סמסטר 2009א

ממ"ן 11 – פתרון שאלה 4

נשים לב לעובדות הבאות:

(1) $\lg((\lg\lg n)^{\lg n}) = \lg n \cdot \lg\lg\lg n = \lg(n^{\lg\lg\lg n})$, לכן $(\lg\lg n)^{\lg n} = n^{\lg\lg\lg n}$;

(2) מנוסחת סטירלינג מתקבל

$$(n!)^{1/\lg n} = \left(\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{1/\lg n} = \left(\sqrt{2\pi}\cdot\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{1/\lg n}\cdot\frac{n^{(n+1/2)/\lg n}}{e^{n/\lg n}};$$

רואים בקלות את החסימות

$$1 < \left(\sqrt{2\pi}\cdot(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/\lg n} < \sqrt{2\pi}\cdot\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right) \le \sqrt{2\pi}\cdot\left(1+b\cdot\frac{1}{n}\right) \le \sqrt{2\pi}\cdot(1+b) = C;$$

בנוסף, $\lg(e^{n/\lg n}) = \frac{n}{\lg n}\cdot\lg e = \lg n\cdot\frac{n\cdot\lg e}{\lg^2 n} = \lg(n^{n\lg e/\lg^2 n})$, ולכן $e^{n/\lg n} = n^{n\lg e/\lg^2 n}$.

מזה נובע מצד אחד

$$(n!)^{1/\lg n} > n^{(n+1/2)/\lg n - n\lg e/\lg^2 n}$$

ומצד שני

$$(n!)^{1/\lg n} \le C\cdot n^{(n+1/2)/\lg n - n\lg e/\lg^2 n} \le C\cdot n^{(n+1/2)/\lg n}$$

(3)

$$1 \le \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1^2} + \left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{7^2}\right) + \left(\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{15^2}\right) + \ldots.$$
$$< \frac{1}{1^2} + 2\cdot\frac{1}{2^2} + 4\cdot\frac{1}{4^2} + 8\cdot\frac{1}{8^2} + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots < 2$$

או אחרת:

$$1 \le \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} < 1 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i(i-1)} = 1 + \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$$

לכן $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = \Theta(1)$;

(4) $\lg(n^{\sqrt{n}/\lg n}) = \lg n \cdot \left(\sqrt{n}/\lg n\right) = \sqrt{n} = \lg(2^{\sqrt{n}})$, לכן $2^{\sqrt{n}} = n^{\sqrt{n}/\lg n}$;

(5) $\lg(n^n \cdot n!) = n \cdot \lg n + \lg(n!) = \Theta(n \cdot \lg n)$;

(6) $n \cdot \lg n = \Theta(n \cdot \lg n)$;

(7) $\lg\left(n^{\frac{\lg\lg\lg n}{\lg n}}\right) = \frac{\lg\lg\lg n}{\lg n} \cdot \lg n = \lg\lg\lg n$, לכן $n^{\frac{\lg\lg\lg n}{\lg n}} = \lg\lg n$;

(8) $\lg(3^n) = n \cdot \lg 3 = (n\lg 3/\lg n) \cdot \lg n = \lg(n^{n\lg 3/\lg n})$, לכן $3^n = n^{n\lg 3/\lg n}$;

(9) $1/n = \Theta(1/n)$;

(10) $n^2 + n \cdot \lg^3 n = \Theta(n^2)$.

נסמן ב- $f(n) << g(n)$ את היחס $f(n) = o(g(n))$ וב- $f(n) == g(n)$ את היחס $f(n) = \Theta(g(n))$.

מ-(3), (5), (6), (7), (9), (10) מתקבל

$$1/n << \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} << n^{\frac{\lg\lg\lg n}{\lg n}} << \lg(n^n \cdot n!) == n \cdot \lg n << n^2 + n \cdot \lg^3 n$$

מהשוואת החזקות ב-(1), (2), (4), (8) נובע

$$\lg\lg\lg n << \sqrt{n}/\lg n << (n+1/2)/\lg n - n\lg e/\lg^2 n == (n+1/2)/\lg n << n\lg 3/\lg n,$$

ומזה מתקבל

$$(\lg\lg n)^{\lg n} << 2^{\sqrt{n}} << (n!)^{1/\lg n} << 3^n$$

אם מוסיפים גם את היחס $n^2 + n \cdot \lg^3 n << (\lg\lg n)^{\lg n}$, מתקבל הסידור המלא של כל הפונקציות:

$$1/n << \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} << n^{\frac{\lg\lg\lg n}{\lg n}} << \lg(n^n \cdot n!) == n \cdot \lg n << n^2 + n \cdot \lg^3 n << (\lg\lg n)^{\lg n} << 2^{\sqrt{n}} << (n!)^{1/\lg n} << 3^n$$