אלגוריתמים
הרצאה 13
דף 1 מ 3
26.1.09

26.1.09

אלגוריתמים - הרצאה 13

המשך זרימה ברשתות..

נניח f פונקציית זרימה, G_f זה רשת שיורית ביחס ל f (G_f מבחינה זאת זו רשת זרימה). f' זו פונקציית זרימה חוקית ב G_f

<u>טענה:</u> $f+f'$ זרימה חוקית ב- G (הגרף המקורי). שערכה הוא: $|f|+|f'|$

מתחילים מ f בונים רשת שיורית, מוצאים בה זרימה חוקית, השלבה התחתונה? לו f ועושים לה סופרפוזיציה עם זרימה f' ומקבלים זרימה חוקית ברשת המקורית.

אם f' זה מסלול שיפור p שהזרמנו בו Δ (הקיבול השיורי המינימאלי במסלול) אז הוכחנו כבר. זה בעצם הכללה של הטענה לגבי מסלולי שיפור.

<u>הוכחה:</u> נובעת מזה שפונקציית זרימה זו פונקציה לינארית.

$f+f'$ שומרת על הקיבולים ב G_f מתוך ההגדרה של קיבול שיורי.

$f+f'$ שומרת על חוק השימור כיוון ש f ו f', כל אחת שומרת על חוק השימור, ולכן גם סכומן שומר על חוק השימור.

ערך הזרימה $|f|+|f'|$ נמדד במקור s וערכו הוא: $= \sum_{s\to u}[f(s,u)+f'(s,u)] - \sum_{u\to s}[f(u,s)+f'(u,s)]$

$$= \underbrace{\left[\sum_{s\to u} f(s,u) - \sum_{u\to s} f(u,s)\right]}_{|f|} + \underbrace{\left[\sum_{s\to u} f'(s,u) - \sum_{u\to s} f'(u,s)\right]}_{|f'|} = |f|+|f'|$$

בכל אלגוריתם לזרימות מקסימום נעשה בשלבים, בכל שלב יש זרימה f, נעבור לגרף שיורי ונחשב זרימת מקסימום.

<u>משפט</u> $\substack{\text{min-cut} \\ \text{max-flow}}$ (ford fulkerson):

התנאים הבאים שקולים:

(1) f זרימת מקסימום ב G

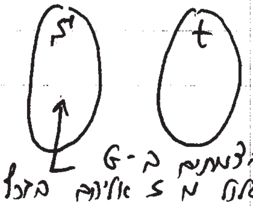
(2) ב G_f (הרשת השיורית) אין מסלול מ-s ל-t.

(3) קיים חתך $(S,\bar{S})$ שעבורו ערך הזרימה שווה לקיבול החתך; ($|f|=C(S,\bar{S})$)

<u>הוכחת המשפט:</u>

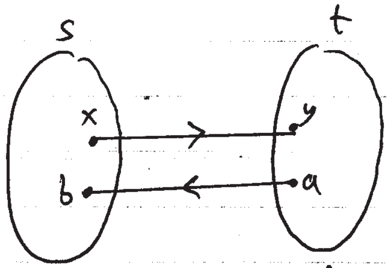
<u>$(1) \Rightarrow (2)$</u>: אם (2) לא היה נכון, אזי היה ב G_f מסלול שיפור מ s ל-t. והיינו כבר שאפשר היה להגדיל את ערך הזרימה בסתירה להנחה ש-f מקסימלית.

$(2) \Rightarrow (3)$: נגדיר את החתך הבא בגרף:



פה ימצאו כל הצמתים ב-G
כך שיש מסלול מ s אליהם בגרף G_f

$t \in \bar{S}$ כי אין מסלול מ s ל-t בגרף G_f לפי תנאי 2.



(הקשת y→x חייבת להיות רוויה כי אם היא לא
היתה רוויה הייתי יכולה להגיע מ-s ל-y ואז
היא היתה שייכת ל-s ולא ל-t.)

הקשת y→x חייבת להיות רוויה,
כלומר $f(x,y)=c(x,y)$, אחרת y→x היתה בגרף השיורי ואפשר היה להגיע
מ-s ל-y בגרף השיורי: (המסלול מ-s ל-x + הקשת y→x).
$f(a,b)=0$, אחרת, בגרף השיורי היתה קשת a→b וניתן היה להגיע מ-s
ל-a בגרף השיורי.

$$|f| = \underbrace{\sum_{e\in(S,\bar{S})} f(e)}_{C(S,\bar{S})} - \underbrace{\sum_{e\in(\bar{S},S)} f(e)}_{0} = C(S,\bar{S})$$

ולכן קיבול החתך שווה לערך הזרימה.

כי כל הקשתות שהולכות ימינה הן רוויות.
כי כל הקשתות שהולכות שמאלה הזרימה שלהן 0.

__(3)⇐(1):__ צריך להוכיח שאם יש חתך רווי אז הזרימה מקסימלית. זה טריוויאלי
כי אם יש זרימה ששווה לקיבול של איזה חתך בגרף שלי אפשר להגדיל אותה,
כי אז היא תעבור את קיבול החתך הרווי בסתירה למשפט שכבר הוכחנו.

למדנו מהמשפט:
זרימה מקסימלית תמיד מגדירה איזשהו חתך רווי.
זרימת המקסימום שווה לקיבול חתך המינימום.

__נגדיר אלגוריתם לחישוב זרימת מקסימום שנובע מהמשפט: (אלגוריתם FF "מטה אלגוריתם")__

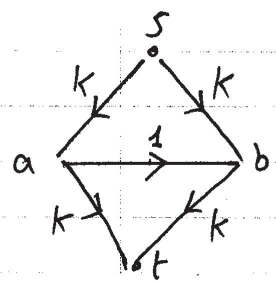
אתחול: $f\equiv 0$
כל עוד f לא מקסימלי, מצא מסלול שיפור ב-G_f ושפר את הזרימה
f בקיבול השיורי המינימלי במסלול.

(נובע מהמשפט כי ברגע שאין מסלול יש זרימת מקסימום, ואם הזרימה לא מקסימלית
יש מסלול שיפור בגרף השיורי)

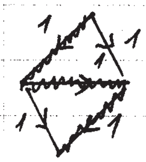
איך נממש את האלגוריתם: (איך נמצא מסלול שיפור ב-G_f)
צריך לבנות רשת שיורית ולמצוא מסלול מ-s ל-t אפשרי באמצעות BFS.
נפרק לשלבים:
1) יצור G_f $O(|E|+|V|)$

אלגוריתמים
הרצאה 13
דף 2 מ 3
26.1.09

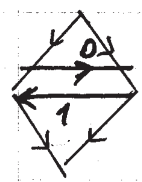
ג) חישוב מסלול ב G_f מ-s ל-t (BFS, DFS, ...) סיבוכיות: $O(|E|+|V|)$



נסתכל לדוגמה על:
באיטרציות: 1,3,5,... נמצא את המסלול: sabt
עם יחידת זרימה.
ובאיטרציות: 2,4,6,... נמצא את המסלול: sbat
עם יחידת זרימה.
סה"כ 2k איטרציות עד שנשלים את הזרימה.
נעשה סימולציה: (נעביר 1 במסלול המסומן)



הגרף השיורי יהיה:



ההתכנסות לזרימת מקסימום יכולה להיות מאוד איטית אם בחרנו מסלולים בצורה לא חכמה.

<u>איך לבחור מסלול שיפור?</u>
גם בחירה שרירותית של מסלול שיפור לא תצטרך יותר מאשר $O(c)$ איטרציות
כאשר c סכום הקיבולים בגרף.

<u>האלגוריתם של Edmond-Karp</u>:
בכל שלב הזרימה אינה מקסימלית: בחר את מסלול השיפור הקצר ביותר (מבחינת מספר הקשתות במסלול).
כמה איטרציות יהיו לנו לכל היותר? כלומר: כמה מסלולי שיפור נחשב?
הגדרת עזר: נגדיר את $\delta_f(s,v)$ בתור המרחק הקצר ביותר מ-s ל-v (מבחינת מספר קשתות) בגרף השיורי ביחס ל-f.
האלגוריתם שלנו בכל שלב מוצא מסלול שיפור שאורכו $\delta_f(s,t)$.
מתחילים מאיטרציה אפס, אחרי זה יש לנו f_1, אחרי זה f_2 וכן הלאה.
f_i - הזרימה אחרי חישוב מסלול השיפור ה-i. (האתחול - זרימת אפס).
<u>טענה</u>: לכל צומת v הסדרה: $\delta_{f_i}(s,v)$ היא סדרה מונוטונית לא יורדת.
כלומר: הצמתים בגרף לא יכולים להתקרב למקור s במהלך האיטרציות לחישוב זרימת מקסימום.

הוכחה: נניח בשלילה שאחרי ששיפרנו את הזרימה מ f ל f' קיים צומת v שמקיים: $\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$.

נבחר את v להיות הצומת שהכי קרוב ל-s ב-$G_{f'}$. (מבין אלה שהתקרבו ל-s)

נתבונן במסלול הקצר ביותר מ-s ל-v ב $G_{f'}$

$s \to \cdots u \to v$

$$\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u) \quad (*)$$

מקרה א': הקשת $u \to v$ הייתה קיימת בגרף G_f.

$$\delta_f(s,v) \leq \delta_f(s,u) + 1 \leq \delta_{f'}(s,u) + 1 = \delta_{f'}(s,v)$$

אי שוויון המשולש תכונה של מרחקים קצרים ביותר. לפי הנחה(*)

וקיבלנו סתירה להנחה ש: $\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$.

מקרה ב': הקשת $u \to v$ לא הייתה קיימת בגרף G_f.

כדי ש $u \to v$ לא יהיה שייך ל G_f אבל $u \to v$ יהיה שייך ל $G_{f'}$ אז:

$v \to u$ היה במסלול השיפור שבחרנו ב G_f ולכן הזרמנו זרימה ב: $v \to u$

ויצרנו קיבול שיורי ב $u \to v$ ב-$G_{f'}$.

כיוון שבחרנו ב G_f מסלול שיפור קצר ביותר ו $v \to u$ הופיע בו,

מתקיים: $\delta_f(s,v) + 1 = \delta_f(s,u)$ (מסלול השיפור נראה כך:

$s \to \cdots v \to u \cdots t$

כלומר:

$$\delta_f(s,v) = \delta_f(s,u) - 1 \leq \delta_{f'}(s,u) - 1 = \delta_{f'}(s,v) - 2 < \delta_{f'}(s,v)$$

וזו סתירה.

$$\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) + 1$$

משפט:

האלגוריתם שבכל איטרציה משפר לאורך המסלול הקצר ביותר צריך ל $O(|E||V|)$ איטרציות לחישוב זרימת מקסימום.

הוכחה:

קשת במסלול שיפור נקראת קריטית אם הקיבול השיורי שלה שווה לקיבול השיורי המינימלי במסלול.

אחרי שמשפרים את הזרימה, כל הקשתות הקריטיות נעלמות (כי הן נהיות רוויות ולא עוברות לגרף השיורי באיטרציה הבאה)

מה מתקיים אם קשת $u \to v$ קריטית בשתי איטרציות (לאו דווקא עוקבות)?

$u \to v$ קריטית בזרימה f, $u \to v$ נעשית שוב קריטית בזרימה f'.

אלגוריתמים
הקבוצה 3
כד ב מ ג
26.1.09

(*) $\delta_f(s,v)=\delta_f(s,u)+1$ כי בחרנו ב-G_f מסלול שיפור קצר ביותר.

כעת: $v\to u$ תחזור לתמונה, חייבת להיות איטרציה (זרימה f'') שבה העברנו זרימה בקשת $u\to v$. באיטרציה זו $\delta_{f''}(s,u)=\delta_{f''}(s,v)+1$

לפי הלמה שהוכחנו: $\delta_{f'}(s,u)\geq\delta_f(s,u)$

$s \to \cdots v \to u \cdots t$

לכן: $\delta_{f''}(s,u)=\delta_{f''}(s,v)+1 \underset{\text{מהטענה הקודמת}}{\geq} \delta_f(s,v)+1 \underset{(*)}{=} \delta_f(s,u)+2$.

מסקנה: בין שתי פעמים עוקבות שבה הקשת $v\to u$ היא קריטית אז הצומת u והתרחק מ-s ב- $+2$ לפחות.

בכל מסלול שיפור יש לו קשת קריטית, כל פעם שקשת נהיית קריטית היא מתרחקת ב $+2$ מהמקור. לכן סה"כ קשת $v\to u$ יכולה להיות קריטית $\frac{V}{2}$ פעמים. (המרחק המינימלי של u מ-s הוא 1, והמרחק המקסימלי של u מ-s הוא: $|V|-1$) וראינו שבין שתי פעמים שבהן $v\to u$ קריטית, המרחק של v מ-s גדל ב-2.

היחס לקשתות קריטיות הוא: $\frac{|E|\cdot|V|}{2}$ (מספר כל הפעמים שבהם אפשרי קשת יכולה להיות קריטית)

בכל מסלול שיפור מכיל לפחות קשת קריטית אחת, לכן מספר האיטרציות קטן שווה מ: $\frac{|E|\cdot|V|}{2}$