תשובה 1

בחלק מהסעיפים בשאלה זו קל לטעות. אם טעיתם נסו להבין את הסיבה.

א. $x \subseteq y$ ב. $x \in y$

ג. $x \in y$ ד. אף אחד משניהם

ה. $x \subseteq y$ ו. $x \subseteq y$

ז. אף אחד משניהם ח. $x \subseteq y$ וגם $x \in y$

תשובה 2

א. **נכון**. לפי הגדרת חיסור קבוצות $A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$.

מכאן, שוב לפי אותה הגדרה: $(A - B) - B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin B\}$.

מתכונות הקשר הלוגי "וגם", אפשר לוותר באגף ימין על ההופעה השניה של $x \notin B$.

קיבלנו: $(A - B) - B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\} = A - B$

ב. **נכון**. אפשר להוכיח על ידי שימוש בהגדרות ובלוגיקה, בדומה לסעיף הקודם.

כדי לגוון, נציג הוכחה אחרת – הוכחה אלגברית.

ניעזר בטענה שבשורה השנייה בעמ' 21 בספר: $A \cap B = \varnothing \ \Leftrightarrow \ A - B = A$.

נציב $B - A$ במקום B :

$$A \cap (B - A) = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad A - (B - A) = A \qquad (*)$$

מהגדרת חיתוך קבוצות יחד עם הגדרת הפרש קבוצות, מתקיים תמיד $A \cap (B - A) = \varnothing$.

לכן מהשקילות (*) נקבל $A - (B - A) = A$.

ג. **לא נכון**.

דוגמא נגדית: נקח $x \neq \varnothing$ כלשהו, ותהי $A = \{x\}$, קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא x.

אז $P(A) = \{\varnothing, A\}$.

כעת $x \in A$, אבל $x \notin P(A)$ כי $x \neq \varnothing$ ו- $x \neq \{x\}$.

הראינו איבר של A שאינו ב- $P(A)$, לכן A אינה חלקית ל- $P(A)$.

תשובה 3

בהתאם להצעה, נסמן $B = B_1 \cap B_2$.

נפתח את אגף שמאל הנתון בשאלה , תוך הצבת B ובעזרת ההדרכה לשאלה :

$$(A_1 \cup A_2) - B = (A_1 \cup A_2) \cap B'$$

ניעזר בפילוג החיתוך מעל האיחוד (סעיף 1.3.4 בספר) :

$$= (A_1 \cap B') \cup (A_2 \cap B')$$

מהגדרת B, לפי דה-מורגן : $B' = B_1{}' \cup B_2{}'$. נציב זאת :

$$= (A_1 \cap (B_1{}' \cup B_2{}')) \cup (A_2 \cap (B_1{}' \cup B_2{}'))$$

ניעזר בפילוג האיחוד מעל החיתוך (סעיף 1.3.4 בספר) :

$$= ((A_1 \cap B_1{}') \cup (A_1 \cap B_2{}')) \;\cup\; ((A_2 \cap B_1{}') \cup (A_2 \cap B_2{}'))$$

שוב בעזרת ההדרכה לשאלה :

$$= ((A_1 - B_1) \cup (A_1 - B_2)) \;\cup\; ((A_2 - B_1) \cup (A_2 - B_2))$$

מהקיבוציות של האיחוד (אסוציאטיביות, עמ' 10 בספר), ניתן לסלק כאן שני זוגות סוגרים :

$$= (A_1 - B_1) \cup (A_1 - B_2) \;\cup\; (A_2 - B_1) \cup (A_2 - B_2)$$

תשובה 4

א. $A_0 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 2\} = \varnothing$, $A_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 4\} = \{4\}$

$A_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 6\}$, $A_3 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 8\}$

$$B_0 = A_1 - A_0 = \{4\} - \varnothing = \{4\}$$

$$B_1 = A_2 - A_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 < x \le 6\}$$

$$B_2 = A_3 - A_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 6 < x \le 8\}$$

ב. עבור $0 < n$ כלשהו

$$B_n = A_{n+1} - A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 2n+4\} - \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 2n+2\}$$

$$= \{x \in \mathbf{R} \mid 2n+2 < x \le 2n+4\}$$

נשים לב שהמעבר לשורה השניה (ולכן גם הביטוי המתקבל) אינו נכון כאשר $n = 0$.

התשובה המלאה היא אפוא :

$B_0 = \{4\}$ ועבור כל $n > 0$, $B_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 2n+2 < x \le 2n+4\}$.

ג. נוכיח: $\bigcup_{2\le n\in\mathbf{N}} B_n = \{x\in\mathbf{R} \mid 6<x\}$.

הכלה בכיוון אחד: יהי $x \in \bigcup_{2\le n\in\mathbf{N}} B_n$. משמע x שייך **לפחות לאחת** הקבוצות B_n .

מהנוסחה שרשמנו עבור B_n ומההנחה $2\le n$ נובע בפרט $6<x$.

הכלה בכיוון שני: יהי $6<x$. יהי k המספר הטבעי הגדול ביותר שקטן ממש מ- $\frac{x-2}{2}$.

מתקיים $2k+2<x\le 2k+4$, וכן $2\le k$.

מהנוסחה שרשמנו עבור B_n, נובע $x\in B_k$.

מצאנו $2\le k$ כך ש- $x\in B_k$. לכן, מהגדרת איחוד כללי של קבוצות, $x \in \bigcup_{2\le n\in\mathbf{N}} B_n$.

משתי ההכלות יחד מתקבל השוויון המבוקש.

ד. $\bigcup_{i\in I}(A_i') = (\bigcap_{i\in I} A_i)'$, $\bigcap_{i\in I}(A_i') = (\bigcup_{i\in I} A_i)'$.

נמקו בעזרת כללי דה מורגן לכמתים ולא אחרת (הוכחה בלעדיהם תהיה בהכרח שגויה).

ה. ניקח את $\mathbf{R}$ כקבוצה אוניברסלית. אז $D_n = B_n'$. מכאן ומהסעיפים הקודמים:

$$\bigcap_{2\le n\in\mathbf{N}} D_n = \bigcap_{2\le n\in\mathbf{N}} (B_n)' = (\bigcup_{2\le n\in\mathbf{N}} B_n)' = \mathbf{R} - \{x\in\mathbf{R} \mid 6<x\} = \{x\in\mathbf{R} \mid x\le 6\}$$

איתי הראבן