

מבנה הבחינה :

- * יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- * משקל כל שאלה 25% .
- * אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- * יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
 - * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
 - * אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה או מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
 - * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
-

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

- (12 נק') א. יהי R יחס (רלציה) מעל קבוצה A . הוכח:
- אם $R \cup R^{-1}$ הוא סדר-חלקי מעל A , אז $R = I_A$.
- (13 נק') ב. יהי R יחס מעל קבוצה A , ונתון: $R \cap I_A = \emptyset$.
- עוד נתון, ש- a, b הם איברים מסוימים של A (לא בהכרח שונים זה מזה) המקיימים: $(a, b) \in R^2$ וגם $(b, a) \in R^2$.
- הוכח שקיימים $c, d \in A$ (לא בהכרח שונים זה מזה), שאף אחד מהם אינו שווה ל- a ואינו שווה ל- b , שמקיימים: $(c, d) \in R^2$ וגם $(d, c) \in R^2$.

שאלה 2

- תהי X קבוצה. נסמן: $P^0(X) = X$, $P^1(X) = P(X)$, $P^2(X) = P(P(X))$, וכללית, $P^{n+1}(X) = P(P^n(X))$.
- בכך הגדרנו את הביטוי $P^n(X)$ לכל n טבעי.
- באמצע עמ' 11 בחוברת "פרק 5 בתורת הקבוצות" פגשנו \aleph_0 עוצמות אינסופיות שונות: למעשה, הסתכלנו בסדרת הקבוצות $P^n(\mathbb{N})$ ($n \in \mathbb{N}$), והראינו שלאף שתיים מהן אין אותה עוצמה. כעת נמצא עוד כמה עוצמות אינסופיות.

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P^n(\mathbb{N}) \text{ תהי}$$

- (8 נק') א. הוכח שלכל $n \in \mathbb{N}$, $|P^n(\mathbb{N})| \leq |A|$.
- (8 נק') ב. הוכח שלכל $n \in \mathbb{N}$, $|P^n(\mathbb{N})| < |A|$.
- (9 נק') ג. היעזר בקבוצה A הנ"ל, ומצא \aleph_0 עוצמות אינסופיות נוספות, פרט לעוצמות של הקבוצות $P^n(\mathbb{N})$ ($n \in \mathbb{N}$). נמק היטב.

הדרכה: כל הסעיפים בשאלה הזו קלים יותר ממה שהם נראים, ואינם דורשים שום בניה מסובכת. כל מה שנדרש הוא שימוש פשוט בהגדרות ובמשפטים ידועים, וקצת מחשבה.

שאלה 3

יהי a_n מספר הסדרות באורך n , שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0,1,2\}$, ואין בהן הופעות צמודות של 1, אין הופעות צמודות של 2, ואין הופעה של 2 מיד לפני או אחרי 1. בקיצור: אין הופעות של אף אחד מארבעת הרצפים האלה: 11, 22, 12, 21. דוגמא לסדרה מותרת באורך 6: 100201. דוגמאות לסדרות אסורות באורך 6: 100210 (יש 21), 110200 (יש 11). (10 נק') א. רשמי בעזרת חישוב ישיר את a_0, a_1, a_2 . רשמי יחס נסיגה עבור a_n . בדקי שהערכים שרשמת עבור a_0, a_1, a_2 מתאימים ליחס הנסיגה. (15 נק') ב. פתרי את יחס הנסיגה וקבלי נוסחה מפורשת עבור a_n . בדקי את הנוסחה שקיבלת בעזרת תנאי ההתחלה..

שאלה 4

מהו מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ בטבעיים, כאשר $x_1 \neq 5, x_2 \neq 5, x_3 \neq 8, x_4 \neq 8$. 0 הוא מספר טבעי. יש להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 5

תהי L שפה חלקית לשפת תחשיב הפרדיקטים, ובה בין השאר סימני משתנים x, y, z , וסימן פרדיקט דו-מקומי R . בכל אחד מהסעיפים א - ג מופיע פסוק בשפה זו, בכתוב מקוצר. בכל סעיף, קבע אם הפסוק שמופיע בו: (i) אמיתי לוגית. (ii) שקרי לוגית. (iii) אינו אמיתי לוגית ואינו שקרי לוגית. במקרים (i), (ii) הסבר בקצרה את תשובתך באופן מילולי. אין צורך בהוכחה מלאה. במקרה (iii) - תן דוגמא לאינטרפרטציה שבה הפסוק אמיתי ודוגמא לאינטרפרטציה שבה הפסוק שקרי. בכל אינטרפרטציה, ציין מהו העולם (תחום האינטרפרטציה) ומהו הפירוש של R .

8 נק') א. $\forall x \forall y \forall z \left((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z) \right)$

8 נק') ב. $(\forall x \forall y R(x, y)) \wedge (\exists z (\sim R(z, z)))$

9 נק') ג. $(\forall x \forall y (R(x, y))) \vee (\forall x \forall y (\sim R(x, y)))$

בהצלחה!