

**תשובה 1**

א. $x \subseteq y$	ב. $x \in y$	ג. $x \subseteq y$	ד. $x \in y$
ה. $x \subseteq y$	ו. $x \subseteq y$	ז. $x \subseteq y$	ח. שניהם.

**תשובה 2**א. מהגדרת  $\oplus$ ,

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

לפי ההדרכה לשאלה, נבחר  $U$  המכילה את  $A, B$  ונרשום

$$= (A \cap B') \cup (B \cap A')$$

בעזרת דיסטריבוטיביות החיתוך מעל האיחוד (עמ' 17 בספר הלימוד)

$$= (A \cup B) \cap (A \cup A') \cap (B' \cup B) \cap (B' \cup A')$$

לפי טענה בתחתית עמ' 22 בספר,  $A \cup A' = B \cup B' = U$ .לפי שאלה 1.11 בעמ' 16 בספר, ניתן לזרוק את  $U$  מהחיתוך.

נקבל בהמשך לשוויון המקורי,

$$= (A \cup B) \cap (B' \cup A')$$

בעזרת כלל דה-מורגן (סעיף 1.4.3 בספר)

$$= (A \cup B) \cap (B \cap A)'$$

ולבסוף, שוב לפי ההדרכה לשאלה

$$= (A \cup B) - (B \cap A)$$

ב. נתחיל בעזרת ההדרכה לשאלה:

$$(A - B) \cup (B - C) = (A \cap B') \cup (B \cap C')$$

מכאן בעזרת שימוש חוזר בפילוג (דיסטריבוטיביות, סעיף 1.3.4 בספר) של האיחוד מעל החיתוך:

$$= (A \cup B) \cap (A \cup C') \cap (B' \cup B) \cap (B' \cup C')$$

נזרוק את  $B' \cup B$  (נימוק ר' בצעד דומה בהוכחת סעיף א' למעלה):

$$= (A \cup B) \cap (A \cup C') \cap (B' \cup C')$$

שימוש בכלל דה-מורגן בגורם הימני, וכינוס שני האיברים השמאליים בעזרת חוק הפילוג:

$$= (A \cup (B \cap C')) \cap (B \cap C)'$$

ובעזרת ההדרכה לשאלה

$$= (A \cup (B - C)) - (B \cap C)$$

ג. נתחיל בעזרת ההדרכה לשאלה :

$$(A - B) \cap (C - D) = (A \cap B') \cap (C \cap D')$$

בעזרת קיבוץ (אסוציאטיביות) וחילוף (קומוטטיביות, עמ' 15 בספר) החיתוך :

$$= (A \cap C) \cap (B' \cap D')$$

ולפי כלל דה-מורגן :

$$= (A \cap C) \cap (B \cup D)'$$

ושוב לפי ההדרכה לשאלה :

$$= (A \cap C) - (B \cup D)$$

### תשובה 3

א. נניח  $X \oplus A = Y \oplus A$ . נבצע בשני האגפים הפרש סימטרי עם  $A$  :

$$(X \oplus A) \oplus A = (Y \oplus A) \oplus A$$

לפי שאלה 1.22 ב (אסוציאטיביות) נקבל

$$X \oplus (A \oplus A) = Y \oplus (A \oplus A)$$

מהמשך סעיף ב' באותה שאלה,  $A \oplus A = \emptyset$ , ולכן קיבלנו :

$$X \oplus \emptyset = Y \oplus \emptyset$$

ולפי טענה אחרת באותו סעיף (הפרש סימטרי עם הקבוצה הריקה) קיבלנו

$$. X = Y$$

הערה : הפרש סימטרי הוא פעולה חילופית (שוב 1.22 ב),

לכן קיבלנו שנוכל לצמצם גם משמאל, כלומר : אם  $A \oplus X = A \oplus Y$  אז  $X = Y$ .

ב. כיוון אחד (אם  $A = B$ ) מיידי משאלה 1.22 ב :  $A \oplus A = \emptyset$ .

כיוון שני : אם  $A \oplus B = \emptyset$  משמע  $A \oplus B = A \oplus A$  (כי כאמור  $A \oplus A = \emptyset$ ).

מכאן לפי כלל הצמצום משמאל שהוכחנו למעלה בסעיף א' :  $B = A$ .

ג. אם  $A = B'$ , ניעזר בשאלה 2 א בממ"ן זה ונקבל המבוקש (השלימו הפרטים) !

כיוון שני : נובע מהכיוון הראשון בעזרת כלל הצמצום, בדומה לסעיף ב' :

נניח  $A \oplus B = U$ . כאמור בכיוון הראשון של סעיף זה,  $A \oplus A' = U$ .

לכן  $A \oplus B = A \oplus A'$ . לפי כלל הצמצום מסעיף א' :  $B = A'$ .

ד. כיוון אחד : אם  $B = \emptyset$  אז  $A \oplus B = A$  לפי שאלה 1.22 ב (הפרש סימטרי עם הקבוצה

הריקה). כיוון שני : נובע מהכיוון הראשון בעזרת כלל הצמצום, בדומה לסעיפים ב, ג.

## תשובה 4

א.  $B_n = \{n \cdot k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$  , משמע  $B_n$  היא קבוצת כל הכפולות של  $n$ .  
 $B_n \cap B_m$  היא אפוא קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מ-0, והמתחלקים הן ב- $n$  והן ב- $m$ :

$$B_n \cap B_m = \{nk \mid k \in \mathbb{N}^*\} \cap \{ms \mid s \in \mathbb{N}^*\}$$

מכאן, לפי הטענה שבהדרכה, נובע שכל אבר של  $B_n \cap B_m$  מתחלק ב- $c(n,m)$ . משמע:

$$B_n \cap B_m \subseteq B_{c(n,m)}$$

מצד שני, יהי  $x \in B_{c(n,m)}$  , משמע  $x$  מתחלק ב- $c(n,m)$ .

$c(n,m)$  מתחלק הן ב- $n$  והן ב- $m$ . לכן  $x$  מתחלק הן ב- $n$  והן ב- $m$ . לפיכך

$$B_{c(n,m)} \subseteq B_n \cap B_m$$

משתי ההכלות:  $B_n \cap B_m = B_{c(n,m)}$ .

על תכונות הכפולה המשותפת המינימלית ראו

<http://mathworld.wolfram.com/LeastCommonMultiple.html>

[http://en.wikipedia.org/wiki/Least\\_common\\_multiple](http://en.wikipedia.org/wiki/Least_common_multiple)

ב. נראה כי לכל  $m, m \in \mathbb{N}^*$  ,  $m$  אינו שייך לחיתוך הנ"ל. יהי  $m \in \mathbb{N}^*$ .  
 מהגדרת  $B_m$ , כל אברי  $B_m$  גדולים או שווים  $m$ . מובן אפוא כי  $m \notin B_{m+1}$ .  
 לפיכך  $m$  אינו שייך לחיתוך כל ה- $B_n$ -ים.

ג. קבוצה זו היא קבוצת המספרים הראשוניים. נוכיח זאת:  
 כיוון אחד: יהי  $n \in \mathbb{N}^*$  מספר שאינו ראשוני, נוכיח כי  $D_n = \emptyset$ .  
 יהי  $x \in D_n$ , נראה שלא ייתכן  $x$  כזה:  
 ההנחה ש- $n$  ראשוני פירושה שקיימים  $m, k \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 < m, k < n$ , כך ש- $n = km$ .  
 מכיון ש- $n$  מתחלק ב- $m$ , כל מספר המתחלק ב- $n$  מתחלק ב- $m$ . בפרט  $x \in B_m$ .  
 מכיון ש- $1 < m < n$  אז מהגדרת  $D_n$  נקבל כי  $x \notin D_n$ , בסתירה להנחה.  
 הראינו ש- $D_n$  ריקה עבור כל  $n$  שאינו ראשוני.

מצד שני, אם  $n$  ראשוני, נראה כי  $n \in D_n$  ולכן בפרט  $D_n \neq \emptyset$ :  
 לכל  $n \in \mathbb{N}^*$  מתקיים  $n \in B_n$ .  
 אם  $n$  ראשוני, אז לכל  $m$  טבעי המקיים  $1 < m < n$ ,  $n$  אינו מתחלק ב- $m$ , ולכן  $n \notin B_m$ .  
 מהגדרת  $D_n$  נקבל אפוא כי  $n \in D_n$ , ולכן  $D_n$  אינה ריקה.  
 משני הכיוונים יחד, הראינו שקבוצת ערכי  $n$  עבורם  $D_n \neq \emptyset$  היא קבוצת המספרים הראשוניים.

איתי הראבן