מועד 91   8.7.99

מבנה הבחינה :

* עליך לענות על 4 מתוך 6 השאלות, כאשר בין 4 השאלות שבחרת, **חייבת להופיע שאלה מס' 3 או שאלה מס' 4 או שתיהן**.
* משקל כל שאלה 25% .
* אם תשיב על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* **יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

תהי A קבוצה, ותהי $\varnothing \neq B \subseteq A$.

בעזרת הקבוצה הקבועה B נגדיר פונקציה $f : P(A) \to P(A)$ באופן הבא:

לכל $X \in P(A)$,

$$f(X) = \begin{cases} X - B & \text{אם } X \cap B \neq \varnothing : \\ X \cup B & \text{אם } X \cap B = \varnothing : \end{cases}$$

תהי $X \in P(A)$.

(7 נק') א. הוכח כי אם X זרה ל- B אז $f(f(X)) = X$.

(7 נק') ב. הוכח כי אם $X \supseteq B$ אז $f(f(X)) = X$.

(11 נק') ג. הוכח כי X שייכת לתמונת f **אם ורק אם** $f(f(X)) = X$.
נמק היטב כל צעד.

שאלה 2

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים.

(9 נק') א. תהי K קבוצת כל התת-קבוצות הסופיות של $\mathbf{N}$:
$K = \{A \in P(\mathbf{N}) \mid \text{היא קבוצה סופית } A\}$. הוכח כי K היא בת-מניה.

(8 נק') ב. בהנתן $A \in P(\mathbf{N})$, נאמר ש- A **קו-סופית** (*co-finite*) ב- $\mathbf{N}$,
אם A' (המשלימה של A ב- $\mathbf{N}$) היא קבוצה סופית.
תהי L קבוצת כל התת-קבוצות הקו-סופיות ב- $\mathbf{N}$:
$L = \{A \in P(\mathbf{N}) \mid \mathbf{N} \text{ קו-סופית ב- } A\}$. הוכח כי L היא בת-מניה.

(8 נק') ג. תהי M קבוצת כל התת-קבוצות של $\mathbf{N}$ אשר הן ומשלימותיהן אינסופיות:
$M = \{A \in P(\mathbf{N}) \mid \text{שתיהן אינסופיות } A' \text{ -ו } A\}$. האם M היא בת-מניה?

שאלה 3

תהי U קבוצה סופית בת n איברים.

תהי $B \subseteq P(U)$ (כלומר B היא קבוצה של תת-קבוצות של U). עוד נתון כי $|B| > 2^{n-1}$.

(10 נקי) א. יהי $a \in U$. הוכח כי קיימת קבוצה $A \in B$ כך ש- $a \in A$.

(15 נקי) ב. יהי $a \in U$. הוכח כי קיימת קבוצה A המקיימת את התנאים הבאים:
$a \in A$, והקבוצות A ו- $A-\{a\}$ שייכות שתיהן ל- B.
הדרכה: חלק את אברי $P(U)$ לזוגות והשתמש בעקרון שובך היונים.

שאלה 4

יהושע נוטל תרופות שונות:
כדור נגד כאב-ראש: לכל היותר 3 ביום (אפשר 0). כדור מרץ: לכל היותר 3 ביום (אפשר 0).
ויטמין C וויטמין B ללא הגבלה (אפשר 0), בכפוף רק לתנאי הבא, שלגביו הוא מחויב כחבר באגודת ההיפוכונדרים: מספר הכדורים הכולל (מכל 4 הסוגים יחד) שהוא לוקח כל יום יהיה בדיוק n (ערכו של n מוגדר מדי פעם בפרסומי האגודה).
נסמן ב- a_n את מספר ההרכבים השונים של n כדורים שיכול יהושע לקחת ביום אחד, כאשר אין חשיבות לסדר נטילת התרופות, ותרופות מאותו סוג הן זהות.

(10 נקי) א. מצא את הפונקציה היוצרת עבור הסדרה $\{a_n\}$. הסבר!

(5 נקי) ב. הראה כי ניתן לכתוב את הפונקציה היוצרת גם כך:

$$(1-2x^4+x^8)\cdot\frac{1}{(1-x)^4}$$

(10 נקי) ג. מצא ביטוי מפורש עבור a_n (שאלה 7.10 בעמי 129 בספר הלימוד יכולה לסייע).

שאלה 5

תהי L שפה חלקית לשפת תחשיב הפרדיקטים, ובה בין השאר סימני משתנים x,y,z , סימן פרדיקט דו-מקומי A_1^2 וסימן פונקציה דו-מקומית f_1^2 . תהי J אינטרפרטציה של L , שתחומה הוא $\mathbf{N}$ (המספרים הטבעיים) , ובה f_1^2 מתפרש כפונקציה min (כלומר $f_1^2(x,y)$ מתפרש כקטן מבין x,y). A_1^2 מתפרש כרגיל כשוויון.

נתונה התבנית ב- L : $\varphi = \forall x(A_1^2(f_1^2(x,y),y))$

(5 נק׳) א. האם φ היא פסוק? נמקי.

(10 נק׳) ב. האם φ אמיתית ב- J ? נמקי בפירוט, תוך שימוש בהגדרה 3.17 ובהגדרה 3.14.

(10 נק׳) ג. האם φ שקרית ב- J? נמקי בפירוט כנ״ל.

שאלה 6

(13 נק׳) א. יהי p מספר ראשוני, ותהי G חבורה מסדר p^2 . הוכח כי יש ל- G תת-חבורה מסדר p. **הדרכה**: יהי $e \neq a \in G$. הַבדל בין שני מקרים אפשריים, וטפל בכל מקרה לחוד.

(12 נק׳) ב. (אין קשר לסעיף א׳) יהי $\varphi: G \to H$ הומומורפיזם של חבורות. תהי K תת-חבורה של H. נסמן $G_1 = \{g \in G \mid \varphi(g) \in K\}$. הוכח ש- G_1 היא תת-חבורה של G.

בהצלחה!