ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20417

אלגוריתמים

חוברת הקורס –סתיו 2013א

כתב: ד״ר דניאל רייכמן

אוקטובר 2012 – סמסטר סתיו – תשע״ג

תוכן העניינים

אל הסטודנט,

אני מקדם את פניך בברכה עם הצטרפותך אל הלומדים בקורס "אלגוריתמים".

בחוברת זו תמצא את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ואת המטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים, אותם מפרסם/מת מרכז/ת ההוראה.
בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.
פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:
http://telem.openu.ac.il
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר
הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

שעות הייעוץ הן בכל יום ג' בשעות 15:00-17:00 בטלפון 09-7781222. (פגישה נא לתאם מראש).
ניתן לפנות גם בדוא"ל: danielre@openu.ac.il.

אני מאחל לך לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה,

ד"ר דניאל רייכמן
מרכז הקורס

1. לוח זמנים ופעילויות (20417 / 2013א)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
1	14.10.2012-19.10.2012	פרק 1		
2	21.10.2012-26.10.2012	פרק 2		
3	28.10.2012-2.11.2012	פרק 3		
4	4.11.2012-9.11.2012	פרק 3		ממ"ן 11 4.11.2012
5	11.11.2012-16.11.2012	פרק 4		
6	18.11.2012-23.11.2012	פרק 4		
7	25.11.2012-30.11.2012	פרק 4		ממ"ן 12 30.11.2012
8	2.12.2012-7.12.2012	פרק 5		

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
9	14.12.2012-9.12.2012 (א-ו חנוכה)	פרק 5		
10	21.12.2012-16.12.2012	פרק 6		
11	28.12.2012-23.12.2012	פרק 6		ממ"ן 13 28.12.2012
12	4.1.2013-30.12.2012	פרק 6		
13	11.1.2013-6.1.2013	פרק 7		ממ"ן 14 11.01.2013
14	18.1.2013-13.1.2013	פרק 7		
15	25.1.2013-20.1.2013	חזרה		ממ"ן 15 25.01.2013

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

2. הנחיות בקשר לכתיבת אלגוריתמים

יש לזכור חמישה דברים שחיוניים להצגת האלגוריתם:

1. הסבר אותו קודם, ואת הרעיונות שבו - בעברית (אלא אם כן האלגוריתם מאוד פשוט).
2. כתוב את האלגוריתם במילים, או במידת הצורך בפסאודו-קוד, בדומה לספר. רצוי לכתוב בקוד הוראות בעברית, אך המימוש צריך להיות חד-משמעי וברור. (לדוגמה: ניתן לכתוב "בחר את האיבר הראשון ברשימה, ואם הוא גדול מ- 7 אז...").
3. אסור בשום אופן לכתוב "תכניות מחשב" במקום אלגוריתמים. עליך להתרגל לכתיבה בצורת פסאודו-קוד.
4. אם נתבקשת להוכיח את נכונות האלגוריתם עליך לעשות זאת בצורה פורמלית ומדויקת (למשל תוך שימוש באינדוקציה או בכלים מדויקים אחרים). **גם אם לא נתבקשת להוכיח, יש להסביר באופן כללי מדוע האלגוריתם עובד כשורה**.
5. בכל מקרה (גם אם לא צוין במפורש) יש לנתח את זמן הריצה של האלגוריתם. כמו כן, תמיד נסה להגיע לאלגוריתם יעיל ככל שניתן. אלגוריתם שהוא נכון, אך אינו יעיל, יזכה אותך רק בחלק מהנקודות.

3. תיאור המטלות

קרא היטב עמודים אלו לפני שתתחיל לענות על השאלות

בקורס זה 5 מטלות שעליך לפתור ולהגיש לבדיקה. להלן תמצא הסבר על אופן הפתרון הנדרש וכיצד לשלוח את המטלה למנחה.

3.1 מבנה המטלות

המטלות בקורס הן מסוג **ממ"ן רגיל:** תרגילים "יבשים" **שאינם** דורשים הרצת תכניות במחשב (אלא אם צוין אחרת בגוף המטלה). תרגילים אלו נועדו לבדוק את הבנתך בחומר הלימוד.
את הפתרונות למטלה כזו עליך לרשום על דף נייר בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה.

אם השאלה בממ"ן אינה ברורה לך, אל תהסס להתקשר אל אחד מהמנחים (בשעות הייעוץ הטלפוני שלו) לצורך קבלת הסבר.

3.2 חומר הלימוד הדרוש לפתרון המטלות

בטבלה שלהלן תמצא מהו חומר הלימוד הנדרש (לפי פרקי הספר) לפתרון כל אחת מהמטלות.

<u>שים לב:</u>

אין להשתמש לפתרון המטלות בידע הנרכש בפרקי לימוד מתקדמים יותר מהפרקים בהם עוסקת הטבלה

מטלה	חומר הלימוד הנדרש לפתרונה
ממ"ן 11	פרקים 1,2,3
ממ"ן 12	פרק 4
ממ"ן 13	פרקים 4,5
ממ"ן 14	מדריך הלמידה, פרקים ד', ה'
ממ"ן 15	מדריך הלמידה, פרקים ד', ה'

3.3 ניקוד המטלות

משקל כל מטלה 6 נקודות. ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל מינימלי של 18 נקודות לפחות.

ללא צבירת 18 נקודות
לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

4. התנאים לקבלת נקודות זכות

א. צבירת 18 נקודות זכות **לפחות** במטלות.

ב. ציון של לפחות 60 נקודות בבחינת הגמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

לתשומת לבכם!

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן:

אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלות** בציון הנמוך ביותר, שציוניהן נמוכים מציון הבחינה (**עד שתי מטלות**), לא יילקחו בחשבון בעת שקלול הציון הסופי.

זאת בתנאי שמטלות אלה **אינן חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו, מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: **20417 – אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1, 2 ו-3 בספר הלימוד.

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2013א **מועד אחרון להגשה:** 4.11.2012

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

פתרו את שאלה 1.5 בספר הלימוד.

שאלה 2 (20 נקודות)

יהי G גרף לא מכוון. הוכיחו: אם ב- G אין מעגלים באורך קטן מ-5 אז ב-- G $O(n\sqrt{n})$ קשתות לכל היותר.

הדרכה: הוכיחו תחילה כי בגרף כזה הדרגה המינימלית היא $O(\sqrt{n})$.

שאלה 3 (20 נקודות)

א. הציעו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו הקובע האם גרף **לא מכוון** $G=(V,E)$ מכיל מעגל פשוט באורך אי זוגי. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם ונתחו את סיבוכיותו.

ב. הציעו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו הקובע האם גרף **מכוון** $G=(V,E)$ מכיל מעגל (לאו דווקא פשוט) באורך אי זוגי. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 4 (20 נקודות)

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל כקלט גרף מכוון $G=(V,E)$ ומוצא את כל הצמתים מהם קיים מסלול לכל צומת בגרף. (אנו קובעים כי קיים מסלול בין קודקוד לעצמו).

שאלה 5 (20 נקודות)

נתון גרף **מכוון** $G=(V,E)$ וקבוצה $U \subseteq V$. כתבו אלגוריתם הבודק האם קיים מסלול מכוון (לאו דווקא פשוט-המסלול יכול לבקר בקודקוד או קשת יותר מפעם אחת) המכיל את **כל צמתי** U. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20417 - אלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרק 4 בספר הלימוד

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2013א **מועד אחרון להגשה:** 30.11.2012

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

נתבונן בבעיית התזמון הבאה. עלינו לבצע n משימות $1,...,n$, וביכולתנו לבצע משימה אחת בזמן נתון. לכל משימה נדרש זמן ביצוע $l_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$. בנוסף לכל משימה משקל $w_i \geq 0$. נתון תזמון כלשהו של המשימות. אנו מניחים כי המשימות מתחילות בזמן 0, וכי המשימה ה-j בתזמון מתחילה מיד כשסיימנו את המשימה ה-$j-1$. יהי t_j זמן הסיום של המשימה j.

מטרתנו היא למצוא סדר לביצוע המשימות המביא למינימום את הסכום $\sum_{i=1}^{n} t_i w_i$.

הציעו אלגוריתם חמדן לבעיה והוכיחו את נכונותו. (רמז: מיינו את המשימות לפי $\frac{w_i}{l_i}$. בדקו זוג משימות עוקב בתזמון אופטימלי שאינו מקיים את הסדר לעיל).

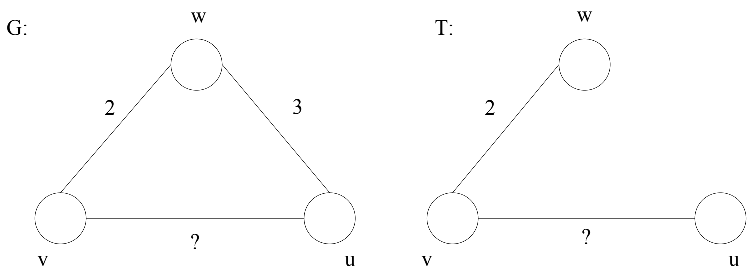
שאלה 2 (20 נקודות)

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון כאשר $|V|=n$. נניח כי ב-G ישנן an^2 קשתות כאשר $a>0$ הוא קבוע כלשהו. הוכיחו כי G מכיל תת-גרף G' בעל $a'n$ קודקודים לפחות כך שהדרגה המינימלית ב-G' היא לפחות $\frac{a}{2}n$ (a' הוא קבוע חיובי שאינו תלוי ב-n). הדרכה-פתרון אפשרי לבעיה הוא להעזר באלגוריתם חמדן המוצא גרף כנ"ל.

שאלה 3 (20 נקודות)

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל כקלט גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$ עם פונקצית משקל $w: E \rightarrow R_+$ ועץ פורש $T=(V,E')$ של G, כך שמשקלה של אחת הקשתות $e\in E'$ מוסתר, ומחשב את טווח הערכים האפשרי של $w(e)$ כך ש-T נשאר עץ פורש מינימלי.

למשל, עבור הקלט הבא:



טווח המשקלים האפשרי של הקשת $e=(u, v)$ הוא $[0, 3]$. אם משקלה של e יעלה על 3, העץ T כבר לא יהיה מינימלי.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 4 (20 נקודות)

פתרו את שאלה 4.9 מספר הלימוד.

שאלה 5 (20 נקודות)

יוצרים גרף לא מכוון $G=(V,E)$ בתהליך הבא. נניח כי $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$. את v_3 מחברים אל v_1, v_2. בשלב ה-i בוחרים באופן שרירותי **שני** קודקודים שונים זה מזה v_r ו- v_s $(r,s<i)$ ומחברים את v_{i+1} אליהם. עוצרים כאשר מחברים את הקודקוד v_n לשני קודקודים שונים זה.

א. הוכיחו: G **קשיר**.

ב. תארו אלגוריתם חמדן המתאים **שלושה** צבעים לקודקודי G כך **שלכל** שני קודקודים **שכנים** מותאמים צבעים **שונים**. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם ונתחו את סיבוכיותו.

ג. פרופסור גרגמל טוען כי האלגוריתם בסעיף ב מיותר שכן G תמיד דו צדדי (ולכן ניתן לצובעו בשני צבעים). האם טענת הפרופסור נכונה? אם כן, הוכיחו זאת. אם לא, תנו דוגמה לתהליך כנ״ל שנותן גרף שאינו דו צדדי.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: **20417 - אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר הלימוד.

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2013א **מועד אחרון להגשה:** 28.12.2012

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$ עם פונקציית משקל $w: E \to R^{+}$ וצומת $s \in V$, נסמן ב- $\delta(v)$ את משקלו של מסלול קצר ביותר מ-s ל-v, עבור כל $v \in V$. עבור צומת $t \in V$ מסלול מ-s ל-t (לאו דווקא פשוט) ייקרא **מסלול שני קצר ביותר** אם הוא קצר ביותר מבין כל המסלולים מ-s ל-t, שמשקלם גדול ממש מ- $\delta(t)$.

קשת $e=(u,v)$ ב-E תיקרא קשת **שימושית** אם קיים מסלול קצר ביותר מ-s ל-v שהקשת האחרונה בו היא e.

א. הוכיחו שאם מסלול מ-s ל-t מכיל רק קשתות שימושיות אז הוא מסלול קצר ביותר מ-s ל-t.

ב. הוכיחו שאם מסלול מ-s ל-t מכיל קשת לא שימושית אז הוא אינו מסלול קצר ביותר מ-s ל-t.

ג. יהי P מסלול שני קצר ביותר מ-s ל-t. הוכיחו שקיימת בו בדיוק קשת לא שימושית אחת $e=(u,v)$, ומתקיים הרישא של P מ-s ל-u היא מסלול קצר ביותר מ-s ל-u, והסיפא של P מ-v ל-t היא מסלול קצר ביותר מ-v ל-t.

ד. כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו שמקבל כקלט גרף G כמתואר בתחילת השאלה, ושני צמתים s ו-t ומוצא משקל מסלול שני קצר ביותר מ-s ל-t ב-G. נמקו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

רמז: האלגוריתם צריך להיעזר בטענות שהוכחו בסעיפים הקודמים. גם אם לא הוכחתם חלק מהטענות תוכלו להסתמך עליהן בכתיבת האלגוריתם.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונים n מספרים ממשיים שונים זה מזה $r_1,...,r_n$. כתבו אלגוריתם יעיל המחזיר את מקדמי הפולינום $P(x)$ שדרגתו n לכל היותר המקיים $P(r_1)=P(r_2)=...=P(r_n)=0$. זמן הריצה של האלגוריתם שלכם צריך להיות $O(n\log^2 n)$. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם.

שאלה 3 (20 נקודות)

א. חשבו את **סכום** כל שורשי היחידה מסדר n.

ב. חשב את **מכפלת** כל שורשי היחידה מסדר n. הפרידו בין n זוגי לאי זוגי.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי A מטריצה מסדר $n\times n$.

א. הוכיחו כי אם $n=2$ ניתן לחשב את A^2 בעזרת 5 פעולות כפל של מספרים ממשיים.

ב. פרופסור תחכמוני טוען כי ברשותו אלגוריתם הפרד ומשול המחשב את A^2 עבור מטריצה מסדר $n\times n$ (n טבעי) בזמן $O(n^{\lg 5})$. הפרופסור מציע להשתמש בגישת רקורסיבית בדומ לאלגוריתם של שטראסן, פרט לכך שבעזרת סעיף א, מתקבלות 5 תת בעיות מגודל $n/2$ ולא 7 כמו באלגוריתם של שטראסן. האם האלגוריתם שהפרופסור מציע אכן פותר את הבעיה בסיבוכיות הנדרשת? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 5 (20 נקודות)

פתרו את שאלה 5.6 בספר הלימוד.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20417 - אלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: מדריך הלמידה, פרקים ד', ה'

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2013א **מועד אחרון להגשה:** 11.01.2013

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות: • שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס • שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה **הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"**

שאלה 1 (25 נקודות)

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכל לבעיה הבאה. בהינתן כקלט גרף מכוון $G=(V,E)$ עם משקל $w(e)$ לכל קשת e, צומת x בגרף ושתי קבוצות S,T של צמתים בגרף, יש למצוא מסלול קצר ביותר בין צומת כלשהו ב-S לצומת כלשהו ב-T העובר דרך הצומת x.

התייחס בתשובתך למקרים הבאים:

א. משקלות הקשתות אי-שליליים.

ב. אין הגבלה על משקלות הקשתות (כלומר עשויים להיות שליליים).

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 2 (20 נקודות)

בהנתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ברצוננו לבדוק האם ניתן לחלק את קודקודי הגרף לשתי קבוצות זרות של קודקודים A ו- B, כך שמתקיים:

i) $|A|=|B|=|V|/2$

ii) **לא קיימת קשת בגרף שקצה אחד שלה מצוי ב-** A **והשני ב-** B **.**

הציעו אלגוריתם פולינומיאלי הפותר את הבעיה, כלומר מחזיר "כן" אם קיימת חלוקה כנ"ל ו"לא" אחרת .

שאלה 3 (25 נקודות)

נתונה המשוואה $a_1x_1+a_2x_2+...a_kx_k=B$ כאשר $a_1,a_2,...,a_k,B$ כולם מספרים **שלמים אי שליליים.** כתבו אלגוריתם המוצא את **המספר המדוייק של פתרונות** בשלמים אי שליליים

(כלומר כל משתנה בפתרון מקבל ערך שלם אי שלילי) של המשוואה. שימו לב כי ייתכן כי אין למשוואה פתרונות. נתחו את זמן הריצה של האלגוריתם שלכם והוכיחו את נכונותו.

שאלה 4 (25 נקודות)

נתונה קבוצה סופית של מחרוזות מעל הא״ב $\{A,...,Z\}$. נסמן קבוצה זו ב- L. בהינתן מחרוזת S מעל הא״ב הנ״ל, הציעו אלגוריתם הבודק האם S היא שרשור של מחרוזות מתוך L. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו. הניחו כי ניתן לבדוק עבור מחרוזת נתונה האם היא ב-L בזמן קבוע.

שאלה 5 (25 נקודות)

פתרו את שאלה 6.13 בספר הלימוד.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: **20417 - אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: מדריך הלמידה, פרקים ד', ה'

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2013א **מועד אחרון להגשה:** 25.01.2013

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

הגדרה: בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, **כיסוי בצמתים** (vertex cover) של G הוא קבוצת צמתים $U \subseteq V$ כך שלכל קשת $(u, v) \in E$ מתקיים $u \in U$ או $v \in U$ (או שניהם).

בהינתן גרף לא מכוון דו-צדדי $G = (V, E)$ (כלומר, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, ואם $(u, v) \in E$ אז $u \in V_1$ ו-$v \in V_2$ או $u \in V_2$ ו-$v \in V_1$) נבנה ממנו רשת זרימה (מכוונת) $G' = (V', E')$ באופן הבא:

$$V' = V_1 \cup V_2 \cup \{s, t\}$$

$$E' = \{(s, u) \mid u \in V_1\} \cup \{(v, t) \mid v \in V_2\} \cup \{(u, v) \mid (u, v) \in E, u \in V_1, v \in V_2\}$$

קיבול הקשתות היוצאות מ-s והקשתות הנכנסות ל-t הוא 1, וקיבול שאר הקשתות הוא אינסופי.

יהי (S, T) חתך מינימלי ברשת שהוגדרה לעיל. יהיו $X = S \cap V_2$ ו-$Y = T \cap V_1$.

א. הראו שהקבוצה $X \cup Y$ היא כיסוי בצמתים של G.

ב. הראו שהקבוצה $X \cup Y$ היא כיסוי בצמתים **מינימלי** של G (כלומר, בכל כיסוי בצמתים אחר של G יש לפחות אותו מספר צמתים כמו ב-$X \cup Y$).

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $G = (V, E)$ רשת זרימה עם מקור s ובור t.

יהיו $U1, U2 \subseteq V$ שתי קבוצות צמתים זרות.

כתבו אלגוריתם המחשב את מספר הקשתות המינימלי שיש להוריד מהגרף כך שלא יהיה שום מסלול המחבר צומת מ-$U1$ עם צומת מ-$U2$.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 3 (20 נקודות)

פתרו את שאלה 23 בפרק 7 בספר הלימוד.

שאלה 4 (20 נקודות)

הגדרה: בהינתן רשת זרימה $G = (V, E)$ עם מקור s, בור t, ופונקציית קיבול c:

- צומת $v \in V$ הוא **במעלה הזרם** אם עבור כל חתך מינימלי (S, T) מתקיים $v \in S$.

- צומת $v \in V$ הוא **במורד הזרם** אם עבור כל חתך מינימלי (S, T) מתקיים $v \in T$.
- צומת $v \in V$ הוא **מרכזי** אם הוא אינו במעלה הזרם ואינו במורד הזרם.

כתבו אלגוריתם המקבל כקלט רשת זרימה $G = (V, E)$ עם מקור s, בור t, ופונקציית קיבול c עם ערכי קיבול שלמים, ומסווג את כל צמתי הרשת לפי ההגדרה שלעיל. כלומר, האלגוריתם קובע אילו צמתים הם במעלה הזרם, אילו הם במורד הזרם ואילו הם מרכזיים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.

שאלה 5 (20 נקודות)

נתונה רשת זרימה עם זרימת מקסימום ברשת. כתבו אלגוריתם יעיל ככל האפשר הבודק האם קיימת קשת שהגדלת קיבולה במספר חיובי כלשהו תגדיל את ערכה של זרימת מקסימום ברשת המתקבלת. הוכיחו את נכונוות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.