

קורס: 20416 "תורת ההסתברות"

תאריך הבחינה: 14.7.2014 (סמסטר 2014 ב - מועד א 5 / 86)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי וספר הקורס בלבד.

מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפת: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

שאלה 1 (25 נקודות)

- שתי מרכזיות טלפון: A ו-B, פועלות באופן בלתי-תלוי זו בזו. בשתי המרכזיות מתקבלות שיחות טלפון בזמנים המקיימים את שלוש ההנחות של תהליך פואסון עם קצב של 2 שיחות לדקה. מתחילים לעקוב אחר שיחות הנכנסות לשתי המרכזיות החל מזמן 0.
- יהיו: T_1 = הזמן החולף (בדקות) מזמן 0 ועד שנכנסת השיחה הראשונה למרכזייה A;
 X_1 = מספר השיחות שנכנסות למרכזייה B מזמן 0 ועד שנכנסת השיחה הראשונה למרכזייה A;
 T_2 = הזמן החולף (בדקות) מזמן 0 ועד שנכנסת השיחה השנייה למרכזייה A;
 X_2 = מספר השיחות שנכנסות למרכזייה B מזמן 0 ועד שנכנסת השיחה השנייה למרכזייה A.
- 9 נק' א. חשב את $P\{X_1 = 2\}$.
- רמז: העזר בהתניה על המשתנה המקרי T_1 .
- 9 נק' ב. מהן התוחלת והשונות של המשתנה המקרי X_2 ?
- 7 נק' ג. זהה את ההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה $T_1 | X_1 = n$, לכל $n = 0, 1, \dots$.

שאלה 2 (25 נקודות)

- נתון סביבון תקין בעל 4 פאות, שעליהן רשומים המספרים 1, 2, 3 ו-4. מסובבים את הסביבון 5 פעמים.
- 6 נק' א. מהי ההסתברות שכל ארבע התוצאות האפשריות תתקבלנה בחמשת הסיבובים?
- 6 נק' ב. מהי ההסתברות שהתוצאה 3 תתקבל לפחות פעם אחת?
- 6 נק' ג. ידוע שבשני הסיבובים הראשונים (מתוך ה-5 שנעשו) התקבלו תוצאות שונות. מהי ההסתברות שב-5 הסיבובים הללו התקבלו כל ארבע התוצאות?
- 7 נק' ד. ידוע שב-5 הסיבובים שנעשו לא התקבלה לפחות אחת מארבע התוצאות האפשריות. מהי ההסתברות שב-5 הסיבובים התקבלו בדיוק שתיים מהתוצאות האפשריות?

שאלה 3 (25 נקודות)

- שני חברים מטילים מטבעות.
- כל אחד מהם מטיל מטבע תקין, עד שלראשונה הוא מקבל H (ואז מפסיק).
- 6 נק' א. מהי שונות מספר ההטלות של החבר הראשון?
- 6 נק' ב. מהי ההסתברות ששניהם יחדיו יבצעו בסך-הכל 10 הטלות מטבע? איזו הנחה יש להניח, כדי לחשב את ההסתברות המבוקשת?
- 6 נק' ג. מהן תוחלת ושונות סך כל ה-T ששניהם (יחדיו) יקבלו במהלך הטלותיהם?
- 7 נק' ד. מהי ההסתברות שההפרש המוחלט בין מספרי ההטלות שלהם יהיה בדיוק 5?

שאלה 4 (25 נקודות)

מטילים 10 פעמים מטבע, שהסתברות לקבל בו H היא p ($0 < p < 1$).
יהי X מספר הזוגות של שתי הטלות עוקבות, שמתקבלת בהן אותה התוצאה.
למשל: אם מקבלים $\overline{HTHHHTHTTH}$, אז $X = 3$.

(9 נק') א. נניח כי $p = 0.5$.

לכל $i = 1, 2, \dots, 9$, נגדיר את המאורעות A_i על ידי:

"בהטלות i ו- $i+1$ התקבלו אותן התוצאות".

האם לכל $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \dots, 9$), המאורעות A_i ו- A_j בלתי-תלויים זה בזה?
הוכח את טענתך.

(16 נק') ב. נניח כי $p = 0.8$. (שימו לב: התפלגות המשתנה המקרי X איננה בינומית)

1. חשב את התוחלת של X .

2. חשב את השונות של X .

שאלה 5 (25 נקודות)

פונקציית הצפיפות המשותפת של המשתנים המקריים X ו- Y נתונה על-ידי:

$$f(x, y) = c|x + y|, \quad |x + y| \leq 1; \quad |x| \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1$$

(13 נק') א. חשב את הערך של c .

(12 נק') ב. מצא את פונקציית הצפיפות המותנית של המשתנה המקרי X בהינתן $Y = 0.5$.

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] \quad \text{נוסחת האינטרפולציה:}$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326