שאלה 1 (25 נקודות)

בחנות יש 25 בקבוקי משקה – 10 בקבוקי מיץ, 7 בקבוקי קולה ו-8 בקבוקי מים.

15 אנשים קנו בחנות בקבוקי שתייה, מתוך המלאי הנתון.

כל אחד קנה בדיוק בקבוק אחד, שאותו בחר באופן מקרי מהמלאי הנתון.

א. יהי X משתנה מקרי, המוגדר על-ידי מספר <u>בקבוקי המים</u> **שנותרו** בחנות.

(6 נק') 1. חשב את $P(X=4)$.

(6 נק') 2. זהה את ההתפלגות של X . (רשום את שמה ואת ערכי הפרמטרים שלה.)

(6 נק') 3. אם ידוע ש- $X=4$, מהי ההסתברות ש-5 הקונים הראשונים לא קנו אף בקבוק מים?

(7 נק') ב. נסמן ב-R את הרווח הנקי ממכירת הבקבוקים.
אם בעל החנות מרוויח 3 ₪ ממכירת כל בקבוק מיץ; 4 ₪ ממכירת כל בקבוק קולה; ו-6 ₪ ממכירת כל בקבוק מים, ומפסיד 0.5 ₪ על כל בקבוק שלא נמכר, מהי תוחלת הרווח הנקי שלו?

שאלה 2 (25 נקודות)

(10 נק') א. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n $(n=1,2,\ldots)$ ו- p $(0<p<1)$.

הוכח כי: $M_X(t)=(pe^t+1-p)^n$, לכל t

ב. יהי Y משתנה מקרי בדיד, שפונקציית ההסתברות שלו נתונה, לכל $a>1$, על-ידי:

$$P\{Y=i\}=\frac{c}{a^i} \quad , \quad i=0,1,...$$

(5 נק') 1. חשב את c .

(5 נק') 2. מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים של Y . **רשום עבור אלו ערכים של t היא קיימת**.

(5 נק') 3. חשב את התוחלת של Y .

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר 0.2,

ויהי Y משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר 0.5.

נניח כי המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה,

ונגדיר את המשתנה המקרי Z , על-ידי $Z=X+Y$.

(9 נק') א. מצא ביטוי כללי להסתברות $P\{Z=n\}$, לכל $n=2,3,\ldots$.
פשט את התוצאה עד כמה שאפשר.

(8 נק') ב. חשב את הסתברות המאורע $\{X=Y\}$.

(8 נק') ג. מצא בעזרת אי-שוויון מרקוב חסם עליון להסתברות ש- $Z^2>90$.

שאלה 4 (25 נקודות)

מכונה ממלאת צנצנות דבש במשקל שמתפלג נורמלית עם תוחלת של 500 גרם.
נניח כי אין תלות בין צנצנות שונות שהמכונה ממלאת.

(7 נק') א. אם המשקל של צנצנת שהמכונה ממלאת, גבוה מ-515 גרם בהסתברות 0.0668, מהי **השונות** של התפלגות המשקל?

(6 נק') ב. מהו המשקל ש- 62% מהצנצנות שוקלות יותר ממנו?
בצע בחישוביך אינטרפולציה לינארית.

(6 נק') ג. כדי לבדוק את תקינות המכונה שוקלים את הצנצנות שהיא ממלאת בזו אחר זו.
מהי ההסתברות שהצנצנת הראשונה, שמשקלה נמוך מ-490 גרם, תתגלה רק **לאחר** השקילה העשירית?

(6 נק') ד. בוחרים באקראי 20 צנצנות דבש.
מהי ההסתברות ש-4 מהן ישקלו פחות מ-490 גרם, 10 מהן בין 490 גרם ל-503 גרם והשאר מעל ל-503 גרם?

שאלה 5 (25 נקודות)

יוסף ניגש למבחן המורכב משלוש שאלות המסומנות ב-A, B ו- C.

נתון כי – ליוסף אין אף תשובה נכונה במבחן בהסתברות 0.02 ;
כל התשובות שלו במבחן נכונות בהסתברות 0.4 ;
הוא עונה נכון לפחות על אחת מהשאלות A ו-B בהסתברות 0.93 ;
אם הוא עונה נכון לפחות על אחת מהשאלות A ו-B , אז הוא עונה נכון על שתיהן גם יחד בהסתברות $\frac{20}{31}$;
אם הוא עונה נכון על שאלה C, אז הוא עונה נכון גם על שאלה A בהסתברות $\frac{5}{6}$.
הוא עונה נכון על שאלה A וגם עונה לא נכון על שאלה C בהסתברות 0.3 ;
וההסתברות שיענה נכון על שאלה A גדולה פי $\frac{4}{3}$ מההסתברות שיענה נכון על שאלה C.

(12 נק') א. יהי X מספר התשובות הנכונות של יוסף במבחן.
מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X. **רשום את ערכיה לכל מספר ממשי**.

(5 נק') ב. תשובה נכונה לכל אחת מהשאלות A , B ו- C מזכה את הנבחן ב-33 נקודות, אך אם כל תשובותיו נכונות הוא מקבל נקודה אחת נוספת (כך שציונו יהיה 100).
מהי תוחלת הציון של יוסף במבחן?

(4 נק') ג. מהי ההסתברות שיוסף יענה נכון על כל השאלות, אם ידוע שענה נכון לפחות על שתיים מהן?

(4 נק') ד. אם יוסף ענה לא נכון לפחות על שאלה אחת, מהי ההסתברות שענה נכון על שאלה A?

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z)=P\{Z\le z\}=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt \qquad ; \qquad \Phi(-z)=1-\Phi(z) \qquad ; \qquad Z\sim N(0,1)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,...,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1}\cdot p \quad , \quad i=1,2,...$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i! \quad , \quad i=0,1,...$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,...$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,...,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,...,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a\le x\le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\,,\, t\neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad -\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,...,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r} \quad , \quad \sum n_i=n\,,\,\sum p_i=1$			

נוסחת הבינום $(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$

כלל ההכלה וההפרדה $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)$

הסתברות מותנית $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

נוסחת הכפל $P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n\mid A_1\cap A_2\cap...\cap A_{n-1})$

נוסחת ההסתברות השלמה $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i) \quad ,$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס $P(B_j\mid A)=\frac{P(A\mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)} \quad ,$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת $E[X]=\sum_x xp_X(x)=\int xf(x)dx$

תוחלת של פונקציה של מ"מ $E[g(X)]=\sum_x g(x)p_X(x)=\int g(x)f(x)dx$

שונות $\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית $E[aX+b]=aE[X]+b$

$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון $P\{X>s+t\mid X>t\}=P\{X>s\} \quad , \quad s,t\ge 0$

תוחלת מותנית $E[X\mid Y=y]=\sum_x xp_{X|Y}(x\mid y)=\int xf_{X|Y}(x\mid y)dx$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X \mid Y=y) = E[X^2 \mid Y=y] - (E[X \mid Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] = E[E[X \mid Y]] = \sum_y E[X \mid Y=y] p_Y(y)$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) \big/ \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$

כאשר X_i מ"מ ב"ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X]$

(כאשר X_i מ"מ ב"ת ש"ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X) + (E[X])^2 \mathrm{Var}(N)$

$$M_Y(t) = E\left[\left(M_X(t)\right)^N\right]$$

אי-שוויון מרקוב X מ"מ אי-שלילי , $a>0$, $P\{X \ge a\} \le E[X]/a$

אי-שוויון צ'בישב $\mu, \sigma^2 < \infty$, $a>0$, $P\{|X-\mu| \ge a\} \le \sigma^2/a^2$

משפט הגבול המרכזי X_i מ"מ ב"ת וש"ה , $\mu, \sigma^2 < \infty$, $P\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) \Big/ \sqrt{n\sigma^2} \le a \right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(a)$

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר p הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני.
- סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1<x<1$$

$$\int (ax+b)^n\,dx = \tfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \ne -1 \quad ; \quad \int \tfrac{1}{ax+b}\,dx = \tfrac{1}{a}\ln(ax+b)$$

$$\int e^{ax}\,dx = \tfrac{1}{a}e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax}\,dx = \tfrac{1}{a\ln b} b^{ax} \quad ;$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים :

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$