

הסבר כללי על הכלה והפרדה

אחד הניסוחים של עקרון ההכלה וההפרדה הוא:

אם נתונה קבוצה סופית U , וקבוצות $A_i \subseteq U$ ($i = 1, \dots, k$) אז

$$|U - \bigcup_{i=1}^k A_i| = |U| - \sum_i |A_i| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i < j < m} |A_i \cap A_j \cap A_m| + \dots + (-1)^k |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k|$$

במילים: עוצמת U ,

פחות סכום עוצמות כל הקבוצות A_i ,

ועוד סכום עוצמות כל החיתוכים של זוגות של קבוצות A_i ,

פחות סכום עוצמות כל החיתוכים המשולשים של קבוצות A_i ,

וכו' בסימנים מתחלפים ... עד לעוצמת חיתוך כל הקבוצות A_i .

הסיכום רק על $i < j$ בנוסחה הוא פשוט דרך להביא לכך ש-

* נספור רק חיתוכים בהם $i \neq j$,

* ועבור $i \neq j$ לא נספור פעמיים כל חיתוך, כלומר נקח רק אחד מבין החיתוכים

$$A_j \cap A_i, A_i \cap A_j.$$

בדומה עבור חיתוכים משולשים והלאה.

אם לכל הקבוצות A_i אותו גודל, נוכל במקום $\sum_i |A_i|$ לרשום $k |A_1|$.

אם לכל החיתוכים בזוגות אותו גודל, נוכל במקום $\sum_{i < j} |A_i \cap A_j|$ לרשום $\binom{k}{2} |A_1 \cap A_2|$.

בדומה עבור חיתוכים משולשים, אם יש להם אותו גודל, וכן הלאה.

דוגמא לשימוש בהכלה והפרדה

הוכח כי מספר הפונקציות של קבוצה A בת n איברים על קבוצה B בת k איברים הוא:

$$k^n - k(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \binom{k}{3}(k-3)^n + \dots = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

פתרון (מקרה פרטי של חישוב זה מופיע בשאלה 4.14 בעמ' 89 בספר הלימוד).

שלב א: הקבוצה שבתוכה נעבוד

תהי U קבוצת כל הפונקציות של A ל- B . לפי שאלה 1.32 עמ' 17 בספר הלימוד, $|U| = k^n$.

שלב ב: הגדרת קבוצות חלקיות מתאימות

ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) נניח כי $B = \{1, 2, \dots, k\}$.

עבור $i = 1, \dots, k$, תהי F_i קבוצת כל הפונקציות של A ל- B אשר המספר i אינו נמצא בתמונתן. הסיבה לבחירה זו היא שאת המספר שאנו נדרשים למצוא בשאלה ניתן להביע כ-

$$|U - \bigcup_{i=1}^k F_i|, \text{ וביטוי כזה ניתן לחישוב בעזרת הכלה והפרדה.}$$

יש k קבוצות F_i .

לכל i , שוב לפי שאלה 1.32, $|F_i| = (k-1)^n$.

שלב ג: חיתוכים בזוגות

עבור $i \neq j$, $F_i \cap F_j$ היא קבוצת הפונקציות של A ל- B אשר i ו- j אינם נמצאים בתמונתן.

יש $\binom{k}{2}$ חיתוכים כאלה של זוגות של קבוצות.

מאותה סיבה כמו בסעיף הקודם, $|F_i \cap F_j| = (k-2)^n$.

שלב ד: חיתוכים כלליים

כללית, עלינו להתבונן בחיתוכים של j קבוצות F_i שונות.

יש $\binom{k}{j}$ חיתוכים כאלה, כלומר $\binom{k}{j}$ דרכים לבחור j קבוצות F_i שונות.

חיתוך כל j קבוצות שונות כאלו מכיל $(k-j)^n$ פונקציות.

שלב ה: יישום הנוסחה

לפי עקרון ההכלה וההפרדה, בעזרת הנתונים שחישבנו בשלבים הקודמים, מספר הפונקציות של A על B הוא:

$$\begin{aligned} & |U - \bigcup_{i=1}^k F_i| \\ &= |U| - \sum_{i=1}^k |F_i| + \sum_{i < j} |F_i \cap F_j| - \sum_{i < j < m} |F_i \cap F_j \cap F_m| + \dots + (-1)^k |F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_k| \\ &= k^n - k(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \binom{k}{3}(k-3)^n + \dots = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n \end{aligned}$$