גלעד ברנע ת.ז. 203627310

ממ"ן 11

היי,
אני ממש מצטער על ההגשה המאוחרת.
זה לא הולך להיות הרגל, קרה משהו ספציפי שגרר את זה.
מקווה שזה לא מאוחר מידי

שוב מתנצל, ותודה!

1

א: לא נכון
ב: נכון
ג: לא נכון
ד: נכון
ה: לא נכון
ו: לא נכון
ז: נכון
ח: לא נכון

2

א

Prove:
$(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (B \cap C)$

First: expanding left-hand side $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$

$(A \cap \neg B) \cup (B \cap \neg C)$ // difference definition
$(A \cup B) \cap (A \cup \neg C) \cap (\neg B \cup B) \cap (\neg B \cup \neg C)$ // distributivity
$(A \cup B) \cap (A \cup \neg C) \cap (\neg B \cup \neg C)$ // $(\neg B \cup B) \equiv T$
$\mathbf{(A \cup B) \cap [(A \cap \neg B) \cup \neg C]}$ // dist.

Second: expanding right-hand side $(A \cup B) \setminus (B \cap C)$

$(A \cup B) \cap \overline{(B \cap C)}$
$(A \cup B) \cap (\neg B \cup \neg C)$
$(A \cap \neg B) \cup (A \cap \neg C) \cup (B \cap \neg B) \cup (B \cap \neg C)$ // dist
$(A \setminus B) \cup (A \cap \neg C) \cup (B \cap \neg C)$ // $(B \cap \neg B) \equiv \varnothing$

$(A \setminus B) \cup [(A \cup B) \cap \neg C]$ // dist

$[(A \setminus B) \cup (A \cup B)] \cap [(A \cap \neg B) \cup \neg C]$ // dist

// I'll now prove that $[(A \setminus B) \cup (A \cup B)] \equiv (A \cup B)$,

// then get back to expanding the full statement

Since $(A \setminus B) \subseteq A$ and $A \subseteq (A \cup B) \Rightarrow$
$(A \setminus B) \subseteq (A \cup B)$
Therefore
$(A \setminus B) \cup (A \cup B) = (A \cup B)$

$\mathbf{(A \cup B) \cap [(A \cap \neg B) \cup \neg C]}$

We see that left-hand side ≡ right-hand side, therefore

$\mathbf{(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (B \cap C)}$

ב

Prove:

if $P(A) \vee P(B) = P(C)$, then $(C=A) \vee (C=B)$

I'll be proving:

$(C \subseteq A \wedge A \subseteq C) \vee (C \subseteq B \wedge B \subseteq C)$

Since it's equivalent to

$(C=A) \vee (C=B)$

First: proof that $C \subseteq A \vee C \subseteq B$

$C \in P(C)$ // power set definition

$P(C) = P(A) \vee P(B) \Rightarrow C \in (P(A) \vee P(B))$

$C \in P(A) \vee C \in P(B)$

$\mathbf{C \subseteq A \vee C \subseteq B}$

Second: proof that $A \subseteq C \vee B \subseteq C$

$A \in P(A)$

$P(A) \subseteq P(A) \cup P(B)$ // union definition

$A \in P(A) \cup P(B)$

Given $P(C) = (P(A) \cup P(B)) \Rightarrow A \in P(C)$

$\mathbf{A \subseteq C}$

$B \in P(B)$

$P(B) \subseteq P(A) \cup P(B)$ // union definition

$B \in P(A) \cup P(B)$

Given $P(C) = (P(A) \cup P(B)) \Rightarrow B \in P(C)$

$\mathbf{B \subseteq C}$

Since $C \subseteq A \vee C \subseteq B$ and $A \subseteq C$ and $B \subseteq C$,
// More formally: $(C \subseteq A \vee C \subseteq B) \wedge (A \subseteq C \wedge B \subseteq C)$
it follows that:
$(C=A) \vee (C=B)$

ג

Prove:
if A,B are finite and $|P(A)| = 2 \cdot |P(A \setminus B)|$, then $|A \cap B| = 1$

---

(1)

$A \setminus B \equiv A \setminus (A \cap B)$ // by definition

(2)

We know that for any two sets X,Y, if $Y \subseteq X$ then $|X \setminus Y| = |X| - |X \cap Y|$
Certainly $(A \cap B) \subseteq A$, so
$|A \setminus (A \cap B)| = |A| - |A \cap B|$.

(3)

Assuming $|A \cap B| = 1$, if follows that:
$|A| - |A \cap B| = |A| - 1$, therefore using (1) and (2):
$|A \setminus B| = |A \setminus (A \cap B)| = |A| - |A \cap B| = |A| - 1$, so
$|P(A \setminus B)| = 2^{|A \setminus B|} = 2^{(|A| - 1)}$

(4): Expanding $2 \cdot |P(A \setminus B)|$

$2 \cdot |P(A \setminus B)| = 2 \cdot 2^{(|A| - 1)} = 2^{|A|}$

(5)

$|P(A)| = 2^{|A|}$ // by definition

(6): Putting it all together

$|P(A)| = 2 \cdot |P(A \setminus B)|$

3

א

Prove: if $(A \subset B)$, then $(A \cup \neg B) \neq U$

Since A is a **proper** subset of B, then $(B \setminus A) \neq \varnothing$.
Expanding $(B \setminus A) = (B \cap \neg A) = (\neg A \cap B) = \overline{(A \cup \neg B)}$ // DeMorgan

Therefore $\overline{(A \cup \neg B)} \neq \varnothing$

Since the complement of a given set X is the universal set (U) if and only if $X=\varnothing$, it follows that the complement of a given set Y is **not** U if and only if $Y\neq\varnothing$.

Because $\overline{(A \cup \neg B)} \neq \varnothing$, then the complement of $\overline{(A \cup \neg B)} \neq U$, therefore $\mathbf{(A \cup \neg B) \neq U}$.

ב

Prove: if $(\neg A \,\Delta\, B) = (\neg B \,\Delta\, C)$, then $A=C$.

We know that $(\neg A \,\Delta\, B) = (\neg B \,\Delta\, A)$, because:

$(\neg A \,\Delta\, B) = (\neg A \cap \neg B) \cup (A \cap \neg\neg B) =$

$(\neg A \cap \neg B) \cup (B \cap A)$ // double negation

Similarly,

$(\neg B \,\Delta\, A) = (\neg B \cap \neg A) \cup (\neg\neg B \cap A) =$

$(\neg A \cap \neg B) \cup (B \cap A)$ // double negation, comm.

It's given that $(\neg A \,\Delta\, B) = (\neg B \,\Delta\, C)$, so

$(\neg B \,\Delta\, A) = (\neg B \,\Delta\, C)$ // replaced $(\neg A \,\Delta\, B)$ with $(\neg B \,\Delta\, A)$

Since for any sets X, Y, Z:

$(X \,\Delta\, Y) = (X \,\Delta\, Z) \Rightarrow X = Z$

It follows that

$(\neg B \,\Delta\, A) = (\neg B \,\Delta\, C) \Rightarrow A = C$

Therefore $\mathbf{A = C}$.

3

Prove:

$A\cap B \subseteq A\Delta B\Delta C \Longrightarrow (A\cap B)\subseteq C$

Expanding $A\Delta B\Delta C$

$A\Delta B\Delta C=(A\Delta B)\Delta C=$

$[(A\Delta B)\cap \bar{C}]\cup[C\cap \overline{(A\Delta B)}]=$ // הגדרת הפרש סימטרי

$[(A\Delta B)\cup C]\cap[\overline{(A\Delta B)}\cup \bar{C}]=$ // פילוג, חילוף

$[(A\Delta B)\cup C]\cap\neg[(A\Delta B)\cap C]$ // דה מורגן

נשים לב: כל x ששייך ל $(A\Delta B)\cup C$ אבל אינו שייך ל $(A\Delta B)\cap C$.

נתרכז בחלק הראשון של המסקנה:

$x\in(A\Delta B)\cup C=$

$x\in A\Delta B$ or $x\in C$ // הגדרת איחוד

$x\in(A\cap\bar{B})\cup\underline{(\bar{A}\cap B)}$ or $x\in C$ // הגדרת הפרש סימטרי

$x\in(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}$ or $x\in C$ // דה-מורגן על חלק ההפרש השמאלי

$[x\in(A\cup B)$ and $x\notin(A\cap B)]$ or $x\in C$

במילים אחרות, ישנו x שעונה על לפחות אחת מהתכונות הבאות:

1) שייך ל C

2) שייך ל $A\cup B$ אבל אינו שייך ל $A\cap B$.

לפי הנתון, אם כל $x\in A\cap B$ אז הוא שייך ל $A\Delta B\Delta C$,

כלומר $x\in A\cap B\to[x\in(A\cup B)\wedge x\notin(A\cap B)]\vee \underline{x\in C}$

אך-הביטוי בסוגריים המרובעים הוא שלילה של נתון כל $x\in A\cap B$,

ומכיוון ש $\underline{P}$ or False $=\underline{P}$, נשארנו עם

$x\in A\cap B\to \underline{x\in C}\Longrightarrow \underline{(A\cap B)\subseteq C}.$

4

ב) $k=1 \Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2\cdot 1} = A_2 \quad (\{0,2,4,\dots\})$

הקבוצה A_2 מכילה רק מספרים זוגיים טבעיים.

גם $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$ מכילה רק מספרים זוגיים טבעיים, ולכן $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k} \subseteq A_2$.

בנוסף, עצם העובדה שאם מציבים $k=1$ מקבלים את A_2, אומרת ש-A_2 היא תת-קבוצה של $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$, כלומר $A_2 \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$.

מכיוון ש $A_2 \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k} \subseteq A_2$, $\Longleftarrow$ $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k} = A_2$.

ג) $k=60 \Longrightarrow \bigcap_{k=1}^{5} A_k = A_{60}$.

הקבוצה $\bigcap_{k=1}^{5} A_k$ מכילה את חיתוך כל הכפולות של 1, 2,

הכפולות של 2, ..., של 5. במקום לחלק, הקבוצה A_{60},

כל איבר במקום ה-i מתחלק בכל המספרים במקום ה-i

של הקבוצות $A_1, A_2, \dots, A_5$, כלומר $\bigcap_{k=1}^{5} A_k \subseteq A_{60}$.

$A_1 = \{0, 1, 2, \dots, 60, \dots, 120, \dots\}$

$A_2 = \{0, 2, 4, \dots, 60, \dots, 120, \dots\}$

$A_3 = \{0, 3, 6, \dots, 60, \dots, 120, \dots\}$

$A_4 = \{0, 4, 8, \dots, 60, \dots, 120, \dots\}$

$A_5 = \{0, 5, 10, \dots, 60, \dots, 120, \dots\}$

$A_{60} = \{0, 60, 120, \dots\}$

בנוסף, כל מספר ב-A_{60} קיים בכל אחת מ $A_1, A_2, \dots, A_5$, כלומר $A_{60} \subseteq \bigcap_{k=1}^{5} A_k$.

מכאן נובע ש $A_{60} = \bigcap_{k=1}^{5} A_k$.

4 ג) $k=0 \Longrightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_0$

לפי ההגדרה, $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ היא קבוצת כל המספרים המחולקים בכל המספרים מ-1 עד ∞, כלומר כל המספרים הטבעיים החיוביים. אך ורק 0 עונה על ההגדרה הזאת (כפולה של כל מספר טבעי).

במילים אחרות, קבוצת כל המספרים המחולקים בכל המספרים הטבעיים היא בדיוק $\{0\} = A_0$, ולכן $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq \{0\}$.

בנוסף, לפי ההגדרה, 0 הוא האיבר הראשון בכל קבוצה לכל $k \geq 1$ טבעי, ולכן $\{0\} \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. מכאן נובע

$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_0$

4 ג 3) $k=3 \Longrightarrow A_6 \cup \{x+3 \mid x \in A_6\} = A_3$.

בעוד A_6 היא קבוצת הכפולות של 6 כולל 0, הקבוצה $\{x+3 \mid x \in A_6\}$ (נסמנה: S) נוצרה מלקיחת כל איבר במקום ה-i ([i]) ממקבילו $A_{6[i]}$ ב-3+ ומבצע חישוב על S כהזזה של A_6.

מכיוון שהכפולות של 6 היא קבוצת הכפולות של 3 במספר זוגי ניתן להציג $A_6 = \{2n \cdot 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

$A_6 = \{0, 6, 12, \ldots\}$

$S = \{3, 9, 15, \ldots\}$

בנוסף, מכיוון שהקבוצה S היא הזזה של A_6 ב-3+, ניתן להציג: $S = \{6n+3 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ומכיוון ש-3 מחלק ב-6 ולכן $S = \{3(2n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$, כלומר קבוצת הכפולות של 3 במספר אי-זוגי.

כל הנ"ל חלוקה ב-2, אין עוד קבוצה מלבד המספרים הזוגיים וקבוצת המספרים האי-זוגיים, ולכן $A_6 \cup S = A_3 \Rightarrow A_6 \cup \{x+3 \mid x \in A_6\} = A_3$.