ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20425

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חוברת הקורס - אביב 2020ב

כתב: ברק קנדל

מרץ 2020 - סמסטר אביב - תש"פ

תוכן העניינים

נספחים

אל הסטודנטים,

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב".

בחוברת זו תמצאו תיאור, מלא ככל האפשר, של הקורס וכן פרטים על כלל פעילויותיכם במהלך הלימודים. רצוי שתראו בה מעין מדריך אישי, שתפקידו להבהיר לכם עניינים שונים. קראו בעיון רב את כל הסעיפים שלהלן, לפני שתתחילו בלימודיכם.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: http://www.openu.ac.il/shoham .

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

בכל בעיה שמתעוררת אפשר לפנות למרכז ההוראה בקורס ברק קנדל, בימי ד' בין השעות 13:00 -15:00 בטלפון 09-7781428, בפקס 09-7780631 או בדואר האלקטרוני, לכתובת: kandell@openu.ac.il .

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה,

צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20425 / 2020ב)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
1	20.03.2020-15.03.2020	1			
2	27.03.2020-22.03.2020	2			
3	03.04.2020-29.03.2020	2-3			
4	10.04.2020-05.04.2020 (ד ערב פסח) (ה-ו פסח)	3		01 05.04.2020	
5	17.04.2020-12.04.2020 (א-ד פסח)	3-4			
6	24.04.2020-19.04.2020 (ג יום הזכרון לשואה)	3-4			
7	01.05.2020-26.04.2020 (ג יום הזיכרון, ד יום העצמאות)	4			11 26.04.2020
8	08.05.2020-03.05.2020	4-5			
9	15.05.2020-10.05.2020 (ג ל"ג בעומר)	5		02 10.5.2020	
10	22.05.2020-17.05.2020	5-6			
11	29.05.2020-24.05.2020 (ו שבועות)	6			12 24.05.2020
12	05.06.2020-31.05.2020	6-7			
13	12.06.2020-07.06.2020	7			13 07.06.2020
14	19.06.2020-14.06.2020	7			
15	26.06.2020-21.06.2020	8			14 21.06.2020

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* *התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

נקודות זכות

הקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב" מקנה למסיימים אותו 4 נקודות זכות.

הדרישות לקבלת 4 נקודות זכות הן:

א. הגשת מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות.

ב. ציון מינימלי 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון מינימלי 60 בקורס.

הגשת מטלות

הקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב" כולל חוברת קורס ובה 6 מטלות להגשה, המיועדות לתרגול רוב נושאי הלימוד של הקורס, ואוסף שאלות לתרגול עצמי של נושאי הלימוד של פרק 8.

עליכם להגיש מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות.

המשקל של כל **מטלת מנחה הוא 6 נקודות** והמשקל של כל **מטלה ממוחשבת הוא 3 נקודות**.

המועד האחרון להגשה של כל מטלה מופיע בכותרתה.

שימו לב, **בקורס זה לא ניתנות מטלות השלמה!**

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1 ו- 2

קומבינטוריקה; חישובי הסתברויות קומבינטוריים

מספר השאלות: 20 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2020 ב **מועד אחרון להגשה:** 05.04.2020

שלחו את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת שאילתא בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

שאלות 1-4 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתון לוח משבצות בגודל 7×7 .

מפזרים באקראי על הלוח 29 דסקיות זהות, כך שבכל משבצת יש לכל היותר דסקית אחת.

<u>שאלה 1</u>

כמה אפשרויות פיזור שונות קיימות?

א. 2^{29} ב. $\frac{49!}{20!}$ ג. $\frac{49!}{29!}$ ד. $\binom{49}{29}$

<u>שאלה 2</u>

בכמה מאפשרויות הפיזור השונות תהיינה בדיוק שתי שורות ריקות?

א. $\binom{7}{2}\cdot 7^5\cdot\binom{30}{24}$ ב. $\binom{7}{2}\binom{35}{29}$ ג. $\binom{7}{2}\binom{35}{29}\Big/5!$ ד. $\binom{7}{2}\binom{29}{5}\binom{30}{24}$

<u>שאלה 3</u>

מהי ההסתברות שהשורה הראשונה **לא** תהיה ריקה מדסקיות?

א. $\frac{29\cdot\binom{48}{28}}{\binom{49}{29}}$ ב. $1-\frac{28!}{29!}$ ג. $\frac{7\cdot\binom{48}{28}}{\binom{49}{29}}$ ד. $1-\frac{\binom{42}{29}}{\binom{49}{29}}$

<u>שאלה 4</u>

מהי ההסתברות שתיווצר על הלוח לפחות שורה אחת מלאה בדסקיות?

א. 0.1248 ב. 0.0775 ג. 0.0589 ד. 0.1272

שאלות 5-8 מתייחסות לבעיה הבאה:

מחלקים באופן אקראי 7 בלונים **שונים** ל- 4 ילדים.

שאלה 5

כמה אפשרויות חלוקה קיימות?

א. $7!$ ב. $4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot4^3$ ג. 7^4 ד. 4^7

שאלה 6

בכמה מהחלוקות יש בדיוק שני ילדים שאינם מקבלים אף בלון?

א. 768 ב. 756 ג. 126 ד. 128

שאלה 7

בכמה מהחלוקות יש שני ילדים שמקבלים 2 בלונים, וילד אחר שמקבל את 3 הנותרים?

א. 320 ב. 5,040 ג. 2,520 ד. 210

שאלה 8

בכמה מהחלוקות כל אחד משלושה ילדים מקבל 2 בלונים, וילד רביעי מקבל בלון אחד?

א. 780 ב. 15,120 ג. 2,520 ד. 630

שאלות 9-11 מתייחסות לבעיה הבאה:

מחלקים באופן אקראי 20 בלונים **זהים** ל- 6 ילדים.

שאלה 9

כמה אפשרויות חלוקה קיימות?

א. $\binom{26}{20}$ ב. $\binom{25}{5}$ ג. 6^{20} ד. 20^6

שאלה 10

בכמה מהחלוקות יש בדיוק שני ילדים שאינם מקבלים אף בלון?

א. 14,535 ב. 34,500 ג. 2,300 ד. 969

שאלה 11

בכמה מהחלוקות יש שלושה ילדים שכל אחד מהם מקבל 6 בלונים וילד נוסף שמקבל 2 בלונים?

א. $\binom{6}{3}\cdot 3$ ב. $\binom{20}{6}\binom{14}{6}\binom{8}{6}\binom{6}{3}\cdot 3$ ג. $\binom{20}{6}\binom{14}{6}\binom{8}{6}\cdot\frac{6!}{2!}$ ד. $\binom{6}{4}\cdot 4!$

שאלות 12-13 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתונה כיתה של 20 סטודנטים: 8 מת"א, 4 מירושלים, 4 מחיפה ו- 4 מבאר-שבע.

בוחרים באקראי קבוצה של 6 סטודנטים מהכיתה.

<u>שאלה 12</u>

מהי ההסתברות שייבחרו לפחות 2 סטודנטים מבין אלו שמגיעים מירושלים או מבאר-שבע?

א. $\frac{56}{380}$ ב. $\frac{16}{380}$ ג. $\frac{85,680}{\binom{20}{6}}$ ד. $\frac{31,500}{\binom{20}{6}}$

<u>שאלה 13</u>

מהי ההסתברות שהסטודנטים הנבחרים מגיעים מ- 3 ערים שונות,

כך שמכל אחת מ- 3 הערים הללו יש בדיוק 2 סטודנטים נבחרים?

א. 0.0316 ב. 0.0780 ג. 0.0836 ד. 0.0056

שאלות 14-15 מתייחסות לבעיה הבאה:

לעידן 30 כדורים: 10 כחולים, 5 שחורים ו- 15 אדומים. כדורים מאותו הצבע זהים זה לזה.

עידן מחלק באקראי את הכדורים ל- 3 קבוצות **לא ריקות** ו<u>ממוספרות</u> .

(כלומר, ניתן להבחין בין הקבוצות וגודלן אינו ידוע מראש.)

<u>שאלה 14</u>

בכמה מאפשרויות החלוקה נוצרת קבוצה שיש בה בדיוק 10 כדורים: 5 שחורים ו- 5 אדומים?

א. 363 ב. 357 ג. 54 ד. 60

<u>שאלה 15</u>

בכמה מאפשרויות החלוקה יש בכל אחת מהקבוצות לפחות 3 כדורים אדומים?

א. 38,808 ב. 6,750 ג. 431,200 ד. 24,000

שאלות 16-20 מתייחסות לבעיה הבאה:

אם לחמישה ילדים מחלקת לילדיה 5 כובעים לחורף בצבעים שונים ו- 5 צעיפים באותם הצבעים.

החלוקה אקראית, וכל ילד מקבל כובע וצעיף.

<u>שאלה 16</u>

מהי ההסתברות שכל הילדים יקבלו כובע וצעיף תואמים (כלומר, באותו הצבע)?

א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{120}$ ג. $\frac{1}{24}$ ד. $\frac{1}{3,125}$

<u>שאלה 17</u>

מהי ההסתברות שבדיוק שלושה ילדים יקבלו כובע וצעיף תואמים?

א. $\frac{3}{125}$ ב. $\frac{1}{60}$ ג. $\frac{1}{125}$ ד. $\frac{1}{12}$

<u>שאלה 18</u>

מהי ההסתברות שלפחות ילד אחד יקבל כובע וצעיף תואמים?

א. $\frac{11}{30}$ ב. $\frac{1}{25}$ ג. $\frac{1}{5}$ ד. $\frac{19}{30}$

<u>שאלה 19</u>

מהי ההסתברות שהילד הבכור יקבל כובע וצעיף תואמים והילד הצעיר יקבל כובע צהוב?

א. $\frac{1}{20}$ ב. $\frac{1}{25}$ ג. $\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{10}$

<u>שאלה 20</u>

מהי ההסתברות שהילד הבכור יקבל לפחות פריט אדום אחד?

א. $\frac{8}{25}$ ב. $\frac{1}{25}$ ג. $\frac{9}{25}$ ד. $\frac{10}{25}$

מטלת מנחה (ממ״ן) 11

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 2 ו- 3

דיאגרמת ון וטענות הסתברות בסיסיות; הסתברות מותנית

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2020 ב **מועד אחרון להגשה:** 26.04.2020

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (30 נקודות)

לכלי רכב מסוים יש 3 גלגלים: שניים אחוריים – ימני ושמאלי – ואחד קדמי.

לכלי הרכב הזה אסור לעלות על הכביש, אם לחץ האוויר אינו תקין לפחות בשניים מגלגליו.

ידוע כי עבור כלי רכב מסוג זה מתקיימים התנאים הבאים –

לחץ האוויר תקין בכל אחד (בנפרד) מגלגליו האחוריים בהסתברות 0.85;

לחץ האוויר אינו תקין בשני הגלגלים האחוריים (בו-זמנית) בהסתברות 0.06;

לחץ האוויר תקין לפחות באחד מהגלגלים בהסתברות 0.96;

ההסתברות שלחץ האוויר אינו תקין בגלגל הקדמי וגם בגלגל האחורי-ימני שווה להסתברות שלחץ האוויר אינו תקין בגלגל הקדמי וגם בגלגל האחורי-שמאלי;

ההסתברות שלחץ האוויר אינו תקין רק בגלגל האחורי הימני שווה ל- ¾ מההסתברות שלחץ האוויר אינו תקין רק בגלגל הקדמי;

אם לחץ האוויר בגלגל האחורי הימני אינו תקין, ההסתברות שלרכב אסור לעלות על הכביש היא 0.6.

(10 נק׳) א. הגדר <u>שלושה</u> מאורעות מתאימים לבעיה המתוארת בשאלה, צייר עבורם דיאגרמת ון, המתארת את הבעיה, ומלא בשטחים החלקיים שנוצרים בדיאגרמה את כל ההסתברויות <u>הנובעות</u> מנתוני הבעיה (ישירות או באמצעות חישוב).

הסבר <u>בקצרה</u> את דרך חישוב ההסתברויות שרשמת בדיאגרמה, **באמצעות טענות הסתברות בסיסיות**.

בכל אחד מהסעיפים שלהלן בטא את המאורע המתואר בסעיף <u>באמצעות המאורעות שהגדרת בסעיף א</u>.

(5 נק׳) ב. מהי ההסתברות שלחץ האוויר אינו תקין בגלגל הקדמי וגם בגלגל האחורי-ימני?

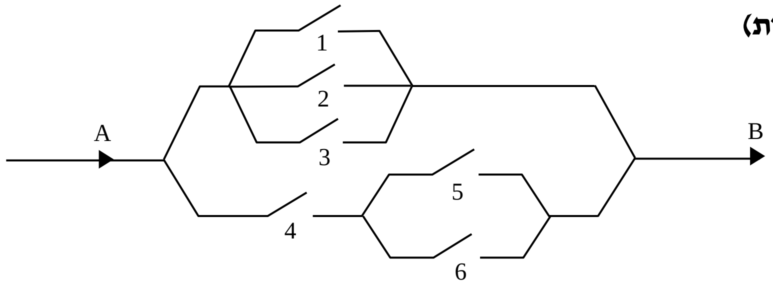
(5 נק׳) ג. מהי ההסתברות שלחץ האוויר אינו תקין רק בגלגל הקדמי?

(5 נק׳) ד. מהי ההסתברות שלרכב מותר לעלות על הכביש?

(5 נק׳) ה. בהינתן שלפחות באחד מגלגלי הרכב לחץ האוויר אינו תקין, מהי ההסתברות שיוכל לעלות על הכביש?

שאלה 2 (25 נקודות)

נתון המעגל הבא:



מצבי המתגים 1, 2 ו-3 בלתי-תלויים זה בזה וכל אחד מהם **סגור** בהסתברות 0.6 (ואז **יכול לעבור בו זרם**);

מצבי המתגים 1, 2 ו-3 בלתי-תלויים במצבי המתגים 4, 5 ו-6;

אם מתג 4 **סגור**, אז <u>לפחות</u> אחד ממתגים 5 ו-6 **סגור** בהסתברות 0.8;

מתג 4 **סגור** בהסתברות 0.9;

אם מתג 5 **פתוח**, אז <u>לפחות</u> אחד מהמתגים 4 ו-6 **פתוח** בהסתברות 0.3.

(8 נק') א. מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?

(8 נק') ב. אם מתג 5 פתוח, מהי ההסתברות ש**<u>לא</u>** עובר זרם מ-A ל-B?

(9 נק') ג. האם המאורעות: "מתג 4 פתוח" ו- "במעגל עובר זרם" בלתי-תלויים זה בזה?
הוכח את טענתך.

שאלה 3 (25 נקודות)

בכיתה 8 בנים ו- 8 בנות. אהוד ואפרת הם שניים מתלמידי הכיתה.

מחלקים באקראי את הכיתה ל- 8 זוגות.

(8 נק') א. מהי ההסתברות שייווצרו בדיוק שני זוגות מעורבים, המורכבים מבן ובת?

(8 נק') ב. אם נוצרו בדיוק שני זוגות מעורבים (המורכבים מבן ובת),
מהי ההסתברות שאהוד ואפרת לא יהיו באותו הזוג?

(9 נק') ג. בוחרים באקראי 5 ילדים מתוך 20 ילדי הכיתה.
אם אפרת נבחרה, מהי ההסתברות שאהוד לא נבחר?

שאלה 4 (20 נקודות)

מטוס מפציץ נשלח לפגוע במטרה מסוימת.

ההסתברות שהמטוס יופל לפני הגיעו למטרה היא 0.4,

ההסתברות שפצצה – שיטיל מטוס שהגיע – תפגע במטרה היא 0.5,

וההסתברות שהמטרה תושמד כתוצאה מפגיעת פצצה – שהטיל מטוס שהגיע – היא 0.8.

חשב את ההסתברות שהמטרה תושמד, אם –

(6 נק') א. נשלח מטוס אחד המטיל פצצה אחת;

(7 נק') ב. נשלחים 5 מטוסים שכל אחד מהם מטיל פצצה אחת;

(7 נק') ג. נשלח מטוס אחד המטיל 5 פצצות.

הנח שהמטוסים פועלים באופן בלתי-תלוי זה בזה, ושאין תלות בין פצצות המשוגרות מאותו מטוס.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: **20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב**

חומר הלימוד למטלה: פרק 4

מספר השאלות: 20 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2020 ב **מועד אחרון להגשה:** 10.05.2020

שלחו את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת שאילתא בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

שאלות 1-4 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתונה חפיסה של 20 קלפים: 5 קלפים ירוקים, 5 קלפים צהובים, 5 קלפים אדומים ו-5 קלפים כחולים.

בוחרים קלף אחר קלף מן החפיסה עד שלראשונה מתקבל קלף שצבעו שונה מצבע הקלף הראשון שנבחר.

יהי X משתנה מקרי, המוגדר על-ידי מספר הקלפים שנבחרו במהלך הניסוי (מתחילתו ועד לסיומו).

<u>שאלה 1</u>

אם בחירת הקלפים נעשית **<u>ללא החזרה</u>**, מהי $P\{X=4\}$?

א. $\frac{10}{323}$ ב. $\frac{140}{969}$ ג. $\frac{3}{64}$ ד. $\frac{9}{64}$

<u>שאלה 2</u>

אם בחירת הקלפים נעשית **<u>ללא החזרה</u>**, מהי השונות של X ?

א. 0.5251 ב. 3.0882 ג. 0.2757 ד. 5.3382

<u>שאלה 3</u>

אם בחירת הקלפים נעשית **<u>עם החזרה</u>**, מהי $P\{X=4\}$?

א. $\frac{3}{256}$ ב. $\frac{12}{64}$ ג. $\frac{3}{64}$ ד. $\frac{9}{64}$

<u>שאלה 4</u>

אם בחירת הקלפים נעשית **<u>עם החזרה</u>**, מהי השונות של X ?

א. $\frac{4}{9}$ ב. $\frac{13}{9}$ ג. $\frac{4}{3}$ ד. $\frac{7}{3}$

שאלות 5-7 מתייחסות לבעיה הבאה:

נניח שמופעים של מאורע מסוים מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של תהליך פואסון עם קצב של 24 מופעים לשעה.

<u>שאלה 5</u>

מהי ההסתברות שבמרווח-זמן שאורכו 5 דקות יתרחשו לפחות 2 מופעים של המאורע?

א. $3e^{-2}$ ב. $1-5e^{-2}$ ג. $1-3e^{-2}$ ד. $2e^{-2}$

<u>שאלה 6</u>

ידוע שבמשך 5 דקות התרחשו לפחות 2 מופעים. מהי ההסתברות שבזמן זה קרו בדיוק i $(i \geq 2)$ מופעים?

א. $\frac{2^i}{(e^2-3)i!}$ ב. $2e^{-2}$ ג. $\frac{2^i e^{-2}}{i!}$ ד. $\frac{2^{(i-2)} e^{-2}}{(i-2)!}$

<u>שאלה 7</u>

נניח שמתבוננים על מרווח-זמן שאורכו שעה אחת, ומחלקים אותו לארבעה חלקים שווים, שאין ביניהם חפיפה ושאורך כל אחד מהם רבע שעה.

אם במרווח-זמן זה (שאורכו שעה אחת) מתרחשים בדיוק 20 מופעים של המאורע,

מהי ההסתברות שבכל רבע שעה (לפי החלוקה המצוינת לעיל) מתרחשים בדיוק 5 מופעים (מתוך ה- 20)?

א. 0.000665 ב. 0.010671 ג. 0.015966 ד. 0.1094

שאלות 8-12 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתונה קבוצה של 16 אנשים – 8 גברים ו- 8 נשים.

מחלקים באופן אקראי את הקבוצה ל- 8 זוגות.

על כל אחד מהזוגות מוטלת משימה זהה.

כל אחד מהזוגות עומד במשימה בהסתברות 0.8, ואין תלות בין הזוגות.

<u>שאלה 8</u>

יהי X מספר הזוגות (מתוך ה- 8) המורכבים משני גברים. מהי $P\{X=3\}$?

א. 0.194 ב. 0.208 ג. 0.059 ד. 0.174

<u>שאלה 9</u>

יהי X מספר הזוגות (מתוך ה- 8) המורכבים משני גברים. מהי התוחלת של X ?

א. 2 ב. 1.8667 ג. 1.9333 ד. 2.0667

<u>שאלה 10</u>

מהי שונות מספר <u>הזוגות</u> שמבצעים את המשימה בהצלחה?

א. 6.4 ב. 1.28 ג. 3.84 ד. 2.56

<u>שאלה 11</u>

מהי שונות מספר <u>האנשים</u> בקבוצה הכוללת שמבצעים את המשימה בהצלחה?

א. 6.4 ב. 3.7333 ג. 5.12 ד. 2.56

<u>שאלה 12</u>

לפני ביצוע המשימות, לכל זוג ניתן סכום של 100 ש״ח.

אם הזוג עומד בהצלחה במשימה, הוא מקבל 100 ש״ח נוספים;

אם לא – הוא משלם 50 ש״ח מהסכום שקיבל.

מהי שונות סכום הכסף <u>הכולל</u> שיש בידי שמונת הזוגות, בתום ביצוע המשימות?

א. 187.5 ב. 29,200 ג. 28,800 ד. 1,360

שאלות 13-15 מתייחסות לבעיה הבאה:

יהי X משתנה מקרי, שפונקציית ההסתברות שלו נתונה על-ידי: $i=1,2,...,20 \quad , \quad P\{X=i\}=ci^2$

בהגרלה, שנערכת מדי יום, משתתפים בכל פעם שהיא נערכת X אנשים שונים.

בדיוק אחד **ממשתתפי** ההגרלה (בלי תלות במספר המשתתפים בה) זוכה בפרס של 2,000 ש״ח,
ולכל המשתתפים בהגרלה יש סיכויים שווים לזכות בפרס זה.

<u>שאלה 13</u>

מהו הערך של c ?

א. $\frac{1}{210}$ ב. $\frac{1}{2,870}$ ג. $\frac{1}{8,610}$ ד. $\frac{1}{420}$

<u>שאלה 14</u>

מהי ההסתברות שמשתתף אקראי בהגרלה יומית כלשהי יזכה בפרס?

א. $1/i$ ב. $0.00035i$ ג. 0.0732 ד. 0.1799

<u>שאלה 15</u>

אדם מחליט להשתתף בהגרלה מדי יום.

מהי סטיית-התקן של מספר הפעמים שישתתף בהגרלות עד שיזכה בפרס לראשונה?

א. 14.86 ב. 220.82 ג. 173.11 ד. 13.16

<u>שאלה 16</u>

יהי $X \sim Po(3)$. חשב את השונות של 2^X .

א. e^9 ב. $e^9 - e^3$ ג. $e^9 - e^6$ ד. e^3

<u>שאלה 17</u>

יהי $X \sim B(200,\frac{1}{9})$. חשב את התוחלת של 2^{X+3} .

א. $8\left(\frac{10}{9}\right)^{200}$ ב. $\left(2^{\frac{200}{9}}\right)^3$ ג. $\left(\frac{10}{9}\right)^{600}$ ד. $2^{\frac{200}{9}+3}$

שאלות 18-20 מתייחסות לבעיה הבאה:

מפעל ממתקים מייצר סוכריות צבעוניות, הנארזות בשקיות המכילות 5 סוכריות כל אחת.
שליש מהסוכריות, שהמפעל מייצר, הן אדומות, ושמינית מהן סגולות.
הסוכריות המיוצרות במפעל, נארזות באקראי בשקיות, כך שצבעי הסוכריות בכל שקית הם אקראיים.

<u>שאלה 18</u>

בוחרים באקראי שקיות של סוכריות, ופותחים אותן בזו אחר זו עד למציאת 3 שקיות (לאו דווקא ברצף) שיש בהן לפחות סוכרייה סגולה אחת.
מהי ההסתברות שיצטרכו לפתוח בדיוק 13 שקיות עד למציאת 3 שקיות כאלה?

א. 0.0096 ב. 0.0416 ג. 0.0338 ד. 0.1467

<u>שאלה 19</u>

שגית קנתה לה ולחברתה 20 שקיות של סוכריות – 15 בחנות A ו-5 בחנות B.
היא בחרה באקראי 7 מתוך 20 השקיות האלה ונתנה אותן לחברתה.
מהי שונות מספר השקיות מחנות A שהחברה של שגית תקבל?

א. 1.3125 ב. 1.9183 ג. 0.8980 ד. 5.25

<u>שאלה 20</u>

מהי **<u>בקירוב</u>** ההסתברות שב- 1,000 שקיות מקריות תהיינה בדיוק 5 שקיות שבתוכן רק סוכריות אדומות?

א. 0.1605 ב. 0.0041 ג. 0.0694 ד. 0.1750

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 5

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2020 ב **מועד אחרון להגשה:** 24.05.2020

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (28 נקודות)

האורך (בס"מ) של לולב מקרי, שנסמנו ב-X, הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת μ ושונות σ^2.

כמו כן, ידוע כי $P\{X > 110\} = 0.5$ וכי $P\{95 < X < 125\} = 0.6826$.

(7 נק') א. מצא את μ ואת σ.

(7 נק') ב. נניח שדרושים 4 לולבים, שאורכו של כל אחד מהם הוא לפחות 120 ס"מ. אם מודדים בזה אחר זה לולבים מקריים (בלתי-תלויים), מהי ההסתברות שיידרשו בדיוק 10 מדידות עד למציאת 4 הלולבים הנדרשים?

(7 נק') ג. ידוע שאורכו של לולב מקרי קטן מ- 125 ס"מ. מהי ההסתברות שהוא ארוך מ- 120 ס"מ?

(7 נק') ד. מהו האורך בס"מ, שההסתברות שלולב יהיה קצר ממנו היא 0.43 ?

הערה: בכל סעיפי השאלה, ערוך <u>אינטרפולציה לינארית</u> היכן שהיא נדרשת.

שאלה 2 (24 נקודות)

נתונה פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי X: $x \ge 1$, $f_X(x) = \dfrac{4}{x^5}$

(6 נק') א. חשב את $P\{X < 2\}$.

ב. יהי $Y = X^3$.

(6 נק') 1. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y ורשום אותה באופן מדויק.

(6 נק') 2. מצא את פונקציית הצפיפות של Y ורשום אותה באופן מדויק.

(6 נק') 3. חשב את $E[Y]$.

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי X - משך הזמן (בדקות) שצופה במחזמר צוחק. X מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x)=\begin{cases} 0 & x<20 \\ a & 20\le x<25 \\ \frac{1}{15} & 25\le x<30 \\ b & 30\le x<35 \\ c & 35\le x \end{cases}$$

נתון ש- $P(X\le 30)=P(X\ge 30)$

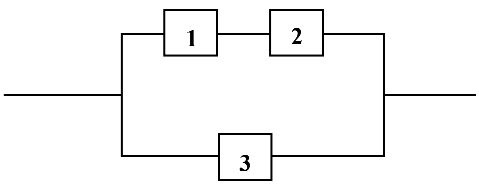
(5 נק׳) א. מצאו את ערכם של הפרמטרים: a,b,c.

(5 נק׳) ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X.

(5 נק׳) ג. חשבו את $E\left[X^3\right]$.

(5 נק׳) ד. דולי מראיינת צופים של המחזמר, עד שתראיין לפחות צופה אחד שצחק פחות מ-30 דקות ולפחות צופה אחד שצחק יותר מ-30 דקות. נסמן ב- Y את מספר הצופים שתראיין. מצאו את התפלגות Y.

שאלה 4 (28 נקודות)



במערכת 3 רכיבים המסודרים במבנה שלהלן:

המערכת פועלת אם שני הרכיבים 1 ו- 2 תקינים או אם רכיב 3 תקין, ובפרט, אם שלושת הרכיבים תקינים.
נסמן ב- X_i את אורך-החיים (בשנים) של רכיב i, לכל $i=1,2,3$. הרכיבים בלתי-תלויים זה בזה.
מפעילים מערכת שכל הרכיבים בה חדשים. אין אפשרות להחליף במערכת רכיב שהתקלקל.

אם ההתפלגות של כל אחד מה- X_i-ים היא אחידה בין 1 ל- 3:

(7 נק׳) א. מהי ההסתברות שהמערכת פועלת לאחר שנתיים מיום הפעלתה?

(7 נק׳) ב. אם לאחר שנתיים המערכת עדיין פועלת, מהי ההסתברות שרכיב 3 תקין בזמן זה?

אם ההתפלגות של כל אחד מה- X_i-ים היא מעריכית עם תוחלת 2:

(7 נק׳) ג. מהי ההסתברות שהמערכת פועלת לאחר שנתיים מיום הפעלתה?

(7 נק׳) ד. אם לאחר שנתיים המערכת עדיין פועלת, מהי ההסתברות שרכיב 3 תקין בזמן זה?

מטלת מנחה (ממ״ן) 13

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 6

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2020 ב **מועד אחרון להגשה:** 07.06.2020

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1 (20 נקודות)

מספר הלקוחות הנכנסים לחנות מכשירי חשמל במשך שעה, הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 50.
ההסתברות שלקוח שנכנס לחנות, יקנה בה מוצר כלשהו היא 0.16.

(6 נק׳) א. מהי ההסתברות שבמשך חצי שעה ייכנסו לחנות 20 לקוחות?

(7 נק׳) ב. מהי ההסתברות שבין הלקוחות, הנכנסים לחנות במשך שעתיים, יהיו בדיוק 20 **שייקנו** בה מוצר כלשהו?

(7 נק׳) ג. אם ידוע שבמשך שעה אחת נכנסו לחנות 40 לקוחות, מהי ההסתברות ש-5 מהם ייקנו בה מוצר כלשהו?

שאלה 2 (20 נקודות)

נתון מטבע, שההסתברות לקבל בו H היא $\frac{X+1}{20}$,

כך ש- X הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 10 ו- 0.5.

מטילים את המטבע 20 פעמים. יהי N מספר הפעמים שהתוצאה H התקבלה ב-20 הטלות אלו.

(10 נק׳) א. חשב את $P\{N=8 \mid X=6\}$.

(10 נק׳) ב. מצא ביטוי כללי להסתברות $P\{N=n, X=i\}$.

עבור אלו ערכים של n ו- i הסתברות זו מקבלת ערכים חיוביים?

שאלה 3 (20 נקודות)

בקופסה נתונה יש 9 כדורים: 4 אדומים, 3 כחולים ו-2 צהובים.

מוציאים מן הקופסה 3 כדורים ללא החזרה. לכל כדור יש סיכויים שווים להיבחר בכל אחת מהבחירות.

יהיו: X = מספר הכדורים האדומים שנבחרו;

Y = מספר הכדורים הכחולים שנבחרו.

(10 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y,

ואת פונקציות ההסתברות השולית של X ו- Y.

(5 נק') ב. האם X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה?

(5 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של Y בהינתן $X = 1$.

שאלה 4 (20 נקודות)

מפזרים באקראי n כדורים שונים ב- n תאים ממוספרים $(n \geq 4)$.

אין תלות בין התאים שאליהם מוכנסים הכדורים,

וכל כדור מוכנס לתוך כל אחד מן התאים הנתונים בהסתברויות שוות.

יהי X_i המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הכדורים שהוכנסו לתוך תא i, לכל $i = 1,\ldots,n$.

(10 נק') א. חשב את $P\{X_1 = 2 , X_2 = 1\}$.

(10 נק') ב. חשב את $P\{X_4 = 1 \mid X_3 = 2\}$.

שאלה 5 (20 נקודות)

נניח כי X_1 ו- X_2 הם משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר p $(p > 0)$.

(5 נק') א. חשבו את $P\{X_1 > m\}$, לכל $m = 0,1,2,...$.

(5 נק') ב. מהי ההתפלגות של $X_1 + X_2$ ומהי שונותה?

ג. יהי $Z = \max\{X_1, X_2\}$.

(5 נק') 1. חשבו את $P\{Z \leq m\}$, לכל $m = 1,2,...$.

(5 נק') 2. מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X_1 ו- Z.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2020 ב **מועד אחרון להגשה:** 21.06.2020

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (28 נקודות)

מפזרים באקראי 10 קוביות תקינות ב- 10 תאים ממוספרים מ-1 עד 10.

נניח שאין תלות בין הקוביות ושכל קובייה "נופלת" לתוך כל אחד מן התאים הנתונים בהסתברויות שוות.

לאחר שמפזרים את הקוביות בתאים, מוציאים מתא 1 את הקוביות שנפלו לתוכו ומטילים אותן.

יהי X_1 מספר הקוביות שנפלו לתוך תא 1 ;

ויהי S סכום התוצאות של ההטלות, שהתקבלו בהטלת הקוביות שנפלו לתוך תא 1.

(8 נק') א. חשב את $P\{S=2\}$.

(12 נק') ב. 1. חשב את התוחלת של S .

2. חשב את השונות של S .

(8 נק') ג. נסמן ב- X_i את מספר הקוביות שנפלו לתוך תא i , לכל $i=1,2,\ldots,10$.

חשב את $\mathrm{Cov}(X_1, X_2+\ldots+X_{10})$ ואת $\rho(X_1, X_2+\ldots+X_{10})$.

שאלה 2 (10 נקודות)

(X_1, X_2, X_3) מתפלגים מולטינומית עם הפרמטרים הבאים :

$p_1=0.2 \quad p_2=0.4 \quad p_3=0.4 \quad n=20$.

חשבו את $\rho(X_1, X_2)$.

שאלה 3 (14 נקודות)

נתון מטבע, שההסתברות לקבל בו H היא $\frac{X+1}{20}$,

כך ש- X הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 10 ו- 0.5.

מטילים את המטבע 20 פעמים. יהי N מספר הפעמים שהתוצאה H התקבלה ב-20 הטלות אלו.

(7 נק׳) א. חשב את התוחלת של N.

(7 נק׳) ב. חשב את השונות של N.

שאלה 4 (14 נקודות)

X הוא משתנה מקרי רציף המתפלג אחיד עם הפרמטרים a ו- b.

(7 נק׳) א. הראו שפונקציית היוצרת מומנטים של X: $t \neq 0$, $(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)$.

(7 נק׳) ב. מצאו את התוחלת והשונות של X על סמך פונקציית יוצרת המומנטים של X.

שאלה 5 (18 נקודות)

שלושה אנשים נכנסים למסעדה ומתיישבים באופן מקרי ליד דלפק שבו n מקומות ישיבה המסודרים בשורה.

(9 נק׳) א. אם $n=5$, מהי שונות מספר האנשים שאיש אינו יושב לידם?

(9 נק׳) ב. אם $n=20$, מהי תוחלת מספר האנשים שאיש אינו יושב לידם?

פתרו באמצעות פירוק לאינדיקטורים.

שאלה 6 (16 נקודות)

מטילים קובייה תקינה 12 פעמים.

בהנחה שהטלות הקובייה בלתי-תלויות זו בזו –

(8 נק׳) א. אם עבור כל הטלה מקבלים פרס שגובהו מחצית מתוצאת ההטלה,
מהן תוחלת ושונות הפרס הכולל שיתקבל בתום ההטלות?

(8 נק׳) ב. יהי X מספר ההטלות שבהן מתקבלות התוצאות 1 או 2;
ויהי Y מספר ההטלות שבהן מתקבלות התוצאות 2 או 3.
חשב את $\text{Var}(X+Y)$.

אוסף שאלות לתרגול עצמי

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 8

.1 לאורך החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר $\frac{1}{500}$.
אין תלות בין נורות שונות מאותו הסוג.
אדם קנה 100 נורות מסוג זה.
מצא קירוב להסתברות שממוצע אורך החיים של 100 הנורות שנקנו יהיה בין 450 ל- 520 שעות.

.2 יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1,000.

א. חשב קירוב נורמלי להסתברות ש- X יקבל את הערך 1,000.
מדוע אפשר לחשב קירוב נורמלי במקרה זה?

ב. חשב חסם תחתון ל- $P\{|X-1{,}000|\le 40\}$, באמצעות אי-שוויון צ'בישב.

.3 נתונים 5 משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, $X_1, X_2, \ldots, X_5$, שכל אחד מהם מקבל את הערכים 0, 3 ו- 6 בהסתברויות שוות (כלומר, הסתברות ⅓ לכל ערך).
נגדיר $Y=\sum_{i=1}^{5}X_i$. חשב חסם עליון ל- $P\{Y>25\}$:

א. בעזרת אי שוויון מרקוב;

ב. בעזרת אי שוויון צ'בישב.

.4 א. יהי X משתנה מקרי אי-שלילי שתוחלתו μ סופית, ויהי $t>0$.
הוכח כי $P\{X\le \mu t\}\ge 1-\frac{1}{t}$.

ב. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n=1,2,\ldots)$, משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר p $(0<p<1)$.
הראה בעזרת אי-שוויון צ'בישב שמתקיים: $P\left\{\overline{X}_n\le \frac{2}{p}\right\}\ge 1-\frac{1-p}{n}$.

הערה: $\overline{X}_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$

.5 הוכח, בעזרת משפט הגבול המרכזי, כי $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}e^{-n}\frac{n^i}{i!}=\frac{1}{2}$.

.6 יהיו X_1 , X_2 , ... , X_{200} משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפונקציה יוצרת המומנטים : $M_X(t)=\left(\dfrac{e^t}{5-4e^t}\right)^2$, עבור $t<\ln 1.25$.

מצא קירוב ל- $P\left\{1{,}910\le\sum_{i=1}^{200}X_i<2{,}050\right\}$.

.7 א. נתון ארגז ובו 120 כדורים שעליהם רשומים מספרים.

לכל $i=1,2,\ldots,15$, יש בארגז i כדורים שהמספר הרשום עליהם הוא i .

בוחרים כדורים מהארגז, בזה אחר זה **ועם החזרה**, כך שבכל בחירה יש לכל הכדורים סיכויים שווים להיבחר.

נניח שבוחרים (בשיטה המתוארת לעיל) בדיוק 100 כדורים.

יהי Y הסכום הכולל של 100 המספרים הרשומים על הכדורים שנבחרו.

חשב קירוב ל- $P\{1{,}000\le Y\le 1{,}100\}$.

הערה : $\sum_{i=1}^{n}i^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^{n}i^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

ב. מעגלים 50 מספרים שנבחרו באקראי, כל אחד לשלם הקרוב לו ביותר, ומסכמים את 50 המספרים המעוגלים.

אם לכל אחת משגיאות-העיגול יש התפלגות אחידה בקטע $[-0.5,\ 0.5)$, מהו קירוב להסתברות שההפרש <u>המוחלט</u> בין הסכום המתקבל לבין הסכום המדויק של 50 המספרים עולה על 3?

.8 אורך-החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים מתפלג מעריכית עם הפרמטר 0.01, והוא אינו תלוי באורך-החיים של נורות אחרות.

כמה נורות מסוג זה עליך לקנות (בקירוב), אם ברצונך להבטיח 5,000 שעות-אור בהסתברות 0.95 לפחות?

הנח שאתה מתקין נורה אחת, ובהישרפה מחליף אותה מייד באחרת. זמן ההחלפה זניח.

.9 נתונים שלושה ארגזים בלתי-תלויים.

לכל ארגז אפשר להכניס X קופסאות, כאשר ל- X יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 150.

א. חשב **קירוב** להסתברות שלשלושת הארגזים יחדיו יוכנסו לפחות 480 קופסאות.

ב. חשב **קירוב** להסתברות ש<u>ההפרש המוחלט</u> בין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז הראשון לבין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז השני יהיה גדול מ- 10.

בשני הסעיפים נמק את פתרונך.

.10 יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- 0.5, עבור $n>4$.

הוכח בעזרת אי שוויון צ'בישב שמתקיים : $P\{X\ge n-2\}\le\dfrac{n}{2(n-4)^2}$.

11. רשום את החסמים מלעיל הקטנים ביותר (המוכרים לך) עבור $P\{X \geq 14\}$, בכל אחד מן המקרים הבאים:

א. X הוא משתנה מקרי אי-שלילי ותוחלתו 7 ;

ב. X הוא משתנה מקרי המקיים $X \geq -2$ ותוחלתו 7 ;

ג. X הוא משתנה מקרי שתוחלתו 7 ושונותו 4.

12. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת סופית μ ושונות סופית σ^2.

הנח ש-n גדול וחשב **קירוב** ל- $P\left\{\bar{X} \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} + \mu\right\}$.

13. המשקל W (בטונות) של מטען, שגשר מסוים יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק, הוא משתנה מקרי נורמלי שתוחלתו 400 וסטיית התקן שלו 40. נניח שהמשקל (בטונות) של מכונית הוא משתנה מקרי שתוחלתו 3 וסטיית התקן שלו 0.3. אם ברגע מסוים ההסתברות לגרימת נזק במבנה הגשר עולה על 0.1, מהו (בקירוב) המספר המינימלי של מכוניות הנמצאות אז על הגשר?

הנח שאין תלות בין משקלי מכוניות שונות ובין המשקל של כל מכונית לעומס שהגשר יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק.

נספחים

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

דף הנוסחאות יצורף לכל בחינה.

נספח ב: רשימת טענות להוכחה בבחינה

בכל בחינה תופענה טענות מן הרשימה המובאת להלן, שאותן תִדָרשו להוכיח במדויק.

ההוכחות של כל הטענות מן הרשימה מובאות באתר הקורס בקובץ נפרד.

משקל הטענות שתופענה בבחינה לא יעלה על 15 נקודות.

הטענות עשויות להופיע ביותר מאשר שאלה אחת.

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,\ldots,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1}\cdot p \quad , \quad i=1,2,\ldots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i! \quad , \quad i=0,1,\ldots$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,\ldots$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,\ldots,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,\ldots,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a\le x\le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\ , t\neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad -\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,\ldots,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r} \quad , \quad \sum n_i=n\ , \sum p_i=1$			

נוסחת הבינום $\quad (x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$

כלל ההכלה וההפרדה $\quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$

הסתברות מותנית $\quad P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

נוסחת הכפל $\quad P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n\mid A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})$

נוסחת ההסתברות השלמה $\quad P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i) \quad ,$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס $\quad P(B_j\mid A)=\dfrac{P(A\mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)} \quad ,$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת $\quad E[X]=\sum_x x\,p_X(x)=\int x\,f(x)dx$

תוחלת של פונקציה של מ"מ $\quad E[g(X)]=\sum_x g(x)\,p_X(x)=\int g(x)\,f(x)dx$

שונות $\quad \mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית $\quad E[aX+b]=aE[X]+b$

$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון $\quad P\{X>s+t\mid X>t\}=P\{X>s\} \quad , \quad s,t\ge 0$

תוחלת מותנית $\quad E[X\mid Y=y]=\sum_x x\,p_{X|Y}(x\mid y)=\int x\,f_{X|Y}(x\mid y)dx$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X \mid Y=y) = E[X^2 \mid Y=y] - (E[X \mid Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] = E[E[X \mid Y]] = \sum_y E[X \mid Y=y]p_Y(y)$

(טענה מתרגיל ת26, עמוד 430) $E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X \mid Y]]$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) \big/ \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(at)$

כאשר X_i מ"מ ב"ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1]$

(כאשר X_i מ"מ ב"ת ש"ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\mathrm{Var}(N)$

$$M_{X_1+\ldots+X_N}(t) = E\left[\left(M_{X_1}(t)\right)^N\right]$$

אי-שוויון מרקוב $P\{X \geq a\} \leq E[X]/a \quad , \quad a>0$, X מ"מ אי-שלילי

אי-שוויון צ'בישב $P\{|X-\mu| \geq a\} \leq \sigma^2/a^2 \quad , \quad a>0 \ , \ \mu,\sigma^2 < \infty$

משפט הגבול המרכזי $P\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) \big/ \sqrt{n\sigma^2} \leq a \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(a) \quad , \quad \mu,\sigma^2 < \infty$, X_i מ"מ ב"ת וש"ה

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר p הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני.
- סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \ , \ -1<x<1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = -\ln(1-x) \ , \ 0<x<1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \tfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \ , \ n \neq -1 \quad ; \quad \int \tfrac{1}{ax+b} dx = \tfrac{1}{a}\ln(ax+b)$$

$$\int e^{ax}dx = \tfrac{1}{a}e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax}dx = \tfrac{1}{a\ln b}b^{ax}$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\log_n a = \log_m a / \log_m n \quad ; \quad \log_n(a^b) = b \cdot \log_n a \quad ; \quad \log_n(ab) = \log_n a + \log_n b$$

נספח ב: טענות להוכחה בבחינה

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב - 20425

ההוכחות של הטענות, המובאות ברשימה שלהלן, נמצאות בקובץ נפרד באתר הקורס.

1. יהיו E ו- F מאורעות במרחב מדגם S. הוכח כי: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

2. יהיו F ו- G מאורעות זרים של ניסוי מקרי כלשהו. הוכח כי בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה, ההסתברות שהמאורע F יתרחש לפני המאורע G היא: $\dfrac{P(F)}{P(F)+P(G)}$

3. יהי X משתנה מקרי בדיד, שתוחלתו סופית, ויהיו a ו- b קבועים ממשיים. הוכח כי:

$$E[aX+b] = aE[X]+b \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$$

4. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$. הוכח כי:

$$E[X] = np \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

5. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \lambda \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda$

6. יהי X משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים N, m ו- n. הוכח כי: $E[X] = n \cdot \frac{m}{N}$

7. יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

8. יהי X משתנה מקרי אחיד (רציף) על הקטע (a, b), עבור $a < b$.

הוכח כי: $E[X] = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

9. הוכח: אם מאורע מסוים מתרחש בהתאם לַהנחות של תהליך-פואסון עם קצב λ, אז משך הזמן החולף עד להתרחשות המופע הראשון של המאורע (החל מזמן 0) הוא משתנה מקרי מעריכי עם אותו הפרמטר λ.

10. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה.
הוכח כי למשתנה המקרי $X + Y$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda_X + \lambda_Y$.

11. יהיו X ו- Y משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.
הוכח כי למשתנה המקרי $X + Y$ יש התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים $(2, p)$.

12. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה.
הוכח שלמשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X + Y = n$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$.

13. יהי $Y = a + bX$, ונניח כי $\sigma_X^2 > 0$. הראה כי: $\rho(X,Y) = \begin{cases} +1 & , \quad b > 0 \\ -1 & , \quad b < 0 \end{cases}$

14. יהיו $X_1, X_2, ..., X_n$ משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת ושונות סופיות, μ ו- σ^2, בהתאמה.

הוכח כי:

$$E[\overline{X}] = \mu \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2/n$$

15. יהיו $X_1, X_2, ..., X_r$ משתנים מקריים בעלי פונקציית התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $p_1, p_2, ..., p_r$.

הוכח: א. למשתנה המקרי X_i יש התפלגות שולית בינומית עם הפרמטרים n ו- p_i.

ב. למשתנה המקרי המותנה X_1 בהינתן $X_2 = j$, לכל $j = 0,1,...,n$, יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n-j$ ו- $p_1/(1-p_2)$.

ג. $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$

16. יהיו X ו- Y משתנים מקריים בדידים בעלי תוחלות ושונויות סופיות.

הוכח:

$$E[X] = E[E[X \mid Y]]$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$$

17. הוכח: אם N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים אי-שליליים, ואם $X_1, X_2, ...$ הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב-N, אז מתקיים:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1]$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\mathrm{Var}(N)$$

הערה: כאשר $N = 0$, סכום המשתנים שווה גם הוא ל-0.

18. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי:

$$M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n \qquad , \qquad -\infty < t < \infty$$

19. יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי:

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \qquad , \qquad t < -\ln(1-p)$$

20. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$.

הוכח כי:

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \qquad , \qquad -\infty < t < \infty$$

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \le z\} = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt \qquad ; \qquad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \qquad ; \qquad Z \sim N(0,1)$$

נוסחת האינטרפולציה: $$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}[\Phi(z_2) - \Phi(z_1)]$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326