

## חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

### שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס.  
 בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא לחורדה של נקודה או שתיים.

6 נק' א. לפנינו פסוקים  $\alpha, \beta, \gamma$ .  $\alpha$  אינו טאוטולוגיה ואינו סתירה.

$\beta$  הוא טאוטולוגיה.  $\gamma$  הוא סתירה.

הפסוק  $(\alpha \wedge (\neg(\beta \wedge \gamma)))$  הוא:

[1] טאוטולוגיה [2] סתירה

[3] שקול ל- $\alpha$  [4] שקול לשלילת  $\alpha$

[5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

$$|P(n)| = 2^{K_n} = C$$

7 נק' ב. תהי  $A$  קבוצה. ידוע שקיימת פונקציה חד-חד-ערכית של  $P(N)$  ל- $A$ .

( $N$  היא קבוצת המספרים הטבעיים) מכאן נובע שבהכרח:

$$P(N) \leq A$$

$$|A| = |\{0, 1\}^N| \quad [1] \times$$

$$|A| < |\{0, 1\}^N| \quad [2] \times$$

$$|N| \leq |A| \quad [3] \circledast$$

$$|A| < 2^C \quad [4] \times$$

$$|A| = 2^C \quad [5] \times$$

6 נק' ג. יהי  $G$  גרף פשוט וקשיר על 5 צמתים.

בחרו את האמירה הנכונה:

[1]  $G$  הוא בהכרח מישורי  $\times$

[2]  $G$  הוא בהכרח אוילרי  $\times$

[3] אם  $G$  אינו אוילרי אז הוא בהכרח מישורי  $\circledast$



חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות  
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

## שאלה 2

הקבוצה  $A = \{0, 1, 2, 4\}$

- 5 נק' א. כמה יחסים (רלציות) ניתן להגדיר מעל הקבוצה  $A \times A$ ?
- 11 נק' ב. על הקבוצה  $A \times A$  מגדירים יחס  $R$  כך:  $(a_1, b_1)R(a_2, b_2)$  אם  $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2$ .
- הוכיחו ש- $R$  הוא יחס שקילות ומצאו את החלוקה של  $A \times A$  המוגדרת על-ידי  $R$ .
- 11 נק' ג. על הקבוצה  $A \times A$  מגדירים יחס  $S$  כך:  $(a_1, b_1)S(a_2, b_2)$  אם  $a_1 \leq a_2$  ו- $b_1 \geq b_2$ .
- הוכיחו ש- $S$  הוא יחס סדר על  $A \times A$  והוכיחו שקיימים איבר גדול ביותר ואיבר קטן ביותר. האם  $S$  יחס סדר מלא? נמקו את התשובה.
- ~~$(4, 0), (0, 4)$~~   $(0, 1), (1, 0)$

## שאלה 3

- 7 נק' א. מצאו את  $a_i, b_i$  בפיתוחים הבאים:  $(1-x)^8 = \sum_{i=0}^8 b_i x^i$ ,  $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ .
- חשבו בקצרה את שתי התשובות.
- סעיפים ב, ג של השאלה עוסקים בזהות האלגברית הבאה:  $(1-x)^8 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = (1-x)^6$  (\*)
- 10 נק' ב. מטוסחת הבינום, המקדם של  $x^2$  באגף ימין של (\*) הוא  $\binom{6}{2} = 15$ .
- בלי לחזור בכך, חשבו את המקדם של  $x^2$  בפיתוח אגף שמאל של (\*) בעזרת הפיתוחים שבסעיף א. הראו שהתוצאה אכן שווה.
- 10 נק' ג. מהו המקדם של  $x^3$  באגף ימין של (\*)?
- בלי לחזור בכך, חשבו את המקדם של  $x^3$  בפיתוח אגף שמאל של (\*) על-ידי פיתוח בעזרת זהויות במתמטיקה יוצרות. הראו שהתוצאה אכן שווה למספר שמצאתם בתחילת הסעיף.

בכל הסעיפים יש להגיע לתשובה מספרית.

## שאלה 4

- 14 נק' א. מיצאו את מספר המילים באורך 8 הבנויות מ- $A, A, B, B, C, C, D, D$  שבהן אין שתי אותיות זהות סמוכות זו לזו.
- 13 נק' ב. מיצאו את מספר המילים באורך 9 הבנויות מ- $A, A, A, B, B, B, C, C, C$  שבהן יש לפחות שלוש אותיות זהות סמוכות זו לזו.

שאלה 5 ✓

גרף פשוט  $G$  מוגדר כך: צומת של  $G$  הוא סדרה באורך 3 שאבריה לקוחים מהקבוצה  $\{0,1\}$ .

למשל הסדרה 101 היא צומת של  $G$ . מספר הצמתים ב-  $G$  הוא אפוא 8.

בין שני צמתים יש קשת אם ורק אם הם נבדלים זה מזה בדיוק במקום אחד.

למשל, יש קשת בין 101 ו-111 אך אין קשת בין 111 ו-001

(5 נק') א. מהי דרגת כל צומת ב-  $G$ ? הוכיחו. 3

(5 נק') ב. הוכיחו ש-  $G$  אינו אוילרי.

(12 נק') ג. הוכיחו ש-  $G$  הוא דו-צדדי.

(5 נק') ד. הוכיחו ש-  $G$  אינו עץ.

בהצלחה!

