7.4.19

ממ"ן 13

שאלה 1:

תהי G חבורה ביחס לפעולה $*$, ויהיו $a,b,c \in G$ איברים שונים זה מזה. נתון ש$a*b=b*c$.

א. הוכח שG אינה חבורה חילופית:
נניח בשלילה G חבורה חילופית, ויהי $e \in G$ האיבר הניטרלי עבור החבורה G.
$a*b=b*c$.
לכן $a*b*c^{-1}*b^{-1}=e$
$a*b*b^{-1}*c^{-1}=e.$
$a*e*c^{-1}=e.$
$a*c^{-1}=e.$ וגם בהכרח $c*c^{-1}=e$
לכן $a=c$ אבל נתון $a \neq c$!

ב. הוכח שיש לפחות חמישה איברים בG:
עד כה, ידוע לנו שישנם 3 איברים שונים $a,b,c \in G$. לכן נצטרך למצוא עוד שני איברים ששייכים לG ולא שווים לa,b,c.
נוכיח שקיים ניטרלי שונה מa:
אם a ניטרלי, אזי מתקיימת המשוואה: $a*b=b*c$
$b=b*c$
כלומר, c חייב להיות ניטרלי, אבל a ניטרלי, וגם $a \neq c$
נוכיח שקיים ניטרלי שונה מb:
אם b ניטרלי, מתקיימת המשוואה: $a*b=b*c$
$a=c$ אבל $a \neq c$!
בדומה להוכחה שa איננו ניטרלי: אם c ניטרלי: $a*b=b*c$
$a*b=b$
כלומר, a ניטרלי, אבל $a \neq c$ וגם c ניטרלי.
לכן, קיים e נייטרלי כך ש$e \neq a \neq b \neq c$.

נוכיח של b קיים נגדי שונה מa,b,c,e:
נוכיח ללא הגבלת הכלליות שa אינו נגדי לb:
נניח $b*a=e$
לכן $b*a=b*a*a^{-1}*b^{-1}$
$a=a*a^{-1}*b^{-1}$
$a=e*b^{-1}$
$a=b^{-1}$
$a*(b^{-1})^{-1}=e$
$a*b=e$ אבל הפעולה אינה חילופית!

ההוכחה תקפה גם עבור c איננו נגדי לb.

נוכיח שe איננו נגדי לb:
נניח בשלילה e נגדי לb. לכן מתקיים: $b*e=e$
$b=e$ אבל $b \neq e$!

לכן קיים $d \in G$ כך ש$d \neq e \neq a \neq b \neq c$ וגם $b*d=e$.

ג. הוכח שאם a נגדי לעצמו אזי c נגדי לעצמו:
נניח $a*a=e$:
לכן מתקיים:$a*b=b*c$
$$a*a*b=a*b*c$$
$$e*b=(a*b)*c$$
$b=b*c*c$ מתקיים אם ורק אם $c*c=e$ כי אז $b=b*e$, ולכן c נגדי לעצמו.

<u>שאלה 2:</u> הוכח ש$\mathbb{N}$ חבורה ביחס לפעולה Δ:
צריך להוכיח: $(\mathbb{N},\Delta)$ מקיימת סגירות, קיבוציות, קיים ניטרלי עבור הפעולה, וקיים הופכי לכל איבר ב$\mathbb{N}$.

1. סגירות: יהיו $a,b\in\mathbb{N}$. לפי הגדרת הפעולה: $a\Delta b=(a*1)*b$.
נפרק את הגדרת הפעולה: $a*1\in\mathbb{N}$ בגלל ש$a,1\in\mathbb{N}$ וגם הפעולה $*$ סגורה עבור הקבוצה $\mathbb{N}$, כחלק מהגדרתה כחבורה.
לכן, $(a*1)*b\in\mathbb{N}$ בגלל ש$a*1,b\in\mathbb{N}$ וגם הפעולה $*$ סגורה עבור הקבוצה $\mathbb{N}$.
2. קיבוציות: יהיו $a,b,c\in\mathbb{N}$:
$$(a\Delta b)\Delta c=\Big(\big((a*1)*b\big)*1\Big)*c=\big((a*1*b)*1\big)*c=(a*1*b*1)*c=a*1*b*1*c$$
$$a\Delta(b\Delta c)=(a*1)*\big((b*1)*c\big)=a*1*(b*1*c)=a*1*b*1*c$$
בגלל שהפעולה Δ מוגדרת ע"י $\mathbb{N}$, שהיא חבורה ביחס לפעולה $*$ - כלומר היא מקיימת בפרט את תכונת הקיבוציות, השוויון לעיל הוגדר.
3. קיום נייטרלי – 3:
יהי $a\in\mathbb{N}$:
$$a\Delta 3=(a*1)*3=a*(1*3)=a*2=a$$
$$3\Delta a=(3*1)*a=2*a=a$$
לפי הגדרת $(\mathbb{N},*)$, האיבר הניטרלי הוא 2, וההופכי ל1 הוא 3, כלומר, $2=3*1$. נוסף על כך, בהוכחה השתמשתי בתכונת הקיבוציות, שהיא חלק מהגדרת $\mathbb{N}$ כחבורה עבור הפעולה $*$.
4. לכל איבר בפעולה, קיים איבר הופכי: יהיו $a,b\in\mathbb{N}$ כך שb נגדי לa.
$$a\Delta b=3$$
$$a*1*b=3$$
$$b*a*1=3$$
לכן, קיים איבר הופכי אם ורק אם לכל $a\in\mathbb{N}$ קיים $b\in\mathbb{N}$ כך ש$b*a*1=3$.

<u>שאלה 3:</u> תהי $A=\{2n+1|n\in\mathbb{Z}\}$

א)

א. תכונת הסגירות מתקיימת עבור $(A,*)$ - לפי הגדרת הפעולה: אם $a,b\in A$ אזי a,b הם אי-זוגיים. בתחילה, מחוסר מa,b 3, שהוא מספר אי זוגי, ולכן מכפלת $(a-3)(b-3)$ היא ניתנת לחילוק ב4 (– נוכל להוציא מכל אחד מהאיברים 2, ומכפלת 2 ב2 היא 4). בהמשך, מחולקת המכפלה ב2, אך היא עדיין זוגית כיוון ש4 לחלק ל2 הוא 2 – וכל מכפלה של מספר ב2 היא זוגית. למנת החילוק הזאת, שהיא זוגית, מוסף מספר אי זוגי, ובגלל שסכום זוגי ואי זוגי הוא אי זוגי, תוצאת הפעולה היא איזוגית, ולפיכך, הפעולה בהכרח סגורה.
ב. תכונת הקיבוציות מתקיימת עבור $(A,*)$: יהיו $a,b,c\in A$.
$$a*(b*c)=\frac{\left(\frac{(a-3)(b-3)}{2}\right)(c-3)}{2}+3=\left(\frac{(a-3)(b-3)}{2}\right)(c-3)+6$$
$$=\frac{(a-3)(b-3)2(c-3)}{2}+6=(a-3)(b-3)(c-3)+6$$

$$(a*b)*c=\frac{(a-3)\left(\frac{(b-3)(c-3)}{2}\right)}{2}+3=\ (a-3)\left(\frac{(b-3)(c-3)}{2}\right)+6$$
$$=\frac{2(a-3)(b-3)(c-3)}{2}=(a-3)(b-3)(c-3)+6$$

שני הביטויים שווים, ולכן הפעולה קיבוצית.

ג. קיום נייטרלי: 5: יהי$a\in A$

$$a*5=\frac{(a-3)(5-3)}{2}+3=\frac{2(a-3)}{2}+3=a-3+3=a$$
$$5*a=\frac{(5-3)(a-3)}{2}+3=\frac{2(a-3)}{2}+3=a-3+3=a$$

ד. קיים הופכי: יהי $a\in A$:

$$3*a=5$$
$$\frac{(3-3)(a-3)}{2}+3=5$$
$$(3-3)(a-3)=2$$
$$0\neq 2$$

ולכן לא קיים הופכי לכל $a\in A$.

ב) בדוק ונמק אותו דבר עבור $\mathbb{Q}\backslash\{3\}$:

א. סגירות – הקבוצה סגורה, כיוון שהתוצאה היחידה של הפעולה אשר שווה ל3 היא כאשר המנה שווה ל0, דבר שמתאפשר אם אחד המכפילים במונה הוא 0, דבר שמתאפשר רק כאשר $a=3$ או $b=3$, אבל $3\notin\mathbb{Q}\backslash\{3\}$.

ב. קיבוציות – בגלל שהקבוצה סגורה ואין תלות בערך מסוים לשם קיבוציות, וכירושה מההוכחה שלעיל, גם הפעולה $(\mathbb{Q},*)$ היא קיבוצית.

ג. הניטרלי הוא אותו ניטרלי – אין תלות בהגדרת הקבוצה A בהוכחה לעיל, ולכן הניטרלי זהה.

ד. עבור $\mathrm{b}\in\mathbb{Q}\backslash\{3\}$ לא קיים נייטרלי:
נניח בשלילה שקיים $a\in\mathbb{Q}\backslash\{3\}$:

$$\mathrm{b}*a=\frac{(6-3)(a-3)}{2}+3=5$$
$$(a-3)(b-3)+6=5$$
$$(a-3)(b-3)=-1$$

בהכרח קיימים שני מספרים שייכים לQ כך שהם לא 3 – כיוון שאם אחד מהם היה 3 אזי זה היה פסוק שקר.

<u>שאלה 4:</u> תהי G חבורה ביחס לפעולה *, ויהיו $a,b,c\in G$.

א. נניח $a*b$ נגדי לעצמו.
לכן מתקיים $a*b*a*b=a*b*b^{-1}*a^{-1}$

$$a*b=b^{-1}*a^{-1}$$
$$b^{-1}*a^{-1}=e$$
$$a*b=e$$
$$b*a=e$$

ב. אם a נגדי ל$b*c$ וגם b נגדי ל$a*c$ אזי מתקיים: $a*(b*c)=e$ (חילופיות נגדיים)

$$b*a*c=e$$
$$a*b*c=b*a*c$$
$$a*b=b*a$$

ג. נניח בשלילה $a * b = c * a$:

$$a * b * a^{-1} * c^{-1} = e$$
$$a * b * (c * a)^{-1} = e$$
$$a * b * (c * b)^{-1} = a * b * (a * b)^{-1}$$
$$c * b = a * b$$
$$c = a$$

אבל $c \neq a$!

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e

שלב 1: השלמת את עמודת ושורת הניטרלי. תוצאת הפעולה עם הניטרלי שווה לאיבר השני.
שלב 2: מצאתי מה ערכו של $a * b$ בדרך השלילה: אם $a * b = a$ אזי $b = e$ אבל $b \neq e$.
אם $a * b = b$ אזי $a = e$ אבל $a \neq e$.
אם $a * b = c * c$ ולכן $a * b \neq c$.
מכך, בהכרח $a * b = e$. לכן גם $b * a = e$ לפי חילופיות הנגדיים בחבורה. בגלל השוויון שנתון ($a * b = c * c$) נובע $c * c = e$.

שלב 3: מצאתי מה ערכו של $a * a$ בדרך השלילה: אם $a * a = a$ אזי $a = e$ אבל $a \neq e$!
אם $a * a = b$ אזי $a * a = b$ כלומר $a * a * b = e$ כלומר לפי שלב 2 $a * a * b = a * b$ כלומר $a = e$ אבל $a \neq e$!

אם $a * a = e$ אזי $a * a = a * b$ כלומר $a = b$
אבל $a \neq b$!

לכן $a * a = c$.

שלב 4: מילאתי $c * a = b$ כי בדומה לסעיפים קודמים, $c * a \neq a, c$ וכן בגלל שהקבוצה היא חבורה עבור הפעולה, מופיע נייטרלי פעם אחת בלבד (הופכי יחיד – לפי הגדרתו בחבורה) ולכן $c * a = b$. כנ"ל לגבי $a * c$.

שלב 5: מילאתי $b * b = c$ כי $b * b \neq b$ – כי $b \neq e$, בנוסף לכך אם $b * b = a$ אזי $a * a = b$, אבל $a * a = c$. בדומה לסעיף קודם, $b \neq e$ כי מופיע פעם אחת לפי הגדרת הופכי בחבורה.

שלב 6 ואחרון: מילאתי $c * b = b * c = a$ כיוון שאם הייתי ממלא אחרת, זה היה סותר את העובדה ש $a \neq b \neq c \neq d$.