קווים לפתרון שאלות בממ"ן 13 סמסטר 2013ב

שאלה 2

א. מכונת טיורינג יכולה לבדוק, בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט, האם באוטומט סופי דטרמיניסטי נתון A יש מסלול **עם מעגל** מן המצב ההתחלתי אל אחד המצבים המקבלים. אם כן, לדחות. אם לא, לקבל.

את הבדיקה אפשר לממש באופן הבא: תחילה מוצאים (למשל, בעזרת חיפוש עומק), את כל המצבים שנמצאים על מסלול מן המצב ההתחלתי אל אחד המצבים המקבלים. לאחר מכן, בודקים לכל אחד מן המצבים הללו, האם יש מסלול מן המצב לעצמו (מעגל).

ב. אפשר להציע את האלגוריתם הבא להכרעת השפה *7-VERTEX-COVER*:

עוברים על כל התת-קבוצות בגודל 7 של קבוצת הצמתים של הגרף G.

לכל תת-קבוצה כזו U, בודקים האם לכל קשת $e = (u, v)$ של G, לפחות אחד מן הצמתים u ו-v שייך ל-U.

אם נמצאה תת-קבוצה בגודל 7 שהצמתים שלה מכסים את כל הקשתות, מקבלים; אחרת, דוחים.

מספר התת-קבוצות של 7 צמתים של G הוא $O(|V|^7)$, כאשר V היא קבוצת הצמתים של G. לכן זמן הריצה של האלגוריתם פולינומיאלי במספר הצמתים של הגרף G.

שאלה 3

מסמך אישור קצר שיכול לאמת שייכות של מילה לשפה B הוא הפירוק של n לגורמים ראשוניים.

מספר הגורמים הראשוניים של n איננו גדול מ-$\log_2 n$. אורך הייצוג של כל אחד מהם איננו גדול מאורך הייצוג של n. לכן גודל מסמך האישור פולינומיאלי בגודל הייצוג של n. (גודל הייצוג של n הוא $O(\log n)$).

מאמת לשפה יקבל בנוסף למילת הקלט את מסמך האישור - הפירוק של n לגורמים ראשוניים.

המאמת יוודא שכל הגורמים בפירוק הם אכן ראשוניים. אם לא, הוא ידחה.

לאחר מכן הוא יוודא שמכפלתם שווה ל-n. אם לא, הוא ידחה.

לאחר מכן הוא יוודא שהראשוני ה-m בפירוק לגורמים ראשוניים גדול מ-k. אם כן, הוא יקבל. אם לא, הוא ידחה.

זמן הריצה של כל אחד מן השלבים פולינומיאלי בגודל הקלט.

הצגנו מאמת בעל זמן ריצה פולינומיאלי לשפה B. לכן B שייכת ל-NP.

שאלה 4

א. אפשר להסיק ש-A שייכת ל-TIME(n). להלן מכונה המכריעה את A בזמן $O(n)$:

"על קלט w :

1. חשב את $f(w)$.

2. בדוק האם $f(w)$ שייכת ל-B. אם כן, קבל (את w). אם לא, דחה (את w)."

זמן החישוב של $f(w)$ בשלב 1 ליניארי ב-$|w|$. לכן גם האורך של $f(w)$ ליניארי ב-$|w|$.

זמן החישוב של שלב 2 ליניארי ב-$|f(w)|$, ולכן גם ליניארי ב-$|w|$.

ב. אפשר להסיק ש-A שייכת ל-TIME(n^2). להלן מכונה המכריעה את A בזמן $O(n^2)$:

"על קלט w :

1. חשב את $f(w)$.

2. בדוק האם $f(w)$ שייכת ל-B. אם כן, קבל (את w). אם לא, דחה (את w)."

זמן החישוב של $f(w)$ בשלב 1 ליניארי ב-$|w|$. לכן גם האורך של $f(w)$ ליניארי ב-$|w|$.

זמן החישוב של שלב 2 ריבועי ב-$|f(w)|$, ולכן גם ריבועי ב-$|w|$.

ג. אי אפשר להסיק ש-A שייכת ל-TIME(n).

חישוב הרדוקציה דורש זמן ריבועי ב-$|w|$. לכן האורך של $f(w)$ עשוי להיות ריבועי ב-$|w|$.

הזמן הדרוש להכרעת השייכות של $f(w)$ ל-B ליניארי ב-$|f(w)|$. זמן זה עשוי להיות ריבועי ב-$|w|$.

לכן הזמן הדרוש להכרעת השייכות של $|w|$ ל-A עלול להיות ריבועי ולא ליניארי.

ד. אי אפשר להסיק ש-A שייכת ל-TIME(n^2).

חישוב הרדוקציה דורש זמן ריבועי ב-$|w|$. לכן האורך של $f(w)$ עשוי להיות ריבועי ב-$|w|$.

הזמן הדרוש להכרעת השייכות של $f(w)$ ל-B ריבועי ב-$|f(w)|$. זמן זה איננו ריבועי ב-$|w|$.

לכן הזמן הדרוש להכרעת השייכות של $|w|$ ל-A עלול להיות יותר מריבועי.

שאלה 5

הרדוקציה: נשתמש בהדרכה שמופיעה בשאלה :

לכל צומת v של הגרף יהיו שלושה משתנים בוליאניים - v_1, v_2 ו-v_3.

הפירוש של v_1 הוא : הצומת v צבוע בצבע 1

הפירוש של v_2 הוא : הצומת v צבוע בצבע 2

הפירוש של v_3 הוא : הצומת v צבוע בצבע 3

לכל צומת v בגרף יהיו הפסוקיות הבאות :

$v_1 \vee v_2 \vee v_3$ - הצומת v צבוע באחד משלושת הצבעים

$\neg v_1 \vee \neg v_2$ - הצומת v לא צבוע גם בצבע 1 וגם בצבע 2

$\neg v_1 \vee \neg v_3$ - הצומת v לא צבוע גם בצבע 1 וגם בצבע 3

$\neg v_2 \vee \neg v_3$ - הצומת v לא צבוע גם בצבע 2 וגם בצבע 3

לכל קשת (v, u) יהיו הפסוקות הבאות:

$\neg v_1 \vee \neg u_1$ - הצומת v והצומת u אינם צבועים שניהם בצבע 1

$\neg v_2 \vee \neg u_2$ - הצומת v והצומת u אינם צבועים שניהם בצבע 2

$\neg v_3 \vee \neg u_3$ - הצומת v והצומת u אינם צבועים שניהם בצבע 3

הרדוקציה תקפה: נניח שלגרף G יש צביעה חוקית c בשלושה צבעים. לכל v נקבע ערך 1 ל-v_i המתאים לצבע i שקיבל הצומת v בצביעה c, ונקבע ערך 0 למשתנים האחרים של הצומת v. ההשמה הזו מספקת את קבוצת הפסוקיות.

נניח שקבוצת הפסוקיות ספיקה. לכל v יש אטום v_i יחיד שערכו 1 (בגלל הפסוקיות מן הסוג הראשון). נשים לכל צומת v את הצבע i שעבורו v_i הוא 1 ונקבל צביעה חוקית של הגרף G. (ההשמה המספקת של הפסוק מספקת גם את הפסוקיות של הקשתות).

הרדוקציה ניתנת לחישוב בזמן פולנומיאלי: לכל צומת בונים ארבע פסוקיות בגודל 3 או 2; לכל קשת בונים שלוש פסוקיות בגודל 2.

שאלה 8

א. להלן מכונה מכריעה לשפה $NONDISJOINT_{\text{DFA}}$:

"על קלט $<A, B>$ כאשר A ו-B הם אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים:

1. בנה את אוטומט המכפלה C לחיתוך של השפות שמזהים A ו-B. ($L(C) = L(A) \cap L(B)$).
2. בדוק, בעזרת מכונה לשפה E_{DFA}, האם $L(C) = \varnothing$. אם כן, דחה. אם לא, קבל."

כל אחד מן השלבים מתבצע פעם אחת. זמן הריצה של כל שלב פולינומיאלי בגודל הקלט.

ב. **רדוקציה** של $3SAT$:

"על קלט $<\phi>$ כאשר ϕ היא נוסחה ב-3CNF:

1. יהי n מספר המשתנים בנוסחה ϕ, ויהי k מספר הפסוקיות ב-ϕ.
2. לכל פסוקית C_i ב-ϕ, $C_i = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$, בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי A_i שמזהה את שפת כל המחרוזות הבינריות שאורכן n והן מייצגות השמות שמספקות את C_i.
3. החזר את $<A_1, A_2, \ldots, A_k>$."

נסביר מהי השפה שמזהה האוטומט A_i:

כל מחרוזת בינרית באורך n מייצגת השמה של 0-ים ו-1-ים ל-n המשתנים של הנוסחה.

השמה כזו מספקת את הפסוקית $C_i = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ אם לפחות באחד המקומות המתאימים לליטרלים של הפסוקית יש בהשמה ערך שהופך את הליטרל הזה ל-1.

מספר המצבים של האוטומט A_i ליניארי ב-n: על משתנים שלא מופיעים בפסוקית אפשר לעבור ממצב למצב גם על 0 וגם על 1. על משתנים שכן מופיעים בפסוקית יש התפצלות. על הערך שמספק את הליטרל שבפסוקית עוברים למצב שמאפשר קריאה של 0-ים ו-1-ים עד להשלמת האורך של המחרוזת ל-n, ואז כניסה למצב המקבל היחיד של האוטומט. על הערך שלא מספק את הליטרל שבפסוקית ממשיכים לליטרל הבא. אם מדובר בליטרל השלישי,

עוברים למצב מלכודת לא מקבל. למצב הזה עוברים גם מן המצב המקבל בקריאה של כל סמל (מחרוזת הקלט ארוכה מ-n).

הרדוקציה תקפה: ϕ ספיקה אם ורק אם יש השמה של 0-ים ו-1-ים למשתני הנוסחה שבה בכל פסוקית יש לפחות ליטרל אחד שערכו 1, אם ורק אם החיתוך של קבוצות ההשמות שמספקות כל אחת מן הפסוקיות לא ריק, אם ורק אם $L(A_1) \cap L(A_2) \cap \cdots \cap L(A_k) \neq \varnothing$, אם ורק אם $<A_1, A_2, \ldots, A_k>$ שייכת ל-$NONDISJOINT_{\mathrm{DFA}}$.

הרדוקציה חשיבה בזמן פולינומיאלי: כל אחד מן השלבים של הרדוקציה מתבצע פעם אחת. שלב 1 ושלב 3 פולינומיאליים. גם שלב 2 פולינומיאלי, כי מספר האוטומטים שבונים שווה למספר הפסוקיות, והגודל של כל אחד מהם ליניארי במספר המשתנים.

ג. ההבדל הוא שמספר האוטומטים בשפה של סעיף א הוא קבוע (2), ואילו מספר האוטומטים בשפה של סעיף ב איננו נתון מראש (הוא חלק מן הקלט).

הזמן הדרוש לבניית אוטומט מכפלה של שני אוטומטים ריבועי בגודל האוטומטים. לכן זמן הריצה של המכונה של סעיף א יכול להיות $O(n^2)$ (לא במכונת טיורינג עם סרט אחד, אבל כן במכונה יותר משוכללת). זהו זמן פולינומיאלי בגודל הקלט.

אם נרצה לבנות אוטומט מכפלה ל-k האוטומטים בסעיף ב, הזמן שיידרש הוא לפחות מסדר גודל של n^k, משום שזה סדר הגודל של מספר המצבים של אוטומט המכפלה הזה. זמן זה **איננו פולינומיאלי בגודל הקלט**, משום שהמעריך k איננו מספר קבוע אלא תלוי בקלט.