הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל הפקולטה למדעי המחשב

אלגוריתמים 1 (234247) – סמסטר אביב 2005

תרגיל בית 4

מתרגל אחראי על התרגיל: דודו אמזלג, **שעת קבלה**: יום א' 11:00-12:00, amzallag@cs.

תאריך חלוקה: יום חמישי 5/5/05.

תאריך הגשה: יום שני 23/5/05, שעה 12:00 בצהריים.

הערות:

- יש להגיש את התרגיל בזוגות.
- שאלות על התרגיל נא להפנות למתרגל האחראי על התרגיל.
- נא לוודא שהפתרון המוגש קריא. פתרונות לא-קריאים לא ייבדקו!
- נא לצרף לפתרון את דף השער המופיע באתר הקורס.
- יש להוכיח כל טענה שלא נלמדה בהרצאה או בתרגול.
- כל אלגוריתם יש לתאר תחילה בקצרה (מה הרעיון מאחוריו) ואחר כך בפירוט (תיאור מילולי, או פסאודו-קוד).
- יש להוכיח נכונות ולנתח סיבוכיות של כל אלגוריתם.
- לא כל השאלות יבדקו.

שאלה 1

יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון עם פונקצית משקל $w:E\rightarrow\mathbb{R}$ על הקשתות.

א. אם G חסר מעגלים שליליים אזי ניתן להפעיל את האלגוריתם הגנרי הבא (שנלמד בהרצאה) למציאת מסלולים קלים ביותר מצומת $s\in V$ לכל צומת $v\in V$:

1. קבע פונקצית חסם עליון $d:V\rightarrow\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ באופן הבא: $d(s)=0,\forall v\in V\setminus\{s\}:d(v)=\infty$.
2. כל עוד קיימת קשת $(u,v)\in E$ כך ש- $d(v)>d(u)+w(u,v)$:
3. $d(v)\leftarrow d(u)+w(u,v)$
4. $p(v)\leftarrow u$

הראו שבסיום האלגוריתם הקשתות מהצורה $\left(p(v),v\right)$ מגדירות עץ מסלולים קלים ביותר. כלומר, עץ מכוון ש- s שורשו ולכל $v\in V$ קיים מסלול קל ביותר מ- s ל- v במשקל $dist(s,v)$ ב- G אמ"ם קיים מסלול מכוון מ- s ל- v במשקל $dist(s,v)$ בעץ.

ב. תהא d פונקצית חסם עליון (או לחילופין: פונקציה כלשהי מ- V לממשיים + ∞), ויהא C מעגל שלילי ב- G המכיל צומת x כך ש- $d(x)$ סופי. הראו כי קיימת ב- C קשת (u,v) כך ש- $d(v)>d(u)+w(u,v)$.

<u>שאלה 2</u>

יהיו $G=(V,E)$ גרף מכוון עם פונקצית משקל $w:E\rightarrow\mathbb{R}$, $s\in V$, ו- $k\in\mathbb{N}$. הציעו אלגוריתם המוצא לכל $v\in V\setminus\{s\}$ את משקל המסלול הקל ביותר מ- s ל- v המשתמש ב- k קשתות לכל היותר (קשת המופיעה במסלול i פעמים נספרת i פעמים).

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את זמן הריצה. תארו את התנהגות האלגוריתם כאשר בגרף קיימים מעגלים שליליים.

<u>שאלה 3</u>: האלגוריתם של Karp לחישוב המשקל הממוצע המינימלי של מעגל.

יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון עם פונקצית משקל $w:E\rightarrow\mathbb{R}$, ונסמן $n=|V|$. נגדיר משקל ממוצע של מעגל $c=\langle e_1,e_2,\ldots,e_k\rangle$ של קשתות ב- E על ידי

$$\mu(c)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}w(e_i)$$

יהי $\mu^*=\min_c\mu(c)$, כאשר c עובר על כל המעגלים המכוונים ב- G. מעגל c שעבורו $\mu(c)=\mu^*$ נקרא **מעגל בעל משקל ממוצע מינימלי** (minimum mean-weight cycle). תרגיל זה חוקר אלגוריתם יעיל לחישוב μ^*.

נניח, בלי הגבלת הכלליות, שניתן להגיע אל כל צומת $v\in V$ מצומת מקור $s\in V$. יהי $\delta(s,v)$ משקלו של מסלול קל ביותר מ- s אל v , ויהי $\delta_k(s,v)$ משקלו של מסלול קל ביותר מ- s אל v המכיל בדיוק k קשתות. אם לא קיים מסלול בן k קשתות בדיוק מ- s אל v , אזי $\delta_k(s,v)=\infty$.

א. הראו שאם $\mu^*=0$, אזי G אינו מכיל מעגלים שליליים (דהיינו, בעלי משקל שלילי), וכן $\delta(s,v)=\min_{0\le k\le n-1}\delta_k(s,v)$ עבור כל הצמתים $v\in V$.

ב. הראו שאם $\mu^*=0$ אזי $\max\limits_{0\le k\le n-1}\frac{\delta_n(s,v)-\delta_k(s,v)}{n-k}\ge 0$ עבור כל $v\in V$.

ג. יהי c מעגל שמשקלו 0, ויהיו u ו- v שני צמתים כלשהם על c. נניח שמשקלו של המסלול מ- u ל- v לאורך המעגל הוא x. הוכיחו כי $\delta(s,v)=\delta(s,u)+x$.

הדרכה. משקל המסלול מ- v ל- u לאורך המעגל הוא $-x$.

ד. הראו שאם $\mu^*=0$, אזי קיים צומת v על המעגל בעל המשקל הממוצע המינימלי באופן שמתקיים

$$\max_{0\le k\le n-1}\frac{\delta_n(s,v)-\delta_k(s,v)}{n-k}=0$$

הדרכה. הראו שבהינתן מסלול קל ביותר אל צומת כלשהו על המעגל בעל המשקל הממוצע המינימלי, ניתן להמשיך מסלול זה לאורך המעגל, ובכך ליצור מסלול קל ביותר אל הצומת הבא על המעגל.

ה. הראו שאם $\mu^*=0$, אזי $\min\limits_{v\in V}\max\limits_{0\le k\le n-1}\frac{\delta_n(s,v)-\delta_k(s,v)}{n-k}=0$

ו. הראו שאם מוסיפים קבוע t למשקלה של כל קשת ב- G , אזי μ^* גדל ב- t. השתמשו בכך כדי להראות כי

$$\mu^*=\min_{v\in V}\max_{0\le k\le n-1}\frac{\delta_n(s,v)-\delta_k(s,v)}{n-k}$$

ז. תארו אלגוריתם שזמן ריצתו $O(VE)$ לחישוב μ^*.

הערות. בעיית מציאת המעגל בעל המשקל הממוצע המינימלי קרובה יחסית לבעיית מציאת מעגל שלילי (כלומר, בעיית ההחלטה האם גרף מכוון נתון עם משקלות על הקשתות מכיל מעגל עם משקל כולל שלילי). כל אלגוריתם הפותר את בעיית מציאת המעגל בעל המשקל הממוצע המינימלי מניב, באופן טבעי, גם פתרון לבעיית מציאת מעגל שלילי: מעגל שלילי קיים בגרף אם ורק אם $\mu^* < 0$. האלגוריתם המתואר בשאלה זו פותח ב-1978 על-ידי Karp[1].

שאלה 4

א. הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(V+E)$ שבהינתן גרף מכוון <u>וחסר מעגלים</u> $G=(V,E)$, צומת $s \in V$ ופונקצית משקל על הקשתות $w: E \to \mathbb{R}$, מוצא לכל צומת $v \in V$ את $\delta(v)$ – משקל המסלול הקל ביותר מ- s ל- v. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

רמז: מה ניתן לומר על $\delta(v)$ אם לכל u כך ש- $(u \to v) \in E$ כבר ידוע $\delta(u)$?

ב. נתונה קבוצה $C=\{1,\dots,n\}$ של n ערים המחוברות בניהן במסלולי טיול. אורכו של מסלול הטיול המחבר בין הערים u ו- v הוא $d(u,v)$ ומחיר הלינה בעיר i ללילה בודד הוא $c(i)$. רוצים לתכנן מסלול מהעיר s לעיר t, תחת הדרישות הבאות:

1. אין חובה לבקר בכל הערים.
2. על המסע להימשך m ימים.
3. ניתן לבקר במספר ערים באותו יום.
4. $u(k)$ הוא המרחק הגדול ביותר המותר למעבר ביום המסע ה- k-י, $k=1,\dots,m$.
5. אין ללון באותה עיר יומיים רצופים (אך ניתן ללון באותה עיר יותר מפעם אחת).

הציעו אלגוריתם לתכנון מסע בעלות כוללת מינימלית העומד בדרישות הנ"ל. הוכיחו נכונות ונתחו את סיבוכיות האלגוריתם שהצעתם.

שאלה 5

נתונים n משתנים $x_1,x_2,\dots,x_n$ ו- m ($m \ge n$) אי-שוויונות מהצורה $x_i - x_j \le c_k$, כך ש- c_k מספר ממשי, לכל $1 \le k \le m$. הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(mn)$ הקובע האם קיים פתרון חוקי למערכת המשוואות. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

רמז: הגדירו גרף מכוון $G=(V,E)$ בו כל צומת v_i מייצג את המשתנה x_i ואם $x_i - x_j \le c_k$ אז יש קשת מ- v_j ל- v_i במשקל c_k.

[1] R. Karp. A characterization of the minimum cycle mean in a digraph. *Discrete Mathematics*, 23: 309-311, 1978