פתרון תרגיל בית 4

שאלה 1

א. נראה תחילה כי G_π (הגרף המוגדר ע"י קשתות מהצורה $(p(v),v)$) הינו עץ. נניח בשלילה כי קיים מעגל $C = v_0, v_1, \ldots, v_n, v_0$ ב- G_π. נניח בה"כ כי הקשת האחרונה שעבורה התבצעה רלקסציה היא (v_n, v_0), כלומר התבצע העדכון $d(v_0) \leftarrow d(v_n) + w(v_n, v_0)$, ונסמן ב- $d'(v_0)$ את ערך הפונקציה עבור v_0 לפני פעולת העדכון. מכאן ש- $d(v_0) < d'(v_0)$. אבל $p(v_1) = v_0$ ולכן $d(v_1) \geq d'(v_0) + w(v_0, v_1) > d(v_0) + w(v_0, v_1)$, כלומר צריכה להתבצע פעולת רלקסציה נוספת על הקשת (v_0, v_1). לפיכך G_π הוא עץ. נראה כעת כי עץ זה הוא עץ המסלולים הקלים ביותר דהיינו, נראה כי לכל צומת v בגרף, קיים ב- G מסלול מ- s ל- v במשקל $d(s,v)$ אם ורק אם קיים מסלול מכוון בעץ מ- s ל- v במשקל $d(s,v)$ (כאן $d(s,v)$ הוא משקלו של המסלול הקל ביותר מ- s ל- v). אם קיים מסלול כזה בגרף, אזי מסלול זה **בדיוק** חייב לחבר בין s ל- v גם בעץ, שכן האלגוריתם מוצא את המסלול הקל ביותר בין s ל- v ובכל שלב מעדכן את $p(v)$ בהתאם. מאידך, מסלול כזה בעץ יחייב קיומו של מסלול במשקל זהה גם בגרף, שכן המסלול בעץ מורכב מקשתות הנמצאות בגרף.

ב. נניח בשלילה כי לא קיימת קשת (u,v) ב- $C = (x, v_1, v_2, \ldots, v_r)$ המקיימת $d(v) > d(u) + w(u,v)$, ויהי x צומת על C כך ש- $d(x)$ סופי. נניח אפוא כי $d(x) = k$. אזי

$$k = d(x) \leq d(v_1) + w(v_1, x) \leq d(v_2) + w(v_2, v_1) + w(v_1, x) \leq \ldots \leq d(x) + \sum_{e \in C} w(e)$$

כלומר, $\sum_{e \in C} w(e) \geq 0$ בסתירה לכך ש- C שלילי.

שאלה 2

מציאת המסלול הקל ביותר, המשתמש ב- k קשתות לכל היותר, מצומת מקור s לכל אחד מיתר הצמתים בגרף יכולה להיעשות על-ידי הרצה של אלגוריתם Bellman-Ford k איטרציות **בלבד**. סיבוכיות הזמן הכוללת היא $O(kE)$ ואת הנכונות ניתן להוכיח בצורה פשוטה יחסית (למשל באינדוקציה על מספר האיטרציות שהאלגוריתם מבצע). התנהגות האלגוריתם במידה שבגרף קיימים מעגלים שליליים זהה לזו של אלגוריתם Bellman-Ford "הרגיל".

שאלה 3

א. אם ב- G היה מעגל שלילי, אזי אז $\mu^* < 0$, לפיכך G אינו מכיל מעגלים שליליים. מכאן, מסלול קצר ביותר לא יכיל מעגלים ויהיה מורכב מ- $n-1$ קשתות, לכל היותר.

ב. תחילה, ודאו ש- $n-k$ חיובי ממש שכן $k \le n-1$. כעת, מכיוון שבגרף אין מעגלים שלילים ומשקל המסלול הקצר ביותר הוא פונקציה לא-יורדת של אורכו (דהיינו, מספר הקשתות על אותו מסלול) מתקיים, $\delta_n(s,v)-\delta(s,v)\ge 0$.

ג. מצד אחד, מסלול קצר ביותר מ- s ל- u עשוי לעבור דרך v ולפיכך $\delta(s,u)\le\delta(s,v)+x$. מצד שני, $\delta(s,v)\le\delta(s,u)-x$ שכן מסלול קצר ביותר מ- s ל- v עשוי לעבור דרך u ודרך מעגל שמשקלו אפס במחיר של $-x$. לפיכך, משני אי-השיוויונים עולה כי $\delta(s,v)=\delta(s,u)+x$.

ד. הגע אל המעגל דרך אחד מהמסלולים הקצרים ביותר ואז הרחב את המסלול לאורך המעגל על-מנת ליצור מסלול קצר ביותר באורך n. אם v הוא צומת הסיום, אזי $\delta_n(s,v)=\delta(s,v)$. כעת, מאחר והמסלול נבנה מהמסלול הקצר ביותר אל המעגל, לא קיים מסלול קצר יותר.

ה. אנו יודעים שקיים צומת כלשהו עם הפרש גדול ביותר של 0,וכל ההפרשים האפשריים גדולים מאפס, לפיכך המינימום חייב להיות אפס.

ו. הוספת קבוע t למשקלה של כל קשת בגרף מגדילה את μ^* ב- t. פעולה זו גם מגדילה את $\delta_n(s,v)$ ב- nt ומורידה את $-\delta_k(s,v)$ ב- kt. בחירה של $t=-\mu^*$ תתן את המבוקש.

ז. חשב לכל $v\in V$ את $\delta_k(s,v)$ עבור $k=0,1,\dots,n$ בזמן $O(VE)$ על-ידי חישוב הרקורסיה $\delta_{k+1}(s,v)=\min_u \delta_k(s,v)+w(u,v)$. בזמן $O(V^2)$, חשב כעת את

$$\mu^*=\min_{v\in V}\max_{0\le k\le n-1}\frac{\delta_n(s,v)-\delta_k(s,v)}{n-k}.$$

שאלה 4

א. על-ידי הקלת הקשתות של גרף מכוון ללא מעגלים משוקלל $G=(V,E)$ על-פי מיון טופולוגי של צמתיו, ניתן לחשב מסלולים קלים ביותר מצומת מקור נתון בזמן $O(V+E)$. נעיר כי מסלולים קלים ביותר מוגדרים היטב בגרפים כאלה, שכן גם אם קיימות בו קשתות שליליות, לא ייתכן קיומו של מעגל שלילי.

האלגוריתם מתחיל במיון טופולוגי של הגרף, כדי לכפות על הצמתים סדר ליניארי. אם קיים מסלול מצומת u לצומת v, אזי u ימוקם לפני v בסדר הטופולוגי. אנו מבצעים מעבר אחד בלבד על הצמתים, בסדר שנקבע על-פי המיון הטופולוגי. במהלך הביקור על-פני כל צומת מתבצעת הקלה של כל הקשתות היוצאות מצומת זה.

ב. חשב תחילה את המרחקים הקצרים ביותר $\delta(i,j)$ בין כל זוג ערים i ו- j. כעת, בנה גרף מכוון (חסר מעגלים) $H=(V,E)$ שלו $n(m+1)$ צמתים. הצמתים, שיסומנו ב- v_{ip} עבור כל $i\in\{1,\dots,n\}$ ו- $p\in\{1,\dots,m\}$, ייצגו את האפשרות להישאר בעיר i ביום המסע ה- p. לכל $i,j\in\{1,\dots,n\}$, באשר $i\ne j$, ו- $p\in\{1,\dots,m\}$, הוסף את הקשת $(v_{i(p-1)},v_{jp})$ לגרף H אם $\delta(i,j)\le u(p)$. קשת זו מייצגת את יכולתו של התייר לנוע מעיר i לעיר j מבלי שיעבור את מכסת המרחק היומית המותרת. בנוסף, לכל צומת v_{ip} שייך את המחיר c_i לצומת.

המסע (tour) הזול ביותר הוא פשוט המסלול המחבר את v_{s0} עם v_{tm} שלו סכום משקלי צמתים קטן ביותר. אם לא ניתן להגיע מ- v_{s0} ל- v_{tm}, הרי שלא קיים מסע כזה העונה על דרישות הבעיה.

נוכל להמיר את בעיית המסלול הקל ביותר עם משקלים על הצמתים לבעיית המסלול הקל ביותר ה"רגילה" (עם משקלים על הקשתות) בקלות. אחת האפשרויות היא לשייך לכל קשת (u,v) את מחירו של צומת v כמשקל דהיינו,

$w(u,v)=c(v)$, שכן הגרף מכוון. מכאן אפוא ברור, כי פתרון בעיית המסלול הקל ביותר תפתור את בעיות המסלול הקל ביותר עם משקלים בצמתים.

נכונות. מסלול בגרף המחבר את v_{s0} עם v_{tm} שקול למסע בן m ימים. במיוחד, כל קשת $(v_{i(p-1)},v_{jp})$ לאורך מסלול זה מייצגת את היום ה- p -י במסע, יום שבו עברו מעיר i לעיר j. שים לב שקשת כזו קיימת בגרף H אם ורק אם יום המסע המתאים אינו מפר את מכסת המרחק היומית המותרת. בנוסף, מאחר שקשת $(v_{i(p-1)},v_{ip})$ אינה קיימת ב- H לכל i ו- p, התייר אינו יכול (או רוצה) להישאר באותה עיר בשני לילות רצופים. כעת, הרדוקציה מבעית המסלול הקל ביותר עם משקלים בצמתים לבעיית המסלול הקל ביותר "הרגילה" שומרת על מחירם הכולל של המסלולים (עד כדי מחירו של צומת המקור). לפיכך, אלגוריתם הפותר את בעיית המסלול הקל ביותר ממקור יחיד על הגרף המתקבל מהרדוקציה יניב מסע עם מחיר קטן ביותר, כנדרש.

זמן ריצה. המרחקים הקצרים ביותר בין כל זוגות הצמתים מחושבים, באמצעות אלגוריתם Floyd-Warshall בזמן $O(n^3)$. הגרף H מכיל $O(nm)$ צמתים ו- $O(n^2m)$ קשתות, כך שבזמן $O(n^2m)$ ניתן לבנות את H. מאחר ו- H הוא גרף מכוון ללא-מעגלים, מסלול קל ביותר על H ניתן לחישוב בזמן $O(n^2m)$ בעזרת האלגוריתם מהסעיף הקודם. לפיכך זמן הריצה הכולל הוא אם כן $O(n^3+n^2m)=O(n^2(n+m))$.

שאלה 5

אלגוריתם המכריע בשאלת קיומו של פתרון חוקי למערכת המשוואות יתבסס על הבנייה המוצעת. נגדיר גרף מכוון $G=(V,E)$ בו כל צומת v_i מייצג את המשתנה x_i וקשת (i,j) קיימת בגרף, במשקל c_k, אם ורק אם $x_i-x_j\le c_k$.

נוסיף ל- G צומת מקור s, אותו נחבר לכל יתר הצמתים בקשת מכוונת שמשקלה אפס, נריץ כעת, על הגרף שהתקבל, את אלגוריתם Bellman-Ford. אם בגרף אין מעגלים שליליים, נחזיר $x_i=\delta(s,v_i)$. אם G מכיל מעגלים שליליים אזי אין פתרון למערכת המשוואות. כדי לראות זאת די אם נתבונן במעגל כזה בגרף ונתבונן במערכת אי-השיוויונים המתאימה לקשתות המעגל. סכימה של סדרת אי- השיוויונים תעלה כי משקלו הכולל של המעגל הוא **חיובי**, בסתירה לעובדת היותו שלילי. זמן הריצה הכולל של האלגוריתם הוא כמובן $O(VE)$.