שאלה 1

א. נתון כי פונקציית הצפיפות של X היא: $f_X(x)=cx \quad , \quad 3<x<5$

1. $\int_3^5 f_X(x)dx=\int_3^5 cxdx=c\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^5=\frac{c(25-9)}{2}=8c \qquad \Rightarrow \qquad c=\frac{1}{8}=0.125$

2. $E[X]=\int_3^5 xf_X(x)dx=\frac{1}{8}\int_3^5 x^2dx=\frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_3^5=\frac{125-27}{24}=\frac{49}{12}=4.08\bar{3}$

3. עבור $3<x<5$ מתקיים: $F_X(x)=\int_3^x f_X(t)dx=\frac{1}{8}\int_3^x tdx=\frac{1}{8}\left[\frac{t^2}{2}\right]_3^x=\frac{x^2-9}{16}$

לפיכך:
$$F_X(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\le 3\\ \frac{x^2-9}{16} & , \quad 3<x<5\\ 1 & , \quad x\ge 5\end{cases}$$

ב. הוכחת הטענה מובאת באתר הקורס.

שאלה 2

א. המאורע $\{X_5>5\}$ מתרחש אם הספרה 5 ממוקמת באחד מהמקומות 6-9 בשורה. הואיל וסידור הספרות אקראי, הספרה 5 ממוקמת בכל אחד מהמקומות בשורה בהסתברות 1/9, ולכן ממוקמת באחד מהמקומות 6-9 בהסתברות 4/9.

ב. תחילה נשים לב כי $\sum_{i=1}^9 X_i=\sum_{i=1}^9 i=45$. לפיכך, מתקיים $\sum_{i=1}^8 X_i=45-X_9$, ומכאן שעלינו לחשב את השונות של $45-X_9$. מהאמור בסעיף הקודם, נובע כי למשתנה המקרי X_9 יש התפלגות אחידה בדידה בין 1 ל- 9, ולכן: $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^8 X_i\right)=\mathrm{Var}(45-X_9)=\mathrm{Var}(X_9)=\frac{9^2-1}{12}=6.\bar{6}$

ג. לכל $i=1,2,\ldots,9$, נסמן ב- Y_i את האינדיקטור של המאורע שהספרה i נמצאת במקום i.

מתקיים: $E[Y_i]=P\{Y_i=1\}=P\{X_i=i\}=\frac{1}{9} \qquad \Rightarrow \qquad E[Y]=\sum_{i=1}^9 P\{Y_i=1\}=9\cdot\frac{1}{9}=1$

כמו כן, מתקיים: $\mathrm{Var}(Y_i)=P\{Y_i=1\}P\{Y_i=0\}=\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}=\frac{8}{81}$

ולכל $i\neq j$, המקיימים $i,j=1,2,\ldots,9$, מתקיים: $P\{Y_i=1,Y_j=1\}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{72}$

$$\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)=P\{Y_i=1,Y_j=1\}-P\{Y_i=1\}P\{Y_j=1\}=\frac{1}{72}-\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{648}$$

ומכאן כי: $\mathrm{Var}(Y)=\sum_{i=1}^9\mathrm{Var}(Y_i)+\sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)=9\cdot\frac{8}{81}+9\cdot 8\cdot\frac{1}{648}=1$

שאלה 3

א. מטעמי סימטריה, התוחלת של X היא 0.5. כעת, נחשב את השונות של X:

$$\mathrm{Var}(Y)=E[X^2]-(E[X])^2=\tfrac{1}{3}(0.25^2+0.5^2+0.75^2)-0.5^2=0.041\overline{6}=\tfrac{1}{24}$$

ב. בהינתן ערך של X, דהיינו הערך של $P(\mathrm{H})$, קיימת אי-תלות בין תוצאות ההטלות של המטבע, כלומר, ההסתברויות המותנות של המאורעות A_1, A_2 ו- $A_1 \cap A_2$ בהינתן $X=i$ הן:

$$P(A_1 \mid X=i)=P(A_2 \mid X=i)=i \qquad , \qquad i=0.25,0.5,0.75$$

$$P(A_1 \cap A_2 \mid X=i)=i^2 \qquad , \qquad i=0.25,0.5,0.75$$

ולכן, לכל i מתקיים: $P(A_1 \cap A_2 \mid X=i)=P(A_1 \mid X=i)P(A_2 \mid X=i)$

והמאורעות A_1, A_2 בלתי-תלויים בתנאי המאורע $\{X=i\}$.

ג. לחישוב ההסתברויות של המאורעות A_1, A_2 ו- $A_1 \cap A_2$, נעזר בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(A_1)=\sum_i P(A_1 \mid X=i)P\{X=i\}=\sum_i i\cdot\tfrac{1}{3}=\tfrac{1}{2}=P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_2)=\sum_i P(A_1 \cap A_2 \mid X=i)P\{X=i\}=\sum_i i^2\cdot\tfrac{1}{3}=\tfrac{7}{24}$$

קיבלנו כי, $P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1)P(A_2)$, ומכאן שהמאורעות תלויים.

ד. לכל $i=0.25,0.5,0.75$ מתקיים: $P\{X=i \mid A_1\}=\dfrac{P\{X=i,A_1\}}{P(A_1)}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot i}{0.5}=\tfrac{2}{3}\cdot i$

ומכאן: $E[X \mid A_1]=\sum_i iP\{X=i \mid A_1\}=\sum_i \tfrac{2}{3}\cdot i^2=\tfrac{2}{3}(0.25^2+0.5^2+0.75^2)=\tfrac{7}{12}$

שאלה 4

א. הרווח הנקי בהגרלה בודדת הוא 2^X-10. עבור משתנה מקרי פואסוני X, הפרש זה חיובי כאשר $X \geq 4$.
לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא:

$$P\{2^X-10 \geq 0\}=P\{X \geq 4\}=1-P\{X \leq 3\}=1-e^{-2}\left(\tfrac{2^0}{0!}+\tfrac{2^1}{1!}+\tfrac{2^2}{2!}+\tfrac{2^3}{3!}\right)=1-6.\overline{3}e^{-2}=0.1429$$

ב. $E[2^X-10]=E[2^X]-10=\sum_{i=0}^{\infty}2^i e^{-2}\tfrac{2^i}{i!}-10=e^{-2}\sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{4^i}{i!}-10=e^{-2}e^4-10=e^2-10=-2.611$

ג. ההסתברות לקבל את המספר 4 בהגרלה כלשהי היא: $P\{X=4\}=e^{-2}\cdot\tfrac{2^4}{4!}=\tfrac{2}{3}e^{-2}=0.0902$

1. יהי Y המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר ההגרלה שבה מתקבלת התוצאה 4 לראשונה. התפלגות המשתנה המקרי Y היא גיאומטרית עם הפרמטר 0.0902. ולכן:

$$P\{Y>10\}=(1-p)^{10}=0.9098^{10}=0.3885$$

2. יהי W המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר ההגרלות, מתוך 300 ההגרלות הראשונות, שבהן מתקבלת התוצאה 4. הואיל ולמשתנה המקרי W יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 300 ו- 0.0902, כך שמתקיים $np(1-p)>10$, נוכל לחשב קירוב נורמלי להסתברות המבוקשת. נקבל:

$$P\{W \geq 40\}=P\{W \geq 39.5\}=1-\Phi\left(\tfrac{39.5-300\cdot 0.0902}{\sqrt{300\cdot 0.0902\cdot 0.9098}}\right)=1-\Phi(2.5072)=1-0.9939=0.0061$$

שאלה 5

א. נבחר את המספר ספרה אחר ספרה. נתחיל מבחירת ספרת מאות-האלפים, ומכאן נקבל כי מספר אפשרויות הבחירה שבהן כל הספרות של המספר הנבחר שונות זו מזו הוא:

$$8 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 120{,}960$$

ב. כדי שכל ספרה במספר תהיה גדולה מקודמתה, ברור כי כל הספרות במספר צריכות להיות שונות זהו מזו. כעת, כאשר בוחרים 6 ספרות שונות שתרכבנה את המספר (מתוך 10 הספרות האפשריות), בהכרח הספרה הגדולה ביותר איננה 0 או 1. לפיכך, אפשר לסדר כל בחירה של 6 ספרות שונות בדרך יחידה שתיצור מספר כנדרש, ומכאן כי ההסתברות המבוקשת היא:

$$\frac{\binom{10}{6}}{8 \cdot 10^5} = \frac{210}{800{,}000} = 0.0002625$$

ג. כל ספרה במספר זוגית בהסתברות 0.5 (ובכלל זה ספרת מאות-האלפים), ומכיוון שבחירת המספר אקראית, אפשר להניח שאין תלות בין הספרות השונות במספר. היות שכך, נקבל כי התפלגות המשתנה המקרי N, המוגדר על-ידי מספר הספרות הזוגיות במספר היא בינומית ומתקיים:

$$P\{N = n\} = \binom{6}{n} \cdot 0.5^6 \qquad , \qquad n = 0,1,\ldots,6$$

ד. ראשית, למאורע $P\{X = i, Y = j\}$ הסתברות חיובית רק כאשר $i = 0,1,\ldots,5$ ו- $j = 0,\ldots,5-i$.

שנית, המאורע הזה מתרחש כאשר במספר יש i אפסים בספרות שאינן ספרת מאות-האלפים, ו- j "אחדים" באותן הספרות. לפיכך, כדי לחשב את ההסתברות של המאורע הזה, נמקם את i האפסים במספר ב- 5 המקומות האפשריים עבורם (חוץ מאשר בספרת מאות-האלפים); אחר-כך, נמקם את j האחדים ב- $5-i$ המקומות ה"פנויים" במספר שאינם ספרת מאות-האלפים; ולבסוף, נמקם ספרות גדולות מ-1 ב- $6-i-j$ המקומות האחרונים שנותרו פנויים.

מקבלים:

$$P\{X = i, Y = j\} = \frac{\binom{5}{i}\binom{5-i}{j} \cdot 8^{6-i-j}}{8 \cdot 10^5} = \underbrace{\binom{5}{i} \cdot 0.1^i}_{0} \cdot \underbrace{\binom{5-i}{j} \cdot 0.1^j}_{1} \cdot \underbrace{0.8^{5-i-j}}_{2-9}$$

$$= \frac{5!}{i!\,j!\,(5-i-j)!} \cdot 0.1^{i+j} \cdot 0.8^{5-i-j} \qquad , \qquad i = 0,1,\ldots,5 \quad ; \quad j = 0,\ldots,5-i$$

קיבלנו שההתפלגות המשותפת היא מולטינומית עם הפרמטרים $n = 5$ ו- $\underline{p} = (0.1, 0.1, 0.8)$.

התוצאה שקיבלנו צפויה, מכיוון שההתפלגות המשותפת של X ו- Y מבוססת רק על 5 ספרות, מתוך 6 הספרות המרכיבות את המספר.