הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל הפקולטה למדעי המחשב

אלגוריתמים 1 (234247) – סמסטר אביב 2005

פתרון תרגיל בית 2 (סקיצה)

שאלה 1

א. נפתור דרך רדוקציה לבעיית מציאת צמתי הפרדה בגרף נתון. נבנה את הגרף $G'=(V',E')$ כעותק של גרף הקלט $G=(V,E)$ כשאנו מוסיפים צומת חדש v_e על כל קשת $e \in E$. דהיינו,

$$V'=V \cup \{v_e \mid e \in E\} \text{ ו- } E'=\{(u,v_e),(v_e,v) \mid e=(u,v) \in E\}$$

כעת מציאת הגשרים ב- G תתבצע על-ידי הפעלת האלגוריתם למציאת צמתי הפרדה על G'. יש להראות כי קשת e הינה גשר ב- G אמ״ם v_e צומת הפרדה ב- G'. סיבוכיות זמן הריצה תהיה $O(V+E)$.

ב. נראה כי גרף לא-מכוון ניתן לחיזוק אם ורק אם אינו מכיל גשרים.

<u>כיוון אחד</u>: אם קיים גשר (u,v) ב- G אז כיוונה $u \rightarrow v$ ייצור מצב שאין מסלול מ- v ל- u, ולהיפך: כיוון הקשת כך $v \rightarrow u$ ייצור מצב שאין מסלול מ- u ל- v.

<u>כיוון שני</u>: אם אין גשרים ב- G אז נריץ DFS על הגרף ונכוון את הקשתות באופן הבא: קשתות עץ מכוונות מאב לבן וקשתות אחוריות מכוונות מצאצא לאב קדמון.

טענה: כיוון הקשתות כפי שמתואר יוצר גרף קשיר היטב.

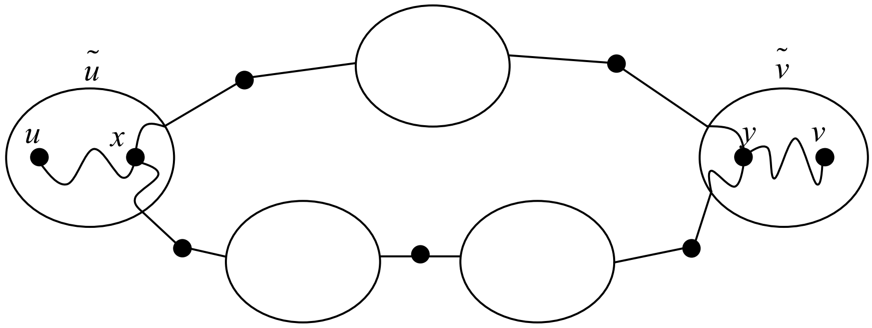
הוכחה: נראה שמכל צומת יש מסלול מכוון לאביו בעץ ה-DFS. המשמעות היא שמכל צומת יש מסלול לשורש עץ ה-DFS - s, ולכן יש מסלול מכל צומת u לכל צומת v (דרך s).

נניח בשלילה שקיים צומת v ממנו אין מסלול דרך קשתות עץ וקשתות אחוריות (מכוונות מצאצא לאב קדמון) לאביו בעץ ה-DFS - u. נסמן ב- T את תת-עץ ה-DFS שמושרש ב- v, וב- p את המסלול בעץ ה-DFS מ- s ל- u. כלומר, אין קשת (אחורית) מצומת ב- T לצומת ב- p. המשמעות היא שכל המסלול בין T ל- p ב- G עוברים דרך הקשת (u,v) ולכן היא גשר – סתירה. □

כלומר, על מנת להחליט האם גרף ניתן לחיזוק נשתמש באלגוריתם מסעיף א׳ על מנת לבדוק האם ישנם בו גשרים. במידה ולא, נכוון את הקשתות כפי שתואר בהוכחת הכיוון השני לעיל. הסיבוכיות תהיה כמובן $O(V+E)$.

שאלה 2

א. נניח בשלילה שקיים מעגל פשוט בגרף העל. מתוך מבנה גרף העל, מעגל זה מורכב, לסירוגין, מצמתי הפרדה ורכיבים אי-פריקים. נתבונן בשני רכיבים אי-פריקים $\tilde{u}$ ו- $\tilde{v}$ המייצגים שני צמתים על-גבי המעגל, ויהיו u ו- v שני צמתים השייכים לשני רכיבים אלה. מכאן שקיימים שני מסלולים על המעגל בין u ו- v (ראו ציור). נסמן ב- x את הצומת האחרון המשותף לשניהם בתוך $\tilde{u}$, וב- y את הצומת הראשון המשותף לשניהם ב- $\tilde{v}$. מכאן שהמעגל דרך x ו- y הוא מעגל פשוט, ולכן כל צמתים עליו צריכים להיות בתוך אותו רכיב אי-פריק – סתירה.



ב. אם קיים מסלול פשוט המחבר שני צמתים המוכלים ברכיב אי-פריק והוא **אינו** מוכל כולו ברכיב, אזי בהכרח קיים צומת הפרדה המופיע יותר מפעם אחת על-גבי המסלול, כיוון שמבנה העל הינו עץ. כלומר, המסלול המקבל אינו פשוט.

<u>שאלה 3</u>

יש להראות כי קיימים לפחות שני מסלולים מכוונים פשוטים מ- u לצומת אחר אמ"ם בכל הרצת DFS מ- u מתקבלת קשת קדמית או קשת חוצה בין שני צמתים השייכים לעץ ה-DFS ששורשו u (זכרו שעשויים להתקבל מספר עצים).

כעת, נריץ DFS מכל אחד מצמתי הגרף ונבחן האם קיימות קשתות קדמיות או קשתות חוצות בעץ ה-DFS שלו. זמן הריצה הכולל הוא לפיכך $O(V(V+E)) = O(V^2+VE)$.

<u>שאלה 4</u>

האלגוריתם שהוגדר בתרגול 2 למיון טופולוגי אינו מוצא סידור אופטימלי לכל גרף מכוון פשוט. נתבונן במעגל מכוון $a \to b \to c \to d \to a$ לו נוספה הקשת $a \to c$. הפעלה של האלגוריתם עם בחירה של הצומת b כצומת ראשון, תניב הסדר b,c,d,a בו יש שתי הפרות: $a \to b$ ו- $a \to c$. לעומת זאת, הסדר a,b,c,d מכיל הפרה אחת: $d \to a$.

<u>שאלה 5</u>

נסמן ב- $\tilde{G}$ את גרף העל (גרף הרכיבים הקשירים היטב) של G.

טענה: G קשיר למחצה אמ"ם במיון טופולוגי של $\tilde{G}$ יש קשת בין כל זוג צמתים עוקבים (עפ"י סדר המיון).

הוכחה: נניח כי G קשיר למחצה. $\tilde{G}$ הוא גרף מכוון חסר מעגלים ולכן ניתן למיין אותו טופולוגית. יהיו $\tilde{u}$ ו- $\tilde{v}$ שני צמתים ב- $\tilde{G}$, כך ששניהם עוקבים בסדר המיון הטופולוגי, ו- $\tilde{u}$ מקדים את $\tilde{v}$. מאחר ו- G קשיר למחצה קיים מסלול מ- $\tilde{u}$ ל- $\tilde{v}$, וכמו כן לא יתכן שמסלול זה עובר דרך צומת אחר $\tilde{w}$ (אחרת $\tilde{w}$ היה צריך להיות בין $\tilde{u}$ ו- $\tilde{v}$ בסדר המיון). לכן קיימת קשת מ- $\tilde{u}$ ל- $\tilde{v}$.

מצד שני, נניח כי ל- $\tilde{G}$ יש מיון טופולוגי כך שיש קשת בין כל זוג צמתים עוקבים. יהיו u ו- v שני צמתים ב- G, ונסמן ב- $\tilde{u}$ וב- $\tilde{v}$ את הרכיבים הקשירים היטב אליהם הם שייכים. אם $\tilde{u} = \tilde{v}$ אז ברור כי יש מסלול מכוון מ- u ל- v ב- G. אחרת, נניח בה"כ כי $\tilde{u}$ קודם ל- $\tilde{v}$ בסדר המיון. לכן קיים מסלול מ- $\tilde{u}$ ל- $\tilde{v}$ ב- $\tilde{G}$. מכאן שקיים מסלול מכוון מ- u ל- v ב- G. □

מהטענה נובעת נכונות האלגוריתם הבא: בהינתן G נבנה את $\tilde{G}$, נמיין אותו טופולוגית ונבדוק האם יש קשת ב- $\tilde{G}$ בין כל זוג צמתים עוקבים בסידור. הסיבוכיות תהיה $O(V+E)$.