הדבק כאן את מדבקת הנבחן

9999999999

מספר התלמיד הנבחן
רשום את כל תשע הספרות

האוניברסיטה הפתוחה

כ"ו בתמוז תשע"ה

13
ביולי 2015

מס' שאלון - 503

סמסטר 2015ב

מס' מועד 85

20585 / 4

שאלון בחינת גמר

20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה 3 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה שש שאלות.

עליכם לענות על חמש שאלות בלבד.

משקל כל שאלה 20 נקודות.

חומר עזר:
כל חומר עזר מותר בשימוש.
אסור בשימוש כל מכשיר שבאמצעותו אפשר להתחבר לאינטרנט או לאצור מידע לרבות מחשב נישא ו/או טאבלט.

בהצלחה !!!

החזירו
למשגיח את השאלון
וכל עזר אחר שקיבלתם בתוך מחברת התשובות

שאלה 1

האם **לכל שפה מזוהה-טיורינג** B יש מכונת טיורינג M שמזהה את B ומקיימת את התנאי הבא:

על **כל** מילה **ששייכת ל-B** הראש הקורא-כותב של המכונה אף פעם לא נע שמאלה?

בכל צעד הראש יכול לנוע ימינה, ויכול להישאר במקום, אך לא לנוע שמאלה.
שימו לב שהתנאי נדרש רק למילים ששייכות לשפה. על מילים שלא שייכות לשפה אין מגבלה על תנועות הראש הקורא-כותב.

הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 2

נגדיר את השפה $EPSILON_{\text{LBA}}$:

$$EPSILON_{\text{LBA}} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is an LBA and } L(M) = \{\varepsilon\}\}$$

מילה $\langle M\rangle$ שייכת לשפה, אם M הוא אוטומט חסום ליניארית שמזהה את השפה $\{\varepsilon\}$. (M מקבל את המילה הריקה, ולא מקבל כל מילה אחרת).

הראו רדוקצית מיפוי של E_{LBA} ל-$EPSILON_{\text{LBA}}$ ($E_{\text{LBA}} \le_m EPSILON_{\text{LBA}}$).
תארו את הרדוקציה והוכיחו שהיא תקפה ושהיא ניתנת לחישוב.

תזכורת: $E_{\text{LBA}} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is an LBA and } L(M) = \varnothing\}$

שאלה 3 (כל סעיף 10 נקודות)

B היא שפה NP-שלמה.

א. נניח שתימצא שפה C במחלקת השפות $\text{NP}\cap\text{coNP}$ כך ש- $B \le_P C$.
האם אפשר יהיה להסיק מכך ש- $\text{NP}=\text{coNP}$? **הוכיחו** את תשובתכם.

ב. נניח שיוכח **שלכל** שפה D במחלקת השפות $\text{NP}\cap\text{coNP}$ מתקיים גם $D \le_P B$ וגם $\overline{D} \le_P B$.
האם אפשר יהיה להסיק מכך ש- $\text{NP}=\text{coNP}$? **הוכיחו** את תשובתכם.

שאלה 4

שפה A נקראת **P-שלמה** אם A שייכת למחלקה P, ולכל שפה B במחלקה P, $B \le_L A$.
(שימו לב שמדובר על רדוקציה במקום לוגריתמי).

הוכיחו: אם יש במחלקה P שפה לא טריוויאלית C ($C\neq\varnothing$, $C\neq\Sigma^*$) **שאיננה** P-שלמה, אז $\text{P}\neq\text{L}$.
(כלומר, המחלקה P **מכילה ממש** את המחלקה L, ואיננה שווה לה).

שאלה 5

במסעדה יוקרתית מוצעות n מנות שונות שמסומנות $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

לכל מנה d_i יש מחיר p_i ויש ערך תזונתי c_i. (p_i ו-c_i הם מספרים שלמים חיוביים).

לכל סועד במסעדה יש סכום מרבי P שהוא מוכן להוציא וערך תזונתי מינימלי C שהוא מעוניין להשיג.

הבעיה העומדת בפני הסועד במסעדה היא: האם יש תת-קבוצה של המנות שסכום המחירים שלהן איננו גדול מ-P, וסכום הערכים התזונתיים שלהן איננו קטן מ-C?

(האם יש $D \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ כך ש- $\Sigma_{i \in D} p_i \leq P$ ו- $\Sigma_{i \in D} c_i \geq C$?)

הוכיחו: הבעיה הזו היא **NP-שלמה**.

הדרכה: הוכיחו שהבעיה שייכת ל-NP, והראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של אחת השפות ה-NP-שלמות שמופיעות בספר.

תארו את הרדוקציה, והוכיחו שהיא תקפה ושהיא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 6

מאמת במקום לוגריתמי הוא מאמת V שמשתמש, בנוסף למקום של הקלט, במקום שהוא לוגריתמי בגודל הקלט.

מאמת כזה הוא מכונה עם שני סרטים, סרט קלט שהוא סרט לקריאה בלבד, וסרט עבודה שהוא סרט לקריאה ולכתיבה.

המאמת מקבל כקלט (על סרט הקלט) מחרוזת $<w, c>$. w היא מילת הקלט ו-c הוא האימות.

הגודל של c ($|c|$) לוגריתמי בגודל של w.

המקום שבו משתמש המאמת על סרט העבודה גם הוא לוגריתמי בגודל של w.

השפה של המאמת V היא $\{w \mid V \text{ accepts } <w, c> \text{ for some string } c \text{ where } |c| = O(\log(|w|))\}$.

להלן "הוכחה" לכך **שלכל** שפה ב-NL יש מאמת במקום לוגריתמי:

תהי D שפה ב-NL. אז יש ל-D מכונה לא דטרמיניסטית N שמכריעה את D, ומשתמשת במקום לוגריתמי בסרט העבודה שלה.

נבנה מאמת במקום לוגריתמי לשפה D: המאמת יקבל, בנוסף למילת הקלט w, את סדרת הבחירות הלא דטרמיניסטיות שעושה המכונה N בריצתה על מילת הקלט w. כלומר, האימות יהיה "כתובת" כמו בהוכחת משפט 3.16 ובהוכחת משפט 7.20.

המאמת יריץ (בסרט העבודה) סימולציה של ריצת N על w לפי סדרת הבחירות הלא דטרמיניסטיות שבאימות. אם מסלול החישוב הזה של N הביא לקבלת w, הוא יקבל. אחרת, הוא ידחה.

מה **לא נכון** ב"הוכחה" הזו?

הסבירו **במדויק** מה הטעות בהוכחה - איזו נקודה בהוכחה שגויה ומה בדיוק השגיאה.

- סוף -