ממן 12

שאלה 1:

א. $P(A) = \{\{\emptyset,1\},\{\emptyset\},\{1\},\emptyset\}$

$P(B) = \{\{\{\emptyset,1\}\},\{\{1\}\},\{\{\emptyset,1\},\{1\}\},\emptyset\}$

ב. $P(A) \cap A = \{\emptyset\}$

$P(A) \cap B = \{\{\emptyset,1\},\{1\}\}$

ג. $B\backslash(A \cup P(A)) = B\backslash(\{\emptyset,1\} \cup \{\{\emptyset,1\},\{\emptyset\},\{1\},\emptyset\}) = \{\{\emptyset,1\},\{1\}\}\backslash$
$\{\{\emptyset,1\},\{\emptyset\},\{1\},\emptyset,1\} = \emptyset$

שאלה 2: יהיו A, B, C קבוצות.

א. הוכח את הטענה: $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C)$

לפי הגדרת שוויון, יש להוכיח את הטענה $A\backslash(B\backslash C) \subseteq (A\backslash B) \cup (A \cap C)$,
ואת הטענה $(A\backslash B) \cup (A \cap C) \subseteq A\backslash(B\backslash C)$.

ראשית, נוכיח את <u>הטענה:</u> $(A\backslash B) \cup (A \cap C) \subseteq A\backslash(B\backslash C)$.

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה $(A\backslash B) \cup (A \cap C) \nsubseteq A\backslash(B\backslash C)$

קיים $x \in (A\backslash B) \cup (A \cap C)$

לכן ע"פ הגדרת השייכות בשלילה: $(x \notin A\backslash(B\backslash C))$ וגם $(x \in ((A\backslash B) \cup (A \cap C)))$

לכן $(x \notin A$ וגם $(x \in B$ וגם $x \notin C))$ וגם$\big((x \in A$ וגם $x \notin B)$או $(x \in A$ וגם $x \in C)\big)$

לכן $(x \notin A$ וגם $(x \in B$ וגם $x \notin C))$ וגם$\big(x \in A$ וגם $(x \notin B$ או $x \in C)\big)$

לכן $(x \notin A$ וגם $(x \in B$ וגם $x \notin C))$ וגם$\big(x \in A$ וגם $(x \in B$ וגם $x \notin C)\big)$

לכן $(x \in B$ וגם $x \notin C)$וגם$(x \in A$ וגם $x \notin A)$

בפרט $x \notin A$ וגם $x \in A$ חייב להתקיים - אך בלתי אפשרי – וזוהי סתירה! לכן הטענה נכונה.

שנית, נוכיח את <u>הטענה</u>: $A\backslash(B\backslash C) \subseteq (A\backslash B) \cup (A \cap C)$.

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה $A\backslash(B\backslash C) \nsubseteq (A\backslash B) \cup (A \cap C)$

קיים $x \in A(B\backslash C)$

לכן ע"פ הגדרת השייכות ושלילתה: $(x \notin ((A\backslash B) \cup (A \cap C)))$וגם$(x \in A\backslash(B\backslash C))$

לכן $((x \notin A$ וגם $x \notin C)$ או $(x \notin A$ וגם $x \in B))$ וגם $\big(x \in A$ וגם$(x \notin B$ וגם $x \in C)\big)$

לכן $(x \notin A$ וגם $(x \in B$ או $x \notin C))$ וגם $\big(x \in A$ וגם $(x \notin B$ וגם $x \in C)\big)$

לכן $(x \notin A$ וגם $(x \notin B$ וגם $x \in C))$ וגם $\big(x \in A$ וגם $(x \notin B$ וגם $x \in C)\big)$

לכן $(x \notin B$ וגם $x \in C)$ וגם $(x \in A$ וגם $x \notin A)$

בפרט $x \notin A$ וגם $x \in A$ וזוהי סתירה – לכן השלילה אינה נכונה, והטענה נכונה.

ב. הוכח את <u>הטענה:</u> אם $(A\backslash C)\cup(C\backslash B)\subseteq A\cap B$ אזי $A\subseteq B$.

<u>הוכחה:</u> יהי $x\in(A\backslash C)\cup(C\backslash B)$

לכן $x\in A\cap B$ וגם $x\in(A\backslash C)\cup(C\backslash B)$

לכן $(x\in A$ וגם $x\in B)$ וגם $\big((x\in A$ וגם $x\notin C)$ או $(x\in C$ וגם $x\notin B)\big)$

לכן $(x\in A$ וגם $x\in B)$ וגם $(x\in A$ או $x\notin B)$

בפרט $x\in A$ חייב להתקיים לפי הטענה $(x\in A$ וגם $x\in B)$

לכן $(x\in A$ וגם $x\in B)$

לכן $A\subseteq B$ – ע"פ הגדרת ההכלה.

ג. הוכח את <u>הטענה:</u> אם $\mathrm{P}(A)\subseteq P(A\backslash B)$ אזי $\mathrm{A}\cap B=\phi$.

<u>הוכחה:</u> תהי $X\in P(A)$

לכן $X\in P(A)$ וגם $X\in P(A\backslash B)$

לכן $x\subseteq A$ וגם $x\subseteq A\backslash P$

לפי טענת עזר $x\in B$ וגם $x\notin A$

לכן, לא קיים $x\notin B$ וגם $x\in A$

לכן $\mathrm{A}\cap B=\phi$.

<u>טענת עזר:</u> אם $A\subseteq B\backslash C$ וגם $\mathrm{A}\subseteq B$ אזי $x\notin$ $x\in C$ וגם B.

<u>הוכחה:</u> יהי $x\in A$

לכן $(x\in$ וגם $x\in A)$ וגם $(x\in A$ וגם $x\in B)$ B וגם $x\notin C))$

לכן $(x\notin$ או $x\notin A)$ וגם $(x\in A$ וגם $x\in B)$ B או $x\in C))$

לכן $x\in C$ וגם $(x\in A$ וגם $x\in B)$

לכן $x\in C$ וגם $(x\notin A$ או $x\notin B)$

בגלל סתירה עם ההנחה $x\in C$ וגם $x\notin B$

ד. הוכח את הטענה: אם $\{A\}\subseteq P(B)$ אזי $P(A)\subseteq P(B)$.

נניח $\{A\}\subseteq P(B)$

נניח בשלילה $P(A)\nsubseteq P(B)$.

לכן יהי $X\in\{A\}$

לכן $X=A\ \&\&\ X\in P(B)$

לכן $X\subseteq A\ \&\&\ A\subseteq X\ \&\&\ X\subseteq B$.

לכן קיים $x\in X$

לכן $x\in A\ \&\&\ x\in B$

לכן $A\subseteq B$.

לפי ההנחה בשלילה קיים $Y\in P(A)\ \&\&\ Y\notin P(B)$

לפי טענת עזר $A\nsubseteq B$ וזוהי סתירה!

ולכן הטענה נכונה.

טענת עזר: אם $P(A)\nsubseteq P(B)$ אזי $A\subseteq B$

נניח $P(A)\nsubseteq P(B)$

לכן קיים $X\notin P(B)$ וגם $X\in P(A)$

לכן $X\subseteq A\ \&\&\ X\nsubseteq B$

לכן קיים $x\in A\ \&\&\ x\in X\ \&\&\ x\notin B$

בפרט $x\in A\ \&\&\ x\notin B$

לכן $A\nsubseteq B$.

שאלה 3:

א. על קבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ מגדירים פעולה בינארית Δ באופן הבא: לכל $a,b\in\mathbb{Z}$ $a\Delta b=a$ אם $a\geq 0$ ו$a\Delta b=b$ אם $a<0$. בדוק האם הפעולה מקיימת סגירות ,קיבוציות, חילופיות ואם קיים ב$\mathbb{Z}$ איבר ניטרלי עבור הפעולה.

סגירות: יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$. לפי הגדרת הפעולה, תוצאתה היא בוודאות a או b וגם $a,b\in\mathbb{Z}$.

קיבוציות: יהיו $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

אם $a\geq 0$ אזי $a\Delta(b\Delta c)=a$

$(a\Delta b)\Delta c=(a\Delta b)=a$

ואם $a<0$ אזי $a\Delta(b\Delta c)=b\Delta c=c$

$(a\Delta b)\Delta c=c$

וגם הפעולה סגורה עבור $\mathbb{Z}$ (הוכח בסעיף קודם)

ולכן הפעולה קיבוצית.

חילופיות: נבחר לדוגמה את האיברים $2,3 \in \mathbb{Z}$.

$2\Delta 3 = 2$

$3\Delta 2 = 3$

$2 \neq 3$ ולכן הפעולה אינה חילופית.

קיום נייטרלי: בגלל שהפעולה אינה חיובית, לא קיים נייטרלי עבור $(\mathbb{Z}, \Delta)$.

ב. תהי A קבוצה לא ריקה. על הקבוצה $P(A)$ מגדירים פעולה בינארית $*$ כך שלכל $X, Y \in P(A)$

$X * Y = X \cap Y$.

בדוק אם הפעולה $*$ מקיימת את תכונת הסגירות, הקיבוציות והחילופיות, ואם קיים ב$P(A)$ איבר נטרלי ביחס ל$*$ ואם לכל איבר ב$P(A)$ יש נגדי ביחס לפעולה זו.

סגירות: יהיו $X, Y \in P(A)$

לכן $X, Y \subseteq A$

לכן יהיו $x \in X \,\&\&\, y \in Y$

לכן $x, y \in A$

לכן $X \subseteq Y$ או $Y \subseteq X$

לכן $(X \cap Y = X$ או $Y \cap X = Y)$ וגם $X, Y \subseteq A$

ולכן כל תוצאה של הפעולה עבור $P(A)$ היא סגורה.

קיבוציות: יהיו $X, Y, Z \in P(A)$.

לכן $X, Y, Z \subseteq A$

יהי $x \in X \cap (Y \cap Z)$

לכן $x \in X \,\&\&\, (x \in Y \,\&\&\, x \in Z)$

בגלל שהקשר הלוגי "וגם" קיבוצי: $(x \in X \,\&\&\, x \in Y) \,\&\&\, x \in Z$

לכן מתקיים $x \in (X \cap Y) \cap Z$

לכן $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$ וגם הפעולה סגורה עבור P(A)

ולכן הפעולה קיבוצית.

חילופיות: יהיו $X, Y \in P(A)$

לכן $X \cap Y = Y \cap X$ לפי הגדרת החיתוך.

קיום נייטרלי: A נייטרלי עבור הפעולה על הקבוצה $P(A)$

יהי $X \in P(A)$

לכן $X \subseteq A$

לכן יהי $x \in X$

לכן $x \in A \,\&\&\, x \in X$

לכן $x \in (A \cap X) \,\&\&\, x \in A$

לכן $X \cap A = X$ וגם הפעולה חילופית

לכן A נייטרלי בפעולה עבור $P(X)$.

קיום הופכי: תהי $A = \{1,2,3,4\}$. לכן יהי $\{1,2,3\} = X \in P(A)$

לכן צריך להתקיים f הופכי כך ש$f \cap X = A$

לכן $f \cap \{1,2,3\} = \{1,2,3,4\}$

אבל לא קיים ב$\{1,2,3\}$ האיבר $4 \in \{1,2,3,4\}$ ולכן לא קיים הופכי.