פרק 5: משתנים מקריים רציפים (סיכום)

משתנה מקרי רציף: משתנה מקרי שקבוצת ערכיו האפשריים אינה בת-מניה.
ברוב המקרים קבוצה זו היא קטע של מספרים ממשיים (או מספר סופי של קטעים).

פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי רציף: אם X הוא משתנה מקרי רציף, אז פונקציית הצפיפות שלו היא פונקציה ממשית $f(x)$ המוגדרת לכל x ומקיימת:

א. $f(x) \geq 0$ לכל x.

ב. לכל מאורע B מתקיים $P\{X \in B\} = \int_B f(x)\,dx$, כלומר, לכל $a < b$ ממשיים: $P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)\,dx$.
לפיכך, $P\{a \leq X \leq b\}$ היא השטח שמתחת לעקומת הצפיפות $f(x)$, המשתרע מהנקודה a ועד לנקודה b.

ג. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$; כלומר, השטח שמתחת לעקומת הצפיפות $f(x)$ (ומעל לציר x) שווה ל-1.

<u>הערה</u>: אם X הוא משתנה מקרי רציף אז לכל a ממשי $P\{X = a\} = 0$, ולכן $P\{X \leq a\} = P\{X < a\}$.

פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי רציף: $F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ לכל x.

הקשר בין פונקציית ההתפלגות המצטברת לפונקציית הצפיפות: $\boxed{f(x) = \frac{d}{dx}F(x)}$ לכל x.

תוחלת: התוחלת של X מסומנת ב- $E[X]$, ומוגדרת על-ידי $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$.

אם X הוא משתנה מקרי אי-שלילי, כלומר $P\{X \geq 0\} = 1$, אז $E[X] = \int_0^{\infty} P\{X > x\}\,dx$.

תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי:

אם $g(x)$ היא פונקציה ממשית המוגדרת לכל הערכים האפשריים של משתנה מקרי X,
אז $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$.

לכן, התוחלת מקיימת את השוויון $E[aX+b] = aE[X] + b$.

שונות: השונות של X מסומנת ב- $\mathrm{Var}(X)$, ומוגדרת על-ידי $\mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x)\,dx$.

אפשר להראות שמתקיים $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (E[X])^2$.

השונות מקיימת את השוויון $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$.

סטיית-תקן: סטיית התקן של X היא השורש החיובי של שונותו. סימון: $\mathrm{SD}(X)$ או σ_X.
סטיית התקן מקיימת את השוויון $\mathrm{SD}(aX+b) = |a|\,\mathrm{SD}(X)$.

התפלגות של פונקציה של משתנה מקרי: יהי X משתנה מקרי רציף, ויהי $Y = g(X)$ פונקציה של X.

אם g היא פונקציה מונוטונית עולה, אז $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = P\{X \leq g^{-1}(y)\} = F_X(g^{-1}(y))$;

אם g היא פונקציה מונוטונית יורדת, אז $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = P\{X \geq g^{-1}(y)\} = 1 - F_X(g^{-1}(y))$;

לכן $f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$.

משתנים מקריים מיוחדים

משתנה מקרי אחיד: a ו- b ממשיים ו- $a<b$ $X \sim U(a,b)$

$a \le x \le b$ $F(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$; $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$

$\text{Var}(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$ $E[X]=\dfrac{a+b}{2}$

שימו לב: לא תיתכן התפלגות אחידה על קטע אינסופי.

משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי: $Z \sim N(0,1)$

z ממשי $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$; $F(z)=\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

$\text{Var}(Z)=1$ $E[Z]=0$

הערה: $f(z)$ סימטרית סביב 0, לכן מתקיים $P\{Z \le -z\}=P\{Z \ge z\}$, כלומר, $\Phi(-z)=1-\Phi(z)$.

משתנה מקרי נורמלי: μ ממשי ו- $\sigma^2>0$ $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

x ממשי $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$; $F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$\text{Var}(X)=\sigma^2$ $E[X]=\mu$

טענה: אם $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ אז $aX+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$.

תוצאה: אם $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ אז $Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ ולכן:

$$F_X(x)=P\{X \le x\}=P\left\{\tfrac{X-\mu}{\sigma} \le \tfrac{x-\mu}{\sigma}\right\}=P\left\{Z \le \tfrac{x-\mu}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\tfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

משפט הגבול של דה-מואבר – לפלאס: (הקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית)

אם $S_n \sim B(n,p)$ אז $P\left\{a \le \dfrac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right\} \to \Phi(b)-\Phi(a)$ כאשר $n \to \infty$.

בדרך-כלל הקירוב טוב כאשר $np(1-p)>10$.

משתנה מקרי מעריכי: $\lambda>0$ $X \sim Exp(\lambda)$

$x>0$ $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$; $F(x)=1-e^{-\lambda x}$

$\text{Var}(X)=\dfrac{1}{\lambda^2} \Rightarrow E[X^2]=\int_0^\infty x^2 f(x)dx=\dfrac{1}{\lambda^2}+\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2=\dfrac{2}{\lambda^2}$ $E[X]=\dfrac{1}{\lambda}$

תכונת חוסר-הזכרון:

משתנה מקרי X נקרא חסר-זיכרון אם לכל s ו- t אי-שליליים מתקיים $P\{X>s+t \mid X>t\}=P\{X>s\}$.

המשתנה המקרי המעריכי הוא המשתנה היחיד שמקיים את תכונת חוסר-הזיכרון.

הערה: המשתנה המקרי הגיאומטרי מקיים את תכונת חוסר-הזיכרון, אך רק עבור s ו- t **שלמים** אי-שליליים. (לכן, אינו נקרא חסר-זיכרון.)

משתנה מקרי גמא: $\lambda > 0$ ו- $t > 0$ $X \sim Gamma(t, \lambda)$

$x > 0$ $f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{t-1}}{\Gamma(t)} \quad ; \quad \Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-y} y^{t-1} dy$

$\text{Var}(X) = \frac{t}{\lambda^2}$ $E[X] = \frac{t}{\lambda}$

הערות: 1. $\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1)$ לכל $t > 1$, ואם n שלם וחיובי אז $\Gamma(n) = (n-1)!$.

2. אפשר להראות כי: $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ ו- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

3. $Gamma(1, \lambda) = Exp(\lambda)$ ו- $Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2(n)$.

טענה: אם המופעים המתרחשים במרווח-זמן כלשהו מקיימים את שלושת ההנחות של תהליך פואסון עם קצב λ, אז –

1. הזמן החולף (מתחילת מרווח-הזמן) עד להתרחשות המופע הראשון הוא משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ.

2. הזמן החולף (מתחילת מרווח-הזמן) עד להתרחשות המופע ה-n-י הוא משתנה מקרי גמא עם הפרמטרים n ו- λ.

משתנה מקרי ביתא: $a > 0$ ו- $b > 0$ $X \sim Beta(a,b)$

$0 \le x \le 1$ $f(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} \quad ; \quad B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$

$\text{Var}(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$ $E[X] = \frac{a}{a+b}$

הערות: 1. $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

2. $Beta(1,1) = U(0,1)$

משתנה מקרי קושי: θ ממשי $X \sim Cauchy(\theta)$

x ממשי $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x-\theta)^2}$

התוחלת והשונות של משתנה מקרי קושי אינן מוגדרות