תשובה 1

א. $f(0,3) = f(2,0) = 6$, לכן f אינה חד-חד-ערכית.

נוכיח ש- f היא על.

יהי $n \in \mathbf{Z}$. מתקיים $f(n,-n) = 3n - 2n = n$.

מצאנו מקור תחת f לכל מספר שלם n, לכן f היא <u>**על**</u> $\mathbf{Z}$.

הוכחה אחרת (מקור אחר ל- n):

אם n הוא שלם זוגי, $n = 2k$ כאשר k שלם. במקרה כזה $f(0,k) = n$.

אם n הוא שלם אי-זוגי, $n = 2k+1$ כאשר k שלם.

במקרה כזה $f(1, k-1) = 3 + 2k - 2 = n$.

ב.

$g(g(X)) = (X \oplus \mathbf{Z}) \oplus \mathbf{Z}$

לפי שאלה 1.22ב (אסוציאטיביות ההפרש הסימטרי) בעמ' 27 בספר

$= X \oplus (\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z})$

לפי טענה נוספת באותו סעיף שם (הפרש סימטרי של קבוצה עם עצמה)

$= X \oplus \varnothing$

ולפי טענה נוספת שם (הפרש סימטרי עם קבוצה ריקה)

$= X$

ג. נוכיח כללית שעבור קבוצה כלשהי A, אם פונקציה $g : A \to A$ מקיימת:

לכל $x \in A$, $g(g(x)) = x$

אז g חד-חד-ערכית ועל.

הוכחת חד-חד-ערכיות:

יהיו $x, y \in A$, המקיימים $g(x) = g(y)$. עלינו להראות ש- $x = y$.

מכיוון ש- g היא פונקציה, ניתן להפעיל g בשני האגפים של השוויון $g(x) = g(y)$.

נקבל $g(g(x)) = g(g(y))$. משמע $x = y$.

הוכחת על:

יהי $x \in A$. מכיוון ש- $g(g(x)) = x$, הרי קיים איבר ב- A (האיבר $g(x)$)

שתמונתו היא x.

תשובה 2

א. איברים של $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ שיש להם תמונות שונות תחת f נמצאים במחלקות שקילות שונות.
בשאלה 1א למעלה ראינו ש- f היא **על** $\mathbf{Z}$.
משמע לכל $n\in\mathbf{Z}$ קיים מקור תחת f ב- $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.
$\mathbf{Z}$ היא אינסופית, משמע קבוצת התמונות המתקבלות היא אינסופית, לכן מספר המקורות, השייכים כאמור למחלקות שקילות שונות, הוא אינסופי. לכן מספר מחלקות השקילות הוא אינסופי.

ב. באותה מחלקה עם $(0,0)$ נמצאים הזוגות $(m,n)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ המקיימים $3m+2n=0$.
יהי $m=2k$ שלם זוגי כלשהו. אז $n=-3k$ גם הוא שלם, ומתקיים $3m+2n=0$.
לכל ערך שלם של k נקבל כך פתרון מהצורה $(m,n)=(2k,-3k)$. פתרונות אלה שונים כולם זה מזה. לכן מספר הפתרונות אינסופי, כלומר מחלקת השקילות היא בת אינסוף איברים (אגב, לא קשה לראות ש**כל** הפתרונות, כלומר כל אברי מחלקת השקילות, הם מהצורה הנ"ל).

ג. עלינו להראות: $3(a+m)+2(b+n)=3a+2b$.
זה נובע מכך שלפי הנתון לגבי (m,n), $3m+2n=0$.

ד. יהי (a,b) איבר של אחת ממחלקות השקילות, כלומר איבר כלשהו של $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. לפי סעיפים ב, ג, באותה מחלקה עם (a,b) נמצאים כל הזוגות מהצורה $(a+2k\ ,\ b-3k)$, לכל k שלם. זו קבוצה אינסופית של זוגות סדורים. לכן מחלקת השקילות היא אינסופית.

תשובה 3

א. יחס מעל A הוא קבוצה של זוגות סדורים של אברי A. לכן כל יחס מעל A, ובפרט כל יחס שקילות מעל A, **חלקי** לקבוצה $A\times A$. קל לבדוק ש- $A\times A$ עצמה היא יחס שקילות (זהו יחס השקילות שבו כל אברי A נמצאים באותה מחלקה).
לכן $A\times A$ היא האיבר הגדול ביותר ב- K לגבי הכלה.

מצד שני, יחס שקילות הוא בפרט רפלקסיבי, כלומר **מכיל** את I_A.
היחס I_A אף הוא יחס שקילות מעל A (זהו יחס השקילות שבו כל איבר של A נמצא במחלקה בפני עצמו). מכיון שכל יחס שקילות מעל A מכיל אותו, I_A הוא האיבר הקטן ביותר ב- K לגבי הכלה.

ב. נפתור את (i), (ii), (iii).
נתבונן ביחס מעל $\mathbf{N}$ שמכיל זוג סדור אחד בלבד, כגון $\{(2,17)\}$.

זה ודאי יחס סופי מעל $\mathbf{N}$. הוא מכיל איבר אחד בלבד, לכן אין אף קבוצה חלקית לו ששייכת ל- M (היחס הריק אינו ב- M). לכן $\{(2,17)\}$ הוא **איבר מינימלי** ב- M.

מצד שני, יש כמובן עוד יחסים רבים מעל $\mathbf{N}$ שמכילים זוג סדור אחד בלבד, ולפי אותו שיקול כל אחד מהם הוא איבר מינימלי ב- M.

לפי שאלה 3.21 בעמ' 93 בספר, אם יש בקבוצה סדורה-חלקית יותר מאיבר מינימלי אחד, אז אין בקבוצה איבר קטן ביותר.

הראינו אפוא שיש ב- M איברים מינימליים רבים, ואין איבר קטן ביותר.

נראה כעת שב- M אין אף איבר מקסימלי. נניח בשלילה ש- X הוא מקסימלי ב- M.

X הוא יחס סופי מעל $\mathbf{N}$, כלומר קבוצה **סופית** שחלקית ל- $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$.

$\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ היא קבוצה **אינסופית**, לכן קיימים איברים ב- $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ שאינם ב- X. ניקח איבר אחד כזה ונצרף אותו ל- X. איחוד של קבוצה בת איבר אחד עם קבוצה סופית נותן קבוצה סופית. לכן הקבוצה שקיבלנו שייכת ל- M. היא מכילה-ממש את X, בסתירה להיות X איבר מקסימלי ב- M. לפיכך לא קיים X כזה.

הראינו שאין ב- M איבר מקסימלי . לכן ודאי שאין ב- M איבר גדול ביותר.

תשובה 4

(i) **בדיקה** עבור $n=1$: $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{\sqrt{k}} = 1 = \sqrt{1}$.

(ii) **מעבר** : נניח שהטענה נכונה עבור n, כלומר נניח ש- $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$,

נוכיח שהיא נכונה עבור $n+1$, כלומר נוכיח ש- $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n+1}$. לשם כך נפתח :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

בהצבה של הנחת האינדוקציה, נקבל שאגף ימין גדול /שווה מ-

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sqrt{n}$$

נפתח את הסכום הזה (הצעד הראשון הוא פשוט מכנה משותף) :

$$= \frac{1+\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1+\sqrt{n}\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$$

וקיבלנו את אי-השוויון המבוקש, כלומר הוכחנו שהטענה נכונה עבור $n+1$.

מ- *(i)* + *(ii)*, לפי עקרון האינדוקציה בטבעיים, הטענה נכונה לכל n טבעי חיובי.

איתי הראבן