

מטלת מנחה (ממ"ן) 17

הקורס: 20276 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה - פרקים 6 - 7

משקל המטלה: 3 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: יום ו' 16.6.06

סמסטר: 2006

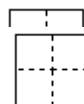
אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1

בלוקים זהים בגודל 2×1 :

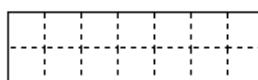
בידינו מספר בלתי-מוגבל של

בלוקים זהים בגודל 2×2 :



ומספר בלתי-מוגבל של

$n \times 2$:



עלינו לרצף מלבן שממדי (בציון $n=7$).

אסור לחרוג מגבולות המלבן. בלוק של 2×1 אפשר להניח כרצוננו "שוכב" או "עומד".
יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

(9 נק') א. רשום יחס נסיגה עבור a_n (הסבר אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

(10 נק') ב. פתור את יחס הנסיגה.

(6 נק') ג. חשב את a_4 בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א',
ומתוך הנוסחה המפורשת שקיבלת בסעיף ב'.

שאר הממ"ן עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בעמוד הבא רשימה של נוסחאות שימושיות.

שאלה 2

חזרו ופתרו את שאלה 4 בממ"ן 15, בעזרת פונקציה יוצרת:

כתבו פונקציה יוצרת עבור מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = n$ תחת

האילווצים הנתונים בשאלה, ומצאו את המקדם של x^{29} בפונקציה שרשמתם.
יש להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 3

יהושע נוטל תרופות שונות: כדור נגד כאב-ראש: לכל היותר 3 ביום (אפשר 0). כדור מרץ: לכל היותר 3 ביום (אפשר 0). ויטמין C וויטמין B ללא הגבלה (אפשר 0), כל זה בכפוף לתנאי הבא, שלגביו הוא מחויב כחבר באגודת ההיפוכונדרים: מספר הכדורים הכולל, מכל 4 הסוגים יחד, שהוא לוקח כל יום יהיה בדיוק n . ערכו של n מוגדר מדי פעם בפרסומי האגודה.

נסמן ב- a_n את מספר ההרכבים השונים של n כדורים שיכול יהושע לקחת ביום אחד, כאשר אין חשיבות לסדר נטילת התרופות, ותרופות מאותו סוג הן זהות.

- א. מצא את הפונקציה היוצרת עבור הסדרה $\{a_n\}$. הסבר
- ב. מצא ביטוי מפורש עבור a_n (שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר הלימוד יכולה לסיע).

שאלה 4

דוגמא לתרגיל מסוג זה נמצאת בסוף הקובץ "מבוא לפונקציות יוצרות" שבאתר הקורס.

$$\frac{(1-x^2)^n}{(1-x)^n} = (1+x)^n \quad \text{חשב את המקדם של } x^{2m} \text{ בכל אחד מאגפי הזהות האלגברית:}$$

$$\sum_{k=0}^n ?? = \binom{n}{2m} \quad \text{קבל מכאן זהות על סכומים של מקדמים בינומיים, מהצורה:}$$

בדוק את תשובתך עבור המקרה $n=5, m=2$ ועבור המקרה $n=5, m=3$.
הדרכה: את אגף שמאל בזהות האלגברית הנתונה רשום כמכפלה.
היעזר בנוסחאות שבתחתית העמוד.

להלן סיכום כמה נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות:

$$(i) \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad \text{ואינסופי:} \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{סכום טור הנדסי סופי:}$$

(ii) כפל פונקציות יוצרות:

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad \text{אם} \quad f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad \text{ו-} \quad g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \quad \text{אז}$$

(ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד).

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+\dots)^n = \sum_{k=0}^{\infty} D(n,k)x^k \quad \text{!iii)}$$

במלים אחרות: המקדם של x^k בפיתוח הביטוי $\frac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$.
 ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר.