ממ"ן 16 – פתרון שאלה 2 (בעיה 11-3 בספר הלימוד)

א. ניתן לבטא את סכמת החיפוש המתוארת בשאלה ע"י הנוסחה:

$$h(k,i) = (h'(k,i) + \frac{i(i+1)}{2}) \bmod m$$

הנוסחה של סכמת הבדיקה הריבועית: $h(k,i) = (h'(k,i) + c_1 i + c_2 i^2) \bmod m$

נשווה את שני הביטויים ונקבל: $\frac{i(i+1)}{2}) = c_1 i + c_2 i^2$

ומכאן: $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$

ב. נתבונן בטבלה מלאה ונניח כי הערך המבוקש לא קיים בטבלה. לפיכך ייערכו m ניסיונות לפי החישוב המתואר בשאלה. נניח בשלילה כי בצורה זו לא ייבדק כל תא בטבלה. כלומר במהלך m הניסיונות שלנו יהיו חזרות (איזשהו תא בטבלה ייבדק יותר מפעם אחת).

בפרט, נניח בשלילה כי מתקיים $h(k, i)=h(k, j)$ עבור $0 \le i \neq j < m$, ונניח בה"כ כי $i < j$.

לפי הגדרת סכמת החיפוש:

$h(k, i)=h'(k)+i(i+1)/2 \pmod m$

$h(k, j)=h'(k)+j(j+1)/2 \pmod m$

ומכאן:

$h(k, j)=h(k, i) \Rightarrow$

$h'(k) + j(j+1)/2 = h'(k) + i(i+1)/2 + c\cdot m \Rightarrow$

$h'(k) + j(j+1)/2 - h'(k) - i(i+1)/2 = c\cdot m \Rightarrow$

$j(j+1)/2 - i(i+1)/2 = c\cdot m$

נסמן $j=i+d$, נציב ונקבל:

$i\cdot d+d(d+1)/2=c\cdot m$

או

$d(2i+d+1)=c\cdot 2m$

מהעובדה ש- $m=2^p$ נובע ש- $d(2i+d+1)$ הוא כפולה של $2m=2^{p+1}$.

כעת יש שתי אפשרויות: או ש- d הוא זוגי או ש- $(2i+d+1)$ הוא זוגי.

אם d הוא זוגי אז $2i+d+1$) הוא אי-זוגי, ואילו אם $(2i+d+1)$ הוא זוגי אז d הוא אי-זוגי.

לפיכך, או ש- d הוא כפולה של 2^{p+1}, או ש-$(2i+d+1)$ הוא כפולה של 2^{p+1}.

אבל d בוודאי קטן מ-m ולא יכול להיות כפולה של $2m$, וכמו-כן $(2i+d+1)\le(2i+2d)=2(i+d)<2m$ (כי $i+d=j<m$). לפיכך, לא ייתכן שהמכפלה $d(2i+d+1)$ היא כפולה של $2m$. הגענו לסתירה, ולכן ההנחה הראשונית איננה נכונה. המסקנה היא שלא יכולות להיות חזרות ובמקרה הגרוע ייבדק כל תא בטבלה. **מ.ש.ל.**