[redacted]

מספר התלמיד הנבחן
רשום את כל תשע הספרות

האוניברסיטה הפתוחה

[redacted]

כ"ח באדר ב' תשע"ט

מס' שאלון - 468

4

באפריל 2019

סמסטר 2019א

20417 / 4

מס' מועד 93

שאלון בחינת גמר

20417 - אלגוריתמים

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה **7** עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה חמש שאלות.

מתוכן יש לענות על ארבע שאלות.

25 נקודות לכל שאלה.

לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).

על שאלות שמסומנות בכוכב - יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה) ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות.

לשאלון זה מצורפים דפי עזר.

חומר עזר:
כל חומר עזר אסור בשימוש.

בהצלחה !!!

החזירו
למשגיח את השאלון
וכל עזר אחר שקיבלתם בתוך מחברת התשובות

אלגוריתמים 2019א – מועד 93

הנחיות: ענו על 4 מתוך 5 שאלות. לכל שאלה 25 נקודות. לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה.
על שאלות שמסומנות בכוכב - יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה), ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).
חומר עזר: אסור. דף נוסחאות מצ"ב. בהצלחה!

שאלה 1 – בעיית הספיקות 2-SAT (25 נק').

הציגו אלגוריתם יעיל, שבהינתן נוסחה φ בצורת 2-CNF מוצא לה השמה מספקת, ואם אין השמה כזו - מדווח שהנוסחה איננה ספיקה. הדרכה: העזרו בגרף מכוון G שמותאם לנוסחה φ.

תזכורת: נוסחת 2-CNF היא נוסחה מהצורה $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$, כשלכל פסוקית הצורה $\varphi_i = (z_{i,1} \vee z_{i,2})$, וכל $z_{i,j}$ הינו אחד מהליטרלים $x_1, \ldots, x_n, \neg x_1, \ldots, \neg x_n$. למשל $\varphi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$ הינה נוסחת 2-CNF עם $n = 3$ משתנים, ו-$m = 4$ פסוקיות. השמה הינה פונקציה שמתאימה לכל משתנה x_i ערך "אמת" T או "שקר" F. בהינתן השמה מסוימת, אזי הליטרל x_i מסופק אם ההשמה מקיימת $x_i \leftarrow T$, והליטרל $\neg x_i$ מסופק אם $x_i \leftarrow F$. הפסוקית $\varphi_i = (z_{i,1} \vee z_{i,2})$ מסופקת, אם לפחות אחד מהליטרלים שבה $z_{i,1}, z_{i,2}$ מסופק. הנוסחא כולה φ מסופקת, אם כל הפסוקיות $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ מסופקות. הנוסחא נקראת ספיקה, אם לפחות אחת מבין 2^n ההשמות האפשריות מספקת אותה.

נ"ל לבדוק רק יש שדה 3 בה.
כל השורה כמחרוזת בינרי. תודה

***שאלה 2* – ספירת מסלולים מזעריים** (25 נק').

בהנתן גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$ ושני קדקודים $u,v\in V$, הציגו אלגוריתם, שמחשב את מספרם של המסלולים המזעריים בין u ל-v ב- G.

[redacted]

***שאלה 3* – תכנון דינאמי** (25 נק').

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים אי-שליליים $c(e)\ge 0$ על הצלעות $e\in E$, ונתון קדקוד מסוים $r\in V$. הביטו באלגוריתם הבא:

(i) מאתחלים מערך חד-ממדי A באמצעות הכלל: $A[v]=\begin{cases}0, & v=r\\ \infty, & v\ne r\end{cases}$.

(ii) לולאה חיצונית: חוזרים שוב ושוב על הפעולה הבאה.

(1ii) לולאה פנימית: סורקים את הצלעות בסדר לקסיקוגרפי. לכל $e=(u,v)\in E$ מבצעים:

אם $A[v]>A[u]+c(e)$ אז מעדכנים $A[v]\leftarrow A[u]+c(e)$.

(2ii) אם בהרצה הנוכחית של כל הלולאה הפנימית לא בוצע אף עדכון,

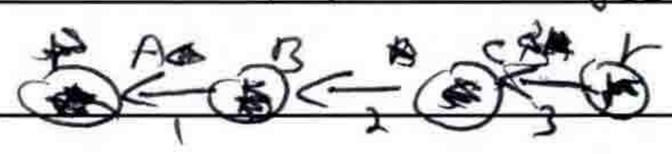
אז האלגוריתם מסיים.

(א) רישמו מה מחשב האלגוריתם (אין צורך להוכיח נכונות).

האלגוריתם מחשב את המסלולים הקלים ביותר מ-r לשאר הגרפים.

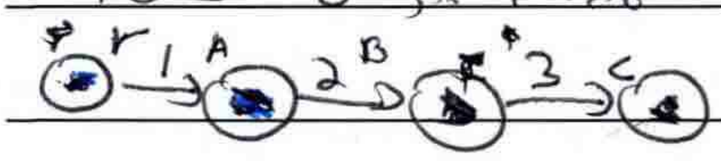
(ב) יהי $B(n)$ המספר המרבי של איטרציות שמתבצעות בלולאה החיצונית על גרפים בעלי n קדקודים. חשבו את $B(n)$, והציגו סדרת גרפים G_n עליהם מתבצעות בדיוק $B(n)$ איטרציות.

$|B(n)|=n$. נביט בגרף הבא ויהי r הקדקוד הראשון.



(ג) הציגו סדרת גרפים אחרת G'_n, עבורם נכנסים ללולאה החיצונית פעמיים בלבד, וזאת למרות שמספר הצלעות שלהם זהה לגרפים מהסעיף הקודם, כלומר $|E(G'_n)|=|E(G_n)|$ לכל n.

$|B(n)|=2$. ארבעים שנעדכנים בסדר הלקסיקוגרפי. אבל אם נ' ל כבר יהיה ל כלולו הפנימי ובאיטרציה הבאה כבר לא יעדכנים



שאלה 4 – הקטנה מרבית של זרימה ברשת (25 נק').

נתונה רשת זרימה, כלומר גרף מכוון $G=(V,E)$ עם מקור ויעד $s \neq t \in V$, וקיבולות מוגבלות מהצורה $c_e \in \{0,1\}$ לכל $e \in E$. נתון בנוסף מספר טבעי $k \geq 1$. הציגו אלגוריתם, שמוצא k צלעות ברשת, שהסרתן מקטינה ככל הניתן את הזרימה המרבית. (לא יינתן ניקוד על אלגוריתם טריוויאלי, שבודק את כל האפשרויות להסיר k צלעות מהרשת).

עמ' 2

***שאלה 5* – חציון של צמד רשימות ממוינות** (25 נק').

תזכורת: החציון של רשימת מספרים, הינו המספר המתקבל בדיוק באמצע הרשימה לאחר פעולת מיון. למשל, לאחר מיון הרשימה $(2,9,7,2,3)$ מתקבלת הרשימה $(2,2,3,7,9)$, שבאמצעה ממוקם החציון $\text{Median}(2,9,7,2,3)=3$. כאשר אורך הרשימה זוגי, אזי ישנם שני איברים אמצעיים ברשימה הממוינת. במקרה שכזה, החציון מוגדר כמספר הקטן מבין השניים, למשל $\text{Median}(1,2,4,9)=2$ (ולא 4).

הבעיה: ברשותנו גישה לשני בסיסי נתונים נפרדים, שבכל אחד מהם מאוחסנת רשימה ממוינת של n מספרים. עלינו לחשב את החציון של כלל $2n$ המספרים, וברצוננו **למזער את מספר הגישות לבסיסי הנתונים**, משום שכל גישה אליהם יקרה ואיטית. בפרט, איננו קוראים מתוכם את כל $2n$ המספרים. במקום זאת, ביכולתנו לקבל מכל בסיס נתונים מענה מידי לשאילתות מהצורה: "מהו המספר במיקום m ברשימה הממוינת". הציגו אלגוריתם הפרד ומשול, שמחשב את החציון של כלל $2n$ המספרים, תוך ביצוע **מספר לוגריתמי של** $O(\log n)$ **שאילתות** בלבד.

(הניחו לשם פשטות, כי בכל הקריאות הרקורסיביות מטפלים ברשימות שאורכן אי-זוגי).

הגדרת האלגוריתם

[redacted]

בהצלחה!

התשובה בחברת בעמוד 5

שאלון 468 93.31.1 M1

אלגוריתמים 20417 – דף נוסחאות – גרפים

סימונים. ההגדרות הבאות מתאימות גם לגרפים לא מכוונים וגם לגרפים מכוונים. בגרף $G=(V,E)$ קבוצת הקדקודים (=צמתים) הינה V, וקבוצת הצלעות (=קשתות) הינה E. מסמנים $|V|=n, |E|=m$. כל הגרפים בקורס זה הם "פשוטים" במובן הבא: אין "לולאות עצמיות" (= אין צלע מקדקוד לעצמו) ואין "צלעות כפולות" (צלע יכולה להופיע או לא להופיע, אך לא יכולה להופיע מספר רב של פעמים).

מסלולים. מסלול (=מסילה) בגרף הוא סדרת קדקודים $(v_0,...,v_k)$ כך שיש בגרף צלע מ- v_{i-1} ל- v_i לכל $1 \le i \le k$. אפשר לחשוב על אותו מסלול כסדרת צלעות $(e_1,...,e_k)$ שבה לכל $1 \le i \le k$ הצלע e_i מחברת בגרף את v_{i-1} ל- v_i. מסלול פשוט הוא מסלול שאף קדקוד לא מופיע בו פעמיים (ומעלה). מעגל הוא מסלול שבו $v_0 = v_k$. מעגל פשוט הוא מסלול שאף קדקוד לא מופיע בו פעמיים (ומעלה) למעט $v_0 = v_k$. שני מסלולים נקראים זרים בקדקודים אם אין להם אף קדקוד משותף, ונקראים זרים בצלעות אם אין להם אף צלע משותפת. קדקוד t נקרא נגיש מקדקוד s אם קיים בגרף מסלול מ- s ל- t. גרף לא-מכוון נקרא קשיר (ובדומה גרף מכוון נקרא קשיר במובן החזק) אם כל זוג קדקודים נגישים האחד מהשני.

משקלים. בגרף ממושקל לכל צלע e מוגדר משקל $w(e)$ (=אורך $\ell(e)$, =מחיר $c(e)$). בגרף לא ממושקל אורך מסלול = מספר הצלעות במסלול. בגרף כן ממושקל אורך מסלול = סכום משקלי הצלעות במסלול. בגרף כן/לא ממושקל מסלול מזערי (=מינימלי) מ- s ל- t הינו מסלול מ- s ל- t שאורכו מזערי. עץ מרחקים מזעריים T עם שורש $s \in V$ הוא עץ פורש כך שלכל קדקוד $t \in V$, המרחק (=אורך מסלול מזערי) מ- s ל- t ב- T שווה למרחק מ- s ל- t ב- G. אבחנה מרכזית: בגרף כן/לא ממושקל: אם $s \longrightarrow u \longrightarrow v \longrightarrow t$ מסלול מזערי מ- s ל- t, אז תת-המסלול $u \longrightarrow v$ הינו מסלול מזערי מ- u ל- v (כאן $\longrightarrow$ מסמן תת-מסלול). עץ פורש מזערי (עפ"מ) בגרף ממושקל ולא-מכוון הוא עץ פורש, שסכום משקלי הצלעות שלו מזערי מבין כל העצים הפורשים.

רשתות זרימה. ברשת זרימה נתונים גרף מכוון $G=(V,E)$ עם קדקודי מקור $s \in V$ ויעד $s \ne t \in V$ וקיבולות אי-שליליות $c(e) \ge 0$ על הצלעות. זרימה חוקית הינה פונקציה $f: E \to \mathbb{R}$ שמכבדת את מגבלת הקיבולת: $f(e) \le c(e)$ לכל צלע e, ואת חוק שימור הזרימה: $f_{in}(v) = f_{out}(v)$ לכל קדקוד $v \ne s,t$. כאן $f_{in}(v)$ הינו סכום הזרימות בצלעות שנכנסות ל- v, ו- $f_{out}(v)$ הינו סכום הזרימות בצלעות שיוצאות מ- v. חתך $(S, T=V \setminus S)$ ברשת הינה חלוקה של קבוצת הקדקודים שבה $s \in S, t \in T$. קיבולת $c(S,T)$ של חתך הינה סכום הקיבולות של צלעות שיוצאות מ- S ונכנסות ל- T. זרימה $f(S,T)$ של חתך הינה ההפרש בין סכום הזרימות של צלעות שיוצאות מ- S ונכנסות ל- T לבין סכום הזרימות של צלעות שנכנסות ל- S ויוצאות מ- T. לכל חתך (S,T) גודלה של זרימה חוקית f הינו $val(f) = f_{out}(s) = f_{in}(t) = f(S,T)$. משפט מרכזי: גודל זרימה מרבית (max-flow) = גודל חתך מזערי (min-cut).

קלט		פלט	אלגוריתם + זמן ריצה	תכונות + הערות
גרף מכוון G קדקוד מקור $s \in V$		עץ פורש T של הקדקודים הנגישים מ- s	סריקה לרוחב BFS $\|E\|+\|V\|$	T הינו עץ מרחקים מזעריים מהמקור s
			סריקה לעומק DFS $\|E\|+\|V\|$	בגרף לא-מכוון: כל צלע של G שאינה ב- T בהכרח מחברת בין אב-קדמון לבין צאצא שלו ב- T. בגרף מכוון חסר מעגלים: מחשב מיון טופולוגי
גרף מכוון G ממושקל (עם/בלי מקור $s \in V$)	$w(e) \geq 0$	עץ T של מרחקים (ומסלולים) מזעריים מהמקור s לקדקודים הנגישים מ- s	דייקסטרא Dijkstra $\|E\|+\|V\|\lg\|V\|$	
	$w(e)$ כללי		בלמן-פורד Bellman-Ford $\|E\|\|V\|$	מדווחים על קיומם של מעגלים שמשקלם שלילי
		מרחקים (ומסלולים) מזעריים בין כל זוגות הקדקודים	פלויד-וורשאל Floyd-Warshall $\|V\|^3$	
גרף לא-מכוון G עם משקלים אי-שליליים $w(e) \geq 0$		עפ"מ של הגרף (עץ פורש מזערי)	פרים Prim $\|E\|+\|V\|\lg\|V\|$	אם e צלע שמשקלה מזערי מבין כל הצלעות שמחברות בין $S, V \setminus S$ אז יש עפ"מ שכולל את e. אם e צלע שמשקלה מרבי מבין כל הצלעות במעגל מסוים אז יש עפ"מ שלא כולל את e.
			קרוסקאל Kruskal $\|E\|\lg\|V\|$	
גרף מכוון G עם מקור $s \in V$ ויעד $s \neq t \in V$ וקיבולות אי-שליליות $c(e) \geq 0$		זרימה חוקית מרבית	אדמונדס-קארפ Edmonds-Karp $\|E\|^2\|V\|$	וריאנט של פורד-פלקרסון Ford–Fulkerson
זוג ווקטורים $\vec{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ $\vec{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1})$		הקונבולוציה הציקלית $\vec{a} \otimes \vec{b} =$ $(c_0, \ldots, c_{2n-2})$ שבה $c_k = \Sigma_{0 \leq i \leq k} a_i b_{k-i}$	טרנספורם פורייה המהיר FFT $n \lg n$	מתאים לכפל פולינומים $(\sum_{0 \leq i \leq n-1} a_i x^i)(\sum_{0 \leq j \leq n-1} b_j x^j)$ $= (\sum_{0 \leq k \leq 2n-2} c_k x^k)$ כאשר $c_k = \Sigma_{0 \leq i \leq k} a_i b_{k-i}$

לשימוש הבודק

שאלה 2 הישן

ניסיון ראשון לתכנון: לבסוף נשתמש בין 4, 5 רובר
אי קשר שלו פותחה מ BFS לניון שקודקוד יש אחר
פיתח יום בוגר בכן לבני.

הגדרת הבעיה:

יהי x, y מיקומים לעמודים בין 1 ל-4.
ולכן בשלב שווה ערך ותן לדרך לי לעמוד ולכ
כל מרחב לכ בעמודים של BFS.
קיימים שני מלבנים, אז שהם עמודים בתחום אז שקיים קודקוד
לשאלה אם בפינות B לא, ואז נניח אלגוריתם הבא.
נניח שיש שלום בנתיבים, אלם נקבל שרק קודקודים
ל כם יתרמסו יחד. לכן כבאלגוריתם הלוחם
נקבל שרק לאחר שמסיים פינות השכנה באחרונה
נוסף יש בלוחות אלם נקבל שמנסו לא יקשר בין בעזרת
בשלב 1-4. בעזרת בשלב של בתרבות נקבל שלום
בשבר בה i לא תפסם לא ואחר בעמודים. שלו מנוון שלא
ולא נקבל בפינות אלם בלי רק בוטל לבונה של בכן 1 בכדי
לשמר לא מעבר בלוחות. אלם בטלנה עמודים

סיבוכיות: בהתבסס לוגם ומלבנים בעמן ריצוי אלם נקבל
$O(n+m)$ כמו BFS.

שאלה 2

בעיה הראשונה:

נשנה את האלגוריתם BFS כך שיגיע לכל. כל צומת תרשה
שנמצא נמצא לו עומק המרחק ממנו ל 1.

~~נמצא~~ ~~שמקבלים~~ כאשר קפיצות של משקל i אנו
מגדילים צומת בשכבה i+1 שמקבל פותחה נוסיף לאותה
שכבה ה 1. (בגלל כל הצומת בשכבה ה- i+1).

האלגוריתם יעצר כאשר הוא יגיע לסוף אי כל השכבה
שמס ~~v~~.

נחזיר את המרחק של v.

[redacted]

לשימוש הבודק

שאלה 5

האלגוריתם: כל איבר הערמה גדול מ- 1 נבדק:
נבדוק אם האיבר הוא בן בלבד. בכל מקרה נשאר רק איבר
אחד בערמה + הערמה ריקה. הדרך שבה נבדקים אם בנים
היא חלוקה בינארית של המערך בגודל שווה. נרשם שמספר
+ אבל יש נתון כי, נבדקים רק ע"י קן שמריך
את המספרים לבדם לעצמה, האופן בדיקה נמשך עד אין הבנים
נגדיר + המספרים שקטנים מהבדקים. אם כם שווים נחזיר
את האמת. משך הזמן, יהיה גדול 1 נחזיר את הבדקו לבדיקה.

ניתוח סיבוכיות: נניח שהמערך בגודל n לצורך הדגמה
מספר של חיפושים בינארי. אם האמצע של מקום או גבוה
יש נחפש נמצא כ - מספר המספרים שנבדקים יש בנמצא או אחרים
וכל אם לכם הבדיקה שאנו נחפשים (בדיקה של המספר ואחרים)
וגם אין מספר לחפש שם מספר. כך הבדיקה גם מספרים שאינם
מבחינה בינארית כ.

מסקנה: בגלל אלגוריתם יעילים את הפרמטר הזה
אי המספרים וגם + הוא גם בינארי $O(\log n)$

שאלה 4

אלגוריתם: נריץ אלגוריתם רנדומלי-דנס על G הנתון לריצה לינארית.
נוריד בהסתברות הנדרשת את השפה L-T-S.
אחרת נריץ לריצה 1.

נכונות: נטען שבהסתברות גבוהה הגרף G הוא 1, נשלם בזמן לינארי כל הקודקודים שמורדים ו-S ו-t שוים בגלל שהם מקיימים את G שמורדים ו-t מקיים אי נתיב במעגלים לינארי. נטען שבמצב הנקודות שנוריד לא יהיו במעגלים כולם כלומר שנורד מן G, נשאר לפחות מעגל בגודל לינארי מ-T-L בגלל הנחת הנתון. אחרת נריץ לריצה 1 ו-T לינארי. נריץ אלגוריתם רנדומלי כלשהו לריצה לינארית.

סיבוכיות: הריצה הרנדומלי דנס - $O(|E|^2|V|)$
הורדה מהגרף $O(|E|)$
בדיקת קיום $O(|E|+|V|)$