תשובה 1

א. יחס מעל A הוא קבוצה חלקית כלשהי של $A \times A$.
קבוצת כל היחסים מעל A היא אפוא $P(A \times A)$.
$|P(A \times A)| = 2^9 = 512$

ב. S הוא רפלקסיבי וסימטרי אבל אינו טרנזיטיבי. נוכיח שאינו טרנזיטיבי:
עלינו למצוא $R_1, R_2, R_3 \in M$ כך ש-
$(R_1, R_2) \in S$, $(R_2, R_3) \in S$, אבל $(R_1, R_3) \notin S$.
במלים אחרות, עלינו למצוא $R_1, R_2, R_3 \in M$ כך ש-
(*) $R_1R_2 = R_2R_1$, $R_2R_3 = R_3R_2$, אבל $R_1R_3 \neq R_3R_1$.

כידוע, היחס הריק מתחלף בכפל עם כל יחס. גם I_A מתחלף בכפל עם כל יחס.
לכן אם נקח את R_2 להיות היחס הריק או יחס היחידה, יתקיימו שני השוויונים של (*),
בלי קשר לשאלה מהם R_1, R_3.
כל שנותר לנו הוא למצוא R_1, R_3 המקיימים $R_1R_3 \neq R_3R_1$.
בקצת ניסוי וטעיה לא קשה למצוא כאלה – השלימו בעצמכם.

תשובה 2

א. **לא**. למשל אם $R_1 = \{(1,2)\}$, $R_2 = \{(2,1)\}$ אז $R_1 \neq R_2$ אבל $s(R_1) = s(R_2)$.

ב. **לא**. בתמונה של s נמצאים רק יחסים סימטריים, וכמובן יש ב- M יחסים שאינם סימטריים, כגון $\{(1,2)\}$.

ג. **לא.** מיצאו בעצמכם דוגמה נגדית.

ד. **כן**. זה נובע ללא חישובים כלל, משתי תכונות בסיסיות של סגור:
הסגור הסימטרי של יחס כלשהו הוא סימטרי.
בהינתן יחס **סימטרי**, הסגור הסימטרי שלו הוא היחס הנתון עצמו.

תשובה 3

א. רפלקסיביות: תהי $f \in F$. באופן טריביאלי, לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le f(n)$.

לכן $(f,f) \in K$.

אנטי-סימטריות: תהיינה $f,g \in F$, ונניח ש- $(f,g) \in K$ וגם $(g,f) \in K$.

כלומר לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le g(n)$ וגם לכל $n \in \mathbf{N}$, $g(n) \le f(n)$.

משמע לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le g(n)$ וגם $g(n) \le f(n)$.

לכן, מתכונת האנטי-סימטריות של היחס $\le$ בטבעיים, לכל $n \in \mathbf{N}$, $g(n) = f(n)$.

כלומר $f = g$.

טרנזיטיביות: תהיינה $f,g,h \in F$, ונניח ש- $(f,g) \in K$ וגם $(g,h) \in K$.

כלומר לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le g(n)$ וגם לכל $n \in \mathbf{N}$, $g(n) \le h(n)$.

משמע לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le g(n)$ וגם $g(n) \le h(n)$.

מתכונת הטרנזיטיביות של היחס $\le$ בטבעיים, לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le h(n)$.

כלומר $(f,h) \in K$.

ב. תהי $f(n) = n$ ותהי $g(n) = 7$ (הפונקציה הקבועה המחזירה ערך 7 עבור כל n).

מכיוון ש- $f(1) > g(1)$, נקבל $(f,g) \notin K$.

מצד שני $f(10) < g(10)$ ולכן $(g,f) \notin K$.

מצאנו שני איברים של F שהיחס K אינו משווה ביניהם, לכן K אינו סדר-מלא.

ג. **לא**. תהי $f \in F$, נראה ש- f **אינה** איבר מקסימלי.

נתבונן בפונקציה $g(n) = f(n) + 1$. מובן ש- $g \ne f$.

לכל $n \in \mathbf{N}$ מתקיים $f(n) \le g(n)$. לכן $(f,g) \in K$. לפיכך f אינה איבר מקסימלי.

מכיון שאין איבר מקסימלי, ודאי אין איבר גדול ביותר (מדוע?).

ד. הפונקציה המחזירה 0 לכל n היא האיבר הקטן ביותר (מדוע?).

לפיכך היא גם האיבר המינימלי **היחיד** (מדוע?)

ה. בהינתן $f \in F$, תהי $g \in F$ פונקציה **המתלכדת** עם f (כלומר $g(n) = f(n)$) בכל מקום פרט ל- $n = 106$, שעבורו נגדיר: $g(106) = f(106) + 1$.

מובן ש- $(f,g) \in K$. הוכיחו בעצמכם שאין אף פונקציה "בין" שתיהן.

משמע g **מכסה** את f.

תשובה 4

בדיקה: נציב $n=0$: $2\cdot 3^0+(-2)^1=2-2=0$.

נציב $n=1$: $2\cdot 3^1+(-2)^2=6+4=10$.

בדקנו גם עבור $n=1$ כי בשלב המעבר אנו מתכוונים לבצע אינדוקציה תוך שימוש ב"שני צעדים אחורה" ולא רק צעד אחד.

מעבר: נניח שהטענה נכונה עבור n ועבור $n-1$ **(שניהם!)**

כלומר נניח $f(n) = 2\cdot 3^n+(-2)^{n+1}$, $f(n-1) = 2\cdot 3^{n-1}+(-2)^n$,

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר נוכיח ש- $f(n+1) = 2\cdot 3^{n+1}+(-2)^{n+2}$.

כלומר נוכיח ש- (כתבנו בצורה אחרת את הביטוי מהשורה הקודמת).

מההגדרה הרקורסיבית של f ,

$$f(n+1) = f(n)+6f(n-1)$$

נציב את הנחות האינדוקציה:

$$= 2\cdot 3^n+(-2)^{n+1} + 6\left(2\cdot 3^{n-1}+(-2)^n\right)$$

נפתח ונסדר מחדש:

$$= 2\cdot 3^n + 12\cdot 3^{n-1}+(-2)^{n+1}+6(-2)^n$$

$$= 18\cdot 3^{n-1} + 4(-2)^n$$

$$= 2\cdot 3^{n+1}+(-2)^{n+2}$$

הראינו שהטענה נכונה עבור $n+1$.

לפי עקרון האינדוקציה השלמה, מהבדיקה והמעבר יחד נובע שהטענה נכונה לכל n טבעי.

ב. **לא.** $f(n) = 2\cdot 3^n+(-2)^{n+1}=2\cdot(3^n-(-2)^n)$,

לפיכך $f(n)$ הוא תמיד מספר **זוגי**. לכן למשל 1 אינו בתמונה של f .

ג. הסעיף בוטל אבל נענה עליו: התשובה היא **לא**.

מנוסחת הנסיגה וערכי ההתחלה הנתונים (או מהנוסחה המפורשת) $f(2) = f(1)=10$,

משמע הפונקציה אינה חד-חד-ערכית.

איתי הראבן