תשובה 1

א. $f(1) = f(-1)$, לכן f אינה חד-חד-ערכית.

ב. מכיוון שלכל x, $f(x)$ הוא שורש ריבועי של מספר ממשי, בפרט $0 \le f(x)$ (שורש ריבועי במתמטיקה הוא תמיד השורש הלא-שלילי. אם לפעולת השורש היו שתי תוצאות, היא לא היתה פונקציה).

המספרים הממשיים השליליים אינם אפוא בתמונת f, ולכן f ***אינה על***.

בנוסף, לכל x ממשי, $x^2 \ge 0$, לכן $x^2 + 1 \ge 1$, ולכן $f(x) = \sqrt{x^2+1} \ge 1$.

כלומר תמונת f מכילה רק מספרים הגדולים/שווים 1.

ג. אם $x \neq 0$ אז $x^2 > 0$ לכן $x^2 + 1 > 1$ ו- $f(x) = \sqrt{x^2+1} > 1$.

לכן ניתן לראות את f כפונקציה מהממשיים החיוביים אל הממשיים הגדולים מ- 1 .

כאמור בשאלה, נסמן פונקציה זו ב- g. נבדוק את תכונות g :

* ***חד-חד-ערכיות***: אם $x, y > 0$ ו- $g(x) = g(y)$,

משמע $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+1}$. מכאן $x^2 + 1 = y^2 + 1$, כלומר $x^2 = y^2$.

מכיוון ש- $x, y > 0$ (!) נובע מכאן $x = y$. לכן f חח"ע (חד-חד-ערכית).

* ***על***: יהי $z > 1$. נחפש x המקיים $g(x) = z$.

לשם כך נפתור את המשוואה $g(x) = z$ ונבדוק אם יש פתרון בתחום ההגדרה של g .

מתוך $z = \sqrt{x^2+1}$ נקבל אחרי חילוץ $x = \pm\sqrt{z^2-1}$.

כעת, מכיוון ש- $z > 1$ גם $z^2 > 1$, לכן $z^2 - 1 > 0$ ולכן קיים שורש ריבועי ממשי.

נבחר את השורש החיובי. הוא גדול ממש מ- 0 , וקיבלנו פתרון בתחום המבוקש.

שימו לב: מכיוון שהעלינו בריבוע במהלך החילוץ, ***יש לבדוק שאכן הפתרון פותר את המשוואה המקורית*** $z = \sqrt{x^2+1}$ (למשל $-2 \neq 2$ אבל $(-2)^2 = 2^2$, כלומר שוויון לאחר העלאה בריבוע אינו מחייב שהיה שוויון במקור !) .

נציב $x = \sqrt{z^2-1}$ במשוואה $z = \sqrt{x^2+1}$. לאחר פישוט המשוואה: $z = \sqrt{z^2}$.

שימו לב שמשוואה זו אינה נכונה לכל z , היא נכונה אםם $0 \le z$!

הנחנו $z > 1$ ולכן התנאי מתקיים.

מצאנו פתרון בתחום הנתון, לכן g היא ***על*** קבוצת הממשיים הגדולים מ- 1.

תשובה 2

לפני שניגשים לפתור חשוב להבין את הגדרתה של f_*, ובפרט את תחום ההגדרה והטווח שלה.

f_* מתאימה לכל קבוצה חלקית X של A - קבוצה חלקית של B, שהיא קבוצת התמונות של אברי X תחת הפונקציה f.

***פתרון השאלה*:**

כיוון אחד*:** נניח ש- f ***אינה חח"ע (חד-חד-ערכית) ונראה ש- f_* ***אינה*** חח"ע:

מההנחה, יהיו $a_1, a_2 \in A$ מקיימים $a_1 \neq a_2$, $f(a_1) = f(a_2) = b \in B$.

אז $f_*(\{a_1\}) = f_*(\{a_2\}) = \{b\}$ ולכן f_* אינה חח"ע.

כיוון שני*:** נניח ש- f_* ***אינה חח"ע ונראה ש- f ***אינה*** חח"ע:

מההנחה, תהיינה $X, Y \in P(A)$, $X \neq Y$, $f_*(X) = f_*(Y)$.

מההנחה $X \neq Y$, קיים $a \in X$ שאינו שייך ל- Y, או שקיים $a \in Y$ שאינו שייך ל- X.

ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) נניח שקיים $a \in X$ שאינו שייך ל- Y.

נסמן $b = f(a)$. מהגדרת f_*, $b \in f_*(X)$.

אך $f_*(X) = f_*(Y)$, לכן $b \in f_*(Y)$.

מכאן, שוב מהגדרת f_*, קיים $a_1 \in Y$ המקיים $b = f(a_1)$.

הנחנו ש- $a \notin Y$ ולכן $a \neq a_1$.

קיבלנו $f(a) = f(a_1) = b$, $a \neq a_1$, לכן f אינה חח"ע.

תשובה 3

א. רפלקסיביות: תהי $f \in F$. באופן טריביאלי, לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \leq f(n)$.

לכן $(f,f) \in K$.

אנטי-סימטריות: תהיינה $f, g \in F$, ונניח ש- $(f,g) \in K$ וגם $(g,f) \in K$.

כלומר לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \leq g(n)$ וגם לכל $n \in \mathbf{N}$, $g(n) \leq f(n)$.

משמע לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \leq g(n)$ וגם $g(n) \leq f(n)$.

לכן, מתכונת האנטי-סימטריות של היחס $\leq$ בטבעיים, לכל $n \in \mathbf{N}$, $g(n) = f(n)$.

כלומר $f = g$.

טרנזיטיביות: תהיינה $f, g, h \in F$, ונניח ש- $(f,g) \in K$ וגם $(g,h) \in K$.

כלומר לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \leq g(n)$ וגם לכל $n \in \mathbf{N}$, $g(n) \leq h(n)$.

משמע לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le g(n)$ וגם $g(n) \le h(n)$.

מתכונות הטרנזיטיביות של היחס $\le$ בטבעיים, לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le h(n)$.

כלומר $(f,h) \in K$.

ב. תהי $f(n) = n$ ותהי $g(n) = 7$ (הפונקציה הקבועה המחזירה ערך 7 עבור כל n).

מכיוון ש- $f(1) > g(1)$, $(f,g) \notin K$.

מצד שני $f(10) < g(10)$ ולכן $(g,f) \notin K$.

מצאנו שני איברים של F שהיחס K אינו משווה ביניהם, לכן K אינו סדר-מלא.

ג. תהי $f \in F$, נראה ש- f ***אינה*** איבר מקסימלי.

נתבונן בפונקציה $g(n) = f(n) + 1$. מובן ש- $g \neq f$.

כעת, לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le g(n)$. לכן $(f,g) \in K$. לפיכך f אינה איבר מקסימלי.

ד. בהינתן $f,g \in F$, תהי $h(n) = f(n) + g(n)$. מכיוון ש- f,g הן אל הטבעיים, מובן שלכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le h(n)$ ולכל $n \in \mathbf{N}$, $g(n) \le h(n)$.

כלומר $(f,h) \in K$ וגם $(g,h) \in K$.

יש עוד אפשרויות פשוטות לתת פונקציה h מתאימה.

למשל יכולנו לבחור: $h(n) = \max(f(n), g(n))$.

תשובה 4

ההוכחה לא קלה, כדאי לקרוא אותה בעיון. מי שפתר כך או באופן דומה יכול בהחלט להיות מרוצה! מי שניסה לפתור ונתקע באמצע - קיראו והבינו את ההוכחה שכאן.
ומי שחשב שפתר בכמה שורות - כדאי להבין היכן הטעות בהוכחה שניסחתם.

הבהרה: הסימון D_1^n פירושו $(D_1)^n$ כלומר החזקה ה- n של היחס D_1.

טענת-עזר: יהיו X,Y קבוצות המקיימות $|X \oplus Y| = k$, כאשר $0 < k \in \mathbf{N}$.

נניח עוד ש- $x \in X$, $x \notin Y$. נסמן $Z = X - \{x\}$.

אז $|X \oplus Z| = 1$, $|Z \oplus Y| = k - 1$.

הוכחה:

$$X \oplus Z = X \oplus (X - \{x\}) = (X - (X - \{x\})) \cup ((X - \{x\}) - X)$$

$$= \{x\} \cup \emptyset = \{x\}$$

לכן $|X \oplus Z| = 1$.

$Z \oplus Y = (X - \{x\}) \oplus Y = ((X - \{x\}) - Y) \cup (Y - (X - \{x\}))$

$= ((X - Y) \cup (Y - X)) - \{x\}$

$= (X \oplus Y) - \{x\}$

את המעבר מהשורה הראשונה לשנייה כאן נשאיר כתרגיל לא קשה, בעזרת הזהות

$A - B = A \cap B'$, או בעזרת שאלה 3א בממ"ן 11.

מכיוון ש- $|X \oplus Y| = k$*, ומהנתון* $x \in X \oplus Y$*, נובע* $|(X \oplus Y) - \{x\}| = k - 1$.

כעת לפתרון השאלה בממ"ן.

עלינו להוכיח באינדוקציה כי לכל $1 \le n$*,* $D_1^n = D_n$.

בדיקה עבור $n = 1$: *מיידי* $D_1^1 = D_1$.

מעבר : *נניח* $D_1^n = D_n$*, ונוכיח* $D_1^{n+1} = D_{n+1}$.

מהגדרת חזקה של יחס ואסוציאטיביות כפל יחסים, $D_1^{n+1} = D_1 D_1^n$.

מהנחת האינדוקציה, $D_1^n = D_n$*, ולכן* $D_1^{n+1} = D_1 D_n$.

עלינו אפוא להוכיח ש- $D_1 D_n = D_{n+1}$.

את השוויון הזה נוכיח ע"י הכלה דו-כיוונית.

הכלה בכיוון אחד : *נוכיח ש-* $D_1 D_n \supseteq D_{n+1}$.

יהי $(X,Y) \in D_{n+1}$*, נוכיח ש-* $(X,Y) \in D_1 D_n$.

אם $X = Y$ *אז ודאי* $(X,Y) \in D_1 D_n$ *, כי* $(X,X) \in D_1$ *,* $(X,X) \in D_n$.

נניח אפוא $X \neq Y$ *. לכן קיים איבר של* X *שאינו ב-* Y *או קיים איבר של* Y *שאינו ב-* X.

ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) נניח $x \in X$*,* $x \notin Y$.

ההנחה $(X,Y) \in D_{n+1}$ *פירושה* $|X \oplus Y| \le n + 1$.

מטענת העזר שהוכחנו, נקבל קבוצה Z *כך ש-* $|X \oplus Z| = 1$ *,* $|Z \oplus Y| \le n$.

משמע $(X,Z) \in D_1$ *,* $(Z,Y) \in D_n$.

מהגדרת כפל יחסים, $(X,Y) \in D_1 D_n$ *כמבוקש.*

הכלה בכיוון השני : *נוכיח ש-* $D_1 D_n \subseteq D_{n+1}$.

יהי $(X,Y) \in D_1 D_n$*, נוכיח ש-* $(X,Y) \in D_{n+1}$.

מהגדרת כפל יחסים, קיים $Z \in P(\mathbb{N})$ *כך ש-* $(X,Z) \in D_1$ *ו-* $(Z,Y) \in D_n$.

כלומר $1 \leq |X \triangle Z|$ ו- $|Z \triangle Y| \leq n$. עלינו להראות ש- $|X \triangle Y| \leq n+1$.

לפי שאלה 3ד בממ"ן 11, $X \triangle Y = (X \triangle Z) \triangle (Z \quad Y)$.

אבל $(X \triangle Z) \quad (Z \quad Y) \quad (X \quad Z) \quad (Z \quad Y)$.

באגף ימין יש לנו איחוד של קבוצה שגודלה לכל היותר 1 עם קבוצה שגודלה לכל היותר n.

לפי נוסחה בראש עמ' 17 בספר, גודל האיחוד הזה הוא לכל היותר $n+1$.

לכן גם $|X \triangle Y| \leq n+1$, כמבוקש.

איתי הראבן