Solution by Daniel Krauthgamer

(89) מועד א' - 2007

שאלה 1

א. לא נכון. נביא דוגמא:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

הסגר הטרנזיטיבי של R יהיה

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

עם זאת R_T היא הסגר הטרנזיטיבי של R_2 כאשר היא מוגדרת

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

R_2 טרנזיטיבית ולכן $R_2 \subset R_T$ היא הסגר של R עצמה ולכן

ב. לא נכון. נראה ע"פ דוגמא.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad RS = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t(RS) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad S_T\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad R_T S_T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ג. לא נכון.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad t(R_T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

לא רפלקסיבי

רפלקסיבי

Solution by Daniel Krauthgamer

שאלה 1 - המשך

3. מהגדרת הסגור, $R \subseteq t(R)$ כלומר לכל x, $x \in R \to x \in t(R)$
נניח בשלילה כי R רפלקסיבי כלומר $I_A \subseteq R$ מכאן נובע
ש-$I_A \subseteq t(R)$ כי מהגדרת הרפלקסיביות אם $I_A \subseteq t(R)$ $t(R)$
רפלקסיבית $\Rightarrow$ סתירה $\Rightarrow$ R אינו רפלקסיבי.

ה. נכון. $t(R)$ מתאים ל-R את הסגור שלו, שמהגדרת
הסגור הוא טרנזיטיבי. ומכאן לפי שאלה 2.33 סעיף ו'
אם $t(R)$ היא הסגור הטרנזיטיבי של R אזי $t(R)$ היא הסגור
של עצמה כלומר $t(t(R)) = t(R)$ מ.ש.ל.

שאלה 2

נגדיר את הקבוצות A, B, C כך ש: $|A| = m_1, |B| = m_2$ ו- $|C| = k$.
כלומר עפ"י שאלה 1.ג' מהנתון נובע כי A שוות עצמה לקבוצה חלקית של B.
כלומר קיימת f חח"ע מ-A ל-B.
מהגדרת החזקה m_1^k ו-m_2^k מייצגות את קבוצת הפונקציות מ-C ל-A
ומ-C ל-B בהתאמה.
נראה כי קיימת פונקציה חח"ע מ-A^C ל-B^C. נגדיר את הפונקציה g
להיות פונקציה מ-$C \to A$ אזי ($h = f(g(x))$ תהיה $C \to B$. כי $h \in B^C$.
מכיוון שהיא פונקציה ב-B^C, מכאן קיימת התאמה חח"ע מ-A^C ל-B^C $\Rightarrow$
$m_1^k \le m_2^k$.

Solution by Daniel Krauthgamer

שאלה 3

א. מספר האיברים היוצאים 5 ספרות עם חזרות $5^5 = 3125$

ב. מספר מחלקות השקילות ניתן לספור

$$\sum_{i=1}^{5}\binom{5}{i} = \underset{5}{\binom{5}{1}} + \underset{10}{\binom{5}{2}} + \underset{10}{\binom{5}{3}} + \underset{5}{\binom{5}{4}} + \underset{1}{\binom{5}{5}} = 2^5 - 1 = \underline{31}$$

סכום מספר האפשרויות של i איברים מתוך 5.

31 מחלקות שקילות.

ג. $\underline{abcde}$ - כל האותיות ושכן כל אות תופיע פעם אחת

מדובר בתמורה של 5 אותיות $5! = 120$

ד. $\{a,b\}$ - מספר הצירופים של שתי אותיות במילה בת חמש אותיות פחות שתי האפשרויות $aaaaa$ ו- $bbbbb$

$$5^2 - 2 = 23$$

ה. $\{a,b,c,d\}$ - נבחר לספור חמש אותיות במילה בת חמש אותיות כאשר אות אחת ניתנת לבחירה של 4 (חוזרת על עצמה).

$$5! \cdot 4 = 480$$

סידור חמש האותיות   אותיות ניתנות לבחירה

כעת יש לחלק בסידורים הפנימיים בין שתי אותיות זהות

$$\frac{480}{2!} = 240$$

באופן דומה ניתן לתמורה של 4 אותיות ולבחור מקום בין 5 המקומות האפשריים להוספת אות נוספת. לאחר מכן יש לחלק בסידורים הפנימיים שנוצרו

$$\frac{4! \cdot \binom{5}{1}}{2!} = 4 \cdot \frac{5!}{2!} = 240$$

אפשרויות לבחור אות נוספת

Solution by Daniel Krauthgamer

שאלה 4

א.

$$\binom{4}{1}^3\cdot\binom{3}{1}^3\cdot\binom{2}{1}^3\cdot\binom{1}{1}^3$$

$$4^3\cdot 3^3\cdot 2^3\cdot 1^3 = 13,824$$

יש לחלק בסידורי סדר הקבוצות $4! \Rightarrow 576$

ב.

A_1 - אדומים
A_2 - כחולים
A_3 - ירוקים
A_4 - לבנים

$\}$ קבוצות 3 בצבע

$$|A_1| = \frac{3^3\cdot 2^3}{3!} = 36$$

$$|A_2| = |A_3| = |A_4| = 36$$

חיתוכי זוגות:

$$|A_1\cap A_2| = \frac{2^3}{2!} = 4$$

חיתוכי שלשות ורביעיות $=1$ כי בבחירת שלוש קבוצות כנ"ל
בצבע אחיד גורר באילוצי השאלה כי גם הרביעית תהיה בצבע אחיד.

$$576 - 4\cdot 36 + 6\cdot 4 = 456$$

Solution by Daniel Krauthgamer

שאלה 5

א. $A_1^2(A,B) \leftrightarrow \forall x_1 \left[\left(R(x_1,A) \wedge R(x_1,B) \right) \vee \left(\sim R(x_1,A) \wedge \sim R(x_1,B) \right) \right]$

ב. $\forall x_4 \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \left[R(x_1,x_3) \wedge R(x_2,x_3) \wedge \sim R(x_4,x_3) \right]$

ג. לא. נניח עולם בו שתי הקבוצות {1} {2} ננסה לגרום לעולם זה לעמוד בדרישות הפסוק. נוסיף את הקבוצה {{2},{1}} אך כעת יש קבוצה נוספת עליה יש להחיל את הפסוק ולכן יש להוסיף את {{1},{{1},{2}}} והמקבילה עם {2}. זה תהליך החוזר על עצמה ללא עצירה. על כן יכול הפסוק להתקיים אולי בעולם לא-סופי אך בהחלט לא בעולם סופי.