פתרון ממ"ן 12

שאלה 1

על הקבוצה $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ נתונים שני יחסים R,S המוגדרים כך: לכל $A,B\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$

ARB אם ורק אם $A\cap\{1,2\}=B\cap\{1,2\}$ ו- ASB אם ורק אם $A\cap\{1,2\}\subset B\cap\{1,2\}$.

א. קבעו אם אחד מהיחסים הוא יחס שקילות ואם התשובה חיובית, מיצאו את מחלקות השקילות שלו.

ב. קבעו אם אחד היחסים הוא יחס סדר חלקי או מלא ואם התשובה חיובית, מיצאו את האיברים המינימליים והמקסימליים בקבוצה הסדורה שגיליתם.

תשובה

א. נראה ש- R הוא יחס שקילות:

רפלקסיביות: לכל $A\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ מתקיים $A\cap\{1,2\}=A\cap\{1,2\}$, כלומר ARA ולכן R יחס רפלקסיבי.

סימטריה: לכל $A,B\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$, אם ARB אז $A\cap\{1,2\}=B\cap\{1,2\}$ לכן $B\cap\{1,2\}=A\cap\{1,2\}$ כלומר BRA ולכן R יחס סימטרי.

טרנזיטיביות: לכל $A,B,C\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ אם ARB ו- BRC אז $A\cap\{1,2\}=B\cap\{1,2\}$ וגם $B\cap\{1,2\}=C\cap\{1,2\}$. מכאן ש- $A\cap\{1,2\}=C\cap\{1,2\}$ כלומר ARC ולכן R טרנזיטיבי.

לפיכך R הוא יחס שקילות.

לפי ההגדרה, שתי קבוצות $A,B\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ נמצאות ביחס R אם ורק אם החיתוכים שלהן עם הקבוצה $\{1,2\}$ שווים זה לזה. מכאן שבכל מחלקת שקילות אנו אמורים למצוא קבוצות אשר החיתוכים שלהן עם $\{1,2\}$ זהים. מאחר שחיתוך בין קבוצה כלשהי ל- $\{1,2\}$ יכול להיות רק אחת מארבע הקבוצות שחלקיות ל- $\{1,2\}$ (כלומר $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$) נובע שיש לכל היותר 4 מחלקות שקילות. וכפי שנראה יש אכן 4 מחלקות:

המחלקה שבה נמצאת $\varnothing$ (שבה כל הקבוצות אשר החיתוך שלהן עם $\{1,2\}$ הוא $\varnothing$)

$$S_{\varnothing}=\{\varnothing,\{3\},\{4\},\{3,4\}\}$$

המחלקה שבה נמצאת $\{1\}$ (שבה כל הקבוצות אשר החיתוך שלהן עם $\{1,2\}$ הוא $\{1\}$)

$$S_{\{1\}}=\{\{1\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,3,4\}\}$$

המחלקה שבה נמצאת $\{2\}$ (שבה כל הקבוצות אשר החיתוך שלהן עם $\{1,2\}$ הוא $\{1\}$)

$$S_{\{2\}}=\{\{2\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,3,4\}\}$$

המחלקה שבה נמצאת $\{1,2\}$ (שבה כל הקבוצות אשר החיתוך שלהן עם $\{1,2\}$ הוא $\{1,2\}$)

$$S_{\{1,2\}}=\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}\}$$

הערה: כפי שמובטח במשפט 2.16, $\{S_\varnothing, S_{\{1\}}, S_{\{2\}}, S_{\{1,2\}}\}$ היא חלוקה של $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ (שכן $S_\varnothing, S_{\{1\}}, S_{\{2\}}, S_{\{1,2\}}$ הן לא ריקות, זרות זו לזו והאיחוד שלהן הוא $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$).

ב. נראה ש- S הוא יחס סדר.

אנטי-רפלקסיבי: לכל $A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$, **לא מתקיים** $\langle A, A\rangle \notin S$ כי $A \cap \{1,2\} = A \cap \{1,2\}$

טרנזיטיביות: לכל $A, B, C \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ אם ASB ו- BSC אז $A \cap \{1,2\} \subset B \cap \{1,2\}$. וגם $B \cap \{1,2\} \subset C \cap \{1,2\}$. מכאן שלכל $x \in A \cap \{1,2\}$ מתקיים $x \in B \cap \{1,2\}$, לכן $x \in C \cap \{1,2\}$ ומכאן ש- $A \cap \{1,2\} \subseteq C \cap \{1,2\}$. בנוסף מפני ש- $A \cap \{1,2\} \subset B \cap \{1,2\}$ קיים $y \in B \cap \{1,2\}$ כך ש- $y \notin\in A \cap \{1,2\}$. אבל ברור ש- $y \in C \cap \{1,2\}$. מכאן ש- $B \cap \{1,2\} \subset C \cap \{1,2\}$ (הכלה ממש) ולכן S טרנזיטיבי. לפיכך S הוא יחס סדר.

ברור שאם $A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ ו- $A \cap \{1,2\} = \varnothing$ אז לא קיימת קבוצה $X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ כך ש- $X \cap \{1,2\} \subset A \cap \{1,2\}$ (כי לקבוצה הריקה אין קבוצות חלקיות ממש). לכן כל קבוצה $A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ כך ש- $A \cap \{1,2\} = \varnothing$ היא איבר מינימלי בקבוצה הסדורה $\langle \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}, S\rangle$.

מכאן שהקבוצות $\varnothing, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}$ הן איברים מינימליים. לכל קבוצה $Y \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ ששונה מארבע הקבוצות הנ"ל יש חיתוך לא ריק עם $\{1,2\}$ לכן $\varnothing \cap \{1,2\} \subset Y \cap \{1,2\}$ לכן $\langle \varnothing, Y\rangle \in S$. במילים אחרות Y כזו אינה איבר מינימלי ולכן $\varnothing, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}$ הם כל האיברים המינימליים בקבוצה הסדורה $\langle \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}, S\rangle$.

למציאת איברים מקסימליים נשים לב שאם $A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ ו- $A \cap \{1,2\} = \{1,2\}$ אז לא קיימת קבוצה $X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ כך ש- $A \cap \{1,2\} \subset X \cap \{1,2\}$ (לא ייתכן $\{1,2\} \subset X \cap \{1,2\}$).

מכאן ש- $\{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}$ איברים מקסימליים ב- $\langle \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}, S\rangle$.

כל קבוצה $Y \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ ששונה מארבע הקבוצות הנ"ל לא מכילה את $\{1,2\}$ לכן $Y \cap \{1,2\} \subset \{1,2\}$ ולכן $\langle Y, \{1,2\}\rangle \in S$. במילים אחרות Y כזו אינה איבר מינימלי ולכן $\{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}$ הם כל האיברים המינימליים ב- $\langle \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}, S\rangle$.

שאלה 2

על הקבוצה $A = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ מגדירים שני יחסים, R, S כך: לכל $x, y \in A$, xRy אם ורק אם קיים מספר **טבעי** $i > 0$ כך ש- $\frac{y}{x} = 2^i$ ו- xSy אם ורק אם קיים מספר **שלם** j כך ש- $\frac{y}{x} = 2^j$.

א. הוכיחו שאחד משני היחסים הוא יחס שקילות.

ב. מיצאו את מחלקות השקילות של יחס השקילות שגיליתם בסעיף א'.

ג. הוכיחו שאחד משני היחסים הוא סדר חלקי.

ד. מיצאו את האיברים המינימליים ואת האיברים המקסימליים (אם יש) לגבי היחס האחרון.

תשובה

א. נוכיח ש- S הוא יחס שקילות.

רפלקסיביות: לכל $x, x \in A$ מתקיים $\frac{x}{x} = 2^0$, לכן xSx ולכן S יחס רפלקסיבי.

סימטריה: לכל $x, y \in A$, אם xSy אז קיים מספר שלם j כך ש- $\frac{y}{x} = 2^j$. אז $\frac{x}{y} = 2^{-j}$

ומאחר שגם $-j$ הוא שלם, נקבל ש- ySx ולכן S יחס סימטרי.

טרנזיטיביות: לכל $x, y, z \in A$, אם xSy ו- ySz אז קיים מספרים שלמים j, k כך ש-

$\frac{y}{x} = 2^j$ ו- $\frac{z}{y} = 2^k$ ואז $\frac{z}{x} = \frac{z}{y} \cdot \frac{y}{x} = 2^j \cdot 2^k = 2^{j+k}$ כאשר כמובן, $j + k$ שלם.

מכאן xSz ומכאן ש- S טרנזיטיבי. לפיכך הוא יחס **שקילות**.

ב. שלפי הגדרת S, לכל $x, y \in A$, xSy אם ורק אם המנה שלהם היא חזקה של 2 (חיובית

שלילית או 2^0). מכאן ששני מספרים אי- זוגיים שונים לא יכולים להימצא ביחס S ולכן מספרים אי-זוגיים שונים יימצאו תמיד במחקות שקילות שונות. מצד שני, לכל מספר טבעי

x חיובי ניתן למצוא מספרים טבעיים k, j כך ש- $x = (2k+1)2^j$ וברור ש- $xS(2k+1)$

מכאן ש- x שייך למחלקה של $2k+1$. במילים אחרות, כל מספר $x \in A$ שייך למחלקה של מספר אי-זוגי מסויים ולכן המחלקות של המספרים האי-זוגים הן כל מחלקות השקילות של

היחס הזה. לסיכום, כל מחלקת שקילות של S היא מהצורה $S_k = \{(2k+1)2^j \mid j \in \mathbf{N}\}$

כאשר $k \in \mathbf{N}$. (לכל $k \in \mathbf{N}$ יש מחלקה שכזו והמספר הקטן ביותר בה הוא $2k+1$).

ג. נראה ש- R הוא סדר חלקי.

אנטי-רפלקסיביות: לפי ההגדרה, לכל $x, y \in A$, xRy אם ורק אם קיים מספר **טבעי** $i > 0$

כך ש- $\frac{y}{x} = 2^i$, ומאחר שבמצב $2^i > 2^0 = 1$ נקבל שאם xRy אז בהכרח $y>x$ ולכן לא

ייתכן ש- xRx.

טרנזיטיביות: לכל $x, y, z \in A$, אם xRy ו- yRz אז קיים מספרים טבעיים חיוביים j, k כך

ש- $\frac{y}{x} = 2^j$ ו- $\frac{z}{y} = 2^k$ ואז $\frac{z}{x} = \frac{z}{y} \cdot \frac{y}{x} = 2^j \cdot 2^k = 2^{j+k}$ כאשר $j + k$ טבעי חיובי.

לכן xRz ומכאן ש- R טרנזיטיבי. לפיכך הוא יחס **סדר**.

ד. כל מספר טבעי אי-זוגי $2k+1$ הוא איבר מינימלי ביחס R מפני שלכל $x \in A$, $\frac{2k+1}{x} \neq 2^i$

לכל $i > 0$. (המנה בין מספר אי זוגי ומספר טבעי אחר לא יכולה להיות חזקה חיובית של 2)

אין עוד איברים מינימליים, שכן שכל מספר טבעי זוגי הוא מהצורה $y = (2k+1)2^i$ כאשר

$k \in \mathbf{N}$ ו- $i > 0$. במקרה זה, $\frac{y}{2k+1} = 2^i$ לכן $(2k+1)Ry$ ולכן y לא מינימלי.

מכאן שהמספרים האי-זוגיים הם כל האיברים המינימליים ביחס R.

אין איברים מקסימליים ביחס R מפני שלכל $x \in \mathbf{N}$ מתקיים $xR(2x)$.

שאלה 3

לכל n טבעי נסמן $A_n = \{0,1,2,\dots,n\}$ ובנוסף נסמן $A_{-1} = \varnothing$. תהי $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ פונקציה.

א. הוכיחו ש- f היא חד-חד-ערכית אם ורק אם $f[A_n] \neq f[A_m]$ לכל $m,n \in \mathbf{N} \cup \{-1\}$, $m \neq n$.

ב. הוכיחו ש- f היא על אם ורק אם $f^{-1}[A_n] \neq f^{-1}[A_m]$ לכל $m,n \in \mathbf{N} \cup \{-1\}$, $m \neq n$.

תשובה

א. **כיוון ראשון**

נניח ש- f היא חד-חד-ערכית ונראה $f[A_n] \neq f[A_m]$ לכל $m,n \in \mathbf{N} \cup \{-1\}$, $m \neq n$.

נבחר $m \neq n$. אז אפשר להניח למשל ש- $m > n$. במקרה זה, $m \in A_m$ אבל $m \notin A_n$.

אז לפי הגדרה 3.3, $f(m) \in f[A_m]$. מצד שני, m שונה מכל אחד מהמספרים $0,1,2,\dots,n$

ומפני ש- f היא חד-חד-ערכית נקבל מכאן ש- $f(m)$ שונה מכל אחד מהמספרים

$f(0), f(1), f(2),\dots, f(n)$ כלומר $f(m) \notin f[A_n]$. לכן $f[A_n] \neq f[A_m]$.

פתרון אחר:

נניח בדרך השלילה ש- $f[A_n] = f[A_m]$ עבור $m \neq n$. אז $f^{-1}[f[A_m]] = f^{-1}[f[A_n]]$. אבל

אז, מפני ש- f היא חד-חד-ערכית , משאלה 16 ג נקבל ש- $A_n = A_m$ וזו סתירה.

כיוון שני

נניח ש- $f[A_n] \neq f[A_m]$ לכל $m,n \in \mathbf{N} \cup \{-1\}$, $m \neq n$. נראה ש- f היא חד-חד-ערכית.

לשם כך נשים לב שלכן $n \in \mathbf{N} \cup \{-1\}$ מתקיים $f[A_n] \neq f[A_{n+1}]$. אבל מפני ש-

$A_n \subseteq A_{n+1}$ הרי שגם $f[A_n] \subseteq f[A_{n+1}]$. אבל $f[A_n] \neq f[A_{n+1}]$ לכן $f[A_n] \subset f[A_{n+1}]$

כלומר $\{f(0), f(1), f(2),\dots, f(n)\} \subset \{f(0), f(1), f(2),\dots, f(n), f(n+1)\}$.

מכאן ש- $f(n+1)$ שונה מ- $f(0), f(1), f(2),\dots, f(n)$ כלומר התמונה של כל איבר שונה

מהתמונות של האיברים הקטנים ממנו. מכאן שלכל $m,n \in \mathbf{N} \cup \{-1\}$, אם $m > n$ אז

התמונה של m שונה מהתמונה של- n ומכאן ש- f היא חד-חד-ערכית.

ב. **כיוון ראשון**

נניח ש- f היא על ונראה ש- $f^{-1}[A_n] \neq f^{-1}[A_m]$ לכל $m,n \in \mathbf{N} \cup \{-1\}$, $m \neq n$.

אפשר להניח למשל ש- $m > n$. מאחר ש- f היא על, קיים $x \in \mathbf{N}$ כך ש- $f(x) = m$. אז

$f(x) \in A_m$ ולכן לפי הגדרה 3.3 $x \in f^{-1}[A_m]$. מצד שני, מפניה ש- $f(x) = m > n$ נקבל

ש- $f(x) \neq 0,1,2,\dots,n$ לכן ולכן $x \notin f^{-1}[A_n]$. מכאן ש- $f^{-1}[A_n] \neq f^{-1}[A_m]$

פתרון אחר:

נניח בדרך השלילה ש- $f^{-1}[A_m] = f^{-1}[A_n]$ עבור $m \neq n$. אז $f[f^{-1}[A_m]] = f[f^{-1}[A_n]]$.

אבל אז, מפני ש- f היא על, משאלה 16 ד' נקבל ש- $A_n = A_m$ וזו סתירה.

כיוון שני

נניח ש- $f^{-1}[A_m] \neq f^{-1}[A_n]$ לכל $m,n \in \mathbf{N} \cup \{-1\}$, $m \neq n$ ונראה ש- f היא על.

לשם כך נבחר מספר כלשהו $n \in \mathbf{N}$ ונראה שיש לו מקור. לפי הנתון, $f^{-1}[A_{n-1}] \neq f^{-1}[A_n]$

(נשים לב שזה תקף גם עבור $n = 0$ כי A_{-1} מוגדרת בנתוני השאלה).

מאחר ש- $A_{n-1} \subseteq A_n$ הרי שגם $f^{-1}[A_{n-1}] \subseteq f^{-1}[A_n]$ ומפני ש- $f^{-1}[A_{n-1}] \neq f^{-1}[A_n]$

נקבל ש- $f^{-1}[A_{n-1}] \subset f^{-1}[A_n]$ ולכן קיים $x \in f^{-1}[A_n]$ כך ש- $x \notin f^{-1}[A_{n-1}]$. מכאן (לפי הגדרה 3.3) $f(x) \in A_n$ ו- $f(x) \notin A_{n-1}$ ומכאן שבהכרח $f(x) = n$ (כי n הוא המספר היחיד השייך ל- A_n ואינו שייך ל- A_{n-1}. מכאן ש- f היא על.

שאלה 4

נתונה פונקציה $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ המוגדרת כך: לכל $m,n \in \mathbf{Z}$, $f\langle m,n\rangle = \langle 2m+3n, 3m+2n\rangle$.

נסמן ב- $\pi_1: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ את ההטלה על הרכיב הראשון ($\pi_1\langle m,n\rangle = m$ לכל $m,n \in \mathbf{Z}$)

א. הוכיחו ש- f היא חד-חד-ערכית ולא על.

ב. הוכיחו ש- $\pi_1 \circ f$ היא על ולא חד-חד-ערכית.

ג. הוכיחו שהפונקציה $g: \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \to \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ המוגדרת על-ידי $g\langle x,y\rangle = \langle 2x+3y, 3x+2y\rangle$ לכל $x,y \in \mathbf{Q}$ היא הפיכה ומיצאו את הפונקציה ההפכית לה.

תשובה

א. כדי להוכיח ש- f היא חד-חד-ערכית נראה שלכל $\langle m_1,n_1\rangle,\langle m_2,n_2\rangle \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, מתוך השוויון $f\langle m_1,n_1\rangle = f\langle m_2,n_2\rangle$ נובע $\langle m_1,n_1\rangle = \langle m_2,n_2\rangle$.

אכן, אם $f\langle m_1,n_1\rangle = f\langle m_2,n_2\rangle$ אז $\langle 2m_1+3n_1, 3m_1+2n_1\rangle = \langle 2m_2+3n_2, 3m_2+2n_2\rangle$

כלומר $2m_1+3n_1 = 2m_2+3n_2$ ו- $3m_1+2n_1 = 3m_2+2n_2$. אם כופלים את השוויון הראשון ב- 3 ואת השני ב- 2 ומחסרים אותם, מקבלים ש- $n_1 = n_2$ ואז נובע מיד שגם $m_1 = m_2$.

מכאן ש- $\langle m_1,n_1\rangle = \langle m_2,n_2\rangle$ ולכן f היא חד-חד-ערכית.

כדי להראות ש- f היא לא על, נראה שקיים איבר $\langle s,t\rangle \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ כך ש- $f\langle m,n\rangle \neq \langle s,t\rangle$ לכל $\langle m,n\rangle \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. נראה למשל ש- $f\langle m,n\rangle \neq \langle 1,0\rangle$. אכן אם נניח שיש $\langle m,n\rangle \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ כך ש- $f\langle m,n\rangle = \langle 1,0\rangle$ נקבל $2m+3n=1$, $3m+2n=0$ ואז נקבל ש- $n=\frac{3}{5}$, $m=-\frac{2}{5}$ בסתירה להנחה ש- $m,n \in \mathbf{Z}$. מכאן ש- f לא על.

ב. לפי ההגדרה, $(\pi_1 \circ f)\langle m,n\rangle = \pi_1\langle 2m+3n, 3m+2n\rangle = 2m+3n$.

לכל $k \in \mathbf{Z}$ מתקיים $(\pi_1 \circ f)\langle -k,k\rangle = -2k+3k = k$ מכאן ש- $\pi_1 \circ f$ היא על.

$\pi_1 \circ f$ לא חד-חד-ערכית שכן למשל, $(\pi_1 \circ f)\langle 1,1\rangle = 5$ וגם $(\pi_1 \circ f)\langle -5,5\rangle = 5$.

ג. כדי למצוא פונקציה הפכית ל- g (אם היא בכלל קיימת) נרשום $g\langle x,y\rangle = \langle s,t\rangle$ (שוויון שנותן את $\langle s,t\rangle$ כפונקציה של $\langle x,y\rangle$) ונמצא את הקשר ההפוך כלומר נביע את $\langle x,y\rangle$ כפונקציה של $\langle s,t\rangle$. מתוך $g\langle x,y\rangle = \langle s,t\rangle$ נובע $3x+2y=t$, $2x+3y=s$ ונקבל מכאן ש-

$x = \frac{3t}{5} - \frac{2s}{5}$, $y = \frac{3s}{5} - \frac{2t}{5}$.

לכן נגדיר $h\colon \mathbf{Q}\times\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ על-ידי $h\langle s,t\rangle = \langle \frac{3t}{5} - \frac{2s}{5}, \frac{3s}{5} - \frac{2t}{5}\rangle$ לכל $\langle s,t\rangle \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$.

נראה ש- h הפכית ל- g כלומר שההרכבות $h \circ g$ ו- $g \circ h$ הן פונקציית הזהות של $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ (וזה גם יראה ש- g הפיכה)

לכל $\langle x,y\rangle \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ מקיים:

$$(h \circ g)\langle x,y\rangle = (h(g\langle x,y\rangle) = h\langle 2x+3y, 3x+2y\rangle =$$
$$= \langle \frac{3(3x+2y)}{5} - \frac{2(2x+3y)}{5}, \frac{3(2x+3y)}{5} - \frac{2(3x+2y)}{5}\rangle = \langle x,y\rangle$$

לכן $h \circ g = I_{\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}}$.

לכל $\langle s,t\rangle \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ מקיים:

$$(g \circ h)\langle s,t\rangle = (g(h\langle s,t\rangle) = g\langle h\langle s,t\rangle = g\langle \frac{3t}{5} - \frac{2s}{5}, \frac{3s}{5} - \frac{2t}{5}\rangle =$$
$$= \langle 2\left(\frac{3t}{5} - \frac{2s}{5}\right) + 3\left(\frac{3s}{5} - \frac{2t}{5}\right), 3\left(\frac{3t}{5} - \frac{2s}{5}\right) + 2\left(\frac{3s}{5} - \frac{2t}{5}\right)\rangle = \langle s,t\rangle$$

לכן

$g \circ h = I_{\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}}$.

מכאן ש- h הופכית ל- g.