אלגוריתמים - תרגיל 2

3 בנובמבר 2003

תאריך אחרון להגשה: יום ד' 12.11

1. אלגוריתם למציאת קבוצה בלתי תלויה כבדה ביותר במטרואיד: נתון מטרואיד $M = (X, F)$ כאשר X היא קבוצת הבסיס ו F היא אוסף תת-הקבוצות הבלתי-תלויות של X. נתונה פונקצית משקל $w : X- > R^+$. מחפשים אוסף איברים $S \subseteq X$ כך ש

   - $S \in F$
   - סכום המשקלות $\sum_{x \in S} w(x)$ הוא מקסימלי.

   אלגוריתם חמדני אפשרי יעבוד כך:

   (א) אתחול: $B = \emptyset$, $i = 0$.

   (ב) סדרי את איברי X מהכבד אל הקל. מתקבל הסידור $x_1, x_2, ..., x_n$.

   (ג) עברי על איברי X לפי הסדר הנ"ל. בכל שלב נסי להוסיף את האיבר $\mathrm{x_i}$ לקבוצה B. אם $x_i \cup B \in F$ אזי $B = B \cup x_i$. $i = i + 1$

   (ד) הקבוצה הסופית B היא הפלט של האלגוריתם.

   אנו רוצים להוכיח שאלגוריתם זה מוצא קבוצה אופטימלית. צרו מן ההדרכה הבאה הוכחה מלאה. ההוכחה היא באנלוגיה לאלגוריתם העץ הפורש. בכל מקום שכתוב "איבר" חשבו על "צלע". בכל מקום שכתוב "קבוצה תלויה" חשבו על קבוצת צלעות המכילה מעגל. "בסיס" הוא "עץ פורש".

   (א) הוכיחו שהקבוצה B היא בסיס במטרואיד.

   (ב) ניח בשלילה ש B איננה פיתרון אופטימלי. תהיה $B^* \subseteq X$ פתרון אופטימלי לבעיה כך שמבין כל הפיתרונות האופטימליים ההפרש הסימטרי $B^* \triangle B$ הוא מינימלי בגודלו.

   (ג) יהיה x האיבר הכבד ביותר ב $B \setminus B^*$.

   (ד) נגדיר מעגל במטרואיד להיות קבוצה תלויה מינימלית, כלומר $C \subseteq X$ כך ש $C \notin F$ אבל $C \setminus \{u\} \in F$ עבור כל $u \in C$. כל קבוצה תלויה מכילה מעגל.

   (ה) הראו ש $B^* \cup \{x\}$ מכילה מעגל יחיד- נקרא לו C. הראו ש $x \in C$. הראו ש $(B^* \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in F$ לכל $y \in C$.

(ו) הראו ש $w(f) \geq w(x)$ עבור כל $f \in C$. הראו ש $w(f) = w(x)$ מתקיים רק אם $f \in B$. לכן קיים $f^* \in C$ כך ש $w(f^*) > w(x)$.

(ז) הבחינו ש f^* היה מועמד לכניסה ל B לפני x, ונדחה. מצד שני, כל האיברים הכבדים ממש מ x נמצאים ב $B \cap B^*$, וביניהם גם f^*. הסיקו מכאן סתירה.

2. יהיו $M_1 = (E, \mathcal{I}_1), M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ זוג מטרואידים.

(א) נגדיר $M = (E, \mathcal{I})$ כאשר $\mathcal{I} = \{X_1 \cup X_2 | X_1 \in \mathcal{I}_1, X_2 \in \mathcal{I}_2\}$. האם זהו מטרואיד?

(ב) נגדיר $M = (E, \mathcal{I})$ כאשר $\mathcal{I} = \{X_1 \cap X_2 | X_1 \in \mathcal{I}_1, X_2 \in \mathcal{I}_2\}$. האם זהו מטרואיד?

3. נתונים n שיעורים. שיעור מספר i נערך בזמן (s_i, t_i). רוצים לקיים את כל השיעורים תוך שימוש במספר מינימלי של חדרי לימוד (אסור ששני שיעורים שזמניהם חופפים יתקיימו באותו חדר כמובן). להלן שתי הצעות לפיתרון הבעיה. לגבי כל הצעה הוכיחו אם היא נכונה, או תנו דוגמה נגדית אם היא לא.

(א) שימי מספר מירבי של שיעורים בחדר הראשון (את זה אפשר לבצע בעזרת האלגוריתם החמדן שלמדתם בכיתה). פתחי חדר שני ושימי בו מספר מירבי של שיעורים מבין אלה שנותרו, וכן הלאה (רמז: זה לא עובד).

(ב) מייני את השיעורים לפי זמני ההתחלה שלהם, מהמוקדם למאוחר. עברי על השיעורים בסדר הזה. אם אפשר לשים את השיעור הנוכחי באחד החדרים הקיימים אז שבצי אותו שם. אחרת פתחי חדר חדש ושבצי השיעור שם. רמז: זה עובד. יהיה s המספר המירבי של שיעורים שחיתוך הזמנים של כולם אינו ריק. ברור שצריך לפחות s חדרים כדי לשבץ את כל השיעורים. לכן אם יש אלגוריתם שמשבץ בלכל היותר s חדרים הוא אופטימלי. נתבונן בשיעור שגרם לנו לפתוח את החדר האחרון. הוא מכיל נקודת זמן שחותכת הרבה שיעורים.