תשובה 1

מובן שלא ניתן להגיע למצב כזה בקבוצות סופיות. נקח אפוא קבוצות אינסופיות.
אחרי קצת ניסוי וטעיה אפשר להגיע לקבוצות שונות שמקיימות את הנדרש.
למשל, תהי $A = \mathbf{N}$ ותהי $B = \{0,-1,-2,-3,\ldots\} = \{-n \mid n \in \mathbf{N}\}$.
אז $A \cup B = \mathbf{Z}$ (קבוצת המספרים השלמים),
$A - B = \mathbf{N} - \{0\}$, $A \oplus B = \mathbf{Z} - \{0\}$.
כל חמש הקבוצות האלה שונות זו מזו . למשל:
(-1) שייך ל- $A \oplus B$ ואינו שייך ל- $A - B$, לכן $A \oplus B \neq A - B$.
בדומה לגבי השאר.
הפונקציה $f(n) = -n$ היא פונקציה חח"ע של A על B. לכן $|B| = |A|$.
הפונקציה $g(n) = n+1$ היא פונקציה חח"ע של A על $A-B$. לכן $|A-B| = |A|$.
מהגדרת העוצמה $\aleph_0$, עוצמת A היא $\aleph_0$.
לפי שאלה 4.4 בעמ' 119 בספר, גם $|\mathbf{Z}| = \aleph_0$. כלומר $|A \cup B| = \aleph_0$.
נותר להראות שגם $|A \oplus B| = \aleph_0$. זה מתקבל למשל משאלה 4.3 סעיף ד (אפשר גם בדרכים אחרות).

תשובה 2

א. כאמור בשאלה, $\mathbf{Q}$ היא בת-מניה. אילו גם $K = \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ היתה בת-מנייה, אז לפי שאלה 4.3ד בעמ' 119 בספר, גם $\mathbf{Q} \cup K$ היתה בת-מנייה. אבל איחוד זה הוא $\mathbf{R}$!
במשפט 4.5 ראינו ש- $\mathbf{R}$ אינה בת-מנייה. לפיכך K אינה בת-מנייה.
ב. נגדיר פונקציה $f : A \to \mathbf{Q}$, כך: $f(x) = x - \sqrt{2}$.
מהגדרת A, זו אכן פונקציה של A ל- $\mathbf{Q}$. נוכיח ש- f חד-חד-ערכית (חח"ע) ועל $\mathbf{Q}$.
הוכחת חח"ע: יהיו $x_1, x_2 \in A$ ונניח $f(x_1) = f(x_2)$. משמע $x_1 - \sqrt{2} = x_2 - \sqrt{2}$.
נוסיף $\sqrt{2}$ בשני האגפים ונקבל $x_1 = x_2$. כלומר f חח"ע.
הוכחת על: יהי $q \in \mathbf{Q}$. יהי $x = q + \sqrt{2}$. אז $x \in A$ כי $x - \sqrt{2} = q$, ואותו שוויון מראה גם כי $f(x) = q$. מצאנו מקור ל- q , שהוא איבר כלשהו ב- $\mathbf{Q}$, לכן f היא **על** $\mathbf{Q}$.
הראינו פונקציה חח"ע ועל של A ל- $\mathbf{Q}$, לכן, מהגדרת שוויון עוצמות, $|A| = |\mathbf{Q}|$. כאמור בסעיף הקודם, עוצמה זו היא $\aleph_0$.

תשובה 3

א. לפי הגדרת יחס (רלציה) מעל קבוצה (סעיף 2.3.3), קבוצת היחסים מעל $\mathbf{N}$ **היא בדיוק** $P(\mathbf{N}\times\mathbf{N})$: לא רק שיש להן אותה עוצמה, אלא $P(\mathbf{N}\times\mathbf{N})$ **היא** קבוצת היחסים מעל $\mathbf{N}$!

כידוע, $|\mathbf{N}\times\mathbf{N}| = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

מכאן לפי משפט 5.23 ומשפט 5.26 : $|P(\mathbf{N}\times\mathbf{N})| = 2^{\aleph_0} = C$.

ב. תהי T קבוצת היחסים הטרנזיטיביים מעל $\mathbf{N}$.

T חלקית לקבוצת כל היחסים מעל $\mathbf{N}$, לכן (סעיף א כאן + שאלה 5.1): $|T| \le C$.

מצד שני, נגדיר פונקציה $P(\mathbf{N}) \to T$ כך:

לכל $A \in P(\mathbf{N})$ נתאים את היחס I_A , אותו נראה כיחס מעל $\mathbf{N}$. מובן שהוא טרנזיטיבי.

התאמה זו היא חד-חד-ערכית (ניתן למצוא את A מתוך I_A) ולכן $C = |P(\mathbf{N})| \le |T|$.

משני האי-שוויונים, לפי קנטור-שרדר-ברנשטיין, נקבל $|T| = C$.

תשובה 4

א. תהיינה A_1, A_2 , B_1, B_2 קבוצות שעוצמותיהן בהתאמה k_1, k_2 , m_1, m_2 .

נתון $k_1 \le k_2$, $m_1 \le m_2$.

כדי לקצר מעט את ההוכחה ניעזר בטריק השימושי הבא: אנו חופשים לבחור כראות עינינו את הקבוצות המייצגות את העוצמות השונות, כל עוד הקבוצות שנבחר הן בעלות העוצמות הנדרשות.

מתוך הנתון, לפי שאלה 5.1א בחוברת "פרק 5", קיימת קבוצה חלקית של A_2 שעוצמתה שווה לעוצמת A_1, וקיימת קבוצה חלקית של B_2 שעוצמתה שווה לעוצמת B_1.

לכן **ב.ה.כ. נניח** $A_1 \subseteq A_2$, $B_1 \subseteq B_2$ **(!)**

כעת מהגדרת כפל עוצמות $|A_1 \times B_1| = k_1 \cdot m_1$, $|A_2 \times B_2| = k_2 \cdot m_2$.

אבל מכיוון ש- $A_1 \subseteq A_2$, $B_1 \subseteq B_2$, מהגדרת מכפלה קרטזית נקבל $A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$.

לכן , בהסתמך על שאלה 5.1ב, $k_1 \cdot m_1 \le k_2 \cdot m_2$.

ב. מצד אחד, $\aleph_0 \le C$ ולכן בעזרת סעיף א, $\aleph_0 \cdot C \le C \cdot C = C$.

מצד שני $1 \le \aleph_0$ ולכן בדומה $C = 1 \cdot C \le \aleph_0 \cdot C$.

משני הכיוונים יחד, בעזרת קנטור-שרדר-ברנשטיין, נובע המבוקש.

ג. לפי משפט 5.26, $2^{\aleph_0} = C$. נציב זאת ונקבל

$$C^C = (2^{\aleph_0})^C = 2^{\aleph_0 \cdot C} = 2^C .$$

במעברים נעזרנו במשפט 5.27ג ובסעיף ב של שאלה זו.

תשובה 5

ניעזר במשפט 5.13ב.

קבוצת הממשיים $\mathbf{R}$ היא אינסופית ואינה בת-מניה.

הקבוצה $\mathbf{Q}$ חלקית לה ובת-מניה.

לפי המשפט הנ״ל, $|K| = |\mathbf{R} - \mathbf{Q}| = |\mathrm{R}| = C$.

איתי הראבן