

קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"  
תאריך הבחינה: 25.8.2008 (סמסטר 2008 ב - מועד 3ב/93)

**חומר העזר המותר לשימוש בבחינה:** מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש במהלך הבחינה!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

**לבחינה מצורפים:** טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

### שאלה 1 (25 נקודות)

מחלבת "תנובה" עורכת מבצע.

על צידו הפנימי של המכסה של כל מעדן חלב מתוצרתה מוטבעת באקראי אחת מאותיות השם "תנובה".

כלומר, ההסתברות של כל אחת מ-5 האותיות להופיע על כל אחד מן המכסים היא 0.2.

אין תלות בין האותיות המוטבעות על מכסי המעדנים.

9 נק' א. מה תוחלת מספר המעדנים שיש לקנות עד לקבלת כל חמש האותיות בשם "תנובה"?

ב. אדם קנה 15 מעדני חלב מתוצרת "תנובה".

יהי  $X$  מספר האותיות השונות שהתקבלו ב-15 מעדנים אלו.

8 נק' 1. חשב את התוחלת של  $X$ .

8 נק' 2. חשב את השונות של  $X$ .

### שאלה 2 (25 נקודות)

פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי  $X$  נתונה על-ידי:  $f_X(x) = ae^{-x/3}$ ,  $x > 0$

6 נק' א. מצא את  $a$ .

7 נק' ב. חשב את  $P\{X < 4 | X > 2\}$ .

ג. נגדיר את המשתנה המקרי  $Y$  על-ידי:  $Y = X^2$ .

6 נק' 1. חשב את התוחלת של  $Y$ .

רמז: זהה את התפלגות  $X$  והעזר בתוחלתה ושונותה של ההתפלגות שזיהית.

6 נק' 2. מצא את פונקציית הצפיפות של  $Y$ .

### שאלה 3 (25 נקודות)

$X$  אנשים משתתפים בהגרלה, וידוע כי:  $P\{X = i\} = 0.01$ ,  $i = 1, 2, \dots, 100$

בהגרלה זו מוצעים למכירה 100 כרטיסים, בעלות של 15 ש"ח לכרטיס, ובדיוק אחד מ-100 הכרטיסים מוכה

את קונוהו בפרס של 500 ש"ח.

כל אדם שמשתתף בהגרלה קונה כרטיס אחד בלבד, ואם מספר המשתתפים קטן מ-100, ייתכן שאף אחד

ממשתתפי ההגרלה לא יזכה בפרס. במקרה כזה, שבו אף משתתף לא זוכה בפרס – הפרס נתרם לצדקה.

בחירת הכרטיסים על-ידי משתתפי ההגרלה אקראית.

8 נק' א. מהי ההסתברות שאף אחד ממשתתפי ההגרלה לא יזכה בפרס?

9 נק' ב. מהן תוחלת ושונות הרווח הנקי של מארגני ההגרלה?

8 נק' ג. יוסי משתתף בהגרלה.

האם המאורעות: "יוסי זוכה בפרס"  $B$  ו-  $\{X = i\}$ , עבור  $i = 1, 2, \dots, 100$ , בלתי-תלויים

זה בזה?

נמק את תשובתך.

#### שאלה 4 (25 נקודות)

(10 נק') א. יהי  $X$  משתנה מקרי כלשהו ששונויות חיוביות; ויהי  $Y = aX + b$ .

$$\rho(X, Y) = \begin{cases} +1 & , a > 0 \\ -1 & , a < 0 \end{cases} \quad \text{הראה כי:}$$

(15 נק') ב. יהי  $X$  משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת 10 ושונויות 1, ויהי  $Y$  משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת

20 ושונויות 4; ונניח כי  $X$  ו- $Y$  בלתי-תלויים זה בזה.

נגדיר את המשתנה המקרי  $W$  על-ידי:  $W = 2X - Y$ .

1. חשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של המשתנה המקרי  $W$ .

2. חשב את  $P\{W \geq -2.5\}$ .

(החישוב צריך להיות מדויק עד כמה שאפשר).

#### שאלה 5 (25 נקודות)

בכד 16 גולות צבעוניות, שכולן שונות זו מזו.

לגולות 8 צבעים שונים, ומכל צבע יש 2 גולות.

בכל יום, יותם מוציא באקראי 2 גולות ושם אותן בכיס ימין, ואחר-כך מוציא עוד 2 גולות ושם אותן בכיס שמאל.

אין תלות בין צבעי הגולות שיותם מוציא בימים שונים.

נגדיר את המאורעות:  $A =$  יותם שם לפחות באחד מכיסיו 2 גולות מאותו הצבע;

$B =$  4 הגולות בשני כיסיו של יותם הן מ-2 צבעים בסך-הכל.

(סדר 4 הגולות בכיסים אינו משנה, העיקר שארבעתן הן מ-2 צבעים בלבד)

(6 נק') א. חשב את תוחלת מספר הימים שיעברו עד שהמאורע  $A \cap B$  יתרחש בפעם השלישית.

(6 נק') ב. מהי שונות מספר הפעמים בחודש (של 30 ימים), שבהן המאורע  $B$  מתרחש?

(6 נק') ג. האם המאורעות  $A$  ו- $B$  בלתי-תלויים זה בזה?

(7 נק') ד. נתבונן על יום מקרי כלשהו ונגדיר את המשתנה המקרי  $X$  על-ידי "מספר הכיסים שיש בהם 2 גולות מאותו הצבע".

חשב את התוחלת של  $X$ .

**בהצלחה!**

**ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית,  $\Phi(x)$**

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

$x$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(x)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
$x$	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(x)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
$x$	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

# דף נוסחאות לבחינה

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב - 20425

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה היוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}, \quad i=0,1,\dots,n$	$np$	$np(1-p)$	$(pe^t + 1 - p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1} \cdot p, \quad i=1,2,\dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i!, \quad i=0,1,\dots$	$\lambda$	$\lambda$	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1} (1-p)^{i-r} \cdot p^r, \quad i=r, r+1, \dots$	$r/p$	$(1-p)r/p^2$	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r, \quad t < -\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i} / \binom{N}{n}, \quad i=0,1,\dots,m$	$nm/N$	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N} (1 - \frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n}, \quad i=m+1, m+2, \dots, m+n$	$m + (1+n)/2$	$(n^2 - 1)/12$	
אחידה	$1/(b-a), \quad a \leq x \leq b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt} - e^{at})/(tb - ta), \quad t \neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty$	$\mu$	$\sigma^2$	$\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda - t), \quad t < \lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1, \dots, n_r} \cdot p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}, \quad \sum n_i = n, \sum p_i = 1$			

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

נוסחת הבינום

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

כלל ההכלה וההפרדה

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

הסתברות מותנית

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

נוסחת הכפל

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i), \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S$$

נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}, \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S$$

נוסחת בייס

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx$$

תוחלת

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx$$

תוחלת של פונקציה של מ"מ

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

שונות

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של תהליך פואסון עם קצב  $\lambda$  ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר  $\lambda$ .

$$P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\}, \quad s, t \geq 0$$

תכונת חוסר-הזכרון

$$E[X | Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x | y) = \int x f_{X|Y}(x | y) dx \quad \text{תוחלת מותנית}$$

$$E[X] = E[E[X | Y]] = \sum_y E[X | Y = y] p_Y(y) \quad \text{נוסחת התוחלת המותנית}$$

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X | Y)] + \text{Var}(E[X | Y]) \quad \text{נוסחת השונות המותנית}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] \quad \text{תוחלת של סכום משתנים מקריים}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y] \quad \text{שונות משותפת}$$

$$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j) \quad \text{שונות של סכום משתנים מקריים}$$

$$\rho(X, Y) = \text{Cov}(X, Y) / \sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)} \quad \text{מקדם המתאם הלינארי}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X] \quad \text{תוחלת ושונות של סכום מקרי}$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N] \text{Var}(X) + (E[X])^2 \text{Var}(N)$$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad \text{פונקציה יוצרת מומנטים}$$

$$M_{X_1 + \dots + X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t) \quad \text{כאשר } X_i \text{ מ"מ ב"ת מתקיים:}$$

$$P\{X \geq a\} \leq E[X]/a, \quad a > 0, \quad \text{מ"מ אי-שלילי} \quad \text{אי-שוויון מרקוב}$$

$$P\{|X - \mu| \geq a\} \leq \sigma^2/a^2, \quad a > 0, \quad \mu, \sigma^2 < \infty \quad \text{אי-שוויון צ'בישב}$$

$$P\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)/\sqrt{n\sigma^2} \leq a\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a), \quad \mu, \sigma^2 < \infty, \quad X_i \text{ מ"מ ב"ת וש"ה} \quad \text{משפט הגבול המרכזי}$$

- אם  $A$  ו- $B$  מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע  $A$  יתרחש לפני המאורע  $B$  היא  $P(A)/[P(A) + P(B)]$ .
- סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר  $p$  הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני.
- סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של  $X$  בהינתן  $X + Y = n$ , כאשר  $X$  ו- $Y$  מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו  $p$ ) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x; \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1}, \quad n \neq -1; \quad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}; \quad \int b^{ax} dx = \frac{1}{a \ln b} b^{ax}$$