20416 - תאריך הבחינה: 25.8.2014 (סמסטר 2014ב - מועד 3ב / 92)

שאלה 1

א. לכל $y > 0$ מתקיים: $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{-\ln X \le y\} = P\{\ln X \ge -y\} = P\{X \ge e^{-y}\} = 1 - e^{-y}$

קיבלנו פונקציה התפלגות מצטברת של התפלגות אחידה (רציפה) על הקטע (0,1).

ב. המשתנים המקריים $X_1, X_2, \dots, X_n$ בלתי-תלויים זה בזה ולכולם התפלגות אחידה על הקטע (0,1), לפיכך:

$$E[Y_n] = E\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i] = (E[X_1])^n = 0.5^n$$

$$E[Y_n^2] = E\left[\prod_{i=1}^{n} X_i^2\right] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i^2] = (E[X_1^2])^n = (\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2)^n = (\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{4})^n = (\tfrac{1}{3})^n$$

ומכאן: $\mathrm{Var}(Y_n) = E[Y_n^2] - (E[Y_n])^2)^n = (\tfrac{1}{3})^n - (\tfrac{1}{4})^n$

ג. נשתמש בתוצאת סעיף א (שלכל $-\ln X_i$ התפלגות אחידה) ובאי-התלות בין ה- X_i-ים, ובעזרת משפט הגבול המרכזי נקבל כי לכל t ממשי מתקיים:

$$P\{Y_n \le e^{-n+t\sqrt{n}}\} = P\left\{\prod_{i=1}^{n} X_i \le e^{-n+t\sqrt{n}}\right\} = P\left\{\ln\prod_{i=1}^{n} X_i \le \ln e^{-n+t\sqrt{n}}\right\}$$

$$= P\left\{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i \le -n + t\sqrt{n}\right\} = P\left\{-\sum_{i=1}^{n}\ln X_i \ge n - t\sqrt{n}\right\} =$$

$$= P\left\{\frac{-\sum_{i=1}^{n}\ln X_i - n\cdot 1}{\sqrt{n\cdot 1}} \ge \frac{n - t\sqrt{n} - n\cdot 1}{\sqrt{n\cdot 1}}\right\} \cong P\{Z \ge -t\} = \Phi(t)$$

שאלה 2

מספר אפשרויות החלוקה בחזרה השנייה הוא: $n(S) = 5!\cdot 5! = 120^2$

א. המאורע המשלים למאורע, שיוחאי מקבל לפחות פריט אחד שאינו שלו, הוא המאורע שיוחאי מקבל את שני הפריטים שהביא. לפיכך, מקבלים: $1 - \frac{1\cdot 1\cdot (4!)^2}{(5!)^2} = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0.96$

ב. נסמן ב- A את המאורע שיוחאי קיבל לפחות פריט אחד שאינו שלו וב- B את המאורע שאהוד קיבל לפחות אחד מהפריטים של יוחאי. נשים לב שמתקיים $B \subset A$, ומכאן ש- $A \cap B = B$, ולכן:

$$P(B\,|\,A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1 - P(B^C)}{P(A)} = \frac{1 - \frac{4^2\cdot(4!)^2}{(5!)^2}}{0.96} = \frac{\frac{9}{25}}{0.96} = 0.375$$

הערה – אם לא מבחינים ביחס ההכלה בין המאורעות, אפשר לחשב את הסתברות החיתוך גם כך :
חיתוך המאורעות מתרחש בשלושה מקרים –

1. יוחאי קיבל בדיוק אחד מהפריטים שהביא, ואהוד קיבל את הפריט האחר של יוחאי ;
2. יוחאי לא קיבל אף אחד מהפריטים שהביא, ואהוד קיבל בדיוק פריט אחד של יוחאי ;
3. יוחאי לא קיבל אף אחד מהפריטים שהביא, ואהוד קיבל את שני הפריטים של יוחאי.

למקרה 1 יש הסתברות $\frac{(2\cdot 4)\cdot(1\cdot 4)}{5^2\cdot 4^2}=\frac{2}{25}=0.08$, כי יוחאי יכול לקבל את אחד מ-2 הפריטים שהביא ועוד פריט מהסוג השני שאינו שלו, ואילו אהוד מקבל את הפריט השני של יוחאי ועוד פריט מהסוג השני.

למקרה 2 יש הסתברות $\frac{(4\cdot 4)\cdot(2\cdot 3)}{5^2\cdot 4^2}=\frac{6}{25}=0.24$, כי יוחאי מקבל 2 פריטים שאינם שלו, ואילו אהוד מקבל אחד מהפריטים של יוחאי ועוד פריט מהסוג השני שאינו של יוחאי.

למקרה 3 יש הסתברות $\frac{(4\cdot 4)\cdot(1\cdot 1)}{5^2\cdot 4^2}=\frac{1}{25}=0.04$, כי יוחאי מקבל 2 פריטים שאינם שלו, ואילו אהוד מקבל את 2 הפריטים של יוחאי.

ומכאן, נחשב את ההסתברות המבוקשת :
$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2+6+1}{25}}{1-\frac{1\cdot 1}{5^2}}=\frac{9}{24}=0.375$$

ג. נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה, כדי לחשב את ההסתברות המבוקשת.

נסמן ב- A_i את המאורע שילד i קיבל את שני הפריטים שהביא, לכל $i=1,2,3,4,5$, ונחשב את ההסתברות של המאורע $A_1^C\cap\ldots\cap A_5^C$. תנאי הבעיה סימטריים, לכן :

$$\begin{aligned}P(A_1^C\cap\ldots\cap A_5^C)&=1-P(A_1\cup\ldots\cup A_5)\\&=1-\left[\binom{5}{1}P(A_1)-\binom{5}{2}P(A_1\cap A_2)+\ldots+\binom{5}{5}P(A_1\cap\ldots\cap A_5)\right]\\&=1-\left[\binom{5}{1}\cdot\frac{1^2}{5^2}-\binom{5}{2}\cdot\frac{1}{5^2\cdot 4^2}+\binom{5}{3}\cdot\frac{1}{5^2\cdot 4^2\cdot 3^2}-\binom{5}{4}\cdot\frac{1}{5^2\cdot 4^2\cdot 3^2\cdot 2^2}+\binom{5}{5}\cdot\frac{1}{5^2\cdot 4^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 1^2}\right]\\&=1-\frac{71}{400}=1-0.17736=0.82264\end{aligned}$$

שאלה 3

נתון כי $X\sim B(10,0.5)$ וכי $Y\sim B(30,0.5)$, וכן כי X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה.

א. $[\,X+Y\sim B(40,0.5)\,]$
$$P\{2(X+Y)=38\}=P\{X+Y=19\}=\binom{40}{19}\cdot 0.5^{40}=0.1194$$

ב. נמצא מהי ההתפלגות המותנית של רוחב המלבן בהינתן היקפו. כלומר, נמצא את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $X+Y=19$. מקבלים, כל לכל $i=0,1,\ldots,10$ מתקיים :

$$\begin{aligned}P\{X=i\,|\,X+Y=19\}&=\frac{P\{X=i,Y=19-i\}}{P\{X+Y=19\}}=\frac{P\{X=i\}P\{Y=19-i\}}{P\{X+Y=19\}}\\&=\frac{\binom{10}{i}\cdot 0.5^{10}\cdot\binom{30}{19-i}\cdot 0.5^{30}}{\binom{40}{19}\cdot 0.5^{40}}=\frac{\binom{10}{i}\binom{30}{19-i}}{\binom{40}{19}}\end{aligned}$$

לפיכך: $X \mid X+Y=19 \sim HG(N=40, m=10, n=19)$

ומכאן כי: $\text{Var}(X \mid X+Y=19) = \frac{40-19}{40-1} \cdot 19 \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{30}{40} = 1.8269$

ג. [X ו- Y בלתי-תלויים] $E[XY] = E[X]E[Y] = 5 \cdot 15 = 75$

ד. [X ו- Y בלתי-תלויים] $\text{Var}(XY) = E[X^2Y^2] - (E[XY])^2 = E[X^2]E[Y^2] - 75^2$

כעת: $E[X^2] = \text{Var}(X) + (E[X])^2 = 2.5 + 5^2 = 27.5$

$E[Y^2] = \text{Var}(Y) + (E[Y])^2 = 7.5 + 15^2 = 232.5$

ומכאן: $\text{Var}(XY) = 27.5 \cdot 232.5 - 75^2 = 768.75$

שאלה 4

סכום הכסף הכולל שבו נרכשים מוצרים במהלך יום ראשון הוא הסכום המקרי: $\sum_{i=1}^{N} 100X_i$

כאשר למשתנה המקרי N יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 50, למשתנים המקריים X_i יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 1, וכל המשתנים המקריים הללו בלתי-תלויים זה בזה.

א. $E\left[\sum_{i=1}^{N} 100X_i\right] = 100E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = 100 \cdot E[N]E[X_1] = 100 \cdot 50 \cdot 1 = 5{,}000$

ב. $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} 100X_i\right) = 100^2 \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = 10{,}000 \cdot [E[N]\text{Var}(X_1) + (E[X_1])^2 \text{Var}(N)]$

$= 10{,}000 \cdot (50 \cdot 1 + 1 \cdot 50) = 1{,}000{,}000$

ג. נסמן ב- Y את הסכום המקרי שהוגדר לעיל, ונקבל כי: $M_Y(t) = E\left[\left(M_{100X_1}(t)\right)^N\right]$

כעת, לכל t ממשי מתקיים: $M_{100X_1}(t) = M_{X_1}(100t) = e^{1 \cdot (e^{100t}-1)}$

לפיכך, לכל t ממשי מתקיים:

$$M_Y(t) = E\left[e^{(e^{100t}-1)N}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(e^{100t}-1)n} \cdot e^{-50} \cdot \frac{50^n}{n!} = e^{-50} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (50e^{(e^{100t}-1)})^n \cdot \frac{1}{n!} = e^{50[e^{(e^{100t}-1)}-1]}$$

שאלה 5

לפי נתוני הבעיה מתקיים $X \sim U(18,19)$ ו- $Y \mid X=x \sim U(x,19)$.

א. $f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y \mid x) f_X(x) = \frac{1}{19-x} \cdot 1 \quad , \quad 18 < x < y < 19$

כמו כן: $f_Y(y) = \int_{18}^{y} \frac{1}{19-x} dx = -\ln(19-x)\Big|_{18}^{y} = -\ln(19-y) \quad , \quad 18 < y < 19$

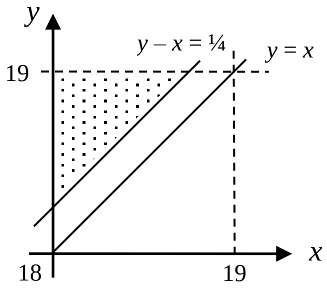
ב. לחישוב התוחלת והשונות של Y נעזר בנוסחאות המותנות של התוחלת והשונות. נקבל:

$E[Y] = E[E[Y \mid X]] = E\left[\frac{X+19}{2}\right] = \frac{18.5+19}{2} = 18.75$

$$\mathrm{Var}(Y)=E(\mathrm{Var}(Y\mid X)]+\mathrm{Var}(E[Y\mid X])=E\left[\tfrac{(19-X)^2}{12}\right]+\mathrm{Var}\left(\tfrac{X+19}{2}\right)$$

$$=\tfrac{19^2-38E[X]+E[X^2]}{12}+\tfrac{1}{4}\mathrm{Var}(X)=\tfrac{19^2-38\cdot 18.5+(1/12+18.5^2)}{12}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{12}=\tfrac{7}{144}$$

ג. בציור שלהלן מתואר התחום שבו המאורע הנתון מתקיים :



$$P\{Y-X\ge 0.25\}=\int_{18}^{18.75}\int_{x+0.25}^{19}\tfrac{1}{19-x}\,dy\,dx=\int_{18}^{18.75}\tfrac{18.75-x}{19-x}\,dx=\int_{18}^{18.75}\left(1-\tfrac{0.25}{19-x}\right)dx$$

$$=0.75+0.25\ln(19-x)\Big|_{18}^{18.75}=0.75+0.25\ln 0.25-0=0.4034$$