תרגול 12: שימושי זרימה

תזכורת

נתונה רשת זרימה $N=(G,s,t,c)$ כאשר:

- $G=(V,E)$ הוא גרף מכוון
- $s\in V$ צומת בתפקיד מקור (אינו בהכרח מקור ב- G)
- $t\in V$ צומת בתפקיד בור (אינו בהכרח בור ב- G)
- $c:E\to R^{+}$ פונקצית קיבול אי-שלילית על הקשתות

פונקציה $f:E\to R$ היא פונקצית זרימה חוקית אם מתקיים כי:

1. $\forall e\in E$,$0\le f(e)\le c(e)$.
2. $\sum_{e\in N^{-}(v)} f(e)=\sum_{e\in N^{+}(v)} f(e)$, כאשר $N^{+}(v)$ היא קבוצת הקשתות אשר יוצאות מ- v ו- $N^{-}(v)$ היא קבוצת הקשתות אשר נכנסת ל- v, $\forall v\in V\setminus\{s,t\}$.

ערך של פונקצית הזרימה הוא: $\sum_{e\in N^{+}(s)} f(e)-\sum_{e\in N^{-}(s)} f(e)$ (זרימה "נטו" אשר יוצאת מ- s), והוא יסומן על-ידי $|f|$. <u>זרימת מקסימום</u> היא זרימה אשר מביאה את $|f|$ למקסימום.

נאמר שחתך $(S,V\setminus S)$ הוא <u>חתך *s-t*</u>, אם מתקיים: $s\in S, t\notin S$. <u>קיבול</u> של חתך יוגדר להיות סך הקיבולים של הקשתות הקדמיות בו, ועבור חתך $(S,V\setminus S)$ נסמן: $c(S)=\sum_{e=(u,v)|u\in S,v\notin S} c(e)$. <u>חתך מינימום</u> הוא חתך *s-t* אשר קיבולו קטן-שווה לקיבול כל חתך אחר.

משפט ה- min-cut-max-flow: אם f^{*} זרימת מקסימום ו-$(S,V\setminus S)$ חתך מינימום אז $|f^{*}|=c(S)$.

תרגיל 1

בהינתן גרף לא-מכוון $G=(V,E)$ <u>הקשירות בקשתות</u> (edge connectivity) של G, נסמנה ב-$\kappa(G)$, היא המספר המינימלי של קשתות שהסרתן מ- G הופכת אותו ללא קשיר.

הציעו אלגוריתם יעיל לחישוב $\kappa(G)$.

פתרון:

בהינתן חתך לא-טריוויאלי ב- G $(S,V\setminus S)$ נסמן ב- $\left|(S,V\setminus S)\right|$ את מספר הקשתות בחתך (כלומר מספר הקשתות $(u,v)\,|\,u\in S, v\in V\setminus S$). נסמן ב- $\mathrm{MINCUT}(G)$ את גודל החתך המינימלי מבין כל החתכים הלא-טריוויאליים.

טענה: $\mathrm{MINCUT}(G)=\kappa(G)$.

הוכחה: נראה כי $\mathrm{MINCUT}(G)\geq\kappa(G)$ וגם $\mathrm{MINCUT}(G)\leq\kappa(G)$.

הוכחת $\mathrm{MINCUT}(G)\geq\kappa(G)$: נסמן $k=\mathrm{MINCUT}(G)$ כלומר קיים חתך $(S,V\setminus S)$ המכיל בדיוק k קשתות. אם נסיר קשתות אלה מ- G הגרף לא יהיה קשיר, לכן $\mathrm{MINCUT}(G)\geq\kappa(G)$.

הוכחת $\mathrm{MINCUT}(G)\leq\kappa(G)$: נסמן $k=\kappa(G)$ אזי יש קבוצה של k קשתות שהסרתן מ- G מפרידה את G ל-2 רכיבי קשירות (לא יתכן שליותר כי אז יש לפחות קשת אחת "מיותרת" בקבוצה, בסתירה למינימליות הקבוצה) $\Leftarrow$ קיבלנו חתך בגודל k, לכן $\mathrm{MINCUT}(G)\leq\kappa(G)$.

מסקנה: חישוב $\kappa(G)$ ו- $\mathrm{MINCUT}(G)$ הן בעיות שקולות.

בהינתן הגרף הלא-מכוון $G=(V,E)$ נגדיר גרף מכוון $G'=(V,E')$ שבו כל קשת לא מכוונת ב- G הופכת לזוג קשתות מכוונות אנטי-מקבילות ב- G', כלומר $E'=\{(u,v),(v,u)\,|\,(u,v)\in E\}$. כמו כן נגדיר לכל קשת קיבול 1. נגדיר קיבול של חתך לא-טריוויאלי $(S,V\setminus S)$ ב- G' כסכום הקיבולים על הקשתות הקדמיות בחתך $(u,v)\,|\,u\in S, v\notin S$, ונסמן ב- $\mathrm{MINCUT}(G')$ את ערך חתך המינימום (הגלובלי) ב- G'. ברור מהגדרת G' כי $\mathrm{MINCUT}(G')=\mathrm{MINCUT}(G)$.

נשתמש במשפט ה-min-cut max-flow על מנת ליצור אלגוריתם לחישוב $\mathrm{MINCUT}(G')$:

1. בהינתן G נבנה את G' כנ"ל.
2. נקבע צומת s כמקור.
3. לכל צומת $t\in V\setminus\{s\}$ נחשב את זרימת המקסימום ב- G' כאשר s המקור ו- t הבור. הערך שהתקבל הוא קיבול חתך המינימום כאשר s המקור ו- t הבור. נסמן ערך זה ב- $c_{s,t}$.
4. נחזיר את הערך המינימלי מבין הערכים שהתקבלו בסעיף הקודם.

יהא $(S,\overline{S})$ חתך מינימום גלובלי ב- G'. נראה שקיים $t\in V\setminus\{s\}$ כך ש- $c_{s,t}\leq c(S,\overline{S})$. משיקולי סימטריה $c(S,\overline{S})=c(\overline{S},S)$, לכן ניתן להניח בלי הגבלת הכלליות כי $s\in S$. יהא $x\in\overline{S}$ כלשהו. כאשר בשלב 3 באלגוריתם $t=x$ החתך $(S,\overline{S})$ הוא חתך $s-t$ ולכן $c_{s,x}\leq c(S,\overline{S})$.

אם קיים $y\in V\setminus\{s\}$ כך ש- $c_{s,y}<c(S,\overline{S})$ אזי $(S,\overline{S})$ אינו חתך מינימום גלובלי. לכן נסיק כי האלגוריתם מחשב את $\kappa(G)$.

בהנחה שמריצים את האלג' של דיניץ לחישוב זרימת המקסימום, סיבוכיות הזמן תהיה: $O(V^3E)$.

תרגיל 2

נתון מפעל ובו m רובוטים. המפעל מחולק ל-$n\times n$ משבצות, כך שבכל משבצת ישנו רובוט אחד לכל היותר. אחת לכמה זמן, על כל רובוט להטעין את הסוללה שלו. נקודות הטעינה נמצאות בקירות המפעל, כלומר על מנת להטען על הרובוט להגיע למשבצת (i,j) כך ש-$i\in\{1,n\}$ או $j\in\{1,n\}$. (נניח כי אין רובוט הסמוך לנקודת טעינה, ולאחר הטעינה הרובוט חוזר למשבצת ממנה יצא.) רובוט יכול להתקדם מהמשבצת בה הוא נמצא לאחת מארבע המשבצות השכנות לה (מימינה, משמאלה, מתחתיה, או מעליה). מאחר ולא ידוע זמן העבודה שמאפשרת כל סוללה לפני שצריך להטעין אותה שנית, אנו מעוניינים שהמסלול בו צועד כל רובוט יהיה זר למסלולים של רובוטים אחרים, על מנת למנוע התנגשויות ביניהם. הציעו אלגוריתם יעיל המחזיר מסלולים העונים על הדרישות, או מודיע שלא קיימים כאלה.

פתרון

נגדיר גרף מכוון $G=(V,E)$ המייצג את המשבצות והמעברים האפשריים ביניהן:

$$V=\left\{v_{i,j}\mid (i,j)\in\{1,2,\ldots,n\}\times\{1,2,\ldots,n\}\right\}$$

$$E=\left\{(v_{i,j},v_{i+1,j}),(v_{i+1,j},v_{i,j})\mid (i,j)\in\{1,2,\ldots,n-1\}\times\{1,2,\ldots,n\}\right\}\cup$$
$$\left\{(v_{i,j},v_{i,j+1}),(v_{i,j+1},v_{i,j})\mid (i,j)\in\{1,2,\ldots,n\}\times\{1,2,\ldots,n-1\}\right\}$$

כעת נגדיר "רשת זרימה" באופן הבא:

- ברשת יהיו m מקורות – הצמתים המתאימים ל-m המשבצות בהן ישנם רובוטים. נסמנם ב-S.
- ברשת יהיו $4n-4$ בורות – הצמתים המתאימים למשבצות הסמוכות לנקודות טעינה. נסמנם ב-T.
- נגדיר פונקצית קיבול $c:V\cup E\to\mathbb{R}^+$ המתאימה לכל קשת ולכל צומת קיבול 1.

נאמר שפונקצית זרימה $f:V\cup E\to\mathbb{R}^+$ ברשת היא חוקית אם היא מקיימת:

1. לכל $x\in V\cup E$ מתקיים $0\le f(x)\le c(x)$,
2. לכל צומת $v\in V\setminus S$ מתקיים $\sum\limits_{e\in in(v)} f(e)=f(v)$,
3. ולכל צומת $v\in V\setminus T$ מתקיים $\sum\limits_{e\in out(v)} f(e)=f(v)$

נגדיר את הערך של פונקצית זרימה כ-$|f|=\sum\limits_{s\in S}\left(\sum\limits_{e\in out(s)} f(e)-\sum\limits_{e\in in(s)} f(e)\right)$.

<u>טענה:</u> קיימת זרימה בשלמים[1] ברשת שהגדרנו שערכה k אמ"ם קיימים k מסלולים חוקיים עבור k רובוטים.

<u>הוכחה:</u>

$\Leftarrow$ נניח שקיימת ברשת זרימה בשלמים שערכה k. מאחר והזרימה בשלמים והקיבול של כל צומת 1, ישנם בדיוק k צמתים ב-S שיוצאת מהם זרימה 1 ונכנסת אליהם זרימה 0. נסתכל על צומת כזה s. לפי תנאי 3 לעיל, ומאחר והזרימה בשלמים, קיימת בדיוק קשת אחת היוצאת מ-s ועליה זרימה של יחידה 1.

[1] זרימה בשלמים זו זרימה המתאימה לכל אלמנט ערך שלם.

נסמן ב- u את הצומת השכן ל- s על אותה הקשת. אם $u \in T$ מצאנו מסלול עבור s. אחרת, לפי תנאים 2 ו-3 לעיל ישנו בדיוק צומת אחד שכן ל- u אליו מוזרמת יחידת זרימה מ- u. ניתן להמשיך באותם טיעונים ולבנות כך מסלול מ- s. המסלול אינו יכול לעבור באותו צומת פעמיים מאחר ועבור הצומת הראשון המופיע פעמיים במסלול, נסמנו ב- v, יהיו שתי קשתות נכנסות עם זרימה אחת, ולכן לפי תנאי 2 נקבל ש- $f(v) \geq 2$ בעוד ש- $c(v)=1$. לכן המסלול חייב להיות סופי באורכו ולהסתיים בצומת מ- T (המסלול אינו יכול להסתיים ב- s מאחר ול- s נכנסת זרימה 0). מנימוקים דומים נקבל שכל המסלולים זרים בצמתים, כלומר הינם חוקיים.

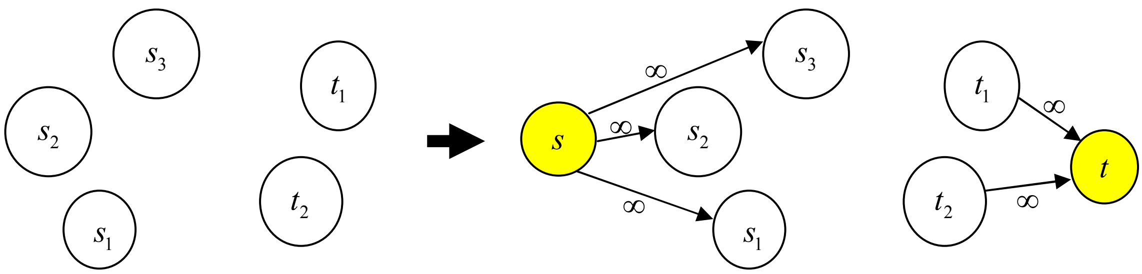
$\Rightarrow$ אם קיימים k מסלולים חוקיים, ניתן "להזרים" יחידת זרימה אחת דרך כל אחד מהם ולקבל זרימה בשלמים שערכה k. למשל עבור המסלול $s \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} v_2 \ldots \xrightarrow{e_m} t$ נגדיר את ערכי הזרימה הבאים: $f(s)=f(e_1)=f(v_1)=f(e_2)=\ldots=f(e_m)=f(t)=1$. ניתן לראות שפונקצית הזרימה שהגדרנו אכן חוקית וערכה k. □

נסיק שעל מנת למצוא מסלולים חוקיים נחשב זרימת מקסימום ברשת שהגדרנו (נניח לרגע שניתן לבצע זאת ע"י רדוקציה לבעיית זרימה "רגילה"). אם ערכה קטן מ- m נודיע שלא קיימים מסלוליים חוקיים. אם ערכה m (שימו לב שערכה אינו יכול להיות גדול מ- m), נחזיר את מסלולי הזרימה שניתן למצוא בדרך שתוארה בהוכחת הכיוון הראשון של הטענה. שימו לב ששימוש ב-Ford-Fulkerson מבטיח שנמצא זרימת מקסימום בשלמים כאשר כל הקיבולים על הקשתות שלמים.

סיבוכיות האלגוריתם תהיה $O(Ef^*)=O(n^2m)$. אם $m>4n$ אין פתרון, לכן למעשה – $O(n^3)$.

נותר לתאר כיצד מוצאים זרימת מקסימום כאשר ישנם מספר בורות ומקורות וכאשר ישנם אילוצי קיבול על הצמתים. נתאר רדוקציות עבור כל אחד מהווריאנטים:

- על מנת למצוא זרימת מקסימום כאשר ישנם מספר בורות ומספר מקורות נוסיף צומת חדש s שיהיה המקור היחיד, ונמתח ממנו קשתות בקיבול ∞ לכל אחד מהמקורות הישנים. באופן דומה, נוסיף צומת חדש t שיהיה הבור היחיד, ונמתח אליו קשתות בקיבול ∞ מכל אחד מהבורות הישנים:



- על מנת לטפל בזרימה עם אילוצי קיבול על הצמתים "נפצל" כל צומת $v \in V$ לשני צמתים v_{in} ו- v_{out}. את כל הקשתות שנכנסו ל- v נכוון ל- v_{in} ואת כל הקשתות שיצאו מ- v נוציא מ- v_{out}. כמו כן נוסיף קשת חדשה $(v_{in} \rightarrow v_{out})$ שקיבולה $c(v)$: