

מטלת מנחה 13 - 2008א

שאלה 1 (14 נקודות: 7 נקודות לכל סעיף)

א. נתון מערך A ובו $A[2]$ ו- $A[3]$ הם שורשים של ערמות חוקיות וב- $A[1]$ יש ערך בלתי מוגדר. ידוע כי האיבר האחרון (הנמצא באחת משתי הערמות) הוא $A[n]$.

הסבר כיצד ליצור ערימה אחת עם $n-1$ איברים.

$O(1)$ נחליף את האיבר שב- $A[1]$ עם האיבר שב- $A[n]$

$O(1)$ נקטין את heap-size ב-1

$O(\lg n)$ ונבצע heapify.

מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם? $O(\lg n)$

ב. נדון באותה השאלה עם $A[i]$. כל הערימה "חוקית" (כלומר כל איבר גדול מכל צאצאיו) פרט ל- $A[i]$ שבו יש ערך לא מוגדר.

הסבר כיצד להפוך את ה"ערימה" לערימה חוקית (עם איבר אחד פחות).

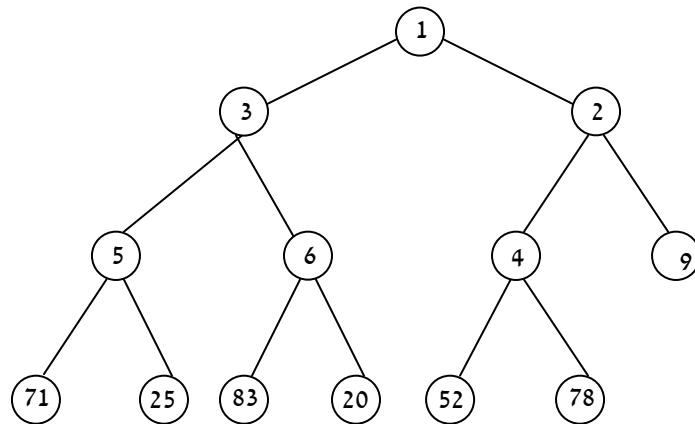
מהי סיבוכיות האלגוריתם?

$O(1)$	נחליף את האיבר שב- $A[i]$ עם האיבר שב- $A[n]$.
$O(1)$	נקטין את heap-size ב-1.
$O(\lg n)$	כעת, איננו יודעים האם עץ האיבר לעצמות בערימה, או לרדת, ולכן נפעיל את heapify, ואם פולאה להעצמות האיבר עד למקום בו הוא לא גדול מאביו. רק אחד משני הדברים יתבצע כיוון שאם האיבר לא גדול מאביו - הפולאה להעצמות האיבר - לא תתחיל להתבצע, ואם האיבר לא קטן מאביו אחד מילדיו, heapify לא יבצע דבר.
$O(\lg n)$	

שאלה 2 (20 נקודות)

ערימה ממויינת (SH) היא ערימה בה כל איבר קטן מכל האיברים הנמצאים ברמות שמתחתיו.

דוגמה:



תאר אלגוריתם למימוש הפעולה DEL-MIN-SH את המינימום מערימה ממויינת בת n איברים בסיבוכיות זמן $O(n)$, כך שלאחר המחיקה היא תישאר ערימה ממויינת.

הסבר את נכונות האלגוריתם והראה כי הוא עומד בדרישת הסיבוכיות.

אם האיבר ה- i ברמה האחרונה אז הצב במקומו את הצלה האחרון והקטן את גודל הערימה ב-1.
אחרת מצא את האיבר הקטן ביותר ברמה שמתחתיו (האיבר ה- j) והצב אותו במקום האיבר ה- i . קרא רקורסיבית לאלגוריתם עם האיבר ה- j .

מיון הכנסה - יציב. עובר על כל המערך מהתחלה לסוף ועובר על איבר מוצא את המקום המתאים עבורו, לכן כאשר ישנם שני איברים שווים אזי האיבר הראשון יהיה ראשון גם במערך הממוין.

מיון מילוך - יציבותו תלויה במימוש של פונקציות merge. אם מקפידים במילוך שכאשר משווים שני איברים משני תתי מערכים ויש שני איברים שווים הוא יכניס קודם את האיבר השמאלי לאיבר החדש (זה בעצם האינדקס הקטן יותר, שהיה ראשון במערך הלא ממוין) אזי הוא יהיה יציב.

מיון צרימה - לא יציב. יכול לקרות מצב שיש איבר בתת עץ ימני ברמה השלישית ששווה לאיבר בתת עץ הימני ברמה הרביעית. לאחר שנוצרה את המקסימום מהצרימה ונעביר תמיד קודם את האיברים שקודם ברמה הרביעית לראש העץ ואח"כ נבצע heapify, בעולה זו יכולה לגרום כי האיבר שהיה ברמה הרביעית יעבור לרמה השלישית וכך יהיה לפני האביר שבתת עץ הימני ברמה השלישית. מצב זה יכול להוביל כי האיבר השני יהיה ראשון שיצא מהצרימה, מצב המוביל כי מיון צרימה לא יציב.

מיון מהיר - לא יציב. הדוגמא הפשוטה ביותר היא כאשר יש מערך באורך 2 עם שני איברים שווים, אזי מיון מהיר יחליף בניהם ויחזיר מערך ממוין.

עבור כל איבר נשמור אותו בצורה של: value ו-index.
כאשר ה-value הוא הערך של האיבר,
ו-index מציינת את המקום ההתחלתי של האיבר.
לדוגמא:

value	7	5	9	7	8
index	1	2	3	4	5

כעת, כאשר נמייין את המערך וניתקף במצב שישנם שני איברים שווים אזי נשווה את ה-index שלהם, ונדאג שהאיבר עם האינדקס הקטן יותר יהיה ראשון במערך.

שאלה 4 (18 נקודות)

9 נק' א. נחלק את כביש ירושלים-ת"א ל- n קטעים :

$$[a_i, b_i] , \quad a_i < b_i , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

n נהגים נסעו לאורך קטעים שונים של כביש זה.

הנהג ה- i נסע לאורך הקטע שבין הק"מ ה- a_i והק"מ ה- b_i , כאשר a_i ו- b_i שלמים .

הסבר כיצד ניתן לבצע עיבוד מקדים על הנתונים בסיבוכיות זמן $O(n \lg n)$ ובזיכרון בגודל $O(n)$,

כך שבהינתן נקודה כלשהי על כביש ירושלים-ת"א (למשל הק"מ ה-17),

ניתן יהיה לקבוע בסיבוכיות זמן $O(\lg n)$ כמה מכוניות עברו בנקודה זו.

תאר כיצד תבוצע השאילתה ונתח את סיבוכיות זמן הריצה של ביצועה.

9 נק' ב. הנח כעת שכל הנקודות $[a_i, b_i]$ מתפלגות באופן אחיד בקטע $[0, 1]$.

תאר אלגוריתם המבצע את העיבוד המקדים שבסעיף א' ורץ בזמן $O(n)$ במקרה הממוצע.

א. נשמור במערך באורך $2n$ את קצוות קטעי הנסיעה שלהם.
 באופן הבא:

ק"מ	1	5	2	4	3	24	10	18	15	30	22	50	55	58
נק'	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	B
התחלה/סיום														
מספר מכוניות														

נפעיל מיון מילוט על המערך לפי עדה ק"מ. לאחר מיון המערך יראה כך:

ק"מ	1	2	3	4	5	10	15	18	22	24	30	50	55	58
נק'	a	a	a	b	b	a	a	b	a	b	b	b	A	B
התחלה/סיום														
מספר מכוניות														

סיבוכיות פעולה זו : זמן - $O(n \lg n)$, מקום - $O(n)$ - מיון מילוט.
 כעת נעבור על המערך ונחשב את מספר המכוניות שעברו בכל ק"מ במערך. אם הערך מייצג a כלאחר נקודת התחלה, נוסיף 1 לאונה ונעדכן את הערך במערך בתא המתאים לו. אם הערך הוא b , נציב את ערך האונה בתא הנוכחי ולאחר מכן נפחית 1 מערך האונה כיוון שמכונית אחת סיימה לנסוע ולכן יש להקטין את מספר המכוניות הנוסעות. עבור הדוגמא נקבל את המערך הבא :

ק"מ	1	2	3	4	5	10	15	18	22	24	30	50	55	58
נק'	a	a	a	b	b	a	a	b	a	b	b	b	A	B
התחלה/סיום														
מספר מכוניות	1	2	3	3	2	2	3	3	3	3	2	1	1	1

שדה המניה של המצרך נותן לנו אינדיקציה על מספר הנהגים שצברו בקטע שתחילתו הוא הק"מ שנמצא בשדה הק"מ של אותו איבר וסופו הוא הק"מ של האיבר הבא.

סיבוכיות פצולה זו: זמן - $O(n)$, מקום - $O(1)$.

כלומר, סיבוכיות כל הציבוד המקדים: זמן - $O(n \lg n) + O(n) = O(n \lg n)$

מקום - $O(n) + O(1) = O(n)$.

השאלתה תבוצע באופן הבא:

היות שהמצרך ממין, על כל קלט של נקודה כלשהי יתבצע חיפוש בינארי עד למציאת ערכה במצרך או מציאת מיקומה בהתאם לערכה. במידה והנקודה נמצאת במצרך, יוחזר ערכה, כלומר ערך שדה מספר המכונות עבור האינדקס שלה במידה והנקודה לא נמצאת, נחפש את האינדקס הכי גדול שקטן ממנה. במידה והק"מ שמצאנו מייצג נקודת התחלה של קטע נחזיר את מספר המכונות שמופיעות באינדקס זה, ובמידה ואינדקס זה הוא b כלומר מייצג נקודת סיום קטע נחזיר את ערכו פחות 1, כיוון שמספר המכונות המופיעות אצלו כולל את כל אלו שצברו דרכו וצדיין לא סיימו את נסיעתם + המכונות שסיימה את נסיעתה בנקודה זו ולכן אותה יש להחסיר.

לדוגמא: עבור קלט '4' השאלתה תחזיר את הערך 3, עבור קלט '12' יוחזר 2 ועבור קלט 20 יוחזר 2.

סיבוכיות: מציאת איבר המצרך בעזרת חיפוש בינארי: $O(\lg n)$.

ב. כיוון שהנקודות מתפלגות באופן אחיד ניתן להשתמש במיון דלי במקום מיון מילוט ועל ידי כך להקטין את זמן הציבוד המקדים ל- $O(n)$.

שאלה 5 (18 נקודות)

נתונות m קבוצות S_1, S_2, \dots, S_m . כל קבוצה מכילה מספרים שלמים בתחום 1 עד n . נסמן את גודל הקבוצה i -ב- $|S_i|$.

נתון כי $\sum_{i=1}^m |S_i| = n$.

כתוב אלגוריתם הממין את כל m הקבוצות (כלומר, האלגוריתם צריך להחזיר m רשימות ממויינות).

זמן הריצה של האלגוריתם צריך להיות $O(n)$ (ולא $O(m \cdot n)$).
רמז: השתמש במיון-מניה.

פתרון

יהי A מערך באורך n . נשתמש ב- k כאינדקס למערך.

$k \leftarrow 1$

עבור $i \leftarrow 1 \dots m$: כל הקבוצות :

לכל קבוצה i עבור $j \leftarrow 1 \dots |S_i|$ כל איברי הקבוצה

$A[k] \leftarrow (S_i)_j, i$: לכל איבר בקבוצה :

(כלומר נשמור ב- A את ערך האיבר, וכן את מספר

הקבוצה אליה שייך האיבר)

$k \leftarrow k + 1$

$O(n)$

נכמת A מכיל את כל האיברים מכלל הקבוצות, וכן לכל איבר את מספר הקבוצה אליה הוא שייך, ו A איננו ממויין)

$O(n)$ נמין את A מיון מניה (מיון מניה של n ערכים שכולם בתחום $1 \dots n$)

נכמת B מכיל את כל האיברים מכלל הקבוצות, וכן לכל איבר את מספר הקבוצה אליה הוא שייך, והוא ממויין)

$O(m)$ נאתחל m אינדקסים, ל- m קבוצות ב- 1.

$O(n)$ נעבור על B $k \leftarrow 1 \dots n$

נצתיק כל ערך מתוך B אל הקבוצה אליה הוא היה שייך (המידע ב- B), תוך קידום האינדקס, של הקבוצה המתאימה.

נקבל m קבוצות, כשבכל קבוצה מופיעים הערכים המקוריים שהיו בה, אלא שעתה, מכיוון שהכנסנו אותם לקבוצה, לפי סדר, הערכים בכל קבוצה - ממויינים!

סדר האורך הוא : $O(n) + O(m) + O(n) = O(n)$

שאלה 6 (18 נקודות)

נתון מערך של מספרים שלמים. מספר הספרות של המספרים אינו בהכרח אחיד אבל מספר הספרות הכולל של כל המספרים במערך הוא n .
(אם המערך מכיל למשל את המספרים: 1, 12, 123, 1234 אז במקרה זה $n=10$).

כתוב אלגוריתם למיון המערך בזמן $O(n)$.

נפריד את המספרים לרשימות לפי מספר ספרותיהם.

נמייין כל רשימה במיון בסיס.

נחבר את כל הרשימות לרשימה אחת (מספר בעל m ספרות קטן

ממספר בעל $m+1$ ספרות).