

## שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.  
 בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת חסבר קצר כמה מלים, לא יותר משתי שורות. חסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, חסבר שנוי בצורה קיצונית עלול להביא לחורדה של נקודה או שתיים.  
 (6 נק') א. את הפסוק "הריבוע של כל מספר גדול מ-1 הוא גדול מאותו מספר" ניתן להצדיק כך:

$$\forall x((x > 1) \wedge (x^2 > x)) \quad [1]$$

$$\neg \exists x((x < 1) \wedge (x^2 < x)) \quad [2]$$

$$\forall x((x^2 > x) \rightarrow (x > 1)) \quad [3]$$

$$\forall x((x < 1) \vee (x = 1) \vee (x^2 > x)) \quad [4]$$

(7 נק') ב. נתונות קבוצות  $A, B$  שחלקיות לקבוצת המספרים הממשיים  $\mathbb{R}$  כך ש-

$$A \cap B = \emptyset$$

$$|A' \cup B'| = |\mathbb{R}| \quad [2]$$

$$|A'| = |\mathbb{R}| \quad [4]$$

$$|B| = \aleph_0 \text{ או } |A| = \aleph_0 \quad [1]$$

$$A' \text{ קבוצה אינסופית} \quad [3]$$

$$|A \cup B| = |\mathbb{R}| \quad [5]$$

(6 נק') ג.  $G$  הוא גרף פשוט על 6 צמתים שבו הדרגה של כל צומת היא 3. אז:

$$G \text{ הוא מישורי} \quad [1]$$

$$G \text{ הוא לא מישורי} \quad [2]$$

$$G \text{ הוא המילטוני} \quad [3]$$

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות  
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

## שאלה 2

- נסמן ב-  $R$  את יחס הסדר הרגיל בקבוצת המספרים הטבעיים  $N$  (כלומר: לכל  $k, n \in N$ ,  $k \leq n$  אם ורק אם  $(k, n) \in R$ ).  
יהי  $a$  איבר כלשהו כך ש-  $a \in N$ . נסמן ב-  $S = \{(a, a)\} \cup \{(n, a) | n \in N\}$ .  
(9 נק') א. הוכיחו ש-  $R \cup S$  הוא סדר חלקי על הקבוצה  $N \cup \{a\}$ .  
(9 נק') ב. הוכיחו שקיים ב-  $N \cup \{a\}$  איבר גדול ביותר לגבי היחס  $R \cup S$ . נמקו!  
(9 נק') ג. האם האיבר הגדול ביותר שמצאת בסעיף ב' מכסה איבר אחר של  $N \cup \{a\}$ ? נמקו את התשובה.

## שאלה 3

- (9 נק') א. מיצאו את המקדם של-  $x^{12}$  בפיתוח של המונקציה  $\frac{(1-x^5)^5}{(1-x)^{10}}$ .  
(18 נק') ב. כתבו מונקציה יחצרת עבור מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה  $x_1 + x_2 + \dots + x_{15} = 12$  כאשר  $x_i \leq 4$  לכל  $1 \leq i \leq 10$  וכל חמשת המעלמים האחרים הם מספרים המתחלקים ב-5. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה.  
(הערות מועילות: 0 הוא מספר טבעי שמתחלק ב-5.  $\frac{1-x^5}{1-x} = 1+x+\dots+x^4$ )

## שאלה 4

- נסמן ב-  $a_n$  את מספר המחרוזות באורך  $n$ , שאיבריהן הם הספרות 1, 2, 3, 4 והאותיות  $a, b$ . בעלות התכונה שמימין לספרה חייבת להופיע אות. למשל  $a2b3aa$  ו-  $bba$  הן מחרוזות מותרות אבל 3 ו-  $a23b4$  מחרוזות אסורות. את  $a_0$  מגדירים כ-1.  
(7 נק') א. מיצאו בעזרת חישוב ישיר את  $a_1, a_2$ .  
(7 נק') ב. מיצאו יחס נסיגה ל-  $a_n$  ובדקו שהערכים של  $a_0, a_1, a_2$  מתאימים ליחס הנסיגה.  
(13 נק') ג. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור  $a_n$ .

## שאלה 5

- בני מתייג  $T = (V, E)$  הצמתיים מסומנים במספרים עוקבים, החל מ-1 והלאה.  
נתון ש-  $(1, 3, 1, 2)$  היא סדרת פרופר של  $T$ .  
(9 נק') א. שרטטו את העץ  $T$  כך שייראה גרף דו-צדדי.  
(9 נק') ב. הוכיחו שקיימים עלים  $u, v \in V$  כך שהגרף  $G = (V, E \cup \{uv\})$  (המתקבל על ידי הוספת קשת ב-  $T$  בין  $u, v$ ) לא יהיה גרף דו-צדדי. נמקו את התשובה.  
(9 נק') ג. מהו המספר המינימלי של קשתות שצריך להוסיף ל-  $T$  כדי לקבל גרף לא מישורי? נמקו את התשובה.

2019a\_82