מתמטיקה דיסקרטית *20276*
אביב ב *1999*
פתרון ממ"ן *12*

תשובה *1*

א. כיוון אחד: יהי $x \in C$, נראה ש- $x \in A, x \in B$:

מכיוון ש- $x \in C$, אז מהגדרת מכפלה קרטזית, $(x,x) \in C \times C$. מכאן ומהנתון בשאלה:

$(x,x) \in (A \times B) \cup (B \times A)$. מהגדרת איחוד, $(x,x) \in (A \times B)$ או $(x,x) \in (B \times A)$.

בכל מקרה, מהגדרת מכפלה מקבלים $x \in A$ וגם $x \in B$. לפיכך $C \subseteq A, B$.

כיוון שני: יהי $x \in A$, נראה ש- $x \in C$:

מכיוון שנתון ש- B אינה ריקה, יהי $y \in B$. אז $(x,y) \in (A \times B)$, לכן מהגדרת איחוד,

$(x,y) \in (A \times B) \cup (B \times A)$. מכאן ומהנתון בשאלה, $(x,y) \in C \times C$, ולפי הגדרת מכפלה

בפרט $x \in C$. ההוכחה עבור B - בדומה. לפיכך $A, B \subseteq C$.

משני הכיוונים מתקבל השוויון המבוקש.

הערה: ההנחה בשאלה כי A, B אינן ריקות היא חיונית: אם למשל $A = C = \emptyset$ אז לכל קבוצה

B יתקיים: $(A \times B) \cup (B \times A) = \emptyset = C \times C$, כלומר הטענה <u>אינה נכונה</u> במקרה זה!

יש לשים לב שאכן אנו משתמשים בהוכחה בהנחה ששתי הקבוצות אינן ריקות, אחרת יסתבר

ש"הוכחנו" טענה שאינה נכונה! זו הסיבה לכך שהוכחת הכיוון השני נוסחה בזהירות, ולא

"במכה אחת" עבור A ו- B.

ב. *a*. לא נכון. דוגמא נגדית "מינימלית": $A = B = \{1\}$, $C = \emptyset$ (השלימו הפרטים!).

קל גם לתת דוגמאות שבהן C אינה ריקה.

b. נכון. הוכחה: הטענה $(x,y) \in A \times C - B \times C$
נכונה אס"ם $(x,y) \in A \times C$ וגם $(x,y) \notin B \times C$.
כלומר אס"ם ($x \in A$, $y \in C$) וגם ($x \notin B$ או $y \notin C$).
כלומר אס"ם $x \in A$, $x \notin B$, ו- $y \in C$ (מדוע?).
כלומר אס"ם $x \in A - B$ ו- $y \in C$.
כלומר אס"ם $(x,y) \in (A - B) \times C$.

תשובה *2*

א. כללית, תהי A קבוצה בת n איברים, ו- R רלציה אנטי-סימטרית מעל A.

נפריד את R לאיברים מהצורה (x,x) (איברי R השייכים לרלציית היחידה I_A)

ואיברים מהצורה (x,y) כאשר $x \neq y$ (איברי R שאינם שייכים לרלציית היחידה).

מספר האיברים מהסוג הראשון הוא לכל היותר $n = |I_A|$.

כעת, מספר כל הזוגות (x,y) כאשר $x \neq y$ הוא: $|(A\times A)-I_A| = n^2-n = n(n-1)$.

אך מכיוון ש- R אנטי-סימטרית, הרי לכל x,y, לכל היותר אחד משני הזוגות (x,y) ו- (y,x) יכול להמצא ב- R. לפיכך מספר אברי R מהסוג השני הוא לכל היותר $n(n-1)/2$.

בסה"כ קיבלנו לכל היותר $n+n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ איברים ב- R.

הצגה של הרלציה בעזרת טבלה (עמ' *34* בספר) יכולה לעזור לנו לראות את ההגבלה באופן ברור.

במקרה שלנו, $n(n+1)/2 = 55$.

ב. משאלה *2.34* בספר, הסגור הסימטרי של R הוא $S = R\cup R^{-1}$.

מהנוסחה הכללית שבראש עמ' *17* בספר נקבל:

$$\left|R\cup R^{-1}\right| = |R| + \left|R^{-1}\right| - \left|R\cap R^{-1}\right|$$

מהגדרת R^{-1} ברור כי לכל רלציה, $|R| = \left|R^{-1}\right|$.

בנוסף, עבור R אנטי-סימטרית, $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$ (עמ' *50* בספר). למען הסעיף הבא נאמר כבר כי קל להראות מכאן, שעבור R אנטי-סימטרית, $R\cap R^{-1} = R\cap I_A$.

קיבלנו אפוא: $|S| = \left|R\cup R^{-1}\right| = 2|R| - \left|R\cap I_A\right|$ (*)

ומכיוון ש $\left|I_A\right| = 10$ ו- $|R|\geq 30$ נובע מנוסחה זו כי $|S| \geq 2\cdot 30 - 10 = 50$.

ג. נובע מיד מהנוסחה (*), משיקולי זוגיות.

תשובה 3

א. רפלקסיביות: לפי שאלה *2.18* א בספר, עמ' *48*, אם R רפלקסיבית גם R^{-1} רפלקסיבית.

מכאן ומהגדרת רפלקסיביות, $I_K\subseteq R$ וגם $I_K\subseteq R^{-1}$. לפיכך $I_K\subseteq R\cap R^{-1}$, משמע (שוב מהגדרת רפלקסיביות): $R\cap R^{-1}$ רפלקסיבית.

סימטריות: לפי שאלה *2.6* סעיף *2* בעמ' *36* בספר, $(R\cap S)^{-1} = R^{-1}\cap S^{-1}$.

בפרט, לכל רלציה R: $(R\cap R^{-1})^{-1} = R^{-1}\cap (R^{-1})^{-1} = R^{-1}\cap R = R\cap R^{-1}$.

משמע, לפי הגדרת רלציה סימטרית, $R\cap R^{-1}$ היא סימטרית.

טרנזיטיביות: לפי שאלה *2.29* א בעמ' *53* בספר, אם R טרנזיטיבית אז כך גם R^{-1}.

מכאן, לפי שאלה *2.30* ג באותו העמוד, נקבל כי גם $R\cap R^{-1}$ היא טרנזיטיבית.

ב. לא. דוגמא נגדית : $K = \{1,2,3\}$, $R = I_K \cup \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (השלימו הפרטים!).

ג. קיימות *15* רלציות שקילות שונות מעל $\{1,2,3,4\}$, ניתן לספור אותן באופן ישיר בעזרת החלוקות שהן מגדירות. דרך אפשרית לארגן את הספירה :

רלציה אחת (הזהות) שבה כל המחלקות בגודל *1*,

6 רלציות שבכל אחת מהן שלוש מחלקות בגדלים $2,1,1$,

3 רלציות שבכל אחת מהן שתי מחלקות בגדלים $2,2$,

4 רלציות שבכל אחת מהן שתי מחלקות בגדלים $3,1$,

ורלציה אחת שהיא בעלת מחלקת שקילות יחידה בגודל *4*.

תשובה *4*

א. נכון, מיידי מההגדרה של חזקה של רלציה (עמ׳ *46* בספר).

(הגדרה זו כשלעצמה מסתמכת על תכונת האסוציאטיביות של כפל רלציות).

ב. לא. דוגמא נגדית : $A = \{1,2\}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ג. כן. מקרה פרטי של שאלה *2.8* בעמ׳ *40* בספר.

ד. לא. דוגמא נגדית : $A = \{1,2\}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

ה. כן. מקרה פרטי של שאלה *2.8* בעמ׳ *40* בספר.

ו. לא. דוגמא נגדית : $A = \{1,2\}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(השלימו הפרטים בעצמכם בסעיפים ב - ו).

תשובה *5*

ניעזר בעובדות הבאות על הפונקציה הנתונה, שקל לוודא את נכונותן :

(1) $f(x) = 0$ אס״ם $x = 0$ (מהסתכלות בביטוי).

(2) $f(x) > 0$ אס״ם $x > 0$ (מהסתכלות בסימנים של המונה והמכנה).

וכן בטענות הידועות הבאות על המשוואה הריבועית $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$:

(a) למשוואה קיים פתרון ממשי (אחד לפחות) אס״ם $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

(*b*) אם קיימים שני פתרונות שונים, מכפלתם שווה c/a (נוסחת וייטה).

(ואם יש פתרון יחיד, אז מכפלתו בעצמו שווה c/a).

כעת לפתרון:

א. יהי $y \in \mathbf{R}$. y הוא בתמונת f אםם קיים $x \in \mathbf{R}$ כך ש- $y = f(x)$.

ע"י סידור המשוואה נקבל את המשוואה השקולה: $yx^2 - 2x + y = 0$.

לפי (*a*) למעלה, עבור $y \neq 0$ נתון, יש x ממשי המקיים את המשוואה, אס"ם $\Delta \geq 0$.

כאן $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2)$. ביטוי זה אי-שלילי אס"ם $|y| \leq 1$.

מכאן בצירוף הערה (*1*) למעלה, אנו מקבלים שתמונת f היא בדיוק הקטע $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$.

ב. לפי א, תמונת f היא הקטע $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$, וודאי שתמונת g מוכלת בקטע זה.
לפי הערה (*2*) למעלה והגדרת תחומה של g, תמונת g מכילה מספרים אי-שליליים בלבד.
לכן התמונה מוכלת בקטע $\{y \mid 0 \leq y \leq 1\}$, שהוא גם תחום ההגדרה של g.
משמע g היא אמנם פונקציה של הקטע הנ"ל אל עצמו.

נַראה ש- g חח"ע ועל. לפי הערה (*1*) למעלה, נוכל לזרוק את הזוג $(0,0)$, ולראות את g כפונקציה של הקטע $A = \{x \mid 0 < x \leq 1\}$ לעצמו. די שנראה כי פונקציה זו היא חח"ע ועל (מדוע די בכך?)

מהתשובה לסעיף א, לכל $y \in A$ קיים $x \in \mathbf{R}$ כך שהזוג (x, y) מקיים $yx^2 - 2x + y = 0$.
עלינו להראות שלכל $y \in A$ קיים x <u>אחד ויחיד</u> <u>השייך ל- *A*</u> הפותר את המשוואה (קיום x כזה לכל $y \in A$ משמעו ש- g היא על A. יחידותו פירושה ש- g היא חח"ע). יהי אפוא $y \in A$, ויהי x מספר ממשי כלשהו כך שהזוג (x, y) מקיים $yx^2 - 2x + y = 0$. פרט ל- x יש לכל היותר פתרון ממשי אחד נוסף למשוואה הריבועית. לפי הערה (*2*) למעלה, x והפתרון השני (אם קיים פתרון נוסף) הם מספרים חיוביים. לפי הערה (*b*) למעלה, מכפלת שני הפתרונות עבור x (או אם הפתרון יחיד - מכפלתו בעצמו) שווה $c/a = y/y = 1$. אולם ברור כי אם מכפלה של שני מספרים חיוביים שווה *1* הרי או ששניהם שווים *1*, או שאחד מהם גדול מ- *1* והשני קטן מ- *1*. בכל מקרה, קיבלנו שקיים פתרון אחד ויחיד בתחום המבוקש, כפי שנדרש.

אִתַּי הראבן

אפריל *1999*