שאלה 1

(10נק') א. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y בהתאמה. הוכיחו כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda_X+\lambda_Y$.

(5 נק') ב. X_i מתפלג פואסונית עם פרמטר λ לכל $i=1,2,...,n$. X_i בלתי תלויים זה בזה. הוכיחו ש- $\sum_{i=1}^{n} X_i$ מתפלג פואסונית עם הפרמטר $n\lambda$.

(10 נק') ג. מספר כוסות הקפה שנמכרות בבית הקפה השכונתי מתפלג פואסונית עם תוחלת של 5 כוסות לעשר דקות.

1. מה ההסתברות שבין 8:00 ל- 8:20 ימכרו 8 כוסות קפה בבית הקפה וגם שבין 8:00 ל- 8:30 באותו היום, ימכרו 14 כוסות קפה בבית הקפה?
2. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר הדקות בין 8:00 ל- 8:20 בהן לא נמכרה אף כוס קפה בבית הקפה?

__פתרון:__

א. הפתרון באתר הקורס.

ב. נוכיח את הטענה באמצעות אינדוקציה. בסיס האינדוקציה הוא שהטענה נכונה עבור $n=2$ לפי סעיף א. הנחת האינדוקציה היא שהטענה נכונה עבור $n-1$. כלומר, $\sum_{i=1}^{n-1} X_i \sim Pois((n-1)\lambda)$ נוכיח את נכונות הטענה עבור n:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n-1} X_i + X_n \sim Pois((n-1)\lambda+\lambda=n\lambda) \square .$$

לפי הטענה בסעיף א.

ג. 1. נסמן ב- X את מספר כוסות הקפה הנמכרות בין 8:00 ל- 8:20 בבית הקפה.
נסמן ב- Y את מספר כוסות הקפה הנמכרות בין 8:00 ל- 8:30 בבית הקפה.
השאלה הנשאלת היא $P\{X=8 \cap Y=14\}$.
נסמן ב- Z את מספר כוסות הקפה הנמכרות בין 8:20 ל- 8:30 בבית הקפה.
שימו לב שמתקיים:

$$P\{X=8 \cap Y=14\} = P\{X=8 \cap Z=6\} = P\{X=8\}P\{Z=6\} .$$

$X \sim Pois(10), \quad Z \sim Pois(5)$ והם משתנים בלתי תלויים , כיוון שהם מוגדרים על זמנים לא חופפים.

ולכן, $\boxed{0.01646} = e^{-10}\dfrac{10^8}{8!}e^{-5}\dfrac{5^6}{6!} = P\{X=8\}P\{Z=6\}$.

2. ראשית, נחשב את הסיכוי שבדקה כלשהי בבית הקפה לא ימכרו כוסות קפה. נסמן ב- W את מספר כוסות הקפה הנמכרות בדקה כלשהי. $\Leftarrow W \sim Pois(\frac{5}{10} = 0.5)$

$P\{W=0\} = e^{-0.5}\dfrac{0.5^0}{0!} = 0.60653$. בין 8:00 ל- 8:20 ישנן 20 דקות בלתי תלויות במספר כוסות הקפה הנמכרות.

יהי R מספר הדקות בין 8:00 ל- 8:20 בהן לא נמכרה אף כוס קפה בבית הקפה. מתקיים ש- $R \sim B(20, 0.60653)$. נציב בנוסחאות התוחלת והשונות של ההתפלגות הבינומית ונקבל:

$$E[R] = 20 \cdot 0.60653 = \boxed{12.131} \quad Var(R) = 20 \cdot 0.60653 \cdot (1 - 0.60653) = \boxed{4.773}$$

שאלה 2

פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי X היא: $-1<x<0$, $f_X(x)=k\,e^{-x}$.

(6 נק׳) א. חשבו את k.

(6 נק׳) ב. חשבו את התוחלת של X.

(6 נק׳) ג. יהי $Y=X^2$. מצאו את פונקציית הצפיפות של Y.

(7 נק׳) ד. יהי X_1, X_2, ..., X_n מדגם מקרי מההתפלגות של X. חשבו את $P\{\min_{i=1,\dots,n} X_i \le -0.5\}$.

<u>פתרון</u>:

א. $$\int_{-1}^{0} f_X(x)\,dx = k\int_{-1}^{0} e^{-x}dx = -k\,e^{-x}\Big|_{-1}^{0} = k(e-1)=1 \qquad \Rightarrow \qquad k=\frac{1}{e-1}$$

ב. $$E[X]=\int_{-1}^{0} x\,f_X(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{xe^{-x}}{e-1}dx=\frac{-xe^{-x}}{e-1}\Big|_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}\frac{e^{-x}}{e-1}dx=\frac{-e}{e-1}-\frac{e^{-x}}{e-1}\Big|_{-1}^{0}$$

$$=\frac{-e}{e-1}-\frac{1}{e-1}+\frac{e}{e-1}=\frac{-1}{e-1}=-0.5820$$

ג. נמצא תחילה את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y. לכל $0<y<1$, מתקיים:

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le 0\}=\int_{-\sqrt{y}}^{0} f_X(x)\,dx$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{e^{-x}}{e-1}dx=-\frac{e^{-x}}{e-1}\Big|_{-\sqrt{y}}^{0}=\frac{e^{\sqrt{y}}-1}{e-1}$$

ולכן, לכל $0<y<1$, מתקיים: $f_Y(y)=\frac{e^{\sqrt{y}}}{e-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$

ד. נחשב תחילה את ההסתברות של המאורע $\{X>-0.5\}$. מקבלים:

$$P\{X>-0.5\} = \int_{-0.5}^{0} f_X(x)\,dx = \int_{-0.5}^{0}\frac{e^{-x}}{e-1}dx = \frac{-e^{-x}}{e-1}\Big|_{-0.5}^{0} = \frac{-1}{e-1}+\frac{\sqrt{e}}{e-1}=0.3775$$

מכאן, הואיל וה-X_i-ים בלתי-תלויים, מקבלים כי לכל $n=1,\dots,10$ מתקיים:

$$P\{\min_{i=1,\dots,n} X_i\le -0.5\}=1-P\{\min_{i=1,\dots,n} X_i>-0.5\}=1-P\{X_1>-0.5,\dots,X_n>-0.5\}$$

$$=1-P\{X_1>-0.5\}\cdot\ldots\cdot P\{X_n>-0.5\}=1-\left(\frac{\sqrt{e}-1}{e-1}\right)^n$$

שאלה 3

במרחב מדגם של ניסוי מקרי כלשהו נתונים שלושה מאורעות A , B ו- C .

נתון על המאורעות הללו כי-

$$P(A)=0.5 \quad P(B)=0.5 \quad P(C)=0.8 \quad P(A\cap C)=0.4$$

$$P(A\cap B\cap C^c)=0.05 \, .$$

C ו- B בלתי תלויים וכמו כן B ו- A בלתי תלויים בתנאי C .

(7 נק') א. חשבו את $P(A\cap B)$.

(6 נק') ב. האם שלושת המאורעות A , B ו- C בלתי תלויים זה בזה?

(6 נק') ג. חשבו את $P(A\cup B\cup C)$.

(6 נק') ה. חוזרים על הניסוי המתואר בשאלה באופן בלתי תלוי זה בזה עד הפעם הראשונה שמתקיים $A^c\cup B^c$. מה ההסתברות שיתבצעו לכול היותר 7 חזרות?

<u>פתרון:</u>

א. המאורעות B ו- A בלתי-תלויים בתנאי C , לכן:

$$P(A\cap B|C)=P(A|C)P(B|C)\Rightarrow \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)}=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}\frac{P(B\cap C)}{P(C)}\Rightarrow$$

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{P(A\cap C)P(B\cap C)}{P(C)}$$

C ו- B בלתי תלויים ולכן מתקיים ש: $P(B\cap C)=P(B)P(C)=0.5\cdot 0.8=0.4$.

ונתון ש: $P(A\cap C)=0.4$. ולכן מתקיים ש:

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{P(A\cap C)P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{0.4\cdot 0.4}{0.8}=0.2 \, .$$

$$P(A\cap B)=P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap C^c)=0.2+0.05=\boxed{0.25} \, .$$

ב. כדי ששלושת המאורעות יהיו בלתי תלויים צריך להראות שכול זוג בלתי תלוי זה בזה וגם שמתקיים $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$.

1. C ו- B בלתי תלויים. נתון.

2. $P(A\cap B)=0.25=P(A)P(B)=0.5\cdot 0.5$ ולכן המאורעות B ו- A בלתי-תלויים.

3. $P(A\cap C)=0.4=P(A)P(C)=0.8\cdot 0.5$ ולכן המאורעות C ו- A בלתי-תלויים.

4. $P(A\cap B\cap C)=0.2=P(A)P(B)P(C)=0.8\cdot 0.5\cdot 0.5$.

מסקנה: שלושת המאורעות A , B ו- C בלתי תלויים.

ג. $P(A\cup B\cup C)=1-P(A^c\cap B^c\cap C^c)$. כיוון שהראנו בסעיף הקודם ששלושת המאורעות

A, B ו- C בלתי תלויים, אזי המשלימים שלהם הם בלתי תלויים ולכן,

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(A^c\cap B^c\cap C^c)=1-P(A^c)P(B^c)P(C^c)=$$
$$1-0.2\cdot 0.5\cdot 0.5=\boxed{0.95}$$

ד. בתחילה נחשב את הסיכוי למאורע $A^c\cup B^c$

$P(A^c\cup B^c)=1-P(A\cap B)=1-0.25=0.75$.

נסמן ב- X את מספר החזרות לניסוי עד קבלת $A^c\cup B^c$ בניסוי בודד.

מתקיים ש: $X\sim G(0.75)$.

$$P(X\le 7)=1-P(X>7)=1-(1-0.75)^7=1-0.25^7=\boxed{0.99994}$$

שאלה 4

הפקיד קירק מכניס n מכתבים ורודים ו n מכתבים כחולים (סך הכל $2n$ מכתבים) ל- n מעטפות. על כל מעטפה רשומה כתובת שונה. על כל אחד מהמכתבים רשומה אחת מ- n הכתובות, כאשר לכל כתובת מיועדים בדיוק 2 מכתבים, אחד ורוד ואחד כחול. קירק שהוא פקיד מפוזר, בוחר באקראי איזה מכתבים להכניס לכל מעטפה, ורק מקפיד להכניס לכל מעטפה מכתב אחד ורוד ומכתב אחד כחול.

נסמן ב- X את מספר המעטפות שהכתובת על לפחות אחד מהמכתבים בתוכה זהה לכתובת המעטפה.

(5נק') א. חשבו את $E[X]$.

(20 נק') ב. עבור $n=10$.

1. חשבו את $Var(X)$.

2. נסמן ב- Y את מספר המעטפות שהכתובת על אף אחד מהמכתבים בתוכן זהה לכתובת המעטפה. מצאו את התוחלת והשונות של Y.

א. נגדיר עבור $1 \le i \le n$:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{At least one of the letters of envelope i is inside the correct envelope} \\ 0 & \text{Othewise} \end{cases}$$

$A_{i,1} =$ The first letter of envelope i is inside the correct envelope

$A_{i,1} =$ The second letter of envelope i is inside the correct envelope

מתקיים ש :

$$E[X_i] = P(X_i = 1) = P(A_{i,1} \cup A_{i,2}) =$$
$$= P(A_{i,1}) + P(A_{i,2}) - P(A_{i,1} \cap A_{i,2}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n^2}$$

ולסיכום :

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n \cdot \frac{2n-1}{n^2} = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

ב.

1. עבור $n=10$ חשבו את $Var(X)$.

ראשית, עבור $n=10$ מתקבל ש

$$E[X_i] = P(X_i = 1) = \frac{2 \cdot 10 - 1}{10^2} = \frac{19}{100} = 0.19$$
$$Var(X_i) = P(X_i = 1)\left(1 - P(X_i = 1)\right) = 0.19(1 - 0.19) = 0.1539$$

כמו כן :

$$P\left(X_i=1,X_j=1\right)=1-P\left(\left(X_i=0\right)\cup\left(X_j=0\right)\right)=$$
$$=1-\left[P\left(X_i=0\right)+P\left(X_j=0\right)-P\left(X_i=0,X_j=0\right)\right]$$

$$P\left(X_j=0\right)=P\left(X_i=0\right)=1-P\left(X_i=1\right)=0.81$$

(ואפשר גם $P\left(X_i=0\right)=P\left(\overline{A_{i,1}}\cap\overline{A_{i,2}}\right)=\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}=0.81$)

כדי לחשב את $P\left(X_i=0,X_j=0\right)$ נשים לב שיש כמה מקרים :

- המעטפה ה-i מכילה גם את המכתב הוורוד ה-j וגם את המכתב הכחול ה-j. במקרה זה ברור שגם המעטפה ה-j איננה מכילה אף אחד מהמכתבים שלה. הסתברות :
$$\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=0.01$$
- המעטפה ה-i מכילה את המכתב הוורוד ה-j ומכתב כחול שאיננו המכתב הכחול ה-i או ה-j. המעטפה ה-j איננה מכילה את המכתב הוורוד שלה, כדי ש $X_j=0$ נדרוש שתכיל מכתב שאיננו המכתב הכחול ה-j ואיננו המכתב שנכנס למעטפה הקודמת. הסתברות : $\frac{1}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{8}{9}=\frac{64}{900}$.
- המעטפה ה-i מכילה את המכתב הכחול ה-j ומכתב ורוד שאיננו המכתב הוורוד ה-i או ה-j. באופן דומה נקבל את ההסתברות $\frac{1}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{8}{9}=\frac{64}{900}$.
- המעטפה ה-i מכילה שני מכתבים שאינם המכתבים ה-i או ה-j. כדי ש $X_j=0$ נדרוש שגם מעטפה זו תכיל מכתבים השונים מהמכתבים המיועדים לה והמכתבים שנכנסו למעטפה הקודמת. נקבל את ההסתברות : $\frac{8}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}=\frac{4096}{8100}$.

סך הכל נקבל :

$$P\left(X_i=0,X_j=0\right)=\frac{1}{100}+\frac{64}{900}+\frac{64}{900}+\frac{4096}{8100}=\frac{5329}{8100}$$

ומכאן ש :

$$P\left(X_i=1,X_j=1\right)=1-\left(0.81+0.81-\frac{5329}{8100}\right)=0.0379$$

$$COV\left(X_i,X_j\right)=P\left(X_i=1,X_j=1\right)-P\left(X_i=1\right)P\left(X_j=1\right)=$$
$$=0.0379-0.19^2=0.0018$$

ולסיכום :

$$Var\left(X\right)=Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=10\cdot 0.1539+2\binom{10}{2}\cdot 0.0018=1.701$$

2. מתקיים ש: $Y=10-X$. נשתמש בתכונות התוחלת והשונות ונקבל:

$$E[Y]=E[10-X]=10-E[X]=10-1.9=\boxed{8.1}$$

$$Var(Y)=Var(10-X)=(-1)^2Var(X)=Var(X)=\boxed{1.701}$$

שאלה 5

נפח החלב בקרטון חלב מתפלג נורמלית עם תוחלת של 1000 מ"ל וסטיית תקן של 8 מ"ל. נפח החלב בקרטונים שונים בלתי תלוי זה בזה.

(6 נק') א. מהו המספר M כך שבהסתברות של 5% נפח החלב במ"ל יהיה נמוך מ- M ?

(6 נק') ב. מה ההסתברות שנפח החלב בקרטון חלב יהיה מעל 1016 מ"ל או מתחת ל- 996 מ"ל?

(6 נק') ג. נדגמו 13 קרטוני חלב אקראיים. נסמן ב- X_1 - מספר קרטוני החלב במדגם עם נפח הגדול מ-1016 מ"ל. נסמן ב- X_2 - מספר קרטוני החלב במדגם עם נפח הגדול מ-996 מ"ל וקטן מ-1016 מ"ל. נסמן ב- X_3 - מספר קרטוני החלב במדגם עם נפח הקטן מ-996 מ"ל. מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של (X_1, X_2, X_3) .

(7 נק') ד. נדגמו 4 קרטוני חלב אקראיים. מה ההסתברות שנפח החלב הממוצע לקרטון במדגם יהיה לכל היותר 998 מ"ל?

<u>פתרון :</u>

נסמן ב- X את נפח קרטון חלב במ"ל. נתון ש : $X \sim N(1000, 8^2)$.

א. נסמן ב- M את נפח החלב במ"ל שבהסתברות של 5% נפח החלב בקרטון כלשהו יהי נמוך ממנו. M מקיים $P\{X < M\} = 0.05$.

$$P\{X < M\} = \Phi\left\{\frac{M - 1000}{8}\right\} = 0.05$$

$$\Rightarrow \frac{M - 1000}{8} = -1.645 \Rightarrow \boxed{M = 986.84}$$

ב.

$$P\{X < 996 \cup X > 1016\} = P\{X < 996\} + P\{X > 1016\} =$$

$$P\left\{Z < \frac{996 - 1000}{8}\right\} + P\left\{Z > \frac{1016 - 1000}{8}\right\}$$

$$= \Phi(-0.5) + 1 - \Phi(2) = 1 - \Phi(0.5) + 1 - \Phi(2) = 2 - (0.6915 + 0.9772) = \boxed{0.3313}$$

ג.

$$(X_1, X_2, X_3) \sim Multi(13,\ p_1 = 1-0.9772,\ p_2 = 1-0.3313,\ p_2 = 1-0.6915) \Rightarrow$$
$$(X_1, X_2, X_3) \sim Multi(13,\ p_1 = 0.0228,\ p_2 = 0.6687,\ p_2 = 0.3085) \Rightarrow$$
$$\boxed{\begin{array}{l} P\left\{X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k\right\} = \dfrac{13!}{i!\,j!\,k!} \cdot 0.0228^i \cdot 0.6687^j \cdot 0.3085^k \\ i = 1,2,\ldots,13 \quad j = 13-i,\ldots,13 \quad k = 13-i-j,\ldots,13 \end{array}}$$

ד. כיוון ש- $X \sim N(1000, 8^2)$ ובוצע מדגם מקרי בגודל 4 מתקיים ש: $\bar{X} \sim N(1000, \frac{8^2}{4})$.

$$P\left\{\bar{X} < 998\right\} = P\left\{Z < \frac{998-1000}{8/\sqrt{4}}\right\} = \Phi(-0.5) = 1-\Phi(0.5) = 1-0.6915 = \boxed{0.3085}$$