פתרון תרגיל בית 5 (סקיצה)

שאלה 1

א. נמיין את הגרף מיון טופולוגי. לכל צומת v נשמור משתנה $l(v)$ שייצג את המסלול הארוך ביותר המסתיים בצומת v. כעת, נעבור על הגרף לפי סדר המיון (מהמקורות לבורות). עבור הצומת הנוכחי v בוחנים את הקשתות היוצאות ממנו. לכל קשת $v \to u$ מעדכנים $l(u) \leftarrow \max\{l(u), l(v)+1\}$.
סיבוכיות המיון הטופולוגי היא $O(V+E)$. הזמן שמשקיעים בכל צומת $v \in V$ במעבר הוא $O\left(d(v)\right)$ ולכן סיבוכיות האלגוריתם היא $O(V+E)$.

ב. נמצא מסלול ארוך ביותר בגרף כפי שתואר בסעיף הקודם. הצמתים על מסלול זה מהווים קליק בגרף התשתית של G.

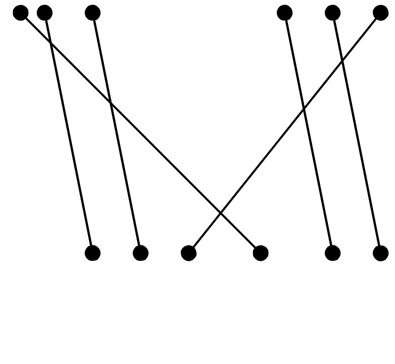
ג. נפתור כמו ב-א׳, אבל המשתנה $l(v)$ ייצג את המסלול הכבד ביותר המסתיים בצומת v. העדכון הפעם עבור קשת $v \to u$ יהיה: $l(u) \leftarrow \max\{l(u), l(v)+w(v \to u)\}$.

ד. נבנה גרף מכוון וחסר מעגלים כך שלכל תיבה i נגדיר שלושה צמתים בהתאם לשלושת המצבים בהם היא עשויה להימצא (הגובה הוא x_i, y_i או z_i). נגדיר קשת בין שני צמתים $i \to j$ אם ניתן להניח את התיבה המיוצגת ע״י j על תיבה המיוצגת ע״י i כפי שמתואר בשאלה. כעת נמצא מסלול מכוון כבד ביותר בגרף זה כפי שתואר בסעיף ג׳. משקל המסלול הוא הגובה המבוקש והמסלול עצמו מייצג את התיבות במגדל ואת האוריינטציה שלהן. הסיבוכיות היא $O(V+E)=O(n+n^2)=O(n)$.

שאלה 2

א. נשים לב כי קבוצת קווי תעופה שאינם נחתכים מתאימה לתת-סדרה מונוטונית עולה בפרמוטציה המוגדרת ע״י קבוצת הערים השנייה. ניתן למצוא תת-סדרה מונוטונית עולה ארוכה ביותר של פרמוטציה π ע״י חישוב תת-המחרוזת המשותפת הארוכה ביותר של π והסדרה $(1,2,...,n)$ באמצעות האלגוריתם שנלמד בתרגול.

ב. התשובה שלילית. נתבונן בדוגמה הבאה שבה האלגוריתם מחזיר שלושה גבהים בעוד שבפועל יש צורך בשניים בלבד:



ג. נפצל כל עיר בעלת דרגה גדולה מאחד למספר ערים השווה לדרגה. נדאג בפיצול שלא ליצור חיתוכים חדשים (בין קשתות) שלא היו קיימים לפני הפיצול. כעת ישנן מספר ערים כמספר הקשתות המקורי m, וניתן לפתור את הבעיה בעזרת האלגוריתם שתיארנו ב- א' בסיבוכיות הנדרשת.

שאלה 3

לצורך פשטות נתאר אלגוריתם למציאת **גודל** שידוך המקסימום בעץ. נגדיר לכל צומת v שני משתנים:

1. $M^-(v)$ - גודל שידוך המקסימום בתת העץ המושרש ב- v (בשלב ראשון נהפוך את העץ לעץ מכוון) תחת האילוץ ש- v עצמו לא משודך. 2. $M^+(v)$ - גודל שידוך המקסימום בתת העץ המושרש ב- v תחת האילוץ ש- v משודך לאחד מבניו.

עבור העלים בעץ קל לחשב את הערכים הנ"ל (אפס בשני המקרים). עבור צומת v כלשהו, בהנחה שהמשתנים של בניו כבר מעודכנים, העדכון מתבצע כדלקמן:

$$M^+(v) = 1 + \max_{u \text{ child of } v} \left\{ M^-(u) + \sum_{w \neq u \text{ child of } v} \max\left\{M^+(w), M^-(w)\right\} \right\}$$

$$M^-(v) = \sum_{u \text{ child of } v} \max\left\{M^+(u), M^-(u)\right\}$$

הפתרון המבוקש הוא $\max\left\{M^+(r), M^-(r)\right\}$ כאשר r הוא שורש העץ.

על מנת להשקיע בכל צומת $v \in V$ זמן $O\left(d(v)\right)$ (ובכך לקבל סיבוכיות כללית $O(V)$), יש לחשב את הסכום עבור כל הבנים השונים מ- u (בביטוי שמתייחס ל- $M^+(v)$) בצורה חכמה. קרי, לא לחשב לכל w את הסכום מחדש, אלא להפחית מהסכום שחושב עבור הבן הקודם u' את התרומה של u ולהוסיף את התרומה של u'.

שאלה 4

נשתמש בתכנות דינאמי. נניח שהביצה הראשונה הושלכה מקומה i. אם נשברה, יש לפתור את הבעיה עבור $i-1$ קומות ו- $k-1$ ביצים. אחרת, יש לפתור את הבעיה עבור $n-i$ קומות ו- k ביצים. כלומר, ניתן לחשב את $E(n,k)$ רקורסיבית באופן הבא: $E(n,k) = \min_{1 \le i \le n} \left\{1 + \max\{E(i-1,k-1), E(n-i,k)\}\right\}$ כאשר תנאי ההתחלה הוא $E(i,1) = i$ לכל $1 \le i \le n$. סיבוכיות מציאת $E(n,k)$ היא כמובן $O(nk)$ ואינה פולינומיאלית בגודל הקלט.

שאלה 5

נפתור את הבעיה בעזרת תכנון דינאמי. נבנה מטריצה בינארית בגודל $n \times A$. המקום ה- i,j במטריצה הוא 1 אם קיימת תת קבוצה $S \subseteq \left\{a_1, a_2, ..., a_i\right\}$ כך ש- $j = \sum_{k \in S} a_k$, ו-0 אחרת. התא שמעניין אותנו הוא כמובן התא במקום ה- n, A. נעבור על המטריצה שורה אחר שורה ונמלא משמאל לימין. את השורה ה- i נמלא כדלקמן. נעבור על השורה ה- $i-1$ ובכל מקום $i-1, j$ שבו נתקלים ב-1, נרשום 1 במקום ה- $i, j+a_i$. כמו כן נרשום 1 במקום ה- i, a_i. באתחול נציב 1 במקום ה- $1, a_1$ ואפס בכל מקום אחר. הסיבוכיות היא $O(nA)$, ולכן אינה פולינומיאלית בגודל הקלט שהוא $O(n \log A)$ (כי ניתן להניח שכל המספרים קטנים מ- A).