ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20425

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חוברת הקורס - סתיו 2014א

כתבה: נעמי מילאנו-רוזנטל

אוקטובר 2013 - סמסטר סתיו - תשע״ד

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

נספחים

אל הסטודנטים,

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב".

בחוברת זו תמצאו תיאור, מלא ככל האפשר, של הקורס וכן פרטים על כלל פעילויותיכם במהלך הלימודים. רצוי שתראו בה מעין מדריך אישי, שתפקידו להבהיר לכם עניינים שונים. קראו בעיון רב את כל הסעיפים שלהלן, לפני שתתחילו בלימודיכם.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: http://telem.openu.ac.il .

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

בכל בעיה שמתעוררת תוכלו לפנות למרכזת ההוראה בקורס – נעמי מילאנו-רוזנטל, בטלפון 09-7781428, בפקס 09-7780631 או בדואר האלקטרוני לכתובת naomimi@openu.ac.il .

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה,

צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (קורס 20425 / סמסטר 2014א)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	 ממ"ן (למנחה)
1	13.10.2013 - 18.10.2013	1			
2	20.10.2013 - 25.10.2013	1 + 2			
3	27.10.2013 - 1.11.2013	2			
4	3.11.2013 - 8.11.2013	2 + 3			
5	10.11.2013 - 15.11.2013	3		ממ"ח 01 10.11.2013	
6	17.11.2013 - 22.11.2013	3 + 4			
7	24.11.2013 - 29.11.2013 (ה-ו חנוכה)	4			ממ"ן 11 24.11.2013
8	1.12.2013 - 6.12.2013 (א-ה חנוכה)	4 + 5			
9	8.12.2013 - 13.12.2013	5			ממ"ן 12 8.12.2013
10	15.12.2013 - 20.12.2013	5 + 6			
11	22.12.2013 - 27.12.2013	6			ממ"ן 13 22.12.2013
12	29.12.2013 - 3.1.2014	6 + 7			
13	5.1.2014 - 10.1.2014	7			ממ"ן 14 5.1.2014
14	12.1.2014 - 17.1.2014	7			
15	19.1.2014 - 24.1.2014	8			ממ"ן 15 19.1.2014

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

- התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים, מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

נקודות זכות

הקורס ״הסתברות לתלמידי מדעי המחשב״ מקנה למסיימים אותו 4 נקודות זכות.

הדרישות לקבלת 4 נקודות זכות הן:

א. הגשת מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות.

ב. ציון מינימלי 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון מינימלי 60 בקורס.

הגשת מטלות

הקורס ״הסתברות לתלמידי מדעי המחשב״ כולל חוברת קורס ובה 6 מטלות להגשה, המיועדות לתרגול רוב נושאי הלימוד של הקורס, ואוסף שאלות לתרגול עצמי של נושאי הלימוד של פרק 8.

עליכם להגיש מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות, כאשר המשקל של כל מטלה להגשה הוא 5 נקודות (כלומר, עליכם להגיש לפחות 3 ממטלות ההגשה). המועד האחרון להגשה של כל מטלה מופיע בכותרתה. שימו לב, **בקורס זה לא ניתנות מטלות השלמה!**

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: **20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב**

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1 ו- 2

קומבינטוריקה; חישובי הסתברויות קומבינטוריים

מספר השאלות: 20 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2014 א **מועד אחרון להגשה:** 10.11.2013

שלחו את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת שאילתא בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

שאלות 1-5 מתייחסות לבעיה הבאה:

ילד קטן מקליד את 22 האותיות העבריות מ- א' עד ת' (ללא אותיות סופיות) בסדר אקראי.

כל אחת מ- 22 האותיות מופיעה בדיוק פעם אחת ברצף ההקלדה.

<u>שאלה 1</u>

מהי ההסתברות שהאות א' תופיע במקום הראשון ברצף-ההקלדה והאות ת' תופיע במקום האחרון ברצף-ההקלדה?

א. $\dfrac{\binom{22}{2}}{22!}$ ב. $\dfrac{20!}{22!}$ ג. $\dfrac{2}{20!}$ ד. $\dfrac{1}{20!}$

<u>שאלה 2</u>

מהי ההסתברות שברצף-ההקלדה תופיע המילה "מאורע"?

א. $1-\dfrac{5!}{22!}$ ב. $\dfrac{5!\cdot 17!}{22!}$ ג. $\dfrac{5\cdot 17!}{22!}$ ד. $\dfrac{18!}{22!}$

<u>שאלה 3</u>

מהי ההסתברות שברצף-ההקלדה האותיות א', ב' ו- ג' תופענה כולן עד (וכולל) למקום העשירי?

(שלוש האותיות <u>לא חייבות</u> להופיע במקומות סמוכים או בסדר מסוים).

א. $\dfrac{8}{77}$ ב. $\dfrac{1}{15}$ ג. $\dfrac{6}{77}$ ד. $\dfrac{1}{120}$

<u>שאלה 4</u>

מהי ההסתברות שברצף-ההקלדה האותיות ד' ו- ה' תופענה לפני האותיות צ' ו- ק'?

(האותיות <u>לא חייבות</u> להופיע במקומות סמוכים).

א. $\dfrac{1}{16}$ ב. $\dfrac{1}{6}$ ג. $\dfrac{1}{4}$ ד. $\dfrac{1}{2}$

<u>שאלה 5</u>

מהי ההסתברות שברצף-ההקלדה תופיע לפחות אחת משלוש המילים "נמלי", "ספה" ו"רשת"?

א. 0.006476 ב. 0.006513 ג. 0.0021645 ד. 0.0064935

שאלות 6-7 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתונים 20 חרוזים, שכולם **שונים** זה מזה, וביניהם 4 חרוזים צהובים.

בוחרים **ללא החזרה** 7 חרוזים מקריים (מתוך ה- 20).

<u>שאלה 6</u>

מהי ההסתברות שייבחרו בדיוק 2 חרוזים צהובים (מתוך ה-7)?

א. $\frac{26}{1,615}$ ב. $\frac{3}{95}$ ג. $\frac{112}{255}$ ד. $\frac{546}{1,615}$

<u>שאלה 7</u>

מסדרים את 7 החרוזים הנבחרים בשורה באופן אקראי.

מהי ההסתברות שהחרוזים הראשון והאחרון בשורה יהיו צהובים, ושמלבדם לא יהיו עוד חרוזים צהובים בשורה של 7 החרוזים?

א. $\frac{26}{1,615}$ ב. $\frac{3}{95}$ ג. $\frac{7}{19}$ ד. $\frac{546}{1,615}$

שאלות 8-9 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתונים 20 חרוזים, שכולם **שונים** זה מזה, וביניהם 4 חרוזים צהובים.

בוחרים **עם החזרה** 30 חרוזים מקריים.

(בבחירה עם החזרה כל חרוז יכול להיבחר יותר מפעם אחת.)

<u>שאלה 8</u>

מהי ההסתברות שייבחרו בדיוק 5 חרוזים צהובים?

א. $\binom{30}{5}\cdot 0.2^5$ ב. $\binom{30}{5}\cdot 0.2^5\cdot 0.8^{25}$ ג. $\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{16}$ ד. $0.2^5\cdot 0.8^{25}$

<u>שאלה 9</u>

מהי ההסתברות שהחרוזים הראשון והאחרון שייבחרו יהיו צהובים, ומלבדם יהיו בדיוק עוד 3 חרוזים צהובים בין החרוזים הנבחרים?

א. $\binom{5}{3}\cdot 0.2^3\cdot 0.8^{25}$ ב. $3,276\cdot 0.2^5\cdot 0.8^{25}$ ג. $(0.2^5+0.2^3)\cdot 0.8^{25}$ ד. $0.2^5\cdot 0.8^{25}$

שאלות 10-11 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתון לוח משובץ בגודל 5×5 (כלומר, לוח שבו 5 שורות ובכל שורה 5 משבצות).

על כל משבצת בלוח כותבים באקראי אחת מהספרות 0 או 1.

<u>שאלה 10</u>

מהי ההסתברות שתהיינה בלוח בדיוק 15 משבצות שעליהן הספרה 1?

א. $\binom{25}{15} \cdot 0.5^{15}$ ב. $\binom{25}{15} \cdot 0.5^{25}$ ג. $\binom{25}{15} \cdot 0.2^{25}$ ד. 0.5^{25}

<u>שאלה 11</u>

מהי ההסתברות שלפחות בשורה אחת סכום הספרות יהיה בדיוק 3?

א. $1-\frac{11^5}{2^{20}}$ ב. $\frac{\binom{5}{3} \cdot 5}{2^{25}}$ ג. $\frac{\binom{5}{3} \cdot 5}{2^5}$ ד. $1-\frac{20}{2^5}$

שאלות 12-14 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתון לוח משובץ בגודל 5×5 (כלומר, לוח שבו 5 שורות ובכל שורה 5 משבצות).

מפזרים באקראי על משבצות הלוח 25 דסקיות (דסקית אחת על כל משבצת).

על 10 מהדסקיות רשומה הספרה 1 ועל 15 הדסקיות האחרות רשומה הספרה 0.

<u>שאלה 12</u>

מהי ההסתברות שבכל השורות יתקבל בדיוק אותו סכום של ספרות?

א. 0.0278 ב. 0.0234 ג. 0.0413 ד. 0.0306

<u>שאלה 13</u>

מהי ההסתברות שלפחות בשורה אחת סכום הספרות יהיה בדיוק 3?

א. 0.7628 ב. 0.7988 ג. 0.2372 ד. 0.2012

<u>שאלה 14</u>

מהי ההסתברות שתהיה על הלוח לפחות שורה אחת שעל כל משבצותיה הספרה 1?

א. $\frac{77,530}{\binom{25}{10}}$ ב. $\frac{77,520}{\binom{25}{10}}$ ג. $\frac{77,510}{\binom{25}{10}}$ ד. $\frac{77,500}{\binom{25}{10}}$

שאלות 15-19 מתייחסות לבעיה הבאה:

מפזרים באקראי 12 כדורים **שונים** ב- 10 תאים ממוספרים מ- 1 עד 10.

<u>שאלה 15</u>

כמה אפשרויות פיזור קיימות?

א. $\binom{21}{12}$ ב. $\binom{12}{10}$ ג. 12^{10} ד. 10^{12}

<u>שאלה 16</u>

בכמה מאפשרויות הפיזור יהיו בדיוק 9 תאים מלאים (כלומר, שיש בהם לפחות כדור אחד)?

א. $10^{12}-10!\cdot 10^2$ ב. $\binom{10}{9}\cdot 9^{12}$ ג. $22,275\cdot 10!$ ד. $22,275\cdot 9!$

<u>שאלה 17</u>

מהי ההסתברות שמספר הכדורים הכולל בתאים 1-5 יהיה גדול (ממש) ממספר הכדורים הכולל שיהיה בתאים 6-10?

א. 0.5 ב. $\binom{12}{7}\cdot 0.5^{12}$ ג. $0.5-\binom{12}{6}\cdot 0.5^{13}$ ד. $\binom{12}{7}\cdot 0.5^{7}$

<u>שאלה 18</u>

מהי ההסתברות שבתא 1 יהיו לפחות 3 כדורים?

א. $1-\frac{220\cdot 9^9}{10^{12}}$ ב. $\frac{220\cdot 9^9}{10^{12}}$ ג. $\frac{220\cdot 10^9}{10^{12}}$ ד. $1-\frac{255\cdot 9^{10}}{10^{12}}$

<u>שאלה 19</u>

בכמה מהפיזורים יש בדיוק 4 תאים, שבכל אחד מהם 3 כדורים?

א. $\binom{10}{4}\cdot 4!\cdot\frac{12!}{(3!)^4}$ ב. $\binom{10}{4}\cdot\frac{12!}{(3!)^4}$ ג. $\binom{10}{4}\cdot\frac{12!}{(3!)^4\cdot 4!}$ ד. $\binom{10}{4}\cdot\frac{12!}{(3!)^4\cdot 4}$

שאלה 20 מתייחסת לבעיה הבאה:

מפזרים באקראי 12 כדורים **זהים** ב- 10 תאים ממוספרים מ- 1 עד 10.

<u>שאלה 20</u>

בכמה מהפיזורים יהיה בכל אחד מהתאים מספר זוגי של כדורים?

(גם 0 הוא מספר זוגי של כדורים.)

א. $\binom{15}{6}\cdot 2^6$ ב. $\frac{12!}{2^6}\cdot 10^6$ ג. $\binom{15}{6}$ ד. $\binom{12}{6}\cdot 6!\cdot 10^6$

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 2 ו- 3

דיאגרמת ון וטענות הסתברות בסיסיות; הסתברות מותנית

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2014 א **מועד אחרון להגשה:** 24.11.2013

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

נערך מחקר על הרגלי הצפייה של מנויי-כבלים במהדורות החדשות בערוצים 1, 2 ו- 10.
מהסקר עולות המסקנות הבאות:

ההסתברות שמנוי אינו צופה כלל במהדורות החדשות (כלומר, באף אחת מהן) היא 0.3;

ההסתברות שמנוי צופה במהדורות החדשות של שני ערוצים בדיוק היא 0.25;

ההסתברות שמנוי צופה במהדורות החדשות של ערוץ אחד בדיוק היא 0.37;

ההסתברות שמנוי צופה במהדורות החדשות בערוצים 1 או 2 (ובכלל זה בשתיהן) היא 0.56;

אם המנוי צופה במהדורות החדשות בערוצים 1 או 2, ההסתברות שיצפה בשתיהן היא 0.25;

אם המנוי צופה במהדורת החדשות בערוצים 2 או 10, ההסתברות שיצפה רק במהדורת ערוץ 10 היא $\frac{2}{9}$.

בוחרים באופן מקרי משתתף בסקר.

(8 נק') א. הגדר שלושה מאורעות מתאימים לבעיה המתוארת בשאלה, צייר עבורם דיאגרמת ון, המתארת את הבעיה, ומלא בשטחים החלקיים שנוצרים בה את כל ההסתברויות הנתונות בבעיה.
הסבר בקצרה את דרך חישוב ההסתברויות שרשמת בדיאגרמה, באמצעות טענות הסתברות בסיסיות.

(3 נק') ב. מהי ההסתברות שהמשתתף הנבחר צופה במהדורת החדשות בערוץ 10?

(3 נק') ג. מהי ההסתברות שהמשתתף הנבחר צופה במהדורות חדשות בשני ערוצים לפחות?

(3 נק') ד. אם קיימת לפחות מהדורת חדשות אחת שהמשתתף הנבחר אינו צופה בה,
מהי ההסתברות שהוא אינו צופה במהדורת החדשות בערוץ 10?

(3 נק') ה. אם ידוע שהמשתתף הנבחר צופה במהדורות החדשות בערוצים 1 או 10,
מהי ההסתברות שהוא צופה במהדורות החדשות בערוצים 2 או 10?

בכל אחד מסעיפים ב-ה בטא את המאורע המתואר בסעיף באמצעות המאורעות שהגדרת בסעיף א.

שאלה 2 (14 נקודות)

שני אבירים משתתפים בדו-קרב.
שני האבירים יורים זה על זה עד שלפחות אחד מהם מוטל מת.
האביר האחרון שנותר בחיים מנצח בדו-קרב.

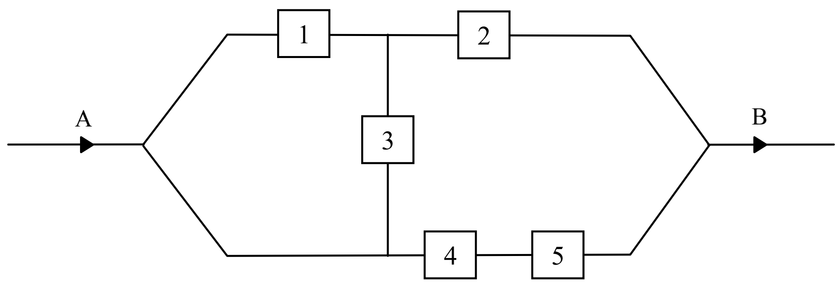
בכל ירייה, אביר A פוגע ביריבו בהסתברות 0.5 ואילו אביר B פוגע ביריבו בהסתברות 0.3.
אין תלות בין תוצאות הירי של אותו אביר או בין תוצאות הירי של שני האבירים.

(7 נק׳) א. נניח שהאבירים יורים זה על זה <u>בו-זמנית</u>.
כלומר, בכל פעם שניהם יורים באותו הזמן.
מהי ההסתברות שאביר A ינצח בדו-קרב?
(כלומר, מהי ההסתברות שאביר A הוא היחיד שיִוָּתֵר בחיים?)

(7 נק׳) ב. נניח שהאבירים יורים זה על זה <u>לסירוגין</u>.
כלומר, בכל פעם יורה רק אביר אחד, <u>ואביר A הוא זה שיורה ראשון</u>,
אחריו יורה אביר B, וחוזר חלילה.
מהי ההסתברות שאביר A ינצח בדו-קרב?

שאלה 3 (21 נקודות)

נתונה המערכת המתוארת באיור.
במערכת 5 רכיבים, שכל אחד מהם תקין בהסתברות 0.8, ואז יכול לעבור בו זרם.
אין תלות בין מצבי התקינות של חמשת הרכיבים במערכת.



(7 נק׳) א. מהי ההסתברות שעובר זרם במערכת מ- A ל- B?

(7 נק׳) ב. ידוע שרכיב 1 תקין ויכול לעבור בו זרם.
מהי ההסתברות שעובר זרם במערכת מ- A ל- B?

(7 נק׳) ג. ידוע **שלפחות** אחד מהרכיבים 1 ו- 2 אינו תקין.
מהי ההסתברות שעובר זרם במערכת מ- A ל- B?

שאלה 4 (24 נקודות)

בצנצנת יש 300 ממתקים: 150 אדומים, 100 ירוקים ו- 50 צהובים.

מוציאים מהצנצנת באקראי, בזה אחר זה ו<u>ללא החזרה</u> 10 ממתקים.

(6 נק') א. מהי ההסתברות שבבחירה החמישית יוצא לראשונה ממתק צהוב?

(6 נק') ב. אם ידוע שבבחירה החמישית הוצא לראשונה ממתק צהוב,
מהי ההסתברות שגם בבחירה השישית יוצא ממתק צהוב?

(6 נק') ג. אם בין 10 הממתקים שהוצאו יש בדיוק 2 ממתקים צהובים,
מהי ההסתברות שיש ביניהם בדיוק 4 ממתקים אדומים?

(6 נק') ד. אם ידוע ששני הממתקים הראשונים שהוצאו היו אדומים,
מהי ההסתברות שהוצאו בסך-הכל 6 ממתקים אדומים (מתוך ה-10)?

שאלה 5 (21 נקודות)

נתונים המאורעות K , I ו- A_1 , A_2 , ... , A_{30} , ונניח שמתקיים –

$P(I) = 0.02$ $\quad$ $P(K \cap I^C) = 0$ $\quad$ $A_i \cap A_j = \varnothing \quad , \quad i \neq j$

$P(K^C \mid I \cap A_i) = 0.9^i \ , \ i = 1,...,30$ $\quad$ $P(A_i) = P(A_j) \quad , \quad i \neq j$

A_i ו- I בלתי-תלויים, לכל $i = 1,...,30$ $\quad$ $\bigcup_{i=1}^{30} A_i = S$

(7 נק') א. חשב את $P(I \cap K^C \mid A_1)$.

(7 נק') ב. חשב את $P(I \cap K^C)$.

(7 נק') ג. חשב את $P(K)$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 4

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2014 א **מועד אחרון להגשה:** 8.12.2013

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (28 נקודות)

שחר מטיל 2 קוביות שוב ושוב עד שהוא מקבל לראשונה את הסכום 8 (בשתי הקוביות יחד).

יהי X מספר הפעמים ששחר קיבל סכום שונה מ-8.

(7 נק') א. מהי ההסתברות ששחר יטיל את הקוביות יותר מ-7 פעמים?

(7 נק') ב. מצא את פונקציית ההסתברות של X.

(7 נק') ג. חשב את $E[(X-4)^2]$.

(7 נק') ד. נניח שידוע ששחר הטיל את הקוביות לפחות פעמיים.
לאור מידע זה, מהי פונקציית ההסתברות המעודכנת של X ?

שאלה 2 (28 נקודות)

ארבעה חברים – אבנר, ברק גד ודן – מטילים בזה אחר זה ובסדר זה מטבע, שההסתברות לקבל בו H היא $\frac{1}{3}$. כל אחד משלושת החברים הראשונים (כלומר, אבנר, ברק וגד) מטיל בתורו את המטבע עד שלראשונה הוא מקבל H, ואילו דן מטיל את המטבע עד שלראשונה הוא מקבל T.

(7 נק') א. מהי ההסתברות שמספר ההטלות הכולל של אבנר, ברק וגד יהיה שווה בדיוק ל- 7?

(7 נק') ב. 1. מהי ההסתברות שאבנר יטיל את המטבע מספר זוגי של פעמים?

(7 נק') 2. אם מספר ההטלות הכולל של אבנר, ברק וגד הוא מספר זוגי, מהי ההסתברות שמספר ההטלות של אבנר זוגי?

רמז: היעזר בתוצאה שקיבלת בסעיף ב1.

(7 נק') ג. נסמן ב-W את המספר הכולל של ה-H-ים שהתקבלו בהטלות שביצעו ארבעת החברים.
מצא את פונקציית ההסתברות של W וחשב את שונותו.

שאלה 3 (22 נקודות)

נתון לוח ריבועי, שעליו מצוירות 64 משבצות זהות בגודלן, המסודרות במבנה של 8 שורות ו- 8 עמודות.

נתונות גם 64 דסקיות, ש- 34 מהן לבנות והשאר שחורות.

מפזרים באקראי את הדסקיות על הלוח.

דסקית אחת על כל משבצת.

(7 נקי) א. מהי ההסתברות שב- 3 השורות העליונות של הלוח תהיינה בדיוק 11 דסקיות שחורות?

(7 נקי) ב. מהי שונות מספר הדסקיות השחורות שימוקמו ב- 3 השורות העליונות של הלוח?

נתון לוח משבצות נוסף שגודלו 100×100 .

בלוח זה כל משבצת נצבעת בצבע לבן בהסתברות 0.995, ואחרת בצבע שחור.

(8 נקי) ג. חשב **קירוב** להסתברות שיהיו בלוח בדיוק 54 משבצות שחורות.

שאלה 4 (10 נקודות)

ידוע כי אם מחביאים בחדר מסוים i חפצים $(i = 0,1,\ldots)$, ההסתברות שאדם, שייכנס לחדר ויחפש אותם, ימצא לפחות אחד מהם היא $\frac{i}{i+1}$.

אדם נכנס לחדר שהוחבאו בו X חפצים, כאשר X הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\lambda = 8$.

מהי ההסתברות שבחיפושיו בחדר ימצא לפחות חפץ אחד?

שאלה 5 (12 נקודות)

שיכור הולך בצעדים אקראיים לאורך ציר ישר שעליו הנקודות 0, ±1, ±2, ..., באופן הבא:

הוא מתחיל מנקודה 0. בכל שלב הוא עושה צעד באורך 1, צעד לימין בהסתברות p $(0 < p < 1)$ וצעד לשמאל בהסתברות $1 - p$. צעדיו של השיכור בלתי-תלויים זה בזה.

נסמן ב- X את הנקודה על הציר שעליה נמצא השיכור לאחר 100 צעדים.

(6 נקי) א. מצא את פונקציית ההסתברות של X .

(6 נקי) ב. חשב את התוחלת ואת השונות של X .

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 5

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2014 א **מועד אחרון להגשה:** 22.12.2013

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (24 נקודות)

יהי X משתנה מקרי רציף, שלו פונקציית הצפיפות הבאה: $-2 < x < 2 \quad , \quad f_X(x) = \frac{c}{2}\cdot|x|$

(6 נק') א. חשב את c.

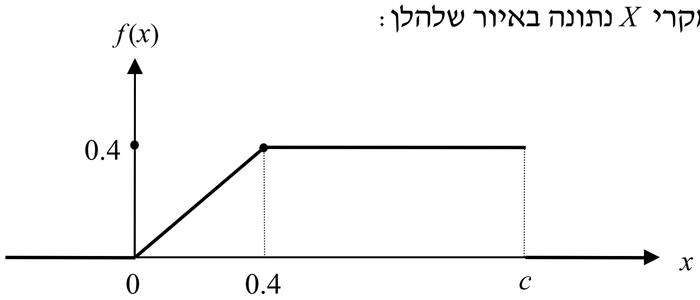
(6 נק') ב. מצא את התוחלת של X.

(6 נק') ג. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X.
רשום אותה באופן מדויק, **לכל x ממשי**.

(6 נק') ד. חשב את $P\left\{X < 1 \,\middle|\, |X| > \frac{1}{2}\right\}$.

שאלה 2 (24 נקודות)

פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי X נתונה באיור שלהלן:



(6 נק') א. מצא את c.

(6 נק') ב. חשב את $P\{0.2 < X < 1\}$.

(6 נק') ג. חשב את התוחלת של X.

(6 נק') ד. ידוע שהמאורע $A = \{X > 0.4\}$ מתרחש.
חשב את $P\{X \le x \mid A\}$, **לכל x ממשי**.

שאלה 3 (12 נקודות)

מאיה, יואב וליאת קבעו להיפגש אחר-הצהריים בין השעה ארבע לשעה חמש.

לזמן-ההגעה של כל אחד מהם יש התפלגות אחידה (רציפה) על הקטע $(4,5)$,

ואין תלות בין זמני-ההגעה של שלושתם.

(6 נק׳) א. אם ידוע ששלושתם הגיעו עד רבע לחמש,
מהי ההסתברות ששניים מהם הגיעו עד ארבע וחצי והשלישי/ת הגיע/ה אחרי ארבע וחצי?

(6 נק׳) ב. מהי ההסתברות שליאת תגיע אחרונה?

שאלה 4 (16 נקודות)

יהי X משתנה מקרי שפונקציית הצפיפות שלו נתונה על-ידי: $x > 0 \quad , \quad f_X(x) = 2ce^{-0.2x}$

ויהי Y משתנה מקרי המוגדר על-ידי $Y = X^2 - 4$.

(4 נק׳) א. מצא את c .

(6 נק׳) ב. חשב את $E[Y]$.

(6 נק׳) ג. חשב את $P\{Y > 0 \mid X > 1\}$.

שאלה 5 (24 נקודות)

ידוע שהתפלגות המשקל (בגרמים) של צפרדע מזן מסוים היא נורמלית עם תוחלת μ וסטיית-תקן σ.

(6 נק׳) א. אם ידוע שצפרדע שוקלת פחות מ- 72.308 גרם בהסתברות 0.1, ומעל ל- 77.69 גרם בהסתברות 0.65, מהן התוחלת וסטיית-התקן של התפלגות משקלה?

(6 נק׳) ב. מהו המשקל, שההסתברות שצפרדע מקרית (מזן זה) תשקול פחות ממנו היא 0.71?

(6 נק׳) ג. אם ידוע שצפרדע מסוימת שוקלת יותר מ- 76 גרם, מהי ההסתברות שהיא שוקלת פחות מ- 81 גרם?

(6 נק׳) ד. כמות המזון שצפרדע מהזן הזה אוכלת במשך יום אחד שווה לעשירית ממשקלה.
נסמן ב- Y את כמות המזון שצפרדע מקרית מזן זה אוכלת במשך יום.
מהי ההתפלגות של Y ומהן התוחלת והשונות של Y?

הערה: <u>בכל סעיפי השאלה ערוך אינטרפולציה לינארית היכן שזה נדרש</u>.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 6

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2014 א **מועד אחרון להגשה:** 5.1.2014

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (21 נקודות)

יורים במטרה שוב ושוב, עד שפוגעים בה 3 פעמים בסך-הכל.

אין תלות בין יריות שונות.

ההסתברות לפגוע במטרה בכל ירייה היא p ($0 < p < 1$).

יהיו X = מספר היריות עד (וכולל) לפגיעה הראשונה;

Y = מספר היריות עד (וכולל) לפגיעה השלישית.

(7 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו-Y.

רשום אותה באופן מדויק ופרט את תחום הערכים האפשריים המתאים לה.

(7 נק') ב. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $Y = j$, עבור $j = 3,4,\ldots$.

רשום אותה באופן מדויק ופרט את תחום הערכים האפשריים המתאים לה.

(7 נק') ג. חשב את $P\{Y - X = 9\}$.

שאלה 2 (21 נקודות)

10 אוטובוסים אמורים להגיע לתחנה מסוימת בין 4:15 לבין 4:30.

בפועל, כל אחד מהם מגיע לתחנה בזמן X, שהתפלגותו אחידה בין 4:00 לבין 4:45,

ואין תלות בין זמני ההגעה של האוטובוסים השונים.

נגדיר את המשתנים המקריים: Y = מספר האוטובוסים שמגיעים בזמן (בין 4:15 לבין 4:30);

W = מספר האוטובוסים שמקדימים (מגיעים לפני 4:15).

(7 נק') א. מצא את פונקציית הסתברות המשותפת של Y ו-W.

(7 נק') ב. מצא את פונקציית הסתברות המותנית של Y בהינתן $W = j$, לכל $j = 0,1,\ldots,10$.

(7 נק') ג. אדם הגיע לתחנה בשעה 4:00 והוא מחכה לראשון מבין 10 האוטובוסים (המוזכרים בתחילת השאלה) שיגיע. מהי ההסתברות שיחכה בתחנה לכל היותר 5 דקות?

שאלה 3 (15 נקודות)

נתון לוח שבו 6 משבצות, כמשורטט להלן:

רושמים באקראי על משבצות הלוח את הספרות 1, 2, 3, 4, 5 ו- 6 – ספרה אחת בכל משבצת – כך שכל ספרה נרשמת על הלוח בדיוק פעם אחת.

נסמן ב- X את מספר הכפולות של 3 הרשומות בשורה הראשונה;
ונסמן ב- Y את מספר הכפולות של 2 הרשומות בשורה הראשונה.

(10 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y
ואת פונקציות ההסתברות השולית של X ו- Y.
בדוק שסכום ההסתברויות המשותפות שווה ל- 1.

(5 נק') ב. האם המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-תלויים? נמק את תשובתך.

שאלה 4 (35 נקודות)

בקופסה חרוזים, שעל כל אחד מהם מצוירות נקודות.
מספר הנקודות על כל חרוז הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 10.
אין תלות בין מספרי הנקודות שעל חרוזים שונים.

(7 נק') א. בוחרים באקראי 20 חרוזים שונים.
מהי ההסתברות שעל 3 מהחרוזים תהיינה בדיוק 10 נקודות, על 2 מהם בדיוק 11 נקודות ועל 15 הנותרים פחות מ-10 נקודות או יותר מ-11 נקודות?

ב. בוחרים באקראי 5 חרוזים שונים.

(7 נק') 1. מהי ההסתברות שעל 5 החרוזים שנבחרו תהיינה בסך-הכל 47 נקודות?

(7 נק') 2. אם על 5 החרוזים שנבחרו יש בסך-הכל 47 נקודות,
מהי ההסתברות שלפחות על אחד מהם יש בדיוק 12 נקודות?

(7 נק') 3. הצבע של כל נקודה, שמצוירת על החרוזים, הוא לבן בהסתברות 0.8, ואחרת – אדום.
מהי ההסתברות שעל 5 החרוזים הנבחרים תהיינה בסך-הכל 9 נקודות אדומות?

(7 נק') 4. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף ב3, אם ידוע שעל חמשת החרוזים האלה יש בדיוק 40 נקודות לבנות?

שאלה 5 (8 נקודות)

בצנצנת יש 300 ממתקים: 150 אדומים, 100 ירוקים ו- 50 צהובים.
מוציאים מהצנצנת באקראי, בזה אחר זה ו<u>ללא החזרה</u> 10 ממתקים.

לכל $i = 1,2,\ldots,10$, נניח שהמשתנה המקרי X_i מקבל את הערך 1 כאשר הצבע של הממתק ה-i-י שנבחר הוא אדום, וכי $X_i = 0$ אם צבעו אינו אדום.

האם יש תלות בין המשתנים המקריים X_1 , X_2 , ... , X_{10} ?
נמק את תשובתך באמצעות תנאי אי-התלות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2014 א **מועד אחרון להגשה:** 19.1.2014

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10 נקודות)

יהיו $X_1, X_2, \dots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, כך שלכל $i = 1,2,\dots,n$ מתקיים $E[X_i] = \mu$ ו- $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$.

נגדיר $M_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ n$.

חשב את מקדם המתאם הלינארי בין X_1 ל- M_n.

שאלה 2 (10 נקודות)

מטילים שוב ושוב מטבע, שההסתברות לקבל בו H היא p $(0 < p < 1)$.

נגדיר את המשתנה המקרי X_i על-ידי המספר הסידורי של ההטלה שבה התקבלה התוצאה H בפעם ה- i-ית, לכל $i = 1,2,\dots$.

חשב את מקדם המתאם בין X_m ל- X_n, עבור $m < n$.

שאלה 3 (21 נקודות)

עוף מזן מסוים מטיל $X - 1$ ביצים בעונת הרבייה, כאשר X הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר 0.1.

כל אחת מהביצים שהעוף מטיל, בוקעת בהסתברות 0.7,

והגוזל שבוקע ממנה מגיע לגיל בגרות בהסתברות 0.5.

אין תלות בין בקיעת ביצים שונות או בין מספר הביצים שהעוף מטיל לבין בקיעתן.

נסמן ב-Y את מספר הביצים, שעוף כזה מטיל, ושמתפתח מהן גוזל שהגיע לגיל בגרות.

(7 נק') א. מהי ההסתברות שעוף מקרי (מהזן הנתון) יטיל לפחות 8 ביצים בעונה?

(7 נק') ב. חשב את התוחלת של Y.

(7 נק') ג. חשב את השונות של Y.

שאלה 4 (25 נקודות)

כיתה שבה 10 בנות ו- 20 בנים יוצאת לטיול שנתי.

בכל פעם שילדי הכיתה צריכים לעלות לאוטובוס שמסיע אותם, קוראת המורה את שמותיהם מרשימה המסודרת באופן מקרי, והילדים עולים לאוטובוס לפי סדר הקראת שמותיהם.

יהי X מספר הבנות בכיתה, העולות לאוטובוס מייד לאחר בת אחרת מכיתתן.

(8 נק׳) א. הגדר סדרת אינדיקטורים שסכומם X , המוגדרים ביחס למקומות ברשימה.
הגדר סדרת נוספת של אינדיקטורים שסכומם X , המוגדרים ביחס לבנות הכיתה.

(8 נק׳) ב. חשב את התוחלת של X , בעזרת **כל אחת** משתי סדרות האינדיקטורים שהגדרת בסעיף א.
(כלומר, עליך לבצע שני חישובים של התוחלת.)

(9 נק׳) ג. חשב את השונות של X , בעזרת **אחת** משתי סדרות האינדיקטורים שהגדרת בסעיף א.
(כלומר, עליך לבצע חישוב יחיד של השונות.)

שאלה 5 (24 נקודות)

מטילים מטבע תקין עד שלראשונה מתקבל H. יהי N מספר ההטלות המטבע שנעשו.

לאחר מכן, מטילים קובייה תקינה N פעמים.

נסמן ב- X_i , לכל $i = 1,2,\ldots,N$, את התוצאה שהתקבלה בהטלת הקובייה ה-i-ית.

נגדיר $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

(7 נק׳) א. חשב את התוחלת של S .

(7 נק׳) ב. חשב את השונות של S .

(5 נק׳) ג. חשב את $P\{ N = 2 , X_1 = 1 \mid S = 3\}$.

(5 נק׳) ד. האם המשתנים המקריים N ו- S בלתי-תלויים זה בזה?

שאלה 6 (10 נקודות)

נתונה טבלת ההסתברויות המשותפות הבאה :

X \ Y	0	1	2	3
1	$\frac{2}{27}$	0	0	$\frac{1}{27}$
2	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	0
3	0	$\frac{6}{27}$	0	0

(5 נק׳) א. האם X ו- Y בלתי-מתואמים?

(5 נק׳) ב. מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים של Y.

אוסף שאלות לתרגול עצמי

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 8

1. לאורך החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר $\frac{1}{500}$.
אין תלות בין נורות שונות מאותו הסוג.
אדם קנה 100 נורות מסוג זה.
מצא קירוב להסתברות <u>שממוצע</u> אורך החיים של 100 הנורות שנקנו יהיה בין 450 ל- 520 שעות.

2. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1,000.

א. חשב קירוב נורמלי להסתברות ש- X יקבל את הערך 1,000.
מדוע אפשר לחשב קירוב נורמלי במקרה זה?

ב. חשב חסם תחתון ל- $P\{|X-1{,}000|\leq 40\}$, באמצעות אי-שוויון צ׳בישב.

3. נתונים 5 משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, $X_1, X_2, \ldots, X_5$, שכל אחד מהם מקבל את הערכים 0, 3 ו- 6 בהסתברויות שוות (כלומר, הסתברות ⅓ לכל ערך).
נגדיר $Y=\sum_{i=1}^{5} X_i$. חשב חסם עליון ל- $P\{Y>25\}$:

א. בעזרת אי שוויון מרקוב;

ב. בעזרת אי שוויון צ׳בישב.

4. א. יהי X משתנה מקרי אי-שלילי שתוחלתו μ סופית, ויהי $t>0$.
הוכח כי $P\{X\leq \mu t\}\geq 1-\frac{1}{t}$.

ב. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n=1,2,\ldots)$, משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר p $(0<p<1)$.
הראה בעזרת אי-שוויון צ׳בישב שמתקיים: $P\left\{\overline{X}_n\leq \frac{2}{p}\right\}\geq 1-\frac{1-p}{n}$.

הערה: $\overline{X}_n=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

5. הוכח, בעזרת משפט הגבול המרכזי, כי $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} e^{-n}\frac{n^i}{i!}=\frac{1}{2}$.

6. יהיו X_1 , X_2 , ... , X_{200} משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפונקציה יוצרת המומנטים: $M_X(t) = \left(\frac{e^t}{5-4e^t}\right)^2$, עבור $t < \ln 1.25$.

מצא קירוב ל- $P\left\{1{,}910 \le \sum_{i=1}^{200} X_i < 2{,}050\right\}$.

7. א. נתון ארגז ובו 120 כדורים שעליהם רשומים מספרים.

לכל $i = 1,2,\ldots,15$, יש בארגז i כדורים שהמספר הרשום עליהם הוא i .

בוחרים כדורים מהארגז, בזה אחר זה **ועם החזרה**, כך שבכל בחירה יש לכל הכדורים סיכויים שווים להיבחר.

נניח שבוחרים (בשיטה המתוארת לעיל) בדיוק 100 כדורים.

יהי Y הסכום הכולל של 100 המספרים הרשומים על הכדורים שנבחרו.

חשב קירוב ל- $P\{1{,}000 \le Y \le 1{,}100\}$.

הערה: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ב. מעגלים 50 מספרים שנבחרו באקראי, כל אחד לשלם הקרוב לו ביותר, ומסכמים את 50 המספרים המעוגלים.

אם לכל אחת משגיאות-העיגול יש התפלגות אחידה בקטע $(-0.5, 0.5]$, מהו קירוב להסתברות שההפרש המוחלט בין הסכום המתקבל לבין הסכום המדויק של 50 המספרים עולה על 3?

8. אורך-החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים מתפלג מעריכית עם הפרמטר 0.01, והוא אינו תלוי באורך-החיים של נורות אחרות.

כמה נורות מסוג זה עליך לקנות (בקירוב), אם ברצונך להבטיח 5,000 שעות-אור בהסתברות 0.95 לפחות?

הנח שאתה מתקין נורה אחת, ובהישרפה מחליף אותה מייד באחרת. זמן ההחלפה זניח.

9. נתונים שלושה ארגזים בלתי-תלויים.

לכל ארגז אפשר להכניס X קופסאות, כאשר ל- X יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 150.

א. חשב **קירוב** להסתברות שלשלושת הארגזים יחדיו יוכנסו לפחות 480 קופסאות.

ב. חשב **קירוב** להסתברות שההפרש המוחלט בין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז הראשון לבין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז השני יהיה גדול מ- 10.

בשני הסעיפים נמק את פתרונך.

10. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- 0.5, עבור $n > 4$.

הוכח בעזרת אי שוויון צ'בישב שמתקיים: $P\{X \ge n-2\} \le \frac{n}{2(n-4)^2}$.

11. רשום את החסמים מלעיל הקטנים ביותר (המוכרים לך) עבור $P\{X \geq 14\}$, בכל אחד מן המקרים הבאים:

א. X הוא משתנה מקרי אי-שלילי ותוחלתו 7;

ב. X הוא משתנה מקרי המקיים $X \geq -2$ ותוחלתו 7;

ג. X הוא משתנה מקרי שתוחלתו 7 ושונותו 4.

12. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת סופית μ ושונות סופית σ^2.

הנח ש-n גדול וחשב **קירוב** ל- $P\left\{\bar{X} \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} + \mu\right\}$.

13. המשקל W (בטונות) של מטען, שגשר מסוים יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק, הוא משתנה מקרי נורמלי שתוחלתו 400 וסטיית התקן שלו 40. נניח שהמשקל (בטונות) של מכונית הוא משתנה מקרי שתוחלתו 3 וסטיית התקן שלו 0.3. אם ברגע מסוים ההסתברות לגרימת נזק במבנה הגשר עולה על 0.1, מהו (בקירוב) המספר המינימלי של מכוניות הנמצאות אז על הגשר?

הנח שאין תלות בין משקלי מכוניות שונות ובין המשקל של כל מכונית לעומס שהגשר יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק.

נספחים

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

דף הנוסחאות יצורף לכל בחינה.

גירסת דף הנוסחאות, המובאת בחוברת מטלות זו, נכונה לחודש אוקטובר 2010.

לקראת הבחינה מומלץ לבדוק באתר הקורס אם לא חלו שינויים בדף הנוסחאות שיצורף לבחינה.

נספח ב: רשימת טענות להוכחה בבחינה

בכל בחינה עשויות להופיע טענות, מן הרשימה המובאת להלן, שאותן תִּדָּרשו להוכיח במדויק.

ההוכחות של כל הטענות מן הרשימה מובאות באתר הקורס בקובץ נפרד.

משקל הטענות שתופענה בבחינה לא יעלה על 25 נקודות.

הטענות עשויות להופיע ביותר מאשר שאלה אחת.

גירסת רשימת הטענות, המובאת בחוברת מטלות זו, נכונה לחודש פברואר 2011.

לקראת הבחינה מומלץ לבדוק באתר הקורס אם לא חלו שינויים ברשימת הטענות לבחינה.

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,...,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t + 1 - p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1} \cdot p \quad , \quad i=1,2,...$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i! \quad , \quad i=0,1,...$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r} \cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,...$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,...,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1, m+2,...,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a \le x \le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)$, $t \ne 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad -\infty < x < \infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda - t) \quad , \quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,...,n_r} \cdot p_1^{n_1} \cdot ... \cdot p_r^{n_r} \quad , \quad \sum n_i = n \, , \, \sum p_i = 1$			

נוסחת הבינום $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$

כלל ההכלה וההפרדה $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$

הסתברות מותנית $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

נוסחת הכפל $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

נוסחת ההסתברות השלמה $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) \quad ,$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס $P(B_j | A) = \dfrac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)} \quad ,$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת $E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx$

תוחלת של פונקציה של מ"מ $E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx$

שונות $\mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית $E[aX+b] = aE[X] + b$

$\mathrm{Var}(aX+b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון $P\{X > s+t \mid X > t\} = P\{X > s\} \quad , \quad s,t \ge 0$

תוחלת מותנית $E[X | Y=y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y) = \int x f_{X|Y}(x|y) dx$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X\mid Y=y) = E[X^2\mid Y=y]-(E[X\mid Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] = E[E[X\mid Y]] = \sum_y E[X\mid Y=y]p_Y(y)$

(טענה מתרגיל ת26, עמוד 430) $E[X\cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X\mid Y]]$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X\mid Y)]+\mathrm{Var}(E[X\mid Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right] = \sum_{i=1}^{n}E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]=E[XY]-E[X]E[Y]$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{j=1}^{m}Y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Cov}(X_i,Y_j)$$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{i<j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)\big/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t)=E[e^{tX}]\quad ;\quad M_{aX+b}(t)=e^{bt}M_X(at)$

כאשר X_i מ״מ ב״ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t)\cdot\ldots\cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N}X_i\right]=E[N]E[X]$

(כאשר X_i מ״מ ב״ת ש״ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)=E[N]\mathrm{Var}(X)+(E[X])^2\mathrm{Var}(N)$

$$M_Y(t)=E\left[\left(M_X(t)\right)^N\right]$$

אי-שוויון מרקוב $P\{X\ge a\}\le E[X]/a\quad ,\quad a>0$, X מ״מ אי-שלילי

אי-שוויון צ'בישב $P\{|X-\mu|\ge a\}\le\sigma^2\big/a^2\quad ,\quad a>0\ ,\ \mu,\sigma^2<\infty$

משפט הגבול המרכזי $P\left\{(\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu)\big/\sqrt{n\sigma^2}\le a\right\}\underset{n\to\infty}{\to}\Phi(a)\quad ,\quad \mu,\sigma^2<\infty$, X_i מ״מ ב״ת וש״ה

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב״ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ״מ בינומיים (גיאומטריים) ב״ת עם אותו הפרמטר p הוא מ״מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ״מ פואסוניים ב״ת הוא מ״מ פואסוני.
- סכום של מ״מ נורמליים ב״ת הוא מ״מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ״מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב״ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}\quad ;\quad \sum_{i=0}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\quad ;\quad \sum_{i=0}^{n}i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}=e^x\quad ;\quad \sum_{i=0}^{n}x^i=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\quad ;\quad \sum_{i=0}^{\infty}x^i=\frac{1}{1-x}\quad ,\quad -1<x<1$$

$$\int(ax+b)^n\,dx=\tfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}\ ,\quad n\ne-1\quad ;\quad \int\tfrac{1}{ax+b}\,dx=\tfrac{1}{a}\ln(ax+b)$$

$$\int e^{ax}dx=\tfrac{1}{a}e^{ax}\quad ;\quad \int b^{ax}dx=\tfrac{1}{a\ln b}b^{ax}$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים :

$$\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$$

$$\log_n a=\log_m a/\log_m n\quad ;\quad \log_n(a^b)=b\cdot\log_n a\quad ;\quad \log_n(ab)=\log_n a+\log_n b$$

נספח ב: טענות להוכחה בבחינה

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב - 20425

ההוכחות של הטענות, המובאות ברשימה שלהלן, נמצאות בקובץ נפרד באתר הקורס.

1. יהיו E ו- F מאורעות במרחב מדגם S. הוכח כי: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

2. יהיו F ו- G מאורעות זרים של ניסוי מקרי כלשהו. הוכח כי בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה, ההסתברות שהמאורע F יתרחש לפני המאורע G היא: $\dfrac{P(F)}{P(F)+P(G)}$

3. יהי X משתנה מקרי בדיד, שתוחלתו סופית, ויהיו a ו- b קבועים ממשיים. הוכח כי:

$$E[aX+b] = aE[X]+b \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$$

4. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$. הוכח כי:

$$E[X] = np \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

5. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \lambda \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda$

6. יהי X משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים N, m ו- n. הוכח כי: $E[X] = n \cdot \frac{m}{N}$

7. יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

8. הוכח: אם מאורע מסוים מתרחש בהתאם לַהנחות של תהליך-פואסון עם קצב λ, אז משך הזמן החולף עד להתרחשות המופע הראשון של המאורע (החל מזמן 0) הוא משתנה מקרי מעריכי עם אותו הפרמטר λ.

9. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה.
הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda_X + \lambda_Y$.

10. יהיו X ו- Y משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.
הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים $(2, p)$.

11. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה.
הוכח שלמשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X+Y=n$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$.

12. יהי $Y = a + bX$, ונניח כי $\sigma_X^2 > 0$. הראה כי:

$$\rho(X,Y) = \begin{cases} +1 & , \quad b > 0 \\ -1 & , \quad b < 0 \end{cases}$$

13. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת ושונות סופיות, μ ו- σ^2, בהתאמה.

הוכח כי: $E[\overline{X}] = \mu \quad ; \quad \mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2/n$

14. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_r$ משתנים מקריים בעלי פונקציית התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $p_1, p_2, \ldots, p_r$.

הוכח: א. למשתנה המקרי X_i יש התפלגות שולית בינומית עם הפרמטרים n ו-p_i.

ב. למשתנה המקרי המותנה X_1 בהינתן $X_2 = j$, לכל $j = 0,1,\ldots,n$, יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n-j$ ו- $p_1/(1-p_2)$.

ג. $Cov(X_i, X_j) = -np_ip_j$

15. יהיו X ו-Y משתנים מקריים בדידים בעלי תוחלות ושונויות סופיות.

הוכח:

$$E[X] = E[E[X \mid Y]]$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$$

16. הוכח: אם N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים אי-שליליים, ואם $X_1, X_2, \ldots$ הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב-N, אז מתקיים:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1]$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\mathrm{Var}(N)$$

הערה: כאשר $N = 0$, סכום המשתנים שווה גם הוא ל-0.

17. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי: $M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n \quad , \quad -\infty < t < \infty$

18. יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי: $M_X(t) = \dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \quad , \quad t < -\ln(1-p)$

19. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$.

הוכח כי: $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \quad , \quad -\infty < t < \infty$

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z)=P\{Z\le z\}=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt \qquad ; \qquad \Phi(-z)=1-\Phi(z) \qquad ; \qquad Z\sim N(0,1)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326