פתרונות לממ"ן 12 - 2012ב - 20425

1. הנתונים הם : A = המשתתף מצליח בניסיון הראשון $\qquad P(A) = 0.6$

B = המשתתף מצליח בניסיון השני $\qquad P(B) = 0.6$

C = המשתתף מצליח בניסיון השלישי $\qquad P(C) = 0.6$

$$P(B \mid A) = \tfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = \tfrac{2}{3} \cdot 0.6 = 0.4$$

$$P(A \cap B^C \cap C^C) = 0.1$$

$$P(B \mid \text{יצליח רק באחד מהניסיונות}) = \frac{P(A^C \cap B \cap C^C)}{P(A \cap B^C \cap C^C) + P(A^C \cap B \cap C^C) + P(A^C \cap B^C \cap C)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p}{0.1 + p + 0} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad 3p = 0.1 + p \quad \Rightarrow \quad p = P(A^C \cap B \cap C^C) = 0.05$$

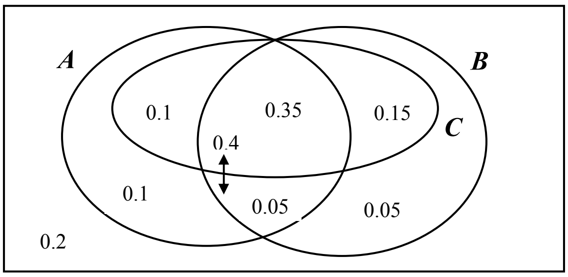
כמו כן, $P(A^C \cap B^C \cap C) = 0$ ולכן $C \subset A \cup B$. מכאן מקבלים :

$$P(A^C \cap C) = P(A^C \cap B \cap C)$$
$$P(B^C \cap C) = P(A \cap B^C \cap C)$$
$$P(A^C \cap B^C) = P(A^C \cap B^C \cap C^C)$$

נמצא כעת את כל ההסתברויות המתאימות לשטחים החלקיים בדיאגרמת-הוון שלהלן :

$$P(A^C \cap B \cap C) = P(A^C \cap B) - P(A^C \cap B \cap C^C) = P(B) - P(A \cap B) - P(A^C \cap B \cap C^C) = 0.6 - 0.4 - 0.05 = 0.15$$
$$P(A \cap B^C \cap C) = P(A \cap B^C) - P(A \cap B^C \cap C^C) = P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap B^C \cap C^C) = 0.6 - 0.4 - 0.1 = 0.1$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(C) - P(C \cap (A^C \cup B^C)) = P(C) - P(C \cap A^C) - P(C \cap B^C) + P(C \cap A^C \cap B^C)$$
$$= P(C) - P(A^C \cap B \cap C) - P(A \cap B^C \cap C) + P(C \cap A^C \cap B^C) = 0.6 - 0.15 - 0.1 + 0 = 0.35$$
$$P(A \cap B \cap C^C) = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) = 0.4 - 0.35 = 0.05$$
$$P(A^C \cap B^C \cap C^C) = P(A^C \cap B^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (0.6 + 0.6 - 0.4) = 0.2$$

א. דיאגרמת ון מתאימה היא :



שימו לב, שלמאורע C אין חפיפה עם המאורע $A^C \cap B^C$, כי אם משתתף נכשל בשני ניסיונותיו הראשונים, הניסיון השלישי שלו נחשב עבורו ככישלון.

ב. $P(A \cap B \cap C) = 0.35$

ג. $P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A^C \cap B^C \cap C^C) = 1 - 0.2 = 0.8$

ד. $P(\text{נכשל בדיוק בשני ניסיונות} \mid A^C \cup B^C \cup C^C)$

$$= \frac{P(A \cap B^C \cap C^C) + P(A^C \cap B \cap C^C) + P(A^C \cap B^C \cap C)}{1 - P(A \cap B \cap C)} = \frac{0 + 0.05 + 0.1}{1 - 0.35} = 0.2308$$

ה. $$P(B \cap (A \cup C) \mid B) = \frac{P(B \cap (A \cup C))}{P(B)} = \frac{0.15 + 0.35 + 0.05}{0.6} = 0.9167$$

2. א. נסמן ב- A_i את המאורע שממסר i סגור, לכל $i = 1,2,3,4,5,6$, וב- B את המאורע שעובר זרם מ-A ל-B.

$$P(B^C) = P((A_1^C \cup A_2^C) \cap A_3^C \cap (A_4^C \cup (A_5^C \cap A_6^C)))$$

$$= P(A_1^C \cup A_2^C)P(A_3^C)P(A_4^C \cup (A_5^C \cap A_6^C))$$ [כל הממסרים בלתי-תלויים זה בזה]

$$= [P(A_1^C) + P(A_2^C) - P(A_1^C \cap A_2^C)] \cdot P(A_3^C) \cdot [P(A_4^C) + P(A_5^C \cap A_6^C) - P(A_4^C \cap A_5^C \cap A_6^C)]$$

$$= [0.3 + 0.3 - 0.3^2] \cdot 0.2 \cdot [0.2 + 0.3^2 - 0.2 \cdot 0.3^2] = 0.027744$$

לכן:

$$P(B) = 1 - 0.027744 = 0.972256$$

ב. נתחיל בחישוב ההסתברות המותנית שממסר 4 פתוח, אם ידוע שעובר זרם מ-A ל-B.

$$P(A_4^C \mid B) = \frac{P((A_4^C \cap A_3) \cup (A_4^C \cap A_1 \cap A_2))}{0.972256}$$

$$= \frac{P(A_4^C \cap A_3) + P(A_4^C \cap A_1 \cap A_2) - P(A_4^C \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{0.972256}$$

$$= \frac{0.2(0.8 + 0.7^2 - 0.8 \cdot 0.7^2)}{0.972256} = \frac{0.1796}{0.972256} = 0.184725$$

ומכאן:

$$P(A_4 \mid B) = 1 - P(A_4^C \mid B) = 0.815275$$

ג.

$$P(A_3 \mid B) = \frac{P(A_3)}{0.972256} = \frac{0.8}{0.972256} = 0.82283$$

ד.

$$P(B \mid A_3^C \cap A_5^C) = \frac{P((A_3^C \cap A_5^C) \cap ((A_1 \cap A_2) \cup (A_4 \cap A_6)))}{P(A_3^C \cap A_5^C)}$$

$$= \frac{P(A_3^C \cap A_5^C)[P(A_1 \cap A_2) + P(A_4 \cap A_6) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_6)]}{P(A_3^C \cap A_5^C)}$$ [כל הממסרים בלתי-תלויים זה בזה]

$$= P(A_1 \cap A_2) + P(A_4 \cap A_6) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_6)$$ [אפשר להתחיל את החישוב מהשורה הזאת]

$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_4)P(A_6) - P(A_1)P(A_2)P(A_4)P(A_6)$$

$$= 0.7^2 + 0.8 \cdot 0.7 - 0.7^3 \cdot 0.8 = 0.7756$$

3. א. יש בסך-הכל 5 חבילות מסוג B, ולכן ההסתברות שייבחרו לפחות 4 חבילות מסוג B, כאשר בוחרים 10 מתוך 20 החבילות היא:

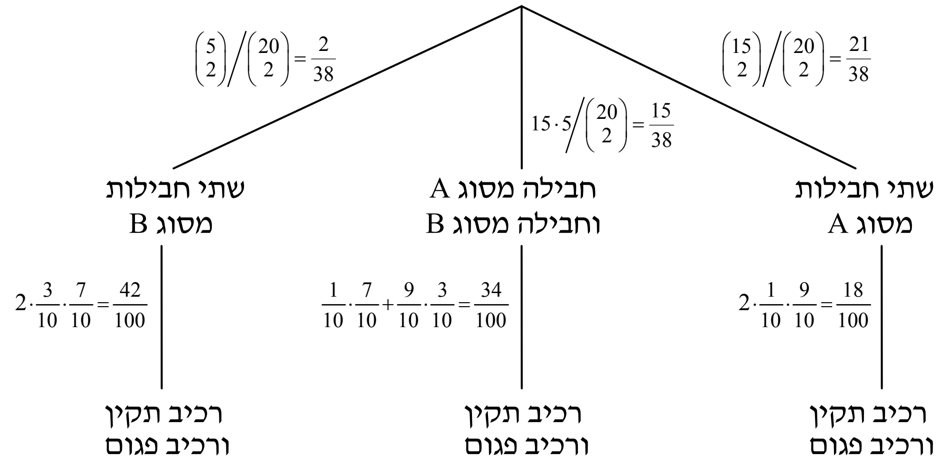
$$\frac{\binom{5}{4}\binom{15}{6} + \binom{5}{5}\binom{15}{5}}{\binom{20}{10}} = \frac{25,025 + 3,003}{184,756} = \frac{28,028}{184,756} = 0.151703$$

וההסתברות המותנית שייבחרו כל 5 החבילות מסוג B, אם ידוע שנבחרו לפחות 4 מהן היא:

$$\frac{\binom{5}{5}\binom{15}{5}}{\binom{20}{10}} \Bigg/ \frac{\binom{5}{4}\binom{15}{6} + \binom{5}{5}\binom{15}{5}}{\binom{20}{10}} = \frac{\binom{5}{5}\binom{15}{5}}{\binom{5}{4}\binom{15}{6} + \binom{5}{5}\binom{15}{5}} = \frac{3,003}{28,028} = 0.107143$$

הערה! שימו לב, למרחב המדגם המצומצם בבעיה זו. בהינתן שבין 10 החבילות שנבחרו יש לפחות 4 חבילות מסוג B, מרחב המדגם המצומצם מכיל רק את המקרים שבהם נבחרות לפחות 4 חבילות מסוג B, ויש בו $\binom{5}{4}\binom{15}{6} + \binom{5}{5}\binom{15}{5}$ תוצאות.

ב. נצייר עץ-הסתברות מתאים לבעיה. בקומה הראשונה של העץ נרשום את האפשרויות לבחירת שתי החבילות, ובקומה השנייה – את ההסתברויות המותנות (בסוג החבילות הנבחרות) שתוצאות הבדיקה הן רכיב תקין ורכיב פגום. מקבלים:



$$P\{\text{שתי חב' מסוג A} \mid \text{רכיב תקין ורכיב פגום}\} = \frac{\frac{21}{38}\cdot\frac{18}{100}}{\frac{21}{38}\cdot\frac{18}{100}+\frac{15}{38}\cdot\frac{34}{100}+\frac{2}{38}\cdot\frac{42}{100}} = \frac{378}{972} = \frac{7}{18} = 0.3889$$

4. לניסוי המתואר בבעיה מתאים מרחב מדגם בעל תוצאות שוות הסתברות, שכל אחת מהן מתקבלת בהסתברות $\frac{1}{6^4}=\frac{1}{1{,}296}$.

א. נסמן ב-A את המאורע שמתקבלות 4 תוצאות זוגיות וב-B את המאורע שמתקבלות 4 תוצאות שכולן גדולות מ-3, ונקבל:

$$P(B\mid A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}=0.197531$$

ב. נסמן ב-C את המאורע שמתקבלות לפחות 2 תוצאות זוגיות וב-D את המאורע שמתקבלת לפחות תוצאה אחת ששווה ל-6, ונקבל:

$$P(D\mid C)=\frac{P(D\cap C)}{P(C)}=\frac{\overbrace{6^4}^{\text{כל האפשרויות}}-\overbrace{5^4}^{\text{אין 6}}-\overbrace{4\cdot 3^3}^{\text{6 אחד ושלוש תוצאות אי-זוגיות}}}{\underbrace{6^4}_{\text{כל האפשרויות}}-\underbrace{3^4}_{\text{רק תוצאות אי-זוגיות}}-\underbrace{4\cdot 3^4}_{\text{תוצאה אחת זוגית ושלוש אי-זוגיות}}}=\frac{563}{891}=0.63187$$

5. א. נסמן ב-A את המאורע שנבחר מטבע תקין וב-B את המאורע שהתקבלו לפחות שני H-ים ב-3 ההטלות.

$$P(B)=P(B\mid A)P(A)+P(B\mid A^C)P(A^C)$$
$$=\left[3\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3+\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\right]\cdot\frac{m}{n}+\left[3\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^2\cdot\tfrac{1}{3}+\left(\tfrac{2}{3}\right)^3\right]\cdot\frac{n-m}{n}=\frac{m}{2n}+\frac{20(n-m)}{27n}$$

ב.
$$P(A\mid B)=\frac{P(B\mid A)P(A)}{P(B)}=\frac{\left[3\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3+\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\right]\cdot\frac{m}{n}}{\frac{m}{2n}+\frac{20(n-m)}{27n}}=\frac{27m}{40n-13m}$$