קורס 20417 סמסטר 2017ב

אודי ליוטשי 036745438

ממ"ן 12

1) א. נניח בשלילה ש Ps,v אינו מזערי, כלומר, קיים מסלול אחר Pm בין s ל-v שהוא מזערי. נסתכל על הצלע האחרונה במסלול המזערי (זו המתחברת ל-v), היא שימושית כי היא האחרונה במסלול מזערי.
נשים לב שלכל צומת נכנסת רק צלע שימושית אחת מאחר וקיים רק מסלול מזערי אחד ומכאן שקיימת רק צלע אחרונה אחת במסלול כזה.
כלומר, הצלע האחרונה במסלול המזערי היא שימושית והיא משותפת גם למסלול Ps,v מאחר והוא כולל רק צלעות שימושיות ולכן חייב לכלול צלע זו.
הראינה שהצלע האחרונה במסלול המזערי משותפת לשני המסלולים Ps,v ו-Pm .
נמשיך באותו אופן אחורה על כל הצמתים במסלול המזערי ונראה שכל הצלעות של Ps,v ו-Pm משותפות, כלומר Ps,v=Pm ולכן Ps,v מזערי בסתירה להנחת השלילה.
מכאן שהנחת השלילה שלנו שגויה וניתן להסיק ש - Ps,v מזערי והטענה נכונה.

ב. נסתכל על הצלע הלא שימושית הראשונה במסלול Ps,v כלשהו הכולל לפחות צלע לא שימושית אחת. צלע זו נכנסת לצומת x, מאחר והיא לא שימושית לא יתכן שהמסלול שעשינו מ-s ל-x מזערי (שהרי אחרת הצלע הייתה שימושית), כלומר, קיים מסלול מזערי אחר ל-x עם סכום משקלי צלעות קטן יותר. ברור אם כך שצירוף מסלול מזערי זה עם יתר המסלול מ-x ל-v ב-Ps,v נותן מסלול עם סכום משקלי צלעות קטן יותר מ-Ps,v, מכאן שPs,v אינו מזערי.

ג. ברור שקיימת לפחות צלע לא שימושית אחת שהרי אחרת היה מזערי לפי סעיף א (*).
נניח ש Ps,v כמעט מזערי וקיימות בו שתי צלעות לא שימושיות או יותר. באופן דומה לסעיף ב נחליף את הצלע הלא שימושית הראשונה במסלול באחת שימושית ונקבל מסלול מזערי עד לאותה נקודה לפי סעיף א, כלומר הקטנו את סכום משקלי הצלעות. נזכור שקיימת לפחות עוד צלע לא שימושית אחת ולכן לפי סעיף ב המסלול אינו מזערי, כלומר, מצאנו מסלול שאינו מזערי אשר סכום משקל צלעותיו קטן מ Ps,v בסתירה להיות Ps,v כמעט מזערי.
כלומר, הנחת השלילה שלנו שגויה ולכן במסלול Ps,v קיימת מקסימום צלע לא שימושית אחת ולפי (*) קיימת במסלול כזה לפחות צלע לא שימושית אחת כך שבסיכום קיימת במסלול כזה בדיוק צלע לא שימושית אחת.

ד. הרישא מהווה מסלול מזערי לפי סעיף א שהרי כל הצלעות במסלול בין s לu1 שימושיות.
לגבי הסיפא, ברור שהוא חלק ממסלול מזערי ל-v שהרי אם נחבר אותו למסלול מזערי המגיע ל-u2 נקבל מסלול מ-s ל- v הכולל רק צלעות שימושיות (לפי סעיף ב) ולפי סעיף א כל המסלול מזערי.
נניח בשלילה שהסיפא לא מזערי אז קיים מסלול מזערי אחר מ-u2 ל-v אבל אם קיים מסלול כזה הוא היה "מקצר" את המסלול המזערי מ-s ל-v שדנו בו קודם בסתירה להיותו מזערי. לכן, לא קיים מסלול כזה וגם הסיפא מזערי.

ה. נמצא את כל המסלולים המזעריים מ-s לכל שאר הצמתים בעזרת האלגוריתם של דייקסטרה.
נסמן את כל הצלעות השימושיות שמצאנו בתהליך (צלעות השייכות לפחות למסלול מזערי אחד כלשהו) בE1.
יהי E2 = E/E1 צלעות שאינן שימושיות.
נבנה גרף חדש באופן הבא:

לגרף המקורי נוסיף עותק של הגרף הנפרש ע"י E1 ונחבר אל עותק זה את הצלעות בE2 בלבד כך שכל צלע ב-E2 שהייתה מחוברת לצומת v תהיה מעתה מחוברת לצומת v’ שבעותק (העותק כולל את כל הצמתים).
נריץ שוב את דייקסטרה מ-s. המסלול המינימלי בין s לצומת t’ הוא מסלול כמעט מזערי בין s ל-t מאחר והוא כולל בהכרח צלע שאינה שימושית ורק אחת (אין דרך להגיע ל’t מבלי לעבור בצומת שאינה שימושית שהרי רק אלו מחוברות לעותק של E1) ואין אף מסלול שאינו מזערי עם סכום משקלי צלעות קטן ממנו לפי דייקסטרה.

ניתוח זמן ריצה
2 הרצות דייקסטרה: $2*\Theta(|E| \log|V|)$
הערה: הגרף החדש אומנם כולל עד פי 2 יותר צלעות וצמתים אך זהו גידול לינארי ולא משפיע על סדר הגודל של זמן הרצת דייקסטרה מכיוון שהגידול לינארי.
סה"כ: $\Theta(|E| \log|V|)$

2)

<u>תיאור כללי של הפתרון</u>

הסרת הקשת e^* מ-T נותנת לנו 2 רכיבי קשירות T1,T2 שגם הם עצים. נרוץ על כל הצלעות ב-G’ ונמצא את הצלע המחברת את רכיבי הקשירות ומשקלה מינימלי (חייבת להיות כזו שכן G’ קשיר).

<u>האלגוריתם</u>

1) נחפש ונסיר את e^* מ-T.
2) ניצור ונאתחל מערך בגודל מספר הצמתים.
3) נריץ BFS על אחד הצמתים של G’, נכניס את הצמתים שנמצאו למערך.
4) נרוץ על כל הצלעות ב’G ונבחר את הצלע אשר צד אחד שלה נמצא במערך, הצד האחר לא נמצא ומשקלה מינימלי.
5) נוסיף את הצלע שמצאנו e’ ל-T ונקבל את T’ כנדרש.

<u>הוכחת נכונות</u>

לפי משפט 4.17 בספר, כל עץ פורש מינימלי של G' כולל את קשת e^*.

נניח בשלילה ש T’=T1UT2U{e’} אינו עץ מינימלי, כלומר קיים עץ אחר מינימלי T’’=T1’’ U T2’’ U {e} אחר ומתקיים w(T’’)<w(T’), מכאן שלפחות אחד התנאים הבאים חייב להתקיים:

w(T1’’) < w(T1)

w(T2’’) < w(T2)

בה"כ נניח שהתנאי מתקיים עבור T1, אזי:

w(T1’’) < w(T1)

w(T2’’) ≤ w(T2)

לכן

w(T’’) = w(T1’’)+w(T2’’)+w(e’) ≤ w(T1’’)+w(T2)+w(e’) < w(T1)+w(T2)+w(e’) = W(T)

קיבלנו סתירה לנתון ש-T עץ מינימלי ב-G.

מכאן ש T’ מינימלי כנדרש.

<u>זמן ריצה (ממוספר בהתאם למספר הצעדים באלגוריתם)</u>

1) ריצה על הצלעות של T: $O(|E|)$
2) $O(|V|)$
3) $O(|E|+|V|)$
4) $O(|E|)$
5) $O(1)$

סה"כ:

הרכיב הכי משמעותי הוא $O(|E|+|V|)$

לפי טענה בספר בגרף קשיר מתקיים $O(|E|+|V|) = O(|E|)$, לכן נקבל סה"כ $O(|E|)$

3)

נסתכל על הביטוי הבא:

$$\begin{aligned}\phi = \; & (X1 \lor X2 \lor \neg X3) \land (X1 \lor \neg X2 \lor X3) \land \\ & (X2 \lor X4 \lor \neg X5) \land (X2 \lor \neg X4 \lor X5) \land \\ & (X3 \lor X4 \lor \neg X5) \land (X3 \lor \neg X4 \lor X5) \land \\ & (\neg X1 \lor \neg X2 \lor \neg X3)\end{aligned}$$

מעקב אחר ריצת האלגוריתם:

האלגוריתם סורק מופעים של X1 מוצא 3 פסוקיות חדשות ובוחר השמה X1=T המספקת 2 מתוכן

האלגוריתם סורק מופעים של X2 מוצא 3 פסוקיות חדשות ובוחר השמה X2=T המספקת 2 מתוכן

האלגוריתם סורק מופעים של X3 מוצא 3 פסוקיות חדשות ובוחר השמה X3=T המספקת 2 מתוכן

ריצת האלגוריתם מסתיימת מאחר ולא נותרו פסוקיות חדשות (אפשר להניח שהוא נותן לX4,X5 ערך T, זה לא משנה), האלגוריתם מחזיר השמה שאינה מספקת מכיוון שערך הפסוקית האחרונה הוא F.

לעומת זאת קיימת השמה מספקת לביטוי:

X1	X2	X3	X4	X5
T	T	F	T	T

נדגיש את ערך האמת (מספיק רק אחד) בכל פסוקית:

$$\begin{aligned}\phi = \; & (X1 \lor X2 \lor \neg X3) \land (X1 \lor \neg X2 \lor X3) \land \\ & (X2 \lor X4 \lor \neg X5) \land (X2 \lor \neg X4 \lor X5) \land \\ & (X3 \lor X4 \lor \neg X5) \land (X3 \lor \neg X4 \lor X5) \land \\ & (\neg X1 \lor \neg X2 \lor \neg X3)\end{aligned}$$

4) יהי T עץ בינארי לחלוטין בעל n עלים. נגדיר סדרת שכיחויות $f_i = \frac{1}{2^{d(i)}}$ לכל $1 < i < n \mid i$ כאשר $d(i)$ הוא עומק העלה המתויג בתווית i, שאליה מתייחסת השכיחות f_i.

נניח שהעלים מסודרים באופן הבא מבחינת עומקם $d1 \le d2 \le \ldots \le dn$

אז נקבל $f1 \ge f2 \ge \ldots fn\text{-}1 \ge fn$. כלומר עלים עם עומק רב יותר משוייכים לתדירות קטנה יותר כנדרש.

נראה שהרצה של האלגוריתם של הופמן על אותיות עם סדרת תדירויות כמו זו המתוארת לעיל יכולה להפיק את העץ הנתון T (במילים אחרות T הוא עץ הופמן אפשרי של סדרת השכיחויות הנ"ל):

העץ בינארי לחלוטין לכן לכל עלה אח, לכן בכל איטרציה של האלגוריתם של הופמן נקבל עלה אב כתוצאה מחיבור שני העלים האחים בעומק d עם תדירות $\frac{1}{2^{\mathrm{d}-1}} = \frac{1}{2^{\mathrm{d}}} + \frac{1}{2^{\mathrm{d}}}$. כמו כן, מובטח לנו שבאחת האיטרציות יווצר עלה אח גם לעלה האב וכך חיבור העלים ימשך עד שנגיע לשורש שתדירותו תהיה סכום כל התדירויות של עלי העץ $\frac{1}{2^{d-\mathrm{d}}} = 1$.

ראינו שעבור שהרצת האלגוריתם של הופמן על האותיות עם סדרת התדירויות שהגדרנו מפיק את העץ T כנדרש.