א. **תנאי התחלה:** $a_0 = 1$ (הסדרה הריקה מקיימת את התנאים! נוח להיעזר ב- a_0 לסעיף ב),

$a_1 = 3$, $a_2 = 7$ (כל הזוגות פרט לשני הזוגות האסורים).

יחס נסיגה: נבדוק כיצד בנויה סדרה באורך n המקיימת את הנדרש.

נתבונן באיבר האחרון של הסדרה:

* אם הוא 0 או 1 (שתי אפשרויות), אז קטע הסדרה הקודם לו הוא **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-1$ (a_{n-1} אפשרויות).
* אם הוא 2 אז לפניו בא 0, ולפניו **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-2$ (a_{n-2} אפשרויות).

קיבלנו: $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$.

לבדיקה נציב $n=2$: $a_2 = 2a_1 + a_0 = 2\cdot 3 + 1 = 7$.

ב. **המשוואה האפיינית**: $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$. פתרונותיה: $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

לפיכך $a_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$ **(*)**

בהצבת תנאי ההתחלה נקבל: $A + B = 1$, $(A+B) + \sqrt{2}(A-B) = 3$.

מכאן $A = (1+\sqrt{2})/2$, $B = (1-\sqrt{2})/2$.

לאחר הצבה של $A, B, \lambda_1, \lambda_2$ נוסחה (*) וקצת סידור:

$$a_n = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right)$$

תשובה 2

פתרון ללא פונקציות יוצרות

אף אחד מהמשתנים אינו שווה 0 ואינו שווה 1, במלים אחרות כל המשתנים גדולים/ שווים 2.

לכן נציב $x_i = y_i + 2$ ($1 \le i \le 6$),

ונקבל $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + 12 = 29$,

כלומר $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 17$, כאשר y_i הם טבעיים כלשהם, שהתנאי היחיד לגביהם הוא התנאי על הזוגיות, בו נטפל כעת.

בדיוק 3 מהמשתנים המקוריים היו זוגיים, לכן בדיוק 3 מהמשתנים החדשים הם זוגיים (חיסור 2 ממספר אינו משנה את הזוגיות שלו).

יש $\binom{6}{3} = 20$ דרכים לבחור את 3 המשתנים הזוגיים מתוך 6 המשתנים.

לאחר שבחרנו אותם, נניח ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) שאֵלה הם 3 המשתנים הראשונים.

נסמן אפוא: $y_i = 2z_i$ ($1 \le i \le 3$), $y_i = 2z_i + 1$ ($4 \le i \le 6$).

נקבל $2z_1 + 2z_2 + 2z_3 + 2z_4 + 2z_5 + 2z_6 + 3 = 17$,

כלומר $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = 7$, כאשר z_i הם טבעיים **ללא כל הגבלה**.

מספר הפתרונות של משוואה כזו חושב בסעיף 2.4 בספר, והוא $D(6,7) = \binom{12}{5} = 792$.

את זה עלינו לכפול במספר הדרכים לבחור מי יהיו המשתנים הזוגיים, שהוא כאמור 20.

תשובה סופית: $792 \cdot 20 = 15,840$.

דרך אחרת: התחלה של פתרון בעזרת פונקציות יוצרות

כמו בפתרון הקודם, נניח שהמשתנים הזוגיים הם 3 הראשונים, ואת התוצאה שנקבל נכפול ב- $20 = \binom{6}{3}$.

מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$ תחת האילוצים הנתונים בשאלה הוא המקדם של x^{29} בפיתוח הפונקציה

$$f(x) = (x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^3 (x^3 + x^5 + x^7 + \ldots)^3$$

בסוגריים השמאליים נוציא גורם משותף x^2, שלאחר העלאה בחזקת 3 נותן x^6.

בסוגריים הימניים נוציא גורם משותף x^3, שלאחר העלאה בחזקת 3 נותן x^9.

קיבלנו

$$= x^6 (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^3 \cdot x^9 (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^3$$

$$= x^{15} (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^6$$

מכיון שהוצאנו החוצה x^{15}, המקדם של x^{29} בפיתוח הביטוי כולו שווה למקדם של $x^{29-15} = x^{14}$ בפיתוח של הגורם הימני $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^6$.

הטור ההנדסי כאן הוא טור אינסופי. מכאן השלימו את הפתרון בעצמכם.

אפשר להיעזר בשיטות הפיתוח המוצגות בפתרון שתי השאלות הבאות בממ"ן זה.

תשובה 3

א. מספר הדרכים לחלק את n הכבשים בין הרועים הוא כמספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = n$, בכפוף לתנאי $5 \le t_i \le 25 \quad (i = 1,2,3,4)$.

הפונקציה היוצרת:

$$f(x) = (x^5 + x^6 + \ldots + x^{25})^4 = (x^5)^4 (1 + x^2 + \ldots + x^{20})^4 = x^{20} \left(\frac{1 - x^{21}}{1 - x} \right)^4$$

ב. זהו המקדם של x^{70} בפונקציה הנ״ל,

או במלים אחרות המקדם של x^{50} בפונקציה $\left(\frac{1-x^{21}}{1-x}\right)^4$.

נמשיך לפתח את הפונקציה:

$$\left(\frac{1-x^{21}}{1-x}\right)^4 = (1-x^{21})^4\cdot\frac{1}{(1-x)^4} = (1-4\cdot x^{21}+6\cdot x^{42}-4x^{63}+x^{84})\cdot\sum_{i=0}^{\infty}D(4,i)x^i$$

במעבר האחרון נעזרנו בנוסחת הבינום עבור הגורם השמאלי, ובנוסחה (iii) שבסוף הממ״ן עבור הגורם הימני.

כאמור, אנו רוצים את המקדם של x^{50}, לכן נוכל להתעלם ממחוברים בעלי חזקה גדולה יותר.

בעזרת נוסחה (ii) שבסוף הממ״ן, המקדם המבוקש הוא:

$$1\cdot D(4,50)-4\cdot D(4,29)+6\cdot D(4,8) = \binom{53}{3}-4\cdot\binom{32}{3}+6\cdot\binom{11}{3} = 23,426-19,840+990 = 4,576$$

תשובה 4

הזהות הנתונה: $\left(\frac{1}{1+x}\right)^n\cdot(1+x)^{2n} = (1+x)^n$

אם נפתח בנפרד את אגף ימין ואת אגף שמאל של הזהות הנתונה, נקבל שני טורים. עקב השוויון בין שני אגפי הזהות הנתונה, שני הטורים שנקבל צריכים להיות שווים. כלומר לכל k טבעי, המקדם של x^k בפיתוח אגף ימין צריך להיות שווה למקדם של x^k בפיתוח אגף שמאל.

נקרא למקדם זה c_k.

פיתוח אגף ימין בזהות הנתונה

מנוסחת הבינום: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k$

(המשכנו את הסכום עד אינסוף בעזרת הגדרת המקדמים הבינומיים החריגים בעמ׳ 30 בספר).

קיבלנו אפוא $c_k = \binom{n}{k}$.

פיתוח אגף שמאל בזהות הנתונה

אגף שמאל בזהות הנתונה הוא מכפלה של שני גורמים. הראשון הוא $\frac{1}{(1+x)^n}$.

לפי נוסחה (iii) המופיעה בסוף המטלה, $\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty}D(n,i)x^i$

בהצבת $(-x)$ במקום x נקבל

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i D(n,i) x^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

כאשר $a_i = (-1)^i D(n,i)$.

הגורם השני אותו אנו עלינו לפתח הוא $(1+x)^{2n}$.

בהצבת $2n$ במקום n בנוסחת הבינום נקבל:

$$(1+x)^{2n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2n}{i} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

כאשר $b_i = \binom{2n}{i}$.

פיתחנו את שני הגורמים, כעת ניעזר בנוסחה לפיתוח מכפלה: נוסחה (ii) בסוף המטלה.

כללית, המקדם של x^k במכפלה הוא $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$. נציב ונקבל:

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i D(n,i) \binom{2n}{k-i}$$

הזהות הקומבינטורית המבוקשת

נשווה את שני הביטויים שקיבלנו עבור c_k :

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i D(n, \ i) \binom{2n}{k-i} = \binom{n}{k}$$

זו הזהות המבוקשת.

השלימו עצמאית את הבדיקה עבור המקרה הפרטי הנדרש.

איתי הראבן