תשובה 1

א. נבדוק כיצד בנויה סדרה באורך n המקיימת את הנדרש.

נתבונן באיבר האחרון של הסדרה:

* אם הוא אי-זוגי (4 אפשרויות), אז קטע הסדרה הקודם לו הוא **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-1$ (a_{n-1} אפשרויות).

* אם הוא זוגי (4 אפשרויות) אז לפניו בא מספר אי-זוגי (4 אפשרויות), ולפניו **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-2$ (a_{n-2} אפשרויות).

קיבלנו: $a_n = 4a_{n-1} + 16a_{n-2}$.

תנאי התחלה:

$a_0 = 1$ (הסדרה הריקה מקיימת את התנאים! נוח להיעזר ב- a_0 לסעיף ב),

$a_1 = 8$,

$a_2 = 8^2 - 4^2 = 48$ (כל הזוגות פחות זוגות של מספרים זוגיים),

לבדיקה, מיחס הנסיגה: $a_2 = 4a_1 + 16a_0 = 4\cdot 8 + 16 = 48$.

ב. המשוואה האפיינית: $\lambda^2 - 4\lambda - 16 = 0$. פתרונותיה: $x_2 = 2(1-\sqrt{5})$, $x_1 = 2(1+\sqrt{5})$.

לפיכך $a_n = A\cdot 2^n(1+\sqrt{5})^n + B\cdot 2^n(1-\sqrt{5})^n$.

בהצבת תנאי ההתחלה עבור $n = 0,1$ נקבל: $A + B = 1$, $2A(1+\sqrt{5}) + 2B(1-\sqrt{5}) = 8$.

כלומר $A(1+\sqrt{5}) + B(1-\sqrt{5}) = 4$ לכן $(A+B) + \sqrt{5}(A-B) = 4$ ולכן $A - B = \frac{3}{\sqrt{5}}$

מכאן

$$A = \frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{\sqrt{5}}\right) \quad , \quad B = \frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{\sqrt{5}}\right) .$$

ולכן

$$a_n = \left(1+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\cdot 2^{n-1}(1+\sqrt{5})^n + \left(1-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\cdot 2^{n-1}(1-\sqrt{5})^n$$

רצוי מאד להציב ולבדוק ערכים אחדים של n !

תשובה 2

א. $g(x) = \frac{f(x)}{1-x} = f(x)\cdot(1+x+x^2+\ldots) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i)\cdot(\sum_{i=0}^{\infty} 1\cdot x^i)$.

לפי נוסחה (ii) שבסוף הממ"ן (כפל פונקציות יוצרות), המקדם של x^n בפיתוח $g(x)$ הוא:

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 1 = a_0 + a_1 + \ldots + a_n .$$

ב. $f(x) = g(x)\cdot(1-x)$. לפיכך $a_n = b_n - b_{n-1}$ $(n \ge 1)$, ו- $a_0 = b_0$.

יכולנו לקבל תוצאה זו גם מתוך התשובה לסעיף א:

$$b_{n-1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} \quad , \quad b_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

ולכן $b_n - b_{n-1} = a_n$ ($n \geq 1$).

תשובה 3

נפתור בשלבים:

א. הזהות הנתונה:
$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^n \cdot (1+x)^{2n} = (1+x)^n$$

הזהות המבוקשת:
$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i D(n,i)\binom{2n}{k-i} = \binom{n}{k}$$

אם נפתח את שני אגפי הזהות הנתונה, נקבל שני טורים. עקב השוויון בין שני אגפי הזהות הנתונה, לכל k טבעי, המקדם של x^k בפיתוח אגף ימין צריך להיות שווה למקדם של x^k בפיתוח אגף שמאל. נקרא למקדם זה c_k.

ב. פיתוח אגף ימין בזהות הנתונה:

מנוסחת הבינום: $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$ (ר' תחילת פתרון השאלה הקודמת).

כלומר: $c_k = \binom{n}{k}$.

ג. אגף שמאל בזהות הנתונה הוא מכפלה של שני גורמים. הראשון הוא $\frac{1}{(1+x)^n}$.

נוסחה (iii) שבסוף הממ"ן אומרת:
$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} D(n,i)x^i$$

בהצבת $(-x)$ במקום x נקבל

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i D(n,i)x^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

כאשר $a_i = (-1)^i D(n,i)$.

ד. הגורם השני אותו אנו רוצים לפתח הוא $(1+x)^{2n}$.

בהצבת $2n$ במקום n בנוסחת הבינום נקבל:

$$(1+x)^{2n} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{2n}{i}x^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

כאשר $b_i = \binom{2n}{i}$.

ה.   אנו מעוניינים לפתח את $\left(\frac{1}{1+x}\right)^n \cdot (1+x)^{2n}$. פיתחנו כל אחד מהגורמים, וכעת ניעזר בנוסחה לפיתוח מכפלה ("קומבינטוריקה" ראש עמ' 122, ובצורה נוחה יותר – בדף הזהויות שנשלח). כללית, המקדם של x^k במכפלה הוא $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$. נציב ונקבל:

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i D(n,i) \binom{2n}{k-i}$$

בכך הוכח השוויון המבוקש.

בדיקה עבור המקרה הפרטי הנדרש: השלימו עצמאית.

תשובה 4

א.   מספר הדרכים לחלק את המחשבים הוא כמספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = n$, בכפוף לתנאי $x_i \le 24$, $(i = 1,2,3)$.

הפונקציה היוצרת: $f(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{24})^3 = \left(\frac{1-x^{25}}{1-x}\right)^3$

ב.   זהו המקדם של x^{70} בפונקציה הנ"ל. נמשיך לפתח את הפונקציה:

$$\left(\frac{1-x^{25}}{1-x}\right)^3 = (1-x^{25})^3 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} = (1 - 3\cdot x^{25} + 3\cdot x^{50} - x^{75}) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} D(3,i)$$

במעבר האחרון, נעזרנו בנוסחת הבינום עבור הגורם השמאלי, ובנוסחה *(iii)* מהממ"ן עבור הגורם הימני.
כאמור, אנו רוצים את המקדם של x^{70} , לכן נוכל להתעלם ממחוברים בעלי חזקה גדולה יותר.
המקדם המבוקש הוא:

$$1\cdot D(3,70) - 3\cdot D(3,45) + 3\cdot D(3,20) = \binom{72}{2} - 3\cdot\binom{47}{2} + 3\cdot\binom{22}{2} = 2{,}556 - 3{,}243 + 693 = 6$$

תוצאה קצת מפתיעה !

נבדוק מדוע המספר כה קטן: כנראה זה אומר שמספר המחשבים בכל רכב אינו יכול להיות קטן בהרבה מ- 24. ואמנם, אם ברכב כלשהו יש 21 מחשבים או פחות, אז בשני כלי הרכב האחרים יחד יש $70 - 21 = 49$ מחשבים או יותר, ולכן (שובך יונים) באחד מאותם שני כלי רכב יש יותר מ- 24 מחשבים, בסתירה לדרישה. לכן כדי להעמיס את 70 המחשבים, בכל רכב צריכים לשים **לפחות** 22 מחשבים.
לפיכך, מספר המחשבים בכל רכב יכול לקבל אחד משלושה ערכים בלבד: 22, 23 או 24 .
כעת קל לבדוק ישירות שיש רק שתי דרכים להציג את 70 כסכום של 3 מספרים מתוך הנ"ל,
תוך התעלמות מסדר המחוברים: $24 + 23 + 23$ או $24 + 24 + 22$.
עם התחשבות בסדר המחוברים נקבל 6 אפשרויות .

אפשר גם לומר כך:

נתבונן במשוואה $x_1+x_2+x_3=70$, בכפוף לתנאים שמצאנו : $22\le x_i\le 24$, $(i=1,2,3)$.

לכל i , נציב $x_i=y_i+22$. נקבל שאנו מחפשים את מספר הפתרונות של

$y_1+y_2+y_3=4$, בכפוף לתנאים $0\le y_i\le 2$, $(i=1,2,3)$.

שוב בבדיקה ישירה, הפתרונות ללא חשיבות לסדר הם : $2+2+0$ או $2+1+1$.

כל אחד משני הפתרונות הללו נותן 3 פתרונות אם נייחס חשיבות לסדר. מכאן התוצאה 6.

אגב, יש עוד דרכים לפתור את השאלה הזו !

איתי הראבן