

פרק 7

רשתות

זרימה

לקט

תרגילים

מעשי

שאלה 1

נתונה רשימה של p טייסים, n נוטים ו- m מטוסים. כמו כן נתונה טבלה המפרטת לאיזה מטוסים יכולים לעלות הטייסים והנוטים.

המטרה – להרכיב מספר מקסימלי של צוותים (טייס ונווט) כדי להעלות לאוויר מספר מקסימלי של מטוסים בו-זמנית.

תאר אלגוריתם המשיג מטרה זו.

שאלה 2

בשכבת כיתות א' בבי"ס מסוים יש k ילדים. ביה"ס מציע m חוגים לכיתות א'. כל ילד c_i ($1 \leq i \leq k$) הכין רשימה L_i המכילה את כל החוגים בהם הוא מעוניין להשתתף. בנוסף, הוריו של כל ילד c_i ($1 \leq i \leq k$) הגבילו את מספר החוגים שמותר לו להשתתף בהם ל- r_i .

בכל חוג a_i ($1 \leq i \leq m$) יכולים להשתתף לכל היותר n_i תלמידים.

א. כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכל ו הבודק האם קיים שיבוץ של הילדים לחוגים כך שכל החוגים הם מלאים (כלומר, לא נשאר מקום פנוי באף חוג). הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

ב. כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכל ו הבודק האם קיים שיבוץ של הילדים לחוגים כך שכל ילד משתתף בכל החוגים שהוא מעוניין בהם. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

A spammer is located at one node q in a undirected communication network G and peaceful email users are located at nodes denoted by the set S . Let c_{uv} denote the effort required to install a spam filter for the network edge (u, v) . The problem is to determine the minimal effort required to isolate the spammer from the email users using the spam filters. Find an efficient polynomial time algorithm to solve this problem.

Dining Problem. Several families go out to dinner together. To increase their social interaction, they would like to sit at tables so that no two members of the same family are at the same table. Show how to formulate finding a seating arrangement that meets this objective as a maximum flow problem. Assume that the dinner contingent has p families and that the i th family has $a(i)$ members. Also assume that q tables are available and that the j th table has a seating capacity of $b(j)$.

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$. נתונות שתי קבוצות זרות ולא ריקות של צמתים, $B \subset V$, $M \subset V$. בכל צומת $v \in M$ נמצא קוף, ובכל צומת $v \in B$ מונחת בננה.

א. (14 נק') הציעו אלגוריתם המבוסס על זרימה המוצא מהו המספר המינימלי של קשתות שיש להוריד מהגרף כך שלאף אחד מהקופים לא תהיה גישה לאף אחת מהבנות. הסבירו בקצרה מדוע האלגוריתם נכון. ציינו ונמקו את סיבוכיות זמן הריצה. הבהרה: הקופים יכולים להתקדם בגרף רק על-פי כיווני הקשתות.

ב. (6 נק') קוף חדש הגיע לגרף. יש למצוא את כל הצמתים בגרף שאם נמקם בהם את הקוף החדש, ערך הפתרון של סעיף א' לא יגדל (או להודיע שאין צמתים כאלו). אסור להוסיף את הקוף לצומת שכבר יש בו קוף אחר. הציעו אלגוריתם יעיל למציאת קבוצת צמתים זו. הסבירו בקצרה מדוע האלגוריתם נכון, ציינו ונמקו את סיבוכיות זמן הריצה. הערה: אין להניח שכבר יש בידכם פתרון לסעיף א', במידת הצורך ניתן לחזור על חלקים מהאלגוריתם שהצעתם בסעיף א'.

גרפים

שאלה 6

סעיף א'

הוכיחו או הפריכו: קיימת רשת זרימה $G = (V, E)$ אשר מכילה 7 קשתות עם קיבול 1 ועוד 30 קשתות עם קיבול 10, והזרימה המקסימלית בה הינה בגודל 39 (פרט ל 37 הקשתות הנתונות, אין קשתות נוספות ברשת).

סעיף ב'

הוכיחו או הפריכו: קיימת רשת זרימה $G = (V, E)$ אשר כל הקיבולים בה הם 1 או $\sqrt{2}$, קיים ברשת מסלול בין המקור לבור שכל הקשתות שבו בעלות קיבול $\sqrt{2}$, והזרימה המקסימלית הינה בגודל 39.

סעיף ג'

הוכיחו או הפריכו: קיימת רשת זרימה $G = (V, E)$ אשר כל הקיבולים בה הם 1 או $\sqrt{2}$, קיים ברשת חתך (לאו דווקא מינימלי) מהמקור אל הבור שכל הקשתות שלו בעלות קיבול $\sqrt{2}$ והזרימה המקסימלית היא 39.

- יהיו $L = \{l_1, \dots, l_{|L|}\}$ ו $R = \{r_1, \dots, r_{|R|}\}$ שתי קבוצות מספרים טבעיים המקיימות

$$\sum_{r \in R} r = \sum_{l \in L} l = m$$

- בנה אלגוריתם הבודק האם קיים גרף דו צדדי אשר קודקודיו הם $\{R \cup L\}$ ודרגת כל צומת בו היא כגודל המספר אותו הצומת מייצג

We define a *most vital arc* of a network as an arc whose deletion causes the largest decrease in the maximum s - t -flow value. Let f be an arbitrary maximum s - t -flow. Either prove the following claims or show through counterexamples that they are false:

- (a) A most vital arc is an arc e with the maximum value of $c(e)$.
- (b) A most vital arc is an arc e with the maximum value of $f(e)$.
- (c) A most vital arc is an arc e with the maximum value of $f(e)$ among arcs belonging to some minimum cut.
- (d) An arc that does not belong to some minimum cut cannot be a most vital arc.
- (e) A network might contain several most vital arcs.

Question 2: A matching M is called *maximal* if M is not strictly contained in another matching, namely, if there is no $M' \neq M$ such that $M \subseteq M'$.

1. Design an algorithm that finds a maximal matching in an arbitrary undirected graph.
2. Let M be a maximal matching and M^* be a maximum matching (in an arbitrary graph). Show that $|M| \leq |M^*| \leq 2 \cdot |M|$.

בהינתן גרף מכוון, כיצד ניתן למצוא תת גרף שבו לכל הקדקודים דרגת הכניסה 1 ודרגת היציאה 1, או להוכיח שאין כזה ?

א. אם כל הקשתות ברשת זרימה הן בעלות קיבולת זוגית פרט לקשת אחת e שהיא בעלת קיבול אי-זוגי, והזרימה המרבית הינה אי-זוגית, אזי בזרימה המרבית הקשת e רווייה.

ב. אם כל הקשתות ברשת זרימה הן בעלות קיבולת זוגית, אזי גם הזרימה המרבית הינה זוגית.

ג. אם כל הקיבולות של הקשתות ברשת זרימה הן בעלות ערך אי-זוגי, אזי גם הזרימה המרבית הינה זוגית.

Given is a network flow with no parallel edges. It is known that the max-flow value in the network is F . Good fairy A suggests you to increase by 2 the capacity of a single edge (of your choice). Good fairy B suggests you to increase by 1 the capacity of two edges (of your choice).

For each of the following two questions, draw the network, the best utilization of fairy A's suggestion and the best utilization of fairy B's suggestion.

1. Suggest a network flow with at most 4 vertices for which the suggestion of fairy A is better than the suggestion of fairy B (that is, it enables a larger increase of the max-flow value).
2. Suggest a network flow with at most 4 vertices for which both suggestions are equivalent and both enable an increase of the max-flow value to $F+1$.
3. A bad witch is trying to cancel the ferries suggestions. She fails canceling them, but now she is selecting for you the edge (in suggestion A) or the edges (in suggestion B) whose capacity will increase.

Suggest a network flow with at most 4 vertices for which without the witch's interfering the max-flow is increased by two (in both suggestions) but with the witch's interfering it is not increased at all (in both suggestions). You need to draw the network, the best utilization of suggestion A, the best utilization of suggestion B, the witch's choice for suggestion A, and the witch's choice for suggestion B (5 networks in total).