תקציר פתרון מועד 85

תשובה 1

א. [3] ב. [3] ג. [2]

תשובה 2

א. $(x,y) \in \widetilde{R}$ פירושו $(x,y) \in R \wedge (y,x) \notin R$. מכאן שני הדברים.

ב. יהיו $(y,z) \in \widetilde{R}$,$(x,y) \in \widetilde{R}$, נוכיח ש- $(x,z) \in \widetilde{R}$.

מהנתון ומהגדרת $\widetilde{R}$, $(y,z) \in R$, $(x,y) \in R$. לכן, מכיון ש- R טרנזיטיבי, גם $(x,z) \in R$.

נותר להוכיח ש- $(x,z) \notin R^{-1}$. כלומר להוכיח ש- $(z,x) \notin R$.

נניח בשלילה ש- $(z,x) \in R$. כאמור $(x,y) \in R$. מהטרנזיטיביות של R נובע $(z,y) \in R$.

משמע $(y,z) \in R^{-1}$. אבל זו סתירה לנתון $(y,z) \in \widetilde{R}$!

תשובה 3

א. $6^4 = 1296$

ב. מספר מחלקות השקילות הוא כמספר הדרכים לבחור מתוך A ארבעה איברים, ללא חשיבות לסדר ועם חזרות.

$D(6,4) = \binom{9}{5} = 126$.

ג. כמספר הקבוצות החלקיות של קבוצת מחלקות השקילות: 2^{126} .

שאלה 4

הכלה והפרדה. תהי U קבוצת כל הסדרות, תהיינה A_1, A_2, A_3, A_4 קבוצות הסדרות המכילות שלישיות עולות בהתאמה, B_6, B_5, B_4, B_3 קבוצות הסדרות המכילות שלישיות יורדות בהתאמה. להלן במלה "סוג" הכוונה "A" או "B".

0. $|U| = 6!$

1. $|A_i| = |B_i| = 4!$, ארבעה מכל סוג

2. $|A_i \cap A_{i+1}| = |B_i \cap B_{i-1}| = 3!$ שלושה מכל סוג

   $|A_i \cap A_{i+2}| = |B_i \cap B_{i-2}| = 2$ שניים מכל סוג

   $|A_1 \cap A_4| = |B_6 \cap B_3| = 2$

   $A_i \cap B_j = \varnothing$ פרט לשני חיתוכים: $|A_1 \cap B_6| = |A_4 \cap B_3| = 2$.

3. $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = |B_6 \cap B_5 \cap B_4| = |B_5 \cap B_4 \cap B_3| = 2$

   $|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |B_6 \cap B_5 \cap B_3| = |B_6 \cap B_4 \cap B_3| = 1$

4. $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = |B_6 \cap B_5 \cap B_4 \cap B_3| = 1$

תשובה:

$$6! - 8 \cdot 4! + (6 \cdot 3! + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2) - (4 \cdot 2 + 4 \cdot 1) + 2 \cdot 1$$
$$= 720 - 192 + 52 - 12 + 2 = 570$$

שאלה 5

א. מהנתון יש $n-2$ צמתים בעלי דרגה אי-זוגית. לכן $n-2$ הוא זוגי, משמע n זוגי.

סכום הדרגות של צומת כלשהו בגרף ובגרף המשלים הוא $n-1$, שהוא מספר אי-זוגי.

לכן זוגיות הדרגה של צומת כלשהו בגרף הפוכה מזוגיות אותו צומת בגרף המשלים.

לכן, מהנתון, בגרף המשלים יש בדיוק שני צמתים בעלי דרגה זוגית.

בנוסף, הגרף המשלים קשיר, כי הוא משלים של גרף לא קשיר.

אלה התנאים לקיום מסלול אוילר פתוח.

ב. למשל גרף שהוא 3 צמתים עם קשת אחת.

לא קשה לתת דוגמאות אחרות, אם מבינים שכדאי לקחת מספר אי-זוגי של צמתים.