אלגוריתמיקה - סמסטר 2006ב - פתרון שאלות נבחרות מתוך ממ"ן 13

פתרון שאלה 1

מסמך האישור הקצר יהיה רשימה של k צמתים בגרף שמהווים קליקה.

בדיקת המסמך: יש לוודא שהרשימה מכילה k צמתים (שונים זה מזה), ושבין כל שני צמתים ברשימה יש קשת בגרף. זמן הבדיקה הוא $O(k^2)$.

זהו זמן פולינומיאלי, כי $O(k^2) = O(n^2)$ (כש-n הוא מספר הצמתים בגרף).

תזכורת: **גודל הקלט** לבעיה הוא כמות הזיכרון הדרושה לייצוג הקלט. במקרה שלנו הקלט לבעיה הוא גרף G ומספר k. אם נסמן את מספר הצמתים בגרף ב-n, אז מספר הקשתות הוא $O(n^2)$ וזוהי כמות הזיכרון הדרושה לייצוג הקלט.

פתרון שאלה 2

א. מכיוון שפסוק שכתוב ב-DNF מורכב מפסוקיות המחוברות ביניהן ע"י קשרי OR, הפסוק יהיה ספיק אם ורק אם קיימת לפחות פסוקית אחת ספיקה.

כל אחת מהפסוקיות מורכבת מליטרלים המחוברים ביניהם ע"י קשרי AND (**ליטרל** הוא מופע של משתנה או של השלילה של משתנה). קל לראות, שפסוקית תהיה ספיקה אם ורק אם לא קיים בה מופע של משתנה וגם של שלילתו. (מה תהיה ההשמה המספקת במקרה זה?)

לכן, כדי לבדוק אם פסוק שכתוב ב-DNF הוא ספיק, צריך לעבור על הפסוקיות עד שנמצא פסוקית אחת שאין בה מופע של משתנה ושלילתו (או עד שנבדוק את כל הפסוקיות ויתברר שאין אחת כזו).

זמן הבדיקה הכולל הוא לינארי באורך הפסוק.

ב. נמיר את הפסוק $(A \vee B) \& (C \vee D) \& (E \vee F)$ מ-CNF ל-DNF:

$$(A \vee B) \& (C \vee D) \& (E \vee F) = [A \& (C \vee D) \& (E \vee F)] \vee [B \& (C \vee D) \& (E \vee F)] =$$
$$= [A \& ((C \& E) \vee (C \& F) \vee (D \& E) \vee (D \& F))] \vee [B \& ((C \& E) \vee (C \& F) \vee (D \& E) \vee (D \& F))] =$$
$$= (A \& C \& E) \vee (A \& C \& F) \vee (A \& D \& E) \vee (A \& D \& F) \vee [B \& C \& E) \vee (B \& C \& F) \vee$$
$$\vee (B \& D \& E) \vee (B \& D \& F)$$

ג. הטעות בהוכחה היא בשלב 2. המרת הפסוק מ-CNF ל-DNF לוקחת זמן **אקספוננציאלי** ולכן אלגוריתם הפתרון הוא אקספוננציאלי.

בדוגמה לעיל פסוק הקלט הכיל 3 פסוקיות, בעוד שבפסוק הפלט יש $8 = 2^3$ פסוקיות.

פתרון שאלה 3

בשאלה 1 הוכחנו שבעיית הקליקה שייכת ל-NP.

כדי להוכיח שהבעיה היא NP-שלמה, נתאר רדוקציה לבעיה מבעיית הכיסוי ע״י צמתים.

הקלט לבעיית הכיסוי ע״י צמתים הוא גרף בלתי מכוון $G = (V, E)$ ומספר טבעי k.

נסמן ב-n את מספר הצמתים בגרף G.

הקלט שאלגוריתם הרדוקציה יבנה עבור בעיית הקליקה הוא הגרף G' המשלים בקשתות של G (כפי שמוגדר בשאלה) והמספר $n - k$.

כלומר: $< G, k > \rightarrow < G' = (V, E'), n - k >$

ביצוע הרדוקציה לוקח זמן שהוא $O(n^2)$ וזהו כמובן זמן פולינומיאלי.

נוכיח שהרדוקציה נכונה.

<u>כיוון ראשון</u>: נניח שב-G קיימת קבוצת צמתים בגודל k שמכסה את כל קשתות הגרף. נסמנה ב-V'.

נשים לב שהקבוצה $V - V'$ היא **קבוצה בלתי תלויה** של צמתים ב-G. כלומר, אין אף זוג צמתים ב- $V - V'$ שיש ביניהם קשת. (מדוע ?)

לפיכך בגרף G' תהיה קשת בין **כל** זוג צמתים בקבוצה $V - V'$ ולכן קבוצה זו מהווה קליקה ב-G'.

גודל הקבוצה הוא $n - k$ ולכן בגרף G' קיימת קליקה בגודל $n - k$.

<u>כיוון שני</u>: נניח שבגרף G' קיימת קליקה בגודל $n - k$. ברור שאותם צמתים בגרף G מהווים קבוצה בלתי תלויה. מכך נובע שכל הצמתים ב-G **שאינם** שייכים לקבוצה זו מכסים את כל הקשתות של G.

לפיכך בגרף G קיים כיסוי ע״י צמתים שגודלו $n - (n - k) = k$.

מ.ש.ל.

פתרון שאלה 5

א. האלגוריתם מוחק מ- E' רק קשתות שמכוסות ע״י צמתים שהוכנסו כבר ל- V', ולכן כאשר $E' = \phi$ הקבוצה V' מהווה כיסוי של כל קשתות הגרף.

ב. בשורה (2.2) האלגוריתם מוסיף ל- V' שני צמתים וברור שלפחות אחד מהם חייב להיות בכיסוי המינימלי. בנוסף, לאחר הוספת שני הצמתים ל- V', האלגוריתם מוחק מ- E' את כל הקשתות הנוגעות בהם, ולכן באיטרציה הבאה יוכנסו ל- V' שני צמתים **אחרים**.

לכן מספר הצמתים בכיסוי שמוצא האלגוריתם יהיה גדול פי שניים לכל היותר ממספר הצמתים בכיסוי המינימלי.