בבחינה שש שאלות.

עליכם לענות על **חמש** שאלות מתוכן.

יש לכתוב את הבחינה **בעט**.

בהצלחה!

שאלה 1 (20 נקודות: סעיף א' – 15 נק'; סעיף ב' – 5 נק')

אפשר לייצג ביטוי אריתמטי המורכב ממספרים טבעיים, האופרטור האונרי "–" וארבעת האופרטורים הבינריים "+", "–", "×" ו- "/" באמצעות עץ בינרי באופן הבא:

מספר טבעי I מיוצג ע"י עלה המכיל את I.

הביטוי E– מיוצג ע"י עץ, שהשורש שלו מכיל את האופרטור האונרי "–" ובנו היחיד הוא השורש של תת-עץ המכיל את הביטוי E.

הביטוי E·F (שבו הסימן "·" מציין איזשהו אופרטור בינרי) מיוצג ע"י עץ, שהשורש שלו מכיל את האופרטור "·", בנו השמאלי הוא השורש של תת-עץ המכיל את הביטוי E ובנו הימני הוא השורש של תת-עץ המכיל את הביטוי F.

א. כתבו אלגוריתם המקבל עץ בינרי המייצג ביטוי אריתמטי ומחשב את ערך הביטוי.

ב. מהו זמן הריצה של האלגוריתם (כפונקציה של מספר הצמתים בעץ)? נמקו את תשובתכם.

שאלה 2 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

נדון בגרסה של בעיית תרמיל הגב בשברים, שבה קיימים מספר סוגים של פריטים והקלט כולל את מספר הפריטים מכל סוג (כל הפריטים מאותו סוג הם זהים). כלומר, הקלט לבעיה מורכב מ:

1. N – מספר סוגי הפריטים
2. W – המשקל המקסימלי שאפשר לשאת בתרמיל
3. וקטור q המכיל את מספר הפריטים מהסוג ה-i לכל $1 \le i \le N$
4. וקטור w המכיל את המשקל w_i של כל פריט מהסוג ה-i לכל $1 \le i \le N$
5. וקטור v המכיל את השווי v_i של כל פריט מהסוג ה-i לכל $1 \le i \le N$

א. תארו אלגוריתם לפתרון גרסה זו של הבעיה.

ב. פתרו את הבעיה עבור הקלט הבא:

N = 5, W = 70

q = [3, 1, 4, 3, 2]

w = [10, 20, 25, 8, 7]

v = [15, 42, 30, 16, 18]

שאלה 3 (20 נקודות)

נדון בבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: גרף G = (V, E) ותת-קבוצה U של V

השאלה: האם קיים בגרף מסלול פשוט העובר בכל צמתי U?

הוכיחו שהבעיה שלמה ב-NP.

שאלה 4 (20 נקודות: 10 נקודות לכל סעיף)

א. כתבו אלגוריתם המקבל מספר טבעי אי-זוגי, ובודק אם אפשר לייצג את המספר כסכום של שלושה מספרים ראשוניים. מותר להשתמש באלגוריתם AKS לבדיקת ראשוניות כשגרת-עזר.

ב. על-פי **השערת גולדבך האי-זוגית** אפשר לייצג כל מספר אי-זוגי גדול מ-5 כסכום של שלושה מספרים ראשוניים. למשל: $7 = 2 + 2 + 3$, $9 = 2 + 2 + 5$, $41 = 11 + 13 + 17$

הראו כיצד אפשר להוכיח או להפריך את ההשערה באמצעות אורקל לבעיית העצירה.

שאלה 5 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

בעיית **הגרפים הלא-איזומורפיים** (graph non-isomorphism) היא הבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: שני גרפים לא מכוונים $G_1 = (V_1, E_1)$ ו- $G_2 = (V_2, E_2)$

השאלה: האם G_1 ו- G_2 **אינם** איזומורפיים?

איה רוצה לשכנע את בועז ששני גרפים נתונים G_1 ו- G_2 אינם איזומורפיים.

נניח שכל אחד משני הגרפים מכיל n קדקודים $1, 2, \ldots, n$ ונתבונן בפרוטוקול ההוכחה הבא:

(1) בועז מגריל תמורה π של המספרים $\{1, 2, \ldots, n\}$;

(2) בועז בוחר באקראי מספר i מתוך $\{1, 2\}$;

(3) בועז שולח לאיה את $\pi(G_i)$ (כלומר, הוא שולח את הגרף G_i כשהקדקודים שלו "מעורבבים").

(4) איה אומרת לבועז אם $\pi(G_i)$ איזומורפי ל- G_1 או ל- G_2;

(5) אם איה צדקה (כלומר, היא אמרה לבועז ש- $\pi(G_i)$ איזומורפי לגרף שהוא בחר), אז בועז מחליט שהגרפים אינם איזומורפיים; אחרת, הוא מחליט שהגרפים איזומורפיים.

א. הסבירו מדוע איה לא תוכל לרמות את בועז ולשכנע אותו שגרפים איזומורפיים אינם כאלה.

ב. בהנחה שהגרפים אינם איזומורפיים, כמה איטרציות של הפרוטוקול יידרשו לאיה כדי לשכנע בכך את בועז בהסתברות גבוהה מ- 99%? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 6 (20 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

א. מצאו השמה מספקת עבור הפסוק הבא: $(A \vee B \vee {\sim}C) \,\&\, ({\sim}A \vee {\sim}B) \,\&\, (B \vee C)$.

ב. נניח שקיימת שגרה המסוגלת לבדוק בזמן פולינומי אם פסוק נתון בתחשיב הפסוקים הוא ספיק. הראו כיצד אפשר להשתמש בשגרה זו כדי **למצוא** השמה מספקת לפסוק נתון בזמן פולינומי.

ב ה צ ל ח ה !