שאלה 1

א. נסמן ב- Y את מספר הפגיעות המוצלחות של הצלף.

היריות של הצלף בלתי-תלויות זו בזו, ולכן $Y \sim B(n, p)$.

כעת, אם הצלף פוגע Y פגיעות מוצלחות ב- n היריות, אז הוא מחטיא אותה $n - Y$ פעמים.

לכן, ההפרש בין מספר הפגיעות המוצלחות שלו למספר ההחטאות שלו הוא:

$$X = Y - (n - Y) = 2Y - n$$

ומכאן מקבלים:

$$P\{X = i\} = P\{2Y - n = i\} = P\left\{Y = \tfrac{i+n}{2}\right\} = \binom{n}{\frac{i+n}{2}} p^{\frac{i+n}{2}}(1-p)^{n-\frac{i+n}{2}} \qquad , \qquad i = -n, -n+2, \ldots, n-2, n$$

וגם:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(2Y - n) = 2^2\,\mathrm{Var}(Y) = 4np(1-p)$$

ב. אם X_i מסמן את מספר היריות של צלף i, לכל $i = 1,2$, והיריות של כל צלף בל תי-תלויות זו בזו, אז $X_i \sim Geo(p)$, לכל $i = 1,2$.

נחשב תחילה את פונקציית ההסתברות של Y למקרה שבו הוא מקבל ערך **אי-שלילי**. כלומר, למקרה שבו $X_1 - X_2 \ge 0$, או לחלופין $X_1 \ge X_2$. לכל $j = 0,1,\ldots$ מתקיים:

$$P\{Y = j\} = P\{X_1 - X_2 = j\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X_2 = i, X_1 = i + j\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X_2 = i\}P\{X_1 = i + j\}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1}p(1-p)^{i+j-1}p = p^2(1-p)^j\sum_{i=1}^{\infty}[(1-p)^2]^{i-1} = \frac{p^2(1-p)^j}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)^j}{2-p}$$

כלומר:

$$P\{Y = j\} = \frac{p(1-p)^j}{2-p} = \frac{0.5^{j+1}}{1.5} = \frac{0.5^j}{3} = \frac{0.5^{|j|}}{3} \qquad , \qquad j = 0,1,2,\ldots$$

עתה, נחשב את פונקציית ההסתברות של Y למקרה שבו הוא מקבל ערך **שלילי**. כלומר, למקרה שבו $X_1 - X_2 < 0$, או לחלופין $X_1 < X_2$. לכל $j = -1,-2,\ldots$ מתקיים:

$$P\{Y = j\} = P\{X_1 - X_2 = j\} \overset{\overset{j<0}{\uparrow}}{=} P\{X_2 - X_1 = -j\} \overset{\overset{-j>0}{\uparrow}}{=} \frac{p(1-p)^{-j}}{2-p} = \frac{0.5^{-j}}{3} = \frac{0.5^{|j|}}{3} \qquad , \qquad j = -1,-2,\ldots$$

כאשר התוצאה האחרונה נובעת מהמקרה הראשון שחושב, הואיל שקיימת סימטריה בין שני המשתנים המקריים, מבחינת תנאי הבעיה.

שאלה 2

א. ההתפלגות של X היא גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{2}{3}$;

ההתפלגות של $Y \mid X = i$ היא בינומית-שלילית עם הפרמטרים i ו- $\frac{2}{3}$.

לכן, לכל i ו- j שלמים וחיוביים, המקיימים $1 \le i \le j$, מתקיים:

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j \mid X=i\}P\{X=i\}=\binom{j-1}{i-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^{j-i}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}\frac{2}{3}=\binom{j-1}{i-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}$$

ב. אפשר לראות שהמשתנים המקריים X ו- Y תלויים, מהשוואה בין ההתפלגות השולית של Y (שמחושבת בסעיף ד) להתפלגות המותנית של Y בהינתן $X = i$. ההתפלגויות שונות ולכן המשתנים תלויים.

אולם, אפשר גם להראות שתנאי האי-תלות אינו מתקיים:

$$0=P\{X=2,Y=1\}\neq P\{X=2\}P\{Y=1\}>0$$

ג. $$P\{X=Y\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=i,Y=i\}=\sum_{i=1}^{\infty}\binom{i-1}{i-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)^{i-1}=\frac{4}{9}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^{i-1}=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{9}}=\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{7}=\frac{4}{7}$$

ד. לכל j שלם וחיובי, מתקיים:

$$P\{Y=j\}=\sum_{i=1}^{j}P\{X=i,Y=j\}=\sum_{i=1}^{j}\binom{j-1}{i-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\sum_{i=1}^{j}\binom{j-1}{i-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j-1}{i}\left(\frac{2}{3}\right)^{i}=\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}+1\right)^{j-1}=\left(\frac{5}{9}\right)^{j-1}\frac{4}{9}$$

מהתוצאה שקיבלנו אפשר לראות שההתפלגות של Y היא גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{4}{9}$.

שאלה 3

א. $$P\{S_1<T\}=\int_0^{\infty}\int_s^{\infty}f_{S_1,T}(s,t)\,dt\,ds=\int_0^{\infty}\int_s^{\infty}\lambda e^{-\lambda s}\mu e^{-\mu t}\,dt\,ds=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda s}\underbrace{\int_s^{\infty}\mu e^{-\mu t}\,dt}_{=P\{T>s\}}\,ds$$

$$=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda s}e^{-\mu s}\,ds=\int_0^{\infty}\lambda e^{-(\lambda+\mu)s}\,ds=\left.\frac{-\lambda e^{-(\lambda+\mu)s}}{\lambda+\mu}\right|_0^{\infty}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

ב. נשתמש באי-התלות בין שני המשתנים המקריים T , S_1 ונקבל:

$$\rho(S_1,T-S_1)=\frac{\mathrm{Cov}(S_1,T-S_1)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_1)\mathrm{Var}(T-S_1)}}=\frac{\overbrace{\mathrm{Cov}(S_1,T)}^{=0}-\mathrm{Var}(S_1)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_1)[\mathrm{Var}(T)+\mathrm{Var}(S_1)]}}$$

$$=-\sqrt{\frac{\mathrm{Var}(S_1)}{\mathrm{Var}(T)+\mathrm{Var}(S_1)}}=-\sqrt{\frac{\frac{1}{\lambda^2}}{\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{\lambda^2}}}=-\sqrt{\frac{\mu^2}{\mu^2+\lambda^2}}=\frac{-\mu}{\sqrt{\mu^2+\lambda^2}}$$

ג. הזמן החולף מרגע פתיחת הבנק ועד לתחילת השירות של הלקוח השני הוא: $\max\{S_1,T\}$

לפיכך, הזמן שיחלוף מפתיחת הבנק ועד לסיום השירות של הלקוח השני הוא: $\max\{S_1,T\}+S_2$

נמצא תחילה את פונקציית ההתפלגות המצטברת של $M=\max\{S_1,T\}$, ממנה נמצא את פונקציית הצפיפות של M, ולבסוף את התוחלת של M. לכל $a>0$ מתקיים:

$$F_M(a)=P\{\max(S_1,T)\le a\}=P\{S_1\le a,T\le a\}=P\{S_1\le a\}P\{T\le a\}=(1-e^{-\lambda a})(1-e^{-\mu a})$$

ולאחר גזירה נקבל כי: $f_M(a)=\lambda e^{-\lambda a}+\mu e^{-\mu a}-(\lambda+\mu)e^{-(\mu+\lambda)a} \quad , \quad a>0$

לכן:
$$E[M]=\int_0^\infty a\,f_M(a)da=\underbrace{\int_0^\infty a\lambda e^{-\lambda a}da}_{=E[Exp(\lambda)]}+\underbrace{\int_0^\infty a\mu e^{-\mu a}da}_{=E[Exp(\mu)]}-\underbrace{\int_0^\infty(\lambda+\mu)ae^{-(\mu+\lambda)a}da}_{=E[Exp(\lambda+\mu)]}=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda+\mu}$$

ומכאן מקבלים:
$$E[\max\{S_1,T\}+S_2]=E[M+S_2]=E[M]+E[S_2]=\frac{2}{\lambda}+\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda+\mu}$$

הערה: כדי לפתור את הסעיף אי- אפשר להתנות ביחס (גדול-קטן) בין T ל- S_1 ולהשתמש בהסתברות שחושבה בסעיף א, מכיוון שהתוחלת המותנית במאורע כזה איננה התוחלת המעריכית הרגילה.

כלומר:
$$E[\max\{S_1,T\}]=E[\max\{S_1,T\}|T>S_1]P\{T>S_1\}+E[\max\{S_1,T\}|T<S_1]P\{T<S_1\}$$
$$=E[T|T>S_1]P\{T>S_1\}+E[S_1|T<S_1]P\{T<S_1\}$$

ושתי התוחלות המותנות האחרונות שונות מ- $E[T]$ ומ- $E[S_1]$.

שאלה 4

נסמן את המשקל (בק"ג) של דלעת מקרית ב- X; ונתון כי $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

א. לפי נתוני הבעיה: $P\{X<5.7\}=\Phi\left(\frac{5.7-\mu}{\sigma}\right)=0.1587=\Phi(-1) \quad \Rightarrow \quad \mu=5.7+\sigma$

וגם: $P\{X>8.0946\}=1-\Phi\left(\frac{8.0946-\mu}{\sigma}\right)=0.2$

או לחלופין: $\Phi\left(\frac{8.0946-\mu}{\sigma}\right)=0.8=\Phi(0.842) \quad \Rightarrow \quad \mu=8.0946-0.842\sigma$

ומכאן מקבלים כי $\sigma=1.3$ ו- $\mu=7$.

ב1. $P\{X<8\}=\Phi\left(\frac{8-7}{1.3}\right)=\Phi(0.7692)=0.77916$

מכאן, שמספר הדלעות ששוקלות פחות מ-8 ק"ג הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 10 ו- 0.77916.

ולכן, ההסתברות המבוקשת היא: $\binom{10}{7}\cdot 0.77916^7\cdot 0.22084^3=0.2253$

ב2. המשקל הכולל של 10 דלעות מקריות ובלתי- תלויות הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת $10\cdot 7=70$ ושונות $10\cdot 1.3^2=16.9$. לפיכך, אם נסמן ב- W את המשקל הכולל של 10 הדלעות, נקבל:

$$P\{W>75\}=1-\Phi\left(\frac{75-70}{\sqrt{16.9}}\right)=1-\Phi(1.2163)=1-0.8881=0.1119$$

ב3.
$$P\{X<5\}=\Phi\left(\tfrac{5-7}{1.3}\right)=\Phi(-1.5385)=1-0.93802=0.06198$$
$$P\{5<X<8\}=\Phi\left(\tfrac{8-7}{1.3}\right)-\Phi\left(\tfrac{5-7}{1.3}\right)=\Phi(0.7692)-\Phi(-1.5385)=0.77916-0.06198=0.71718$$
$$P\{X>8\}=1-\Phi\left(\tfrac{8-7}{1.3}\right)=1-\Phi(0.7692)=1-0.77916=0.22084$$

נסמן ב- Y את המחיר של דלעת מקרית. לפי החישובים שלעיל מקבלים :

$$E[Y]=20\cdot 0.06198+30\cdot 0.71718+40\cdot 0.22084=31.5886$$
$$E[Y^2]=20^2\cdot 0.06198+30^2\cdot 0.71718+40^2\cdot 0.22084=1,023.598$$
$$\text{Var}(Y)=E[Y^2]-(E[Y])^2=1,023.598-31.5886^2=25.75835$$

ומכאן, הואיל ו- $S=Y_1+\ldots+Y_{10}$, כאשר ה- Y_i-ים בלתי-תלויים, מתקיים :
$$E[S]=10E[Y]=315.886$$
$$\text{Var}(S)=10\text{Var}(Y)=257.5835$$

ולפי אי-שוויון צ'בישב מקבלים את החסם :
$$P\left\{|S-E[S]|\ge 32\right\}\le\frac{257.58}{32^2}=0.2515$$

שאלה 5

א. בהטלה של שתי קוביות תקינות מתקיים : $P\{X=Y\}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

ומכאן, הואיל וקיימת סימטריה בתנאי הניסוי בין שתי הקוביות, מתקיים :

$$P(A)=P\{X<Y\}=P\{X>Y\}=\frac{1-\frac{1}{6}}{2}=\frac{5}{12}$$

כמו כן :

ב $$P(B)=P\{|X-Y|\le 2\}=1-P\{(1,6),(6,1),(1,5),(5,1),(2,6),(6,2),(1,4),(4,1),(2,5),(5,2),(3,6),(6,3)\}=1-\tfrac{12}{36}=\tfrac{2}{3}$$

. נמצא תחילה את פונקציית ההסתברות המותנית של המשתנה המקרי X במאורע A .

לכל $i=1,\ldots,5$ מתקיים :
$$P\{X=i\mid X<Y\}=\frac{P\{X=i<Y\}}{P\{X<Y\}}=\frac{P\{X=i\}P\{Y>i\}}{P\{X<Y\}}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{6-i}{6}}{\frac{5}{12}}=\frac{6-i}{15}$$

לפיכך :
$$E[X\mid A]=\sum_{i=1}^{5}P\{X=i\mid X<Y\}=\sum_{i=1}^{5}i\cdot\tfrac{6-i}{15}=\tfrac{6}{15}\cdot\tfrac{5\cdot 6}{2}-\tfrac{1}{15}\cdot\tfrac{5\cdot 6\cdot 11}{6}=6-\tfrac{11}{3}=2\tfrac{1}{3}$$

ג. בהינתן המאורע $B=\{|X-Y|\le 2\}$, ההפרש המוחלט בין X ל- Y יכול לקבל את הערכים 0, 1 ו- 2 ,

לפיכך :
$$P\{|X-Y|=i \mid |X<Y|\le 2\}=\frac{P\{|X-Y|=i\}}{P(B)}=\begin{cases}\frac{6}{36}\big/\frac{2}{3}=\frac{1}{4} & ,\quad i=0\\ \frac{10}{36}\big/\frac{2}{3}=\frac{5}{12} & ,\quad i=1\\ \frac{8}{36}\big/\frac{2}{3}=\frac{1}{3} & ,\quad i=2\end{cases}$$

ומכאן כי :
$$E[|X-Y|\mid B]=0\cdot\tfrac{1}{4}+1\cdot\tfrac{5}{12}+2\cdot\tfrac{1}{3}=1\tfrac{1}{12}$$