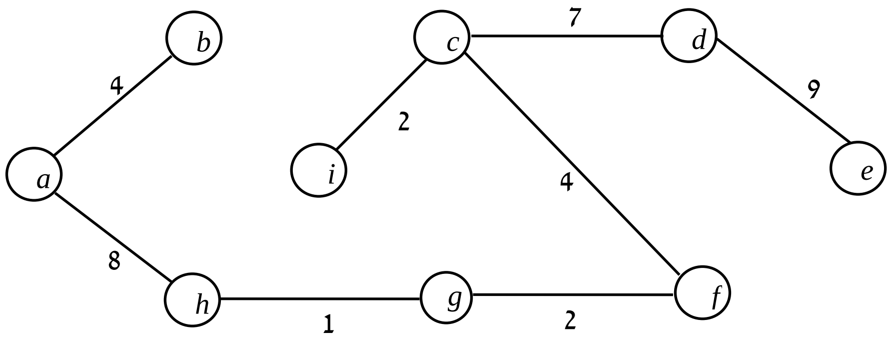
פתרון מועד 94 – סמסטר 1998ג

שאלה 1

א.



ב. האלגוריתם הוא חמדני, כי בכל שלב הוא מסיר מהגרף את הקשת הכי כבדה שהסרתה לא פוגעת בקשירות הגרף.

שאלה 2

א. **מצא את שני הגדולים ב-**L

(1) אם L מכילה איבר אחד, אז הצב את ערך האיבר הזה ב-M והצב $-\infty$ ב-m;

אם L מכילה שני איברים, אז הצב את ערך האיבר הגדול מביניהם ב-M ואת ערך הקטן מביניהם ב-m;

(2) אחרת, בצע את הפעולות הבאות:

(2.1) חלק את L לשני חצאים $Lleft$ ו- $Lright$;

(2.2) קרא ל-**מצא את שני הגדולים ב-** $Lleft$ והצב את הערכים המוחזרים ב- M_l ו- m_l;

(2.3) קרא ל-**מצא את שני הגדולים ב-** $Lright$ והצב את הערכים המוחזרים ב- M_r ו- m_r;

(2.4) אם $M_l \geq M_r$, אז בצע את הפעולות הבאות:

(2.4.1) $M \leftarrow M_l$

(2.4.2) $m \leftarrow \max(M_r, m_l)$

(2.5) אחרת, בצע את הפעולות הבאות:

(2.5.1) $M \leftarrow M_r$

(2.5.2) $m \leftarrow \max(M_l, m_r)$

(3) חזור עם M ו- m.

סיבוכיות הזמן של האלגוריתם היא $O(n)$ (כמו האלגוריתם למציאת מינימום ומקסימום).

ב. האלגוריתם המקבילי: כמו האלגוריתם בסעיף א', אבל שורות (2.2) ו- (2.3) מתבצעות במקביל. דרושים $n/2$ מעבדים (בהנחה ש-n הוא חזקה של 2). סיבוכיות הזמן המקבילית היא $O(\log n)$, כי הקריאות הרקורסיביות מתבצעות במקביל ולכן נוסחת הנסיגה היא $C(n) = C(n/2) + 2$.

שאלה 3

א. הערך הנמצא בתא ה- $(i\ ,\ j)$ בטבלה הוא T אם ורק אם ניתן לבחור תת-קבוצה של הפריטים $a_1, a_2, \ldots, a_i$ במשקל כולל של j.

$$c(i,j) = c(i-1, j) \vee c(i-1,\ j-w_i)$$

ב. ארבע העמודות האחרונות בטבלה:

$i \backslash j$	10	11	12	13
0	F	F	F	F
1	F	F	F	F
2	F	F	F	F
3	T	F	F	F
4	T	F	T	T
5	T	T	T	T

יש פתרון לבעיה מכיוון ש- $c(5, 13) = \mathrm{T}$.

כדי למצוא את הפריטים שמשקלם הכולל הוא 13, מתחילים מ- c(5,13) ומתקדמים במעלה הטבלה באופן הבא:

אם $c(i, j) = c(i-1, j)$ אז לא בוחרים את הפריט a_i ועוברים לפריט הקודם $(i \leftarrow i-1)$.

אחרת, בוחרים את הפריט a_i, מעדכנים את ערכו של j $(j \leftarrow j - w_i)$, ועוברים לפריט הקודם $(i \leftarrow i-1)$.

הפריטים שנבחרים במקרה שלנו: a_4, a_3, a_1.

שאלה 4

שייכות ל-NP: מסמך אישור קצר יכיל מסלול פשוט באורך k (כלומר, רשימה של $k + 1$ צמתים). כדי לבדוק את מסמך האישור נוודא שיש ברשימה בדיוק $k + 1$ צמתים שונים זה מזה, ושבין כל שני צמתים סמוכים ברשימה יש קשת בגרף. בדיקה זו יכולה להיעשות בזמן פולינומיאלי.

רדוקציה מבעיה ב- NPC: רדוקציה מבעיית המסלול ההמילטוני: $G(V,E) \rightarrow G(V,E)$,$|V|-1$.

ברור שיש ב- G מסלול המילטוני אם ורק אם יש ב- G מסלול פשוט באורך $|\mathrm{V}|-1$.

שאלה 5

א. הבעיה כריעה. את הבעיה מכריע אחד משני האלגוריתמים האלה: אלגוריתם שמחזיר תמיד "כן", או אלגוריתם שמחזיר תמיד "לא".

ב. הבעיה אינה כריעה. זוהי בעצם בעיית הטוטליות.

ג. הבעיה כריעה. אפשר לפתור אותה באמצעות בדיקת מספר סופי של אפשרויות.

ד. הבעיה כריעה. כדי לפתור את הבעיה צריך לבדוק אם קיים אינדקס i שעבורו $x_i = y_i$.

אם קיים אינדקס כזה אז הוא מהווה פתרון לבעיה. אם לא קיים אינדקס כזה, אז ברור שאין לבעיה פתרון, כי כל מילה בקבוצה X ארוכה ממש מהמילה המתאימה בקבוצה Y.

שאלה 6

א. האלגוריתם הנאיבי לבדיקת ראשוניות של מספר N בודק במקרה הגרוע את כל המספרים עד ל- $\sqrt{N}$. מכיוון שגודל הקלט הוא $\log N$ ו- $\sqrt{N} = \left(2^{\log N}\right)^{1/2} = (\sqrt{2})^{\log N}$, הרי שהאלגוריתם הוא אקספוננציאלי בגודל הקלט.

ב. בעיית הראשוניות שייכת ל-co-RP, מפני שהיא הבעיה המשלימה של בעיית הפריקות ובעיית הפריקות שייכת ל- RP.

ג. על-פי סעיף ב' בעיית הראשוניות שייכת ל- co-RP.

מכיוון ש- $\text{co-RP} \subseteq \text{co-NP}$, אז בעיית הראשוניות שייכת גם ל- co-NP.

ד. לא. ניתן היה להסיק זאת רק אם היה ידוע שבעיית הראשוניות היא בעיה NP-שלמה.