פתרון מטלת מנחה (ממ"ן) 14

שאלה 1

נסמן $A=\{1,2,3,...,n\}$ כאשר $n\geq 1$ טבעי, ונניח ש- k מספר טבעי כך ש- $1\leq k\leq n$.

א. מהו מספר המחרוזות באורך n הכתובות בספרות $0,1,2$ שבהן 1 מופיע k פעמים בדיוק?

ב. מצאו את מספר הזוגות $\langle B,C\rangle$ שבהם $B,C\subseteq A$, $|B|=k$ ו- $B\cap C=\varnothing$. (רמז: סעיף א')

ג. נניח ש- $n=7$. מצאו את מספר הקבוצות $\{B,C\}$ שבהן $B,C\subseteq A$, $|B|=3$ ו- $B\cap C=\varnothing$.

תשובה

א. נבחר תחילה k מקומות מתוך ה- n שבהם נמקם את הספרה 1.

יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות לבחירת המקומות האלה, ולאחר כל בחירה כזו, נותרים במחרוזת $n-k$ מקומות שבהם ניתן להושיב באופן חופשי כל אחת $0,2$ - יש לכך 2^{n-k} אפשרויות.

לכן לפי עקרון הכפל, מספר המחרוזות המקיימות את התנאים של סעיף זה הוא $2^{n-k}\binom{n}{k}$.

ב. לכל זוג $\langle B,C\rangle$ שבו $B,C\subseteq A$, $|B|=k$ נתאים מחרוזת יחידה באורך n שכתובה בספרות $0,1,2$ לפי הכלל הבא:

לכל $i\in\{1,2,3,...,n\}$ רושמים במקום ה- i במחרוזת 1 אם $i\in B$, 2 אם $i\in C$ ו- 0 אם i לא שייך לאף אחת משתי הקבוצות.

מכאן שמספר הזוגות $\langle B,C\rangle$ שבהם $B,C\subseteq A$, $|B|=k$ ו- $B\cap C=\varnothing$ שווה למספר המחרוזות מסעיף א' כלומר ל- $2^{n-k}\binom{n}{k}$.

לפי מה שראינו בסעיף ב' במקרה ש- $n=7$, מספר הזוגות הסדורים $\langle B,C\rangle$ שבהם $B,C\subseteq A$, $|B|=3$ ו- $B\cap C=\varnothing$ הוא $2^4\binom{7}{3}$. ניעזר בתוצאה זו כדי למצוא את מספר הקבוצות $\{B,C\}$ שבהן $B,C\subseteq A$, $|B|=3$ ו- $B\cap C=\varnothing$.

לשם כך נשים שלכל זוג סדור $\langle B,C\rangle$ שספרנו לעיל, מתאימה קבוצה $\{B,C\}$ אבל יש מספר מקרים שבהם לשני זוגות שונים $\langle B,C\rangle$ מתאימה אותה קבוצה $\{B,C\}$ וזה יכול לקרות רק אם $\langle B,C\rangle$ ו- $\langle C,B\rangle$ הם זוגות שונים. זוגות כאלה מופיעים רק כאשר $|B|=|C|=3$ ו- $B\neq C$.

לכן מספר הקבוצות $\langle B,C\rangle$ מסוג זה שווה ל- $\binom{7}{3}\binom{4}{3}$ (כמספר האפשרויות לבחור קבוצה B בעלת 3 איברים מתוך $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ וקבוצה C בעלת 3 איברים מתוך 4 האיברים

הנותרים. מספר הקבוצות $\{B,C\}$ המתאימות להן הוא $\frac{1}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{3}$ (וזה מה ספרנו פעמיים בחישוב מספר הזוגות הסדורים $\langle B,C\rangle$)

לסיכום מספר הקבוצות $\{B,C\}$ המקיימות את תנאי השאלה הוא:

$$2^4\binom{7}{3}-\frac{1}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{3}=14\binom{7}{3}=490$$

שאלה 2

א. הוכיחו ש- $\sum_{k=0}^{n}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\cdot\binom{n}{k}4^k=\frac{5^n+(-3)^n}{2}$

ב. הוכיחו שסכום המספרים בעלי **אינדקס זוגי**, מתוך $a_0,a_1,...,a_n$ הוא: $\sum_{k=0}^{n}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\cdot a_k$

ג. מיצאו את מספר המילים באורך n הכתובות באותיות A,B,C,D,E שבהן האות A מופיעה מספר זוגי של פעמים.

תשובה

א. נפרק את הסכום הנתון לשניים

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\cdot\binom{n}{k}4^k=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot4^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\cdot4^k.$$

ונשים בל שסכומים אלה הם בעצם פיתוחים של בינום:

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k\cdot1^{n-k}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-4)^k1^{n-k}=\frac{1}{2}(4+1)^k+\frac{1}{2}(-4+1)^k=\frac{5^n+(-3)^n}{2}$$

ב. עבור k זוגי מתקיים $\frac{1^k+(-1)^k}{2}=\frac{1+1}{2}=1$.

ועבור k אי- זוגי מתקיים $\frac{1^k+(-1)^k}{2}=\frac{1-1}{2}=0$.

לכן בביטוי $\sum_{k=0}^{n}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\cdot a_k$ מופיעים בפועל רק מחוברים בעלי אינדקס זוגי

ולכן $\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}a_{2j}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\cdot a_k$ (סכום המחוברים בעלי אינדקס זוגי בלבד)

כלומר סכום המספרים בעלי אינדקס זוגי, מתוך $a_0,a_1,...,a_n$.

ג. לכל $0\le k\le n$ נסמן ב- a_k את מספר המילים באורך n הכתובות באותיות A,B,C,D,E שבהן האות A מופיעה בדיוק k פעמים.

אז $a_k=\binom{n}{k}4^{n-k}$, שכן עבור k נתון יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות לבחור k מקומות מתוך ה- n שבהם תופיע האות A ולכל בחירה כזו, נותרים $n-k$ המקומות אחרים שבהם ניתן לרשום ב- 4^{n-k} דרכים שונות אותיות מתוך הקבוצה $\{B,C,D,E\}$.

ואז, מספר המילים באורך n הכתובות באותיות A,B,C,D,E שבהן האות A מופיעה מספר זוגי של פעמים הוא סכום המספרים בעלי אינדקס זוגי, מתוך $a_0,a_1,...,a_n$.

לפי הסעיף הקודם סכום זה הוא: $\sum_{k=0}^{n}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\cdot a_k$ כלומר ל- $\sum_{k=0}^{n}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\cdot\binom{n}{k}4^{n-k}$.

מאחר ש- $\sum_{k=0}^{n}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\cdot\binom{n}{k}4^{n-k}=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot4^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k4^{n-k}\right]$ נקבל

בעזרת נוסחת הבינום ש-

$\sum_{k=0}^{n}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\cdot\binom{n}{k}4^{n-k}=\frac{1}{2}\left[(1+4)^n+(-1+4)^n\right]=\frac{5^n+3^n}{2}$ וזו התשובה לסעיף זה.

שאלה 3

חשבו את מספר הפונקציות $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ המקיימות $|f^{-1}[\{i\}]|\neq i$ לכל $1\le i\le 4$.

תשובה

ניעזר בעקרון ההכלה וההפרדה.

לכל $1\le i\le 4$ נסמן ב- A_i את קבוצת הפונקציות המקיימים $|f^{-1}[\{i\}]|=i$.

במילים אחרות A_i היא קבוצת הפונקציות שבהן למספר i יש בדיוק i מקורות.

כדי לבנות פונקציה כזו עלינו לבחור תחילה i מספרים מתוך $\{1,2,3,4\}$ שאותם הפונקציה תעתיק ל- i (יש $\binom{4}{i}$ אפשרויות לבחור אותם) ולכל בחירה כזו, הפונקציה יכולה להעתיק את $4-i$ המספרים הנותרים בתחום, לכל מספר בטווח ששונה מ- i (ולזה יש 3^{4-i} אפשרויות)

לכן $|A_i|=\binom{4}{i}3^{4-i}$.

לכל $1\le i<j\le 4$, $A_i\cap A_j$ היא קבוצת הפונקציות $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ שבהן ל- i יש בדיוק i מקורות ול- j יש בדיוק j מקורות.

כדי לבנות פונקציה כזו עלינו לבחור i מספרים מתוך $\{1,2,3,4\}$ שאותם הפונקציה תעתיק ל- i (יש $\binom{4}{i}$ אפשרויות לבחור אותם) ולאחר מכן j מספרים מתוך $4-i$ הנותרים שאותם

הפונקציה תעתיק ל- j (יש $\binom{4-i}{j}$ אפשרויות לבחירתם). את שאר $4-i-j$ המספרים שנותרו

בתחום אפשר להעתיק חופשית לשני האיברים בטווח השונים מ- i, j (ולכך יש 2^{4-i-j} אפשרויות).

לכן $|A_i \cap A_j| = \binom{4}{i}\binom{4-i}{j}2^{4-i-j}$. נעיר שהנוסחה תקפה גם במקרים שבהם $4-i<j$ שכן

במקרה זה החיתוך $A_i \cap A_j$ הוא ריק והמקדם הבינומי $\binom{4-i}{j}$ הוא 0.זה קורה כאשר אחת

משתי הקבוצות היא A_4).

כמו כן נעיר שהחיתוכים של שלוש קבוצות שונות מהסוג A_i הוא תמיד ריק מפני שאם i, j, k

שלושה מספרים שונים מתוך $\{1,2,3,4\}$ אז כדי לבנות פונקציה כך ש- $|f^{-1}[\{i\}]| = i$ ו-

$|f^{-1}[\{j\}]| = j$ ו- $|f^{-1}[\{k\}]| = k$ אנו זקוקים ל- $i+j+k$ מקורות. אבל

$i+j+k \geq 1+2+3=6$ ובתחום יש רק 4 איברים!

נחשב את כל המרכיבים הדרושים בנוסחת ההכלה וההפרדה:

$$|A_1| = \binom{4}{1}3^{4-1} = 4\cdot 3^3 = 108, \quad |A_2| = \binom{4}{2}3^{4-2} = 6\cdot 3^2 = 54,$$

$$|A_3| = \binom{4}{3}3^{4-3} = 4\cdot 3 = 12, \quad \text{ו-} \quad |A_4| = \binom{4}{4}3^{4-4} = 1$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{4}{1}\binom{4-1}{2}2^{4-1-2} = 24, \quad |A_1 \cap A_3| = \binom{4}{1}\binom{4-1}{3}2^{4-1-3} = 4,$$

$$\text{ו-} \quad |A_2 \cap A_3| = \binom{4}{2}\binom{4-2}{3}2^{4-2-3} = 0.$$

(כל החיתוכים שבהם אחת משתי הקבוצות היא A_4 הם ריקים)

לכן לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מספר הפונקציות המקיימות את תנאי השאלה הוא:

$$4^4 - |A_1| - |A_2| - |A_3| - |A_4| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| =$$
$$= 256 - 108 - 54 - 12 - 1 + 24 + 4 + 0 = 109$$

שאלה 4

מפזרים 13 כדורים זהים ב- 6 תאים שונים.

א. חשבו את מספר הפיזורים שבהם שלושת התאים הראשונים מכילים ביחד לפחות 10 כדורים.

ב. חשבו את מספר הפיזורים שבהם אין אף תא שבו 3 כדורים בדיוק.

ג. מה התשובה לסעיף א' במקרה ש- 13 הכדורים שונים זה מזה?

תשובה

א. נחלק את הספריה ל- 4 סוגי פיזורים שמכסים את כל האופציות אך אין אף מקרה משותף לכל שניים מהם (כך נוכל פשוט לחבר את התוצאות ולקבל את סך כל המקרים האפשריים)

1. שלושת התאים הראשונים מכילים 10 כדורים ושלושת התאים הנותרים מכילים 3 כדורים. מספר הפיזורים האפשריים הוא $D(3,10)D(3,3)=\binom{10+2}{2}\binom{3+2}{2}=\binom{12}{2}\binom{5}{2}$
2. שלושת התאים הראשונים מכילים 11 כדורים ושלושת התאים הנותרים מכילים 2 כדורים. מספר הפיזורים האפשריים הוא $D(3,11)D(3,2)=\binom{11+2}{2}\binom{2+2}{2}=\binom{13}{2}\binom{4}{2}$.
3. שלושת התאים הראשונים מכילים 12 כדורים ושלושת התאים הנותרים מכילים כדור אחד בלבד. מספר הפיזורים האפשריים הוא $D(3,12)D(3,1)=\binom{12+2}{2}\binom{1+2}{2}=\binom{14}{2}\binom{3}{2}$
4. שלושת התאים הראשונים מכילים 13 כדורים ושלושת התאים הנותרים ריקים. מספר הפיזורים האפשריים הוא $D(3,13)D(3,0)=\binom{13+2}{2}\binom{0+2}{2}=\binom{15}{2}\binom{2}{2}$.

לכן התשובה בסעיף זה היא $\binom{12}{2}\binom{5}{2}+\binom{13}{2}\binom{4}{2}+\binom{14}{2}\binom{3}{2}+\binom{15}{2}\binom{2}{2}$.

ב. ניעזר בעקרון ההכלה וההפרדה.

לכל $1\le i\le 6$ נסמן ב- A_i את קבוצת הפזורים שבהן בתא מספר i יש 3 כדורים בדיוק.

אז $|A_i|=D(5,10)=\binom{14}{4}$ (מניחים 3 כדורים בתא מספר i אז יש $D(5,10)$ פיזורים אפשריים של 10 הכדורים הנותרים ב- 5 התאים האחרים). יש $\binom{6}{1}$ קבוצות A_i.

לכל $1\le i<j\le 6$, $|A_i\cap A_j|=D(4,7)=\binom{10}{3}$ ((מניחים 3 כדורים בכל אחד מהתאים i ו- j ואז יש $D(4,7)$ פיזורים אפשריים של 7 הכדורים הנותרים ב- 4 התאים האחרים).

יש $\binom{6}{2}$ קבוצות מהסוג $A_i\cap A_j$.

לכל $1\le i<j<k\le 6$, $|A_i\cap A_j\cap A_k|=D(3,4)=\binom{6}{2}$ (מניחים 3 כדורים בכל אחד מהתאים i, j ו- k ואז יש $D(3,4)$ פיזורים אפשריים של 4 הכדורים הנותרים ב- 3 התאים האחרים). יש $\binom{6}{3}$ קבוצות מהסוג $A_i\cap A_j\cap A_k$

לכל $1 \le i < j < k < l \le 6$, $|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = D(2,1) = \binom{2}{1}$ (מניחים 3 כדורים בכל אחד מהתאים i , j , k ו- ואז יש $D(2,1)$ סידורים אפשריים של הכדור הנותר ב- 2 התאים האחרים). יש $\binom{6}{4}$ קבוצות מהסוג $A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l$.

ברור שחיתוכים של יותר מ- 4 קבוצות A_i הם ריקים כי למשל פיזור השייך ל- 5 קבוצות כאלה היה דורש קיום של 15 כדורי לפחות.

מספר הפיזורים האפשריים של 13 כדורים זהים ב- 6 תאים שונים הוא $D(6,13) = \binom{18}{5}$

לכן מספר הפיזורים שבהם אין אף תא שבו 3 כדורים בדיוק הוא :

$$\binom{18}{5} - |\bigcup_{1 \le i \le 6} A_i| = \binom{18}{5} - \binom{6}{1}\binom{14}{4} + \binom{6}{2}\binom{10}{3} - \binom{6}{3}\binom{6}{2} + \binom{6}{4}\binom{2}{1}$$

ג. פיזור n כדורים שונים ב- k תאים שונים הוא בעצם כמו הגדרת פונקציה מקבוצת הכדורים לקבוצת התאים. ולכן מספר הפיזורים האפשריים הוא k^n .

1. בוחרים 10 מתוך 13 הכדורים ומניחים אותם בשלושת התאים הראשונים. את 3 הכדורים הנותרים מניחים בשלושת התאים האחרים :

יש $\binom{13}{3}3^{13} = \binom{13}{10}3^{10} \cdot 3^3$. אפשרויות.

2. בוחרים 11 מתוך 13 הכדורים ומניחים אותם בשלושת התאים הראשונים. את 2 הכדורים הנותרים מניחים בשלושת התאים האחרים :

יש $\binom{13}{2}3^{13} = \binom{13}{11}3^{11} \cdot 3^2$. אפשרויות.

3. בוחרים 12 מתוך 13 הכדורים ומניחים אותם בשלושת התאים הראשונים. את הכדור הנותר מניחים באחד משלושת התאים האחרים :

יש $\binom{13}{1}3^{13} = \binom{13}{12}3^{12} \cdot 3^1$. אפשרויות.

4. מניחים את 13 הכדורים בשלושת התאים הראשונים בלבד.

יש $\binom{13}{0}3^{13} = \binom{13}{13}3^{13} \cdot 3^0$. אפשרויות.

נסכם את 4 התוצאות ונקבל שהתשובה לסעיף זה היא : $\left[\binom{13}{3} + \binom{13}{2} + \binom{13}{1} + \binom{13}{0}\right]3^{13}$