דף סיכום בחינה

מזהה סטודנט: N101458268

מזהה קורס: 04101   שם קורס: אשנב למתמטיקה

#	תיאור	הערה	ציון מקסימאלי	ציון שאלה סופי	שאלת בונוס	שאלה מבוטלת
1.1			15.00	10.00	0	0
1.2			10.00	10.00	0	0
2.1			10.00		0	0
2.2			15.00		0	0
3.1			8.00	8.00	0	0
3.2			8.00	8.00	0	0
3.3			9.00	9.00	0	0
4.1			5.00	4.00	0	0
4.2			10.00	10.00	0	0
4.3			10.00	10.00	0	0
5.1			6.00	6.00	0	0
5.2			6.00	6.00	0	0
5.3			6.00	6.00	0	0
5.4			7.00	7.00	0	0
6.1			13.00		0	0
6.2			12.00		0	0

ציון בחינה סופי : 94.00

הבחינה הבדוקה בעמודים הבאים

לשימוש הבודק

שאלה 1:

$A \subseteq C$, $A \cap B$ שקולה ל-C.

א. (i) (כמובן סימון מקובל $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$)

$C = \mathbb{N}_0$, $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$.

ברור כי הקבוצות שונות.
ברור כי קבוצת הטבעיים מוכלת בקבוצת הטבעיים איחוד $\{0\}$.
חיתוך השלמים והטבעיים הוא הטבעיים כיוון ש $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. כמו כן ידוע כי $\mathbb{N}$ (החיתוך $A \cap B$) שקולה ל $\mathbb{N}_0$ (כ-C), שקולות כן מודגמת על ידי הפונקציה $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ $f(x) = x+1$ שהיא על וחח"ע.

✓

(ii) אם $A \not\subseteq B$ אז קיים $x \in A$ כך ש- $x \notin B$, לכן גם $x \notin A \cap B$ אבל $A \subseteq C$ כך ש- $x \in C$.
כמו כן $|A| \leq |C|$ מכאן ש- $|A \cap B| < |C|$
לא נכון
?
וכידוע בקבוצות סופיות אם מספר איברי הקבוצה שונה אז הקבוצות לא שקולות,
זו לא ההגדרה של קבוצות סופיות
מכאן ש- C בהכרח אינסופית (וגם $A \cap B$).

10
(1.1)

128481

ב. אם $\{\mathbb{N}\} \subseteq P(S)$ משמעו כי
$\mathbb{N} \subseteq S$ - קבוצת החזקה היא קב'
כל תתי הקבוצות, כלומר $\mathbb{N}$
תת קבוצה של S ומוכלת בה.
~~מספר~~ כידוע 1 הוא מס' טבעי ומתקיים
$1 \in \mathbb{N}$ לכן $1 \in S$ לכן $\{1\} \subseteq S$
כלומר $\{1\}$ היא תת קבוצה של S
לכן שייכת לקב' החזקה $P(S)$ ומתקיים
$\{1\} \in P(S)$ כנדרש.

10
(1.2)

טיוטה

שאלה 2:

א. נתון כי a,b,c שונים.
לכן מהנתון $a*b=b*c$ נובע
כי $b\neq e$ כלומר b אינו האיבר הנייטרלי
בחבורה, אחרת $a=c$ בסתירה לכך
שהם שונים.
אם $c=e$ אז
בנוסף $c\neq e$ ו- $a\neq e$, אחרת $a*b=b$
וזה לא אפשרי מיחידות הנייטרלי
או אם $a=e$ אז $b=b*c$ וכנ"ל.
כלומר a,b,c אינם איבר נייטרלי.
בנוסף, מיחידות האיבר הנגדי, לא ייתכן
כי a נגדי ל-b או כי c נגדי
ל-b, אחרת נקבל $b*c=e$ או $a*b=e$
בהתאמה, אבל זה לא אפשרי כאמור מיחידות
האיבר הנגדי.
מחילופיות האיבר הנגדי, גם b לא
נגדי ל-a או ל-c.

כעת נפנה לבדוק השוויון בשאלה,
ונפעיל עליו משמאל את a^{-1} (הנגדי של a שכאמור
הוא אינו b): $a^{-1}*a*b*c\overset{?}{=}a^{-1}*b*b$
נקבל $b*c=a^{-1}*b*b$ כמובן. נעת נפעיל
c^{-1} עם הפעולה $*$ מימין: $b*c*c^{-1}=a^{-1}*b*b*c^{-1}$
וקיבלנו $b=a^{-1}*b*b*c^{-1}$
אבל $a^{-1}*b\neq e$, $a^{-1}\neq e$ כפי שהראיתי בתחילה
(כי מיחידות האיבר הנגדי
a^{-1} נגדי רק ל-a), $b*c^{-1}\neq e$, $c^{-1}\neq e$ כלומר
לא ייתכן כי השוויון מתקיים כי יידרש
$e*b*e$ באגף ימין מסתירה לעיל.

לשימוש הבודק

ב. ~~סגירות: יהיו $a,b\in A$:~~

~~$a*b=2ab-a-b+1$~~

~~נראה כי הכפלת מס' אי זוגי~~

~~במס' אי זוגי (שלמים) מחזירה מס' אי זוגי:~~

~~$ab=(2n_1+1)(2n_2+1)=4n_1n_2+2n_1+2n_2+1$~~

~~ברור כי $4n_1n_2$, $2n_1$, $2n_2$ זוגיים,~~

~~לכן חיבור מספרים זוגיים עם 1~~

~~מביא למס' אי זוגי. ניתן גם לכתוב~~

~~באופן פורמלי כי $2(2n_1n_2+n_1+n_2)+1\in A$~~

~~כי $2n_1n_2+n_1+n_2\in\mathbb{Z}$ (ברור כי המכפלה והחיבור $n_1n_2\in\mathbb{Z}$).~~

~~מס' זוגי (2ab) פחות מס' אי זוגי (2ab-a)~~

~~מחזיר מס' זוגי פחות מס' אי~~

ב. ~~סגירות: $a,b\in A$:~~

~~$a*b=2ab-a-b+1$~~

~~ברור כי $2ab$ זוגי. פחות~~

טיוטה

לשימוש הבודק

שאלה 3:

א. נניח בשלילה כי f אינה על,
כלומר קיים $y\in\mathbb{N}$ כך שלא קיים
$x\in\mathbb{N}$ ומקיים $f(x)=y$.
נבחר ~~[illegible]~~ $g(y+1)$ ברור כי $y+1\in\mathbb{N}$
לכן בתחום של g וכמו כן $g(y+1)\in\mathbb{N}$
כי בטווח של g.
כמו כן מהנתון $f(g(y+1))=(y+1)-1=y$,
כלומר $g(y+1)=x$ בסתירה ~~[illegible]~~ לכך שלא
קיים איבר כזה, כלומר קיבלנו סתירה
להנחת השלילה ו-f על.

8
(3.1)

ב. נראה ~~[illegible]~~ כי $f\circ g$ אינה חח"ע, כלומר
קיימים ~~[illegible]~~ $a,b\in\mathbb{N}$ ~~[illegible]~~ $a\neq b$ המקיימים $f(a)=f(b)$.
נבחר את $1,6\in\mathbb{N}$, ברור כי $1\neq 6$
אבל ~~[illegible]~~ מתקיים $f\circ g(1)=5=f\circ g(6)=6-1$,
מכאן ש $f\circ g$ אינה חח"ע כנדרש.

8
(3.2)

ג. אם f חח"ע אז לכל $a,b\in\mathbb{N}$ $a\neq b$ מתקיים
$f(a)\neq f(b)$. אבל מסעיף ב' ראינו כי
$f(g(1))=f(g(6))$ לכן מחח"ע f נובע כי
$g(1)=g(6)$, אבל ברור כי $1\neq 6$ לכן
קיימים איברים שונים $1,6$ כך ש- $g(1)=g(6)$
וזוהי בדיוק סתירה להגדרת חח"ע, כלומר
g אינה חח"ע.

9
(3.3)

128481

לשימוש הבודק

שאלה 4:

א. נתון כי האיזומטריות אינן הזהות.
לכל אחת מהן קיימת 2 נקודות
שבת לכן הן אינן סיבוב (כי לסיבוב נק' שבת יחידה)
4 (4.1)
במישור הן אינן הזזה או שיקוף מוזז
(כי איזה שיקוף? יש לפרט נק' שבת כלל), לכן
הן שיקופים.

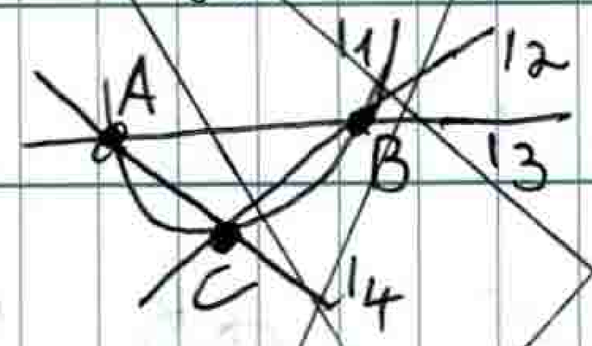
ב. f ו- g הן שיקופים שונים כיוון
ש- C אינה נק' שבת של f ו- A אינה
נק' שבת של g לכן הישר המשקף שונה
כי נק' שבת בשיקוף הן רק על הישר
המשקף. כמו כן בנק' B היא
10 (4.2)
נק' שבת משותפת, לכן (משפט שילון)
הישרים המשקפים נחתכים (ואינם מקבילים),
מכאן שההרכבה fog היא סיבוב (כי
שני הישרים נחתכים ועפ"י עמ' 78).

ג. כאמור נק' השבת המשותפת היחידה
בין f ל- g היא B, כלומר B
היא נק' החיתוך של הישרים המשקפים
את f ו- g כמו כן הראנו
כי הישרים אינם מתלכדים וכי ההרכבה
10 (4.3)
היא סיבוב, בסיבוב יש נק' שבת יחידה
שהיא במקרה זה B, ~~שלא~~ (עפ"י עמ' 77 למעלה)
לכן A אינה נק' שבת של ההרכבה fog
(כי $A \neq B$ נתון).

לשימוש הבודק

שאלה 5:

~~א) נראה כי המערכת חסרת סתירה ע"י הצגת מודל של המערכת:~~



~~המודל: קיימות 3 נק' שונות A,B,C~~

~~קיימים 4 ישרים:~~ ~~$l_1=\{A,B,C\}$~~

~~$l_2=\{C,B\}$, $l_3=\{A,B\}$, $l_4=\{A,C\}$~~

~~קל לראות כי מתק...~~

א. נראה כי המערכת חסרת סתירה ע"י הצגת מודל:

הנקודות: A,B,C.

הישרים: $l_1=\{A,B,C\}$

$l_2=\{A,B\}$

6 (5.1)

(1) קיימים 2 ישרים, קל לראות כי שונים:

$C\in l_1$, $C\notin l_2$

(2) לפחות יש 2 נק' משותפות A,B.

(3) $A,C\in l_1$, $B,C\in l_1$, $A,B\in l_2$

כלומר לכל זוג נק' קיים ישר שהן נמצאות עליו.

ב. נראה כי המערכת בלתי תלויה ע"י

* הצגת מודל לכל זוג של האקסיומות:

מודל ריק מקיים את אקסיומה 2 ו-3

ללא את אקסיומה 1. (באופן ריק)

6 (5.2)

* המודל עם נקודה יחידה A ושני ישרים

$l_1=\{A\}$, $l_2=\emptyset=\{\}$

מקיים את אקסיומה 1 (קיימים 2 ישרים שונים)

ואת אקסיומה 3 "על ריק" כי אין שתי נקודות

אקסיומה 2 לא מתקיימת

128481

(המשך שאלה 5 ב')

* המודל עם הנקודות A,B,C,D
והישרים $l_1=\{A,B,C\}$, $l_2=\{A,B,D\}$
מקיים את אקסיומה 1, מקיים את אקסיומה 2 כי A,B משותפות לשני הישרים.
ולא מקיים את אקסיומה 3 כי ל C,D אין ישר שהן נמצאות עליו.

הראינו כי כל זוג אקסיומות אינו גורר את השלישית לכן המערכת בלתי תלויה.

ג. נראה מודל שונה למערכת לכן היא אינה קטגורית: הנקודות A,B,C,D
הישרים $l_2=\{A,B\}$, $l_1=\{A,B,C,D\}$
(1) מתקיימת כי קיימים ישרים שונים.

6 (5.3)

(3) מתקיימת: $A,B\in l_2$, $A,C\in l_1$, $A,D\in l_1$, $B,C\in l_1$, $C,D\in l_1$, $B,D\in l_1$, כלומר כל זוג נקודות שונות שייכות לישר משותף.
(2) לזוג הישרים יש 2 נק' משותפות A,B.
המודל שונה כי במודל מסעיף א' קיימות 3 נקודות ובזה 4 נקודות.

ד. משאקסיומה 1 קיימים שני ישרים (שונים), מאקסיומה 2 לזוג הישרים יש לפחות 2 נקודות משותפות, אבל מכך שהישרים שונים נדרשת נקודה השייכת לאחד הישרים ולא לשני, נקודה זו אינה אחת משתי הנקודות המשותפות כי אינה שייכת לאחד מהישרים, לכן נקודה שלישית וכל מודל של המערכת יכיל לפחות 3 נקודות שונות.

7 (5.4)

8