תשובה 1

א. $|K| = \aleph_0$. הוכחה: הפונקציה $f(x) = 4x$ מתאימה לכל אבר של K מספר שלם.

לכן זוהי פונקציה $f : K \to \mathbf{Z}$. היא חד-חד-ערכית ועל (הוכיחו זאת!).

לכן עוצמת K שווה לעוצמת $\mathbf{Z}$, שהיא כידוע $\aleph_0$.

ב. $|L| = C$. הוכחה: נתאים לכל מספר ממשי x את הזוג הסדור $(x, 4x-5)$.

קל לראות שלכל x ממשי, $(x, 4x-5) \in L$.

ההתאמה שלנו היא אפוא פונקציה $g : \mathbf{R} \to L$.

(i) נוכיח ש- g היא **על**: יהי $(x, y) \in L$. מהגדרת L, $4x - y = 5$. כלומר $y = 4x - 5$.

לכן $g(x) = (x, 4x-5) = (x, y)$. מצאנו מקור ל- (x, y) שהוא אבר כלשהו של L.

משמע g היא **על** L.

(ii) נוכיח ש- g היא חד-חד-ערכית: יהיו $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ונניח $g(x_1) = g(x_2)$.

משמע $(x_1, 4x_1 - 5) = (x_2, 4x_2 - 5)$.

מהגדרת שוויון בין זוגות סדורים (אמצע עמ' 29 בספר), בפרט מתקיים שוויון ברכיב הראשון,

כלומר $x_1 = x_2$. לפיכך g היא חד-חד-ערכית.

ג. $|M| = \aleph_0$. הוכחה: נגדיר פונקציה $h : M \to \mathbf{Z}$ כלהלן:

לכל $(x, y) \in M$, $h(x, y) = x + y$.

מהגדרת M, $h(x, y)$ הוא מספר שלם ולכן h היא אכן פונקציה של M ל- $\mathbf{Z}$.

נוכיח בבת אחת ש- h היא **חד-חד-ערכית ועל**.

נעשה זאת על ידי כך שנראה שלכל $n \in \mathbf{Z}$ קיים תחת h מקור **אחד ויחיד** ב- M.

במלים אחרות, נראה שלכל $n \in \mathbf{Z}$ קיים $(x, y) \in M$ **אחד ויחיד** המקיים $h(x, y) = n$.

מדוע אם נראה זאת, זה יוכיח את הנדרש?

הטענה שלכל $n \in \mathbf{Z}$ **קיים** $(x, y) \in M$ כך ש- $h(x, y) = n$, פירושה ש- h היא **על** $\mathbf{Z}$.

הטענה שלכל $n \in \mathbf{Z}$ **יש לכל היותר** $(x, y) \in M$ יחיד כזה, פירושה ש- h היא **חד-חד-ערכית**.

ובכן יהי $n \in \mathbf{Z}$. אנו רוצים להראות שקיים $(x, y) \in M$ **אחד ויחיד** המקיים $h(x, y) = n$.

מהגדרת M, מה שעלינו להראות הוא שקיים $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ אחד ויחיד המקיים את כל

התנאים הבאים: $4x - y = 5$, $x + y \in \mathbf{Z}$, $h(x, y) = n$.

את התנאי $x + y \in \mathbf{Z}$ אפשר להשמיט, כי הוא נובע מהדרישה $h(x, y) = n$.

קיבלנו מערכת של שתי משוואות: $x + y = n$, $4x - y = 5$.

למערכת זו יש אכן פתרון **אחד ויחיד**, כלומר זוג סדור אחד ויחיד (x, y) המקיים את המערכת:

הראו זאת על-ידי פתרון מערכת המשוואות עם n כפרמטר, והשלימו את ההוכחה.

תשובה 2

נמשיך את ההוכחה.

מכיוון ש- $k,m \geq 2$, יהי $a_2 \in A$, $a_2 \neq a_1$ ויהי $b_2 \in B$, $b_2 \neq b_1$.

נגדיר $f : A \cup B \to A \times B$ כך:

$$f(x) = \begin{cases} (x,b_1) & x \in A\,,\ x \neq a_1 \\ (a_2,b_2) & x = a_1 \\ (a_1,x) & x \in B \end{cases}$$

השלימו: הראו ש- f היא חד-חד-ערכית.

תשובה 3

התשובה היא [3]. נוכיח זאת:

יחס מעל קבוצה A הוא קבוצה חלקית של $A \times A$.

קבוצת כל היחסים מעל A היא אפוא $P(A \times A)$.

לפי משפט 5.23, עוצמתה היא $|P(A \times A)| = 2^{|A \times A|}$

כידוע מפרק 4, $|A| = C$.

לפי הגדרת כפל עוצמות בפרק 5, $|A \times A| = |A| \cdot |A|$

לפי טענה 5.15ד, $C \cdot C = C$.

קיבלנו אפוא $|P(A \times A)| = 2^C$.

תשובה 4

א. תהיינה A_1, A_2, B קבוצות שעוצמותיהן בהתאמה k_1, k_2, m . נתון $k_1 \leq k_2$.

כדי לקצר מעט את ההוכחה ניעזר בטריק השימושי הבא: **אנו חופשים לבחור כראות עינינו את הקבוצות המייצגות את העוצמות, כל עוד הקבוצות שנבחר הן בעלות העוצמות הנדרשות.**

מכיוון ש- $k_1 \leq k_2$, לפי שאלה 5.1א בחוברת "פרק 5" **קיימת** קבוצה חלקית של A_2 שעוצמתה שווה לעוצמת A_1 . לכן **ב.ה.כ. נבחר** $A_1 \subseteq A_2$ (!)

מהגדרת חזקה של עוצמות, $k_1{}^m$ היא עוצמת קבוצת הפונקציות של B ל- A_1 ,

ו- $k_2{}^m$ היא עוצמת קבוצת הפונקציות של B ל- A_2 .

מכיוון ש- $A_1 \subseteq A_2$, פונקציה של B ל- A_1 היא גם פונקציה של B ל- A_2 **(!)** (מדוע?)

כלומר קבוצת הפונקציות של B ל- A_1 מוכלת בקבוצת הפונקציות של B ל- A_2 .

לכן, בהסתמך על שאלה 5.1ב, עוצמת הקבוצה הראשונה קטנה / שווה לעוצמת הקבוצה השניה.

משמע $k_1{}^m \leq k_2{}^m$.

ב. מצד אחד, $\aleph_0 \le C$ ולכן בעזרת סעיף א, $\aleph_0^{\aleph_0} \le C^{\aleph_0} = C$

(השוויון ל- C הוא לפי טענה 5.28).

מצד שני $2 \le \aleph_0$ ולכן בעזרת סעיף א, $C = 2^{\aleph_0} \le \aleph_0^{\aleph_0}$.

(השוויון ל- C הוא לפי משפט 5.26).

משני האי-שוויונים יחד, בעזרת קנטור-שרדר-ברנשטיין, מתקבל $\aleph_0^{\aleph_0} = C$.

איתי הראבן