פתרונות לממ"ן 11 - 2012א - 20425

1. א. במקום לחשב את מספר האפשרויות לקבוע את הערך של i ואז לפזר i כדורים זהים ב- 5 תאים, נניח שמפזרים את <u>כל</u> הכדורים הזהים ב- 6 תאים, כך שבתא ה- 6 נמצאים כל הכדורים שאינם מוּצָאים מהארגז. לפי תנאי הניסוי, אין הגבלה על מספר הכדורים בכל תא, ולכן בכל אחד מהתאים יכול להיות מספר אי-שלילי של כדורים. לפיכך, מספר אפשרויות הפיזור הוא $\binom{25}{20}=53{,}130$.

ב. נסמן ב- n_i את מספר הכדורים בתא i, לכל $i = 1,2,\dots,10$; ונסמן ב- d_i את ההפרש בין מספר הכדורים בתא i למספר הכדורים בתא $i-1$. כלומר, לכל $i = 2,\dots,10$, מתקיים $d_i = n_i - n_{i-1}$, <u>**ונגדיר**</u> $d_1 = n_1$.

פיזור הכדורים ב- 10 התאים עונה על הדרישות המתוארות בניסוי 1, אם $\sum_{i=1}^{10} d_i \le 20$ ואם $d_i \ge 0$ לכל $i = 1,\dots,10$. לכן, מספר אפשרויות הפיזור במרחב המדגם של ניסוי 1 שקול למספר אפשרויות הפיזור של 20 כדורים זהים ב- 11 תאים ממוספרים (תא 11 "קולט" את הכדורים שאינם נמצאים בתאים 1 עד 10, שכן בתא האחרון יש <u>לכל היותר</u> 20 כדורים ולא מספר קבוע מראש של כדורים).

ומכאן, שמספר אפשרויות הפיזור הוא $\binom{30}{20}=30{,}045{,}015$.

2. א. יש 8^{10} אפשרויות שונות לפיזור הכדורים הממוספרים בתאים.

ב. נבחר 2 כדורים שיהיו בתא הראשון ($\binom{10}{2}=45$ אפשרויות) ואחר-כך נפזר את 8 הכדורים האחרים בתאים 2-8 (7^8 אפשרויות). לפיכך, מספר אפשרויות הפיזור הוא $45\cdot 7^8$.

ג. כדי למצוא את מספר הפיזורים שבהם התא הראשון ריק ובתא השני יש לפחות כדור אחד, נפחית ממספר הפיזורים שבהם התא הראשון ריק את מספר הפיזורים שבהם התאים הראשון והשני ריקים, ונקבל $7^{10}-6^{10}$.

ד. נמנה את מספר הפיזורים שבהם יש 6 או 7 תאים ריקים.

יש $\binom{8}{6}=28$ אפשרויות לבחור 6 תאים שיהיו ריקים. משנבחרו התאים הריקים, יש $2^{10} = 1{,}024$ אפשרויות לפזר בשני התאים האחרים את הכדורים הממוספרים. כעת, נשים לב שב- 2 מאפשרויות הפיזור האלו כל הכדורים נמצאים רק באחד משני התאים. לפיכך, יש $28 \cdot (1{,}024 - 2) = 28{,}616$ פיזורים שבהם בדיוק 6 תאים ריקים.

מעבר לזה, יש גם 8 פיזורים שבהם יש בדיוק 7 תאים ריקים. לכן, בסך-הכל יש 28,624 פיזורים שבהם יש לפחות 6 תאים ריקים.

3. א. מספר האפשרויות לפזר באקראי $2n$ כדורים זהים ב- n תאים הוא $\binom{2n+n-1}{2n}=\binom{3n-1}{2n}$.

ב. נבחר את שני התאים הריקים, נשים כדור אחד בכל אחד מהתאים האחרים ($n-2$ תאים) ונפזר את הכדורים הנותרים (נותרו $2n-(n-2) = n+2$ כדורים) בתאים אלו. מכאן, נקבל שמספר אפשרויות הפיזור הוא $\binom{n}{2}\binom{n+2+n-3}{n+2}=\binom{n}{2}\binom{2n-1}{n+2}$.

ג. מספר האפשרויות לפזר באקראי $2n$ כדורים זהים ב- n תאים כך שבכל תא יהיה מספר זוגי של כדורים, הוא כמספר האפשרויות לפזר באקראי n כדורים זהים ב- n תאים (ואז להכפיל את מספר הכדורים בכל תא). כלומר, $\binom{n+n-1}{n}=\binom{2n-1}{n}$.

ד. יש $n-2$ אפשרויות לבחור שלושה תאים סמוכים. בכל אחד משלושת התאים הסמוכים נשים כדור אחד ואז נפזר בהם את יתר הכדורים.

לפיכך, נקבל שמספר אפשרויות הפיזור הוא $(n-2)\binom{2n-1}{2n-3}=(n-2)\binom{2n-3+2}{2n-3}$.

4. א. 1. אם יש חשיבות לסדר הבחירה והבחירה היא עם החזרה, יש 19^{10} אפשרויות בחירה שונות.

2. אם אין חשיבות לסדר הבחירה והבחירה היא עם החזרה, יש $\binom{28}{10}$ אפשרויות בחירה שונות, מכיוון ש-10 הבחירות שקולות ל-10 כדורים זהים ו-19 המספרים הנתונים שקולים ל-19 תאים ממוספרים. (אם למשל, יש 2 כדורים בתא שמתאים למספר 5, פירוש הדבר, שהמספר 5 נבחר פעמיים.)

3. אם יש חשיבות לסדר הבחירה והבחירה היא ללא החזרה, יש $\frac{19!}{9!}$ אפשרויות בחירה שונות.

4. אם אין חשיבות לסדר הבחירה והבחירה היא ללא החזרה, יש $\binom{19}{10}$ אפשרויות בחירה שונות.

בהנחה שיש חשיבות לסדר בחירת המספרים נקבל כי –

ב. בסעיף זה, נדרש שוויון בין הערכים המוחלטים של שני המספרים – הראשון והאחרון. לכן, אם המספר הראשון שונה מאפס (18 אפשרויות), יש 2 אפשרויות לבחירת המספר האחרון; ואם המספר הראשון שווה ל-0, אז גם האחרון צריך להיות שווה ל-0. לפיכך, מספר אפשרויות הבחירה המתאימות במקרה זה הוא:

$(18\cdot 2+1)\cdot 19^8$

ג. כדי שסכום שלושת המספרים האחרונים שייבחרו יהיה זוגי, צריך ששלושתם יהיו זוגיים (9 אפשרויות בחירה לכל אחד) או ששניים מהם יהיו אי-זוגיים (10 אפשרויות בחירה לכל אחד) והשלישי זוגי (9 אפשרויות לבחירתו ו- 3 למיקומו בשלישיית המספרים האחרונים). לכן, מספר אפשרויות הבחירה הוא:

$(9^3 + 3\cdot 9\cdot 10^2)\cdot 19^7$

ד. יש בקבוצת המספרים הנתונה 7 כפולות של 3, לכן מספר אפשרויות הבחירה הוא: $\binom{10}{3}\cdot 12^7\cdot 7^3$