שימוש בטענת "או" (חלוקה למקרים)

φ, ψ, θ טענות.

אם מתקיימים התנאים הבאים, אז הוכחנו את θ:

1. הוכחנו (φ או ψ)
2. מתוך הנחת φ הוכחנו θ
3. מתוך הנחת ψ הוכחנו θ

מסגרת לחלוקה למקרים:

ידוע (φ או ψ).

מקרה 1: נניח φ

θ

מקרה 2: נניח ψ

θ

לכן θ.

מש"ל.

על כל המקרים להסתיים בדיוק כמו ההוכחה כולה. באותה טענה.

טענה

לכל A,B. $(A\setminus B)\cup(A\cap B)=A$

הוכחה

תהיינה A,B.

נוכיח כי: $(A\setminus B)\cup(A\cap B)\subseteq A$:

יהי x.

נניח $x\in(A\setminus B)\cup(A\cap B)$

לכן $x\in A\setminus B$ או $x\in A\cap B$.

מקרה 1: נניח $x\in A\setminus B$

אז $x\in A$ וגם $x\notin B$ ולכן $x\in A$

מקרה 2: נניח $x \in A \cap B$

אז ($x \in A$ וגם $x \in B$) ובפרט $x \in A$.

לכן $x \in A$ ומכאן $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \subseteq A$. 1

נוכיח $A \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap B)$:

יהי x.

נניח $x \in A$. 3

ידוע כי $x \in B$ או $x \notin B$.

4 מקרה 1: נניח $x \in B$

מ 3 ו 4 נובע $x \in A \cap B$ ולכן $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B)$

מקרה 2: נניח $x \notin B$ (5)

מ-(3) ו-(5) נובע $x \in A \setminus B$ ולכן $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B)$

לכן $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ ולכן $A \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ (2)

מ-(1) ו-(2) נובע $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

מש"ל.

תרגיל

תהיינה A, B, C קבוצות.

הוכיחו או הפריכו!

① $A \setminus B \subseteq A \setminus (B \cap C)$

תשובה

יהי x.

נניח $x \in A \setminus B$.

לכן $x \in A$ וגם $x \notin B$.

בפרט $x \notin B$ לכן $x \notin B \cap C$.

$x \in A$ וגם $x \notin B \cap C$ לכן $x \in A \setminus (B \cap C)$

הטענה נכונה. מש"ל.

2

$$A \setminus (A \setminus B) = B$$

<u>תשובה</u>

נתבונן ב:

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{2, 3\}$$

אז:

$$A \setminus B = \{1\}$$

$$A \setminus (A \setminus B) = \{2\} \neq B$$

ולכן הטענה אינה נכונה.

מש"ל.

נסיון:

נוכיח $B \subseteq A \setminus (A \setminus B)$:

יהי x.

נניח $x \in B$.

לכן $x \notin A \setminus B$.

נרצה ש $x \in A$

מקרה בעייתי: יש איבר ב B שאינו שייך ל A

(3) $A\setminus(A\setminus B)\subseteq B$

תשובה

יהי x.

נניח $x\in A\setminus(A\setminus B)$

לכן $x\in A$ וגם $x\notin A\setminus B$. (1)

בפרט $x\notin A\setminus B$ ולכן ($x\notin A$ או $x\in B$).

$x\in A$ לכן מ (1) $x\in B$.

לכן הטענה נכונה.

מש"ל.

(4) אם $A\setminus(B\setminus C)\subseteq(A\setminus B)\setminus C$ אז $A\cap C=\emptyset$

לכל x. $x\notin A\cap C$

תשובה

(1) נניח $A\setminus(B\setminus C)\subseteq(A\setminus B)\setminus C$.

יהי x.

נניח בשלילה $x\in A\cap C$.

לכן $x\in A$ וגם $x\in C$.

בפרט $x\in C$. לכן $x\notin B\setminus C$.

(2) $x\in A$ וגם $x\notin B\setminus C$ לכן $x\in A\setminus(B\setminus C)$.

(3) $x\in C$ ולכן $x\notin(A\setminus B)\setminus C$

מ 2 ו- 3 נובעת סתירה ל 1.

לכן $x \notin A \cap C$. לכן $A \cap C = \emptyset$.

הטענה נכונה.

מ.ש.ל.

הערה

הטענה $D=\emptyset$ מתורגמת לטענה: לכל x. $x\notin D$.

שיטה

$x\in(A\setminus B)\setminus C$ פירושו

$x\in A\setminus B$
וגם
$x\notin C$

$x\notin(A\setminus B)\setminus C$ פירושו $x\notin A\setminus B$ או $x\in C$

תרגיל

תהיינה A, B קבוצות.

נניח שקיים x כך ש- $(x \in B$ וגם A שקולה ל- $A \setminus \{x\})$

הוכח או הפרך:

(1) A אינסופית.

תשובה

נתבונן ב:

$B = \{2, 3\}$

$A = \{1\}$

$x = 3$

אכן, $x \in B$.

נתבונן בהתאמה:

$$\begin{array}{l} A: \quad 1 \\ \qquad\quad | \\ A\setminus\{x\}: \quad 1 \end{array}$$

ההתאמה חד חד ערכית לכן A שקולה ל $A\setminus\{x\}$,

אבל A סופית.

לכן הטענה אינה נכונה.

מש"ל.

(2) אם $A\cap B\neq\emptyset$ אז A אינסופית.

תשובה

נתבונן ב
$A=\{1\}$

$B=\{1,2\}$

$x=2$

אכן $2\in B$.

$A\cap B=\{1\}\neq\emptyset$

$A\setminus\{2\}=A$ ולכן $A\setminus\{2\}$ שקולה ל A.

כי כל קבוצה שקולה לעצמה.

וגם A סופית. לכן הטענה אינה נכונה. מ.ש.ל.

(3) אם $B \subseteq A$ אז A אינסופי.

תשובה

נניח $B \subseteq A$.

נתון $x \in B$ לכן $x \in A$.

נוכיח $A \setminus \{x\} \subseteq A$,

יהי y.

נניח $y \in A \setminus \{x\}$.

לכן $y \in A$ וגם $y \notin \{x\}$

ובפרט $y \in A$.

1 לכן $A \setminus \{x\} \subseteq A$

נכונה: $A \not\subseteq A \setminus \{x\}$

נתבונן ב x.

$x \in A$ וגם $x \in \{x\}$ ולכן $x \notin A \setminus \{x\}$.

מכיוון $A \not\subseteq A \setminus \{x\}$. ②

מ ① ו ② $A \setminus \{x\} \subset A$

מהנתון $A \setminus \{x\}$ שקולה ל A

לכן A אינסופית.

הטענה נכונה.

מש"ל.

תרגיל

תהיינה A,B.

הוכיחו או הפריכו:

① אם $A\cup B=A\cap B$ אז $B\subseteq A$

תשובה

נניח $A\cup B=A\cap B$. ①

יהי x.

נניח $x\in B$.

מכאן $x\in A\cup B$ ומ ① $x\in A\cap B$.

לכן $x\in A$ וגם $x\in B$ ובפרט $x\in A$.

הטענה נכונה. מש"ל.

(2) אם $A\cup B$ שקולה ל $A\cap B$ אז $B\subseteq A$.

<u>תשובה</u>

נתבונן ב: $A=\mathbb{N}$

$B=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

$$A\cup B=\mathbb{N}\cup\{0\}$$

$$A\cap B=\mathbb{N}$$

נתבונן בהתאמה:

$$\begin{array}{lcccccc}
A\cup B: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\
 & | & | & | & | & | & \\
A\cap B: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots
\end{array}$$

ההתאמה חד חד ערכית לכן $A \cup B$ שקולה

ל $A \cap B$.

נתבונן ב 0 :

$0 \in B$ אם $0 \notin A$

לכן $B \not\subseteq A$.

הטענה אינה נכונה.

משל.

3) אם $A\cup B$ שקולה ל $A\cap B$ וגם $A\cup B$ סופית אז $B\subseteq A$.

תשובה

נניח $(A\cup B$ שקולה ל $A\cap B)$ וגם $A\cup B$ סופית.

נובע ש $A\cap B \not\subset A\cup B$.

1 כלומר $(A\cap B \nsubseteq A\cup B$ או $A\cup B\subseteq A\cap B)$

נוכיח $A\cap B\subseteq A\cup B$:

יהי y.

נניח $y\in A\cap B$.

אז $y\in A$ וגם $y\in B$ ובפרט $y\in A$

ולכן $y\in A\cup B$.

מכאן $A\cap B\subseteq A\cup B$ (2)

מ (1) ו (2) נובע ש $A\cup B\subseteq A\cap B$. (3)

מ (2) ו (3) נובע $A\cap B=A\cup B$.

לפי סעיף ראשון של התרגיל $B\subseteq A$.

התשובה נכונה.

משל.

קבוצת הקבוצות החלקיות

הגדרה

תהי A קבוצה.

קבוצת הקבוצות החלקיות של A

תסומן $P(A)$ ומוגדרת על ידי:

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}.$$

הערות

1. $X \in P(A)$ אם ורק אם $X \subseteq A$.
2. אם A סופית ובה m איברים, ב $P(A)$ יהיו 2^m איברים.

דוגמאות:

$$P(\phi) = \{\phi\}$$

$$P(\{1,2,3\}) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

__תרגיל__

תהיינה A,B קבוצות.

הוכיחו או הפריכו:

(1) אם $A \subseteq B$ אז $P(A) \subseteq P(B)$

__תשובה__

נניח $A \subseteq B$ (1).

יהי $X \in P(A)$.

אז $X \subseteq A$ (2).

יהי y.

נניח $y \in X$.

מ (2) $y \in A$ ומ (1) $y \in B$.

לכן $X \subseteq B$ ולכן $X \in P(B)$.

לכן הטענה נכונה.

מש"ל.

② אם $A \cap B = \phi$ אז $P(A) \cap P(B) = \phi$

<u>תשובה</u>

נתבונן ב
$A = \{1\}$
$B = \{2\}$

$A \cap B = \phi$

$P(A) = \{\phi, \{1\}\}$

$P(B) = \{\phi, \{2\}\}$

לכן $P(A) \cap P(B) = \{\phi\} \neq \phi$

לכן הטענה אינה נכונה.

מש"ל.

לשבוע הבא:

ממ"ן 11 - לשלוח. 4.4.2011

ממ"ח 01 - 6.4

לקרוא היטב יחידה 4 כולל התוספת
שבחוברת התוספות.

תרגילים בקבוצת דיון.