תשובה 1

א. יחס דו-מקומי מעל A הוא תת-קבוצה של $A \times A$. קבוצת היחסים הדו-מקומיים מעל A היא אפוא $P(A \times A)$. לפי שאלה 1.7 בעמ' 9 בכרך "תורת הקבוצות", ולפי נוסחה באמצע עמוד 30 שם: $P(A \times A) = 2^{n^2}$.

ב. לפי שאלה 3.19 בעמ' 91 בכרך "תורת הקבוצות": כמספר הדרכים לסדר n עצמים שונים בשורה. לפי "קומבינטוריקה", ראש עמ' 23, מספר זה הוא $n!$.

ג. k^n: ר' "קומבינטוריקה" שאלה 1.32 בעמ' 17.

ד. ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) נניח כי $A = \{1,2,\ldots,n\}$.

בחירת פונקציה **חח"ע** של A הנ"ל ל- B כמוה כבחירת n- יה **סדורה** (!) של איברים מתוך B, כלומר חליפה של n מתוך k. לפי הגדרת "חליפה" ("קומבינטוריקה" עמ' 18) מספר החליפות הנ"ל הוא: $P(k,n) = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1)$.

שימו לב שנוסחה זו נכונה גם אם $k < n$: במקרה כזה הנוסחה נותנת 0 כפי שצריך, כי אחד הגורמים במכפלה יהיה $k - k = 0$.

ה. $\dfrac{n!}{(3!)^k k!}$: השווה שאלה 2.28 (הנוסחה השניה - ר' ההסבר עבורה) ושאלה 2.29 בספר הלימוד, עמ' 37, 157.

תשובה 2

א. $\dfrac{12!}{2!2!2!4!1!1!} = 2,494,800$ - השוו למשל "קומבינטוריקה" שאלה 2.41 בעמ' 43.

ב. אם הרצף **ציווי** חייב להופיע, נראה אותו כתו בודד. פרט לו, יש עוד 7 תוים, מהם שני זוגות של תוים זהים (צ, י). לכן מספר הסידורים: $\dfrac{8!}{2!2!} = 10,080$ (כאשר **ציווי** נחשב כתו בודד אין משמעות להחלפה בין ההופעות של אותיות זהות בתוכו, ואין משמעות להחלפה של האות י' שבתוכו עם האות י' שמחוץ לו. כנ"ל גם עבור האות ו').

ג. מספר הסידורים בהם <u>מופיע</u> הרצף **הצלה** (נראה אותו כתו בודד. בנוסף לו יש 8 תוים, מהם 2 תוים זהים ועוד 4 תוים זהים אחרים): $\dfrac{9!}{2!4!} = 7,560$.

לכן מספר הסידורים בהם <u>לא מופיע</u> הרצף **הצלה**: $2,494,800 - 7,560 = 2,487,240$

תשובה 3

א. מדובר בבחירה של 20 עצמים מתוך 4 סוגים, כאשר עצמים מאותו סוג נחשבים זהים (עמ' 49 בספר הלימוד). מספר האפשרויות לכך הוא $D(4,20) = \binom{23}{3} = 1,771$.

ב. עלינו להוריד מתוצאת הסעיף הקודם את הבחירות שאינן אפשריות כעת עקב הגבלת מספר הארטיקים:

* 20 ארטיק אננס (אפשרות אחת) * 20 ארטיק דובדבן (אפשרות אחת),
* 20 ארטיק משמש (אפשרות אחת),
* 19 ארטיק משמש + ארטיק אחד נוסף מסוג אחר (3 אפשרויות).

סך האפשרויות הפסולות: 6.

מכאן, מספר הדרכים האפשריות לבחור 20 ארטיקים: $1,771 - 6 = 1,765$.

תשובה 4

אף אחד מהמשתנים אינו שווה 0 ואינו שווה 1, כלומר במלים אחרות:

כל המשתנים גדולים/ שווים 2. לכן נציב $x_i = y_i + 2$ $(1 \le i \le 6)$,

ונקבל $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + 12 = 29$,

כלומר $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 17$, כאשר y_i הם טבעיים כלשהם, שהתנאי היחיד לגביהם הוא התנאי על הזוגיות, בו נטפל כעת.

בדיוק 3 מהמשתנים המקוריים היו זוגיים, ולכן בדיוק 3 מהמשתנים החדשים הם זוגיים (חיסור 2 ממספר אינו משנה את הזוגיות שלו). יש $\binom{6}{3} = 20$ דרכים לבחור את 3 המשתנים הזוגיים מתוך 6 המשתנים.

לאחר שבחרנו אותם, נניח ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) שאֵלה הם 3 המשתנים הראשונים.

נסמן אפוא: $y_i = 2z_i$ $(1 \le i \le 3)$, $y_i = 2z_i + 1$ $(4 \le i \le 6)$.

נקבל $2z_1 + 2z_2 + 2z_3 + 2z_4 + 2z_5 + 2z_6 + 3 = 17$,

כלומר $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = 7$, כאשר z_i הם טבעיים **ללא כל הגבלה**.

מספר הפתרונות של משוואה כזו חושב בסעיף 2.4, והוא $D(6,7) = \binom{12}{5} = 792$.

את זה עלינו לכפול במספר הדרכים לבחור מי יהיו המשתנים הזוגיים, שהוא כאמור 20.

תשובה סופית: $792 \cdot 20 = 15,840$.

איתי הראבן