תשובה 1

א. מהנתון, תהי $f: A-B \to B-A$ חד-חד-ערכית ועל.

בעזרת פילוג החיתוך לגבי האיחוד, $A=(A\cap B')\cup(A\cap B)$,

כלומר $A=(A-B)\cup(A\cap B)$, וזהו **איחוד זר** (איחוד של שתי קבוצות זרות).

בדומה, $B=(B-A)\cup(A\cap B)$.

נגדיר $g: A\to B$ כך:
$$g(a)=\begin{cases} f(a) & a\in A-B \\ a & a\in A\cap B \end{cases}$$

מהנתון לגבי f נקבל ש- g מעבירה את $A-B$ באופן **חד-חד-ערכי על** $B-A$,

ומכיוון ש- g פועלת כזהות על $A\cap B$, היא מעבירה את $A\cap B$ באופן חד-חד-ערכי על עצמו.

בהתחשב בכך ש- $B=(B-A)\cup(A\cap B)$, לא קשה להראות ש- g היא חד-חד-ערכית ועל B.

הוכחה של טענה כללית יותר, ממנה זה נובע, ראו בפרק *5*, טענה *5.9* !

הראינו פונקציה **חד-חד-ערכית** מ- A **על** B , לכן הן שוות-עוצמה.

ב. כאמור, כללית $A=(A-B)\cup(A\cap B)$, וזהו איחוד זר,

וכן $B=(B-A)\cup(A\cap B)$ וזהו איחוד זר.

מכאן, אם A,B **סופיות**, ומתקיים $|A|=|B|$ אז:
$$|A-B|=|A|-|A\cap B|=|B|-|A\cap B|=|B-A|$$

ג. לדוגמא נקח $A=\mathbf{N}$, ו- B היא קבוצת הטבעיים הזוגיים (השלימו הבדיקה).

תשובה 2

א. כאמור בשאלה, $\mathbf{Q}$ היא בת-מניה. אילו גם $K=\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ היתה בת-מנייה, אז לפי שאלה *4.3*ד בעמ' *119* בספר, גם $\mathbf{Q}\cup K$ היתה בת-מנייה. אבל איחוד זה הוא $\mathbf{R}$!

במשפט *4.5* ראינו ש- $\mathbf{R}$ אינה בת-מנייה. לפיכך K אינה בת-מנייה.

ב. נגדיר פונקציה $f: A\to\mathbf{Q}$, כך: $f(x)=x-\sqrt{2}$.

מהגדרת A, זו אכן פונקציה של A ל- $\mathbf{Q}$. נוכיח ש- f חד-חד-ערכית (חח"ע) ועל $\mathbf{Q}$.

הוכחת חח"ע: יהיו $x_1,x_2\in A$ ונניח $f(x_1)=f(x_2)$. משמע $x_1-\sqrt{2}=x_2-\sqrt{2}$.

נוסיף $\sqrt{2}$ בשני האגפים ונקבל $x_1=x_2$. כלומר f חח"ע.

הוכחת על: יהי $q ˉ \mathbf{Q}$. יהי $x = q + \sqrt{2}$. אז $x ˉ A$ כי $x - \sqrt{2} = q$, ואותו שוויון מראה גם כי $f(x) = q$. מצאנו מקור ל- q , שהוא איבר כלשהו ב- $\mathbf{Q}$, לכן f היא **על** $\mathbf{Q}$ **.**
הראינו פונקציה חח"ע ועל של A ל- $\mathbf{Q}$, לכן, מהגדרת שוויון עוצמות, $|A| = |\mathbf{Q}|$. כאמור בסעיף הקודם, עוצמה זו היא $_{0}$.

תשובה 3

א. לפי הגדרת יחס (רלציה) מעל קבוצה (סעיף *2.3.3*), קבוצת היחסים מעל ¥ **היא בדיוק** $P(¥ \times ¥)$ (לא רק שיש להן אותה עוצמה, אלא $P(¥ \times ¥)$ **היא** קבוצת היחסים מעל ¥ !).

כידוע, $|¥ \times ¥| = {}_{0}\,'\,{}_{0} = {}_{0}$.

מכאן לפי משפט *5.23* ומשפט *5.26* : $|P(¥ \times ¥)| = 2^{0} = C$.

ב. תהי T קבוצת היחסים הטרנזיטיביים מעל ¥.

T חלקית לקבוצת כל היחסים מעל ¥ , לכן (סעיף א כאן + שאלה *5.1*): $|T| \leq C$.

מצד שני, נגדיר פונקציה $P(¥) \to T$ כך:

לכל $A ˉ P(¥)$ נתאים את היחס I_A , אותו נראה כיחס מעל ¥. מובן שהוא טרנזיטיבי.

התאמה זו היא חד-חד-ערכית (ניתן למצוא את A מתוך I_A) ולכן $C = |P(¥)| \leq |T|$.

משני האי-שוויונים, לפי קנטור-שרדר-ברנשטיין, נקבל $|T| = C$.

תשובה 4

א. תהיינה A_1, A_2, B_1, B_2 קבוצות שעוצמותיהן בהתאמה k_1, k_2, m_1, m_2 .

נתון $k_1 \leq k_2$, $m_1 \leq m_2$.

כדי לקצר מעט את ההוכחה ניעזר בטריק השימושי הבא: אנו חופשים לבחור כראות עינינו את הקבוצות המייצגות את העוצמות השונות, כל עוד הקבוצות שנבחר הן בעלות העוצמות הנדרשות.

מתוך הנתון, לפי שאלה *5.1*א בחוברת "פרק *5*", קיימת קבוצה חלקית של A_2 שעוצמתה שווה לעוצמת A_1 , וקיימת קבוצה חלקית של B_2 שעוצמתה שווה לעוצמת B_1 .

לכן **ב.ה.כ. נניח** $A_1 \subseteq A_2$, $B_1 \subseteq B_2$ **(!)**

כעת מהגדרת כפל עוצמות $|A_1 \times B_1| = k_1 \times m_1$, $|A_2 \times B_2| = k_2 \times m_2$.

אבל מכיוון ש- $A_1 \subseteq A_2$, $B_1 \subseteq B_2$, מהגדרת מכפלה קרטזית נקבל $A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$.

לכן , בהסתמך על שאלה *5.1*ב, $k_1 \cdot m_1 \leq k_2 \cdot m_2$.

ב. מצד אחד, $_{0} \leq C$ ולכן בעזרת סעיף א, $C \; C \leq C \; C = {}_{0}$.

מצד שני $1 \le \aleph_0$ ולכן בדומה $C \cdot 1 \le C \cdot \aleph_0$.
משני הכיוונים יחד, בעזרת קנטור-שרדר-ברנשטיין, נובע המבוקש.

ג. לפי משפט *5.26*, $C = 2^{\aleph_0}$. נציב זאת ונקבל

$$C^C = (2^{\aleph_0})^C = 2^{\aleph_0 \cdot C} = 2^C .$$

במעברים נעזרנו במשפט *5.27*ג ובסעיף ב של שאלה זו.

תשובה 5

ניעזר במשפט *5.13*ב. קבוצת הממשיים $\mathbf{R}$ היא אינסופית ואינה בת-מניה.
הקבוצה K חלקית לה ובת-מניה. לפי המשפט הנ״ל, $|\mathbf{R} - K| = |\mathbf{R}| = C$.

איתי הראבן