



מספר התלמיד הנבחן
רשום את כל תשע הספרות

**האוניברסיטה
הפתוחה**

ד' באב תשע"ח

סמסטר 2018 ב

20425 / 4

מוס' שאלון - 465

16

ביולי 2018

87 מוס' מועד

שאלון בחינת גמר

20425 - הסתרות לתלמידי מדעי המחשב

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה 6 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה חמיש שאלות.

עליכם לענות על ארבע שאלות מתוך.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם חשבו את התוצאה הסופית. כמובן, במידת האפשר.

لبcheinah מצורפת טבלת ערכיהם של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית ודף נוסחות הכלול 2 עמודים.

חומר עזר:

מחשבון מדעי בלבד, שאינו אוצר מידע.

בצלחה !!!

איןכם חייבים

להחזיר את השאלון לאוניברסיטה הפתוחה



שאלה 1 (25 נקודות)

יהיו X ו- Y משתנים מקריים בלתי-תלויים,
שלכל אחד מהם התפלגות ניאומטרית עם הפרמטר p ($0 < p < 1$).
נגידר את המשתנה המקרי $R = |X - Y|$.

$$P\{R = j\} = \frac{2p(1-p)^j}{2-p} \quad \text{מתקיים: } j = 0, 1, \dots$$

(12 נק') ב. מהי התוחלת של המשתנה המקרי R ?

שאלה 2 (25 נקודות)

נתון ארגז ובו X אגוזים בקליפתם.
למשתנה המקרי X יש התפלגות איחידה בדידה בין 70 ל-100.
שירה ניגשת לארגז ומנסה לפצח את כל האגוזים שבתוכו.
היא מצילה לפצח כל אגוז בהסתברות 0.75, ואני תלות בין תוצאות הפיצוץ של אגוזים שונים.

יהי Y מספר האגוזים ששירה מצילה לפצח.

- (6 נק') א. אם ידוע שיש בארגז מספר זוגי של אגוזים, מהי ההסתברות שיש בו יותר מ-90 אגוזים?
(6 נק') ב. מהי תוחלת מספר האגוזים ששירה תצליח לפצח?
(6 נק') ג. מהי שונות מספר האגוזים ששירה תצליח לפצח?
(7 נק') ד. חשב את (Y, ρ) .

שאלה 3 (25 נקודות)

50 תלמידים יושבים בשורה.
מחלקים באקראי לתלמידים שאלוני בבחינה: 30 מסוג A ו- 20 מסוג B.
(6 נק') א. מהי ההסתברות שני התלמידים היושבים בקצוות של השורה יקבלו שאלונים מסוג A?
(6 נק') ב. מהי ההסתברות שלא יהיה בשורה שני תלמידים סמוכים שניהם יקבלו שאלונים מסוג B?
(6 נק') ג. 25 התלמידים היושבים במקומות 1-25 בשורה קיבלו בסך-הכל 17 שאלונים מסוג A.
מהי ההסתברות ש-10 התלמידים היושבים במקומות 1-10 בשורה,
קיבלו בסך-הכל 6 שאלונים מסוג A?
(7 נק') ד. מהי ההסתברות שאחד (אחד מן התלמידים) קיבל שאלון שונה מזו של התלמידים היושבים
במקומות/מות הסמוך/כיסם לו בשורה?

שאלה 4 (25 נקודות)

- נתונים 10 כדורים ממושפרים מ-1 עד 10.
בוחרים באקראי 3 כדורים לא החזרה.
- (6 נק') א. יהיו X המשטנה המקורי המוגדר על-ידי מספר הcadorsים ה"זוגיים" שנבחרים.
מהי פונקציית ההסתברות של המשטנה המקורי X ומהו שונטו?
- (7 נק') ב. יהיו M המשטנה המקורי המוגדר על-ידי מספר הcadors הגודל ביותר שנבחר (בין השלושה שנבחרו).
- מהי פונקציית ההסתברות של המשטנה המקורי M ?
- (6 נק') ג. חוזרים על תהליך הבחירה המתואר מעלה 20 פעמים. אין תלות בין החזרות השונות.
יהי Y המשטנה המקורי המוגדר על-ידי מספר הפעמים שכדור מס' 7 נבחר.
מהי פונקציית ההסתברות של המשטנה המקורי Y ומהו שונטו?
- (6 נק') ד. חוזרים על תהליך הבחירה המתואר מעלה עד לרשותה כדור מס' 7 נבחר.
אין תלות בין החזרות השונות.
יהי W המשטנה המקורי המוגדר על-ידי מספר החזרות על התהליך שבוצעות.
מהי פונקציית ההסתברות של המשטנה המקורי W ומהו שונטו?

שאלה 5 (25 נקודות)

- (10 נק') א. יהיו X משטנה מקורי מעריכי עם הפרמטר λ ($0 < \lambda$).

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

- (15 נק') ב. בוחנות פיצויים ידוע שהביקוש היומי (בק"ג) לבוטנים קלויים הוא משטנה המקורי X ,
שהתפלגותו נתונה על-ידי פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x) = \begin{cases} c(20 - x) & , \quad 0 < x < 20 \\ 0 & , \quad \text{else} \end{cases}$$

1. מהו הערך של c ?
2. מהי תוחלת הביקוש היומי לבוטנים קלויים (בק"ג)?
3. בתחילת היום יש בוחנות 15 ק"ג בוטנים קלויים.
מהי ההסתברות שלא יחסרו בוטנים קלויים עד סוף היום?

בצלחה!

ערכיים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] \quad \text{נוסחת האינטראפולציה:}$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה - 20425

הfonקציית יוצרת המומנטים	השונות	התוחלת	fonקציית ההסתברות / fonקציית הצפיפות	התפלגות
$(pe^t + 1 - p)^n$	$np(1 - p)$	np	$\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n$	בינומית
$pe^t / (1 - (1 - p)e^t)_{t < -\ln(1-p)}$	$(1 - p) / p^2$	$1/p$	$(1 - p)^{i-1} \cdot p, \quad i = 1, 2, \dots$	גיאומטרית
$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$	λ	λ	$e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i!, \quad i = 0, 1, \dots$	פואסונית
$(pe^t / (1 - (1 - p)e^t))_{t < -\ln(1-p)}^r$	$(1 - p)r / p^2$	r/p	$\binom{i-1}{r-1} (1 - p)^{i-r} \cdot p^r, \quad i = r, r+1, \dots$	בינומית שלילית
	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N} (1 - \frac{m}{N})$	nm/N	$\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i} / \binom{N}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, m$	היפרגיאומטרית
	$(n^2 - 1)/12$	$m + (1+n)/2$	$\frac{1}{n}, \quad i = m+1, m+2, \dots, m+n$	אחדה בדידה
$(e^{bt} - e^{at}) / (tb - ta), t \neq 0$	$(b-a)^2/12$	$(a+b)/2$	$1/(b-a), \quad a \leq x \leq b$	אחדה
$\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2/2\}$	σ^2	μ	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty$	נורמלית
$\lambda/(\lambda - t), \quad t < \lambda$	$1/\lambda^2$	$1/\lambda$	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$	מעריכית
			$\binom{n}{n_1, \dots, n_r} \cdot p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}, \quad \sum n_i = n, \sum p_i = 1$	מולטינומית

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

נוסחת הבינום

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

כלל ה嚂לה וההפרדה

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

נוסחת המכפל

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i), \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודים הוא } S$$

נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i)}, \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודים הוא } S$$

נוסחת בייס

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx$$

תוחלת

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx$$

תוחלת של פונקציה של מ"מ

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

שונות

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

אם מופיעים של מאורע נתנו מתרכשים בהתאם לשלווש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קבוע λ ליחידת זמן אחד,
אז מספר המופיעים שמתרכשים ביחידת זמן אחד הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ .

$$P\{X > s+t | X > t\} = P\{X > s\}, \quad s, t \geq 0$$

תכונת חוסר-זיכרון

$$E[X | Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x | y) = \int x f_{X|Y}(x | y) dx$$

תוחלת מותנית

$$\text{Var}(X | Y = y) = E[X^2 | Y = y] - (E[X | Y = y])^2$$

שונות מותניות

$$E[X] = E[E[X | Y]] = \sum_y E[X | Y = y] p_Y(y)$$

נוסחת התוחלת המותנית

$$E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X | Y]]$$

(טענה מתרגיל 26, עמוד 430)

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X | Y)] + \text{Var}(E[X | Y])$$

נוסחת השונות המותנית

$$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$$

תוחלת של סכום משתנים מקריים

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

שונות משותפת

$$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$$

שונות של סכום משתנים מקריים

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

$$\rho(X, Y) = \text{Cov}(X, Y) / \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}$$

מקדם המתאם הlienari

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$$

פונקציה יוצרת מומנטים

$$M_{X_1+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t)$$

$$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X_1]$$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\text{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\text{Var}(N)$$

(כאשר X_i מ"מ ב"ת ש"ה)

$$M_{X_1+\dots+X_N}(t) = E\left[\left(M_{X_1}(t)\right)^N\right]$$

$$P\{X \geq a\} \leq E[X]/a \quad , \quad a > 0 \quad , \quad X \text{ מ"מ אי-שלילי}$$

אי-שוויון מרקוב

$$P\{|X - \mu| \geq a\} \leq \sigma^2/a^2 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty$$

אי-שוויון צ'בישוב

$$P\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)/\sqrt{n\sigma^2} \leq a\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a) \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty$$

משפט הגבול המרכזי

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבhzorot ב"ת על הניסוי $P(A)/[P(A) + P(B)]$.

סכום של מ"מ ביןומיים (גייאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר p הוא מ"מ ביןומי (ביןומי-שלילי).

סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני.

סכום של מ"מ נורמלים ב"ת הוא מ"מ נורמלי.

ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X + Y = n$, כאשר X ו- Y מ"מ פואסוניים (ביןומיים עם אותו p) ב"ת היא ביןומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1 < x < 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = -\ln(1-x) \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \neq -1 \quad ; \quad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים :

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \frac{1}{a \ln b} b^{ax} \quad ; \quad \boxed{\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx}$$

$$\log_n a = \log_m a / \log_m n \quad ; \quad \log_n(a^b) = b \cdot \log_n a \quad ; \quad \log_n(ab) = \log_n a + \log_n b$$