99 ר
מועד III

מבנה הבחינה:

בבחינה חמש שאלות.

מתוכן יש לענות על **ארבע** שאלות.

משקל כל שאלה מפורט בגוף השאלון.

כל חומר עזר מותר בשימוש.

☠ חשוב לכתוב את האלגוריתם בצורה מרווחת, מחולקת לבלוקים, עם הסבר (מילולי, בעברית) תמציתי לפעולת הבלוק.

☠ בכל שאלה עליך לציין מהי הסיבוכיות של האלגוריתם.

ייבדקו ארבע התשובות הראשונות שיופיעו במחברת הבחינה.

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

הגדרה:

א. גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$ נקרא תלת-קשיר (3-connected) אם $|V|\geq 2$ והורדה של כל זוג צמתים וכל הקשתות הנוגעות בהם אינה פוגעת בקשירות הגרף.

ב. גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$ נקרא תלת-קשיר-בקשתות (3-edge-connected) אם $|V|\geq 2$ והורדה של כל זוג קשתות אינה פוגעת בקשירות הגרף.

הוכח או הפרך:

א. כל גרף תלת-קשיר הוא גם תלת-קשיר-בקשתות.

ב. כל גרף תלת-קשיר-בקשתות הוא גרף תלת-קשיר.

שאלה 2 (25 נקודות)

כתוב אלגוריתם המקבל כקלט גרף $G=(V,E)$, קשת $e\in E$ ומספר חיובי שלם k ונותן את מספר המסלולים באורך k ב- G שעוברים דרך e. סיבוכיות האלגוריתם תהיה $O(|V|^{2.81}\log|V|)$.

הסבר את נכונות האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי k מספר טבעי. גרף $G=(V,E)$ יקרא k-צביע אם אפשר לצבוע את צמתיו ב- k צבעים כך שעבור כל קשת $(u,v)\in E$ ל- u ול- v צבעים שונים.

א. מהו ה- k המינימלי כך שלכל עץ T, T הוא k-צביע?
הוכח! (רמז: באינדוקציה).

ב. יהי G מעגל פשוט בן n צמתים $(n>1)$. נסח והוכח תנאי הכרחי ומספיק לכך ש- G הוא 2-צביע.

ג. יהי G גרף פשוט. נסח והוכח תנאי הכרחי ומספיק לכך ש- G הוא 2-צביע.

ד. עבור גרף $G=(V,E)$, Δ_G היא הדרגה המקסימלית של צומת ב- G $\Delta_G=\max_{v\in V}\{d(v)\}$.

כתוב אלגוריתם אשר מקבל כקלט גרף $G=(V,E)$ ונותן כפלט צביעה של G ב- Δ_G+1 צבעים כך שעבור כל קשת $(u,v)\in E$ ל- u ול- v צבעים שונים.

שאלה 4 (25 נקודות)

יהי G הגרף הלא מכוון הבא:

$$G = \left(\left\{ v_i \middle| -n \le i \le n \right\} \ , \ \left\{ (v_i, v_j) \middle| \ 0 \le i, j \le n \text{ או } -n \le i, j \le 0 \right\} \right)$$

א. כמה קשתות יש ב- G?

ב. כמה רכיבים אי-פריקים יש ב- G?

ג. מי הם צמתי ההפרדה?

ד. מהי הזרימה המקסימלית בין כל שני צמתים ב- G? הוכח.

שאלה 5 (25 נקודות)

א. יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון עם קבולים על הקשתות. עבור $a, b \in V$, F_{ab} היא הזרימה המקסימלית ברשת המוגדרת ע"י $G = (V, E)$ כש- a משמש מקור ו- b משמש בור.

הוכח או הפרך:

1. בכל רשת זרימה $G = (V, E)$ ולכל שלושה צמתים שונים $s, t, w \in V$ מתקיים $F_{st} = \min\{F_{sw}, F_{wt}\}$.
2. בכל רשת זרימה $G = (V, E)$ ולכל שלושה צמתים שונים $s, t, w \in V$ $F_{st} \le F_{sw} + F_{wt}$.

ב. תהי $G = (V, E)$ רשת זרימה עם מקור s ובור t.

יהיו $U_1, U_2 \subseteq V$ שתי קבוצות צמתים זרות.

כתוב אלגוריתם המחשב את מספר הקשתות המינימלי שיש להוריד מהגרף כך שלא יהיה שום מסלול המחבר צומת מ- U_1 עם צומת מ- U_2.

הסבר את נכונות האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

בהצלחה!