מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"**

מספר השאלות: 13 | **משקל המטלה: נקודה אחת**

סמסטר: 2018א | **מועד הגשה: 30.10.2017**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א

בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/

הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בשאלות המסומנות בסולמית (#) מופיעות שתי טענות. בשאלות אלה סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה
ב - אם רק טענה 2 נכונה
ג - אם שתי הטענות נכונות
ד - אם שתי הטענות אינן נכונות

שאלה 1 #

1. האמירה **המספרים 6, 7 הם מספרים זוגיים** היא פסוק.
2. הביטוי המתמטי $1+2+3+4$ הוא פסוק.

שאלה 2 #

1. **שלילת** הפסוק **הכד נמצא על השולחן**
היא הפסוק **הכד נמצא מתחת לשולחן**
2. **שלילת** הפסוק איציק שפך את המים מהכד
היא הפסוק איציק מילא את הכד במים

שאלה 3 #

1. הפסוק $1+1=2$ **וגם** $2+3>5$ הוא אמת.
2. הפסוק $1+1=2$ **או** $3+3>2$ הוא אמת.

שאלה 4 #

1. הפסוק **אם** $2=3$ **אז** $2=1+1$ הוא אמת.
2. הפסוק **אם** $2=3$ **אז** $2=10$ הוא אמת.

שאלה 5 #

1. לוח האמת של הפסוק הפורמלי $(p \to q) \vee (r \to q)$ הוא:

p	q	r	$(p \to q) \vee (r \to q)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

2. הפסוק הפורמלי $(\neg p) \wedge \neg(p \to q)$ הוא סתירה.

שאלה 6 #

1. הפסוק הפורמלי $\neg(p \to q)$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $p \wedge \neg q$.
2. הפסוק הפורמלי $p \leftrightarrow q$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$.

שאלה 7 #

1. $\neg((p \vee q) \wedge r)$ שקול טאוטולוגית ל- $((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$.
2. $p \wedge \neg(p \wedge q)$ שקול טאוטולוגית ל- $p \wedge \neg q$.

שאלה 8 #

1. **שלילת** הפסוק **האוכל היה חם וטעים**
שקולה לפסוק **האוכל לא היה חם והאוכל לא היה טעים**.
2. **שלילת** הפסוק **רצחתָ וגם ירשתָ** שקולה לפסוק **לא רצחתָ או לא ירשתָ**

שאלה 9 #

1. מתוך הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p$ נובע טאוטולוגית הפסוק r .
2. מתוך הפסוק r נובע טאוטולוגית הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p$.

שאלה 10 #

1. את הפסוק "הריבוע של מספר לעולם אינו קטן מ- 0"
אפשר לרשום כך: $\forall x \neg (x^2 < 0)$.
2. את הפסוק "קיים מספר גדול מ- 0 שהריבוע שלו הוא 9"
אפשר לרשום כך: $(\exists x(x > 0)) \wedge (\exists x(x^2 = 9))$.

בשאלות 11 – 13 אין זוגות של טענות, בחרו את התשובה הנכונה.

שאלה 11

נתבונן בפסוק: **לכל מספר הגדול/שווה 0 , קיים מספר שאם נעלה אותו בריבוע נקבל את המספר המקורי.**

ניתן להצרין פסוק זה כך:

א. $\forall x(x \geq 0 \wedge \exists y\, (y^2 = x))$

ב. $(\forall x\, (x \geq 0)) \wedge (\exists y\, (y^2 = x))$

ג. $\forall x(x \geq 0 \to \exists y\, (y^2 = x))$

ד. $(\forall x\, (x \geq 0)) \to (\exists y\, (y^2 = x))$

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

שאלה 12

את **שלילת** הפסוק **לכל x קיים y שהוא השורש הריבועי של x** ניתן לנסח כך:

א. **לכל x לא קיים y שהוא השורש הריבועי של x** .

ב. **קיים x כך שלכל y , y אינו השורש הריבועי של x** .

ג. קיים x כך שקיים y שאינו השורש הריבועי של x .

ד. **לכל x קיים y שאינו השורש הריבועי של x** .

ה. **לא לכל y קיים x כך ש- y הוא השורש הריבועי של x** .

שאלה 13

נתבונן בטענה:

A: **לכל סנדלר קיים אדם, שכל הנעלים שלו עברו תיקון אצל הסנדלר הזה.**

טענה השקולה **לשלילת** A היא:

א. לכל אדם קיים סנדלר, שלא תיקן אף נעל של אותו אדם.

ב. לכל סנדלר קיים אדם, שאף אחת מהנעלים שלו לא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

ג. לכל סנדלר קיים אדם, שלפחות נעל אחת שלו לא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

ד. קיים סנדלר כך שלכל אדם יש לפחות נעל אחת שלא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

ה. קיים סנדלר שמעולם לא תיקן שתי נעלים של אותו אדם.

מטלת מנחה (ממ״ן) 11

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 1**

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2018א | **מועד הגשה: 7.11.2017**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (20 נק׳)

שאלה זו נועדת לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות ולחדד כמה נקודות שכדאי להבין בשלב מוקדם:

* ההבדל בין A לבין $\{A\}$ (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא A).

* מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה $\varnothing$ לבין $\{\varnothing\}$.

* ההבדל בין "x איבר של y" לבין "x חלקי ל- y".

תהיינה: $X=\{1,2\}$, $Y=\{X,\{3\}\}$, $Z=\{X\}$.

לכל אחת מהטענות הבאות קבע אם היא נכונה.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $X\in Y$ ב. $Z\in Y$ ג. $X\subseteq Y$

ד. $Z\subseteq Y$ ה. $\varnothing\in Z$ ו. $|Y|=2$

ז. $P(X)\subseteq P(Y)$ ח. $\{\varnothing\}\subseteq P(X)$

שאלה 2 (28 נק׳)

א. הוכיחו: אם $X\subseteq Y$ אז $P(X)\subseteq P(Y)$.

ב. הוכיחו: $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$. נמקו היטב כל שלב בהוכחה.

(לגבי **איחוד** לא מתקיימת טענה כללית הדומה לזו שבסעיף ב׳: ר׳ החוברת ״אוסף תרגילים פתורים״ עמ׳ 1 שאלה 2 . בסעיפים הבאים נבדוק מתי בדיוק כן מתקיים שוויון כזה עבור איחוד)

ג. הוכיחו **שאם** $A\subseteq B$ או $B\subseteq A$ **אז** $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$.

ד. הוכיחו את הכיוון ההפוך לטענה שבסעיף ג׳, כלומר הוכיחו ש-

אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ **אז** $A\subseteq B$ או $B\subseteq A$.

הדרכה: נוח להוכיח סעיף זה בדרך השלילה. מהי בדיוק הנחת השלילה במקרה זה?

שאלה 3 (24 נקי)

תנו **שתי הוכחות** לשוויון $A \oplus B = A' \oplus B'$. הוכחה אחת מהצורה "יהי x איבר של אגף ימין, נראה שהוא איבר של אגף שמאל ... ולהיפך ...", והוכחה שניה בעזרת אלגברה של קבוצות, ללא שימוש במושג "איבר". בהוכחה הראשונה היעזרו בטענות שלמדנו בתחשיב הפסוקים כדי לעבור מביטוי לביטוי שקול. בהוכחה השניה היעזרו בטענות מפרק 1 בתורת הקבוצות.

הסימן $\oplus$ (הפרש סימטרי) מוגדר בשאלה 1.22 בכרך "תורת הקבוצות".

שאלה 4 (28 נקי)

איחוד של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בהגדרה 1.6 בעמוד 12 בספר.

במלים פשוטות ההגדרה היא:

$x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ אםם x שייך **לפחות** לאחת הקבוצות A_i, כאשר i מקבל ערכים ב- I.

במלים אחרות: $\boxed{x \in \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{אםם} \quad \exists i\left(i \in I \wedge x \in A_i\right)}$

חיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בעמוד 16 בספר. במלים פשוטות ההגדרה היא:

$x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ אםם x שייך **לכל** הקבוצות A_i, כאשר i מקבל ערכים ב- I.

במלים אחרות: $\boxed{x \in \bigcap_{i \in I} A_i \quad \text{אםם} \quad \forall i\left(i \in I \to x \in A_i\right)}$

השאלה שלפניכם מתרגלת את השימוש בשני מושגים האלה.

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים (כולל 0).

לכל $n \in \mathbf{N}$, תהי $A_n = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 \le x \le 3n+1\}$, ותהי $B_n = A_{n+1} - A_n$.

(4 נקי) א. חשבו את A_0, A_1, A_2, A_3 ואת B_0, B_1, B_2.

(4 נקי) ב. יהי $n > 0$. רשמו במפורש את אברי הקבוצה B_n (הם תלויים כמובן ב- n)

(10 נקי) ג. חשבו את $\bigcup_{1 \le n \in \mathbf{N}} B_n$. הוכיחו את תשובתכם בעזרת הכלה דו-כיוונית.

(8 נקי) ד. בעזרת ההגדרות של איחוד וחיתוך כלליים בתחילת השאלה **ובעזרת כללי דה-מורגן לכמתים** $\exists, \forall$, אותם למדנו בלוגיקה, נסחו והוכיחו הכללה של כללי דה-מורגן לקבוצות, עבור **איחוד וחיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות**, שכולן חלקיות לקבוצה אוניברסלית U:

$$\bigcup_{i \in I}(A_i') = ? \quad , \quad \bigcap_{i \in I}(A_i') = ? .$$

(6 נקי) ה. נסמן $D_n = \mathbf{N} - B_n$. חשבו בעזרת הסעיפים הקודמים את $\bigcap_{1 \le n \in \mathbf{N}} D_n$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 2**

מספר השאלות: 11 | **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2018א | **מועד הגשה: 15.11.2017**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

"רלציה" בעברית: **יחס**.

בכל שאלה במטלה זו מופיעה טענה אחת. סמנו:

א - אם הטענה נכונה   **ב** - אם הטענה לא נכונה

שאלה 1

אם R הוא יחס מעל קבוצה A אז קיימת קבוצה $A \subseteq X$ כך ש- $R = X \times X$.

שאלה 2

אם R ו- S הם יחסים מעל קבוצה A, גם $R \times S$ הוא יחס מעל הקבוצה A.

שאלה 3

אם R הוא יחס מעל קבוצה A אז $R \times A$ הוא יחס מעל $A \times A$

שאלה 4

אם R ו- S הם יחסים מעל קבוצה A גם ההפרש הסימטרי $R \oplus S$ הוא יחס מעל הקבוצה A.
(ראו בשאלה 1.22 בכרך "תורת הקבוצות".)

שאלה 5

$X \subseteq A$ ואם $R = X \times X'$ אז $Domain(R) \cup Range(R) = A$.

שאלה 6

אם R הוא יחס מעל קבוצה A ואם $Domain(R) \cap Range(R) = \varnothing$ אז קיימת קבוצה $X \subseteq A$ כך ש- $R \subseteq X \times X'$.

שאלה 7

אם R הוא יחס מעל קבוצה A אז $R^{-1}R = I_A$ אם ורק אם $Range(R) = A$.

שאלה 8

אם R הוא יחס מעל קבוצה A ואם $RR^{-1}=I_A$ אז $Range(R)=A$.

שאלה 9

לכל יחס R מתקיים : $RR^{-1}=R^{-1}R$.

שאלה 10

אם R,S הם יחסים מעל A כך ש- $SR=RS$ אז $S^{-1}R=RS^{-1}$.

שאלה 11

אם R הוא יחס רפלקסיבי מעל קבוצה A אז $RR^{-1}=I_A$.

שאלה 12

אם R הוא יחס אנטי-סימטרי אז גם R^{-1} הוא יחס אנטי-סימטרי.

שאלה 13

אם R יחס טרנזיטיבי אז גם R^2 הוא טרנזיטיבי.

שאלה 14

לכל יחס R , היחס $R\cup R^2$ הוא טרנזיטיבי.

שאלה 15

אם R הוא יחס מעל $A=\{1,2,3\}$ אז $R\cup R^2\cup R^3$ הוא טרנזיטיבי.

שאלה 16

אם R,S הם יחסים סימטריים מעל A אז גם $R\cup S$ יחס סימטרי.

שאלה 17

אם R,S הם יחסים אנטי-סימטריים מעל A אז גם $R\cup S$ יחס אנטי-סימטרי.

בשאלות 18-20 R הוא יחס מעל A קבוצת המספרים הטבעיים ש**אינם מתחלקים** ב- 3
המוגדר כך : $(m,n)\in R$ אם ורק אם $3|\ m+n$.

שאלה 18

R רפלקסיבי

שאלה 19

R^2 רפלקסיבי

שאלה 20

R^2 טרנזיטיבי

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" פרקים 2-3**

מספר השאלות: 11 | **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2018א | **מועד הגשה: 27.11.2017**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

הערה: כל הפונקציות במטלה זו הן פונקציות **של**, כלומר **מלאות** (לא פונקציות חלקיות**!**)**.**

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: **א** - אם הטענה נכונה ; **ב** - אם הטענה לא נכונה

שאלה 1

לכל יחס שקילות מעל $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ יש מחלקה שבה מספר האיברים הוא אי-זוגי.

שאלה 2

לכל יחס שקילות מעל $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ יש מחלקה שבה מספר האיברים הוא אי- זוגי.

שאלה 3

אם R הוא יחס רפלקסיבי סימטרי ומעל הקבוצה $A=\{1,2\}$ אז R הוא יחס שקילות

שאלה 4

אם R הוא יחס רפלקסיבי סימטרי ומעל הקבוצה $A=\{1,2,3\}$ אז R הוא יחס שקילות

שאלה 5

אם R הוא יחס רפלקסיבי סימטרי ומעל הקבוצה $A=\{1,2,3\}$ אז R^2 הוא יחס שקילות

בשאלות 7,6 R הוא יחס שקילות מעל הקבוצה $A=\{1,2,3,4,5\}$.

ידוע שלכל $m,n\in A$, **אם** mRn **ואם** $m+n$ זוגי **אז** $m=n$.

שאלה 6

מספר האיברים בכל מחלקה של R הוא 2 לכל היותר

שאלה 7

לכל יחס R מסוג זה יש מחלקת שקילות בעלת איבר אחד שהוא מספר זוגי.

בשאלות 8-11 S הוא יחס על קבוצת השלמים $\mathbf{Z}$ המקיים: $(n,m)\in S$ אםם $m^2+m=n^2+n$

שאלה 8

S הוא יחס שקילות על $\mathbf{Z}$.

שאלה 9

אם S יחס שקילות, אז בכל המחלקות שלו יש אותו מספר איברים.

שאלה 10

קיימים מספרים זוגיים $m,n \in \mathbf{Z}$ כך ש- $(n,m) \in S$

שאלה 11

לכל $n \in \mathbf{Z}$, $(-n-1,n) \in S^2$

שאלה 12

הפונקציה $f : P(\mathbf{N}) \to P(\mathbf{N})$ המוגדרת ע"י $f(X) = X - \{1\}$ לכל $X \in P(\mathbf{N})$ היא חד- חד-ערכית.

שאלה 13

הפונקציה $f : P(\mathbf{N}) \to P(\mathbf{N})$ המוגדרת ע"י $f(X) = X - \{1\}$ לכל $X \in P(\mathbf{N})$ היא על.

בשאלות 14-17 נתונה הפונקציות $f : \mathbf{Q}-\{1\} \to \mathbf{Q}$ ו- $g : \mathbf{Q}-\{1\} \to \mathbf{Q}-\{1\}$ המוגדרות על-ידי $f(x) = g(x) = \frac{x}{x-1}$ לכל $x \in \mathbf{Q}-\{1\}$. ($\mathbf{Q}$ היא קבוצת המספרים הרציונליים)

שאלה 14

f היא חד- חד-ערכית.

שאלה 15

f היא על.

שאלה 16

g היא על.

שאלה 17

gg היא על.

שאלה 18

אם R הוא יחס סדר מעל קבוצה A אז $R = R^2$.

שאלה 19

מספר יחסי הסדר מעל $A = \{1,2,3\}$ שבהם יש בדיוק שני איברים מקסימליים שווה למספר יחסי הסדר מעל A שבהם קיים איבר גדול ביותר.

שאלה 20

מספר יחסי הסדר **הלא** מלאים מעל $A = \{1,2,3,4\}$ שבהם יש איבר מינימלי יחיד ואיבר מקסימלי יחיד הוא 8

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 2- 3**

מספר השאלות: 5 | **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2018א | **מועד הגשה: 4.12.2017**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

"רלציה" בעברית: **יחס**

שאלה 1 (7 נקודות)

תן דוגמא לקבוצה סופית A וליחס R מעל A, כך ש- $R \cup R^2$ **אינו** טרנזיטיבי.
יש לנמק מדוע הדוגמא שהבאת מקיימת את הנדרש.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $A=\{1,2,3\}$ ותהי M קבוצת כל היחסים מעל A.

תהי $t: M \to M$ הפונקציה המתאימה לכל $R \in M$ את הסגור הטרנזיטיבי שלו.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. t היא חד-חד-ערכית   ב. t היא **על** M ג. לכל $R \in M$, $t(t(R)) = t(R)$

ד. לכל $R, S \in M$, $t(RS) = t(R)t(S)$ (הכפל הוא כפל יחסים)

שאלה 3 (27 נקודות)

תהי $A=\{1,2,3,4\}$ ותהי K קבוצת כל היחסים מעל A **שהם סימטריים אך אינם רפלקסיביים**.

בכרך "תורת הקבוצות" בעמ' 94, שאלה 3.25א, מוכח שיחס ההכלה $\subseteq$ הוא סדר-חלקי מעל כל קבוצה של קבוצות. מכיון שיחס הוא סוג מסוים של קבוצה (קבוצה של זוגות סדורים), מתקבל מהאמור שיחס ההכלה $\subseteq$ הוא סדר-חלקי מעל K. השאלה מתייחסת לסדר-חלקי זה.

א. הראה שיש ב- K איבר קטן ביותר - מיהו? הוכח שהוא הקטן ביותר.

ב. מצא איבר מקסימלי ב- K. הוכח שהוא מקסימלי.

ג. הוכח שאין ב- K איבר גדול ביותר.

שאלה 4 (24 נקודות)

הגדרה: מספר טבעי חיובי נקרא **ראשוני** (prime) אם הוא שונה מ- 1, ומתחלק ללא שארית רק בעצמו וב- 1. כבר ליוונים היה ידוע שקבוצת המספרים הראשוניים היא אינסופית.

שימו לב ש- 1 אינו נחשב ראשוני. קבוצת הראשוניים "מתחילה" כך: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

משפט ידוע קובע שכל מספר טבעי הגדול מ- 1 ניתן להצגה כמכפלה של מספרים ראשוניים, ויש רק דרך אחת להציג אותו כך, עד כדי החלפת סדר הגורמים במכפלה (מה היה מתקלקל במשפט זה אילו 1 היה נחשב ראשוני?). נסמן ב- K את קבוצת המספרים הראשוניים.

נסמן $M = \mathbf{N} - \{0,1\}$. תהי $f : M \to P(K)$ הפונקציה המתאימה לכל $n \in M$ את **קבוצת** הגורמים הראשוניים של n (המספרים הראשוניים בהם n מתחלק ללא שארית).

למשל $f(140) = \{2,5,7\}$. (המשך השאלה בעמ' הבא)

א. האם f היא חד-חד-ערכית? ב. האם f היא **על** $P(K)$?

בהמשך לאמור, הפונקציה f מחלקת את M למחלקות שקילות, בעזרת התנאי: n,m שייכים לאותה מחלקה אסם $f(n) = f(m)$. ראו הסעיף "העתק טבעי" בעמ' 84 בספר, וראו הסבר מפורט יותר באתר הקורס, מאגר המשאבים, עזרים ללמידה - "יחס שקילות המושרה על-ידי פונקציה". המשך השאלה מתייחס לחלוקה זו.

ג. מיהם כל המספרים הנמצאים באותה מחלקה עם המספר 125 ?

ד. מיהם כל המספרים הנמצאים באותה מחלקה עם המספר 20 ?

שאלה 5 (22 נקודות)

לכל n טבעי יהי $a_n = \sum_{i=0}^{5} (n+i)^2$.

במלים אחרות, a_n הוא סכום **הריבועים** של 6 מספרים טבעיים עוקבים. המחובר הראשון הוא n^2 והמחובר הששי והאחרון הוא $(n+5)^2$.

הוכיחי באינדוקציה: לכל n טבעי , a_n נותן שארית 7 בחילוק ב- 12.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 4-5**

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2018א **מועד הגשה: 12.12.2017**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

חלק מהממ"ן מסתמך על החוברת "פרק 5" שנמצאת בידיכם.

חוברת זו משלימה את פרק 4 בתורת הקבוצות ומחליפה חלק ממנו.

שאלה 1 (27 נק')

$\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

בכל סעיף מצא את עוצמת הקבוצה הרשומה בו. הוכח את תשובותיך.

(8 נק') א. $K = \{x \in \mathbf{R} \mid 0.3 + 3x \in \mathbf{N}\}$

(8 נק') ב. $L = \{(x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid x + y = 5\}$

(9 נק') ג. $M = \{ (x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid 2x + y \in \mathbf{N}$ וגם $x - 2y \in \mathbf{N} \}$

הדרכה: נסמן $2x + y = n$, $x - 2y = m$ ו"נפתור" את מערכת המשוואות.

שאלה 2 (24 נקודות)

א. תהי K קבוצת כל תת-הקבוצות **הסופיות** של $\mathbf{N}$: $K = \{A \in P(\mathbf{N}) \mid$ היא קבוצה סופית $A\}$.

הוכח ש- K היא בת-מניה. אפשר להיעזר בחוברת "אוסף תרגילים פתורים" עמ' 8 שאלה 10ה, אבל שימו לב ששם מדובר על סדרות וכאן על קבוצות, לכן יש עוד מה להוכיח. דרך אפשרית היא להתאים לכל קבוצה - סדרה.

ב. בהינתן $A \in P(\mathbf{N})$, נאמר ש- A **קו-סופית** (*co-finite*) ב- $\mathbf{N}$,

אם A' (המשלימה של A ב- $\mathbf{N}$) היא קבוצה סופית.

מובן שאם A קו-סופית ב- $\mathbf{N}$ אז A אינסופית (מדוע?),

אבל לא כל קבוצה אינסופית של טבעיים היא קו-סופית ב- $\mathbf{N}$ (למשל?) .

תהי L קבוצת כל התת-קבוצות הקו-סופיות ב- $\mathbf{N}$: $L = \{A \in P(\mathbf{N}) \mid \mathbf{N}$ קו-סופית ב- $A\}$.

הוכח ש- L היא בת-מניה.

שאלה 3 (21 נק׳)

(9 נק׳) א. הוכיחי שקבוצת היחסים (רלציות) מעל הקבוצה **N**, עוצמתה C .
הדרכה: כדאי להיזכר בהגדרה של יחס מעל קבוצה.

(12 נק׳) ב. הוכיחי שקבוצת היחסים **הרפלקסיביים** מעל **N** , עוצמתה C .

שאלה 4 (24 נק׳)

N היא קבוצת המספרים הטבעיים, **R** היא קבוצת המספרים הממשיים.

א. תהי A קבוצת כל הפונקציות של **N** ל- **R** . עוצמת A היא:

[1] מספר סופי כלשהו **[2]** $\aleph_0$ **[3]** C

[4] 2^C **[5]** אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

ב. תהי B קבוצת כל הפונקציות של $P(\mathbf{N})$ ל- $P(\mathbf{R})$. עוצמת B היא:

[1] אפס (אין פונקציות כאלה) **[2]** C **[3]** 2^C

[4] עוצמה גדולה מ- 2^C **[5]** אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

הוכיחו את תשובתכם.

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 1-2**

מספר השאלות: 11 | **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2018א | **מועד הגשה: 25.12.2017**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

הערה: כל הפונקציות במטלה זו הן פונקציות מלאות

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: **א** - אם הטענה נכונה ; **ב** - אם הטענה לא נכונה

שאלה 1

אם $|A|=3^3$ ו- $|B|=3$ אז מספר הפונקציות מ- A ל- B שווה למספר הפונקציות מ- B ל- A .

שאלה 2

תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. מספר הפונקציות מ- A ל- A המעתיקות מספרים זוגיים למספרים זוגיים הוא 18^3

שאלה 3

תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. מספר הפונקציות מ- A ל- A המעתיקות כל מספר של A לאחד המחלקים של אותו מספר הוא $2^3 3^2$

שאלה 4

תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות מ- A ל- A המעתיקות מספרים זוגיים למספרים זוגיים שווה למספר הפונקציות מ- $\{1,2\}$ ל- A .

שאלה 5

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות מהקבוצה $\{1,2,3,4,5\}$ לעצמה המעתיקות את 1 למספר שונה מ- 1 הוא $5!-4!$

שאלה 6

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות מהקבוצה $\{1,2,3,4,5\}$ לעצמה המעתיקות את 1 למספר שונה מ- 1 ואת 2 למספר שונה מ- 2 הוא $5!-2\cdot 4!$

שאלה 7

מספר הפונקציות מ- $A=\{1,2,3,4\}$ **על** $B=\{1,2,3\}$ הוא $3^4-3\cdot 2^4$.

שאלה 8

מספר הקבוצות החלקיות ל- $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ שבהן יש לפחות 3 איברים שווה למספר הקבוצות החלקיות ל- A שבהן יש לכל היותר 3 אברים.

שאלה 9
מספר החלוקות השונות של הקבוצה $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ למחלקות בנות 3 איברים כל אחת שווה למספר כל הבחירות האפשריות של קבוצה בעלת 3 איברים מתוך A .

שאלה 10
מספר הסידורים השונים של המחרוזת AAABBC גדול ממספר הסידורים השונים של המחרוזת AABBCC

שאלה 11
מספר הסידורים השונים של המחרוזת AABBCC שבהן לא מופיע הרצף AA גדול ממספר הסידורים שלה שבהם מופיע הרצף AA .

שאלה 12
מספר הסידורים השונים של המחרוזת AABBCC שווה למספר החלוקות של הקבוצה $\{1,2,3,4,5,6\}$ ל- 3 מחלקות בנות 2 איברים כל אחת.

שאלה 13
מספר הסידורים השונים של המחרוזת AABBCC שווה למספר הדרכים שבהן יכולים 6 תלמידים להגיש 3 עבודות שונות בזוגות.

שאלה 14
מספר הדרכים לפיזור 3 כדורים זהים ב- 4 תאים שונים שווה למספר הדרכים השונות לפיזור 4 כדורים זהים ב- 3 תאים שונים.

שאלה 15
מספר הדרכים לפיזור 4 כדורים זהים ב- 4 תאים שונים שווה למספר הדרכים השונות לפיזור 3 כדורים זהים ב- 5 תאים שונים.

שאלה 16
מספר הדרכים לפיזור 4 כדורים שונים ב- 4 תאים שונים גדול פי 16 ממספר הדרכים לפיזור 4 כדורים זהים ב- 4 תאים שונים.

שאלה 17
מספר הדרכים לפיזור 4 כדורים שונים ב- 4 תאים זהים הוא קטן מ- 10.

שאלה 18
מספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=14$ שווה למספר הפתרונות השלמים החיוביים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=10$

שאלה 19
מספר הפתרונות בטבעיים זוגיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=14$ שווה למספר הפתרונות בטבעיים אי-זוגיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=14$

שאלה 20
מספר הפתרונות בשלמים שהם 1 או 1- לאי-שוויון $x_1+x_2+x_3+x_4\geq 0$ הוא 10.

מטלת מנחה (ממ״ן) 14

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 3-4**

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2018א | **מועד הגשה: 1.1.2018**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (27 נקודות)

יהי $n \ge 3$. נתבונן בזהות $\binom{n}{3} = \sum_{i=2}^{n-1}(i-1)(n-i)$. ניתן להוכיח אותה כך:

אגף שמאל הוא מספר האפשרויות לבחור 3 מספרים **שונים** מתוך הקבוצה $A = \{1,2,\dots,n\}$ **ללא חשיבות לסדר**. אגף ימין מייצג דרך קצת מיוחדת לספור את האפשרויות הללו:

ראשית נבחר מספר i בתחום $2 \le i \le n-1$. זה יהיה המספר **האמצעי בגודלו** מבין השלושה.

כעת נבחר מספר כלשהו ב- A הקטן מ- i (לכך יש $i-1$ אפשרויות),

ומספר כלשהו ב- A הגדול מ- i (לכך יש $n-i$ אפשרויות).

מספר האפשרויות לבחירת קבוצה בת 3 איברים, אשר האמצעי בגודלו מביניהם הוא i, הוא אפוא $(i-1)(n-i)$. נסכם את האפשרויות עבור כל ערכי i, ומכאן השוויון!

(6 נק׳) א. בדוק את השוויון עבור $n=3$ ועבור $n=4$.

(21 נק׳) ב. נכליל את התהליך הנ״ל, למקרה של בחירת $2k+1$ מספרים שונים מתוך $A=\{1,2,\dots,n\}$ (כאשר $n \ge 2k+1$), ללא חשיבות לסדר.

נתחיל שוב מבחירת האיבר שיהיה האמצעי בגודלו מבין הנבחרים. השלם את הזהות הבאה (החלף את חמשת סימני השאלה בביטויים מתאימים) והוכח אותה באופן דומה לנ״ל:

$$\binom{n}{2k+1} = \sum_{i=?}^{?}\binom{?}{k}\binom{?}{?}$$

בדוק את תשובתך בעזרת 3 המקרים הבאים ורשום בכל מקרה את התוצאה:

(1) $k=0$ (2) $k=1$ (3) $n=2k+1$.

שאלה 2 (27 נקודות)

תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. מיצאו כמה פונקציות $f:A\to A$ מקיימות את התנאי:

שלושת המספרים 1,2,3 נמצאים בתמונה של f (כלומר כל אחד מהמספרים 1,2,3 מתקבל על-ידי הפעלת f על אבר כלשהו של A). ייתכן בהחלט שאברים נוספים ב- A מתקבלים גם הם.

דוגמאות: *(i)* הפונקציה השולחת את כל אברי A ל- 1 **אינה** מקיימת את התנאי.

(ii) פונקציית הזהות, השולחת כל אבר לעצמו, מקיימת את התנאי.

(iii) הפונקציה f המוגדרת כך: $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1$, $f(5)=2$, $f(6)=3$
מקיימת את התנאי.

כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה. אין הכרח להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 3 (27 נקודות)

במערכת מחשב מסוימת, סיסמת משתמש היא באורך של **לפחות 3 תוים ולכל היותר 100 תוים**.
התוים המותרים: a-z, A-Z, 0-9 (יש אפוא $26+26+10=62$ תוים מותרים).
סיסמא חייבת להכיל **לפחות אות קטנה אחת, לפחות אות גדולה אחת ולפחות ספרה אחת**.

ביום מסוים, באג מוזר בתהליך בדיקת הסיסמא גרם לכך שבכניסה למערכת **לא היתה התייחסות לסדר התוים ולא היתה התייחסות לחזרות**. למשל, המערכת לא הבחינה בין הסיסמאות BA1Aa11, aAB1, 1AAAABBBaa, כי בשלושתן מופיעים בדיוק אותם תוים.
עוד דוגמאות: נניח שהסיסמא של משה היא **abA122**. באותו יום מוזר:
אם משה הקליד בטעות 22aAab111b , המערכת קיבלה אותו.
אם משה הקליד בטעות abA123, המערכת לא קיבלה אותו, כי התו 3 לא נמצא בסיסמא שלו.
אם משה הקליד בטעות aba122, המערכת לא קיבלה אותו, כי חסר התו A שנמצא בסיסמא שלו.

כמה סיסמאות שונות היו אפשריות **בפועל** באותו יום? "אפשריות בפועל" משמע **סיסמאות שהמערכת לא מבחינה ביניהן נחשבות כאותה סיסמא**.

מדובר רק על סיסמאות חוקיות, המקיימות את הדרישות שבתחילת השאלה.

כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה. אין הכרח להגיע לתשובה מספרית, אבל תשובה שמכילה סכומים (או סיגמא) של עשרות גורמים לא תתקבל: יש לפשט אותה או למצוא דרך אחרת לפתור את השאלה...

שאלה 4 (19 נקודות)

לטקס בוגרים של האוניברסיטה הגיעו בוגרים ואורחים שונים. במהלך הערב חלק מהאנשים הללו לחצו ידים זה לזה. הוכח שיש לפחות שני אנשים שלחצו בדיוק אותו מספר ידים.
הבהרות: אדם לא לוחץ יד לעצמו, שני אנשים אינם לוחצים יד זה לזה יותר מפעם אחת.

מטלת מנחה (ממ״ן) 15

הקורס: 20476 מתמטיקה דיסקרטית   **חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 6-7**

מספר השאלות: 4   **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2018א   **מועד הגשה: 10.1.2018**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (25 נק׳)

יהי a_n מספר הסדרות באורך n, שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0,1,2\}$,

אשר אין בהן הופעה של **00** ואין בהן הופעה של **01** (מותרת הופעה של 10).

דוגמאות לסדרות **מותרות** באורך 5: 12211 , 11110 .

דוגמאות לסדרות **אסורות** באורך 5: 12011 , 11100.

(10 נק׳) א. רשמי בעזרת חישוב ישיר את $a_0\,, a_1, a_2$. רשמי יחס נסיגה עבור a_n .

בדקי שהערכים שרשמת עבור $a_0\,, a_1, a_2$ מתאימים ליחס הנסיגה.

(15 נק׳) ב. פתרי את יחס הנסיגה וקבלי נוסחה מפורשת עבור a_n .

ביטויים כגון $\sqrt{5}, \sqrt{3}\,, \sqrt{2}$ יש להשאיר כפי שהם.

ביטויים כגון $\sqrt{12}$ יש להעביר לצורה $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=2\sqrt{3}$.

שאר הממ״ן עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בסוף הממ״ן רשימה של נוסחאות שימושיות.

שאלה 2 (23 נק׳)

תהי $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. נתון: $a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = -2$. שאר המקדמים אינם

ידועים. תהי g פונקציה המקיימת: $f(x)\cdot g(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots$.

נסמן $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$. חשבי את $b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3$.

שאלה 3 (25 נק')

מצאו את מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$,

כאשר 3 מהמשתנים הם מספרים טבעיים **זוגיים**,

3 המשתנים האחרים הם מספרים טבעיים **אי-זוגיים**,

ואף אחד מהמשתנים אינו שווה 0 ואינו שווה 1 .

לא נתון איזה מהמשתנים הם זוגיים ואיזה אי-זוגיים.

אפשר לפתור בעזרת פונקציה יוצרת ואפשר בדרך אחרת. **יש להגיע לתשובה סופית מספרית**.

שאלה 4 (27 נק')

דוגמא לתרגיל מסוג זה נמצאת בסוף הקובץ "מבוא לפונקציות יוצרות" שבאתר הקורס.

(8 נק') א. נרשום את הפיתוחים הבאים:

$$f(x) = (1-x)^9 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \qquad g(x) = \frac{1}{(1-x)^{10}} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

מצאו את a_i ואת b_i, לכל i טבעי.

(16 נק') ב. נשים לב ש- $f(x)\cdot g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (*)

יהי $k \in \mathbf{N}$. את המקדם של x^k בפונקציה $f(x)\cdot g(x)$ אפשר לחשב בשתי דרכים:

- מתוך אגף שמאל של (*), ע"י כפל פונקציות יוצרות.
- מתוך אגף ימין של (*), בפיתוח הידוע של $\dfrac{1}{1-x}$.

השוו את שתי התוצאות וקבלו זהות מהצורה $? \;=\; \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{?}{?}\cdot D(?\,,?)$.

(3 נק') בדקו את הזהות שקיבלתם עבור המקרה $k=2$.

להלן כמה נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות:

(i)! סכום טור הנדסי סופי: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ואינסופי: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \dfrac{1}{1-x}$

(ii)! כפל פונקציות יוצרות:

אם $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, ו- $f(x)\cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

אז $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד).

(iii)! $\sum_{k=0}^{\infty} D(n,k)x^k = (1+x+x^2+\ldots)^n = \dfrac{1}{(1-x)^n}$ (במלים אחרות: המקדם של x^k

בפיתוח הביטוי $\dfrac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$. ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר).

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: "תורת הגרפים" פרקים 1- 3**
מספר השאלות: 20 | **משקל המטלה: 2 נקודות**
סמסטר: 2018א | **מועד הגשה: 22.1.2018**

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א

בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/

הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: **א** - אם הטענה נכונה ; **ב** - אם הטענה לא נכונה

שאלה 1

קיים גרף פשוט על 7 צמתים, בעלי דרגות 3,3,3,3,5,6,4

שאלה 2

קיים גרף על 7 צמתים בעלי דרגות 3,3,3,3,5,6,8

שאלה 3

קיים גרף פשוט על 7 צמתים בעלי דרגות 2,2,2,2,2,6,6

שאלה 4

קיים גרף על 7 צמתים בעלי דרגות 1,1,3,3,2,6,6

שאלה 5

אם בגרף פשוט על **7** צמתים הדרגה של כל צומת היא לפחות 2 אז הגרף הוא קשיר

שאלה 6

אם בגרף פשוט על **7** צמתים הדרגה של כל צומת היא לפחות 3 אז הגרף הוא קשיר

שאלה 7

אם בגרף פשוט על **8** צמתים הדרגה של כל צומת היא לפחות 3 אז הגרף הוא קשיר

שאלה 8

בגרף פשוט ולא קשיר על **7** צמתים יש לכל היותר 15 קשתות.

שאלה 9

אם G הוא גרף דו-צדדי אז הגרף המשלים $\overline{G}$ הוא דו-צדדי.

שאלה 10

אם G הוא גרף דו-צדדי אז הגרף המשלים $\overline{G}$ אינו דו-צדדי.

שאלה 11

אם בעץ T על 6 צמתים יש 3 עלים אז ב- T קיים צומת בעל דרגה 3.

שאלה 12

אם סכום דרגות הצמתים בעץ T הוא 10 אז T הוא עץ על 6 צמתים.

שאלה 13

העצים **המתוייגים** בעלי סדרות פרופר $(2,2,4,5,5)$ ו- $(4,2,2,5,4)$ הם איזומורפיים (לפי הגדרה 2.8)

שאלה 14

העצים בעלי סדרות פרופר $(2,2,4,5,5)$ ו- $(4,2,2,5,4)$ הם איזומורפיים כגרפים **לא מתוייגים**. (לפי הגדרה 2.7)

שאלה 15

בכל עץ בעל שני עלים בלבד יש מסלול אוילר

שאלה 16

אם G הוא גרף אוילרי דו-צדדי אז מספר הצמתים של G הוא זוגי.

שאלה 17

אם G הוא גרף אוילרי בעל מספר זוגי של הצמתים אז G הוא גרף דו-צדדי.

שאלה 18

אם G הוא גרף פשוט על 7 צמתים שבו דרגות הצמתים הן $3,3,3,3,4,4,4$ אז G המילטוני.

שאלה 19

אם G הוא גרף פשוט על 7 צמתים שבו דרגות הצמתים הן $2,2,2,2,2,3,3$ אז G לא המילטוני.

שאלה 20

קיים G גרף פשוט על 7 צמתים לא המילטוני שבו דרגות הצמתים הן $2,2,2,2,2,3,3$.

מטלת מנחה (ממ״ן) 16

הקורס: 20476 – מתמטיקה בדידה

חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים – כל היחידה

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2018א **מועד הגשה: 2.2.2018**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (25 נקודות)

בהנתן גרף כלשהו, הנה אלגוריתם לבניית מסלול בגרף:

פתיחה: נבחר צומת כלשהו כרצוננו. בצומת זה מתחיל המסלול.

התקדמות: מצומת שאנו נמצאים בו נתקדם לצומת שכֵן לאורך קשת כלשהי, נקפיד רק <u>לא לחזור על קשת שכבר הלכנו בה</u>. אם יש כמה קשתות אפשריות, נבחר אחת מהן כרצוננו. כל עוד זה אפשרי, נמשיך להתקדם בגרף.

סיום: כאשר נגיע לצומת שכבר לא ניתן להתקדם ממנו - סיימנו.

האלגוריתם מחזיר את (כלומר התוצאה שלו היא) המסלול שנוצר.

(12 נק׳) א. הוכיחו שבגרף שכל צמתיו בעלי דרגה זוגית, אלגוריתם זה מחזיר תמיד מעגל (אפשר להניח שהגרף פשוט, אם כי זה לא חיוני).

(13 נק׳) ב. כידוע, גרף קשיר שכל צמתיו בעלי דרגה זוגית הוא אוילרי. הראו שהאלגוריתם שהבאנו **אינו** פותר את הבעיה של מציאת מעגל אוילר, כי הוא עשוי להחזיר מעגל שאינו מעגל אוילר: **תנו דוגמא** לגרף פשוט וקשיר, שכל צמתיו בעלי דרגה זוגית, ומסלול **שאינו** מעגל אוילר, שעשוי להתקבל על ידי האלגוריתם. ציינו בבירור היכן תחילת המסלול שלכם.

שאלה 2 (15 נקודות)

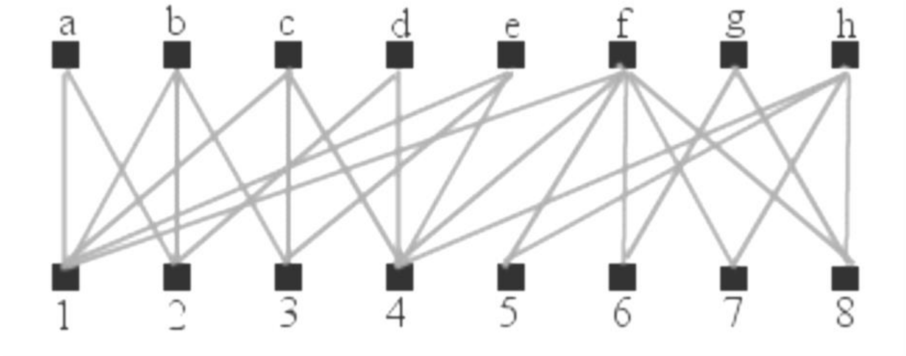
השאלה מתייחסת לגרף שהוגדר בממ״ח 05 , שאלה 3. אפשר להסתמך על פתרון הממ״ח.

(5 נק׳) א. האם יש בגרף זה מעגל אוילר? הוכח

(10 נק׳) ב. האם יש בגרף זה מעגל המילטון? הוכח

שאלה 3 (15 נקודות)

הוכיחו כי בגרף הבא לא קיים זיווג מושלם.



שאלה 4 (45 נקודות)

G הוא גרף פשוט על קבוצת הצמתים $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

בין כל שני צמתים שונים i,j המקיימים $1 \le i \le 4$ וגם $1 \le j \le 4$ יש קשת של G.

בין כל שני צמתים שונים i,j המקיימים $5 \le i \le 9$ וגם $5 \le j \le 9$ יש קשת של G.

בנוסף על כל הקשתות הללו יש ב- G **עוד בדיוק חמש קשתות** (בסעיף ה' נקרא להן "הקשתות המיוחדות").

יהי $H = \bar{G}$ הגרף המשלים של G.

א. הוכיחי ש- H הוא דו-צדדי.

ב. מהו מספר הצביעה של H? הוכח.

ג. חשבי את מספר הקשתות של H .

ד. בהנחה ש- H קשיר, הוכיחי ש- H אינו מישורי.

ה. נחזור לעסוק בגרף המקורי, G. בסעיף זה בלבד נניח שלחמש ה"קשתות המיוחדות" של G יש צומת משותף (צומת שהוא שכן של כל אחת מחמש הקשתות).
בהנחה זו, מהו מספר הצביעה של G ? הוכיחי.