תשובה 1

א. מהנתון, תהי $f : A-B \rightarrow B-A$ חד-חד-ערכית ועל.

כידוע (בעזרת פילוג החיתוך לגבי האיחוד) $A=(A\cap B')\cup(A\cap B)$,

כלומר $A=(A-B)\cup(A\cap B)$, וזהו איחוד זר.

בדומה, $B=(B-A)\cup(A\cap B)$.

נגדיר $g : A\rightarrow B$ כך:

$$g(a)=\begin{cases} f(a) & a\in A-B \\ a & a\in A\cap B \end{cases}$$

מהנתון על f נקבל ש- g מעבירה את $A-B$ באופן חד-חד-ערכי על $B-A$,

ומכיוון ש- g פועלת כזהות על $A\cap B$, היא מעבירה את $A\cap B$ באופן חד-חד-ערכי על עצמו.

בהתחשב בכך ש- $B=(B-A)\cup(A\cap B)$, לא קשה להראות ש- g היא חד-חד-ערכית ועל B.

הוכחה של טענה כללית יותר, ממנה זה נובע, ראו בפרק 5, טענה 5.9 .

הראינו פונקציה **חד-חד-ערכית** מ- A **על** B , לכן הן שוות-עוצמה.

ב. כאמור, כללית $A=(A-B)\cup(A\cap B)$, וזהו איחוד זר,

וכן $B=(B-A)\cup(A\cap B)$ וזהו איחוד זר.

מכאן, אם A,B **סופיות**, ומתקיים $|A|=|B|$ אז:

$$|A-B|=|A|-|A\cap B|=|B|-|A\cap B|=|B-A|$$

ג. לדוגמא נקח $A=\mathbf{N}$, ו- B היא קבוצת הטבעיים הזוגיים (השלימו הבדיקה).

תשובה 2

א. זו הקבוצה $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. לפי שאלה 4.4 בספר הלימוד, $\mathbf{Z}$ היא בת-מניה.

כעת, כללית אם $|A|=|B|$ ו- $|C|=|D|$ אז $|A\times C|=|B\times D|$

(הוכיחו זאת, ע"י בניית פונקציה חח"ע ועל מתאימה ! ר' גם פרק 5 שאלה 5.5).

מכאן $|\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}|=|\mathbf{N}\times\mathbf{N}|$. לפי שאלה 4.7 בעמ' 123 בספר הלימוד, $|\mathbf{N}\times\mathbf{N}|=\aleph_0$.

לפיכך העוצמה היא $\aleph_0$.

ב. ראשית, התשובה אינה תלויה באילו קבוצות נבחר: די שנמצא $\aleph_0$ קבוצות זרות **כלשהן**, שעוצמת כל אחת מהן C, ונחשב את עוצמת האיחוד שלהן. אם נבחר $\aleph_0$ קבוצות זרות אחרות שעוצמת כל אחת מהן C, אז קיימת פונקציה **חד-חד-ערכית** של איחוד $\aleph_0$ הקבוצות הללו **על** איחוד $\aleph_0$ הקבוצות המקוריות שבחרנו (הוכיחו זאת!). לפיכך עוצמת האיחוד המבוקש אינה תלויה בבחירת $\aleph_0$ הקבוצות שעוצמתן C.

נבחר אפוא כך: לכל n טבעי, תהי $A_n=\{x\in\mathbf{R} \mid n<x<n+1\}$.

לפי הגדרת העוצמה C בספר הלימוד, $|A_n|=C$. נסמן $A=\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$.

A היא אפוא קבוצת כל המספרים הממשיים החיוביים שאינם טבעיים.

A מכילה את A_0, שעוצמתה C, ולכן $|A|\geq C$. מצד שני, $A\subset\mathbf{R}$, ולכן $|A|\leq C$.

משני הכיוונים יחד, לפי משפט שרדר-ברנשטיין, $|A|=C$.

ג. העוצמה היא $\aleph_0$: ר' אוסף תרגילים פתורים, קבוצה 3 שאלה 10ה.

ד. לפי אוסף תרגילים פתורים קבוצה 3 שאלה 2, עוצמת הקבוצה הנ"ל היא כעוצמת $P(\mathbf{R})$.

לפי משפט קנטור (משפט 5.6), עוצמה זו גדולה ממש מ- C.

תשובה 3

א. תהי f פונקציה של A **על** B. עלינו לבנות פונקציה חח"ע של B ל- A. מכיוון ש- f על, הרי לכל $b\in B$, הקבוצה $\{a\in A \mid f(a)=b\}$ (קבוצת המקורות של b) אינה ריקה. נבחר שרירותית מקור לכל איבר של B. בכך הגדרנו פונקציה של B ל- A!

קל לראות שפונקציה זו היא חח"ע.

מי שההוכחה נראית לו קצת מוזרה, יכול להתנחם בכך שהוא בחברה טובה: השימוש בבחירה שרירותית של נציגים בקבוצה כלשהי של קבוצות נראה למתמטיקאים רבים חשוד. בניסוח אקסיומטי של תורת הקבוצות, הסתבר שהוא מצריך אקסיומה מיוחדת, הנקראת "אקסיומת הבחירה".

ב. לפי המקורות שבהדרכה לסעיף זה, קיימת פונקציה "טבעית" של A **על** A/E.

לפי סעיף א כאן, נובע המבוקש!

תשובה 4

א. תהיינה A_1,A_2, B_1,B_2 קבוצות שעוצמותיהן בהתאמה k_1,k_2, m_1,m_2.

כדי לקצר מעט את ההוכחה ניעזר בשאלה 5.1א, לפיה יש קבוצה חלקית של A_2, שעוצמתה k_1, ויש קבוצה חלקית של B_2 שעוצמתה m_1. לכן ב.ה.כ. נניח $A_1\subseteq A_2$, $B_1\subseteq B_2$.

כעת מהגדרת כפל עוצמות $k_1\cdot m_1=|A_1\times B_1|$, $k_2\cdot m_2=|A_2\times B_2|$.

אבל מהנחתנו ומהגדרת מכפלה קרטזית נקבל $A_1\times B_1\subseteq A_2\times B_2$.

לכן, בהסתמך על שאלה 5.1ב, $k_1\cdot m_1\leq k_2\cdot m_2$.

ב. מצד אחד, $\aleph_0\leq C$ ולכן בעזרת סעיף א, $\aleph_0\cdot C\leq C\cdot C=C$.

מצד שני $1\leq\aleph_0$ ולכן בדומה $C=1\cdot C\leq\aleph_0\cdot C$.

משני הכיוונים יחד, בעזרת קנטור-שרדר-ברנשטיין, נובע המבוקש.

ג. לפי משפט 5.26, $2^{\aleph_0}=C$. נציב זאת ונקבל $C^C=(2^{\aleph_0})^C=2^{\aleph_0\cdot C}=2^C$.

במעברים נעזרנו במשפט 5.27ג ובסעיף ב של שאלה זו.

איתי הראבן