נושאים במתמטיקה לתלמידי מח"ר - 10444

סמסטר ב2009

פתרון ממ"ן 16

תשובה 1

א. נפתור את המערכת הנתונה על-ידי דרוג מטריצת המקדמים המורחבת (כפי שעושים, למשל, בדוגמא 2 בעמ' 24 בספר הלימוד). למערכת יש 4 משוואות ו- 3 נעלמים.
נדרג את מטריצת המקדמים (שים לב לכך שהעמודה הימנית במטריצת המקדמים היא עמודת המקדמים החופשיים):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 6 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \to -\frac{R_3}{7} \\ R_3 \to -R_3 \\ R_4 \to \frac{R_4}{2}}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \to R_3 - 9R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \to -\frac{R_3}{8} \\ R_4 \to R_4 + \frac{R_3}{8}}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \to R_1 - 2R_2 \\ R_2 \to R_2 - R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הגענו לצורת מדרגות קנונית. המערכת המתאימה היא:

$$\begin{aligned} x \qquad &= 2 \\ y \quad &= 1 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

כל שלושת המשתנים הם משתנים קשורים ולמערכת קיים פתרון יחיד והוא $\langle 2,1,-1 \rangle$.
ודאו, על-ידי הצבה כמובן, שזהו אכן פתרון של המערכת הנתונה.

ב. זוהי מערכת משוואות הומוגנית בת 3משוואות ו- 4 נעלמים. ברור שלמערכת זו, כמו לכל מערכת הומוגנית, יש פתרון- הפתרון הטריביאלי. מכיוון שזו מערכת 3×4 אנו יודעים מראש, לפני פתירתה, שיש לה גם פתרון לא טריביאלי.

נפתור את המערכת הנתונה על-ידי דרוג מטריצת המקדמים :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -13 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -13 & 0 \\ 3 & -16 & -10 & 44 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & 22 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{R_2}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -13 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & -22 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & 22 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_2 \to \frac{R_2}{8}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -13 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 5R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{8} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & -\frac{11}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן ניתן להסיק כי x, y הם משתנים קשורים, z, w משתנים חופשיים (ראה הגדרה 7.14 בספר הלימוד). נמשיך כמו בפתרון החלק הראשון בסעיף א׳ של השאלה : נבחר $z = s$ ו- $w = t$, כאשר s ו- t הם ערכים שרירותיים,.

מהמשוואה הראשונה נקבל : $x = -\frac{7}{8}s - \frac{3}{4}t$

ומהמשוואה השנייה נקבל : $y = -\frac{5}{8}s + \frac{11}{4}t$

לכן, <u>**הפתרון הכללי**</u> הוא : $\left\langle -\frac{7}{8}t - \frac{3}{4}s \;\;,\;\; -\frac{5}{8}t + \frac{11}{4}s \;\;,\;\; t \;\;,\;\; s \right\rangle$ עבור s,t ממשיים.

וקבוצת **כל** הפתרונות של המערכת הנתונה הוא הקבוצה

$$P = \left\{ \left\langle -\frac{7}{8}t - \frac{3}{4}s \;\;,\;\; -\frac{5}{8}t + \frac{11}{4}s \;\;,\;\; t \;\;,\;\; s \right\rangle \;\mathbf{:}\; t, s \in \mathbf{R} \right\}$$

<u>**בדיקה**</u> : מציבים את הרביעייה הזאת במשוואות הנתונות.

תשובה 2

א. הפרבולה עוברת דרך הנקודה $\langle 3,4 \rangle$, לכן : $4 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$

הפרבולה עוברת גם דרך הנקודה $\langle 4,0 \rangle$, לכן: $0 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$

וכן דרך הנקודה $\langle 1,6 \rangle$ ולכן: $6 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$

ומערכת המשוואות שקיבלנו היא:

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 4 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ a + b + c = 6 \end{cases}$$

ב. נפתור, כמו שעשינו בסעיף א' של שאלה 1, על-ידי דרוג מטריצת המקדמים:

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 4 \\ 16 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 16 & 4 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 9R_1]{R_2 \to R_2 - 16R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -12 & -15 & -96 \\ 0 & -6 & -8 & -50 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -12 & -15 & -96 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to -2R_3]{R_2 \to -\frac{1}{12}R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - \frac{4}{5}R_3]{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - \frac{1}{4}R_3]{R_1 \to R_1 + \frac{1}{4}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

הגענו לצורת מדרגות קנונית, והפתרון של המערכת הנתונה הוא:

$c = 4 \quad , \quad b = 3 \quad , \quad a = -1$

ולכן הפרבולה הנתונה היא: $y = -x^2 + 3x + 4$

נבדוק את נכונות הפתרון על-ידי הצבת הנקודות הנתונות במשוואה:

נבדוק עבור הנקודה $\langle 3,4 \rangle$: $-3^2 + 3 \cdot 3 + 4 = 4$, והנקודה $\langle 3,4 \rangle$ אכן נמצאת על הפרבולה שמצאנו.

נבדוק עבור הנקודה $\langle 4,0 \rangle$: $-4^2 + 3 \cdot 4 + 4 = 0$, והנקודה $\langle 4,0 \rangle$ אכן נמצאת על הפרבולה שמצאנו.

נבדוק עבור הנקודה $\langle 1,6 \rangle$: $-1^2 + 3 \cdot 1 + 4 = 6$, וגם הנקודה $\langle 1,6 \rangle$ נמצאת על הפרבולה שמצאנו.

תשובה3

נדרג את מטריצת המקדמים המורחבת
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4a & 2a^2 & -1 & 4 \\ 0 & 4a & -1 & a \\ 0 & -4a^2 & (4-3a^2) & 4a-5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+aR_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 4a & 2a^2 & -1 & 4 \\ 0 & 4a & -1 & a \\ 0 & 0 & 4-3a^2-a & a^2+4a-5 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 4a & 2a^2 & -1 & 4 \\ 0 & 4a & -1 & a \\ 0 & 0 & (3a+4)(1-a) & (a-1)(a+5) \end{array}\right)(*)$$

תחילה נדון במקרה $a=0$ (כי $4a$ הוא איבר שפותח שורה בצורה המדורגת).

נציב במטריצה שקיבלנו:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

במקרה זה קיבלנו שהשורה הראשונה היא שורת "סתירה" מהטיפוס $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}$

כאשר $\beta\neq 0$, ולמערכת כזאת **אין פתרון**. לכן אם $a=0$ אין פתרון.

<u>נעבור ל- $a\neq 0$:</u>

המטריצה (*) שקולת שורות למטריצה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{a}{2} & -\frac{1}{4a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4a} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & (3a+4)(1-a) & (a-1)(a+5) \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{8}-\frac{1}{4a} & \frac{1}{a}-\frac{a}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4a} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -3(a+\frac{4}{3})(a-1) & (a-1)(a+5) \end{array}\right)(**)$$

<u>אם $a=1$</u> אז השורה האחרונה היא: $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}$

אז יש אינסוף פתרונות. נחשב את הפתרון הכללי, נציב $a=1$ במטריצה (**)

ונקבל:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{1}{2}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{1}{8}t+\frac{7}{8} \\ y=\frac{1}{4}t+\frac{1}{4} \\ z=t \end{cases}$$

לכן הפתרון כללי הוא: $\left\langle\frac{1}{8}t+\frac{7}{8},\frac{1}{4}t+\frac{1}{4},t\right\rangle$, t ממשי.

אם $a=-\frac{4}{3}$ מתקבלת שורת "סתירה", $\left(0 \quad 0 \quad 0 \mid -\frac{77}{9}\right)$ ולכן אין פתרון.

אם $a \neq 0,1,-\frac{4}{3}$ המטריצה (**) שקולת שורות למטריצה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{8}-\frac{1}{4a} & \frac{1}{a}-\frac{a}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4a} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+5}{-3(a+\frac{4}{3})} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a}-\frac{a}{8}-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4a}\right)\cdot\frac{a+5}{-3(a+\frac{4}{3})} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4}+\frac{1}{4a}\cdot\frac{a+5}{-3(a+\frac{4}{3})} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+5}{-3(a+\frac{4}{3})} \end{array}\right)$$

לסיכום: עבור $a \neq 0,1,-\frac{4}{3}$ יש פתרון יחיד.

עבור $a=0$ או $-\frac{4}{3}$ אין פתרון.

עבור $a=1$ יש אינסוף פתרונות והפתרון הכללי הוא: $\left\langle \frac{1}{8}t+\frac{7}{8},\frac{1}{4}t+\frac{1}{4},t \right\rangle$, $t \in \mathbf{R}$.

תשובה 4

א. נדרג את המטריצה המורחבת (למרות שלסעיף זה מספיק לדרג את המטריצה המצומצמת) כי דרוג זה שימושי לשני הסעיפים.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-a & 0 & 0 & b \\ 0 & 2-a & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -2-a & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3-a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & -2-a & 6 \\ 0 & 2-a & -5 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3-a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & -2-a & 6 \\ 0 & 0 & -1-a^2 & 6a-8 \end{array}\right) \quad (*)$$

אם $a=3$ יש אינסוף פתרונות והמטריצה המצומצמת שקולת שורות למטריצה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מזה נובע כי $x=s$ משתנה חפשי ו- $z=0$, $y-5z=0$ ולכן הפתרון הכללי הוא $\langle s,\ 0,\ 0\rangle$,

s הוא מספר ממשי.

אם $a \neq 3$ יש פתרון טריוויאלי בלבד מפני שלכל a, $-1-a^2 \neq 0$ (כי $-1-a^2 \leq -1-0 < 0$).

ב. נקבע $a=3$ ונציב בצורה (*) מהסעיף א). לאחר החלפת שורות נקבל: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$.

יש פתרון בתנאי ש- $\underline{b=0}$. במקרה זה, יש אינסוף פתרונות,

והפתרון הכללי הוא: $\langle -1, 1, s\rangle$, s ממשי. נמק זאת- כפי שעשינו בשאלות קודמות.

תשובה 5

א. **הטענה אינה נכונה.**

נביא דוגמא נגדית:

עבור $n=3$, נסתכל במערכת של 2 משוואות ב-3 נעלמים:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

נפתור מערכת זו:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

קיבלנו שהשורה השניה היא שורת "סתירה" מהטיפוס $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, ולמערכת כזאת **אין פתרון**.

ב. **הטענה נכונה.**

נוכיח זאת:

אם למערכת לינארית אי-הומוגנית של n משוואות ב- n נעלמים אין פתרון, הרי שעל-ידי סדרה של פעולות אלמנטריות על שורות מטריצת המקדמים של המערכת נגיע למטריצה שבה יש שורת "סתירה" מהטיפוס $(\underbrace{0\ \ 0\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0}_{n\ \ zeroes}\ \ \beta)$, כאשר $\beta \neq 0$. כלומר, במטריצת המקדמים המצומצמת תתקבל (אחרי סדרה של פעולות אלמנטריות על שורות מטריצת המקדמים המצומצמת של המערכת) שורת אפסים.

לפיכך, מטריצת המקדמים המצומצמת של המערכת ההומוגנית היא שקולת שורות למטריצה שבה יש שורת אפסים. לכן, למעשה, במערכת ההומוגנית שקיבלנו (ששקולה למערכת ההומוגנית הנתונה) מספר המשתנים, n, גדול ממספר המשוואות (מספר השורות) שהוא $n-1$, ולפי משפט 7.19 מספר הפתרונות במקרה זה הוא אינסופי.

ג. **הטענה אינה נכונה.**

נביא דוגמא נגדית:

נסתכל במערכת:

$$\begin{cases} x+\ \ y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$$

$m=n=2$, אך למערכת יש אינסוף פתרונות! הוכח זאת!

ד. **הטענה נכונה.**

נוכיח זאת:

אם $m<n$, אז לפי משפט 7.15 סעיף 2 , למערכת הנתונה או שיש שורת סתירה- ואז אין פתרון , או שיש משתנים חופשיים, ואז קיימים אינסוף פתרונות. בשאלה נתון שלמערכת פתרון יחיד, לכן מתקיים $m \geq n$. עתה נפריד למקרים:

1) **אם** $m=n$: במקרה זה, לפי מסקנה 7.24, גם למערכת הלינארית ההומוגנית המתאימה יש פתרון יחיד, ולכן, שוב לפי מסקנה 7.24, למערכת האי-הומוגנית השנייה (שבה עמודת מקדמים חופשיים שונה) עם אותה מטריצת המקדמים המצומצמת יש גם כן פתרון יחיד, ולפיכך אין לה אינסוף פתרונות.

2) **אם** $m>n$: למערכת הנתונה יש פתרון, לכן בתהליך הדרוג של מטריצת המקדמים המצומצמת שלה הגענו למטריצת מדרגות קנונית שבה מספר האיברים הפותחים הוא n (כי יש פתרון יחיד), ולכן יש n משתנים קשורים ואין אף משתנה חופשי. לפיכך אם נחליף רק את עמודת המקדמים החופשיים נגיע (על-ידי אותן פעולות אלמנטריות) ממטריצת המקדמים, עם עמודת המקדמים החופשיים החדשה, למטריצת מדרגות קנונית שבה n משתנים קשורים ואין משתנים חופשיים ולכן, אם **לא** תהיה בה שורה מהטיפוס $(0,0,0,\ldots,0,1)$, אז למערכת החדשה יש פתרון יחיד, ואם תהיה שורה כזאת,אז למערכת החדשה אין פתרון. **ובכל מקרה** - אין אינסוף פתרונות.

תשובה 6

א. נפתור את המערכת הנתונה:

ב.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 4 & -5 & 8 & b_2 \\ -3 & 3 & 3 & b_3 \\ 1 & 1 & -3 & b_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 4R_1 \\ R_3 \to R_3 + 3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & 3 & -12 & b_2 - 4b_1 \\ 0 & -3 & 18 & b_3 + 3b_1 \\ 0 & 3 & -8 & b_4 - b_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & 3 & -12 & b_2 - 4b_1 \\ 0 & 0 & 6 & b_3 + b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 4 & b_4 - b_2 + 3b_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \to \frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \to \frac{1}{6}R_3 \\ R_4 \to \frac{1}{4}R_4}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & 1 & -4 & \frac{b_2 - 4b_1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b_2 + b_3 - b_1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b_4 - b_2 + 3b_1}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & 1 & -4 & \frac{b_2-4b_1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b_3+b_2-b_1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3b_4-2b_3-5b_2+11b_1}{12} \end{pmatrix}$$

ולמערכת הנתונה יהיה פתרון אם ורק אם $\frac{3b_4-2b_3-5b_2+11b_1}{12}=0$

כלומר, אם ורק אם $11b_1-5b_2-2b_3+3b_4=0$ (*),

(כי רק בתנאי זה **לא** מתקבלת שורה מהטיפוס $(0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ \beta)$ כאשר $\beta \neq 0$).

ג. ממטריצת המדרגות שאליה הגענו ניתן לראות שלכל הערכים האפשריים של רכיבי $\langle b_1,b_2,b_3,b_4\rangle$ מתקיים ש- x , y ו- z הם משתנים קשורים ואין משתנים חופשיים. לכן למערכת הנתונה יש לכל היותר פתרון יחיד (יש פתרון יחיד אם מתקיים (*), ואין פתרון אם לא מתקיים (*)).

ג. אם עמודת המקדמים החופשיים היא כפי שנתון: $\underline{b}=\langle a,1,0,3\rangle$, הרי שלמערכת הנתונה יש פתרון יחיד אם ורק אם מתקיים (*), שפירושו – במקרה זה:

$$11\cdot a-5\cdot 1-2\cdot 0+3\cdot 3=0$$

$$-5+9+11a=0$$

$$11a=-4 \ \Rightarrow\ a=-\frac{4}{11}$$

עבור $a=-\frac{4}{11}$ יש למערכת הנתונה פתרון, וכדי למצוא פתרון זה נציב את ערכי b_i המתאימים במטריצת המדרגות שקיבלנו בסעיף א' ונקבל שמטריצת המדרגות של המערכת הנתונה היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -\frac{4}{11} \\ 0 & 1 & -4 & \frac{9}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2+4R_3]{R_1\to R_1+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & \frac{14}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{19}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1+3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{43}{22} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{19}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומצאנו שעבור $a=-\frac{4}{11}$ הפתרון היחיד של המערכת הוא $\left\langle \frac{43}{22}, \frac{19}{11}, \frac{5}{22} \right\rangle$ (ט.ל.ח.).