תשובה 1

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n+1}\binom{m}{n} = \sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{m!}{n!(m-n)!} = \sum_{n=0}^{m}\frac{m!}{(n+1)!(m-n)!}$$

נארגן ביטוי זה כך שיהיה דומה למקדם בינומי :

$$= \sum_{n=0}^{m}\frac{m+1}{m+1}\cdot\frac{m!}{(n+1)!(m-n)!} = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}\frac{(m+1)!}{(n+1)!(m-n)!} = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}\binom{m+1}{n+1}$$

נחליף משתנה, $i = n+1$:

$$= \frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m+1}\binom{m+1}{i} = \frac{1}{m+1}(2^{m+1}-1)$$

בצעד האחרון נעזרנו בכך ש- $\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i} = 2^{m+1}$ (תכונה ידועה של המקדמים הבינומיים, ראו תחילת סעיף 3.2 בספר), בעוד שבסכום שאצלנו חסר המחובר $i=0$.

תשובה 2

הגורמים הראשוניים של 180 הם 2,3,5. החישוב דומה בכל לדוגמא שבספר הלימוד.

התוצאה היא 48 .

תשובה 3

הנה שוב חישוב מספר הפונקציות של קבוצה סופית A **על** קבוצה סופית B. חישוב זה מופיע גם באתר הקורס. מקרה פרטי של שאלה זו מופיע בשאלה 4.14 בעמ' 89 בספר הלימוד.

מספר **כל** הפונקציות של A ל- B הוא k^n (שאלה 1.32 עמ' 17 בספר הלימוד).

ב.ה.כ. נניח כי $B=\{1,2,\dots,k\}$. עבור $i=1,\dots,k$ תהי F_i קבוצת כל הפונקציות של A ל- B אשר המספר i **אינו** נמצא בתמונתן.

לכל i , לפי אותה נוסחה (מספר כל הפונקציות של קבוצה נתונה לאחרת), $|F_i| = (k-1)^n$.

יש k קבוצות F_i .

בדומה, עבור $i \neq j$, $|F_i \cap F_j| = (k-2)^n$. יש $\binom{k}{2}$ דרכים לבחור את זוג הקבוצות.

כללית, עלינו להתבונן בחיתוכים של j קבוצות F_i שונות. חיתוך כל j קבוצות שונות כאלו מכיל $(k-j)^n$ פונקציות. יש $\binom{k}{j}$ דרכים לבחור j קבוצות F_i שונות.

מכאן, לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מספר כל הפונקציות של A **על** B הוא

$$k^n - k(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \binom{k}{3}(k-3)^n + \ldots = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n$$

א. לפי התוצאה הנ"ל, זהו מספר הפונקציות של קבוצה נתונה בת 2 איברים <u>**על**</u> קבוצה נתונה בת 5 איברים. מובן כי אין פונקציות כאלו !

ב. בדומה, כללית, אם $n<k$ אז $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n = 0$.

תשובה 4

א. תהי B חלקית ל- A. אם $B \neq \emptyset$, הרי הסכום הקטן ביותר האפשרי של איבריה הוא 4, המתקבל עבור $B=\{4\}$. הסכום הגדול ביותר האפשרי מתקבל עבור $B=\{53, 54, \ldots, 61\}$ ושווה 513. מספר הסכומים האפשריים לתת-קבוצות **לא-ריקות** של A הוא אפוא **לכל היותר** $513-4+1=510$. בצירוף הקבוצה הריקה: 511.

מצד שני, מספר הקבוצות החלקיות של A הוא $2^9=512$.

מכיוון שיש יותר קבוצות מסכומים אפשריים, הרי לפי עקרון שובך היונים, יש לפחות שתי קבוצות בעלות אותו סכום.

ב. בסעיף א קיבלנו שבהינתן A כמתואר, קיימות $B,C \subseteq A$, $B \neq C$, בעלות אותו סכום. נזרוק מ- B ומ- C את כל האיברים השייכים לחיתוך שלהן, ונקבל שתי קבוצות שונות וזרות בעלות אותו סכום.

איתי הראבן