2012ב – מועד 86

.1

א. $\beta \to \alpha$ הוא טאוטולוגיה. הסבר: שורות בהן שניהם T, ברור ש- $\beta \to \alpha$ הוא T. כנ"ל בשורות בהן שניהם F. בשורות בהן אלפא הוא T, ובטא הוא F, גם הוא מקבל ערך T. לא קיימים מקרים אחרים – ולכן $\beta \to \alpha$ מקבל ערך T בכל שורה. בכל טענה כאן מסתמכים על לוח האמת של הקשר "חץ".

ב. C. הסבר: נתאים באופן חח"ע ועל לכל פונקציה כמתואר בשאלה פונקציה מקבוצת המספרים הטבעיים האי-זוגיים לקבוצה $\{0,1\}$ (מדוע היא חח"ע ועל?). עוצמת קבוצת המספרים הטבעיים האי-זוגיים היא $\aleph_0$ (בנייה קלה של פונקציה חח"ע ועל).

לכן, על פי הגדרת חזקת עוצמות, עוצמת קבוצת הפונקציות המדוברת היא $2^{\aleph_0} = C$

ג. כל יער על יותר מצומת אחד הוא גרף דו-צדדי. ביער אין מעגל ובפרט אין בו מעגל באורך אי-זוגי, ומכיוון שנתון שיש בו לפחות שני צמתים, הוא דו-צדדי.

.2

א. D אינו סדר מלא מעל A.

נתבונן ב-7 וב-5.

אכן, 7 אינו מתחלק ב-5, ו-5 אינו מתחלק ב-7, ולכן $(5,7) \notin D, (7,5) \notin D$. כמו כן מתקיים $5,7 \in A$, כלומר, D אינו משווה בין כל שני איברים ב-A, ולכן, על פי הגדרת סדר מלא מעל קבוצה, D אינו סדר מלא מעל A.

ב. על פי "תורת הקבוצות", הסגור הסימטרי של יחס R הוא $R \cup R^{-1}$.

לכן, הסגור הסימטרי של D הוא $D \cup D^{-1}$.

נתבונן ב-3,6.

אכן, 6 מתחלק ב-3 ולכן $(3,6) \in D$, ומתקיים (על פי הגדרת רלציה הפוכה) $(6,3) \in D^{-1}$, ועל פי הגדרת איחד, $(6,3) \in D \cup D^{-1}$.

כמו כן מתקיים $3,6 \in A$, כלומר, מצאנו $a,b \in A$ המקיימים $aDb \wedge bDa \wedge a \neq b$, ולכן על פי הגדרת רלציה אנטיסימטרית, $D \cup D^{-1}$ אינה אנטיסימטרית, ולכן היא אינה סדר חלקי מעל A.

ג. הטענה איננה נכונה, ונביא דוגמה נגדית. נתבונן ב-3,2. אכן, $3,2 \in A$, וכמו כן מתקיים $6 \in A$, וכן ש-6 מתחלק ב-3 וב-2.

לכן, על פי הגדרת D, $(2,6),(3,6) \in D$, ועל פי הגדרת רלציה הפוכה, $(6,2) \in D$.

לכן, על פי הגדרת כפל רלציות, $(3,2) \in D \cdot D^{-1}$. נניח בשלילה שמתקיים $(3,2) \in D^{-1} \cdot D$. כלומר, קיים $a \in A$ כך שמתקיים $(3,a) \in D^{-1}, (a,2) \in D$, כלומר $(a,3) \in D$. על פי הגדרת D, נובע ש-3 מתחלק ב-a, אך 3 הוא מספר ראשוני,

וכן $a \neq 1$, ולכן a=3. עם זאת, צריך גם להתקיים 2 מתחלק ב-a, אך 2 אינו מתחלק ב-3, והגענו לסתירה. כלומר, $(3,2) \notin D^{-1} \cdot D$.

.3

א. עבור כל $x \in X$, עלינו להתאים לו איבר אחד מ-Y, ולאיבר הבא להתאים מ-Y לא כולל האיבר שהותאם כבר. לכן יש לנו (על פי עיקרון הכפל) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

ב. נשתמש בעיקרון ההכלה וההפרדה.

תהי U קבוצת הפונקציות החד-חד ערכיות של X ל-Y. ע״פ סעיף א׳, $|U| = 360$.

תהי F_i קבוצת הפונקציות החד-חד ערכיות של X ל-Y המקיימות $f(i) = i$. נחשב את F_i בדומה לחישוב בסעיף א׳: כל איבר יקבל אחד מהאיברים הנותרים מהקבוצה Y. כלומר, $|F_i| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

נחשב חיתוכים בזוגות: $F_i \cap F_j$ היא קבוצת הפונקציות החד-חד-ערכיות של X ל-Y המקיימות $f(i) = i, f(j) = j$. בדומה לחישוב קודם, עבור $i, j \in X, i \neq j$ $|F_i \cap F_j| = 4 \cdot 3 = 12$.

בדומה נחשב חיתוכים בשלשות: עבור $i, j, k \in X$, כולם שונים זה מזה, $|F_i \cap F_j \cap F_k| = 3$.

אם כל איבר הולך לעצמו, הפונקציה היא אחת: $|F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4| = 1$.

כעת, נחשב את S_i, כפי שהוא מוגדר בפרק על עיקרון ההכלה וההפרדה.

$S_1 = 4 \cdot |F_i| = 240$.

$S_2 = \binom{4}{2} \cdot |F_i \cap F_j| = 72$.

$S_3 = \binom{4}{3} \cdot |F_i \cap F_j \cap F_k| = 12$.

$S_4 = 1$.

$F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$ היא קבוצת הפונקציות החח״ע של X ל-Y המקיימות: קיים $i \in X$ כך ש-$f(i) = i$, ולכן אנו מחפשים את $|F_1' \cap F_2' \cap F_3' \cap F_4'|$. על פי עיקרון ההכלה וההפרדה,

$|F_1' \cap F_2' \cap F_3' \cap F_4'| = 360 - 240 + 72 - 12 + 1 = 181$, וזו התשובה הסופית.

4. נשתמש בפונקציה יוצרת לפתרון הבעיה. נניח ב.ה.כ. ששלושת המשתנים הראשונים הם אלו שמתחלקים ב-3. אז הפונקציה היוצרת המתאימה היא:

$(1+x^3+x^6+...)^3\cdot(x+x^2+x^4+x^5+x^7+x^8+...)^2$, ומחפשים בה את המקדם של x^{24}.

$$\begin{aligned}&(1+x^3+x^6+...)^3\cdot(x+x^2+x^4+x^5+x^7+x^8+...)^2=\\&=(1+x^3+x^6+...)^3\cdot(x(1+x)+x^4(1+x)+x^7(1+x)+...)^2=\\&=(1+x^3+x^6+...)^3\cdot((1+x)\cdot(x+x^4+x^7+...))^2=\\&=(1+x^3+x^6+...)^3\cdot(x+x^4+x^7+...)^2\cdot(1+x)^2=\\&=(1+x^3+x^6+...)^3\cdot x^2\cdot(1+x^3+x^6+...)^2\cdot(1+2x+x^2)=\\&=(1+x^3+x^6+...)^5\cdot(1+2x+x^2)\cdot x^2\end{aligned}$$

כעת, אנו מחפשים בעצם את המקדם של x^{22} בפיתוח של הפונקציה $(1+x^3+x^6+...)^5\cdot(1+2x+x^2)$. נעשה התאמות בין המקדמים בסוגריים משמאל לסוגריים מימין.

עבור 1, נחפש את המקדם של x^{22} בביטוי $(1+x^3+x^6+...)^5$. לא ניתן להגיע ל-22 על ידי חיבור מספר גורמים שמתחלקים ב-3, ולכן המקדם של x^{22} בביטוי הוא 0.

עבור $2x$, נחפש את המקדם של x^{21} בביטוי $(1+x^3+x^6+...)^5$. נסמן $y=x^3$, ונחפש את המקדם של y^7 בביטוי $(1+y+y^2+...)^5$. על פי נוסחה (iii) בממ"ן 15, המקדם של y^7 בביטוי הוא $D(5,7)=\binom{11}{4}=330$. נכפול את התוצאה במקדם של x בסוגריים משמאל, ונקבל 660.

עבור x^2, נחפש את המקדם של x^{20} בביטוי $(1+x^3+x^6+...)^5$, אך שוב – המקדם הזה שווה 0.

סך הכל קיבלנו 660.

כעת, נכפול את התוצאה במספר האפשרויות לבחור את שלושת המשתנים שמתחלקים ב-3, וזהו $\binom{5}{3}=10$.

סך הכל, מספר הפתרונות של המשוואה המקיימים את ההגבלות הנתונות הם 6600.

5.

א. יהיו $(a,b),(c,d)\in V$. נוכיח שקיים מסלול בין (a,b) ל-(c,d), וכך נוכיח (על פי הגדרת גרף קשיר), שהגרף הוא קשיר.

אם $a+b\neq c+d$, אז על פי הגדרת G קיימת קשת ביניהם ובוודאי קיים מסלול ביניהם.

אם $a+b=c+d$, נגדיר e כך: אם $d=3$, e=1. אחרת, e=d+1. ברור ש-$e\in A$.

מתקיים $e \neq d$ ולכן מתקיים $c+d \neq c+e$, ולכן על פי הגדרת הגרף G, יש ביניהם קשת. כמו כן מתקיים $a+b \neq c+e$ ולכן יש ביניהם קשת. כלומר, יש קשת בין (a,b) ל-(c,e) ובין (c,e) ל-(c,d), ולכן קיים מסלול בין (a,b) ל-(c,d).

כלומר, בכל מקרה קיים מסלול בין (a,b) ל-(c,d), ולכן על פי הגדרת גרף קשיר, G הוא קשיר. מ.ש.ל.

ב. (1,1): עלינו למצוא את מספר הזוגות הסדורים שסכומם שונה מ-2. מספר הזוגות הסדורים הכולל הוא 9. כעת, 2=1+1, ולכן אין קשת עם (1,1). בכל זוג אחר האיבר הראשון יהיה גדול מ-1 או השני, ובפרט הסכום יהיו גדול מ-2. לכן יש קשת עם כל אחד מהצמתים האחרים, כלומר דרגתו היא 8.

(2,3): עלינו למצוא את מספר הזוגות הסדורים שסכומם שונה מ-5. שוב, מספר הזוגות הסדורים הכולל הוא 9. זוגות סדורים שסכומם הוא 5 יהיו: (2,3), (3,2), ולכן איתם אין קשת. עם שאר הצמתים יש קשת, ולכן דרגתו היא 7.

ג. קבוצת הצמתים היא $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

הצומת היחיד שסכומו 2 הוא (1,1). ולכן הוא שכן של כל שאר הצמתים, ודרגתו 8.

הצמתים שסכומם הוא 3 הם (1,2), (2,1), ולכן הם אינם נמצאים זה עם זה בשכנות, אך כל אחד מהם שכן של כל שאר הצמתים. לכן דרגת כל אחד מהם היא 7.

הצמתים שסכומם הוא 4 הם (1,3),(2,2),(3,1). לכן דרגת כל אחד מהם היא 6.

הצמתים שסכומם הוא 5 הם (2,3),(3,2), ולכן דרגת כל אחד מהם היא 7.

הצומת היחיד שסכומו 6 הוא (3,3), ולכן דרגתו 8.

סכום הדרגות הוא אם כן, 8+14+18+14+8=62.

על פי מסקנה 1.3, מספר הקשתות בגרף הוא מחצית מסכום הדרגות בגרף, ולכן מספר הקשתות בגרף G הוא 31.

ד. בסעיף הקודם מצאנו שדרגת הצמתים (2,3),(3,2) (1,2), (2,1) היא אי-זוגית, ולכן בפרט יש בו יותר משני צמתים מדרגה אי-זוגית. לכן, אין בו מסלול אוילר, ואין בו מעגל אוילר.