האוניברסיטה הפתוחה

20476

# מתמטיקה בדידה

## חוברת הקורס אביב 2016ב

כתב: איתי הראבן

מרץ 2016 - סמסטר אביב תשע"ו

**פנימי – לא להפצה.**

# תוכן העניינים

## אל הסטודנטים,

ברוכים הבאים לקורס "מתמטיקה בדידה".
לפני שתתחילו בלימוד אנא קראו עמודים אלה בעיון.

על חלק מספרי הלימוד וחלק מחומרי העזר של הקורס מופיעים מספרי קורס 20276, 20283. חומרים אלה הועברו לקורס שלנו מקורס שפעל באו"פ בשנים קודמות.

באתר האינטרנט של הקורס תמצאו חומרי למידה נוספים והדרכה ללמידה. אתר הקורס הוא גם ערוץ תקשורת אפשרי עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. אתרי הקורסים נמצאים בכתובת http://opal.openu.ac.il .

הסבר על למידה מתוקשבת אפשר למצוא כאן: http://telem.openu.ac.il .
מערכות אחרות של האו"פ זמינות כאן:
https://sheilta.apps.openu.ac.il/pls/dmyopt2/sheilta.myop.
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה: www.openu.ac.il/Library . פרטים לגבי נהלי האוניברסיטה הפתוחה מפורטים בידיעון האקדמי, באתר הכללי של האו"פ: http://www.openu.ac.il .

מרכז ההוראה בקורס הוא איתי הראבן. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בדואר אלקטרוני itaiha@openu.ac.il
- דרך מערכת המסרים באתר הקורס.
- בטלפון **052-5277220** בימי ד' בין השעות 19:00 - 20:00.
- פקס: **09-7780631** , לרשום "עבור איתי"

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה ,
צוות הקורס

**שימו לב:**

**חובה להגיש מטלות במשקל של 12 נקודות לפחות.**

**ללא הגשת מטלות במשקל זה**

**אי-אפשר לעבור את הקורס.**

**ראו הסבר בעמוד ה'**

## **לוח זמנים ופעילויות** (20476 /2016ב)

| שבוע הלימוד | תאריכי שבוע הלימוד | יחידת הלימוד המומלצת | מפגשי ההנחיה* | תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ) | תאריך אחרון למשלוח ממ"ן (למנחה) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 11.3.2016-6.3.2016 | החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה" | | | |
| 2 | 18.3.2016-13.3.2016 | תורת הקבוצות פרק 1 | | ממ"ח 01 יום ו' 18.3.2016 | |
| 3 | 25.3.2016-20.3.2016 (ה-ו פורים) | תורת הקבוצות סעיפים 2.1- 2.4 | | | |
| 4 | 1.4.2016-27.3.2016 | תורת הקבוצות סעיפים 2.5 -3.1 | | | ממ"ן 11 יום א' 27.3.2016 |
| 5 | 8.4.2016-3.4.2016 | תורת הקבוצות סעיפים 3.2- 3.5 | | ממ"ח 02 יום ו' 8.4.2016 | |
| 6 | 15.4.2016-10.4.2016 | תורת הקבוצות סעיף 4.1 | | ממ"ח 03 יום ו' 15.4.2016 | |
| 7 | 22.4.2016-17.4.2016 (ו ערב פסח) | תורת הקבוצות פרק 5 (חוברת נפרדת) | | | ממ"ן 12 יום ה' 21.4.2016 |
| 8 | 29.4.2016-24.4.2016 (א-ו פסח) | חזרה על החומר | | | |
| 9 | 6.5.2016-1.5.2016 (ה יום הזכרון לשואה) | קומבינטוריקה סעיפים 1.1- 2.3 | | | ממ"ן 13 יום ו' 6.5.2016 |

* *התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

לוח זמנים ופעילויות - המשך

| שבוע הלימוד | תאריכי שבוע הלימוד | יחידת הלימוד המומלצת | מפגשי ההנחיה* | תאריך אחרון למשלוח: ממ"ח (לאו"פ) | ממ"ן (למנחה) |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 13.5.2016-8.5.2016<br>(ד יום הזיכרון)<br>(ה יום העצמאות) | קומבינטוריקה<br>סעיפים 2.4- 3.2 | | | |
| 11 | 20.5.2016-15.5.2016 | קומבינטוריקה<br>פרקים 4 - 5 | | ממ"ח 04<br>יום א'<br>15.5.2016 | |
| 12 | 27.5.2016-22.5.2016<br>(ה ל"ג בעומר) | קומבינטוריקה<br>פרקים 6- 7 | | | ממ"ן 14<br>יום ד'<br>25.5.2016 |
| 13 | 3.6.2016-29.5.2016 | חזרה על החומר | | | |
| 14 | 10.6.2016-5.6.2016<br>(א יום ירושלים) | תורת הגרפים<br>פרקים 1-2 | | | ממ"ן 15<br>יום א'<br>5.6.2016 |
| 15 | 17.6.2016-12.6.2016<br>(א שבועות) | תורת הגרפים<br>פרקים 3-4 | | | |
| 16 | 24.6.2016-19.6.2016 | תורת הגרפים<br>פרקים 5-6 | | ממ"ח 05<br>יום א'<br>19.6.2016 | ממ"ן 16<br>יום ד'<br>29.6.2016 |

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

## מטלות הקורס

**קראו היטב עמודים אלה לפני שתתחילו לענות על השאלות**

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס. הבנה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. מטלות המנחה (ממ״נים) יבדקו על-ידי המנחה ויוחזרו לכם בצירוף הערות המתייחסות לתשובות. על מטלות המחשב (ממ״חים) תקבלו רק פירוט תשובות נכונות ולא נכונות.

**מבנה המטלות**

בכל מטלה כמה שאלות. משקל כל השאלות במטלה זהה אלא אם כן צוין אחרת.
את הפתרונות לממ״ן עליכם לרשום על דף בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. לחלופין ניתן להגיש את המטלות מודפסות במעבד תמלילים, בתנאי שכל הסימונים המתמטיים ברורים. אין להשתמש בסימונים שאינם מופיעים ביחידות.

**ניקוד המטלות**

בקורס שש מטלות מנחה (ממ״נים) וחמש מטלות מחשב (ממ״חים).
משקל כל ממ״ן הוא 3 נקודות, משקל כל ממ״ח הוא נקודה אחת.
בהגשת כל המטלות ניתן אפוא לצבור 23 נקודות.

**דרישות חובה בהגשת המטלות:**

# חובה להגיש מטלות במשקל של 12 נקודות לפחות.
# ללא הגשת מטלות במשקל זה לפחות,
# אי-אפשר לעבור את הקורס.

**תנאים לקבלת נקודות זכות בקורס**

א. להגיש מטלות במשקל של 12 נק׳ לפחות.
ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.
ג. לקבל בציון הסופי 60 נקודות לפחות.

# הערות חשובות לתשומת לבך!

**פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.**

**כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:**

**בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.**
**ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.**

**זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.**

**מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.**

## השאירו לעצמכם העתק של המטלה

## האוניברסיטה הפתוחה אינה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

# מטלת מחשב (ממ"ח) 01

**קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ב**

**חומר הלימוד למטלה**: הפרק "מבוא מהיר ללוגיקה"

**מספר השאלות:** 16        **משקל המטלה:** נקודה אחת

**מועד אחרון להגשה:** יום ו' 18.3.2016

**תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א**
**בכתובת** http://www.openu.ac.il/sheilta/
**הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!**

**הערה כללית: בחוברת זו, כל ממ"ח שהגשתו היא ביום ו', ניתן להגישו עד מוצ"ש בחצות.**

בשאלות 1 - 12 במטלה זו מופיעות שתי טענות. בשאלות אלה סמנו :

א - אם רק טענה 1 נכונה,      ב - אם רק טענה 2 נכונה,

ג - אם שתי הטענות נכונות,      ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

בשאר השאלות פשוט בחרו את התשובה הנכונה.

**שאלה 1** #

1. הנוסחה $(x^2+7x-10)^3$ היא פסוק.

2. הנוסחה $(3^2+7\cdot 3-10)^3$ היא פסוק.

**שאלה 2** #

1. **שלילתו** של הפסוק    הכלב אכל לי את המחברת
היא    המחברת אכלה לי את הכלב

2. **שלילתו** של הפסוק    החתול אכל לי את המחברת
היא    החתול לא אכל לי את המחברת

**שאלה 3** #

1. הפסוק   $1+4=5$ **וגם** $2+3=5$   הוא אמת.

2. הפסוק   $1+4=5$ **או** $1+3=5$   הוא אמת.

**שאלה 4** #

1. הפסוק **אם** $2 > 7$ **אז** $2 + 3 = 5$ הוא אמת.

2. הפסוק **אם** $2 > 7$ **אז** $2 + 3 \neq 5$ הוא אמת.

**שאלה 5** #

1. לוח האמת של הפסוק הפורמלי $(p \wedge \neg q) \to (r \to q)$ הוא:

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p \wedge \neg q) \to (r \to q)$ |
|---|---|---|---|
| **T** | **T** | **T** | **T** |
| **T** | **T** | **F** | **T** |
| **T** | **F** | **T** | **F** |
| **T** | **F** | **F** | **T** |
| **F** | **T** | **T** | **T** |
| **F** | **T** | **F** | **T** |
| **F** | **F** | **T** | **T** |
| **F** | **F** | **F** | **T** |

2. הפסוק הפורמלי $(\neg p) \to p$ הוא סתירה.

**שאלה 6** #

1. הפסוק הפורמלי $p \to q$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $(\neg q) \to (\neg p)$.

2. הפסוק הפורמלי $\neg(p \to q)$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $p \to (\neg q)$.

**שאלה 7** #

1. $(\neg r) \wedge \neg(p \vee q)$ שקול טאוטולוגית ל- $\neg\big(p \vee q \vee (\neg r)\big)$.

2. $(p \vee q) \wedge q$ שקול טאוטולוגית ל- $q$.

**שאלה 8** #

1. **שלילת** הפסוק אני לא רוצה לזמביה, אני רוצה לפראג
שקולה לפסוק אני רוצה לזמביה ואני לא רוצה לפראג

2. **שלילת** הפסוק אין סוסים שמדברים עברית ואין שלג באפריקה
שקולה לפסוק יש סוסים שמדברים עברית או שיש שלג באפריקה

**שאלה 9** #

1. מתוך $(q \to p) \wedge q$ נובע טאוטולוגית $p$ .

2. מתוך $q \wedge (\neg q)$ נובע טאוטולוגית $p$ .

**שאלה 10** #

נתבונן בפסוק: **כל מספר הגדול מ- 7, גדול מ- 6.**

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x(x > 7 \quad \wedge \quad x > 6)$ .

2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x(x > 7 \quad \to \quad x > 6)$ .

**שאלה 11** #

נתבונן שוב בפסוק: **כל מספר הגדול מ- 7 הוא גדול מ- 6.**

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $(\forall x(x > 7)) \to (\forall x(x > 6))$ .

2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $(\forall x(x > 7)) \wedge 7 > 6$ .

**שאלה 12** #

1. את **שלילת** הפסוק **לכל $x$ שנבחר, קיים $y$ הגדול מ- $x$**
ניתן לנסח כך: **לכל $x$ שנבחר, אין $y$ הגדול מ- $x$** .

2. את **שלילת** הפסוק **יש מספר $x$, שאף מספר $y$ אינו קטן ממנו**
ניתן לנסח כך: **לכל מספר $x$ יש מספר $y$ הקטן ממנו** .

**המשך המטלה בעמוד הבא**

**השאלות הבאות הן חלק מהממ"ח** למרות שאינן עוסקות בלוגיקה. מטרתן לוודא שמידע בסיסי שעשוי להיות נחוץ לכם במהלך הסמסטר ידוע וזמין לכם.
בחרו בכל שאלה את התשובה הנכונה. את התשובות תוכלו למצוא באתר הקורס.
האתר נמצא בתוך סביבת הלמידה, שכתובתה http://opal.openu.ac.il
בתוך האתר ראו בפרט עמוד "שאלות נפוצות".

**שאלה 13**
היכן אני מוצא פרטים ליצירת קשר עם המנחה שלי והיכן המנחה כותב הודעות לקבוצה?

א. את פרטי המנחה מחפשים בגוגל והודעות הוא שולח בדואר שליחים.

ב. פרטי המנחה: שואלים זה את זה עד שמוצאים מישהו שיודע.
הודעות המנחה: בבלוג האישי של המנחה, בכתובת blog_shel_manche.com

ג. פרטי המנחה: בדף צוות הקורס, המקושר מאתר הקורס.
הודעות המנחה: בקבוצת הדיון של המנחה, באתר הקורס.

**שאלה 14**
האם אפשר להגיש מטלת מנחה (ממ"ן) **במערכת המטלות** כקובץ סרוק?

א. לא ב. ממש לא ג. בשום אופן

ד. במערכת המטלות יש להגיש טקסט מוקלד בלבד, אלא אם המנחה שלך הודיע במפורש שהוא מוכן לקבל סרוק.

**שאלה 15**
שלחתי מטלה למנחה, לא קיבלתי עדיין ציון, לא ברור לי מה קרה עם המטלה.
למי עלי לפנות בשלב ראשון?

א. למרכֵּז ההוראה של הקורס ב. לאחראי האקדמי של הקורס

ג. לראש המחלקה האקדמית ד. למנחה או הבודק שאליו הוגשה המטלה.

**שאלה 16**
אני זקוק לדחיה בממ"ן בגלל נסיבות מיוחדות כגון מילואים או מחלה. למי עלי לפנות?

א. למרכֵּז ההוראה של הקורס ב. לאחראי האקדמי של הקורס

ג. למנחה, אלא אם יש בודק שאינו המנחה, ואז פונים אליו.

ד. למנחה, גם אם יש בודק שאינו המנחה.

# מטלת מנחה (ממ״ן) 11

**קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ב**

**חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרק 1

**מספר השאלות:** 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

**מועד אחרון להגשה:** יום א׳ 27.3.2016

**מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״)

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל.

**שאלה 1** (18 נק׳)

שאלה זו נועדת לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות ולחדד כמה נקודות שכדאי להבין בשלב מוקדם:

* ההבדל בין $A$ לבין $\{A\}$ (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא $A$).

* מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה $\varnothing$ לבין $\{\varnothing\}$.

* ההבדל בין "$x$ איבר של $y$" לבין "$x$ חלקי ל- $y$".

תהיינה: $X=\{1,2\}$ , $Y=\{X,\{3\}\}$ , $Z=\{X\}$ .

לכל אחת מהטענות הבאות קבע אם היא נכונה.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $X\in Y$ ב. $Z\in Y$ ג. $X\subseteq Y$

ד. $Z\subseteq Y$ ה. $\varnothing\in Z$ ו. $|Y|=2$

ז. $P(X)\subseteq P(Y)$ ח. $\{\varnothing\}\subseteq P(X)$

**שאלה 2** (32 נק׳)

א. הוכיחו: אם $X\subseteq Y$ אז $P(X)\subseteq P(Y)$.

ב. הוכיחו: $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$. נמקו היטב כל שלב בהוכחה.

לגבי **איחוד** לא מתקיימת טענה כללית הדומה לזו שבסעיף ב׳: ר׳ החוברת ״אוסף תרגילים פתורים״ עמ׳ 1 שאלה 2. בסעיפים הבאים נבדוק מתי בדיוק כן מתקיים שוויון כזה עבור איחוד.

ג. הוכיחו **שאם** $A\subseteq B$ או $B\subseteq A$ **אז** $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ .

ד. הוכיחו את הכיוון ההפוך לטענה שבסעיף ב׳, כלומר הוכיחו

**שאם** $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ **אז** $A\subseteq B$ או $B\subseteq A$.

הדרכה: נוח להוכיח סעיף זה בדרך השלילה. מהי בדיוק הנחת השלילה במקרה זה?

**שאלה 3** (26 נק')

תנו **שתי הוכחות** לשוויון $A \oplus B = A' \oplus B'$. הוכחה אחת מהצורה "יהי $x$ איבר של אגף ימין, נראה שהוא איבר של אגף שמאל ... ולהיפך...", והוכחה שניה בעזרת אלגברה של קבוצות, ללא שימוש במושג "איבר". בהוכחה הראשונה היעזרו בטענות שלמדנו בתחשיב הפסוקים כדי לעבור מביטוי לביטוי שקול, בכל צעד תנו הפניה לטענה הרלבנטית. בהוכחה השניה היעזרו בטענות מפרק 1 בתורת הקבוצות.

הסימן $\oplus$ (הפרש סימטרי) מוגדר בשאלה 1.22 בכרך "תורת הקבוצות".

**שאלה 4** (24 נק')

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים : $\mathbf{N} = \{0,1,2,...,\}$ (ר' עמ' 3 בספר הלימוד).

לכל $n \in \mathbf{N}$, תהי $A_n = \{x \in \mathbf{N} \mid 0 \le x \le n\}$ .

**הוכיחו או הפריכו** כל אחת מהטענות הבאות.

(4 נק') א. $A_0 = \varnothing$

(5 נק') ב. $\forall_{n\in\mathbf{N}} \ A_n \subseteq A_{n+1}$

(5 נק') ג. $\exists_{n\in\mathbf{N}} \ A_n = \mathbf{N}$

(5 נק') ד. $\forall_{n\in\mathbf{N}} \ \forall_{k\in\mathbf{N}} \ \exists_{m\in\mathbf{N}} \ |A_m - A_n| = k$

(5 נק') ה. $\forall_{n\in\mathbf{N}} \ \forall_{m\in\mathbf{N}} \left( (A_m = \{x^2 \mid x \in A_n\}) \leftrightarrow (m = n \ \wedge \ n < 2) \right)$

---

## תזכורת לגבי מטלות הנשלחות בדואר ישראל

כל סמסטר, מטלות בודדות מתוך שפע המטלות הנשלחות בקורס אובדות בדרך למנחה. כל סטודנט בטוח ש"לי זה לא יקרה", אבל העובדה היא שזה קורה.

אם אתם שולחים מטלה בדואר ישראל או אפילו מגישים למנחה אישית על נייר, צלמו עותק ושמרו אצלכם. זה סוג של ביטוח במחיר אפסי, שיכול לחסוך לכם הרבה עגמת נפש.

---

# מטלת מחשב (ממ"ח) 02

**קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ב**

**חומר הלימוד למטלה**: "תורת הקבוצות" סעיפים 2.1 – 2.4

**מספר השאלות**: 12 **משקל המטלה**: נקודה אחת

**מועד אחרון להגשה**: יום ו' 8.4.2016

**תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א**
**בכתובת** http://www.openu.ac.il/sheilta/
**הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!**

בשאלות המסומנות ב- # (למשל שאלה 3) מופיעות שתי טענות. בשאלות אלה סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה, ב - אם רק טענה 2 נכונה,

ג - אם שתי הטענות נכונות, ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

בשאלות **שאינן** מסומנות בסולמית, פשוט בחרו את התשובה הנכונה.

**שאלה 1**

יהי $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2)\}$. נתבונן בשוויון $R = X \times Y$.

א. אם $X = \{1,2\}$, $Y = \{1,2,3\}$ אז $R = X \times Y$.

ב. אם $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{1,2\}$ אז $R = X \times Y$.

ג. השוויון $R = X \times Y$ מתקיים עבור $X,Y$ מסוימים, שאינם אלה שהוצגו בתשובות א, ב.

ד. לא קיימות קבוצות $X,Y$ כך ש- $R = X \times Y$.

**שאלה 2**

תהי $A = \{1,2,3,4\}$ ויהי $R$ היחס הבא מ- $A$ ל- $A$: $R = \{(1,1),(1,2),(3,1),(3,4),(4,1)\}$.

ההפרש הסימטרי $\oplus$ הוגדר בעמ' 27 בספר. $Domain(R) \oplus Range(R)$ הוא

א. $\{3\}$ ב. $\{1,2,4\}$ ג. $\varnothing$ ד. $\{2,3\}$ ה. $A$

**שאלה 3 #**

$R,A$ הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

טענה (*i*): $RR^{-1} = I_A$.

טענה (*ii*): $R^{-1}R = I_A$.

**שאלה 4**

$A$, $R$ הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

א. $R = R^2$.

ב. $R \neq R^2$ אבל $R^2 = R^3$.

ג. $R^2 \neq R^3$ אבל $R^3 = R^4$.

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

**שאלה 5** #

$A$, $R$ הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

טענה (*i*): $R \cup R^2$ הוא רפלקסיבי.

טענה (*ii*): $R \cup R^2$ הוא סימטרי.

**שאלה 6** #

$A$, $R$ הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

טענה (*i*): $R \cup R^2$ הוא אנטי-סימטרי.

טענה (*ii*): $R \cup R^2$ הוא טרנזיטיבי.

**שאלה 7**

היחס הריק $\varnothing$ (יחס שאינו מכיל אף זוג סדור) מעל $A = \{1,2\}$ הוא:

א. רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

ב. סימטרי ורפלקסיבי אך לא טרנזיטיבי.

ג. סימטרי וטרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי.

ד. רפלקסיבי וטרנזיטיבי אך לא סימטרי.

ה. טרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי ולא סימטרי.

**שאלה 8** #

$R,S$ הם יחסים מעל קבוצה $A$ ומתקיים $S \subseteq R$.

טענה (*i*): אם $R$ רפלקסיבי אז $S$ רפלקסיבי.

טענה (*ii*): אם $R$ טרנזיטיבי אז $S$ טרנזיטיבי.

**שאלה 9** #

$R,S$ הם יחסים מעל קבוצה $A$ ומתקיים $S \subseteq R$.

טענה (*i*): אם $S$ רפלקסיבי אז $R$ רפלקסיבי.

טענה (*ii*): אם $S$ טרנזיטיבי אז $R$ טרנזיטיבי.

**שאלה 10**

$R$ הוא יחס טרנזיטיבי וסימטרי מעל קבוצת הטבעיים $\mathbf{N}$.

ידוע שב- $R$ יש אינסוף זוגות סדורים. מכאן ניתן להסיק:

א. $R$ רפלקסיבי

ב. $R = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$

ג. $R = I_{\mathbf{N}}$

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

**שאלה 11**

$R$ הוא יחס כלשהו. איזה מהפסוקים הבאים מביע את הטענה ש- $R$ הוא יחס סימטרי?

א. $\forall x \forall y \left( (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \right)$

ב. $\forall x \exists y \left( (x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R \right)$

ג. $\left( \forall x \forall y \ (x,y) \in R \right) \rightarrow \left( \forall x \forall y \ (y,x) \in R \right)$

ד. $\forall x \forall y \ \left( (x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R \right)$

ה. $\exists x \exists y \left( (x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R \right)$

**שאלה 12**

$R$ הוא יחס מעל קבוצה סופית כלשהי, וידוע ש- $R$ **<u>אינו</u>** (!) אנטי-סימטרי.

מכאן ניתן להסיק:

א. $R$ סימטרי.

ב. ב- $R$ יש לפחות שני זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש $R$ כזה שבו בדיוק שני זוגות.

ג. ב- $R$ יש לפחות 3 זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש $R$ כזה שבו בדיוק 3 זוגות.

ד. ב- $R$ יש לכל היותר שני זוגות סדורים.

ה. ב- $R$ יש מספר זוגי של זוגות סדורים.

ו. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

## תזכורת חשובה

ללא עמידה בדרישת הגשת המטלות לא ניתן לעבור את הקורס

בסוף כל סמסטר, סטודנטים בודדים נאלצים להירשם מחדש לקורס (בתשלום), כי לא הגישו מטלות במכסה הנדרשת. חסכו לעצמכם את העלות הכספית ואת אבדן הסמסטר, הגישו מטלות לפי הנדרש.
הדרישות מפורטות בתחילת החוברת.

# מטלת מחשב (ממ"ח) 03

**קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ב**

**חומר הלימוד למטלה**: "תורת הקבוצות" מסעיף 2.5 עד סוף פרק 3

**מספר השאלות:** 12 **משקל המטלה:** נקודה אחת

**מועד אחרון להגשה:** יום ו' 15.4.2016

| |
|---|
| **תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א** |
| **בכתובת** http://www.openu.ac.il/sheilta/ |
| **הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!** |

"רלציה" בעברית: יחס.

**שאלה 1**

יהיו: $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ , $R=\{(1,2),(1,3),(2,3),(5,6)\}$ ,

$E$ הוא הסגור הרפלקסיבי של הסגור הסימטרי של $R$.

**החלוקה** שיחס השקילות $E$ משרה ב- $A$ היא:

א. $\{\{1,2,3\},\{5,6\}\}$ ב. $\{\{1,2,3\},\{5,6\},\{4\},\{7\}\}$

ג. $\{\{1,2,3,5,6\}\}$ ד. $\{\{1,2,3\},\{5,6\},\{4,7\}\}$

ה. $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{5,6\}\}$

ו. $E$ אינו יחס שקילות מעל $A$ ולכן אינו משרה חלוקה של $A$.

**שאלה 2**

נגדיר יחס $M$ מעל $\mathbf{N}-\{0\}$:

עבור $n,m$ טבעיים חיוביים, $(n,m)\in M$ אםם $n\cdot m$ הוא מספר זוגי.

מספר מחלקות השקילות ש- $M$ משרה ב- $\mathbf{N}-\{0\}$ הוא:

א. 1 ב. 2 ג. יש אינסוף מחלקות שקילות. ד. 4

ה. $M$ אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

**שאלה 3**

נגדיר יחס $K$ מעל קבוצת המספרים השלמים $\mathbf{Z}$:

עבור $n,m$ שלמים, $(n,m)\in K$ אםם $4n-4m$ מתחלק ב- 3.

מספר מחלקות השקילות ש- $K$ משרה ב- $\mathbf{Z}$ הוא:

א. יש אינסוף מחלקות שקילות. ב. 2 ג. 3 ד. 4

ה. $K$ אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

**הבהרה:** המושג "מתחלק" מוגדר גם עבור שלמים שליליים, למשל $-12$ מתחלק ב- 3.

ההגדרה היא: $a$ מתחלק ב- $b$ אם ורק אם קיים מספר שלם $k$ כך ש- $a=kb$.

**שאלה 4**

נתבונן ביחסי שקילות מעל הקבוצה $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ , בהם אחת ממחלקות השקילות היא בדיוק הקבוצה $\{1,2\}$ , בעוד המספרים 3,4,5 נמצאים יחד במחלקת שקילות אחרת (לאו דווקא לבדם).

מספר יחסי השקילות האלה הוא:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. 4 ה. 5 ו. 6

**שאלה 5**

**Z** היא קבוצת המספרים השלמים. נגדיר פונקציה $f$ מ- $\mathbf{Z}$ ל- $\mathbf{Z}$ : $f(k) = (k-1)(k+2)$ .

$f$ היא:

א. חד-חד-ערכית ועל
ב. חד-חד-ערכית אבל לא על
ג. על אבל לא חד-חד-ערכית.
ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.
ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbf{Z}$ ל- $\mathbf{Z}$ .

**שאלה 6**

נסמן $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ . תהי $g(x) = \dfrac{1+x}{1+5x}$ , $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ .

$g$ היא:

א. חד-חד-ערכית ועל
ב. חד-חד-ערכית אבל לא על
ג. על אבל לא חד-חד-ערכית.
ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.
ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbf{R}^+$ ל- $\mathbf{R}^+$ .

**שאלה 7**

תהי $f(X) = X \cup \mathbf{N}$ , $f : P(\mathbf{R}) \to P(\mathbf{R})$ .

$f$ היא:

א. חד-חד-ערכית ועל
ב. חד-חד-ערכית אבל לא על
ג. על אבל לא חד-חד-ערכית.
ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.
ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $P(\mathbf{R})$ ל- $P(\mathbf{R})$ .

**שאלה 8**

בעמ' 85 בכרך "תורת הקבוצות" מוגדרת $\varphi_A$ , **הפונקציה האופיינית** של $A$ ב- $U$ .

ניקח את $\mathbf{N}$ להיות הקבוצה האוניברסלית $U$, ותהיינה $A,B \subseteq \mathbf{N}$ .

נתבון בטענה $\forall n \left( \varphi_A(n) \le \varphi_B(n) \right)$ . איזו מהטענות הבאות **שקולה** לטענה זו?

א. $|A| \le |B|$

ב. כל אברי $A$ קטנים או שווים לכל אברי $B$ .

ג. $A \subseteq B$

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

**שאלה 9**

יהיו $X,Y \subseteq \mathbf{N}$ . נאמר ש- $(X,Y) \in D$ **אסם (אם ורק אם)** $X \subseteq Y$ . היחס $D$ הוא:

א. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$ ואינו סדר-מלא מעל $P(\mathbf{N})$.

ב. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$, שהוא גם סדר-מלא מעל $P(\mathbf{N})$.

ג. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$, שהוא גם יחס שקילות מעל $P(\mathbf{N})$.

ד. אינו סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$.

**שאלה 10**

יהיו $x,y \in \mathbf{N}-\{0\}$. נאמר ש- $(x,y) \in D$ **אסם** $x$ מתחלק ב- $y$ **או** $y$ מתחלק ב- $x$.

היחס $D$ הוא:

א. סדר מלא מעל $\mathbf{N}-\{0\}$.

ב. יחס סדר-חלקי מעל $\mathbf{N}-\{0\}$, שאינו סדר מלא מעל $\mathbf{N}-\{0\}$.

ג. אינו סדר-חלקי מעל $\mathbf{N}-\{0\}$ (ולכן גם אינו סדר מלא מעל $\mathbf{N}-\{0\}$).

ד. אינו יחס מעל $\mathbf{N}-\{0\}$.

**שאלה 11**

$R$ הוא סדר-חלקי על קבוצה כלשהי $A$.

$a,b$ הם שני אברים שונים של $A$, ושניהם אברים מקסימליים לגבי $R$. מכאן נובע:

א. $|A|=2$.

ב. $R$ הוא סדר מלא מעל $A$.

ג. $R$ אינו סדר מלא מעל $A$.

ד. $A$ היא אינסופית.

ה. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

**שאלה 12**

$R$ הוא סדר-חלקי על קבוצה כלשהי $A$.

$a,b$ הם שני אברים שונים של $A$, ושניהם אברים גדולים ביותר לגבי $R$. מכאן נובע:

א. $|A|=2$.

ב. $R$ הוא סדר מלא מעל $A$.

ג. $R$ אינו סדר מלא מעל $A$.

ד. $A$ היא אינסופית.

ה. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

## התדריכים השבועיים

באתר הקורס יש תדריכים לכל פרק בחומר. התדריכים נותנים דגשים, הבהרות, הפניות לחומר עזר נוסף באתר. פה ושם הם מחדדים הגדרה לא מעודכנת שנמצאת בספר (למשל ההגדרה של המושג "פונקציה").

בנוסף לעדכונים, התדריכים משקפים את נקודת המבט של מרכז ההוראה על הקורס. מכיון שמרכז ההוראה כותב את הבחינה, משתלם להבין את נקודת המבט שלו.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 12

**קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ב**

**חומר הלימוד למטלה**: "תורת הקבוצות" פרקים 2- 3

**מספר השאלות:** 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

**מועד אחרון להגשה:** יום ה' 21.4.2016

**מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

**שאלה 1** (24 נקודות)

$A$ היא קבוצה לא ריקה, $R$ הוא יחס מעל $A$. נסמן $\widetilde{R} = R - R^{-1}$.

(6 נק') א. הוכיחו: $\widetilde{R}$ הוא בהכרח אנטי-סימטרי, והוא מקיים $\widetilde{R} \cap I_A = \varnothing$.

(18 נק') ב. הוכיחו: אם $R$ טרנזיטיבי אז $\widetilde{R}$ טרנזיטיבי.

הדרכה: סעיף א' הוא תרגיל חימום לקראת סעיף ב'.

את שני הסעיפים נוח להוכיח לא באלגברה של קבוצות ויחסים אלא ברמת האיברים.

הוכחה ברמת האיברים שיחס $\widetilde{R}$ מקיים תכונה כלשהי **חייבת** להתחיל בצורה הבאה:

נניח שזוגות סדורים אלה ואלה שייכים ל- $\widetilde{R}$.

היא **לא יכולה** להתחיל בצורה: נניח שזוגות סדורים אלה ואלה שייכים ל- $R$.

**שאלה 2** (32 נקודות)

תהי $A = \{1,2,3\}$ ותהי $M$ קבוצת כל היחסים מעל $A$.

תהי $t : M \to M$ הפונקציה המתאימה לכל $R \in M$ את הסגור הטרנזיטיבי שלו.

**הוכח או הפרך** כל אחת מהטענות הבאות:

א. $t$ היא חד-חד-ערכית

ב. $t$ היא **על** $M$

ג. לכל $R \in M$, $t(R - I_A) = t(R) - I_A$

ד. לכל $R \in M$, $t(t(R)) = t(R)$

הסבר לסעיף ג: יחס הוא קבוצה של זוגות סדורים. ההפרש הוא הפרש בין קבוצות.

**שאלה 3** (32 נקודות)

תהי $F$ קבוצת כל הפונקציות של $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$. נגדיר יחס $K$ מעל $F$ :

עבור $f,g \in F$ : $(f,g) \in K$ אםם <u>**לכל**</u> $n \in \mathbf{N}$ , $f(n) \le g(n)$ .

א. הוכח ש- $K$ הוא סדר-חלקי מעל $F$.

ב. הוכח ש- $K$ **אינו** סדר-מלא מעל $F$ .

ג. הוכח שאין ב- $F$ איברים מקסימליים לגבי היחס $K$.

ד. הוכח שלכל שני אברים ב- $F$ קיים אבר של $F$ הגדול משניהם.

במלים אחרות, בהינתן $f,g \in F$ , הוכח שקיים $h \in F$ המקיים בעת ובעונה אחת :

$(f,h) \in K$ , $(g,h) \in K$ , $h$ שונה מ- $f$ , $h$ שונה מ- $g$ .

הערה : $h$ אינו איבר קבוע של $F$ אלא תלוי ב- $f,g$ .

**שאלה 4** (12 נקודות)

הוכיחי באינדוקציה שלכל $n$ טבעי, $3^n + 7^n - 2$ מתחלק ב- 8 .

# מטלת מנחה (ממ״ן) 13

**קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ב**

**חומר הלימוד למטלה: ״תורת הקבוצות״ פרקים 4,5**

**מספר השאלות: 4** **משקל המטלה: 3 נקודות**

**מועד אחרון להגשה:** יום ו׳ 6.5.2016

**מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״)

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

**שימו לב: חלק ממטלה זו מתייחס לפרק 5 בתורת הקבוצות, שנמצא בידיכם בחוברת נפרדת.**

**שאלה 1** (30 נקודות)

תני דוגמא לקבוצות $A,B$ כך ש**חמש הקבוצות** $A,\ B,\ A-B,\ A\oplus B,\ A\cup B$ שונות כולן זו מזו, אבל לכל חמש הקבוצות האלה אותה עוצמה. הוכיחי שהקבוצות שונות זו מזו והוכיחי שיש להן אותה עוצמה. **ההפרש הסימטרי** $A\oplus B$ הוגדר בפרק 1, שאלה 1.22 בעמ׳ 27.

**שאלה 2** (35 נקודות)

א. יהי $n$ מספר טבעי חיובי.

הראו כי קבוצת התת-קבוצות של $\mathbf{N}$ שגודלן בדיוק $n$, היא בת-מנייה.

**הערה**: קבוצת **הסדרות** באורך $n$ מעל $\mathbf{N}$ היא כידוע בת-מנייה.

ניתן להיעזר בכך, אך שימו לב שהשאלה כאן היא על **תת-קבוצות** ולא על סדרות.

ב. הראו כי קבוצת כל התת-קבוצות הסופיות של $\mathbf{N}$ היא בת-מנייה.

ג. בלי להסתמך על פרק 5, הראו כי קבוצת כל התת-קבוצות **האינסופיות** של $\mathbf{N}$ **אינה** בת-מנייה.

ד. בעזרת פרק 5 מיצאו את עוצמת הקבוצה מהסעיף הקודם. הוכיחו את תשובתכם.

המשך השאלה - בעמוד הבא

ה. הנוסחה $\Big|\{X \in P(\mathbf{N}) \mid |X| = n\}\Big| = \aleph_0$

מביעה בכתיב פורמלי את הטענה של סעיף א.

*(i)* כתבו נוסחה דומה המביעה את הטענה של סעיף ב.

*(ii)* כתבו נוסחה דומה המביעה את הטענה שמצאתם בסעיף ד.

בכתיבת הנוסחאות אפשר להסתמך על כך שקבוצה של מספרים טבעיים, עוצמתה חייבת להיות אחד משני אלה: מספר טבעי או $\aleph_0$ .

**שאלה 3** (10 נקודות)

מצאו **מה לא תקין** בהגדרה הבאה.
בדומה להגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות בפרק 5, נגדיר הפרש סימטרי בין עוצמות:
תהיינה $k,m$ עוצמות, לא בהכרח שונות זו מזו. נגדיר את $k \oplus m$ באופן הבא:
תהיינה $A,B$ קבוצות המקיימות $|A| = k$ , $|B| = m$,

**נגדיר** את ההפרש הסימטרי של העוצמות $k,m$ להיות עוצמת ההפרש הסימטרי של הקבוצות $A,B$:
$k \oplus m = |A \oplus B|$ .

הגדרה כזו אינה אפשרית. עליכם להסביר מה הבעיה בהגדרה, ולהראות ע"י דוגמא שההגדרה **אינה תקינה**. הדרכה: ראו ההגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות.
שימו לב: התשובה אינה יכולה להיות "ההפרש הסימטרי של העוצמות לא יוצא מה שהוא צריך להיות": לא ברור מראש מה הוא צריך להיות, ובכל מקרה מדובר בנסיון להגדיר מושג חדש.
השאלה שאתם מתבקשים לענות עליה אינה אם ההגדרה תואמת לציפיות (אם יש כאלה) אלא האם בכלל הצלחנו להגדיר כאן משהו.

**שאלה 4** (25 נקודות)

(13 נק') א. יהיו $k_1, k_2, m_1, m_2$ עוצמות.
הוכח שאם $k_1 \le k_2$ ו- $m_1 \le m_2$ אז $k_1 \cdot m_1 \le k_2 \cdot m_2$ .

(6 נק') ב. הוכח: $\aleph_0 \cdot C = C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם).

(6 נק') ג. הוכח: $C^C = 2^C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם ובמשפטים שבחוברת).

# מטלת מחשב (ממ"ח) 04

**קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ב**

**חומר הלימוד למטלה**: "קומבינטוריקה" פרקים 1,2

**מספר השאלות:** 13 **משקל המטלה:** נקודה אחת

**מועד אחרון להגשה:** יום א' 15.5.2016

**תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א**
**בכתובת** http://www.openu.ac.il/sheilta/
**הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!**

בשאלות 1 – 4 $A,B$ הן קבוצות סופיות, $|A|=4$ , $|B|=3$ .

**שאלה 1**

מספר הפונקציות של $A$ ל- $B$ הוא:

א. 4 ב. 7 ג. 20 ד. 64 ה. 81

**שאלה 2**

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של $A$ ל- $B$ הוא:

א. 1 ב. 3 ג. 4 ד. 24 ה. 0 (אין פונקציות כאלה)

**שאלה 3**

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של $B$ ל- $A$ הוא:

א. 1 ב. 3 ג. 4 ד. 24 ה. 0 (אין פונקציות כאלה)

**שאלה 4**

מספר הפונקציות של $A$ **על** $B$ הוא:

א. 3 ב. 4 ג. 12 ד. 36 ה. 0 (אין פונקציות כאלה)

**שאלה 5**

$A$ היא קבוצה, $|A|=10$.

מספר הקבוצות החלקיות ל- $A$ אשר בכל אחת מהן בדיוק 3 אברים הוא:

א. 7 ב. 120 ג. 720 ד. 1,000 ה. $3^{10}$

**שאלה 6**

מספר יחסי הסדר המלא מעל קבוצה $A$ בת 10 אברים הוא:

א. 1 ב. 100 ג. 1,024 ד. !10 ה. $2^{10}$

שאלות 7- 9 עוסקות בדרכים שונות לסדר את המחרוזת AAABBCCDD (להלן: "המחרוזת").

**שאלה 7**

מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת הוא:

א. 24 ב. 48 ג. 7,560 ד. 15,120 ה. 362,880

**שאלה 8**

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת כאשר צמד האותיות BB חייב להופיע ברצף?

א. 7 ב. 24 ג. 1,680 ד. 5,040 ה. 40,320

**שאלה 9**

**בנוסף** לדרישה שבשאלה 8, נדרוש גם **שלא** יופיע הרצף AAA.

מספר הסידורים האפשריים כעת קטן ממספר הסידורים שמצאתם בשאלה 8. **בכמה הוא קטן?**

א. 24 ב. 60 ג. 120 ד. 180 ה. 360

שאלות 10 – 12 עוסקות בארבע משפחות שיצאו יחד למנגל והכינו 8 סטֵייקים **זהים** ו- 10 שיפודים **זהים**. המשפחות **אינן** נחשבות זהות. כמו כן, סטייק **אינו** זהה לשיפוד.

**שאלה 10**

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לחלק את 8 הסטייקים בין המשפחות?

יש לחלק את כל הסטייקים. ייתכן שמשפחה לא רוצה סטייקים כלל.

א. 4,096 ב. 65,536 ג. $D(4,8)=\binom{11}{7}$ ד. $D(4,8)=\binom{11}{3}$ ה. $D(8,4)$

**שאלה 11**

נסמן את התשובה לשאלה הקודמת ב- $x$. בכמה דרכים ניתן לחלק את **כל האוכל** בין המשפחות?

יש לחלק את כל השיפודים ואת כל הסטייקים. ייתכן שמשפחה לא רוצה אוכל כלל.

א. $x+715$ ב. $x+286$ ג. $x\cdot 715$ ד. $x\cdot 286$

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

**שאלה 12**

בכמה דרכים ניתן לחלק רק את 10 השיפודים בין המשפחות, אם כל משפחה חייבת לקבל לפחות שיפוד אחד ומשפחת כהן חייבת לקבל לפחות שני שיפודים?

א. 4 ב. 5 ג. 20 ד. 56 ה. 1,204

**שאלה 13**

מהו מספר הפתרונות בטבעיים של **אי-השוויון** $x_1+x_2+x_3\le 10$ ?

תזכורת: בקורס זה, 0 הוא מספר טבעי. **הדרכה**: נסמן $x_4=10-(x_1+x_2+x_3)$ .

א. 10 ב. 66 ג. 210 ד. 286 ה. 540

# מטלת מנחה (ממ"ן) 14

**קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ב**

**חומר הלימוד למטלה**: "קומבינטוריקה" פרקים 3,4,5

**מספר השאלות:** 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

**מועד אחרון להגשה:** יום ד' 25.5.2016

**מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

**שאלה 1** (25 נק')

פשטו את הסכום $\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n+1}\binom{m}{n}$ . הגיעו לביטוי התלוי ב- $m$, שאינו מכיל סכומים.

במהלך הפתרון סביר שתזדקקו לפעולה מקובלת הקרויה **החלפת משתנה הסכימה**. דוגמא:

בביטוי $\sum_{i=20}^{50} a_{i-3}$ נעבור למשתנה $j=i-3$ ונקבל שניתן לרשום את הסכום גם כך: $\sum_{j=17}^{47} a_j$ .

שימו לב להחלפת הערכים הן בתוך הסכום והן בגבולות הסכימה.

**שאלה 2** (25 נק')

מיצאו בכמה מן **התמורות** של שש הספרות 123456 לא מופיע **אף אחד** משמונה הרצפים הבאים:

.123, 234, 345, 456, 654,543, 432, 321

דוגמא לתמורה המקיימת את התנאי: **653124** . יש להגיע לתשובה מספרית.

**שאלה 3** (25 נק')

מצאו כמה מספרים שלמים $n$, $1 \le n \le 7770$, הם בעלי התכונה:

$n$ מתחלק ב- 7, והוא **<u>אינו</u>** מתחלק באף מספר טבעי $k$ המקיים $2 \le k \le 10 \;\wedge\; k \ne 7$ .

הצעה: לפני שמסתערים על החישוב כדאי להקדיש כמה דקות לפשֵט את השאלה.

**שאלה 4** (25 נק')

(15 נק') א. מתוך 2000 המספרים שבתחום $1 \leq n \leq 2000$ מישהו בחר 1001 מספרים שונים. הוכיחו שבקבוצת 1001 המספרים שנבחרו, בהכרח יש שני אברים שונים $x,y$ כך ש- $y$ מתחלק ב- $x$ ללא שארית.

**הדרכה:** כל מספר טבעי חיובי $n$ ניתן להציג באופן יחיד כך: $n = 2^k \cdot b$ , כאשר $k$ טבעי (יכול להיות 0), ו- $b$ הוא **אי-זוגי**: פשוט מוציאים כגורם מתוך $n$ את החזקה הגדולה ביותר של 2 אשר בה $n$ מתחלק ללא שארית. אחרי שנחלק את $n$ בחזקה הזו של 2 , נקבל מספר אי-זוגי, אחרת היה אפשר להמשיך ולחלק ב- 2.

$k$ הוא אפוא מספר הפעמים בו ניתן לחלק את $n$ ב- 2 כך שיתקבל מספר שלם.

$b$ הוא התוצאה של החילוק הזה.

דוגמאות: $15 = 2^0 \cdot 15$, $72 = 2^3 \cdot 9$, $1024 = 2^{10} \cdot 1$.

בשאלה שלנו נתאים לכל $n$ את המספר $b$ שמתקבל ממנו, ונחשוב קצת מה זה אומר.

(10 נק') ב. אדם פזיז ניסה ליישם את ההוכחה של סעיף א' על בחירה של 1001 מספרים שונים מתוך 2000 המספרים שבתחום $2001 \leq n \leq 4000$. הוא טען שגם במקרה זה בקבוצת 1001 המספרים שנבחרו, בהכרח חייבים להיות שני אברים שונים $a,b$ כך ש- $a$ מתחלק ב- $b$ ללא שארית. הוא הוכיח זאת באותה דרך של סעיף א'. מצאו את הטעות בהוכחה במקרה זה (אין הכרח למצוא דוגמא נגדית לטענה, אתם מתבקשים רק להסביר מדוע אותה הוכחה לא עובדת במקרה זה).

# מטלת מנחה (ממ"ן) 15

**קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ב**

**חומר הלימוד למטלה**: "קומבינטוריקה" פרקים 6 – 7.3

**מספר השאלות:** 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

**מועד אחרון להגשה:** יום א' 5.6.2016

**מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

**שאלה 1**

יהי $a_n$ מספר הסדרות באורך $n$, שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0,1,2\}$,

אשר אין בהן הופעה של **00** ואין בהן הופעה של **01** (מותרת הופעה של 10).

דוגמאות לסדרות **מותרות** באורך 5: 12211 , 11110 .

דוגמאות לסדרות **אסורות** באורך 5: 12011 , 11100.

(10 נק') א. רשמי בעזרת חישוב ישיר את $a_0, a_1, a_2$. רשמי יחס נסיגה עבור $a_n$.
בדקי שהערכים שרשמת עבור $a_0, a_1, a_2$ מתאימים ליחס הנסיגה.

(15 נק') ב. פתרי את יחס הנסיגה וקבלי נוסחה מפורשת עבור $a_n$.
ביטויים כגון $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ יש להשאיר כפי שהם.
ביטויים כגון $\sqrt{12}$ יש להעביר לצורה $\sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = 2\sqrt{3}$.

**שאר הממ"ן עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בסוף הממ"ן רשימה של נוסחאות שימושיות.**

**שאלה 2**

ארבע המשפחות שהוזכרו בממ"ח 04 יצאו שוב למנגל והכינו $n$ שיפודים.

כל משפחה מחסלת לפחות 6 שיפודים, אבל לא מסוגלת להתמודד עם יותר מ- 24 שיפודים.

יש לחלק את כל השיפודים. השיפודים זהים, המשפחות נחשבות שונות זו מזו.

(7 נק') א. רשמו פונקציה יוצרת עבור מספר הדרכים לחלק את $n$ השיפודים בין המשפחות לפי התנאים הנ"ל.

(8 נק') ב. בדקו והסבירו את התשובות המתקבלות מסעיף א עבור המקרים:
$n=24$ , $n=25$ , $n=95$ , $n=100$ .

(10 נק') ג. אם מספר השיפודים הוא 40, חשבו בעזרת סעיף א' את מספר הדרכים לחלק אותם בין המשפחות, לפי אותם תנאים. תנו תשובה סופית מספרית.

**שאלה 3**

(10 נק׳) א. כתבו פונקציה יוצרת עבור מספר פתרונות המשוואה

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3n + 1$ , כאשר כל המשתנים הם מספרים טבעיים המתחלקים ב- 3,
פרט לאחד המשתנים שהוא מספר טבעי שאינו מתחלק ב- 3. לא נתון מיהו המשתנה יוצא הדופן.

תזכורת: 0 הוא מספר טבעי והוא מתחלק ב- 3.

הדרכה: כתבו פונקציה יוצרת בהנחה שידוע מיהו יוצא הדופן, וכפלו אותה בגורם מתאים.

(15 נק׳) ב. בעזרת חלק א, מצאו את מספר הפתרונות בתנאים האמורים כאשר $n = 12$ .

**יש להגיע לתשובה סופית מספרית**.

**שאלה 4**

דוגמא לתרגיל מסוג זה נמצאת בסוף הקובץ ״מבוא לפונקציות יוצרות״ שבאתר הקורס.

(8 נק׳) א. נרשום את הפיתוחים הבאים:

$$f(x) = (1-x)^9 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \qquad g(x) = \frac{1}{(1-x)^{10}} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

מצאו את $a_i$ ואת $b_i$, לכל $i$ טבעי.

(15 נק׳) ב. נשים לב ש- $f(x) \cdot g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (*)

יהי $k \in \mathbf{N}$. את המקדם של $x^k$ בפונקציה $f(x) \cdot g(x)$ אפשר לחשב בשתי דרכים:

- מתוך אגף שמאל של (*), ע״י כפל פונקציות יוצרות.
- מתוך אגף ימין של (*), בפיתוח הידוע של $\dfrac{1}{1-x}$ .

השוו את שתי התוצאות וקבלו זהות מהצורה $? = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{?}{?} \cdot D(?\,,?)$ .

(2 נק׳) בדקו את הזהות שקיבלתם עבור המקרה $k = 2$ .

---

**להלן נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות**:

**(*i*)!** סכום טור הנדסי סופי: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ ואינסופי: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \dfrac{1}{1-x}$

**(*ii*)!** כפל פונקציות יוצרות:

אם $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ , $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ , ו- $f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

אז $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד).

**(*iii*)!** $$\frac{1}{(1-x)^n} = (1 + x + x^2 + \ldots)^n = \sum_{k=0}^{\infty} D(n,k) x^k$$

במלים אחרות: המקדם של $x^k$ בפיתוח הביטוי $\dfrac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$ .

(ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ׳ 129 בספר)

# מטלת מחשב (ממ"ח) 05

**קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ב**

**חומר הלימוד למטלה**: "תורת הגרפים" פרקים 1- 3

**מספר השאלות:** 10 **משקל המטלה:** נקודה אחת

**מועד אחרון להגשה:** יום א' 19.6.2016

**תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א**
**בכתובת** http://www.openu.ac.il/sheilta/
**הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!**

**שאלה 1**

נתאר לעצמנו גרף על 5 צמתים,

3 מהצמתים הם בעלי דרגה 4 ושני הצמתים האחרים בעלי דרגה קטנה מ- 3.

א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.

ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.

ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.

ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.

ה. לא קיים גרף כזה.

**שאלה 2**

נתאר לעצמנו גרף על 7 צמתים, שדרגותיהם: 2,2,3,3,4,5,6.

תשובות לבחירה: אותן חמש תשובות א – ה שהופיעו בשאלה הקודמת.

**שאלה 3**

גרף פשוט $G$ מוגדר כך:

הצמתים של $G$ הם הקבוצות בנות בדיוק 3 אברים מתוך $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

למשל הקבוצה $\{1,4,8\}$ היא צומת של $G$. מספר הצמתים הוא אפוא $\binom{8}{3}$.

בין שני צמתים שונים $A,B$ יש קשת אם ורק אם $A \cap B = \varnothing$.

למשל יש קשת בין $\{1,4,8\}$ לבין $\{2,3,5\}$. דרגת כל צומת ב- $G$ היא:

א. 10 ב. 20 ג. 30 ד. 40

**שאלה 4**

בהתייחס לגרף מהשאלה הקודמת, מספר הקשתות בגרף הוא:

א. 28 ב. 56 ג. 280 ד. 560 ה. 1120

**שאלה 5**

השאלה מתייחסת למושגים שונים שהוגדרו בפרק 1 ב"תורת הגרפים".

בגרף המלא $K_9$ נצבע ארבעה צמתים באדום ואת חמשת הצמתים האחרים בירוק.

תהי $A$ קבוצת הצמתים האדומים, $B$ קבוצת הצמתים הירוקים. נסמן:

$G_1$: הגרף המושרה על-ידי $A$ ב- $K_9$. $G_2$: הגרף המושרה על-ידי $B$ ב- $K_9$.

$G_3$: איחוד הגרפים $G_1, G_2$,

כלומר גרף על $A \cup B$ שקבוצת הקשתות שלו היא $E(G_1) \cup E(G_2)$.

$G_4$: גרף על $A \cup B$, שהקשתות שלו הן רק אלה המחברות צומת אדום עם צומת ירוק.

להלן כמה טענות:

*(i)* $G_1$ הוא גרף דו-צדדי

*(ii)* $G_4$ הוא גרף דו-צדדי

*(iii)* $G_3$ הוא קשיר

*(iv)* $G_4$ הוא קשיר

*(v)* $G_1$ הוא גרף מלא על 4 צמתים

*(vi)* $K_9$ הוא גרף דו-צדדי

*(vii)* $G_3$ הוא תת-גרף פורש של $K_9$

*(viii)* $G_4$ הוא תת-גרף פורש של $K_9$

מתוך 8 טענות אלה, הטענות הנכונות הן בדיוק:

א. *(ii)*, *(iv)*, *(vi)*

ב. *(i)*, *(iii)*, *(vi)*, *(vii)*, *(viii)*.

ג. *(i)*, *(iii)*, *(v)*

ד. *(ii)*, *(iv)*, *(v)*, *(vii)*, *(viii)*.

ה. אף אחד מארבעת הסעיפים הקודמים אינו מציג את כל הטענות הנכונות ורק אותן.

**שאלה 6**

$G$ הוא **יער** על 20 צמתים, ויש לו בדיוק 5 רכיבי קשירות.

מישהו עשה את התהליך הבא: מיספר באופן שרירותי את רכיבי הקשירות מ- 1 עד 5,

בחר באופן שרירותי צומת אחד בכל רכיב קשירות, קרא לצומת הזה $v_i$ $(i = 1,\ldots,5)$,

ולכל $1 \le i \le 4$ **הוסיף** לגרף קשת בין $v_i$ ל- $v_{i+1}$.

אחרי הוספת הקשתות האלה קיבלנו גרף שהוא:

א. יער בעל 24 קשתות.

ב. עץ בעל 19 קשתות.

ג. גרף שאינו יער (ובפרט אינו עץ).

ד. גרף קשיר שאינו פשוט.

ה. גרף פשוט שאינו קשיר.

ו. חלק מהתשובות הקודמות אפשריות, אבל בלי מידע נוסף לא ניתן לקבוע תשובה נכונה אחת.

**שאלה 7**

בפרק 2 של החוברת "תורת הגרפים", בתשובה לשאלה 8, מופיע עץ מתויג.

נוסיף לעץ הזה עלה שמספרו 9 ונחבר אותו לצומת שמספרה 6.

סדרת Prüfer של העץ החדש היא:

א. $(4,4,3,4,4,2,6)$

ב. $(4,4,3,4,4,2,9)$

ג. $(6,4,4,3,4,4,2)$

ד. $(6,4,4,4,3,2,4)$

ה. $(4,4,4,4,3,2,6)$

ו. $(4,4,4,2,4,3,6)$

**שאלה 9**

$G$ הוא גרף פשוט וקשיר על קבוצת הצמתים $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

נתון ש- $G$ הוא אוילרי, כלומר יש בו מעגל אוילר.

עוד נתון שאין ב- $G$ קשת בין 1 ל- 2, אין קשת בין 2 ל- 3 ואין קשת בין 1 ל- 3.

נוסיף ל- $G$ **שתי קשתות**: קשת בין 1 ל- 2 וקשת בין 2 ל- 3. הגרף שנקבל הוא:

א. אוילרי.

ב. אינו אוילרי, אבל יש בו מסלול אוילר שאינו מעגל.

ג. אינו אוילרי, ואין בו מסלול אוילר שאינו מעגל.

ד. ייתכן שהוא אוילרי וייתכן שלא – תלוי בגרף המקורי $G$.

ה. לא ייתכן, יש סתירה בנתוני השאלה.

**שאלה 10**

נתבונן בגרף הדו-צדדי המלא $K_{4,4}$.

א. הוא המילטוני, ויש בו גם מסלול המילטון שאינו מעגל.

א. הוא המילטוני, וכל מסלול המילטון בו הוא מעגל.

ג. הוא אינו המילטוני, אבל יש בו מסלול המילטון שאינו מעגל.

ד. אין בו מסלול המילטון כלל.

לקראת סוף הסמסטר ייפתח באתר הקורס פורום "לקראת הבחינה", אפשר להעלות בו שאלות שעולות במהלך חזרה על החומר לקראת הבחינה.

עוד  ראו באתר הקורס הנחיות כיצד להתכונן לבחינה.

# מטלת מנחה (ממ״ן) 16

**קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ב**

**חומר הלימוד למטלה**: ״תורת הגרפים״ , כל החוברת

**מספר השאלות:** 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

**מועד אחרון להגשה:** יום ד׳ 29.6.2016

**מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״)

- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

**שאלה 1** (10 נקודות)

בהגדרה של מסלול בגרף מופיעה דרישה שקשת לא יכולה להופיע במסלול יותר מפעם אחת. נשמיט את הדרישה הזו, כלומר נאפשר לקשת להופיע יותר מפעם אחת. נשאיר את שאר הדרישות. למושג שמתקבל מההגדרה החדשה נקרא ״מסלול מוכלל״.

הוכיחו שבכל גרף קשיר (לא חייב להיות פשוט) יש מסלול מוכלל המסתיים באותו צומת שבו התחיל, וכל קשת מופיעה בו בדיוק פעמיים.

**שאלה 2** (20 נקודות)

$G$ הוא עץ בעל 60 צמתים, מתוכם בדיוק 10 צמתים בעלי דרגה 3.

אין ב- $G$ צמתים בעלי דרגה גדולה מ- 3.

כמה עלים יש ל- $G$? פתרו **בשתי** דרכים שונות, כמפורט להלן:

א. מצאו את מספר העלים על-ידי התבוננות בצורתה של סדרת פרוּפֶר של $G$ .

ב. מצאו את מספר העלים ללא שימוש בסדרת פרוּפֶר.

פתרון על-ידי מתן דוגמא של עץ מסוים (או סדרת פרופר מסוימת) לא יתקבל:

נדרשת הוכחה כללית, לכל $G$ המקיים את התנאים.

**שאלה 3** (20 נקודות)

בגרף הדו-צדדי המלא $K_{6,6}$ קיימות $6!$ דרכים שונות ליצור זיווג מושלם.

א. נזרוק מהגרף $K_{6,6}$ קשת אחת (הצמתים שבקצות הקשת נשארים בגרף).

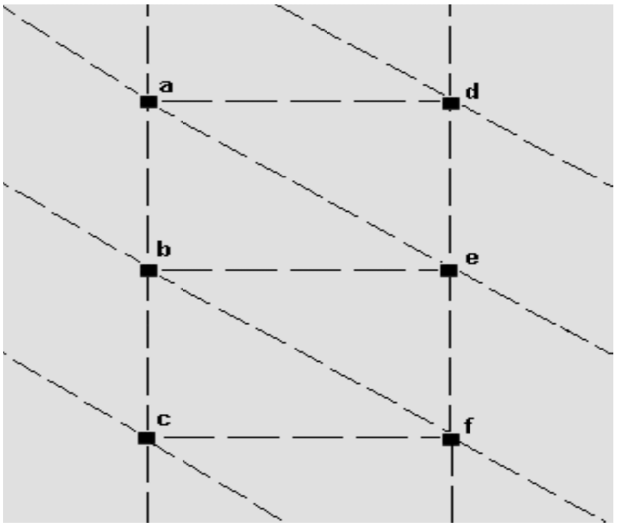
כמה זיווגים מושלמים ניתן להגדיר בגרף שהתקבל? הוכיחו.

ב. מהגרף שהתקבל בסעיף א נזרוק עוד קשת. כמה זיווגים מושלמים ניתן להגדיר בגרף שנקבל? הוכיחו. שימו לב שייתכן שלקשת שזרקנו כעת יש צומת משותפת עם הקשת שזרקנו בסעיף א, וייתכן שלא. התייחסו לשני המקרים.

**שאלה 4** (14 נקודות)

$G$ הוא גרף מישורי פשוט על 11 צמתים. הוכיחו שהגרף המשלים שלו, $\overline{G}$, אינו מישורי.
(גרף משלים הוגדר ב"תורת הגרפים" הגדרה 1.4).

**שאלה 5** (36 נקודות)




בתרשים: גרף על 6 צמתים **a-f** .
קשתות הגרף הן הקוים המקווקווים.
הרקע האפור הוא משטח שמתנהג כמו משחקי מחשב מסוימים: כל מה שיוצא מצד ימין של המשטח חוזר ונכנס מצד שמאל, בדיוק באותו גובה בו יצא, וכל מה שיוצא מתחתית המשטח חוזר ומופיע בראש המשטח, בדיוק מעל המקום בו יצא. משטח כזה נקרא במתמטיקה **טורוס** (**Torus**) .
דוגמאות: (i) צומת **a** מחובר בקשת לצומת **c**: הקשת יוצאת מ- **a** כלפי מעלה, נכנסת שוב מתחתית המשטח ומגיעה ל- **c.**
(ii) הקשת שיוצאת מ- **d** באלכסון כלפי מטה וימינה מגיעה לצומת **b** .

א. (i) מהו המספר הקטן ביותר של צבעים הנדרש כדי לצבוע גרף זה? הוכיחו.
(ii) האם גרף זה הוא מישורי? הוכיחו **בלי להסתמך** על מסקנה 5.4 או 5.5 בחוברת הלימוד.
(iii) כמה קשתות יש בגרף?

ב. נסלק מהגרף את הצומת **f** ואת כל הקשתות הסמוכות לו.
ענו שוב על שלוש השאלות שבסעיף א', עבור הגרף המתקבל.

ג. מהגרף שקיבלנו בסעיף ב' נסלק את הקשת **ae** .
ענו שוב על שלוש השאלות שבסעיף א', עבור הגרף המתקבל.

שימו לב שבגרף שבתרשים אין "קשתות מצטלבות" (הגדרה 5.1 בפרק 5), כלומר אין חיתוכים בין קשתות בנקודה שאינה צומת, אבל זה לא אומר שהגרף מישורי, כי יציאה של קשת מצד אחד של המשטח וכניסה שלה חזרה מהצד השני היא כמובן שינוי של כללי המשחק. גרף מישורי ניתן לשרטט במישור ללא קשתות מצטלבות, על הגרף שבתרשים אפשר לומר שהוא "טורוסי", כלומר ניתן לשרטט אותו ללא קשתות מצטלבות על משטח טורוס. כל גרף מישורי הוא "טורוסי", אבל על טורוס אפשר לשרטט גרפים שלא ניתן לשרטט במישור, ראו למשל
http://www.amotlpaa.org/math/k7torus.html