

**מבנה הבחינה :**

- \* יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- \* משקל כל שאלה 25% .
- \* אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

**משך המבחן: 3 שעות.**

**חומר עזר:** כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

---

**שימו לב:**

- \* יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נאמר במפורש בשאלה.
  - \* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
  - \* אפשר גם להסתמך על טענות מהמדור "עזרים ללמידה" באתר הקורס.
  - \* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
  - \* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
- 

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

**אנא קראו בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !**

### **שאלה 1**

$\mathbb{Z}$  היא קבוצת המספרים השלמים,  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .

$\mathbb{R}$  היא קבוצת המספרים הממשיים.

10 נק' א. תהי  $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(x, y) = 3x + 2y$ .

הוכח ש- $f$  אינה חד-חד-ערכית, והוכח ש- $f$  היא על.

5 נק' ב. תהי  $g: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$ ,  $g(X) = X \oplus \mathbb{Z}$ .

הוכח: לכל  $X \in P(\mathbb{R})$ ,  $g(g(X)) = X$ .

(הגדרת ההפרש סימטרי ותכונותיו ר' בעמ' 27 בדרך "תורת הקבוצות").

הוכחה אלגברית קצרה הרבה יותר במקרה זה מאשר הוכחה ע"י "יהי  $x$  איבר...".

10 נק' ג. האם  $g$  היא חד-חד-ערכית? האם  $g$  היא על?

### **שאלה 2**

15 נק' א. תהי  $A = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}, x - 2y \in \mathbb{N}, x + y + z \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

הוכח ש- $A$  אינה בת מניה.

הדרכה: הוכח שהיא מכילה קבוצה שאינה בת מניה.

10 נק' ב. מהי עוצמת  $A$ ? הוכח.

### **שאלה 3**

בכל סעיפי השאלה  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

8 נק' א. מצאי כמה פונקציות  $f$  של  $A$  ל- $B$  הן בעלות התכונה הבאה:

**לכל**  $x \in A$ ,  $x + f(x)$  הוא מספר אי-זוגי.

8 נק' ב. מצאי כמה פונקציות  $f$  של  $A$  ל- $B$  הן בעלות התכונה הבאה:

**לכל**  $x \in A$ ,  $x \cdot f(x)$  הוא מספר זוגי.

3 נק' ג. הוכיחי שפונקציה של  $A$  ל- $B$  המקיימת את התנאי של סעיף א, מקיימת גם את

התנאי של סעיף ב.

6 נק' ד. כמה פונקציות  $f$  של  $A$  ל- $B$  אינן מקיימות אף אחד משני התנאים א, ב?

**יש לנמק את התשובות. בסעיפים א', ב', ד' יש להגיע לתשובה סופית מספרית.**

## שאלה 4

$K_n$  הוא מספר החלוקות של הקבוצה  $\{1, 2, \dots, n\}$  המקיימות:

בכל מחלקה יש לא יותר משני איברים.

למשל  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  היא חלוקה של  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  העונה על הדרישה.

(20 נק') א. מצא את  $K_1, K_2, K_3$ .

מצא יחס נסיגה (רקורסיה) עבור  $K_n$ . נמק בצורה ברורה.

(5 נק') ב. מצא את  $K_6$ .

אין צורך לפתור כללית את יחס הנסיגה: זה אינו יחס נסיגה לינארי, אין לנו כלים לפתור יחס זה.

## שאלה 5

יהיו  $A, B, C, D$  פסוקים יסודיים. נסמן:

$$\varphi_1 = (A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$$

$$\varphi_2 = (A \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow D) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow D)$$

$$\varphi_3 = (A \rightarrow (C \wedge D)) \vee (B \rightarrow (C \wedge D))$$

$$\varphi_4 = ((\sim C) \vee (\sim D)) \rightarrow ((\sim A) \wedge (\sim B)) \quad \varphi_5 = ((A \vee B) \rightarrow C) \wedge ((A \vee B) \rightarrow D)$$

נתבונן בטענות הבאות:

א.  $\varphi_1 \models \varphi_3$

ב.  $\varphi_3 \models \varphi_1$

ג.  $\varphi_1 \equiv \varphi_5$

ד.  $\varphi_2 \equiv \varphi_3$

ה.  $\varphi_1 \equiv \varphi_4$

לכל אחת מהטענות א' – ה', קבע אם היא נכונה.

אם כן – הוכח, אם לא – תן אינטרפרטציה המראה זאת!

כדי להוכיח טענה אמיתית, אפשר להשתמש בלוחות אמת ואפשר בדרכים אחרות.

בהצלחה!