תשובה 1

א. ראשית נשים לב שהפונקציה אכן מוגדרת היטב ומעבירה כל ממשי חיובי לממשי חיובי :

אם $x > 0$ אז $\sqrt{1+2x} > 1$ ולכן $\sqrt{1+2x} - 1 > 0$.

(תזכורת: שורש ריבועי במתמטיקה הוא תמיד השורש האי-שלילי) .

הפונקציה **חד-חד-ערכית**:

אם $f(x_1) = f(x_2)$, משמע $\sqrt{1+2x_1} - 1 = \sqrt{1+2x_2} - 1$;

מכאן $\sqrt{1+2x_1} = \sqrt{1+2x_2}$;

פונקציית השורש הריבועי היא חד-חד-ערכית (ר' להלן), לכן $1+2x_1 = 1+2x_2$,

ומכאן $x_1 = x_2$.

הפונקציה היא **על** $\mathbf{R}^+$:

יהי $y > 0$. נחפש פתרון למשוואה $\sqrt{1+2x} - 1 = y$.

אחרי העברת אגפים והעלאה בריבוע נקבל $1+2x = (1+y)^2$,

ומכאן $x = \dfrac{(1+y)^2 - 1}{2} = \dfrac{y^2}{2} + y$.

נשים לב שעבור $y > 0$, קיבלנו $x > 0$, כלומר בתחום הנדרש.

עלינו לבצע עוד בדיקה: מכיון שבמהלך הפתרון העלינו בריבוע את שני האגפים, עלינו לבדוק שהפתרון שמצאנו אכן פותר את המשוואה המקורית (מדוע יש לבדוק אחרי העלאה בריבוע ? למשל מהמשוואה $x = -2$ נקבל אחרי העלאה בריבוע את המשוואה $x^2 = 4$. למשוואה זו יש גם פתרון $x = 2$, שאינו פתרון של המשוואה המקורית. זה קרה כי פונקציית ההעלאה בריבוע אינה חד-חד-ערכית. אחרי העלאה בריבוע של שני אגפים במשוואה יש לבדוק שהפתרונות שקיבלנו אכן פותרים את המשוואה שלפני ההעלאה בריבוע).

נציב אפוא את הפתרון שקיבלנו $x = \dfrac{(1+y)^2 - 1}{2}$ במשוואה $\sqrt{1+2x} - 1 = y$.

לאחר צמצומים נקבל: $\sqrt{(1+y)^2} = 1 + y$.

שימו לב **שלא תמיד נכון** ש $\sqrt{z^2} = z$: למשל $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$.

אבל במקרה שלנו נתון $y > 0$, לכן $1 + y > 0$, כלומר השוויון שעלינו לבדוק הוא מהצורה $\sqrt{z^2} = z$ כאשר $1 + y = z > 0$, ולכן השוויון אכן מתקיים.

הערה: מדוע לא נזקקנו לבדיקה כזו בהוכחת חד-חד-ערכיות, למרות שגם שם נפתרנו משורש ריבועי ? ראשית שם היה נתון שכל אחד מהאגפים הוא שורש ריבועי , כלומר הארגומנט שבתוך השורש הוא מספר אי-שלילי. שנית, **למרות שבשני המקרים העלינו בריבוע , כיוון הטיעון היה**

הפוך : בהוכחת חד-חד-ערכיות יצאנו **מההנחה** $f(x_1) = f(x_2)$, והתקדמנו צעד צעד כדי להראות **שמתוך זה נובע** $x_1 = x_2$. בדרך העלינו בריבוע, כלומר השתמשנו בטענה מהצורה:

אם $a = b$ אז $a^2 = b^2$. **טענה זו ודאי נכונה** !

לעומת זאת כשניסינו למצוא פתרון למשוואה $\sqrt{1+2x} - 1 = y$, יצאנו מהשוויון **שאנו רוצים שיתקיים**, והתקדמנו צעד-צעד לפתרון. מנין לנו שהפתרון אכן פותר את המשוואה ? כללית, בפתרון משוואה כל צעד צריך להיות **שקילות**, כלומר תקף הן "קדימה" והן "אחורה" , כי בסופו של דבר אנו רוצים לומר: *(i)* אם x שווה לערך או הערכים שמצאנו אז המשוואה מתקיימת ; *(ii)* אלה הם **כל** הערכים שפותרים את המשוואה. גם כאשר מספיק לנו למצוא רק פתרון אחד, כמו כאן, עדיין הכיוון שבו החישוב צריך להיות תקף הוא "אחורה", בניגוד לכיוון שבו אנו מתקדמים במציאת הפתרון. הטענה שאנו טוענים לגבי הפתרון היא: אם x שווה לערך שמצאנו, אז מתקיימת המשוואה. במהלך הפתרון הלכנו בכיוון הפוך לזה.

לכן כאשר מעלים בריבוע **במהלך פתרון משוואה**, אנו בעצם אומרים: עלינו לקיים $a = b$, נניח לרגע $a^2 = b^2$ ונראה אם נוכל לחזור אחורה. מכיון שמתוך $a^2 = b^2$ לא נובע $a = b$, עלינו לבדוק את הפתרון.

ב. הפונקציה **אינה חד-חד-ערכית**: למשל $\lfloor 0.5 \rfloor = \lfloor 0.1 \rfloor = 0$.

הפונקציה היא **על**: לכל $n \in \mathbf{Z}$ מתקיים $\lfloor n \rfloor = n$, לכן n שייך לתמונה של f - הוא התמונה של עצמו.

ג. הפונקציה **אינה חד-חד-ערכית**: למשל $f(\{1,17\}) = f(\varnothing) = \mathbf{N}$.

הפונקציה **אינה על** $P(\mathbf{R})$:

לכל קבוצה של ממשיים שאינה מכילה את כל הטבעיים (למשל $\varnothing$) אין מקור.

ד. הפונקציה **חד-חד-ערכית**:

נניח $f(X_1) = f(X_2)$, כלומר $X_1 \oplus \mathbf{N} = X_2 \oplus \mathbf{N}$.

נבצע בשני האגפים הפרש סימטרי עם $\mathbf{N}$: $(X_1 \oplus \mathbf{N}) \oplus \mathbf{N} = (X_2 \oplus \mathbf{N}) \oplus \mathbf{N}$.

מכאן בעזרת שלוש תכונות שונות של הפרש סימטרי שהוכחו בשאלה 1.22 בעמ' 27 בספר, נקבל $X_1 = X_2$ (השלימו !).

הפונקציה היא **על** $P(\mathbf{R})$:

תהי $Y \in P(\mathbf{R})$, נוכיח שקיים $X \in P(\mathbf{R})$ כך ש- $f(X) = Y$:

נקח $X = Y \oplus \mathbf{N}$. אז

$$f(X) = f(Y \oplus \mathbf{N}) = (Y \oplus \mathbf{N}) \oplus \mathbf{N} = Y \oplus (\mathbf{N} \oplus \mathbf{N}) = (Y \oplus \varnothing) = Y .$$

נעזרנו שוב בתכונות שונות של הפרש סימטרי שהוכחו בשאלה 1.22 .

תשובה 2

יחס מעל A הוא קבוצה של זוגות סדורים של אברי A, לכן כל יחס מעל A, ובפרט כל יחס שקילות מעל A, **חלקי** לקבוצה $A\times A$. קל לבדוק ש- $A\times A$ עצמה היא יחס שקילות (זהו יחס השקילות שבו כל אברי A נמצאים באותה מחלקה). לכן $A\times A$ היא האיבר הגדול ביותר ב- K לגבי הכלה.

מצד שני, יחס שקילות הוא בפרט רפלקסיבי, כלומר **מכיל** את I_A .

קל לבדוק שהיחס I_A אף הוא יחס שקילות מעל A (זהו יחס השקילות שבו כל איבר של A נמצא במחלקה בפני עצמו). מכיון שכל יחס שקילות מעל A מכיל אותו, I_A הוא האיבר הקטן ביותר ב- K לגבי הכלה.

ג. היחס הריק מוכל בכל יחס, והוא אנטי-סימטרי (אם לא ברור לך מדוע הוא אנטי-סימטרי, ר' שאלות רב-ברירה בעניין זה באתר הקורס). לכן הוא איבר קטן ביותר ב- J לגבי הכלה.

לעומת זאת, **אין** ב- J איבר גדול ביותר לגבי הכלה. כדי להראות זאת, נראה **שני איברים מקסימליים** ב- J, שונים זה מזה (לפי שאלה 3.21 בעמ' 93 בספר, אם יש כמה איברים מקסימליים שונים אז אין איבר גדול ביותר).

יהי $R = I_A \cup \{(1,2)\,,(2,3)\,,(1,3)\}$. מבדיקה ישירה, R הוא אנטי-סימטרי.

אם קיים ב- J איבר R_1 (כלומר יחס אנטי-סימטרי R_1) המכיל-ממש את R, אז R_1 חייב להכיל לפחות אחד מהזוגות $(3,2)\,,(3,1)\,,(2,1)$, כי אלה כל אברי $A\times A$ שמחוץ ל- R. אבל הוספה של כל אחד מהזוגות האלה ל- R מקלקלת את האנטי-סימטריות. לכן אין יחס אנטי-סימטרי מעל A המכיל את R. לפיכך R הוא **איבר מקסימלי** ב- J .

בדומה ל- R נוכל לקחת למשל את $S = I_A \cup \{(2,1)\,,(3,2)\,,(3,1)\} = R^{-1}$,

מסיבה דומה לגמרי, גם הוא איבר מקסימלי ב- J.

מצאנו שני איברים מקסימליים שונים, לכן אין ב- J איבר גדול ביותר.

הוכחה אחרת, קצרה יותר, לטענה שאין ב- J איבר גדול ביותר :

נניח בשלילה שקיים איבר גדול ביותר ב- J . נקרא לו M.

היחס $\{(1,2)\}$ (יחס שבו יש זוג אחד בלבד) הוא אנטי-סימטרי.

גם היחס $\{(2,1)\}$ הוא אנטי-סימטרי.

היחס M , שהוא איבר גדול ביותר ב- J , מכיל את שני היחסים האלה.

כלומר $(1,2) \in M$ וגם $(2,1) \in M$.

זה בסתירה לכך ש- M אנטי-סימטרי. לפיכך לא קיים M כזה.

תשובה 3

לפני שניגשים לפתור חשוב להבין את הגדרתה של f_* , ובפרט את תחום ההגדרה והטווח שלה.

f_* מתאימה לכל קבוצה חלקית X של A - קבוצה חלקית של B, שהיא קבוצת התמונות של אברי X תחת הפונקציה f.

פתרון השאלה:

כיוון אחד: נניח ש- f **אינה** חח"ע (חד-חד-ערכית) ונראה ש- f_* **אינה** חח"ע :

מההנחה, יהיו $a_1, a_2 \in A$ מקיימים $a_1 \neq a_2$, $f(a_1) = f(a_2) = b \in B$.

אז $f_*(\{a_1\}) = f_*(\{a_2\}) = \{b\}$ ולכן f_* אינה חח"ע.

כיוון שני: נניח ש- f_* **אינה** חח"ע ונראה ש- f **אינה** חח"ע :

מההנחה, תהיינה $X, Y \in P(A)$, $X \neq Y$, $f_*(X) = f_*(Y)$.

מההנחה $X \neq Y$, קיים $a \in X$ שאינו שייך ל- Y, או שקיים $a \in Y$ שאינו שייך ל- X.

ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) נניח שקיים $a \in X$ שאינו שייך ל- Y .

נסמן $b = f(a)$. מהגדרת f_* , $b \in f_*(X)$.

אך $f_*(X) = f_*(Y)$, לכן $b \in f_*(Y)$.

מכאן, שוב מהגדרת f_* , קיים $a_1 \in Y$ המקיים $b = f(a_1)$.

הנחנו ש- $a \notin Y$ ולכן $a \neq a_1$.

קיבלנו $f(a) = f(a_1) = b$, $a \neq a_1$, לכן f אינה חח"ע.

תשובה 4

(i) **בדיקה** עבור $n = 0$ (אפשר להתחיל מ- $n = 1$ אבל נוח להתחיל כאן מאפס) :

כל מספר טבעי מתחלק ללא שארית ב- $3^0 = 1$,

ובפרט, מספר טבעי בעל ספרה אחת מתחלק ב- 1 ...

(ii) **מעבר**: נניח שכל מספר טבעי שבנוי מ- 3^n ספרות זהות, מתחלק ב- 3^n .

יהי a מספר טבעי שבנוי מ- 3^{n+1} ספרות זהות, נוכיח שהוא מתחלק ב- 3^{n+1} .

נסמן $3^n = k$.

נסמן ב- b את המספר בעל 3^n ספרות זהות, שכולן הן אותה ספרה שממנה בנוי a .

קל לראות ש- $a = b \cdot (1 + 10^k + 10^{2k})$ (ראו רמז שהופיע בעמוד הבית של הקורס).

כעת, המספר $1 + 10^k + 10^{2k}$ מכיל בכתיב עשרוני בדיוק 3 הופעות של הספרה 1 (נשים לב שלכל n טבעי, כולל 0, מתקיים $k = 3^n > 0$) והשאר - אפסים.

לכן סכום הספרות שלו הוא 3, ולכן הוא מתחלק ב- 3.

מצד שני, לפי הנחת האינדוקציה, b מתחלק ב- 3^n .

לכן מכפלתם מתחלקת ב - 3^{n+1} .

מ- $(i)+(ii)$, לפי עקרון האינדוקציה בטבעיים, הטענה נכונה לכל n טבעי.

איתי הראבן