סמסטר 2011ב – פתרון ממ"ן 11

פתרון שאלה 1

א'

$sum \leftarrow 0$
$i \leftarrow 0$
while $3i < n$
  do $sum \leftarrow sum + i^2$
    $i \leftarrow i+1$

הלולאה מתבצעת $\lceil n/3 \rceil$ פעמים. זמן הריצה: $\lceil n/3 \rceil = \Theta(n)$.

ב'

$sum \leftarrow 0$
$i \leftarrow 0$
while $4i < n$
  do $j \leftarrow 0$
    while $2j < i$
      do $sum \leftarrow sum + 3i + j$
        $j \leftarrow j+1$
    $i \leftarrow i+1$

הלולאה החיצונית מתבצעת $\lceil n/4 \rceil$ פעמים; הלולאה הפנימית $\lceil i/2 \rceil$ פעמים. זמן הריצה:

$$\sum_{i=0}^{\lceil n/4 \rceil -1} \lceil i/2 \rceil = 2\sum_{j=0}^{\lceil n/8 \rceil -1} j = \lceil n/8 \rceil \cdot \left(\lceil n/8 \rceil - 1\right) = \Theta\left(n^2\right)$$

ג'

$sum \leftarrow 0$
$i \leftarrow 0$
while $5i < n$
  do $j \leftarrow 0$
    while $j < i^2$
      do $sum \leftarrow sum + ij$
        $j \leftarrow j+1$
    $i \leftarrow i+1$

הלולאה החיצונית מתבצעת $\lceil n/5 \rceil$ פעמים; הלולאה הפנימית i^2 פעמים. זמן הריצה:

$$\sum_{i=0}^{\lceil n/5 \rceil -1} i^2 = \frac{1}{6}\lceil n/5 \rceil \cdot \left(\lceil n/5 \rceil - 1\right) \cdot \left(2\lceil n/5 \rceil - 1\right) = \Theta\left(n^3\right)$$

ד'

$sum \leftarrow 0$
$i \leftarrow 0$
while $i < n$
  do $j \leftarrow 0,\ p \leftarrow 1$
    while $p < i$
      do $sum \leftarrow sum + 1$
        $j \leftarrow j + 1$
        $p \leftarrow 2p$
    $i \leftarrow i + 1$

הלולאה החיצונית מתבצעת n פעמים; הלולאה הפנימית $\lfloor \lg i \rfloor$ פעמים. זמן הריצה:

$$\Theta\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lfloor \lg i \rfloor\right) = \Theta\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lg i\right) = \Theta\left(\lg\left((n-1)!\right)\right) = \Theta\left(n \cdot \lg n\right)$$

פתרון שאלה 2

האלגוריתם דומה לאלגוריתם חיפוש בינרי (הגרסה הרקורסיבית):

BINARY-EQ-SEARCH(T, p, r)
  if $p > r$
    then return -1
  $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
  if $A[q] > q$
    then return BINARY-EQ-SEARCH$(T, p, q-1)$
  else if $A[q] < q$
    then return BINARY-EQ-SEARCH$(T, q+1, r)$
  else return q

קריאת ההפעלה:

RECURSIVE-BINARY-EQ-SEARCH(T)
  BINARY-EQ-SEARCH$(T, 1, length[T])$

נכונות האלגוריתם נובעת מהעובדה שאיברי המערך שונים זה מזה. לכן, אם $A[q] > q$, אזי $A[k] > k$ לכל $k > q$; אם $A[q] < q$, אזי $A[k] < k$ לכל $k < q$.

פתרון שאלה 3

נניח ללא הגבלת הכלליות כי $m < n$, כלומר $\min(m,n) = m$. ממיינים את הרשימה S באמצעות מיון-מיזוג, בזמן $\Theta(m \cdot \lg m)$. אחר-כך, עבור כל איבר $y \in T$, מחפשים את הערך $x = z - y$ ברשימה S, בעזרת האלגוריתם חיפוש בינרי; זמן כל החיפושים $\Theta(n \cdot \lg m)$.

זמן הריצה הכולל: $\Theta(m \lg m) + \Theta(n \lg m) = \Theta((m+n) \cdot \lg m) = \Theta((m+n) \cdot \lg(\min(m,n)))$.

פתרון שאלה 4

נשים לב כי $n \cdot \lg\left(n^2\right) = 2n \cdot \lg n = \Theta(n \cdot \lg n)$.

אחרי השוואת כל הפונקציות, מתקבל הסדר הבא:

$$2/n;\ 37;\ \sqrt{n};\ n;\ n \cdot \lg\lg n;\ \{n \cdot \lg n,\ n \cdot \lg\left(n^2\right)\};\ n \cdot \lg^2 n;\ n^{3/2};\ n^2;\ n^2 \lg n;\ n^3;\ 2^{n/2};\ 2^n$$

פתרון שאלה 5

שמורת הלולאה החיצונית (מתקיימת לפני כל איטרציה של הלולאה הראשית):

התת-מערך $A[1..left-1]$ הוא ממוין ומכיל את $left-1$ האיברים הקטנים ביותר;

התת-מערך $A[right+1..n]$ הוא ממוין ומכיל את $n - right$ האיברים הגדולים ביותר.

<u>אתחול</u>: בהתחלה $left = 1$ ו- $right = n$ ולכן הטענה מתקיימת באופן ריק.

<u>תחזוקה</u>: בכל איטרציה של הלולאה הראשית, האיבר המינימלי בתת-מערך $A[left..right]$ מוצב ב- $A[left]$ והאיבר המקסימלי בתת-מערך $A[left..right]$ מוצב ב- $A[right]$ (זה נובע מהנכונות של שמורת הלולאה הפנימית).

בשורות 21-22 מעודכנים הערכים של $left$ ו- $right$ ולכן הטענה נשארת נכונה.

<u>סיום</u>: הלולאה מסתיימת כאשר $left \geq right$. יש שתי אפשרויות:

אם n זוגי אז $left = right + 1$. כלומר, המערך מורכב משני חלקים $A[1..right]$ ו- $A[right+1..n]$, ומנכונות הטענה נובע שכל המערך ממוין.

אם n אי-זוגי אז $left = right$. כלומר, המערך מורכב משלושה חלקים $A[1..left-1]$, $A[left]$ ו- $A[left+1..n]$, ומנכונות הטענה נובע שכל המערך ממוין.

שמורת הלולאה הפנימית (מתקיימת לפני האיטרציה ה- k של הלולאה הפנימית):

$A[\min]$ הוא האיבר המינימלי בתת-מערך $A[left..left+k-1]$;

$A[\max]$ הוא האיבר המקסימלי בתת-מערך $A[left..left+k-1]$.

ההוכחה ששמורת הלולאה הפנימית מתקיימת (אתחול, תחזוקה וסיום) מושארת כתרגיל לקורא.