

קווים לפתרון שאלות בממ"ן 14 סמסטר 2011

שאלה 1

תחילה נציע את האלגוריתם m -PATH. אלגוריתם זה מקבל כקלט גרף לא מכוון G , צומת s ב- G ומספר טבעי m . האלגוריתם מקבל את הקלט רק אם יש בגרף G מסלול פשוט (ללא מעגלים) שמתחיל ב- s ואורכו m .

"על קלט $\langle G, s, m \rangle$ כאשר G הוא גרף לא מכוון, s הוא צומת בגרף ו- m הוא מספר טבעי:

1. אם $m = 0$, קבל.
2. סמן את s .
3. לכל צומת v שכן של s (כלומר, יש בגרף G קשת (s, v)):
4. אם v לא מסומן, הפעל את האלגוריתם m -PATH על $\langle G, v, m-1 \rangle$.
5. אם האלגוריתם קיבל, קבל.
6. הסר את הסימון מ- s .
7. דחה."

אפשר לממש את האלגוריתם הזה במכונת טיורינג על-ידי כך ששומרים בכל שלב את המסלול מ- s לצומת הנוכחי ואת המונה m . כלומר, האלגוריתם ניתן למימוש במקום ליניארי.

להלן אלגוריתם להכרעת השפה UHAMCIRCUIT:

"על קלט $\langle G \rangle$ כאשר G הוא גרף לא מכוון:

1. ספור את הצמתים של הגרף G . נסמן את מספר הצמתים על-ידי n .
2. בחר צומת s ב- G , והפעל את האלגוריתם m -PATH על הקלט $\langle G, s, n-1 \rangle$.
3. בכל פעם שהאלגוריתם m -PATH עומד לקבל (בקריאה הראשונה שלו), בדוק האם יש קשת מן הצומת האחרון במסלול שהוא מצא ל- s . אם כן, קבל. אם לא, המשך להריץ את האלגוריתם m -PATH.
4. דחה."

לספירת הצמתים דרוש מקום לוגריתמי. להפעלת האלגוריתם m -PATH דרוש מקום ליניארי. האלגוריתם בודק האם יש מעגל פשוט באורך n שמתחיל ומסתיים ב- s . כלומר, האם יש מעגל המילטון ב- G .

שאלה 3

א. בהוכחת משפט 5.9 מוצע אלגוריתם להכרעת A_{LBA} .

על קלט $\langle M, w \rangle$ כאשר M הוא אוטומט חסום-ליניארי ו- w היא מילה, האלגוריתם מסמלץ את ריצת M על w qng^n צעדים, כאשר n הוא האורך של w . לצורך הסימולציה יש לשמור את המיקום בסרט של הראש הקורא ($O(\log n)$), את המצב שבו נמצאים ($O(\log q)$) ומונה צעדים שיכול להגיע עד qng^n .

$$O(\log(qng^n)) = O(n)$$

המקום הדרוש לאלגוריתם המוצע ליניארי בגודל הקלט.

ב. תהי A שפה ב-PSPACE.

תהי M מכונת טיורינג שמכריעה שייכות לשפה A במגבלת מקום x^k עבור k טבעי כלשהו.

תהי w מילה מעל האלפבית של A .

נבנה בזמן פולינומיאלי קלט לשפה A_{LBA} : נבנה אוטומט חסום-ליניארית M' ומילת קלט w' ל- M' :

האוטומט M' יהיה זהה למכונה M , פרט לשינויים הבאים:

נוסיף לאלפבית הסרט סמל $\#$ שלא שייך לאלפבית הסרט של M .

ההתייחסות לסמל $\#$ בפונקציית המעברים תהיה בדיוק כמו ההתייחסות

לסמל הרווח: בכל קריאה של $\#$ נפעל בדיוק כמו בקריאה של רווח.

המילה w' תהיה המילה w ואחריה $|w|^k - |w|$ סמלי $\#$.

שימו לב, הבנייה של M' איננה תלויה ב- w . אפשר לבנות את M' פעם אחת ולתמיד. זמן הבנייה

של M' איננו תלוי ב- w והוא קבוע.

w שייכת ל- A אם ורק אם $\langle M', w' \rangle$ שייכת ל- A_{LBA} .

ג. מכיוון שהראינו ש- A_{LBA} שייכת ל-PSPACE, וכל שפה ב-PSPACE ניתנת לרדוקציה בזמן

פולינומיאלי ל- A_{LBA} , נסיק ש- A_{LBA} היא שפה PSPACE-שלמה.

שאלה 4

המחלקה L סגורה לשרשור:

תהיינה A_1 ו- A_2 שתי שפות המוכרעות במקום לוגריתמי על-ידי המכונות M_1 ו- M_2 , בהתאמה.

נבנה מכונת טיורינג M שמכריעה את השרשור של A_1 ו- A_2 :

"על קלט w :

1. חשב את האורך n של w . $w = w_1 w_2 \dots w_n$.

2. ל- $i = 0, 1, 2, \dots, n$ בצע:

3. הרץ את M_1 על $w_i \dots w_1$. אם היא דחתה, לך ל-2.

4. הרץ את M_2 על $w_{i+1} \dots w_n$. אם היא דחתה, לך ל-2.

5. קבל.

6. דחה."

חישוב האורך של w דורש מקום לוגריתמי.

החזקת המונה i דורשת מקום לוגריתמי.

ביצוע הסימולציה של כל אחת מן המכונות בשלבים 3 ו-4 דורשת מקום לוגריתמי. (לא מעתיקים

את הקלט לסרט העבודה, אלא משתמשים במונה i כסמן של סוף הקלט (במקרה של M_1) או של

תחילת הקלט (במקרה של M_2)).

לכן המכונה M שמכריעה את $A_1 A_2$ פועלת במקום לוגריתמי.

שאלה 6

A_{NFA} שייכת ל-NL: אפשר לבנות מכונה לא דטרמיניסטית שעל קלט $\langle M, w \rangle$ כאשר M הוא אוטומט סופי לא דטרמיניסטי ו- w היא מילה, תפעל באופן הבא:

המכונה תשמור על סרט העבודה את המצב שבו נמצא האוטומט. בתחילה זה יהיה המצב ההתחלתי של האוטומט. בנוסף תשמור המכונה מונה שיציין כמה סמלים כבר נקראו ממילת הקלט w . בתחילה ערכו של המונה יהיה 0.

בכל שלב, יוגדל המונה ב-1, נגיע לסמל הבא ב- w ונקרא אותו.

כעת יש בידנו הסמל הבא במילה (נקרא לו σ) והמצב q שבו האוטומט נמצא.

נעבור על תיאור האוטומט בקלט, ונבחר באופן לא דטרמיניסטי לאיזה מצב לעבור מבין המצבים שאליהם אפשר לעבור כאשר נמצאים במצב q וקוראים את הסמל σ . נכתוב את המצב החדש במקומו של המצב q .

כאשר תסתיים קריאת המילה, נבדוק האם המצב q שרשום בסרט העבודה שייך לקבוצת המצבים המקבלים. אם כן, נקבל. אם לא, נדחה.

המקום בסרט העבודה הדרוש למכונה שתיארו הוא לוגריתמי בגודל הקלט: שומרים מצב אחד וכמה מונים שמסייעים לנוע על פני הקלט.

רדוקצית מקום לוגריתמית של $PATH$ ל- A_{NFA} : כאשר נתון קלט $\langle G, s, t \rangle$ לבעיית $PATH$, נבנה קלט $\langle M, w \rangle$ לבעיית A_{NFA} :

מצבי האוטומט M יהיו הצמתים של G

המצב התחלתי יהיה s

המצב המקבל היחיד יהיה t

האלפבית של האוטומט יהיה $\{a\}$

פונקצית המעברים תעביר ממצב q למצב p (בקריאת האות a) אם יש בגרף קשת

מכוונת מ- p ל- q . בנוסף יהיה למצב המקבל t קשת עצמית (מתויגת עם a).

המילה w תהיה a^n כאשר n הוא מספר מצבי האוטומט M (= מספר צומתי G).

הבנייה ניתנת לביצוע במקום לוגריתמי:

מצבי M הם העתקה של צומתי G .

המצב ההתחלתי והמצב המקבל מועתקים מן הקלט.

האלפבית של M קבוע.

פונקצית המעברים היא העתקה של קשתות G ותוספת קבועה של קשת עצמית למצב המקבל.

כדי לבנות את המילה w צריך לספור את הצמתים של G .

נכונות הרדוקציה: אם $\langle G, s, t \rangle$ שייכת ל- $PATH$, אז יש מסלול מכוון מ- s ל- t ב- G . אם יש ב- G מסלול מכוון מ- s ל- t , אז יש מסלול כזה ללא מעגלים. אורכו של מסלול ללא מעגלים קטן מ- n (מספר צומתי G). מסלול כזה מתאים באוטומט M לקריאת מילה w שאורכה קטן מ- n , והיא מביאה את האוטומט מן המצב ההתחלתי למצב המקבל. מכיוון שיש קשת עצמית למצב המקבל, המילה a^n שייכת לשפה שהאוטומט מזהה. לכן $\langle M, w \rangle$ שייכת ל- A_{NFA} .

אם $\langle M, w \rangle$ שייכת ל- A_{NFA} , אז המילה a^n מביאה את האוטומט M מן המצב ההתחלתי אל המצב המקבל. לכן יש בגרף G מסלול מכוון מ- s ל- t . לכן $\langle G, s, t \rangle$ שייכת ל- $PATH$.