תשובה 1

א. תנאי ההתחלה:

$a_0 = 1$ (סדרה ריקה! נוח להיעזר ב- a_0 לסעיף ב)

$a_1 = 1$ (רק בלוק 1×2 עומד אפשרי)

$a_2 = 3$ בלוק של 2×2, או שני בלוקים 1×2 עומדים, או שני בלוקים 1×2 שוכבים).

יחס נסיגה: נתבונן בריצוף באורך $n + 1$.

* אם הוא מסתיים בבלוק 1×2 עומד, אז לפני הבלוק הזה יכול לבוא כל ריצוף באורך n, כלומר a_n ריצופים אפשריים.

* אם הוא מסתיים בבלוק של 2×2, אז לפני הבלוק הזה יכול לבוא כל ריצוף באורך $n - 1$, כלומר a_{n-1} ריצופים אפשריים.

* אם הוא מסתיים בבלוק 1×2 שוכב, אז בהכרח מדובר בשני בלוקים 1×2 שוכבים זה מעל זה. לפניהם יכול לבוא כל ריצוף באורך $n - 1$, כלומר a_{n-1} ריצופים אפשריים.

בסה"כ קיבלנו: $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$

נבדוק שזה תואם את תנאי ההתחלה שרשמנו: $a_2 = a_1 + 2a_0 = 1 + 2\cdot 1 = 3$.

ב. המשוואה האפיינית: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.

פתרונותיה הם: $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$ כלומר $2, -1$.

לפיכך $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$.

בהצבת תנאי ההתחלה a_1, a_0 נקבל:

$A + B = 1$, $2A - B = 1$.

מחיבור שתי משוואות אלה $3A = 2$, כלומר $A = 2/3$. מכאן $B = 1/3$.

לפיכך

$$a_n = \frac{2}{3}\cdot 2^n + \frac{1}{3}(-1)^n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + (-1)^n\right)$$

ג. מיחס הנסיגה: $a_3 = a_2 + 2a_1 = 5$, $a_4 = a_3 + 2a_2 = 11$.

מהנוסחה המפורשת: $a_4 = \dfrac{1}{3}\left(2^5 + (-1)^4\right) = 11$

תשובה 2

כמו בפתרון שאלה *4* בממ״ן *15*, נניח שהמשתנים הזוגיים הם *3* הראשונים, ונכפול את התוצאה שנקבל ב- $20 = \binom{6}{3}$.

מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$ תחת האילוצים הנתונים בשאלה הוא המקדם של x^{29} בפיתוח הפונקציה $f(x) = (x^2 + x^4 + x^6 + \dots)^3(x^3 + x^5 + x^7 + \dots)^3$.

בסוגריים השמאליים נוציא גורם משותף x^2 , שלאחר העלאה בחזקת *3* נותן x^6 .

בסוגריים הימניים נוציא גורם משותף x^3 , שלאחר העלאה בחזקת *3* נותן x^9 .

קיבלנו

$$f(x) = x^6(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)^3 x^9(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)^3$$
$$= x^{15}(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)^6$$

המקדם של x^{29} בפונקציה זו הוא המקדם של x^{14} בפונקציה $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)^6$.

בהצבת $y = x^2$, זהו המקדם של y^7 בפונקציה $(1 + y + y^2 + y^3 + \dots)^6$.

לפי נוסחה (*iii*) שבסוף הממ״ן, המקדם הזה הוא $D(6,7) = \binom{12}{5} = 792$.

כאמור בתחילת הפתרון, את זה עלינו לכפול ב- *20* . תשובה סופית: $15{,}840 = 20 \cdot 792$.

תשובה 3

א. לפי הדיון בעמ׳ *124 - 127* בספר, הפונקציה היוצרת היא

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^2$$

a_n הוא המקדם של x^n בפיתוח פונקציה זו.

ב. מסעיף א׳, בעזרת סכום טור הנדסי סופי וסכום טור הנדסי אינסופי נקבל:

$$f(x) = \left(\frac{1 - x^4}{1 - x}\right)^2\left(\frac{1}{1 - x}\right)^2 = (1 - x^4)^2 \frac{1}{(1 - x)^4} = (1 - 2x^4 + x^8)\frac{1}{(1 - x)^4}$$

לפי נוסחה (*iii*) שהופיעה בממ״ן (עמ׳ *11*), $\frac{1}{(1 - x)^4} = \sum_{i=0}^{\infty} D(4, i)\, x^i$.

מכאן ע״י קיבוץ איברים הנותנים מעלה n (נוסחה (*ii*) בממ״ן. השווה גם השאלה הקודמת), המקדם של x^n ב- $f(x)$ הוא

$$a_n = D(4,n) - 2D(4,n-4) + D(4,n-8) = \binom{n+3}{3} - 2\binom{n-1}{3} + \binom{n-5}{3}$$

אם $n < 5$ הביטוי הימני ביותר באגף ימין הוא 0 (מקדמים בינומיים חריגים - ר' עמ' *30*).
בדומה, אם $n - 1 < 3$ הביטוי האמצעי באגף ימין מתאפס.
נקבל כך את המקרים $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 10$, שלא קשה לודא את נכונותם מתנאי השאלה, אך הם אינם מהוים בדיקה טובה לביטוי בשלמותו. מצד שני, אם נניח $n \geq 5$ ונפתח את הביטוי, לאחר פיתוח וקיבוץ איברים מתקבל הביטוי הפשוט: $a_n = 16n - 32$ $(n \geq 5)$
(תרגיל מומלץ - לחשב זאת). האם מישהו רואה דרך קצרה להגיע ישר לתוצאה זו ?

תשובה 4

א. המקדם של x^{2m} בפיתוח $(1+x)^n$ הוא, לפי נוסחת הבינום, $c_{2m} = \binom{n}{2m}$.

את אגף שמאל של הזהות הנתונה בשאלה נראה כמכפלה של שני גורמים: $(1-x^2)^n \frac{1}{(1-x)^n}$

יהי b_i המקדם של x^i בפיתוח $\frac{1}{(1-x)^n}$. מנוסחה (*iii*) בממ"ן, $b_i = D(n,i)$.

נפתח גם: $(1-x^2)^n = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n}{i} (x^2)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n}{i} x^{2i}$.

נסמן ב- a_i את המקדם של x^i בביטוי זה.

מכיוון שמופיעות רק חזקות זוגיות של x, כל המקדמים בעלי אינדקס אי-זוגי מתאפסים:

$a_{2i+1} = 0$ לכל i טבעי. אנו רואים גם ש- $a_{2i} = (-1)^i \binom{n}{i}$.

שימו לב שזהו a_{2i} ולא a_i, למרות שבמקדם הבינומי ובחזקה של (-1) מופיע i ולא $2i$.
כעת ניעזר בנוסחה (*ii*) שבסוף הממ"ן למציאת המקדמים בכפל פונקציות יוצרות:

$$c_{2m} = \sum_{i=0}^{2m} a_i b_{2m-i}$$

נזכור שעבור ה- a-ים יש לנו רק מקדמים a_{2i} ולא a_{2i+1}, ונוכל לרשום עבור המקרה שלנו:

$$c_{2m} = \sum_{i=0}^{m} a_{2i} b_{2m-2i}$$

שימו לב לשינוי גבול הסכימה כאן והבינו מדוע הוא נדרש.
נציב בשוויון זה את הביטויים שקיבלנו עבור המקדמים:

$$\binom{n}{2m} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n}{i} D(n, 2m-2i)$$

זו הזהות המבוקשת (נקרא למשתנה הסכימה k במקום i כדי להתאים לנדרש בשאלה).

בדיקה: כאשר $n=5, m=2$, אגף שמאל הוא $\binom{5}{4}=5$, ואגף ימין הוא

$$\binom{5}{0} D(5,4) - \binom{5}{1} D(5,2) + \binom{5}{2} D(5,0) = \binom{8}{4} - 5\binom{6}{2} + 10\binom{4}{0} = 70 - 75 + 10 = 5$$

שימו לב ש- $D(j,0) = \binom{j+0-1}{j-1} = \binom{j-1}{j-1} = 1$.

את הבדיקה השניה אנא השלימו בעצמכם.

איתי הראבן