מספר התלמיד הנבחן
רשום את כל תשע הספרות

הדבק כאן את מדבקת הנבחן

האוניברסיטה הפתוחה

ז' בתמוז תשע"ט

10
ביולי 2019

מס' שאלון - 509

סמסטר 2019ב

מס' מועד 86

4 / 20585

שאלון בחינת גמר

20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה **3** עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה שש שאלות.

עליכם לענות על חמש שאלות בלבד.

משקל כל שאלה 20 נקודות.

חומר עזר:
כל חומר עזר מותר בשימוש.
אסור בשימוש כל מכשיר אלקטרוני שבאמצעותו ניתן לאצור מידע לרבות מכשיר טלפון נייד, מחשב נישא, שעון חכם וכד'.

בהצלחה !!!

החזירו
למשגיח את השאלון
וכל עזר אחר שקיבלתם בתוך מחברת התשובות

שאלה 1 (סעיף א – 2 נקודות; סעיף ב - 9 נקודות; סעיף ג - 9 נקודות)

נניח שנשנה את ההגדרה של מכונת טיורינג דטרמיניסטית M, כך שיהיו למכונה **שני מצבים מקבלים**, q_{acc1} ו-q_{acc2}.

M מקבלת את המילה w, אם בריצתה של M על w, M מסיימת ב-q_{acc1} או ב-q_{acc2}.

השפה ש-M מזהה, $L(M)$, היא קבוצת המילים ש-M מקבלת.

נסמן ב-$L(q_{acc1})$ את שפת המילים w, שבריצת M עליהן, M מסיימת ב-q_{acc1}, וב-$L(q_{acc2})$ את שפת המילים w, שבריצת M עליהן, M מסיימת ב-q_{acc2}.

על מכונה דטרמיניסטית M, בעלת שני מצבים מקבלים, נתון, ש-$L(M)$ **איננה כריעה**, וש-$L(q_{acc1})$ ו-$L(q_{acc2})$ **אינסופיות**.

א. האם ייתכן ש-$L(q_{acc1})$ ו-$L(q_{acc2})$ שתיהן **כריעות**? הוכיחו!

ב. האם ייתכן ש-$L(q_{acc1})$ **כריעה** ו-$L(q_{acc2})$ **איננה כריעה**? הוכיחו!

ג. האם ייתכן ש-$L(q_{acc1})$ ו-$L(q_{acc2})$ **שתיהן אינן כריעות**? הוכיחו!

בכל סעיף, אם עניתם שייתכן, **תארו מכונה מתאימה**. אם עניתם שלא ייתכן, **הוכיחו** שלא ייתכן.

שאלה 2 (סעיף א - 15 נקודות; סעיף ב - 5 נקודות)

נגדיר: $SELF\text{-}REJ_{TM} = \{<M> \mid M \text{ is a TM that rejects } <M>\}$

מילה $<M>$ שייכת לשפה, אם M היא מכונת טיורינג, שכאשר היא רצה על הקלט $<M>$, היא מסיימת במצב הדוחה q_{reject}.

א. הוכיחו, **באמצעות שיטת האלכסון**, ש-$SELF\text{-}REJ_{TM}$ **איננה כריעה**.

ב. האם $SELF\text{-}REJ_{TM}$ **מזוהה-טיורינג**? הוכיחו!

שאלה 3

נגדיר: $COFINITE_{TM} = \{<M> \mid M \text{ is a TM and } \overline{L(M)} \text{ is a finite language}\}$

מילה $<M>$ שייכת ל-$COFINITE_{TM}$, אם M היא מכונת טיורינג, שמספר המילים שהיא **לא מקבלת** סופי.

הוכיחו: $COFINITE_{TM}$ **איננה מזוהה-טיורינג**.

הדרכה: הראו רדוקציית מיפוי של שפה לא מזוהה-טיורינג (למשל, המשלימה של A_{TM}).

שאלה 4

בשאלה זו נניח כי NP≠coNP.

תהי C שפה ב-NP–coNP (C שייכת ל-NP, ולא שייכת ל-coNP), ותהי D שפה ב-coNP–NP.

נתבונן במחלקת השפות הבאה $\mathrm{P}\cup\{C, D\}$. (זו מחלקת כל השפות של המחלקה P, ובנוסף, השפות C ו-D).

שפה B תיקרא **שלמה** במחלקה $\mathrm{P}\cup\{C, D\}$, אם

- B שייכת למחלקה $\mathrm{P}\cup\{C, D\}$
- לכל שפה A במחלקה $\mathrm{P}\cup\{C, D\}$, $A\leq_{\mathrm{P}}B$

האם **יש** שפות שלמות במחלקה $\mathrm{P}\cup\{C, D\}$?

אם עניתם שכן, **תנו דוגמה** לשפה כזו, **והוכיחו** שהיא שלמה במחלקה $\mathrm{P}\cup\{C, D\}$.

אם עניתם שלא, **הוכיחו** שאין שפה שלמה במחלקה $\mathrm{P}\cup\{C, D\}$.

שאלה 5

נגדיר את השפה *AP-SUM*: מילים בשפה הן מהצורה $<S, t>$, כך ש-S היא קבוצה סופית של מספרים טבעיים בייצוג עשרוני, $S=\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, ו-$t$ הוא מספר טבעי בייצוג עשרוני.

מילה $<S, t>$ שייכת לשפה, אם יש ל-S תת-קבוצה $\{m_1, m_2, \ldots, m_l\}$, שסכום המספרים שלה הוא במרחק לא גדול מ-10 מ-t. ($t-10 \leq m_1+m_2+\cdots+m_l \leq t+10$).

$$AP\text{-}SUM = \{<S, t> \mid S=\{n_1, \ldots, n_k\}, \text{ and for some } \{m_1, \ldots, m_l\}\subseteq S \text{ we have } t-10 \leq \Sigma m_i \leq t+10\}$$

הוכיחו: *AP-SUM* היא שפה **NP-שלמה**.

שאלה 6

נגדיר את השפה *ONE-PATH*:

$$ONE\text{-}PATH = \{<G, s, t> \mid G \text{ is a directed graph that has exactly one directed paths from } s \text{ to } t>$$

מילה $<G, s, t>$ שייכת לשפה, אם G הוא גרף מכוון, s ו-t הם צמתים של G, ויש ב-G מסלול מכוון אחד ויחיד מ-s ל-t.

הוכיחו: *ONE-PATH* שייכת ל-NL.

בהוכחה אתם יכולים להיעזר בשוויון NL=coNL.

ב ה צ ל ח ה !

(3) נוכיח כי $COFINITE_{TM}$ אינה מעל"ה איורינג.

נצביע כך נראה רדוקציה $\overline{A_{TM}} \leq_m Cofinite_{TM}$.

f, עבור קלט $\langle M,w\rangle$:

1) בונה מ"ט N, עבור קלט x:

1.1) הרץ את M עבור w, אם M מקבלת את w – דחה, אחרת – קבל.

2) החזר את $\langle N\rangle$

הרדוקציה חשיבה שכן אין מזדרים מ"ט הנמנעת לרנייה בזמן סופי.

תקינות:

אם $\langle M,w\rangle \in \overline{A_{TM}}$ אזי M לא מקבלת את w (דוחה או שרצה לעד). במידה והיא דוחה את w אחרי k צעדים אזי יש מספר סופי שלא מוגים מעל Σ^* באורך שקטן מ-k (מצב שהוא אי-קבלה ואי-דחייה) ולפי אי-הבחנה מספר המוגים באורך $\leq k$ הוא סופי. (אוצ $L(M)$ סופית)

במידה ו-M לא עוצרת עבור w אזי לפי k שלה N תדפיס את x ואז $L(N)=\emptyset$

ומכאן שאם $\langle M,w\rangle \in \overline{A_{TM}}$ $\Leftarrow$ $L(f(M,w))$ סופית

המשך בעמ' הבא

242138

אם $\langle m,w\rangle \notin A_{TM}$ אזי m מקבלת את x ולכן קיים k

שלא כך ש- m מקבלת את w אחרי k צעדים

ומכאן שלכל x המקיים $|x|\geq k$ N תבחר

את $x \Leftarrow L(f(\langle m,w\rangle))$ איי נטופיים.

נשכן יש איי נטוף מודים מעל Σ^* מאורך שצדק שום k.

לשימוש הבודק

לשימוש הבודק

② ב) נניח בשלילה שיש TM self-rej שיורשה כריעה.

נניח בשלילה כי self-rej כריעה, עבור יש מ"ט H המכריעה אותה.

נבנה את מכונת הטיורינג D הבאה:

D, על קלט w המכיל מכונת טיורינג M:

1) מריץ את H על M

2) אם H קיבלה את <M> - קבל

3) אחרת אם H דחתה את <M> - דחה

נריץ את D על <D> - מה שיקרה הוא ש- D תגיע למצב מקבל אם $<D> \in self\text{-}rej_{TM}$, כלומר אם D דוחה את <D>.

במקרה השני נקבל כי D תגיע למצב דוחה אם H דחתה את <D>, כלומר $<D> \in self\text{-}rej_{TM}$

כלומר קיבלנו: D מקבלת את <D> $\Leftrightarrow$ H הכריעה ש- $<D> \in self\text{-}rej$ $\Leftrightarrow$ D דוחה את <D>.

וכן D דוחה את <D> $\Leftrightarrow$ H הכריעה כי $<D> \notin self\text{-}rej_{TM}$ $\Leftrightarrow$ D לא דוחה את <D>.

בשני המקרים הללו קיבלנו סתירה ועל כן בהכרח השפה $self\text{-}rej_{TM}$ לא כריעה!

ג. השפה מגדירה טיורינג נצב מ"ט T שמגדירה אותה:

T, בהינתן קלט <M> כאשר M מ"ט

1) מריץ את M על <M>, אם M דחתה את <M> - קבל

אחרת דחה.

- המשך בעמ' הבא ←

242138

ברור שאם מ"ט M שייכת ל- Self-Rej אז M דוחה
את <M> אחרי מספר צעדים סופי ולכן T
תקבל את M. אם M מקבלת את <M> אז
לא עוצרת אבל גם T לא תקבל.

לשימוש הבודק

(6) נוכיח כי ONE-PATH שייכת ל- NL:
נזכר כי NL = Co-NL לכן די שאם נוכיח
כי $\overline{\text{ONE-PATH}} \in NL$. נשים לב כי:

$\overline{\text{ONE-PATH}} = \{\langle G,s,t\rangle \mid$ G גרף מכוון בו אין מסלול מ- s ל- t או שיש יותר ממסלול אחד מ- s ל- t $\}$

נבנה מכונה M המכריעה את $\overline{\text{ONE-PATH}}$ בשימוש
במקום לוגריתמי בסרט העבודה.
M בהינתן קלט $\langle G,s,t\rangle$: המאותחל ל-0
1) החזקת בסרט העבודה מונה c בגודל $\lg(n)$ שני מצביעים
לצומתים הנוכחיים של שני המסלולים מ- s ל- t. p_1, p_2
אתחל את p_1 ו- p_2 להיות שווים ל- s בתחילה.
כמו כן נחזיק משתנה בוליאני (דגלון) d
שלו כאשר יש פיצול בין המסלולים ערכו יהיה 1.
בתחילה ערכו שווה לאפס.
2) כל עוד $c < n$:
1.2) נחשב באופן לא דטרמיניסטי את הצומתים הבאים
שני המסלולים ל- p_1 ו- p_2 במסלול ונעדכן את ערך המצביעים.
אם $p_1 \neq p_2$ נעדכן את d להיות שווה ל- 1.
2.2) הגדל את c ב- 1 ונעדכן את ערכו בסרט
העבודה.
2.3) אם מתקיים כי $p_1 = p_2 = t$ ואם $d = 1$ - קבל.
~~3) אם $p_1 = t$ ו- $p_2 = t$ ואם $d = 0$ דחה~~ 3) דחה
~~4) אם p_1 ואם p_2 שונים מ- t חשב את מ"ט M'~~
הוסף את מ"ט M'
6) המכריעה את $\overline{\text{PATH}}$ על הקלט $\langle G,s,t\rangle$ - אם קיבלה - קבל.

בהכרח היומן בגאל כי
$\overline{\text{PATH}} \in NL$

נוכיח כי M משתמש בזיכרון לוגריתמי:

M מחזיקה כשומר מונה בסוגר לוגריתמי (ביחס לגודל הקלט) וכן ~~שלושה קבועים~~ מחזיקה שני מצביעים לצמתי G (בהינתן שהצמתים ממוספרים) אלו כבר מצביע שם כן לוגריתמי ביחס ל-n וכן משתנה בוליאני d.

במהלך ריצתה M קוראת את G-מ' שהיא מ"ב המבריעה את $\overline{Path}$ הנתונה כשומר G-NL ומעבירה G-מ' את הקלט $\langle G,s,t\rangle$ עם אחרי תו שדה בוודאי לוגריתמי בגודל הקלט.

אם $\langle G,s,t\rangle$ שייכת ל-$\overline{PATH}$ אזי אין מסלול בין s ל-t ב-G ואז $\langle G,s,t\rangle \in \overline{ONE\text{-}PATH}$.

אחרת, המסלול באורך לא בר מינימלי מחבשת שני מסלולים שונים (יש עניין בגזרה) ב-G מ-s ל-t.

אם קיימים שניים כאלה M מקבלת את הקלט $\langle G,s,t\rangle$.

$ONE\text{-}PATH \in NL \iff \overline{ONE\text{-}PATH} \in NL$ - ב /לכן

$NL = co\text{-}NL$

□

לשימוש הבודק

⑤ נוכיח כי: AP-SUM∈NPC:

כאשר, נגיב מאמת V כך שבהינתן מסמך איטור c

לקלט s,t מכריע. בזמן פולינומיאלי:

V, בהינתן קלט <s,t,c>:

1) אתחל sum=0

2) לכל $c_i \in C$ בצע:

2.1) בדוק אם $c_i \notin C$ - דחה.

2.2) אחרת sum=sum+c_i וכן מחק את c_i מ- C.

3) בדוק אם t-10 ≤ sum ≤ t+10 - אם כן - קבל אחרת דחה.

ברור כי המאמת V רץ בזמן פולינומיאלי שכן

עובר פ' כל המספרים ששונים ל-C ולכל אחד בודק

אם שייך ל-S וזה מבוצע ב- $O(n^2)$.

לכפולה מבוצעת ההשוואה אם sum נמצא בתחום

[t-10, t+10] - דבר המבוצע בזמן קבוע.

מכאן ש-V רץ בזמן פולינומיאלי.

ברור כי אם C מקיימת את התנאי - כלומר קיים תת קבוצה

וגם הסכום ש"ל האיברים מקיים [t-10, t+10] אזי V

מקבלת את הקלט. אם לא V דוחה.

כעת כדי להוכיח כי ל-AP-SUM קיימת

הדוקציה פולינומיאלית מכל A∈NP כי אם נראה הדוקציה

מבעיית NP - שלמה אחרת.

נראה כי Subset-Sum ≤p Ap-Sum

ולכן בהוכחה 7.56 מוכחים ש-Subset-sum∈NPC.

נעשה כאן עי' הצגת מ"ח M_f המבצעת הדוקציה זו

בזמן פולינומיאלי - כך ש- <s,t>∈Subset-Sum ⇔ f(<s,t>)

∈Ap-sum

לשימוש הבודק

M_f בהינתן קלט $<S,t>$:

1) הגדרה: $S' = \{s \cdot 100 \mid s \in S\}$

2) הגדרה: $t = t \cdot 100$

3) החזרה $<S',t'>$

טענה - M_f רצה בזמן פולינומיאלי:

הוכחה: M_f עוברת על האיברים ב-S ומגדירה קבוצה חדשה S' בזמן קבוע לכל איבר ולבסוף מגדירה את t' בזמן קבוע - לכן בהכרח M_f רצה בזמן פולינומיאלי.

נובעים כ עת $<S,t> \in \text{Subset-Sum} \Leftrightarrow f(<S,t>) \in \text{AP-Sum}$ ∴

אם $<S,t> \in \text{Subset-Sum}$ הרי שיש עבור קבוצה $C \subseteq S$ כך ש $\sum_{c_i \in C} c_i = t$ $\Leftarrow$ קיימת קבוצה C' המוכלת ב-S' כך ש- $t' = 100t = 100 \cdot \sum_{c_i \in C} c_i = \sum_{c_i \in C} 100 c_i = \sum_{c_i' \in C'} c_i' = t'$

ונגזרת לפי השיוויון שהוצג כ עת לעיל.

ולכן בהכרח $<S',t'> \in \text{AP-Sum}$

אם $<S,t> \notin \text{Subset-Sum}$ $\Leftarrow$ לא קיימת קבוצה $C \subseteq S$ כך ש- $\sum_{c_i \in C} c_i = t$ ולכן מכיוון ש- $c_i \in \mathbb{N}$ (אפשרי) לכל $c_i \in C$ אזי בהכרח מכיוון שבקבוצה S' ההפרש בין כל זוג איברים הוא לפחות 100 לא יתכן שתהיה תת קבוצה $C' \subseteq S'$ כך ש- $t' - 10 \le \text{Sum}(C') = t - 10$ שכן כדי שזה יקרה צריך אחד מן השניים:

1) קיים זוג איברים ב-S (מספרים) שההפרש בינם ב ו.ס - אוק זה לא יתכן כי $S \subseteq \mathbb{N}$.

2) מתקיים כי $\text{sum}(C) = t$ - אין הנחנו ש- $S,t \notin \text{Subset-Sum}$

ומכאן ש- $f(<S,t>) \notin \text{Ap-Sum}$

ומכאן שקיימת רדוקציה פולינומיאלית מבעיית Suset-Sum שהיא NP-שלמה לבעיית AP-Sum ולכן גם בעיה זו NP-שלמה. □

242138

1) א) לא יתכן.

נתון כי $L(M)$ איננה כריעה וכן $L(q_{acc1})$ ו- $L(q_{acc2})$ איסומיות - כלומר יש איפוס מילים ש- M עוצרת עליהן במצב q_{acc1} ואיפוס מילים ש- M עוצרת עליהן ב- q_{acc2}, כדי להכריע שם מילה $w \in L(q_{acc1})$ צריך להראות כי M מקבלת את w במצב q_{acc1}, אם נתון כי $L(M)$ איננה כריעה ואם ננית בשלילה כי $L(q_{acc1})$ ו- $L(q_{acc2})$ כריעות אזי יש מ"ט M_1 שמכריעה את $L(q_{acc1})$ ומ"ט M_2 שמכריעה את $L(q_{acc2})$ ואז ניתן להכריע את M באמצעות הרצת M_1 עד w ו-M_2 עד w ולבדוק אם אחת מהן מקבלת - אם כן סיימה לכם ש- $L(M)$ איננה כריעה.

~~ב) לא יתכן - ננית בשלילה שהדבר יתכן, אזי יש מ"ט M_1 שמכריעה את $L(q_{acc1})$ כלומר לכל מילה w M_1 מקבלת את w אם M עוצרת עד w ב- q_{acc1}, כמו כן מסגירות למשלים בשפות כריעות גם השפה $\overline{L(q_{acc1})}$ כריעה ע"י מ"ט $\overline{M_1}$, נשים לב ש- $w \in L(q_{acc1})$ אם"ם M עוצרת עד w במצב שאינו q_{acc1} אם"ם M לא עוצרת עד w במצב q_{acc1}. מכאן שניתן להכריע את $L(M)$ באופן הבא: 1) הרץ את M_1 עד w 2) אם מקבל - קבל~~

רא"ד בכא

לשימוש הבודק

ב) ייתכן - נניח:

נניח כי $L(q_{acc1})$ כריעה אזי קיימת מ"ט M_1 המכריעה אותה וכן קיימת מ"ט $\overline{M_1}$ המכריעה את $\overline{L(q_{acc1})}$.

ניתן להראות ש- $L(q_{acc2})$ מקיימת תנאי נכונים מ"ט M_2 המקבלת אותה:

M_2, בהינתן קלט ש

1) הרץ את M על ש - אם M עוצרת (אז ש) במצב q_{acc2} - קבל

מכאן ש- $L(q_{acc2})$ מקיימת תנאי. אך אם $\overline{L(q_{acc2})}$ מקיימת תנאי לפי סעיף א' מתקיים ש- $L(M)$ כריעה - סתירה.

לכן, ייתכן הדבר.

~~אם $L(q_{acc1})$ כריעה אזי קיימת מ"ט M_1 המכריעה אותה וכן קיימת מ"ט $\overline{M_1}$ המכריעה את $\overline{L(q_{acc1})}$ ניתן להגיד כי $w \in L(q_{acc1})$ אם M לא עוצרת על ש ב-q~~

~~מכונה בעלת יכולה להיות מכונה שבה מילה ש מתקבלת במצב q_{acc1} אם ש כזו וגם מילה שמקיימת שסכום ספרותיה שווה לסכומה מילה ש מתקבלת ב- q_{acc2} אם לא כזו~~

מכונה M בעלת תנאים בעלת M, בהינתן קלט ש, M' נקבל במצב q_{acc1} אם ש כזו, ונקבל במצב q_{acc2} אם M' עוצרת על ש. (-1 אם לא כזו).

הרחבה של $L(q_{acc})$ כריאה טוב

$L(q_{acc})$ לא כריאה שכן היו "מקבילה"

δ - Atm.

9 - לא עונה על סעיף ג'.

לשימוש הבודק

לשימוש הבודק

242138

לשימוש הבודק

לשימוש הבודק

242138

לשימוש הבודק

לשימוש הבודק

242138

לשימוש הבודק

גליון תשובות לשאלות רב-ברירתיות

הקף במעגל את התשובה שבחרת (לכל שאלה יש רק תשובה אחת נכונה).
אם תרצה לבטל תשובה שבחרת, סמן עליה X.
דוגמה לתשובה שבחרת: א ב ג (ד) ה ו ז ח ט
דוגמה לתשובה שבטלת: א ב ג ד ה (X) ז ח ט

שאלה	תשובה	שאלה	תשובה
1	א ב ג ד ה ו ז ח ט	21	א ב ג ד ה ו ז ח ט
2	א ב ג ד ה ו ז ח ט	22	א ב ג ד ה ו ז ח ט
3	א ב ג ד ה ו ז ח ט	23	א ב ג ד ה ו ז ח ט
4	א ב ג ד ה ו ז ח ט	24	א ב ג ד ה ו ז ח ט
5	א ב ג ד ה ו ז ח ט	25	א ב ג ד ה ו ז ח ט
6	א ב ג ד ה ו ז ח ט	26	א ב ג ד ה ו ז ח ט
7	א ב ג ד ה ו ז ח ט	27	א ב ג ד ה ו ז ח ט
8	א ב ג ד ה ו ז ח ט	28	א ב ג ד ה ו ז ח ט
9	א ב ג ד ה ו ז ח ט	29	א ב ג ד ה ו ז ח ט
10	א ב ג ד ה ו ז ח ט	30	א ב ג ד ה ו ז ח ט
11	א ב ג ד ה ו ז ח ט	31	א ב ג ד ה ו ז ח ט
12	א ב ג ד ה ו ז ח ט	32	א ב ג ד ה ו ז ח ט
13	א ב ג ד ה ו ז ח ט	33	א ב ג ד ה ו ז ח ט
14	א ב ג ד ה ו ז ח ט	34	א ב ג ד ה ו ז ח ט
15	א ב ג ד ה ו ז ח ט	35	א ב ג ד ה ו ז ח ט
16	א ב ג ד ה ו ז ח ט	36	א ב ג ד ה ו ז ח ט
17	א ב ג ד ה ו ז ח ט	37	א ב ג ד ה ו ז ח ט
18	א ב ג ד ה ו ז ח ט	38	א ב ג ד ה ו ז ח ט
19	א ב ג ד ה ו ז ח ט	39	א ב ג ד ה ו ז ח ט
20	א ב ג ד ה ו ז ח ט	40	א ב ג ד ה ו ז ח ט

לשימוש פנימי

מספר התשובות הנכונות: _____ ציון: _____

שם הבודק: _____

242138