מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרק 2

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3** נקודות

סמסטר: 2008ב **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 28.3.08

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

"רלציה" בעברית: **יחס**.

שאלה 1 (20 נקודות)

א. תהי $S \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ מוגדרת כך: $S = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{N} \ , \ x \le 5 \ , \ 3 \le y\}$.
מְצאו קבוצות A,B כך ש- $S = A \times B$.

ב. תהי $D \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ מוגדרת כך: $D = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{N} \ , \ x + y \le 5\}$.
הוכיחו **שלא קיימות** קבוצות A,B כך ש- $D = A \times B$.
הדרכה לסעיף ב: נניח בשלילה שקיימות A,B כאלה... נסו להגיע לסתירה על ידי כך שתקבלו מתוך הנחת השלילה איברים ב- D, שאינם נמצאים ב- D לפי הנתון.

שאלה 2 (24 נקודות)

תהי $A = \{1,2,3\}$. R,S הם יחסים מעל A, ומתקיים $R \subseteq S$.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. כדי להפריך טענה - הבא דוגמא נגדית.
לטענות הנכונות - תן הוכחה מסודרת המסתמכת על טענות והגדרות בספר.

א. אם R רפלקסיבי אז S רפלקסיבי.

ב. אם S רפלקסיבי אז R רפלקסיבי.

ג. אם R סימטרי אז S סימטרי.

ד. אם S סימטרי אז R סימטרי.

ה. אם R אנטי-סימטרי אז S אנטי-סימטרי.

ו. אם S אנטי-סימטרי אז R אנטי-סימטרי.

שאלה 3 (24 נקודות)

לכל אחד מהיחסים הבאים ולכל אחת מהתכונות הבאות, בדוק אם היחס מקיים את התכונה.
התכונות: רפלקסיביות, סימטריות, אנטי-סימטריות, טרנזיטיביות.
בנוסף, אם היחס הוא יחס שקילות - ציין זאת. הוכח כל תשובה.

שים לב שיחס יכול להיות סימטרי ואנטי-סימטרי בעת ובעונה אחת, כך שאם הראית שיחס הוא סימטרי, זה לא מוכיח שהוא אינו אנטי-סימטרי.

א. היחס R מעל $\mathbf{N}-\{0\}$ המוגדר כך: $(n,m)\in R$ אםם n מתחלק ללא שארית ב- m.

ב. הסגור הסימטרי של היחס R מהסעיף הקודם.

ג. היחס S מעל קבוצת הממשיים השונים מאפס, המוגדר כך: $(x,y)\in S$ אםם $x\cdot y>0$.

שאלה 4 (32 נקודות)

לכל $n\in\mathbf{N}$, יהי D_n היחס הבא מעל $P(\mathbf{N})$:

עבור $X,Y\in P(\mathbf{N})$, $(X,Y)\in D_n$ אםם $|X\oplus Y|\le n$.

למשל $(\{1,2,3\}\ ,\{1,8\})\in D_3$, כי $\{1,2,3\}\oplus\{1,8\}=\{2,3,8\}$ היא קבוצה בת 3 איברים.

מאותה סיבה, עבור כל $n\ge 3$ מתקיים $(\{1,2,3\}\ ,\{1,8\})\in D_n$.

הגדרנו אפוא **סדרה אינסופית של יחסים** מעל $P(\mathbf{N})$.

בממ"ן 13 נוכיח באינדוקציה שעבור יחסים אלה, לכל $1\le n$, $D_1^{\,n}=D_n$.

בינתיים אתם מוזמנים להסתמך על כך ללא הוכחה, זה נחוץ לסעיף ג.

בנוסף, כדאי להסתמך במהלך הפתרון על שאלה מממ"ן 11, ועל משפט 2.16 בעמ' 56 בספר.
אפשר גם להסתמך על הטענות הבאות:

* איחוד שתי קבוצות סופיות הוא קבוצה סופית.
* קבוצה חלקית לקבוצה סופית היא סופית.
* קבוצה שמכילה קבוצה אינסופית היא אינסופית.

א. (5 נק') הוכח: $D_0=I_{P(\mathbf{N})}$ (יחס היחידה מעל $P(\mathbf{N})$).

ב. (3 נק') הוכח: לכל $n\in\mathbf{N}$, $D_n\subseteq D_{n+1}$.

ג. (8 נק') יהי D הסגור הטרנזיטיבי של D_1 . הוכח:
$(X,Y)\in D$ **אםם** $X\oplus Y$ היא קבוצה **סופית** של טבעיים (ייתכן ריקה).

ד. (8 נק') הוכח ש- D הוא יחס שקילות.

ה. (8 נק') תן דוגמא לקבוצות X,Y של טבעיים, שאף אחת מהן אינה ריקה, אף אחת מהן אינה $\mathbf{N}$, וכך ש- X,Y **אינן** באותה מחלקת שקילות לגבי יחס השקילות D .