פתרון ממ"ן 13

תשובה 1

א. $|K| = \aleph_0$. הוכחה: הפונקציה $f(x) = 0.3 + 3x$ היא פונקציה של K ל- $\mathbf{N}$ (הוכיחו זאת!) והיא חד-חד-ערכית ועל (הוכיחו!).

לחלופין אפשר להראות שהפונקציה $f(n) = (n - 0.3) / 3$ היא פונקציה חח"ע של $\mathbf{N}$ על K.

ב. $|L| = C$. הוכחה: נתאים לכל מספר ממשי x את הזוג הסדור $(x, 5-x)$.

קל לראות שלכל x ממשי, $(x, 5-x) \in L$.

ההתאמה שלנו היא אפוא פונקציה $g: \mathbf{R} \to L$.

(i) נוכיח ש- g היא **על**: יהי $(x, y) \in L$. מהגדרת L, $x + y = 5$. כלומר $y = 5 - x$.

לכן $g(x) = (x, 5-x) = (x, y)$. מצאנו מקור ב- $\mathbf{R}$ לאבר כללי של L, משמע g היא **על** L.

(ii) נוכיח ש- g היא חד-חד-ערכית: יהיו $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ונניח $g(x_1) = g(x_2)$.

משמע $(x_1, 5 - x_1) = (x_2, 5 - x_2)$.

מהגדרת שוויון בין זוגות סדורים (אמצע עמ' 29 בספר), בפרט מתקיים שוויון ברכיב הראשון, כלומר $x_1 = x_2$. לפיכך g היא חד-חד-ערכית.

ג. $|M| = \aleph_0$. הוכחה: נרשום את התנאים על x,y כמערכת משוואות:

$$\begin{cases} 2x + y = n \\ x - 2y = m \end{cases} ,\quad \text{כאשר } n,m \in \mathbf{N}.$$

נחלץ את x,y: $x = (2n + m) / 5$, $y = (n - 2m) / 5$.

כעת, תהי f הפונקציה המתאימה לכל זוג סדור $(n,m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ את הזוג הסדור

$((2n + m) / 5,\ (n - 2m) / 5)$

השלימו את ההוכחה על- ידי כך שתראו את הטענות הבאות:

(i) f היא פונקציה של $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ ל- M.

(ii) f היא חד-חד-ערכית.

(iii) f היא על.

לחלופין, תהי g הפונקציה השולחת כל אבר (x, y) ב- M אל הזוג הסדור $(2x + y,\ x - 2y)$.

השלימו את ההוכחה על- ידי כך שתראו את הטענות הבאות:

(i) g היא פונקציה של M ל- $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

(ii) g היא חד-חד-ערכית.

(iii) g היא על.

תשובה 2

א. בחוברת "אוסף תרגילים פתורים" קבוצה 3 שאלה 10ה', מראים כי קבוצת **הסדרות הסופיות** של טבעיים היא בת-מניה. בשאלה שלפנינו עוסקים לא בסדרות אלא בתת-קבוצות של $\mathbf{N}$. נתאים לכל קבוצה סופית של מספרים טבעיים - סדרה סופית: פשוט נסדר את אברי הקבוצה בסדר עולה. בכך

הגדרנו פונקציה של הקבוצה K שבשאלה אל קבוצת הסדרות הסופיות של טבעיים. פונקציה זו אינה על (מדוע?) אך מובן שהיא חד-חד-ערכית. לפיכך $|K| \le \aleph_0$.

מצד שני, K היא אינסופית, מכיון שהיא מכילה את כל הקבוצות מהצורה $\{n\}$, לכל n טבעי.

מכאן לפי משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין $|K| = \aleph_0$ (למעשה אין כאן צורך במשפט הנ"ל, שהוא בגדר "תותח כבד". ניתן להראות בלעדיו, שקבוצה אינסופית המוכלת בקבוצה בת-מניה היא בת- מניה).

ב. הפונקציה $g : L \to K$ המתאימה לכל קבוצה את **המשלים שלה ב- $\mathbf{N}$** היא חח"ע ועל (מדוע?).

לפיכך $|K| = |L|$, ולפי סעיף א' עוצמה זו היא $\aleph_0$.

תשובה 3

א. יחס מעל קבוצה A הוא קבוצה כלשהי של זוגות סדורים של אברי A.

במלים אחרות, יחס מעל A הוא **קבוצה חלקית כלשהי** של $A \times A$.

לפיכך קבוצת כל היחסים מעל A **היא בדיוק** $P(A \times A)$.

שימו לב: אנו לא רק אומרים שיש להן אותה עוצמה, אלא שזו היא ממש אותה הקבוצה!

כעת, בעזרת משפטים ידועים: $|P(\mathbf{N} \times \mathbf{N})| = 2^{|\mathbf{N}\times\mathbf{N}|} = 2^{\aleph_0} = C$.

ב. נסמן ב- K את קבוצת היחסים הרפלקסיביים מעל $\mathbf{N}$. נראה ש- $|K| = C$.

רעיון ההוכחה: יחס רפלקסיבי R מעל $\mathbf{N}$ חייב להכיל את $I_{\mathbf{N}}$.

נסתכל איזה זוגות נמצאים ב- R <u>**פרט**</u> לאברי $I_{\mathbf{N}}$.

לקבוצת הזוגות ב- R <u>**שאינם**</u> ב- $I_{\mathbf{N}}$ נקרא R^*.

R^* קובעת לגמרי את R, כי יתר אברי R הם בדיוק אברי $I_{\mathbf{N}}$.

במלים אחרות, אם $R^* = R - I_{\mathbf{N}}$ אז $R = R^* \cup I_{\mathbf{N}}$ וזהו איחוד זר.

R^* יכולה להיות כל קבוצה חלקית של $(\mathbf{N} \times \mathbf{N}) - I_{\mathbf{N}}$.

לפיכך עוצמת K היא כעוצמת $P\big((\mathbf{N} \times \mathbf{N}) - I_{\mathbf{N}}\big)$. עוצמה זו היא C.

הנה תקציר של הוכחה פורמלית המבוססת על רעיון זה:

נגדיר $f : K \to P\big((\mathbf{N} \times \mathbf{N}) - I_{\mathbf{N}}\big)$ בצורה הבאה:

לכל $R \in K$, $f(R) = R - I_{\mathbf{N}}$.

(i) הראו ש- f היא אכן פונקציה של K אל $P\big((\mathbf{N} \times \mathbf{N}) - I_{\mathbf{N}}\big)$.

(ii) הראו ש- f היא חד-חד-ערכית ועל.

(iii) $(\mathbf{N} \times \mathbf{N}) - I_{\mathbf{N}}$ היא קבוצה אינסופית (קל לראות) והיא חלקית ל- $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, שהיא כידוע בת-מניה.

לפיכך (טענה שמוזכרת בפסקה השניה בעמ' 119 בספר) גם $(\mathbf{N} \times \mathbf{N}) - I_{\mathbf{N}}$ בת-מניה.

(iv) לכן $\big|P\big((\mathbf{N} \times \mathbf{N}) - I_{\mathbf{N}}\big)\big| = 2^{\aleph_0} = C$. מכאן, לפי *(ii)*: $|K| = C$.

בהוכחה זו שיחק לנו המזל ומצאנו התאמה חח"ע ועל בין הקבוצה המבוקשת לקבוצה שאנו מסוגלים לחשב את עוצמתה. לא תמיד זה המצב. כדי לדעת להתמודד עם מצב בו קשה למצוא פונקציה כזו נציג הוכחה אחרת, הנעזרת במשפט קנטור-שרדר-ברנשטיין.

הוכחה אחרת לסעיף ב

תהי K קבוצת היחסים הרפלקסיביים מעל $\mathbf{N}$.

מצד אחד K חלקית לקבוצת כל היחסים מעל $\mathbf{N}$, שלפי סעיף א' עוצמתה C.

לכן (שאלה 5.1 ב' בחוברת "פרק 5") $|K| \le C$ **(*)**

(ii) מצד שני, נגדיר פונקציה $f : P(\mathbf{N}) \to K$ בצורה הבאה:

לכל $X \in P(\mathbf{N})$ תהי
$$f(X) = \begin{cases} (X \times \mathbf{N}) \cup I_{\mathbf{N}} & |X| = 1 \\ (X \times X) \cup I_{\mathbf{N}} & |X| \ne 1 \end{cases}$$

$f(X)$ הוא אכן יחס רפלקסיבי מעל $\mathbf{N}$ כי הוא יחס מעל $\mathbf{N}$ והוא מכיל את $I_{\mathbf{N}}$.

f היא חד-חד-ערכית.

הוכחה: יהיו $X, Y \in P(\mathbf{N})$, נניח $X \ne Y$ ונוכיח $f(X) \ne f(Y)$.

נפריד למקרים... השלימו את ההוכחה ש- f חד-חד-ערכית!

מצאנו $f : P(\mathbf{N}) \to K$ שהיא חד-חד-ערכית.

מהגדרת "קטן/שווה" בין עוצמות, $C = |P(\mathbf{N})| \le |K|$ **(**)**

מתוך (*) ו- (**) יחד, בעזרת משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין, $|K| = C$.

הערה: הפונקציה f שבנינו בהוכחה זו היא אחת מתוך פונקציות רבות אפשריות, כל פונקציה חד-חד-ערכית $f : P(\mathbf{N}) \to K$ תתאים לנו. דוגמא אחרת ל- f בה יכולנו להיעזר:

$f(X) = (\{1\} \times X) \cup (X \times \{1,2\}) \cup I_{\mathbf{N}}$. גם זו פונקציה חד-חד-ערכית מ- $P(\mathbf{N})$ ל- K.

תשובה 4

א. הקבוצה היא $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

מההגדרות, עוצמתה היא $|\mathbf{R}^{\mathbf{N}}| = |\mathbf{R}|^{|\mathbf{N}|} = C^{\aleph_0}$.

לפי טענה 5.28 בחוברת "פרק 5", $C^{\aleph_0} = C$.

ב. הקבוצה היא $P(\mathbf{R})^{P(\mathbf{N})}$.

מההגדרות ומשפטים ידועים, עוצמתה היא

$$|P(\mathbf{R})^{P(\mathbf{N})}| = |P(\mathbf{R})|^{|P(\mathbf{N})|} = (2^C)^C$$

לפי חוקי חזקות בעוצמות (משפט 2.57ג) $= 2^{C \cdot C}$

ולפי טענה 5.15ד $= 2^C$