תשובה 1

א. 1. לפסוק יסודי: $h[P] = 0$

2. לכל פסוק α : $h[\sim (\alpha)] = h[\alpha] + 1$

3. לכל שני פסוקים α,β : $h[(\alpha) \to (\beta)] = h[\alpha] + h[\beta]$

ב. 1. לפסוק יסודי: $f[P] = 0$

2. לכל פסוק α : $f[\sim (\alpha)] = f[\alpha]$

3. לכל שני פסוקים α,β : $f[(\alpha) \to (\beta)] = f[\alpha] + f[\beta] + 1$

ג. 1. לפסוק יסודי: $s[P] = 0$

2. לכל פסוק α : $s[\sim (\alpha)] = s[\alpha] + 1$

3. לכל שני פסוקים α,β : $s[(\alpha) \to (\beta)] = s[\alpha] + s[\beta] + 2$

ד. ההוכחה - באינדוקציה על בניית פסוק, ונעזרת בהגדרות הרקורסיביות א-ג.

1. עבור פסוק יסודי P , השוויון מתקיים מיידית מתוך סעיף 1 של א,ב,ג.

2. נניח כי עבור α מתקיים $s[\alpha] = h[\alpha] + 2f[\alpha]$, ונראה עבור $\sim (\alpha)$:

מ- ג2 :

$$s[\sim (\alpha)] = s[\alpha] + 1$$

מההנחה עבור α :

$$= h[\alpha] + 2f[\alpha] + 1$$

ובהצבת האגפים הימניים של א2 ו-ב2 נקבל

$$= h[\sim (\alpha)] + 2f[\sim (\alpha)]$$

משמע הנוסחה נכונה גם עבור $\sim (\alpha)$.

3. נניח כי עבור α,β הנוסחה נכונה, ונחשב עבור $(\alpha) \to (\beta)$:

החישוב מקביל לגמרי צעד-צעד לנ"ל - השלימו בעצמכם.

תשובה 2

א.

A	B	$\sim B$	$A \downarrow (\sim B)$
T	T	F	**F**
T	F	T	**F**
F	T	F	**T**
F	F	T	**F**

ב. אילו הקבוצה $\{K\}$ היתה קבוצה שלמה של קשרים, אז בהינתן פסוק α הכתוב בעזרת הקשרים הרגילים, היה אפשר למצוא פסוק β, הכתוב רק בעזרת K, השקול טאוטולוגית ל- α.
השקילות הטאוטולוגית של α ו- β משמעה, שבכל אינטרפרטציה מלאה, לשני הפסוקים יש אותו ערך אמת.

יהי $\alpha = \sim A_1$ כאשר A_1 הוא פסוק יסודי. נראה שאין אף β מתאים עבורו.
בהשמה J המלאה, הנותנת לכל הפסוקים היסודיים ערך F, α מקבל ערך T.
לעומת זאת, יהי β פסוק שאינו מכיל קשרים פרט ל- K. נוכיח כי עבור J הנ"ל, $J(\beta) = \text{F}$.
נוכיח זאת באינדוקציה על עץ הבניה (עמ' 44) של β: אינדוקציה על עץ הבניה היא טכניקה נוחה להוכחת טענות על פסוקים. באינדוקציה כזו יש שני שלבים: (1) בדיקה עבור ה"עלים" של העץ, כלומר עבור פסוקים יסודיים. (2) מעבָר מצומת או זוג צמתות לצומת שמתחתיהם, במקרה שלנו מזוג פסוקים μ, ν לפסוק $\mu K \nu$ (או בכתיב אחר $K(\mu,\nu)$).

הטענה אותה נוכיח באינדוקציה על העץ היא:
כל פסוק שאינו מכיל קשרים פרט ל- K, מקבל ערך F באינטרפרטציה J שבה כל הפסוקים היסודיים שקריים.
הוכחה:
שלב 1: בדיקה: אם β יסודי, אז מהגדרת J, $J(\beta) = F$.
שלב 2: מעבר: נניח כי $J(\mu) = J(\nu) = \text{F}$. אז לפי הלוח של K, גם $J(\mu K \nu) = \text{F}$.

בכך הוכחה הטענה, ומכאן מובן כי פסוק שאינו מכיל קשרים פרט ל- K אינו יכול להיות שקול טאוטולוגית ל- α הנ"ל.

שימו לב שבהוכחה עשינו מעט מאד שימוש בלוח האמת של K. תרגיל מומלץ: הוכיחו בדומה לגמרי להוכחה הנ"ל, כי אם קשר דו-מקומי כלשהו מהווה קבוצה שלמה של קשרים, אז בשורה הראשונה בלוח האמת שלו (השורה (T,T)) מופיע F, ובשורה האחרונה בלוח האמת שלו (השורה (F,F)) מופיע T!

תשובה 3

א. נבחר פסוקים יסודיים:

L: הקמיע הוא הורקראקס

H: הארי הוא הורקראקס

V: וולדמורט מנסה לחסל הורקראקס של עצמו

W: וולדמורט נפגע

S: הקמיע הציל את הארי כשהיה תינוק

בעזרתם:

.a $L \vee H$ .b $V \to W$ .c $S \wedge W$

.d $V \leftrightarrow (L \vee H)$ .e $H \to V$ .f $L \to W$

ב. (1) נכון. נניח בשלילה **שלא** מתקיימת הגרירה הטאוטולוגית בה מדובר.

מהגדרת גרירה טאוטולוגית, זה אומר **שקיימת** אינטרפרטציה שבה b,d אמיתיים ו- f שקרי. תהי J אינטרפרטציה כזו.

מהאמור, $J(f) = \mathbf{F}$. לכן, לפי לוח האמת של "חץ", $J(L) = \mathbf{T}$, $J(W) = \mathbf{F}$.

מכך ש- $J(L) = \mathbf{T}$, וכאמור $J(d) = \mathbf{T}$, נקבל בעזרת הפסוק d ולוחות האמת של "או" ושל "חץ כפול", ש- $J(V) = \mathbf{T}$.

אבל $J(V) = \mathbf{T}$, יחד עם האמור $J(W) = \mathbf{F}$, נותן, לפי הלוח של "חץ": $J(b) = \mathbf{F}$.

זו סתירה להנחה ש- b אמיתי ב- J. הגענו לסתירה, לכן ההנחה שגויה, משמע אין אינטרפרטציה כזו. במלים אחרות, אכן מתקיים $\{b,d\} \models f$.

(2) לא נכון. למשל, באינטרפרטציה שבה W, L אמיתיים שניהם, f אמיתי, ולכן $\sim f$ שקרי. אבל $(\sim L) \to (\sim W)$ אינו שקרי אלא אמיתי באינטרפרטציה זו.

לכן $\sim f$ אינו שקול טאוטולוגית ל- $(\sim L) \to (\sim W)$.

(3) לא נכון. למשל באינטרפרטציה J שבה $J(H) = J(L) = \mathbf{F}$ ו- $J(V) = \mathbf{T}$, מתקיים $J(e) = \mathbf{T}$, $J(d) = \mathbf{F}$, ולכן e **אינו** גורר טאוטולוגית את d.

תשובה 4

ראשית שתי הערות:

(1) פסוק יכול להיות בעת ובעונה אחת בשתי הצורות הנורמליות. למשל כל פסוק יסודי הוא בצורה דיסיונקטיבית נורמלית (**צד"נ**) ובצורה קוניונקטיבית נורמלית (**צק"נ**). דוגמא נוספת: הפסוק $(A_0) \vee (A_1)$ הוא בצד"נ וגם בצק"נ (מדוע?)

(2) קיימים פסוקים שונים בעלי צד"נ השקולים זה לזה. ראשית מובן שניתן לסדר את הפסוקים המרכיבים את הדיסיונקציה בסדר כרצוננו, ובתוך כל פסוק כזה ניתן לסדר את

הפסוקים המקושרים ע"י $\wedge$ בסדר כרצוננו. ייתכנו גם שקילויות פחות טריביאליות. למשל הפסוק $((A_0)\wedge(A_1))\vee((\sim A_0)\wedge(A_1))\vee((A_0)\wedge(\sim A_1))$ הוא פסוק בצד"נ, שנבנה בעזרת לוח האמת של הפסוק $(A_0)\vee(A_1)$, שאף הוא כאמור בצד"נ. שני הפסוקים שקולים זה לזה. שקילויות דומות ייתכנו גם בין פסוקים בצק"נ.

כעת לפתרון השאלה.

את שתי הצורות הנורמליות נוכל לקבל בעזרת לוח האמת של הפסוק, ראה שאלות 2.31 , 2.33 בעמ' 62 בספר הלימוד ותשובותיהן. את לוח האמת של הפסוק הנתון בשאלה נקבל בזריזות באופן הבא: נמצא את כל המצבים בהם הפסוק מקבל ערך F:

לפי לוח האמת של $\to$, זה קורה בדיוק כאשר $(\sim P_0)\vee P_1$ אמיתי ו- $P_2\to(\sim P_0)$ שקרי.

שוב לפי לוח האמת של $\to$, $P_2\to(\sim P_0)$ שקרי בדיוק כאשר P_2 אמיתי ו- $\sim P_0$ שקרי, משמע כאשר P_2,P_0 אמיתיים שניהם. אמרנו גם כי $(\sim P_0)\vee P_1$ אמיתי, ומלוח האמת של $\vee$ יחד עם העובדה ש- $\sim P_0$ שקרי באינטרפרטציה שלנו, אנו רואים כי P_1 אמיתי באינטר' שלנו.

קיבלנו כי הפסוק שבשאלה שקרי **בדיוק** באותן אינטרפרטציות בהן P_0,P_1,P_2 אמיתיים שלושתם. לפיכך הוא אמיתי בכל האינטר' האחרות. מכאן הצורות הנורמליות, לפי השיטה שבשאלות 2.31 , 2.33 הנ"ל:

צד"נ: $\bigvee_{i=1}^{7}\alpha_i$, כאשר α_i עובר על שבעת הפסוקים שצורתם $(\pm P_0)\wedge(\pm P_1)\wedge(\pm P_2)$, כשכל סימן $\pm P_i$ מייצג אחד משני הפסוקים P_i או $\sim P_i$, והמגבלה היחידה היא שחייבת להיות לפחות הופעה אחת של $\sim$ בביטוי כולו.

צק"נ: $(\sim P_0)\vee(\sim P_1)\vee(\sim P_2)$: זוהי צק"נ, למרות שלא מופיע אף סימן $\wedge$, כשם שפסוק יסודי הוא בצק"נ! נשים לב כי פסוק זה הוא גם בצד"נ, ולפיכך הוא תשובה אפשרית לשתי הצורות המבוקשות!

איתי הראבן