

מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.

* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.

* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי וידיאו, עליך לחזור ולהוכיחן.

* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(6 נק') **א.** α, β הם פסוקים פורמליים. בכל אחד מהם מופיעים משתנים פסוקיים p, q

וקשרים לוגיים שונים. בלוח אמת משותף של α, β מתקיימים התנאים הבאים:

(i) בכל שורה שבה α מקבל ערך T, β מקבל ערך F.

(ii) בכל שורה שבה β מקבל ערך T, α מקבל ערך F.

מכאן נובע:

[1] הפסוק $\alpha \rightarrow \beta$ הוא טאוטולוגיה

[2] הפסוק $\alpha \rightarrow \beta$ הוא סתירה

[3] הפסוק $\alpha \leftrightarrow \neg \beta$ הוא טאוטולוגיה

[4] הפסוק $\alpha \leftrightarrow \beta$ הוא סתירה

[5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

נדי לחסוך לבטים וספקות: רק תשובה אחת נכונה. אם נראה לכם שיש יותר מתשובה אחת נכונה – בדקו היכן טעיתם.

(7 נק') **ב.** R היא קבוצת המספרים הממשיים. כזכור $C = |R|$. נסמן $d = |P(R)|$.

d^C שווה ל-

[1] \aleph_0 [2] C [3] d [4] 2^d

[5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק') **ג.** G הוא עץ מתויג על 6 צמתים, התגים הם כמקובל המספרים 1, 2, 3, 4, 5, 6.

סדרת Prüfer של G היא $(1, x, 2, y)$ כאשר $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. לפיכך:

[1] $x, y \in \{3, 4, 5, 6\}$ ובהכרח $x \neq y$. [2] $x, y \in \{3, 4, 5, 6\}$ וייתכן $x = y$.

[3] $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ כאשר המגבלה היחידה היא $x \neq y$.

[4] $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ואין עליהם כל מגבלה.

[5] לא ייתכן: אורך סדרת Prüfer של G אינו 4.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

תהי $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

תהי K קבוצת הקבוצות החלקיות של A , פרט לקבוצה הריקה (לכן $|K| = 2^8 - 1 = 127$).
לכל $X \in K$, נסמן ב- $\min(X)$ את המספר הקטן ביותר ב- X , וב- $\max(X)$ את המספר הגדול ביותר ב- X . נגדיר יחס E מעל K :

עבור $A, B \in K$, $(A, B) \in E$ אם ורק אם $\min(A) + \max(B) = \min(B) + \max(A)$.

(9 נק') א. הוכיחו ש- E הוא יחס שקילות מעל K .

(9 נק') ב. מצאו פונקציה $f: K \rightarrow \mathbb{N}$ המקיימת:

לכל $A, B \in K$, $(A, B) \in E$ אם ורק אם $f(A) = f(B)$.

(9 נק') ג. לכמה מחלקות שקילות מחלק היחס E את הקבוצה K ? נמקו את תשובתכם.

הדרכה: (i) אפשר לפתור את סעיף ב' לפני סעיף א' ולהיעזר בו בפתרון סעיף א'. מצד שני, אם אין לכם רעיון לפונקציה מתאימה בסעיף ב', פתרו את סעיף א' וסביר שהרעיון לסעיף ב' יצוץ מתוך החישוב.

(ii) בכל מקרה כדאי להסתמך על סעיף ב' בפתרון סעיף ג'.

שאלה 3

שלושה אנשים שונים (שמותיהם: א', ב', ג') מתבוננים בקבוצה $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

כל אחד מהם יוצר מחרוזת באורך 3 מתוך אברי A .

דוגמא 1: א' בנתה את המחרוזת 123, ב' בנה גם הוא 123, ג' בנה את המחרוזת 444.

דוגמא 2: א' בנתה את המחרוזת 122, ב' בנה את המחרוזת 232, ג' בנה את המחרוזת 312.

(7 נק') א. מהו מספר הדרכים בהן א', ב', ו-ג' יבנו מחרוזות כאמור?

כל אחת משתי הדוגמאות שלמעלה מציגה דרך אחת מתוך הדרכים האפשריות.

(20 נק') ב. מהו מספר הדרכים בהן א', ב', ו-ג' יבנו מחרוזות כאמור, כאשר נדרש שכל אחד

מאברי A יופיע לפחות באחת המחרוזות שנבנו? דוגמא 1 למעלה מקיימת את

הדרישה, דוגמא 2 אינה מקיימת את הדרישה כי אף אחד לא השתמש במספר 4.

בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 4

יהי a_n מספר הדרכים לסדר את n המספרים שבמחזוריות $1, 2, 3, \dots, n$, כך שאף מספר לא זז ימינה או שמאלה יותר ממקום אחד לעומת המיקום המקורי שלו.

דוגמאות עבור $n = 6$:

המחזוריות 132546 עומדת בדרישה: המספרים שזזו ממקומם הם 2, 3, 4, 5 וכל אחד מהם זז ממקומו המקורי צעד אחד ימינה או שמאלה.

גם המחזוריות 123456 עומדת בדרישה, כי אף מספר לא זז כלל.

המחזוריות 234516 אינה מקיימת את הדרישה, כי 1 זז מהמיקום המקורי שלו ארבעה צעדים.

9 נק' א. מצאו את a_1, a_2, a_3 . כתבו יחס נסיגה עבור הסדרה a_n (נמקו בצורה ברורה).

9 נק' ב. חשבו את ההפרש $a_{10} - a_9$ (תשובה מספרית).

9 נק' ג. בכמה דרכים ניתן לסדר את המחזוריות 123456 כך שקיים לפחות מספר אחד

שזז הצידה יותר ממקום אחד לעומת המיקום המקורי שלו?

הערה: אין צורך לפתור את יחס הנסיגה. הפתרון קל אבל לא נחוץ לאף אחד מהסעיפים בשאלה.

שאלה 5

G הוא גרף פשוט על קבוצת צמתים V , $|V| = 6$.

בעזרת G נגדיר על אותה קבוצת צמתים V גרף פשוט חדש, H :

עבור $x, y \in V$, $x \neq y$,

ב- H יש קשת בין x ל- y אם ורק אם ב- G יש ל- x, y צומת שכן משותף.

8 נק' א. תנו דוגמא לגרף קשיר G כך ש- H גם הוא קשיר.

8 נק' ב. תנו דוגמא לגרף קשיר G כך ש- H אינו קשיר.

11 נק' ג. הוכיחו: אם H קשיר אז G קשיר.

בכל הסעיפים $|V| = 6$.

בהצלחה!