פתרון ממ"ן 14

שאלה 1

הוכיחו את הזהות $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$ בשתי הדרכים הבאות:

א. אינדוקציה על n.

ב. שיקול קומבינטורי: ספירת מספר הקבוצות בנות $m+1$ מספרים מתוך הקבוצה $\{0,1,\ldots,n\}$ שבהן המספר הגדול ביותר הוא k.

תשובה

א. נבחר מספר טבעי m (שייחשב קבוע במהלך ההוכחה) ונוכיח שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

בסיס האינדוקציה יהיה $n=m$.

עבור $n=m$ הטענה היא: $\sum_{k=m}^{m}\binom{k}{m}=\binom{m+1}{m+1}$ כלומר $\binom{m}{m}=\binom{m+1}{m+1}$ וזה נכון.

נניח כעת שהטענה נכונה עבור n כאשר $n\geq m$ כלומר $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$.

נוכיח שהטענה נכונה ל- $n+1$ כלומר $\sum_{k=m}^{n+1}\binom{k}{m}=\binom{n+2}{m+1}$.

תוך שימוש בהנחת האינדוקציה מקבלים ש-

$\sum_{k=m}^{n+1}\binom{k}{m}=\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}+\binom{n+1}{m}=\binom{n+1}{m+1}+\binom{n+1}{m}$ ומתקיים:

$$\binom{n+1}{m+1}+\binom{n+1}{m}=\frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!}+\frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}=\frac{(n+1)!}{m!(n-m)!}\left[\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1-m}\right]$$
$$=\frac{(n+1)!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{n+2}{(m+1)(n+1-m)}=\frac{(n+2)!}{(m+1)!(n+1-m)!}=\binom{n+2}{m+1}$$

מכאן ש- $\sum_{k=m}^{n+1}\binom{k}{m}=\binom{n+2}{m+1}$.

הוכחנו שהטענה נכונה עבור $n+1$ מתוך הנחה שהיא נכונה ל-n ולכן לפי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n. מאחר שאותה הוכחה תקפה לכל m הוכחנו את מה שנדרש בשאלה.

ב. מספר איברי הקבוצה $\{0,1,\ldots,n\}$ הוא $n+1$. מספר הקבוצות החלקיות בנות $m+1$ מתוכה הוא כמספר הבחירות של $m+1$ איברים מתוך $n+1$ (בלי חשיבות לסדר) כלומר $\binom{m+1}{m+1}$,

נספור כעת את הקבוצות האלה בדרך אחרת. לכל $k \le n+1$ נמצא את מספר הקבוצות בנות $m+1$ איברים שבהן המספר הגדול ביותר הוא k. ברור שיש להתייחס רק ל-$k \ge m$ שכן, אם המספר הגדול ביותר בקבוצה הוא קטן מ- m אז הקבוצה חלקית ל- $\{0,1,\ldots,m-1\}$ ומספר האיברים בה אינו עולה על m.

לכל $k \ge m$ מספר הקבוצות החלקיות ל- $\{0,1,\ldots,n\}$ בנות $m+1$ איברים שבהן האיבר הגדול ביותר הוא k שווה למספר הקבוצות בנות m איברים שחלקיות ל- $\{0,1,\ldots,k-1\}$ וזה שווה למספר הבחירות (בלי חשיבות לסדר) של m איברים מתוך k כלומר ל- $\binom{m}{k}$.

מאחר שאין חפיפות בין הקבוצות שספרנו עבור ערכים שונים של k, נקבל בעזרת עקרון החיבור שמספר הקבוצות בנות $m+1$ איברים שחלקיות ל- $\{0,1,\ldots,n\}$ הוא $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}$

ומכאן ש- $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$.

שאלה 2

א. מיצאו את מספר הפונקציות $f:\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\to\{1,2,3,4\}$ המקיימות

$$|f^{-1}[\{1\}]| = |f^{-1}[\{2\}]| = |f^{-1}[\{3\}]| = |f^{-1}[\{4\}]|$$

ב. בשמונה מקומות המסומנים ב- $1,2,3,4,5,6,7,8$ מסדרים את הסימנים $1,1,2,2,3,3,4,4$. מיצאו את מספר הסידורים שבהם אף אחד מהמספרים $1,2,3,4$ לא יושב במקום שמסומן במספר הזהה לו.

תשובה

א. נשים לב ש- $f^{-1}[\{1\}]\cup f^{-1}[\{2\}]\cup f^{-1}[\{3\}]\cup f^{-1}[\{4\}]=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ כי כל איבר בתחום הוא מקור של אחד מהאיברים מהטווח כלומר מתוך הקבוצה $\{1,2,3,4\}$.

מכאן נקבל ש- $|f^{-1}[\{1\}]\cup f^{-1}[\{2\}]\cup f^{-1}[\{3\}]\cup f^{-1}[\{4\}]|=|\{1,2,3,4,5,6,7,8\}|=8$.

בנוסף ארבע הקבוצות הנ"ל הן זרות זו לזו כי אם נניח למשל ש- $x\in f^{-1}[\{1\}]\cap f^{-1}[\{2\}]$ נקבל ש- $f(x)=1$ וגם ש- $f(x)=2$ בסתירה להגדרת מושג הפונקציה.

לכן
$$|f^{-1}[\{1\}]\cup f^{-1}[\{2\}]\cup f^{-1}[\{3\}]\cup f^{-1}[\{4\}]|=$$
$$=|f^{-1}[\{1\}]|+|f^{-1}[\{2\}]|+|f^{-1}[\{3\}]|+|f^{-1}[\{4\}]|=8$$

מאחר שלארבע הקבוצות יש אותה עוצמה נסיק שלכל אחת מהן יש בדיוק שני איברים.
לסיכום, עלינו למצוא את מספר הפונקציות $f:\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\to\{1,2,3,4\}$ המעתיקות בדיוק שני איברים ל- i, עבור כל $i\in\{1,2,3,4\}$.

יש $\binom{8}{2}$ אפשרויות לבחירת שני איברים מהתחום שיועתקו ל- 1, ולאחר כל בחירה כזו, יוותרו

$\binom{6}{2}$ אפשרויות לבחירת שני איברים שיועתקו ל- 2. לאחר כל שתי הבחירות הנ"ל יהיו $\binom{4}{2}$ אפשרויות לבחירת שני איברים שיועתקו ל- 3, ואחרי כל זה, יישארו $\binom{2}{2}$ אפשרויות לבחירת שני איברים שיועתקו ל- 4 .

לכן מספר הפונקציות המקיימות את התנאי הנתון הוא $\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$.

דרך אחרת: לכל פונקציה המקיימת את תנאי השאלה מתאימה מילה באורך 8 הכתובה בסימנים 1,1,2,2,3,3,4,4 וגם להפך. לכן מספר הפונקציות שווה למספר התמורות עם חזרות של $1,1,2,2,3,3,4,4$ כלומר ל- $\frac{8!}{(2!)^4}$. לא קשה לבדוק ש- $\frac{8!}{(2!)^4} = \binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$

ב. ניעזר בעקרון ההכלה וההפרדה.

לכל $1 \le i \le 4$ נסמן ב- A_i את מספר הסידורים שבהם המספר i יושב במקום שמספרו i .

מספר הסידורים בקבוצה A_i הוא כמספר התמורות עם חזרות של i, j, j, k, k, l, l כאשר $j, k, l \in \{1,2,3,4\}$ הם שלושת המספרים השונים מ- i (כי אותם ניתן לסדר באופן חופשי בשבעת המקומות שמספרם שונה מ- i).

לכן $|A_i| = \frac{7!}{1!(2!)^3}$, לכל $1 \le i \le 4$ ויש $\binom{4}{1}$ מקרים כאלה.

לכל $1 \le i < j \le 4$ מספר הסידורים בקבוצה $A_i \cap A_j$ הוא כמספר התמורות עם חזרות של i, j, k, k, l, l כאשר $k, l \in \{1,2,3,4\}$ הם שני המספרים השונים מ- i, j (כי אותם ניתן לסדר באופן חופשי בששת המקומות שמספרם שונה מ- i ו- j).

לכן $|A_i \cap A_j| = \frac{6!}{(1!)^2(2!)^2}$ לכל $1 \le i < j \le 4$ ויש $\binom{4}{2}$ מקרים כאלה.

לכל $1 \le i < j < k \le 4$ מספר הסידורים בקבוצה $A_i \cap A_j \cap A_k$ הוא כמספר התמורות עם חזרות של i, j, k, l, l כאשר $l \in \{1,2,3,4\}$ הוא המספר השונה מ- i, j, k (כי אותם ניתן לסדר באופן חופשי בחמשת המקומות שמספרם שונה מ- i, j ו- k).

לכן $|A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{5!}{(1!)^3(2!)}$ לכל $1 \le i < j < k \le 4$ ויש $\binom{4}{3}$ מקרים כאלה.

ולבסוף $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$ הוא כמספר התמורות של $1,2,3,4$ (כי בארבעת המקומות המסומנים ב- $1,2,3,4$ יושבים המספרים $1,2,3,4$ בהתאמה וארבעת המקומות הנותרים ניתן לסדר חופשית את $1,2,3,4$).

לכן $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4!$.

נסמן ב- U את קבוצת כל הסידורים בשורה של $1,1,2,2,3,3,4,4$. אז $|U| = \frac{8!}{(2!)^4}$.

מצד שני, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ היא קבוצת הסידורים של $1,1,2,2,3,3,4,4$ שבהם **לפחות אחד**

מהמספרים $1,2,3,4$ יושב במקום שמסומן במספר הזהה לו.

לכן מספר הסידורים שבהם **אף אחד** מהמספרים $1,2,3,4$ לא יושב במקום שמסומן במספר הזהה לו הוא $|U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)|$.

מעקרון ההכלה וההפרדה נקבל:

$$|U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| = |U| - |(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| =$$

$$= \frac{8!}{(2!)^4} - \binom{4}{1}\frac{7!}{1!(2!)^3} + \binom{4}{2}\frac{6!}{(1!)^2(2!)^2} - \binom{4}{3}\frac{5!}{(1!)^3(2!)} + \binom{4}{4}4! =$$

$$= 4!\left(\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{16} - 4\cdot\frac{7\cdot 6\cdot 5}{8} + 6\cdot\frac{6\cdot 5}{4} - 4\cdot\frac{5}{2} + 1\right) =$$

$$= 24(105 - 105 + 45 - 10 + 1) = 864$$

שאלה 3

מפזרים 13 כדורים זהים ב- 6 תאים שונים.

א. מיצאו את מספר הפיזורים שבהם שלושת התאים הראשונים מכילים ביחד לפחות 10 כדורים.

ב. מיצאו את מספר הפיזורים שבהם אין אף תא שבו 3 כדורים בדיוק.

תשובה

א. לפני שניגש לפתרון נציין דרך שנראית לכאורה נכונה אך למעשה היא שגויה:

"נפזר תחילה 10 כדורים בשלושת התאים הראשונים, ואת שאר הכדורים נפזר חופשית בששת התאים".

אלא שבדרך זו אנחנו סופרים בין השאר את שתי הדרכים הבאות, כשונות:

דרך 1: שמים קודם 10 כדורים בתא הראשון $|\underline{10}|\underline{0}|\underline{0}|\underline{0}|\underline{0}|\underline{0}|$ ולאחר מכן שמים שניים משלושת הכדורים הנותרים בתא השני ואת האחרון בתא הרביעי.

מקבלים את הסידור $|\underline{10}|\underline{2}|\underline{0}|\underline{1}|\underline{0}|\underline{0}|$.

דרך 2: שמים קודם 9 כדורים בתא הראשון ואחד בתא השני, $|\underline{9}|\underline{1}|\underline{0}|\underline{0}|\underline{0}|\underline{0}|$ (כך פיזרנו תחילה 10 כדורים בשלושת התאים הראשונים) ולאחר מכן מפזרים את שלושת הכדורים הנותרים כך: אחד בתא הראשון, אחד בתא השני ואחת בתא הרביעי.

מקבלים שוב את הסידור $|\underline{10}|\underline{2}|\underline{0}|\underline{1}|\underline{0}|\underline{0}|$.

לכן הדרך הזו שגויה שכן, אנו סופרים לעיתים אותו פיזור כמה פעמים.

וכעת פתרון נכון:

נפריד את הפיזורים האפשריים ל- 4 קבוצות. נסמן ב- A_i את קבוצת הפיזורים שבהם מפזרים בדיוק i כדורים בשלושת התאים הראשונים.

קבוצת הפיזורים שעלינו לספור היא $A_{10} \cup A_{11} \cup A_{12} \cup A_{13}$ ומאחר שאלה קבוצות זרות זו לזו, נקבל מעקרון החיבור ש- $|A_{10} \cup A_{11} \cup A_{12} \cup A_{13}| = |A_{10}| + |A_{11}| + |A_{12}| + |A_{13}|$.

מספר הפיזורים של k כדורים זהים ב-n תאים שונים הוא: $D(n,k)=\binom{n-1+k}{k}=\binom{n-1+k}{n-1}$.

לכן:

$|A_{10}|=D(3,10)\cdot D(3,3)$ (מפזרים 10 כדורים בשלושת התאים הראשונים ו- 3 כדורים בתאים הנותרים)

$|A_{11}|=D(3,11)\cdot D(3,2)$ (מפזרים 11 כדורים בשלושת התאים הראשונים ו- 2 כדורים בתאים הנותרים)

$|A_{12}|=D(3,12)\cdot D(3,1)$ (מפזרים 12 כדורים בשלושת התאים הראשונים ו- 1 כדורים בתאים הנותרים)

$|A_{13}|=D(3,13)\cdot D(3,0)$ (מפזרים 13 כדורים בשלושת התאים הראשונים ו- 0 כדורים בתאים הנותרים).

לכן מספר כל הפיזורים האפשריים הוא:

$$D(3,10)D(3,3)+D(3,11)D(3,2)+D(3,12)D(3,1)+D(3,13)D(3,0)$$
$$=\binom{12}{2}\binom{5}{2}+\binom{13}{2}\binom{4}{2}+\binom{14}{2}\binom{3}{2}+\binom{15}{2}\binom{2}{2}$$
$$=66\cdot 10+78\cdot 6+91\cdot 3+105\cdot 1=1506$$

ב. יש לשים לב שהתנון של סעיף א' אינו נוגע גם לסעיף זה. רק הנתון שבתחילת השאלה שייך לשני הסעיפים.

יותר קל לחשב מספר הפיזורים שבהם יש בדיוק 3 כדורים בתאים מסוימים לכן נחשב את מספר הפיזורים שבהם קיים לפחות תא אחד שבו בדיוק 3 ככדורים ונחסר את התוצאה ממספר כל הפיזורים האפשריים.

נסמן ב- U את קבוצת כל הפיזורים של 13 כדורים ב- 6 תאים שונים וב- A_i $(1\le i\le 6)$ קבוצת הפיזורים מתוך U שבהם תא i מכיל בדיוק 3 כדורים.

מספר הפיזורים שבהם אין אף תא שבו 3 כדורים בדיוק הוא $|U\setminus\bigcup_{i=1}^{6}A_i|=|U|-|\bigcup_{i=1}^{6}A_i|$.

$|U|=D(6,13)=\binom{18}{5}$. את $|\bigcup_{i=1}^{6}A_i|$ נחשב בעזרת עקרון ההכלה וההפרדה:

לכל $1\le i\le 6$, $|A_i|=D(5,10)=\binom{14}{4}$ (שמים 3 כדורים בתא i ואת 10 הכדורים האחרים ב- 5 התאים הנותרים). יש $\binom{6}{1}$ מקרים כאלה.

לכל $1\le i<j\le 6$, $|A_i\cap A_j|=D(4,7)=\binom{10}{3}$ (שמים 3 כדורים בכל אחד מהתאים i,j ואת 7 הכדורים האחרים ב- 4 התאים הנותרים). יש $\binom{6}{2}$ מקרים כאלה.

לכל $1\le i<j<k\le 6$, $|A_i\cap A_j\cap A_k|=D(3,4)=\binom{6}{2}$ (שמים 3 כדורים בכל אחד מהתאים i,j,k, ואת 4 הכדורים האחרים ב- 3 התאים הנותרים). יש $\binom{6}{3}$ מקרים.

לכל $1\le i<j<k<l\le 6$, $|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l|=D(2,1)=\binom{2}{1}$ (שמים 3 כדורים בל

אחד מהתאים i,j,k,l ואת הכדור האחרון באחד משני התאים הנותרים). יש $\binom{6}{4}$ מקרים.

כל החיתוכים האחרים של קבוצות A_i הם ריקים כי לא ייתכן ש- 5 תאים או יותר יכילו 3 כדורים כל אחד. בעזרת עקרון הכלה וההפרדה נקבל:

$$|U \setminus \bigcup_{i=1}^{6} A_i| = |U| - |\bigcup_{i=1}^{6} A_i| = \binom{18}{5} - \binom{6}{1}\binom{14}{4} + \binom{6}{2}\binom{10}{3} - \binom{6}{3}\binom{6}{2} + \binom{6}{4}\binom{2}{1}$$

שאלה 4

א. יהיו $p_1, p_2, ..., p_n$ מספרים ראשוניים **שונים** ו- $k_1, k_2, ..., k_n$ מספרים טבעיים. מיצאו את מספר המספרים הטבעיים המחלקים את $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$.

ב. מיצאו את מספר המספרים הטבעיים המחלקים לפחות אחד מהמספרים $10^{40}, 20^{30}, 40^{20}$.

תשובה

א. מספר טבעי מחלק את $M = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$ אם ורק אם הוא מהצורה $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ כאשר $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ מספרים טבעיים המקיימים $0 \le \alpha_i \le k_i$ לכל $1 \le i \le n$.

לכל מחלק של M יש הצגה יחידה מהצורה $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ לכן מספר המחלקים השונים של M שווה למספר ה- n-יות הסדורות $\langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \rangle$ שבהן $0 \le \alpha_i \le k_i$ לכל $1 \le i \le n$.

מאשר שכל אחד מהמעריכים α_i יכול לקבל $k_i + 1$ ערכים, נסיק בעזרת עקרון הכפל שמספר המחלקים של $M = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$ הוא $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_n+1)$

ב. נסמן:

A - קבוצת המחלקים של 10^{40},

B - קבוצת המחלקים של 20^{30},

C - קבוצת המחלקים של 40^{20}.

בשאלה מבקשים בעצם לחשב את $|A \cup B \cup C|$. נעשה זאת בעזרת עקרון ההכלה וההפרדה.

לשם כך נפרק תחילה את שלושת המספרים למכפלות של ראשוניים:

$10^{40} = 2^{40}5^{40}$, $20^{30} = 2^{60}5^{30}$, $40^{20} = 2^{60}5^{20}$.

בהתאם לתוצאה מסעיף א' נקבל:

$|A| = (40+1)(40+1) = 1681$, $|B| = (60+1)(30+1) = 1891$, $|C| = (60+1)(20+1) = 1281$.

$A \cap B$ היא קבוצת המספרים המחלקים את $2^{40}5^{40}$ וגם את $2^{60}5^{30}$ לכן זו קבוצת המספרים המחלקים את $2^{40}5^{30}$. מכאן ש- $|A \cap B| = (40+1)(30+1) = 1271$.

$B \cap C$ היא קבוצת המספרים המחלקים את $2^{60}5^{30}$ וגם את $2^{60}5^{20}$ לכן זו קבוצת המספרים המחלקים את $2^{60}5^{20}$. מכאן ש- $|B \cap C| = (60+1)(20+1) = 1281$.

$A\cap C$ היא קבוצת המספרים המחלקים את $2^{40}5^{40}$ וגם את $2^{60}5^{20}$ לכן זו קבוצת המספרים המחלקים את $2^{40}5^{20}$. מכאן ש- $|A\cap C| = (40+1)(20+1) = 861$.

$A\cap B\cap C$ היא קבוצת המספרים המחלקים את $2^{40}5^{40}$, $2^{60}5^{30}$ ו- $2^{60}5^{20}$ לכן זו קבוצת המספרים המחלקים את $2^{40}5^{20}$. מכאן ש- $|A\cap B\cap C| = (40+1)(20+1) = 861$.

לפיכך :
$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| &= |A|+|B|+|C| - |A\cap B| - |B\cap C| - |A\cap C| + |A\cap B\cap C|\\ &= 1681+1891+1281-1271-1281-861+861 = 2301\end{aligned}$$

שאלה 5

א. מיצאו את כל השלשות $\langle j,k,l\rangle$ של מספרים טבעיים המקיימות $2j+3k+5l=10$.

ב. מיצאו את המקדם של x^{10} בביטוי $(1+x^2+x^3+x^5)^{10}$ על-ידי שימוש בפיתוח המולטינומי שבעמוד 79 בספר. (היעזרו בסעיף א')

ג. מיצאו את המקדם של x^{10} בביטוי $(1+x^2+x^3+x^5)^{10}$ על ידי שימוש בפירוק $1+x^2+x^3+x^5 = (1+x^2)(1+x^3)$ ובנוסחת הבינום של ניוטון.
השוו עם התוצאה מסעיף ב'.

תשובה

א. אין הרבה מקרים אפשריים. אפשר למשל להפריד למקרים $l=0,1,2$.
נקבל שכל השלשות האפשריות הן : $\langle 5,0,0\rangle$, $\langle 2,2,0\rangle$, $\langle 1,1,1\rangle$, $\langle 0,0,2\rangle$.

ב. מנוסחת המולטינום ידוע שבפיתוח הביטוי $(a+b+c+d)^{10}$ נקבל סכום של אבירים מהצורה $\dfrac{10!}{i!\,j!k!l!}a^ib^jc^kd^l$ כאשר i,j,k,l מספרים טבעיים ו- $i+j+k+l=10$.

כאשר $a=1,\ b=x^2,\ c=x^3,\ d=x^5$ מקבלים ש- $(1+x^2+x^3+x^5)^{10}$ הוא סכום של איברים מהצורה $\dfrac{10!}{i!\,j!k!l!}x^{2j}x^{3k}x^{5l}$ כאשר i,j,k,l טבעיים ו- $i+j+k+l=10$.

את x^{10} נקבל בביטוי הנ"ל בכל המקרים שבהם $2j+3k+5l=10$.

לכן המקדם של x^{10} בפיתוח של $(1+x^2+x^3+x^5)^{10}$ שווה לסכום כל המספרים מהצורה $\dfrac{10!}{i!\,j!k!l!}$ כאשר $i+j+k+l=10$ ו- $2j+3k+5l=10$.

בסעיף א' מצאנו את ארבע השלשות של מספרים טבעיים המקיימים $2j+3k+5l=10$:
$\langle 5,0,0\rangle$, $\langle 2,2,0\rangle$, $\langle 1,1,1\rangle$, $\langle 0,0,2\rangle$.

מכאן נקבל את ארבע האופציות עבור i,j,k,l (בהתאם לתנאי ש- $i+j+k+l=10$)

$\langle 5,5,0,0\rangle$, $\langle 6,2,2,0\rangle$, $\langle 7,1,1,1\rangle$, $\langle 8,0,0,2\rangle$.

בהתאם לזה נקבל שהמקדם של x^{10} בפיתוח של $(1+x^2+x^3+x^5)^{10}$ הוא הסכום הבא:

$$\frac{10!}{8!0!0!2!}+\frac{10!}{7!1!1!1!}+\frac{10!}{6!2!2!0!}+\frac{10!}{5!5!0!0!}=45+720+1260+252=2277$$

ג. $1+x^2+x^3+x^5=(1+x^2)(1+x^3)$ לכן $(1+x^2+x^3+x^5)^{10}=(1+x^2)^{10}(1+x^3)^{10}$

לפי נוסחת הבינום של ניוטון נקבל: $(1+x^2+x^3+x^5)^{10}=\left(\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}x^{2i}\right)\left(\sum_{j=0}^{10}\binom{10}{j}x^{3j}\right)$

אם נפתח סוגריים נקבל סכום של ביטויים מהצורה $\binom{10}{i}\binom{10}{j}x^{2i+3j}$ כאשר $0\le i,j\le 10$.

את x^{10} נקבל בכל המקרים שבהם $2i+3j=10$.

לא קשה לגלות שיש רק שני מקרים כאלה: $i=5$, $j=0$ ו- $i=2$, $j=2$.

בהתאם לזה נקבל כי המקדם של x^{10} בפיתוח של $(1+x^2+x^3+x^5)^{10}$ הוא:

$$\binom{10}{5}\binom{10}{0}+\binom{10}{2}\binom{10}{2}=252+45^2=252+2025=2277$$