פתרונות לממ"ן 15 - 2012א - 20425

.1 $P\{-0.564 \le Z \le -0.073\} = \Phi(-0.073) - \Phi(-0.564)$

$$= 1 - \Phi(0.073) - [1 - \Phi(0.564)] = \Phi(0.564) - \Phi(0.073)$$

נתבונן בטבלה 5.1 (עמוד 112 במדריך הלמידה). אפשר לראות כי :

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(0.07) = 0.5279 \\ \Phi(0.08) = 0.5319\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Phi(0.07\underline{\underline{3}}) = 0.5279 + \underline{\underline{0.3}} \cdot (0.5319 - 0.5279) = 0.5291$$

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(0.56) = 0.7123 \\ \Phi(0.57) = 0.7157\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Phi(0.56\underline{\underline{4}}) = 0.7123 + \underline{\underline{0.4}} \cdot (0.7157 - 0.7123) = 0.71366$$

לכן : $P\{-0.564 \le Z \le -0.073\} = 0.71366 - 0.5291 = 0.18456$

כעת, עלינו למצוא את הערך של a , המקיים את המשוואה $P\{Z \ge a\} = 0.325$.

או לחלופין את המשוואה : $1 - P\{Z \ge a\} = P\{Z < a\} = \underline{\underline{\Phi(a) = 0.675}}$

נתבונן שוב בטבלה 5.1 (עמוד 112 במדריך הלמידה). הערך המדויק 0.675 אינו מופיע בגוף הטבלה, אך אפשר למצוא בה שני ערכים רצופים, שהוא נמצא ביניהם. מתקיים :

$$\Phi(0.45) = 0.6736 < \underline{\underline{\Phi(a) = 0.675}} < 0.6772 = \Phi(0.46)$$

לכן, הערך של a , שאותו אנו מחפשים, יהיה בין 0.45 ל- 0.46. נמצא אותו כך :

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(0.45) = 0.6736 \\ \quad \updownarrow 0.01 \quad \updownarrow 0.0036 \\ \Phi(0.46) = 0.6772\end{array}\right\} \Rightarrow \quad a = 0.45 + 0.01 \cdot \frac{0.675 - 0.6736}{0.6772 - 0.6736} = 0.45 + 0.01 \cdot \frac{0.0014}{0.0036} = 0.4547$$

לכן, $a = 0.4547$.

.2 נתון כי $X \sim N(7, \sigma^2)$ = אורך של קיסם (בס"מ)

א. $P\{6.736 \le X \le 7.264\} = P\{\frac{6.736-7}{\sigma} \le Z \le \frac{7.264-7}{\sigma}\} = \Phi\left(\frac{0.264}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-0.264}{\sigma}\right)$

$$= 2\Phi\left(\frac{0.264}{\sigma}\right) - 1 = 0.34$$

לכן : $\Phi\left(\frac{0.264}{\sigma}\right) = 0.67 = \Phi(0.44)$ [מטבלה 5.1, עמוד 112 במדריך]

ומכאן : $\frac{0.264}{\sigma} = 0.44 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{0.264}{0.44} = 0.6$

ב. נמצא את הערך של a שמקיים את המשוואה: $P\{X < a\} = 0.57$

מתקיים: $P\{X < a\} = P\{Z < \frac{a-7}{0.6}\} = \underline{\underline{\Phi\left(\frac{a-7}{0.6}\right)}} = 0.57 = \underline{\underline{\Phi(0.17641)}}$

הסברים לחישוב ההסתברות הנורמלית – מטבלה 5.1, עמוד 112 במדריך:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(0.17) = 0.5675 \\ \Phi(0.18) = 0.5714\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}0.5714 - 0.5675 = \underline{0.0039} \\ 0.57 - 0.5675 = \underline{0.0025} \\ 0.18 - 0.17 = \underline{0.01}\end{array}\right.$$

$$\Phi(0.17 + \underline{0.01} \cdot \underline{0.0025}/\underline{0.0039}) = \Phi(0.17641) = 0.57 \quad \Leftarrow$$

ולכן: $a = 7 + 0.17641 \cdot 0.6 =$ 7.10585 ס״מ

ג. $$P\{X < 8.1 \mid X > 7.5\} = \frac{P\{7.5 < X < 8.1\}}{P\{X > 7.5\}} = \frac{P\{\frac{7.5-7}{0.6} < Z < \frac{8.1-7}{0.6}\}}{P\{Z > \frac{7.5-7}{0.6}\}} = \frac{P\{0.8333 < Z < 1.8333\}}{P\{Z > 0.8333\}}$$

$$= \frac{\Phi(1.8333) - \Phi(0.8333)}{1 - \Phi(0.8333)} = \frac{0.9666 - 0.7976}{1 - 0.7976} = 0.835$$

חישוב $\Phi(1.8333)$ ו- $\Phi(0.8333)$:

$$\Phi(1.8333) = \underbrace{\Phi(1.83)}_{=0.9664} + 0.33 \cdot [\underbrace{\Phi(1.84)}_{=0.9671} - \underbrace{\Phi(1.83)}_{=0.9664}] = 0.9666$$

$$\Phi(0.8333) = \underbrace{\Phi(0.83)}_{=0.7967} + 0.33 \cdot [\underbrace{\Phi(0.84)}_{=0.7995} - \underbrace{\Phi(0.83)}_{=0.7967}] = 0.7976$$

ד. ההסתברות שהאורך של הקיסם הקצר ביותר בחבילה מקרית יהיה **קטן** מ- 6.36 ס״מ שווה להסתברות <u>שלפחות</u> קיסם אחד מהקיסמים שבחבילה זו יהיה קצר מ- 6.36 ס״מ. במקרה זה, קל יותר לחשב את ההסתברות של המאורע המשלים, <u>שכל</u> הקיסמים בחבילה ארוכים מ- 6.36 ס״מ. לכן, נתחיל בחישוב ההסתברות שהאורך של קיסם מקרי עולה על 6.36 ס״מ:

$$P\{X \geq 6.36\} = P\{Z \geq \frac{6.36-7}{0.6}\} = P\{Z \geq -1.0667\} = \Phi(1.0667) = 0.8569$$

הסברים לחישוב ההסתברות הנורמלית – מטבלה 5.1, עמוד 112 במדריך:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(1.06) = 0.8554 \\ \Phi(1.07) = 0.8577\end{array}\right. \Rightarrow 0.8577 - 0.8554 = \underline{0.0022}$$

$$\Phi(1.06\underline{67}) = 0.8554 + 0.\underline{67} \cdot \underline{0.0022} = 0.8569$$

כעת, מכיוון שאורכי הקיסמים שבחבילה בלתי-תלויים זה בזה, ההסתברות <u>שכולם</u> יהיו ארוכים מ- 6.36 ס״מ היא: $0.8569^{20} = 0.0455$

ומכאן, שההסתברות <u>שלפחות</u> אחד מהקיסמים בחבילה קצר מ- 6.36 ס״מ, דהיינו ההסתברות שאורך הקיסם הקצר ביותר בחבילה קטן מ- 6.36 ס״מ, היא: $1 - 0.0455 = 0.9545$

3. א. סכום שטחי המלבנים והמשולש שכלואים תחת עקומת הצפיפות שווה ל-1. לכן :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^3 f_X(x)\,dx = c + 2c + 2c = 5c = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c = 0.2$$

ב. לחישוב ההסתברות המבוקשת נסכום את שטחי שני המלבנים החלקיים, הכלואים תחת עקומת הצפיפות בין $x = 0.25$ לבין $x = 1.5$. נקבל : $P\{0.25 \le X \le 1.5\} = 0.75 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.4 = 0.35$

ג.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.2 & , \quad 0 \le x < 1 \\ 0.4 & , \quad 1 \le x < 2 \\ 0.8(3-x) & , \quad 2 \le x < 3 \\ 0 & , \quad x < 0\,;\, x \ge 3 \end{cases}$$

ד. לכל $0 \le x < 1$ מתקיים : $F_X(x) = x \cdot 0.2 = 0.2x$

לכל $1 \le x < 2$ מתקיים : $F_X(x) = 0.2 + (x-1) \cdot 0.4 = 0.4x - 0.2$

לכל $2 \le x \le 3$ מתקיים : $F_X(x) = 1 - P\{X > x\} = 1 - \frac{1}{2} \cdot 0.8(3-x)^2 = 1 - 0.4(3-x)^2$

לכן :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 0.2x & , \quad 0 \le x < 1 \\ 0.4x - 0.2 & , \quad 1 \le x < 2 \\ 1 - 0.4(3-x)^2 & , \quad 2 \le x \le 3 \\ 1 & , \quad 3 < x \end{cases}$$

ה.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 0.2x\,dx + \int_1^2 0.4x\,dx + \int_2^3 0.8(3-x)x\,dx$$

$$= \frac{0.2x^2}{2}\bigg|_0^1 + \frac{0.4x^2}{2}\bigg|_1^2 + 0.8 \cdot \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_2^3 = 0.1 + 0.8 - 0.2 + 3.6 - 2.\overline{6} = 1.6\overline{3} = 1\tfrac{19}{30}$$

4. תחום הערכים האפשריים של המשתנה המקרי Y הוא הקטע $(-4,8)$. לכן, לכל $-4 < y < 8$ מתקיים :

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{2X - 8 \le y\} = P\{X \le \tfrac{y+8}{2}\} = F_X(\tfrac{y+8}{2})$$

ומכאן : $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{2} f_X(\frac{y+8}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \qquad , \qquad -4 < y < 8$

כלומר, Y הוא משתנה מקרי אחיד על הקטע $(-4,8)$.

5. א.

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{0} y f_Y(y)\,dy + \int_0^{\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{0} y \cdot \tfrac{\lambda}{2} e^{\lambda y}\,dy + \int_0^{\infty} y \cdot \tfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda y}\,dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} y\lambda e^{\lambda y}\,dy + \tfrac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\infty} y \cdot \lambda e^{-\lambda y}\,dy}_{=E[Exp(\lambda)]=\frac{1}{\lambda}} = -\tfrac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\infty} w\lambda e^{-\lambda w}\,dw}_{} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{\lambda} = -\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{\lambda} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{\lambda} = 0$$

מציבים: $w = -y$

ב. $$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{0} y^2 f_Y(y)\,dy + \int_{0}^{\infty} y^2 f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{0} y^2 \tfrac{\lambda}{2} e^{\lambda y}\,dy + \int_{0}^{\infty} y^2 \tfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda y}\,dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} y^2 \lambda e^{\lambda y}\,dy + \underbrace{\tfrac{1}{2}\int_{0}^{\infty} y^2 \lambda e^{-\lambda y}\,dy}_{=E[Exp(\lambda)^2]=\frac{2}{\lambda^2}} = \underbrace{\tfrac{1}{2}\int_{0}^{\infty} w^2 \lambda e^{-\lambda w}\,dw}_{\boxed{\text{מציבים: } w=-y}} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{\lambda^2} = 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{\lambda^2} = \tfrac{2}{\lambda^2}$$

לכן: $\mathrm{Var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - 0 = \frac{2}{\lambda^2}$

ג. לכל $y \le 0$ מתקיים: $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{y} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda t}\,dt = \frac{1}{2}e^{\lambda t}\Big|_{-\infty}^{y} = \frac{1}{2}e^{\lambda y}$

נשים לב כי $F_Y(0) = \frac{1}{2}$, לכן, לכל $y \ge 0$ מתקיים:

$$F_Y(y) = \tfrac{1}{2} + \int_{0}^{y} f_Y(t)\,dt = \tfrac{1}{2} + \int_{0}^{y} \tfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda t}\,dt = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}e^{-\lambda t}\Big|_{0}^{y} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(e^{-\lambda y} - 1) = 1 - \tfrac{1}{2}e^{-\lambda y}$$

כלומר: $$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda y} & , \quad y < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda y} & , \quad y \ge 0 \end{cases}$$

ד. לכל $w \ge 0$ מתקיים:

$$F_W(w) = P\{W \le w\} = P\{|Y| \le w\} = P\{-w \le Y \le w\} = F_Y(w) - F_Y(-w)$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}e^{-\lambda w} - \tfrac{1}{2}e^{\lambda w} = 1 - e^{-\lambda w}$$

לכן, W הוא משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ.

ה. מתכונת חוסר הזיכרון של ההתפלגות המעריכית נקבל כי:

$$P\left\{W \le \tfrac{2}{\lambda^2} \middle| W \ge \tfrac{1}{\lambda^2}\right\} = 1 - P\left\{W > \tfrac{2}{\lambda^2} \middle| W \ge \tfrac{1}{\lambda^2}\right\} = 1 - P\left\{W > \tfrac{1}{\lambda^2}\right\} = P\left\{W \le \tfrac{1}{\lambda^2}\right\} = 1 - e^{-\lambda\cdot(1/\lambda^2)} = 1 - e^{-1/\lambda}$$