

## תשובה 1

כל קטע בדיאגרמת הסה של קבוצה סדורה-חלקית מייצג זוג איברים, שאחד מהם מכסה את השני. מהגדרת המושג "מכסה", קבוצה  $B \in P(A)$  מכסה קבוצה  $C \in P(A)$  לגבי רלצית ההכלה אם ורק אם קיים:

$C \subset B$  ואין אף קבוצה  $D \in P(A)$  המקיימת  $C \subset D \subset B$  (הכלות-ממש).

עבור  $B, C$  סופיות, קל לראות שתנאי זה מתקיים אם ורק אם קיים:

$C \subset B$  ומספר אברי  $C$  קטן ב-1 ממספר אברי  $B$ .

כעת, לקבוצה  $A$  בת  $n$  איברים יש  $\binom{n}{k}$  תת-קבוצות בנות  $k$  איברים.

אם  $B$  בת  $k$  איברים, יש לה  $k$  תת-קבוצות בנות  $k-1$  איברים (ע"י השמטת איבר אחד של  $B$  בכל פעם). נשים לב שטענה זו נכונה גם אם  $B$  ריקה.

לפיכך מספר הקטעים בדיאגרמת הסה של רלצית ההכלה מעל  $P(A)$  הוא  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ .

לפי שאלה 3.9 בעמ' 71 בספר הלימוד, סכום זה שווה  $2^{n-1} \cdot n$ .

## תשובה 2

הגורמים הראשוניים של 126 הם 2, 3, 7. החישוב דומה בכל לדוגמא שבספר הלימוד.

התוצאה היא 36.

## תשובה 3

הנה שוב החישוב של מספר הפונקציות של קבוצה סופית  $A$  על קבוצה סופית  $B$ . חישוב זה מופיע גם באתר הקורס. מקרה פרטי של שאלה זו מופיע בשאלה 4.14 בעמ' 89 בספר הלימוד.

מספר כל הפונקציות של  $A$  ל- $B$  הוא  $k^n$  (שאלה 1.32 עמ' 17 בספר הלימוד).

ב.ה.כ. נניח כי  $B = \{1, 2, \dots, k\}$ . עבור  $i = 1, \dots, k$  תהי  $F_i$  קבוצת כל הפונקציות של  $A$  ל- $B$  אשר המספר  $i$  אינו נמצא בתמונתן.

לכל  $i$ , לפי אותה נוסחה (מספר כל הפונקציות של קבוצה נתונה לאחרת),  $|F_i| = (k-1)^n$ .

יש  $k$  קבוצות  $F_i$ .

בדומה, עבור  $i \neq j$ ,  $|F_i \cap F_j| = (k-2)^n$ . יש  $\binom{k}{2}$  דרכים לבחור את זוג הקבוצות.

כללית, עלינו להתבונן בחיתוכים של  $j$  קבוצות  $F_i$  שונות. חיתוך כל  $j$  קבוצות שונות כאלו

מכיל  $(k-j)^n$  פונקציות. יש  $\binom{k}{j}$  דרכים לבחור  $j$  קבוצות  $F_i$  שונות.

מכאן, לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מספר כל הפונקציות של  $A$  על  $B$  הוא

$$k^n - k(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \binom{k}{3}(k-3)^n + \dots = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

א. לפי התוצאה הנ"ל, זהו מספר הפונקציות של קבוצה נתונה בת 2 איברים על קבוצה נתונה בת 5 איברים. מובן כי אין פונקציות כאלו !

ב. בדומה, כללית, אם  $n < k$  אז  $\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n = 0$ .

## תשובה 4

א. תהי  $B$  חלקית ל- $A$ . אם  $B \neq \emptyset$ , הרי הסכום הקטן ביותר האפשרי של איבריה הוא 4, המתקבל עבור  $B = \{4\}$ . הסכום הגדול ביותר האפשרי מתקבל עבור  $B = \{53, 54, \dots, 61\}$  ושווה 513. מספר הסכומים האפשריים לתת-קבוצות **לא-ריקות** של  $A$  הוא אפוא **לכל היותר**  $513 - 4 + 1 = 510$ . בצירוף הקבוצה הריקה: 511.

מצד שני, מספר הקבוצות החלקיות של  $A$  הוא  $2^9 = 512$ .

מכיוון שיש יותר קבוצות מסכומים אפשריים, הרי לפי עקרון שובך היונים, יש לפחות שתי קבוצות בעלות אותו סכום.

ב. בסעיף א קיבלנו שבהינתן  $A$  כמתואר, קיימות  $B, C \subseteq A$ ,  $B \neq C$ , בעלות אותו סכום. נזרוק מ- $B$  ומ- $C$  את כל האיברים השייכים לחיתוך שלהן, ונקבל שתי קבוצות שונות וזרות בעלות אותו סכום.

איתי הראבן