# בחינה לדוגמה 3 סמסטר 2020ב

**מבנה הבחינה**: בבחינה **שש** שאלות. עליכם לענות על **חמש** מהן.

## שאלה 1

שפה $L$ תיקרא **מזוהה על-ידי עצירה**, אם קיימת מכונת טיורינג $M$, שלכל $w \in L$ עוצרת (ב-$q_{accept}$ או ב-$q_{reject}$), ולכל $w \notin L$ לא עוצרת.

א. נתון שהשפה $L$ מזוהה על-ידי עצירה. האם בהכרח $L$ היא שפה מזוהה-טיורינג?
**הוכיחו** את תשובתכם.

ב. נתון ש-$L$ מזוהה טיורינג. האם בהכרח $L$ מזוהה על-ידי עצירה?
**הוכיחו** את תשובתכם.

## שאלה 2

נגדיר את השפה $EPSILON_{TM}$:

$$EPSILON_{TM} = \{<M> \mid M \text{ accepts the empty word}\}$$

זוהי שפת התיאורים של מכונות טיורינג, שמקבלות את המילה הריקה. (כש-$M$ מתחילה לפעול על סרט שכולו רווחים, היא מסיימת במצב המקבל).

א. האם אפשר להוכיח **באמצעות משפט Rice** (ראו בעיה 5.16 בספר), ש-$EPSILON_{TM}$ איננה כריעה?
אם עניתם שכן, כִּתְבוּ את ההוכחה. אם עניתם שלא, הסבירו היטב למה לא.

## שאלה 3

א. הראו ש- $HALT_{TM} \le_P A_{TM}$, או הוכיחו שלא קיימת רדוקציה פולינומיאלית כזו.

ב. הראו ש- $ALL_{TM} \le_P E_{TM}$, או הוכיחו שלא קיימת רדוקציה פולינומיאלית כזו.

**שאלה 4**

עיינו בהגדרת השפה *3COLOR* בבעיה 7.38 בספר (עמוד 326).

הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של *3COLOR* ל-*3SAT* (הראו כי $3SAT \leq_P 3COLOR$).

עליכם להראות רדוקציה ישירה, ולא רדוקציה כמו בהוכחת משפט Cook-Levin.

**הדרכה**: התאימו שלושה משתנים בוליאניים לכל צומת $v$ בגרף - $v_1$, $v_2$ ו-$v_3$.

ערכו של המשתנה $v_i$ ($i = 1, 2, 3$) יהיה 1 אם הצומת $v$ צבוע בצבע $i$, ויהיה 0 אם הצומת $v$ צבוע באחד משני הצבעים האחרים.

בנו פסוקיות (בגודל 2 או 3) שיאמרו:

- לכל צומת $v$ בגרף, $v$ צבוע בצבע אחד ויחיד
- לכל קשת $(u, v)$ בגרף, $u$ ו-$v$ צבועים בצבעים שונים

תארו את הרדוקציה, הוכיחו שהיא תקפה, והראו שהיא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

**שאלה 5**

האם המחלקה L סגורה לפעולת השרשור (concatenation)? **הוכיחו** את תשובתכם.

**שאלה 6**

**תזכורת**: מעגל פשוט בגרף מכוון $G$ הוא מעגל, שבו כל צומת של המעגל מופיע פעם אחת במעגל.

נגדיר את הפונקציה הבאה:

$f(G, v) =$ גודל המעגל הפשוט הגדול ביותר בגרף המכוון $G$ ש-$v$ שייך אליו

הקלט לפונקציה הוא גרף מכוון $G$ וצומת $v$ של $G$.

הפונקציה מחזירה מספר טבעי או 0. המספר שהיא מחזירה הוא הגודל של המעגל הפשוט הגדול ביותר ב-$G$ ש-$v$ שייך אליו.

א. הוכיחו: אם אפשר לחשב את הפונקציה $f$ בזמן פולינומיאלי, אז P=NP.

ב. הוכיחו: אם אפשר לקרב את הפונקציה $f$ בקבוע חיבורי 5 בזמן פולינומיאלי, אז P=NP.

עליכם להוכיח, שאם אפשר לחשב בזמן פולינומיאלי פונקציה $g(G, v)$, ומובטח ש-

$$f(G, v)-5 \leq g(G, v) \leq f(G, v)+5 ,$$

אז P=NP.