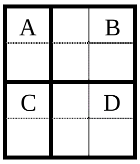
פתרונות לממ"ן 15 - 2012ב - 20425



1. א. נחלק את 12 המקומות במלבן לארבעה איזורים, כמתואר באיור שלהלן :

הערכים האפשריים של X הם 0, 1 ו-2. הערכים האפשריים של Y הם 4, 5 ו-6.

הערכים של ההסתברויות המשותפות הם :

$P\{X=0,Y=4\}=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{6}{66}$ [שתי הבנות באיזור B]

$P\{X=0,Y=5\}=\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}}=\frac{16}{66}$ [בת אחת באיזור B והשנייה באיזור D]

$P\{X=0,Y=6\}=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{6}{66}$ [שתי הבנות באיזור D]

$P\{X=1,Y=4\}=\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}}=\frac{8}{66}$ [בת אחת באיזור A והשנייה באיזור B]

$P\{X=1,Y=5\}=2\cdot\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}}=\frac{16}{66}$ [בת אחת באיזור A והשנייה באיזור D או שאחת ב-C והשנייה ב-B]

$P\{X=1,Y=6\}=\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}}=\frac{8}{66}$ [בת אחת באיזור C והשנייה באיזור D]

$P\{X=2,Y=4\}=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{1}{66}$ [שתי הבנות באיזור A]

$P\{X=2,Y=5\}=\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{12}{2}}=\frac{4}{66}$ [בת אחת באיזור A והשנייה באיזור C]

$P\{X=2,Y=6\}=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{1}{66}$ [שתי הבנות באיזור C]

נערוך את התוצאות שקיבלנו בטבלה :

Y / **X**	**4**	**5**	**6**	p_X
0	$\frac{6}{66}$	$\frac{16}{66}$	$\frac{6}{66}$	$\frac{28}{66}$
1	$\frac{8}{66}$	$\frac{16}{66}$	$\frac{8}{66}$	$\frac{32}{66}$
2	$\frac{1}{66}$	$\frac{4}{66}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{6}{66}$
p_Y	$\frac{15}{66}$	$\frac{36}{66}$	$\frac{15}{66}$	

ב. כדי לקבוע האם המשתנים המקריים X ו-Y בלתי-תלויים, נבדוק את תנאי האי-תלות. למשל :

$$P\{X=0,Y=4\}=\frac{6}{66}=\frac{33}{363} \quad \neq \quad P\{X=0\}P\{Y=4\}=\frac{28}{66}\cdot\frac{15}{66}=\frac{35}{363}$$

ולכן, כצפוי, מקבלים שהמשתנים המקריים הללו תלויים.

ג. נמצא את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $Y=6$. מכיוון ש : $P\{Y=6\}=\frac{15}{66}$

ומכאן : $P\{X=2\mid Y=6\}=\frac{\frac{1}{66}}{\frac{15}{66}}=\frac{1}{15}$; $P\{X=1\mid Y=6\}=\frac{\frac{8}{66}}{\frac{15}{66}}=\frac{8}{15}$; $P\{X=0\mid Y=6\}=\frac{\frac{6}{66}}{\frac{15}{66}}=\frac{6}{15}$

2. א. הערכים האפשריים של W_1 הם 0, 1, 2, 4 ו- 8. נמצא כעת את פונקציית ההסתברות של W_1 :

$P\{W_1 = 0\} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}$ [לפחות משתנה אחד שווה ל-0]

$P\{W_1 = 1\} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ [כל המשתנים שווים ל-1]

$P\{W_1 = 2\} = \frac{3}{3^3} = \frac{3}{27}$ [משתנה אחד שווה ל-2 ושני המשתנים האחרים שווים ל-1]

$P\{W_1 = 4\} = \frac{3}{3^3} = \frac{3}{27}$ [משתנה אחד שווה ל-1 ושני המשתנים האחרים שווים ל-2]

$P\{W_1 = 8\} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ [כל המשתנים שווים ל-2]

ב. כדי לקבוע אם המשתנים המקריים W_1 ו- W_2 בלתי-תלויים, נבדוק את תנאי האי-תלות. למשל:

$$P\{\underbrace{W_1 = 1, W_2 = 2}_{\text{כל המשתנים שווים ל-1}}\} = \frac{1}{27} \quad \neq \quad P\{W_1 = 1\}P\{W_2 = 2\} = \frac{1}{27} \cdot \frac{5}{27}$$

כאשר: $P\{W_2 = 2\} = P\left\{(X, Y, Z) \in \{(1,1,1), (2,1,0), (2,0,1), (1,2,0), (1,0,2)\}\right\} = \frac{5}{27}$

כלומר, התנאי אינו מתקיים, ולכן המשתנים המקריים הללו תלויים.

3. לכל $i = 1,\ldots,10$, הערכים האפשריים של X_i הם 0, 1, ..., 10 וכל אחד מהם מתקבל בהסתברות $\frac{1}{11}$.

א.
$$P\left\{2 \le \min_{i=1,\ldots,10} X_i \le 4\right\} = P\left\{\min_{i=1,\ldots,10} X_i > 1\right\} - P\left\{\min_{i=1,\ldots,10} X_i > 4\right\}$$
$$= P\{X_1 > 1, X_2 > 1, \ldots, X_{10} > 1\} - P\{X_1 > 4, X_2 > 4, \ldots, X_{10} > 4\}$$
$$= \prod_{i=1}^{10} P\{X_i > 1\} - \prod_{i=1}^{10} P\{X_i > 4\} = \left(\frac{9}{11}\right)^{10} - \left(\frac{6}{11}\right)^{10} = 0.1321$$

ב.
$$P\left\{X_1 = 7, \max_{i=1,\ldots,10} X_i = 7\right\} = P\{X_1 = 7, X_2 \le 7, \ldots, X_{10} \le 7\} = \frac{1}{11} \cdot \left(\frac{8}{11}\right)^9 = 0.005175$$

ג.
$$P\left\{X_1 = 3, \max_{i=1,\ldots,10} X_i = 8\right\} = P\left\{X_1 = 3, \max_{i=1,\ldots,10} X_i \le 8\right\} - P\left\{X_1 = 3, \max_{i=1,\ldots,10} X_i \le 7\right\}$$
$$= P\{X_1 = 3, X_2 \le 8, \ldots, X_{10} \le 8\} - P\{X_1 = 3, X_2 \le 7, \ldots, X_{10} \le 7\}$$
$$= \frac{1}{11} \cdot \left(\frac{9}{11}\right)^9 - \frac{1}{11} \cdot \left(\frac{8}{11}\right)^9 = 0.009762$$

ד. סכום עשרת ה-X_i-ים שווה ל-97 רק במקרים הבאים:

1) אם 7 מהם שווים ל-10 ושלושת האחרים שווים ל-9 ($\binom{10}{7} = 120$ אפשרויות);

2) אם 8 מהם שווים ל-10, אחד שווה ל-9 והאחרון שווה ל-8 ($10 \cdot 9 = 90$ אפשרויות);

3) אם 9 מהם שווים ל-10 והעשירי שווה ל-7 (10 אפשרויות).

לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i = 97\right\} = (120 + 90 + 10) \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^{10} = 8.48 \cdot 10^{-9}$

4. א. נסמן ב-X את מספר הטעויות שהקלדנית עושה ב-5 העמודים הראשונים. ההתפלגות של המשתנה המקרי X היא פואסונית עם הפרמטר 5 (מכיוון ש-X הוא סכום של 5 משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים). מכאן:

$$P\{X > 2\} = 1 - P\{X \le 2\} = 1 - e^{-5}\left(\tfrac{5^0}{0!} + \tfrac{5^1}{1!} + \tfrac{5^2}{2!}\right) = 1 - 18.5e^{-5} = 0.87535$$

ב. ההסתברות שבעמוד מסוים אין אף טעות-הקלדה היא: $P\{X = 0\} = e^{-1}\tfrac{1^0}{0!} = e^{-1} = 0.36788$

ולכן, ההסתברות שבעמוד מסוים יש לפחות טעות-הקלדה אחת היא:

$$P\{X \ge 1\} = 1 - e^{-1} = 0.63212$$

העמודים בלתי-תלויים זה בזה. לכן, ההסתברות שבכל אחד מחמשת העמודים הראשונים יש לפחות טעות אחת (או לחלופין שאין ביניהם עמוד בלי טעויות הקלדה) היא: $0.63212^5 = 0.100925$

וההסתברות שבין עמודים אלו יש לפחות עמוד אחד שאין בו טעויות הקלדה היא:

$$1 - 0.100925 = 0.899075$$

ג. נפריד את המאורע, שהטעות השנייה של הקלדנית נמצאת בעמוד 6, לשני מקרים. ייתכן שיש לקלדנית טעות אחת בעמודים 1-5 והטעות השנייה שלה נמצאת בעמוד 6, וייתכן ששתי הטעויות הראשונות שלה הן בעמוד 6. נסמן ב-Y את מספר הטעויות של הקלדנית בעמוד 6. ההתפלגות של המשתנה המקרי Y היא פואסונית עם הפרמטר 1, והוא בלתי-תלוי במשתנה המקרי X, שמוגדר בסעיף א. מכאן מקבלים:

$$P\{X=1, Y\ge 1\} + P\{X=0, Y\ge 2\} = P\{X=1\}P\{Y\ge 1\} + P\{X=0\}P\{Y\ge 2\}$$

$$= 5e^{-5}(1-e^{-1}) + e^{-5}(1-e^{-1}-e^{-1}) = 0.0231$$

ד. נסמן ב-W את מספר טעויות ההקלדה בשני העמודים הראשונים, ונחשב את ההסתברות שיש בהם בדיוק 4 טעויות-הקלדה: $P\{W = 4\} = e^{-2}\tfrac{2^4}{4!} = \tfrac{2}{3}e^{-2} = 0.0902235$

נסמן ב-X_1 את מספר טעויות ההקלדה בעמוד הראשון וב-X_2 את מספר טעויות ההקלדה בעמוד השני, ונחשב את ההסתברות שיש בעמוד הראשון בדיוק טעות אחת מתוך ה-4 **שידוע** שקיימות בשני העמודים הראשונים. נקבל:

$$P\{X_1 = 1 \mid W = 4\} = \frac{P\{X_1 = 1, X_2 = 3\}}{P\{W = 4\}} = \frac{P\{X_1 = 1\}P\{X_2 = 3\}}{P\{W = 4\}}$$

$$= \frac{e^{-1}\tfrac{1^1}{1!}\cdot e^{-1}\tfrac{1^3}{3!}}{e^{-2}\tfrac{2^4}{4!}} = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.25$$

יכולנו להגיע לתוצאה זו ישירות ממסקנת דוגמה 4ב (עמודים 145 - 146 במדריך הלמידה), שהרי X_1 ו-X_2 הם משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים. במקרה כזה, ההתפלגות המותנית של X_1 בתנאי $W = X_1 + X_2 = 4$ היא בינומית עם הפרמטרים 4 ו- $\tfrac{1}{1+1} = \tfrac{1}{2}$.

ה. מספר הטעויות שהקלדנית עושה בהקלדת 40 העמודים הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 40. לכן, מספר הטעויות שהקלדנית מוצאת בקריאת 40 העמודים שהקלידה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $40 \cdot 0.8 = 32$ (ראה דוגמה 2ב במדריך הלמידה, עמודים 138 - 140). מכאן, ששונות מספר הטעויות שהיא מוצאת בקריאה, שווה לפרמטר ההתפלגות האחרונה, דהיינו ל-32.

5. נתון כי X ו-Y משתנים מקריים בלתי-תלויים וכי: $X \sim Geo(p) \quad ; \quad Y \sim Po(\lambda)$

לכן:

$$P\{X-1=Y\}=\sum_{i=0}^{\infty}P\{X-1=Y=i\}=\sum_{i=0}^{\infty}P\{X-1=i,Y=i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}P\{X-1=i\}P\{Y=i\}$$ [X ו-Y בלתי-תלויים זה בזה]

$$=\sum_{i=0}^{\infty}P\{X=i+1\}P\{Y=i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}p(1-p)^i e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}=pe^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{[(1-p)\lambda]^i}{i!}=p\cancel{e^{-\lambda}}e^{(\cancel{1}-p)\lambda}=pe^{-\lambda p}$$