תשובה 1

צונזר.

תשובה 2

א. ב"אוסף תרגילים פתורים" קבוצה 3 שאלה 10ה', מראים כי קבוצת **הסדרות הסופיות** של טבעיים היא בת-מניה. בשאלה שלפנינו עוסקים לא בסדרות אלא בתת-קבוצות של **N**. נתאים לכל קבוצה סופית של מספרים טבעיים - סדרה סופית: פשוט נסדר את אברי הקבוצה בסדר עולה. בכך הגדרנו פונקציה של הקבוצה K שבשאלה אל קבוצת הסדרות הסופיות של טבעיים. פונקציה זו אינה על (מדוע?) אך מובן שהיא חד-חד-ערכית. לפיכך $|K| \le \aleph_0$.

מצד שני, K היא אינסופית, מכיון שהיא מכילה את כל הקבוצות מהצורה $\{n\}$, לכל n טבעי.

מכאן לפי משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין $|K| = \aleph_0$ (למעשה אין כאן צורך במשפט הנ"ל, שהוא בגדר "תותח כבד". ניתן להראות בלעדיו, שקבוצה אינסופית המוכלת בקבוצה בת-מניה היא בת מניה).

ב. הפונקציה $g : L \to K$ המתאימה לכל קבוצה את המשלים שלה ב- $\mathbf{N}$ היא חח"ע ועל.

לפיכך $|L| = |K|$, ולפי סעיף א' גודל זה הוא $\aleph_0$.

ג. נשים לב שהקבוצות K,L,M זרות זו לזו, ו- $K \cup L \cup M = P(\mathbf{N})$.

כעת, אילו M היתה בת-מניה, היינו מקבלים ש- $P(\mathbf{N})$ היא איחוד של 3 קבוצות זרות בנות-מניה. ע"י שימוש חוזר בשאלה 4.3ד בעמ' 119 בספר (איחוד שתי קבוצות זרות בנות-מניה הוא בר-מניה) היינו מקבלים כי $P(\mathbf{N})$ היא בת-מניה - בסתירה למשפט 5.25 , וכן בסתירה למשפט 5.6 (משפט קנטור).

לכן M אינה בת-מניה.

ד. לפי סעיפים א, ב יחד עם שאלה 4.3ד בעמ' 119 בספר, $K \cup L$ היא בת-מניה.

ממשפט 5.6 (משפט קנטור), $P(\mathbf{N})$ אינה בת-מניה.

משני אלה יחד , בעזרת משפט 5.13ב , נקבל $|P(\mathbf{N}) - (K \cup L)| = |P(\mathbf{N})|$.

אבל $K \cup L \cup M = P(\mathbf{N})$ וזהו איחוד זר, לכן $P(\mathbf{N}) - (K \cup L) = M$.

קיבלנו: $|M| = |P(\mathbf{N})| = C$.

תשובה 3

א. שתי חלוקות אפשריות המקיימות זאת מתוארות בחוברת "אוסף תרגילים פתורים", קבוצה 1, בתשובה לשאלה 4 ה'. יש כמובן דרכים רבות נוספות.

ב. העובדה $|\mathbf{N}\times\mathbf{N}|=|\mathbf{N}|$ פירושה שקיימת $f:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ חד-חד-ערכית ועל.

לכל $n\in\mathbf{N}$, נסמן $A_n=\mathbf{N}\times\{n\}\subset\mathbf{N}\times\mathbf{N}$.

אוסף הקבוצות A_n הוא כמובן חלוקה של $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ ל- $\aleph_0$ מחלקות זרות שכולן אינסופיות.

תהי $K_n\subset\mathbf{N}$ תמונת הקבוצה A_n תחת f האמורה למעלה.

קל לראות שאוסף הקבוצות K_n מהווה חלוקה של $\mathbf{N}$ המקיימת את הנדרש:

כל $n\in\mathbf{N}$ נמצא לפחות באחת הקבוצות K_n: מכיון ש- f היא **על** $\mathbf{N}$, קיים ב- $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ מקור ל- n תחת f, ומכיוון ש- $\{A_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ היא חלוקה של $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, מקור זה שייך לאחת הקבוצות A_i.

לכן n הוא תמונה של איבר ב- A_i כלשהי, כלומר שייך לקבוצה K_i המתאימה.

אם $n\neq m$ אז $K_n\cap K_m=\varnothing$: נניח בשלילה $j\in K_n\cap K_m$. אז $j=f(x)$ וגם $j=f(y)$ כאשר x,y במחלקות שונות ב- $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$. מכיון שהמחלקות ב- $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ זרות, נובע ש- x,y שונים זה מזה, וזו סתירה לחד-חד-ערכיות f. לכן לא קיים j כזה, כלומר $K_n\cap K_m=\varnothing$.

אגב, הוכחה זו היא דוגמא לטענה כללית הרבה יותר. באופן מאד לא פורמלי: אם קבוצות A,B הן שוות-עוצמה, אז ניתן "להעתיק כל מה שמוגדר מעל A" (למשל: מבנה אלגברי כלשהו, חלוקה, יחס כלשהו שהגדרנו מעל A) ל- B, והתוצאה היא "העתק נאמן למקור" של מה שנעשה ב- A. ניסוח מדויק של טענה זו שייך לתחום הלוגיקה המתימטית.

תשובה 4

א. תהיינה A_1,A_2, B_1,B_2 קבוצות שעוצמותיהן בהתאמה k_1,k_2, m_1,m_2.

נתון $k_1\le k_2$, $m_1\le m_2$.

כדי לקצר מעט את ההוכחה ניעזר בטריק השימושי הבא: אנו חופשים לבחור כראות עינינו את הקבוצות המייצגות את העוצמות השונות, כל עוד הקבוצות שנבחר הן בעלות העוצמות הנדרשות.

מתוך הנתון, לפי שאלה 5.1א בחוברת "פרק 5", קיימת קבוצה חלקית של A_2 שעוצמתה שווה לעוצמת A_1, וקיימת קבוצה חלקית של B_2 שעוצמתה שווה לעוצמת B_1.

לכן **ב.ה.כ. נניח** $A_1\subseteq A_2$, $B_1\subseteq B_2$ (!)

כעת מהגדרת כפל עוצמות $k_1\cdot m_1=|A_1\times B_1|$, $k_2\cdot m_2=|A_2\times B_2|$.

אבל מכיוון ש- $A_1\subseteq A_2$, $B_1\subseteq B_2$, מהגדרת מכפלה קרטזית נקבל $A_1\times B_1\subseteq A_2\times B_2$.

לכן , בהסתמך על שאלה 5.1ב, $k_1 \cdot m_1 \le k_2 \cdot m_2$.

ב. מצד אחד, $\aleph_0 \le C$ ולכן בעזרת סעיף א, $\aleph_0 \cdot C \le C \cdot C = C$.

מצד שני $1 \le \aleph_0$ ולכן בדומה $C = 1 \cdot C \le \aleph_0 \cdot C$.

משני הכיוונים יחד, בעזרת קנטור-שרדר-ברנשטיין, נובע המבוקש.

ג. לפי משפט 5.26, $2^{\aleph_0} = C$. נציב זאת ונקבל

$$C^C = (2^{\aleph_0})^C = 2^{\aleph_0 \cdot C} = 2^C .$$

במעברים נעזרנו במשפט 5.27ג ובסעיף ב של שאלה זו.

איתי הראבן