מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה**: החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"

מספר השאלות: 13 **משקל המטלה:** נקודה אחת

סמסטר: 2017ב **מועד הגשה: 2.4.2017**

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

הערה כללית: בחוברת זו, כל ממ"ח שהגשתו היא ביום ו', ניתן להגישו עד מוצ"ש בחצות.

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות. סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה, ב - אם רק טענה 2 נכונה,

ג - אם שתי הטענות נכונות, ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

1. בהנתן הֶקשֵר מתאים, הביטוי נותרו פחות מ- 5 דקות לסיום המשחק הוא פסוק.
2. בהנתן הֶקשֵר מתאים, הביטוי $5^3 + 3^5$ הוא פסוק.

שאלה 2

1. הפסוק משה הצליח בבחינה
   הוא **שלילתו** של הפסוק משה קיבל 40 בבחינה
2. הפסוק הכלב רדף אחר החתול
   הוא **שלילתו** של הפסוק החתול רדף אחר הכלב

שאלה 3

1. הפסוק $1+4=5$ **וגם** $2+2=10$ הוא אמת.
2. הפסוק $1+4=5$ **או** $2+2=10$ הוא אמת.

שאלה 4

1. הפסוק **אם** $3=2$ **אז** בעולם חיים כיום יותר ממיליארד בני אדם הוא אמת.
2. הפסוק **אם** $3=2$ **אז** בעולם חיים כיום פחות ממיליארד בני אדם הוא אמת.

שאלה 5

1. לוח האמת של הפסוק הפורמלי $(p \vee q) \to (q \to r)$ הוא:

p	q	r	$(p \vee q) \to (r \to q)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**F**
T	**F**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**T**
F	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**T**

2. הפסוק הפורמלי $p \leftrightarrow (\neg p)$ הוא סתירה.

שאלה 6

1. הפסוק הפורמלי $(\neg p) \to q$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $p \vee \neg q$.
2. הפסוק הפורמלי $p \to (\neg q)$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $\neg(p \wedge q)$.

שאלה 7

1. $\neg(r \wedge (p \vee q))$ שקול טאוטולוגית ל- $((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$.
2. $(p \vee q) \wedge (\neg q)$ שקול טאוטולוגית ל- $p \wedge (\neg q)$.

שאלה 8

1. **שלילת** הפסוק זה יקרה מחר או מחרתיים
שקולה לפסוק זה לא יקרה מחר **ו**לא יקרה מחרתיים.

2. **שלילת** הפסוק ארדוף, אשיג **ו**אחלק שלל
שקולה לפסוק לא ארדוף, לא אשיג, **ו**לא אחלק שלל.

שאלה 9

1. מתוך הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge r$ נובע טאוטולוגית הפסוק p .
2. מתוך הפסוק p נובע טאוטולוגית הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge r$.

שאלה 10

1. אם מתוך סתירה כלשהי נובע $\alpha \vee \beta$ אז מ- α נובע $\neg\beta$.
2. אם מתוך טאוטולוגיה כלשהי נובע $\alpha \vee \beta$ אז מ- $\neg\alpha$ נובע β .

שאלה 11

נתבונן בפסוק: **כל מספר הגדול מ- 1, הריבוע שלו גדול ממנו עצמו.**

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x\left(1 < x \ \wedge \ x < x^2\right)$.
2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x\left(1 < x \ \to \ x < x^2\right)$.

שאלה 12

נתבונן שוב בפסוק: **כל מספר הגדול מ- 1, הריבוע שלו גדול ממנו עצמו.**

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\left(\forall x\ (1 < x)\right) \to \ x < x^2$.
2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\left(\forall x\ (1 < x)\right) \to \left(\forall x(x < x^2)\right)$

שאלה 13

את **שלילת** הפסוק **"לכל מספר טבעי קיים מספר טבעי שקטן ממנו"** ניתן לנסח כך:

1. קיים מספר טבעי כך שכל מספר טבעי אחר הוא גדול ממנו.
2. קיים מספר טבעי כך שכל מספר שקטן ממנו הוא לא מספר טבעי.

מטלת מנחה (ממ״ן) 11

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרק 1

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2017ב | **מועד הגשה: 9.4.2017**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״)
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, בדואר ישראל לכתובת המנחה או הבודק של קבוצתך

שאלה 1

שאלה זו נועדת לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות ולחדד כמה נקודות שכדאי להבין:
* ההבדל בין A לבין $\{A\}$ (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא A).
* מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה $\varnothing$ לבין $\{\varnothing\}$.
* ההבדל בין "x איבר של y" לבין "x חלקי ל- y".

בכל אחד מהזוגות x , y הבאים, קבעו אם $x \in y$ וקבע אם $x \subseteq y$.

ייתכן ששני היחסים יתקיימו בעת ובעונה אחת, וייתכן גם שאף אחד משניהם לא יתקיים.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק.

א. $\varnothing \;;\; \varnothing$

ב. $\{\{\varnothing\}\} \;;\; \{\varnothing\}$

ג. $\{\varnothing,\{1\}\} \;;\; \{\varnothing\}$

ד. $\{\varnothing, \{1\}\} \;;\; \{1\}$

ה. $\{\varnothing,\{1\}\} \;;\; \{\{1\}\}$

ו. $\{\varnothing,\{1\}\} \;;\; \{\varnothing,\{1\}\}$

ז. $P(\{1\}) \;;\; \{\varnothing\}$

ח. $P(P(\varnothing)) \;;\; P(\varnothing)$

שאלה 2

הוכיחו את הטענות הבאות בעזרת **״אלגברה של קבוצות״**: צאו מאחד האגפים, פתחו אותו בעזרת זהויות ידועות, והגיעו לאגף השני. אין להשתמש בהוכחה במושג ״איבר״ !

במקומות בהם מופיע הפרש קבוצות מומלץ להיעזר בזהות $A - B = A \cap B'$ (עמ׳ 23 בספר הלימוד). הסימן $\oplus$ מוגדר בשאלה 1.22 בספר הלימוד.

א. $A-(B-A)=A$

ב. $(A - B) \cup (B - C) = (A \cup (B - C)) - (B \cap C)$

ג. $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

שאלה 3

הוכיחו את הטענות א׳-ד׳. הסימן $\oplus$ מוגדר בשאלה 1.22 בספר הלימוד. רצוי להיעזר בתכונות של ההפרש הסימטרי המוכחות באותה שאלה, ולתת הוכחות אלגבריות, בדומה לשאלה 2 בממ״ן זה. זה יכול לחסוך הרבה עבודה.

U היא קבוצה אוניברסלית, המכילה את כל הקבוצות שבשאלה.

שימו לב: **בטענות ״אם ורק אם״ יש להוכיח שני כיוונים**.

א. כלל הצמצום: אם $X \oplus A = Y \oplus A$ אז $X = Y$.

הדרכה: היעזרו באסוציאטיביות של $\oplus$ ובתכונות אחרות שלה.

ב. $A \oplus B = \emptyset$ אם ורק אם $A = B$.

ג. $A \oplus B = U$ אם ורק אם $A = B'$.

ד. $A \oplus B = A$ אם ורק אם $B = \emptyset$.

שאלה 4

סעיפים ב-ג בשאלה זו מתייחסים להגדרה 1.6 בעמ׳ 12 בספר הלימוד, ולהגדרה הדומה עבור חיתוך, בעמוד 16 בספר הלימוד.

תהי $\mathbf{N}^*$ קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מ- 0. לכל $n \in \mathbf{N}^*$ נגדיר קבוצה:

$$B_n = \{n \cdot k \mid k \in \mathbf{N}^*\}$$

(קבוצת כל המספרים שצורתם $n \cdot k$, כאשר $k \in \mathbf{N}^*$).

א. הוכיחו כי $B_n \cap B_m = B_{c(n,m)}$ כאשר $c(n,m)$ הוא הכפולה המשותפת המינימלית של n, m

(המספר הטבעי החיובי הקטן ביותר המתחלק ללא שארית ב- n וב- m).

הדרכה: ניתן להסתמך על הטענה כי כל כפולה משותפת של n, m מתחלקת בכפולה המשותפת המינימלית שלהן.

ב. הסבירו מדוע $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} B_n = \emptyset$.

ג. לכל $n \geq 2$ נסמן $D_n = B_n - \bigcup_{1 < i < n} B_i$ (בפרט: $D_2 = B_2$, $D_3 = B_3 - B_2$).

עבור איזה ערכים של n קיים: $D_n \neq \emptyset$? כלומר מצא את $\{n \in \mathbf{N}^* \mid D_n \neq \emptyset\}$.

אל תשכחו להראות שהתשובה כוללת את **כל** הערכים המקיימים זאת (״הכלה דו-כיוונית״).

מטלת מחשב (ממ״ח) 02

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרק 2
מספר השאלות: 11 | **משקל המטלה:** נקודה אחת
סמסטר: 2017ב | **מועד הגשה:** 23.4.2017

תשובות לממ״ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת״א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ״ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ״ח למנחה!

״רלציה״ בעברית: יחס.

בכל אחת מהשאלות הבאות סמנו את התשובה הנכונה.

שאלה 1

יהי $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(2,2)\}$. נתבונן בשוויון $R=X\times Y$.

א. אם $X=\{1\}$, $Y=\{1,2,3\}$ אז $R=X\times Y$.

ב. אם $X=\{1,2\}$, $Y=\{1,2,3\}$ אז $R=X\times Y$.

ג. השוויון $R=X\times Y$ מתקיים עבור X,Y מסוימים, שאינם אלה שהוצגו בתשובות א, ב.

ד. לא קיימות קבוצות X,Y כך ש- $R=X\times Y$.

שאלה 2

תהי $A=\{1,2,3,4\}$ ויהי R היחס הבא מ- A ל- A: $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,4),(4,3)\}$.

$Domain(R)\cap Range(R)$ הוא:

א. $\{1\}$ ב. $\{1,2,4\}$ ג. $\varnothing$ ד. $\{1,2\}$ ה. A

שאלה 3

R,A הם **אלה שהוגדרו בשאלה 2**. S הוא יחס מעל A. השוויון $RS=I_A$ מתקיים עבור:

א. $S=I_A$ ב. $S=R^{-1}$ ג. $S=R$

ד. אינו מתקיים עבור שום S ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

שאלה 4

R הוא יחס כלשהו מעל קבוצה כלשהי. השוויון $R^3R^2=R^5$

א. נכון תמיד ב. נכון **רק** אם $R=I_A$ ג. נכון **רק** אם $R=\varnothing$

ד. נכון **רק** אם $R=A\times A$ ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

שאלה 5

R הוא יחס כלשהו מעל קבוצה A כלשהי. התנאי $RR^{-1} = I_A$ **שקול** (!) לתנאי

א. $R^{-1}R = I_A$ ב. $R = I_A$ ג. $R \neq \varnothing$

ד. $Domain(R) = A$ ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

שאלה 6

תהי $A = \{1,2,3\}$ ויהי R היחס הבא מ- A ל- A : $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,1)\}$.

טענה (***i***) : $R \cup R^2$ הוא רפלקסיבי. טענה (***ii***) : $R \cup R^2$ הוא סימטרי.

א. רק טענה (***i***) נכונה. ב. רק טענה (***ii***) נכונה.

ג. שתי הטענות (***i***) , (***ii***) נכונות. ד. אף אחת מהטענות (***i***), (***ii***) אינה נכונה.

שאלה 7

R, A הם אלה שהוגדרו בשאלה 6.

טענה (***i***) : $R \cup R^2$ הוא אנטי-סימטרי. טענה (***ii***) : $R \cup R^2$ הוא טרנזיטיבי.

א. רק טענה (***i***) נכונה. ב. רק טענה (***ii***) נכונה.

ג. שתי הטענות (***i***) , (***ii***) נכונות. ד. אף אחת מהטענות (***i***), (***ii***) אינה נכונה.

שאלה 8

היחס $R = \{(1,1),(2,2)\}$ מעל $A = \{1,2,3\}$ הוא :

א. רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

ב. סימטרי ורפלקסיבי אך לא טרנזיטיבי.

ג. סימטרי וטרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי.

ד. רפלקסיבי וטרנזיטיבי אך לא סימטרי.

ה. טרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי ולא סימטרי.

שאלה 9

R,S הם יחסים מעל קבוצה A ומתקיים $S \subseteq R$.

טענה (***i***) : אם S סימטרי אז R סימטרי. טענה (***ii***) : אם S אנטי-סימטרי אז R אנטי-סימטרי

א. רק טענה (***i***) נכונה. ב. רק טענה (***ii***) נכונה.

ג. שתי הטענות (***i***) , (***ii***) נכונות. ד. אף אחת מהטענות (***i***), (***ii***) אינה נכונה.

שאלה 10

R הוא יחס מעל קבוצה כלשהי. ידוע ש- R **הוא סימטרי ואינו** טרנזיטיבי.

מכאן ניתן להסיק:

א. $R \cap I_A = \varnothing$

ב. $R \cap I_A \neq \varnothing$

ג. יש ב- A לפחות שני אבירים שונים.

ד. יש ב- R לפחות 3 זוגות סדורים.

ה. יש ב- R לפחות 4 זוגות סדורים.

שאלה 11

R,S הם יחסים מעל קבוצה A.

הסימן $\oplus$ (הפרש סימטרי) הוגדר בשאלה 1.22 בעמ' 27 בכרך "תורת הקבוצות".

טענה (***i***): אם R,S אנטי-סימטריים אז $R \oplus S$ אנטי-סימטרי.

טענה (***ii***): אם R,S טרנזיטיביים אז $R \oplus S$ טרנזיטיבי.

א. רק טענה (***i***) נכונה.

ב. רק טענה (***ii***) נכונה.

ג. שתי הטענות (***i***), (***ii***) נכונות.

ד. אף אחת מהטענות (***i***), (***ii***) אינה נכונה.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: "תורת הקבוצות" פרקים 2-3
מספר השאלות: 10 | **משקל המטלה:** נקודה אחת
סמסטר: 2017ב | **מועד הגשה: 30.4.2017**

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

"רלציה" בעברית: יחס.

בכל שאלה סמנו את התשובה הנכונה

שאלה 1

יהיו: $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $R=\{(1,2),(1,3),(2,3),(5,6)\}$, $E=I_A\cup R\cup R^{-1}$.

החלוקה שיחס השקילות E משרה ב- A היא:

א. $\{\{1,2,3\},\{5,6\}\}$ ב. $\{\{1,2,3\},\{4\},\{5,6\}\}$

ג. $\{\{1,2,3,5,6\}\}$ ד. $\{\{1,2,3,4,5,6\}\}$

ה. $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{5,6\}\}$

ו. E אינו יחס שקילות מעל A ולכן אינו משרה חלוקה של A.

שאלה 2

נגדיר יחס L מעל $\mathbf{N}$: $(n,m)\in L$ אם ורק אם $n+m$ מתחלק ללא שארית ב- 3.

מספר מחלקות השקילות ש- L משרה ב- $\mathbf{N}$ הוא:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. יש אינסוף מחלקות שקילות.

ה. L אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

שאלה 3

נגדיר יחס M מעל $\mathbf{N}-\{0\}$:

עבור n,m טבעיים חיוביים, $(n,m)\in M$ אם ורק אם $n\cdot m$ מתחלק ללא שארית ב- 10.

מספר מחלקות השקילות ש- M משרה ב- $\mathbf{N}-\{0\}$ הוא :

א. 1 ב. 2 ג. 10 ד. יש אינסוף מחלקות שקילות.

ה. M אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

שאלה 4

נגדיר פונקציה f מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$: $f(k)=k^2+k$.

f היא :

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$.

שאלה 5

תהי $g(x)=x^2+2x-1000$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

g היא :

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbf{R}$ ל- $\mathbf{R}$.

שאלה 6

תהי $f(X)=X\cap\mathbf{N}$, $f:P(\mathbf{R})\to P(\mathbf{N})$.

f היא :

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $P(\mathbf{R})$ ל- $P(\mathbf{N})$.

שאלה 7

תהיינה $A,B \subseteq U$ שונות זו מזו, ומתקיים: $\{A,B\}$ היא **חלוקה** של U.

בעמ' 85 בכרך "תורת הקבוצות" מוגדרת φ_A , **הפונקציה האופיינית** של A ב- U .

טענה (***i***): מהנתון נובע שלכל $x \in U$, $\varphi_A(x)+\varphi_B(x)=1$.

טענה (***ii***): מהנתון נובע שלכל $x \in U$, $\varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x)=0$.

א. רק טענה (***i***) נכונה.
ב. רק טענה (***ii***) נכונה.
ג. שתי הטענות (***i***) , (***ii***) נכונות.
ד. אף אחת מהטענות (***i***), (***ii***) אינה נכונה.

שאלה 8

תהי $A=\{1,2,3,4\}$ ויהיו $X,Y \subseteq A$.

נאמר ש- $(X,Y) \in D$ **אם ורק אם** $X \subseteq Y$. היחס D הוא:

א. סדר-חלקי מעל $P(A)$ ואינו סדר-מלא מעל $P(A)$.
ב. סדר-חלקי מעל $P(A)$, שהוא גם סדר-מלא מעל $P(A)$.
ג. סדר-חלקי מעל $P(A)$, שהוא גם יחס שקילות מעל $P(A)$.
ד. אינו יחס מעל $P(A)$.

שאלה 9

מעל קבוצה כלשהי A מוגדר סדר-חלקי R, **שאינו** סדר-מלא. מכאן נובע:

א. $|A|=1$.
ב. $|A|=2$.
ג. $|A|\geq 2$.
ד. מספר הזוגות הסדורים ב- R הוא אינסופי.
ה. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

שאלה 10

R הוא סדר-חלקי על קבוצה כלשהי A .

נתון שקיים $a \in A$ שאינו איבר מקסימלי ואינו איבר מינימלי לגבי R . מכאן נובע:

א. $|A|=3$.
ב. R הוא סדר מלא מעל A .
ג. R אינו סדר מלא מעל A .
ד. A היא אינסופית.
ה. $|R|\geq 6$

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרקים 2- 3

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2017ב | **מועד הגשה: 7.5.2017**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל לכתבתו של מנחה או הבודק של קבוצתך

שאלה 1 (30 נקודות)

$\mathbf{Z}$ היא קבוצת השלמים : $\mathbf{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$, $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

א. תהי $f:\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ הפונקציה המוגדרת על-ידי $f(x,y)=3x+2y$ לכל $(x,y)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

הוכיחו ש- f **אינה** חד-חד-ערכית , והוכיחו ש- f היא **על** .

ב. תהי $g:P(\mathbf{R})\to P(\mathbf{R})$ הפונקציה המוגדרת על-ידי $g(X)=X\oplus\mathbf{Z}$ לכל $X\in P(\mathbf{R})$.

הוכיחו שלכל $X\in P(\mathbf{R})$, $g(g(X))=X$

הדרכה: ראו תכונות של הפרש סימטרי בעמ' 27 בכרך "תורת הקבוצות".

הוכחה אלגברית קצרה הרבה יותר במקרה זה מאשר הוכחה ע"י "יהי x איבר...".

ג. האם g היא חד-חד-ערכית? האם g היא על ? נמקו את התשובות.

שאלה 2 (32 נקודות)

נגדיר יחס E מעל $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$: שני איברים של $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ עומדים ביחס E זה לזה אם ורק אם הפונקציה f מסעיף א של השאלה הקודמת שולחת אותם לאותו איבר של $\mathbf{Z}$.

E הוא **יחס שקילות**: זה נובע מהסעיף "העתק טבעי" בעמ' 84 בספר. ראו הסבר מפורט יותר באתר הקורס, מאגר המשאבים, עזרים ללמידה - "יחס שקילות המושרה על-ידי פונקציה".
השאלה מתייחסת ליחס השקילות הזה.

א. האם מספר מחלקות השקילות אליהן E מחלקת את $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ הוא סופי או אינסופי ?

ב. הוכיחו שמחלקת השקילות של $(0,0)$ היא אינסופית, כלומר מכילה אינסוף איברים.

ג. יהי $(a,b)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ ויהי $(m,n)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. הוכיחו : אם (m,n) נמצא באותה מחלקת שקילות עם $(0,0)$, אז $(a+m,\, b+n)$ נמצא באותה מחלקת שקילות עם (a,b) .

ד. הוכיחו **שכל** מחלקות השקילות אליהן E מחלקת את $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ הן אינסופיות.

שאלה 3 (28 נקודות)

בשאלה 3.25א בעמ' 94 בספר מוכח שיחס ההכלה $\subseteq$ הוא סדר-חלקי מעל כל קבוצה של קבוצות.

א. תהי A קבוצה לא ריקה, ותהי K קבוצת כל **יחסי השקילות** מעל A.

לפי האמור בתחילת השאלה, K סדורה בסדר-חלקי לגבי הכלה (אברי K הם קבוצות, כי יחס מעל קבוצה גם הוא קבוצה: קבוצה של זוגות סדורים). הראה שיש ב- K איבר קטן ביותר ואיבר גדול ביותר ("תורת הקבוצות" עמ' 93). מיהם?

הוכיחו שהאיברים שאתה מציין אכן שייכים ל- K.

ב. תהי M קבוצת כל היחסים **הסופיים** מעל $\mathbf{N}$, פרט ליחס הריק (יחס סופי: יחס שהוא קבוצה סופית, כלומר שיש בו מספר סופי של זוגות סדורים. בקבוצה M שהוגדרה כאן נמצאים כל היחסים הסופיים מעל $\mathbf{N}$, חוץ מהיחס הריק).

לפי האמור בתחילת השאלה, M סדורה בסדר-חלקי לגבי הכלה.

(*i*) האם יש ב- M איבר קטן ביותר? איבר גדול ביותר? אם כן, מיהם?

(*ii*) אם לא מצאת איבר קטן ביותר, האם יש איברים מינימליים? אם כן, ציין מיהם והסבר מדוע הם אינם קטנים ביותר. אם אין איברים מינימליים, הסבר מדוע אין.

(*iii*) אם לא מצאת איבר גדול ביותר, האם יש איברים מקסימליים? אם כן, ציין מיהם והסבר מדוע הם אינם גדולים ביותר. אם אין איברים מקסימליים, הסבר מדוע אין.

שאלה 4 (10 נקודות)

פונקציה $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ מוגדרת ברקורסיה כך:

$f(0)=1$, ולכל $k\in\mathbf{N}$: $f(k+1)=(k+1)\cdot f(k)$

(בהמשך הקורס נחזור לפונקציה זו ונקרא לה בשם "עצרת").

(5 נק') א. חשבי את $f(5)$.

(17 נק') ב. הוכיחי באינדוקציה: $1\cdot f(1)+2\cdot f(2)+3\cdot f(3)+\ldots+n\cdot f(n)=f(n+1)-1$

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרקים 4-5

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2017ב **מועד הגשה: 14.5.2017**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל לכתובתו של מנחה או בודק קבוצתך

שימו לב: חלק ממטלה זו מתייחס לפרק 5 בתורת הקבוצות, שנמצא בידיכם בחוברת נפרדת.

שאלה 1 (27 נק')

א. הוכיחו שאם $|A-B|=|B-A|$ אז $|A|=|B|$.

הדרכה: לא נתון שהקבוצות סופיות, לכן יש לעבוד לפי הגדרת שוויון עוצמות.

ההנחה על A,B פירושה שקיימת פונקציה חח"ע ועל מסוימת, ועלינו להראות שמכך נובע שקיימת פונקציה חח"ע ועל אחרת...

ב. הראו שאם A,B **סופיות** ו- $|A|=|B|$ אז $|A-B|=|B-A|$.

ג. הראו ע"י דוגמא שטענת סעיף ב אינה נכונה בהכרח עבור A,B שאינן סופיות.

שאלה 2 (10 נק')

נתונות 100 קבוצות $A_1, A_2, \dots, A_{100}$, שכולן חלקיות לקבוצת הממשיים $\mathbf{R}$.

נתון שלכל i $(1 \le i \le 100)$, **המשלים** של A_i ב- $\mathbf{R}$ הוא קבוצה בת-מניה.

נסמן $A = \bigcap_{1\le i\le 100} A_i$. נסמן ב- B את **המשלים** של A ב- $\mathbf{R}$.

עוצמת B היא:

[1] 0 **[2]** מספר טבעי כלשהו שאינו 0 **[3]** $\aleph_0$

[4] C **[5]** התשובה תלויה בבחירת הקבוצות $A_1, A_2, \dots, A_{100}$.

מצאו את התשובה הנכונה **ונמקו**.

שאלה 3 (18 נק׳)

תהיינה A,B,C קבוצות **בנות מניה**, החלקיות לקבוצת הממשיים $\mathbf{R}$.

נסמן : $D = A' \cap B' \cap C'$ (המשלימים הם יחסית ל- $\mathbf{R}$). עוצמת D היא :

[1] 0 **[2]** מספר טבעי כלשהו שאינו 0 **[3]** $\aleph_0$

[4] C **[5]** התשובה תלויה בבחירת הקבוצות A,B,C .

מצאו את התשובה הנכונה **ונמקו**.

שאלה 4 (20 נק׳)

(8 נק׳) א. הוכיחו שקבוצת היחסים (רלציות) מעל הקבוצה $\mathbf{N}$, עוצמתה C .

הדרכה : כדאי להיזכר בהגדרה של יחס מעל קבוצה.

(12 נק׳) ב. הוכיחו שקבוצת היחסים **האנטי-סימטריים** מעל $\mathbf{N}$, עוצמתה C .

שאלה 5 (25 נק׳)

(12 נק׳) א. תהיינה k_1, k_2, m עוצמות. נתון $k_1 \le k_2$. הוכיחו : $k_1{}^m \le k_2{}^m$.

(13 נק׳) ב. הוכיחו : $\aleph_0{}^{\aleph_0} = C$. כדאי להיעזר בסעיף א.

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: "קומבינטוריקה" פרקים 1-2
מספר השאלות: 12 | **משקל המטלה:** נקודה אחת
סמסטר: 2017ב | **מועד הגשה: 28.5.2017**

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בשאלות $1-4$ A,B הן קבוצות, $|A|=5$, $|B|=3$.

שאלה 1

מספר הפונקציות של B ל- A הוא:

א. 15 ב. 120 ג. 125 ד. 243 ה. 512

שאלה 2

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של B ל- A הוא:

א. 5 ב. 15 ג. 20 ד. 60 ה. 120

שאלה 3

מספר היחסים הרפלקסיביים מעל A הוא:

א. 5 ב. 25 ג. 32 ד. 5^5 ה. 2^{20}

שאלה 4

מספר יחסי הסדר המלא מעל A הוא:

א. 5 ב. 25 ג. 32 ד. 120 ה. 3,125

שאלות 5- 7 עוסקות בדרכים שונות לסדר את המחרוזת 1223334444 (להלן: "המחרוזת").

שאלה 5

מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת הוא:

א. 10 ב. $1!+2!+3!+4!$ ג. $10!$ ד. $\frac{10!}{2!3!4!}$

ה. $10!-(1!+2!+3!+4!)$

שאלה 6

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת כאשר הספרות 22 חייבות להיות צמודות זו לזו?

א. 25 ב. 252 ג. 2520 ד. 12,520 ה. 125,200

שאלה 7

בנוסף לדרישה שבשאלה 6, נדרוש גם **שלא** יופיע הרצף 333.

מספר הסידורים האפשריים כעת קטן ממספר הסידורים שמצאתם בשאלה 6. **בכמה הוא קטן?**

א. 10 ב. 210 ג. 2100 ד. 12,100 ה. 122,100

בכל אחת מהשאלות 8 – 10 נתונה קבוצה של כדורים בצבעים אדום, סגול ולבן, ועליכם למצוא **בכמה דרכים ניתן לבחור מהקבוצה הנתונה 10 כדורים**, ללא חשיבות לסדר הבחירה.

כדורים בעלי אותו צבע נחשבים זהים.

שאלה 8

יש מספר בלתי מוגבל של כדורים מכל צבע.

א. 3^{10} ב. $\frac{10!}{3!}$ ג. 10^3 ד. $D(10,3)$ ה. $D(3,10)$

שאלה 9

נסמן את התשובה לשאלה הקודמת ב- x.

כעת לרשותנו רק 8 כדורים אדומים, 8 כדורים סגולים ו- 7 כדורים לבנים.

התשובה כעת היא:

א. $x-7$ ב. $x-10$ ג. $x-12$ ד. ללא שינוי, x.

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 10

לרשותנו שוב 8 כדורים אדומים, 8 כדורים סגולים ו- 7 כדורים לבנים.

הפעם כל צבע חייב להיבחר לפחות פעם אחת.

א. 15 ב. 25 ג. 35 ד. 45 ה. 55

שאלה 11

מהו מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=13$?

א. 65 ב. 1,287 ג. 2,380 ד. 6,188 ה. 154,440

תזכורת: בקורס זה, 0 הוא מספר טבעי.

שאלה 12

מהו מספר הפתרונות בטבעיים אי-זוגיים של $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=13$?

א. 65 ב. 495 ג. 70 ד. 1,190 ה. 1,680

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

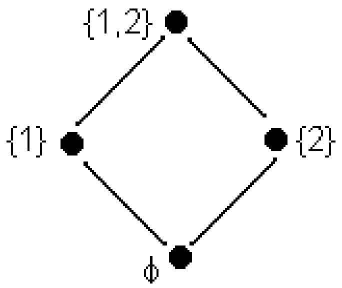
הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: קומבינטוריקה פרקים 3-4

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2017ב | **מועד הגשה:** 4.6.2017

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל לכתובת מנחה או בודק קבוצתכם

שאלה 1



באיור מופיעה דיאגרמת הסה ("תורת הקבוצות" עמ' 88) של
יחס ההכלה $\subseteq$ מעל $P(\{1,2\})$.
אנו רואים כי בדיאגרמה 4 קטעים.

תהי A קבוצה בת n איברים $(n > 0)$. מצא את מספר
הקטעים בדיאגרמת הסה של יחס ההכלה מעל $P(A)$.

את הביטוי המתקבל סכמו לביטוי פשוט, שאינו מכיל סכומים, בעזרת נוסחה המופיעה באחת השאלות בספר הלימוד.

שאלה 2

חשבו את פונקצית אוילר $\Theta(360)$ בשתי דרכים:

א. בעזרת הנוסחה שבתחתית עמוד 93 בספר הלימוד.

ב. באופן ישיר בעזרת הכלה והפרדה.

שאלה 3

קראו באתר הקורס את החישוב של מספר הפונקציות של קבוצה סופית A **על** קבוצה סופית B,
כאשר $|A|=n$, $|B|=k$.

החישוב הוא בעזרת הכלה והפרדה, והתוצאה היא $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n$.

א. הראו את השוויון הבא **בלי** לחשב בפירוש את הסכום שבאגף שמאל:

$$5^2-5\cdot 4^2+\binom{5}{2}\cdot 3^2-\binom{5}{3}\cdot 2^2+5\cdot 1=0$$

ב. נסחו הכללה של משוואה זו: מיהם כל הסכומים מסוג זה השווים אפס?
תנו תשובה כללית ככל שניתן, שאף קבוע מספרי אינו מופיע בה.

שאלה 4

A היא קבוצה בת 9 איברים, החלקית לקבוצה $\{4,5,6,\ldots,60,61\}$.

א. הראו שקיימות (לפחות) שתי תת-קבוצות שונות של A, שסכום איבריהן שווה.
(הדרכה: עקרון שובך היונים).
שימו לב שהשאלה מתייחסת לתת-קבוצות של הקבוצה הלא-ידועה A,
לא לתת-קבוצות כלשהן של $\{4,5,6,\ldots,60,61\}$!

ב. הראו שקיימות (לפחות) שתי קבוצות **זרות** כאלו.
הדרכה: נובע בקלות מסעיף א' ללא שיקולים קומבינטוריים!

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20476 מתמטיקה דיסקרטית **חומר הלימוד למטלה**: קומבינטוריקה פרקים 6-7

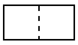
מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2017ב **מועד הגשה:** 11.6.2017

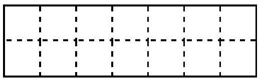
מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1

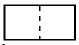
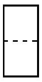
בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים בגודל 2×1 :



בלוק יכול להיות באחד משלושה צבעים: **ירוק, כחול, לבן** (הבלוק כולו צבוע בצבע אחיד, לא כל משבצת בנפרד). עלינו לרצף מלבן שממדיו $2 \times n$ (בציור לדוגמא משמאל $n = 7$), בלי לחרוג מגבולות המלבן.



בלוק ירוק אפשר להניח במצב "שוכב" או במצב "עומד" .

בלוק כחול אפשר להניח **רק במצב שוכב** , לבן אפשר להניח  **רק במצב עומד**.

אסור להניח בלוק ירוק שוכב על בלוק כחול (דשא לא צומח על הים).

יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

(10 נק') א. רשמו יחס נסיגה עבור a_n (הסבר אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

(15 נק') ב. פתרו את יחס הנסיגה.

להסיר ספק: בריצוף, גבולות הבלוקים נראים לעין. ריצוף בשני בלוקים ירוקים העומדים זה ליד זה שונה מריצוף בשני בלוקים ירוקים השוכבים זה על גבי זה.

שאלה 2

הנתונים הבאים חלים על שני סעיפי השאלה. תהי $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

נתון: $a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = -2,\ a_3 = -10$. שאר המקדמים אינם ידועים.

תהי g פונקציה המקיימת: $f(x) \cdot g(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots$

(20 נק') א. נסמן $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$. חשבו את $b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3$.

הדרכה: התקדמו בהדרגה. בחישוב כל מקדם היעזרו במקדמים שמצאתם לפני כן.

(5 נק') ב. נסמן $4f(x) \cdot f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$. מצאו את c_3.

שאלה 3 (ראו תרגיל דומה בסוף הקובץ "מבוא לפונקציות יוצרות" באתר הקורס)

יהי $m \in \mathbf{N}$. נתבונן בזהות $(1+x)^m(1-x)^m = (1-x^2)^m$.

מצאו את המקדם של x^6 בכל אחד מהאגפים של הזהות הנ"ל: באגף אחד סכום של מחוברים ובאגף האחר ביטוי פשוט. הביטויים כמובן תלויים ב- m.

רשמו את הזהות הקומבינטורית המתקבלת.

בדקו את הזהות שקיבלתם עבור $m = 4$.

תזכורת: ביטויים מוזרים כגון $\binom{2}{9}$, $\binom{10}{-2}$ הוגדרו בכרך "קומבינטוריקה" בעמ' 30.

אין צורך להפריד את החישוב הכללי למקרים לפי הגודל של m.

שאלה 4

במחסן של חנות מחשבים נמצאים n מחשבים ישנים **זהים**. בעלי החנות מעמיסים את המחשבים הישנים על 3 רכבים **שונים** (הרכב של איציק, הרכב של בני והרכב של גילה), שבכל אחד מהם יש מקום ל- 24 מחשבים לכל היותר.

(9 נק') א. רישמו פונקציה יוצרת עבור מספר הדרכים לחלק את n המחשבים הזהים בין 3 הרכבים השונים (לא חייבים לנצל את כל הרכבים).

(16 נק') ב. אם מספר המחשבים הוא 70, חשבו בעזרת סעיף א' או בדרך אחרת את מספר הדרכים לחלק את המחשבים בין הרכבים. תן תשובה סופית מספרית.

להלן נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות:

(*i*)! סכום טור הנדסי סופי: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ואינסופי: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

(*ii*)! כפל פונקציות יוצרות:

אם $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, ו- $f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

אז $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד).

(*iii*)! $\sum_{k=0}^{\infty} D(n,k)x^k = (1+x+x^2+\dots)^n = \frac{1}{(1-x)^n}$.

במילים אחרות: המקדם של x^k בפיתוח הביטוי $\frac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$.

(ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר).

מטלת מחשב (ממ״ח) 05

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה
חומר הלימוד למטלה: ״תורת הגרפים״ פרקים 1- 3
מספר השאלות: 11
משקל המטלה: נקודה אחת
סמסטר: 2017ב
מועד הגשה: 25.6.2017

תשובות לממ״ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת״א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ״ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ״ח למנחה!

שאלה 1

נתאר לעצמנו גרף על 6 צמתים, שדרגותיהם: 1,1,2,2,2,3.

א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.
ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.
ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.
ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.
ה. לא קיים גרף כזה.

שאלה 2

נתאר לעצמנו גרף על 8 צמתים, שדרגותיהם: 0,1,2,2,3,4,7,7 .

א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.
ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.
ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.
ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.
ה. לא קיים גרף כזה.

שאלה 3

בהנתן $n > 0$ טבעי, יהי Q_n הגרף הפשוט הבא:

הצמתים של Q_n הם הסדרות באורך n שאבריהן 0, 1 (מספר הצמתים הוא אפוא 2^n).

שני צמתים מחוברים בקשת אם ורק אם הם נבדלים זה מזה בקואורדינטה אחת בדיוק.

למשל, ב- Q_6 יש קשת בין הצומת $(0,0,1,0,1,1)$ לצומת $(0,1,1,0,1,1)$, כי שתי הסדרות הללו נבדלות זו מזו רק בקואורדינטה השניה. מספר **הקשתות** של Q_6 הוא:

א. 63 ב. 128 ג. 192 ד. 720

שאלה 4

K_n הוא הגרף המלא על n צמתים ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4).

נתבונן באיחוד זר של K_3 עם K_5 : גרף בעל 8 צמתים, שיש לו שני רכיבי קשירות:

רכיב קשירות אחד הוא עותק של K_3 ורכיב הקשירות השני הוא עותק של K_5 .

נוסיף לקשתות הקיימות בגרף עוד קשתות: נחבר בקשת כל צומת של K_3 עם כל צומת של K_5.

הגרף שנקבל הוא:

א. K_8, והוא דו-צדדי, הצדדים שלו הם הגרפים K_3, K_5 מהם התחלנו.

ב. K_8, והוא דו-צדדי, אבל הצדדים שלו **אינם** הגרפים K_3, K_5 מהם התחלנו.

ג. K_8, והוא אינו דו-צדדי.

ד. גרף דו-צדדי שאינו K_8 .

ה. גרף שאינו דו-צדדי ואינו K_8 .

שאלה 5

השאלה עוסקת באיזומורפיזם של גרפים שאינם מתויגים ("תורת הגרפים" הגדרה 2.7).

נזכור שלכל גרף G, המשלים שלו ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4) מסומן $\overline{G}$.

C_n הוא גרף שהוא מעגל פשוט על n צמתים.

טענה (*i*): $\overline{C_4}$ איזומורפי לגרף הבנוי משתי קשתות זרות: 

טענה (*ii*): $\overline{C_5}$ איזומורפי ל- C_5.

א. רק טענה (***i***) נכונה.

ב. רק טענה (***ii***) נכונה.

ג. שתי הטענות (***i***) , (***ii***) נכונות.

ד. אף אחת מהטענות (***i***), (***ii***) אינה נכונה.

שאלה 6

G הוא **יער** על 14 צמתים, ובו בדיוק 14 קשתות.

א. G הוא עץ.

ב. ל- G יש בדיוק שני רכיבי קשירות.

ג. ל- G יש בדיוק שלשה רכיבי קשירות.

ד. נחוץ מידע נוסף כדי לקבוע כמה רכיבי קשירות יש ל- G .

ה. לא ייתכן יער כזה.

שאלה 7

דרגות הצמתים (לא סדרת Prüfer !) בגרף G הן : 1,1,1,2,2,3 .

גם לגרף H יש בדיוק אותה סדרת דרגות. הגרפים אינם מתוייגים.

טענה ***(i)*** : G,H הם בהכרח עצים. טענה ***(ii)*** : G,H בהכרח איזומורפיים זה לזה.

א. רק טענה ***(i)*** נכונה.
ב. רק טענה ***(ii)*** נכונה.
ג. שתי הטענות ***(i)*** , ***(ii)*** נכונות.
ד. אף אחת מהטענות ***(i)***, ***(ii)*** אינה נכונה.

שאלה 8

בפרק 2 של החוברת "תורת הגרפים", בתשובה לשאלה 7, מופיע עץ מתויג.

נוסיף לעץ הזה עלה שמספרו 9 ונחבר אותו לצומת שמספרה 6.

סדרת Prüfer של העץ החדש היא :

א. $(4,4,3,4,4,2,6)$
ב. $(4,4,3,4,4,2,9)$
ג. $(6,4,4,3,4,4,2)$
ד. $(6,4,4,4,3,2,4)$
ה. $(4,4,4,4,3,2,6)$
ו. $(4,4,4,2,4,3,6)$

שאלה 9

הגרף הדו-צדדי המלא $K_{p,q}$ הוגדר ב"תורת הגרפים" הגדרה 1.5 .

$K_{6,2}$ הוא :

א. אוילרי והמילטוני.
ב. אוילרי אבל אינו המילטוני.
ג. המילטוני אבל אינו אוילרי.
ד. אינו אוילרי ואינו המילטוני.

שאלה 10

G הוא גרף אוילרי (כלומר יש בו מעגל אוילר), ויש ב- G גם מסלול אוילר שאינו מעגל.

א. זה לא מעניין, בכל גרף אוילרי יש גם מסלול אוילר שאינו מעגל.
ב. טענה א' אינה נכונה, אבל יש גרף פשוט המקיים את הדרישות הללו.
ג. יש גרף כזה, אבל לא גרף פשוט.
ד. לא ייתכן גרף כזה.

שאלה 11

G הוא גרף המילטוני (כלומר יש בו מעגל המילטון), ויש ב- G גם מסלול המילטון שאינו מעגל.

א. זה לא מעניין, בכל גרף המילטוני יש גם מסלול המילטון שאינו מעגל.
ב. טענה א' אינה נכונה, אבל יש גרף פשוט המקיים את הדרישות הללו.
ג. יש גרף כזה, אבל לא גרף פשוט.
ד. לא ייתכן גרף כזה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20476 – מתמטיקה בדידה

חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים – כל היחידה

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2017ב **מועד הגשה: 2.7.2017**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של מנחה או בודק קבוצתך

שאלה 1 (15 נקודות)

בממ"ן 14 שאלה 1 הסתכלנו בדיאגרמת הסה של יחס ההכלה מעל קבוצה A בת k אברים.

כדי לפשט את הסימון נניח $A=\{1,2,\dots,k\}$.

נסתכל שוב באותה דיאגרמת הסה, והפעם נראה אותה כגרף. צמתי הגרף הם אברי $P(A)$.

א. הראו שהגרף הוא רגולרי (כלומר לכל הצמתים אותה דרגה). מהי הדרגה?

ב. בממ"ן 14 חישבנו את מספר הקשתות בגרף. חשבו אותו מחדש, הפעם על ידי שיקול פשוט של תורת הגרפים.

ג. הוכיחו שהגרף הוא דו-צדדי: הראו חלוקה של הצמתים לשני צדדים.

שאלה 2 (15 נקודות)

יהיו $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ שני עצים על אותה קבוצת צמתים V.

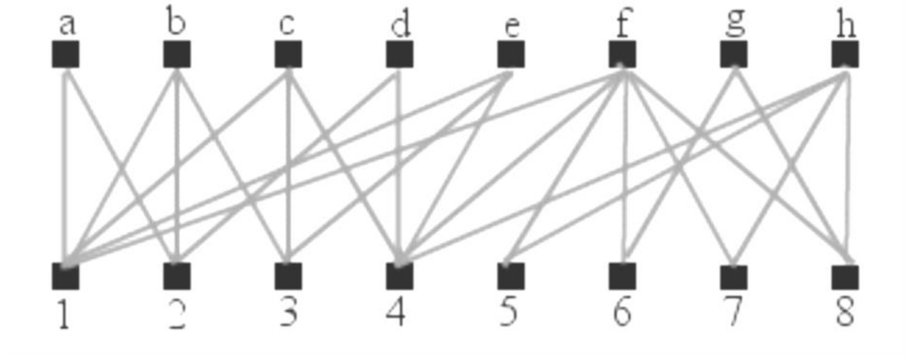
לכל $v\in V$ תהי $d_1(v)$ הדרגה של v ב- G_1 ותהי $d_2(v)$ הדרגה של v ב- G_2 .

הוכיחו כי קיים $v\in V$ עבורו $d_1(v)+d_2(v)\le 3$.

הדרכה: חשבו את סכום כל הדרגות בשני העצים.

שאלה 3 (22 נקודות)

הוכיחו כי בגרף הבא לא קיים זיווג מושלם.



שאלה 4 (23 נקודות)

G הוא גרף מישורי על 11 צמתים. הוכיחו שהגרף המשלים שלו, $\overline{G}$, אינו מישורי.

רשות (בונוס 5 נקודות. אין ציון מעל 100 אבל הבונוס יכול לקזז נקודות שירדו):
הוכיחו טענה זו כאשר במקום 11, מספר הצמתים בגרף הוא מספר כלשהו הגדול מ- 10.

שאלה 5 (25 נקודות)

צבענו (צביעה נאותה) ב- k צבעים גרף G, המקיים $\chi(G) = k$.

(12 נק׳) א. הראו שלכל צבע מתוך k הצבעים, יש ב- G צומת, ששכניו משתמשים **בכל** $k-1$ הצבעים הנותרים. הדרכה: הוכיחו בדרך השלילה.
נסחו היטב ובבירור את טענת השלילה.

(8 נק׳) ב. איזו טענה מספר הלימוד מוכיח סעיף א ?

(5 נק׳) ג. הראו כי ב- G יש לפחות k צמתים שדרגת כל אחד מהם היא לפחות $k-1$.