שאלה 1

א. $P\{X=1\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$P\{X=2\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

$P\{X=i\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}+\frac{1}{2}\cdot\binom{i-1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}=\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\left[1+\binom{i-1}{2}\right] \quad , \quad i=3,4,...$

ב. $P\{B\mid X=5\}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\binom{4}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left[1+\binom{4}{2}\right]}=\dfrac{6}{7}$

ג. **דרך I:** נתונה בשחקן שנבחר:
$E[X]=\underbrace{E[X\mid A]}_{=E[Geo(\frac{1}{2})]}P(A)+\underbrace{E[X\mid B]}_{=E[NB(3,\frac{1}{2})]}P(B)=2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot2\cdot\frac{1}{2}=4$

דרך II:
$E[X]=\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\sum_{i=3}^{\infty}i\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}+\sum_{i=3}^{\infty}i\binom{i-1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{\infty}i\left(\frac{1}{2}\right)^{i}+\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{\infty}i\binom{i-1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}$

$=\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}i\left(\frac{1}{2}\right)^{i}}_{=E[Geo(\frac{1}{2})]}-\cancel{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=3}^{\infty}i\binom{i-1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}}_{=E[NB(3,\frac{1}{2})]}=\frac{1}{2}(2+6)=4$

שאלה 2

א. מספר הפתקים הכחולים שמוצאים ב- 10 הבחירות הראשונות הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N=20$, $m=7$, $n=10$. לפיכך, השונות המבוקשת היא: $\frac{10}{19}\cdot10\cdot\frac{7}{20}\cdot\frac{13}{20}=1.1974$

ב. $\dfrac{\binom{7}{4}\binom{13}{10}}{\binom{20}{14}}\cdot\dfrac{3}{6}=\dfrac{10{,}010}{38{,}760}\cdot\dfrac{1}{2}=0.1291$ או $\dfrac{\binom{14}{4}\binom{5}{2}}{\binom{20}{7}}=\dfrac{10{,}010}{77{,}520}=0.1291$

ג. **דרך I**

נגדיר: $X_i=\begin{cases}1 & , \text{ פתק אדום הוצא בבחירה } i \text{ ופתק כחול בבחירה } i+1\\ 0 & , \text{ אחרת}\end{cases}$ לכל $i=1,\dots,19$

ונקבל כי: $X=\sum_{i=1}^{19}X_i$ = מספר הפתקים הכחולים שהוצאו מייד לאחר פתק אדום.

עתה, לכל $i=1,\dots,19$ מתקיים: $E[X_i]=P\{X_i=1\}=\frac{13}{20}\cdot\frac{7}{19}=\frac{91}{380}$

ומכאן: $E[X]=\sum_{i=1}^{19}E[X_i]=19\cdot\frac{91}{380}=\frac{91}{20}=4.55$

דרך II

נגדיר: $X_i=\begin{cases}1 & , \text{ פתק כחול } i \text{ הוצא אחרי פתק אדום}\\ 0 & , \text{ אחרת}\end{cases}$ לכל $i=1,\dots,7$

ונקבל כי: $X=\sum_{i=1}^{7}X_i$ = מספר הפתקים הכחולים שהוצאו מייד לאחר פתק אדום.

עתה, לכל $i=1,\dots,7$ מתקיים: $E[X_i]=P\{X_i=1\}=\frac{19}{20}\cdot\frac{13}{19}=\frac{13}{20}$

הואיל ויש הסתברות $\frac{19}{20}$ שהפתק הכחול לא הוצא ראשון.

ומכאן: $E[X]=\sum_{i=1}^{7}E[X_i]=7\cdot\frac{13}{20}=\frac{91}{20}=4.55$

ד. **דרך I**

לכל $i=1,\ldots,19$ מתקיים: $\operatorname{Var}(X_i)=P\{X_i=1\}P\{X_i=0\}=\frac{91}{380}\cdot\frac{289}{380}=\frac{26{,}299}{144{,}400}=0.182126$

ולכל $1\le i,j\le 19$, כך ש- $i\ne j$, מתקיים:

$$P\{X_i=1,X_j=1\}=\begin{cases}0 & , \quad |i-j|=1\\ \frac{13}{20}\cdot\frac{7}{19}\cdot\frac{12}{18}\cdot\frac{6}{17}=\frac{91}{1{,}615} & , \quad |i-j|>1\end{cases}$$

$$\operatorname{Cov}(X_i,X_j)=\begin{cases}0-\left(\frac{91}{380}\right)^2=-\frac{8{,}281}{144{,}400} & , \quad |i-j|=1\\ \frac{91}{1{,}615}-\left(\frac{91}{380}\right)^2=-\frac{2{,}457}{2{,}454{,}800} & , \quad |i-j|>1\end{cases}$$

$$\operatorname{Var}(X)=\sum_{i=1}^{19}\operatorname{Var}(X_i)+2\sum_{i<j}\operatorname{Cov}(X_i,X_j)=19\cdot\frac{26{,}299}{144{,}400}-2\cdot 18\cdot\frac{8{,}281}{144{,}400}-2\cdot 153\cdot\frac{2{,}457}{2{,}454{,}800}=1.0896$$

הסבר: יש בסך-הכל $\binom{19}{2}=171$ זוגות שונים של i ו- j (עבור $i<j$), וב- 18 מתוכם מתקיים $j=i+1$.
לכן, יש 153 זוגות שונים של i ו- j שמקיימים $j>i+1$.

דרך II

לכל $i=1,\ldots,7$ מתקיים: $\operatorname{Var}(X_i)=P\{X_i=1\}P\{X_i=0\}=\frac{13}{20}\cdot\frac{7}{20}=\frac{91}{400}=0.2275$

ולכל $1\le i,j\le 17$, כך ש- $i\ne j$, מתקיים: $P\{X_i=1,X_j=1\}=\frac{153}{190}\cdot\frac{13}{18}\cdot\frac{12}{17}=\frac{39}{95}$

הואיל ויש הסתברות $\frac{153}{190}$ ששני הפתקים הכחולים הוצאו במקומות המאפשרים שאחרי כל אחד מהם יוצא פתק אדום.

כעת: $\operatorname{Cov}(X_i,X_j)=\frac{39}{95}-\left(\frac{13}{20}\right)^2=-\frac{91}{7{,}600}$

ומכאן: $\operatorname{Var}(X)=\sum_{i=1}^{7}\operatorname{Var}(X_i)+2\sum_{i<j}\operatorname{Cov}(X_i,X_j)=7\cdot\frac{91}{400}-7\cdot 6\cdot\frac{91}{7{,}600}=1.0896$

דרך נוספת לסעיפים ג ו- ד

אם נתייחס לסידור הצבעים בשורה, אז יש בסה"כ $\binom{20}{7}$ אפשרויות למיקום הפתקים הכחולים. כעת, המאורע $\{X=i\}$ מתרחש אם יש i פתקים כחולים שכל אחד מהם מוצא אחרי פתק אדום ועוד $7-i$ פתקים כחולים שזה לא מתקיים לגביהם. נבחר i פתקים אדומים ונצמיד להם פתק כחול שיוצא מייד אחריהם, $\binom{13}{i}$ אפשרויות. נותר לקבוע את המיקום של $7-i$ הפתקים הכחולים האחרים. מספר המיקומים שלהם שקול לפיזור של $7-i$ כדורים זהים ב- $i+1$ תאים (בתחילת השורה או מייד אחרי אחד מ-i הפתקים הכחולים האחרים), כלומר, $\binom{7}{7-i}$ אפשרויות. מקבלים כי: $P\{X=i\}=\frac{\binom{13}{i}\binom{7}{7-i}}{\binom{20}{7}} \quad , \quad i=0,1,\ldots,7$

ומכאן של-X יש התפלגות היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N=20$, $m=13$, $n=7$. ומתקיים:

$$E[X]=7\cdot\frac{13}{20}=4.55 \qquad ; \qquad \operatorname{Var}(X)=\frac{13}{19}\cdot 7\cdot\frac{13}{20}\cdot\frac{7}{20}=1.0896$$

שאלה 3

נסמן ב- A_i את המאורע שמתג i סגור $(i = 1,\dots,5)$, וב- B את המאורע שעובר זרם מנקודה A לנקודה B.

כל המאורעות A_i בלתי-תלויים זה בזה ומתקיים $P(A_i) = 0.8$.

א.
$$P(B) = P(A_1 \cup ((A_2 \cup A_4) \cap (A_3 \cup A_5)))$$
$$= P(A_1) + P((A_2 \cup A_4) \cap (A_3 \cup A_5)) - P(A_1 \cap (A_2 \cup A_4) \cap (A_3 \cup A_5))$$
$$= P(A_1) + P(A_2 \cup A_4)P(A_3 \cup A_5)) - P(A_1)P(A_2 \cup A_4)P(A_3 \cup A_5)$$
[המתגים A_i ב״ת זה בזה]
$$= 0.8 + (1-0.2^2)^2 - 0.8 \cdot (1-0.2^2)^2 = 0.98432$$

ב.
$$P(A_2^C \mid B^C) = 1 - P(A_2 \mid B^C) = 1 - \frac{P(A_2 \cap A_1^C \cap A_3^C \cap A_5^C)}{P(B^C)}$$
$$= 1 - \frac{0.8 \cdot 0.2^3}{1-0.98432} = 1 - \frac{0.0064}{0.01568} = 0.59184$$
[המתגים A_i ב״ת זה בזה]

ג.
$$P(B \mid A_1^C \cap (A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)) = \frac{P(A_1^C \cap (A_2 \cup A_4) \cap (A_3 \cup A_5))}{P(A_1^C \cap (A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5))}$$
$$= \frac{\cancel{P(A_1^C)}P(A_2 \cup A_4)P(A_3 \cup A_5)}{\cancel{P(A_1^C)}P(A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)}$$
[המתגים A_i ב״ת זה בזה]
$$= \frac{(1-0.2^2)^2}{1-0.2^4} = \frac{0.9216}{0.9984} = 0.9231$$

שאלה 4

א. נסמן משקל של עגבניה מקרית ב- X. מתקיים $X \sim N(100,30^2)$.

א1.
$$P\{X<70\} = \Phi\left(\tfrac{70-100}{30}\right) = \Phi(-1) = 1-\Phi(1) = 1-0.8413 = 0.1587$$
$$P\{70 \le X \le 125\} = \Phi\left(\tfrac{125-100}{30}\right) - \Phi\left(\tfrac{70-100}{30}\right) = \Phi(0.8333) - \Phi(-1) = 0.7976 - 0.1587 = 0.6389$$
$$P\{X>125\} = 1-\Phi\left(\tfrac{125-100}{30}\right) = 1-\Phi(0.8333) = 1-0.7976 = 0.2024$$

ההתפלגות המשותפת של מספרי העגבניות מכל סוג, בהתאם למשקלן, היא מולטינומית.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{50!}{8!31!11!} \cdot 0.1587^8 \cdot 0.6389^{31} \cdot 0.2024^{11} = 0.0201$

א2. בהינתן שבדיוק 8 עגבניות שקלו פחות מ-70 גרם, למספר העגבניות שתשקולנה יותר מ-125 גרם יש התפלגות מותנית בינומית עם הפרמטרים $n = 50 - 8 = 42$ ו- $p = \frac{0.2024}{1-0.1587} = 0.2406$.

לפיכך, השונות המבוקשת היא: $42 \cdot 0.2406 \cdot 0.7594 = 7.67$

ב. הערכים האפשריים של X הם $0,1,\dots,n$, והערכים האפשריים של Y הם $1,2,\dots,6$.

למשתנה המקרי X יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- p .

כאשר $X = i < n$ ו- $Y = j$, פירוש הדבר שהתוצאה 1 התקבלה i פעמים, וכן התקבלו $n-i$ תוצאות נוספות בין 2 ל- j, כך שהתוצאה j התקבלה לפחות פעם אחת (שכן היא התוצאה הגדולה ביותר).

לפיכך, מתקיים:

$$P\{X=i,Y=j\}=\begin{cases}\dfrac{\binom{n}{i}\cdot[(j-1)^{n-i}-(j-2)^{n-i}]}{6^n} & , \quad i=0,1,...,n-1\ ;\ j=2,3,...,6\\ \dfrac{1}{6^n} & , \quad i=n\quad ;\quad j=1\end{cases}$$

הערה: לתוצאה הראשונה אפשר להגיע גם כך:

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\mid X=i\}$$

$$=\binom{n}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{n-i}\cdot\left[\left(\frac{j-1}{5}\right)^{n-i}-\left(\frac{j-2}{5}\right)^{n-i}\right]\quad , \quad i=0,1,...,n-1\ ;\ j=2,3,...,6$$

שאלה 5

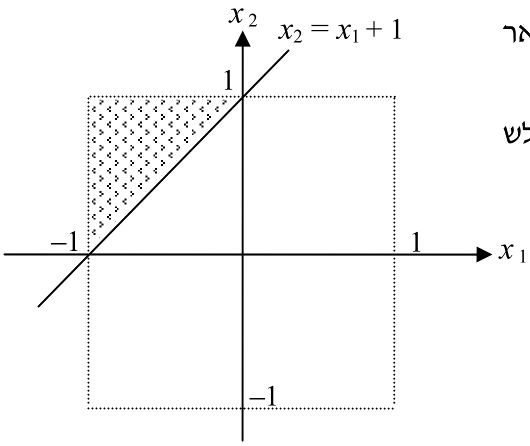
א. נמצא תחילה את פונקציית ההתפלגות המצטברת של M. לכל $-1<m<1$ מתקיים:

$$P\{M\le m\}=P\{X_1\le m,...,X_n\le m\}=P\{X_1\le m\}\cdot...\cdot P\{X_n\le m\}=\left(\tfrac{m-(-1)}{1-(-1)}\right)^n=\left(\tfrac{m+1}{2}\right)^n$$

נגזור את הפונקציה שקיבלנו, ונקבל את פונקציית הצפיפות של M. לכל $-1<m<1$ מתקיים:

$$f_M(m)=\tfrac{d}{dm}\left(\tfrac{m+1}{2}\right)^n=\tfrac{n}{2}\left(\tfrac{m+1}{2}\right)^{n-1}$$

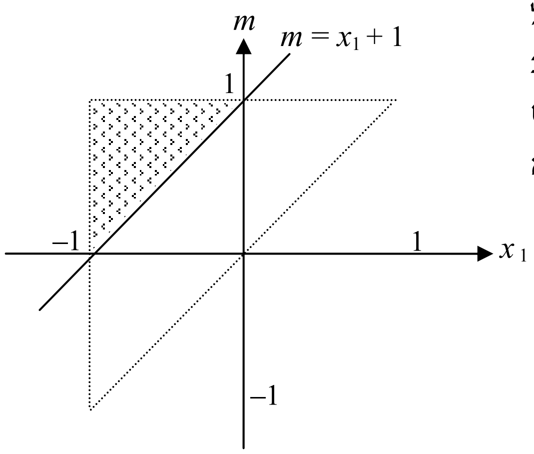
ב. הצפיפות המשותפת של X_1 ו- X_2 מוגדרת על הריבוע המתואר באיור ושווה ל- $(1/2)^2=1/4$ בכל התחום הזה.
לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא הנפח הכלוא מעל המשולש המסומן ומתחת לפונקציית הצפיפות, דהיינו $(1/2)\cdot(1/4)=1/8$.



אפשר להגיע לתוצאה האחרונה גם בחישוב:

$$P\{X_2>X_1+1\}=\int_{-1}^{0}\int_{x_1+1}^{1}(\tfrac{1}{2})^2\,dx_2dx_1=\int_{-1}^{0}\tfrac{1}{4}x_1dx_1=\tfrac{1}{8}(x_1)^2\Big|_{-1}^{0}=\tfrac{1}{8}$$

ג. במקרה הזה, הצפיפות המשותפת של X_1 ו- M אינה קבועה מעל תחום ההגדרה של התפלגותם המשותפת. לפיכך, נערוך חישוב למציאת ההסתברות המבוקשת. מכיוון שהמשתנים המקריים $X_1, X_2, ..., X_n$ בלתי-תלויים זה בזה, צפיפותם המשותפת היא $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ומתקיים:



$$
\begin{aligned}
P\{M > X_1+1\} &= 1 - P\{\underbrace{M < X_1+1}_{=A}\}\\
&= 1 - P\{\underbrace{M < X_1+1, X_1>0}_{=A\cap B}\} - P\{\underbrace{M < X_1+1, X_1<0}_{=A\cap B^C}\}\\
&= 1 - P\{X_1>0\} - P\{X_1<0, X_2 < X_1+1, \ldots, X_n < X_1+1\}\\
&= 1 - \tfrac{1}{2} - \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{x_1+1}\cdots\int_{-1}^{x_1+1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n dx_n\cdots dx_2dx_1\\
&= \tfrac{1}{2} - \int_{-1}^{0}\left(x_1+2\right)^{n-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n dx_1\\
&= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{n}\left(x_1+2\right)^n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\Big|_{-1}^{0} = \quad \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n\cdot 2^n}
\end{aligned}
$$

דרך נוספת:

$$
\begin{aligned}
P\{M \le X_1+1\} &= \int_{-1}^{1} P\{M \le X_1+1 \mid X_1 = x\}\cdot f_{X_1}(x)dx\\
&= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{0} P\{M \le X_1+1 \mid X_1 = x\}dx + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{1} P\{M \le X_1+1 \mid X_1 = x\}dx\\
&= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{0}\prod_{i=2}^{n} P\{X_i \le x+1\}dx + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{1} 1dx = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(\tfrac{x+2}{2}\right)^{n-1}dx + \tfrac{1}{2}\\
&= \tfrac{2}{2n}\left(\tfrac{x+2}{2}\right)^n\Big|_{-1}^{0} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n\cdot 2^n}
\end{aligned}
$$

ולכן:

$$
P\{M > X_1+1\} = 1 - P\{M \le X_1+1\} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n\cdot 2^n}
$$