

פתרון שאלות בממ"ן 12 סמסטר 2020

שאלה 3

- א. כדי להוכיח שהמכונה M עוצרת על כל קלט, נראה שכל שלב של המכונה M מסתיים. אין במכונה M אפשרות של חישוב אינסופי.
- בשלב 1 עוברים על המילים לפי הסדר הסטנדרטי עד שמגיעים למילה w .
 w היא מילה מעל האלפבית, ועוברים על המילים לפי סדר. לכן חייב להיות שנגיע ל- w ונמצא את המיקום שלה בסדר הסטנדרטי (נמצא את i).
בשלב 2 מריצים את E עד שהוא מדפיס את המחרוזת i .
מכיוון שהשפה $HALT-ALL_{TM}$ אינסופית (יש אינסוף מכונות שעוצרות על כל קלט שלהן), ו- E מפיק את השפה הזו, אז חייב להיות שתודפס המחרוזת i .
מחרוזת זו היא מילה ששייכת לשפה $HALT-ALL_{TM}$. היא תיאור של מכונה A שעוצרת על כל קלט שלה. לכן, בשלב 3, כאשר מריצים את A על w , בהכרח A תעצור (במצב המקבל או במצב הדוחה), ואז גם המכונה M תעצור.
- ב. מכיוון ש- M היא מכונה שעוצרת על כל קלט שלה, אז $\langle M \rangle$ שייכת לשפה $HALT-ALL_{TM}$. המונה E מפיק את השפה הזו. לכן E ידפיס את $\langle M \rangle$. לכן יש מספר j כך שהמחרוזת j -ש- E מדפיס היא $\langle M \rangle$.
- ג. כאשר נריץ את M על המילה w שהיא המילה j -לפי הסדר הסטנדרטי, נמצא בשלב 1 של M את המספר j . בשלב 2 נריץ את E עד להדפסת המחרוזת j -ש- E מדפיס. מחרוזת זו היא התיאור של המכונה M . בשלב 3 נריץ את M על w . אבל זה בדיוק מה שאנחנו עושים. כלומר, יש פה ריצה אינסופית. זו סתירה למה שהראינו ש- M עוצרת על כל קלט.

שאלה 4

- נראה שאם יש מכונה מכריעה R לשפה A_{TM} , אז אפשר לבנות מכונה מכריעה לשפה $HALT_{TM}$:
- "על קלט $\langle M, w \rangle$ כאשר M היא מכונת טיורינג ו- w מילה:
- בנה מכונה K שזוהה בכל למכונה M , פרט לכך שכל כניסה ל- q_{reject} מוחלפת בכניסה ל- q_{accept} .
 - בעזרת המכונה R קבע האם $\langle K, w \rangle$ שייכת ל- A_{TM} .
אם כן, קבל; אם לא, דחה."

שאלה 5

- א. B יכולה להיות, למשל, שפת המילים מהצורה $\langle M, w \rangle$ שבהן M היא מכונת טיורינג, **שהמצב ההתחלתי שלה הוא המצב הדוחה** q_{reject} , ו- w היא מילה מעל אלפבית הקלט של M .
- B אינסופית, משום שיש אינסוף מכונות טיורינג שבהן המצב ההתחלתי הוא המצב q_{reject} , ולכל מכונה כזו יש אינסוף מילות קלט אפשריות.

B היא שפה **כריעה**, כי מכונה יכולה לבדוק האם המצב ההתחלתי של M הוא q_{reject} , והאם w היא מילה מעל אלפבית הקלט של M .

B חלקית ל- $\overline{A_{\text{TM}}}$, משום שאם המצב ההתחלתי של M הוא q_{reject} , אז M לא מקבלת את w , ולכן $\langle M, w \rangle$ שייכת ל- $\overline{A_{\text{TM}}}$.

ב. $B - \overline{A_{\text{TM}}}$ לא מזוהה-טיורינג.

נניח בשלילה שהיא מזוהה-טיורינג. נזכור ש- B כריעה, ולכן מזוהה-טיורינג.

נקבל ש- $\overline{A_{\text{TM}}}$ היא איחוד של שתי שפות מזוהות-טיורינג, ועל כן היא עצמה מזוהה-טיורינג, בסתירה לכך שהיא לא מזוהה-טיורינג.

שאלה 6

השפה $FIVE_{\text{LBA}}$ איננה כריעה.

הוכחה: נראה רדוקציה של A_{TM} :

נניח בשלילה שיש מכונה R שמכריעה את $FIVE_{\text{LBA}}$. להלן מכונה שמכריעה את A_{TM} :

"על קלט $\langle M, w \rangle$ כאשר M היא מכונת טיורינג ו- w מילה:

1. בנה את ה- B_1 LBA הבא:

B_1 זהה ל- B של הוכחת משפט 5.10, למעט ההבדל הבא:

לפני ש- B_1 בודק אם מתקיימים שלושת התנאים שמופיעים בתחילת עמוד 224, הוא בודק האם מילת הקלט x היא אחת מהמילים #, ##, ###, ####, #####. אם כן, הוא מקבל את המילה; אחרת, הוא ממשיך לפעול בדיוק כמו B .

2. הרץ את המכונה R על הקלט $\langle B_1 \rangle$ כדי לקבוע האם $\langle B_1 \rangle$ שייכת ל- $FIVE_{\text{LBA}}$.

אם כן, קבל; אם לא, דחה."

שאלה 7

א. רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $INFINITE_{\text{TM}}$:

"על קלט $\langle M, w \rangle$ כאשר M היא מכונת טיורינג ו- w היא מחרוזת:

1. בנה את המכונה M_1 הבאה:

$M_1 = \text{"על קלט } x \text{"}$

1. הרץ את M על w וקבל (את x) אם M קיבלה את w .

2. החזר את $\langle M_1 \rangle$.

הסבר: אם $\langle M, w \rangle$ שייכת ל- A_{TM} , אז M_1 מקבלת כל קלט שלה, ולכן $\langle M_1 \rangle$ שייכת ל-

$INFINITE_{\text{TM}}$.

אם $\langle M, w \rangle$ לא שייכת ל- A_{TM} , אז M_1 לא מקבלת אף קלט שלה, ולכן $\langle M_1 \rangle$ לא שייכת ל-

$INFINITE_{\text{TM}}$.

ב. רדוקצית מיפוי של A_{TM} למשלימה של $INFINITE_{TM}$:

"על קלט $\langle M, w \rangle$ כאשר M היא מכונת טיורינג ו- w היא מחרוזת :

1. בנה את המכונה M_2 הבאה :

$M_2 = \text{"על קלט } x \text{"}$

1. הרץ את M על w | x | צעדים.

2. אם M קיבלה את w בתוך $|x|$ צעדים, דחה (את x) ; אחרת, קבל (את x). "

2. החזר את $\langle M_2 \rangle$. "

הסבר : אם $\langle M, w \rangle$ שייכת ל- A_{TM} , אז יש מספר צעדים y כך שלאחר ש- M רצה y צעדים, היא מקבלת את w . לכן על קלט x כך ש- $|x| \geq y$, M_2 תדחה, ולכן $\langle M_2 \rangle$ לא שייכת ל- $INFINITE_{TM}$.

אם $\langle M, w \rangle$ לא שייכת ל- A_{TM} , אז לכל מספר צעדים y , לאחר ש- M רצה y צעדים, היא לא מקבלת את w . לכן M_2 תקבל כל קלט x , ולכן $\langle M_2 \rangle$ שייכת ל- $INFINITE_{TM}$.

ג. $INFINITE_{TM}$ איננה מזוהה-טיורינג, כי הרדוקציה של סעיף ב היא גם רדוקציה של המשלימה

של A_{TM} ל- $INFINITE_{TM}$, והמשלימה של A_{TM} איננה מזוהה-טיורינג.

המשלימה של $INFINITE_{TM}$ איננה מזוהה-טיורינג, כי הרדוקציה של סעיף א היא גם רדוקציה

של המשלימה של A_{TM} למשלימה של $INFINITE_{TM}$, והמשלימה של A_{TM} איננה מזוהה-טיורינג.