שאלה 1

א. המאורע A_1 מתרחש רק אם במקום 1 מתחיל רצף של 3 כדורים אדומים, שמסתיים במקום 3. כלומר, כדי שהמאורע יתרחש, חייבים להיות כדורים אדומים במקומות 1-3 במעגל, אבל חייבים להיות גם כדורים כחולים במקומות 50 ו- 4, ש"יגדירו" את תחילת הרצף ואת סופו.

לפיכך: $P(A_1) = P(\text{BRRRB}) = 0.5^5 = \frac{1}{32} = 0.03125$

כמו כן: $P(A_2) = P(\text{B}) = 0.5$

אבל: $P(A_1 \cap A_2) = P(\text{BRRRB}) = 0.5^5 = \frac{1}{32} = 0.03125$

ומכאן שתנאי האי-תלות לא מתקיים והמאורעות תלויים זה בזה. (למעשה, A_2 מוכל ב- A_1.)

ב. נגדיר: $X_i = \begin{cases} 1 & , \text{במקום } i \text{ במעגל מתחיל רצף באורך 2 של כדורים אדומים} \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$ לכל $i = 1,2,\ldots,50$.

כאשר $X = \sum_{i=1}^{50} X_i$ = הוא מספר הרצפים באורך 2 של כדורים אדומים שהתקבלו במעגל.

כעת, נשים לב, שהמאורע $X_i = 1$, לכל $i = 1,\ldots,50$, מתרחש אם ורק אם במקום i ובמקום שאחריו יש כדורים אדומים ובמקומות שלצידי הרצף של הכדורים האדומים יש כדורים כחולים.

לכן: $P\{X_i = 1\} = P(\text{BRRB}) = 0.5^4 = \frac{1}{16} = 0.0625 \quad , \quad i = 1,2,...,50$

ומכאן, שמתקיים: $E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{50} X_i\right] = \sum_{i=1}^{50} E[X_i] = 50 \cdot 0.0625 = 3.125$

ג. מהסעיף הקודם נקבל כי:

$$\text{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = \frac{1}{16} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{256} = 0.05859375 \quad , \quad i = 1,2,...,50$$

כמו כן, לכל $i \neq j$, כך ש- $i, j = 1,\ldots,50$, מתקיים:

$$E[X_iX_j] = P\{X_i = 1, X_j = 1\} = \begin{cases} 0 & , \ |i-j| = 1,2 \\ 0.5^7 & , \ |i-j| = 3 \qquad (\text{...THHTHHT...}) \\ 0.5^8 & , \ |i-j| \geq 4 \qquad (\text{...THHT...THHT...}) \end{cases}$$

הערה: כאשר כתוב $|i-j| = n$, הכוונה לשני מקומות במעגל ש<u>מבדילים ביניהם</u> $n-1$ מקומות.

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E[X_iX_j] - E[X_i]E[X_j] = \begin{cases} 0 - \left(\frac{1}{16}\right)^2 = -\frac{1}{256} & , \ |i-j| = 1,2 \\ 0.5^7 - \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1}{256} & , \ |i-j| = 3 \\ 0.5^8 - \left(\frac{1}{16}\right)^2 = 0 & , \ |i-j| \geq 4 \end{cases}$$

ולכן:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right) = \sum_{i=1}^{50}\mathrm{Var}(Y_i) + \sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

$$= 50 \cdot \tfrac{15}{256} + 2 \cdot (50+50) \cdot (-\tfrac{1}{256}) + 2 \cdot 50 \cdot \tfrac{1}{256} = \tfrac{325}{128} = 2.539$$

שאלה 2

א. לפי נתוני הבעיה, למשתנה המקרי X יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 10, ולמשתנה המקרי המותנה Y בהינתן $X = i$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים i ו- ⅓. לכן, בהכרח מתקיים $Y \le X$, והערכים האפשריים של i ו- j, שבהם ההסתברות המשותפת מקבלת ערכים חיוביים הם:

$$\{(i,j):\ i = 0,1,...\ ;\ j = 0,1,\ldots, i\}$$

או לחלופין:

$$\{(i,j):\ i = j, j+1,\ldots\ ;\ j = 0,1,...\}$$

כעת, לכל $i = 0,1,...$ ולכל $j = 0,1,...,i$, מתקיים:

$$P\{X=i, Y=j\} = P\{X=i\}P\{Y=j \mid X=i\} = e^{-10}\frac{10^i}{i!}\cdot\binom{i}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^j\left(\frac{2}{3}\right)^{i-j} = e^{-10}\frac{1}{j!\,(i-j)!}\cdot 10^i\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^j\left(\frac{2}{3}\right)^{i-j}$$

ב.

$$P\{Y=j\} = \sum_{i=j}^{\infty} P\{X=i, Y=j\} = \sum_{i=j}^{\infty} e^{-10}\frac{1}{j!\,(i-j)!}\cdot 10^i\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^j\left(\frac{2}{3}\right)^{i-j}$$

$$= e^{-10}\cdot\frac{1}{j!}\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^j \underbrace{\sum_{i=j}^{\infty}\frac{1}{(i-j)!}\cdot\left(\frac{20}{3}\right)^{i-j}}_{=e^{20/3}}$$

$$= e^{-10+20/3}\cdot\frac{1}{j!}\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^j = e^{-10/3}\cdot\frac{1}{j!}\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^j$$

קיבלנו של- Y יש התפלגות שולית פואסונית עם הפרמטר $\frac{10}{3}$.

דרך נוספת:

אפשר גם להעזר בטענה המובאת במדריך הלמידה בדוגמה 2ב (עמוד 138), שכן מספר הכדורים שמוצאים מן הארגז הוא משתנה מקרי פואסוני (עם הפרמטר 10) וכל כדור שמוצא מן הארגז מוכנס לתא 1, בהסתברות ⅓. לפיכך, מספר הכדורים שמוכנסים לתא 1 הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $10\cdot\frac{1}{3}$.

ג. קל לראות שהמשתנים תלויים בעזרת השוואה בין ההתפלגות השולית של Y להתפלגות המותנית של Y.

למשל: $P\{Y=0\} = e^{-10/3}$

אך: $P\{Y=0 \mid X=1\} = \frac{2}{3}$

כלומר, התנאי השקול לתנאי האי-תלות לא מתקיים, ולכן המשתנים המקריים תלויים זה בזה.

שאלה 3

א. הוכחת הטענה מובאת באתר הקורס ובמדריך הלמידה (פרק 5).

ב. 1. דוגמה לפונקציית התפלגות מצטברת רציפה היא הפונקציה של ההתפלגות המעריכית עם הפרמטר λ.

כלומר, עבור X עם התפלגות כזאת, מתקיים:
$$F_X(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x} & , \quad x>0\end{cases}$$

ב. 2. דוגמה לפונקציית התפלגות מצטברת שהיא רציפה מימין, אך אינה רציפה, היא פונקציה של התפלגות בדידה. נתבונן למשל, על פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי ברנולי עם הפרמטר 0.5:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0\\ 0.5 & , \quad 0\le x<1\\ 1 & , \quad x\ge 1\end{cases}$$

מתקיים בה $F_X(0)=0.5$, אבל $\lim_{n\to\infty} F_X(-\frac{1}{n})=0\ne 0.5$, ולכן איננה רציפה.

שאלה 4

א. לכל $x\ge 2\theta>0$ מתקיים:

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=\int_{2\theta}^{x} f_X(t)\,dt=\int_{2\theta}^{x}\frac{8\theta^2}{t^3}dt=\left.\frac{8\theta^2}{-2t^2}\right|_{2\theta}^{x}=4\theta^2\left(\frac{1}{4\theta^2}-\frac{1}{x^2}\right)=1-\frac{4\theta^2}{x^2}$$

כלומר, מתקיים:
$$F_X(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\le 2\theta\\ 1-\dfrac{4\theta^2}{x^2} & , \quad x\ge 2\theta\end{cases}$$

ב.
$$E[X]=\int_{2\theta}^{\infty} x f_X(x)\,dx=\int_{2\theta}^{\infty}\frac{8\theta^2}{x^2}dx=\left.\frac{8\theta^2}{-x}\right|_{2\theta}^{\infty}=0+\frac{8\theta^2}{2\theta}=4\theta$$

ג.
$$P\{X>3\theta \mid X<5\theta\}=\frac{P\{X>3\theta, X<5\theta\}}{P\{X<5\theta\}}=\frac{P\{3\theta<X<5\theta\}}{P\{X<5\theta\}}$$

$$=\frac{F_X(5\theta)-F_X(3\theta)}{F_X(5\theta)}=\frac{(1-\frac{4}{25})-(1-\frac{4}{9})}{(1-\frac{4}{25})}=0.3386$$

ד. תחילה, נחשב את ההסתברות של המאורעות $\{Y_i=1\}$: $\quad P\{Y_i=1\}=P\{X_i\le 4\theta\}=1-\frac{4}{16}=0.75$

לפיכך, למשתנה המקרי $\sum_{i=1}^{50} Y_i$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 50 ו- 0.75, ומתקיים:

$$P\{36\le \sum_{i=1}^{50} Y_i\le 37\}=\binom{50}{36}\cdot 0.75^{36}\cdot 0.25^{14}+\binom{50}{37}\cdot 0.75^{37}\cdot 0.25^{13}=0.111+0.126=0.237$$

שאלה 5

א. נסמן ב- X את מספר הכדורים הלבנים שייבחרו. לפי נתוני השאלה: $X \sim HG(N=18, m=10, n=5)$

לכן: $\mathrm{Var}(X) = \frac{18-5}{18-1} \cdot 5 \cdot \frac{10}{18} \cdot \frac{8}{18} = 0.9441$

ב. $$\frac{\binom{3}{2}\left[\binom{10}{2}\binom{5}{1}+\binom{10}{3}\right]}{\binom{3}{2}\binom{15}{3}} = \frac{\binom{10}{2}\binom{5}{1}+\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{1{,}035}{1{,}365} = \frac{345}{455} = 0.7582$$

במונה, הסתברויות של שני מאורעות:

1. נבחרו 2 אדומים ו-2 לבנים ו-1 שחור; 2. נבחרו 2 אדומים ו-3 לבנים.

במכנה, הסתברות המאורע המַתנה: נבחרו 2 אדומים ועוד 3 כדורים שאינם אדומים.

ג. נסמן ב- R_i את מספר הכדורים האדומים שנבחרו בפעם ה- i-ית, לכל $i = 1,2$.

$$P\{R_2=2\} = P\{R_1=0, R_2=2\} + P\{R_1=1, R_2=2\}$$

$$= \frac{\binom{3}{0}\binom{15}{5}\cdot\binom{3}{2}\binom{10}{3}+\binom{3}{1}\binom{15}{4}\cdot\binom{2}{2}\binom{11}{3}}{\binom{18}{5}\binom{13}{5}} = 0.09804 + 0.06127 = 0.1593$$

הערה: הואיל ואין שום מידע לגבי הבחירה של 5 הכדורים הראשונים, ההסתברות שקיבלנו שווה להסתברות שייבחרו בדיוק 2 כדורים אדומים בבחירה הראשונה של 5 הכדורים.

כלומר, שווה ל: $\frac{\binom{3}{2}\binom{15}{3}}{\binom{18}{5}} = \frac{1{,}365}{8{,}568} = 0.1593$

ד. נסמן ב- Y_i את מספר הכדורים הלבנים שייבחרו בחזרה ה-i-ית, לכל $i = 1,2,\ldots,90$.

ה-Y_i-ים בלתי-תלויים, ולכל $i = 1,2,\ldots,90$ מתקיים:

$$E[Y_i] = 5 \cdot \tfrac{10}{18} = 2.7778 \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(Y_i) = \tfrac{18-5}{18-1} \cdot 5 \cdot \tfrac{10}{18} \cdot \tfrac{8}{18} = 0.9441$$

לכן: $E[Y] = 90 \cdot 2.7778 = 250 \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(Y) = 90 \cdot 0.9441 = 84.967$

כעת, נשתמש באי-שוויון צ'בישב כדי למצוא חסם עליון להסתברות של המאורע הנתון. נקבל:

$$P\{|Y-250| \ge 13\} \le \frac{84.967}{13^2} = 0.503$$