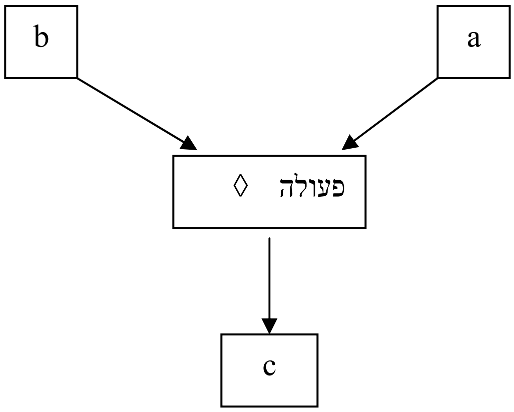
חבורות

הגדרה1:

תהי A קבוצה, הפעולה $\Diamond$ נקראת פעולה בינארית על A אם היא מתאימה תוצאה c לכל $(a,b)\in A\times A$

יהיה $(a,b)\in A\times A$, פעולה בינארית $\Diamond$, אז



דוגמאות של פעולות בינאריות בקבוצות מספרים:

1. תהי $A=N$ פעולות חיבור,חיסור, כפל, חילוק הן פעולות בינאריות שכן לכל זוג סדור של מספרים $(m,n)\in N$ כל אחת מהפעולות הנ"ל מתאימה תוצאה יחידה.
2. תהי $A=N$, לכל זוג סדור $(m,n)\in N$, נגדיר פעולה $\Diamond$ בצורה:
$$k=m\Diamond n=\frac{1}{2}(m+n)$$
3. תהי $A=N$, לכל זוג סדור $(m,n)\in N$, נגדיר פעולה $\Diamond$ בצורה:
$$k=m\Diamond n=\max\{m,n\}$$
4. תהי $A=Z_k=\{0,1,2,\dots,k-1\}$, נגדיר פעולה $+_{\bmod k}$ בצורה:
$$q=m+_{\bmod k}n=m+n(\bmod k)$$
5. תהי $A=Z_k=\{0,1,2,\dots,k-1\}$, נגדיר פעולה $*_{\bmod k}$ בצורה:
$$q=m*_{\bmod k}n=m\cdot n(\bmod k)$$

דוגמאות של פעולות בינאריות בקבוצות שאינן קבוצות מספרים :

6. תהי A קבוצה, לכל $(C,D)\in P(A)\times P(A)$ הפעולות חיתוך, איחוד, הפרש, הפרש סימטרי, סכום קבוצות הן פעולות בינאריות על $P(A)$.
7. נתבונן במישור הממשי לכל זוג נקודות $(p,q)\in R^4$ נתאים את המרחק בין הנקודות p ו- q, זו פעולה בינארית על R^2.
8. נתבונן במישור הממשי לכל זוג נקודות $(p,q)\in R^4$ נתאים את נקודת אמצע הקטע שמחבר את p ו- q, זו פעולה בינארית על R^2.

תכונות של פעולות בינאריות:

הגדרה2:

תהי A קבוצה עליה מוגדרת פעולה בינארית $\Diamond$, נאמר ש-

1. A סגורה ביחס ל- הפעולה $\Diamond$ אם לכל $(a,b)\in A\times A \Leftarrow a\Diamond b\in A$
2. הפעולה $\Diamond$ חלופית (קומוטטיבית) אם לכל $(a,b)\in A\times A \Leftarrow a\Diamond b=b\Diamond a$
3. הפעולה $\Diamond$ קיבוצית(אסוציאטיבית) אם לכל $(a,b)\in A\times A \Leftarrow (a\Diamond b)\Diamond c=a\Diamond(b\Diamond c)$
4. ל- A יש איבר נייטרלי "0" ביחס לפעולה $\Diamond$ אם לכל $a\in A \Leftarrow 0\Diamond a=a\Diamond 0=a$
5. ב- A יש איבר נגדי ביחס לפעולה $\Diamond$ אם לכל $a\in A$ קיים $-a\in A$", כך ש- $a\Diamond -a=0$
6. נאמר שפעולה $\Diamond$ מקיימת חוק צמצום משמאל אם לכל $a,b,c\in A$ מתקיים $ab=ac$ אז $b=c$.
7. נאמר שפעולה $\Diamond$ מקיימת חוק צמצום משמאל אם לכל $a,b,c\in A$ מתקיים $ba=ca$ אז $b=c$.

דוגמאות:

1. תהי A קבוצה, פעולת חיתוך ב- $P(A)$ היא חלופית, קיבוצית, $P(A)$ סגורה ביחס אליה ויש בה ניטרלי $A=$"0" $(C\cap A=C,\quad \forall C\subseteq A)$, אין נגדי ואין חוק צמצום.
2. תהי $A=N$ ופעולה $\Diamond$ בצורה: $k=m\Diamond n=\max\{m,n\}$ זו פעולה חלופית, קיבוצית, A סגורה ביחס אליה, איבר ניטרלי הוא $1=$"0", אין נגדי ואין חוק צמצום.
3. תהי $A=Z_k=\{0,1,2,\ldots,k-1\}$, הפעולה $+_{\bmod k}$ היא חלופית, קיבוצית, A סגורה ביחס אליה, איבר ניטרלי הוא 0, נגדי לכל $a\in Z_k$ הוא $k-a\in Z_k$ ויש חוק צמצום דו צדדי.

מושג החבורה

הגדרה3:

נאמר ש קבוצה A עם פעולה בינארית ◊ שמוגדרת עליה היא חבורה באם מתקיים :

A סגורה ביחס ל- ◊

◊ קיבוצית

ב- A קיים איבר ניטרלי

ב- A לכל איבר קיים איבר נגדי

דוגמאות:

1. תהי $A = N$ עם פעולת חיסור - זו לא חבורה כי הפעולה אינה קיבוצית.
2. תהי $A = N$ עם פעולת חיבור - זו לא חבורה כי אין איבר ניטרלי
3. תהי $A = N$ עם פעולת כפל - זו לא חבורה כי למרות ש-היא סגורה, הפעולה קיבוצית, איבר ניטרלי הוא 1 חסר כאן איבר נגדי למשל ל- 2.
4. תהי $A = Z_k = \{0,1,2,\ldots,k-1\}$ עם הפעולה $+_{\mathrm{mod}\,k}$. הפעם זו חבורה (ראה הצדקה בסעיף הקודם של דוגמאות)
5. תהי $A = Q \setminus \{0\}$ עם פעולת כפל - זו חבורה כי היא סגורה, הפעולה קיבוצית, איבר ניטרלי הוא 1 ולכל $a \in Q \setminus \{0\}$ האיבר הנגדי הוא $\frac{1}{a} \in Q \setminus \{0\}$.

הגדרה4:

אם A עם פעולה בינארית ◊ היא חבורה וגם הפעולה ◊ היא חלופית, אז A עם פעולה ◊ נקראת חבורה חלופית.

דוגמאות:

$A = Z_k = \{0,1,2,\ldots,k-1\}$ עם הפעולה $+_{\mathrm{mod}\,k}$ היא חבורה חלופית

$A = Q \setminus \{0\}$ עם פעולת כפל היא חבורה חלופית

תהי A קבוצה, $P(A)$ עם פעולת ההפרש הסימטרי סגורה, הפעולה חלופית , קיבוצית, יש ניטרלי $\varnothing$ ויש נגדי לכל $C \subseteq A$ זו הקבוצה C בעצמה כי מתקיים : $C \oplus C = \varnothing$

לכן $P(A)$ עם פעולת ההפרש הסימטרי היא חבורה חלופית

תהי C קבוצת כל הפונקציות חד חד ערכיות ועל מ-R ל- R עם פעולת הרכבת פונקציות , אז C עם ההרכבה היא חבורה לא חלופית.

תת חבורה

הגדרה5:

תהי G חבורה, תת קבוצה H של G היא תת חבורה שלה באם היא בעצמה חבורה ביחס לפעולה ב- G.

דוגמא: בחבורה Z_4 ביחס לחיבור יש תת חבורה $H=\{0,2\}$, לוח הפעולה הוא:

$+_{\text{mod }4}$	0	2
0	0	2
2	2	0

משפט1:

תת קבוצה H של חבורה G היא תת- חבורה של G אם:

1. איבר ניטרלי ב-H
2. H סגורה תחת הפעולה המוגדרת ב-G
3. לכל $a\in H$ גם $a^{-1}\in H$

מסימה: הוכח את המשפט.

משפט2:

תהי G חבורה, קבוצת איברים ב-G המתחלפים עם כל איבר של G מהווה תת- חבורה של G.

קבוצה זו נקראת המרכז של G ומסומנת ב- $C(G)$.

הוכחה:

1. $C(G)$ קבוצה לא ריקה כי $e\in G$.
2. סגירות: $a,b\in G$ אז לכל $x\in G$ מתקיים $bx=xb$, $ax=xa$ ובגלל הקיבוציות ב- G:

   $(ab)x=a(bx)=a(xb)=(ax)b=(xa)b=x(ab)$ לכן
3. קיבוציות יש ב- G ולכן גם ב-$C(G)$.
4. איבר ניטרלי e ב-G מתחלף עם כל איבר ב-G לכן $e\in C(G)$.
5. אם $a\in C(G)$ אז לכל $x\in G$ מתקיים $ax=xa$ וגם $a^{-1}\in G$ לכן:

   $xa^{-1}=a^{-1}axa^{-1}=a^{-1}xaa^{-1}=a^{-1}x$ לכן $a^{-1}\in C(G)$

   כלומר לכל $a\in C(G)$ יש נגדי ב- $C(G)$.

מסקנה:

אם G חבורה חלופית אז $C(G)=G$.

דוגמא:

א. תהי G חבורה של מטריצות רגולאריות מסדר n על n ביחס לפעולת כפל.
(זו חבורה כי יש סגירות לכפל, קיבוציות, I ניטרלית ונגדי לכל מטריצה בG כי היא רגולארית.)
המרכז $C(G)$ של חבורה זו הינו קבוצת המטריצות הסקלריות.

ב. $A=Q\setminus\{0\}$ עם פעולת כפל חבורה חלופית ולכן $C(A)=A$.

משפט3:

G חבורה סופית ביחס לפעולה * . תהי H תת קבוצה לא ריקה של G, אם לכל $a,b\in H$ גם $ab\in H$ אז H תת חבורה של G (כלומר מספיק לבדוק סגירות).

הוכחה:

תהי $H=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$, נסמן איבר ניטרלי ב- G להיות e.

1. יש סגירות - נתון
2. יש קיבוציות שכן אם כל אברי חבורה G מקיימות תכונה זו אז גם אברי H ($H\subseteq G$).
3. איבר ניטרלי ב- H שכן אם H סגורה ולא ריקה, אז לאיבר $a\in H$ מתקיים :

$a=a_i$, $a*a=a_j$, לכן קיים $m\le k$ כך ש- $\underbrace{a*a*\cdots*a}_{m\ \text{פעמים}}=a$ לכן

נסמן $\underbrace{a*a*\cdots*a}_{m-1\ \text{פעמים}}=b\in H$, נזכור שאברי H הם גם אברי חבורה G:

כלומר $ab=ba=a$ וגם ל $a\in G$ קיים $a^{-1}\in G$, כך ש- $a*a^{-1}=e$
מכאן:

$$ab=a$$
$$a^{-1}ab=a^{-1}a$$
$$eb=e$$
$$b=e\in H$$

4. יש נגדי לכל איבר $a\in H$ ראינו כי קיים $m\le k$ כך ש- $\underbrace{a*a*\cdots*a}_{m\ \text{פעמים}}=a$

כלומר $\underbrace{a*a*\cdots*a}_{m-1\ \text{פעמים}}=e\in H$, כלומר $\underbrace{a*a*\cdots*a}_{m-2\ \text{פעמים}}=a^{-1}\in H$ הוא הנגדי של $a\in H$. מש"ל

סימון:

מעכשיו אם G חבורה אם פעולה בינארית כלשהי Δ, $a,b\in G$ לצורך קיצור נסמן $a\Delta b=ab$

קוסטים

תהי H תת חבורה של G, $a \in G$ אז הקבוצה $aH = \{ah / h \in H\}$ נקרא הקוסט השמאלי של H

והקבוצה $Ha = \{ha / h \in H\}$ נקראת הקוסט הימני של H.

משפט4:

תהי H תת חבורה של G, אז קבוצת הקוסטים הימניים (השמאליים) Ha מהווה חלוקה על G.

הוכחה:

כיוון ש- $e \in H$ כי H חבורה אז לכל $a \in G$ מתקיים $a = ea \in Ha$ כלומר כל איבר של G נמצא באיזשהו קוסט. כעת נניח כי $a, b \in G$; $a \neq b$ אבל $Ha \bigcap Hb \neq \varnothing$, אז קיים $c \in G$ כך ש- $c \in Hb \;\wedge\; c \in Ha$, כלומר קיימים $h_1, h_2 \in H$ כך ש- $h_1 a = c = h_2 b$

אז $a = h_1^{-1} h_2 b \in Hb$ מכאן $Ha \subseteq Hb$, באותה צורה ניתן להראות ש- $Hb \subseteq Ha$ לכן $Ha = Hb$.

משפט5 לגראנזי (ללא הוכחה):

תהי H תת חבורה של חבורה סופית G, סדר(מספר האיברים) של H מחלק את הסדר של G.

תת חבורה נורמאלית

הגדרה6:

תת חבורה H של G נקראת נורמאלית אם לכל $a \in G$ מתקיים $aH = Ha$.

מסקנה:

כל תת חבורה של חבורה חלופית היא נורמאלית

משפט6:

תהי H תת חבורה נורמאלית של של חבורה G, אז קבוצת הקוסטים של H מהווה תת חבורה ביחס לכפל: $aH * bH = abH$

מסימה: הוכח את המשפט.

תת חבורה ציקלית

תהי G חבורה ו- $a \in G$. נסמן $a^0 = e$ וגם $a^m = \underbrace{aa\cdots a}_{m\ \text{פעמים}}$, $a^{-m} = \underbrace{a^{-1}a^{-1}\cdots a^{-1}}_{m\ \text{פעמים}}$ אם קיים $k \in N$ כך ש- $a^k = e$ אז נאמר ש- $H = \{e, a, a^2, \ldots, a^{k-1}\}$ היא תת חבורה ציקלית של G ו a הוא היוצר שלה.

דוגמא:

נתבונן בקבוצת כל התמורות של 3 איברים:

$$\phi_2 = (a_3, a_1, a_2)\ ,\ \phi_1 = (a_2, a_3, a_1)\ \ ,\sigma_2 = (a_3, a_2, a_1), \sigma_1 = (a_1, a_3, a_2), e = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\sigma_3 = (a_2, a_1, a_3)$$

יש 3!=6 כאלה, עם פעולת הרכבה, למשל $\phi_1 \circ \sigma_2 = (a_1, a_3, a_2)$ - זוהי חבורה.

טבלת הפעולה היא:

	e	σ_1	σ_2	σ_3	ϕ_1	ϕ_2
e	e	σ_1	σ_2	σ_3	ϕ_1	ϕ_2
σ_1	σ_1	e	ϕ_1	ϕ_2	σ_2	σ_3
σ_2	σ_2	ϕ_2	e	ϕ_1	σ_3	σ_1
σ_3	σ_3	ϕ_1	ϕ_2	e	σ_1	σ_2
ϕ_1	ϕ_1	σ_3	σ_1	σ_2	ϕ_2	e
ϕ_2	ϕ_2	σ_2	σ_3	σ_1	e	ϕ_1

ברור ש- $\sigma_2^3 = \sigma_2$, לכן למשל, מקבלים תת חבורה ציקלית: $\{e, \sigma_2, \sigma_2^2\}$

קבוצת יוצרים

תהי G חבורה , ו-H תת חבורה של G. הקבוצה $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ היא קבוצת יוצרים של H אם לכל $h \in H$ קיימים $m_1, \ldots, m_k \in Z$ כך ש- $H = a_1^{m_1} \cdots a_k^{m_k}$.

בדוגמא קודמת:

אפשר לראות ש- $\phi_1 = \sigma_1\sigma_2$, $\sigma_3 = \phi_1\sigma_1 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$, $\phi_2 = \sigma_1\sigma_3$, $e = \sigma_1\sigma_1$,

לכן $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ קבוצת יוצרים של חבורת התמורות.

דמי- חבורות (Semigroups)

הגדרה7:

קבוצה S עם פעולה בינארית קיבוצית סגורה נקראת דמי-חבורה.

אם בנוסף ל-S יש איבר ניטרלי אז היא נקראת מונואיד (Monoid).

דוגמאות:

1. תהי A קבוצה, $\left(P(A),\cup\right)$ היא מונואיד, $\left(P(A),\cap\right)$ היא מונואיד
2. $\left(N,+\right)$ רק דמי-חבורה ואילו $\left(N,\bullet\right)$ מונואיד
3. קבוצת כל הפונקציות ממשיות עם פעולת הרכבה היא מונואיד.

מסקנה:

דמי חבורה יכולה להיות קבוצה ריקה

הגדרה8:

תהי S דמי חבורה, תת קבוצה W של S שהיא בעצמה דמי-חבורה נקראת תת דמי-חבורה של S.

מסקנה:

כל תת קבוצה של דמי חבורה S שסגורה לפעולה בינארית המוגדרת ב-S היא תת דמי-חבורה של S.

דוגמא:

1. כל תת קבוצה שלה מסוג $A=\{m\in N/m\geq k\}$ לכל $k\in R$ היא תת דמי-חבורה של $\left(N,+\right)$.
2. כל קבוצה סופית של $\left(N,\bullet\right)$ היא אינה דמי-חבורה כי אינה סגורה.