# מבוא לפרק 4 בכרך "תורת הקבוצות"

**א. רקע**

מושג האינסוף נתפש במהלך רוב ההיסטוריה האנושית כמושג שעל גבול המיסטיקה.
מפתיע אולי לשמוע, שמזה כ- 130 שנה קיימת מסגרת התייחסות מתמטית,
שבמידה רבה "אילפה" את המושג הזה, ומאפשרת לדון בו בצורה מוגדרת היטב ועניינית.
את היסודות לתחום זה הניח גיאורג קנטור (Georg Cantor, 1845 – 1918).

שאלות ישנות כגון:

- האם יש אינסוף אחד ויחיד או שיש מובן לגדלים אינסופיים שונים?
- אם יש יותר מאינסוף אחד, האם ניתן להשוות בין שני "אינסופים", ולומר שאינסוף אחד גדול ממשנהו?
- אם יש "אינסופים" גדולים יותר וגדולים פחות, האם יש אינסוף הגדול מכל שאר ה"אינסופים", והאם יש אינסוף הקטן מכל שאר ה"אינסופים"?

קיבלו תשובה ברורה כבר בעבודותיו הראשונות של קנטור.

למרבה הפלא, ההגדרות הנדרשות כדי "לאלף" את מושג האינסוף הן פשוטות ביותר, וכמעט מובנות מאליהן. הקושי אינו בהגדרות, אלא בכך שמיד עם תחילת יישום ההגדרות אנו נתקלים בתוצאות הנראות בלתי-הגיוניות, תוצאות העשויות להביא למסקנה שההגדרות אינן מובילות למשהו מועיל. לקנטור היה הדמיון הנדרש ללכת, למרות זאת, בעקבות ההגדרות, ולבדוק לאן הן מובילות. הטיפול שלו במושג האינסוף עורר התנגדות של חלק מהמתמטיקאים בתקופתו. למרות זאת, תוך זמן לא רב, בתהליך שהחל עוד בימי חייו של קנטור, הפכה גישתו למוכרת ומקובלת. קנטור סבל בערוב ימיו מדיכאון קליני ואושפז לסירוגין בבתי חולים. עם זאת, הספיק לראות את ראשית הצלחת תורתו. המושגים והתוצאות אליהם הגיע הם כיום חלק בסיסי של תורת הקבוצות, ונלמדים באופן שגרתי בשנה א' של לימודי מתימטיקה.

**ב. קבוצות שוות עוצמה**

בספר מדע-פופולרי ישן בשם "1,2,3 … Infinity" מציג הפיסיקאי George Gamow את הרעיון הבסיסי של קנטור בצורה פשוטה וברורה. הנה התיאור שלו, בעיבוד קל:
נניח שבשבט מסוים האנשים אינם יודעים לספור מעֵבר ל- 5 . כל מספר הגדול מ- 5 הוא בעיניהם "**הרבה**". למרות מגבלה זו, אין לבני השבט בעיה לבצע עסקה של החלפת "הרבה" סוסים תמורת "הרבה" מטבעות זהב, כאשר הם בטוחים שכמות הסוסים שמסרו שווה בדיוק לכמות המטבעות שקיבלו:

**הדרך לעשות זאת היא להתאים אחד-לאחד בין הסוסים למטבעות, באופן שלכל סוס יותאם מטבע אחד ויחיד, ולא יישארו סוסים או מטבעות שאינם מותאמים.**

במושגים מתימטיים, בני השבט מנסים לבנות פונקציה **חד-חד-ערכית** של קבוצת הסוסים **על** קבוצת המטבעות. קיומה של פונקציה כזו מראה שהקבוצות שוות גודל.

מצבנו לגבי המושג **אינסוף** דומה למצבם של בני השבט לגבי המושג **הרבה**.
לנו לא ברור איך להשוות בין קבוצות אינסופיות. נאמץ אפוא את הפתרון של אותו שבט :

**הגדרה** : נאמר שלקבוצות $A$, $B$ יש אותו גודל (המונח המקובל הוא **עוצמה**) אם קיימת **פונקציה חד-חד-ערכית** של $A$ <u>על</u> $B$.

אם נחשוב על כך, ניתן לטעון שזו בעצם ההגדרה היחידה המתקבלת על הדעת :
אם יש סיכוי כלשהו לדבר על גדלים של קבוצות אינסופיות, הרי תכונה בסיסית שודאי נרצה לדרוש ממושג הגודל היא, שאם ניתן להתאים את אברי שתי קבוצות "אחד-לאחד" ולמצות כך את שתי הקבוצות, הקבוצות הן שוות-גודל.
קנטור לקח אפוא "דרישה מינימלית" זו – כהגדרה !

אגב, נשים לב שכמו עבור בני השבט, הגדרה זו מאפשרת לנו לקבוע אם שתי קבוצות הן שוות-גודל בלי לדעת מהו גודל זה. בני השבט אינם צריכים לתת שם למספר 12 , או אף לדעת שמכרו 12 סוסים, כדי לדעת שקבוצת הסוסים שמכרו **שוות-גודל** לקבוצת המטבעות שקיבלו. הגדרנו את המושג **קבוצות שוות-עוצמה** כיחידה אחת, בלי שנזקקנו לדעת מהי "עוצמה".

עוד הערה : הגדרנו בינתיים רק שוויון עוצמות, ולכן אנו יכולים בשלב זה לשאול רק אם שתי קבוצות הן **שוות-עוצמה** או **שונות-עוצמה**. המושג "גדול מ-" הוא עדין יותר, ויוגדר בשלב מאוחר יותר.

אם הגדרת שוויון עוצמות כה פשוטה, מדוע נוסדה תורת העוצמות האינסופיות רק בשלהי המאה ה- 19 ולא הרבה קודם? הסיבה לכך היא ככל הנראה מכשלות כגון זו :
נתבונן בקבוצת המספרים הטבעיים : $\mathbf{N}=\{0,1,2,\ldots\}$ . תהי $\mathbf{N}^*=\mathbf{N}-\{0\}=\{1,2,3\ldots\}$ .
$\mathbf{N}^*$ היא קבוצה **חלקית-ממש** של $\mathbf{N}$ .
מצד שני, הפונקציה $f(n)=n+1$ היא פונקציה **חח"ע** של $\mathbf{N}$ **על** $\mathbf{N}^*$ .
לפי הגדרתנו, פירוש הדבר כי לשתי קבוצות אלו אותו גודל !
אך זה נראה כשטות גמורה : **איך יתכן שלקבוצה ולקבוצה חלקית-ממש שלה יהיה אותו גודל?**

ההגדרה הביאה לתוצאה הנראית בלתי מתקבלת על הדעת. מצד שני, ההגדרה שנתנו היא כאמור דרישה "מינימלית" סבירה ביותר ממושג הגודל. מכיון שהגדרה זו הביאה מיד למסקנה, שקבוצה יכולה להיות שוות-גודל לקבוצה חלקית-ממש שלה, אנו עשויים לחשוב שמושג הגודל הוא חסר-טעם לגבי קבוצות אינסופיות. בעיה זו עיכבה את התפתחות מושג האינסוף במשך מאות שנים.

פריצת הדרך של קנטור החלה בכך שלא נרתע מהפרדוקס. הוא חשד שיש טעם להמשיך לבדוק את המסקנות המתקבלות מהגדרת שוויון עוצמה, למרות ההתנגשות עם האינטואיציה.

לשם כך עלינו לקבל, שייתכן שלקבוצה $A$ ולקבוצה $B$ החלקית-ממש ל- $A$ יהיה אותו גודל ! רעיון זה מוזר לנו, אך מוזרותו נובעת מכך שהאינטואיציה שלנו לגבי גדלים של קבוצות נבנתה בעבודה עם קבוצות סופיות ! בקבוצות סופיות אכן מצב כזה לא ייתכן. מסתבר שמצב כזה קורה רק בקבוצות אינסופיות, ולמעשה מאפיין קבוצות אינסופיות: לכל קבוצה אינסופית יש תת-קבוצות השונות ממנה, שהן שוות-עוצמה לה; ורק בקבוצה אינסופית ייתכן מצב כזה.

הנה עוד דוגמאות למצב זה:

- $A = \mathbf{N}$ , $B =$ קבוצת הטבעיים הזוגיים.
- הפונקציה $f : A \to B$ , $f(n) = 2n$ , היא חח"ע ועל,
- ומראה כי קבוצת המספרים הטבעיים שוות עוצמה לקבוצת המספרים הטבעיים הזוגיים.

- $A = \mathbf{N}$ , $B =$ קבוצת הטבעיים המתחלקים ב- 10.
- הפונקציה $f : A \to B$ , $f(n) = 10n$ , היא חח"ע ועל,
- ומראה כי קבוצת הטבעיים שוות עוצמה לקבוצת הטבעיים המתחלקים ב- 10.

- $A = \mathbf{N}$ , $B = \{1, 10, 100, 1000, \ldots\}$.
- הפונקציה $f : A \to B$ , $f(n) = 10^n$ , היא חח"ע ועל,
- ומראה כי קבוצת הטבעיים שוות עוצמה לקבוצת המספרים הטבעיים שהם חזקות של 10.

- הפונקציה המתוארת בספר הלימוד בשאלה 4.4 מראה כי קבוצת המספרים השלמים שוות-עוצמה לקבוצת המספרים הטבעיים.

- בתשובה לשאלה 4.8 בספר הלימוד מתוארת פונקציה המראה כי קבוצת המספרים הרציונליים (המספרים הניתנים לכתיבה כשבר שמונהו ומכנהו מספרים שלמים, והמכנה שונה מאפס) היא שוות עוצמה לקבוצת המספרים הטבעיים.

- הפונקציה המתוארת באיור שבעמ' 128 בספר הלימוד מראה כי קבוצת הנקודות שעל קו ישר שוות עוצמה לקבוצת הנקודות שבקטע פתוח.

כללית, אם עוצמת $A$ שווה לעוצמת $B$, כותבים $|A| = |B|$.

אחרי שרואים את כל הדוגמאות הללו (ודוגמאות נוספות שיוזכרו בהמשך) עולה חשד שכל הקבוצות האינסופיות שוות עוצמה. למרבה השמחה, המצב אינו כך. דוגמא ראשונה לשתי קבוצות אינסופיות שאינן שוות עוצמה ניתנה **בהוכחת האלכסון של קנטור**, המראה כי קבוצת המספרים הממשיים **אינה** שוות עוצמה לקבוצת הטבעיים (משפט 4.5).

כדי להבין את משמעות המשפט, חשוב להבין מה עלינו להוכיח כדי להראות שקבוצה נתונה $A$ **אינה** שוות עוצמה לקבוצה נתונה $B$. אין זה די שנבנה פונקציה של $A$ ל- $B$ שהיא אינה חח"ע או לא

על, או פונקציה של $A$ ל- $B$ שהיא על אך לא חח"ע ! אילו הקבוצות היו סופיות היה אמנם די בכך. **אך עבור קבוצות אינסופיות קיומה של פונקציה כזו אינו אומר שלקבוצות עוצמה שונה!**

נסתכל למשל בקבוצות $\mathbf{N}$ , $\mathbf{N}^*$ שבעמוד הקודם. כזכור $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\} = \{1,2,3\ldots\}$ .

הפונקציה $g:\mathbf{N}^* \to \mathbf{N}$ : $g(n)=n$ היא חד-חד-ערכית ואינה על ( 0 אינו בתמונה).

למרות זאת ראינו בעזרת פונקציה אחרת, ששתי הקבוצות הללו שוות עוצמה !

**כיצד אפוא ניתן להראות ששתי קבוצות כלשהן אינן שוות עוצמה ?**

הגדרת שוויון עוצמות אמרה :

הקבוצות $A,B$ שוות-עוצמה אםם **קיימת** פונקציה חח"ע של $A$ על $B$.

לכן, כדי להראות שקבוצה $A$ **אינה** שוות עוצמה לקבוצה $B$ עלינו להראות **שלא קיימת** פונקציה חח"ע של $A$ על $B$. טענה כזו לא ניתן לבדוק ע"י הבאת דוגמא של פונקציה זו או אחרת.

עלינו להראות **שאין אף** פונקציה של $A$ ל- $B$ שהיא בעת ובעונה אחת חח"ע ועל.

זה מה שהראה קנטור בהוכחת האלכסון, עבור $A=\mathbf{N}$ , $B=\mathbf{R}$ . כאמור זהו משפט 4.5 בספר.

### ג. היחס "קטן מ-" בין עוצמות

לאחר שמשתכנעים שקיימות עוצמות אינסופיות שונות, עולה השאלה אם ניתן לומר עבור שתי עוצמות לא רק שהן שונות, אלא ש"עוצמתה של קבוצה $A$ קטנה מעוצמתה של קבוצה $B$".

הדוגמא עם הפונקציה $g$ בראש העמוד, והדוגמאות שראינו לקבוצה אינסופית שהיא שוות עוצמה לתת-קבוצה-ממש שלה, מראות לנו שיש להיזהר מעט בהגדרה.

להגדרת אי-שוויון עוצמות שני חלקים :

בשלב ראשון מגדירים אי-שוויון חלש, כלומר "קטן או שווה" (עמ' 129 בספר הלימוד) :

**הגדרה** : $|A| \le |B|$ אםם קיימת פונקציה **חד-חד-ערכית** של $A$ ל- $B$

(פונקציה שאינה דווקא על).

<u>דוגמאות</u> :

- הפונקציה $g$ שבראש העמוד מראה כי $|\mathbf{N}^*| \le |\mathbf{N}|$ .

(ואכן הפונקציה $f$ בעמ' 2 כאן הראתה שלמעשה קבוצות אלו שוות-עוצמה!).

- הפונקציה של $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{R}$ השולחת כל מספר לעצמו מראה כי $|\mathbf{N}| \le |\mathbf{R}|$

(והוכחת האלכסון מראה כי במקרה זה העוצמות אינן שוות).

- כללית יותר, אם $A \subseteq B$ , אז הפונקציה של $A$ ל- $B$ השולחת כל איבר של $A$ לעצמו מראה כי $|A| \le |B|$.

בשלב שני מגדירים אי-שוויון חזק כך:

**הגדרה**: $|A|<|B|$ אםם $|A|\leq|B|$ ו- $|A|\neq|B|$.

כלומר $|A|<|B|$ אםם

**קיימת פונקציה חד-חד-ערכית** של $A$ ל- $B$, **ולא קיימת פונקציה חד-חד-ערכית** של $A$ <u>על</u> $B$.

דוגמא: מהגדרה זו והאמור למעלה נובע ש- $|\mathbf{N}|<|\mathbf{R}|$.

דוגמא חשובה וכללית - משפט 4.8: לכל קבוצה $A$, $|A|<|P(A)|$.

בשל חשיבותו זכה משפט זה לשם "משפט קנטור", אם כי כמעט כל הטענות בפרק 4 הוכחו ע"י קנטור (גם המשפט הקרוי בספר "משפט שרדר-ברנשטיין" מכונה ברוב הטקסטים המתימטיים "משפט קנטור-ברנשטיין").

לסיום, הנה כמה טענות לגבי עוצמות, המוכחות בספר.

עוצמת $\mathbf{N}$ מסומנת $\aleph_0$ (גם סימון זה נקבע ע"י קנטור).

עוצמת $\mathbf{R}$ מסומנת בספר שלנו $C$ (בספרים אחרים היא מסומנת לרוב א).

- איחוד שתי קבוצות, שעוצמת כל אחת מהן $\aleph_0$ - עוצמתו $\aleph_0$.
- איחוד $k$ קבוצות ($k$ טבעי גדול מ- 0 כלשהו), שעוצמת כל אחת מהן $\aleph_0$ - עוצמתו $\aleph_0$.
- איחוד $\aleph_0$ קבוצות, שעוצמת כל אחת מהן $\aleph_0$ - עוצמתו $\aleph_0$.
- $|\mathbf{N}\times\mathbf{N}|=\aleph_0$
- מכפלה קרטזית של $k$ קבוצות ($k$ טבעי גדול מ- 0 כלשהו), שעוצמת כל אחת מהן $\aleph_0$ - עוצמתה $\aleph_0$.
- איחוד $k$ קבוצות ($k$ טבעי גדול מ- 0 כלשהו), שעוצמת כל אחת מהן $C$ - עוצמתו $C$.
- מכפלה קרטזית של $k$ קבוצות ($k$ טבעי גדול מ- 0 כלשהו), שעוצמת כל אחת מהן $C$ - עוצמתה $C$.
- $|P(\mathbf{N})|=C$
- קבוצת כל הפונקציות של $\mathrm{N}$ לקבוצה $\{0,1\}$ - עוצמתה $C$.

ואזהרה:

לא הבאנו דוגמא לעוצמה שבין $\aleph_0$ ל- $C$, ועשוי אפוא להתקבל הרושם ש- $C$ היא העוצמה הבאה בגודלה אחרי $\aleph_0$. האם זה אכן המצב? במובן מסוים, שאולי אינו לגמרי מספֵּק, התשובה לשאלה אם יש עוצמות בין $\aleph_0$ ל- $C$ ידועה, אך התשובה אינה "כן" או "לא", אלא מעט מורכבת יותר. נושא זה חורג מתחום הקורס שלנו.

למעוניינים בעוד מידע:

קנטור:

http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Cantor.html

http://www.shu.edu/html/teaching/math/reals/history/cantor.html

http://www.britannica.com/bcom/eb/article/6/0,5716,20386+1+20082,00.html

ראשית תורת הקבוצות:

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Beginnings_of_set_theory.html

השערת הרצף – ההשערה שאין עוצמות בין $\aleph_0$ ל- C:

http://www.ii.com/math/ch/

http://www.u.arizona.edu/~chalmers/notes/continuum.html

הספר *1,2,3,…,Infinity* של George Gamow באמזון:

http://www.amazon.com/exec/obidos/ASIN/0486256642/ericstreasuretroA/102-9019337-7736113