פתרונות לממ"ן 14 - 2012א - 20425

1. א. נסמן ב- X את מספר הסוכריות האדומות שיש בשקית מקרית. ההתפלגות של המשתנה המקרי X היא בינומית עם הפרמטרים 5 ו- ⅓. לכן, ההסתברות שבשקית יהיו לפחות שתי סוכריות אדומות היא:

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^5 - 5\left(\tfrac{2}{3}\right)^4\left(\tfrac{1}{3}\right)^1 = 1 - \tfrac{32}{243} - \tfrac{80}{243} = \tfrac{131}{243}$$

ב. נסמן ב- Y את מספר השקיות ששגית מוכרת לאחיה במשך 8 ימים, וב- W את ההוצאה הכספית שלה לאחר 8 ימים. ההתפלגות של המשתנה המקרי Y היא בינומית עם הפרמטרים 8 ו- $\tfrac{112}{243}$, ומתקיים $W = 8\cdot 5 - 3Y = 40 - 3Y$. לכן, התוחלת וסטיית-התקן של W הן:

$$E[W] = E[40 - 3Y] = 40 - 3\cdot 8\cdot \tfrac{112}{243} = 28.9383$$

$$\mathrm{Var}(W) = \mathrm{Var}(40 - 3Y) = (-3)^2\cdot 8\cdot \tfrac{112}{243}\cdot \tfrac{131}{243} = 17.890 \quad ; \quad \sigma(W) = \sqrt{17.890} = 4.230$$

ג. נסמן ב- S את מספר השקיות שפותחים עד למציאת 3 שקיות שיש בהם לפחות סוכרייה סגולה אחת. ההתפלגות של המשתנה המקרי S היא בינומית-שלילית עם הפרמטרים 3 ו- $1 - \left(\tfrac{7}{8}\right)^5 = 0.4871$. לכן:

$$P\{S = 13\} = \binom{12}{2}\cdot 0.4871^3\cdot 0.5129^{10} = 0.0096$$

$$E[S] = \tfrac{3}{0.4871} = 6.159$$

$$\mathrm{Var}(S) = \frac{3\cdot 0.5129}{0.4871^2} = 6.4851$$

ד. מספר השקיות מחנות A, שהחברה של שגית קיבלה, הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N = 20$, $m = 15$ ו- $n = 7$. נסמן את המשתנה המקרי הזה ב- H ונקבל:

$$P\{H = 5\} = \frac{\binom{15}{5}\binom{5}{2}}{\binom{20}{7}} = 0.3874$$

$$\mathrm{Var}(H) = 7\cdot \tfrac{15}{20}\cdot \tfrac{5}{20}\cdot \tfrac{20-7}{20-1} = 0.8980$$

2. א.

$$E[2^X] = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i\cdot e^{-3}\cdot \tfrac{3^i}{i!} = e^{-3}\sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{6^i}{i!} = e^{-3}\cdot e^6 = e^3$$

$$E[2^{2X}] = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{2i}\cdot e^{-3}\cdot \tfrac{3^i}{i!} = e^{-3}\sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{12^i}{i!} = e^{-3}\cdot e^{12} = e^9$$

$$\mathrm{Var}(2^X) = E[2^{2X}] - (E[2^X])^2 = e^9 - e^6$$

ב.

$$E[2^X] = \sum_{i=0}^{200} 2^i\cdot \binom{200}{i}\left(\tfrac{1}{9}\right)^i\left(\tfrac{8}{9}\right)^{200-i} = \sum_{i=0}^{200}\binom{200}{i}\left(\tfrac{2}{9}\right)^i\left(\tfrac{8}{9}\right)^{200-i} \underset{\text{נוסחת הבינום}}{\downarrow}= \left(\tfrac{2}{9} + \tfrac{8}{9}\right)^{200} = \left(\tfrac{10}{9}\right)^{200}$$

$$E[2^{X+3}] = E[2^3\cdot 2^X] = 2^3 E[2^X] = 8\left(\tfrac{10}{9}\right)^{200}$$

3. א. מספר ההזמנות שהסוכן הצעיר ביותר מקבל הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $4n+3$ ו- $p=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{4n}$. כלומר, כאשר $n=10$, התפלגות משתנה מקרי זה היא בינומית עם הפרמטרים 43 ו- $\frac{1}{40}$. לפיכך, ההסתברות המדויקת שהסוכן הצעיר ביותר יקבל בדיוק 2 הזמנות היא:

$$\binom{43}{2}\left(\frac{1}{40}\right)^2\left(\frac{39}{40}\right)^{41} = 0.199874$$

וקירוב פואסון להסתברות זו מחושב עבור:
$$\lambda = (4n+3)\cdot\frac{1}{4n} = 1+\frac{3}{4n} \underset{n=10}{\overset{\downarrow}{=}} 1.075$$

כלומר:
$$P\{X=2\} \cong e^{-1.075}\frac{1.075^2}{2!} = 0.197206$$

ב. אם n גדול מאוד, נוכל לחשב קירוב פואסון להסתברות הבינומית, כאשר:
$$\lambda = 1+\frac{3}{4n} \cong 1$$

נקבל:
$$P\{X=2\} \cong e^{-1}\cdot\frac{1^2}{2!} = 0.5e^{-1} = 0.18394$$

4. א. נסמן ב-X את המשתנה המקרי, המוגדר על-ידי מספר הבחירה שבה נבחר לראשונה המספר 0. ההתפלגות של המשתנה המקרי X היא גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{1}{19}$. לכן:

$$P\{X\ge 12\}=P\{X>11\}=\left(1-\frac{1}{19}\right)^{11}=0.5517$$

ב. מספר הבחירות שנדרשות עד לבחירת מספר שגדול מ-5 הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר $\frac{4}{19}$.

לכן, השונות המבוקשת היא:
$$\frac{1-\frac{4}{19}}{\left(\frac{4}{19}\right)^2}=17.8125$$

ג. המאורע A_7 מתרחש, אם תוצאת המכפלה מתחלקת ב-7 ללא שארית. כלומר, אם לפחות אחד מבין המספרים הנבחרים הוא 0, 7 או 7–. לפיכך, המאורע A_7 אינו מתרחש, אם בין עשרת המספרים הנבחרים אין אף 0, 7 או 7–. ומכאן:
$$P(A_7)=1-P(A_7^C)=1-\left(\frac{16}{19}\right)^{10}=0.8206655$$

ד. נסמן ב-Y את המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הפעמים שמבצעים את הניסוי עד שהמאורע A_7 מתרחש בדיוק 30 פעמים. ההתפלגות של המשתנה המקרי Y היא בינומית שלילית עם הפרמטרים 30 ו- $1-\left(\frac{16}{19}\right)^{10}$. המשתנה המקרי W, המוגדר בשאלה, הוא טרנספורמציה לינארית של המשתנה המקרי Y, ומתקיים $W=Y-30$. לפיכך, לכל $j=0,1,2,...$, מתקיים:

$$P\{W=j\}=P\{Y-30=j\}=P\{Y=j+30\}=\binom{j+29}{29}\left(1-\left(\frac{16}{19}\right)^{10}\right)^{30}\left(\left(\frac{16}{19}\right)^{10}\right)^{j}$$

ה.
$$E[W]=E[Y-30]=E[Y]-30=\frac{30}{1-\left(\frac{16}{19}\right)^{10}}-30=6.5557$$

$$\mathrm{Var}(W)=\mathrm{Var}(Y-30)=\mathrm{Var}(Y)=\frac{30\left(\frac{16}{19}\right)^{10}}{\left(1-\left(\frac{16}{19}\right)^{10}\right)^2}=7.98827$$

5. נסמן ב-A את המאורע שנבחר מטבע תקין וב-B את המאורע שהמטבע הנבחר מוטל בדיוק 4 פעמים עד לקבלת ה-H הראשון. לפי נוסחת ההסתברות השלמה מתקיים:

$$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|A^C)P(A^C)=0.5^4\cdot\frac{38}{50}+0.75^3\cdot 0.25\cdot\frac{12}{50}=0.0738125$$