

## שאלה 1 (25 נקודות)

נתון גרף מכוון  $G = (V, E)$  עם משקלות אי-שליליים לצמתים (כלומר, לכל צומת  $v \in V$  יש משקל

$$w(v) \geq 0). \text{ אורכו של מסלול } s \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_l \text{ הוא } \sum_{i=1}^l w(v_i).$$

א. תאר אלגוריתם שסיבוכיותו  $O(|V|^3)$  אשר מקבל כקלט  $G = (V, E)$  כנייל ושני צמתים

$s, t \in V$  ומחשב אורך מסלול קצר ביותר בין  $s$  ל- $t$  בגרף. נתח את סיבוכיות האלגוריתם והוכח את נכונותו.

ב. האם האלגוריתם שתיארת בסעיף א' יפעל כהלכה גם כאשר יש לצמתים משקלות שליליים? אם כן - חוכח. אם לא - הבא דוגמה המכשילה את האלגוריתם.

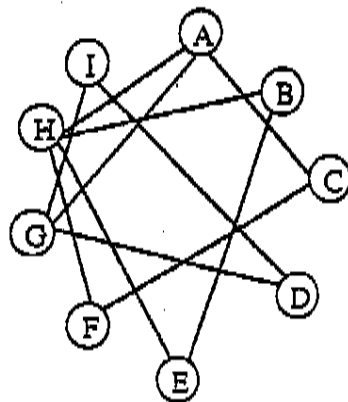
## שאלה 2 (25 נקודות)

יהי  $G = (V, E)$  גרף לא מכוון וקשיר חמקיים  $|E| \geq |V|$ . הוכח של- $G$  יש לפחות 3 עצים פורשים שונים.

## שאלה 3 (25 נקודות)

א. נתון גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  עם  $k$  רכיבים דו-קשירים. לכל רכיב  $1 \leq i \leq k$  נתון מספר  $m_i$  שהוא מספר צמתי ההפרדה ברכיב. מהו מספר צמתי ההפרדה בגרף כולו? הוכח.

ב. מצא בדרך אלגוריתמית יעילת את צמתי ההפרדה והרכיבים הדו-קשירים בגרף הבא. הראה את שלבי ביצוע האלגוריתם.



## שאלה 4 (25 נקודות)

בכל אחד מהסעיפים הבאים כתוב אלגוריתם אשר מקבל כקלט גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ , כך ש- $|V| = n$ , מספר טבעי  $n \leq k$  וקשת  $e \in E$  ונותן כפלט את הערך המתואר בסעיף. סיבוכיות כל אחד מהאלגוריתמים צריכה להיות  $O(k \cdot n^{187})$  ואפשר גם  $O(n^{187} \cdot \lg k)$ . הוכח את נכונות האלגוריתמים ונתח את סיבוכיותם.

- מספר המסלולים באורך  $k$  אשר מתחילים בקשת  $e$ .
- מספר המסלולים באורך  $k$  אשר אינם עוברים דרך הקשת  $e$ .

## שאלה 5 (25 נקודות)

נתונה קבוצת נשים  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , קבוצת גברים  $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$  וקבוצת אילוצים  $C \subseteq X \times Y$ . כל אילוץ  $(x_i, y_j) \in C$  משמעותו כי האישה  $x_i$  והגבר  $y_j$  מעוניינים להינשא. בחברה בח מדובר מותרת  $k$ -פוליגמיה. כלומר, כל גבר יכול להינשא ל- $k$  נשים לכל היותר, וכל אישה יכולה להינשא ל- $k$  גברים לכל היותר, כאשר  $k$  הוא קבוע. כתוב אלגוריתם המקבל כקלט את  $X, Y$  ו- $C$  ומוצא את מספר השידוכים המקסימלי כאשר מותרת  $k$ -פוליגמיה, כלומר, את המספר המקסימלי של זוגות שיכולים להינשא זה לזו, תוך שמירה על האילוצים בקבוצת  $C$  וכאשר כל גבר וכל אישה נישאים לכל היותר  $k$  פעמים.

**בהצלחה!**