

קורס: 20416 "תורת ההסתברות"

תאריך הבחינה: 20.7.2015 (סמסטר 2015 ב - מועד א 6 / 87)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי וספר הקורס בלבד.

מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובתיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפת: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

שאלה 1 (25 נקודות)

יהיו X ו- Y שני משתנים מקריים מעריכיים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפרמטר λ ($\lambda > 0$).

9 נק' א. מצא את פונקציית הצפיפות המותנית של X בהינתן המאורע $\{X > Y\}$.

8 נק' ב. הראה כי $E[X | X > Y] = \frac{3}{2\lambda}$.

8 נק' ג. העזר בנוסחת התוחלת המותנית, כדי למצוא את $E[X | X < Y]$.

הערה: שים לב לכיוון סימן אי-השוויון בכל אחד מן הסעיפים.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתון משתנה מקרי רציף X , שפונקציית הצפיפות שלו היא: $f_X(x) = cx^2 e^{-x^2/2}$, $x > 0$.
ונתון כי לכל $x > 0$, ההתפלגות המותנית של המשתנה המקרי Y בהינתן $X = x$ היא אחידה רציפה על הקטע $(0, x)$.

9 נק' א. הראה כי: $f_Y(y) = ce^{-y^2/2}$, $y > 0$.

8 נק' ב. מצא את c .

8 נק' ג. חשב את $P\{Y \leq 1.82\}$.

שאלה 3 (25 נקודות)

תייר מגיע לאזור שיש בו 4 כפרים.

בכל יום התייר בוחר באקראי אחד מארבעת הכפרים כדי ללון בו (בלי תלות בבחירות אחרות).
התייר מחליט לעזוב את האזור מייד לאחר שיזדמן לו ללון בכל אחד מהכפרים.

8 נק' א. מהי ההסתברות שהתייר ישהה באזור יותר מ-4 ימים?

9 נק' ב. מהי ההסתברות שהתייר יעזוב לאחר 15 ימים לכל היותר?

8 נק' ג. מהי שונות משך ביקורו באזור (בימים)?

שאלה 4 (25 נקודות)

בסניף דואר 3 אשנבים : אשנב 1, אשנב 2 ואשנב 3.
 כל לקוח שנכנס לסניף הדואר פונה באקראי לאחד משלושת האשנבים.
 מספר הלקוחות הנכנסים לסניף הדואר ב- 15 דקות הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 6.
 בשעה 8:00 סניף הדואר ריק.
 נתבונן על פרק הזמן שבין 8:00 לבין 8:15, וביחס אליו נגדיר את המשתנים המקריים הבאים :

$$N = \text{מספר הלקוחות שנכנסים לסניף הדואר};$$

$$X = \text{מספר האשנבים שפונה אליהם לפחות לקוח אחד};$$

$$Y = \text{מספר הלקוחות שפונים לאשנב 1}.$$

(8 נק') א. רשום ביטוי מתאים ל- $P\{Y=j, N=n\}$, לכל $n=0,1,\dots$ ו- $j=0,1,\dots,n$.

(8 נק') ב. רשום ביטוי מתאים ל- $P\{X=1, N=n\}$, לכל $n=1,2,\dots$.

(9 נק') ג. חשב את $P\{X=2, Y=4, N=8\}$.

שאלה 5 (25 נקודות)

(16 נק') א. יהיו X ו- Y משתנים מקריים בינומיים בלתי-תלויים,

שלכל אחד מהם הפרמטרים $2n$ ו- 0.5 .

$$1. \text{ הוכח כי } P\{X-Y \geq n\} \leq \frac{1}{2n}$$

$$2. \text{ בהנחה ש- } n \text{ גדול, מצא קירוב להסתברות המאורע } \{X-Y \geq \sqrt{n}\}.$$

(9 נק') ב. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ ($\lambda > 0$).

$$\text{הוכח או הפרך: } E\left[\frac{1}{X+1}\right] = \frac{1}{\lambda+1}$$

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] \quad \text{נוסחת האינטרפולציה:}$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326