**מבנה הבחינה**: בבחינה **שש** שאלות. עליכם לענות על **חמש** מהן.

**שאלה 1**

נעיין במודל החישובי הבא: מכונת טיורינג **עם אינסוף מצבים**.

מכונה כזו זהה למכונה רגילה, פרט לכך שמספר המצבים יכול להיות אינסופי (ולכן גם התחום והטווח של פונקצית המעברים יכולים להיות אינסופיים).

האם למכונה כזו **יש יותר כוח** מאשר למכונה רגילה?

אם עניתם שכן, עליכם להראות שמכונה עם אינסוף מצבים יכולה לזהות שפות שאי אפשר לזהות אותן בעזרת מכונה עם מספר סופי של מצבים.

בנוסף עליכם להסביר מדוע אין בקיומה של מכונה כזו סתירה לתזה של צ'רץ'-טיורינג.

אם עניתם שלא, עליכם להראות כיצד מכונה עם מספר **סופי** של מצבים יכולה לחקות את פעולתה של מכונה עם **אינסוף** מצבים.

**שאלה 2**

הוכיחו שהשפה $C$ הבאה היא **מזוהה-טיורינג אך איננה כריעה**:

$C$ = {<$M$, $x$> | $M$ is a TM that accepts $x$; when $M$ terminates its running on $x$ its tape contains a word not longer than $x$}

(מילה <$M$, $x$> שייכת ל-$C$ אם $M$ היא תיאור של מכונת טיורינג, $x$ היא מילה, $M$ מקבלת את $x$, וכאשר $M$ מסיימת את הריצה על $x$ (במצב $q_{accept}$) כתובה על הסרט מילה שאיננה ארוכה מ-$x$).

הוכחת האי-כריעות של השפה תיעשה **בעזרת שיטת האלכסון**.

**הדרכה**: הניחו בשלילה ש-$C$ כריעה. אז יש מכונה $H$ שמכריעה אותה. בנו מכונה $D$ שתפעל הפוך מכל מכונה $M$ שהיא.

(אל תשכחו להוכיח ש-$C$ מזוהה-טיורינג).

**שאלה 3** (סעיף א - 5 נקודות; סעיף ב - 5 נקודות; סעיף ג - 10 נקודות)

מילה $v$ היא תחילית (prefix) של מילה $w$, אם יש מילה $u$ כך ש- $w=vu$.

לכל אחת מהשפות הבאות, קבעו האם היא שייכת למחלקה P, **והוכיחו** את קביעתכם.

א. $PREF_{\mathrm{DFA}} = \{\langle A, v\rangle \mid A$ is a DFA and there is $w \in L(A)$ that is a prefix of $v\}$

ב. $PREF_{\mathrm{CFG}} = \{\langle G, v\rangle \mid G$ is a CFG and there is $w \in L(G)$ that is a prefix of $v\}$

ג. $PREF_{\mathrm{TM}} = \{\langle M, v\rangle \mid M$ is a TM and there is $w \in L(M)$ that is a prefix of $v\}$

**שאלה 4**

הוכיחו שהשפה $NONEMPTY\text{-}INTER_{\mathrm{DFA}}$ שלהלן היא שפה **NP-קשה**:

$$NONEMPTY\text{-}INTER_{\mathrm{DFA}} = \{<A_1, ..., A_k> \mid A_1, ..., A_k \text{ are DFAs and } L(A_1)\cap \cdots \cap L(A_k) \neq \varnothing\}$$

מילה $<A_1, A_2, ..., A_k>$ שייכת לשפה אם $A_1$, $A_2$, ..., $A_k$ הם תיאורים של אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים, ויש מילה ששייכת לכל אחת מן השפות של האוטומטים הללו.

**הדרכה**: הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של $3SAT$.

אפשר לייצג השמה של ערכים בוליאניים ל-$n$ משתנים בוליאניים $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ בעזרת מחרוזת באורך $n$ מעל $\{0, 1\}$: המקום ה-$i$ במחרוזת יציין את ערכו של $x_i$.

לכל פסוקית בנו אוטומט שיזהה את שפת כל המחרוזות מעל $\{0, 1\}$ שמתאימות להשמות שמספקות את הפסוקית.

**שאלה 5**

נתונה השפה $\#SAT$

$$\#SAT = \{<\phi, k> \mid \phi \text{ is a Boolean formula with } \textbf{at least } k \text{ different satisfying assignments}\}$$

א. האם אפשר להוכיח ששפה זו שייכת ל- SPACE($n$)?
אם עניתם שכן, כתבו את ההוכחה. אם עניתם שלא, הסבירו למה לא.

ב. האם התשובה לסעיף א תשתנה, אם נחליף בהגדרת השפה את המילים "at least" במילים "at most"? הסבירו את תשובתכם.

ג. האם התשובה תשתנה, אם נחליף את המילים "at least" במילה "exactly"?
הסבירו את תשובתכם.

**שאלה 6**

הוכיחו: אם P=NP, אז יש אלגוריתם **בעל זמן ריצה פולינומיאלי** לבעיה הבאה:

הקלט: נוסחה בוליאנית $\phi$.

הפלט: השמה מספקת של $\phi$ אם $\phi$ ספיקה. אם $\phi$ לא ספיקה, יוחזר "לא".

(האלגוריתם מקבל כקלט נוסחה בוליאנית $\phi$. אם אין ל-$\phi$ השמה מספקת, מוחזר "לא". אם יש ל-$\phi$ השמה מספקת, מוחזרת אחת ההשמות המספקות של $\phi$. כלומר, מוחזרת הצבה של 0-ים ו-1-ים למשתנים של $\phi$ כך שהערך של $\phi$ בהצבה הזו הוא 1).

**הדרכה**: אם P=NP, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי ל-$SAT$.

אפשר לקרוא לאלגוריתם הזה כמה פעמים כדי למצוא הצבה למשתנים של $\phi$ שתספק את $\phi$.