<u>ממ"ן 16</u>

<u>שאלה 1:</u>

א. המחשה (1) היא מודל למערכת.
המחשה (2) אינה מודל למערכת - אינה מקיימת את אקסיומה 2.
המחשה (3) היא מודל למערכת.
המחשה (4) אינה מודל למערכת – אינה מקיימת את אקסיומה 3.
המחשה (5) אינה מודל למערכת – אינה מקיימת את אקסיומה 2.

ב. כדי להוכיח שהמערכת אינה תלויה, נראה מודלים שמקיימים את כל האקסיומות פרט לאחת בכל פעם (כך, אם יש תלות כאשר אחת האקסיומות לא תתקיים גם אחרת לא תתקיים):
המודל הריק מקיים את אקסיומות 3 ,2 בלבד ולא את אקסיומה 1,
המודל שבו קבוצת הנקודות היא $\{A, B, C, D\}$ וקבוצת הישרים היא
$\{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$ מקיים את אקסיומות 3 ,1 בלבד,
והמודל שבו קבוצת הנקודות היא $\{A, B, C, D\}$ וקבוצת הישרים היא ϕ, מקיים את אקסיומות 2 ,1 בלבד.
לכן, המערכת אינה תלויה – כי כל אקסיומה אינה נובעת מאקסיומה אחרת במערכת.

ג. כדי להוכיח שהמערכת אינה שלמה, די להראות שני מודלים שמקיימים את המערכת, אך אחד מהם בלבד שמקיים את המערכת עם אקסיומה נוספת. – כלומר לא כל אקסיומה שנוספת למערכת סותרת אותה או נובעת ממנה:
נוסיף את האקסיומה "קיים ישר יחיד שעליו 2 נקודות בדיוק" למערכת.
המודל שקבוצת הנקודות שלו היא $\{A, B, C, D\}$ וקבוצת הישרים שלו $\{\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \{A, B, C, D\}\}$ מקיים את המערכת הנתונה, אך אינו מקיים את המערכת החדשה (כיוון שלא קיים בו ישר שעליו שתי נקודות)
אך המודל שקבוצת הנקודות שלו היא $\{A, B, C, D\}$ וקבוצת הישרים שלו היא
$\{\{A, B, C, D\}, \{B\}, \{C\}, \{A, D\}\}$ מקיים את המערכת הישנה וגם מקיים את המערכת החדשה.
לכן, לא כל אקסיומה שנוספת למערכת סותרת אותה או נובעת ממנה, ולכן המערכת אינה שלמה.

ד. הוכח או הפרך כל אחת מן הטענות הבאות:
1. בכל מודל של המערכת הנתונה, על כל ישר יש לפחות נקודה אחת: הטענה נכונה.
נניח בשלילה שקיים מודל (M, L) למערכת הנתונה, כך שקיים ישר שעליו אין נקודות.
לפי אקסיומה 1: $M = \{A, B, C, D\}$.
לפי הנחת השלילה: קיים ישר ℓ שעליו אין נקודות.
ללא הגבלת הכלליות: נקודה A אינה נמצאת על הישר ℓ (לפי ההנחה)
ולכן, לפי אקסיומה 3, קיימים שני ישרים ℓ_1, ℓ_2: $A \in \ell_1, \ell_2$,
אבל לפי אקסיומה 2 קיים ישר יחיד שA נמצאת עליו, וזוהי סתירה!
2. קיים מודל למערכת שבו יש ישר שעליו נמצאות שלוש נקודות בדיוק: הטענה נכונה.
המודל שקבוצת נקודותיו $\{A, B, C, D\}$ וקבוצת ישריו $\{\{A, B, C\}, \{A, B, C, D\}, \{D\}\}$ מקיימת את המערכת, ולכן קיים מודל למערכת שבו יש ישר שעליו שלוש נקודות, ולכן הטענה נכונה.

<u>שאלה 2:</u> הוכח שהמערכת תלויה ולא שלמה.

<u>תלויה:</u> נוכיח שאקסיומה 1 גוררת את אקסיומה 4:
אם אקסיומה 1 גוררת את אקסיומה 4 אזי בהכרח כל מודל שמקיים את אקסיומה 1 מקיים גם את 4.
נניח בשלילה שקיים מודל (M, L) שמקיים את אקסיומה 1 ולאו את אקסיומה 4:
לפי אקסיומה 1 קיימת נקודה A: $A \in M$ וגם קיימים הישרים ℓ_1, ℓ_2: $A \in \ell_1, \ell_2$ וגם $\ell_1 \neq \ell_2$
לכן, נקודה A נמצאת על שני ישרים, וזוהי סתירה להנחת השלילה! (כי הנחת השלילה היא שכל הנקודות נמצאות על ישר אחד בלבד)

לכן, בגלל שאחת האקסיומות נובעת מן השנייה המערכת תלויה.

<u>אינה שלמה:</u> נוסיף למערכת את האקסיומה "כל נקודה נמצאת בדיוק על שני ישרים".

המודל שקבוצת נקודותיו $\{A,B\}$ וקבוצת ישריו $\{\{A\},\phi,\{A,B\}\}$ מקיים את המערכת המקורית, וגם את המערכת החדשה.

המודל שקבוצת נקודותיו היא $\{A,B,C\}$ וקבוצת ישריו היא $\{\{A\},\{A,B\},\{C\},\{A,C\}\}$ מקיים את המערכת הישנה אך לא את המערכת החדשה.

לכן, לא כל אקסיומה שנוספת למערכת סותרת אותה או נובעת ממנה (שהרי במודל אחד היא נכונה ובשני לא), ולכן המערכת אינה שלמה.

<u>שאלה 3:</u>

א. נגדיר את המודל $(*,\{0,1,2,3\})$ באופן הבא: לכל $a,b\in\{0,1,2,3\}$: $a*b=|a-b|$.
המודל מקיים את אקסיומה 1 - סגירות: בגלל שאין מספרים שליליים, כל תוצאה של חיסור בין המספרים בקבוצה היא שלילית אך לא קטנה מ-3 (שהרי ההפרש הכי גדול הוא בין 0 ל3 – והוא 3-) ותוצאת הפעולה היא ערך מוחלט ולכן בהכרח גם התוצאה שייכת לקבוצה.
המודל **אינו** מקיים את הקיבוציות: לדוגמה עבור $1,2,3\in\{0,1,2,3\}$: $(1*2)*3=1*3=2$
$0=1*1=(2*3)*1$ ולכן אין קיבוציות – כלומר, אקסיומה 2 לא מתקיימת.
0 הניטרלי עבור המודל – ולכן מתקיימת אקסיומה 3: $3*0=0*3=3, 2*0=0*2=2, 1*0=$
$0*1=1, 0*0=0$.
כל איבר בקבוצת המודל הופכי לעצמו: בגלל ש$a-a=0$ – כלומר, אקסיומה 4 מתקיימת.
לכן, קיים מודל למערכת ללא אקסיומה 2 – כלומר, היא איננה נובעת מן האקסיומות האחרות.

ב. המודל $(\cdot_4,\{0,1,2,3\})$: כפי שהודגם בשיעורים על פעולות בינאריות, הפעולה סגורה, קיבוצית וקיים ניטרלי (1), אך לא קיים הופכי ל0 – (כיוון שכל מספר כפול 0 הוא 0) – כלומר, אקסיומות 3 ,2 ,1 מתקיימות אך לא 4, ובנוסף לכך, אקסיומה 5 מתקיימת (כי לקבוצת המודל יש בדיוק 4 איברים).

ג. מקיים סגירות –המודל $(\cdot_{15},\{3,6,9,12\})$:
מקיים את אקסיומה 1 – סגירות – בגלל שכל איברי קבוצת המודל הם כפולות של 3, גם מכפלותיהם כפולה של 3, ועליהם מופעל שארית כך שהתוצאה תמיד תהיה כפולה של שלוש עד 15. בגלל ש5 אחד הראשוניים של 15, ואין מספר שלו ראשוני שהוא 5 בקבוצת המודל, אף פעם לא יהיו כפולות של 15, ולכן התוצאה לעולם לא תהיה 0.
הערה: כירושה מפעולת הכפל הרגילה בתוך הפעולה הזאת, הפעולה חילופית.
מקיים ניטרלי (אקסיומה 3) – 6. $12=6\cdot_{15}12=6\cdot_{15}6\ \ 12,\ 9=6\ \ _{15}\!\cdot\ 9,\ 6=6\ \ _{15}\!\cdot\ 6,\ 3=6\ \ _{15}\!\cdot\ 3$
לכל איבר בקבוצת המודל יש הופכי (אקסיומה 4): $6=6\ \ _{15}\!\cdot\ 6,\ 6=9\ \ _{15}\!\cdot\ 9,\ 6=12\ \ _{15}\!\cdot\ 3$
ובנוסף, לקבוצת המודל יש בדיוק 4 איברים, ולכן מתקיימת גם אקסיומה 5.
ולכן המודל מקיים את המערכת (5 ,4 ,3, 2, 1).
המודל $(\cdot_{15},\{1,4,14,11\})$:
המודל מקיים סגירות: $11=14\cdot_{15}4, 14=11\cdot_{15}4, 14=14\cdot_{15}1, 11=11\cdot_{15}1, 4=4\cdot_{15}1$,
$11\cdot_{15}14=4$
המודל מקיים ניטרלי: הניטרלי הוא 1 כירושה מהכפל על הטבעיים. בגלל שבקבוצת המודל אין מספרים גדולים מ15, שהלא הפעולה היא כפל שארית 15, בהכרח התוצאה של כל אחד מאיברי קבוצת המודל קטן מ15 ושווה לעצמו.
המודל מקיים נגדיים: $1=11\cdot 11, 1=4\cdot 4, 1=1\ _{15}\!\cdot 1, 1=14\ _{15}\!\cdot 14$.
ובנוסף, לקבוצת המודל יש בדיוק 4 איברים, ולכן מתקיימת גם אקסיומה 5.
ולכן, המודל מקיים את המערכת $(1,2,3,4,5)$

ד. בגלל שמערכת קטגורית היא מערכת בעלת מודל יחיד שמקיים אותה, ובגלל שבסעיף ג' הראינו שני מודלים שונים שמקיימים אותה, המערכת בהכרח איננה קטגורית.

שאלה 4:

א. במודל שקבוצת הנקודות שלו היא $\{A, B, C\}$ וקבוצת הישרים שלו היא $\{\{A, C, B\}, \{A, B\}, \{C\}\}$ כל האקסיומות של המערכת הנתונה מתקיימות.

ב. נוכיח שהמערכת בלתי תלויה על ידי הצגת מודלים שמקיימים את המערכת פרט לאקסיומה אחת בכל פעם:
המודל הריק מקיים את אקסיומות 2 ו3 בלבד.
המודל שקבוצת נקודותיו היא $\{A\}$ וקיימים שני ישרים שונים ℓ_1, ℓ_2: $\ell_1 = \{A\}, \ell_2 = \{A\}$, וקבוצת ישריו היא $\{\ell_1, \ell_2\}$ מקיים את אקסיומות 1 ו3 בלבד.
המודל שקבוצת נקודותיו היא $\{A, B, C\}$ וקבוצת ישריו היא $\{\{A, B\}, \{A, B, C\}\}$ מקיים את אקסיומות 1 ו2 בלבד.

ג. מערכת קטגורית היא מערכת שלה יש מודל יחיד שמקיים אותה. כדי להראות שמערכת אינה קטגורית נראה שקיימים שני מודלים שמקיימים אותה:
המודל שקבוצת נקודותיו היא $\{A, B, C, D\}$ וקבוצת ישריו היא $\{\{A, B\}, \{C, D\}, \{A, B, C, D\}\}$ הוא מודל למערכת.
המודל שקבוצת נקודותיו היא $\{A, B, C, D, E, F\}$ וקבוצת ישריו היא
$\{\{A, B\}, \{C, D\}, \{E, F\}, \{A, B, C, D, E, F\}\}$ גם הוא מקיים את המערכת.
לכן, לא קיים מודל יחיד שמקיים את המערכת, כלומר היא איננה קטגורית.

ד. הוכח שבמערכת מתקיים המשפט: "קיימות לפחות 4 נקודות שונות":
נוכיח על ידי הוכחת הטענה השקולה: "בכל מודל של המערכת קיימות לפחות 4 נקודות שונות":
נניח בשלילה שקיים מודל (M, L) של המערכת כך שיש בו 3 נקודות בלבד.
לפי אקסיומה 1 קיימת נקודה A: קיימים ישרים שונים ℓ_1, ℓ_2 כך ש$A \in \ell_1, \ell_2$
ולפי אקסיומה 2 קיימת נקודה $B \neq A$: $B \in \ell_1, \ell_2$.
בגלל ש$\ell_1 \neq \ell_2$ קיימת נקודה $C \in \ell_2$ וגם $C \notin \ell_1$.
לפי אקסיומה 3, חייב להיות ישר כלשהו ℓ_3: $C \in \ell_3$ (שלא נחתך עם הישר $\{A, B\}$)
לפי אקסיומה 2, קיימת נקודה $D \in \ell_3, \ell_2$ וגם $D \neq C$.
לכן, במודל המינימלי יש לפחות 4 נקודות שונות וזוהי סתירה!