ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20585

מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חוברת הקורס - סתיו 2016א

כתב: אלעזר בירנבוים

אוקטובר 2015 - סמסטר סתיו - תשע"ו

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

אני מקדם את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים.
בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.
פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:
http://telem.openu.ac.il
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר
הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

שעות הייעוץ בקורס מתקיימות בימי ראשון בשעות 18:00-20:00 בטלפון 04-6850321.
אבקש מאוד לא להתקשר לטלפון הזה בשעות לא סבירות ובשבתות.
ניתן לפנות גם בדואר אלקטרוני: elazar@openu.ac.il

אני מאחל לכם הצלחה בלימודים.

בברכה,

אלעזר הירנבוים

מרכז ההוראה

1. לוח זמנים ופעילויות (20585 / 2016א)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
1	23.10.2015-18.10.2015	פרק 1		
2	30.10.2015-25.10.2015	פרק 1	מפגש ראשון	
3	6.11.2015-1.11.2015	פרק 2		ממ"ן 11 6.11.2015
4	13.11.2015-8.11.2015	פרק 2 פרק 3	מפגש שני	
5	20.11.2015-15.11.2015	פרק 3		
6	27.11.2015-22.11.2015	פרק 3 פרק 4	מפגש שלישי	ממ"ן 12 27.11.2015
7	4.12.2015-29.11.2015	פרק 4		
8	11.12.2015-6.12.2015 (ב-ו חנוכה)	פרק 4	מפגש רביעי	

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
9	18.12.2015-13.12.2015 (א-ב חנוכה)	פרק 4		
10	25.12.2015-20.12.2015	פרק 4 פרק 5	מפגש חמישי	ממ"ן 13 25.12.2015
11	1.1.2016-27.12.2015	פרק 5		
12	8.1.2016-3.1.2016	פרק 5 פרק 6	מפגש שישי	ממ"ן 14 8.1.2016
13	15.1.2016-10.1.2016	פרק 6		
14	22.1.2016-17.1.2016	פרק 7		
15	29.1.2016-24.1.2016	פרק 7	מפגש שביעי	ממ"ן 15 29.1.2016

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

2. תיאור המטלות

קראו היטב עמודים אלו לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס - הבנה מעמיקה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. המטלות תיבדקנה על-ידי המנחה ותוחזרנה בצירוף הערות המתייחסות לתשובות.

המטלות מלוות את יחידות הלימוד בקורס. להלן פירוט המטלות, היחידות שאליהן מתייחסת כל מטלה ומשקלה היחסי. בחלק מהמטלות תופענה גם שאלות המתייחסות ליחידות שכבר נלמדו.

ממ״ן 11 - פרק 1 - 6 נקודות
ממ״ן 12 - פרקים 2, 3 - 6 נקודות
ממ״ן 13 - פרק 4 - 8 נקודות
ממ״ן 14 - פרק 5 - 4 נקודות
ממ״ן 15 - פרקים 6, 7 - 6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל של 24 נקודות לפחות.
שימו לב שחובה להגיש את ממ״ן 13.

ללא צבירת 24 נקודות בהגשת מטלות לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

למען הסר ספק, יודגש שחל איסור על הכנה משותפת והעתקה של מטלות או חלקי מטלות.
(הנושא מפורט בתקנון משמעת לסטודנטים - נספח 1 של ידיעון האו״פ).

לתשומת לבכם!
כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן: אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלה** בציון הנמוך ביותר, שציונה נמוך מציון הבחינה, לא תילקח בחשבון בעת שקלול הציון הסופי. זאת בתנאי שמטלה זו **אינה חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס.
סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון שמספרו 09-7782222, או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא http://www.openu.ac.il/sheilta קורסים ⇦ ציוני מטלות ובחינות ⇦ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.
יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות

שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של ציוני המטלות והבחינה יהיה נמוך מ-60).

<u>**כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.**</u>

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל כולל של 24 נקודות לפחות.

ב. ציון של לפחות 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2016א **מועד אחרון להגשה:** 6 נוב' 15

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (15%)

אפשר להציע אלגוריתם נוסף להכרעת השפה A של דוגמה 3.7 :

רושמים על ה-0-ים של הקלט תחילה את x, אחר כך את x^2 (שני x-ים), אחר כך את x^4 (ארבעה x-ים), אחר כך את x^8 (שמונה x-ים), וכך הלאה.

ממשיכים בתהליך הזה עד שמגלים שמספר ה-0-ים שווה ל-x^k עבור k כלשהו שהוא חזקה שלמה של 2 (ואז מקבלים את הקלט), או עד שמגלים אי-שוויון (ואז דוחים את הקלט).

תארו בעזרת איור (כמו איור 3.8 בספר) מכונת טיורינג שמממשת את האלגוריתם הזה.
הקפידו על כך שהאיור יהיה גדול, בהיר, וללא קשתות נחתכות.
אתם רשאים להשמיט מעברים בלתי אפשריים (כדוגמת המעבר המתייחס לקריאת הסמל x במצב q_1 של המכונה M_2 באיור 3.8).

אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$.

למכונה יהיו **לא יותר משנים עשר מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

הסבירו היטב את פעולת המכונה, ולמה היא אכן מכריעה את השפה A.

שאלה 2 (14%)

שפה L תיקרא **מזוהה על-ידי עצירה** אם קיימת מכונת טיורינג M שלכל $w \in L$ עוצרת (ב-q_{accept} או ב-q_{reject}), ולכל $w \notin L$ לא עוצרת.

א. נתון שהשפה L מזוהה על-ידי עצירה. האם בהכרח L היא שפה מזוהה-טיורינג?
הוכיחו את תשובתכם.

ב. נתון ש-L מזוהה טיורינג. האם בהכרח L מזוהה על-ידי עצירה?
הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 3 (12%)

עיינו בהגדרה 3.3 בספר (עמוד 168).

נניח שנשנה את ההגדרה של פונקצית המעברים δ (בסעיף 4) באופן הבא:

$$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\mathrm{L}_k, \mathrm{R}_k \mid k \text{ is natural}, k > 0\}$$

הפירוש של הפונקציה החדשה הוא כזה: כאשר המכונה נמצאת במצב q, והראש קורא את הסמל a, אם $\delta(q, a) = (r, b, \mathrm{R}_k)$, אז כותבים b במקום a, עוברים מהמצב q למצב r, והראש נע על הסרט k ריבועים ימינה. אם $\delta(q, a) = (r, b, \mathrm{L}_k)$, אז כותבים b במקום a, עוברים מהמצב q למצב r, והראש נע על הסרט k ריבועים שמאלה. אם במהלך התנועה שמאלה מגיעים לריבוע השמאלי ביותר של הסרט, נשארים בריבוע זה.

האם למכונה כזו **יש יותר כוח** מאשר למכונה רגילה?

אם עניתם שכן, עליכם להראות שמכונה כזו יכולה לזהות שפות שאי אפשר לזהות אותן בעזרת מכונה רגילה.

אם עניתם שלא, עליכם להראות כיצד מכונה רגילה יכולה לחקות את פעולתה של המכונה החדשה.

שאלה 4 (15%)

בנו מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית** להכרעת השפה D הבאה:

$$D = \{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, \sqcup, x\}$; למכונה יהיו **לא יותר מ-12 מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{reject} וכל הקשתות שנכנסות אליו).

הסבירו היטב את פעולת המכונה, את התפקיד של כל מצב, את נקודות האי-דטרמיניזם, ולמה המכונה אכן מכריעה את D.

שאלה 5 (14%)

בנו מונה (enumerator) לשפה $\{0, 1\}^*$, שידפיס את המילים של השפה **בסדר הסטנדרטי** (המילה הריקה, אחר כך המילה 0, אחר כך המילה 1, אחר כך המילה 00, אחר כך המילה 01, וכך הלאה).

האלפבית Σ של סרט הפלט יהיה $\{0, 1\}$; האלפבית Γ של סרט העבודה יהיה $\{0, 1, \sqcup\}$.

למונה יהיו **לא יותר מעשרה מצבים** (כולל q_{print} ו-q_{halt}).

תארו את המונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{halt} וכל הקשתות שנכנסות אליו. אפשר לוותר על הציור של מעברים בלתי אפשריים).

להגדרה פורמלית של מונה, עיינו במדריך הלמידה.

הסבירו היטב את פעולת המונה, ולמה הוא אכן מדפיס את המילים של השפה $\{0, 1\}^*$ בסדר הסטנדרטי.

שאלה 6 (10%)

א. על המונה E נתון שהוא מפיק את מילות השפה שלו $L(E)$ בסדר הסטנדרטי.
האם אפשר להסיק מכך **שיש** מונה F שמפיק את המשלימה של $L(E)$ בסדר הסטנדרטי?
הוכיחו את תשובתכם.

ב. על המונה G נתון שהוא מפיק את מילות השפה שלו $L(G)$ לא לפי הסדר הסטנדרטי.
האם אפשר להסיק מכך **שאין** מונה H שמפיק את המשלימה של $L(G)$ בסדר הסטנדרטי?
הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 7 (20%)

נעיין במחלקת השפות **הלא כריעות** מעל אלפבית נתון Σ.

א. האם המחלקה הזו סגורה **למשלים**? (כלומר, אם L לא כריעה, האם בהכרח גם המשלימה של L לא כריעה?)

ב. האם המחלקה הזו סגורה **לאיחוד**? (כלומר, אם L_1 ו-L_2 אינן כריעות, האם בהכרח $L_1 \cup L_2$ איננה כריעה?)

ג. האם המחלקה הזו סגורה **לחיתוך**? (כלומר, אם L_1 ו-L_2 אינן כריעות, האם בהכרח $L_1 \cap L_2$ איננה כריעה?)

ד. האם המחלקה הזו סגורה **לשרשור**? (כלומר, אם L_1 ו-L_2 אינן כריעות, האם בהכרח $L_1 L_2$ איננה כריעה?)

הוכיחו את תשובותיכם.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2016א **מועד אחרון להגשה:** 27 נוב' 15

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (14%)

הוכיחו שהשפה $LONGEST_{\mathrm{DFA}}$ שלהלן היא **שפה כריעה**:

$$LONGEST_{\mathrm{DFA}} = \{<A, w> \mid A \text{ is a DFA, } w \text{ is a longest word in } L(A)\}$$

(מילה $<A,w>$ שייכת לשפה, אם A הוא אוטומט סופי דטרמיניסטי, ו-w היא מילה **ארוכה ביותר** בשפה ש-A מזהה. כלומר, A מקבל את w, ולא מקבל מילים ארוכות מ-w).

שאלה 2 (12%)

תהי U **מכונת טיורינג אוניברסלית** (כמו בהוכחת משפט 4.11).

מה יקרה כאשר נריץ את U על הקלט $<U, <U>>$? (האם המכונה תגיע למצב q_{accept}? האם היא תגיע ל-q_{reject}? האם היא לעולם לא תעצור?)

הצדיקו את תשובתכם.

שאלה 3 (15%)

הוכיחו שהשפה C הבאה היא **מזוהה-טיורינג אך איננה כריעה**:

$$C = \{<M, x> \mid M \text{ is a TM that accepts } x\text{; when } M \text{ terminates its running on } x \text{ its tape contains a word not longer than } x\}$$

(מילה $<M, x>$ שייכת ל-C אם M היא תיאור של מכונת טיורינג, x היא מילה, M מקבלת את x, וכאשר M מסיימת את הריצה על x (במצב q_{accept}) כתובה על הסרט מילה שאיננה ארוכה מ-x).

הוכחת האי-כריעות של השפה תיעשה **בעזרת שיטת האלכסון**.

הדרכה: הניחו בשלילה ש-C כריעה. אז יש מכונה H שמכריעה אותה. בנו מכונה D שתפעל הפוך מכל מכונה M שהיא.

(אל תשכחו להוכיח ש-C מזוהה-טיורינג).

שאלה 4 (12%)

השפות E_{TM} ו-ALL_{TM} מוגדרות בספר בעמוד 217 ובעמוד 240 (בעיה 5.18).

בהסתמך על כך ש-ALL_{TM} איננה כריעה, להלן "הוכחה" לכך שגם E_{TM} איננה כריעה:

נראה רדוקציה של ALL_{TM}:

נניח בשלילה ש-E_{TM} כריעה. אז יש מכונה S שמכריעה אותה.

נבנה מכונה שמכריעה את ALL_{TM}:

"על קלט $\langle M \rangle$ כאשר M היא מכונת טיורינג:

1. בנה את המכונה M_1 הבאה:

"על קלט x:

1. הרץ את M על x. אם M קיבלה את x, דחה (את x). אחרת, קבל (את x)."

2. הרץ את S על $\langle M_1 \rangle$. אם קיבלה ($\langle M_1 \rangle$ שייכת ל-E_{TM}), קבל ($\langle M \rangle$ שייכת ל-ALL_{TM}). אם דחתה, דחה."

מה **לא נכון** ב"הוכחה" הזו?

הסבירו **במדויק** מה הטעות בהוכחה - איזו נקודה בהוכחה שגויה ומה בדיוק השגיאה.

שאלה 5 (14%)

במשפט 5.10 הוכח שהשפה E_{LBA} איננה כריעה.

א. האם E_{LBA} היא שפה **מזוהה-טיורינג**? הוכיחו את תשובתכם.

ב. האם השפה **המשלימה** (השפה $\overline{E_{LBA}}$) היא שפה **מזוהה-טיורינג**? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 6 (18%)

עיינו בהוכחת משפט 5.30.

כדי להראות רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $\overline{EQ_{TM}}$, מתוארת מכונה F שבונה שתי מכונות M_1 ו-M_2.

כדי להראות רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל-EQ_{TM}, מתוארת מכונה G שבונה שתי מכונות M_1 ו-M_2.

בנו רדוקציות מיפוי **אחרות** של A_{TM} ל- $\overline{EQ_{TM}}$ ול-EQ_{TM}. ברדוקציות שתבנו, **המכונה M_1 תהיה המכונה M** (של הקלט לרדוקציה).

כלומר, כדי להראות רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $\overline{EQ_{TM}}$, תארו מכונה F' שבונה מכונות M_1 ו-M_2, והמכונה M_1 שהיא בונה היא **המכונה M מן הקלט של F'**.

כדי להראות רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל-EQ_{TM}, תארו מכונה G' שבונה מכונות M_1 ו-M_2,והמכונה M_1 שהיא בונה היא **המכונה M מן הקלט של G'**.

שאלה 7 (15%)

הוכיחו: $REGULAR_{TM}$ איננה מזוהה-טיורינג וגם השפה המשלימה שלה איננה מזוהה טיורינג.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 9 **משקל המטלה:** 8 נקודות

סמסטר: 2016א **מועד אחרון להגשה:** 25 דצמ' 15

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (12%. סעיף א - 5%, סעיף ב - 7%)

לכל אחת מן השפות הבאות, מצאו פונקציות $s(n)$ ו-$t(n)$ **מצומצמות ביותר**, כך שהשפה שייכת ל-$\mathrm{TIME}(t(n))$ במכונת טיורינג בעלת סרט אחד, והשפה שייכת ל-$\mathrm{TIME}(s(n))$ במכונת טיורינג בעלת שני סרטים.

עליכם **להצדיק** את תשובותיכם - למה אלה הפונקציות המצומצמות ביותר האפשריות.

א. שפת המילים מעל $\{a, b\}$ שהסמל האחרון במילה הוא a.

ב. שפת המילים מעל $\{a, b\}$ שבהן מספר ה-a-ים שווה למספר ה-b-ים.

שאלה 2 (14%)

הוכיחו שהשפות הבאות שייכות **למחלקה P**:

א. $INFINITE_{\mathrm{NFA}} = \{<B> \mid B \text{ is an NFA and } L(B) \text{ is infinite}\}$

ב. $STRONGLY\text{-}CONNECTED = \{<G> \mid G \text{ is a } \textbf{directed} \text{ strongly connected graph}\}$

מילה $<G>$ שייכת לשפה אם G הוא גרף מכוון קשיר חזק (יש בגרף מסלול מכל צומת לכל צומת).

שאלה 3 (8%)

נעיין בשפה הבאה:

$$STEPS_{TM} = \{<M, w, t> \mid M \text{ is a deterministic TM that accepts } w \text{ within } t \text{ steps}\}$$

מילה $<M, w, t>$ שייכת לשפה אם M היא מכונת טיורינג דטרמיניסטית, w היא מילה ו-t הוא מספר טבעי, ו-M מקבלת את w ב-t צעדי ריצה או פחות.

פרופסור מלומד הציע את ההוכחה הבאה לכך שהשפה $STEPS_{TM}$ **שייכת ל-P**:

נבנה מכונה מכריעה לשפה שזמן הריצה שלה פולינומיאלי:

"על קלט $<M, w, t>$ כאשר M היא מכונת טיורינג, w מילה ו-t מספר טבעי:

1. הרץ את M t צעדים על w. אם M קיבלה את w קבל. אחרת, דחה."

האם ההוכחה של הפרופסור המלומד טובה? **הצדיקו היטב** את תשובתכם.

שאלה 4 (12%)

מספר טבעי n נקרא **משוכלל** (perfect number) אם הוא שווה לסכום מחלקיו הקטנים ממנו. למשל, 6 הוא משוכלל, כי 1+2+3=6. גם 28 הוא מספר משוכלל (בדקו!).

הוכיחו שהשפה הבאה **שייכת ל-NP**: $\{<n> \mid n \text{ is a perfect natural number}\}$

הדרכה: הוכיחו: אם הפירוק של n לגורמים ראשוניים הוא $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$, $k \geq 2$, אז סכום המחלקים של n, כולל n עצמו, הוא

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{m_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{m_2}) \cdots (1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{m_k})$$

שאלה 5 (14%)

א. הראו ש- $HALT_{TM} \leq_P A_{TM}$ או הוכיחו שלא קיימת רדוקציה פולינומיאלית כזו.

ב. הראו ש- $ALL_{TM} \leq_P E_{TM}$ או הוכיחו שלא קיימת רדוקציה פולינומיאלית כזו.

שאלה 6 (6%)

עיינו בפסוק ϕ_{move} בהוכחת משפט Cook-Levin.

יהי q מצב במכונה השונה מן המצב המקבל ומן המצב הדוחה ($q \neq q_{accept}$, $q \neq q_{reject}$).

האם ייתכן חלון **חוקי** שבו q הוא הסמל האמצעי גם בשורה הראשונה וגם בשורה השנייה של החלון? **הוכיחו** את תשובתכם.

שאלה 7 (10%)

הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של *3SAT* ל- *INDEPENDENT-SET*.

(*INDEPENDENT-SET* מוגדרת במדריך הלמידה בעמוד 78).

שאלה 8 (16%)

א. בעיה 7.53 בספר (עמוד 328).

ב. הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של $\neq SAT$ ל- *SET-SPLITTING* (ראו בעיה 7.29 בספר).

שאלה 9 (8%)

הסבירו היטב למה אי אפשר להשתמש ברדוקציה הבאה להוכחת משפט 7.55, במקום הרדוקציה שמופיעה בהוכחת המשפט:

"על קלט <*G*, *s*, *t*> כאשר *G* הוא גרף מכוון ו-*s* ו-*t* צמתים של *G*:

1. החלף כל קשת מכוונת ב-*G* בקשת לא מכוונת מקבילה. יהי *H* הגרף הלא מכוון המתקבל.
2. החזר את <*H*, *s*, *t*>."

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2016א **מועד אחרון להגשה:** 8 ינו' 16

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

נגדיר: $UHAMCIRCUIT = \{<G> \mid G \text{ is an undirected graph that has a Hamiltonian circuit}\}$

(זוהי שפת הגרפים הלא מכוונים שיש להם מעגל המילטון).

הוכיחו שהשפה $UHAMCIRCUIT$ שייכת ל-SPACE(n).

הציגו אלגוריתם להכרעת השפה, הסבירו היטב כיצד הוא ימומש, והוכיחו שהמקום הדרוש הוא $O(n)$.

שאלה 2 (10%)

הראו רדוקציה **בעלת זמן ריצה $O(n^2)$** של השפה SAT לשפה $TQBF$.

הדרכה: זו לא הרדוקציה של הוכחת משפט 8.9.

שאלה 3 (30%)

תזכורת: $A_{\text{LBA}} = \{<M, w> \mid M \text{ is an LBA, } w \text{ is a string, and } M \text{ accepts } w\}$

א. הוכיחו: השפה A_{LBA} שייכת ל-PSPACE.

ב. תהי A שפה ב-PSPACE. תארו רדוקציה בעלת זמן ריצה פולינומיאלי של A ל-A_{LBA}. (הראו כי $A \leq_P A_{\text{LBA}}$ על-ידי הצגת רדוקציה בזמן פולינומיאלי של A ל-A_{LBA}).

ג. הסיקו: A_{LBA} היא שפה PSPACE-שלמה.

שאלה 4 (10%)

האם המחלקה L סגורה לפעולת השרשור (concatenation)? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 5 (20%)

נגדיר את השפה B הבאה: $B = \{e \mid e \text{ is an expression of properly nested parentheses}\}$

B היא שפת הביטויים האריתמטיים של מספרים שלמים אי-שליליים שבהם הסוגריים תקינים.

האלפבית של B הוא $\Sigma = \{+, -, \times, /, (,), 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

דוגמאות למילים ששייכות ל-B: $((2-95)/14))+((2)+(2/3)-(1+2+5)$, $3/(4-5+3\times2)$, $(4-2)$, $143+5$

דוגמאות למילים שלא שייכות ל-B: $((2+5)\times(5/7)$, $(5\times+2)$, $)145+16($, $(156+234$, $+89$, $45+(\,)$, -6

הוכיחו שהשפה B **שייכת למחלקה L**.

עליכם לתאר מכונה דטרמיניסטית, בעלת סיבוכיות מקום לוגריתמית, שמכריעה את B.

שאלה 6 (20%)

בעיה 8.18 בספר (עמוד 359).

הדרכה: הראו: $A_{NFA} \in NL$ ו- $PATH \le_L A_{NFA}$.

מטלת מנחה (ממ״ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: סעיפים 9.1, 10.1 ו-10.2 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2016א **מועד אחרון להגשה:** 29 ינו׳ 16

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1 (12%)

הוכיחו שהפונקציה $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ניתנת לבנייה **במגבלת מקום עצמית** (space constructible).

שאלה 2 (12%)

עיינו במכונה D שבהוכחת משפט 9.3 (עמוד 366).

א. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate M on w ..." במשפט "Simulate M on $<M>$ ..."
(כלומר, במקום לבצע סימולציה של M על $w = <M>10^k$, נבצע סימולציה של M על $<M>$).
האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate M on w ..." במשפט "Simulate M on 10^k ..."
(כלומר, במקום לבצע סימולציה של M על $w = <M>10^k$, נבצע סימולציה של M על 10^k).
האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 3 (12%)

הסבירו כיצד אפשר לבנות מכונה עם שני סרטים, שכאשר היא מקבלת כקלט על הסרט הראשון את המילה 1^n, היא מסיימת כאשר על הסרט השני כתוב הייצוג הבינרי של n.

הסרט הראשון הוא סרט לקריאה בלבד. הסרט השני הוא סרט לקריאה וכתיבה והוא סרט הפלט.
עליכם לבנות מכונה שזמן ריצתה יהיה $O(n)$.

עליכם להסביר היטב את אופן פעולת המכונה, ולהסביר מדוע זמן הריצה שלה הוא $O(n)$.

שאלה 4 (24%)

לימדו את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה (עמודים 126-128).

א. נסחו בעיית **הכרעה** של בעיית הסוכן הנוסע (כלומר, בעיה שהתשובה עליה היא "כן" או "לא").

ב. הוכיחו: בעיית ההכרעה של בעיית הסוכן הנוסע **המטרית** היא בעיה NP-שלמה.

הדרכה: הוכיחו שהיא שייכת ל-NP, והראו רדוקציה פולינומיאלית של בעיית קיומו של מעגל המילטון בגרף לא מכוון.

(מעגל המילטון בגרף לא מכוון G הוא מעגל פשוט שמכיל כל צומת של G פעם אחת ויחידה. אתם יכולים להשתמש בעובדה שבעיית קיומו של מעגל המילטון בגרף לא מכוון היא בעיה NP-שלמה).

ג. הוכיחו: לכל בעיית סוכן נוסע **לא מטרית**, אפשר לבנות בזמן פולינומיאלי בעיית סוכן נוסע **מטרית** עם אותם צמתים, כך ש-P הוא מסלול אופטימלי בבעיה המקורית (הלא מטרית), אם ורק אם P הוא מסלול אופטימלי בבעיה החדשה (המטרית).

הדרכה: הגדילו את משקלי הקשתות באופן שיתקיימו תנאי הבעיה המטרית.

ד. הסבירו מדוע אין סתירה בין קיומו של אלגוריתם קירוב בעל יחס קירוב 2 (ואפילו 1.5) ובעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית הסוכן הנוסע המטרית, ובין אי-קיומו של אלגוריתם כזה לבעיה הכללית (הלא מטרית), לאור מה שהראיתם בסעיף הקודם (שיש דרך מהירה לעבור מהבעיה הכללית לבעיה המטרית, באופן שמשמר את המסלולים האופטימליים).

שאלה 5 (16%)

הוכיחו: אם יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **ההכרעה** *MAX-CUT*, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **האופטימיזציה** *MAX-CUT*.

האלגוריתם לבעיית ההכרעה מקבל כקלט גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

האלגוריתם מחזיר "כן" אם יש ב-G חתך שגודלו לפחות k, ו-"לא" אחרת.

האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה מקבל כקלט גרף לא מכוון G.

האלגוריתם מחזיר חתך בעל גודל מקסימלי ב-G, כלומר, חלוקה של קבוצת הצמתים של G לשתי תת-קבוצות זרות S ו-T, כך שמספר הקשתות המחברות צומת מ-S עם צומת מ-T הוא מקסימלי.

הדרכה: האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה יהיה בנוי משני שלבים:

בשלב הראשון קוראים לאלגוריתם ההכרעה כמה פעמים כדי למצוא את גודלו של החתך המקסימלי.

בשלב השני, מבצעים בכל פעם שינויים (קלים) בגרף, וקוראים לאלגוריתם ההכרעה על הגרפים החדשים. לפי התשובות שהוא מחזיר, יודעים איזה צמתים שייכים לאותה תת-קבוצה (S או T), ואיזה צמתים לא שייכים לאותה תת-קבוצה (כלומר, אם האחד שייך ל-S אז השני שייך ל-T).

שאלה 6 (10%)

עיינו באלגוריתם *PRIME* בעמוד 401 בספר.

הוכיחו: אם t הוא מספר טבעי קטן מ-p שאיננו זר ל-p (המחלק המשותף המקסימלי של t ו-p גדול מ-1), אז t הוא עד לפריקות של p. (כלומר, אם הוא ייבחר כאחד מ-k המספרים בשלב 2 של האלגוריתם, האלגוריתם ידחה).

שאלה 7 (14%)

בעיה 10.10 בספר (עמוד 439).

כדי להוכיח את שוויון המחלקות, הראו הכלה דו-כיוונית.