

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 2-3

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: יום א' 27.11.2011

סמסטר: 2012א

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (21 נק')

א. תנו דוגמא ליחס R שהוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל $A = \{1, 2, 3\}$,

אך **הסגור הסימטרי** שלו אינו יחס שקילות מעל A .

הראו שהדוגמא שנתתם מקיימת את הנדרש.

ב. הוכיחו: אם R הוא יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל A **כלשהי**

אז $R \cap R^{-1}$ הוא יחס שקילות מעל A . **נמקו בפירוט** כל צעד בהוכחה.

ג. תנו דוגמא ליחס R מעל $A = \{1, 2, 3\}$ כך ש- $R \cup R^2$ אינו טרנזיטיבי.

שאלה 2 (30 נק')

הגדרה: מספר טבעי חיובי נקרא **ראשוני** (prime) אם הוא שונה מ-1, ומתחלק ללא שארית רק

בעצמו וב-1. כבר ליוונוס היה ידוע שקבוצת המספרים הראשוניים היא אינסופית.

שימו לב ש-1 אינו נחשב ראשוני. קבוצת הראשוניים "מתחילה" כך: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

משפט ידוע קובע שכל מספר טבעי הגדול מ-1 ניתן להצגה כמכפלה של מספרים ראשוניים, ויש

רק דרך אחת להציג אותו כך, עד כדי החלפת סדר הגורמים במכפלה (מה היה מתקלקל במשפט

זה אילו 1 היה נחשב ראשוני?).

נסמן $N^* = N - \{0\}$. תהי $f: N^* \rightarrow N^*$ הפונקציה המתאימה לכל טבעי n הגדול מאפס את

מספר המספרים הטבעיים החיוביים (לאו דווקא ראשוניים!) שבהם n מתחלק ללא שארית.

למשל 12 מתחלק ב-6 מספרים שונים: 1, 2, 3, 4, 6, 12 ולכן $f(12) = 6$.

1 מתחלק רק בעצמו ולכן $f(1) = 1$.

א. האם f היא חד-חד-ערכית?

ב. האם f היא על N^* ? הדרכה: יהי p מספר ראשוני. הסתכלו בחזקות של p .

(המשך השאלה בעמ' הבא)

(המשך שאלה 2)

הפונקציה f מחלקת את \mathbb{N}^* למחלקות שקילות, בעזרת התנאי: n, m שייכים לאותה מחלקה אם $f(n) = f(m)$. ראו הסעיף "העתק טבעי" בעמ' 84 בספר, וראו הסבר מפורט יותר באתר הקורס, מאגר המשאבים, עזרים ללמידה - "יחס שקילות המושרה על-ידי פונקציה". המשך השאלה מתייחס לחלוקה זו.

ג. מיהם כל המספרים הנמצאים באותה מחלקה עם המספר 5 ?

ד. מיהם כל המספרים הנמצאים באותה מחלקה עם המספר 4 ?

ה. האם מספר מחלקות השקילות ש- f משרה ב- \mathbb{N}^* הוא סופי או אינסופי ?

ו. הוכיחו שפרט למחלקה שבה נמצא 1, כל אחת ממחלקות השקילות מכילה אינסוף איברים.
יש לנמק כל תשובה.

שאלה 3 (32 נקודות)

תהי F קבוצת כל הפונקציות של \mathbb{N} ל- \mathbb{N} . נגדיר יחס K מעל F :

עבור $f, g \in F$: $(f, g) \in K$ אם $\text{לכל } n \in \mathbb{N}, f(n) \leq g(n)$.

(6 נק') א. הוכח ש- K הוא סדר-חלקי מעל F .

(4 נק') ב. הוכח ש- K אינו סדר-מלא מעל F .

(6 נק') ג. האם יש ב- F איברים מקסימליים לגבי היחס K ?

האם יש איבר גדול ביותר? הוכח.

(6 נק') ד. האם יש ב- F איברים מינימליים לגבי היחס K ?

האם יש איבר קטן ביותר? הוכח.

(10 נק') ה. הוכח שלכל $f \in F$ קיים $g \in F$ שמכסה את f (הגדרה 3.6 בעמ' 88 בספר).

הוכח שלכל $f \in F$ קיים יותר מ- g אחד כזה.

שאלה 4 (17 נקודות)

הפונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ מוגדרת ברקורסיה כך:

$$f(0) = 10, f(1) = 29, \text{ ולכל } 1 \leq n: f(n+1) = 7f(n) - 10f(n-1)$$

הוכח באינדוקציה (ולא בדרך אחרת): $f(n) = 3 \cdot 5^n + 7 \cdot 2^n$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 4-5

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה

משקל המטלה: 3 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: יום א' 11.12.2011

סמסטר: 2012א

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

חלק מהממ"ן מסתמך על החוברת "פרק 5" שנמצאת בידיכם.
חוברת זו משלימה את פרק 4 בתורת הקבוצות ומחליפה חלק ממנו.

שאלה 1 (24 נקודות)

א. הוכח שאם $|A - B| = |B - A|$ אז $|A| = |B|$.

הדרכה: לא נתון שהקבוצות סופיות, לכן יש לעבוד לפי הגדרת שוויון עוצמות: מהנתון נובע שקיימת פונקציה חח"ע ועל מסוימת, ועלינו להראות שמכך נובע שקיימת פונקציה חח"ע ועל אחרת...

ב. הראה שאם A, B סופיות ו- $|A| = |B|$ אז $|A - B| = |B - A|$.

ג. הראה ע"י דוגמא שטענת סעיף ב אינה נכונה בהכרח עבור A, B שאינן סופיות.

שאלה 2 (24 נקודות)

א. תהי K קבוצת כל תת-הקבוצות הסופיות של \mathbb{N} : $K = \{A \in P(\mathbb{N}) \mid A \text{ היא קבוצה סופית}\}$. הוכח ש- K היא בת-מניה. אפשר להיעזר בחוברת "אוסף תרגילים פתורים" עמ' 8 שאלה 10, אבל שימו לב ששם מדובר על סדרות וכאן על קבוצות, לכן יש עוד מה להוכיח. דרך אפשרית היא להתאים לכל קבוצה - סדרה.

ב. בהינתן $A \in P(\mathbb{N})$, נאמר ש- A קו-סופית (co-finite) ב- \mathbb{N} ,

אם A' (המשלימה של A ב- \mathbb{N}) היא קבוצה סופית.

מובן שאם A קו-סופית ב- \mathbb{N} אז A אינסופית (מדוע?),

אבל לא כל קבוצה אינסופית של טבעיים היא קו-סופית ב- \mathbb{N} (למשל!).

תהי L קבוצת כל התת-קבוצות הקו-סופיות ב- \mathbb{N} : $L = \{A \in P(\mathbb{N}) \mid A \text{ קו-סופית ב- } \mathbb{N}\}$.

הוכח ש- L היא בת-מניה.

שאלה 3 (24 נקודות)

א. תהי M קבוצת כל התת-קבוצות של N אשר הן ומשלימותיהן אינסופיות:

$$M = \{A \in P(N) \mid A \text{ ו-} A' \text{ שניהן אינסופיות}\}.$$

הוכיחי ש- M אינה בת-מניה. עליך להוכיח זאת בעזרת סעיף 4.1.1 בספר ובעזרת העובדה ש-
 $P(N)$ אינה בת-מנייה. אין להסתמך על טענות אחרות מפרק 5. כדאי להיעזר בשאלה 2 כאן.

ב. מצאי בעזרת פרק 5 את עוצמת M . שימוש במשפט מתאים ייתן הוכחה קצרה מאוד.

שאלה 4 (28 נקודות)

(12 נק') א. יהיו k_1, k_2, m_1, m_2 עוצמות.

הוכח שאם $k_1 \leq k_2$ ו- $m_1 \leq m_2$ אז $k_1 \cdot m_1 \leq k_2 \cdot m_2$.

(8 נק') ב. הוכח: $\aleph_0 \cdot C = C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם).

(8 נק') ג. הוכח: $C^C = 2^C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם ובמשפטים שבחוברת).

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 1-2
מספר השאלות: 11 משקל המטלה: 3 נקודות
סמסטר: 2012א מועד אחרון להגשה: יום ו' 30.12.2011

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת <http://www.openu.ac.il/sheilta/>
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בשאלות 1–4 הן קבוצות סופיות, $|A| = 6$, $|B| = 3$.

שאלה 1

מספר הפונקציות של B ל- A הוא:

א. 18 ב. 20 ג. 120 ד. 216 ה. 729

שאלה 2

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של B ל- A הוא:

א. 6 ב. 20 ג. 120 ד. 216 ה. 729

שאלה 3

מספר היחסים הרפלקסיביים מעל A הוא:

א. 6 ב. 36 ג. 64 ד. 6^6 ה. 2^{30}

שאלה 4

מספר יחסי הסדר המלא מעל A הוא:

א. 6 ב. 36 ג. 64 ד. 120 ה. 720

שאלות 5-8 עוסקות בדרכים שונות לסדר את המחרוזת 1223334444 (להלן: "המחרוזת").

שאלה 5

מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת הוא:

- א. 10 ב. $1! + 2! + 3! + 4!$ ג. $10!$ ד. $\frac{10!}{2!3!4!}$
- ה. $10! - (1! + 2! + 3! + 4!)$

שאלה 6

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת כאשר הספרות 22 חייבות להיות צמודות זו לזו?

- א. 25 ב. 252 ג. 2520 ד. 12,520 ה. 125,200

שאלה 7

בנוסף לדרישה שבשאלה 6, נדרוש גם **שלא** יופיע הרצף 333.

מספר הסידורים האפשריים כעת קטן ממספר הסידורים שמצאתם בשאלה 6. **בכמה הוא קטן?**

- א. 10 ב. 210 ג. 2100 ד. 12,100 ה. 122,100

שאלות 8 – 10 עוסקות בארבע משפחות שיצאו יחד למנגל והכינו 9 סטייקים **זהים** ו-12 שיפודים **זהים**. המשפחות **אינן** נחשבות זהות. כמו כן, סטייק **אינו** זהה לשיפוד.

שאלה 8

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לחלק את 12 השיפודים בין המשפחות? יש לחלק את כל השיפודים. ייתכן שמשפחה לא רוצה שיפודים כלל.

א. $D(4,12) = \binom{15}{11}$ ב. $D(4,12) = \binom{15}{3}$ ג. 4^{12} ד. $\binom{12}{4}$ ה. $D(12,4)$

שאלה 9

נסמן את התשובה לשאלה הקודמת ב- x . בכמה דרכים ניתן לחלק את כל האוכל בין המשפחות? יש לחלק את כל השיפודים ואת כל הסטייקים. ייתכן שמשפחה לא רוצה אוכל כלל.

א. $x + D(4,9)$ ב. $x + D(9,4)$ ג. $x \cdot D(4,9)$ ד. $x \cdot D(9,4)$ ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 10

בכמה דרכים ניתן לחלק רק את 12 השיפודים בין המשפחות, אם משפחת כהן חייבת לקבל לפחות 3 שיפודים, וכל משפחה אחרת חייבת לקבל שיפוד אחד לפחות?

א. 48 ב. 84 ג. 484 ד. 840 ה. 848

שאלה 11

מהו מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$?

א. 120 ב. 210 ג. 1,820 ד. 4,368 ה. 8,634