מספר התלמיד הנבחן
רשום את כל תשע הספרות

האוניברסיטה הפתוחה

א' באדר א' תשע"ט

מס' שאלון - 468

6

בפברואר 2019

סמסטר 2019א

מס' מועד 85

20417 / 4

שאלון בחינת גמר

20417 - אלגוריתמים

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה **6** עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה חמש שאלות.

מתוכן יש לענות על ארבע שאלות.

25 נקודות לכל שאלה.

לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).

על שאלות שמסומנות בכוכב - יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה) ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות.

לשאלון זה מצורפים דפי עזר.

חומר עזר:
כל חומר עזר אסור בשימוש.

בהצלחה !!!

החזירו
למשגיח את השאלון
וכל עזר אחר שקיבלתם בתוך מחברת התשובות

שאלון 468

85.26.4 M1

אלגוריתמים 2019א – מועד ראשון

הנחיות: ענו על 4 מתוך 5 שאלות. לכל שאלה 25 נקודות. לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה.
על שאלות שמסומנות בכוכב - יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה), ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).
חומר עזר: אסור. דף נוסחאות מצ״ב. בהצלחה!

שאלה 1 – הרצת FFT (25 נק׳).

נביט בפולינום $p(x)=4x^3+3x^2+2x+1$. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) במסגרת הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום. בדקו את תשובתכם ע״י הצבה ישירה של הערכים המתאימים בפולינום.

***שאלה 2* – עץ פורש מזערי (עפ״מ) עם דרגה מזערית לקדקוד נבחר** (25 נק׳).

נתון גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$ עם משקל שלם $w(e)>0$ לכל צלע $e\in E$. נתון גם קדקוד נבחר $u\in V$. הציגו אלגוריתם למציאת עפ״מ ב-G כך שדרגתו של u בעץ תהיה מזערית. כלומר, הפלט T של האלגוריתם הינו עפ״מ, ולכל עפ״מ אחר T' מתקיים: הדרגה של u ב-T קטנה או שווה לדרגה של u ב- T'.

הגדרת האלגוריתם לכל הקשתות שמחוברות בין u לקודקוד אחר נוסיף ε
קטן ככל הניתן, נבצע Prim על הגרף ולאחר מכן נסיר מהקשתות את ε

אבחנה עיקרית בטענת נכונות לאחר הוספת ε לקשתות של u, Prim יתן העדפה
לקשתות עם ε, לכן מספר הקשתות של u יהיה מינימלי כאפשר
כלומר דרגתו תהיה מינימלית, נניח כי קיים T' עפ״מ אשר שונה מ-T עפ״מ
אם דרגתו של u ב T' קטנה מדרגתו של u ב T נובע כי Prim בחר
בלא בעיית משקל גבוה יותר, סתירה כי T עפ״מ ונכונות Prim

יעילות האלגוריתם הוספת ε לקשתות u O(1) הרצת Prim $O(|E|+|V|\log|V|)$
הסרת ε, O(1) לכן סה״כ זמן ריצה $O(|E|+|V|\log|V|)$

* הנכונות שהוספת ε לא תבצע בגרף מוכחת בספר אך הפרט אם כאן מכיוון שמשקל כל צלע טבעי $w(e)$
← אם משקל הצלעות זהה, הוספת ε בעצם תתן העדפה לכל הצלעות אשר לא מקושרות ל-u ובסוף קשת יחידה ל-u
← אם משקל הצלעות שונה הוספת ε לא תשנה כי ε<1
וכי זה צלע משקל חיובי שלם

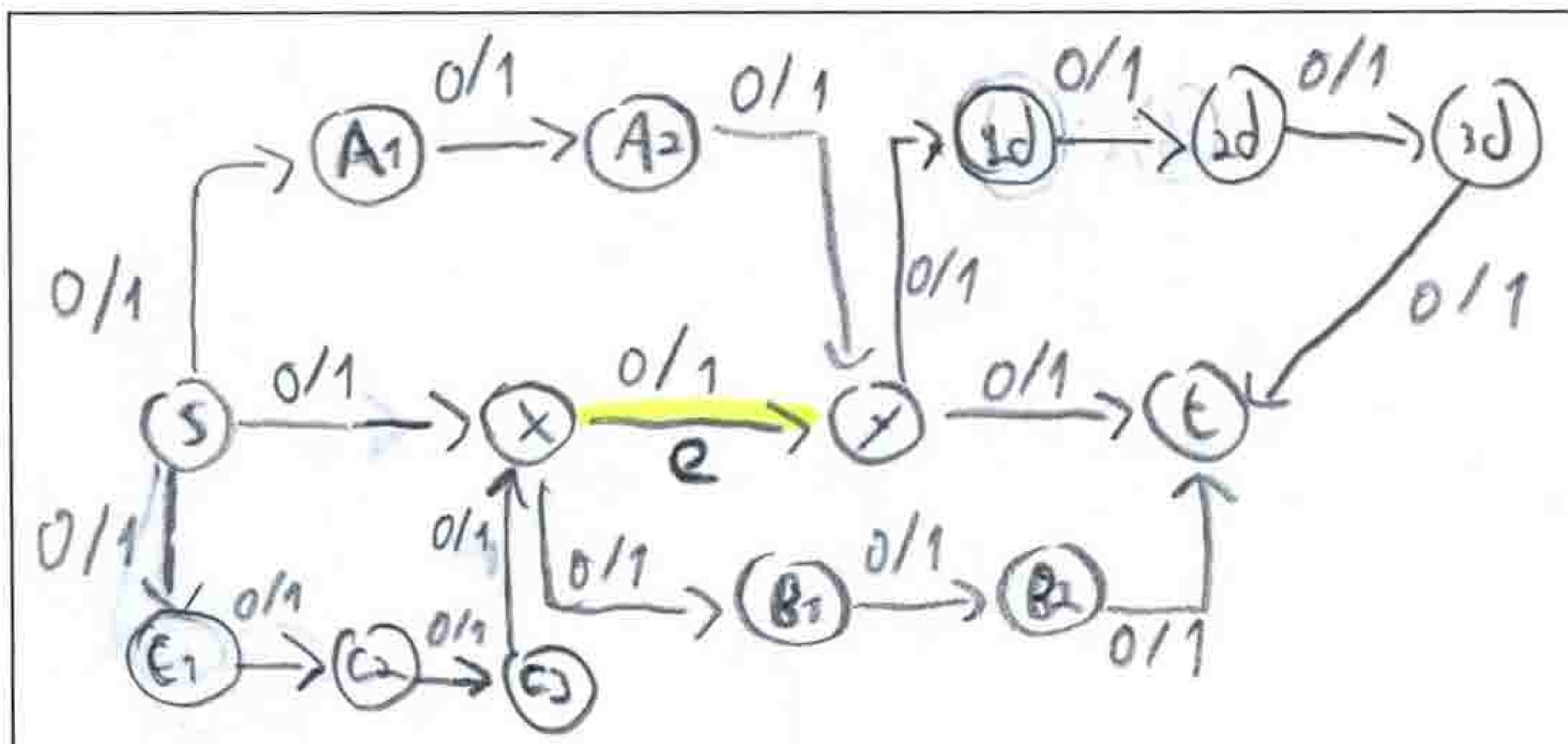
<u>שאלה 3 – מיקום סוגריים בביטויים בוליאניים</u> (25 נק').

ביטוי בוליאני ללא סוגריים, הינה סדרה של הקבועים הלוגיים T,F (המייצגים, כרגיל, את הערכים $True, False$), כך שבין כל שני קבועים, מופיע אחד מהאופרטורים הלוגיים $\wedge, \vee, \otimes$ (המייצגים כרגיל את האופרטורים, and, or, xor). אותו ביטוי בוליאני, עשוי לקבל ערך אמת שונה בהתאם למיקום הסוגריים. למשל, בביטוי $F \wedge T \otimes T$ ניתן למקם סוגריים בדיוק בשתי דרכים שונות: $(F \wedge T) \otimes T \equiv T$ בעוד ש- $F \wedge (T \otimes T) \equiv F$. הציגו אלגוריתם תכנון דינמי, שבהינתן ביטוי בוליאני ללא סוגריים, מחשב את <u>מספר הדרכים למיקום סוגריים</u> עבורן מתקבל הערך T. הניחו, לשם פשטות, שהקלט נתון במערך של הקבועים $A[1...n]$, ובמערך של האופרטורים $B[1...n-1]$. למשל הקלט $F \wedge T \otimes T$ נתון במערכים, שבהם $A[1] = F,\ A[2] = T,\ A[3] = T$ וכן $B[1] = \wedge,\ B[2] = \otimes$.

<u>*שאלה 4* – זרימה – צלעות שמוסרות פעמיים מהרשת השיורית</u> (25 נק').

הציגו דוגמא פשוטה של רשת זרימה עם צלע e, שמקיימת את שתי התכונות הבאות: (א) במהלך הרצת **Edmonds-Karp** על הרשת ישנן שתי איטרציות שונות, שבהן תוספת הזרימה דרך e זהה לקיבולת השיורית של e. (ב) הצלע e מחברת בגרף המקורי בין שני קדקודים, שמרחקם מהמקור s שונה. (לא יינתן ניקוד על דוגמא שמתאימה להרצה של **Ford-Fulkerson** אבל לא מתאימה להרצה של **Edmonds-Karp**).

<u>ציור של רשת הזרימה</u>



הסבר

הרצה ראשונה המסלול היה s-x-y-t

הרצה שניה המסלול היה s-A1-A2-y-x-B1-B2-t

הרצה שלישית המסלול היה s-c1-c2-c3-x-y-d1-d2-d3-t

תנאי (א) ותנאי (ב) מתקי"מ

***שאלה 5* – מסלולים מזעריים זוגיים/אי-זוגיים** (25 נק׳)

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, עם מקור $s \in V$ ויעד $s \neq t \in V$, ונתונות גם שתי תתי-קבוצות זרות ולא ריקות של קדקודים $A,B \subseteq V$, המקיימות $s,t \notin A$, $s,t \notin B$. הציגו אלגוריתם שמוצא מסלול מהמקור ליעד, כך שאורכו של המסלול הינו מזערי מבין כל המסלולים, שמבקרים ב-A מספר זוגי של פעמים ומבקרים ב-B מספר אי-זוגי של פעמים. בשאלה זו מותרים מסלולים לא פשוטים, כלומר מותר למסלול לעבור דרך קדקוד או אפילו צלע יותר מפעם אחת. (למשל, עבור $A=\{v_1,v_2\}$ ועבור $B=\{v_3,v_4\}$, אזי המסלול $s \to v_1 \to v_3 \to v_1 \to v_5 \to t$ מבקר ב-A בדיוק פעמיים (מס׳ זוגי) ומבקר ב-B בדיוק פעם אחת (מס׳ אי-זוגי). תזכורת: אפס הינו מספר זוגי).

הגדרת האלגוריתם ____________________

אבחנה עיקרית בטענת נכונות ____________________

יעילות האלגוריתם ____________________

שאלון 468 85.26.4 M1

ב ה צ ל ח ה !