

מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.

* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.

* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.

* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(6 נק') א. α, β הם פסוקים, וידוע שהפסוק $\alpha \vee \beta$ הוא טאוטולוגיה. מכאן נובע:

- [1] α הוא טאוטולוגיה ו- β הוא טאוטולוגיה.
- [2] בדיוק אחד משני הפסוקים α, β הוא טאוטולוגיה.
- [3] לפחות אחד משני הפסוקים α, β הוא טאוטולוגיה.
- [4] לפחות אחד משני הפסוקים α, β אינו סתירה.
- [5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

(7 נק') ב. \mathbf{R} היא קבוצת המספרים הממשיים.

לכל n טבעי, נסמן $I_n = \{x \in \mathbf{R} \mid n < x < n+1\}$.

לכל n טבעי, תהי A_n קבוצה של מספרים ממשיים המקיימת:

$$|A_n| = \aleph_0, \quad A_n \subseteq I_n.$$

עוצמת הקבוצה $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ היא:

- [1] \aleph_0
- [2] \mathbf{C}
- [3] עוצמה אינסופית שאינה \aleph_0 ואינה \mathbf{C} .
- [4] לא קיימות קבוצות A_n כאלה.
- [5] קיימות קבוצות כאלה, אבל לא ניתן לענות על השאלה מתוך הנתונים.

(6 נק') ג. סדרת Prüfer של עץ מתויג G היא: $(1, 1, 2, 2, 3)$. מספר העלים של G הוא:

- [1] 1
- [2] 2
- [3] 3
- [4] 4
- [5] 5

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

תהי M קבוצת היחסים (הרלציות) מעל $A = \{1,2,3\}$.

7 נק' א. כמה איברים יש ב- M ?

7 נק' ב. תנו דוגמא ל- $R, S \in M$ המקיימים: $RS \neq SR$ (הכפל כאן הוא כפל יחסים).

13 נק' ג. נגדיר יחס S מעל M (שימו לב, מעל M ולא מעל A):

עבור $R_1, R_2 \in M$, $(R_1, R_2) \in S$ אם ורק אם $R_1 R_2 = R_2 R_1$.

הוכיחו ש- S אינו טרנזיטיבי.

שאלה 3

מיצאו כמה מספרים טבעיים n , בתחום $n < 1000$, מקיימים:

סכום כל הספרות של n הוא בדיוק 14.

דוגמאות: 455 הוא מספר כזה, כי $4+5+5=14$.

גם 77 הוא מספר כזה, כי $7+7=14$.

לעומת זאת 140 אינו מספר כזה, כי $1+4+0=5 \neq 14$.

אפשר לפתור בעזרת פונקציה יוצרת, או בעזרת הכלה והפרדה, או בדרך אחרת.

יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

למנוע עגמת נפש: השאלה אינה שקולה לשאלה כמה פתרונות טבעיים יש למשוואה

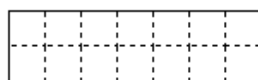
$x_1 + x_2 + x_3 = 14$. למשל $12+1+1=14$, אבל זה אינו נותן מספר העונה על תנאי השאלה.

שאלה 4

בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×1 :



ומספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×2 :



עלינו לרצף מלבן שממדיו $n \times 2$:
(בציור $n=7$).

בלוק של 2×1 אפשר להניח כרצוננו "שוכב" או "עומד". אסור לחרוג מגבולות המלבן.

יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

לדוגמא, $a_2 = 3$: שני בלוקים 2×1 שוכבים, או שני בלוקים 2×1 עומדים,

או בלוק אחד של 2×2 .

(10 נק') א. רשום יחס נסיגה עבור a_n (הסבר אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

(10 נק') ב. פתור את יחס הנסיגה.

(7 נק') ג. חשב את a_4 בשתי דרכים : מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א',

ומתוך הנוסחה המפורשת שקיבלת בסעיף ב'.

שאלה 5

יהי P גרף על 10 צמתים, שהוא מסלול פשוט (ובפרט - עץ) :

$x \text{ --- } * \text{ --- } * \text{ --- } * \text{ --- } * \text{ --- } * \text{ --- } * \text{ --- } * \text{ --- } y$

x, y הם העלים של P .

נוסיף לגרף P שני צמתים חדשים u, v .

נחבר (נוסיף קשת בין) כל אחד מהצמתים החדשים u, v לכל אחד מעשרת הצמתים של P ,

ונוסיף גם קשת בין u ל- v .

לגרף על 12 הצמתים, המתקבל לאחר כל התוספות האלה, נקרא G .

(10 נק') א. הראו ש- G הוא מישורי, על-ידי שרטוט של G במישור או בדרך אחרת.

(17 נק') ב. לגרף G שהגדרנו למעלה נוסף צומת חדש, w .

נחבר את w בקשתות עם כל אחד מארבעת הצמתים x, y, u, v .

קיבלנו גרף על 13 צמתים, נקרא לו H .

הוכיחו ש- H אינו מישורי.

בהצלחה!