

**קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"**  
**תאריך הבחינה: 6.3.2017 (סמסטר 2017 א - מועד א' 6 / 87)**

**חומר העזר המותר:** מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

**לבחינה מצורפים:** טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

### שאלה 1 (25 נקודות)

א. יהי  $X$  משתנה מקרי רציף שפונקציית הצפיפות שלו היא:  $3 < x < 5$ ,  $f_X(x) = cx$ .

- 5 נק' 1. מצא את  $c$ .
- 5 נק' 2. חשב את התוחלת של  $X$ .
- 5 נק' 3. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של  $X$ . רשום אותה באופן מדויק.
- 10 נק' ב. יהי  $X$  משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ).

הוכח כי:  $E[X] = \frac{1}{\lambda}$

### שאלה 2 (25 נקודות)

מסדרים באקראי בשורה את הספרות 1, 2, ..., 9.

לכל  $i = 1, 2, \dots, 9$ , יהי  $X_i$  המשתנה המקרי המוגדר על-ידי המיקום הסידורי בשורה של הספרה  $i$ .

- 6 נק' א. חשב את  $P\{X_5 > 5\}$ .
- 6 נק' ב. חשב את השונות של  $\sum_{i=1}^8 X_i$ . (שימו לב לגבול העליון של הסכימה).
- 13 נק' ג. יהי  $Y$  המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הספרות שעבורן מתקיים  $X_i = i$ .
1. חשב את התוחלת של  $Y$ .
2. חשב את השונות של  $Y$ .

### שאלה 3 (25 נקודות)

יהי  $X$  משתנה מקרי בדיד, המקבל את הערכים 0.25, 0.5 ו-0.75 בהסתברויות שוות, דהיינו, כל ערך בהסתברות  $\frac{1}{3}$ .

מטילים מטבע שההסתברות לקבל בו  $H$  היא  $X$ .

יהיו  $A_1$  ו- $A_2$  המאורעות שבהטלות הראשונה והשנייה, בהתאמה, של המטבע הנבחר התקבל  $H$ .

- 6 נק' א. חשב את השונות של  $X$ .
- 6 נק' ב. לכל  $i = 0.25, 0.5, 0.75$ , האם המאורעות  $A_1$  ו- $A_2$  בלתי-תלויים בתנאי המאורע  $\{X = i\}$ ?
- 6 נק' ג. האם המאורעות  $A_1$  ו- $A_2$  בלתי-תלויים?
- 7 נק' ד. חשב את התוחלת המותנית של המשתנה המקרי  $X$  בהינתן המאורע  $A_1$ .

#### שאלה 4 (25 נקודות)

מכונת מזל מגרילה מספר  $X$  שהתפלגותו פואסונית עם הפרמטר 2. מהמר נדרש לשלם 10 ₪ עבור השתתפות בהגרלה אחת של מספר. סכום הזכייה שלו מהגרלה בודדת הוא  $2^X$  ₪.

(6 נק') א. מהי ההסתברות שהרווח הנקי מהגרלה בודדת יהיה חיובי?

(7 נק') ב. מהי תוחלת הרווח הנקי של מהמר בהגרלה בודדת?

(12 נק') ג. אדם מגריל מספרים שוב ושוב. אין תלות בין הגרלות שונות.

1. מהי ההסתברות שיקבל לראשונה את המספר 4 לאחר ההגרלה העשירית?

2. מהי **בקירוב** ההסתברות שיקבל את המספר 4 לפחות ארבעים פעמים,

במהלך 300 ההגרלות הראשונות?

#### שאלה 5 (25 נקודות)

בחרים מספר בן 6 ספרות, שכולן בין 0 ל-9, כך שהספרה הראשונה במספר, דהיינו ספרת מאות-האלפים, איננה 0 או 1.

לכל אחד מהמספרים האפשריים המתוארים מעלה, יש סיכוי שווה להיבחר.

(6 נק') א. בכמה מאפשרויות הבחירה נבחר מספר שכל ספרותיו שונות זו מזו?

(6 נק') ב. מה ההסתברות שייבחר מספר שכל ספרה בו גדולה מקודמתה?

כלומר, ספרת מאות-האלפים היא הגדולה ביותר במספר וספרת האחדות היא הקטנה ביותר.

(6 נק') ג. מהי פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הספרות הזוגיות במספר?

(7 נק') ד. יהי  $X$  המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר ה-0-ים במספר הנבחר,

ויהי  $Y$  המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר ה-1-ים במספר הנבחר.

מהי פונקציית ההסתברות המשותפת של המשתנים המקריים  $X$  ו- $Y$ ?

**בהצלחה!**

**ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית,  $\Phi(z)$**

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] \quad \text{נוסחת האינטרפולציה:}$$

$z$	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
$z$	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
$z$	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

## דף נוסחאות לבחינה - 20425

התפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}, \quad i=0,1,\dots,n$	$np$	$np(1-p)$	$(pe^t + 1 - p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1} \cdot p, \quad i=1,2,\dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t / (1 - (1-p)e^t), \quad t < -\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i!, \quad i=0,1,\dots$	$\lambda$	$\lambda$	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1} (1-p)^{i-r} \cdot p^r, \quad i=r, r+1, \dots$	$r/p$	$(1-p)r/p^2$	$(pe^t / (1 - (1-p)e^t))^r, \quad t < -\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i} / \binom{N}{n}, \quad i=0,1,\dots,m$	$nm/N$	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N} (1 - \frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n}, \quad i=m+1, m+2, \dots, m+n$	$m + (1+n)/2$	$(n^2 - 1)/12$	
אחידה	$1/(b-a), \quad a \leq x \leq b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt} - e^{at}) / (tb - ta), \quad t \neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty$	$\mu$	$\sigma^2$	$\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda - t), \quad t < \lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1, \dots, n_r} \cdot p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}, \quad \sum n_i = n, \sum p_i = 1$			

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

נוסחת הבינום

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

כלל ההכלה וההפרדה

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

הסתברות מותנית

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

נוסחת הכפל

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i), \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S$$

נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}, \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S$$

נוסחת בייס

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx$$

תוחלת

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx$$

תוחלת של פונקציה של מ"מ

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

שונות

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב  $\lambda$  ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר  $\lambda$ .

$$P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\}, \quad s, t \geq 0$$

תכונת חוסר-הזכרון

$$E[X | Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y) = \int x f_{X|Y}(x|y) dx$$

תוחלת מותנית

$\text{Var}(X   Y = y) = E[X^2   Y = y] - (E[X   Y = y])^2$	שונות מותנית
$E[X] = E[E[X   Y]] = \sum_y E[X   Y = y] p_Y(y)$	נוסחת התוחלת המותנית
$E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X   Y]]$	(טענה מתרגיל 26, עמוד 430)
$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X   Y)] + \text{Var}(E[X   Y])$	נוסחת השונות המותנית
$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$	תוחלת של סכום משתנים מקריים
$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$	שונות משותפת
$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$	
$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$	שונות של סכום משתנים מקריים
$\rho(X, Y) = \text{Cov}(X, Y) / \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}$	מקדם המתאם הלינארי
$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$	פונקציה יוצרת מומנטים
$M_{X_1+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t) \quad :$ כאשר $X_i$ מ"מ ב"ת מתקיים	
$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X]$	תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי
$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\text{Var}(X) + (E[X])^2 \text{Var}(N)$	(כאשר $X_i$ מ"מ ב"ת ש"ה)
$M_Y(t) = E[(M_X(t))^N]$	
$P\{X \geq a\} \leq E[X]/a \quad , \quad a > 0 \quad , \quad X$ מ"מ אי-שלילי	אי-שוויון מרקוב
$P\{ X - \mu  \geq a\} \leq \sigma^2/a^2 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty$	אי-שוויון צ'בישב
$P\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)/\sqrt{n\sigma^2} \leq a\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a) \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty \quad , \quad X_i$ מ"מ ב"ת וש"ה	משפט הגבול המרכזי
<hr/>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>אם <math>A</math> ו-<math>B</math> מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע <math>A</math> יתרחש לפני המאורע <math>B</math> היא <math>P(A)/[P(A) + P(B)]</math>.</li> <li>סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר <math>p</math> הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי).</li> <li>סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני.</li> <li>סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי.</li> <li>ההתפלגות המותנית של <math>X</math> בהינתן <math>X + Y = n</math>, כאשר <math>X</math> ו-<math>Y</math> מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו <math>p</math>) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).</li> </ul>	
<hr/>	
$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	
$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1 < x < 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = -\ln(1-x) \quad , \quad 0 < x < 1$	
$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \neq -1 \quad ; \quad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$	נוסחת האינטגרציה בחלקים:
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \frac{1}{a \ln b} b^{ax} \quad ; \quad \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$	
$\log_n a = \log_m a / \log_m n \quad ; \quad \log_n (a^b) = b \cdot \log_n a \quad ; \quad \log_n (ab) = \log_n a + \log_n b$	