20416 - תאריך הבחינה: 25.8.2008 (סמסטר 2008ב - מועד 93)

שאלה 1

א. נסמן ב- X_i את מספר המעדנים שיש לקנות עד לקבלת אות שטרם התקבלה במעדנים שנקנו קודם לכן.
מהגדרת X_i נובע ש- $i = 1,2,\ldots,5$ וה-X_i-ים בלתי-תלויים זה בזה; וכן $X_i \sim Geo(\frac{6-i}{5})$, כאשר $X_1 = 1$.
כעת, מספר המעדנים שיש לקנות עד לקבלת כל אותיות השם "תנובה" הוא סכום המשתנים המקריים הגיאומטריים שהוגדרו לעיל, כלומר, $\sum_{i=1}^{5} X_i$. לכן, התוחלת המבוקשת היא:

$$E\left[\sum_{i=1}^{5} X_i\right] = \sum_{i=1}^{5} E[X_i] = \sum_{i=1}^{5} \tfrac{5}{6-i} = 1 + \tfrac{5}{4} + \tfrac{5}{3} + \tfrac{5}{2} + \tfrac{5}{1} = 11\tfrac{5}{12}$$

ב1. נגדיר: $Y_i = \begin{cases} 1 & , \text{האות } i \text{ התקבלה לפחות פעם אחת ב-15 המכסים} \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$ לכל $i = 1,2,\ldots,5$.

כאשר $X = \sum_{i=1}^{5} Y_i$ = הוא מספר האותיות השונות שהתקבלו ב-15 המכסים.

כעת: $P\{Y_i = 1\} = 1 - P\{Y_i = 0\} = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{15} = 0.9648$

ומכאן: $E[X] = \sum_{i=1}^{5} P\{Y_i = 1\} = 5 \cdot 0.9648 = 4.8241$

ב2. כעת, לכל $i \neq j$ מתקיים:

$$\begin{aligned} P\{Y_i = 1, Y_j = 1\} &= 1 - P\{Y_i = 0 \cup Y_j = 0\} = 1 - P\{Y_i = 0\} - P\{Y_j = 0\} + P\{Y_i = 0, Y_j = 0\} \\ &= 1 - 2\left(\tfrac{4}{5}\right)^{15} + \left(\tfrac{3}{5}\right)^{15} = 0.9301 \end{aligned}$$

לכן: $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = P\{Y_i = 1, Y_j = 1\} - P\{Y_i = 1\}P\{Y_j = 1\} = 0.9301 - 0.9648^2 = -7.685 \cdot 10^{-4}$

ומכאן: $\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{5} \text{Var}(Y_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(Y_i, Y_j) = 5 \cdot 0.9648 \cdot 0.0352 - 5 \cdot 4 \cdot 7.685 \cdot 10^{-4} = 0.1544$

שאלה 2

פונקציות הצפיפות הנתונות בבעיה זו הן:

$$f_Y(y) = \frac{1}{10} \quad , \quad 0 < y < 10$$

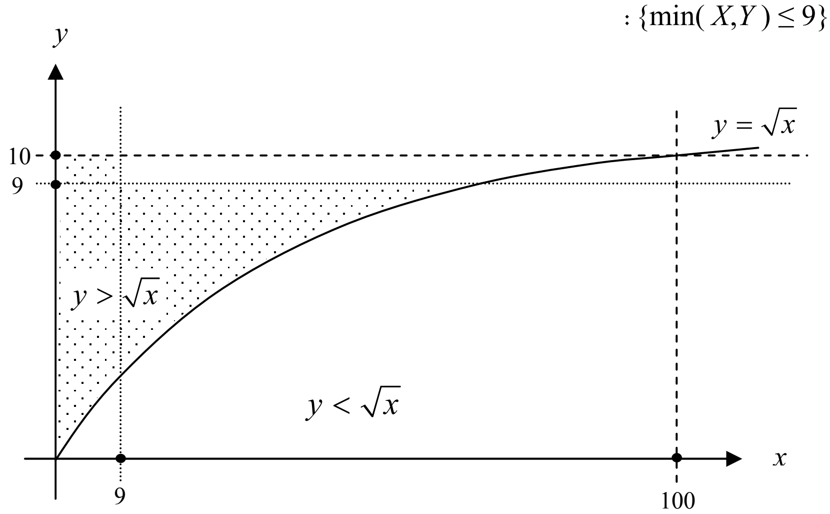
$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{1}{y^2} \quad , \quad 0 < x < y^2$$

א. פונקציית הצפיפות המשותפת במקרה זה היא: $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{10y^2} \quad , \quad 0 < x < y^2 < 100$

לכן: $E[XY] = \int_0^{10}\int_0^{y^2} xy \frac{1}{10y^2} dx dy = \int_0^{10}\int_0^{y^2} \frac{x}{10y} dx dy = \int_0^{10} \frac{x^2}{20y}\Big|_0^{y^2} dy = \int_0^{10} \frac{y^3}{20} dy = \frac{y^4}{80}\Big|_0^{10} = 125$

ב. $f_X(x) = \int_{\sqrt{x}}^{10} \frac{1}{10y^2} dy = \frac{-1}{10y}\Big|_{\sqrt{x}}^{10} = \frac{1}{10\sqrt{x}} - \frac{1}{100} \quad , \quad 0 < x < 100$

ג. נצייר את התחום שבו פונקציית הצפיפות המשותפת מקבלת ערכים חיוביים, ונסמן בתוכו בנקודות את התחום שבו מתרחש המאורע $\{\min(X,Y) \le 9\}$:



אפשר לראות, שחישוב ההסתברות של המאורע המשלים, דהיינו החישוב של $P\{\min(X,Y) > 9\}$, פשוט יותר מחישוב $P\{\min(X,Y) \le 9\}$. לפיכך :

$$P\{\min(X,Y) \le 9\} = 1 - P\{\min(X,Y) > 9\} = 1 - \int_9^{10}\int_9^{y^2} \frac{1}{10y^2}\,dxdy = 1 - \int_9^{10} \frac{x}{10y^2}\Big|_9^{y^2} dy$$

$$= 1 - \int_9^{10}\left(\frac{1}{10} - \frac{9}{10y^2}\right)dy = 1 - \left[\frac{y}{10} + \frac{9}{10y}\right]_9^{10} = 1 - (1 + 0.09 - 0.9 - 0.1) = 0.91$$

שאלה 3

א. מנתוני הבעיה נובע כי $N \sim B(10, 0.3)$. לכן, לפי נוסחת הבינום, נקבל כי :

$$E[a^N] = \sum_{n=0}^{10} a^n \cdot \binom{10}{n} \cdot 0.3^n \cdot 0.7^{10-n} = \sum_{n=0}^{10} \binom{10}{n} \cdot (0.3a)^n \cdot 0.7^{10-n} = (0.3a + 0.7)^{10}$$

ב. אם ידוע ש- n ילדים הגיעו להשתתף בחידון, אז מספר השאלות שיש לפחות ילד אחד שענה עליהן נכון הוא משתנה בינומי עם הפרמטרים 15 (כמספר השאלות) ו- p , שהיא ההסתברות שלפחות ילד אחד יענה נכון על שאלה כלשהי. מכיוון ש- n ילדים משתתפים בחידון וההסתברות שכל אחד מהם יענה נכון על כל שאלה היא 0.4 (ולא נכון בהסתברות 0.6), מקבלים כי $p = 1 - 0.6^n$. לכן : $X \mid N = n \sim B(15, 1 - 0.6^n)$

ג. מהסעיפים הקודמים נקבל כי :

$$E[X] = E[E[X \mid N]] = E[15(1 - 0.6^N)] = 15(1 - E[0.6^N]) = 15(1 - (0.3 \cdot 0.6 + 0.7)^{10}) = 10.8225$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{Var}(E[X \mid N]) + E[\mathrm{Var}(X \mid N)] \\
&= \mathrm{Var}(15(1 - 0.6^N)) + E[15(1 - 0.6^N)0.6^N] \\
&= 15^2\,\mathrm{Var}(0.6^N) + 15E[0.6^N - 0.36^N] \\
&= 15^2(E[0.6^{2N}] - (E[0.6^N])^2) + 15(E[0.6^N] - E[0.36^N]) \\
&= 15^2 \cdot (0.808^{10} - 0.88^{20}) + 15(0.88^{10} - 0.808^{10}) = 11.6335
\end{aligned}$$

שאלה 4

א. נסמן ב- A_i את המאורע שממסר i סגור, לכל $i = 1,2,3,4,5,6$. לפי הנתון $P(A_i) = 0.6$ לכל i.

$$P\{\text{B-ל A-מ זרם עובר }\textbf{לא}\} = P((A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C) \cap (A_4^C \cup (A_5^C \cap A_6^C)))$$

$$= P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C)P(A_4^C \cup (A_5^C \cap A_6^C))$$ [כל הממסרים בלתי-תלויים זה בזה]

$$= P(A_1^C)P(A_2^C)P(A_3^C)[P(A_4^C) + P(A_5^C \cap A_6^C) - P(A_4^C \cap A_5^C \cap A_6^C)]$$

$$= 0.4^3(0.4 + 0.4^2 - 0.4^3) = 0.064 \cdot 0.496 = 0.031744$$

לכן:

$$P\{\text{B-ל A-מ זרם עובר}\} = 1 - 0.031744 = 0.968256$$

ב. נחשב את ההסתברות המותנית שממסר 5 סגור, אם ידוע שעובר זרם מ-A ל-B.

$$P\{A_5 \mid \text{B-ל A-מ זרם עובר}\} = \frac{P(A_5 \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4))}{0.968256}$$

$$= \frac{P(A_5)P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)}{0.968256}$$ [כל הממסרים בלתי-תלויים זה בזה]

$$= \frac{P(A_5)[1 - P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C)]}{0.968256} = \frac{0.6 \cdot (1 - 0.4^4)}{0.968256} = \frac{0.58464}{0.968256} = 0.6038$$

ג. לפי סעיף ב, ההסתברות שמתג 5 יהיה פתוח, אם ידוע שעובר זרם מ-A ל-B, היא:

$$P\{A_5^C \mid \text{B-ל A-מ זרם עובר}\} = 1 - P\{A_5 \mid \text{B-ל A-מ זרם עובר}\} = 1 - 0.6038 = 0.3962$$

כמו כן, נתון ש- 100 המעגלים בלתי-תלויים זה בזה, ולכן מספר המעגלים שבהם מתג 5 פתוח, אם ידוע בשכולם עובר זרם, הוא משתנה מקרי בינומי, שנסמנו ב- Y, ולו הפרמטרים 100 ו- 0.3962.

מכיוון שמתקיים $np(1-p) = 23.92 > 10$, אפשר לחשב קירוב נורמלי להסתברות המבוקשת. מקבלים:

$$P\{Y \ge 40\} = P\{Y \ge 39.5\} \cong P\left\{Z \ge \tfrac{39.5 - 100\cdot 0.3962}{\sqrt{100\cdot 0.3962\cdot 0.6038}}\right\} = P\{Z \ge -0.0245\} = \Phi(0.0245) = 0.5098$$

שאלה 5

א. המאורע $A \cap B$ מתרחש רק אם בכל אחד מהכיסים של יותם יש שתי גולות מאותו הצבע. לכן:

$$P(A \cap B) = \frac{8 \cdot 7}{\binom{16}{2}\binom{14}{2}} = \frac{1}{15 \cdot 13} = \frac{1}{195} = 0.00513$$

המאורע B מתרחש אם 4 הגולות בשני כיסיו של יותם הן משני צבעים בלבד. לכן:

$$P(B) = \frac{\binom{8}{2}\binom{4}{2}}{\binom{16}{2}\binom{14}{2}} = \frac{3}{195} = \frac{1}{65} = 0.0154$$

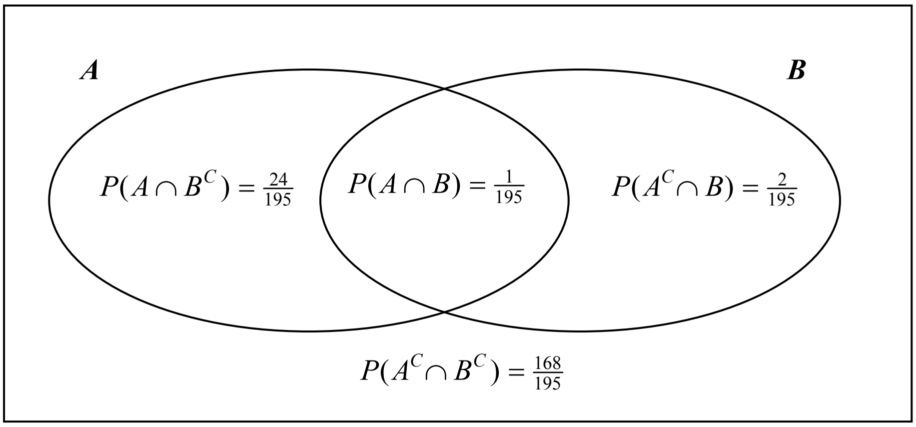
ומכאן:

$$P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{65} - \frac{1}{195} = \frac{2}{195} = 0.01026$$

כעת, המאורע $A \cap B^C$ מתרחש רק אם בכיס אחד של יותם יש שתי גולות מאותו הצבע ובכיס השני יש גולות מ-2 צבעים שונים. לכן:

$$P(A \cap B^C) = \frac{2 \cdot 8 \cdot \binom{7}{2} \cdot 2^2}{\binom{16}{2}\binom{14}{2}} = \frac{24}{195} = 0.1231 \qquad \Rightarrow \qquad P(A^C \cap B^C) = 1 - \frac{1+2+24}{195} = \frac{168}{195} = \frac{56}{65} = 0.8615$$

קיבלנו, אם כן, כי:



ב. נשים לב, שמתקיים:

$$P\{X=1\} = P(A \cap B^C) = \tfrac{24}{195}$$

$$P\{X=2\} = P(A \cap B) = \tfrac{1}{195}$$

לכן:

$$P\{X=0\} = P(A^C) = 1 - \tfrac{25}{195} = \tfrac{170}{195} = \tfrac{34}{39}$$

ומכאן, שלכל t ממשי מתקיים:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \tfrac{34}{39} + e^t \cdot \tfrac{24}{195} + e^{2t} \cdot \tfrac{1}{195}$$

ג. מספר הימים שיעברו עד שהמאורע B יתרחש בפעם השלישית הוא משתנה מקרי בינומי שלילי עם הפרמטרים 3 ו- $\frac{1}{65}$. לכן, התוחלת המבוקשת היא $3/\frac{1}{65} = 195$.