# פתרונות לממ"ן 11 - 2012ב - 20425

1. מספר התוצאות האפשריות במרחב במדגם הוא $n(S) = 20!$ .

א. ראשית, נקבע את סדר זוגות המספרים בשורה ($10!$ אפשרויות). אחר-כך, נקבע את הסדר הפנימי של כל זוג כדורים שעליהם מספרים שווים ($2^{10}$ אפשרויות).

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{10!\cdot 2^{10}}{20!} = 1.53\cdot 10^{-9}$

ב. בשלב ראשון, נסדר בשורה את 6 הכדורים הנושאים מספרים שהם כפולות של 3 ($6!$ אפשרויות). נותרים 14 כדורים אחרים. בשלב שני, נשמור מקום ריק בין כל 2 כדורים שנושאים כפולות של 3 (בסך-הכל 5 מקומות) ונקבע עוד 9 מקומות ריקים בשורה לכדורים האחרים (ללא שום הגבלה – בין הכדורים או בקצות השורה). קביעת 9 המקומות הריקים בשורה היא כפיזור של 9 כדורים זהים ב- 7 תאים ($\binom{15}{9}$ אפשרויות). לבסוף, משנקבעו בסך-הכל 14 מקומות ריקים בשורה, לכדורים שאינם נושאים כפולות של 3, נסדר את 14 הכדורים האלה ב- 14 המקומות הריקים ($14!$ אפשרויות).

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{6!\cdot\binom{15}{9}\cdot 14!}{20!} = \frac{\binom{15}{9}}{\binom{20}{14}} = \frac{5{,}005}{38{,}760} = 0.129$

ג. נבחר אחד מכדורים ה- 7 ונמקם אותו במקום 5 בשורה (2 אפשרויות). אחר-כך נסדר את שאר הכדורים ($19!$ אפשרויות) מכאן, נקבל את ההסתברות: $\frac{2\cdot 19!}{20!} = \frac{2}{20} = 0.1$

שימו לב, שההסתברות היא היחס שבין מספר כדורי ה-7 לסך-כל הכדורים.

ד. לאור התוצאה שקיבלנו בסעיף הקודם, אפשר להבין שכדי לחשב את ההסתברות המבוקשת, מספיק להתייחס בחישוב לכדורים שנמצאים במקומות הקיצוניים בשורה.

יש $10\cdot 9$ אפשרויות לבחור 2 כדורים אדומים לקצוות מתוך $20\cdot 19$ אפשרויות כלליות.

לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{10\cdot 9}{20\cdot 19} = \frac{9}{38} = 0.237$

2. א. לחברי הוועד אין תפקידים זהים, לכן יש לבחור דיירים לכל תפקיד בנפרד. אם בוחרים תחילה את היו"ר והגזבר ולבסוף את 2 הנציגים הנוספים , מקבלים כי מספר הוועדים השונים הוא:

$$32\cdot 31\cdot\binom{30}{2} = 431{,}520$$

ב. יש 431,520 בחירות שונות של ועדים. מתוכן, יש $\binom{24}{2}\cdot 30\cdot 29 = 240{,}120$ בחירות שבהן 2 הנציגים הנוספים אינם דיירי דירות צפוניות (בחרנו אותם ראשונים, כדי להבטיח זאת). לכן, מספר הוועדים שבהם יש לפחות נציג נוסף אחד שהוא דייר דירה צפונית הוא: $431{,}520 - 240{,}120 = 191{,}400$

ג. נבחר תחילה את היו"ר (32 אפשרויות), אחר-כך נבחר נציג מהקומה של היו"ר (3 אפשרויות). משנבחרו היו"ר והנציג, נבחר נציג נוסף מקומה אחרת (28 אפשרויות) ולבסוף את הגזבר (29 אפשרויות), שביחס אליו אין שום מגבלה. נקבל: $32\cdot 3\cdot 28\cdot 29 = 77{,}952$

ד. נפריד את החישוב לשני מקרים, בהתאם לקומה שבה מתגורר הדייר שנבחר לתפקיד היו״ר:
1. אם היו״ר שנבחר מתגורר בקומה 6 (4 אפשרויות), אז לבחירת הגזבר יש 11 אפשרויות;
2. אם היו״ר שנבחר מתגורר בקומה 7 או 8 (8 אפשרויות), אז לבחירת הגזבר יש 12 אפשרויות.

לכן, מספר הוועדים השונים שאפשר לבחור הם: $(4 \cdot 11 + 8 \cdot 12) \cdot \binom{30}{2} = 60{,}900$

3. א. יש $6! = 720$ תמורות שונות של 6 עצמים שונים ורק אחת מתמורות אלו היא תמורת הזהות. לכן, ההסתברות המבוקשת היא $\frac{1}{720}$.

ב. נקבע תחילה מיהם שלושת המספרים שנמצאים במקומם הנכון ונמנה את מספר התמורות שבהם שלושת המספרים האחרים אינם במקומם הנכון. יש $\binom{6}{3} = 20$ אפשרויות לבחור את שלושת המספרים שיהיו במקום הנכון, ו-2 אפשרויות בלבד לקבוע את המקומות של שלושת המספרים האחרים, כך שלא יהיו במקומם הנכון. לפיכך, יש $20 \cdot 2 = 40$ תמורות שיש בהן בדיוק 3 מספרים במקום הנכון, וההסתברות המבוקשת היא $\frac{40}{720} = \frac{1}{18} = 0.05\overline{5}$.

ג. כדי לחשב את מספר התמורות שאין בהם אף מספר במקום הנכון, נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה. נסמן ב- $A_i$ את המאורע שהמספר $i$, לכל $i = 1,2,\ldots,6$, נמצא במקום הנכון, ונקבל כי:

$$n(A_1) = 5! = 120$$
$$n(A_1 \cap A_2) = 4! = 24$$
$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3! = 6$$
$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 2! = 2$$
$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6) = 1$$

ומכאן:

$$\begin{aligned} n(A_1^C \cap \ldots \cap A_6^C) &= 6! - n(A_1 \cup \ldots \cup A_6) \\ &= 6! - \sum_{i=1}^{6} (-1)^{i+1} \binom{6}{i} n(A_1 \cap \ldots \cap A_i) \\ &= 6! - (6 \cdot 120 - 15 \cdot 24 + 20 \cdot 6 - 15 \cdot 2 + 6 - 1) = 720 - 455 = 265 \end{aligned}$$

כלומר, יש 265 תמורות שאין בהן אף מספר במקום הנכון, וההסתברות המבוקשת היא:

$\frac{265}{720} = 0.3680\overline{5}$

4. לפתרון בעיה זו נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה.

לכל $i = 1,\dots,8$ , נסמן ב- $A_i$ את המאורע, שבשורה $i$ יש לפחות דסקית אחת. המאורע שיש בכל אחת מהשורות לפחות דסקית אחת הוא חיתוך המאורעות $A_1$, $A_2$, ..., $A_8$. לכן, נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה לחישוב הסתברות המאורע המשלים של החיתוך, שהוא המאורע המוגדר על-ידי איחוד המשלימים של המאורעות $A_1$, $A_2$, ..., $A_8$. כלומר:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_8) = 1 - P(A_1^C \cup \ldots \cup A_8^C)$$

כעת:

$$P(A_1^C) = \binom{56}{37} \Big/ \binom{64}{37}$$ [ 37 הדסקיות מסודרות ב-7 שורות בלבד ]

$$P(A_1^C \cap A_2^C) = \binom{48}{37} \Big/ \binom{64}{37}$$ [ 37 הדסקיות מסודרות ב-6 שורות בלבד ]

$$P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C) = \binom{40}{37} \Big/ \binom{64}{37}$$ [ 37 הדסקיות מסודרות ב-5 שורות בלבד ]

$$n(A_1^C \cap \ldots \cap A_i^C) = 0 \quad , \quad i \geq 4$$ [ לא ייתכן שיהיו יותר מ-3 שורות ריקות מדסקיות ]

לפיכך, לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מקבלים:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_8) = 1 - P(A_1^C \cup \ldots \cup A_8^C)$$
$$= 1 - \left[ \binom{8}{1} \cdot \frac{\binom{56}{37}}{\binom{64}{37}} - \binom{8}{2} \cdot \frac{\binom{48}{37}}{\binom{64}{37}} + \binom{8}{3} \cdot \frac{\binom{40}{37}}{\binom{64}{37}} \right] = 0.996$$

5. אם מביאים בחשבון את סדר לכידת הפרפרים, מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם הוא $4^8 = 65{,}536$.

א. נבחר תחילה את שני סוגי הפרפרים. יש לכך $\binom{4}{2} = 6$ אפשרויות שונות. משנבחרו הסוגים, נבחר את כל הפרפרים משני סוגים אלה. יש לכך $2^8$ אפשרויות, אך בשתיים מהן כל הפרפרים הנבחרים הם מאותו הסוג. לכן, נפחית שתי אפשרויות אלו מסך כל האפשרויות. ומכאן נקבל את ההסתברות:

$$\frac{\binom{4}{2} \cdot (2^8 - 2)}{4^8} = \frac{1{,}524}{65{,}536} = 0.023254$$

ב. 1. נחשב את ההסתברות שבין שמונת הפרפרים אין אף פרפר ירוק וממנה נמצא את ההסתברות המבוקשת. כלומר, ההסתברות היא:
$$1 - \frac{3^8}{4^8} = 1 - 0.75^8 = 0.89989$$

2. נבחר את 3 הפעמים שבהן ניצוד פרפר ירוק, ואחר-כך נספור את האפשרויות השונות ללכידת יתר הפרפרים (שהם משלושת הסוגים שאינם ירוקים). באופן כזה, נקבל שההסתברות המבוקשת היא:

$$\frac{\binom{8}{3} \cdot 3^5}{4^8} = \frac{13{,}608}{65{,}536} = 0.20764$$