

שאלה 1 (25 נקודות)

יהיו X_1, X_2, \dots משתנים מקריים בלתי-תלויים שלכל אחד מהם התפלגות אחידה רציפה על הקטע $(0,1)$.

(12 נק') א. חשב את $P\{X_1 \cdot X_2 < 0.05\}$.

(13 נק') ב. מצא קבוע N , כל שלכל $n > N$ מתקיים: $P\{X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n > 0.05\} < 0.6^n$.

שאלה 2 (25 נקודות)

בקופסה נתונה יש 30 כדורים: 12 אדומים, 10 כחולים ו-8 צהובים.

מוציאים מן הקופסה 9 כדורים ללא החזרה. לכל כדור יש סיכויים שווים להיבחר.

יהיו: X = מספר הכדורים האדומים שנבחרו;

Y = מספר הכדורים הכחולים שנבחרו.

(7 נק') א. מצא ביטוי כללי לפונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .

רשום באופן מדויק את תחום הערכים האפשריים של הפונקציה.

(6 נק') ב. חשב את השונות של X .

(6 נק') ג. מהו לדעתך הסימן של מקדם המתאם הלינארי בין X ל- Y ?

נמק בקצרה את תשובתך. **אין צורך לחשב את ערכו של מקדם המתאם.**

(6 נק') ד. ידוע שנבחרו בדיוק שני כדורים כחולים.

בהינתן מידע זה, מהי השונות המותנית של מספר הכדורים האדומים שנבחרו?

שאלה 3 (25 נקודות)

בתחילת שנה פועלות במפעל 3 מכונות (בלתי-תלויות) בנות 1, 2 ו-3 שנים.

מספר התיקונים שיידרשו **במכונה בת i שנים** מקיים את שלוש ההנחות של תהליך פואסון עם קצב של $3i$

תיקונים לשנה אחת, לכל $i = 1, 2, 3$.

(6 נק') א. מהי ההסתברות שבמשך שנה אחת יידרשו בדיוק 22 תיקונים בכל המכונות יחד?

(7 נק') ב. בתחילת השנה היצרן מפעיל את שלושת המכונות (והן תקינות).

1. מהי ההסתברות שיעבור לפחות חודש אחד עד שיידרש התיקון הראשון?

2. מהי שונות אורך-הזמן (בשנים) שיעבור עד לתיקון החמישי שיידרש במכונות?

(6 נק') ג. במחצית הראשונה של השנה נדרשו בסך-הכל 10 תיקונים.

מהי ההסתברות ש-6 מהם נדרשו למכונה בת השלוש, 2 למכונה בת השנתיים ו-2 למכונה בת

השנה?

(6 נק') ד. נניח שקיימים 5 מפעלים, הפועלים בתנאים דומים לאלו המצוינים בתחילת השאלה, ונניח

שאין תלות בין המפעלים השונים.

חשב **קירוב** להסתברות, שבמשך שנה אחת יידרשו בין 85 תיקונים ל-100 תיקונים בסך-הכל

בכל 5 המפעלים.

הערה: הנח ש-12 חודשי השנה שווים זה לזה באורכם, היכן שההנחה נדרשת.

שאלה 4 (25 נקודות)

מפזרים באקראי 10 קוביות תקינות ב-10 תאים ממוספרים מ-1 עד 10. נניח שאין תלות בין הקוביות וכי כל קובייה "נופלת" לתוך כל אחד מן התאים הנתונים בהסתברויות שוות. לאחר שמפזרים את הקוביות בתאים, מוציאים מתא 1 את הקוביות שנפלו לתוכו ומטילים אותן.

יהי X_1 מספר הקוביות שנפלו לתוך תא 1; ויהי S סכום התוצאות של ההטלות, שהתקבלו בהטלת הקוביות שנפלו לתוך תא 1.

- 7 נק' א. חשב את $P\{S = 2\}$.
- 11 נק' ב. 1. חשב את התוחלת של S .
2. חשב את השונות של S .
- 7 נק' ג. נסמן ב- X_i את מספר הקוביות שנפלו לתוך תא i , לכל $i = 1, 2, \dots, 10$.
חשב את $\text{Cov}(X_1, X_2 + \dots + X_{10})$.

שאלה 5 (25 נקודות)

יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 1; ויהי Y משתנה מקרי המוגדר על-ידי $Y = 1 - 2e^{-X}$.
8 נק' א. 1. חשב את פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה המקרי Y .
2. זהה את ההתפלגות של המשתנה המקרי Y (שם ההתפלגות והפרמטרים שלה).

ב. נגדיר את המשתנה המקרי U על-ידי:

$$U = \begin{cases} Y & , \quad Y < 0 \\ 1 - \frac{Y}{2} & , \quad Y \geq 0 \end{cases}$$

- 8 נק' 1. חשב את התוחלת של U .
 - 9 נק' 2. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של U .
- הערה:** קבע תחילה את תחום הערכים האפשריים של U .
אחר-כך, חשב את ערכי הפונקציה לכל ערך ממשי.

בהצלחה!