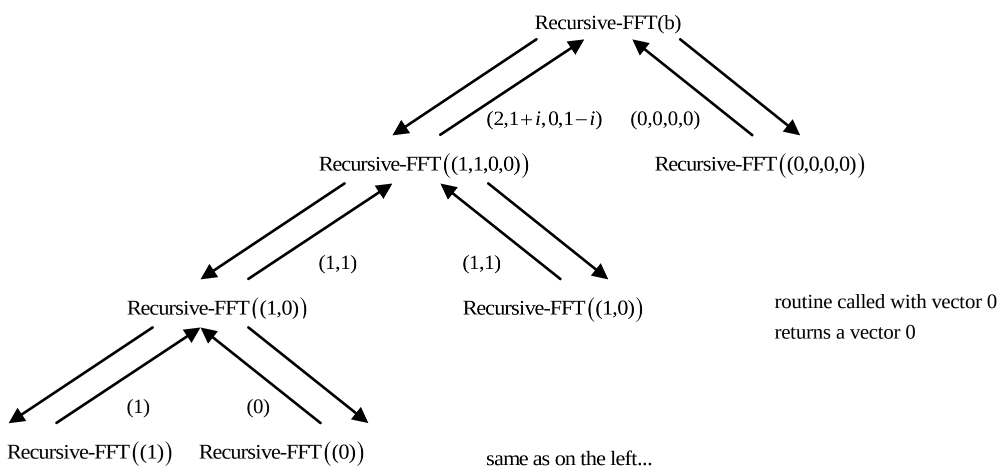
## שאלה 1

לצורך פתרון השאלה אעזר בפרוצדורה רקורסיבית המבוססת על טרנספורם פורייה שנלקחה מהחומר של הקורס הישן (המבוסס על הספר Introduction to algorithms 2nd Ed. שנכתב ע״י Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L. & Stein C.). הפרוצדורה מופיעה בסעיף 30.2 בספר הנ״ל ונקראת Recursive-FFT (להלן יופיע ציטוט שלה ללא פירוש הסימונים אשר אני משער שמוכרים לבודק). עפ״י משפט 30.8 בספר זה, לכל שני וקטורים $a$ ו- $b$ באורך $n$ ( $n$ חזקה של 2), $a \otimes b = DFT_{2n}^{-1}\left(DFT_{2n}(a) \cdot DFT_{2n}(b)\right)$, כאשר הווקטורים $a$ ו- $b$ מרופדים באפסים עד לגודל $2n$ ו- $\cdot$ מייצג מכפלת וקטורים קאורדינטה-קאורדינטה.

```
Recursive-FFT(a)
    n ← length[a]
    if n=1
       then return a
    ω_n ← e^{2πi/n}
    ω ← 1
    a^[0] ← (a_0, a_2, …, a_{n-2})
    a^[1] ← (a_1, a_3, …, a_{n-1})
    y^[0] ← Recursive-FFT(a^[0])
    y^[1] ← Recursive-FFT(a^[1])
    for k ← 0 to n/2 - 1
        do y_k ← y_k^[0] + ω y_k^[1]
           y_k ← y_k^[0] − ω y_k^[1]
           ω ← ω ω_n
    return y
```

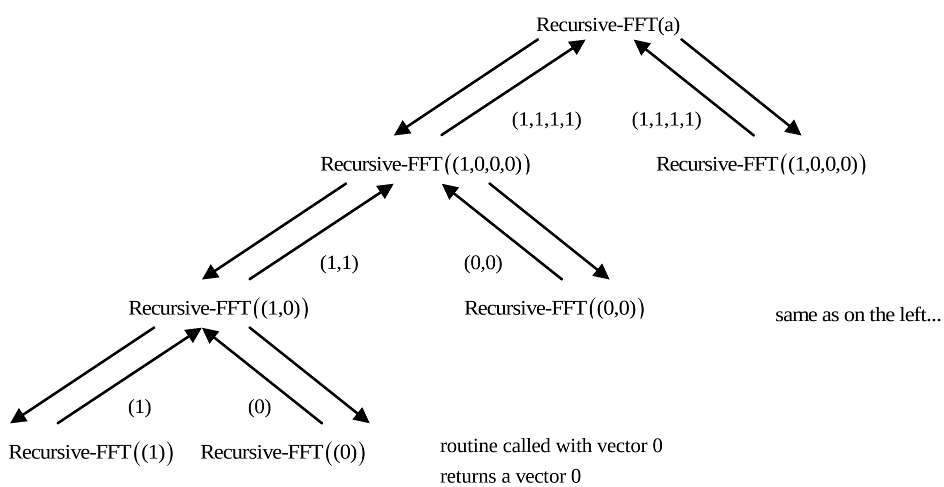
$a=(1,1,0,0)$ ו- $b=(1,0,1,0)$ הם ווקטורי המקדמים של הפולינומים $1+x$ ו- $1+x^2$, בהתאמה (מרופדים ב-0 בסוף כדי שאורכם $n$ יהיה כפולה של 2). צריך לחשב את הקונוולציה $a\otimes b$. נרפד את שני הווקטורים בעוד $n$ 0-ים ונקבל $a=(1,1,0,0,0,0,0,0)$ ו- $b=(1,0,1,0,0,0,0,0)$.

נחשב את $\mathrm{DFT}_8\mathrm{(b)=Recursive\text{-}FFT(b)}$ :




קל לוודא שהקריאות ברמות הנמוכות מחזירות את הווקטורים שרשומים בשרטוט למעלה ומכיוון ש- $y^{[1]}=0$, קל גם לראות שבסוף השגרה מחזירה $y=(2,1+i,0,1-i,2,1+i,0,1-i)$.

נחשב את $\mathrm{DFT}_8\mathrm{(a)=Recursive\text{-}FFT(a)}$ :



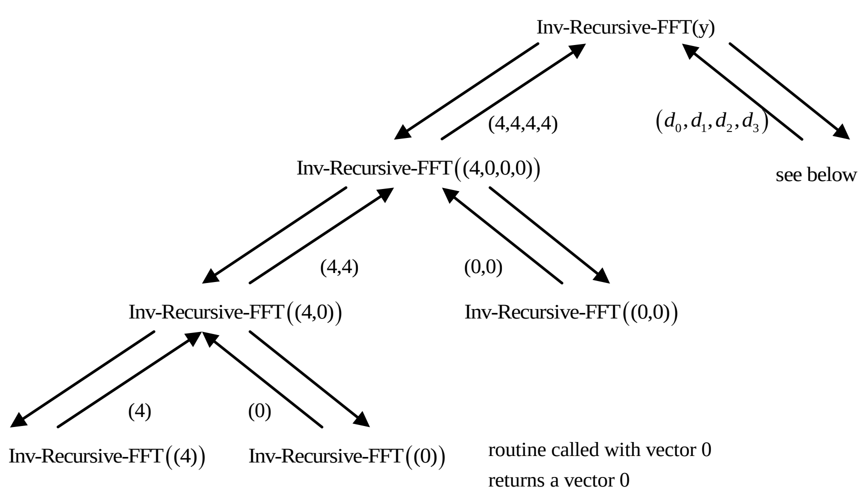

מכיוון שישנם הרבה אפסים, קל לוודא שהקריאות ברמות הנמוכות מחזירות את הווקטורים שרשומים בשרטוט למעלה. אפרט, איך מתקבלת התוצאה הסופית. כזכור, $n=8$ ולכן $\omega_n=e^{\pi i/4}$.

בהתחלה $\omega=1$ ונכנסים ללולאת ה-for בשורה 10 עם $k=0$ ו- $y=(-,-,-,-,-,-,-,-)$. בסוף האיטרציה $y=(2,-,-,-,0,-,-,-)$ ו- $\omega=e^{\pi i/4}$. נכנסים לאיטרציה הבאה עם $k=1$ ובסופה $y=(2,1+e^{\pi i/4},-,-,0,1-e^{\pi i/4},-,-)$ ו- $\omega=e^{\pi i/4}e^{\pi i/4}=e^{\pi i/2}=i$. נכנסים לאיטרציה הבאה עם $k=2$ ובסופה $y=(2,1+e^{\pi i/4},1+i,-,0,1-e^{\pi i/4},1-i,-)$ ו- $\omega=e^{\pi i/2}e^{\pi i/4}=e^{3\pi i/4}$. נכנסים לאיטרציה הבאה עם $k=3$ ובסופה $y=(2,1+e^{\pi i/4},1+i,1+e^{3\pi i/4},0,1-e^{\pi i/4},1-i,1-e^{3\pi i/4})$ ו- $\omega=e^{3\pi i/4}e^{\pi i/4}=e^{\pi i}=-1$ והלולאה מגיעה לסופה. מחזירים את הווקטור $y$.

השלב הבא הוא לחשב את הווקטור $y=DFT_8(a)\cdot DFT_8(b)$ :

$$y=\left(2,1+e^{\pi i/4},1+i,1+e^{3\pi i/4},0,1-e^{\pi i/4},1-i,1-e^{3\pi i/4}\right)\cdot\left(2,1+i,0,1-i,2,1+i,0,1-i\right)=$$
$$\left(4,\left(1+i\right)\left(1+e^{\pi i/4}\right),0,\left(1-i\right)\left(1+e^{3\pi i/4}\right),0,\left(1+i\right)\left(1-e^{\pi i/4}\right),0,\left(1-i\right)\left(1-e^{3\pi i/4}\right)\right)$$

בשלב האחרון יש לחשב את $\mathrm{DFT}_8^{-1}(\mathrm{y})$ לקבלת ווקטור הקאורדינטות של הפולינום $(1+x)(1+x^2)$. משתמשים באלגוריתם Inv-Recursive-FFT המתקבל מ- Recursive-FFT ע״י שינוי שורה 4 ל- $\omega_{\mathrm{n}}\leftarrow e^{-2\pi i/n}$ וחלוקת הווקטור המתקבל בסקלר 8.



$\text{Inv-Recursive-FFT}\left(\left((1+i)\left(1+e^{\pi i/4}\right),(1-i)\left(1+e^{3\pi i/4}\right),(1+i)\left(1-e^{\pi i/4}\right),(1-i)\left(1-e^{3\pi i/4}\right)\right)\right)$

$\left(2+2i,(2+2i)e^{\pi i/4}\right)$ $\left(2-2i,(2-2i)e^{3\pi i/4}\right)$

$\text{Inv-Recursive-FFT}\left(\left((1+i)\left(1+e^{\pi i/4}\right),(1+i)\left(1-e^{\pi i/4}\right)\right)\right)$ $\text{Inv-Recursive-FFT}\left(\left((1-i)\left(1+e^{3\pi i/4}\right),(1-i)\left(1-e^{3\pi i/4}\right)\right)\right)$

$\left((1+i)\left(1+e^{\pi i/4}\right)\right)$ $\left((1+i)\left(1-e^{\pi i/4}\right)\right)$ $\left((1-i)\left(1+e^{3\pi i/4}\right)\right)$ $\left((1-i)\left(1-e^{3\pi i/4}\right)\right)$

$\text{Inv-Recursive-FFT}\left(\left((1+i)\left(1+e^{\pi i/4}\right)\right)\right)$ $\text{Inv-Recursive-FFT}\left(\left((1+i)\left(1-e^{\pi i/4}\right)\right)\right)$ $\text{Inv-Recursive-FFT}\left(\left((1-i)\left(1+e^{3\pi i/4}\right)\right)\right)$ $\text{Inv-Recursive-FFT}\left(\left((1-i)\left(1-e^{3\pi i/4}\right)\right)\right)$

הווקטור החסר $\left(d_0,d_1,d_2,d_3\right)$ שווה ל- $\left(4,4e^{\pi i/4},4i,4ie^{\pi i/4}\right)$ :

$$d_0=(2+2i)+1\cdot(2-2i)=4$$

$$d_2=(2+2i)-1\cdot(2-2i)=4i$$

$$d_1=(2+2i)e^{\pi i/4}+e^{-\pi i/2}\left(2-2i\right)e^{3\pi i/4}=(2+2i)e^{\pi i/4}+(2-2i)e^{\pi i/4}=4e^{\pi i/4}$$

$$d_3=(2+2i)e^{\pi i/4}-e^{-\pi i/2}\left(2-2i\right)e^{3\pi i/4}=(2+2i)e^{\pi i/4}-(2-2i)e^{\pi i/4}=4ie^{\pi i/4}$$

נסמן את וקטור הקאורדינטות של הפולינום $(1+x)(1+x^2)$ ב- $\left(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7\right)$ ונקבל

$$a_0=\left(4+1\cdot 4\right)/8=1 \qquad a_4=\left(4-1\cdot 4\right)/8=0$$

$$a_1=\left(4+e^{-\pi i/4}\cdot 4e^{\pi i/4}\right)/8=1 \qquad a_5=\left(4-e^{-\pi i/4}\cdot 4e^{\pi i/4}\right)/8=0$$

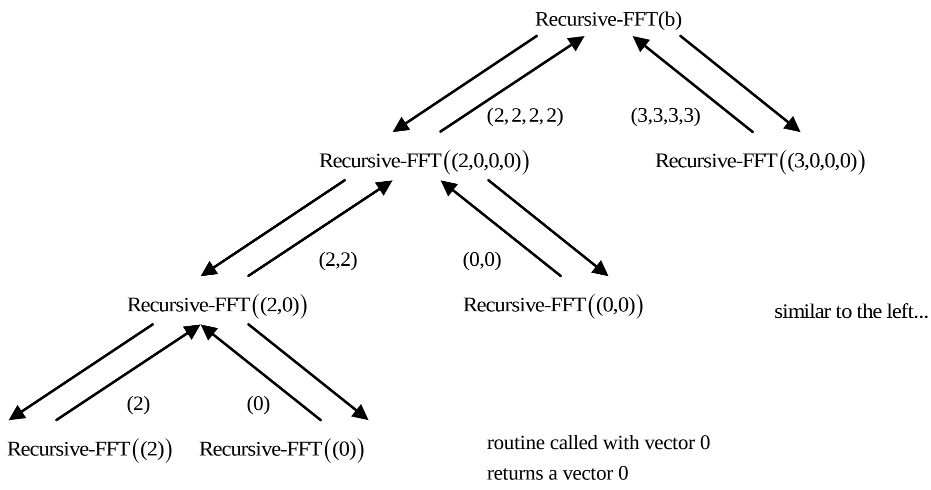
$$a_2=\left(4+e^{-\pi i/2}\cdot 4i\right)/8=\left(4-i\cdot 4i\right)/8=1 \qquad a_6=\left(4-e^{-\pi i/2}\cdot 4i\right)/8=\left(4+i\cdot 4i\right)/8=0$$

$$a_3=\left(4+e^{-3\pi i/4}\cdot 4ie^{\pi i/4}\right)/8=\left(4-i\cdot 4i\right)/8=1 \qquad a_7=\left(4-e^{-3\pi i/4}\cdot 4ie^{\pi i/4}\right)/8=\left(4+i\cdot 4i\right)/8=0$$

ואכן, בדיקה קלה מראה ש- $(1+x)(1+x^2)=(1+x+x^2+x^3)$ כפי שקיבלנו לעיל

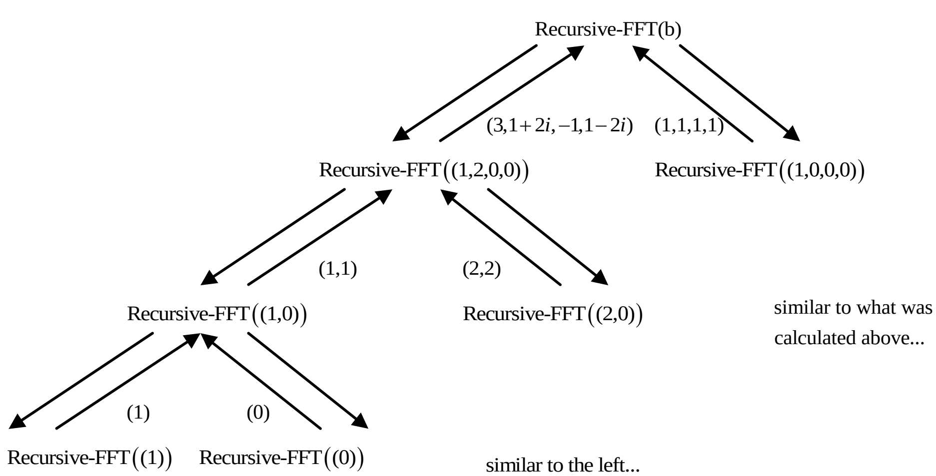
נעבור למכפלה הבאה: $a=(1,1,2,0)$ ו- $b=(2,3,0,0)$ הם ווקטורי המקדמים של הפולינומים $1+x+2x^2$ ו- $2+3x$, בהתאמה (מרופדים ב-0 כדי שאורכם, $n=4$, יהיה כפולה של 2). נחשב את הקונוולציה $a\otimes b$. נרפד את שני הווקטורים בעוד $n$ 0-ים ונקבל $a=(1,1,2,0,0,0,0,0)$ ו- $b=(2,3,0,0,0,0,0,0)$.

נחשב את $DFT_8(b)$=Recursive-FFT(b) :




שוב, $n=8$ ולכן $\omega_n = e^{\pi i/4}$. בהתחלה $\omega=1$ ונכנסים ללולאת ה-for בשורה 10 עם $k=0$ ו- $y=(-,-,-,-,-,-,-,-)$. בסוף האיטרציה $y=(5,-,-,-,-1,-,-,-)$ ו- $\omega=e^{\pi i/4}$. באיטרציה הבאה $k=1$ ובסופה $y=(5,2+3e^{\pi i/4},-,-,-1,2-3e^{\pi i/4},-,-)$ ו- $\omega=e^{\pi i/2}=i$. באיטרציה הבאה $k=2$ ובסופה $y=(5,2+3e^{\pi i/4},2+3i,-,-1,2-3e^{\pi i/4},2-3i,-)$ ו- $\omega=e^{3\pi i/4}$. באיטרציה הבאה $k=3$ ובסופה $y=(5,2+3e^{\pi i/4},2+3i,2+3e^{3\pi i/4},-1,2-3e^{\pi i/4},2-3i,2-3e^{3\pi i/4})$ ו- $\omega=e^{\pi i}=-1$ והלולאה מגיעה לסופה. מחזירים את הווקטור $y$.

נחשב את $DFT_8(a)$=Recursive-FFT(a) :



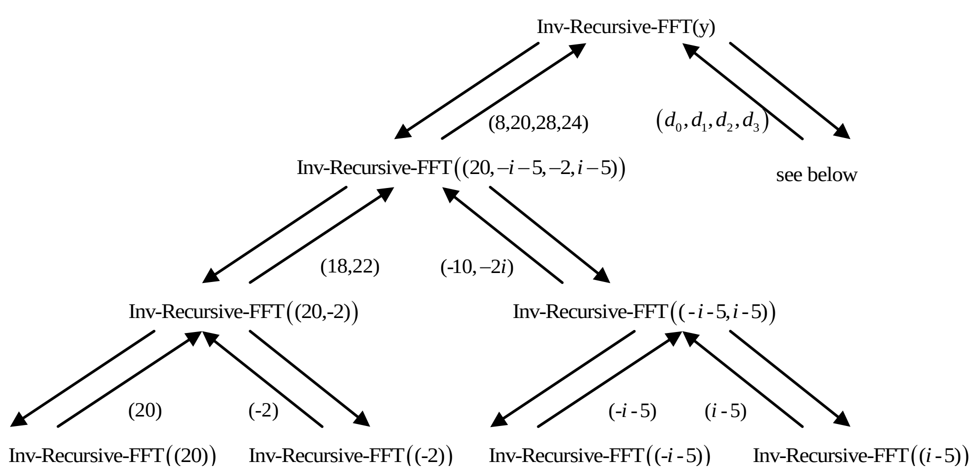
שוב, $n=8$ ולכן $\omega_n = e^{\pi i/4}$. בהתחלה $\omega = 1$ ונכנסים ללולאת ה-for בשורה 10 עם $k=0$ ו-
$y=(-,-,-,-,-,-,-,-)$. בסוף האיטרציה $y=(4,-,-,-,2,-,-,-)$ ו- $\omega = e^{\pi i/4}$. באיטרציה
הבאה $k=1$ ובסופה $y=(4,1+2i+e^{\pi i/4},-,-,2,1+2i-e^{\pi i/4},-,-)$ ו- $\omega = e^{\pi i/2} = i$. באיטרציה
הבאה $k=2$ ובסופה $y=(4,1+2i+e^{\pi i/4},-1+i,-,2,1+2i-e^{\pi i/4},-1-i,-)$ ו- $\omega = e^{3\pi i/4}$. אח״כ
$k=3$ ובסוף $y=(4,1+2i+e^{\pi i/4},-1+i,1-2i+e^{3\pi i/4},2,1+2i-e^{\pi i/4},-1-i,1-2i-e^{3\pi i/4})$ ו-
$\omega = e^{\pi i} = -1$ והלולאה מגיעה לסופה. מחזירים את הווקטור $y$.

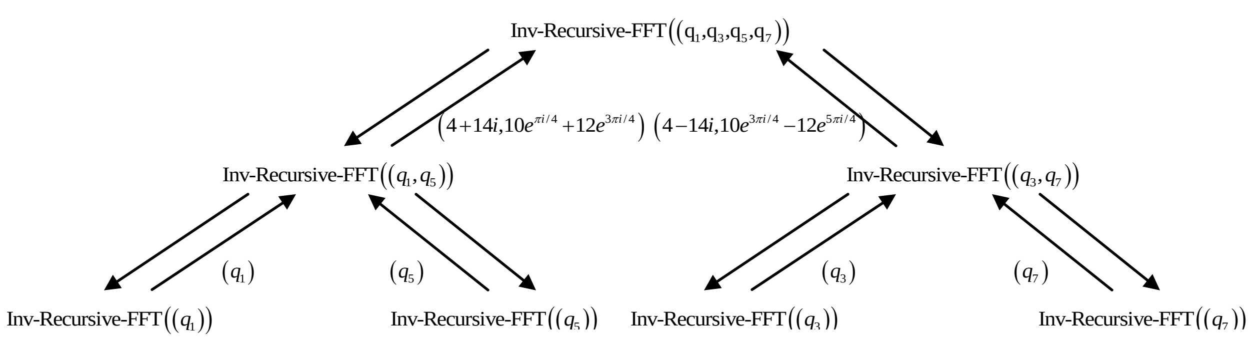
השלב הבא הוא לחשב את הווקטור $y=(q_0,q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6,q_7)=DFT_8(a)\cdot DFT_8(b)$ :

$q_0 = 20$ $\quad q_1 = 2+7i+5e^{\pi i/4}+6e^{3\pi i/4}$ $\quad q_2 = -i-5$ $\quad q_3 = 2-7i+5e^{3\pi i/4}-6e^{5\pi i/4}$

$q_4 = -2$ $\quad q_5 = 2+7i-5e^{\pi i/4}-6e^{3\pi i/4}$ $\quad q_6 = i-5$ $\quad q_7 = 2-7i-5e^{3\pi i/4}+6e^{5\pi i/4}$

בשלב הסופי, מפעילים את האלגוריתם Inv-Recursive-FFT, כמו קודם, על מנת לחשב את
$\mathrm{DFT}_8^{-1}(\mathrm{y})$ לקבלת ווקטור הקאורדינטות של הפולינום $(1+x+2x^2)(2+3x)$.



הווקטור החסר $\left(d_0,d_1,d_2,d_3\right)$ שווה ל- $\left(8,20e^{\pi i/4},28i,24e^{3\pi i/4}\right)$ :

$$d_0=4+14i+1\cdot\left(4-14i\right)=8$$

$$d_2=4+14i-1\cdot\left(4-14i\right)=28i$$

$$d_1=10e^{\pi i/4}+12e^{3\pi i/4}+e^{-\pi i/2}\cdot\left(10e^{3\pi i/4}-12e^{5\pi i/4}\right)=20e^{\pi i/4}$$

$$d_3=10e^{\pi i/4}+12e^{3\pi i/4}-e^{-\pi i/2}\cdot\left(10e^{3\pi i/4}-12e^{5\pi i/4}\right)=24e^{3\pi i/4}$$

נסמן את ווקטור הקאורדינטות של $(1+x+2x^2)(2+3x)$ ב- $\left(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7\right)$ ונקבל:

$$a_0=\left(8+1\cdot 8\right)/8=2 \qquad a_4=\left(8-1\cdot 8\right)/8=0$$

$$a_1=\left(20+e^{-\pi i/4}\cdot 20e^{\pi i/4}\right)/8=5 \qquad a_5=\left(20-e^{-\pi i/4}\cdot 20e^{\pi i/4}\right)/8=0$$

$$a_2=\left(28+e^{-\pi i/2}\cdot 28e^{\pi i/2}\right)/8=7 \qquad a_6=\left(28-e^{-\pi i/2}\cdot 28e^{\pi i/2}\right)/8=0$$

$$a_3=\left(24+e^{-3\pi i/4}\cdot 24e^{3\pi i/4}\right)/8=6 \qquad a_7=\left(24-e^{-3\pi i/4}\cdot 24e^{3\pi i/4}\right)/8=0$$

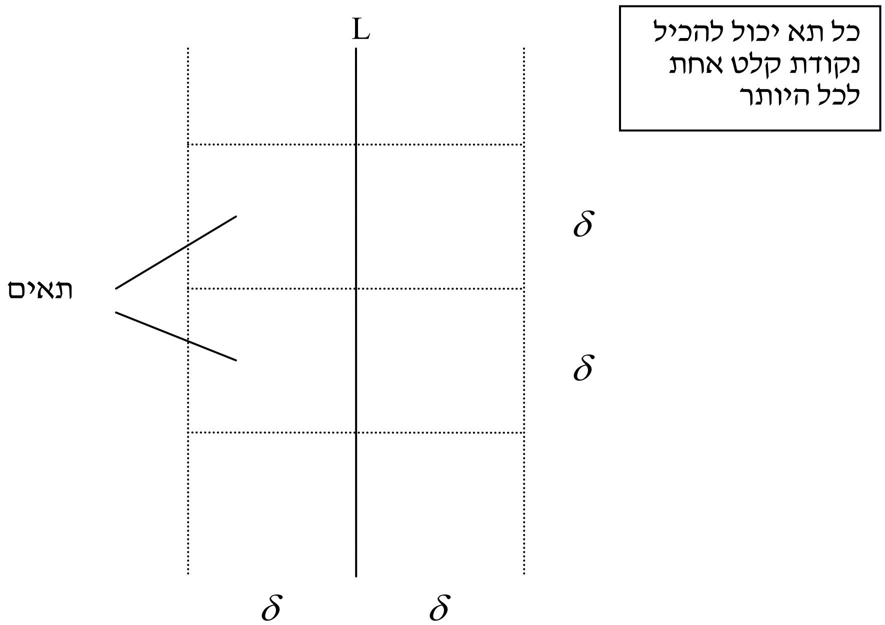
ואכן, בדיקה קלה מראה ש- $(1+x+2x^2)(2+3x)=2+5x+7x^2+6x^3$ .

## **<u>שאלה 2</u>**

בהינתן $n$ נקודות ב- $\mathbb{R}^2$ , האלגוריתם הפרד ומשול הבא מוצא את זוג הנקודות הקרובות ביותר כאשר המרחק בין שתי נקודות $p_1=(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ ו- $p_2=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ נמדד ע״י הפונקי הבאה:

$L_\infty(x,y)=\max\left\{\left|x_1-x_2\right|,\left|y_1-y_2\right|\right\}$ .

למעשה, יש לבצע שינויים מינוריים במיוחד באלגוריתם המופיע בע״מ 246 המוצא את זוג הנקודות הקרובות ביותר כאשר המרחק בין הנקודות נמדד ע״י המרחק האוקלידי הרגיל. ראשית, בכל מקום שמופיעה הפונקי $d$ יש להחליפה ב- $L_\infty$ , כמובן. שנית, ניתן להקטין את הקבוע 15 המופיע שם ל-3. השרטוט הבא המחליף את איור 5.7 בע״מ 245 עוזר להבין מדוע. זמן הריצה של האלגוריתם המעודכן נשאר ללא שינוי, היינו, $O(n\lg n)$ .




## שאלה 3

א. יהיו a ו-b מספרים זוגיים. נסמן $d=\gcd(a,b)$ ו-$e=\gcd(a/2,b/2)$ ונראה ש-$d=2e$.

ראשית, $e|a/2$ ו-$e|b/2$ ולכן $2e|a$ ו-$2e|b$. נניח שמתקיים $f|a$ ו-$f|b$ לאיזה שהוא מספר $f$ ונראה ש-$f|2e$. נרשום $f\cdot t=a$ ו-$f\cdot s=b$. היות ו-a ו-b זוגיים, ניתן לרשום גם $f\cdot t=2\cdot(a/2)$ ו-$f\cdot s=2\cdot(b/2)$. נחלק את שני האגפים (בשתי המשוואות) ב-2 ונקבל $(f\cdot t)/2=a/2$ ו-$(f\cdot s)/2=b/2$. כעת, אם $f$ אי-זוגי, הרי שגם $t$ וגם $s$ בהכרח זוגיים ולכן $f|a/2$ וכן $f|b/2$. היות ש-$e=\gcd(a/2,b/2)$ מקבלים ש-$f|e$ ובפרט $f|2e$. אם $f$ זוגי, אזי $f/2|a/2$ וכן $f/2|b/2$ ושוב כמו קודם $f/2|e$ ולכן $f|2e$. בכל מקרה קיבלנו ש-$f|2e$ ולכן $2e=d$, כנדרש.

ב. יהיה a מספר אי-זוגי ו-b מספר זוגי. נסמן $d=\gcd(a,b)$ ו-$e=\gcd(a,b/2)$ ונראה ש-$d=e$.

ראשית, $e|a$ וכן $e|b/2\Rightarrow e|b$. היות ו-$d=\gcd(a,b)$, נובע ש-$e|d$. מצד שני, $d|a$ וכן $d|b$. נרשום $d\cdot t=b$. היות ו-$b$ זוגי ניתן לרשום גם $d\cdot t=2\cdot(b/2)$. נחלק את שני האגפים ב-2 ונקבל $(d\cdot t)/2=b/2$. אם $d$ היה זוגי היינו מקבלים שגם $a$ זוגי (שהרי $d|a$) בסתירה לנתון.

לכן, $t$ זוגי ו- $d\,|\,b/2$. כעת, היות ו- $e=\gcd(a,b/2)$ וכן $d\,|\,a$, נובע $d\,|\,e$. הראינו קודם ש- $e\,|\,d$ ולכן בסה״כ $d=e$, כנדרש.

ג. יהיה a ו-b מספרים אי-זוגיים. נסמן $d=\gcd(a,b)$ ו- $e=\gcd((a-b)/2,b)$ ונראה ש- $d=e$. ראשית, $d\,|\,b$ ו- $d\,|\,b$ ולכן גם $d\,|\,(a-b)$. ניתן לרשום $d\cdot t=2\cdot\left((a-b)/2\right)$ (כי $(a-b)$ זוגי). נחלק את שני האגפים ב-2 ונקבל $\left(d\cdot t\right)/2=(a-b)/2$. שוב כמו קודם, אם היינו מניחים ש- $d$ זוגי היינו מקבלים סתירה לכך $b$ הוא אי-זוגי. לכן, בהכרח $t$ זוגי ומכאן $d\,\big|\left((a-b)/2\right)$. היות ו- $e=\gcd((a-b)/2,b)$ ו- $d\,|\,b$ נובע ש- $d\,|\,e$. מצד שני, $e\,|\,b$ ו- $e\,\big|\left((a-b)/2\right)$ ומכאן גם ש- $e\,|\,(a-b)$. מכאן קל לראות ש- $e\,|\,a$ (שהרי $e\,|\,(a-b)-b$). אך, $d=\gcd(a,b)$, לכן, $e\,|\,d$ ובסה״כ קיבלנו ש- $d\,|\,e$ וגם $e\,|\,d$, כלומר, $d=e$, כנדרש.

ד. אלגוריתם הפרד ומשול המחשב את $\gcd(a,b)$, בהינתן שני שלמים חיוביים $d$ ו- $e$ הוא (הנחתי ש- $d$ ו- $e$ לא יכולים להיות שניהם 0):

```
gcd(a,b)
    if a = 1 or b = 1
        then return 1
    if b > a
        then exchange a ↔ b
    if a = b or b = 0
        then return a
    if a mod 2 = 0 and b mod 2 = 0
        then return 2gcd(a/2,b/2)
    if a mod 2 = 1 and b mod 2 = 1
        then return gcd((a-b)/2,b)
    if a mod 2 = 1 and b mod 2 = 0
        then return gcd(a,b/2)
    if a mod 2 = 0 and b mod 2 = 1
        then return gcd(a/2,b)
```

ניתוח זמן ריצה: בכל קריאה רקורסיבית מתבצעות מספר סופי של פעולות יסוד. נשים לב ש- $(a-b)/2\le a/2$ אם $a>b$ ו- $(b-a)/2\le b/2$ אם $a\le b$. לכן, בכל קריאה רקורסיבית $a$

קטן בלפחות פי 2 ו/או $b$ קטן בלפחות פי 2. עומק הרקורסיה הוא, אם כן, לכל היותר $O(\lg a+\lg b)=O(\max\{\lg a,\lg b\})$. היות ואורך הייצוג של מספר $n$ בבסיס סופי כלשהו הוא $O(\lg n)$, זהו למעשה אלגוריתם ליניארי בגודל הקלט המקסימלי מבין שני מספרי הקלט.

## <u>שאלה 4</u>

נתונה סדרה $s=(a_i)_{i=1}^{n}$ של $n$ מספרים ממשיים. נבנה אלגוריתם תכנון דינמי המוצא תת-סדרה עולה של $s$ באורך מקסימלי. ברוח התכנון הדינמי, נבנה מערך $M[1\ldots n]$ כך שב-$M[i]$ יאוחסן האורך של תת-סדרה עולה של $s$ באורך מקסימלי **המסתיימת** ב-$a_i$. ברור שכל תת-סדרה של $s$, מסתיימת באחד מאיבריה, לכן $\underset{i}{Max}\{M[i]\}$ הוא מבוקשנו (כפי שנראה, לא קשה לשחזר תת-סדרה כזאת מהמערך $M$).

כיצד נבנה מערך $M$ כנ"ל? ברור ש-$M[1]=1$. נניח שאנו יודעים את $M[i]$ לכל $1\le i<n$, אזי קל לראות ש-
$$M[n]=\begin{cases}1 & a_n\le a_i\ \forall\ 1\le i<n\\ \underset{i}{Max}\left\{M[i]\,\middle|\,a_n>a_i\right\}+1 & otherwise\end{cases}$$
. אם יהיה ברשותנו אלגוריתם הבונה מערך $M$ כנ"ל, הרי שהוא פותר נכונה את הבעיה.

שורות 1-5 באלגוריתם תכנון דינמי MAX-INC-SUB-SERIES שלהלן בונה את המערך $M[1\ldots n]$ עפ"י נוסחת הנסיגה שלמעלה. שורות 6-18 משחזרות ומדפיסות תת-מערך כנדרש: ראשית מוצאים איבר אחרון בתת-סדרה שכזאת – שהוא $a_{\text{largest}}$ כאשר $\text{largest}=\underset{i}{Max}\{M[i]\}$. האיבר הקודם לו ימצא בסדרה $s$ במיקום $\underset{1\le i<\text{largest}}{Max}\{i\,|\,M[i]=M[\text{largest}]-1\}$, וכך הלאה.

```
MAX-INC-SUB-SERIES(s)
1.    for i ← 1 to length[s]
2.        do M[i] ← 1
3.            for j ← 1 to i - 1
4.                do if s[i] > s[j] and M[i] <= M[j]
5.                    then M[i] ← M[j] + 1
```

```
6.    largest ← 1
7.    for i ← 2 to length[M]
8.        do if M[i] > M[largest]
9.              then largest ← i
10.   series_len ← M[largest]
11.   PUSH(S, s[largest])
12.   while i >= 1 and series_len > 0
13.       do if M[i] = series_len - 1
14.             then PUSH(S, s[i])
15.                  series_len ← series_len - 1
16.          i ← i - 1
17.   while not STACK-EMPTY(S)
18.       do print(POP(S))
```

ניתוח זמן ריצה: החלק הפנימי של לולאת ה-for הפנימית בשורות 1-5 רץ בזמן קבוע ולכן זמן הריצה של הלולאה החיצונית (ולכן של כל הקטע הנ"ל) הוא $O(1)+O(2)+\ldots+O(n)=O(n^2)$ במקרה הגרוע. קל לראות שזמן הריצה של שורות 6-18 הוא $O(n)$ ולכן זמן הריצה הכללי של האלגוריתם הנ"ל הוא $O(n^2)$ במקרה הגרוע.

## **<u>שאלה 5</u>**

נתונים $n$ סוגי חלקים. לכל חלק $i\in\{1,\ldots,n\}$ יש פרמטר אורך $d_i$, מחיר $p_i$, צד ימין $r_i$ וצד שמאל $l_i$. אפשר לחבר את $i$ עם $j$ אס"ם $r_i=l_j$. להלן אלגוריתם תיכנון דינמי המקבל ערך חיובי $L$ ומוצא את המסילה הזולה שאורכה $L$ אם מסילה כזו קיימת (אם יש כמה אז אחת מהן).

נניח שיש בסה"כ $X$ ערכי "צד ימין" וערכי "צד שמאל" שונים (נמספר אותם מ-1 עד $X$). מעתה כך נזהה אותם. נבנה שני מערכים תלת-מימדיים $A[1\ldots X,0\ldots n,0\ldots L]$ ו-$B[1\ldots X,0\ldots n,0\ldots L]$, כאשר $A[x,i,l]$ מייצג את $\min_S\sum_{j\in S}p_j$ על פני קבוצות $S\subseteq\{1,\ldots,i\}$ (סדורות) המייצגות מסילות רכבת חוקיות שצד ימין של החלק האחרון שלהן הוא $x$ וכן אורכה של כל אחת מהמסילות מקיים את המשוואה $\sum_{j\in S}d_j=l$. אם אין אף קבוצה $S$ המקיימת את האילוצים האלה, אזי $A[x,i,l]=\infty$.

באותו אופן, $B[x,i,l]$ מייצג את $\min \sum_{j\in S} p_j$ על פני קבוצות $S \subseteq \{1,\ldots,i\}$ (סדורות) המייצגות מסילות רכבת חוקיות שצד שמאל של החלק הראשון שלהן הוא $x$ וכן אורכה של כל אחת מהמסילות מקיים את המשוואה $\sum_{j\in S} d_j = l$. שוב, אם אין אף קבוצה $S$ המקיימת את האילוצים האלה, אזי $B[x,i,l]=\infty$.

מסילת רכבת חייבת להסתיים באיזה שהוא חלק שיש לו צד ימין כלשהו, לכן ברור ש-$\min_{1\le x\le X} A[x,n,L]$ הוא מחיר המסילה הזולה ביותר (החייב להיות שווה ל-$\min_{1\le x\le X} B[x,n,L]$). בהמשך נראה איך אפשר לשחזר את אחת המסילות האופטימליות (אם קיימת) בעזרת המערכים $A$ ו-$B$.

נוסחה רקורסיבית ליצירת המערכים $A$ ו-$B$:

- עבור $i=0$, לכל $0\le l\le L$ ולכל $1\le x\le X$: $A[x,i,l]=\infty$, $B[x,i,l]=\infty$.
- עבור $0<i\le n$: לכל $1\le x\le X$,

  אם $l<d_i$, $A[x,i,l]=A[x,i-1,l]$ ו-$B[x,i,l]=B[x,i-1,l]$

  אחרת, $A[x,i,l]=\min\left(A[x,i-1,l],\, p_i+\min_{l'+l''=l-d_i}\left(A[l_i,i,l']+B[r_i,i,l'']\right)\right)$ ו-

  $$B[x,i,l]=\min\left(B[x,i-1,l],\, p_i+\min_{l'+l''=l-d_i}\left(A[l_i,i,l']+B[r_i,i,l'']\right)\right)$$

<u>הסבר</u>: הפתרון המוצע בעצם פותר בעיה רחבה יותר: בהינתן ערך חיובי $L$, מהי המסילה הזולה ביותר שאורכה $L$ שצד ימין (שמאל) של חלקה האחרון (ראשון) הוא $x$ עבור $1\le x\le X$ (אם קיימת מסילה כזאת). בהינתן $x$, $1\le x\le X$, אם החלק $n$ לא מופיע בפתרון אופטימלי שצד ימין (שמאל) של החלק האחרון (הראשון) שלו הוא $x$, אזי ברור ש-$A[x,n,L]=A[x,n-1,L]$ ($B[x,n,L]=B[x,n-1,L]$). לעומת זאת, אם $n$ כן מופיע בפתרון כנ"ל, אזי הוא מחלק את המסילה לשלוש תת-מסילות (הימנית והשמאלית ביותר יכולות להיות ריקות): תת-מסילה חוקית שמאלית (שבה $n$ יכול להופיע שוב) אשר צד ימין של החלק האחרון שלה הוא $l_n$, החלק $n$ ותת-מסילה חוקית ימנית (שגם בה $n$ יכול להופיע) אשר צד שמאל של החלק הראשון שלה הוא $r_n$. סכום אורכי המסילות הקיצוניות צריך להיות שווה ל-$L-d_n$.

האלגוריתם תכנון דינמי LEAST-COST-RAILWAY שלהלן מבוסס על נוסחת הנסיגה שלעיל ומוצא את שווי המסילה האופטימלית. ההסבר למעלה מוכיח את נכונותו של האלגוריתם.

LEAST-COST-RAILWAY(Parts,L)

1. n $\leftarrow$ *length*[Parts]
2. build a map: keys: 1,2,... values: diffrent *left*[Parts[i]] and *right*[Parts[i]], $1 \le i \le n$
3. X $\leftarrow$ the size of the map builts on row 2
4. Array A[1…X,0…n,0…L]
5. Array B[1…X,0…n,0…L]
6. A[x,0,$l$] $\leftarrow$ $\infty$ for each $1 \le x \le X$ and $0 \le l \le L$
7. for i $\leftarrow$ 1 to n
8.     do for x $\leftarrow$ 1 to X
9.         do for $l$ $\leftarrow$ 0 to L
10.             do Use the above recurrence to compute A[x,i,$l$] and B[x,i,$l$]
11. retrun the minimum of A[x,n,L] over all $1 \le x \le X$

ניתן לשחזר את המסילה באופן הבא: נמצא את $m=\left\{x \middle| A[x,n,L]=\min_{1\le x\le X}\{A[x,n,L]\}\right\}$ ונתחיל מ-$A[m,n,L]\neq\infty$ (ייתכנו יותר מאחד ואם כולם $\infty$ הרי שלא קיימת מסילה כנדרש). החלק $n$ אינו נוטל חלק בפתרון אם $A[m,n,L]=A[m,n-1,L]$. אחרת, ניתן למצוא את $l'$ ו-$l''$ המקיימים $l'+l''=L-d_n$ שהביאו את הביטוי $A[l_i,i,l']+B[r_i,i,l'']$ למינימום. לשים את החלק $n$ באמצע המסילה ולמצוא באותו אופן את חלק המסילה שמתחבר לו מימין ואת חלק המסילה שמתחבר לו משמאל (כאמור, ייתכן שאחד או שניים מחלקים אלה – ריקים).

ניתוח זמן הריצה: זמן הריצה של האלגוריתם LEAST-COST-RAILWAY במקרה הגרוע הוא $O\left(nXL\cdot L\right)=O(nXL^2)$ משום שנדרש זמן $O\left(L\right)$ במקרה הגרוע לחישוב שני המינימומים בשורה 10 ויתר חלקי האלגוריתם נשלטים ע"י חסם זה. קל לראות שזמן ריצת חלק האלגוריתם המשחזר את המסילה מהמערכים $A$ ו-$B$ שתואר בפיסקה הקודמת בוודאי חסום מלמעלה ע"י $O\left(nL^2\right)$ במקרה הגרוע (החלק החדש שמתווסף – כאשר אכן מאורע זה קורה – תמיד נוסף באחד הקצוות).
בסה"כ תיארנו אלגוריתם הפותר את הבעיה בזמן $O(nXL^2)$ במקרה הגרוע.