# מטלת מנחה (ממ"ן) 12

**הקורס: 20433 - מבני נתונים**

**פתרונות חלקיים לממן.**

**שאלה 1** (20 נקודות: 5 נקי' לכל סעיף)

הוכח או הפרך:

**ג.** $n^2 = \Omega(\lg(n!))$

נוכיח טענה זו. בשיטה מעט שונה:

צ.ל. $C > 0$ ו- $n_0 \geq 0$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים

(1) $n^2 \geq C \lg(n!)$.

בעמוד 33 מופיע הנתון הבא: $\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$,

כלומר, קיים $C_1 > 0$ ו- $n_{01} \geq 0$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים

(2) $\lg(n!) \leq C_1 n \lg n$,

נחבר את (1) ו- (2) ונקבל, כי עלינו להוכיח שקיים $C > 0$ ו- $n_0 \geq 0$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים:

$$\underbrace{C \lg(n!) \leq C \cdot C_1 n \lg n}_{\text{בספר 33 דנכון לפי עמו}} \leq n^2$$

כעת, מספיק להראות כי: $n^2 = \Omega(n \lg n)$.

כלומר עלינו להראות שקיים $C_2 > 0$ ו- $n_{02} \geq 0$ כך שלכל $n > n_{02}$ מתקיים:

$n^2 \geq C_2 n \lg n$.

נבודד את $C$ ע"י חלוקת שני האגפים ב- $n \lg n$ $\quad \frac{n^2}{n \lg n} = \frac{n}{\lg n} \geq C_2$

מכיוון שהמונה הוא פולינום, והמכנה – פולילוגריתם, הרי שהמונה גדל מהר יותר מהמכנה, ולכן הביטוי כולו שואף לאינסוף! אין בעיה לחסום ***מלמטה*** ביטוי השואף לאינסוף.

למשל $c_2 = 1$, ו- $n_{02} = 2$.

**שאלה 2** (14 נקודות : 7 נק' לכל סעיף)

הוכח או הפרך :

א. $f(n) = \Theta(f(n/2))$

נפריך טענה זו ע"י דוגמא נגדית.

למשל : $f(n) = 2^n$ . עבור פונקציה זו מתקיים $f(n) \neq O\left(f\left(n/2\right)\right)$

נוכיח כי : $2^n \neq O\left(2^{\frac{n}{2}}\right)$.

נניח בשלילה כי קיימים $n_0 \geq 0, C > 0$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים : $2^n \leq C2^{\frac{n}{2}}$

נבודד את C, ע"י חלוקה של שני אגפי אי השוויון ב- $2^{\frac{n}{2}}$:

$\frac{2^n}{2^{\frac{n}{2}}} \leq C \quad \Leftarrow 2^{n-\frac{n}{2}} \leq C \quad \Leftarrow 2^{\frac{n}{2}} \leq C$ $2^{\frac{n}{2}}$ היא פונקציה השואפת לאינסוף.,

וזו כמובן סתירה כיוון שלא קיים קבוע שיכול לחסום פונקציה השואפת לאיסוף. מכאן, שלא קיימים $n_0 \geq 0, C > 0$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים : $2^n \leq C2^{\frac{n}{2}}$ . כלומר : $2^n \neq O\left(2^{\frac{n}{2}}\right)$. ולכן,

לא לכל הפונקציות מתקיים : $f(n) = \Theta\left(f\left(\frac{n}{2}\right)\right)$

ב. אם $f(n) = O(g(n))$ אז $2^{f(n)}=O(2^{g(n)})$

גם טענה זו אינה נכונה!

והנה דוגמא נגדית: עבור $g(n) = \frac{n}{2}$ $f(n) = n,$ .., ברור שמתקיים : $f(n) = O(g(n))$ .

אבל, עבור $2^{f(n)} = 2^{\frac{n}{2}}$ ועבור $2^{g(n)} = 2^n$ הוכחנו בסעיף א', ש :

$2^{f(n)} = 2^n \neq O\left(2^{\frac{n}{2}}\right) = 2^{g(n)}$.

ולכן –הפרכנו את הטענה.

**שאלה 3** (28 נקודות : 7 נק' לכל סעיף)

פתור באמצעות שיטת האיטרציה את נוסחאות הנסיגה הבאות :

ג.
$$T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 1 \\ 3T(n-2) + O(1) & n > 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & T(n) = 3T(n-2)+1 & \left[T(n-2) = 3T((n-2)-2)+1\right] \\
(2) & \quad = 3\left[3T(n-2\cdot 2)+1\right]+1 & \left\{T(n-2\cdot 2) = 3T((n-2\cdot 2)-2)+1\right\} \\
(3) & \quad = 3\left[3\{3T(n-3\cdot 2)+1\}+1\right]+1 = & \\
(3) & \quad = 3\left[3^2 T(n-3\cdot 2)+3+1\right]+1 = & \\
(3) & \quad = 3^3 T(n-3\cdot 2)+3^2+3+1 = & \\
(3) & \quad = 3^3 T(n-3\cdot 2)+3^2+3^1+3^0 = \ldots & \\
(i) & \quad = 3^{i} T(n-i\cdot 2)+3^{i-1}+3^{i-2}+\cdots+3^0 = &
\end{array}$$

עבור איזה $i$ נגיע ל- $T(1)$ ? כלומר מהו $i$ עבורו : $T(n-2i)=T(1)$ ?

$$n-2i = 1 \Rightarrow$$
$$n-1 = 2i \Rightarrow$$
$$\frac{n-1}{2} = i$$
$$i = \frac{n-1}{2}$$

כלומר השלב האחרון הוא השלב ה- $\dfrac{n-1}{2}$

$$\left(\frac{n-1}{2}\right) \quad = 3^{\frac{n-1}{2}} T\left(\underbrace{n-\underbrace{2\frac{n-1}{2}}_{n-1}}_{1}\right)+3^{\frac{n-1}{2}-1}+\cdots+3^0 =$$

$$\left(\frac{n-1}{2}\right) \quad = 3^{\frac{n-1}{2}} T(1)+\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}-1} 3^i =$$

$$\left(\frac{n-1}{2}\right) \quad = 3^{\frac{n-1}{2}} T(1)+\frac{3^{\frac{n-1}{2}-1+1}-1}{3-1} = 3^{\frac{n}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{2}}+3^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{3^{-\frac{1}{2}}}{2}-\frac{1}{2} =$$

$$= O\left(3^{\frac{n}{2}}\right) = \underline{\underline{O\left(\sqrt{3^n}\right)}}$$

ד. $T(n)=\begin{cases}2T(n/2)+n/\lg n & \text{n}>1\\ O(1) & \text{n}=1\end{cases}$

$$\left[T\left(\frac{n}{2}\right)=2T\left(\frac{\frac{n}{2}}{2}\right)+\frac{\frac{n}{2}}{\lg\frac{n}{2}}\right]$$

$$(1)\qquad T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+\frac{n}{\lg n}=$$

$$\left[T\left(\frac{n}{2^2}\right)=2T\left(\frac{\frac{n}{2^2}}{2}\right)+\frac{\frac{n}{2^2}}{\lg\frac{n}{2^2}}\right]$$

$$(2)\qquad =2\left[2T\left(\frac{n}{2^2}\right)+\frac{\frac{n}{2}}{\lg\frac{n}{2}}\right]+\frac{n}{\lg n}=$$

$$(3)\qquad =2\left[2\left\{2T\left(\frac{\frac{n}{2^2}}{2}\right)+\frac{\frac{n}{2^2}}{\lg\frac{n}{2^2}}\right\}+\frac{\frac{n}{2}}{\lg\frac{n}{2}}\right]+\frac{n}{\lg n}=2\left[2^2T\left(\frac{n}{2^3}\right)+2^1\frac{\frac{n}{2^2}}{\lg\frac{n}{2^2}}+\frac{\frac{n}{2}}{\lg\frac{n}{2}}\right]+\frac{n}{\lg n}=$$

$$(3)\qquad =2^3T\left(\frac{n}{2^3}\right)+2^2\frac{\frac{n}{2^2}}{\lg\frac{n}{2^2}}+2^1\frac{\frac{n}{2^1}}{\lg\frac{n}{2^1}}+2^0\frac{n}{\lg n}=2^3T\left(\frac{n}{2^3}\right)+\frac{n}{\lg\frac{n}{2^2}}+\frac{n}{\lg\frac{n}{2^1}}+\frac{n}{\lg n}=$$

$$(3)\qquad =2^3T\left(\frac{n}{2^3}\right)+\frac{n}{\lg n-\lg 2^2}+\frac{n}{\lg n-\lg 2^1}+\frac{n}{\lg n-\lg 2^0}=$$

$$(i)\qquad =2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right)+\frac{n}{\lg n-(i-1)}+\frac{n}{\lg n-(i-2)}+\cdots+\frac{n}{\lg n-0}=$$

$$(\lg_2 n)\qquad =\underbrace{2^{\lg_2 n}}_{n}\underbrace{T\left(\frac{n}{\underbrace{2^{\lg_2 n}}_{n}}\right)}_{1}+n\sum_{i=0}^{\lg_2 n-1}\frac{1}{\lg_2 n-i}=$$

נתבונן בטור שקיבלנו : $\sum_{i=0}^{\lg_2 n-1}\frac{1}{\lg_2 n-i}=\frac{1}{\lg_2 n}+\frac{1}{\lg_2 n-1}+\cdots+\frac{1}{\underbrace{\lg_2 n-(\lg_2 n-1)}_{1}}=$

טור זה זהה לטור הבא, כשההבדל הוא בסדר הופעת האיברים (לסדר הופעת האיברים, אין משמעות בתרגילי חיבור)

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{\lg_2 n-1}+\frac{1}{\lg_2 n}=\sum_{i=1}^{\lg_2 n}\frac{1}{i}$$

וזהו טור הרמוני, כפי שמופיע בעמוד 41 בספר הלימוד (נוסחא 3.5) ולכן :

מכאן : $\sum_{i=1}^{\lg_2 n}\frac{1}{i}=\ln(\lg_2 n)+\mathrm{O}(1)$

$$(\lg_2 n)\qquad =n+n\sum_{i=1}^{\lg_2 n}\frac{1}{i}=n+n\cdot\ln(\lg_2 n)-n=\underline{\underline{O(n\lg\lg n)}}$$

**שאלה 4** (16 נקודות : 4 נק' לכל סעיף)

א. תאר את פעולתה של השגרה PARTITION על המערכים :

$$A =< 13, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30 >$$
$$B =< 30, 30, 30, 30, 13, 30, 30, 30, 30 >$$

ב. איזה ערך של $q$ מחזירה PARTITION כאשר כל האיברים במערך $A[p..r]$ שווים זה לזה פרט לאחד מהם?

ג. מהו זמן הריצה של QUICKSORT אם לכל האיברים במערך $A$ , פרט לאחד מהם, יש אותו ערך?

ד. מהו זמן הריצה של QUICKSORT אם כל האיברים במערך $A$ , פרט לאחד מהם, ממוינים בסדר יורד?

**פתרון**

ב. איזה ערך של $q$ מחזירה PARTITION כאשר כל האיברים במערך $A[p..r]$ שווים זה לזה פרט לאחד מהם?

*הערך שמחזירה PARTITION תלוי בערך השונה, ובמיקומו.*

| | בתחילת המערך | באמצע המערך | בסוף המערך |
|---|---|---|---|
| הערך השונה מינימום : | 1 | בערך $n/2$ | בערך $n/2$ |
| הערך השונה מקסימום : | $n-1$ | בערך $n/2$ | בערך $n/2$ |

**שאלה 5** (22 נקודות - 12 נק' לסעיף א'; 4 נק' לסעיף ב'; 6 נק' לסעיף ג')

בהינתן מערך של $n$ מספרים, נדון בבעיית החזרת $k$ האיברים הקטנים ביותר, בסדר **ממויין** ($n$ ו-$k$ משתנים בלתי-תלויים, $1 \le k \le n$).

א. איך אפשר לשנות את האלגוריתם מיון-מהיר כדי להתאים אותו לבעיה זו?

השינויים הם בשגרה QuickSort

```
QuickSort(A, p, r, k)
  if (p<=k) and (p<=r)
  then  q←partition(A, p, r)
        QuickSort(A, p, q, k)
        QuickSort(A, q, r, k)
```

ב. מהו זמן הריצה של האלגוריתם (כפונקציה של $n$ ו-$k$) במקרה הטוב ביותר ובמקרה הגרוע ביותר?

המקרה הגרוע יקח $O(n \cdot k)$ והמקרה הטוב $O(k \cdot \lg k + n)$