מטלת מנחה (ממ״ן) 19

הקורס: 20276 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: מבנים אלגבריים פרקים 1-2

משקל המטלה: 3 נקודות | מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 11.6.99 | סמסטר: ב 1999

(ע)

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ״ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1

תהי $\mathbf{R}$ קבוצת המספרים הממשיים. עולות לדיון שלוש הצעות להגדיר פעולה בינארית מעל $\mathbf{R}$.

הצעה א׳: לכל $(b, c) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ נתאים פיתרון של המשוואה

$$x^2 + bx + c = 0$$

הצעה ב׳: לכל $(b, c) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ נתאים פיתרון של המשוואה

$$x^2 + bx + |c| = 0$$

הצעה ג׳: לכל $(b, c) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ נתאים את סכום הפיתרונות של המשוואה הריבועית

$$x^2 + bx + c = 0$$

I. מי משלושת ההצעות הנ״ל אכן מגדירה פעולה בינארית מעל $\mathbf{R}$ ומי לא? הוכיחו את טענותיכם!

II. לגבי כל הצעה המספקת הגדרה כשרה לפעולה בינארית, דונו בתכונות הגרופואיד המתקבל. האם הוא קומוטטיבי? אסוציאטיבי? האם הוא מכיל אבר יחידה? האם לכל אבר בו יש הופכי ביחס לפעולה הבינארית?

שאלה 2

יהי M מונואיד, ויהי a איבר הפיך ב- M. תהי $f_a : M \to M$ הפונקציה $f_a(m) = a^{-1}ma$.

א. הוכח כי f_a היא איזומורפיזם של M על M. (10 נק׳)

ב. תהי $C_a = \{m \in M \mid f_a(m) = m\}$. הוכח כי C_a הוא תת-מונואיד של M (תת-מונואיד של M משמע: תת-גרופואיד של M, שהוא מונואיד לגבי אותה הפעולה). (10 נק׳)

שאלה 3

תהי $X = \{1,2,3\}$ ונסמן ב- A_X את קבוצת כל הרלציות מ- X ל- X.

A_X היא גרופואיד לגבי הפעולה של כפל רלציות.

בין הטענות הבאות, מצא את כל אלה שאינן נכונות , והפרך אותן ע"י דוגמא נגדית.

אין צורך להתייחס לטענות הנכונות.

א. הגרופואיד A_X הוא קומוטטיבי.

ב. רלצית היחידה I_X מעל X היא איבר יחידה בגרופואיד A_X.

ג. A_X הוא אגודה: לפי "תורת הקבוצות" משפט 2.8 בעמ' 43, כפל רלציות הוא אסוציאטיבי.

ד. כל אברי A_X הפיכים: הרלציה R^{-1} ("תורת הקבוצות" עמ' 36) היא הפכי דו-צדדי של R.

שאלה 4

תהי A קבוצה בת יותר מאיבר אחד.

I. נתבונן בגרופואיד $(P(A), \cap)$. האם הוא: קומוטטיבי? אסוציאטיבי? בעל איבר יחידה? האם יש הפכי לכל איבר?

II. חזור על סעיף א', כשבמקום חיתוך קבוצות, הפעולה היא הפרש קבוצות.

שאלה 5

I. כתוב את לוח הכפל (למעשה – חיבור) של הגרופואיד $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$, כאשר $\mathbf{Z}_2$ הוא הגרופואיד החיבורי של שאריות מודולו 2. כפל גרופואידים מוגדר בעמוד 28 בספר הלימוד.

II. הראה כי $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ אינו איזומורפי ל- $\mathbf{Z}_4$.