$\boxed{\text{שאלה 1}}$ 9:54

$A\times A=\left\{\binom{1}{1}\binom{1}{2}\binom{1}{3}\binom{2}{1}\binom{2}{2}\binom{2}{3}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}\right\}$ $M=P(A\times A)$

א) נוכיח ש t אינה חח"ע.

נתבונן בקבוצות:

$B=(A\times A)-\left\{\binom{3}{3}\right\}$

$C=(A\times A)-\left\{\binom{2}{2}\right\}$

B אינה טרנזיטיבית כי $\binom{3}{1},\binom{1}{3}\in B$ אבל $\binom{3}{3}\notin B$

C " " $\binom{2}{1},\binom{1}{2}\in C$ אבל $\binom{2}{2}\notin C$

אבל $t(B)=t(C)=A\times A$

ב) לכל $R,S\in M$ $t(R\cup S)=t(R)\cup t(S)$

לפי הגדרת סגור: $(R\cup S)\subseteq t(R\cup S)$

$R\subseteq t(R)\wedge S\subseteq t(S)$

$(R\cup S)\subseteq t(R)\cup t(S)$

לפי שאלה 10.ב.2 $t(R)\cup t(S)$ אינה בהכרח טרנזיטיבית

ולפי הגדרת סגור $t(R\cup S)$ בהכרח טרנזיטיבי.

לכן הטענה אינה נכונה.

ג) נתבונן: $R=\left\{\binom{3}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{3}\binom{3}{1}\right\}$ אינה רפלקסיבי

אבל $I_{A\times A}\subseteq t(R)=A\times A$

לכן הטענה אינה נכונה

ד) לכל $R\in M$ אם $t(R)$ אינו רפלקסיבי אז R אינו רפלקסיבי

נניח $t(R)$ אינה רפלקסיבי. לכן $I_{A\times A}\not\subseteq t(R)$

לפי הגדרת סגור $R\subseteq t(R)$ ולכן קיים $\binom{a}{a}\in I_{A\times A}$ כך ש $\binom{a}{a}\notin t(R)$

ונובע ישירות שבהכרח $\binom{a}{a}\notin R$ כי $R\subseteq t(R)$ לכן $I_{A\times A}\not\subseteq R$

R אינה רפלקסיבית !

ה) לפי שאלה 10.ב.2 בספר הטענה נכונה.

$\boxed{\text{שאלה 2}}$ 10:35

א) נגדיר $M=P(N\times N)$ נוכיח ש $|M|=C$

לפי משפט 5.25 $|P(N)|=C$

לפי משפט [illegible] $|N|=|N^{k}|$

לפי $\boxed{5.23}$ $\boxed{5.26}$ $|P(N)|=|P(N\times N)|=C$

ב) נגדיר $T\subseteq P(N\times N)$ בקב' כל היחסים הטרנזיטיביים מעל N

T חלקי ל $P(N\times N)$ שכן קיימת פונק' חח"ע של T לתוך $P(N\times N)$

לכן $|T|\le|P(N\times N)|$

~~נגדיר פונק' f של $P(N\times N)$ לתוך T באופן הבא:~~

~~אם $x\in P(N\times N)$ הוא טרנזיטיבי אז $f(x)=x$~~

~~אם x אינו טרנזיטיבי אז $f(x)=t(x)$ כלומר הסגור הטרנזיטיבי שלו.~~

לכן

נגדיר פונק' f מ $P(N\times N)=M$ ל T באופן הבא: אם $R\in P(N\times N)$ טרנזיטיבי אז $f(R)=R$
אם לא $f(R)=t(R)$ כלומר הסגור הטרנזיטיבי של R

f משרה חלוקה על M. קיים פונק' g חח"ע ועל מקב' מחלקות השקילות ל T.

קב' מחלקות השקילות עוצמתה C וקיים העתקה שהיא חח"ע ועל ממנה ל T.

לכן עוצמת T C.

$\boxed{\text{שאלה 3}}$

$\frac{11:17}{11:36}$

א) לכל $x \in B$ $x+f(x)$ אי זוגי

מספר הפונ' מ $\{1,3,5,7\}$ אל $\{2,4\}$ $2^4=16$

מספר הפונ' מ $\{2,4,6\}$ אל $\{1,3,5\}$ $3^3=27$

$16+27=\underline{43}$

ב) לכל $x \in B$ $x \cdot f(x)$ זוגי

$\{2,4,6\}$ אל $\overset{\{1,2,3,4,5\}}{A}$ $5^3=125$

$\{1,3,5,7\}$ אל $\{2,4\}$ $2^4=16$

$125+16=\underline{141}$

ג) כי הפונק' המקיימות א' הינן חלקית לקבוצת הפונ' המקיימות ב.

כלומר $\left(\{1,3,5\}^{\{2,4,6\}} \cup \{2,4\}^{\{1,3,5,7\}}\right) \subseteq \{1,2,3,4,5\}^{\{2,4,6\}} \cup \{2,4\}^{\{1,3,5,7\}}$

ד) קיים $|A|^{|B|}$ פונק' מ B ל A, כלומר $5^7=78125$

קיים 141 שמקיימים את ב. לכן קיים $78125-141=77984$

שלא מקיימות את אף אחד מהן.

$\boxed{\text{שאלה 4}}$

11:35
12:00

א)

כמה דרכים לבחור בן זוג ל a
b " "
c " "
d " "

$$\frac{\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{4!} =$$

$$= \frac{\frac{\cancel{8}^{4}\cdot 7}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{6}^{3}\cdot 5}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^{2}\cdot 3}{\cancel{2}}}{4\cdot 3\cdot 2} = \frac{\cancel{4}\cdot 7\cdot \cancel{3}\cdot 5\cdot \cancel{2}\cdot 3}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 105$$

שאלה 5

$(א,ב,ג) — (ד,ה,ו)$

$(ד,ה,ז) \quad (ד,ה,ח)$

יש ב G $\binom{8}{3}$ צמתים

$|V| = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2} = 56$

$\boxed{G=(V,E) \text{ יהי}}$

X (א) נניח בשלילה ש G אינו קשר.

לכן קיים צומת $v \in V$ כך שלכל $x \in V$ $x \cap v \neq \emptyset$

כלומר כל שאר הצמתים מורכבים מקבוצת האיברים $V-\{א,...,ח\}$

לכן יש ב $|V| = 11 = \binom{5}{3}+1$ צמתים בסתירה להגדרת V שיש בה $\binom{8}{3}=56$ איברים.

(ב) לפי הגדרת G יש קשת בין $u,v \in V$ כך ש $u \cap v = \emptyset$

לכן מספר הצמתות שמקיימים את התנאי היא $\binom{5}{3}=10$

כלומר מספר התת-קבוצות בגודל 3 איברים מתוך $V-\{א,...,ח\}$

(ג) לפי (ב) דרגת כל צומת היא 10. לכן $2|E| = \sum \deg(v) = 56\cdot10$

$2|E| = 560 \qquad |E| = 280$

(ד) קיים ב G מעגל אוילר. לפי חלק (א) G קשיר. לפי חלק ב דרגת כל צומת 10

כלומר זוגי. לכן לפי משפט קיים מעגל אוילר.