מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20407 - מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1, 2, 3 (ספר הלימוד)

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2015ב **מועד אחרון להגשה:** 22.3.2015

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:
• שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שאלה 1 (16 נקודות)

חשבו את מספר ההשוואות (בין מפתחות) ואת מספר ההעתקות (של מפתחות) שהאלגוריתם מיון-הכנסה מבצע עבור הקלטים הבאים:

א' $\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1, \ldots, n, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}-1$

ב' $\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}+2, \frac{n}{2}-2, \ldots, 2, n-1, 1, n$

התוצאות יינתנו קודם בצורה מדויקת ואחר-כך בצורה אסימפטוטית.

שאלה 2 (15 נקודות)

הגדרה: $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = c$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbf{N}$ כך $n \ge n_0$ גורר $\left|\frac{f(n)}{g(n)} - c\right| < \varepsilon$.

הוכיחו את המשפטים הבאים:

א' $f(n) = o(g(n))$ אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 0$.

ב' $n^{1+\varepsilon} + n\lg n = \Theta(n^{1+\varepsilon})$, לכל ε, $\varepsilon > 0$.

ג' $n^{k+\varepsilon} + n^k \lg n = \Theta(n^{k+\varepsilon})$, לכל k ו-ε, $k \ge 0$, $\varepsilon > 0$.

שאלה 3 (29 נקודות)

סדרו את הפונקציות הבאות על-פי שיעור הגידול שלהן, כלומר, מצאו סידור $f_1, \ldots, f_{15}$ של הפונקציות המקיים

$$f_1 = O(f_2), \ldots, f_{14} = O(f_{15}) .$$

חלקו את הרשימה למחלקות כך ש- f_i ו- f_j שייכות לאותה מחלקה אם ורק אם

$$f_i(n) = \Theta(f_j(n)) .$$

$\lg(n^2)$	$\lg\lg n$	$\sqrt[3]{n^7}$	$2/n$	$\lg n$
$(\lg n)^{1/3}$	$(1+\lg n)\cdot\sqrt[3]{n^2}$	n^3+n	$n/\lg n$	$\sqrt{\lg n}$
3^{n+1}	$n!$	$n^2\cdot\sqrt[3]{n}\cdot\lg n$	2^{n^2}	$(n^2+1)\cdot\lg n$

שאלה 4 (40 נקודות)

מיון-דירוג

נתון מערך A של מספרים, לא בהכרח שונים זה מזה. לכל איבר $x \in A$ מגדירים את הדרגה $r(x)$ של x במערך A כמספר האיברים ב**כל** המערך A והקטנים מ-x ביחד עם מספר האיברים הנמצאים ב-A לפני x והשווים ל-x עם תוספת של 1.

לכן, בהינתן מערך A באורך n, ניתן לבנות את מערך הדרגות R באותו אורך n, כך שלכל $i = 1,\ldots,n$, $R[i] = r(A[i])$.

א' הראו שלכל מערך נתון A באורך n, מערך הדרגות R הינו תמורה של הסדרה $< 1,2,\ldots,n >$.

ב' הראו שהשגרה הבאה מחשבת נכון את מערך הדרגות $R[1..n]$ של המערך הנתון $A[1..n]$:

```
RANK(A, R)
  for i ← 1 to n
     do R[i] ← 0
  for j ← 1 to n
     do for i ← 1 to j
           do if A[i] ≤ A[j]
                 then R[j] ← R[j] + 1
                 else R[i] ← R[i] + 1
```

ג' הראו שהאלגוריתם הבא ממיין את המערך $A[1..n]$ בעזרת שני מערכי העזר $R[1..n]$ ו-$U[1..n]$:

RANK-SORT(A)
  RANK(A,R)
  for $i \leftarrow 1$ **to** n
    do $U[R[i]] \leftarrow A[i]$
  for $i \leftarrow 1$ **to** n
    do $A[i] \leftarrow U[i]$

ד' מהם המספרים המדויקים של פעולות ההשוואה (בין איברי המערכים בלבד) ושל פעולות ההעתקה (של איברי המערכים בלבד) שהאלגוריתם מבצע במקרה הטוב ובמקרה הגרוע ?

ה' הראו שהאלגוריתם הבא ממיין את המערך $A[1..n]$ בעזרת מערך העזר $R[1..n]$ בלבד :

RANK-SORT1(A)
  RANK(A,R)
  for $i \leftarrow 1$ **to** n
    do while $R[i] \neq i$
      do $t \leftarrow R[i]$
        exchange $A[i] \leftrightarrow A[t]$
        exchange $R[i] \leftrightarrow R[t]$

ו' מהם המספרים המדויקים של פעולות ההשוואה (בין איברי המערכים בלבד) ושל פעולות ההעתקה (של איברי המערכים בלבד) שהאלגוריתם השני מבצע במקרה הטוב ובמקרה הגרוע ? (כל החלפה מורכבת מ-3 העתקות.)

ז' תנו דוגמה של קלט שעבורו האלגוריתם השני מבצע את המספר המכסימלי של החלפות.

ח' השוו בין ביצועי שני האלגוריתמים מבחינת צריכת הזמן וצריכת הזיכרון.

ט' מהי סיבוכיות האלגוריתם (כפונקציה של n) במקרה הטוב, במקרה הגרוע ובממוצע ?