

**קורס: 20416 "תורת ההסתברות"**

**תאריך הבחינה: 24.6.2013 (סמסטר ב' 2013 - מועד א' / 82)**

**חומר העזר המותר:** ספר הקורס ומחשבון מדעי בלבד.

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

**לבחינה מצורפת:** טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית.

## שאלה 1 (25 נקודות)

- נתונה קבוצה של  $n$  אנשים וביניהם איתמר.  
 כל אחד מחברי הקבוצה בוחר כדור אחד.  
 הצבע של כל כדור שנבחר הוא אדום בהסתברות  $p$  ( $0 < p < 1$ ), ואחרת – שחור בהסתברות  $1 - p$ .  
 אין תלות בין הבחירות של האנשים בקבוצה.  
 לאחר שכל אחד מחברי הקבוצה בוחר כדור, בוחרים באקראי אחד מבין האנשים **שבחרו בכדור אדום**.  
 אם אף אחד מחברי הקבוצה לא בחר בכדור אדום, בוחרים באקראי אחד מבין  $n$  האנשים בקבוצה.  
 נגדיר את המאורעות:  $A$  = איתמר הוא חבר הקבוצה שנבחר;  $B$  = איתמר בחר בכדור אדום;  $C$  = בדיוק 4 מחברי הקבוצה בחרו בכדור אדום.
- 8 נק' א. חשב את  $P(A|C)$ .  
 9 נק' ב. הוכח כי:  $P(A|B) = \frac{1 - (1 - p)^n}{np}$ .  
 8 נק' ג. השתמש בתוצאה המובאת בסעיף ב, כדי להוכיח כי:  $P(A) = \frac{1}{n}$ .  
 נמק את כל צעדי החישוב.

## שאלה 2 (25 נקודות)

- חברת חטיפים מכניסה מדבקה אחת, לכל אריזה של חטיפים שהיא מייצרת.  
 קיימים 10 סוגים אפשריים של מדבקות,  
 ובכל אריזה, ההסתברות לקבל כל סוג של מדבקה (מתוך ה-10) היא 0.1.  
 אין תלות בין סוגי-מדבקות שמוכנסים לאריזות שונות.
- 7 נק' א. בוחרים באקראי 5 אריזות של חטיפים.  
 מהי ההסתברות לקבל בהן 3 או 4 סוגים שונים של מדבקות? (לא יותר ולא פחות)
- 6 נק' ב. בוחרים באקראי 20 אריזות ומסתבר שיש בהן בדיוק 2 מדבקות מכל סוג.  
 מהי ההסתברות לבחור באקראי 5 אריזות (מתוך 20 אריזות אלה),  
 ולקבל בהן 5 מדבקות שכולן שונות זו מזו?
- 12 נק' ג. אלון קנה 15 אריזות של חטיפים.  
 1. מהי תוחלת מספר סוגי המדבקות שיקבל ב-15 האריזות שקנה?  
 2. מהי שונות מספר סוגי המדבקות שיקבל ב-15 האריזות שקנה?

### שאלה 3 (25 נקודות)

יהיו  $X_1$  ו-  $X_2$  משתנים מקריים בלתי-תלויים.

למשתנה המקרי  $X_1$  יש התפלגות גמא עם הפרמטרים  $t_1$  ו-  $\lambda$  ( $\lambda, t_1 > 0$ );

ולמשתנה המקרי  $X_2$  יש התפלגות גמא עם הפרמטרים  $t_2$  ו-  $\lambda$  ( $\lambda, t_2 > 0$ ).

(14 נק') א. נגדיר את המשתנים המקריים  $Y_1$  ו-  $Y_2$  על ידי:  $Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$  ו-  $Y_2 = X_1 + X_2$ .

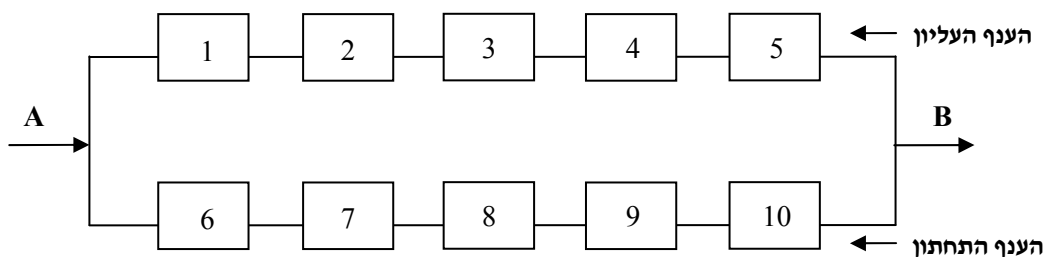
מצא את פונקציית הצפיפות המשותפת של המשתנים המקריים  $Y_1$  ו-  $Y_2$ .

רשום אותה באופן מדויק.

(11 נק') ב. מצא את  $E[Y_1]$ .

### שאלה 4 (25 נקודות)

מערכת מורכבת מ- 10 רכיבים המסודרים במבנה המשורטט להלן:



המערכת פועלת ועובר בה זרם מ-A ל-B,

כל עוד לפחות באחד משני "ענפיה" (העליון או התחתון) כל חמשת הרכיבים תקינים.

נסמן ב-  $X_i$  את אורך-החיים (בשבועות) של רכיב  $i$ , לכל  $i = 1, 2, \dots, 10$ .

נניח שלכל אחד מה-  $X_i$  יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ );

וכי כל הרכיבים בלתי-תלויים זה בזה.

מפעילים מערכת חדשה –

(6 נק') א. אורך-החיים של הענף העליון הוא הזמן החולף החל מהפעלת המערכת החדשה

ועד לרגע שבו מתקלקל לראשונה אחד מרכיבי הענף העליון.

מהי התפלגות אורך-החיים של הענף העליון?

זהה את ההתפלגות, ונמק את תשובתך.

(6 נק') ב. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של אורך חיי-המערכת.

(6 נק') ג. חשב את תוחלת אורך חיי-המערכת.

(7 נק') ד. יהיו  $a$  ו-  $b$  קבועים המקיימים  $0 < a < b$ .

אם אורך-החיים של הענף העליון גדול מ-  $a$ ,

מהי ההסתברות שאורך-החיים של המערכת גדול מ-  $b$ ?

שאלה 5 (25 נקודות)

נתונה פונקציית ההסתברות המשותפת:

$$P\{X = m, Y = n\} = e^{-7} \cdot \frac{4^m}{m!} \cdot \frac{3^{n-m}}{(n-m)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, \dots, n$$

(6 נק') א. מצא את ההתפלגות השולית של  $X$  וזהה אותה.

(7 נק') ב. חשב את  $E[X|Y=n]$  לכל  $n = 0, 1, \dots$ .

(6 נק') ג. האם  $X$  ו- $Y-X$  בלתי-תלויים? נמק את תשובתך.

(6 נק') ד. הראה כי  $\rho(X, Y) = \sqrt{\frac{\text{Var}(X)}{\text{Var}(Y)}}$ .

**בהצלחה!**

**ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית,  $\Phi(z)$**

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$z$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
$z$	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
$z$	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326