ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20476

# מתמטיקה בדידה

## חוברת הקורס קיץ 2018ג

כתב: ישראל פרידמן

יולי 2018 - סמסטר קיץ תשע״ח

**פנימי – לא להפצה.**

# תוכן העניינים

## אל הסטודנטים,

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מתמטיקה בדידה".
אנא קראו בעיון את כל הסעיפים לפני שתתחילו בלימודיכם. פרטים לגבי נהלים המקובלים באוניברסיטה הפתוחה מפורטים בידיעון האקדמי. תיאורי הקורסים מופיעים בקטלוג הקורסים.
**<u>הערה:</u>** על חלק מספרי הלימוד וחלק מחומרי העזר של הקורס מופיעים מספרי קורס 20276, 20283.
חומרים אלה הועברו לקורס שלנו מקורס שפעל באו"פ בשנים קודמות.

קורס זה מתוקשב במסגרת הפעילות של מחלקת תלם (תקשוב ללימוד מרחוק).
קורס מתוקשב כולל, נוסף על יחידות הלימוד הכתובות, גם פעילות באתר הקורס באינטרנט.
פעילות זו כוללת: אינטראקציה בין הסטודנטים לצוות ההוראה באמצעות קבוצות דיון ודואר אלקטרוני, הפניות למאגרי מידע ולאתרים ברשת האינטרנט, חומרי לימוד והעשרה. הפעילות באתר הקורס אינה חובה אך האתר יכול לסייע מאוד בלימוד הקורס.
כתובת אתרי הקורסים: **http://www.openu.ac.il/shoham** .
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

**לתשומת לבכם:**
סמסטר הקיץ נמשך 9 שבועות בלבד ולכן יידרש מכם מאמץ ניכר לעמוד בעומס ובלוח הזמנים של הקורס. חשוב להקפיד על לימוד החומר והגשת המטלות בקצב שקבענו, כדי להבטיח סיום מוצלח של הקורס. בגלל משך הסמסטר הקצר, אין אפשרות לפגר בהגשת מטלות.

פרטים נוספים בהמשך החוברת.

מרכז ההוראה בקורס הוא ישראל פרידמן. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 09-7781431, בימי א' בשעות 13:00 – 15:00 ( ניתן גם לנסות בימים אחרים).
- דרך אתר הקורס.
- בפקס 09-7780631

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה ,
צוות הקורס

## לוח זמנים ופעילויות (מס' קורס: 20476 / ג2018)

| שבוע הלימוד | תאריכי שבוע הלימוד | יחידת הלימוד המומלצת | מפגשי הנחיה* | תאריך אחרון למשלוח | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | ממ"ח (לאו"פ) | ממ"ן (למנחה) |
| 1 | 13.7.2018-8.7.2018 | החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה" תורת הקבוצות פרק 1 | | ממ"ח 01<br>15.7.2018 | |
| 2 | 20.7.2018-15.7.2018 | תורת הקבוצות פרק 2 | | | ממ"ן 11<br>23.7.2018 |
| 3 | 27.7.2018-22.7.2018<br>(א צום ט' באב) | תורת הקבוצות פרק 3 | | | ממ"ח 02<br>29.7.2018 |
| 4 | 3.8.2018-29.7.2018 | תורת הקבוצות פרקים 4 – 5 | | ממ"ח 03<br>3.8.2018 | ממ"ן 12<br>7.8.2018 |
| 5 | 10.8.2018-5.8.2018 | קומבינטוריקה פרקים 1 - 2 | | | ממ"ן 13<br>14.8.2018 |
| 6 | 17.8.2018-12.8.2018 | קומבינטוריקה פרקים 3 - 5 | | ממ"ח 04<br>20.8.2018 | |
| 7 | 24.8.2018-19.8.2018 | קומבינטוריקה פרקים 6- 7 | | | ממ"ן 14<br>26.8.2018 |
| 8 | 31.8.2018-26.8.2018 | תורת הגרפים פרקים 1 - 3 | | | ממ"ן 15<br>2.9.2018 |
| 9 | 7.9.2018-2.9.2018 | תורת הגרפים פרקים 4- 6 | | ממ"ח 05<br>8.9.2018 | ממ"ן 16<br>14.2018 |

*מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד*

*+ התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב#לוח מפגשים ומנחים#*

## מטלות הקורס

**קראו היטב עמודים אלה לפני שתתחילו לענות על השאלות**

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס. הבנה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. מטלות המנחה (ממנ״ים) יבדקו על-ידי המנחה ויוחזרו לכם בצירוף הערות המתייחסות לתשובות. על מטלות המחשב (ממ״חים) תקבלו רק פירוט תשובות נכונות ולא נכונות.

**מבנה המטלות**

בכל מטלה כמה שאלות. משקל כל השאלות במטלה זהה אלא אם כן צוין אחרת.
את הפתרונות לממ״ן עליכם לרשום על דף בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. לחלופין ניתן להגיש את המטלות מודפסות במעבד תמלילים, בתנאי שכל הסימונים המתמטיים ברורים. אין להשתמש בסימונים שאינם מופיעים ביחידות.

**ניקוד המטלות**

בקורס שש מטלות מנחה (ממ״נים) וחמש מטלות מחשב (ממ״חים).
משקל כל ממ״ן הוא 3 נקודות, משקל כל ממ״ח הוא 2 נקודות מלבד ממ״ח 01 שמשקלו נקודה אחת.
בהגשת כל המטלות ניתן אפוא לצבור 27 נקודות.

**דרישות חובה בהגשת המטלות:**

# חובה להגיש מטלות במשקל של 14 נקודות לפחות.
# ללא הגשת מטלות במשקל זה לפחות,
# אי-אפשר לעבור את הקורס.

**תנאים לקבלת נקודות זכות בקורס**

א. להגיש מטלות במשקל של 14 נק׳ לפחות.
ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.
ג. לקבל בציון הסופי 60 נקודות לפחות.

# הערות חשובות לתשומת לבך!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

## עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

## אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

# מטלת מחשב (ממ"ח) 01

**הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה** **חומר הלימוד למטלה: החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"**

**מספר השאלות: 13** **משקל המטלה: נקודה אחת**

**סמסטר: 2018ג** **מועד הגשה: 15.7.2018**

**את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א**
**בכתובת** http://www.openu.ac.il/sheilta/
**הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!**

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות. סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה, ב - אם רק טענה 2 נכונה,

ג - אם שתי הטענות נכונות, ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

### שאלה 1

1. "משה הכה בסלע ויצאו ממנו מים" - זהו פסוק.
2. "ארבעים שנה" - זהו פסוק.

### שאלה 2

1. **שלילת** הפסוק אברסט הוא ההר הגבוה ביותר בכדור הארץ.
   היא הפסוק אברסט הוא ההר הנמוך ביותר בכדור הארץ.
2. **שלילת** הפסוק $1+1>2$ היא הפסוק $1+1<2$ .

### שאלה 3

1. הפסוק $1+1=2$ **או** $2+3>5$ הוא אמת.
2. הפסוק $1+1=2$ **וגם** $3+3>2$ הוא אמת.

### שאלה 4

1. הפסוק **אם** $2>3$ **אז** $2<3$ הוא אמת.
2. הפסוק **אם** $2>3$ **אז** $2=4$ הוא אמת.

### שאלה 5

1. הפסוק **אם** $2<3$ **אז** $3<4$ הוא אמת.
2. הפסוק **אם** $2<3$ **אז** $4<3$ הוא אמת.

| $p$ | $q$ | $r$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|
| **T** | **T** | **T** | **T** |
| **T** | **T** | **F** | **F** |
| **T** | **F** | **T** | **F** |
| **T** | **F** | **F** | **F** |
| **F** | **T** | **T** | **T** |
| **F** | **T** | **F** | **F** |
| **F** | **F** | **T** | **F** |
| **F** | **F** | **F** | **T** |

**שאלה 6**

1. באיור משמאל מופיע לוח האמת של הפסוק $\alpha = (p \to q) \wedge (p \to r)$.
2. הפסוק הפורמלי $(\neg p) \wedge \neg(p \to q)$ הוא סתירה.

**שאלה 7**

1. $\neg((p \wedge q) \vee r)$ שקול טאוטולוגית ל- $((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$.
2. $p \wedge \neg(p \wedge q)$ שקול טאוטולוגית ל- $q \wedge \neg(q \wedge p)$.

**שאלה 8**

1. שלילת הפסוק **היום חם ולח** שקולה לפסוק **היום לא חם או היום לא לח**.
2. שלילת הפסוק **אסע לתאילנד השנה או בשנה הבאה**
שקולה לפסוק **לא אסע לתאילנד השנה ולא אסע לתאילנד בשנה הבאה**.

**שאלה 9**

1. מתוך הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p$ נובע טאוטולוגית הפסוק $r$.
2. מתוך הפסוק $r$ נובע טאוטולוגית הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p$.

**שאלה 10**

1. אם מ- $\alpha$ נובע $\beta$ אז $\alpha \wedge \neg\beta$ הוא סתירה.
2. אם מ- $\alpha \wedge \neg\beta$ נובעת סתירה אז מ- $\alpha$ נובע $\neg\beta$.

**שאלה 11**

נתבונן בפסוק: **לכל מספר הגדול מ- 1, הריבוע שלו גדול ממנו.**

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x((x > 1) \wedge (x^2 > x))$
2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x((x > 1) \to (x^2 > x))$

**שאלה 12**

נתבונן שוב בפסוק: **לכל מספר הגדול מ- 1, הריבוע שלו גדול ממנו.**

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x((x \le 1) \vee (x^2 > x))$
2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $(\forall x\,(x > 1)) \to \forall x(x^2 > x)$

**שאלה 13**

1. את שלילת הפסוק **לכל** x **קיים** y **שהריבוע שלו הוא** x
ניתן לנסח כך: **לכל** x **לא קיים** y **שהריבוע שלו הוא** x.
2. את שלילת הפסוק **לכל** x **קיים** y **שהריבוע שלו הוא** x
ניתן לנסח כך: **קיים** x**, כך שלכל** y **, הריבוע של** y שונה מ- x.

# מטלת מנחה (ממ״ן) 11

**הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה** | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 1**

**מספר השאלות: 4** | **משקל המטלה: 3 נקודות**

**סמסטר: 2018ג** | **מועד הגשה: 23.7.2018**

**מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״)
- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

**שאלה 1** (24 נק׳)

שאלה זו נועדת לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות:
- ההבדל בין $A$ לבין $\{A\}$ (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא $A$).
- מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה $\varnothing$ לבין $\{\varnothing\}$.
- ההבדל בין "$x$ איבר של $y$" לבין "$x$ חלקי ל- $y$".

לכל אחד מהזוגות $x\,;\,y$ הבאים, קבעו אם $x \in y$ וקבעו אם $x \subseteq y$.

ייתכן ששני היחסים יתקיימו בעת ובעונה אחת, וייתכן גם שאף אחד משניהם לא יתקיים.

בשאלה זו אין צורך לנמק.

א. $\{1,2\} \;;\; \{1,2,3\}$

ב. $\{3\} \;;\; \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

ג. $\{1,2\} \;;\; \{\{1,2\},3\}$

ד. $\{1,3\} \;;\; \{\{1,2\},3\}$

ה. $\varnothing \;;\; \varnothing$

ו. $\{\varnothing\} \;;\; \{\varnothing\}$

ז. $\{1\} \;;\; \{1,2\}$

ח. $\varnothing \;;\; P(\{1,2,3\})$

**שאלה 2** (27 נק׳)

**הוכח או הפרך** כל אחת מהטענות הבאות. כדי להפריך טענה - הבא דוגמא נגדית.

לטענות הנכונות - תן הוכחה מסודרת המסתמכת בכל צעד על טענות והגדרות בספר .

א. $(A-B)-B = A-B$

ב. $A-(B-A) = A$

ג. $A \subseteq P(A)$

**שאלה 3** (12 נק׳)

הוכח את הטענה הבאה בעזרת **״אלגברה של קבוצות״**: צא מאחד האגפים, פתח אותו בעזרת זהויות ידועות, והגע לאגף השני. אין להשתמש בהוכחה במושג ״איבר״. במקומות בהם מופיע

הפרש קבוצות מומלץ להיעזר בזהות $A-B=A\cap B'$ (עמ' 23 בספר הלימוד).
**בכל צעד, ציין באופן ברור את הזהויות עליהן אתה מסתמך.**

$$(A_1\cup A_2)-(B_1\cap B_2) \;=\; (A_1-B_1)\cup(A_1-B_2)\cup(A_2-B_1)\cup(A_2-B_2)$$

הצעה: נוח לסמן $B=B_1\cap B_2$ ולהציב בחזרה את $B_1,B_2$ בשלב מאוחר.

**שאלה 4** (33 נק')

איחוד של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בהגדרה 1.6 בעמוד 12 בספר.
במלים פשוטות ההגדרה היא:
$x\in\bigcup_{i\in I}A_i$ אםם $x$ שייך **לפחות** לאחת הקבוצות $A_i$, כאשר $i$ מקבל ערכים ב- $I$.

**במלים אחרות:** $x\in\bigcup_{i\in I}A_i$ אםם $\exists i\left(i\in I\ \wedge\ x\in A_i\right)$

חיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בעמוד 16 בספר. במלים פשוטות ההגדרה היא:
$x\in\bigcap_{i\in I}A_i$ אםם $x$ שייך **לכל** הקבוצות $A_i$, כאשר $i$ מקבל ערכים ב- $I$.

**במלים אחרות:** $x\in\bigcap_{i\in I}A_i$ אםם $\forall i\left(i\in I\ \rightarrow\ x\in A_i\right)$

השאלה שלפניכם מתרגלת את השימוש בשני המושגים הללו.

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים (כולל 0), $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

לכל $n\in\mathbf{N}$, תהי $A_n=\left\{x\in\mathbf{R}\ |\ 4\le x\le 2n+2\right\}$, ותהי $B_n=A_{n+1}-A_n$.

(7 נק') א. חשבו את $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ ואת $B_0$, $B_1$, $B_2$.

(5 נק') ב. רשמו ביטוי מפורש עבור $B_n$ (ביטוי מפורש: ביטוי בעל צורה דומה להגדרה של $A_n$).

(9 נק') ג. חשבו את $\bigcup_{2\le n\in\mathbf{N}}B_n$. הוכיחו את תשובתכם בעזרת הכלה דו-כיוונית.

(10 נק') ד. בעזרת ההגדרות של איחוד וחיתוך כלליים בתחילת השאלה **ובעזרת כללי דה-מורגן לכמתים** $\forall,\exists$, אותם למדנו בלוגיקה, נסחו והוכיחו הכללה של כללי דה-מורגן לקבוצות, עבור **איחוד וחיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות**, שכולן חלקיות לקבוצה אוניברסלית $U$:

$$\bigcup_{i\in I}(A_i')=?\quad,\quad\bigcap_{i\in I}(A_i')=?\ .$$

(6 נק') ה. נסמן $D_n=\mathbf{R}-B_n$. חשבו בעזרת הסעיפים הקודמים את $\bigcap_{2\le n\in\mathbf{N}}D_n$.

# מטלת מחשב (ממ"ח) 02

**הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה** | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 2**
**מספר השאלות: 20** | **משקל המטלה: 2 נקודות**
**סמסטר: 2018ג** | **מועד הגשה: 29.7.2018**

**את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א**
**בכתובת** http://www.openu.ac.il/sheilta/
**הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!**

"רלציה" בעברית: **יחס**.

בכל שאלה במטלה זו מופיעה טענה אחת. סמנו:

**א** - אם הטענה נכונה　　　　**ב** - אם הטענה לא נכונה

**שאלה 1**

אם $R$ הוא יחס מעל קבוצה $A$ אז קיימת קבוצה $X \subseteq A$ כך ש- $R = X \times X$.

**שאלה 2**

אם $R$ ו- $S$ הם יחסים מעל קבוצה $A$, גם $R \times S$ הוא יחס מעל הקבוצה $A$.

**שאלה 3**

אם $R$ הוא יחס מעל קבוצה $A$ אז $R \times A$ הוא יחס מעל $A \times A$

**שאלה 4**

אם $R$ ו- $S$ הם יחסים מעל קבוצה $A$ גם ההפרש הסימטרי $R \oplus S$ הוא יחס מעל הקבוצה $A$.
(ראו בשאלה 1.22 בכרך "תורת הקבוצות".)

בשאלות 5,6 $R$ הקבוצה $A$ הנחשבת לקבוצה אוניברסלית

**שאלה 5**

אם $X \subseteq A$, ו- $R = X \times X'$ ואם $R \neq \varnothing$ אז $Domain(R) \cup Range(R) = A$.

**שאלה 6**

אם $R$ הוא יחס מעל קבוצה $A$ ואם $Domain(R) \cap Range(R) = \varnothing$ אז קיימת קבוצה $X \subseteq A$ כך ש- $R \subseteq X \times X'$.

**שאלה 7**

אם $R$ הוא יחס מעל קבוצה $A$ ואם $R^{-1}R = I_A$ אז $Range(R) = A$.

**שאלה 8**

אם $R$ הוא יחס מעל קבוצה $A$ ואם $RR^{-1} = I_A$ אז $Range(R) = A$.

**שאלה 9**

לכל יחס $R$ מתקיים: $RR^{-1} = R^{-1}R$.

**שאלה 10**

אם $R,S$ הם יחסים מעל $A$ כך ש- $SR = RS$ אז $S^{-1}R = RS^{-1}$.

**שאלה 11**

אם $R$ הוא יחס רפלקסיבי מעל קבוצה $A$ אז $RR^{-1} = I_A$.

**שאלה 12**

אם $R$ הוא יחס אנטי-סימטרי אז גם $R^{-1}$ הוא יחס אנטי-סימטרי.

**שאלה 13**

אם $R$ יחס טרנזיטיבי אז גם $R^2$ הוא טרנזיטיבי.

**שאלה 14**

לכל יחס $R$, היחס $R \cup R^2$ הוא טרנזיטיבי.

**שאלה 15**

אם $R$ הוא יחס מעל $A = \{1,2,3\}$ אז $R \cup R^2 \cup R^3$ הוא טרנזיטיבי.

**שאלה 16**

אם $R,S$ הם יחסים סימטריים מעל $A$ אז גם $R \cup S$ יחס סימטרי.

**שאלה 17**

אם $R,S$ הם יחסים אנטי-סימטריים מעל $A$ אז גם $R \cup S$ יחס אנטי-סימטרי.

בשאלות 18-20 $R$ הוא יחס מעל $A$ קבוצת המספרים הטבעיים ש**אינם מתחלקים** ב- 3 המוגדר כך: $(m,n) \in R$ אם ורק אם $3 | m + n$.

**שאלה 18**

$R$ רפלקסיבי

**שאלה 19**

$R^2$ רפלקסיבי

**שאלה 20**

$R^2$ טרנזיטיבי

# מטלת מחשב (ממ״ח) 03

**הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה** | **חומר הלימוד למטלה: ״תורת הקבוצות״ פרקים 2-3**
**מספר השאלות: 20** | **משקל המטלה: 2 נקודות**
**סמסטר: 2018ג** | **מועד הגשה: 3.8.2018**

**את התשובות לממ״ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת״א**
**בכתובת** http://www.openu.ac.il/sheilta/
**הממ״ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ״ח למנחה!**

**הערה**: כל הפונקציות במטלה זו הן פונקציות **של,** כלומר **מלאות** (לא פונקציות חלקיות**!).**
בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.
**סמנו**: **א** - אם הטענה נכונה ; **ב** - אם הטענה לא נכונה

**שאלה 1**

לכל יחס שקילות מעל $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ יש מחלקה שבה מספר האיברים הוא אי-זוגי.

**שאלה 2**

לכל יחס שקילות מעל $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ יש מחלקה שבה מספר האיברים הוא אי- זוגי.

**שאלה 3**

אם $R$ הוא יחס רפלקסיבי סימטרי ומעל הקבוצה $A=\{1,2\}$ אז $R$ הוא יחס שקילות

**שאלה 4**

אם $R$ הוא יחס רפלקסיבי סימטרי ומעל הקבוצה $A=\{1,2,3\}$ אז $R$ הוא יחס שקילות

**שאלה 5**

אם $R$ הוא יחס רפלקסיבי סימטרי ומעל הקבוצה $A=\{1,2,3\}$ אז $R^2$ הוא יחס שקילות

בשאלות 7,6 $R$ הוא יחס שקילות מעל הקבוצה $A=\{1,2,3,4,5\}$.

ידוע שלכל $m,n\in A$, **אם** $mRn$ **ואם** $m+n$ זוגי **אז** $m=n$.

**שאלה 6**

מספר האיברים בכל מחלקה של $R$ הוא 2 לכל היותר

**שאלה 7**

לכל יחס $R$ מסוג זה יש מחלקת שקילות בעלת איבר אחד שהוא מספר זוגי.

בשאלות 8-11 $S$ הוא יחס על קבוצת השלמים $\mathbf{Z}$ המקיים: $(n,m)\in S$ אםם $m^2+m=n^2+n$

**שאלה 8**

$S$ הוא יחס שקילות על $\mathbf{Z}$.

**שאלה 9**

אם $S$ יחס שקילות, אז בכל המחלקות שלו יש אותו מספר איברים.

**שאלה 10**

קיימים מספרים זוגיים $m,n \in \mathbf{Z}$ כך ש- $(n,m) \in S$

**שאלה 11**

לכל $n \in \mathbf{Z}$ , $(-n-1,n) \in S^2$

**שאלה 12**

הפונקציה $f: P(\mathbf{N}) \to P(\mathbf{N})$ המוגדרת ע"י $f(X) = X - \{1\}$ לכל $X \in P(\mathbf{N})$ היא חד- חד-ערכית.

**שאלה 13**

הפונקציה $f: P(\mathbf{N}) \to P(\mathbf{N})$ המוגדרת ע"י $f(X) = X - \{1\}$ לכל $X \in P(\mathbf{N})$ היא על.

בשאלות 14-17 נתונה הפונקציות $f: \mathbf{Q}-\{1\} \to \mathbf{Q}$ ו- $g: \mathbf{Q}-\{1\} \to \mathbf{Q}-\{1\}$ המוגדרות על-ידי $f(x) = g(x) = \frac{x}{x-1}$ לכל $x \in \mathbf{Q}-\{1\}$. ( $\mathbf{Q}$ היא קבוצת המספרים הרציונליים)

**שאלה 14**

$f$ היא חד- חד-ערכית.

**שאלה 15**

$f$ היא על.

**שאלה 16**

$g$ היא על.

**שאלה 17**

$gg$ היא על.

**שאלה 18**

אם $R$ הוא יחס סדר מעל קבוצה $A$ אז $R = R^2$.

**שאלה 19**

מספר יחסי הסדר מעל $A = \{1,2,3\}$ שבהם יש בדיוק שני איברים מקסימליים

שווה למספר יחסי הסדר מעל $A$ שבהם קיים איבר גדול ביותר.

**שאלה 20**

מספר יחסי הסדר **הלא** מלאים מעל $A = \{1,2,3,4\}$ שבהם יש איבר מינימלי יחיד וגם איבר מקסימלי יחיד הוא 8

# מטלת מנחה (ממ"ן) 12

**הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה** | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 2- 3**

**מספר השאלות: 4** | **משקל המטלה: 3 נקודות**

**סמסטר: 2018ג** | **מועד הגשה: 7.8.2018**

**מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

**שאלה 1** (25 נקודות)

תהי $M$ קבוצת היחסים (הרלציות) מעל $A = \{1,2,3\}$ .

(7 נק') א. כמה אברים יש ב- $M$ ?

(18 נק') ב. נגדיר יחס $S$ מעל $M$ (שימו לב, מעל $M$ ולא מעל $A$ ):

עבור $R_1 , R_2 \in M$ : $(R_1 , R_2) \in S$ אםם $R_1R_2 = R_2R_1$ .

הוכיחו ש- $S$ <u>אינו</u> יחס שקילות מעל $M$.

**שאלה 2** (24 נק')

תהי $A = \{1, 2, 3\}$ . תהי $M$ קבוצת כל היחסים מעל $A$.

תהי $s : M \to M$ הפונקציה המתאימה לכל $R \in M$ את הסגור הסימטרי שלו.

**הוכח או הפרך** כל אחת מהטענות הבאות:

א. $s$ היא חד-חד-ערכית.

ב. $s$ היא **על** $M$.

ג. לכל $R_1, R_2 \in M$ , $s(R_1R_2) = s(R_1)s(R_2)$ (הכפל כאן הוא כפל יחסים).

ד. לכל $R \in M$ , $s(s(R)) = s(R)$ .

**שאלה 3** (28 נקודות)

תהי $F$ קבוצת כל הפונקציות של $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$. נגדיר יחס $K$ מעל $F$ :

עבור $f,g \in F$ : $(f,g) \in K$ אםם <u>**לכל**</u> $n \in \mathbf{N}$ , $f(n) \le g(n)$ .

(5 נק׳) א. הוכח ש- $K$ הוא סדר-חלקי מעל $F$.

(5 נק׳) ב. הוכח ש- $K$ **אינו** סדר-מלא מעל $F$ .

(5 נק׳) ג. האם יש ב- $F$ איברים מקסימליים לגבי היחס $K$ ?
האם יש איבר גדול ביותר? הוכח.

(5 נק׳) ד. האם יש ב- $F$ איברים מינימליים לגבי היחס $K$ ?
האם יש איבר קטן ביותר? הוכח.

(8 נק׳) ה. הוכח שלכל $f \in F$ קיים $g \in F$ **שמכסֶה** את $f$ (הגדרה 3.6 בעמ׳ 88 בספר) .
הוכח שלכל $f \in F$ קיים יותר מ- $g$ אחד כזה.

**שאלה 4** (23 נקודות)

פונקציה $f:\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ מוגדרת ברקורסיה כך :

$f(0)=0$ , $f(1)=10$ , ולכל $n \in \mathbf{N}$ : $f(n+2) = f(n+1)+6f(n)$

(15 נק׳) א. הוכיחי באינדוקציה (ולא בדרך אחרת) : $f(n) = 2\cdot 3^n + (-2)^{n+1}$ .

(8 נק׳) ב. האם $f$ היא <u>**על**</u> $\mathbf{N}$ ? הוכיחי את תשובתך.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 13

**הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה** **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 4-5**

**מספר השאלות: 4** **משקל המטלה: 3 נקודות**

**סמסטר: 2018ג** **מועד הגשה: 14.8.2018**

**מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

**חלק מהממ"ן מסתמך על החוברת "פרק 5" שנמצאת בידיכם.**
**חוברת זו משלימה את פרק 4 בתורת הקבוצות ומחליפה חלק ממנו.**

**שאלה 1** (22 נקודות)

תני דוגמא לקבוצות $A,B$ כך ש**חמש הקבוצות** $A,\ B,\ A-B,\ A\oplus B,\ A\cup B$ שונות כולן זו מזו, אבל לכל חמש הקבוצות האלה אותה עוצמה. הוכיחי שהקבוצות שונות זו מזו והוכיחי שיש להן אותה עוצמה. **ההפרש הסימטרי** $A\oplus B$ הוגדר בפרק 1, שאלה 1.22 בעמ' 27.

**שאלה 2** (30 נקודות)

א. יהי $n$ מספר טבעי חיובי.

הראו כי קבוצת התת-קבוצות של $\mathbf{N}$ שגודלן בדיוק $n$, היא בת-מנייה.

**הערה**: קבוצת **הסדרות** באורך $n$ מעל $\mathbf{N}$ היא כידוע בת-מנייה.

ניתן להיעזר בכך, אך שימו לב שהשאלה כאן היא על **תת-קבוצות** ולא על סדרות.

ב. הראו כי קבוצת כל התת-קבוצות הסופיות של $\mathbf{N}$ היא בת-מנייה.

ג. בהסתמך על טענות מסעיף 4.1 (עמ' 116 – 128 בספר) בצירוף הטענה ש- $P(\mathbf{N})$ אינה בת-מניה (טענה שמוכחת בפרק 5), הראו כי קבוצת כל התת-קבוצות **האינסופיות** של $\mathbf{N}$ **אינה** בת-מנייה. אין להיעזר בטענות אחרות מפרק 5 פרט לעובדה הנ"ל.

ד. בעזרת פרק 5 מיצאו את עוצמת הקבוצה מהסעיף הקודם. הוכיחו את תשובתכם.

המשך השאלה - בעמוד הבא

ה. הנוסחה $\aleph_0 = \left| \{ X \in P(\mathbf{N}) \mid |X| = n \} \right|$

מביעה בכתיב פורמלי את הטענה של סעיף א.

*(i)* כתבו נוסחה דומה המביעה את הטענה של סעיף ב.

*(ii)* כתבו נוסחה דומה המביעה את הטענה שמצאתם בסעיף ד.

בכתיבת הנוסחאות אפשר להסתמך על כך שקבוצה של מספרים טבעיים, עוצמתה חייבת להיות אחד משני אלה: מספר טבעי או $\aleph_0$ .

**שאלה 3** (20 נקודות)

מצאו **מה לא תקין** בהגדרה הבאה.
בדומה להגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות בפרק 5, נגדיר הפרש סימטרי בין עוצמות:
תהיינה $k,m$ עוצמות, לא בהכרח שונות זו מזו. נגדיר את $k \oplus m$ באופן הבא:
תהיינה $A,B$ קבוצות המקיימות $|A| = k$ , $|B| = m$,

**נגדיר** את ההפרש הסימטרי של העוצמות $k,m$ להיות עוצמת ההפרש הסימטרי של הקבוצות $A,B$:
$k \oplus m = |A \oplus B|$ .

הגדרה כזו אינה אפשרית. עליכם להסביר מה הבעיה בהגדרה, ולהראות ע"י דוגמא שההגדרה **אינה תקינה**. הדרכה: ראו ההגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות.
שימו לב: התשובה אינה יכולה להיות "ההפרש הסימטרי של העוצמות לא יוצא מה שהוא צריך להיות": לא ברור מראש מה הוא צריך להיות, ובכל מקרה מדובר בנסיון להגדיר מושג חדש.
השאלה שאתם מתבקשים לענות עליה אינה אם ההגדרה תואמת לציפיות (אם יש כאלה) אלא האם בכלל הצלחנו להגדיר כאן משהו.

**שאלה 4** (28 נקודות)

(12 נק') א. יהיו $k_1, k_2, m_1, m_2$ עוצמות.
הוכח שאם $k_1 \le k_2$ ו- $m_1 \le m_2$ אז $k_1 \cdot m_1 \le k_2 \cdot m_2$ .

(8 נק') ב. הוכח: $\aleph_0 \cdot C = C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם).

(8 נק') ג. הוכח: $C^C = 2^C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם ובמשפטים שבחוברת).

# מטלת מחשב (ממ"ח) 04

**הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה** | **חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 1-2**

**מספר השאלות: 20** | **משקל המטלה: 2 נקודות**

**סמסטר: 2018ג** | **מועד הגשה: 20.8.2018**

**את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א**
**בכתובת** http://www.openu.ac.il/sheilta/
**הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!**

**הערה:** כל הפונקציות במטלה זו הן פונקציות מלאות

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

**סמנו**: **א** - אם הטענה נכונה ; **ב** - אם הטענה לא נכונה

**שאלה 1**

אם $|A|=3^3$ ו- $|B|=3$ אז מספר הפונקציות מ- $A$ ל- $B$ שווה למספר הפונקציות מ- $B$ ל- $A$.

**שאלה 2**

תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. מספר הפונקציות מ- $A$ ל- $A$ המעתיקות מספרים זוגיים למספרים זוגיים הוא $18^3$

**שאלה 3**

תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. מספר הפונקציות מ- $A$ ל- $A$ המעתיקות כל מספר של $A$ לאחד המחלקים של אותו מספר הוא $2^3 3^2$

**שאלה 4**

תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות מ- $A$ ל- $A$ המעתיקות מספרים זוגיים למספרים זוגיים שווה למספר הפונקציות מ- $\{1,2\}$ ל- $A$.

**שאלה 5**

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות מהקבוצה $\{1,2,3,4,5\}$ לעצמה המעתיקות את 1 למספר שונה מ- 1 הוא $5!-4!$

**שאלה 6**

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות מהקבוצה $\{1,2,3,4,5\}$ לעצמה המעתיקות את 1 למספר שונה מ- 1 ואת 2 למספר שונה מ- 2 הוא $5!-2\cdot 4!$

**שאלה 7**

מספר הפונקציות מ- $A=\{1,2,3,4\}$ **על** $B=\{1,2,3\}$ הוא $3^4-3\cdot 2^4$.

**שאלה 8**

מספר הקבוצות החלקיות ל- $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ שבהן יש לפחות 3 איברים שווה למספר הקבוצות החלקיות ל- $A$ שבהן יש לכל היותר 3 אברים.

**שאלה 9**
מספר החלוקות השונות של הקבוצה $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ למחלקות בנות 3 איברים כל אחת שווה למספר כל הבחירות האפשריות של קבוצה בעלת 3 איברים מתוך $A$ .

**שאלה 10**
מספר הסידורים השונים של המחרוזת AAABBC גדול ממספר הסידורים השונים של המחרוזת AABBCC

**שאלה 11**
מספר הסידורים השונים של המחרוזת AABBCC שבהן לא מופיע הרצף AA גדול ממספר הסידורים שלה שבהם מופיע הרצף AA .

**שאלה 12**
מספר הסידורים השונים של המחרוזת AABBCC שווה למספר החלוקות של הקבוצה $\{1,2,3,4,5,6\}$ ל- 3 מחלקות בנות 2 איברים כל אחת.

**שאלה 13**
מספר הסידורים השונים של המחרוזת AABBCC שווה למספר הדרכים שבהן יכולים 6 תלמידים להגיש 3 עבודות שונות בזוגות.

**שאלה 14**
מספר הדרכים לפיזור 3 כדורים זהים ב- 4 תאים שונים שווה למספר הדרכים השונות לפיזור 4 כדורים זהים ב- 3 תאים שונים.

**שאלה 15**
מספר הדרכים לפיזור 4 כדורים זהים ב- 4 תאים שונים שווה למספר הדרכים השונות לפיזור 3 כדורים זהים ב- 5 תאים שונים.

**שאלה 16**
מספר הדרכים לפיזור 4 כדורים שונים ב- 4 תאים שונים גדול פי 16 ממספר הדרכים לפיזור 4 כדורים זהים ב- 4 תאים שונים.

**שאלה 17**
מספר הדרכים לפיזור 4 כדורים שונים ב- 4 תאים זהים הוא קטן מ- 10.

**שאלה 18**
מספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=14$ שווה למספר הפתרונות השלמים החיוביים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=10$

**שאלה 19**
מספר הפתרונות בטבעיים זוגיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=14$ שווה למספר הפתרונות בטבעיים אי-זוגיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=14$

**שאלה 20**
מספר הפתרונות בשלמים שהם 1 או 1- לאי-שוויון $x_1+x_2+x_3+x_4 \geq 0$ הוא 10.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 14

**הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה** — **חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 3-4**

**מספר השאלות: 4** — **משקל המטלה: 3 נקודות**

**סמסטר: 2018ג** — **מועד הגשה: 26.8.2018**

**מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

**שאלה 1** (20 נקודות)

א. השוויון הבא מובן מאליו: לכל $n$ טבעי, $1 = (3-2)^n$.

פתחו את אגף שמאל של השוויון בעזרת הבינום של ניוטון והשלימו את החסר בזהות הבאה:

$1 = (??)^? \cdot 3^? \binom{?}{?} \sum_{i=0}^{n}$. בידקו את הזהות שקיבלתם עבור המקרה $n = 4$.

ב. כידוע, מספר הדרכים לחלק $k$ כדורים זהים ל- 10 תאים שונים הוא $D(10,k)$.

נחלק את התאים לשתי קבוצות: נחליט ששלושה תאים הם אדומים ושבעה תאים הם ירוקים.
התאים עדיין שונים זה מזה (!), רק הוספנו להם צבע.

קבלו בעזרת החלוקה הזו זהות מהצורה $D(10,k) = \sum_{i=0}^{k} ???$.

בידקו את הזהות שקיבלתם עבור המקרה $k = 3$.

**שאלה 2** (30 נקודות)

בשאלות 7 – 9 בממ"ח 04 עסקנו בסידורים של המחרוזת AAABBCCDD.

בכמה דרכים ניתן לסדר מחרוזת זו, אם אסור שיופיע הרצף AAA, אסור שיופיע BB,
אסור שיופיע CC ואסור DD? הצמד AA יכול להופיע.

יש להגיע לתשובה סופית מספרית. הדרכה: הכלה והפרדה.

**שאלה 3** (30 נקודות)

ארבע משפחות יצאו יחד למנגל והכינו 8 סטֵייקים **זהים** ו- 10 שיפודים **זהים**.
( שימו לב: המשפחות **אינן** נחשבות זהות. כמו כן, סטייק **אינו** זהה לשיפוד).

המשפחות החליטו לחלק את **כל האוכל** , כאשר כל משפחה חייבת לקבל **משהו** - שיפוד או סטייק אחד לפחות. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?
יש להגיע לתשובה סופית מספרית. הדרכה: הכלה והפרדה.

**שאלה 4** (20 נקודות)

רמי מציע לדינה את האתגר הבא:
דינה תבחר 8 מספרים טבעיים שונים כלשהם בתחום $10 \le n \le 36$.
רמי ינסה ליצור, תוך שימוש **רק במספרים שדינה בחרה או בחלק מהם**, שני סכומים שווים.
למשל, אם דינה בחרה את המספרים $10, 11, 12, 15, 18, 25, 32, 36$
רמי יכול לרשום את השוויון $36 = 25 + 11$.
לחלופין, הוא יכול לרשום $25 + 15 = 18 + 12 + 10$.
כל המספרים צריכים להילקח מהרשימה של דינה, ואין חזרות על אותו מספר.
אם רמי מצליח לרשום שוויון כזה – הוא מנצח. אם הוא לא מצליח – דינה מנצחת.

בהנחה שאחרי שדינה בוחרת יש לרמי די זמן - או מחשב - לבדוק את כל האפשרויות,
הוכיחו כי רמי תמיד ינצח!

הדרכה: עקרון שובך היונים.

# מטלת מנחה (ממ״ן) 15

**הקורס: 20476 מתמטיקה דיסקרטית** **חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 6-7**

**מספר השאלות: 4** **משקל המטלה: 3 נקודות**

**סמסטר: 2018ג** **מועד הגשה: 2.9.2018**

**מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״)

- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

**שאלה 1**

יהי $a_n$ מספר הסדרות באורך $n$, שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0,1,2\}$,

אשר אין בהן הופעה של **00** ואין בהן הופעה של **01** (מותרת הופעה של 10).

דוגמאות לסדרות **מותרות** באורך 5: 12211 , 11110.

דוגמאות לסדרות **אסורות** באורך 5: 12011 , 11100.

(10 נק׳) א. רשמי בעזרת חישוב ישיר את $a_0, a_1, a_2$. רשמי יחס נסיגה עבור $a_n$.
בדקי שהערכים שרשמת עבור $a_0, a_1, a_2$ מתאימים ליחס הנסיגה.

(15 נק׳) ב. פתרי את יחס הנסיגה וקבלי נוסחה מפורשת עבור $a_n$.
ביטויים כגון $\sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{2}$ יש להשאיר כפי שהם.
ביטויים כגון $\sqrt{12}$ יש להעביר לצורה $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$.

**שאר הממ״ן עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בסוף הממ״ן רשימה של נוסחאות שימושיות.**

**שאלה 2**

מצאו את מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24$,

כאשר שניים מהמשתנים הם מספרים טבעיים **אי-זוגיים**,

3 המשתנים האחרים הם מספרים טבעיים **זוגיים**,

**ואף אחד** מהמשתנים אינו שווה 0 ואינו שווה 1.

לא נתון איזה מהמשתנים הם זוגיים ואיזה אי-זוגיים.

אפשר לפתור בעזרת פונקציה יוצרת ואפשר בדרך אחרת. **יש להגיע לתשובה סופית מספרית**.

**שאלה 3**

יהושע נוטל תרופות שונות: כדור נגד כאב-ראש: לכל היותר 3 ביום (אפשר 0). כדור מרץ: לכל היותר 3 ביום (אפשר 0). ויטמין $B$ ללא הגבלה (אפשר 0), וויטמין $C$ כל זה בכפוף לתנאי הבא, שלגביו הוא מחויב כחבר באגודת ההיפוכונדרים: מספר הכדורים הכולל, מכל 4 הסוגים יחד, שהוא לוקח כל יום יהיה בדיוק $n$. ערכו של $n$ מוגדר מדי פעם בפרסומי האגודה.

נסמן ב- $a_n$ את מספר ההרכבים השונים של $n$ כדורים שיכול יהושע לקחת ביום אחד, כאשר אין חשיבות לסדר נטילת התרופות, ותרופות מאותו סוג הן זהות.

(10 נק׳) א. מצא את הפונקציה היוצרת עבור הסדרה $\{ a_n \}$. הסבר!

(15 נק׳) ב. מצא ביטוי מפורש עבור $a_n$ (שאלה 7.10 בעמ׳ 129 בספר הלימוד יכולה לסייע).

**שאלה 4**

דוגמא לתרגיל מסוג זה נמצאת בסוף הקובץ ״מבוא לפונקציות יוצרות״ שבאתר הקורס.

חשב את המקדם של $x^{2m}$ בכל אחד מאגפי הזהות האלגברית: $\dfrac{(1-x^2)^n}{(1-x)^n} = (1+x)^n$.

קבל מכאן זהות על סכומים של מקדמים בינומיים, מהצורה: $\sum_{k=0}^{?} ?? = \binom{n}{2m}$.

בדוק את תשובתך עבור המקרה $n = 5, m = 2$ ועבור המקרה $n = 5, m = 3$.

הדרכה: את אגף שמאל בזהות האלגברית הנתונה רשום כמכפלה.

היעזר בנוסחאות שבתחתית העמוד.

---

להלן כמה נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות:

**(i)!** סכום טור הנדסי סופי: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ואינסופי: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \dfrac{1}{1-x}$

**(ii)!** כפל פונקציות יוצרות:

אם $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ ו- $f(x)\cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

אז $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד).

**(iii)!** $\sum_{k=0}^{\infty} D(n,k) x^k = (1+x+x^2+\dots)^n = \dfrac{1}{(1-x)^n}$.

במלים אחרות: המקדם של $x^k$ בפיתוח הביטוי $\dfrac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$.

ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ׳ 129 בספר.

# מטלת מחשב (ממ"ח) 05

**הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה** | **חומר הלימוד למטלה: "תורת הגרפים" פרקים 1- 3**

**מספר השאלות: 20** | **משקל המטלה: 2 נקודות**

**סמסטר: 2018ג** | **מועד הגשה: 8.9.2018**

**תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א**

**בכתובת** http://www.openu.ac.il/sheilta/

**הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!**

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

**סמנו**: **א** - אם הטענה נכונה ; **ב** - אם הטענה לא נכונה

**שאלה 1**

קיים גרף פשוט על 7 צמתים, בעלי דרגות 3,3,3,3,5,6,4

**שאלה 2**

קיים גרף על 7 צמתים בעלי דרגות 3,3,3,3,5,6,8

**שאלה 3**

קיים גרף פשוט על 7 צמתים בעלי דרגות 2,2,2,2,2,6,6

**שאלה 4**

קיים גרף על 7 צמתים בעלי דרגות 1,1,3,3,2,6,6

**שאלה 5**

אם בגרף פשוט על **7** צמתים הדרגה של כל צומת היא לפחות 2 אז הגרף הוא קשיר

**שאלה 6**

אם בגרף פשוט על **7** צמתים הדרגה של כל צומת היא לפחות 3 אז הגרף הוא קשיר

**שאלה 7**

אם בגרף פשוט על **8** צמתים הדרגה של כל צומת היא לפחות 3 אז הגרף הוא קשיר

**שאלה 8**

בגרף פשוט ולא קשיר על **7** צמתים יש לכל היותר 15 קשתות.

**שאלה 9**

אם $G$ הוא גרף דו-צדדי אז הגרף המשלים $\overline{G}$ הוא דו-צדדי.

**שאלה 10**

אם $G$ הוא גרף דו-צדדי אז הגרף המשלים $\overline{G}$ אינו דו-צדדי.

**שאלה 11**

אם בעץ $T$ על 6 צמתים יש 3 עלים אז ב- $T$ קיים צומת בעל דרגה 3.

**שאלה 12**

אם סכום דרגות הצמתים בעץ $T$ הוא 10 אז $T$ הוא עץ על 6 צמתים.

**שאלה 13**

העצים **המתוייגים** בעלי סדרות פרופר $(2,2,4,5,5)$ ו- $(4,2,2,5,4)$ הם איזומורפיים
(לפי הגדרה 2.8)

**שאלה 14**

העצים בעלי סדרות פרופר $(2,2,4,5,5)$ ו- $(4,2,2,5,4)$ הם איזומורפיים כגרפים **לא מתוייגים**.
(לפי הגדרה 2.7)

**שאלה 15**

בכל עץ בעל שני עלים בלבד יש מסלול אוילר

**שאלה 16**

אם $G$ הוא גרף אוילרי דו-צדדי אז מספר הצמתים של $G$ הוא זוגי.

**שאלה 17**

אם $G$ הוא גרף אוילרי בעל מספר זוגי של הצמתים אז $G$ הוא גרף דו-צדדי.

**שאלה 18**

אם $G$ הוא גרף פשוט על 7 צמתים שבו דרגות הצמתים הן $3,3,3,3,4,4,4$ אז $G$ המילטוני.

**שאלה 19**

אם $G$ הוא גרף פשוט על 7 צמתים שבו דרגות הצמתים הן $2,2,2,2,2,3,3$ אז $G$ לא המילטוני.

**שאלה 20**

קיים $G$ גרף פשוט על 7 צמתים לא המילטוני שבו דרגות הצמתים הן $2,2,2,2,2,3,3$.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 16

**הקורס: 20476 – מתמטיקה בדידה**

**חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים – כל היחידה**

**מספר השאלות: 5** **משקל המטלה: 3 נקודות**

**סמסטר: 2018ג** **מועד הגשה 14.2018**

**מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

**שאלה 1** (20 נקודות)

א. שרטט גרף אוילרי על מספר זוגי של צמתים, שאין בו זיווג מושלם.
הוכח שהגרף ששירטטת עונה על הדרישות.

ב. הוכח: אם $G$ הוא גרף המילטוני על מספר זוגי של צמתים אז יש ב- $G$ זיווג מושלם.

**שאלה 2** (15 נקודות)

א. כמה זיווגים מושלמים יש בגרף המלא $K_5$ ?

ב. כמה זיווגים מושלמים יש בגרף הדו-צדדי המלא $K_{5,5}$ ?

ג. בגרף הדו-צדדי המלא $K_{5,5}$ בחרנו אחד הצמתים ומחקנו מהגרף 4 מהקשתות
השכנות לצומת זה. כמה זיווגים מושלמים יש בגרף שקיבלנו?

**שאלה 3** (20 נקודות)

יהי $P$ גרף על 10 צמתים, שהוא מסלול פשוט (ובפרט - עץ):

$x$ --- * --- * --- * --- * --- * --- * --- * --- * --- $y$

$x,y$ הם העלים של $P$.

**נוסיף** לגרף $P$ שני צמתים חדשים $u,v$ .

נחבר (נוסיף קשת בין) **כל אחד** מהצמתים החדשים $u,v$ **לכל אחד** מעשרת הצמתים של $P$,

ונוסיף גם קשת בין $u$ ל- $v$.

לגרף על 12 הצמתים, המתקבל לאחר כל התוספות האלה, נקרא $G$ .

(8 נק׳) א. הראו ש- $G$ הוא מישורי, על-ידי שרטוט של $G$ במישור או בדרך אחרת.

(12 נק׳) ב. לגרף $G$ שהגדרנו למעלה נוסיף צומת חדש, $w$ .

נחבר את $w$ בקשתות עם כל אחד מארבעת הצמתים $x,y,u,v$ .

קיבלנו גרף על 13 צמתים, נקרא לו $H$ .

הוכיחו ש- $H$ אינו מישורי.

**שאלה 4** (15 נקודות)

א. מהו מספר הצביעה של הגרף $P$ מהשאלה הקודמת? הוכח.

ב. מהו מספר הצביעה של הגרף $G$ מהשאלה הקודמת? הוכח.

ג. מהו מספר הצביעה של הגרף $W$ מהשאלה הקודמת? הוכח.

**שאלה 5** (30 נקודות)

(שאלה זו עוסקת במסקנות הנובעות ממשפט אוילר, כדאי לעיין בהן תחילה)

נתון גרף מישורי פשוט $G=(V,E)$ עם $f$ פאות שבו האורך של כל מעגל הוא לפחות 6.

א. הוכיחו $|E|\geq 3f$

ב. הוכיחו ש- $|E|\leq 1.5|V|-3$

ג. הוכיחו שקיים ב- $G$ צומת שדרגתו קטנה מ- 3.