1.1.1 שפות שלמות במחלקה coNP-NP בהנחה ש-$\text{coNP}\neq\text{NP}$

השאלה האם $\text{NP} = \text{coNP}$ היא שאלה פתוחה. ההנחה הרווחת היא כי הקבוצות שונות.

נניח שאכן כך הדבר, כלומר נניח כי $\text{NP} \neq \text{coNP}$.

נתבונן במחלקה coNP-NP (מחלקה השפות השייכות ל- coNP אשר אינן שייכות ל- NP).

שפה B תיקרא **שלמה** במחלקה coNP-NP, אם היא מקיימת את 2 התנאים הבאים –

א. B שייכת למחלקה coNP-NP.

ב. לכל שפה A במחלקה coNP-NP, $A \leq_P B$.

האם **יש** שפות שלמות במחלקה coNP-NP ?

אם התשובה חיובית, **תנו דוגמה** לשפה כזו, **והוכיחו** שהיא שלמה במחלקה coNP-NP.

אם התשובה שלילית, **הוכיחו** שאין שפה שלמה במחלקה coNP-NP.

התשובה **חיובית**. דוגמה לשפה **שלמה** במחלקה coNP-NP היא השפה המשלימה ל- SAT –

$$\overline{\text{SAT}} = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi \text{ is a false boolean formula which cannot be satisfied under any assingment whatsoever}\}$$

כלומר, $\overline{\text{SAT}}$ היא שפת נוסחאות הבוליאניות שהן טענות סתירה, דהיינו טענה שקרית תחת כל השמות האפשריות שלא ניתן לספק אותה (למשל $\varphi = (x \wedge \neg x)$).

בכדי להראות ש- $\overline{\text{SAT}} \in (\text{coNP-NP})\text{-Complete}$ נראה שהיא מקיימת את 2 התנאים לעיל –

א. <u>$\overline{\text{SAT}} \in \text{coNP-NP}$</u>: ברור ש- $\overline{\text{SAT}} \in \text{coNP}$, שכן $\text{SAT} \in \text{NP}$, וניתן גם להוכיח את הטענה במפורט בקלות: כל השמה מספקת מהווה מסמך אישור "לאי" השולל את שייכותה של נוסחה בשפה. השמה כזו היא לינארית (ובפרט פולינומיאלית) ביחס לנוסחה, לכן בהינתן השמה מספקת ניתן לאמת בזמן פולינומיאלי שהנוסחה אכן אינה שייכת לשפה, לפיכך $\overline{\text{SAT}} \in \text{coNP}$. נותר להוכיח ש- $\overline{\text{SAT}} \in \text{coNP-NP}$, דהיינו ש- $\overline{\text{SAT}} \notin \text{NP}$. נוכיח זאת בדרך השלילה –

נניח בשלילה ש- $\overline{\text{SAT}} \in \text{NP}$ (*). SAT שלמה ב- NP, לכן קיימת רדוקציה פולינומיאלית אליה מכל בעיה ב- NP. בפרט, קיימת אליה רדוקציה פולינומיאלית מ- $\overline{\text{SAT}}$ (שע"פ הנחת השלילה שלנו, שייכת גם היא ל- NP). לפיכך $\overline{\text{SAT}} \leq_P \text{SAT}$, כלומר, קיימת פונקציה חשיבה f המקבלת כקלט נוסחה בוליאנית φ ועוצרת כשעל הסרט שלה רשום פלט של נוסחה $f(\varphi) = \psi$ המקיימת $\psi \in \text{SAT} \Leftrightarrow \varphi \in \overline{\text{SAT}}$, או באופן שקול, $\psi \notin \text{SAT} \Leftrightarrow \varphi \notin \overline{\text{SAT}}$, כלומר, הרדוקציה $\overline{\text{SAT}} \leq_P \text{SAT}$ גוררת את גם קיום הרדוקציה המשלימה: $\overline{\overline{\text{SAT}}} \leq_P \overline{\text{SAT}}$, אולם זוהי בדיוק הרדוקציה $\text{SAT} \leq_P \overline{\text{SAT}}$, כלומר SAT ניתנת לרדוקציה אל בעיה ב- coNP, ומאחר שכל בעיה ב- NP ניתנת לרדוקציה אל SAT, נובע כי $\text{NP} \subseteq \text{coNP}$ (שכן ע"י סדרת הרדוקציה ניתן להכריע כל בעיה ב- NP ע"י המכונה האי-דטרמיניסטית המכריעה את $\overline{\text{SAT}}$). באופן דומה, נראה כי $\text{coNP} \subseteq \text{NP}$: בהינתן בעיה $A \in \text{coNP}$, הבעיה המשלימה לה $\overline{A}$ שייכת ל- NP ולכן $\overline{A} \leq_P \text{SAT}$ ומכאן כמו קודם קיימת גם הרדוקציה $\overline{\overline{A}} \leq_P \overline{\text{SAT}}$ אולם זוהי בדיוק הרדוקציה $A \leq_P \overline{\text{SAT}}$, וע"פ הנחת השלילה שלנו $\overline{\text{SAT}} \in \text{NP}$, לפיכך כל בעיה $A \in \text{coNP}$ ניתנת לרדוקציה לבעיה ב- NP ומכאן ש- $\text{coNP} \subseteq \text{NP}$, ומההכלה הדו-כיוונית בין הקבוצות נובע כי $\text{NP} = \text{coNP}$ בסתירה לאקסיומה שאנחנו מניחים בשאלה לפיה $\text{NP} \neq \text{coNP}$, לפיכך $\overline{\text{SAT}} \notin \text{NP}$ כנדרש.

ב. <u>$\forall A \in \text{coNP}(A \leq_P \overline{\text{SAT}})$</u>: בהינתן בעיה $A \in \text{coNP}$, מתקיים $\overline{A} \in \text{NP}$, לכן $\overline{A} \leq_P \text{SAT}$ ולכן $\overline{\overline{A}} \leq_P \overline{\text{SAT}}$ דהיינו $A \leq_P \overline{\text{SAT}}$, כלומר אכן, כל בעיה ב- coNP ניתנת לרדוקציה פולינומיאלית אל $\overline{\text{SAT}}$ כנדרש.

לסיכום: הראינו כי מתקיים (א) $\overline{\text{SAT}} \in \text{coNP-NP}$ **וגם** (ב) $\forall A \in \text{coNP}(A \leq_P \overline{\text{SAT}})$ לכן $\overline{\text{SAT}}$ שלמה במחלקה coNP-NP כנדרש.