

עיסוי - ת.ל.י

פעולה בינארי על קבוצה

הגדרה

יהי A קבוצה לא ריקה.

פעולה בינארי על A היא התאמה

המתאימה לכל צמד סדרה של איברים מתוך A

קוצאה אחד ויחידה.

הרב

האם ההתאמה הבאה למצוה פשוטה
בניגוד לא הטבעי?

① כדל על סדר של טבע (ח, ט) (אולי א) $\frac{1}{2}$.

הערה

כדל על סדר של איברים מניח למתאמה
הנצחה אחת ויחידה אכן ההתאמה למצוה פשוטה
בניגוד לא.

לשם.

(2) כדי שיהיה סדרה של טבעי"ם (m, n) נראים כי \sqrt{n} .

משאבה

כדי שיהיה סדרה של טבעי"ם למראיתם תוצאה את

ויתרה ולכן ההרמיה מגדירה פעולה ביןאית-ם
הטבעי"ם.

ממל"

(3) כדי שיהיה סדרה של טבעים (m, n) נראים על
 m אם m זוגי, אחרת n אם n זוגי.

רשומה

נרמין $2, 4$:

$2, 4 \in A$ וזוהי הסדרה $(2, 4)$ הראשונה שני.

הנצח.

כעת הוראנו איך מגדירה פונקציה ביןאי-הם A .

לשם.

הערה

נסמן פעולות בינאריות על קבוצה בסמלים כגון:

$+, \cdot, *, \triangle, \oplus, \odot, \oslash, \dots$

אם התוצאה שמראתה הפעולה $*$, למשל, היא

הסדר (a, b) נסמן $a * b$.

סעיף 1

הצגה

יהא A זבויג כא יינע.

יהא $*$ פעולה בינאריע אויף A .

נאמר כי A סגורה יחיד $*$ נאמר:

דאס a, b איז $(a \in A \text{ און } b \in A) \text{ איז } a * b \in A$.

דאס $a, b \in A$ איז $a * b \in A$

סגירות - שני ערכים בהן לא הוכחה

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
 \mathbb{R} סגור בהם אחרת לא

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ סגור בהם אחרת לא

\mathbb{N} סגור בהם אחרת לא

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ סגור אחרת לא.

2.3.11 מכניזם טענה

① אם φ ו- ψ טענות קטנות
הם המשפטים x, y בהתאמה
זיהו עקב
אם הטענה $(\varphi \wedge \psi)$.

דוגמה
אם הטענה $(x \in A \wedge y \in B)$ נכונה
 $x, y \in A$.

ערה
אם הטענה $(x \in A \wedge x \in B)$ נכונה.

② טענה - מה צריך:

כדאי X אם ψ איש

נגד ψ טענה אחרת שנראה X
זמן קצר.

דוגמה:

אם הטענה X אם $X < 0$ איש $X^2 < 0$

נרצה: $X < 0$ כדאי $X^2 < 0$.

אם

אם הטענה X אם $X^2 < 0$ איש $X = 3$

זמן קצר.

(3) כאן הוכחה:

ז"ל x שז"ל $(\varphi \text{ ו} \psi)$

כאשר φ נכונה אטומית ו שז"ל x נכונה

אפשרי. ז"ל.

ראיה:

ז"ל x שז"ל $(x^2 \notin M \text{ ו} x \in M)$

ז"ל $x \in M$ שז"ל $x^2 \notin M$. ז"ל ז"ל ד:

④ בבנייה גורמת:

אם הנתון:

$$\{x \mid \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ x = 2n \end{array}\}$$

באמצעות הקיבוצי:

$$\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

אם $y \in \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$?

כאשר $y = 2n$ ו- $n \in \mathbb{N}$

$$A = \{3^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

הצגה
 3.3

$$x \oplus y = \frac{x \cdot y}{81}$$

3.3 $x, y \in A$ נכנס

האם A סגורה ביחס \oplus ?

הוכחה

יהי x, y

נניח $x, y \in A$

$x = 3^n$ עבור $n \in \mathbb{Z}$ כן $x \in A$

$y = 3^m$ עבור $m \in \mathbb{Z}$ כן $y \in A$

כדאי:

$$x \odot y = \frac{xy}{81} =$$

$$= \frac{3^n \cdot 3^m}{3^4} = 3^{n+m-4}$$

$$n+m+(-4) \in \mathbb{Z} \quad \text{כי } n, m, -4 \in \mathbb{Z}$$

$$: n+m+(-4) \approx \text{מספר}$$

$$x \odot y = 3^{n+m+(-4)} \quad \text{כאשר } n+m+(-4) \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{אם } A \text{ קבוצה של מספרים טבעיים, אז } x \odot y \in A \quad \text{כאשר}$$

הערה

$A = \{0, 2, 3\}$ היא סגורה ביחס \cdot

$+$ mod 4 ?

תשובה

כן, $2, 3$:

$2, 3 \in A$ אבל

$2 +_{\text{mod } 4} 3 = 1 \notin A$, כנ"ל

לכן A אינה סגורה ביחס $+$ mod 4.
הערה

תרגיל

ל $A = \{1, 3, 5, 7\}$ האם A סגורה תחת

• mod 8 ?

תשובה

(גיוון בטבלת הפעולה:

mod	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

כל התוצאות הן
איברים ב A

לכן A סגורה תחת-סלסט.

לפי

זיבאציון

הגדרה

יהא A זיבאציון לא הינקה.

יהא $*$ פאונקציע בינאריע אויף A .

נאמט זי אז זיבאציון אויף A איז אסאך:

① A סגורה אויף $*$.

② $(a * b) * c = a * (b * c)$, $a, b, c \in A$ דאס.

הצגה

$x * y = \frac{xy}{81}$ $x, y \in \mathbb{N}$ נניח

האם $*$ ג'בויז'ה \mathbb{N} ?

תשובה

נבדוק $1, 2$:

$1 * 2 = \frac{2}{81} \notin \mathbb{N}$ $1, 2 \in \mathbb{N}$ אכן

כל \mathbb{N} אינה סגורה ביחס $*$ ואם כן

$*$ אינה ג'בויז'ה \mathbb{N} .

נ"ס

תרגיל
נתון: $x, y \in A$ ו $A = \{3^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$$x * y = \frac{x \cdot y}{81}$$

האם $*$ גורם A להיות

גורם
הוא A סגור תחת $*$.

יהי $a, b, c \in A$.

$$(a * b) * c = \left(\frac{ab}{81} \right) * c =$$

$$= \frac{\frac{ab}{81} \cdot c}{81} = \frac{abc}{6561} \quad (1)$$

$$a * (b * c) = a * \frac{bc}{81} =$$

$$= \frac{a \cdot \frac{bc}{81}}{81} = \frac{abc}{6561} \quad (2)$$

$\sim 312.2 \times 10^6$
 $\text{Sun} \cdot A \sim$

$$(a+b) * c = a * (b * c) \quad (2) \cdot 1 \quad (1) \mathcal{N}$$

ג'לם איבה ניגיה

יהא A גבול שאלה ייגיה.

יהא $*$ באיבה ניגיה — A סה.

$e \in A$ ג'לם ניגיה. (A ניגיה סה $*$)

כאם : $x \in A$ סה $x * e = x$ ו $e * x = x$.

$$x * y = \frac{xy}{81}$$

הכנסה $x, y \in A$ נכנס $A = \{3^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

האם A סגור תחת $*$?

הוכחה

נבחר $n = 4$

$$81 = 3^4 \Rightarrow 4 \in \mathbb{Z}$$

$$81 \in A \quad \text{נכון}$$

נבחר $n = 1$

הוכחנו $81 \in A$

$$X \in A \quad \text{'n'}$$

$$X * 81 = \frac{X \cdot 81}{81} = X$$

$$81 * X = \frac{81 \cdot X}{81} = X$$

$$A \approx \text{f.c.j. } 81 \quad \text{108}$$

$$A \approx \text{f.c.j. } = 2 \quad \text{108}$$

80 N

7 G.C

כדי ל יהיה ניטרלי היתה e 2.3×10^3 cm^{-3}

$$X * e = X$$

$$\frac{Xe}{\delta l} = X / \cdot \delta l$$

$$xe = \delta_1 x \quad / \quad x \neq 0$$

$e = 81$

מה
האכת
2.11
 $(e)_{\text{כ}}$
 $e = \frac{1}{2}$

תוצאה

$\forall x, y \in \mathbb{Z}$: $x * y = x$

$$y \geq 0 \quad \text{כאשר} \quad x * y = x$$

$$y < 0 \quad \text{כאשר} \quad x * y = y$$

① \therefore זהו כלל

$$-1 \cdot 1 \quad (-1) * 1 \cdot 1$$

$$-2 \cdot 2 \quad 2 * (-2) \cdot 2$$

$$-5 \cdot 5 \quad (-3) * (-5) \cdot 5$$

2. האם \mathbb{Z} יחיד? \mathbb{Z}

השאלה

הי' $e \in \mathbb{Z}$.

אם $e < 0$ או $e \geq 0$.

נניח $e < 0$:

נבדוק 1 .

$1 \in \mathbb{Z}$. כמובן $1 > 0 > e$

אם $1 \neq e$,

אז $1 * e = e \neq 1$: $*$ לא חסומה

$$\frac{e \geq 0 : e \in \mathbb{N}}{e+1 \in \mathbb{N}}$$

$$: e+1 \in \mathbb{N}$$

$$. e+1 \in \mathbb{Z} \quad \text{כאשר } e, 1 \in \mathbb{Z}$$

$$. e+1 \neq e \quad \text{כי } e+1 > e \geq 0$$

$$e * (e+1) = e + e+1 \quad \text{כאשר}$$

$$. * \quad \text{כאשר } e, 1 \in \mathbb{Z} \quad \text{כי } e, 1 \in \mathbb{Z}$$

$$. \mathbb{N}$$

טיוטה

מה צ"ע?

הטענה המקורית:

ז"ע $e \in Z$ כע סוף $x \in Z$ $(e * x = x \text{ ו- } x * e = x)$

פסולה:

כדף $e \in Z$ ז"ע $x \in Z$ כע $(e * x \neq x \text{ ו- } x * e \neq x)$

$$\frac{\neg 0 \cdot 0}{\underline{\underline{e < 0}}}$$

$$1 * e = e < 0$$

1

$$\underline{\underline{e < 0}}$$

~~$$-1 * e = -1$$~~

~~$$e * -1 = -1$$~~

$$\underline{\underline{e > 0}}$$

$$1 * e = 1$$

$$e * 1 = e$$

א. ב. ג. ד. ה. ו. ז. ח. ט. י.

הערה

יהי A סדרה ייחודית.

יהי x פשוטה בין-אחר A .

יהי $e \in A$ יחידה.

יהי $a \in A$.

$A \approx$) א. ב. ג. ד. ה. ו. ז. ח. ט. י.

$a * b = e$ - כל (ביחס $*$)

גיוס

1.25) $x, y \in A$ כד. $A = \{3^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$$x * y = \frac{xy}{81}$$

הוכחנו כי $81 \in A$ נכרי.

הראו כי לכל איברי A ז"ם 1.25.

משוואה

יהי $x \in A$.

כל ז"ם $n \in \mathbb{Z}$ כך $x = 3^n$.

• $\exists n \in \mathbb{Z}$ such that $n \leq x$ and $x < n+1$ for all $x \in \mathbb{R}$

$$y = 3^{8-n} \quad (10)$$

$$y = 3^{8-n}$$

$$\frac{8-n}{2} \in \mathbb{Z}$$

$$y \in A \quad y \geq \delta$$

צו פאן

$$X * y = \frac{x \cdot y}{81} = \frac{3^n \cdot 3^{8-n}}{81} = \frac{3^8}{81} = 81$$

نہ

ע"כ 1887 ה'תקפ"ח א"י 2"ס י"ד

$$x = 3^n$$

$$\frac{761.0}{}$$

: 2.0 50 y 37

$$x \times y = 81$$

$$\frac{xy}{81} = 81$$

$$y = \frac{6561}{x} = 3^{8-n}$$

תרגיל

$$X * y = -3xy \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

① האם \mathbb{Q} עם $*$ מהווה חבורה?

הנחנו $-\frac{1}{3}$

$$-\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$$

$$\forall x \in \mathbb{Q}$$

$$x * \left(-\frac{1}{3}\right) = -3 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = x$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) * x = -3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x = x$$

$$Q \approx \delta_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij}$$

7.6.6

$$\cancel{-3xe = x}$$

$$: \quad 2k \cdot 0.7 \cdot e \quad e \quad n.77$$

$$2xe = -3 \cdot 2 \cdot e = 2$$

\Downarrow

$$e = -\frac{1}{3}$$

מה האלה?

(*) ערצקא — החופשה ארץ האלה

י'סר — מק'טה וארץ — אלה
שעליו אלה.

(*) מנ"ן 12 אלה 22.4.

(*) ממפדס הא (משל) אלה יחידה 4.

עזרה אלה אלה יחידה.