שאלה 1

א1. נשים לב , שלתוצאות שמתקבלות ב- 3 ההטלות הראשונות של המשחק , אין השפעה על מספר ההטלות שיבוצעו בהמשכו. בכל מקרה, בין אם מקבלים יותר H מאשר T ובין אם להיפך, בהמשך המשחק מבצעים ניסוי גיאומטרי עם הפרמטר 0.5, הואיל והמטבע תקין. לפיכך, אם נסמן ב- G משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר 0.5, נקבל כי לכל $j = 4,5,\ldots$, מתקיים :

$$P\{Y=j\}=P\{3+G=j\}=P\{G=j-3\}=0.5\cdot 0.5^{j-3-1}=0.5^{j-3} \qquad , \qquad j=4,5,\ldots$$

א2. מהסעיף הקודם נקבל כי :

$$E[Y]=E[3+G]=3+E[G]=3+\tfrac{1}{0.5}=5$$

$$\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{Var}(3+G)=\mathrm{Var}(G)=\tfrac{0.5}{0.5^2}=2$$

ב. במשחק זה, בניגוד למשחק הקודם, לתוצאות שתי ההטלות הראשונות יש השפעה על המשך המשחק.

אם ב-2 ההטלות הראשונות של המטבע **הלא-תקין** מקבלים פעמיים T, בהסתברות p^2 :

ממשיכים בניסוי גיאומטרי עד לקבלת ה-T הראשון, כלומר, בניסוי גיאומטרי עם הפרמטר p ;

לעומת זאת –

אם ב-2 ההטלות הראשונות של המטבע **הלא-תקין** מקבלים לפחות פעם אחת H, בהסתברות $1-p^2$:

ממשיכים בניסוי גיאומטרי עד לקבלת ה-H הראשון, כלומר, בניסוי גיאומטרי עם הפרמטר $1-p$.

נסמן ב- A את המאורע שבשתי ההטלות הראשונות מקבלים פעמיים T ; ב- G_p משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p ; וב- G_{1-p} משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר $1-p$.

כעת, נמצא את פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי W בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה , כאשר נתונה בהתרחשות המאורע A (מתרחש או שאינו מתרחש). לכל $k = 3,4,\ldots$ מתקיים :

$$P\{W=k\}=P\{W=k\,|\,A\}P(A)+P\{W=k\,|\,A^C\}P(A^C)=P\{G_p=k-2\}p^2+P\{G_{1-p}=k-2\}(1-p^2)$$

$$=(1-p)^{k-3}p\cdot p^2+p^{k-3}(1-p)\cdot(1-p^2)=(1-p)^{k-3}p^3+p^{k-3}(1-p)\cdot(1-p^2)$$

שאלה 2

א. במבנה המתואר בשאלה יש בסך- הכל $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$ כדורים, <u>שאחד מהם נבחר באקראי</u>. כלומר, כל אחד מהכדורים נבחר בהסתברות $1\Big/\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2}{n(n+1)}$. לפיכך :

$$P\{X=i,Y=j\}=\tfrac{2}{n(n+1)} \qquad , \qquad i=1,2,\ldots,n \quad ; \quad j=1,\ldots,i$$

ב. מכיוון שבשורה i יש בסך-הכל i כדורים, מתקיים :

$$P\{X=i\}=\tfrac{2i}{n(n+1)} \qquad , \qquad i=1,2,\ldots,n$$

מכיוון שהמקום j מופיע החל בשורה j וכלה בשורה n , הוא מופיע בסך-הכל ב- $n-(j-1)$ שורות.

לפיכך, מתקיים :

$$P\{Y=j\}=\tfrac{2(n-j+1)}{n(n+1)} \qquad , \qquad j=1,2,\ldots,n$$

ג. ברור ששני המשתנים המקריים תלויים זה בזה, היות שמתקיים $Y \le X$. נוכל גם להראות שתנאי אי-התלות לא מתקיים. למשל: $P\{X=1, Y=2\} = 0$

אבל: $P\{X=1\}P\{Y=2\} = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$

כלומר: $P\{X=1, Y=2\} \neq P\{X=1\}P\{Y=2\}$

ד. $$P\{Y \le 2 \mid X \ge 4\} = \frac{P\{X \ge 4, Y \le 2\}}{P\{X \ge 4\}} = \frac{2 \cdot (n-3)}{\frac{n(n+1)}{2} - (1+2+3)} = \frac{4 \cdot (n-3)}{n(n+1) - 12} = \frac{4 \cdot (n-3)}{(n+4)(n-3)} = \frac{4}{n+4}$$

שימו לב: החישוב נעשה על-ידי מניית התוצאות השייכות למאורעות שבמונה ובמכנה. דרך חישוב זו אפשרית, מכיוון שכל התוצאות במרחב המדגם שוות-הסתברות.

שאלה 3

א. $$\frac{3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{1}{44} = 0.02273$$

ב. ראשית, נשים לב, שהמשתנה המקרי X מקבל ערכים שלמים בין 0 ל-3.

כעת, נגדיר: $X_i = \begin{cases} 1 \quad , & \text{במקום } i \text{ מתחיל הרצף 2011} \\ 0 \quad , & \text{אחרת} \end{cases}$ לכל $i = 1,\ldots,9$

ונקבל כי: $\sum_{i=1}^{9} X_i = X =$ מספר הפעמים שהרצף 2011 מופיע בשורת הקלפים.

לכל $i = 1,\ldots,9$, נחשב את התוחלת של X_i. בדומה לסעיף א, נקבל: $E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \frac{1}{44}$

ומכאן: $$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{9} X_i\right] = \sum_{i=1}^{9} E[X_i] = 9 \cdot \frac{1}{44} = 0.20455$$

ג. נחשב כעת את השונות של X_i, לכל $i = 1,\ldots,9$. נקבל:

$$\text{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = \frac{1}{44} \cdot \frac{43}{44} = \frac{43}{1{,}936}$$

את חישוב השונות המשותפת של X_i ו- X_j, לכל $i \ne j$, נפריד לשני מקרים, בהתאם למרחק בין המקומות ה-i-י וה-j-י בשורה. נקבל:

$$E[X_i X_j] = P\{X_i = 1, X_j = 1\} = \begin{cases} 0 & , \quad |i-j| \le 3 \\ \frac{3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{1{,}540} & , \quad |i-j| \ge 4 \end{cases}$$

לפיכך: $$\text{Cov}(X_i, X_j) = E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j] = \begin{cases} 0 - \left(\frac{1}{44}\right)^2 = -\frac{1}{1{,}936} & , \quad |i-j| \le 3 \\ \frac{1}{1{,}540} - \left(\frac{1}{44}\right)^2 = \frac{9}{67{,}760} & , \quad |i-j| \ge 4 \end{cases}$$

ומכאן: $$\text{Var}(X) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{9} X_i\right) = \sum_{i=1}^{9} \text{Var}(X_i) + \sum_{i \ne j} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

$$= 9 \cdot \frac{43}{1{,}936} - 2 \cdot 21 \cdot \frac{1}{1{,}936} + 2 \cdot \left[\binom{9}{2} - 21\right] \cdot \frac{9}{67{,}760} = 0.1822$$

שאלה 4

א. $\int_9^\infty f_X(x)dx = a\int_9^\infty e^{-x/9}dx = -9ae^{-x/9}\Big|_9^\infty = 0+9ae^{-1} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{1}{9}e$

ב. פונקציית הצפיפות של X היא: $f_X(x) = \frac{1}{9}e^{-x/9}\cdot e = \frac{1}{9}e^{-(x-9)/9} \quad , \quad x>9$

ופונקציית הצפיפות של Y היא: $f_Y(y) = \frac{1}{9}e^{-y/9} \quad , \quad y>0$

מהתבוננות בשתי הפונקציות , אפשר לשער שהמשתנה המקרי X הוא הזזה ב- 9 של המשתנה המקרי Y.
נבדוק את אמיתות ההשערה. נניח ש- X הוא אכן הזזה ב-9 של Y , ונמצא את פונקציית הצפיפות שלו.

מתקיים: $F_X(x) = P\{X\le x\} = P\{Y+9\le x\} = P\{Y\le x-9\} = F_Y(x-9) \quad , \quad x>9$

לפיכך: $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{d}{dx}F_Y(x-9) = f_Y(x-9) = \frac{1}{9}e^{-(x-9)/9} \quad , \quad x>9$

קיבלנו את פונקציית הצפיפות הנתונה . לפיכך, את הקשר בין X ל- Y אפשר לבטא באמצעות הפונקציה $Y = X-9$.

ג. מכיוון שמתקיים $Y = X-9$, נקבל: $E[X]=E[Y+9]=E[Y]+9=9+9=18$

$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y+9)=\mathrm{Var}(Y)=9^2=81$

ד. $M_X(t) = M_{Y+9}(t) = e^{9t}M_Y(t) = \frac{\frac{1}{9}e^{9t}}{\frac{1}{9}-t} = \frac{e^{9t}}{1-9t} \quad , \quad t<\frac{1}{9}$

שאלה 5

א. ההוכחה מובאת בספר הקורס ובקובץ התרגילים הפתורים לפרק 7 באתר הקורס.

ב. התוחלת של כל אחד מה- X_i-ים היא 0.5 ושונותם היא $0.5^2 = 0.25$. לכן, התוחלת של ממוצע ה- X_i-ים גם היא 0.5 ושונות הממוצע היא $0.25/n$.

1. $P\{0.4<\overline{X}_n<0.6\} = P\{|\overline{X}_n-0.5|<0.1\} = 1-P\{|\overline{X}_n-0.5|\ge 0.1\} \ge 1-\frac{\frac{0.25}{n}}{0.1^2} = 1-\frac{25}{n} > 0.75$

$1-\frac{25}{n}>0.75 \qquad \Rightarrow \qquad n>100$

לכן, ה- n המינימלי העונה על הדרישות הוא 101.

2. $P\{0.4<\overline{X}_n<0.6\} \cong P\left\{\frac{0.4-0.5}{0.5/\sqrt{n}}<Z<\frac{0.6-0.5}{0.5/\sqrt{n}}\right\} = P\{-0.2\sqrt{n}<Z<0.2\sqrt{n}\}$

$= \Phi(0.2\sqrt{n})-\Phi(-0.2\sqrt{n}) = 2\Phi(0.2\sqrt{n})-1>0.75$

$2\Phi(0.2\sqrt{n})-1>0.75 \quad\Rightarrow\quad \Phi(0.2\sqrt{n})>0.875=\Phi(1.15) \quad\Rightarrow\quad 0.2\sqrt{n}>1.15 \quad\Rightarrow\quad n>33.0625$

לכן, ה- n המינימלי העונה על הדרישות הוא 34.