פתרון שאלה 1 בממ"ן 12

שאלה 1 (20 נקודות)

מצאו חסמים אסימפטוטיים הדוקים עבור $T(n)$ בכל אחת מנוסחאות הנסיגה שלהלן. הניחו כי $T(n)$ קבועה עבור $n = 1$ (או עבור כמה ערכים התחלתיים של n, לפי הצורך).

א'

$T(n) = 4T(n/8) + n^{2/3}$

משפט האב: $a = 4$, $b = 8$, $\log_b a = 2/3$; $f(n) = n^{2/3} = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$; לפי מקרה 2, הפתרון הוא $T(n) = \Theta\left(n^{2/3} \cdot \lg n\right)$

ב'

$T(n) = 6T(n/6) + \lg^5 n$

משפט האב: $a = b = 6$, $\log_b a = 1$; $f(n) = \lg^5 n = O\left(n^{1-\varepsilon}\right)$, לכל $0 < \varepsilon < 1$; לפי מקרה 1 , הפתרון הוא $T(n) = \Theta(n)$

ג'

$T(n) = 3T(n/3) + n + n/\lg^2 n$

משפט האב: $a = b = 3$, $\log_b a = 1$; $f(n) = n + n/\lg^2 n = \Theta(n)$; לפי מקרה 2, הפתרון הוא $T(n) = \Theta(n \cdot \lg n)$

ד'

$T(n) = 32T(n/4) + n^{5/2} \cdot \lg^3 n$

משפט האב: $a = 32$, $b = 4$, $\log_b a = 5/2$; $f(n) = n^{5/2} \cdot \lg^3 n = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \lg^3 n\right)$; לפי מקרה 2 המורחב, $T(n) = \Theta\left(n^{5/2} \cdot \lg^4 n\right)$

ה'

$T(n)=\frac{5}{2}T(\sqrt{n})+\lg^4 n$

$(T(2)=1)$

מבצעים החלפת משתנים: $m=2^n$, $m=\lg n$; מתקבלת נוסחת הנסיגה

$$S\left(m\right)=T\left(2^m\right)=\frac{5}{2}\cdot T\left(2^{m/2}\right)+m^4=\frac{5}{2}\cdot S\left(m/2\right)+m^4$$

משפט האב: $a=5/2$, $b=2$, $\log_b a=\lg 5-1$; $f\left(m\right)=m^4=\Omega\left(m^{\lg 5-1+\varepsilon}\right)$ לכל

$0<\varepsilon<5-\lg 5$; $f\left(m\right)$ גם מקיימת את תנאי הרגולריות; לפי מקרה 3, $S\left(m\right)=\Theta\left(m^4\right)$.

מזה נובע כי הפתרון הוא $T\left(n\right)=\Theta\left(\lg^4 n\right)$.

ו'

$T(n)=\sqrt{n^3}\cdot T(\sqrt{n})+n^3\lg^5 n$

$(T(2)=1)$

מחלקים ב- n^3 :

$$U\left(n\right)=\frac{T\left(n\right)}{n^3}=\frac{T\left(\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n^3}}+\lg^5 n=U\left(\sqrt{n}\right)+\lg^5 n$$

מבצעים החלפת משתנים: $m=2^n$, $m=\lg n$; מתקבלת נוסחת הנסיגה

$$S\left(m\right)=U\left(2^m\right)=U\left(2^{m/2}\right)+m^5=S\left(m/2\right)+m^5$$

משפט האב: $a=1$, $b=2$, $\log_b a=0$; $f\left(m\right)=m^5=\Omega\left(m^{\varepsilon}\right)$ לכל $0<\varepsilon<5$;

$f\left(m\right)$ גם מקיימת את תנאי הרגולריות; לפי מקרה 3, $S\left(m\right)=\Theta\left(m^5\right)$.

מזה נובע כי $U\left(n\right)=\Theta\left(\lg^5 n\right)$ ולכן הפתרון הוא $T\left(n\right)=\Theta\left(n^3\cdot\lg^5 n\right)$.