פרק 6: התפלגות משותפת של משתנים מקריים (תרגילים) (20416 / 21.7.11)

1. בארגז גדול יש 10 נעליים שחורות מאותו דגם: 7 מהן ימניות והשאר שמאליות.
מוציאים מהארגז נעל אחר נעל, ללא החזרה, עד שמתקבל זוג. (כלומר, עד שלראשונה יש מחוץ לארגז לפחות נעל אחת ימנית ולפחות נעל אחת שמאלית.)

יהיו X = מספר הנעליים הימניות שהוצאו;
Y = מספר הנעליים השמאליות שהוצאו.

א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו-Y ואת פונקציות ההסתברות השולית של X ו-Y.
ב. חשב את $F_{X,Y}(2,2)$.
ג. האם X ו-Y בלתי-תלויים?
ד. מצא את פונקציית ההסתברות של $X+Y$.
ה. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $Y = 2$.
ו. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של Y בהינתן $X = 1$.

2. מטילים שתי קוביות תקינות.
יהיו X = מספר הקוביות שבהן התקבלה התוצאה 4;
Y = מספר התוצאות הזוגיות שהתקבלו.

מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו-Y.

3. עידו הזמין למסיבה 20 אורחים – 10 גברים ו- 10 נשים. כל גבר יגיע למסיבה בהסתברות 0.8 וכל אישה תגיע למסיבה בהסתברות 0.9. אין תלות בין האנשים המוזמנים למסיבה.
מהי ההסתברות ש-18 אורחים יגיעו למסיבה?

4. יהיו X ו-Y משתנים מקריים בלתי-תלויים, כך של-X יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו-p, ול-Y יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים m ו-p.
האם גם המשתנים המקריים X ו- $W = X + Y$ בלתי-תלויים זה בזה?

5. בחצר יש שני כלובים. בכלוב 1 – תרנגול אחד ותרנגולת אחת, ובכלוב 2 – שני תרנגולים ושתי תרנגולות.
בוחרים אחד מן הכלובים באופן מקרי ומוציאים ממנו באקראי שני עופות ללא החזרה.

יהיו N = מספר הכלוב שנבחר;
Z = מספר התרנגולים (הזכרים) שהוצאו.

א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של N ו-Z.
ב. האם N ו-Z בלתי-תלויים?

6. יהיו X_1 ו-X_2 משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם פונקציית ההסתברות $p_X(k) = p(1-p)^k$, עבור $k = 0,1,\ldots$ ו- $0 < p < 1$, ויהי $Y = X_1 + X_2$. מצא את פונקציית ההסתברות של Y.

7. יהיו X_1 , X_2 , ... , X_r משתנים מקריים בעלי פונקציית התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים n ו- p_1 , p_2 , ... , p_r .

א. מהי לדעתך ההתפלגות השולית של X_i, לכל $i = 1,2,...,r$? אין צורך להוכיח את טענתך.

ב. מהי לדעתך ההתפלגות של $X_i + X_j$ $(i \neq j)$? אין צורך להוכיח את טענתך.

ג. האם לדעתך המשתנים המקריים X_i ו- X_j $(i \neq j)$ בלתי-תלויים זה בזה?

ד. מהי ההתפלגות המותנית של X_1 בהינתן $X_2 = j$, לכל $j = 0,1,...,n$? נמק את תשובתך.

ה. יהי Y משתנה מקרי המוגדר על-ידי מספר הימים החולפים החל מה-1.1 (בכל שנה) ועד ליום הראשון בשנה שבו יורד גשם. פונקציית ההסתברות של Y נתונה על-ידי: $P\{Y = j\} = 2^{-(j+1)}$ לכל $j = 0,1,...,10$; $P\{Y > 10\} = 2^{-11}$.

הנח שאין תלות בין שנים שונות, וחשב את ההסתברות שבמהלך 20 השנים הבאות יהיו 13 שנים שבהן הגשם הראשון יהיה בין ה-2.1 ל-5.1, 5 שנים שבהן הגשם הראשון יהיה ב-1.1 וביתר השנים ירד הגשם הראשון רק לאחר ה-5.1 .

8. בסניף דואר מסוים יש שלושה אשנבים (1 2 ו-3). מספר האנשים הפונים לאשנב 1 במשך דקה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 2, מספר האנשים הפונים לאשנב 2 במשך דקה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 3 ומספר האנשים הפונים לאשנב 3 במשך דקה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 4.
אין תלות בין אנשים הנכנסים לסניף בדקות שונות, ואין תלות בין מספרי האנשים שפונים לאשנבים השונים.

א. מהי ההסתברות שבין 8:00 ל- 8:01 ייכנסו תשעה אנשים לסניף הדואר?

ב. אם ידוע שבין 8:00 ל- 8:01 נכנסו תשעה אנשים לסניף הדואר, מהי ההסתברות ששלושה מהם פנו לאשנב 1?

ג. אם ידוע שבין 8:00 ל- 8:01 נכנסו לסניף הדואר שלושה אנשים שפנו לאשנב 1, מהי ההסתברות שבסך-הכל נכנסו לסניף הדואר באותה הדקה תשעה אנשים?

ד. אם ידוע שבין 8:00 ל- 8:01 נכנסו תשעה אנשים לסניף הדואר, מהי ההסתברות ששלושה מהם פנו לאשנב 1, שלושה לאשנב 2 ושלושה לאשנב 3?

ה. אם אדם הפונה לאשנב 1 קונה בו בולים בהסתברות 0.6, מהי ההסתברות שבין האנשים הפונים לאשנב 1 מ- 8:00 עד 8:05 יהיו 5 שיקנו בולים?

9. יהיו $X_1, X_2, ..., X_{100}$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, ונניח כי לכל $i = 1,...,100$, ההתפלגות של המשתנה המקרי X_i היא פואסונית עם הפרמטר $i/50$.

א. מצא את ההתפלגות המותנית של $\sum_{i=1}^{100} X_i$ בתנאי $X_{100} = n$.

ב. מצא את ההתפלגות המותנית של X_{100} בתנאי $\sum_{i=1}^{100} X_i = n$.

10. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n_X ו- p ויהי Y משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n_Y ו- p .
אם X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה, מהי ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X + Y = n$?

11. יהיו X_1 , X_2 , ... , X_n משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכולם התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר p ($0 < p < 1$).

א. חשב את $P\left\{\max_{i=1,\ldots,n} X_i \le j\right\}$, לכל $j = 1,2,\ldots$.
מצא את פונקציית ההסתברות של $\max_{i=1,\ldots,n} X_i$.

ב. זהה את ההתפלגות של $\min_{i=1,\ldots,n} X_i$.

12. נניח כי $Y \sim Po(\lambda)$ וכי $X \mid Y = j \sim B(j, p)$ ונניח שמגדירים $P\{X = 0 \mid Y = 0\} = 1$.

א. מהם הערכים של i ו- j , שבהם פונקציית ההסתברות המשותפת, דהיינו $P\{X = i , Y = j\}$, מקבלת ערכים חיוביים?

ב. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .

ג. מצא את פונקציית ההסתברות השולית של X,
וזהה את ההתפלגות של X .

הערה: זכור כי $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} = e^a$

ד. הוכח כי המשתנים המקריים X ו- $Y - X$ בלתי-תלויים זה בזה, וזהה את ההתפלגות של $Y - X$.

13. מטילים 10 כדורים באופן אקראי לתוך 3 תאים ממוספרים. אחר-כך, מוציאים את הכדורים שנפלו לתא מספר 1, ומטילים אותם באופן אקראי לתוך 4 תאים ממוספרים אחרים.

יהיו X = מספר הכדורים שנפלו לתוך תא מספר 1 בשלב הראשון ;
Y = מספר הכדורים שנפלו לתוך תא מספר 2 בשלב השני.

א. זהה את ההתפלגות של X ואת ההתפלגות של Y בהינתן $X = i$.

ב. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .

ג. מצא את ההתפלגות השולית של Y .

14. התפלגות זמן השירות (בדקות) של כל לקוח באשנב מסוים בבנק היא מעריכית עם הפרמטר 0.5. יואב נכנס לסניף הבנק ומעוניין לקבל שירות באשנב. הוא מוצא שיש 5 אנשים בתור לאשנב זה ואדם נוסף שמקבל שירות מהפקיד שבאשנב. מהי שונות הזמן שיואב יצטרך להמתין עד לקבלת השירות?

15. נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת : $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot I_{(0,(1-x)^2)}(y) \cdot I_{(0,1)}(x)$

א. מצא את פונקציית הצפיפות השולית של Y .

ב. מצא את פונקציית הצפיפות המותנית של X בתנאי $Y = y$.

ג. חשב את $P\{\min(X,Y) \le 0.25\}$.

ד. חשב את $P\{X \ge 2Y\}$.

16. נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת : $f_{X,Y}(x, y) = x \cdot I_{(0,1)}(y) \cdot I_{(1-y,1+y)}(x)$

מצא את פונקציית הצפיפות המותנית של Y בהינתן $X = x$.

17. מסמנים על שולחן קווים, באופן כזה שמתקבלת עליו רשת של ריבועים שאורך צלעותיהם הוא 10 ס"מ. אחר-כך, מטילים באקראי על השולחן דיסקית שקוטרה 7 ס"מ.
אם מרכז הדיסקית נופל על השולחן, מהי ההסתברות שהדיסקית לא תחתוך אף קו (או תבלוט מהשולחן)?
(הנח שהשולחן מלבני, שאורכו ורוחבו הם כפולות של 10 ס"מ, ושהקווים מקבילים לצלעות השולחן ועוביים זניח.)

18. ההספק של זרם I (באמפרים) העובר דרך התנגדות R (באומים) הוא $W = I^2R$ (בוואטים).
נניח ש- I ו- R הם משתנים מקריים בלתי-תלויים, שפונקציות הצפיפות שלהם נתונות על-ידי –

$$f_R(y) = 2y \quad , \quad 0 \le y \le 1 \qquad ; \qquad f_I(x) = 6x(1-x) \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

מצא את פונקצית הצפיפות של W.

19. יהי Y משתנה מקרי גמא עם הפרמטרים (t, λ) ויהי X בתנאי $Y = y$ משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר y.
מצא את ההתפלגות של Y בתנאי $X = n$.

20. יהיו X_1 ו- X_2 משתנים מקריים מעריכיים בלתי-תלויים, ולכל אחד מהם הפרמטר λ.
א. מצא את פונקציית הצפיפות המשותפת של $Y_1 = X_1 + X_2$ ו- $Y_2 = e^{-X_1}$.
ב. מצא את פונקציות הצפיפות השולית של Y_1 ושל Y_2, וזהה את ההתפלגויות של כל אחד מהמשתנים המקריים הללו.
ג. האם Y_1 ו- Y_2 בלתי-תלויים?

21. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, שלכל אחד מהם פונקציית ההתפלגות המצטברת:

$$F(x) = \tfrac{1}{4}x^2 \quad , \quad 0 \le x \le 2$$

חשב את התוחלת של סטטיסטי הסדר השמיני של המדגם המקרי הנתון.

22. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, שלכל אחד מהם פונקציית התפלגות מצטברת F ופונקציית צפיפות f.
הממוצע של שני המשתנים המקריים, הגדול ביותר והקטן ביותר, דהיינו הגודל $M = [X_{(1)} + X_{(n)}]/2$, נקרא אמצע-הטווח. הראה כי $F_M(a) = \int_{-\infty}^{a} n\left[F(2a-x) - F(x)\right]^{n-1} f(x)\,dx$.