

האוניברסיטה הפתוחה

20290

**אלגוריתמיקה -
יסודות מדעי המחשב
חוברת הקורס – קיץ 2020**

כתב: אייל משיח

יולי 2020 - סמסטר קיץ – תש"פ

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

א	אל הסטודנט
ב	1. לוח זמנים ופעילויות
ג	2. תיאור המטלות
ד	3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס
1	ממ"ן 11
3	ממ"ן 12
5	ממ"ן 13
7	ממ"ן 14
9	ממ"ן 15

אל הסטודנט,

אנו מברכים אותך עם הצטרפותך אל הלומדים בקורס "אלגוריתמיקה - יסודות מדעי המחשב".

הקורס בסמסטר קיץ נמשך 9 שבועות בלבד, ולכן חשוב להקפיד על לימוד החומר והגשת המטלות בקצב שקבענו כדי להבטיח סיום מוצלח של הקורס. **בגלל משך הסמסטר הקצר, אין אפשרות לדחות את הגשת המטלות.**

ברצוננו להפנות תשומת לבך לשתי נקודות חשובות:

- במהלך הקורס יש להגיש תרגילי בית. מספיק להגיש שלושה מתוך חמשת הממ"נים שבחוברת, אך מומלץ להגיש את כולם. יש להקפיד על הגשת הממ"נים במועד.
 - הקורס "אלגוריתמיקה" הוא קורס מתקדם. לקורס יש אתר-בית הכולל לוח הודעות, קבוצת דיון, מאגר משאבים והפניות לאתרים אחרים ברשת. לתשומת לבך, אתר הקורס הוא ערוץ תקשורת "רשמי". יש להתייחס להודעות ועדכונים שיופיעו בלוח ההודעות שבאתר כאילו שנשלחו בדואר. פרטים על למידה מתקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: <http://telem.openu.ac.il>.
- מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספרייה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

לתשומת לב הסטודנטים הלומדים בחו"ל:

למרות הריחוק הפיסי הגדול, נשתדל לשמור אתכם על קשרים הדוקים ולעמוד לרשותכם ככל האפשר.

הפרטים החיוניים על הקורס נכללים בחוברת הקורס וכן באתר הקורס. מומלץ מאוד להשתמש באתר הקורס ובכל אמצעי העזר שבו וכמובן לפנות אלינו במידת הצורך.

צוות הקורס ישמח לעמוד לרשותך בכל שאלה שתתעורר.

ניתן לפנות אלי ביום ג', בשעות 11:00-13:00, בטלפון 09-7781233, או ב-e-mail.

כתובתי היא: eyalma@openu.ac.il.

פגישות יש לתאם מראש.

בברכה,

אייל משיח
מרכז הקורס

1. לוח זמנים ופעילויות (2020 / 20290)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	פרקי הלימוד המומלצים	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן למנחה
1	17.7.2020-14.7.2020	פרקים 1-3	מפגש 1	
2	24.7.2020-19.7.2020	פרק 4	מפגש 2	ממ"ן 11 24.7.2020
3	31.7.2020-26.7.2020 (ה צום ט' באב)	פרק 5	מפגש 3	
4	7.8.2020-2.8.2020	פרק 6	מפגש 4	ממ"ן 12 7.8.2020
5	14.8.2020-9.8.2020	פרק 7	מפגש 5	
6	21.8.2020-16.8.2020	פרק 8	מפגש 6	ממ"ן 13 21.8.2020
7	28.8.2020-23.8.2020	פרק 9	מפגש 7	
8	4.9.2020-30.8.2020	פרק 10	מפגש 8	ממ"ן 14 4.9.2020
9	11.9.2020-6.9.2020	פרק 11	מפגש 9	
10	14.9.2020-13.9.2020	פרק 12		ממ"ן 15 18.9.2020

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

2. תיאור המטלות

הממ"נים בקורס הם ממ"נים **רגילים**: כל מטלה מורכבת ממספר תרגילים "יבשים" **שאינם** דורשים הרצת תכניות במחשב. תרגילים אלו נועדו לבדוק את הבנתך בחומר הלימוד. את הפתרון למטלה כזו יש לכתוב **בעט** על דף נייר בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. (אפשר ורצוי, כמובן, להדפיס את הפתרון למטלה). אם השאלה בממ"ן אינה ברורה לך, ניתן להתקשר אל אחד מהמנחים (בשעת הייעוץ הטלפוני שלו) לצורך קבלת הסבר או לנסות להיעזר בקבוצת הדיון של הקורס. בטבלה שלהלן תמצא מהו חומר הלימוד הנדרש (לפי פרקי הספר) לפתרון כל אחת מהמטלות, ומשקל כל מטלה בחישוב הציון של הקורס.

שים לב!

בעת כתיבת פתרון למטלה אין להסתמך על פרקי לימוד **מתקדמים** יותר מהפרקים בהם עוסקת המטלה.

מטלה	חומר הלימוד הנדרש לפתרון	משקל המטלה
ממ"ן 11	פרקים 1-4	6 נקודות
ממ"ן 12	פרקים 5-6	6 נקודות
ממ"ן 13	פרק 7	6 נקודות
ממ"ן 14	פרקים 8-9	6 נקודות
ממ"ן 15	פרקים 10-12	6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש שלוש מטלות מתוך החמש.

לתשומת לבכם!

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן:

אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלות** בציון הנמוך ביותר, שציוניהן נמוכים מציון הבחינה (**עד שתי מטלות**), לא יילקחו בחשבון בעת שקלול הציון הסופי.

זאת בתנאי שמטלות אלה **אינן חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו, מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליך לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל של 18 נקודות לפחות.

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון של 60 לפחות.

ג. לקבל ציון סופי של 60 לפחות.

לתשומת לבכם:

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס. סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימאלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע

בטלפון 09-7782222 או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא <http://www.openu.ac.il/sheilta>

קורסים ⇨ ציוני מטלות ובחינות ⇨ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.

יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של המטלות והבחינה יהיה נמוך מ-60).

כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1-4

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 24.7.2020

סמסטר: ג2020

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (15 נקודות: סעיף א – 5 נק'; סעיף ב' – 10 נק')

א. קראו את סעיף 1 במאמר "The Theory of Computing: A Scientific Perspective".
ב. תנו שתי דוגמאות למוצרים טכנולוגיים שפותחו במהלך מהפכת המחשוב של 40 השנים האחרונות. עבור כל אחד ממוצרים אלה – כתבו בקיצור איך הוא השפיע עליכם, ואיך לדעתכם הוא השפיע (לטוב וגם לרע) על החברה שבה אנו חיים.

שאלה 2 (20 נקודות)

אפשר לייצג ביטוי אריתמטי המורכב ממספרים טבעיים, האופרטור האונירי "-" וארבעת האופרטורים הבינריים "+", "-", "x" ו "/" באמצעות עץ בינרי באופן הבא:
מספר טבעי I מיוצג ע"י עלה המכיל את I.
הביטוי E – מיוצג ע"י עץ, שהשורש שלו מכיל את האופרטור האונירי "-" ובנו היחיד הוא השורש של תת-עץ המכיל את הביטוי E.
הביטוי E-F (שבו הסימן "-" מציין איזושהו אופרטור בינרי) מיוצג ע"י עץ, שהשורש שלו מכיל את האופרטור "-". בנו השמאלי הוא השורש של תת-עץ המכיל את הביטוי E ובנו הימני הוא השורש של תת-עץ המכיל את הביטוי F.
כתבו אלגוריתם רקורסיבי, המקבל עץ בינרי המייצג ביטוי אריתמטי ומחשב את ערך הביטוי.

שאלה 3 (20 נקודות)

א. הריצו את האלגוריתם של דייקסטרה למציאת המסלול הקצר ביותר על הגרף שבעמוד 91 בספר הלימוד.
ב. הסבירו מדוע האלגוריתם של דייקסטרה אינו מתאים לגרף שיש בו קשתות שליליות, ותנו דוגמה לגרף בעל קשת שלילית שעבורו האלגוריתם יחזיר תשובה שגויה.

שאלה 4 (20 נקודות)

נדון בגרסה של בעיית תרמיל הגב בשברים, שבה קיימים מספר סוגים של פריטים והקלט כולל את מספר הפריטים מכל סוג (כל הפריטים מאותו סוג הם זהים). כלומר, הקלט לבעיה מורכב מ:

1. N – מספר סוגי הפריטים
 2. W – המשקל המקסימלי שאפשר לשאת בתרמיל
 3. וקטור q המכיל את מספר הפריטים מהסוג i לכל $1 \leq i \leq N$
 4. וקטור w המכיל את המשקל w_i של כל פריט מהסוג i לכל $1 \leq i \leq N$
 5. וקטור v המכיל את השווי v_i של כל פריט מהסוג i לכל $1 \leq i \leq N$
- א. תארו אלגוריתם לפתרון גרסה זו של הבעיה (אין צורך לכתוב פסאודו-קוד).
 ב. פתרו את הבעיה עבור הקלט הבא:

$$N = 5, W = 70$$

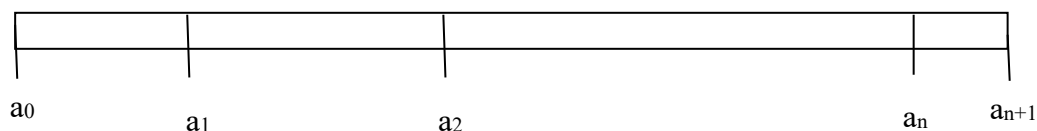
$$q = [3, 1, 4, 3, 2]$$

$$w = [10, 20, 25, 8, 7]$$

$$v = [15, 42, 30, 16, 18]$$

שאלה 5 (25 נקודות: סעיף א' – 10 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

במפעל לעיבוד שבבי יש מכונה לחיתוך מוטות אלומיניום. על המכונה לחתוך כל מוט ב- n נקודות שנקבעו מראש, והעלות של כל פעולת חיתוך שווה לאורך המוט בזמן שבו מבוצעת פעולת החיתוך. לדוגמה, נניח שהמוט שיש לחתוך הוא באורך יחידה ועל המוט יש שני סימונים בנקודות $1/5$ ו- $3/5$. כדאי לבצע את החיתוך הראשון בנקודה $3/5$, ואז העלות הכוללת תהיה: $1 + 3/5 = 1.6$. נסמן את n הנקודות שעל המוט ב- a_1, a_2, \dots, a_n ונסמן את קצות המוט ב- a_0 ו- a_{n+1} . המוט נראה אפוא כך:



- מעוניינים למצוא את העלות הכוללת המינימלית של ביצוע כל החיתוכים המסומנים על המוט. נגדיר ב- $Cost(a_i, a_j)$ את העלות המינימלית של ביצוע כל החיתוכים בין הנקודות a_i ו- a_j . כלומר, העלות הכוללת המינימלית היא $Cost(a_0, a_{n+1})$. הנוסחה הרקורסיבית לחישוב $Cost(a_i, a_j)$ היא:
- $$Cost(a_i, a_j) = a_j - a_i + \min_{i < k < j} [Cost(a_i, a_k) + Cost(a_k, a_j)]$$
- א. הסבירו את הנוסחה. מהו תנאי העצירה של הנוסחה?
 ב. בהתבסס על הנוסחה, כתבו אלגוריתם תכנון דינמי המחשב את העלות הכוללת המינימלית. האלגוריתם צריך לפתור את התת-בעיות "מלמטה למעלה", החל מהתת-בעיות הקטנות ביותר. באיזה מבנה הנתונים האלגוריתם משתמש? הסבירו את דרך הפעולה שלו.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 5-6

מספר השאלות: 5 משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: 2020 מועד אחרון להגשה: 7.8.2020

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (20 נקודות: סעיפים א', ב' – 5 נק' לכל אחד; סעיף ג' – 10 נק')

בהינתן רשימת איברים באורך N , איבר רוב ברשימה הוא איבר שמופיע בה יותר מ- $N/2$ פעמים.

א. הוכיחו את הטענה הבאה: אם x הוא איבר רוב ברשימה L , אז x הוא גם איבר רוב ברשימה

המתקבלת מ- L ע"י מחיקת איבר אחד השווה ל- x ומחיקת איבר נוסף השונה מ- x .

ב. להלן אלגוריתם הבודק אם קיים איבר רוב במערך A בגודל N :

(1) $Counter \leftarrow 0$

(2) עבור i המקבל את הערכים 1 עד n בצע:

(2.1) אם $Counter = 0$, אז בצע

(2.1.1) $Candidate \leftarrow A[i]$

(2.1.2) $Counter \leftarrow 1$

(2.2) אחרת אם $A[i] = Candidate$, אז $Counter \leftarrow Counter + 1$

(2.3) אחרת, $Counter \leftarrow Counter - 1$

(3) אם $Counter = 0$, אז הדפס "אין איבר רוב ב- A ".

(4) אחרת, קרא לשגרה $Check-Majority-Element(A, N, candidate)$ והחזר את תשובתה.

השגרה $Check-Majority-Element(A, N, x)$ בודקת אם x הוא איבר רוב במערך A בגודל N .

הדגימו את ריצת האלגוריתם על המערך $[3, 3, 2, 1, 3, 4, 4]$.

פרטו את ערכי המשתנים i , $candidate$, $counter$ בכל שלב.

ג. הסבירו את אופן פעולת האלגוריתם. בפרט, הסבירו היכן נעשה שימוש בטענה מסעיף א

ומדוע נדרשת הבדיקה בשורה (4).

שאלה 2 (20 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

נתון מערך מספרים A בגודל n . מעוניינים לשנות את המערך, כך שהאיבר במקום ה- i במערך יכיל את סכום איברי המערך המקורי עד לאינדקס i . למשל:

המערך המקורי:

2	3	1	7	5
---	---	---	---	---

המערך החדש:

2	5	6	13	18
---	---	---	----	----

- א. כתבו אלגוריתם נאיבי הפותר את הבעיה בזמן $O(n^2)$.
ב. כתבו אלגוריתם הפותר את הבעיה בזמן $O(n)$ והוכיחו את נכונותו.

שאלה 3 (20 נקודות)

- חיפוש **טרנרי** דומה לחיפוש בינרי, אך בכל שלב מחלקים את תחום החיפוש לשלושה חלקים.
א. כתבו אלגוריתם רקורסיבי המבצע חיפוש טרנרי ברשימה ממוינת.
ב. הוכיחו את נכונותו של האלגוריתם שכתבתם ונתחו את זמן ריצתו.

שאלה 4 (20 נקודות)

- נתונה סדרה של n קטעים הנמצאים על ציר ה- X .
כל קטע $[a_i, b_i]$ מאופיין ע"י שתי נקודות הקצה שלו. מעוניינים לבדוק אם קיימים בסדרה שני קטעים שיש ביניהם חפיפה (כלומר, יש להם לפחות נקודה משותפת אחת). למשל, עבור סדרת הקטעים $[3,6]$, $[1,2]$, $[4,7]$, תוחזר תשובה חיובית, מפני שיש חפיפה בין הקטעים $[4,7]$ ו- $[3,6]$.
תארו אלגוריתם הפותר את הבעיה בזמן $O(n \log n)$ והסבירו מדוע הוא נכון.

שאלה 5 (20 נקודות)

- נתונים בניין בן n קומות ושלושה כדורי זכוכית זהים. ידוע שאם נזרוק כדור זכוכית החל מקומה מסוימת ומעלה, הכדור יישבר. זריקת כדור מקומה נמוכה יותר לא תגרום לשבירתו. הבעיה היא למצוא את הקומה המינימלית שזריקת כדור ממנה תגרום לשבירתו. הפעולות המותרות לצורך פתרון הבעיה הן זריקת כדורים מקומות הבנין (ובדיקה אם הם נשברו). תארו אלגוריתם **יעיל** לפתרון הבעיה ונתחו את זמן הריצה שלו.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 21.8.2020

סמסטר: 2020ג

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (20 נקודות)

האינדקס הכרומטי של גרף הוא מספר הצבעים המינימלי הדרוש לצביעה חוקית של קשתות הגרף (צביעה שבה כל שתי קשתות בעלות קדקוד משותף צבועות בצבע שונה).

א. להלן תיאור של אלגוריתם לצביעת C_n (הגרף השלם בגודל n) עבור n זוגי:

(1) סמן את קדקודי הגרף במספרים $0, 1, 2, \dots, n-1$ וצייר את C_n כך שקדקוד 0 יהיה במרכז מעגל

ואילו קדקודים $1, 2, \dots, n-1$ יהיו נקודות על הקף המעגל המפוזרות במרחקים שווים זו מזו.

קשתות הגרף יתוארו בצירוף הזה כקטעים ישרים המקשרים את שני הקדקודים המתאימים.

(2) עבור i המקבל את הערכים 1 עד $n-1$ בצע:

(2.1) צבע בצבע מס' i את הקשת $(0, i)$ ונוסף על כך את $(n-2)/2$ הקשתות הניצבות לקשת זו.

צבעו באמצעות האלגוריתם המתואר לעיל את C_6 .

ב. מהו האינדקס הכרומטי של C_n כאשר n זוגי? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 2 (20 נקודות)

להלן נתונות שתי גרסאות של בעיית הספיקות בתחשיב הפסוקים.

עבור כל אחת מהגרסאות – כתבו אם לדעתכם הבעיה שייכת ל-NP ונמקו את קביעתכם:

א. הקלט לבעיה: פסוק ϕ בתחשיב הפסוקים

השאלה: האם קיימת עבור ϕ השמה מספקת, שבה **בדיק** לחצי מהמשתנים יש ערך True?

ב. הקלט לבעיה: פסוק ϕ בתחשיב הפסוקים

השאלה: האם מספר ההשמות המספקות את ϕ הוא זוגי?

שאלה 3 (20 נקודות)

נדון בבעיה הבאה :

הקלט: גרף $G = (V, E)$ ותת-קבוצה U של V

השאלה: האם קיים בגרף מסלול פשוט העובר בכל צמתי U ?

הוכיחו שהבעיה היא NP-שלמה.

שאלה 4 (20 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

א. הגדירו באופן פורמלי את בעיית הקליקה ואת בעיית המסלול ההמילטוני.

ב. נתבונן בבעיה הבאה :

הקלט: גרף G ומספר טבעי k

השאלה: האם קיימת ב- G קליקה בגודל k או מסלול המילטוני?

הוכיחו שהבעיה היא NP-שלמה.

שאלה 5 (20 נקודות)

פרופ' כלומסקי הציע את האלגוריתם הבא למציאת קליקה בגודל k בגרף $G = (V, E)$:

(1) עבור בצורה שיטתית על כל התת-קבוצות בגודל k של V ;

(1.1) אם התת-קבוצה הנוכחית היא קליקה, אז הדפס "כן" ועצור.

(1.2) אחרת, עבור לתת-קבוצה הבאה;

(2) הדפס "לא" ועצור.

פרופסור כלומסקי טוען, שזמן הריצה של האלגוריתם הוא פולינומי ומכך נובע שמתקיים $P = NP$.

האם הפרופסור צודק?

נתחו במדויק את זמן הריצה של האלגוריתם והתייחסו לשני החלקים בטענתו של הפרופסור.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

נניח שקיימת שגרה, המסוגלת לבדוק בזמן פולינומי אם פסוק נתון בתחשיב הפסוקים הוא ספיק.

הראו כיצד אפשר להשתמש בשגרה זו כדי למצוא בזמן פולינומי השמה מספקת לפסוק נתון.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 8-9

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 4.9.2020

סמסטר: 2020

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.**

שאלה 1 (15 נקודות)

נתונה בעיית הכרעה D , שקלטיה הם מספרים שלמים חיוביים. בידנו אלגוריתם A לפתרון הבעיה. ידוע שהאלגוריתם נכון חלקית לכל קלט חוקי. כמו-כן, בידנו הוכחה שהאלגוריתם עוצר על כל הקלטים הגדולים או שווים ל-1000, אך לא הצלחנו להרחיב את ההוכחה גם לקלטים הקטנים מ-1000. האם הבעיה D כריעה? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתבונן בגרסה הבאה של בעיית נחש הדומינו במחצית העליונה של המישור האינסופי: הקלט לבעיה: קבוצה סופית T של סוגי מרצפות ושלוש נקודות שונות V, W, W' במחצית העליונה של המישור האינסופי השאלה: האם אפשר להגיע מ- V ל- W וגם מ- V ל- W' ? הוכיחו שגם גרסה זו של בעיית נחש הדומינו היא בלתי כריעה.

שאלה 3 (20 נקודות)

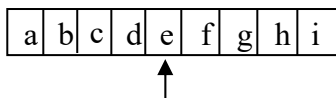
נתבונן בגרסה הבאה של בעיית התאמת המילים: הקלט לבעיה: שתי סדרות מילים X ו- Y ומספר טבעי k השאלה: האם קיימת התאמת מילים שמורכבת **בדיוק** מ- k אינדקסים שונים (עם חזרות)? הוכיחו שגם גרסה זו של בעיית התאמת המילים היא בלתי כריעה.

שאלה 4 (20 נקודות)

- א. כתבו אלגוריתם המקבל מספר טבעי **אי-זוגי**, ובודק אם אפשר לייצג את המספר כסכום של שלושה מספרים ראשוניים. מותר להשתמש באלגוריתם AKS כשגרת-עזר לבדיקת ראשוניות. הערה: מומלץ להתייחס בנפרד לאפשרות שהמספר 2 מופיע בסכום.
- ב. על-פי **השערת גולדבך האי-זוגית** אפשר לייצג כל מספר אי-זוגי גדול מ-5 כסכום של שלושה מספרים ראשוניים. למשל: $7 = 2 + 2 + 3$, $9 = 2 + 2 + 5$, $41 = 11 + 13 + 17$. הראו כיצד אפשר להוכיח או להפריך את ההשערה באמצעות אורקל לבעיית העצירה.

שאלה 5 (25 נקודות: סעיף א' – 10 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

- נדון בסימולציה של מכונת טיורינג באמצעות אוטומט סופי דטרמיניסטי עם **שתי** מחסניות. קונפיגורציה נתונה של מכונת טיורינג M תיוצג ע"י האוטומט A בדרך הבאה:
- המצב של M ותוכן התא שעליו מצביע הראש הקורא-כותב יהיו מיוצגים ע"י המצב של האוטומט A.
 - מחסנית אחת של האוטומט (המחסנית "השמאלית") תשמור את תוכן הסרט הנמצא משמאל לראש הקורא-כותב. התו הימני ביותר בחלק זה של הסרט יהיה בראש המחסנית.
 - המחסנית השנייה של האוטומט (המחסנית "הימנית") תשמור את תוכן הסרט הנמצא מימין לראש הקורא-כותב. התו השמאלי ביותר בחלק זה של הסרט יהיה בראש המחסנית.



למשל, עבור מכונה M שנמצאת במצב Q_1 וסרט שנראה כך:

האוטומט A יהיה במצב (Q_1, e) ושתי המחסניות ייראו כך:



א. הסבירו בפירוט כיצד האוטומט A יבצע סימולציה של:

1. צעד שמאלה של M.

2. צעד ימינה של M.

- ב. נניח שבקונפיגורציה ההתחלתית של המכונה M היא נמצאת במצב start, והראש הקורא-כותב מצביע על הסימן # שמשמאל לקלט. כתבו שגרה שתקרא את תווי הקלט ותביא את שתי המחסניות למצב הדרוש. הסבירו את דרך פעולתה של השגרה.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

הוכיחו שהמחלקה EXPTIME היא חסינה; כלומר, מחלקת הבעיות הניתנות לפתרון בזמן אקספוננציאלי היא אותה מחלקה בכל המודלים החישוביים האוניברסליים.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 10-12

מספר השאלות: 6 משקל המטלה: 6 נקודות

מועד אחרון להגשה: 18.9.2020

סמסטר: ג2020

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (20 נקודות: סעיף א' – 15 נק'; סעיף ב' – 5 נק')

- נתונה רשימת איברים ממוינת באורך N . ייתכן שיש ברשימה כפילויות. בהינתן איבר x , יש למצוא את האינדקס האחרון ברשימה שבו x מופיע. במקרה ש- x אינו מופיע ברשימה, יש להחזיר הודעה מתאימה.
- א. כתבו אלגוריתם מקבילי, המשתמש ב- N מעבדים ופותר את הבעיה בזמן קבוע.
- ב. הסבירו מדוע האלגוריתם שהצעתם הוא נכון.

שאלה 2 (20 נקודות)

להלן נתון אלגוריתם מקבילי לפתרון הבעיה המוגדרת בשאלה 2 בממ"ן 12:

חשב-סכום-רישות-של-מערך A בגודל n

$$(1) \quad i \leftarrow 1$$

$$(2) \quad \text{כל עוד } i \leq n/2 \text{ בצע:}$$

$$(2.1) \quad \text{לכל } i+1 \leq k \leq n \text{ בצע במקביל:}$$

$$(2.1.1) \quad A[k] \leftarrow A[k] + A[k-i]$$

$$(2.2) \quad i \leftarrow 2 \times i$$

(3) חזור.

א. הריצו את האלגוריתם על המערך הבא:

1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1

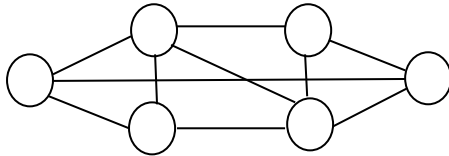
- ב. נתחו את זמן הריצה ואת סיבוכיות המכפלה של האלגוריתם.
- האם הושג שיפור ביחס לאלגוריתם הסדרתי שרץ בזמן $O(n)$?

שאלה 3 (20 נקודות)

נתבונן בבעיית הקטע הקריטי עבור שלושה מעבדים. בגרסה זו של הבעיה יכולים להימצא בקטע הקריטי בכל רגע נתון מעבד אחד או שניים, אך לא כל שלושת המעבדים יחד. הסבירו מהם השינויים שצריך לעשות בפרוטוקול המופיע בספר (עמ' 279-278) בכדי להתאים אותו לגרסה זו של הבעיה.

שאלה 4 (20 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

א. צבעו את צמתי הגרף הבא (צביעה חוקית) בשלושה צבעים:



ב. בספר הלימוד מתואר פרוטוקול אפס-ידע, שבעזרתו איה יכולה לשכנע את בועז שגרף G ניתן לצביעה בשלושה צבעים.

נעשה שינוי קל בפרוטוקול שבספר, ונרשה לבועז לבחור בכל שלב גם זוג צמתים שאינם סמוכים. האם הפרוטוקול יישאר פרוטוקול אפס-ידע? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 5 (20 נקודות)

ידוע שבתחום $1..N$ קיימים בערך $N/\log N$ מספרים ראשוניים.

להלן נתון אלגוריתם אקראי לבחירת מספר ראשוני בתחום $1..N$. האלגוריתם משתמש באלגוריתם AKS – האלגוריתם הדטרמיניסטי לבדיקת ראשוניות.

(1) הגרל מספר אקראי x בתחום $2..N$;

(2) אם $AKS(x) = \text{true}$, אז חזור את x ועצור.

(3) אחרת, חזור לשורה (1);

א. מה הסיכוי שהאלגוריתם יצליח למצוא מספר ראשוני כבר בניסיון הראשון?

ב. מה הסיכוי שגם לאחר עשרה ניסיונות האלגוריתם לא ימצא מספר ראשוני?

ג. הוכיחו שהסיכוי שהאלגוריתם לא יצליח למצוא מספר ראשוני ב- $\log N$ הניסיונות הראשונים קטן מ- $2/5$ (עבור N מספיק גדול).

ד. איה מעוניינת להתחיל להשתמש במערכת RSA. לשם כך היא צריכה ליצור מפתח ציבורי ומפתח סודי. היא הפעילה את האלגוריתם המתואר לעיל כדי לבחור שני מספרים ראשוניים, וקבלה את המספרים 11 ו-29. המספר Publ שבחרה איה הוא 187. חשבו את המספר Priv . מה יהיה המפתח הסודי של איה?

שאלה 6 (שאלת בונוס)

בעמוד 336 בספר מוזכרים שני טיעונים הכופרים באפשרות קיומה של מכונה אינטליגנטית. חוו דעתכם על שני טיעונים אלה ונסו להביא טיעוני-נגד.