תקציר פתרון בחינה 5

תשובה 1

א. [5] ב. [3] ג. [5]

תשובה 2

א. יהי $(a,b) \in R_1S_1$. משמע קיים $c \in A$ כך ש- $(a,c) \in R_1$ $(c,b) \in S_1$.

$R_1 \subseteq R$, לכן $(a,c) \in R$. $S_1 \subseteq S$, לכן $(c,b) \in S$.

שוב מהגדרת כפל יחסים, קיבלנו $(a,b) \in RS$.

ב. הוכחת טענה זו ע"י התבוננות באיברי היחסים אינה קלה.

ההוכחה האלגברית פשוטה למדי: לפי עמ' 52 בספר, T טרנזיטיבית אםם $T^2 \subseteq T$.

עלינו להוכיח אפוא כי $(RS)^2 \subseteq RS$. נחשב:

(הגדרת חזקה של רלציה)	$(RS)^2 = (RS)(RS)$
(כפל רלציות הוא אסוציאטיבי: משפט 2.8)	$= R(SR)S$
(נתון $RS = SR$)	$= R(RS)S$
(שוב אסוציאטיביות והגדרת חזקה)	$= R^2S^2$
(סעיף א, בצירוף העובדה שהיחסים הטרנזיטיביים R,S מקיימים $R^2 \subseteq R$, $S^2 \subseteq S$)	$\subseteq RS$

ג. דוגמה 1: $R = \{(1,2)\}$, $S = \{(2,1)\}$. דוגמה 2: $R = \{(1,2)\}$, $S = \{(1,1)\}$.

תשובה 3 (השאלה הופיעה במטלה בסמסטר קודם. היא דומה לשאלה ממועד א2 אבל אחרת: שם התמונות היו זוגות לא סדורים).

א. $(4 \cdot 4)^3 = 16^3 = 4{,}096$

ב. תהי U קבוצת **כל** הפונקציות של B ל- $A \times A$. מהסעיף הקודם $|U| = 4{,}096$.

עבור $i = 1,2,3,4$, תהי F_i קבוצת הפונקציות f השייכות ל- U, אשר i **אינו** נמצא כאיבר ימני ואינו נמצא כאיבר שמאלי **באף אחד** מהזוגות שבתמונת f.

למשל הפונקציה g בדוגמא שבגוף השאלה שייכת ל- F_3 וגם ל- F_4.

אנו מחפשים את גודל הקבוצה $U - \bigcup_{i=1}^{4} F_i$.

את F_1 ניתן לראות כקבוצת הפונקציות של B לקבוצה $\{2,3,4\} \times \{2,3,4\}$.

לכן, בדומה לסעיף א, $|F_1| = (3 \cdot 3)^3 = 729$.

בדומה מובן כי עבור $i = 1,2,3,4$, $|F_i| = 729$.

חיתוכים בזוגות:

את $F_1 \cap F_2$ ניתן לראות כקבוצת הפונקציות של B לקבוצה $\{3,4\} \times \{3,4\}$.

לכן $|F_1 \cap F_2| = (2 \cdot 2)^3 = 64$.

מובן כי לכל $i \neq j$ זהו גם $|F_i \cap F_j|$. יש 6 חיתוכים בזוגות

חיתוכים משולשים:

כל חיתוך כזה הוא קבוצת הפונקציות של B לקבוצה בת איבר אחד. יש בדיוק פונקציה אחת השולחת את כל אברי B לאיבר קבוע. לכן עבור i,j,k שונים זה מזה, $|F_i \cap F_j \cap F_k| = 1$.

יש 4 חיתוכים משולשים.

החיתוך $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$ הוא ריק.

מעקרון ההכלה וההפרדה,

$$\left| U - \bigcup_{i=1}^{4} F_i \right| = |U| - 4|F_i| + 6|F_1 \cap F_2| - 4|F_1 \cap F_2 \cap F_3|$$

$$= 4{,}096 - 4 \cdot 729 + 6 \cdot 64 - 4 \cdot 1 = 1{,}560$$

תשובה 4 (השאלה הופיעה במטלה בסמסטר קודם עם המספרים 1 – 8 במקום 1 - 7).

א. נבדוק כיצד בנויה סדרה באורך n המקיימת את הנדרש.

נתבונן באיבר האחרון של הסדרה:

* אם הוא אי-זוגי (4 אפשרויות), אז קטע הסדרה הקודם לו הוא **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-1$ (a_{n-1} אפשרויות).
* אם הוא זוגי (3 אפשרויות) אז לפניו בא מספר אי-זוגי (4 אפשרויות), ולפניו **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-2$ (a_{n-2} אפשרויות).

קיבלנו: $a_n = 4a_{n-1} + 12a_{n-2}$.

תנאי התחלה:

$a_0 = 1$ (הסדרה הריקה מקיימת את התנאים),

$a_1 = 7$,

$a_2 = 7^2 - 3^2 = 40$ (כל הזוגות פחות זוגות של מספרים זוגיים),

לבדיקה, מיחס הנסיגה: $a_2 = 4a_1 + 12a_0 = 4 \cdot 7 + 12 = 40$.

ב. המשוואה האפיינית: $\lambda^2-4\lambda-12=0$. פתרונותיה: 6, -2 .

לפיכך $a_n=A\cdot 6^n+B\cdot(-2)^n$.

בהצבת תנאי ההתחלה: $A+B=1$, $6A-2B=7$.

מכאן $B=-1/8$, $A=9/8$.

כלומר $a_n=\frac{9}{8}\cdot 6^n-\frac{1}{8}\cdot(-2)^n$.

בדיקה: $a_2=\frac{9}{8}\cdot 6^2-\frac{1}{8}\cdot(-2)^2=\frac{9\cdot 36-4}{8}=40$

תשובה 5

א. מכיון שאין ביניהם קשת ב- G, יש ביניהם קשת ב- $\overline{G}$.

ב. יהי x צומת השונה מ- a,b.

לא ייתכן שב- G קיימת קשת ax **וגם** קשת xb, כי זהו מסלול באורך 2 בין a ל- b.

כלומר ב- G, או שאין קשת ax או שאין קשת xb.

לכן ב- $\overline{G}$ יש קשת ax או שיש קשת xb.

משמע x הוא באותו רכיב קשירות עם a או עם b. אבל לפי א' זהו אותו רכיב קשירות.