20416 - תאריך הבחינה: 20.7.2015 (סמסטר 2015ב - מועד א6 / 87)

שאלה 1

א. נמצא תחילה את פונקציית ההתפלגות המצטברת המותנית המתאימה. לכל $a > 0$ מתקיים:

$$F_{X|X>Y}(a) = P\{X \le a \mid X > Y\} = \frac{P\{X \le a, X > Y\}}{P\{X > Y\}} = \frac{\int_0^a \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} dydx}{0.5}$$

$$= 2\int_0^a \lambda e^{-\lambda x} \underbrace{\int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy}_{=F_Y(x)} dx = 2\int_0^a \lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})dx = 2\int_0^a \lambda e^{-\lambda x}dx - \int_0^a 2\lambda e^{-2\lambda x}dx$$

$$= 2(1-e^{-\lambda a}) - (1-e^{-2\lambda a}) = 1 - 2e^{-\lambda a} + e^{-2\lambda a}$$

לפיכך, לכל $a > 0$ מתקיים:

$$f_{X|X>Y}(a) = \tfrac{d}{da} F_{X|X>Y}(a) = \tfrac{d}{da}[1-2e^{-\lambda a} + e^{-2\lambda a}] = 2\lambda e^{-\lambda a} - 2\lambda e^{-2\lambda a} = 2\lambda e^{-\lambda a}(1-e^{-\lambda a})$$

ב.

$$E[X \mid X > Y] = \int_0^\infty a\, f_{X|X>Y}(a)da = \int_0^\infty a(2\lambda e^{-\lambda a} - 2\lambda e^{-2\lambda a})da$$

$$= 2\underbrace{\int_0^\infty a\lambda e^{-\lambda a}da}_{=E[Exp(\lambda)]} - \underbrace{\int_0^\infty a2\lambda e^{-2\lambda a}da}_{=E[Exp(2\lambda)]} = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}$$

ג. לפי נתוני הבעיה, המאורעות $\{X > Y\}$ ו- $\{X < Y\}$ הם מאורעות משלימים. לפיכך:

$$\tfrac{1}{\lambda} = E[X] = E[X \mid X > Y]\cdot P\{X > Y\} + E[X \mid X < Y]\cdot P\{X < Y\} = \tfrac{3}{2\lambda}\cdot\tfrac{1}{2} + E[X \mid X < Y]\cdot\tfrac{1}{2}$$

ומכאן:

$$E[X \mid X < Y] = 2(\tfrac{1}{\lambda} - \tfrac{3}{2\lambda}\cdot\tfrac{1}{2}) = \tfrac{2}{4\lambda} = \tfrac{1}{2\lambda}$$

שאלה 2

א. מנתוני הבעיה נובע כי פונקציית הצפיפות המשותפת של X ו- Y חיובית לכל $0 < y < x$.

לפיכך, לכל $y > 0$ מתקיים:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^\infty f(x,y)dx = \int_{-\infty}^\infty f_X(x) f_{Y|X}(y \mid x)dx = c\int_y^\infty x^2 e^{-x^2/2}\cdot\tfrac{1}{x}dx = c\int_y^\infty x e^{-x^2/2}dx = -ce^{-x^2/2}\Big|_y^\infty = ce^{-y^2/2}$$

ב. מצד אחד, $f_Y(y)$ היא פונקציית צפיפות, ולכן:

$$\int_{-\infty}^\infty f_Y(y)dy = c\int_0^\infty e^{-y^2/2}dy = 1$$

מצד שני, נתבונן על פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית סטנדרטית. מתקיים:

$$\int_0^\infty \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}dy = \tfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \int_0^\infty e^{-y^2/2}dy = \tfrac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}$$

לפיכך:

$$c\int_0^\infty e^{-y^2/2}dy = c\cdot\sqrt{\tfrac{\pi}{2}} = 1 \quad\Rightarrow\quad c = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}$$

ג. $P\{Y \le 1.82\} = \int_0^{1.82} f_Y(y)dy = \int_0^{1.82} \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \cdot e^{-y^2/2} dy = 2\int_0^{1.82} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2} dy$

$$= 2[\Phi(1.82) - \Phi(0)] = 2(0.9656 - 0.5) = 0.9312$$

שאלה 3

א. התייר שוהה באזור לפחות 4 ימים. לכן, המאורע המשלים של המאורע "ישהה באזור **יותר** מ-4 ימים" הוא המאורע "ישהה באזור **בדיוק** 4 ימים". אולם, התייר שוהה באזור בדיוק 4 ימים אם ורק אם, בכל אחד מ-4 הימים מזדמן לו ללון בכפר אחר. לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא:

$$1 - \frac{4!}{4^4} = 1 - \frac{24}{256} = 1 - \frac{3}{32} = 1 - 0.09375 = 0.90625$$

ב. המאורע המשלים הוא, שהתייר עוזב לאחר יותר מ-15 ימי שהות, והוא מתרחש רק אם במהלך 15 הימים האלה לא הזדמן לו לשהות בכל אחד מהכפרים. נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה, כדי לחשב את ההסתברות המבוקשת.

לכל $i = 1,2,3,4$, נסמן ב- A_i את המאורע שהתייר לן בכפר i במהלך 15 ימי שהותו באזור, ונחשב את הסתברות המאורע $A_1^C \cup A_2^C \cup A_3^C \cup A_4^C$. תנאי הבעיה סימטריים, לכן:

$$P(A_1^C \cup A_2^C \cup A_3^C \cup A_4^C) = 4P(A_1^C) - \binom{4}{2} P(A_1^C \cap A_2^C) + \binom{4}{3} P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C) - P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C)$$

$$= 4 \cdot \frac{3^{15}}{4^{15}} - 6 \cdot \frac{2^{15}}{4^{15}} + 4 \cdot \frac{1^{15}}{4^{15}} - 0 = \frac{57{,}199{,}024}{4^{15}} = 0.05327$$

ומכאן, מקבלים את ההסתברות המבוקשת: $1 - 0.05327 = 0.94673$

ג. נסמן ב- X_1 את מספר הימים שישהה באזור מהיום השני ועד ליום שבו יבקר בכפר השני, ב- X_2 את מספר הימים שישהה באזור מהיום שאחרי הביקור בכפר השני ועד ליום שבו יבקר לראשונה בכפר השלישי, ב- X_3 את מספר הימים שישהה באזור מהיום שאחרי הביקור בכפר השלישי ועד ליום שבו יבקר לראשונה בכפר הרביעי. מתקיים:

$$X_1 \sim Geo(0.75) \qquad ; \qquad X_2 \sim Geo(0.5) \qquad ; \qquad X_3 \sim Geo(0.25)$$

הואיל והבחירות של התייר הן אקראיות, שלושת המשתנים המקריים הללו בלתי תלויים זה בזה, ומספר הימים שהתייר ישהה באיזור הוא $1 + X_1 + X_2 + X_3$.

ומכאן כי: $\mathrm{Var}(1 + X_1 + X_2 + X_3) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_3) = \frac{0.25}{0.75^2} + \frac{0.5}{0.5^2} + \frac{0.75}{0.25^2} = 14.\overline{4}$

שאלה 4

א. לפי נתוני הבעיה: $N \sim Po(6)$ ו- $Y \mid N = n \sim B(n, ⅓)$.

לפיכך, לכל $n = 0,1,\ldots$ ו- $j = 0,1,\ldots,n$ מתקיים:

$$P\{Y = j, N = n\} = P\{Y = j \mid N = n\} P\{N = n\} = \binom{n}{j} \left(\tfrac{1}{3}\right)^j \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-j} \cdot e^{-6} \cdot \tfrac{6^n}{n!}$$

ב. כאשר $X = 1$, פירוש הדבר, שכל הלקוחות שנכנסו לסניף פנו בדיוק לאחד מהאשנבים (1, 2 או 3).

לפיכך, לכל $n = 1,2,\ldots$ מתקיים : $P\{X=1, N=n\} = P\{X=1 \mid N=n\}P\{N=n\} = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot e^{-6} \cdot \frac{6^n}{n!}$

ג. משמעות המאורע $P\{X=2 \, , Y=4 \, , N=8\}$ היא, שנכנסו 8 לקוחות לסניף, כך ש- 4 מהם פנו לאשנב 1, ו- 4 האחרים פנו כולם לאחד משני האשנבים האחרים (2 או 3). כמו כן, נשים לב, שבהינתן מספר הלקוחות הנכנסים לסניף, ההתפלגות המשותפת של מספר הפונים לכל אחד מן האשנבים היא מולטינומית. לפיכך :

$$P\{X=2, Y=4, N=8\} = P\{X=2, Y=4 \mid N=8\}P\{N=8\} = 2 \cdot \frac{8!}{4!4!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 \cdot e^{-6} \cdot \frac{6^8}{8!} = 0.0022$$

שאלה 5

א1. נשתמש באי-שוויון צ'בישב כדי להוכיח את אי-השוויון הנתון.

מהנתונים נובע כי : $E[X-Y]=0 \quad ; \quad \text{Var}(X-Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 2 \cdot 2n \cdot 0.5^2 = n$

לפיכך, לפי אי-שוויון צ'בישב מתקיים : $P\{|(X-Y)-0| \geq n\} \leq \dfrac{\text{Var}(X-Y)}{n^2} = \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$

כעת :
$$P\{|(X-Y)-0| \geq n\} = P\{X-Y \geq n\} + P\{X-Y \leq -n\}$$
$$= P\{X \geq Y+n\} + P\{Y \geq X+n\} = 2P\{X \geq Y+n\} = 2P\{X-Y \geq n\}$$

כאשר המעבר הלפני-אחרון נובע מהסימטריה בין X ל- Y ; שני המשתנים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות.

לפיכך : $P\{|(X-Y)-0| \geq n\} = 2P\{X-Y \geq n\} \leq \frac{1}{n}$

או לחלופין : $P\{X-Y \geq n\} \leq \frac{1}{2n}$

א2. בהנחה ש- n גדול, אפשר להשתמש במשפט הגבול המרכזי, כדי למצוא קירוב להסתברות המאורע הנתון.
לכל אחד מהמשתנים X ו- Y יש בקירוב התפלגות נורמלית עם הפרמטרים n ו- $0.5n$ והם בלתי-תלויים זה בזה. לפיכך, להפרש ביניהם יש בקירוב התפלגות נורמלית עם הפרמטרים 0 ו- $2 \cdot 0.5n = n$.

ומכאן מקבלים : $P\{X-Y \geq \sqrt{n}\} \cong P\left\{\frac{Z-0}{\sqrt{n}} \geq \frac{\sqrt{n}-0}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\Phi(1) = 1-0.8413 = 0.1587$

ב. נחשב את התוחלת $\frac{1}{X+1}$, עבור X שהוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$:

$$E\left[\frac{1}{X+1}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!}$$
$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \cdot (e^{\lambda}-1) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$$

קיבלנו, שהטענה המובאת בסעיף זה איננה נכונה.