הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל הפקולטה למדעי המחשב

אלגוריתמים 1 (234247) – סמסטר אביב 2005

בחינת סוף סמסטר – מועד ב' 18/9/2005

הוראות:

1. משך הבחינה 3 שעות.
2. הבחינה מכילה 5 שאלות.
3. אסור שימוש בכל חומר עזר למעט דף A4 יחיד כתוב משני צדדיו.
4. אם הנכם מסתמכים על טענות שנלמדו בהרצאה או בתרגול, צטטו אותן. כל טענה אחרת (כולל טענות מתרגילי הבית) יש להוכיח.

שאלה 1 (20 נקודות)

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$. הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(V+E)$ המחשב קבוצה $U\subseteq V$ בעלת מספר מקסימלי אפשרי של צמתים כך שיש ב- G מסלול (לאו דווקא פשוט) דרך כל צמתי U. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונה רשת תקשורת המורכבת מ- n מחשבים ו- m ערוצים (כל ערוץ מחבר בין שני מחשבים והינו דו-כיווני), כך שלכל ערוץ e נתונה ההסתברות p שיקרוס (מספר ממשי גדול מ-0 וקטן מ-1, ההסתברויות בלתי-תלויות). הציעו אלגוריתם יעיל שבהינתן רשת כנ"ל ושני מחשבים בה מוצא את מסלול התקשורת הבטוח ביותר ביניהם, כלומר המסלול שההסתברות שיקרוס קטנה ביותר (מסלול קורס אם ערוץ אחד או יותר בו קורסים. לכן ההסתברות שמסלול $v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \ldots \xrightarrow{e_k} v_k$ לא יקרוס (כאשר ההסתברות לקריסת קשת e_i היא p_i), היא $(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_k)$). הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

הניחו כי ניתן לחשב ב- $O(1)$ תוצאת כל פעולה/פונקציה במחשבון סטנדרטי.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתון מערך של n מספרים ממשיים $[a_1,a_2,...,a_n]$. **d-חלוקה** של המערך היא חלוקה שלו ל- d מקטעים זרים, כלומר בחירה של $d-1$ אינדקסים $1\le i_1<i_2<\ldots<i_{d-1}<n$ המגדירים את d המקטעים $[a_1,...,a_{i_1}],[a_{i_1+1},...,a_{i_2}],....,[a_{i_{d-1}+1},...,a_n]$. המחיר של מקטע ב- d-חלוקה הוא סכום המספרים באותו מקטע. המחיר של d-חלוקה הוא המקסימום של מחירי המקטעים שהיא מגדירה.

דוגמה: $[4,2,7],[9],[5,6]$ היא 3-חלוקה של $[4,2,7,9,5,6]$ שמחירה הוא $\max\{13,9,11\}=13$.

הציעו אלגוריתם יעיל שבהינתן מערך כנ"ל ומספר d, מוצא d-חלוקה של המערך שמחירה קטן ביותר. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

שאלה 4 (20 נקודות)

נתונים m דיסקים קשיחים ו- k סרטים $f_1, f_2, ..., f_k$, כך שלכל דיסק נתונה רשימת הסרטים אותם הוא מכיל (דיסק לא יכיל מספר עותקים מאותו סרט, אך עותקים של סרט מסוים עשויים להופיע במספר דיסקים).
בנוסף, נתונות בקשות לשידור (download) לסרטים, כך ש- r_i מייצג את מספר בקשות השידור עבור הסרט f_i, לכל $i = 1,2,...,k$. כמו כן, b_j מייצג את מספר הסרטים המקסימלי שהדיסק ה- j מסוגל לשדר (סרט המשודר מספר פעמים יספר כמספר הפעמים ששודר).
הציעו אלגוריתם יעיל שמוצא שידור של הסרטים מהדיסקים תחת האילוצים לעיל, או מודיע שאין שידור כזה.
הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

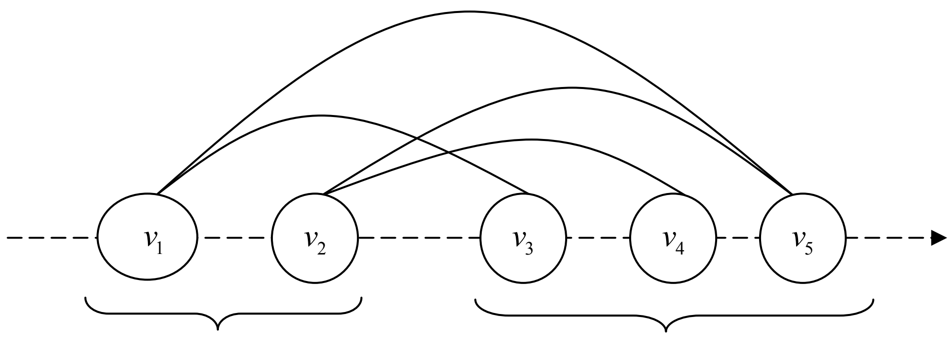
דוגמה: נניח שישנם 2 דיסקים, d_1 ו- d_2, ו-5 סרטים, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, כך ש- d_1 מכיל את הסרטים f_1, f_2, f_4 ו- d_2 מכיל את הסרטים f_2, f_3, f_5. מספר הסרטים ש- d_1 מסוגל לשדר הוא 6 ומספר הסרטים ש- d_2 מסוגל לשדר הוא 4. מספר הבקשות לשידור של $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ הן, בהתאמה, (2,4,0,3,1). פתרון אפשרי הינו ש- d_1 יספק 2 בקשות לשידור של f_1, בקשה אחת של f_2 ו-3 בקשות של f_4 (סה"כ 6 שידורים). d_2 יספק 3 בקשות של f_2 ובקשה אחת של f_5 (סה"כ 4 בקשות). באופן זה נענו כל בקשות השידור ונשמרו כל האילוצים.

שאלה 5 (20 נקודות)

יהא $G = (V, E)$ גרף לא מכוון, שצמתיו $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, מופיעים בסדר זה על ציר הממשיים (כלומר לכל $1 \le i < j \le n$ מתקיים כי v_i מופיע לפני v_j).

***d*-חלוקה** של צמתי G היא חלוקה שלהם ל- d מקטעים זרים, כלומר בחירה של $d-1$ אינדקסים $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_{d-1} < n$ המגדירים את d המקטעים $[v_1, ..., v_{i_1}], [v_{i_1+1}, ..., v_{i_2}], ..., [v_{i_{d-1}+1}, ..., v_n]$.

d-חלוקה נקראת **בלתי תלויה**, אם לא קיימים בה שני צמתים שכנים השייכים לאותו מקטע.
למשל, להלן 2-חלוקה בלתי-תלויה של הגרף המצויר.



הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(V + E)$ שמוצא *d*-חלוקה בלתי תלויה של G כך ש- d קטן ככל האפשר.
הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

בהצלחה!