פתרונות לממ"ן 13 - 2019א - 20425

1. לכל $i=1,\ldots,10$, הערכים האפשריים של X_i הם $0,1,\ldots,10$ וכל אחד מהם מתקבל בהסתברות $\frac{1}{11}$.

א. $$P\left\{2 \le \min_{i=1,\ldots,10} X_i \le 4\right\} = P\left\{\min_{i=1,\ldots,10} X_i > 1\right\} - P\left\{\min_{i=1,\ldots,10} X_i > 4\right\}$$

$$= P\{X_1 > 1, X_2 > 1, \ldots, X_{10} > 1\} - P\{X_1 > 4, X_2 > 4, \ldots, X_{10} > 4\}$$

$$= \prod_{i=1}^{10} P\{X_i > 1\} - \prod_{i=1}^{10} P\{X_i > 4\} = \left(\tfrac{9}{11}\right)^{10} - \left(\tfrac{6}{11}\right)^{10} = 0.1321$$

ב. $$P\left\{X_1 = 7, \max_{i=1,\ldots,10} X_i = 7\right\} = P\{X_1 = 7, X_2 \le 7, \ldots, X_{10} \le 7\} = \tfrac{1}{11} \cdot \left(\tfrac{8}{11}\right)^9 = 0.005175$$

ג. $$P\left\{X_1 = 3, \max_{i=1,\ldots,10} X_i = 8\right\} = P\left\{X_1 = 3, \max_{i=1,\ldots,10} X_i \le 8\right\} - P\left\{X_1 = 3, \max_{i=1,\ldots,10} X_i \le 7\right\}$$

$$= P\{X_1 = 3, X_2 \le 8, \ldots, X_{10} \le 8\} - P\{X_1 = 3, X_2 \le 7, \ldots, X_{10} \le 7\}$$

$$= \tfrac{1}{11} \cdot \left(\tfrac{9}{11}\right)^9 - \tfrac{1}{11} \cdot \left(\tfrac{8}{11}\right)^9 = 0.009762$$

ד. סכום עשרת ה- X_i-ים שווה ל-97 רק במקרים הבאים :

1) אם 7 מהם שווים ל-10 ושלושת האחרים שווים ל-9 ($\binom{10}{7} = 120$ אפשרויות) ;

2) אם 8 מהם שווים ל-10, אחד שווה ל-9 והאחרון שווה ל-8 ($10 \cdot 9 = 90$ אפשרויות) ;

3) אם 9 מהם שווים ל-10 והעשירי שווה ל-7 (10 אפשרויות).

לכן, ההסתברות המבוקשת היא : $$P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i = 97\right\} = (120 + 90 + 10) \cdot \left(\tfrac{1}{11}\right)^{10} = 8.48 \cdot 10^{-9}$$

2. א. המשתנים המקריים תלויים, הואיל ולא מתקיים תנאי אי-התלות. למשל :

$$P\{X_2 = 6, X_5 = 8\} = 0 \quad \neq \quad P\{X_2 = 6\}P\{X_5 = 8\} = \binom{5}{1} \cdot 0.4^4 0.6^2 \cdot \binom{7}{4} \cdot 0.4^3 0.6^5 > 0$$

ב. לכל $i = 2,3,\ldots$ ו- $j = 8,9,\ldots$, המקיימים $j - i \ge 6$, כלומר, לכל $i = 2,3,\ldots$ ו- $j = i+6, i+7,\ldots$,

מתקיים : $$P\{X_2 = i, X_8 = j\} = \binom{i-1}{1} \cdot 0.4^{i-2} 0.6^2 \cdot \binom{j-1-i}{5} \cdot 0.4^{j-i-6} 0.6^6 = (i-1) \cdot \binom{j-1-i}{5} \cdot 0.4^{j-8} 0.6^8$$

בכל מקרה אחר, ההסתברות המשותפת שווה ל-0.

הסבר: המאורע $\{X_2 = i, X_8 = j\}$ מתקיים אם ב- $(i-1)$ ההטלות הראשונות התקבל בדיוק H אחד, בהטלה ה-i-ית התקבל ה-H השני, מהטלה $(i+1)$ עד להטלה $(j-1)$ התקבלו בדיוק חמישה H-ים, ובהטלה j התקבל ה-H השמיני.

ג. לכל $j = 8,9,\ldots$, מתקיים :

$$P\{X_2 = i \mid X_8 = j\} = \frac{P\{X_2 = i, X_8 = j\}}{P\{X_8 = j\}} = \frac{(i-1) \cdot \binom{j-1-i}{5} \cdot 0.4^{j-8} 0.6^8}{\binom{j-1}{7} \cdot 0.4^{j-8} 0.6^8} = \frac{(i-1) \cdot \binom{j-1-i}{5}}{\binom{j-1}{7}} \quad , \quad i = 2,\ldots, j-6$$

בכל מקרה אחר, ההסתברות המותנית שווה ל-0.

3. א. נתחיל בחישוב ההסתברויות שבהטלת 3 קוביות לא מתקבל אף 4, שמתקבל בדיוק 4 אחד, שמתקבלים בדיוק שני 4 ושבכל הקוביות מתקבל 4. ההסתברויות הן :

$P\{\text{אין אף } 4\} = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$ $\qquad$ $P\{\text{בדיוק } 4 \text{ אחד}\} = \frac{3\cdot 5^2}{6^3} = \frac{75}{216}$

$P\{\text{בדיוק שני } 4\} = \frac{3\cdot 5}{6^3} = \frac{15}{216}$ $\qquad$ $P\{\text{הכל } 4\} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$

ולכן : $$P\{X=16, Y=11, Z=2\} = \frac{30!}{16!\cdot 11!\cdot 2!\cdot 1!}\cdot\left(\tfrac{125}{216}\right)^{16}\left(\tfrac{75}{216}\right)^{11}\left(\tfrac{15}{216}\right)^{2}\left(\tfrac{1}{216}\right)^{1} = 0.004962$$

ב. נשתמש בהסתברויות שחושבו בסעיף א ונקבל שלכל $i, j = 0,1,2,\ldots,30$, כך ש- $i+j \le 30$ מתקיים :

$$P\{X=i, Y=j\} = \frac{30!}{i!\cdot j!\cdot(30-i-j)!}\cdot\left(\tfrac{125}{216}\right)^{i}\left(\tfrac{75}{216}\right)^{j}\left(\tfrac{16}{216}\right)^{30-i-j}$$

ג. הואיל ולמשתנים המקריים X , Y ו- Z יש התפלגות משותפת מולטינומית, ההתפלגות המותנית של Y בהינתן $Z=3$ היא בינומית עם הפרמטרים $30-3=27$ ו- $p = \frac{75}{216}\big/(1-\frac{15}{216}) = \frac{75}{201} = \frac{25}{67}$.

לפיכך : $$P\{Y=j \mid Z=3\} = \binom{27}{j}\cdot\left(\tfrac{25}{67}\right)^{j}\left(\tfrac{42}{67}\right)^{27-j} \qquad , \qquad j=0,1,\ldots,27$$

ג. נסמן ב-W את מספר ההטלות שבהן התוצאה 4 מתקבלת לכל היותר פעמיים. למשתנה המקרי W יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 30 ו- $1-\frac{1}{216}$. לכן : $\mathrm{Var}(W) = 30\cdot\frac{215}{216}\cdot\frac{1}{216} = 0.13825$

4. נסמן ב- X_i את מספר ההודעות שמקבל פקיד i במהלך יום אחד, לכל $i=1,2,3,4,5$.

לפי נתוני הבעיה, ה-X_i-ים בלתי-תלויים ולכל אחד מהם יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 10.

א. הואיל וה-X_i-ים בלתי-תלויים, ההתפלגות של הסכום $\sum_{i=1}^{5} X_i$ היא פואסונית עם הפרמטר $5\cdot 10 = 50$.

(ראה דוגמה 3א במדריך הלמידה, עמוד 142).

לפיכך : $$P\left\{\sum_{i=1}^{5} X_i = 45\right\} = e^{-50}\frac{50^{45}}{45!} = 0.0458$$

ב1. מבלי להגביל את כלליות הפתרון, נניח כי X_1 הוא מספר ההודעות שהפקיד רמי מקבל במשך יום אחד. הואיל וה-X_i-ים בלתי-תלויים, ההתפלגות המותנית של X_1 בהינתן שסכום ה-X_i-ים שווה ל-45 היא בינומית עם הפרמטרים $n=45$ ו- $p=\frac{10}{50}=0.2$. (ראה דוגמה 4ב במדריך הלמידה, עמוד 145).

לכן : $$P\left\{X_1 = 9 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{5} X_i = 45\right\} = \binom{45}{9}\cdot 0.2^{9}\cdot 0.8^{36} = 0.14724$$

ב2. כעת, ההתפלגות המשותפת המותנית של ה-X_i-ים בהינתן שסכומם שווה ל-45 היא מולטינומית עם הפרמטרים $n=45$ ו- $\underset{\sim}{p} = (\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5})$. (זוהי הכללה של דוגמה 4ב ממדריך הלמידה, עמוד 145).

לפיכך : $$P\left\{X_1 = 9,\ldots,X_5 = 9 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{5} X_i = 45\right\} = \frac{45!}{(9!)^5}\cdot 0.2^{45} = 0.000669$$

ג. מספר ההודעות שמגיעות למשרד במשך יום אחד הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 50. עתה, היות שכל הודעה מגיעה עם בקשה-לאישור קריאה בהסתברות 0.1, מספר ההודעות שמגיעות למשרד

עם בקשה כזאת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $50\cdot 0.1 = 5$. (ראה דוגמה 2ב במדריך הלמידה, עמוד 138).

לפיכך, ההסתברות שבמשך יום תגענה בסה"כ 6 הודעות עם בקשת-קריאה היא: $e^{-5}\frac{5^6}{6!} = 0.1462$