פתרון ממ"ן 13

שאלה 1

מיצאו את העוצמות של כל אחת מן הקבוצות הבאות. נמקו את התשובות.

א. קבוצת כל המספרים הממשיים בקטע $(0,1)$ אשר בפיתוח שלהם כשבר עשרוני אינסופי מופיעות רק הספרות 0 ו- 1 ומימין לכל ספרה שהיא 0 מופיע תמיד הספרה 1.

ב. $\{\langle x, y\sqrt{2}\rangle \in \mathbf{Q} \times \mathbf{R} \mid x + y = 1\}$

ג. $\{\langle x, y, z\rangle \in \mathbf{Q} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x + y + z = 1\}$

ד. $\mathcal{P}(\mathbf{Q} \cap (11^{-10}, 10^{-10}))$

תשובה

א. נבחר בקטע $(0,1)$ אשר בפיתוח שלו כשבר עשרוני אינסופי מופיעות רק הספרות 0 ו- 1 ומימין לכל ספרה שהיא 0 מופיע תמיד הספרה 1. אם נחליף כל צמד 01 המופיע בפיתוח בספרה 2 נקבל פיתוח עשרוני אינסופי מופיעות רק הספרות 1 ו- 2 .

להפך אם בפיתוח עשרוני אינסופי של מספר בקטע $(0,1)$ מופיעות רק הספרות 1 ו- 2, לאחר החלפת כל ספרה שהיא 2 בצמד 01 נקבל מספר בקטע $(0,1)$ אשר בפיתוח שלו כשבר עשרוני אינסופי מופיעות רק הספרות 0 ו- 1 ומימין לכל ספרה שהיא 0 מופיע תמיד הספרה 1.

מכאן שהקבוצה הנתונה שקולה ל- $\{0,2\}^{\mathbf{N}}$ ולכן לפי שאלה 4.15 עוצמתה היא $\aleph$.

ב. כל איבר בקבוצה $\{\langle x, y\sqrt{2}\rangle \in \mathbf{Q} \times \mathbf{R} \mid x + y = 1\}$ הוא מהצורה $\langle x, (1-x)\sqrt{2}\rangle$ כאשר $x \in \mathbf{Q}$. במילים אחרות $\{\langle x, y\sqrt{2}\rangle \in \mathbf{Q} \times \mathbf{R} \mid x + y = 1\} = \{\langle x, (1-x)\sqrt{2}\rangle \mid x \in \mathbf{Q}\}$.

הפונקציה $f : \mathbf{Q} \to \{\langle x, (1-x)\sqrt{2}\rangle \mid x \in \mathbf{Q}\}$ המוגדרת על-ידי $f(x) = (x, (1-x)\sqrt{2})$ היא חד-חד-ערכית ועל, לכן $|\{\langle x, y\sqrt{2}\rangle \in \mathbf{Q} \times \mathbf{R} \mid x + y = 1\}| = |\mathbf{Q}| = \aleph_0$.

ג. נשים לב ש- $\{\langle x, y, z\rangle \in \mathbf{Q} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x + y + z = 1\}$ מכילה למשל $\{\langle 0, y, 1-y\rangle \mid y \in \mathbf{R}\}$.

הקבוצה האחרונה שקולה ל- $\mathbf{R}$ מפני שהפונקציה $f : \mathbf{R} \to \{\langle 0, y, 1-y\rangle \mid y \in \mathbf{R}\}$ המוגדרת על -ידי $f(y) = \langle 0, y, 1-y\rangle$ לכל $y \in \mathbf{R}$ היא חד-חד ערכית ועל.

מכאן ש- $\aleph = |\mathbf{R}| \le |\{\langle x, y, z\rangle \in \mathbf{Q} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x + y + z = 1\}|$.

מצד שני $\{\langle x, y, z\rangle \in \mathbf{Q} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x + y + z = 1\} \subseteq \mathbf{R}^3$ לכן

$|\{\langle x, y, z\rangle \in \mathbf{Q} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x + y + z = 1\}| \le |\mathbf{R}^3| = \aleph$ ולכן ממשפט קנטור ברנשטיין מקבלים ש- $|\{\langle x, y, z\rangle \in \mathbf{Q} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x + y + z = 1\}| = \aleph$.

ד. מצד אחד, $\mathbf{Q} \cap (11^{-10}, 10^{-10}) \subseteq \mathbf{Q}$ לכן $|\mathbf{Q} \cap (11^{-10}, 10^{-10})| \le |\mathbf{Q}| = \aleph_0$.

מצד שני, אם נסמן $\varepsilon = 10^{-10} - 11^{-10}$ אז $\varepsilon > 0$ ולכל $n \ge 1$ טבעי, המספרים $q_n = 11^{-10} + \varepsilon/n$ הם רציונליים, שונים זה מזה ושייכים לקטע הפתוח $(11^{-10}, 10^{-10})$ (שכן , $11^{-10} < q_n = 11^{-10} + \varepsilon/n < 11^{-10} + \varepsilon = 10^{-10}$). מכאן ש- $\mathbf{Q} \cap (11^{-10}, 10^{-10})$ מכילה קבוצה אינסופית ובת מניה ולכן $\aleph_0 \le |\mathbf{Q} \cap (11^{-10}, 10^{-10})|$.

ממשפט קנטור ברנשטיין נובע ש- $|\mathbf{Q} \cap (11^{-10}, 10^{-10})| = \aleph_0$,

לכן: $|\mathcal{P}(\mathbf{Q} \cap (11^{-10}, 10^{-10}))| = 2^{\aleph_0} = א$.

שאלה 2

פונקציה $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ נקראת **ריבועית** אם קיימים $a,b,c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ כך ש-

$f(x) = ax^2 + bx + c$ לכל $x \in \mathbf{R}$. נסמן:

A - קבוצת כל הפונקציות הריבועיות.

$B = \{ f \in A \mid f(0) \in \mathbf{Q} \}$

$C = \{ f \in A \mid f[\mathbf{Q}] \subseteq \mathbf{Q} \}$

מיצאו את היחסים ("=" או "<") בין כל שתיים מהעוצמות הבאות:

$|A|, |B|, |C|, |\mathcal{P}(B)|, |\mathcal{P}(C)|$. נמקו את התשובות.

תשובה

מציאת $|A|$.

כל פונקציה ריבועית $f(x) = ax^2 + bx + c$ נקבעת באופן יחיד על ידי שלושת המקדמים a,b,c.

ההתאמה המתאימה לכל שלשה סדורה $(a,b,c) \in (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ את הפונקציה הריבועית $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = ax^2 + bx + c$ לכל $x \in \mathbf{R}$ היא חד-חד-ערכית ועל.

לכן $|A| = |(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}|$.

מאחר ש- $\{1\} \times \mathbf{R}^2 \subseteq (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^3$ ובנוסף $|\{1\} \times \mathbf{R}^2| = |\mathbf{R}^2| = א$ וגם $|\mathbf{R}^3| = א$ נקבל שמצד אחד $|(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}| \le א$ ומצד שני $א \le |(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}|$ לכן ממשפט קנטור ברנשטיין מקבלים ש- $|A| = |(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}| = א$.

מציאת $|B|$.

אם $f(x) = ax^2 + bx + c$ אז $f(0) = c$. מכאן שפונקציה ריבועית $f(x) = ax^2 + bx + c$ שייכת לקבוצה B אם ורק אם $c \in \mathbf{Q}$. מכאן שלכל פונקציה ריבועית השייכת ל- B מתאימה שלשה סדורה אחת ויחידה (a,b,c) שבה $a,b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ ו- $c \in \mathbf{Q}$. לכן יש התאמה חד-חד-ערכית ועל בין B לבין $(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R} \times \mathbf{Q}$ ולכן $|B| = |(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R} \times \mathbf{Q}|$.

מכיוון ש- $\{1\}\times\mathbf{R}\times\{0\}\subseteq(\mathbf{R}\setminus\{0\})\times\mathbf{R}\times\mathbf{Q}$ נקבל ש-

$\aleph=|\{1\}\times\mathbf{R}\times\{0\}|\le|(\mathbf{R}\setminus\{0\})\times\mathbf{R}\times\mathbf{Q}|=|B|$.

מצד שני, $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}^3$ לכן $|B|=|(\mathbf{R}\setminus\{0\})\times\mathbf{R}\times\mathbf{Q}|\le|\mathbf{R}^3|=\aleph$.

משפט קנטור ברנשטיין מקבלים ש- $|B|=|\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{Q}|=\aleph$.

מכאן ש- $|\mathcal{P}(B)|=|2^B|=2^{|B|}=2^{\aleph}=\aleph'$. (ראו עמ' 201)

מציאת $|C|$.

C היא קבוצת כל הפונקציות הריבועיות $f(x)=ax^2+bx+c$ עם התכונה ש- $f(x)\in\mathbf{Q}$ לכל $x\in\mathbf{Q}$. נבדוק מה תכונה זו אומרת על שלושת המקדמים a,b,c שבעצם קובעים את הפונקציה.

ברור שצריך להתקיים $f(0)\in\mathbf{Q}$ כלומר $c\in\mathbf{Q}$. כמו-כן צריך להתקיים למשל ש-

$f(1)=a+b+c\in\mathbf{Q}$ וגם $f(-1)=a-b+c\in\mathbf{Q}$ כלומר $a+b+c=r$ ו- $a-b+c=q$ הם מספרים רציונליים.

נחבר את שני השוויונות ונקבל ש- $2a+2c=r+q$ כלומר $a=\frac{r+q}{2}-c$ ומכאן ש- $a\in\mathbf{Q}$.

נחסר את שני השוויונות ונקבל ש- $2b=r-q$ כלומר $b=\frac{r-q}{2}$ ומכאן ש- $b\in\mathbf{Q}$.

לכן קיבלנו שכל פונקציה השייכת ל- C היא מהצורה $f(x)=ax^2+bx+c$ כאשר $a,b,c\in\mathbf{Q}$.

מצד אם $f(x)=ax^2+bx+c$ כאשר $a,b,c\in\mathbf{Q}$, $a\neq 0$. אז מפני שסכום או מכפלה של מספרים רציונליים הם גם רציונליים נקבל שלכל $x\in\mathbf{Q}$ גם $f(x)=ax^2+bx+c\in\mathbf{Q}$ כלומר $f\in C$.

מכאן ש- C היא קבוצת כל הפונקציות הריבועיות $f(x)=ax^2+bx+c$ כך ש- $a,b,c\in\mathbf{Q}$ לכן יש התאמה חח"ע ועל בין C לבין $(\mathbf{Q}\setminus\{0\})\times\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$. מאחר ש- $|\mathbf{Q}|=|\mathbf{Q}\setminus\{0\}|=\aleph_0$ (משפט 4.4) ומכפלה קרטזית של מספר סופי של קבוצות בנות מניה היא בת מניה (ראו משפט 4.11) נקבל ש- $|C|=|(\mathbf{Q}\setminus\{0\})\times\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}|=\aleph_0$.

מכאן ש- $|\mathcal{P}(C)|=|2^C|=2^{|C|}=2^{\aleph_0}=\aleph$.

ובכן, קיבלנו את התוצאות הבאות: $|C|=\aleph_0$, $|\mathcal{P}(C)|=\aleph$, $|A|=|B|=\aleph$, $|\mathcal{P}(B)|=\aleph'$.

מאחר ש- $\aleph_0<\aleph<\aleph'$ נוכל לסכם ולקבוע ש- $|C|<|A|=|B|=|\mathcal{P}(C)|<|\mathcal{P}(B)|$

שאלה 3

א. נניח ש- A,B,C קבוצות כך ש- $C=A\cup B$ ו- $A\cap B=\varnothing$.

הוכיחו שהפונקציה $f:\mathcal{P}(C)\to\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$ המוגדרת על ידי $f(X)=\langle X\cap A, X\cap B\rangle$ לכל $X\in\mathcal{P}(C)$, היא הפיכה. הסיקו ש- $2^{|A\cup B|}=2^{|A|}\cdot 2^{|B|}$

ב. בחרו קבוצות A,B מתאימות והשתמשו בתוצאה מסעיף א' כדי להוכיח את הטענות הבאות:

1. $\aleph = \aleph \cdot \aleph$ (מותר להיעזר בטענות 4.14 ו- 4.15)

2. $\aleph' = \aleph' \cdot \aleph'$ (ראו ההגדרה של $\aleph'$ בפסקה המופיעה לפני סעיף 4.7 בספר)

תשובה

א. נראה ש- f היא חד-חד-ערכית.

נניח ש- $X,Y \in \mathcal{P}(C)$ ו- $f(X) = f(Y)$. אז $\langle X \cap A, X \cap B\rangle = \langle Y \cap A, Y \cap B\rangle$ ולכן

$X \cap A = Y \cap A$ ו- $X \cap B = Y \cap B$.

מכאן ש- $(X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$.

מחוקי הפילוג (משפט 1.20) נקבל ש- $X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B)$

כלומר $X \cap C = Y \cap C$ ומפני ש- $X,Y \subseteq C$ נקבל ש- $X = Y$. לכן f היא חד-חד-ערכית.

הוכיח כעת ש- f היא על. נבחר זוג כלשהו $\langle T,Z\rangle \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

מאחר ש- $T \subseteq A$ ו- $Z \subseteq B$ נקבל ש- $T \cup Z \subseteq C$ ו- $T \cap B = Z \cap A = \varnothing$.

נסמן כעת $X = Z \cup T$. אז $X \in \mathcal{P}(C)$ ומתקיים:

$f(X) = \langle X \cap A, X \cap B\rangle = \langle (T \cup Z) \cap A, (T \cup Z) \cap B\rangle$.

מחוקי הפילוג נקבל $(T \cup Z) \cap A = (T \cap A) \cup (Z \cap A) = T \cup \varnothing = T$

(שכן $Z \cap A = \varnothing$ ו- $T \subseteq A$).

באופן דומה נקבל ש- $(T \cup Z) \cap B = (T \cap B) \cup (Z \cap B) = \varnothing \cup Z = Z$

(כי $T \cap B = \varnothing$ ו- $Z \subseteq B$).

לכן $f(X) = \langle X \cap A, X \cap B\rangle = \langle (T \cup Z) \cap A, (T \cup Z) \cap B\rangle = \langle T,Z\rangle$ ולכן f היא על.

מכאן ש- f היא הפיכה ולכן $|\mathcal{P}(C)| = |\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)|$.

לכן לפי הגדרה 4.36 מתקיים $|\mathcal{P}(C)| = |\mathcal{P}(A)| \cdot |\mathcal{P}(B)|$ ולפי טענה 4.14 והגדרה 4.40 נקבל ש-

$2^{|C|} = 2^{|A|} \cdot 2^{|B|}$, כלומר $2^{|A \cup B|} = 2^{|A|} \cdot 2^{|B|}$.

ב. נבחר למשל $A = \{2n | n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{2n+1 | n \in \mathbf{N}\}$. אז $A \cup B = \mathbf{N}$ ו- $A \cap B = \varnothing$ לכן

לפי סעיף א', $2^{|A \cup B|} = 2^{|A|} \cdot 2^{|B|}$ ומאחר ש- $|A \cup B| = |A| = |B| = \aleph_0$ נקבל ש-

$2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0}$. מהטענות 4.14 ו- 4.15 ידוע ש- $\aleph = 2^{\aleph_0}$. לפיכך הוכחנו ש- $\aleph = \aleph \cdot \aleph$

נבחר כעת $A = [0,\infty)$, $B = (-\infty,0)$. אז $A \cup B = \mathbf{R}$ ו- $A \cap B = \varnothing$ לכן לפי סעיף א',

$2^{|A \cup B|} = 2^{|A|} \cdot 2^{|B|}$ ומאחר ש- $|A \cup B| = |A| = |B| = \aleph$ נקבל ש- $2^{\aleph} = 2^{\aleph} \cdot 2^{\aleph}$.

לפי הסימון המוגדר בעמוד 201, $\aleph' = 2^{\aleph}$ לפיכך הוכחנו ש- $\aleph' = \aleph' \cdot \aleph'$.

שאלה 4

א. יהי a מספר ממשי כך ש- $a+\frac{1}{a}$ הוא מספר שלם. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי

המספר $a^n+\frac{1}{a^n}$ הוא שלם.

ב. נתונה הפונקציה $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ המוגדרת על ידי $f(x)=\frac{x}{1+x}$ לכל $x\geq 0$.

לכל $n\geq 1$ טבעי נסמן ב- $f^{(n)}=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n}$ (ההרכבה של f על עצמה n פעמים).

מיצאו נוסחה ל- $f^{(n)}$ והוכיחו אותה באינדוקציה על n.

תשובה

א. נשים לב שמעצם ההנחה ש- $a+\frac{1}{a}$ קיים ושלם נובע ש- $a\neq 0$.

נוכיח את הטענה בעזרת עקרון האינדוקציה המורחבת (ראו עמוד 9 בתורת הקבוצות)

כפי שנראה במהלך ההוכחה, החישובים יהיו נוחים לנו כאשר $n\geq 2$ לכן נבדוק את נכונות

הטענה בנפרד עבור $n<2$. אכן, $a^0+\frac{1}{a^0}=2$ שלם וגם $a^1+\frac{1}{a^1}$ שלם על-פי הנתון.

נניח כעת ש- $n\geq 2$ טבעי ונניח הטענה מתקיימת עבור כל מספר טבעי שקטן מ- n כלומר

$a^m+\frac{1}{a^m}$ הוא מספר טבעי עבור כל $m<n$. עלינו להוכיח שאז $a^n+\frac{1}{a^n}$ שלם.

מאחר ש- $n\geq 2$, המספרים $n-1$ ו- $n-2$ הם טבעיים, הטענה נכונה עבורם.

לפי ההנחה $a^{n-1}+\frac{1}{a^{n-1}}$ שלם ו- $a+\frac{1}{a}$ שלם לכן גם המכפלה שלהם מספר שלם.

נסמן אותה ב- K. מתקיים: $K=\left(a^{n-1}+\frac{1}{a^{n-1}}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)=a^n+\frac{1}{a^n}+a^{n-2}+\frac{1}{a^{n-2}}$.

לפי ההנחה הטענה נכונה גם עבור $n-2$ לכן $a^{n-2}+\frac{1}{a^{n-2}}$ הוא מספר שלם.

מכאן נקבל ש- $a^n+\frac{1}{a^n}=K-\left(a^{n-2}+\frac{1}{a^{n-2}}\right)$ הוא מספר שלם, כהפרש של שלמים.

לפיכך תנאיי עקרון האינדוקציה המורחבת מתקיימים ולכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

ב. נשים לב שלכל $x\geq 0$, $0\leq\frac{x}{1+x}<1$ כלומר $0\leq f(x)<1$ לכן f היא אכן פונקציה מ- $[0,\infty)$

ל- $[0,\infty)$ וכך יהיו גם ההרכבות של f על עצמה.

לכל $x \geq 0$ מתקיים: $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{1+f(x)} = \frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x}$

הוכיח באינדוקציה ש לכל $n \geq 1$ טבעי מתקיים $f^{(n)}(x) = \frac{x}{1+nx}$ לכל $x \geq 0$.

עבור $n=1$ הטענה נכונה שכן $f^{(1)}(x) = f(x) = \frac{x}{1+1\cdot x}$ (לפי הנתון).

נניח כעת שהטענה נכונה עבור מספר טבעי $n \geq 1$ כלומר $f^{(n)} = \frac{x}{1+nx}$ לכל $x \geq 0$.

עלינו להוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$ כלומר $f^{(n+1)} = \frac{x}{1+(n+1)x}$ לכל $x \geq 0$.

מתקיים: $f^{(n+1)}(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n+1}(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n}(f(x)) = f^{(n)}(f(x))$.

לכן לפי הנחת האינדוקציה נקבל שלכל $x \geq 0$:

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(f(x)) = \frac{f(x)}{1+n\cdot f(x)} = \frac{\frac{x}{1+x}}{1+n\cdot\frac{x}{1+x}} = \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{1+x+nx}{1+x}} = \frac{x}{1+(n+1)x}$$

לכן לפי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $n \geq 1$ טבעי.