

פתרון שאלה 2

- א. לפי המוסבר בספר הלימוד בעמוד 159, גובהו של כל עץ החלטה הממיינ n איברים הוא לפחות $\lg_2(n!) = \lg_2(120) \cong 6.9$. נציב $n = 5$ ונקבל $h \geq \lg_2(5!) = \lg_2(120) \cong 6.9$. לפיכך, לכל אלגוריתם מיון מבוסס השוואות, אורכו של המסלול הארוך ביותר בעץ ההחלטה הוא 7. כלומר, במקרה הגרוע תידרשנה לפחות 7 השוואות כדי למיין מערך בעל 5 איברים.
- ב. נניח כי איברי המערך הם a, b, c, d, e .
נשווה את 2 זוגות האיברים a, b ו- c, d .
נניח בה"כ כי התוצאות שהתקבלו הן $a > b$, $c > d$. נשווה את 2 האיברים הגדולים מבין הארבעה כלומר a, c ונניח בה"כ כי $a > c$.
לפיכך קיבלנו בסך הכל כי $a > c > d$ וגם $a > b$, ושלב זה הצריך 3 השוואות.
למעשה, קיבלנו מערך ממוין בן 3 איברים a, c, d , וכעת נותר לנו למצוא את מקומם של האיברים b ו- e במערך זה.
נעבור כעת לאיבר החמישי – e . נמצא את מיקומו של e במערך a, c, d :
ראשית, נשווה את e עם c (האיבר האמצעי):
 - אם $e > c$, נשווה את e עם a .
 - אם $e < c$, נשווה את e עם d .שלב זה עלה לנו ב-2 השוואות נוספות, ובסיומו קיבלנו מערך ממוין של 4 איברים:
 a, c, d, e (לא בהכרח בסדר הזה).
במקרה הגרוע ביותר, a הוא עדיין האיבר הגדול מבין הארבעה.
אבל, מכיוון שידוע כי $a > b$ (שלב I), נצטרך לחפש את מקומו של b במערך ממוין בן 3 איברים בלבד – c, d, e .
בדומה למוסבר קודם לכן, שלב זה ייקח 2 השוואות אף הוא.
אם נקבל כי $e > a$, אזי נצטרך לחפש את מיקומו של b במערך בן 2 איברים בלבד – c, d וייתכן שבמקרה זה נוכל להסתפק בהשוואה אחת בלבד (ובכל מקרה, לא יותר מ-2 השוואות). לפיכך, האלגוריתם יבצע 7 השוואות לכל היותר.
- ג. נראה כי כל המיונים שנלמדו דורשים יותר מ-7 השוואות במקרה הגרוע ביותר:

מיון-הכנסה:

המקרה הגרוע ביותר עבור מיון-הכנסה הוא מערך הממוין בסדר הפוך.
במקרה זה מספר ההיפוכים הוא 10 (כל זוג אינדקסים במערך מהווה היפוך).
לפי שאלה 5 בממ"ן 11 זהו גם מספר ההשוואות שיבצע האלגוריתם.

מיון-מיזוג:

1	2	4	3	5
---	---	---	---	---

תת-

נתבונן בפעולת האלגוריתם על המערך :
ראשית, האלגוריתם יפצל את המערך לשני
מערכים (1,2,4) ו-(3,5).

התת-מערך (1,2,4) יתפצל לשני תת-מערכים (1,2) ו-(4).
התת-מערך (1,2) יתפצל לשני תת-מערכים בגודל 1 והמיזוג שלהם ידרוש פעולת השוואה אחת.

לאחר מכן ימזג האלגוריתם את (1,2) עם (4). סדר האיברים לא ישתנה, אך לצורך המיזוג ידרשו 2 השוואות.

התת-מערך (3,5) יפוצל לשני תת-מערכים בגודל 1 והמיזוג שלהם ידרוש פעולת השוואה אחת.

לבסוף, ימזג האלגוריתם את (1,2,4) עם (3,5).
לצורך כך יתבצעו 4 השוואות : 3 ישווה עם 1,2,4 ו-5 ישווה עם 4.
לפיכך, יתבצעו בסך הכל 8 השוואות ($=1+2+1+4$).

מיון-מהיר:

המקרה הגרוע ביותר עבור מיון מהיר הוא מערך הממוין בסדר עולה :

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

במקרה זה, שגרת החלוקה תחלק בכל שלב את המערך לאזור המכיל איבר אחד בלבד ולאזור המכיל $n-1$ איברים.
בשלב הראשון יושו כל האיברים עם איבר הציר 1 ובסך הכל יתבצעו 6 השוואות. (מדוע?)
לאחר מכן יושו כל האיברים באזור הימני עם איבר הציר 2 – 5 השוואות.
וכך הלאה. בסה"כ יתבצעו $15=3+4+5+6$ השוואות.

מיון-ערימה:

נשים לב שבכל קריאה לשגרה Heapify, מתבצעות 2 השוואות בין איברי המערך:

1. $A[l] > A[i]$ – בדיקה האם הבן השמאלי גדול ממש מהאב
2. $A[r] > A[largest]$ – בדיקה האם הבן הימני גדול יותר מהאב / הבן השמאלי.

בבניית ערימה בת 5 איברים תידרשנה לפחות 2 קריאות ל-Heapify. כלומר, לפחות 4 השוואות.
בביצוע המיון עצמו תידרשנה עוד 3 קריאות ולפחות 6 השוואות.
לכן, גם במקרה הטוב ביותר מיון-ערימה יבצע 10 השוואות.
לפיכך, כל האלגוריתמים שנלמדו בכיתה מבצעים במקרה הגרוע יותר מאשר 7 השוואות.
עובדה זו אינה מפתיעה, משום שאלגוריתם הפותר בעיה ספציפית – במקרה שלנו מיון מערך בעל 5 איברים – יהיה בדרך כלל יעיל יותר מאשר אלגוריתם כללי.