פתרון שאלות בממ"ן 14 סמסטר 2019א

שאלה 1

תהי A שפה חסרת הקשר. אז יש ל-A דקדוק חסר הקשר G בצורה הנורמלית של חומסקי.

מספר צעדי הגזירה של מילה w ששייכת ל-A בדקדוק G הוא $2n–1$, כאשר $n=|w|$.

גזירה כזו מתחילה במשתנה ההתחלתי S, ולאחר $2n–1$ צעדי גזירה מגיעים ל-w.

אם נעבור על כל הגזירות האפשריות, שיש בהן בדיוק $2n–1$ צעדי גזירה, ונבדוק לכל אחת מהן, האם המילה שנגזרה היא w, נדע האם w שייכת ל-A או לא.

כדי לעבור על כל הגזירות האפשריות, שיש בהן $2n–1$ צעדי גזירה, נסמן על-ידי b את המספר המקסימלי של כללי שכתוב של איזה שהוא משתנה בדקדוק, ונמספר את כללי השכתוב של כל משתנה X. מספר כללי השכתוב של כל משתנה X הוא בין 1 ל-b.

אנחנו מניחים שמממשים גזירה שמאלית ביותר (בכל צעד גזירה משכתבים את המשתנה השמאלי ביותר במחרוזת הגזירה).

לכל גזירה תתאים "כתובת" באורך $2n–1$ של מספרים בתחום $1..b$:

אם במקום ה-i בכתובת מופיע המספר c (c הוא מספר בין 1 ל-b), אזי בצעד הגזירה ה-i משכתבים את המשתנה השמאלי ביותר במחרוזת הגזירה באמצעות כלל השכתוב ה-c של משתנה זה.

חלק מן הכתובות אינן חוקיות, כי לא לכל משתנה יש בהכרח b כללי שכתוב. כאשר נתקלים בכתובת לא חוקית, עוברים לכתובת הבאה, ומתחילים גזירה חדשה.

גם אם המילה w לא נגזרה בגזירה שמתאימה לכתובת הנוכחית, עוברים לכתובת הבאה.

כך אפשר לעבור על כל הגזירות האפשריות שאורכן $2n–1$.

"על קלט w כאשר w מילה :

1. נסמן $n=|w|$.
2. אתחל כתובת של $2n–1$ 1-ים.
3. הפעל את הגזירה שמתאימה לכתובת השמורה.
4. אם נגזרה המילה w, קבל.
5. אם הכתובת הייתה $2n–1$ b-ים, דחה. (עברנו על כל הגזירות האפשריות, ו-w לא נגזרה.)
6. אם הכתובת לא חוקית, או שלא נגזרה המילה w, עבור לכתובת הבאה (דומה להוספת 1 בבסיס b).
7. לך ל-3."

סיבוכיות מקום :

שמירת הכתובת : $2n–1$ ריבועים.

שמירת מחרוזת הגזירה : לכל היותר $2n$ ריבועים. (זה האורך המקסימלי של מחרוזת הגזירה לאחר $2n–1$ צעדי גזירה.)

בסך הכל, מקום לינארי באורך מילת הקלט w (בנוסף למקום של w עצמה).

שאלה 3

א. בהוכחת משפט 5.9 מוצע אלגוריתם להכרעת A_{LBA}.

על קלט $<M, w>$ כאשר M הוא אוטומט חסום-ליניארית ו-w היא מילה, האלגוריתם מסמלץ את ריצת M על w qng^n צעדים, כאשר n הוא האורך של w.

לצורך הסימולציה יש לשמור את המיקום בסרט של הראש הקורא ($O(\log n)$), את המצב שבו נמצאים ($O(\log q)$) ומונה צעדים שיכול להגיע עד qng^n.

$O(\log(qng^n)) = O(n)$.

המקום הדרוש לאלגוריתם המוצע ליניארי בגודל הקלט.

ב. תהי A שפה ב-PSPACE.

תהי M מכונת טיורינג שמכריעה שייכות לשפה A במגבלת מקום x^k עבור k טבעי כלשהו.

תהי w מילה מעל האלפבית של A.

נבנה בזמן פולינומיאלי קלט לשפה A_{LBA}: נבנה אוטומט חסום-ליניארית M' ומילת קלט w' ל-M':

האוטומט M' יהיה זהה למכונה M, פרט לשינויים הבאים:

נוסיף לאלפבית הסרט סמל # שלא שייך לאלפבית הסרט של M.

ההתייחסות לסמל # בפונקצית המעברים תהיה בדיוק כמו ההתייחסות לסמל הרווח: בכל קריאה של # נפעל בדיוק כמו בקריאה של רווח.

המילה w' תהיה המילה w ואחריה $|w|^k - |w|$ סמלי #.

שימו לב, הבנייה של M' איננה תלויה ב-w. אפשר לבנות את M' פעם אחת ולתמיד. זמן הבנייה של M' איננו תלוי ב-w והוא קבוע.

w שייכת ל-A אם ורק אם $<M', w'>$ שייכת ל-A_{LBA}.

ג. מכיוון שהראינו ש-A_{LBA} שייכת ל-PSPACE, וכל שפה ב-PSPACE ניתנת לרדוקציה בזמן פולינומיאלי ל-A_{LBA}, נסיק ש-A_{LBA} היא שפה PSPACE-שלמה.

שאלה 4

המחלקה L סגורה לשרשור:

תהיינה A_1 ו-A_2 שתי שפות המוכרעות במקום לוגריתמי על-ידי המכונות M_1 ו-M_2, בהתאמה.

נבנה מכונת טיורינג M שמכריעה את השרשור של A_1 ו-A_2:

"על קלט w:

1. חשב את האורך n של w. $w = w_1 w_2 \cdots w_n$.
2. ל- $i = 0, 1, 2, ..., n$ בצע:
3. הרץ את M_1 על $w_1 \cdots w_i$. אם היא דחתה, לך ל-2.
4. הרץ את M_2 על $w_{i+1} \cdots w_n$. אם היא דחתה, לך ל-2.
5. קבל.
6. דחה."

חישוב האורך של w דורש מקום לוגריתמי.

החזקת המונה i דורשת מקום לוגריתמי.

ביצוע הסימולציה של כל אחת מן המכונות בשלבים 3 ו-4 דורשת מקום לוגריתמי. (לא מעתיקים את הקלט לסרט העבודה, אלא משתמשים במונה i כסמן של סוף הקלט (במקרה של M_1) או של תחילת הקלט (במקרה של M_2)).

לכן המכונה M שמכריעה את A_1A_2 פועלת במקום לוגריתמי.

שאלה 6

A_{NFA} שייכת ל-NL: אפשר לבנות מכונה לא דטרמיניסטית שעל קלט $<M, w>$ כאשר M הוא אוטומט סופי לא דטרמיניסטי ו-w היא מילה, תפעל באופן הבא:

המכונה תשמור על סרט העבודה את המצב שבו נמצא האוטומט. בתחילה זה יהיה המצב ההתחלתי של האוטומט. בנוסף תשמור המכונה מונה שיציין כמה סמלים כבר נקראו ממילת הקלט w. בתחילה ערכו של המונה יהיה 0.

בכל שלב, יוגדל המונה ב-1, נגיע לסמל הבא ב-w ונקרא אותו.

כעת יש בידנו הסמל הבא במילה (נקרא לו σ) והמצב q שבו האוטומט נמצא.

נעבור על תיאור האוטומט בקלט, ונבחר באופן לא דטרמיניסטי לאיזה מצב לעבור מבין המצבים שאליהם אפשר לעבור כאשר נמצאים במצב q וקוראים את הסמל σ. נכתוב את המצב החדש במקומו של המצב q.

כאשר תסתיים קריאת המילה, נבדוק האם המצב q שרשום בסרט העבודה שייך לקבוצת המצבים המקבלים. אם כן, נקבל. אם לא, נדחה.

המקום בסרט העבודה הדרוש למכונה שתיארו הוא לוגריתמי בגודל הקלט: שומרים מצב אחד וכמה מונים שמסייעים לנוע על פני הקלט.

רדוקצית מקום לוגריתמי של $PATH$ ל- A_{NFA}: כאשר נתון קלט $<G, s, t>$ לבעיית $PATH$, נבנה קלט $<M, w>$ לבעיית A_{NFA}:

מצבי האוטומט M יהיו הצמתים של G

המצב התחלתי יהיה s

המצב המקבל היחיד יהיה t

האלפבית של האוטומט יהיה $\{a\}$

פונקצית המעברים תעביר ממצב q למצב p (בקריאת האות a) אם יש בגרף קשת מכוונת מ-p ל-q. בנוסף יהיה למצב המקבל t קשת עצמית (מתויגת עם a).

המילה w תהיה a^n כאשר n הוא מספר מצבי האוטומט M (= מספר צומתי G).

הבנייה ניתנת לביצוע במקום לוגריתמי:

מצבי M הם העתקה של צומתי G.

המצב ההתחלתי והמצב המקבל מועתקים מן הקלט.

האלפבית של M קבוע.

פונקצית המעברים היא העתקה של קשתות G ותוספת קבועה של קשת עצמית למצב המקבל.

כדי לבנות את המילה w צריך לספור את הצמתים של G.

נכונות הרדוקציה: אם $<G, s, t>$ שייכת ל-$PATH$, אז יש מסלול מכוון מ-s ל-t ב-G. אם יש ב-G מסלול מכוון מ-s ל-t, אז יש מסלול כזה ללא מעגלים. אורכו של מסלול ללא מעגלים קטן מ-n (מספר צומתי G). מסלול כזה מתאים באוטומט M לקריאת מילה w שאורכה קטן מ-n, והיא מביאה את האוטומט מן המצב ההתחלתי למצב המקבל. מכיוון שיש קשת עצמית למצב המקבל, המילה a^n שייכת לשפה שהאוטומט מזהה. לכן $<M, w>$ שייכת ל- A_{NFA}.

אם $<M, w>$ שייכת ל-A_{NFA}, אז המילה a^n מביאה את האוטומט M מן המצב ההתחלתי אל המצב המקבל. לכן יש בגרף G מסלול מכוון מ-s ל-t. לכן $<G, s, t>$ שייכת ל-$PATH$.