20416 - תאריך הבחינה: 24.8.2015 (סמסטר 2015ב - מועד 4ב / 93)

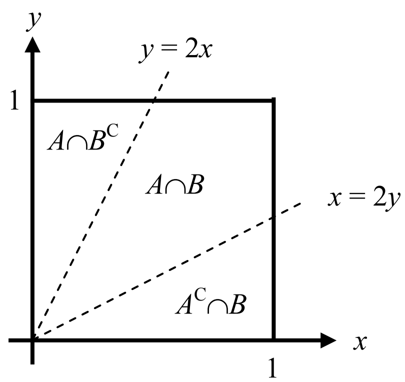
שאלה 1

א. נסמן ב- X_i אורך של שיחה מקרית שהמוקדנית מקבלת. נתון כי $N \sim Po(m)$, כי $X_i \sim Exp(\lambda)$ לכל i, וכי X_i בלתי-תלויים בינם לבין עצמם וגם בלתי-תלויים ב- N.

כמו כן, המשתנה המקרי Y מוגדר כאורך הכולל של השיחות, לפיכך: $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$

ומכאן כי:
$$M_Y(t) = E\left[\left(M_{X_1}(t)\right)^N\right] = E\left[\left(\tfrac{\lambda}{\lambda-t}\right)^N\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n e^{-m}\cdot\tfrac{m^n}{n!} = e^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{\lambda m}{\lambda-t}\right)^n\cdot\tfrac{1}{n!}$$
$$= \exp\{-m + \tfrac{\lambda m}{\lambda-t}\} = \exp\{\tfrac{-\lambda m + tm + \lambda m}{\lambda-t}\} = e^{\frac{tm}{\lambda-t}} \qquad , \qquad t < \lambda$$

ב. באיור שלהלן מתואר תחום ההתפלגות המשותפת של X ו- Y וכן התחומים שבהם מתרחשים המאורעות A ו- B.



הואיל ולמשתנים המקריים הבלתי-תלויים X ו- Y יש התפלגות אחידה רציפה, אז גם ההתפלגות המשותפת שלהם אחידה על-פני הריבוע המשורטט באיור. לפיכך, הנפח מעל לדלתון המרכזי הוא 0.5, והנפח מעל לכל אחד משני המשולשים הוא 0.25.

מכאן מקבלים כי: $P(A \mid B) = \frac{0.5}{0.5+0.25} = \frac{2}{3}$

שאלה 2

א. סכום כל הספרות בשורה הוא 21. נסמן ב- Y את הספרה האחרונה בשורה. בהנחה שכל הסידורים מתקבלים בהסתברויות שוות, למשתנה המקרי Y יש התפלגות אחידה בדידה על המספרים 1, ..., 6.

כעת, סכום חמש הספרות הראשונות בשורה הוא $21 - Y$, ומכאן כי:

$$\text{Var}(21-Y) = \text{Var}(Y) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12} = 2.91\overline{6}$$

ב. נגדיר:
$$X_i = \begin{cases} 1 & , \text{אחרי הספרה ה-}i\text{-ית יש ספרה גדולה יותר} \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases} \qquad \text{לכל } i = 1,\ldots,5$$

ונקבל כי: $X = \sum_{i=1}^{5} X_i$ = מספר הספרות בשורה שבמקום שלימינן יש ספרה גדולה יותר.

עתה, מטעמי סימטריה, לכל $i = 1,\ldots,5$ מתקיים: $E[X_i] = P\{X_i = 1\} = 0.5$

לפיכך: $E[X] = \sum_{i=1}^{5} E[X_i] = 5 \cdot 0.5 = 2.5$

ג. לכל $i = 1,\ldots,5$ מתקיים: $\mathrm{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$

ולכל $1 \le i < j \le 5$ מתקיים:

$$P\{X_i = 1, X_j = 1\} = \begin{cases} \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} & , \quad i = j-1 \\ \frac{\binom{4}{2}}{4!} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} & , \quad i < j-1 \end{cases}$$

לכן:

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{12} & , \quad i = j-1 \\ \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 & , \quad i < j-1 \end{cases}$$

ומכאן:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{5} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 5 \cdot 0.25 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{12} + 0 = \frac{7}{12} = 0.58\overline{3}$$

הסבר: כאשר $i = j-1$, למעשה מתבוננים על שלושה מקומות בשורה:

מקומות i, $i+1 = j$ ו- $i+2 = j+2$.

יש !3 אפשרויות לסדר כל שלישיית מספרים שנמצאת במקומות הללו, ורק בסידור אחד מתוכם מתקיים המאורע $\{X_i = 1, X_j = 1\}$.

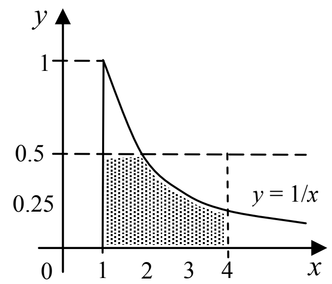
כאשר $i < j-1$, למעשה מתבוננים על ארבעה מקומות בשורה: מקומות i, $i+1$, j ו- $j+1$.

יש !4 אפשרויות לסדר כל רביעיית מספרים שנמצאת במקומות הללו, ולכל בחירה של זוג מספרים מתוך ה- 4 שיהיה במקומות i ו- $i+1$ יש סידור אחד בלבד שבו מתקיים המאורע $\{X_i = 1, X_j = 1\}$. כעת, הואיל ויש $\binom{4}{2}$ אפשרויות לבחור שני מספרים מתוך 4, מקבלים את התוצאה הרשומה לעיל.

שימו לב, שבמקרה זה, מקבלים כי השונות המשותפת מתאפסת, הואיל והסידור הפנימי של כל זוג מספרים אינו משפיע על הסידור הפנימי של הזוג האחר.

שאלה 3

א.



$$F_{X,Y}(4,\tfrac{1}{2}) = P\{X \le 4, Y \le \tfrac{1}{2}\} = \int_1^2 \int_0^{1/2} 3xy^2\,dy\,dx + \int_2^4 \int_0^{1/x} 3xy^2\,dy\,dx$$

$$= \int_1^2 xy^3\Big|_0^{1/2} dx + \int_2^4 xy^3\Big|_0^{1/x} dx = \int_1^2 \frac{x}{8}dx + \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{16}\Big|_1^2 - \frac{1}{x}\Big|_2^4 = \frac{4}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{7}{16}$$

ב.

$$f_X(x) = \int_0^{1/x} 3xy^2\,dy = xy^3\Big|_0^{1/x} = \frac{1}{x^2} \qquad , \qquad x > 1$$

לכל $x > 1$ מתקיים:

$$f_{Y|X}(y\,|\,x) = \frac{3xy^2}{1/x^2} = 3x^3y^2 \qquad , \qquad 0 < y < \frac{1}{x}$$

לפיכך:

$$E[Y\,|\,X = x] = \int_0^{1/x} y\,f_{Y|X}(y\,|\,x)\,dy = \int_0^{1/x} 3x^3y^3\,dy = \frac{3}{4}x^3y^4\Big|_0^{1/x} = \frac{3}{4x}$$

ג. נעזר במשפט 7.1 (עמודים 309-310 בספר הקורס).

נסמן:
$$s = g_1(x,y) = 3x \qquad x = h_1(s,t) = s/3$$
$$t = g_2(x,y) = 2y \qquad y = h_2(s,t) = t/2$$

מהקשר בין (X,Y) ל- (S,T) נובע, שהמשתנה המקרי S מקבל ערכים גדולים מ- 3 ואילו המשתנה המקרי T מקבל ערכים בין 0 ל- $6/s$.

כעת, מתקיים:
$$|J(x,y)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

ומכאן שלכל $s > 3$ ולכל $0 < t < 6/s$ מתקיים:
$$f_{S,T}(s,t) = f_{X,Y}(x,y)|J(x,y)|^{-1} = 3 \cdot \tfrac{1}{3}s \cdot \tfrac{1}{4}t^2 \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{24}st^2$$

דרך נוספת:

לכל $s > 3$ ולכל $0 < t < 6/s$ מתקיים:
$$F_{S,T}(s,t) = P\{S \le s, T \le t\} = P\{3X \le s, 2Y \le t\} = P\{X \le \tfrac{s}{3}, Y \le \tfrac{t}{2}\} = F_{X,Y}(\tfrac{s}{3},\tfrac{t}{2})$$

ומכאן:
$$f_{S,T}(s,t) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}F_{S,T}(s,t) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}F_{X,Y}(\tfrac{s}{3},\tfrac{t}{2}) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot f_{X,Y}(\tfrac{s}{3},\tfrac{t}{2}) = \tfrac{1}{6}\cdot 3 \cdot \tfrac{s}{3}\cdot(\tfrac{t}{2})^2 = \tfrac{1}{24}st^2$$

שאלה 4

א.
$$E[X] = \int_{-1}^{0} \tfrac{1}{3}x\,dx + \int_{0}^{1} \tfrac{2}{3}x\,dx = \tfrac{1}{6}x^2\Big|_{-1}^{0} + \tfrac{2}{6}x^2\Big|_{0}^{1} = -\tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{6}$$
$$E[X^2] = \int_{-1}^{0} \tfrac{1}{3}x^2dx + \int_{0}^{1} \tfrac{2}{3}x^2dx = \tfrac{1}{9}x^3\Big|_{-1}^{0} + \tfrac{2}{9}x^3\Big|_{0}^{1} = \tfrac{1}{9} + \tfrac{2}{9} = \tfrac{1}{3}$$
$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \tfrac{1}{3} - \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 = \tfrac{11}{36}$$

ב.
$$F_X(x) = P\{X \le x\} = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \tfrac{1}{3}(x+1) & -1 \le x < 0 \\ \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$

ג1.
$$P\{S \le 13\} = 1 - P\{S > 13\} \ge 1 - P\{S \ge 13\} = 1 - P\{S \ge 13 - 60\cdot\tfrac{1}{6}\} = 1 - P\{S - 60\cdot\tfrac{1}{6} \ge 3\}$$
$$\ge 1 - \frac{\mathrm{Var}(S - 60\cdot\frac{1}{6})}{\mathrm{Var}(S - 60\cdot\frac{1}{6}) + 3^2} = 1 - \frac{60\cdot\frac{11}{36}}{60\cdot\frac{11}{36} + 9} = 1 - \frac{18.\bar{3}}{27.\bar{3}} = \frac{27}{82} = 0.329$$

ג2.
$$P\{S \le 13\} = P\left\{\sum_{i=1}^{60} X_i \le 13\right\} \cong P\left\{Z \le \frac{13 - 60\cdot\frac{1}{6}}{\sqrt{60\cdot\frac{11}{36}}}\right\} = P\{Z \le 0.7006\} = 0.758$$

שאלה 5

א1. $P\{Y<20\}=P\{X\le 9\}=1-P\{X>9\}=1-0.8^9=0.8658$

א2. $E[Y]=4P\{X=1\}+8P\{X=2\}+\sum_{i=3}^{\infty}2iP\{X=i\}$

$$=4\cdot 0.2+8\cdot 0.2\cdot 0.8+2(E[X]-P\{X=1\}-2P\{X=2\})$$

$$=2.08+2(5-0.2-2\cdot 0.2\cdot 0.8)=11.04$$

ב. נסמן ב- n_i את המספר שמקבל שחקן i, לכל $i=1,2,...,5$. שימו לב, שאין שום חשיבות לערכים המסוימים של חמשת המספרים. מספיקה הידיעה שהם שונים זה מזה.

$X=0$ כאשר לשחקן 1 מספר קטן יותר מאשר לשחקן 2. במקרה זה, אין שום חשיבות למספרים שבידי שחקנים 3, 4 ו- 5. מהסימטריה בין שחקנים 1 ו-2 מקבלים: $P\{X=0\}=P\{n_1<n_2\}=1/2$

$X=1$ כאשר לשחקן 1 מספר גדול יותר מאשר לשחקן 2 וקטן יותר מאשר לשחקן 3. מכיוון שאפשר לסדר 3 מספרים שונים ב- !3 סידורים, ורק באחד מהם $X=1$, מקבלים כי:

$$P\{X=1\}=P\{n_2<n_1<n_3\}=1/3!=1/6$$

באותו אופן – מכיוון שאפשר לסדר 4 מספרים שונים ב- !4 סידורים, כאשר רק בשניים מהם $X=2$, מקבלים כי: $P\{X=2\}=P\{n_2,n_3<n_1<n_4\}=2!/4!=1/12$

ומכיוון שב- !3 מתוך !5 הסידורים האפשריים של 5 מספרים שונים מתקיים $X=3$, מקבלים:

$$P\{X=3\}=P\{n_2,n_3,n_4<n_1<n_5\}=3!/5!=1/20$$

ולבסוף, מהסימטריה בין חמשת השחקנים מקבלים: $P\{X=4\}=P\{n_1 \text{ הכי גדול}\}=1/5$

כעת, נחשב את סטיית-התקן של X.

התוחלת של X: $E[X]=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{12}+3\cdot\frac{1}{20}+4\cdot\frac{1}{5}=\frac{77}{60}=1.2833$

השונות של X: $E[X^2]=0^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{12}+3^2\cdot\frac{1}{20}+4^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{83}{20}=4.15$

$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{83}{20}-\left(\frac{77}{60}\right)^2=2.50306$$