ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20585

מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חוברת הקורס - אביב 2017ב

כתב: אלעזר בירנבוים

מרץ 2017 - סמסטר אביב - תשע"ז

תוכן העניינים

אל הסטודנטים	א
1. לוח זמנים ופעילויות	ג
2. תיאור המטלות	ה
3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס	ו
ממ"ן 11	1
ממ"ן 12	5
ממ"ן 13	7
ממ"ן 14	11
ממ"ן 15	13

אל הסטודנטים,

אני מקדם את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים.
בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.
פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:
http://telem.openu.ac.il
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

שעות הייעוץ בקורס מתקיימות בימי ראשון בשעות 18:00-20:00 בטלפון 04-6850321.
אבקש מאוד לא להתקשר לטלפון הזה בשעות לא סבירות ובשבתות.
ניתן לפנות גם בדואר אלקטרוני: elazar@openu.ac.il

אני מאחל לכם הצלחה בלימודים.

לתשומת לב הסטודנטים הלומדים בחו"ל:
למרות הריחוק הפיסי הגדול, נשתדל לשמור אתכם על קשרים הדוקים ולעמוד לרשותכם ככל האפשר. הפרטים החיוניים על הקורס נכללים בחוברת הקורס וכן באתר הקורס. מומלץ מאד להשתמש באתר הקורס ובכל אמצעי העזר שבו וכמובן לפנות אלינו במידת הצורך.

בברכה,

אלעזר בירנבוים

מרכז ההוראה

1. לוח זמנים ופעילויות (20585 / 2017ב)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
1	24.3.2017-19.3.2017	פרק 1		
2	31.3.2017-26.3.2017	פרק 1	מפגש ראשון	
3	7.4.2017-2.4.2017	פרק 2		ממ"ן 11 7.4.2017
4	14.4.2017-9.4.2017 (ב ערב פסח) (ג-ו פסח)	פרק 2 פרק 3		
5	21.4.2017-16.4.2017 (א-ב פסח)	פרק 3	מפגש שני	
6	28.4.2017-23.4.2017 (ב יום הזכרון לשואה)	פרק 3 פרק 4		ממ"ן 12 28.4.2017
7	5.5.2017-30.4.2017 (ב יום הזיכרון) (ג יום העצמאות)	פרק 4	מפגש שלישי	
8	12.5.2017-7.5.2017	פרק 4		

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ״ן (למנחה)
9	19.5.2017-14.5.2017 (א ל״ג בעומר)	פרק 4	מפגש רביעי	
10	26.5.2017-21.5.2017 (ג יום ירושלים)	פרק 4 פרק 5		ממ״ן 13 26.5.2017
11	2.6.2017-28.5.2017 (ד שבועות)	פרק 5	מפגש חמישי	
12	9.6.2017-4.6.2017	פרק 5 פרק 6		ממ״ן 14 9.6.2017
13	16.6.2017-11.6.2017	פרק 6	מפגש שישי	
14	23.6.2017-18.6.2017	פרק 7		
15	30.6.2017-25.6.2017	פרק 7	מפגש שביעי	ממ״ן 15 30.6.2017

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

2. תיאור המטלות

קראו היטב עמודים אלו לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס - הבנה מעמיקה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. המטלות תיבדקנה על-ידי המנחה ותוחזרנה בצירוף הערות המתייחסות לתשובות.

המטלות מלוות את יחידות הלימוד בקורס. להלן פירוט המטלות, היחידות שאליהן מתייחסת כל מטלה ומשקלה היחסי. בחלק מהמטלות תופענה גם שאלות המתייחסות ליחידות שכבר נלמדו.

ממ"ן 11 - פרק 1 - 6 נקודות
ממ"ן 12 - פרקים 2, 3 - 6 נקודות
ממ"ן 13 - פרק 4 - 8 נקודות
ממ"ן 14 - פרק 5 - 4 נקודות
ממ"ן 15 - פרקים 6, 7 - 6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל של 24 נקודות לפחות.
שימו לב שחובה להגיש את ממ"ן 13.

ללא צבירת 24 נקודות בהגשת מטלות לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

למען הסר ספק, יודגש שחל איסור על הכנה משותפת והעתקה של מטלות או חלקי מטלות.
(הנושא מפורט בתקנון משמעת לסטודנטים - נספח 1 של ידיעון האו"פ).

לתשומת לבכם!
כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן: אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלה** בציון הנמוך ביותר, שציונה נמוך מציון הבחינה, לא תילקח בחשבון בעת שקלול הציון הסופי. זאת בתנאי שמטלה זו **אינה חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס.
סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון שמספרו 09-7782222, או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא http://www.openu.ac.il/sheilta קורסים ⇦ ציוני מטלות ובחינות ⇦ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.
יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות

שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של ציוני המטלות והבחינה יהיה נמוך מ-60).

<u>כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.</u>

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל כולל של 24 נקודות לפחות.

ב. ציון של לפחות 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2017ב **מועד אחרון להגשה:** 7 אפר' 17

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (12%)

הציגו **תיאור מלא** (כמו איור 3.8 בספר) של מכונת טיורינג שמכריעה את השפה $A_3 = \{0^{3^n} \mid n \geq 0\}$.

(A_3 היא שפת המחרוזות של 0-ים שאורכן הוא חזקה שלמה של 3).

אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$.

למכונה יהיו **לא יותר מתשעה מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

פעולת המכונה צריכה להיות מקבילה למכונה של איור 3.8.

הסבירו היטב את פעולת המכונה ולמה היא אכן מכריעה את השפה A_3.

שאלה 2 (16%)

א. הציגו תיאור מלא של מכונת טיורינג **שמכריעה** את השפה הריקה $\emptyset$.

ב. הציגו תיאור מלא של מכונת טיורינג **שמזהה** את השפה הריקה $\emptyset$ אך **איננה מכריעה** אותה.

בתשובות לשני הסעיפים עליכם להציג מכונות עם **מספר קטן ככל האפשר** של מצבים, **ולהסביר היטב** מדוע המכונות אכן מבצעות את הנדרש.

שאלה 3 (15%)

נעיין במודל החישובי הבא: מכונת טיורינג **עם אינסוף מצבים**.
מכונה כזו זהה למכונה רגילה, פרט לכך שמספר המצבים יכול להיות אינסופי (ולכן גם התחום והטווח של פונקצית המעברים יכולים להיות אינסופיים).

האם למכונה כזו **יש יותר כוח** מאשר למכונה רגילה?

אם עניתם שכן, עליכם להראות שמכונה עם אינסוף מצבים יכולה לזהות שפות שאי אפשר לזהות אותן בעזרת מכונה עם מספר סופי של מצבים.
בנוסף עליכם להסביר מדוע אין בקיומה של מכונה כזו סתירה לתזה של צ'רץ'-טיורינג.

אם עניתם שלא, עליכם להראות כיצד מכונה עם מספר **סופי** של מצבים יכולה לחקות את פעולתה של מכונה עם **אינסוף** מצבים.

שאלה 4 (15%)

תארו מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית** לזיהוי השפה הבאה:

$$F = \{\#x_1\#x_2\# \dots \#x_k \mid \text{each } x_i \in \{0, 1\}^* \text{ and } x_i = x_j \text{ for some } i \neq j\}$$

רמת הפירוט תהיה כמו בדוגמה 3.12 בספר.
המכונה צריכה להשתמש באי-דטרמיניזם באופן שיקל על החישובים (לעומת מכונה דטרמיניסטית לאותה המשימה).

שאלה 5 (15%)

תהי w מחרוזת סמלים. מסמנים על-ידי w^R את המחרוזת המתקבלת מ-w על-ידי היפוך סדר הסמלים ב-w.

דוגמה: $11001^R = 10011$

בנו מונה (enumerator) לשפה $D = \{w\#w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$.

האלפבית Σ של סרט הפלט יהיה $\{0, 1, \#\}$; האלפבית Γ של סרט העבודה יהיה $\{0, 1, \sqcup\}$.

למונה יהיו **לא יותר משנים עשר מצבים** (כולל q_{print} ו-q_{halt}).

תארו את המונה בעזרת איור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{halt} וכל הקשתות שנכנסות אליו. אפשר לוותר על הציור של מעברים בלתי אפשריים).
הקפידו על כך שהאיור יהיה גדול, בהיר, וללא קשתות נחתכות.
להגדרה פורמלית של מונה, עיינו במדריך הלמידה.

הסבירו היטב את פעולת המונה, ולמה הוא אכן מפיק את השפה D.

שאלה 6 (15%)

הוכיחו: שפה A היא מזוהה-טיורינג אם ורק אם יש מונה (enumerator) שמפיק את A וכל מילה ב-A מודפסת על-ידי המונה **פעם אחת ויחידה**. (כלומר, מילה ששייכת ל-A מודפסת פעם אחת; מילה שלא שייכת ל-A לא מודפסת אף פעם).

(ההבדל בין משפט 3.21 למה שאתם צריכים להוכיח בשאלה הוא הדרישה שכל מילה בשפה תודפס רק פעם אחת).

שאלה 7 (12%)

בעיה 3.12 בספר (עמוד 189).

הדרכה: אפשר להיעזר בטענה של בעיה 3.13 בספר. (טענה זו מוכחת במדריך הלמידה בתרגיל 1.10).

מטלת מנחה (ממ״ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2017ב **מועד אחרון להגשה:** 28 אפרי' 17

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1 (10%)

מסמנים על-ידי $|C|$ את הגודל (העוצמה) של הקבוצה C. מסמנים על-ידי $L(M)$ את השפה שמזהה אוטומט סופי דטרמיניסטי M.

הוכיחו שהשפה G_{DFA} שלהלן היא **שפה כריעה**:

$$G_{\mathrm{DFA}} = \{\langle A, B\rangle \mid |L(A)| > |L(B)| \text{ ; הם אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים } B \text{ ו-} A\}$$

מילה מהצורה $\langle A, B\rangle$ שייכת לשפה G_{DFA} אם A ו-B הם תיאורים של אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים, והשפה שמזהה האוטומט A גדולה יותר מן השפה שמזהה האוטומט B.

אם שתי השפות אינסופיות, אז $|L(A)| = |L(B)|$; אם אחת סופית ואחת אינסופית, אז האינסופית גדולה מן הסופית; אם שתיהן סופיות, אז $|L(A)| > |L(B)|$ אם ורק אם מספר המילים ב-$L(A)$ גדול ממספר המילים ב-$L(B)$.

שאלה 2 (10%)

נסמן על-ידי $\mathbb{N}_0$ את קבוצת המספרים הטבעיים עם 0: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

הוכיחו שהפונקציה g הבאה היא **התאמה** (correspondence) של $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ו-$\mathbb{N}_0$:

$$g(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$$

(להגדרת התאמה עיינו בספר בהגדרה 4.12).

שאלה 3 (15%)

הוכיחו: אם יימצא אלגוריתם פלאי להכרעת השפה A_{TM}, אז אפשר יהיה להיעזר בו כדי להכריע את השפה $HALT_{\mathrm{TM}}$ המוגדרת בעמוד 216 בספר.

שאלה 4 (15%. סעיף א - 5%, סעיף ב - 10%)

נגדיר את השפה L הבאה :

$L = \{<M> \mid$; M הוא תיאור של מכונת טיורינג

כאשר M רצה על $<M>$, היא מגיעה למצב q_{accept}, ועל הסרט כתובה המילה הריקה$\}$

L היא שפת המחרוזות שמתארות מכונות טיורינג M בעלות התכונה הבאה :

כש-M רצה על $<M>$ כקלט, היא מסיימת במצב q_{accept}, ואז הסרט של המכונה מכיל רק סמלי רווח.

א. הוכיחו : השפה L **מזוהה-טיורינג**.

ב. הוכיחו **בעזרת שיטת האלכסון** שהשפה L **איננה כריעה**.

הדרכה : הניחו בשלילה שיש מכונה H שמכריעה את L. בנו מכונה D שתפעל הפוך מכל מכונה M שהיא.

שאלה 5 (18%)

ביחס לכל שפה שלהלן, קבעו האם אפשר להוכיח שהיא לא כריעה **בעזרת משפט Rice** (ראו בעיה 5.16 בספר). אם קבעתם שכן, כתבו את ההוכחה. אם קבעתם שלא, **הסבירו היטב** למה לא.

א. $A = \{<M> \mid M \text{ is a TM and } |L(M)| < 50\}$

(A היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג שמקבלות פחות מ-50 מילים).

ב. $B = \{<M> \mid M \text{ is a TM and } M \text{ accepts every word } w \text{ within 1,000 steps}\}$

(B היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג שמקבלות כל מילה w בתוך 1,000 צעדים).

ג. $DECIDABLE_{TM} = \{<M> \mid M \text{ is a TM and } L(M) \text{ is a decidable language}\}$

(זוהי שפת התיאורים של מכונות טיורינג שהשפה שהן מזהות היא שפה כריעה).

שאלה 6 (12%)

תארו אוטומט חסום לינארית (LBA) שמכריע את השפה A_{NFA} (המוגדרת בספר בעמוד 195).

שאלה 7 (20%. סעיף א - 6%, סעיף ב - 12%, סעיף ד - 2%)

בבעיה 5.18 בספר (עמוד 240) מוגדרת השפה $INFINITE_{TM}$.

א. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $INFINITE_{TM}$ (הראו : $A_{TM} \leq_m INFINITE_{TM}$).

ב. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $\overline{INFINITE_{TM}}$ (הראו : $A_{TM} \leq_m \overline{INFINITE_{TM}}$).

הדרכה : אם מכונת טיורינג M מקבלת את הקלט w, אז כשמריצים את M על w מגיעים למצב המקבל לאחר מספר סופי של צעדים.

מכונת טיורינג N יכולה להתייחס לקלט שלה כאל מספר הצעדים שיש להריץ מכונה אחרת S.

(למשל, אם הקלט של N הוא v, אז N תריץ את S $|v|$ צעדים).

ג. הסיקו : $INFINITE_{TM}$ ו- $\overline{INFINITE_{TM}}$ **אינן מזוהות-טיורינג**.

מטלת מנחה (ממ״ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 8 **משקל המטלה:** 8 נקודות

סמסטר: 2017ב **מועד אחרון להגשה:** 26 מאי 17

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1 (12%)

תהי w מחרוזת סמלים. מסמנים על-ידי w^R את המחרוזת המתקבלת מ-w על-ידי היפוך סדר הסמלים ב-w.

דוגמה: $11001^R = 10011$

מילה w נקראת **פלינדרום** אם $w=w^R$.

דוגמה: 1100011 היא פלינדרום; 110001 איננה פלינדרום.

נגדיר את השפה PAL:

$$PAL = \{w\in\{0,1\}^* \mid w=w^R\}$$

(זוהי שפת הפלינדרומים מעל האלפבית $\{0,1\}$).

מצאו פונקציה $t(n)$ מינימלית, כך ש- $PAL\in\mathrm{TIME}(t(n))$

א. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד.

ב. במכונה דטרמיניסטית עם שני סרטים.

ג. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד שיש לו שני ראשים קוראים-כותבים.

הסבירו את תשובותיכם.

שאלה 2 (14%. כל סעיף 7%)

הוכיחו שהשפות הבאות שייכות למחלקה P :

א. A_{NFA} (ראו משפט 4.2 בספר).

ב. $C = \{<G, w> \mid G$ is a CFG in Chomsky normal form and w has more than one parse tree in $G\}$

$<G, w>$ שייכת ל-C אם G הוא דקדוק חסר הקשר בצורה הנורמלית של חומסקי, $w \in L(G)$,

ויש יותר מאופן אחד לגזור את w בדקדוק G.

שאלה 3 (15%. כל סעיף 5%)

א. הציעו מאמת (verifier) לשפה $\overline{ALL_{\text{CFG}}}$ (ראו משפט 5.13 בספר).

ב. הסבירו מדוע המאמת שהצעתם **איננו בהכרח** בעל זמן ריצה פולינומיאלי בגודל הקלט.

ג. הוכיחו : $\overline{ALL_{\text{CFG}}}$ **לא שייכת ל-NP**.

שאלה 4 (7%)

האם השפה C שלהלן שייכת למחלקה NP? הוכיחו את תשובתכם.

$C = \{<n, m> \mid m$-מספר הראשוניים השונים בפירוק לגורמים ראשוניים של n איננו גדול מ$\}$

(למשל, $<3276, 4> \in C$ ‏(3276 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$), $<3276, 3> \notin C$).

שאלה 5 (12%)

בהוכחת משפט Cook-Levin (משפט 7.37 : SAT היא NP-שלמה) בונים נוסחה בוליאנית ϕ שהיא AND של ארבע נוסחאות : $\phi = \phi_{\text{cell}} \wedge \phi_{\text{start}} \wedge \phi_{\text{move}} \wedge \phi_{\text{accept}}$

הנוסחה ϕ_{cell} נראית מיותרת : שלוש הנוסחאות האחרות אומרות שהשורה הראשונה מתאימה לקונפיגורציה ההתחלתית (ϕ_{start}), שהמעבר משורה לשורה נעשה לפי פונקצית המעברים של המכונה (ϕ_{move}), ושיש שורה שמתאימה לקונפיגורציה מקבלת (ϕ_{accept}). זה נראה מספיק כדי לקבוע שמילת הקלט מתקבלת על-ידי המכונה.

הסבירו היטב למה צריך גם את ϕ_{cell}.

שאלה 6 (15%)

עיינו בהגדרת השפה *3COLOR* בבעיה 7.38 בספר (עמוד 326).

הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של *3COLOR* ל-*3SAT* (הראו כי $3COLOR \leq_P 3SAT$).

עליכם להראות רדוקציה ישירה, ולא רדוקציה כמו בהוכחת משפט Cook-Levin.

הדרכה: התאימו שלושה משתנים בוליאניים לכל צומת v בגרף - v_1, v_2 ו-v_3.

ערכו של המשתנה v_i ($i = 1, 2, 3$) יהיה 1 אם הצומת v צבוע בצבע i, ויהיה 0 אם הצומת v צבוע באחד משני הצבעים האחרים.

בנו פסוקיות (בגודל 2 או 3) שיאמרו:

- לכל צומת v בגרף, v צבוע בצבע אחד ויחיד
- לכל קשת (u, v) בגרף, u ו-v צבועים בצבעים שונים

תארו את הרדוקציה, הוכיחו שהיא תקפה, והראו שהיא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 7 (7%)

יהי Σ אלפבית נתון.

מצאו את כל השפות L כך ש- $L \equiv_P \Sigma^*$ ואת כל השפות K כך ש- $K \equiv_P \varnothing$.

הסבירו היטב את תשובותיכם.

(היחס $\equiv_P$ מוגדר במדריך הלמידה בעמוד 70).

שאלה 8 (18%)

א. הוכיחו שהשפה $NONDISJOINT_{DFA}$ שלהלן שייכת למחלקה P:

$$NONDISJOINT_{DFA} = \{<A, B> \mid A \text{ and } B \text{ are DFAs and } L(A) \cap L(B) \neq \varnothing\}$$

מילה $<A, B>$ שייכת לשפה אם A ו-B הם תיאורים של אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים שהשפות שהם מזהים אינן זרות זו לזו.

ב. הוכיחו שהשפה $NONEMPTY\text{-}INTER_{DFA}$ שלהלן היא שפה **NP-קשה**:

$$NONEMPTY\text{-}INTER_{DFA} = \{<A_1, ..., A_k> \mid A_1, ..., A_k \text{ are DFAs and } L(A_1) \cap \cdots \cap L(A_k) \neq \varnothing\}$$

מילה $<A_1, A_2, ..., A_k>$ שייכת לשפה אם A_1, A_2, ..., A_k הם תיאורים של אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים, ויש מילה ששייכת לכל אחת מן השפות של האוטומטים הללו.

הדרכה: הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של *3SAT*.

אפשר לייצג השמה של ערכים בוליאניים ל-n משתנים בוליאניים x_1, x_2, ..., x_n בעזרת מחרוזות באורך n מעל $\{0, 1\}$: המקום ה-i במחרוזת יציין את ערכו של x_i.

לכל פסוקית בנו אוטומט שיזהה את שפת כל המחרוזות מעל $\{0, 1\}$ שמתאימות להשמות שמספקות את הפסוקית.

(סעיף ג מופיע בעמוד הבא)

ג. הסבירו היטב מהו ההבדל בין השפה של סעיף א לשפה של סעיף ב שגורם לכך שהראשונה שייכת ל-P והשנייה היא NP-קשה. (תשובה בסגנון "פה יש שני אוטומטים ופה יש k אוטומטים" לא תתקבל כתשובה נכונה. זה לא מסביר את ההבדל).

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2017ב **מועד אחרון להגשה:** 9 יוני 17

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

נגדיר: $UHAMCIRCUIT = \{<G> \mid G \text{ is an undirected graph that has a Hamiltonian circuit}\}$

(זוהי שפת הגרפים הלא מכוונים שיש להם מעגל המילטון).

הוכיחו שהשפה $UHAMCIRCUIT$ שייכת ל-SPACE(n).

הציגו אלגוריתם להכרעת השפה, הסבירו היטב כיצד הוא ימומש, והוכיחו שהמקום הדרוש הוא $O(n)$.

שאלה 2 (10%)

הראו רדוקציה **בעלת זמן ריצה $O(n^2)$** של השפה SAT לשפה $TQBF$.

הדרכה: זו לא הרדוקציה של הוכחת משפט 8.9.

שאלה 3 (30%)

תזכורת: $A_{\text{LBA}} = \{<M, w> \mid M \text{ is an LBA, } w \text{ is a string, and } M \text{ accepts } w\}$

א. הוכיחו: השפה A_{LBA} שייכת ל-PSPACE.

ב. תהי A שפה ב-PSPACE. תארו רדוקציה בעלת זמן ריצה פולינומיאלי של A ל-A_{LBA}. (הראו כי $A \le_P A_{\text{LBA}}$ על-ידי הצגת רדוקציה בזמן פולינומיאלי של A ל-A_{LBA}).

ג. הסיקו: A_{LBA} היא שפה PSPACE-שלמה.

שאלה 4 (10%)

האם המחלקה L סגורה לפעולת השרשור (concatenation)? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 5 (20%)

נגדיר את השפה B הבאה: $B = \{e \mid e \text{ is an expression of properly nested parentheses}\}$

B היא שפת הביטויים האריתמטיים של מספרים שלמים אי-שליליים שבהם הסוגריים תקינים.

האלפבית של B הוא $\Sigma = \{+, –, \times, /, (,), 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

דוגמאות למילים ששייכות ל-B: (1+2+5)–(2/3)+((2)+((2–95)/14)), (2×3+5–4)/3, (2–4), 143+5

דוגמאות למילים שלא שייכות ל-B: ((2+5)×(5/7), (2+×5),)145+16(, (234+156, 89+, 45+( ), –6

הוכיחו שהשפה B **שייכת למחלקה L**.

עליכם לתאר מכונה דטרמיניסטית, בעלת סיבוכיות מקום לוגריתמית, שמכריעה את B.

שאלה 6 (20%)

בעיה 8.18 בספר (עמוד 359).

הדרכה: הראו: $A_{NFA} \in NL$ ו- $PATH \leq_L A_{NFA}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: סעיפים 9.1, 10.1 ו-10.2 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2017ב **מועד אחרון להגשה:** 30 יוני 17

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20%)

א. יהי k מספר טבעי. מה יקרה כאשר נריץ את המכונה D מהוכחת משפט 9.3 על הקלט $<D>10^k$?
(כלומר, מריצים את המכונה D על התיאור שלה שאחריו רשומה המחרוזת 10^k).
הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. מה יקרה כאשר נריץ את המכונה D מהוכחת משפט 9.10 על הקלט $<D>10^k$?
הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 2 (8%)

האם **ממה שנלמד בסעיף 9.1** בספר אפשר להסיק **שכל** שפה PSPACE-שלמה איננה שייכת ל-NL?
הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 3 (14%)

הוכיחו: $\text{NP} \neq \text{SPACE}(n)$.

שאלה 4 (10%)

עיינו באלגוריתם A בעמוד 394 בספר הלימוד.

כזכור, הוכח שאלגוריתם זה הוא בעל יחס קירוב ≤ 2.

הוכיחו שיחס הקירוב 2 הוא **הדוק** ביחס לאלגוריתם A (כלומר, יחס הקירוב ≤ 2):

הראו שלכל n טבעי גדול מ-0, יש גרף לא מכוון $G = (V, E)$ כך שמתקיים:

- $|V|=2n$ (בגרף G יש $2n$ קדקודים);
- יש תת-קבוצה U של V ($U \subseteq V$) המהווה כיסוי קדקודים מינימלי ו- $|U|=n$ (יש בגרף כיסוי קדקודים מינימלי שגודלו n);
- האלגוריתם A ימצא כיסוי שגודלו $2n$.

שאלה 5 (20%)

לִמדו את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה.
הניחו שמחירי הקשתות בבעיית הסוכן הנוסע הם **חיוביים**.

א. הוכיחו שעלות המסלול של הסוכן הנוסע שמוצא אלגוריתם הקירוב לבעיית הסוכן הנוסע המטרית **קטנה** מפעמיים עלות המסלול האופטימלי.
הדרכה: אם מורידים קשת אחת ממעגל המילטוני, מקבלים עץ פורש של הגרף.

ב. כזכור, הוכח שאלגוריתם זה הוא בעל יחס קירוב ≤ 2.
הוכיחו שיחס הקירוב 2 הוא **הדוק** ביחס לאלגוריתם (כלומר, אי אפשר להצביע על חסם קטן יותר).
הדרכה: לכל n אי-זוגי גדול מ-5, התבוננו בגרף מלא בעל n צמתים, $x_1, x_2, ..., x_n$, שהמחירים של הקשתות שלו הם כדלקמן: המחיר של כל קשת שנוגעת ב-x_1 הוא 1; המחיר של כל הקשתות מהצורה (x_i, x_{i+1}) הוא 1; המחיר של כל שאר הקשתות הוא 2.
הוכיחו שבגרף זה מתקיים אי-שוויון המשולש.
הוכיחו שהקירוב שהאלגוריתם משיג על גרף כזה הוא $2-2/n$.
הסיקו את התוצאה הנדרשת.

שאלה 6 (8%)

יהי p מספר ראשוני.

א. הוכיחו **בעזרת אינדוקציה**, שלכל a טבעי או 0, $a^p \equiv a \pmod p$.

ב. הסיקו את המשפט הקטן של פרמה (משפט 10.6) ממה שהוכחתם בסעיף א.

שאלה 7 (20%)

א. הוכיחו: אם P=NP, אז יש אלגוריתם **בעל זמן ריצה פולינומיאלי** לבעיה הבאה:

הקלט: נוסחה בוליאנית ϕ.

הפלט: השמה מספקת של ϕ אם ϕ ספיקה. אם ϕ לא ספיקה, יוחזר "לא".

(האלגוריתם מקבל כקלט נוסחה בוליאנית ϕ. אם אין ל-ϕ השמה מספקת, מוחזר "לא". אם יש ל-ϕ השמה מספקת, מוחזרת אחת ההשמות המספקות של ϕ. כלומר, מוחזרת הצבה של 0-ים ו-1-ים למשתנים של ϕ כך שהערך של ϕ בהצבה הזו הוא 1).

הדרכה: אם P=NP, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי ל-*SAT*.

אפשר לקרוא לאלגוריתם הזה כמה פעמים כדי למצוא הצבה למשתנים של ϕ שתספק את ϕ.

ב. בעיה 10.11 בספר (עמוד 439).

הדרכה: התאימו את מה שהראיתם בסעיף א.