פתרונות לממ"ן 11 - 2014א - 20425

1. נגדיר את המאורעות: A = הנסקר צופה בחדשות ערוץ 1
B = הנסקר צופה בחדשות ערוץ 2
C = הנסקר צופה בחדשות ערוץ 10

כל אחד מן המאורעות הבסיסיים המוגדרים לעיל, מציין את אחד משלושת הפרמטרים שנבדקים אצל הנסקר והוא יכול להתקיים או לא להתקיים לגביו. את כל המאורעות האחרים, הנוגעים ליותר מאשר מהדורת חדשות אחת, אפשר לבטא באמצעות מאורעות אלו. לכן, אין צורך בהגדרת מאורעות בסיסיים נוספים.

הנתונים הם: $P(A^C \cap B^C \cap C^C) = 0.3 \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B \cup C) = 1 - 0.3 = 0.7$

$P\{\text{צופים בדיוק בשתי מהדורות חדשות}\} = P(A \cap B \cap C^C) + P(A \cap B^C \cap C) + P(A^C \cap B \cap C) = 0.25$

$P\{\text{צופים בדיוק במהדורת חדשות אחת}\} = P(A \cap B^C \cap C^C) + P(A^C \cap B \cap C^C) + P(A^C \cap B^C \cap C) = 0.37$

$P(A \cup B) = 0.56$

$$\Rightarrow \quad P(A^C \cap B^C \cap C) = P(A \cup B \cup C) - P(A \cup B) = 0.7 - 0.56 = 0.14$$

$$P(A \cap B \mid A \cup B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = 0.25 \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0.25 \cdot 0.56 = 0.14$$

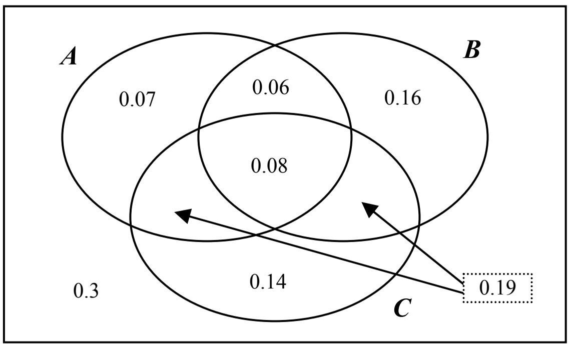
$$P(A^C \cap B^C \cap C \mid B \cup C) = \frac{P(A^C \cap B^C \cap C)}{P(B \cup C)} = \frac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad P(B \cup C) = 0.14 / \tfrac{2}{9} = 0.63$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B^C \cap C^C) = P(A \cup B \cup C) - P(B \cup C) = 0.7 - 0.63 = 0.07$$

$$\Rightarrow \quad P(A^C \cap B \cap C^C) = 0.37 - P(A \cap B^C \cap C^C) - P(A^C \cap B^C \cap C) = 0.37 - 0.07 - 0.14 = 0.16$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B \cap C) = P(A \cup B) - 0.25 - 0.07 - 0.16 = 0.08$$

א. דיאגרמת ון מתאימה היא:



שימו לב, שלפי נתוני הבעיה, אין אפשרות לדעת את ההסתברויות של המאורעות $A \cap B^C \cap C$ ו- $A^C \cap B \cap C$, אלא רק את סכומן.

ב. $P(C) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B^C \cap C) + P(A^C \cap B \cap C) + P(A^C \cap B^C \cap C)$
$= 0.08 + 0.19 + 0.14 = 0.41$

ג. $P(A \cap B \cap C^C) + P(A \cap B^C \cap C) + P(A^C \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 0.25 + 0.08 = 0.33$

ד. $P(C^C \mid A^C\cup B^C\cup C^C) = \dfrac{P(C^C)}{P(A^C\cup B^C\cup C^C)} = \dfrac{1-0.41}{1-0.08} = \dfrac{0.59}{0.92} = 0.6413$

ה. $P(B\cup C \mid A\cup C) = \dfrac{P((B\cup C)\cap(A\cup C))}{P(A\cup C)} = \dfrac{P((B\cap A)\cup C)}{1-P(A^C\cap C^C)} = \dfrac{0.41+0.06}{1-0.3-0.16} = \dfrac{0.47}{0.54} = 0.8704$

2. א. נגדיר את המאורעות: A = אביר A פוגע באביר B

B = אביר B פוגע באביר A

ואת המאורעות: $F = A\cap B^C$ = אביר A פוגע באביר B, אך אינו נפגע בעצמו (על-ידי אביר B)

$G = B$ = אביר B פוגע באביר A

המאורעות F ו- G זרים זה לזה, ואם המאורע F מתרחש לפני המאורע G, אביר A מנצח בדו-קרב ונותר היחיד בחיים. לכן, ההסתברות שאביר A ינצח בדו-קרב היא:

$$\frac{0.5\cdot(1-0.3)}{0.5\cdot(1-0.3)+0.3} = \frac{0.35}{0.65} = 0.5385$$

ב. נגדיר את המאורעות: $F^* = A$ אביר A פוגע באביר B

$G^* = A^C\cap B$ = אביר B פוגע באביר A ואינו נפגע מאביר A בסיבוב הקודם

המאורעות F^* ו- G^* זרים זה לזה, ואם המאורע F^* מתרחש לפני המאורע G^*, אביר A מנצח בדו-קרב ונותר היחיד בחיים. לכן, ההסתברות שאביר A ינצח בדו-קרב היא:

$$\frac{0.5}{0.5+\cdot(1-0.5)0.3} = \frac{0.5}{0.65} = 0.7692$$

ואפשר לפתור את הסעיף הזה גם כך:

נחשב את ההסתברות שאביר A ינצח בדו-קרב בירייה ה-i-ית שהוא מבצע, ונסכום את כל ההסתברויות הללו על-פני $i = 1,2,\ldots$. נשתמש בסימוני המאורעות מהסעיף הקודם ונקבל:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A)[P(A^C)]^{i-1}[P(B^C)]^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} 0.5\cdot(1-0.5)^{i-1}\cdot(1-0.3)^{i-1}$$

$$= 0.5\cdot\sum_{i=1}^{\infty}(0.5\cdot0.7)^{i-1} = 0.5\cdot\sum_{i=0}^{\infty}0.35^i = \frac{0.5}{1-0.35} = 0.7692$$

3. א. נסמן ב- A_i את המאורע שרכיב i תקין, לכל $i = 1,2,3,4,5$. מתקיים: $P(A_i) = 0.8 \quad , \quad i = 1,\ldots,5$

ולפי נתוני השאלה, חמשת המאורעות הללו בלתי-תלויים זה בזה.

עתה, נסמן ב-B את המאורע, שעובר זרם במערכת, ונקבל:

$$P(B) = P((A_4\cap A_5)\cup(A_2\cap(A_1\cup A_3)))$$

$$= P(A_4\cap A_5) + P(A_2\cap(A_1\cup A_3)) - P(A_4\cap A_5\cap A_2\cap(A_1\cup A_3))$$

$$= P(A_4)P(A_5) + P(A_2)[1-P(A_1^C)P(A_3^C)] - P(A_4)P(A_5)P(A_2)[1-P(A_1^C)P(A_3^C)]$$ [המאורעות ב"ת]

$$= 0.8^2 + 0.8\cdot[1-0.2^2] - 0.8^3[1-0.2^2] = 0.91648$$

קיבלנו שעובר זרם במערכת בהסתברות 0.91648.

ב. אין תלות בין מצבי התקינות של חמשת הרכיבים במערכת, לכן:

$$P(B\mid A_1)=\frac{P(B\cap A_1)}{P(A_1)}=\frac{P(A_1\cap(A_2\cup(A_4\cap A_5)))}{P(A_1)}=\frac{P(A_1)P(A_2\cup(A_4\cap A_5))}{P(A_1)}$$
$$=P(A_2\cup(A_4\cap A_5))=P(A_2)+P(A_4\cap A_5)-P(A_2\cap A_4\cap A_5)$$
$$=0.8+0.8^2-0.8^3=0.928$$

ג.
$$P(B\mid A_1^C\cup A_2^C)=\frac{P(B\cap(A_1^C\cup A_2^C))}{P(A_1^C\cup A_2^C)}$$
$$=\frac{P(B)-P(B\cap(A_1\cap A_2))}{1-P(A_1\cap A_2)}\overset{A_1\cap A_2\subset B}{\underset{\uparrow}{=}}\frac{P(B)-P(A_1\cap A_2)}{1-P(A_1\cap A_2)}$$
$$=\frac{0.91648-0.8^2}{1-0.8^2}=\frac{0.27648}{0.36}=0.768$$ [המאורעות ב"ת]

4. א.
$$\frac{250\cdot249\cdot248\cdot247\cdot50}{300\cdot299\cdot298\cdot297\cdot296}=0.08113$$

ב. נסמן ב- A את המאורע שבבחירה החמישית הוצא לראשונה ממתק צהוב וב- B את המאורע שבבחירה השישית הוצא ממתק צהוב. חיתוך המאורעות A ו- B כולל את כל המקרים שבהם בבחירות החמישית והשישית הוצאו ממתקים צהובים, ולפני כן ממתקים שאינם צהובים. לפיכך:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\dfrac{250\cdot249\cdot248\cdot247\cdot50\cdot49}{300\cdot299\cdot298\cdot297\cdot296\cdot295}}{\dfrac{250\cdot249\cdot248\cdot247\cdot50}{300\cdot299\cdot298\cdot297\cdot296}}=\frac{49}{295}=0.1661$$

שימו לב, שאפשר לחשב את ההסתברות המותנית המבוקשת גם בעזרת מרחב המדגם המצומצם:
בהינתן שהוצאו כבר 5 ממתקים, שרק אחד מהם צהוב, לפני הבחירה השישית יש בצנצנת 295 ממתקים, שמהם 49 צהובים. לפיכך, ההסתברות להוציא ממתק צהוב היא החלק היחסי שלהם בצנצנת.

ג. נסמן ב- C את המאורע שהוצאו בדיוק 2 ממתקים צהובים וב- D את המאורע שהוצאו בדיוק 4 ממתקים אדומים. חיתוך המאורעות C ו- D כולל את כל המקרים שבהם הוצאו 2 ממתקים צהובים, 4 ממתקים אדומים ו- 4 ממתקים ירוקים. לפיכך:

$$P(D|C)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}=\frac{\binom{50}{2}\cdot\binom{150}{4}\cdot\binom{100}{4}}{\binom{300}{10}}\Bigg/\frac{\binom{50}{2}\cdot\binom{250}{8}}{\binom{300}{10}}=\frac{\binom{150}{4}\cdot\binom{100}{4}}{\binom{250}{8}}=0.2351$$

שימו לב, שגם כאן אפשר להגיע לתוצאה הסופית באמצעות מרחב המדגם המצומצם:
אם ידוע שהוצאו בדיוק 2 ממתקים צהובים, נותר עוד לבחור 8 ממתקים מתוך 250 שאינם צהובים. כדי שהמאורע D יתרחש במרחב המדגם המצומצם, צריכים להיות 4 ממתקים אדומים בתוך 8 הממתקים הללו.

ד. נסמן ב- E את המאורע ששני הממתקים הראשונים שהוצאו היו אדומים וב- F את המאורע שהוצאו בסך-הכל 6 ממתקים אדומים. חיתוך המאורעות E ו- F כולל את כל המקרים שבהם הוצאו 2 ממתקים אדומים בשתי הבחירות הראשונות, ואחר-כך עוד 4 ממתקים אדומים במהלך 8 הבחירות האחרונות.

לפיכך:
$$P(F|E)=\frac{P(E\cap F)}{P(C)}=\frac{150\cdot 149\cdot\binom{148}{4}\cdot\binom{150}{4}}{300\cdot 299\cdot\binom{298}{8}}\Bigg/\frac{150\cdot 149}{300\cdot 299}=\frac{\binom{148}{4}\cdot\binom{150}{4}}{\binom{298}{8}}=0.2771$$

וגם כאן נוכל להשתמש במרחב המדגם המצומצם:
לאחר שהוצאו 2 ממתקים אדומים, יש בצנצנת 298 ממתקים שמהם 148 אדומים. לפיכך, כדי שהמאורע F יתרחש יש לבחור עוד 4 ממתקים אדומים מתוכם ועוד 4 ממתקים שאינם אדומים.

5. א. [נוסחת הכפל למאורעות מותנים]
$$P(I\cap K^C\mid A_1)=P(K^C\mid I\cap A_1)P(I\mid A_1)$$
[I ו- A_1 בלתי-תלויים]
$$=P(K^C\mid I\cap A_1)P(I)=0.9^1\cdot 0.02=0.018$$

ב. [ה-A_i-ים זרים ואיחודם הוא S]
$$P(I\cap K^C)=\sum_{i=1}^{30}P(I\cap K^C\cap A_i)$$
[נוסחת הכפל]
$$=\sum_{i=1}^{30}P(K^C\mid I\cap A_i)P(I\mid A_i)P(A_i)$$
[I ו- A_i בלתי-תלויים]
$$=\sum_{i=1}^{30}P(K^C\mid I\cap A_i)P(I)P(A_i)$$
[ה-A_i-ים זרים ואיחודם הוא S, לכן $P(A_i)=1/30$]
$$=\sum_{i=1}^{30}0.9^i\cdot 0.02\cdot\tfrac{1}{30}$$
$$=\frac{0.02}{30}\left(\frac{1-0.9^{31}}{1-0.9}-1\right)=0.00574565$$

ג. המאורעות K ו- I^C זרים זה לזה, לכן המאורע K מוכל במאורע I. ומכאן, מקבלים כי:

$$P(K)=P(I)-P(I\cap K^C)=0.02-0.005746=0.014254$$