קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"

תאריך הבחינה: 10.2.2014 (סמסטר א 2014 - מועד א3 / 83)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפים: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

שאלה 1 (25 נקודות)

יהיו X_1 ו- X_2 משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלשניהם הפרמטר p $(0 < p < 1)$;

ויהי $M = \min\{X_1, X_2\}$.

(9 נק') א. חשב את $P\{X_1 = X_2\}$ ואת $P\{X_1 < X_2\}$.

(9 נק') ב. חשב את $P\{X_1 = i\ ,\ M = j\}$, **לכל i ו- j שלמים וחיוביים**.

(7 נק') ג. הוכח כי $P\{X_1 \le i\ ,\ M \le j\} = 1 - (1-p)^i$, **לכל i ו- j שלמים, המקיימים $1 \le i \le j$**.

שאלה 2 (25 נקודות)

יהי X משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת μ ושונות 4 ; ויהי $Y = \dfrac{X-\mu}{2}$.

(7 נק') א. חשב את $P\{-2 \le X - \mu \le 4\}$.

(8 נק') ב. מהו הערך של $E[Y^2]$ ושל $E[(X-\mu)^2]$?

(10 נק') ג. ידוע שהמאורע $B = \{|X-\mu| \le 2\}$ מתרחש.
חשב את $P\{Y \le a \mid B\}$, **לכל a ממשי**.

שאלה 3 (25 נקודות)

גשם של מטאורים נופל על שטח עגול, שרדיוסו 10 ק"מ, כך שכל מטאור נופל בנקודה אקראית בתוך השטח, וללא תלות בנקודות נפילה של מטאורים אחרים.

נניח שמספר המטאורים, שנופלים בתוך השטח העגול שלעיל, הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 2, וכי מתקיימות שלוש ההנחות של תהליך פואסון, ביחס לשטח שבו נופלים המטאורים.

(6 נק') א. מהי ההסתברות שייפלו <u>בדיוק</u> 3 מטאורים בשטח העגול הנתון?

(7 נק') ב. נניח שתופעת גשם המטאורים חוזרת על עצמה 5 פעמים, בדיוק באותם התנאים המתוארים לעיל, כך שאין תלות בין החזרות השונות.
מהי ההסתברות ש<u>לפחות</u> פעמיים (מתוך ה- 5) ייפלו <u>לפחות</u> 3 מטאורים, בתחומי השטח העגול?

בתוך השטח העגול הנתון מסמנים עיגול ברדיוס 6 ק"מ, שכולו בתחומי השטח הנתון.

(6 נק') ג. מהי ההסתברות שבגבולות השטח העגול ה"קטן" שסומן לא ייפול אף מטאור?

(6 נק') ד. ידוע שבתחומי השטח ה"גדול" נפלו בדיוק 4 מטאורים.
מהי ההסתברות שבדיוק אחד מהם נפל בתחומי השטח ה"קטן", שסומן בתוך השטח ה"גדול"?

שאלה 4 (25 נקודות)

קופסה מכילה 3 כדורים ממוספרים ב- 1, 2 ו- 3.

מוציאים באקראי שני כדורים מהקופסה.

מתבוננים על שני המספרים הרשומים על הכדורים, מוחקים את המספר הגדול יותר מבין השניים שהוצאו, רושמים במקומו את המספר הקטן יותר (מבין השניים), ומחזירים לקופסה את שני הכדורים.

למשל, אם הוצא הזוג $(1,3)$, הוא יוחזר כ- $(1,1)$.

חוזרים על התהליך פעם אחר פעם, עד שכל הכדורים בקופסה נושאים את המספר 1.

הערה: אם במהלך הניסוי מוציאים שני כדורים, שעליהם מספרים שווים, הם מוחזרים לקופסה ללא שינוי.

(8 נק׳) א. מהי ההסתברות שהניסוי יסתיים לאחר שתי הוצאות-כדורים בדיוק?

(8 נק׳) ב. אם לאחר הוצאת-הכדורים הראשונה יש בקופסה לפחות כדור אחד הנושא את המספר 2, מהי ההסתברות שהניסוי יסתיים לאחר הוצאת-כדורים אחת נוספת בלבד?

(9 נק׳) ג. מה תוחלת מספר הוצאות-הכדורים שיבוצעו מתחילת הניסוי ועד שכל הכדורים בקופסה יישאו את המספר 1?

שאלה 5 (25 נקודות)

(10 נק׳) א. יהי X משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים N , m ו- n .

הוכח כי $E[X] = n \cdot \frac{m}{N}$.

מסדרים באקראי 20 כדורים שונים בשורה: 5 כחולים ו- 15 אדומים.

(5 נק׳) ב. מהי שונות מספר הכדורים הכחולים שנמצאים בחמשת המקומות השמאליים ביותר בשורה?

(5 נק׳) ג. מהי ההסתברות שאין בשורה כדורים כחולים שנמצאים במקומות סמוכים?

(5 נק׳) ד. נגדיר שני מאורעות:

A = אין כדורים כחולים בחמשת המקומות השמאליים ביותר בשורה;

B = יש לפחות כדור כחול אחד בחמשת המקומות הימניים ביותר בשורה.

חשב את $P(A \cap B)$.

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z)=P\{Z\le z\}=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt \qquad ; \qquad \Phi(-z)=1-\Phi(z) \qquad ; \qquad Z\sim N(0,1)$$

נוסחת האינטרפולציה: $$\Phi(z)\approx\Phi(z_1)+\frac{z-z_1}{z_2-z_1}[\Phi(z_2)-\Phi(z_1)]$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה - 20425

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,...,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1}\cdot p \quad , \quad i=1,2,...$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i! \quad , \quad i=0,1,...$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,...$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,...,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,...,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a\le x\le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\,,\, t\neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad -\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,...,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r} \quad , \quad \sum n_i=n\,,\,\sum p_i=1$			

נוסחת הבינום $(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$

כלל ההכלה וההפרדה $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$

הסתברות מותנית $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

נוסחת הכפל $P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n\mid A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})$

נוסחת ההסתברות השלמה $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)$, $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס $P(B_j\mid A)=\frac{P(A\mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)}$, $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת $E[X]=\sum_x x\,p_X(x)=\int x f(x)dx$

תוחלת של פונקציה של מ"מ $E[g(X)]=\sum_x g(x)p_X(x)=\int g(x)f(x)dx$

שונות $\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית $E[aX+b]=aE[X]+b$

$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון $P\{X>s+t\mid X>t\}=P\{X>s\}$, $s,t\ge 0$

תוחלת מותנית $E[X\mid Y=y]=\sum_x x\,p_{X|Y}(x\mid y)=\int x f_{X|Y}(x\mid y)dx$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X \mid Y=y) \;=\; E[X^2 \mid Y=y]-(E[X \mid Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] \;=\; E[E[X \mid Y]] \;=\; \sum_y E[X \mid Y=y]p_Y(y)$

(טענה מתרגיל ת26, עמוד 430) $E[X{\cdot}g(Y)] \;=\; E[g(Y)E[X \mid Y]]$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) \;=\; E[\mathrm{Var}(X \mid Y)]+\mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]=E[XY]-E[X]E[Y]$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i,\sum_{j=1}^{m} Y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Cov}(X_i,Y_j)$$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{i<j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)\big/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t)=E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t)=e^{bt}M_X(at)$

כאשר X_i מ״מ ב״ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) \;=\; M_{X_1}(t)\cdot\ldots\cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right]=E[N]E[X]$

(כאשר X_i מ״מ ב״ת ש״ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)=E[N]\mathrm{Var}(X)+(E[X])^2\,\mathrm{Var}(N)$

$$M_Y(t)=E\left[\left(M_X(t)\right)^N\right]$$

אי-שוויון מרקוב $P\{X\ge a\}\le E[X]/a \quad , \quad a>0$, X מ״מ אי-שלילי

אי-שוויון צ׳בישב $P\{|X-\mu|\ge a\}\le \sigma^2/a^2 \quad , \quad a>0$, $\mu,\sigma^2<\infty$

משפט הגבול המרכזי $P\left\{(\sum_{i=1}^{n} X_i-n\mu)\Big/\sqrt{n\sigma^2}\le a\right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(a) \quad , \quad \mu,\sigma^2<\infty$, X_i מ״מ ב״ת וש״ה

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב״ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ״מ בינומיים (גיאומטריים) ב״ת עם אותו הפרמטר p הוא מ״מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ״מ פואסוניים ב״ת הוא מ״מ פואסוני.
- סכום של מ״מ נורמליים ב״ת הוא מ״מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ״מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב״ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}=e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i=\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i=\frac{1}{1-x} \quad , \quad -1<x<1$$

$$\int (ax+b)^n\,dx=\tfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \quad , \quad n\ne -1 \quad ; \quad \int \tfrac{1}{ax+b}\,dx=\tfrac{1}{a}\ln(ax+b)$$

$$\int e^{ax}dx=\tfrac{1}{a}e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax}dx=\tfrac{1}{a\ln b}b^{ax} \quad ;$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$$

$$\log_n a=\log_m a/\log_m n \quad ; \quad \log_n(a^b)=b\cdot\log_n a \quad ; \quad \log_n(ab)=\log_n a+\log_n b$$