כמה זהויות לוגיות

דה מורגן
$\neg(A\wedge B) \Leftrightarrow \neg A\vee\neg B$
$\neg(A\vee B) \Leftrightarrow \neg A\wedge\neg B$

גרירה
$A\to B \Leftrightarrow \neg A\vee B \Leftrightarrow \neg B\to\neg A$
$\neg(A\to B) \Leftrightarrow A\wedge\neg B$

דיסטריבוטיביות
$A\vee(B\wedge C) \Leftrightarrow (A\vee B)\wedge(A\vee C)$
$A\wedge(B\vee C) \Leftrightarrow (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

כלל α -בביטוי עם משתנה קשור, אפשר להחליף את המשתנה בכל משתנה אחר, שאינו בתחום הקשירה

שלילת לכל
$\neg\forall x.P \Leftrightarrow \exists x.\neg P$

שלילת קיים
$\neg\exists x.P \Leftrightarrow \forall x.\neg P$

לכל – גם
$\forall x.(A\wedge B) \Leftrightarrow (\forall x.A)\wedge(\forall x.B)$

קיים - או
$\exists x.(A\vee B) \Leftrightarrow (\exists x.A)\vee(\exists x.B)$

תורת הקבוצות הנאיבית

שיוויון קבוצות
$A=B \Leftrightarrow \forall x.[(x\in A)\Leftrightarrow(x\in B)]$
$A\neq B \Leftrightarrow \exists x(x\notin A \vee x\notin B)$

הכלה (אם כל איבר של A הוא איבר של B...)
$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x.[(x\in A)\to(x\in B)]$
$A\subseteq B \equiv \forall x\in A(x\in B)$ עמ' 27
$(A\subseteq B)\Leftrightarrow[(A\cup B)=B]$
$[(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq C)]\Rightarrow(A\subseteq C)$ ($\subseteq$ is transitive)
$a\in A \Leftrightarrow \{a\}\subseteq A$

(...ויש איבר של B שאינו ב-A)
$(A\subset B)\Leftrightarrow[(A\subseteq B)\wedge\exists x(x\in B\wedge x\notin A)]$
$(A\subset B)\Leftrightarrow[A\subseteq B\wedge B\not\subseteq A]$

(אם ורק אם יש איבר של A שאינו איבר של B)
$A\not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge x\notin B)$ עמ' 27
$A\not\subseteq B \equiv \exists x\in A(x\notin B)$

משפט
$A=B \Leftrightarrow (A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$

$\forall x.\, x\notin\phi$

קבוצה ריקה מוכלת בכל קבוצה
$\forall A.\,\phi\subseteq A$

אזי גם C זרה ל B
$[(A\cap B=\varnothing)\wedge(C\subseteq A)]\to(C\cap B=\varnothing)$

איחוד עמ' 31
$A\cup B = \{x\mid(x\in A)\vee(x\in B)\}$
$[(A\cup B)\subseteq C] \Leftrightarrow [(A\subseteq C)\wedge(B\subseteq C)]$
$[x\in(A\cup B)\cup C]\Leftrightarrow[(x\in A\cup B)\vee(x\in C)]$
$(A\subseteq B)\Leftrightarrow(A\cup B=B)$
$[A\cup(B\cap C)]=[(A\cup B)\cap(A\cup C)]$ חוק הפילוג

חיתוך
$A\cap B = \{x\mid(x\in A)\wedge(x\in B)\}$
$[x\in(A\cap B)\cap C]\Leftrightarrow[(x\in A\cap B)\wedge(x\in C)]$
$(A\subseteq B)\Leftrightarrow(A\cap B=A)$
$(C\subseteq A\cap B)\Leftrightarrow(C\subseteq A\wedge C\subseteq B)$
$[A\cap(B\cup C)]=[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$ חוק הפילוג

הפרש
$A\setminus B = \{x\mid(x\in A)\wedge(x\notin B)\}$
$A\setminus B = A\cap B^c$
$A\setminus B = (A\cup B)\setminus B$ p41 (1.21)
$A\setminus B = A\setminus(A\cap B)$

$A\setminus B = B^c\setminus A^c$
$(A\setminus B)=A \Leftrightarrow (A\cap B)=\varnothing$ p42 q26
$A\setminus B=\varnothing \Leftrightarrow A\subseteq B$
$(A\setminus B=B\setminus A) \Leftrightarrow A=B$
$A\cup(B\setminus A) = A\cup B$
$A\cap(B\setminus A) = \varnothing$
$(B\subseteq A)\to[(B\cup(A\setminus B)) = A]$
$(C\subseteq D)\to[(A\setminus D)\subseteq(A\setminus C)]$
$(A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$ p42 q30

Symmetric Difference
$A\Delta B = \{x\mid(x\in A)\wedge(x\notin B) \vee (x\in B)\wedge(x\notin A)\}$
$A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$
$A\cap(B\setminus C) = (A\setminus B)\cap(A\cap C)$

הקבוצה המשלימה (כאשר יש מובן ל U)
$\bar{A}=U\setminus A$

הפרש סימטרי
$A\Delta B \Leftrightarrow (A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)$
$A\Delta B \Leftrightarrow \bar{A}\vee\bar{B}$

$(A\subseteq B)\Leftrightarrow(\bar{B}\subseteq\bar{A})$
$(A\cap B=\varnothing)\Leftrightarrow(A\subseteq\bar{B})$
$[B=\bar{A}]\Leftrightarrow[(A\cap B=\varnothing)\wedge(\bar{A}\cap\bar{B}=\varnothing)]$

דה-מורגן
$\overline{A\cup B} \Leftrightarrow \bar{A}\cap\bar{B}$
$\overline{(A\cap B)} = (\bar{A}\cup\bar{B})$

זהות
$A\cap(B\vee C) \Leftrightarrow (A\cap B)\vee(A\cap C)$
$A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$
$A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

$\overline{(A\Delta B)} = A\Delta\bar{B} = \bar{A}\Delta B$

מכפלה קרטזית
$A\times B=\{\langle a,b\rangle\mid a\in A\wedge b\in B\}$

הגדרת זוג סדור
$\langle a,b\rangle\equiv\{\{a,b\},a\}$

קבוצת החזקה

קבוצה תת-הקבוצות של A
$P(A)=\{B\mid B\subseteq A\}$

עוצמתה
$|P(A)|=2^{|A|}$

דוגמא:
$P(\phi)=\{\phi\}$
$P(P(\phi))=\{\{\phi\},\phi\}$

משפט
$P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

יש x שהוא איבר של A, וניחן בתכונה P:
$\exists x\in AP(x) \equiv \exists x(x\in A\wedge P(x))$

כל עצם, אם הוא איבר של A, אז הוא ניחן בתכונה P
$\forall x(x\in A\to P(x))$

יחסים

יחס ASB תת קבוצה של $A\times B$: $S\in P(A\times B)$

יחס הפוך
$S^{-1}=\{\langle b,a\rangle\mid\langle a,b\rangle\in S\}$
$aSb\Leftrightarrow bS^{-1}a$

הרכבת יחסים
$\langle a,c\rangle\in T\circ S \Leftrightarrow$
$\exists b\in B.[\langle a,b\rangle\in S\wedge\langle b,c\rangle\in T]$

יחס משלים
$\bar{S}=(A\times B)-S$

יחס סימטרי
$S^{-1}=S$
$\forall a,b\in A.[\langle a,b\rangle\in S\to\langle b,a\rangle\in S]$

יחס טרנסיטיבי
$\forall a,b,c\in A.[aSb\wedge bSc\to aSc]$

יחס רפלקסיבי בקבוצה A
$\forall a\in A.aSa$

יחס שקילות
רפלקסיבי + סימטרי + טרנסיטיבי

אי רפלקסיבי
$\forall a\in A.\neg(aSa)$

אנטי סימטרי
$\forall a\in A\forall b\in B.[aSb\wedge bSa\to a=b]$

אנטי סימטרי חזק (גם לא עם עצמו)
$\forall a\in A\forall b\in A.[aSb\to\neg bSa]$

סדר חלקי
רפלקסיבי + אנטי סימטרי + טרנסיטיבי ($\leq$)

סדר חלקי חזק
אי רפלקסיבי + טרנסיטיבי ($<$)

סדר מלא
סדר חלקי + $\forall a,b\in A.[aSb\vee bSa]$

סדר מלא חזק
סדר חלקי חזק+ $\forall a,b\in A.[aSb\vee bSa\vee(a=b)]$

איחוד יחסים
$x(S\cup T)y \Leftrightarrow xSy\vee xTy$

מחלקת שקילות - מחלקת השקילות של x היא כל האיברים שמקיימים את יחס השקילות איתו
$[x] = \{y\mid xSy\}$

קבוצת המנה - קבוצת מחלקות השקילות.

חלוקות

חלוקה P של A היא קבוצת תת-קבוצות לא ריקות של A

המקיימת
$\forall a\in A.[\exists m\in P.\,a\in m]$

הקבוצות זרות
$\forall m_1,m_2\in P.[(m_1\cap m_2\neq\phi)\to(m_1=m_2)]$

משפט: קבוצת מחלקות השקילות היא חלוקה.

פונקציות

יחס חד ערכי
לכל $a\in A$ קיים **לכל היותר** אחד $b\in B$ כך ש $\langle a,b\rangle\in S$

יחס מלא
לכל $a\in A$ קיים **לפחות** אחד $b\in B$ כך ש $\langle a,b\rangle\in S$

פונקציה
$f:A\to B$ היא יחס מ A ל B **חד ערכי** ו-**מלא**

פונקציה חח"ע
מספר הגדרות:
1. היחס ההפוך חד ערכי
2. $\forall x,y\in A.[x\neq y\to f(x)\neq f(y)]$
3. $\forall x,y\in A.[f(x)=f(y)\to x=y]$

פונקציה על
1. היחס ההפוך מלא
2. $\forall b\in B.\exists a\in A.[f(a)=b]$

הרכבה
$f:A\to B \quad g:B\to C$
$g\circ f:A\to C \quad (g\circ f)(c)=g(f(c))$

כלל η
$\lambda x.f(x) = f$

פונקציה הפיכה
פונקציה **חח"ע** ו-**על**. נקראת גם **פ' שקילות**

הרכבת פונקציות

הרכבת פונקציות היא אסוציאטיבית
$(g\circ f)\circ h=g\circ(f\circ h)$

אם g,f חח"ע אז $g\circ f$ חח"ע
אם g,f על אז $g\circ f$ על
אם $g\circ f$ חח"ע אז f חח"ע
אם $g\circ f$ על אז g על
אם $g\circ f$ חח"ע ו- f על אז g חח"ע
אם $g\circ f$ על ו- g חח"ע אז f על

משפט: $f:A\to B$ הפיכה $\Leftrightarrow$ קיימת $g:B\to A$,
כך ש: $g\circ f=I_A \wedge f\circ g=I_B$
אם g קיימת היא יחידה ותסומן: $g=f^{-1}$

חשבון עוצמות

מכפלה
$|A\times B| = |A|\cdot|B|$

מספר היחסים בקבוצה
$|P(A)| = 2^{|A|}$

קבוצת הפונקציות מ-A ל-B
$|A\to B| = |B^A| = |B|^{|A|}$

ל A,B זרות
$|A|+|B| = |A\cup B|$

לכל A,B
$|A|+|B| = |(\{0\}\times A)\cup(\{1\}\times B)|$

הגדרה: $\exists f:A\to B$ הפיכה $\Leftrightarrow |A|=|B|$

הגדרה: A בת מניה $\Leftrightarrow \exists f:N\to A$ הפיכה

הגדרה: **קבוצה אינסופית** יש לה תת-קבוצה בת מניה

משפט: לכל קבוצה סופית A, קיים n טבעי כך שקיימת $f:\{0,1,...,n-1\}\to A$ הפיכה, ואז $|A|=n$

משפט: אם A בת מניה ו $B\subseteq A$ אז B סופית או בת מניה

שמות:
Σ א"ב סופי , Σ^* קבוצת כל המחרוזות באורך סופי מעל Σ .
אם A אינסופית וקיימת $f:\Sigma^*\to A$ פונקציה חלקית שהיא על, אז A בת מניה.

$|A|\leq|B|$
1. אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע
2. אם קיימת $f:B\to A$ על או $A=\phi$

$|A|<|B|$
אם $|A|\leq|B| \wedge |A|\neq|B|$
כלומר קיימת $f:A\to B$ חח"ע
אבל לא קיימת $g:A\to B$ הפיכה

משפט קנטור
לכל קבוצה A, $2^{|A|}=|P(A)| > |A|$
הוכחה שלא קיימת $f:N\to N^N$ בעזרת שיטת האלכסון.

משפט קנטור-ברנשטיין
$|A|\leq|B|\wedge|B|\leq|A| \Rightarrow |A|=|B|$
כלל הסנדביץ': אם $A\subseteq B\subseteq C \wedge |A|=|C|$ אז $|B|=|A|=|C|$

חשבון עוצמות אינסופיות
כללי האריתמטיקה הבסיסיים הנוגעים בחיבור, כפל וחזקות של מספרים טבעיים תקפים גם לעוצמות אינסופיות.
אי שוויון חלש נשמר.
אי שוויון חזק אינו נשמר
פעולות הפוכות – חיסור, חילוק, שורש, לוגריתם **אינן** ניתנות להכללה עבור עוצמות אינסופיות