

3 לאטה

- (K) נתון a, b חיוביים, $a > b$.
 אם $b > a/2$, אז $a \bmod b = a - b < a/2$;
 אם $b \leq a/2$, אז $a \bmod b < b$.
 בשני המקרים מתקבל $a \bmod b < a/2$.

- (P) נסמן (a_i, b_i) את הזוג (a, b) אחרי האיטרציה ה- i באלגוריתם.
 הזוג (a_0, b_0) הוא הזוג (a, b) המקורי.
 נסמן n את מספר האיטרציות; מתקיימים התנאים $b_n = 0, b_{n-1} > 0$.
 אם $a > b$, אזי לכל $i, 2 \leq i \leq n$,

$$b_i = a_{i-1} \bmod b_{i-1}$$

$$a_i = b_{i-1} = a_{i-2} \bmod b_{i-2} < a_{i-2}/2$$

$$b_i < a_{i-1}/2 = b_{i-2}/2$$

אם $n = 2k+1$, אז $0 < b_{n-1} < b/2^k$; $k < \lceil \lg b \rceil$ יהיה נכון;
 $n < 1 + 2 \lceil \lg b \rceil$

אם $n = 2k$, אז $0 < b_{n-1} < b/2^{k-1} < b/2^{k-2}$; $k-1 < \lceil \lg b \rceil$ יהיה נכון;
 $n < 2 + 2 \lceil \lg b \rceil$

אם $a < b$, מתבצעת איטרציה אחת נוספת (הואילוף): $a_1 = b_0, b_1 = a_0$.
 מתקבל $n < 3 + 2 \lceil \lg a \rceil$.

לכן, בכל המקרים, $n < 3 + 2 \lceil \lg \min(a, b) \rceil$.
הערה: ניתן להוסיף להמספר המכסימלי של איטרציות באדפטיביות
 נחלק יותר מהר שתייבדל פה.

(D) זמן הריצה האסימפטוטי של השלמה הנו $O(\lg m)$.