

אלגוריתמים – פתרונות לתרגיל 4

1. נשנה את האלגוריתם של Dijkstra, כך שהפעולה + בעידכון תוחלף ב- max, כלומר במקום:

$$\text{if } d[v] > d[u] + w(u,v) \text{ then } d[v] \leftarrow d[u] + w(u,v)$$

נבצע:

$$\text{if } d[v] > \max(d[u], w(u,v)) \text{ then } d[v] \leftarrow \max(d[u], w(u,v))$$

2. האלגוריתם:

- אם $f(s) \neq 0$ – נענה "לא".
- לכל קשת (u,v) : אם $f(u) + w(u,v) < f(v)$ נענה "לא".
- אם $f(u) + w(u,v) > f(v)$ נזרוק את הקשת.
- לאחר שנעבור על כל הקשתות נישאר עם גרף שמכיל רק קשתות (u,v) עבורן $f(u) + w(u,v) = f(v)$. נריץ עליו BFS מ- s , ונענה "כן" אם ורק אם כל הקודקודים נגישים מ- s .

זמן ריצה: $O(|V| + |E|)$.

נכונות:

- קל לבדוק שאם $\forall v \in V \ f(v) = \delta(s,v)$ אז $f(s) = 0$, לכל $(u,v) \in E$ מתקיים $f(u) + w(u,v) \geq f(v)$, והגרף שנשאר הוא גרף המסלולים הקצרים ביותר מ- s , ולכן, מכיוון ש: $\forall v \in V \ f(v) < \infty$, כל הקודקודים נגישים מ- s .
- נניח שנשארו גם גרף שבו כל הקודקודים נגישים מ- s , ונראה ש: $\forall v \in V \ f(v) = \delta(s,v)$. קל להראות שכל מסלול מ- s לכל v בגרף שנשאר הוא באורך $f(v)$, ולכן $\delta(s,v) \leq f(v)$. כעת נראה באינדוקציה על מספר הקשתות במסלולים הקצרים ביותר ש: $\delta(s,v) \geq f(v)$. עבור $s - s$ ברור. עבור $v \neq s$, יהי u הקודקוד שלפני v במסלול קצר ביותר מ- s ל- v . אז $\delta(s,u) + w(u,v) = \delta(s,v)$, ולפי הנחת האינדוקציה $\delta(s,u) \geq f(u)$. לכן $\delta(s,v) = \delta(s,u) + w(u,v) \geq f(u) + w(u,v) \geq f(v)$.

3. נוסיף קודקוד חדש s וקשתות במשקל 0 מ- s לכל $v \in V$, ונריץ Bellman-Ford מ- s . לכל $v \in V$ מתקיים $\delta(s,v) = \delta^*(v)$, כי משקל כל הקשתות שיוצאות מ- s הוא 0, ולכן
$$\delta(s,v) = \min_{u \in V} (w(s,u) + \delta(u,v)) = \min_{u \in V} \delta(u,v) = \delta^*(v)$$

4. נחשב את המטריצה $D^{(n)}$ (במקום $D^{(n-1)}$). יש בגרף מעגל שלילי אם ורק אם במטריצה שמתקבלת בסוף האלגוריתם יש ערך שלילי באלכסון, כי מעגל שלילי נותן מסלול באורך $0 >$ מקודקוד לעצמו. עלינו לחשב את $D^{(n)}$ כי מכיוון שמדובר במעגל, ייתכן שהוא מכיל n קשתות.

5. יש בגרף מעגל שלילי אם ורק אם במטריצה שמתקבלת בסוף האלגוריתם יש ערך שלילי באלכסון, כי מעגל שלילי נותן מסלול באורך $0 >$ מקודקוד לעצמו.

6. עידכון הסגור הטרנזיטיבי, כשאשר מוסיפים קשת (u,v) :
 נעבור על כל זוגות הקודקודים x,y , ונוסיף את הקשת (x,y) ל- G^* אם ורק אם יש ב- G^* קשת (x,u) וקשת (v,y) .
 זמן הריצה: $O(|V|^2)$.