שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר : כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נקי) **א.** נתונים פסוקים α,β כך ש- $\alpha \to \beta \equiv \alpha \vee \beta$ מכאן נובע :

[1] β הוא טאוטולוגיה.

[2] α הוא טאוטולוגיה.

[3] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

(7 נקי) **ב.** נתונות קבוצות לא ריקות A,B כך ש- $|A \setminus B| = |A \cup B|$. אז :

[1] $|A| > |B|$.

[2] $|A| \geq |B|$

[3] אם $|B| = \aleph_0$ אז $|A| > \aleph_0$.

[4] אם B אינסופית אז $|A| = |B|$.

(6 נקי) **ג.** נניח ש- G הוא גרף **פשוט** על 6 צמתים שבו הדרגה של כל צומת היא 4.

[1] G הוא בהכרח מישורי .

[2] G הוא בהכרח לא מישורי .

[3] שתי הטענות הקודמות שגויות.

המשך הבחינה בעמוד הבא

מועד ב' - ב' 2019

שאלה 2

על הקבוצה $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ נתונים שני יחסים R,S המוגדרים כך: לכל $A,B\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$

ARB אם ורק אם $A\setminus\{1,2\}=B\setminus\{1,2\}$ ו- ASB אם ורק אם $A\setminus\{1,2\}\subset B\setminus\{1,2\}$.

הערה לתלמידים מסמסטרים קודמים בלבד: אתם יכולים להשתמש בהגדרה הבאה עבור S:

ASB אם ורק אם $A=B$ או $A\setminus\{1,2\}\subset B\setminus\{1,2\}$). **תלמידי 2019ב, אנא התעלמו מהערה זו**)

(14 נק') א. קבעו (ללא הוכחה) אם אחד מהיחסים הוא יחס שקילות ואם התשובה חיובית, מיצאו את מחלקות השקילות שלו.

(13 נק') ב. קבעו (ללא הוכחה) אם אחד היחסים הוא יחס סדר חלקי או מלא ואם התשובה חיובית, מיצאו את האיברים המינימליים והמקסימליים בקבוצה הסדורה שגיליתם.

שאלה 3

בשאלה זו נתייחס למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=n$ ולפתרונות שלה בטבעיים.

(14 נק') א. רישמו פונקציה יוצרת המתאימה למציאת מספר פתרונות המשוואה במקרה ש- x_1,x_2,x_3 הם מספרים אי-זוגיים ו- x_4,x_5,x_6,x_7 הם מספרים זוגיים ומיצאו את המקדם של x^n בפונקציה הזו.

(13 נק') ב. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה שבהם בדיוק שלושה מן הנעלמים הם מספרים זוגיים במקרה ש- $n=14$.

שאלה 4

נסמן ב- a_n את קבוצת כל המחרוזות באורך n הכתובות רק בספרות 1,2,3,4,5,6,7, שבהן מימין לכל ספרה זוגית מופיעה **בהכרח** ספרה אי-זוגית. למשל 12345 ו-53321 הן מחרוזות חוקיות, אבל 2, 32 ו-5443 הן מחרוזות פסולות. את a_0 מגדירים כ-1.

(7 נק') א. מיצאו בעזרת חישוב ישיר את a_1,a_2.

(7 נק') ב. מיצאו יחס נסיגה ל- a_n ובדקו שהערכים של a_0,a_1,a_2 מתאימים ליחס הנסיגה.

(13 נק') ג. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n.

שאלה 5

בעץ T יש 5 עלים ולכל צומת שאינו עלה יש דרגה 3.

(14 נק') א. מיצאו את מספר הצמתים של T. 8

8^{Y-2}

(13 נק') ב. מיצאו את מספר העצים המתוייגים המקיימים את תנאי השאלה.

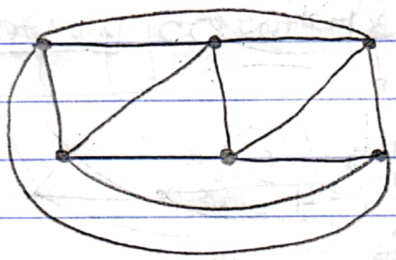
בהצלחה!

α	β	$\alpha \to \beta$	$\alpha \vee \beta$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	F

4) א. [1] לפי טבלת אמת

ב. [2] הקבוצות שתיהן יכולות להיות עקביות שוות, וההחסרה שלהן לא תפגע, והן יכולות להיות עקביות שונות והעקביות לא תפגע

ג. [1] לפי משפט שכל גרף מישורי פשוט יש צומת שדרגתו קטנה שווה ל-5



2) א. R יחס שקילות. נמצא את מחלקות השקילות:

$\emptyset = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$\bar{3} = \{A \setminus \{1,2\} = \{3\}\}$ $\{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$\bar{4} = \{A \setminus \{1,2\} = \{4\}\}$ $\{\{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}\}$

$\bar{5} = \{A \setminus \{1,2\} = \{3,4\}\}$ $\{\{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

ב. S יחס סדר חלקי. הוא משווה כי ניתן להשוות בין שני איברים, שני איברים יכולים להיות משווים. <u>האיברים המינימליים:</u> כל האיברים $\{\{1\}, \{2\}, \emptyset, \{1,2\}\}$
כל איבר שנותן כיחס $A \setminus \{1,2\}$ קבוצה ריקה.
האיברים המקסימליים: כל האיברים שיתנו לנו אחרי ההחסרה נקבל $\{3,4\}$
$\{\{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

Scanned by CamScanner

הוצאנו גורם משותף כדי שהמעריכים יהיו שווים

כי המעריכים כולם זוגיים

3) א.

$$(1+x^2+x^4\ldots)^3(x+x^3+x^5\ldots)^4=$$

$$(1+x^2+x^4\ldots)^3x^4(1+x^2+x^4+\ldots)^4=$$

$$\frac{1}{(1-x^2)^3}\cdot\frac{1}{(1-x^2)^4}\cdot x^4=\frac{1}{(1-x^2)^7}\cdot x^4=x^4\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\binom{7-1+k}{k}x^{2n}=x^4\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{6+k}{k}\cdot x^{2k}$$

המקדם הוא $\boxed{x^4\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{6+n}{n}\cdot x^{2n}}$

ב. אנחנו צריכים למצוא את המקדם של x^{10}, כיוון שאת x^4 חייב לקחת, $(14-4=10)$ כלומר

$x_1+x_2+x_3\ldots=10$

האפשרות היחידה היא כאשר $n=5$ בפונקציה היוצרת. נציב: $\binom{6+n}{n}=\binom{11}{5}=462$. נכפול כעת בכמות האופציות של 3 איברים בדיוק שיהיו זוגיים

$$462\cdot\binom{7}{3}=462\cdot35=\boxed{16170}$$

4) א.

$a_0=1$

$a_1=\underbrace{\quad}_{\text{אי-זוגי}}=4$ ספרות אי-זוגיות

$a_2=\underbrace{3}_{\text{זוגי}}\ \underbrace{4}_{\text{אי-זוגי}}=12$

$\underbrace{\quad}_{\text{אי-זוגי}}\ \underbrace{\quad}_{\text{אי-זוגי}}=4\cdot4=16$ $\Big\}\ a_2=28$

ב. נפרק למקרים בהם התו הראשון הוא זוגי:

$a_n=\underbrace{3}_{\text{זוגי}}\ \underbrace{4}_{\text{אי-זוגי}}=12(a_{n-2})$

$a_n=\underbrace{4}_{\text{אי-זוגי}}=4\cdot(a_{n-1})$

$$\boxed{a_n=4(a_{n-1})+12(a_{n-2})}$$

נבדוק את a_2: $4\cdot4+12\cdot1=28$

ג.

$$x^2=4x+12=x^2-4x-12$$

$((x+2)(x-6)$: כפול -2 : הפתרונות$)$ $\left\langle \begin{matrix}x=6\\x=-2\end{matrix}\right.$

$$\boxed{a_n=-2^nA+6^nB}$$

$$\begin{cases}1=A+B & /\cdot2\\4=-2A+6B\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}2=2A+2B\\4=-2A+6B\end{matrix}\right\}+$$

$6=8B\ \ /:8$

$B=\frac{3}{4}$

נציב:

$1=A+\frac{3}{4}$

$A=1-\frac{3}{4}$

$A=\frac{1}{4}$

$$\boxed{a_n=(-2)^n\cdot\frac{1}{4}+6^n\cdot\frac{3}{4}}$$