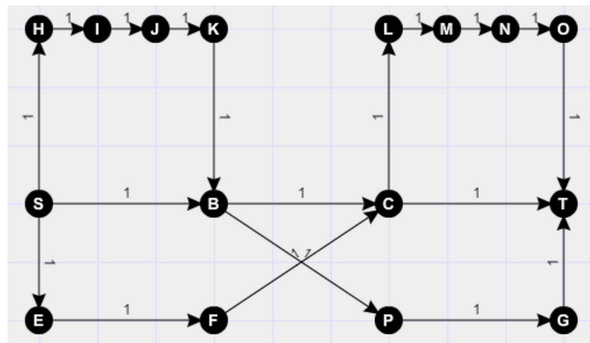
קורס 20417 סמסטר 2017ב

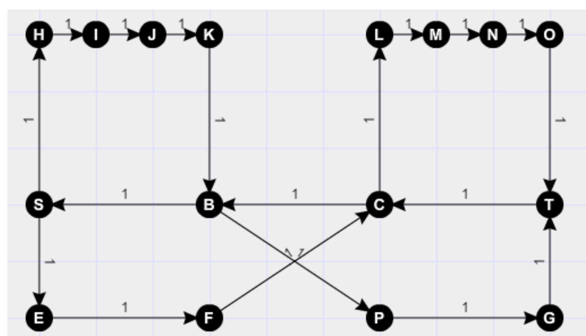
אודי ליוטשי 036745438

ממ"ן 15

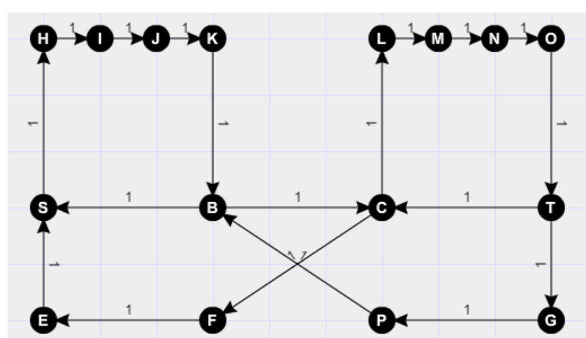
1)



האלגוריתם של Edmonds-Karp מחפש את המסלול הקצר ביותר, לכן המסלול שיבחר באיטרציה הראשונה יהיה S-B-C-T. לאחר האיטרציה הראשונה הגרף השיורי יראה כך:



כעת המסלול הקצר ביותר יהיה S-E-F-C-B-P-G-T, לכן לאחר האיטרציה השניה הגרף השיורי יראה כך:



כעת המסלול הקצר ביותר יהיה S-H-I-J-K-B-C-L-M-N-O-T, האלגוריתם יסיים עבודתו לאחר איטרציה זו.

נשים לב לקשת (B,C) ונראה שהיא מוסרת תחילה, נוספת ושוב מוסרת. תוספת הזרימה בכל איטרציה שבה נעשה בה שימוש שווה לקיבולת השיורית שלה כנדרש.

2)

א. נניח קיום של זרימה חוקית כלשהי, נסמן את הזרימה שלה ב-x. יהי y גדול כרצוננו ובפרט y>x, נכפיל את הזרימה של כל קשת ב y/x ונקבל זרימה y גדולה כרצוננו ובפרט גדולה מ-x ולכן עומדת באילוץ הקיבולת. הזרימה חוקית כי הזרימה שך כך צלע הוכפלה באותו יחס ולכן כלל "מה שנכנס = מה שיוצא" נשמר עבור כל קודקוד. אם הזרימה בכל צלע גדלה באותו יחס (אשר גדול מ-1) גם הזרימה הכללית גדלה ביחס זה ומאחר והוא גדול כרצוננו נקבל זרימה חוקית גדולה כרצוננו.

ב. הבעיה דומה לבעיית ההפצה עם חסם תחתון (עמ' 413 בספר) כאשר לכל v∈V מתקיים $d_v = 0$

פתרון לבעיה זו שקול לפתרון הבעיה הנתונה בסעיף זה.

נגדיר את הגרף G' והביקוש d'_v כך:

נמצא את הצלע עם הקיבולת הגדולה ביותר c_{max} , נגדיר לכל צלע הפצה התחלתית בגודל c_{max}, כך נבטיח שהפתרון עומד בתנאי הבעיה:

$$\forall e \in E \; f_0 = c_{max}$$

כיוון ששלחנו כבר c_{max} יחידות זרימה דרך כל קשת נצטרך לטפל בחוסר האיזון מצד הביקוש:

$$d'_v = f_0^{in}(v) - f_0^{out}(v)$$

נותרנו עם בעיית הפצה ללא חסם התחתון כאשר $d_v = 0$ אשר באמצעות רדוקציה ניתן להמירה לבעיית רשת זרימה ע"י הוספת צומת מקור-על וצומת בור-על כפי שמוזכר בעמ' 411 בספר. פתרון זה שקול לפתרון הבעיה המקורית.

את פתרון בעיית הזרימה שקיבלנו מהרדוקציה ניתן לבצע ע"י הרצת האלגוריתם של Edmons-Krab

זמן הריצה יהיה $O(m^2 n)$

נכונות הפתרון מבוססת על משפט 7.50 וההוכחה בעמ' 415 בספר.

ג. נריץ את האלגוריתם מסעיף ב ונבנה גרף G' אשר יהיה עותק של גרף המקורי G אשר s,t מחליפים תפקיד, כיוון כל הקשתות מתהפך והקיבולת של כל קשת שווה להפרש בין הזרימה בקשת שקיבלנו מסעיף ב' והקיבולת המקורית של הצלע (נקבל מספר אי שלילי).

נריץ על G' את האלגוריתם של Edmons-Krab, התוצאה שנקבל תייצג את הזרימה המקסימלית שניתן להפחית מהזרימה שקיבלנו בסעיף ב' כך שהזרימה תשאר חוקית, מכאן שקיבלנו זרימה חוקית מינימלית.

הוכחת נכונות:

ראשית נוודא שהזרימה בכל צלע אינה קטנה מהקיבולת. הקיבולת של הצלעות ב-G' היא ההפרש בין הזרימה לקיבולת ב-G, לכן גם אם הזרימה בכל צלע תהיה שווה לקיבולת ב-G' נקבל שהזרימה ב-G שווה לקיבולת ולכן חוקית:

$$f(e) = c(e) + x$$

$$f'(e) \le c'(e) = f(e) - c(e) = x \;\; \rightarrow \;\; f(e) - f'(e) \ge c(e)$$

תנאי נוסף שנבדוק הוא שהזרימה אכן מזערית. נניח בשלילה שהתוצאה שקיבלנו איננה מזערית, אז תוצאת הזרימה המקסימלית ב-G' איננה מקסימלית בסתירה להוכחת נכונות האלגוריתם, לכן מצב זה אינו אפשרי והתוצאה אכן מזערית.

ניתוח זמן ריצה:

בניית 'G: $O(m)$

הרצת האלגוריתם של Edmons-Krab פעמיים : $O(m^2n)$

סה"כ $O(m^2n)$

3)

א.

האלגוריתם:

1. בניית רשת שיורית G_f על סמך הזרימה המרבית f הנתונה
2. עדכון הקיבולת של *e ב- 1+
3. הרצת האלגוריתם של Edmons-Krab על G_f המעודכן, עדכון הצלעות במסלול השיפור ועדכון הזרימה המקסימלית במידת הצורך

הנכונות נובעת מנכונות האלגוריתם של Edmons-Krab.

זמן ריצה:

1. בניית רשת שיורית לפי זרימה נתונה: O(m)
2. עדכון *e: O(1)
3. הרצת האלגוריתם של Edmons-Krab על G_f המעודכן : O(m+n)=O(m) מכיוון שעד העדכון הזרימה הייתה מקסימלית, לכן קיים מסלול שיפור אחד בלבד והאלגוריתם ירוץ איטרציה אחת בלבד אשר כוללת הרצת BFS ומכאן נובע זמן הריצה (אחרת, היה קיים מסלול שיפור נוסף שלא קשור לצלע שעודכנה בסתירה לנתון שהזרימה הייתה מקסימלית טרם העדכון)

סה"כ נקבל O(m) זמן ריצה לינארי כנדרש.

ב.

האלגוריתם:

1. אם f(e*) < c(e*) אז הקטנת הקיבולת של *e אינה משפיעה על הזרימה (אין הפרה של התנאי שאומר שהזרימה בהכרח אינה גדולה מהקיבולת) ואין צורך לשנות דבר.
אחרת, נקבל מצב שבו הזרימה גדולה מהקיבולת וזוהי אינה זרימה חוקית ויש לתקנה.
2. נמצא מסלול המכיל את *e באמצעות BFS על S ונוריד 1 מערך הזרימה של כל צלע בו, בנוסף נוריד 1 מערך הזרימה המקסימלית.
3. נבנה רשת שיורית G_f לפי הזרימה המקסימלית שקיבלנו.
4. יתכן שלאחר העדכון שעשינו נותר עדיין מסלול שיפור אחד, לכן נריץ את האלגוריתם של Edmons-Krab על G_f, כולל עדכון הצלעות במסלול השיפור ועדכון הזרימה המקסימלית במידת הצורך

נכונות:

צעדים 1+2 נכונים מכיוון שנשמר חוק שימור הזרימה וחסם הקיבול אינו מופר.

הנכונות של צעדים 3+4 נובעת מנכונות האלגוריתם של Edmons-Krab.

זמן ריצה:

1. בדיקת תנאי פשוט: O(1)
2. הרצת BFS: O(m+n)=O(m)

עדכון המסלול: O(m)

יחד נקבל O(m)

3. בניית רשת שיורית: O(m)
4. הרצת האלגוריתם של Edmons-Krab על G_f: O(m+n)=O(m) מכיוון שעד העדכון הזרימה הייתה מקסימלית, לכן קיים מסלול שיפור אחד בלבד והאלגוריתם ירוץ איטרציה אחת בלבד אשר כוללת הרצת BFS ומכאן נובע זמן הריצה (אחרת, היה קיים מסלול שיפור נוסף שלא קשור לצלע שעודכנה בסתירה לנתון שהזרימה הייתה מקסימלית טרם העדכון)

סה"כ נקבל O(m) זמן ריצה לינארי כנדרש.

4) נגדיר גרף דו צדדי G(V,E) כך שצד אחת ייצג את המשתנים X והצד השני את הפסוקיות Y, הצלעות יחברו את המשתנה לפסוקיות שבו הוא מופיע :

$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$

$Y = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$

$V = XUY$

$E = \left\{e_{x_n,\varphi_n} = (x_n, \varphi_n) \middle| x_n \in \varphi_n\right\}$

$\forall e \in E\ c(e) = 1$

נראה |X|=|Y|:

|Y|≥|X| מאחר וכל משתנה חבר בשלוש פסוקיות.

|X|≥|Y| מאחר וכל פסוקית מכילה שלושה משתנים.

משני התנאים יחדיו נקבל את השוויון.

ממשפט HALL נסיק שקיים שידוך מושלם בין צידי הגרף וניתן למוצאו בעזרת האלגוריתם של Ford-Fulkerson באופן הבא:

נייצר את G' ע"י כך שנחבר את כל המשתנים ל-S עם צלע שקיבולה 1, נחבר את כל הפסוקיות ל-T עם צלע שקיבולה 1.

על מנת לקבלת זרימה מקסימלית בגודל |X| (זהו החתך המינימלי) התוצאה תהיה חייבת להיות חיבור של כל משתנה לפסוקית אחת בלבד, שזה בדיוק מה שאנו צריכים.

זיווג זה פותר את בעיית הספיקה מאחר והוא יוצר התאמה של כל פסוקית למשתנה אחד בלבד וכל מה שנותר לעשות הוא לתת לו את הערך המתאים כך שהפסוקית תסופק, כלומר, ערך אמת אם מופיע ללא סימן שלילה ולהפך. התלות של כל פסוקית במשתנה אחר מונע מצב של סתירה בין השמות של אותו משתנה.

מאחר וכל פסוקית כזו תקבל השמה מספקת נקבל פתרון לבעיה כולה.

הנכונות נובעת מההסבר הנ"ל.

ניתוח זמן ריצה:

בניית G': O(n)

הרצת F.F: O(3*n*n) = O(n^2)

קביעת השמה מספקת: O(n)

סה"כ O(n^2)