

קורס: 20416 "תורת ההסתברות"

תאריך הבחינה: 5.9.2016 (סמסטר 2016 ב - מועד ב4 / 93)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי וספר הקורס בלבד.

מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפת: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

שאלה 1 (25 נקודות)

נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת:

$$f_{X,Y}(x,y) = c(y^2 - x^2)e^{-y}, \quad y > 0; \quad -y < x < y$$

- 9 נק' א. חשב את c .
 8 נק' ב. מהי $P\{X > 0\}$?
 8 נק' ג. חשב את $\text{Var}(Y)$.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתונים 10 כדורים שונים: 2 צהובים, 2 אדומים, 2 כחולים, 2 ירוקים, ו-2 לבנים. מחלקים באקראי את הכדורים ל-5 ילדים: 2 כדורים לכל ילד.

נאמר שילד מקבל זוג "מעורב" של כדורים אם קיבל 2 כדורים בצבעים שונים.

- 9 נק' א. מהי ההסתברות שכל הילדים יקבלו זוגות "מעורבים" של כדורים?
 8 נק' ב. מהי תוחלת מספר הילדים שיקבלו זוגות "מעורבים" של כדורים?
 8 נק' ג. מהי שונות מספר הילדים שיקבלו זוגות "מעורבים" של כדורים?

שאלה 3 (25 נקודות)

נדב מחליט לעשות כפיפות בטן בכל בוקר של ימי השבוע הקרוב (בסה"כ 7 ימים). נדב מתקשה להחליט כמה כפיפות יעשה בכל פעם. הוא מתלבט בין שתי אפשרויות:

אפשרות א: הוא יבחר פעם אחת מספר מקרי X , שהתפלגותו פואסונית עם הפרמטר 5, ובכל יום (מתוך ה-7) יעשה בדיוק אותו מספר X של כפיפות בטן.

אפשרות ב: בכל יום i ($i = 1, 2, \dots, 7$), הוא יבחר מספר מקרי X_i , שהתפלגותו פואסונית עם הפרמטר 5, ויעשה X_i כפיפות בטן, כך שלא תהיה תלות בין ה- X_i ימים המוגדרים לימים שונים.

12 נק' א. עבור כל אחת מהאפשרויות חשב:

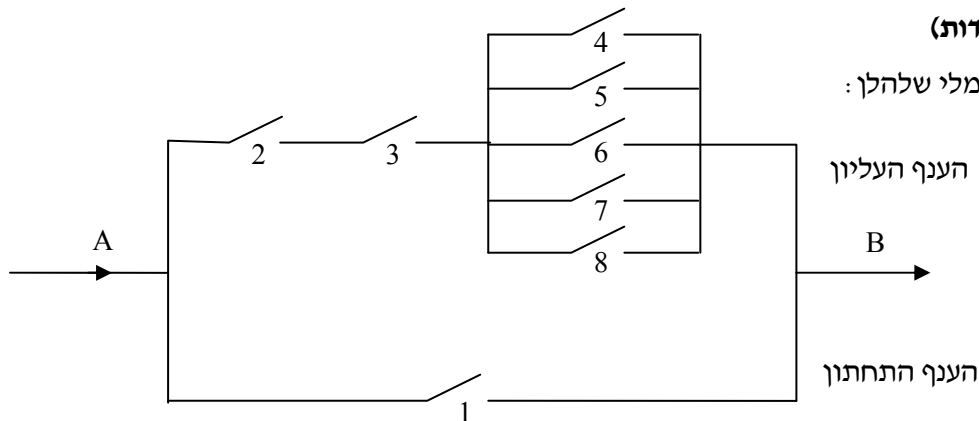
- את ההסתברות שבמשך 7 הימים נדב יעשה בסך-הכל 42 כפיפות בטן;
- את שונות המספר הכולל של כפיפות הבטן שנדב יעשה במשך 7 הימים.

ב. עבור אפשרות ב בלבד:

- 7 נק' 1. אם ידוע שנדב עשה בסך-הכל 42 כפיפות בטן ב-7 הימים, מהי ההסתברות שביום הראשון עשה בדיוק 5 כפיפות בטן וביום השני בדיוק 6?
 6 נק' 2. מהו קירוב להסתברות שבמשך 7 הימים יעשה **לפחות** 42 כפיפות בטן? חשב ערך מדויק עד כמה שניתן.

שאלה 4 (25 נקודות)

נתון המעגל החשמלי שלהלן :



כל אחד משמונת המתגים המרכיבים את המעגל סגור בהסתברות 0.4, ואז יכול לעבור בו זרם. אין תלות בין מצבי המתגים השונים, והמצב של כל מתג הוא סגור או פתוח. זרם יכול לעבור במעגל מנקודה A לנקודה B דרך הענף העליון, דרך הענף התחתון או דרך שניהם, בהתאם למצבי המתגים.

יהי X מספר המתגים הסגורים במעגל כולו ; ויהי Y מספר הענפים שיכול לעבור דרכם זרם.

- (12 נק') א. מהן פונקציות ההסתברות השולית של X ושל Y ?
- (8 נק') ב. 1. חשב את ההסתברות **המשותפת** $P\{X=2, Y=0\}$.
2. חשב את ההסתברות **המותנית** $P\{Y=1 | X=3\}$.
- (5 נק') ג. האם המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-תלויים? נמק את תשובתך.

שאלה 5 (25 נקודות)

יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 3.

$$Y = \begin{cases} X & , X \leq 1 \\ e^{1-X} & , X > 1 \end{cases} \quad \text{נגדיר את המשתנה המקרי } Y \text{ על-ידי:}$$

- (9 נק') א. חשב את $P\{Y < 0.5\}$.
- (8 נק') ב. הוכח כי פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי Y היא :
 $f_Y(y) = 3y^2e^{-3} + 3e^{-3y} \quad , \quad 0 < y < 1$
- (8 נק') ג. חשב את התוחלת של המשתנה המקרי Y .

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] \quad \text{נוסחת האינטרפולציה:}$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326