

קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"
תאריך הבחינה: 29.6.2016 (סמסטר 2016 ב - מועד א 1 / 82)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפים: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

שאלה 1 (25 נקודות)

(13 נק') א. יהיו F ו- G מאורעות זרים (בעלי הסתברות חיובית) של ניסוי מקרי כלשהו.

הוכח כי בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה,

$$\frac{P(F)}{P(F) + P(G)} : \text{ההסתברות שהמאורע } F \text{ יתרחש לפני המאורע } G \text{ היא:}$$

(12 נק') ב. הוכח באמצעות שיקולים קומבינטוריים את השוויון: $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$

שאלה 2 (25 נקודות)

התפלגות משקל ביצה (בגרם) שגודלה M היא נורמלית עם תוחלת של 58 גרם וסטיית-תקן של 2.5 גרם; התפלגות משקל ביצה (בגרם) שגודלה L היא נורמלית עם תוחלת של 68 גרם וסטיית-תקן של 2.5 גרם.

אדם בוחר באופן מקרי ביצים מתוך סלסלה גדולה, כך שאין תלות בין הביצים הנבחרות. כל ביצה שנבחרת מהסלסלה היא בגודל M בהסתברות 0.4, ואחרת, בגודל L בהסתברות 0.6.

(6 נק') א. מהו המשקל ש-78% מהביצים בגודל L שוקלות יותר ממנו?

(6 נק') ב. נבחרה באקראי ביצה מתוך הסלסלה והתברר שמשקלה בין 60 גרם ל-65 גרם.

מהי ההסתברות שנבחרה ביצה בגודל M ?

(7 נק') ג. אדם בחר 15 ביצים בגודל L ו-5 ביצים בגודל M , ושם את כולן בשקית אחת.

מהי ההסתברות שמשקל הביצים שבשקית יעלה על 1.3 ק"ג?

(6 נק') ד. אדם בוחר באקראי מהסלסלה 90 ביצים.

מהי בקירוב ההסתברות שיבחר לכל היותר 57 ביצים בגודל L ?

הערה: בכל סעיפי השאלה יש לחשב תוצאות מדויקות עד כמה שאפשר.

שאלה 3 (25 נקודות)

(12 נק') א. יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר 0.01.

נגדיר את המשתנה המקרי Y על-ידי $Y = \min\{30, X\}$.

1. מהי פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי Y ?

2. חשב את $P\{X=Y\}$.

(13 נק') ב. יהי U משתנה מקרי אחיד בדיד, שערכיו האפשריים 1, 2, ..., 100,

מתקבלים בהסתברויות שוות (לכל ערך).

נגדיר את המשתנה המקרי W על-ידי $W = \max\{30, U\}$.

1. מהי פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי W ?

2. מהי התוחלת של המשתנה המקרי W ?

שאלה 4 (25 נקודות)

נתונים 10 כדורים ממוספרים מ-1 עד 10 ונתונות 10 קופסאות ממוספרות מ-1 עד 10. מכניסים באקראי את הכדורים לקופסאות – כדור אחד לכל קופסה.

נאמר שכדור מתאים לקופסה, אם שניהם נושאים אותו המספר.

(6 נק') א. מהי ההסתברות שכל הכדורים שעליהם מספר זוגי יוכנסו לקופסאות הנושאות מספר זוגי?

(6 נק') ב. מהי ההסתברות שכדור 1 לא יוכנס לקופסה המתאימה לו וגם כדור 2 לא יוכנס לקופסה המתאימה לו?

(13 נק') ג. 1. מהי תוחלת מספר הכדורים שיוכנסו לקופסאות המתאימות להם?

2. מהי שונות מספר הכדורים שיוכנסו לקופסאות המתאימות להם?

שאלה 5 (25 נקודות)

נתון כד ובתוכו 60 מטבעות זהים למראה.

במחצית מהמטבעות מתקבל H בהסתברות $\frac{1}{2}$; בשליש מהם בהסתברות $\frac{1}{3}$; ובשית מהם בהסתברות $\frac{1}{6}$.

(7 נק') א. בוחרים באקראי מטבע מהכד.

אם מטילים אותו פעם אחת, מהי ההסתברות לקבל בו H?

ב. בוחרים באקראי וללא החזרה 10 מטבעות מהכד, כך שלכל המטבעות סיכויים שווים להיבחר.

נגדיר את המשתנים המקריים שלהלן:

X הוא מספר המטבעות מסוג $P(H) = \frac{1}{2}$ שנבחרים מהכד;

Y הוא מספר המטבעות מסוג $P(H) = \frac{1}{3}$ שנבחרים מהכד.

(6 נק') 1. מהי פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y ? כתוב אותה במדויק.

(6 נק') 2. מהי פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $Y=4$? כתוב אותה במדויק.

(6 נק') 3. השתמש בנוסחה לחישוב שונות של סכום שני משתנים מקריים,

כדי לחשב את השונות המשותפת של X ו- Y .

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] \quad \text{נוסחת האינטרפולציה:}$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה - 20425

התפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}, \quad i=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t + 1 - p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1} \cdot p, \quad i=1,2,\dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t / (1 - (1-p)e^t), \quad t < -\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i!, \quad i=0,1,\dots$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1} (1-p)^{i-r} \cdot p^r, \quad i=r, r+1, \dots$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$(pe^t / (1 - (1-p)e^t))^r, \quad t < -\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i} / \binom{N}{n}, \quad i=0,1,\dots,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N} (1 - \frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n}, \quad i=m+1, m+2, \dots, m+n$	$m + (1+n)/2$	$(n^2 - 1)/12$	
אחידה	$1/(b-a), \quad a \leq x \leq b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt} - e^{at}) / (tb - ta), \quad t \neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda - t), \quad t < \lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1, \dots, n_r} \cdot p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}, \quad \sum n_i = n, \sum p_i = 1$			

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

נוסחת הבינום

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

כלל ההכלה וההפרדה

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

הסתברות מותנית

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

נוסחת הכפל

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i), \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S$$

נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}, \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S$$

נוסחת בייס

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx$$

תוחלת

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx$$

תוחלת של פונקציה של מ"מ

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

שונות

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ .

$$P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\}, \quad s, t \geq 0$$

תכונת חוסר-הזכרון

$$E[X | Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y) = \int x f_{X|Y}(x|y) dx$$

תוחלת מותנית

$$\text{Var}(X | Y = y) = E[X^2 | Y = y] - (E[X | Y = y])^2$$

שונוות מותנית

$$E[X] = E[E[X | Y]] = \sum_y E[X | Y = y] p_Y(y)$$

נוסחת התוחלת המותנית

$$E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X | Y]]$$

(טענה מתרגיל 26, עמוד 430)

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X | Y)] + \text{Var}(E[X | Y])$$

נוסחת השונוות המותנית

$$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$$

תוחלת של סכום משתנים מקריים

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

שונוות משותפת

$$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

שונוות של סכום משתנים מקריים

$$\rho(X, Y) = \text{Cov}(X, Y) / \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}$$

מקדם המתאם הלינארי

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$$

פונקציה יוצרת מומנטים

$$M_{X_1 + \dots + X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t) \quad : \text{כאשר } X_i \text{ מ"מ ב"ת מתקיים}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X]$$

תוחלת, שונוות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\text{Var}(X) + (E[X])^2 \text{Var}(N)$$

(כאשר X_i מ"מ ב"ת ש"ה)

$$M_Y(t) = E[(M_X(t))^N]$$

$$P\{X \geq a\} \leq E[X]/a \quad , \quad a > 0 \quad , \quad X \text{ מ"מ אי-שלילי}$$

אי-שוויון מרקוב

$$P\{|X - \mu| \geq a\} \leq \sigma^2 / a^2 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty$$

אי-שוויון צ'בישב

$$P\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right) / \sqrt{n\sigma^2} \leq a\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a) \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty \quad , \quad X_i \text{ מ"מ ב"ת וש"ה}$$

משפט הגבול המרכזי

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A) + P(B)]$.

- סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר p הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי).

- סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני.

- סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי.

- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X + Y = n$, כאשר X ו- Y מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1 < x < 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = -\ln(1-x) \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \neq -1 \quad ; \quad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים:

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \frac{1}{a \ln b} b^{ax} \quad ; \quad \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

$$\log_n a = \log_m a / \log_m n \quad ; \quad \log_n (a^b) = b \cdot \log_n a \quad ; \quad \log_n (ab) = \log_n a + \log_n b$$