ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

04101

אשנב למתמטיקה

חוברת הקורס- אביב ב2014

כתב: ישראל פרידמן

מרץ 2014 - סמסטר אביב - תשע"ד

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

אל הסטודנטים	א
לוח זמנים ופעילויות	ב
התנאים לקבלת נקודות זכות	ג
תיאור המטלות	ג
ממ״ן 11	1
ממ״ח 01	3
ממ״ן 12	7
ממ״ח 02	9
ממ״ן 13	13
ממ״ח 03	15
ממ״ן 14	19
ממ״ן 15	21
ממ״ח 04	23
ממ״ן 16	27
ממ״ח 05	29
ממ״ן 17	33

סטודנט יקר,

הקורס ״אשנב למתמטיקה״ כשמו כן הוא - אשנב אל עולם המתמטיקה המודרנית, מבעדו ניתן ללמוד טיפין מן הנעשה בעולם זה.

החומר הנכלל בקורס הינו מגוון והוא נועד להקנות ללומד מושגים מתמטיים בסיסיים, דרך מחשבה מתמטית וכן יכולת להשתמש בכלים מתמטיים הנלמדים בקורס. הקורס ״אשנב למתמטיקה״ יכול לשמש גם סטודנטים אשר אינם מתכוננים ללמוד מתמטיקה בעתיד.

בחוברת זו תמצאו הסברים על מרכיביו השונים של הקורס ועל כלל פעילויותיכם בו. הקריאה בה עשויה למנוע מכם טרדות רבות, ולסייע לכם בפתרון בעיות העלולות להתעורר תוך כדי לימוד. שמרו עליה כי היא תהיה לכם לעזר רב בהמשך לימוד הקורס.
בהמשך תמצאו את לוח הזמנים של הקורס ואת המטלות.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: http://telem.openu.ac.il .
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מרכז ההוראה בקורס הוא ישראל פרידמן. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 09-7781431, בימי א׳ בשעות 13:00 - 15:00 (ניתן גם לנסות בימים אחרים).
- דרך אתר הקורס.
- בפקס 09-7780631

אנו מאחלים לך הצלחה ולימוד פורה.

ב ב ר כ ה,
צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (מס' קורס: 04101 /ב2014)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
1	7.3.2014-2.3.2014	יחידה 1			
2	14.3.2014-9.3.2014	יחידות 1,2			ממ"ן 11 19.3.2014
3	21.3.2014-16.3.2014 (א-ב פורים)	יחידה 2		ממ"ח 01 23.3.2014	
4	28.3.2014-23.3.2014	יחידה 3			ממ"ן 12 01.04.2014
5	4.4.2014-30.3.2014	יחידה 3		ממ"ח 02 10.4.2014	
6	11.4.2014-6.4.2014	יחידות 4,3			ממ"ן 13 15.4.2014
7	18.4.2014-13.4.2014 (ב ערב פסח, ג-ו פסח)	יחידה 4			
8	25.4.2014-20.4.2014 (א-ב פסח)	יחידה 5		ממ"ח 03 28.4.2014	
9	2.5.2014-27.4.2014 (ב יום הזכרון לשואה)	יחידות 7,5			ממ"ן 14 5.5.2014
10	9.5.2014-4.5.2014 (ב יום הזכרון, ג יום העצמאות)	יחידה 7			
11	16.5.2014-11.5.2014	יחידה 7			ממ"ן 15 20.5.2014
12	23.5.2014-18.5.2014 (א ל"ג בעומר)	יחידות 8,9			
13	30.5.2014-25.5.2014 (ד יום ירושלים)	יחידות 8,9		ממ"ח 04 3.6.2014	
14	6.6.2014-1.6.2014 (ג-ד שבועות)	יחידה 10			ממ"ן 16 10.6.2014
15	13.6.2014-8.6.2014	יחידה 12		ממ"ח 05 14.6.2014	
16	20.6.2014-15.6.2014	יחידה 12			ממ"ן 17 25.6.2014

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

התנאים לקבלת נקודות זכות

להגיש במשך הקורס מטלות שמשקלן הכולל **לפחות 15 נקודות**, כאשר לפחות שתיים מהן חייבות להיות ממ״נים.

לקבל בבחינת הגמר ציון **60 לפחות**.

לקבל בציון הסופי **60 נקודות לפחות**.

תיאור המטלות

בקורס כלולות חמש מטלות מחשב ושבע מטלות מנחה. תאריכי הגשת המטלות מופיעים בלוח זמנים ופעילויות וכן על גבי המטלות עצמן. שימו לב כי תאריכים אלה הם תאריכים אחרונים למשלוח. מטלות שיישלחו לאחר המועד הסופי שנקבע בלוח הזמנים של הקורס, לא יילקחו בחשבון בחישוב הציון הסופי. המטלות ייבדקו על-ידי המנחים כדי שהסטודנטים יוכלו לקבל משוב על עבודתו. במקרים מיוחדים יכולים הסטודנטים לפנות אל מרכז ההוראה בקורס.

בחישוב הציון הסופי יהיה משקלן הכולל של כל העבודות לכל היותר 30 נקודות. כדי לגשת לבחינת הגמר, עליכם להגיש במשך הקורס מטלות שמשקלן לפחות 15 נקודות, כאשר שתיים מתוכן חייבות להיות ממ״נים.

להלן פירוט המשקלות לכל אחת מהעבודות השוטפות:

שם המטלה	משקל	שם המטלה	משקל
ממ״ח 01	2 נק׳	ממ״ן 11	2 נק׳
ממ״ח 02	2 נק׳	ממ״ן 12	3 נק׳
ממ״ח 03	2 נק׳	ממ״ן 13	3 נק׳
ממ״ח 04	2 נק׳	ממ״ן 14	3 נק׳
ממ״ח 05	2 נק׳	ממ״ן 15	3 נק׳
		ממ״ן 16	3 נק׳
		ממ״ן 17	3 נק׳

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.
כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:
בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.
זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה. אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 2,1

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2014ב **מועד הגשה: 19.03.2014**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- *שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס*
- *שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה*

הסבר מפורט ב#נוהל הגשת מטלות מנחה#

שאלה 1

יהיו A ו- B הקבוצות הבאות:

$$B=\left\{\frac{2}{1},\frac{2}{2},\frac{2}{3},\ldots\right\}=\left\{\frac{2}{n}\,\middle|\, n\in\mathbf{N}\right\},\; A=\{\,2,4,6,\ldots\}=\{2n\,|\,n\in\mathbf{N}\}$$

הוכח או הפרך כל אחת מן הטענות הבאות:

א. קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין A ו- B.

ב. כל התאמה בין A ו- B היא חד-חד-ערכית.

ג. קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין A ו- B המתאימה את $2\in A$ ל- $2\in B$.

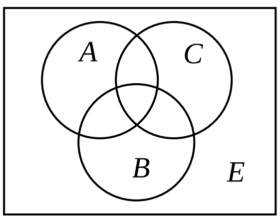
ד. האם B היא אינסופית? נמק!

שאלה 2

באיור שלפניך דיאגרמת ון המתארת את היחסים בין שלוש קבוצות כלשהן A, B ו- C שחלקיות לקבוצה E.

קווקו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות:

(תאר כל קבוצה בדיאגרמה נפרדת)



א. $A\setminus(B\setminus C)$

ב. $(A\setminus B)\setminus C$

ג. $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

ד. $A^C(E)\cap(B\setminus C)$

ה. $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)$

שאלה 3

יהיו A ו- B קבוצות.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $A \cup B = A \setminus B$, אז $B = \emptyset$.

ב. אם $A \cup B$ שקולה ל- $A \setminus B$, אז $B = \emptyset$.

ג. אם $A \cup B$ היא קבוצה סופית ו- $A \cup B$ שקולה ל- $A \setminus B$ אז $B = \emptyset$.

שאלה 4

יהיו A, B קבוצות. נתון ש- $B = A \setminus \{1\}$. הוכח או הפרך את הטענות:

א. אם A שקולה ל- B, אז A היא אינסופית.

ב. אם $A \neq B$ ואם A שקולה ל- B, אז A היא אינסופית.

ג. אם $A \setminus \{2\}$ שקולה ל- B אז A היא אינסופית.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: **אשנב למתמטיקה**

חומר הלימוד למטלה: **יחידות 2,1**

מספר השאלות: **22** **משקל המטלה:** **2 נקודות**

סמסטר: **2014ב** **מועד הגשה:** **23.03.2014**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**

בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א - אם רק טענה 1 נכונה ב - אם רק טענה 2 נכונה

ג - אם שתי הטענות נכונות ד - אם שתי הטענות לא נכונות

שאלה 1

1. $\{1,2\} \in \{1,2,\{3\}\}$.
2. $\{1,2\} \subseteq \{1,2,\{1\}\}$.

שאלה 2

1. $\{1\} \in \{1,2,\{1\}\}$.
2. $\{1\} \subseteq \{1,2,\{1\}\}$.

שאלה 3

1. $\varnothing \subseteq \{1,2\}$.
2. $\{1,\varnothing\} \subseteq \{1,2\}$.

שאלה 4

1. $\emptyset \subseteq \emptyset$.
2. $\emptyset = \{\emptyset\}$.

שאלה 5

1. אם קיים $x \in B$ כך ש-$x \notin A$ אז $A \subset B$.
2. אם $A \subset B$ אז $A \subseteq B$.

שאלה 6

1. אם $A \subseteq B$ אז $A \in B$.
2. אם $A \in B$ ו- $x \in A$ אז $x \in B$.

שאלה 7

1. אם $x \in A \cup B$ ואם $x \notin A$ אז $x \in B$.
2. אם $x \notin A \cap B$ ואם $x \notin A$ אז $x \notin B$.

שאלה 8

1. אם $x \notin A \setminus B$ אז $x \notin A$.
2. אם $x \notin A \setminus B$ ו- $x \in A$ אז $x \in A \cap B$.

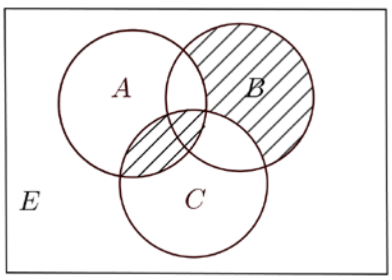
שאלה 9

1. אם $x \notin A \cup B$ אז $x \notin A$ וגם $x \notin B$.
2. אם $A \not\subseteq B$ ו- $B \not\subseteq A$ אז $A \cap B = \emptyset$.

שאלה 10

1. אם $A \cap B = A$ אז $A \cup B = B$.
2. אם $A \setminus B = A$ אז $B = \emptyset$.

שאלה 11



השטח המקווקו מתאר את הקבוצה:

1. $[(B \setminus (C \setminus A)) \cap (B \setminus (A \setminus C))] \cup [(A \cap C) \setminus B]$.
2. $(A \cap C) \cup [(B \setminus C) \cap A^C(E)]$.

שאלה 12

1. $\{1,2,3\} \subseteq \{\mathbf{N}\}$.
2. $\{1\} \in \{\mathbf{N}\}$.

שאלה 13

1. אם B,A קבוצות שקולות אז כל התאמה ביניהן היא חד-חד-ערכית.
2. אם $B\ ,A$ לא שקולות אז כל התאמה ביניהן היא לא חד-חד-ערכית.

שאלה 14

1. אם $A \subseteq B$ ואם A שקולה ל- B אז $A = B$.
2. אם $A \neq B$ אז A לא שקולה ל- B.

שאלה 15

1. קיימת קבוצה A ששקולה ל- $\{A\}$.
2. קיימת קבוצה A ששקולה ל- $\{A, \{A\}\}$.

שאלה 16

1. אם A קבוצה אינסופית ואם B חלקית ממש ל- A אז A שקולה ל- B.
2. אם A קבוצה סופית ואם B חלקית ממש ל-A אז A לא שקולה ל- B.

שאלה 17

1. אם $A \cap B$ שקולה ל- A ואם $B \not\subseteq A$ אז A אינסופית.
2. אם $B \not\subseteq A$ ו- A שקולה ל- B אז A אינסופית.

שאלה 18

1. כל שתי קבוצות אינסופיות הן שקולות.
2. כל שתי קבוצות סופיות ושונות הן לא שקולות.

שאלה 19

1. אם $x \in A$ אז $x \in P(A)$.
2. אם $X \subseteq A$ אז $\{X\} \subseteq P(A)$.

שאלה 20

1. אם $P(A) \neq \emptyset$ אז $A \neq \emptyset$.
2. אם $P(A) \neq \{\emptyset\}$ אז $A \neq \emptyset$.

שאלה 21

1. קיימת קבוצה A ששקולה ל- $P(A)$.
2. אם A קבוצת כל המספרים הטבעיים הזוגיים אז $P(A)$ לא שקולה ל- $\mathbf{N}$.

שאלה 22

1. כדי להגדיר התאמה חד חד ערכית בין $\mathbf{N}$ לקבוצת המספרים הטבעיים האי-זוגיים חייבים להתאים לכל מספר n את המספר $2n-1$.
2. הקבוצה $\mathbf{N} \cup \{\{n\} \mid n \in \mathbf{N}\}$ שקולה ל- $P(\mathbf{N})$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 3,2

מספר השאלות: 3 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2014ב **מועד הגשה: 01.04.2014**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות: • *שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס*   • *שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה*   ***הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"***

שאלה 1 (30 נקודות)

יהיו $A = \{1, \{2\}, \varnothing\}$, $B = \{1,2\}$.

א. רשום את $P(A)$ ואת $P(B)$ בעזרת צומדיים.

ב. רשום את $P(A) \setminus P(B)$ ואת $P(B) \setminus P(A)$.

ג. רשום את $P(\varnothing)$ ואת $P(P(\varnothing))$. האם קבוצות אלה שקולות? נמק!

שאלה 2 (40 נקובות)

הוכח כי לכל שלוש קבוצות A, B ו- C מתקיים:

א. $(A \cup B) \cap (C \setminus A) = (B \setminus A) \cap C$.

ב. אם $A \setminus B \subseteq (A \cup B) \setminus C$, אז $(A \setminus C) \cap B = \varnothing$.

ג. אם $P(A) = P(B) \cap P(C)$, אז $A = B \cap C$.

ד. $P(A \setminus B) \neq P(A) \setminus P(B)$.

שאלה 3 (30 נקובות)

א. תהי A קבוצה שבה לפחות שני איברים ועליה מוגדרת פעולה בינרית $*$ באופן הבא:

לכל $a,b \in A$, $a * b = b$.

בדוק אם הפעולה $*$ מקיימת את תכונות הסגירות, הקיבוציות, החילופיות, ואם קיים ב- A איבר נטרלי ביחס לפעולה זו. נמק תשובותיך.

ב. תהי A קבוצה **לא ריקה**. על הקבוצה $P(A)$ מגדירים פעולה בינרית $*$ כך:

לכל $X, Y \in P(A)$, $X * Y = X \cup Y$.

בדוק אם הפעולה $*$ מקיימת את תכונות הסגירות, הקיבוציות והחילופיות, אם קיים ב- $P(A)$ איבר נטרלי ביחס ל- $*$ ואם לכל איבר ב- $P(A)$ יש נגדי ביחס לפעולה זו. נמק תשובותיך.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: **אשנב למתמטיקה**

חומר הלימוד למטלה: **יחידה 3**

מספר השאלות: **24** **משקל המטלה:** **2 נקודות**

סמסטר: **2014ב** **מועד הגשה:** **10.04.2014**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**

בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א - אם רק טענה 1 נכונה **ב** - אם רק טענה 2 נכונה

ג - אם שתי הטענות נכונות **ד** - אם שתי הטענות לא נכונות.

שאלה 1

1. הפעולה המתאימה לכל זוג סדור (m,n) של מספרים טבעיים את ההפרש $m-n$ היא פעולה בינרית על **N**
2. הפעולה המתאימה לכל זוג סדור של מספרים טבעיים כל מספר שקטן מסכומם היא פעולה בינרית על **N**

שאלה 2

הפעולה המתאימה לכל זוג סדור (m,n) של מספרים טבעיים את $(m+n)(m+n-1)/2$ היא:

1. פעולה בינרית על **N** שמקיימת את תכונת הסגירות
2. פעולה חילופית

שאלה 3

1. הפעולה שמתאימה לכל זוג סדור של מספרים שלמים את המספר $1/2$ היא פעולה בינרית על **Z** שמקיימת את תכונת הקיבוציות
2. הפעולה שמתאימה לכל זוג סדור של מספרים רציונליים את המספר $1/2$ היא פעולה בינרית על **Q** שמקיימת את תכונת הקיבוציות

בשאלות 5,4 נתונה קבוצה A שעליה מוגדרת פעולה בינרית $*$.

שאלה 4

1. אם $*$ חילופית אז ב- A יש לפחות שני איברים
2. אם $*$ אינה חילופית אז ב- A יש לפחות שני איברים

שאלה 5

1. אם $*$ קיבוצית אז ב- A יש לפחות שלושה איברים
2. אם ב- A קיים איבר נטרלי e ביחס ל- $*$ אז ל- e יש נגדי ביחס ל- $*$

שאלה 6

1. הקבוצה $A = \{0\}$ היא חבורה ביחס לפעולת החיבור הרגיל
2. הקבוצה $A = \{0,1,-1\}$ היא חבורה ביחס לפעולת החיבור הרגיל

שאלה 7

1. הקבוצה $\{0,1\}$ היא חבורה ביחס לפעולת הכפל הרגיל
2. הקבוצה $\{1\}$ היא חבורה ביחס לפעולת החילוק הרגיל

בשאלות 8-11 נתייחס לקבוצה $A = \{a, b, c\}$

ולפעולה $*$ שמוגדרת על-ידי הטבלה הבאה :

$*$	a	b	c
a	b	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

שאלה 8

1. הפעולה $*$ מקיימת את תכונת הסגירות
2. הפעולה $*$ מקיימת את תכונת הקיבוציות

שאלה 9

1. הפעולה $*$ היא חילופית
2. קיים ב- A איבר נטרלי ביחס ל- $*$

שאלה 10

1. לכל איבר של A יש נגדי ביחס לפעולה $*$
2. הפעולה $*$ מקיימת את תכונות הצמצום

שאלה 11

1. a נגדי ל- a ביחס לפעולה $*$
2. c נגדי ל- a ביחס לפעולה $*$

שאלה 12

נגדיר פעולה בינרית $*$ על $\mathbf{N}_0$ באופן הבא: לכל $x,y \in \mathbf{N}_0$, $x*y = x+y+x$.

1. 0 איבר נטרלי ביחס לפעולה $*$
2. הפעולה $*$ הי קיבוצית, מפני שהוגדרה בעזרת החיבור הרגיל בלבד

בשאלות 13-15 A היא קבוצה לא ריקה

שאלה 13

1. $P(A)$ סגורה ביחס לפעולת ההפרש בין קבוצות
2. קיים ב- $P(A)$ איבר נטרלי ביחס לפעולת ההפרש

שאלה 14

1. קיים ב- $P(A)$ איבר נטרלי ביחס לפעולת החיתוך בין קבוצות
2. לכל איבר ב- $P(A)$ יש איבר נגדי ביחס לפעולת החיתוך

שאלה 15

1. קיים ב- $P(A)$ איבר נטרלי ביחס לפעולת האיחוד
2. ל- A יש איבר נגדי ב- $P(A)$ ביחס לפעולת האיחוד

שאלה 16

1. הקבוצה $\{4,8\}$ היא חבורה ביחס לפעולת הכפל מודולו 12
2. הקבוצה $\{3,6,9\}$ היא חבורה ביחס לפעולת החיבור מודולו 12

בשאלות 17-20 G היא חבורה ביחס לפעולה $*$, e הוא האיבר הנטרלי ו- a,b,c הם איברים של G (**שימו לב**, ייתכן שיש גם איברים אחרים ב- G).

שאלה 17

1. אם a נגדי ל- b אז b נגדי ל- a
2. אם $a*b = b*a$ אז G חילופית

שאלה 18

1. $a*(b*c) = (a*c)*b$
2. $b*(a*c) = (b*a)*c$

שאלה 19

1. קיים $x \in G$ כך ש- $a*x = b$
2. קיים $y \in G$ כך ש- $y*a = b$

שאלה 20

1. $b*a^{-1}$ נגדי ל- $a*b^{-1}$
2. $(a*b*c)^{-1} = c^{-1}*b^{-1}*a^{-1}$

שאלה 21

1. כל חבורה בעלת שלושה איברים היא חילופית
2. קיימת חבורה בעלת שלושה איברים ובה איבר שנגדי לעצמו ולא נטרלי

שאלה 22

תהי A קבוצה בת ארבעה איברים

1. קיימת פעולה בינרית על A שמקיימת את כל התכונות שבהגדרת החבורה, למעט קיבוציות.
2. קיימת פעולה בינרית על A שמקיימת את תכונות הסגירות, קיום איבר נטרלי וחוק הצמצום השמאלי אך אינה מקיימת את חוק הצמצום הימני

שאלה 23

נגדיר פעולה בינרית Δ על $A = \{2n | n \in \mathbf{N}\}$ באופן הבא: לכל $x, y \in A$, $x\Delta y = \frac{1}{2}xy$.

1. Δ מקיימת את חוקי הצמצום
2. A חבורה ביחס לפעולה Δ

שאלה 24

תהי G חבורת פעולות הסימטרייה של משולש שווה צלעות, כפי שהוגדרה בספר.

1. יהיו $a, b, c \in G$. אם $a \circ b = b \circ c$ אז $a = c$
2. יהי $x \in G$. אם $x \circ x \neq I$ אז $x \circ x \circ x = I$

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידה 3

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2014ב **מועד הגשה: 15.04.2014**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- *שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס*
- *שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה*

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

תהי A קבוצה שעליה מוגדרת פעולה בינרית $*$ המקיימת את תכונת הסגירות ואת חוקי הצמצום. ידוע שיש איבר $e \in A$ כך שלכל $x \in A$ מתקיים $x * e = x$.

א. הוכח כי e אינו בהכרח איבר ניטרלי ב- A ביחס לפעולה $*$.

ב. הוכח כי אם $*$ פעולה קיבוצית, אז e ניטרלי ב- A ביחס לפעולה $*$.

שאלה 2

תהי $G = \{e, a, b, c\}$ חבורה ביחס לפעולה $*$ (e, a, b ו- c עצמים שונים).

נתון כי e הוא האיבר הניטרלי ב- G. כמו כן נתון כי $(a * a) * a = b$.

א. הוכח כי $a * a \neq a$, $a * a \neq b$ וכן ש- $a * a \neq e$.

ב. חשב את $a * a$ ואת $c * a$. נמק את תשובתך.

ג. הוכח כי $b * a \neq a$, $b * a \neq b$ וכן ש- $b * a \neq c$.

ד. הראה כי יש דרך יחידה להשלים את לוח הפעולה של G. נמק את תשובתך!

שאלה 3

א. תהי A קבוצת כל המספרים השלמים הזוגיים: $A=\{2n \mid n\in \mathbf{Z}\}$. על קבוצה זו מגדירים פעולה בינרית $*$ באופן הבא:

לכל A, $a*b=a+b-ab$.

בדוק אלו מן התכונות שבהגדרת מושג החבורה מתקיימות ב- A ביחס לפעולה $*$.

ב. בדוק אלו מהתכונות שבהגדרת מושג החבורה מתקיימות בקבוצה $\mathbf{Q}\setminus\{1\}$ (קבוצת המספרים הרציונליים השונים מ- 1) ביחס לפעולה $*$ המוגדרת באופן הבא:

לכל $a,b\in\mathbf{Q}\setminus\{1\}$, $a*b=a+b-ab$.

שאלה 4

תהי G חבורה ביחס לפעולה $*$.

א. הוכח כי לכל a ו- b ב- G קיים $x\in G$ כך ש- $a*x=b$.

ב. נניח כי **לכל** a, b ו- c ב- G מתקיים התנאי הבא: **אם** $a*c=b*a$, אז $c=b$.
הוכח כי G היא חבורה חילופית.
(רמז: עפ"י הטענה שהוכחת בסעיף א, לכל a ו- b ב- G קיים $x\in G$ כך ש- $(a*b)*x=b*a$).

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 5,4

מספר השאלות: 24   **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2014ב   **מועד הגשה: 28.04.2014**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א - אם רק טענה 1 נכונה   **ב** - אם רק טענה 2 נכונה

ג - אם שתי הטענות נכונות   **ד** - אם שתי הטענות לא נכונות

שאלה 1

1. השלשה $(\{1,2\}, \{a,b,c\}, \{(1,a),(2,b)\})$ מגדירה פונקציה מ- $\{1,2\}$ ל- $\{a,b,c\}$
2. השלשה $(\{1,2\}, \{a,b,c\}, \{(1,b),(2,a),(1,c)\})$ מגדירה פונקציה מ- $\{1,2\}$ ל- $\{a,b,c\}$

שאלה 2

1. השלשה $(\{1,2,\varnothing\}, \{a,b\}, \{(1,a),(2,b)\})$ מגדירה פונקציה מ- $\{1,2,\varnothing\}$ ל- $\{a,b\}$
2. השלשה $(\{1,2,\varnothing\}, \{a,b\}, \{(1,a),(2,a),(\varnothing,a)\})$ מגדירה פונקציה מ- $\{1,2,\varnothing\}$ ל- $\{a,b\}$

שאלה 3

1. השלשות $(\{1,2\}, \{1,2\}, \{(2,1),(1,1)\})$, $(\{1,2\}, \{1,2\}, \{(1,1),(2,1)\})$ מגדירות פונקציות שוות
2. הנוסחות $f(n) = n+1$ ו- $g(n) = \dfrac{n^2}{n-1} - \dfrac{1}{n-1}$ מגדירות פונקציות שוות מ- $\boldsymbol{N}$ ל- $\boldsymbol{N}$

שאלה 4

1. אם לשתי פונקציות יש אותו תחום, אותו טווח ואותה תמונה, אז הן שוות.
2. אם $f, g\colon A \to B$ פונקציות ואם לכל $D \subseteq B$ מתקיים $f^{-1}(D) = g^{-1}(D)$ אז $f = g$

בשאלות 5-8 נדון בפונקציה $f:\{1,2,3\}\to\{a,b,c\}$ שמוגדרת כך: $f(1)=a$, $f(2)=f(3)=b$

(לפני קביעת נכונות הטענות כדאי לבדוק אם כל הביטויים מוגדרים היטב!)

שאלה 5

1. $f(\{1,3\})=\{a,b\}$
2. $f(\varnothing)=\varnothing$

שאלה 6

1. $f(2,3)=b$
2. $f(\{\varnothing\})=\{\varnothing\}$

שאלה 7

1. $f(\{1,2,3\})=\{a,b,c\}$
2. $f^{-1}(\{a\})=\{1\}$

שאלה 8

1. $f^{-1}(\{b,c\})=\{2,3\}$
2. $f^{-1}(\{c\})=f^{-1}(\varnothing)$

שאלה 9

תהי $f:A\to B$ פונקציה

1. אם $A_1, A_2\subseteq A$ ואם $A_1\cap A_2=\varnothing$ אז $f(A_1)\cap f(A_2)=\varnothing$
2. אם $B_1, B_2\subseteq B$ ואם $B_1\cap B_2=\varnothing$ אז $f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)=\varnothing$

שאלה 10

תהי $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה שמוגדרת על-ידי $f(x)=x^2-2x$

1. $f^{-1}(\{-1,-2\})=\{1\}$
2. $f^{-1}(\{3,-1\})=\{3,1\}$

בשאלות 13-11 נתונות פונקציות $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}$, $g,h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, שמוגדרות כך :

$$h(x)=2x-1\ ,\ \ g(x)=2x+1\ ,\ \ f(x)=2x/(x-1)$$

שאלה 11

1. $f\circ g$ מוגדרת מ- $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ ל- $\mathbf{R}$
2. $g\circ f$ מוגדרת מ- $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ ל- $\mathbf{R}$

שאלה 12

1. $f\circ h$ מוגדרת מ- $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ ל- $\mathbf{R}$
2. $f\circ f$ מוגדרת מ- $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ ל- $\mathbf{R}$ ומתקיים $(f\circ f)(x)=4x/(x+1)$

שאלה 13

1. f היא פונקציה חד-חד-ערכית
2. f היא פונקציה על

בשאלות 17-14 f היא פונקציה מקבוצה A לקבוצה B

שאלה 14

1. f היא על אם ורק אם לכל $x\in A$ יש $y\in B$ כך ש- $f(x)=y$
2. f היא על אם ורק אם לכל תמונה ב- B יש מקור ב- A

שאלה 15

1. f היא על אם ורק אם קיים $y\in B$ כך שלכל $x\in A$ מתקיים $f(x)=y$
2. f היא על אם ורק אם לכל $y\in B$, $f^{-1}(\{y\})\neq\varnothing$

שאלה 16

1. f היא חד-חד-ערכית אם לכל $x\in A$ קיים $y\in B$ יחיד, כך ש- $f(x)=y$
2. f היא חד-חד-ערכית אם לכל $x_1,x_2\in A$ השוויון $f(x_1)=f(x_2)$ גורר ש- $x_1=x_2$

שאלה 17

1. f היא חד-חד-ערכית אם ורק אם לכל $y\in B$, $f^{-1}(\{y\})$ היא ריקה או בת איבר אחד
2. f היא חד-חד-ערכית אם ורק אם לכל $y\in B$ קיים $x\in A$ יחיד, כך ש- $f(x)=y$

בשאלות 21-18 נתונות פונקציות $f: A \to B$, $g: B \to C$

שאלה 18

1. אם f, g הן פונקציות על אז $g \circ f$ היא פונקציה מ- A על C
2. אם f, g הן חד-חד-ערכיות אז $g \circ f$ היא פונקציה חד-חד-ערכית

שאלה 19

1. אם f, g פונקציות הפיכות אז גם $g \circ f$ הפיכה ו- $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
2. אם f הפיכה ו- h פונקציה הפוכה ל- f אז $f \circ h = h \circ f$

שאלה 20

1. אם A סופית ו- f היא על אז B סופית
2. אם A אינסופית ו- f היא על אז B אינסופית

שאלה 21

1. אם A סופית ו- f היא חד-חד-ערכית אז B סופית
2. אם A אינסופית ו- f היא חד-חד-ערכית אז B אינסופית

בשאלות 23-22 נתונות פונקציות $f, g: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ המוגדרות כך :

לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = 2n$ ו- $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{סא } n \text{ יגוז} \\ \frac{n+1}{2} & \text{סא } n \text{ יא-יגוז} \end{cases}$

שאלה 22

1. g היא פונקציה על
2. $f \quad g$ היא פונקצית הזהות על $\mathbf{N}$

שאלה 23

1. קיימת פונקציה $h: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ כך ש- $h \quad f$ היא פונקצית הזהות על $\mathbf{N}$
2. קיימת פונקציה $k: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ כך ש- $g \quad k$ היא פונקצית הזהות על $\mathbf{N}$

שאלה 24

תהי פונקציה $f: A \to A$

1. אם f היא על אז f היא בהכרח חד-חד-ערכית
2. אם f היא חד-חד-ערכית אז f היא בהכרח גם על

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 5,4

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2014ב **מועד הגשה:** 5.5.2014

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- *שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס*
- *שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה*

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

תהיינה A ו- B הקבוצות הבאות: $A=\{a,b\}\ ,\ B=\{1,2,3\}$

א. רשום את כל הפונקציות מ- A ל- B. ציין אלו מהן חד-חד-ערכיות, אלו על ואלו הפיכות.

ב. רשום את כל הפונקציות מ- B ל- A. ציין אילו מהן חד-חד-ערכיות, אילו על ואילו הפיכות.

ג. מצא פונקציות $f:A\to B$ ו- $g:B\to A$ כך ש- $g\circ f$ תהיה הפיכה.

הערה: לפניך דרך נוחה לרישום הפונקציות:

לדוגמה, את הפונקציה מ- A ל- B המתאימה ל- a את 1 ול- b את 3 נסמן ב- $\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ואת הפונקציה מ- B ל- A המתאימה ל- 1 את a ל- 2 ול- 3 את b נסמן ב- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & b \end{bmatrix}$.

שאלה 2

נתונות פונקציה $f:A\to B$ וקבוצות $C,D\subseteq A$ כך ש- $C\neq D$

א. הוכח כי אם $f(C)\neq f(D)$, לא נובע כי f היא בהכרח חד-חד-ערכית.

ב. הוכח שאם f היא חד-חד-ערכית אז $f(C)\neq f(D)$.

ג. הדגם קבוצות $C,D\subseteq A$, $C\neq D$, ופונקציה חד-חד-ערכית $f:A\to B$ כך ש- $f(C)=f(C)\cup f(D)$.

שאלה 3

יהיו f ו- g הפונקציות מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$ המוגדרות כך:

$$f(n)=\begin{cases} n-1 & \text{אם } n \text{ זוגי} \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{אם } n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

לכל $n \in \mathbf{N}$, $g(n) = 2n-1$

הוכח או הפרך כל אחת מן הטענות הבאות:

א. f היא חד-חד-ערכית

ב. g היא חד-חד-ערכית

ג. f היא על $\mathbf{N}$

ד. g היא על $\mathbf{N}$

ה. $f \circ g$ היא פונקצית הזהות על $\mathbf{N}$

ו. $g \circ f$ היא פונקצית הזהות על $\mathbf{N}$

שאלה 4

א. תהי A קבוצה כלשהי ותהיינה h, g, f פונקציות מ- A ל- A .

הוכח שאם f היא על ואם $g \circ f = h \circ f$ אז $g = h$.

ב. עבור $A = \mathbf{N}$ (קבוצת המספרים הטבעיים) הדגם פונקציות h, g, f מ- A ל- A כך ש- f תהיה פונקציה חד-חד-ערכית וכך שיתקיים $g \circ f = h \circ f$, אבל $g \neq h$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 7,5

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2014ב **מועד הגשה: 20.05.2014**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- *שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס*
- *שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה*

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

נתונה פונקציה $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}\setminus\{-1\}$. ($\mathbf{Q}$ היא קבוצת כל המספרים הרציונליים).

לכל $x\in\mathbf{Q}$ נסמן $g(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)+1}$.

א. הוכח כי הנוסחה הנ"ל מגדירה פונקציה $g:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}\setminus\{1\}$.

ב. הוכח כי אם f היא חד-חד-ערכית אז גם g היא חד-חד-ערכית.

ג. הוכח כי אם f היא פונקציה על אז גם g היא פונקציה על.

ד. הוכח כי אם f הפיכה אז גם g הפיכה ומצא נוסחה המביעה את g^{-1} בעזרת הפונקציה f^{-1} (ההפכית של f). נמק תשובתך.

שאלה 2

תהי T קבוצת הנקודות שעל מעגל שמרכזו O , (T לא כוללת את פנים המעגל). תהי f איזומטריה של המישור כך ש- T קבוצה קבועה ביחס ל- f . יהיו A ,B קצות קוטר במעגל T.

א. הוכח שהנקודות $f(A),\ f(B)$ הן קצות קוטר ב- T.

ב. הוכח ש- O נקודת שבת של f.

ג. הוכח שאם $f(A)=A$ ואם f אינה הזהות אז f שיקוף.

ד. הוכח שקבוצת הנקודות שבפנים המעגל היא קבוצה קבועה ביחס ל- f .

שאלה 3

נתונות f, g איזומטריות של המישור ו- A, B נקודות שונות במישור. ידוע כי הנקודות A, B הן נקודות שבת של האיזומטריה $f \circ g$.

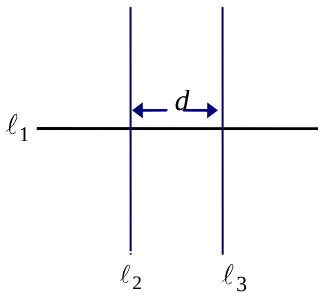
א. הוכח כי $f \circ g$ אינה בהכרח איזומטרית הזהות.

ב. הוכח כי אם f ו- g הופכות את מגמת המשולשים אז הן איזומטריות הפוכות זו לזו.

ג. הוכח כי אם f ו- g הופכות את מגמת המשולשים ואם ל- f יש נקודת שבת אז $f = g$.

שאלה 4

יהיו ℓ_3 , ℓ_2 , ℓ_1 שלושה ישרים כמו באיור (ℓ_3 , ℓ_2 מאונכים ל- ℓ_1). נסמן $f = S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$



א. הוכח כי $S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2} = S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ ו- $S_{\ell_1} \circ S_{\ell_3} = S_{\ell_3} \circ S_{\ell_1}$.

ב. תאר באופן מדויק את האיזומטריה $f \circ f$. נמק תשובתך.

ג. הוכח כי ההרכבה של כל שיקוף מוזז על עצמו היא הזזה.

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

הקורס: אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 9,8,7

מספר השאלות: 24 **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2014ב **מועד הגשה: 3.6.2014**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא** בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א - אם רק טענה 1 נכונה **ב** - אם רק טענה 2 נכונה

ג - אם שתי הטענות נכונות **ד** - אם שתי הטענות לא נכונות

בשאלות 1-5 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ הם ישרים ו- $S_{\ell_1}, S_{\ell_2}, S_{\ell_3}, S_{\ell_4}$ הם שיקופים ביחס אליהם.

שאלה 1

1. אם $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ ו- $S_{\ell_4} \circ S_{\ell_3}$ מתארים אותה הזזה לא טריוויאלית אז $\ell_1 = \ell_3$ ו- $\ell_4 = \ell_2$
2. אם $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ ו- $S_{\ell_4} \circ S_{\ell_3}$ מתארים אותה הזזה לא טריוויאלית אז $\ell_2 \| \ell_3$ או $\ell_2 = \ell_3$

שאלה 2

נתון ש- $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ סיבוב לא טריוויאלי סביב נקודה A.

1. אם $A \in \ell_3$ אז קיים ישר ℓ_4 כך ש- $S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2} = S_{\ell_3} \circ S_{\ell_4}$
2. קיים ℓ_2' כך ש- $S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2} = S_{\ell_2'} \circ S_{\ell_1}$

שאלה 3

1. אם $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ הזזה ואם $S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2}$ הזזה אז $S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_3}$ שיקוף
2. אם $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ סיבוב ואם $S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2}$ סיבוב אז $S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_3}$ שיקוף

שאלה 4

בשאלה זו ℓ_1, ℓ_2 הם ישרים מקבילים ו- ℓ_3 חותך אותם.

1. קיים ישר ℓ_3' מקביל ל- ℓ_3 כך ש- $S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_3} = S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_3'}$
2. קיימים ישרים מקבילים ℓ_5, ℓ_6 וישר ℓ_7 מאונך להם כך ש- $S_{\ell_5} \circ S_{\ell_6} \circ S_{\ell_7} = S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$

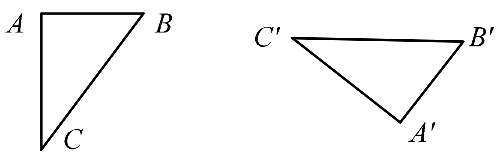
שאלה 5

1. אם $f = S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ אז $f^{-1} = S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_3}$
2. אם f איזומטריה של המישור אז f^{-1} היא איזומטריה מאותו סוג

שאלה 6

1. קיימת איזומטריה f כך ש- $f \circ f$ שיקוף
2. קיימת איזומטריה f כך ש- $f \circ f$ סיבוב

בשאלות 7-8 f היא איזומטריה שמתאימה את A ל-A' את B ל-B' ואת C ל-C' (ראה ציור).



שאלה 7

1. המשולשים ABC ו-$A'B'C'$ חופפים זה לזה
2. קיימת איזומטריה g שונה מ-f שמתאימה את A ל-A' ואת B ל-B'

שאלה 8

1. f היא שיקוף מוזז.
2. f היא סיבוב.

בשאלות 9-10 f היא איזומטריה ו- $M \neq \emptyset$ קבוצה קבועה ביחס ל- f

שאלה 9

1. f אינה הזזה
2. אם M קבוצת שבת ביחס ל- f אז לכל $x \in M$ מתקיים $f(x) = x$

שאלה 10

1. אם M סופית אז M היא בהכרח קבוצת שבת של f
2. אם f שיקוף מוזז אז יתכן $f(M) \subset M$ (הכלה ממש)

בשאלות 11-13 f ו- g הן איזומטריות של המישור.

שאלה 11

1. אם x נקודת שבת של $g \circ f$ אז $g(x)$ נקודת שבת של $f \circ g$
2. אם $g \circ f$ שיקוף אז גם $f \circ g$ שיקוף

שאלה 12

1. אם ל- $g \circ f$ יש נקודת שבת אז ל- f ול- g יש נקודת שבת
2. אם f,g הופכות מגמת משולשים ובעלות נקודת שבת משותפת אז $g \circ f$ סיבוב

שאלה 13

1. אם A, B נקודות שונות ואם $f(A) = B$, $f(B) = A$ אז ל- f יש נקודת שבת
2. קיימים שלושה שיקופים כך שהרכבתם היא איזומטריה בעלת נקודת שבת יחידה

שאלה 14

1. אם מוסיפים אקסיומה למערכת בלתי תלויה, מתקבלת מערכת תלויה או בעלת סתירה
2. אם משמיטים אקסיומה ממערכת אקסיומות בעלת סתירה, מתקבלת מערכת חסרת סתירה

שאלה 15

1. אם לאחר הוספת אקסיומה למערכת שלמה מתקבלת מערכת חסרת סתירה אז המערכת החדשה היא תלויה
2. אם משמיטים אקסיומה ממערכת שלמה אז המערכת החדשה אינה שלמה

שאלה 16

1. אם מוסיפים למערכת אקסיומות משפט שאינו מתקיים באחד המודלים של המערכת, אז המערכת החדשה היא בעלת סתירה
2. אם מוסיפים למערכת אקסיומות משפט שמתקיים בכל מודל של המערכת, אז המערכת החדשה היא תלויה

השאלות 17, 18 נתונות מערכת אקסיומות A ואקסיומה α.

שאלה 17

ידוע שלאחר הוספת α ל- A מתקבלת מערכת חסרת סתירה גם לאחר הוספת שלילת α ל- A מתקבלת מערכת חסרת סתירה.

1. A בעלת סתירה
2. A אינה קטגורית

שאלה 18

ידוע שלאחר הוספת α ל- A מתקבלת מערכת חסרת סתירה ולאחר הוספת שלילת α ל- A מתקבלת מערכת בעלת סתירה.

1. α נובעת ממערכת האקסיומות A
2. שלילת α נובעת מאקסיומות מערכת A

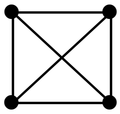
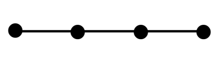
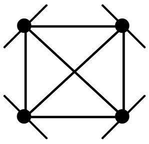
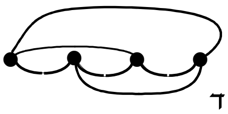
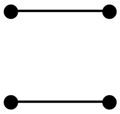
בשאלות 19-21 נעסוק במערכת האקסיומות הבאה:

א. יש בדיוק ארבע נקודות.

ב. לכל שתי נקודות שונות יש ישר אחד ויחיד אשר שתיהן נמצאת עליו.

ג. לכל ישר ℓ ולכל נקודה P שאינה על ℓ קיים ירש יחיד אשר P נמצאת עליו ואין לו נקודות משותפות עם ℓ.

לפניך ההמחשות הבאות (מעגלים וקשתות מגדירים ישרים):

א 
ב 
ג 
ד 
ה 

שאלה 19

1. המחשה א מראה כי המערכת חסרת סתירה
2. המחשה ג מראה כי המערכת חסרת סתירה

שאלה 20

1. המחשה ב מראה כי אקסיומה 3 אינה נובעת מאקסיומות 2,1
2. המחשה ה מראה כי אקסיומה 2 אינה נובעת באקסיומות 3,1

שאלה 21

1. המחשות א,ד מגדירות מודלים שקולים
2. מן ההמחשות הנתונות אפשר להסיק שהמערכת אינה שלמה

בשאלות 23,22 נעסוק במערכת האקסיומות הבאה:

א. יש לפחות שש נקודות.

ב. על כל ישר נמצאות בדיוק שלוש נקודות.

ג. לכל יש ℓ ולכל נקודה P שאינה על ℓ קיים יש יחיד אשר P נמצאת עליו ואין לו נקודות משותפות עם ℓ.

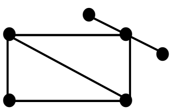
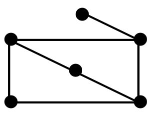
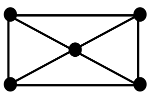
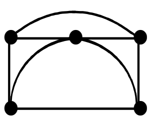
שאלה 22

1. המערכת היא חסרת סתירה
2. המערכת היא בלתי תלויה

שאלה 23

1. המערכת היא קטגורית
2. במערכת מתקיים המשפט הבא: "אם לכל שלוש נקודות קיים ישר אחד אשר הן נמצאות עליו, אז קיימות בדיוק שש נקודות"

שאלה 24

1. ההמחשות  ו-  שקולות זו לזו
2. ההמחשות  ו-  שקולות זו לזו

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 9,8

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2014ב **מועד הגשה: 10.6.2014**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- *שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס*
- *שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה*

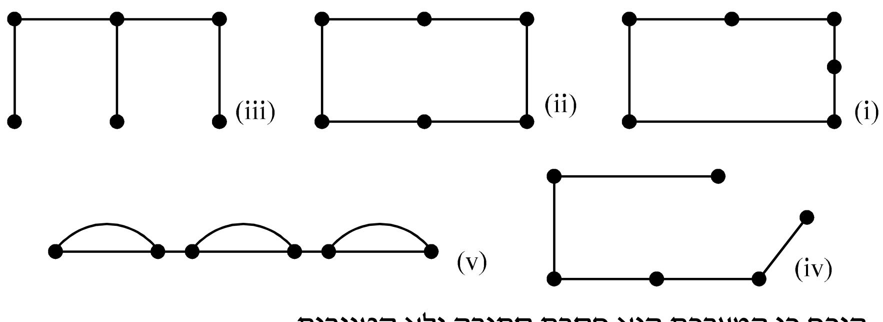
הסבר מפורט ב#נוהל הגשת מטלות מנחה#

שאלה 1 (28 נקודות)

נתונה מערכת האקסיומות הבאה, אשר מושגי היסוד שלה הם "נקודה", "ישר" (כקבוצה של נקודות) והיחס "נמצאת על".

1. יש בדיוק ארבעה ישרים.
2. יש בדיוק שש נקודות.
3. על כל ישר נמצאות לפחות שתי נקודות שונות.
4. לכל שני ישרים שונים יש לכל היותר נקודה אחת הנמצאת על שניהם.
5. לכל ישר ℓ ולכל נקודה P שאינה על ℓ קיים **לכל היותר** ישר אחד כך ש- P נמצאת עליו ואין לו נקודה משותפת עם ℓ.

א. לגבי **כל** אחת מההמחשות הבאות, קבע אם היא מגדירה מודל למערכת. אם לא - ציין אקסיומה שאינה מתקיימת.



ב. הוכח כי המערכת היא חסרת סתירה ולא קטגורית.

ג. הוכח כי אקסיומה 4 אינה נובעת מן אקסיומות האחרות והוכח כי אקסיומה 5 אינה נובעת מן האקסיומות האחרות.

ד. הוכח שבכל מודל של המערכת מתקיים המשפט: "לא כל הנקודות נמצאות על ישר אחד".

שאלה 2 (16 נקודות)

נסתכל במערכת האקסיומות הבאה :

א. יש בדיוק שלוש נקודות.

ב. קיימים שני ישרים **שונים** ℓ_1, ℓ_2 ושתי נקודות **שונות** A, B כך ש- $A, B \in \ell_1$ וגם $A, B \in \ell_2$.

ג. על כל ישר יש לפחות שתי נקודות.

ד. לכל ישר m ונקודה P שאינה על m קיים ישר m' אשר P נמצאת עליו ואין לו נקודות משותפות עם m.

הוכח שהמערכת הזאת היא בעלת סתירה.

שאלה 3 (28 נקודות)

בשאלה זו נתייחס למערכת הכוללת את ארבע האקסיומות של החבורה כפי שהוגדרו בעמוד 45, יחידה 4. מושג היסוד שלה הוא פעולה בינרית.

א. הוכח כי מערכת האקסיומות היא חסרת סתירה.

ב. הוכח כי אקסיומה 2 אינה נובעת מן האקסיומות האחרות.

ג. הוכח כי אקסיומה 4 אינה נובעת מן האקסיומות האחרות.

ד. נוסיף את אקסיומה 5 : יש בדיוק 4 איברים. הוכח שהקבוצה $\{1,3,5,7\}$ ביחס לפעולת הכפל מודולו 8 היא מודל למערכת $(1,2,3,4,5)$. (אין צורך בהוכחת קיבוציות).

ה. הוכח שהמערכת $(1,2,3,4,5)$ אינה קטגורית.

שאלה 4 (28 נקודות)

נתונה מערכת האקסיומות הבאה, העוסקת במושגים "נקודה", "ישר" (קבוצה של נקודות) וביחס "נמצאת על" בפירושו הרגיל :

1. יש בדיוק ארבע נקודות.
2. כל שתי נקודות נמצאות על ישר יחיד.
3. כל ישר מכיל לפחות שתי נקודות שונות.
4. לכל ישר ℓ ונקודה P שלא נמצאת על ℓ יש ישר יחיד אשר P נמצאת עליו ואין לו נקודה משותפת עם ℓ .

א. הוכח שמערכת האקסיומות חסרת סתירה.

ב. הוכח מתוך מערכת זו את המשפט : "אין ישר ועליו בדיוק 3 נקודות שונות".

ג. הוכח שמערכת האקסיומות הנתונה אינה מערכת שלמה.

ד. נוסיף למערכת את האקסיומה הבאה : לכל שני ישרים יש נקודה משותפת.

(i) הוכח כי המערכת המורחבת חסרת סתירה.

(ii) הוכח כי המערכת המורחבת קטגורית.

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

הקורס: אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 10, 12

מספר השאלות: 24 **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2014ב **מועד הגשה: 14.6.2014**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא** בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א - אם רק טענה 1 נכונה
ב - אם רק טענה 2 נכונה
ג - אם שתי הטענות נכונות
ד - אם שתי הטענות לא נכונות

בכל השאלות בממ"ח זה, הנקודות והישרים נמצאים באותו מישור.

בשאלות 1-4 נתייחס למודל אשר הנקודות בו הן כל הנקודות במישור פרט לנקודות השייכות לישר נתון ℓ. נסמן קבוצת הנקודות ב- A. ישר במודל זה הוא חיתוך לא ריק של ישר רגיל במישור, עם הקבוצה A. (שים לב כי במודל זה, ישרים שאינם מקבילים ל- ℓ מורכבים משני חלקים זרים).

שאלה 1

1. במודל זה מתקיימות כל אקסיומות החילה.
2. המודל מדגים את האי-תלות של אקסיומת המקבילים באקסיומות החילה.

שאלה 2

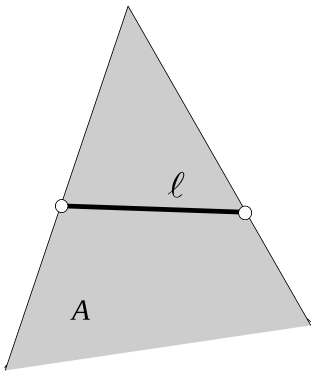
1. המודל מקיים את כל אקסיומות הסדר.
2. המודל מדגים את האי-תלות של אקסיומת פאש בשאר אקסיומות הסדר.

שאלה 3

1. המודל מקיים את אקסיומת החפיפה III-1 .
2. המודל מקיים את אקסיומת החפיפה III-2 .

שאלה 4

1. המודל מקיים את אקסיומת החפיפה III-3 .
2. המודל מקיים את אקסיומת החפיפה III-4 .



בשאלות 5-7 נתייחס למודל שבו קבוצת הנקודות A היא: קבוצת כל הנקודות הנמצאות בין שתי קרניים שונות היוצאות מאותה נקודה, לא כולל הנקודות שעל שתי הקרניים. (ראה ציור). ישר במודל זה הוא כל חיתוך לא ריק של A עם ישר רגיל במישור (שים לב כי הישרים כאן יכולים להיות קטעים או קרניים, חסרי קצוות).

שאלה 5

1. המודל מקיים את כל אקסיומות החילה.
2. המודל מדגים את האי-תלות של אקסיומת המקבילים באקסיומות החילה.

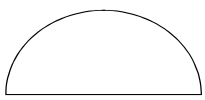
שאלה 6

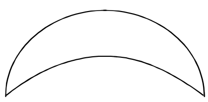
1. המודל מקיים את כל אקסיומות הסדר.
2. המודל מדגים את האי-תלות של אקסיומת פאש בשאר אקסיומות הסדר.

שאלה 7

1. המודל מקיים את כל אקסיומות החפיפה.
2. המודל מדגים את האי-תלות של אקסיומת החפיפה III-1 בשאר אקסיומות החפיפה.

בשאלות 8-11 נעסוק בהמחשות הבאות:

א 

ב 

הנקודות בכל המחשה הן הנקודות הפנימיות, ללא הנקודות שעל הקו המקיף. ישר הוא אותו חלק של ישר רגיל הנמצא בתוך קבוצת הנקודות הנתונה.

שאלה 8

1. המחשה א מקיימת את כל אקסיומות החילה.
2. המחשה א מקיימת את אקסיומת המקבילים.

שאלה 9

1. המחשה ב מקיימת את כל אקסיומות החילה.

המחשה ב מקיימת את אקסיומת הרציפות IV-1 .

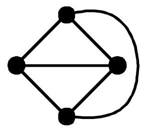
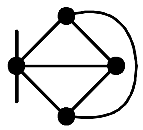
שאלה 10

1. המחשה א מקיימת את אקסיומת פאש.
2. המחשה ב מקיימת את אקסיומת פאש.

שאלה 11

1. המחשה א מדגימה את האי-תלות של אקסיומה III-4 בשאר אקסיומות החפיפה.
2. המחשה ב מקיימת את אקסיומת החפיפה III-4 .

שאלה 12

1. ההמחשה  מתארת מודל שמקיים את אקסיומות החילה ואקסיומת המקבילים.
2. ההמחשה  מתארת מודל שמקיים את אקסיומות החילה ואקסיומת המקבילים.

בשאלות 13-8 a,b,c הם מספרים שלמים.

שאלה 13

1. אם $b|a$ ו- $c|a$ אז $bc|a^2$.
2. אם a לא מחלק את b ו- b לא מחלק את a אז ל- a ו- b אין מחלק משותף גדול מ- 1.

שאלה 14

1. אם $a|bc$ ואם a לא מחלק את b אז a מחלק c .
2. אם $a|(b+c)$ ואם a לא מחלק את b אז a לא מחלק את c .

שאלה 15

1. אם $a|b$ ו- $a|c$ אז $a^2|bc$
2. אם $b|a$ ו- $c|a$ אז $bc|a$.

שאלה 16

1. a^2 יכול לתת שארית 3 בחלוקה ב- 4.
2. a^2 יכול לתת שארית 3 בחלוקה ב- 5.

שאלה 17

1. אם שארית החלוקה של a ב- b שווה לשארית החלוקה של a ב- c אז $b = c$.
2. אם $b < c$ אז שארית החלוקה של a ב- b קטנה משארית החלוקה של a ב - c .

שאלה 18

1. אם a נותן שארית r בחלוקה ב- b אז $2a$ נותן שארית $2r$ בחלוקה ב- $2b$.
2. אם a נותן שארית 4 בחלוקה ב- 5 אז $3a$ נותן שארית 2 בחלוקה ב- 5.

שאלה 19

1. בקבוצה הנוצרת מ- $\{3,4\}$ על-ידי חיבור נמצאים כל המספרים הטבעיים פרט ל- 1,2,5.
2. בקבוצה הנוצרת מ- $\{2,-5\}$ על-ידי חיבור נמצאים כל המספרים השלמים (חיוביים או שליליים).

שאלה 20

1. בקבוצה הנוצרת על-ידי כפל מ- $\{1,2,3,5,7,11,13\}$ נמצא כל מספר טבעי שגדול מ- 100.
2. $1/8$ נמצא בקבוצה הנוצרת על-ידי כפל מ- $\{2, -\frac{1}{2}\}$.

שאלה 21

1. $\{2, 3\}$ היא קבוצת יוצרים (ביחס לחיבור) לקבוצה הנוצרת על ידי חיבור מ- $\{2, 5\}$.
2. $\{3, \frac{1}{9}\}$ היא קבוצת יוצרים מינימלית (ביחס לכפל) לקבוצה הנוצרת על ידי כפל מ- $\{9, 1/3\}$.

שאלה 22

1. 1069 הוא מספר ראשוני.
2. 1073 הוא מספר ראשוני.

שאלה 23

1. אם $n > 3$ אז לפחות אחד מבין המספרים n, $n+2$, $n+4$ אינו ראשוני.
2. אם $n > 1$ אז $n^3 - n$ מתחלק ב- 3.

שאלה 24

1. קיימים מספרים טבעיים m ו- n כך ש- $21n - 28 = 56m - 4$.
2. קיימים מספרים טבעיים k, n, m כך ש- $15^{2m-1} \cdot 6^n \cdot 2^k = 5^k \cdot 9^n \cdot 2^m$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 17

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 12,10

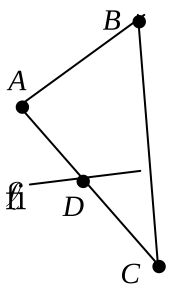
מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2014ב **מועד הגשה: 25.6.2014**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- *שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס*
- *שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה*

הסבר מפורט ב#נוהל הגשת מטלות מנחה#



שאלה 1 (30 נקודות)

(בשאלה זו נתייחס לאקסיומות הגיאומטריה האוקלידית. הישר והנקודות שלהלן, נמצאים באותו מישור).

א. יהי ℓ ישר ויהיו A, B ו- C נקודות לא קוויות שאינן על ℓ.
נתון שיש נקודה D הנמצאת על ℓ ומקיימת (ADC). כמו כן נתון שלא קיימת נקודה E הנמצאת על ℓ ומקיימת (AEB).
הוכח שיש נקודה על ℓ (נסמנה ב- F, שמקיימת (BFC)).

הערה: בניסוח לא פורמלי, עליך להוכיח שאם A ו- B נמצאות מאותו עבר של ℓ, וכמו כן A ו- C אינן נמצאות מאותו עבר של ℓ, אז גם B ו- C אינן נמצאות מאותו עבר של ℓ. ראה איור להמחשה.

ב. נתון משולש ΔABC ותהיינה D, E ו- F נקודות המקיימות: (ADB), (BEC), (AFC).
הוכח כי D, E ו- F אינן קוויות.

הדרכה: נניח בשלילה כי D, E ו- F נמצאות על ישר אחד.
כמו כן נניח שהן מקיימות (DFE). (אם הן נמצאות בסדר שונה על הישר - ההוכחה דומה).
התבונן במשולש ΔBDE. לפי הנחת השלילה הישר ש- A ו- C נמצאות עליו חותך את הקטע DE בנקודה F. כעת עליך להשתמש באקסיומת פאש ובאחת מאקסיומות הסדר האחרות ולהגיע לסתירה.

שאלה 2 (30 נקודות)

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. קיימים מספרים טבעיים m ו- n כך ש: $36m + 14 = 51n - 20$.

ב. לכל n טבעי, המספר $n(n+33)(n+46)(n+92)(n+74)$ מתחלק ב- 10.

ג. אם A^* הקבוצה הנוצרת מ- $A = \{36, \frac{1}{9}, \frac{1}{4}\}$ על ידי כפל, אז $27 \in A^*$.

ד. אם $a|bc$ ואם a אינו מחלק את b אז $a|c$.

שאלה 3 (20 נקודות)

התבונן בסדרה הבאה המוגדרת על-ידי: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ ולכל n טבעי $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

א. רשום את ערכיהם של $a_1, a_2, \ldots, a_8$.

ב. הוכח באינדוקציה מתימטית כי לכל n טבעי מתקיים:

$$a_{n+1}^2 - a_{n+2} \cdot a_n = (-1)^n$$

ג. האם קיום השוויון שבסעיף ב' תלוי בערכים המסוימים שבחרנו עבור a_1 ו- a_2 ? נמק!

שאלה 4 (20 נקודות)

א. הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי, המספר $n^3 + 3n^2 + 2n$ מתחלק ב- 6.

ב. הוכח כי לכל a טבעי, המספר $a(a^2 + 11)$ מתחלק ב- 6, ללא שימוש באינדוקציה.