תשובה 1

א. **לא**: למשל, תהיינה $R=\{(1,2)\}$, $S=\{(2,1)\}$. מתקיים $R\neq S$ אבל $s(R)=s(S)$ (מדוע?)

ב. **לא**: מהגדרת סגוֹר של יחס עבור תכונה כלשהי, הסגוֹר מקיים את התכונה.

לפיכך לכל $R\in M$, $s(R)$ הוא יחס **סימטרי** מעל A .

קיימים מעל A יחסים שאינם סימטריים, למשל $\{(1,2)\}$.

מהאמור, יחס זה (וכל יחס שאינו סימטרי) אינו בתמונה של s , ולכן s אינה על M.

ג. **לא**: דוגמא נגדית: $R=\{(1,2)\}$ (השלימו את הבדיקה!)

ד. **נכון**: לכל יחס R מעל קבוצה כלשהי, ולכל תכונה, הסגוֹר של הסגוֹר של R לגבי התכונה שווה לסגוֹר של R לגבי התכונה. זהו בדיוק סעיף א' של שאלה 2.33 בעמ' 55 בכרך "תורת הקבוצות".

תשובה 2

א. לא. למשל $f(2)=f(3)=2$.

ב. f היא **על**: בהינתן $n\in\mathbf{N}^*$, נקח $x=2^{n-1}$. מתקיים $x\in\mathbf{N}^*$ ו- $f(x)=n$.

ג. ל- 5 יש שני מחלקים שונים: הוא עצמו ו- 1. לפי מה שנאמר בפתח השאלה, תכונה זו היא בדיוק התכונה המגדירה מספרים ראשוניים. לכן המחלקה שבה נמצא 5 היא קבוצת כל המספרים הראשוניים.

ד. למספר 4 יש שלושה מחלקים שונים: 1, 2 והוא עצמו.
נוכיח שתכונה זו מאפיינת מספרים שהם **ריבוע של מספר ראשוני**.

כיוון אחד: נניח $n=p^2$ כאשר p ראשוני. אז n מתחלק ב- $1,p,p^2$. נראה ש- n אינו מתחלק באף מספר אחר: לפי ההדרכה שפורסמה לשאלה, כל מחלק k של n הוא מכפלה של גורמים ראשוניים המופיעים ב- n , כאשר כל ראשוני מופיע ב- k מספר פעמים שאינו עולה על מספר הופעותיו ב- n.

מכיוון של- n יש רק גורם ראשוני אחד , p, המופיע פעמיים, האפשרויות היחידות הן $1,p,p^2$.

כיוון שני: נניח של- n יש בדיוק 3 מחלקים. כלומר פרט לעצמו ול- 1 הוא מתחלק בעוד מספר אחד בלבד. נקרא למספר זה p . אם p אינו ראשוני אז n מתחלק גם בכל גורם ראשוני של p ונקבל יותר מ- 3 מחלקים ל- n, בסתירה להנחה. לפיכך p ראשוני. בנוסף, מכיוון ש- n מתחלק

ב- p נוכל לרשום $n = p\cdot q$ עבור q טבעי חיובי כלשהו. מכך ש- $p \neq n$ ו- $p \neq 1$ נובע $q \neq 1$ ו- $q \neq n$. לכן אם $q \neq p$ נקבל יותר מ- 3 מחלקים ל- n , בסתירה להנחה.
לכן $q = p$ כלומר $n = p^2$.

ה. לפי הדיון "יחס שקילות המושרה ע"י פונקציה" או לפי הדיון "העתק טבעי", מספר מחלקות השקילות ש- f משרה הוא כמספר האיברים בתמונה של f . ראינו ש- f היא **על**, כלומר תמונתה היא כל $\mathbf{N}^*$, לכן קבוצת מחלקות השקילות היא בהתאמה חד-חד-ערכית ועל לקבוצה $\mathbf{N}^*$, ולפיכך היא אינסופית.

ו. יהי x טבעי גדול מ- 1, המקיים $f(x) = n$, כאשר $1 < n \in \mathbf{N}$. נוכיח שהמחלקה שבה x נמצא היא אינסופית. יהי p ראשוני כלשהו. המספר p^{n-1} מתחלק בדיוק ב- n מספרים שונים: $1, p, p^2, \ldots, p^{n-1}$ (מסיבה דומה למה שנאמר בפתרון סעיף ד, כיוון ראשון). לכן p^{n-1} נמצא באותה מחלקה של x . במקום p נוכל להציב **כל מספר ראשוני**. עבור מספרים שונים p,q מובן ש- $p^{n-1} \neq q^{n-1}$. מכיוון שקבוצת המספרים הראשוניים היא אינסופית, קיבלנו אינסוף איברים שונים הנמצאים כולם במחלקה של x .

תשובה 3

א. היחס הריק $\varnothing$ הוא אנטי-סימטרי (ראו באתר הקורס בוחן עצמי בנושא יחסים), והוא מוכל בכל יחס מעל A. בפרט הוא מוכל בכל יחס אנטי-סימטרי מעל A . לפיכך הוא קטן ביותר.

ב. יהי R היחס הבא:

$$R \;=\; I_A \cup \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\} \;=\; \{(x,y)\in A\times A \mid \; x \le y\}$$

R הוא יחס אנטי-סימטרי מעל A (מדוע?) ואין אף יחס אנטי-סימטרי אחר מעל A שמכיל אותו (מדוע? נמקו!) . לפיכך, מהגדרת איבר מקסימלי, R הוא אבר מקסימלי ב- K.

ג. מהיחס R שבתשובה לסעיף הקודם נשמיט את הזוג $(1,2)$ ובמקומו נצרף את הזוג $(2,1)$.
ליחס המתקבל כך נקרא R_1 . בדומה ל- R, גם R_1 הוא אבר מקסימלי ב- K (הוכיחו זאת).
מצאנו ב- K שני איברים מקסימליים שונים – לכן, לפי "תורת הקבוצות" שאלה 3.21 בעמ' 93, לא קיים ב- K איבר גדול ביותר.

תשובה 4

א. 120 (השלימו את החישוב).

ב. כדי לקצר את הכתיבה נשתמש בסימון Σ , שבקרוב נזדקק לו בקומבינטוריקה.
הסבר לסימון זה ראו באתר הקורס. אין הכרח להשתמש בסימון זה בהוכחה.

עלינו להוכיח : $\sum_{k=1}^{n} k \cdot f(k) = f(n+1) - 1$.

בדיקה עבור $n=1$:

ראשית נחשב את $f(1)$ ואת $f(2)$, בעזרת ההגדרה של f :

$$f(1) = 1 \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1 \quad , \quad f(2) = 2 \cdot f(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

וכעת לבדיקה עצמה : בטענה המבוקשת $\sum_{k=1}^{n} k \cdot f(k) = f(n+1) - 1$ נקח $n=1$.

קיבלנו את השוויון $1 \cdot f(1) = f(2) - 1$.

בעזרת הערכים של $f(1)$, $f(2)$ שמצאנו, אנו רואים שהשוויון מתקיים.

מעבר:

נניח שהטענה נכונה עבור n, כלומר **נניח** $\sum_{k=1}^{n} k \cdot f(k) = f(n+1) - 1$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר **נוכיח** : $\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot f(k) = f(n+2) - 1$.

נפתֵח את אגף שמאל של השוויון שאנו רוצים להוכיח. נפרק את הסכום לשני חלקים :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot f(k) = (n+1) \cdot f(n+1) + \sum_{k=1}^{n} k \cdot f(k)$$

מהנחת האינדוקציה, $\sum_{k=1}^{n} k \cdot f(k) = f(n+1) - 1$. נציב זאת באגף ימין ונקבל

$$= (n+1) \cdot f(n+1) + f(n+1) \quad -1$$

נקבץ איברים

$$= (n+2) \cdot f(n+1) \quad -1$$

ומהגדרת f

$$= f(n+2) \quad -1$$

הוכחנו שהטענה נכונה עבור $n+1$.

משני השלבים (הבדיקה והמעבר) יחד נובע שהטענה נכונה לכל n טבעי חיובי.

איתי הראבן