תשובה 1

א. לפי שאלה 3.19 בעמ' 91 בכרך "תורת הקבוצות": כמספר הדרכים לסדר 8 עצמים שונים בשורה. לפי "קומבינטוריקה", בראש עמ' 23 , מספר זה הוא $8! = 40,320$.

ב. כמספר הדרכים לבחור 3 מתוך 8 עצמים שונים, ללא חזרות וללא חשיבות לסדר:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56$$

ג. ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) נניח ש- $B = \{1,2,3\}$.

בחירת פונקציה מ- B הזו ל- A שקולה לבחירת **סדרה** של 3 איברים מתוך A (מדוע?).

פונקציה מ- B ל- A היא חד-חד-ערכית אסם כל איברי הסדרה המתאימה שונים זה מזה.

לכן מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של B ל- A הוא כמספר הדרכים לבחור 3 מתוך 8 עצמים שונים, **ללא חזרות ועם חשיבות לסדר**: $8\cdot 7\cdot 6 = 336$.

ד. $8^3 = 512$: ר' "קומבינטוריקה" שאלה 1.32 בעמ' 17.

ה. $\frac{8!}{(3!)^2\cdot 2!\cdot 2!} = 280$. הסבר למכנה: חילקנו בסידורים הפנימיים בכל אחת מהמחלקות, וכן בהחלפה בין שתי המחלקות בגודל 3. ראו שאלה 2.28 בעמ' 37 בספר (הנוסחה השניה בשאלה - ר' ההסבר עבורה בעמ' 157) ושאלה 2.29 באותם עמודים.

תשובה 2

א. $\frac{10!}{4!3!2!} = 12,600$: ר' שאלה 2.41 בעמ' 43 בספר, והדיון הכללי שבעקבותיה.

ב. אם שתי הספרות הללו חייבות להופיע צמודות, **נתייחס אליהן כאל תו בודד**.
בנוסף, מכיון שהן זהות, אין משמעות להחלפת הסדר בין שתי ההופעות של 2.
יש לנו אפוא 9 תוים, מ- 4 סוגים שונים, כשהכמויות מהסוגים השונים הן: 4+3+1+1 .
מכאן, בדומה לגמרי לסעיף הקודם, מספר הסידורים הוא $2,520 = \frac{9!}{4!3!}$.

ג. נוריד מתוצאת הסעיף הקודם את הסידורים בהם מופיע הרצף 333 .

אם **מופיע** הרצף 333, נראה אותו כתו בודד. בהנחה שגם 22 מופיע, יש לנו 7 תוים שונים, מהם 4 זהים ועוד 3 שונים.

לכן מספר הסידורים בהם **מופיע** הרצף 22 **ומופיע** גם 333 הוא: $\frac{7!}{4!} = 210$.

מספר הסידורים בהם **מופיע** הרצף 22 **ולא מופיע** 333 הוא אפוא:

$2,520 - 210 = 2,310$.

תשובה 3

א. מדובר בבחירה של 10 עצמים מתוך 3 סוגים, כאשר עצמים מאותו סוג נחשבים זהים (עמ' 49 בספר). מספר האפשרויות לכך הוא $D(3,10) = \binom{12}{2} = 66$.

ב. עלינו להוריד מתוצאת הסעיף הקודם את הבחירות שאינן אפשריות כעת עקב הגבלת מספר הכדורים:

כל הכדורים אדומים (אפשרות אחת), 9 כדורים אדומים (2 אפשרויות לכדור הנותר),

כל הכדורים סגולים (אפשרות אחת), 9 כדורים סגולים (2 אפשרויות לכדור הנותר),

כל הכדורים לבנים (אפשרות אחת), 9 כדורים לבנים (2 אפשרויות לכדור הנותר),

8 כדורים לבנים (3 אפשרויות לשני הכדורים הנותרים: אדום-אדום, סגול-סגול, אדום-סגול).

סך האפשרויות הפסולות: 12.

מכאן, מספר הדרכים המותרות: $66 - 12 = 54$.

ג. אם כל צבע צריך להיבחר לפחות פעם אחת, נקח כדור אחד מכל צבע.

נותר לנו לבחור 7 כדורים מתוך 7 אדומים, 7 סגולים, 6 לבנים.

החישוב דומה לסעיפים א, ב, כאשר הפעם יש רק אפשרות אחת פסולה: בחירת 7 כדורים לבנים.

מספר הדרכים: $D(3,7) - 1 = 35$.

תשובה 4

א. לפי הדיון בסעיף 2.4 בספר (ר' בפרט תחתית עמוד 49 מקרה מספר 2),

מספר הפתרונות למשוואה זו הוא $D(5,24) = \binom{5+24-1}{4} = 20,475$.

ב. לכל $1 \le i \le 5$, נסמן $x_i = 2y_i$. נציב זאת במשוואה הנתונה בשאלה ונחלק אותה ב- 2.
נקבל כי מספר פתרונות המשוואה הנתונה בטבעיים **זוגיים** הוא כמספר פתרונות המשוואה $y_1 + y_2 + \ldots + y_5 = 12$ כאשר y_i **טבעיים כלשהם** !

בדומה לסעיף הקודם, מספר הפתרונות הוא $D(5,12) = \binom{5+12-1}{4} = 1,820$.

ג. ראשית עלינו לבחור מיהו המשתנה שיקבל ערך זוגי, מבין המשתנים $x_1, \ldots, x_5$.
יש 5 אפשרויות, ומובן שבכל אחת מהן נקבל אותו מספר פתרונות למשוואה.
נניח אפוא ש- x_1 הוא הזוגי, ונכפול את התוצאה שנקבל ב- 5.

נסמן $x_1 = 2y_1$, ועבור $2 \le i \le 5$ נסמן $x_i = 2y_i + 1$.
נקבל כי מספר פתרונות המשוואה הנתונה באילוצים הנתונים בשאלה הוא כמספר פתרונות המשוואה $2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_5 + 4 = 24$ כאשר y_i **טבעיים כלשהם**.

לאחר סידור נקבל $y_1 + y_2 + \ldots + y_5 = 10$.

מספר פתרונות משוואה זו בטבעיים הוא, בדומה לסעיף הקודם,

$$D(5,10) = \binom{5+10-1}{4} = 1,001 .$$

כאמור בתחילת הפתרון, עלינו לכפול זאת ב- 5. התשובה הסופית היא $5,005$.

איתי הראבן