# **פתרון בחינה לדוגמה 2 סמסטר 2018א**

## שאלה 1

למכונה המוצעת בשאלה **אין יותר כוח** מאשר למכונה רגילה.

מכונה רגילה יכולה לחקות את פעולתה של המכונה החדשה באופן הבא:

לכל מעבר מן הצורה $\delta(q, a) = (r, b, \mathrm{R}_k)$ יהיו במכונה הרגילה $k-1$ מצבים נוספים, $p_1, \ldots, p_{k-1}$.

המעברים המתאימים למעבר הזה יהיו

$$\delta(q, a) = (p_1, b, \mathrm{R})$$

לכל $\gamma \in \Gamma$ ולכל $1 \le i < k-1$, $\delta(p_i, \gamma) = (p_{i+1}, \gamma, \mathrm{R})$

לכל $\gamma \in \Gamma$, $\delta(p_{k-1}, \gamma) = (r, \gamma, \mathrm{R})$

באופן דומה אפשר לחקות מעברים מן הצורה $\delta(q, a) = (r, b, \mathrm{L}_k)$.

## שאלה 2

השפה $FIVE_{\mathrm{LBA}}$ **איננה כריעה**.

**הוכחה**: נראה רדוקציה של $A_{\mathrm{TM}}$:

נניח בשלילה שיש מכונה $R$ שמכריעה את $FIVE_{\mathrm{LBA}}$. להלן מכונה שמכריעה את $A_{\mathrm{TM}}$:

"על קלט $\langle M, w\rangle$ כאשר $M$ היא מכונת טיורינג ו-$w$ מילה:

1. בנה את ה-LBA $B_1$ הבא:

   $B_1$ זהה ל-$B$ של הוכחת משפט 5.10, למעט ההבדל הבא:

   לפני ש-$B_1$ בודק אם מתקיימים שלושת התנאים שמופיעים בתחילת עמוד 224, הוא בודק האם מילת הקלט $x$ היא אחת מהמילים #, ##, ###, ####. אם כן, הוא מקבל את המילה; אחרת, הוא ממשיך לפעול בדיוק כמו $B$.
2. הרץ את המכונה $R$ על הקלט $\langle B_1\rangle$ כדי לקבוע האם $\langle B_1\rangle$ שייכת ל-$FIVE_{\mathrm{LBA}}$.

   אם כן, קבל; אם לא, דחה."

## שאלה 3

א. "על קלט $\langle M, w\rangle$ כאשר $M$ מכונת טיורינג ו-$w$ מילה:

1. החלף ב-$M$ כל כניסה למצב $q_{\mathrm{reject}}$ בכניסה למצב $q_{\mathrm{accept}}$.

   תהי $M'$ המכונה שהתקבלה.
2. החזר את $\langle M', w\rangle$."

הרדוקציה ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט. (מעבר על פונקציית המעברים של $M$).

ב. לא קיימת רדוקצית מיפוי של $ALL_{\mathrm{TM}}$ ל-$E_{\mathrm{TM}}$, כי המשלימה של $ALL_{\mathrm{TM}}$ איננה מזוהה-טיורינג והמשלימה של $E_{\mathrm{TM}}$ כן מזוהה-טיורינג.

**שאלה 4**

א. **הרדוקציה**: על קלט $<G, s, t>$ לבעיית *HAMPATH*, נבנה את $<H>$ קלט לבעיית *EHAMPATH*:
$H$ יכיל את כל הצמתים והקשתות של $G$. בנוסף יהיו ב-$H$ שני צמתים נוספים, $v$ ו-$u$, ושתי קשתות נוספות, $(v, s)$ ו-$(t, u)$.

**הרדוקציה תקפה**: אם ב-$G$ יש מסלול המילטון מ-$s$ ל-$t$, אז ב-$H$ יש מסלול המילטון שבנוי מן הקשת $(v, s)$, מן הקשתות של המסלול מ-$s$ ל-$t$ ומן הקשת $(t, u)$.
אם ב-$H$ יש מסלול המילטון, הוא חייב לכלול את הקשתות $(v, s)$ ו-$(t, u)$, כי זו הדרך היחידה לכלול את $v$ ואת $u$ במסלול. לכן יש ב-$G$ מסלול המילטון מ-$s$ ל-$t$.

**הרדוקציה ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי**: הוספנו שני צמתים ושתי קשתות.

ב. נותר להראות שהשפה *EHAMPATH* **שייכת ל-NP**.
מסמך אישור קצר: רשימת הצמתים של מסלול המילטון לפי הסדר של המסלול.
מאמת יוכל לוודא בזמן פולנומיאלי שכל צומת של הגרף מופיע ברשימה פעם אחת ויחידה, ושיש קשת בגרף בין כל שני צמתים עוקבים ברשימה.

**שאלה 5**

**הרדוקציה**:

"על קלט $<G, k>$ כאשר $G=(V, E)$ הוא גרף לא מכוון ו-$k$ הוא מספר טבעי:

1. בנה את הקלט הבא לבעיית *HITTING-SET*:
2. הקבוצה $S$ תהיה קבוצת הצמתים $V$.
3. לכל קשת $e=(u, v)$ תהיה קבוצה $S_e$: $S_e=\{u, v\}$.
4. החזר את $S=V$ ואת קבוצת הקבוצות $S_e$ לכל $e\in E$."

**הרדוקציה תקפה**: יש ב-$G$ כיסוי קדקודים בגודל $k$, אם ורק אם יש קבוצת צמתים $U$ ($U\subseteq V$) כך ש- $|U|=k$, ולכל קשת $e=(u, v)$ ב-$E$, או ש- $u\in U$ או ש- $v\in U$ (או שניהם), אם ורק אם לכל קבוצה $S_e=\{u, v\}$, או ש- $u\in U$ או ש- $v\in U$ (או שניהם), אם ורק אם לכל קבוצה $S_e=\{u, v\}$, החיתוך של $S_e$ עם $U$ איננו ריק ($T=U$).

**הרדוקציה ניתנת לחישוב במקום לוגריתמי**: למעשה, מעתיקים לסרט הפלט את קבוצת הצמתים $V$ (זו הקבוצה $S$), ויוצרים מכל קשת $(u, v)$ בסרט הקלט קבוצה $\{u, v\}$ בסרט הפלט.

הפעולות האלה דורשות מעבר על קבוצת הצמתים $V$ ומעבר על קבוצת הקשתות $E$.

את המעברים האלה אפשר לממש בעזרת מונה בגודל קבוצת הצמתים ומונה בגודל קבוצת הקשתות. זה דורש מקום לוגריתמי בגודל הקלט.

**שאלה 6**

כאשר נתונה מילה $w$, ורוצים לדעת האם היא שייכת ל-$AB$, עוברים על כל החלוקות האפשריות של $w$ לשתי תת-מילים, $w=uv$. לכל חלוקה כזו, מריצים את המכונה של $A$ על $u$ ואת המכונה של $B$ על $w$ כמה פעמים (כמה?). אם באחת החלוקות שתיהן קיבלו, מקבלים.

נותר להוכיח שזמן הריצה פולינומיאלי בגודל הקלט, שמילה שלא שייכת לשפה נדחית בוודאות, ושכל מילה ששייכת לשפה מתקבלת בהסתברות חצי לפחות.