קראו תחילה את כל השאלות. לפני שתתחילו לפתור וודאו שאתם מבינים את השאלה לעומק.

בשאלות בהן נדרש לכתוב אלגוריתם, אין צורך לכתוב פסאודו-קוד אך יש לכתוב את האלגוריתם בצורה ברורה וחד משמעית. יש להסביר תחילה את רעיון האלגוריתם וכן להוכיח/להסביר את נכונותו. בנוסף יש לנתח את סיבוכיותו.

שאלה 1

א. (7 נק') פתרו את נוסחת הנסיגה: $T(n)=\sqrt{2}T(\sqrt{n})+\sqrt{\log n}$

(4) $\sqrt{\log(n)} \cdot \log\log(n)$

ב. (9 נק') קבעו את היחס האסימפטוטי בין $(\log n)!$ לבין n^k עבור k קבוע חיובי כלשהו.

ג. (9 נק') הוכיחו: אם $f(n)=O(g(n))$ וגם $g(n)=O(h(n))$ אז $f(n)=O(h(n))$. יש להראות שקיימים n_0 ו-c כנדרש.

$n^k<(\log n)!$

שאלה 2

א. (10 נק') נתון מערך $A[1..n]$ של מספרים ממשיים. כתבו אלגוריתם הבודק האם **קיים** ב- A איבר z המופיע **יותר** מ- $n/2$ פעמים ב- A. זמן הריצה הנדרש של האלגוריתם הינו $\Theta(n)$.

ב. (15 נק') נתונים מערך $A[1..n]$ של מספרים ממשיים ומספר טבעי m המקיים $2m<n$.

כתבו אלגוריתם הבודק האם **קיים** ב- A איבר z המקיים את שני התנאים הבאים:

(1) A מכיל לפחות $n-2m$ איברים קטנים מ- z;

(2) z מופיע יותר מ- m פעמים ב- A.

זמן הריצה הנדרש של האלגוריתם הינו $\Theta(n)$.

רמז: חשבו כיצד סעיף א' עשוי לעזור.

שימו לב לכך שבשני הסעיפים z הוא לא חלק מהקלט.

Select לאיבר ה- $n-2m+1$

Partition על $A[n-2m+1]$

הרצת האלגוריתם מסעיף א על

$A[n-2m+1]$

שאלה 3

נתונה ערמת מקסימום H בת n איברים. נבחר צומת z בערמה שגובהו k (k שלם, $0 < k < \lg n$).
מוסיפים לכל אחד מאיברי התת-ערמה המושרשת ב- z את הקבוע $C > 0$. ברצוננו לתקן עתה את המבנה H כך שיחזור להיות ערמת מקסימום חוקית (ללא שינוי ערכי האיברים בערמה).

(8 נק') א. כתבו שגרה ראשונה לתיקון הערמה H, שזמן הריצה שלה $O(\lg n \cdot (\lg n - k))$.
הסבירו את התוצאה. heapify כלפי מעלה

(9 נק') ב. כתבו שגרה שנייה לתיקון הערמה H, שזמן הריצה שלה $O(2^k \cdot \lg n)$. הסבירו את התוצאה. מחיקת 2^{k+1} הצמתים והחזרתם

(8 נק') ג. איזו שגרה תהיה עדיפה בכל אחד מהמקרים הבאים?

k קבוע; ב עדיף

$k = \lg\lg n$; אין הבדל

$k = \lg n / 2$; סעיף ב

$\lg n - k$ קבוע (כלומר k קטן מ- $\lg n$ רק בקבוע). סעיף א.

הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 4

נניח שבונים עץ חיפוש בינרי על ידי כך שמכניסים לעץ, בזה אחר זה, ערכים השונים זה מזה.

א. (6 נק') מהו זמן הריצה של בניית העץ? n^2

ב. (7 נק') הראו שמספר הצמתים הנבדקים במהלך חיפוש אחר ערך בעץ גדול ב-1 ממספר הצמתים שנבדקו כאשר ערך זה הוכנס לעץ לראשונה. הוכחתי

ג. (6 נק') האם תשובתכם תשתנה אם לפני החיפוש בוצעה מחיקה של אחד הצמתים בעץ? פרטו. כן

ד. (6 נק') האם תשובתכם תשתנה אם ההכנסה מתבצעת לתוך עץ אדום שחור (ללא מחיקות)? כן

$1+2+3+4+\dots+n$ $(n+1)\cdot\frac{n}{2} = n^2$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

המשך הבחינה בעמוד הבא

שאלה 5

הציעו מבנה נתונים S, שבאמצעותו ניתן לבצע את הפעולות הבאות בזמנים הנדרשים (n מציין את מספר האיברים במבנה):

$\mathrm{INSERT}(S,k)$: הכנסת המפתח k למבנה S; זמן הריצה: $O(\lg n)$;

$\mathrm{DEL\text{-}OLD}(S)$: מחיקת האיבר הוותיק ביותר (האיבר שנכנס ראשון) מהמבנה S; זמן הריצה $O(\lg n)$;

$\mathrm{DEL\text{-}MAX}(S)$: מחיקת האיבר בעל המפתח המכסימלי מהמבנה S; זמן הריצה $O(\lg n)$;

$\mathrm{MIDTIME}(S)$: החזרת המפתח בעל זמן ההכנסה שהוא החציון של זמני ההכנסה של כל האיברים; זמן הריצה: $O(1)$.

הערה: המבנה S יכול להיות מורכב מכמה מבני נתונים יסודיים.

בהצלחה!