

בחינה 1 - מסמטר א - 1996

משך הבחינה - 3 שעות
משקל כל השאלות זהה
כל חומר עזר מותר בשימוש

שאלה 1

נתאר באורח לא פורמאלי אלגוריתם הממין רשימה L בת n איברים:

(I) נבחר $n > k > 1$ כלשהו.

(II) נחלק את L ל- $k-1$ רשימות L_i זרות בגודל $\lfloor n/k \rfloor$, ולרשימה נוספת המורכבת משאר האיברים.

(III) נבחר בכל אחת מ- k הרשימות L_i את המקסימום m_i . יהי M המקסימום מבין ה- m_i .

(IV) נזרוק את "הזוכה" M מרשימתו, נמצא ברשימה זו m_i חדש (המקסימום החדש ברשימה זו), ונחזור ל-III.

- א. כתוב את האלגוריתם בפסאודו-קוד. הנח כי אברי הרשימה L_i מתוחזקים ברשימה מקושרת.
ב. נתח את סיבוכיות האלגוריתם כפונקציה של n ו- k . מהו ה- k הטוב ביותר שכדאי לבחור?
ג. נניח עתה כי במקום ברשימה מקושרת, אברי הרשימה L_i מוחזקים בצורת ערימה. נתח את סיבוכיות האלגוריתם תחת ההנחה הזאת.

שאלה 2

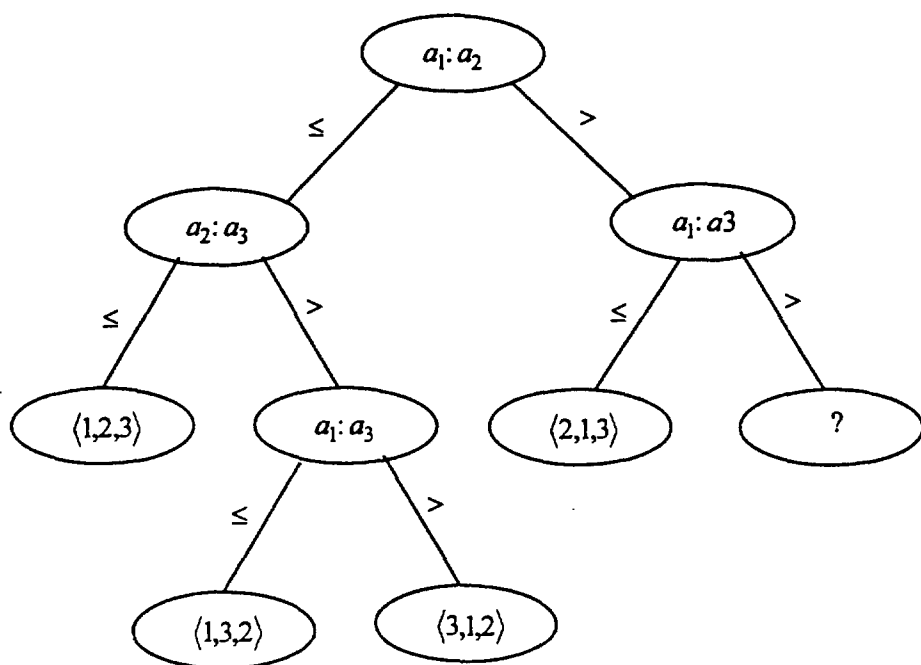
נתון מערך A בעל n איברים עם מקסימום M ומינימום m .

א. הוכח כי קיימים במערך איברים x ו- y כך ש-

$$|x - y| \leq \frac{M - m}{n - 1}$$

- ב. כתוב אלגוריתם יעיל ככל שתוכל המוצא x ו- y כנאמר ב-(א). הראה במפורט את נכונות האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

א. נתון עץ המיון הבא עבור רשימה בת 3 איברים $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$:



לא ידוע מה מחזיר האלגוריתם בעלה הימני ביותר, אך ידוע כי מדובר בעלה (כלומר האלגוריתם עוצר שם).

הראה כי אלגוריתם זה אינו נכון. עליך להוכיח כי ישנם קלטים מסוימים עליהם האלגוריתם טועה (כלומר מחזיר רשימה שאינה ממויינת).

ב. נתונות שתי רשימות ממוינות L_1 ו- L_2 בעלות n איברים כל אחת. הראה כי כל אלגוריתם הממזג את שתי הרשימות L_1 ו- L_2 לרשימה ממוינת אחת L (בעלת $2n$ איברים) נדרש לבצע לפחות $2n - 1$ השוואות במקרה הגרוע. (כלומר, אם אלגוריתם למיזוג מבצע $2n - 2$ השוואות או פחות, על כל קלט, אזי בהכרח ישנם קלטים עליהם האלגוריתם טועה, כלומר התשובה שהוא מחזיר אינה רשימה ממויינת).

שאלה 4

בסעיפים הבאים הצע מבנה נתונים המממש את כל הפעולות בסעיף על קבוצה S של מספרים; בצורה יעילה ככל שתוכל.

פקודה	משמעות
$INSERT(S, x)$	הכנס את x לקבוצה S
$DELETE(S, x)$	מחק את x מ- S
$FIND(S, x)$	ברר האם x נמצא ב- S
$SUM(S, x)$	החזר את סכום האיברים ב- S שערכם אינו עולה על x
דוגמה: עבור הקבוצה $S = \{6, 2, 3, 8, 7, 9\}$ הפקודה $SUM(S, 7)$ תחזיר $6+2+3+7=18$.	

פקודה	משמעות
$INSERT(S, x)$	הכנס את x לקבוצה S
$DELETE(S, x)$	מחק את x מ- S
$FIND(S, x)$	ברר האם x נמצא ב- S
$PRINT-SMALL(S, i)$	הדפס את i האיברים הקטנים ביותר ב- S .

הערה: הפעולה $PRINT-SMALL(S, i)$ נדרשת להתבצע בזמן $\theta(i)$. (אם ישנם פחות מ- i איברים יוצאת הודעת שגיאה).

פקודה	משמעות
$BUILD(L, S)$	איתחול מבני הנתונים
$DEL-MIN(S)$	מחק המינימום מ- S
$DEL-MAX(S)$	מחק המקסימום מ- S
$DEL-13-MIN(S)$	מחק את האיבר ה-13 בגודלו מ- S

הערות: באיתחול, מקבלים רשימה L ובונים ממנה את מבנה הנתונים הרצוי. נדרש שהבנייה תתבצע ב- $O(n)$.

הפעולה $DEL-13-MIN$ מוחקת מ- S את האיבר ה-13 הקטן ביותר (כלומר זה שבמקום ה-13 ברשימה הממוינת). אם יש פחות מ-13 איברים יוצאת הודעת שגיאה.

שאלה 5

א. הכנס את האיברים הבאים (משמאל לימין) לעץ אדום-שחור המתחיל במצב ריק. יש לאזן את העץ בכל רגע שדרוש.

20, 15, 12, 30, 45, 49, 46

ב. מחק את האיברים (מימין לשמאל) מהעץ (כלומר קודם נמחק 46, ואז 49 וכו').

בהצלחה!