

## פתרון שאלות בממ"ן 12 סמסטר 2019א

### שאלה 2

א. **ההוכחה לא טובה.**  $D$  מקבלת את  $\langle M \rangle$ , אם  $M$  לא מקבלת את  $\langle M^+ \rangle$ .  $D$  דוחה את  $\langle M \rangle$ , אם  $M$  כן מקבלת את  $\langle M^+ \rangle$ . זה לא אומר ש- $D$  שונה מ- $M$ . ייתכן ששתייהן מקבלות את  $\langle M \rangle$  ולא מקבלות את  $\langle M^+ \rangle$ , או להפך (שתייהן לא מקבלות את  $\langle M \rangle$  ומקבלות את  $\langle M^+ \rangle$ ).

ב. **ההוכחה טובה.**  $D$  מקבלת את  $\langle M \rangle$ , אם  $M^+$  לא מקבלת את  $\langle M \rangle$ .  $D$  דוחה את  $\langle M \rangle$ , אם  $M^+$  כן מקבלת את  $\langle M \rangle$ . זה אומר ש- $D$  שונה מ- $M^+$  לכל  $M$ . ברור ש- $D$  איננה המכונה הראשונה בסדר הסטנדרטי של המכונות. לכן, אם  $D$  קיימת, היא איזושהי מכונה  $M^+$ . אבל הראינו שהיא שונה מכולן.

### שאלה 4

א. אפשר להשתמש במשפט Rice :

$P$  תהיה השפה של כל התיאורים של מכונות טיורינג שיש בשפה שהן מזהות בדיוק 5 מילים. יש מכונות טיורינג שהתיאור שלהן שייך ל- $P$  ויש מכונות שהתיאור שלהן לא שייך ל- $P$ . אם שתי מכונות מזהות אותה השפה, אז או שהתיאורים של שתייהן שייכים ל- $P$  או שהתיאורים של שתייהן לא שייכים ל- $P$ . לפי משפט Rice,  $P$  איננה כריעה.  $P$  זהה לשפה  $A$ .

ב. אי אפשר להשתמש במשפט Rice, משום שתכונת השייכות ל- $B$  איננה תכונה של השפה שמכונה מזהה, אלא תכונה של המכונה עצמה - ייתכנו שתי מכונות שמזהות אותה השפה, ואחת מהן שייכת ל- $B$  ואילו השנייה איננה שייכת ל- $B$ . דוגמה: תהיה  $M_1$  ו- $M_2$  שתי מכונות שמקבלות כל מילה מעל אלפבית נתון  $\Sigma$  - השפה של שתייהן היא  $\Sigma^*$ .

$M_1$  נכנסת מיד למצב המקבל - על כל קלט היא מבצעת צעד אחד. לכן לכל מילה  $w$  באורך 1,  $M_1$  מקבלת את  $w$  לאחר בדיוק  $|w|$  צעדים. לכן  $\langle M_1 \rangle$  שייכת ל- $B$ .  $M_2$  קוראת את הקלט עד שהיא מגיעה לסמל הרווח שמימין למילת הקלט, ואז נכנסת למצב המקבל. על כל מילה  $w$  היא מבצעת  $|w|+1$  צעדים. לכן  $\langle M_2 \rangle$  לא שייכת ל- $B$ .

ג. אפשר להשתמש במשפט Rice :

$P$  תהיה השפה של כל התיאורים של מכונות טיורינג שהשפה שהן מזהות היא שפה רגולרית. יש מכונות טיורינג שהתיאור שלהן שייך ל- $P$  ויש מכונות שהתיאור שלהן לא שייך ל- $P$ . אם שתי מכונות מזהות אותה השפה, אז או שהתיאורים של שתייהן שייכים ל- $P$  או שהתיאורים של שתייהן לא שייכים ל- $P$ . לפי משפט Rice,  $P$  איננה כריעה.  $P = \text{REGULAR}_{\text{TM}}$ .

## שאלה 5

$ALL_{LBA}$  איננה כריעה.

**הוכחה:** נניח בשלילה ש- $A_{LBA}$  כריעה, ונראה שאפשר להכריע את  $A_{TM}$ :

אפשר לבנות מכונת טיורינג  $T$  שעל קלט  $\langle M, w \rangle$  תבנה  $D$  שמקבל כל מחרוזת **שלא מהווה היסטוריית חישוב מקבלת** של  $M$  על  $w$ :

$D$  יבדוק תחילה האם אפשר לחלק את הקלט לתת-מחרוזות שביניהן יש #. אם לא, הוא יקבל.

לאחר מכן  $D$  יבדוק האם כל תת-מחרוזת מתארת קונפיגורציה. אם לא, הוא יקבל.

לאחר מכן  $D$  יבדוק האם התת-מחרוזת הראשונה היא הקונפיגורציה ההתחלתית של  $M$  על  $w$ . אם לא, הוא יקבל.

לאחר מכן  $D$  יבדוק האם כל קונפיגורציה נובעת מן הקודמת לה לפי כללי המעבר של  $M$ . אם לא, הוא יקבל.

לבסוף  $D$  יבדוק האם הקונפיגורציה האחרונה היא קונפיגורציה מקבלת. אם כן, הוא ידחה. אם לא, הוא יקבל.

כעת  $T$  תבדוק האם  $\langle D \rangle$  שייכת ל- $ALL_{LBA}$ . אם כן, היא תדחה (את  $\langle M, w \rangle$ ). אם לא, היא תקבל. ( $\langle D \rangle$  שייכת ל- $ALL_{LBA}$  אם ורק אם  $\langle M, w \rangle$  לא שייכת ל- $A_{TM}$ ).

## שאלה 6

א. רדוקצית מיפוי של  $A_{TM}$  ל- $ALL_{TM}$ :

"על קלט  $\langle M, w \rangle$  כאשר  $M$  היא מכונת טיורינג ו- $w$  היא מחרוזת:

1. בנה את המכונה  $M_1$  הבאה:

$$M_1 = \text{"על קלט } x$$

1. אם  $x \neq w$ , קבל.

2. אם  $x = w$ , הרץ את  $M$  על  $w$  (את  $x$ ) וקבל (את  $x = w$ ) אם  $M$  קיבלה את  $w$ .

2. החזר את  $\langle M_1 \rangle$ .

ב. רדוקצית מיפוי של  $A_{TM}$  למשלימה של  $ALL_{TM}$ :

"על קלט  $\langle M, w \rangle$  כאשר  $M$  היא מכונת טיורינג ו- $w$  היא מחרוזת:

1. בנה את המכונה  $M_2$  הבאה:

$$M_2 = \text{"על קלט } x$$

1. הרץ את  $M$  על  $w$   $|x|$  צעדים.

2. אם  $M$  קיבלה את  $w$  בתוך  $|x|$  צעדים, דחה (את  $x$ ); אחרת, קבל (את  $x$ ).

2. החזר את  $\langle M_2 \rangle$ .

**הסבר:** אם  $\langle M, w \rangle$  שייכת ל- $A_{TM}$ , אז יש מספר צעדים  $y$  כך שלאחר ש- $M$  רצה  $y$  צעדים, היא מקבלת את  $w$ . לכן על קלט  $x$  כך ש- $|x| \geq y$ ,  $M_2$  תדחה, ולכן  $M_2$  לא שייכת ל- $ALL_{TM}$ .

אם  $\langle M, w \rangle$  לא שייכת ל- $A_{TM}$ , אז לכל מספר צעדים  $y$ , לאחר ש- $M$  רצה  $y$  צעדים, היא לא מקבלת את  $w$ . לכן  $M_2$  תקבל כל קלט  $x$ , ולכן  $M_2$  שייכת ל- $ALL_{TM}$ .

ג.  $ALL_{TM}$  איננה מזוהה-טיורינג כי הרדוקציה של סעיף ב היא גם רדוקציה של המשלימה של  $A_{TM}$  ל- $ALL_{TM}$ . לכן אין רדוקצית מיפוי של  $ALL_{TM}$  ל- $A_{TM}$  (כן מזוהה-טיורינג).

ד. המשלימה של  $ALL_{TM}$  איננה מזוהה-טיורינג (הוכחה בעזרת הרדוקציה של סעיף א). לכן אין רדוקצית מיפוי של המשלימה של  $ALL_{TM}$  ל- $A_{TM}$ .