פתרון בחינה 2

תשובה 1

א: [3]

הסבר: נסמן

ב- α את הפסוק " לאברהם יש שכל "

ב- β את הפסוק " אברהם שותה "

וב- γ את הפסוק " אברהם נוהג "

הפסוק המביע את הטענה "אם לאברהם יש שכל, אז אם אברהם שותה הוא לא נוהג" הוא:

$$\varphi = \alpha \to (\beta \to (\neg\gamma))$$

על-ידי שימוש בשקילות $p \to q \equiv (\neg p) \vee q$ ובכללי דה מורגן נקבל:

$$\varphi \equiv (\neg\alpha) \vee (\beta \to (\neg\gamma)) \equiv (\neg\alpha) \vee (\neg\beta) \vee (\neg\gamma) \equiv \neg(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)$$

נרשום כעת את הפסוקים הרשומים כתשובות אפשריות:

[1] אם לאברהם אין שכל אז אם אברהם שותה הוא נוהג:

$$(\neg\alpha) \to (\beta \to \gamma) \equiv \alpha \vee (\beta \to \gamma) \equiv \alpha \vee (\neg\beta) \vee \gamma$$

[2] אם לאברהם אין שכל אז הוא שותה ונוהג.

$$(\neg\alpha) \to (\beta \wedge \gamma) \equiv \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$$

[3] אם אברהם שותה ונוהג – אין לו שכל.

$$(\beta \wedge \gamma) \to (\neg\alpha) \equiv (\neg(\beta \wedge \gamma)) \vee (\neg\alpha) \equiv (\neg\beta) \vee (\neg\gamma) \vee (\neg\alpha)$$

[4] אם אברהם שותה ולא נוהג – יש לו שכל.

$$((\beta \wedge (\neg\gamma)) \to \alpha \equiv (\neg(\beta \wedge (\neg\gamma)) \vee \alpha \equiv (\neg\beta) \vee \gamma \vee (\alpha)$$

[5] אם אברהם נוהג ולא שותה – יש לו שכל.

$$(\gamma \wedge (\neg\beta)) \to \alpha \equiv (\neg(\gamma \wedge (\neg\beta)) \vee \alpha \equiv (\neg\gamma) \vee \beta \vee (\alpha).$$

מכאן ברור שהתשובה הנכונה היא **[3]**

ב: $d^C = |P(\mathbf{R})|^{|\mathbf{R}|} = (2^{|\mathbf{R}|})^{|\mathbf{R}|} = 2^{|\mathbf{R}||\mathbf{R}|} = 2^{|\mathbf{R}\times\mathbf{R}|} = 2^{|\mathbf{R}|} = d$ ולכן התשובה היא [3]

ג: [3] כמספר החלוקות של קבוצה בת 6 אברים לשלוש מחלקות של שני אברים כל אחת.

תשובה 2

א. סימטרי: נכון כללית $(R^{-1}R)^{-1} = R^{-1}R$

טרנזיטיבי: תנאי לטרנזיטיביות של יחס T הוא: $(T)^2 \subseteq T$.

אצלנו $(R^{-1}R)^2 = R^{-1}RR^{-1}R = R^{-1}I_AR = R^{-1}R$

ב. נותר רק להראות ש- $R^{-1}R$ רפלקסיבי.

יהי $x \in A$. מהנתון על הטווח, קיים y כך ש- $(y,x) \in R$.

מתקיים אפוא גם $(x,y) \in R^{-1}$. משני אלה יחד, לכן $(x,x) \in R^{-1}R$.

תשובה 3 (השאלה הופיעה במספרים אחרים לפני כמה מועדים)

א. $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

ב. תהי U קבוצת הפונקציות החד-חד-ערכיות של X ל- Y. $|U| = 840$.

לכל $i \in X$, תהי A_i קבוצת הפונקציות החד-חד-ערכיות של X ל- Y המקיימות $f(i) = i$.

המספר שאנו נדרשים לחשב הוא $|A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4'|$.

או במלים אחרות $|(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)'|$.

נכין נתונים לשימוש בהכלה והפרדה. נתחיל בחישוב $|A_1|$.

אם התמונה של 1 חייבת להיות 1, אז כדי לקבוע פונקציה חד-חד-ערכית של X ל- Y נותר לנו לבחור תמונות עבור 2,3,4. תמונות אלה צריכות להבחר מתוך הקבוצה $Y - \{1\}$, והן צריכות להיות שונות זו מזו. מספר האפשרויות לעשות זאת הוא כמספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של קבוצה בת 3 איברים לקבוצה בת 6 איברים, כלומר $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

מובן כי אותה תוצאה נכונה לא רק ל- A_1 אלא לכל אחת מהקבוצות A_i.

משמע: $|A_i| = 120$, ויש לנו 4 קבוצות A_i.

בצורה דומה, $|A_i \cap A_j| = 5 \cdot 4 = 20$ ($i \neq j$). יש לנו 6 חיתוכים כאלה.

בדומה, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 4$ (i,j,k שונים זה מזה). יש לנו 4 חיתוכים כאלה.

ולבסוף, יש פונקציה אחת ויחידה השולחת כל איבר ב- X לעצמו: $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$.

מעקרון ההכלה וההפרדה, מספר הפונקציות המבוקש הוא

$$840 - 4 \cdot 120 + 6 \cdot 20 - 4 \cdot 4 + 1 = 465$$

תשובה 4

יחס הנסיגה לינארי הומוגני. המשוואה האופיינית: $\lambda^2 - 6p\lambda + 5p^2 = 0$.

פתרונותיה: $\lambda = p, 5p$. פתרון כללי ליחס הנסיגה: $a_n = Ap^n + B(5p)^n$.

תנאי התחלה: $0 = A + B$, $k = A \cdot p + B \cdot 5p = 8p \;=>\; A + 5B = 8$.

מכאן: $B = 2$, $A = -2$. כלומר $a_n = 2(5^n - 1) \cdot p^n$

תשובה 5 (המקור הוא הספר של שי גירון ושוני דר)

א. נניח ש- $v_1,v_2 \in V$ צמתים שונים בגרף. מתאימים להם שני זוגות של צבעים $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ כאשר $a_1,a_2 \in A$ ו- $b_1,b_2 \in B$. אם v_1,v_2 סמוכים ב- G אז הם נצבעים שצבעים שונים כלומר $a_1 \neq a_2$. ואם v_1,v_2 אינם סמוכים ב- G אז הם סמוכים ב- $\overline{G}$, לכן הם נצבעים שם בצבעים שונים כלומר $b_1 \neq b_2$. מכאן שבכל מקרה $(a_1,b_1) \neq (a_2,b_2)$ ולכן ההתאמה הנתונה היא חד-חד-ערכית.

ב. נגדיר $f:V \to A \times B$ כך: לכל $v \in V$, $f(v)=(a,b)$ כאשר $a \in A$ הוא הצבע שבו נצבע v בגרף G ו- $b \in B$ הוא הצבע v בגרף שבו נצבע $\overline{G}$. הטענה שהוכחנו בסעיף א' היא ש- f היא פונקציה חד-חד-ערכית.

ג. מאחר ש- $f:V \to A \times B$ היא חד-חד-ערכית, נובע שהעוצמה של V אינה גדולה מזו של $A \times B$ במילים אחרות $|A \times B| \geq |V|$. זה מבטיח ש- $|A| \cdot |B| \geq n$ ומאחר שמספר הצביעה של G הוא $|A|$ ומספר הצביעה של $\overline{G}$ הוא $|B|$ נקבל ש- $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geq n$.