

# מטלת מנחה (ממ"ן) 20

הקורס: 20276 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: מבנים אלגבריים פרק 3

משקל המטלה: 3 נקודות  
מועד אחרון להגשה: 25.6.99  
מספר השאלות: 4  
סמסטר: ב 1999

אנא שים לב:

מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.  
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

## שאלה 1

I. יהי  $f: G \rightarrow M$  הומומורפיזם של הגרופואיד  $G$  על הגרופואיד  $M$ . הוכח כי אם  $G$  הוא חבורה אז גם  $M$  הוא חבורה.  
II. תן דוגמה ל- $f: M \rightarrow G$ , הומומורפיזם של מונואיד  $M$  על מונואיד  $G$ , כאשר  $M$  הוא מונואיד שאינו חבורה, אך  $G$  היא חבורה בת יותר מאיבר אחד.

## שאלה 2

הוכח שכל חבורה מסדר 4 איזומורפית ל- $\mathbb{Z}_4$  או ל- $V_4$  (ראה עמוד 74 בספר הלימוד).  
הדרכה: תהי  $G = \{e, a, b, c\}$ . שבץ בהדרגה את האברים בלוח הכפל. היעזר בשאלה 3.6 בספר הלימוד.

## שאלה 3

תהי  $G$  חבורה,  $H$  תת-חבורה של  $G$ .  
תהי  $A$  קבוצת יוצרים עבור  $G$ . הוכח כי  $H$  היא תת-חבורה נורמלית של  $G$  אם ורק אם לכל  $gHg^{-1} \subseteq H$ ,  $g \in A$  (היעזר במשפט 3.22).

## שאלה 4

הוכח בעזרת הקריטריון שבשאלה 3 כי  $\{e, x^2\}$  היא תת-חבורה נורמלית של  $D_4$  (ראה עמ' 83-84 בספר הלימוד).

## שאלה 5

$S_n$  היא חבורת התמורות על הקבוצה  $B_n = \{1, 2, \dots, n\}$  (משמע – קבוצת הפונקציות החח"ע ועל של הקבוצה  $B_n$  לעצמה, עם הפעולה של הרכבת פונקציות). ראה "מבנים אלגבריים" עמוד 72 דוגמה 6). תהי  $H$  התת-חבורה של  $S_n$ , שאיבריה הן כל התמורות המשאירות את 1 במקומו:

$$H = \{f \in S_n \mid f(1) = 1\}$$

(הוכח לעצמך שזו אכן תת-חבורה). נניח כעת כי  $n \geq 2$  ותהי  $a \in S_n$  התמורה המחליפה את 1 עם 2, ומשאירה את כל יתר אברי  $B_n$  במקומם.

I. מהי התת חבורה  $aHa^{-1}$ ? הוכח.

II. האם  $H$  היא תת-חבורה נורמלית של  $S_n$  עבור  $n > 2$ ?