תשובה 1

א. תהי $X \in P(A)$ ויהי $|X| = k$.

ל-X יש בדיוק k תת-קבוצות בגודל $k-1$ (נזרוק בכל פעם אבר אחד מ-X).

אלה אברי $P(A)$ שאותם X מכסה.

אברי $P(A)$ המכסים את X הם קבוצות בגודל $k+1$ המכילות את A.

יש בדיוק $n-k$ קבוצות כאלה (נוסיף ל-X בכל פעם אבר אחד שמחוץ ל-X).

בסה"כ מספר השכנים של X הוא $k+(n-k)=n$, מספר שאינו תלוי ב-X.

משמע הגרף הוא רגולרי מדרגה n.

ב. ב- H_n יש 2^n צמתים, ודרגת כל צומת היא n.

סכום כל הדרגות בגרף הוא אפוא $n \cdot 2^n$.

מכאן בעזרת טענה 1.3 בעמ' 10 בחוברת, מספר הקשתות של H_n הוא $n \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2} n \cdot 2^n$.

ג. עבור n זוגי (מדוע?)

תשובה 2

נחשב:

$$\sum_{v\in V}\left(d_1(v)+d_2(v)\right) = \sum_{v\in V} d_1(v) + \sum_{v\in V} d_2(v)$$

לפי טענה 1.3 בעמ' 10 בחוברת נקבל

$$=2E_1+2E_2$$

כאשר E_1, E_2 הם מספרי הקשתות בכל אחד מהעצים.

מכיון שמדובר בעצים, ושניהם על אותה קבוצת צמתים V, נקבל מעמוד 19 משפט 2.5 סעיף 4:

$$=2(|V|-1)+2(|V|-1) = 4|V|-4$$

קיבלנו: $\sum_{v\in V}\left(d_1(v)+d_2(v)\right) = 4|V|-4$

אילו **לכל** $v \in V$ היה $d_1(v)+d_2(v) \geq 4$, היה בהכרח $\sum_{v\in V}\left(d_1(v)+d_2(v)\right) \geq 4|V|$,

בסתירה למה שקיבלנו. לכן לא ייתכן **שלכל** $v \in V$ יהיה $d_1(v)+d_2(v) \geq 4$.

במלים אחרות, **קיים** $v \in V$ עבורו $d_1(v)+d_2(v) \leq 3$.

תשובה 3

א. בגרף שהוא מסלול פשוט על 4 צמתים : w---x---y---z ,

הזיווג המודגש, המזווג את x עם y, אינו ניתן להרחבה.

יחד עם זה מובן שהוא אינו זיווג מקסימום :

הוא מכיל רק זוג אחד, בעוד שהזיווג w---x---y---z מכיל שני זוגות.

ב. המסלול w---x---y---z הוא מסלול שיפור עבור הזיווג w---x---y---z .

הזיווג המשופר שהוא נותן הוא בדיוק הזיווג w---x---y---z .

ג. הטענה נכונה : אילו הוא היה ניתן להרחבה היינו מקבלים זיווג גדול יותר (כלומר זיווג בעל מספר גדול של זוגות) - בסתירה להיותו של M זיווג מקסימום.

תשובה 4

הערה : כפי שהוזכר בפורום, נשמט בשאלה הנתון שמדובר בגרף פשוט. למעשה, המושג של משלים מעניין ורלבנטי רק לגרפים פשוטים : אם G **אינו** פשוט אז **המשלים של המשלים** של G אינו שווה ל- G. וגם להיפך : אם המשלים של המשלים של G אינו שווה ל- G אז G אינו פשוט. שתי הטענות הן תרגיל קל עבורכם. מסיבה זו לא מקובל להשתמש במושג "משלים" עבור גרפים שאינם פשוטים).

לפי מסקנה 5.4 בעמ' 54 בספר, מספר הקשתות בגרף מישורי פשוט על 11 צמתים הוא לכל היותר $33-6=27$. בפרט, מספר הקשתות של G הוא לכל היותר 27.

בגרף המלא K_{11} יש $\binom{11}{2}=55$ קשתות. לכן ב- $\overline{G}$ יש לפחות $55-27=28$ קשתות.

מכאן, לפי האמור בתחילת התשובה, $\overline{G}$ אינו מישורי.

תשובה 5

א. אילו היו שני צמתים כאלה, הרי מהעובדה שיש להם אותו צבע בצביעה של G נובע שהם אינם שכנים ב- G, ומהעובדה שיש להם אותו צבע בצביעה של $\overline{G}$ נובע שהם אינם שכנים ב- $\overline{G}$.

זה לא ייתכן : כל שני צמתים של G, או שהם שכנים ב- G או שהם שכנים ב- $\overline{G}$.

לכן אין שני צמתים כאלה.

האמירה שאין שני צמתים כאלה פירושה בדיוק שהפונקציה של V ל- $A\times B$ שהוגדרה בשאלה היא חד-חד-ערכית.

ב. התשובה היא (3) : $\chi(G)\cdot\chi(\overline{G})\geq n$. השלימו בעצמכם את הנימוק.

איתי הראבן