פרק 1: קומבינטוריקה (תרגילים)

(20416 / 23.1.12)

1. לפניך תיאור של שני משחקי מזל הנערכים באמצעות חפיסת קלפים רגילה בת 52 קלפים.

משחק 1: בוחרים באקראי וללא החזרה שני קלפים מהחפיסה.
זוכים אם שני הקלפים מאותו סוג (דהיינו, שניהם יהלומים/עלים/לבבות/תלתנים).

משחק 2: מפרידים מהחפיסה את 13 קלפי הלב, ובוחרים מתוכם 3 קלפים בזה אחר זה וללא החזרה.
זוכים אם 3 הקלפים שנבחרו הוצאו בסדר עולה.

א. כמה אפשרויות בחירה יש בכל אחד מהמשחקים?

ב. בכמה מאפשרויות הבחירה זוכים בכל אחד מהמשחקים?

2. מטילים 5 כדורים, המסומנים באותיות A, B, C, D ו- E לתוך 7 תאים ממוספרים מ- 1 עד 7, המסודרים בשורה.

א. כמה פיזורים שונים של הכדורים קיימים?

ב. בכמה מהפיזורים כדורים A ו- D נמצאים בתא 2?

ג. בכמה מהפיזורים כדורים A ו- D נמצאים באותו תא?

ד. בכמה מהפיזורים רק כדורים A ו- D נמצאים בתא 2?

ה. בכמה מהפיזורים כדורים A ו- D נמצאים בתאים סמוכים?

ו. בכמה מהפיזורים בין התא שלתוכו נפל כדור A לבין התא שלתוכו נפל כדור D מפרידים לפחות 2 תאים?

ז. בכמה מהפיזורים מספר התא שבו נמצא כדור A קטן ממספר התא שבו נמצא כדור B, ומספר התא שבו נמצא כדור B קטן ממספר התא שבו נמצא כדור C?

ח. בכמה מהפיזורים יש בתא 3 לפחות כדור אחד?

ט. בכמה מהפיזורים יש בתא 3 לפחות ארבעה כדורים?

3. מטילים 5 כדורים **<u>זהים</u>** לתוך 7 תאים ממוספרים מ- 1 עד 7, המסודרים בשורה.

א. כמה פיזורים שונים של הכדורים קיימים?

ב. בכמה מהפיזורים יש בתא 3 לפחות כדור אחד?

ג. בכמה מהפיזורים יש בתא 3 לפחות ארבעה כדורים?

4. שלושה ילדים, אסף, בני וגלעד, מטילים קוביות. כל אחד מהילדים מטיל פעם אחת קובייה אחת.

א. כמה מקרים שונים קיימים, שבהם התוצאה של אסף קטנה מזו של בני, והתוצאה של בני קטנה מזו של גלעד?

ב. בכמה מקרים יש לפחות ילד אחד שמקבל את התוצאה 1?

הסבר מדוע הפתרון: II) בחירת תוצאות לשאר הילדים $\rightarrow 3\cdot 6^2 \leftarrow$ I) בחירת ילד שמקבל את התוצאה 1 אינו נכון.

ג. בכמה מקרים יש לפחות שני ילדים שמקבלים תוצאות זהות?

הסבר מדוע הפתרון: III) התוצאה של הילד השלישי $\rightarrow \binom{3}{2}\cdot \underset{\downarrow}{6}\cdot 6 \leftarrow$ I) בחירת 2 ילדים שמקבלים אותה התוצאה אינו נכון.

II) התוצאה ש- 2 הילדים מקבלים

5. כיתה של 10 בנים ו- 10 בנות מתחלקת באקראי לקבוצות.
   א. מהו מספר החלוקות האפשריות לשלוש קבוצות בגדלים 5, 7 ו- 8?
   ב. מהו מספר החלוקות האפשריות לשתי קבוצות שוות-גודל, כך שבאחת מהן יש בדיוק 4 בנים?
   ג. מהו מספר החלוקות האפשריות לשתי קבוצות שוות-גודל?
   ד. מהו מספר החלוקות האפשריות לשתי קבוצות שוות-גודל, שבכל אחת מהן 5 בנים ו- 5 בנות?
   ה. מהו מספר החלוקות האפשריות לארבע קבוצות שוות-גודל, שתנקנה את הכיתה בימים א-ד? (כל קבוצה תנקה את הכיתה ביום אחד מהארבעה).
   ו. מהו מספר החלוקות של 20 הילדים לשתי קבוצות לא-ריקות? (בכל הגדלים האפשריים).

6. אבי נסע ל-7 ימים להתארח בבית סבתו. הוא לקח עימו 9 מכוניות <u>שכולן שונות זו מזו</u> – 4 אדומות, 3 כחולות ו-2 שחורות. בכל יום הוא בחר באקראי אחת מ-9 המכוניות שהביא ושיחק איתה.
   א. כמה אפשרויות בחירה שונות יש לאבי בתקופה של שבעת הימים?
   ב. בכמה מאפשרויות הבחירה נבחרה מכונית אדומה בכל אחד משלושת הימים האחרונים?
   ג. בכמה מאפשרויות הבחירה יש בדיוק 3 ימים (מתוך ה-7), שבהם נבחרה מכונית אדומה?
   ד. בכמה מאפשרויות הבחירה יש בדיוק 3 ימים שבהם נבחרה מכונית אדומה, בדיוק 2 ימים שבהם נבחרה מכונית כחולה ובדיוק 2 ימים שבהם נבחרה מכונית שחורה?
   ה. בכמה מאפשרויות הבחירה יש לפחות יומיים שבהם נבחרה מכונית כחולה?
   ו. בכמה מאפשרויות הבחירה צבעי המכוניות שנבחרו בימים הראשון והאחרון זהים?

7. במישור מסומנים 15 ישרים שונים, מהם 4 המקבילים זה לזה.
   כמה נקודות חיתוך יש ל- 15 הישרים, אם בכל נקודה נפגשים לכל היותר 2 ישרים?

8. מסדרים בשורה באופן אקראי 12 דגלים – 4 מהם צהובים, 3 ירוקים והיתר אדומים.
   א. אם כל הדגלים שונים זה מזה, כמה סידורים שונים קיימים?
   בכמה מהסידורים האלה כל הדגלים מאותו הצבע סמוכים זה לזה? (כלומר, הדגלים מסודרים בקבוצות של צבעים.)
   ב. אם כל הדגלים מאותו צבע זהים זה לזה, כמה סידורים שונים קיימים?
   בכמה מהסידורים האלה כל הדגלים מאותו הצבע סמוכים זה לזה? (כלומר, הדגלים מסודרים בקבוצות של צבעים.)

9. כמה מילים בנות 10 אותיות אפשר ליצור מן האותיות a, b ו- c, אם כל אות חייבת להופיע לפחות פעמיים במילה?

10. מספר בינארי מורכב מהספרות 0 ו- 1 בלבד. אם לא מותרים אפסים מובילים במספר –
   א. כמה מספרים בינאריים בני 10 ספרות קיימים?
   ב. כמה מספרים בינאריים בני 15 ספרות, שבהם 10 אחדים ו- 5 אפסים, קיימים?
   ג. כמה מספרים בינאריים בני 15 ספרות, שבהם 10 אחדים ו- 5 אפסים, קיימים, אם אסור שיהיו בהם שני אפסים רצופים?
   ד. כמה מספרים בינאריים בני 15 ספרות, שבהם 10 אחדים ו- 5 אפסים, קיימים, אם בין כל שני אפסים חייבים להיות לפחות שני אחדים?

11. 15 נשים ו-6 גברים מתיישבים בשורה.
   א. כמה אפשרויות סידור קיימות?
   ב. בכמה מאפשרויות הסידור אין שני גברים שיושבים זה לצד זה?
   ג. בכמה מאפשרויות הסידור יש לפחות שתי נשים בין כל שני גברים?

12. ילדה משחילה על חוט חרוזים שונים זה מזה בסדר אקראי – 8 אדומים, 2 כתומים ו-4 צהובים.
   אחר-כך, היא קושרת את שני הקצוות של החוט, כך שנוצרת שרשרת עגולה, שאין לה התחלה או סוף.
   א. כמה <u>שרשרות שונות</u> יכולות להיווצר בדרך זו?
   ב. כמה <u>שרשרות שונות</u> שאין בהן 2 חרוזים צהובים סמוכים זה לזה, יכולות להיווצר בדרך זו?
   ג. אילו הילדה היתה מוסיפה לשרשרת סֶגֶר, כמה <u>שרשרות שונות</u> היו יכולות להיווצר בדרך זו?

13. 6 אנשים יושבים בחדר ולפניהם ארגז שבתוכו 8 חפצים שונים. בוחרים אנשים ונותנים להם חפצים מהארגז, לפי המתואר בכל אחד מסעיפי השאלה. בחירת האנשים (שמקבלים את החפצים) ובחירת החפצים (שניתנים לאנשים שנבחרו) אקראיות.
   א. בכמה דרכים אפשר לבחור שני אנשים ולתת לאחד מהם חפץ אחד ולשֵׁני שְׁניים?
   ב. בכמה דרכים אפשר לבחור שני אנשים ולתת לאחד מהם שְׁני חפצים ולשֵׁני שלושה?
   ג. בכמה דרכים אפשר לבחור שני אנשים ולתת לכל אחד מהם חפץ אחד?
   ד. בכמה דרכים אפשר לבחור שני אנשים ולתת לכל אחד מהם שני חפצים?
   ה. בכמה דרכים אפשר לבחור ארבעה אנשים ולתת לכל אחד מהם שני חפצים?
   ו. בכמה דרכים אפשר לתת חפץ אחד לכל אחד משלושה אנשים, ושני חפצים לכל אחד משני אנשים נוספים?
   ז. בכמה דרכים אפשר לתת חפץ אחד לכל אחד מחמישה אנשים, ולשישי את שלושת החפצים הנותרים?

14. על לוח שחמט (8×8 משבצות) מפזרים באקראי 8 כלי-משחק שונים זה מזה: צריח שחור וצריח לבן, רץ שחור ורץ לבן, פרש שחור ופרש לבן, חייל שחור וחייל לבן.
   כל אחד מכלי המשחק נמצא על משבצת אחת, ואין שני כלים על אותה משבצת.
   א. כמה אפשרויות יש לבחירת 8 המשבצות (שעליהן ימוקמו 8 הכלים)?
   ב. כמה אפשרויות יש לבחירת 8 המשבצות ולסידור 8 הכלים עליהן?
   ג. בכמה מהסידורים כל כלי-המשחק ממוקמים בשורה 7? ובכמה מהם כולם באותה שורה?
   ד. בכמה מהסידורים הכלים הלבנים ממוקמים ב-4 השורות הראשונות של הלוח?
   ה. בכמה מהסידורים כל הכלים השחורים נמצאים בפינות הלוח?

15. הזהות הבאה מוכרת בשם **הזהות הקומבינטורית של פֶּרְמָה**: $n \geq k$, $\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1}$
   הבא שיקול קומבינטורי (אין צורך בחישובים) לביסוס זהות זו.

   <u>רמז:</u> חשוב על קבוצת המספרים 1 עד n. בכמה תת-קבוצות בגודל k המספר הגדול ביותר הוא i?