פתרונות לממ"ן 11 - 2013ב - 20425

1. א. כאשר מסדרים 20 אנשים בשורה, מספר התוצאות השונות במרחב המדגם הוא $20!$.
כדי ליצור תוצאה שבה מתקיים המאורע המתואר בסעיף זה, נסדר תחילה את הבנות ב-10 המקומות השמאליים בשורה, ואח"כ נסדר את הבנים ב-10 המקומות הנותרים.
נקבל: $\frac{10!\cdot 10!}{20!} = 5.4125\cdot 10^{-6}$

ב. כאשר בוחרים 15 פרטים עם החזרה (ובהכרח לפי סדר) מתוך אוכלוסייה בת 20 פרטים, מספר התוצאות השונות במרחב המדגם הוא 20^{15} (מכיוון שבכל אחד מ-15 שלבי-הניסוי יש 20 אפשרויות בחירה).
כעת, כדי ליצור תוצאה שבה מתקיים המאורע המתואר בסעיף זה, נתחיל בבחירה של 5 מקומות במדגם שבהם ייבחרו בנים ($\binom{15}{5}=3{,}003$ אפשרויות). אח"כ נבחר את 5 הבנים (עם החזרה) למקומות האלו ו-10 בנות (עם החזרה) למקומות האחרים. נקבל:

$$\frac{\binom{15}{10}10^5\cdot 10^{10}}{20^{15}} = 0.09164$$

ג. בסעיף זה מספר התוצאות השונות במרחב המדגם נותר כשהיה בסעיף הקודם, דהיינו 20^{15}.
כעת, כדי ליצור תוצאה שבה מתקיים המאורע המתואר בסעיף זה, תחילה יש לבחור 5 בנים למקומות הראשונים במדגם. אחר-כך, יש לבחור את 10 הבחירות האחרונות (ללא הגבלה).
מקבלים: $\frac{10^5\cdot 20^{10}}{20^{15}} = \frac{10^5}{20^5} = 0.03125$
שימו לב, שאפשר לוותר על ההכפלה ב-20^{10} (במונה ובמכנה), מכיוון שעל 10 הבחירות האחרונות לא קיימת כל הגבלה מבחינת ההגדרה של המאורע שאת הסתברותו מחשבים.

ד. בסעיף זה התלמידים מסתדרים באקראי במעגל, שהמקומות בו לא מסומנים. לכן, מספר התוצאות השונות במרחב המדגם הוא $19!$. כעת, נמנה את מספר האפשרויות ליצור תוצאה שבה מתקיים המאורע המתואר בסעיף זה:

דרך I

תחילה נסדר את הבנים במעגל ($9!$ אפשרויות). אחר-כך, נבחר ביניהם 5 מרווחים לזוגות של הבנות ($\binom{10}{5}=252$ אפשרויות). בכל מרווח כזה, "נסמן" שני מקומות לזוג בנות. לבסוף, נסדר את הבנות ב-10 המקומות שסומנו להם ($10!$ אפשרויות). נקבל:

$$\frac{9!\cdot 252\cdot 10!}{19!} = 0.002728$$

דרך II

תחילה, נחלק את הבנות לזוגות ($\frac{1}{5!}\binom{10}{2,2,2,2,2} = \frac{10!}{5!\cdot 2^5} = 945$ אפשרויות לחלוקה ללא סדר) ונקבע בכל זוג סדר פנימי ($2^5 = 32$ אפשרויות). אח"כ נסדר את הזוגות במעגל ($4!$ אפשרויות לסידור במעגל שהמקומות בו אינם מסומנים) ונשמור בין כל שני זוגות מקום ריק. כעת, יש לקבוע 5 מקומות ריקים נוספים בין הזוגות, כאשר קביעת המקומות הללו היא כחלוקה של 5 כדורים זהים ב-5 תאים ממוספרים (כלומר, $\binom{5+4}{5}=126$ אפשרויות). בשלב האחרון יש למקם את 10 הבנים ב-10 המקומות הריקים שנקבעו להם במעגל ($10!$ אפשרויות). ומכאן מקבלים: $\frac{945\cdot 32\cdot 4!\cdot 126\cdot 10!}{19!} = 0.002728$

2. א. מספר האפשרויות השונות לסדר בשורה את 9 הקלפים (שלא כולם שונים זה מזה) הוא:

$$\frac{9!}{2!\cdot 2!\cdot 3!}=15{,}120$$

כל הסידורים הללו הם שווי-הסתברות, ורק באחד מהם מתקבלת המילה "סטטיסטיקה". לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא $1/15{,}120=6.614\cdot 10^{-5}$.

ב. כדי לחשב את ההסתברות המבוקשת, נניח שכל הקלפים שונים זה מזה. לפיכך, במרחב המדגם של הניסוי, שבו בוחרים 9 קלפים לפי סדר ועם החזרה מתוך אוכלוסייה בגודל 9, יש 9^9 תוצאות שונות.

1. מספר התוצאות שבהן מתקבלת המילה "סטטיסטיקה" הוא: $2\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2=2^4\cdot 3^3=432$
ומכאן, שההסתברות המבוקשת היא $432/9^9=1.115\cdot 10^{-6}$.

2. כדי לקבוע את ההסתברות המבוקשת, תחילה נביא בחשבון את סדר קבלת האותיות המפורטות למדגם. כלומר, נמנה את מספר האפשרויות לסדר במדגם את האותיות **ט**, **ס** ו- **י** בהתאם לכמויות הרשומות בסעיף ($\binom{9}{4}\binom{5}{3}\binom{2}{2}=\frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!}=1{,}260$ אפשרויות). אח"כ נקבע אלו קלפים יעלו במדגם: הואיל וכל אחת מהאותיות מופיעה על יותר מאשר קלף אחד (בסה"כ $3^4\cdot 2^3\cdot 2^2=2{,}592$ אפשרויות).

ומכאן מקבלים את ההסתברות: $$\frac{1{,}260\cdot 2{,}592}{9^9}=0.00843$$

3. א. ראשית, יש !6 תוצאות שונות במרחב המדגם.
שנית, כדי למנות את מספר התוצאות השייכות למאורע המתואר בסעיף זה, נבחר את ארבעת הספלים שיונחו על התחתיות המתאימות להם ונדאג שהשניים האחרים לא יונחו על התחתיות שלהם (כלומר, כל אחד מהשניים יונח על התחתית של הספל האחר – אפשרות אחת בלבד).

לפיכך, נקבל: $$\frac{\binom{6}{4}}{6!}=\frac{15}{720}=\frac{1}{48}$$

ב. אם שני הספלים הקטנים ביותר מונחים על תחתיותיהם, נותר רק להניח את שאר 4 הספלים האחרים על התחתיות הנותרות. לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $$\frac{4!}{6!}=\frac{1}{30}$$

ג. אם שלושת הספלים הקטנים ביותר מונחים על שלוש התחתיות של הספלים הגדולים ביותר, אז מתקיים ההיפך לגבי הספלים הגדולים ביותר. כלומר, את שלושת הספלים הקטנים ביותר מניחים על 3 תחתיות אפשריות וכך גם את שלושת הספלים הגדולים ביותר.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $$\frac{(3!)^2}{6!}=\frac{1}{20}=0.05$$

ד. כדי שבדיוק ספל אחד יונח על תחתית מתאימה, כל הספלים האחרים צריכים להיות על תחתיות לא-מתאימות להם. נחשב את ההסתברות המבוקשת באמצעות כלל ההכלה וההפרדה, לאחר שנבחר את הספל שיונח על התחתית המתאימה.
נסמן ב- A_i את המאורע שספל i מונח על התחתית שלו, לכל $i=1,2,3,4,5$, ונחשב את מספר התוצאות השייכות למאורע $A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C\cap A_4^C\cap A_5^C$.

תנאי הבעיה סימטריים, לכן:

$$n(A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C\cap A_4^C\cap A_5^C) = 5! - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)$$
$$= 5! - \left[\binom{5}{1}n(A_1) - \binom{5}{2}n(A_1\cap A_2) + \ldots + \binom{5}{5}n(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5)\right]$$
$$= 5! - \left[5\cdot 4! - 10\cdot 3! + 10\cdot 2! - 5\cdot 1 + 1\cdot 1\right] = 120 - 76 = 44$$

ומכאן, מקבלים את ההסתברות המבוקשת: $\frac{6\cdot 44}{6!} = 0.3\overline{6}$

4. א. נחשב תחילה את מספר התוצאות במרחב המדגם של הניסוי המתואר בסעיף זה:

$$n(S) = \binom{20}{2,\ldots,2}\cdot\frac{1}{10!} = \frac{20!}{2^{10}\cdot 10!} = 654{,}729{,}075$$

א1. כעת, כדי שבכל זוג יהיה בלון שנושא מספר זוגי, האפשרות היחידה היא להתאים לכל בלון אי-זוגי בלון זוגי. מספר אפשרויות ההתאמה הוא !10, ולכן ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{10!}{n(S)} = 0.00554$

א2. כדי שבדיוק ב-2 זוגות בלונים לא יהיה אף בלון הנושא מספר זוגי, צריכים להתקבל בחלוקה 2 זוגות של בלונים הנושאים מספרים אי-זוגיים, 6 זוגות "מעורבים" (מספר זוגי ומספר אי-זוגי) ו-2 זוגות של בלונים הנושאים מספרים זוגיים. לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{\left[\binom{10}{2}\binom{8}{2}/2!\right]^2\cdot 6!}{n(S)} = 0.4365$

ב. נתייחס רק לסידור של הבלונים שממוספרים ב-4, 5 ו-6. יש לבלונים אלו $3! = 6$ סידורים פנימיים, ורק ב-2 מהם בלון מספר 4 נמצא לשמאל בלונים 5 ו-6. לכן, ההסתברות המבוקשת היא $2/6 = 1/3$.

ג. נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה, כדי לחשב את ההסתברות המבוקשת.
נסמן ב- A_i את המאורע שילד i מקבל לפחות בלון זוגי אחד, לכל $i = 1,2,3,4$, ונחשב את ההסתברות של המאורע $A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4$. תנאי הבעיה סימטריים, לכן:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)$$
$$= 1 - P(A_1^C \cup A_2^C \cup A_3^C \cup A_4^C)$$
$$= 1 - \left[\binom{4}{1}P(A_1^C) - \binom{4}{2}P(A_1^C\cap A_2^C) + \binom{4}{3}P(A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C) - P(A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C\cap A_4^C)\right]$$
$$= 1 - \left[4\cdot\frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{2}} - 6\cdot\frac{\binom{10}{4}}{\binom{20}{4}} + 4\cdot\frac{\binom{10}{6}}{\binom{20}{6}} - \frac{\binom{10}{8}}{\binom{20}{8}}\right] = 1 - 0.7086 = 0.2914$$

שימו לב, שמשמעות המאורע המוגדר על-ידי חיתוך של k מתוך המאורעות A_i^C היא ש-k הילדים (שהמאורעות מתייחסים אליהם) קיבלו רק בלונים אי-זוגיים. כלומר, בסך-הכל $2k$ בלונים אי-זוגיים, כאשר אין חשיבות לחלוקה הפנימית של $2k$ הבלונים ל-k הילדים. לכן, בחישוב ההסתברויות מספיק להתייחס לקבוצת $2k$ הבלונים שילדים אלו קיבלו.