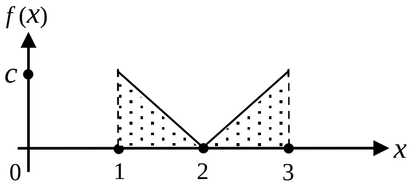
# פתרונות לממ"ן 12 - 2019א - 20425




1. א. נצייר את פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי $X$:
קל לראות שסך כל השטח המנוקד שווה ל- $c$ .
לפיכך, מקבלים כי $c = 1$ .
אך אפשר גם לחשב את הערך של $c$ באופן הבא:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = c\int_1^2(2-x)dx + c\int_2^3(x-2)dx = c\left[2x - \tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2 + c\left[\tfrac{1}{2}x^2 - 2x\right]_2^3$$
$$= c(4-2-2+0.5+4.5-6-2+4) = c = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c = 1$$

ב. למשתנה המקרי $X$ פונקציית צפיפות סימטרית וחסומה מלעיל, המוגדרת על קטע סגור. לפיכך, התוחלת של המשתנה המקרי $X$ חייבת להיות 2 (מרכז הסימטריה).

אפשר גם לחשב את התוחלת באופן הבא:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_1^2 x(2-x)dx + \int_2^3 x(x-2)dx = \left[x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_1^2 + \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2\right]_2^3$$
$$= 4 - \tfrac{8}{3} - 1 + \tfrac{1}{3} + 9 - 9 - \tfrac{8}{3} + 4 = 2$$

ג. לפי חישובי שטחים של משולשים:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{(2-x)^2}{2}}_{\substack{\text{שטח המשולש} \\ \text{בין } x \text{ ל- } 2}} = \frac{-x^2+4x-3}{2} & , \quad 1 \le x \le 2 \\ \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{(x-2)^2}{2}}_{\substack{\text{שטח המשולש} \\ \text{בין 2 ל- } x}} = \frac{x^2-4x+5}{2} & , \quad 2 \le x \le 3 \\ 1 & , \quad x \ge 3 \end{cases}$$

ד. $$P\{X < 2.5 \mid X > 2\} = \frac{P\{2 < X < 2.5\}}{P\{X > 2\}} = \frac{F_X(2.5) - F_X(2)}{1 - F_X(2)} = \frac{0.5 + 0.125 - 0.5}{1 - 0.5} = 0.25$$

ה. נמצא תחילה את הקשר בין פונקציות ההתפלגות המצטברת של $Y$ ושל $X$. לכל $0 \le y \le 4$ מתקיים:

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{(X-1)^2 \le y\} = P\{-\sqrt{y} \le X - 1 \le \sqrt{y}\}$$
$$= P\{0 \le X - 1 \le \sqrt{y}\} = P\{1 \le X \le 1 + \sqrt{y}\} = F_X(1+\sqrt{y})$$

ומכאן:
$$F_Y(3.24) = F_X(1+\sqrt{3.24}) = F_X(1+1.8) = F_X(2.8) = \frac{2.8^2 - 4\cdot 2.8 + 5}{2} = 0.82$$

2. נסמן ב-$X$ את אורך החיים (בשבועות) של רכיב מקרי ; $X \sim Exp\left(\frac{1}{250}\right)$.

א1. המשתנה המקרי המעריכי מקיים את תכונת חוסר-הזיכרון. לכן, מתקיים :

$$P\{X \geq 300 \mid X \geq 200\} = P\{X \geq 100\} = e^{-\frac{100}{250}} = e^{-0.4} = 0.6703$$

א2. נשים לב שידוע לנו שהרכיב פועל כבר 200 שבועות. כעת, מכיוון שהמשתנה המקרי המעריכי מקיים את תכונת חוסר-הזיכרון, התפלגות אורך החיים של הרכיב מעבר לזמן זה, כלומר, בהינתן שהוא פועל כבר 200 שבועות, נשארת מעריכית עם הפרמטר $\frac{1}{250}$. כלומר, אורך החיים של הרכיב המסוים הזה הוא 200 השבועות שנתון שהוא כבר פועל ועוד הזמן שיפעל מעבר לכך. נסמן את הזמן הנוסף שיפעל ב-$X$ ונקבל

שתוחלת אורך החיים של רכיב זה היא : $E[200 + X] = 200 + 250 = 450$

ושונות אורך החיים שלו היא : $\mathrm{Var}(200 + X) = \mathrm{Var}(X) = 250^2$

ב. כדי שהמנוע יפעל לפחות 400 שבועות, צריך להיות לפחות רכיב אחד שיפעל לפחות 400 שבועות. המאורע המשלים למאורע זה הוא שכל הרכיבים יפעלו פחות מ-400 שבועות. מכיוון שהרכיבים בלתי-תלויים זה בזה, קל לחשב את הסתברות המאורע המשלים. מקבלים :

$$(P\{X < 400\})^3 = (1 - e^{-\frac{400}{250}})^3 = 0.7981^3 = 0.5084$$

ומכאן שההסתברות המבוקשת היא : $1 - 0.5084 = 0.4916$

3. למשתנה המקרי $X$ יש התפלגות אחידה (רציפה) בין $-4$ ל- 7.

לכן, לכל $-4 < x < 7$, מתקיים : $F_X(x) = P\{X \leq x\} = \dfrac{x - (-4)}{7 - (-4)} = \dfrac{x + 4}{11}$

א. $$P\{X^2 - 16 > 0 \mid X > 0\} = \frac{P\{X^2 - 16 > 0, X > 0\}}{P\{X > 0\}} = \frac{P\{X > 4, X > 0\}}{P\{X > 0\}} = \frac{P\{X > 4\}}{P\{X > 0\}} = \frac{\frac{3}{11}}{\frac{7}{11}} = \frac{3}{7}$$

ב. $$E[|X^2 - 16|] = \int_{-4}^{4} \tfrac{1}{11}(16 - x^2)\,dx + \int_{4}^{7} \tfrac{1}{11}(x^2 - 16)\,dx = \tfrac{1}{11}\Big[16x - \tfrac{1}{3}x^3\Big]_{-4}^{4} + \tfrac{1}{11}\Big[\tfrac{1}{3}x^3 - 16x\Big]_{4}^{7}$$

$$= \tfrac{1}{11}[64 - \tfrac{64}{3} + 64 - \tfrac{64}{3}] + \tfrac{1}{11}[\tfrac{343}{3} - 112 - \tfrac{64}{3} + 64] = 11\tfrac{28}{33} = 11.\overline{84}$$

4. נסמן ב- $X$ את המשקל של צנצנת ממרח שוקולד מקרית. לפי נתוני הבעיה : $X \sim N(\mu, 12^2)$.

א. מנתוני הבעיה נובע כי : $P\{X > 364.16\} = 0.119$

לכן : $P\{X > 364.16\} = 1 - \Phi\left(\frac{364.16 - \mu}{12}\right) = 0.119$

או לחלופין : $\Phi\left(\frac{364.16 - \mu}{12}\right) = 1 - 0.119 = 0.881$

כעת, מטבלה 5.1 במדריך (עמוד 112), עולה כי : $\Phi(1.18) = 0.881$

**הסבר:**

| $z$ | 0.00 | 0.01 | $\cdots$ | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\vdots$ | | | | | |
| 1.1 | | | | $\Phi(1.18) =$ **0.9772** | |
| $\vdots$ | | | | | |

לכן: $\frac{364.16-\mu}{12} = 1.18 \quad \Rightarrow \quad \mu = 364.16 - 12 \cdot 1.18 = 350$

כלומר, התוחלת של משקל צנצנת ממרח שוקולד היא 350 גרם.

ב. $P\{X < 320\} = P\left\{Z < \frac{330-350}{12}\right\} = \Phi(-1.6667) = 1 - \Phi(1.6667)$

$= 1 - 0.9522 = 0.0478 = 4.78\% > 4\%$

**הסבר:**

| $z$ | 0.00 | ··· | 0.06 | 0.07 | ··· |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | | | | | |
| ⋮ | | | | | |
| 1.6 | | | $\Phi(1.66) = 0.9515$ | $\Phi(1.67) = 0.9525$ | |

$\Phi(1.6667) \cong 0.9522$

**והחישוב המדויק:**

$\Phi(1.66) = 0.9515$

$\Rightarrow 0.9525 - 0.9515 = \underline{\underline{0.001}}$

$\Phi(1.67) = 0.9525$

$\Rightarrow \Phi(1.66\underline{67}) = 0.9515 + 0.\underline{67} \cdot \underline{\underline{0.001}} = 0.9522$

מהתוצאה האחרונה נובע שהחברה **אינה** עומדת בהתחייבותה.

ג. נמצא את הערך של $a$ שמקיים את המשוואה: $P\{X < a\} = \Phi\left(\frac{a-350}{12}\right) = 0.25$

או לחלופין את המשוואה: $1 - \Phi\left(\frac{a-350}{12}\right) = \Phi\left(-\frac{a-350}{12}\right) = 0.75$

לשם כך, נעזר בטבלה 5.2 במדריך, ונקבל כי: $\Phi(0.674) = 0.75$

לפיכך: $-\frac{a-350}{12} = 0.674$

ומכאן שמתקיים: $a = 350 - 0.674 \cdot 12 = 341.912$ גרם

כלומר, ההסתברות שצנצנת מקרית תשקול פחות מ- 341.912 גרם היא 0.25.

ד. $$P\{X > 355 \mid X < 365\} = \frac{P\{355 < X < 365\}}{P\{X < 365\}} = \frac{\Phi(1.25) - \Phi(0.4167)}{\Phi(1.25)}$$

$$= \frac{0.8944 - 0.6616}{0.8944} = 0.2603$$

ה. נחשב תחילה את ההסתברות שצנצנת מקרית תשקול פחות מ-345 גרם:

$$P\{X < 345\} = P\left\{Z < \frac{345-350}{12}\right\} = \Phi(-0.4167) = 1 - \Phi(0.4167) = 1 - 0.6616 = 0.3384$$

כעת, כדי שהצנצנת האחרונה שתישקל תהיה העשירית שמשקלה נמוך מ-345 גרם, צריך שבין 29 הצנצנות שנשקלות ראשונות תהיינה עוד 9 צנצנות שמשקלן נמוך מ-345 גרם (ומשקל הצנצנת האחרונה חייב להיות גם הוא נמוך מ-345 גרם).

לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $\binom{29}{9} \cdot 0.3384^{10} \cdot 0.6616^{20} = 0.05092$