פתרון ממ"ן 16

שאלה 1

בשאלה זו נתייחס לעצים על n צמתים המתויגים במספרים $1,2,3,...,n$ שבהן יש בדיוק 5 צמתים שאינם עלים והם בעלי דרגות 2,3,4,5,6.

א. מיצאו את n.

ב. מיצאו את מספר העצים המקיימים את נתוני השאלה.

תשובה

א. סדרת פרופר של עץ T בעל n צמתים היא באורך $n-2$ ומספר ההופעות של צומת v הוא $\deg_T(v)-1$ (כאשר העלים אינם מופיעים כלל).

לכן בסדרות פרופר של העצים הנתונים יופיעו רק חמשת הצמתים שאינם עלים ומספר ההופעות שלהם יהיו 1,2,3,4,5 בהתאמה. מכאן שלסדרת פרופר של עץ כזה יש תמיד אורך 15 (כסכום ההופעות של הצמתים בסדרה) ולכן מספר הצמתים בעצים הנתונים הוא $n=17$.

ב. אם נניח שחמשת הצמתים (שאינם עלים) בעלי הדרגות 2,3,4,5,6 בהתאמה הם מסומנים באותיות a,b,c,d,e אז הסדרות פרופר המאימות לעצים (שאינם איזומורפיים כעצים מתויגים) הן בעצם כל התמורות עם חזרות של האותיות $a,b,b,c,c,c,d,d,d,d,e,e,e,e,e$.

מספר התמורות האלה הוא $\frac{15!}{1!2!3!4!5!}$.

את הצמתים a,b,c,d,e אפשר לבחור באופן חופשי מתוך 17 צמתים מתויגים.

מספר הבחירות השונות שלהם (שהן עם חשיבות לסדר!) הוא $\frac{17!}{12!}=17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13$.

כפי שראינו לכל בחירה כזו, קיימים $\frac{15!}{1!2!3!4!5!}$ עצים מתוייגים.

לכן מספר כל העצים המקיימים את נתוני השאלה הוא $\frac{17!}{12!}\cdot\frac{15!}{1!2!3!4!5!}=\binom{17}{5}\frac{15!}{2!3!4!}$.

שאלה 2

נתון גרף פשוט $G=(V,E)$ שבו $|V|=n\geq 3$.

א. הוכיחו שאם $u,v\in V$ צמתים לא סמוכים ו- $H=(V\setminus\{u,v\},F)$ הגרף המתקבל מ- G על ידי השמטת u,v וכל הקשתות הסמוכות להם אז: $|F|=|E|-(\deg_G(u)+\deg_G(v))$.

ב. הוכיחו שאם $|E|>\binom{n-1}{2}+1$ אז $G=(V,E)$ המילטוני. (רמז: משפט *Ore*)

תשובה

א. מהצומת u יוצאות $\deg_G(u)$ קשתות ב- G שלפי ההנחה הן לא יוצאות גם מ- v. לכן השמטת u יחד עם הקשתות הסמוכות לו מקטינה את מספר הקשתות של G ב- $\deg_G(u)$ ולא משנה את מספר הקשתות היוצאות מ- v. לכן השמטת v יחד עם הקשתות הסמוכות לו מקטינה גם היא את מספר הקשתות של G ב- $\deg_G(v)$.

מכאן שהשמטת u,v וכל הקשתות הסמוכות להם מקטינה גם היא את מספר הקשתות של G ב- $\deg_G(u)+\deg_G(v)$ ולכן $|F|=|E|-(\deg_G(u)+\deg_G(v))$.

ב. משפט *Ore* מבטיח ש- G המילטוני אם לכל שני צמתים $u,v\in V$ שאינם סמוכים, מתקיים $\deg_G(u)+\deg_G(v)\ge n$.

לפי סעיף א', לכל שני צמתים כאלה מתקיים: $|F|=|E|-(\deg_G(u)+\deg_G(v))$.

לכן $(\deg_G(u)+\deg_G(v))=|E|-|F|$ ומאחר שנתון כי $|E|>\binom{n-1}{2}+1$ נקבל:

$$(\deg_G(u)+\deg_G(v)) > \binom{n-1}{2}+1-|F|.$$

F היא קבוצת הקשתות של הגרף H שהוא בעל $n-2$ צמתים. לכן מספר הקשתות של H הוא לכל היותר כמספר הקשתות של הגרף מלא על $n-2$ צמתים, K_{n-2}.

מספר הקשתות של K_{n-2} הוא $\binom{n-2}{2}$, לכן $|F|\le\binom{n-2}{2}$ ומכאן נקבל ש-

$$\deg_G(u)+\deg_G(v) > \binom{n-1}{2}+1-\binom{n-2}{2}=$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1-\frac{(n-2)(n-3)}{2}=\frac{(n-2)}{2}[(n-1)-(n-3)]+1=n-1$$

לסיכום, מצאנו ש- $\deg_G(u)+\deg_G(v)>n-1$ כלומר $\deg_G(u)+\deg_G(v)\ge n$ ולכן לפי משפט *Ore* הגרף G המילטוני.

שאלה 3

יהיו $k,n>0$ מספרים טבעיים. נתון גרף דו-צדדי $G=(A\cup B,E)$ כך ש- $\deg_G(v)=k$ לכל $v\in A$ ו- $\deg_G(w)=n$ לכל $w\in B$.

א. תהי $X\subseteq A$ קבוצת צמתים. מיצאו את מספר הקשתות ב- G שיש להן קצה אחד ב- X.

ב. תהי $Y\subseteq B$ קבוצת צמתים. מיצאו את מספר הקשתות ב- G שיש להן קצה אחד ב- Y.

ג. הוכיחו שלכל $X\subseteq A$ מתקיים: $k\,|X|\le n\,|\Gamma_G(X)|$ (ראו הגדרת $\Gamma_G(X)$ בפרק 4 בספר)

ד. הוכיחו שאם $n\le k$ אז קיים ב- G זיווג המזווג את כל צומתי A.

ה. יהי $G=(A\cup B,E)$ כאשר $A=\{1,2,3,\ldots,100\}$, $B=\{S\subseteq A \mid |S|=99\}$ ו- E היא קבוצת כל הקשתות מהצורה $\{i,S\}$ שבהן $S\in B$ ו- $i\in S$.

הוכיחו שקיים ב- G זיווג המזווג את כל צומתי A.

תשובה

א. אם $v \in X$ אז $v \in A$ ולפי הנתון $\deg_G(v) = k$. לכן מכל צומת של X יוצאות k קשתות ולכן מספר הקשתות ב- G שיש להן קצה אחד ב- X הוא $k\,|X|$.

ב. אם $w \in Y$ אז $w \in B$ ולפי הנתון $\deg_G(w) = n$. לכן מכל צומת של Y יוצאות n קשתות ולכן מספר הקשתות ב- G שיש להן קצה אחד ב- Y הוא $n\,|Y|$.

ג. $\Gamma_G(X)$ היא קבוצת כל השכנים של צומתי X. מאחר ש- $X \subseteq A$, כל השכנים של צומתי X שייכים ל- B. לכן $\Gamma_G(X) \subseteq B$.

לכל קשת עם קצה אחד ב- X יש תמיד קצה שני ב- $\Gamma_G(X)$ (מפני שכך הגדרנו את $\Gamma_G(X)$)

לכן מספר הקשתות שיש להן קצה אחד ב- X **אינו עולה** על מספר הקשתות שיש להן קצה אחד ב- $\Gamma_G(X)$.

לפי סעיף א׳ מספר הקשתות שיש להן קצה אחד ב- X הוא $k\,|X|$ ומספר הקשתות שיש להן קצה אחד ב-$\Gamma_G(X)$ הוא $n|\Gamma_G(X)|$. מכאן ש- $k\,|X| \le n\,|\Gamma_G(X)|$.

ד. מסעיף ג׳ ידוע שלכל $X \subseteq A$ מתקיים $k\,|X| \le n\,|\Gamma_G(X)|$.

לכן אם $n \le k$ אז $k\,|X| \le n\,|\Gamma_G(X)| \le k\,|\Gamma_G(X)|$.

מכאן שלכל $X \subseteq A$ $|X| \le |\Gamma_G(X)|$ ולכן משפט הול (4.7) מבטיח שקיים ב- G זיווג המזווג את כל צומתי A.

ה. מספר הקבוצות בנות 99 איברים מתוך $A = \{1,2,3,\ldots,100\}$ הוא $100 = \binom{100}{99}$.

כל איבר של A שייך בדיוק ל- 99 קבוצות S מתוך B ולכן לקבוצה כזו שייכים 99 איברים.

מכאן ש- $\deg_G(i) = 99$ לכל $i \in A$ ו- $\deg_G(S) = 99$ לכל $S \in B$.

מאחר שהדרגות שוות, מסעיף ד׳ נובע שקיים ב- G זיווג המזווג את כל צומתי A.

שאלה 4

יהי $G = (V,E)$ גרף מישורי פשוט על n צמתים שבו לפחות שתי צלעות. בשאלה נתייחס לשיכון מישורי נתון של G. תהי F קבוצת הפאות של G. ידוע שהאורך המינימלי של מעגל ב-G הוא c.

נסמן ב- A את קבוצת כל הזוגות $(e,f) \in E \times F$ שבהם e קשת המקיפה את f.

א. הוכיחו ש- $|A| \le 2|E|$ ו- $|A| \ge c|F|$.

ב. הוכיחו ש- $|E| \le \frac{c}{c-2}(n-2)$. (היעזרו בנוסחת אוילר)

ג. הסיקו מסעיף ב׳ ש- $K_{3,3}$ אינו מישורי.

תשובה

א. כל קשת e גובלת לכל היותר בשתי פאות ולכן היא יכולה להופיע לכל היותר בשני זוגות (e,f) מתוך הקבוצה A. לכן מספר הזוגות ב- A אינו עולה על $2|E|$ כלומר $|A| \le 2|E|$.

מפני שאנו מדברים על שיכון מישורי של הגרף, מספר ההופעות של פאה f בזוגות מהסוג (e,f) שבקבוצה A שווה למספר הקשתות שמקיפות את f. קבוצת הקשתות המקיפות פאה היא תמיד מעגל מסויים בגרף ולכן מספר הקשתות בה הוא לפחות c.

מכאן שמספר ההופעות של כל פאה f בזוגות סדורים שבקבוצה A הוא לפחות c ולכן מספר הזוגות ב- A הוא לפחות $c|F|$. מכאן ש- $|A| \ge c|F|$.

ב. מאחר ש- $|A| \ge c|F|$ ו- $|A| \le 2|E|$ נסיק ש- $c|F| \le 2|E|$

נוסחת אוילר מבטיחה ש- $|F| = |E| - n + 2$ לכן אם נציב $|E| - n + 2$ באי-שוויון הקודם נקבל: $c(|E| - n + 2) \le 2|E|$ כלומר $(c-2)|E| \le c(n-2)$.

מאחר שיש בגרף לפחות שתי פאות, לא ייתכן שהגרף הוא מסלול שאינו מעגל ולכן חייב להיות הו לפחות מעגל אחד. זהו גרף פשוט לכן לא ייתכנו בו מעגלים באורך 2.

לפיכך $c > 2$ ומותר לחלק בביטוי החיובי $c-2$ את שני אגפי האי-שוויון האחרון.

נקבל: $|E| \le \dfrac{c}{c-2}(n-2)$ כנדרש.

ג. בגרף $K_{3,3}$ אין מעגל באורך 2 כי הוא גרף פשוט וגם לא מעגל באורך 3 מפני שבגרף דו צדדי אין מעגל באורך אי-זוגי. אבל קל לראות שיש בו מעגל באורך 4. לכן $c = 4$. בנוסף $n = 6$.

לכן, אילו היה $K_{3,3}$ מישורי, לפי ב׳ סעיף היה צריך להתקיים $|E| \le \dfrac{4}{4-2}(6-2) = 8$ וזו כמובן סתירה, שכן מספר הקשתות ב- $K_{3,3}$ הוא 9. לכן $K_{3,3}$ לא מישורי.

שאלה 5

א. נתונות שתי קבוצות של n צמתים כל אחת $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$,

ושתי קבוצות של קשתות: $E = \{v_i v_j \mid 1 \le i < j \le n\} \cup \{w_i w_j \mid 1 \le i < j \le n\}$,

$F = \{v_i w_j \mid 1 \le i, j \le n\}$.

נסמן: $G = (V \cup W, E)$ ו- $H = (V \cup W, F)$.

מיצאו את $\chi(G)$ ואת $\chi(H)$. נמקו את התשובה.

ב. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: אם G ו- H הם גרפים על אותה קבוצת צמתים אז $\chi(G \cup H) \le \chi(G) + \chi(H)$

תשובה

א. לגרף G יש שני מרכיבי קשירות: אחד שבו קבוצת הצמתים היא $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ וקבוצת הקשתות היא $\{v_i v_j \mid 1 \le i < j \le n\}$ והשני שבו קבוצת הצמתים היא $W = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ וקבוצת הקשתות שלו היא $\{w_i w_j \mid 1 \le i < j \le n\}$.

שני הרכיבים האלה הם גרפים מלאים על n צמתים. מאחר ש- $\chi(K_n) = n$, כלומר מספר הצביעה של כל אחד מרכיבי G הוא n נסיק שגם $\chi(G) = n$.

H הוא הגרף הדו-צדדי המלא $K_{n,n}$ (לכל קשת של H יש קצה ב- V וקצה ב- W)

לכן $\chi(H) = 2$ (אם צובעים כל הצמתים של V בצבע אחד ואת אלה של W בצבע אחר מקבלים צביעה נאותה וברור שזה המספר המינימלי האפשרי של צבעים שדרושים לצביעה).

ב. נתבונן בגרפים G ו- H מסעיף א'. הגרף $G \cup H$ הוא הגרף המלא על הקבוצה $V \cup W$ שהיא בעלת $2n$ קודקודים. במילים אחרות $G \cup H = K_{2n}$.

(הערה: מספר הקשתות ב- K_{2n} הוא $\frac{2n(2n-1)}{2} = 2n^2 - n$. נבדוק שזה קורה גם ב- $G \cup H$.

ל- G יש שני מרכיבי קשירות שזהים ל- K_n ובכל אחד מהם יש $\frac{n(n-1)}{2}$ קשתות, לכן מספר הקשתות של G הוא $n(n-1)$.

H הוא הגרף הדו-צדדי המלא $K_{n,n}$ לכן מספר הקשתות שלו הוא n^2.

ל- G ו- H אין אף קשת משותפת, לכן שמספר הקשתות של $G \cup H$ הוא סכום מספרי הקשתות של שני הגרפים כלומר $n(n-1) + n^2 = 2n^2 - n$).

לסיכום: $\chi(G \cup H) = \chi(K_{2n}) = 2n$ כאשר $\chi(G) = n$ ו- $\chi(H) = 2$.

לכן עבור כל $n > 2$ עבור הגרפים מסעיף א' מתקיים $\chi(G \cup H) = 2n > n + 2 = \chi(G) + \chi(H)$ ולכן הטענה בסעיף ב' לא נכונה.