נושאים במתמטיקה לתלמידי מח"ר - 10444

סמסטר 2009ב

<u>פתרון ממ"ן 15</u>

<u>תשובה 1</u>

א. 1) $\forall x(J(x) \to L(x))$

2) יש עורך-דין שאינו שופט.

3) $\exists x(W(x) \wedge L(x) \wedge P(x))$

4) $\neg(\exists x(W(x) \wedge P(x) \wedge H(x))$

5) כל השופטים אוהבים רק שופטים. (כלומר – כל שופט שאוהב "מישהו", ה"מישהו" הזה הוא שופט).

ב. 2)

$$\neg(\exists x(L(x) \wedge (\neg J(x))))$$
$$\equiv \forall x(\neg(L(x) \wedge (\neg J(x))))$$
$$\equiv \forall x((\neg L(x)) \vee (\neg(\neg J(x))))$$
$$\equiv \forall x((\neg L(x)) \vee J(x)) \equiv \forall x(J(x) \vee (\neg L(x)))$$

כל אדם הוא שופט או שאינו עורך-דין.

5)

$$\neg(\forall x(J(x) \to \forall y(L(x,y) \to J(y)))$$
$$\equiv \exists x(\neg((\neg J(x)) \vee (\forall y(L(x,y) \to J(y)))))$$
$$\equiv \exists x(J(x) \wedge (\neg \forall y(L(x,y) \to J(y))))$$
$$\equiv \exists x(J(x) \wedge (\exists y(\neg((\neg L(x,y)) \vee J(y)))))$$
$$\equiv \exists x(J(x) \wedge (\exists y(L(x,y) \wedge (\neg J(y)))))$$

יש שופט שאוהב אדם שאינו שופט.

<u>תשובה 2</u>

1). החוק הראשון הוא: $\forall x\big(M(x) \to (\neg K(x))\big)$

החוק השני הוא:

$$\forall x\big(\neg(M(x) \wedge S(x))\big) \equiv \forall x\big((\neg M(x)) \vee (\neg S(x))\big) \equiv \forall x\big(M(x) \to (\neg S(x))\big)$$

לכן,

$$\varphi := \left(\forall x\left(M(x) \to (\neg K(x))\right)\right) \wedge \left(\forall x\left(M(x) \to (\neg S(x))\right)\right) \equiv$$
$$\equiv \forall x\left(\left(M(x) \to (\neg K(x))\right) \wedge \left(M(x) \to (\neg S(x))\right)\right)$$

ומתקיים (לפי ויתור על $\to$),

$$\varphi \equiv \forall x\left(\left((\neg M(x)) \vee (\neg K(x))\right) \wedge \left((\neg M(x)) \vee (\neg S(x))\right)\right)$$

ולכן

$$\neg\varphi \equiv \exists x\left(\neg\left(\left((\neg M(x)) \vee (\neg K(x))\right) \wedge \left((\neg M(x)) \vee (\neg S(x))\right)\right)\right)$$
$$\equiv \exists x\left(\left(\neg\left((\neg M(x)) \vee (\neg K(x))\right)\right) \vee \left(\neg\left((\neg M(x)) \vee (\neg S(x))\right)\right)\right)$$
$$\underset{\uparrow}{\equiv} \exists x\left(\left(M(x) \wedge K(x)\right) \vee \left(M(x) \wedge S(x)\right)\right)$$

לפי כללי דה-מורגן

$$\underset{\uparrow}{\equiv} \exists x\left(M(x) \wedge \left(K(x) \vee S(x)\right)\right)$$

לפי כללי הפילוג

<u>תשובה 3</u>

יהי $D = Z$ קבוצת המספרים השלמים.

נסמן: $P(x)$: ‘x הוא מספר זוגי’

$Q(x)$: ‘x הוא מספר אי-זוגי’

הפסוק $\left(\exists x\left(P(x)\right)\right) \wedge \left(\exists x\left(Q(x)\right)\right)$ אמת מכיוון ש- $P(2)$ אמת ו- $Q(3)$ אמת

לכן גם $P(2) \wedge Q(3)$ אמת, שפירושו, הפסוק $\left(\exists x\left(P(x)\right)\right) \wedge \left(\exists x\left(Q(x)\right)\right)$ אמת (1)

לעומת זה, הפסוק $\exists x\left(\left(P(x)\right) \wedge \left(Q(x)\right)\right)$ שקר מכיוון שכל מספר שלם הוא או רק זוגי או רק אי-זוגי, לכן לא קיים מספר שלם שהוא זוגי <u>וגם</u> אי-זוגי

ולכן הפסוק $\exists x\left(\left(P(x)\right) \wedge Q(x)\right)$ שקרי\ (2)

מ-(1) ו-(2) נובע ש- φ שקר, כנדרש.

<u>תשובה 4</u>

א. נסמן: $K(x)$: ‘x הוא ברווז כתום’

$M(x)$: ‘x הוא ברווז מאושר’

נצרין את הטיעון הנתון לשפת הפרדיקטים:

$$\forall x\left(K(x) \to M(x)\right),\ \exists x K(x) \Rightarrow \exists x M(x)$$

נוכיח שהטיעון הפורמאלי תקף לוגית:

1. $\exists x K(x)$ (הנחה)
2. $K(a)$ (הנחה, $\exists E$ משורה 1)
3. $\forall x\big(K(x) \to M(x)\big)$ (הנחה)
4. $K(a) \to M(a)$ (הנחה, $\forall E$ משורה 3)
5. $M(a)$ (MP משורות 2 ו-4)
6. $\exists x M(x)$ (לפי $\forall I$ משורה 5)

מ.ש.ל.

תשובה 5

א. **הפסוק הוא אמת**.

הפסוק אומר: יש מספר ממשי x כך שלכל y ממשי מתקיים $x < y^2$.

ואכן, ניקח לדוגמה את המספר $x = -1$, אזי **לכל** y ממשי מתקיים $y^2 \geq 0 > -1 = x$.

נשלול את הפסוק הנתון:

$$\neg(\exists x(\forall y(x < y^2))) \equiv \forall x(\neg(\forall y(x < y^2))) \equiv \forall x(\exists y(\neg(x < y^2))) \equiv \forall x(\exists y(x \geq y^2))$$

ב. **הפסוק הוא אמת**.

הטענה הרשומה בפסוק אומרת:

לכל מספר ממשי חיובי x מתקיים:

לכל מספר ממשי y יש n שלם כך ש- $nx \geq y$.

טענה זו נכונה. לכל מספר ממשי y נבחר מספר שלם, שנסמנו ב- n , המקיים $n \geq \frac{y}{x}$

(למשל ניתן לבחור כ- n את המספר השלם הראשון שנמצא על ציר המספרים מימין למספר $\frac{y}{x}$).

ברור שאז $nx \geq y$ (שהרי $x > 0$) ומתקיים הרשום.

נשלול את הפסוק הנתון:

$$\neg(\forall x((x > 0) \to (\forall y(\exists n(nx \geq y)))))$$

$$\underset{\uparrow}{\equiv} \exists x(\neg((\neg(x > 0)) \vee (\forall y(\exists n(nx \geq y)))))$$

ויתור על $\to$

$$\equiv \exists x((x > 0) \wedge (\neg(\forall y(\exists n(nx \geq y)))))$$

$$\equiv \exists x((x > 0) \wedge (\exists y(\forall n(nx < y))))$$

ג. **הפסוק הוא אמת**.

נסביר: ניתן למצוא x שמקיים את התנאי הראשון שאומר ש- $x \geq 0$ (כי אז $1 - y = \pm\sqrt{x}$ וקיים מספר ממשי y כזה), ואותו x מקיים גם את התנאי השני שאומר $x \leq 0$: ניקח פשוט $x = 0$.

וההוכחה היא: **עבור** $x = 0$ **מתקיים**: $y = 1$ מקיים את הדרישה הראשונה ($0 = (1-1)^2$), ו- $y = 0$ מקיים את הדרישה השנייה ($0 = -0^2$).

נשלול:

$$\neg\exists x\left(\left(\exists y(x = (1-y)^2)\right) \wedge \left(\exists y(x = -y^2)\right)\right) \equiv$$

$$\equiv \forall x(\neg((\exists y(x = (1-y)^2)) \wedge (\exists y(x = -y^2)))) \equiv$$

$$\underset{\uparrow}{\equiv} \forall x((\neg(\exists y(x = (1-y)^2)) \vee (\neg\exists y(x = -y^2)))) \equiv$$

לפי כללי דה-מורגן

$$\equiv \forall x(((\forall y(\neg(x = (1-y)^2))) \vee (\forall y(\neg(x = -y^2))))) \equiv$$

$$\equiv \forall x((\forall y(x \neq (1-y)^2)) \vee (\forall y(x \neq -y^2)))$$