# שיעור 2:

* גרף כמבנה נתונים - ניתן לייצג בעיות רבות

דוגמאות למבני נתונים - גרפים:
* רשימה מקושרת היא סוג של גרף
* עץ בינרי הוא גרף

## גרפים:

גרף G: $G=(V,E)$

V - קבוצת הקודקודים/צמתים $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$

E - קבוצת הקשתות/צלעות - כל איבר ב- E הוא זוג סדור = גרף מכוון של איברים מ- V

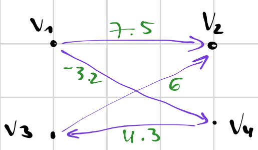
לא סדור = גרף לא מכוון

ייצוג "גרפי" של גרפים:

$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

$E=\{(v_1,v_2),(v_3,v_2),(v_1,v_4),(v_4,v_3)\}$

⟸



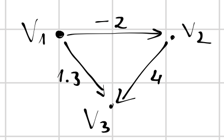

לצומת $V_1$ - דרגת כניסה 0 ודרגת יציאה 2

דרגה של צומת - $\underbrace{\text{דרגת כניסה / דרגת יציאה}}_{\text{בגרפים מכוונים}}$ - כמה קשתות "נוגעות" בצומת

משקל של קשת - יש גרפים ממושקלים ויש גרפים שלא.

* מסלול פשוט - כל צומת מופיעה פעם אחת
* מעגל - מסלול פשוט שמתחיל ונגמר באותו צומת

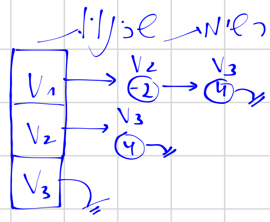
ייצוג של גרף: (מכוון, ממושקל)




ייצוג ראשון - מטריצת שכנויות

| מ- \ ל- | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ |
|---|---|---|---|
| $V_1$ | | -2 | 1.3 |
| $V_2$ | | | 4 |
| $V_3$ | | | |

ייצוג שני - רשימת שכנויות




זיכרון: הרשימה דורשת תא לכל צומת ותא לכל קשת ← $O(n+m)$

הערה: n - מס' צמתים, m - מס' קשתות

המטריצה דורשת $O(n^2)$

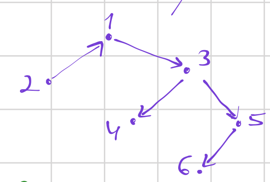
בדיקת קשת: ברשימה - $O(n)$ - כי צריך לעבור על כל השכנים

במטריצה - $O(1)$ - פשוט הולכים לתא

בכל בעיה צריך להחליט באיזה ייצוג להשתמש - לפי מה שבודקים/מחפשים

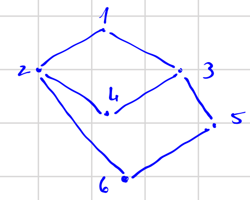
## סריקה:

### DFS - סריקה לעומק



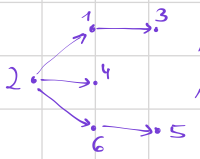

מתחילים בצומת מסויימת
מתקדמים עד שנתקעים
ואז חוזרים אחורה עד
לנקודה שאפשר שוב להתקדם
עד שבסופם סרקנו את כל הגרף

DFS נוח למימוש ברקורסיה או מחסנית




שתי הסריקות ב- $O(m+n)$

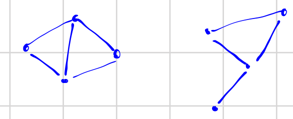
### BFS - סריקה לרוחב




מתחילים בצומת מסוים והולכים
לשכנים שלו במרחק 1 ואז מרח' 2
לשכנים שלהם וכו' עד שנסרק
כל הגרף.

BFS - מימוש באמצעות תור

## רכיבים קשירים:

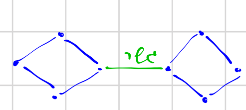


בגרף 2 רכיבי קשירות

מציאת רכיבי קשירות בזמן $O(m+n)$ - ניתן באמצעות שתי הסריקות DFS / BFS (לא משנה איזה)

מציאת גשרים - בעזרת DFS בלבד בזמן $O(m+n)$

גשר = קשת שניתוקה הופכת את הגרף ללא קשיר



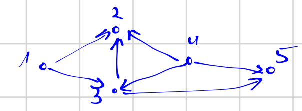

גרפים מכוונים - קשירות היטב - מסלול מכל צומת לכל צומת.

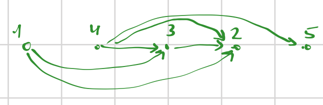
רכיבים קשירים היטב - $O(m+n)$ - משתמשים פעמיים ב- DFS

שימושים: BFS - מציאת מסלול קצר ביותר בין 2 צמתים (בגרף לא ממושקל)

גרף מכוון ללא מעגלים (DAG - גמ"ל)

מיון טופולוגי - רק עבור גמ"ל




המיון הטופולוגי של הגרף

## שאלות:

שאלה 1 - הגדרה: קבוצת צמתים שולטת $V'$ בגרף לא מכוון $G=(V,E)$ היא תת קבוצה של V המקיימת: כל צומת $v\in V$ שייך ל-$V'$ או שיש קשת המחברת בינו לבין צומת ב-$V'$.

האם קיימת חלוקה של הצמתים בגרף לא מכוון קשיר (בעל יותר משני צמתים) לשתי קבוצות שולטות?

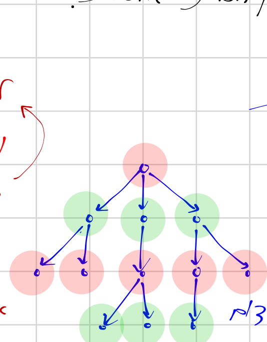
* נניח גרף בייצוג של רשימת שכנויות - צריך לחלק את הגרף ל-2 קבוצות שולטות

נחלק את כל הצמתים ל-2 קבוצות:

קבוצה אדומה - לכל צומת אדום יש שכן ירוק

קבוצה ירוקה - לכל צומת ירוק יש שכן אדום

נריץ BFS $O(m+n)$
נחלק את הצמתים לרמות
נצבע את כל הרמות הזוגיות באדום
ואת האי-זוגיות בירוק



לכל צומת $O(1)$ x n צמתים = $O(n)$

נרצה להגיע לזמן ריצה $O(n)$

לכל צומת - אם הצומת צבוע - נעצור אותו
אם הצומת לא צבוע ושכן הראשון צבוע נצבע
את הצומת בצבע ההפוך לשכנו.
ואם גם שכנו לא צבוע נצבע את הצומת בירוק ואת שכנו

בגרף קשיר לא מכוון - $\Omega(n) = m = O(n^2)$

מס' הקשתות בגרף

## שאלה 2:

הגדרה: גרף מעורב הוא גרף שבו כמה מהקשתות מכוונות והאחרות אינן מכוונות.

הוכיחו שאם בגרף מעורב הגרף המתקבל מכל צמתי הגרף ומהקשתות המכוונות בלבד אינו מכיל מעגל מכוון.

אז תמיד ניתן לכוון את הקשתות הלא מכוונות רק שבגרף המכוון המתקבל אין מעגל מכוון.

הראו כיצד ניתן למצוא כיוון מתאים לקשתות בזמן $O(|V|+|E|)$

רמז: מצאו קודם את האלגוריתם המבצע את הכיוון ומהוכחת נכונותו הסיקו כי קיים כיוון כנדרש.

הוכחה קונסטרוקטיבית

לעשות מיון טופולוגי כי אין מעגלים $O(V+E)$

ואז לכוון את הקשתות הלא מכוונות כך שבמיון הטופולוגי הקשתות ילכו משמאל לימין

## שאלה 3:

תהי $A$ מטריצת סמיכויות של גרף נתון $G=(V,E)$ (כאשר $|V|=n$). הסבר מהי המשמעות של כל אחת מהמטריצות הבאות במקרה ש-$G$ גרף מכוון ובמקרה ש-$G$ הוא גרף לא מכוון.

1. $transpose(A)$
2. $A^k$
3. $B = A + A^2 + \dots + A^n$

שיעור 2 - המשך לשאלה 3

1. בגרף לא מכוון - $A = A^t$

בגרף מכוון - הפיכת הקשתות $\hat{G} = (V, \hat{E})$

2. משמעות החזקה של מטריצה - $A^k_{i,j}$ - מס' המסלולים באורך $k$ מ-$v_i$ ל-$v_j$

הוכחה באינדוקציה על $k$:

בסיס: $k=1$ - מעצם הגדרת מט' הסמיכויות - במטריצה יופיע 1 אם יש קשת מ-$v_i$ ל-$v_j$ ואם אין יופיע 0.

צעד האינדוקציה: נניח שהמשפט נכון לכל $k<l$ ונוכיח שהוא נכון ל-$k=l$

הוכחה: כמה מסלולים באורך $l$ יש בין $v_i$ ל-$v_j$

$$\sum_{(v_q,v_j)\in E} A^{l-1}_{i,q} = \sum_{v_q \in V}\left(A^{l-1}_{i,q}\cdot A_{q,j}\right) = \left(A^{l-1}\cdot A\right)_{i,j} = A^{l}_{i,j}$$

מס' המסלולים באורך $l$ מ-$v_i$ ל-$v_j$

מ.ש.ל.

3. סה"כ כמה מסלולים יש.

## שאלה 4:

כאשר משתמשים בייצוג ע"י מטריצת סמיכויות, רוב האלגוריתמים על גרפים רצים בזמן $O(V^2)$, אולם ישנם כמה יוצאים מהכלל.

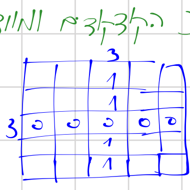
הראה שניתן לקבוע בזמן $O(V)$ אם גרף מכוון מכיל בור (sink) - קודקוד בעל דרגת כניסה $|V|-1$ ודרגת יציאה 0

גם אם משתמשים בייצוג ע"י מטריצת סמיכויות.

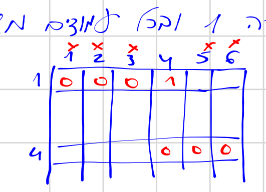
רשימת שכנויות - עוברים על כל הקודקודים ומוצאים את הקודקוד שמצביע לכולם ואז עוברים על היתר הקודקודים ומוודאים שכל אחד מהם מגיע אליו.

במטריצת שכנויות צריך למצוא שורה שכולה אפסים ובה העמודה היא עמודת אחדים

מתחילים משורה 1 ובכל עמודה משווים ומקפיצים 0 פוסלים את השורה של העמודה



דוגמא



```
K←1
for i←2 to |V| do
    if A[K,i] ≠ 0
    then K←i
for i←1 to |V| do
    if A[K,i] ≠ 0
    then return 0
for i←1 to |V| do
    if i≠K and A[i,K]=0
    then return 0
return K
```

מוצאים את המועמד להיות הבור

בודקים שהשורה כולה של המועמד שנבחר אכן שורת אפסים

בודקים שהעמודה היא עמודת אחדים פרט למקום - $a_{K,K}$

זמן ריצה - $O(V)$

כי כל אחת מהלולאות רצה

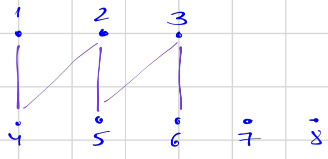
ב- $O(V)$

## שאלה 5:

הגדרה: מסלול המילטוני הוא מסלול פשוט, שבו כל צומת של הגרף מופיע בדיוק פעם אחת.

א. הוכח שבגרף הבא אין מסלול המילטוני

בהי גרף לא מכוון שבו $V=\{1,2,3\}\cup\{4,5,6,7,8\}$ כל צומת מבין הצמתים $\{1,2,3\}$ מחובר בקשת לכל צומת מבין הצמתים $\{4,5,6,7,8\}$. אין קשתות נוספות.



לא משנה מאיזה צד נתחיל לא ניתן להגיע לכל הקודקודים בלי לחזור לאחד מהקודקודים $\{1,2,3\}$ ולכן זה לא יהיה מסלול המילטוני.

מסלול המילטוני: מסלול פשוט דרך כל צמתי הגרף

מסלול אוילריאני: מסלול דרך כל הקשתות בגרף (פעם יחידה בכל קשת)

← קיים מסלול כזה אמ"מ הדרגות של כל הצמתים זוגיות או יש 2 צמתים שדרגתם אי זוגית

ב. הגדרה: טורניר הוא גרף מכוון שבו בין כל זוג צמתים קיימת קשת מכוונת באחד (משני) הכיוונים האפשריים.

הוכח כי בכל טורניר קיים מסלול המילטוני (רמז: ההוכחה באינדוקציה על מספר הצמתים).

צעד: נניח שבכל טורניר בעל $|V|<k$ צמתים יש מסלול המילטוני ונוכיח שבטורניר בעל $|V|=k$ צמתים יש מסלול המילטוני.

נתון טורניר בעל $k$ צמתים, ניקח מהגרף צומת $u$ כלשהו - נשאר טורניר בעל $k-1$ צמתים וע"פ ההנחה יש בו מסלול המילטוני: $V_1 \to V_2 \to \dots \to V_{k-2} \to V_{k-1}$

נחבר את $u$ במקום: אם יש קשת $(u,v_1)$ מצאנו מסלול המילטוני

אם אין כזאת, נחפש i קטן ביותר עבורו קיימת הקשת $(u,v_i)$ – אם אין i כנ"ל אז קיימת הקשת $(v_{k-1},u)$

אז המסלול ההמילטוני: $v_1\to v_2\to\dots\to v_{k-1}\to u$.

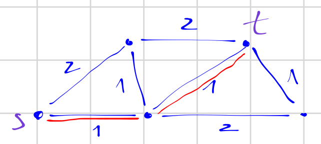
עבור ה-i שמצאנו: $v_1\to v_2\to\dots\to v_{i-1}\to v_i\to\dots\to v_{k-1}$ ואז המסלול ההמילטוני הוא: $v_1\to v_2\to\dots\to v_{i-1}\to u\to v_i\to\dots\to v_{k-1}$

## שאלה 6:

כתוב אלגוריתם יעיל ככל שניתן אשר מקבל כקלט גרף לא מכוון $G=(V,E)$ עם פונקציית משקל $w:E\to\{1,2\}$ ושני צמתים $s,t\in V$ ומוצא משקל מסלול קצר ביותר בין s ו-t ב-G.

הוכח את נכונות האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

גרף לדוגמא:





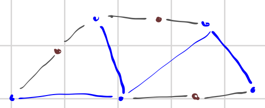
אורך מסלול = סכום משקלי הקשתות במסלול

הסיבוכיות שנרצה להגיע אליה – $O(|V|+|E|)$

ניצור מ-G גרף חדש $G'=(V',E')$:

כל צמתי G יהיו צמתים ב-G'

כל קשת ב-G שמשקלה 1 תהיה קשת ב-G'



הגרף G' החדש והלא ממושקל שיצרנו מ-G

כל קשת $\{v_i,v_j\}$ ב-G שמשקלה 2:
1. נוסיף ל-V' צומת חדש $v_{ij}$
2. נוסיף ל-E' 2 קשתות $\{v_i,v_{ij}\}$, $\{v_j,v_{ij}\}$

זמן הריצה של בניית הגרף החדש $O(V+E)$ – הפכנו את הגרף לגרף לא ממושקל.

* ב-G' יש מסלול באורך k מ-v ל-u אמ"מ ב-G יש מסלול שמשקלו k מ-v ל-u.

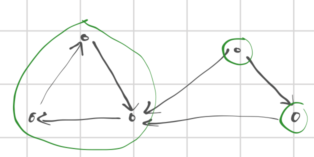
נריץ BFS ונמצא את המסלול הקצר ביותר מ-s ל-t

## שאלה 7:

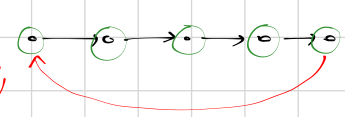
א) לכל גרף מכוון $G=(V,E)$ הוספת קשת חדשה לגרף גורמת למספר הרכיבים הקשירים היטב בגרף לקטון לכל היותר ב-1.

ב) לכל גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ ולכל ריצת DFS על G, מספר הרכיבים הדו-קשירים של G גדול או שווה ממספר העלים בעץ ה-DFS המתאים

רכיב קשיר היטב – רכיב שיש בו מסלול מכל צומת לכל צומת.



3 רכיבים קשירים היטב



5 רכיבים קשירים

נוסיף את הקשת האדומה – ונקבל רכיב קשיר היטב יחיד!