תשובה 1

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n+1}\binom{m}{n} = \sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{m!}{n!(m-n)!} = \sum_{n=0}^{m}\frac{m!}{(n+1)!(m-n)!}$$

נארגן ביטוי זה כך שיהיה דומה למקדם בינומי :

$$= \sum_{n=0}^{m}\frac{m+1}{m+1}\cdot\frac{m!}{(n+1)!(m-n)!} = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}\frac{(m+1)!}{(n+1)!(m-n)!} = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}\binom{m+1}{n+1}$$

נחליף משתנה בסכום האחרון, $i = n+1$:

$$= \frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m+1}\binom{m+1}{i} = \frac{1}{m+1}(2^{m+1}-1)$$

בצעד האחרון נעזרנו בכך ש- $\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i} = 2^{m+1}$ (תכונה ידועה של המקדמים הבינומיים,

ראו תחילת סעיף 3.2 בספר), בעוד שבסכום שאצלנו חסר המחובר $i = 0$.

תשובה 2

א. $(4\cdot 4)^3 = 16^3 = 4{,}096$

ב. תהי U קבוצת **כל** הפונקציות של B ל- $A\times A$. מהסעיף הקודם $|U| = 4{,}096$.

עבור $i = 1,2,3,4$, תהי F_i קבוצת הפונקציות f השייכות ל- U, אשר i **אינו** נמצא כאיבר ימני ואינו נמצא כאיבר שמאלי **באף אחד** מהזוגות שבתמונת f .

למשל הפונקציה g בדוגמא שבגוף השאלה שייכת ל- F_3 וגם ל- F_4 .

אנו מחפשים את גודל הקבוצה $U - \bigcup_{i=1}^{4}F_i$.

את F_1 ניתן לראות כקבוצת הפונקציות של B לקבוצה $\{2,3,4\}\times\{2,3,4\}$.

לכן, בדומה לסעיף א, $|F_1| = (3\cdot 3)^3 = 729$.

בדומה מובן כי עבור $i = 1,2,3,4$, $|F_i| = 729$.

נחשב חיתוכים בזוגות:

את $F_1 \cap F_2$ ניתן לראות כקבוצת הפונקציות של B לקבוצה $\{3,4\} \times \{3,4\}$.

לכן $\left|F_1 \cap F_2\right| = (2 \cdot 2)^3 = 64$.

מובן כי לכל $i \neq j$ זהו גם $|F_i \cap F_j|$. יש 6 חיתוכים בזוגות

חיתוכים משולשים:

כל חיתוך כזה הוא קבוצת הפונקציות של B לקבוצה בת איבר אחד. יש בדיוק פונקציה אחת השולחת את כל אברי B לאיבר קבוע. לכן עבור i,j,k שונים זה מזה, $|F_i \cap F_j \cap F_k| = 1$.

יש 4 חיתוכים משולשים.

החיתוך $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$ הוא ריק.

מעקרון ההכלה וההפרדה,

$$\left|U - \bigcup_{i=1}^{4} F_i\right| = |U| - 4|F_i| + 6|F_1 \cap F_2| - 4|F_1 \cap F_2 \cap F_3|$$

$$= 4{,}096 - 4 \cdot 729 + 6 \cdot 64 - 4 \cdot 1 = 1{,}560$$

תשובה 3

תהי U קבוצת כל הדרכים לחלק את **כל** האוכל למשפחות, ללא כל הגבלה.

בעזרת התשובות לממ"ח 04 שאלות 8, 9, נקבל אחרי ביצוע החישוב: $|U| = 1{,}301{,}300$.

תהי A_i $(i = 1,\ldots,5)$ קבוצת החלוקות ב- U, בהן משפחה i אינה מקבלת דבר.

(i) $|A_i| = D(4,12) \cdot D(4,9) = \binom{15}{12}\binom{12}{9} = 455 \cdot 220 = 100{,}100$.

יש 5 קבוצות A_i.

(ii) $|A_i \cap A_j| = D(3,12) \cdot D(3,9) = \binom{14}{12}\binom{11}{9} = 91 \cdot 55 = 5{,}005$ $(i \neq j)$.

יש 10 חיתוכים כאלה.

(iii) $|A_i \cap A_j \cap A_k| = D(2,12) \cdot D(2,9) = \binom{13}{12}\binom{10}{9} = 13 \cdot 10 = 130$ (i,j,k שונים זה מזה).

יש 10 חיתוכים כאלה.

(iv) חיתוך של 4 קבוצות A_i שונות הוא מצב יחיד, בו משפחה אחת מקבלת את כל האוכל.
יש 5 חיתוכים של רביעיות.

(v) חיתוך חמש הקבוצות A_i הוא ריק, כי יש לחלק את האוכל.

לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מספר החלוקות המקיימות את הדרישה הוא:

$$1{,}301{,}300 - 5 \cdot 100{,}100 + 10 \cdot 5{,}005 - 10 \cdot 130 + 5 - 0 = 849{,}555$$

תשובה 4

מכיון שאף אחד לא לחץ יד לעצמו, אדם שהגיע לטקס יכול ללחוץ לכל היותר 599 ידים.
מספר לחיצות הידים הקטן ביותר האפשרי הוא 0.

לכאורה יש לנו 600 אפשרויות למספר לחיצות ידים: המספרים $0,1,2,\ldots,599$.
אבל אם יש אדם שלחץ 599 ידים, משמע הוא לחץ **לכל שאר האנשים**.
במקרה כזה אין אדם שלא לחץ אף יד:
האדם שלחץ 599 ידים לחץ יותר מ- 0, וכל אחד אחר לחץ לפחות את ידו של אדם זה.

לפיכך יש שתי אפשרויות:
או שיש אדם שלחץ 599 ידים ואין אדם שלחץ 0 , משמע מספר לחיצות הידים השונות הוא בתחום $1,2,3,\ldots,599$,
או שאין אדם שלחץ 599 ידים ואז אולי יש אדם שלחץ 0, משמע מספר לחיצות הידים הוא בתחום $0,1,2,\ldots,598$.

בכל אחד משני המקרים יש 599 אפשרויות למספר לחיצות ידים.
ניישם את עקרון שובך היונים על כל אחד משני המצבים: בכל אחד מהמצבים יש 600 אנשים ורק 599 אפשרויות. לפי עקרון שובך היונים, בכל אחד מהמצבים יש (לפחות) שני אנשים שלחצו אותו מספר ידים.

המספר 600 בשאלה הוא כמובן שרירותי. אותה תוצאה נכונה לכל התכנסות של אנשים:
תמיד יש לפחות שני אנשים שלחצו אותו מספר ידים.

איתי הראבן