20425 - תאריך הבחינה: 12.2.2018 (סמסטר 2018א - מועד 84 / 3א)

שאלה 1

א.

$$P\{S=0,T=0\}=\left(\tfrac{1}{2}\right)^4=\tfrac{1}{16}$$

$$P\{S=0,T=1\}=2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{4}{16}$$

$$P\{S=0,T=2\}=2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{2}{16}$$

$$P\{S=1,T=1\}=2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{4}{16}$$

$$P\{S=1,T=2\}=2\cdot 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{4}{16}$$

$$P\{S=2,T=2\}=\left(\tfrac{1}{2}\right)^4=\tfrac{1}{16}$$

ואפשר לסכם כך:

$$P\{S=i,T=i\}=\begin{cases}\binom{2}{i}\binom{2}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^4 & ,\quad i=j=0,1,2\\ 2\cdot\binom{2}{i}\binom{2}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^4 & ,\quad i<j\quad;\quad i,j=0,1,2\\ 0 & ,\quad otherwise\end{cases}$$

ב.

$$E[S]=1\cdot\tfrac{8}{16}+2\cdot\tfrac{1}{16}=\tfrac{10}{16}=0.625$$

$$E[T]=1\cdot\tfrac{8}{16}+2\cdot\tfrac{7}{16}=\tfrac{22}{16}=1.375$$

$$E[ST]=1\cdot\tfrac{4}{16}+2\cdot\tfrac{4}{16}+4\cdot\tfrac{1}{16}=\tfrac{16}{16}=1$$

ולכן:

$$\text{Cov}(S,T)=E[ST]-E[S]E[T]=1-0.625\cdot1.375=0.140625=\tfrac{36}{256}=\tfrac{9}{64}$$

ג.

$$P\{S=0\,|\,T=2\}=\tfrac{2}{16}\Big/\tfrac{7}{16}=\tfrac{2}{7}$$

$$P\{S=1\,|\,T=2\}=\tfrac{4}{16}\Big/\tfrac{7}{16}=\tfrac{4}{7}$$

$$P\{S=2\,|\,T=2\}=\tfrac{1}{16}\Big/\tfrac{7}{16}=\tfrac{1}{7}$$

ומכאן:

$$E[S\,|\,T=2]=1\cdot\tfrac{4}{7}+2\cdot\tfrac{1}{7}=\tfrac{6}{7}$$

שאלה 2

א. לכל $y>0$ מתקיים:

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Z^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le Z\le\sqrt{y}\}=\Phi(\sqrt{y})-\Phi(-\sqrt{y})=2\Phi(\sqrt{y})-1$$

ב. לפי הסעיף הקודם, נגזור ונקבל כי לכל $y>0$ מתקיים:

$$f_Y(y)=\tfrac{d}{dy}F_Y(y)=\tfrac{d}{dy}[2\Phi(\sqrt{y})-1]=2f_Z(\sqrt{y})\cdot\tfrac{d}{dy}[\sqrt{y}]=\tfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}}\cdot\tfrac{1}{2\sqrt{y}}=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}$$

ג. לפי הסעיף הקודם, לכל $w>0$ מתקיים:

$$F_W(w)=P\{2Y\le w\}=P\{Y\le\tfrac{w}{2}\}=F_Y(\tfrac{w}{2})$$

ומכאן, שלכל $w>0$ מתקיים:

$$f_W(w)=\tfrac{d}{dw}F_W(w)=\tfrac{d}{dw}F_Y(\tfrac{w}{2})=\tfrac{1}{2}f_Y(\tfrac{w}{2})=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2\pi\frac{w}{2}}}e^{-\frac{w}{2\cdot2}}=\tfrac{1}{\sqrt{4\pi w}}e^{-\frac{w}{4}}$$

שאלה 3

א. 1. חישוב הפונקציה יוצרת המומנטים מובא באתר הקורס.

2. נגזור את הפונקציה יוצרת המומנטים ונקבל:

$$M'_X(t)=\frac{pe^t(1-(1-p)e^t)+(1-p)pe^{2t}}{(1-(1-p)e^t)^2}=\frac{pe^t}{(1-(1-p)e^t)^2}$$

ומכאן:

$$E[X]=M'_X(t)\Big|_{t=0}=\frac{pe^t}{(1-(1-p)e^t)^2}\Bigg|_{t=0}=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p}$$

ב. 1.

$$\rho(X+Y,Y)=\frac{\text{Cov}(X+Y,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X+Y)\text{Var}(Y)}}=\frac{\overbrace{\text{Cov}(X,Y)}^{=0}+\text{Var}(Y)}{\sqrt{[\text{Var}(X)+\text{Var}(Y)]\text{Var}(Y)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\text{Var}(Y)}{\text{Var}(X)+\text{Var}(Y)}}=\sqrt{\frac{\text{Var}(Y)}{2\text{Var}(Y)}}=\sqrt{0.5}=0.707$$

2.

$$P\{X=Y\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=i,Y=i\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=i\}P\{Y=i\}=\sum_{i=1}^{\infty}p^2(1-p)^{2(i-1)}$$

$$=p^2\sum_{i=0}^{\infty}[(1-p)^2]^i=\frac{p^2}{1-(1-p)^2}=\frac{p^2}{2p-p^2}=\frac{p}{2-p}$$

שאלה 4

א.

$$P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{\binom{4}{3}\cdot 3^3\cdot 3}{6^4}-\frac{\binom{4}{3}\cdot 3}{6^4}=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{108}=\frac{13}{54}=0.2407$$

ב.

$$P(A^C\cap B^C)=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$

$$=1-\frac{1}{4}-\frac{\binom{4}{3}\cdot 5}{6^4}+\frac{1}{108}=1-\frac{1}{4}-\frac{5}{324}+\frac{1}{108}=\frac{241}{324}=0.7438$$

ג.

$$P(A)=\frac{1}{4}=0.25$$

$$P(C)=\frac{4\cdot 3\cdot 4^2}{6^4}=\frac{4}{27}=0.14815$$

$$P(A\cap C)=\frac{4\cdot 3\cdot 2^2}{6^4}=\frac{1}{27}=0.03704$$

קיבלנו כי $P(A\cap C)=P(A)P(C)$, ולכן המאורעות A ו- C בלתי-תלויים זה בזה.

ד.

$$P(A\mid D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{4\cdot 3^3}{6^4}\Big/\frac{4\cdot 5^3}{6^4}=\frac{3^3}{5^3}=\frac{27}{125}=0.216$$

$$P(B\mid D)=\frac{P(B\cap D)}{P(D)}=\frac{4}{6^4}\Big/\frac{4\cdot 5^3}{6^4}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}=0.008$$

$$P(A\cap B\mid D)=\frac{P(A\cap B\cap D)}{P(D)}=\frac{4}{6^4}\Big/\frac{4\cdot 5^3}{6^4}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}=0.008$$

קיבלנו כי $P(A\cap B\mid D)\neq P(A\mid D)P(B\mid D)$, ומכאן שהמאורעות A ו- B תלויים בהינתן המאורע D.

דרך נוספת

אפשר גם להשוות את ההסתברות $P(A\mid D)$ להסתברות $P(A\mid B\cap D)$.

מקבלים: $P(A\mid D)=0.216\neq P(A\mid B\cap D)=1$

ומכאן ש המאורעות A ו- B תלויים בהינתן המאורע D.

שאלה 5

א. למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 5.

לפיכך: $P\{X+Y=6\}=e^{-5}\cdot\frac{5^6}{6!}=0.146$

ב. למשתנים המקריים X ו- Y יש ערכים שלמים ואי-שליליים בלבד, לפיכך:

$$P\{3X+2Y=6\}=P\{X=0,Y=3\}+P\{X=2,Y=0\}$$

$$=e^{-2}\cdot e^{-3}\cdot\frac{3^3}{3!}+e^{-2}\cdot\frac{2^2}{2!}\cdot e^{-3}=0.0303+0.0135=0.0438$$

ג. למשתנים המקריים $3X$ ו- $2Y$ אין אותה התפלגות. הדרך הפשוטה ביותר לקבוע זאת, היא באמצעות הערכים האפשריים של כל אחד מהמשתנים. הערכים של המשתנה המקרי $3X$ הם 0, 3, 6, ... בעוד שהערכים של המשתנה המקרי $2Y$ הם 0, 2, 4, ...

ד. נתחיל בחישוב פונקציית ההסתברות המתאימה לתוחלת הנתונה. לכל $n=1,2,\ldots$ מתקיים:

$$P\{X+Y=n\mid X\geq1\}=\frac{P\{X+Y=n,X\geq1\}}{P\{X\geq1\}}=\frac{P\{X+Y=n\}-P\{X+Y=n,X=0\}}{1-P\{X=0\}}$$

$$=\frac{e^{-5}\cdot\frac{5^n}{n!}-\overbrace{e^{-2}}^{P\{X=0\}}\cdot\overbrace{e^{-3}\cdot\frac{3^n}{n!}}^{P\{Y=n\}}}{1-e^{-2}}=\frac{\frac{e^{-5}}{n!}\cdot(5^n-3^n)}{1-e^{-2}}$$

ומכאן:

$$E[X+Y\mid X\geq1]=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{\frac{e^{-5}}{n!}\cdot(5^n-3^n)}{1-e^{-2}}=\frac{e^{-5}}{1-e^{-2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-3^n}{(n-1)!}$$

$$=\frac{e^{-5}}{1-e^{-2}}\left(5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\right)=\frac{e^{-5}(5e^5-3e^3)}{1-e^{-2}}=\frac{5-3e^{-2}}{1-e^{-2}}=\frac{5e^2-3}{e^2-1}$$

דרך חישוב נוספת:

[X ו- Y ב״ת]

$$E[X+Y\mid X\geq1]=E[X\mid X\geq1]+E[Y\mid X\geq1]=\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot\frac{P\{X=i\}}{P\{X\geq1\}}+E[Y]$$

$$=\frac{\sum_{i=0}^{\infty}iP\{X=i\}}{P\{X\geq1\}}+E[Y]=\frac{E[X]}{P\{X\geq1\}}+E[Y]=\frac{2}{1-e^{-2}}+3=\frac{5e^2-3}{e^2-1}$$

ועוד דרך חישוב:

[$\{X\geq1\}\cup\{X=0\}=S$]

$$5=E[X+Y]=E[X+Y\mid X\geq1]P\{X\geq1\}+E[X\mid X=0]P\{X=0\}$$

[X ו- Y ב״ת]

$$=E[X+Y\mid X\geq1]\cdot(1-e^{-2})+\underbrace{E[Y\mid X=0]}_{=E[Y]}\cdot e^{-2}$$

$$=E[X+Y\mid X\geq1]\cdot(1-e^{-2})+3\cdot e^{-2}$$

ומכאן כי: $E[X+Y\mid X\geq1]=\frac{5e^2-3}{e^2-1}$