פתרונות לממ"ן 16 - 2012ב - 20425

1. א. לכל $i = 1,\ldots,44$, נגדיר :

$$X_i = \begin{cases} 1 & , \text{קלף } i\text{, שאינו מלך/מלכה, מתגלה לפני קלף המלך/מלכה השמיני} \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$$

ונקבל כי : $\underbrace{\sum_{i=1}^{44} X_i}_{\text{לא מלך ולא מלכה}} + \underset{\text{מלך או מלכה}}{\underset{\downarrow}{8}} = X$ = מספר הקלפים שהופכים עד שמתגלה קלף המלך/מלכה ה-8.

נחשב את התוחלת של X_i , לכל $i = 1,\ldots,44$. מקבלים :

$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \tfrac{8}{9}$$ [בחישוב ההסתברות מתייחסים רק ל-8 קלפי המלכים ולקלף i שאינו מלך/מלכה]

ומכאן : $$E[X] = E\left[8 + \sum_{i=1}^{44} X_i\right] = 8 + \sum_{i=1}^{44} E[X_i] = 8 + 44 \cdot \tfrac{8}{9} = 47\tfrac{1}{9} = 47.\overline{1}$$

ב. נחשב את השונות של X_i , לכל $i = 1,\ldots,44$. מסעיף א מקבלים כי :

$$\text{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{1}{9} = \tfrac{8}{81}$$

כעת, נחשב את השונות המשותפת של X_i ו- X_j . לכל $i \neq j$ מתקיים :

$$E[X_i X_j] = P\{X_i = 1, X_j = 1\}$$

$$= P\{X_i = 1\}P\{X_j = 1 | X_i = 1\} = \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{9}{10} = \tfrac{4}{5}$$ [בחישוב ההסת' מתייחסים רק ל-8 קלפי המלכים ולקלפים i ו- j שאינם מלך/מלכה]

לכן : $$\text{Cov}(X_i, X_j) = E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j] = \tfrac{4}{5} - \left(\tfrac{8}{9}\right)^2 = \tfrac{4}{405}$$

ומכאן : $$\text{Var}(X) = \text{Var}\left(8 + \sum_{i=1}^{44} X_i\right) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{44} X_i\right) = \sum_{i=1}^{44} \text{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

$$= 44 \cdot \tfrac{8}{81} + 44 \cdot 43 \cdot \tfrac{4}{405} = 23\tfrac{1{,}053}{32{,}805} = 23\tfrac{13}{405} = 23.0321$$

2. א. נסמן ב-N את המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר המקררים שהטכנאי מתקן ביום אחד. למשתנה המקרי N יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 12, ולכן תוחלתו ושונותו שוות ל-12. כמו כן, נסמן ב-X_1 , X_2 , ... , X_N את זמני-התיקון של המקררים שהטכנאי מתקן ביום אחד. לכל אחד מה-X_i-ים יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר 1.65, ולכן התוחלת של כל אחד מהם היא 1/1.65 והשונות $1/1.65^2$. כמו כן, ה-X_i-ים בלתי-תלויים זה בזה ובלתי תלויים ב- N .

לפיכך, אפשר להציג את הזמן הכולל שהטכנאי מקדיש לתיקון מקררים ביום אחד, באמצעות הסכום המקרי $\sum_{i=1}^{N} X_i$. לחישוב התוחלת של סכום זה, נשתמש בתוצאת דוגמה 4ד (עמוד 375 בספר) ונקבל כי :

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1] = 12 \cdot \tfrac{1}{1.65} = 7.\overline{27}$$

ב. בסימוני הסעיף הקודם, ומתוצאת דוגמה 4יד (עמוד 386 בספר), העוסקת בחישוב שונות של סכום מקרי, נקבל כי:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\,\mathrm{Var}(N) = 12\cdot\tfrac{1}{1.65^2} + \left(\tfrac{1}{1.65}\right)^2\cdot 12 = 8.815$$

ג. נסמן ב-Y את הסכום המקרי שהוגדר בסעיף א. לחישוב הפונקציה יוצרת המומנטים של הסכום המקרי, דהיינו של Y, נשתמש בתוצאת דוגמה 6י (עמוד 399 בספר). לכל $t < 1.65$ נקבל:

$$M_Y(t) = E\left[\left(M_{X_1}(t)\right)^N\right] = E\left[\left(\tfrac{1.65}{1.65-t}\right)^N\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1.65}{1.65-t}\right)^n\cdot e^{-12}\cdot\tfrac{12^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{12\cdot 1.65}{1.65-t}\right)^n\cdot e^{-12}\cdot\tfrac{1}{n!} = e^{-12}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{12\cdot 1.65}{1.65-t}\right)^n\cdot\tfrac{1}{n!} = \exp\left\{-12+\tfrac{19.8}{1.65-t}\right\}$$

לבדיקת תוצאת סעיף א, נגזור את הפונקציה שקיבלנו ונציב בנגזרת $t = 0$:

$$M'_Y(t)\Big|_{t=0} = \tfrac{19.8}{(1.65-t)^2}\cdot\exp\left\{-12+\tfrac{19.8}{1.65-t}\right\}\Big|_{t=0} = \tfrac{19.8}{1.65^2}\cdot e^0 = 7.\overline{27}$$

3. א. ההתפלגות של המשתנה המקרי X_i היא גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{1}{6}$, לכל $i = 1,2,\ldots,6$.
כמו כן, ה-X_i-ים בלתי-תלויים. לכן, לסכום ה-X_i-ים יש התפלגות בינומית-שלילית עם הפרמטרים 6 ו- $\frac{1}{6}$, ומתקיים:

$$E\left[\sum_{i=1}^{6} X_i\right] = \frac{6}{\frac{1}{6}} = 36 \qquad ; \qquad \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{6} X_i\right) = \frac{6\cdot\frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 180$$

ב. ה-X_i-ים בלתי-תלויים, לכן:

$$E\left[\sum_{i=1}^{6} X_i \,\middle|\, X_1+X_2=10\right] = E\left[10+\sum_{i=3}^{6} X_i \,\middle|\, X_1+X_2=10\right] = 10 + E\left[\sum_{i=3}^{6} X_i \,\middle|\, X_1+X_2=10\right]$$

$$= 10 + E\left[\sum_{i=3}^{6} X_i\right] = 10 + \frac{4}{\frac{1}{6}} = 10+24 = 34 \qquad [\text{ה-}X_i\text{-ים בלתי-תלויים}]$$

4. א. נרשום תחילה את ארבע התוצאות האפשריות של X_1 ו- X_2 , ולצד כל אחת מהן את ההסתברות לקבלתה ואת הערכים המתאימים של Y_1 ו- Y_2, כאשר $Y_1 = X_1 + X_2$ ו- $Y_2 = X_1 - X_2$.

X_1	X_2	Y_1	Y_2	ההסתברות
0	0	0	0	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
0	1	1	-1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
1	0	1	1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
1	1	2	0	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

מהטבלה האחרונה, אפשר למצוא את פונקציית ההסתברות המשותפת של Y_1 ו- Y_2:

Y_1 \ Y_2	-1	0	1	p_{Y_2}
0	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
p_{Y_1}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	

ב.
$$E[Y_1Y_2] = 0 + 1\cdot(-1)\cdot\tfrac{1}{3} + 1\cdot 1\cdot\tfrac{1}{6} = -\tfrac{1}{6}$$
$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2) = E[Y_1Y_2] - E[Y_1]E[Y_2] = -\tfrac{1}{6} - \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}\right)\left(-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}\right) = -\tfrac{1}{6} + \tfrac{7}{6}\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{36}$$
$$\mathrm{Var}(Y_1) = \mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{17}{36}$$
$$\mathrm{Var}(Y_2) = \mathrm{Var}(X_1 - X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + (-1)^2\,\mathrm{Var}(X_2) = \tfrac{17}{36}$$
$$\rho(Y_1,Y_2) = \frac{\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_1)\mathrm{Var}(Y_2)}} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{17}{36}} = 0.05882$$

5. א. הסכום של משתנים מקריים נורמליים בלתי-תלויים הוא משתנה מקרי נורמלי עם הפרמטרים שמתקבלים מסכימת התוחלות ומסכימת **השונויות** של המשתנים המקריים שבסכום. לכן, בהנחה שמשקל השקית זניח, נקבל שהמשקל הכולל (בק״ג) של שקית מלאה ב-5 תפוחים ירוקים וב-5 תפוחים אדומים, שנסמנו ב-W, הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת $5\cdot 0.1 + 5\cdot 0.15 = 1.25$ ושונות $5\cdot 0.01^2 + 5\cdot 0.02^2 = 0.0025$. לכן:

$$P\{X < 1.3\} = \Phi\left(\tfrac{1.3-1.25}{\sqrt{0.0025}}\right) = \Phi\left(\tfrac{0.05}{0.05}\right) = \Phi(1) = 0.8413$$

ב. מהאמור בסעיף הקודם, נקבל כי הפונקציה יוצרת המומנטים של X היא:

$$M_X(t) = e^{1.25t + 0.0025t^2/2} \qquad , \qquad \text{ממשי } t$$

6. א. נתון כי:
$$X \sim Geo(p) \qquad ; \qquad Y \mid X = i \sim B(i,p)$$

לכן:
$$P\{X=Y\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X=Y=i\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{Y=i \mid X=i\}P\{X=i\}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}\binom{i}{i}p^i(1-p)^0\,p(1-p)^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty}p^{i+1}(1-p)^{i-1} = p^2\sum_{i=1}^{\infty}p^{i-1}(1-p)^{i-1}$$
$$= p^2\sum_{i=0}^{\infty}[p(1-p)]^i = \frac{p^2}{1-p(1-p)}$$

ב. לפי נתוני הבעיה מתקיים:
$$E[X] = \tfrac{1}{p} \qquad ; \qquad E[Y \mid X = i] = ip$$

לפיכך:
$$E[Y] = E[E[Y \mid X]] = E[pX] = pE[X] = p\cdot\tfrac{1}{p} = 1$$

כמו כן, לפי הנתונים מתקיים:
$$\mathrm{Var}(X) = \tfrac{1-p}{p^2} \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(Y \mid X = i) = ip(1-p)$$

לכן:
$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(E[Y \mid X]) + E[\mathrm{Var}(Y \mid X)] = \mathrm{Var}(pX) + E[p(1-p)X]$$
$$= p^2\mathrm{Var}(X) + p(1-p)E[X] = p^2\cdot\tfrac{1-p}{p^2} + p(1-p)\cdot\tfrac{1}{p} = 2(1-p)$$