

ממ"ן 13 – פתרון שאלה 4

א' נניח בשלילה שקיימים בקבוצה S ארבעה מספרים (שונים זה מזה) a, b, c ו- d , ושכל אחד מארבעת המספרים מופיע ב- S $\lfloor n/4 \rfloor + 1$ פעמים לפחות. לכן, הקבוצה S מכילה $4 \cdot \lfloor n/4 \rfloor + 4$ איברים לפחות.

שימו לב כי

- אם $n = 4k$, אזי $4 \cdot \lfloor n/4 \rfloor + 4 = 4k + 4 = n + 4$;
- אם $n = 4k + 1$, אזי $4 \cdot \lfloor n/4 \rfloor + 4 = 4k + 4 = n + 3$;
- אם $n = 4k + 2$, אזי $4 \cdot \lfloor n/4 \rfloor + 4 = 4k + 4 = n + 2$;
- אם $n = 4k + 3$, אזי $4 \cdot \lfloor n/4 \rfloor + 4 = 4k + 4 = n + 1$.

בכל אחד מהמקרים הגענו לסתירה.

ב' לפי הסעיף הקודם, קיימים ב- S לכל היותר שלושה מספרים המופיעים כל אחד יותר מ- $\lfloor n/4 \rfloor$ פעמים. נניח שהקבוצה S ממוינת; במצב זה, כל מספר המופיע $\lfloor n/4 \rfloor + 1$ פעמים לפחות יוצר ב- S רצף של ערכים זהים שחייב להכיל לפחות אחד מערכי המיקום הבאים :

$$\lfloor 3n/4 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/4 \rceil$$

לפיכך, כדי למצוא את כל המספרים המופיעים ב- S יותר מ- $\lfloor n/4 \rfloor$ פעמים, מספיק לבדוק את שלושת ערכי המיקום האלה.

מוצאים את שלושת ערכי המיקום באמצעות האלגוריתם SELECT ;

עבור כל אחד משלושת ערכי המיקום שמצאנו, סורקים את S וסופרים את מספר המופעים שלו ב- S ; אם מספר המופעים גדול מ- $\lfloor n/4 \rfloor$, אז ערך המיקום הזה הוא פתרון.

זמן הריצה של כל אחד משני השלבים הוא $O(n)$.