20416 - תאריך הבחינה: 29.8.2011 (סמסטר 2011א - מועד ב2/ 92)

שאלה 1

א. עבור כל שני מקומות סמוכים במעגל, נגדיר את ניסוי-הברנולי הבא:

אם בשני המקומות הסמוכים יש כדורים אדומים – תוצאת הניסוי היא "הצלחה";

ואם בשני המקומות הסמוכים יש <u>לפחות</u> כדור אחד כחול – תוצאת הניסוי היא "כשלון".

באופן הזה, נקבל שהמשתנה המקרי X שווה למספר ההצלחות ב-100 חזרות על ניסוי-הברנולי המוגדר לעיל. ולמרות זאת, ההתפלגות של X איננה בינומית, מכיוון שחלק מן החזרות תלויות זו בזו. בעזרת תנאי אי-התלות נראה שכל שתי חזרות <u>עוקבות</u> תלויות זו בזו.

בלי הגבלת הכלליות, נניח שהמקומות במעגל ממוספרים בכיוון השעון.

נגדיר: $X_i = \begin{cases} 1 & , \text{הכדורים במקומות } i \text{ ו- } i+1 \text{ אדומים} \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$ לכל $i = 1,\dots,n$,

הערה: מקום $n+1$ הוא למעשה מקום 1 (כלומר, האינדיקטור X_n שווה ל-1 אם במקומות n ו-1 יש כדורים אדומים).

נקבל כי: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ = מספר הכדורים האדומים שלימין כל אחד מהם יש כדור אדום נוסף.

נראה את קיום התלות בין כל שתי חזרות עוקבות, בעזרת תנאי אי-התלות.

לכל i $(i = 1,2,\dots,n)$ מתקיים: $P\{X_i = 1\} = 0.5^2 = 0.25$

אבל: $P\{X_i = 1, X_{i+1} = 1\} = 0.5^3 \neq P\{X_i = 1\}P\{X_i = 1\} = 0.5^4$

ב. מסעיף א נקבל: $E[X_i] = P\{X_i = 1\} = 0.25$

ומכאן מקבלים: $E[X] = \sum_{i=1}^{100} E[X_i] = 100 \cdot 0.25 = 25$

ג. נשתמש בהגדרת האינדיקטורים מסעיף א, ונקבל:

$$\text{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = 0.25 \cdot 0.75 = 0.1875$$

ולכל $i,j = 1,\dots,100$ $(i<j)$ מתקיים:

$$E[X_i X_j] = P\{X_i = 1, X_j = 1\} = \begin{cases} 0.5^2 \cdot 0.5^2 = 0.0625 & , \quad j > i+1 \\ 0.5^3 = 0.125 & , \quad j = i+1 \end{cases}$$

כלומר:

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j] = \begin{cases} 0.0625 - 0.0625 = 0 & , \quad j > i+1 \\ 0.125 - 0.0625 = 0.0625 & , \quad j = i+1 \end{cases}$$

לכן:

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{100} \text{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \text{Cov}(X_i, X_j) = 100 \cdot 0.1875 + 2 \cdot 100 \cdot 0.0625 + 0 = 31.25$$

ד. לפי אי-שוויון צ'בישב:

$$P\{15 \le X \le 35\} = P\{|X - 25| \le 10\} = 1 - P\{|X - 25| > 10\}$$

$$= 1 - P\{|X - 25| \ge 11\} \ge 1 - \frac{31.25}{11^2} = 0.742$$

[ל-X ערכים שלמים בלבד]

שאלה 2

א. למשתנה המקרי X יש התפלגות אחידה רציפה על הקטע $(0,1)$, לכן :

$$E[X]=\tfrac{1}{2} \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(X)=\tfrac{1}{12}$$

כמו כן : $N \mid X=p \sim B(10,p)$

ולכן : $E[N \mid X=p]=10p \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(N \mid X=p)=10p(1-p)$

כעת, לחישוב פונקציית ההסתברות, נשתמש בנוסחה (4.7) מעמוד 380 בספר ונעזר בפונקציית ביתא ובקשר שלה לפונקציית גמא. לכל $n=0,1,\dots,10$ מתקיים :

$$P\{N=n\}=\int_0^1 P\{N=n \mid X=p\} f_X(p)dp=\int_0^1 \binom{10}{n} p^n(1-p)^{10-n}\cdot 1dp=\binom{10}{n}\int_0^1 p^n(1-p)^{10-n}dp$$
$$=\binom{10}{n}B(n+1,11-n)=\frac{10!}{\cancel{n!(10-n)!}}\cdot\frac{\cancel{n!(10-n)!}}{11!}=\frac{1}{11}$$

ב1. נשתמש בנוסחה החלופית לחישוב השונות המשותפת, בטענה מתרגיל ת26 בפרק 7 ובנוסחת התוחלת המותנית, ונקבל :

$$\mathrm{Cov}(X,E[Y \mid X]) = E[X\cdot E[Y \mid X]] - E[X]\cdot E[E[Y \mid X]]$$ [הנוסחה החלופית לחישוב השונות המשותפת]

$$= E[E[XY \mid X]] - E[X]\cdot E[E[Y \mid X]]$$ [לפי הטענה מתרגיל ת26, עמוד 430]

$$= E[XY] - E[X]\cdot E[Y] = \mathrm{Cov}(X,Y)$$ [נוסחת התוחלת המותנית]

ב2. $$\mathrm{Cov}(N,S) = \mathrm{Cov}\left(N,\sum_{i=1}^{N}X_i\right) = \mathrm{Cov}\left(N,E\left[\sum_{i=1}^{N}X_i \,\middle|\, N\right]\right)$$ [לפי סעיף ב1]

כעת :

$$E\left[\sum_{i=1}^{N}X_i \,\middle|\, N=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i \,\middle|\, N=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right] = nE[X_1]$$ [ל-X_i-ים תוחלות סופיות והם ב״ת ב-N]

לכן :

$$\mathrm{Cov}(N,S) = \mathrm{Cov}\left(N,E\left[\sum_{i=1}^{N}X_i \,\middle|\, N\right]\right) = \mathrm{Cov}\big(N,NE[X_1]\big) = E[X_1]\mathrm{Cov}\big(N,N\big) = E[X_1]\mathrm{Var}\big(N\big)$$

שאלה 3

א. נסמן ב-X את המשקל (בגרמים) של תפוח אקראי מזן ״חרמון״ שגודל במטע A.
מתקיים : $X \sim N(150,\,20^2)$.

כדי למצוא את המשקל המינימלי של התפוחים שנשלחים לשיווק בארץ, נמצא את המשקל ש-15% מהתפוחים שוקלים פחות ממנו.

$$P\{X<a\} = \Phi(\tfrac{a-150}{20}) = 0.15 = \Phi(-1.036) \quad\Rightarrow\quad a = 150-1.036\cdot 20 = 129.28$$

כלומר, המשקל המינימלי של התפוחים המשווקים בארץ הוא 129.28 גרם.

ב. ההסתברות ש- 20 התפוחים יחולקו ל-3 הקבוצות היא מולטינומית עם הפרמטרים 20 ו- $(0.15,0.6,0.25)$.

לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{20!}{4!11!5!}\cdot 0.15^4\cdot 0.6^{11}\cdot 0.25^5 = 0.03796$

ג. מנתוני הסעיף, ידוע ש-12 התפוחים הנותרים שוקלים פחות מ-155 גרם. לכן, עלינו לחשב את ההסתברות המותנית: $P\{X<140 \mid X<155\}=\frac{P\{Z<\frac{140-150}{20}\}}{P\{Z<\frac{155-150}{20}\}}=\frac{\Phi(-0.5)}{\Phi(0.25)}=\frac{1-0.6915}{0.5987}=0.5153$

כעת, נסמן ב- Y את מספר התפוחים (מתוך ה-12) שמשקלם נמוך מ-140 גרם .

למשתנה המקרי Y יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 12 ו-0.5153.

לכן: $P\{Y=5\}=\binom{12}{5}\cdot 0.5153^5\cdot 0.4847^7=0.1809$

ד. $P\{X>184\}=P\{Z>\frac{184-150}{20}\}=1-\Phi(1.7)=1-0.9554=0.0446$

למספר התפוחים שהטבח ישקול, עד שימצא את מבוקשו, יש התפלגות בינומית-שלילית עם הפרמטרים 5 ו- 0.0446. לכן, אם נסמן ב- W את מספר התפוחים שישקול, נקבל כי:

$$E[W]=\frac{5}{0.0446}=112.108 \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(X)=\frac{5\cdot 0.9554}{0.0446^2}=2{,}401.52$$

שאלה 4

א. אפשר להציג את פונקציית הצפיפות המשותפת כמכפלה של שתי פונקציות – האחת תלויה רק ב- x והשנייה רק ב- y . לכן, מטענה 2.1, המובאת בספר בעמוד 285, נובע שהמשתנים המקריים בלתי-תלויים. קל לראות שפונקציית הצפיפות של X היא פונקציה של x^2 וכי פונקציית הצפיפות של Y היא פונקציה של $\frac{1}{y^2}$. אך עדיין יש לחשב מהו הגורם הקבוע בכל אחת מפונקציות הצפיפות. נמצא תחילה את ערכו של c:

$$\int_2^\infty\int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dxdy=\int_2^\infty\int_0^1\frac{cx^2}{y^2}\,dxdy=\int_2^\infty\frac{cx^3}{3y^2}\bigg|_0^1 dy=\int_2^\infty\frac{c}{3y^2}\,dy=-\frac{c}{3y}\bigg|_2^\infty=\frac{c}{6}\qquad\Rightarrow\qquad c=6$$

עתה, נמצא את פונקציית הצפיפות השולית של X וממנה נוכל להסיק מהי פונקציית הצפיפות של Y.

$$f_X(x)=\int_2^\infty\frac{6x^2}{y^2}\,dy=-\frac{6x^2}{y}\bigg|_2^\infty=\frac{6x^2}{2}=3x^2\qquad,\qquad 0\le x\le 1$$

ומכאן: $f_Y(y)=\frac{2}{y^2}\qquad,\qquad 2\le y<\infty$

ב. פונקציית הצפיפות של X_i, לכל $i=1,2,3,4$, היא: $f_X(x)=3x^2\qquad,\qquad 0\le x\le 1$

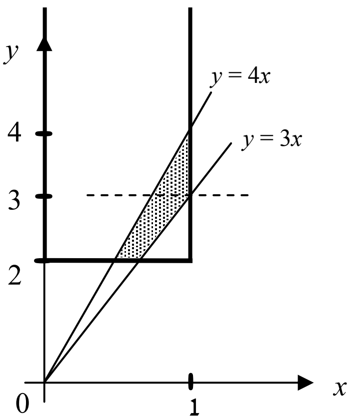
נמצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X_i, ואחר-כך את פונקציית הצפיפות של סטטיסטי הסדר התשיעי. לכל $0\le x\le 1$ מתקיים: $F_X(x)=\int_0^x 3t^2dt=\frac{3x^3}{3}=x^3$

לכן: $f_{X_{(9)}}(x)=\frac{10!}{8!1!1!}\cdot(x^3)^8\cdot 3x^2(1-x^3)=270(x^{26}-x^{29})\qquad,\qquad 0\le x\le 1$

ומכאן:

$$E[X_{(9)}]=270\int_0^1 x(x^{26}-x^{29})dx=270\left[\tfrac{1}{28}x^{28}-\tfrac{1}{31}x^{31}\right]_0^1=270\left(\tfrac{1}{28}-\tfrac{1}{31}\right)=\tfrac{405}{434}=0.93318$$

ג. נצייר את התחום שבו פונקציית הצפיפות המשותפת מקבלת ערכים חיוביים, ובתוכו נסמן (בנקודות) את התחום שבו מתקיים $3X \le Y \le 4X$. כעת, נבצע אינטגרציה על הצפיפות המשותפת בתחום זה :



$$P\{3X \le Y \le 4X\} = \int_2^3 \int_{y/4}^{y/3} \frac{6x^2}{y^2}\,dxdy + \int_3^4 \int_{y/4}^{1} \frac{6x^2}{y^2}\,dxdy$$

$$= \int_2^3 \frac{6x^3}{3y^2}\bigg|_{y/4}^{y/3} dy + \int_3^4 \frac{6x^3}{3y^2}\bigg|_{y/4}^{1} dy = 2\int_2^3 \frac{\left(\frac{y}{3}\right)^3 - \left(\frac{y}{4}\right)^3}{y^2}dy + 2\int_3^4 \frac{1-\left(\frac{y}{4}\right)^3}{y^2}dy$$

$$= 2\left(\tfrac{1}{27} - \tfrac{1}{64}\right)\int_2^3 y\,dy + 2\int_2^3\left(\frac{1}{y^2} - \tfrac{1}{64}y\right)dy$$

$$= \tfrac{37}{864}\cdot\tfrac{1}{2}y^2\Big|_2^3 + 2\int_3^4\left(-\frac{1}{y} - \tfrac{1}{128}y^2\right)dy = \tfrac{185}{1,728} + \tfrac{11}{192} = 0.16435$$

שאלה 5

נרשום תחילה את נתוני הבעיה. לשם כך, נגדיר את שלושת המאורעות :

A = המשתתף סיווג עצמו כצופה-בוקר ;

B = המשתתף סיווג עצמו כצופה-צהריים ;

C = המשתתף סיווג עצמו כצופה-ערב.

כעת :

$P(A^C \cap B^C \cap C) = 0.35$

$P(A^C \cap B^C \cap C^C) = 0.2$

$P(A \cap B \cap C) = 0.05$

$P(A^C \cap B \cap C^C) = 0.12$

$P(A) = 0.2$

$P(B \cap (A \cup C)) = 0.2$

$P(C \mid A) = 0.6$

לפיכך :

$P(A \cap C) = P(C \mid A)P(A) = 0.6 \cdot 0.2 = 0.12$

$P(A \cap B^C \cap C) = P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) = 0.12 - 0.05 = 0.07$

$P(A \cap C^C) = P(A) - P(A \cap C) = 0.2 - 0.12 = 0.08$

$\Rightarrow \quad P(A \cap C^C) = P(A \cap B \cap C^C) + P(A \cap B^C \cap C^C) = 0.08$

$\Rightarrow \quad P(A \cap B^C \cap C^C) = 0.08 - \underline{P(A \cap B \cap C^C)} = 0.08 - p$

$P(B \cap (A \cup C)) = P(A \cap B \cap C^C) + P(A^C \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

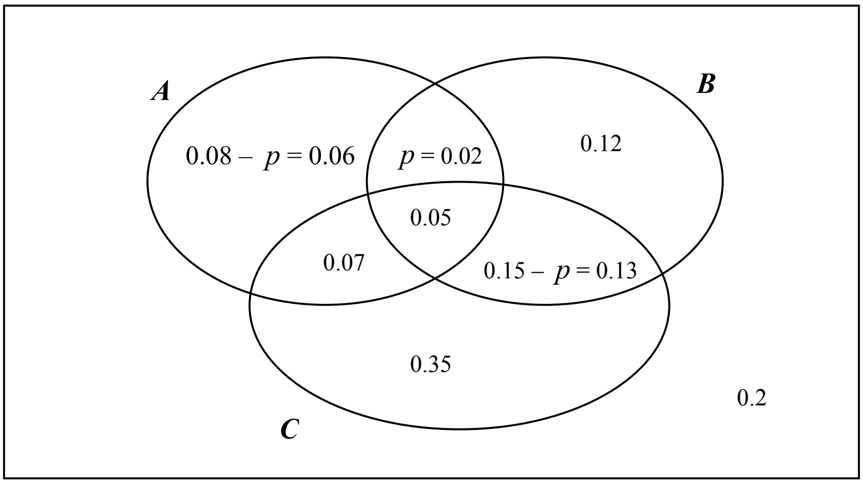
$\Rightarrow \quad P(A \cap B \cap C^C) + P(A^C \cap B \cap C) = P(B \cap (A \cup C)) - P(A \cap B \cap C) = 0.2 - 0.05 = 0.15$

$\Rightarrow \quad P(A^C \cap B \cap C) = 0.15 - \underline{P(A \cap B \cap C^C)} = 0.15 - p$

נסמן ב- p את $\underline{P(A\cap B\cap C^C)}$ ונצייר דיאגרמת ון המתאימה לנתונים שמצאנו עד כה.

מכיוון שסכום כל ההסתברויות הרשומות בדיאגרמה שווה ל-1, נקבל כי $p=0.02$.

ומכאן :



א.
$$P(A\cap B^C\cap C^C)=0.06$$
$$P(B\cap C\,|\,A^C)=\frac{P(A^C\cap B\cap C)}{P(A^C)}=\frac{0.13}{0.8}=0.1625$$

ב1. אי-אפשר לחשב את הסתברות המאורע הנתון, מכיוון שיש תלות בין שלוש הבחירות של משתתפי-הסקר. התלות נובעת מכך שמספר משתתפי-הסקר סופי.
<u>בהינתן הסיווג של המשתתף הראשון שנבחר</u>, ההסתברויות שחושבו סעיף א, אינן תקפות עוד ביחס למשתתף השני שייבחר.
אילו מספר משתתפי הסקר, שנסמנו ב- N , היה ידוע, יכולנו לחשב את ההסתברות כך :

$$3!\cdot\frac{0.06N}{N}\cdot\frac{0.12N}{N-1}\cdot\frac{0.35N}{N-2}$$

ב2. בבעיה הנתונה מצוין שהסקר <u>רב-משתתפים</u>, לפיכך :

$$3!\cdot\frac{0.06N}{N}\cdot\frac{0.12N}{N-1}\cdot\frac{0.35N}{N-2}\cong 6\cdot 0.06\cdot 0.12\cdot 0.35=0.01512$$

ג. אם נתון שבסקר השתתפו 10,000 מנויים, ומתוכם דגמו 100, אז מספר המנויים במדגם שצופים בטלביזיה בכל חלקי-היום הוא משתנה מקרי, שהתפלגותו היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N=10{,}000$, $n=100$ ו- $m=0.05\cdot N=500$.

לפיכך, השונות המבוקשת היא :
$$\frac{10{,}000-100}{10{,}000-1}\cdot 100\cdot 0.05\cdot 0.95=4.703$$