מבנה הבחינה :

* עליך לענות על 4 מתוך 6 השאלות, כאשר בין 4 השאלות שבחרת, **חייבת להופיע שאלה מס' 3 או שאלה מס' 4 או שתיהן**.
* משקל כל שאלה 25% .
* אם תשיב על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* **יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

תהי $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.

להלן יחסים (רלציות) שונים המוגדרים מעל $P(A)$ (שים לב: מעל $P(A)$, לא מעל A).

בכל סעיף, קבע אם היחס המוגדר באותו סעיף הוא:

(i) רפלקסיבי? *(ii)* סימטרי? *(iii)* אנטי-סימטרי? *(iv)* טרנזיטיבי? **נמק כל תשובה**.

(6 נק') א. היחס R המוגדר כך: $(X,Y) \in R$ אםם $1 \in X \cup Y$.

(6 נק') ב. היחס S המוגדר כך: $(X,Y) \in S$ אםם $1 \notin X \cup Y$.

(6 נק') ג. היחס T המוגדר כך: $(X,Y) \in T$ אםם $X \subseteq Y$ או $Y \subseteq X$.

(6 נק') ד. היחס K המוגדר כך: $(X,Y) \in K$ אםם $|X|$ = **סכום** אברי Y.

דוגמא: אם $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ו- $Y = \{2, 4\}$

מתקיים $(X,Y) \in K$ כי $|X| = 6 =$ סכום אברי Y.

סכום אברי $\varnothing$ מוגדר להיות 0.

(1 נקודה: בהירות הנימוקים).

תזכורת: העובדה שיחס הוא סימטרי אינה מונעת ממנו להיות אנטי-סימטרי.

שאלה 2

(13 נק') א. תהי $A = \{(x, y) \ | \ x, y \in \mathbf{R} \ , \ x - y = 5 \ , \ x + y \in \mathbf{N} \ \}$.

מהי עוצמת A ? הוכח.

(12 נק') ב. תהי $B = \{(x, y, z) \ | \ x, y, z \in \mathbf{R} \ , \ x - y = 5 \ , \ x + y + z \in \mathbf{N} \ \}$.

מהי עוצמת B ? הוכח.

שאלה 3

יהי I_n מספר **החלוקות** של הקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$ המקיימות :

בכל מחלקה יש לא יותר משני איברים.

דוגמא : $\{\{1,2\}, \{3\}, \{4\}, \{5,6\}\}$ היא חלוקה של $\{1,2,3,4,5,6\}$ העונה על הדרישה.

(10 נק') א. הוכח את יחס הנסיגה (רקורסיה) : $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$ ($n \geq 2$).

תן ערכי התחלה מספיקים. **אין צורך לפתור את יחס הנסיגה**.

(10 נק') ב. יהיו $1 \leq m \leq n$. נסכים כי $I_0 = 1$.

הוכח : $I_{n+m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{k} k! I_{m-k} I_{n-k}$.

הדרכה : חלֵק את הקבוצה שגודלה $n + m$ לשתי קבוצות זרות, A_1 בגודל m

ו- A_2 בגודל n. מיין את כל החלוקות העונות לדרישה לפי $k = 0, \dots, m$,

כאשר k הוא .... ?

(5 נק') ג. הראה כי הנוסחה מסעיף א היא מקרה פרטי של סעיף ב.

שאלה 4

(19 נק') א. חשב את המקדם של x^{2m} בכל אחד מאגפי הזהות האלגברית :

$$(1+x)^{10}(1-x)^{10} = (1-x^2)^{10} .$$

קבל מכאן זהות על סכומים של מכפלות של מקדמים בינומיים.

(6 נק') ב. בדוק את תשובתך עבור המקרה $m=1$ ועבור המקרה $m=10$.

שים לב להגדרת המקדמים הבינומיים החריגים ("קומבינטוריקה" עמ' 30).

שאלה 5

נתונה שפה של תחשיב הפרדיקטים, שבה סימן פונקציה חד-מקומית f ,

סימן פונקציה דו-מקומית m , סימן פרדיקט דו-מקומי S וסימן קבוע a .

בנוסף נמצא בשפה סימן **השוויון**, שלמען הקיצור נרשום אותו פשוט כשוויון,

כגון $f(x)=m(y,a)$ או כגון $\sim(x=y)$.

אין בשפה עוד סימני פונקציות, פרדיקטים או קבועים.

כרגיל, נמצאים בשפה הקשרים הלוגיים $\vee, \wedge, \leftrightarrow, \rightarrow, \sim$, סוגריים, שני הכמתים $\forall, \exists$

וסימני משתנים כגון x,y,z .

נתונה אינטרפרטציה J של השפה , שעולמה הוא המספרים הטבעיים **ללא 0**, ובה :

$f(x)$ מתפרש כמספר $x+1$. $m(x,y)$ מתפרש כמספר $x \cdot y$.

$S(x,y)$ אמיתי אםם $x<y$.

a מתפרש כמספר 1 .

בכל סעיף, כתוֹב שם-עצם או תבנית בשפה הנ"ל המייצגים את הנאמר באותו סעיף.

כתיב מקוצר - מותר. הקפד לשים סוגרים במקרה שייתכן ספק בקריאה.

שים לב שסימנים כגון "1" או "<" אינם תוים בשפה - השתמש בסימנים המייצגים אותם בשפה, כפי שתואר. **אין צורך לנמק**.

(2 נק') א. שם-עצם המייצג את המספר 9 , שהסימן f מופיע בו לא יותר מ- 5 פעמים (אפשר פחות).

(5 נק') ב. פסוק האומר ש- 1 קטן מכל מספר אחר בעולם (שים לב ש- 1 אינו קטן מעצמו).

(3 נק') ג. תבנית ψ שבה x,z מופיעים חפשיים, האומרת ש- x מתחלק ללא שארית ב- z.

למען ההמשך, נקרא לתבנית מסעיף ג' $\psi(x,z)$.

בסעיפים הבאים אפשר להשתמש בה, וכן אפשר במידת הצורך לרשום $\psi(z,y)$ וכדומה.

בצורה דומה אפשר בכל סעיף להיעזר בתבניות שבניתם בסעיפים שלפניו.

(6 נק') ד. תבנית $\pi(x)$ האומרת ש- x הוא מספר ראשוני.

(מספר ראשוני הוא מספר טבעי חיובי שונה מ- 1, שמתחלק ללא שארית רק בעצמו וב- 1.

שימו לב ש- **1 אינו נחשב ראשוני**).

(3 נק') ה. תבנית $\varphi(x,z)$ האומרת ש- z הוא גורם ראשוני של x.

(6 נק') ו. תבנית האומרת ש- z הוא הגורם הראשוני הקטן ביותר של x

(שוב שים לב ש- z אינו קטן מעצמו).

שאלה 6

תהי $A=\{1,2,3,\ldots,10\}$. נחלק את $P(A)$ לשתי מחלקות :

במחלקה K_0 הקבוצות שהן בעלות מספר זוגי של איברים

ובמחלקה K_1 הקבוצות שהן בעלות מספר אי-זוגי של איברים.

בכל אחד מהסעיפים א', ב', מתוארת דרך להפוך את $P(A)$ לגרופואיד.

בכל סעיף, קבע אם החלוקה $\{K_1 , K_2\}$ היא חלוקה מותרת של הגרופואיד.

אם החלוקה מותרת – רשום את לוח הכפל של גרופואיד המנה.

(12 נקי) א. הפעולה היא הפרש קבוצות ("תורת הקבוצות" עמ' 20).

(13 נקי) ב. הפעולה היא הפרש סימטרי של קבוצות
("תורת הקבוצות" שאלה 1.22 בעמ' 27).
ניתן להיעזר בתכונה הבאה של הפרש סימטרי : $A\oplus B = (A\cup B)-(A\cap B)$.

בהצלחה!