פתרון ממ"ן 14

תשובה 1

א. עבור $n=3$ אגף שמאל הוא $\binom{3}{3}=1$.

אגף ימין הוא סכום שבו i רץ מ- 2 עד 2, כלומר מחובר אחד בלבד: $(2-1)(3-2)=1$.

קיבלנו שהאגפים שווים.

השלימו בעצמכם את הבדיקה עבור המקרה $n=4$.

ב. האמירה ש- i הוא האבר האמצעי בגודלו מבין $2k+1$ מספרים, שקולה לאמירה: בקבוצה בת $2k+1$ המספרים יש בדיוק k מספרים קטנים מ- i ויש בדיוק k מספרים גדולים מ- i.

מכיון שכל המספרים לקוחים מתוך $A=\{1,2,\ldots,n\}$, מתקבל מהאמור כי $k+1\le i\le n-k$.

כעת, עבור כל ערך של i עלינו לבחור k מספרים קטנים ממנו ו- k מספרים גדולים ממנו.

לכך יש $\binom{n-i}{k}\binom{i-1}{k}$ אפשרויות.

בסיכום, קיבלנו את הזהות הבאה: $\sum_{i=k+1}^{n-k}\binom{i-1}{k}\binom{n-i}{k}=\binom{n}{2k+1}$.

מקרים פרטיים - השלימו את החישובים!

(i) עבור $k=0$ שני האגפים נותנים n.

(ii) עבור $k=1$ מתקבלת הזהות שהוצגה בגוף השאלה.

(iii) עבור $n=2k+1$ שני האגפים נותנים 1.

תשובה 2

תהי U קבוצת כל הפונקציות של A ל- A. כידוע $|U|=6^6$.

נכין מצרכים לחישוב בעזרת הכלה והפרדה.

תהי A_i $(i=1,2,3)$ קבוצת הפונקציות של A ל- A שבכל אחת מהן i **אינו** נמצא בתמונה.

כל פונקציה כזו ניתן לראות כפונקציה של A לקבוצה $A-\{i\}$, ולהיפך: כל פונקציה של A לקבוצה $A-\{i\}$ אפשר לראות כפונקציה של A ל- A אשר i אינו נמצא בתמונה שלה.

לפיכך $|A_i|=5^6$. כאמור יש 3 קבוצות A_i.

נתבונן בחיתוכים $A_i\cap A_j$ כאשר $i\ne j$. $|A_i\cap A_j|=4^6$ (מדוע?). יש 3 חיתוכים כאלה.

בדומה, $|A_1\cap A_2\cap A_3|=3^6$.

על פי עקרון ההכלה וההפרדה, מספר הפונקציות העונות על הנדרש בשאלה הוא $6^6-3\cdot 5^6+3\cdot 4^6-3^6$.

תשובה 3

המערכת לא מייחסת חשיבות לסדר התוים שהוקלדו או למספר ההופעות של תו. במלים אחרות, המערכת מתייחסת בדיוק **לקבוצת** התוים שהוקלדו: שתי סיסמאות נחשבו זהות באותו יום אם ורק אם **קבוצת** התוים בסיסמא אחת שווה בדיוק **לקבוצת** התוים בסיסמא השניה.

השאלה היא אפוא: כמה קבוצות חלקיות יש לקבוצת התוים המותרים, בהגבלה הבאה: קבוצה חייבת להכיל ספרה, אות קטנה ואות גדולה (הדרישה שאורך סיסמא הוא לכל היותר 100 אינה מגבילה, כי מספר כל התוים האפשריים הוא רק 62).

יש לפחות שתי דרכים לפתור את השאלה.

דרך א: הכלה והפרדה

תהי U קבוצת כל הקבוצות של תוים מותרים. $|U| = 2^{62}$.

תהיינה

A קבוצת הקבוצות בהן לא מופיעה אף ספרה,

B קבוצת הקבוצות בהן לא מופיעה אות גדולה,

C קבוצת הקבוצות בהן לא מופיעה אות קטנה.

נכין את גדלי הקבוצות ואת החיתוכים - **השלימו!**

בשימוש בהכלה והפרדה נקבל:

$$2^{62} - (2^{52} + 2\cdot 2^{36}) + (2\cdot 2^{26} + 2^{10}) - 1 \ .$$

דרך ב: חישוב ישיר ללא הכלה והפרדה (תודה לישראל בר-מאיר!)

בחירה של קבוצת תוים בה יש לפחות ספרה אחת, לפחות אות גדולה אחת ולפחות אות קטנה אחת שקולה לבחירה של שלושת הדברים הבאים יחד:

קבוצה לא ריקה של ספרות, קבוצה לא ריקה של אותיות גדולות, קבוצה לא ריקה של אותיות קטנות.

לפיכך התשובה היא: $(2^{10}-1)(2^{26}-1)(2^{26}-1)$.

תרגיל קל: הראו ששתי התשובות מתלכדות.

תשובה 4

יהי n מספר האנשים שהגיעו לטקס.

מכיון שאף אחד לא לחץ יד לעצמו, אדם יכול ללחוץ לכל היותר $n-1$ ידים.

מספר לחיצות הידים הקטן ביותר האפשרי הוא 0.

לפיכך יש n אפשרויות למספר לחיצות ידים: המספרים $0,\dots,n-1$.

במבט ראשון נראה שאין לנו אפשרות ליישם את עקרון שובך היונים, כי מספר האנשים שווה למספר האפשרויות ללחוץ ידים. כדי ליישם את העקרון נצטרך לעבוד עוד קצת:

נשים לב שאם יש אדם שלחץ $n-1$ ידים, הוא לחץ **לכל שאר האנשים**. במקרה כזה אין אדם שלא לחץ אף יד. נפריד בהתאם לשני מקרים:

(i) יש אדם שלחץ $n-1$ ידים, ואז אין אדם שלחץ 0.

במקרה זה מספר לחיצות הידים הוא בתחום $1,\dots,n-1$.

(ii) אין אדם שלחץ $n-1$ ידים, ואז אולי יש אדם שלחץ 0.

במקרה זה מספר לחיצות הידים הוא בתחום $0,\dots,n-2$.

בכל אחד משני המקרים יש רק $n-1$ אפשרויות למספר לחיצות ידים.

בכל אחד משני המקרים ניישם את עקרון שובך היונים:

יש n אנשים ורק $n-1$ אפשרויות למספר לחיצות הידים.

לפי עקרון שובך היונים, בכל אחד משני המקרים יש (לפחות) שני אנשים שלחצו אותו מספר ידים.