תשובה 1

מהגדרת כפל יחסים ומהנתון $(a,b) \in R^2$ נובע שקיים $c \in A$ כך ש-

$(i)\ \ (a,c) \in R$ $(ii)\ \ (c,b) \in R$

בדומה, מהנתון $(b,a) \in R^2$ נקבל שקיים $d \in A$ כך ש-

$(iii)\ \ (b,d) \in R$ $(iv)\ \ (d,a) \in R$

משילוב נוסחאות (i) + (iv) ומהגדרת כפל יחסים, נקבל $(d,c) \in R^2$.

בדומה, משילוב נוסחאות (iii) + (ii) נקבל $(c,d) \in R^2$.

בנוסף, מנוסחה (i) יחד עם הנתון ש- R אנטי-סימטרי נובע $a \neq c$.

בדומה, מ- (ii), (iii) , (iv) נקבל באותו אופן: $b \neq c$, $b \neq d$, $d \neq a$.

תשובה 2

א. לא. השלימו את הנימוק.

ב. לא. השלימו את הנימוק.

ג. לא. דוגמא נגדית: $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. השלימו את החישוב והראו ש- $t(R^2) \neq \left(t(R)\right)^2$.

ד. כן. $t(R)$ הוא טרנזיטיבי (הסגור הטרנזיטיבי של יחס כלשהו הוא טרנזיטיבי).
הסגור הטרנזיטיבי של יחס טרנזיטיבי הוא היחס עצמו, לכן $t(t(R)) = t(R)$.

תשובה 3

א. יחס מעל A הוא קבוצה של זוגות סדורים של אברי A. לכן כל יחס מעל A, ובפרט כל יחס שקילות מעל A , **חלקי** לקבוצה $A \times A$. קל לבדוק שהיחס $A \times A$ הוא יחס שקילות מעל A (זהו יחס השקילות שבו כל אברי A נמצאים באותה מחלקה).

לכן $A \times A$ היא האיבר הגדול ביותר ב- K לגבי הכלה.

מצד שני, יחס שקילות הוא בפרט רפלקסיבי, כלומר **מכיל** את I_A .

היחס I_A אף הוא יחס שקילות מעל A (זהו יחס השקילות שבו כל איבר של A נמצא במחלקה בפני עצמו). מכיון שכל יחס שקילות מעל A מכיל אותו, I_A הוא האיבר הקטן ביותר ב- K לגבי הכלה.

ב. (i) נסמן $B=\{1,2,3\}$, $C=\{1,2,4\}$.

היחס $(B\times B)\cup\{(4,4)\}$ הוא יחס שקילות מעל A , והוא אבר מקסימלי ב- L .

גם $(C\times C)\cup\{(3,3)\}$ הוא יחס שקילות מעל A , וגם הוא אבר מקסימלי ב- L .

השלימו את הבדיקה של הטענות שנאמרו כאן.

(ii) היחס $I_A\cup\{(1,2),(2,1)\}$ הוא יחס שקילות מעל A , והוא אבר מינימלי ב- L .

גם $I_A\cup\{(1,3),(3,1)\}$ הוא יחס שקילות מעל A , וגם הוא אבר מינימלי ב- L .

השלימו את הבדיקה של הטענות שנאמרו כאן.

ג. לפי שאלה 3.21 בעמ' 93 בספר, בקבוצה סדורה-חלקית שיש בה אבר קטן ביותר, יש רק אבר מינימלי אחד. במלים אחרות (ראו הפרק בלוגיקה...):

בקבוצה סדורה חלקית שיש בה יותר (או פחות) מאבר מינימלי אחד - אין אבר קטן ביותר.

בסעיף הקודם מצאנו שני אברים מינימליים ב- L. לכן אין ב- L אבר קטן ביותר.

ההוכחה שאין ב- L אבר גדול ביותר - דומה.

תשובה 4

בדיקה: נציב $n=0$: $2\cdot5^0-7\cdot3^0=2-7=-5$.

נציב $n=1$: $2\cdot5^1-7\cdot3^1=10-21=-11$.

בדקנו גם עבור $n=1$ כי בשלב המעבר אנו מתכוונים לבצע אינדוקציה תוך שימוש ב"שני צעדים אחורה" ולא רק צעד אחד.

מעבר: נניח שהטענה נכונה עבור n ועבור $n-1$ **(שניהם!)**

כלומר נניח $f(n)\ =\ 2\cdot5^n-7\cdot3^n$, $f(n-1)\ =\ 2\cdot5^{n-1}-7\cdot3^{n-1}$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר נוכיח ש- $f(n+1)\ =\ 2\cdot5^{n+1}-7\cdot3^{n+1}$.

מההגדרה הרקורסיבית של f ,

$$f(n+1)\ =\ 8f(n)-15f(n-1)$$

נציב את הנחות האינדוקציה:

$$=8(2\cdot5^n-7\cdot3^n)\ -\ 15(2\cdot5^{n-1}-7\cdot3^{n-1})$$

נפתח ונקבץ מחדש:

$$=(8\cdot2\cdot5-15\cdot2)5^{n-1}-(8\cdot7\cdot3-15\cdot7)3^{n-1}$$

$$=2\cdot25\cdot5^{n-1}-7\cdot9\cdot3^{n-1}$$

$$=2\cdot5^{n+1}-7\cdot3^{n+1}$$

הוכחנו כי $f(n+1) = 2\cdot5^{n+1} - 7\cdot3^{n+1}$, כלומר הראינו שהטענה נכונה עבור $n+1$.

לפי עקרון האינדוקציה השלמה, משני השלבים נובע שהטענה נכונה לכל n טבעי.

ב. לא. למשל 0 הוא אבר של $\mathbf{Z}$ ואינו מתקבל בתמונה של f :

נניח בשלילה כי קיים $n \in \mathbf{N}$ המקיים: $2\cdot5^n - 7\cdot3^n = 0$.

משמע $2\cdot5^n = 7\cdot3^n$.

שוויון זה לא ייתכן, למשל מהסיבה שאגף שמאל הוא זוגי ואגף ימין אי-זוגי.

לכן לא קיים n כזה. לפיכך 0 אינו בתמונה של f.

איתי הראבן