2007א – מועד 89

1.

א. t איננה חח"ע. נראה כי קיימות שתי רלציות $R,S \in M$ כך שמתקיים $R \neq S \wedge t(R)=t(S)$.

נתבונן ב- $R=\{(1,2),(2,3)\}, S=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$. אכן, על פי הכרך "תורת הקבוצות", מכיוון ש- $|A|=3$,
$t(R)=R\cup R^2\cup R^3=\{(1,2),(2,3)\}\cup\{(1,3)\}\cup\phi=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$.
כמו כן,
$t(S)=S\cup S^2\cup S^3=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}\cup\{(1,3)\}\cup\phi=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$.
כמו כן מתקיים $R,S\subseteq A\times A$, ולכן $R,S\in M$.

כלומר, מצאנו $R,S\in M$ כך שמתקיים $R\neq S\wedge t(R)=t(S)$ ובכך הוכחנו ש-t איננה חח"ע.

ב. הטענה איננה נכונה. נתבונן ב- $R=S=\{(1,3),(3,1)\}$.
אכן, $RS=\{(1,1),(3,3)\}$, ו- $t(RS)=\{(1,1),(3,3)\}$.
בנוסף, $t(R)=t(S)=\{(1,3),(3,1),(1,1),(3,3)\}$, וכך $t(R)t(S)=\{(1,1),(3,3),(1,3),(3,1)\}$. מתקיים גם $R,S\in M$, ולכן מצאנו $R,S\in M$ כך ש- $t(RS)\neq t(R)t(S)$, ובכך הפרכנו את הטענה.

ג. הטענה איננה נכונה. נתבונן ב- $R=\{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$. אכן, $R\subseteq A\times A$ ולכן $R\in M$.
כמו כן, מתקיים $I_A \nsubseteq R$ ולכן R איננה רפלקסיבית.
$t(R)=R\cup R^2\cup R^3=R\cup\{(1,1),(2,2),(3,3),(3,2),(2,3)\}\cup R^3$.

בפרט מתקיים $I_A\subseteq R^2\subseteq t(R)$, ולכן, על פי הטרנזיטיביות של יחס ההכלה, $I_A\subseteq t(R)$, ו- $t(R)$ רלפקסיבית.

כלומר, מצאנו דוגמה בה R איננה רפלקסיבית, אך עם זאת $t(R)$ רפלקסיבית, ובכך הפרכנו את הטענה.

ד. הטענה נכונה. תהי $R\in M$, ונניח ש- $t(R)$ אינה רפלקסיבית, כלומר, $I_A \nsubseteq t(R)$.
כלומר, $I_A \nsubseteq R\cup R^2\cup R^3$ ובפרט מתקיים $I_A\nsubseteq R$, כלומר, R אינה רלפקסיבית.
בכך הוכחנו את הטענה.

ה. הטענה נכונה. תהי $R\in M$, $t(R)$ הוא הסגור הטרנזיטיבי של R. בשאלה 2.33 בכרך תורת הקבוצות, מוכח שאם רלציה היא סגור של רלציה אחרת ביחס לתכונה מסוימת, אזי היא הסגור של עצמה ביחס לאותה תכונה. כלומר, $t(t(R))=t(R)$.
מ.ש.ל.

2.

3.

א. זהו בעצם מספר התמורות עם חזרות של חמישה איברים, והוא $5^5=3125$.

ב. כל מחלקת שקילות היא בעצם תת קבוצה של $\{a,b,c,d,e\}$, שכן כל המחרוזות המורכבות מתת קבוצה מסוימת של $\{a,b,c,d,e\}$ נמצאות ביחד, וכל מחרוזת שמורכבת מתת קבוצה אחרת, אינה נמצאת בשקילות עם מחרוזות מתת הקבוצה הזו.

כלומר, מספר מחלקות השקילות הוא כמספר תתי הקבוצות של $\{a,b,c,d,e\}$, להוציא הקבוצה הריקה, שכן לא ניתן ליצור מחרוזת מהקבוצה הריקה. כלומר, $2^5-1=31$.

ג. זהו בעצם מספר התמורות של חמישה איברים, שכן כל חמשת האיברים מהקבוצה חייבים להופיע, מה שמשנה הוא הסדר. כלומר, התשובה היא $5!=120$.

ד. זוהי קבוצת המחרוזות שבנויות מהאותיות a ו-b. זהו מספר החליפות של שני איברים מתוך חמישה, אך עם זאת, יש להחסיר ממספר זה את המחרוזות בהן לא מופיע כלל b או לא מופיע כלל a (יש רק מחרוזת אחת בכל מקרה). כלומר, נקבל $2^5-2=30$.

ה. ניעזר בעיקרון ההכלה וההפרדה.

תהי U קבוצת כל המחרוזות המורכבות מהאותיות a,b,c,d ללא הגבלות. בדומה בדומה לחישוב בסעיף ד', זהו מספר החליפות של חמישה איברים מתוך ארבעה, כלומר, $4^5=1024$.

A_i היא קבוצת המחרוזות מהקבוצה a,b,c,d, כך שהתו i לא מופיע כלל. בדומה לחישוב קודם, לכל $i\in\{a,b,c,d,e\}$ $|A_i|=3^5=243$.

בדומה, לכל $i,j\in\{a,b,c,d,e\},i\neq j$, $|A_i\cap A_j|=2^5=32$.

$|A_i\cap A_j\cap A_k|=1^5=1$.

$|A_a\cap A_b\cap A_c\cap A_d|=0$.

נחשב את Si.

$S_1=4\cdot|A_i|=972$.

$S_2=6\cdot|A_i\cap A_j|=192$.

$S_3=4\cdot|A_i\cap A_j\cap A_k|=4$.

$S_4=0$.

אנו מחפשים את $|A_a'\cap A_b'\cap A_c'\cap A_d'|$. על פי עקרון ההכלה וההפרדה,

$$|A_a'\cap A_b'\cap A_c'\cap A_d'|=|U|-S_1+S_2-S_3+S_4=1024-972+192-4+0=240$$

כלומר, מספר האיברים במחלקת השקילות הזו הוא 240.

4.

א. לפיזור הקוביות יש אפשרות אחת, שכן כל קוביה צריכה ללכת לקבוצה אחרת, ומכיוון שאין חשיבות לסדר הקבוצות.

עבור שאר הפריטים, יש חשיבות לסדר הבחירה, שכן ניתן לייחס לצבע הקוביה שבקבוצה "שם" לקבוצה. לכן לפיזור הכדורים והן לפיזור הגלילים יש !4 אפשרויות. סה"כ יש על פי עיקרון הכפל $1\cdot 4!\cdot 4!=576$.

ב. ניעזר בעיקרון ההכלה וההפרדה. תהי U קבוצת החלוקות של הפריטים כך שבכל קבוצה יש פריט אחד מכל סוג. על פי סעיף א', $|U|=576$.

נסמן את הצבעים במספרים: כחול – 1, אדום – 2, ירוק – 3, לבן – 4.

תהי A_i קבוצת החלוקות של הפריטים כך שכל הפריטים בצבע i מופיעים באותה קבוצה. $|A_i|$ הוא בעצם מספר האפשרויות לחלק את שאר הפריטים, ללא הגבלות בנוסף להגבלה שבסעיף א', ובדומה לחישוב שם:

$|A_i|=1\cdot 3!\cdot 3!=36$.

בדומה נחשב חיתוכים בזוגות:

$. |A_i \cap A_j| = 1 = 1 \cdot 2! = 2$

בדומה אפשר לחשב גם חיתוכים בשלשות, כשזה בעצם משאיר אפשרות אחת – לשים את הצבע הנותר בקבוצה אחת:

$. |A_i \cap A_j \cap A_k| = 1$

$. |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$

נחשב את Si.

$. S_1 = 4 \cdot |A_i| = 144$

$. S_2 = 6 \cdot |A_i \cap A_j| = 12$

$. S_3 = 4, S_4 = 1$

כעת, אנו מחפשים את

$. |A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4'| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 576 - 144 + 12 - 4 + 1 = 441$

כלומר, מספר החלוקות שעונות על הדרישה הוא 273.