טענות להוכחה בבחינה (19.2.10)

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב - 20425

בכל בחינה עשויות להופיע טענות, מן הרשימה המובאת להלן, שאותן תִּדָּרשו להוכיח במדויק.

לצד כל טענה מובא מציין מקום להוכחתה. זהו נוסח ההוכחה שאותו עליכם לכתוב בבחינה.

משקל הטענות שתופענה בבחינה לא יעלה על 25 נקודות, ואף ייתכן שיהיה נמוך מזה.

הטענות עשויות להופיע ביותר מאשר שאלה אחת.

1. יהיו E ו-F מאורעות במרחב מדגם S. הוכח כי: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

הוכחה: בספר הקורס, עמוד 36.

2. יהיו F ו-G מאורעות זרים של ניסוי מקרי כלשהו. הוכח כי בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה, ההסתברות שהמאורע F יתרחש לפני המאורע G היא: $\dfrac{P(F)}{P(F)+P(G)}$

הוכחה: במדריך הלמידה, עמוד 46, או בדומה לפתרון תרגיל 19ב בקובץ התרגילים לפרק 3.

3. יהי X משתנה מקרי בדיד, שתוחלתו סופית, ויהיו a ו-b קבועים ממשיים. הוכח כי:

$$E[aX+b] = aE[X]+b \quad ; \quad \text{Var}(aX+b) = a^2\text{Var}(X)$$

הוכחה: תוחלת – בספר הקורס, עמוד 157 ; שונות – בספר הקורס, עמוד 159.

4. יהי X משתנה מקרי בדיד, שתוחלתו ושונותו סופיות. הוכח כי: $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

הוכחה: **הנוסחה החלופית לשונות** – בספר הקורס, עמודים 158-9.

5. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו-p $(0 < p < 1)$. הוכח כי:

$$E[X] = np$$
$$\text{Var}(X) = np(1-p)$$

הוכחה: בספר הקורס, תוחלת – עמודים 347-8 ; שונות – עמודים 364-5.

6. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \lambda \quad ; \quad \text{Var}(X) = \lambda$

הוכחה: בספר הקורס, תוחלת ושונות – עמוד 172.

7. יהי X משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים N, m ו-n. הוכח כי: $E[X] = n \cdot \frac{m}{N}$

הוכחה: תוחלת – בספר הקורס, עמוד 348.

8. יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

הוכחה: בספר הקורס, עמודים 237-8.

9. הוכח: אם מאורע מסוים מתרחש בהתאם לַהנחות של תהליך-פואסון עם קצב λ, אז משך הזמן החולף עד להתרחשות המופע הראשון של המאורע (החל מזמן 0) הוא משתנה מקרי מעריכי עם אותו הפרמטר λ.

הוכחה: במדריך הלמידה, עמודים 108-9.

10. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה.
הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda_X+\lambda_Y$.

הוכחה: במדריך הלמידה, עמוד 142.

11. יהיו X ו- Y משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפרמטר p $(0<p<1)$.
הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים $(2,p)$.

הוכחה: אין. (בדומה לפתרון תרגיל 6 בקובץ התרגילים לפרק 6, באתר הקורס.)

12. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה.
הוכח שלמשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X+Y=n$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$.

הוכחה: במדריך הלמידה, עמודים 145-6.

13. יהי $Y=a+bX$, ונניח כי $\sigma_X^2>0$. הראה כי:
$$\rho(X,Y)=\begin{cases}+1 & , \quad b>0\\ -1 & , \quad b<0\end{cases}$$

הוכחה: במדריך הלמידה, עמוד 188.

14. יהיו X_1, X_2, ..., X_n משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת ושונות סופיות, μ ו- σ^2, בהתאמה. הוכח כי:
$$E[\overline{X}]=\mu \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(\overline{X})=\sigma^2/n$$

הוכחה: בספר הקורס, תוחלת – עמוד 346 ; שונות – עמוד 363.

15. יהיו X_1, X_2, ..., X_r משתנים מקריים בעלי פונקציית התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים n ו- p_1, p_2, ..., p_r .

הוכח: א. למשתנה המקרי X_i יש התפלגות שולית בינומית עם הפרמטרים n ו-p_i .

ב. למשתנה המקרי המותנה X_1 בהינתן $X_2=j$, לכל $j=0,1,...,n$, יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n-j$ ו- $p_1/(1-p_2)$.

ג. $Cov(X_i,X_j)=-np_ip_j$

הוכחות: א ו-ב: באתר הקורס, בפתרון תרגיל 7 בקובץ התרגילים לפרק 6 ;
ג: באתר הקורס, בפתרון תרגיל 2א בקובץ התרגילים לפרק 7.

16. יהיו X ו- Y משתנים מקריים בדידים בעלי תוחלות ושונויות סופיות. הוכח:
$$E[X]=E[E[X\mid Y]]$$
$$\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X\mid Y)]+\mathrm{Var}(E[X\mid Y])$$

הוכחה: **נוסחאות התוחלת והשונות המותנות** – בספר הקורס, תוחלת – עמוד 374 ; שונות – עמוד 385.

17. הוכח: אם N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים אי-שליליים, ואם X_1, X_2, ... הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב-N, אז מתקיים:
$$E\left[\sum_{i=1}^{N}X_i\right]=E[N]E[X_1]$$
$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)=E[N]\mathrm{Var}(X_1)+(E[X_1])^2\,\mathrm{Var}(N)$$

הערה: כאשר $N=0$, סכום המשתנים שווה גם הוא ל-0.

הוכחה: **תוחלת ושונות סכום מקרי** – בספר הקורס, תוחלת – עמוד 375 ; שונות – עמוד 386.

18. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי: $-\infty < t < \infty$, $M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n$

הוכחה: בספר הקורס, עמוד 393.

19. יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי: $t < -\ln(1-p)$, $M_X(t) = \dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$

הוכחה: אין. (חישוב לפי הגדרת הפונקציה יוצרת המומנטים.)

20. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$.

הוכח כי: $-\infty < t < \infty$, $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

הוכחה: בספר הקורס, עמוד 394.