שאלה 1

האם קיים גרף בעל סדרת הדרגות הבאות ?

א. 3, 3, 3, 3, 3, 3

ב. 3, 3, 3, 3, 3

ג. 5, 4, 3, 2, 1, 1

ד. האם ייתכן גרף שבו דרגת כל קדקד היא 3 יהיו 100 צלעות ?

שאלה 2

נסמן ב – $\Delta(G)$ את הדרגה המקסימלית ב – G וב – $\delta(G)$ את הדרגה המינימלית.

הוכיחו כי $\Delta(G) \geq 2 \cdot \frac{|E|}{|V|} \geq \delta(G)$.

שאלה 3

הוכחו כי בכל גרף לא מכוון עם יותר מקודקוד אחד קיימים שני קודקודים בעלי אותה דרגה.

שאלה 4

הוכיחו כי גרף לא מכוון הוא קשיר אס"ם בכל קבוצת קודקודים לא ריקה ושאינה מכילה את כל קודקוד הגרף S, ישנה קשת שקצה אחד שלה ב-S והשני איננו ב-S.

שאלה 5 – **הוכחה על דרך הבנייה (הוכחה קונסטרוקטיבית)**

קשירות בגרף לא מכוון לעומת קשירות חזקה בגרף מכוון.

(א) נתון $G=(V,E)$ גרף **לא מכוון**, קשיר, עם לפחות שני קדקודים. הוכיחו כי תמיד קיים קדקוד, שלאחר הסרתו מהגרף עדיין מתקבל גרף קשיר.

(ב) הציגו גרף **מכוון**, קשיר היטב, $H=(V,E)$ כך שלאחר הסרה של **כל** קדקוד $v \in V$ מהגרף, תמיד יתקבל גרף שאיננו קשיר היטב.

שאלה 6

במדינה מסוימת יש n ערים וחברת תעופה אחת. נתון כי מעיר הבירה יוצאים 21 קוי תעופה ומעיר נתונה נוספת L יוצא רק קו תעופה אחד, מכל שאר הערים יוצאים 20 קוי תעופה. הוכיחו כי ניתן להגיע מעיר הבירה לעיר L (ייתכן כי במעבר בערים נוספות).

(הטענה הכללית: אם בגרף יש בדיוק שני קודקודים עם ערכיות אי-זוגית, אז יש מסלול ביניהם).

שאלה 7

יהי G גרף פשוט, נסמן ב – $\delta(G)$ את הדרגה המינימלית בגרף. נניח כי $\delta(G) > 1$.

א. הוכיחו כי יש ב – G מסלול פשוט באורך $\delta(G)$ לפחות.

ב. הוכיחו כי יש ב – G מעגל פשוט באורך $\delta(G) + 1$ לפחות.

שאלה 8

א. יהי G גרף לא מכוון, לא קשיר, עם שני רכיבי קשירות. הוכיחו כי הגרף המשלים $\bar{G}$ קשיר והקוטר שלו הוא לכל היותר 2.

ב. יהי G גרף לא מכוון עם n קודקודים שבו דרגת כל קודקוד היא לפחות $\frac{n-1}{2}$. הוכיחו כי G קשיר והקוטר שלו הוא לכל היותר 2.

שאלה 9

G הוא גרף מכוון ו- G′ הוא גרף תשתית לא מכוון של G, כלומר מכיל אותם צמתים כמו G ויש לו קשתות בין צמתים שהיו ביניהם קשתות ב-G.

הוכח כי הגרף G הוא קשיר חזק אמ"מ :

1. גרף התשתית G' הוא קשיר וכן
2. כל קשת ב- G שייכת למעגל מכוון.

שאלה 10

בסעיפים הבאים אנחנו מניחים כי $G=(V,E)$ גרף קשיר.

א. הוכיחו או הפריכו: עבור **כל** עץ פורש T של G, קיים עץ DFS, שגרף התשתית שלו הוא T (גרף התשתית של גרף מכוון הוא גרף **לא** מכוון, המתקבל על-ידי "הסרת" הכיוונים מהקשתות).

ב. הוכיחו או הפריכו: לכל עצי ה-DFS של G יש אותו מספר עלים.

שאלה 11

שאלה 2 - BFS מול DFS (25 נק'). יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר ולא מכוון, ויהי $s \in V$. נסמן ב- T_{BFS} עץ BFS של G שמושרש ב- s, ונסמן ב- T_{DFS} עץ DFS של G שמושרש ב- s. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הנפרדות הבאות:

(א) לכל T_{BFS} ולכל T_{DFS} מתקיים שהעומק של T_{BFS} קטן או שווה לעומק של T_{DFS}.

(ב) לכל T_{BFS} ולכל T_{DFS} מספר העלים של T_{BFS} גדול או שווה למספר העלים של T_{DFS}.

שאלה 12

נתון גרף לא מכוון G עם מקור s ויעד t. ברצוננו למצוא אוסף גדול ככל האפשר של מסלולים זרים בצלעות מ-s ל-t. (שני מסלולים הינם זרים בצלעות אם אין להם אף צלע משותפת). נביט באלגוריתם הבא: מתחילים עם הגרף G. באיטרציה i מריצים BFS על הגרף הנוכחי למציאת מסלול P_i מ-s ל-t. אם נמצא מסלול P_i באיטרציה הנוכחית, אז מוחקים את כל הצלעות של P_i מהגרף וממשיכים לאיטרציה הבאה. אם לא נמצא מסלול P_i באיטרציה הנוכחית, אז עוצרים ומחזירים כפלט את כל המסלולים $P_1,\dots,P_{i-1}$, שנמצאו באיטרציות קודמות. הוכיחו/הפריכו את הטענה הבאה: האלגוריתם מוצא אוסף גדול ככל האפשר של מסלולים זרים בצלעות מ-s ל-t.

שאלה 13

בהנתן גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$, **הקוטר** של הגרף מוגדר כמרחק המקסימלי בין שני צמתים בגרף (כזכור המרחק בין שני צמתים הוא אורך המסלול הקצר ביותר המחבר ביניהם).

כתבו אלגוריתם יעיל המחשב את הקוטר של גרף קשיר **חסר מעגלים**. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.