# מטלת מחשב (ממ"ח) 01

**הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה** | **חומר הלימוד למטלה: החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"**

**מספר השאלות: 13** | **משקל המטלה: נקודה אחת**

**סמסטר: 2019ג** | **מועד הגשה: 15.7.2019**

**את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א**
**בכתובת** http://www.openu.ac.il/sheilta/
**הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!**

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות. סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה, ב - אם רק טענה 2 נכונה,

ג - אם שתי הטענות נכונות, ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

**שאלה 1**

1. האמירה **המספרים 6, 7 הם מספרים זוגיים** היא פסוק.
2. הביטוי המתמטי $1+2+3+4$ הוא פסוק.

**שאלה 2**

1. **שלילת** הפסוק **הכד נמצא על השולחן** היא הפסוק **הכד נמצא מתחת לשולחן**
2. **שלילת** הפסוק איציק שפך את המים מהכד היא הפסוק איציק מילא את הכד במים

**שאלה 3**

1. הפסוק $1+1=2$ **וגם** $2+3>5$ הוא אמת.
2. הפסוק $1+1=2$ **או** $3+3>2$ הוא אמת.

**שאלה 4**

1. הפסוק **אם** $3=2$ **אז** $1+1=2$ הוא אמת.
2. הפסוק **אם** $3=2$ **אז** $10=2$ הוא אמת.

**שאלה 5**

1. לוח האמת של הפסוק הפורמלי $(p\to q)\vee(r\to q)$ הוא:

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p\to q)\vee(r\to q)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | T | F | T |
| T | F | T | F |
| T | F | F | T |
| F | T | T | T |
| F | T | F | T |
| F | F | T | T |
| F | F | F | T |

2. הפסוק הפורמלי $(\neg p)\wedge\neg(p\to q)$ הוא סתירה.

**שאלה 6**

1. הפסוק הפורמלי $\neg(p \to q)$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $p \wedge \neg q$ .

2. הפסוק הפורמלי $p \leftrightarrow q$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $(p \wedge q) \vee \big((\neg p) \wedge (\neg q)\big)$ .

**שאלה 7**

1. $\neg\big((p \vee q) \wedge r\big)$ שקול טאוטולוגית ל- $\big((\neg p) \wedge (\neg q)\big) \vee \neg r$ .

2. $p \wedge \neg(p \wedge q)$ שקול טאוטולוגית ל- $p \wedge \neg q$ .

**שאלה 8**

1. **שלילת** הפסוק **האוכל היה חם וטעים**

   שקולה לפסוק **האוכל לא היה חם והאוכל לא היה טעים**.

2. **שלילת** הפסוק **רצחתָ וגם ירשתָ** שקולה לפסוק **לא רצחתָ או לא ירשתָ**

**שאלה 9**

1. מתוך הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p$ נובע טאוטולוגית הפסוק $r$ .

2. מתוך הפסוק $r$ נובע טאוטולוגית הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p$ .

**שאלה 10**

1. את הפסוק "הריבוע של מספר לעולם אינו קטן מ- 0"

   אפשר לרשום כך: $\forall x \neg (x^2 < 0)$ .

2. את הפסוק "קיים מספר גדול מ- 0 שהריבוע שלו הוא 9 "

   אפשר לרשום כך: $\big(\exists x (x > 0)\big) \wedge \big(\exists x (x^2 = 9)\big)$ .

**שאלה 11**

נתבונן בפסוק: **לכל מספר הגדול/שווה 0 , קיים מספר שאם נעלה אותו בריבוע נקבל את המספר המקורי.** ניתן להצרין פסוק זה כך:

1. $\big(\forall x\ (x \geq 0)\big) \to \big(\exists y\ (y^2 = x)\big)$

2. $\forall x\big(x \geq 0 \to \exists y\ (y^2 = x)\big)$

**שאלה 12**

את **שלילת** הפסוק **לכל** $x$ **קיים** $y$ **שהוא השורש הריבועי של** $x$ ניתן לנסח כך:

1. **קיים** x **כך שקיים** y **שאינו השורש הריבועי של** x .

2. **לכל** $x$ **קיים** $y$ **שאינו השורש הריבועי של** $x$ .

**שאלה 13**

נתבונן בטענה:

$A$: **לכל סנדלר קיים אדם, שכל הנעלים שלו עברו תיקון אצל הסנדלר הזה.**

טענה השקולה **לשלילת** $A$ היא:

1. קיים סנדלר כך שלכל אדם יש לפחות נעל אחת שלא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

2. קיים סנדלר שמעולם לא תיקן שתי נעלים של אותו אדם.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 11

**קורס: 20476 מתמטיקה בדידה** | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 1**

**מספר השאלות: 4** | **משקל המטלה: 3 נקודות**

**סמסטר: 2019ג** | **מועד הגשה: 21.7.2019**

**מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

**שאלה 1** (24 נק')

לכל אחת מהטענות הבאות קבעו אם היא נכונה או לא.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $2 \in \{\{1\},\{2\}\}$ ב. $\{2\} \in \{\{1\},\{2\}\}$ ג. $\{2,3\} \subseteq \{1,\{2,3\}\}$ ד. $\varnothing \subseteq \{1,\{2\}\}$

ה. $\{\varnothing\} \subseteq \{\{1\}\}$ ו. $\{1,2\} \subseteq \{\mathbf{N}\}$ ז. $|\{1,\mathbf{N}\}| = |\{1,\varnothing\}|$ ח. $\{1,\{2\}\} \cap \mathcal{P}(\{1,2\}) \neq \varnothing$

**שאלה 2** (24 נק')

יהיו $A,B,C$ קבוצות. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (B \cap C)$.

ב. אם $\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ אז $C = A$ או $C = B$.

ג. אם $A,B$ קבוצות סופיות ואם $|\mathcal{P}(A)| = 2 \cdot |\mathcal{P}(A \setminus B)|$ אז $|A \cap B| = 1$.

**שאלה 3** (24 נק')

יהיו $A,B,C$ קבוצות חלקיות לקבוצה אוניברסלית $U$. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $A \subset B$ אז $A \cup B^c \neq U$.

ב. אם $A^c \Delta B = B^c \Delta C$ אז $A = C$.

ג. אם $A \cap B \subseteq A \Delta B \Delta C$ אז $A \cap B \subseteq C$.

**שאלה 4** (28 נק')

בשאלה זו, קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbf{N}$ היא הקבוצה האוניברסלית.

לכל $k \in \mathbf{N}$ נסמן $A_k = \{0k, 1k, 2k, 3k, \ldots\} = \{nk \mid n \in \mathbf{N}\}$.

בכל אחד מן הסעיפים הבאים, מיצאו מספר טבעי $k$ כך שהקבוצה באותו סעיף תהיה שווה ל- $A_k$. נמקו טענותיכם.

א. $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$ ב. $\bigcap_{k=1}^{5} A_k$ ג. $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ ד. $A_6 \cup \{x+3 \mid x \in A_6\}$

# מטלת מחשב (ממ"ח) 02

**קורס: 20476 מתמטיקה בדידה** | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 2,1**

**מספר השאלות: 20** | **משקל המטלה: 2 נקודות**

**סמסטר: 2019ג** | **מועד הגשה: 26.7.2019**

**את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א**
**בכתובת** http://www.openu.ac.il/sheilta/
**הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!**

**בכל שאלה במטלה זו מופיעה טענה אחת. סמנו:**

**א - אם הטענה נכונה** **ב - אם הטענה לא נכונה**

במטלה זו $A,B,C$ הן קבוצות, $R,S$ הם יחסים והאות $n$ מייצגת מספר טבעי

**שאלה 1**

$\{2,3\} \cap \{\{2\},\{3\}\} = \{\{2\},3\} \cap \{2,\{3\}\}$

**שאלה 2**

אם $A \cup B = A \cup C$ אז $B = C$

**שאלה 3**

אם $A \subseteq B \cup C$ אז $A \subseteq B$ או $A \subseteq C$

**שאלה 4**

אם $A,B$ קבוצות סופיות זרות אז $|\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)| = 2^{|A|} + 2^{|B|}$

**שאלה 5**

$A \subseteq \mathcal{P}(A)$

**שאלה 6**

אם $A \Delta B = A \setminus B$ אז $B \subseteq A$

**שאלה 7**

אם $x \in A \Delta B \Delta C$ אז $x \notin A \cap B$

**שאלה 8**

אם $x \notin A^c \cap B^c$ אז $x \in A \cap B$

**שאלה 9**

אם $A \subset B \times C$ אז $B \neq \varnothing$ וגם $C \neq \varnothing$

**שאלה 10**

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right)$$

**שאלה 11**

אם כל איבר של $A$ הוא זוג סדור אז קיימות קבוצת $B,C$ כך ש- $A = B \times C$

**שאלה 12**

אם $R$ יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי אז $R^2 = R$ .

**שאלה 13**

אם יחס $R$ מקיים $R^2 = R$ אז $R$ הוא יחס טרנזיטיבי.

**שאלה 14**

אם $R \cup S$ יחס אנטי-סימטרי אז גם $R,S$ הם יחסים אנטי-סימטריים

**שאלה 15**

מספר יחסי השקילות השונים שניתן להגדיר על הקבוצה $\{1,2,3\}$ קטן ממספר יחסי הסדר המלא שניתן להגדיר על קבוצה זו.

**שאלה 16**

כל יחס רפלקסיבי $R$ המקיים $R^2 = R$ הוא יחס שקילות.

**שאלה 17**

אם ליחס שקילות $R$ על $\{1,2,3,\ldots,n\}$ יש פחות מ- $n$ מחלקות אז $|R| \geq n+2$

**שאלה 18**

אם $1 < n < m$ מספרים טבעיים אז החלוקה של $\mathbf{Z}$ המוגדרת על-ידי יחס השקילות $\equiv_m$ היא עידון של החלוקה של $\mathbf{Z}$ המוגדרת על ידי יחס השקילות $\equiv_n$ .

**שאלה 19**

אם $A$ קבוצה סדורה (סדר מלא!) ואינסופית אז אין ב- $A$ איבר אחרון

**שאלה 20**

אם $A = \{1,2,3,4\}$ ואם $\langle A, \prec \rangle$ הוא סדר חלקי שבו קיימים שני אברים מינימליים ושני איברים מקסימליים אז כל איבר של $A$ הוא מינימלי או מקסימלי.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 12

**קורס: 20476 מתמטיקה בדידה** **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 2, 3**

**מספר השאלות: 4** **משקל המטלה: 3 נקודות**

**סמסטר: 2019ג** **מועד הגשה: 2.8.2019**

**מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

**שאלה 1** (28 נקודות)

א. יהיו $A,B,C,D$ קבוצות.

הוכיחו שאם $A\Delta B \subseteq D$ ו- $B\Delta C \subseteq D$ אז $A\Delta C \subseteq D$.

על הקבוצה $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ נתונים שני יחסים $R,S$ המוגדרים כך: לכל $A,B \in \mathcal{P}(\{1,2,3\})$:

$ARB$ אם ורק אם $A\Delta B \subseteq \{1,2\}$ ו- $ASB$ אם ורק אם $A\Delta\{1,2\} \subset B\Delta\{1,2\}$.

ב. קבעו אם אחד מהיחסים הוא יחס שקילות ואם התשובה חיובית, נמקו מדוע ומיצאו את מחלקות השקילות שלו.

ג. קבעו אם אחד היחסים הוא סדר מלא. נמקו את התשובה.

**שאלה 2** (30 נקודות)

על הקבוצה $A = \{\langle a,b\rangle \mid a,b \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\}$ מגדירים שני יחסים $R,T$ כך:

לכל $\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle \in A$, $\langle a_1,b_1\rangle R\langle a_2,b_2\rangle$ אם ורק אם $a_1b_2 = a_2b_1$ ו- $\langle a_1,b_1\rangle T\langle a_2,b_2\rangle$ אם ורק אם $a_1b_2 < a_2b_1$.

א. הוכיחו שאחד היחסים הוא יחס שקילות והאחר הוא יחס סדר.

ב. לכל $n\in\mathbf{N} \setminus \{0\}$ נסמן ב- $S_{\langle n,1\rangle}$ את מחלקת השקילות של $\langle n,1\rangle$ (לפי יחס השקילות מסעיף א')

האם $S_{\langle n,1\rangle} \cap S_{\langle m,1\rangle} = \varnothing$ כאשר $m \neq n$? האם אוסף הקבוצות $\{S_{\langle n,1\rangle} \mid n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\}$ הוא חלוקה של $A$? נמקו את התשובות.

ג. קבעו אם יחס הסדר שמצאתם בסעיף א' הוא סדר מלא והאם קיימים איברים מינימליים או מקסימליים. נמקו את התשובה.

**שאלה 3** (21 נקודות)

בשאלה זו, לכל שתי קבוצות $A,B$ ולכל פונקציה $f : A \to B$ נסמן ב- $g : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ את הפונקציה המוגדרת כך: לכל $D \in \mathcal{P}(B)$ , $g(D) = f^{-1}[D]$ .

א. הוכיחו ש- $f$ היא על אם ורק אם $g$ היא חד-חד ערכית. (אפשר להיעזר בשאלה 16 בספר)

ב. בסעיף זה נניח ש- $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ מוגדרת על-ידי $f(n) = n - 1$ לכל $n > 0$ ו- $f(0) = 0$ .
הוכיחו שבמקרה זה הפונקציה $g : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ המתאימה ל- $f$ , היא חד-חד ערכית ותארו את הקבוצות: $g(\{0,1,2,\dots,n\})$ , $g(\mathbf{N})$ ו- $g(\mathbf{N}\setminus\{0\})$ .

ג. האם הפונקציה $g$ מסעיף ב' היא על? נמקו את התשובה.

**שאלה 4** (21 נקודות)

נתונות הפונקציות $f, g : \mathbf{N} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ המוגדרת כך:

לכל $m \in \mathbf{N}$ , $n \in \mathbf{Z}$ , $f\langle m,n\rangle = \langle m, 2m-n\rangle$ ו- $g\langle m,n\rangle = \langle m, m-2n\rangle$ .

א. הוכיחו ש- $f$ היא הפיכה ומיצאו את הפונקציה ההפכית שלה. נמקו את התשובה.

ב. הוכיחו ש- $g$ אינה הפיכה. נמקו את התשובה.

ג. מיצאו את $g[\mathbf{N} \times \{0\}]$ ואת $g^{-1}[\mathbf{N} \times \{0\}]$ .

# מטלת מחשב (ממ"ח) 03

**קורס: 20476 מתמטיקה בדידה** **חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" פרקים 4,3**

**מספר השאלות: 20** **משקל המטלה: 2 נקודות**

**סמסטר: 2019ג** **מועד הגשה: 7.8.2019**

**את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א**
**בכתובת** http://www.openu.ac.il/sheilta/
**הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!**

**בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.**

**סמנו: א - אם הטענה נכונה ; ב - אם הטענה לא נכונה**

במטלה זו האותיות $f,g$ מסמנות פונקציות, $\chi_A$ מסמנת פונקציה אופיינית של קבוצה.

**שאלה 1**
עבור כל מספר $n\in\mathbf{N}$ השלשות $\left\langle \mathbf{R},\mathbf{R},\{\langle x,1+x+x^2+\cdots+x^n\rangle \mid x\in\mathbf{R}\}\right\rangle$
ו- $\left\langle \mathbf{R},\mathbf{R},\{\langle 1,n+1\rangle\}\cup\{\langle x,\ (1-x^{n+1})/(1-x)\rangle \mid x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}\}\right\rangle$ הן פונקציות שוות.

**שאלה 2**
אם $f:A\to B$ היא פונקציה ו- $C_1,C_2\subseteq A$, $C_1\cap C_2=\varnothing$ אז גם $f[C_1]\cap f[C_2]=\varnothing$.

**שאלה 3**
אם $f:A\to B$ פונקציה ו- $D_1,D_2\subseteq B$, $D_1\cap D_2=\varnothing$ אז גם $f^{-1}[D_1]\cap f^{-1}[D_2]=\varnothing$.

**שאלה 4**
$f:A\to B$ היא חד-חד-ערכית אם ורק אם לכל קבוצה סופית $C\subseteq A$ מתקיים $|f[C]|=|C|$

**שאלה 5**
$f:A\to B$ היא על אם ורק אם לכל קבוצה סופית $D\subseteq B$ מתקיים $|f^{-1}[D]|=|D|$

**שאלה 6**
אם $A,B$ תת-קבוצות של קבוצה אוניברסלית $U$ אז $\chi_A^{-1}[\{1\}]\cap\chi_B^{-1}[\{0\}]=A\setminus B$

**שאלה 7**
אם $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ היא חד-חד-ערכית אז $f$ היא על.

**שאלה 8**
אם $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ היא על אז $f$ היא חד-חד-ערכית.

**שאלה 9**

אם $f,g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ ואם $f\circ g=I_{\mathbf{N}}$ אז $f$ היא פונקציה הפיכה.

**שאלה 10**

אם $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ , $f(n)=n+3$ לכל $n\in\mathbf{N}$ אז קיימת פונקציה **קבועה** $g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ כך ש-

$f\circ g=g\circ f$

**שאלה 11**

קבוצת המספרים הטבעיים שמתחלקים ב- 7 שקולה לקבוצת המספרים הטבעיים שאינם מתחלקים ב- 7.

**שאלה 12**

אם קבוצה אינסופית $A$ שקולה לכל קבוצה אינסופית שחלקית לה אז $|A|=\aleph_0$ .

**שאלה 13**

אם $A$ קבוצת הקבוצות החלקיות ל- $\mathbf{N}$ ששקולות ל- $\mathbf{N}$ ו- $B$ קבוצת הקבוצות החלקיות ל- $\mathbf{N}$ שאינן שקולות ל- $\mathbf{N}$ אז $A$ שקולה ל- $B$ .

**שאלה 14**

אם $A\subseteq\mathbf{R}$ ואם $|A|>\aleph_0$ אז $A$ מכילה קטע לא מנוון.

**שאלה 15**

$$|\mathbf{R}\setminus[0,\infty)|<|\mathbf{R}\setminus[0,1)|$$

**שאלה 16**

הקבוצות $\mathbf{N}^{\{1,2\}}$ ו- $\mathbf{N}^{\{1,2,3\}}$ הן שקולות זו לזו. (להבנת הסימונים עיינו בפרק 3.9)

**שאלה 17**

הקבוצות $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ ו- $\{1,2,3\}^{\mathbf{N}}$ הן שקולות זו לזו.

**שאלה 18**

הקבוצות $\mathbf{N}^{\{1,2\}}$ ו- $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ הן שקולות זו לזו.

**שאלה 19**

אם $\mathcal{F}$ היא קבוצת כל התת-קבוצות הסופיות של $\mathbf{N}$ אז $\left|\bigcup_{A\in\mathcal{F}}A\right|<\left|\bigcup_{A\in\mathcal{F}}\mathcal{P}(A)\right|$

**שאלה 20**

אם $\kappa_1$ עוצמה סופית ו- $\kappa_2$ עוצמה אינסופית אז $\aleph_0+\kappa_1\neq\aleph_0+\kappa_2$ .

# מטלת מנחה (ממ"ן) 13

**קורס: 20476 מתמטיקה בדידה** | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 4**

**מספר השאלות: 3** | **משקל המטלה: 3 נקודות**

**סמסטר: 2019ג** | **מועד הגשה: 12.8.2019**

**מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

**שאלה 1** (40 נק')

מיצאו את העוצמות של כל אחת מן הקבוצות הבאות. נמקו את התשובות.

א. קבוצת כל המספרים הממשיים בקטע $(0,1)$ אשר בפיתוח שלהם כשבר עשרוני אינסופי כל ספרה מופיעה בסמיכות לספרה השווה לה. (למשל, אם בפיתוח מופיע הרצף $a3c$ אז לפחות אחת מהספרות $a,c$ היא 3).

ב. $(\mathbf{N}\times(0,1))\cap(\mathbf{R}\times\mathbf{Q})$

ג. $\mathcal{P}((0,1)\setminus\mathbf{I})$ , כאשר $\mathbf{I}$ היא קבוצת כל המספרים הממשיים האי-רציונליים.

ד. $\mathcal{P}((0,10^{-10})\setminus\mathbf{Q})$

**שאלה 2** (40 נק')

נתונות הקבוצות הבאות (המשלימים המופיעים להלן הם ביחס לקבוצה $\mathbf{N}$)

$K=\{A\in\mathcal{P}(\mathbf{N}) \mid |A^c|=\aleph_0\}$ ו- $M=\{A\in\mathcal{P}(\mathbf{N}) \mid |A|=\aleph_0 \ \wedge\ |A^c|=\aleph_0\}$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

א. $|K|=\aleph_0$

ב. $|M|=\aleph_0$

ג. $|\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus K|=\aleph_0$

ד. $|\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus M|=\aleph_0$

**שאלה 3** (20 נק׳)

נתונות הקבוצות הבאות :

$A=\{A_i \mid i\in \mathbf{N}\}$ כאשר $A_i \subseteq \mathbf{N}$ , $A_i \neq A_j$ ו- $A_i \cap A_j = \varnothing$ לכל $i,j\in\mathbf{N}$ , $i\neq j$ .

$B$ - קבוצה של קטעים פתוחים ב- $\mathbf{R}$ כך שלאף שניים מהם אין נקודה משותפת.

$C$ - קבוצה אינסופית של קטעים פתוחים ב- $\mathbf{R}$ שאינה בת מניה.

א. הוכיחו ש- $|B|\leq|A|$ .

ב. הוכיחו שקיימים קטעים $I,J\in C$ כך ש- $|I\cap J|=|\mathbf{R}|$

# מטלת מנחה (ממ״ן) 14

**קורס: 20476 מתמטיקה בדידה** **חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 4,3**

**מספר השאלות: 4** **משקל המטלה: 3 נקודות**

**סמסטר: 2019ג** **מועד הגשה: 20.8.2019**

**מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

**שאלה 1** (30 נקודות)

נסמן $A=\{1,2,3,...,n\}$ כאשר $n\ge 1$ טבעי, ונניח ש- $k$ מספר טבעי כך ש- $1\le k\le n$.

א. מהו מספר המחרוזות באורך $n$ הכתובות בספרות $0,1,2$ שבהן 1 מופיע $k$ פעמים בדיוק?

ב. מצאו את מספר הזוגות $\langle B,C\rangle$ שבהם $B,C\subseteq A$ , $|B|=k$ ו- $B\cap C=\varnothing$. (רמז: סעיף א׳)

ג. נניח ש- $n=7$. מצאו את מספר הקבוצות $\{B,C\}$ שבהן $B,C\subseteq A$ , $|B|=3$ ו- $B\cap C=\varnothing$.

**שאלה 2** ( 8+3+9 נקודות)

א. הוכיחו ש- $\sum_{k=0}^{n}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\cdot\binom{n}{k}4^k=\frac{5^n+(-3)^n}{2}$

ב. הוכיחו שסכום המספרים בעלי **אינדקס זוגי**, מתוך $a_0,a_1,...,a_n$ הוא: $\sum_{k=0}^{n}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\cdot a_k$

ג. מיצאו את מספר המילים באורך $n$ הכתובות באותיות $A,B,C,D,E$ שבהן האות $A$ מופיעה מספר זוגי של פעמים.

**שאלה 3** (20 נקודות)

חשבו את מספר הפונקציות $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ המקיימות $|f^{-1}[\{i\}]|\ne i$ לכל $1\le i\le 4$.

**שאלה 4** (30 נקודות)

מפזרים 13 כדורים זהים ב- 6 תאים שונים.

א. חשבו את מספר הפיזורים שבהם שלושת התאים הראשונים מכילים ביחד לפחות 10 כדורים.

ב. חשבו את מספר הפיזורים שבהם אין אף תא שבו 3 כדורים בדיוק.

ג. מה התשובה לסעיף א׳ במקרה ש- 13 הכדורים שונים זה מזה?

# מטלת מחשב (ממ"ח) 04

**קורס: 20476 מתמטיקה בדידה** | **חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 1-7**

**מספר השאלות: 20** | **משקל המטלה: 2 נקודות**

**סמסטר: 2019ג** | **מועד הגשה: עד 27.8.2019**

**את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א**
**בכתובת** http://www.openu.ac.il/sheilta/
**הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!**

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

**סמנו**: **א** - אם הטענה נכונה ; **ב** - אם הטענה לא נכונה

בשאלות 1-3 האות $A$ מסמנת קבוצה בעלת 3 איברים.

**שאלה 1**

מספר היחסים שניתן להגדיר על $A$ הוא 9

**שאלה 2**

מספר היחסים האנטי רפלקסיביים על $A$ הוא $2^6$

**שאלה 3**

מספר היחסים על $A$ שווה למספר הפונקציות מ- $A$ ל- $\mathcal{P}(A)$

בשאלות 4 - 10 נתייחס לקבוצה $A=\{1,2,3,4,5,6\}$

**שאלה 4**

מספר הפונקציות $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2,3\}]=\{1,2,3\}$ שווה מספר הפונקציות $f:A\to A$ המקיימות $f^{-1}[\{1,2\}]=\varnothing$ .

**שאלה 5**

מספר הפונקציות $f:A\to A$ שהן חד-חד-ערכיות שווה למספר הפונקציות $f:\{1,2,3,4,5\}\to A$ שהן חד-חד-ערכיות.

**שאלה 6**

מספר הפונקציות $f:A\to A$ המקבלות את הערך 1 פעם אחת, את הערך 2 פעמיים ואת הערך 3 שלוש פעמים, גדול ממספר הפונקציות $f:A\to A$ המקבלות פעמיים כל אחד מן הערכים 1,2,3.

**שאלה 7**

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2\}]=\{1,2\}$ קטן ממספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:A\to A$ המקיימות $f[\{1,2,3\}]=\{1,2,3\}$ .

**שאלה 8**

מספר הזוגות הסדורים $\langle B,C\rangle$ שבהם $B,C\subseteq A$ , $|B|=|C|=2$ ו- $B\cap C=\varnothing$ שווה למספר המילים באורך 6 שבהן כל אחת מהספרות 0,1,2 מופיעה פעמיים.

**שאלה 9**

מספר הקבוצות $\{B,C\}$ שבהן $B,C\subseteq A$ , $|B|=|C|=3$ ו- $B\cap C=\varnothing$ שווה למספר המילים באורך 6 שבהן כל אחת מהספרות 0,1 מופיעה שלוש פעמים.

**שאלה 10**

מספר הזוגות הסדורים $\langle B,C\rangle$ שבהם $B,C\subseteq A$ , $|B|=2,\ |C|=3$ ו- $B\cap C=\varnothing$ שווה למספר המילים באורך 6 שבהן 0 מופיע פעם אחת, 1 מופיע פעמיים ו- 2 מופיע שלוש פעמים.

**שאלה 11**

מספר יחסי השקילות השונים על $A$ שהם בעלי שלוש מחלקות בדיוק הוא גדול מ- 100.

**שאלה 12**

יש בדיוק 78 הפונקציות $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $\{1,2,3\}\subseteq f[\{1,2,3,4\}]$

**שאלה 13**

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $\{1,2,3\}\subseteq f[\{1,2,3,4\}]$
שווה למספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5\}$ המקיימות $\{1,2\}\not\subseteq f[\{1,2,3,4\}]$

**שאלה 14**

מספר הדרכים לפיזור 12 כדורים זהים ב- 8 תאים שונים כך שבשני התאים הראשונים ביחד יימצאו לפחות 10 כדורים, הוא 396

**שאלה 15**

הפתרון לשאלה הקודמת הוא המקדם של $x^{12}$ בפיתוח של $x^{10}(1+x+x^2+\cdots)^8$

**שאלה 16**

מספר הדרכים לפיזור 12 כדורים זהים ב- 8 תאים שונים כך ששניים מן התאים יכילו לפחות 5 כדורים כל אחד, הוא 1008

**שאלה 17**

הפתרון לשאלה הקודמת הוא המקדם של $x^{12}$ בפיתוח של $(x^5+x^6+x^7+\cdots)^2(1+x+x^2+\cdots)^8$

**שאלה 18**

מספר הדרכים לפיזור 12 כדורים זהים ב- 8 תאים שונים כך ששניים מן התאים יכילו ביחד לפחות 10 כדורים הוא $28\cdot 316$

בשאלות 20-19 נסמן ב- $P(mn,m)$ את מספר כל הפיזורים האפשריים של $mn$ כדורים שונים ב- $m$ תאים זהים כך שבכל תא יימצאו בדיוק $n$ כדורים.

**שאלה 19**

$P(8,4)=(8!)/2^4$ .

**שאלה 20**

$P(6,3)>P(6,2)$

# מטלת מנחה (ממ"ן) 15

**קורס: 20476 מתמטיקה דיסקרטית** | **חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 5-7**

**מספר השאלות: 4** | **משקל המטלה: 3 נקודות**

**סמסטר: 2019ג** | **מועד הגשה: 1.9.2019**

**מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

**שאלה 1** (16 נק')

נתונים: $A$ קבוצה לא ריקה בעלת $n$ איברים, פונקציה $f: A \to A$ ואיבר $a \in A$.

נסמן $f^2(a) = f(f(a))$ , $f^3(a) = f(f^2(a))$ ... $f^k(a) = f(f^{k-1}(a))$ , לכל $k > 1$.

א. הוכיחו שקיימים מספרים $i, j$ כך ש- $1 \le i < j \le n+1$ וכך ש- $f^i(a) = f^j(a)$.

ב. הוכיחו שאם $f$ היא חד-חד- ערכית אז קיים $k > 1$ כך ש- $f^k(a) = a$.

**שאלה 2** (30 נק')

תהי $A$ קבוצת כל המספרים הטבעיים שבהם מופיעות רק הספרות 1,2. נסמן:

ב- $a_n$ את מספר האיברים ב- $A$ שהם מספרים בעלי $n$ ספרות ומתחלקים ב- 3.

ב- $b_n$ את מספר האיברים ב- $A$ שהם בעלי $n$ ספרות ושארית החילוק שלהם ב- 3 היא 1

ב- $c_n$ את מספר האיברים ב- $A$ שהם בעלי $n$ ספרות ושארית החילוק שלהם ב- 3 היא 2

א. מיצא את $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$.

ב. לכל $n \ge 2$ הביעו את $a_n$ בעזרת $b_{n-1}$ ו- $c_{n-1}$, את $b_n$ בעזרת $a_{n-1}$ ו- $c_{n-1}$ ואת $c_n$ בעזרת $a_{n-1}$ ו- $b_{n-1}$.

ג. היעזרו בתוצאות של סעיף ב' כדי למצוא יחסי נסיגה עבור כל אחת מהסדרות $a_n$ , $b_n$ , $c_n$.

ד. פתרו את יחסי הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור $a_n$ , $b_n$ , $c_n$.

ה. בדקו ש- $a_n + b_n + c_n$ שווה למספר האיברים של $A$ שהם בעלי $n$ ספרות.

**שאלה 3** (27 נקי)

א. כתבו פונקציה יוצרת עבור מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 20$$

ב. מיצאו את מספר הפתרונות של המשוואה מסעיף א' .

ג. מיצאו את מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 20$$

כאשר לפחות אחד מהנעלמים הוא אי-זוגי .

**שאלה 4** (27 נקי)

א. מיצאו את המקדם של- $x^{19}$ בפיתוח של הפונקציה $\dfrac{(1-x^5)^5}{(1-x)^{10}}$

ב. כתבו פונקציה יוצרת עבור מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{15} = 19$$

כאשר $x_i \leq 4$ לכל $1 \leq i \leq 10$ וכל חמשת הנעלמים האחרים הם מספרים המתחלקים ב- $5$ .

ג. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה..

(הערות מועילות : 0 הוא מספר טבעי שמתחלק ב- 5. $1 + x + \cdots + x^4 = \dfrac{1-x^5}{1-x}$)

# מטלת מחשב (ממ"ח) 05

**הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה** | **חומר הלימוד למטלה: "תורת הגרפים" פרקים 1- 3**

**מספר השאלות: 20** | **משקל המטלה: 2 נקודות**

**סמסטר: 2019ג** | **מועד הגשה: 8.9.2019**

**תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א**

**בכתובת** http://www.openu.ac.il/sheilta/

**הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!**

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

**סמנו**: **א** - אם הטענה נכונה ; **ב** - אם הטענה לא נכונה

**שאלה 1**

קיים גרף פשוט על 7 צמתים, בעלי דרגות 3,3,3,3,5,6,4

**שאלה 2**

קיים גרף על 7 צמתים בעלי דרגות 3,3,3,3,5,6,8

**שאלה 3**

קיים גרף פשוט על 7 צמתים בעלי דרגות 2,2,2,2,2,6,6

**שאלה 4**

קיים גרף על 7 צמתים בעלי דרגות 1,1,3,3,2,6,6

**שאלה 5**

אם בגרף פשוט על **7** צמתים הדרגה של כל צומת היא לפחות 2 אז הגרף הוא קשיר

**שאלה 6**

אם בגרף פשוט על **7** צמתים הדרגה של כל צומת היא לפחות 3 אז הגרף הוא קשיר

**שאלה 7**

אם בגרף פשוט על **8** צמתים הדרגה של כל צומת היא לפחות 3 אז הגרף הוא קשיר

**שאלה 8**

בגרף פשוט ולא קשיר על **7** צמתים יש לכל היותר 15 קשתות.

**שאלה 9**

אם $G$ הוא גרף דו-צדדי אז הגרף המשלים $\overline{G}$ הוא דו-צדדי.

**שאלה 10**

אם $G$ הוא גרף דו-צדדי אז הגרף המשלים $\overline{G}$ אינו דו-צדדי.

**שאלה 11**

אם בעץ $T$ על 6 צמתים יש 3 עלים אז ב- $T$ קיים צומת בעל דרגה 3.

**שאלה 12**

אם סכום דרגות הצמתים בעץ $T$ הוא 10 אז $T$ הוא עץ על 6 צמתים.

**שאלה 13**

העצים **המתוייגים** בעלי סדרות פרופר $(2,2,4,5,5)$ ו- $(4,2,2,5,4)$ הם איזומורפיים (לפי הגדרה 2.8)

**שאלה 14**

העצים בעלי סדרות פרופר $(2,2,4,5,5)$ ו- $(4,2,2,5,4)$ הם איזומורפיים כגרפים **לא מתוייגים**. (לפי הגדרה 2.7)

**שאלה 15**

בכל עץ בעל שני עלים בלבד יש מסלול אוילר

**שאלה 16**

אם $G$ הוא גרף אוילרי דו-צדדי אז מספר הצמתים של $G$ הוא זוגי.

**שאלה 17**

אם $G$ הוא גרף אוילרי בעל מספר זוגי של הצמתים אז $G$ הוא גרף דו-צדדי.

**שאלה 18**

אם $G$ הוא גרף פשוט על 7 צמתים שבו דרגות הצמתים הן $3,3,3,3,4,4,4$ אז $G$ המילטוני.

**שאלה 19**

אם $G$ הוא גרף פשוט על 7 צמתים שבו דרגות הצמתים הן $2,2,2,2,2,3,3$ אז $G$ לא המילטוני.

**שאלה 20**

קיים $G$ גרף פשוט על 7 צמתים לא המילטוני שבו דרגות הצמתים הן $2,2,2,2,2,3,3$.

# מטלת מנחה (ממ״ן) 16

**הקורס: 20476 – מתמטיקה בדידה** **חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים – כל היחידה**

**מספר השאלות: 4** **משקל המטלה: 3 נקודות**

**סמסטר: 2019ג** **מועד הגשה: 14.9.2019**

**מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

**שאלה 1** (30 נקודות)

נתון $T = (V,E)$ , עץ על $n$ צמתים שבו יש בדיוק 3 עלים. נתון ש- $n \geq 5$ .

א. הוכיחו שב- $T$ יש בדיוק צומת אחד בעל דרגה 3.(הדרכה: ניתן להוכיח בדרך השלילה שחייב להיות צומת כזה, אך לא יותר מאחד).

ב. הוכיחו שלכל $v \in V$ , אם $d_T(v) \neq 1,3$ אז $d_T(v) = 2$ .

ג. הוכיחו שהגרף המשלים $\overline{T}$ אינו אוילרי.

ד. הוכיחו שבגרף המשלים $\overline{T}$ קיים מסלול אוילר אם ורק אם $n = 6$ .

ה. הוכיחו שלכל $n \geq 7$ הגרף המשלים $\overline{T}$ הוא המילטוני

**שאלה 2** (30 נקודות)

בשאלה זו נתייחס לכל העצים $T$ בעלי 10 צמתים המתויגים במספרים $1,2,3,\ldots,10$ שבהם 4 עלים המתויגים ב- $1,2,3,4$ (ייתכנו עוד צמתים שהם עלים)

א. מיצאו את העצים $T$ בעלי סדרת פרופר $(5,5,6,6,7,7,8,8)$ ו- $(5,6,7,8,9,10,9,8)$ .

ב. מיצאו את מספר העצים $T$ המקיימים את תנאי השאלה.

ג. מיצאו את מספר העצים $T$, שבהם העלים הם $1,2,3,4$ בלבד (אין עלים נוספים)

ד. הוכיחו שלעץ $T$ בעל סדרת פרופר $(5,5,6,6,7,7,8,8)$ אין זיווג מושלם.

**שאלה 3** (20 נקודות)

$G$ הוא גרף **דו-צדדי מלא** על 7 צמתים. ידוע ש- $G$ הוא גרף **מישורי** ושקיים בו **מסלול אוילר**.

א. מיצאו את מספר הקשתות של $G$. נמקו את התשובה.

ב. מיצאו את מספר הפאות של $G$. נמקו את התשובה.

ג. מיצאו את מספר הצביעה של $G$. נמקו את התשובה.

**שאלה 4** (20 נקודות)

בגרף **מישורי פשוט** $G$ קיים **מסלול אוילר** באורך $9$.

ידוע ש- $u,v$ הם צמתים לא סמוכים ב- $G$ וידוע שהגרף $G \cup \{uv\}$ (המתקבל מ- $G$ לאחר הוספת הקשת $uv$ ) אינו גרף משורי. **הוכיחו או הפריכו** כל אחת מן הטענות הבאות :

א. קיים גרף $G$ על 5 צמתים שמקיים את תנאיי השאלה

ב. קיים גרף $G$ על 6 צמתים שמקיים את תנאיי השאלה