אפריל בלוגם:

1. פולקינג - הצדיה.
2. שוון פולקינג - הצדיה.
3. תמונה של הקהל עם הילדים. חופשי - הילדים הקהל של תמונה
4. מלוי של הקהל עם הילדים. חוויה - הילדים הקהל של מלוי
5. הצדיה הכאה.

מדוע - להיות:

1. פועלים זה זה אחרים.
2. פועלים על.
3. פועלים יחדיו.
4. פועלים הפוכים.

פונקציה חח"ע

הגדרה:

$f: A \to B$ תיקרא חח"ע אם:

לכל $x, y \in A$. אם $f(x) = f(y)$ אז $x = y$.

הגדרה שקולה:

לכל $x, y \in A$. אם $x \neq y$ אז $f(x) \neq f(y)$.

הגדרה

$f: A \to B$ הוא חד-חד-ערכית אם:

(1) לכל $x, y \in A$ אם $f(x) = f(y)$ אז $x = y$.

(2) f היא על אם $\forall b \in B \; \exists a \in A \; f(a) = b$.

דוגמה

f אינה חד-חד-ערכית כיוון שמצאנו $x \neq y$ כך ש-$f(x) = f(y)$.
אבל, לכל $x, y \in A$. אם $f(x) = f(y)$ אז $x = y$.
לעומת זאת f היא על כי:

לכן הפונקציה אינה חח"ע.

$1 \neq 2$ אבל $f(1) = f(2)$.

אבל f אינה עולה ממש.

על A אין ב.ו.

② אם f חד חד ערכית אז לכל $y \in B$
יש אומר אחד בדיוק. $f^{-1}(\{y\})$ =

תשובה

נתון ש
אכן f חד חד
ערכית.

נתון ש $2 \in B$:

$f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$ מכיוון שאין בה אבר אחד
בדיוק. יכולה להיות

משפט

יהיו G חבורה ו-H תת-חבורה שלה. נגדיר יחס שקילות $\sim$ על G באופן הבא:

$$x \sim y \iff xy^{-1} \in H$$

אזי מחלקת השקילות של x היא Hx.

הוכחה

נראה ש-$\sim$ אכן יחס שקילות:

- רפלקסיביות: $x \sim x$ כי $xx^{-1} = e \in H$.
- סימטריות: אם $x \sim y$ אז $xy^{-1} \in H$, ולכן $(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1} \in H$, כלומר $y \sim x$.
- טרנזיטיביות: אם $x \sim y$ ו-$y \sim z$ אז $xy^{-1}, yz^{-1} \in H$, ולכן $xz^{-1} = (xy^{-1})(yz^{-1}) \in H$, כלומר $x \sim z$.

מחלקת השקילות של x היא:

$$[x] = \{y \in G \mid y \sim x\} = \{y \in G \mid yx^{-1} \in H\} = \{y \in G \mid y \in Hx\} = Hx$$

כאשר השוויון האחרון נובע מכך ש-$yx^{-1} \in H$ אם ורק אם $y \in Hx$.

תרגיל

יהי G חבורה ו-H תת-חבורה שלה. נגדיר יחס $\sim$ על G באופן הבא:

$$x \sim y \iff y^{-1}x \in H$$

הראו כי $\sim$ הוא יחס שקילות.

מצאו את מחלקת השקילות של $x \in G$.

מהצד השני: $a*y = a*x$

מהנחת הצמצום שלנו מתקיים כי $y = x$.

לכן f חח"ע.

תרגיל

יהי G חבורה ותהי $*$ פעולה בינארית על G.
יהי $a \in G$. נגדיר סחיה ב-G ע"י $*$.

לכל $f : G \to G$ עבור x:

$$f(x) = a * x \quad \text{לכל } x \in G.$$

הוכיחו f חח"ע ועל.

מוכנה

תשובה

נתון ש- $G = \{1, 2\}$ $a = 1$

$*$ סחיה ב-G.

x	1	2
1	1	1
2	1	1

לדוגמה $1, 2$:

$$f(1) = 1 * 1 = 1 = 1 * 2 = f(2)$$

אבל $1 \neq 2$.

לכן f אינה חד חד ערכית.

נ"ש

$g \circ f$ מ.ש $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$

יהי $x, y \in A$.

תשובה: נניח f חח"ע ו-$g \circ f$ חח"ע. צ"ל g חח"ע.

תהי f חח"ע ו-$g \circ f$ חח"ע. צ"ל g חח"ע.

הוכיחו זאת בפרט:

$g : B \to C$

$f : A \to B$

רמז

הוכחה:

② אם g חח"ע אז $g \circ f$ חח"ע אם"ם f חח"ע.

$\Rightarrow$ נניח ש-$g \circ f$ חח"ע. נראה ש-f חח"ע.

$f(x) = f(y)$ אז $g(f(x)) = g(f(y))$.

מאחר ש-g חח"ע נובע ש-$x = y$.

$\Leftarrow$ נניח ש-f חח"ע ו-g חח"ע. נראה ש-$g \circ f$ חח"ע.

$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ אז $g(f(x)) = g(f(y))$.

מאחר ש-g חח"ע נובע ש-$f(x) = f(y)$.

מאחר ש-f חח"ע נובע ש-$x = y$.

תשובה:

דוגמא ב':

אבל g כבר לא חח"ע.

דוגמא ב' $\forall 1,2 \in A$.

$1 \neq 2$ אבל $g \circ f(1) = 2 = g \circ f(2)$

לכן $g \circ f$ אינה חח"ע.

נ"ע.

(3) אם $f \circ g$ חד חד ערכית אז f חד חד ערכית.

הוכחה

נניח ש $f \circ g$ חד חד ערכית.

יהיו $x, y \in X$.

נניח ש $f(x) = f(y)$.

אזי $g(f(x)) = g(f(y))$

מהגדרת הרכבה $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y)$

$f \circ g$ חד חד ערכית אזי $x = y$ ומכאן ש g חד חד ערכית.

(4) אם $f \circ g$ חד חד ערכית אז g חד חד ערכית.

הוכחה

נניח ש:

נגד:

לכן $f \circ g$ חד חד ערכית.

যদি g এমন হয় যে $x_1 \neq x_2$ হলে $g(x_1) = g(x_2)$.

$x_1, x_2 \in B$ হলে $x_1 \neq x_2$ হবে।

যেমন : 2, 3.

הגדרות

הגדרה

$f: A \to B$ היא על אם לכל $y \in B$

קיים $x \in A$ כך ש $f(x) = y$.

יהי $y \in G$.

תשובה

הרעיון: f על.

$\exists x \in G$ כך ש $f(x) = a * x$.

לפי: $f : G \to G$ על, אז:

יהי $a \in G$.

יהי G חבורה ו-e איבר יחידה של $*$.

תרגיל

מתוך כך נובע שהעתקה הזו היא כ.

ל"ש $g \in G$ שעבורו $y = x * a$.

לעומת זאת ב X:

$g \in G$ יהי $y = x * a$ אז $f(x) = x * a = y$

לכן f על.

מ"ש.

g על וקיים $x \in B$ כך ש $g(x)=y$.

כלומר $y \in C$.

מ.ש f על אם g על.

הוכחה

① אם f על אז g על לפי הגדרת g.

② אם g חח"ע אז f חח"ע:

$g : B \to C$

$f : A \to B$

הגדרה

مرتبة،

لدى $f \circ g$ و g.

$$h = (x)g = (f(z))g = g(z) \circ f$$

لكل $z \in A$.

لكون z:

$$x = f(z) \text{ .}$$

$\exists x \in B$! عنصر لكل $z \in A$ بحيث

② אם $f \circ g$ על אז f על.

תשובה

דוגמה נ:

נשים:

$f \circ g$ על.

דוגמה נ 3:

f לא על כי $\exists B \in B$ ולכל $\forall x \in A$. $f(x) \neq 3$

Q.E.D.

③ אם $f\circ g$ על אז g על.

הוכחה

נ.ש. $f\circ g$ על.

יהי $y\in C$.

מכך ש $f\circ g$ על קיים $x\in A$ כך ש $y=(f\circ g)(x)$.

$f(x)$ מקיים g.

$f(x)\in B$ ולכן $y=(f\circ g)(x)=g(f(x))$

מש"ל.

פונקציה הפוכה של פונקציה

הגדרה

תהא A קבוצה.

פונקציה הפוכה של A מוגדרת על ידי:

$$I_A : A \to A$$

לכל $x \in A$. $I_A(x) = x$.

לכולם:

1. זה זה שקר.
2. עץ.
3. כל $f: A \to B$ מתקיים:

$$f \circ I_A = f$$

$$I_B \circ f = f$$

g הינה ההופכית של f ומסומן $g = f^{-1}$.

משפט

תהי $f: A \to B$ פונקציה חח"ע ועל. אזי קיימת $g: B \to A$ כך ש:

$$g \circ f = I_A$$

ו

$$f \circ g = I_B$$

הוכחת המשפט:

משפט

$f: A \to B$ הפיכה אם ורק אם f חח"ע ועל.

הערה

התאמה חח"ע ועל היא בדיוק פונקציה הפיכה

כלומר אין שני זוגות סדורים שונים עם אותו איבר ראשון.

תרגיל

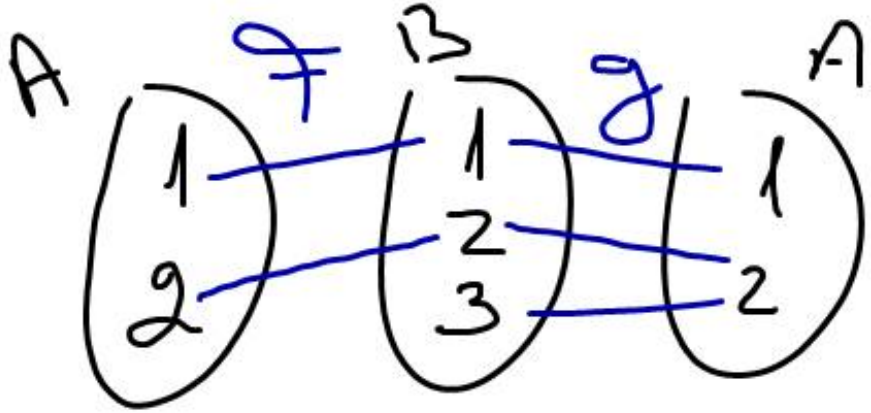
$f: A \to B$, $g: B \to A$

הוכיחו או הפריכו:

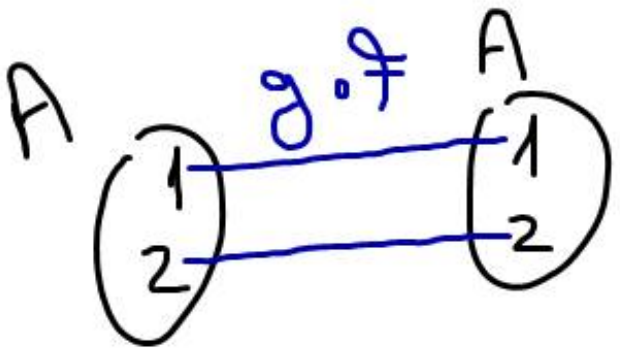
① אם $g \circ f = I_A$ אז $f \circ g = I_B$.

תשובה

לדוגמה:



נובע ש



$g \circ f = I_A$ כלומר

כאן מ:

$$f \circ g(3) = f(g(3)) = f(2) = 2 \neq 3$$

כלומר $f \circ g \neq I_B$.

הערה חשובה שנייה:

מטלה:

② אם $A = B$ אז $g \circ f = I_A$ וגם $f \circ g = I_B$.

דוגמה

יהי $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$: f, g שתי פונקציות כך ש :

$f(x) = x + 1$ כלומר f היא $x \in \mathbb{N}$.

$g(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ כלומר g היא $x \in \mathbb{N}$.

נ.ט.ש $\mu_I = f \circ g$:

הקיומים והנתונים על $f \circ g$ ועל μ_I שולים מהקודם.

יהי $x \in X$.

אם $x \geq 1$ אזי $x < 1 + x$.

אזי:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (1+x) g = x + 1 - 1 = x$$

$$= \mu_I(x) =$$

אזי $\mu_I = f \circ g$

$f \circ g(1) = f(g(1)) = f(5) = 6 \neq I_{\mathbb{N}}(1)$: כמו כן

לכן $I_{\mathbb{N}} \neq g \circ f$.

הערה: אין שוויון.

מ.ש.

③ אם $B = A$ הרי A פונקציית הזהות $I_A = f \circ g$

אלא f הפיכה.

הוכחה

נניח $B = A$ הרי A פונקציית הזהות $I_A = f \circ g$.

$f \circ g$ חח"ע אבל f לא בהכרח.

נגדיר $h : A \to \mathcal{P}(A)$ (קבוצת החזקה)

עבור $x \in A$ כלשהו $h(x) = f(x)$.

הוכחה: h היא חד חד ערכית:

יהיו $x, y \in A$.

נניח ש $h(x) = h(y)$

כלומר $f(x) = f(y)$ מהגדרת h

וזכור f היא חד חד ערכית לכן

$x = y$.

לכן h היא חד חד ערכית.

הוכחה: h על:

יהי $y \in f(A)$. לכן קיים $x \in A$ כך ש

$y=f(x)$. מהי בבר $f(A)$.

נשוין ב x.

$h(x)=f(x)=y$.

לכן h עח.

נבחר A שקיים $f(A)$

נראה כי: $A \supseteq f(A)$

יהי: $x \in f(A)$. לכן קיים $y \in A$

כך ש $x=f(y)$. f אומר בעצם לכל $x \in A$.

כל f עם תחום הוא ה.ע.

$\exists \omega \in A \; \forall x \in A \; f(x) \neq \omega$.

$\forall \omega \in A \; \exists V \in \mathcal{P}(A)$ כך ש $f(V) = \omega$

וזו סתירה.

A סופית אזי $V \neq f(V)$ לכל

$V \subseteq f(V)$ אזי $f(V) \neq A$ אזי קיים V כך ש

לשבוע הבא:

יחידה 7 – לקרוא, לפתור, לשנן.

לקרוא גם את הנוסף –
ולנסות את התרגילים באתר.

לדעת היטב את הנוכחי מפרק 3.4.7

מתן 14 – פתרון שבועי.