

שאלה 1 (25 נקודות)

גרף מכוון $G = (V, E)$ נקרא **טורניר** אם גרף התשתית שלו (הגרף המתקבל ע"י הסרת כווני הקשתות) הוא גרף מלא (קליק).
הוכח שבכל טורניר יש צומת שממנו ניתן להגיע לכל צומת אחר ע"י מסלול באורך 2 לכל היותר.

שאלה 2 (25 נקודות)

כתוב אלגוריתם המקבל כקלט גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ עם פונקצית משקל $w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ ושני צמתים $a, b \in V$ ומוצא מסלול בין a ל- b ב- G שבו הקשת הקלה ביותר היא ארוכה ככל שניתן.
הוכח את נכונות האלגוריתם ונתח את סבוכיותו.

שאלה 3 (25 נקודות)

בגרף קשיר, לא מכוון וחסר משקלות בוצע DFS שכלל את השינויים הבאים:
בשלב האתחול לכל קשת e נקבע משקל $w(e) = 0$ ובנוסף אותחל משתנה חדש $m = 1$.
בנוסף, בכל פעם שבודקים קשת e במהלך ביצוע DFS מבצעים:
אם $w(e) = 0$ אז: 1. $w(e) \leftarrow m$
2. $m \leftarrow m + 1$

- הראה שעץ ה- DFS שמתקבל הוא בהכרח עץ פורש מינימלי בגרף ע"פ המשקלות שנקבעו במהלך האלגוריתם.
- בהינתן גרף קשיר ולא מכוון, האם כל ריצת DFS כנ"ל תיתן תמיד עץ בעל אותו סכום משקלות? אם כן - הוכח. אם לא - הבא דוגמה נגדית.

שאלה 4 (25 נקודות)

א. נתונה רשת זרימה $G = (V, E)$ עם פונקציית קיבול c ועליה פונקציה $f: E \rightarrow R$. תן אלגוריתם יעיל הבודק אם f היא פונקציית זרימה חוקית. הוכח את נכונות האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

ב. נאמר כי ברשת זרימה בעלת פונקציית זרימה f קיים מעגל זרימה אם קיימת ברשת סדרת קשתות e_1, \dots, e_n כך ש:

1. הסדרה e_1, \dots, e_n מהווה מעגל ברשת.

2. לכל קשת e_i , $f(e_i) > 0$.

הוכח שבהינתן רשת זרימה עם פונקציית זרימה f ומעגל זרימה ברשת, ניתן לשנות את f על קשתות המעגל, כך שעבור אחת מקשתות המעגל $f(e) = 0$ (ובכך להסיר את מעגל הזרימה), מבלי לשנות את כמות הזרימה מהמקור לבור.

שאלה 5 (25 נקודות)

קוטר של גרף לא מכוון וחסר משקלות $G = (V, E)$ הוא המרחק הגדול ביותר בין שני צמתים כלשהם בגרף.

בהינתן גרף לא מכוון וחסר משקלות ברצוננו לבדוק האם קוטרו קטן או שווה ל- k , כאשר k נתון.

א. כתוב אלגוריתם המשתמש בכפל מטריצות ופותר את הבעיה.

הוכח את נכונות האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

ב. כתוב אלגוריתם יעיל ככל שתוכל שלא משתמש בכפל מטריצות ומחשב את קוטרו של גרף נתון. הוכח את נכונותו ונתח את סיבוכיותו. באיזה מבין האלגוריתמים כדאי להשתמש כדי לפתור את הבעיה שהועלתה בראשית השאלה? כלומר, מי מבין השניים יעיל יותר?

ג. נניח שידוע כי בגרף הנתון דרגת כל צומת קטנה או שווה לקבוע c . האם במקרה זה ניתן למצוא אלגוריתם המשתמש בכפל מטריצות שבודק אם קוטר הגרף הנתון קטן או שווה ל- k וסיבוכיותו טובה יותר מזו של האלגוריתם שתיארת בסעיף ב'? הוכח.

סוף!