תשובה 1

א.	נכון	ב.	לא נכון	ג.	לא נכון	ד.	נכון
ה.	לא נכון	ו.	לא נכון	ז.	נכון	ח.	נכון

תשובה 2

א. נכון. לפי הגדרת חיסור קבוצות $A-B=\{x \mid x\in A \ \wedge\ x\notin B\}$,

ושוב לפי אותה הגדרה: $(A-B)-B=\{x \mid (x\in A \ \wedge\ x\notin B)\wedge x\notin B\}$

לפי לוח האמת של "וגם" אפשר לסלק את ההופעה החוזרת של $x\notin B$,

כלומר $(A-B)-B=\{x \mid (x\in A \ \wedge\ x\notin B)\}=A-B$

הוכחה אחרת: מהגדרת חיסור קבוצות והגדרת חיתוך קבוצות מובן כי:

(*) $(A-B)\cap B=\varnothing$

ניעזר כעת בטענה שבשורה השנייה בראש עמ' 21 בספר:

$A-B=A \quad\Leftrightarrow\quad A\cap B=\varnothing$.

כדי למנוע בלבול נרשום אותה מחדש כך:

(**) $X-Y=X$ אם ורק אם $X\cap Y=\varnothing$

נציב $X=A-B$, $Y=B$.

מנוסחה (*) למעלה נקבל ש- $X\cap Y=\varnothing$.

לכן, לפי טענה (**) , $X-Y=X$, כלומר $(A-B)-B=A-B$.

ב. **נכון**. הוכחה: ניעזר שוב בטענה שבשורה השנייה בעמ' 21 בספר:

$A-B=A \quad\Leftrightarrow\quad A\cap B=\varnothing$.

נציב $B-A$ במקום B :

$$A-(B-A)=A \quad\Leftrightarrow\quad A\cap(B-A)=\varnothing \qquad (*)$$

מהגדרת חיתוך קבוצות יחד עם הגדרת הפרש קבוצות, מתקיים: $A\cap(B-A)=\varnothing$.

לכן מהשקילות (*) נקבל $A-(B-A)=A$.

אפשר להוכיח טענה זאת גם בדרכים אחרות, למשל בעזרת מושג המשלים, בדומה למה שנראה בפתרון שאלה 3.

ג. לא נכון: ראו החוברת "אוסף תרגילים פתורים", קבוצה 1 שאלה 2.

ד. **נכון.** התנאי $X \in P(A \cap B)$ שקול, לפי הגדרת קבוצת חזקה, לתנאי

$X \subseteq A \cap B$.

לפי שאלה 1.10 ב׳, זה שקול ל-

$X \subseteq A$ **וגם** $X \subseteq B$.

שוב לפי הגדרת קבוצת חזקה, זה שקול ל-

$X \in P(A)$ **וגם** $X \in P(B)$.

ומהגדרת חיתוך, זה שקול ל-

$X \in P(A) \cap P(B)$.

קיבלנו: $X \in P(A \cap B)$ **אסם** (אם ורק אם) $X \in P(A) \cap P(B)$.
לפי הגדרת שוויון קבוצות (הגדרה 1.1), שתי הקבוצות שוות.

תשובה 3

א. כדי לקצר קצת את הנוסחאות בתחילת הפיתוח, נסמן $B = B_1 \cap B_2$.

נפתח את אגף שמאל הנתון בשאלה, תוך הצבת B ובעזרת ההדרכה לשאלה:

$$(A_1 \cup A_2) - B = (A_1 \cup A_2) \cap B'$$

ניעזר בפילוג החיתוך מעל האיחוד (סעיף 1.3.4 בספר):

$$= (A_1 \cap B') \cup (A_2 \cap B')$$

מהגדרת B, לפי דה-מורגן: $B' = B_1' \cup B_2'$. נציב זאת:

$$= (A_1 \cap (B_1' \cup B_2')) \cup (A_2 \cap (B_1' \cup B_2'))$$

ניעזר בפילוג האיחוד מעל החיתוך (סעיף 1.3.4 בספר):

$$= ((A_1 \cap B_1') \cup (A_1 \cap B_2')) \cup ((A_2 \cap B_1') \cup (A_2 \cap B_2'))$$

שוב בעזרת ההדרכה לשאלה:

$$= ((A_1 - B_1) \cup (A_1 - B_2)) \cup ((A_2 - B_1) \cup (A_2 - B_2))$$

מהקיבוציות של האיחוד (אסוציאטיביות, עמ׳ 10 בספר), ניתן לסלק כאן שני זוגות סוגרים:

$$= (A_1 - B_1) \cup (A_1 - B_2) \cup (A_2 - B_1) \cup (A_2 - B_2)$$

ב.

$$A' \oplus B' = (A' - B') \cup (B' - A') = (A' \cap B) \cup (B' \cap A)$$

נשנה את סדר האיברים בעזרת חילופיות החיתוך וחילופיות האיחוד:

$$= (A \cap B') \cup (B \cap A') = (A - B) \cup (B - A) = A \oplus B$$

ישראל בר-מאיר הציע פתרון אלגנטי יותר לסעיף זה, תוך שימוש בטריק טכני שכדאי להכיר. הפתרון של ישראל יפורסם בפורום.

תשובה 4

א. לא נכון: $A_0 = \{x \in \mathbf{N} \mid 0 \le x \le 0\} = \{0\} \ne \varnothing$,

ב. נכון. הוכחה:

יהי $x \in A_n$. מהגדרת A_n , $x \in \mathbf{N}$, $x \le n$.

לכן מתקיים גם $x \in \mathbf{N}$, $x \le n+1$. לכן, מהגדרת A_n , $x \in A_{n+1}$.

הראינו שכל אבר של A_n שייך ל- A_{n+1} , משמע $A_n \subseteq A_{n+1}$.

ג. לא נכון: מהגדרת הטבעיים, כל מספר טבעי הוא סופי, אבל קבוצת המספרים הטבעיים אינה סופית. דרך אחרת: מהגדרת הקבוצות A_n , בכל אחת מהקבוצות A_n יש מספר גדול ביותר בקבוצה - זהו המספר n . לכן, **אילו** היה קיים n כך ש- $A_n = \mathbf{N}$, אותו n היה המספר הטבעי הגדול ביותר. אבל כידוע אין מספר טבעי גדול ביותר: לכל מספר טבעי ניתן להוסיף 1 ולקבל מספר גדול יותר (תכונה של מספרים טבעיים שידועה לנו מבית הספר).

ד. נכון, כי $A_{n+1} - A_n = \{n+1\}$, קבוצה בת איבר אחד.

ה. נכון. בהינתן $n,k \in \mathbf{N}$ ניקח $m = n+k$ (השלימו את ההסבר).

איתי הראבן