הרצאה ש
אלגוריתמים
25.1.09
2 מ 17
25.1.09

אלגוריתמים - הרצאה 12

זרימה ברשתות

באופן כללי: מה זה זרימה?

ישנו גרף מכוון G ובכל קשת e נתון קיבול $c(e)$ שהוא חיובי ממשי, חוץ מזה יש 2 צמתים מיוחדים שמסומנים בתור s - המקור. t - הבור (היעד).

נחשוב על הקשת בתור צינור שהקיבול שלה מייצג קיבול של צינור. והמטרה להזרים זרימה מהמקור לבור. f הינו פונקציית זרימה חוקית אם הוא מקיים:

1) לכל קשת e הזרימה בה היא לא יותר מהקיבול שלה. $f(e) \le c(e)$ (חוק הקיבול)

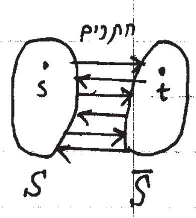
2) לכל צומת פרט למקור ולבור הזרימה הנכנסת שווה לזרימה היוצאת.

כלומר לכל $v \in V$, $v \neq s,t$ מתקיים חוק השימור: $\sum_{u \to v} f(u,v) = \sum_{v \to u} f(v,u)$.

<u>המטרה</u>: מציאת פונקציית זרימה שערכה מקסימלי מ-s ל-t.

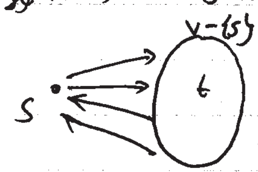
בהינתן פונקציית זרימה f מודדים את <u>הערך של f</u> במקור s: $|f| = \sum_{s \to u} f(s,u) - \sum_{u \to s} f(u,s)$

<u>חתך</u>: בהקשר שלנו מדובר בגרפים מכוונים ויש מקור ובור. חתך זו חלוקה של צמתי הגרף לשתי קבוצות: S ו-$\bar{S}$ רק שמתקיים $s \in S$, $t \in \bar{S}$, $S \cap \bar{S} = \emptyset$, $S \cup \bar{S} = V$



ציור 1

הגדרנו את ערך הזרימה f בהתייחס לחתך שבציור 2
ערך הזרימה = ערך הזרימה שיוצאת מ-S פחות זרימה שנכנסת ל-S



ציור 2

<u>טענה</u>: נתון חתך $S\bar{S}$ שמפריד בין המקור לבור, אזי: הערך של פונקציית הזרימה $|f|$ שהוגדר להיות ערך ומדידה במקור הוא:

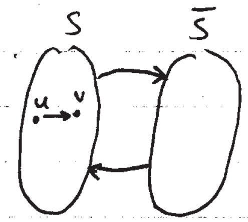
$$|f| = \underbrace{\sum_{\substack{u \in S \\ v \in \bar{S}}} f(u,v)}_{\text{מדידה במקור}} - \underbrace{\sum_{\substack{u \in S \\ v \in \bar{S}}} f(v,u)}_{\text{מדידה בצומת כלשהו}}$$

זרימה בקשתות שלא קיימות היא אפס.

הטענה אומרת שלא חשוב איפה מודדים את הזרימה, בכל חתך נקבל בדיוק את אותו ערך של זרימה. $|f|$ הינו הזרימה במקור, וצד ימין של המשוואה הוא ערך הזרימה בחתך כלשהו $S\bar{S}$

<u>הוכחת הטענה</u>: נסכם את משוואות השימור לכל הצמתים ב-S
(לכל צומת נסכם: זרימה יוצאת פחות זרימה נכנסת.)
בכל צומת שהוא לא מקור ההפרש בין הזרימה הנכנסת לזרימה היוצאת הוא אפס.
עבור המקור זה ערך פונקציית הזרימה f

$$|f| = \sum_{v\in S}\Big[\underbrace{\sum_{v\to u} f(v,u) - \sum_{u\to v} f(u,v)}_{\text{זרימה יוצאת - זרימה נכנסת}}\Big]$$



$$|f| = \sum_{\substack{u\in S\\ v\in \bar{S}}} f(u,v) - \sum_{\substack{u\in S\\ v\in \bar{S}}} f(v,u)$$

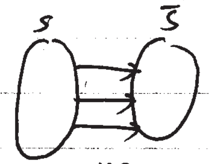
כל הזרימות בתוך S מבטלות אחת את השניה
כי עבור u הזרימה ב + ועבור v הזרימה ב -
מסכום

כנדרש בטענה.

טיעון: זרימה בקשת $v\to u$ שמוכלות ב-S מתבטלת.
זרימה מ-S ל $\bar{S}$ נותרת עם סימן חיובי.
זרימה מ $\bar{S}$ ל S נותרת עם סימן שלילי.
מסקנה: בכל החתכים ערך הזרימה |f| זהה.

<u>הגדרה:</u> בהינתן חתך $(S,\bar{S})$ <u>קיבול החתך</u> מוגדר להיות:

$$C(S,\bar{S}) = \sum_{\substack{u\in S\\ v\in \bar{S}}} C(v,u)$$



סכום קיבולי הקשתות מ S ל $\bar{S}$

<u>טענה:</u> לכל חתך $(S,\bar{S})$ מתקיים: $|f| \le C(S,\bar{S})$

<u>הוכחה:</u> ראינו בטענה הקודמת ש:

$$|f| = \underbrace{\sum_{\substack{u\in S\\ v\in \bar{S}}} f(u,v)}_{\text{חסום ע"י הקיבול של החתך } (S,\bar{S})} - \underbrace{\sum_{\substack{u\in S\\ v\in \bar{S}}} f(v,u)}_{\text{אי שלילי כי זרימה היא תמיד אי שלילי}}$$

ולכן: $|f| \le C(S,\bar{S})$

<u>מסקנה:</u> הזרימה המקסימלית (ערכה) מ-s ל-t חסום ע"י קיבול חתך המינימום שמפריד בין s ל-t

<u>מסלול שיפור</u>

$$u \xrightarrow{f(u,v)} v$$

נתון גרף G, קיבולים, פונקציה זרימה f, מקור s ובור t.

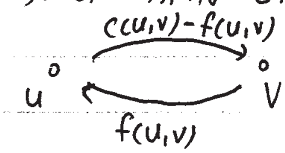
בגרף השיורי:

$$u \underset{f(u,v)}{\overset{C(u,v)-f(u,v)}{\rightleftarrows}} v$$

שתי קשתות עם קיבול שיורי ביחס לזרימה f(u,v).

הרצאה 12
אין זוריאנמג
25.1.09
דף 2 מ 2

<u>גרף שיורי</u> G_f מוגדר ביחס לזרימה f ולכל קשת $u\to v$ מכיל את שתי הקשתות:



גרף שיורי הוא כלי שמאפשר לנו להגדיר את הזרימה בגרף.

<u>מסלול שיפור</u> (ביחס לזרימה נתונה f) הוא מסלול מ-s ל-t בגרף השיורי.

מסלול שיפור בגרף השיורי G_f:

כל הקיבולים במסלול גדולים ממש מאפס.

נסתכל על מסלול השיפור הזה: אם נעביר יחידת זרימה במסלול נקבל זרימה חוקית f' בגרף. כל קשת במסלול היא או קשת קדמית או קשת אחורית

אם זו קשת קדמית אז ניתן להגדיל את הזרימה בקשת.

אם זו קשת אחורית אז ניתן להקטין את הזרימה בקשת. (ביחידה אחת).

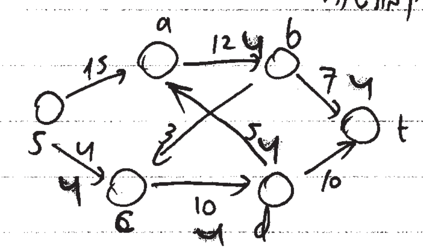
לכן עדכון הזרימה במסלול שיפור ביחידה אחת שומר על חוקי הקיבול. כלומר:

הזרימה בגרף המקורי שומרת על חוקי הקיבול.

חוקי השימור גם נשמרים כי לכל צומת במסלול מ-s ל-t נכנסת יחידת זרימה ויוצאת יחידת זרימה. (אם מדובר בקשת קדמית אז מגדילים את הזרימה בקשת שנכנסת וגם בקשת שיוצאת, לכל צומת באמצע נכנסת יחידת זרימה ויוצאת יחידת זרימה).

אם הקשת שיוצאת מ-s היא קשת קדמית אזי $|f|$ גדל ביחידה.

בהינתן מסלול שיפור p ניתן להגדיל את הזרימה בו במינימום על פני כל הקשתות e במסלול p של $c_f(e)$: $\min\limits_{e\in p}\{\underbrace{c_f(e)}_{\text{קיבול שיורי}}\}$, כלומר צוואר הבקבוק במסלול.

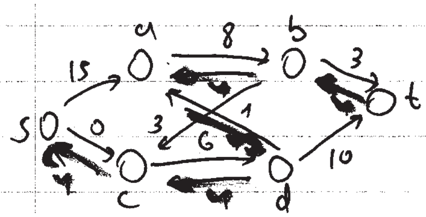


בהתחלה $|f|=0$

- זרימה.

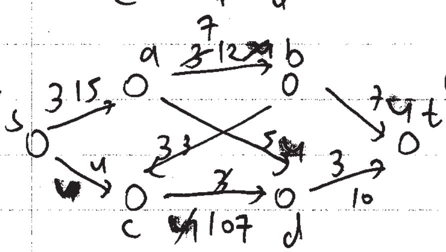
- קיבול.

נבחר שרירותית איזשהו מסלול מ s ל-t ונסמן בו זרימה מקסימית



הגרף השיורי יראה כך: (מסומן בורוד)

$s\to a\to b\to c\to d\to t$



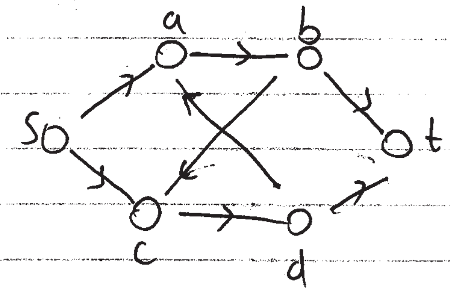
נסתכל על המסלול הכתום (בהמשך לקודם)

- זרימה.

- קיבול

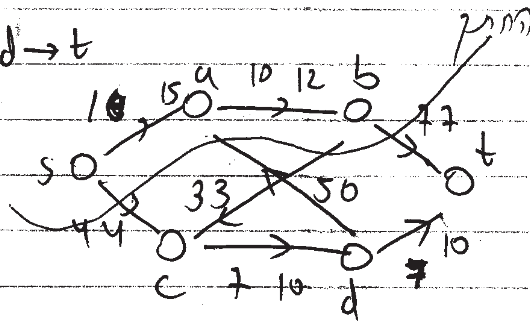
המסלול הבא הוא:
(לא הספקתי לרשום קיבולים).
מצורף דף עם השירטוטים

$s \to a \to b \to t$



המסלול הבא:

$s \to a \to d \to t$



נחפש חתך רווי , $S=\{s,a,b\}$
כלומר שם הקשתות בו רוויות (קיבול = זרימה).

$s \to c$

$a \leftarrow d$

$b \to c$

$b \to t$

ערך החתך הוא: $4+3+7=14$

ערך הזרימה הוא: $14-0=14$

קשתות יוצאות מ-S
קשתות נכנסות ל-S

דף הרצון, גן

מציאת מסלולי שיפור:

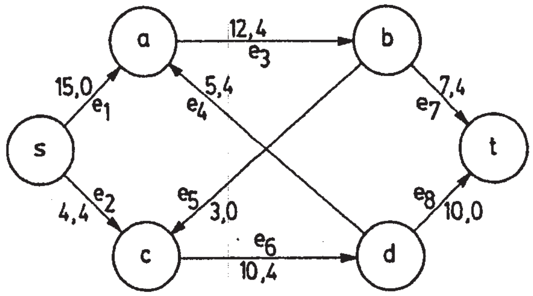


Figure 5.2

הרשת הנתונה:

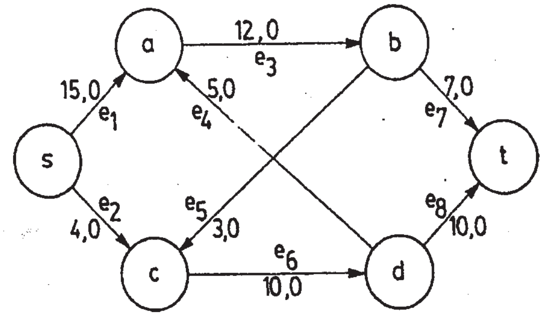


Figure 5.1

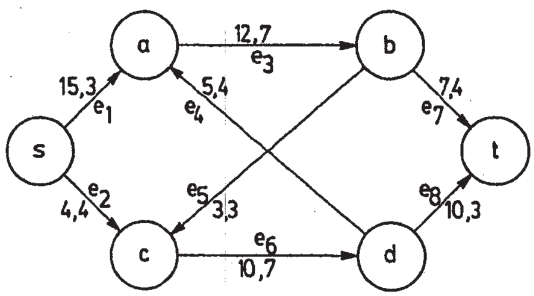


Figure 5.3

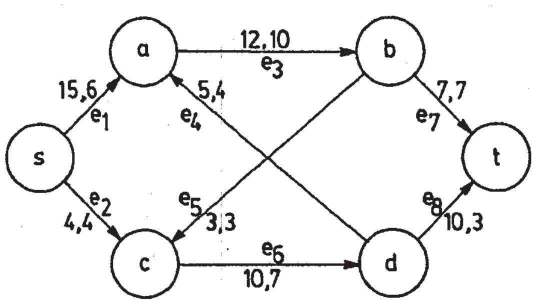


Figure 5.4

מסלול שיפור ראשון: $s \xrightarrow{e_2} c \xrightarrow{e_6} d \xrightarrow{e_4} a \xrightarrow{e_3} b \xrightarrow{e_7} t$. במסלול זה $\Delta = 4$

מסלול שיפור שני: $s \xrightarrow{e_1} a \xrightarrow{e_3} b \xrightarrow{e_5} c \xrightarrow{e_6} d \xrightarrow{e_8} t$. במסלול זה $\Delta = 3$

מסלול שיפור שלישי: $s \xrightarrow{e_1} a \xleftarrow{e_3} b \xrightarrow{e_7} t$ .. במסלול זה $\Delta = 3$

מסלול שיפור רביעי: $s \xrightarrow{e_1} a \xleftarrow{e_4} d \xrightarrow{e_8} t$ .. במסלול זה $\Delta = 4$

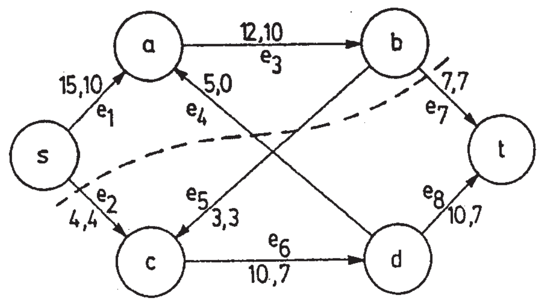


Figure 5.5

זרימת מקסימום:
החתך: { s,a,b}
הוא חתך מינימום
רווי.