תשובה 1

א. (i) לפסוק יסודי P: $f[P]=0$.

(ii) אם α פסוק כלשהו אז: $f[\sim(\alpha)]=f[\alpha]+1$

(iii) אם α,β פסוקים כלשהם אז: $f[(\alpha)\to(\beta)]=f[\alpha]+f[\beta]+2$

ב. חישוב רקורסיבי, או בעזרת ספירת הסוגרים, או בעזרת סעיף ג שלהלן, נותן: $f[\varphi]=11$.

ג. $f[\alpha]$ הוא מספר הצלעות (ה"קטעים") בעץ הבניה של α.

כדי להוכיח זאת, נסמן ב- $g[\alpha]$ את מספר הצלעות בעץ הבניה של α,

וננסה לרשום הגדרה רקורסיבית של הפונקציה g.

מהגדרת עץ הבנייה של פסוק, בעץ של פסוק יסודי P אין צלעות, כלומר $g[P]=0$,

בעץ של $\sim(\alpha)$ יש צלע אחת נוספת על זו שבעץ של α, כלומר $g[\sim(\alpha)]=g[\alpha]+1$,

ולבסוף, בדומה, $g[(\alpha)\to(\beta)]=g[\alpha]+g[\beta]+2$.

קיבלנו הגדרה זהה להגדרה הרקורסיבית של f שנתנו בסעיף א.
שתי פונקציות שיש להן אותה הגדרה רקורסיבית - מתלכדות (אילו זה לא היה כך, לא היינו יכולים בכלל **להגדיר** דברים ברקורסיה על עץ הבנייה של פסוק! אנו עושים שימוש בקורס בהגדרה רקורסיבית על העץ של פסוק, כלומר אנו מניחים שהגדרה רקורסיבית על העץ נותנת תוצאה מוגדרת היטב. זה אומר בדיוק שאם שתי פונקציות מקיימות אותם תנאי רקורסיה, הן מתלכדות. אפשר להוכיח טענה זאת, אנו לא עושים זאת בקורס שלנו).
לכן מספר הצלעות בעץ הבניה של פסוק שווה למספר זוגות הסוגרים בפסוק.

תשובה 2

נשים לב שהמרכיב $(P_0\to P_0)$ שבסוף הפסוק הוא טאוטולוגיה. אם נסלק אותו נקבל את הפסוק $(\sim(P_0\to P_1))\vee(\sim(P_0\to P_2))$, וקל לראות שפסוק זה שקול טאוטולוגית לפסוק המקורי! די לתת צורות נורמליות לפסוק זה - כל צורה נורמלית שלו היא בהכרח גם צורה נורמלית לפסוק המקורי.

עוד נשים לב שהפסוק $P_0\to P_1$ שקרי אםם P_0 אמיתי ו- P_1 שקרי.

לכן $\sim(P_0\to P_1)$ אמיתי אםם P_0 אמיתי ו- P_1 שקרי.

בדומה $\sim(P_0\to P_2)$ אמיתי אםם P_0 אמיתי ו- P_2 שקרי.

מכאן לא קשה לרשום את לוח האמת של $(\sim(P_0\to P_1))\vee(\sim(P_0\to P_2))$.

בעזרת הלוח שנרשום או בעזרת מה שנאמר כאן, אנו רואים שהפסוק הנ"ל אמיתי ב- 3 מתוך 8 השורות של לוח האמת:

כל השורות בהן P_0 אמיתי, פרט לשורה בה P_0, P_1, P_2 אמיתיים כולם.

מכאן לפי האלגוריתם 2.30 בספר, **צורה דיסיונקטיבית נורמלית (צד"נ)** לפסוק היא:

$(P_0 \wedge P_1 \wedge (\sim P_2)) \vee (P_0 \wedge (\sim P_1) \wedge P_2) \vee (P_0 \wedge (\sim P)_1 \wedge (\sim P_2))$.

צד"נ של פסוק אינה יחידה: ייתכנו צורות רבות כאלה!

צד"נ אחרת אפשרית לפסוק זה, שניתן לקבל אותה ישירות מהפסוק הנתון היא:

$(P_0 \wedge (\sim P_1)) \ \vee \ (P_0 \wedge (\sim P_2))$ **(*)**

בצורה זו לא כל הפסוקים היסודיים הנתונים מופיעים בכל מרכיב - זה לגיטימי!

צורה קוניונקטיבית נורמלית (צק"נ) לפסוק: לפי המתכון שבתשובה לשאלה 2.33 נקבל צורה אחת אפשרית, שהיא קוניונקציה של 5 פסוקים שכל אחד מהם מכיל את כל 3 הפסוקים היסודיים, עם הופעות שונות של סימני שלילה על חלק מהם.

נדגים כאן דווקא צק"נ אחרת לפסוק המקורי: $P_0 \wedge ((\sim P_1) \vee (\sim P_2))$!

הגענו לפסוק זה על-ידי שימוש בחוק הפילוג על הפסוק (*) ופישוט הפסוק שהתקבל בעזרת שקילויות שונות.

תשובה 3

א. נסמן: L: לוגיקה היא מקצוע קשה. S: רוב הסטודנטים אוהבים לוגיקה.

D: דיסקרטית הוא קורס קל.

אנו רואים את L,S,D כפסוקים יסודיים. תרגום הטענות בשאלה:

(i) $L \vee S$

(ii) $D \rightarrow (\sim L)$

(iii) $(\sim S) \rightarrow (\sim D)$

ב. ניתן לענות על השאלה בעזרת לוח אמת בעל 8 שורות.

למען העניין, נראה כאן דרך אחרת:

עלינו לבדוק אם בכל אינטרפרטציה שבה *(i)*+*(ii)* אמיתיים, גם *(iii)* אמיתי.

נבדוק אם קיימת אינטרפרטציה J שבה *(i)*+*(ii)* אמיתיים ו- *(iii)* שקרי.

נתבונן ב- *(iii)*. לפי הלוח של "חץ",

פסוק "חץ" הוא **שקרי** ב- J כלשהי אםם המרכיב השמאלי שלו אמיתי ב- J והימני שקרי ב- J.

במקרה שלנו זה אומר: $\sim S$ אמיתי ב- J ו- $\sim D$ שקרי ב- J.

כלומר $J(S) = \mathrm{F}$, $J(D) = \mathrm{T}$.

הנחנו ש- *(ii)* אמיתי ב- J , ויחד עם התוצאה $J(D) = \mathrm{T}$, נקבל מהלוח של "חץ" שגם $J(\sim L) = \mathrm{T}$. כלומר $J(L) = \mathrm{F}$.

קיבלנו $J(L) = \mathrm{F}$ וקודם קיבלנו $J(S) = \mathrm{F}$. מהלוח של "או" יוצא שגם פסוק *(i)* שקרי ב- J, בסתירה להנחתנו !

הגענו לסתירה, לכן לא קיימת J שבה *(i)*+*(ii)* אמיתיים ו- *(iii)* שקרי.

כלומר בכל אינטרפרטציה שבה *(i)*+ *(ii)* אמיתיים, גם *(iii)* אמיתי.

משמע - התוצאה *(iii)* **נובעת טאוטולוגית** מההנחות *(i)* + *(ii)* !

תשובה 4

א. למשל נקח: $\alpha = P_0$, $\beta = P_1$, $\gamma = P_0 \vee P_1 \vee P_2$. השלימו את הבדיקה.

ב. **נכון**. הנתון $\alpha \vee \beta \models \gamma$ פירושו, שבכל אינטרפרטציה שבה $\alpha \vee \beta$ אמיתי, גם γ אמיתי. נראה שמכך נובע $\alpha \models \gamma$ ו- $\beta \models \gamma$:

תהי J אינטרפרטציה שבה α אמיתי. מלוח האמת של $\vee$, הפסוק $\alpha \vee \beta$ אמיתי ב- J.

לכן, לפי הנתון, γ אמיתי ב- J. הראינו ש-γ אמיתי בכל אינטרפרטציה שבה α אמיתי, כלומר $\alpha \models \gamma$.

בצורה דומה לגמרי מראים ש- $\beta \models \gamma$.

ג. נניח בשלילה שקיימת אינטרפרטציה J שבה $\alpha \to (\beta \to (\gamma \to \alpha))$ שקרי.

מכאן, לפי לוח האמת של "חץ", α **אמיתי** ב- J , ו- $\beta \to (\gamma \to \alpha)$ שקרי ב- J.

מכאן, שוב מלוח האמת של "חץ", β אמיתי ב- J , ו- $\gamma \to \alpha$ שקרי ב- J.

מכאן, שוב מלוח האמת של "חץ", γ אמיתי ב- J , ו- α **שקרי** ב- J.

קיבלנו ש- α אמיתי ושקרי בעת ובעונה אחת ב- J, זה לא אפשרי, לכן לא קיימת J כזו.

לכן $\alpha \to (\beta \to (\gamma \to \alpha))$ הוא טאוטולוגיה.

איתי הראבן