

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20290 - אלגוריתמיקה - יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1-4

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 7 נקודות

סמסטר: 2004 **מועד אחרון להגשה:** 12.3.2004

אנא שים לב:

מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (10 נקודות)

הראה כיצד ניתן לעשות סימולציה של לולאת "while-do" באמצעות משפט תנאי ושגרה רקורסיבית.

שאלה 2 (10 נקודות)

נתונים שני תורים Q_1 ו- Q_2 . כל אחד מהתורים מכיל n איברים ממוינים (האיבר הקטן נמצא בראש התור והאיבר הגדול ביותר נמצא בסוף התור). כתוב שגרה, המבצעת מיזוג של שני התורים. לאחר ביצוע השגרה, התור Q_1 יכיל $2n$ איברים ממוינים והתור Q_2 יהיה ריק.

הפעולות שניתן לבצע על תור הן:

- בדיקה אם התור ריק
- הכנסת איבר חדש לסוף התור
- הוצאת האיבר שבראש התור

שאלה 3 (15 נקודות)

בשאלה זו עליך לכתוב תכנית מחשב בשפת המחשב החביבה עליך (Pascal / C / C++), אשר פותרת בעיה אלגוריתמית שתוגדר על-ידך. התכנית צריכה לעבור קומפילציה ולרוץ, אך הפלט שלה יהיה שגוי, כתוצאה מכך שבתכנית יש הערה שלא נסגרה. הגדר את הבעיה האלגוריתמית שהתכנית אמורה לפתור והסבר כיצד השגיאה בתכנית גורמת ליצירת הפלט השגוי.

שאלה 4 (15 נקודות)

עומק של צומת בעץ בינרי הוא אורך המסלול משורש העץ אל הצומת. כתוב אלגוריתם רקורסיבי, המקבל עץ בינרי T ומחשב את סכום העומקים של כל הצמתים בעץ.

שאלה 5 (20 נקודות)

חתך (CUT) בגרף לא מכוון $G = (V, E)$ הוא חלוקה של צמתי הגרף לשתי קבוצות $(S, V-S)$.
 גודל החתך הוא מספר הקשתות המחברות בין הצמתים השייכים ל- S לצמתים השייכים ל- $V-S$.
 הבעיה של מציאת חתך מקסימלי בגרף נתון נקראת בעיית ה-MAX CUT.
 להלן אלגוריתם לפתרון בעיית ה-MAX CUT עבור גרף $G = (V, E)$ בעל n צמתים v_1, v_2, \dots, v_n :

$$(1) \quad T \leftarrow \emptyset, S \leftarrow \emptyset$$

(2) עבור i המקבל את הערכים 1 עד n בצע:

(2.1) הצב ב- x את מספר השכנים של v_i השייכים ל- S ;

(2.2) הצב ב- y את מספר השכנים של v_i השייכים ל- T ;

(2.3) אם $x \leq y$ אז הכנס את v_i ל- S ;

(2.4) אחרת הכנס את v_i ל- T ;

(3) החזר את שתי הקבוצות (S, T) .

- א. הסבר בקצרה את עקרון הפעולה של האלגוריתם. באיזו גישה האלגוריתם משתמש?
- ב. תן דוגמה לגרף G , שעבורו האלגוריתם לא ימצא את החתך המקסימלי. הוכח את טענתך.
 (כלומר, הרץ את האלגוריתם על הגרף והראה שהחתך שהאלגוריתם מוצא אינו מקסימלי).

שאלה 6 (10 נקודות)

כתוב אלגוריתם המחשב את האיבר ה- n בסדרת פיבונצ'י ללא שימוש במערך עזר.

שאלה 7 (20 נקודות)

- בסניף הדואר המרכזי בתל-אביב קיימים k סוגים שונים של בולים. (לכל סוג יש ערך נקוב שונה).
 כאשר אדם מבקש לשלוח מכתב שעלותו N שקלים, פקיד הדואר צריך למצוא הרכב של בולים
 שערכו יהיה בדיוק N . ברצוננו לחשב את מספר הדרכים (השונות) להגיע לסכום N .
 מספר הבולים מכל סוג אינו מוגבל.
- א. כתוב אלגוריתם תכנון דינמי לפתרון הבעיה.
 הדרכה: יש להשתמש בטבלה בגודל $(N+1) \times (k+1)$.
- ב. השתמש באלגוריתם שכתבת כדי לפתור את הבעיה עבור הקלט הבא:
 עלות המכתב: 10 ₪. סוגי הבולים: 2 ₪, 3 ₪, 4 ₪, 5 ₪.
 צייר את הטבלה המתקבלת.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20290 - אלגוריתמיקה - יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 5-6

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 7 נקודות

סמסטר: 2004 **מועד אחרון להגשה:** 9.4.2004

אנא שים לב:

מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20 נקודות)

בחנות הספרים "קודקוד ספרים" הוכרז על מבצע לעידוד המכירות:
כל הקונה שני ספרים – יקבל את הזול מביניהם בחינם! (מספר הספרים לקונה בודד אינו מוגבל).
דני נכנס לחנות והתלהב מהמבצע. הוא בחר מספר זוגי של ספרים וניגש לקופה.
א. הראה שהמחיר הכולל שדני ישלם תלוי באופן שבו הוא יחלק את הספרים לזוגות.
ב. תאר אלגוריתם פשוט, שיאפשר לדני לשלם מחיר כולל מינימלי על הספרים שהוא בחר.
מהו זמן הריצה של האלגוריתם?
ג. הוכח את נכונותו של האלגוריתם.
ד. נסמן את מחירי הספרים ב- a_1, a_2, \dots, a_n . כתוב פסאודו-קוד לחישוב המחיר הכולל שדני ישלם עבור הספרים.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתון האלגוריתם הרקורסיבי הבא לחישוב n^2 (n מספר טבעי כלשהו):

חשב-את n בריבוע

(1) אם $n = 0$ אז החזר 0.

(2) אחרת בצע את הפעולות הבאות:

(2.2) קרא **לחשב-את $(n-1)$ בריבוע** והצב את הערך המוחזר ב- x ;

(2.1) החזר את $x + 2n - 1$.

א. הוכח את נכונותו המלאה של האלגוריתם.
ב. איזה שינוי צריך לעשות באלגוריתם כדי שהוא יהיה נכון גם עבור מספרים שליליים?

שאלה 3 (20 נקודות)

- א. כתוב אלגוריתם, המקבל כקלט שני מספרים שלמים וחיוביים $m, n > 1$ ומחשב את $\lfloor \log_m n \rfloor$.
 האלגוריתם יבצע את החישוב ע"י חישוב החזקות של m (m^0, m^1, m^2, \dots) עד שיימצא המספר k המקיים $m^k \leq n < m^{k+1}$.
 ב. מהי סיבוכיות הזמן של האלגוריתם?
 ג. הוכח את נכונותו המלאה של האלגוריתם.

שאלה 4 (30 נקודות)

- נתון מערך ממוין $A[1..n]$ המכיל מספרים שלמים בתחום שבין 0 ל-MAX.
 נניח שניתן להשתמש במקומות $A[0]$ ו- $A[n+1]$ לאכסון מספרים שהם מחוץ לתחום.
 בהתחלה: $A[0] = -1, A[n+1] = MAX + 1$.
 האלגוריתם הבא מקבל את המערך A ומספר שלם x , ומבצע חיפוש של x במערך:

$$(1) \quad hi \leftarrow n, low \leftarrow 1$$

(2) כל עוד $low \leq hi$ בצע את הפעולות הבאות:

$$p \leftarrow \frac{x - A[low - 1]}{A[hi + 1] - A[low - 1]} \quad (2.1)$$

$$mid \leftarrow \lfloor p \cdot (hi - low + 1) \rfloor + low \quad (2.2)$$

(2.3) אם $x = A[mid]$ אז הדפס: "x נמצא במערך במקום mid" ועצור.

(2.4) אחרת בצע את הפעולות הבאות:

(2.4.1) אם $x < A[mid]$ אז $hi \leftarrow mid - 1$;

(2.4.2) אחרת $low \leftarrow mid + 1$;

(3) הדפס: "x לא נמצא במערך" ועצור.

א. נתון המערך A הבא, המכיל מספרים בתחום 0 עד 1000 (כלומר, $MAX = 1000$):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
28	72	93	270	316	430	675	824	903	942

הדגם את פעולת האלגוריתם עבור $x = 270$ ו- $x = 400$.

- ב. מהו זמן הריצה של האלגוריתם במקרה הטוב ובמקרה הגרוע? נמק את תשובתך.
 ג. השווה את אופן הפעולה של האלגוריתם לזה של האלגוריתם לחיפוש בינרי.
 איזה משני האלגוריתמים הוא טוב יותר לדעתך?
 ד. תן דוגמה ליישום של האלגוריתם בחיי היום-יום.

שאלה 5 (10 נקודות)

הוכח את הטענה הבאה (עמ' 146 בספר): גובהו של כל עץ בינרי המכיל N עלים הוא לפחות $\log_2 N$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20290 - אלגוריתמיקה - יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 7-9

מספר השאלות: 7 משקל המטלה: 9 נקודות

סמסטר: ב2004 מועד אחרון להגשה: 14.5.2004

אנא שים לב:

מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (10 נקודות)

איור 7.7 בספר ממחיש את העובדה, שעלייה במהירותם של מחשבים לא תסייע לנו לפתור בצורה יעילה בעיות שלמות ב-NP. שרטט טבלה דומה עבור הפונקציות N^5 ו- 3^N .

שאלה 2 (10 נקודות)

בעיית הסכום החלקי היא הבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: קבוצה A בת n מספרים שלמים וחיוביים a_1, a_2, \dots, a_n ומספר שלם וחיובי K .

השאלה: האם ניתן לבחור תת-קבוצה של A , שסכום האיברים בה יהיה בדיוק K ?

הוכח שהבעיה שייכת למחלקה NP. יש לתאר את מסמך האישור הקצר, להסביר איך תתבצע

בדיקת המסמך ולהראות שזמן הבדיקה הוא פולינומיאלי בגודל הקלט.

שאלה 3 (20 נקודות)

(לפי רעיון של ד"ר צבי לוטקר)

נדון בגרסה הבאה של בעיית הסכום החלקי:

בגרסה זו נתונות שתי קבוצות מספרים זרות זו לזו A_1, A_2 ושני מספרים K_1, K_2 (כל המספרים

שלמים וחיוביים). ידוע שמתקיימת אחת משתי האפשרויות הבאות: או שהתשובה של בעיית

הסכום החלקי גם על A_1 ו- K_1 וגם על A_2 ו- K_2 היא "כן" או שהתשובה של בעיית הסכום החלקי

גם על A_1 ו- K_1 וגם על A_2 ו- K_2 היא "לא" (כלומר, שני הקלטים "מתנהגים" באותה צורה).

ברצוננו לקבוע איזו משתי האפשרויות היא הנכונה.

א. הוכח שהבעיה אינה קשה יותר מבעיית הסכום החלקי.

(כלומר, יש לתאר רדוקציה מהבעיה החדשה לבעיית הסכום החלקי).

ב. הוכח שהבעיה אינה קלה יותר מבעיית הסכום החלקי.

(כלומר, בהינתן קלט A, K לבעיית הסכום החלקי, יש לבנות את שני הקלטים לבעיה החדשה,

כך שיתקיים התנאי שהוגדר לעיל, וכך שהתשובה של בעיית הסכום החלקי גם על A_1 ו- K_1 וגם

על A_2 ו- K_2 תהיה "כן" אם ורק אם התשובה של בעיית הסכום החלקי על A ו- K תהיה "כן").

שאלה 4 (20 נקודות)

בעיית אבני הדומינו (בעיית הריצוף) היא הבעיה הבאה :

הקלט : קבוצה סופית T של סוגי מרצפות.

השאלה : האם ניתן לרצף את סריג השלמים האינסופי אך ורק באמצעות מרצפות מן הסוגים

המופיעים בקבוצה T ?

בעיית המופעים החוזרים של אבני הדומינו היא הבעיה הבאה :

הקלט : קבוצה סופית T של סוגי מרצפות ומרצפת מסוימת T .

השאלה : האם ניתן לרצף את סריג השלמים האינסופי אך ורק באמצעות מרצפות מן הסוגים

המופיעים בקבוצה T , כך שהריצוף יכיל מספר אינסופי של עותקים של המרצפת המסוימת ?

א. נניח שנתון לנו אורקל לבעיית המופעים החוזרים של אבני הדומינו.

הראה כיצד ניתן להשתמש באורקל כדי לפתור את בעיית אבני הדומינו הרגילה.

ב. האם גם הכיוון השני מתקיים ? כלומר, האם ניתן להשתמש באורקל לבעיית אבני הדומינו

הרגילה כדי לפתור את בעיית המופעים החוזרים של אבני הדומינו ?

שאלה 5 (15 נקודות)

נגדיר את הבעיה הבאה :

הקלט לבעיה : תוכנית Q .

השאלה : האם התוכנית Q מחשבת את הפונקציה $f(x) = x^2$?

הוכח שהבעיה אינה ניתנת להכרעה.

שאלה 6 (10 נקודות)

בנה את האוטומטים הבאים :

א. אוטומט סופי דטרמיניסטי, שמקבל את כל המלים מעל $\Sigma = \{0,1\}$, שהן ייצוג בינרי של

מספרים המתחלקים ב-4 ללא שארית.

ב. אוטומט סופי דטרמיניסטי, שמקבל את כל המילים מעל $\Sigma = \{a,b\}$, שהאות a מופיעה בהן

לפחות פעמיים והאות b מופיעה בהן מספר אי-זוגי של פעמים.

בכל אחד מהסעיפים – נסה לבנות אוטומט בעל מספר מצבים מינימלי.

שאלה 7 (15 נקודות)

בנה מכונת טיורינג בעלת שני סרטים, המקבלת שני מספרים אונריים (גדולים מאפס) x ו- y

ובודקת אם x מתחלק ב- y ללא שארית.

(הגדרה של מכונת טיורינג בעלת שני סרטים מופיעה בבחינה לדוגמה מס' 6.)

המספר הראשון נתון על גבי הסרט הראשון והמספר השני נתון על גבי הסרט השני.

הראש הקורא-כותב של כל סרט ממוקם בהתחלה מול הסימן # שמשמאל למספר.

הערה : מותר להשתמש בגרסה של מכונת טיורינג, שבה הראש הקורא-כותב של הסרט הראשון

יכול גם להישאר במקום. כלומר, אפשר להשתמש במעבר : $(q, \sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (q', \sigma'_1, \sigma'_2, S, L/R)$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20290 - אלגוריתמיקה - יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 10-12

מספר השאלות: 6 משקל המטלה: 7 נקודות

סמסטר: 2004 מועד אחרון להגשה: 11.6.2004

אנא שים לב:

מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20 נקודות)

בפרק 10 במדריך הלמידה (עמ' 138) מתואר אלגוריתם מקבילי, הפותר בזמן פולינומיאלי את בעיית הספיקות בתחשיב הפסוקים. האלגוריתם מורכב משני שלבים: בשלב הראשון כל אחד מהמעבדים מחשב את ערך האמת של הפסוק עבור השמה מסוימת. בשלב השני צריך לבדוק אם לפחות מעבד אחד מצא השמה מספקת. אם כן – הפסוק ספיק; אחרת – הפסוק אינו ספיק.

א. נסמן ב- n את מספר הפסוקים האטומיים בפסוק הקלט.

בכמה מעבדים האלגוריתם משתמש? כמה זמן יידרש לביצוע השלב הראשון באלגוריתם?
ב. הסבר כיצד ניתן לבצע את השלב השני באלגוריתם בזמן פולינומיאלי. הנח שאין שיתוף בכתיבה. כלומר, לא קיים משתנה ששני מעבדים או יותר יכולים לשנות את ערכו.

שאלה 2 (20 נקודות)

נדון בפתרון לבעיית הקטע הקריטי עבור שני מעבדים.

הפתרון מבוסס על שימוש בשני משתנים מבוזרים X_1 ו- X_2 .

להלן הפרוטוקול עבור P_1 (הפרוטוקול עבור P_2 הוא סימטרי – יש להחליף בין X_1 ו- X_2):

(1) בצע פעולות פרטיות עד שתוצאה להיכנס לקטע הקריטי;

(2) חכה עד אשר X_2 הופך ל- \perp ;

(3) $X_1 \leftarrow \perp$;

(4) בצע את הקטע הקריטי;

(5) $X_1 \leftarrow \perp$;

(6) חזור לשורה (1);

א. מהו ההבדל בין פתרון זה לפתרון המופיע בספר?

ב. האם הפתרון נכון? הסבר את תשובתך.

ג. האם הפתרון יהיה נכון אם נחליף בין שורות (2) ו- (3) בפרוטוקול? הסבר את תשובתך.

שאלה 3 (10 נקודות)

יהא A אלגוריתם, שמקבל זוג מספרים ומחזיר "כן" אם שני המספרים הנבדקים הם ראשוניים. בדיקת הראשוניות של כל אחד מהמספרים מתבצעת באמצעות קריאה לאלגוריתם ההסתברותי לבדיקת ראשוניות המתואר בספר. כמה עדים מאשרים צריך האלגוריתם ההסתברותי לבדוק (עבור כל אחד מהמספרים), כדי שהסיכוי שאלגוריתם A יחזיר תשובה שגויה יהיה קטן מ- $1/10$? הוכח את תשובתך.

שאלה 4 (20 נקודות)

א. הסבר איך ממומש במערכת מפתח-ציבורי מנגנון של חתימה אלקטרונית.
ב. מהן כל הדרישות ממנגנון של חתימה אלקטרונית ?
האם דרישות אלה מתמלאות במערכת מפתח-ציבורי ?
נמק את תשובתך, תוך התייחסות לכל אחת מהדרישות שצינת.

שאלה 5 (20 נקודות)

איה ובוועז מדברים בטלפון. במהלך השיחה מתעורר ביניהם ויכוח והם מחליטים ליישב אותו באמצעות הטלת מטבע. נדון בפרוטוקול הבא להטלת מטבע דרך הטלפון:
(1) איה עושה אחד משני הדברים הבאים:

- בוחרת שני מספרים ראשוניים בני 150 ספרות כל אחד ושולחת את מכפלתם לבועז.
 - בוחרת שלושה מספרים ראשוניים בני 100 ספרות כל אחד ושולחת את מכפלתם לבועז.
- (2) בועז צריך להחליט אם למספר שהוא קיבל (מספר בן 300 ספרות) יש שני גורמים ראשוניים או שלושה גורמים ראשוניים, ולמסור את החלטתו לאיה.
- (3) איה שולחת לבועז את הפירוק לגורמים של המספר, בכדי שבוועז יוכל להיווכח אם הוא צדק או לא. בועז מכפיל את המספרים שאיה שלחה לו, ומוודא שהמכפלה שווה למספר שנשלח אליו בשלב (1).

(4) אם בועז צדק, תוצאת ההטלה תהיה "עץ"; אחרת - התוצאה תהיה "פלי".

- א. הסבר כיצד איה יכולה לרמות את בועז.
- ב. הצע דרך לתקן את הפרוטוקול, כך שהוא יהיה בטוח (כלומר, לאחר התיקון איה לא תוכל לרמות).
- ג. על איזו הנחה (סמויה) מבוסס הפרוטוקול?

שאלה 6 (10 נקודות)

חוה דעתך על המשפט הבא:

"Saying that computers don't really know how to play chess is like saying that airplanes don't really fly, because they don't flap their wings."