

## בחינה 2

**מבנה הבחינה :**

בבחינה שני חלקים.

**חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.**

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

**משך המבחן: 3 שעות.**

**חומר עזר:** כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

---

**שימו לב:**

\* בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.

\* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.

\* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.

\* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.

---

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

## חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

### שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס.

**בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה.** אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

6 נק') א. נתבונן בטענה: אם לאברהם יש שכל, אז אם אברהם שותה הוא לא נוהג.

טענה זו שקולה לטענה:

[1] אם לאברהם אין שכל אז אם אברהם שותה הוא נוהג.

[2] אם לאברהם אין שכל אז הוא שותה ונוהג.

[3] אם אברהם שותה ונוהג – אין לו שכל.

[4] אם אברהם שותה ולא נוהג – יש לו שכל.

[5] אם אברהם נוהג ולא שותה – יש לו שכל.

7 נק') ב. כזכור אנו מסמנים  $C = |\mathbf{R}|$ . נסמן  $d = |P(\mathbf{R})|$ .

$d^C$  שווה ל-

[1]  $\aleph_0$

[2]  $C$

[3]  $d$

[4]  $2^d$

[5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

6 נק') ג. בגרף המלא  $K_6$  קיימות דרכים שונות ליצור זיווג מושלם.

כמה דרכים כאלה יש, כלומר כמה זיווגים מושלמים ניתן להגדיר ב-  $K_6$  ?

[1] 3

[2] 6

[3] 15

[4] 36

[5] 64

[6] 720

**חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות**  
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

## שאלה 2

- $R$  הוא יחס מעל קבוצה  $A$ , ונתון  $RR^{-1} = I_A$ .  
כידוע, במצב כזה  $R^{-1}R$  אינו חייב להיות שווה ל- $I_A$ .  
בשאלה זו נבדוק איזה תכונות יש במצב כזה ל- $R^{-1}R$ . בשני הסעיפים נתון  $RR^{-1} = I_A$ .  
(18 נק') א. הוכיחו ש- $R^{-1}R$  הוא סימטרי וטרנזיטיבי.  
הדרכה: נוח להוכיח סעיף זה בעזרת תכונות אלגבריות של יחסים.  
(9 נק') ב. בנוסף לנתון  $RR^{-1} = I_A$ , נתון כעת גם ש- $\text{Range}(R) = A$ .  
הוכיחו ש- $R^{-1}R$  הוא יחס שקילות מעל  $A$ .

## שאלה 3

- תהיינה  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .  
(6 נק') א. כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של  $X$  ל- $Y$  קיימות?  
(21 נק') ב. מצאו כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של  $X$  ל- $Y$  מקיימות את התנאי הבא:  
לכל  $i \in X$ ,  $f(i) \neq i$ . הדרכה: הכלה והפרדה.

#### שאלה 4

נתון  $p \neq 0$ .

סדרה מסוימת מקיימת את יחס הנסיגה (יחס רקורסיה):  $a_{n+2} = 6p \cdot a_{n+1} - 5p^2 \cdot a_n$ :

עם תנאי התחלה:  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 8p$ .

פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור  $a_n$ .

את הביטוי שקיבלתם עליכם להביא לצורה:  $a_n = p^n \cdot (\text{משהו})$ ,

כאשר הביטוי שבסוגרים תלוי ב- $n$  אך אינו תלוי ב- $p$ .

#### שאלה 5

יהי  $G$  גרף פשוט, שקבוצת הצמתים שלו היא  $V$ .

נניח שצבענו את  $G$  צביעה נאותה, בצבעים הלקוחים מקבוצת צבעים  $A$ .

$\bar{G}$  הוא הגרף המשלים של  $G$  (הגדרה 1.4, עמ' 12 בחוברת "תורת הגרפים").

בלי קשר לצביעה של  $G$ , צבענו את  $\bar{G}$  צביעה נאותה, בצבעים הלקוחים מקבוצת צבעים  $B$ .

(10 נק') א. לכל  $v \in V$  נתאים זוג סדור של צבעים: הראשון בזוג הוא הצבע של  $v$

בצביעה של  $G$  והשני בזוג הוא הצבע של  $v$  בצביעה של  $\bar{G}$ .

הוכיחו שבהתאמה זו, אין שני צמתים שונים שמותאם להם אותו זוג סדור של צבעים.

(7 נק') ב. נסחו את הטענה של סעיף א כטענה על **חד-חד-ערכיות** של פונקציה

(פונקציה מהיכן להיכן?)

(10 נק') ג. יהי  $n = |V|$ . מהסעיפים הקודמים נובעת אחת הטענות הבאות. מצאו איזו,

והוכיחו אותה.

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n \quad (1)$$

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \geq n \quad (2)$$

$$\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \leq n \quad (3)$$

$$\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \geq n \quad (4)$$

צביעה נאותה ומספר הצביעה,  $\chi(G)$ , הוגדרו שניהם בפרק 6 בחוברת "תורת הגרפים".

**בהצלחה!**