

## שאלה 1

א: [5]. דוגמא נגדית לסעיפים א, ב, ג:  $p \vee \neg p$ . דוגמא נגדית לסעיף ד:  $(p \rightarrow p) \vee p$ .

ב: [3]. איחוד המשלימים הוא בר-מניה. לפי משפט בפרק 5, המשלים של קבוצה בת-מניה בתוך קבוצה אינסופית כלשהי  $X$ , עוצמתו היא כעוצמת  $X$ .

ג: [5]

## שאלה 2

א, ב: דרך מהירה: לפתור קודם את סעיף ב ולהסתמך עליו לפתרון א: הפונקציה היא  $f(X) = \max(X) - \min(X)$ . מכאן נובע מייד סעיף א. לחלופין, צריך לעבוד קצת בסעיף א: רפלקסיביות וסימטריות מיידיות. טרנזיטיביות דורשת טיפה עבודה.

ג. לא. דוגמא נגדית:  $A = \{1\}$ ,  $B = \{2\}$ ,  $C = \{3\}$ .

## שאלה 3

הכלה והפרדה. קצת דומה לחישוב של אי-סדר מלא, טיפה אחרת. ללא הגבלה יש  $6!$  סידורים.

נסמן ב-  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) את קבוצת הסידורים בהם זוג  $i$  שהיה יחד קודם הוא שוב יחד.

$|A_i|$ : יש 3 אפשרויות לבחור לזוג  $i$  שורה. בתוך השורה יש להם 2 אפשרויות להתיישב.

כעת יש  $4!$  סידורים לשאר החברים.

$|A_i \cap A_j|$ : אם שני זוגות נשארים זוגות בהכרח הזוג השלישי נשאר זוג. כלומר חיתוך של שתי

קבוצות שווה לחיתוך של שלושתן. נחשב אפוא את החיתוך המשולש:

יש  $3!$  אפשרויות לבחור שורות ל- 3 הזוגות. בתוך השורות יש להם  $2^3$  אפשרויות לשבת.

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ : כאמור.

תשובה:  $6! - 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4! + 3 \cdot 6 \cdot 8 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 384$

#### שאלה 4

א.  $a_2 = 9 - 2 = 7$  ,  $a_1 = 3$  ,  $a_0 = 1$  .

נסתכל בסדרה באורך  $n+1$  .

אם היא מסתיימת ב-0 או ב-1, לפנייהם יכולה לבוא כל סדרה חוקית באורך  $n$  .

אם היא מסתיימת ב-2, לפניו בהכרח בא 0, ולפניו כל סדרה חוקית באורך  $n-1$  .

לכן  $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$  .

ב.  $a_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$   $\Leftrightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$  .

מתנאי ההתחלה מקבלים  $A, B = (1 \pm \sqrt{2}) / 2$  .

$$a_n = \frac{1}{2} \left( (1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1} \right)$$

#### שאלה 5

$$\sum_{v \in V'} (d_1(v) + d_2(v)) = \sum_{v \in V'} d_1(v) + \sum_{v \in V'} d_2(v)$$

$$= 2E_1 + 2E_2$$

$$= 2(|V| - 1) + 2(|V| - 1) = 4|V| - 4$$

אילו לכל  $v \in V$  היה  $d_1(v) + d_2(v) \geq 4$  , היה בהכרח  $\sum_{v \in V'} (d_1(v) + d_2(v)) \geq 4|V|$  ,

בסתירה למה שקיבלנו.