תשובה 1

בחלק מהסעיפים בשאלה זו קל לטעות. אם טעיתם נסו להבין את הסיבה.

א. $x \subseteq y$ ב. $x \in y$ ג. אף אחד משניהם

ד. $x \subseteq y$ ה. $x \in y$ ו. $x \subseteq y$

ז. אף אחד משניהם ח. $x \subseteq y$

תשובה 2

א. **לא נכון.** דוגמא נגדית: $A = B = \{1\}$. השלימו בעצמכם את בדיקת הדוגמא.

ב. **לא נכון.** דוגמא נגדית: $B = \{1\}$, $A = \varnothing$. השלימו.

ג. **לא נכון.** ראו החוברת "אוסף תרגילים פתורים", קבוצה 1 שאלה 2.

תשובה 3

א. נפתח את אגף ימין לפי ההדרכה:

$$(X \cap Y) - (X \cap Z) = (X \cap Y) \cap (X \cap Z)'$$

בעזרת כלל דה-מורגן נקבל:

$$= (X \cap Y) \cap (X' \cup Z')$$

בעזרת פילוג האיחוד יחסית לחיתוך (סעיף 1.3.4):

$$= (X \cap Y \cap X') \cup (X \cap Y \cap Z')$$

בעזרת תכונות החילוף והקיבוץ של החיתוך (עמ' 15):

$$= ((X \cap X') \cap Y) \cup (X \cap Y \cap Z')$$

מנוסחה שבתחתית עמוד 22 בספר, $X \cap X' = \varnothing$,
ובעזרת $\varnothing \cap A = \varnothing$ (עמ' 15) ו- $\varnothing \cup A = A$ (עמ' 10), נקבל:

$$= X \cap Y \cap Z'$$

לפי קיבוץ החיתוך, ושוב לפי הזהות שבהדרכה,

$$= X \cap (Y - Z)$$

ב. מהגדרת הפרש סימטרי,

$$A' \oplus B' \;=\; (A' - B') \cup (B' - A')$$

בעזרת ההדרכה ואחרי כן בעזרת "משלים של משלים":

$$= \; (A' \cap B'') \cup (B' \cap A'') \;= (A' \cap B) \cup (B' \cap A)$$

בעזרת חילופיות החיתוך וחילופיות האיחוד, ואז שוב מההדרכה, נקבל:

$$= \; (A \cap B') \cup (B \cap A') = (A - B) \cup (B - A) \;=\; A \oplus B$$

תשובה 4

א. $A_0 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 2\} = \varnothing$, $A_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 4\} = \{4\}$

$A_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 6\}$, $A_3 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 8\}$

$$B_0 = A_1 - A_0 = \{4\} - \varnothing = \{4\}$$

$$B_1 = A_2 - A_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 < x \le 6\}$$

$$B_2 = A_3 - A_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 6 < x \le 8\}$$

ב. עבור $0 < n$ כלשהו

$$B_n = A_{n+1} - A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 2n+4\} - \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 2n+2\}$$

$$= \{x \in \mathbf{R} \mid 2n+2 < x \le 2n+4\}$$

נשים לב שהמעבר לשורה השניה (ולכן גם הביטוי המתקבל) אינו נכון כאשר $n = 0$.
הביטוי האמור, יחד עם התוצאה $B_0 = \{4\}$, הוא התיאור הנדרש.

ג. נוכיח: $\bigcup_{2 \le n \in \mathbf{N}} B_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 6 < x\}$.

הכלה בכיוון אחד: יהי $x \in \bigcup_{2 \le n \in \mathbf{N}} B_n$. משמע x שייך **לפחות לאחת** הקבוצות B_n.

מהנוסחה שרשמנו עבור B_n ומההנחה $2 \le n$ נובע בפרט $6 < x$.

הכלה בכיוון שני: יהי $6 < x$. יהי k המספר הטבעי הגדול ביותר שקטן ממש מ- $\frac{x-2}{2}$.

מתקיים $2k+2 < x \le 2k+4$, וכן $2 \le k$.
מהנוסחה שרשמנו עבור B_n, נובע $x \in B_k$.

מצאנו $2 \le k$ כך ש- $x \in B_k$. לכן, מהגדרת איחוד כללי של קבוצות, $x \in \bigcup_{2 \le n \in \mathbf{N}} B_n$.

משתי ההכלות יחד מתקבל השוויון המבוקש.

ד. $\bigcup_{i \in I} (A_i') = (\bigcap_{i \in I} A_i)'$, $\bigcap_{i \in I} (A_i') = (\bigcup_{i \in I} A_i)'$.
נמקו בעזרת כללי דה מורגן לכמתים ולא אחרת (הוכחה בלעדיהם תהיה בהכרח שגויה).

ה. ניקח את $\mathbf{R}$ כקבוצה אוניברסלית. אז $D_n = B_n'$. מכאן ומהסעיפים הקודמים:

$$\bigcap_{2 \le n \in \mathbf{N}} D_n = \bigcap_{2 \le n \in \mathbf{N}} (B_n)' = (\bigcup_{2 \le n \in \mathbf{N}} B_n)' = \mathbf{R} - \{x \in \mathbf{R} \mid 6 < x\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \le 6\}$$

איתי הראבן