בחינה 2015א מועד א ראשון (מועד 84)

שאלה 1

א. לפי הגדרת הקשר הלוגי $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ הביטוי מתקיים או כאשר A שקר או כאשר A אמת וגם B אמת
לכך כל האיברים שלא נמצאים בקבוצה A (A') ואלו שנמצאים גם ב A וגם ב B ($\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$) מקיימים את הביטוי $x \in A \to x \in B$:

$$\mathrm{A}' \cup (A \cap B) = \{4,5,6,7\} \cup \{3\} = \{3,4,5,6,7\}$$

לכך תשובה [5] היא הנכונה.

ב. קבוצת כל הסדרות בנות שני איברים של A היא: $A \times A$. קבוצת כל הקבוצות החלקיות לקבוצה $A \times A$ היא $\mathrm{P}(A \times A)$
לפי משפט 5.23 $|P(A \times A)| = 2^{|\mathrm{A} \times \mathrm{A}|}$ לפי הגדרה 5.14 (כפל עוצמות) $|A \times A| = |\mathrm{A}|^2$ לפי שאלה 5.4 $|A| = |\{\mathrm{x} \in \mathrm{R} | 0 \le \mathrm{x} \le 1\}| = |\{\mathrm{x} \in \mathrm{R} | 0 < \mathrm{x} < 1\}| = \mathrm{C}$
ולכך $|P(A \times A)| = 2^{|\mathrm{A} \times \mathrm{A}|} = 2^{|\mathrm{A}|^2} = 2^{C^2}$
לפי טענה 5.15 $(\mathrm{C} \cdot \mathrm{C} = \mathrm{C})$: $= 2^{C}$
לכך תשובה [3] היא הנכונה

ג. לפי הגדרת יער הרי הוא אוסף של עצים
לפי משפט 2.5-4. - בעץ מספר הקשתות($|E|$) הוא - $|E| = |\mathrm{V}| - 1$
נגדיר: n(מספר העצים ביער) $0 < i \le n$, V_i-המצמתים של עץ ביער וE_{i} הקשתות של עץ ביער

$$|E| = |E_1| + |E_2| + \cdots |E_n| = (|\mathrm{V}_1| - 1) + (|\mathrm{V}_2| - 1) + \cdots =$$
$$(|\mathrm{V}_1| + |\mathrm{V}_2| + \cdots) - 1 \cdot \mathrm{n} = |\mathrm{V}| - \mathrm{n}$$

לכך:

$$|E| = 90 = 100 - \mathrm{n} = |\mathrm{V}| - \mathrm{n}$$
$$\downarrow$$
$$n = 10$$

כיוון שמספר העצים ביער הוא 10 כיוון שיער הוא גרף שכל רכיב בו הוא עץ. יש ביער G 10 רכיבי קשירויות
ולכך התשובה היא: [4]

שאלה 2

א. סדר חלקי הרי הוא: רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי סימטרי
לפי הגדרת אנטי סימטרי היא aRb וגם $bRa \Rightarrow a = b$
אפשר למצוא רלציה שהיא גם טרנזיטיבית וגם ישנם איברים a,b כך שלמרות ש aRb וגם bRc, $a \neq b$
כדוגמת $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ שהרי היא טרנזיטיבית כיוון ש $\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = R^2$
ולמרות זאת קיים $b = 2 \neq 1 = a$ כך ש $2R1$ וגם $1R2$.
כל קבוצה K שתכיל את R תכיל גם את $(2,1)$ ו $\langle 1,2 \rangle$
ולכך K איננה אנטי סימטרית. ולכך איננה סדר חלקי למרות שR טרנזטיבי

ב. סדר חלקי הרי הוא: רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי סימטרי
קיימת רלציה אנטי סימטרית שאיננה סדר חלקי וכל רלציה K שמכילה אותה איננה סדר חלקי.
כדוגמת $\mathrm{R} = \langle \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix} \rangle$. שהיא אנטי סימטרית כיוון ש $\mathrm{I_A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \subseteq \emptyset = \mathrm{R} \cap \mathrm{R}^{-1}$ (לפי הגדרת אנטי סימטריות)
נניח שקיים $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{K}$ כך ש K הוא סדר חלקי כיוון ש K צריך להיות סמטרי לפי הגדרת הסגור של רפלקסיביות

$$\mathrm{K} \subseteq \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{Bmatrix} = \mathrm{R} \cup I_{\mathrm{A}} = \mathrm{S}$$

כיוון ש K צריך להיות טרנזטיבי לפי הגדרת הסגור הטרנזיטיבי $SUS^2US^3 \ldots = \langle \begin{smallmatrix} 1&2&3&1&2&3&1 \\ 2&3&1&1&2&3&3 \end{smallmatrix} \ldots \rangle \subseteq K$
אם כן K מכיל $3R1$ וגם $1R3$ אף ש $a = 1 \neq 3 = b$ ולכך איננו אנטי סימטרי
ולכך איננו סדר חלקי למרות שהוא טרנזטיבי.

שאלה 3

א. על מנת להגיע מstart לend צריך ללכת 9 צעדים ימינה ו9 למעלה
לפי שאלה 2.81 מספר המסלולים השונים הוא $\binom{k+n}{k} = \binom{9+9}{9} = \binom{18}{9}$

ב. נפתור באמצעות עיקרון ההכלה וההפרדה
A-האפשרויות לעבור ב(3,3) B- האפשרויות לעבור ב(6,3) C- האפשרויות לעבור ב(6,6)
$x = \binom{3+3}{3} = \binom{6}{3}$: מספר הדרכים ללכת 3 למעלה ו3 ימינה (מstart ל(3,3) ומ(3,3) ל(6,6) ומ(6,6) לend)
$y = \binom{6+6}{6} = \binom{12}{6}$: מספר הדרכים ללכת 6 למעלה ו6 ימינה (מstart ל(6,6) ומ(3,3) לend)
$z = \binom{6+3}{3} = \binom{9}{3}$: מספר הדרכים ללכת 3 למעלה ו6 ימינה ומספר האפשרויות 6 למעלה ו3 ימינה (מstart ל(6,3) ומ(6,3) לend)
1 : מספר האפשריות ללכת 3 ימינה ומספר האפשרויות ל3 שמאלה (מ(3,3) ל(6,3) ומ(6,3) ל(6,6))

לפי הסעיף הקודם: $|U| = \binom{18}{9}$

$$|A| = x \cdot y = \binom{6}{3}\binom{12}{6} = \frac{6! \cdot 12!}{3! \cdot 3! \cdot 6! \cdot 6!} = 18480$$

$$|B| = z \cdot z = \binom{9}{3}^2 = 7056$$

$$|C| = y \cdot x$$

$$|A \cap B| = x \cdot 1 \cdot z = \binom{6}{3}\binom{9}{3} = 20 \cdot 84 = 1680$$

$$|B \cap C| = z \cdot 1 \cdot x$$

$$|C \cap A| = x \cdot x \cdot x = \binom{6}{3}^3 = 8000$$

$$|A \cap B \cap C| = x \cdot 1 \cdot 1 \cdot x = x^2 = \binom{6}{3}^2 = 400$$

$$|A' \cap B' \cap C'| = |U| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| - |A \cap B \cap C| =$$

$$\binom{18}{9} - 2xy - z^2 + 2xz + x^3 - x^2 = 48620 - 36960 - 7056 + 3360 + 8000 - 400 = 15564$$

שאלה 4

א. מספר הפונקציות עבור $|x| = i$ הוא $|B|^i$ כפול מספר האפשרויות לבחירת $|x|$ מ $|A|$ $\left(\binom{|A|}{i}\right)$
הסכום הוא:

$$\sum_{i=0}^{|A|} \binom{|A|}{i} |B|^i$$

ב. עבור כל איבר ב A אפשר לקשר אותו לאחד האיברים בA או שהוא לא קיים ב-X לכך יש $|B| + 1$ אפשרויות. וכיוון שלכל איבר בA יש את מספר האפשרויות הללו. סה"כ מספר האפשרויות הוא $|f| = (|B| + 1)^{|A|}$

ג. לפי הבינום של ניוטון $(|B| + 1)^{|A|} = 1 + |B|\binom{|A|}{1} + |B|^2\binom{|A|}{2} + \cdots + |B|^{|A|-1}\binom{|A|}{|A|-1} + |B|^{|A|} = \sum_{i=0}^{|A|} \binom{|A|}{i} |B|^i$

שאלה 5

א. מספר הצמתים השכנים לכל צומת הם בחירה של שני מקומות שיהיו נבדלים.
מספר האפשרויות לבחירה הם: $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$ ולכך מספר הקשתות השכנות הוא 6
ולכך הדרגה של כל צומת היא 6

ב. נבחר צומת v_1 כל שהיא בגרף. נתייחס לצומת השכנה ל v_1 כ v_2 הצומת v_2 נבדלת מv_1 בשתי מקומות i,j. הצומת נתייחס לצומת השכנה ל v_2 כv_3 , v_3 נבדל מv_2 בשתי מקומות.
אם שתי המקומות הנבדלים בv_3 הם i,j הרי v_3 הוא הצומת v_1.
אם הם שונים מi,j אז v_3 נבדל מv_1 ב4 מקומות
אם אחד מהם הוא iאו j מספר המקומות הנבדלים מv_1 עולה באחד ויורד באחד ולכך נשאר 2.
האיבר v_3 אם הוא נבדל מv_1 בשתי מקומות השכנים שלא הרי הם כשכנים של v_2 ואם הוא נבדל בארבע מקומות מv_1 השכנים שלו נבדלים בשתי מקומות והשכנים שלהם הרי הם כשכנים של v_2 לכך מוכח שיש מסלול מv_1 רק לצמתים שנבדלים ממנו או ב2 מקומות או ב4. אך לנבדלים ב1 או 3 אין ולכך אין מסלול בין כל האיברים וG אינו קשיר.

ג. ע"פ משפט 1.6 גרף הוא דו"צ רק אם אין בו מעגל אי זוגי. כיוון שקיימים בגרף G מעגלים אי זוגיים כדוגמת: $(0,1,1,0) \leftarrow (1,1,0,0) \leftarrow (1,1,1,1)$ שכל אחד שונה מהבא אחריו בשתי מקומות, מוכח שהגרף אינו דו"צ

ד. מספר הקשתות בגרף:

$$\sum_{i=0}^{16}\frac{\deg(\mathrm{v_i})}{2} = [\text{ע"פ סעיף א}]\,16\cdot\frac{6}{2} = 48$$

לפי מסקנה 5.4 מספר הקשתות המקסימלי בגרף מישורי פשוט הוא $3n-6$
נניח ש G הוא מישורי לפי זה $3\cdot 16 - 6 = 42 \geq 54$ כיוון שאין זה נכון מוכח ש G אינו מישורי