פתרונות לממ"ן 16 - 2013א - 20425

1. א. ההתפלגות של המשתנה המקרי Y בתנאי $X=i$ היא גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{2^i}{2^i+1}$, ולכן:

$$P\{Y \le n \mid X=i\} = 1 - P\{Y > n \mid X=i\} = 1 - \left(\tfrac{1}{2^i+1}\right)^n$$

ב. $$E[W] = E[2^{-X}] = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \cdot e^{-\lambda} \cdot \tfrac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda/2} = e^{-\lambda/2}$$

$$E[W^2] = E[2^{-2X}] = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-2i} \cdot e^{-\lambda} \cdot \tfrac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{4}\right)^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda/4} = e^{-3\lambda/4}$$

ומכאן: $$\text{Var}(W) = E[W^2] - (E[W])^2 = e^{-3\lambda/4} - e^{-\lambda}$$

ג. לחישוב התוחלת של Y נשתמש בנוסחת התוחלת המותנית.

לכל $i = 0,1,\ldots$, מתקיים: $$E[Y \mid X=i] = \tfrac{2^i+1}{2^i}$$

לכן: $$E[Y] = E[E[Y \mid X]] = E\left[\frac{2^X+1}{2^X}\right] = E\left[1 + \frac{1}{2^X}\right] = E[1+W] = E[W] + 1 = e^{-\lambda/2} + 1$$

ד. לחישוב השונות של Y נשתמש בנוסחת השונות המותנית.

לכל $i = 0,1,\ldots$, מתקיים: $$E[Y \mid X=i] = \tfrac{2^i+1}{2^i} \qquad ; \qquad \text{Var}(Y \mid X=i) = \tfrac{2^i+1}{2^{2i}}$$

לכן: $$\text{Var}(Y) = \text{Var}(E[Y \mid X]) + E[\text{Var}(Y \mid X)] = \text{Var}\left(\frac{2^X+1}{2^X}\right) + E\left[\frac{2^X+1}{2^{2X}}\right]$$

$$= \text{Var}(1+W) + E[W + W^2] = \text{Var}(W) + E[W] + E[W^2]$$

$$= e^{-3\lambda/4} - e^{-\lambda} + e^{-\lambda/2} + e^{-3\lambda/4} = 2e^{-3\lambda/4} - e^{-\lambda} + e^{-\lambda/2}$$

2. א. נסמן ב- $X_1, X_2, \ldots, X_N$ את מספר הגפרורים בכל אחת מהקופסאות שקיבלו N האנשים.
מנתוני הבעיה נובע שה-X_i-ים בלתי-תלויים זה בזה ובלתי תלויים ב-N. לפיכך, אפשר להציג את מספר הגפרורים הכולל שמקבלים N אנשי הקבוצה, באמצעות הסכום המקרי $\sum_{i=1}^{N} X_i$.

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1] = \tfrac{1+10}{2} \cdot 20 = 110$$ [ה-X_i-ים שווי-התפלגות]

ב. בסימוני הסעיף הקודם, נקבל כי:

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\text{Var}(X_1) + (E[X_1])^2 \text{Var}(N) = \tfrac{1+10}{2} \cdot 20 + 20^2 \cdot \tfrac{10^2-1}{12} = 3,410$$

3. א. מבלי להגביל את כלליות הפתרון, נניח שהזוגות נבחרים לפי סדר. ונגדיר:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{זוג } i \text{ הוא זוג מעורב} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \qquad \text{לכל } i = 1,\ldots,15$$

ונקבל כי: $X = \sum_{i=1}^{15} X_i$ = מספר הזוגות המעורבים

עתה, לכל $i = 1,\ldots,15$ מתקיים:
$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \frac{15^2}{\binom{30}{2}} = \frac{225}{435} = \frac{15}{29} = 0.5172$$

לכן:
$$E[X] = \sum_{i=1}^{15} E[X_i] = 15 \cdot \frac{15}{29} = 7\frac{22}{29} = 7.7586$$

ב. בסימוני הסעיף הקודם, נקבל כי:
$$\text{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = \frac{15}{29} \cdot \frac{14}{29} = \frac{210}{841} = 0.2497$$

ולכל $1 \le i, j \le 15$ מתקיים:
$$P\{X_i = 1, X_j = 1\} = \frac{15^2}{\binom{30}{2}} \cdot \frac{14^2}{\binom{28}{2}} = \frac{225}{435} \cdot \frac{196}{378} = \frac{70}{261} = 0.2682$$
$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{70}{261} - \left(\frac{15}{29}\right)^2 = \frac{5}{7{,}569} = 0.0006606$$

לכן:
$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{15} \text{Var}(X_i) + \sum_{i \ne j} \text{Cov}(X_i, X_j) = 15 \cdot \frac{210}{841} + 15 \cdot 14 \cdot \frac{5}{7{,}569} = 3.8843$$

4. נסמן ב-X^* את מספר הציפורים שיושבות על הכבל העליון. מתקיים: $Y = X + X^*$

כאשר, המשתנים המקריים X ו-X^* בלתי-תלויים ויש לכל אחד מהם התפלגות בינומית עם הפרמטרים 30 ו-0.5, ולמשתנה המקרי Y יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 60 ו-0.5. לפיכך, מתקיים:

$$\rho(X,Y) = \rho(X, X + X^*) = \frac{\text{Cov}(X, X + X^*)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\text{Var}(X) + \overbrace{\text{Cov}(X, X^*)}^{=0}}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$
$$= \frac{30 \cdot 0.5^2}{\sqrt{30 \cdot 0.5^2 \cdot 60 \cdot 0.5^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

5. א. בין X_1 ל- X_2 קיים הקשר הלינארי השלילי $X_2 = 21 - X_1$. לכן, מקדם המתאם ביניהם שווה ל- -1.

אפשר להגיע לתוצאה זו גם ב**חישוב ישיר**:

למשתנה המקרי X_1 יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 21 ו- 2/6, למשתנה המקרי X_2 יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 21 ו- 4/6 וקיים ביניהם הקשר הלינארי $X_2 = 21 - X_1$. לכן:

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \text{Cov}(X_1, 21 - X_1) = \text{Cov}(X_1, 21) - \text{Cov}(X_1, X_1) = 0 - \text{Var}(X_1) = -\text{Var}(X_1)$$
$$\text{Var}(X_2) = \text{Var}(21 - X_1) = (-1)^2\,\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_1)$$

ומכאן מקבלים כי:
$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(X_2)}} = \frac{-\text{Var}(X_1)}{\text{Var}(X_1)} = -1$$

ב.
$$E[Y_1] = E\left[(-1)^{X_1}\right] = \sum_{i=0}^{21} (-1)^i \binom{21}{i}\left(\frac{2}{6}\right)^i \left(\frac{4}{6}\right)^{21-i} = \left(-\frac{2}{6} + \frac{4}{6}\right)^{21} = \left(\frac{1}{3}\right)^{21}$$
$$E[Y_2] = E\left[(-1)^{X_2}\right] = \sum_{i=0}^{21} (-1)^i \binom{21}{i}\left(\frac{4}{6}\right)^i \left(\frac{2}{6}\right)^{21-i} = \left(-\frac{4}{6} + \frac{2}{6}\right)^{21} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{21}$$

נשים לב, שמתקיים השוויון $X_1 + X_2 = 21$, לכן :

$$E[Y_1Y_2] = E\left[(-1)^{X_1+X_2}\right] = E\left[(-1)^{21}\right] = E[-1] = -1$$

ומכאן :

$$\text{Cov}(Y_1,Y_2) = E[Y_1Y_2] - E[Y_1]E[Y_2] = -1 + \left(\tfrac{1}{3^{21}}\right)^2$$

6. א. למציאת התוחלת של X , נגזור את הפונקציה יוצרת המומנטים של X לפי t ונציב בנגזרת את הערך 0.

נקבל :

$$\frac{d}{dt}[M_X(t)] = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{1+e^{t-\theta}}{1+e^{-\theta}}\right)^{3n}\right] = 3n\left(\frac{1+e^{t-\theta}}{1+e^{-\theta}}\right)^{3n-1}\cdot\frac{e^{t-\theta}}{1+e^{-\theta}}$$

ולכן :

$$E[X] = \frac{d}{dt}[M_X(t)]\Big|_{t=0} = 3n\left(\frac{1+e^{t-\theta}}{1+e^{-\theta}}\right)^{3n-1}\cdot\frac{e^{t-\theta}}{1+e^{-\theta}}\Bigg|_{t=0} = \frac{3ne^{-\theta}}{1+e^{-\theta}}$$

ב. אם X הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $3n$ ו- $p = \frac{e^{-\theta}}{1+e^{-\theta}}$, אז הפונקציה יוצרת המומנטים שלו, לכל t, היא :

$$M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^{3n} = \left(\frac{e^{-\theta}}{1+e^{-\theta}}\cdot e^t + 1 - \frac{e^{-\theta}}{1+e^{-\theta}}\right)^{3n} = \left(\frac{e^{t-\theta}}{1+e^{-\theta}} + \frac{1}{1+e^{-\theta}}\right)^{3n} = \left(\frac{1+e^{t-\theta}}{1+e^{-\theta}}\right)^{3n}$$