

האוניברסיטה הפתוחה

20407

מבני נתונים
ומבוא לאלגוריתמים
חוברת הקורס אביב 2017

כתב: ליאור קמה

מרץ 2017 – סמסטר אביב – תשע"ז

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

א	אל הסטודנטים
ג	1. לוח זמנים ופעילויות
ה	2. תיאור המטלות
ה	2.1 מבנה המטלות
ה	2.2 חומר הלימוד הדרוש לפתרון המטלות
ו	2.3 ניקוד המטלות
ו	2.4 הנחיות לכתיבת אלגוריתמים
ז	2.5 הנחיות לכתיבת פרויקט הרצה
ח	3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס
1	ממ"ן 11
3	ממ"ן 12
5	ממ"ן 13
7	ממ"ן 14
11	ממ"ן 15
13	ממ"ן 16 – פרויקט מסכם

אל הסטודנטים,

אנו מברכים אתכם עם הצטרפותכם לקורס "מבני-נתונים ומבוא לאלגוריתמים" באוניברסיטה הפתוחה. על מנת לסייע לכם לעבור את הקורס בהצלחה, ברצוננו להפנות את תשומת לבכם למספר נקודות חשובות:

- נוכחות במפגשי ההנחיה אינה חובה. יחד עם זאת, מומלץ מאוד להגיע באופן סדיר למפגשי ההנחיה. המפגשים כוללים תרגול רב והשתתפות בהם תסייע לכם בפתרון המטלות. כמו כן, ניסיון העבר מלמד, כי קיים מתאם גבוה בין נוכחות סדירה במפגשי ההנחיה לבין הצלחה במבחן הסופי.
 - במהלך הקורס יש להגיש תרגילי בית. כדי להיות זכאי לגשת לבחינה, יש להגיש שלוש מתוך המטלות 11, 12, 13, 14, 15, ובנוסף לכך את מטלה 16, שהיא מטלת חובה. הכנת המטלות מהווה הכנה מצוינת לבחינה ולכן מומלץ להגיש כמה שיותר מהן. (כל מטלה נוספת שתוגש מעבר למינימום הנדרש תוכל רק לשפר את ציון המגן).
- יש להקפיד על הגשת המטלות במועד.

לקורס קיים אתר אינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים, אותם מפרסם מרכז ההוראה. בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו במערכת אופ"ל בכתובת: <http://opal.openu.ac.il>

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספרייה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מומלץ לעקוב אחרי ההודעות המתפרסמות בלוח ההודעות שבאתר. מאגר המשאבים שבאתר מתעדכן באופן שוטף במהלך הסמסטר, והוא מכיל פתרונות לשאלות מספר הלימוד, בחינות לדוגמה וכדומה.

צוות הקורס ישמח לעמוד לרשותכם בכל שאלה שתתעורר.

ניתן לפנות למנחים בשעות ההנחיה הטלפונית שלהם, או אל מרכז הקורס ליאור קמה ביום א' בשעות 10:00-12:00 בטלפון 09-7781270, או במייל lior.kamma@openu.ac.il פגישות יש לתאם מראש.

לתשומת לב הסטודנטים הלומדים בחו"ל:

למרות המרחק הפיסי הגדול, נשתדל לשמור אתכם על קשרים הדוקים ולעמוד לרשותכם ככל האפשר.

הפרטים החיוניים על הקורס נכללים בחוברת הקורס וכן באתר הקורס. מומלץ מאוד להשתמש באתר הקורס ובכל אמצעי העזר שבו וכמובן לפנות אלינו במידת הצורך.

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

בברכה,

ליאור קמה
מרכז ההוראה בקורס

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

1. לוח זמנים ופעילויות (קורס 20407 \ 2017)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
1	24.3.2017-19.3.2017	פרק א' (מדריך הלמידה) פרקים 1 – 2		
2	31.3.2017-26.3.2017	פרק ב' (מדריך הלמידה) פרק 3 (ספר הלימוד)	מפגש ראשון	
3	7.4.2017-2.4.2017	פרק ג' (מדריך הלמידה) פרק 4 (ספר הלימוד)		ממ"ן 11 2.4.2017
4	14.4.2017-9.4.2017 (ב ערב פסח) (ג-ו פסח)	פרק ד' (מדריך הלמידה) פרק 6 (ספר הלימוד)	מפגש שני	
5	21.4.2017-16.4.2017 (א-ב פסח)	פרק ה' (מדריך הלמידה) פרק 7 (ספר הלימוד)		
6	28.4.2017-23.4.2017 (ב יום הזכרון לשואה)	פרקין ה', ו' פרקים 7, 9		ממ"ן 12 23.4.2017
7	5.5.2017-30.4.2017 (ב יום הזיכרון) (ג יום העצמאות)	פרק ו' (מדריך הלמידה) פרק 9 (ספר הלימוד)	מפגש שלישי	
8	12.5.2017-7.5.2017	פרק ז' (מדריך הלמידה) פרק 8 (ספר הלימוד)		

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
9	19.5.2017-14.5.2017 (א ל"ג בעומר)	פרק ח' (מדריך הלמידה) פרק 10 (ספר הלימוד)	מפגש רביעי	ממ"ן 13 15.5.2017
10	26.5.2017-21.5.2017 (ג יום ירושלים)	פרק ט' (מדריך הלמידה) פרק 11 (ספר הלימוד)		
11	2.6.2017-28.5.2017 (ד שבועות)	פרק י' (מדריך הלמידה) פרק 12 (ספר הלימוד)	מפגש חמישי	
12	9.6.2017-4.6.2017	פרק י"א (מדריך הלמידה) פרק 13 (ספר הלימוד)		ממ"ן 14 4.6.2017
13	16.6.2017-11.6.2017	פרקים י"א, י"ב פרקים 13, 14	מפגש שישי	
14	23.6.2017-18.6.2017	פרק י"ב (מדריך הלמידה) פרק 14 (ספר הלימוד)		ממ"ן 15 25.6.2017
15	30.6.2017-25.6.2017	חזרה	מפגש שביעי	ממ"ן 16 30.7.2017

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

2. תיאור המטלות

קראו היטב עמודים אלו לפני שתתחיל לענות על השאלות

חוברת זו מכילה חמש מטלות תיאורטיות ומטלה מעשית שניתן להגיש במהלך הקורס. **המטלה המעשית (ממ"ן 16) היא מטלת חובה.** מבין חמש המטלות הנותרות יש לפתור **שלוש לפחות**.

2.1 מבנה המטלות

מטלה תיאורטית (מטלות 11-15)

כל מטלה מורכבת מכמה שאלות. פתרון השאלות במטלה כזו אינו דורש הרצת תוכניות במחשב. את הפתרון של המטלות ניתן להקליד או לכתוב בכתב יד **בעט** על דף נייר, **בכתב ברור** ובצורה מסודרת. רצוי לכתוב ברווחים ולהשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. אם שאלה כלשהי בממ"ן אינה ברורה די הצורך, תוכלו להיעזר בקבוצת הדיון של הקורס, או ליצור קשר עם אחד המנחים או מרכז ההוראה (במייל או בשעת ההנחיה הטלפונית).

פרויקט הרצה (מטלה 16)

במטלה כזו עליכם לכתוב ולהריץ במחשב תוכנית בשפת C/C++ או Java. מובן שעל התוכנית לעבור הידור (קומפילציה) ולבצע את הנדרש ממנה ללא טעויות. עליכם לשלוח למנחה: 1. הדפסה של קובץ התוכנית
2. דוגמאות מייצגות של קלטים/פלטים אפשריים
3. קובץ התוכנית וקובץ הרצה של התוכנית.

הערה: מומלץ להתחיל לעבוד על הפרויקטים לפחות שבועיים לפני מועד ההגשה.

2.2 חומר הלימוד הדרוש לפתרון המטלות

מ ט ל ה	חומר הלימוד הנדרש לפתרונה (בספר הלימוד)
ממ"ן 11	פרקים 1,2,3
ממ"ן 12	פרקים 4,6,7
ממ"ן 13	פרקים 8,9
ממ"ן 14	פרקים 10,11,12
ממ"ן 15	פרקים 13,14

הערות:

- לצורך פתרון המטלה, יש להשתמש רק בחומר שנלמד עד למועד הגשת המטלה ולא בחומר הנמצא בפרקים מתקדמים יותר.
- בעת פתרון שאלות, ניתן להסתמך על תוצאות **מוכחות** מתוך ספר הלימוד ומדריך הלמידה של הקורס. במקרה זה יש לציין את המקור עליו מסתמכים (אין צורך במראה מקום מדויק).

2.3 ניקוד המטלות

משקל כל אחד מהממ"נים התיאורטיים 11-15 הוא 4 נקודות.

משקלו של ממ"ן 16 הוא 6 נקודות

כאמור, חובה להגיש את ממ"ן 16 ועוד שלושה ממ"נים תיאורטיים.

הכנת המטלות התיאורטיות חייבת להיעשות על-ידי כל סטודנט **בנפרד**. במקרה שתוגשנה שתי מטלות זהות, המטלות תיפסלנה ותוגש תלונה לוועדת המשמעת.

הכנת הפרויקט (ממ"ן 16) יכולה להיעשות בזוגות.

לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן תצליחו להשיב באופן חלקי בלבד.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

2.4 הנחיות כלליות לכתיבה וניתוח של אלגוריתמים במטלות התיאורטיות

במרבית השאלות בממ"נים הרגילים יש לכתוב **אלגוריתם**. להלן מספר הנחיות לגבי אופן הכתיבה.

1) **לפני** ההצגה המפורטת של האלגוריתם (בפסאודוקוד) יש להציג תיאור מילולי של הרעיון המרכזי באלגוריתם (תיאור High-Level) על התיאור להיות כתוב באופן רהוט וברור, ומטרתו לאפשר לקוראים לקבל תמונה ברורה של אופן פעולת האלגוריתם, גם ללא קריאת התיאור המפורט בפסאודוקוד.

2) יש לכתוב את האלגוריתם בפסאודוקוד, בדומה לספר. מותר לשלב הוראות בעברית, במידה שהמימוש שלהן חד-משמעי וברור. (לדוגמה: ניתן לכתוב "בחר את האיבר הראשון ברשימה; אם הוא גדול מ-7 אז...").

3) אסור **בשום אופן** לכתוב תוכניות בשפת תכנות במקום בפסאודוקוד.

4) גם אם לא נדרשתם במפורש, יש להוכיח כי האלגוריתם מקיים את הדרוש בשאלה.

א) יש **לנסח** תחילה באופן **פורמלי מדויק** את הטענות המרכזיות שאתם מעוניינים להוכיח. (למשל: "לכל ℓ . בשלב (איטרציה) ה- ℓ בהרצה, אורך המערך בו האלגוריתם מחפש את

ערך הקלט אינו עולה על $n/2^\ell$ ")

ב) עבור כל טענה שניסחתם, יש לכתוב הוכחה פורמלית ומדויקת. אם הטענה פשוטה מאוד, מספיק הסבר קצר ומשכנע.

- 5) יש לנתח את סיבוכיות האלגוריתם (סיבוכיות זמן ריצה וסיבוכיות מקום).
- א) גם אם לא התבקשתם מפורשות, יש לנתח את זמן הריצה של האלגוריתם. את סיבוכיות המקום יש לנתח רק במקומות בהם התבקשתם באופן מפורש.
- ב) אם לא נאמר באופן מפורש אחרת, יש לנתח את סיבוכיות המקרה הגרוע ביותר (worst case analysis)
- ג) יש לנסח תחילה באופן **פורמלי מדויק** את הטענות המרכזיות שאתם מעוניינים להוכיח.
- ד) עבור כל טענה שניסחתם, יש לכתוב הוכחה פורמלית ומדויקת. אם הטענה פשוטה מאוד, מספיק הסבר קצר.
- ה) יש לנסות ולתכנן אלגוריתמים יעילים ככל האפשר.

2.5 הנחיות לכתיבת פרויקט הרצה

ההנחיות נחלקות לשני נושאים עיקריים:

1. כתיבת הקוד: תכנות פשוט וקריא, מודולריות, תכנות מלמעלה למטה.
2. תיעוד: תיעוד כללי, תיעוד בגוף התוכנית.

1. כתיבת הקוד

תכנות פשוט וקריא

- לאחר קריאת התיעוד, על התכנית להיות מובנת גם למי שלא היה שותף לכתיבתה! לכן יש להקפיד על הכללים הבאים:
- א. יש לתת למשתנים שמות משמעותיים.
 - ב. אין להשתמש באותו משתנה למטרות שונות (יוצאים מן הכלל בעניין זה הם משתנים המשמשים כאינדקסים).
 - ג. אם משתנה מקבל במהלך התכנית ערכים בתחום מסוים, יש להגדיר תחום זה.
 - ד. כדאי להשתמש ב- `enumerated type` בעל משמעות בכל מקום שאפשר. למשל, בשפת C/C++, במקום: `int month[12]` נשתמש ב- `enum month = {jan, feb, ..., dec}`.
 - ה. מומלץ להעביר פרמטרים בין הפונקציות השונות ומותר להשתמש במשתנים גלובליים במקרה הצורך.

מודולריות

- את התוכנית יש לחלק לפונקציות בהתאם לכללים הבאים:
- א. אם קטע קוד או פעולה חוזרים על עצמם בשינויים קלים, יש לכתוב אותם פעם אחת כפונקציה.
 - ב. מספר המשפטים בפונקציה צריך להיות מוגבל, כך שניתן לקרוא ולהבין את פעולתה בקלות.
 - ג. יש להשתדל לרכז את פעולות הקלט/פלט בתוך פונקציות ספציפיות למטרות אלו.
 - ד. הפונקציה הראשית צריכה להיות מורכבת אך ורק מקריאות לפונקציות.

תכנות מלמעלה למטה (Top-Down)

לאחר כתיבת האלגוריתם לפתרון הבעיה המוצגת בממ"ן, יש "לתרגם" את האלגוריתם לתוכנית מחשב.

רצוי לכתוב את התוכנית באופן הבא :

שלב א - תכנון המבנה הכללי של התוכנית, וחלוקה לפונקציות עיקריות (מודולים).

שלב ב - תכנון כל מודול וחלוקה לתת-מודולים. (יש להחליט בשלב זה אילו ערכים מועברים בין המודולים).

שלב ג - כתיבת הקוד לתוכנית בסדר שבו היא תוכננה : מתחילים בפונקציה הראשית ומסיימים בפונקציות העזר.

שלב ד - ניפוי שגיאות, בדיקת נכונות התוכנית באמצעות הרצתה על קלטים שונים, כתיבת התיעוד.

2. תיעוד

התיעוד צריך להיות מורכב משני חלקים :

1. תיעוד כללי :

- תיאור הבעיה והגישה הכללית של התוכנית לפתרונה.

- תיאור מבני הנתונים העיקריים שבהם התוכנית משתמשת.

- תיאור כללי של הפונקציות המרכיבות את התוכנית והקשרים ביניהן (מי קורא למי וכו').

2. תיעוד בגוף התכנית :

לכל פונקציה יש להוסיף מספר שורות, המסבירות באופן כללי מה מבצעת השגרה ומהו תפקיד המשתנים המוגדרים בה. כמו כן יש להוסיף הסברים נוספים לפי הצורך.

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

א. הגשת ממ"ן 16, וקבלת ציון 60 לכל הפחות במטלה.

ב. הגשת שלושה ממ"נים לפחות מתוך חמשת הממ"נים הרגילים.

ג. ציון של 60 לפחות בבחינת הגמר.

ד. הציון המשוקלל של המטלות והבחינה נדרש להיות 60 לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20407 - מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1,2,3 בספר הלימוד

מספר השאלות: 4

משקל המטלה: 4 נקודות

מועד אחרון להגשה: 2.4.2017

סמסטר: 2017

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שאלה 1 (25 נקודות)

נתון מערך $A[1, \dots, n]$. ידוע כי קיים $1 \leq \ell \leq n$ המקיים כי התת-מערך $A[1, \dots, \ell]$ ממין בסדר עולה, והתת מערך $A[\ell, \dots, n]$ ממין בסדר יורד (לדוגמה, במערך $[2, 5, 9, 10, 8, 0]$ מתקיים $\ell = 4$). קְתְּבו אלגוריתם המקבל את המערך ומוצא בזמן $\Theta(\log n)$ את ערכו של ℓ .

שאלה 2 (30 נקודות)

עבור על זוג של פונקציות $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ קבעו את נכונות כל אחת מהטענות הבאות

$$(a) f = O(g) \quad (b) f = \Omega(g) \quad (c) f = \Theta(g) \quad (d) f = \omega(g) \quad (e) f = o(g)$$

הוכיחו את קביעתכם.

$$א. \quad n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n^2, \quad g(n) = n^2 + 10^{10}n$$

$$ב. \quad n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n \log^{12} n, \quad g(n) = n^{1.1}$$

$$ג. \quad n \in \mathbb{N} \quad f(n) = 5^{\log n}, \quad g(n) = n^{\log 5}$$

$$ד. \quad n \in \mathbb{N} \quad f(n) = \begin{cases} n^{10} & n < 10^{10} \\ \log n & n \geq 10^{10} \end{cases}, \quad g(n) = \begin{cases} \log n & n < 10^{10} \\ n^{10} & n \geq 10^{10} \end{cases}$$

שאלה 3 (30 נקודות)

התבוננו באלגוריתם majority הנתון בשגרה שבראש העמוד הבא.

א. הוכיחו כי אם במערך יש ערך המופיע יותר מ $n/2$ פעמים, אז האלגוריתם יחזיר את הערך הזה.

ב. חשבו את זמן הריצה של האלגוריתם.

majority($A[1, \dots, n]$)

1. $index \leftarrow 1$
 2. $candidate \leftarrow NIL$
 3. $counter \leftarrow 0$
 4. **while** $index \leq n$
 5. **do if** $counter = 0$
 6. **then** $candidate \leftarrow A[index]$
 7. $counter \leftarrow counter + 1$
 8. **else if** $candidate = A[index]$
 9. **then** $counter \leftarrow counter + 1$
 10. **else** $counter \leftarrow counter - 1$
 11. $index \leftarrow index + 1$
 12. **return** $candidate$
-

שאלה 4 (15 נקודות)

תהאנה $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ פונקציות עולות (כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $f(n+1) > f(n)$ וגם $g(n+1) > g(n)$). הוכיחו או הפריכו: $f = O(g)$ או $g = O(f)$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4,6,7 בספר הלימוד.

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: 23.4.2017

סמסטר: ב2017

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שאלה 1 (25 נקודות)

מצאו חסמים אסימפטוטיים הדוקים עבור פונקציות המקיימות את נוסחאות הנסיגה הבאות.

- $T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log n$
- $T(n) = 7T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$
- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log^2 n$
- $T(n) = T(n-1) + n \log n$
- $T(n) = T(\sqrt{n}) + 5$

שאלה 2 (25 נקודות)

כתבו אלגוריתם המקבל כקלט מצביעים ל k מערכים ממויינים A_1, A_2, \dots, A_k בני n איברים כל אחד ובונה מערך ממויין A אחד בגודל nk המכיל את אברי כל מערכי הקלט (עם חזרות, אם יש כאלו).

הוכיחו כי זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם הוא הטוב ביותר אסימפטוטית.

רמז: מה קורה כאשר $n = 1$?

שאלה 3 (30 נקודות)

בהנתן מערך בגודל n ומספר $1 \leq k \leq n$, האיבר ה- k -הקטן ביותר הוא האיבר שיופיע במקום ה- k אם נסדר את המערך.

לדוגמה במערך $[2,5,1,10,8,20]$ האיבר הרביעי הקטן ביותר הוא 8. מההגדרה נובע כי על ידי סידור המערך ניתן למצוא לכל k את האיבר ה- k - הקטן ביותר בזמן $\Theta(n \log n)$. עבור ערכים קטנים של k ניתן לראות כי האלגוריתם הפשוט שתארנו מאד בזבזני (למשל, אם $k = 1$ האיבר ה- k הקטן ביותר הוא האיבר המינימלי במערך וניתן למצוא אותו בזמן לינארי). פתבו אלגוריתם המקבל כקלט מערך בגודל n ומספר k המקיים $k < \frac{n}{\log n}$ ומחזיר את האיבר ה- k - הקטן ביותר בזמן $\Theta(n)$.

שאלה 4 (20 נקודות)

פתבו אלגוריתם המקבל כקלט מערך בגודל n ומשנה את סדר האיברים במערך כך שכל המספרים האי-זוגיים מופיעים לפני כל המספרים הזוגיים במערך. על האלגוריתם לרוץ בזמן $\Theta(n)$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 8,9 בספר הלימוד

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: 15.5.2017

סמסטר: 2017ב

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שאלה 1 (15 נקודות)

הסבירו כיצד ניתן לממש את אלגוריתם SELECT בסיבוכיות מקום $\Theta(1)$.

שאלה 2 (30 נקודות)

נתון מערך $A[1, \dots, n]$ ומספר $1 \leq k \leq n$. פתבו אלגוריתם הממקם את k האיברים הקטנים ביותר במערך בתחילת המערך. כלומר, בסיום הריצה התת-מערך $A[1, \dots, k]$ מכיל את k האיברים הקטנים ביותר ב A . על האלגוריתם לרוץ בזמן $\Theta(n)$ ובסיבוכיות מקום $\Theta(1)$.

שאלה 3 (30 נקודות)

נתון מערך $A[1, \dots, n]$ ומספר $1 \leq k \leq n$. פתבו אלגוריתם המוצא את k האיברים ב A הקרובים ביותר לחציון. כלומר, אותם k איברים במערך שההפרש בינם לבין האיבר החציוני בערך מוחלט הוא הקטן ביותר. על האלגוריתם לרוץ בזמן $\Theta(n)$ ובסיבוכיות מקום $\Theta(n)$.

שאלה 4 (25 נקודות)

נתון מערך $A[1, \dots, n]$, וידוע כי לכל $1 \leq \ell \leq n$ מתקיים $A[\ell] \in \{1, 2, \dots, n^5\}$. פתבו אלגוריתם הממין את המערך בזמן $\Theta(n)$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 10,11,12 בספר הלימוד

מספר השאלות: 4 משקל המטלה: 4 נקודות

סמסטר: 2017 מועד אחרון להגשה: 4.6.2017

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שאלה 1 (30 נקודות)

ידוע שאחת הבעיות הנוצרות כאשר מממשים מחסנית על ידי שימוש במערך היא מצב הגלישה הנגרם ע"י ניסיון להכניס איבר חדש למערך מלא.

נבחן את האלגוריתם הבא, שנקרא אלגוריתם ההכפלה, לפתרון בעיית הגלישה.

בכל פעם שהמערך מתמלא, האלגוריתם מבצע את הפעולות הבאות.

1. מייצר מערך חדש, בגודל כפול מהמערך הנוכחי.

2. מעתיק את כל אברי המחסנית מהמערך הישן למערך החדש

(עם שמירת סדר האיברים: בסיס אל בסיס, ראש אל ראש).

5 נק') א. הראו כי זמן הריצה של פעולת הכנסה של איבר למחסנית בגודל n במקרה

הגרוע ביותר הוא $\Theta(n)$.

10 נק') ב. הראו כי זמן הריצה הכולל עבור ביצוע סדרה של n הכנסות למחסנית ריקה

הוא $\Theta(n)$. האם אין כאן סתירה לזמן הריצה שחישבנו בסעיף א'?

15 נק') ג. עדכנו את אלגוריתם ההכפלה כך שכל פעולת הכנסה תתבצע בזמן קבוע

במקרה הגרוע ביותר.

שאלה 2 (10 נקודות)

יהי T עץ בינארי מלא. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה.

T הוא עץ חיפוש בינארי אם ורק אם לכל צומת x ב- T שאיננו עלה, המפתח של x קטן או שווה

מהמפתח של בנו הימני של x וגדול או שווה מהמפתח של בנו השמאלי של x .

שאלה 3 (30 נקודות)

חברת גלילות מחזיקה n סניפים s_1, s_2, \dots, s_n ברחבי העולם. על סוכן מכירות של החברה לעבור בכל אחד מהסניפים של החברה על מנת לאסוף מוצרים שונים.

1. כאשר הסוכן מסיים את עבודתו בסניף $1 \leq j \leq n$ הוא מקבל כתקציב סכום כסף m_j .

2. עבור $j \leq n - 1$ מסניף s_j יוצאת טיסה לסניף הבא, s_{j+1} , בעלות c_j .

מהסניף האחרון s_n יוצאת טיסה לסניף הראשון s_1 בעלות c_n .

נתון בנוסף כי סך כל הכסף שהסוכן יקבל שווה לסך עלות כל הטיסות שיצטרך לקחת, כלומר

$$\sum_{j=1}^n m_j = \sum_{j=1}^n c_j.$$

בכל רגע נתון הסוכן יכול לשלם על הטיסה הבאה רק מתוך הכסף שברשותו כרגע.

החברה מאפשרת לסוכן להחליט מאיזה סניף יתחיל את מסעו, ומאפשרת לו להגיע ישירות לסניף זה ללא עלות כלל.

(10 נקודות) א. הראו כי תמיד קיים $1 \leq j \leq n$ כך שאם יתחיל הסוכן את מסעו בסניף s_j יוכל לסיים את מסעו בתקציב העומד לרשותו.

(20 נקודות) ב. תכננו אלגוריתם המוצא $1 \leq j \leq n$ כזה בזמן $\Theta(n)$.

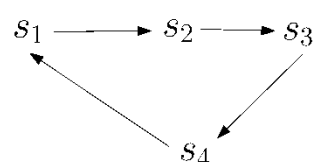
רמז לפתרון אפשרי המשתמש בתור: האלגוריתם עובר על הסניפים לפי סדר

בכל שלב מכניס את הסניף הבא לתור אם הסוכן יכול להגיע אליו.

אחרת, האלגוריתם מוציא סניפים מהתור עד שהמסע לסניף הבא מתאפשר.

דוגמה לקלט עבור הבעיה:

$$\begin{array}{ll} m_1 = 3 & c_1 = 2 \\ m_2 = 6 & c_2 = 7 \\ m_3 = 4 & c_3 = 5 \\ m_4 = 2 & c_4 = 1 \end{array}$$



הטבלה הבאה מסכמת את מסעו של הסוכן אם יתחיל את מסעו בסניף הרביעי.

מספר הסניף בו נמצא הסוכן	הכסף בידי הסוכן בהגיעו לסניף	הכסף שמקבל הסוכן עם סיום עבודתו	עלות הטיסה לסניף הבא
4	0	2	1
1	1	3	2
2	2	4	5
3	1	5	6

שאלה 4 (30 נקודות)

בשאלה זו נראה כי כאשר אנו יודעים כי מספר האיברים השונים במערך בגודל n הוא קטן (יחסית לגודל המערך), ניתן "לשבור" את החסם התחתון על זמן הריצה של אלגוריתם מיון ולמייין את המערך בזמן לינארי בתוחלת.

נתון מערך $A[1, \dots, n]$. ידוע כי מספר האיברים השונים ב A הוא \sqrt{n} . כתבו אלגוריתם הממייין את המערך בתוחלת זמן $\Theta(n)$, ובמקום $\Theta(\sqrt{n})$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 13,14 בספר הלימוד

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: 25.6.2017

סמסטר: 2017ב

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שאלה 1 (25 נקודות)

כתבו אלגוריתם המקבל כקלט עץ אדום-שחור ומספר x , ובודק האם קיימים בעץ שני צמתים שסכום מפתחותיהם הוא x . על האלגוריתם לרוץ בזמן $\Theta(n)$ ולהשתמש במקום $\Theta(\log n)$.
לאלגוריתם מותרת גישה לקלט אך ורק לקריאה.

שאלה 2 (25 נקודות)

הציעו מימוש יעיל של מבנה נתונים התומך בפעולות הבאות.
 $insert(x)$ – מכניס את המפתח x למבנה.
 $find(x)$ – בודק האם המפתח x נמצא במבנה, ומחזיר מצביע לאיבר שמפתחו x במקרה שהתשובה היא כן.
 $median()$ – מחזיר את ערכו של המפתח החציוני במבנה.
 $deleteMedian()$ – מוחק איבר המחזיק את המפתח החציוני מהמבנה.

על זמן הריצה של כל הפעולות להיות $\Theta(\log n)$, למעט הפעולה $median()$ שזמן ריצתה צריך להיות $O(1)$.

שאלה 3 (30 נקודות)

תכננו אלגוריתם המקבל כקלט רשימה של n מלבנים במישור, שצלעותיהם מקבילות לצירים, ורשימה של n נקודות נוספות, ומוצא נקודה המופיעה במספר הגדול ביותר של מלבנים.

רשימת המלבנים ניתנת כמערך $R[1, \dots, n]$ כאשר כל איבר במערך מורכב משתי נקודות $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)$ המציינות את הפינה השמאלית התחתונה והפינה הימנית העליונה של המלבן בהתאמה.

רשימת הנקודות ניתנת כמערך $P[1, \dots, n]$ כאשר כל איבר במערך הוא נקודה במישור. על זמן הריצה של האלגוריתם להיות $\Theta(n \log n)$.

שאלה 4 (20 נקודות)

הסמסטר מגיע לקיצו ואתם מעוניינים לארגן לעצמכם חופשה הגונה לימים שאחרי הבחינות. בעודכם מוצפים במידע על חופשות במחירים שונים, אתם מחליטים לארגן את המידע במבנה נתונים שיעזור לכם להתמקד בתקציב שלכם.

הציעו מימוש יעיל של מבנה נתונים התומך בפעולות הבאות.

$insert(v)$ – מכניס את המידע v על החופשה למבנה. המידע מכיל מחיר ויעד.

$find(p)$ – בודק האם קיימת במבנה חופשה v שמחירה p , ומחזיר יעד מתאים במקרה שהתשובה היא כן.

$priceRange(p, q)$ – מחזיר את כל היעדים המתאימים לחופשות במבנה בטווח המחירים בין p ו q .

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

פרויקט מסכם

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 1

מועד אחרון להגשה: 30.7.2017

סמסטר: 2017

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

בפרויקט זה נתכנן אלגוריתם מקוון (*Online*) מוגבל מקום עבור הבעיה הבאה.

k האיברים הקטנים ביותר

קלט: מערך של מספרים באורך n ומספר k .

פלט: רשימה של k האיברים הקטנים ביותר במערך בסדר עולה.

אלגוריתמים מקוונים. המודל של אלגוריתמים מקוונים מדמה מצב בו אין לנו מידע על כל הקלט מראש. לדוגמה, ב"בעיית המועמדים", המוצגת בפרק 5.1 בספר הלימוד על האלגוריתם לקבל בכל רגע נתון החלטה על זהות המועמד הטוב ביותר עד כה. אלגוריתם מקוון מקבל את הקלט בחלקים, ולא כיחידה אחת. בכל שלב האלגוריתם מקבל פיסה חדשה של קלט, ומאבד גישה לקלט מהשלבים הקודמים. אחת הדרכים לדמות אלגוריתם כזה היא לתכנן אלגוריתם העובר על הקלט פעם אחת בדיוק (*One-Pass*). כך, למשל, אלגוריתם *Hire-Assistant* בעמוד 77 בספר מדמה (*Emulates*) אלגוריתם מקוון ל"בעיית המועמדים". דוגמה נוספת לאלגוריתם המדמה אלגוריתם מקוון ראינו בממ"ן 11. בבחינה מחודשת של אלגוריתם majority מהממ"ן תוכלו לראות כי האלגוריתם מבצע מעבר יחיד על הקלט. אותו האלגוריתם בדיוק יבצע את אותה הפעולה לו יקבל את אברי המערך אחד-אחד ממקור חיצוני. מכיוון שאלגוריתם מקוון אינו יודע את "העתיד", בכל שלב בריצת האלגוריתם הוא אמור להיות מסוגל לתת תשובה על מה שראה עד כה. אלגוריתם *Hire-Assistant* שבעמוד 77 מחזיק בכל רגע נתון במשתנה *best* את המועמד הטוב ביותר שבחן עד כה.

אלגוריתמים מוגבלי מקום. האלגוריתם הבא הוא אלגוריתם פשוט עבור בעיית k האיברים הקטנים ביותר. בכל שלב נשמור את כל האיברים שראינו עד עכשיו, וברגע שנתבקש להחזיר

תשובה, נמיין את k האיברים הקטנים ביותר מתוך המאגר שברשותנו. אלגוריתם כזה מאד בזבזני במקום. אם k מאד קטן ו n מאד גדול, לדוגמה, סיבוכיות המקום עשויה להיות $\Omega(n)$, בשעה שבכל רגע נתון "יעניינו" אותנו רק k איברים. על כן נהיה מעוניינים להגביל את המקום שבו ישתמש האלגוריתם.

תכנון האלגוריתם. האלגוריתם שנתכנן מקבל כקלט מצביע למערך $A[1, \dots, n]$, מספר $k < n$,

ושלוש נקודות בדיקה $n_1 < n_2 < n_3 < n$.

על האלגוריתם לעבור על המערך במעבר אחד ולהדפיס את k האיברים הקטנים ביותר שבחן עד לנקודות הבדיקה n_1, n_2, n_3 במערך.

בכל רגע נתון האלגוריתם שומר רק את k האיברים הקטנים ביותר (לכל היותר) שבחן עד כה. כלומר, סיבוכיות המקום של האלגוריתם היא $\Theta(k)$.

לשם כך עליכם לתכנן מבנה נתונים המוגבל ל k איברים, ותומך בפעולות הבאות.

$insert(x)$ – הכנסת מפתח x . סיבוכיות זמן הריצה $\Theta(\log k)$.

1. אם המבנה מכיל פחות מ k איברים, האלגוריתם יכניס את x .

2. אם המבנה מכיל k איברים, האלגוריתם יכניס את x רק במקרה בו x קטן מהאיבר

המקסימלי במבנה. במקרה כזה, האלגוריתם יוציא מהמבנה את האיבר המקסימלי.

$printkMin()$ – הדפסת k האיברים הקטנים ביותר שנבחנו עד כה. סיבוכיות זמן הריצה $\Theta(k)$.

ניתן להשתמש בתור קדימויות (עמוד 116 בספר) בתור שכבת בסיס למבנה הנתונים שלכם.

הריצו את האלגוריתם שתכנתם על שלושה מערכים A, B, C באורכים 200,400,800 בהתאמה.

מלאו את המערכים בעזרת פונקצית ספרייה המיועדת ליצירת מספרים אקראיים; כל מערך יכול

איברים בתחום 0..1023.

עבור כל מערך כקלט, הפעילו את האלגוריתם שכתבתם עם הערכים $k = 10, 50, 100$ ועם

נקודות בדיקה $n_1 = \frac{n}{4}, n_2 = \frac{n}{2}, n_3 = \frac{3n}{4}$.