עניתי על השאלות 1,3,4,5,6 (שאלה 2 לא נבחרה)

שאלה 1

יהי פונקציה f הניתנת לחישוב, כלומר קיימת מכונת טיורינג M שלכל קלט $w \in \Sigma^*$ הפונקציה עוצרת ועל הסרט רשומה המילה $f(w)$ בלבד.

נוכיח כי השפה $L_f = \{f(w) | w \in \Sigma^*\}$ מזוהה טיורינג. נבנה עבורה מונה בעל שני סרטים המדפיס את השפה:

1. שנה את המכונה M, ממכונה על סרט אחד לשני סרטים, כך שהיא מתעלמת בכל מעבר מהתוכן בסרט השני ולא משנה אותו. נקרא למכונה החדשה M'.
2. לכל מילה w לפי הסדר הסטנדרטי, החל מהמילה הריקה (המילה רשומה על הסרט השני):
   2.1. העתק את המילה w לסרט הראשון (במקום כל התוכן הקודם שלו)
   2.2. הרץ את המכונה M' על הקלט w.
   2.3. הדפס את תוכן הסרט הראשון

נשים לב כי לפי משפט 3.13, כל מכונה עם שני סרטים היא בעלת אותו כוח כמו מכונה עם סרט אחד, ולכן אם נוכיח עבור המכונה שתוארה עם שני סרטים ההוכחה מספיקה.

ההרכבה בשלב 1 היא סופית, כי פשוט מרכיבים מכונה חדשה ממכונה קיימת על ידי שינוי פשוט יחסית.

יהי מילה $w' \in L_f$. כלומר קיימת מילה $w \in \Sigma^*$ כך שמתקיים $w' = f(w)$. כלומר קיים איזשהו מספר טבעי i, כך שהמילה w היא המילה ה-i לפי הסדר הסטנדרטי.
עבור כל האיטרציות לפני האיטרציה ה-i, אנחנו ביצענו מספר סופי של פעולות בשלב 2.1 ושלב 2.3, ומכיוון ונתון שהמכונה M עוצרת לכל קלט אז גם M' תעצור לכל קלט, אז גם שלב 2.2 הוא סופי.
באיטרציה ה-i, יתקיים כי בסוף ריצת M' על הסרט הראשון תהיה המילה w', ולכן המונה ידפיס את w'.

ולכן לכל מילה $x \in L_f$, לאחר מספר סופי של צעדים (התלוי ב-x כמובן) המילה תודפס על ידי המונה. ולכן המונה שבנינו הוא אכן מונה של השפה L_f. ולכן לפי משפט 3.21 (עמוד 181 בספר), השפה L_f היא אכן מזוהה-טיורינג.

ולכן לכל פונקציה הניתנת לחישוב, הטווח של הפונקציה הוא שפה מזוהה-טיורינג.

שאלה 3

$C = \{\langle M,n\rangle | M\ is\ a\ TM. The\ longest\ word\ that\ M\ halts\ on\ has\ length\ at\ most\ n\}$

השפה אינה מזוהה טיורינג, נוכיח על ידי רדוקציה מיפוי f עבור $\overline{A_{TM}} \leq_M C$:

עבור קלט $\langle M,w\rangle$ כאשר M מכונת טיורינג ו-w מילה:

1. נבנה מכונת טיורינג חדשה M', כאשר נבחר תו # שאינו בא"ב של M.
   עבור קלט x:
   1.1. אם $x = w$: קבל
   1.2. אם $x = w\#$:
      1.2.1. הרץ את המכונה M על הקלט w. אם קיבלה, קבל.
   1.3. היכנס ללולאה אינסופית
2. החזר את $\langle M', |w|\rangle$

הרדוקציה חשיבה כמובן, כי אנחנו בסה"כ בונים מכונה חדשה מהקלט ומחזירים אותה לאחר חישוב אורך הקלט.
נוכיח את נכונותה:

אם $\langle M,w\rangle \notin \overline{A_{TM}}$, כלומר $\langle M,w\rangle \in A_{TM}$, כלומר M מקבלת על הקלט w. כלומר השפה של M' תהיה $L(M') = \{w, w\#\}$ (בהכרח מילים שונות). כמובן מתקיים $|w\#| \leq |w|$, ולכן הטענה כי אורך המילה הארוכה ביותר בשפה היא $|w|$ אינה נכונה ולכן $f(\langle M,w\rangle) = \langle M', |w|\rangle \notin C$.

אם $\langle M,w\rangle \in \overline{A_{TM}}$, כלומר $\langle M,w\rangle \notin A_{TM}$, כלומר M לא מקבלת על הקלט w. כלומר השפה של M' תהיה $L(M') = \{w\}$ (בהכרח מילים שונות). המילה הכי ארוכה בשפה היא w ולכן הטענה מתקיימת ומתקיים $f(\langle M,w\rangle) = \langle M', |w|\rangle \in C$.

סה"כ קיבלנו כי מתקיים $f(\langle M,w\rangle) \in C \Leftrightarrow \langle M,w\rangle \in \overline{A_{TM}}$ וגם כי f חשיבה ולכן הרדוקציה תקפה ולכן $\overline{A_{TM}} \leq_M C$.

לפי משפט 4.23, השפה $\overline{A_{TM}}$ איננה מזוהה טיורינג. ולכן לפי משפט 5.29 השפה C איננה מזוהה טיורינג.

שאלה 4

נסמן ב-HIS את בעיית הקבוצה הבלתי תלויה שכוללת מחצית מן הצמתים של קבוצה נתונה (הבעיה בשאלה).

נוכיח כי HIS שפה NP שלמה על ידי הוכחה כי $HIS \in NP$ וגם כי HIS שפה NP קשה.

הוכחת $HIS \in NP$:

נוכיח שהשפה ב-NP על ידי בניית מאמת V:

עבור הקלט $\langle G, k, U, C\rangle$ כאשר $G = (V, E)$ גרף לא מכוון ; k מספר טבעי ; U תת קבוצה של V לא ריקה שיש בה מספר זוגי של צמתים ; C מסמך האישור:

1. בדוק ש-C הוא רשימה של צמתים מתוך V בגודל k. אחרת תדחה.
2. בדוק שמתקיים $|C \cap U| = \frac{|U|}{2}$. אחרת תדחה.
3. לכל שני צמתים u, v ב-C, בדוק כי אין צלע (u, v) ב-E. אחרת תדחה.
4. קבל

נכונות: אנחנו בודקים שיש קבוצה בגודל k צמתים ב-G (שלב 1) שהיא קבוצה בלתי תלויה ב-G (שלב 3) שמכילה בדיוק מחצית מן הצמתים של U (שלב 2). למעשה מוודאים את כל גורמי השאלה בבעיה.

סיבוכיות: הבדיקה בשלב 1 היא בסיבוכיות $O(|V| \cdot |C|)$. ידוע כי $U \subseteq V$ ולכן שלב 2 רץ בסיבוכיות מרבית של $O(|V| \cdot |C|)$. הבדיקה בשלב 3 מתבצעת בסיבוכיות מרבית $O(|C|^2 \cdot |E|)$.
ולכן הסיבוכיות הכללית היא $O(|V| \cdot |C| + |C|^2 \cdot |E|)$.

נשים לב כי $|V| + |E| \in O(|G|)$, וגם כי $|G|$ קטן מאורך הקלט לבעיה. מסמך האישור C הוא רשימת צמתים ולכן $|C| \le |V|$, ולכן אורך מסמך האישור הוא גם פולינומיאלי מעל גודל הקלט לבעיה. ולכן סיבוכיות זמן הריצה של המאמת היא פולינומיאלית מעל גודל הקלט.

ולכן אם יש מאמת פולינומיאלי לשפה HIS, אז מתקיים $HIS \in NP$.

הוכחת $HIS \in NPhard$:

נתון כי השפה IS היא NP-שלמה, ולכן בפרט היא NP-קשה, ולכן אם נוכיח כי $IS \le_P HIS$ נוכיח כי HIS היא NP-קשה.

נבנה רדוקציית מיפוי $f: IS \to HIS$ בין שתי השפות:

עבור קלט $\langle G, k\rangle$ כאשר $G = (V, E)$ גרף לא מכוון ו-k מספר טבעי:

1. נבנה גרף חדש $G' = (V', E')$ כאשר:
   1.1. $U \leftarrow \{v_i, v_i' | 1 \le i \le k\}$ ($2k$ צמתים חדשים שנקרא להם v_i, v_i')
   1.2. $V' \leftarrow V \cup U$ (נוסיף לגרף קבוצה נפרדת זאת)
   1.3. $E' \leftarrow E \cup \{(v_i, v_i') | 1 \le i \le k\}$ (כל זוג שמתאים לאותו אינדקס נוסיף צלע בודדת – כלומר הגרף החדש הוא הגרף המקורי ועוד k זוגות של צמתים המחוברים בקשת בודדת)
2. החזר $\langle G', 2k, U\rangle$

סיבוכיות: אנחנו מניחים כי $k \le |V|$ (כי אחרת אין על מה לדבר על קבוצה בלתי תלויה). הבנייה מתבצעת בסיבוכיות לכל היותר $O(k + |V| + k)$, כלומר לכל היותר $O(|V|)$ ועוד הזמן להעתקה שהוא פולינומיאלי בגודל הקלט, ולכן סה"כ הרדוקציה היא בזמן פולינומיאלי מעל גודל הקלט.

נכונות: אם $\langle G, k\rangle \notin IS$, אז לא קיימת קבוצה בלתי תלויה בגודל k ב-G. בתוספת שהוספנו לגרף G' (תת הגרף שקבוצת צמתיו היא U), הקבוצה הבלתי תלויה הגודלה ביותר היא בגודל k, ולכן לא קיימת קבוצה בלתי תלויה בגודל $2k$ בגרף G' ולכן $\langle G', 2k, U\rangle = f(\langle G, k\rangle) \notin HIS$.

אם $\langle G,k\rangle \in IS$, אז קיימת קבוצת קודקודים S בגודל k המהווה קבוצה בלתי תלויה בגרף G. בתוספת שהוספנו לגרף G' (תת הגרף שקבוצת צמתיו היא U) יש קבוצת קודקודים בלתי תלויה בגודל k (למשל אם נבחר רק את הצמתים עם הסימן תג), ולכן קיימת קבוצת קודקודים $S' = S \cup \{v_i' | 1 \le i \le k\}$ שהיא קבוצה בלתי תלויה בגודל $2k$. נשים לב שבדיוק חצי מ-U מופיע ב-S' ולכן הקבוצה S' היא תשובה מתאימה לבעיה ולכן $\langle G',2k,U\rangle = f(\langle G,k\rangle) \in HIS$.

ולכן יש לנו רדוקציית מיפוי המקיימת $f(\langle G,k\rangle) \in HIS \Leftrightarrow \langle G,k\rangle \in IS$, רדוקציה פולינומיאלית בגודל הקלט, ולכן מתקיים $IS \le_P HIS$ ולכן HIS היא שפה NP-קשה.

שאלה 5

נתון כי $A \in NPcomplete$, $B \subset A$ וגם $B \in P$. נוכיח שהשפה $A - B \in NPcomplete$ על ידי הוכחה של שתי הטענות: $\boldsymbol{A - B \in NP}$ וגם $A - B \in NPhard$ על ידי הצגת רדוקציה משפה NP שלמה A.

הוכחת $A - B \in NP$:

אם $A \in NPcomplete$, אז לפי הגדרת הקבוצה NP שלמה, מתקיים $A \in NP$. ולכן לפי הגדרת הקבוצה NP, קיימת מכונה טיורינג לא דטרמיניסטית R שרצה בזמן פולינומיאלי מעל גודל הקלט ומכריעה את השפה A.

נתון כי $B \in P$, ולכן קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטית S שרצה בזמן פולינומיאלי מעל גודל הקלט ומכריעה את השפה B.

נבנה מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית חדשה M:

עבור קלט w:

1. הרץ את המכונה S על הקלט w. אם קיבלה, דחה.
2. הרץ את המכונה R על הקלט w. אם קיבלה, קבל.
3. אחרת דחה

סיבוכיות: אנחנו מריצים מכונה דטרמיניסטית פולינומיאלית S בשלב 1, ולכן קיים איזשהו k_1 טבעי כך ששלב 1 ירוץ ב-$Time\left(|w|^{k_1}\right)$. בשלב 2 אנחנו מריצים מכונה לא דטרמיניסטית פולינומיאלית R, ולכן קיים איזשהו k_2 טבעי כך ששלב 2 ירוץ ב-$NTime\left(|w|^{k_2}\right)$. סה"כ נקבל כי הסיבוכיות היא לכל היותר $NTIME\left(|w|^{\max\{k_1,k_2\}}\right)$, כלומר בסיבוכיות $NTime\left(|w|^{k}\right)$ עבור k טבעי כלשהו.
הערה: נשים לב כי בשלב 2 אנחנו מחזירים את אותה התוצאה של המכונה R, ולכן אפשר פשוט לעבור להרצת המכונה ואין שום בעיה עם "המתנה" למעבר על כל ענפי החישוב.

נכונות: אם $w \in A - B$, כלומר $w \in A \wedge w \notin B$, ולכן S דוחה את w וגם R תקבל באחד מענפי החישוב את w, ולכן המכונה תקבל.

אם $w \notin A - B$, כלומר $w \notin A \vee w \in B$. אם $w \in B$, אז S מקבלת את w ואנחנו נדחה את המילה בשלב 1. אם $w \notin A$, לא קיים מסלול חישוב המוביל למצב מקבל במכונה S, ולכן היא לא תקבל, ונדחה בשלב 3.

סה"כ קיבלנו כי קיימת מכונה המכריעה את $A - B$ ב-$NTime\left(|w|^{k}\right)$ עבור k טבעי, ולכן $A - B \in NP$.

הוכחת $A \leq_P A - B$:

נתון כי $A \subset B$, ולכן קיימת מילה x המקיימת $x \in A \wedge x \notin B$. נתון כי $B \in P$, ולכן קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטית S שרצה בזמן פולינומיאלי מעל גודל הקלט ומכריעה את השפה B.

נבנה רדוקציית מיפוי $f: A \to A - B$ בין שתי השפות:

עבור קלט w:

1. הרץ את המכונה S על w. אם קיבלה, החזר את המילה x.
2. אחרת, החזר את המילה w

סיבוכיות: עבור קלט w, לפי ההגדרה של מכונה פולינומיאלית, קיים k טבעי כך שההרצה של S על w תיקח זמן של $O(|w|^k)$. לאחר ההרצה הזאת אנחנו מחזירים מילה מסוימת כלומר סיבוכיות קבועה (אמנם יכול לקרות כי x היא מילה מאוד גדולה, אבל היא ידועה מראש ולכן אפשר להגדיר את האורך שלה כקבוע). ולכן הרדוקציה היא חשיבה ופולינומיאלית בגודל הקלט.

נכונות: אם $w \notin A$, אז לפי הנתון $B \subset A$, בהכרח מתקיים $w \notin B$. ולכן S תדחה את w ולכן $f(w) = w$. אבל כמובן שמתקיים $w \notin A - B$ (מהגדרת הפרש) ולכן קיבלנו כי $f(w) \notin A - B$.

אם $w \in A$, אז יכולים להיות שני מקרים: $w \in B$ או $w \notin B$:

- אם $w \notin B$, S תדחה ולכן $f(w) = w$. אבל אם $w \in A \wedge w \notin B$ אז $w \in A - B$. ולכן $f(w) \notin A - B$.
- אם $w \in B$, S תקבל ולכן $f(w) = x$. אבל לפי הבחירה מתקיים $x \in A - B$. ולכן $f(w) \notin A - B$.

סה"כ קיבלנו כי $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in A - B$, ולכן הרדוקציה תקפה.

לכל בעיה $C \in NP$, לפי העובדה כי A שפה NP שלמה, מתקיים $C \leq_P A$. עכשיו הוכחנו כי $A \leq_P A - B$ ולכן $C \leq_P A - B$. ולכן סה"כ קיבלנו כי $A - B \in NPhard$.

שאלה 6

$$RG-CONN=\{\langle G\rangle | G\ is\ a\ red-green\ connected\ graph\}$$

נסמן ב-$color[v]$ את הצבע של צומת v בגרף.

בשביל להוכיח כי $RG-CONN$ היא שפה NL-שלמה, נוכיח כי היא שפה NL וגם שפה NL-קשה.

לפי משפט 8.25 נתון כי הבעיה $PATH$ היא NL-שלמה, ולכן בפרט היא ב-NL. ולכן קיימת מכונה לא דטרמיניסטית S המכריעה את $PATH$ בסיבוכיות מקום לוגריתמית.

לפי משפט 8.27 מתקיים $NL=coNL$, ולכן קיימת מכונה לא דטרמיניסטית R המכריעה את $\overline{PATH}$ (למשל בעמוד 356 בספר) בסיבוכיות מקום לוגריתמית.

הוכחת $RG-CONN\in NL$:

נבנה מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית M המכריעה את $\overline{RG-CONN}$ בסיבוכיות מקום לוגריתמית:

עבור קלט $\langle G\rangle$, כאשר $G=(V,E)$ הוא גרף מכוון עם פונקציית צבע $color$ של אדום-ירוק:

1. בחר באופן לא דטרמיניסטי צומת u מתוך V.
2. בחר באופן לא דטרמיניסטי צומת v מתוך V.
3. אם $color[u]=red$ וגם $color[v]=green$:
   3.1. הרץ את המכונה R (המכונה של $\overline{PATH}$) על הקלט $\langle G,v_i,v_k\rangle$. אם קיבלה, קבל.
4. דחה

סיבוכיות מקום: אפשר לסמן את הבחירה של u ושל v בתור אינדקס בייצוג בינארי, ולכן המקום הוא לוגריתמי בגודל הקלט. המכונה R (המכונה של $\overline{PATH}$) היא בסיבוכיות מקום לוגריתמית ולכן סה"כ אנחנו צריכים מקום לוגריתמי מגודל הקלט, ולכן תקין.

נכונות: $\langle G\rangle\notin RG-CONN$ אם"ם קיים צומת אדום וצומת ירוק שאין מסלול מהאדום לירוק G, כלומר קיים צומת אדום u וצומת ירוק v כך ש- $\langle G,u,v\rangle\in\overline{PATH}$.

הערה: חשוב מאוד להריץ את הגרסה של $\overline{PATH}$ ולא $PATH$ כי המכונה לא דטרמיניסטית ואפשר לדון רק בענפי החישוב המקבלים.

ולכן יש לנו מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית במקום לוגריתמי המכריעה את הבעיה $\overline{RG-CONN}$ ולכן קיבלנו כי $\overline{RG-CONN}\in NL$, כלומר $RG-CONN\in coNL$, ולפי השוויון $NL=coNL$ (משפט 8.27) מתקיים שהשפה $RG-CONN\in NL$.

הוכחת $RG-CONN \in NLhard$:

השפה $PATH$ היא שפה NL-שלמה, ולכן בפרט NL-קשה. אם נוכיח כי $PATH \leq_P RG-CONN$ אז נוכיח שהשפה $RG-CONN$ היא NL-קשה.

נבנה רדוקציית מיפוי $f: PATH \rightarrow RG-CONN$ בין שתי השפות:

עבור קלט $\langle G,s,t \rangle$ כאשר $G=(V,E)$ גרף מכוון ו-s,t הם שני צמתים ב-V, בצע:

1. על סרט העבודה: ספור את מספר הצמתים בגרף, וסמן אותו (בייצוג בינארי) כ-n
2. על סרט העבודה: בגודל הסיביות של n, צור מונה חדש בשם i
3. כתוב לסרט הפלט את הגרף החדש $G'=(V',E',color)$ שהוא גרף אדום-ירוק:
   3.1. כתוב לסרט הפלט את קבוצת הצמתים V
   3.2. כתוב לסרט הפלט את קבוצת הצלעות E
   3.3. עבור $i \leftarrow 1$ עד n:
      3.3.1. כתוב לסרט הפלט את הצלע (t,v_i) כאשר v_i הוא הצומת ה-i
   3.4. כתוב לסרט הפלט את הצבע $color[s] \leftarrow red$
   3.5. עבור $i \leftarrow 1$ עד n:
      3.5.1. אם $v_i \neq s$: כתוב לסרט הפלט את הצבע $color[v_i] \leftarrow green$

סיבוכיות מקום: נשים לב כי $|\langle G,s,t \rangle| < |V|$. גודל המקום הנדרש בייצוג בינארי עבור n הוא $\log(|V|)$, ולכן סה"כ קיבלנו כי המקום הנדרש על סרט העבודה הוא לוגריתמי בגודל הקלט, כלומר הרדוקציה היא רדוקציה לוגריתמית תקינה.

נכונות: אם $\langle G,s,t \rangle \in PATH$, כלומר קיים מסלול מ-$s$ ל-t בגרף G, נסמן מסלול זה ב-$P_{s,t}$.
יהי צומת $v \in V-\{s,t\}$. לפי הבנייה בשלב 3.3.1, קיימת הצלע (t,v). ולכן קיים המסלול $P_{s,v}=P_{s,t} \circ (t,v)$ בגרף G'. הצומת האדום היחידי בגרף הוא s, והוכחנו שיש מסלול ממנו לכל צומת אחר בגרף (שהם כולם ירוקים) ולכן $\langle G' \rangle \in RG-CONN$.

אם $\langle G,s,t \rangle \notin PATH$, כלומר לא קיים מסלול מ-$s$ ל-t בגרף G. נניח בשלילה כי $\langle G' \rangle \in RG-CONN$. כלומר קיים מסלול כלשהו מ-s ל-t (בגלל הצבעים). כלומר התוספת שלנו בשלב 3.3.1 היא זאת שיצרה מסלול חדש שאינו ב-G. כלומר קיים צומת v כלשהו כך שהצלע (t,v) נמצאת במסלול $P_{s,t}$. מכל מסלול אפשר לקחת מסלול פשוט, ובפרט ניקח את המסלול שהוא רישא של $P_{s,t}$ עד הצלע (t,v), כלומר מסלול פשוט $P'_{s,t}$ שלא מכיל צלע היוצאת מ-t, כלומר לא מכילה צלעות שהוספנו חדשות שיצרנו בשלב 3.3.1, כלומר המסלול החדש הזה $P'_{s,t}$ הוא מסלול בגרף G המקורי, בסתירה להנחה כי $\langle G,s,t \rangle \notin PATH$.

ולכן מתקיים $\langle G,s,t \rangle \in PATH \Leftrightarrow \langle G' \rangle \in RG-CONN$.

ולכן הרדוקציה נכונה וסיבוכיות מקום לוגריתמית, ולכן אכן מתקיים $PATH \leq_P RG-CONN$, ולכן אכן מתקיים $RG-CONN$ היא שפה NL-קשה.