

קורס: 20416 "תורת ההסתברות"

תאריך הבחינה: 20.6.2013 (סמסטר ב' 2013 - מועד א' / 81)

חומר העזר המותר: ספר הקורס ומחשבון מדעי בלבד.

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפת: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית.

שאלה 1 (25 נקודות)

- (12 נק') א. צלף יורה n יריות לעבר מטרה. אין תלות בין תוצאות היריות. ההסתברות לפגוע בהצלחה במטרה (בכל ירייה) היא p ($0 < p < 1$). (אם הצלף אינו פוגע בהצלחה במטרה, הירייה נחשבת כהחטאה).
- יהי X ההפרש בין מספר הפגיעות המוצלחות של הצלף לבין מספר ההחטאות שלו.
1. מהי פונקציית ההסתברות של X ?
 2. מהי השונות של X ?
- (13 נק') ב. שני צלפים יורים לעבר מטרה, שההסתברות לפגוע בה בהצלחה בכל ירייה היא 0.5. (כאשר צלף לא פוגע בהצלחה במטרה, הירייה נחשבת כהחטאה).
- כל צלף יורה עד שהוא פוגע לראשונה במטרה.
- נניח כי אין תלות בין תוצאות היריות של כל צלף (בנפרד), וכי אין תלות בין תוצאות היריות של הצלפים השונים.
- יהיו X_1 מספר היריות של צלף 1 ו- X_2 מספר היריות של צלף 2, ויהי $Y = X_1 - X_2$.
- הראה כי: $P\{Y = i\} = \frac{0.5^{|i|}}{3}$, $i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
- המלצה:** ערוך חישובים נפרדים למקרה שבו i אי-שלילי ולמקרה שבו i שלילי.

שאלה 2 (25 נקודות)

- מבצעים ניסוי בעל שני שלבים עם מטבע שההסתברות לקבל בו H היא $\frac{2}{3}$.
- שלב I:** מטילים את המטבע הנתון עד שמתקבל בו ה- H הראשון.
- נסמן ב- X מספר ההטלות שנעשות **בשלב I** (כלומר, עד לקבלת ה- H הראשון).
- שלב II:** מטילים שוב את המטבע הנתון עד שמקבלים בסך-הכל X פעמים H (לאו דווקא ברציפות). (שימו לב, שמספר ה- H שיש לקבל בשלב זה תלוי בתוצאת שלב I).
- נסמן ב- Y את מספר ההטלות **בשלב II בלבד** (כלומר, עד לקבלת X פעמים H).
- 7 (נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .
רשום אותה באופן מדויק: ערכים אפשריים והסתברויות.
 - 6 (נק') ב. האם המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-תלויים? נמק את תשובתך.
 - 6 (נק') ג. חשב את $P\{X = Y\}$.
 - 6 (נק') ד. מצא את פונקציית ההסתברות השולית של Y ;
וזהה את התפלגות Y .

שאלה 3 (25 נקודות)

אדם נכנס לבנק עם פתיחתו, ומייד מתחיל לקבל שירות מפקיד יחיד שמשרת את הלקוחות.

לקוח שני נכנס לבנק T דקות לאחר פתיחת הבנק.

אם הפקיד פנוי – הלקוח השני מייד ניגש אליו;

אם הפקיד עדיין משרת את הלקוח הראשון – הלקוח השני מחכה לתורו.

למשתנה המקרי T יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר μ .

משך זמן השירות (בדקות) של כל לקוח אצל הפקיד, הוא משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ .

הפקיד משרת את הלקוחות בזה אחר זה, לפי סדר כניסתם לבנק.

יהיו: $S_1 =$ משך זמן השירות של הלקוח הראשון;

$S_2 =$ משך זמן השירות של הלקוח השני.

נניח כי המשתנים המקריים T , S_1 ו- S_2 בלתי-תלויים.

(8 נק') א. מהי ההסתברות שהלקוח השני יקבל שירות מהפקיד **מייד** עם היכנסו לבנק?

(9 נק') ב. חשב את $\rho(S_1, T - S_1)$.

(8 נק') ג. הפקיד יוצא להפסקה לאחר שהוא מסיים את מתן השירות ללקוח השני.

מהי תוחלת הזמן שיעבור ממועד פתיחת הבנק ועד ליציאתו להפסקה?

שאלה 4 (25 נקודות)

למשקל (בק"ג) של דלעת מסוג מסוים יש התפלגות נורמלית עם הפרמטרים μ ו- σ^2 .

ידוע שההסתברות שדלעת מקרית מסוג זה תשקול פחות מ- 5.7 ק"ג היא 0.1587;

וההסתברות שתשקול יותר מ- 8.0946 ק"ג היא 0.2.

(6 נק') א. מצא את הערכים של μ ושל σ^2 .

ב. בוחרים 10 דלעות מקריות, שאין תלות בין משקליהן.

(6 נק') 1. מהי ההסתברות שבדיוק 7 מהן תשקולנה פחות מ- 8 ק"ג?

(6 נק') 2. מהי ההסתברות שמשקלן הכולל של 10 הדלעות יעלה על 75 ק"ג?

(7 נק') 3. מחיר של דלעת נקבע לפי משקלה: דלעת ששוקלת עד 5 ק"ג עולה 20 ₪;

דלעת ששוקלת בין 5 ק"ג לבין 8 ק"ג עולה 30 ₪;

ודלעת ששוקלת יותר מ- 8 ק"ג עולה 40 ₪.

נסמן ב- S את המחיר הכולל של 10 הדלעות.

מצא **חסם עליון להסתברות** שהמחיר הכולל של 10 הדלעות יסטה מתוחלתו (בערך

מוחלט) לפחות ב- 32 ₪.

שאלה 5 (25 נקודות)

מטילים שתי קוביות תקינות.

יהיו: X = תוצאת ההטלה בקובייה הראשונה;

Y = תוצאת ההטלה בקובייה השנייה.

(8 נק') א. נגדיר שני מאורעות כדלקמן: $A = \{X < Y\}$ ו- $B = \{|X - Y| \leq 2\}$.

חשב את $P(A)$ ואת $P(B)$.

(9 נק') ב. חשב את $E[X|A]$.

(8 נק') ג. חשב את $E[|X - Y| | B]$.

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326