תשובה 1

תהי U קבוצת כל הדרכים לחלק את **כל** האוכל למשפחות, ללא כל הגבלה.

לפי פתרון ממ"ן 15 שאלה 4ב, $|U| = 100{,}100$.

(i) תהי A_i $(i = 1,\ldots,4)$ קבוצת החלוקות ב- U, בהן משפחה i אינה מקבלת דבר.

$|A_i| = D(3,12)\cdot D(3,9) = \binom{14}{12}\binom{11}{9} = 91\cdot 55 = 5{,}005$. יש 4 קבוצות A_i .

(ii) $|A_i \cap A_j| = D(2,12)\cdot D(2,9) = \binom{13}{12}\binom{10}{9} = 13\cdot 10 = 130$ $(i \neq j)$. יש 6 חיתוכים כאלה.

(iii) חיתוך של 3 קבוצות A_i שונות הוא מצב יחיד, בו משפחה אחת מקבלת את כל האוכל.

יש 4 חיתוכים משולשים.

(iv) החיתוך של כל ארבעת ה- A_i הוא ריק (כי יש לחלק את האוכל).

סיכום: לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מספר החלוקות המקיימות את הדרישה הוא:

$$100{,}100 - 4\cdot 5{,}005 + 6\cdot 130 - 4\cdot 1 = 80{,}856$$

תשובה 2

תהי U קבוצת המספרים השלמים בתחום $1 \le n \le 2100$ המתחלקים ב- 4.

$|U| = 2100/4 = 525$.

תהיינה A,B,C קבוצות המספרים השייכים ל- U , **ומתחלקים** ב- 5,6,7 , בהתאמה.

כלומר A היא קבוצת אברי U המתחלקים ב- 5, וכו'.

נחשב את גדלי הקבוצות והחיתוכים שלהן.

A היא קבוצת המספרים בתחום $1 \le n \le 2100$ המתחלקים ב- 20.

לכן $|A| = 2100/20 = 105$.

B היא קבוצת המספרים בתחום $1 \le n \le 2100$ המתחלקים ב- 12 (שימו לב!).

לכן $|B| = 2100/12 = 175$.

C היא קבוצת המספרים בתחום $1 \le n \le 2100$ המתחלקים ב- 28.

לכן $|C| = 2100/28 = 75$.

בדומה נקבל:

$|A \cap B| = 2100/60 = 35$, $|A \cap C| = 2100/140 = 15$, $|B \cap C| = 2100/84 = 25$.

וכן: $|A \cap B \cap C| = 2100/420 = 5$.

אנו מעוניינים ב- $|U-(A\cup B\cup C)|$. מעקרון ההכלה וההפרדה:

$$|U-(A\cup B\cup C)|$$
$$=|U|-(|A|+|B|+|C|)\ +(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)-|A\cap B\cap C|$$

ובהצבת הגדלים שחישבנו

$$=525-(105+175+75)+(35+15+25)-5=240$$

תשובה 3

א. כדי לקבוע תמורה שיש לה בדיוק k נקודות שבת, בשלב ראשון נבחר מתוך n העצמים את k העצמים שיישארו במקומם. יש $\binom{n}{k}$ דרכים לבחור את נקודות השבת. כעת, שאר $n-k$ העצמים חייבים להתערבב בינם לבין עצמם, ואף אחד מהם אינו נקודת שבת. לכן מספר הדרכים להשלים את קביעת התמורה הוא כמספר התמורות שהן אי-סדר-מלא על $n-k$ עצמים.

בסה״כ קיבלנו $\binom{n}{k}\psi(n-k)$ תמורות שיש להן בדיוק k נקודות שבת.

ב. נחליף משתנה סכימה באגף שמאל, ניקח $k'=n-k$.

כאשר k רץ מ- 0 עד n, המשתנה k' רץ מ- n עד 0,

ומכיון שסדר הסיכום אינו משנה, אפשר לקחת גם את הסכימה של k' להיות מ- 0 עד n.

לכן $\sum_{k'=0}^{n} g(k')\binom{n}{n-k'} = \sum_{k=0}^{n} g(n-k)\binom{n}{k}$.

כידוע (נוסחה שנייה בעמ׳ 29 בספר) $\binom{n}{n-k'}=\binom{n}{k'}$. נציב ונקבל $\sum_{k'=0}^{n} g(k')\binom{n}{k'}$.

כעת נחליף רק את **שמו** של משתנה הסכימה k' ל- k וקיבלנו את הזהות המבוקשת.

ג. מספר כל התמורות, ממויינות לפי מספר נקודות השבת הוא $\sum_{k=0}^{n} s(n,k)$.

לפי סעיף א׳ זהו $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\psi(n-k)$. בעזרת סעיף ב׳, סכום זה שווה $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\psi(k)$.

נציב את הביטוי המפורש עבור ψ שנתון בשאלה, ונקבל $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{i!}$

לאחר צמצום והוצאת גורם קבוע החוצה זהו: $n!\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{(n-k)!\,i!}$.

מצד שני, מספר כל התמורות על n עצמים הוא כמובן $n!$. קיבלנו את הזהות:

$n!=n!\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{(n-k)!\ i!}$, כלומר $1=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{(n-k)!\ i!}$. **זו הזהות שרצינו לקבל.**

בדיקה עבור $n = 3$:

$$\sum_{k=0}^{3}\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{(3-k)!\,i!} = \sum_{i=0}^{0}\frac{(-1)^i}{(3-0)!\,i!} + \sum_{i=0}^{1}\frac{(-1)^i}{(3-1)!\,i!} + \sum_{i=0}^{2}\frac{(-1)^i}{(3-2)!\,i!} + \sum_{i=0}^{3}\frac{(-1)^i}{(3-3)!\,i!}$$

$$= \frac{1}{3!0!} + (\frac{1}{2!0!} - \frac{1}{2!1!}) + (\frac{1}{1!0!} - \frac{1}{1!1!} + \frac{1}{1!2!}) + (\frac{1}{0!0!} - \frac{1}{0!1!} + \frac{1}{0!2!} - \frac{1}{0!3!})$$

לכל אחד מארבעת המחוברים בעלי סימן שלילי כאן יש בן זוג חיובי שמצטמצם איתו,

אחרי הצמצום נותרים שני מחוברים : $\frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} = 1$.

ראו המשך דיון באתר הקורס, במספר הממוצע של נקודות שבת שיש לתמורה על n עצמים.

תשובה 4

תהי A קבוצה סופית. כידוע מספר היחסים מעל A הוא סופי.

נחשוב על היחסים השונים מעל A כעל שובכים. נקרא למספר השובכים m .

יהי R יחס כלשהו מעל A. נחשוב על היחסים $R, R^2, R^3, \ldots, R^{m+1}$ כעל יונים.

נשים כל אחד מהם בשובך המייצג את היחס המתאים לו.

מספר היונים, $m+1$, גדול ממספר השובכים. מעקרון שובך היונים, יש שתי יונים באותו שובך,

כלומר שתי חזקות של R השוות זו לזו.

לכן לא ייתכן שכל חזקה של R תהיה שונה מכל החזקות הקודמות לה.

איתי הראבן