יחסים - שימור תכונות

הפעולה / התכונה	איחוד $R \cup S$	חיתוך $R \cap S$	הופכי R^{-1}	כפל RS	חזקה $R^n \ (n \ge 1)$	הפרש $R - S$	משלים ל- $A \times A$ R'
רפלקסיביות	כן	כן	כן	כן	כן	לא	לא
סימטריות	כן	כן	כן	לא	כן	כן	כן
אנטיסימטריות	לא	כן	כן	לא	לא	כן	לא
טרנזיטיביות	לא	כן	כן	לא	כן	לא	לא

הוכחות

רפלקסיביות

איחוד $R \cup S$	למעשה מספיק שאחד היחסים יהיה רפלקסיבי: אם R רפלקסיבי אז $I_A \subseteq R$, ולכן $I_A \subseteq R \cup S$.
חיתוך $R \cap S$	מכיוון ש- R ו- S רפלקסיביים מתקיים $I_A \subseteq R$ ו- $I_A \subseteq S$; לכן $I_A \subseteq R \cap S$.
הופכי R^{-1}	מכיוון ש- R רפלקסיבי מתקיים $I_A \subseteq R$; לכן גם $I_A^{-1} \subseteq R^{-1}$. אבל $I_A^{-1} = I_A$, כך ש- $I_A \subseteq R^{-1}$.
כפל RS	לֶמָּה 1: אם $R \subseteq S$ ו- $T \subseteq U$ אז $RT \subseteq SU$. הוכחה: $$(a,b) \in RT \ \Rightarrow \ (a,x) \in R \ and \ (x,b) \in T \ \Rightarrow$$ $$\Rightarrow \ (a,x) \in S \ and \ (x,b) \in U \ \Rightarrow \ (a,b) \in SU$$ מכיוון ש- R ו- S רפלקסיביים מתקיים $I_A \subseteq R$ ו- $I_A \subseteq S$; בעזרת למה 1 מקבלים: $I_A^2 \subseteq RS$. אבל $I_A^2 = I_A$, ולכן $I_A \subseteq RS$.
חזקה $R^n \ (n \ge 1)$	נובע מהעובדה שכפל יחסים משמר רפלקסיביות.
הפרש $R - S$	דוגמה נגדית: $R = S = I_A \quad \Leftarrow \quad R - S = \phi$
משלים R'	דוגמה נגדית מעל $A = \{1,2\}$: $R = I_A \quad \Leftarrow \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \end{pmatrix}$

סימטריות

איחוד $R\cup S$	$(a,b)\in R\cup S \;\Rightarrow\; (a,b)\in R \text{ or } (a,b)\in S \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; (b,a)\in R \text{ or } (b,a)\in S \;\Rightarrow\; (b,a)\in R\cup S$
חיתוך $R\cap S$	$(a,b)\in R\cap S \;\Rightarrow\; (a,b)\in R \text{ and } (a,b)\in S \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; (b,a)\in R \text{ and } (b,a)\in S \;\Rightarrow\; (b,a)\in R\cap S$
הופכי R^{-1}	$(a,b)\in R^{-1} \;\Rightarrow\; (b,a)\in R \;\Rightarrow\; (a,b)\in R \;\Rightarrow\; (b,a)\in R^{-1}$
כפל RS	דוגמה נגדית: $RS=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \Leftarrow S=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ R=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix}$
חזקה $R^n\ (n\ge 1)$	באינדוקציה: נתון ש- R^1 סימטרי. אם R^n סימטרי עבור $n\ge 1$ אז: $(a,b)\in R^{n+1} \;\Rightarrow\; (a,b)\in R^nR \;\Rightarrow\; (a,x)\in R^n \text{ and } (x,b)\in R \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; (x,a)\in R^n \text{ and } (b,x)\in R \;\Rightarrow\; (b,a)\in R\cdot R^n \;\Rightarrow\; (b,a)\in R^{n+1}$
הפרש $R-S$	$(a,b)\in R-S \;\Rightarrow\; (a,b)\in R \text{ and } (a,b)\notin S \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; (b,a)\in R \text{ and } (b,a)\notin S \;\Rightarrow\; (b,a)\in R-S$
משלים R'	$(a,b)\in R' \;\Rightarrow\; (a,b)\notin R \;\Rightarrow\; (b,a)\notin R \;\Rightarrow\; (b,a)\in R'$

אנטיסימטריות

איחוד $R\cup S$	דוגמה נגדית: $R\cup S=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix} \Leftarrow S=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ R=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
חיתוך $R\cap S$	$(a,b)\in R\cap S \text{ and } (b,a)\in R\cap S \;\Rightarrow\; (a,b)\in R \text{ and } (b,a)\in R \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; a=b$
הופכי R^{-1}	$(a,b)\in R^{-1} \text{ and } (b,a)\in R^{-1} \;\Rightarrow\; (b,a)\in R \text{ and } (a,b)\in R \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; a=b$
כפל RS	דוגמה נגדית: $RS=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix} \Leftarrow S=\begin{pmatrix}34\\21\end{pmatrix},\ R=\begin{pmatrix}12\\34\end{pmatrix}$
חזקה $R^n\ (n\ge 1)$	דוגמה נגדית: $R^2=\begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix} \Leftarrow R=\begin{pmatrix}1234\\3421\end{pmatrix}$
הפרש $R-S$	$(a,b)\in R-S \text{ and } (b,a)\in R-S \;\Rightarrow\; (a,b)\in R \text{ and } (b,a)\in R \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; a=b$
משלים R'	דוגמה נגדית מעל $A=\{1,2\}$: $R^{-1}=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix} \Leftarrow R=I_A$

<u>טרנזיטיביות</u>

איחוד $R\cup S$	דוגמה נגדית: $R\cup S=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix} \Leftarrow S=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, R=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
חיתוך $R\cap S$	$(a,b)\in R\cap S \text{ and } (b,c)\in R\cap S \Rightarrow$ $\Rightarrow \big((a,b)\in R \text{ and } (b,c)\in R\big)$ and $\big((a,b)\in S \text{ and } (b,c)\in S\big) \Rightarrow$ $\Rightarrow (a,c)\in R \text{ and } (a,c)\in S \Rightarrow (a,c)\in R\cap S$
הופכי R^{-1}	$(a,b)\in R^{-1} \text{ and } (b,c)\in R^{-1} \Rightarrow (b,a)\in R \text{ and } (c,b)\in R \Rightarrow$ $\Rightarrow (c,a)\in R \Rightarrow (a,c)\in R^{-1}$
כפל RS	דוגמה נגדית: $RS=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix} \Leftarrow S=\begin{pmatrix}34\\21\end{pmatrix}, R=\begin{pmatrix}12\\34\end{pmatrix}$
חזקה $R^n\ (n\ge 1)$	למה 2: R טרנזיטיבי אםם $R^2\subseteq R$. הוכחת הכיוון הראשון: $(a,b)\in R^2 \Rightarrow (a,x)\in R \text{ and } (x,b)\in R \Rightarrow (a,b)\in R$ הוכחת הכיוון השני: $(a,b)\in R \text{ and } (b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R^2 \Rightarrow (a,c)\in R$ ועכשיו באינדוקציה: נתון ש- R^1 טרנזיטיבי, ועל-כן $R^2\subseteq R$ (למה 2). אם R^n טרנזיטיבי עבור $n\ge 1$ אז $R^{2n}\subseteq R^n$ (למה 2). מלמה 1 מקבלים: $R^2R^{2n}\subseteq RR^n$, כלומר: $R^{2(n+1)}\subseteq R^{n+1}$, ולכן גם R^{n+1} טרנזיטיבי (למה 2).
הפרש $R-S$	דוגמה נגדית: $R-S=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix} \Leftarrow S=\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}, R=\begin{pmatrix}1212\\2112\end{pmatrix}$
משלים R'	דוגמה נגדית מעל $A=\{1,2\}$: $R^{-1}=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix} \Leftarrow R=I_A$