

ה א ו נ י ב ר ס י ט ה ה פ ת ו ח ה

20290

אלגוריתמיקה -

יסודות מדעי המחשב

חוברת הקורס – סתיו 2020א

כתב: אייל משיח

נובמבר 2019 - סמסטר סתיו – תש"פ

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

א	אל הסטודנט
ג	1. לוח זמנים ופעילויות
ה	2. תיאור המטלות
ו	3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס
1	ממ"ן 11
3	ממ"ן 12
5	ממ"ן 13
7	ממ"ן 14
9	ממ"ן 15

אל הסטודנט,

אנו מברכים אותך עם הצטרפותך אל הלומדים בקורס "אלגוריתמיקה - יסודות מדעי המחשב".

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים, אותם מפרסם/מת מרכז/ת ההוראה. בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:

<http://telem.openu.ac.il>

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספרייה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

במהלך הקורס יש להגיש תרגילי בית. מספיק להגיש שלושה מתוך חמשת הממ"נים שבחוברת, אך מומלץ להגיש את כולם. יש להקפיד על הגשת הממ"נים במועד.

צוות הקורס ישמח לעמוד לרשותך בכל שאלה שתתעורר.

לתשומת לב הסטודנטים הלומדים בחו"ל:

למרות הריחוק הפיסי הגדול, נשתדל לשמור אתכם על קשרים הדוקים ולעמוד לרשותכם ככל האפשר.

הפרטים החיוניים על הקורס נכללים בחוברת הקורס וכן באתר הקורס. מומלץ מאוד להשתמש באתר הקורס ובכל אמצעי העזר שבו וכמובן לפנות אלינו במידת הצורך.

ניתן לפנות אלי ביום ג', בשעות 11:00-13:00, בטלפון 09-7781233, או ב-e-mail.

כתובתי היא: eyalma@openu.ac.il

פגישות יש לתאם מראש.

בברכה,

אייל משיח
מרכז הקורס

1. לוח זמנים ופעילויות (2020 / 20290א)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	פרקי הלימוד המומלצים	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן למנחה
1	8.11.2019-3.11.2019	פרקים 1-4	מפגש 1	
2	15.11.2019-10.11.2019	פרק 5		ממ"ן 11 15.11.2019
3	22.11.2019-17.11.2019	פרק 5	מפגש 2	
4	29.11.2019-24.11.2019	פרק 6		
5	6.12.2019-1.12.2019	פרק 6	מפגש 3	ממ"ן 12 6.12.2019
6	13.12.2019-8.12.2019	פרק 7		
7	20.12.2019-15.12.2019	פרק 7	מפגש 4	
8	27.12.2019-22.12.2019 (ב-ו חנוכה)	פרק 8		ממ"ן 13 27.12.2019

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

לוח זמנים ופעילויות – המשך

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן למנחה
9	3.1.2020-29.12.2019 (א-ב חנוכה)	פרק 9	מפגש 5	
10	10.1.2020-5.1.2020	פרק 9	מפגש 6	
11	17.1.2020-12.1.2020	פרק 10		ממ"ן 14 17.1.2020
12	24.1.2020-19.1.2020	פרק 10	מפגש 7	
13	31.1.2020-26.1.2020	פרק 11		
14	7.2.2020-2.2.2020	פרק 11	מפגש 8	ממ"ן 15 7.2.2020

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

2. תיאור המטלות

הממ"נים בקורס הם ממ"נים **רגילים**: כל מטלה מורכבת ממספר תרגילים "יבשים" **שאינם** דורשים הרצת תכניות במחשב. תרגילים אלו נועדו לבדוק את הבנתך בחומר הלימוד. את הפתרון למטלה כזו יש לכתוב **בעט** על דף נייר בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. (אפשר ורצוי, כמובן, להדפיס את הפתרון למטלה). אם השאלה בממ"ן אינה ברורה לך, ניתן להתקשר אל אחד מהמנחים (בשעת הייעוץ הטלפוני שלו) לצורך קבלת הסבר או לנסות להיעזר בקבוצת הדיון של הקורס. בטבלה שלהלן תמצא מהו חומר הלימוד הנדרש (לפי פרקי הספר) לפתרון כל אחת מהמטלות, ומשקל כל מטלה בחישוב הציון של הקורס.

שים לב!

בעת כתיבת פתרון למטלה אין להסתמך על פרקי לימוד **מתקדמים** יותר מהפרקים בהם עוסקת המטלה.

מטלה	חומר הלימוד הנדרש לפתרון	משקל המטלה
ממ"ן 11	פרקים 1-4	6 נקודות
ממ"ן 12	פרקים 5-6	6 נקודות
ממ"ן 13	פרק 7	6 נקודות
ממ"ן 14	פרקים 8-9	6 נקודות
ממ"ן 15	פרקים 10-12	6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש שלוש מטלות מתוך החמש.

לתשומת לבכם!

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן: אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלות** בציון הנמוך ביותר, שציוניהן נמוכים מציון הבחינה (**עד שתי מטלות**), לא יילקחו בחשבון בעת שקלול הציון הסופי.

זאת בתנאי שמטלות אלה **אינן חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו, מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליך לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל של 18 נקודות לפחות.

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון של 60 לפחות.

ג. לקבל ציון סופי של 60 לפחות.

לתשומת לבכם:

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס. סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימאלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון 09-7782222 או **יעדכנו בעצמם** באתר שאילתא <http://www.openu.ac.il/sheilta>

קורסים ⇨ ציוני מטלות ובחינות ⇨ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.
יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של המטלות והבחינה יהיה נמוך מ- 60).

כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1-4

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 15.11.2019

סמסטר: 2020א

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.**

שאלה 1 (15 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 10 נק')

- א. קראו את סעיף 1 במאמר "The Theory of Computing: A Scientific Perspective".
- ב. תנו דוגמה לפיתוח טכנולוגי המבוסס על פתרון לבעיה מתחום מדעי המחשב התיאורטיים. תארו בקצרה את הבעיה במציאות ואת המודל המתמטי המתאים לבעיה. מהי הבעיה המתאימה במדעי המחשב? האם לדעתכם במוצר הטכנולוגי שהבאתם כדוגמה נעשה שימוש באלגוריתם ידוע לפתרון הבעיה?

שאלה 2 (25 נקודות)

מספר שמח הוא מספר המוגדר ע"י התהליך הבא:

מתחילים עם איזשהו מספר שלם חיובי, ומחליפים את המספר בסכום הריבועים של הספרות שלו בבסיס 10. חוזרים על הפעולה שוב ושוב. אם התהליך מסתיים במספר 1, אז המספר המקורי הוא מספר שמח (אחרת הוא **מספר עצוב**). למשל, המספר 139 הוא מספר שמח מפני שמתקיים:

$$1^2 + 3^2 + 9^2 = 91$$

$$9^2 + 1^2 = 82$$

$$8^2 + 2^2 = 68$$

$$6^2 + 8^2 = 100$$

$$1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$$

כתבו אלגוריתם המקבל מספר שלם חיובי x ובודק אם x הוא מספר שמח. הסבירו בקצרה את אופן פעולת האלגוריתם ופרטו את מבני הבקרה שבהם האלגוריתם משתמש.

שאלה 3 (20 נקודות)

אפשר לייצג ביטוי אריתמטי המורכב ממספרים טבעיים, האופרטור האונרי " $-$ " וארבעת האופרטורים הבינריים " $+$ ", " $-$ ", " \times " ו- " $/$ " באמצעות עץ בינרי באופן הבא:

מספר טבעי I מיוצג ע"י עלה המכיל את I .

הביטוי $E - E$ מיוצג ע"י עץ, שהשורש שלו מכיל את האופרטור האונרי " $-$ " ובנו היחיד הוא השורש של תת-עץ המכיל את הביטוי E .

הביטוי $E \cdot F$ (שבו הסימן " \cdot " מציין איזשהו אופרטור בינרי) מיוצג ע"י עץ, שהשורש שלו מכיל את האופרטור " \cdot ", בנו השמאלי הוא השורש של תת-עץ המכיל את הביטוי E ובנו הימני הוא השורש של תת-עץ המכיל את הביטוי F .

כתבו אלגוריתם המדפיס את הביטוי האריתמטי המיוצג ע"י עץ בינרי נתון T . שימו לב שבכל פעם שמופיע אופרטור בינרי יש להוסיף סוגריים מסביב לאופרטור ולאופרנדים שלו.

שאלה 4 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

תת-קבוצה של צמתים בעץ נקראת **כיסוי ע"י צמתים** אם לכל קשת (a, b) בעץ – התת-קבוצה מכילה את a או את b (או את שניהם).

בהינתן עץ T (לאו דווקא בינרי), מעוניינים למצוא כיסוי ע"י צמתים שגודלו מינימלי.

א. תארו אלגוריתם חמדני המוצא את הפתרון האופטימלי לבעיה.

ב. הסבירו מדוע האלגוריתם שתיארתם מוצא תמיד את הפתרון האופטימלי.

שאלה 5 (20 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

בשאלה זו עליכם לתאר אלגוריתם תכנון דינמי, המקבל שני מספרים שלמים אי-שליליים M ו- N , ומחשב את מספר הדרכים השונות להגיע לתוצאה $M:N$ במשחק כדורסל.

הניחו שבכל התקפה הקבוצה המחזיקה בכדור יכולה לקלוע סל של שתי נקודות, סל של שלוש נקודות, או סל של נקודה אחת (בזריקת עונשין).

לדוגמה לתוצאה $3:0$ אפשר להגיע בארבע דרכים שונות:

סל של 3, סל של 2 ואחריו סל של 1, סל של 1 ואחריו סל של 2, שלושה סלים של 1

א. הגדירו בצורה מתאימה תת-בעיה. מהו מבנה הנתונים המתאים לשמירת הפתרונות לתת-בעיות?

ב. תארו את האלגוריתם המבוקש (אין חובה לכתוב פסאודו-קוד).

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 5-6

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2020א **מועד אחרון להגשה:** 6.12.201

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.**

שאלה 1 (15 נקודות: סעיף א' – 10 נק'; סעיף ב' – 5 נק')

נתון מצולע פשוט וקמור.

המצולע מיוצג על-ידי סדרת הקואורדינטות של קדקודיו $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ המסודרים בכיוון השעון. מעוניינים למצוא את המרחק המינימלי בין שני קדקודים של המצולע. פרופ' כלומסקי הציע לפתור את הבעיה באמצעות חישוב המרחק בין כל שני קדקודים סמוכים והחזרת הערך המינימלי.

א. כתבו אלגוריתם מתאים ונתחו את זמן ריצתו.

ב. חוו דעתכם על הצעתו של הפרופסור.

שאלה 2 (25 נקודות: סעיף א' – 10 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

להלן מופיע אלגוריתם המקבל כקלט מערך מספרים A באורך n (הניחו ש- n הוא חזקה שלמה של 2):

(1) $k \leftarrow n$;

(2) כל עוד $k > 1$ בצע:

(2.1) $k \leftarrow k/2$;

(2.2) עבור i המקבל את הערכים 1 עד k בצע:

(2.2.1) אם $A[i] < A[i + k]$, אז החלף ביניהם;

(3) החזר את $A[1]$.

א. הדגימו את ריצת האלגוריתם על המערך:

1	2	3	4	5	6	7	8
2	8	3	5	6	4	7	1

מה מבצע האלגוריתם?

ב. נתחו את זמן הריצה של האלגוריתם והוכיחו את נכונותו.

שאלה 3 (20 נקודות: סעיפים א', ב' – 5 נק' לכל אחד; סעיף ג' – 10 נק')

בהינתן רשימת איברים באורך N , איבר רוב ברשימה הוא איבר שמופיע בה יותר מ- $N/2$ פעמים. א. הוכיחו את הטענה הבאה: אם x הוא איבר רוב ברשימה L , אז x הוא גם איבר רוב ברשימה המתקבלת מ- L ע"י מחיקת איבר אחד השווה ל- x ומחיקת איבר נוסף השונה מ- x .

ב. להלן אלגוריתם הבודק אם קיים איבר רוב במערך A בגודל N :

(1) $Counter \leftarrow 0$

(2) עבור i המקבל את הערכים 1 עד n בצע:

(2.1) אם $Counter = 0$, אז בצע

(2.1.1) $Candidate \leftarrow A[i]$

(2.1.2) $Counter \leftarrow 1$

(2.2) אחרת אם $A[i] = Candidate$, אז $Counter \leftarrow Counter + 1$

(2.3) אחרת, $Counter \leftarrow Counter - 1$

(3) אם $Counter = 0$, אז הדפס "אין איבר רוב ב- A ".

(4) אחרת, קרא לשגרה $Check-Majority-Element(A, N, candidate)$ והחזר את תשובתה.

השגרה $Check-Majority-Element(A, N, x)$ בודקת אם x הוא איבר רוב במערך A בגודל N .

הדגימו את ריצת האלגוריתם על המערך הבא: $[3, 3, 2, 1, 3, 4, 4]$.

פרטו את ערכי המשתנים i , $candidate$ ו- $counter$ בכל שלב.

ג. הסבירו את אופן פעולת האלגוריתם.

בפרט, הסבירו היכן נעשה שימוש בטענה מסעיף א, ומדוע נדרשת הבדיקה בשורה (4).

שאלה 4 (20 נקודות: סעיפים א', ב' – 10 נק' לכל אחד; סעיף ג' – בונוס)

נתונה רשימה L המכילה n מספרים a_1, \dots, a_n .

מעוניינים למצוא את שני המספרים הגדולים ביותר ברשימה.

א. כתבו אלגוריתם לפתרון הבעיה הפועל בשיטת הפרד ומשול.

ב. כתבו נוסחת נסיגה עבור מספר ההשוואות שמבצע האלגוריתם.

מהו פתרון הנוסחה כאשר n הוא חזקה שלמה של 2?

ג. מצאו חסם עליון על מספר ההשוואות עבור n כלשהו.

שאלה 5 (20 נקודות)

חוקר מוזיקה המתעניין בתקופת הבארוק, הכין רשימה של N מלחיני הבארוק הגדולים.

עבור כל מלחין ברשימה, הוא רשם את שנת לידתו ושנת מותו של המלחין.

החוקר מעוניין לדעת באיזו שנה חיו הכי הרבה מלחינים מבין המלחינים שברשימה.

תארו אלגוריתם יעיל לפתרון הבעיה ונתחו את זמן ריצתו.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

מספר השאלות: 5

משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: 2020א

מועד אחרון להגשה: 27.12.2019

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (15 נקודות)

התבוננו באיור המופיע בעמ' 107 במדריך הלמידה, המתאר את מערכת הגשרים בעיר קניגסברג. א. ציירו את הגרף המתאים. ב. הוכיחו שקיים בגרף מסלול המילטוני, אך לא קיים בו מסלול אוילרי. ג. הראו שניתן להסיר מהגרף בדיוק שתי קשתות, ולקבל גרף שקיים בו מסלול אוילרי אך לא קיים בו מסלול המילטוני.

שאלה 2 (25 נקודות: סעיפים א', ב' – 5 נק' לכל אחד; סעיף ג' – 15 נק')

כידוע, כל מספר טבעי N ניתן להצגה כמכפלה של גורמים ראשוניים.

למשל: $18 = 2 \times 3^2$, $28 = 2^2 \times 7$, $38 = 2 \times 19$, $48 = 2^4 \times 3$

א. הוכיחו שמספר הגורמים הראשוניים של מספר טבעי N (עם חזרות) הוא $O(\log_2 N)$.

ב. כאשר מספר טבעי N מוצג כמכפלה של גורמים ראשוניים:

$$N = 2^a \times 3^b \times 5^c \times \dots$$

אפשר לחשב ביעילות את סכום כל המחלקים של N (כולל N עצמו) באופן הבא:

$$(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^a) \times (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^b) \times (1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^c) \times \dots$$

חשבו את סכום כל המחלקים של 48 באופן המתואר לעיל והראו שמתקבלת התוצאה הנכונה.

ג. מספר טבעי N נקרא **מושלם**, אם סכום המחלקים של N (לא כולל N עצמו) שווה ל- N .

למשל, 28 הוא מספר מושלם מפני ש- $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

הוכיחו שהשאלה אם מספר נתון X הוא מספר מושלם היא בעיה השייכת ל-NP.

תארו במדויק את מסמך האישור ואת אלגוריתם האימות (הסתמכו על סעיפים א' ו-ב').

שאלה 3 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

א. **קבוצה בלתי תלויה** (independent set) בגרף לא מכוון G היא תת-קבוצה V' של V , כך שבין כל שני צמתים ב- V' אין קשת.

בעיית הקבוצה הבלתי תלויה היא הבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k

השאלה: האם קיימת ב- G קבוצה בלתי תלויה בגודל k ?

תארו רדוקציה פולינומית מבעיית הקליקה לבעיית הקבוצה הבלתי תלויה.

ב. **כיסוי ע"י צמתים** (vertex cover) בגרף לא מכוון G היא תת-קבוצה V' של V , כך שלפחות

קצה אחד של כל קשת בגרף שייך ל- V' .

בעיית הכיסוי ע"י צמתים היא הבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k

השאלה: האם קיים ב- G כיסוי ע"י צמתים בגודל k ?

תארו רדוקציה פולינומית מבעיית הקבוצה הבלתי תלויה לבעיית הכיסוי ע"י צמתים.

שאלה 4 (20 נקודות)

נתונה בעיית ההכרעה הבאה:

הקלט לבעיה: שני פסוקים שונים זה מזה בתחשיב הפסוקים

השאלה: האם **לפחות** אחד הפסוקים הוא ספיק?

הוכיחו שהבעיה היא NP-שלמה.

שאלה 5 (20 נקודות)

ראש מכללה למדעי המחשב צריך לקבוע את שיבוץ המרצים בסמסטר הקרוב.

ברשותו נמצאות רשימה בגודל N של הקורסים המוצעים בסמסטר הקרוב, רשימה בגודל M של המרצים השייכים לסגל המכללה, וכן טבלה המפרטת אלו קורסים יכול ללמד כל אחד מהמרצים.

המרצים במכללה נבחרו כך שלכל קורס יש **בדיוק** שני מרצים שיכולים ללמד אותו.

כדי לחסוך בהוצאות, ראש המכללה מעוניין להעסיק K מרצים לכל היותר מתוך המרצים השייכים

לסגל המכללה. לפיכך, הוא מעוניין לדעת אם קיימת תת-קבוצה בגודל K של מרצים, כך שלכל

קורס המוצע בסמסטר הקרוב, יהיה בתת-קבוצה לפחות מרצה אחד שיוכל ללמד אותו.

הסבירו איך אפשר להציג את הבעיה כגרפים והוכיחו שהבעיה היא NP-שלמה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 8-9

מספר השאלות: 6

משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: א2020

מועד אחרון להגשה: 17.1.2020

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.**

שאלה 1 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

עבור כל אחד מהקלטים הבאים לבעיית התאמת המילים – מצאו התאמת מילים חוקית (אם היא קיימת), או הוכיחו שאין התאמה כזו:

א.

	1	2	3
X	baaa	ba	aba
Y	aaa	baab	ab

ב.

	1	2	3
X	ba	abb	bab
Y	bab	bb	abb

שאלה 2 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

להלן נתונות שתי גרסאות של בעיית התאמת המילים.

עבור כל אחת מהגרסאות – קבעו אם הבעיה כריעה או לא.

אם הבעיה כריעה, תארו אלגוריתם המכריע אותה; אחרת, הוכיחו שהבעיה אינה כריעה.

א. הקלט לבעיה: שתי סדרות מילים X ו-Y באורך N ומספר טבעי K

השאלה: האם קיימת סדרת אינדקסים באורך K, כך שאם נשרשר את המילים באינדקסים

אלו מהסדרות X ו-Y תתקבל אותה מילה?

ב. הקלט לבעיה: שתי סדרות מילים X ו-Y באורך N ומספר טבעי K

השאלה: האם קיימת סדרת אינדקסים באורך גדול מ-K, כך שאם נשרשר את המילים

באינדקסים אלו מהסדרות X ו-Y תתקבל אותה מילה?

שאלה 3 (20 נקודות)

נדון בגרסה הבאה של בעיית הריצוף:

הקלט לבעיה: קבוצה סופית T של סוגי מרצפות

השאלה: האם ניתן לכסות כל שטח סופי באמצעות לכל היותר **שני שלישים** מסוגי מרצפות שב-

T ?

הוכיחו שגם גרסה זו של בעיית הריצוף היא בלתי כריעה.

שאלה 4 (15 נקודות)

בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי, שמקבל את כל המחרוזות מעל $\Sigma = \{0,1\}$ המייצגות מספרים בינריים המתחלקים ב-7 ללא שארית.

כדי לצייר את האוטומט, מומלץ להשתמש בכלי שנמצא באתר <http://madebyevan.com/fsm>.

שאלה 5 (25 נקודות)

בנו מכונת טיורינג המבצעת חיבור של שני מספרים בינריים X ו- Y .

הקלט למכונה נמצא על הסרט באופן הבא (משמאל לימין): $X\$Y^*$

כלומר, בין שני המספרים מפריד התו המיוחד $\$$ ומימין למספר השני נמצא התו המיוחד $*$.

למשל, אם $X = 3$ ו- $Y = 5$, אז הקלט למכונה הוא $###011\$101^*###$.

מצב הסרט לאחר ביצוע פעולת החיבור צריך להיות $###1000###$.

הניחו ששני המספרים X ו- Y הם באותו אורך (אחרת אפשר "לרפד" את המספר הקצר יותר ע"י הוספת אפסים משמאלו).

תארו את דרך פעולתה של המכונה, ציירו את תרשים המעברים ופרטו את תפקידו של כל אחד מהמצבים.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

הוכיחו שאוטומט סופי עם שתי מחסניות הוא מודל שקול למכונת טיורינג.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 10-12

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 7.2.2020

סמסטר: א2020

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.**

שאלה 1 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

- א. כתבו אלגוריתם מקבילי הבודק בזמן **קבוע** אם מספר נתון N הוא ראשוני. בכמה מעבדים האלגוריתם משתמש? האם זהו מספר סביר?
- הערה: הניחו שפעולת חילוק בין שני מספרים מתבצעת בזמן קבוע.
- ב. נניח כעת שאין בין המעבדים שיתוף בכתיבה; כלומר, לא קיים משתנה ששני מעבדים או יותר יכולים לשנות את ערכו. בצעו את השינוי הנדרש באלגוריתם מסעיף א'. זמן הריצה של האלגוריתם המתקבל צריך להיות פולינומי בגודל הקלט.

שאלה 2 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

- נדון בפתרון לבעיית הקטע הקריטי עבור שני מעבדים (פתרון שונה מזה שבספר). הפתרון מבוסס על שימוש בשני משתנים X_1 ו- X_2 . להלן הפרוטוקול עבור P_1 (הפרוטוקול עבור P_2 הוא סימטרי – יש להחליף בין X_1 ו- X_2):
- (1) בצע פעולות פרטיות עד שתוצאה להיכנס לקטע הקריטי;
 - (2) חכה עד אשר X_2 הופך ל-לא;
 - (3) $X_1 \leftarrow$ כן;
 - (4) בצע את הקטע הקריטי;
 - (5) $X_1 \leftarrow$ לא;
 - (6) חזור לשורה (1);
- א. האם הפתרון נכון? הוכיחו את תשובתכם.
- ב. האם הפתרון יהיה נכון אם נחליף בין שורות (2) ו- (3) בפרוטוקול? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 3 (20 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

- א. הגדירו את מחלקת הסיבוכיות RP ותנו דוגמה לבעיה השייכת ל-RP.
- ב. הוכיחו שלכל בעיה ב-RP קיים אלגוריתם הסתברותי, שרץ בזמן פולינומי ועלול לטעות טעות דו-צדדית בהסתברות שקטנה מ- $1/3$.
- כלומר, אם התשובה לבעיה היא "כן", אז האלגוריתם יחזיר "כן" בהסתברות שגדולה מ- $2/3$; אם התשובה לבעיה היא "לא", אז האלגוריתם יחזיר "לא" בהסתברות שגדולה מ- $2/3$.

שאלה 4 (15 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 10 נק')

- פרופ' כלומסקי טוען, שהוא מצא דרך לייעל את מערכת RSA. לדבריו, במקום לבחור שני מספרים ראשוניים גדולים ולהכפיל אותם זה בזה, מספיק לבחור מספר ראשוני אחד ולהעלות אותו בריבוע.
- א. בועז החליט להשתמש בשיטה של פרופ' כלומסקי.
- המפתח הציבורי של בועז הוא $(\text{Publ}, \text{Prod}) = (53, 961)$.
- מצאו את המפתח הסודי של בועז (המספר Priv).
- ב. חוו דעתכם על הצעתו של פרופ' כלומסקי.

שאלה 5 (25 נקודות: סעיף א' – 10 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

- בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, נאמר שצביעה של קשתות הגרף היא צביעה חוקית, אם כל שתי קשתות בעלות קדקוד משותף צבועות בצבעים שונים.
- נגדיר את הבעיה הבאה (בעיית ה- **edge 4-coloring**):
- הקלט לבעיה: גרף לא מכוון $G = (V, E)$
- השאלה: האם קיימת צביעה חוקית של קשתות הגרף בארבעה צבעים?
- א. האם אפשר לצבוע בארבעה צבעים את הקשתות של C_5 (קליקה של חמישה צמתים)? הוכיחו את תשובתכם.
- ב. נניח שאיזה רוצה לשכנע את בועז, שאפשר לצבוע את הקשתות של גרף נתון G בצורה חוקית באמצעות ארבעה צבעים. בועז צריך להשתכנע בהסתברות גבוהה שקיימת צביעה חוקית כזו, אך אסור שהוא ילמד דבר על תבנית הצביעה.
- תארו פרוטוקול הוכחה מתאים.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

- חוו דעתכם על ההגדרה הבאה למושג "בינה מלאכותית" (Artificial Intelligence):
- "AI is the attempt to make computers do what people think computers cannot do."