תשובה 1

א. מהנתון, תהי $f: A-B \to B-A$ חד-חד-ערכית ועל.

בעזרת פילוג החיתוך לגבי האיחוד, $A=(A\cap B')\cup(A\cap B)$,

כלומר $A=(A-B)\cup(A\cap B)$, וזהו **איחוד זר** (איחוד של שתי קבוצות זרות).

בדומה, $B=(B-A)\cup(A\cap B)$.

נגדיר $g: A\to B$ כך :

$$g(a)=\begin{cases} f(a) & a\in A-B \\ a & a\in A\cap B \end{cases}$$

מהנתון לגבי f נקבל ש- g מעבירה את $A-B$ באופן **חד-חד-ערכי על** $B-A$,

ומכיוון ש- g פועלת כזהות על $A\cap B$, היא מעבירה את $A\cap B$ באופן חד-חד-ערכי על עצמו.

בהתחשב בכך ש- $B=(B-A)\cup(A\cap B)$, לא קשה להראות ש- g היא חד-חד-ערכית ועל B.

הוכחה של טענה כללית יותר, ממנה זה נובע, ראו בפרק 5, טענה 5.9 !

הראינו פונקציה **חד-חד-ערכית** מ- A **על** B , לכן הן שוות-עוצמה.

ב. כאמור, כללית $A=(A-B)\cup(A\cap B)$, וזהו איחוד זר,

וכן $B=(B-A)\cup(A\cap B)$ וזהו איחוד זר.

מכאן, אם A,B **סופיות**, ומתקיים $|A|=|B|$ אז :

$$|A-B|=|A|-|A\cap B|=|B|-|A\cap B|=|B-A|$$

ג. לדוגמא נקח $A=\mathbf{N}$, ו- B היא קבוצת הטבעיים הזוגיים (השלימו הבדיקה).

תשובה 2

א. עוצמת קבוצת המשוואות הללו כעוצמת הקבוצה $(\mathbf{Z}-\{0\})\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

כידוע, השלמים וכן השלמים ללא אפס הם קבוצות אינסופיות בנות-מניה.

מכאן, ומהגדרת כפל עוצמות : $|(\mathbf{Z}-\{0\})\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}|=\aleph_0\cdot\aleph_0\cdot\aleph_0$

ומטענה 5.15ג בפרק 5, $\aleph_0\cdot\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$.

ב. תהי M קבוצת המשוואות מהסוג (*). ראינו ש- $|M|=\aleph_0$.

מכיוון ש- M בת-מניה, נסדר אותה **בסדרה אינסופית** : $M=\{m_0, m_1, m_2,\ldots\}$.

שימו לב שסידור כזה, עם אינדקסים שהם המספרים הטבעיים, אפשרי אסם הקבוצה בת-מניה.

תהי A קבוצת הפתרונות הממשיים של משוואות מ- M.

נגדיר פונקציה $f : A \to M \times \{1,2\}$:

בהינתן $x \in A$, תהי m המשוואה **הראשונה (!)** ש- x הוא פתרון שלה ,

בסדרת המשוואות $m_0, m_1, m_2,\ldots$. כעת,

* אם x הוא הפתרון הממשי היחיד של m , נגדיר $f(x) = (m,1) \in M \times \{1,2\}$.

* אם x הוא אחד משני פתרונות ממשיים של m , נגדיר את $f(x)$ להיות $(m,1)$ או $(m,2)$

בהתאם לשאלה אם x הוא הגדול או הקטן מבין שני הפתרונות של m .

בכך הגדרנו $f : A \to M \times \{1,2\}$. מובן ש- f היא חד-חד-ערכית :

אם $f(x) = f(y)$ אז מהגדרת f, המספרים x,y הם פתרונות של אותה משוואה.

הם לא יכולים להיות פתרונות שונים של המשוואה, כי אז ה"קואורדינטה" הימנית של $f(x)$

(המספר 1 או 2) היתה שונה מה"קואורדינטה" הימנית של $f(y)$. לכן $x = y$.

נשים לב ש- $M \times \{1,2\} = M \times \{1\} \cup M \times \{2\}$, וזהו איחוד זר של שתי קבוצות בנות-מניה.

לכן $| M \times \{1,2\} | = \aleph_0$.

מכאן ומהגדרת $\le$ בין עוצמות, העובדה ש- $f : A \to M \times \{1,2\}$ היא חח"ע מראה לנו

כי $| A | \le \aleph_0$.

מצד שני, לכל n טבעי חיובי, $\sqrt{n} \in A$, כי הוא פתרון של המשוואה $1x^2 + 0x + (-n) = 0$.

לכן $| A | \ge \aleph_0$.

משני האי-שוויונים, לפי משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין, $| A | = \aleph_0$ (האמת שבמקרה של קבוצות בנות מניה אין הכרח להשתמש בקנטור-שרדר-ברנשטיין : תת-קבוצה אינסופית של קבוצה בת-מניה היא בת-מניה. זו טענה שלא קשה להוכיח באופן ישיר, וקשורה לעצם הגדרת המושג "קבוצה אינסופית").

ג. מהגדרת הקבוצות B,A, הן זרות זו לזו, והאיחוד של שתיהן הוא קבוצת הממשיים $\mathbf{R}$.

ראינו ש- A בת-מניה. אילו גם B היתה בת-מניה, אז לפי שאלה 4.3ד בעמ' 119 בספר,

$A \cup B$ היתה בת-מניה, כלומר $\mathbf{R}$ היתה בת-מניה, בניגוד למשפט 4.5.

לכן B אינה בת-מניה.

תשובה 3

א. לפי הגדרת יחס (רלציה) מעל קבוצה (סעיף 2.3.3), קבוצת היחסים מעל $\mathbf{N}$ **היא בדיוק** $P(\mathbf{N} \times \mathbf{N})$ (לא רק שיש להן אותה עוצמה, אלא $P(\mathbf{N} \times \mathbf{N})$ **היא** קבוצת היחסים מעל $\mathbf{N}$!).

כידוע, $| \mathbf{N} \times \mathbb{N} | = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

מכאן לפי משפט 5.23 ומשפט 5.26 : $| P(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) | = 2^{\aleph_0} = C$.

ב. תהי T קבוצת היחסים הטרנזיטיביים מעל **N**.

T חלקית לקבוצת כל היחסים מעל **N**, לכן (סעיף א כאן + שאלה 5.1): $|T| \leq C$.

מצד שני, נגדיר פונקציה $P(\mathbf{N}) \to T$ כך:

לכל $A \in P(\mathbf{N})$ נתאים את היחס I_A , אותו נראה כיחס מעל $\mathbb{N}$. מובן שהוא טרנזיטיבי.

התאמה זו היא חד-חד-ערכית (ניתן למצוא את A מתוך I_A) ולכן $C = |P(\mathbf{N})| \leq |T|$.

משני האי-שוויונים, לפי קנטור-שרדר-ברנשטיין, נקבל $|T| = C$.

תשובה 4

א. תהיינה A_1, A_2 , B_1, B_2 קבוצות שעוצמותיהן בהתאמה k_1, k_2 , m_1, m_2 .

נתון $k_1 \leq k_2$, $m_1 \leq m_2$.

כדי לקצר מעט את ההוכחה ניעזר בטריק השימושי הבא: אנו חופשים לבחור כראות עינינו את הקבוצות המייצגות את העוצמות השונות, כל עוד הקבוצות שנבחר הן בעלות העוצמות הנדרשות.

מתוך הנתון, לפי שאלה 5.1א בחוברת "פרק 5", קיימת קבוצה חלקית של A_2 שעוצמתה שווה לעוצמת A_1 , וקיימת קבוצה חלקית של B_2 שעוצמתה שווה לעוצמת B_1 .

לכן **ב.ה.כ. נניח** $A_1 \subseteq A_2$, $B_1 \subseteq B_2$ (!)

כעת מהגדרת כפל עוצמות $k_1 \cdot m_1 = |A_1 \times B_1|$, $k_2 \cdot m_2 = |A_2 \times B_2|$.

אבל מכיוון ש- $A_1 \subseteq A_2$, $B_1 \subseteq B_2$, מהגדרת מכפלה קרטזית נקבל $A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$.

לכן , בהסתמך על שאלה 5.1ב, $k_1 \cdot m_1 \leq k_2 \cdot m_2$.

ב. מצד אחד, $\aleph_0 \leq C$ ולכן בעזרת סעיף א, $\aleph_0 \cdot C \leq C \cdot C = C$.

מצד שני $1 \leq \aleph_0$ ולכן בדומה $C = 1 \cdot C \leq \aleph_0 \cdot C$.

משני הכיוונים יחד, בעזרת קנטור-שרדר-ברנשטיין, נובע המבוקש.

ג. לפי משפט 5.26, $2^{\aleph_0} = C$. נציב זאת ונקבל

$$C^C = (2^{\aleph_0})^C = 2^{\aleph_0 \cdot C} = 2^C .$$

במעברים נעזרנו במשפט 5.27ג ובסעיף ב של שאלה זו.

תשובה 5

ניעזר במשפט 5.13ב. קבוצת הממשיים **R** היא אינסופית ואינה בת-מניה.

הקבוצה A חלקית לה ובת-מניה. לפי המשפט הנ"ל, $|\mathbf{R} - A| = |\mathbf{R}| = C$.

איתי הראבן