20416 - תאריך הבחינה: 5.7.2010 (סמסטר 2010ב - מועד 85)

שאלה 1

א. לכל $x > 0$ ולכל $n = 1,2,\ldots$, מתקיים:

$$F_{X|N=n}(x\,|\,n) = P\{X \le x \,|\, N = n\} = P\left\{\frac{Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_{2N}^2}{2} \le x \,\middle|\, N = n\right\}$$

$$= P\left\{Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_{2n}^2 \le 2x\right\}$$ [N וה-Z_i-ים בלתי-תלויים זה בזה]

$$= P\left\{\chi^2_{(2n)} \le 2x\right\} = F_{\chi^2_{(2n)}}(2x)$$ [סכום של ריבועי מ״מ $N(0,1)$ ב״ת הוא מ״מ חי-בריבוע]

לכן:
$$f_{X|N=n}(x\,|\,n) = \tfrac{d}{dx}F_{X|N=n}(x\,|\,n) = 2\cdot f_{\chi^2_{(2n)}}(2x) = 2\cdot\frac{\frac{1}{2}e^{-(1/2)\cdot 2x}(\frac{1}{2}\cdot 2x)^{n-1}}{\Gamma(n)} = \frac{e^{-x}x^{n-1}}{\Gamma(n)}$$

כלומר, למשתנה המקרי X בהינתן $N = n$ יש התפלגות גמא עם הפרמטרים $\lambda = 1$ ו- $t = n$.

ב. לכל $x > 0$ מתקיים:

$$f_X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{X,N}(x,n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{X|N=n}(x\,|\,n)P\{N = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{X|N=n}(x\,|\,n)P\{N = n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-x}x^{n-1}}{\Gamma(n)}\cdot(1-p)^{n-1}p = pe^{-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(1-p)x]^{n-1}}{(n-1)!} = pe^{-x}e^{(1-p)x} = pe^{-px}$$

כלומר, למשתנה המקרי X יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר $\lambda = p$.

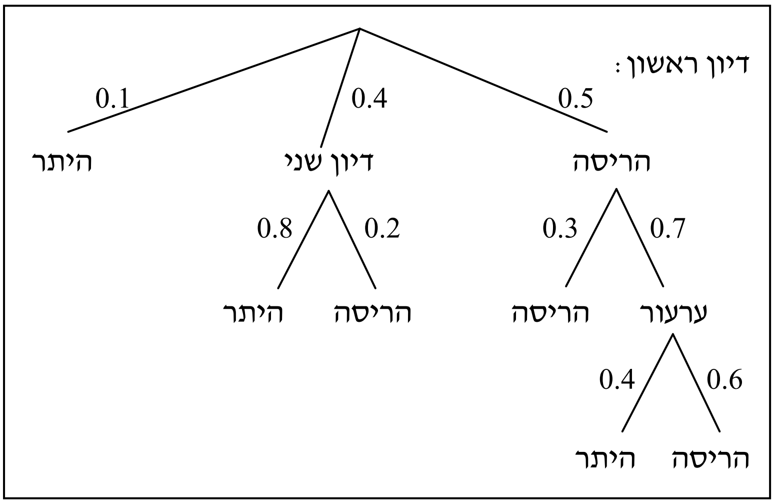
ג. לכל $n = 1,2,\ldots$ ולכל $x > 0$ מתקיים:

$$p_{N|X=x}(n\,|\,x) = \frac{f_{X,N}(x,n)}{f_X(x)} = \frac{\frac{e^{-x}x^{n-1}}{\Gamma(n)}\cdot(1-p)^{n-1}p}{pe^{-px}} = \frac{e^{-(1-p)x}[(1-p)x]^{n-1}}{(n-1)!}$$

לכן, למשתנה המקרי $N - 1$ בהינתן $X = x$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda = (1-p)x$.

שאלה 2

א. נצייר עץ-הסתברות מתאים לבעיה:



לפי עץ-ההסתברות, ההסתברות שמבנה בלתי-חוקי יקבל היתר היא:

$$0.1+0.4\cdot 0.8+0.5\cdot 0.7\cdot 0.4=0.56$$

ב1. ההסתברות לקבל היתר בדיון הראשון היא 0.1. לכן, ההסתברות המבוקשת היא הסתברות בינומית-שלילית עם הפרמטרים 2 ו-0.1 בנקודה 15. כלומר: $\binom{14}{1}0.1^2\cdot 0.9^{13}=0.0356$

ב2. נסמן ב- X_1 את מספר המבנים שקיבלו היתר בדיון הראשון בעניינם, ב- X_2 את מספר המבנים שקיבלו היתר לאחר הדיון הראשון בעניינם וב- X_3 את מספר המבנים שלא קיבלו היתר. נשים לב, של-X_i-ים יש התפלגות משותפת מולטינומית, עם הפרמטרים $n=20$ ו- $\underset{\sim}{p}=(0.1,0.46,0.44)$. לכן:

$$P\{X_1=3\,|\,X_1+X_2=14\}=\frac{P\{X_1=3,X_1+X_2=14\}}{P\{X_1+X_2=14\}}=\frac{P\{X_1=3,X_2=11\}}{P\{X_1+X_2=14\}}$$

$$=\frac{\binom{20}{3,11,6}0.1^3\cdot 0.46^{11}\cdot \cancel{0.44^6}}{\binom{20}{14}0.56^{14}\cdot \cancel{0.44^6}}=\binom{14}{3}\left(\frac{0.1}{0.56}\right)^3\left(\frac{0.46}{0.56}\right)^{11}=0.2381$$

שימו לב, שההתפלגות המותנית היא התפלגות בינומית עם הפרמטרים 14 ו- $\frac{0.1}{0.56}$.

ב3. מהאמור בסעיף הקודם, נובע כי למשתנה המקרי המותנה $X_2\,|\,X_1=3$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n=17$ ו- $p=\frac{0.46}{1-0.1}$. לכן: $\mathrm{Var}(X_2\,|\,X_1=3)=17\cdot\frac{0.46}{0.9}\cdot\frac{0.44}{0.9}=4.2479$

שאלה 3

א. נסמן ב-W את המאורע שנבחר לפחות כדור לבן אחד וב-Y את המאורע שנבחר לפחות כדור צהוב אחד.

$$P(W\cap Y)=1-P(W^C\cup Y^C)=1-P(W^C)-P(Y^C)+P(W^C\cap Y^C)$$

$$=1-\frac{\binom{20}{8}}{\binom{25}{8}}-\frac{\binom{20}{8}}{\binom{25}{8}}+\frac{\binom{15}{8}}{\binom{25}{8}}=0.77301$$

ב. נגדיר: $X_i=\begin{cases}1 & , \text{צבע } i \text{ נבחר במדגם 8 הכדורים}\\ 0 & , \text{אחרת}\end{cases}$ לכל $i=1,\ldots,5$

ונקבל כי: $X=\sum_{i=1}^{5}X_i=$ מספר הצבעים השונים של 8 הכדורים שנבחרו

עתה, לכל $i=1,\ldots,5$ מתקיים: $E[X_i]=P\{X_i=1\}=1-\frac{\binom{20}{8}}{\binom{25}{8}}=1-0.11647=0.88353$

לכן: $E[X]=\sum_{i=1}^{5}E[X_i]=5\cdot 0.88353=4.41765$

ג. בסימוני הסעיף הקודם, נקבל כי: $\mathrm{Var}(X_i)=P\{X_i=1\}P\{X_i=0\}=0.88353\cdot 0.11647=0.102904$

ולכל $1\le i\ne j\le 5$ מתקיים: $P\{X_i=1,X_j=1\}=0.77301$ [לפי סעיף א]

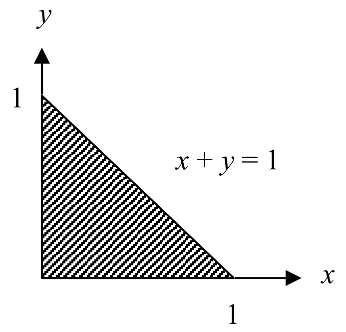
$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=0.77301-0.88353^2=-0.0076137$

לכן: $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{5} \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 5 \cdot 0.102904 - 5 \cdot 4 \cdot 0.0076137 = 0.36225$

שאלה 4

תחום ההגדרה של פונקציית הצפיפות המשותפת של X ו- Y מסומן באיור הבא בקווקוו:

$0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1\ ,\ 0 \le x + y \le 1 \qquad , \qquad f(x,y) = 3(x+y)$



א. לכל $0 \le x \le 1$:

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 3(x+y)\,dy = \left[3xy + \frac{3y^2}{2}\right]_0^{1-x} = \frac{3}{2}(1-x^2)$$

ב. לכל $0 \le x \le 1$ מתקיים:

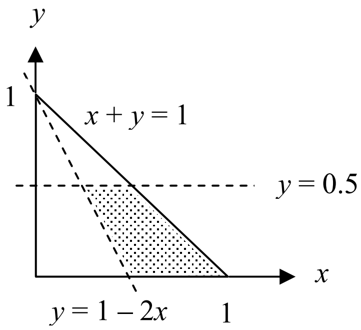
$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{3(x+y)}{\frac{3}{2}(1-x^2)} = \frac{2(x+y)}{(1-x^2)} \qquad , \qquad 0 \le y \le 1-x$$

לכן:

$$f_{Y|X}(y|0.5) = \frac{2(0.5+y)}{(1-0.25)} = \tfrac{4}{3}(1+2y) \qquad , \qquad 0 \le y \le 0.5$$

ומכאן:

$$E[Y|X=0.5] = \int_0^{0.5} \tfrac{4}{3}(1+2y) \cdot y\,dy = \frac{4}{3}\left[\frac{y^2}{2} + \frac{2y^3}{3}\right]_0^{0.5} = \frac{5}{18} = 0.2\overline{7}$$



ג. נסמן את התחום שבו מתרחש המאורע $\{1 - 2X < Y < 0.5\}$.

אפשר לבטא את התחום המנוקד גם באופן הבא:

$$\{0 < Y < 0.5\ ,\ \tfrac{1-Y}{2} < X < 1 - Y\}$$

ובאמצעות הצגה זו לחשב את ההסתברות המבוקשת.

$$P\{1 - 2X < Y < 0.5\} = \int_0^{0.5} \int_{(1-y)/2}^{1-y} 3(x+y)\,dx\,dy = \int_0^{0.5} \left[\frac{3x^2}{2} + 3xy\right]_{(1-y)/2}^{1-y} dy$$

$$= \int_0^{0.5} \left[\tfrac{9}{8}(1-y)^2 + \tfrac{3}{2}y(1-y)\right] dy = \left[-\tfrac{9}{24}(1-y)^3 + \tfrac{3}{4}y^2 - \tfrac{3}{6}y^3\right]_0^{0.5}$$

$$= \tfrac{29}{64} = 0.453125$$

ד. X ו- Y תלויים, מכיוון שלא ניתן להציג את פונקציית הצפיפות המשותפת שלהם כמכפלה של שני גורמים: האחד תלוי ב- X בלבד והשני תלוי ב- Y בלבד.

שאלה 5

א. התפלגות הסכום של משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים היא פואסונית עם פרמטר שהוא סכום הפרמטרים של משתני הסכום. כלומר, התפלגות המספר הכולל של הקרמבו ששני העובדים אורזים בשעה אחת היא פואסונית עם הפרמטר $2.25\lambda^2$.

כעת, מכיוון שאפשר להציג כל משתנה מקרי פואסוני כסכום של משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, נוכל להשתמש במשפט הגבול המרכזי לחישוב הקירוב ל- λ. נסמן ב-X את המספר הכולל של הקרמבו ששני העובדים אורזים בשעה אחת, ונקבל:

$$P\{X > 280\} = P\{X \geq 280.5\} \cong P\left\{Z \geq \tfrac{280.5-2.25\lambda^2}{\sqrt{2.25\lambda^2}}\right\} = 1 - \Phi\left(\tfrac{280.5-2.25\lambda^2}{1.5\lambda}\right) = 0.3085$$

כלומר:
$$\Phi\left(\tfrac{280.5-2.25\lambda^2}{1.5\lambda}\right) = 0.6915 = \Phi(0.5)$$

ומכאן שמתקיימת המשוואה:
$$2.25\lambda^2 + 0.75\lambda - 280.5 = 0$$

ולכן:
$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{4.5}\left(-0.75 \pm \sqrt{\overset{=50.25}{0.75^2 + 2524.5}}\right) = \begin{cases} 11 \\ \cancel{-11.3 < 0} \end{cases}$$

כלומר, $\lambda \cong 11$.

ב. נסמן ב- X את הזמן האריזה (בדקות) של קרמבו מקרי. לפי נתוני הבעיה: $X \sim N(\mu, 0.035^2)$.

כמו כן, מתקיים:
$$P\{X < 0.12359\} = 0.75$$

כלומר:
$$P\{X < 0.12359\} = P\left\{Z < \tfrac{0.12359-\mu}{0.035}\right\} = \Phi\left(\tfrac{0.12359-\mu}{0.035}\right) = 0.75 = \Phi(0.674)$$

ומכאן מקבלים כי:
$$\tfrac{0.12359-\mu}{0.035} = 0.674 \qquad \Rightarrow \qquad \mu = 0.12359 - 0.674 \cdot 0.035 = 0.1$$

ג. מספר הקרמבו (מתוך ה-20), שזמן האריזה שלהם קצר מ-0.12 דקות <u>בהינתן</u> שזמן האריזה שלהם עולה על 0.09 דקות, הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $n = 20$ ו- $p = P\{X < 0.12 \mid X > 0.95\}$. לכן, נחשב תחילה את פרמטר ההסתברות ואחר-כך נמצא את השונות המבוקשת.

$$p = P\{X < 0.12 \mid X > 0.09\} = \frac{P\{0.09 < X < 0.12\}}{P\{X > 0.09\}} = \frac{\Phi(0.5714) - \Phi(-0.2857)}{\Phi(0.2857)}$$

$$= \frac{0.7162 - (1 - 0.6125)}{0.6125} = 0.5367$$

ומכאן, השונות:
$$20 \cdot 0.5367 \cdot 0.4633 = 4.973$$