

שאלה 1

- (10 נק') א. הצע אלגוריתם, יעיל ככל שתוכל, המקבל כקלט סדרה a_1, a_2, \dots, a_n של מספרים טבעיים ובודק האם יש בה שלושה מספרים a_i, a_j, a_k , $1 \leq i \neq j \neq k \leq n$, כך ש- $a_i \cdot a_j = a_k$ (כלומר: האם יש בסדרה שלושה מספרים, כך שמכפלת שניים מהם שווה לשלישי).
- הסבר את נכונות האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.
- (10 נק') ב. הצע אלגוריתם כמו ב-(א) שתוחלת זמן הריצה שלו קטנה ככל האפשר. נמק את טיעוניך.
- הדרכה: השתמש בגיבוב.

שאלה 2

- (10 נק') א. נתונה סדרה של n מספרים שלמים. הצע אלגוריתם המוצא וממין את i האיברים הגדולים ביותר בסדרה בסיבוכיות זמן $O(n)$ אם נתון כי $i \leq \frac{n}{\log n}$.
- (10 נק') ב. נתונה סדרה של n מספרים טבעיים בתחום $1, \dots, n^2$. הצע אלגוריתם הממין את סדרת המספרים בסיבוכיות זמן $O(n)$. נמק את טיעוניך.

שאלה 3

- ענה על הסעיפים הבאים ב - "תמיד ניתן למימוש" או "לא תמיד ניתן למימוש".
- אם השבת "תמיד ניתן למימוש" - תן אלגוריתם.
- אם השבת "לא תמיד ניתן למימוש" - נמק.
- (10 נק') א. ניתן להפוך עץ חיפוש בינארי לעץ אדום-שחור בסיבוכיות זמן $O(n)$.
- (10 נק') ב. ניתן לבנות עץ חיפוש בינארי בלשהו מסדרה כלשהי בסיבוכיות זמן $O(n)$.

שאלה 4

בעולם 3 מעמדות: 1. פרולטריון 2. בורגנות 3. אצולה.

נגדיר 'תור מעמדות':

בתור מעמדות עומדים אנשים מ-3 המעמדות.

אדם הרוצה להכנס לתור נכנס תמיד למקום האחרון.

ברגע שיוצא האדם הראשון מתקדם התור עפ"י המעמדות:

פרולטרנים - מקום אחד קדימה, בורגנים - 2 מקומות קדימה, אצילים - 3 מקומות קדימה. אם

מגיעים כמה אנשים לאותו מקום בתור הם יסתדרו לפי סדר המעמדות בהתאם.

דוגמא:

1	2	2	3	1	2	3	2	מעמד
a	b	c	d	e	f	g	h	איש
1	2	3	4	5	6	7	8	מקום בתור

a יוצא מהתור וסידור הביניים המתקבל הוא:

								g(3)
								f(2)
								d(3)
								c(2)
								b(2)
								e(1)
								h(2)
								איש ומעמדו
								מקום

(בסוגריים רשום המעמד של כל איש).

לאחר שהאנשים שהגיעו לאותו המקום בתור יסתדרו לפי סדר המעמדות

בהתאם הסידור החדש הסופי יהיה:

b	d	c	g	f	e	h
---	---	---	---	---	---	---

5 נק') א. האם ייתכן ששני אנשים מאותו המעמד מגיעים לאותו המקום? אם כן, הצע מדיניות לטפל במקרה זה.

15 נק') ב. הצע מבנה נתונים למימוש תור מעמדות שניתן לבצע עליו את הפעולות הבאות בסיבוכיות המבוקשת. תאר תחילה את מבנה הנתונים ואח"כ בקצרה את אופן מימוש הפעולות.

1. $insert(q, x, m)$ - הכנס לתור q את x שמעמדו m . $O(1)$.

2. $enqueue(q)$ - הוצא מ-q את האיבר הראשון בתור (וקדם את התור בהתאם)

$O(n)$ (n - מס' האנשים בתור).

3. $promote(p, i)$ - מעביר את האיש שאליו מצביע p i מקומות קדימה (או

אחורה אם i שלילי). $O(i)$.

4. $rebellion(q)$ - בתור q יש מרד: הפרולטריון הופך לאצולה והאצולה

לפרולטריון. $O(1)$.

שאלה 5

הצע מבנה נתונים שבאמצעותו ניתן לממש כל אחת מהפקודות הבאות בסיבוכיות המבוקשת.
(n = מספר האברים ב- S)

פקודה	סיבוכיות	משמעות
BUILD (S)	$O(n)$	אתחל את מבנה הנתונים מרשימה של n מספרים.
INSERT (x, S)	$O(\log n)$	הכנס את x ל- S ;
DELETE (x, S)	$O(\log n)$	הוצא את x מ- S ;
MAX10 (S)	$O(1)$	החזר את הערך של האיבר העשירי בגודלו ;
MAXGAP (S)	$O(1)$	החזר את הערכים של שני אברים x ו- y עבורם $ x - y $ מקסימלי ;

שאלה 6

בהינתן שתי סדרות של מספרים טבעיים $\langle w_1, \dots, w_n \rangle$ ו- $\langle c_1, \dots, c_n \rangle$ ושני מספרים טבעיים S, T , מעוניינים לפתור את הבעיה הבאה: יש למצוא שתי סדרות של מספרים:

$$0 \leq s_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$0 \leq t_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

כך שמתקיים $\sum_{i=1}^n s_i w_i \leq S$, $\sum_{i=1}^n t_i w_i \leq T$ ואילו $\sum_{i=1}^n c_i (s_i + t_i)$ גדול ככל האפשר.

(10 נק') א. הצע אלגוריתם, יעיל ככל שתוכל, הפותר בעיה זו באופן אופטימלי.

הסבר את נכונות האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

(10 נק') ב. אם יש הגבלה ש- s_i חייבים להיות שלמים (כלומר $s_i \in \{0,1\}$) הצע אלגוריתם דינמי

לבעיה שסיבוכיותו $O(nS)$. נמק את טיעוניך.

סוף!