פתרון שאלה 4 בממ"ן 12 – סמסטר 2007א

א. גרסה של STOOGE-SORT המבצעת קריאות רקורסיביות על שלושה תת-מערכים באורך $3n/4$ כל אחד:

STOOGE-SORT1(A, i, j)

1 **if** $(j-i+1) < 4$

2 **then** sort array A with insertion sort

3 **else** $k \leftarrow \lfloor (j-i+1)/4 \rfloor$

4 STOOGE-SORT1$(A, i, j-k)$ ▸ First three-quarters

5 STOOGE-SORT1$(A, i+k, j)$ ▸ Last three-quarters

6 STOOGE-SORT1$(A, i, j-k)$ ▸ First three-quarters again

האלגוריתם ממין את המערך בצורה נכונה. אחרי שתי הקריאות הרקורסיביות בשורות 4 ו-5, הרבע האחרון של המערך מכיל את $n/4$ האיברים הגדולים בצורה ממוינת.
הקריאה בשורה 6 ממינת את שלושת הרבעים הראשונים של המערך בצורה רקורסיבית.
(אפשר להוכיח את נכונות האלגוריתם בצורה יותר פורמלית באמצעות שימוש באינדוקציה.)

נוסחת נסיגה עבור זמן הריצה של האלגוריתם: $T(n) = 3 \cdot T(\frac{3}{4}n) + \Theta(1)$

עפ"י מקרה 1 במשפט האב, פתרון הנוסחה הוא $T(n) = n^{\lg_{\frac{4}{3}} 3} \cong n^{3.82}$.

ב. להלן גרסה של STOOGE-SORT המבצעת קריאות רקורסיביות על שלושה תת-מערכים באורך $n/2$ כל אחד. הפעם נצטרך לבצע 6 קריאות רקורסיביות.

STOOGE-SORT2(A, i, j)

1 **if** $(j-i+1) < 4$

2 **then** sort array A with insertion sort

3 **else** $k \leftarrow \lfloor (j-i+1)/4 \rfloor$

4 STOOGE-SORT2$(A, i, j-2k)$ ▸ First two-halves

5 STOOGE-SORT$(A, i+k, j-k)$ ▸ Middle two-halves

6 STOOGE-SORT$(A, i+2k, j)$ ▸ Last two-halves

7 STOOGE-SORT$(A, i+k, j-k)$ ▸ Middle two-halves again

8 STOOGE-SORT2$(A, i, j-2k)$ ▸ First two-halves again

9 STOOGE-SORT$(A, i+k, j-k)$ ▸ Middle two-halves again

האלגוריתם ממין את המערך בצורה נכונה. אחרי שלוש הקריאות הרקורסיביות הראשונות הרבע האחרון של המערך מכיל את $n/4$ האיברים הגדולים בצורה ממוינת;
אחרי שלוש הקריאות הרקורסיביות הבאות הרבע הראשון של המערך מכיל את $n/4$ האיברים הקטנים בצורה ממוינת;
הקריאה בשורה 9 ממינת את שני הרבעים האמצעיים של המערך בצורה רקורסיבית.

נוסחת נסיגה עבור זמן הריצה של האלגוריתם: $T(n) = 6 \cdot T(\frac{n}{2}) + \Theta(1)$

עפ"י מקרה 1 במשפט האב, פתרון הנוסחה הוא $T(n) = n^{\lg_2 6} \cong n^{2.58}$.

שימו לב, שבשני הסעיפים הפתרון הרקורסיבי מבוסס על חלוקה של המערך לרבעים, ולכן אם $n < 4$ לא ממיינים את המערך ברקורסיה. ב-STOOGE-SORT המקורי הפתרון הרקורסיבי מבוסס על חלוקה של המערך לשלישים ולכן תנאי העצירה הוא $n < 3$.