# מטלת מחשב (ממ"ח) 01

**הקורס:** **20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב**

**חומר הלימוד למטלה:** פרקים 1 ו- 2

קומבינטוריקה; חישובי הסתברויות קומבינטוריים

**מספר השאלות:** 20 **משקל המטלה:** 3 נקודות

**סמסטר:** 2015 א **מועד אחרון להגשה:** 16.11.2014

**שלחו את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת שאילתא בכתובת www.openu.ac.il/sheilta**

**שאלות 1-4 מתייחסות לבעיה הבאה:**

נתון לוח משבצות בגודל $7\times7$ .

מפזרים באקראי על הלוח 29 דסקיות זהות, כך שבכל משבצת יש לכל היותר דסקית אחת.

**<u>שאלה 1</u>**

כמה אפשרויות פיזור שונות קיימות?

א. $2^{29}$ ב. $\frac{49!}{20!}$ ג. $\frac{49!}{29!}$ ד. $\binom{49}{29}$

**<u>שאלה 2</u>**

בכמה מאפשרויות הפיזור השונות תהיינה בדיוק שתי שורות ריקות?

א. $\binom{7}{2}\cdot 7^5\cdot\binom{30}{24}$ ב. $\binom{7}{2}\binom{35}{29}$ ג. $\binom{7}{2}\binom{35}{29}\Big/5!$ ד. $\binom{7}{2}\binom{29}{5}\binom{30}{24}$

**<u>שאלה 3</u>**

מהי ההסתברות שהשורה הראשונה **לא** תהיה ריקה מדסקיות?

א. $\frac{29\cdot\binom{48}{28}}{\binom{49}{29}}$ ב. $1-\frac{28!}{29!}$ ג. $\frac{7\cdot\binom{48}{28}}{\binom{49}{29}}$ ד. $1-\frac{\binom{42}{29}}{\binom{49}{29}}$

**<u>שאלה 4</u>**

מהי ההסתברות שתיווצר על הלוח לפחות שורה אחת מלאה בדסקיות?

א. 0.1248 ב. 0.0775 ג. 0.0589 ד. 0.1272

**שאלות 5-8 מתייחסות לבעיה הבאה:**

מחלקים באופן אקראי 7 בלונים **שונים** ל- 4 ילדים.

**<u>שאלה 5</u>**

כמה אפשרויות חלוקה קיימות?

א. $7!$ ב. $4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot4^3$ ג. $7^4$ ד. $4^7$

**<u>שאלה 6</u>**

בכמה מהחלוקות יש בדיוק שני ילדים שאינם מקבלים אף בלון?

א. 768 ב. 756 ג. 126 ד. 128

**<u>שאלה 7</u>**

בכמה מהחלוקות יש שני ילדים שמקבלים 2 בלונים, וילד אחר שמקבל את 3 הנותרים?

א. 320 ב. 5,040 ג. 2,520 ד. 210

**<u>שאלה 8</u>**

בכמה מהחלוקות כל אחד משלושה ילדים מקבל 2 בלונים, וילד רביעי מקבל בלון אחד?

א. 780 ב. 15,120 ג. 2,520 ד. 630

**שאלות 9-11 מתייחסות לבעיה הבאה:**

מחלקים באופן אקראי 20 בלונים **זהים** ל- 6 ילדים.

**<u>שאלה 9</u>**

כמה אפשרויות חלוקה קיימות?

א. $\binom{26}{20}$ ב. $\binom{25}{5}$ ג. $6^{20}$ ד. $20^6$

**<u>שאלה 10</u>**

בכמה מהחלוקות יש בדיוק שני ילדים שאינם מקבלים אף בלון?

א. 14,535 ב. 34,500 ג. 2,300 ד. 969

**<u>שאלה 11</u>**

בכמה מהחלוקות יש שלושה ילדים שכל אחד מהם מקבל 6 בלונים וילד נוסף שמקבל 2 בלונים?

א. $\binom{6}{3}\cdot 3$ ב. $\binom{20}{6}\binom{14}{6}\binom{8}{6}\binom{6}{3}\cdot 3$ ג. $\binom{20}{6}\binom{14}{6}\binom{8}{6}\cdot\frac{6!}{2!}$ ד. $\binom{6}{4}\cdot 4!$

**שאלות 12-13 מתייחסות לבעיה הבאה:**

נתונה כיתה של 20 סטודנטים: 8 מת״א, 4 מירושלים, 4 מחיפה ו- 4 מבאר-שבע.
בוחרים באקראי קבוצה של 6 סטודנטים מהכיתה.

**שאלה 12**

מהי ההסתברות שייבחרו לפחות 2 סטודנטים מבין אלו שמגיעים מירושלים או מבאר-שבע?

א. $\frac{56}{380}$ ב. $\frac{16}{380}$ ג. $\frac{85,680}{\binom{20}{6}}$ ד. $\frac{31,500}{\binom{20}{6}}$

**שאלה 13**

מהי ההסתברות שהסטודנטים הנבחרים מגיעים מ- 3 ערים שונות,
כך שמכל אחת מ- 3 הערים הללו יש בדיוק 2 סטודנטים נבחרים?

א. 0.0316 ב. 0.0780 ג. 0.0836 ד. 0.0056

**שאלות 14-15 מתייחסות לבעיה הבאה:**

לעידן 30 כדורים: 10 כחולים, 5 שחורים ו- 15 אדומים. כדורים מאותו הצבע זהים זה לזה.
עידן מחלק באקראי את הכדורים ל- 3 קבוצות **לא ריקות** וממוספרות.
(כלומר, ניתן להבחין בין הקבוצות וגודלן אינו ידוע מראש.)

**שאלה 14**

בכמה מאפשרויות החלוקה נוצרת קבוצה שיש בה בדיוק 10 כדורים: 5 שחורים ו- 5 אדומים?

א. 363 ב. 357 ג. 54 ד. 60

**שאלה 15**

בכמה מאפשרויות החלוקה יש בכל אחת מהקבוצות לפחות 3 כדורים אדומים?

א. 38,808 ב. 6,750 ג. 431,200 ד. 24,000

**שאלות 16-20 מתייחסות לבעיה הבאה:**

אם לחמישה ילדים מחלקת לילדיה 5 כובעים לחורף בצבעים שונים ו- 5 צעיפים באותם הצבעים.
החלוקה אקראית, וכל ילד מקבל כובע וצעיף.

**שאלה 16**

מהי ההסתברות שכל הילדים יקבלו כובע וצעיף תואמים (כלומר, באותו הצבע)?

א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{120}$ ג. $\frac{1}{24}$ ד. $\frac{1}{3,125}$

**<u>שאלה 17</u>**

מהי ההסתברות שבדיוק שלושה ילדים יקבלו כובע וצעיף תואמים?

א. $\frac{3}{125}$ ב. $\frac{1}{60}$ ג. $\frac{1}{125}$ ד. $\frac{1}{12}$

**<u>שאלה 18</u>**

מהי ההסתברות שלפחות ילד אחד יקבל כובע וצעיף תואמים?

א. $\frac{11}{30}$ ב. $\frac{1}{25}$ ג. $\frac{1}{5}$ ד. $\frac{19}{30}$

**<u>שאלה 19</u>**

מהי ההסתברות שהילד הבכור יקבל כובע וצעיף תואמים והילד הצעיר יקבל כובע צהוב?

א. $\frac{1}{20}$ ב. $\frac{1}{25}$ ג. $\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{10}$

**<u>שאלה 20</u>**

מהי ההסתברות שהילד הבכור יקבל לפחות פריט אדום אחד?

א. $\frac{8}{25}$ ב. $\frac{1}{25}$ ג. $\frac{9}{25}$ ד. $\frac{10}{25}$

# מטלת מנחה (ממ"ן) 11

**הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב**

**חומר הלימוד למטלה:** פרקים 2 ו- 3

דיאגרמת ון וטענות הסתברות בסיסיות; הסתברות מותנית

**מספר השאלות:** 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

**סמסטר:** 2015 א **מועד אחרון להגשה:** 30.11.2014

**שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות** –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

**הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"**

**שאלה 1 (20 נקודות)**

הווטרינרית העירונית ערכה סקר בקרב תושבי העיר, וקיבלה את התוצאות הבאות:

ל- 45% מהתושבים יש כלב/ים או חתול/ים;

ל- 70% מהתושבים אין כלב/ים;

ל- 9% מהתושבים יש לפחות שני כלבים;

ל- 25% מהתושבים יש לפחות חתול אחד;

ל- 76% מבין התושבים שיש להם לפחות חתול אחד, יש בדיוק חתול אחד;

אם לתושב יש כלב/ים, אז אין לו יותר מחתול אחד;

ול- 2% מהתושבים יש בדיוק חתול אחד ולפחות שני כלבים.

נניח שכל בעל-חיים בעיר (כלב או חתול) רשום על-שמו של תושב אחד בלבד.

(8 נק') א. הגדר ארבעה מאורעות מתאימים לבעיה המתוארת בשאלה, צייר עבורם דיאגרמת ון, המתארת את הבעיה, ומלא בשטחים החלקיים שנוצרים בדיאגרמה את כל ההסתברויות הנובעות מנתוני הבעיה (ישירות או באמצעות חישוב).

הסבר בקצרה את דרך חישוב ההסתברויות שרשמת בדיאגרמה, **באמצעות טענות הסתברות בסיסיות**.

**** בסעיפים הבאים, כשכתוב בעל-חיים הכוונה היא לכלב או לחתול ****

בכל אחד מהסעיפים שלהלן בטא את המאורע המתואר בסעיף באמצעות המאורעות שהגדרת בסעיף א.

בוחרים באופן מקרי תושב של העיר –

(3 נק') ב. מהי ההסתברות שלתושב הנבחר יש בדיוק כלב אחד ובדיוק חתול אחד?

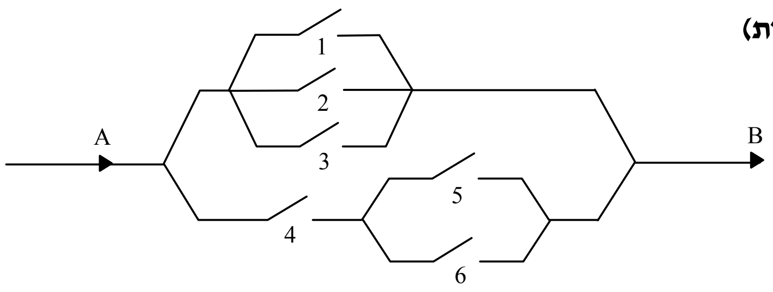
(3 נק') ג. מהי ההסתברות שלתושב הנבחר יש לפחות שני בעלי-חיים?

(3 נק') ד. אם לתושב הנבחר יש לפחות חתול אחד, מהי ההסתברות שיש לו יותר מכלב אחד?

(3 נק') ה. אם לתושב הנבחר יש יותר מבעל-חיים אחד,
מהי ההסתברות שיש לו בעלי-חיים משני הסוגים?

**שאלה 2  (21 נקודות)**

נתון המעגל הבא:




מצבי המתגים 1, 2 ו-3 בלתי-תלויים זה בזה וכל אחד מהם **סגור** בהסתברות 0.6 (ואז **יכול לעבור בו זרם**);

מצבי המתגים 1, 2 ו-3 בלתי-תלויים במצבי המתגים 4, 5 ו-6;

אם מתג 4 **סגור**, אז <u>לפחות</u> אחד ממתגים 5 ו-6 **סגור** בהסתברות 0.8;

מתג 4 **סגור** בהסתברות 0.9;

אם מתג 5 **פתוח**, אז <u>לפחות</u> אחד מהמתגים 4 ו-6 **פתוח** בהסתברות 0.3.

(7 נק׳)  א.  מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?

(7 נק׳)  ב.  אם מתג 5 פתוח, מהי ההסתברות ש<u>**לא**</u> עובר זרם מ-A ל-B?

(7 נק׳)  ג.  האם המאורעות: ״מתג 4 פתוח״ ו- ״במעגל עובר זרם״ בלתי-תלויים זה בזה? הוכח את טענתך.

**שאלה 3  (20 נקודות)**

בכיתה 8 בנים ו- 8 בנות. אהוד ואפרת הם שניים מתלמידי הכיתה.

מחלקים באקראי את הכיתה ל- 8 זוגות.

(7 נק׳)  א.  מהי ההסתברות שיווצרו בדיוק שני זוגות מעורבים, המורכבים מבן ובת?

(7 נק׳)  ב.  אם נוצרו בדיוק שני זוגות מעורבים (המורכבים מבן ובת), מהי ההסתברות שאהוד ואפרת לא יהיו באותו הזוג?

(6 נק׳)  ג.  בוחרים באקראי 5 ילדים מתוך 20 ילדי הכיתה. אם אפרת נבחרה, מהי ההסתברות שאהוד לא נבחר?

**שאלה 4  (21 נקודות)**

נתון ארגז ובו כדורים זהים. מוציאים כדורים מהארגז ומפזרים אותם ב- 10 תאים ממוספרים מ- 1 עד 10, כך שבתא 1 יש מספר כדורים קטן (ממש) מאשר בתא 2, בתא 2 יש מספר כדורים קטן (ממש) מאשר בתא 3, ... , בתא 9 יש מספר כדורים קטן (ממש) מאשר בתא 10 ובתא 10 יש לכל היותר 20 כדורים. הנח שבארגז יש מספיק כדורים לכל אפשרות פיזור שעונה על הדרישות.

(7 נק׳)  א.  כמה אפשרויות פיזור שונות קיימות?

הערה: תא 1 יכול להיות ריק.

נניח שכל הפיזורים האפשריים מתקבלים בהסתברויות שוות.

(7 נק׳)  ב.  מהי ההסתברות שבתא 7 יש בדיוק 15 כדורים?

(7 נק׳)  ג.  ידוע שבתא האחרון יש בדיוק 15 כדורים. מהי ההסתברות שמספר הכדורים הכולל בשני התאים הראשונים (1 ו-2) הוא בדיוק 4?

**שאלה 5 (18 נקודות)**

נתונים שלושה מאורעות, $A$ , $B$ ו- $C$, במרחב מדגם $S$ .

נניח שידוע לגבי מאורעות אלו כי –

$$P(A) = 0.8$$

$$P(B) = 0.5$$

$A$ ו- $B$ בלתי-תלויים

$$P(C) = 0.5$$

$B$ ו- $C$ בלתי-תלויים בתנאי $A$

$$P(A \cap C) = 0.4$$

$$P(A^C \cap B \cap C) = 0.05$$

(6 נק') א. חשב את $P(B^C \cap C)$ .

(6 נק') ב. אם ידוע שהמאורע $A$ מתרחש, מהי ההסתברות שמתרחש לפחות עוד מאורע אחד מבין המאורעות $B$ ו- $C$?

(6 נק') ג. האם שלושת המאורעות $A$ , $B$ ו- $C$ בלתי-תלויים זה בזה?

# מטלת מחשב (ממ"ח) 02

**הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב**

**חומר הלימוד למטלה:** פרק 4

**מספר השאלות:** 20 **משקל המטלה:** 3 נקודות

**סמסטר:** 2015 א **מועד אחרון להגשה:** 14.12.2014

| |
|---|
| **שלחו את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת שאילתא בכתובת www.openu.ac.il/sheilta** |

**שאלות 1-4 מתייחסות לבעיה הבאה:**

נתונה חפיסה של 20 קלפים: 5 קלפים ירוקים, 5 קלפים צהובים, 5 קלפים אדומים ו-5 קלפים כחולים.

בוחרים קלף אחר קלף מן החפיסה עד שלראשונה מתקבל קלף שצבעו שונה מצבע הקלף הראשון שנבחר.

יהי $X$ משתנה מקרי, המוגדר על-ידי מספר הקלפים שנבחרו במהלך הניסוי (מתחילתו ועד לסיומו).

**<u>שאלה 1</u>**

אם בחירת הקלפים נעשית **<u>ללא החזרה</u>**, מהי $P\{X=4\}$ ?

א. $\frac{10}{323}$ ב. $\frac{140}{969}$ ג. $\frac{3}{64}$ ד. $\frac{9}{64}$

**<u>שאלה 2</u>**

אם בחירת הקלפים נעשית **<u>ללא החזרה</u>**, מהי השונות של $X$ ?

א. 0.5251 ב. 3.0882 ג. 0.2757 ד. 5.3382

**<u>שאלה 3</u>**

אם בחירת הקלפים נעשית **<u>עם החזרה</u>**, מהי $P\{X=4\}$ ?

א. $\frac{3}{256}$ ב. $\frac{12}{64}$ ג. $\frac{3}{64}$ ד. $\frac{9}{64}$

**<u>שאלה 4</u>**

אם בחירת הקלפים נעשית **<u>עם החזרה</u>**, מהי השונות של $X$ ?

א. $\frac{4}{9}$ ב. $\frac{13}{9}$ ג. $\frac{4}{3}$ ד. $\frac{7}{3}$

**שאלות 5-7 מתייחסות לבעיה הבאה:**

נניח שמופעים של מאורע מסוים מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של תהליך פואסון עם קצב של 24 מופעים לשעה.

**<u>שאלה 5</u>**

מהי ההסתברות שבמרווח-זמן שאורכו 5 דקות יתרחשו לפחות 2 מופעים של המאורע?

א. $3e^{-2}$ ב. $1-5e^{-2}$ ג. $1-3e^{-2}$ ד. $2e^{-2}$

**<u>שאלה 6</u>**

ידוע שבמשך 5 דקות התרחשו לפחות 2 מופעים. מהי ההסתברות שבזמן זה קרו בדיוק $i$ $(i \geq 2)$ מופעים?

א. $\frac{2^i}{(e^2-3)i!}$ ב. $2e^{-2}$ ג. $\frac{2^i e^{-2}}{i!}$ ד. $\frac{2^{(i-2)}e^{-2}}{(i-2)!}$

**<u>שאלה 7</u>**

נניח שמתבוננים על מרווח-זמן שאורכו שעה אחת, ומחלקים אותו לארבעה חלקים שווים, שאין ביניהם חפיפה ושאורך כל אחד מהם רבע שעה.

אם במרווח-זמן זה (שאורכו שעה אחת) מתרחשים בדיוק 20 מופעים של המאורע,

מהי ההסתברות שבכל רבע שעה (לפי החלוקה המצוינת לעיל) מתרחשים בדיוק 5 מופעים (מתוך ה- 20)?

א. 0.000665 ב. 0.010671 ג. 0.015966 ד. 0.1094

**שאלות 8-12 מתייחסות לבעיה הבאה:**

נתונה קבוצה של 16 אנשים – 8 גברים ו- 8 נשים.

מחלקים באופן אקראי את הקבוצה ל- 8 זוגות.

על כל אחד מהזוגות מוטלת משימה זהה.

כל אחד מהזוגות עומד במשימה בהסתברות 0.8, ואין תלות בין הזוגות.

**<u>שאלה 8</u>**

יהי $X$ מספר הזוגות (מתוך ה- 8) המורכבים משני גברים. מהי $P\{X=3\}$ ?

א. 0.194 ב. 0.208 ג. 0.059 ד. 0.174

**<u>שאלה 9</u>**

יהי $X$ מספר הזוגות (מתוך ה- 8) המורכבים משני גברים. מהי התוחלת של $X$ ?

א. 2 ב. 1.8667 ג. 1.9333 ד. 2.0667

**<u>שאלה 10</u>**

מהי שונות מספר <u>הזוגות</u> שמבצעים את המשימה בהצלחה?

א. 6.4 ב. 1.28 ג. 3.84 ד. 2.56

**<u>שאלה 11</u>**

מהי שונות מספר <u>האנשים</u> בקבוצה הכוללת שמבצעים את המשימה בהצלחה?

א. 6.4 ב. 3.7333 ג. 5.12 ד. 2.56

**<u>שאלה 12</u>**

לפני ביצוע המשימות, לכל זוג ניתן סכום של 100 ש"ח.

אם הזוג עומד בהצלחה במשימה, הוא מקבל 100 ש"ח נוספים;

אם לא – הוא משלם 50 ש"ח מהסכום שקיבל.

מהי שונות סכום הכסף <u>הכולל</u> שיש בידי שמונת הזוגות, בתום ביצוע המשימות?

א. 187.5 ב. 29,200 ג. 28,800 ד. 1,360

**שאלות 13-15 מתייחסות לבעיה הבאה:**

יהי $X$ משתנה מקרי, שפונקציית ההסתברות שלו נתונה על-ידי: $i=1,2,...,20 \quad , \quad P\{X=i\}=c\,i^2$

בהגרלה, שנערכת מדי יום, משתתפים בכל פעם שהיא נערכת $X$ אנשים שונים.

בדיוק אחד **ממשתתפי** ההגרלה (בלי תלות במספר המשתתפים בה) זוכה בפרס של 2,000 ש"ח,
ולכל המשתתפים בהגרלה יש סיכויים שווים לזכות בפרס זה.

**<u>שאלה 13</u>**

מהו הערך של $c$?

א. $\frac{1}{210}$ ב. $\frac{1}{2,870}$ ג. $\frac{1}{8,610}$ ד. $\frac{1}{420}$

**<u>שאלה 14</u>**

מהי ההסתברות שמשתתף אקראי בהגרלה יומית כלשהי יזכה בפרס?

א. $1/i$ ב. $0.00035i$ ג. 0.0732 ד. 0.1799

**<u>שאלה 15</u>**

אדם מחליט להשתתף בהגרלה מדי יום.

מהי סטיית-התקן של מספר הפעמים שישתתף בהגרלות עד שיזכה בפרס לראשונה?

א. 14.86 ב. 220.82 ג. 173.11 ד. 13.16

**<u>שאלה 16</u>**

יהי $X \sim Po(3)$ . חשב את השונות של $2^X$ .

א. $e^9$ ב. $e^9 - e^3$ ג. $e^9 - e^6$ ד. $e^3$

**<u>שאלה 17</u>**

יהי $X \sim B(200, \frac{1}{9})$ . חשב את התוחלת של $2^{X+3}$ .

א. $8\left(\frac{10}{9}\right)^{200}$ ב. $\left(2^{\frac{200}{9}}\right)^3$ ג. $\left(\frac{10}{9}\right)^{600}$ ד. $2^{\frac{200}{9}+3}$

**שאלות 18-20 מתייחסות לבעיה הבאה:**

מפעל ממתקים מייצר סוכריות צבעוניות, הנארזות בשקיות המכילות 5 סוכריות כל אחת.
שליש מהסוכריות, שהמפעל מייצר, הן אדומות, ושמינית מהן סגולות.
הסוכריות המיוצרות במפעל, נארזות באקראי בשקיות, כך שצבעי הסוכריות בכל שקית הם אקראיים.

**<u>שאלה 18</u>**

בוחרים באקראי שקיות של סוכריות, ופותחים אותן בזו אחר זו עד למציאת 3 שקיות (לאו דווקא ברצף) שיש בהן לפחות סוכרייה סגולה אחת.
מהי ההסתברות שיצטרכו לפתוח בדיוק 13 שקיות עד למציאת 3 שקיות כאלה?

א. 0.0096 ב. 0.0416 ג. 0.0338 ד. 0.1467

**<u>שאלה 19</u>**

שגית קנתה לה ולחברתה 20 שקיות של סוכריות – 15 בחנות A ו-5 בחנות B.
היא בחרה באקראי 7 מתוך 20 השקיות האלה ונתנה אותן לחברתה.
מהי שונות מספר השקיות מחנות A שהחברה של שגית תקבל?

א. 1.3125 ב. 1.9183 ג. 0.8980 ד. 5.25

**<u>שאלה 20</u>**

מהי **<u>בקירוב</u>** ההסתברות שב- 1,000 שקיות מקריות תהיינה בדיוק 5 שקיות שבתוכן רק סוכריות אדומות?

א. 0.1605 ב. 0.0041 ג. 0.0694 ד. 0.1750

# מטלת מנחה (ממ"ן) 12

**הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב**

**חומר הלימוד למטלה:** פרק 5

**מספר השאלות:** 4 **משקל המטלה:** 6 נקודות

**סמסטר:** 2015 א **מועד אחרון להגשה:** 28.12.2014

**שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –**

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

**הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"**

**שאלה 1 (28 נקודות)**

האורך (בס"מ) של לולב מקרי, שנסמנו ב-$X$, הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת $\mu$ ושונות $\sigma^2$.
כמו כן, ידוע כי $P\{X > 110\} = 0.5$ וכי $P\{95 < X < 125\} = 0.6826$.

(7 נק') א. מצא את $\mu$ ואת $\sigma$.

(7 נק') ב. נניח שדרושים 4 לולבים, שאורכו של כל אחד מהם הוא לפחות 120 ס"מ.
אם מודדים בזה אחר זה לולבים מקריים (בלתי-תלויים), מהי ההסתברות שיידרשו בדיוק 10 מדידות עד למציאת 4 הלולבים הנדרשים?

(7 נק') ג. ידוע שאורכו של לולב מקרי קטן מ- 125 ס"מ.
מהי ההסתברות שהוא ארוך מ- 120 ס"מ?

(7 נק') ד. מהו האורך בס"מ, שההסתברות שלולב יהיה קצר ממנו היא 0.43 ?

**הערה:** בכל סעיפי השאלה, ערוך <u>אינטרפולציה לינארית</u> היכן שהיא נדרשת.

**שאלה 2 (24 נקודות)**

נתונה פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי $X$:
$$f_X(x) = \frac{4}{x^5} \quad , \quad x \ge 1$$

(6 נק') א. חשב את $P\{X < 2\}$.

ב. יהי $Y = X^3$.

(6 נק') 1. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של $Y$ ורשום אותה באופן מדויק.

(6 נק') 2. מצא את פונקציית הצפיפות של $Y$ ורשום אותה באופן מדויק.

(6 נק') 3. חשב את $E[Y]$.

**שאלה 3 (20 נקודות)**

נתונה פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי $X$:

$$f_X(x)=\begin{cases} ax & , \quad 20\le x\le 30 \\ 0 & , \quad \text{אחרת} \end{cases}$$

(6 נק') א. חשב את $a$ ותאר באופן גרפי את פונקציית הצפיפות.

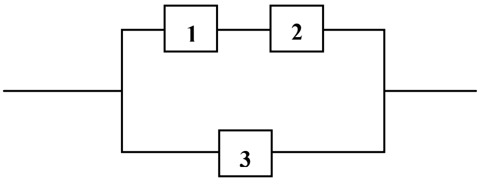
(7 נק') ב. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של $X$, רשום אותה באופן מדויק וחשב באמצעותה את $P\{24\le X\le 28\}$.

(7 נק') ג. יהי $Y=X^2$.

1. מצא את פונקציית הצפיפות של $Y$. רשום אותה באופן מדויק.
2. חשב את השונות של $Y$.

**שאלה 4 (28 נקודות)**

במערכת 3 רכיבים המסודרים במבנה שלהלן:




המערכת פועלת אם שני הרכיבים 1 ו- 2 תקינים או אם רכיב 3 תקין, ובפרט, אם שלושת הרכיבים תקינים.
נסמן ב- $X_i$ את אורך-החיים (בשנים) של רכיב $i$, לכל $i=1,2,3$. הרכיבים בלתי-תלויים זה בזה.
מפעילים מערכת שכל הרכיבים בה חדשים. אין אפשרות להחליף במערכת רכיב שהתקלקל.

אם ההתפלגות של כל אחד מה-$X_i$-ים היא אחידה בין 1 ל- 3:

(7 נק') א. מהי ההסתברות שהמערכת פועלת לאחר שנתיים מיום הפעלתה?

(7 נק') ב. אם לאחר שנתיים המערכת עדיין פועלת, מהי ההסתברות שרכיב 3 תקין בזמן זה?

אם ההתפלגות של כל אחד מה-$X_i$-ים היא מעריכית עם תוחלת 2:

(7 נק') ג. מהי ההסתברות שהמערכת פועלת לאחר שנתיים מיום הפעלתה?

(7 נק') ד. אם לאחר שנתיים המערכת עדיין פועלת, מהי ההסתברות שרכיב 3 תקין בזמן זה?

# מטלת מנחה (ממ"ן) 13

**הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב**

**חומר הלימוד למטלה:** פרק 6

**מספר השאלות:** 6 **משקל המטלה:** 6 נקודות

**סמסטר:** 2015 א **מועד אחרון להגשה:** 11.1.2015

**שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –**

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

**הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"**

**שאלה 1 (28 נקודות)**

בתחילת שנה מסוימת פועלות במפעל 3 מכונות (בלתי-תלויות) בנות 1, 2 ו- 3 שנים.

מספר התיקונים שיידרשו **במכונה בת $i$ שנים** מקיים את שלוש ההנחות של תהליך פואסון עם קצב של $\boldsymbol{3i}$ תיקונים לשנה אחת, לכל $i = 1,2,3$ .

(7 נק׳) א. מהי ההסתברות שבמשך שנה אחת יידרש לכל היותר תיקון אחד במכונה בת השנה?

(7 נק׳) ב. מהי ההסתברות שבמשך שנה אחת יידרשו בדיוק 22 תיקונים בכל המכונות יחד?

(7 נק׳) ג. בתחילת השנה היצרן מפעיל את שלוש המכונות (וכולן תקינות).

1. מהי התפלגות אורך-הזמן שיעבור עד לתיקון הראשון שיידרש במכונות?
רשום את שם ההתפלגות ואת הפרמטר המתאים לה. אין צורך להוכיח את טענתך.
2. מהי ההסתברות שיעבור לפחות חודש אחד עד שיידרש התיקון הראשון?
הנח ש-12 חודשי השנה שווים באורכם.

(7 נק׳) ד. במחצית הראשונה של השנה נדרשו בסך-הכל 10 תיקונים.
מהי ההסתברות שבדיוק 6 מהם נדרשו למכונה בת 3 השנים?

**שאלה 2 (16 נקודות)**

נתון מטבע, שההסתברות לקבל בו H היא $\frac{X+1}{20}$ ,

כך ש- $X$ הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 10 ו- 0.5.

מטילים את המטבע 20 פעמים. יהי $N$ מספר הפעמים שהתוצאה H התקבלה ב-20 הטלות אלו.

(8 נק׳) א. חשב את $P\{N=8 \mid X=6\}$ .

(8 נק׳) ב. מצא ביטוי כללי להסתברות $P\{N=n, X=i\}$ .
עבור אלו ערכים של $n$ ו- $i$ הסתברות זו מקבלת ערכים חיוביים?

**שאלה 3 (20 נקודות)**

בקופסה נתונה יש 9 כדורים: 4 אדומים, 3 כחולים ו-2 צהובים.

מוציאים מן הקופסה 3 כדורים <u>ללא החזרה</u>. לכל כדור יש סיכויים שווים להיבחר בכל אחת מהבחירות.

יהיו: $X$ = מספר הכדורים האדומים שנבחרו;

$Y$ = מספר הכדורים הכחולים שנבחרו.

(10 נק׳) א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של $X$ ו- $Y$,

ואת פונקציות ההסתברות השולית של $X$ ו- $Y$.

(5 נק׳) ב. האם $X$ ו- $Y$ בלתי-תלויים זה בזה?

(5 נק׳) א. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של $Y$ בהינתן $X = 1$.

**שאלה 4 (16 נקודות)**

מפזרים באקראי $n$ כדורים שונים ב- $n$ תאים ממוספרים ($n \geq 4$).

אין תלות בין התאים שאליהם מוכנסים הכדורים,

וכל כדור מוכנס לתוך כל אחד מן התאים הנתונים בהסתברויות שוות.

יהי $X_i$ המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הכדורים שהוכנסו לתוך תא $i$, לכל $i = 1,\ldots,n$.

(8 נק׳) א. חשב את $P\{X_1 = 2 , X_2 = 1\}$.

(8 נק׳) ב. חשב את $P\{X_4 = 1 \mid X_3 = 2\}$.

**שאלה 5 (10 נקודות)**

יהי $X$ משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר $p$, ויהי $Y$ משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $n$ ו- $p$.

אם המשתנים המקריים $X$ ו- $Y$ בלתי-תלויים זה בזה, מהי ההסתברות ש- $X - 1 = Y$?

**שאלה 6 (10 נקודות)**

יהיו $A$, $B$ ו- $C$ מאורעות לא-ריקים במרחב מדגם $S$.

נתון כי: $A$ ו- $C$ מאורעות זרים זה לזה;

$P(B \mid A) = P(B \mid C) = 0.25$;

$P(A \cap B^C) = 0.3$;

$P(C \cap B^C) = 0.15$;

$P(A^C \cap B^C \cap C^C) = 0.2$.

נסמן ב-$X$ את מספר המאורעות שמתרחשים, מבין 3 המאורעות המוגדרים בתחילת השאלה,

וב-$Y$ אינדיקטור המצביע על התרחשות המאורע $B$.

כלומר, $Y = 1$, אם המאורע $B$ מתרחש ו- $Y = 0$, אם הוא אינו מתרחש.

מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של $X$ ו- $Y$.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 14

**הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב**

**חומר הלימוד למטלה:** פרק 7

**מספר השאלות:** 6 **משקל המטלה:** 6 נקודות

**סמסטר:** 2015 א **מועד אחרון להגשה:** 25.1.2015

**שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –**

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

**הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"**

**שאלה 1 (28 נקודות)**

מפזרים באקראי 10 קוביות תקינות ב- 10 תאים ממוספרים מ-1 עד 10.

נניח שאין תלות בין הקוביות ושכל קובייה "נופלת" לתוך כל אחד מן התאים הנתונים בהסתברויות שוות.

לאחר שמפזרים את הקוביות בתאים, מוציאים מתא 1 את הקוביות שנפלו לתוכו ומטילים אותן.

יהי $X_1$ מספר הקוביות שנפלו לתוך תא 1 ;

ויהי $S$ סכום התוצאות של ההטלות, שהתקבלו בהטלת הקוביות שנפלו לתוך תא 1.

(8 נק') א. חשב את $P\{S=2\}$ .

(12 נק') ב. 1. חשב את התוחלת של $S$ .

2. חשב את השונות של $S$ .

(8 נק') ג. נסמן ב- $X_i$ את מספר הקוביות שנפלו לתוך תא $i$ , לכל $i=1,2,\ldots,10$ .

חשב את $\mathrm{Cov}(X_1, X_2+\ldots+X_{10})$ ואת $\rho(X_1, X_2+\ldots+X_{10})$ .

**שאלה 2 (10 נקודות)**

יהיו $X$ ו- $Y$ משתנים מקריים בדידים בעלי תוחלות ושונויות סופיות.

הוכח כי: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X, E[Y|X])$

**הערה:** ציין מהן טענות-העזר שעליהן מתבססות הוכחותיך. את טענות-העזר אין צורך להוכיח.

**שאלה 3 (14 נקודות)**

נתון מטבע, שההסתברות לקבל בו H היא $\frac{X+1}{20}$,

כך ש-$X$ הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 10 ו- 0.5.

מטילים את המטבע 20 פעמים. יהי $N$ מספר הפעמים שהתוצאה H התקבלה ב-20 הטלות אלו.

(7 נק׳) א. חשב את התוחלת של $N$.

(7 נק׳) ב. חשב את השונות של $N$.

**שאלה 4 (14 נקודות)**

האורך (בס״מ) של לולב מקרי, שנסמנו ב-$X$, הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת 110 ושונות $15^2$.

(7 נק׳) א. מהי התפלגות <u>ממוצע-האורכים</u> של 9 לולבים מקריים (בלתי-תלויים)?
רשום את שם ההתפלגות ואת ערכי הפרמטרים שלה.
על אלו טענות מתבססת תשובתך?

(7 נק׳) ב. האם ההסתברות שממוצע-האורכים של 9 לולבים מקריים יעלה על 115 ס״מ
גדולה או קטנה מההסתברות שהאורך של לולב מקרי (יחיד) יעלה על 115 ס״מ?
נמק את תשובתך בהתבסס על מאפייני ההתפלגות הנורמלית, **וללא חישוב** של שתי
ההסתברויות הללו.

**שאלה 5 (18 נקודות)**

נתונים 40 בלונים: 20 אדומים ו- 20 צהובים.

מחלקים באופן אקראי את הבלונים ל- 20 ילדים, לכל ילד 2 בלונים.

יהי $X$ מספר הילדים שמקבלים 2 בלונים מאותו הצבע (כלומר, 2 אדומים או 2 צהובים).

(8 נק׳) א. חשב את התוחלת של $X$.

(10 נק׳) ב. חשב את השונות של $X$.

**שאלה 6 (16 נקודות)**

מטילים קובייה תקינה 12 פעמים.

בהנחה שהטלות הקובייה בלתי-תלויות זו בזו –

(8 נק׳) א. אם עבור כל הטלה מקבלים פרס שגובהו מחצית מתוצאת ההטלה,
מהן תוחלת ושונות הפרס הכולל שיתקבל בתום ההטלות?

(8 נק׳) ב. יהי $X$ מספר ההטלות שבהן מתקבלות התוצאות 1 או 2;
ויהי $Y$ מספר ההטלות שבהן מתקבלות התוצאות 2 או 3.
חשב את $\text{Var}(X+Y)$.

# אוסף שאלות לתרגול עצמי

**הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב**

**חומר הלימוד למטלה: פרק 8**

**1.** לאורך החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר $\frac{1}{500}$.
אין תלות בין נורות שונות מאותו הסוג.
אדם קנה 100 נורות מסוג זה.
מצא קירוב להסתברות שממוצע אורך החיים של 100 הנורות שנקנו יהיה בין 450 ל- 520 שעות.

**2.** יהי $X$ משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1,000.

א. חשב קירוב נורמלי להסתברות ש-$X$ יקבל את הערך 1,000.
מדוע אפשר לחשב קירוב נורמלי במקרה זה?

ב. חשב חסם תחתון ל- $P\{|X-1{,}000|\le 40\}$, באמצעות אי-שוויון צ'בישב.

**3.** נתונים 5 משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, $X_1$, $X_2$, ... , $X_5$, שכל אחד מהם מקבל את הערכים 0, 3 ו- 6 בהסתברויות שוות (כלומר, הסתברות ⅓ לכל ערך).
נגדיר $Y=\sum_{i=1}^{5} X_i$ . חשב חסם עליון ל- $P\{Y>25\}$:

א. בעזרת אי שוויון מרקוב;

ב. בעזרת אי שוויון צ'בישב.

**4.** א. יהי $X$ משתנה מקרי אי-שלילי שתוחלתו $\mu$ סופית, ויהי $t>0$.
הוכח כי $P\{X\le \mu t\}\ge 1-\frac{1}{t}$.

ב. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n=1,2,\ldots)$, משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר $p$ $(0<p<1)$.
הראה בעזרת אי-שוויון צ'בישב שמתקיים: $P\left\{\overline{X}_n\le \frac{2}{p}\right\}\ge 1-\frac{1-p}{n}$.

**הערה:** $\overline{X}_n=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

**5.** הוכח, בעזרת משפט הגבול המרכזי, כי $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} e^{-n}\frac{n^i}{i!}=\frac{1}{2}$.

**6.** יהיו $X_1$ , $X_2$ , ... , $X_{200}$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפונקציה יוצרת המומנטים: $M_X(t)=\left(\frac{e^t}{5-4e^t}\right)^2$ , עבור $t<\ln 1.25$ .

מצא קירוב ל- $P\left\{1{,}910\le\sum_{i=1}^{200}X_i<2{,}050\right\}$ .

**7.** א. נתון ארגז ובו 120 כדורים שעליהם רשומים מספרים.

לכל $i=1,2,\ldots,15$ , יש בארגז $i$ כדורים שהמספר הרשום עליהם הוא $i$ .

בוחרים כדורים מהארגז, בזה אחר זה **ועם החזרה**, כך שבכל בחירה יש לכל הכדורים סיכויים שווים להיבחר.

נניח שבוחרים (בשיטה המתוארת לעיל) בדיוק 100 כדורים.

יהי $Y$ הסכום הכולל של 100 המספרים הרשומים על הכדורים שנבחרו.

חשב קירוב ל- $P\{1{,}000\le Y\le 1{,}100\}$ .

הערה: $\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ; $\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ב. מעגלים 50 מספרים שנבחרו באקראי, כל אחד לשלם הקרוב לו ביותר, ומסכמים את 50 המספרים המעוגלים.

אם לכל אחת משגיאות-העיגול יש התפלגות אחידה בקטע $(-0.5,\ 0.5]$, מהו קירוב להסתברות שההפרש <u>המוחלט</u> בין הסכום המתקבל לבין הסכום המדויק של 50 המספרים עולה על 3?

**8.** אורך-החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים מתפלג מעריכית עם הפרמטר 0.01, והוא אינו תלוי באורך-החיים של נורות אחרות.

כמה נורות מסוג זה עליך לקנות (בקירוב), אם ברצונך להבטיח 5,000 שעות-אור בהסתברות 0.95 לפחות?

הנח שאתה מתקין נורה אחת, ובהישרפה מחליף אותה מייד באחרת. זמן ההחלפה זניח.

**9.** נתונים שלושה ארגזים בלתי-תלויים.

לכל ארגז אפשר להכניס $X$ קופסאות, כאשר ל- $X$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 150.

א. חשב **קירוב** להסתברות שלשלושת הארגזים יחדיו יוכנסו לפחות 480 קופסאות.

ב. חשב **קירוב** להסתברות ש<u>ההפרש המוחלט</u> בין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז הראשון לבין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז השני יהיה גדול מ- 10.

בשני הסעיפים נמק את פתרונך.

**10.** יהי $X$ משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $n$ ו- 0.5, עבור $n>4$ .

הוכח בעזרת אי שוויון צ'בישב שמתקיים: $P\{X\ge n-2\}\le\frac{n}{2(n-4)^2}$ .

**11.** רשום את החסמים מלעיל הקטנים ביותר (המוכרים לך) עבור $P\{X \geq 14\}$ , בכל אחד מן המקרים הבאים:

א. $X$ הוא משתנה מקרי אי-שלילי ותוחלתו 7 ;

ב. $X$ הוא משתנה מקרי המקיים $X \geq -2$ ותוחלתו 7 ;

ג. $X$ הוא משתנה מקרי שתוחלתו 7 ושונותו 4.

**12.** יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת סופית $\mu$ ושונות סופית $\sigma^2$.

הנח ש-$n$ גדול וחשב **קירוב** ל- $P\left\{\bar{X} \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} + \mu\right\}$.

**13.** המשקל $W$ (בטונות) של מטען, שגשר מסוים יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק, הוא משתנה מקרי נורמלי שתוחלתו 400 וסטיית התקן שלו 40. נניח שהמשקל (בטונות) של מכונית הוא משתנה מקרי שתוחלתו 3 וסטיית התקן שלו 0.3. אם ברגע מסוים ההסתברות לגרימת נזק במבנה הגשר עולה על 0.1, מהו (בקירוב) המספר המינימלי של מכוניות הנמצאות אז על הגשר?

הנח שאין תלות בין משקלי מכוניות שונות ובין המשקל של כל מכונית לעומס שהגשר יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק.

# נספחים

## נספח א:   דף נוסחאות לבחינה

דף הנוסחאות יצורף לכל בחינה.

גירסת דף הנוסחאות, המובאת בחוברת מטלות זו, נכונה לחודש אוקטובר 2010.

**לקראת הבחינה מומלץ לבדוק באתר הקורס אם לא חלו שינויים בדף הנוסחאות שיצורף לבחינה.**

## נספח ב:   רשימת טענות להוכחה בבחינה

בכל בחינה עשויות להופיע טענות, מן הרשימה המובאת להלן, שאותן תִּדָּרשו להוכיח במדויק.

ההוכחות של כל הטענות מן הרשימה מובאות באתר הקורס בקובץ נפרד.

**משקל הטענות שתופענה בבחינה לא יעלה על 25 נקודות.**

הטענות עשויות להופיע ביותר מאשר שאלה אחת.

גירסת רשימת הטענות, המובאת בחוברת מטלות זו, נכונה לחודש פברואר 2011.

**לקראת הבחינה מומלץ לבדוק באתר הקורס אם לא חלו שינויים ברשימת הטענות לבחינה.**

## נספח ג:   ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

# נספח א: דף נוסחאות לבחינה

| ההתפלגות | פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות | התוחלת | השונות | הפונקציה יוצרת המומנטים |
|---|---|---|---|---|
| בינומית | $\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,...,n$ | $np$ | $np(1-p)$ | $(pe^t+1-p)^n$ |
| גיאומטרית | $(1-p)^{i-1}\cdot p \quad , \quad i=1,2,...$ | $1/p$ | $(1-p)/p^2$ | $pe^t/(1-(1-p)e^t)$<br>$t<-\ln(1-p)$ |
| פואסונית | $e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i! \quad , \quad i=0,1,...$ | $\lambda$ | $\lambda$ | $\exp\{\lambda(e^t-1)\}$ |
| בינומית שלילית | $\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,...$ | $r/p$ | $(1-p)r/p^2$ | $\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$<br>$t<-\ln(1-p)$ |
| היפרגיאומטרית | $\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,...,m$ | $nm/N$ | $\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$ | |
| אחידה בדידה | $\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,...,m+n$ | $m+(1+n)/2$ | $(n^2-1)/12$ | |
| אחידה | $1/(b-a) \quad , \quad a\le x\le b$ | $(a+b)/2$ | $(b-a)^2/12$ | $(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\ , t\neq 0$ |
| נורמלית | $(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad -\infty<x<\infty$ | $\mu$ | $\sigma^2$ | $\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$ |
| מעריכית | $\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$ | $1/\lambda$ | $1/\lambda^2$ | $\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$ |
| מולטינומית | $\binom{n}{n_1,...,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot...\cdot p_r^{n_r} \quad , \quad \sum n_i=n\ , \sum p_i=1$ | | | |

**נוסחת הבינום** $\quad (x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$

$P(A) = P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$

**כלל ההכלה וההפרדה** $\quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)$

**הסתברות מותנית** $\quad P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

**נוסחת הכפל** $\quad P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\cdot...\cdot P(A_n\mid A_1\cap A_2\cap...\cap A_{n-1})$

**נוסחת ההסתברות השלמה** $\quad P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i) \quad ,$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא $S$

**נוסחת בייס** $\quad P(B_j\mid A)=\frac{P(A\mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)} \quad ,$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא $S$

**תוחלת** $\quad E[X]=\sum_x x\,p_X(x)=\int x f(x)dx$

**תוחלת של פונקציה של מ"מ** $\quad E[g(X)]=\sum_x g(x)p_X(x)=\int g(x)f(x)dx$

**שונות** $\quad \mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$

**תוחלת ושונות של פונקציה לינארית** $\quad E[aX+b]=aE[X]+b$

$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב $\lambda$ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\lambda$.

**תכונת חוסר-הזכרון** $\quad P\{X>s+t \mid X>t\}=P\{X>s\} \quad , \quad s,t\ge 0$

**תוחלת מותנית** $\quad E[X\mid Y=y]=\sum_x x\,p_{X|Y}(x\mid y)=\int x f_{X|Y}(x\mid y)dx$

**שונות מותנית** $\mathrm{Var}(X \mid Y=y) = E[X^2 \mid Y=y] - (E[X \mid Y=y])^2$

**נוסחת התוחלת המותנית** $E[X] = E[E[X \mid Y]] = \sum_y E[X \mid Y=y] p_Y(y)$

(טענה מתרגיל ת26, עמוד 430) $E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y) E[X \mid Y]]$

**נוסחת השונות המותנית** $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

**תוחלת של סכום משתנים מקריים** $E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$

**שונות משותפת** $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

**שונות של סכום משתנים מקריים** $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

**מקדם המתאם הלינארי** $\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) \big/ \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

**פונקציה יוצרת מומנטים** $M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$

כאשר $X_i$ מ״מ ב״ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)$

**תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי** $E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X]$

( כאשר $X_i$ מ״מ ב״ת ש״ה ) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X) + (E[X])^2 \mathrm{Var}(N)$

$$M_Y(t) = E\left[\left(M_X(t)\right)^N\right]$$

**אי-שוויון מרקוב** $P\{X \ge a\} \le E[X]/a \quad , \quad a>0$ , $X$ מ״מ אי-שלילי

**אי-שוויון צ׳בישב** $P\{|X-\mu| \ge a\} \le \sigma^2/a^2 \quad , \quad a>0 \ , \ \mu, \sigma^2 < \infty$

**משפט הגבול המרכזי** $P\left\{ \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right) \Big/ \sqrt{n\sigma^2} \le a \right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(a) \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty$ , $X_i$ מ״מ ב״ת ושי״ה

---

- אם $A$ ו- $B$ מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב״ת על הניסוי המאורע $A$ יתרחש לפני המאורע $B$ היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$ .
- סכום של מ״מ בינומיים (גיאומטריים) ב״ת עם אותו הפרמטר $p$ הוא מ״מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ״מ פואסוניים ב״ת הוא מ״מ פואסוני.
- סכום של מ״מ נורמליים ב״ת הוא מ״מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של $X$ בהינתן $X+Y=n$ , כאשר $X$ ו-$Y$ מ״מ פואסוניים (בינומיים עם אותו $p$) ב״ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

---

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^\infty \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^\infty x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1<x<1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \tfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \ , \ n \ne -1 \quad ; \quad \int \tfrac{1}{ax+b} dx = \tfrac{1}{a}\ln(ax+b)$$

$$\int e^{ax} dx = \tfrac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \tfrac{1}{a \ln b} b^{ax}$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים :

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

$$\log_n a = \log_m a / \log_m n \quad ; \quad \log_n(a^b) = b \cdot \log_n a \quad ; \quad \log_n(ab) = \log_n a + \log_n b$$

# נספח ב: טענות להוכחה בבחינה

## הסתברות לתלמידי מדעי המחשב - 20425

**ההוכחות של הטענות, המובאות ברשימה שלהלן, נמצאות בקובץ נפרד באתר הקורס.**

1. יהיו $E$ ו- $F$ מאורעות במרחב מדגם $S$. הוכח כי: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

2. יהיו $F$ ו- $G$ מאורעות זרים של ניסוי מקרי כלשהו. הוכח כי בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה, ההסתברות שהמאורע $F$ יתרחש לפני המאורע $G$ היא: $\dfrac{P(F)}{P(F)+P(G)}$

3. יהי $X$ משתנה מקרי בדיד, שתוחלתו סופית, ויהיו $a$ ו- $b$ קבועים ממשיים. הוכח כי:
$E[aX+b] = aE[X]+b \quad ; \quad \mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$

4. יהי $X$ משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $n$ ו- $p$ $(0 < p < 1)$. הוכח כי:
$E[X] = np \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$

5. יהי $X$ משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\lambda$ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \lambda \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda$

6. יהי $X$ משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N$, $m$ ו- $n$. הוכח כי: $E[X] = n \cdot \frac{m}{N}$

7. יהי $X$ משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר $\lambda$ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

8. הוכח: אם מאורע מסוים מתרחש בהתאם לַהנחות של תהליך-פואסון עם קצב $\lambda$, אז משך הזמן החולף עד להתרחשות המופע הראשון של המאורע (החל מזמן 0) הוא משתנה מקרי מעריכי עם אותו הפרמטר $\lambda$.

9. יהיו $X$ ו- $Y$ משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים $\lambda_X$ ו- $\lambda_Y$, בהתאמה.
הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda_X + \lambda_Y$.

10. יהיו $X$ ו- $Y$ משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפרמטר $p$ $(0 < p < 1)$.
הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים $(2, p)$.

11. יהיו $X$ ו- $Y$ משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים $\lambda_X$ ו- $\lambda_Y$, בהתאמה.
הוכח שלמשתנה המקרי המותנה $X$ בהינתן $X+Y=n$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n$ ו- $\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$.

12. יהי $Y = a + bX$, ונניח כי $\sigma_X^2 > 0$. הראה כי: $\rho(X,Y) = \begin{cases} +1 & , \ b > 0 \\ -1 & , \ b < 0 \end{cases}$

**13.** יהיו $X_1, X_2, ..., X_n$ משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת ושונות סופיות, $\mu$ ו- $\sigma^2$, בהתאמה.

הוכח כי: $E[\overline{X}] = \mu \quad ; \quad \mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2/n$

**14.** יהיו $X_1, X_2, ..., X_r$ משתנים מקריים בעלי פונקציית התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים $n$ ו- $p_1, p_2, ..., p_r$.

הוכח: א. למשתנה המקרי $X_i$ יש התפלגות שולית בינומית עם הפרמטרים $n$ ו-$p_i$.

ב. למשתנה המקרי המותנה $X_1$ בהינתן $X_2 = j$, לכל $j = 0,1,...,n$, יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n - j$ ו- $p_1/(1-p_2)$.

ג. $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$

**15.** יהיו $X$ ו-$Y$ משתנים מקריים בדידים בעלי תוחלות ושונויות סופיות.

הוכח: $E[X] = E[E[X \mid Y]]$

$\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

**16.** הוכח: אם $N$ הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים אי-שליליים, ואם $X_1, X_2, ...$ הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב-$N$, אז מתקיים:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1]$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\mathrm{Var}(N)$$

**הערה:** כאשר $N = 0$, סכום המשתנים שווה גם הוא ל-0.

**17.** יהי $X$ משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $n$ ו- $p$ $(0 < p < 1)$.

הוכח כי: $M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n \quad , \quad -\infty < t < \infty$

**18.** יהי $X$ משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר $p$ $(0 < p < 1)$.

הוכח כי: $M_X(t) = \dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \quad , \quad t < -\ln(1-p)$

**19.** יהי $X$ משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\lambda$ $(\lambda > 0)$.

הוכח כי: $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \quad , \quad -\infty < t < \infty$

## נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z)=P\{Z\le z\}=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt \qquad ; \qquad \Phi(-z)=1-\Phi(z) \qquad ; \qquad Z\sim N(0,1)$$

**נוסחת האינטרפולציה:** $$\Phi(z)\approx\Phi(z_1)+\frac{z-z_1}{z_2-z_1}[\Phi(z_2)-\Phi(z_1)]$$

| $z$ | 0.0 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |

| $\Phi(z)$ | 0.50 | 0.55 | 0.60 | 0.65 | 0.70 | 0.75 | 0.80 | 0.85 | 0.90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 0.0 | 0.126 | 0.253 | 0.385 | 0.524 | 0.674 | 0.842 | 1.036 | 1.282 |
| $\Phi(z)$ | 0.91 | 0.92 | 0.93 | 0.94 | 0.95 | 0.96 | 0.97 | 0.98 | 0.99 |
| $z$ | 1.341 | 1.405 | 1.476 | 1.555 | 1.645 | 1.751 | 1.881 | 2.054 | 2.326 |