אלגוריתמים
הרצאה 8
דף ג מ 2
22.12.08

12.12.08

אלגוריתמים - הרצאה 8

מסלולים קלים ביותר

תוויות יציבות: בהינתן גרף תוויות הן יציבות אם פעולות רלקסציה נוספות לא ישנו את התוויות.

הסיבוכיות של הזמן הנדרש:

רלקסציה בקשת "עולה" $O(1)$ ולכן בדיקה אחת בזמן הנדרש עולה $O(|E|)$ כי צריך לעבור על כל הקשתות. חוזרים על זה $|V|$ פעמים. ולכן הכל: $O(|V|\cdot|E|)$

מסלולים קלים ביותר בין כל זוגות הצמתים:

במקרה שיש משקלים שליליים, דרך טריוויאלית לעשות את זה:

א) הרץ בלמן פורד מכל השורשים האפשריים. סיבוכיות: $O(|V|^2\cdot|E|)$

ב) קיימים שני אלגוריתמים נוספים לבעיה זו: ① Floyd Warskall ② כפל מטריצות.

① Floyd Warskall:

נגדיר את W בתור מטריצת המשקלים של הגרף. כלומר: w_{ij} הנו משקל הקשת (i,j). אם לא קיימת כזו קשת אז $w_{ij}=\infty$.

נגדיר את $D^{(k)}$ בתור משפחה של מטריצות כך ש: $k=0,\dots,|V|$.

$D_{ij}^{(k)}$ מוגדר להיות המשקל של המסלול הקל ביותר מצומת i לצומת j כאשר צמתי הביניים שייכים לקבוצה $\{1,2,\dots,k\}$

נסתכל על מטריצה ספציפית במשפחה $D^{(k)}$ לדוגמה: המטריצה ה-k המקום ה-ij במטריצה ה-k זה משקל המסלול הקל ביותר מצומת i לצומת j כאשר מותר להשתמש לאורך המסלול רק בצמתי ביניים שממוספרים מ-1 עד k (לא חייבים להשתמש בכולם אפשר רק בחלקם). ולכן $W=D^{(0)}$ כי אסור שיהיו צמתי ביניים (כי W זאת מטריצת המסלול שמורכבים מ יחידה ולכן צמתי ביניים)

$D^{(|V|)}$ זאת מטריצת המרחקים הקלים ביותר בגרף כי צמתי הביניים שמותר להשתמש בהם זה כל הצמתים. האלגוריתם יתחיל מ-$D^{(0)}$ ומתוכו ימצא את $D^{(1)}$ וכך הלאה עד שנמצא את $D^{(V)}$ וזה בדיוק מה שאנחנו מחפשים.

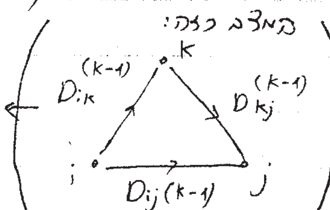
חישוב $D^{(k)}$ מתוך $D^{(k-1)}$:

for $i=1$ to $|V|$

for $j=1$ to $|V|$

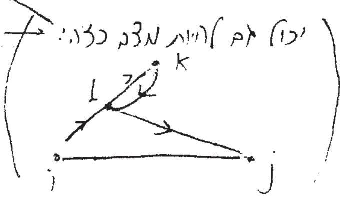
$$D_{ij}^{(k)}=\min\{\underset{\text{מה שמצאנו קודם.}}{D_{ij}^{(k-1)}},\ \underbrace{D_{ik}^{(k-1)}+D_{kj}^{(k-1)}}_{\text{המסלול הקל ביותר דרך } k}\}$$

במצב כזה:



החיתוך של צומת ביניים בין 2 המסלולים.

יכול גם להיות מצב כזה: מצב כזה אבל היינו מגלים כבר בהרצה הקודמת כי המסלול ilj יותר קל והיינו מגלים אותו קודם לכן.



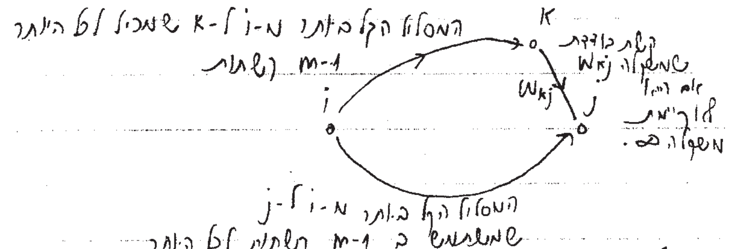
אז המצב הזה הוא לא מצב בעייתי.

ההנחה היא שמעגל אין משקל שלילי.

סיבוכיות: צריך להריץ את האלגוריתם V פעמים בשביל לחשב את $D^{(|V|)}$.
כל מעבר עולה $O(|V|^2)$, פעולת העדכון של המינימום היא $O(1)$ על V צמתים.
לכן סה"כ סיבוכיות: $O(|V|^3)$.

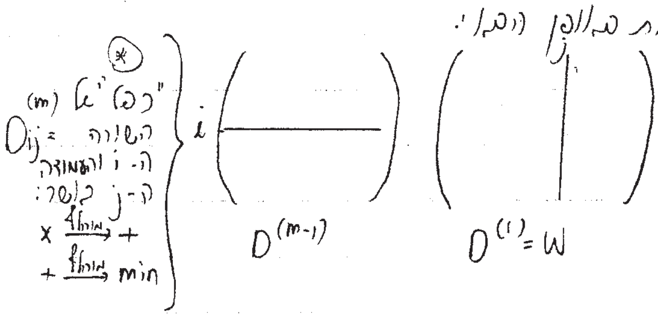
(ב) כפל מטריצות

W מוגדר כמטריצת המשקלים של הגרף.
$D^{(m)}$ - משפחה של מטריצות, $m=0,...,|V|-1$
$D^{(m)}_{ij}$ - משקל המסלול הקל ביותר מצומת i עד צומת j כאשר המסלול מכיל לכל היותר m קשתות.
$D^{(0)}_{ij}$ זו המטריצה שבאלכסון שלה יש 0 (כלומר אם $j=i$) ובכל שאר המקומות (כלומר $j\neq i$) הערך במטריצה הוא ∞.
נחשב את $D^{(m)}$ מתוך $D^{(m-1)}$: נסתכל על הזוג i,j



לכל צומת k נשווה בין $D^{(m-1)}_{ij}$ לבין: $D^{(m-1)}_{ik}+W_{kj}$
נבחר במינימום על פני כל האפשרויות ל-k. דהיינו: $D^{(m)}_{ij}=\min_{1\le k\le V}\{D^{(m-1)}_{ik}+W_{kj}\}$
(וזה נכון גם כאשר $j=k$ כי: $W_{jj}=0$.)
סיבוכיות: יש V^2 זוגות i,j, לכל i,j צריך לבדוק V צמתים (על פני כל ה-k)
ולכן סה"כ סיבוכיות של $O(|V|^4)$

ניתן להסתכל על התהליך הזה ככפל מטריצות באופן הבא:



זהו "כפל מטריצות" לפי הגדרה חדשה(*)
עדיין מתקיים אסוציאטיביות (שכנעו את עצמכם)

כדי לחשב את A^8 אפשר לחשב: A^2, A^4, A^8
כלומר 3 כפלי מטריצות: $3=\log_2 8$
בגלל אסוציאטיביות אפשר להשתמש באותו טריק כדי לחשב את $D^{(m)}$ ב-$O(\log m)$ כפלים.
כלומר הסיבוכיות תהיה $O(|V|^3\log|V|)$ (קירבנו את זה לפלויד וורשל)

אלגוריתמים
קבוצה 8
דף 2 מ 2
22.10.08

תכנון דינמי

טכניקה כללית לפתרון של בעיות מתוך פתרון של תת בעיות. צריך 2 תכונות מרכזיות כדי שנוכל להפעיל את טכניקת התכנון הדינמי (תד"ל). התכונות:

① הפתרון אופטימלי לקלט גדול ישרה פתרון אופטימלי גם על תת בעיות. במסלולים קלים קיומה לזה מתקיים כי תת מסלול של מסלול קל ביותר גם הוא קל ביותר.

② שיתוף - ניתן לעשות מספר פולינומי של בדיקות גם בקלט גדול. כי יש תת בעיות שמשותפות למספר רב של קריאות ולכן כדאי לשתף אותן.

דוגמה ראשונה - מכפלת מטריצות בשרשרת

נתונות n מטריצות $A_1, \dots, A_n$

המטרה: לחשב את $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$

(המטריצות שלא ריבועיות). השאלה היא באיזה סדר לבצע את הכפל (איפה לשים את הסוגריים).

נניח שמימד מטריצה A_i הם: $P_{i-1} \times P_i$.

מספר הפעולות כדי לכפול מטריצה שגודלה P על Q ומטריצה שגודלה Q על R. זה: $P \cdot Q \cdot R$.

דוגמה: A_1, A_2, A_3 — 10×100, 100×5, 5×50

האפשרויות לסדר הכפל הם:

1) $(A_1 \times A_2) A_3$

זה לנו: $5000 + 2500 = 7500$

2) $A_1 \times (A_2 \times A_3)$

וזה לנו: $50{,}000 + 25{,}000 = 75{,}000$

① אופטימליות של תת בעיות:

פתרון אופטימלי: $(A_1 \cdots A_k)(A_{k+1} \cdots A_n)$

הפתרון האופטימלי של $A_1, \dots, A_n$ משרה פתרונות אופטימליים על $A_1 \cdots A_k$ ו- $A_{k+1} \cdots A_n$

אחרת אפשר היה לשפר את הפתרון האופטימלי של $A_1 \cdots A_n$

מחיר אופטימלי של הכפלת $A_1 \cdots A_n$ נסמן ב - $m(1,n)$.

$$m(1,n) = m(1,k) + m(k+1,n) + \underbrace{P_0 \cdot P_k \cdot P_n}$$

מחיר הכפלת: $\underbrace{(A_1 \cdots A_k)}_{P_0 \times P_k} \underbrace{(A_{k+1} \cdots A_n)}_{P_k \times P_n}$

נוסחאות הרקורסיה תהיה: $m(1,n) = \min\limits_{1 \le k \le n} \{ m(1,k) + m(k+1,n) + P_0 \cdot P_k \cdot P_n \}$

קיבלנו נוסחאות רקורסיה. נבדוק את n נקודות השבירה האפשריות (מוגדרות ע"י k).

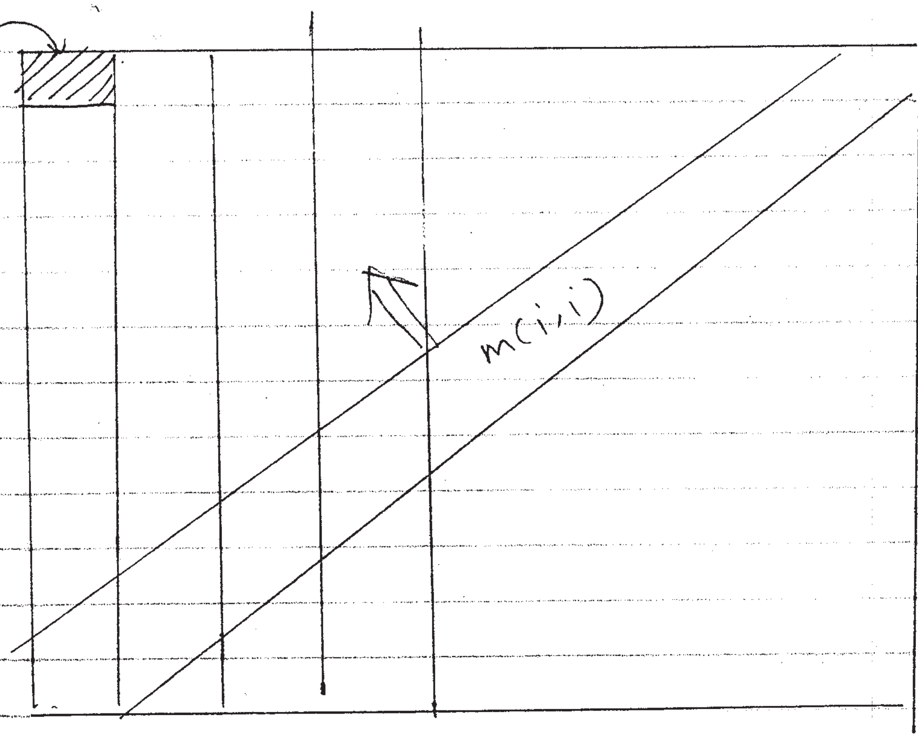
אך נשתמש בתכונת השיתוף ונבנה טבלה שתאפשר לנו לממש את נוסחאות הרקורסיה בצורה יעילה.

(המשך בעמוד הבא - מאחור...)

$m(1,n)$ - היעד

$m(i-1,i) = A_{i-1} \cdot A_i$

$\overbrace{p_{i-2} \cdot p_{i-1}}\ \overbrace{p_{i-1} \cdot p_i}$



כדי למלא
אלכסון ל
האינפורמציה
נמצאת
באלכסונים
הקודמים
שמילאנו
כבר..

$$m(i,j) = \min_{i \le k < j} \{ m(i,k) + m(k+1,j) + p_{k-1} p_k p_j \}$$

לפי נוסחאת הרקורסיה כדי לחשב את $m(i,j)$ מספיק לדעת מהו $m(p,q)$
כאשר $q-p < j-i$. (פה באה לידי ביטוי תכונת השיתוף של תת בעיות)