תשובה 1

א. $|K| = \aleph_0$. הוכחה: נסמן $\mathbf{N}^+ = \mathbf{N} - \{0\}$.

הפונקציה $f : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R}^+$ המוגדרת כך: $f(x) = \sqrt{x}$ היא פונקציה חד-חד-ערכית, והתמונה שלה היא בדיוק K (מדוע?). ניתן אפוא לראות את f כפונקציה $f : \mathbf{N}^+ \to K$

ובהגדרה זו של התחום והטווח, f היא פונקציה **חד-חד-ערכית ועל**.

לכן , מהגדרת שוויון עוצמות, עוצמת K שווה לעוצמת $\mathbf{N}^+$, שהיא כידוע $\aleph_0$.

אפשר גם להוכיח על ידי פונקציה בכיוון ההפוך: הפונקציה $g : K \to \mathbf{R}$ המוגדרת כך:

$g(x) = x^2$, היא פונקציה חד-חד-ערכית (נמקו זאת!) והתמונה שלה היא בדיוק $\mathbf{N}^+$.

לכן ניתן לראות את g כפונקציה $g : K \to \mathbf{N}^+$, ובהגדרה זו של התחום והטווח היא חד-חד-ערכית ועל. לכן...

ב. $|L| = C$. תקציר הוכחה: ראשית, $|L| \le C$,

כי $L \subseteq \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, וכידוע $|\mathbf{R} \times \mathbf{R}| = C$.

מצד שני, L מכילה את הקבוצה $L_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \mid x \cdot y = 1\}$.

קל לראות ש- $|L_1| = C$ (נתאים לכל $x \in \mathbf{R}^+$ את הזוג הסדור $(x, 1/x) \in L_1$. השלימו את הטיעון). לכן $|L| \ge C$.

משני האי-שוויונים, לפי משפט קנטור-ברנשטיין, $|L| = C$.

ג. $|M| = \aleph_0$. הוכחה: נציג את M כאיחוד של $\aleph_0$ קבוצות:

לכל $k \in \mathbf{N}^+$ תהי $M_k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \mid (x \cdot y = k) \wedge (x^2 \in \mathbf{N})\}$.

M היא איחוד כל הקבוצות M_k, $k \in \mathbf{N}^+$.

כידוע, איחוד $\aleph_0$ קבוצות שכל אחת מהן בת-מניה הוא בר-מניה.

לכן כדי להראות ש- $|M| = \aleph_0$ די שנוכיח שלכל $k \in \mathbf{N}^+$, M_k היא בת-מניה.

לא אפרט כאן את ההמשך – השלימו בעצמכם .

תשובה 2

א. בחוברת "אוסף תרגילים פתורים" קבוצה 3 שאלה 10ה', מראים כי קבוצת **הסדרות הסופיות** של טבעיים היא בת-מניה. בשאלה שלפנינו עוסקים לא בסדרות אלא בתת-קבוצות של **N**. נתאים לכל קבוצה סופית של מספרים טבעיים - סדרה סופית: פשוט נסדר את אברי הקבוצה בסדר עולה. בכך הגדרנו פונקציה של הקבוצה K שבשאלה אל קבוצת הסדרות הסופיות של טבעיים. פונקציה זו אינה על (מדוע?) אך מובן שהיא חד-חד-ערכית. לפיכך $|K| \le \aleph_0$.

מצד שני, K היא אינסופית, מכיון שהיא מכילה את כל הקבוצות מהצורה $\{n\}$, לכל n טבעי.
מכאן לפי משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין $|K| = \aleph_0$ (למעשה אין כאן צורך במשפט הנ"ל, שהוא בגדר "תותח כבד". ניתן להראות בלעדיו, שקבוצה אינסופית המוכלת בקבוצה בת-מניה היא בת-מניה).

ב. הפונקציה $g : L \to K$ המתאימה לכל קבוצה את **המשלים שלה ב- N** היא חח"ע ועל (מדוע?). לפיכך $|L| = |K|$, ולפי סעיף א' עוצמה זו היא $\aleph_0$.

תשובה 3

א. ניעזר בקבוצות K,L מהשאלה הקודמת.
הקבוצות K,L,M זרות זו לזו, ו- $K \cup L \cup M = P(\mathbf{N})$.
כעת, אילו M היתה בת-מניה, היינו מקבלים ש- $P(\mathbf{N})$ היא איחוד של 3 קבוצות זרות בנות-מניה. ע"י שימוש חוזר בשאלה 4.3ד בעמ' 119 בספר (איחוד שתי קבוצות זרות בנות-מניה הוא בר-מניה) היינו מקבלים כי $P(\mathbf{N})$ היא בת-מניה - בסתירה למשפט 5.25, וכן בסתירה למשפט 5.6 (משפט קנטור). לכן M אינה בת-מניה.

ב. נסמן $B = K \cup L$. מהאמור בתחילת פתרון הסעיף הקודם, $M = P(\mathbf{N}) - B$.
בנוסף, B היא בת-מנייה, ו- $P(\mathbf{N})$ היא קבוצה אינסופית שאינה בת-מנייה.
הקבוצות $P(\mathbf{N})$, B מקיימות אפוא את תנאי משפט 5.13ב (עמ' 16 בחוברת "פרק 5") עבור הקבוצות A, B בהתאמה. לכן $|P(\mathbf{N}) - B| = |P(\mathbf{N})| = C$. כאמור $M = P(\mathbf{N}) - B$, כלומר $|M| = C$.

תשובה 4

יחס מעל קבוצה A הוא קבוצה כלשהי של זוגות סדורים של אברי A .

במלים אחרות, יחס מעל A הוא **קבוצה חלקית כלשהי** של $A \times A$.

לפיכך קבוצת כל היחסים מעל A **היא בדיוק** $P(A \times A)$

(שימו לב: אנו לא רק אומרים שיש להן אותה עוצמה, אלא שזו היא ממש אותה הקבוצה!).

כעת, בעזרת משפטים ידועים: $| P(\mathbf{R} \times \mathbf{R}) | = 2^{|\mathbf{R}\times\mathbf{R}|} = 2^C$.

תשובה 5

א. תהיינה $A_1, A_2\ , B_1, B_2$ קבוצות שעוצמותיהן בהתאמה $k_1, k_2\ , m_1, m_2$.

נתון $k_1 \le k_2\ ,\ m_1 \le m_2$.

כדי לקצר מעט את ההוכחה ניעזר בטריק השימושי הבא: **אנו חופשים לבחור כראות עינינו את הקבוצות המייצגות את העוצמות השונות, כל עוד הקבוצות שנבחר הן בעלות העוצמות הנדרשות.** מתוך הנתון, לפי שאלה 5.1א בחוברת "פרק 5", **קיימת** קבוצה חלקית של A_2 שעוצמתה שווה לעוצמת A_1 , **וקיימת** קבוצה חלקית של B_2 שעוצמתה שווה לעוצמת B_1 .

לכן **ב.ה.כ. נניח** $A_1 \subseteq A_2\ ,\ B_1 \subseteq B_2$ (!)

כעת מהגדרת כפל עוצמות $k_1 \cdot m_1 = | A_1 \times B_1 |\quad ,\quad k_2 \cdot m_2 = | A_2 \times B_2 |$.

אבל מכיוון ש- $A_1 \subseteq A_2\ ,\ B_1 \subseteq B_2$, מהגדרת מכפלה קרטזית נקבל $A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$.

לכן , בהסתמך על שאלה 5.1ב, $k_1 \cdot m_1 \le k_2 \cdot m_2$.

ב. מצד אחד, $\aleph_0 \le C$ ולכן בעזרת סעיף א, $\aleph_0 \cdot C \le C \cdot C = C$.

מצד שני $1 \le \aleph_0$ ולכן בדומה $C = 1 \cdot C \le \aleph_0 \cdot C$.

משני הכיוונים יחד, בעזרת קנטור-שרדר-ברנשטיין, נובע המבוקש.

ג. לפי משפט 5.26, $2^{\aleph_0} = C$. נציב זאת ונקבל

$C^C = (2^{\aleph_0})^C = 2^{\aleph_0 \cdot C} = 2^C$.

במעברים נעזרנו במשפט 5.27ג ובסעיף ב של שאלה זו.

איתי הראבן