פתרונות לממ"ן 12 - 2014א - 20425

1. א. נסמן ב-Y את המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר ההטלות ששחר מבצע. למשתנה המקרי Y יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{5}{36}$ (שהיא ההסתברות לקבל סכום 8 בהטלת שתי קוביות). לפיכך :

$$P\{Y>7\}=\left(\tfrac{31}{36}\right)^7=0.3511$$

ב. המשתנה המקרי X , המוגדר על-ידי מספר ההטלות שבהן שחר מקבל סכום שונה מ-8, הוא פונקציה לינארית של המשתנה המקרי Y (המוגדר בסעיף הקודם) ומתקיים $X=Y-1$. לכן, הערכים האפשריים של X הם השלמים האי-שליליים ופונקציית ההסתברות שלו היא :

$$P\{X=i\}=P\{Y-1=i\}=P\{Y=i+1\}=\left(\tfrac{31}{36}\right)^i\cdot\tfrac{5}{36}\qquad ;\qquad i=0,1,...$$

ג.

$$E[(X-4)^2]=E[(Y-5)^2]=\mathrm{Var}(Y-5)+(E[Y-5])^2=\mathrm{Var}(Y)+(E[Y]-5)^2$$

$$=\frac{1-\frac{5}{36}}{\left(\frac{5}{36}\right)^2}+\left(\frac{1}{\frac{5}{36}}-5\right)^2=49.48$$

ד. נתון כי שחר הטיל את הקוביות לפחות פעמיים, לכן ידוע כי $Y\geq 2$ או לחלופין כי $X\geq 1$. לכן, פונקציית ההסתברות המעודכנת תתקבל מהתניה במאורע $\{X\geq 1\}$. כלומר, פונקציית ההסתברות המעודכנת היא :

$$P\{X=i\mid X\geq 1\}=\frac{P\{X=i\}}{P\{X\geq 1\}}=\frac{\left(\frac{31}{36}\right)^i\cdot\frac{5}{36}}{1-\frac{5}{36}}=\left(\tfrac{31}{36}\right)^{i-1}\cdot\tfrac{5}{36}\qquad ,\qquad i=1,2,...$$

2. א. למספר ההטלות הכולל, שמבצעים אבנר ברק וגד, יש התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים 3 ו- ⅓.
לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא : $\binom{6}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{729}=0.10974$

ב. 1. למספר ההטלות של אבנר יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר ⅓. נסמן ב-X את מספר ההטלות שאבנר עושה, ונחשב את ההסתברות ש-X מקבל ערך זוגי. נקבל :

$$P\{X\text{ זוגי }\}=\sum_{i=1}^{\infty}\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{2i-1}=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\left(\tfrac{2}{3}\right)^2\right]^{i-1}=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{1-\frac{4}{9}}=\tfrac{2}{9}\cdot\tfrac{9}{5}=\tfrac{2}{5}$$

2. נסמן ב-A (B) $[C]$ את המאורע שאבנר (ברק) [גד] מטיל את המטבע שלו מספר זוגי של פעמים. לפי תנאי הבעיה, A , B ו-C הם מאורעות בלתי-תלויים ולכל אחד מהם הסתברות של 2/5 להתרחש. לפיכך, מספר ההטלות הכולל (של אבנר, ברק וגד) הוא זוגי, אם כל אחד מהם מטיל את המטבע שברשותו מספר זוגי של פעמים או אם אחד מהם מטיל את המטבע שברשותו מספר זוגי של פעמים וכל אחד מהשניים האחרים מטיל את המטבע שלו מספר אי-זוגי של פעמים. כלומר :

$$P\{\text{סה"כ מספר זוגי של הטלות}\}$$

$$=P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B^C\cap C^C)+P(A^C\cap B\cap C^C)+P(A^C\cap B^C\cap C)$$

$$=\left(\tfrac{2}{5}\right)^3+3\cdot\tfrac{2}{5}\left(\tfrac{3}{5}\right)^2=0.496\qquad [\,A\text{ , }B\text{ ו- }C\text{ בלתי-תלויים}\,]$$

ומכאן :

$$P\{A\mid\text{סה"כ מספר זוגי של הטלות}\}=\frac{P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B^C\cap C^C)}{0.496}=\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2}{0.496}=\frac{13}{31}=0.4194$$

ג. נסמן ב-Y את מספר ההטלות שביצע דן. המשתנה המקרי Y הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר ⅔. כעת, אבנר, ברק וגד מקבלים בדיוק H אחד כל אחד ואילו דן מקבל $Y-1$ פעמים H. לכן, מתקיים הקשר $W = 3 + Y - 1 = Y + 2$. ומכאן, אפשר למצוא את פונקציית ההסתברות של W ואת שונותו. מקבלים:

$$P\{W = i\} = P\{Y + 2 = i\} = P\{Y = i - 2\} = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{i-3} \qquad , \qquad i = 3,4,...$$

$$\text{Var}(W) = \text{Var}(Y + 2) = \text{Var}(Y) = \frac{1-\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$$

3. א. מספר הדסקיות השחורות שימוקמו ב-3 השורות העליונות של הלוח הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N = 64$, $m = 30$ ו- $n = 24$, שנסמנו ב- X . לפיכך:

$$P\{X = 11\} = \frac{\binom{30}{11}\binom{34}{13}}{\binom{64}{24}} = 0.20225$$

ב. בסימוני הסעיף הקודם נקבל:

$$\text{Var}(X) = \frac{64 - 24}{64 - 1} \cdot 24 \cdot \frac{30}{64} \cdot \frac{34}{64} = 3.795$$

ג. מספר המשבצות <u>השחורות</u> בלוח זה הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 10,000 ו- 0.005. לכן, נוכל לחשב קירוב פואסוני להסתברות המבוקשת, כאשר $\lambda = np = 10{,}000 \cdot 0.005 = 50$.

נקבל:

$$e^{-50} \cdot \tfrac{50^{54}}{54!} = 0.0464$$

4. נסמן ב- A את המאורע שהאדם מוצא לפחות חפץ אחד. נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה לחישוב ההסתברות המבוקשת, כאשר נתנה בערכו של X . נקבל:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A \mid X = i)P\{X = i\} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{i}{1+i} \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{(i+1)!}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}(i-1) \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = \frac{1}{\lambda}\Big(E[X-1] - (0-1)P\{X = 0\}\Big)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\Big(\lambda - 1 + e^{-\lambda}\Big) = 1 - \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} = 1 - \frac{1 - e^{-8}}{8} = 0.87504$$

5. א. נסמן ב- Y את המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הפעמים שהשיכור צועד ימינה ב-100 צעדים. ההתפלגות של Y היא בינומית עם הפרמטרים 100 ו- p . המשתנה המקרי $100 - Y$ הוא מספר הצעדים שהשיכור צועד שמאלה. לפיכך, לפי סימון זה, הנקודה על הציר שעליה נמצא השיכור לאחר 100 צעדים היא:

$$X = Y - (100 - Y) = 2Y - 100$$

ומכאן, שהערכים האפשריים של X הם $\{-100,-98,...,-2,0,2,...,98,100\}$ וההסתברויות לקבלתם הן:

$$P\{X = 2j - 100\} = P\{Y = j\} = \binom{100}{j}p^j(1-p)^{100-j} \qquad , \qquad j = 0,1,...,100$$

ב.

$$E[X] = E[2Y - 100] = 2E[Y] - 100 = 200p - 100 = 100(2p - 1)$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(2Y - 100) = \text{Var}(2Y) = 4\text{Var}(Y) = 4 \cdot 100p(1-p) = 400p(1-p)$$