תשובה 1

א. נבדוק כיצד בנויה סדרה באורך n המקיימת את הנדרש.

נתבונן באיבר האחרון של הסדרה:

* אם הוא אי-זוגי (4 אפשרויות), אז קטע הסדרה הקודם לו הוא **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-1$ (a_{n-1} אפשרויות).
* אם הוא זוגי (4 אפשרויות) אז לפניו בא מספר אי-זוגי (4 אפשרויות), ולפניו **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-2$ (a_{n-2} אפשרויות).

קיבלנו: $a_n = 4a_{n-1} + 16a_{n-2}$.

תנאי התחלה:

$a_0 = 1$ (הסדרה הריקה מקיימת את התנאים! נוח להיעזר ב- a_0 לסעיף ב),

$a_1 = 8$,

$a_2 = 8^2 - 4^2 = 48$ (כל הזוגות פחות זוגות של מספרים זוגיים),

לבדיקה, מיחס הנסיגה: $a_2 = 4a_1 + 16a_0 = 4\cdot 8 + 16 = 48$.

ב. המשוואה האפיינית: $\lambda^2 - 4\lambda - 16 = 0$. פתרונותיה: $2 \pm 2\sqrt{5}$.

לפיכך $a_n = A\cdot(2+2\sqrt{5})^n + B\cdot(2-2\sqrt{5})^n$.

בהצבת תנאי ההתחלה נקבל לאחר קצת סידור: $A+B=1$, $(A+B)+\sqrt{5}(A-B)=4$.

נציב את המשוואה הראשונה בשנייה: $(A-B) = 3/\sqrt{5} = 3\sqrt{5}/5$.

נחבר ונחסר משוואה זו מהמשוואה $A+B=1$ ונקבל:

$$A = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \quad , \quad B = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}.$$

כלומר

$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\cdot(2+2\sqrt{5})^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\cdot(2-2\sqrt{5})^n$$

אם רוצים, אפשר לרשום זאת גם כך:

$$a_n = \left((1+\frac{3}{\sqrt{5}})\cdot(1+\sqrt{5})^n + (1-\frac{3}{\sqrt{5}})\cdot(1-\sqrt{5})^n \right)\cdot 2^{n-1}$$

רצוי מאד להציב ולבדוק ערכים אחדים של n !

נציג עוד דרך לפתרון הבעיה. השיטה הבאה מועילה במקרה שאיננו מצליחים לגלות יחס נסיגה עבור הסדרה הנתונה, אך ניתן למצוא מערכת יחסי נסיגה משולבים:

נסמן ב- b_n את מספר הסדרות באורך n המקיימות את התנאי שבשאלה ומסתיימות במספר זוגי. נסמן ב- c_n את מספר הסדרות באורך n המקיימות את התנאי שבשאלה ומסתיימות במספר אי-זוגי. מתנאי הבעיה נקבל את מערכת יחסי הנסיגה המשולבים:

(*i*) $a_n = b_n + c_n$

(*ii*) $b_{n+1} = 4c_n$

(*iii*) $c_{n+1} = 4c_n + 4b_n$

אם נרשום את משוואה (*ii*) בצורה $b_n = 4c_{n-1}$, נוכל להציב אותה במשוואה (*iii*). נקבל:

$$(*) \quad c_{n+1} = 4c_n + 4 \cdot 4c_{n-1}$$

זהו יחס נסיגה ליניארי עבור c_n. המשוואה האפיינית שלו: $\lambda^2 - 4\lambda - 16 = 0$

פותרים את המשוואה האפיינית כמו קודם, ומכאן בעזרת תנאי ההתחלה מוצאים את הביטוי עבור c_n. **יש לשים לב שערכי ההתחלה כעת הם אלה של** c , **לא אלה של** a !

אחרי שמצאנו ביטוי מפורש עבור c_n, נציב אותו במשוואה (*ii*) ונקבל ביטוי מפורש עבור b_n .

נציב את שני הביטויים במשוואה (*i*) ונקבל את הפתרון עבור a_n .

תרגיל מומלץ: לבצע את התהליך הזה ולהשוות עם התוצאה שקיבלנו בדרך הקודמת.

ראו גם החוברת אוסף תרגילים פתורים, קבוצה 6 שאלה 1.

הערה: המשוואה שקיבלנו עבור c_n היא אותה המשוואה שקיבלנו בדרך הקודמת עבור a_n.

זה בפירוש לא חייב לקרות: למרות שקיים קשר בין המשוואות שנקבל בתיאורים רקורסיביים שונים של בעיה, **המשוואות בהחלט לא חייבות להיות זהות!**

מי שלמד אלגברה ליניארית מוזמן לחשוב על הנושא בהקשר של צירופים ליניאריים במרחב הסדרות. למי שלמד או ילמד משוואות דיפרנציאליות - הנושא דומה מאד לתיאור מרחב הפתרונות של מערכת משוואות דיפרנציאליות ליניאריות.

הנה דוגמא פשוטה (אין קשר לשאלה שלנו) שבה נקבל משוואות שונות לגמרי:

$a_n = 2^n + 3^n \qquad b_n = 5^n + 7^n \qquad c_n = 2^n - 5^n \qquad d_n = 3^n - 7^n$

אז $a_n = b_n + c_n + d_n$ אבל אין כל קשר בין המשוואה האפיינית של a_n לבין זו של b_n .

(הסיבה לשוני היא שהמשוואה עבור a_n **אינה שקולה למערכת המשוואות** עבור שלושת האחרים + התנאי $a_n = b_n + c_n + d_n$. לכן "מרחבי הפתרונות" שונים).

תשובה 2

א. $g(x) = \frac{f(x)}{1-x} = f(x)\cdot(1+x+x^2+\ldots) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i)\cdot(\sum_{i=0}^{\infty} 1\cdot x^i)$.

לפי נוסחה (ii) שבסוף הממ"ן (כפל פונקציות יוצרות), המקדם של x^n בפיתוח $g(x)$ הוא:

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 1 = a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

ב. $f(x) = g(x)\cdot(1-x)$. לפיכך $a_n = b_n - b_{n-1}$ $(n \ge 1)$, ו- $a_0 = b_0$.

יכולנו לקבל תוצאה זו גם מתוך התשובה לסעיף א:

$$b_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n \quad , \quad b_{n-1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$$

ולכן $b_n - b_{n-1} = a_n$ $(n \ge 1)$.

תשובה 3

נפתור בשלבים:

א. הזהות הנתונה: $\left(\frac{1}{1+x}\right)^n \cdot (1+x)^{2n} = (1+x)^n$

הזהות המבוקשת: $\sum_{i=0}^{k} (-1)^i D(n,i) \binom{2n}{k-i} = \binom{n}{k}$

אם נפתח את שני אגפי הזהות הנתונה, נקבל שני טורים. עקב השוויון בין שני אגפי הזהות הנתונה, לכל k טבעי, המקדם של x^k בפיתוח אגף ימין צריך להיות שווה למקדם של x^k בפיתוח אגף שמאל. נקרא למקדם זה c_k.

ב. פיתוח אגף ימין בזהות הנתונה:

מנוסחת הבינום: $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$ (ר' תחילת פתרון השאלה הקודמת).

כלומר: $c_k = \binom{n}{k}$.

ג. אגף שמאל בזהות הנתונה הוא מכפלה של שני גורמים. הראשון הוא $\frac{1}{(1+x)^n}$.

נוסחה (iii) שבסוף הממ"ן אומרת: $\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} D(n,i) x^i$

בהצבת $(-x)$ במקום x נקבל

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i D(n,i)x^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

כאשר $a_i = (-1)^i D(n,i)$.

ד. הגורם השני אותו אנו רוצים לפתח הוא $(1+x)^{2n}$.

בהצבת $2n$ במקום n בנוסחת הבינום נקבל:

$$(1+x)^{2n} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{2n}{i}x^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

כאשר $b_i = \binom{2n}{i}$.

ה. אנו מעוניינים לפתח את $\left(\frac{1}{1+x}\right)^n \cdot (1+x)^{2n}$. פיתחנו כל אחד מהגורמים, וכעת ניעזר בנוסחה לפיתוח מכפלה ("קומבינטוריקה" ראש עמ' 122, ובצורה נוחה יותר – בדף הזהויות שנשלח). כללית, המקדם של x^k במכפלה הוא $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$. נציב ונקבל:

$$c_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i D(n,i)\binom{2n}{k-i}$$

בכך הוכח השוויון המבוקש.

בדיקה עבור המקרה הפרטי הנדרש: אנא השלימו עצמאית.

תשובה 4

א. מספר הדרכים לחלק את המחשבים הוא כמספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = n$, בכפוף לתנאי $x_i \le 24$, $(i = 1,2,3)$.

הפונקציה היוצרת: $f(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{24})^3 = \left(\frac{1-x^{25}}{1-x}\right)^3$

ב. זהו המקדם של x^{70} בפונקציה הנ"ל. נמשיך לפתח את הפונקציה:

$$\left(\frac{1-x^{25}}{1-x}\right)^3 = (1-x^{25})^3 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} = (1 - 3\cdot x^{25} + 3\cdot x^{50} - x^{75})\cdot \sum_{i=0}^{\infty} D(3,i)$$

במעבר האחרון, נעזרנו בנוסחת הבינום עבור הגורם השמאלי, ובנוסחה *(iii)* מהממ"ן עבור הגורם הימני.

כאמור, אנו רוצים את המקדם של x^{70}, לכן נוכל להתעלם ממחוברים בעלי חזקה גדולה יותר.
המקדם המבוקש הוא:

$$1\cdot D(3,70)-3\cdot D(3,45)+3\cdot D(3,20) \;=\; \binom{72}{2}-3\cdot\binom{47}{2}+3\cdot\binom{22}{2} \;=\; 2{,}556-3{,}243+693 \;=\; 6$$

תוצאה קצת מפתיעה!

נבדוק מדוע המספר כה קטן: כנראה זה אומר שמספר המחשבים בכל רכב אינו יכול להיות קטן בהרבה מ- 24. ואמנם, אם ברכב כלשהו יש 21 מחשבים או פחות, אז בשני כלי הרכב האחרים יחד יש $70-21=49$ מחשבים או יותר, ולכן (שובך יונים) באחד מאותם שני כלי רכב יש יותר מ- 24 מחשבים, בסתירה לדרישה. לכן כדי להעמיס את 70 המחשבים, בכל רכב צריכים לשים **לפחות** 22 מחשבים.
משמע מספר המחשבים בכל רכב יכול לקבל אחד משלושה ערכים בלבד: 22, 23 או 24.
כעת קל לבדוק ישירות שיש רק שתי דרכים להציג את 70 כסכום של 3 מספרים מתוך הנ"ל, תוך התעלמות מסדר המחוברים: $24+23+23$ או $24+24+22$. עם התחשבות בסדר המחוברים, נקבל 6 אפשרויות.

אפשר גם לומר כך:
נתבונן במשוואה $x_1+x_2+x_3=70$, בכפוף לתנאים שמצאנו: $22\le x_i\le 24$, $(i=1,2,3)$.
לכל i, נציב $x_i=y_i+22$. נקבל שאנו מחפשים את מספר הפתרונות של
$y_1+y_2+y_3=4$, בכפוף לתנאים $0\le y_i\le 2$, $(i=1,2,3)$.
שוב בבדיקה ישירה, הפתרונות ללא חשיבות לסדר הם: $0+2+2$ או $1+1+2$.
כל אחד משני הפתרונות הללו נותן 3 פתרונות אם נייחס חשיבות לסדר. מכאן התוצאה 6.

אגב, יש עוד דרכים לפתור את השאלה הזו!

איתי הראבן