ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20476

מתמטיקה בדידה

חוברת הקורס קיץ 2015ג

כתב: איתי הראבן

יולי 2015 - סמסטר קיץ תשע"ה

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

ברוכים הבאים לקורס "מתמטיקה בדידה".
לפני שתתחילו בלימוד אנא קראו עמודים אלה בעיון.

על חלק מספרי הלימוד וחלק מחומרי העזר של הקורס מופיעים מספרי קורס 20276, 20283.
חומרים אלה הועברו לקורס שלנו מקורס שפעל באו"פ בשנים קודמות.

באתר האינטרנט של הקורס תמצאו חומרי למידה נוספים והדרכה ללמידה. אתר הקורס הוא גם ערוץ תקשורת אפשרי עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. אתרי הקורסים נמצאים בכתובת http://opal.openu.ac.il .

הסבר על למידה מתוקשבת אפשר למצוא כאן: http://telem.openu.ac.il .
מערכות אחרות של האו"פ זמינות כאן:
https://sheilta.apps.openu.ac.il/pls/dmyopt2/sheilta.myop.
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה: www.openu.ac.il/Library . פרטים לגבי נהלי האוניברסיטה הפתוחה מפורטים בידיעון האקדמי, באתר הכללי של האו"פ: http://www.openu.ac.il .

לתשומת לבכם:
סמסטר הקיץ נמשך 9 שבועות בלבד ולכן יידרש מכם מאמץ ניכר לעמוד בעומס ובלוח הזמנים של הקורס. חשוב להקפיד על לימוד החומר והגשת המטלות בקצב שקבענו, כדי להבטיח סיום מוצלח של הקורס. בגלל משך הסמסטר הקצר, אין אפשרות לפגר בהגשת מטלות.

מרכז ההוראה בקורס הוא איתי הראבן. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בדואר אלקטרוני itaiha@openu.ac.il
- דרך מערכת המסרים באתר הקורס.
- בטלפון **052-5277220** בימי ד' בין השעות 19:00 - 20:00.
- פקס: **09-7780631** , לרשום "עבור איתי"

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה ,
צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20476 / 2015ג)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי הנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ״ח (לאו״פ)	תאריך אחרון למשלוח ממ״ן (למנחה)
1	17.7.2015-12.7.2015	החוברת ״מבוא מהיר ללוגיקה״			
2	24.7.2015-19.7.2015	תורת הקבוצות פרקים 1 - 2.1			ממ״ן 11 יום ה׳ 23.7.2015
3	31.7.2015-26.7.2015 (א צום ט׳ באב)	תורת הקבוצות פרקים 2.2 - 3		ממ״ח 01 יום ד׳ 29.7.2015	
4	7.8.2015-2.8.2015	תורת הקבוצות פרקים 4 – 5		ממ״ח 02 יום א׳ 2.8.2015	ממ״ן 12 יום ו׳ 7.8.2015
5	14.8.2015-9.8.2015	קומבינטוריקה פרקים 1 - 2			ממ״ן 13 יום ו׳ 14.8.2015
6	21.8.2015-16.8.2015	קומבינטוריקה פרקים 3 - 5		ממ״ח 03 יום ה׳ 20.8.2015	
7	28.8.2015-23.8.2015	קומבינטוריקה פרקים 6- 7			
8	4.9.2015-30.8.2015	תורת הגרפים פרקים 1 - 3			ממ״ן 14 יום א׳ 30.8.2015
9	11.9.2015-6.9.2015	תורת הגרפים פרקים 4- 6		ממ״ח 04 מוצ״ש בחצות 12.9.2015	ממ״ן 15 יום ה׳ 17.9.2015

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

מטלות הקורס

קראו היטב עמודים אלה לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס. הבנה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. מטלות המנחה (ממנ״ים) יבדקו על-ידי המנחה ויוחזרו לכם בצירוף הערות המתייחסות לתשובות. על מטלות המחשב (ממ״חים) תקבלו רק פירוט תשובות נכונות ולא נכונות.

מבנה המטלות

בכל מטלה כמה שאלות. משקל כל השאלות במטלה זהה אלא אם כן צוין אחרת.
את הפתרונות לממ״ן עליכם לרשום על דף בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. לחלופין ניתן להגיש את המטלות מודפסות במעבד תמלילים, בתנאי שכל הסימונים המתמטיים ברורים. אין להשתמש בסימונים שאינם מופיעים ביחידות.

ניקוד המטלות

בקורס חמש מטלות מנחה (ממ״נים) וארבע מטלות מחשב (ממ״חים).
משקל כל ממ״ן הוא 3 נקודות, משקל כל ממ״ח הוא 2 נקודות.
בהגשת כל המטלות ניתן אפוא לצבור 23 נקודות.

דרישות חובה בהגשת המטלות

חובה להגיש מטלות במשקל של 12 נקודות לפחות.

התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

א. להגיש מטלות במשקל של 12 נק׳ לפחות.
ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.
ג. לקבל בציון הסופי 60 נקודות לפחות.

הערות חשובות לתשומת לבך!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מנחה (ממ״ן) 11

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2015ג

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 1

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ה׳ 23.7.2015

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״)

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל.

שאלה 1 (16 נק׳)

שאלה זו נועדת לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות ולחדד כמה נקודות שכדאי להבין בשלב מוקדם:

* ההבדל בין A לבין $\{A\}$ (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא A).

* מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה $\varnothing$ לבין $\{\varnothing\}$.

* ההבדל בין "x איבר של y" לבין "x חלקי ל- y".

בכל אחד מהזוגות $x\,;\,y$ הבאים, קבע אם $x \in y$ וקבע אם $x \subseteq y$.

ייתכן ששני היחסים יתקיימו בעת ובעונה אחת, וייתכן גם שאף אחד משניהם לא יתקיים.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק.

א. $\varnothing \;;\; \varnothing$

ב. $\{\{\varnothing\}\} \;;\; \{\varnothing\}$

ג. $\{\varnothing,\{1\}\} \;;\; \{\varnothing\}$

ד. $\{\varnothing,\{1\}\} \;;\; \{1\}$

ה. $\{\varnothing,\{1\}\} \;;\; \{\{1\}\}$

ו. $\{\varnothing,\{1\}\} \;;\; \{\varnothing,\{1\}\}$

ז. $P(\{1\}) \;;\; \{\varnothing\}$

ח. $P(P(\varnothing)) \;;\; P(\varnothing)$

שאלה 2 (22 נק׳)

הוכיחו את הטענות הבאות בעזרת **״אלגברה של קבוצות״**: צאו מאחד האגפים, פתחו אותו בעזרת זהויות ידועות, והגיעו לאגף השני. אין להשתמש בהוכחה במושג ״איבר״ !

בעבודה עם הפרש קבוצות מומלץ להיעזר בזהות $A - B = A \cap B'$ (עמ׳ 23 בספר הלימוד).

א. $(A-B)\cup(B-C) = (A\cup(B-C)) - (B\cap C)$

ב. $(A-B)\cap(C-D) = (A\cap C) - (B\cup D)$

שאלה 3 (32 נקי)

הוכיחו את הטענות א׳-ד׳. הסימן $\oplus$ מוגדר בשאלה 1.22 בספר הלימוד. כדאי להיעזר בתכונות של ההפרש הסימטרי המוכחות באותה שאלה ולתת הוכחות אלגבריות, בדומה לשאלה 2 בממ״ן זה. זה יכול לחסוך הרבה עבודה. **בטענות ״אם ורק אם״ יש להוכיח שני כיוונים**.

א. $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

ב. כלל הצמצום עבור הפרש סימטרי: אם $X \oplus A = Y \oplus A$ אז $X = Y$.

הדרכה: הוכחה קצרה אפשר לקבל בעזרת האסוציאטיביות של $\oplus$ ותכונות אחרות שלה.

ג. $A \oplus B = \varnothing$ **אם ורק אם** $A = B$.

ד. $A \oplus B = A$ **אם ורק אם** $B = \varnothing$.

שאלה 4 (30 נקי)

איחוד של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בהגדרה 1.6 בעמוד 12 בספר.

במלים פשוטות ההגדרה היא:

$x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ אםם x שייך **לפחות** לאחת הקבוצות A_i, כאשר i מקבל ערכים ב- I.

במלים אחרות:

$x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ אםם $\exists i\left(i \in I \wedge x \in A_i\right)$

חיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בעמוד 16 בספר. במלים פשוטות ההגדרה היא:

$x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ אםם x שייך **לכל** הקבוצות A_i, כאשר i מקבל ערכים ב- I.

במלים אחרות:

$x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ אםם $\forall i\left(i \in I \rightarrow x \in A_i\right)$

תהי $\mathbf{N}^*$ קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מ- 0. לכל $n \in \mathbf{N}^*$ נגדיר קבוצה:

$$B_n = \{n \cdot k \mid k \in \mathbf{N}^*\}$$

במלים אחרות, B_n היא קבוצת כל המספרים שצורתם $n \cdot k$, כאשר $k \in \mathbf{N}^*$.

א. הוכח כי $B_n \cap B_m = B_{c(n,m)}$ כאשר $c(n,m)$ הוא הכפולה המשותפת המינימלית של n, m

(המספר הטבעי החיובי הקטן ביותר המתחלק ללא שארית ב- n וב- m).

הדרכה: ניתן להסתמך על הטענה כי כל כפולה משותפת של n, m מתחלקת בכפולה המשותפת המינימלית שלהן. 5 נקודות בונוס למי שיצרף הוכחה קבילה לטענה זו.

ב. הסבר מדוע $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} B_n = \varnothing$.

ג. לכל $n \geq 2$ נסמן $D_n = B_n - \bigcup_{1<i<n} B_i$ (בפרט: $D_2 = B_2$, $D_3 = B_3 - B_2$).

עבור איזה ערכים של n קיים: $D_n \neq \varnothing$? כלומר מצא את $\{n \in \mathbf{N}^* \mid D_n \neq \varnothing\}$.

אל תשכח להראות שתשובתך כוללת את **כל** הערכים המקיימים זאת (״הכלה דו-כיוונית״).

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2015ג

חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" סעיפים 2.1 – 2.4

מספר השאלות: 11 **משקל המטלה**: 2 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ד' 29.7.2015

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בשאלות המסומנות בסולמית (#) מופיעות שתי טענות. סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה, ב - אם רק טענה 2 נכונה,

ג - אם שתי הטענות נכונות, ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

בשאלות שאינן מסומנות בסולמית, פשוט בחרו את התשובה הנכונה.

שאלה 1

יהי $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(2,2)\}$. נתבונן בשוויון $R = X \times Y$.

א. אם $X = \{1\}$, $Y = \{1,2,3\}$ אז $R = X \times Y$.

ב. אם $X = \{1,2\}$, $Y = \{1,2,3\}$ אז $R = X \times Y$.

ג. השוויון $R = X \times Y$ מתקיים עבור X,Y מסוימים, שאינם אלה שהוצגו בתשובות א, ב.

ד. לא קיימות קבוצות X,Y כך ש- $R = X \times Y$.

שאלה 2 (כאן ובהמשך הקורס: **"רלציה" בעברית: יחס**)

תהי $A = \{1,2,3,4\}$ ויהי R היחס הבא מ- A ל- A: $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,4),(4,3)\}$.

$Domain(R) \cap Range(R)$ הוא:

א. $\{1\}$ ב. $\{1,2,4\}$ ג. $\varnothing$ ד. $\{1,2\}$ ה. A

שאלה 3

A, R הם **אלה שהוגדרו בשאלה 2**. S הוא יחס מעל A . השוויון $RS = I_A$ מתקיים עבור:

א. $S = I_A$ ב. $S = R^{-1}$ ג. $S = R$

ד. אינו מתקיים עבור שום S ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

שאלה 4

R הוא יחס כלשהו מעל קבוצה כלשהי. השוויון $R^4R = R^5$

א. נכון תמיד ב. נכון **רק** אם $R = I_A$ ג. נכון **רק** אם $R = \varnothing$

ד. נכון **רק** אם $R = A \times A$ ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 5

R הוא יחס כלשהו מעל קבוצה A כלשהי. התנאי $RR^{-1} = I_A$ **שקול** (!) לתנאי

א. $R^{-1}R = I_A$ ב. $R = I_A$ ג. $R \neq \varnothing$

ד. $Domain(R) = A$ ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

שאלה 6 (#)

תהי $A = \{1,2,3\}$ ויהי R היחס הבא מ- A ל- A : $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,1)\}$.

טענה ***(i)***: R^2 הוא רפלקסיבי. טענה ***(ii)***: R^2 הוא סימטרי.

שאלה 7 (#)

A, R הם אלה שהוגדרו בשאלה 6.

טענה ***(i)***: R^2 הוא אנטי-סימטרי. טענה ***(ii)***: R^2 הוא טרנזיטיבי.

שאלה 8

היחס $R = \{(1,1),(2,2)\}$ מעל $A = \{1,2,3\}$ הוא:

א. רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי. ב. סימטרי ורפלקסיבי אך לא טרנזיטיבי.

ג. סימטרי וטרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי. ד. רפלקסיבי וטרנזיטיבי אך לא סימטרי.

ה. טרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי ולא סימטרי.

שאלה 9 (#)

R,S הם יחסים מעל קבוצה A ומתקיים $S \subseteq R$.

טענה ***(i)***: אם S סימטרי אז R סימטרי. טענה ***(ii)***: אם S אנטי-סימטרי אז R אנטי-סימטרי.

שאלה 10

R הוא יחס מעל קבוצה כלשהי וידוע ש- R **אינו** טרנזיטיבי. מכאן ניתן להסיק:

א. ב- R יש לפחות שני זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש R כזה שבו בדיוק שני זוגות.

ב. ב- R יש לפחות 3 זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש R כזה שבו בדיוק 3 זוגות.

ג. ב- R יש לפחות 4 זוגות סדורים.

ד. מהנתון נובע ש- A אינסופית וב- R יש אינסוף זוגות סדורים.

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 11 (#)

R,S הם יחסים מעל קבוצה A.

הסימן $\oplus$ (הפרש סימטרי) הוגדר בשאלה 1.22 בעמ' 27 בכרך "תורת הקבוצות".

טענה ***(i)***: אם R,S אנטי-סימטריים אז $R \oplus S$ אנטי-סימטרי.

טענה ***(ii)***: אם R,S טרנזיטיביים אז $R \oplus S$ טרנזיטיבי.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2015ג

חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" מסעיף 2.5 עד סוף פרק 3

מספר השאלות: 10 **משקל המטלה**: 2 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום א' 2.8.2015

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

שאלה 1

יהיו: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $R = \{(1,2),(1,3),(2,3),(5,6)\}$, $E = I_A \cup R \cup R^{-1}$.

החלוקה שיחס השקילות E משרה ב- A היא:

א. $\{\{1,2,3\},\{5,6\}\}$ ב. $\{\{1,2,3\},\{4\},\{5,6\}\}$

ג. $\{\{1,2,3,5,6\}\}$ ד. $\{\{1,2,3,4,5,6\}\}$

ה. $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{5,6\}\}$

ו. E אינו יחס שקילות מעל A ולכן אינו משרה חלוקה של A.

שאלה 2 (תזכורת: **יחס** הוא המלה העברית ל-**רלציה**)

נגדיר יחס L מעל $\mathbf{N}$: $(n,m) \in L$ אםם $n+m$ מתחלק ללא שארית ב- 3.

מספר מחלקות השקילות ש- L משרה ב- $\mathbf{N}$ הוא:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. יש אינסוף מחלקות שקילות.

ה. L אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

שאלה 3

נגדיר יחס M מעל $\mathbf{N}-\{0\}$:

עבור n,m טבעיים חיוביים, $(n,m) \in M$ אםם $3n-3m$ מתחלק ללא שארית ב- 10.

מספר מחלקות השקילות ש- M משרה ב- $\mathbf{N}-\{0\}$ הוא:

א. 3 ב. 10 ג. 30 ד. יש אינסוף מחלקות שקילות.

ה. M אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

שאלה 4

נגדיר פונקציה f מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$: $f(k)=k^2-k$.

f היא:

א. חד-חד-ערכית ועל	ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית.	ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$.

שאלה 5

תהי $g(x)=x^2+2x-1000$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

g היא:

א. חד-חד-ערכית ועל	ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית.	ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbf{R}$ ל- $\mathbf{R}$.

שאלה 6

תהי $h(X)=X\cap\mathbf{N}$, $h:P(\mathbf{R})\to P(\mathbf{N})$.

h היא:

א. חד-חד-ערכית ועל	ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית.	ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $P(\mathbf{R})$ ל- $P(\mathbf{N})$.

שאלה 7

תהיינה $A,B\subseteq U$ שונות זו מזו, ומתקיים: $\{A,B\}$ היא **חלוקה** של U.

בעמ' 85 בכרך "תורת הקבוצות" מוגדרת φ_A , **הפונקציה האופיינית** של A ב- U .

טענה (***i***): מהנתון נובע שלכל $x\in U$, $\varphi_A(x)+\varphi_B(x)=1$.

טענה (***ii***): מהנתון נובע שלכל $x\in U$, $\varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x)=0$.

א. רק טענה (***i***) נכונה.	ב. רק טענה (***ii***) נכונה.

ג. שתי הטענות (***i***) , (***ii***) נכונות.	ד. אף אחת מהטענות (***i***), (***ii***) אינה נכונה.

שאלה 8

תהי $A = \{1,2,3,4\}$ ויהיו $X,Y \subseteq A$.

נאמר ש- $(X,Y) \in D$ **אםם (אם ורק אם)** $X \supseteq Y$. היחס D הוא:

א. סדר-חלקי מעל $P(A)$ ואינו סדר-מלא מעל $P(A)$.

ב. סדר-חלקי מעל $P(A)$, שהוא גם סדר-מלא מעל $P(A)$.

ג. סדר-חלקי מעל $P(A)$, שהוא גם יחס שקילות מעל $P(A)$.

ד. אינו יחס מעל $P(A)$.

שאלה 9

מעל קבוצה כלשהי A מוגדר סדר-חלקי R, **שאינו** סדר-מלא. מכאן נובע:

א. $|A| = 1$.

ב. $|A| = 2$.

ג. $|A| \geq 2$.

ד. מספר הזוגות הסדורים ב- R הוא אינסופי.

ה. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

שאלה 10

R הוא סדר-חלקי על קבוצה כלשהי A.

a,b הם שני אברים שונים של A, ושניהם אברים מקסימליים לגבי R . מכאן נובע:

א. $|A| = 2$.

ב. R הוא סדר מלא מעל A .

ג. R אינו סדר מלא מעל A.

ד. A היא אינסופית.

ה. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2015ג

חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" פרקים 2- 3

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ו' 7.8.2015

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1 (30 נקודות)

$\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים, $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

$\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

א. תהי $f(x,y) = 3x + 2y$, $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$.

הוכח ש- f **אינה** חד-חד-ערכית , והוכח ש- f היא **על** .

ב. תהי $g(X) = X \oplus \mathbf{Z}$, $g : P(\mathbf{R}) \to P(\mathbf{R})$.

הוכח: לכל $X \in P(\mathbf{R})$, $g(g(X)) = X$

הדרכה: ר' תכונות של הפרש סימטרי בעמ' 27 בכרך "תורת הקבוצות".

הוכחה אלגברית קצרה הרבה יותר במקרה זה מאשר הוכחה ע"י "יהי x איבר...".

ג. האם g היא חד-חד-ערכית? האם g היא על ?

שאלה 2 (32 נקודות)

נגדיר יחס E מעל $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$: שני איברים של $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ עומדים ביחס E זה לזה אם ורק אם הפונקציה f מסעיף א של השאלה הקודמת שולחת אותם לאותו איבר של $\mathbf{Z}$.

E הוא **יחס שקילות**: זה נובע מהסעיף "העתק טבעי" בעמ' 84 בספר. ראו הסבר מפורט יותר באתר הקורס, "יחס שקילות המושרה על-ידי פונקציה". השאלה מתייחסת ליחס השקילות הזה.

א. האם מספר מחלקות השקילות אליהן E מחלקת את $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ הוא סופי או אינסופי ?

(המשך השאלה בעמ' הבא)

(המשך שאלה 2)

ב. הוכח שמחלקת השקילות שבה נמצא $(0,0)$ היא אינסופית, כלומר מכילה אינסוף איברים.

ג. יהי $(a,b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ויהי $(m,n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

הוכח: אם (m,n) נמצא באותה מחלקת שקילות עם $(0,0)$,

אז $(a+m,\, b+n)$ נמצא באותה מחלקת שקילות עם (a,b).

ד. הוכח **שכל** מחלקות השקילות אליהן E מחלקת את $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ הן אינסופיות.

שאלה 3 (28 נקודות)

בשאלה 3.25א בעמ' 94 בספר מוכח שיחס ההכלה $\subseteq$ הוא סדר-חלקי מעל כל קבוצה של קבוצות.

א. תהי K קבוצת כל **היחסים הטרנזיטיביים** מעל $\mathbf{N}$.

לפי האמור בתחילת השאלה, K סדורה בסדר-חלקי לגבי הכלה (אברי K הם קבוצות, כי יחס מעל קבוצה גם הוא קבוצה: קבוצה של זוגות סדורים). הראה שיש ב- K איבר קטן ביותר ואיבר גדול ביותר ("תורת הקבוצות" עמ' 93). מיהם?

נמק מדוע האיברים שאתה מציין אכן שייכים ל- K.

ב. תהי M קבוצת כל היחסים **הסופיים** מעל $\mathbf{N}$, פרט ליחס הריק (יחס סופי: יחס שהוא קבוצה סופית, כלומר שיש בו מספר סופי של זוגות סדורים. בקבוצה M שהוגדרה כאן נמצאים כל היחסים הסופיים מעל $\mathbf{N}$, חוץ מהיחס הריק).

לפי האמור בתחילת השאלה, M סדורה בסדר-חלקי לגבי הכלה.

(*i*) האם יש ב- M איבר קטן ביותר? איבר גדול ביותר? אם כן, מיהם?

(*ii*) אם לא מצאת איבר קטן ביותר, האם יש איברים מינימליים? אם כן, ציין מיהם והסבר מדוע הם אינם קטנים ביותר. אם אין איברים מינימליים, הסבר מדוע אין.

(*iii*) אם לא מצאת איבר גדול ביותר, האם יש איברים מקסימליים? אם כן, ציין מיהם והסבר מדוע הם אינם גדולים ביותר. אם אין איברים מקסימליים, הסבר מדוע אין.

שאלה 4 (10 נקודות)

פונקציה $f:\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ מוגדרת ברקורסיה כך:

$f(0)=1$, ולכל $k \in \mathbf{N}$: $f(k+1)=(k+1)\cdot f(k)$

(בהמשך הקורס נחזור לפונקציה זו ונקרא לה בשם "עצרת").

(2 נק') א. חשבי את $f(5)$.

(8 נק') ב. הוכיחי באינדוקציה: $1\cdot f(1) + 2\cdot f(2) + 3\cdot f(3) + \ldots + n\cdot f(n) = f(n+1)-1$

מטלת מנחה (ממ״ן) 13

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2015ג

חומר הלימוד למטלה: ״תורת הקבוצות״ פרקים 4,5

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה**: 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ו׳ 14.8.2015

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״)

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שימו לב: חלק ממטלה זו מתייחס לפרק 5 בתורת הקבוצות, שנמצא בידיכם בחוברת נפרדת.

שאלה 1 (27 נק׳)

א. הוכח שאם $|A-B|=|B-A|$ אז $|A|=|B|$.

הדרכה: לא נתון שהקבוצות סופיות, לכן יש לעבוד לפי הגדרת שוויון עוצמות.

ההנחה על A,B פירושה שקיימת פונקציה חח״ע ועל מסוימת, ועלינו להראות שמכך נובע שקיימת פונקציה חח״ע ועל אחרת...

ב. הראה שאם A,B **סופיות** ו- $|A|=|B|$ אז $|A-B|=|B-A|$.

ג. הראה ע״י דוגמא שטענת סעיף ב אינה נכונה בהכרח עבור A,B שאינן סופיות.

שאלה 2 (10 נק׳)

נתונות 100 קבוצות $A_1, A_2, \dots, A_{100}$, שכולן חלקיות לקבוצת הממשיים $\mathbf{R}$.

נתון שלכל i ($1 \le i \le 100$), **המשלים** של A_i ב- $\mathbf{R}$ הוא קבוצה בת-מניה.

נסמן $A = \bigcap_{1\le i\le 100} A_i$. נסמן ב- B את **המשלים** של A ב- $\mathbf{R}$.

עוצמת B היא:

[1] 0 **[2]** מספר טבעי כלשהו שאינו 0 **[3]** $\aleph_0$

[4] C **[5]** התשובה תלויה בבחירת הקבוצות $A_1, A_2, \dots, A_{100}$.

מצאו את התשובה הנכונה **ונמקו**.

שאלה 3 (18 נקי)

תהיינה A,B,C קבוצות **בנות מניה**, החלקיות לקבוצת הממשיים **R**.

נסמן: $D = A' \cap B' \cap C'$ (המשלימים הם יחסית ל- **R**). עוצמת D היא:

[1] 0 **[2]** מספר טבעי כלשהו שאינו 0 **[3]** $\aleph_0$

[4] C **[5]** התשובה תלויה בבחירת הקבוצות A,B,C .

מצאו את התשובה הנכונה **ונמקו**.

שאלה 4 (20 נקי)

(8 נקי) א. הוכיחי שקבוצת היחסים (רלציות) מעל הקבוצה **N**, עוצמתה C .

הדרכה: כדאי להיזכר בהגדרה של יחס מעל קבוצה.

(12 נקי) ב. הוכיחי שקבוצת היחסים **הסימטריים** מעל **N** , עוצמתה C .

שאלה 5 (25 נקי)

(12 נקי) א. תהיינה k_1,k_2,m עוצמות. נתון $k_1 \le k_2$. הוכח: $k_1 \cdot m \le k_2 \cdot m$.

(13 נקי) ב. הוכח: $C \cdot \aleph_0 = C$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2015ג

חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 1,2

מספר השאלות: 11 **משקל המטלה:** 2 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ה' 20.8.2015

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בשאלות 1 – 4 A,B הן קבוצות, $|A|=5$, $|B|=3$.

שאלה 1

מספר הפונקציות של B ל- A הוא:

א. 15 ב. 120 ג. 125 ד. 243 ה. 512

שאלה 2

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של B ל- A הוא:

א. 5 ב. 15 ג. 20 ד. 60 ה. 120

שאלה 3

מספר היחסים הרפלקסיביים מעל A הוא:

א. 5 ב. 25 ג. 32 ד. 5^5 ה. 2^{20}

שאלה 4

מספר יחסי הסדר המלא מעל A הוא:

א. 5 ב. 25 ג. 32 ד. 120 ה. 3,125

שאלות 5- 7 עוסקות בדרכים שונות לסדר את המחרוזת 223334444 (להלן: "המחרוזת").

שאלה 5

מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת הוא:

א. 9 ב. $2!+3!+4!$ ג. 1260

ד. 36,2880 ה. $9!-(2!+3!+4!)$

שאלה 6

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת כאשר הספרות 22 חייבות להיות צמודות זו לזו?

א. 28 ב. 280 ג. 820 ד. 2,280 ה. 8,820

שאלה 7

בנוסף לדרישה שבשאלה 6, נדרוש גם **שלא** יופיע הרצף 333.

מספר הסידורים האפשריים כעת קטן ממספר הסידורים שמצאתם בשאלה 6. **בכמה הוא קטן?**

א. 13 ב. 30 ג. 130 ד. 300 ה. 310

בכל אחת מהשאלות 8 – 10 נתונה קבוצה של כדורים בצבעים אדום, סגול ולבן ותנאים מסוימים. עליכם למצוא **בכמה דרכים ניתן לבחור מהקבוצה הנתונה 50 כדורים**, בתנאים הנתונים, ללא חשיבות לסדר הבחירה. כדורים בעלי אותו צבע נחשבים זהים.

שאלה 8

יש מספר בלתי מוגבל של כדורים מכל צבע.

א. 3^{50} ב. 50 ג. 50^3 ד. 1,326 ה. 22,100

שאלה 9

נסמן את התשובה לשאלה הקודמת ב- x.

כעת לרשותנו רק 49 כדורים אדומים, 48 כדורים סגולים ו- 48 כדורים לבנים.

התשובה כעת היא:

א. $x-7$ ב. $x-10$ ג. $x-12$ ד. ללא שינוי, x.

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 10

לרשותנו שוב 49 כדורים אדומים, 48 כדורים סגולים ו- 48 כדורים לבנים.

הפעם הבחירה צריכה להכיל **מכל צבע** לפחות 16 כדורים.

א. 2 ב. 6 ג. 8 ד. 26 ה. 28

שאלה 11

מהו מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=14$?

א. 360 ב. 630 ג. 3,060 ד. 6,003 ה. 6,300

תזכורת: בקורס זה, 0 הוא מספר טבעי.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2015ג

חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 3,4,5,6

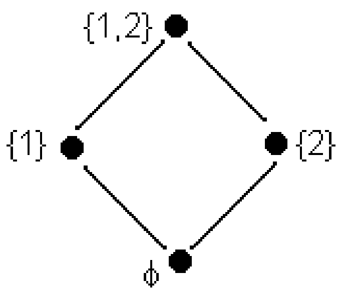
מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום א' 30.8.2015

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1



באיור מופיעה דיאגרמת הסה ("תורת הקבוצות" עמ' 88) של

יחס ההכלה $\subseteq$ מעל $P(\{1,2\})$.

אנו רואים כי בדיאגרמה 4 קטעים.

תהי A קבוצה בת k איברים $(k > 0)$. מצאו את מספר

הקטעים בדיאגרמת הסה של יחס ההכלה מעל $P(A)$.

את הביטוי המתקבל סכמו לביטוי פשוט, **שאינו מכיל סכומים**, בעזרת נוסחה המופיעה באחת השאלות בספר הלימוד.

שאלה 2

נסמן $B = \{5,6,7,8,9\}$, $A = \{1,2,3,4\}$.

יהי K יחס מ- A ל- B (כלומר K הוא קבוצה חלקית של $A \times B$).

(5 נק') א. בכמה יחסים K כאלה $1 \notin domain(K)$?

(20 נק') ב. בכמה יחסים K כאלה $\{1,2,3\} \subseteq domain(K)$?

כדאי להיעזר בהכלה והפרדה. אין הכרח להגיע לתשובה מספרית.

תזכורת למושגים מתורת הקבוצות:

$K = \{(2,5),(2,6),(3,5),(4,9)\}$ הוא יחס מ- A ל- B, ו- $domain(K) = \{2,3,4\}$.

שאלה 3

חשבי את פונקצית אוילר $\Theta(3600)$ בשתי דרכים:

(10 נק׳) א. בעזרת הנוסחה שבתחתית עמוד 93 בספר הלימוד.

(15 נק׳) ב. באופן ישיר בעזרת הכלה והפרדה.

שאלה 4

רמי מציע לדינה את האתגר הבא:

דינה תבחר 8 מספרים טבעיים שונים כלשהם בתחום $10 \le n \le 36$.

רמי ינסה ליצור, תוך שימוש **רק במספרים שדינה בחרה או בחלק מהם,** שני סכומים שווים.

למשל, אם דינה בחרה את המספרים $10, 11, 12, 15, 18, 25, 32, 36$

רמי יכול לרשום את השוויון $11 + 25 = 36$.

לחלופין, הוא יכול לרשום $10 + 12 + 18 = 15 + 25$.

כל המספרים צריכים להילקח מהרשימה של דינה, ואין חזרות על אותו מספר.

אם רמי מצליח לרשום שוויון כזה – הוא מנצח. אם הוא לא מצליח – דינה מנצחת.

בהנחה שאחרי שדינה בוחרת יש לרמי די זמן - או מחשב - לבדוק את כל האפשרויות,

הוכיחו כי רמי תמיד ינצח! הדרכה: עקרון שובך היונים.

שאלה 5

יהי a_n מספר הסדרות באורך n, שאבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,\dots,7\}$, והמקיימות את התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים **זוגיים** זה בסמוך לזה. למשל אם $n = 5$ הסדרה $(1,1,2,6,3)$ אינה מותרת, מכיון ש- 2 מופיע ליד 6.

גם הסדרה $(1,1,2,2,3)$ אסורה, כי יש שתי הופעות צמודות של 2.

מצא יחס נסיגה (יחס רקורסיה) עבור a_n. רשום את $a_0,\ a_1,\ a_2$.

בדוק שהערך שרשמת עבור a_0 מתאים ליחס הנסיגה שרשמת.

רשום את המשוואה האופיינית (״קומבינטוריקה״ עמ׳ 117), פתור את יחס הנסיגה, וקבל ביטוי מפורש עבור a_n. ביטויים כגון $\sqrt{48}$ יש להעביר לצורה כגון $4\sqrt{3}$, ואין להציב במקומם קירובים עשרוניים כגון *6.93*.

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2015ג

חומר הלימוד למטלה: "תורת הגרפים" פרקים 1- 3

מספר השאלות: 11 **משקל המטלה:** 2 נקודות

מועד אחרון להגשה: מוצ"ש בחצות 12.9.2015

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

שאלה 1

נתאר לעצמנו גרף על 6 צמתים, שדרגותיהם : 1,1,2,2,2,3.

א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.

ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.

ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.

ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.

ה. לא קיים גרף כזה.

שאלה 2

נתאר לעצמנו גרף על 8 צמתים, שדרגותיהם : 0,1,2,2,3,4,7,7 .

א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.

ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.

ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.

ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.

ה. לא קיים גרף כזה.

שאלה 3

בהנתן $n > 0$ טבעי, יהי Q_n הגרף הפשוט הבא :

הצמתים של Q_n הם הסדרות באורך n שאבריהן 0, 1 (מספר הצמתים הוא אפוא 2^n).

שני צמתים מחוברים בקשת אם ורק אם הם נבדלים זה מזה בקואורדינטה אחת בדיוק.

למשל, ב- Q_6 יש קשת בין הצומת $(0,0,1,0,1,1)$ לצומת $(0,1,1,0,1,1)$, כי שתי הסדרות הללו נבדלות זו מזו רק בקואורדינטה השניה. מספר **הקשתות** של Q_6 הוא :

א. 63 ב. 128 ג. 192 ד. 720

שאלה 4

K_n הוא הגרף המלא על n צמתים ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4).

נתבונן באיחוד זר של K_3 עם K_5 : גרף בעל 8 צמתים, שיש לו שני רכיבי קשירות:

רכיב קשירות אחד הוא עותק של K_3 ורכיב הקשירות השני הוא עותק של K_5 .

נוסיף לקשתות הקיימות בגרף עוד קשתות: נחבר בקשת כל צומת של K_3 עם כל צומת של K_5.

הגרף שנקבל הוא:

א. K_8, והוא דו-צדדי, הצדדים שלו הם הגרפים K_3, K_5 מהם התחלנו.

ב. K_8, והוא דו-צדדי, אבל הצדדים שלו **אינם** הגרפים K_3, K_5 מהם התחלנו.

ג. K_8, והוא אינו דו-צדדי.

ד. גרף דו-צדדי שאינו K_8 .

ה. גרף שאינו **דו**-צדדי ואינו K_8 .

שאלה 5

השאלה עוסקת באיזומורפיזם של גרפים שאינם מתויגים ("תורת הגרפים" הגדרה 2.7).

נזכור שלכל גרף G, המשלים שלו ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4) מסומן $\overline{G}$.

C_n הוא גרף שהוא מעגל פשוט על n צמתים.

טענה (*i*): $\overline{C_4}$ איזומורפי לגרף הבנוי משתי קשתות זרות:

טענה (*ii*): $\overline{C_5}$ איזומורפי ל- C_5 .

א. רק טענה (*i*) נכונה.

ב. רק טענה (*ii*) נכונה.

ג. שתי הטענות (*i*) , (*ii*) נכונות.

ד. אף אחת מהטענות (*i*), (*ii*) אינה נכונה.

שאלה 6

G הוא **יער** על 14 צמתים, ובו בדיוק 14 קשתות.

א. G הוא עץ.

ב. ל- G יש בדיוק שני רכיבי קשירות.

ג. ל- G יש בדיוק שלשה רכיבי קשירות.

ד. נחוץ מידע נוסף כדי לקבוע כמה רכיבי קשירות יש ל- G.

ה. לא ייתכן יער כזה.

שאלה 7

דרגות הצמתים (לא סדרת Prüfer !) בגרף G הן : 1,1,1,2,2,3 .

גם לגרף H יש בדיוק אותה סדרת דרגות. הגרפים אינם מתוייגים.

טענה ***(i)*** : G,H הם בהכרח עצים.

טענה ***(ii)*** : G,H בהכרח איזומורפיים זה לזה.

א. רק טענה ***(i)*** נכונה.
ב. רק טענה ***(ii)*** נכונה.
ג. שתי הטענות ***(i)*** , ***(ii)*** נכונות.
ד. אף אחת מהטענות ***(i)***, ***(ii)*** אינה נכונה.

שאלה 8

בפרק 2 של החוברת "תורת הגרפים", בתשובה לשאלה 7, מופיע עץ מתויג.

נוסיף לעץ הזה עלה שמספרו 9 ונחבר אותו לצומת שמספרה 6.

סדרת Prüfer של העץ החדש היא :

א. $(4,4,3,4,4,2,6)$
ב. $(4,4,3,4,4,2,9)$
ג. $(6,4,4,3,4,4,2)$
ד. $(6,4,4,4,3,2,4)$
ה. $(4,4,4,4,3,2,6)$
ו. $(4,4,4,2,4,3,6)$

שאלה 9

הגרף הדו-צדדי המלא $K_{p,q}$ הוגדר ב"תורת הגרפים" הגדרה 1.5 .

$K_{6,2}$ הוא :

א. אוילרי והמילטוני.
ב. אוילרי אבל אינו המילטוני.
ג. המילטוני אבל אינו אוילרי.
ד. אינו אוילרי ואינו המילטוני.

בעמוד הבא : שאלות 10, 11

שאלה 10

G הוא גרף אוילרי (כלומר יש בו מעגל אוילר), ויש ב- G גם מסלול אוילר שאינו מעגל.

א. זה לא מעניין, בכל גרף אוילרי יש גם מסלול אוילר שאינו מעגל.

ב. טענה א' אינה נכונה, אבל יש גרף פשוט המקיים את הדרישות הללו.

ג. יש גרף כזה, אבל לא גרף פשוט.

ד. לא ייתכן גרף כזה.

שאלה 11

G הוא גרף המילטוני (כלומר יש בו מעגל המילטון), ויש ב- G גם מסלול המילטון שאינו מעגל.

א. זה לא מעניין, בכל גרף המילטוני יש גם מסלול המילטון שאינו מעגל.

ב. טענה א' אינה נכונה, אבל יש גרף פשוט המקיים את הדרישות הללו.

ג. יש גרף כזה, אבל לא גרף פשוט.

ד. לא ייתכן גרף כזה.

מטלת מנחה (ממ״ן) 15

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2015ג

חומר הלימוד למטלה: ״תורת הגרפים״ , כל החוברת

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ה׳ 17.9.2015

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״)
- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1 (15 נקודות)

בממ״ן 14 שאלה 1 הסתכלנו בדיאגרמת הסה של יחס ההכלה מעל קבוצה A בת k אברים.

נסתכל שוב באותה דיאגרמת הסה, והפעם נראה אותה כגרף. צמתי הגרף הם אברי $P(A)$.

א. הראו שהגרף הוא רגולרי (כלומר לכל הצמתים אותה דרגה). מהי הדרגה?

ב. בממ״ן 14 חישבנו את מספר הקשתות בגרף. חשבו אותו מחדש, הפעם על ידי שיקול פשוט של תורת הגרפים.

ג. הוכיחו שהגרף הוא דו-צדדי: הראו חלוקה של הצמתים לשני צדדים.

שאלה 2 (25 נקודות)

יהיו $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ שני עצים על אותה קבוצת צמתים V.

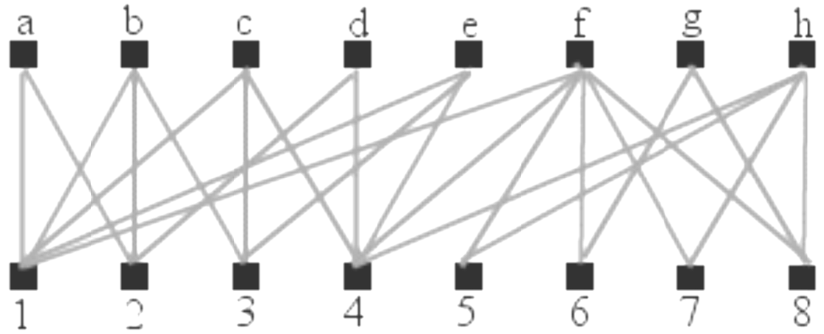
לכל $v\in V$ תהי $d_1(v)$ הדרגה של v ב- G_1 ותהי $d_2(v)$ הדרגה של v ב- G_2 .

הוכיחו כי קיים $v\in V$ עבורו $d_1(v)+d_2(v)\le 3$.

הדרכה: חשבו את סכום כל הדרגות בשני העצים.

שאלה 3 (13 נקודות)

הוכיחו כי בגרף הבא לא קיים זיווג מושלם.



שאלה 4 (27 נקודות)

G הוא גרף פשוט על קבוצת הצמתים $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

בין כל שני צמתים שונים i,j המקיימים $1 \le i \le 4$ וגם $1 \le j \le 4$ יש קשת של G.

בין כל שני צמתים שונים i,j המקיימים $5 \le i \le 9$ וגם $5 \le j \le 9$ יש קשת של G.

בנוסף על כל הקשתות הללו יש ב- G **עוד בדיוק חמש קשתות**.

יהי $H = \bar{G}$ הגרף המשלים של G.

א. הוכיחי ש- H הוא דו-צדדי.

ב. חשבי את מספר הקשתות של H .

ג. בהנחה ש- H קשיר, הוכיחי ש- H אינו מישורי.

שאלה 5 (20 נקודות)

G_1 הוא גרף על קבוצת הצמתים $\{1,2,\ldots,8\}$ ונתון שמספר הצביעה של G_1 הוא 5.

G_2 הוא גרף על קבוצת הצמתים $\{7,8,\ldots,20\}$ ונתון שמספר הצביעה של G_2 הוא 7.

עוד נתון שבאף אחד משני הגרפים אין קשת בין הצומת 7 לצומת 8.

G הוא גרף על קבוצת הצמתים $\{1,2,\ldots,20\}$, שקבוצת הקשתות שלו היא איחוד קבוצת הקשתות של G_1 עם קבוצת הקשתות של G_2 .

מספר הצביעה של G הוא: 5 / 7 / 12 / לא ניתן לקבוע בלי מידע נוסף.

מצא את התשובה הנכונה והוכח אותה.