ממ"ן 14

שאלה 1: יהיו $B=\{1,2\}, A=\{a,b,c\}$

א. כל הפונקציות מA לB שאינן על:

$(A,B,\{(a,1)\}),\ \ (A,B,\{(a,2)\}),\ \ (A,B,\{(b,1)\}),\ \ (A,B,\{(b,2)\}),$
$(A,B,\{(c,1)\}),\ \ (A,B,\{(c,2)\})$

ב. כל הפונקציות מB לA שאינן חד-חד-ערכיות:

$(B,A,\{(1,a),(2,a)\},\ \ (B,A,\{(1,b),(2,b)\},\ \ \ \ (B,A,\{(1,c),(2,c)\},$

ג. נגדיר $f=(\{a,b\},\{1,2\},\{(a,1),(b,2)\})$
ו$g=(\{1,2\},\{a,b\},\{(1,a),(2,b)\})$

ד. נגדיר $f=(\{a,b\},\{1,2\},\{(a,2),(b,1)\})$
ו$g=(\{1,2\},\{a,b\},\{(1,a),(2,b)\})$

שאלה 2: תהי פונקציה $f:A\to B$ ותהי $C\subseteq A$.

א. הוכח $C\subseteq f^{-1}(f(C))$:
יהי $x\in C$
לכן מתקיים $x\in f^{-1}(f(C))$ וגם $x\in C$
ובפרט, $x\in f^{-1}(f(x))$ (כיוון שחלק מהטענה היא ההנחה, וגם $x\in C$) מתקיים בגלל שאחד ממקורותיה של תמונת איבר היא האיבר עצמו (על פי הגדרה).

ב. הוכח שאם f חד-חד-ערכית אזי $C=f^{-1}(f(C))$.
נניח f חד-חד-ערכית, ובדומה לסעיף הקודם יהי $x\in C$ כך ש$x\in f^{-1}(f(x))$.
בגלל שf חד-חד-ערכית, לכל איבר בטווח ישנו לכל היותר מקור יחיד.
לכן בגלל שx בהכרח שייך ל$f^{-1}(f(x))$ הוא גם היחיד,
כלומר $\{x\}=f^{-1}(f(c))$, וכך עבור כל $x\in C$, כלומר, קבוצת האיחוד של מקורותיו של כל x היא C,
שהרי $x\in C$.

ג. $A=\mathbb{Z}, B=\mathbb{N}\cup\{0\}, C=\mathbb{N}\cup\{0\}$, ונגדיר $f:A\to B: f(x)=x$^2.
לדוגמה: $2\in\mathbb{N}\cup\{0\}\in\mathbb{Z}$
$f(2)=4$
$f^{-1}(4)=\{2,-2\}$
וכך עבור כל מספר.

שאלה 3: נתונות פונקציות $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ קבוצת המספרים הטבעיים). ידוע כי לכל $n\in\mathbb{N}$: $f(n)=g(2n)$

א. הוכח כי אם g חד-חד-ערכית אז f חד-חד-ערכית:
נניח g חד-חד-ערכית:
לכן קיימים $n,m\in\mathbb{N}$ שונים כך שמתקיים $g(n)=g(m)$
לכן, מתקיים $g(2n)=g(2m)$ מסגירות כפל הטבעיים
ששקול לביטוי $f(n)=f(m)$, ולכן, f חד-חד-ערכית.

ב. הוכח כי אם f היא פונקציה על אז גם g היא פונקציה על:
נניח f על. לכן מתקיים: $f(\mathbb{N})=\mathbb{N}$.
כלומר, $\{f(n)\mid n\in\mathbb{N}\}=\mathbb{N}$
ששקול לביטוי $\{g(2n)\mid n\in\mathbb{N}\}=\mathbb{N}$
לכן $\{g(x)\mid x\in\{2n\mid n\in\mathbb{N}\}\}=\mathbb{N}$
כלומר $g(\{2n\mid n\in\mathbb{N}\})=\mathbb{N}$
ובגלל ש$\{2n\mid n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{N}$, ניתן לומר: $g(\mathbb{N})=\mathbb{N}$.

ג. נגדיר את $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$:

$f(n) = 2n$

נגדיר את $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$g(n) = n = I_{\mathbb{N}}$

ד. הוכח כי אם f על, אזי g אינה חד-חד-ערכית:

בדומה לשאלה ב', נוכל לראות שהפונקציה g על ביחס ל$\{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$.

לכן מתקיים: $g(\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}) = \mathbb{N}$.

לכן, לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $x \in \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ כך ש $g(x) = n$

לכן, אם קיים $y \in \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ כך ש$f(y) \in \mathbb{N}$, אזי f אינה חד-חד-ערכית כי קיימים $x, y \in \mathbb{N}$ שעבורם הפוקנציה מוגדרת, כך ש $x \neq y$ וגם $f(x) = f(y)$.

<u>שאלה 4:</u> הוכח או הפרך:

א. הפונקציה $f: \{x \in \mathbb{Q} | x \leq 0\} \to \mathbb{Q}$ שמוגדרת ע"י $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ היא חד-חד-ערכית:

הטענה נכונה.

נניח $f(x)$ אינה חד-חד-ערכית. לכן קיימים $x, y \in \{x \in \mathbb{Q} | x \leq 0\}$ כך ש $x \neq y$ וגם $f(x) = f(y)$.

לכן $\frac{x^2}{x-2} = \frac{y^2}{y-2}$

כלומר, היחס בין x^2 ל$x - 2$ שווה ליחס בין y^2 ל$y - 2$.

אבל, אם נפרק את הביטויים ונניח ש$x < y$ (ללא הגבלת הכלליות, כך שגם $x < y$), בהכרח יתקיים ש$x^2 < y^2$ וגם $x - 2 > y - 2$. לכן, ישנו יחס ישר בין גודלו של המספר לבין תמונתו של המספר ביחס לפונקציה – שהרי ככל שמספר קטן, כך מנתו ביחס למספר כלשהו קטנה וגם ככל שמספר קטן, כך מנתו של מספר ביחס אליו קטנה, אם ורק אם מדובר במספרים שליליים. עבור $x = 0$, המנה היא 0, וישנו רק x יחיד כך ש$x^2 = 0$, והלוא הוא 0.

ב. הפונקציה $g: \{x \in \mathbb{Q} | x > 2\} \to \mathbb{Q}$ שמוגדרת ע"י $g(x) = \frac{x^2}{x-2}$ היא חד-חד-ערכית: הטענה שגויה

ניקח לדוגמה את $3, 6 \in \{x \in \mathbb{Q} | x > 2\}$:

$$g(3) = \frac{3^2}{3-2} = \frac{9}{1} = 9$$

$$g(6) = \frac{6^2}{6-2} = \frac{36}{4} = 9$$

ולכן, בגלל של9 מותאמים שני איברים מ$\{x \in \mathbb{Q} | x > 2\}$, הפונקציה איננה חד-חד-ערכית.

ג. הפונקציה $h: \{x \in \mathbb{Q} | x > 2\} \to \{x \in \mathbb{Q} | x > 2\}$ שמוגדרת ע"י $h(x) = \frac{x^2}{x-2}$ היא על: הטענה שגויה

נניח h על. לכן לכל $x \in \{x \in \mathbb{Q} | x > 2\}$ קיים $y \in \{x \in \mathbb{Q} | x > 2\}$ כך ש $h(y) = x$.

לדוגמה, נניח $x = 10$, לכן, מתקיים: $10 = \frac{y^2}{y-2}$

כלומר: $10(x - 2) = x^2$

$x^2 - 10x + 20 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 80}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

30.4

$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{5}$, ולכן בגלל שחיבור וחיסור של רציונלי עם אי רציונלי $\left(\sqrt{5}\right)$ בהכרח אי רציונלי, לא קיימת תמונה ל10 ביחס לh, ולכן h אינה על (כי לא קיים מקור אחד לפחות לכל איבר בטווח).