הוכחות

כלל 1: הוכחה של טענת קיום

להוכיח טענה מהצורה: קיים x כך ש φ

נציג אובייקט c ונראה כי הוא מקיים את φ.

מסגרת ההוכחה תיראה כך:

נתבונן ב c

נוכיח ש c מקיים את φ

לכן קיים x כך ש φ.

מש"ל

טענה

קיימת A כך ש $1 \in A$.

הוכחה

נתבונן ב $\{1\}$.

אכן, $1 \in \{1\}$

לכן קיימת A כך ש $1 \in A$.

מש"ל

טענה

קיים x כך ש $x^2-6x+8=0$

הוכחה

נתבונן ב 4.

$$4^2-6\cdot 4+8=16-24+8=0$$

לכן קיים x כך ש $x^2-6x+8=0$

מש"ל.

כיוטה

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}\begin{matrix}\nearrow 2\\ \searrow 4\end{matrix}$$

כלל 2: הוכחת טענה כללית

להוכחת טענה מהצורה

לכל x. ש

"ניקח" משתנה, לא נניח עליו דבר ונוכיח שהוא מק"מ את ש. מילת הקוד לכך היא "יהי".

מסגרת ההוכחה תיראה כך:

יהי x.

$\boxed{\text{נוכיח כי x מקיים ש}}$

לכן לכל x. ש

מש"ל

טענה

לכל x. $(x+1)^2 = x^2+2x+1$

הוכחה

יהי x.

$$(x+1)^2 = (x+1)(x+1) =$$

$$= x^2+x+x+1 =$$

$$= x^2+2x+1$$

לכן לכל x. $(x+1)^2 = x^2+2x+1$.

מש״ל.

כלל 3: הוכחת טענת גרירה

להוכחת טענה מהצורה:

אם φ אז ψ

נניח ש φ מתקיים ונוכיח ש ψ מתקיים.

מסגרת ההוכחה תראה כך:

נניח φ

נוכיח ψ

לכן אם φ אז ψ

מש״ל

טענה

אם $x \in \{1\}$ אז $x \in \{1,2\}$

הוכחה

נניח $x \in \{1\}$.

מכאן $x = 1$. $1 \in \{1,2\}$,

ולכן $x \in \{1,2\}$.

לכן אם $x \in \{1\}$ אז $x \in \{1,2\}$.

מש"ל

כלל 3.5: נביעה באופן ריק

אם ידוע ש φ טענה שקרית, אז הטענה:

אם φ אז ψ

תמיד נכונה.

דוגמה:

- אם $3^2 = -1$ אז $5 > 8$
- אם $2 \in \{8\}$ אז $2^2 = 4$

כלל 4: הוכחת טענת "או"

להוכחת טענה מהצורה

φ או ψ

נניח ש φ אינו מתקיים ונוכיח ψ.

אפשר גם הפוך: להניח (לא ψ) ולהוכיח φ

מסגרת ההוכחה תראה כך:

נניח (לא φ)

נוכיח ψ

לכן (φ או ψ)

מש"ל

טענה

לכל x. אם $x^2-6x+8=0$ אז ($x=2$ או $x=4$)

הוכחה

יהי x.

נניח $x^2-6x+8=0$

נניח $x\neq 2$

$x^2-6x+8=0$ כלומר $(x-2)(x-4)=0$

הנחנו $x\neq 2$, לכן $x-2\neq 0$.

נחלק את $(x-2)(x-4)=0$ ב $x-2$

ונקבל $x-4=0$ כלומר $\boxed{x=4}$ מש"ל.

טענה

לכל x. אם $x^2-6x+8=0$ אז ($x=2$ או $x=4$)

הוכחה

יהי x.

נניח $x^2-6x+8=0$ (1)

נניח $x \neq 2$ (2)

מ (1) נובע $(x-2)(x-4)=0$. (3)

מ (2) נובע $x-2 \neq 0$.

נחלק את (3) ב $x-2$

ונקבל $x-4=0$, כלומר $x=4$.

מש"ל.

כימות

1.

יהי x.

אזי: אם $x^2-6x+8=0$

אז $x=2$ או $x=4$

2.

יהי x.

נניח $x^2-6x+8=0$

אזי: $x=2$ או $x=4$

3

יהי x.

נניח $x^2-6x+8=0$

נניח $x \neq 2$

אז: $x=4$

כלל 4.5

1. מ φ נובע (φ או ψ)

2. מ ψ נובע (φ או ψ)

דוגמה:

מהטענה $1<2$ ניתן להסיק ($1<2$ או $1>3$)

כלל 5: הוכחת טענת "וגם".

להוכחת טענה מהצורה:

φ וגם ψ

נניח לחוד כל אחת מבין φ, ψ, והסדר אינו משנה.

המסגרת תראה כך:

> > נניח φ
>
> > נניח ψ
>
> לכן (φ וגם ψ) מש״ל

כלל ט: הוכחת טענת שלילה

להוכחת טענה מהצורה:

לא φ

נניח ש φ דוקא כן נכונה ונגיע לסתירה

לעובדה ידועה או לנתון.

למעט מקרים מאוד פשוטים - יש לרשום סתירה למה.

מסגרת ההוכחה:

נניח בשלילה φ

נוכיח סתירה

לכן לא φ.

מש"ל

טענה

$$(x+2)^2 \neq x^2+4x+3$$

הוכחה

נניח בשלילה

$$(x+2)^2 = x^2+4x+3$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{4x}+4 = \cancel{x^2}+\cancel{4x}+3$$

$$1=0$$

בסתירה.

לכן $(x+2)^2 \neq x^2+4x+3$.

מש"ל.

תרגיל

הוכיחו את הטענות הבאות:

1. $8 \in \{x \mid$ קיים n טבעי: $n \in \mathbb{N}$ וגם $x = 4n\}$

תשובה

נתבונן ב 2.

$2 \in \mathbb{N}$

וגם

$8 = 4 \cdot 2$

לכן $8 \in \{x \mid$ קיים n טבעי: $n \in \mathbb{N}$ וגם $x = 4n\}$

מש"ל.

טיוטה

מה צ״ל?

קיים n ש $\left(n\in\mathbb{N} \text{ וגם } 8=4n\right)$

$8=4n$

$\downarrow$

$8=4n$

$\downarrow$

$2=n$

נתבונן ב 2

צ״ל: $\left(2\in\mathbb{N} \text{ וגם } 8=4\cdot 2\right)$

נתבונן ב 2

נוכיח $2\in\mathbb{N}$

נוכיח $8=4\cdot 2$

(2) $7 \notin \{x \mid$ קיים n כך ש $n \in \mathbb{N}$ וגם $x=4n\}$

הוכחה

יהי n.

נניח $n \in \mathbb{N}$. (1)

נניח בשלילה $7=4n$.

נחלק ב 4 ונקבל:

$n = 1\frac{3}{4}$

בסתירה ל (1).

לכן $7 \notin \{x \mid$ קיים n כך ש $n \in \mathbb{N}$ וגם $x=4n\}$

מש"ל.

שלילה

מה צ"ל?

לא קיים n ש ($n\in\mathbb{N}$ וגם $7=4n$)

$$\boxed{\boxed{\text{לכל } n.\ (n\notin\mathbb{N} \text{ או } 7\neq 4n)}}$$

יהי n

צ"ל: $n\notin\mathbb{N}$ או $7\neq 4n$

יהי n.

נניח $n\in\mathbb{N}$.

צ"ל $7\neq 4n$

יהי n.

נניח $n \in \mathbb{N}$

נניח בשלילה $7=4n$

נגיע לסתירה

הכלה

תהיינה A,B קבוצות.

נאמר כי A חלקית ל B או A מוכלת ב B כאשר:

לכל x. אם $x \in A$ אז $x \in B$.

ונסמן $A \subseteq B$.

טענה

לכל A,B,C. אם ($A\subseteq B$ וגם $B\subseteq C$) אז $A\subseteq C$.

לכל x. אם $x\in A$ אז $x\in B$

לכל x. אם $x\in B$ אז $x\in C$

לכל x. אם $x\in A$ אז $x\in C$.

הוכחה

תהיינה A,B,C.

נניח ($A\subseteq B$ וגם $B\subseteq C$) (1)

יהי x.

נניח $x\in A$. (2)

מ (1) נובע $A\subseteq B$. מ (2) $x\in B$. (3)

מ (1) נובע $B\subseteq C$. מ (3) $x\in C$.

מש"ל.

הוכחה

תהיינה A,B,C.

צ"ל: אם $A\subseteq B$ וגם $B\subseteq C$ אז $A\subseteq C$

תהיינה A,B,C.

נניח $A\subseteq B$ וגם $B\subseteq C$

צ"ל: $A\subseteq C$

לכל x.

אם $x\in A$

אז $x\in C$.

תהיינה A, B, C.

נניח $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq C$

יהי x.

צ"ל: אם $x \in A$ אז $x \in C$

תהיינה A, B, C.

נניח $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq C$

יהי x.

נניח $x \in A$

צ"ל $x \in C$.

הטענה הפנימית – מוכחת.

תרגיל

הוכיחו או הפריכו:

(i) $\{1\} \subseteq \{1,\{2\}\}$

תשובה

יהי x.

נניח $x \in \{1\}$.

אז $x = 1$.

לכן $x \in \{1,\{2\}\}$.

לכן הטענה נכונה.

מש"ל.

דוגמה

מה צ"ל? לכל x. אם $x \in \{1\}$ אז $x \in \{1,\{2\}\}$.

יהי x.

נניח $x \in \{1\}$

צ"ל: $x \in \{1,\{2\}\}$

(2) $\{2\} \subseteq \{1,\{2\}\}$

<u>תשובה</u>

נתבונן ב 2.

אכן, $2 \in \{2\}$ גם $2 \notin \{1,\{2\}\}$.

לכן $\{2\} \not\subseteq \{1,\{2\}\}$

והטענה אינה נכונה.

מש"ל.

כימות

מה $\square$''?

לכן (לכל x. אם $x \in \{2\}$ אז $x \in \{1,\{2\}\}$)

ק״ם x כך ש ($x \in \{2\}$ וגם $x \notin \{1,\{2\}\}$)

הכלה ממש

תהיינה A, B קבוצות.

נאמר כי A מוכלת ממש ב B או

A חלקית ממש ל B כאשר:

לכל x. אם $x \in A$ אז $x \in B$

וגם

קיים y עם ש $y \in B$ וגם $y \notin A$.

נסמן $A \subset B$

הכלה ממש

תהיינה A,B קבוצות.

נאמר כי A מוכלת ממש ב B או

A חלקית ממש ל B כאשר:

$$A \subseteq B$$

וגם

$$B \not\subseteq A$$

נסמן $A \subset B$

תרגיל

הוכיחו או הפריכו:

① $\{1\} \subset \{1,\{2\}\}$

תשובה

1. הוכחנו בתרגיל קודם ש $\{1\} \subseteq \{1,\{2\}\}$.

נוכיח כי $\{1,\{2\}\} \nsubseteq \{1\}$:

נתבונן ב $\{2\}$.

אכן, $\{2\} \in \{1,\{2\}\}$

2. וגם $\{2\} \notin \{1\}$ לכן $\{1,\{2\}\} \nsubseteq \{1\}$

א ① . ② נכון $\{1\} \subset \{1, \{2\}\}$.

א צ״ל.

טיוטה

מה צ"ל? $\{1\} \subseteq \{1,\{2\}\}$ וגם $\{1,\{2\}\} \nsubseteq \{1\}$

$\{1\} \subseteq \{1,\{2\}\}$

$\{1,\{2\}\} \nsubseteq \{1\}$

הוכחנו

צ"ם X כך ש $X \in \{1,\{2\}\}$

וגם

$X \notin \{1\}$

נתבונן ב $\{2\}$

צ"ל: $\{2\} \in \{1,\{2\}\}$

וגם $\{2\} \notin \{1\}$

(2) $\{2\} \subset \{2\}$

תשובה

יהי x.

נניח $x \in \{2\}$.

אז $x \in \{2\}$.

לכן $\{2\} \subseteq \{2\}$. מכלל 4.5 נובע

($\{2\} \neq \{2\}$ או $\{2\} \subseteq \{2\}$) כלומר $\{2\} \not\subset \{2\}$.

הטענה אינה נכונה.

מש"ל.

מה ב״ג?

הטענה אומרת ש: $\{2\} \subseteq \{2\}$ וגם $\{2\} \nsubseteq \{2\}$.

שלילתה אומרת:

$$\boxed{\{2\} \nsubseteq \{2\} \quad \underline{\text{או}} \quad \{2\} \subseteq \{2\}}$$

למפגש הבא

- לקרוא ולדעת יחידה 2.
- שאלות מהפורום.
- לחזור על התבניות גם של ניסוח ושלילה וגם של הוכחה.