת, ונראה שההתפלגות המשותפת של F_1 ו- F_2 בהינתן $S=30$ היא מולטינומית עם הפרמטרים $n=30$ ו- $\underset{\sim}{p}=\left(\frac{6}{28},\frac{6}{28},\frac{16}{28}\right)$.

$$P\{F_1=4,F_2=6 \mid S=30\}=\frac{P\{F_1=4,F_2=6,M=20\}}{P\{S=30\}}$$

$$=\frac{\cancel{e^{-6}}\cdot\frac{6^4}{4!}\cdot\cancel{e^{-6}}\cdot\frac{6^6}{6!}\cdot\cancel{e^{-16}}\cdot\frac{16^{20}}{20!}}{\cancel{e^{-28}}\cdot\frac{28^{30}}{30!}} \qquad [\ F_1,\ F_2 \text{ ו- } M \text{ בלתי-תלויים זה בזה}\ ]$$

$$=\binom{30}{4,6,20}\cdot\left(\frac{6}{28}\right)^4\left(\frac{6}{28}\right)^6\left(\frac{16}{28}\right)^{20}=0.01775$$

ג. מספר הנשים שגילן גבוה מ-50, הנפגעות בקטע הכביש המסוים במהלך שנה אחת, הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $3\cdot 0.4=1.2$. (ראה דוגמה 2ב במדריך, עמוד 138.)
נסמן ב-W את המשתנה המקרי הזה, ונקבל:

$$P\{W\geq 2\}=1-P\{W\leq 1\}=1-e^{-1.2}\left(\frac{1.2^0}{0!}+\frac{1.2^1}{1!}\right)=1-2.2e^{-1.2}=0.337373$$