קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"

תאריך הבחינה: 3.2.2016 (סמסטר 2016א - מועד 1א / 82)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.
כל השאלות זהות במשקלן.
בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפים: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

שאלה 1 (25 נקודות)

15 תלמידים נבחנים בבחינה מסוימת. אין תלות בין תוצאות התלמידים בבחינה.
כל אחד מהתלמידים מקבל ציון נמוך מ- 60 בהסתברות 0.2 ; ציון בין 60 לבין 80 בהסתברות 0.5
וציון גבוה מ- 80 בהסתברות 0.3.

יהי X מספר התלמידים שמקבלים ציון גבוה מ- 80 ;
ויהי Y מספר התלמידים שמקבלים ציון בין 60 לבין 80.

(7 נקי) א. רשום את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.
(6 נקי) ב. האם המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-תלויים?
(6 נקי) ג. חשב את $\rho(X,Y)$.
(6 נקי) ד. חשב את $E[X \mid Y=1]$.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתונה חפיסה של 52 קלפים.
הקלפים מ-4 צורות : לב אדום, יהלום אדום, עלה שחור ותלתן שחור.
מכל צורה יש 13 קלפים שונים.

בוחרים מהחפיסה באקראי 4 קלפים בזה אחר זה וללא החזרה.

(6 נקי) א. מהי ההסתברות שייבחרו קלפים בדיוק מ-3 צורות?
(6 נקי) ב. מהי ההסתברות שהקלפים הראשון והרביעי שייבחרו יהיו מאותה הצורה?
(6 נקי) ג. אם נבחרו רק קלפים אדומים, מהי ההסתברות שכולם לבבות?
(7 נקי) ד. מהי ההסתברות שכל קלף שנבחר גדול מקודמו?
הערה : אין חשיבות לצורה של הקלף ;
וסדר הקלפים הוא 2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K,A , כאשר '2' הוא הקלף הקטן ביותר.

שאלה 3 (25 נקודות)

א. מוקדנית עונה לשיחות בהתאם להנחות של תהליך פואסון עם קצב של 10 לשעה.
(5 נקי) 1. מהי ההסתברות שבמשך חצי שעה לא תענה לאף שיחה?
(5 נקי) 2. מהי ההסתברות שבמשך שלוש שעות תענה ל- 35 שיחות,
כך ש- 12 מהן תהיינה בשעה הראשונה (מתוך השלוש)?
(5 נקי) 3. מהי **בקירוב** ההסתברות שבמשך חמש שעות היא תענה ליותר מ-60 שיחות?

(10 נקי) ב. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 40 ו- 0.1.
נגדיר את המשתנה המקרי Y על-ידי $Y=\max\{X,3\}$.
חשב את התוחלת של Y.

שאלה 4 (25 נקודות)

קבע לגבי כל אחת משלוש הפונקציות הנתונות להלן אם היא יכולה לשמש כ**פונקציית צפיפות**.
נמק את קביעותיך. תוכל להסתמך גם על תוצאות וטענות המוכרות לך מתורת ההסתברות ומהחדו"א.

(5 נקי) א. $f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - 1 & , \quad 0 \le x \le 4 \\ -\frac{x}{2} + 3 & , \quad 4 < x \le 6 \end{cases}$

(5 נקי) ב. $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} \quad , \quad x > 0$

(5 נקי) ג. $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2+2x-1} \quad ,$ x ממשי

קבע לגבי כל אחת משתי הפונקציות הנתונות להלן אם היא יכולה לשמש כ**פונקציית התפלגות מצטברת**.
נמק את קביעותיך. תוכל להסתמך גם על תוצאות וטענות המוכרות לך מתורת ההסתברות ומהחדו"א.

(5 נקי) ד. $F_X(x) = \sqrt{x} \quad , \quad x > 0$

(5 נקי) ה. $F_X(x) = \dfrac{x}{1+x} \quad , \quad x \ge 0$

שאלה 5 (25 נקודות)

(13 נקי) א. יהיו X ו- Y משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים,
שלכל אחד מהם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.
הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים 2 ו- p.

(12 נקי) ב. יהיו X, Y ו- Z משתנים מקריים בלתי-מתואמים, שלכל אחד מהם שונות σ^2 $(\sigma^2 > 0)$.
חשב את $\rho(X+Y\,,\,Y+Z)$.

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z)=P\{Z\le z\}=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt \qquad ; \qquad \Phi(-z)=1-\Phi(z) \qquad ; \qquad Z\sim N(0,1)$$

נוסחת האינטרפולציה: $$\Phi(z)\approx\Phi(z_1)+\frac{z-z_1}{z_2-z_1}[\Phi(z_2)-\Phi(z_1)]$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה - 20425

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,\ldots,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1} \cdot p \quad , \quad i=1,2,\ldots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda} \cdot \lambda^i/i! \quad , \quad i=0,1,\ldots$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r} \cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,\ldots$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,\ldots,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,\ldots,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a \le x \le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\, , \, t \ne 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad -\infty < x < \infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,\ldots,n_r} \cdot p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r} \quad , \quad \sum n_i = n \, , \, \sum p_i = 1$			

נוסחת הבינום
$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

כלל ההכלה וההפרדה
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

הסתברות מותנית
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

נוסחת הכפל
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

נוסחת ההסתברות השלמה
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)$$
, $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס
$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)}$$
, $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת
$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx$$

תוחלת של פונקציה של מ"מ
$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx$$

שונות
$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית
$$E[aX + b] = aE[X] + b$$
$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון
$$P\{X > s+t \mid X > t\} = P\{X > s\} \quad , \quad s,t \ge 0$$

תוחלת מותנית
$$E[X \mid Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x \mid y) = \int x f_{X|Y}(x \mid y) dx$$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X \mid Y=y) \;=\; E[X^2 \mid Y=y]-(E[X \mid Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] \;=\; E[E[X \mid Y]] \;=\; \sum_y E[X \mid Y=y]p_Y(y)$

(טענה מתרגיל ת26, עמוד 430) $E[X\cdot g(Y)] \;=\; E[g(Y)E[X \mid Y]]$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) \;=\; E[\mathrm{Var}(X \mid Y)]+\mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \;=\; \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]=E[XY]-E[X]E[Y]$

$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)\big/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t)=E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t)=e^{bt}M_X(at)$

כאשר X_i מ"מ ב"ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) \;=\; M_{X_1}(t)\cdot\ldots\cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right]=E[N]E[X]$

(כאשר X_i מ"מ ב"ת ש"ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)=E[N]\mathrm{Var}(X)+(E[X])^2\,\mathrm{Var}(N)$

$M_Y(t)=E\left[\left(M_X(t)\right)^N\right]$

אי-שוויון מרקוב $P\{X \ge a\} \le E[X]/a \quad , \quad a>0$, X מ"מ אי-שלילי

אי-שוויון צ'בישב $P\{|X-\mu| \ge a\} \le \sigma^2/a^2 \quad , \quad a>0 \;,\; \mu,\sigma^2<\infty$

משפט הגבול המרכזי $P\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right)\Big/\sqrt{n\sigma^2} \le a \right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(a) \quad , \quad \mu,\sigma^2<\infty$, X_i מ"מ ב"ת וש"ה

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר p הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני.
- סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \;,\; -1<x<1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = -\ln(1-x) \;,\; 0<x<1$$

$$\int (ax+b)^n\,dx = \tfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \;,\; n \ne -1 \quad ; \quad \int \tfrac{1}{ax+b}\,dx = \tfrac{1}{a}\ln(ax+b)$$

$$\int e^{ax}dx = \tfrac{1}{a}e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax}dx = \tfrac{1}{a\ln b}b^{ax} \quad ;$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

$$\log_n a = \log_m a/\log_m n \quad ; \quad \log_n(a^b) = b\cdot\log_n a \quad ; \quad \log_n(ab) = \log_n a + \log_n b$$