פתרונות לממ"ן 18 - 2011ב - 20425

1. איבר הסכימה של הטור הנתון שווה לפונקציית ההסתברות של משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר n בנקודה i. כלומר, אם $X \sim Po(n)$, אז: $P\{X = i\} = e^{-n}\frac{n^i}{i!} \quad , \quad i = 0,1,...$

ומכאן: $P\{X \le n\} = \sum_{i=0}^{n} e^{-n}\frac{n^i}{i!}$

כמו כן: $E[X] = \text{Var}(X) = n$

נשתמש כעת במשפט הגבול המרכזי, כדי למצוא קירוב להסתברות זו. נוכל להשתמש במשפט זה, מכיוון שאפשר להציג משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר n כסכום של n משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים שלכולם הפרמטר 1. לאחר עריכת תיקון רציפות, נקבל את הקירוב הבא, שגבולו 0.5, כנדרש:

$$P\{X \le n\} = P\{X \le n + 0.5\} \cong P\left\{Z \le \tfrac{n+0.5-n}{\sqrt{n}}\right\} = \Phi\left(\tfrac{1}{2\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(0) = 0.5$$

2. תחילה נמצא את התוחלת והשונות של X_i, לכל $i = 1,2,...,200$, באמצעות הפונקציה יוצרת המומנטים הנתונה. אחר-כך, נשתמש במשפט הגבול המרכזי לחישוב הקירוב להסתברות.

הפונקציה יוצרת המומנטים הנתונה היא פונקציה יוצרת מומנטים של התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים $r = 2$ ו- $p = 0.2$. נראה זאת:

$$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^2 = \left(\frac{0.2e^t}{1-0.8e^t}\right)^2 = \left(\frac{e^t}{5-4e^t}\right)^2 \quad , \quad t < -\ln 0.8 = \ln\tfrac{1}{0.8} = \ln 1.25$$

לכן, התוחלת של כל אחד מה-X_i-ים שווה ל- $\frac{2}{0.2} = 10$ והשונות ל- $\frac{2 \cdot 0.8}{0.2^2} = 40$.

מכאן:

$$P\left\{1{,}910 \le \sum_{i=1}^{200} X_i < 2{,}050\right\} = P\left\{1{,}909.5 \le \sum_{i=1}^{200} X_i < 2{,}049.5\right\} \quad [\text{תיקון רציפות}]$$

$$\cong \Phi\left(\frac{2{,}049.5 - 200\cdot 10}{\sqrt{200\cdot 40}}\right) - \Phi\left(\frac{1{,}909.5 - 200\cdot 10}{\sqrt{200\cdot 40}}\right)$$

$$= \Phi(0.5534) - \Phi(-1.0118) = 0.7100 - (1 - 0.8442) = 0.5542$$

3. נסמן ב- X_i את אורך-החיים של הנורה ה-i-ית, לכל $i = 1,...,n$. מתקיים $X_i \sim Exp(0.01)$ לכל i.

ה-X_i-ים בלתי-תלויים, ולכן אפשר להשתמש במשפט הגבול המרכזי למציאת n.

צריך להתקיים:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \ge 5{,}000\right\} \cong P\left\{Z \ge \frac{5{,}000 - n\cdot 100}{\sqrt{n\cdot 100^2}}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{50-n}{\sqrt{n}}\right) \ge 0.95$$

כאשר Z מסמן משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי.

כלומר, צריך להתקיים: $$\Phi\left(\frac{50-n}{\sqrt{n}}\right) \le 0.05 = \Phi(-1.645)$$

הפונקציה $\Phi(\cdot)$ היא חח"ע, ולכל $n > 0$, הפונקציה $\frac{50-n}{\sqrt{n}}$ היא פונקציה יורדת של n. לכן, עלינו למצוא את ה-n המינימלי, שהחל ממנו מתקיים $\frac{50-n}{\sqrt{n}} \le -1.645$. לשם כך, נפתור את המשוואה $50 - n = -1.645\sqrt{n}$, שהיא משוואה ריבועית שהמשתנה שלה הוא $\sqrt{n}$. מקבלים כי $\sqrt{n} \ge 7.9124$ ולכן $n \ge 64$.

4. נסמן ב- X_1 את מספר הקופסאות שמוכנסות לארגז הראשון, ב- X_2 את מספר הקופסאות שמוכנסות לארגז השני וב- X_3 את מספר הקופסאות שמוכנסות לארגז השלישי.

א. לכל אחד מהמשתנים המקריים <u>הבלתי-תלויים</u> X_1, X_2 ו- X_3 יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 150. לכן, לסכומם יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 450. כעת, אפשר להציג משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 450 כסכום של 450 משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים שלכולם התפלגות פואסונית עם הפרמטר 1. מכיוון שכך, נוכל להשתמש במשפט הגבול המרכזי לחישוב הקירוב המבוקש. נערוך תיקון רציפות (מכיוון שההתפלגות הפואסונית היא התפלגות בדידה, שערכיה האפשריים שלמים בלבד) ונקבל:

$$P\{X_1 + X_2 + X_3 \ge 480\} = P\{X_1 + X_2 + X_3 \ge 479.5\} \cong P\left\{Z \ge \tfrac{479.5-450}{\sqrt{450}}\right\} = P\{Z \ge 1.3906\}$$
$$= 1 - \Phi(1.3906) = 1 - 0.9178 = 0.0822$$

ב. לכל אחד מהמשתנים המקריים X_1 ו- X_2, שהוגדרו בתחילת השאלה, יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 150. לכן, אפשר להציג כל אחד מהם, למשל, כסכום של 150 משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים שלכולם התפלגות פואסונית עם הפרמטר 1. מכיוון שכך, נובע ממשפט הגבול המרכזי, שההתפלגות של כל אחד מה- X_i-ים היא <u>בקירוב</u> התפלגות נורמלית עם תוחלת 150 ושונות 150, ובגלל האי-תלות ביניהם נובע שגם התפלגות ההפרש היא <u>בקירוב</u> נורמלית עם תוחלת:

$$E[X_1 - X_2] = E[X_1] - E[X_2] = 0$$

ושונות: $$\text{Var}(X_1 - X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) = 300$$

לפיכך: $$P\{|X_1 - X_2| > 10\} \cong P\left\{|Z| > \tfrac{10.5-0}{\sqrt{300}}\right\} = P\{Z > 0.6062\} + P\{Z < -0.6062\}$$
$$= 2[1 - \Phi(0.6062)] = 2(1 - 0.7278) = 0.5444$$

5. נתון כי $X \sim B(n, 0.5)$, ולכן: $$E[X] = \tfrac{n}{2} \qquad ; \qquad \text{Var}(X) = \tfrac{n}{4}$$

כמו כן, התפלגות המשתנה המקרי X סימטרית סביב $\frac{n}{2}$, ולכן למשתנה המקרי Y, המוגדר על-ידי $Y = X - \frac{n}{2}$, יש התפלגות סימטרית סביב 0. מכיוון שכך, לכל קבוע a, מתקיים:

$$P\{Y \ge a\} = P\{Y \le -a\}$$

ולחלופין: $$P\{X - \tfrac{n}{2} \ge \tfrac{n}{2} - 2\} = P\{X - \tfrac{n}{2} \le -(\tfrac{n}{2} - 2)\}$$

ומכאן: $$P\{|X - \tfrac{n}{2}| \ge \tfrac{n}{2} - 2\} = P\{X - \tfrac{n}{2} \ge \tfrac{n}{2} - 2\} + P\{X - \tfrac{n}{2} \le -(\tfrac{n}{2} - 2)\} = 2P\{X - \tfrac{n}{2} \ge \tfrac{n}{2} - 2\}$$

כעת, נשתמש באי-שוויון צ'בישב למציאת החסם המבוקש, ונקבל כי :

$$P\{X \ge n-2\} = P\{X - \tfrac{n}{2} \ge \tfrac{n}{2} - 2\} = \tfrac{1}{2} \cdot P\{|X - \tfrac{n}{2}| \ge \tfrac{n}{2} - 2\} \le \frac{\frac{n}{4}}{2(\frac{n}{2}-2)^2} = \frac{\frac{n}{4}}{\frac{2(n-4)^2}{4}} = \frac{n}{2(n-4)^2}$$

6. א. נתון ש-X הוא משתנה מקרי סימטרי סביב 0, שתוחלתו ושונותו סופיות. לכן, בהכרח $E[X]=0$.

הערה: אומרים שהתוחלת של משתנה מקרי X קיימת, אם לפחות אחד משני הסכומים $E[X^+]=\sum_{x>0} x\,p(x)$ ו- $E[X^-]=\sum_{x<0} x\,p(x)$ סופי. כאשר לפחות אחד משני הסכומים הללו סופי, התוחלת של X , המתקבלת מן הסכום $E[X]=E[X^+]+E[X^-]$, מוגדרת היטב.

לפי הנתונים בשאלה, $E[X]$ סופית (כלומר, קיימת) ומתקיים $E[X^+]=-E[X^-]$. לכן, התוחלת של X בהכרח שווה לאפס. הרחבה בנושא זה תוכלו למצוא בסעיף 7.8 בספר (עמוד 406).

מאי-שוויון צ'בישב נקבל כי, לכל $t>0$ מתקיים : $P\{|X-0| \ge t\} \le \dfrac{\sigma^2}{t^2}$

שני המאורעות זרים זה לזה

כלומר כי : $P\{X \le -t$ או $X \ge t\} = P\{X \le -t\} + P\{X \ge t\} \le \dfrac{\sigma^2}{t^2}$

אבל, המשתנה המקרי X סימטרי סביב אפס, ולכן : $P\{X \le -t\} = P\{X \ge t\}$

ומכאן, מתקבל האי-שוויון : $P\{X \ge t\} \le \dfrac{\sigma^2}{2t^2}$

ב. המשתנה המקרי X הוא אי-שלילי ותוחלתו μ . לכן, מאי-שוויון מרקוב מקבלים, שלכל $t>0$ מתקיים : $P\{X \le \mu t\} \ge P\{X < \mu t\} \ge 1 - \dfrac{\mu}{\mu t} = 1 - \dfrac{1}{t}$