# נושאים במתמטיקה לתלמידי מח"ר - 10444

סמסטר 2009ב

## פתרון ממ"ן 17

**בפתרון זה מומלץ לקרוא את כל הפתרון גם אם אתה חושב שאתה יודע לענות על השאלה.**

**תשובה 1**

א. כאשר מדובר בקבוצה בת שלושה וקטורים, כדי לבדוק אם הקבוצה פורשת את $\mathbf{R}^3$ נבדוק אם היא בת"ל (בלתי תלויה לינארית), שכן אז נוכל להסתמך על מסקנה 8.29

לפיה **קבוצה של 3 וקטורים ב- $\mathbf{R}^3$ היא קבוצה בת"ל אם ורק אם היא פורשת את $\mathbf{R}^3$.**

לפי ההגדרה (הגדרה 8.19 ), הקבוצה $\{\underline{u},\underline{v},\underline{w}\}$ היא קבוצה בת"ל אם ורק אם מתקיים:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0 \quad \Leftarrow \quad \alpha\underline{u} + \beta\underline{v} + \gamma\underline{w} = \underline{0} \qquad (1)$$

כלומר, אנו בודקים את מערכת המשוואות:

$$\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} + \gamma\underline{w} = \underline{0} \qquad (2)$$

אם יש למערכת זו **רק פתרון טריביאלי**, אז הקבוצה הנתונה בת"ל, ואם יש למערכת זו **גם פתרון לא טריביאלי**, אז הקבוצה הנתונה ת"ל.

או, במילים אחרות, <u>הקבוצה הנתונה</u> $\{\underline{u},\underline{v},\underline{w}\}$ <u>היא בת"ל **אם ורק אם** למערכת הלינארית ההומוגנית (2) אין פתרון לא טריוויאלי</u>.

1) נתבונן במערכת המשוואות (2) המתאימה לקבוצה בת שלושת הוקטורים $\{\langle 5,3,4\rangle,\langle 1,2,5\rangle,\langle 1,1,2\rangle\}$. זוהי המערכת:

$$\alpha\langle 5,3,4\rangle + \beta\langle 1,2,5\rangle + \gamma\langle 1,1,2\rangle = \langle 0,0,0\rangle$$

או

$$\alpha\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

או

$$\begin{cases} 5\alpha + 1\beta + 1\gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + 1\gamma = 0 \\ 4\alpha + 5\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

הקבוצה הנתונה היא בת"ל אם ורק אם למערכת הלינארית ההומוגנית (3) אין פתרון לא טריוויאלי.

נסתכל במטריצת המקדמים החופשיים של מערכת הומוגנית זו:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

שימו לב לכך שבמטריצה זו, למעשה, רשמנו אנכית את שלושת הוקטורים הנתונים זה ליד זה – **כשהסדר אינו חשוב**.

למערכת ההומוגנית של 3 משוואות ב-3 נעלמים **אין** פתרון לא טריוויאלי אם ורק אם המטריצה המצומצמת שקולת שורות למטריצת היחידה $I$.
נדרג, אם כן, את המטריצה המצומצמת (תחילה נחליף את סדר הוקטורים כדי להקל על הדרוג):

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המטריצה שקיבלנו **אינה** שקולת שורות ל- $I$ ולכן למערכת הנידונה **יש** פתרון לא טריוויאלי ולכן הקבוצה הנתונה תלויה לינארית.
מכאן נקבל, לפי מסקנה 8.29 (3) ו-(4), שהקבוצה הנתונה (קבוצה של 3 וקטורים ב- $\mathbf{R}^3$) **אינה** פורשת את $\mathbf{R}^3$.

2) בקבוצה הנתונה יש 4 וקטורים ולכן, לפי המסקנה ממשפט 8.22, שרשומה בעמ' 107 בשורה השמינית (או לפי שאלה 8.30א עבור $V = \mathbf{R}^n$), הקבוצה תלויה לינארית (שהרי $k = 4 > n = 3$), אך ייתכן שהקבוצה פורשת את $\mathbf{R}^3$.

קבוצה נתונה של וקטורים ב- $\mathbf{R}^3$ פורשת את $\mathbf{R}^3$ אם ורק אם **כל** וקטור ב- $\mathbf{R}^3$ ניתן להצגה כצירוף לינארי של אברי הקבוצה.

כלומר, הקבוצה הנתונה פורשת את $\mathbf{R}^3$ **אם ורק אם לכל** וקטור $\underline{v} = \langle a,b,c \rangle \in \mathbf{R}^3$ קיימים $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ו- $\lambda_4$ ממשיים כך ש-

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \underline{a}_i \qquad (*)$$

כאשר $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ הם ארבעת הוקטורים בקבוצה הנתונה.

נבדוק זאת: ב- (*) רשום למעשה:

$$\begin{aligned} \langle a,b,c \rangle &= \lambda_1 \langle 2,-1,1 \rangle + \lambda_2 \langle 1,2,3 \rangle + \lambda_3 \langle 1,1,1 \rangle + \lambda_4 \langle 0,0,1 \rangle \qquad (**) \\ &= \langle 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ , -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \, , \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \rangle \end{aligned}$$

השקול למערכת:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = b \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = c \end{cases}$$

נבדוק אם לכל וקטור $\langle a,b,c\rangle \in \mathbf{R}^3$ יש פתרון למערכת זו.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & a \\ -1 & 2 & 1 & 0 & b \\ 1 & 3 & 1 & 1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_1]{R_2 \to R_2 + \frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 2\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} & 0 & b + \frac{1}{2}a \\ 0 & 2\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & c - \frac{1}{2}a \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{R_2 \to 2R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 2b + a \\ 0 & 0 & -1 & 1 & c - a - b \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to -R_3]{R_1 \to \frac{1}{2}R_1,\ R_2 \to \frac{1}{5}R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2b + a}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a + b - c \end{pmatrix}$$

ומכאן קל לראות שלכל ערך ממשי של $a$, $b$ ו-$c$ יש למערכת הנתונה פתרון ממשי (נמק זאת באופן תיאורטי, או מצא פתרון).

לכן כל וקטור ב- $\mathbf{R}^3$ ניתן להצגה כקומבינציה לינארית של אברי הקבוצה הנתונה, ולפי ההגדרה שהבאנו קודם, פירושו שהקבוצה הנתונה פורשת את $\mathbf{R}^3$.

3) בקבוצה הנתונה יש שני וקטורים בלבד ולכן מכיוון שלבסיס של $\mathbf{R}^3$ יש בדיוק 3 וקטורים (לפי מסקנה 8.29(2) ), הקבוצה אינה בסיס, ולכן לא פורשת את $\mathbf{R}^3$.

4) הקבי' בת שלושת הוקטורים היא $\{\langle 1,2,2\rangle, \langle 3,-1,-1\rangle, \langle 2,-5,3\rangle\}$, ולכן, כפי שהסברנו בסעיף 1) של השאלה, אנו בודקים אם היא בת"ל. והמערכת המתקבלת ב- $(2)$ היא:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

או:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - 5\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

נדרג את המטריצה המתאימה:

$$\begin{pmatrix}1&3&2\\2&-1&-5\\2&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2\\2&-1&-5\\0&0&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2\\0&-7&-9\\0&0&8\end{pmatrix}$$

המטריצה שקיבלנו שקולת שורות ל-I -נמק זאת! מכאן נובע כי למערכת (1) יש רק פתרון טריוויאלי, ולכן הקבוצה הנתונה **בת"ל** ולפיכך פורשת את $\mathbf{R}^3$ .

ב. לפי הגדרת בסיס של $\mathbf{R}^3$, על מנת שקבוצה תהיה בסיס היא צריכה לפרוש את $\mathbf{R}^3$ וגם להיות קבוצה בת"ל. בסעיף א' מצאנו שהקבוצה היחידה, ברשימת שלוש הקבוצות הראשונות, שפורשת את $\mathbf{R}^3$ היא הקבוצה בסעיף 2). אך קבוצה זו **אינה** בסיס של $\mathbf{R}^3$ (לפי מקנה 8.29(2)). לכן כל אחת משלוש הקבוצות הראשונות אינה בסיס של $\mathbf{R}^3$ .

הקבוצה בסעיף 4) בת"ל ופורשת את $\mathbf{R}^3$ , ולכן בסיס של $\mathbf{R}^3$ .

**תשובה 2**

עבור כל אחד מהוקטורים הנתונים בשני הסעיפים הראשונים של השאלה נרצה לבדוק **קיום** קבועים ממשיים $\lambda_3,\lambda_2,\lambda_1$ כך שאם נסמן את הוקטור ב- $\underline{v}=\langle a,b,c,d\rangle$ , אז

$$\underline{v}=\lambda_1\underline{u}_1+\lambda_2\underline{u}_2+\lambda_3\underline{u}_3 \qquad (1)$$

או:

$$\langle a,b,c,d\rangle=\lambda_1\langle 1,-1,1,-1\rangle+\lambda_2\langle 1,2,-2,1\rangle+\lambda_3\langle 1,3,-3,-5\rangle$$

ושוויון זה שקול למערכת המשוואות הבאה:

$$(2)\qquad \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a\\-\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=b\\\lambda_1-2\lambda_2-3\lambda_3=c\\-\lambda_1+\lambda_2-5\lambda_3=d\end{cases}$$

א. עבור הווקטור $\langle 1,-8,8,1\rangle$ המערכת (2) היא

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1\\-\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=-8\\\lambda_1-2\lambda_2-3\lambda_3=8\\-\lambda_1+\lambda_2-5\lambda_3=1\end{cases}$$

נעבור למטריצת המקדמים של המערכת:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -8 \\ 1 & -2 & -3 & 8 \\ -1 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_3 \to R_3 + R_2 \\ \to \\ R_4 \to \frac{1}{2} R_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

זוהי מערכת אי-הומוגנית ב-3 נעלמים שמטריצת המקדמים שלה שקולת שורות למטריצת היחידה, ולכן למערכת יש פתרון והווקטור $\langle 1,-8,8,1 \rangle$ הוא צירוף לינארי של $\underline{u}_1$ , $\underline{u}_2$ ו- $\underline{u}_3$ .

למעשה קיבלנו גם שמתקיים $\langle 1,-8,8,1 \rangle = 3\underline{u}_1 - 1\underline{u}_2 - 1\underline{u}_3$ .

עבור הווקטור $\langle 2,2,-1,1 \rangle$ המערכת (2) היא

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 2 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = -1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - 5\lambda_3 = 1 \end{cases}$$

נעבור למטריצת המקדמים של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_3 \to R_3 + R_2 \\ \to \\ R_4 \to \frac{1}{2} R_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1.5 \end{array}\right)$$

במהלך ביצוע פעולות אלמנטריות על שורות המטריצה הגענו לשורה מהצורה $\langle 0,0,0,1\rangle$ ,

ולכן למערכת אין פתרון והווקטור $\langle 2,2,-1,1\rangle$ אינו צירוף לינארי של $\underline{u}_1$ , $\underline{u}_2$ ו- $\underline{u}_3$.

ב. נחפש את התנאים שצריכים לקיים $\alpha$ ו- $\beta$ כך שהווקטור $\underline{w}=\langle\alpha,1,\beta,5\rangle$ יהיה צירוף לינארי של $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ .

עבור וקטור זה המערכת (2) היא

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\alpha \\ -\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=1 \\ \lambda_1-2\lambda_2-3\lambda_3=\beta \\ -\lambda_1+\lambda_2-5\lambda_3=5 \end{cases}$$

נעבור למטריצת המקדמים של המערכת :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & \beta \\ -1 & 1 & -5 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 3 & 4 & 1+\alpha \\ 0 & -3 & -4 & \beta-\alpha \\ 0 & 2 & -4 & \alpha+5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to\frac{1}{2}R_4]{R_3\to R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 3 & 4 & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \beta+1 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2}\alpha+\frac{5}{2} \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 3 & 4 & 1+\alpha \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2}\alpha+\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \beta+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2}\alpha+\frac{5}{2} \\ 0 & 3 & 4 & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \beta+1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2}\alpha+\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 10 & -\frac{1}{2}\alpha-\frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \beta+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2}\alpha+\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{20}\alpha-\frac{13}{20} \\ 0 & 0 & 0 & \beta+1 \end{array}\right) \qquad (3)$$

ולמערכת זו יש פתרון (יחיד) אם ורק אם $\beta+1=0$ , כלומר, $\beta=-1$ .

לכן הווקטור $\underline{w}=\langle\alpha,1,\beta,5\rangle$ הוא צירוף לינארי של $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ כאשר $\beta=-1$ ו- $\alpha$ כלשהו.

ג. עבור $\alpha=7$ , הווקטור $\underline{w}=\langle 7,1,\beta,5\rangle$ הוא צירוף לינארי של $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ אם מתקיים $\beta=-1$ , והווקטור $\underline{w}=\langle 7,1,-1,5\rangle$ הוא צירוף לינארי של $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$. כדי למצוא את מקדמי הצירוף נחזור למטריצת המקדמים שקיבלנו ב-(3), נציב בה $\alpha=7$ ו- $\beta=-1$ ,

ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & -2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 8 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

לכן מקדמי הצירוף הם: $\lambda_1 = 4 \;\; , \lambda_2 = 4 \; , \lambda_3 = -1$

ו- $\langle 7,1,-1,5 \rangle = 4\underline{u}_1 + 4\underline{u}_2 - 1\underline{u}_3$

**תשובה 3**

א. נסמן $A = \{\underline{u},\underline{v},\underline{w}\}$. נתון שזהו בסיס של $\mathbf{R}^3$, ולכן זוהי קבוצה בלתי תלויה לינארית של וקטורים ב- $\mathbf{R}^3$.

נסמן $B = \{3\underline{u} - \underline{v} + \underline{w} \, , - \underline{u} + 2\underline{v} + \underline{w} \, , \underline{u} + 3\underline{w}\}$, ונבדוק אם הקבוצה $B$ היא בת"ל.

$B$ היא קבוצה בת"ל אם ורק אם למערכת

$$\lambda_1(3\underline{u} - \underline{v} + \underline{w}) + \lambda_2(-\underline{u} + 2\underline{v} + \underline{w}) + \lambda_3(\underline{u} + 3\underline{w}) = \underline{0}$$

**יש פתרון טריוויאלי בלבד**.

כלומר, $B$ היא קבוצה בת"ל אם ורק אם מתקיים:

$$\lambda_1(3\underline{u} - \underline{v} + \underline{w}) + \lambda_2(-\underline{u} + 2\underline{v} + \underline{w}) + \lambda_3(\underline{u} + 3\underline{w}) = \underline{0} \quad \Leftarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \qquad (1)$$

נבדוק את המערכת.

מערכת זו שקולה ל- $(3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)\underline{u} + (-\lambda_1 + 2\lambda_2)\underline{v} + (\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3)\underline{w} = \underline{0}$.

**מכיוון שהקבוצה $A$ בת"ל**, נובע, מהשוויון האחרון, כי:

$$\begin{cases} 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

נפתור מערכת הומוגנית זו:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

קיבלנו שהמערכת שלנו, מערכת לינארית בת 3 נעלמים ו-3 משוואות, כל המשתנים שלה קשורים ואין לה משתנים חופשיים. ולכן למערכת פתרון יחיד והוא הפתרון הטריביאלי.

ומכאן מתקבל: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, **ולכן $B$ בת"ל**.

ב. שוב, $A=\{\underline{u},\underline{v},\underline{w}\}$. ונתון שזהו בסיס של $\mathbf{R}^3$, ולכן זוהי קבוצה בלתי תלויה לינארית של וקטורים ב- $\mathbf{R}^3$.

נסמן $C=\{3\underline{u}-\underline{v}+\underline{w}\,,-\underline{u}+2\underline{v}+3\underline{w}\,,\underline{u}+\underline{w}\}$,

כדי לבדוק אם $C$ בסיס, נבדוק אם זוהי קבוצה בת"ל.

$C$ היא קבוצה בת"ל אם ורק אם למערכת

$$\lambda_1(3\underline{u}-\underline{v}+\underline{w})+\lambda_2(-\underline{u}+2\underline{v}+3\underline{w})+\lambda_3(\underline{u}+\underline{w})=\underline{0}$$

**יש פתרון טריוויאלי בלבד**.

כלומר, $C$ היא קבוצה בת"ל אם ורק אם מתקיים:

$$\lambda_1(3\underline{u}-\underline{v}+\underline{w})+\lambda_2(-\underline{u}+2\underline{v}+3\underline{w})+\lambda_3(\underline{u}+\underline{w})=\underline{0}\quad\Leftarrow\quad\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0\qquad(1)$$

נבדוק את המערכת.

מערכת זו שקולה ל- $(3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)\underline{u}+(-\lambda_1+2\lambda_2)\underline{v}+(\lambda_1+3\lambda_2+1\lambda_3)\underline{w}=\underline{0}$.

**מכיוון שהקבוצה $A$ בת"ל**, נובע, מהשוויון האחרון, כי:

$$\begin{cases}3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\-\lambda_1+2\lambda_2=0\\\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$$

נפתור מערכת הומוגנית זו:

$$\begin{pmatrix}3&-1&1\\-1&2&0\\1&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&1\\-1&2&0\\3&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3\\0&5&1\\0&-10&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3\\0&5&1\\0&5&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&3\\0&5&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

קיבלנו שלמערכת יש משתנה אחד חופשי, ולכן יש לה אינסוף פתרונות. **ולכן $C$ ת"ל**, ולפיכך אינה בסיס של $\mathbf{R}^3$.

**תשובה 4**

א. לפי ההגדרה, $V=\{\underline{u},\underline{v},\underline{w}\}$ היא קבוצה בת"ל אם ורק אם מתקיים:

$$\alpha\underline{u}+\beta\underline{v}+\gamma\underline{w}=\underline{0} \quad \Leftarrow \quad \alpha=\beta=\gamma=0 \qquad (1)$$

לכן ערכי $\lambda$ שעבורם $V$ בת"ל הם כל ערכי $\lambda$ שעבורם מתקיים (1), נמצא אותם.

אם $\alpha\underline{u}+\beta\underline{v}+\gamma\underline{w}=\underline{0}$ הרי שלפי הגדרת הוקטורים ב- $V$ כצירופים לינאריים של אברי $A$ מתקיים:

$$\alpha(\underline{a}+\lambda\underline{b})+\beta(\underline{b}+\lambda\underline{c})+\gamma(\underline{c}+\lambda\underline{a})=\underline{0}$$

או:

$$(\alpha+\lambda\gamma)\underline{a}+(\beta+\lambda\alpha)\underline{b}+(\gamma+\lambda\beta)\underline{c}=\underline{0}$$

**נתון ש- $A$ בת"ל**, לכן משוויון זה נובע ש-

$$\alpha+\lambda\gamma=\beta+\lambda\alpha=\gamma+\lambda\beta=0$$

שוויון זה מייצג, למעשה, מערכת משוואות הומוגנית שהנעלמים בה הם $\alpha,\beta,\gamma$ :

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha \quad\quad + \lambda\gamma = 0 \\ \lambda\alpha + \beta \quad\quad = 0 \\ \quad\quad \lambda\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

שמטריצת המקדמים המצומצמת שלה היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-\lambda R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda^2 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-\lambda R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1+\lambda^3 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שלמערכת ההומוגנית יש פתרון יחיד אם ורק אם $1+\lambda^3\neq 0$ או $\lambda^3\neq -1$ כלומר, $\lambda\neq -1$ .

לכן, לכל $\lambda\neq -1$ למערכת (2) יש פתרון יחיד – וזהו הפתרון הטריוויאלי, כלומר $\alpha=\beta=\gamma=0$ .

קיבלנו, לפי (1), כי לכל $\lambda\neq -1$ הקבוצה $V$ בת"ל.

ב. מ-(1) בסעיף הקודם נובע ש- $V$ תלויה לינארית אם ורק אם $\lambda=-1$ ואז,

$$(3)\quad \begin{cases} \underline{u}=\underline{a}-\underline{b} \\ \underline{v}=\underline{b}-\underline{c} \\ \underline{w}=\underline{c}-\underline{a} \end{cases}$$

אנו מחפשים קבועים ממשיים $\beta,\alpha$ כך ש-

$$\begin{aligned} \underline{w} &= \alpha\underline{u} + \beta\underline{v} \\ &= \alpha(\underline{a} - \underline{b}) + \beta(\underline{b} - \underline{c}) \\ &= \alpha\underline{a} + (\beta - \alpha)\underline{b} - \beta\underline{c} \end{aligned}$$

לפי (3)

מצד שני, לפי (3): $\underline{w} = \underline{c} - \underline{a}$

לכן, נשווה מקדמים ונקבל:

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta - \alpha = 0 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

מערכת משוואות שפתרונה הוא $\alpha = \beta = -1$

לכן $\underline{w} = -\underline{u} - \underline{v}$

**תשובה 5**

א. נפתור את המערכת הנתונה. מטריצת המקדמים המצומצמת היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{R_2 \to -R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to -R_2]{R_1 \to R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ופתרון כללי של המערכת הוא $\langle -2s - t, -s, s, t \rangle$ עבור $s, t \in \mathbf{R}$ (וודאו זאת!).

ב. אם נסמן פתרון כללי של המערכת ב- $\underline{p}$ הרי ש-

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} -2s - t \\ -s \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t = s\underline{u}_2 + t\underline{u}_1$$

מצאנו, אם כן, שכל פתרון של המערכת ניתן להצגה כצירוף של $\underline{u}_1$ ו- $\underline{u}_2$ .

ג. יהיו

$\underline{u}_1 = \langle -1,0,0,1 \rangle$
$\underline{u}_2 = \langle -2,-1,1,0 \rangle$
$\underline{u}_3 = \langle 0,\alpha,1,1 \rangle$
$\underline{u}_4 = \langle 0,1,1,\beta \rangle$

נחפש תנאי על $\beta,\alpha$ כך שהקבוצה $\{\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3,\underline{u}_4\}$ היא בסיס של $\mathbf{R}^4$.

כדי שהקבוצה $\{\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3,\underline{u}_4\}$ תהיה בסיס של $\mathbf{R}^4$ יש לדרוש שהיא תהיה בת״ל, שהרי לפי מסקנה 8.29(4), קבוצה בת 4 וקטורים ב- $\mathbf{R}^4$ היא בסיס של $\mathbf{R}^4$ אם ורק אם היא בת״ל.

נוכיח שהקבוצה $\{\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3,\underline{u}_4\}$ בת״ל:

אנו עושים זאת כפי שעשינו בתשובה לשאלה 1!
לא אפרט שוב הכל, אך כשאתם פותרים שאלה כזאת בממן או בבחינה, עליכם לפרט את כל השיקולים!

אנו בודקים את מערכת המשוואות: $a\underline{u}_1 + b\underline{u}_1 + c\underline{u}_3 + d\underline{u}_4 = \underline{0}$ (*)

אם יש למערכת זו **רק פתרון טריביאלי**, אז הקבוצה הנתונה בת״ל, ואם יש למערכת זו **גם פתרון לא טריביאלי**, אז הקבוצה הנתונה ת״ל.

נתבונן במערכת המשוואות (*) המתאימה לקבוצה בת ארבעת הוקטורים $\{\langle -1,0,0,1 \rangle, \langle -2,-1,1,0 \rangle, \langle 0,\alpha,1,1 \rangle, \langle 0,1,1,\beta \rangle\}$. זוהי המערכת:

$$a\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{cases} -a-2b = 0 \\ -b+\alpha c + d = 0 \\ b + c + d = 0 \\ a + c + \beta d = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

הקבוצה הנתונה היא בת״ל אם ורק אם למערכת הלינארית ההומוגנית (**) אין פתרון לא טריוויאלי.

נסתכל במטריצת המקדמים החופשיים של מערכת הומוגנית זו:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

למערכת ההומוגנית של 4 משוואות ב-4 נעלמים **אין** פתרון לא טריוויאלי אם ורק אם המטריצה המצומצמת שקולת שורות למטריצת היחידה $I$.

נדרג, אם כן, את המטריצה המצומצמת :

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_1]{R_1 \to -R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 \\ 0 & -2 & 1 & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + 2R_2]{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \beta+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \beta+2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - \frac{\alpha+1}{3} R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \beta+2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \dfrac{\alpha+1}{3}(\beta+2) \end{pmatrix}$$

המטריצה שקיבלנו שקולת שורות למטריצת היחידה, $I$, אם ורק אם

$2 - \frac{\alpha+1}{3}(\beta+2) \neq 0$ , ואז למערכת הנידונה **אין** פתרון לא טריוויאלי .

ולכן הקבוצה הנתונה בלתי תלויה לינארית. אם ורק אם $\frac{6-(\alpha+1)(\beta+2)}{3} \neq 0$

או $6-(\alpha+1)(\beta+2) \neq 0$.

מכאן נקבל, לפי מסקנה 8.29(4), שהקבוצה הנתונה $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4\}$ (קבוצה של 4 וקטורים ב- $\mathbf{R}^4$) בסיס של $\mathbf{R}^4$ אם"ם $(\alpha+1)(\beta+2) \neq 6$.

**תשובה 6**

א. הטענה אינה נכונה. נוכיח זאת.

נבחר כדוגמא נגדית: $A=\{\langle 1,0\rangle ,\langle 2,0\rangle,\langle 0,0\rangle\}$ . $k=3$ , $n=2$ .

מתקיים $k>n$, אך $A$ **אינה פורשת** את $\mathbf{R}^2$ , שהרי הווקטור $\langle 0,1\rangle$, למשל, אינו ניתן לתיאור כצירוף לינארי של אברי $A$ . נמק זאת.

ב. הטענה אינה נכונה. נוכיח זאת.

נבחר כדוגמא נגדית: $A=\{\langle 1,0\rangle ,\langle 2,0\rangle,\langle 0,1\rangle\}$ . $k=3$ , $n=2$ .

מתקיים $k>n$, לכן $A$ תלויה לינארית. אך הווקטור $\underline{a}_3=\langle 0,1\rangle$ אינו ניתן לתיאור כצירוף לינארי של שאר וקטורי $A$ . נמק זאת (הנימוק כמו בסעיף א' של השאלה).

ג. הטענה אינה נכונה. נוכיח זאת.

נבחר כדוגמא נגדית: $A=\{\langle 1,0\rangle ,\langle 2,0\rangle,\langle 0,0\rangle\}$ . $k=3$ , $n=2$ .

מתקיים $k>n$, לכן $A$ תלויה לינארית.

אם נבחר $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ נקבל ש-

$$\lambda_1\langle 1,0\rangle+\lambda_2\langle 2,0\rangle+\lambda_3\langle 0,0\rangle=1\langle 1,0\rangle+1\langle 2,0\rangle+1\langle 0,0\rangle=\langle 3,0\rangle\neq\langle 0,0\rangle=\underline{0}$$