פרק 2: אקסיומות ההסתברות (סיכום)

(20425 / 4.9.08)

מרחב מדגם: קבוצת כל התוצאות האפשריות של ניסוי מקרי. סימון: S

נקודה במרחב המדגם: תוצאה אפשרית כלשהי של הניסוי המקרי (כלומר, איבר במרחב המדגם).

מאורע: תת-קבוצה של מרחב המדגם (כלומר, אוסף כלשהו של תוצאות אפשריות). סימון: $A, B, C, \ldots$

אומרים ש**מאורע מתרחש**, אם תוצאת הניסוי המקרי היא אחת מהתוצאות השייכות לו.

מאורע ריק: מאורע שאינו מכיל אף תוצאה ממרחב המדגם. סימון: $\varnothing$

לכל מאורע A מתקיים $\varnothing \subseteq A$.

איחוד מאורעות A ו- B: המאורע המורכב מכל התוצאות השייכות למאורע A <u>או</u> למאורע B, ובכלל זה לשניהם.

איחוד מאורעות כולל את כל התוצאות ב-S, השייכות <u>לפחות לאחד</u> מהמאורעות שבאיחוד.

איחוד מאורעות מתרחש – אם לפחות אחד מהמאורעות שבאיחוד מתרחש;
אם תוצאת הניסוי שייכת לפחות לאחד מהמאורעות שבאיחוד.

- סימון: $A \cup B$
- תמיד מתקיים: $A, B \subseteq A \cup B$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cup A = A$, $A \cup S = S$.
- $A \cup B = \varnothing$ אם ורק אם $A = \varnothing$ וגם $B = \varnothing$.
- ניתן להכליל את מושג האיחוד לשלושה מאורעות ויותר.

חיתוך מאורעות A ו- B: המאורע המורכב מכל <u>התוצאות המשותפות</u> למאורעות A ו- B.

חיתוך של מאורעות כולל את כל התוצאות ב-S, השייכות לכל המאורעות שבחיתוך.

חיתוך מאורעות מתרחש – אם כל המאורעות שבחיתוך מתרחשים;
אם תוצאת הניסוי שייכת לכל המאורעות שבחיתוך.

- סימון: $A \cap B$
- תמיד מתקיים: $A \cap B \subseteq A, B$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap A = A$, $A \cap S = A$.
- ניתן להכליל את מושג החיתוך לשלושה מאורעות ויותר.

מאורעות זרים: המאורעות A ו-B נקראים זרים אם $A \cap B = \varnothing$.

- מאורעות זרים לא יכולים להתרחש בו-זמנית (מכיוון שאין להם תוצאות משותפות).
- מאורעות, המכילים תוצאה אחת כל אחד (והתוצאות שונות זו מזו), זרים זה לזה.
- המאורעות $A_1, A_2, \ldots$ נקראים זרים אם כל שניים מהם זרים לפי ההגדרה שלעיל.

המשלים של מאורע A: המאורע המכיל את כל התוצאות במרחב המדגם S, אשר אינן שייכות ל- A.

- סימון: A^C
- תמיד מתקיים: $A \cap A^C = \varnothing$, $A \cup A^C = S$, $(A^C)^C = A$, $S^C = \varnothing$, $\varnothing^C = S$.

חוקי החילוף:
$A \cap B = B \cap A$
$A \cup B = B \cup A$

חוקי הפילוג:
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

חוקי הקיבוץ:
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

חוקי דה-מורגן:
$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

הסתברות של מאורע: פונקציה שסימונה $P(\cdot)$, ערכיה ממשיים והיא מוגדרת על קבוצת כל המאורעות של ניסוי מקרי, ומקיימת את שלושת אקסיומות ההסתברות שלהלן.

אקסיומות ההסתברות: **1.** לכל מאורע A במרחב מדגם S מתקיים $0 \le P(A) \le 1$

2. $P(S) = 1$

3. לכל סדרה של מאורעות זרים A_1, A_2, ... מתקיים $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

הערות: **1.** <u>באקסיומה 3</u>, כאשר מציבים $A_i = \varnothing$, לכל $i = n+1, n+2$, מקבלים כי $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

2. פונקציית ההסתברות מתאימה לכל מאורע במרחב המדגם של ניסוי מקרי מספר ממשי בין 0 ל-1, המבטא את הסיכוי שהמאורע יתרחש בביצוע של הניסוי המקרי.

טענות בסיסיות בהסתברות:

$$P(\varnothing) = 0$$
$$P(A^C) = 1 - P(A)$$
$$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(B)$$
$$0 \le P(A \cap B) \le P(A)\,,\, P(B) \le P(A \cup B) \le 1$$

כלל ההכלה וההפרדה:

שני מאורעות: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

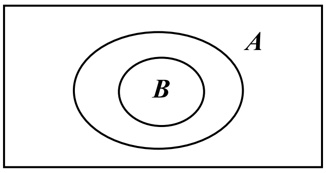
שלושה מאורעות: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

n מאורעות: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$

הערה: אפשר לנסח את כלל ההכלה וההפרדה להסתברויות, אך גם לעוצמות של קבוצות סופיות.

אם $B \subseteq A$ אז מתקיים

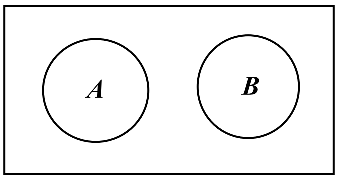
$$P(B) \le P(A)$$
$$P(A \cap B) = P(B)$$
$$P(A \cup B) = P(A)$$
$$P(A \cap B^C) = P(A) - P(B)$$



אם $A \cap B = \varnothing$ אז מתקיים

$B \subseteq A^C$ ו- $A \subseteq B^C$

$$P(A \cap B) = 0$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$P(A \cap B^C) = P(A) \quad ; \quad P(A \cup B^C) = P(B^C)$$
$$P(B \cap A^C) = P(B) \quad ; \quad P(B \cup A^C) = P(A^C)$$



הערה: $P(A^C)$ היא ההסתברות שהמאורע A <u>לא</u> יתרחש.

$P(A \cap B)$ היא ההסתברות ששני המאורעות, A ו-B, יתרחשו <u>בו-זמנית</u>.

$P(A \cup B)$ היא ההסתברות ש<u>לפחות אחד</u> משני המאורעות, A ו-B, יתרחש.

מרחב מדגם בעל תוצאות שוות-הסתברות:

זהו מרחב מדגם <u>בעל מספר תוצאות סופי</u>, שבו כל התוצאות האפשריות מתקבלות באותן ההסתברויות.

כללי הקומבינטוריקה משמשים לחישוב הסתברויות של מאורעות במרחב מדגם בעל תוצאות שוות-הסתברות.

מתקיים:

$$P\{\text{מאורע}\} = \frac{\text{מספר הנקודות במרחב המדגם השייכות למאורע}}{\text{מספר הנקודות במרחב המדגם}}$$

הסתברות היא פונקציית קבוצות רציפה, כלומר, אם $\{A_n\,,\, n \ge 1\}$ היא סדרה עולה (או יורדת) של מאורעות, אז: $P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.