הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל הפקולטה למדעי המחשב

אלגוריתמים 1 (234247) – סמסטר אביב 2005

פתרון תרגיל בית 6

שאלה 1

הפתרון מופיע בדפי ההרצאה (וב-CLRS).

שאלה 2

נייצג את הקבוצה $A \subseteq \{1,2,...,n\}$ ע״י הפולינום $p(A)=\sum_{i\in A} x^i$ ואת הקבוצה $B \subseteq \{1,2,...,n\}$ ע״י הפולינום $p(B)=\sum_{i\in B} x^i$. כעת, ניתן לחשב את פולינום המכפלה $p=p(A)\cdot p(B)$ בזמן $O(n\log n)$ ע״י FFT. שימו לב כי לכל $c\in\{1,2,...,2n\}$ מתקיים כי המקדם של x^c ב-p שונה מאפס אמ״ם קיימים $a\in A$ ו-$b\in B$ כך ש-$a+b=c$. לכן פלט האלגוריתם יהיה החזקות בעלות מקדם שונה מאפס ב-p.

שאלה 3

א. $C(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+a_1b_1x^2$. די לחשב את המכפלות a_1b_1, a_0b_0 ו-$(a_0+a_1)(b_0+b_1)$.
יש לשים לב כי $(a_0+a_1)(b_0+b_1)-a_0b_0-a_1b_1=a_0b_1+a_1b_0$.

ב. נחלק כל אחד מהפולינומים לחזקות גבוהות ונמוכות (ניתן גם לחלק לפי זוגיות החזקות):

$$A(x)=A_0(x)+x^{n/2}A_1(x)=(a_0+a_1x+...+a_{(n/2)-1}x^{(n/2)-1})+x^{n/2}(a_{n/2}+a_{(n/2)+1}x+...+a_{n-1}x^{(n/2)-1})$$
$$B(x)=B_0(x)+x^{n/2}B_1(x)=(b_0+b_1x+...+b_{(n/2)-1}x^{(n/2)-1})+x^{n/2}(b_{n/2}+b_{(n/2)+1}x+...+b_{n-1}x^{(n/2)-1})$$

כעת נשים לב כי באופן דומה לסעיף הקודם מתקיים

$$C(x)=A(x)\cdot B(x)=A_0(x)B_0(x)+x^{n/2}\left(A_0(x)B_1(x)+A_1(x)B_0(x)\right)+x^nA_1(x)B_1(x)$$

כך ש:

$$\left(A_0(x)+A_1(x))(B_0(x)+B_1(x)\right)-A_0(x)B_0(x)-A_1(x)B_1(x)=A_0(x)B_1(x)+A_1(x)B_0(x)$$

כלומר, ניתן לחשב את $C(x)$ ע״י 3 פעולות כפל של פולינומים מדרגה חסומה ב-$n/2$ ועוד $O(n)$ פעולות נוספות. נסמן ב-$T(n)$ את זמן ריצת האלגוריתם עבור פולינום מדרגה חסומה ב-n. אזי נוסחת הנסיגה שמתקבלת היא $T(n)=3T(n/2)+O(n)$ כאשר $T(1)=O(1)$.

ניתן לפתור את הנוסחה עפ״י משפט ה-Master או בצורה ישירה (למשל, ע״י פיתוח):

$$T(n)\le 3T(n/2)+cn\le 3\left(3T(n/4)+c\frac{n}{2}\right)+cn=9T(n/4)+(1+\frac{3}{2})cn=$$

$$9\left(3T(n/8)+c\frac{n}{4}\right)+(1+\frac{3}{2})cn=27T(n/8)+(1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4})cn=\ldots=$$

$$3^{\log_2 n}T(1)+cn\sum_{i=0}^{\log_2 n}\left(\frac{3}{2}\right)^i=\Theta\left(3^{\log_2 n}+\frac{cn3^{\log_2 n}}{2^{\log_2 n}}\right)=\Theta(3^{\log_2 n})=\Theta(n^{\log_2 3})\approx\Theta(n^{1.58})$$

שימו לב שזמן הריצה שהתקבל טוב משמעותית מפתרון נאיבי ב- $\Theta(n^2)$.

שאלה 4

א. נחשב זרימת מקסימום f ב- N ונסתכל על הקבוצות S ו- T שהוגדרו ברמז. יש להראות כי $e=(u,v)\in E$ היא קשת קריטית מלמעלה אמ"ם $u\in S$ ו- $v\in T$. סיבוכיות האלגוריתם תהיה לכן $O(V^2E)$, כפי שנדרש.

ב. נחשב זרימת מקסימום f ב- N ונבדוק לכל קשת $e=(u,v)\in E$ אם יש מסלול מכוון מ- u ל- v בגרף השיורי G_f (ע"י הרצת BFS למשל). יש להראות כי (u,v) קשת קריטית מלמטה אמ"ם אין מסלול כזה. סיבוכיות האלגוריתם היא $O(V^2E)+O(E(V+E))=O(V^2E)$. ניתן להניח כי $E=O(V^2)$ משום שבבעיית הזרימה הנחנו שעוסקים רק בגרפים פשוטים (אם יש קשתות מקבילות ניתן להחליף אותן בקשת אחת שקיבולה שווה לסכום קיבולן, ובכך לקבל גרף ללא קשתות מקבילות).

שאלה 5

א. $A\cup B$ קבוצה בלתי תלויה משום שקשת עשויה להיות רק בין שני צמתים $u\in S$ ו- $v\in\overline{S}$, אבל אז הקיבול של $(S,\overline{S})$ יהיה ∞ בסתירה לכך שזהו חתך מינימום (ישנם ברשת חתכים עם קיבול סופי למשל $(\{s\},V'\setminus\{s\})$ לכן לא יתכן שקיבול חתך מינימום יהיה אינסופי).

ב. נניח בשלילה שקיימת קבוצה בלתי-תלויה מקסימום IS כך ש- $|IS|>|A\cup B|$. נסמן $S'=\{s\}\cup(IS\cap V_1)\cup(\overline{IS}\cap V_2)$ ונסתכל על החתך $(S',\overline{S'})$. ניתן לראות כי $c(S')=|V_1\cup V_2|-|IS|$. באופן דומה ניתן לראות ש- $c(S)=|V_1\cup V_2|-|A\cup B|$. לכן אם $|IS|>|A\cup B|$ אז $c(S')<c(S)$ בסתירה לכך ש- $(S,\overline{S})$ חתך מינימום.

שאלה 6

נשתמש באלגוריתם שהוצע בשאלה. נוכיח נכונות באמצעות שתי הטענות הבאות.

טענה 1: תהא f זרימה בשלמים ברשת העזר אזי קיים כיסוי ע"י $V-|f|$ מסלולים.

הוכחה: נתאר בנייה כזו. נשים לב כי ממבנה רשת הזרימה נובע כי ניתן לפרק את f ל- $|f|$ מסלולים מהצורה $s \to v_i \to u_j \to t$, הזרים זה לזה בצמתי הביניים (רק s ו- t משותפים). נסתכל על מסלול כזה $s \to v_i \to u_j \to t$. הוא מתאים לקשת $i \to j$ ב- G. אם קיים מסלול זרימה $s \to v_j \to u_k \to t$ אז קיימת קשת $j \to k$, כלומר ניתן להאריך את הקשת $i \to j$ למסלול $i \to j \to k$. באופן דומה, אם קיים מסלול זרימה $s \to v_m \to u_i \to t$ אז קיימת קשת $m \to i$ וניתן לקבל מסלול $m \to i \to j \to k$. באופן זה "נאריך" את המסלול בשני הכיוונים ככל הניתן ונחזור על הפעולה עבור מסלולי זרימה שעדיין לא השתתפו בבניית מסלולים ב- G. בסיום, לכל צומת ב- $v_i \in \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ שאין זרימה ממנו, נוסיף מסלול שמכיל רק את הצומת i לכיסוי.

מתוך מבנה רשת העזר, וכיוון ש- G אינו מכיל מעגלים, נובע שקיבלנו באופן זה כיסוי במסלולים.

נראה שמספר המסלולים הוא $V-|f|$. נסתכל על הצומת האחרון בכל אחד מהמסלולים שהגדרנו. אם i הוא צומת אחרון המשמעות היא שאין זרימה דרך הצומת v_i, ולהיפך: אם אין זרימה דרך v_i אז i הוא צומת אחרון באחד המסלולים שבנינו. לכן מספר המסלולים הוא $V-|f|$. □

טענה 2: לכל כיסוי ע"י k מסלולים ניתן להתאים זרימה (בשלמים) שערכה $V-k$.

הוכחה: לכל מסלול המכיל ℓ צמתים $i_1 \to i_2 \to ... \to i_\ell$ נתאים $\ell-1$ מסלולי זרימה ברשת העזר: $s \to v_{i_j} \to u_{i_{j+1}} \to t$, $1 \le j \le \ell-1$. ישנם כאמור k מסלולים. נסמן את האורך של המסלול ה- j ב- ℓ_j ואת הזרימה שהתקבלה ב- f. אזי נקבל כי:

$$|f| = \sum_{j=1}^{k} (\ell_j - 1) = \left(\sum_{j=1}^{k} \ell_j \right) - k = V - k .$$ □

סיבוכיות האלגוריתם היא $O(E' f^*) = O\left((V+E)V\right)$ (f^* הוא ערך זרימת המקסימום ברשת העזר).