תשובה *1*

א. הוכחה ישירה ע"י פיתוח אגף שמאל וקיבוץ איברים. את המקרים $n = 0,1,2$ יש לבדוק

בנפרד: למשל, עבור $n = 2$ לא נכונה הנוסחה $\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$ (מדוע?) ובמקומה יש

להשתמש בהגדרת המקרים החריגים (עמ' *30* בספר הלימוד) לפיה $\binom{2}{3} = 0$.

ב. בשאלה *3.15* מוכחת הזהות $\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$. בזכות הגדרת המקרים החריגים,

ניתן להמשיך את הסכום באגף שמאל כלפי מטה עד $j = 0$ (כל האיברים הנוספים שווים *0*):

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1} \qquad (*)$$

אנו מעוניינים בסכום:

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots n^3 = \sum_{j=0}^{n} j^3$$

בהצבת תוצאת סעיף א נקבל:

$$= \sum_{j=0}^{n}\left(\binom{j}{1} + 6\binom{j}{2} + 6\binom{j}{3}\right)$$

ובעזרת הנוסחה (*) נקבל:

$$= \binom{n+1}{2} + 6\binom{n+1}{3} + 6\binom{n+1}{4}$$

זהו הביטוי הבינומי המבוקש. אם רוצים, ניתן לפתח אותו ולקבל, לאחר סידור, ביטוי מפורש לסכום החזקות השלישיות:

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

תשובה *2*

כל קטע בדיאגרמת הסה של קבוצה סדורה-חלקית מייצג זוג איברים, שאחד מהם מכסה את השני. מהגדרת המושג "מכסה", קבוצה $B \in P(A)$ מכסָה קבוצה $C \in P(A)$ לגבי רלצית ההכלה אם ורק אם קיים:

$B \subset C$ ואין אף קבוצה $D \in P(A)$ המקיימת $B \subset D \subset C$ (הכלות-ממש).

עבור B,C סופיות, מובן שתנאי זה מתקיים אם ורק אם קיים:

$C \subset B$ ומספר אברי C קטן ב- *1* ממספר אברי B.

כעת, לקבוצה A בת n איברים יש $\binom{n}{k}$ תת-קבוצות בנות k איברים.

אם B בת k איברים, יש לה k תת-קבוצות בנות $k-1$ איברים (ע״י השמטת איבר אחד של B בכל פעם, או אם נרצה, כמקרה פרטי של הנוסחה הנ״ל). נשים לב שטענה זו נכונה גם אם B ריקה.

לפיכך מספר הקטעים בדיאגרמת הסה של רלצית ההכלה מעל $P(A)$ הוא $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

לפי שאלה *3.9* בעמ׳ *71* בכרך ״קומבינטוריקה״, סכום זה שווה $n \cdot 2^{n-1}$.

תשובה 3

נתחיל בסעיף c. מספר הפונקציות של קבוצה A בת n איברים <u>על</u> קבוצה B בת k איברים ניתן לחישוב בעזרת עקרון ההכלה וההפרדה (דוגמא לחישוב כזה מופיעה בשאלה *4.14* בעמ׳ *89* בספר הלימוד):

מספר כל הפונקציות של A ל- B הוא k^n (שאלה *1.32* עמ׳ *17* בספר הלימוד).

ב.ה.כ. נניח כי $B=\{1,2,\ldots,k\}$. עבור $i=1,\ldots,k$ תהי F_i קבוצת כל הפונקציות של A ל- B אשר המספר i אינו נמצא בתמונתן. יש k קבוצות כאלו. לפי אותה נוסחה (מספר כל הפונקציות של קבוצה נתונה לאחרת), גודל כל קבוצה כזו הוא $(k-1)^n$. כדי ליישם את עקרון ההכלה וההפרדה, עלינו להתבונן בחיתוכים של j קבוצות F_i שונות. יש $\binom{k}{j}$ דרכים לבחור j קבוצות F_i שונות. חיתוך כל j קבוצות שונות כאלו מכיל $(k-j)^n$ פונקציות. מכאן, לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מספר כל הפונקציות של A על B הוא

$$k^n - k(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \binom{k}{3}(k-3)^n + \ldots,$$

כלומר שווה לסעיף d (המתוקן).

את יתר הסעיפים לא ננסה לחשב, אלא נשווה קומבינטורית בינם לבין סעיף c, באופן הבא:

כל פונקציה f של A על $B = \{1,2,\ldots,k\}$ מגדירה "חלוקה סדורה" באורך k של A, כלומר סדרה של k תת-קבוצות של A, זרות ולא-ריקות, שאיחודן הוא A:

הקבוצה הראשונה בסדרה היא $A_1 = \{x \in A \mid f(x) = 1\}$.

בדומה, לכל $1 \le i \le k$ נגדיר $A_i = \{x \in A \mid f(x) = i\}$.

מכיוון ש- f היא על, כל הקבוצות הללו לא ריקות. מכיוון ש- f היא פונקציה של A, הרי הן זרות ואיחודן הוא כל A. אולם קיבלנו יותר מאשר חלוקה של A: בבניה זו הגדרנו מיהי הקבוצה הראשונה, השניה וכו', כלומר קיבלנו סדרה של קבוצות, להבדיל מחלוקה "רגילה" בה אין חשיבות לסדר הקבוצות בחלוקה.

* מצד שני, סדרת k הקבוצות $(A_1,\ldots,A_k)$ שקיבלנו מתוך f מגדירה לגמרי את f: היא קובעת לאן עובר כל איבר של A: האיברים השייכים ל- A_i עוברים ל- i. כמו כן, כל "חלוקה סדורה" של A מגדירה באותו אופן פונקציה של A על $\{1,2,\ldots,k\}$. לפיכך מספר הפונקציות של A על $\{1,2,\ldots,k\}$ הוא כמספר החלוקות הסדורות של A ל- k תת-קבוצות.

** הנה ניסוח מדויק יותר של הנ"ל: תהי F קבוצת הפונקציות של A על $\{1,2,\ldots,k\}$, ותהי G קבוצת כל הסדרות באורך k שאבריהן קבוצות חלקיות של A, כאשר בכל סדרה הקבוצות זרות זו לזו, לא-ריקות ואיחודן הוא A. הבניה שתיארנו מגדירה פונקציה של F ל- G: לכל $f \in F$ התאמנו סדרה $(A_1,\ldots,A_k)$ השייכת ל- G. ההסבר בפיסקה הקודמת מראה כי פונקציה זו של F ל- G היא חד-חד-ערכית ועל (האם ברור לך איזה קטע בפיסקה מראה שהיא חח"ע ואיזה קטע מראה שהיא על?) . מכאן השוויון בגודל בין שתי הקבוצות.

כעת, מכל חלוקה סדורה באורך k ניתן לקבל $k!$ חלוקות סדורות (כולל המקורית), ע"י תמורות בין k התת-קבוצות (שינוי סדר אברי החלוקה הסדורה). כל $k!$ החלוקות הסדורות הללו (ורק הן) מגדירות אותה חלוקה "רגילה", שבה אין חשיבות לסדר. לפיכך, מספר החלוקות הסדורות באורך k של A גדול פי $k!$ ממספר החלוקות ה"רגילות" של A ל-k תת-קבוצות לא-ריקות, שהוא המתואר בסעיף a.

נותר לטפל בסעיף b. לכל סדרה $(B_1,\ldots,B_k)$ המקיימת את תנאי סעיף b, נתבונן בסדרה

$$(*) \quad (B_1\,,\, B_2 - B_1\,,\, B_3 - B_2\,,\ldots,\, B_k - B_{k-1})$$

מהנתון ב- b נובע כי כל ההפרשים הללו אינם ריקים, הם זרים זה לזה ואיחודם הוא A. בכך הגדרנו פונקציה של קבוצת הסדרות המתוארות בסעיף b לקבוצת החלוקות הסדורות של A באורך k. האם פונקציה זו היא חח"ע ועל? הַראו שכן, ע"י נימוק בסגנון דומה למה שעשינו בהשוואה בין c לבין החלוקות הסדורות, בפיסקאות המסומנות *, **. ראו גם פירוט לגבי הוכחת חח"ע ועל בעזרת פונקציה הפוכה, באוסף השאלות הפתורות, קבוצה *3* שאלה *1*.

לפיכך המספר המתואר ב- b שווה לזה המתואר ב- c. כאמור, מספר זה שווה למספר ב- d, וגדול פי $k!$ מזה של a.

תשובה 4

נסמן ב- A_i את קבוצת הלילות בהם פגשה הידועה את מכשפה i.
עבור $1 \le i, j, k, l \le 5$ ושונים זה מזה, הנתונים הם:

$$|A_i| = 10 \quad |A_i \cap A_j| = 5 \quad |A_i \cap A_j \cap A_k| = 3$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = 2 \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 1$$

לפי הכלה והפרדה בצורה המופיעה בעמ' *88*,

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_5| = 5 \cdot 10 - \binom{5}{2} \cdot 5 + \binom{5}{3} \cdot 3 - \binom{5}{4} \cdot 2 + 1 = 21$$

לאחר הוספת *6* לילות בודדים (אם נחשיב גם אותם כחלק מהועידה) על הר קירח, התשובה: *27*.

תשובה 5

עקב התנאי ב"הבהרה" (יתכן שתלמיד לקח למשל את התיק השייך לו אך לא את המימיה שלו), לא ניתן להשתמש בנוסחה לאי-סדר מלא. במקום זה יש לבצע חישוב הדומה לחישוב שבהוכחת הנוסחה לאי-סדר מלא (עמ' *90* בספר הלימוד):

לחלוקה של כל התיקים והמימיות ל- n הילדים, תיק אחד ומימיה אחת לכל ילד, נקרא מצב.

מספר כל המצבים, ללא הגבלות: $(n!)^2$ (מדוע?)

נסמן ב- A_i את קבוצת המצבים בהם ילד i מצא הן את המימיה והן את התיק השייכים לו.

עבור i נתון, יש $((n-1)!)^2$ מצבים כאלה (מדוע?).

עבור $1 \le j \le n$, החיתוך של j A_i-ים שונים מכיל בדיוק $((n-j)!)^2$ מצבים.

לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מספר המצבים המותרים בשאלה הוא:

$$(n!)^2 - \binom{n}{1}((n-1)!)^2 + \binom{n}{2}((n-2)!)^2 - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}((n-n)!)^2$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}((n-j)!)^2 = n! \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{(n-j)!}{j!}$$

אִתַּי הראבן

אפריל *1999*