

# מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20276 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 2-3.1

משקל המטלה: 3 נקודות  
מועד אחרון להגשה: 12.3.99 (ש)  
מספר השאלות: 5  
סמסטר: ב 1999

אנא שים לב:

מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.  
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

## שאלה 1

תהיינה  $A$  ו- $B$  קבוצות לא ריקות.

I. הוכיחו שאם  $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C$  אזי  $A = B = C$ .

II. הוכיחו או הפריכו:

$$(A \times A) - (B \times C) = (A - B) \times (A - C) \quad \text{I}$$

$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C) \quad \text{II}$$

## שאלה 2

תהי  $A$  קבוצה בת 10 איברים,  $R$  רלציה אנטי-סימטרית מעל  $A$ ,  $S$  הסגור הסימטרי של  $R$ . נתון

כי  $|R| \geq 30$ .

הוכח את הטענות הבאות:

$$|R| \leq 55. \text{ I}$$

$$|S| \geq 50. \text{ II}$$

III. אם  $|S| = 60$  אז לא ייתכן כי  $|I_A \cap R| = 7$

### שאלה 3

תהי  $K$  קבוצה,  $R$  רלציה מעל  $K$ .

- I. הראה כי אם  $R$  רפלקסיבית וטרנזיטיבית אז  $R \cap R^{-1}$  היא רלציית שקילות מעל  $K$ .
- II. אם  $R$  רפלקסיבית וטרנזיטיבית, האם בהכרח  $R \cup R^{-1}$  היא רלציית שקילות מעל  $K$ ?  
הראה שכן או הבא דוגמה נגדית.
- III. כמה רלציות שקילות שונות קיימות מעל  $\{1,2,3,4\}$ ?  
הדרכה: רשום את כל החלוקות האפשריות.

### שאלה 4

$R, S$  הן רלציות מעל קבוצה  $I$ .  $A$  היא רלציית היחידה (הזהות) מעל  $A$ . הוכח או הפרך:

- I.  $R^2 R^3 = R^5$ .
- II.  $R^2 R^{-1} = R$ .
- III.  $(R^2)^{-1} = (R^{-1})^2$ .
- IV.  $(R - I)^2 = R^2 - I$ .
- V. אם  $RS = SR$  אז  $R^{-1}S^{-1} = S^{-1}R^{-1}$ .
- VI.  $(R \cup S)^2 = R^2 \cup RS \cup S^2$ .

### שאלה 5

תהי  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ , פונקציה של  $\mathbf{R}$  ל- $\mathbf{R}$ .

- I. הראה כי  $f$  אינה על. מצא את תמונת  $f$ . הדרכה: עבור איזה ערכי  $y$  יש פתרון  $x$  למשוואה הריבועית  $yx^2 - 2x + y = 0$ ?
- II. תהי  $g$  הפונקציה של הקטע  $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$  אל עצמו, הנתונה על ידי אותה נוסחה כמו  $f$  הנ"ל. הסבר מדוע  $g$  היא אכן פונקציה אל הקבוצה האמורה. הראה כי  $g$  היא חד-חד-ערכית ועל.