ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20425

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חוברת הקורס - אביב 2013ב

כתבה: נעמי מילאנו-רוזנטל

מרץ 2013 - סמסטר אביב – תשע"ג

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

נספחים

אל הסטודנטים,

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב".

בחוברת זו תמצאו תיאור, מלא ככל האפשר, של הקורס וכן פרטים על כלל פעילויותיכם במהלך הלימודים. רצוי שתראו בה מעין מדריך אישי, שתפקידו להבהיר לכם עניינים שונים. קראו בעיון רב את כל הסעיפים שלהלן, לפני שתתחילו בלימודיכם.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: http://telem.openu.ac.il .

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

בכל בעיה שמתעוררת תוכלו לפנות למרכזת ההוראה בקורס - נעמי מילאנו-רוזנטל, בטלפון 09-7781428, בפקס 09-7780631 או בדואר האלקטרוני לכתובת naomimi@openu.ac.il .

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה,

צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (מס' קורס 20425 / 2013ב)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן למנחה
1	8.3.2013-3.3.2013	1		
2	15.3.2013-10.3.2013	2 + 1		
3	22.3.2013-17.3.2013	2		
4	29.3.2013-24.3.2013 (ב-ו פסח)	3 + 2		ממ"ן 11 24.3.2013
5	5.4.2013-31.3.2013 (א-ב פסח)	3		
6	12.4.2013-7.4.2013 (ב יום הזכרון לשואה)	4 + 3		
7	19.4.2013-14.4.2013 (ב יום הזכרון, ג יום העצמאות)	4		ממ"ן 12 14.4.2013
8	26.4.2013-21.4.2013	5 + 4		
9	3.5.2013-28.4.2013 (א ל"ג בעומר)	5		ממ"ן 13 28.4.2013
10	10.5.2013-5.5.2013 (ד יום ירושלים)	6 + 5		
11	17.5.2013-12.5.2013 (ג-ד שבועות)	6		ממ"ן 14 12.5.2013
12	24.5.2013-19.5.2013	7 + 6		
13	31.5.2013-26.5.2013	7		ממ"ן 15 26.5.2013
14	7.6.2013-2.6.2013	7		
15	14.6.2013-9.6.2013	8		ממ"ן 16 9.6.2013

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים, מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

נקודות זכות

הקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב" מקנה למסיימים אותו 4 נקודות זכות.

הדרישות לקבלת 4 נקודות זכות הן:

א. הגשת מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות.

ב. ציון מינימלי 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון מינימלי 60 בקורס.

הגשת מטלות

הקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב" כולל חוברת קורס ובה 6 מטלות להגשה, המיועדות לתרגול <u>רוב</u> נושאי הלימוד של הקורס, ואוסף שאלות לתרגול עצמי של נושאי הלימוד של פרק 8.

עליכם להגיש מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות, כאשר המשקל של כל מטלה להגשה הוא 5 נקודות (כלומר, עליכם להגיש לפחות 3 ממטלות ההגשה). המועד האחרון להגשה של כל מטלה מופיע בכותרתה. שימו לב, **בקורס זה לא ניתנות מטלות השלמה!**

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1 ו- 2

קומבינטוריקה; חישובי הסתברויות קומבינטוריים

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2013 ב **מועד אחרון להגשה:** 24.3.2013

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (28 נקודות)

בכיתה בת 20 תלמידים - 10 בנות ו- 10 בנים.

(7 נק') א. מסדרים באקראי את התלמידים בשורה.
מהי ההסתברות שהבנות תעמודנה ב- 10 המקומות השמאליים בשורה?

(7 נק') ב. בוחרים באקראי (לפי סדר) **ועם החזרה** 15 תלמידים מהכיתה.
מהי ההסתברות שייבחרו למדגם בדיוק 5 בנים?

(7 נק') ג. בוחרים באקראי (לפי סדר) **ועם החזרה** 15 תלמידים מהכיתה.
מהי ההסתברות ש- 5 הנבחרים הראשונים הם בנים?

(7 נק') ד. 20 התלמידים נעמדים במעגל בסדר אקראי.
מהי ההסתברות שייווצר מעגל שבו בדיוק 5 זוגות (נפרדים) של בנות?
הערה: בין כל 2 זוגות חייב להיות לפחות בן אחד שיפריד ביניהם.

שאלה 2 (18 נקודות)

נתונים 9 קלפים עם האותיות: **ס י ה ט י ט ס ט ק**

(6 נק') א. מסדרים את הקלפים בשורה באופן אקראי.
מהי ההסתברות שתתקבל המילה "סטטיסטיקה"?

ב. בוחרים 9 קלפים בזה אחר זה (עם סדר) **ועם החזרה**.

(6 נק') 1. מהי ההסתברות שתתקבל המילה "סטטיסטיקה"?

(6 נק') 2. מהי ההסתברות שהאות **ט** תתקבל 4 פעמים, האות **ס** – 3 פעמים, והאות **י** – פעמיים?

שאלה 3 (26 נקודות)

נתונים 6 ספלים בגדלים שונים ו- 6 תחתיות שונות המתאימות לספלים אלו.

כל תחתית מתאימה בדיוק לאחד מ- 6 הספלים.

מניחים באקראי את הספלים על התחתיות (ספל אחד על כל תחתית).

(6 נק׳) א. מהי ההסתברות שבדיוק ארבעה ספלים יונחו על התחתיות המתאימות להם?

(6 נק׳) ב. מהי ההסתברות ששני הספלים הקטנים ביותר יונחו על התחתיות המתאימות להם?

(6 נק׳) ג. מהי ההסתברות ששלושת הספלים הקטנים ביותר יונחו על שלוש התחתיות המתאימות לספלים הגדולים ביותר?

(8 נק׳) ד. מהי ההסתברות שבדיוק ספל אחד יונח על התחתית המתאימה לו?

שאלה 4 (28 נקודות)

נתונים 20 בלונים <u>שונים</u> ממוספרים מ-1 עד 20.

א. מחלקים באופן אקראי את הבלונים לזוגות. אין חשיבות לסדר הזוגות.

(7 נק׳) 1. מהי ההסתברות שבכל זוג בלונים יהיה בלון שנושא מספר זוגי?

(7 נק׳) 2. מהי ההסתברות **שבדיוק ב- 2 זוגות בלונים** לא יהיה אף בלון הנושא מספר זוגי?

(7 נק׳) ב. מסדרים את הבלונים בשורה באופן מקרי.

מהי ההסתברות שבלון מספר 4 ימוקם בשורה במקום שמאלי יותר מאשר בלון מספר 5 ובלון מספר 6?

(7 נק׳) ג. מתוך 20 הבלונים בוחרים באקראי 2 בלונים לכל אחד מ- 4 ילדים (בסך-הכל 8 בלונים).

מהי ההסתברות שכל ילד (מהארבעה) יקבל לפחות בלון אחד הנושא מספר זוגי?

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 2 ו- 3

דיאגרמת ון וטענות הסתברות בסיסיות; הסתברות מותנית

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2013 ב **מועד אחרון להגשה:** 14.4.2013

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

מנהל מחלקה לאיכות הסביבה בעירייה החליט לבדוק את נכונות תושבי העיר למחזר חומרים שונים:

1. עיתונים;
2. בקבוקי משקה משפחתיים;
3. מיכלי משקה אישיים (בקבוקים קטנים ופחיות);
4. סוללות.

הוא ערך סקר בין תושבי העיר ומצא כי –

כל מי שמוכן למחזר סוללות מוכן גם למחזר מיכלי משקה אישיים;

כל מי שמוכן למחזר מיכלי משקה אישיים מוכן גם למחזר בקבוקי משקה משפחתיים;

59% מהתושבים מוכנים למחזר עיתונים;

10% מהתושבים מוכנים למחזר את כל החומרים ברשימה;

מבין התושבים שמוכנים למחזר סוללות, 50% מוכנים למחזר גם עיתונים;

80% מהתושבים מוכנים למחזר לפחות חומר אחד מהרשימה שלעיל, כאשר רבע **מהם** מוכנים למחזר רק עיתונים, שמינית **מהם** מוכנים למחזר רק בקבוקי משקה משפחתיים והשאר מוכנים למחזר לפחות שני חומרים מהרשימה;

⅓ מהתושבים שמוכנים למחזר בדיוק 3 חומרים מהרשימה, לא ממחזרים סוללות.

(8 נק׳) א. הגדר ארבעה מאורעות מתאימים לבעיה וצייר עבורם דיאגרמת ון מתאימה לבעיה.
מלא בדיאגרמה את כל ההסתברויות הנתונות.
הסבר <u>בקצרה</u> את דרך חישוב ההסתברויות הרשומות בדיאגרמה וּוַדא שסכומן הוא 1.

בוחרים באקראי אחד מתושבי העיר –

(3 נק׳) ב. מהי ההסתברות שהתושב הנבחר מוכן למחזר לפחות אחד מהחומרים?

(3 נק׳) ג. מהי ההסתברות שהתושב הנבחר אינו מוכן למחזר מיכלי משקה אישיים?

(3 נק׳) ד. אם התושב הנבחר אינו ממחזר לפחות חומר אחד מהרשימה שלעיל,
מהי ההסתברות שהוא מוכן למחזר בדיוק חומר אחד מבין הארבעה שברשימה?

(3 נק׳) ה. ידוע שהתושב הנבחר ממחזר עיתונים ובקבוקים משפחתיים.
מהי ההסתברות שהוא מוכן למחזר גם סוללות?

שאלה 2 (32 נקודות)

מטילים 5 קוביות תקינות.

(8 נק׳) א. מהי ההסתברות שתתקבלנה בדיוק ארבע תוצאות זוגיות?

(8 נק׳) ב. אם התקבלו בדיוק ארבע תוצאות זוגיות,
מהי ההסתברות שיש ביניהן בדיוק שתי תוצאות 6?

(8 נק׳) ג. מהי ההסתברות שהתוצאה 4 תתקבל לפחות בשתי קוביות?

(8 נק׳) ד. אם התוצאה 4 התקבלה לפחות פעמיים,
מהי ההסתברות שהיא התקבלה לפחות ארבע פעמים?

שאלה 3 (24 נקודות)

נתונה המערכת המתוארת באיור. כל אחד ממתגים 1, 3 ו- 5 **סגור** בהסתברות 0.9 (ואז **עובר בו זרם**).

מתגים 1 ו- 2 בלתי-תלויים במתגים 3 ו- 4.

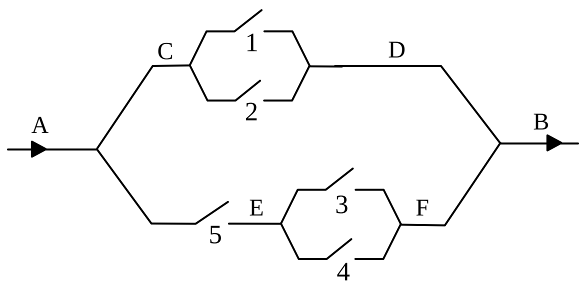
מתג 5 בלתי-תלוי בכל המתגים האחרים.

אם מתג 1 סגור, אז מתג 2 סגור בהסתברות 0.9.

אם מתג 3 סגור, אז מתג 4 סגור בהסתברות 0.9.

אם מתג 1 פתוח, אז מתג 2 סגור בהסתברות 0.3.

אם מתג 3 פתוח, אז מתג 4 סגור בהסתברות 0.3.



(8 נק׳) א. מהי ההסתברות שעובר זרם במערכת מנקודה C לנקודה D?

(8 נק׳) ב. אם מתג 2 פתוח, מהי ההסתברות שעובר זרם במערכת מנקודה C לנקודה D?

(8 נק׳) ג. מהי ההסתברות שעובר זרם במערכת מנקודה A לנקודה B?

שאלה 4 (14 נקודות)

מטילים n פעמים מטבע $(n = 1,2,\ldots)$, שההסתברות לקבל בו את התוצאה H היא p.

נגדיר את המאורעות הבאים:

A = בהטלה הראשונה (מתוך n ההטלות) מתקבלת התוצאה H;

B_k = התוצאה H מתקבלת k פעמים ב- n ההטלות, לכל $k = 0,1,2,\ldots,n$.

באלו תנאים המאורעות A ו- B_k בלתי-תלויים זה בזה?

הוכח את טענתך.

שאלה 5 (10 נקודות)

ילד אוסף בהתמדה קלפי-משחק.

נניח שיש 10 סוגים שונים של קלפי-משחק וכי כל קלף שהילד משיג הוא מסוג 1 בהסתברות $\frac{1}{3}$, ואחרת, מסוג i בהסתברות $\frac{2}{27}$, לכל $i = 2,\ldots,10$. כמו כן, נניח שאין תלות בין סוגי הקלפים שהילד משיג.

מהי ההסתברות שהקלף ה-15 שהילד ישיג יהיה מסוג שטרם יש לו כמותו?

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 4

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2013 ב **מועד אחרון להגשה:** 28.4.2013

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (16 נקודות)

מטילים קובייה תקינה 60 פעמים.

יהי X משתנה מקרי המוגדר על-ידי מספר התוצאות **הזוגיות** שהתקבלו ב- 60 ההטלות.

(8 נק') א. מהי ההסתברות המדויקת ש- $X > 30$?

(8 נק') ב. יהי Y המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר התוצאות **האי-זוגיות** שהתקבלו באותן 60 ההטלות.

חשב את $P\{X^2 + Y^2 = 1{,}872\}$.

שאלה 2 (14 נקודות)

יהי X משתנה מקרי שערכיו האפשריים הם $0, 1, \ldots, n$.

בוחרים באקראי מדגם (לא סדור) בגודל X וללא החזרה מבין המספרים $1, 2, \ldots, n$.

הראה כי ההסתברות שהמספר 1 יהיה שייך למדגם הנבחר שווה ל- $\frac{E[X]}{n}$.

שאלה 3 (14 נקודות)

לחמישה שחקנים, המסומנים בספרות 1 עד 5, מחלקים באקראי חמישה מספרים שונים (אין חשיבות למספרים המסוימים שהם מקבלים, אלא רק לכך שהם שונים זה מזה). בכל שלב של המשחק, שניים מהשחקנים משווים את המספרים שבידיהם, ובעל המספר הגדול יותר הוא המנצח. תחילה משווים השחקנים 1 ו- 2 את מספריהם; המנצח משווה את מספרו לזה של שחקן 3, וכן הלאה.

יהי X מספר הפעמים ששחקן 1 מנצח.

רשום את פונקציית ההסתברות של X וחשב את השונות של X .

שאלה 4 (16 נקודות)

(8 נק') א. יהי $X \sim Po(\lambda)$, כאשר $\lambda > 0$.

חשב את $E[X!]$, לכל ערך אפשרי של λ.

(8 נק') ב. יהי $X \sim NB(r, p)$, כאשר $r \geq 2$ ו- $p > 0$.

חשב את $E\left[\frac{1}{X-1}\right]$.

שאלה 5 (16 נקודות)

שני שחקנים, A ו-B, משחקים משחק של הטלת מטבעות. ברשות כל אחד מהם מטבע, שההסתברות לקבל בו **H** היא p $(0 < p < 1)$. השחקנים מטילים שוב ושוב ובו-זמנית את שני המטבעות שברשותם (כל אחד את המטבע שלו), עד לפעם הראשונה שבה הם מקבלים תוצאות שונות.

(8 נק') א. מהן תוחלת ושונות מספר השלבים במשחק?

(8 נק') ב. נניח שהמשחק הסתיים לאחר 5 שלבים בדיוק.

מהי הסתברות שבמהלך המשחק היו בדיוק 2 שלבים שבהם התוצאה היתה (H,H), כלומר, ששני השחקנים קיבלו בו-זמנית את התוצאה H?

שאלה 6 (24 נקודות)

א. מספר ההרשמות המאושרות לקורס מסוים, שבוע לפני מועד פתיחתו, עומד על 30.

כמו כן, יש 30 הרשמות מותנות, אשר כל אחת מהן תאושר, עד למועד פתיחת הקורס, בהסתברות 0.35.

יהי X מספר ההרשמות הכולל שיאושרו עד לפתיחת הקורס.

(8 נק') 1. רשום את פונקציית ההסתברות של X .

כלומר, רשום ביטוי ל- $P\{X = i\}$ וציין מהם ערכי i האפשריים.

(8 נק') 2. מהן התוחלת והשונות של X ?

(8 נק') ב. לקורס אחר נרשמו 1,200 אנשים.

ההרשמה של כל אחד מהם תאושר בהסתברות 0.02.

חשב קירוב להסתברות שמספר ההרשמות שיאושרו יהיה בדיוק 25.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 5

מספר השאלות: 5   **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2013 ב   **מועד אחרון להגשה:** 12.5.2013

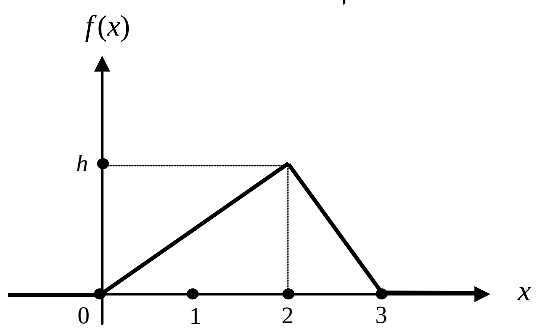
שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (30 נקודות)

באיור שלהלן נתונה פונקציית הצפיפות $f(x)$ של המשתנה המקרי X :



(6 נק') א. חשב את הערך של h .

(6 נק') ב. כתוב את ערכי פונקציית הצפיפות לכל x ממשי.

(6 נק') ג. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X .

(6 נק') ד. חשב את $P\{X > 1 \mid X < 2\}$.

(6 נק') ה. חשב את התוחלת של X .

שאלה 2 (18 נקודות)

יהי Z משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי, ויהי $Y = Z^2$.

(6 נק') א. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y, כפונקציה של Φ (שהיא פונקציית ההתפלגות המצטברת של Z).

(6 נק') ב. מצא את פונקציית הצפיפות של Y.
כתוב את הפונקציה באופן מדויק.

(6 נק') ג. נגדיר את המשתנה המקרי W על-ידי $W = aY$, עבור $a > 0$.
מצא את פונקציית הצפיפות של W.

שאלה 3 (25 נקודות)

משקל גביע גבינה לבנה מתוצרת מסוימת מתפלג נורמלית עם תוחלת μ וסטיית-תקן של 6 גרם.

נניח כי ידוע, שההסתברות שגביע גבינה ישקול יותר מ- 267.08 גרם היא 0.119.

כמו כן, נניח כי אין תלות בין משקלים של גביעי גבינה שונים.

(5 נק׳) א. חשב את μ .

(5 נק׳) ב. החברה, המייצרת את גביעי הגבינה, מתחייבת שלכל היותר 2.5% מהגביעים ישקלו מתחת ל- 250 גרם. האם היא עומדת בהתחייבותה?

(5 נק׳) ג. מהו המשקל ש- 25% מהגביעים שוקלים פחות ממנו?

(5 נק׳) ד. אם נתון שגביע מסוים שוקל מתחת ל- 265 גרם, מהי ההסתברות שמשקלו גבוה מ- 255 גרם?

(5 נק׳) ה. נתונים 30 גביעי גבינה מקריים.

אם שוקלים את הגביעים בזה אחר זה, מהי ההסתברות שהגביע האחרון שיישקל, דהיינו הגביע ה- 30, יהיה הגביע העשירי שמשקלו נמוך מ- 257 גרם?

הערה: בצע אינטרפולציה לינארית בחישוביך, היכן שהיא נדרשת.

שאלה 4 (11 נקודות)

יהי X משתנה מקרי אחיד (רציף) על הקטע $(-2, 3)$.

(5 נק׳) א. חשב את $P\{X^2 - 4 > 0 \mid X > 0\}$.

(6 נק׳) ב. חשב את $E[\,| X^2 - 4 |\,]$.

שאלה 5 (16 נקודות)

לאורך החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר $\frac{1}{500}$.

אין תלות בין נורות שונות מאותו הסוג.

(10 נק׳) א. נורה מסוימת דולקת כבר 250 שעות –

1. מהי ההסתברות שתדלוק עוד 250 שעות לפחות?
2. מהן תוחלת ושונות אורך החיים של נורה זו בהינתן המידע הנתון?

   שים לב, שידוע לך שהנורה דולקת כבר 250 שעות.

(6 נק׳) ב. במנורה מסוימת מורכבות 3 נורות מסוג זה ונניח שלא מחליפים נורה שנשרפת.

מהי ההסתברות שהמנורה תאיר (באור מלא או חלקי) לפחות 700 שעות?

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 6

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2013 ב **מועד אחרון להגשה:** 26.5.2013

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (14 נקודות)

בוחרים באקראי משלחת של 5 מדענים מתוך קבוצה של 10 מדענים המורכבת מ-3 כימאים, 5 ביולוגים ו-2 פיזיקאים.

יהיו X = מספר הביולוגים במשלחת ;

Y = מספר הפיזיקאים במשלחת.

(8 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו-Y .
רשום אותה באופן מדויק. כלומר, רשום את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.

(6 נק') ב. חשב את $P\{Y=1 \mid X=3\}$.

שאלה 2 (26 נקודות)

בארון 5 חליפות בגדים : אדומה, ירוקה, צהובה, כחולה ושחורה.

כל חליפה כוללת חולצה ומכנסיים (באותו הצבע).

בוחרים באקראי מהארון 2 חולצות ו- 2 זוגות מכנסיים (לאו דווקא השייכים לאותן החליפות).

נגדיר את המשתנים המקריים : X = מספר החליפות השלמות שנבחרו

Y = מספר הפריטים האדומים שנבחרו

(14 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו-Y .

(4 נק') ב. האם המשתנים המקריים X ו-Y בלתי-תלויים? נמק את תשובתך.

(8 נק') ג. מתוך 4 הפריטים שנבחרו באקראי מהארון, בוחרים באקראי חולצה אחת וזוג מכנסיים אחד.
אם ידוע ש- $Y=2$ עבור 4 הפריטים שנבחרו, מהי ההסתברות ששני הפריטים שנבחרו מתוכם מהווים חליפה, כלומר הם מאותו הצבע?

שאלה 3 (24 נקודות)

ועדה עירונית מתכנסת בכל פעם שעליה להחליט כיצד לנהוג במבנה בלתי-חוקי שהוקם בשטח העיר.

בדיון הראשון שנערך בנוגע לכל מבנה כזה –

ההסתברות שהוועדה תורה על הריסתו היא 0.5;

ההסתברות שתקבע מועד לדיון שני בעניינו היא 0.4;

וההסתברות שתוציא לו היתר בנייה היא 0.1.

אם בדיון הראשון הוועדה מורה על הריסת מבנה, בעליו מגיש ערעור על ההחלטה בהסתברות 0.7.

ההסתברות שהערעור יתקבל והמבנה יקבל היתר היא 0.4;

ההסתברות שהערעור יידחה והמבנה ייהרס היא 0.6.

אם בדיון הראשון הוועדה קובעת מועד לדיון שני בעניינו של מבנה, ההסתברות שבסופו של דבר יינתן לו היתר היא 0.8, ואחרת – הוא ייהרס.

הערה: שימו לב, שבסופו של דבר, כל מבנה לא-חוקי מקבל היתר או נהרס.

(5 נק׳) א. מהי ההסתברות שמבנה בלתי-חוקי יקבל היתר?

ב. הוועדה דנה בעניינם של 20 מבנים בלתי-חוקיים.

בהנחה שאין תלות בין החלטותיה לגבי מבנים שונים –

(5 נק׳) 1. מהי ההסתברות שהמבנה החמישה-עשר, שהוועדה תדון בעניינו, יהיה השני (מתוך ה-15) שיקבל היתר עוד בדיון הראשון בעניינו?

(7 נק׳) 2. אם בסופו של דבר 14 מ-20 המבנים קיבלו היתר,

מהי ההסתברות ש-3 מהם קיבלו את ההיתר בדיון הראשון בעניינם?

(7 נק׳) 3. אם ידוע שרק 3 מ-20 מבנים אלו קיבלו היתר בדיון הראשון בעניינם,

מהי פונקציית ההסתברות של מספר המבנים הנוספים (מתוך ה-20) שקיבלו היתר בסופו של דבר (כלומר, לאחר הדיון הראשון)?

שאלה 4 (36 נקודות)

במשרד כלשהו עובדים 5 פקידים.

מספר הודעות הדוא״ל שמקבל כל פקיד במהלך יום אחד הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 10.

נניח שאין תלות בין מספרי ההודעות שמקבלים פקידים שונים, ושכל הודעה מגיעה בדיוק לאחד מהם.

בוחרים יום מקרי בשבוע –

(6 נק׳) א. מהי ההסתברות שבדיוק שניים מהפקידים (מתוך ה-5) יקבלו בדיוק 10 הודעות כל אחד?

(6 נק׳) ב. מהי ההסתברות שיתקבלו במשרד בסה״כ 45 הודעות (אצל כל 5 הפקידים יחד)?

ג. אם התקבלו במשרד בסה״כ 45 הודעות –

(6 נק׳) 1. מהי ההסתברות שרמי (אחד מן הפקידים) קיבל בדיוק 9 מתוכן?

(6 נק׳) 2. מהי ההסתברות שכל אחד מהפקידים קיבל בדיוק 9 הודעות?

(6 נק׳) ד. ההסתברות שכל הודעה שמתקבלת במשרד תגיע עם בקשה לאישור-קריאה היא 0.1.

מהי ההסתברות שבמשך היום תגענה בסה״כ 6 הודעות עם אישורי-קריאה?

(6 נק׳) ה. מהי ההסתברות שהמספר המינימלי של הודעות שיתקבלו אצל פקיד (במשך היום) יהיה 2?

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2013 ב **מועד אחרון להגשה:** 9.6.2013

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונים 9 קלפים עם האותיות: **ס** **י** **ה** **ט** **י** **ט** **ס** **ט** **ק**

בוחרים באקראי מדגם של 9 קלפים בזה אחר זה ו<u>עם החזרה</u> (מתוך 9 הקלפים הנתונים).

יהי X מספר קלפי ה- **ט** שנבחרו למדגם;

ויהי Y מספר קלפי ה- **ס** שנבחרו למדגם.

מהן $E[Y \mid X = x]$ ו- $\mathrm{Var}(Y \mid X = x)$, לכל $x = 0,1,\ldots,9$?

שאלה 2 (20 נקודות)

מספר הקונים המגיעים ביום ראשון לסניף מסוים של סופרמרקט הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1,000.

הקונה ה-i-י, שמגיע ביום ראשון לסניף זה ממחזר X_i בקבוקים, לכל $i = 1,2,\ldots$, כאשר המשתנים המקריים X_i, מוגדרים על-ידי $X_i = Y_i - 1$, עבור Y_i-ים שהתפלגותם גיאומטרית עם הפרמטר 0.2.

כמו כן, נניח שאין תלות בין מספר הבקבוקים שקונים שונים ממחזרים, וגם כי אין תלות בין מספר הקונים שמגיעים לסניף ביום ראשון למספר הבקבוקים שכל אחד מהם ממחזר.

(6 נק') א. חשב את תוחלת מספר הבקבוקים הממוחזרים ביום ראשון.

(6 נק') ב. חשב את שונות מספר הבקבוקים הממוחזרים ביום ראשון.

(8 נק') ג. מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים של מספר הבקבוקים הממוחזרים ביום ראשון;
חשב באמצעות הפונקציה שמצאת את התוחלת של מספר הבקבוקים הממוחזרים ביום ראשון, והשווה את התוצאה שקיבלת לתוצאת סעיף א.
רמז: העזר בדוגמה 6י בספר הקורס.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתונה קבוצת המספרים $\{1,2,\ldots,10\}$.

בוחרים מהקבוצה, בזה אחר זה, באופן מקרי ו<u>עם החזרה</u>, 12 מספרים.

יהי X מספר המספרים בקבוצה $\{1,2,\ldots,10\}$ שנבחרו לפחות פעם אחת.

(לדוגמה, אם נבחרו המספרים : 1,4,8,7,9,8,7,4,3,1,2,10 אז $X = 8$).

(6 נק') א. חשב את התוחלת של X.

(8 נק') ב. חשב את השונות של X.

(6 נק') ג. יהי Y מספר המספרים שלא נבחרו בכלל ב-12 הבחירות.
חשב את השונות של Y.

שאלה 4 (24 נקודות)

נניח כי $X \sim Geo(⅔)$ וכי $Y \mid X = i \sim NB(i\,,⅔)$.

(8 נק') א. חשב את $E[Y]$ ואת $\mathrm{Var}(Y)$ באמצעות נוסחאות התוחלת המותנית והשונות המותנית.

(8 נק') ב. חשב את מקדם המתאם בין X ל-Y.
העזר בתרגיל ת26 בעמוד 430 בספר הקורס.

(8 נק') ג. חשב את $E[X \mid Y = j]$.

רמז: מצא תחילה את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $Y = j$;
אחר-כך, בחישוב התוחלת המותנית, שים לב שהסכום שמתקבל מייצג תוחלת של משתנה מקרי בינומי שערכיו מוזזים ב- 1+ .

שאלה 5 (11 נקודות)

משחק מורכב מ- n שלבים בלתי-תלויים.

שלב i של המשחק מסתיים בהצלחה בהסתברות $\frac{n-i}{n}$, לכל $i = 1,2,\ldots,n$, ואחרת – בכשלון.

(5 נק') א. מהי תוחלת מספר ההצלחות במשחק?

(6 נק') ב. הראה כי שונות מספר ההצלחות במשחק היא $\frac{n^2-1}{6n}$.

שאלה 6 (15 נקודות)

נתונה הפונקציה יוצרת המומנטים : $M_X(t) = \left(\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n} e^{ti}\right)^r$, ממשי t

(5 נק') א. הגדר משתנה מקרי X שזוהי הפונקציה יוצרת המומנטים שלו.

(5 נק') ב. חשב (בכל דרך שתבחר) את התוחלת ואת השונות של X.

(5 נק') ג. חשב את $P\{X = 1\}$.

אוסף שאלות לתרגול עצמי

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 8

1. לאורך החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר $\frac{1}{500}$.
אין תלות בין נורות שונות מאותו הסוג.
אדם קנה 100 נורות מסוג זה.
מצא קירוב להסתברות שממוצע אורך החיים של 100 הנורות שנקנו יהיה בין 450 ל- 520 שעות.

2. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1,000.

א. חשב קירוב נורמלי להסתברות ש- X יקבל את הערך 1,000.
מדוע אפשר לחשב קירוב נורמלי במקרה זה?

ב. חשב חסם תחתון ל- $P\{|X-1{,}000| \le 40\}$, באמצעות אי-שוויון צ'בישב.

3. נתונים 5 משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, $X_1, X_2, \ldots, X_5$, שכל אחד מהם מקבל את הערכים 0, 3 ו- 6 בהסתברויות שוות (כלומר, הסתברות ⅓ לכל ערך).
נגדיר $Y=\sum_{i=1}^{5} X_i$. חשב חסם עליון ל- $P\{Y>25\}$:

א. בעזרת אי שוויון מרקוב;

ב. בעזרת אי שוויון צ'בישב.

4. א. יהי X משתנה מקרי אי-שלילי שתוחלתו μ סופית, ויהי $t>0$.
הוכח כי $P\{X \le \mu t\} \ge 1-\frac{1}{t}$.

ב. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n=1,2,\ldots)$, משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר p $(0<p<1)$.
הראה בעזרת אי-שוויון צ'בישב שמתקיים: $P\left\{\overline{X}_n \le \frac{2}{p}\right\} \ge 1-\frac{1-p}{n}$.

הערה: $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

5. הוכח, בעזרת משפט הגבול המרכזי, כי $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} e^{-n}\frac{n^i}{i!}=\frac{1}{2}$.

.6 יהיו X_1 , X_2 , ... , X_{200} משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפונקציה יוצרת המומנטים: $M_X(t)=\left(\frac{e^t}{5-4e^t}\right)^2$, עבור $t<\ln 1.25$.

מצא קירוב ל- $P\left\{1{,}910 \le \sum_{i=1}^{200} X_i < 2{,}050\right\}$.

.7 א. נתון ארגז ובו 120 כדורים שעליהם רשומים מספרים.

לכל $i=1,2,\ldots,15$, יש בארגז i כדורים שהמספר הרשום עליהם הוא i .

בוחרים כדורים מהארגז, בזה אחר זה **ועם החזרה**, כך שבכל בחירה יש לכל הכדורים סיכויים שווים להיבחר.

נניח שבוחרים (בשיטה המתוארת לעיל) בדיוק 100 כדורים.

יהי Y הסכום הכולל של 100 המספרים הרשומים על הכדורים שנבחרו.

חשב קירוב ל- $P\{1{,}000 \le Y \le 1{,}100\}$.

הערה: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ב. מעגלים 50 מספרים שנבחרו באקראי, כל אחד לשלם הקרוב לו ביותר, ומסכמים את 50 המספרים המעוגלים.

אם לכל אחת משגיאות-העיגול יש התפלגות אחידה בקטע $[-0.5, 0.5)$, מהו קירוב להסתברות שההפרש <u>המוחלט</u> בין הסכום המתקבל לבין הסכום המדויק של 50 המספרים עולה על 3?

.8 אורך-החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים מתפלג מעריכית עם הפרמטר 0.01, והוא אינו תלוי באורך-החיים של נורות אחרות.

כמה נורות מסוג זה עליך לקנות (בקירוב), אם ברצונך להבטיח 5,000 שעות-אור בהסתברות 0.95 לפחות?

הנח שאתה מתקין נורה אחת, ובהישרפה מחליף אותה מייד באחרת. זמן ההחלפה זניח.

.9 נתונים שלושה ארגזים בלתי-תלויים.

לכל ארגז אפשר להכניס X קופסאות, כאשר ל- X יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 150.

א. חשב **קירוב** להסתברות שלשלושת הארגזים יחדיו יוכנסו לפחות 480 קופסאות.

ב. חשב **קירוב** להסתברות ש<u>ההפרש המוחלט</u> בין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז הראשון לבין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז השני יהיה גדול מ- 10.

בשני הסעיפים נמק את פתרונך.

.10 יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- 0.5, עבור $n>4$.

הוכח בעזרת אי שוויון צ'בישב שמתקיים: $P\{X \ge n-2\} \le \frac{n}{2(n-4)^2}$.

11. רשום את החסמים מלעיל הקטנים ביותר (המוכרים לך) עבור $P\{X \geq 14\}$, בכל אחד מן המקרים הבאים:

א. X הוא משתנה מקרי אי-שלילי ותוחלתו 7 ;

ב. X הוא משתנה מקרי המקיים $X \geq -2$ ותוחלתו 7 ;

ג. X הוא משתנה מקרי שתוחלתו 7 ושונותו 4.

12. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת סופית μ ושונות סופית σ^2.

הנח ש-n גדול וחשב **קירוב** ל- $P\left\{\bar{X} \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} + \mu\right\}$.

13. המשקל W (בטונות) של מטען, שגשר מסוים יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק, הוא משתנה מקרי נורמלי שתוחלתו 400 וסטיית התקן שלו 40. נניח שהמשקל (בטונות) של מכונית הוא משתנה מקרי שתוחלתו 3 וסטיית התקן שלו 0.3. אם ברגע מסוים ההסתברות לגרימת נזק במבנה הגשר עולה על 0.1, מהו (בקירוב) המספר המינימלי של מכוניות הנמצאות אז על הגשר?

הנח שאין תלות בין משקלי מכוניות שונות ובין המשקל של כל מכונית לעומס שהגשר יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק.

נספחים

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

דף הנוסחאות יצורף לכל בחינה.

גירסת דף הנוסחאות, המובאת בחוברת מטלות זו, נכונה לחודש אוקטובר 2010.

לקראת הבחינה מומלץ לבדוק באתר הקורס אם לא חלו שינויים בדף הנוסחאות שיצורף לבחינה.

נספח ב: רשימת טענות להוכחה בבחינה

בכל בחינה עשויות להופיע טענות, מן הרשימה המובאת להלן, שאותן תִּדָּרשו להוכיח במדויק.

ההוכחות של כל הטענות מן הרשימה מובאות באתר הקורס בקובץ נפרד.

משקל הטענות שתופענה בבחינה לא יעלה על 25 נקודות.

הטענות עשויות להופיע ביותר מאשר שאלה אחת.

גירסת רשימת הטענות, המובאת בחוברת מטלות זו, נכונה לחודש פברואר 2011.

לקראת הבחינה מומלץ לבדוק באתר הקורס אם לא חלו שינויים ברשימת הטענות לבחינה.

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,\ldots,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1}\cdot p \quad , \quad i=1,2,\ldots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i! \quad , \quad i=0,1,\ldots$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,\ldots$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,\ldots,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,\ldots,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a\le x\le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\ ,\ t\neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad -\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,\ldots,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r} \quad , \quad \sum n_i=n\ ,\ \sum p_i=1$			

נוסחת הבינום
$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}$$

$$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^C)$$

כלל ההכלה וההפרדה
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

הסתברות מותנית
$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

נוסחת הכפל
$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n\mid A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})$$

נוסחת ההסתברות השלמה
$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)$$
, $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס
$$P(B_j\mid A)=\frac{P(A\mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)}$$
, $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת
$$E[X]=\sum_x x\,p_X(x)=\int x\,f(x)dx$$

תוחלת של פונקציה של מ"מ
$$E[g(X)]=\sum_x g(x)\,p_X(x)=\int g(x)\,f(x)dx$$

שונות
$$\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית
$$E[aX+b]=aE[X]+b$$
$$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון
$$P\{X>s+t \mid X>t\}=P\{X>s\} \quad , \quad s,t\ge 0$$

תוחלת מותנית
$$E[X\mid Y=y]=\sum_x x\,p_{X|Y}(x\mid y)=\int x\,f_{X|Y}(x\mid y)dx$$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X \mid Y=y) = E[X^2 \mid Y=y] - (E[X \mid Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] = E[E[X \mid Y]] = \sum_y E[X \mid Y=y] p_Y(y)$

(טענה מתרגיל ת26, עמוד 430) $E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X \mid Y]]$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) \big/ \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$

כאשר X_i מ"מ ב"ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X]$

(כאשר X_i מ"מ ב"ת ש"ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X) + (E[X])^2 \mathrm{Var}(N)$

$$M_Y(t) = E\left[\left(M_X(t)\right)^N\right]$$

אי-שוויון מרקוב $P\{X \ge a\} \le E[X]/a \quad , \quad a>0$, X מ"מ אי-שלילי

אי-שוויון צ'בישב $P\{|X-\mu| \ge a\} \le \sigma^2 / a^2 \quad , \quad a>0 \ , \ \mu,\sigma^2 < \infty$

משפט הגבול המרכזי $P\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) \Big/ \sqrt{n\sigma^2} \le a \right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(a) \quad , \quad \mu,\sigma^2 < \infty$, X_i מ"מ ב"ת וש"ה

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר p הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני.
- סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1<x<1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \tfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \ , \quad n \ne -1 \quad ; \quad \int \tfrac{1}{ax+b} dx = \tfrac{1}{a}\ln(ax+b)$$

$$\int e^{ax} dx = \tfrac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \tfrac{1}{a \ln b} b^{ax}$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

$$\log_n a = \log_m a / \log_m n \quad ; \quad \log_n(a^b) = b \cdot \log_n a \quad ; \quad \log_n(ab) = \log_n a + \log_n b$$

נספח ב: טענות להוכחה בבחינה

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב - 20425

ההוכחות של הטענות, המובאות ברשימה שלהלן, נמצאות בקובץ נפרד באתר הקורס.

1. יהיו E ו- F מאורעות במרחב מדגם S. הוכח כי: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

2. יהיו F ו- G מאורעות זרים של ניסוי מקרי כלשהו. הוכח כי בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה, ההסתברות שהמאורע F יתרחש לפני המאורע G היא: $\dfrac{P(F)}{P(F)+P(G)}$

3. יהי X משתנה מקרי בדיד, שתוחלתו סופית, ויהיו a ו- b קבועים ממשיים. הוכח כי:

$$E[aX+b] = aE[X]+b \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$$

4. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$. הוכח כי:

$$E[X] = np \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

5. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \lambda \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda$

6. יהי X משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים N, m ו- n. הוכח כי: $E[X] = n \cdot \frac{m}{N}$

7. יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

8. הוכח: אם מאורע מסוים מתרחש בהתאם לַהנחות של תהליך-פואסון עם קצב λ, אז משך הזמן החולף עד להתרחשות המופע הראשון של המאורע (החל מזמן 0) הוא משתנה מקרי מעריכי עם אותו הפרמטר λ.

9. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה.
הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda_X + \lambda_Y$.

10. יהיו X ו- Y משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.
הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים $(2, p)$.

11. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה.
הוכח שלמשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X+Y=n$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$.

12. יהי $Y = a + bX$, ונניח כי $\sigma_X^2 > 0$. הראה כי:

$$\rho(X,Y) = \begin{cases} +1 & , \quad b > 0 \\ -1 & , \quad b < 0 \end{cases}$$

13. יהיו $X_1, X_2, ..., X_n$ משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת ושונות סופיות, μ ו- σ^2, בהתאמה.

הוכח כי: $E[\overline{X}] = \mu \quad ; \quad \mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2/n$

14. יהיו $X_1, X_2, ..., X_r$ משתנים מקריים בעלי פונקציית התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $p_1, p_2, ..., p_r$.

הוכח: א. למשתנה המקרי X_i יש התפלגות שולית בינומית עם הפרמטרים n ו- p_i.

ב. למשתנה המקרי המותנה X_1 בהינתן $X_2 = j$, לכל $j = 0,1,...,n$, יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n - j$ ו- $p_1/(1-p_2)$.

ג. $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$

15. יהיו X ו- Y משתנים מקריים בדידים בעלי תוחלות ושונויות סופיות.

הוכח: $E[X] = E[E[X \mid Y]]$

$\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

16. הוכח: אם N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים אי-שליליים, ואם $X_1, X_2, ...$ הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב-N, אז מתקיים:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1]$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\mathrm{Var}(N)$$

הערה: כאשר $N = 0$, סכום המשתנים שווה גם הוא ל-0.

17. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי: $M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n \quad , \quad -\infty < t < \infty$

18. יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי: $M_X(t) = \dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \quad , \quad t < -\ln(1-p)$

19. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$.

הוכח כי: $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \quad , \quad -\infty < t < \infty$

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z)=P\{Z\le z\}=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt \qquad ; \qquad \Phi(-z)=1-\Phi(z) \qquad ; \qquad Z\sim N(0,1)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326