תשובה 1

א. $|K| = \aleph_0$. הוכחה: הפונקציה $f(x) = 0.17 + 3x$ היא פונקציה $f : K \to \mathbf{Z}$,
והיא חד-חד-ערכית ועל (הוכיחו זאת!).
לחלופין אפשר להראות שהפונקציה $f(n) = (n - 0.17) / 3$ היא פונקציה חח"ע של $\mathbf{Z}$ על K.

ב. $|L| = C$. הוכחה: נתאים לכל מספר ממשי x את הזוג הסדור $(x, 4x - 5)$.
קל לראות שלכל x ממשי, $(x, 4x - 5) \in L$.
ההתאמה שלנו היא אפוא פונקציה $g : \mathbf{R} \to L$.
(i) נוכיח ש- g היא **על**: יהי $(x, y) \in L$. מהגדרת L, $4x - y = 5$. כלומר $y = 4x - 5$.
לכן $g(x) = (x, 4x - 5) = (x, y)$. מצאנו מקור ב- $\mathbf{R}$ לאבר כללי של L, משמע g היא **על** L.
(ii) נוכיח ש- g היא חד-חד-ערכית: יהיו $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ונניח $g(x_1) = g(x_2)$.
משמע $(x_1, 4x_1 - 5) = (x_2, 4x_2 - 5)$.
מהגדרת שוויון בין זוגות סדורים (אמצע עמ' 29 בספר), בפרט מתקיים שוויון ברכיב הראשון,
כלומר $x_1 = x_2$. לפיכך g היא חד-חד-ערכית.

ג. $|M| = \aleph_0$. הוכחה: כהכנה לפתרון, נרשום את התנאים על x,y כמערכת משוואות:

$$\begin{matrix} x + y = n \\ 4x - y = 5 \end{matrix} \quad , \quad \text{כאשר } n \in \mathbf{Z} .$$

נחלץ את x,y: $x = 1 + \frac{n}{5}$, $y = -1 + \frac{4n}{5}$.

כעת, תהי f הפונקציה המתאימה לכל $n \in \mathbf{Z}$ את הזוג הסדור $(1 + \frac{n}{5} \, , \, -1 + \frac{4n}{5})$.
השלימו את ההוכחה על- ידי כך שתראו את הטענות הבאות:
(i) f היא פונקציה של $\mathbf{Z}$ ל- M.
(ii) f היא חד-חד-ערכית.
(iii) f היא על.

לחלופין, תהי g הפונקציה השולחת כל אבר (x, y) ב- M אל הסכום $x + y$.
השלימו את ההוכחה על- ידי כך שתראו את הטענות הבאות:
(i) g היא פונקציה של M ל- $\mathbf{Z}$.
(ii) g היא חד-חד-ערכית.
(iii) g היא על.

תשובה 2

מהגדרת B , $B = A' = \left(\bigcap_{1\le i\le 100} A_i\right)'$

ולפי כללי דה-מורגן בתורת הקבוצות $= \bigcup_{1\le i\le 100}(A_i')$

לפי הנתון, זהו איחוד של 100 קבוצות בנות מניה.

נוכיח שאיחוד כזה הוא בר-מניה. נתקדם לפי ההדרכה שפורסמה בפורום.

לפי "תורת הקבוצות" עמ' 119 שאלה 4.3ד, אם מתקיים התנאי (*) הבא:

(*) $|A| = |B| = \aleph_0$ **או** $|A| = \aleph_0$ ו- B סופית **או** $|B| = \aleph_0$ ו- A סופית **(*)**

ובנוסף לכך $A \cap B = \varnothing$, אז $|A \cup B| = \aleph_0$.

נקרא לטענה זו "הטענה על קבוצות זרות".

בשאלה שלנו, אילו היה נתון שהקבוצות A_i' זרות זו לזו, אז על ידי שימוש חוזר בטענה על קבוצות זרות היינו מקבלים ש- $\bigcup_{1\le i\le 100}(A_i')$ הוא בר-מניה.

מכיון שלא נתון שהקבוצות A_i' זרות זו לזו, אנו זקוקים לטענה הבאה:

__**טענה 1**__

מתוך ההנחה (*) נובעת המסקנה $|A \cup B| = \aleph_0$ גם ללא ההנחה שהקבוצות זרות.

__**הוכחת טענה 1**__

נניח שמתקיים התנאי (*) ואיננו מניחים דבר על $A \cap B$. נוכיח ש- $|A \cup B| = \aleph_0$.

(*תודה לאילון בן-שמואל, שקיצר משמעותית את ההוכחה שלי כאן*). כידוע $A \cup B = A \cup (B - A)$, ובאגף ימין האיחוד הוא של שתי קבוצות זרות. לפיכך:

(*i*) מהנתון, A היא סופית או בת-מניה.

(*ii*) $B - A \subseteq B$, ומהנתון B היא סופית או בת-מניה. קבוצה המוכלת בקבוצה סופית או בת-מניה היא סופית או בת-מניה (טענה זו מופיעה בספר, ראו הפניה בתחילת ההדרכה לשאלה בפורום), לפיכך גם $B - A$ היא סופית או בת-מניה.

(*iii*) לא ייתכן שהקבוצה A והקבוצה $B - A$ שתיהן סופיות, כי אז האיחוד שלהן היה סופי, אבל האיחוד שלהן מכיל את A ואת B , שלפי הנתון לפחות אחת מהן אינסופית.

(*i*)+(*ii*)+(*ii*) יחד אומרים שהקבוצות הזרות A , $B - A$ מקיימות את התנאי (*) , כאשר בתפקיד B נמצאת כעת $B - A$.

לפי "הטענה על קבוצות זרות" , $|A \cup (B - A)| = \aleph_0$.

כאמור $A \cup B = A \cup (B - A)$, כלומר הוכחנו ש- $|A \cup B| = \aleph_0$.

עד כאן הוכחת טענה 1.

על ידי שימוש חוזר בטענה 1 (כלומר איחוד עם קבוצה בת-מניה אחת נוספת בכל שלב, שוב ושוב)
נקבל שאיחוד של 100 קבוצות בנות-מניה הוא בר-מניה, גם ללא הנחה שהן זרות.
ניסוח פורמלי של שיקול זה הוא הוכחה באינדוקציה על מספר הקבוצות באיחוד:

טענה 2

יהי $1 \le n \in \mathbf{N}$. איחוד של n קבוצות בנות-מניה הוא בר-מניה.

הוכחת טענה 2

באינדוקציה על n.

בדיקה עבור $n = 1$: מה שיש להוכיח הוא בדיוק מה שנתון.

מעבר: נניח שעבור כל n קבוצות בנות-מניה, האיחוד שלהן הוא בר-מניה.

נוכיח שזה מתקיים גם עבור כל $n+1$ קבוצות בנות-מניה:

תהיינה $A_1, \ldots, A_{n+1}$ קבוצות, שכל אחת מהן בת-מניה.

מהנחת האינדוקציה, האיחוד של n הראשונות, $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ הוא בר-מניה.

מהנתון, A_{n+1} היא בת-מניה.

מכאן לפי טענה 1, $(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}$ היא בת-מניה.

הוכחנו את הטענה עבור $n+1$, לפי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $1 \le n \in \mathbf{N}$.

מכאן כאמור, בשאלה שלנו, $|B| = \aleph_0$.

תשובה 3

נתבונן במשלים של D: $D' = (A' \cap B' \cap C')' = A \cup B \cup C$

אגף ימין הוא איחוד של 3 קבוצות בנות מניה.

לפי טענה 2 שהוכחנו במהלך פתרון שאלה 2, איחוד כזה הוא קבוצה בת-מניה.

כעת נשים לב שמהגדרת משלים, $D = \mathbf{R} - D'$.

כידוע $|\mathbf{R}| = c \ne \aleph_0$, וכאמור $|D'| = \aleph_0$.

מכאן, לפי משפט 5.13ב בעמ' 12 בחוברת "פרק 5", $|D| = c$.

תשובה 4

א. יחס מעל קבוצה A הוא קבוצה חלקית של $A\times A$.

קבוצת כל היחסים מעל A היא אפוא $P(A\times A)$.

לכן הקבוצה בה מדובר בסעיף זה היא $P(\mathbf{N}\times\mathbf{N})$.

לפי שאלה 4.7א בעמ' 123 בספר, $|\mathbf{N}\times\mathbf{N}|=\aleph_0$.

מכאן, בעזרת משפט 5.23 (עמ' 21 בחוברת "פרק 5") , $|P(\mathbf{N}\times\mathbf{N})|=2^{\aleph_0}$.

לפי משפט 5.26 שם, $2^{\aleph_0}=C$.

ב. נסמן ב- K את קבוצת היחסים האנטי-סימטריים מעל $\mathbf{N}$.

K חלקית לקבוצת כל היחסים מעל $\mathbf{N}$, שלפי סעיף א' עוצמתה C.

לכן **(*i*)** $|K|\le C$

מצד שני, לכל $A\subseteq\mathbf{N}$ נתבונן בקבוצה I_A . נראה את I_A כיחס מעל $\mathbf{N}$.

קל לראות שזהו יחס אנטי-סימטרי. ההתאמה $A\to I_A$ היא אפוא פונקציה של $P(\mathbf{N})$ ל- K.

פונקציה זו היא חד-חד-ערכית (מדוע?).

לכן , מהגדרת "קטן/שווה" בין עוצמות, $|P(\mathbf{N})|\le|K|$.

לפי משפט 5.25 קיבלנו: **(*ii*)** $C\le|K|$.

מתוך (*i*) + (*ii*) יחד, לפי משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין, $|K|=C$.

תשובה 5

א. תהיינה A_1,A_2,B קבוצות שעוצמותיהן בהתאמה k_1,k_2,m . נתון $k_1\le k_2$.

כדי לקצר מעט את ההוכחה ניעזר בטריק השימושי הבא: **אנו חופשים לבחור כראות עינינו את הקבוצות המייצגות את העוצמות, כל עוד הקבוצות שנבחר הן בעלות העוצמות הנדרשות.**

מכיוון ש- $k_1\le k_2$, לפי שאלה 5.1א בחוברת "פרק 5" **קיימת** קבוצה חלקית של A_2 שעוצמתה שווה לעוצמת A_1 . לכן **ב.ה.כ. נבחר** $A_1\subseteq A_2$ (!)

מהגדרת חזקה של עוצמות, $k_1^{\,m}$ היא עוצמת קבוצת הפונקציות של B ל- A_1 ,

ו- $k_2^{\,m}$ היא עוצמת קבוצת הפונקציות של B ל- A_2 .

מכיוון ש- $A_1\subseteq A_2$, פונקציה של B ל- A_1 היא גם פונקציה של B ל- A_2 **(!)** (מדוע?)

כלומר קבוצת הפונקציות של B ל- A_1 מוכלת בקבוצת הפונקציות של B ל- A_2 .

לכן, בהסתמך על שאלה 5.1ב, עוצמת הקבוצה הראשונה קטנה / שווה לעוצמת הקבוצה השניה.

משמע $k_1^{\,m}\le k_2^{\,m}$.

ב. מצד אחד, $\aleph_0 \le C$ ולכן בעזרת סעיף א, $\aleph_0^{\aleph_0} \le C^{\aleph_0} = C$

(השוויון ל- C הוא לפי טענה 5.28).

מצד שני $2 \le \aleph_0$ ולכן בעזרת סעיף א, $C = 2^{\aleph_0} \le \aleph_0^{\aleph_0}$.

(השוויון ל- C הוא לפי משפט 5.26).

משני האי-שוויונים יחד, בעזרת קנטור-שרדר-ברנשטיין, מתקבל $\aleph_0^{\aleph_0} = C$.

איתי הראבן