ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20585

מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חוברת הקורס - אביב 2015ב

כתב: אלעזר בירנבוים

מרץ 2015 - סמסטר אביב - תשע"ה

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

אני מקדם את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים.
בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.
פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת :
http://telem.openu.ac.il
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

שעות הייעוץ בקורס מתקיימות בימי ראשון בשעות 00 :18-00 :20 בטלפון 04-6850321.
אבקש מאוד לא להתקשר לטלפון הזה בשעות לא סבירות ובשבתות.
ניתן לפנות גם בדואר אלקטרוני : elazar@openu.ac.il

אני מאחל לכם הצלחה בלימודים.

בברכה,

אלעזר בירנבוים

מרכז ההוראה

1. לוח זמנים ופעילויות (20585 / 2015ב)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ״ן (למנחה)
1	13.3.2015-10.3.2015	פרק 1		
2	20.3.2015-15.3.2015	פרק 1	מפגש ראשון	
3	27.3.2015-22.3.2015	פרק 2		ממ״ן 11 27.3.2015
4	3.4.2015-29.3.2015 (ו ערב פסח)	פרק 2 פרק 3	מפגש שני	
5	10.4.2015-5.4.2015 (א-ו פסח)	פרק 3		
6	17.4.2015-12.4.2015 (ה יום הזכרון לשואה)	פרק 3 פרק 4	מפגש שלישי	ממ״ן 12 17.4.2015
7	24.4.2015-19.4.2015 (ד יום הזכרון) (ה יום העצמאות)	פרק 4		
8	1.5.2015-26.4.2015	פרק 4	מפגש רביעי	

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

לוח זמנים ופעילויות – המשך

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
9	3.5.2015-8.5.2015 (ה ל"ג בעומר)	פרק 4		
10	10.5.2015-15.5.2015	פרק 4 פרק 5	מפגש חמישי	ממ"ן 13 15.5.2015
11	17.5.2015-22.5.2015 (א יום ירושלים)	פרק 5		
12	24.5.2015-29.5.2015 (א שבועות)	פרק 5 פרק 6	מפגש שישי	ממ"ן 14 29.5.2015
13	31.5.2015-5.6.2015	פרק 6		
14	7.6.2015-12.6.2015	פרק 7		
15	14.6.2015-23.6.2015	פרק 7	מפגש שביעי	ממ"ן 15 23.6.2015

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

2. תיאור המטלות

קראו היטב עמודים אלו לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס - הבנה מעמיקה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. המטלות תיבדקנה על-ידי המנחה ותוחזרנה בצירוף הערות המתייחסות לתשובות.

המטלות מלוות את יחידות הלימוד בקורס. להלן פירוט המטלות, היחידות שאליהן מתייחסת כל מטלה ומשקלה היחסי. בחלק מהמטלות תופענה גם שאלות המתייחסות ליחידות שכבר נלמדו.

ממ"ן 11 - פרק 1 - 6 נקודות
ממ"ן 12 - פרקים 2, 3 - 6 נקודות
ממ"ן 13 - פרק 4 - 8 נקודות
ממ"ן 14 - פרק 5 - 4 נקודות
ממ"ן 15 - פרקים 6, 7 - 6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל של 24 נקודות לפחות.
שימו לב שחובה להגיש את ממ"ן 13.

ללא צבירת 24 נקודות בהגשת מטלות לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

למען הסר ספק, יודגש שחל איסור על הכנה משותפת והעתקה של מטלות או חלקי מטלות.
(הנושא מפורט בתקנון משמעת לסטודנטים - נספח 1 של ידיעון האו"פ).

לתשומת לבכם!
כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן: אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלה** בציון הנמוך ביותר, שציונה נמוך מציון הבחינה, לא תילקח בחשבון בעת שקלול הציון הסופי. זאת בתנאי שמטלה זו **אינה חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס.
סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון שמספרו 09-7782222, או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא http://www.openu.ac.il/sheilta
קורסים ⇦ ציוני מטלות ובחינות ⇦ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.
יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות

שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של ציוני המטלות והבחינה יהיה נמוך מ-60).

<u>כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.</u>

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם לעמוד בדרישות הבאות :

א. להגיש מטלות במשקל כולל של 24 נקודות לפחות.

ב. ציון של לפחות 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2015ב **מועד אחרון להגשה:** 27 מרץ 15

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (14%)

נגדיר את השפה D הבאה:

$$D = \{0^{n_1}10^{n_2}1\cdots10^{n_k} \ \mid \ 0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k\}$$

(דוגמאות למילים ששייכות לשפה: 000, 0010000100000, 0100010000100000).

בנו מכונת טיורינג **המכריעה** את D.

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, \sqcup, x\}$; למכונה יהיו **לא יותר מתשעה מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה בעזרת איור (כמו איור 3.8 בספר).

אתם רשאים להשמיט מעברים בלתי אפשריים (כדוגמת המעבר המתייחס לקריאת הסמל x במצב q_1 של המכונה M_2 באיור 3.8).

הקפידו שלא תהיינה קשתות נחתכות באיור.

הסבירו היטב את פעולת המכונה, ולמה היא אכן מכריעה את השפה D.

שאלה 2 (16%. סעיף א - 4%; סעיף ב - 12%)

עיינו במכונה M_1 של איור 3.10.

א. האם במצב q_6 אפשר להשמיט את המעברים המתאימים לסמלים 0 ו-1?
הצדיקו את תשובתכם.

ב. הציעו דרך לשנות את המכונה M_1 **כך שאפשר יהיה לוותר על אחד המצבים** (ולקבל מכונה עם תשעה מצבים בלבד, כולל q_{accept} ו-q_{reject}).
המכונה לאחר השינוי חייבת להכריע את השפה B ש-M_1 מכריעה.
אינכם צריכים לצייר את המכונה החדשה. די להסביר את השינויים הנדרשים.

שאלה 3 (14%)

נעיין במודל החישובי הבא: מכונת טיורינג **עם אינסוף מצבים**.
מכונה כזו זהה למכונה רגילה, פרט לכך שמספר המצבים יכול להיות אינסופי (ולכן גם התחום והטווח של פונקצית המעברים יכולים להיות אינסופיים).

האם למכונה כזו **יש יותר כוח** מאשר למכונה רגילה?

אם עניתם שכן, עליכם להראות שמכונה עם אינסוף מצבים יכולה לזהות שפות שאי אפשר לזהות אותן בעזרת מכונה עם מספר סופי של מצבים.
בנוסף עליכם להסביר מדוע אין בקיומה של מכונה כזו סתירה לתזה של צ'רץ'-טיורינג.

אם עניתם שלא, עליכם להראות כיצד מכונה עם מספר **סופי** של מצבים יכולה לחקות את פעולתה של מכונה עם **אינסוף** מצבים.

שאלה 4 (14%)

תארו מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית** לזיהוי השפה הבאה:

$$F = \{\#x_1\#x_2\# \ldots \#x_k \mid \text{each } x_i \in \{0, 1\}^* \text{ and } x_i = x_j \text{ for some } i \neq j\}$$

רמת הפירוט תהיה כמו בדוגמה 3.12 בספר.
המכונה צריכה להשתמש באי-דטרמיניזם באופן שיקל על החישובים (לעומת מכונה דטרמיניסטית לאותה המשימה).

שאלה 5 (16%)

תהי w מחרוזת סמלים. מסמנים על-ידי w^R את המחרוזת המתקבלת מ-w על-ידי היפוך סדר הסמלים ב-w.

דוגמה: $11001^R = 10011$

בנו מונה (enumerator) לשפה $D = \{w\#w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$.

האלפבית Σ של סרט הפלט יהיה $\{0, 1, \#\}$; האלפבית Γ של סרט העבודה יהיה $\{0, 1, \sqcup\}$.

למונה יהיו **לא יותר משנים עשר מצבים** (כולל q_{print} ו-q_{halt}).
תארו את המונה בעזרת איור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{halt} וכל הקשתות שנכנסות אליו. אפשר לוותר על הציור של מעברים בלתי אפשריים).
הקפידו על כך שהאיור יהיה גדול, בהיר, וללא קשתות נחתכות.
להגדרה פורמלית של מונה, עיינו במדריך הלמידה.
הסבירו היטב את פעולת המונה, ולמה הוא אכן מפיק את השפה D.

שאלה 6 (14%)

הוכיחו: שפה A היא מזוהה-טיורינג אם ורק אם יש מונה (enumerator) שמפיק את A וכל מילה ב-A מודפסת על-ידי המונה **פעם אחת ויחידה**. (כלומר, מילה ששייכת ל-A מודפסת פעם אחת; מילה שלא שייכת ל-A לא מודפסת אף פעם).

(ההבדל בין משפט 3.21 למה שאתם צריכים להוכיח בשאלה הוא הדרישה שכל מילה בשפה תודפס רק פעם אחת).

שאלה 7 (12%)

קראו בבעיה 3.22 בספר את ההגדרה של 2-PDA (אוטומט עם שתי מחסניות).

א. תארו אוטומט עם שתי מחסניות להכרעת השפה $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$.

ב. תארו אוטומט עם שתי מחסניות להכרעת השפה $\{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2015ב **מועד אחרון להגשה:** 17 אפר' 15

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (12%)

הוכיחו שהשפה G שלהלן היא **שפה כריעה**:

$G = \{<R>$ | R הוא ביטוי רגולרי; המילה 111 היא תת-מילה של **כל** מילה בשפה ש-R מתאר$\}$

(מילה מהצורה $<R>$ שייכת לשפה G, אם R הוא ביטוי רגולרי, וכל מילה w בשפה ש-R מתאר היא מהצורה $w = x111y$, כאשר x ו-y הן מילים כלשהן).

שאלה 2 (12%)

א. יהי Σ אלפבית **אינסופי בן מנייה** ($|\Sigma| = |\mathbb{N}|$).

האם קבוצת כל המחרוזות **הסופיות** מעל Σ היא קבוצה בת מנייה? הוכיחו את תשובתכם.

ב. יהי Σ אלפבית **סופי** המכיל יותר מאות אחת ($|\Sigma| > 1$).

האם קבוצת כל המחרוזות **האינסופיות בנות המנייה** מעל Σ היא קבוצה בת מנייה? הוכיחו.

שאלה 3 (18%)

נגדיר את השפה $HALT\text{-}ALL_{TM}$ הבאה:

$$HALT\text{-}ALL_{TM} = \{<M> \mid M \text{ is a TM that halts on all its inputs}\}$$

זוהי שפת התיאורים של מכונות טיורינג שעוצרות על כל קלט שלהן (במצב המקבל או במצב הדוחה).

נוכיח **בעזרת שיטת האלכסון** שהשפה $HALT\text{-}ALL_{TM}$ **איננה מזוהה-טיורינג**:

נניח בשלילה שהשפה $HALT\text{-}ALL_{TM}$ כן מזוהה-טיורינג.

אז לפי משפט 3.21, יש ל-$HALT\text{-}ALL_{TM}$ מונה (enumerator) E.

נזכור שאפשר לסדר את המחרוזות מעל אלפבית נתון Σ לפי הסדר הסטנדרטי.

נבנה את המכונה M הבאה:

M = "על קלט w :

1. מצא את i כך ש-w היא המחרוזת ה-i לפי הסדר הסטנדרטי.
2. הרץ את המונה E עד שהוא מדפיס את המחרוזת ה-i.

המחרוזת ה-i שהמונה הדפיס היא מחרוזת ששייכת ל-$HALT\text{-}ALL_{TM}$. כלומר, היא תיאור של מכונת טיורינג שעוצרת על כל קלט. נסמן אותה על-ידי A.

3. הרץ את A על w.

אם A קיבלה את w, דחה. אם A דחתה את w, קבל.

א. הוכיחו : המכונה M עוצרת על כל קלט.

ב. הסיקו : יש j כך שהמונה E ידפיס את $<M>$ כמחרוזת ה-j שהוא מדפיס.

ג. בדקו מה יקרה כאשר נריץ את M על המחרוזת ה-j לפי הסדר הסטנדרטי, והגיעו לסתירה.

שאלה 4 (10%)

הציגו רדוקציה של $HALT_{TM}$ ל-A_{TM} (רדוקציה בכיוון הפוך מזה של הוכחת משפט 5.1).

שאלה 5 (18%)

ביחס לכל אחת מן השפות הבאות, קבעו האם אפשר להוכיח שהיא לא כריעה **בעזרת משפט Rice** (ראו בעיה 5.16 בספר) או לא.
אם קבעתם שאפשר, כתבו את ההוכחה. אם קבעתם שאי אפשר, הסבירו היטב למה אי אפשר.

א. $A = \{<M> \mid M \text{ is a TM and } |L(M)| < 50\}$

(A היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג שמקבלות פחות מ-50 מילים).

ב. $B = \{<M> \mid M \text{ is a TM and } M \text{ accepts every word } w \text{ within 1,000 steps}\}$

(B היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג שמקבלות כל מילה w בתוך 1,000 צעדים).

ג. $DECIDABLE_{TM} = \{<M> \mid M \text{ is a TM and } L(M) \text{ is a decidable language}\}$

(זוהי שפת התיאורים של מכונות טיורינג שהשפה שהן מזהות היא שפה כריעה).

שאלה 6 (12%)

תארו אוטומט חסום ליניארית (LBA) שמכריע את השפה A_{NFA} (המוגדרת בספר בעמוד 195).

שאלה 7 (18%)

בבעיה 5.18 בספר (עמוד 240) מוגדרת השפה $INFINITE_{TM}$.

א. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $INFINITE_{TM}$ (הראו : $A_{TM} \leq_m INFINITE_{TM}$).

ב. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $\overline{INFINITE_{TM}}$ (הראו : $A_{TM} \leq_m \overline{INFINITE_{TM}}$).

הדרכה : אם מכונת טיורינג M מקבלת את הקלט w, אז כשמריצים את M על w מגיעים למצב המקבל לאחר מספר סופי של צעדים.

מכונת טיורינג N יכולה להתייחס לקלט שלה כאל מספר הצעדים שיש להריץ מכונה אחרת S.

(למשל, אם הקלט של N הוא v, אז N תריץ את S $|v|$ צעדים).

ג. הסיקו : $INFINITE_{TM}$ ו- $\overline{INFINITE_{TM}}$ **אינן מזוהות-טיורינג**.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 8 **משקל המטלה:** 8 נקודות

סמסטר: 2015ב **מועד אחרון להגשה:** 15 מאי 15

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (12%)

תהי w מחרוזת סמלים. מסמנים על-ידי w^R את המחרוזת המתקבלת מ-w על-ידי היפוך סדר הסמלים ב-w.

דוגמה: $11001^R = 10011$

מילה w נקראת **פלינדרום** אם $w = w^R$.

דוגמה: 1100011 היא פלינדרום; 110001 איננה פלינדרום.

נגדיר את השפה PAL:

$$PAL = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$$

(זוהי שפת הפלינדרומים מעל האלפבית $\{0,1\}$).

מצאו פונקציה $t(n)$ מינימלית, כך ש- $PAL \in \mathrm{TIME}(t(n))$

א. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד.

ב. במכונה דטרמיניסטית עם שני סרטים.

ג. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד שיש לו שני ראשים קוראים-כותבים.

הסבירו את תשובותיכם.

שאלה 2 (12%)

הוכיחו שהשפות הבאות שייכות למחלקה P:

א. EQ_{DFA} (ראו משפט 4.5 בספר).

ב. $5\text{-}CLIQUE = \{\langle G\rangle \mid G \text{ is an undirected graph with a 5-clique}\}$.

שאלה 3 (10%)

הוכיחו שהשפה הבאה שייכת **למחלקה NP**:

$B = \{<n, m, k> \mid$ הראשוני ה-m בפירוק לגורמים ראשוניים של n גדול מ-$k\}$

שלשה $<n, m, k>$ של מספרים טבעיים שייכת ל-B אם הראשוני ה-m (לפי גודל) בפירוק של n לגורמים ראשוניים גדול מ-k. אם m גדול ממספר הראשוניים בפירוק לגורמים של n, אז $<n, m, k>$ לא שייכת ל-B.

למשל, $<3276, 3, 6> \in B$ ($3276 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$; הראשוני השלישי בפירוק לגורמים ראשוניים הוא 7 והוא גדול מ-6), $<3276, 4, 20> \notin B$, $<3276, 5, 0> \notin B$.

שאלה 4 (16%)

נאמר ששפה A **ניתנת לרדוקציה בזמן ליניארי** לשפה B אם יש פונקציה f **חשיבה בזמן ליניארי** כך שלכל w, $w \in A \iff f(w) \in B$.

נאמר ששפה A **ניתנת לרדוקציה בזמן ריבועי** לשפה B אם יש פונקציה f **חשיבה בזמן ריבועי** כך שלכל w, $w \in A \iff f(w) \in B$.

א. נתון ש-B שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n)$ וש-A ניתנת לרדוקציה בזמן **ליניארי** ל-B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n)$? הסבירו את תשובתכם.

ב. נתון ש-B שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n^2)$ וש-A ניתנת לרדוקציה בזמן **ליניארי** ל-B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n^2)$? הסבירו את תשובתכם.

ג. נתון ש-B שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n)$ וש-A ניתנת לרדוקציה בזמן **ריבועי** ל-B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n)$? הסבירו את תשובתכם.

ד. נתון ש-B שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n^2)$ וש-A ניתנת לרדוקציה בזמן **ריבועי** ל- B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n^2)$? הסבירו את תשובתכם.

שאלה 5 (14%)

עיינו בהגדרת השפה *3COLOR* בבעיה 7.38 בספר (עמוד 326).

הראו רדוקציה פולינומיאלית של *3COLOR* ל-*3SAT* (הראו כי $3COLOR \leq_P 3SAT$).

עליכם להראות רדוקציה ישירה, ולא רדוקציה כמו בהוכחת משפט Cook-Levin.

הדרכה: התאימו שלושה משתנים בוליאניים לכל צומת v בגרף - v_1, v_2 ו-v_3.

ערכו של המשתנה v_i ($i = 1, 2, 3$) יהיה 1 אם הצומת v צבוע בצבע i, ויהיה 0 אם הצומת v צבוע באחד משני הצבעים האחרים.

בנו פסוקיות (בגודל 2 או 3) שיאמרו:

- לכל צומת v בגרף, v צבוע בצבע אחד ויחיד
- לכל קשת (u, v) בגרף, u ו-v צבועים בצבעים שונים

תארו את הרדוקציה, הוכיחו שהיא תקפה, והראו שהיא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 6 (10%)

איך אפשר לדעת, מתוך עיון בנוסחה ϕ שמייצרת הרדוקציה של הוכחת משפט Cook-Levin (משפט 7.37), האם המכונה N שמכריעה את השפה A היא מכונה דטרמיניסטית או לא?
הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 7 (8%)

יהי Σ אלפבית נתון.

מצאו את כל השפות L כך ש- $L \equiv_{\mathrm{P}} \Sigma^*$ ואת כל השפות K כך ש- $K \equiv_{\mathrm{P}} \varnothing$.

הסבירו היטב את תשובותיכם.

(היחס $\equiv_{\mathrm{P}}$ מוגדר במדריך הלמידה בעמוד 70).

שאלה 8 (18%)

א. הוכיחו שהשפה $NONDISJOINT_{\mathrm{DFA}}$ שלהלן שייכת למחלקה P :

$$NONDISJOINT_{\mathrm{DFA}} = \{<A, B> \mid A \text{ and } B \text{ are DFAs and } L(A) \cap L(B) \neq \varnothing\}$$

מילה $<A, B>$ שייכת לשפה אם A ו-B הם תיאורים של אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים שהשפות שהם מזהים אינן זרות זו לזו.

ב. הוכיחו שהשפה $NONEMPTY\text{-}INTER_{\mathrm{DFA}}$ שלהלן היא שפה **NP-קשה** :

$$NONEMPTY\text{-}INTER_{\mathrm{DFA}} = \{<A_1, ..., A_k> \mid A_1, ..., A_k \text{ are DFAs and } L(A_1) \cap \cdots \cap L(A_k) \neq \varnothing\}$$

מילה $<A_1, A_2, ..., A_k>$ שייכת לשפה אם A_1, A_2, ..., A_k הם תיאורים של אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים, ויש מילה ששייכת לכל אחת מן השפות של האוטומטים הללו.

הדרכה : הראו רדוקציה פולינומיאלית של $3SAT$.

אפשר לייצג השמה של ערכים בוליאניים ל-n משתנים בוליאניים x_1, x_2, ..., x_n בעזרת מחרוזות באורך n מעל $\{0, 1\}$: המקום ה-i במחרוזת יציין את ערכו של x_i.

לכל פסוקית בנו אוטומט שיזהה את שפת כל המחרוזות מעל $\{0, 1\}$ שמתאימות להשמות שמספקות את הפסוקית.

ג. הסבירו היטב מהו ההבדל בין השפה של סעיף א לשפה של סעיף ב שגורם לכך שהראשונה שייכת ל-P והשנייה היא NP-קשה. (תשובה בסגנון "פה יש שני אוטומטים ופה יש k אוטומטים" לא תתקבל כתשובה נכונה. זה לא מסביר את ההבדל).

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2015ב **מועד אחרון להגשה:** 29 מאי 15

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות: • שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס • שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה **הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"**

שאלה 1 (10%)

בדוגמה 8.3 בספר מראים ש-SAT שייכת ל-SPACE(n).

האם אפשר להסיק מכך ומן העובדה ש-SAT היא בעיה NP-שלמה, ש- $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{SPACE}(n)$?

הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 2 (10%)

נתונה השפה $\#SAT$

$\#SAT$ = {<ϕ, k> | ϕ is a Boolean formula with **at least** k different satisfying assignments}

א. האם אפשר להוכיח ששפה זו שייכת ל- SPACE(n)?
אם עניתם שכן, כתבו את ההוכחה. אם עניתם שלא, הסבירו למה לא.

ב. האם התשובה לסעיף א תשתנה, אם נחליף בהגדרת השפה את המילים "at least" במילים "at most"? הסבירו את תשובתכם.

ג. האם התשובה תשתנה, אם נחליף את המילים "at least" במילה "exactly"?
הסבירו את תשובתכם.

שאלה 3 (20%)

א. הוכיחו: $EQ_{\mathrm{DFA}} \in \mathrm{SPACE}(n^2)$. **(השפה EQ_{DFA} מוגדרת לפני משפט 4.5 בספר)**

ב. הוכיחו: $EQ_{\mathrm{NFA}} \in \mathrm{SPACE}(n^2)$. **(**$EQ_{\mathrm{NFA}}$ = {<A, B> | A and B are NFAs and $L(A) = L(B)$}**)**

שאלה 4 (20%)

בעיה 8.34 בספר (עמוד 360).

כדי להוכיח שהשפה B שייכת למחלקה L, עליכם לתאר בפירוט מכונה דטרמיניסטית, בעלת סיבוכיות מקום לוגריתמית, שמכריעה את B.

שאלה 5 (20%)

הבעיה *HITTING-SET* מוגדרת כך:

הקלט: קבוצה סופית S; אוסף $\{S_1, S_2, ..., S_m\}$ של תת-קבוצות של S (כל S_i היא תת-קבוצה של S); מספר טבעי k.

השאלה: האם יש ל-S תת-קבוצה T בגודל k כך שלכל $1 \le i \le m$, $T \cap S_i \neq \varnothing$? (כלומר, האם יש ל-$S$ תת-קבוצה בגודל k שהחיתוך שלה עם כל אחת מן התת-קבוצות S_i איננו ריק?)

הוכיחו: $VERTEX\text{-}COVER \le_L HITTING\text{-}SET$.

(*VERTEX-COVER* מוגדרת בעמוד 312 בספר).

עליכם לתאר את הרדוקציה, להוכיח שהיא תקפה, ולהוכיח בפירוט שהיא יכולה להתבצע **במקום לוגריתמי**.

שאלה 6 (20%)

בעיה 8.16 בספר (עמוד 359).

הדרכה: הראו: $STRONGLY\text{-}CONNECTED \in NL$ ו- $PATH \le_L STRONGLY\text{-}CONNECTED$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: סעיפים 9.1, 10.1 ו-10.2 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2015ב **מועד אחרון להגשה:** 23 יוני 15

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20%)

א. יהי k מספר טבעי. מה יקרה כאשר נריץ את המכונה D מהוכחת משפט 9.3 על הקלט $<D>10^k$?
(כלומר, מריצים את המכונה D על התיאור שלה שאחריו רשומה המחרוזת 10^k).
הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. מה יקרה כאשר נריץ את המכונה D מהוכחת משפט 9.10 על הקלט $<D>10^k$?
הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 2 (8%)

האם **ממה שנלמד בסעיף 9.1** בספר אפשר להסיק **שכל** שפה PSPACE-שלמה איננה שייכת ל-NL?
הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 3 (14%)

הוכיחו: $\text{NP} \neq \text{SPACE}(n)$.

שאלה 4 (10%)

עיינו באלגוריתם A בעמוד 394 בספר הלימוד.

כזכור, הוכח שאלגוריתם זה הוא בעל יחס קירוב ≤ 2.

הוכיחו שיחס הקירוב 2 הוא **הדוק** ביחס לאלגוריתם A (כלומר, יחס הקירוב ≤ 2):

הראו שלכל n טבעי גדול מ-0, יש גרף לא מכוון $G = (V, E)$ כך שמתקיים:

- $|V| = 2n$ (בגרף G יש $2n$ קדקודים);
- יש תת-קבוצה U של V ($U \subseteq V$) המהווה כיסוי קדקודים מינימלי ו- $|U| = n$ (יש בגרף כיסוי קדקודים מינימלי שגודלו n);
- האלגוריתם A ימצא כיסוי שגודלו $2n$.

שאלה 5 (20%)

לימדו את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה.
הניחו שמחירי הקשתות בבעיית הסוכן הנוסע הם **חיוביים**.

א. הוכיחו שעלות המסלול של הסוכן הנוסע שמוצא אלגוריתם הקירוב לבעיית הסוכן הנוסע המטרית **קטנה** מפעמיים עלות המסלול האופטימלי.

הדרכה: אם מורידים קשת אחת ממעגל המילטוני, מקבלים עץ פורש של הגרף.

ב. כזכור, הוכח שאלגוריתם זה הוא בעל יחס קירוב ≤ 2.

הוכיחו שיחס הקירוב 2 הוא **הדוק** ביחס לאלגוריתם (כלומר, אי אפשר להצביע על חסם קטן יותר).

הדרכה: לכל n אי-זוגי גדול מ-5, התבוננו בגרף מלא בעל n צמתים, $x_1, x_2, ..., x_n$, שהמחירים של הקשתות שלו הם כדלקמן: המחיר של כל קשת שנוגעת ב-x_1 הוא 1; המחיר של כל הקשתות מהצורה (x_i, x_{i+1}) הוא 1; המחיר של כל שאר הקשתות הוא 2.

הוכיחו שבגרף זה מתקיים אי-שוויון המשולש.

הוכיחו שהקירוב שהאלגוריתם משיג על גרף כזה הוא $2 - 2/n$.

הסיקו את התוצאה הנדרשת.

שאלה 6 (8%)

יהי p מספר ראשוני.

א. הוכיחו **בעזרת אינדוקציה**, שלכל a טבעי או 0, $a^p \equiv a \pmod{p}$.

ב. הסיקו את המשפט הקטן של פרמה (משפט 10.6) ממה שהוכחתם בסעיף א.

שאלה 7 (20%)

א. הוכיחו: אם P = NP, אז יש אלגוריתם **בעל זמן ריצה פולינומיאלי** לבעיה הבאה:

הקלט: נוסחה בוליאנית ϕ.

הפלט: השמה מספקת של ϕ אם ϕ ספיקה. אם ϕ לא ספיקה, יוחזר "לא".

(האלגוריתם מקבל כקלט נוסחה בוליאנית ϕ. אם אין ל-ϕ השמה מספקת, מוחזר "לא". אם יש ל-ϕ השמה מספקת, מוחזרת אחת ההשמות המספקות של ϕ. כלומר, מוחזרת הצבה של 0-ים ו-1-ים למשתנים של ϕ כך שהערך של ϕ בהצבה הזו הוא 1).

הדרכה: אם P = NP, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי ל-*SAT*.

אפשר לקרוא לאלגוריתם הזה כמה פעמים כדי למצוא הצבה למשתנים של ϕ שתספק את ϕ.

ב. בעיה 10.11 בספר (עמוד 439).

הדרכה: התאימו את מה שהראיתם בסעיף א.