

### שאלה 1 (25 נקודות)

נתון גרף פשוט ולא מכוון  $G = (V, E)$  עם משקלים אי-שליליים על הקשתות. הקשתות צבועות בשני צבעים: אדום ושחור. כתוב אלגוריתם בסיבוכיות  $O(|V|^2)$  המקבל כקלט גרף  $G$  כנייל וצומת  $s$  בגרף ומוצא לכל צומת  $v \in V$  את משקל המסלול הקל ביותר (כלומר, שסכום משקלי קשתותיו הוא מינימלי) מבין כל המסלולים מ- $s$  ל- $v$  המכילים מספר זוגי של קשתות אדומות. עליך לפתור זאת ע"י רדוקציה - כלומר, בניית גרף חדש מ- $G$ , הרצת אלגוריתם ידוע ללא שינויים על הגרף החדש ובניית פתרון לגרף המקורי מתוצאת האלגוריתם. פתרון שאינו ע"י רדוקציה לא יתקבל. נתח את סיבוכיות האלגוריתם וחוכח את נכונותו.

### שאלה 2 (25 נקודות)

כתוב אלגוריתם יעיל ככל האפשר אשר מקבל כקלט גרף פשוט ולא מכוון  $G = (V, E)$  עם פונקציית משקל על הקשתות  $w: E \rightarrow \{2, 3\}$  ומוצא עץ פורש מינימלי של  $G$ . נתח את סיבוכיות האלגוריתם וחוכח את נכונותו.

### שאלה 3 (25 נקודות)

א. תן דוגמה לגרף בעל קוטר 2 (להזכירך, הקוטר של גרף הוא המרחק הגדול ביותר בין שני צמתים בגרף, ומרחק בין שני צמתים בגרף הוא אורך המסלול הקצר ביותר ביניהם).  
 ב. כתוב אלגוריתם אשר מקבל כקלט גרף פשוט ולא מכוון  $G = (V, E)$  בעל קוטר 2 ומחשב את  $\sum_{e \in E} \text{short\_path}(e)$  כאשר  $\text{short\_path}(e)$  הוא מספר המסלולים הקצרים ביותר ב- $G$  אשר עוברים דרך הקשת  $e$ .

סיבוכיות האלגוריתם צריכה להיות  $O(n^{\log 7})$ .

חוכח את נכונות האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

**שאלה 4 (25 נקודות)**

נגדיר את הגרף  $G_{N,K}$

$$V = \{i \mid 0 \leq i \leq N-1\}$$

$$E = \{(i, j) \mid j = (i + k) \pmod{N} \quad 1 \leq k \leq K\}$$

א. בהינתן גרף  $G_{N,K}$  שקיבול כל הקשתות בו הוא 1 מחי הזרימה המקסימלית בין כל זוג צמתים בגרף? הוכח.

ב. תן אלגוריתם המוצא את הזרימה המקסימלית בין שני צמתים  $s, t$  ב- $G_{N,K}$  כאשר קיבול כל קשת הוא 1 או 2. נתח את סיבוכיותו והסבר את נכונותו.

**שאלה 5 (25 נקודות)**

בהינתן גרף קשיר ולא מכוון  $G = (V, E)$  נאמר כי מסלול פשוט  $P$  הוא  $k$ -גשר בגרף אם אורכו של  $P$  הוא  $k$  וכל קשת ב- $P$  היא גשר ב- $G$ .

כתוב אלגוריתם אשר מקבל כקלט גרף קשיר ולא מכוון  $G = (V, E)$  ומוצא את הערך  $k$  הגדול ביותר כך שב- $G$  קיים  $k$ -גשר. נתח את סיבוכיות האלגוריתם והסבר את נכונותו.

**בהצלחה!**