פתרון ממ"ן 11

שאלה 1

לכל אחת מהטענות הבאות קבעו אם היא נכונה או לא.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $1 \in \{1,\{1\}\}$ ב. $1 \in \{\{1\}\}$ ג. $\{2\} \subseteq \{1,\{1\},\{2\}\}$ ד. $\{\varnothing\} \subseteq \{1,\{\varnothing\}\}$

ה. $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing,\{1\}\}$ ו. $\{1\} \in \{\mathbf{N}\}$ ז. $|\{1,\mathbf{N}\}| = |\{1,2\}|$ ח. $|\mathcal{P}(\{2,\varnothing\})| = 2 \cdot |\mathcal{P}(\{\varnothing\})|$

תשובה

א. נכון

ב. לא נכון

ג. לא נכון

ד. לא נכון

ה. נכון

ו. לא נכון

ז. נכון

ח. נכון

שאלה 2

יהיו A,B,C קבוצות. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

ב. אם $\{A\} \subseteq \mathcal{P}(B)$ אז $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

ג. אם $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ אז $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$.

תשובה

א. נוכיח שלכל x, x הוא איבר של $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$ אם ורק אם הוא איבר של $A \setminus (B \setminus C)$.

נניח תחילה ש- $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

אז $x \in A \setminus B$ או $x \in A \cap C$ כלומר ($x \in A$ וגם $x \notin B$) או ($x \in A$ וגם $x \in C$).

אם ($x \in A$ ו- $x \notin B$) אז $x \in A$ וגם $x \notin (B \setminus C)$ ולכן $x \in A \setminus (B \setminus C)$.

ואם ($x \in A$ וגם $x \in C$) אז $x \in A$ וגם $x \notin (B \setminus C)$ ולכן $x \in A \setminus (B \setminus C)$.

מכאן שכל $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ מקיים $x \in A \setminus (B \setminus C)$.

להפך, נניח ש- $x \in A \setminus (B \setminus C)$. אז $x \in A$ וגם $x \notin (B \setminus C)$ לכן $x \in A$ וגם ($x \notin B$ או $x \in C$)

מכאן ש- ($x \in A$ וגם $x \notin B$) או ($x \in A$ וגם $x \in C$) כלומר $x \in (A \cap C)$ או $x \in (A \setminus B)$ ולכן

$x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$. בזאת הוכחנו ש- $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

פתרון אחר: נניח ששלוש הקבוצות הן חלקיות לקבוצה אוניברסלית U כלשהי (U יכולה למשל להיות האיחוד שלהן).

אז אל ידי שימוש במשפט 1.24, בכללי הפילוג (1.20) וכללי דה מורגן (1.26) נקבל:

$$A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B \setminus C)^c = A \cap (B \cap C^c)^c =$$
$$= A \cap (B^c \cup C^{cc}) = A \cap (B^c \cup C) =$$
$$= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

ב. לפי ההנחה, $\{A\} \subseteq \mathcal{P}(B)$ ומאחר ש- $A \in \{A\}$ נסיק ש- $A \in \mathcal{P}(B)$ ומכאן נובע ש- $A \subseteq B$.

עלינו להראות ש- $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ כלומר: לכל $X \in \mathcal{P}(A)$ מתקיים $X \in \mathcal{P}(B)$.

נניח ש- $X \in \mathcal{P}(A)$. אז $X \subseteq A$ ומאחר ש- $A \subseteq B$ נקבל ש- $X \subseteq B$ כלומר $X \in \mathcal{P}(B)$.

כך הוכחנו ש- $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

ג. בסעיף זה ניעזר בעובדה שלכל קבוצה A מתקיים $A \in \mathcal{P}(A)$ (וזאת מפני ש- $A \subseteq A$). לפי הערה זו, $A \cup B \in \mathcal{P}(A \cup B)$ ולכן, מהנתון נובע ש- $A \cup B \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ כלומר $A \cup B \in \mathcal{P}(A)$ או $A \cup B \in \mathcal{P}(A)$ ומכאן ש- $A \cup B \subseteq A$ או $A \cup B \subseteq B$.

אם $A \cup B \subseteq A$ אז $B \subseteq A$ ואם $A \cup B \subseteq B$ אז $A \subseteq B$ וזה מה שרצינו להוכיח.

שאלה 3

יהיו A, B, C קבוצות חלקיות לקבוצה אוניברסלית U. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $(A \cap B)^c \subseteq A$ אז $A = U$

ב. $A^c \Delta B = A \Delta C$ אז $C = B^c$

ג. אם $x \in (A \cap B) \setminus C$ אז $x \notin A \Delta B \Delta C$.

תשובה

א. אם $(A \cap B)^c \subseteq A$ אז לפי ... $A^c \subseteq (A \cap B)^{cc}$ כלומר $A^c \subseteq A \cap B$. מכאן ש- $A^c \subseteq A$. אז, מאחר ש- $A^c \subseteq A^c$ נקבל ש- $A^c \subseteq A \cap A^c = \varnothing$. מכאן ש- $A^c = \varnothing$ ולכן $A = U$.

ב. לפי הטענה שבשאלה 41, מתקיים $A^c \Delta B = A \Delta B^c$ ולכן מהנתון נובע בעצם ש- $A \Delta B^c = A \Delta C$.

ואז על ידי שימוש בחוק הצמצום של הפעולה Δ (שאלה 32 ג) נקבל ש- $B^c = C$.

ג. אם $x \in (A \cap B) \setminus C$ אז $x \in A$ ו- $x \in B$ וגם $x \notin C$. מכאן ש- $x \notin A \Delta B$ (כי $x \in A \Delta B$ אם ורק אם הוא שייך לאחת בלבד מבין הקבוצות A, B. ואז, מסיבה דומה, מפני ש- $x \notin A \Delta B$ וגם $x \notin A \Delta B$ נקבל ש- $x \notin (A \Delta B) \Delta C$.

שאלה 4

בשאלה זו $\mathbf{N}$ היא הקבוצה האוניברסלית. לכל $n \in \mathbf{N}$ נסמן $A_n = \{0,1,2,3,\dots,n\}$.

עבור כל אחת מן הקבוצות הבאות, קבעו אם היא שווה או לא לאחת הקבוצות $\mathbf{N}$, $\mathbf{N} \setminus \{0\}$, $\varnothing$.

נמקו טענותיכם.

א. $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n{}^c$ ב. $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n{}^c$ ג. $\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n} \setminus A_n)$ ד. $\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{n+1} \cap A_n{}^c)$

תשובה

א. לפי כללי דה מורגן $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n{}^c = \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right)^c$. לכל $n \in \mathbf{N}$, המספר 0 שייך ל-

$A_n = \{0,1,2,3,\dots,n\}$ ולכן $0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$. מצד שני אם $k \geq 1$ אז $k \notin A_0$ לכן $k \notin \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$

ומכאן ש- $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \{0\}$. לפיכך: $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n{}^c = \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right)^c = \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

ב. לפי כללי דה מורגן $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n{}^c = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)^c$. מאחר שלכל $k \in \mathbf{N}$, $k \in A_k$, נקבל ש-

$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \supseteq \mathbf{N}$. מכאן ש- $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \mathbf{N}$ ולכן: $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n{}^c = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)^c = \mathbf{N}^c = \varnothing$.

ג. נשים לב שעבור $n = 0$, $A_{2n} \setminus A_n = A_0 \setminus A_0 = \varnothing$,

ועבור כל $n \geq 1$, $A_{2n} \setminus A_n = \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$. מכאן שלכל $n \geq 1$ המספר $n+1$ שייך

ל- $\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n} \setminus A_n)$ ולכן קבוצה זו מכילה כל מספר טבעי $n \geq 2$.

מצד שני, הקבוצות $A_{2n} \setminus A_n$ לא מכילות אף מספר שקטן מ- 2 ולכן

$\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n} \setminus A_n) = \mathbf{N} \setminus \{0,1\}$ וקבוצה זו לא שווה לאף אחת מהקבוצות $\mathbf{N}$, $\mathbf{N} \setminus \{0\}$, $\varnothing$.

ד. לכל $n \in \mathbf{N}$: $A_{n+1} \cap A_n{}^c = A_{n+1} \setminus A_n = \{0,1,2,3,\dots,n+1\} \setminus \{0,1,2,3,\dots,n\} = \{n+1\}$.

לכן $\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{n+1} \cap A_n{}^c) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{n+1\} = \{1,2,3,\dots\} = \mathbf{N} \setminus \{0\}$