

# 2008א - מטלת מנחה 12

## הצעה חלקית לפתרון הממן

### פתרון שאלה 1

ג. הוכח או הפרך :  $3^n = O(2^n)$ .

הפעם נאלץ להפריך... נראה שלא קיימים  $C > 0$  ו-  $n_0$  כך שלכל  $n > n_0$  מתקיים

$$3^n \leq C \cdot 2^n :$$

נבודד את  $C$  בצידו הימני של אי השוויון, ע"י הכפלת שני האגפים ב-  $\frac{1}{2^n}$  :

$$\frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \leq C$$

מכיוון שהביטוי  $\frac{3}{2}$  גדול מ-1, הרי שהביטוי מצידו השמאלי של אי השוויון גדל (מהר מאוד), ככל ש-  $n$  גדל, ולכן, לא קיים קבוע שיכול לחסום אותו מלמעלה.

ד. הוכח או הפרך :  $n^{0.4} = O(\lg^2 n)$ .

גם הפעם נפריך. נראה שלא קיימים  $C > 0$  ו-  $n_0$  כך שלכל  $n > n_0$  מתקיים :

$$n^{0.4} \leq C \lg^2 n$$

שוב נוציא  $\lg$  משני אגפי אי השוויון. אי השוויון ישמר, גם לאחר הפעלת הפונקציה  $\lg$  :

$$\lg n^{0.4} \leq \lg(C \lg^2 n)$$

$$\lg n^{0.4} \leq \lg C + \lg(\lg^2 n)$$

נסמן :  $C_1 = \lg C$  ונבודד את  $C_1$  בצד ימין של אי השוויון ע"י הפחתת  $\lg \lg^2 n$  משני

הצדדים:

$$\lg n^{0.4} - \lg \lg^2 n \leq C_1$$

$$\lg \frac{n^{0.4}}{\lg^2 n} \leq C_1$$

מכיוון שכל פונקציה פולינומיאלית חיובית גדלה מהר יותר מכל פונקציה פולי-

לוגריתמית –

הרי שהביטוי  $\frac{n^{0.4}}{\lg^2 n}$  יכול לגדול כרצוננו (אם כי לאט), ולכן גם הביטוי  $\lg \frac{n^{0.4}}{\lg^2 n}$  יוכל לגדול

כרצוננו, ולכן לא קיים קבוע שיחסום אותו מלמעלה.

### פתרון שאלה 3

- א. הפונקציה מחשבת  $a^n$  עבור  $n \geq 0$ .  
 ב. זמן הריצה  $T(n) = 2T(n/2) + O(1) = O(n)$   
 ג. ניתן לקרא פונקציה פעם אחת בלבד. 2 אפשרויות לכתיבה:

```

if n=0
then return 1
if n=1
then return a
if n mod 2 = 0
then
    x = F(a, n/2)
    return x*x
else
    x = F(a, (n-1)/2)
    return (a*x*x)
    
```

```

if n=0
then return 1
if n=1
then return a
if n mod 2 = 0
then return ( F(a*a, n/2)
else return (a * F(a*a, (n-1)/2) )
    
```

סיבוכיות:  $T(n) = T(n/2) + O(1) = O(\lg n)$

### פתרון שאלה 5

התייחס לאלגוריתם החלוקה של LOMUTO בשאלה 2-8 בספר הלימוד (עמ' 156, 155).  
 הפעל את LOMUTO-PARTITION על המערך B הנתון בשאלה 5א.

$B = \langle 30, 30, 30, 30, 13, 30, 30, 30, 30 \rangle$   
 $x \leftarrow 30$   
 $B = \langle \underbrace{30, 30, 30, 30}_{i, j}, 13, 30, 30, 30, 30 \rangle$   
 $B = \langle \underbrace{30, 30, 30, 30}_{i, j}, 13, 30, 30, 30, 30 \rangle$   
 $B = \langle 30, \underbrace{30, 30, 30, 30}_{i, j}, 13, 30, 30, 30, 30 \rangle$   
 $B = \langle 30, 30, \underbrace{30, 30, 13, 30}_{j, i}, 30, 30, 30, 30 \rangle$   
 $B = \langle 30, 30, 30, \underbrace{30, 13, 30, 30}_{j, i}, 30, 30, 30 \rangle$   
 $B = \langle 30, 30, 30, 30, \underbrace{13, 30, 30, 30}_{j, i}, 30, 30 \rangle$   
 $B = \langle 30, 30, 30, 30, 13, \underbrace{30, 30, 30}_{j, i}, 30 \rangle$   
 $B = \langle 30, 30, 30, 30, 13, 30, \underbrace{30, 30}_{j, i}, 30 \rangle$   
 $B = \langle 30, 30, 30, 30, 13, 30, 30, \underbrace{30}_{j, i} \rangle$

11/17 פרק 1-n.

ב. ענה על סעיפים ב'-ד' בשאלה 2-8 בספר.

Partition "נושע" בכל איבר פֿעד אונטן בלעז: לאחער שאיבר טופל אלס אונז  
 משיי האיינצקייט שטובריס על המערק - אלס יבול להשיע אלס האיבר שוב  
 (מערק אונז על partition). לכן, partition יבול להעביי איבר ממקומו - אלס  
 היינטיק פֿעד אונטן.

לעמטן : lomuto-Partition יבול להחלל לעפל באיבר אונז יונטן מעס אונטן.  
 לעמל מערק הבא :  $\langle 90, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30 \rangle$ , יועבר 90 לעמל מערק,  
 תיב שווא עובר מתא לתא. ציב אלס תאי המערק! (ביצקו!).  
 כלומר איבר יבול להיות מועבר ממקומו  $n-1$  פעמים ע"י  
 lomuto-Partition.

ג. lomuto-Partition מעצט מעבר על כל איברי המערק, כאשר עובר כל איבר.  
 במקרה הטוב, מבוצעות 4 פעולות.  
 מכאן עוצר העולל על lomuto-Partition הוא  $\Theta(n)$ .

ד. כפי שראינו בסעיף א' כאשר איברי הקלט שווים זה לזה, מחזירה lomuto-  
 Partition :  $n-1$ , וזהו המקרה הטוב עבור QuickSort. בשאלה 5 א', ראינו  
 e-partition מחזירה כאשר כל האיברים שווים זה לזה את אמצט תת  
 המערק - וזהו המקרה הטוב עבור QuickSort.  
 כלומר, החלפת partition ב-lomuto-partition תפחוק את המקרה שבו כל  
 האיברים שווים, ממקרה טוב על quickSort למקרה הטוב.  
 בשאר המקרים - אין שוני!