

מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.

* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של

הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת

"אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות

שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.

* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי

אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.

* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים

של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. ההסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם ניקוד חלקי גם אם בחרתם תשובה לא נכונה.

(7 נק') א. α, β הם פסוקים מורכבים. בלוח אמת משותף שלהם יש שורות שבהן שניהם

מקבלים ערך T ויש שורות שבהן שניהם מקבלים ערך F.

יש בלוח גם שורות שבהן α מקבל ערך T ו- β מקבל ערך F,

אבל אין בלוח אף שורה בה α מקבל F ו- β מקבל T.

מהאמור כאן נובע:

[1] $\alpha \rightarrow \beta$ הוא טאוטולוגיה [2] $\alpha \rightarrow \beta$ הוא סתירה

[3] $\beta \rightarrow \alpha$ הוא טאוטולוגיה [4] $\beta \rightarrow \alpha$ הוא סתירה

[5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה

(6 נק') ב. A היא קבוצת הפונקציות של N לקבוצה $\{0,1\}$, המקיימות:

לכל n זוגי, $f(n) = 0$ (אין דרישה מיוחדת מ- $f(n)$ כאשר n הוא אי-זוגי).

עוצמתה של A היא:

[1] מספר סופי [2] \aleph_0 [3] C

[4] גדולה מ- C [5] לא ניתן לקבוע מהנתונים את עוצמת A

(6 נק') ג. משפט 1.6 ב"תורת הגרפים" אומר:

"גרף בעל לפחות שני צמתים הוא דו-צדדי אם ורק אם אין בו מעגל באורך אי-זוגי".

נזכור שביער, ובפרט בעץ, אין מעגלים כלל.

איזו מהאמירות הבאות נכונה?

[1] כל יער על יותר מצומת אחד הוא גרף דו-צדדי.

[2] הטענה הקודמת אינה נכונה, אבל כל עץ על יותר מצומת אחד הוא גרף דו-צדדי.

[3] עץ על מספר אי-זוגי של צמתים לעולם אינו גרף דו-צדדי.

[4] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

חלק ב': ענו על שלש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

בכל סעיפי השאלה $A = \mathbb{N} - \{0,1\}$ (הטבעיים ללא 0 ו-1), ו- D הוא יחס מעל A המוגדר כך:

$(a,b) \in D$ אם b מתחלק ב- a ללא שארית.

לפי "תורת הקבוצות" עמ' 90 שאלה 3.14, D הוא יחס סדר-חלקי מעל A .

(7 נק') א. האם D הוא סדר-מלא מעל A ? הוכח את תשובתך.

(10 נק') ב. הוכח שהסגור הסימטרי של D אינו יחס סדר-חלקי מעל A .

(10 נק') ג. הוכח או הפרד: $DD^{-1} = D^{-1}D$ (הכפל הוא כפל יחסים).

שאלה 3

תהינה $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{1,2,3,4,5,6\}$.

(6 נק') א. כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של X ל- Y קיימות?

(21 נק') ב. כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של X ל- Y מקיימות את התנאי:

לכל $i \in X$, $f(i) \neq i$. הדרכה: הכלה והפרדה.

שאלה 4

מצאו את מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24$ במספרים טבעיים,

כאשר שלושה מהמשתנים מתחלקים ב-3 ושני האחרים אינם מתחלקים ב-3.

לא נתון איזה מהמשתנים מתחלקים ב-3.

אפשר להיעזר בפונקציה יוצרת אבל אין הכרח. יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

הדרכה: כל מספר טבעי הוא מאחת הצורות: $3k, 3k+1, 3k+2$, כאשר $k \in \mathbb{N}$.

תזכורת: 0 הוא מספר טבעי והוא מתחלק ב-3.

שאלה 5 בעמוד הבא

שאלה 5

תהי $A = \{1, 2, 3\}$ ותהי $V = A \times A$.
הגרף G מוגדר כך: קבוצת הצמתים של G היא הקבוצה V הנתונה למעלה.
למשל הזוג הסדור $(2, 1)$ הוא צומת של G .
בין צומת (a, b) לצומת (c, d) יש קשת אם ורק אם $a + b \neq c + d$.
למשל יש קשת בין $(2, 1)$ לבין $(2, 2)$, ואין קשת בין $(2, 2)$ ל- $(1, 3)$.

- 5 נק' א. הוכח ש- G קשיר.
- 6 נק' ב. מה דרגת הצומת $(1, 1)$ ומה דרגת הצומת $(2, 3)$?
- 8 נק' ג. כמה קשתות יש ב- G ? הוכח.
- 8 נק' ד. הוכח שאין ב- G מסלול אוילר (לא מסלול אוילר פתוח ולא מעגל אוילר).

בהצלחה!