תשובה 1

א. **תנאי התחלה:** $a_0 = 1$ (סדרה ריקה! נוח להיעזר ב- a_0 לסעיף ב),

$a_1 = 3$, $a_2 = 3^2 - 2 = 7$.

יחס נסיגה: נתבונן בסדרה מותרת באורך $n+1$.

* אם היא מתחילה ב- 2, ההמשך יכול להיות כל סדרה מותרת באורך n.

מצב זה תורם אפוא a_n אפשרויות.

* אם היא מתחילה ב- 1, ההמשך יכול להיות כל סדרה מותרת באורך n.

גם מצב זה תורם אפוא a_n אפשרויות.

* אם היא מתחילה ב- 0, אחריו חייב לבוא 2 ואחריו יכולה לבוא סדרה מותרת באורך $n-1$.

משמע a_{n-1} אפשרויות.

בסה"כ קיבלנו : $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$.

נבדוק שזה תואם את תנאי ההתחלה שרשמנו : $2a_1 + a_0 = 6 + 1 = 7 = a_2$.

ב. המשוואה האפיינית : $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$. פתרונותיה : $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$.

לפיכך $a_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$.

בהצבת תנאי ההתחלה a_1, a_0 נקבל :

$1 = a_0 = A + B$, $3 = a_1 = A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2}) = A + B + \sqrt{2}(A-B)$.

משתי המשוואות יחד נקבל $A - B = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$,

ומכאן יחד עם המשוואה הראשונה : $A = (1+\sqrt{2})/2$, $B = (1-\sqrt{2})/2$.

לפיכך

$$a_n = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right)$$

תשובה 2

פתרון ללא פונקציות יוצרות

אף אחד מהמשתנים אינו שווה 0 ואינו שווה 1, במלים אחרות כל המשתנים גדולים/ שווים 2.

לכן נציב $x_i = y_i + 2$ ($1 \le i \le 6$),

ונקבל $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + 12 = 29$,

כלומר $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6=17$, כאשר y_i הם טבעיים כלשהם, שהתנאי היחיד לגביהם הוא התנאי על הזוגיות, בו נטפל כעת.

בדיוק 3 מהמשתנים המקוריים היו זוגיים, לכן בדיוק 3 מהמשתנים החדשים הם זוגיים (חיסור 2 ממספר אינו משנה את הזוגיות שלו).

יש $\binom{6}{3}=20$ דרכים לבחור את 3 המשתנים הזוגיים מתוך 6 המשתנים.

לאחר שבחרנו אותם, נניח ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) שאֵלה הם 3 המשתנים הראשונים.

נסמן אפוא: $y_i=2z_i$ $(1\le i\le 3)$, $y_i=2z_i+1$ $(4\le i\le 6)$.

נקבל $2z_1+2z_2+2z_3+2z_4+2z_5+2z_6+3=17$,

כלומר $z_1+z_2+z_3+z_4+z_5+z_6=7$, כאשר z_i הם טבעיים **ללא כל הגבלה**.

מספר הפתרונות של משוואה כזו חושב בסעיף 2.4 בספר, והוא $D(6,7)=\binom{12}{5}=792$.

את זה עלינו לכפול במספר הדרכים לבחור מי יהיו המשתנים הזוגיים, שהוא כאמור 20.

תשובה סופית: $792\cdot 20=15{,}840$.

דרך אחרת: התחלה של פתרון בעזרת פונקציות יוצרות

כמו בפתרון הקודם, נניח שהמשתנים הזוגיים הם 3 הראשונים, ואת התוצאה שנקבל נכפול ב- $\binom{6}{3}=20$.

מספר פתרונות המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=29$ תחת האילוצים הנתונים בשאלה הוא המקדם של x^{29} בפיתוח הפונקציה

$$f(x)=(x^2+x^4+x^6+\dots)^3(x^3+x^5+x^7+\dots)^3$$

בסוגריים השמאליים נוציא גורם משותף x^2, שלאחר העלאה בחזקת 3 נותן x^6 .

בסוגריים הימניים נוציא גורם משותף x^3, שלאחר העלאה בחזקת 3 נותן x^9 .

קיבלנו

$$=x^6(1+x^2+x^4+x^6+\dots)^3\cdot x^9(1+x^2+x^4+x^6+\dots)^3$$

$$=x^{15}(1+x^2+x^4+x^6+\dots)^6$$

מכיון שהוצאנו החוצה x^{15}, המקדם של x^{29} בפיתוח הביטוי כולו שווה למקדם של $x^{29-15}=x^{14}$ בפיתוח של הגורם הימני $(1+x^2+x^4+x^6+\dots)^6$.

הטור ההנדסי כאן הוא טור אינסופי. מכאן השלימו את הפתרון בעצמכם.

אפשר להיעזר בשיטות הפיתוח המוצגות בפתרון שתי השאלות הבאות בממ"ן זה.

תשובה 3

א. מספר הדרכים לחלק את n הכבשים בין הרועים הוא כמספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $t_1+t_2+t_3+t_4=n$, בכפוף לתנאי $t_i \le 20$, $(i=1,2,3,4)$.

הפונקציה היוצרת: $$f(x) = (1+x+x^2+\ldots+x^{20})^4 = \left(\frac{1-x^{21}}{1-x}\right)^4$$

ב. זהו המקדם של x^{50} בפונקציה הנ"ל. נמשיך לפתח את הפונקציה:

$$\left(\frac{1-x^{21}}{1-x}\right)^4 = (1-x^{21})^4 \cdot \frac{1}{(1-x)^4} = (1-4\cdot x^{21}+6\cdot x^{42}-4x^{63}+x^{84})\cdot \sum_{i=0}^{\infty} D(4,i)x^i$$

במעבר האחרון נעזרנו בנוסחת הבינום עבור הגורם השמאלי, ובנוסחה (iii) שבסוף הממ"ן עבור הגורם הימני.

כאמור, אנו רוצים את המקדם של x^{50}, לכן נוכל להתעלם ממחוברים בעלי חזקה גדולה יותר.

בעזרת נוסחה (ii) שבסוף הממ"ן, המקדם המבוקש הוא:

$$1\cdot D(4,50)-4\cdot D(4,29)+6\cdot D(4,8) = \binom{53}{3}-4\cdot\binom{32}{3}+6\cdot\binom{11}{3} = 23,426-19,840+990 = 4,576$$

תשובה 4

הזהות הנתונה: $$\left(\frac{1}{1+x}\right)^n \cdot (1+x)^{2n} = (1+x)^n$$

אם נפתח בנפרד את אגף ימין ואת אגף שמאל של הזהות הנתונה, נקבל שני טורים. עקב השוויון בין שני אגפי הזהות הנתונה, שני הטורים שנקבל צריכים להיות שווים. כלומר לכל k טבעי, המקדם של x^k בפיתוח אגף ימין צריך להיות שווה למקדם של x^k בפיתוח אגף שמאל.

נקרא למקדם זה c_k.

פיתוח אגף ימין בזהות הנתונה

מנוסחת הבינום: $$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k$$

(המשכנו את הסכום עד אינסוף בעזרת הגדרת המקדמים הבינומיים החריגים בעמ' 30 בספר).

קיבלנו אפוא $c_k = \binom{n}{k}$.

פיתוח אגף שמאל בזהות הנתונה

אגף שמאל בזהות הנתונה הוא מכפלה של שני גורמים. הראשון הוא $\frac{1}{(1+x)^n}$.

לפי נוסחה (*iii*) המופיעה בסוף המטלה,

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} D(n,i)x^i$$

בהצבת $(-x)$ במקום x נקבל

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i D(n,i)x^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

כאשר $a_i = (-1)^i D(n,i)$.

הגורם השני אותו אנו עלינו לפתח הוא $(1+x)^{2n}$.

בהצבת $2n$ במקום n בנוסחת הבינום נקבל:

$$(1+x)^{2n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2n}{i} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

כאשר $b_i = \binom{2n}{i}$.

פיתחנו את שני הגורמים, כעת ניעזר בנוסחה לפיתוח מכפלה: נוסחה (*ii*) בסוף המטלה.

כללית, המקדם של x^k במכפלה הוא $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$. נציב ונקבל:

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i D(n,i) \binom{2n}{k-i}$$

הזהות הקומבינטורית המבוקשת

נשווה את שני הביטויים שקיבלנו עבור c_k:

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i D(n, \ i) \binom{2n}{k-i} = \binom{n}{k}$$

זו הזהות המבוקשת.

השלימו עצמאית את הבדיקה עבור המקרה הפרטי הנדרש.

איתי הראבן