פתרונות לממ"ן 14 - 2020ב - 20425

1. למשתנה המקרי X_1 יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 10 ו- 0.1 ;
ואילו המשתנה המקרי S הוא סכום מקרי של תוצאות ההטלות של X_1 הקוביות שהיו בתא 1.
נסמן ב- S_i את תוצאת ההטלה של הקובייה ה- i-ית שהיתה בתא 1, לכל $i = 1,2,\ldots,X_1$.
בסימונים אלו, נתוני הבעיה הם :

$$S = \sum_{i=1}^{X_1} S_i \qquad ; \qquad X_1 \sim B(10,0.1) \qquad ;$$ לכל S_i התפלגות אחידה בדידה בין 1 ל-6

א. סכום תוצאות ההטלות, שמתקבלות בקוביות שנפלו לתא 1, שווה ל-2 בשני מקרים :
1) לתוך תא 1 נפלה קובייה אחת והתקבלה בה התוצאה 2 ;
2) לתוך תא 1 נפלו שתי קוביות והתקבלה בשתיהן התוצאה 1.
לפיכך :

$$\begin{aligned} P\{S=2\} &= P\{X_1=1, S_1=2\} + P\{X_1=2, S_1=1, S_2=1\} \\ &= P\{S_1=2 \mid X_1=1\}P\{X_1=1\} + P\{S_1=1, S_2=1 \mid X_1=2\}P\{X_1=2\} \\ &= \tfrac{1}{6}\cdot\binom{10}{1}\cdot 0.1\cdot 0.9^9 + \left(\tfrac{1}{6}\right)^2\cdot\binom{10}{2}\cdot 0.1^2\cdot 0.9^8 = 0.06995 \end{aligned}$$

ב. לפי נוסחת התוחלת של סכום מקרי : $E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{X_1} S_i\right] = E[X_1]\cdot E[S_1] = 10\cdot 0.1\cdot 3.5 = 3.5$

לפי נוסחת השונות של סכום מקרי :

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(S) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{X_1} S_i\right) = E[X_1]\mathrm{Var}(S_1) + (E[S_1])^2\mathrm{Var}(X_1) \\ &= 10\cdot 0.1\cdot \tfrac{35}{12} + 3.5^2\cdot 10\cdot 0.1\cdot 0.9 = 13.942 \end{aligned}$$

ג. $$\mathrm{Cov}(X_1, X_2+\ldots+X_{10}) = \mathrm{Cov}(X_1, 10-X_1) = 0 - \mathrm{Var}(X_1) = -10\cdot 0.1\cdot 0.9 = -0.9$$

$$\begin{aligned} \rho(X_1, X_2+\ldots+X_{10}) &= \rho(X_1, 10-X_1) = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, 10-X_1)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)\mathrm{Var}(10-X_1)}} \\ &= \frac{0-\mathrm{Var}(X_1)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)(-1)^2\mathrm{Var}(X_1)}} = \frac{-\mathrm{Var}(X_1)}{\mathrm{Var}(X_1)} = -1 \end{aligned}$$

התוצאה שהתקבלה צפויה, הואיל ויש קשר לינארי מלא ושלילי בין X_1 ל- $X_2 + \ldots X_{10} = 10 - X_1$.

דרך חישוב נוספת לשונות המשותפת:

ל- X_i-ים יש התפלגות משותפת מולטינומית עם $n = 10$ ווקטור הסתברויות שכל רכיביו שווים ל-0.1.
לכן, לכל $i = 2,3,\ldots,10$ מתקיים : $\mathrm{Cov}(X_1, X_i) = -10\cdot 0.1\cdot 0.1 = -0.1$

ומכאן : $$\mathrm{Cov}(X_1, X_2+\ldots+X_{10}) = \sum_{i=2}^{10}\mathrm{Cov}(X_1, X_i) = 9\cdot(-0.1) = -0.9$$

2. ההתפלגות השולית של כל רכיב מולטינומי היא בינומית לכן :

$$X_1 \sim B(20,0.2) \Rightarrow Var(X_1) = 20 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 3.2$$
$$X_2 \sim B(20,0.4) \Rightarrow Var(X_2) = 20 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 4.8$$

נמצא את השונות המשותפת של שני רכיבים מולטינומיים :

למשתנים המקריים $X_1, \ldots, X_r$ יש התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $(p_1, \ldots, p_r)$. לכן, לכל אחד מהם יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n וה- p_i המתאים לו ; ולסכום של כל שניים מהם, $X_i + X_j$ (עבור $i \neq j$), יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- $p_i + p_j$.

לפיכך : $\mathrm{Var}(X_i) = np_i(1-p_i)$

וגם : $\mathrm{Var}(X_i + X_j) = n(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j)$

ומצד שני : $\mathrm{Var}(X_i + X_j) = \mathrm{Var}(X_i) + \mathrm{Var}(X_j) + 2\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

ולכן : $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{2}[\mathrm{Var}(X_i + X_j) - \mathrm{Var}(X_i) - \mathrm{Var}(X_j)]$

כעת, נציב את נוסחאות השונות הבינומית ונקבל נוסחה לשונות המשותפת של X_i ו- X_j :

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \tfrac{1}{2}[n(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j) - np_i(1-p_i) - np_j(1-p_j)] = \tfrac{1}{2}[-2np_i p_j] = -np_i p_j$$

ובבעיה שלנו מתקיים :

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = -20 \cdot 0.2 \cdot 0.4 = -1.6$$

לכן :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{-1.6}{\sqrt{3.2 \cdot 4.8}} = \boxed{-0.4082}$$

3. למשתנה המקרי X יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 10 ו- 0.5;

למשתנה המקרי המותנה N בהינתן $X=i$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 20 ו- $\frac{i+1}{20}$.

נשתמש בנוסחאות התוחלת והשונות המותנות, ונקבל:

א. $$E[N]=E[E[N\mid X]]=E[20\cdot\tfrac{X+1}{20}]=E[X+1]=E[X]+1=10\cdot 0.5+1=6$$

ב. $$\mathrm{Var}[N]=E[\mathrm{Var}(N\mid X)]+\mathrm{Var}(E[N\mid X])=E\Big[20\cdot\tfrac{X+1}{20}\cdot\Big(1-\tfrac{X+1}{20}\Big)\Big]+\mathrm{Var}(20\cdot\tfrac{X+1}{20})$$

$$=E[X+1]-E[0.05(X+1)^2]+\mathrm{Var}(X+1)$$

$$=E[X]+1-0.05\cdot(E[X^2]+2E[X]+1)+\mathrm{Var}(X)$$

$$=5+1-0.05\cdot(27.5+2\cdot 5+1)+2.5=6.575$$

$$\boxed{\begin{array}{l}E[X]=10\cdot 0.5=5\\ \mathrm{Var}(X)=10\cdot 0.5\cdot 0.5=2.5\\ E[X^2]=2.5+5^2=27.5\end{array}}$$

4.

עבור המשתנה המקרי הרציף ו- $a<b$ $\qquad X\sim U(a,b)$

פונקציית הצפיפות:

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\qquad a\le x\le b$$

בניית פונקציה יוצרת מומנטים:

$$M_X(t)=E[e^{tX}]=\int_a^b e^{tX}\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{e^{tx}}{t}\cdot\frac{1}{b-a}\bigg|_a^b=$$

$$\frac{e^{tb}}{t}\cdot\frac{1}{b-a}-\frac{e^{ta}}{t}\cdot\frac{1}{b-a}=\frac{e^{tb}-e^{ta}}{tb-ta}\qquad t\ne 0$$

א. כדי להתמודד עם כך שפונקציית יוצרת המומנטים אינה מוגדרת עבור $t=0$, נעזר בטור הבא:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(ax)^i}{i!}=e^{ax}$$

$$M_X(t)=\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}=\frac{1}{t(b-a)}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(bt)^i}{i!}-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(at)^i}{i!}\right)=$$

$$\frac{1}{t(b-a)}\left[\left(1+\frac{bt}{1}+\frac{(bt)^2}{2!}+\frac{(bt)^3}{3!}\cdots\right)-\left(1+\frac{at}{1}+\frac{(at)^2}{2!}+\frac{(at)^3}{3!}\cdots\right)\right]=$$

$$\frac{1}{t(b-a)}t(b-a)+\frac{1}{t(b-a)}\left(\frac{t^2b^2}{2}-\frac{t^2a^2}{2}\right)+\frac{1}{t(b-a)}\left(\frac{t^3b^3}{6}-\frac{t^3a^3}{6}\right)\cdots=$$

$$1+\frac{t(b+a)}{2}+\frac{t^2}{(b-a)}\left(\frac{b^3}{6}-\frac{a^3}{6}\right)\cdots$$

כעת נגזור את פונקציית היוצרת מומנטים:

$$M_X'(t)=\frac{(b+a)}{2}+\sum_{i=3}^{\infty}\frac{t^{i-1}}{(b-a)}\left(\frac{b^i}{i!}-\frac{a^i}{i!}\right)\Rightarrow$$

$$E[X]=M_X'(t=0)=\frac{(b+a)}{2}$$

5.

א. נסמן ב- X את מספר האנשים שאיש אינו יושב לידם.

נגדיר: $X_i = \begin{cases} 1 & \text{איש אינו יושב ליד האדם ה-}i\text{-י} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ לכל $i = 1,2,3$, ונקבל: $X = \sum_{i=1}^{3} X_i$,

כאשר: $P\{X_i = 1\} = \underbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4}}_{i\text{ יושב בקצה, ולידו מקום פנוי}} + \underbrace{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}}_{i\text{ אינו יושב בקצה, ומשני צדדיו מקומות פנויים}} = \frac{3}{10} = 0.3$

לכן: $\mathrm{Var}(X_i) = 0.3 - 0.3^2 = 0.21$

ולכל $i \neq j$: $P\{X_i = 1, X_j = 1\} = P\{\text{מקומות 1, 3 ו-5 תפוסים}\} = 1/10 = 0.1$

$\Leftarrow$ $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0.1 - 0.3^2 = 0.01$

לפיכך: $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 3 \cdot 0.21 + 3 \cdot 2 \cdot 0.01 = 0.69$

ב. נסמן ב- X את מספר האנשים שאיש אינו יושב לידם.

נגדיר: איש אינו יושב ליד האדם ה-i-י
אחרת
לכל $i = 1,2,3$, ונקבל: $X = \sum_{i=1}^{3} X_i$,

כאשר: $P\{X_i = 1\} = \underbrace{\frac{2}{20} \cdot \frac{17}{19}}_{i\text{ יושב בקצה, ולידו מקום פנוי}} + \underbrace{\frac{18}{20} \cdot \frac{17}{19} \cdot \frac{16}{18}}_{i\text{ אינו יושב בקצה, ומשני צדדיו מקומות פנויים}} = \frac{153}{190}$

ולכן: $E[X] = \sum_{i=1}^{3} E[X_i] = 3 \cdot \frac{153}{190} = \frac{459}{190} = 2.416$

6. א. נסמן ב- W_i את תוצאת ההטלה ה-i-ית, לכל $i = 1,2,...,12$. בסימון זה, גובה הפרס הכולל יהיה $\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{2}W_i$.

מכיוון שאפשר להניח שההטלות בלתי-תלויות זו בזו ומכיוון ש- $E[W_i]=3.5$ ו- $\text{Var}(W_i)=\frac{35}{12}=2.91\overline{6}$,

נקבל כי :
$$E\left[\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{2}W_i\right]=\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{2}E[W_i]=12\cdot\frac{1}{2}\cdot 3.5=21$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{2}W_i\right)=\sum_{i=1}^{12}\text{Var}(\tfrac{1}{2}W_i)=\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{4}\text{Var}(W_i)=12\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{35}{12}=\frac{35}{4}=8.75$$

ב. נסמן ב- X_i את מספר הפעמים שהתוצאה i התקבלה, לכל $i = 1,2,...,6$, ונקבל כי : $X=X_1+X_2$

$Y=X_2+X_3$

ומכאן :
$$\begin{aligned}\text{Var}(X+Y)&=\text{Var}(X_1+2X_2+X_3)\\&=\text{Var}(X_1)+\text{Var}(2X_2)+\text{Var}(X_3)+2\text{Cov}(X_1,2X_2)+2\text{Cov}(X_1,X_3)+2\text{Cov}(2X_2,X_3)\\&=\left[\text{Var}(X_1)+4\text{Var}(X_2)+\text{Var}(X_3)\right]+\left[4\text{Cov}(X_1,X_2)+2\text{Cov}(X_1,X_3)+4\text{Cov}(X_2,X_3)\right]\\&=6\text{Var}(X_1)+10\text{Cov}(X_1,X_2)\\&=6\cdot12\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{6}+10\cdot(-12\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6})\\&=6\tfrac{2}{3}=6.\overline{6}\end{aligned}$$

[ל-X_i-ים התפלגות משותפת מולטינומית עם $n = 12$ ו- $\underset{\sim}{p}=\left(\frac{1}{6},...,\frac{1}{6}\right)$, לכן הם שווי-התפלגות]