תשובה 1

א. שם-עצם. ב. תבנית לא אטומית שאינה פסוק. ג. תבנית אטומית שאינה פסוק.

ד. ביטוי לא תקין (הארגומנטים של פונקציה צריכים להיות שמות-עצם, וכאן אחד הארגומנטים הוא תבנית).

ה. תבנית לא אטומית שאינה פסוק (ההופעה האחרונה של x_1 בתבנית היא כמשתנה חפשי).

ו. ביטוי לא תקין (כמת, כגון $\forall x_1$, צריך לחול על תבנית ולא על שם-עצם).

ז. תבנית לא אטומית, שאינה פסוק (x_2 חפשי).

ח. תבנית לא אטומית שהיא פסוק.

תשובה 2

א. היחס R רפלקסיבי: $\forall x R(x,x)$.

היחס R אנטי-סימטרי: $\forall x \forall y \big((R(x,y) \wedge R(y,x)) \to A_1^2(x,y) \big)$.

היחס R טרנזיטיבי: $\forall x \forall y \forall z \big((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z) \big)$.

היחס R משווה בין כל שני איברים בעולם: $\forall x \forall y \big(R(x,y) \vee R(y,x) \big)$.

צירוף ארבעת אלה בעזרת $\wedge$ מביע את הטענה ש- R הוא סדר-מלא.

ב. $\forall x_1 \big(R(a_1, x_1) \big)$. שימו לב להבדל בין "קטן ביותר" לבין "מינימלי".

תשובה 3

א. $\forall x \forall y \Big(\big((\sim E(x,a)) \wedge (\sim E(y,a)) \big) \to \big((\sim E(f(x,y),x)) \wedge (\sim E(f(x,y),y)) \big) \Big)$

ב. $\exists z \big(E(x, f(y,z)) \big)$

ג. $(\sim E(x,a)) \wedge \forall y \forall z \big(E(x, f(y,z)) \to (E(y,a) \vee E(z,a)) \big)$

כלומר $x \neq 1$ וכל שני מספרים שמכפלתם שווה x, אחד מהם שווה ל- 1.

אפשרות אחרת: $(\sim E(x,a)) \wedge \forall y \forall z \big(E(x, f(y,z)) \to (E(y,x) \vee E(z,x)) \big)$

כלומר $x \neq 1$ וכל שני מספרים שמכפלתם שווה x, אחד מהם שווה ל- x.

יש עוד דרכים בשפה זו להביע את הטענה ש- x ראשוני.

ד. $E(f(a,a),a) \wedge \forall x\big(E(f(x,x),x) \to E(x,a)\big)$

התבניות בסעיפים ב, ג **אינן** פסוקים, מכיוון שיש בהן משתנים חפשיים.
הן מביעות טענות על המשתנים המופיעים בהן חפשיים.

התבניות בסעיפים א, ד הן פסוקים - אין בהם משתנים חפשיים.
בהתאם לכך, הן אינן אומרות משהו על x או על y, אלא מביעות תכונה של העולם.

תשובה 4

א. תהי J אינטרפרטציה שעולמה הוא הקבוצה $\{1,2\}$,

ובה A_1^1 מתפרש כתכונה "להיות שווה 1" ו- A_2^1 מתפרש כתכונה "להיות שווה 2".

הטענה "קיים בעולם איבר השווה 1" אמיתית ב- J.
נפרט: קיימת תחת האינטרפרטציה J השמה σ למשתנה x_1 (ההשמה: $\sigma(x_1)=1$) כך ש-

$J_\sigma(\psi)=\mathrm{T}$ (הסימון הזה אומר: התבנית ψ אמיתית ב- J תחת ההשמה σ).

מצאנו השמה ב- J שתחתיה התבנית ψ אמיתית, לפיכך **הפסוק** $\exists x_1(\psi)$ אמיתי ב- J.

בדומה, הטענה "קיים בעולם איבר השווה 2" אמיתית ב- J, כלומר הפסוק $\exists x_1\varphi$ אמיתי ב- J.

לכן, לפי לוח האמת של "וגם", הפסוק $(\exists x_1\psi)\wedge(\exists x_1\varphi)$ אמיתי ב- J.

לעומת זאת, אין בעולם הנ"ל איבר השווה בעת ובעונה אחת ל- 1 ול- 2.
במלים אחרות, **לא קיימת** באינטרפרטציה J השמה σ למשתנה x_1, כך שהתבנית $\psi\wedge\varphi$ אמיתית תחת σ. לכן הפסוק $\exists x_1(\psi\wedge\varphi)$ שקרי ב- J.

מצאנו אינטרפרטציה שבה הפסוק $(\exists x_1\psi)\wedge(\exists x_1\varphi)$ אמיתי בעוד ש- $\exists x_1(\psi\wedge\varphi)$ שקרי,
משמע הפסוק הראשון אינו גורר לוגית את השני, ובפרט הם אינם שקולים לוגית.

ב. נוכיח ש- $\exists x_1(\psi\wedge\varphi)$ גורר לוגית את $(\exists x_1\psi)\wedge(\exists x_1\varphi)$.
תהי J אינטרפרטציה שבה $\exists x_1(\psi\wedge\varphi)$ אמיתי.
משמע **קיימת** השמה σ, באינטרפרטציה J, עבורה $\psi\wedge\varphi$ אמיתי: $J_\sigma(\psi\wedge\varphi)=\mathrm{T}$.

מכאן, לפי לוח האמת של "וגם", $J_\sigma(\psi) = J_\sigma(\varphi) = \mathrm{T}$.

מצאנו השמה ב- J שבה התבנית ψ אמיתית , לפיכך הפסוק $\exists x_1(\psi)$ אמיתי ב- J.

מצאנו השמה ב- J שבה התבנית φ אמיתית , לפיכך הפסוק $\exists x_1(\varphi)$ אמיתי ב- J.

לכן, מהלוח של "וגם", גם הפסוק $(\exists x_1\psi) \wedge (\exists x_1\varphi)$ אמיתי ב- J .

הראינו שמההנחה ש- $\exists x_1(\psi \wedge \varphi)$ אמיתי ב- J נובע שגם $(\exists x_1\psi) \wedge (\exists x_1\varphi)$ אמיתי ב- J .
משמע הפסוק הראשון גורר לוגית את השני.

בהוכחת סעיף ב לא הסתמכנו על הנתון ש- ψ הוא $A_1^1(x_1)$ ו- φ הוא $A_2^1(x_1)$,
אלא רק על כך שהתבניות ψ, φ מכילות משתנה חפשי אחד בלבד, שהוא x_1 .
(למעשה ניתן לוותר גם על ההנחה הזו, אבל לא נעשה זאת כאן).
לכן הטענה בסעיף זה נכונה לכל ψ, φ כאלה .

איתי הראבן