

### שאלה 1 (25 נקודות)

ציוני בחינה מסוימת מתפלגים נורמלית עם תוחלת 80 וסטיית-תקן  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ). ההסתברות שסטודנט מקרי יקבל בבחינה הזאת ציון גבוה מ-83.5 היא 0.3085. אין תלות בין ציונים של סטודנטים שונים בבחינה.

(8 נק') א. 1. מהו הערך של  $\sigma$ ?

2. אם נגדיל את הערך של  $\sigma$ , שחושב בסעיף 1, כיצד תשתנה ההסתברות שציון מקרי

בבחינה יהיה גבוה מ-83.5? הסבר את תשובתך במילים ללא חישובים נוספים.

(8 נק') ב. המרצה בודק בחינות רבות, שהוגשו לו על-ידי סטודנטים, בזו אחר זו.

מהי ההסתברות שיבדוק **יותר** מ-20 בחינות, עד שייתקל לראשונה בבחינה שציונה יהיה נמוך מ-65?

(9 נק') ג. כמה בחינות יש לבדוק, כדי שהציון הממוצע של הבחינות שנבדקו יהיה בין 75 ל-85 בהסתברות שעולה על 0.99?

בכל סעיפי השאלה: ערוך אינטרפולציה לינארית, היכן שהיא נדרשת.

### שאלה 2 (25 נקודות)

**הוכח**: אם  $N$  הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים אי-שליליים, ואם  $X_1, X_2, \dots$  הם משתנים מקריים שווי-התפלגות, בלתי-תלויים זה בזה, ובלתי-תלויים ב- $N$ , אז מתקיים –

$$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X_1] \quad \text{א.}$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\text{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\text{Var}(N) \quad \text{ב.}$$

### שאלה 3 (25 נקודות)

נתונה חפיסת קלפים רגילה, טרופה היטב, ובה 52 קלפים, המונחים כשפניהם כלפי מטה. (בחפיסה רגילה יש קלפים מ-4 צורות, ומכל צורה יש 13 קלפים). הופכים את הקלפים בזה אחר זה, ומגלים את פניהם.

יהיו  $X$  = הפעם שבה התגלה הקלף אס-לב ( $A\heartsuit$ )

$Y$  = הפעם שבה התגלה קלף האס הראשון ( $A\heartsuit$  או  $A\spadesuit$  או  $A\clubsuit$  או  $A\diamondsuit$ )

(8 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות של  $X$ .

(10 נק') ב. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של  $X$  בהינתן  $Y=j$ , לכל  $j=1,2,\dots,49$ .

(7 נק') ג. האם  $X$  ו- $Y$  בלתי-תלויים? הוכח את טענתך.

#### שאלה 4 (25 נקודות)

שני שחקנים, A ו-B, משחקים במשחק קלפים.

כל שחקן מקבל 2 קלפים.

כל קלף, מהקלפים הניתנים לשחקנים, יכול להיות חזק (בהסתברות 0.5) או חלש (בהסתברות 0.5).  
אין תלות בין כל הקלפים הניתנים לשחקנים.

שחקן A הוא שחקן נועז, ותמיד פותח את המשחק בקלף חזק, אם קיבל לפחות אחד כזה.

שחקן B הוא שחקן מתון, ותמיד פותח את המשחק בקלף מקרי, מתוך שני הקלפים שקיבל.

(7 נק') א. שחקן A הנועז פתח את המשחק בקלף חזק.

מהי ההסתברות שגם הקלף השני שברשותו הוא קלף חזק?

(7 נק') ב. שחקן B המתון פתח את המשחק בקלף חזק.

מהי ההסתברות שגם הקלף השני שברשותו הוא קלף חזק?

ג. בוחרים באקראי אחד משני השחקנים –

(6 נק') 1. אם השחקן שנבחר פתח את המשחק בקלף חזק,

מהי ההסתברות שגם הקלף השני שברשותו חזק?

(5 נק') 2. אם השחקן שנבחר פתח את המשחק בקלף חזק ואחריו חשף קלף חלש,

מהי ההסתברות שהוא השחקן הנועז A?

#### שאלה 5 (25 נקודות)

בפארק גדול מסתובבים 3 נמרים, שאותם צריך ללכוד. לשם כך הוזמן לפארק לוכד-נמרים מנוסה.

לוכד-הנמרים מנסה פעם אחר פעם ללכוד את הנמרים, ובכל נסיון שלו הוא יכול ללכוד לכל היותר נמר אחד.

כאשר לוכד-הנמרים מצליח ללכוד נמר – הנמר מוצא מהפארק (ואין צורך ללכוד אותו שוב).

ההסתברות שכל נסיון של לוכד-הנמרים יסתיים בהצלחה, כלומר, בלכידת נמר אחד, היא 0.4.

אין תלות בין נסיונות הלכידה של לוכד-הנמרים.

(6 נק') א. מה ההסתברות שלוכד-הנמרים יצליח ללכוד את כל הנמרים ב-5 נסיונות לכל היותר?

(6 נק') ב. אם ידוע שלוכד הנמרים הצליח ללכוד את כל הנמרים ב-5 נסיונות לכל היותר,

מהי ההסתברות שהוא נזקק לשם כך לכל 5 הנסיונות?

(6 נק') ג. מהן תוחלת ושונות מספר הנסיונות שהלוכד יבצע עד לתפיסתם של כל הנמרים?

(7 נק') ד. נניח שכל נסיון כושל של הלוכד (שבו הוא אינו מצליח ללכוד אף נמר) אורך 15 דקות,

וכי כל נסיון מוצלח (שבו הוא מצליח ללכוד נמר) אורך 30 דקות.

מהן תוחלת ושונות הזמן (בדקות) שהלוכד ישקיע בנסיונות-הלכידה?

(הכוונה לנסיונות מוצלחים וכושלים גם יחד, שיעשה עד ללכידת כל הנמרים.)

**בהצלחה!**