פתרון מבחן מועד 82 מתאריך 23/1/2019

שאלה 1 (25 נקודות)

(5 נק׳) א. הוכיחו שאם A ו- B הם מאורעות בלתי תלויים זה בזה, אזי $\bar{A}$ ו- $\bar{B}$ יהיו מאורעות בלתי תלויים זה בזה ($\bar{A}$ ו - $\bar{B}$ מייצגים את המאורעות המשלימים ל A ו- B בהתאמה)

(12 נק׳) ב. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה. הוכיחו שלמשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X+Y=n$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$.

(8 נק׳) ג. הראו שאם משתנה מקרי מתפלגת מעריכית עם פרמטר λ, אז פונקצית היוצרת מומנטים שלו היא $M_X(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t}$ כאשר $t<\lambda$.

פתרון :

א. נתון ש A ו- B בלתי-תלויים, ולכן מתקיים ש: $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. כדי להוכיח ש $\bar{A}$ ו- $\bar{B}$ מאורעות בלתי תלויים זה בזה, נראה שמתקיים: $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})$.

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})\overset{1}{=}1-P(AUB)\overset{2}{=}1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]=$$
$$\overset{3}{=}1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)\overset{4}{=}1-P(A)-P(B)\left(1-P(A)\right)$$
$$=\left(1-P(A)\right)\left(1-P(B)\right)\overset{5}{=}P(\bar{A})P(\bar{B})$$

<u>נימוקים:</u>

1- הסתברות למאורע משלים.

2- כלל ההכלה וההפרדה.

3- תנאי האי תלות בין A ו- B.

4- פירוק לגורמים.

5- הסתברות למאורע משלים.

ב. הערכים האפשריים של שני המשתנים הפואסוניים הם כל השלמים <u>האי-שליליים</u>.

לכן, בהינתן ש- $X+Y=n$, הערכים האפשריים של X הם כל השלמים בין 0 ל- n .

לפיכך, לכל $i=0,1,\ldots,n$, מתקיים :

$$P\{X=i \mid X+Y=n\} = \frac{P\{X=i, X+Y=n\}}{P\{X+Y=n\}}$$ [הערכים האפשריים של X ו-Y שלמים אי-שליליים]

$$= \frac{P\{X=i, Y=n-i\}}{P\{X+Y=n\}} = \frac{P\{X=i\}P\{Y=n-i\}}{P\{X+Y=n\}}$$ [X ו-Y בלתי-תלויים]

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda_X}} \cdot \frac{\lambda_X^i}{i!} \cdot \cancel{e^{-\lambda_Y}} \cdot \frac{\lambda_Y^{n-i}}{(n-i)!}}{\cancel{e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)}} \cdot \frac{(\lambda_X+\lambda_Y)^n}{n!}}$$ [$X+Y$ מתפלג פואסונית עם $\lambda_X+\lambda_Y$]

$$= \binom{n}{i} \cdot \left(\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^i \cdot \left(\frac{\lambda_Y}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^{n-i} \qquad , \qquad i=0,1,\ldots,n$$

קיבלנו של- X בהינתן $X+Y=n$ יש פונקציית הסתברות בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$, ולכן זוהי התפלגותו.

ג. נבנה את פונקציית יוצרת המומנטים של ההתפלגות המעריכית :

$$M_X(t) \overset{1}{=} E[e^{tX}] \overset{2}{=} \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda-t)x}dx = \left.\frac{-\lambda e^{-(\lambda-t)x}}{\lambda-t}\right|_0^\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-\lambda e^{-(\lambda-t)x}}{\lambda-t} - \frac{-\lambda e^{-(\lambda-t)0}}{\lambda-t} \overset{3}{=} \frac{\lambda}{\lambda-t}$$

<u>נימוקים :</u>

1- לפי הגדרה של פונקציה יוצרת מומנטים.

2- לפי תכונות התוחלת של משתנה מקרי רציף.

3- כדי שהגבול יתכנס נדרוש $t<\lambda$.

שאלה 2 (25 נקודות)

לאונרד משחק בכל יום במשחק מחשב. יהי X -משך הזמן (בדקות) שהוא מקדיש מדי יום למשחק . X מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x)=\begin{cases}0 & x<b\\ a & b\le x<b+2\\ 2a & b+2\le x<b+3\\ a & b+3\le x<b+5\\ c & b+5\le x\end{cases}$$

כמו כן ידוע ש: $E[X]=12.5$.

(8 נק׳) א. חשבו את ערכי הפרמטרים a,b,c .

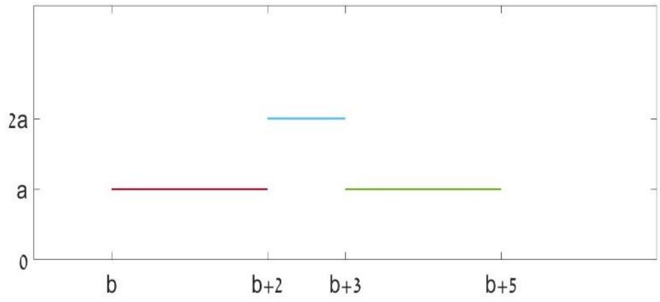
(7 נק׳) ב. חשבו את $Var(X)$.

(10 נק׳) ג. לאונרד החליט שהוא סופר את מספר הימים שעוברים החל מהיום ועד היום בו הוא ישחק יותר מ-13 דקות (היום בו הוא משחק יותר מ- 13 דקות <u>לא נספר</u>). משך הזמן שלאונרד מקדיש למשחק בימים שונים בלתי-תלויים. נגדיר את W להיות מספר הימים שיספרו על ידי לאונרד. מצאו את התוחלת והשונות של W.

<u>פתרון :</u>

א. כיוון שסך השטח מתחת לפונקציית הצפיפות שווה ל-1 נקבל ש $\boxed{c=0}$.

נצייר את פונקציית הצפיפות:



סך השטח מתחת לפונקציית הצפיפות שווה ל-1 ולכן נקבל $2a+2a+2a=1$ כלומר $\boxed{a=\frac{1}{6}}$.

כיוון שפונקציית הצפיפות סימטרית, התוחלת מתקבלת בציר הסימטריה ולכן $E[X]=\frac{b+b+5}{2}=b+2.5$ ומהנתון $E[X]=12.5$ ניתן להסיק ש $\boxed{b=10}$.

ב.

$$E\left[X^2\right]=\int_{x=10}^{12}\frac{1}{6}x^2dx+\int_{x=12}^{13}\frac{1}{3}x^2dx+\int_{x=13}^{15}\frac{1}{6}x^2dx=\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{10}^{12}+\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{12}^{13}+\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{13}^{15}=158$$

$$Var(X)=E\left[X^2\right]-\left(E[X]\right)^2=158-12.5^2=\boxed{1.75}$$

ג. ההסתברות שהמשחק נמשך יותר מ-13 דקות היא השטח של המלבן הימני הקטן שבשרטוט שבסיסו 2 וגובהו $\frac{1}{6}$ ולכן, $P(X>13)=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

נסמן ב- R את מספר הימים שיספרו כולל היום שבו המשחק נמשך יותר מ- 13 דקות.

מתקיים ש $R\sim G\left(\frac{1}{3}\right)$ ולכן $E[R]=\frac{1}{1/3}=3$ ו- $Var(R)=\frac{2/3}{(1/3)^2}=6$. כיוון שהמשתנה W מוגדר ללא היום שבו המשחק נמשך יותר מ- 13 דקות מתקיים ש: $W=R-1$. נשתמש בתכונות התוחלת והשונות ונקבל: $E[W]=E[R-1]=E[R]-1=3-1=\boxed{2}$

$.Var(W)=Var(R-1)=Var(R)=\boxed{6}$

שאלה 3 (25 נקודות)

(16נק') א. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכולם התפלגות אחידה בדידה בין 0 ל-10. (כלומר, כל אחד מן המשתנים מקבל את הערכים 0, 1, ..., 10 בהסתברויות שוות).

1) חשב את $P\left\{\min_{i=1,\ldots,10} X_i \le 2\right\}$.

2) מה ההסתברות שמבין 10 ה-X_i-ים יהיו בדיוק 5 שיקבלו ערך שאינו עולה על 4 ובדיוק 3 שיקבלו ערך בין 5 ל-8 (כולל 5 וכולל 8)?

(9 נק') ב. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת סופית μ ושונות סופית σ^2. הניחו ש-n גדול. חשבו **קירוב** ל- $P\left\{\bar{X} \le \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} + \mu\right\}$.

פתרון:

א. לכל $i = 1,\ldots,10$, הערכים האפשריים של X_i הם $0, 1, \ldots, 10$ וכל אחד מהם מתקבל בהסתברות $\frac{1}{11}$.

.1
$$P\left\{\min_{i=1,\ldots,10} X_i \le 2\right\} = 1 - P\left\{\min_{i=1,\ldots,10} X_i > 2\right\} = 1 - P\{X_1 > 2, X_2 > 2, \ldots, X_{10} > 2\}$$

כיוון שהמשתנים הם בלתי תלויים זה בזה מתקיים ש :

$$1 - P\{X_1 > 2, X_2 > 2, \ldots, X_{10} > 2\} = 1 - P\{X_1 > 2\} \cdot P\{X_2 > 2\} \cdot \ldots \cdot P\{X_{10} > 2\}$$

כיוון שהמשתנים כולם מתפלגים אחיד בין 0 ל-10 , מתקיים ש :

$P\{X_i > 2\} = \frac{8}{11} \forall i = 1,2,\ldots,10$ ולכן :

$$1 - P\{X_1 > 2\} \cdot P\{X_2 > 2\} \cdot \ldots \cdot P\{X_{10} > 2\} = 1 - \left(\frac{8}{11}\right)^{10} = \boxed{0.9586}$$

.2 נשתמש בפונקציית ההסתברות המולטינומית, כדי לקבל את ההסתברות המבוקשת :

$$\frac{10!}{5!3!2!} \cdot \left(\frac{5}{11}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{11}\right)^2 = \boxed{0.0777}$$

ב. נעזר במשפט הגבול המרכזי :

$$P\left\{\bar{X} \le \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} + \mu\right\} = P\left\{\bar{X} - \mu \le \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = P\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 2\right\} \cong P\{Z \le 2\} = \Phi(2) = \boxed{0.9772}$$

<u>שאלה 4 (25 נקודות)</u>

מיכל מסדרת על השולחן בסדר <u>אקראי</u> שורה של 12 כוסות משקה: 2 כוסות שמפנייה, 4 כוסות של יין לבן ו-6 כוסות של יין אדום.

(12 נק׳) א. נסמן ב- U את מספר הכוסות של יין אדום במקומות 1,2,3. וב- W את מספר הכוסות של יין אדום במקומות 4,7,11.

1) חשבו את $E[U-W]$.

2) חשבו את $Var(U+W)$.

3) חשבו את $Cov(U,W)$.

(5 נק׳) ב. מצאו את התפלגות מספר הכוסות שנמצאות בין 2 כוסות השמפנייה.

(8 נק׳) ג. מיכל בוחרת כוס אקראית ושותה אותה. אם הכוס היא כוס שמפנייה היא מספרת 4 בדיחות לחבריה כך שלכל בדיחה יש סיכוי של 0.5 להצחיק את החברים ללא תלות בבדיחה אחרת. אם היא שותה כוס יין היא מספרת 8 בדיחות לחבריה כך שלכל בדיחה יש סיכוי של 0.3 להצחיק את החברים ללא תלות בבדיחה אחרת. מה ההסתברות שבדיוק 4 בדיחות של מיכל יצחיקו את חבריה?

<u>פתרון:</u>

א.

1. לפי הנתונים מתקבל שלשני המשתנים יש אותה התפלגות. עבור שניהם מתקבל $U,V \sim HG(12,6,3)$. מכאן ש: $E[U]=E[W]$ ולפי הלינאריות של התוחלת $E[U-W]=E[U]-E[W]=\boxed{0}$.

2. המשתנה $U+W$ סופר את מספר כוסות היין האדום בששת המקומות 1,2,3,4,7,11 ולכן $U+W \sim HG(12,6,6)$. לפי נוסחת השונות של ההתפלגות ההיפר-גאומטרית:

$$Var(U+W)=6\cdot\frac{6}{12}\left(1-\frac{6}{12}\right)\cdot\frac{12-6}{12-1}=\boxed{\frac{9}{11}}$$

3. לפי נוסחת השונות של ההתפלגות ההיפר-גאומטרית נקבל ש:

$$Var(U)=Var(W)=3\cdot\frac{6}{12}\left(1-\frac{6}{12}\right)\cdot\frac{12-3}{12-1}=\frac{27}{44}$$

כיוון ש: $Var(U+W)=Var(U)+Var(W)+2COV(U,W)$

נקבל ש:

$$COV(U,W)=0.5\left[Var(U+W)-Var(U)-Var(W)\right]==0.5\left[\frac{9}{11}-\frac{27}{44}-\frac{27}{44}\right]=\boxed{-\frac{9}{44}}$$

ב. נבחר את 2 המקומות של כוסות השמפנייה מתוך השורה. ולכן גודל מרחב המדגם: $|\Omega|=\binom{12}{2}=66$

הערכים האפשריים של המשתנה המקרי הם: $0,1,\ldots,10$.

ופונקציית ההסתברות המתקבלת היא: $P(X=k)=\boxed{\frac{11-k}{66}}$

ג. נסמן:

A - המאורע 'מיכל תשתה כוס שמפנייה'.

X מספר הבדיחות שיצחיקו את החברים.

$$X \mid A \sim B(4,0.5) \qquad X \mid \overline{A} \sim B(8,0.3)$$

$$P(A)=\frac{2}{12}$$

ולכן:

$$P(X=4 \mid A)=0.5^4=0.0625$$

$$P(X=4 \mid \overline{A})=\binom{8}{4}0.3^4(1-0.3)^4=0.1362$$

נציב בנוסחת ההסתברות השלמה ונקבל:

$$P(X=4)=P(X=4 \mid A)P(A)+P(X=4 \mid \overline{A})P(\overline{A})==\frac{2}{12}\cdot 0.0625+\frac{10}{12}\cdot 0.2311=\boxed{0.1239}$$

שאלה 5 (25 נקודות)

לערן יש 10 גיבורי-על חביבים, ולכן יש לו 20 בובות קטנות של גיבורי-העל – 2 בובות של כל גיבור-על. ערן מסדר את הבובות על 8 מדפים: ב-4 מדפים יש מקום ל-3 בובות וב-4 מדפים יש מקום ל-2 בובות.

מדף נחשב <u>מדף-על</u> אם יש עליו 2 בובות של אותו גיבור על.

נסמן ב- X את מספר המדפים שהם מדפי-על מתוך 8 המדפים.

(5 נק') א. מה ההסתברות שמדף גדול (מדף שיש בו מקום ל- 3 בובות) יהיה <u>מדף על</u>?

(8 נק') ב. חשבו את $E\left[X\right]$.

(12 נק') ג. חשבו את $Var\left(X\right)$.

<u>פתרון :</u>

א. נתייחס רק למדף גדול אחד ונחשב את הסיכוי שיהיו בו 2 בובות של אותו גיבור על. מספר האפשרויות לניסוי עצמו יהיה : $\binom{20}{3}$ ומתוכם נספור כמה אפשרויות יש למדף על. ראשית נבחר את גיבור העל : לכך יש $\binom{10}{1}$ אפשרויות ואז נבחר בובה נוספת מאלה שנותרו : $\binom{18}{1}$. כך שנקבל :

$$\frac{\binom{10}{1}\binom{18}{1}}{\binom{20}{3}}=\boxed{\frac{3}{19}}$$

ב. נחשב את התוחלת של X על ידי פירוקו לאינדיקטורים. נגדיר משתנה אינדיקטור באופן הבא :

$$1\le i\le 8 \quad X_i=\begin{cases}1 & \text{shelf i is a super shelf}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

וכמו כן $X=\sum_{i=1}^{8}X_i$.

נשים לב שישנם 2 סוגים של מדפים.

נחליט שמדפים 1,2,3,4 הם מדפים של 2 בובות ומדפים 5,6,7,8 הם מדפים של 3 בובות.

עבור מדף של 2 בובות: ישנן $\binom{20}{2}$ אפשרויות לבחור את 2 הבובות, אבל יש $\binom{10}{1}$ אפשרויות לבחור אותן מאותו גיבור-על. לכן :

$$i\in\{1,2,3,4\} \quad E\left(X_i\right)=P\left(X_i=1\right)=\frac{\binom{10}{1}}{\binom{20}{2}}=\frac{1}{19}$$

עבור מדף של 3 בובות: הסיכוי שהמדף יהיה מדף על חושב בסעיף א , ולכן:

$$i \in \{5,6,7,8\} \quad E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{\binom{10}{1}\binom{18}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{3}{19}$$

נסכם ונקבל:

$$E[X] = 4 \cdot \frac{1}{19} + 4 \cdot \frac{3}{19} = \boxed{\frac{16}{19}}$$

ג. ראשית נחשב את שונויות האינדיקטורים:

$$i \in \{1,2,3,4\} \quad Var(X_i) = \frac{1}{19}\left(1 - \frac{1}{19}\right) = \frac{18}{361}$$

$$i \in \{5,6,7,8\} \quad Var(X_i) = \frac{3}{19}\left(1 - \frac{3}{19}\right) = \frac{48}{361}$$

בחישוב השונויות המשותפות נפריד ל-3 מקרים.

- עבור $i \in \{1,2,3,4\}, j \in \{1,2,3,4\}$ - $\binom{4}{2}$ זוגות של שונויות משותפות , $i \neq j$.

ישנן $\binom{20}{2}$ אפשרויות לבחור בובות למדף i ואז $\binom{18}{2}$ אפשרויות לבחור בובות למדף j . כדי ששני המדפים יהיו מדפי-על, יש 10 אפשרויות לבחור גיבור-על עבור מדף i וממנו 2 בובות, ו-9 אפשרויות לבחור גיבור-על עבור מדף j וממנו 2 בובות. נקבל:

$$P(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{10 \cdot 9}{\binom{20}{2}\binom{18}{2}} = \frac{1}{323}$$

$$COV(X_i, X_j) = \frac{1}{323} - \frac{1}{19} \cdot \frac{1}{19} = \frac{2}{6137}$$

- עבור $i\in\{1,2,3,4\},\ j\in\{5,6,7,8\}$ - $4\cdot 4$ זוגות של שונויות משותפות , $i\neq j$.

ישנן $\binom{20}{2}$ אפשרויות לבחור בובות למדף i ואז $\binom{18}{3}$ אפשרויות לבחור בובות למדף j . כדי ששני המדפים יהיו מדפי-על, יש 10 אפשרויות לבחור גיבור-על עבור מדף i וממנו 2 בובות, 9 אפשרויות לבחור גיבור-על עבור מדף j וממנו 2 בובות, ו-16 אפשרויות לבחור בובה נוספת למדף j . נקבל:

$$P\left(X_i=1,X_j=1\right)=\frac{10\cdot 9\cdot 16}{\binom{20}{2}\binom{18}{3}}=\frac{3}{323}$$

$$COV\left(X_i,X_j\right)=\frac{3}{323}-\frac{1}{19}\cdot\frac{3}{19}=\frac{6}{6137}$$

- עבור $i\in\{5,6,7,8\},\ j\in\{5,6,7,8\}$ - $\binom{4}{2}$ זוגות של שונויות משותפות , $i\neq j$.

ישנן $\binom{20}{3}$ אפשרויות לבחור בובות למדף i ואז $\binom{17}{3}$ אפשרויות לבחור בובות למדף j . כדי ששני המדפים יהיו מדפי-על, יש 10 אפשרויות לבחור גיבור-על עבור מדף i וממנו 2 בובות, 9 אפשרויות לבחור גיבור-על עבור מדף j וממנו 2 בובות, 16 אפשרויות לבחור בובה נוספת למדף i ו-15 אפשרויות לבחור בובה נוספת למדף j . נקבל:

$$P\left(X_i=1,X_j=1\right)=\frac{10\cdot 9\cdot 16\cdot 15}{\binom{20}{3}\binom{17}{3}}=\frac{9}{323}$$

$$COV\left(X_i,X_j\right)=\frac{9}{323}-\frac{3}{19}\cdot\frac{3}{19}=\frac{18}{6137}$$

נסכם ונקבל:

$$\begin{aligned}Var\left(X\right)&=4\cdot\frac{18}{361}+4\cdot\frac{48}{361}+\\&+2\left(\binom{4}{2}\cdot\frac{2}{6137}+\binom{4}{2}\cdot\frac{18}{6137}+4\cdot 4\cdot\frac{6}{6137}\right)=\boxed{\frac{4920}{6137}}\end{aligned}$$