20425 - תאריך הבחינה: 27.2.2012 (סמסטר 2012א - מועד 5א / 86)

שאלה 1

נסמן ב- X את ציון מקרי בבחינה. לפי נתוני השאלה: $X \sim N(80,\sigma^2)$.

א1. נמצא את הערך של σ. נתון כי: $P\{X > 83.5\} = 0.3085$

כלומר: $P\{X \le 83.5\} = \Phi\left(\frac{83.5-80}{\sigma}\right) = 1-0.3085 = 0.6915 = \Phi(0.5)$

לכן: $\frac{83.5-80}{\sigma} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 7$

א2. הגדלת הערך של σ פירושה הגדלת השונות של ההתפלגות הנורמלית. כאשר מגדילים את השונות בהתפלגות הנורמלית, עקומת הפעמון, המתארת את צפיפותה, הופכת להיות נמוכה יותר במרכזה ובעלת זנבות עבים יותר. הואיל והמאורע $\{X > 83.5\}$ מכיל ערכים לא מרכזיים של ההתפלגות, הסתברותו תגדל.

ב. נמצא תחילה את ההסתברות שציון של בחינה מקרית יהיה נמוך מ-65:

$P\{X < 65\} = \Phi\left(\frac{65-80}{7}\right) = \Phi(-2.1429) = 1-\Phi(2.1429) = 1-0.9839 = 0.0161$

כעת, מספר הבחינות שייבדקו עד למציאת הבחינה הראשונה שציונה נמוך מ-65, הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר 0.0161. נסמן משתנה מקרי זה ב- Y ונקבל:

$P\{Y > 20\} = (1-0.0161)^{20} = 0.7228$

ג. סכום הציונים של n בחינות גם הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת $80n$ ושונות $7^2 n$.

ממוצע הציונים של n בחינות הוא טרנספורמציה לינארית של הסכום: $\overline{X} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

לכן גם הממוצע הוא משתנה מקרי נורמלי, אך עם תוחלת $\frac{1}{n}\cdot 80n = 80$ ושונות $\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot 7^2 n = 7^2/n$.

לפיכך, צריך שיתקיים: $P\{75 < \overline{X} < 85\} = \Phi\left(\frac{85-80}{7/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{75-80}{7/\sqrt{n}}\right) = \Phi(0.7143\sqrt{n}) - \Phi(-0.7143\sqrt{n})$

$$= 2\Phi(0.7143\sqrt{n}) - 1 \quad > \quad 0.99$$

כלומר, שיתקיים: $\Phi(0.7143\sqrt{n}) \quad > \quad 0.995 = \Phi(0.2575)$

ומכאן: $\sqrt{n} \quad > \quad \frac{2.575}{0.7143} = 3.605 \quad \Rightarrow \quad n > 12.996$

לפיכך, דרושים לפחות 13 ציוני בחינות.

שאלה 2

הוכחת הטענות מובאת בקובץ ההוכחות באתר הקורס ובספר הקורס.

שאלה 3

א. הערכים האפשריים של X הם המספרים השלמים בין 1 ל- 52.

מכיוון שהקלף A♥ יכול להיות ממוקם בכל אחד מהמקומות בחפיסה בהסתברויות שוות, נקבל כי לכל $i=1,\ldots,52$ מתקיים $P\{X=i\}=\frac{1}{52}$.

אפשר גם לחשב את ההסתברות בדרך קומבינטורית: $i=1,\ldots,52 \quad , \quad P\{X=i\}=\frac{1\cdot 51!}{52!}=\frac{1}{52}$

ב. נפריד את חישוב ההסתברות המותנית, $P\{X=i \mid Y=j\}$, לשני מקרים:

1. האס הראשון שמתגלה הוא A♥, כלומר, $i=j$.
2. האס הראשון שמתגלה אינו A♥, אלא אחד מ-3 האסים האחרים, כלומר, $i>j$.

המקרה שבו $j>i$ לא ייתכן, מכיוון שלא ייתכן ש- A♥ יופיע לפני האס הראשון.

<u>מקרה 1</u>: $i=j$

אם נתון שהאס הראשון נמצא במקום j בחפיסה, אז כל אחד מ-4 האסים יכול להיות האס הזה (הראשון). לכן, ההסתברות שדווקא A♥ יהיה האס הראשון, כלומר ההסתברות שיתקיים $X=j$, היא ¼, לכל $j=1,\ldots,49$. נראה גם את החישוב המלא:

$$P\{X=j \mid Y=j\}=\frac{P\{X=j,Y=j\}}{P\{Y=j\}}=\frac{\dfrac{\binom{52-j}{3}\cdot 3!}{\binom{52}{4}\cdot 4!}}{\dfrac{\binom{52-j}{3}}{\binom{52}{4}}}=\frac{1}{4} \quad , \quad j=1,2,\ldots,49$$

הן במונה והן במכנה, מתייחסים בחישוב למקומות האפשריים של האסים בחפיסה. במונה, בוחרים מקומות בחפיסה ל-3 האסים האחרונים, ויש גם התייחסות לסדר הפנימי של האסים, שכן המאורע, ש- A♥ הוא הראשון מבין האסים, תלוי בסדר הפנימי שלהם. במכנה, בוחרים מקומות לכל 4 האסים.

<u>מקרה 2</u>: $i>j$

כעת, נטפל במקרה שבו האס הראשון אינו A♥. אם נתון שהאס הראשון נמצא במקום j בחפיסה והוא איננו A♥ (בהסתברות ¾), אז הקלף A♥ יימצא באחד מ- $52-j$ המקומות שאחרי מקום j. כמקודם, גם כאן נוכל לטעון שהקלף A♥ יכול להימצא בכל אחד מהמקומות ה"מותרים" לו בהסתברויות שוות. ולכן, ההסתברות המותנית שהקלף A♥ יהיה בכל אחד מ- $52-j$ המקומות שאחרי האס הראשון שווה ל- $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{52-j}$.

נראה גם את החישוב המלא:

$$P\{X=i \mid Y=j\}=\frac{P\{X=i,Y=j\}}{P\{Y=j\}}=\frac{\dfrac{\binom{52-j-1}{2}\cdot 3!}{\binom{52}{4}\cdot 4!}}{\dfrac{\binom{52-j}{3}}{\binom{52}{4}}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{52-j} \quad , \quad i=j+1,\ldots,52 \quad ; \quad j=1,2,\ldots,49$$

לכן:
$$P\{X=i\,|\,Y=j\}=\begin{cases}0 & , \quad i<j\\ \frac{1}{4} & , \quad i=j\\ \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{52-j} & , \quad i>j\end{cases}$$

ג. לאחר חישוב ההסתברות המותנית, קל לראות שפונקציית ההסתברות של X שונה מפונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $Y=j$.

למשל: $P\{X=1\}=\frac{1}{52}$

אבל: $P\{X=1\,|\,Y=1\}=\frac{1}{4}$

לכן, התנאי השקול לתנאי האי-תלות לא מתקיים, ומכאן ששני המשתנים המקריים תלויים.

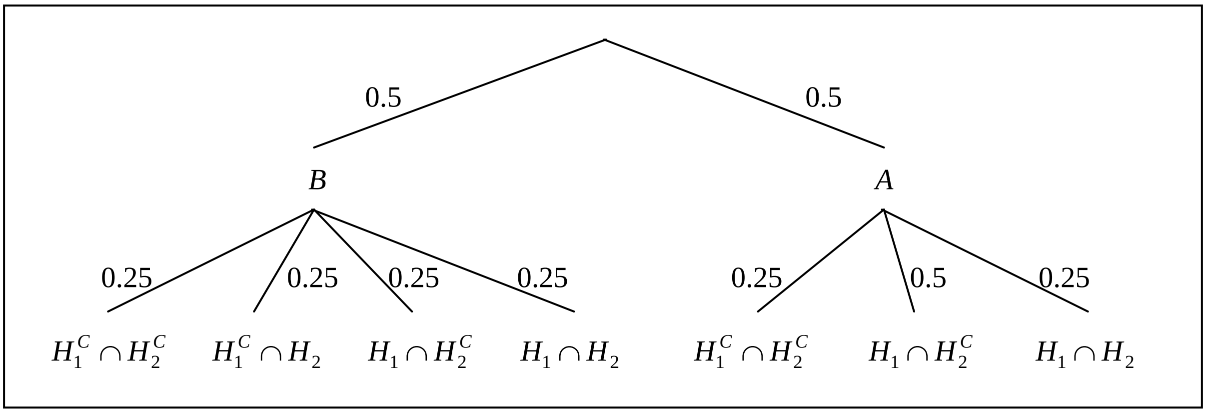
שאלה 4

נסמן ב- H_i את המאורע ששחקן מגלה קלף חזק בשלב ה- i -י במשחק, לכל $i=1,2$;

כמו כן, נסמן ב- A את המאורע שהשחקן המשחק הוא שחקן A.

הערה: בסימונים אלו, המאורע A^C הוא המאורע שהמשחק הוא שחקן B, אך מטעמי נוחיות נסמן $A^C=B$.

בעץ המתואר להלן, מופיעות כל אסטרטגיות המשחק של שני השחקנים. ההסתברויות לכל אסטרטגיה נקבעות בהתאם להסתברויות לקבלת הקלפים הנדרשים לכל אחת מהאסטרטגיות.



א. $$P(H_2\,|\,A\cap H_1)=\frac{P(H_1\cap H_2\,|\,A)}{P(H_1\,|\,A)}=\frac{0.25}{1-0.25}=\frac{0.25}{0.75}=\frac{1}{3}$$

במונה: שחקן A יגלה שני קלפים חזקים, רק אם קיבל שניים כאלה.

במכנה: שחקן A יפתח בקלף חזק, רק אם יש ברשותו לפחות אחד כזה.

ב. $$P(H_2\,|\,B\cap H_1)=\frac{P(H_1\cap H_2\,|\,B)}{P(H_1\,|\,B)}=\frac{0.25}{2\cdot 0.25}=\frac{0.25}{0.5}=\frac{1}{2}$$

במונה: שחקן B יגלה שני קלפים חזקים, רק אם קיבל שניים כאלה.

במכנה: שחקן B יפתח בקלף חזק באופן מקרי.

כעת, נניח שהמאורע A הוא המאורע ששחקן A נבחר, ומכאן שהמשלים שלו הוא המאורע ששחקן B נבחר.

ג1. $$P(H_2 | H_1) = \frac{P(H_1 \cap H_2)}{P(H_1)} = \frac{0.25}{P(H_1 | A)P(A) + P(H_1 | B)P(B)} = \frac{0.25}{0.75 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.5} = \frac{0.25}{0.625} = 0.4$$

במונה: שני השחקנים יגלו שני קלפים חזקים, רק אם קיבלו שני קלפים כאלה. כלומר, כאשר השחקנים מקבלים שני קלפים חזקים, אין חשיבות לאסטרטגיות המשחק השונות שלהם.

במכנה: נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה (נזכור כי $A^C = B$) ובתוצאות שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

דרך נוספת: לפי נוסחת ההסתברות השלמה למאורעות מותנים

$$P(H_2 | H_1) = P(H_2 | H_1 \cap A)P(A | H_1) + P(H_2 | H_1 \cap B)P(B | H_1)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{P(H_1 | A)P(A)}{P(H_1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P(H_1 | B)P(B)}{P(H_1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0.75 \cdot 0.5}{0.625} + \frac{1}{2} \cdot \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.625} = \frac{1}{3} \cdot 0.6 + \frac{1}{2} \cdot 0.4 = 0.4$$

ג2. $$P(A | H_1 \cap H_2^C) = \frac{P(H_1 \cap H_2^C | A)P(A)}{P(H_1 \cap H_2^C)} = \frac{2 \cdot 0.25 \cdot 0.5}{P(H_1) - P(H_1 \cap H_2)} = \frac{0.25}{0.625 - 0.25} = \frac{0.25}{0.375} = \frac{2}{3}$$

במונה: שימוש בנוסחת הכפל. כמו כן, שחקן A יגלה קלף חזק ואחריו קלף חלש, אם קיבל שני קלפים כאלה (חזק וחלש). ההסתברות שיקבל קלפים כאלה היא $2 \cdot 0.5^2$.

במכנה: נשתמש בתוצאות מהסעיף הקודם.

שאלה 5

א. מספר נסיונות הלכידה של לוכד-הנמרים עד לתפיסת 3 הנמרים הוא משתנה מקרי בינומי-שלילי עם הפרמטרים 3 ו- 0.4. נסמן משתנה מקרי זה ב- X.

$$P\{X \le 5\} = 0.4^3 + 3 \cdot 0.4^3 \cdot 0.6 + \binom{4}{2} \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^2 = 0.31744$$

ב. $$P\{X = 5 | X \le 5\} = \frac{P\{X = 5\}}{P\{X \le 5\}} = \frac{\binom{4}{2} \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^2}{0.31744} = \frac{0.13824}{0.31744} = 0.4355$$

ג. $$E[X] = \frac{3}{0.4} = 7.5 \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{3 \cdot 0.6}{0.4^2} = 11.25$$

ד. נסמן ב- Y את הזמן שהלוכד משקיע בתפיסת הנמרים. מתקיים:

$$Y = 3 \cdot 30 + (X - 3) \cdot 15 = 15X + 45$$

לכן:

$$E[Y] = E[15X + 45] = 15E[X] + 45 = 15 \cdot 7.5 + 45 = 157.5$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(15X + 45) = 15^2\,\mathrm{Var}(X) = 225 \cdot 11.25 = 2{,}531.25$$