קורס 20476 סמסטר 2015ג מועד 85

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות:

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* **בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי וידיאו, עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

תזכורת: **N** היא קבוצת המספרים הטבעיים, **Z** היא קבוצת המספרים השלמים.

(6 נק') **א.** נתבונן בפסוק $\forall x \exists y \big((y < x) \wedge (x < y+5) \big)$. נסמן פסוק זה באות α .

משמעות הסימן "<" היא המשמעות הרגילה שלו, המוכרת מבית-הספר, למשל $4 < 7$.
עדיין לא אמרנו על איזו קבוצה של מספרים מדובר. בחרו את הטענה הנכונה:

[1] אם מדובר ב- **N**, α הוא אמת ואם מדובר ב- **Z**, α הוא אמת.

[2] אם מדובר ב- **N**, α הוא אמת, אבל אם מדובר ב- **Z**, α הוא שקר.

[3] אם מדובר ב- **N**, α הוא שקר, אבל אם מדובר ב- **Z**, α הוא אמת.

[4] אם מדובר ב- **N**, α הוא שקר ואם מדובר ב- **Z**, α הוא שקר.

[5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

(7 נק') **ב.** תהי A קבוצת כל הקבוצות החלקיות ל- $P(\mathbf{Z})$ (שימו לב, זו אינה טעות).

למשל הקבוצה $\{\varnothing\ ,\ \{-85, 4\}\ ,\ \mathbf{Z}-\{1,2\}\ ,\ \mathbf{N} \cup \{-5,-6\}\}$ היא איבר של A.

עוצמת A היא:

[1] $\aleph_0$ **[2]** C **[3]** 2^C **[4]** עוצמה k המקיימת $\aleph_0 < k < C$

[5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

(6 נק') **ג.** G הוא גרף פשוט על 27 צמתים, המוגדר כך:

צומת של G הוא מחרוזת באורך 3 הבנויה מהאותיות a,b,c (לא בהכרח כולן).

למשל, המחרוזת aaa היא צומת של G. גם abc היא צומת של G.

צמתים x,y מחוברים בקשת אם ורק אם המחרוזות x,y מתלכדות (כלומר זהות) **פרט למקום אחד בלבד במחרוזת.**

למשל, יש קשת בין הצומת aaa לצומת aca , כי המחרוזות הללו נבדלות זו מזו רק במקום אחד (האות השניה במחרוזת).

מספר **הקשתות** של G הוא:

[1] 26 **[2]** 81 **[3]** 162 **[4]** 243 **[5]** 486

חלק ב׳: ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב׳ כולו: 81 נקודות

שאלה 2

A היא קבוצה לא ריקה, R הוא יחס מעל A. נסמן $\widetilde{R} = R - R^{-1}$.

(7 נק׳) א. הוכיחו: $\widetilde{R}$ הוא בהכרח אנטי-סימטרי, והוא מקיים $\widetilde{R} \cap I_A = \varnothing$.

(20 נק׳) ב. הוכיחו: אם R טרנזיטיבי אז $\widetilde{R}$ טרנזיטיבי.

הדרכה: את שני הסעיפים נוח להוכיח לא באלגברה של קבוצות ויחסים אלא ברמת האיברים.
סעיף א׳ הוא תרגיל חימום לקראת סעיף ב׳.

שאלה 3

בכל סעיפי השאלה $A = \{1,2,3,4,5,6\}$,

K היא קבוצת הסדרות באורך 4 שאבריהן לקוחים מ- A. למשל $(2,5,2,1) \in K$.

(4 נק׳) א. כמה איברים יש ב- K ?

המשך השאלה עוסק ביחס E מעל K, המוגדר כך:
שתי סדרות עומדות ביחס E זו לזו אם ורק אם הן זהות, או נבדלות רק בסדר האיברים.
דוגמאות:

$((2,5,2,1), (2,2,1,5)) \in E$, $((2,5,2,1), (1,2,5,2)) \in E$, $((2,5,2,1), (2,5,2,1)) \in E$

אבל $((2,5,2,1), (5,5,2,1)) \notin E$.

קל לראות ש- E הוא יחס שקילות, אפשר להסתמך על כך ואינכם נדרשים להראות זאת.

(12 נק׳) ב. לכמה מחלקות שקילות מחלק יחס השקילות E את K ?
הדרכה: אפשר להגיע לתשובה בחישוב **קצר מאד** ובלי להסתבך.

(11 נק׳) ג. עבור $A \subseteq K$ כלשהי, נבדוק אם מתקיים התנאי הבא:
לכל $x,y \in K$, אם $x \in A$ ו- $(x,y) \in E$ אז $y \in A$.
במלים אחרות, התנאי הוא:
יחד עם כל איבר של A נמצאים ב- A גם כל אברי K שעומדים איתו ביחס E.
אם A מקיימת את התנאי הזה נאמר שהיא קבוצה טובה.
למשל $\{(1,1,1,1)\ , (5,3,3,3)\ , (3,5,3,3)\ , (3,3,5,3)\ , (3,3,3,5)\}$ היא קבוצה טובה.
מתוך כל הקבוצות החלקיות של K, כמה הן קבוצות טובות?

שאלה 4

מיצאו בכמה מן **התמורות** של שש הספרות 123456 לא מופיע **אף אחד** משמונה הרצפים הבאים:
.123, 234, 345, 456, 654,543, 432, 321

דוגמא לתמורה המקיימת את התנאי: 653124 . יש להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 5

(15 נקי) א. G הוא גרף פשוט **ולא קשיר** על n צמתים ($n \geq 2$).
יש ב- G בדיוק שני צמתים בעלי דרגה זוגית.
הוכיחו שבגרף **המשלים** של G יש מסלול אוילר שאינו מעגל.
נמקו **בצורה מדויקת** כל צעד בהוכחה.
הגרף המשלים הוגדר בחוברת "תורת הגרפים", הגדרה 1.4 בעמ' 12 .

(12 נקי) ב. להלן נסיון להציג משפט הפוך לטענה של סעיף א:
"אם G הוא גרף פשוט ולא קשיר על n צמתים ($n \geq 2$),
ובגרף המשלים של G יש מסלול אוילר שאינו מעגל,
אז יש ב- G בדיוק שני צמתים בעלי דרגה זוגית".

הראו על-ידי דוגמא נגדית שטענה זו **אינה נכונה**.

בהצלחה!