פתרונות לממ"ח 01 - 2018א - 20425

1. לחברי הוועד אין תפקידים זהים, לכן יש לבחור דיירים לכל תפקיד בנפרד. אם בוחרים תחילה את היו"ר והגזבר ולבסוף את 2 הנציגים הנוספים, מקבלים כי מספר הוועדים השונים הוא: $32 \cdot 31 \cdot \binom{30}{2} = 431{,}520$

2. יש 431,520 בחירות שונות של ועדים. מתוכן, יש $\binom{24}{2} \cdot 30 \cdot 29 = 240{,}120$ בחירות שבהן 2 הנציגים הנוספים אינם דיירי דירות צפוניות (בחרנו אותם ראשונים, כדי להבטיח זאת). לכן, מספר הוועדים שבהם יש לפחות נציג נוסף אחד שהוא דייר דירה צפונית הוא: $431{,}520 - 240{,}120 = 191{,}400$

3. נבחר תחילה את היו"ר (32 אפשרויות), אחר-כך נבחר נציג מהקומה של היו"ר (3 אפשרויות). משנבחרו היו"ר והנציג, נבחר נציג נוסף מקומה אחרת (28 אפשרויות) ולבסוף את הגזבר (29 אפשרויות), שביחס אליו אין שום מגבלה. נקבל: $32 \cdot 3 \cdot 28 \cdot 29 = 77{,}952$

4. נפריד את החישוב לשני מקרים, בהתאם לקומה שבה מתגורר הדייר שנבחר לתפקיד היו"ר:
   1. אם היו"ר שנבחר מתגורר בקומה 6 (4 אפשרויות), אז לבחירת הגזבר יש 11 אפשרויות;
   2. אם היו"ר שנבחר מתגורר בקומה 7 או 8 (8 אפשרויות), אז לבחירת הגזבר יש 12 אפשרויות.

   לכן, מספר הוועדים השונים שאפשר לבחור הם: $(4 \cdot 11 + 8 \cdot 12) \cdot \binom{30}{2} = 60{,}900$

5. אם מביאים בחשבון את סדר לכידת הפרפרים, מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם הוא $4^8 = 65{,}536$. כעת, לחישוב ההסתברות: נבחר תחילה את שני סוגי הפרפרים. יש לכך $\binom{4}{2} = 6$ אפשרויות שונות. משנבחרו הסוגים, נבחר את כל הפרפרים משני סוגים אלה. יש לכך 2^8 אפשרויות, אך בשתיים מהן כל הפרפרים הנבחרים הם מאותו הסוג. לכן, נפחית שתי אפשרויות אלו מסך כל האפשרויות.

   ומכאן נקבל את ההסתברות: $$\frac{\binom{4}{2} \cdot (2^8 - 2)}{4^8} = \frac{1{,}524}{65{,}536} = 0.023254$$

6. נחשב את ההסתברות שבין שמונת הפרפרים אין אף פרפר ירוק וממנה נמצא את ההסתברות המבוקשת. כלומר, ההסתברות היא: $1 - \frac{3^8}{4^8} = 1 - 0.75^8 = 0.89989$

7. נבחר את 3 הפעמים שבהן ניצוד פרפר ירוק, ואחר-כך נספור את האפשרויות השונות ללכידת יתר הפרפרים (שהם משלושת הסוגים שאינם ירוקים). באופן כזה, נקבל שההסתברות המבוקשת היא:

   $$\frac{\binom{8}{3} \cdot 3^5}{4^8} = \frac{13{,}608}{65{,}536} = 0.20764$$

8. נחלק את הניסוי לשלושה שלבים: בכל שלב נבחר קבוצת ילדים שיחבשו כובעים מצבע מסוים. מכיוון שכל הכובעים מאותו הצבע זהים זה לזה, אין חשיבות לסדר שבו הילדים בכל קבוצה נבחרים. לפיכך, נבחר 10 ילדים שיחבשו כובעים אדומים, אחר-כך עוד 5 ילדים שיחבשו כובעים כחולים, ולבסוף ייוותרו הילדים שיחבשו את הכובעים הירוקים. כלומר: $n(S) = \binom{20}{10}\binom{10}{5}\binom{5}{5} = \frac{20!}{10!5!5!} = 46{,}558{,}512$

   נשים לב, שמרחב המדגם של הבעיה מכיל תוצאות שוות-הסתברות.

9. כדי לחשב את ההסתברות, מספיק להביא בחשבון את בחירת הילדים שיחבשו את הכובעים הכחולים.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{\binom{10}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{10!\cdot 15!}{5!\cdot 20!} = 0.01625$

10. המאורע המשלים למאורע הנתון הוא המאורע שבו כל הכובעים האדומים ניתנים לבנות או שכולם ניתנים לבנים. ההסתברות שכל הכובעים האדומים יינתנו לבנות שווה להסתברות שכולם יינתנו לבנים.

לפיכך, בדומה לסעיף הקודם, נקבל: $1 - 2\cdot\frac{\binom{10}{10}}{\binom{20}{10}} = 0.99999$

11. כעת, הבעיה הנתונה שקולה לסידור של הכובעים בשורה. מכיוון שכובעים מאותו הצבע זהים זה לזה, אפשר לחלק את הניסוי לשלבים, שבכל אחד מהם נקבעים המקומות בשורה שבהם ימוקמו הכובעים מכל צבע. לכן, במרחב המדגם של הבעיה הזאת יש $\binom{20}{10}\binom{10}{5}\binom{5}{5}$ תוצאות שוות-הסתברות, בדומה למרחב המדגם של בעית חלוקת הכובעים לילדים, המתוארת בתחילת השאלה.

כדי לחשב את ההסתברות המבוקשת בסעיף זה, מספיק להביא בחשבון את המקומות בשורה שנקבעים לכובעים הירוקים. כלומר: $\frac{\binom{10}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{10!\cdot 15!}{5!\cdot 20!} = 0.01625$

12. את ההסתברות המבוקשת כאן אפשר לחשב בשתי דרכים:

דרך I

נחשב את ההסתברות תחת ההנחה שהכובעים שונים זה מזה. הנחה זו אינה משנה את הסתברות המאורע שמוגדר בבעיה, מכיוון שלכל סידור בשורה של הכובעים הזהים מתאימים $10!5!5!$ סידורים בשורה של הכובעים השונים. (זו גם הסיבה ששני מרחבי המדגם מורכבים מתוצאות שוות-הסתברות.)

כדי לחשב את מונה ההסתברות, נסדר תחילה את הכובעים שאינם ירוקים בשורה ($15!$ אפשרויות). כעת, נבחר 5 מקומות מתוך המקומות שבין הכובעים הלא-הירוקים ומשני צידי שורת הכובעים הלא-ירוקים ונמקם בהם את הכובעים הירוקים, כך שלא יהיו שני כובעים ירוקים סמוכים ($16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12$ אפשרויות). מכאן, נקבל את ההסתברות:

$$\frac{15!\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{20!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16} = \frac{91}{323} = 0.2817$$

דרך II

נחשב את ההסתברות ביחס למרחב המדגם שהוגדר בסעיף ד1.

נסדר בשורה את 5 הכובעים הירוקים ונשמור בין כל שניים מהם מרווח אחד לכובע לא-ירוק (אפשרות 1). כעת, נמקם בשורה שנוצרה עוד 11 מרווחים לכובעים הנותרים. המרווחים הללו יכולים להיות בין כל שני כובעים ירוקים או משני הצדדים של שורת הכובעים הירוקים. לפיכך, הבעיה שקולה לפיזור של 11 כדורים זהים ב-6 תאים ממוספרים ($\binom{16}{11}$ אפשרויות). אפשר להמשיך ולסדר במרווחים שנבחרו את הכובעים האדומים והכחולים, אך אין בכך צורך, כפי שיראה החישוב שלהלן:

$$\frac{\binom{16}{11}\cdot\cancel{\binom{15}{10}\cdot\binom{5}{5}}}{\binom{20}{5}\cdot\cancel{\binom{15}{10}\cdot\binom{5}{5}}} = 0.2817$$

(שימו לב, שכדי להדגים את "חוסר הנחיצות" בסידור הכובעים האדומים והכחולים, חושב המכנה לפי חלוקת הניסוי לשלבים הבאים: בחירת מקומות לכובעים הירוקים, בחירת מקומות לכובעים האדומים, ולבסוף בחירת מקומות לכובעים הכחולים. בהבדל מסדר השלבים שהוגדר בסעיף ד1.)

13. לצורך חישוב ההסתברות המבוקשת, נניח כי ניתן להבחין בין כובעים מאותו הצבע.

הואיל ומדובר ב-4 ערימות שוות-גודל, מספר החלוקות במרחב המדגם הוא: $\frac{20!}{(5!)^4\cdot 4!}$

כאשר איננו מגדירים סדר בין 4 הקבוצות.

כעת, נמנה את מספר החלוקות ל-4 קבוצות, כך שתיווצר בדיוק ערימה אחת שאין בה בכלל כובעים כחולים. "נבחר" תחילה 5 כובעים לא-כחולים, $\binom{15}{5}$ אפשרויות; אחר-כך ניצור 3 קבוצות שבכולן לפחות כובע כחול אחד. ייתכנו שני מקרים: שתי קבוצות שיש בהן בדיוק כובע כחול אחד או שתי קבוצות שיש בכל אחת מהן בדיוק שני כובעים כחולים. במקרה הראשון – נבחר כובע כחול ונצרף לו 4 כובעים שאינם כחולים, $5\cdot\binom{10}{4}$ אפשרויות; נבחר עוד כובע כחול ונצרף לו 4 כובעים שאינם כחולים, $4\cdot\binom{6}{4}$ אפשרויות; ואז תיווצר הקבוצה האחרונה. לחישוב מספר התוצאות המרכיבות את המקרה הראשון, נכפול את כל המספרים שקיבלנו ונחלק ב-2 מכיוון שקיימות שתי קבוצות בהרכבי צבעים דומים (1 כחול ו-4 שאינם כחולים). במקרה השני – נבחר כובע כחול ונצרף לו 4 כובעים שאינם כחולים, $5\cdot\binom{10}{4}$ אפשרויות; נבחר 2 כובעים כחולים ונצרף להם 3 כובעים שאינם כחולים, $\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{3}$ אפשרויות; ואז תיווצר הקבוצה האחרונה. גם במקרה השני נכפול את כל המספרים שקיבלנו ונחלק ב-2, מכיוון שקיימות שתי קבוצות בהרכבי צבעים דומים (2 כחולים ו-3 שאינם כחולים).

ומכאן, נקבל את ההסתברות: $\binom{15}{5}\cdot 5\cdot\binom{10}{4}\cdot\left[4\cdot\binom{6}{4}+\binom{4}{2}\binom{6}{3}\right]\cdot\frac{1}{2}\Big/\frac{20!}{(5!)^4\cdot 4!}=0.5805$

14. מספר אפשרויות החלוקה של המפתחות הוא: $\binom{14}{2,2,\ldots,2}=\frac{14!}{2^7}=681{,}080{,}400$

כי יש $\binom{14}{2}$ אפשרויות לבחור שני אורחים שיקבלו מפתחות לחדר הראשון, $\binom{12}{2}$ אפשרויות לבחור שני אורחים שיקבלו מפתחות לחדר השני, וכך הלאה.

15. תחילה נבחר 5 זוגות שיקבלו מפתחות תואמים. יש $\binom{7}{5}$ אפשרויות לבחירת 5 זוגות אלו. נשארים 4 אורחים ויש 2 אפשרויות לחלק אותם לזוגות, כך שלא ייווצר ביניהם זוג של אורחים נשואים. ולבסוף, יש !7 אפשרויות לחלק את 7 הזוגות הללו ל-7 החדרים (כל זוג מקבל שני מפתחות זהים). לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $\binom{7}{5}\cdot 2\cdot 7!\Big/\binom{14}{2,2,\ldots,2}\;=\;0.0003108$

16. נחלק 7 מפתחות שונים לגברים ו-7 מפתחות שונים לנשים ונקבל בחדרים 7 זוגות מעורבים. לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $(7!)^2\Big/\binom{14}{2,2,\ldots,2}\;=\;0.0373$

17. נתחיל בבחירת שני הזוגות שמקבלים מפתחות תואמים. יש $\binom{7}{2}$ אפשרויות לבחירת שני זוגות אלו ו- $7\cdot 6$ אפשרויות לבחור עבורם מפתחות. כעת, נמנה את מספר האפשרויות לחלק ל-5 הזוגות האחרים את יתר המפתחות (10 בסך-הכל), כך שאף אחת מן הנשים בזוגות הללו לא תקבל מפתח זהה לזה שיקבל בעלה. למניית מספר האפשרויות הזה נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה (שמובא בספר בתרגיל ה9 בעמוד 73). לכל $i = 1,2,3,4,5$, נסמן ב- A_i את המאורע שזוג i מקבל מפתחות תואמים.

$n(A_1) = 5\cdot\frac{8!}{2^4} = 12,600$ [יש 5 זוגות של מפתחות תואמים שזוג 1 יכול לקבל]

$n(A_1\cap A_2) = 5\cdot 4\cdot\frac{6!}{2^3} = 1,800$ [אם זוג 1 קיבל מפתחות תואמים, אז יש 4 זוגות של מפתחות תואמים לזוג 2]

$n(A_1\cap A_2\cap A_3) = 5\cdot 4\cdot 3\cdot\frac{4!}{2^2} = 360$

$n(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4) = n(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5) = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 120$

לכן, לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מספר האפשרויות לחלק את המפתחות, כך שאף זוג מתוך ה-5 לא יקבל מפתחות תואמים, הוא :

$$\begin{aligned} n(A_1^C\cap\ldots\cap A_5^C) &= \tfrac{10!}{2^5} - n(A_1\cup\ldots\cup A_5) \\ &= \tfrac{10!}{2^5} - \sum_{i=1}^{5}(-1)^{i+1}\binom{5}{i} n(A_1\cap\ldots\cap A_i) \\ &= \tfrac{10!}{2^5} - (5\cdot 12,600 - 10\cdot 1,800 + 10\cdot 360 - 5\cdot 120 + 120) = 65,280 \end{aligned}$$

מכאן, נקבל את ההסתברות המבוקשת : $\binom{7}{2}\cdot 7\cdot 6\cdot 65,280 \Big/ \frac{14!}{2^7} = 0.08454$

18. ראשית, יש !6 תוצאות שונות במרחב המדגם.

שנית, אם שני הספלים הקטנים ביותר מונחים על תחתיותיהם, נותר רק להניח את שאר 4 הספלים האחרים על התחתיות הנותרות. לכן, ההסתברות המבוקשת היא : $\frac{4!}{6!} = \frac{1}{30}$

19. אם שלושת הספלים הקטנים ביותר מונחים על שלוש התחתיות של הספלים הגדולים ביותר, אז מתקיים ההיפך לגבי הספלים הגדולים ביותר. כלומר, את שלושת הספלים הקטנים ביותר מניחים על 3 תחתיות אפשריות וכך גם את שלושת הספלים הגדולים ביותר.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא : $\frac{(3!)^2}{6!} = \frac{1}{20} = 0.05$

20. כדי שבדיוק ספל אחד יונח על תחתית מתאימה, כל הספלים האחרים צריכים להיות על תחתיות לא-מתאימות להם. נחשב את ההסתברות המבוקשת באמצעות כלל ההכלה וההפרדה, לאחר שנבחר את הספל שיונח על התחתית המתאימה.

נסמן ב- A_i את המאורע שספל i מונח על התחתית שלו, לכל $i = 1,2,3,4,5$, ונחשב את מספר התוצאות השייכות למאורע $A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C\cap A_4^C\cap A_5^C$. תנאי הבעיה סימטריים, לכן :

$$\begin{aligned} n(A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C\cap A_4^C\cap A_5^C) &= 5! - n(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5) \\ &= 5! - \left[\binom{5}{1}n(A_1) - \binom{5}{2}n(A_1\cap A_2) + \ldots + \binom{5}{5}n(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5)\right] \\ &= 5! - [5\cdot 4! - 10\cdot 3! + 10\cdot 2! - 5\cdot 1 + 1\cdot 1] = 120 - 76 = 44 \end{aligned}$$

ומכאן, מקבלים את ההסתברות המבוקשת : $\frac{6\cdot 44}{6!} = 0.3\overline{6}$

פתרונות לממ"ח 02 - 2018א - 20425

1. למשתנה המקרי X הנתון בבעיה יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 60 ו- 0.5 .

לפיכך, לכל $i = 0,1,\ldots,60$ מתקיים: $P\{X = i\} = \binom{60}{i} \cdot 0.5^{60} = \binom{60}{60-i} \cdot 0.5^{60} = P\{X = 60 - i\}$

ומכאן שמתקיים: $P\{X < 30\} = P\{X > 30\}$

כמו כן, מתקיים: $P\{X < 30\} + P\{X = 30\} + P\{X > 30\} = 1$

לכן, נוכל לחשב את ההסתברות המבוקשת כך:

$$P\{X > 30\} = \frac{1 - P\{X = 30\}}{2} = \frac{1 - \binom{60}{30}0.5^{60}}{2} = 0.4487$$

2. נשים לב שמתקיים הקשר $Y = 60 - X$. כלומר, אנו מעוניינים בהסתברות המאורע:

$$X^2 + Y^2 = X^2 + (60 - X)^2 = 2X^2 - 120X + 3{,}600 = 1{,}872$$

המתרחש כאשר: $X_{1,2} = \dfrac{120 \pm \sqrt{120^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1{,}728}}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 36 \\ 24 \end{array} \right.$

כלומר: $P\{X^2 + Y^2 = 1{,}872\} = P\{X = 24\} + P\{X = 36\} = 2 \cdot \binom{60}{24} \cdot 0.5^{60} = 0.06254$

3. מתקיים $Y = 60 - X$, ולכן: $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(60 - X) = \mathrm{Var}(X)$

4-5. נסמן ב- n_i את המספר שמקבל שחקן i, לכל $i = 1,2,...,5$. שימו לב, שאין שום חשיבות לערכים המסוימים של חמשת המספרים. מספיקה הידיעה שהם שונים זה מזה.

$X = 0$ כאשר לשחקן 1 מספר קטן יותר מאשר לשחקן 2. במקרה זה, אין שום חשיבות למספרים שבידי שחקנים 3, 4 ו- 5. מהסימטריה בין שחקנים 1 ו-2 מקבלים: $P\{X = 0\} = P\{n_1 < n_2\} = 1/2$

$X = 1$ כאשר לשחקן 1 מספר גדול יותר מאשר לשחקן 2 וקטן יותר מאשר לשחקן 3. מכיוון שאפשר לסדר 3 מספרים שונים ב- !3 סידורים, ורק באחד מהם $X = 1$, מקבלים כי:

$$P\{X = 1\} = P\{n_2 < n_1 < n_3\} = 1/3! = 1/6$$

באותו אופן – מכיוון שאפשר לסדר 4 מספרים שונים ב- !4 סידורים, כאשר רק בשניים מהם $X = 2$, מקבלים כי: $P\{X = 2\} = P\{n_2, n_3 < n_1 < n_4\} = 2!/4! = 1/12$

ומכיוון שב- !3 מתוך !5 הסידורים האפשריים של 5 מספרים שונים מתקיים $X = 3$, מקבלים:

$$P\{X = 3\} = P\{n_2, n_3, n_4 < n_1 < n_5\} = 3!/5! = 1/20$$

ולבסוף, מהסימטריה בין חמשת השחקנים מקבלים: $P\{X = 4\} = P\{n_1 \text{ הכי גדול}\} = 1/5$

6. נחשב את סטיית-התקן של X .

התוחלת של X: $E[X] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{20} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{77}{60} = 1.2833$

השונות של X: $E[X^2] = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{12} + 3^2 \cdot \frac{1}{20} + 4^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{83}{20} = 4.15$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{83}{20} - \left(\frac{77}{60}\right)^2 = 2.50306$$

וסטיית התקן של X: $SD(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sqrt{2.50306}=1.5821$

7. לאחר כל הטלה של שני המטבעות, השחקנים ממשיכים להטיל את מטבעותיהם רק אם שניהם מקבלים H או ששניהם מקבלים T. כלומר, לאחר כל שלב, המשחק ממשיך בהסתברות $p^2+(1-p)^2$ ומסתיים בהסתברות $2p(1-p)$. לפיכך, מספר השלבים במשחק הוא משתנה מקרי, שנסמנו ב- X, והתפלגותו גיאומטרית עם הפרמטר $2p(1-p)$. ומכאן נקבל כי:

$$E[X]=\frac{1}{2p(1-p)} \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(X)=\frac{1-2p(1-p)}{4p^2(1-p)^2}$$

8. **הערה:** השאלה בוטלה, בגלל טעות הקלדה בחוברת (בחזקת המכנה בתשובה א – שהיא התשובה הנכונה).

נחשב תחילה את ההסתברות שהמשחק מסתיים לאחר 5 שלבים בדיוק. מקבלים:

$$P\{X=5\}=(p^2+(1-p)^2)^4\cdot 2p(1-p)$$

כעת:

$$P\{\text{(H,H) במהלך המשחק היו שני}\mid X=5\}=\frac{P\{\text{HH}\times 2,\text{TT}\times 2,\ \text{תוצאות ורחאה בלשב תונוש}\}}{P\{X=5\}}$$

$$=\frac{\binom{4}{2}p^{2\cdot 2}(1-p)^{2\cdot 2}\cdot 2p(1-p)}{(p^2+(1-p)^2)^4\cdot 2p(1-p)}=\binom{4}{2}\left(\frac{p^2}{p^2+(1-p)^2}\right)^2\left(\frac{(1-p)^2}{p^2+(1-p)^2}\right)^2=\frac{6p^4(1-p)^4}{[p^2+(1-p)^2]^4}$$

הערה: שימו לב, שקיבלנו בסופו של דבר הסתברות בינומית עם הפרמטרים 4 ו- $\frac{p^2}{p^2+(1-p)^2}$ בנקודה 2.

תוצאה זו מתקבלת, מכיוון שההטלות בלתי-תלויות זו בזו, ומכיוון שבהינתן המידע ש- $X=5$, ברור שהתוצאה (H,H) לא תתקבל בשלב החמישי, ושהתוצאות היחידות שיכולות להתקבל ב- 4 השלבים הראשונים הן (H,H) או (T,T).

9. מספר הדסקיות השחורות שימוקמו ב-3 השורות העליונות של הלוח הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N=64$, $m=30$ ו- $n=24$, שנסמנו ב- X.

לפיכך: $P\{X=11\}=\dfrac{\binom{30}{11}\binom{34}{13}}{\binom{64}{24}}=0.20225$

10. בסימוני השאלה הקודמת נקבל: $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{64-24}{64-1}\cdot 24\cdot\dfrac{30}{64}\cdot\dfrac{34}{64}=3.795$

11. מספר המשבצות <u>השחורות</u> בלוח זה הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 10,000 ו- 0.005.

לכן, נוכל לחשב קירוב פואסוני להסתברות המבוקשת, כאשר $\lambda=np=10{,}000\cdot 0.005=50$.

נקבל: $e^{-50}\cdot\dfrac{50^{54}}{54!}=0.0464$

12. מספר החפצים המוחבאים הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\lambda=8$.

לכן ההסתברות המבוקשת היא: $P\{X=7\}=e^{-8}\cdot\dfrac{8^7}{7!}=0.1396$

13. $$P\{X=7\mid X\geq 3\}=\frac{P\{X=7\}}{P\{X\geq 3\}}=\frac{e^{-8}\cdot\frac{8^7}{7!}}{1-e^{-8}\cdot(\frac{8^0}{0!}+\frac{8^1}{1!}+\frac{8^2}{2!})}=\frac{0.1396}{0.9862}=0.1415$$

14. נסמן ב- A את המאורע שהאדם מוצא לפחות חפץ אחד.

נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה לחישוב ההסתברות המבוקשת, כאשר נתנה בערכו של X , ונקבל :

$$P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A \mid X = i)P\{X = i\} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{1+i} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{(i+1)!}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} (i-1) \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \frac{1}{\lambda}\left(E[X-1] - (0-1)P\{X = 0\}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\lambda - 1 + e^{-\lambda}\right) = 1 - \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} = 1 - \frac{1-e^{-8}}{8} = 0.87504$$

15. מספר ההטלות של אבנר הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר ⅓.

לכן ההסתברות המבוקשת היא : $P\{X \geq 8\} = P\{X > 7\} = \left(\frac{2}{3}\right)^7 = 0.0585$

16. למספר ההטלות הכולל, שמבצעים אבנר ברק וגד, יש התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים 3 ו- ⅓.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא : $\binom{6}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{729} = 0.10974$

17. למספר ההטלות של אבנר יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר ⅓. נסמן ב-X את מספר ההטלות שאבנר עושה, ונחשב את ההסתברות ש- X מקבל ערך זוגי. נקבל :

$$P\{\text{זוגי } X\} = \sum_{i=1}^{\infty} \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{2i-1} = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(\tfrac{2}{3}\right)^2\right]^{i-1} = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{4}{9}} = \tfrac{2}{9} \cdot \tfrac{9}{5} = \tfrac{2}{5}$$

18. נסמן ב-A (B) [C] את המאורע שאבנר (ברק) [גד] מטיל את המטבע שלו מספר זוגי של פעמים. לפי תנאי הבעיה, A , B ו- C הם מאורעות בלתי-תלויים ולכל אחד מהם הסתברות של 2/5 להתרחש. לפיכך, מספר ההטלות הכולל (של אבנר, ברק וגד) הוא זוגי, אם כל אחד מהם מטיל את המטבע שברשותו מספר זוגי של פעמים או אם אחד מהם מטיל את המטבע שברשותו מספר זוגי של פעמים וכל אחד מהשניים האחרים מטיל את המטבע שלו מספר אי-זוגי של פעמים. כלומר :

$$P\{\text{סה״כ מספר זוגי של הטלות}\}$$

$$= P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B^C \cap C^C) + P(A^C \cap B \cap C^C) + P(A^C \cap B^C \cap C)$$

$$= \left(\tfrac{2}{5}\right)^3 + 3 \cdot \tfrac{2}{5}\left(\tfrac{3}{5}\right)^2 = 0.496 \qquad [\text{בלתי-תלויים } C \text{ ו- } B\,,\,A]$$

ומכאן :

$$P\{A \mid \text{סה״כ מספר זוגי של הטלות}\} = \frac{P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B^C \cap C^C)}{0.496} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2}{0.496} = \frac{13}{31} = 0.4194$$

19. נסמן ב-Y את מספר ההטלות שביצע דן. המשתנה המקרי Y הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר ⅔. כעת, אבנר, ברק וגד מקבלים בדיוק H אחד כל אחד ואילו דן מקבל $Y-1$ פעמים H. לכן, מתקיים הקשר $W = 3 + Y - 1 = Y + 2$. ומכאן, אפשר למצוא את פונקציית ההסתברות של W ואת שונותו. מקבלים :

$$P\{W = i\} = P\{Y + 2 = i\} = P\{Y = i - 2\} = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{i-3} \qquad , \qquad i = 3, 4, \ldots$$

20. בסימוני השאלה הקודמת : $\mathrm{Var}(W) = \mathrm{Var}(Y+2) = \mathrm{Var}(Y) = \frac{1-\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$

פתרונות לממ"ן 11 - 2018א - 20425

1. א. הנתונים הם: A = הרכיב נפגם בשלב הראשון, $P(C^C) = 0.8 \Rightarrow P(C) = 0.2$

B = הרכיב נפגם בשלב השני, $P(A\cap B\cap C^C) = 0.06$

C = הרכיב נפגם בשלב השלישי, $P(A\cap C) = 0.15$

$$P(A\cap B\cap C^C) + P(A\cap B^C\cap C) + P(A^C\cap B\cap C) = 0.15 \quad\Rightarrow\quad P(A\cap B^C\cap C) + P(A^C\cap B\cap C) = 0.09$$

$$P(A^C\cap B^C \mid C) = 0.05 \quad\Rightarrow\quad \frac{P(A^C\cap B^C\cap C)}{P(C)} = 0.05 \quad\Rightarrow\quad P(A^C\cap B^C\cap C) = 0.05\cdot 0.2 = 0.01$$

$$P(A^C\cap B^C \mid C^C) = 0.9 \quad\Rightarrow\quad \frac{P(A^C\cap B^C\cap C^C)}{P(C^C)} = 0.9 \quad\Rightarrow\quad P(A^C\cap B^C\cap C^C) = 0.9\cdot 0.8 = 0.72$$

$$P(A\cup C \mid B) = 1 \quad\Rightarrow\quad P((A\cup C)\cap B) = P(B) \quad\Rightarrow\quad B\subseteq A\cup C \quad\Rightarrow\quad P(A^C\cap B\cap C^C) = 0$$

מנתונים אלה נקבל:

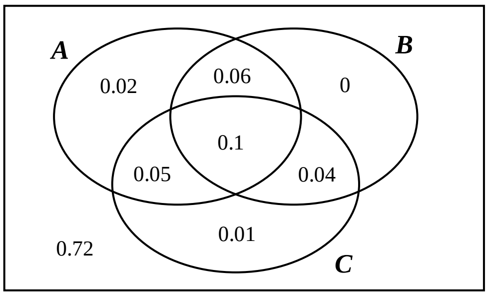
$$P(A^C\cap B\cap C) = P(C) - P(A\cap C) - P(A^C\cap B^C\cap C) = 0.2 - 0.15 - 0.01 = 0.04$$

$$\Rightarrow\quad P(A\cap B^C\cap C) = 0.09 - 0.04 = 0.05$$

$$P(A\cap B\cap C) = P(A\cap C) - P(A\cap B^C\cap C) = 0.15 - 0.05 = 0.1$$

$$P(A\cap B^C\cap C^C) = 1 - P(A^C\cup B\cup C) = 1 - P(C) - P(A^C\cap B^C\cap C^C) - P(A\cap B\cap C^C)$$
$$= 1 - 0.72 - 0.2 - 0.06 = 0.02$$

והדיאגרמה המתאימה היא:



ב. $P(A\cap B\cap C) = 0.1$

ג. $P(A\cup B) = 1 - P(A^C\cap B^C) = 1 - P(A^C\cap B^C\cap C^C) - P(A^C\cap B^C\cap C) = 1 - 0.72 - 0.01 = 0.27$

ד. $$P(B \mid A^C) = \frac{P(B\cap A^C)}{P(A^C)} = \frac{0.04}{0.77} = 0.05195$$

ה. $$P(A \mid A^C\cup B^C\cup C^C) = \frac{P(A\cap(A^C\cup B^C\cup C^C))}{P(A^C\cup B^C\cup C^C)} = \frac{P(A\cap(B^C\cup C^C))}{1-P(A\cap B\cap C)}$$

$$= \frac{0.02+0.05+0.06}{1-0.1} = \frac{0.13}{0.9} = 0.1\overline{4}$$

2. א. $\dfrac{\binom{1}{1}\binom{n-1}{3}}{\binom{n}{4}} = \dfrac{4}{n}$

ב1. כדי לחשב את ההסתברות המותנית המבוקשת נתנה במספר הכולל של חברי הקבוצה שבחרו בכדור אדום. לשם כך, לכל $i = 1,2,\ldots,n$, נגדיר את המאורע $C_i =$ i מחברי הקבוצה בחרו בכדור אדום.

לפי נוסחת ההסתברות השלמה <u>למאורעות מותנים</u>, נקבל:

$$P(A|B) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B\cap C_i)P(C_i|B) = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{i}\binom{n-1}{i-1} p^{i-1}(1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{(n-1)!}{i!(n-i)!} p^{i-1}(1-p)^{n-i}$$

$$= \tfrac{1}{np}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i} = \tfrac{1}{np}[1-(1-p)^n]$$

ב2. לפי נוסחת ההסתברות השלמה, נקבל:

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^C)P(B^C)$$

$$= \frac{1-(1-p)^n}{n\cancel{p}} \cdot \cancel{p} + \frac{1}{n}\cdot(1-p)^{n-1}\cdot(1-p) = \frac{1-(1-p)^n + (1-p)^n}{n} = \frac{1}{n}$$

הסבר לחישוב $P(A \mid B^C)$:

נסמן ב- C את המאורע שלפחות אחד מחברי הקבוצה בחר בכדור אדום.

נשתמש שוב בנוסחת ההסתברות השלמה למאורעות מותנים, ונקבל:

$$P(A|B^C) = P(A|B^C\cap C)P(C|B^C) + P(A|B^C\cap C^C)P(C^C|B^C) = 0 + \tfrac{1}{n}(1-p)^{n-1}$$

שימו לב, שאפשר להגיע לתוצאה האחרונה שקיבלנו גם באופן אינטואיטיבי.

אם איתמר לא בחר בכדור אדום, אז הוא יכול להיות חבר הקבוצה שנבחר אם ורק אם כל חברי הקבוצה לא בחרו בכדור אדום. לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא ההסתברות שכל חברי הקבוצה (שאינם איתמר) בחרו בכדור שחור ושאיתמר הוא זה שנבחר מביניהם.

3. א. $\dfrac{2^{10}}{\binom{20}{10}} = 0.00554$

ב. $$P(A\cup B \mid C) = \frac{P((A\cup B)\cap C)}{P(C)} = \frac{P((A\cap C)\cup(B\cap C))}{P(C)}$$

$$= \frac{P(A\cap C) + P(B\cap C) - \overbrace{P(A\cap B\cap C)}^{=0}}{P(C)}$$

$$= \frac{\dfrac{\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{8}{6}\cdot 6!}{10^{10}} + \dfrac{\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{3}\cdot 7^3}{10^{10}}}{\dfrac{\binom{10}{2}\binom{8}{2}\cdot 8^6}{10^{10}}} = \frac{\binom{8}{6}\cdot 6! + \binom{6}{3}\cdot 7^3}{8^6} = \frac{20{,}160 + 6{,}860}{262{,}144} = 0.1031$$

ג. עלינו לבדוק את קיום התנאי: $P(B\cap C \mid A) = P(B\mid A)P(C\mid A)$

אם המאורע A מתרחש, ייתכן שהמאורע B יתרחש, מכיוון שייתכן מצב שבו יותם יקבל 3 מדבקות מסוג X וכן 7 מדבקות נוספות שכולן שונות זו מזו וכן שונות מ- X. כמו כן, בהינתן שהמאורע A התרחש, אפשרי גם שהמאורע C יתרחש, שכן ייתכן שיותם יקבל 2 מדבקות מסוג Y, 2 מדבקות מסוג Z ו- 6 מדבקות נוספות שכולן שונות זו מזו וכן שונות מ- Y ומ- Z. לפיכך, $P(B\mid A)P(C\mid A) > 0$.

אולם, אם מתרחש המאורע A, לא ייתכן שהמאורע $B \cap C$ מתרחש, מכיוון שהתרחשות חיתוך זה לא מאפשרת קבלה של מדבקות משמונה סוגים לפחות. לפיכך, $P(B \cap C \mid A) = 0$, ומכאן שהתנאי אינו מתקיים והמאורעות B ו- C תלויים בתנאי A.

4. א. נסמן ב- A_i את המאורע שמתג i סגור, לכל $i = 1,2,3,4,5,6$, וב- B את המאורע שעובר זרם מ-A ל-B.

$$P(B^C) = P((A_1^C \cup A_2^C) \cap A_3^C \cap (A_4^C \cup (A_5^C \cap A_6^C)))$$

$$= P(A_1^C \cup A_2^C)P(A_3^C)P(A_4^C \cup (A_5^C \cap A_6^C))$$ [כל המתגים בלתי-תלויים זה בזה]

$$= [P(A_1^C) + P(A_2^C) - P(A_1^C \cap A_2^C)] \cdot P(A_3^C) \cdot [P(A_4^C) + P(A_5^C \cap A_6^C) - P(A_4^C \cap A_5^C \cap A_6^C)]$$

$$= [0.3 + 0.3 - 0.3^2] \cdot 0.2 \cdot [0.2 + 0.3^2 - 0.2 \cdot 0.3^2] = 0.027744$$

לכן:

$$P(B) = 1 - 0.027744 = 0.972256$$

ב. נתחיל בחישוב ההסתברות המותנית שמתג 4 פתוח, אם ידוע שעובר זרם מ-A ל-B.

$$P(A_4^C \mid B) = \frac{P((A_4^C \cap A_3) \cup (A_4^C \cap A_1 \cap A_2))}{0.972256}$$

$$= \frac{P(A_4^C \cap A_3) + P(A_4^C \cap A_1 \cap A_2) - P(A_4^C \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{0.972256}$$

$$= \frac{0.2(0.8 + 0.7^2 - 0.8 \cdot 0.7^2)}{0.972256} = \frac{0.1796}{0.972256} = 0.184725$$

ומכאן:

$$P(A_4 \mid B) = 1 - P(A_4^C \mid B) = 0.815275$$

ג.

$$P(A_3 \mid B) = \frac{P(A_3)}{0.972256} = \frac{0.8}{0.972256} = 0.82283$$

ד. נחשב את ההסתברות המותנית שעובר זרם אם ידוע שמתגים 1 ו- 3 פתוחים וגם לפחות אחד ממתגים 5 ו- 6 פתוחים.

$$P(B \mid A_1^C \cap A_3^C \cap (A_5^C \cup A_6^C)) = \frac{P(A_1^C \cap A_3^C \cap A_4 \cap \overbrace{((A_5^C \cap A_6) \cup (A_5 \cap A_6^C))}^{\text{מאורעות זרים}})}{P(A_1^C \cap A_3^C \cap (A_5^C \cup A_6^C))}$$

$$= \frac{P(A_1^C \cap A_3^C \cap A_4 \cap A_5^C \cap A_6) + P(A_1^C \cap A_3^C \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6^C)}{P(A_1^C)P(A_3^C)P(A_5^C \cup A_6^C)}$$

$$= \frac{\cancel{P(A_1^C)P(A_3^C)}P(A_4)[P(A_5^C)P(A_6) + P(A_5)P(A_6^C)]}{\cancel{P(A_1^C)P(A_3^C)}[1 - P(A_5 \cap A_6)]}$$ [כל המתגים בלתי- תלויים זה בזה]

$$= \frac{P(A_4)[P(A_5^C)P(A_6) + P(A_5)P(A_6^C)]}{1 - P(A_5)P(A_6)}$$

$$= \frac{0.8 \cdot 2 \cdot 0.7 \cdot 0.3}{1 - 0.7^2} = \frac{0.336}{0.51} = 0.6588$$

פתרונות לממ"ן 12 - 2018א - 20425

1. א. לפי נוסחת ההסתברות השלמה, נקבל כי :

$$P\{Y>2\}=0.4\cdot P\{X_A>2\}+0.6\cdot P\{X_B>2\}=0.4\cdot e^{-2\lambda_1}+0.6\cdot e^{-2\lambda_2}$$

ב. בדרך דומה לחישוב בסעיף הקודם נקבל כי לכל $y>0$ מתקיים :

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=1-0.4\cdot e^{-\lambda_1 y}-0.6\cdot e^{-\lambda_2 y}$$

כלומר, לאחר גזירה נקבל : $f_Y(y)=0.4\lambda_1\cdot e^{-\lambda_1 y}+0.6\lambda_2\cdot e^{-\lambda_2 y}\qquad,\qquad y>0$

ג1. $$E[Y]=0.4\underbrace{\int_0^\infty \lambda_1 y\cdot e^{-\lambda_1 y}dy}_{=E[X_A]}+0.6\underbrace{\int_0^\infty \lambda_2 y\cdot e^{-\lambda_2 y}dy}_{=E[X_B]}=0.4E[X_A]+0.6E[X_B]=\tfrac{0.4}{\lambda_1}+\tfrac{0.6}{\lambda_2}$$

לפיכך, הטענה הראשונה נכונה.

ג2. $$E[Y^2]=0.4\underbrace{\int_0^\infty \lambda_1 y^2\cdot e^{-\lambda_1 y}dy}_{=E[X_A^2]}+0.6\underbrace{\int_0^\infty \lambda_2 y^2\cdot e^{-\lambda_2 y}dy}_{=E[X_B^2]}=0.4\cdot\tfrac{2}{\lambda_1^2}+0.6\cdot\tfrac{2}{\lambda_2^2}=\tfrac{0.8}{\lambda_1^2}+\tfrac{1.2}{\lambda_2^2}$$

$$\text{Var}(Y)=E[Y^2]-(E[Y])^2=\tfrac{0.8}{\lambda_1^2}+\tfrac{1.2}{\lambda_2^2}-\left(\tfrac{0.4}{\lambda_1}+\tfrac{0.6}{\lambda_2}\right)^2=\tfrac{0.64}{\lambda_1^2}+\tfrac{0.84}{\lambda_2^2}-\tfrac{0.48}{\lambda_1\lambda_2}$$

ואילו : $0.4\text{Var}(X_A)+0.6\text{Var}(X_B)=\tfrac{0.4}{\lambda_1^2}+\tfrac{0.6}{\lambda_2^2}$

עתה : $$\text{Var}(Y)-0.4\text{Var}(X_A)-0.6\text{Var}(X_B)=\tfrac{0.64}{\lambda_1^2}+\tfrac{0.84}{\lambda_2^2}-\tfrac{0.48}{\lambda_1\lambda_2}-\tfrac{0.4}{\lambda_1^2}-\tfrac{0.6}{\lambda_2^2}$$

$$=\tfrac{0.24}{\lambda_1^2}+\tfrac{0.24}{\lambda_2^2}-\tfrac{0.48}{\lambda_1\lambda_2}=0.24\left(\tfrac{1}{\lambda_1}-\tfrac{1}{\lambda_2}\right)^2\ge 0$$

לפיכך, הטענה אינה נכונה. השוויון אינו מתקיים כאשר $\lambda_1\ne\lambda_2$, אלא רק כאשר $\lambda_1=\lambda_2$.

2. א. $$\int_1^\infty f_X(x)\,dx=\int_1^\infty \frac{4k^4}{x^5}dx=\frac{4k^4}{-4x^4}\bigg|_1^\infty=k^4=1\qquad\Rightarrow\qquad k=\pm1$$

ב. $$E[X]=\int_1^\infty x\,f_X(x)\,dx=\int_1^\infty\frac{4x}{x^5}dx=\int_1^\infty\frac{4}{x^4}dx=\frac{4}{-3x^3}\bigg|_1^\infty=\frac{4}{3}$$

ג. לכל $x\ge1$ מתקיים : $$F_X(x)=\int_1^x f_X(t)\,dt=\int_1^x\frac{4}{t^5}dt=\frac{4}{-4t^4}\bigg|_1^x=1-\frac{1}{x^4}$$

לכן : $$F_X(x)=\begin{cases}0 & ,\quad x<1\\ 1-\dfrac{1}{x^4} & ,\quad x\ge1\end{cases}$$

ד. $$E[X^3]=\int_1^\infty x^3 f_X(x)\,dx=\int_1^\infty\frac{4x^3}{x^5}dx=\int_1^\infty\frac{4}{x^2}dx=\frac{4}{-x}\bigg|_1^\infty=4$$

לכן : $E[2X^3-4]=2E[X^3]-4=2\cdot4-4=4$

3. א. נניח כי X הוא משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 4. מתקיים: $f_X(x) = 4 \cdot e^{-4x} \quad , \quad x > 0$

נתבונן כעת על המשתנה המקרי $X+1$. מתקיים: $P\{X+1 \le y\} = P\{X \le y-1\} \quad , \quad y > 1$

ולכן: $f_{X+1}(y) = f_X(y-1) = 4 \cdot e^{-4(y-1)} \quad , \quad y > 1$

ומכאן כי $k = 4$.

ב. בסימוני הסעיף הקודם, קיבלנו כי $Y = X+1$. לפיכך: $E[Y] = E[X+1] = E[X]+1 = 0.25+1 = 1.25$

4. א. נסמן ב- X את הקוטר (בס"מ) של חישוק מקרי; $X \sim N(\mu, 1.1^2)$.

לפי הנתון בשאלה מתקיים השוויון: $P\{X > 31.111\} = 0.1562$

ומכאן שמתקיים: $P\{X \le 31.111\} = \Phi\left(\frac{31.111-\mu}{1.1}\right) = 1 - 0.1562 = 0.8438 = \Phi(1.01)$

הסבר:

z	0.00	0.01	0.02	· · ·
⋮				
1.0		$\Phi(1.01) = \mathbf{0.8438}$		
⋮				

לכן: $31.111 - \mu = 1.1 \cdot 1.01 = 1.111 \quad \Rightarrow \quad \mu = 30$

ב. $P\{X > 29.2\} = 1 - \Phi\left(\frac{29.2-30}{1.1}\right) = 1 - \Phi(-0.7273) = \Phi(0.72\underline{73})$

$$= \Phi(0.72) + 0.73 \cdot [\Phi(0.73) - \Phi(0.72)] = 0.7642 + 0.\underline{73} \cdot [\underline{\underline{0.7673 - 0.7642}}] = 0.7665$$

מטבלה 5.1 (עמ' 112 במדריך):
$\Phi(0.72) = 0.7642$
$\Rightarrow \; 0.7673 - 0.7642 = \underline{\underline{0.0031}}$
$\Phi(0.73) = 0.7673$
$\Phi(0.72\underline{73}) = 0.7642 + 0.\underline{73} \cdot \underline{\underline{0.0031}} = 0.7665$

ג. $P\{30.8 \le X \le 31.2\} = \Phi\left(\frac{31.2-30}{1.1}\right) - \Phi\left(\frac{30.8-30}{1.1}\right)$

$$= \Phi(1.091) - \Phi(0.7273) = 0.8623 - 0.7665 = 0.0958$$

מטבלה 5.1 (עמ' 112 במדריך):

$\Phi(0.72) = 0.7642$	$\Phi(1.09) = 0.8621$
$\Rightarrow \; 0.7673 - 0.7642 = \underline{\underline{0.0031}}$	$\Rightarrow \; 0.8643 - 0.8621 = \underline{\underline{0.0022}}$
$\Phi(0.73) = 0.7673$	$\Phi(1.10) = 0.8643$
$\Phi(0.72\underline{73}) = 0.7642 + 0.\underline{73} \cdot \underline{\underline{0.0031}} = 0.7667$	$\Phi(1.09\underline{1}) = 0.8621 + 0.\underline{1} \cdot \underline{\underline{0.0022}} = 0.8623$

לכן, ההסתברות שיצטרכו למדוד בדיוק 10 חישוקים עד שיימצא את החישוק המתאים, שקוטרו בין 30.8 ס"מ ל-31.2 ס"מ, היא: $(1-0.0958)^9 \cdot 0.0958 = 0.0387$

ד. נתון שהקוטר של כל 6 החישוקים גדול מ-30.5 ס"מ, לכן ההסתברות שהקוטר של כל אחד מהם יהיה בין 30.8 ס"מ ל-31.2 ס"מ היא ההסתברות המותנית:

$$P\{30.8 < X < 31.2 \mid X > 30.5\} = \frac{P\{30.8 < X < 31.2\}}{P\{X > 30.5\}} = \frac{\Phi(1.091) - \Phi(0.7273)}{1 - \Phi(0.4545)} = \frac{0.0958}{0.3248} = 0.295$$

כאשר:
$$P\{X > 30.5\} = 1 - \Phi\left(\tfrac{30.5-30}{1.1}\right) = 1 - \Phi(0.4545) = 1 - 0.6752 = 0.3248$$

עתה, בהינתן שהקוטר של כל 6 החישוקים גדול מ-30.5 ס"מ, מספר החישוקים (מבין ה-6) שקוטרם בתחום הנתון הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 6 ו-0.295. נסמן את המשתנה הזה ב-Y ונקבל:

$$P\{Y \ge 2\} = 1 - P\{Y \le 1\} = 1 - (1-0.295)^6 - 6 \cdot 0.295 \cdot (1-0.295)^5 = 0.569$$

פתרונות לממ"ן 13 - 2018א - 20425

1. א. נסמן ב- X_j את התוצאה שיותם מקבל ביום ה-j-י של התחרות, לכל $j = 1,2,3,4$. מנתוני הבעיה, נובע כי כל ה-X_j-ים בלתי-תלויים זה בזה ולכל אחד מהם יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר 0.3.

כעת, לכל $i = 1,2,...$, המאורע $\{Y \le i\}$ מתרחש, אם התוצאה הטובה ביותר של יותם בארבעת ימי-התחרות (שהיא התוצאה הנמוכה ביותר שהוא מקבל) אינה עולה על i, כלומר, קטנה או שווה ל-i.
לפיכך, עלינו לחשב את ההסתברות שיש **לפחות** יום אחד (מתוך הארבעה) שבו הוא מקבל תוצאה קטנה או שווה ל- i. במקרה זה, קל יותר לחשב את ההסתברות של המאורע המשלים, **שבכל** ימי-התחרות יותם מקבל תוצאות גבוהות מ- i, וממנה למצוא את ההסתברות המבוקשת. ההסתברות שביום הראשון יותם יקבל תוצאה גבוהה מ- i היא:
$$P\{X_1 > i\} = 0.7^i$$

ולכן, ההסתברות שבכל אחד מימי-התחרות יותם מקבל תוצאה גבוהה מ- i היא:

$$P\{Y > i\} = P\left\{\min_{j=1,\ldots,4} X_j > i\right\} = P\left\{\bigcap_{j=1}^{4}\{X_j > i\}\right\} \underset{\text{בלתי-תלויים}}{\underset{\downarrow}{=}} \prod_{j=1}^{4} P\{X_j > i\} = (0.7^i)^4 \qquad , \qquad i = 1,2,...$$

וההסתברות שהתוצאה הטובה ביותר של יותם לא תעלה על i היא:
$$P\{Y \le i\} = 1 - 0.7^{4i}$$

ב. $$P\{Y = 4\} = P\{Y \le 4\} - P\{Y \le 3\} = (1 - 0.7^{4\cdot 4}) - (1 - 0.7^{4\cdot 3}) = 0.010518$$

דרך פתרון נוספת: ההתפלגות של המשתנה המקרי $Y = \min_{i=1,\ldots,4} X_i$, כאשר ה-$X_i$-ים הם משתנים מקריים
בלתי-תלויים שלכולם התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר 0.3, היא גיאומטרית עם הפרמטר $1 - 0.7^4 = 0.7599$. (ראה תרגיל 10ב בקובץ התרגילים לפרק 6, שנמצא באתר הקורס). לכן:

$$P\{Y = 4\} = P\left\{\min_{i=1,\ldots,4} X_i = 4\right\} = (\underbrace{0.7^4}_{=0.0138})^3(\underbrace{1 - 0.7^4}_{=0.7599}) = 0.010518$$

ג. ההסתברות לקבל את התוצאה 1 ביום מסוים היא 0.3 וההסתברות לקבל את התוצאה 3 ביום מסוים היא $0.7^2 \cdot 0.3 = 0.147$. עתה, נשתמש בפונקציית ההסתברות המולטינומית (דוגמה 1ג בעמוד 136 במדריך), כדי למצוא את ההסתברות המבוקשת. נקבל:
$$\tfrac{4!}{2!2!} \cdot 0.3^2 \cdot 0.147^2 = 0.01167$$

ד. לפי נתוני הבעיה, כל ה-X_i-ים בלתי-תלויים זה בזה ושווי-התפלגות, ולכן כל המאורעות מהצורה $X_{i_1} < X_{i_2} < X_{i_3} < X_{i_4}$ מתרחשים בהסתברויות שוות. למשל, המאורע $X_1 < X_2 < X_3 < X_4$ והמאורע $X_3 < X_1 < X_2 < X_4$ מתרחשים באותה הסתברות. כעת, אם מניחים שבוודאות אחד ממאורעות אלו מתרחש, ויש !4 מאורעות שונים מהצורה הזאת, שבשניים מהם מתקיים $X_{i_1} = X_2$ ו- $X_{i_4} = X_3$, אז ההסתברות המבוקשת היא בהכרח $\frac{2}{4!} = \frac{1}{12}$.

2. א. בהטלה של שתי קוביות תקינות מתקיים: $P\{X=Y\}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

ומכאן, הואיל וקיימת סימטריה בתנאי הניסוי בין שתי הקוביות, מתקיים:

$$P(A)=P\{X<Y\}=P\{X>Y\}=\frac{1-\frac{1}{6}}{2}=\frac{5}{12}$$

כמו כן:

$$P(B)=P\{|X-Y|\le 2\}=1-P\{(1,6),(6,1),(1,5),(5,1),(2,6),(6,2),(1,4),(4,1),(2,5),(5,2),(3,6),(6,3)\}=1-\frac{12}{36}=\frac{2}{3}$$

ב. לכל $i=1,\ldots,5$ מתקיים: $P\{X=i\mid X<Y\}=\frac{P\{X=i<Y\}}{P\{X<Y\}}=\frac{P\{X=i\}P\{Y>i\}}{P\{X<Y\}}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{6-i}{6}}{\frac{5}{12}}=\frac{6-i}{15}$

לפיכך: $E[X\mid A]=\sum_{i=1}^{5}iP\{X=i\mid X<Y\}=\sum_{i=1}^{5}i\cdot\frac{6-i}{15}=\frac{6}{15}\cdot\frac{5\cdot 6}{2}-\frac{1}{15}\cdot\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6}=6-\frac{11}{3}=2\frac{1}{3}$

ג. בהינתן המאורע $B=\{|X-Y|\le 2\}$, ההפרש המוחלט בין X ל-Y יכול לקבל את הערכים 0, 1 ו-2,

לפיכך:

$$P\{|X-Y|=i \,\big|\, |X<Y|\le 2\}=\frac{P\{|X-Y|=i\}}{P(B)}=\begin{cases}\frac{6}{36}\Big/\frac{2}{3}=\frac{1}{4} & , \quad i=0\\ \frac{10}{36}\Big/\frac{2}{3}=\frac{5}{12} & , \quad i=1\\ \frac{8}{36}\Big/\frac{2}{3}=\frac{1}{3} & , \quad i=2\end{cases}$$

3. תחילה, נשים לב כי ל-X יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 50 ו-0.5, ול-Y יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 20 ו-0.5. כמו כן, $Y\le X$ כאשר $Y\le 20$.

א. המאורע $\{X=i\,,\,Y=j\}$ מתרחש אם ב-20 ההטלות הראשונות מקבלים j פעמים H וב-30 ההטלות האחרונות מקבלים $i-j$ פעמים H. כמו כן, מתקיים $j=0,1,\ldots,20$ ו- $i=j,j+1,\ldots,j+30$.

לכן: $P\{X=i,Y=j\}=\binom{20}{j}\binom{30}{i-j}\cdot 0.5^{50} \quad , \quad i=j,j+1,...,j+30 \quad ; \quad j=0,1,...,20$

ב. לכל $j=0,1,\ldots,20$ מתקיים:

$$P\{X=i\mid Y=j\}=\frac{P\{X=i,Y=j\}}{P\{Y=j\}}=\frac{\binom{20}{j}\binom{30}{i-j}\cdot 0.5^{50}}{\binom{20}{j}\cdot 0.5^{20}}=\binom{30}{i-j}\cdot 0.5^{30} \quad , \quad i=j,j+1,...,j+30$$

ההתפלגות המותנית שהתקבלה היא הזזה ב-j של התפלגות בינומית עם הפרמטרים 30 ו-0.5.

ג. לכל $i=0,1,\ldots,50$ מתקיים:

$$P\{Y=j\mid X=i\}=\frac{P\{X=i,Y=j\}}{P\{X=i\}}=\frac{\binom{20}{j}\binom{30}{i-j}\cdot 0.5^{50}}{\binom{50}{i}\cdot 0.5^{50}}=\frac{\binom{20}{j}\binom{30}{i-j}}{\binom{50}{i}} \quad , \quad j=\max\{0,i-30\},...,\min\{20,i\}$$

קיבלנו התפלגות היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N=50$, $m=20$ ו- $n=i$.

ד. קל לראות, שהמשתנים המקריים תלויים. תנאי אי-התלות אינו מתקיים.

למשל: $P\{X=0,Y=1\}=0$

בעוד ש: $P\{X=0\}P\{Y=1\}=0.5^{50}\cdot 20\cdot 0.5^{20}>0$

ה. המאורע $\{X=Y\}$ מתרחש רק אם ב-30 ההטלות האחרונות לא התקבל אף H.

לפיכך: $P\{X=Y\}=0.5^{30}$

4. א. נפריד את המאורע, שהטעות השנייה של הקלדנית נמצאת בעמוד 6, לשני מקרים. ייתכן שיש לקלדנית טעות אחת בעמודים 1-5 והטעות השנייה שלה נמצאת בעמוד 6, וייתכן ששתי הטעויות הראשונות שלה הן בעמוד 6.

נסמן ב- X את מספר הטעויות שהקלדנית עושה ב-5 העמודים הראשונים וב- Y את מספר הטעויות של הקלדנית בעמוד 6. ההתפלגות של המשתנה המקרי X היא פואסונית עם הפרמטר 5 (מכיוון ש-X הוא סכום של 5 משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים), וההתפלגות של המשתנה המקרי Y היא פואסונית עם הפרמטר 1, והוא בלתי-תלוי במשתנה המקרי X. מכאן נקבל:

$$P\{X=1,Y\geq 1\}+P\{X=0\,,Y\geq 2\}=P\{X=1\}P\{Y\geq 1\}+P\{X=0\}P\{Y\geq 2\}$$

$$=5e^{-5}(1-e^{-1})+e^{-5}(1-e^{-1}-e^{-1})=0.0231$$

ב. נסמן ב- W את מספר טעויות ההקלדה בשני העמודים הראשונים, ונחשב את ההסתברות שיש בהם בדיוק 4 טעויות-הקלדה:
$$P\{W=4\}=e^{-2}\tfrac{2^4}{4!}=\tfrac{2}{3}e^{-2}=0.0902235$$

נסמן ב- X_1 את מספר טעויות ההקלדה בעמוד הראשון וב- X_2 את מספר טעויות ההקלדה בעמוד השני, ונחשב את ההסתברות שיש בעמוד הראשון בדיוק טעות אחת מתוך ה-4 **שידוע** שקיימות בשני העמודים הראשונים. נקבל:

$$P\{X_1=1\mid W=4\}=\frac{P\{X_1=1,X_2=3\}}{P\{W=4\}}=\frac{P\{X_1=1\}P\{X_2=3\}}{P\{W=4\}}$$

$$=\frac{e^{-1}\frac{1^1}{1!}\cdot e^{-1}\frac{1^3}{3!}}{e^{-2}\frac{2^4}{4!}}=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=0.25$$

יכולנו להגיע לתוצאה זו ישירות ממסקנת דוגמה 4ב (עמודים 145 - 146 במדריך הלמידה), שהרי X_1 ו- X_2 הם משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים. במקרה כזה, ההתפלגות המותנית של X_1 בתנאי $W=X_1+X_2=4$ היא בינומית עם הפרמטרים 4 ו- $\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$.

ג. מספר הטעויות שהקלדנית עושה בהקלדת 40 העמודים הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 40. לכן, מספר הטעויות שהקלדנית מוצאת בקריאת 40 העמודים שהקלידה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $40\cdot 0.8=32$ (ראה דוגמה 2ב במדריך הלמידה, עמודים 138 - 140). מכאן, ששונות מספר הטעויות שהיא מוצאת בקריאה, שווה לפרמטר ההתפלגות האחרונה, דהיינו ל-32.

פתרונות לממ"ן 14 - 2018א - 20425

1. א. $E[X]=\sum_{i=1}^{10}x_i \Big/ 10=14.5$

לכן: $E[Y]=E[E[Y\mid X]]=E[\frac{1}{3}X]=\frac{1}{3}E[X]=\frac{1}{3}\cdot 14.5=4\frac{5}{6}$

ב. $\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\sum_{i=1}^{10}x_i^2 \Big/ 10-14.5^2=218.5-210.25=8.25$

אפשר גם למצוא את השונות של X בעזרת נוסחת השונות של ההתפלגות האחידה-בדידה.
המשתנה המקרי X הוא משתנה מקרי אחיד-בדיד המקבל 10 ערכים בלבד (בין x_1 לבין x_{10}). לפיכך, שונותו היא כשונות של משתנה מקרי אחיד-בדיד המקבל את הערכים 1, 2, ..., 10. (בין שני המשתנים הללו קיים קשר של הזזה, שאינו משפיע על ערך השונות). כלומר: $\mathrm{Var}(X)=\frac{n^2-1}{12}=\frac{10^2-1}{12}=8.25$

לפיכך: $\mathrm{Var}(Y)=E[\mathrm{Var}(Y\mid X)]+\mathrm{Var}(E[Y\mid X])=E[\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}X]+\mathrm{Var}(\frac{1}{3}X)$

$$=\frac{2}{9}E[X]+\frac{1}{9}\mathrm{Var}(X)=\frac{2}{9}\cdot 14.5+\frac{1}{9}\cdot 8.25=4\frac{5}{36}$$

ג. ידוע כי בהינתן $X=i$ ההתפלגות המותנית של Y היא בינומית עם הפרמטרים i ו- ⅓. לפיכך, ככל שהמשתנה המקרי X מקבל ערכים גבוהים יותר, צפוי כי גם המשתנה המקרי Y יקבל ערכים גבוהים יותר, ולהיפך. ומכאן, שאפשר לצפות, שערכו של מקדם המתאם יהיה חיובי.

ד. נחשב את ערכה של השונות המשותפת:

$$E[XY]=E[E[XY\mid X]]=E[XE[Y\mid X]]=E[\tfrac{1}{3}X^2]=\tfrac{1}{3}E[X^2]=\tfrac{1}{3}\cdot 218.5=72\tfrac{5}{6}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=72\tfrac{5}{6}-14\tfrac{1}{2}\cdot 4\tfrac{5}{6}=2.75$$

2. א. למציאת התוחלת של X, נגזור את הפונקציה יוצרת המומנטים של X לפי t ונציב בנגזרת את הערך 0.

נקבל: $\frac{d}{dt}[M_X(t)]=\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{1+e^{t-\theta}}{1+e^{-\theta}}\right)^{3n}\right]=3n\left(\frac{1+e^{t-\theta}}{1+e^{-\theta}}\right)^{3n-1}\cdot\frac{e^{t-\theta}}{1+e^{-\theta}}$

ולכן: $E[X]=\frac{d}{dt}[M_X(t)]\Big|_{t=0}=3n\left(\frac{1+e^{t-\theta}}{1+e^{-\theta}}\right)^{3n-1}\cdot\frac{e^{t-\theta}}{1+e^{-\theta}}\Big|_{t=0}=\frac{3ne^{-\theta}}{1+e^{-\theta}}$

ב. אם X הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $3n$ ו- $p=\frac{e^{-\theta}}{1+e^{-\theta}}$, אז הפונקציה יוצרת המומנטים שלו, לכל t, היא:

$$M_X(t)=(pe^t+1-p)^{3n}=\left(\frac{e^{-\theta}}{1+e^{-\theta}}\cdot e^t+1-\frac{e^{-\theta}}{1+e^{-\theta}}\right)^{3n}=\left(\frac{e^{t-\theta}}{1+e^{-\theta}}+\frac{1}{1+e^{-\theta}}\right)^{3n}=\left(\frac{1+e^{t-\theta}}{1+e^{-\theta}}\right)^{3n}$$

3. א. לכל $i = 1,\dots,10$ נגדיר את המשתנה המקרי X_i על-ידי מספר האריזות שארז יקנה לאחר שיהיו בידיו $i-1$ סוגים של מדבקות ועד שישיג לראשונה מדבקה מסוג חדש (שטרם יש בידיו).

נשים לב, שלפי הגדרה זו מתקיים כי $X_1 = 1$, ולכל $i = 2,\dots,10$, מתקיים $X_i \sim Geo(\frac{11-i}{10})$.

כמו כן, ה- X_i-ים בלתי-תלויים, ומספר האריזות שארז יקנה שווה לסכום $\sum_{i=1}^{10} X_i$.

לפיכך:
$$E\left[\sum_{i=1}^{10} X_i\right] = \sum_{i=1}^{10} E[X_i] = \sum_{i=1}^{10} \tfrac{10}{11-i} = 1 + \tfrac{10}{9} + \tfrac{10}{8} + \dots + \tfrac{10}{1} = 29.29$$

ב. נניח שאלון פותח את האריזות שקנה בזו אחר זו.

נגדיר:
$$X_i = \begin{cases} 1 & , \quad \text{באריזה } i \text{ התקבלה מדבקה מסוג ״חדש״} \\ 0 & , \quad \text{אחרת} \end{cases} \qquad \text{לכל } i = 1,\dots,15$$

ונקבל כי: $X = \sum_{i=1}^{15} X_i$ = מספר סוגי המדבקות שאלון יקבל

עתה, לכל $i = 1,\dots,15$ מתקיים:
$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \left(\tfrac{9}{10}\right)^{i-1}$$

לכן:
$$E[X] = \sum_{i=1}^{15} E[X_i] = \sum_{i=1}^{15} \left(\tfrac{9}{10}\right)^{i-1} = \frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{15}}{1-\frac{9}{10}} = 10\left[1-\left(\tfrac{9}{10}\right)^{15}\right] = 7.9411$$

4. א. נסמן ב- N את מספר הקונים המגיעים לסופרמרקט ביום ראשון ; $N \sim Po\,(1{,}000)$.

לפי נתוני הבעיה, X_i מסמן את מספר הבקבוקים שקונה i ממחזר, לכל $i = 1,2,\dots,N$, כאשר X_i מוגדר על-ידי $X_i = Y_i - 1$, עבור $Y_i \sim Geo\,(0.2)$. לכן, לכל $i = 1,2,\dots,N$ מתקיים:

$$E[X_i] = E[Y_i - 1] = E[Y_i] - 1 = \tfrac{1}{0.2} - 1 = 4$$

ומספר הבקבוקים שממוחזרים ביום ראשון, נתון באמצעות <u>הסכום המקרי</u> $\sum_{i=1}^{N} X_i$.

לפיכך, לפי דוגמה 4ד (עמודים 375-376 בספר הקורס) מקבלים:
$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1] = 1{,}000 \cdot 4 = 4{,}000$$

ב. לפי סימוני הסעיף הקודם ולפי תוצאת דוגמה 4יד (עמוד 386 בספר הקורס), נקבל כי:

$$\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{Var}(Y_i - 1) = \mathrm{Var}(Y_i) = \tfrac{0.8}{0.2^2} = 20 \qquad , \qquad i = 1,2,\dots,N$$

ומכאן:
$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\mathrm{Var}(N) = 1{,}000 \cdot 20 + 4^2 \cdot 1{,}000 = 36{,}000$$

ג. נשתמש כעת בסימוני סעיף א ובתוצאת דוגמה 6י (עמוד 399 בספר הקורס), ונקבל כי לכל $t < -\ln 0.8$ מתקיים:

$$M_{\sum_{i=1}^{N} X_i}(t) = E\left[\left(M_{X_1}(t)\right)^N\right] = E\left[\left(M_{Y_1-1}(t)\right)^N\right] = E\left[\left(e^{-t}M_{Y_1}(t)\right)^N\right]$$

$$= E\left[\left(e^{-t}\frac{0.2e^t}{1-0.8e^t}\right)^N\right] = E\left[\left(\frac{0.2}{1-0.8e^t}\right)^N\right] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-1{,}000} \cdot \frac{1{,}000^n}{n!} \cdot \left(\frac{0.2}{1-0.8e^t}\right)^n$$

$$= e^{-1{,}000}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{200}{1-0.8e^t}\right)^n = e^{-1{,}000} \cdot e^{200/(1-0.8e^t)} \qquad , \qquad t < -\ln 0.8$$

5. א1. נגדיר: $X_i = \begin{cases} 1 , & \text{לימין אישה } i \text{ עומדת אישה נוספת} \\ 0 , & \text{אחרת} \end{cases}$ לכל $i = 1,\ldots,14$.

ומתקיים: $X = \sum_{i=1}^{14} X_i$.

א2. כדי להגדיר סדרה אחרת של 18 אינדיקטורים, נניח שהמקומות במבנה המלבני ממוספרים – שורה אחר שורה, ובכל שורה משמאל לימין. כלומר, מקומות 4 - 1 הם בשורה הראשונה (מקום 1 משמאל ומקום 4 מימין), מקומות 8 - 5 הם בשורה השנייה (מקום 5 משמאל ומקום 8 מימין), וכך הלאה. עתה נגדיר את האינדיקטורים כך:

$Y_i = \begin{cases} 1 , & \text{במקומות } i \text{ ו- } i+1 \text{ עומדות נשים} \\ 0 , & \text{אחרת} \end{cases}$ לכל $i = 1,2,3,5,6,7,\ldots,21,22,23$.

בסדרה זו יש בסך-הכל 18 אינדיקטורים, וסכומם הוא X .

ב. נראה את חישוב התוחלת לפי כל אחת מהגדרות האינדיקטורים.

$$P\{X_i = 1\} = \underbrace{\tfrac{6}{24}}_{\text{עומדת במקום הכי ימני בשורה}} \cdot 0 + \underbrace{\tfrac{18}{24} \cdot \tfrac{13}{23}}_{\text{לא עומדת במקום הכי ימני בשורה}} = \tfrac{39}{92} \qquad \Rightarrow \qquad E[X] = 14 \cdot \tfrac{39}{92} = \tfrac{273}{46} = 5.9348$$

$$P\{Y_i = 1\} = \tfrac{14}{24} \cdot \tfrac{13}{23} = \tfrac{91}{276} \qquad \Rightarrow \qquad E[X] = 18 \cdot \tfrac{91}{276} = \tfrac{273}{46} = 5.9348$$

ג. גם את חישוב השונות נראה בשתי הדרכים:

דרך I: $\mathrm{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\} P\{X_i = 0\} = \tfrac{39}{92} \cdot \tfrac{53}{92} = \tfrac{2{,}067}{8{,}464}$

$$P\{X_i = 1, X_j = 1\} = \underbrace{\frac{\binom{24}{2} - \binom{18}{2}}{\binom{24}{2}}}_{\text{לפחות אחת מנשים } i \text{ ו- } j \text{ עומדת במקום הימני ביותר בשורה}} \cdot 0 + \underbrace{\frac{\binom{18}{2} - 12}{\binom{24}{2}} \cdot \tfrac{12}{22} \cdot \tfrac{11}{21}}_{i \text{ ו- } j \text{ לא עומדות במקומות סמוכים באותה השורה ואף אחת מהן לא עומדת במקום הימני ביותר בשורה}} + \underbrace{\frac{12}{\binom{24}{2}} \cdot \tfrac{12}{22}}_{i \text{ ו- } j \text{ עומדות במקומות סמוכים באותה השורה ואף אחת מהן לא עומדת במקום הימני ביותר בשורה}} = \tfrac{601}{3{,}542}$$

הסבר: יש בסך הכל $\binom{24}{2}$ אפשרויות לבחור 2 מקומות במבנה המלבני המתואר בשאלה. ב-$\binom{18}{2}$ מאפשרויות הבחירה האלו, אף אחד מ-2 המקומות הנבחרים אינו נמצא בטור הימני ביותר במלבן. כמו כן, יש 12 זוגות של מקומות סמוכים, שאף אחד מהם לא נמצא בטור הימני ביותר במלבן.

כעת: $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \tfrac{601}{3{,}542} - \left(\tfrac{39}{92}\right)^2 = -\tfrac{6{,}533}{651{,}728}$

ומכאן: $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{14} \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 14 \cdot \tfrac{2{,}067}{8{,}464} - 14 \cdot 13 \cdot \tfrac{6{,}533}{651{,}728} = 1.59456$

דרך II: $\mathrm{Var}(Y_i) = P\{Y_i = 1\} P\{Y_i = 0\} = \tfrac{91}{276} \cdot \tfrac{185}{276} = \tfrac{16{,}835}{76{,}176}$

$$P\{Y_i = 1, Y_j = 1\} = \begin{cases} \tfrac{14}{24} \cdot \tfrac{13}{23} \cdot \tfrac{12}{22} = \tfrac{91}{506} , & |i - j| = 1 \\ \tfrac{14}{24} \cdot \tfrac{13}{23} \cdot \tfrac{12}{22} \cdot \tfrac{11}{21} = \tfrac{91}{966} , & |i - j| > 1 \end{cases}$$

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \begin{cases} \frac{91}{506} - \left(\frac{91}{276}\right)^2 = 0.071133 & , \quad |i-j| = 1 \\ \frac{91}{966} - \left(\frac{91}{276}\right)^2 = -0.0145059 & , \quad |i-j| > 1 \end{cases}$$

ומכאן:

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{18} \text{Var}(Y_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(Y_i, Y_j)$$

$$= 18 \cdot \tfrac{16{,}835}{76{,}176} + 2 \cdot 12 \cdot 0.071133 - 2 \cdot \left[\binom{18}{2} - 12\right] \cdot 0.0145059 = 1.59456$$