

ממ"ן 12 – פתרון שאלה 4

באופן כללי, מבנה הנתונים המוצע יורכב משני חלקים: חלק תחתון שיכיל את $\lfloor n/2 \rfloor$ האיברים הקטנים וחלק עליון שיכיל את $\lceil n/2 \rceil$ האיברים הגדולים. בכל אחד משני החלקים יהיו שתי ערמות: ערמת מינימום וערמת מקסימום. מבנה הנתונים המוצע יורכב אפוא מארבע ערמות:

- ערמת מינימום שתכיל את $\lfloor n/2 \rfloor$ האיברים הקטנים;
- ערמת מקסימום שתכיל את $\lfloor n/2 \rfloor$ האיברים הקטנים;
- ערמת מינימום שתכיל את $\lceil n/2 \rceil$ האיברים הגדולים;
- ערמת מקסימום שתכיל את $\lceil n/2 \rceil$ האיברים הגדולים.

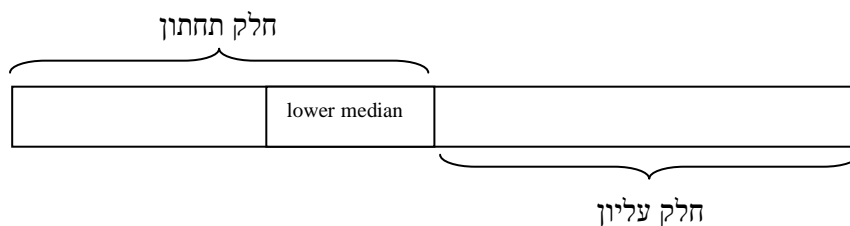
המינימום של החלק התחתון הוא המינימום של הרשימה והמקסימום של החלק העליון הוא המקסימום של הרשימה.

אם n אי-זוגי, אז המינימום של החלק העליון הוא החציון של הרשימה.

אם n זוגי, אז המקסימום של החלק התחתון הוא החציון התחתון של הרשימה והמינימום של החלק

העליון הוא החציון העליון של הרשימה

כלומר, כל ערימה שבחלק התחתון תכיל את כל האיברים שקטנים או שווים לחציון התחתון של הרשימה. כל ערימה שבחלק העליון תכיל את שאר האיברים (ראו איור).



כאמור, בכל חלק יש שתי ערימות שמכילות את אותם איברים. כלומר, בכל פעם שנבצע פעולת שינוי על אחת הערמות (הכנסת איבר או מחיקת איבר) נצטרך לבצע את אותה פעולה על הערמה השנייה.

כדי שנוכל לגשת במהירות למקום המתאים בערמה השנייה, הערמות צריכות להיות "מסונכרנות": כל צומת בכל אחת משתי הערימות יכיל (בנוסף לאיבר המאוחסן בצומת) גם מצביע לאיבר המתאים בערימה השנייה (אם הערמות ממומשות ע"י מערכים, אז המצביע הזה יהיה פשוט האינדקס של האיבר במערך). בכל פעם שישתנה המיקום של איזשהו איבר באחת הערמות, נעדכן את המצביע המתאים בערמה השנייה. כל עדכון כזה לוקח $O(1)$, ולכן הוא לא ישנה את זמן הריצה.

נתאר כעת את אופן מימוש הפעולות.

$\text{BUILD}(L, S)$

נבנה מהרשימה מערך עזר בגודל n . המערך יכיל בכל תא, בנוסף לאיבר שיאוחסן בו, עוד שני שדות – האינדקס של האיבר בערמת המכסימום והאינדקס של האיבר בערמת המינימום. זמן הריצה – $O(n)$. נמצא את החציון של המערך (באמצעות השגרה SELECT) ונבצע חלוקה של המערך סביב החציון – $O(n)$.

נבנה את ערמת המכסימום של החלק העליון מאזור המערך הימני, כך שכל תא במערך יכיל בתום הבנייה את האינדקס של האיבר בערמת המכסימום – $O(n)$.

נבנה את ערמת המינימום של החלק העליון מאזור המערך הימני, כך שכל תא במערך יכיל בתום הבנייה את האינדקס של האיבר בערמת המינימום – $O(n)$.

נעבור על המערך ו"נסנכרן" את שתי הערמות באופן הבא:

```
1   for  $i \leftarrow \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$  to  $n$ 
2       do    $\text{UpperMaxHeap}[A[i].\text{MaxInd}].\text{MinInd} \leftarrow A[i].\text{MinInd}$ 
3            $\text{UpperMinHeap}[A[i].\text{MinInd}].\text{MaxInd} \leftarrow A[i].\text{MaxInd}$ 
```

זמן הביצוע של הסנכרון – $O(n)$.

נעשה פעולות דומות על האזור השמאלי במערך. זמן הביצוע יהיה גם כן $O(n)$.

בסה"כ הזמן שיידרש לצורך בניית מבנה הנתונים הוא $O(n)$.

$\text{INSERT}(z, S)$

ראשית, נשים לב שהוספת איבר חדש למבנה הנתונים עלולה "להפר את האיזון" בין שני האזורים, ובמקרה זה יהיה צורך להעביר איבר מאזור לאזור.

ראשית, נבדוק לאיזה אזור של המערך עלינו להכניס את z . לשם כך, נשווה את z לאיבר המינימלי באזור העליון. אם z קטן ממנו, הוא יוכנס לאזור התחתון; אחרת, הוא יוכנס לאזור העליון. נבחין בין כמה מקרים אפשריים:

- אם מספר האיברים לפני ההכנסה היה זוגי, נאמר $2k$, הרי שבכל אחד משני האזורים היו k איברים. אם הכנסנו את z לאזור העליון, הרי שבאזור העליון יש כעת $k+1$ איברים ובאזור התחתון k איברים. במקרה זה האיזון בין שני האזורים נשמר ואין צורך להעביר איבר מאזור לאזור. לעומת זאת, אם הכנסנו את z לאזור התחתון, הרי שכעת יש $k+1$ איברים באזור התחתון ו- k איברים באזור העליון. לכן עלינו להעביר את האיבר המכסימלי שבאזור התחתון לאזור העליון.

• אם מספר האיברים לפני ההכנסה היה אי-זוגי, נאמר $2k - 1$, הרי שבאזור העליון היו k איברים, ובאזור התחתון $k - 1$ איברים.

אם הכנסנו את z לאזור העליון, הרי שבאזור העליון יש כעת $k + 1$ איברים ובתחתון $k - 1$ איברים. לכן נצטרך להעביר את האיבר המינימלי שבאזור העליון לאזור התחתון. אם הכנסנו את z לאזור התחתון, הרי שבאזור העליון ובתחתון יהיו k איברים ולכן האיזון בין שני האזורים נשמר ואין צורך להעביר איבר מאזור לאזור.

נתאר את הפעולה של הכנסת איבר לאזור התחתון (הכנסת איבר לאזור העליון מתבצעת באופן אנלוגי). ההכנסה מתבצעת בשני שלבים:

1. בשלב הראשון צריך להכניס את האיבר לשתי הערמות של האזור התחתון. הכנסת האיבר לערמות מתבצעת באמצעות קריאה לשגרות MAX-HEAP-INSERT ו-MIN-HEAP-INSERT. יש לזכור ששתי הערמות צריכות להישאר מסונכרנות, ולכן כל החלפה בין איברי ערמה אחת תלווה בעדכון המצביעים של האיברים המתאימים בערמה השנייה. כמובן שלאחר שנבצע את שתי פעולות ההכנסה שני האיברים החדשים צריכים להצביע זה על זה.

2. בשלב השני צריך (במקרים שתיארנו) להעביר איבר מאזור לאזור. נתאר למשל את העברת האיבר המכסימלי שבאזור התחתון לאזור העליון (העברת האיבר המינימלי שבאזור העליון לאזור התחתון היא אנלוגית): ראשית, קוראים ל-HEAP-EXTRACT-MAX עם ערמת המכסימום באזור התחתון. במקביל, מוחקים את האיבר מערימת המינימום של האזור התחתון (ראו את תרגיל 6.5-7 בספר). לאחר מכן מכניסים את האיבר לשתי הערמות של האזור העליון, באמצעות קריאה לשגרות MAX-HEAP-INSERT ו-MIN-HEAP-INSERT.

כל אחת מהפעולות על הערמות במהלך ההכנסה מתבצעת בזמן לוגריתמי, ולכן זמן הביצוע הכולל הוא $O(\lg n)$, כנדרש.

$DEL-MAX-MIN(S)$

מחיקת האיבר המינימלי ב- S : קוראים לשגרה HEAP-EXTRACT-MIN עם ערמת המינימום של האזור התחתון, ובמקביל מוחקים את האיבר מערמת המכסימום של האזור התחתון. מחיקת האיבר המכסימלי ב- S : קוראים לשגרה HEAP-EXTRACT-MAX עם ערמת המכסימום של האזור העליון, ובמקביל מוחקים את האיבר מערמת המינימום של האזור העליון. כמובן שלאחר ביצוע שתי פעולות המחיקה האיזון בין שני האזורים נשמר. כל אחת מהפעולות על הערמות מתבצעת בזמן לוגריתמי, ולכן זמן הביצוע הכולל הוא $O(\lg n)$, כנדרש.

DEL-MEDIAN(S)

אם n אי-זוגי: החציון הוא האיבר המינימלי באזור העליון.
קוראים לשגרה HEAP-EXTRACT-MIN עם ערמת המינימום של האזור העליון, ובמקביל מוחקים את האיבר המתאים מערמת המכסימום של האזור העליון. האיזון בין האזורים נשמר.

אם n זוגי: החציון התחתון הוא האיבר המכסימלי באזור התחתון והחציון העליון הוא האיבר המינימלי באזור העליון. מחיקת האיבר המינימלי באזור העליון מתבצעת כפי שתואר לעיל.

כדי למחוק את האיבר המכסימלי באזור התחתון קוראים לשגרה HEAP-EXTRACT-MAX עם ערמת המכסימום של האזור התחתון ובמקביל מוחקים את האיבר המתאים מערמת המינימום של האזור התחתון.

כמובן שלאחר ביצוע שתי פעולות המחיקה האיזון בין שני האזורים נשמר.

כל אחת מהפעולות על הערמות מתבצעת בזמן לוגריתמי, ולכן זמן הביצוע הכולל הוא $O(\lg n)$, כנדרש.