לשימוש הבודק

3 א. נתון: f חח"ע ערכית.

נניח כי לכל $a\in A$ מתקיים:

$$f(g(a)) = f(a)$$

ונניח בשלילה כי ~~קיים~~ קיימים $c,b\in A$ כך ש:

$$\cancel{g(b)\neq b}\quad g(b) = c \neq b$$

אז מהנתון ~~הראשון~~ הראשון נקבל כי

$$f(g(b)) = f(b)$$

$g(b)=c$ ש

$$f(c) = f(b)$$

אבל נתון כי אם $f(c) = f(b)$ ~~אז $c=b$~~ אז $c = b$

כי f חח"ע) בסתירה להנחה שלנו

כי $c\neq b$, ולכן נקבל כי לא ~~קיים~~ קיימים

$b,c\in A$ כך ש:

$$g(b) = c \neq b$$

הווה אומר לכל $b\in A$ מתקיים

$$g(b) = b$$

כלומר g הינה פונקציית הזהות של A.

מש"ל

339702

לשימוש הבודק

3.ב. נראה דוגמא עבור f ו-g כך ש-$g \circ f = f$ כך ש-g אינה פונקציית הזהות.

נגדיר: $A = \mathbb{N}$

$f(x) = 2x$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{זוגי } x \\ 1 & \text{אי זוגי } x \end{cases}$$

נראה תחילה כי f חח"ע. יהי $x,y \in A$ כך ש: $f(x) = f(y)$

אזי:

$$2x = 2y$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{x = y}$$

וקיבלנו כי אם $f(x)=f(y)$ אזי $x=y$ כלומר f חח"ע.

נראה כי $g \circ f = f$ לכל $x \in A$:

$f(x) = 2x$

$g(f(x)) = g(2x) \underset{\substack{\text{(i)} \\ 2x \text{ מספר זוגי}}}{=} 2x$

הווה אומר $g \circ f = f$ לכל $x \in A$.

נראה כי g אינה פונקציית הזהות:

למשל $3 \in A$:

$g(3) = 1 \neq 3$.

מש"ל.

339702

לשימוש הבודק

$g \circ f = f$ וגם הי"ל

~~A~~ 3.ג. ~~עבור~~ יהי f על. אזי לכל $y \in A$
קיים x כך ש:
$f(x) = y$ (*)

נניח בשלילה כי קיים $a \in A$ כך ש
$$g(a) \neq a$$

מ- (*) נסיק כי קיים $x \in A$ כך ש
$$f(x) = a$$
אזי:
$$g(f(x)) = g(a)$$
אילו $g(a) \neq a$ נקבל כי
$$g(f(x)) = g(a) \neq f(x) = a$$
בסתירה לנתון כי לכל $x \in A$ מתקיים
$$g(f(x)) = f(x)$$
כלומר ההנחה שלנו כי קיים $a \in A$ כך ש:
$$g(a) \neq a$$
אינה נכונה כלומר לכל $a \in A$ מתקיים:
$$g(a) = a$$
הווה אומר: g פונקציית הזהות.
מש"ל

25/25 2

לשימוש הבודק

1. ב. ~~א~~

נתון $A,B \in P(C)$ כלומר ~~$A,B \subseteq C$~~

$A,B \subseteq C$

(i) אם $A \subset B$ ~~A~~

אז' מהרפלקסיביות של קבוצות חלקיות נקבל

*טעות - הכוונה הייתה לטרנזיטיביות

$A \subset B \subseteq C$

כלומר

$A \subset C$ (*)

בנוסף מכך ש $A \subset B$ נקבל כי

$A \cap B = A$

שכן לפי הגדרה כל איבר ב A קיים ב B, מכך ומ-(*) נקבל

$A \cap B \subset C$

בנוסף נתון כי $A \cap B$ שקולה ל C ולכן C קבוצה אינסופית (קיימת קבוצה חלקית לה ממש השקולה אליה). ~~מש~~ הטענה נכונה.

מש"ל.

לשימוש הבודק

1.א.

נ. הטענה נכונה.

נתון:

$A,B \subseteq C$.

ובנוסף

$A \subset C$

מהגדרת החיתוך נקבל

$$A\cap B \subseteq A \subset C$$

כלומר

$A\cap B \subset C$.

בנוסף נתון כי $A\cap B$ שקולה ל- C

ולכן C אינסופית מאותו טיעון בסעיף

הקודם. מש"ל.

1.ב. הטענה לא נכונה.

נבחר:

$A=\{1,2\}$

$B=\{1\}$

$C=\{2\}$.

אזי:

$$A\subseteq B\cup C$$

אך $A\not\subseteq B$ (כי 2 לא איבר ב B)

וגם $A\not\subseteq C$ (כי 1 לא איבר ב C)

מש"ל

לשימוש הבודק

2. א. נתון G חבורה בעלת 4 איברים

e, איבר ניטרלי,

$(a*b)*c=e$.

מהנתון השלישי נקבל:

(*) $(a*b)*c = a*(b*c) = e$

אסוציאטיביות (G חבורה)

$(a*b)*c=e$

כלומר

$b*c$ הוא האיבר הנגדי של a.

נבדוק למקרים:

* $b*c=e$:

אזי נקבל

$a*(b*c)=a*e=a$

e ניטרלי

אך אנו יודעים מ(*) כי

$a*(b*c)=e$

ובשילוב השוויונות נקבל

$a=e$

בסתירה ליחידות האיבר הניטרלי.

* $b*c=c$:

~~$b*c=e*c$~~

$b*c=e*c$

e ניטרלי, $e*c=c$

ועל ידי צמצום c מימין נקבל

$b=e$ בסתירה ליחידות האיבר הניטרלי.

339702

לשימוש הבודק

* $b*c=b$:

$b*c=b*e$

e ניטרלי

וע"י צמצום b משמאל נקבל

$c=e$

בסתירה לחוקיות האיבר הנ"ל.

* $b*c=a$:

זוהי האופציה היחידה שנותרה

ומכך ש G חבורה

נקבל כי $b*c\in G$ (מתכונת הסגירות)

נקבל כי בהכרח $b*c=a$.

לפני כן הוכחנו כי $b*c$ הוא גם

האיבר ההפכי של a ולכן נקבל

e - a הפכי לעצמו, מש"ל.

* הערה: שכחתי להראות כי גם

$(b*c)*a=e$

אך מאחר $b*c=a$ ומכך e

$a*a=e$ נוכל להציב a כ השמאלי

את $(b*c)$ ונקבל כי גם

$(b*c)*a=e$

2. ב. ~~סגירות~~ סגירות: יהי $a,b \in A$ כך ש:
$n,m \in N$

$a = 2n-1$

$b = 2m-1$

אז:

$$a \Delta b = \frac{(2n-1+1)(2m-1+1)}{2} - 1 =$$

$$= \frac{4mn}{2} - 1 = 2mn - 1$$

מכך ש $mn \in N$ (מספר טבעי מסגירות המספרים לכפל) נקבל כי $a \Delta b \in A$.
כלומר הסגירות מתקיימת.

איבר ~~אדיש~~ ניטרלי: נראה כי $1 \in A$ איבר ניטרלי: יהי $a \in A$ כך ש $n \in N$, $a = 2n-1$.

$$a \Delta 1 = \frac{(2n-1+1)(1+1)}{2} - 1 = \frac{4n}{2} - 1 = 2n-1 = a$$

$$1 \Delta a = \frac{(1+1)(2n-1+1)}{2} - 1 = \frac{4n}{2} - 1 = 2n-1 = a$$

~~הווה אומר~~ כלומר לכל $a \in A$ מתקיים
$1 \Delta a = a = a \Delta 1$

הווה אומר $1 \in A$ הינו האיבר הניטרלי בקבוצה A ביחס לפעולה Δ.

$e=1$

~~קיים איבר נטרלי!~~

~~התכונה אינה מתקיימת, למשל עבור $5\in A$~~

~~נחפש $a=2n-1$ כך ש~~

~~$5\Delta a=5$~~

~~$5\Delta a=\frac{(5+1)(2n-1+1)}{2}-1=\frac{6\cdot 2n}{2}-1=6n-1$~~

* קיום איבר נטרלי:

התכונה אינה מתקיימת. למשל עבור $5\in A$

לא קיים $a=2n-1$ כך ש

$5\Delta a=1$.

נראה:

$$5\Delta a=\frac{(5+1)(2n-1+1)}{2}-1=$$

$$=\frac{6\cdot 2n}{2}-1=6n-1$$

אם $5\Delta a=1$ אזי:

$$6n-1=1$$
$$\Updownarrow$$
$$6n=2$$
$$\Updownarrow$$
$$3n=1$$
$$n=\frac{1}{3}$$

אך $\frac{1}{3}\notin N$ ולכן עבור האיבר 5 לא קיים איבר נטרלי, כלומר התכונה לא מתקיימת.

25/25

2

339702

קיבוציות: נבדוק האם $a,b,c \in A$

$a=2n-1, b=2m-1, c=2k-1$, $n,m,k \in \mathbb{N}$

$a\Delta(b\Delta c)=(a\Delta b)\Delta c$

$$(a\Delta b)\Delta c=\left(\frac{2n\cdot 2m}{2}-1\right)=(2mn-1)\Delta c=$$

$$=\frac{2mn\cdot 2k}{2}-1=2mnk-1$$

$$a\Delta(b\Delta c)=a\Delta\left(\frac{2m\cdot 2k}{2}-1\right)=a\Delta(2mk-1)=$$

$$=\frac{2n\cdot 2mk}{2}-1=\cancel{2nmk-1}\ 2mnk-1$$

וקיבלנו

$$(a\Delta b)\Delta c=a\Delta(b\Delta c)$$

לכל $a,b,c \in A$ כלומר הקיבוציות מתקיימת

לסיכום ~~הכונות~~ תכונות החבורה שמתקיימות:
קיום איבר ניטרלי, סגורות, קיבוציות.
לא מתקיים: איבר נגדי.

לשימוש הבודק

6. ט. נציג את כל איברי A כמכפלה של גורמים ראשוניים:

$$\frac{5}{24} = 5\cdot 2^{-3}\cdot 3^{-1}$$

$$6 = 2\cdot 3$$

כל האיברים ב A^* מוצגים בצורה הבאה:

$$5^n\cdot 2^{m-3n}\cdot 3^{m-n}$$

כאשר $m,n>0$.

על מנת שמספר יהיה אי זוגי אנו צריכים כי 2 לא יהיה בין גורמיו (אחרת המספר מתחלק ב 2 - זוגי) ולכן נקבל כי (לפי ההצגה של 2)

$$m-3n=0$$

$$\boxed{m=3n}$$

כל המספרים האי זוגיים ב A^* הינם מהצורה

$$\boxed{5^n\cdot 3^{2n}}$$

נציג את 45 כמכפלה של ראשוניים:

$$45 = 5\cdot 9 = 3^2\cdot 5$$

מהמשפט היסודי של האריתמטיקה נקבל כי $5^n 3^{2n}$ הינה ההצגה היחידה של כל האיברים ב A^* וגם $3^2\cdot 5$ הינה ההצגה ~~היח~~ היחידה של 45 כמכפלה של ראשוניים. מאחר ו $n>0$ נקבל כי נוכל להציג כל מספר ב A^* כ:

*טעות, החזקה בתוך הסוגריים של 3 הייתה אמורה להיות 2n-2

$$3^2\cdot 5\left(5^{n-1}\cdot 3^{2n-1}\right) = 45\left(5^{n-1}\cdot 3^{2n-1}\right) > 0$$

כלומר: כל מספר אי זוגי ב- A^* מתחלק ב 45 ללא שארית. (לפי משפט החלוקה עם שארית וההצגה היחידה של $a\in A^*$ שכן $0\le r<45$). הטענה נכונה. מש"ל.

לשימוש הבודק

* הערה לא ~~...~~ כי התייחסתי לטענה "שלם"
~~את~~ מאוחר וכל מספר אי זוגי ב A^* הוא
בהכרח שלם.

ב

6. ב. נוכיח באינדוקציה.
עבור $\boxed{n=1}$:

$$1+x \ge 1+x$$

הטענה נכונה כי מתקיים שוויון בין הביטויים
נניח נכונות עבור n טבעי ונראה כי
הטענה נכונה עבור n+1.

$$(1+x)^{n+1} = \cancel{...}(1+x)\cdot(1+x)^n \ge (1+x)\cdot(1+nx) =$$

$0 \le x+1$ $(x \ge -1)$
+ הנחת האינדוקציה

$$= 1+x+nx+nx^2 \ge 1+nx+x = 1+(n+1)x$$

פתיחת סוגריים

$0 \le nx^2$
שכן n ~~...~~ אי שלילי
וכך גם x^2
מסויכות N_0 ~~...~~ לכפל
נקבל ~~...~~ שהמספר
~~...~~ אי שלילי

25/25
6

קיבלנו מההנחה כי שהטענה מתקיימת עבור
n היא נכונה עבור n+1, עפ"י עקרון האינדוקציה
הטענה נכונה לכל n טבעי. מש"ל.

339702