האוניברסיטה הפתוחה

י"ד בתמוז תש"ף

מס' שאלון - 466

6
ביולי 2020

סמסטר 2020ב

מס' מועד 72

20417 / 4

שאלון בחינת גמר

20417 - אלגוריתמים

משך בחינה: 4 שעות

בשאלון זה **8** עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה חמש שאלות.
מתוכן יש לענות על ארבע שאלות.
25 נקודות לכל שאלה.

לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).

יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה.

לשאלון זה מצורפים דפי נוספאות.

בהצלחה !!!

אלגוריתמים 20417 – אביב 2020ב – תאריך 6/7

ענו על 4 מתוך 5 שאלות. לכל שאלה 25 נקודות. שאלות עשויות להיפרש על 2 עמודים.
לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר, להוכיח נכונות ולנתח זמן ריצה.
יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה. מחברת הבחינה לא תיבדק כלל.
אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר,
יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).
אם עליכם להציג דוגמא של גרף (למשל, כדוגמא נגדית שמפריכה טענה מסוימת),
אז לא יינתן שום ניקוד על דוגמא של גרף עם יותר מ- 5 קדקודים.
חומר עזר: אסור. דף נוסחאות מצ״ב. בהצלחה!

<u>שאלה 1 – זרימה (צלעות שמוסרות פעמיים מהרשת השיורית)</u> (25 נק׳).

הציגו דוגמא פשוטה של רשת זרימה עם צלע e, שמקיימת את שתי התכונות הבאות: (א) במהלך הרצת **Edmonds-Karp** על הרשת ישנן שתי איטרציות שונות, שבהן תוספת הזרימה דרך e זהה לקיבולת השיורית של e. (ב) הצלע e מחברת בגרף המקורי בין שני קדקודים, שמרחקם מהמקור s שונה. (לא יינתן ניקוד על דוגמא שמתאימה להרצה של **Ford-Fulkerson** אבל לא מתאימה להרצה של **Edmonds-Karp**).

<u>ציור של רשת הזרימה</u>

הסבר ____

____

____

שאלה 2 – <u>תכנון דינאמי בתורת הגרפים</u> (25 נקי).

נתון גרף <u>מכוון</u> $G=(V,E)$ עם משקלים אי-שליליים $c(e)\ge 0$ על הצלעות $e\in E$, ונתון קדקוד מסוים $r\in V$. הביטו באלגוריתם הבא:

(i) מאתחלים מערך חד-ממדי A באמצעות הכלל: $A[v]=\begin{cases}0, & v=r\\ \infty, & v\ne r\end{cases}$.

(ii) לולאה חיצונית: חוזרים שוב ושוב על הפעולה הבאה.

(1ii) לולאה פנימית: סורקים את הצלעות בסדר לקסיקוגרפי. לכל $e=(u,v)\in E$ מבצעים:

אם $A[v]>A[u]+c(e)$ אז מעדכנים $A[v]\leftarrow A[u]+c(e)$.

(2ii) אם בהרצה הנוכחית של כל הלולאה הפנימית לא בוצע אף עדכון,
אז האלגוריתם מסיים.

(א) רישמו <u>מה מחשב האלגוריתם</u> (אין צורך להוכיח נכונות).

____

____

(ב) יהי $B(n)$ המספר המרבי של איטרציות שמתבצעות בלולאה <u>החיצונית</u> על גרפים בעלי n קדקודים. חשבו את $B(n)$, והציגו סדרת גרפים G_n עליהם מתבצעות בדיוק $B(n)$ איטרציות.

____

____

(ג) הציגו סדרת גרפים אחרת G'_n, עבורם נכנסים ללולאה החיצונית פעמיים בלבד, וזאת למרות <u>שמספר הצלעות שלהם זהה</u> לגרפים מהסעיף הקודם, כלומר $|E(G'_n)|=|E(G_n)|$ לכל n.

____

____

<u>שאלה 3 –הרצת FFT</u> (25 נק׳).

נביט בפולינום $p(x)=3x^3+5x^2-x-5$. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) במסגרת הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום (22 נק׳). בדקו את תשובתכם ע״י <u>הצבה ישירה</u> של הערכים המתאימים בפולינום.

<u>שאלה 4 – מסלולים מזעריים (יחידות / חוסר יחידות עמ"מ)</u> (25 נק')

בבעיית המסלולים המזעריים נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם קדקוד מוצא s ועם משקלי צלעות $w(e)>0$. ברצוננו לחשב, כרגיל, עץ T של מסלולים מזעריים (**<u>עמ"מ</u>**) מ- s לכל יתר הקדקודים הנגישים בגרף. כזכור, לכל גרף קלט יש לפחות עמ"מ T אחד (למשל, עץ הפלט של האלגוריתם של Dijkstra). הוכיחו / הפריכו את הטענה הבאה:

"ישנם מספר עמ"מ שונים $T_1 \neq T_2$ מהמוצא s,

אם ורק אם

יש קדקוד v עם מספר מסלולים מזעריים שונים מהמוצא s".

<u>שאלה 5 – עצים פורשים מזעריים (למת-החתך)</u> (25 נק')

השאלה דנה באלגוריתם של Kruskal למציאת עץ פורש מזערי (**<u>עפ"מ</u>**), כשהקלט הינו גרף קשיר ולא-מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים $w(e)>0$ בצלעות, והמשקלים יחודיים (חח"ע), כלומר $w(e_1)\neq w(e_2)$ לצלעות שונות $e_1\neq e_2$. כזכור, בחלק המרכזי בהוכחת הנכונות של **<u>Kruskal</u>** דנים באיטרציה שרירותית של האלגוריתם, ומוכיחים את הטענה הבאה:

(*) הצלע $e=\{u,v\}$, שהאלגוריתם מוסיף ליער באיטרציה הנוכחית שייכת לכל עפ"מ.

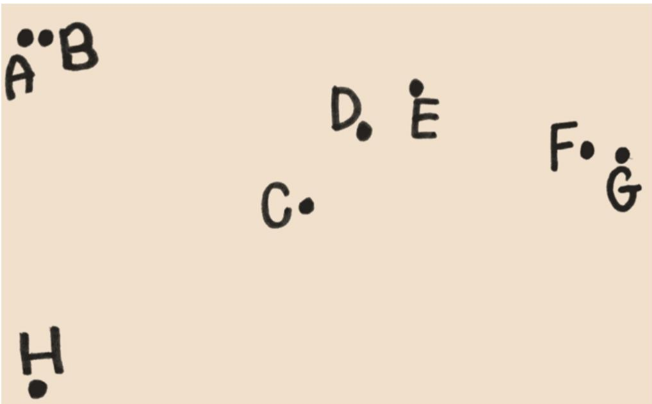
כזכור, לשם הוכחת הטענה (*) מספיק להפעיל את **<u>למת-החתך</u>**, כשהחתך הרלוונטי S מוגדר **<u>כקבוצת כל הקדקודים $C(u)$</u>**, שנמצאים ברכיב הקשירות של u ביער בתחילת האיטרציה.

(א – 19 נק') רישמו מהם כל החתכים האחרים $S'\neq S$ עליהם ניתן להפעיל את למת החתך, כדי להסיק באותו אופן את הטענה (*). (כלומר, באילו חתכים **<u>בדיוק</u>** מותר / אסור להשתמש).

____

____

(ב – 6 נק') נריץ את האלגוריתם על הגרף שכל אחד מקדקודיו $A,B,\ldots,H$ מצויר להלן כעיגול שחור. הגרף הינו **<u>מלא=שלם</u>**, והמשקל $w(e)$ של כל צלע זהה **<u>לאורך שלה בציור</u>**.



רישמו עבור האיטרציה שבה נוספת **<u>הצלע החמישית</u>** ליער, מהם כל החתכים שהגדרתם קודם לכן בסעיף א'. אם רושמים חתך מסוים, אז אין צורך לרשום את החתך המשלים (למשל, אם החלטתם לרשום $S=\{A,H\}$, אז לא לרשום גם את $S=\{B,C,D,E,F,G\}$).

____

____

ב ה צ ל ח ה !

אלגוריתמים 20417 – דף נוסחאות – גרפים

<u>סימונים</u>. ההגדרות הבאות מתאימות גם לגרפים לא מכוונים וגם לגרפים מכוונים. בגרף $G=(V,E)$ קבוצת הקדקודים (=צמתים) הינה V, וקבוצת הצלעות (=קשתות) הינה E. מסמנים $|V|=n, |E|=m$. כל הגרפים בקורס זה הם "פשוטים" במובן הבא: אין "לולאות עצמיות" (= אין צלע מקדקוד לעצמו) ואין "צלעות כפולות" (צלע יכולה להופיע או לא להופיע, אך לא יכולה להופיע מספר רב של פעמים).

<u>מסלולים</u>. מסלול (=מסילה) בגרף הוא סדרת קדקודים $(v_0,...,v_k)$ כך שיש בגרף צלע מ- v_{i-1} ל- v_i לכל $1\le i\le k$. אפשר לחשוב על אותו מסלול כסדרת צלעות $(e_1,...,e_k)$ שבה לכל $1\le i\le k$ הצלע e_i מחברת בגרף את v_{i-1} ל- v_i. מסלול פשוט הוא מסלול שאף קדקוד לא מופיע בו פעמיים (ומעלה). מעגל הוא מסלול שבו $v_0=v_k$. מעגל פשוט הוא מסלול שאף קדקוד לא מופיע בו פעמיים (ומעלה) למעט $v_0=v_k$. שני מסלולים נקראים זרים בקדקודים אם אין להם אף קדקוד משותף, ונקראים זרים בצלעות אם אין להם אף צלע משותפת. קדקוד t נקרא נגיש מקדקוד s אם קיים בגרף מסלול מ- s ל- t. גרף לא-מכוון נקרא קשיר (ובדומה גרף מכוון נקרא קשיר במובן החזק) אם כל זוג קדקודים נגישים האחד מהשני.

<u>משקלים</u>. בגרף ממושקל לכל צלע e מוגדר משקל $w(e)$ (=אורך $\ell(e)$, =מחיר $c(e)$). בגרף לא ממושקל אורך של מסלול הינו מספר הצלעות במסלול. בגרף כן ממושקל אורך=משקל=מחיר של מסלול הינו סכום משקלי הצלעות במסלול. בגרף כן/לא ממושקל מסלול מזערי (=מינימלי) מ- s ל- t הינו מסלול מ- s ל- t שאורכו מזערי, ומרחק מקדקוד u לקדקוד v הינו אורך המסלול המזערי מ- u ל- v. עץ מרחקים מזעריים (עמ"מ) T עם שורש $s\in V$ הינו תת-גרף בצורת עץ כך שלכל קדקוד $t\in V$, המרחק מ- s ל- t ב- T שווה למרחק מ- s ל- t ב- G. אבחנה מרכזית: בגרף כן/לא ממושקל: אם $s\longrightarrow u\longrightarrow v\longrightarrow t$ מסלול מזערי מ- s ל- t, אז תת-המסלול $u\longrightarrow v$ הינו מסלול מזערי מ- u ל- v (כאן $\longrightarrow$ מסמן תת-מסלול). עץ פורש מזערי (עפ"מ) בגרף ממושקל ולא-מכוון הוא עץ פורש, שסכום משקלי הצלעות שלו מזערי מבין כל העצים הפורשים.

<u>רשתות זרימה</u>. ברשת זרימה נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם קדקודי מקור $s\in V$ ויעד $s\ne t\in V$ וקיבולות אי-שליליות $c(e)\ge 0$ על הצלעות. אין צלעות שנכנסות למקור או צלעות שיוצאות מהיעד. זרימה חוקית הינה פונקציה $f:E\to\mathbb{R}$ שמכבדת את מגבלת הקיבולת: $f(e)\le c(e)$ לכל צלע e, ואת חוק שימור הזרימה: $f_{in}(v)=f_{out}(v)$ לכל קדקוד $v\ne s,t$. כאן $f_{in}(v)$ הינו סכום הזרימות בצלעות שנכנסות ל- v, ו- $f_{out}(v)$ הינו סכום הזרימות בצלעות שיוצאות מ- v. חתך $(S,T=V\setminus S)$ ברשת הינה חלוקה של קבוצת הקדקודים שבה $s\in S, t\in T$. קיבולת $c(S,T)$ של חתך הינה סכום הקיבולות של צלעות שיוצאות מ- S ונכנסות ל- T. זרימה $f(S,T)$ של חתך הינה ההפרש בין סכום הזרימות של צלעות שיוצאות מ- S ונכנסות ל- T לבין סכום הזרימות של צלעות שנכנסות ל- S ויוצאות מ- T. גודלה של זרימה חוקית f הינו $val(f)=f_{out}(s)=f_{in}(t)=f(S,T)$, וזאת לכל חתך (S,T). המשפט המרכזי: גודל זרימה מרבית (max-flow) = גודל חתך מזערי (min-cut).

<table dir="rtl">
<tr><th colspan="2">קלט</th><th>פלט</th><th>אלגוריתם, זמן ריצה</th><th>תכונות, הערות</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">גרף מכוון G
קדקוד מוצא $s \in V$</td><td rowspan="2">עץ פורש T
של הקדקודים
הנגישים מ- s</td><td>סריקה לרוחב
BFS
$|E|+|V|$</td><td>T הינו עץ מרחקים
מזעריים מהמוצא s</td></tr>
<tr><td>סריקה לעומק
DFS
$|E|+|V|$</td><td>בגרף לא-מכוון:
כל צלע של G שאינה ב- T
בהכרח מחברת בין אב-קדמון
לבין צאצא שלו ב- T.
בגרף מכוון חסר מעגלים:
מחשב מיון טופולוגי</td></tr>
<tr><td rowspan="3">גרף מכוון
וממושקל
G
עם/בלי
קדקוד
מוצא
$s \in V$</td><td>$w(e) \ge 0$</td><td rowspan="2">עץ T של
מרחקים (ומסלולים)
מזעריים מהמוצא s
לכל הקדקודים
הנגישים מ- s</td><td>דייקסטרא
Dijkstra
$|E|+|V|\log|V|$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$w(e)$
כללי</td><td>בלמן-פורד
Bellman-Ford
$|E||V|$</td><td rowspan="2">מדווחים על קיומם של
מעגלים שמשקלם שלילי</td></tr>
<tr><td>מרחקים (ומסלולים)
מזעריים בין כל
זוגות הקדקודים</td><td>פלויד-וורשאל
Floyd-Warshall
$|V|^3$</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">גרף לא-מכוון G
עם משקלים
אי-שליליים $w(e) \ge 0$</td><td rowspan="2">עפ״מ של הגרף
(עץ פורש מזערי)</td><td>פרים
Prim
$|E|+|V|\log|V|$</td><td>אם e צלע שמשקלה מזערי מבין
כל הצלעות שחוצות חתך מסוים,
אז יש עפ״מ שכולל את e.
(אם e צלע יחידה כנ״ל,
אז כל עפ״מ כולל את e).</td></tr>
<tr><td>קרוסקאל
Kruskal
$|E|\log|V|$</td><td>אם e צלע שמשקלה מרבי מבין
כל הצלעות במעגל מסוים,
אז יש עפ״מ שלא כולל את e.
(אם e צלע יחידה כנ״ל,
אז אין עפ״מ שכולל את e).</td></tr>
<tr><td colspan="2">גרף מכוון G
עם מקור $s \in V$
ויעד $s \neq t \in V$
וקיבולות אי-שליליות
$c(e) \ge 0$</td><td>זרימה חוקית
מרבית</td><td>אדמונדס-קארפ
Edmonds-Karp
$|E|^2|V|$</td><td>וריאנט של
פורד-פלקרסון
Ford–Fulkerson</td></tr>
<tr><td colspan="2">זוג וקטורים
$\vec{a}=(a_0,\dots,a_{n-1})$
$\vec{b}=(b_0,\dots,b_{n-1})$</td><td>הקונבולוציה הציקלית
$\vec{a}\otimes\vec{b}=$
$(c_0,\dots,c_{2n-2})$
שבה
$c_k=\Sigma_{0\le i\le k}a_ib_{k-i}$</td><td>טרנספורם פורייה
המהיר FFT
$n\log n$</td><td>מתאים לכפל פולינומים
$(\sum_{0\le i\le n-1} a_ix^i)(\sum_{0\le j\le n-1} b_jx^j)$
$=(\sum_{0\le k\le 2n-2} c_kx^k)$
כאשר $c_k=\Sigma_{0\le i\le k}a_ib_{k-i}$</td></tr>
</table>