מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"**

מספר השאלות: 13 | **משקל המטלה: נקודה אחת**

סמסטר: 2019א | **מועד הגשה: 28.10.2018**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות. סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה, ב - אם רק טענה 2 נכונה,

ג - אם שתי הטענות נכונות, ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

1. האמירה **המספרים 6, 7 הם מספרים זוגיים** היא פסוק.
2. הביטוי המתמטי $1+2+3+4$ הוא פסוק.

שאלה 2

1. **שלילת** הפסוק **הכד נמצא על השולחן**
היא הפסוק **הכד נמצא מתחת לשולחן**
2. **שלילת** הפסוק איציק שפך את המים מהכד
היא הפסוק איציק מילא את הכד במים

שאלה 3

1. הפסוק $1+1=2$ **וגם** $2+3>5$ הוא אמת.
2. הפסוק $1+1=2$ **או** $3+3>2$ הוא אמת.

שאלה 4

1. הפסוק **אם** $3=2$ **אז** $1+1=2$ הוא אמת.
2. הפסוק **אם** $3=2$ **אז** $10=2$ הוא אמת.

שאלה 5

1. לוח האמת של הפסוק הפורמלי $(p \to q) \vee (r \to q)$ הוא:

p	q	r	$(p \to q) \vee (r \to q)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

2. הפסוק הפורמלי $(\neg p) \wedge \neg(p \to q)$ הוא סתירה.

שאלה 6

1. הפסוק הפורמלי $\neg(p \to q)$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $p \wedge \neg q$.

2. הפסוק הפורמלי $p \leftrightarrow q$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$.

שאלה 7

1. $\neg((p \vee q) \wedge r)$ שקול טאוטולוגית ל- $((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$.

2. $p \wedge \neg(p \wedge q)$ שקול טאוטולוגית ל- $p \wedge \neg q$.

שאלה 8

1. **שלילת** הפסוק **האוכל היה חם וטעים**

   שקולה לפסוק **האוכל לא היה חם והאוכל לא היה טעים**.

2. **שלילת** הפסוק **רצחתָ וגם ירשתָ** שקולה לפסוק **לא רצחתָ או לא ירשתָ**

שאלה 9

1. מתוך הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p$ נובע טאוטולוגית הפסוק r .

2. מתוך הפסוק r נובע טאוטולוגית הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p$.

שאלה 10

1. את הפסוק "הריבוע של מספר לעולם אינו קטן מ- 0"

   אפשר לרשום כך: $\forall x \neg (x^2 < 0)$.

2. את הפסוק "קיים מספר גדול מ- 0 שהריבוע שלו הוא 9 "

   אפשר לרשום כך: $(\exists x(x > 0)) \wedge (\exists x(x^2 = 9))$.

שאלה 11

נתבונן בפסוק: **לכל מספר הגדול/שווה 0 , קיים מספר שאם נעלה אותו בריבוע נקבל את המספר המקורי.** ניתן להצרין פסוק זה כך:

1. $(\forall x\ (x \geq 0)) \to (\exists y\ (y^2 = x))$

2. $\forall x(x \geq 0 \to \exists y\ (y^2 = x))$

שאלה 12

את **שלילת** הפסוק **לכל** x **קיים** y **שהוא השורש הריבועי של** x ניתן לנסח כך:

1. **קיים** x **כך שקיים** y **שאינו השורש הריבועי של** x .

2. **לכל** x **קיים** y **שאינו השורש הריבועי של** x .

שאלה 13

נתבונן בטענה:

A: **לכל סנדלר קיים אדם, שכל הנעלים שלו עברו תיקון אצל הסנדלר הזה.**

טענה השקולה **לשלילת** A היא:

1. קיים סנדלר כך שלכל אדם יש לפחות נעל אחת שלא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

2. קיים סנדלר שמעולם לא תיקן שתי נעלים של אותו אדם.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 1**

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2019א | **מועד הגשה: 4.11.2018**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (20 נק')

שאלה זו נועדת לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות ולחדד כמה נקודות שכדאי להבינן בשלב מוקדם:

* ההבדל בין A לבין $\{A\}$ (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא A).

* מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה $\varnothing$ לבין $\{\varnothing\}$.

* ההבדל בין "x איבר של y" לבין "x חלקי ל- y".

תהיינה: $X = \{1,2\}$, $Y = \{X, \{3\}\}$, $Z = \{X\}$.

לכל אחת מהטענות הבאות קבע אם היא נכונה.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $X \in Y$ ב. $Z \in Y$ ג. $X \subseteq Y$

ד. $Z \subseteq Y$ ה. $\varnothing \in Z$ ו. $|Y| = 2$

ז. $P(X) \subseteq P(Y)$ ח. $\{\varnothing\} \subseteq P(X)$

שאלה 2 (28 נק')

א. הוכיחו: אם $X \subseteq Y$ אז $P(X) \subseteq P(Y)$.

ב. הוכיחו: $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$. נמקו היטב כל שלב בהוכחה.

(לגבי **איחוד** לא מתקיימת טענה כללית הדומה לזו שבסעיף ב': ר' החוברת "אוסף תרגילים פתורים" עמ' 1 שאלה 2 . בסעיפים הבאים נבדוק מתי בדיוק כן מתקיים שוויון כזה עבור איחוד)

ג. הוכיחו **שאם** $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$ **אז** $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

ד. הוכיחו את הכיוון ההפוך לטענה שבסעיף ג', כלומר הוכיחו ש-

אם $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ **אז** $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$.

הדרכה: נוח להוכיח סעיף זה בדרך השלילה. מהי בדיוק הנחת השלילה במקרה זה?

שאלה 3 (24 נק')

תנו **שתי הוכחות** לשוויון $A \oplus B = A' \oplus B'$. הוכחה אחת מהצורה "יהי x איבר של אגף ימין, נראה שהוא איבר של אגף שמאל ... ולהיפך...", והוכחה שניה בעזרת אלגברה של קבוצות, ללא שימוש במושג "איבר". בהוכחה הראשונה היעזרו בטענות שלמדנו בתחשיב הפסוקים כדי לעבור מביטוי לביטוי שקול. בהוכחה השניה היעזרו בטענות מפרק 1 בתורת הקבוצות.

הסימן $\oplus$ (הפרש סימטרי) מוגדר בשאלה 1.22 בכרך "תורת הקבוצות".

שאלה 4 (28 נק')

איחוד של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בהגדרה 1.6 בעמוד 12 בספר.

במלים פשוטות ההגדרה היא:

$x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ אםם x שייך **לפחות** לאחת הקבוצות A_i, כאשר i מקבל ערכים ב- I.

במלים אחרות: $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ אםם $\exists i(i \in I \wedge x \in A_i)$

חיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בעמוד 16 בספר. במלים פשוטות ההגדרה היא:

$x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ אםם x שייך **לכל** הקבוצות A_i, כאשר i מקבל ערכים ב- I.

במלים אחרות: $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ אםם $\forall i(i \in I \rightarrow x \in A_i)$

השאלה שלפניכם מתרגלת את השימוש בשני מושגים האלה.

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים (כולל 0).

לכל $n \in \mathbf{N}$, תהי $A_n = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 \le x \le 3n+1\}$, ותהי $B_n = A_{n+1} - A_n$.

(4 נק') א. חשבו את A_0, A_1, A_2, A_3 ואת B_0, B_1, B_2.

(4 נק') ב. יהי $n > 0$. רשמו במפורש את אברי הקבוצה B_n (הם תלויים כמובן ב- n)

(10 נק') ג. חשבו את $\bigcup_{1 \le n \in \mathbf{N}} B_n$. הוכיחו את תשובתכם בעזרת הכלה דו-כיוונית.

(8 נק') ד. בעזרת ההגדרות של איחוד וחיתוך כלליים בתחילת השאלה **ובעזרת כללי דה-מורגן לכמתים** $\exists, \forall$, אותם למדנו בלוגיקה, נסחו והוכיחו הכללה של כללי דה-מורגן לקבוצות, עבור **איחוד וחיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות**, שכולן חלקיות לקבוצה אוניברסלית U:

$$\bigcup_{i \in I}(A_i') = ? \quad , \quad \bigcap_{i \in I}(A_i') = ?$$

(6 נק') ה. נסמן $D_n = \mathbf{N} - B_n$. חשבו בעזרת הסעיפים הקודמים את $\bigcap_{1 \le n \in \mathbf{N}} D_n$.

מטלת מחשב (ממ״ח) 02

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 2**

מספר השאלות: 20 | **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2019א | **מועד הגשה: 12.11.2018**

את התשובות לממ״ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת״א

בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/

הממ״ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ״ח למנחה!

״רלציה״ בעברית: **יחס**.

בכל שאלה במטלה זו מופיעה טענה אחת. סמנו:

א - אם הטענה נכונה   **ב** - אם הטענה לא נכונה

שאלה 1

אם R הוא יחס מעל קבוצה A אז קיימת קבוצה $X \subseteq A$ כך ש- $R = X \times X$.

שאלה 2

אם R ו- S הם יחסים מעל קבוצה A, גם $R \times S$ הוא יחס מעל הקבוצה A.

שאלה 3

אם R הוא יחס מעל קבוצה A אז $R \times A$ הוא יחס מעל $A \times A$

שאלה 4

אם R ו- S הם יחסים מעל קבוצה A גם ההפרש הסימטרי $R \oplus S$ הוא יחס מעל הקבוצה A.
(ראו בשאלה 1.22 בכרך ״תורת הקבוצות״.)

שאלה 5

$X \subseteq A$, אם $R = X \times X'$ ואם $R \neq \varnothing$, אז $Domain(R) \cup Range(R) = A$.

שאלה 6

אם R הוא יחס מעל קבוצה A ואם $Domain(R) \cap Range(R) = \varnothing$ אז קיימת קבוצה $X \subseteq A$
כך ש- $R \subseteq X \times X'$.

שאלה 7

אם R הוא יחס מעל קבוצה A אז $R^{-1}R = I_A$ אם ורק אם $Range(R) = A$.

שאלה 8

אם R הוא יחס מעל קבוצה A ואם $RR^{-1} = I_A$ אז $Range(R) = A$.

בשאלות 9-15 נתייחס ליחסים $R = \{(n, n+1) | 1 \le n \le 4\}$ ו- $S = R \cup R^{-1}$ מעל הקבוצה $A = \{1,2,3,4,5\}$

שאלה 9

RR^{-1} רפלקסיבי.

שאלה 10

S^2 רפלקסיבי

שאלה 11

$R^k \ne \varnothing$ לכל $k \ge 1$ טבעי.

שאלה 12

$S^k \ne \varnothing$ לכל $k \ge 1$ טבעי.

שאלה 13

$R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$ טרנזיטיבית

שאלה 14

$I_A \cup R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$ סדר חלקי מעל A

שאלה 15

$S \cup S^2 \cup S^3 \cup S^4$ יחס שקילות מעל A

שאלה 16

אם R, S הם יחסים סימטריים מעל קבוצה A אז גם $R \cup S$ יחס סימטרי.

שאלה 17

אם R, S הם יחסים אנטי-סימטריים מעל A אז גם $R \cup S$ יחס אנטי-סימטרי.

בשאלות 18-20 R הוא יחס מעל A קבוצת המספרים הטבעיים ש**אינם מתחלקים** ב- 3 המוגדר כך: $(m,n) \in R$ אם ורק אם $3 | m+n$.

שאלה 18

R רפלקסיבי

שאלה 19

R^2 רפלקסיבי

שאלה 20

R^2 טרנזיטיבי

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" פרקים 2-3**
מספר השאלות: 20 | **משקל המטלה: 2 נקודות**
סמסטר: 2019א | **מועד הגשה: 20.11.2018**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

הערה: כל הפונקציות במטלה זו הן פונקציות **של**, כלומר **מלאות** (לא פונקציות חלקיות**!**).
בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: **א** - אם הטענה נכונה ; **ב** - אם הטענה לא נכונה

שאלה 1

לכל יחס שקילות מעל $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ יש מחלקה שבה מספר האיברים הוא אי-זוגי.

שאלה 2

לכל יחס שקילות מעל $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ יש מחלקה שבה מספר האיברים הוא אי- זוגי.

שאלה 3

אם R הוא יחס רפלקסיבי סימטרי ומעל הקבוצה $A = \{1,2\}$ אז R הוא יחס שקילות

שאלה 4

אם R הוא יחס רפלקסיבי סימטרי ומעל הקבוצה $A = \{1,2,3\}$ אז R הוא יחס שקילות

שאלה 5

אם R הוא יחס רפלקסיבי סימטרי ומעל הקבוצה $A = \{1,2,3\}$ אז R^2 הוא יחס שקילות

בשאלות 7,6 R הוא יחס שקילות מעל הקבוצה $A = \{1,2,3,4,5\}$.

ידוע שלכל $m,n \in A$, **אם** mRn **ואם** $m+n$ זוגי **אז** $m=n$.

שאלה 6

מספר האיברים בכל מחלקה של R הוא 2 לכל היותר

שאלה 7

לכל יחס R מסוג זה יש מחלקת שקילות בעלת איבר אחד שהוא מספר זוגי.

בשאלות 8-11 S הוא יחס על קבוצת השלמים $\mathbf{Z}$ המקיים: $(n,m) \in S$ אםם $m^2+m = n^2+n$

שאלה 8

S הוא יחס שקילות על $\mathbf{Z}$.

שאלה 9

אם S יחס שקילות, אז בכל המחלקות שלו יש אותו מספר איברים.

שאלה 10

קיימים מספרים זוגיים **שונים** $m,n \in \mathbf{Z}$ כך ש- $(n,m) \in S$

שאלה 11

לכל $n \in \mathbf{Z}$, $(-n-1,n) \in S^2$

שאלה 12

הפונקציה $f: P(\mathbf{N}) \to P(\mathbf{N})$ המוגדרת ע״י $f(X) = X - \{1\}$ לכל $X \in P(\mathbf{N})$ היא חד- חד-ערכית.

שאלה 13

הפונקציה $f: P(\mathbf{N}) \to P(\mathbf{N})$ המוגדרת ע״י $f(X) = X - \{1\}$ לכל $X \in P(\mathbf{N})$ היא על.

בשאלות 14-17 נתונה הפונקציות $f: \mathbf{Q} - \{1\} \to \mathbf{Q}$ ו- $g: \mathbf{Q} - \{1\} \to \mathbf{Q} - \{1\}$ המוגדרות על-ידי $f(x) = g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ לכל $x \in \mathbf{Q} - \{1\}$. ($\mathbf{Q}$ היא קבוצת המספרים הרציונליים)

שאלה 14

f היא חד- חד-ערכית.

שאלה 15

f היא על.

שאלה 16

g היא על.

שאלה 17

gg היא על.

שאלה 18

אם R הוא יחס סדר מעל קבוצה A אז $R = R^2$.

שאלה 19

מספר יחסי הסדר מעל $A = \{1,2,3\}$ שבהם יש בדיוק שני איברים מקסימליים

שווה למספר יחסי הסדר מעל A שבהם קיים איבר גדול ביותר.

שאלה 20

מספר יחסי הסדר **הלא** מלאים מעל $A = \{1,2,3,4\}$ שבהם יש איבר מינימלי יחיד ואיבר מקסימלי יחיד הוא 8

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 2- 3**

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2019א | **מועד הגשה: 26.11.2018**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

"רלציה" בעברית: **יחס**

שאלה 1 (28 נקודות)

על קבוצת המספרים $A=\{1,2,3,...,20\}$ מגדירים שני יחסים, R,S כך:

xRy אם"ם קיים מספר **טבעי** i כך ש- $\frac{y}{x}=2^i$. xSy אם"ם קיים מספר **שלם** j כך ש- $\frac{y}{x}=2^j$.

א. הוכיחו שאחד משני היחסים הוא יחס שקילות.

ב. מיצאו את מחלקות השקילות של יחס השקילות שגיליתם בסעיף א'.

ג. הוכיחו שאחד משני היחסים הוא סדר חלקי.

ד. מיצאו את האיברים המינימליים ואת האיברים המקסימליים לגבי היחס האחרון

שאלה 2 (28 נקודות)

יהי R הסדר המלא הרגיל על קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbf{N}$. במילים אחרות: לכל $x,y\in\mathbf{N}$,

xRy אם ורק אם $x\le y$.

נניח בנוסף ש- $m\notin\mathbf{N}$ ונסמן: $S=\begin{pmatrix}0 & m\\ m & m\end{pmatrix}$

א. מיצאו את RS , את SR ואת $(R\cup S)^2$

ב. הוכיחו ש- $R\cup S$ הוא סדר חלקי על $\mathbf{N}\cup\{m\}$

ג. האם קיים איבר מקסימלי לגבי הסדר $R\cup S$? האם הוא מקסימלי יחיד?

ד. האם קיים איבר גדול ביותר לגבי הסדר $R\cup S$? נמקו את התשובה.

שאלה 3 (28 נקודות)

הגדרה: מספר טבעי חיובי נקרא **ראשוני** (prime) אם הוא שונה מ- 1, ומתחלק ללא שארית רק בעצמו וב- 1. כבר ליוונים היה ידוע שקבוצת המספרים הראשוניים היא אינסופית.

שימו לב ש- 1 אינו נחשב ראשוני. קבוצת הראשוניים "מתחילה" כך: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

משפט ידוע קובע שכל מספר טבעי הגדול מ- 1 ניתן להצגה כמכפלה של מספרים ראשוניים, ויש רק דרך אחת להציג אותו כך, עד כדי החלפת סדר הגורמים במכפלה (מה היה מתקלקל במשפט זה אילו 1 היה נחשב ראשוני?). נסמן ב- K את קבוצת המספרים הראשוניים.

נסמן $M = \mathbf{N} - \{0,1\}$. תהי $f : M \to P(K)$ הפונקציה המתאימה לכל $n \in M$ את **קבוצת** הגורמים הראשוניים של n (המספרים הראשוניים בהם n מתחלק ללא שארית).

למשל $f(140) = \{2,5,7\}$. (המשך השאלה בעמ' הבא)

א. האם f היא חד-חד-ערכית? ב. האם f היא **על** $P(K)$?

בהמשך לאמור, הפונקציה f מחלקת את M למחלקות שקילות, בעזרת התנאי: n,m שייכים לאותה מחלקה אםם $f(n) = f(m)$. ראו הסעיף "העתק טבעי" בעמ' 84 בספר, וראו הסבר מפורט יותר באתר הקורס, מאגר המשאבים, עזרים ללמידה - "יחס שקילות המושרה על-ידי פונקציה". המשך השאלה מתייחס לחלוקה זו.

ג. מיהם כל המספרים הנמצאים באותה מחלקה עם המספר 125 ?

ד. מיהם כל המספרים הנמצאים באותה מחלקה עם המספר 20 ?

שאלה 4

א. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי יהי $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

ב. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי קיים מספר טבעי k ומספרים $a_0, a_1, ..., a_k \in \{0,1\}$ כך ש- $n = \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 4-5**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2019א **מועד הגשה: 4.12.2018**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

חלק ממטלה זו מסתמך על החוברת "פרק 5" שנמצאת בידיכם.
חוברת זו משלימה את פרק 4 בתורת הקבוצות ומחליפה חלק ממנו.

שאלה 1 (30 נקודות)

תני דוגמא לקבוצות $A,\ B$ כך ש**חמש הקבוצות** $A,\ B,\ A-B,\ A\oplus B,\ A\cup B$ שונות כולן זו מזו, אבל לכל חמש הקבוצות האלה אותה עוצמה. הוכיחי שהקבוצות שונות זו מזו והוכיחי שיש להן אותה עוצמה. **ההפרש הסימטרי** $A\oplus B$ הוגדר בפרק 1, שאלה 1.22 בעמ' 27.

שאלה 2 (35 נקודות)

א. יהי n מספר טבעי חיובי.
הראו כי קבוצת התת-קבוצות של $\mathbf{N}$ שגודלן בדיוק n, היא בת-מנייה.
הערה: קבוצת **הסדרות** באורך n מעל $\mathbf{N}$ היא כידוע בת-מנייה.
ניתן להיעזר בכך, אך שימו לב שהשאלה כאן היא על **תת-קבוצות** ולא על סדרות.

ב. הראו כי קבוצת כל התת-קבוצות הסופיות של $\mathbf{N}$ היא בת-מנייה.

ג. בלי להסתמך על פרק 5, הראו כי קבוצת כל התת-קבוצות **האינסופיות** של $\mathbf{N}$ **אינה** בת-מנייה.

ד. בעזרת פרק 5 מיצאו את עוצמת הקבוצה מהסעיף הקודם. הוכיחו את תשובתכם.

ה. הנוסחה $\left|\{X\in P(\mathbf{N})\ \mid\ |X|=n\}\right| = \aleph_0$ מביעה בכתיב פורמלי את הטענה של סעיף א'.
(i) כתבו נוסחה דומה המביעה את הטענה של סעיף ב'.
(ii) כתבו נוסחה דומה המביעה את הטענה שמצאתם בסעיף ד'.
(בכתיבת הנוסחאות אפשר להסתמך על כך שקבוצה של מספרים טבעיים, עוצמתה חייבת להיות אחד משני אלה: מספר טבעי או $\aleph_0$).

שאלה 3 (10 נקודות)

מצאו **מה לא תקין** בהגדרה הבאה.

בדומה להגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות בפרק 5, נגדיר הפרש סימטרי בין עוצמות:

תהיינה k,m עוצמות, לא בהכרח שונות זו מזו. נגדיר את $k \oplus m$ באופן הבא:

תהיינה A,B קבוצות המקיימות $|A|=k$, $|B|=m$,

נגדיר את ההפרש הסימטרי של העוצמות k,m כעוצמת ההפרש הסימטרי של הקבוצות A,B:

$k \oplus m = |A \oplus B|$.

הגדרה כזו אינה אפשרית. עליכם להסביר מה הבעיה בהגדרה, ולהראות ע"י דוגמא שההגדרה **אינה תקינה**. הדרכה: ראו ההגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות.

שימו לב: התשובה אינה יכולה להיות "ההפרש הסימטרי של העוצמות לא יוצא מה שהוא צריך להיות": לא ברור מראש מה הוא צריך להיות, ובכל מקרה מדובר בנסיון להגדיר מושג חדש.
השאלה שאתם מתבקשים לענות עליה אינה אם ההגדרה תואמת לציפיות (אם יש כאלה) אלא האם בכלל הצלחנו להגדיר כאן משהו.

שאלה 4 (25 נקודות)

(13 נק') א. יהיו k_1,k_2,m_1,m_2 עוצמות.

הוכח שאם $k_1 \le k_2$ ו- $m_1 \le m_2$ אז $k_1 \cdot m_1 \le k_2 \cdot m_2$.

(6 נק') ב.הוכח: $\aleph_0 \cdot C = C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם).

(6 נק') ג. הוכח: $C^C = 2^C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם ובמשפטים שבחוברת).

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 1-2**

מספר השאלות: 20 | **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2019א | **מועד הגשה: עד 16.12.2018**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

הערה: כל הפונקציות במטלה זו הן פונקציות מלאות

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: **א** - אם הטענה נכונה ; **ב** - אם הטענה לא נכונה

שאלה 1

אם $|A|=3^3$ ו- $|B|=3$ אז מספר הפונקציות מ- A ל- B שווה למספר הפונקציות מ- B ל- A.

שאלה 2

תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. מספר הפונקציות מ- A ל- A המעתיקות מספרים זוגיים למספרים זוגיים הוא 18^3

שאלה 3

תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. מספר הפונקציות מ- A ל- A המעתיקות כל מספר של A לאחד המחלקים של אותו מספר הוא $2^3 3^2$

שאלה 4

תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות מ- A ל- A המעתיקות מספרים זוגיים למספרים זוגיים שווה למספר הפונקציות מ- $\{1,2\}$ ל- A.

שאלה 5

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות מהקבוצה $\{1,2,3,4,5\}$ לעצמה המעתיקות את 1 למספר שונה מ- 1 הוא $5!-4!$

שאלה 6

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות מהקבוצה $\{1,2,3,4,5\}$ לעצמה המעתיקות את 1 למספר שונה מ- 1 ואת 2 למספר שונה מ- 2 הוא $5!-2\cdot 4!$

שאלה 7

מספר הפונקציות מ- $A=\{1,2,3,4\}$ **על** $B=\{1,2,3\}$ הוא $3^4-3\cdot 2^4$.

שאלה 8

מספר הקבוצות החלקיות ל- $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ שבהן יש לפחות 3 איברים שווה למספר הקבוצות החלקיות ל- A שבהן יש לכל היותר 3 אברים.

שאלה 9

מספר החלוקות השונות של הקבוצה $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ למחלקות בנות 3 איברים כל אחת שווה למספר כל הבחירות האפשריות של קבוצה בעלת 3 איברים מתוך A .

שאלה 10

מספר הסידורים השונים של המחרוזת AAABBC גדול ממספר הסידורים השונים של המחרוזת AABBCC

שאלה 11

מספר הסידורים השונים של המחרוזת AABBCC שבהן לא מופיע הרצף AA גדול ממספר הסידורים שלה שבהם מופיע הרצף AA .

שאלה 12

מספר הסידורים השונים של המחרוזת AABBCC שווה למספר החלוקות של הקבוצה $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ל- 3 מחלקות בנות 2 איברים כל אחת.

שאלה 13

מספר הסידורים השונים של המחרוזת AABBCC שווה למספר הדרכים שבהן יכולים 6 תלמידים להגיש 3 עבודות שונות בזוגות.

שאלה 14

מספר הדרכים לפיזור 3 כדורים זהים ב- 4 תאים שונים שווה למספר הדרכים השונות לפיזור 4 כדורים זהים ב- 3 תאים שונים.

שאלה 15

מספר הדרכים לפיזור 4 כדורים זהים ב- 4 תאים שונים שווה למספר הדרכים השונות לפיזור 3 כדורים זהים ב- 5 תאים שונים.

שאלה 16

מספר הדרכים לפיזור 4 כדורים שונים ב- 4 תאים שונים גדול פי 16 ממספר הדרכים לפיזור 4 כדורים זהים ב- 4 תאים שונים.

שאלה 17

מספר הדרכים לפיזור 4 כדורים שונים ב- 4 תאים זהים הוא קטן מ- 10.

שאלה 18

מספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$ שווה למספר הפתרונות השלמים החיוביים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$

שאלה 19

מספר הפתרונות בטבעיים זוגיים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$ שווה למספר הפתרונות בטבעיים אי-זוגיים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$

שאלה 20

מספר הפתרונות בשלמים שהם 1 או 1- לאי-שוויון $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0$ הוא 10.

מטלת מנחה (ממ״ן) 14

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 5,4,3**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2019א **מועד הגשה: 25.12.2018**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1

נסמן $B_0 = 1$ ולכל $n > 0$ טבעי נסמן ב- B_n את מספר החלוקות השונות של הקבוצה $\{1,2,...,n\}$.

(חלוקה היא קבוצה של קבוצות חלקיות לא ריקות וזרות זו לזו שאיחודן הוא $\{1,2,...,n\}$)

א. יהי $0 \le k < n+1$. הביעו בעזרת B_{n-k} את מספר החלוקות של הקבוצה $\{1,2,...,n,n+1\}$ שבהן למחלקה של 1 יש בדיוק $k+1$ איברים.

ב. הוכיחו ש- $B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

ג. היעזרו בנוסחה מסעיף ב׳ ומיצאו את מספר יחסי השקילות השונים שניתן להגדיר על הקבוצה בעלת 6 איברים.

שאלה 2 (25 נק׳)

(כל הפונקציות בשאלה זו הן מלאות, כלומר מוגדרות על כל איברי התחום)

תהי A קבוצה בעלת n איברים ותהי $B = \{0,1,2,3\}$.

א. מיצאו את מספר הפונקציות f מ- A ל- B המקיימות $\{1,2,3\} \subseteq Range(f)$

ב. מיצאו את מספר השלשות הסדורות (A_1, A_2, A_3) כך ש- A_1, A_2, A_3 קבוצות לא ריקות שחלקיות ל- A וזרות זו לזו. רמז: לכל שלשה (A_1, A_2, A_3) התאימו פונקציה f מ- A ל- B כך ש- $f(x) = i$ אם $x \in A_i$ (עבור כל $1 \le i \le 3$) ו- $f(x) = 0$ אחרת.

ג. בכמה דרכים אפשר לבחור שלוש קבוצות לא ריקות של איברים מתוך A שהן זרות זו לזו, כאשר אין חשיבות לסדר הקבוצות שבחרנו.

שאלה 3 (25 נק׳)

מצאו כמה מספרים שלמים n, $1 \le n \le 7770$, הם בעלי התכונה:

n מתחלק ב- 7, והוא **<u>אינו</u>** מתחלק באף מספר טבעי k המקיים $2 \le k \le 10 \ \wedge \ k \ne 7$.

הצעה: לפני שמסתערים על החישוב כדאי להקדיש כמה דקות לפשֵט את השאלה.

שאלה 4 (25 נק׳)

(15 נק׳) א. מתוך 2000 המספרים שבתחום $1 \le n \le 2000$ מישהו בחר 1001 מספרים שונים. הוכיחו שבקבוצת 1001 המספרים שנבחרו, בהכרח יש שני אברים שונים x,y כך ש- y מתחלק ב- x ללא שארית.

הדרכה: כל מספר טבעי חיובי n ניתן להציג באופן יחיד כך: $n = 2^k \cdot b$, כאשר k טבעי (יכול להיות 0), ו- b הוא **אי-זוגי**: פשוט מוציאים כגורם מתוך n את החזקה הגדולה ביותר של 2 אשר בה n מתחלק ללא שארית. אחרי שנחלק את n בחזקה הזו של 2 , נקבל מספר אי-זוגי, אחרת היה אפשר להמשיך ולחלק ב- 2.

k הוא אפוא מספר הפעמים בו ניתן לחלק את n ב- 2 כך שיתקבל מספר שלם.

b הוא התוצאה של החילוק הזה.

דוגמאות: $15 = 2^0 \cdot 15$, $72 = 2^3 \cdot 9$, $1024 = 2^{10} \cdot 1$.

בשאלה שלנו נתאים לכל n את המספר b שמתקבל ממנו, ונחשוב קצת מה זה אומר.

(10 נק׳) ב. אדם פזיז ניסה ליישם את ההוכחה של סעיף א׳ על בחירה של 1001 מספרים שונים מתוך 2000 המספרים שבתחום $2001 \le n \le 4000$. הוא טען שגם במקרה זה בקבוצת 1001 המספרים שנבחרו, בהכרח חייבים להיות שני אברים שונים a,b כך ש- a מתחלק ב- b ללא שארית. הוא הוכיח זאת באותה דרך של סעיף א׳. מצאו את הטעות בהוכחה במקרה זה (אין הכרח למצוא דוגמא נגדית לטענה, אתם מתבקשים רק להסביר מדוע אותה הוכחה לא עובדת במקרה זה).

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20476 מתמטיקה דיסקרטית **חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 6-7**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2019א **מועד הגשה: 3.1.2019**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (25 נקי)

יהי $k \geq 1$ טבעי ויהי a_n מספר הסדרות באורך n, שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,...,2k\}$ אשר אין בהן הופעה של מספרים זוגיים סמוכים זה לזה.

דוגמה לסדרה **מותרת** באורך 5 כאשר $k=10$: $(7)(8)(15)(13)(12)$.

דוגמה לסדרה **אסורה** באורך 5 כאשר $k=10$: $(18)(8)(15)(13)(12)$.

(10 נקי) א. רישמו בעזרת חישוב ישיר את a_0, a_1, a_2. רישמו יחס נסיגה עבור a_n .
בדקי שהערכים שרשמת עבור a_0, a_1, a_2 מתאימים ליחס הנסיגה.

(15 נקי) ב. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n .
ביטויים כגון $\sqrt{m}$ כאשר m אינו ריבוע, יש להשאיר כפי שהם.

שאר הממ"ן עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בסוף הממ"ן רשימה של נוסחאות שימושיות.

שאלה 2 (25 נקי)

תהי $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. נתון ש- $f(x)(1+2x+2x^2+x^3) = \dfrac{1}{(1-x)^3}$

(5 נקי) א. חשבו את a_0, a_1, a_2 .

(10 נקי) ב. מצאו מספרים r,s,t כך ש- $a_n = D(3,n) - ra_{n-1} - sa_{n-2} - ta_{n-3}$ לכל $n \geq 3$. חשבו את a_7 בעזרת הנוסחה הזו.

(10 נקי) ג. רשמו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות השלמים של המשוואה $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = n$. מצאו את מספר הפתרונות במקרה ש- $n = 7$
(רמז: שימו לב לקשר שבין $f(x)$ לבין הפונקציה מסעיף ג')

שאלה 3 (20 נק׳)

מצאו את מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$,

כאשר 3 מהמשתנים הם מספרים טבעיים **זוגיים**,

3 המשתנים האחרים הם מספרים טבעיים **אי-זוגיים**,

ואף אחד מהמשתנים אינו שווה 0 ואינו שווה 1 .

לא נתון איזה מהמשתנים הם זוגיים ואיזה אי-זוגיים.

אפשר לפתור בעזרת פונקציה יוצרת ואפשר בדרך אחרת. **יש להגיע לתשובה סופית מספרית**.

שאלה 4 (30 נק׳)

דוגמא לתרגיל מסוג זה נמצאת בסוף הקובץ "מבוא לפונקציות יוצרות" שבאתר הקורס.

(10 נק׳) א. נרשום את הפיתוחים הבאים :

$$f(x) = (1-x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \qquad g(x) = (1+x+x^2)^n = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

מצאו את a_i לכל i טבעי ואת b_4 . (רמז : $1+x+x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$)

(10 נק׳) ב. חשבו את המקדם של x^7 בפיתוח של הפונקציה $h(x) = (1+x+x^2)^n (1-x^3)^m$

כאשר $m, n \in \mathbf{N}$.

(10 נק׳) ג. היעזרו בפונקציה כמו בסעיף ב׳ וחשבו את מספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} + y_1 + y_2 + \cdots + y_5 = 7$$

כאשר $0 \le x_i \le 2$ לכל $1 \le i \le 10$ ו- y_i מתחלק ב- 3 לכל $1 \le i \le 5$

להלן כמה נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות :

***(i)*!** סכום טור הנדסי סופי : $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ואינסופי : $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

***(ii)*!** כפל פונקציות יוצרות :

אם $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, ו- $f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

אז $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד).

***(iii)*!** $\frac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+\ldots)^n = \sum_{k=0}^{\infty} D(n,k) x^k$ (במלים אחרות : המקדם של x^k

בפיתוח הביטוי $\frac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$. ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ׳ 129 בספר).

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: "תורת הגרפים" פרקים 1- 3**

מספר השאלות: 20 | **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2019א | **מועד הגשה: 13.1.2019**

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א

בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/

הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: **א** - אם הטענה נכונה ; **ב** - אם הטענה לא נכונה

שאלה 1

קיים גרף פשוט על 7 צמתים, בעלי דרגות 3,3,3,3,5,6,4

שאלה 2

קיים גרף על 7 צמתים בעלי דרגות 3,3,3,3,5,6,8

שאלה 3

קיים גרף פשוט על 7 צמתים בעלי דרגות 2,2,2,2,2,6,6

שאלה 4

קיים גרף על 7 צמתים בעלי דרגות 1,1,3,3,2,6,6

שאלה 5

אם בגרף פשוט על **7** צמתים הדרגה של כל צומת היא לפחות 2 אז הגרף הוא קשיר

שאלה 6

אם בגרף פשוט על **7** צמתים הדרגה של כל צומת היא לפחות 3 אז הגרף הוא קשיר

שאלה 7

אם בגרף פשוט על **8** צמתים הדרגה של כל צומת היא לפחות 3 אז הגרף הוא קשיר

שאלה 8

בגרף פשוט ולא קשיר על **7** צמתים יש לכל היותר 15 קשתות.

שאלה 9

אם G הוא גרף דו-צדדי אז הגרף המשלים $\overline{G}$ הוא דו-צדדי.

שאלה 10

אם G הוא גרף דו-צדדי אז הגרף המשלים $\overline{G}$ אינו דו-צדדי.

שאלה 11

אם בעץ T על 6 צמתים יש 3 עלים אז ב- T קיים צומת בעל דרגה 3.

שאלה 12

אם סכום דרגות הצמתים בעץ T הוא 10 אז T הוא עץ על 6 צמתים.

שאלה 13

העצים **המתוייגים** בעלי סדרות פרופר $(2,2,4,5,5)$ ו- $(4,2,2,5,4)$ הם איזומורפיים
(לפי הגדרה 2.8)

שאלה 14

העצים בעלי סדרות פרופר $(2,2,4,5,5)$ ו- $(4,2,2,5,4)$ הם איזומורפיים כגרפים **לא מתוייגים**.
(לפי הגדרה 2.7)

שאלה 15

בכל עץ בעל שני עלים בלבד יש מסלול אוילר

שאלה 16

אם G הוא גרף אוילרי דו-צדדי אז מספר הצמתים של G הוא זוגי.

שאלה 17

אם G הוא גרף אוילרי בעל מספר זוגי של הצמתים אז G הוא גרף דו-צדדי.

שאלה 18

אם G הוא גרף פשוט על 7 צמתים שבו דרגות הצמתים הן $3,3,3,3,4,4,4$ אז G המילטוני.

שאלה 19

אם G הוא גרף פשוט על 7 צמתים שבו דרגות הצמתים הן $2,2,2,2,2,3,3$ אז G לא המילטוני.

שאלה 20

קיים G גרף פשוט על 7 צמתים לא המילטוני שבו דרגות הצמתים הן $2,2,2,2,2,3,3$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20476 – מתמטיקה בדידה

חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים – כל היחידה

מספר השאלות: 4   **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2019א   **מועד הגשה: 23.1.2019**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (30 נקודות)

נתון $T = (V, E)$, עץ על n צמתים שבו יש בדיוק 3 עלים. נתון ש- $n \ge 4$.

א. הוכיחו שב- T יש בדיוק צומת אחד בעל דרגה 3.(הדרכה: ניתן להוכיח בדרך השלילה שחייב להיות צומת כזה, אך לא יותר מאחד).

ב. הוכיחו שלכל $v \in V$, אם $d_T(v) \ne 1,3$ אז $d_T(v) = 2$.

ג. הוכיחו שהגרף המשלים $\overline{T}$ אינו אוילרי.

ד. הוכיחו שבגרף המשלים $\overline{T}$ קיים מסלול אוילר אם ורק אם $n = 6$.

ה. הוכיחו שלכל $n \ge 7$ הגרף המשלים $\overline{T}$ הוא המילטוני

שאלה 2 (30 נקודות)

בשאלה זו נתייחס לכל העצים T בעלי 10 צמתים המתויגים במספרים $1,2,3,\ldots,10$ שבהם 4 עלים המתויגים ב- $1,2,3,4$ (ייתכנו עוד צמתים שהם עלים)

א. מיצאו את העצים T בעלי סדרת פרופר $(5,5,6,6,7,7,8,8)$ ו- $(5,6,7,8,9,10,9,8)$.

ב. מיצאו את מספר העצים T המקיימים את תנאי השאלה.

ג. מיצאו את מספר העצים T, שבהם העלים הם $1,2,3,4$ בלבד (אין עלים נוספים)

ד. הוכיחו שלעץ T בעל סדרת פרופר $(5,5,6,6,7,7,8,8)$ אין זיווג מושלם.

שאלה 3 (20 נקודות)

G הוא גרף **דו-צדדי מלא** על 7 צמתים. ידוע ש- G הוא גרף **מישורי** ושקיים בו **מסלול אוילר**.

א. מיצאו את מספר הצלעות של G. נמקו את התשובה.

ב. מיצאו את מספר הפאות של G. נמקו את התשובה.

ג. מיצאו את מספר הצביעה של G. נמקו את התשובה.

שאלה 4 (20 נקודות)

בגרף **מישורי פשוט** G קיים **מסלול אוילר** באורך 9.

ידוע ש- u,v הם צמתים לא סמוכים ב- G וידוע שהגרף $G \cup \{uv\}$ (המתקבל מ- G לאחר הוספת הקשת uv) אינו גרף משורי. **הוכיחו או הפריכו** כל אחת מן הטענות הבאות:

א. קיים גרף G על 5 צמתים שמקיים את תנאיי השאלה

ב. קיים גרף G על 6 צמתים שמקיים את תנאיי השאלה