פתרון תרגיל בית 1

שאלה 1

כאמור, ההוכחה באינדוקציה על מספר הפעולות שמתבצעות על Q. נסמן מספר זה ב- k.

בסיס: עבור $k=0$, כלומר Q מכיל רק את s הטענה מתקיימת.

צעד: נניח כי הטענה מתקיימת לאחר ביצוע $k \geq 0$ פעולות על Q ונסתכל על Q לאחר ביצוע הפעולה ה- $k+1$. נפריד לשני מקרים בהתאם לפעולה שהתבצעה.

מקרה ראשון: פעולת הוצאה מ- Q. כלומר, לאחר הפעולה $Q=(v_2, v_3, ..., v_r)$. ברור כי מתקיים $d[v_2] \leq ... \leq d[v_r]$ כי לפני ביצוע הפעולה ולפי הנחת האינדוקציה התקיים $d[v_1] \leq d[v_2] \leq ... \leq d[v_r]$. נותר להראות כי $d[v_r] \leq d[v_2]+1$. לפי הנחת האינדוקציה $d[v_r] \leq d[v_1]+1$ וכמו כן $d[v_1] \leq d[v_2]$, לכן מתקיים $d[v_r] \leq d[v_1]+1 \leq d[v_2]+1$.

מקרה שני: פעולת הכנסה ל- Q. כלומר, לאחר הפעולה $Q=(v_1, v_2, ..., v_r, v_{r+1})$. עפ״י הנחת האינדוקציה $d[v_1] \leq d[v_2] \leq ... \leq d[v_r]$, לכן נותר להראות כי $d[v_{r+1}] \leq d[v_1]+1$ ו- $d[v_r] \leq d[v_{r+1}]$. נסמן ב- u את הצומת שגרם להכנסת v_{r+1} ל- Q. כלומר, u הוא הצומת שקדם ל- v_1 בראש Q. אם u ו- v_1 נמצאו באותו זמן ב- Q אז לפי הנחת האינדוקציה $d[u] \leq d[v_1]$. אחרת, כאשר u יצא מ- Q אז התור התרוקן ו- u הוא הגורם להוספת כל הצמתים $v_1, v_2, ..., v_r$ ל- Q (שימו לב שב-CLRS מתעלמים מאפשרות זו). במקרה זה, $d[v_1]=d[u]+1$ ושוב $d[u] \leq d[v_1]$. כאמור, u הוא הגורם להכנסת v_{r+1} ל- Q, לכן $d[v_{r+1}]=d[u]+1 \leq d[v_1]+1$. נותר להראות כי $d[v_r] \leq d[v_{r+1}]$. באופן דומה אם u ו- v_r נמצאו באותו זמן ב- Q אז לפי הנחת האינדוקציה $d[v_r] \leq d[u]+1$, אחרת u הוא האחראי להוספת v_r ל- Q ולכן לפי האלגוריתם $d[v_r]=d[u]+1$. כלומר, $d[v_r] \leq d[u]+1$ ולכן $d[v_r] \leq d[u]+1 = d[v_{r+1}]$. $\square$

שאלה 2

הרעיון: ניצור שלושה העתקים של G אשר מכילים רק את הקשתות הלבנות. את הקשתות השחורות נכוון מהצמתים המתאימים בעותק הראשון לצמתים המתאימים בעותק השני, ומהצמתים המתאימים בעותק השני לצמתים המתאימים בעותק השלישי. נריץ BFS החל מהצומת המתאים ל- s בעותק הראשון. לכל $v \in V$ הערך שהתקבל בצומת המתאים ל- v בעותק הראשון מייצג מסלול קצר ביותר מ- s ל- v שאינו מכיל כלל קשתות שחורות; הערך שהתקבל בצומת המתאים ל- v בעותק השני מייצג מסלול קצר ביותר מ- s ל- v שמכיל בדיוק קשת שחורה אחת; והערך שהתקבל בצומת המתאים ל- v בעותק השלישי מייצג מסלול קצר ביותר מ- s ל- v שמכיל בדיוק שתי קשתות שחורות. נחזיר כמובן את הערך המינימלי מבין שלושתם.

באופן פורמלי: ניצור גרף חדש $G'=(V', E')$ המוגדר באופן הבא:

$V' = \{v^1, v^2, v^3 \mid v \in V\}$

$E' = \{(v^1 \to u^1), (v^2 \to u^2), (v^3 \to u^3) \mid (v \to u) \in E \wedge (v \to u) \text{ is white}\}$
$\quad \cup \{(v^1 \to u^2), (v^2 \to u^3) \mid (v \to u) \in E \wedge (v \to u) \text{ is black}\}$

על G' נריץ BFS החל מ- s^1. בסיום ריצת ה-BFS נחזיר לכל צומת $v \in V$ את הערך $d(v) = \min\{\lambda(v^1), \lambda(v^2), \lambda(v^3)\}$ (כאשר λ מייצג את הערך שחושב בהרצת ה-BFS).

סיבוכיות:

יצירת G' לוקחת $O(V+E)$ זמן. הרצת ה-BFS על G' לוקחת $O(V'+E') = O(V+E)$ מאחר ו- $V' = 3V$ ו- $E' \leq 3E$. חישוב הערך המבוקש לכל צומת לוקח $O(V)$. לכן סה״כ זמן הריצה הוא $O(V+E)$ כפי שנדרש.

נכונות:

נסמן ב- $\delta(v)$ את המסלול הקצר ביותר מ- s ל- v ב- G המכיל לכל היותר 2 קשתות שחורות. נסמן ב- $\delta_0(v), \delta_1(v), \delta_2(v)$ את המסלול הקצר ביותר מ- s ל- v ב- G המכיל בדיוק $0,1,2$ קשתות שחורות, בהתאמה. אזי ברור כי $\delta(v) = \min\{\delta_0(v), \delta_1(v), \delta_2(v)\}$.

על מנת להראות את נכונות האלגוריתם מספיק להראות כי $\lambda(v^{i+1}) = \delta_i(v)$ לכל $v \in V$ ולכל $i = 0,1,2$.

אנו נראה כי לכל $v \in V$ מתקיים $\lambda(v^3) = \delta_2(v)$. ההוכחה עבור $i = 0,1$ דומה.

נראה כי $\lambda(v^3) \leq \delta_2(v)$. אם $\delta_2(v) = \infty$ אז ברור כי $\lambda(v^3) \leq \delta_2(v)$. אם $\delta_2(v) = k < \infty$ אז קיים מסלול באורך k מ- s ל- v ב- G המכיל בדיוק 2 קשתות שחורות: $s = v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_k = v$. נסמן את הקשתות השחורות ב- $(v_i \to v_{i+1})$ וב- $(v_j \to v_{j+1})$ ($(v_i \to v_{i+1})$ מופיעה ראשונה). עפ״י בנית G' קיים בו מסלול באורך k מ- s^1 ל- v^3: $s^1 = v_0^1 \to v_1^1 \to \ldots \to v_i^1 \to v_{i+1}^2 \ldots \to v_j^2 \to v_{j+1}^3 \ldots \to v_k^3 = v$. לכן, עפ״י נכונות BFS $\lambda(v^3) \leq \delta_2(v)$.

נראה כעת כי $\lambda(v^3) \geq \delta_2(v)$. אם $\lambda(v^3) = \infty$ אז ברור כי $\lambda(v^3) \geq \delta_2(v)$. אם $\lambda(v^3) = k < \infty$ אז קיים מסלול באורך k מ- s^1 ל- v^3 ב- G': $s^1 = v_0^1 \to v_1^1 \to \ldots \to v_i^1 \to v_{i+1}^2 \ldots \to v_j^2 \to v_{j+1}^3 \ldots \to v_k^3 = v$. עפ״י בניית G' קיים מסלול באורך k $s = v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_i \to v_{i+1} \ldots \to v_j \to v_{j+1} \ldots \to v_k = v$ שכל הקשתות בו לבנות למעט $(v_i \to v_{i+1})$ ו- $(v_j \to v_{j+1})$. לכן $\lambda(v^3) \geq \delta_2(v)$. □

שאלה 3

אם אין מסלול מ- s ל- t הפתרון הוא הקבוצה הריקה. לכן נניח בהמשך כי קיים מסלול מ- s ל- t. נסמן ב- $\delta(u,v)$ את המרחק הקצר ביותר מצומת u לצומת v. האלגוריתם שנציע מתבסס על הטענה הבאה.

טענה: צומת $v \in V$ נמצא על מסלול קצר ביותר מ- s ל- t $\Leftrightarrow$ $\delta(s,t) = \delta(s,v) + \delta(v,t)$.

הוכחה:

כיוון ראשון: נניח כי v נמצא על מסלול קצר ביותר p מ- s ל- t. נסמן ב- p_{sv} את תת-המסלול מ- s ל- v וב- p_{vt} את תת-המסלול מ- v ל- t. אזי מתקיים כי $\delta(s,v) \le |p_{sv}|$ ו- $\delta(v,t) \le |p_{vt}|$ (כי, למשל, יש מסלול p_{sv} מ- s ל- v, לכן המרחק הקצר ביותר מ- s ל- v הוא לכל היותר $|p_{sv}|$). לכן, $\delta(s,t) = |p| = |p_{sv}| + |p_{vt}| \le \delta(s,v) + \delta(v,t)$. אם $\delta(s,t) < \delta(s,v) + \delta(v,t)$ אז מתקיים כי $\delta(s,v) < |p_{sv}|$ או $\delta(v,t) < |p_{vt}|$. נניח כי $\delta(s,v) < |p_{sv}|$ (ההוכחה עבור המקרה השני דומה). אזי קיים מסלול q מ- s ל- v כך ש- $|q| < |p_{sv}|$. אם נשרשר את p_{vt} ל- q נקבל מסלול באורך $\delta(s,t) = |p| = |p_{sv}| + |p_{vt}| > |q| + |p_{vt}|$ וזה לא יתכן.

כיוון שני: אם $\delta(s,t) = \delta(s,v) + \delta(v,t)$ אזי קיים מסלול p_{sv} מ- s ל- v שאורכו $\delta(s,v)$ וקיים מסלול p_{vt} מ- v ל- t שאורכו $\delta(v,t)$. לכן, אם נשרשר את p_{vt} ל- p_{sv} נקבל מסלול המכיל את v שאורכו $|p_{sv}| + |p_{vt}| = \delta(s,v) + \delta(v,t) = \delta(s,t)$, כלומר מצאנו מסלול קצר ביותר מ- s ל- t המכיל את v. □

ברור כי ניתן לחשב לכל צומת $v \in V$ את $\delta(s,v)$ ע״י הרצת BFS מ- s על G. על מנת לחשב את $\delta(v,t)$ ניזכר (ראו תרגול 2) כי לכל זוג צמתים $u,v \in V$ קיים מסלול באורך k מ- u ל- v ב- G $\Leftrightarrow$ קיים מסלול באורך k מ- v ל- u ב- G', כאשר G' הוא הגרף המתקבל מהפיכת כיווני הקשתות ב- G.

מסקנה: לכל צומת $v \in V$ מתקיים כי $\delta(v,t) = \delta'(t,v)$, כאשר $\delta'(t,v)$ מציין את המרחק הקצר ביותר מ- t ל- v ב- G'.

מהדיון הנ״ל נסיק כי האלגוריתם הבא יחשב את הדרוש:

1. $L \leftarrow \{\}$ (רשימה המאותחלת להיות ריקה).
2. הרץ BFS על G החל מצומת s, לחישוב המרחק הקצר ביותר, $d[v]$, מ- s לכל צומת $v \in V$.
3. אם $d[t] < \infty$:
4. ייצר את הגרף G'.
5. הרץ BFS על G' החל מצומת t, לחישוב המרחק הקצר ביותר, $d'[v]$, מ- t לכל צומת $v \in V$.
6. לכל צומת $v \in V$, אם $d[v] + d'[v] = d[t]$ הוסף את v ל- L.
7. החזר את L.

סיבוכיות האלגוריתם היא כמובן $O(V+E)$, מאחר והוא מורכב מ-2 הרצות BFS לכל היותר (כל אחת בסיבוכיות $O(V+E)$), יצירת הגרף G' (שוב, $O(V+E)$), ובדיקת התנאי לכל הצמתים (ב- $O(V)$ מאחר ולכל צומת הבדיקה מתבצעת ב- $O(1)$).

<u>שאלה 4</u>

א. נניח כי G דו-צדדי ותהא (V_1,V_2) דו-חלוקה של צמתי G. אזי נצבע את צמתי V_1 בצבע 1, ואת צמתי V_2 בצבע 2. מאחר ו- (V_1,V_2) דו-חלוקה אין שני צמתים שכנים הצבועים באותו הצבע, לכן הצביעה חוקית, ולכן G 2-צביע. מצד שני, נניח כי G 2-צביע. נסתכל על צביעה של צמתי G בשני צבעים, 1 ו-2.

נסמן ב- V_1 את קבוצת הצמתים הצבועים בצבע 1 וב- V_2 את קבוצת הצמתים הצבועים בצבע 1. אזי ברור כי $V_1 \cap V_2 = \phi$, $V_1 \cup V_2 = V$ ואין זוג צמתים שכנים ששניהם ב- V_1 או ב- V_2. כלומר (V_1, V_2) היא דו-חלוקה של G ולכן G דו-צדדי.

ב. נניח כי G מכיל מעגל באורך אי זוגי ונניח בשלילה כי G דו-צדדי. על פי הסעיף הקודם G 2-צביע. נסמן את המעגל ב- $v_1 - v_2 - v_3 - \ldots - v_k - v_1$ ונסתכל על 2-צביעה חוקית של G. נניח, בלי הגבלת הכלליות, כי v_1 צבוע בצבע 1. אזי v_2 צבוע בהכרח בצבע 2. באופן דומה v_3 צבוע בהכרח בצבע 1, ובאופן כללי כל צומת עם אינדקס זוגי על המעגל צבוע בצבע 2 וכל צומת עם אינדקס אי-זוגי צבוע בצבע 1. k אי-זוגי (כי אורך המעגל אי-זוגי) לכן v_k צבוע בצבע 1 ולכן הצביעה אינה חוקית (v_1 ו- v_k שכנים בעלי אותו צבע).

בכיוון השני, נניח כי G אינו מכיל מעגלים אי-זוגיים ונראה כי G 2-צביע (כאמור, זה שקול לדו-צדדי). ניתן להניח, בה״כ, כי G קשיר, אחרת, נתייחס לכל רכיב קשירות בנפרד. יהא $s \in V$ צומת כלשהו ב- G. נצבע את צמתי G באופן הבא: $v \in V$ יצבע בצבע 1 אם $\delta(v)$ אי-זוגי ($\delta(v)$ הוא המרחק הקצר ביותר מ- s ל- v), ובצבע 2 אם $\delta(v)$ זוגי (מאחר ו- G קשיר $\delta(v)$ סופי) נראה שהצביעה שהגדרנו חוקית: נניח בשלילה ששני צמתים שכנים u,v נצבעו בצבע זהה. אזי קיים מעגל C (לאו דווקא פשוט) המורכב ממסלול קצר ביותר בין s ו- u, מהקשת (u,v) וממסלול קצר ביותר בין v ל- s שאורכו $\delta(v)+\delta(u)+1$. מאחר ול- $\delta(v)$ ו- $\delta(u)$ אותה זוגיות, אורכו של C אי-זוגי – סתירה.

ג. האלגוריתם שנציע נובע מהוכחת הכיוון השני בסעיף הקודם:

1. אתחול: לכל צומת ב- G נגדיר $d[v] \leftarrow \infty$.
2. כל עוד קיים צומת $s \in V$ כך ש- $d[s] = \infty$:
3. הרץ BFS מ- s (לחישוב $d[v]$ לכל צומת v כך שיש מסלול בין s ו- v)
4. לכל קשת $(u,v) \in E$
5. אם $d[u] \equiv d[v] (\bmod 2)$ הכרז "הגרף אינו צדדי" וסיים.
6. הכרז "הגרף דו-צדדי" והחזר את הדו-חלוקה $V_1 = \{v \mid d[v] \text{ is odd}\}$ ו- $V_2 = \{v \mid d[v] \text{ is even}\}$.

סיבוכיות: נניח שהגרף מכיל k רכיבי קשירות כך שברכיב ה- i ישנם n_i צמתים ו- m_i קשתות. אזי סיבוכיות כל הרצות ה-BFS הינה $O(V+E) = O\left(\sum_{i=1}^{k} n_i + \sum_{i=1}^{k} m_i\right) = \sum_{i=1}^{k} O(n_i + m_i)$. על מנת למצוא בשלב 2 צומת $s \in V$ כך ש- $d[s] = \infty$ נחזיק רשימה מקושרת של הצמתים. כדי למצוא צומת כנדרש נעבור סדרתית על הרשימה. אם עבור הצומת הנוכחי v מתקיים כי $d[v] = \infty$, נחזיר את v (כמובן, נוציא אותו מהרשימה) ונעצור. אחרת, נוציא את v מהרשימה ונמשיך לאיבר הבא ברשימה. כלומר, בכל צעד על הרשימה יוצא ממנה צומת אחד. צומת שיצא מן הרשימה כבר לא יחזור אליה ולכן סה״כ

המעברים על הרשימה לוקח $O(V)$ זמן. שלבים 1,4-6 לוקחים $O(V+E)$ זמן ולכן סה"כ הזמן הוא $O(V+E)$, כפי שנדרש.

נכונות: אם האלגוריתם מחזיר דו-חלוקה אזי ברור כי היא חוקית משום שהבדיקה בשלב 2 מבטיחה שבסיום כל צומת שייך ל- V_1 או ל- V_2 ובשלבים 4-5 בודקים את כל הקשתות, לכן לכל קשת $(u,v)\in E$ מתקיים כי $d[u]\neq d[v] (\bmod 2)$ ולכן לא יתכן ש- u ו- v באותה קבוצה בדו-חלוקה.

מצד שני, נראה כי אם האלגוריתם מכריז שהגרף אינו דו-צדדי אז G מכיל מעגל אי-זוגי ולכן עפ"י הסעיף הקודם אינו דו-צדדי. תהא $(u,v)\in E$ קשת כך ש- $d[u]\equiv d[v] (\bmod 2)$. u ו- v שייכים לאותו רכיב קשירות מאחר ויש ביניהם קשת. נסמן ב- s את הצומת שבהרצת ה-BFS ממנו נקבעו הערכים $d[v], d[u]$. אזי לפי נכונות BFS ערכים אלה מייצגים את אורכי המסלולים הקצרים ביותר מ- s ל- v ומ- s ל- u. נמשיך כמו בסעיף הקודם: קיים מעגל C המורכב ממסלול קצר ביותר בין s ו- u, מהקשת (u,v) וממסלול קצר ביותר בין v ל- s שאורכו $d[v]+d[u]+1$. מאחר ול- $d[v]$ ו- $d[u]$ אותה זוגיות, אורכו של C אי-זוגי ולכן G אינו דו-צדדי.

ד. נסתכל על הגרף G בו כל צומת מייצג תא ושני צמתים שכנים אם התאים המתאימים להם שכנים. נשים לב שכל קשת ב- G מתאימה לחצייה של ישר אחד בדיוק מצידו האחד לצידו השני. נסתכל על כל הקשתות במעגל C ב- G המתאימות לחצייה של ישר ℓ. מספר הקשתות הללו הוא בהכרח זוגי, אחרת המעגל היה מתחיל ומסתיים בצדדים שונים של ℓ. נסיק מכך ש- C מעגל זוגי, כלומר G אינו מכיל מעגלים אי-זוגיים ולכן לפי הסעיפים הקודמים הינו 2-צביע. נסיק מכך שהתאים ניתנים לצביעה חוקית ב-2 צבעים משום שיחס שכנות ב- G מקביל ליחס שכנות בין התאים במישור.

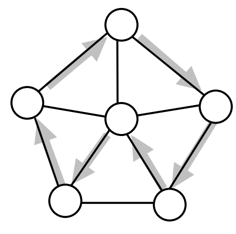
<u>שאלה 5</u>

א. הטענה נכונה. נניח בשלילה שהתקבלו שני עלים u ו- v. נניח, בה"כ, כי u התגלה לפני v. אזי ברגע גילוי u קיים מסלול לבן (דרך הקשת (u,v)) מ- u ל- v ולכן לפי משפט המסלול הלבן u יהיה אב קדמון של v, בסתירה לכך ש- u עלה.

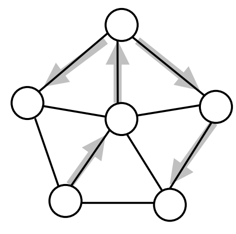
ב. הטענה נכונה. למשל, עבור ריצת DFS היוצאת "מרכז הגלגל" וסובבת סביבו. עם זאת, שימו לב שלא כל ריצת DFS על גלגל מניבה שרוך (ראו דוגמה).

ג. הטענה אינה נכונה. יהא v הצומת הראשון על "שפת הגלגל" שמתגלה. אזי שני שכניו על שפת הגלגל יהיו צאצאיו (לפי משפט המסלול הלבן), ולכן v אינו עלה.

ד. הטענה אינה נכונה:



W_6 מכיל מעגל המילטון



ריצת DFS על W_6 שאינה מניבה שרוך