נושאים במתמטיקה לתלמידי מח"ר - 10444

סמסטר 2009ב

פתרון ממ"ן 18

תשובה 1

א. 1) $AX^{-1}-X^{-1}=B \quad \Leftarrow \quad AX^{-1}-IX^{-1}=B$

$\Leftarrow \quad (A-I)X^{-1}=B$

נכפול מימין במטריצה X ונקבל :

$$(A-I)X^{-1}X = BX$$

או

$BX=(A-I)I=A-I \quad \Leftarrow \quad BX=A-I$

B הפיכה (נתון), נכפול משמאל ב- B^{-1} ונקבל:

$$B^{-1}BX = B^{-1}(A-I)$$

או

$$IX = B^{-1}(A-I)$$

$$\Leftarrow \quad X = B^{-1}(A-I)$$

2) נציב בהצגה שקיבלנו בסעיף הקודם ונקבל:

$$X = B^{-1}(A-I)$$

$$A-I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

נחשב את B^{-1} :

$$(B\,|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to 2R_3]{R_1 \to R_1 - 2R_3}$$

$$\xrightarrow[R_3\to 2R_3]{R_1\to R_1-2R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&-1&2\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&2&1&-2\end{array}\right)$$

וקיבלנו:
$$B^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&0&1\\2&1&-2\end{pmatrix}$$

(וודאו שאין טעות בחישוב B^{-1} – תוכלו לעשות זאת על-ידי שתוודאו כי $BB^{-1}=I$.)

ולכן:
$$X=B^{-1}(A-I)=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&0&1\\2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\3&0&2\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&-5\\0&-1&-2\\3&2&6\end{pmatrix}$$

ב. אנו מחפשים מטריצה C מסדר 2×2 , כי רק עבור C כזאת יכול להתקיים $CA=B$.

נסמן $C=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

נתון ש- C מקיימת $CA=B$, כלומר,
$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

או
$$\begin{pmatrix}a&0\\c&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

כלומר, $a=0$ ו- $c=1$.

לכן, השוויון $CA=B$ מתקיים לכל $C=\begin{pmatrix}0&b\\1&d\end{pmatrix}$.

הדרישה הנוספת היא ש-C תהיה הפיכה.

זה יתקיים אם C תקיים $|C|\neq 0$, או $0d-1b\neq 0$. כלומר $b\neq 0$.

כלומר $C=\begin{pmatrix}0&b\\1&d\end{pmatrix}$ הפיכה לכל ערך של d ו- $b\neq 0$.

נבחר $d=0$ ו- $b=1$ (ברור שיכולנו לבחור אחרת!).

$C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ מקיימת את שני התנאים המופיעים בשאלה. וודאו זאת.

ג. 1) נוכיח כי המטריצה ABA אנטי-סימטרית, ז"א $(ABA)^t=-ABA$

$$(ABA)^t = A^tB^tA^t = (-A)(-B)(-A) = -ABA$$

עפ״י משפט 9.15 (4)   עפ״י ההנחה

2) נוכיח כי המטריצה A^3 אנטי-סימטרית, ז״א $(A^3)^t = -A^3$

$$(A^3)^t = (AAA)^t = A^tA^tA^t = (-A)(-A)(-A) = -AAA = -A^3$$

עפ״י משפט 9.15 (4)   עפ״י ההנחה

<u>תשובה 2</u>

א. נניח כי A מטריצה ריבועית המקיימת: $2A^3 + A^2 - 3A + 2I = 0$

אזי: $A(2A^2 + A - 3I) = -2I$

או: $A(-A^2 - \frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I) = I$ (*)

מצאנו מטריצה שמכפלתה ב- A שווה למטריצת היחידה I. לכן, לפי משפט 9.22, או משפט 9.23(2) , A הפיכה ו- $A^{-1} = -A^2 - \frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I$.

<u>הערה חשובה:</u>

שימו לב, כדי להוכיח ש- A הפיכה, אנו חייבים להסתמך על משפט 9.22, או משפט 9.23 **ולא** על הגדרה 9.17. ההגדרה דורשת קיום מטריצה B כך ש- $AB = BA = I$, בעוד שב- (*) קיבלנו רק את $AB = I$ (עבור $B = -A^2 - \frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I$), לכן כדי להשתמש בהגדרה היה עלינו להוכיח שמתקיים גם $BA = I$.

ב נניח ש- X מטריצה שמקיימת: $AX = A + B$

מכיוון ש- A הפיכה, נכפול משמאל ב- A^{-1} , ונקבל: $A^{-1}AX = A^{-1}A + A^{-1}B$

ז״א: $X = I + A^{-1}B$

נציב את הביטוי שמצאנו בסעיף א׳ עבור A^{-1} , ומתקבל ש-:

$$X = I + (\frac{3}{2}I - \frac{1}{2}A - A^2)B .$$

<u>תשובה 3</u>

א. נוכיח ש- $A + I$ הפיכה:

$$\begin{aligned}(A+I)^3 &= (A+I)(A+I)(A+I)\\ &= (A+I)((A+I)(A+I)) = (A+I)(A^2 + AI + IA + I^2)\\ &= (A+I)(A^2 + 2A + I) = A^3 + 2A^2 + AI + A^2 + 2A + I\end{aligned}$$

$= A^3 + 3A^2 + 3A + I$

לפי הנתון $A^3 = 0$ נקבל ש- $(A + I)^3 = 3A^2 + 3A + I$

לכן $(A + I)^3 - 3A^2 - 3A = I$

אך $3A = 3AI$, לכן $(A + I)^3 - 3A(A + I) = I$

לכן $(A + I)^2(A + I) - 3A(A + I) = I$

או $((A + I)^2 - 3A)(A + I) = I$

כלומר $(A^2 - A + I)(A + I) = I$ **(וודאו זאת!)**

ולפי משפט 9.23(3) קיבלנו ש- $A + I$ הפיכה ו-

$$(A+I)^{-1} = A^2 - A + I \qquad (1)$$

ב. לפי הנתון $A\underline{x} + \underline{x} = \underline{b}$

או, $A\underline{x} + I\underline{x} = \underline{b}$

כלומר מתקיים $(A + I)\underline{x} = \underline{b}$

ומכיוון ש- $A + I$ הפיכה נכפול משמאל ב- $(A + I)^{-1}$ ונקבל

$$(A + I)^{-1}(A + I)\underline{x} = (A + I)^{-1}\underline{b}$$

כלומר $I\underline{x} = (A + I)^{-1}\underline{b}$

ובעזרת השוויון (1) נקבל ש- $\underline{x} = (A^2 - A + I)\underline{b} \qquad (2)$

לפי הנתון מתקיים $A\underline{x} = \underline{b} - \underline{x}$

אם נציב כאן את (2) נקבל: $A\underline{x} = \underline{b} - (A^2 - A + I)\,\underline{b}$

$$= I\underline{b} - (A^2 - A + I)\,\underline{b} = (I - A^2 + A - I)\,\underline{b} = (-A^2 + A)\underline{b}$$

ולכן, $A\underline{x} = -A^2\underline{b} + A\underline{b}$

נכפול משמאל במטריצה A ונקבל $A^2\underline{x} = -A^3\underline{b} + A^2\underline{b}$

אך $A^3 = 0$ ולכן $A^3\underline{b} = \underline{0}$ כי המטריצה A^3 , שבה כופלים את הוקטור $\underline{b}$, היא מטריצת אפסים.

וקיבלנו $A^2\underline{x} = -\underline{0} + A^2\underline{b}$

ולכן $A^2\underline{x} = A^2\underline{b} \qquad (3)$

ג. מסעיף ב׳ **לא** נובע ש- $\underline{x} = \underline{b}$ מכיוון שלא נתון ש- A^2 מטריצה הפיכה, ולכן **לא נוכל** לכפול את שני אגפי (3) במטריצה $(A^2)^{-1}$ ולקבל $\underline{x} = \underline{b}$.

יתר על כן, אפשר להוכיח שמהנתון נובע ש- A^2 **אינה** מטריצה הפיכה. נוכיח זאת בעזרת דטרמיננטות:

נניח, בשלילה, ש- A^2 מטריצה הפיכה ולכן A^2 רגולרית, כלומר $\left|A^2\right| \neq 0$.

מכאן, לפי משפט המכפלה 10.8, $|A||A| \neq 0$ ולכן גם $|A| \neq 0$ (מדוע?)

קיבלנו, אם כן, $\left|A^2\right| \neq 0$ וגם $|A| \neq 0$.

ולכן

$$\left|A^3\right| = \left|AA^2\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{לפי משפט המכפלה}}}{=} |A|\left|A^2\right| \neq 0$$

בעוד שלפי הנתון $A^3 = 0$ ולכן בוודאי ש- $\left|A^3\right| = 0$, וקיבלנו סתירה! ולכן A^2 היא מטריצה סינגולרית.

<u>תשובה 4</u>

א. $|A| = \frac{1}{20} \neq 0$ לכן, לפי משפט 10.9 , A הפיכה.

בשלב זה נביא טענת עזר המופיעה בעמ' 211 בספר:

<u>טענת עזר 1</u>:

אם A מטריצה הפיכה, אז $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$.

ובשאלה שלנו, $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{1/20} = 20$.

נמשיך בתשובה. עתה נרצה, כמובן, לחשב את $\det B$ בעזרת $\det A$. לשם כך נשתמש במשפטים המופיעים בסעיף 10.3 הדן בתכונות הדטרמיננטה.

$$\det B = \begin{vmatrix} 5g & 5d & 5a \\ -2h & -2e & -2b \\ i & f & c \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{כפל שורה בסקלר} \\ \text{עבור שורה ראשונה}}}{=} 5\begin{vmatrix} g & d & a \\ -2h & -2e & -2b \\ i & f & c \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{כפל שורה בסקלר} \\ \text{עבור שורה שנייה}}}{=} 5 \cdot (-2)\begin{vmatrix} g & d & a \\ h & e & b \\ i & f & c \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ |A| = \left|A^t\right|}}{=} -10\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= 10\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10\det A = 10\cdot\frac{1}{20} = \frac{1}{2}$$

נחליף את השורה הראשונה
עם השורה השלישית

$|B|\neq 0$ לכן B הפיכה, ולפי טענת עזר 1 שהבאנו בסעיף א של שאלה זו, מתקיים $\left|B^{-1}\right| = \frac{1}{|B|}$

ולכן $$\left|B^{-1}\right| = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \qquad (1)$$

<u>טענת עזר 2</u>

אם C מטריצה ריבועית מסדר 3×3 ו- λ מספר ממשי, אז מתקיים $|\lambda C| = \lambda^3|C|$.

הוכחה

ממשפט 10.6 סעיף (1), ניתן לקבל שאם כופלים את **כל** אברי C, מטריצה ריבועית מסדר 3×3, ב- λ אז מתקיים $|\lambda C| = \lambda^3|C|$

וזאת מכיוון שעבור $$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

נקבל:
$$|\lambda C| = \begin{vmatrix} \lambda c_{11} & \lambda c_{12} & \lambda c_{13} \\ \lambda c_{21} & \lambda c_{22} & \lambda c_{23} \\ \lambda c_{31} & \lambda c_{32} & \lambda c_{33} \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ \lambda c_{21} & \lambda c_{22} & \lambda c_{23} \\ \lambda c_{31} & \lambda c_{32} & \lambda c_{33} \end{vmatrix}$$

המשפט עבור השורה הראשונה

$$= \lambda^2\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ \lambda c_{31} & \lambda c_{32} & \lambda c_{33} \end{vmatrix} = \lambda^3|C|$$

המשפט עבור השורה השנייה

המשפט עבור השורה השלישית

הערה: ברור שבאופן דומה, עבור מטריצה D ריבועית מסדר $n\times n$ מתקיים

$$|\lambda D| = \lambda^n|D| \quad \text{או} \quad \det(\lambda D) = \lambda^n\det D$$

ולכן, בשאלה שלנו,

$$\left|-2B^{-1}\right| = (-2)^3\left|B^{-1}\right| = -8\left|B^{-1}\right| = -8\cdot 2 = -16$$

והרי $|B^t|=|B|$, ולכן, לפי משפט המכפלה, מתקיים

$$\left|-2B^{-1}\left(B^t\right)^2\right|=\left|-2B^{-1}\right|\left|B^t\right|\left|B^t\right|=\left|-2B^{-1}\right|\left|B^t\right|^2=\left|-2B^{-1}\right|\left|B\right|^2$$

$$=-16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=-4$$

<u>תשובה 5</u>

א. נפתח לפי השורה הראשונה ונקבל:

$$|A|=(a-6)\begin{vmatrix} a-4 & 0 & 12 \\ 3 & a-2 & -6 \\ -0.5 & 1 & 1 \end{vmatrix}-(-8)\begin{vmatrix} 5 & a-4 & 0 \\ -1 & 3 & a-2 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(a-6)((a-4)(a-2-(-6))+12(3+\frac{1}{2}(a-2))+8(5(3+\frac{1}{2}(a-2))-(a-4)(-1))$$

$$=(a-6)((a-4)(a+4)+36+6(a-2))+8(15+\frac{5}{2}(a-2)+a-4)$$

$$=(a-6)(a^2-16+36+6a-12)+8(15+\frac{5}{2}a-5+a-4)$$

$$=(a-6)(a^2+6a+8)+8(\frac{7}{2}a+6)$$

$$=(a-6)(a^2+6a+8)+4(7a+12)$$

$$=a^3+6a^2+8a-6a^2-36a-48+28a+48=a^3$$

קיבלנו ש- $|A|=a^3$.

הערה: בדטרמיננטה כמו שלנו,מומלץ מאד או לדרג תחילה ואז לפשט את החישוב (בדוגמא שלנו זה לא ממש עוזר) , או לפתח לפי שורה/עמודה שבה יש הרבה אפסים – לכן בדוגמא שלנו פיתוח לפי השורה הראשונה או לפי העמודה השלישית הוא היעיל ביותר.

ב. לפי משפט 10.9 , A היא מטריצה הפיכה אם ורק אם $|A|\neq 0$

והרי $|A|=a^3$, לכן

A היא מטריצה הפיכה אם ורק אם $a\neq 0$.

ג. למערכת ההומוגנית הנתונה $A\underline{x}=\underline{0}$, שהיא מערכת של 4 משוואות עם ארבעה נעלמים, יש פתרון לא טריוויאלי אם ורק אם A שקולת שורות למטריצה שבה יש שורת אפסים (וזה לפי משפט 7.22*).

כלומר, למערכת ההומוגנית הנתונה יש פתרון לא טריוויאלי אם A שקולת שורות למטריצה B שבה יש שורת אפסים, ולכן, לפי משפט 9.23(16), A אינה הפיכה, או $a=0$.

קיבלנו שלמערכת $A\underline{x} = \underline{0}$ יש פתרון לא טריוויאלי אם ורק אם $a = 0$.

ד. שימו לב לצירוף המתקבל ממשפט 9.23 ומשפט 10.29 ! מצירוף זה נקבל את המשפט הבא:

<u>משפט</u>

תהי A מטריצה ריבועית מסדר n .

$|A| \neq 0$ **אם ורק אם** מתקיימת **לפחות** אחת מהטענות הבאות:

1. לכל וקטור עמודה . . . .

וכאן יש להכניס את כל 16 הטענות המופיעות במשפט 9.23.

לכן, לפי טענה 6 ב"משפט החדש": $|A| \neq 0$ אם ורק אם העמודות של A , כווקטורים ב- $\mathbf{R}^4$, הן קבוצה בלתי-תלויה-לינארית ב- $\mathbf{R}^4$. לכן כל $a \neq 0$ מקיים את הדרוש.

ה. לפי טענה 9 ב"משפט החדש": $|B| \neq 0$ אם ורק אם השורות של B , כווקטורים ב- $\mathbf{R}^4$, הן בסיס של $\mathbf{R}^4$.

כמו-כן: $|A^2| \neq 0$ אם-ורק-אם $|A| \neq 0$. (כי לפי משפט המכפלה 10.8, $|A^2| = |A||A|$.)

קיבלנו, אם כן, ש- $|A| \neq 0$ אם ורק אם השורות של A^2 , כווקטורים ב- $\mathbf{R}^4$, הן בסיס של $\mathbf{R}^4$.

לכן לכל $a \neq 0$ השורות של A^2 , כווקטורים ב- $\mathbf{R}^4$, מהוות בסיס של $\mathbf{R}^4$.

<u>תשובה 6</u>

א. נתון $A^2 + 3AB = I$ (1)

לכן $A^2 + A(3B) = I$

ומתקיים $A(A+3B) = I$

מצאנו מטריצה שמכפלתה ב- A שווה למטריצת היחידה I. לכן, לפי משפט 9.23(2),

A הפיכה (ו- $A^{-1} = A+3B$).

נתון ש- A מקיימת גם $A^2 = BA$. A הפיכה לכן אם נכפול משוואה זו, מימין, ב- A^{-1} ,

נקבל $A^2A^{-1} = BAA^{-1}$.

והרי $AA^{-1} = I$, לכן $A = B$.

נציב ב- (1) את $A = B$ ונקבל: $A^2 + 3A^2 = I$ או $4A^2 = I$.

לכן, $|4A^2| = |I|$, ומכיון ש- A מטריצה ריבועית מסדר 3×3 ,

נקבל מכאן ש- $\left|4A^2\right| = 4^3\left|A^2\right| = 64\left|A\right|^2 = \left|I\right| = 1$, או $\left|4A^2\right| = 1$.

לכן, לפי טענת העזר 2 המופיעה בתשובה לשאלה 4, $64\left|A\right|^2 = 1$, ולכן $\left|A\right|^2 = \frac{1}{64}$.

וקיבלנו ש- $\left|A\right| = \frac{1}{8}$ או $\left|A\right| = -\frac{1}{8}$.

ב. 1) צריך להוכיח ש- A מטריצה הפיכה אם ורק אם B מטריצה הפיכה .

זוהי טענת שקילות, לכן נפרק אותה לשתי הטענות הבאות :

(I) אם A מטריצה הפיכה, אז B מטריצה הפיכה.

(II) אם B מטריצה הפיכה, אז A מטריצה הפיכה.

נוכיח את (I) :

A הפיכה, לכן $\left|A\right| \neq 0$.

נתון ש- $AB = A$, לכן $\left|AB\right| = \left|A\right|$, או $\left|A\right|\left|B\right| = \left|A\right|$. $\left|A\right| \neq 0$, לכן נחלק את שני אגפי השוויון האחרון ב- $\left|A\right|$, ונקבל ש- $\left|B\right| = 1 \neq 0$, ולכן B הפיכה.

באופן דומה, בעזרת הנתון $BA = B$, מוכיחים את (II).

2) בהוכחה ניעזר בנתונים $BA = B$ ו- $AB = A$:

$$A^2 = (AB)^2 = (AB)(AB) \underset{\uparrow}{=} A(BA)B = ABB = (AB)B = AB = A$$

תכונת האסוציאטיביות (ראה משפט 9.6(2))