פתרון ממ"ן 12

שאלה 1

א. מרחב המצבים עבור בעית החיפוש הנתונה יכיל מצבים מהצורה:

[מהירות=***v***, מיקום (מס' מקטע)=***p***, מספר סיבובים שהושלמו=***r***]

נניח כי המקטעים ממוספרים מ-0 עד *n*-1.

המצב ההתחלתי הוא: [0, 0, 0]

מצב המטרה הוא: [0, 0, *k*]

פעולות:

<u>האטה</u>: לאחר ביצוע פעולת האטה נגיע למצב $((r+v-1) \bmod n, p+\lfloor (r+v-1)/n \rfloor, v-1)$

<u>האצה:</u> לאחר ביצוע פעולת האצה נגיע למצב $((r+v+1) \bmod n, p+\lfloor (r+v+1)/n \rfloor, v+1)$

ב. לא, חיפוש לעומק (DFS) אינו שלם עבור בעיה זו מכיוון שמרחב המצבים הוא אינסופי שכן מספר הסיבובים k שניתן להגדיר לסוכן להסתובב אינו מוגבל.

(אם נגדיר שאפשר לעצור את החיפוש לעומק ברגע שעוברים את המטרה אזי DFS יהיה שלם).

ג. כן, חיפוש לרוחב (BFS) יהיה אופטימלי עבור בעיה זו מכיוון שמחיר הפעולות (ערכי קשתות) אחיד. מחיר כל קשת הוא מעבר יחידת זמן, כלומר שווה ל-1. לכן מובטח ש- BFS ימצא פתרון אופטימלי.

ד. לא, מספר המקטעים שנותרו לסוכן לעבור אינה פונקציה יוריסטית קבילה.
דוגמא נגדית: כאשר נותרים 6 מקטעים והמהירות היא 4, הסוכן יכול לחנות ע"י 4 פעולות האטה (כלומר בעלות 4) למרות שהיוריסטיקה מעריכה שהוא צריך 6 פעולת (עלות 6).

(פונקציה יוריסטית קבילה בה ניתן להשתמש היא מספר המקטעים שנותרו לסוכן לעבור חלקי המהירות המקסימלית שניתן לנסוע - V. שכן בכל נקודת זמן ניתן לעבור לכל היותר V מקטעים מכיוון שזה החסם העליון של המהירות).

היוריסטיקה אינה עקבית. נניח בשלילה שהיוריסטיקה עקבית. מכאן נובע שהיא גם קבילה אך ראינו שלא כך. סתירה.

שאלה 3

א. ע"פ דרישות השאלה שני התנאים הבאים צריכים להתקיים:

1. הפרש הקבוצות V1 ו-V2 צריך לשאוף לאפס.
2. מספר הקשתות המחברות בין צמתים מ-V1 לצמתים מ-V2 צריך לשאוף לאפס.

פונקציה יוריסטית לבעיה:

$$h(n) = |V2 - V1| + Ecommon$$

$|V2 - V1|$ מייצג את הפרש הצמתים בין הקבוצות.

$Ecommon$ מייצג את מספר הקשתות המחברות בין הקבוצות.

באמצעות חיפוש מצב בו ערך הפונקציה מינימלי נקבל מצב מטרה של הבעיה, שכן הפונקציה מייצגת את דרישות הבעיה כערכים בה.

המינימום הגלובלי של הפונקציה הוא 0, והוא מתקבל רק בפתרונות מושלמים (קבוצות זרות ושוות של צמתים).

ב. אלגוריתם טיפוס גבעה אינו מחזיק עץ חיפוש, אלא מסתכל רק על המצב הנוכחי ועל ערך פונקציית המטרה ובוחר מתוך שכניו את השכן הטוב ביותר.

מצב עבור הבעיה הנתונה מתואר ע"י שתי רשימות של צמתים השייכים לכל קבוצה.

קבוצת המצבים השכנים של מצב נתון היא התוצאה של העברת צומת מהקבוצה בה נמצא לקבוצה השנייה. כלומר יהיה לנו כ- $\frac{n}{2}$ מצבים שכנים.

המצב ממנו נתחיל יהיה חלוקה רנדומלית של הצמתים לשתי קבוצות (שוות ככל שניתן). כעת האלגוריתם יעביר צומת מקבוצה V1 לקבוצה V2 ואח"כ צומת בכיוון ההפוך (בכדי לאזן). בכל שלב האלגוריתם יבחר את הצומת עבורו סכום הקשתות בינו לבין הקבוצה השנייה גדול מסכום הקשתות בינו לבין הצמתים בקבוצה שבו נמצא. נבחר בכל פעם את הצומת מהקבוצה שההפרש הוא הגדול ביותר עבורו. ההפרש הוא ערך הירידה במספר הקשתות בין הקבוצות. האלגוריתם יעצר כאשר אין שכן שהעברתו תגרום לירידה במספר הקשתות והמשמעות היא שהגענו למינימום מקומי או גלובלי.

ג. קידוד בעיה זו עבור אלגוריתם גנטי יכול להתבצע בצורה הבאה:

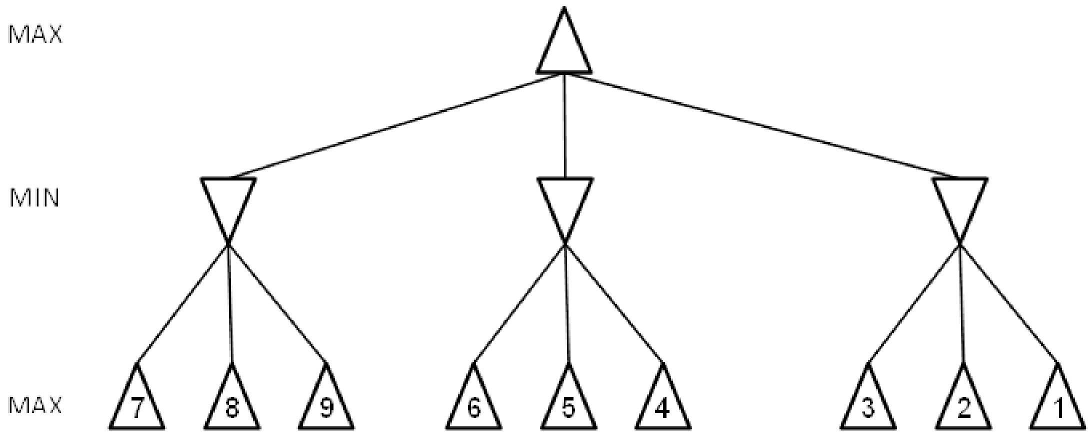
- מצב/פרט (individual) – כל מצב צריך לתאר את החלוקה של הצמתים לשתי הקבוצות. מצב יכול להיות מקודד ע"י מחרוזת של n סיביות {1, 2, ..., n} המציינות את n הצמתים. החצי השמאלי של המחרוזת ייצג את הצמתים השייכים לקבוצה V1 והחצי הימני את הצמתים השייכים לקבוצה V2.

- פונקציית ההתאמה (fitness) – פונקציית ההתאמה שנותנת ערכים גבוהים יותר למצבים טובים יותר יכולה להיות ההפרש בין מספר הקשתות הפנימיות (לצמתי הקבוצה) לבין מספר הקשתות החיצוניות (לצמתי הקבוצה השנייה). נשאף להגדיל את מספר הקשתות הפנימיות ולהקטין את החיצוניות.
- פונקציית ההצלבה – פונציית ההצלבה יכולה להיות בחירה אקראית של נקודת הצלבה במחרוזת לפיה יוצרים זוג חדש. פעולת ההצלבה צריכה לשמור שכל צומת יופיע במחרוזת פעם אחת בלבד לכן פעולת ההצלבה לא תחליף ישירות את האיברים מהמצב השני אלא תבצע החלפה פנימית של אותם האיברים במצב וזאת בכדי לשמור על כל האיברים.
- פעולת המוטציה – פעולת המוטציה יכולה להיות החלפה של שני איברים במחרוזת, אחד מהחצי השמאלי (שייך לקבוצה V1) והשני מהחצי הימני (שייך לקבוצה V2).

ד. טיפוס גבעה אינו אלגוריתם מספיק טוב מכיוון שעלול להיתקע במינימום מקומי שכן תלוי בבחירה הרנדומלית הראשונה.
אלגוריתם הדמיית חישול ניתן למימוש בהתבסס על אלגוריתם טיפוס גבעה שתיארנו בסעיף ב' עם שינוי בחירת הצומת שעובר בין הקבוצות כך שבחירת הצומת תתבצע באופן אקראי.
אלגוריתם הדמיית חישול ואלגוריתם גנטי עדיפים על פני אלגוריתם טיפוס גבעה, שכן מאפשרים שילוב של אקראיות ובחירה מושכלת. משניהם, אלגוריתם גנרי עדיף מכיוון שהוא מתחיל ממספר ממצבים רנדומליים ראשונים ומפתח אותם ואילו אלגוריתם הדמיית חישול מפתח מצב אחד.

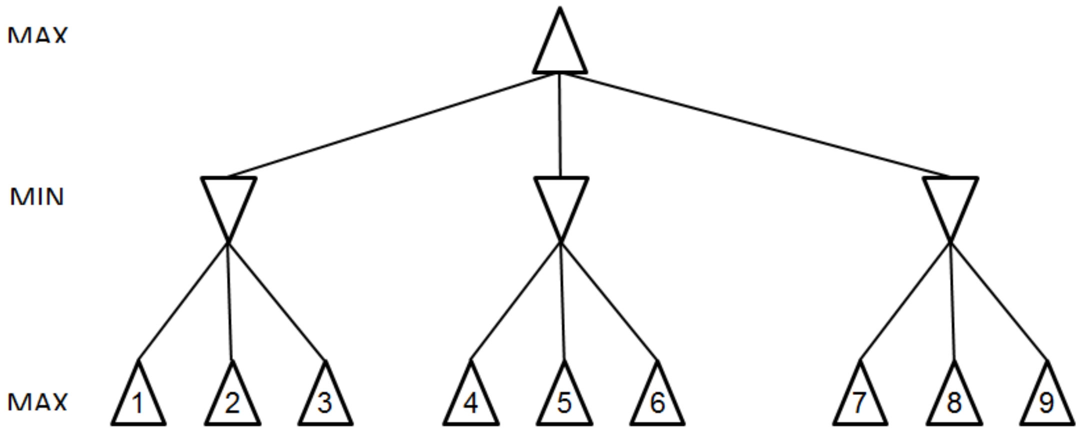
שאלה 4

א. סידור הערכים עבורם אלגוריתם אלפא-ביתא יגזום מספר מקסימלי של צמתים:



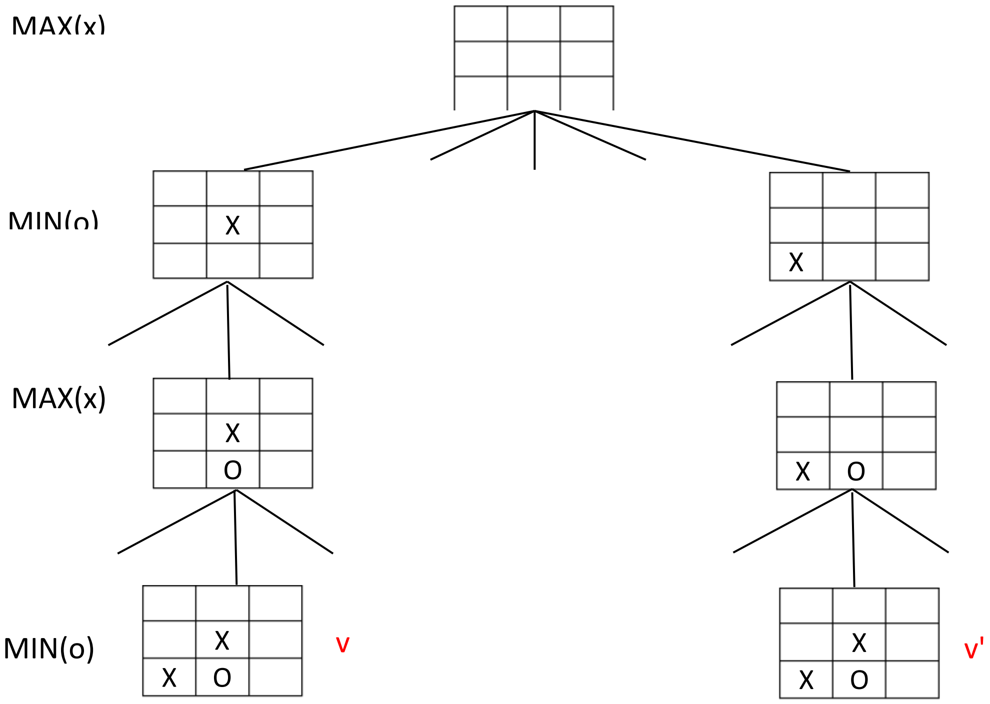
תחילה האלגוריתם יסרוק את תת העץ השמאלי. הערך שיבחר ע"י שחקן ה-MIN הוא 7 שכן זה ערך העלה הקטן ביותר בתת העץ. ערך זה יעלה לשורש ויהווה חסם עבורו כלומר $[7,\infty]$. לאחר מכן ימשיך האלגוריתם לשני הבנים הנוספים ויבדוק את הערכים המופיעים בעלה הראשון אל מול השורש. בשני המקרים ערכם קטן מהשורש כלומר $v \le 7$ ולכן יתבצע גיזום של שאר הצמתים. הצמתים שיגזמו הם: 1, 2, 4, 5.

ב. סידור הערכים עבורם אלגוריתם אלפא-ביתא יגזום מספר מינימלי של צמתים:



עבור סידור זה כל צמתי העץ יסרקו. תחילה יסרק תת העץ השמאלי. ממנו יוחזר ע"י שחקן ה-MIN הערך 1. ערך זה יעלה לשורש ונקבל $[1,\infty]$. תחום זה יועבר לתת העץ האמצעי שיבדוק את בניו אל מול הערך אלפא. כל ערכי העלים בתת העץ האמצעי גדולים מאלפא, לכן תנאי הגיזום לא מתקיים ועל האלגוריתם לסרוק את כל העלים. בסוף סריקת תת העץ האמצעי יוחזר הערך 4 שיבדק מול הערך אלפא של השורש ומכיוון שגדול ממנו נקבל $[4,\infty]$. תחום זה יועבר לתת העץ הימני. כל ערכי העלים של תת העץ הימני גדולים גם הם מערך האלפא ולכן תנאי הגיזום לא מתקיים ויש צורך לסרוק את כולם.

ג. נסתכל על עץ המצבים של המשחק איקס עיגול. ברור כי ניתן להגיע לאותו מצב בדיוק בעץ המשחק דרך מסלולים שונים לדוגמא:



כעת נוכיח כי אם היה גיזום של צמתים עוקבים לצומת v בעץ, כלומר של בנים בתת העץ של v, יתבצע גם גיזום של צמתים עוקבים של הצומת 'v.

אם היה גיזום בתת העץ של v אזי איזשהו צומת מבניו של v החזיר ערך x כך שאחד מתנאי הגיזום התקיים: $x \geq \beta_v$ או $x \leq \alpha_v$ (תלוי בסוג השחקן).

נניח בלי הגבלת הכלליות כי מדובר בשחקן MIN ולכן התנאי השני הוא זה שמתקיים, כלומר $x \leq \alpha_v$
.

כאשר נגיע לבדיקת הצומת 'v עם הערכים $[\alpha_{v'}, \beta_{v'}]$ גם עבורו יתקיים $x \leq \alpha_{v'}$ שכן מתקיים $\alpha_v \leq \alpha_{v'}$ וזה מפני שנבדק בשלב מאוחר יותר. מכיוון שהצומת 'v זהה לצומת v, הערך x יוחזר בשלב כלשהו מאחד הבנים של 'v ויתבצע גיזום בדומה לזה שנעשה עבור v.

מכאן שאם מתבצע גיזום עבור צמתים עוקבים של צומת, בהכרח יתבצע גיזום של צמתים עוקבים של צומת זהה אליו מגיעים ממסלול אחר.