פתרונות לממ"ן 12 - 2012א - 20425

1. נגדיר את המאורעות: A = לתושב הנבחר יש לפחות כלב אחד
$B \subseteq A$ = לתושב הנבחר יש לפחות שני כלבים
C = לתושב הנבחר יש לפחות חתול אחד
$D \subseteq C$ = לתושב הנבחר יש לפחות שני חתולים

המאורעות הבסיסיים המוגדרים לעיל, מציינים את הפרמטרים שנבדקו אצל התושבים, וכל אחד מהם מתקיים או לא מתקיים לגבי כל אחד מהתושבים. את כל המאורעות האחרים, המוגדרים בבעיה, אפשר לבטא באמצעות מאורעות אלו, לכן אין צורך בהגדרת מאורעות בסיסיים נוספים.

הנתונים הם:

$P(A\cup C) = 0.45 \quad \Rightarrow \quad P(A^C\cap C^C) = 1-0.45 = 0.55$

$P(A) = 0.3$

$P(C) = 0.25 \quad \Rightarrow \quad P(A\cap C) = P(A)+P(C)-P(A\cup C) = 0.3+0.25-0.45 = 0.1$

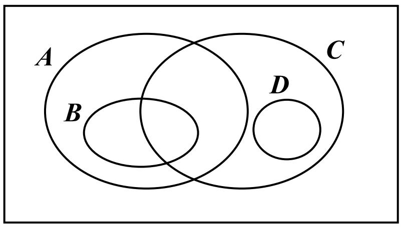
$P(D) = 0.06$

$P(D\cap A) = 0 \quad \Rightarrow \quad D \subseteq C\cap A^C$ וגם $P(D\cap B) = 0$ לכן $B\subseteq A$

$P(B) = 0.09 \quad \Rightarrow \quad P(B\cap C^C) = P(B)-P(B\cap C) = 0.09-0.02 = 0.07$

$P(C\cap D^C\cap B) = P(C\cap B) = 0.02$ ומכאן $B\subseteq D^C$ לכן $B\cap D=\varnothing$

נתאר תחילה את הצורה הכללית של דיאגרמת הון שמתאימה לבעיה. מכיוון שמתקיימות ההכלות: $B\subseteq A$ ו- $D\subseteq C$ ובנוסף המאורע D זר למאורע A ולכן גם למאורע B, מתקבלת דיאגרמה שבה ארבעת המאורעות, כדלקמן:

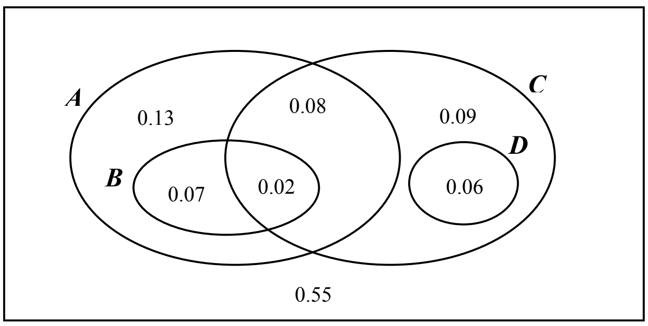


כעת, נסיים לחשב את ההסתברויות המתאימות לשטחי הדיאגרמה:

$P(A\cap C\cap B^C) = P(A\cap C)-P(A\cap C\cap B) = 0.1-0.02 = 0.08$

$P(A\cap C^C\cap B^C) = 0.3-0.1-0.07 = 0.13$

$P(C\cap A^C\cap D^C) = 0.25-0.1-0.06 = 0.09$



ב. $P(A^C \cap C^C) = 0.55$

ג. $P(A \cap C) = 0.1$

ד. $P(C \cap A^C \cap D^C) = 0.09$

ה. $P(A \cup C) - P(A \cap C^C \cap B^C) - P(C \cap A^C \cap D^C) = 0.45 - 0.13 - 0.09 = 0.23$

2. נציין תחילה כי במרחב המדגם יש 8^{15} תוצאות שונות שוות-הסתברות.

א. יש 8 אפשרויות לבחירת הקופסה, לכן ההסתברות המבוקשת היא: $8/8^{15} = 1/8^{14} = 2.274 \cdot 10^{-13}$

ב. יש $\binom{8}{2} = 56$ אפשרויות לבחירת שתי הקופסאות שבתוכן יהיו כל הגולות ויש 2^{15} אפשרויות לפזר בתוכן את כל הגולות. אולם, ב-2 מכל 2^{15} אפשרויות הפיזור בשתי קופסאות, כל הגולות נמצאות בקופסה אחת.
לכן, ההסתברות שהגולות יוכנסו ל-2 קופסאות <u>בדיוק</u> היא: $\binom{8}{2} \cdot (2^{15} - 2)\big/8^{15} = 2.608 \cdot 10^{-8}$

ג. כדי לחשב את ההסתברות שבדיוק 2 קופסאות יישארו ריקות, נבחר אותן ($\binom{8}{2} = 56$ אפשרויות), ונחשב את מספר האפשרויות לפזר את הגולות ב-6 הקופסאות האחרות, כך שבכל אחת מהן תהיה לפחות גולה אחת. לשם כך, נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה.
לכל $i = 1,2,\ldots,6$, נסמן ב- A_i את המאורע שבקופסה i יש לפחות גולה אחת, ונקבל כי:

$$n(A_1 \cap \ldots \cap A_6) = 6^{15} - n(A_1^C \cup \ldots \cup A_6^C)$$

כאשר:

$$n(A_1^C) = 5^{15}$$
$$n(A_1^C \cap A_2^C) = 4^{15}$$
$$n(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C) = 3^{15}$$
$$n(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C) = 2^{15}$$
$$n(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) = 1$$
$$n(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C \cap A_6^C) = 0$$

ולכן:

$$\begin{aligned} n(A_1 \cap \ldots \cap A_6) &= 6^{15} - n(A_1^C \cup \ldots \cup A_6^C) \\ &= 6^{15} - \sum_{i=1}^{6} (-1)^{i+1} \binom{6}{i} n(A_1^C \cap \ldots \cap A_i^C) \\ &= 6^{15} - (6 \cdot 5^{15} - 15 \cdot 4^{15} + 20 \cdot 3^{15} - 15 \cdot 2^{15} + 6 \cdot 1) \cong 3.02899 \cdot 10^{11} \end{aligned}$$

ומכאן, שההסתברות המבוקשת היא: $\binom{8}{2} \cdot n(A_1 \cap \ldots \cap A_6)\big/8^{15} = 0.24105$

ד. מכיוון שמפזרים בקופסאות בסך-הכל 15 גולות, יהיה מספר שווה של גולות ב-4 הקופסאות, רק אם בכל אחת מהן תהיינה 0 גולות או גולה 1 או 2 גולות או 3 גולות. נחשב את מספר אפשרויות הפיזור של כל מקרה בנפרד ונסכום את התוצאות שקיבלנו (זהו למעשה איחוד של 4 מאורעות זרים). נקבל:

$$\frac{4^{15} + 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 4^{11} + \binom{15}{2} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{11}{2} \cdot \binom{9}{2} \cdot 4^7 + \binom{15}{3} \cdot \binom{12}{3} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot 4^3}{8^{15}} = 0.011793$$

ה. מכיוון שיש בסך-הכל מספר אי-זוגי של גולות, לא ייתכן שיהיה מספר שווה של גולות בשתי הרביעיות של הקופסאות (צהובה+ירוקה+אדומה+כחולה לעומת ה-4 האחרות). מהסימטריה בתנאי הבעיה, ביחס לקופסאות ולגולות, נובע שיש אותו סיכוי לכל רביעייה להיות זו שיש בתוכה מספר רב יותר של גולות. לכן, ההסתברות המבוקשת היא בהכרח 0.5.

3. א. הכדורים שונים זה מזה ולכן יש $\binom{8}{2,2,2,2} = \frac{8!}{2^4} = 2{,}520$ חלוקות שונות של הכדורים ל-4 הילדים.
(הילד הראשון בוחר 2 כדורים, הילד השני בוחר 2 כדורים מ-6 הנותרים, וכך הלאה.)

ב. מספר החלוקות האפשריות הוא כמספר האפשרויות לחלק 4 צבעים ל-4 ילדים. לכן, ההסתברות שכל אחד מהילדים יקבל שני כדורים מאותו הצבע היא: $\frac{4!}{2{,}520} = 0.009524$

ג. לכל $i = 1,2,3,4$, נסמן ב- A_i את המאורע שילד i מקבל 2 כדורים מאותו הצבע. נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה לחישוב מספר החלוקות שבהן לפחות ילד אחד מקבל שני כדורים מאותו הצבע, שהרי מאורע זה הוא איחוד המאורעות A_1 , A_2 , A_3 ו- A_4 . נקבל:

$$n(A_1) = 4\cdot\binom{6}{2,2,2} = 4\cdot\frac{6!}{2^3} = 360$$ [ילד 1 בוחר צבע ואת שאר הכדורים מחלקים באקראי]

$$n(A_1 \cap A_2) = 4\cdot 3\cdot\frac{4!}{2^2} = 72$$ [ילדים 1 ו-2 בוחרים צבעים ואת שאר הכדורים מחלקים באקראי]

$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{2!}{2^1} = 24$$ ⋮

$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$$

מכאן, לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מקבלים:

$$n(A_1 \cup \ldots \cup A_4) = \sum_{i=1}^{4}(-1)^{i+1}\binom{4}{i} n(A_1 \cap \ldots \cap A_i)$$
$$= 4\cdot 360 - 6\cdot 72 + 4\cdot 24 - 1\cdot 24 = 1{,}080$$

ולכן, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{1{,}080}{2{,}520} = \frac{3}{7} = 0.4286$

ד. נבחר ילד שיקבל כדור אדום וצהוב, ונבחר את הכדורים שיקבל (שהרי יש 2 כדורים מכל צבע). אחר-כך, נבחר ילד שיקבל את הכדור האדום השני וכדור נוסף שאינו צהוב (אלא בהכרח כדור ירוק או כחול). לבסוף, נחלק באקראי את 4 הכדורים שנשארו. ומכאן, נקבל שההסתברות המבוקשת היא:

$$\frac{\overbrace{4\cdot 2^2}^{\text{ילד 1}}\cdot\overbrace{3\cdot 4}^{\text{ילד 2}}\cdot\overbrace{\binom{4}{2,2}}^{\text{ילדים 3+4}}}{2{,}520} = \frac{1{,}152}{2{,}520} = 0.457143$$

4. א. מספר אפשרויות החלוקה של הגולות הוא כמספר אפשרויות הפיזור של 10 כדורים זהים ב-5 תאים ממוספרים. כלומר: $\binom{10+5-1}{10} = \binom{14}{10} = 1{,}001$

האפשרויות הללו אינן שוות-הסתברות.

הסבר: כאשר החלוקות במרחב המדגם של ניסוי, שבו מפזרים חפצים זהים בתאים, אינן מיוצגות על-ידי מספר קבוע של חלוקות בניסוי דומה, שבו מפזרים חפצים שונים זה מזה בתאים, מקבלים בניסוי החלוקה של החפצים הזהים מרחב מדגם **שונה-הסתברויות**.

נתבונן, למשל, על החלוקה $(1,1,1,1,6)$: כלומר, 4 החברות הראשונות מקבלות גולה אחת והחברה החמישית מקבלת 6 גולות. כאשר הגולות זהות זו לזו, זוהי חלוקה שנמנית פעם אחת במרחב המדגם של הניסוי, גם אם קיימות חלוקות שונות של הגולות הזהות שמובילות לצורה הסופית המצוינת מעלה (שהרי הגולות זהות, וגם אם החברות לא מקבלות תמיד אותן גולות – התוצאה הסופית נראית דומה). לכן, כדי לחשב את ההסתברות של החלוקה הזאת, יש למנות את מספר החלוקות מהצורה הזאת, שקיימות בניסוי החלוקה של הגולות ששונות זו מזו.

כאשר הגולות שונות זו מזו, כדי ליצור חלוקה מהצורה $(1,1,1,1,6)$, יש לבחור את הגולות שתקבל החברה החמישית, ואז לחלק את 4 הגולות האחרות בין 4 החברות הראשונות. לפיכך, יש במרחב המדגם $\binom{10}{6}\cdot 4!$ חלוקות שונות מהצורה $(1,1,1,1,6)$, וההסתברות לקבל את החלוקה הזאת – הן בניסוי החלוקה של הגולות הזהות והן בניסוי החלוקה של הגולות השונות – היא $\frac{\binom{10}{6}\cdot 4!}{5^{10}} = 0.000516$.

נתבונן על חלוקה נוספת. נבחר את החלוקה $(1,1,1,7,0)$. כמקודם, החלוקה הזאת נמנית פעם אחת במרחב המדגם של הניסוי שבו הגולות זהות. אולם, במרחב המדגם של הניסוי שבו הגולות שונות זו מזו, יש $\binom{10}{7}\cdot 3!$ חלוקות שונות מהצורה הזאת. לפיכך, בשני המקרים – גולות זהות וגולות שונות – ההסתברות לקבל את החלוקה $(1,1,1,7,0)$ היא $\frac{\binom{10}{7}\cdot 3!}{5^{10}} = 0.0000737$.

ב. מכיוון שהתוצאות במרחב המדגם של הניסוי שבו מחלקים גולות זהות אינן שוות-הסתברות, יש לחשב את ההסתברות כאשר מתייחסים אל הגולות כאילו היו שונות זו מזו.

כדי שתהיינה בדיוק 2 חברות שתקבלנה 4 גולות כל אחת, צריך להתקיים אחד משני המקרים הבאים:

1. 2 חברות תקבלנה בדיוק 4 גולות וחברה נוספת תקבל 2 גולות.
2. 2 חברות תקבלנה בדיוק 4 גולות ו-2 חברות נוספות תקבלנה גולה 1 כל אחת.

ההסתברות של המקרה הראשון היא: $\frac{\binom{5}{2}\binom{10}{4}\binom{6}{4}\cdot 3}{5^{10}} = 0.00968$

[בוחרים 2 חברות, שתקבלנה 4 גולות כל אחת, ובוחרים לכל אחת 4 גולות; אחר-כך, בוחרים חברה נוספת שתקבל את 2 הגולות הנותרות.]

ההסתברות של המקרה השני היא: $\frac{\binom{5}{2}\binom{10}{4}\binom{6}{4}\cdot 3!}{5^{10}} = 0.01935$

[בוחרים 2 חברות, שתקבלנה 4 גולות כל אחת, ובוחרים לכל אחת 4 גולות; אחר-כך, מחלקים בין 3 החברות הנותרות את הגולות הנותרות: שתי חברות תקבלנה גולה 1 והאחרונה תיוותר ללא גולות.]

לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $0.00968 + 0.01935 = 0.02903$