אלגוריתמים
הרצאה 7
דף 1 מ-2
15.12.08
5.12.08

אלגוריתמים - הרצאה 7

הוכחת נכונות של אלגוריתם דייקסטרה:

א) תמיד מתקיים $d(v) \geq \delta(s,v)$ לכל צומת v.

הוכחה באינדוקציה על סדר היציאה מ-T.*

בסיס: הצומת הראשון שיצא מהקבוצה T הוא צומת המקור s שעבורו $d(s)=0=\delta(s,s)$

יהי v צומת שיצא כרגע מהקבוצה T, אם: $d(v)<\infty$ אזי יש צומת u כך שמתקיים: $d(v)=d(u)+w(u,v)$

באופן אינדוקטיבי הנחנו שיש מסלול מ-s ל-u שמשקלו $d(u)$

* יש מסלול במשקל $d(x)$ לכל צומת x שיצא מ-T.

כיוון ש u עדכן את התווית של v יש גם מסלול מ-s ל v שמשקלו $d(v)$ $\xrightarrow{d(u)} u \xrightarrow[w(u,v)]{} v$

ולכן כאשר v יצא מ-T $d(v)\geq\delta(s,v)$.

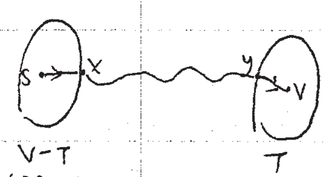
כלומר האלגוריתם שומר על התכונה: שהתוויות הן סדרה מונוטונית לא עולה. והתווית אף פעם לא קטנה מהמסלול הקל ביותר.

משפט: אלגוריתם דייקסטרה מחשב את המסלול הקל ביותר לכל צומת.

הוכחה: באינדוקציה על סדר היציאה מהקבוצה T.

בסיס: טריוויאלית נכון עבור s כי $d(s)=\delta(s,s)=0$

מעבר: נניח שהמשפט נכון עבור k הצמתים הראשונים שיצאו מ-T ונוכיח נכונות עבור הצומת ה-k+1 שהוא v.



המשפט נכון לכל הצמתים בקבוצה זו.

x הוא הצומת האחרון שהמסלול עובר בו לפני שעזב את V-T (המסלול הקל ביותר מ-s ל-v).

y הוא הצומת הראשון שהמסלול עובר בו אחרי שעזב את V-T בפעם הראשונה (המסלול הקל ביותר מ-s ל-v)

$\delta(s,x)=d(x)$ עפ"י הנחת האינדוקציה.

$$d(y) = d(x)+w(x,y)=\delta(s,x)+w(x,y)=\delta(s,y)$$

כאשר x יצא מ-T הוא ניצל את y אין תווית שקטנה מ- $d(x)+w(x,y)$

כיוון שגילינו ש $d(y)\geq\delta(s,y)$ מתקבל ש $d(y)=\delta(s,y)$

המשקלים הם אי שליליים ולכן: $\delta(s,y)\leq\delta(s,v)$

מתקבל ש: $d(y)=\delta(s,y)\leq\delta(s,v)\leq d(v)$

האלגוריתם בחר להוציא מהקבוצה T את הצומת v ולכן $d(v)\leq d(y)$

מתקבל ש: $d(y)=\delta(s,y)\leq\delta(s,v)\leq d(v)\leq d(y)$

ומכאן שכל השוויונות מתחלפים בשוויונים ונקבל: $d(v)=\delta(s,v)$

והוכחנו את הנחת האינדוקציה על צומת v.

הסיבוכיות:

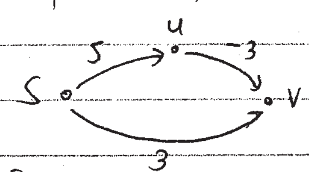
במימוש נאיבי $O(|V|^2)$.

את מציאת המינימום אפשר לעשות באמצעות ערימת מינימום ואז הסיבוכיות תהיה: $O(|E|\log|V|)$

ואפשר באמצעות ערימת פיבונאצ'י: $O(|E|+|V|\log|V|)$.

הערות:
- אם כל הקשתות משקלן אחד אז לא נצטרך להריץ את האלגוריתם הזה כי BFS יתן אותו דבר בסיבוכיות לינארית.
- אם מדובר בגרף מכוון נחליף כל קשת בשתי קשתות מכוונות אנטי סימטריות.

דוגמה:



s	u	v
0	∞	∞
	5	3

כשיש משקלים שליליים אלגוריתם דייקסטרה נכשל

כי הוא לא יזהה את המסלול הקל ביותר מ-s ל-v

שעובר דרך u ולא יזהה את המסלול מ s ל v שמשקלו 3.

הפוינטרים π מחזירים על מסלול קל ביותר.

רלקסציה (הקלה)

נתונה קשת (u,v) אם: $d(v) > d(u)+w(u,v)$ אזי נעדכן(u,v): $d(v) \leftarrow d(u)+w(u,v)$

למה (נכונה גם למשקלים שליליים - אבל לא מעגלים שליליים).

נניח ש d מאותחל כך שלכל צומת v מתקיים: $d(v) \geq \delta(s,v)$, $d(s)=0$

אזי: סדרה שרירותית של צעדי רלקסציה (כולל חזרות) תשמור לכל צומת v: $d(v) \geq \delta(s,v)$

מסקנה: אם ברגע ש: $d(v)=\delta(s,v)$, התווית של v לא תשתנה יותר.

הוכחה: באינדוקציה על צעדי הרלקסציה.
- בסיס: האתחול שומר על דרישות הלמה.
- מעבר: נניח בשלילה ש v הצומת הראשון שעבורו צעד רלקסציה בקשת (u,v) גרם לכך ש: $d(v) < \delta(s,v)$

כתוצאה מפעולת הרלקסציה מתקיים: $d(v)=d(u)+w(u,v)$

לפי הנחת השלילה: $d(u)+w(u,v)=d(v) < \delta(s,v)$

$$\delta(s,v) \leq \delta(s,u)+w(u,v)$$

$$\Downarrow$$

קיבלנו ש-u הפר את תנאי הלמה $d(u) < \delta(s,u)$

כבר לפני v בסתירה לכך ש v הוא הראשון שהפר.

אלגוריתמים
הרצאה 7
דף 2 מ 2
15.12.08

אלגוריתם בלמן פורד

להריץ $|V|-1$ פעמים:

בכל איטרציה לעבור על הקשתות בסדר כלשהו, לכל קשת לבדוק אם אפשר לעשות רלקסציה, אם כן לזכור לכל צומת את הצומת האחרון שעדכן את התווית שלו.

ראינו מהמשפט הכללי על רלקסציות שבכל שלב של אלגוריתם בלמן פורד מתקיים: $d(v) \ge \delta(s,v)$

משפט: בסיום ריצת האלגוריתם מתקיים לכל צומת v: $d(v)=\delta(s,v)$

הוכחה: באינדוקציה על אורך המסלול הקל ביותר מ-s לשאר הצמתים.

הנחת האינדוקציה: אם יש מסלול קל ביותר מ-s לצומת v שמכיל k קשתות אזי לכל המאוחר בסיום הפעולה ה-k מתקיים: $d(v)=\delta(s,v)$.

$k \le |V|-1$ כי אין מעגלים שליליים ולכן זה מסלול פשוט.

בסיס האינדוקציה: המסלול הקל ביותר מ-s לעצמו מכיל 0 קשתות ואכן כבר בהתחלה: $\delta(s,s)=d(s)=0$

נניח שהמשפט נכון עבור $k-1$ ונוכיח עבור k. יהא v צומת שיש אליו מסלול קל ביותר שמכיל k קשתות. $\underbrace{S=v_0\to v_1\to\cdots\to v_{k-1}}_{\text{מסלול קל ביותר ל } v_{k-1} \text{ שמכיל } k-1 \text{ קשתות}}\to v_k=v$

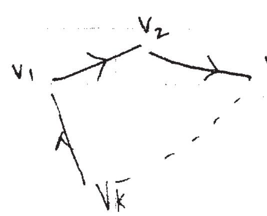
לכן, ניתן להשתמש בהנחת האינדוקציה ל v_{k-1}, בסיום הפעולה ה-$(k-1)$ יתקיים: $d(v_{k-1})=\delta(s,v_{k-1})$

מה קורה בפעולה ה-k? כאשר נגיע לקשת $(v_{k-1}\to v_k)$ האלגוריתם יבדוק האם $d(v_k) > \underbrace{d(v_{k-1})+w(v_{k-1},v_k)}_{\delta(s,v_k)}$

אם התנאי יתקיים נעדכן את $d(v_k)$ לתווית הנכונה.

- המצביעים π זוכרים את המסלול הקל ביותר מ-s לכל צומת, ההוכחה באינדוקציה כמו במשפט הקודם.

מה קורה אם יש בגרף מעגל שלילי?



$$\sum_{i=1}^{k-1} w(v_i,v_{i+1}) + w(v_k,v_1) < 0$$

האם יתכן שבסיום ריצת BFS לא ניתן יהיה לעשות רלקסציות?

כלומר, $d(v_i) \le d(v_{i+1})+w(v_i,v_{i+1})$ $\quad d(v_1) \le d(v_k)+w(v_k,v_1)$ $\quad 1\le i\le k-1$

נחבר את אי השוויונים ונקבל:

$$\sum_{i=1}^{k} \cancel{d}(v_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \cancel{d}(v_i) + (\text{משקל המעגל})$$

ונקבל משקל המעגל ≥ 0 וזו סתירה.

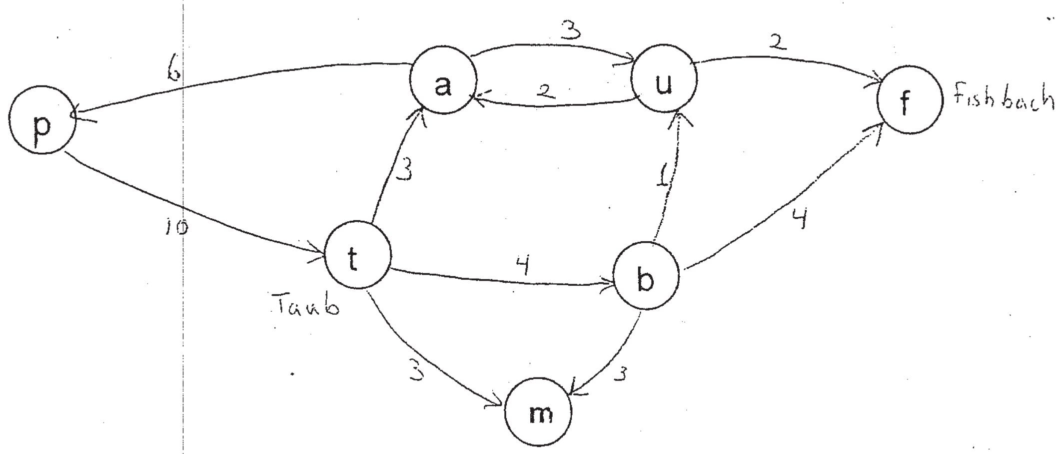
האלגוריתם של Dijkstra

קלט: גרף מכוון, סופי. צומת התחלה s, צומת יעד t, לכל קשת נתון אורך $l(e)\geq 0$
פלט: $\lambda(t)$ =אורך המסלול הקצר ביותר מ- s ל- t.

T – קבוצת הצמתים שמרחקם הסופי מ-s לא נקבע עדיין.

1. $\lambda(s)=0$ ולכל $v\neq s$, $\lambda(v)=\infty$
2. $T=V$
3. יהי u צומת ב-T עבורו $\lambda(u)$ מינימלי.
4. אם $u=t$ עצור.
5. לכל קשת $e=(u,v)$, אם $v\in T$ ו- $\lambda(v) > \lambda(u)+l(e)$, בצע: $\lambda(v)= \lambda(u)+l(e)$
6. $T=T-\{u\}$, חזור לצעד 3.

דוגמת ריצה: מהו המסלול הקצר ביותר המחבר את בניין טאוב עם בניין פישבך?



	init	s	a	m	b	u	f
t (Taub)	0						
p (pool)	∞	∞					
a (Amado)	∞	3					
u (Ulman)	∞	∞					
m (Michlol)	∞	3					
b (בית הסטודנט)	∞	4					
f (Fishbach)	∞	∞					

↑

התוויות מתעדכנות בהתאם לאורך.

הרצאה 7

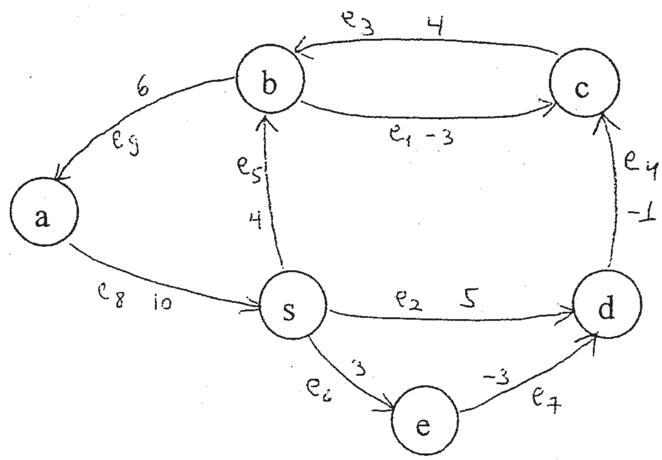
האלגוריתם של Ford

קלט: גרף מכוון, סופי. צומת התחלה s, לכל קשת נתון אורך $l(e)$, יתכן $l(e)<0$ אך אין בגרף מעגלים מכוונים שליליים.

פלט: לכל צומת v, $\lambda(v)$= אורך המסלול הקצר ביותר מ- s ל- v.

1. $\lambda(s)=0$ ולכל $v\neq s$, $\lambda(v)=\infty$
2. כל עוד קיימת קשת $e=(u,v)$, עבורה $\lambda(v) > \lambda(u)+l(e)$, בצע: $\lambda(v)=\lambda(u)+l(e)$.

דוגמת ריצה:



	init	pass #1	pass #2	pass
s	0	0	0	0
a	∞	∞	10	10
b	∞	4	4	3
c	∞	∞	1	-1
d	∞	5	0	0
e	∞	3	3	3

	pass #4
s	0
a	9
b	3
c	-1
d	0
e	3