תשובה 1

כל קטע בדיאגרמת הסה של קבוצה סדורה-חלקית מייצג זוג איברים, שאחד מהם מכסה את השני. מהגדרת המושג "מכסה", קבוצה $B \in P(A)$ מכסה קבוצה $C \in P(A)$ לגבי יחס ההכלה אם ורק אם מתקיים:

$C \subset B$ ואין אף קבוצה $D \in P(A)$ המקיימת $C \subset D \subset B$ (הכלות-ממש).

עבור B,C **סופיות**, קל לראות שתנאי זה מתקיים אם ורק אם קיים:

$C \subset B$ ומספר אברי C קטן ב- 1 ממספר אברי B.

יהי k מספר טבעי בתחום $0 \le k \le n$.

לקבוצה הנתונה A שהיא בת n איברים יש $\binom{n}{k}$ תת-קבוצות בנות k איברים,

כלומר ב- $P(A)$ יש $\binom{n}{k}$ איברים שעוצמתם k.

אם B בת k איברים, יש לה k תת-קבוצות בנות $k-1$ איברים (ע"י השמטת איבר אחד של B בכל פעם. נשים לב שזה נכון גם אם B ריקה). כלומר כל קבוצה בגודל k מכסה בדיוק k קבוצות אחרות.

לכן מספר הקטעים בדיאגרמת הסה של רלצית ההכלה מעל $P(A)$ הוא $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

לפי שאלה 3.9 בעמ' 71 בספר הלימוד, סכום זה שווה $n \cdot 2^{n-1}$.

תשובה 2

תהי U קבוצת כל הדרכים לבחור 20 ארטיקים אילו היה מספר בלתי מוגבל מכל טעם.

בממ"ן 15 קיבלנו $|U| = 1,771$.

עבור $i = 1,\ldots,4$, תהי A_i קבוצת הדרכים לבחור 20 ארטיקים כך שמסוג i בחרנו 10 ארטיקים או יותר, ובהנחה שיש מספר בלתי מוגבל מכל סוג. אלו האפשרויות שאינן מותרות כעת,

ואנו רוצים למצוא את $|U - \bigcup_{i=1}^{4} A_i|$. ניעזר בהכלה והפרדה.

(i) אם מסוג i יש לפחות 10 ארטיקים, הרי אחרי שלקחנו אותם עלינו לבחור עוד 10 ארטיקים מתוך 4 סוגים ללא הגבלה. לכן $|A_i| = D(4,10) = \binom{13}{3} = 286$. יש 4 קבוצות A_i .

(ii) נחשב את $|A_i \cap A_j|$ $(i \neq j)$: אחרי שבחרנו 10 ארטיקים מסוג i ו- 10 מסוג j, לא נותר עוד מה לבחור. לכן $|A_i \cap A_j| = 1$.

יש $\binom{4}{2} = 6$ חיתוכים כאלה.

(iii) מובן שהחיתוך של 3 או יותר מהקבוצות A_i הוא ריק.

כעת בעזרת הכלה והפרדה:

$$|U| - 4|A_i| + 6|A_i \cap A_j| - 0 \;=\; 1,771 - 4 \cdot 286 + 6 \cdot 1 = 633$$

תשובה 3

א. מספר הצוותים האפשריים בני שני אנשים הוא $\binom{4}{2} = 6$.

מספר הדרכים להקצות את המשימות לצוותים הוא כמספר הפונקציות של קבוצה בת 5 איברים (המשימות) לקבוצה בת 6 איברים (הצוותים האפשריים): $6^5 = 7,776$.

ב. תהי U קבוצת כל הדרכים להקצות את המשימות לצוותים ללא הגבלה.

כאמור $|U| = 7,776$.

עבור $i = 1,\ldots,4$, תהי A_i קבוצת הדרכים לחלק את המשימות לצוותים כך שאדם i מתחמק לגמרי מעבודה. אנו רוצים למצוא את $|U - \bigcup_{i=1}^{5} A_i|$. ניעזר בהכלה והפרדה, ונתחיל בהכנת הגדלים הנדרשים.

(i) אם i מתחמק מעבודה, המשימות מתחלקות בין 3 אנשים, שמהם אפשר ליצור $3 = \binom{3}{2}$ צוותים. לכן $|A_i| = 3^5 = 243$. כאמור יש 4 קבוצות A_i.

(ii) עבור $i \neq j$, הקבוצה $A_i \cap A_j$ היא קבוצת הדרכים לחלק את המשימות כך ש- i ו- j מתחמקים שניהם מעבודה. במקרה כזה יש רק צוות אחד אפשרי, ויש רק דרך אחת לחלק את המשימות. לכן $|A_i \cap A_j| = 1$. יש 6 חיתוכים כאלה.

(iii) אם 3 אנשים מתחמקים מעבודה לא ניתן לחלק את המשימות כנדרש.

לכן עבור i,j,k שונים זה מזה, $A_i \cap A_j \cap A_k = \varnothing$.

מכאן שגם החיתוך של כל ארבעת הקבוצות הוא ריק.

כעת בעזרת הכלה והפרדה:

$$|U| - 4|A_i| + 6|A_i \cap A_j| - 0 \;=\; 7,776 - 4 \cdot 243 + 6 \cdot 1 = 6,810$$

תשובה 4

א. נראה את A כקבוצת היונים ואת B כקבוצת השובכים. לומר שלא קיימת פונקציה חד-חד-ערכית של A ל- B משמע: כל פונקציה של A ל- B אינה חד-חד-ערכית.
כלומר אם יש יותר יונים משובכים, אז בכל דרך בה נתאים את היונים לשובכים, יהיה לפחות שובך אחד שיקבל יותר מיונה אחת. זהו עקרון שובך היונים.

ב. נתבונן בפונקציה f הנתונה בהדרכה.

* במקרה שבו $k \leq m/2$, $f(k) = k \in A$ לכן במקרה זה $1 \leq f(k) \leq m/2$.
* במקרה שבו $k > m/2$, $f(k) = m - k$. נבדוק באיזה תחום יכול להיות $f(k)$ במקרה זה:

m הוא האבר הגדול ביותר ב- A, כלומר לכל $k \in A$, $m - k \geq 0$.

לכן לכל $k \in A - \{m\}$, $m - k$ **גדול ממש** מ- 0.

בנוסף, הנחנו $k > m/2$ וע״י חיבור $(m/2) - k$ לשני האגפים נקבל: $m/2 > m - k$.

כלומר במקרה זה $1 \leq f(k) < m/2$.

בסה״כ קיבלנו שתמונת f מוכלת בקבוצה $B = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq m/2\}$.

נראה אפוא את f כפונקציה של $A - \{m\}$ לקבוצה B הנ״ל.

כעת, $|A - \{m\}| = 51$ בעוד ש- $|B| \leq 50$.

מכאן, לפי שובך היונים, קיימים $k_1, k_2 \in A - \{m\}$, $k_1 \neq k_2$, $f(k_1) = f(k_2)$.

אבל מהגדרת f מובן כי במקרה כזה $k_2 = m - k_1$. מכאן המבוקש.

איתי הראבן