פתרון בחינה 7

שאלה 1

א. [5]   ב. [3]   ג. [2]

שאלה 2

א. יהי $x \in A$. עלינו להראות שיש לו מקור. נסמן $y = f(x)$.

בשל הנתון $f(f(x)) = x$ מתקיים $f(y) = x$.

מצאנו אבר ב- A (האבר $y = f(x)$) שתמונתו היא x .

ב. יהיו $x_1, x_2 \in A$ כך שמתקיים $f(x_1) = f(x_2)$.

נפעיל את f בשני האגפים ונקבל $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$.

מהנתון $f(f(x)) = x$, קיבלנו $x_1 = x_2$.

ג. לפי הנתון, לכל $x, y \in A$, כדי שיתקיים xEy מספיק שיתקיים **לפחות אחד מבין שני התנאים:** $x = y$ או $f(x) = y$.

לכן לכל $x \in A$ מתקיים xEx (מפני ש- $x = x$) ולכן היחס **רפלקסיבי**.

נניח כעת ש- xEy . לפי הגדרת היחס E קיימות שתי אפשרויות:

1. $x = y$ ואז ברור שמתקיים גם yEx .
2. $f(x) = y$ ואז $f(f(x)) = f(y)$. אבל $f(f(x)) = x$. לכן $f(y) = x$ ולכן yEx .

מכאן שלכל $x, y \in A$ אם xEy אז yEx לכן E **סימטרי**

וכעת נניח ש- xEy ו- yEz .

1. אם $x = y$ או $y = z$ אז ברור שמתקיים xEz .
2. אם x, y, z שונים זה מזה אז לפי הגדרת E חייב להתקיים $f(x) = y$ ו- $f(y) = z$ לכן $f(f(x)) = f(y) = z$ ומאחר ש- $f(f(x)) = x$ נקבל ש- $x = z$ ולכן xEz .

כך קיבלנו שלכל $x, y, z \in E$, אם xEy ו- yEz אז xEz לכן E **טרנזיטיבי.**

לכן E יחס שקילות.

שאלה 3

א. 2^n

ב. $2^{n+3} - 3 \cdot 2^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} - 2^n$

ג. חישוב

שאלה 4

א. מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3=12$ שווה למספר הפיזורים של 12 עצמים זהים ב- 3 תאים שונים ולכן שווה ל- $D(3,12)$.

ב. כל פתרון $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=24$ מקיים בדיוק אחד משלושת התנאים הבאים:

1. $x_1+x_2+x_3>x_4+x_5+x_6$

2. $x_4+x_5+x_6>x_1+x_2+x_3$

3. $x_1+x_2+x_3=x_4+x_5+x_6$

אנו רוצים לספור את מספר הפתרונות המקיים את תנאי (1). נסמן אותו ב- x.

נשים לב שמספר הפתרונות המקיימים את תנאי (2) שווה למספר הפתרונות המקיימים את תנאי (1) (כי זה אותו אי-שוויון עם שמות אחרים לנעלמים).

כל פתרון $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ המקיים תנאי (3) הוא בעצם פתרון של המערכת

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=12 \\ x_4+x_5+x_6=12 \end{cases}.$$

עבור שלושת המקומות הראשונים (x_1,x_2,x_3) יש $D(3,12)$ אפשרויות (כמספר פתרונות המשוואה $x_1+x_2+x_3=12$).

גם עבור שלושת המקומות האחרונים (x_4,x_5,x_6) יש $D(3,12)$ אפשרויות (כמספר פתרונות המשוואה $x_4+x_5+x_6=12$).

לכן מספר הפתרונות המקיימים תנאי (3) הוא $D(3,12)^2$.

מספר הפתרונות המקיימים אחד משלושת התנאים הנ״ל שווה למספר כל הפתרונות של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=24$ שהוא $D(6,24)$.

לסיכום, מאחר שהתנאים (1), (2) ו- (3) מתארים את קבוצת פתרונות המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=24$ כאיחוד של שלוש קבוצות זרות זו לזו נקבל:

$$D(6,24)=2x+D(3,12)^2.$$

לפיכך שהתשובה לסעיף זה היא:

$$x=\frac{D(6,24)-\left(D(3,12)\right)^2}{2}=\frac{1}{2}\left[\binom{29}{5}-\binom{14}{2}^2\right]=\frac{118,755-8281}{2}=55237$$

שאלה 5

א. הצדדים של H הם $\{5,6,7,8,9\}$, $\{1,2,3,4\}$.

ב. ב- G יש $\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+5=6+10+5=21$ קשתות.

לכן ב- H יש $\binom{9}{2}-21=36-21=15$ קשתות.

המשפט של מועד א' אינו עוזר כאן כי $3n-6=21$ כך ש- 15 קשתות לא מתנגש עם חסם זה. אבל בהמשך הפרק בתורת הגרפים (שאלה 3) מראים שלגרף מישורי פשוט, קשיר **ודו-צדדי** מספר הקשתות הוא לכל היותר $2n-4$, משמע אצלנו 14.