(1)

(א)

- עבור a_0, ישנה אפשרות אחת - סידור 0 איברים, כלומר $a_0=1$.
- עבור a_1, ישנה 3 אפשרויות - 1, 2, 3
לכן $a_1=3$.
- עבור a_2, האפשרויות הן:

02, 10, 11, 12, 20, 21, 22

כלומר 7 אפשרויות, לכן $a_2=7$.

בעבור a_n, ע"פ ישנם 3 אפשרויות התחלה - או 0, או 1, או 2.

- אחרי המספר 1, יכול לבוא כל מספר מהקבוצה {0,1,2}.
- אחרי המספר 2, יכול לבוא כל מספר מהקבוצה {0,1,2}.
- אחרי המספר 0, יכול לבוא רק מספר שהוא - 2. שאחריו, שוב- יכול לבוא כל מספר מהקבוצה {0,1,2}.

לכן יתקיים על סדרה באורך n+2 הבא:

$$\underbrace{a_{n+2}=2\cdot a_{n+1}}_{\text{האפשרויות בהן הסדרה מתחילה ב-1 או 2}}+\underbrace{a_n}_{\text{האפשרויות בהן הסדרה מתחילה ב-0}} \quad \Big| \quad a_0=1,\ a_1=3$$

נבדוק:

$$a_{0+2}=2\cdot a_{0+1}+a_0 \Rightarrow a_2=2\cdot 3+1=\boxed{7}$$

לסיכום, יחס הנסיגה הוא: $\boxed{a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n}$

Scanned by CamScanner

1
ב) נמצא a_n כך ש- $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$ כאשר $a_0=1$ ו- $a_1=3$.

נמצא את יחס הנסיגה:

נניח ש- $a_n=d^n$, אזי:

$$d^{n+2}=2d^{n+1}+d^n \Rightarrow d^2=2d+1 \Rightarrow d^2-2d-1=0$$

נחלק ב-d^n

נפתור את המשוואה:

$$d_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{4\cdot2}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_1=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2} \\ d_2=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2} \end{cases}$$

לכן: $a_n=A\cdot(1+\sqrt{2})^n+B\cdot(1-\sqrt{2})^n$ כאשר A ו- B קבועים שלנו.

נציב $n=0$:

$$a_0=1=A(1+\sqrt{2})^0+B\cdot(1-\sqrt{2})^0 \Rightarrow 1=A+B \Rightarrow \boxed{A=1-B} \quad (1)$$

נציב $n=1$:

$$a_1=3=A(1+\sqrt{2})+B\cdot(1-\sqrt{2}) \Rightarrow 3=A(1+\sqrt{2})+B-\sqrt{2}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3-B+\sqrt{2}B=A(1+\sqrt{2}) \Rightarrow \boxed{\frac{3-B+\sqrt{2}B}{1+\sqrt{2}}=A} \quad (2)$$

נשווה את (1) ו- (2)

נכפול ב-$(1+\sqrt{2})$

$$\frac{3-B+\sqrt{2}B}{1+\sqrt{2}}=1-B \Rightarrow 3-B+\sqrt{2}B=1+\sqrt{2}-B-\sqrt{2}B \Rightarrow 2\sqrt{2}B=-2+\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B=\frac{-2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow A=1-\frac{-2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow A=\frac{2\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{A=\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$$

$A=1-B$
לפי (1)

נציב את A ו-B שקיבלנו במשוואה:

$$a_n = A\cdot(1+\sqrt{2})^n + B\cdot(1-\sqrt{2})^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n + \frac{-2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n}$$

Scanned by CamScanner

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=24$

ניתן לבחור את ~~המשתנים~~ המשתנים האי-זוגיים ב- $\binom{5}{2}$ דרכים.

נניח בה"כ שאותם ~~המשתנים~~ המשתנים האי-זוגיים הם x_1, ו-x_2, לכן:

$$x_1=2k_1+1 \qquad x_2=2k_2+1 \qquad \underbrace{x_3=2k_3 \qquad x_4=2k_4 \qquad x_5=2k_5}$$

x_3, x_4, ו-x_5 הם זוגיים

כי בחרנו את x_1 ו-x_2 להיות האי-זוגיים

נרשום את המשוואה בצורה שונה:

$$2k_1+1+2k_2+1+2k_3+2k_4+2k_5=24 \xRightarrow{\text{נחסר 2}}$$

$$\Rightarrow 2k_1+2k_2+2k_3+2k_4+2k_5=22 \xRightarrow{\text{נחלק ב-2}} k_1+k_2+k_3+k_4+k_5=11$$

~~[illegible]~~

מכיוון שאף אחד מהמשתנים אינו שווה ל-0 (או ל-1),

לכן לכל $1\le i\le 5$, מתקיים $k_i=1+t_i$ ונציב:

$$\underbrace{1+t_1}_{k_1}+\underbrace{1+t_2}_{k_2}+\underbrace{1+t_3}_{k_3}+\underbrace{1+t_4}_{k_4}+\underbrace{1+t_5}_{k_5}=11 \Rightarrow t_1+t_2+t_3+t_4+t_5=6$$

כעת נמיר את הבעיה ל- חלוקת 6 כדורים זהים

ל-5 תאים שונים, ללא מגבלות, ושפתרונה כמובן

הוא $D(5,6)=\binom{10}{4}=210$

נכפיל את 210 ב- $\binom{5}{2}$ (הדרכים לבחירת המשתנים

האי-זוגיים), ונקבל $\binom{5}{2}\cdot 210=2100$

$\boxed{\text{כלומר, התשובה היא 2100}}$

Scanned by CamScanner

שאלה ג':

א) נסמן:

$t_1 =$ כדור כאב-ראש

$t_2 =$ כדור מגל

$t_3 =$ ויטמין C

$t_4 =$ ויטמין B

לפי תנאי השאלה, מתקיימים:

$0 \le t_1 \le 3 \qquad 0 \le t_2 \le 3 \qquad 0 \le t_3 \qquad 0 \le t_4$

עלינו למצוא את מספר הפתרונות של המשוואה:

$$t_1+t_2+t_3+t_4=n$$

נחשב הפונקציה היוצרת:

$$f(x)=(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+\dots)$$

הביטויים בסוגריים השונים מייצגים ~~את~~ באמצעות המעריכים של x, כאשר כל הערכים האפשריים של t_1 בין 0 ל-3 (כולל 0 ו-3). באותו אופן, הסוגריים במקום השני מייצגים את t_2, וכו'...

ב) אנו מחפשים את המקדם של x^n. נפשט את הביטוי:

$$f(x)=(1+x+x^2+x^3)^2(1+x+x^2+\dots)^2 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{סכום טור הנדסי סופי ואינסופי}}}{=} \left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)^2\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 =$$

$$=(1-x^4)^2\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=(1-2x^4+x^2)\cdot\frac{1}{(1-x)^4}=$$

$$=(1-2x^4+x^8)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}D(4,k)x^k$$

Scanned by CamScanner

המקדם של x^n, יתקבל ע"י סכום המכפלות של מק
רגולי עם המקדמים ~~[illegible]~~ השמאליים, קבועי
המתאימים של המשוואה מימין, כלומר:

עבור 1, נתאים את $D(4,n)x^n$

עבור $-2x^4$, נתאים את $D(4,n-4)x^{n-4}$

ועבור x^8, נתאים את $D(4,n-8)x^{n-8}$

נחשב את סכום המקדמים:

$$1\cdot D(4,n)-2\cdot D(4,n-4)+1\cdot D(4,n-8)=$$

$$=\binom{3+n}{3}-2\cdot\binom{n-1}{3}+\binom{n-5}{3}$$

לסיכום:

$$\boxed{a_n=\binom{3+n}{3}-2\cdot\binom{n-1}{3}+\binom{n-5}{3}}$$

Scanned by CamScanner

נוכיח זאת בעזרת שימוש במשוואה?

$$\frac{(1-x^2)^n}{(1-x)^n} = (1-x^2)^n \cdot \frac{1}{(1-x)^n} = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n}{i}x^{2i}}_{(2)} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} D(n,i)x^i =$$

לפי נוסחאות הבינום

ו- נוסחא (iii) שהוכחנו המאמן

$$= \sum_{i=0}^{\infty} C_k x^i$$

מהגדרת כפל טורים

כלומר:

$$\cancel{C_k = (-1)^0\binom{n}{k}D(n,k) + (-1)^1 D(n,k-1) + \dots + (-1)^{k-1}D(n,1)}$$

$$C_k = (-1)^0\binom{n}{k}D(n,k) + (-1)^1\binom{n}{k-1}D(n,k-1) + \dots + (-1)^{k-1}\binom{n}{1}D(n,1) + (-1)^k\binom{n}{0}D(n,0)$$

לכן המקדם של x^{2m} הוא

$$C_{2m} = \sum_{i=0}^{2m}(-1)^i\binom{n}{i}D(n,2m-i)$$

בפונקציה היוצרת של (2), נוכחים רק x-ים עם מעריכים זוגיים, כלומר - ה-x-ים עם המעריכים האי-זוגיים מתאפסים, כלומר - $(-1)^{2i+1}\binom{n}{2i+1}x^{2i+1}=0$ לכל i, לכן גם במקדם C_{2m}, נוכל לא להתייחס ל-i-ים אי זוגיים (בחלק של $D(n,2m-i)$, כלומר:

$$C_{2m} = \sum_{i=0}^{2m}(-1)^i\binom{n}{i}D(n,2m-i) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{n}{i}D(n,2m-2i)$$

ומה מכניסים

ה-i-ים כאן נשארים אותו הדבר, כי צריך לבדוק מה מכפילים

Scanned by CamScanner

לסיכום, המקדם של x^{2m} הוא:

$$C_{2m} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} D(n, 2m-2i)$$

בנוסף, באגף הימני $\underbrace{\text{של המשוואה המקורית,}}$ נקבל ישירות לפי נוסחת הבינום של:

$$(1+x-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

ולכן המקדם של x^{2m} שם הוא $\binom{n}{2m}$

נשווה ונקבל:

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n}{i} D(n, 2m-2i) = \binom{n}{2m}$$

נבדוק עבור $m=2$, $n=5$:

$$\sum_{i=0}^{2} (-1)^i \binom{5}{i} D(5, 4-2i) = (-1)^0 \binom{5}{0} D(5,4) + (-1)^1 \binom{5}{1} D(5,2) +$$

$$+ (-1)^2 \binom{5}{2} D(5,0) =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \binom{8}{4} - 5\binom{6}{4} + 10\binom{4}{4} = \boxed{5}$$

$$\binom{5}{2,2} = \binom{5}{4} = \boxed{5}$$ וסיימנו

נציב עבור $m=3$ $n=5$;

$$\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\binom{5}{i}D(5,6-2i)=$$

$$=\binom{5}{0}\cdot D(5,6)-\binom{5}{1}D(5,4)+\binom{5}{2}D(5,2)-\binom{5}{3}D(5,0)=$$

$$=1\cdot\binom{10}{4}-5\cdot\binom{8}{4}+10\binom{6}{4}-10\binom{4}{4}=$$

$$=0$$

ובדיק:

$$\binom{5}{6}=0$$

מכלל: