מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות:

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* **בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר : כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק') א. איזה מהפסוקים הבאים מביע את הטענה ש- R הוא יחס סימטרי?

[1] $\forall x \forall y \left((x,y) \in R \ \wedge \ (y,x) \in R \right)$

[2] $\forall x \exists y \left((x,y) \in R \ \rightarrow \ (y,x) \in R \right)$

[3] $\left(\forall x \forall y \ (x,y) \in R \right) \rightarrow \left(\forall x \forall y \ (y,x) \in R \right)$

[4] $\forall x \forall y \ \left((x,y) \in R \ \rightarrow \ (y,x) \in R \right)$

[5] $\exists x \exists y \left((x,y) \in R \ \rightarrow \ (y,x) \in R \right)$

(7 נק') **ב.** כידוע יש אינסוף מספרים ראשוניים (מספרים שלמים גדולים מ- 1 שכל אחד מהם מתחלק רק בעצמו וב- 1). כמה קבוצות שכל אבריהן הם מספרים ראשוניים קיימות?
הנה שלוש דוגמאות לקבוצות כאלה :
$\{2,3,19\}$; קבוצת הראשוניים הגדולים מ- 7 ; קבוצת כל המספרים הראשוניים.

[1] $\aleph_0$ **[2]** עוצמה שנמצאת בין $\aleph_0$ לבין C **[3]** C

[4] 2^C **[5]** אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק') **ג.** G_1, G_2 הם גרפים פשוטים וקשירים, בכל אחד מהם יש לפחות 3 צמתים. בכל אחד מהגרפים G_1, G_2 קיים מעגל אוילר. קבוצות הצמתים של G_1, G_2 הן בהתאמה V_1, V_2, ומתקיים $\left| V_1 \cap V_2 \right| = 1$: יש בדיוק צומת אחת המשותפת לשני הגרפים.
G הוא גרף שקבוצת הצמתים שלו היא $V_1 \cup V_2$ וקבוצת הקשתות שלו היא איחוד קבוצות הקשתות של שני הגרפים. מצאו את הטענה הנכונה :

[1] G הוא גרף קשיר ויש בו מעגל אוילר.

[2] G הוא גרף קשיר אבל אין בו מעגל אוילר.

[3] G אינו קשיר ואין בו מעגל אוילר.

[4] G אינו קשיר ויש בו מעגל אוילר.

[5] כדי לדעת אם יש ב- G מעגל אוילר צריך עוד פרטים על הגרפים G_1, G_2.

חלק ב׳: ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב׳ כולו : 81 נקודות

שאלה 2

תהי $A=\{1,2,3,\ldots,10\}$. תהי $M = P(A)-\{\varnothing\} = \{X \mid \varnothing \neq X \wedge X \subseteq A\}$.

להלן יחסים (רלציות) שונים המוגדרים מעל M.

בכל סעיף, קבעו אם היחס המוגדר באותו סעיף הוא :

(i) רפלקסיבי? *(ii)* אנטי-סימטרי? *(iii)* טרנזיטיבי? **נמקו כל תשובה.**

(6 נק׳) א. היחס R המוגדר כך : $(X,Y)\in R$ אםם $5 \in X \cap Y$.

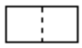
(6 נק׳) ב. היחס S המוגדר כך : $(X,Y)\in S$ אםם $5 \notin X \cup Y$.

(6 נק׳) ג. היחס K המוגדר כך : $(X,Y)\in K$ אםם $\min(X)=\max(Y)$.

(9 נק׳) ד. היחס T המוגדר כך : $(X,Y)\in T$ אםם $\{X,Y\}$ היא **חלוקה** של A.

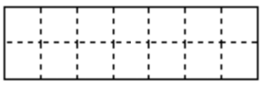
הבהרה : $\min(X)$ הוא האיבר הקטן ביותר ב- X, $\max(Y)$ הוא האיבר הגדול ביותר ב- Y.

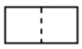
שאלה 3

בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים בגודל 1×2 : 

בלוק יכול להיות באחד משלושה צבעים : ירוק, כחול, לבן (הבלוק כולו צבוע בצבע אחיד, לא כל משבצת בנפרד).

עלינו לרצף מלבן שממדיו $2 \times n$ (בציור $n=7$),
בלי לחרוג מגבולות המלבן.



בלוק ירוק אפשר להניח במצב ״שוכב״  או במצב ״עומד״ .

בלוק כחול אפשר להניח **רק במצב שוכב**. בלוק לבן אפשר להניח **רק במצב עומד**.

אסור להניח בלוק ירוק שוכב על בלוק כחול (דשא לא צומח על הים).

יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

(10 נק׳) א. רשום יחס נסיגה עבור a_n (הסבר אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

(17 נק׳) ב. פתור את יחס הנסיגה.

להסיר ספק : בריצוף, גבולות הבלוקים נראים לעין. למשל, ריצוף בשני בלוקים ירוקים העומדים זה ליד זה שונה מריצוף בשני בלוקים ירוקים השוכבים זה על גבי זה.

שאלה 4

הנה כל הדרכים בהן ניתן להציג את 6 כסכום של שלמים חיוביים שאף אחד מהם אינו גדול מ- 3 :

1+1+1+1+1+1 , 2+1+1+1+1 , 2+2+1+1 , 2+2+2, 3+1+1+1, 3+2+1, 3+3.

היעזרו ברשימה זו וחשבו את מספר יחסי השקילות מעל הקבוצה $\{a,b,c,d,e,f\}$, בהם בכל מחלקת שקילות יש לכל היותר 3 אברים. **יש להגיע לתשובה מספרית.**

שאלה 5

תהי V קבוצת המחרוזות (סדרות) באורך 3 שאבריהן לקוחים מהקבוצה $\{0,1,2\}$.

נגדיר גרף פשוט G כך : קבוצת הצמתים של G היא V.

בין שני צמתים שונים יש קשת אם ורק אם שתי הסדרות **מתלכדות בדיוק במקום אחד**.

דוגמאות :

יש קשת בין הצומת 000 לצומת 210, כי סדרות אלה מתלכדות במקום השלישי ורק בו.

יש קשת בין 210 ל- 221, כי סדרות אלה מתלכדות במקום הראשון ורק בו.

אין קשת בין 000 ל- 010, כי סדרות אלה מתלכדות בשני מקומות : הראשון והשלישי.

אין קשת בין 012 ל- 120, כי סדרות אלה אינן מתלכדות באף מקום.

(6 נק׳) א. לכל הצמתים ב- G אותה דרגה. מצאו מהי דרגה זו. נמקו.

(21 נק׳) ב. הוכיחו שניתן לרשום בזה אחר זה את כל אברי V כאשר כל אבר של V מופיע ברשימה פעם אחת ויחידה, **ואחרי כל מחרוזת שאינה האחרונה ברשימה באה מחרוזת שמתלכדת איתה <u>בשני מקומות</u> או לא מתלכדת איתה <u>באף מקום</u>.**

דוגמא אפשרית להתחלה של רשימה כזו : 000, 001, 212, 120, ...

כל מחרוזת מתלכדת עם הבאה אחריה בשני מקומות או שאינה מתלכדת איתה באף מקום.

הדרכה: חקרו את הגרף המשלים של G.

בהצלחה!