מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"

מספר השאלות: 14 | **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2012א | **מועד אחרון להגשה:** יום א' 30.10.2011

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות. סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה,

ב - אם רק טענה 2 נכונה,

ג - אם שתי הטענות נכונות,

ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

1. הביטוי המתמטי $2+(7\cdot 3^4/18)$ הוא פסוק.
2. האמירה משה הכה בסלע ויצאו ממנו מים היא פסוק.

שאלה 2

1. **שלילת** הפסוק דינה ויוסי הם הסטודנטים בעלי הציונים הגבוהים ביותר בקורס.
   היא הפסוק דינה ויוסי הם הסטודנטים בעלי הציונים הנמוכים ביותר בקורס.
2. **שלילת** הפסוק שם המשפחה של דינה מתחיל באות א' ושם המשפחה של יוסי מתחיל גם הוא באות א'.
   היא הפסוק שמות המשפחה של דינה ושל יוסי לא מתחילים באות א'.

שאלה 3

1. הפסוק $1+1=2$ **וגם** $1+1=2$ הוא אמת.
2. הפסוק $1+1=2$ **או** $1+1>2$ הוא אמת.

שאלה 4

1. הפסוק **אם** $9 = 5 + 2$ **אז** $100 = 2$ הוא אמת.
2. הפסוק **אם** $9 = 5 + 2$ **אז** $1 + 1 = 2$ הוא אמת.

שאלה 5

1. לוח האמת של הפסוק הפורמלי $(p \to q) \vee (p \to r)$ הוא:

p	q	r	$(p \vee q) \to (r \to p)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**T**

2. הפסוק הפורמלי $(\neg p) \to p$ הוא סתירה.

שאלה 6

1. הפסוק הפורמלי $p \to (\neg q)$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $q \to (\neg p)$.
2. הפסוק הפורמלי $\neg(p \to q)$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $(\neg p) \to (\neg q)$.

שאלה 7

1. $\neg((p \wedge q) \vee r)$ שקול טאוטולוגית ל- $((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$.
2. $p \wedge \neg(p \wedge q)$ שקול טאוטולוגית ל- $q \wedge \neg(q \wedge p)$.

שאלה 8

1. **שלילת** הפסוק **רצתי ונפלתי** שקולה לפסוק **לא רצתי או לא נפלתי**.
2. **שלילת** הפסוק **רצחתָ וגם ירשתָ** שקולה לפסוק **לא רצחתָ ולא ירשתָ**

שאלה 9

1. מתוך הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge \neg r$ נובע טאוטולוגית הפסוק $\neg p$.

2. מתוך הפסוק $(\neg p) \wedge (\neg q)$ נובע טאוטולוגית הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge \neg r$.

שאלה 10

1. אם מ- α נובע β אז $\alpha \vee \neg\beta$ הוא טאוטולוגיה.

2. אם מ- $\alpha \wedge \beta$ נובעת סתירה אז מ- β נובע $\neg\alpha$.

שאלה 11

נתבונן בפסוק: **כל מספר הגדול מ- 1, הריבוע שלו גדול ממנו.**

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x \left(x > 1 \ \wedge \ x^2 > x \right)$.

2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\left(\forall x \ (x > 1)\right) \ \wedge \ x^2 > x$.

שאלה 12

נתבונן שוב בפסוק: **כל מספר הגדול מ- 1, הריבוע שלו גדול ממנו.**

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x \left(x > 1 \ \to \ x^2 > x \right)$.

2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\left(\forall x \ (x > 1)\right) \ \to \ \forall x (x^2 > x)$

שאלה 13

1. את **שלילת** הפסוק **לכל x שנבחר, קיים y הגדול מ- x**
ניתן לנסח כך: **לכל x שנבחר, אין y הגדול מ- x .**

2. את **שלילת** הפסוק **יש מספר x, שאף מספר y אינו קטן ממנו**
ניתן לנסח כך: **לכל מספר x, יש מספר y שקטן ממנו**

שאלה 14

1. את **שלילת** הפסוק **כל קרנף אינו עף**
ניתן לנסח כך: **כל קרנף עף.**

2. את **שלילת** הפסוק **קיים יצור עף שאינו קרנף**
ניתן לנסח כך: **כל יצור עף הוא קרנף.**

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 1

מספר השאלות: 4

משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2012א

מועד אחרון להגשה: יום א' 6.11.2011

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (24 נקי)

שאלה זו נועדת לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות ולחדד כמה נקודות שכדאי להבין בשלב מוקדם:

* ההבדל בין A לבין $\{A\}$ (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא A).
  * מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה $\varnothing$ לבין $\{\varnothing\}$.
* ההבדל בין "x איבר של y" לבין "x חלקי ל- y".

תהיינה: $X = \{1,2\}$, $Y = \{X, \{3\}\}$, $Z = \{X\}$.

לכל אחת מהטענות הבאות קבע אם היא נכונה.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $X \in Y$ ב. $Z \in Y$ ג. $X \subseteq Y$

ד. $Z \subseteq Y$ ה. $\varnothing \in Z$ ו. $|Y| = 2$

ז. $P(X) \subseteq P(Y)$ ח. $\{\varnothing\} \subseteq P(X)$

שאלה 2 (28 נקי)

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. כדי להפריך טענה - הבא דוגמא נגדית.

לטענות הנכונות - תן הוכחה מסודרת המסתמכת בכל צעד על טענות והגדרות בספר .

א. $(A - B) \cup B = A$

ב. $(A \cup B) - B = A$

ג. $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

ד. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

שאלה 3 (23 נק׳)

הוכח את הטענות הבאות בעזרת **״אלגברה של קבוצות״**: צא מאחד האגפים, פתח אותו בעזרת זהויות ידועות, והגע לאגף השני. אין להשתמש בהוכחה במושג ״איבר״. במקומות בהם מופיע הפרש קבוצות מומלץ להיעזר בזהות $A-B=A\cap B'$ (עמ׳ 23 בספר הלימוד). **ציין באופן ברור בכל צעד את הזהויות עליהן אתה מסתמך**. הסימן $\oplus$ מוגדר בעמ׳ 27 בספר.

(7 נק׳) א. $(A\cap B)\cup(A\cap B')=A$

(8 נק׳) ב. $A\oplus B=A'\oplus B'$.

(8 נק׳) ג. $(A\oplus B)\oplus(B\oplus C)=A\oplus C$.

שאלה 4 (25 נק׳)

איחוד של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בהגדרה 1.6 בעמוד 12 בספר.

במלים פשוטות ההגדרה היא: $x\in\bigcup_{i\in I}A_i$ אםם x שייך **לפחות** לאחת הקבוצות A_i,

כאשר i מקבל ערכים ב- I.

חיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בעמוד 16 בספר.

במלים פשוטות ההגדרה היא: $x\in\bigcap_{i\in I}A_i$ אםם x שייך **לכל** הקבוצות A_i,

כאשר i מקבל ערכים ב- I.

השאלה שלפניך מתרגלת את השימוש בשני מושגים האלה.

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים (כולל 0), $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

לכל $n\in\mathbf{N}$, תהי $A_n=\{x\in\mathbf{R}\mid 4\le x\le 2n+2\}$, ותהי $B_n=A_{n+1}-A_n$.

א. חשב את A_0, A_1, A_2, A_3 ואת B_0, B_1, B_2.

ב. הוכח: אם $n\le m$ אז $A_n\cap A_m=A_n$.

ג. חשב את $\bigcap_{2\le n\in\mathbf{N}}A_n$

ד. חשב את $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}A_n$

ה. חשב את $\bigcup_{2\le n\in\mathbf{N}}B_n$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרק 2

מספר השאלות: 11 **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2012א **מועד אחרון להגשה:** יום א' 13.11.2011

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

"רלציה" בעברית: יחס.

שאלה 1

השוויון $(A \cup B) \times (A \cup B) = (A \times A) \cup (B \times B)$

א. נכון לכל A,B.

ב. לעולם אינו נכון – אין קבוצות המקיימות זאת.

ג. נכון **רק אם** לפחות אחת מהקבוצות A,B היא הקבוצה הריקה.

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 2

תהי $A = \{1,2,3,4\}$ ויהי R היחס הבא מ- A ל- A: $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1),(4,3)\}$.

$Domain(R) \cap Range(R)$ הוא:

א. $\{1\}$ ב. $\{1,2\}$ ג. $\{1,2,3\}$ ד. A

שאלה 3

A, R הם אלה שהוגדרו בשאלה 2. S הוא יחס מעל A המקיים $RS = R$. מכאן נובע:

א. $S = \varnothing$ ב. $S = I_A$ ג. $S = R$

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 4

R,A הם אלה שהוגדרו בשאלה 2. טענה (*i*): $RR^{-1} = I_A$. טענה (*ii*): $R^{-1}R = I_A$.

א. רק טענה (*i*) נכונה. ב. רק טענה (*ii*) נכונה.

ג. שתי הטענות (*i*), (*ii*) נכונות. ד. אף אחת מהטענות (*i*), (*ii*) אינה נכונה.

שאלה 5

A, R הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

א. $R = R^2$.

ב. $R \neq R^2$ אבל $R^2 = R^3$.

ג. $R^2 \neq R^3$ אבל $R^3 = R^4$.

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 6

A, R הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

טענה ***(i)*** : R^2 הוא רפלקסיבי. טענה ***(ii)*** : R^2 הוא סימטרי.

א. רק טענה ***(i)*** נכונה.

ב. רק טענה ***(ii)*** נכונה.

ג. שתי הטענות ***(i)*** , ***(ii)*** נכונות.

ד. אף אחת מהטענות ***(i)***, ***(ii)*** אינה נכונה.

שאלה 7

A, R הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

טענה ***(i)*** : R^2 הוא אנטי-סימטרי. טענה ***(ii)*** : R^2 הוא טרנזיטיבי.

א. רק טענה ***(i)*** נכונה.

ב. רק טענה ***(ii)*** נכונה.

ג. שתי הטענות ***(i)*** , ***(ii)*** נכונות.

ד. אף אחת מהטענות ***(i)***, ***(ii)*** אינה נכונה.

שאלה 8

היחס הריק מעל $A = \{1,2,3\}$ הוא:

א. רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

ב. סימטרי וטרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי.

ג. רפלקסיבי וטרנזיטיבי אך לא סימטרי.

ד. סימטרי ורפלקסיבי אך לא טרנזיטיבי.

ה. טרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי ולא סימטרי.

שאלה 9

R,S הם יחסים מעל קבוצה A ומתקיים $R \subseteq S$.

טענה ***(i)*** : אם S סימטרי אז R סימטרי. טענה ***(ii)*** : אם S אנטי-סימטרי אז R אנטי-סימטרי

א. רק טענה ***(i)*** נכונה.

ב. רק טענה ***(ii)*** נכונה.

ג. שתי הטענות ***(i)*** , ***(ii)*** נכונות.

ד. אף אחת מהטענות ***(i)***, ***(ii)*** אינה נכונה.

שאלה 10

R הוא יחס טרנזיטיבי מעל קבוצת הטבעיים **N**. ידוע ש- R אינו ריק. מכאן ניתן להסיק:

א. ב- R יש אינסוף זוגות סדורים.

ב. ב- R יש לפחות 3 זוגות סדורים.

ג. $R^2 = R$.

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 11

R הוא יחס מעל קבוצת הטבעיים **N**, וידוע ש- R **אינו** טרנזיטיבי.

S הוא הסגור הטרנזיטיבי של R. מכאן ניתן להסיק:

א. ב- S יש אינסוף זוגות סדורים.

ב. ב- S יש לפחות 3 זוגות סדורים.

ג. $S = R \cup R^2$.

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה**: "תורת הקבוצות" פרקים 2-3

מספר השאלות: 11 **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2012א **מועד אחרון להגשה:** יום א' 20.11.2011

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

"רלציה" בעברית: יחס.

שאלה 1

יהיו: $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $R=\{(1,2),(1,3),(2,3),(4,5)\}$, $E=I_A\cup R\cup R^{-1}$.

החלוקה שיחס השקילות E משרה ב- A היא:

א. $\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$

ב. $\{\{1,2,3,4,5\},\{6,7\}\}$

ג. $\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6\},\{7\}\}$

ד. $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{4,5\},\{6\},\{7\}\}$

ה. E אינו יחס שקילות מעל A ולכן אינו משרה חלוקה של A.

שאלה 2

נגדיר יחס S מעל קבוצת הממשיים השונים מאפס: $(x,y)\in S$ אסם $x\cdot y>0$.

מספר מחלקות השקילות ש- S משרה בקבוצת הממשיים השונים מאפס הוא:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. יש אינסוף מחלקות שקילות.

ה. S אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

שאלה 3

נגדיר יחס K מעל קבוצת הממשיים השונים מאפס: $(x,y)\in K$ אסם $x\cdot y<0$.

מספר מחלקות השקילות ש- K משרה בקבוצת הממשיים השונים מאפס הוא:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. יש אינסוף מחלקות שקילות.

ה. K אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

שאלה 4

מספר יחסי השקילות השונים מעל הקבוצה $\{1,2,3,4\}$ הוא:

א. 1 ב. 4 ג. 5 ד. 7 ה. 8

שאלה 5

R היא קבוצת המספרים הממשיים. נגדיר פונקציה f מ- **R** ל- **R**: $f(x) = x^4 + x^2 - 3$.

f היא:

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- **R** ל- **R** .

שאלה 6

נסמן $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$. תהי $g(x) = \dfrac{1+2x}{1+x}$, $g: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$.

g היא:

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbf{R}^+$ ל- $\mathbf{R}^+$.

שאלה 7

תהי $f(X) = X \cap \mathbf{N}$, $f: P(\mathbf{R}) \to P(\mathbf{N})$.

f היא:

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $P(\mathbf{R})$ ל- $P(\mathbf{N})$.

שאלה 8

תהי $U = \{1,2,3,4,5\}$ ותהיינה $A, B \subseteq U$.

בעמ' 85 בכרך "תורת הקבוצות" מוגדרת φ_A, **הפונקציה האופיינית** של A ב- U .

נניח שלכל $x \in U$ מתקיים $\varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x) = 0$. מכאן נובע:

א. A,B זרות זו לזו, כלומר $A \cap B = \varnothing$.

ב. $A' = B$, כלומר המשלים של A בתוך U הוא B.

ג. לפחות אחת מבין A,B היא הקבוצה הריקה.

ד. $A \oplus B = \varnothing$

שאלה 9

נסמן $A = \mathbf{N} - \{0\}$. נגדיר, לכל $a,b \in A$:

$(a,b) \in D$ **אםם (אם ורק אם)** b מתחלק ב- a ללא שארית. היחס D הוא:

א. סדר-חלקי מעל A ואינו סדר-מלא מעל A .

ב. סדר-חלקי מעל A, שהוא גם סדר-מלא מעל A .

ג. סדר-חלקי מעל A, שהוא גם יחס שקילות מעל A .

ד. אינו יחס מעל A.

שאלה 10

R הוא סדר-חלקי על קבוצה כלשהי A.

a,b הם שני אברים שונים של A, ושניהם אברים מקסימליים לגבי R . מכאן נובע:

א. R הוא סדר מלא מעל A .

ב. R אינו סדר מלא מעל A.

ג. $|A| = 2$.

ד. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

שאלה 11

R הוא סדר-חלקי על קבוצה כלשהי A.

a,b הם שני אברים שונים של A, ושניהם אברים גדולים ביותר לגבי R . מכאן נובע:

א. R הוא סדר מלא מעל A .

ב. R אינו סדר מלא מעל A.

ג. $|A| = 2$.

ד. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 2- 3

מספר השאלות: 4

משקל המטלה: 4 נקודות

סמסטר: 2012א

מועד אחרון להגשה: יום א' 27.11.2011

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (21 נק')

א. תנו דוגמא ליחס R שהוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל $A = \{1,2,3\}$,
אך **הסגור הסימטרי** שלו **אינו** יחס שקילות מעל A.
הראו שהדוגמא שנתתם מקיימת את הנדרש.

ב. הוכיחו: אם R הוא יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל A **כלשהי**
אז $R \cap R^{-1}$ הוא יחס שקילות מעל A. **נמקו בפירוט** כל צעד בהוכחה.

ג. תנו דוגמא ליחס R מעל $A = \{1,2,3\}$ כך ש- $R \cup R^2$ **אינו** טרנזיטיבי .

שאלה 2 (30 נק')

הגדרה: מספר טבעי חיובי נקרא **ראשוני** (prime) אם הוא שונה מ- 1, ומתחלק ללא שארית רק בעצמו וב- 1. כבר ליוונים היה ידוע שקבוצת המספרים הראשוניים היא אינסופית.
שימו לב ש- 1 אינו נחשב ראשוני. קבוצת הראשוניים "מתחילה" כך: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...
משפט ידוע קובע שכל מספר טבעי הגדול מ- 1 ניתן להצגה כמכפלה של מספרים ראשוניים, ויש רק דרך אחת להציג אותו כך, עד כדי החלפת סדר הגורמים במכפלה (מה היה מתקלקל במשפט זה אילו 1 היה נחשב ראשוני ?).

נסמן $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\}$. תהי $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ הפונקציה המתאימה לכל טבעי n הגדול מאפס את **מספר** המספרים הטבעיים החיוביים (לאו דווקא ראשוניים!) שבהם n מתחלק ללא שארית.
למשל 12 מתחלק ב- 6 מספרים שונים: $1,2,3,4,6,12$ ולכן $f(12) = 6$.
1 מתחלק רק בעצמו ולכן $f(1) = 1$.

א. האם f היא חד-חד-ערכית?

ב. האם f היא **על** $\mathbf{N}^*$? הדרכה: יהי p מספר ראשוני. הסתכלו בחזקות של p .

(המשך השאלה בעמ' הבא)

(המשך שאלה 2)

הפונקציה f מחלקת את $\mathbf{N}^*$ למחלקות שקילות, בעזרת התנאי: n,m שייכים לאותה מחלקה אסם $f(n)=f(m)$. ראו הסעיף "העתק טבעי" בעמ' 84 בספר, וראו הסבר מפורט יותר באתר הקורס, מאגר המשאבים, עזרים ללמידה - "יחס שקילות המושרה על-ידי פונקציה".
המשך השאלה מתייחס לחלוקה זו.

ג. מיהם כל המספרים הנמצאים באותה מחלקה עם המספר 5 ?

ד. מיהם כל המספרים הנמצאים באותה מחלקה עם המספר 4 ?

ה. האם מספר מחלקות השקילות ש- f משרה ב- $\mathbf{N}^*$ הוא סופי או אינסופי ?

ו. הוכיחו שפרט למחלקה שבה נמצא 1 , כל אחת ממחלקות השקילות מכילה אינסוף איברים.
יש לנמק כל תשובה.

שאלה 3 (32 נקודות)

תהי F קבוצת כל הפונקציות של $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$. נגדיר יחס K מעל F :

עבור $f,g \in F$: $(f,g)\in K$ אסם <u>**לכל**</u> $n\in\mathbf{N}$, $f(n)\le g(n)$.

(6 נק') א. הוכח ש- K הוא סדר-חלקי מעל F.

(4 נק') ב. הוכח ש- K **אינו** סדר-מלא מעל F .

(6 נק') ג. האם יש ב- F איברים מקסימליים לגבי היחס K ?
האם יש איבר גדול ביותר? הוכח.

(6 נק') ד. האם יש ב- F איברים מינימליים לגבי היחס K ?
האם יש איבר קטן ביותר? הוכח.

(10 נק') ה. הוכח שלכל $f\in F$ קיים $g\in F$ **שמכסֶה** את f (הגדרה 3.6 בעמ' 88 בספר) .
הוכח שלכל $f\in F$ קיים יותר מ- g אחד כזה .

שאלה 4 (17 נקודות)

הפונקציה $f:\mathbf{N}\to\mathbf{Z}$ מוגדרת ברקורסיה כך:

$f(0)=10$, $f(1)=29$, ולכל $1\le n$: $f(n+1) = 7f(n)-10f(n-1)$

הוכח באינדוקציה (ולא בדרך אחרת): $f(n) = 3\cdot 5^n + 7\cdot 2^n$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרקים 4-5

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 3** נקודות

סמסטר: 2012א | **מועד אחרון להגשה**: יום א' 11.12.2011

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

חלק מהממ"ן מסתמך על החוברת "פרק 5" שנמצאת בידיכם.

חוברת זו משלימה את פרק 4 בתורת הקבוצות ומחליפה חלק ממנו.

שאלה 1 (24 נקודות)

א. הוכח שאם $|A-B|=|B-A|$ אז $|A|=|B|$.

הדרכה: לא נתון שהקבוצות סופיות, לכן יש לעבוד לפי הגדרת שוויון עוצמות:
מהנתון נובע שקיימת פונקציה חח"ע ועל מסוימת, ועלינו להראות שמכך נובע שקיימת פונקציה חח"ע ועל אחרת...

ב. הראה שאם A,B **סופיות** ו- $|A|=|B|$ אז $|A-B|=|B-A|$.

ג. הראה ע"י דוגמא שטענת סעיף ב אינה נכונה בהכרח עבור A,B שאינן סופיות.

שאלה 2 (24 נקודות)

א. תהי K קבוצת כל תת-הקבוצות **הסופיות** של $\mathbf{N}$: $K=\{A\in P(\mathbf{N}) \mid \text{היא קבוצה סופית } A\}$.

הוכח ש- K היא בת-מניה. אפשר להיעזר בחוברת "אוסף תרגילים פתורים" עמ' 8 שאלה 10ה, אבל שימו לב ששם מדובר על סדרות וכאן על קבוצות, לכן יש עוד מה להוכיח. דרך אפשרית היא להתאים לכל קבוצה - סדרה.

ב. בהינתן $A\in P(\mathbf{N})$, נאמר ש- A **קו-סופית** (*co-finite*) ב- $\mathbf{N}$,

אם A' (המשלימה של A ב- $\mathbf{N}$) היא קבוצה סופית.

מובן שאם A קו-סופית ב- $\mathbf{N}$ אז A אינסופית (מדוע?),

אבל לא כל קבוצה אינסופית של טבעיים היא קו-סופית ב- $\mathbf{N}$ (למשל?).

תהי L קבוצת כל התת-קבוצות הקו-סופיות ב- $\mathbf{N}$: $L=\{A\in P(\mathbf{N}) \mid \mathbf{N}\text{ קו-סופית ב- } A\}$.

הוכח ש- L היא בת-מניה.

שאלה 3 (24 נקודות)

א. תהי M קבוצת כל התת-קבוצות של $\mathbf{N}$ אשר הן ומשלימותיהן **אינסופיות**:

$M = \{A \in P(\mathbf{N}) \mid$ שתיהן אינסופיות A' -ו $A\}$.

הוכיחי ש- M **אינה** בת-מניה. עליך להוכיח זאת בעזרת סעיף 4.1.1 בספר ובעזרת העובדה ש- $P(\mathbf{N})$ אינה בת-מנייה. אין להסתמך על טענות אחרות מפרק 5. כדאי להיעזר בשאלה 2 כאן.

ב. מצאי בעזרת פרק 5 את עוצמת M. שימוש במשפט מתאים ייתן הוכחה קצרה מאד.

שאלה 4 (28 נקודות)

(12 נקי) א. יהיו k_1, k_2, m_1, m_2 עוצמות.

הוכח שאם $k_1 \le k_2$ -ו $m_1 \le m_2$ אז $k_1 \cdot m_1 \le k_2 \cdot m_2$.

(8 נקי) ב. הוכח: $\aleph_0 \cdot C = C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם).

(8 נקי) ג. הוכח: $C^C = 2^C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם ובמשפטים שבחוברת).

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה
חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 1-2
מספר השאלות: 11
משקל המטלה: 3 נקודות
סמסטר: 2012א
מועד אחרון להגשה: יום ו' 30.12.2011

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בשאלות 1 – 4 A,B הן קבוצות סופיות, $|A|=6$, $|B|=3$.

שאלה 1

מספר הפונקציות של B ל- A הוא:

א. 18 ב. 20 ג. 120 ד. 216 ה. 729

שאלה 2

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של B ל- A הוא:

א. 6 ב. 20 ג. 120 ד. 216 ה. 729

שאלה 3

מספר היחסים הרפלקסיביים מעל A הוא:

א. 6 ב. 36 ג. 64 ד. 6^6 ה. 2^{30}

שאלה 4

מספר יחסי הסדר המלא מעל A הוא:

א. 6 ב. 36 ג. 64 ד. 120 ה. 720

שאלות 5- 8 עוסקות בדרכים שונות לסדר את המחרוזת 1223334444 (להלן: "המחרוזת").

שאלה 5

מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת הוא:

א. 10 ב. $1!+2!+3!+4!$ ג. $10!$ ד. $\frac{10!}{2!3!4!}$

ה. $10!-(1!+2!+3!+4!)$

שאלה 6

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת כאשר הספרות 22 חייבות להיות צמודות זו לזו?

א. 25 ב. 252 ג. 2520 ד. 12,520 ה. 125,200

שאלה 7

בנוסף לדרישה שבשאלה 6, נדרוש גם **שלא** יופיע הרצף 333.

מספר הסידורים האפשריים כעת קטן ממספר הסידורים שמצאתם בשאלה 6. **בכמה הוא קטן?**

א. 10 ב. 210 ג. 2100 ד. 12,100 ה. 122,100

שאלות 8 – 10 עוסקות בארבע משפחות שיצאו יחד למנגל והכינו 9 סטֵייקים **זהים** ו- 12 שיפודים **זהים**. המשפחות **אינן** נחשבות זהות. כמו כן, סטייק **אינו** זהה לשיפוד.

שאלה 8

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לחלק את 12 השיפודים בין המשפחות?

יש לחלק את כל השיפודים. ייתכן שמשפחה לא רוצה שיפודים כלל.

א. $D(4,12)=\binom{15}{11}$ ב. $D(4,12)=\binom{15}{3}$ ג. 4^{12} ד. $\binom{12}{4}$ ה. $D(12,4)$

שאלה 9

נסמן את התשובה לשאלה הקודמת ב- x. בכמה דרכים ניתן לחלק את כל האוכל בין המשפחות?

יש לחלק את כל השיפודים ואת כל הסטייקים. ייתכן שמשפחה לא רוצה אוכל כלל.

א. $x+D(4,9)$ ב. $x+D(9,4)$ ג. $x\cdot D(4,9)$ ד. $x\cdot D(9,4)$

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 10

בכמה דרכים ניתן לחלק רק את 12 השיפודים בין המשפחות, אם משפחת כהן חייבת לקבל לפחות 3 שיפודים, וכל משפחה אחרת חייבת לקבל שיפוד אחד לפחות?

א. 48 ב. 84 ג. 484 ד. 840 ה. 848

שאלה 11

מהו מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=12$?

א. 120 ב. 210 ג. 1,820 ד. 4,368 ה. 8,634

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה**: קומבינטוריקה פרקים 3-4

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

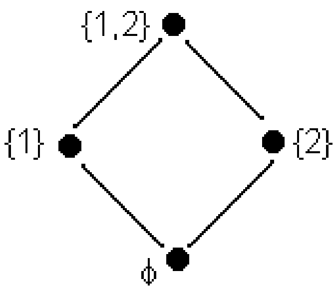
סמסטר: 2012א **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 6.1.2012

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1



באיור מופיעה דיאגרמת הסה ("תורת הקבוצות" עמ' 88) של יחס ההכלה $\subseteq$ מעל $P(\{1,2\})$.

אנו רואים כי בדיאגרמה 4 קטעים.

תהי A קבוצה בת n איברים $(n > 0)$. מצאי את מספר הקטעים בדיאגרמת הסה של יחס ההכלה מעל $P(A)$.

את הביטוי המתקבל סכמי לביטוי פשוט שאינו מכיל סכומים,
בעזרת נוסחה המופיעה באחת השאלות בספר הלימוד.

שאלה 2

דנה, תלמידה בכיתה א', קראה בספר את המשפט המעניין: **דנה קמה דנה נמה**.
אחרי שקראה בהצלחה את המשפט, עלו בדעתה של דנה כמה שאלות מעניינות לא פחות:

א. (3 נק') בכמה דרכים אפשר לסדר את כל 12 האותיות שבמשפט הזה במחרוזת אחת ללא רווחים, כגון **דנהקמהדנהנמה**.

ב. (4 נק') בכמה מהדרכים הללו מופיע בתוך המחרוזת הרצף **דמקה** ?

ג. (18 נק') מה מספר הדרכים לסדר את 12 האותיות כך **שלא** תופיע בתוך המחרוזת **אף אחת** מארבע המחרוזות הבאות: **דמקה, קהה, ממד, ננהה**.
הדרכה: הכלה והפרדה.
שימו לב לצירופי מחרוזות שלא יכולים לקרות יחד, וכאלה שכן אפשריים.

בכל הסעיפים בשאלה זו יש להגיע לתשובה סופית מספרית. כמובן יש לפרט את הדרך.

שאלה 3

המשפחות שהכינו שיפודים וסטייקים בממ"ח 04 החליטו לחלק את האוכל בדרך אחרת:
כל האוכל יחולק בין המשפחות, כאשר כל משפחה חייבת לקבל **משהו** - שיפוד או סטייק אחד לפחות. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת? הדרכה: הכלה והפרדה.
תזכורת: השיפודים זהים, הסטייקים זהים, אך שיפוד אינו זהה לסטייק.

שאלה 4

תהי A קבוצה של 100 מספרים טבעיים כלשהם.
הוכח שקיימת קבוצה חלקית לא-ריקה של A, **שסכום** איבריה מתחלק ב- 100.
הדרכה: נמספר את אברי A: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$.
נסתכל בסכומים:

$$a_1$$

$$a_1 + a_2$$

$$a_1 + a_2 + a_3$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{100}.$$

מטלת מנחה (ממ״ן) 15

הקורס: 20476 מתמטיקה דיסקרטית **חומר הלימוד למטלה**: קומבינטוריקה פרקים 6-7

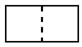
מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2012א **מועד אחרון להגשה:** יום ו׳ 13.1.2012

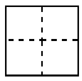
קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1

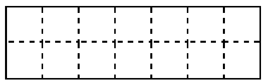
בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×1



ומספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×2



עלינו לרצף מלבן שממדיו $n \times 2$:
(בציור $n = 7$).



אסור לחרוג מגבולות המלבן. בלוק של 2×1 אפשר להניח כרצוננו ״שוכב״ או ״עומד״.
יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

(9 נק׳) א. רשום יחס נסיגה עבור a_n (הסבר אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

(10 נק׳) ב. פתור את יחס הנסיגה.

(6 נק׳) ג. חשב את a_4 בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א׳,
ומתוך הנוסחה המפורשת שקיבלת בסעיף ב׳.

שאר הממ״ן עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בסוף הממ״ן רשימה של נוסחאות שימושיות.

שאלה 2

תהי $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. נתון: $a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = -2$. שאר המקדמים אינם ידועים. תהי g פונקציה המקיימת: $f(x) \cdot g(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots$.

נסמן $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$. חשב את $b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3$.

שאלה 3

יהושע נוטל תרופות שונות: כדור נגד כאב-ראש: לכל היותר 3 ביום (אפשר 0). כדור מרץ: לכל היותר 3 ביום (אפשר 0). ויטמין C וויטמין B ללא הגבלה (אפשר 0), כל זה בכפוף לתנאי הבא, שלגביו הוא מחויב כחבר באגודת ההיפוכונדרים: מספר הכדורים הכולל, מכל 4 הסוגים יחד, שהוא לוקח כל יום יהיה בדיוק n. ערכו של n מוגדר מדי פעם בפרסומי האגודה.

נסמן ב- a_n את מספר ההרכבים השונים של n כדורים שיכול יהושע לקחת ביום אחד, כאשר אין חשיבות לסדר נטילת התרופות, ותרופות מאותו סוג הן זהות.

א. מצא את הפונקציה היוצרת עבור הסדרה $\{ a_n \}$. הסבר!

ב. מצא ביטוי מפורש עבור a_n (שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר הלימוד יכולה לסייע).

שאלה 4

דוגמא לתרגיל מסוג זה נמצאת בסוף הקובץ "מבוא לפונקציות יוצרות" שבאתר הקורס.

חשב את המקדם של x^{2m} בכל אחד מאגפי הזהות האלגברית: $\dfrac{(1-x^2)^n}{(1-x)^n} = (1+x)^n$.

קבל מכאן זהות על סכומים של מקדמים בינומיים, מהצורה: $\displaystyle\sum_{k=0}^{?} ?? = \binom{n}{2m}$.

בדוק את תשובתך עבור המקרה $n=5, m=2$ ועבור המקרה $n=5, m=3$.

הדרכה: את אגף שמאל בזהות האלגברית הנתונה רשום כמכפלה.

היעזר בנוסחאות שבתחתית העמוד.

להלן סיכום כמה נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות:

(i)! סכום טור הנדסי סופי: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ואינסופי: $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

(ii)! כפל פונקציות יוצרות:

אם $f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, ו- $f(x)\cdot g(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

אז $c_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד).

(iii)! $\dfrac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+\ldots)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} D(n,k)x^k$.

במלים אחרות: המקדם של x^k בפיתוח הביטוי $\dfrac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$.

ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה

חומר הלימוד למטלה: "תורת הגרפים" פרקים 1- 3

מספר השאלות: 10

משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2012א

מועד אחרון להגשה: יום ה' 2.2.2012

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א

בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/

הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

שאלה 1

נתאר לעצמנו גרף על 8 צמתים, שדרגותיהם : 1,2,2,3,3,3,6,7 .

א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.

ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.

ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.

ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.

ה. לא קיים גרף כזה.

שאלה 2

נתאר לעצמנו גרף על 6 צמתים, שדרגותיהם : 0,2,2,4,4,4.

א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.

ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.

ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.

ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.

ה. לא קיים גרף כזה.

שאלה 3

G הוא גרף על 50 צמתים, מתוכם 20 צמתים בעלי דרגה 3 ו- 30 צמתים בעלי דרגה 4.

מספר הקשתות ב- G הוא :

א. 49

ב. 50

ג. 90

ד. 180

ה. אין די נתונים כדי לקבוע את מספר הקשתות.

שאלה 4

G הוא גרף דו-צדדי. סכום דרגות הצמתים השייכים לצד אחד של G הוא 8 וסכום דרגות הצמתים השייכים לצד השני של G הוא 6.

א. יש גרף דו-צדדי כזה, פשוט וקשיר.

ב. יש גרף דו-צדדי כזה אבל הוא לא פשוט.

ג. יש גרף דו-צדדי כזה, אבל הוא לא קשיר.

ד. לא ייתכן גרף דו-צדדי כזה.

תזכורת:

הגרף המלא K_n הוגדר בחוברת הלימוד בסעיף הלפני-אחרון של הגדרה 1.4.

הגרף המשלים לגרף G הוגדר בסעיף האחרון של אותה הגדרה.

הגרף הדו-צדדי המלא $K_{p,q}$ הוגדר בהגדרה 1.5 .

שאלה 5

הגרף המשלים של הגרף הדו-צדדי המלא $K_{3,5}$ הוא:

א. K_8

ב. $K_{5,3}$

ג. איחוד זר של K_3 עם K_5 .

ד. גרף ריק (גרף ללא קשתות) על 8 צמתים.

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 6

G הוא **יער** על 14 צמתים, ובו בדיוק 4 רכיבי קשירות. מספר הקשתות ב- G הוא

א. 18

ב. 14

ג. 13

ד. 10

ה. לא ניתן לקבוע את מספר הקשתות מתוך הנתונים.

שאלה 7

בחוברת "תורת הגרפים" בעמ' 29, בתשובה לשאלה 7, מופיע עץ מתויג.

נוסיף לעץ הזה עלה שמספרו 9 ונחבר אותו לצומת שמספרה 5.

סדרת Prüfer של העץ החדש היא:

א. $(4,4,3,4,4,2,5)$

ב. $(5,4,4,3,4,4,2)$

ג. $(4,4,4,4,3,2,1)$

ד. $(4,4,3,5,4,4,2)$

ה. $(4,3,4,4,2,4,5)$

ו. $(4,3,4,4,4,2,1)$

שאלה 8

טענה 1:

מסלול אוילר עובר דרך כל קשת פעם אחת. הוא יכול לעבור כמה פעמים דרך אותה צומת.

טענה 2:

מסלול המילטון עובר דרך כל צומת פעם אחת. הוא יכול לעבור כמה פעמים דרך אותה קשת.

א. רק טענה 1 נכונה

ב. רק טענה 2 נכונה.

ג. שתי הטענות נכונות.

ד. אף אחת משתי הטענות אינה נכונה

שאלה 9

נתבונן ב- $K_{2,8}$. בצד שבו יש שני צמתים, נוסיף קשת בין שני הצמתים. הגרף המתקבל:

א. הוא אוילרי, ויש בו גם מסלול אוילר שאינו מעגל.

א. הוא אוילרי, וכל מסלול אוילר בו הוא מעגל.

ג. הוא אינו אוילרי, אבל יש בו מסלול אוילר שאינו מעגל.

ד. אין בו מסלול אוילר כלל.

שאלה 10

נתבונן ב- $K_{7,8}$.

א. הוא המילטוני, ויש בו גם מסלול המילטון שאינו מעגל.

א. הוא המילטוני, וכל מסלול המילטון בו הוא מעגל.

ג. הוא אינו המילטוני, אבל יש בו מסלול המילטון שאינו מעגל.

ד. אין בו מסלול המילטון כלל.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה**: תורת הגרפים – כל היחידה

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2012א **מועד אחרון להגשה:** יום ה' 9.2.2012

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות מנחה (ממ"נים):

- שליחת הממ"ן באמצעות מערכת המטלות המקוונת - כניסה דרך אתר הקורס
- שליחת הממ"ן באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגש ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

סך הנקודות בממ"ן זה הוא 111 . לא יינתן ציון מעל 100, אבל ניתן להגיע לציון 100 על-ידי פתרון חלק או כל השאלות/הסעיפים כרצונכם.

ציון המטלה מצטבר מניקוד כל התשובות שכתבתם, גם תשובות עליהן קיבלתם ניקוד חלקי.

שאלה 1 (24 נקודות)

בשאלה 1 של ממ"ן 14 עסקנו בדיאגרמת הסה של יחס ההכלה מעל $P(A)$,

כאשר A היא קבוצה בת n אברים. נראה את הדיאגרמה הזו כגרף (גרף לא מכוון):

צמתי הגרף הם הקבוצות החלקיות של A . יש אפוא 2^n צמתים.

בין שני צמתים X,Y יש קשת אם ורק אם X מכסה את Y או Y מכסה את X.

נקרא לגרף זה H_n .

בממ"ן 14 חישבנו את מספר הקשתות ב- H_n . נחשב זאת כעת מחדש, בדרך אחרת.

א. הוכיחו ש- H_n הוא רגולרי. מה הדרגה של כל צומת?

ב. חשבו את מספר הקשתות ב- H_n **בעזרת סעיף א**

(בלי להסתמך על ממ"ן 14 ולא באותה דרך שהוצגה באתר הקורס בפתרון ממ"ן 14).

ג. עבור איזה ערכי n הגרף H_n הוא אוילרי?

שאלה 2 (24 נקודות)

יהיו $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ שני עצים על אותה קבוצת צמתים V.

לכל $v\in V$ תהי $d_1(v)$ הדרגה של v ב- G_1 ותהי $d_2(v)$ הדרגה של v ב- G_2 .

הוכיחו כי קיים $v\in V$ עבורו $d_1(v)+d_2(v)\le 3$.

הדרכה: חשבו את סכום כל הדרגות בשני העצים.

שאלה 3 (21 נקודות)

יהי M זיווג בגרף G. אם **לכל** קשת שאינה ב- M, האיחוד של M עם הקשת החדשה כבר אינו זיווג, נאמר ש- M הוא **זיווג שאינו ניתן להרחבה.**

א. הראו שזיווג שאינו ניתן להרחבה **אינו** בהכרח זיווג מקסימום:
תנו דוגמא פשוטה לגרף G וזיווג M ב- G, כך ש- M אינו ניתן להרחבה אך אינו זיווג מקסימום.
הוכיחו את טענותיכם לגבי M.

ב. הציגו מסלול שיפור עבור הזיווג M שהצגתם בסעיף הקודם.

ג. יהי M זיווג מקסימום בגרף G. האם בהכרח M אינו ניתן להרחבה? הוכיחו.

שאלה 4 (18 נקודות)

G הוא גרף מישורי על 11 צמתים. הוכיחו שהגרף המשלים שלו, $\overline{G}$, אינו מישורי.

שאלה 5 (24 נקודות)

יהי G גרף פשוט, שקבוצת הצמתים שלו היא V.
נניח שצבענו את G צביעה נאותה, בצבעים הלקוחים מקבוצת צבעים A.
$\overline{G}$ הוא הגרף המשלים של G.
בלי קשר לצביעה של G, צבענו את $\overline{G}$ צביעה נאותה, בצבעים הלקוחים מקבוצת צבעים B.

א. לכל $v \in V$ נתאים **זוג סדור** של צבעים: הראשון בזוג הוא הצבע של v בצביעה של G והשני בזוג הוא הצבע של v בצביעה של $\overline{G}$.

הוכיחו שבהתאמה זו, אין שני צמתים שונים שמותאם להם אותו זוג סדור של צבעים.

נסחו אמירה זו גם כטענה על **חד-חד-ערכיות** של פונקציה (פונקציה מהיכן להיכן?)

ב. יהי $n = |V|$. מסעיף א נובעת אחת הטענות הבאות. מצאו איזו, והוכיחו אותה.

(1) $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \geq n$

(2) $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n$

(3) $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geq n$

(4) $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \leq n$

צביעה נאותה ומספר הצביעה, $\chi(G)$, הוגדרו שניהם בעמ' 59 בחוברת "תורת הגרפים".