האוניברסיטה הפתוחה

20476

מתמטיקה בדידה

חוברת הקורס סתיו 2016א

כתב: איתי הראבן

אוקטובר 2015 - סמסטר סתיו תשע"ו

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנטים	א
לוח זמנים ופעילויות	ג
מטלות הקורס	ה
ממ״ח 01	1
ממ״ן 11	5
ממ״ח 02	7
ממ״ח 03	9
ממ״ן 12	11
ממ״ן 13	13
ממ״ח 04	15
ממ״ן 14	17
ממ״ן 15	19
ממ״ח 05	21
ממ״ן 16	23

אל הסטודנטים,

ברוכים הבאים לקורס "מתמטיקה בדידה".
לפני שתתחילו בלימוד אנא קראו עמודים אלה בעיון.

על חלק מספרי הלימוד וחלק מחומרי העזר של הקורס מופיעים מספרי קורס 20276, 20283. חומרים אלה הועברו לקורס שלנו מקורס שפעל באו"פ בשנים קודמות.

באתר האינטרנט של הקורס תמצאו חומרי למידה נוספים והדרכה ללמידה. אתר הקורס הוא גם ערוץ תקשורת אפשרי עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. אתרי הקורסים נמצאים בכתובת http://opal.openu.ac.il .

הסבר על למידה מתוקשבת אפשר למצוא כאן: http://telem.openu.ac.il .
מערכות אחרות של האו"פ זמינות כאן:
https://sheilta.apps.openu.ac.il/pls/dmyopt2/sheilta.myop.
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה: www.openu.ac.il/Library . פרטים לגבי נהלי האוניברסיטה הפתוחה מפורטים בידיעון האקדמי, באתר הכללי של האו"פ: http://www.openu.ac.il .

מרכז ההוראה בקורס הוא איתי הראבן. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בדואר אלקטרוני itaiha@openu.ac.il
- דרך מערכת המסרים באתר הקורס.
- בטלפון **052-5277220** בימי ד' בין השעות 19:00 - 20:00.
- פקס: **09-7780631** , לרשום "עבור איתי"

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה ,
צוות הקורס

שימו לב:

חובה להגיש מטלות במשקל של 12 נקודות לפחות.

ללא הגשת מטלות במשקל זה

אי-אפשר לעבור את הקורס.

ראו הסבר בעמוד ה'

לוח זמנים ופעילויות (20476/ 2016א)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח	
				ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
1	23.10.2015-18.10.2015	החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"			
2	30.10.2015-25.10.2015	תורת הקבוצות פרק 1		ממ"ח 01 יום ו' 30.10.2015	
3	6.11.2015-1.11.2015	תורת הקבוצות סעיפים 2.1- 2.4			ממ"ן 11 יום ה' 5.11.2015
4	13.11.2015-8.11.2015	תורת הקבוצות סעיפים 2.5 -3.1		ממ"ח 02 יום ו' 13.11.2015	
5	20.11.2015-15.11.2015	תורת הקבוצות סעיפים 3.2- 3.5		ממ"ח 03 יום ו' 20.11.2015	
6	27.11.2015-22.11.2015	תורת הקבוצות סעיף 4.1			ממ"ן 12 יום ו' 27.11.2015
7	4.12.2015-29.11.2015	תורת הקבוצות פרק 5 (חוברת נפרדת)			
8	11.12.2015-6.12.2015 (ב-ו חנוכה)	חזרה על החומר			
9	18.12.2015-13.12.2015 (א-ב חנוכה)	קומבינטוריקה סעיפים 1.1- 2.3			ממ"ן 13 יום ג 15.12.2015

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	תאריך אחרון למשלוח ממ"ן (למנחה)
10	25.12.2015-20.12.2015	קומבינטוריקה סעיפים 2.4 - 3.2			
11	1.1.2016-27.12.2015	קומבינטוריקה פרקים 4 - 5		ממ"ח 04 יום ג' 29.12.2015	
12	8.1.2016-3.1.2016	קומבינטוריקה פרקים 6- 7			ממ"ן 14 יום ג' 5.1.2016
13	15.1.2016-10.1.2016	תורת הגרפים פרקים 1-2			ממ"ן 15 יום ה' 14.1.2016
14	22.1.2016-17.1.2016	תורת הגרפים פרקים 3-4			
15	29.1.2016-24.1.2016	חזרה על החומר		ממ"ח 05 יום ו' 29.1.2016	ממ"ן 16 יום א' 31.1.2016

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

מטלות הקורס

קראו היטב עמודים אלה לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס. הבנה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. מטלות המנחה (ממ״ים) יבדקו על-ידי המנחה ויוחזרו לכם בצירוף הערות המתייחסות לתשובות. על מטלות המחשב (ממ״חים) תקבלו רק פירוט תשובות נכונות ולא נכונות.

מבנה המטלות

בכל מטלה כמה שאלות. משקל כל השאלות במטלה זהה אלא אם כן צוין אחרת.
את הפתרונות לממ״ן עליכם לרשום על דף בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. לחלופין ניתן להגיש את המטלות מודפסות במעבד תמלילים, בתנאי שכל הסימונים המתמטיים ברורים. אין להשתמש בסימונים שאינם מופיעים ביחידות.

ניקוד המטלות

בקורס שש מטלות מנחה (ממ״נים) וחמש מטלות מחשב (ממ״חים).
משקל כל ממ״ן הוא 3 נקודות, משקל כל ממ״ח הוא נקודה אחת.
בהגשת כל המטלות ניתן אפוא לצבור 23 נקודות.

דרישות חובה בהגשת המטלות:

חובה להגיש מטלות במשקל של 12 נקודות לפחות.
ללא הגשת מטלות במשקל זה לפחות,
אי-אפשר לעבור את הקורס.

תנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

א. להגיש מטלות במשקל של 12 נק׳ לפחות.

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.

ג. לקבל בציון הסופי 60 נקודות לפחות.

הערות חשובות לתשומת לבך!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

השאירו לעצמכם העתק של המטלה

האוניברסיטה הפתוחה אינה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ״ח) 01

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016א

חומר הלימוד למטלה: הפרק ״מבוא מהיר ללוגיקה״

מספר השאלות: 12 **משקל המטלה:** נקודה אחת

מועד אחרון להגשה: יום ו׳ 30.10.2015

תשובות לממ״ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת״א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ״ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ״ח למנחה!

הערה כללית: בחוברת זו, כל ממ״ח שהגשתו היא ביום ו׳, ניתן להגישו עד מוצ״ש בחצות.

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות. סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה, ב - אם רק טענה 2 נכונה,

ג - אם שתי הטענות נכונות, ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1 #

1. בהנתן הֶקשֵר מתאים, הביטוי הכלב נבח והחתול ברח הוא פסוק.

2. בהנתן הֶקשֵר מתאים, הביטוי $500^3 - 127$ הוא פסוק.

שאלה 2 #

1. הפסוק משה קיבל 100 בבחינה
הוא **שלילתו** של הפסוק משה נכשל בבחינה

2. הפסוק **זבוב בלע את יוסי**
הוא **שלילתו** של הפסוק **יוסי בלע זבוב**

שאלה 3 #

1. הפסוק $1 + 4 = 5$ **וגם** $2 + 2 = 10$ הוא אמת.

2. הפסוק $1 + 4 = 5$ **או** $2 + 2 = 4$ הוא אמת.

שאלה 4 #

1. הפסוק **אם** $2 > 3$ **אז** $7 = 8$ הוא אמת.

2. הפסוק **אם** $2 > 3$ **אז** $7 < 8$ הוא אמת.

שאלה 5 #

1. לוח האמת של הפסוק הפורמלי $(p \vee q) \to (q \to r)$ הוא:

p	q	r	$(p \vee q) \to (q \to r)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**F**
T	**F**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**T**
F	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**T**

2. הפסוק הפורמלי $p \to (\neg p)$ הוא סתירה.

שאלה 6 #

1. הפסוק הפורמלי $p \to q$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $q \vee \neg p$.
2. הפסוק הפורמלי $\neg(p \to q)$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $p \wedge \neg q$.

שאלה 7 #

1. $\neg(r \wedge (p \vee q))$ שקול טאוטולוגית ל- $((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$.
2. $(p \vee q) \wedge (\neg q)$ שקול טאוטולוגית ל- $p \wedge (\neg q)$.

שאלה 8 #

1. **שלילת** הפסוק **יוסי בלע זבוב או יתוש**
   שקולה לפסוק **יוסי לא בלע זבוב ויוסי לא בלע יתוש**
2. **שלילת** הפסוק **יוסי בלע זבוב שבלע יתוש**
   שקולה לפסוק **יוסי לא בלע זבוב, או אם הוא כן בלע אז הזבוב הזה לא בלע יתוש.**

שאלה 9 #

1. אם מתוך סתירה כלשהי נובע הפסוק $\alpha \to \beta$ אז מ- α נובע β.

2. אם מתוך טאוטולוגיה כלשהי נובע הפסוק $\alpha \to \beta$ אז מ- α נובע β.

שאלה 10 #

נתבונן בפסוק :

כל מספר הקטן או שווה שבע, אם נוסיף לו 3 נקבל מספר הקטן או שווה 10

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך : $\forall x(x \le 7 \quad \wedge \quad x+3 \le 10)$.

2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך : $\forall x(x \le 7 \quad \to \quad x+3 \le 10)$.

שאלה 11 #

נתבונן בפסוק :

כל מספר המקיים: כאשר מוסיפים לו 3 מתקבל מספר הקטן או שווה 10,

מקיים: המספר המקורי עצמו קטן או שווה 7 .

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך : $(\forall x(x+3 \le 10)) \to (\forall x(x \le 7))$

2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך : $\forall x(x+3 \le 10 \ \to x \le 7)$

שאלה 12 #

1. את **שלילת** הפסוק כל חייזר רעב עוזב את מקום הולדתו כדי לחפש אוכל

ניתן לנסח כך : יש חייזר שאינו רעב, שעוזב את מקום הולדתו כדי לחפש אוכל

2. את **שלילת** הפסוק קיים חייזר שהוא רעב או צמא

ניתן לנסח כך : כל חייזר אינו רעב ואינו צמא.

תזכורת חשובה

ללא עמידה בדרישת הגשת המטלות לא ניתן לעבור את הקורס.

בסוף כל סמסטר, סטודנטים בודדים נאלצים להירשם מחדש לקורס (בתשלום), כי לא הגישו מטלות במכסה הנדרשת.

חסכו לעצמכם את העלות הכספית ואת אבדן הסמסטר, הגישו מטלות לפי הנדרש. הדרישות מפורטות בתחילת החוברת.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016א

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 1

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ה' 5.11.2015

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל.

שאלה 1

שאלה זו נועדת לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות ולחדד כמה נקודות שכדאי להבינן בשלב מוקדם:

* ההבדל בין A לבין $\{A\}$ (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא A).

  * מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה $\varnothing$ לבין $\{\varnothing\}$.

* ההבדל בין "x איבר של y" לבין "x חלקי ל- y".

בכל אחד מהזוגות $x\,;\,y$ הבאים, קבע אם $x \in y$ וקבע אם $x \subseteq y$.

ייתכן ששני היחסים יתקיימו בעת ובעונה אחת, וייתכן גם שאף אחד משניהם לא יתקיים.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק.

א. $\varnothing \;;\; \varnothing$

ב. $\{\{\varnothing\}\} \;;\; \{\varnothing\}$

ג. $\{\varnothing,\{1\}\} \;;\; \{\varnothing\}$

ד. $\{\varnothing,\{1\}\} \;;\; \{1\}$

ה. $\{\varnothing,\{1\}\} \;;\; \{\{1\}\}$

ו. $\{\{\varnothing\},\{1\}\} \;;\; \{\varnothing,\{1\}\}$

ז. $P(\{1\}) \;;\; \{\varnothing\}$

ח. $P(P(\varnothing)) \;;\; P(\varnothing)$

שאלה 2

הוכיחו את הזהות $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$ **בשתי דרכים**:

דרך 1: "אלגברה של קבוצות": צאו מאחד האגפים, פתחו אותו בעזרת זהויות מפרק 1 בתורת הקבוצות, והגיעו לאגף השני. בהוכחה זו **אין להשתמש** במושג "איבר" או בסימן $\in$.

עבור הפרש קבוצות מומלץ להיעזר בזהות $A - B = A \cap B'$ (עמ' 23 בספר הלימוד).

דרך 2: הראו ש- x שייך לאגף שמאל **אם ורק אם** הוא שייך לאגף ימין. בהוכחה זו יש להסתמך על הגדרת הפעולות בין קבוצות ועל זהויות בתחשיב הפסוקים. ההוכחה דומה להוכחה הקודמת אבל במקום אלגברה של קבוצות התמרון הוא באלגברה של פסוקים.

שאלה 3

תהיינה B,X,Y קבוצות. הוכיחו :

$X \cup B = Y \cup B$ **אם ורק אם** $X - B = Y - B$.

הצעה לארגון ההוכחה:

תהי U קבוצה אוניברסלית המכילה את B,X,Y .

(i) נניח $X \cup B = Y \cup B$. נבצע בשני האגפים פעולה...

(ii) נניח $X - B = Y - B$. נבצע בשני האגפים פעולה....

שאלה 4

איחוד של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בהגדרה 1.6 בעמוד 12 בספר.

במלים פשוטות ההגדרה היא :

$x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ אםם x שייך **לפחות** לאחת הקבוצות A_i , כאשר i מקבל ערכים ב- I.

במלים אחרות:

$x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ אםם $\exists i(i \in I \wedge x \in A_i)$

חיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בעמוד 16 בספר. במלים פשוטות ההגדרה היא :

$x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ אםם x שייך **לכל** הקבוצות A_i , כאשר i מקבל ערכים ב- I.

במלים אחרות:

$x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ אםם $\forall i(i \in I \rightarrow x \in A_i)$

השאלה שלפניכם מתרגלת את השימוש בשני מושגים האלה.

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים (כולל 0) , $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

לכל $n \in \mathbf{N}$, תהי $A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 5 \le x \le 2n+3\}$, ותהי $B_n = A_{n+1} - A_n$.

(4 נק') א. חשבו את A_0 , A_1 , A_2 , A_3 ואת B_0 , B_1 , B_2 .

(4 נק') ב. רשמו ביטוי מפורש עבור B_n (ביטוי מפורש : ביטוי בעל צורה דומה להגדרה של A_n).

(10 נק') ג. חשבו את $\bigcup_{2 \le n \in \mathbf{N}} B_n$. הוכח את תשובתך בעזרת הכלה דו-כיוונית.

(8 נק') ד. בעזרת ההגדרות של איחוד וחיתוך כלליים בתחילת השאלה **ובעזרת כללי דה-מורגן לכמתים** $\forall,\exists$, אותם למדנו בלוגיקה, נסחו והוכיחו הכללה של כללי דה-מורגן לקבוצות, עבור **איחוד וחיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות**, שכולן חלקיות לקבוצה אוניברסלית U :

$$\bigcup_{i \in I}(A_i') = ? \quad , \quad \bigcap_{i \in I}(A_i') = ? \ .$$

(6 נק') ה. נסמן $D_n = \mathbf{R} - B_n$. חשבו בעזרת הסעיפים הקודמים את $\bigcap_{2 \le n \in \mathbf{N}} D_n$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016א

חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" סעיפים 2.1 – 2.4

מספר השאלות: 10 **משקל המטלה:** נקודה אחת

מועד אחרון להגשה: יום ו' 13.11.2015

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בשאלות המסומנות ב- # (למשל שאלה 3) מופיעות שתי טענות. בשאלות אלה סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה, ב - אם רק טענה 2 נכונה,
ג - אם שתי הטענות נכונות, ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

בשאלות <u>שאינן</u> מסומנות בכוכבית, פשוט בחרו את התשובה הנכונה.

שאלה 1

יהי $R = (\{1,2\}\times\{1,3\}) \cup \{(3,2),(2,2)\}$.

א. אם $X=\{1,2\}$ אז קיימת קבוצה Y כך ש- $R = X\times Y$.

ב. התשובה הקודמת אינה נכונה, אבל אם $X=\{1,2,3\}$ אז קיימת Y כך ש- $R = X\times Y$.

ג. התשובות הקודמות אינן נכונות, אבל קיימות קבוצות X,Y כך ש- $R = X\times Y$.

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 2 (כאן ובהמשך הקורס, "רלציה" בעברית: יחס)

תהי $A=\{1,2,3,4\}$. את הקבוצה R שהוגדרה בשאלה 1 נראה כעת כיחס מ- A ל- A.

$Domain(R)\cap Range(R)$ הוא:

א. $\varnothing$ ב. $\{1\}$ ג. $\{2,3\}$ ד. $\{1,2,3\}$ ה. A

שאלה 3 #

R, A הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

טענה (*i*): אם $S = I_A$ אז $RS = I_A$. טענה (*ii*): אם $S = R^{-1}$ אז $RS = I_A$.

שאלה 4

R הוא יחס כלשהו מעל קבוצה A כלשהי. נתון $RR^{-1} = I_A$. מהנתון **נובע**:

א. $R^{-1}R = I_A$ ב. $R = I_A$ ג. $I_A \subseteq R$

ד. $Domain(R) = A$ ה. $Range(R) = A$

שאלה 5

R הוא יחס כלשהו מעל קבוצה כלשהי. השוויון $R^3R^2 = R^5$

א. נכון תמיד   ב. נכון **רק** אם $R = I_A$ ג. נכון **רק** אם $R = \varnothing$

ד. נכון **רק** אם $R = A \times A$ ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

שאלה 6 #

תהי $B = \{1,2,3\}$ ויהי R היחס שהוגדר בשאלה 1, כאשר כעת אנו רואים אותו כיחס מעל B.

טענה (***i***): $R \cup R^2$ הוא רפלקסיבי.   טענה (***ii***): $R \cup R^2$ הוא סימטרי.

שאלה 7 #

B, R הם אלה שהוגדרו בשאלה 6.

טענה (***i***): $R \cup R^2$ הוא אנטי-סימטרי.   טענה (***ii***): $R \cup R^2$ הוא טרנזיטיבי.

שאלה 8 #

R,S הם יחסים מעל קבוצה A ומתקיים $S \subseteq R$.

טענה (***i***): אם S סימטרי אז R סימטרי.   טענה (***ii***): אם R אנטי-סימטרי אז S אנטי-סימטרי.

שאלה 9

R הוא יחס כלשהו. איזה מהפסוקים הבאים מביע את הטענה ש- R הוא יחס סימטרי?

א. $\forall x \forall y \left((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \right)$ ב. $\forall x \exists y \left((x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R \right)$

ג. $\left(\forall x \forall y \, (x,y) \in R \right) \rightarrow \left(\forall x \forall y \, (y,x) \in R \right)$ ד. $\forall x \forall y \left((x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R \right)$

ה. $\exists x \exists y \left((x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R \right)$

שאלה 10

R הוא יחס מעל קבוצה כלשהי. ידוע ש- R **אינו** טרנזיטיבי. מכאן ניתן להסיק:

א. ב- R יש לפחות שני זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש R כזה שבו בדיוק שני זוגות.

ב. ב- R יש לפחות 3 זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש R כזה שבו בדיוק 3 זוגות.

ג. ב- R יש לפחות 4 זוגות סדורים.

ד. מהנתון נובע ש- A אינסופית וב- R יש אינסוף זוגות סדורים.

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

מטלת מחשב (ממ״ח) 03

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016א

חומר הלימוד למטלה: ״תורת הקבוצות״ מסעיף 2.5 עד סוף פרק 3

מספר השאלות: 10 **משקל המטלה:** נקודה אחת

מועד אחרון להגשה: יום ו׳ 20.11.2015

תשובות לממ״ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת״א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ״ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ״ח למנחה!

שאלה 1 (״רלציה״ בעברית: יחס)

יהיו: $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $R=\{(1,2),(3,4),(4,5),(3,5)\}$, $E=I_A\cup R\cup R^{-1}$.

החלוקה שיחס השקילות E משרה ב- A היא:

א. $\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6\}\}$ ב. $\{\{1,2,3\},\{4\},\{5,6\}\}$

ג. $\{\{1,2,3,4,5\}\}$ ד. $\{\{1,2,3,4,5,6\}\}$

ה. $\{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$ ו. E אינו יחס שקילות מעל A ולכן אינו משרה חלוקה של A.

שאלה 2

נגדיר יחס L מעל $\mathbf{N}$: $(n,m)\in L$ אםם $2n-2m$ מתחלק ללא שארית ב- 3.

מספר מחלקות השקילות ש- L משרה ב- $\mathbf{N}$ הוא:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. יש אינסוף מחלקות שקילות.

ה. L אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

שאלה 3

נגדיר יחס M מעל $\mathbf{N}-\{0\}$:

עבור n,m טבעיים חיוביים, $(n,m)\in M$ אםם אחד מהם מתחלק ללא שארית בשני.

מספר מחלקות השקילות ש- M משרה ב- $\mathbf{N}-\{0\}$ הוא:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. יש אינסוף מחלקות שקילות.

ה. M אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

שאלה 4

נגדיר פונקציה f מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$: $f(k)=k^2+k+5$. f היא:

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$.

שאלה 5

תהי $g(x)=x^2+2x-1000$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. g היא:

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbf{R}$ ל- $\mathbf{R}$.

שאלה 6

תהי $f(X)=X-\mathbf{N}$, $f:P(\mathbf{R})\to P(\mathbf{R}-\mathbf{N})$. f היא:

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $P(\mathbf{R})$ ל- $P(\mathbf{R}-\mathbf{N})$.

שאלה 7 # (הסבר על שאלות סולמית ראו בתחילת ממ"ח 02)

נתון $A,B\subseteq U$. בעמ' 85 בכרך "תורת הקבוצות" מוגדרת φ_A , **הפונקציה האופיינית** של A ב- U .

טענה ***(i)***: אם $A\subseteq B$ אז לכל $x\in U$, $\varphi_A(x)\le\varphi_B(x)$.

טענה ***(ii)***: אם לכל $x\in U$, $\varphi_A(x)\le\varphi_B(x)$ אז $A\subseteq B$.

שאלה 8

עבור $X,Y\subseteq\mathbf{N}$, נאמר ש- $(X,Y)\in D$ **אםם (אם ורק אם)** $Y\subseteq X$. היחס D הוא:

א. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$, שאינו סדר-מלא מעל $P(\mathbf{N})$.

ב. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$, שהוא גם סדר-מלא מעל $P(\mathbf{N})$.

ג. סדר-חלקי מעל $\mathbf{N}$. ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 9

מעל קבוצה כלשהי A מוגדר סדר-חלקי R, **שאינו** סדר-מלא. מכאן נובע:

א. $|A|=1$. ב. $|A|=2$. ג. $|A|\ge 2$.

ד. מספר הזוגות הסדורים ב- R הוא אינסופי. ה. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

שאלה 10

R הוא סדר-חלקי על קבוצה A.

a,b הם שני אברים שונים של A, ושניהם אברים מקסימליים לגבי R . מכאן נובע:

א. $|A|=2$. ב. R הוא סדר מלא מעל A . ג. R אינו סדר מלא מעל A.

ד. A היא אינסופית. ה. סתירה, לא ייתכן מצב כזה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016א

חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" פרקים 2- 3

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ו' 27.11.2015

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1 (36 נקודות)

$\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים: $\mathbf{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$.

$\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

א. תהי $f(x,y)=15x-4y$, $f:\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$.

הוכיחו ש- f **אינה** חד-חד-ערכית, והוכיחו ש- f היא **על** (הצעה: בשלב ראשון הראו ש- 1 הוא בתמונה של הפונקציה. המשיכו משם).

ב. תהי $K\subseteq\mathbf{Z}$ קבוצת השלמים הזוגיים. דוגמאות לאברים של K: $38,\ 0,\ -6$.

תהי $g(X)=X\oplus K$, $g:P(\mathbf{Z})\to P(\mathbf{Z})$.

הוכח: לכל $X\in P(\mathbf{Z})$, $g(g(X)) = X$

הדרכה: ר' תכונות של הפרש סימטרי בעמ' 27 בכרך "תורת הקבוצות".

הוכחה אלגברית קצרה הרבה יותר במקרה זה מאשר הוכחה ע"י "יהי x איבר...".

ג. האם g היא חד-חד-ערכית? האם g היא על ?

שאלה 2 (18 נק')

תהי U קבוצה ותהי $B\subseteq U$.

בעזרת הקבוצה הקבועה B נגדיר פונקציה $f:P(U)\to P(U-B)$ כך: $f(X)=X-B$.

קל לראות ש- f היא אכן פונקציה $P(U)\to P(U-B)$, אינכם נדרשים להראות זאת.

המשך השאלה בעמוד הבא

(6 נק׳) א. האם f היא **על** $P(U-B)$? הוכיחו.

(12 נק׳) ב. נניח ש- U היא קבוצה סופית. נסמן $|U| = n$, $|B| = k$.

נגדיר חלוקה π של $P(U)$:

בחלוקה π, קבוצות $X,Y \in P(U)$ הן באותה מחלקה אם ורק אם $X \cup B = Y \cup B$.

קל לראות שזו אכן חלוקה, אינכם נדרשים להוכיח זאת.

שימו לב: זו לא חלוקה של U אלא חלוקה של $P(U)$.

כמה מחלקות שקילות יש בחלוקה π ? נמקו את תשובתכם. אפשר להיעזר בשאלה 3 בממ״ן 11. אפשר להיעזר בקובץ ״יחס שקילות המושרה על-ידי פונקציה״ הנמצא באתר הקורס.

שאלה 3 (30 נקודות)

א. דינה אומרת: אם A היא קבוצה לא-ריקה אז לכל יחס **טרנזיטיבי** R מעל A,
קיים מעל A יחס **סדר חלקי** K כך ש- $R \subseteq K$. הוכיחו שדינה טועה.

ב. שמעון אומר: אם A היא קבוצה לא-ריקה אז לכל יחס **אנטי-סימטרי** R מעל A,
קיים מעל A יחס **סדר חלקי** K כך ש- $R \subseteq K$. הוכיחו ששמעון טועה.

ג. סימה אומרת: אם R הוא סדר-חלקי מעל A והוא **אינו** סדר-מלא מעל A, אז **לא קיים** ב- A
איבר גדול ביותר לגבי R. הוכיחו שסימה טועה.

שאלה 4 (16 נקודות)

לכל n טבעי יהי $a_n = \sum_{i=0}^{5} (n+i)^2$.

במלים אחרות, a_n הוא סכום **הריבועים** של 6 מספרים טבעיים עוקבים. המחובר הראשון הוא n^2 והמחובר הששי והאחרון הוא $(n+5)^2$.

הוכיחי באינדוקציה: לכל n טבעי, a_n נותן שארית 7 בחילוק ב- 12.

וכעת לפרסומות: 60 שניות על התדריכים השבועיים

באתר הקורס יש תדריכים לכל פרק בחומר. התדריכים נותנים דגשים, הבהרות, הפניות לחומר עזר נוסף באתר. פה ושם הם מחדדים הגדרה לא מעודכנת שנמצאת בספר. התדריכים משקפים את נקודת המבט של מרכז ההוראה על הקורס.
מכיון שמרכז ההוראה כותב את הבחינה, משתלם להבין את נקודת המבט שלו.

אלה היו 60 שניות על תדריכים שבועיים באתר הקורס.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016א

חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" פרקים 4,5

מספר השאלות: 4 משקל המטלה: 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ג' 15.12.2015

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שימו לב: חלק ממטלה זו מתייחס לפרק 5 בתורת הקבוצות, שנמצא בידיכם בחוברת נפרדת.

שאלה 1 (36 נק')

$\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים, $\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים.

בכל סעיף מצאו את עוצמת הקבוצה הרשומה בו. הוכיחו את תשובותיך.

א. $K = \{x \in \mathbf{R} \mid 4x \in \mathbf{Z}\}$

ב. $L = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 4x - y = 5\}$

ג. $M = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid (x + y \in \mathbf{Z}) \wedge (4x - y = 5)\}$

שאלה 2 (24 נק')

<u>טענה</u>

אם k,m עוצמות **גדולות מ-** 1 (סופיות או אינסופיות), אז $k + m \le k \cdot m$.

<u>הנה התחלה של הוכחה לטענה</u>

תהי A קבוצה שעוצמתה k, ותהי B קבוצה **זרה ל-** A (!), שעוצמתה m

(יש קבוצות כאלה, משיקולים כללים שהוזכרו בפרק 5 בתורת הקבוצות).

מהנתון על k,m נובע בפרט ש- A,B אינן ריקות. יהי אפוא $a_1 \in A$ ויהי $b_1 \in B$.

נבנה פונקציה $f : A \cup B \to A \times B$.

המשיכו את ההוכחה מנקודה זו (ולא בדרך אחרת).

אין צורך להעתיק את החלק שרשום כאן.

במהלך ההוכחה שימו לב לבעיה בחד-חד-ערכיות שעשויה להיווצר, ותנו לבעיה מענה ע"י שיפוץ קטן בפונקציה שאתם בונים. שימו לב שנתון כי $k,m \ge 2$.

שאלה 3 (10 נקי)

$\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים. נסמן $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x \le 1\}$

מצאו את התשובה הנכונה **והוכיחו אותה:**

עוצמת קבוצת היחסים (הרלציות) מעל A היא:

[1] $\aleph_0$ **[2]** C **[3]** 2^C **[4]** עוצמה גדולה מ- 2^C

[5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 4 (30 נקי)

א. תהיינה k_1, k_2, m עוצמות. נתון $k_1 \le k_2$. הוכח: $k_1^m \le k_2^m$.

ב. הוכח: $C = \aleph_0^{\aleph_0}$. כדאי להיעזר בסעיף א.

תזכורת לגבי מטלות הנשלחות בדואר ישראל

כל סמסטר, מטלות בודדות מתוך שפע המטלות הנשלחות בקורס אובדות בדרך למנחה. כל סטודנט בטוח ש"לי זה לא יקרה", אבל העובדה היא שזה קורה.
אם אתם שולחים מטלה בדואר ישראל או אפילו מגישים למנחה אישית על נייר, צלמו עותק ושמרו אצלכם.

זה סוג של ביטוח במחיר אפסי, שיכול לחסוך לכם הרבה עגמת נפש.

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016א

חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 1,2

מספר השאלות: 11 **משקל המטלה**: נקודה אחת

מועד אחרון להגשה: יום ג' 29.12.2015

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בשאלות 1 – 4 A,B הן קבוצות, $|A|=6$, $|B|=3$.

שאלה 1

מספר הפונקציות של B ל- A הוא:

א. 18 ב. 20 ג. 120 ד. 216 ה. 729

שאלה 2

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של B ל- A הוא:

א. 6 ב. 20 ג. 120 ד. 216 ה. 729

שאלה 3

מספר היחסים הרפלקסיביים מעל A הוא:

א. 6 ב. 36 ג. 64 ד. 6^6 ה. 2^{30}

שאלה 4

יהי $a_0 \in A$. מספר יחסי הסדר המלא מעל A שבהם a_0 הוא איבר מקסימלי הוא:

א. 6 ב. 36 ג. 64 ד. 120 ה. 720

שאלות 5- 7 עוסקות בדרכים שונות לסדר את המחרוזת abbccddd (להלן: "**המחרוזת**").

שאלה 5

מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת הוא:

א. 24 ב. !8 ג. 15 ד. 1680 ה. 840

שאלה 6

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת כאשר הספרות cc חייבות להיות צמודות זו לזו?

א. 24 ב. 42 ג. 240 ד. 420 ה. 2400

שאלה 7

בנוסף לדרישה שבשאלה 6, נדרוש גם **שלא** יופיע הרצף ddd.

מספר הסידורים האפשריים כעת קטן ממספר הסידורים שמצאתם בשאלה 6. **בכמה הוא קטן?**

א. 10 ב. 60 ג. 120 ד. 240 ה. 400

בכל אחת מהשאלות 8 – 10 נתונה קבוצה של כדורים בצבעים אדום, סגול ולבן, ועליכם למצוא **בכמה דרכים ניתן לבחור מהקבוצה הנתונה 10 כדורים**, ללא חשיבות לסדר הבחירה.

כדורים בעלי אותו צבע נחשבים זהים.

שאלה 8

יש מספר בלתי מוגבל של כדורים מכל צבע.

א. 3^{10} ב. $\frac{10!}{3!}$ ג. 10^3 ד. $D(10,3)$ ה. $D(3,10)$

שאלה 9

נסמן את התשובה לשאלה הקודמת ב- x.

כעת לרשותנו רק 8 כדורים אדומים, 8 כדורים סגולים ו- 7 כדורים לבנים.

התשובה כעת היא:

א. $x-7$ ב. $x-10$ ג. $x-12$ ד. ללא שינוי, x.

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 10

לרשותנו שוב 8 כדורים אדומים, 8 כדורים סגולים ו- 7 כדורים לבנים.

הפעם כל צבע חייב להיבחר לפחות פעם אחת.

א. 15 ב. 25 ג. 35 ד. 45 ה. 55

שאלה 11

מהו מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=13$?

א. 65 ב. 1,287 ג. 2,380 ד. 6,188 ה. 154,440

תזכורת: בקורס זה, 0 הוא מספר טבעי.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016א

חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 3,4,5

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ג' 5.1.2016

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1 (25 נק')

תהיינה A,B קבוצות סופיות לא ריקות, $|A|=k$, $|B|=n$.

כידוע, מספר הפונקציות של A ל- B הוא n^k.

<u>הגדרה</u>: אם $X \subseteq A$ ו- f היא פונקציה של X ל- B, אומרים ש-f היא <u>פונקציה חלקית</u> של A ל- B. במלים אחרות, פונקציה חלקית של A ל- B היא פונקציה ל- B, שתחום ההגדרה שלה הוא קבוצה חלקית כלשהי של A. להסיר ספק:

* יתכן ש- $X = A$: פונקציה רגילה של A ל- B היא מקרה פרטי של פונקציה חלקית של A ל- B.

* יתכן ש- $X = \emptyset$: מ- $\emptyset$ יש פונקציה אחת ויחידה לכל קבוצה: "הפונקציה הריקה".

(10 נק') א. רשמו סכום המביע את מספר הפונקציות החלקיות של A ל- B.
הסכום הוא על כל הגדלים האפשריים לקבוצות חלקיות של A.

(10 נק') ב. הראו בעזרת שיקול קומבינטורי, **ללא סכומים וללא שימוש בסעיף א,** שמספר הפונקציות החלקיות של A ל- B הוא $(n+1)^k$.
הדרכה: אם אבר של A לא נמצא בתחום ההגדרה של f אז נגיד ש...

(5 נק') ג. הראו בחישוב ישיר, שהתשובה שקיבלתם בסעיף א שווה לתשובה שקיבלתם בסעיף ב.

שאלה 2 (25 נק')

בכמה דרכים ניתן לסדר את 10 הספרות 0123456789 , כאשר אסור שיופיע **אף אחד** מארבעת הרצפים הבאים: 0123, 2345, 4567, 6789. הגיעו לתשובה סופית מספרית.

דוגמא לסידור תקין: 1234987605 (מותר 1234 ומותר 9876).

דוגמא לסידור לא תקין: 9167234580 (מופיע 2345).

שאלה 3 (25 נק')

תהי $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$. מיצאו כמה **תמורות** של A (פונקציות חד-חד-ערכיות של A על A) מקיימות את התנאי: לכל $1\le i\le 5$, $f(i)\ne i$. דוגמאות:

(i) הפונקציה השולחת את כל אברי A ל- 1 **אינה** עומדת בדרישות, כי היא אינה תמורה.

(ii) פונקציית הזהות היא תמורה, אבל היא **אינה** מקיימת את התנאי.

(iii) התמורה f המוגדרת כך:

$$f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=4,\ f(4)=5,\ f(5)=6,\ f(6)=1,\ f(7)=7$$

מקיימת את התנאי.

אין הכרח להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 4 (25 נק')

(15 נק') א. מתוך 1000 המספרים שבתחום $1\le n\le 1000$ מישהו בחר 501 מספרים שונים. הוכיחו שבקבוצת 501 המספרים שנבחרו, בהכרח יש שני אברים שונים x,y כך ש- y מתחלק ב- x ללא שארית.

הדרכה: כל מספר טבעי חיובי n ניתן להציג באופן יחיד כך: $n=2^k\cdot b$, כאשר k טבעי (יכול להיות 0), ו- b הוא **אי-זוגי**: פשוט מוציאים כגורם מתוך n את החזקה הגדולה ביותר של 2 אשר בה n מתחלק ללא שארית. אחרי שנחלק את n בחזקה הזו של 2 , נקבל מספר אי-זוגי, אחרת היה אפשר להמשיך ולחלק ב- 2.

k הוא אפוא מספר הפעמים בו ניתן לחלק את n ב- 2 כך שיתקבל מספר שלם.

b הוא התוצאה של החילוק הזה.

דוגמאות: $15=2^0\cdot 15$, $72=2^3\cdot 9$, $1024=2^{10}\cdot 1$.

בשאלה שלנו נתאים לכל n את המספר b שמתקבל ממנו, ונחשוב קצת מה זה אומר.

(10 נק') ב. אדם פזיז ניסה ליישם את ההוכחה של סעיף א' על בחירה של 501 מספרים שונים מתוך 1000 המספרים שבתחום $701\le n\le 1700$. הוא טוען שגם במקרה זה בקבוצת 501 המספרים שנבחרו, בהכרח חייבים להיות שני אברים שונים a,b כך ש- a מתחלק ב- b ללא שארית. הוא הוכיח זאת באותה דרך של סעיף א'. מצאו את הטעות בהוכחה במקרה זה (אין הכרח למצוא דוגמא נגדית לטענה, אתם מתבקשים רק להסביר מדוע אותה הוכחה לא עובדת במקרה זה).

מטלת מנחה (ממ״ן) 15

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016א

חומר הלימוד למטלה: ״קומבינטוריקה״ פרקים 6 – 7.3

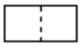
מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ה׳ 14.1.2016

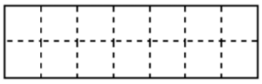
מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״)

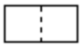
- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1

בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים בגודל 2×1 : 

בלוק יכול להיות **באחד** משלושה צבעים: **ירוק, כחול, לבן** (הבלוק כולו צבוע בצבע אחיד, לא כל משבצת בנפרד). עלינו לרצף מלבן שממדיו $n \times 2$ (בציור לדוגמא משמאל $n = 7$), בלי לחרוג מגבולות המלבן.



בלוק ירוק אפשר להניח במצב ״שוכב״  או במצב ״עומד״  .

בלוק כחול אפשר להניח **רק במצב שוכב**. בלוק לבן אפשר להניח **רק במצב עומד**.

אסור להניח בלוק ירוק שוכב על בלוק כחול (דשא לא צומח על הים).

יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

(10 נק׳) א. רשום יחס נסיגה עבור a_n (הסבר אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

(15 נק׳) ב. פתור את יחס הנסיגה.

להסיר ספק: בריצוף, גבולות הבלוקים נראים לעין. ריצוף בשני בלוקים ירוקים העומדים זה ליד זה שונה מריצוף בשני בלוקים ירוקים השוכבים זה על גבי זה.

שאלה 2

הנתונים הבאים חלים על שני סעיפי השאלה. תהי $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

נתון: $a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = -2,\ a_3 = -10$. שאר המקדמים אינם ידועים.

תהי g פונקציה המקיימת: $f(x) \cdot g(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots$

(20 נק׳) א. נסמן $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$. חשבו את $b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3$.

הדרכה: התקדמו בהדרגה, בחישוב כל מקדם היעזרו במקדמים שמצאתם עד כה.

(5 נק׳) ב. נסמן $4f(x) \cdot f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$. מצאו את c_3 .

שאלה 3 (ראו תרגיל דומה בסוף הקובץ "מבוא לפונקציות יוצרות" באתר הקורס)

יהי $m \in \mathbf{N}$. נתבונן בזהות $(1+x)^m(1-x)^m = (1-x^2)^m$.

מצאו את המקדם של x^6 בכל אחד מהאגפים של הזהות הנ"ל: באגף אחד סכום של מחוברים ובאגף האחר ביטוי פשוט. הביטויים כמובן תלויים ב- m.

רשמו את הזהות הקומבינטורית המתקבלת.

בדקו את הזהות שקיבלתם עבור $m = 4$.

תזכורת: ביטויים מוזרים כגון $\binom{2}{9}$, $\binom{10}{-2}$ הוגדרו בכרך "קומבינטוריקה" בעמ' 30.

אין צורך להפריד את החישוב הכללי למקרים לפי הגודל של m.

שאלה 4

במחסן של חנות מחשבים נמצאים n מחשבים ישנים **זהים**. בעלי החנות מעמיסים את המחשבים הישנים על 3 רכבים **שונים** (הרכב של איציק, הרכב של בני והרכב של גילה), שבכל אחד מהם יש מקום ל- 24 מחשבים לכל היותר.

(9 נק') א. רשום פונקציה יוצרת עבור מספר הדרכים לחלק את n המחשבים הזהים בין 3 הרכבים השונים (לא חייבים לנצל את כל הרכבים).

(16 נק') ב. אם מספר המחשבים הוא 70, חשב בעזרת סעיף א' או בדרך אחרת את מספר הדרכים לחלק את המחשבים בין הרכבים. תן תשובה סופית מספרית.

להלן נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות:

(*i*)! סכום טור הנדסי סופי: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ואינסופי: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

(*ii*)! כפל פונקציות יוצרות:

אם $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, ו- $f(x)\cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

אז $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד).

(*iii*)! $\sum_{k=0}^{\infty} D(n,k)x^k = (1+x+x^2+\ldots)^n = \frac{1}{(1-x)^n}$.

במלים אחרות: המקדם של x^k בפיתוח הביטוי $\frac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$.

(ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר).

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016א

חומר הלימוד למטלה: "תורת הגרפים" פרקים 1- 3

מספר השאלות: 10 **משקל המטלה:** נקודה אחת

מועד אחרון להגשה: יום ו' 29.1.2016

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

שאלה 1

נתאר לעצמנו גרף על 10 צמתים, שדרגותיהם: 1,2,3,3,4,5,6,6,7,8

א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.
ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.
ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.
ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.
ה. לא קיים גרף כזה.

שאלה 2

גרף G מוגדר כך: הצמתים של G הם הקבוצות בנות בדיוק 3 אברים מתוך $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

למשל הקבוצה $\{1,4,7\}$ היא צומת של G. מספר הצמתים של G הוא אפוא $\binom{7}{3}$.

בין שני צמתים שונים A,B יש קשת אם ורק אם $|A \cap B| = 1$.

למשל יש קשת בין $\{1,4,7\}$ לבין $\{2,3,4\}$.

דרגת כל צומת ב- G היא:

א. 6
ב. 18
ג. 35
ד. 36
ה. G אינו גרף רגולרי - לא לכל הצמתים אותה דרגה.

שאלה 3

בהתייחס לגרף מהשאלה הקודמת, מספר הקשתות בגרף הוא:

א. 34
ב. 35
ג. 108
ד. 153
ה. 315

שאלה 4

הגרף משאלה 2 הוא:

א. יער שאינו עץ
ב. עץ
ג. גרף לא קשיר שאינו יער
ד. גרף דו-צדדי
ה. אף אחת מהאפשרויות הקודמות אינה נכונה

שאלה 5

G הוא **יער** על 100 צמתים. מספר הקשתות של G הוא 90.

מספר רכיבי הקשירות של G הוא:

א. 99 ב. 90 ג. 89 ד. 10

ה. מהנתונים לא ניתן לקבוע את מספר רכיבי הקשירות.

שאלה 6 # (הסבר על שאלות סולמית ראו בתחילת ממ"ח 02)

דרגות הצמתים (לא סדרת Prüfer !) בגרף פשוט וקשיר G הן: 1,1,1,2,2,3 .

גם לגרף הפשוט והקשיר H יש בדיוק אותה סדרת דרגות. הגרפים אינם מתוייגים.

טענה (*i*): G,H הם בהכרח עצים. טענה (*ii*): G,H בהכרח איזומורפיים זה לזה.

שאלה 7

G הוא עץ מתויג על 6 צמתים, התגים הם כמקובל המספרים $1,2,3,4,5,6$.

סדרת Prüfer של G היא $(1,x,2,y)$ כאשר $x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}$. לפיכך:

א. $x,y\in\{3,4,5,6\}$ ובהכרח $x\neq y$. ב. $x,y\in\{3,4,5,6\}$ וייתכן $x=y$.

ג. $x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}$ כאשר המגבלה היחידה היא $x\neq y$.

ד. $x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}$ ואין עליהם כל מגבלה.

ה. לא ייתכן: אורך סדרת Prüfer של G אינו 4.

שאלה 8 #

הגרף הדו-צדדי המלא $K_{p,q}$ הוגדר ב"תורת הגרפים" הגדרה 1.5 .

טענה (*i*): $K_{6,2}$ הוא אוילרי. טענה (*ii*): $K_{6,2}$ הוא המילטוני.

שאלה 9 #

G הוא גרף קשיר על 8 צמתים. **דרגות** הצמתים הן: $2,2,3,4,4,5,6,6$. מכאן נובע:

טענה (*i*): יש ב- G מעגל אוילר טענה (*ii*): יש ב- G מסלול אוילר שאינו מעגל.

שאלה 10

G הוא גרף פשוט וקשיר. הוסיפו ל- G כמה קשתות (לא הוסיפו צמתים) והתקבל גרף H , גם הוא פשוט. להלן שלוש טענות (**תזכורת**: גרף המילטוני הוא גרף שיש בו מעגל המילטון):

a. אם G המילטוני אז H המילטוני. *b*. אם H המילטוני אז G המילטוני.

c. אם אחד משני הגרפים G,H המילטוני אז השני **אינו** המילטוני.

מתוך הטענות a,b,c , הטענות הנכונות הן בדיוק אלה:

א. a ב. b ג. a,b ד. c ה. אף אחת מהטענות a,b,c אינה נכונה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016א

חומר הלימוד למטלה: "תורת הגרפים" , כל החוברת

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום א' 31.1.2016

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1 (10 נקודות)

בתשובה 2 בעמ' 11 בספר, בהוכחת טרנזיטיביות, מדוע אי אפשר פשוט לשרשר את שני המסלולים, כלומר להסתכל במסלול שתחילתו $P_{u\to v}$ והמשכו $P_{v\to w}$?

שאלה 2 (15 נקודות)

השאלה מתייחסת לגרף שהוגדר בממ"ח 05 , שאלה 2. אפשר להסתמך על פתרון הממ"ח.

(5 נק') א. האם יש בגרף זה מעגל אוילר? הוכח

(10 נק') ב. האם יש בגרף זה מעגל המילטון? הוכח

שאלה 3 (21 נקודות)

א. כמה זיווגים מושלמים יש בגרף המלא K_6 ?

ב. כמה זיווגים מושלמים יש בגרף הדו-צדדי המלא $K_{6,6}$?

ג. בגרף הדו-צדדי המלא $K_{6,6}$ בחרנו אחד הצמתים ומחקנו מהגרף 4 מהקשתות השכנות לצומת זה. כמה זיווגים מושלמים יש בגרף שקיבלנו?

שאלה 4 (26 נקודות)

גרף פשוט G מוגדר כך: צומת של G הוא סדרה באורך 4 שאבריה לקוחים מהקבוצה $\{0,1\}$.

למשל הסדרה 1011 היא צומת של G. מספר הצמתים ב- G הוא אפוא 16.

בין שני צמתים יש קשת אם ורק אם הם נבדלים זה מזה **בדיוק** בשני מקומות.

למשל, יש קשת בין 1011 ו- 1110 כי ההבדל ביניהן הוא בדיוק בשני מקומות: המקום השני בסדרה והמקום הרביעי בסדרה.

אין קשת בין 1011 ל- 1010, כי סדרות אלה נבדלות רק במקום אחד (האחרון).

(2 נק') א. מהי דרגת כל צומת ב- G? הוכיחו.

(8 נק') ב. הוכיחו ש- G אינו קשיר.

(8 נק') ג. הוכיחו ש- G אינו דו-צדדי.

(8 נק') ד. הוכיחו ש- G אינו מישורי.

שאלה 5 (28 נקודות)

על קבוצת צמתים V מוגדרים חמישה גרפים שונים G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, שכל אחד מהם הוא גרף **דו-צדדי**. החלוקה של V לשני צדדים **אינה** בהכרח אותה חלוקה בחמשת הגרפים:

הצדדים של G_1 הם A_1, B_1, הצדדים של G_2 הם A_2, B_2, וכן הלאה.

כמובן לכל $1 \le i \le 5$, $A_i \cup B_i = V$, $A_i \cap B_i = \varnothing$.

נסמן ב- G את האיחוד של חמשת הגרפים: קבוצת הצמתים של G היא V, וקבוצת הקשתות של G היא איחוד קבוצות הקשתות של הגרפים G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 (כדי ש- G יהיה פשוט, אם קיבלנו בין שני צמתים יותר מקשת אחת, נזרוק את הכפילויות ונשאיר קשת יחידה).

(8 נק') א. לכל $v \in V$ נתאים **סדרה** של חמש אותיות A,B. נדגים את ההתאמה:

אם v שייך לקבוצות A_1, B_2, B_3, A_4, A_5, אז הסדרה המותאמת לו תהיה $ABBAA$.

כללית: במקום ה- i בסדרה של v תופיע האות A אם $v \in A_i$, ותופיע האות B אם $v \in B_i$.

הוכיחו: אם לצמתים $v, w \in V$ מותאמת אותה סדרה של אותיות, אז **אין** ב- G קשת בין v ל- w.

(10 נק') ב. מהסעיף הקודם נובע שמספר הצביעה של G הוא לכל היותר:

2 / 5 / 120 / 10 / 25 / 32. מצאו את התשובה הנכונה **והוכיחו אותה בפירוט.**

(10 נק') ג. תנו דוגמא לגרף המקיים את תנאי השאלה, כלומר הוא איחוד של 5 גרפים דו-צדדיים שונים, ושמספר הצביעה שלו הוא בדיוק המספר שמצאתם בסעיף הקודם.

הוכיחו שהדוגמא שנתתם אכן עונה על הדרישות.