תשובה 1

א. נכון ב. לא נכון ג. לא נכון
ד. נכון ה. לא נכון ו. נכון
ז. לא נכון ח. נכון

תשובה 2

א. **לא נכון.** דוגמא נגדית: $A=\varnothing$, $B=\{1\}$ (הַשלימו בעצמכם את בדיקת הדוגמא).

ב. **לא נכון.** דוגמא נגדית: $A=B=\{1\}$ (הַשלימו).

ג. **לא נכון.** ראו החוברת ״אוסף תרגילים פתורים״, קבוצה 1 שאלה 2.

ד. **נכון.** הוכחה:

התנאי $X\in P(A\cap B)$ שקול, לפי הגדרת קבוצת חזקה, לתנאי

$X\subseteq A\cap B$.

לפי שאלה 1.10 ב׳ , זה שקול ל-

$X\subseteq A$ וגם $X\subseteq B$.

שוב לפי הגדרת קבוצת חזקה, זה שקול ל-

$X\in P(A)$ וגם $X\in P(B)$.

ומהגדרת חיתוך, זה שקול ל-

$X\in P(A)\cap P(B)$.

קיבלנו: $X\in P(A\cap B)$ **אםם** (אם ורק אם) $X\in P(A)\cap P(B)$.
לפי הגדרת שוויון קבוצות (הגדרה 1.1), שתי הקבוצות שוות.

תשובה 3

א. לפי חוק הפילוג (דיסטריבוטיביות) של האיחוד מעל החיתוך:

$$(A\cap B)\cup(A\cap B')=A\cap(B\cup B')$$

כאן השתמשנו בחוק הפילוג כדי לכנס איברים, לא כדי לפלג.

לפי טענה בסוף עמ׳ 22 בספר, $B\cup B'=U$. נציב זאת ונקבל $A\cap U$.

מובן ש- $A\cap U=A$ (הנחנו ש- U מכילה את כל הקבוצות שבדיון. לפי שאלה 1.11ב שבעמ׳ 16 בספר, אם $A\subseteq U$ אז $A\cap U=A$).

קיבלנו כמבוקש $(A\cap B)\cup(A\cap B')=A$.

ב. מהגדרת הפרש סימטרי,

$$A'\oplus B' = (A'-B')\cup(B'-A') = (A'\cap B)\cup(B'\cap A)$$

נשנה את סדר האיברים בעזרת חילופיות החיתוך וחילופיות האיחוד :

$$= (A\cap B')\cup(B\cap A') = (A-B)\cup(B-A) = A\oplus B$$

ג. ניעזר בתכונות של הפרש סימטרי שהוכחו בשאלה 1.22 בספר.

מאסוציאטיביות :

$$(A\oplus B)\oplus(B\oplus C) = A\oplus(B\oplus(B\oplus C))$$

ושוב אסוציאטיביות :

$$= A\oplus((B\oplus B)\oplus C))$$

ובעזרת שתי תכונות נוספות שהוכחו בסעיף ב באותה שאלה,

$$= A\oplus(\varnothing\oplus C)) = A\oplus C$$

תשובה 4

א. $A_0 = \{x\in \mathbf{R} \mid 4\le x\le 2\} = \varnothing$, $A_1 = \{x\in \mathbf{R} \mid 4\le x\le 4\} = \{4\}$

$A_2 = \{x\in \mathbf{R} \mid 4\le x\le 6\}$, $A_3 = \{x\in \mathbf{R} \mid 4\le x\le 8\}$

$$B_0 = A_1 - A_0 = \{4\} - \varnothing = \{4\}$$

$$B_1 = A_2 - A_1 = \{x\in \mathbf{R} \mid 4 < x\le 6\}$$

$$B_2 = A_3 - A_2 = \{x\in \mathbf{R} \mid 6 < x\le 8\}$$

ב. עבור $n\le m$, אם $4\le x\le 2n+2$ אז $4\le x\le 2m+2$.

לכן, אם $n\le m$ אז $A_n\subseteq A_m$.

לפי שאלה 1.11 בעמ' 16 בספר, מההכלה $A_n\subseteq A_m$ נובע $A_n\cap A_m = A_n$.

ג. החיתוך המבוקש בשאלה הוא קבוצת המספרים הממשיים השייכים **לכל** הקבוצות A_n החל מ- $n=2$. בהוכחת הסעיף הקודם כאן, ראינו שבסדרת הקבוצות A_n, כל קבוצה מכילה כל אחת מהקבוצות שבאות לפניה.

טענה כללית: אם נתונה סדרה סופית או אינסופית של קבוצות, כך שכל קבוצה בסדרה מכילה את כל הקבוצות שבאות **לפניה** בסדרה, אז חיתוך כל הקבוצות בסדרה הוא הקבוצה הראשונה בסדרה. השלימו את ההוכחה של טענה זו!

מהטענה הכללית האמורה נקבל שחיתוך כל הקבוצות A_n , החל מ- A_2 והלאה, שווה A_2 .

כזכור $A_2 = \{x \in \mathbf{R} \ | \ 4 \le x \le 6\}$.

ד. נוכיח: $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n = \{x \in \mathbf{R} \ | \ 4 \le x\}$

הכלה בכיוון אחד: יהי $x \in \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$. משמע x שייך **לפחות לאחת** הקבוצות A_n .

מהגדרת A_n נובע בפרט $4 \le x$.

הכלה בכיוון שני: יהי $4 \le x$. קיים k טבעי גדול מספיק, שעבורו $x \le 2k + 2$.

עבור אותו k, $x \in A_k$.

לכן, מהגדרת איחוד כללי של קבוצות, $x \in \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$.

משני הכיוונים יחד, $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n = \{x \in \mathbf{R} \ | \ 4 \le x\}$.

ה. נחשב קודם כל, עבור $2 \le n$ כלשהו:

$$B_n = A_{n+1} - A_n = \{x \in \mathbf{R} \,|\, 4 \le x \le 2n + 4\} - \{x \in \mathbf{R} \,|\, 4 \le x \le 2n + 2\}$$

$$= \{x \in \mathbf{R} \ | \ 2n + 2 < x \le 2n + 4\}$$

כעת נוכיח ש- $\bigcup_{2\le n\in\mathbf{N}} B_n = \{x \in \mathbf{R} \ | \ 6 < x\}$.

הכלה בכיוון אחד: יהי $x \in \bigcup_{2\le n\in\mathbf{N}} B_n$. משמע x שייך **לפחות לאחת** הקבוצות B_n .

מהנוסחה שרשמנו עבור B_n ומההנחה $2 \le n$ נובע בפרט $6 < x$.

הכלה בכיוון שני: יהי $6 < x$. יהי k המספר הטבעי הגדול ביותר שקטן ממש מ- $\frac{x-2}{2}$.

מתקיים $2k + 2 < x \le 2k + 4$, וכן $2 \le k$.

מהנוסחה שרשמנו עבור B_n , נובע $x \in B_k$.

מצאנו $2 \le k$ כך ש- $x \in B_k$. לכן, מהגדרת איחוד כללי של קבוצות, $x \in \bigcup_{2\le n\in\mathbf{N}} B_n$.

משתי ההכלות יחד מתקבל השוויון המבוקש.

איתי הראבן