פתרון ממ"ן 15

שאלה 1

יהי $k \ge 1$ טבעי ויהי a_n מספר הסדרות באורך n, שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,...,2k\}$
אשר אין בהן הופעה של מספרים זוגיים סמוכים זה לזה.

דוגמה לסדרה **מותרת** באורך 5 כאשר $k=10$: $(12)(13)(15)(8)(7)$.

דוגמה לסדרה **אסורה** באורך 5 כאשר $k=10$: $(12)(13)(15)(8)(18)$.

א. רישמו בעזרת חישוב ישיר את a_0, a_1, a_2. רישמו יחס נסיגה עבור a_n .
בדקן שהערכים שרשמת עבור a_0, a_1, a_2 מתאימים ליחס הנסיגה.

ב. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n.
ביטויים כגון $\sqrt{m}$ כאשר m אינו ריבוע, יש להשאיר כפי שהם.

תשובה

א. $a_0 = 1, a_1 = 2k, a_2 = 3k^2$

$a_n = ka_{n-1} + k^2 a_{n-2}$ לכל $n \ge 2$.

ב. פתרונות המשוואה $x^2 - kx - k^2 = 0$ הם:

$x_1, x_2 = \dfrac{k \pm \sqrt{k^2+4k^2}}{2} = \dfrac{k \pm k\sqrt{5}}{2} = k \cdot \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ולכן האיבר הכללי של הסדרה הוא

מהצורה $a_n = x\left(k \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + y\left(k \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \left(\dfrac{k}{2}\right)^n \cdot [x(1+\sqrt{5})^n + y(1-\sqrt{5})^n]$

מחשבים את x, y על ידי הצבת $n=0, n=1$. השלימו!

שאלה 2

תהי $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. נתון ש- $f(x)(1+2x+2x^2+x^3) = \dfrac{1}{(1-x)^3}$

א. חשבו את a_0, a_1, a_2.

ב. מצאו מספרים r,s,t כך ש- $a_n = D(3,n) - ra_{n-1} - sa_{n-2} - ta_{n-3}$ לכל
$n \ge 3$. חשבו את a_7 בעזרת הנוסחה הזו.

ג. רשמו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = n$. מצאו את מספר הפתרונות במקרה ש- $n = 7$
(רמז: שימו לב לקשר שבין $f(x)$ לבין הפונקציה מסעיף ג')

תשובה

א. $\sum_{k=0}^{\infty} D(3,k)x^k = \frac{1}{(1-x)^3}$ כידוע לכן מתוך $f(x)(1+2x+2x^2+x^3) = \frac{1}{(1-x)^3}$

נקבל ש-
$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)(1+2x+2x^2+x^3) =$$
$$= (D(3,0) + D(3,1)x + D(3,2)x^2 + \cdots)$$

ועל ידי השוואת המקדמים של x^0, x^1, x^2 בשני האגפים נקבל:

$$a_0 = D(3,0)$$
$$2a_0 + a_1 = D(3,1) \qquad \text{השלימו את החישוב}$$
$$2a_0 + 2a_1 + a_2 = D(3,2)$$

ב. נשווה כאת את המקדמים של x^n בשני אגפי השוויון שמצאנו בסעיף א' ונקבל:

$$a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-2} + a_{n-3} = D(3,n)$$

לכן $a_n = D(3,n) - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} - a_{n-3}$

את a_0, a_1, a_2 חישבנו ולכן נוכל בעזרת הנוסחה הנ"ל להגיע רקורסיבית לאיברים הבאים בסדרה, עד a_7.

ג. נשים לב שהפונקציה היוצרת המתאימה לבעיה היא $f(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} x^{2j}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{3k}\right)$

שכן המקדם של x^n בפיתוח שלה הוא כמספר פתרונות המשוואה $i + 2j + 3k = n$

(זה מספר הפעמים שנקבל את x^n אם נפתח סוגריים).

נפשט את הביטוי על ידי שימוש בנוסחה $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ (נציב בה גם x^2 ו- x^3 במקום x)

נקבל:

$$f(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} x^{2j}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{3k}\right) = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3} =$$
$$= \frac{1}{(1-x)^3(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{1}{(1-x)^3(1+2x+2x^2+x^3)}$$

מכאן ש- $f(x)(1+2x+2x^2+x^3) = \frac{1}{(1-x)^3}$ (זו אותה פונקציה מקודם) ולכן מספר

פתרונות המשוואה הנתונה הוא $a_n = D(3,n) - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} - a_{n-3}$

עבור $n = 7$ ההוצאה היא a_7 שחישבנו בסעיף ב'

שאלה 3

מצאו את מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$,

כאשר 3 מהמשתנים הם מספרים טבעיים **זוגיים**,

3 המשתנים האחרים הם מספרים טבעיים **אי-זוגיים**,

ואף אחד מהמשתנים אינו שווה 0 ואינו שווה 1 .

לא נתון איזה מהמשתנים הם זוגיים ואיזה אי-זוגיים.

אפשר לפתור בעזרת פונקציה יוצרת ואפשר בדרך אחרת. **יש להגיע לתשובה סופית מספרית**.

תשובה

פתרון ללא פונקציות יוצרות

אף אחד מהמשתנים אינו שווה 0 ואינו שווה 1, במלים אחרות כל המשתנים גדולים/שווים 2.

לכן נציב $x_i = y_i + 2$ $(1 \le i \le 6)$,

ונקבל $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + 12 = 29$,

כלומר $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 17$, כאשר y_i הם טבעיים כלשהם, שהתנאי היחיד לגביהם הוא התנאי על הזוגיות, בו נטפל כעת.

בדיוק 3 מהמשתנים המקוריים היו זוגיים, לכן בדיוק 3 מהמשתנים החדשים הם זוגיים (חיסור 2 ממספר אינו משנה את הזוגיות שלו).

יש $\binom{6}{3} = 20$ דרכים לבחור את 3 המשתנים הזוגיים מתוך 6 המשתנים.

לאחר שבחרנו אותם, נניח ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) שאֵלה הם 3 המשתנים הראשונים.

נסמן אפוא: $y_i = 2z_i$ $(1 \le i \le 3)$, $y_i = 2z_i + 1$ $(4 \le i \le 6)$.

נקבל $2z_1 + 2z_2 + 2z_3 + 2z_4 + 2z_5 + 2z_6 + 3 = 17$,

כלומר $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = 7$, כאשר z_i הם טבעיים **ללא כל הגבלה**.

מספר הפתרונות של משוואה כזו חושב בסעיף 2.4 בספר, והוא $D(6,7) = \binom{12}{5} = 792$.

את זה עלינו לכפול במספר הדרכים לבחור מי יהיו המשתנים הזוגיים, שהוא כאמור 20.

תשובה סופית: $792 \cdot 20 = 15,840$.

דרך אחרת: התחלה של פתרון בעזרת פונקציות יוצרות

כמו בפתרון הקודם, נניח שהמשתנים הזוגיים הם 3 המשתנים הראשונים, ואת התוצאה שנקבל נכפול ב- 20 $\binom{6}{3} = 20$.

מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$ תחת האילוצים הנתונים בשאלה הוא המקדם של x^{29} בפיתוח הפונקציה

$$f(x) = (x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^3 (x^3 + x^5 + x^7 + \ldots)^3$$

בסוגריים השמאליים נוציא גורם משותף x^2, שלאחר העלאה בחזקת 3 נותן x^6.

בסוגריים הימניים נוציא גורם משותף x^3, שלאחר העלאה בחזקת 3 נותן x^9.

קיבלנו

$$= x^6 (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^3 \cdot x^9 (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^3$$

$$= x^{15} (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^6$$

מכיון שהוצאנו החוצה x^{15}, המקדם של x^{29} בפיתוח הביטוי כולו שווה למקדם של $x^{29-15} = x^{14}$ בפיתוח של הגורם הימני $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^6$.

הטור ההנדסי כאן הוא טור אינסופי. מכאן השלימו את הפתרון בעצמכם.

שאלה 4

דוגמא לתרגיל מסוג זה נמצאת בסוף הקובץ "מבוא לפונקציות יוצרות" שבאתר הקורס.

א. נרשום את הפיתוחים הבאים:

$$f(x) = (1-x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \qquad g(x) = (1+x+x^2)^n = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

מצאו את a_i לכל i טבעי ואת b_4. (רמז: $1+x+x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$)

ב. חשבו את המקדם של x^7 בפיתוח של הפונקציה $h(x) = (1+x+x^2)^n (1-x^3)^m$ כאשר $m, n \in \mathbf{N}$.

ג. היעזרו בתוצאה של סעיף ב' כדי לחשב את מספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} + y_1 + y_2 + \cdots + y_5 = 7$$

כאשר $0 \le x_i \le 2$ לכל $1 \le i \le 10$ ו- y_i מתחלק ב- 3 לכל $1 \le i \le 5$

תשובה

א. לפי נוסחת הבינום עבור $n \in \mathbf{N}$, המקדם של x^i בפיתוח של $f(x)=(1-x)^n$ הוא

$a_i = (-1)^i \binom{n}{i}$ (נזכור ש- $\binom{n}{i}=0$ אם $i>n$.

מצד שני, $g(x)=(1+x+x^2)^n=(1-x^3)^n \dfrac{1}{(1-x)^n}=\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i} x^{3i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} D(n,j)x^j\right)$.

המקדם של x^4 בפיתוח הנ"ל הוא $b_4=(-1)^0\binom{n}{0}D(n,4)+(-1)^1\binom{n}{1}D(n,1)=\binom{n+3}{3}-n^2$

ב. $h(x)=(1+x+x^2)^n(1-x^3)^m=\dfrac{(1-x^3)^n}{(1-x)^n}(1-x^3)^m=(1-x^3)^{m+n}\dfrac{1}{(1-x)^n}$

ומכאן ש-

$$h(x)=(1-x^3)^{m+n}\frac{1}{(1-x)^n}=g(x)=(1+x+x^2)^n=(1-x^3)^n\frac{1}{(1-x)^n}=\left(\sum_{i=0}^{m+n}(-1)^i\binom{m+n}{i}x^{3i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}D(n,j)x^j\right)$$

לכן המקדם של x^7 בפיתוח של $h(x)$ הוא:

$$c_7=(-1)^0\binom{m+n}{0}D(n,7)+(-1)^1\binom{m+n}{1}D(n,4)+(-1)^2\binom{m+n}{2}D(n,1)$$

הערה: הנוסחה תקפה בעצם בכל מצב ש- $m+n\ge 0$ (גם אם m שלילי אבל גדול מ- $-n$.

ג. הפונקציה היוצרת המתאימה לבעיה היא $(1+x+x^2)^{10}\left(\sum_{i=0}^{n}x^{3i}\right)^5$

שכן המקדם של x^n בפיתוח שלה הוא כמספר פתרונות המשוואה

$x_1+x_2+\cdots+x_{10}+y_1+y_2+\cdots+y_5=n$ $0\le x_i\le 2$ ו- y_i מתחלק ב- 3

נשים לב ש- $(1+x+x^2)^{10}\left(\sum_{i=0}^{n}x^{3i}\right)^5=\left(\dfrac{1-x^3}{1-x}\right)^{10}\dfrac{1}{(1-x^3)^5}=(1-x^3)^5\dfrac{1}{(1-x)^{10}}$

ולכן $(1+x+x^2)^{10}\left(\sum_{i=0}^{n}x^{3i}\right)^5=\left(\dfrac{1-x^3}{1-x}\right)^{10}\dfrac{1}{(1-x^3)^5}=(1-x^3)^5\dfrac{1}{(1-x)^{10}}$

זה מקרה פרטי של הפונקציה מסעיף ב' עבור $m+n=5$ ו- $n=10$ ולפי מה שראינו שם המקדם

של x^7 בפיתוח שלה הוא $c_7=(-1)^0\binom{5}{0}D(10,7)+(-1)^1\binom{5}{1}D(10,4)+(-1)^2\binom{5}{2}D(10,1)$

וזו גם התשובה של סעיף ג'.