איזומטריות - המשך

תרגיל

f איזומטריה ℓ ישר.

$x \in \ell$ נקודת שבת של f.

הראו כי $f \circ S_\ell \circ f$ שיקוף.

תשובה

f שומרת מגמה או f אינה שומרת מגמה.

מקרה 1: f שומרת מגמה

S_ℓ שיקוף ולכן הופכת מגמה לכן $f \circ S_\ell$
הופכת מגמה.

לכן $F\circ S_\ell \circ F$ הופכת מגמה.

נתבונן ב x.

מהגדרת הרכבה

$$F\circ S_\ell\circ F(x) = F(S_\ell(F(x))) = F(S_\ell(x)) = F(x) = x$$

x נקודת שבת של x

$x \in \ell$

לכן x נקודת שבת של $F\circ S_\ell \circ F$.

לפי סווג איזומטריות $F\circ S_\ell\circ F$ הופכת מגמה ובעלת נקודות שבת ולכן שיקוף.

מקרה 2: f אינה שומרת מגמה

g שיקוף ולכן הופכת מגמה. לכן $g \circ f$ שומרת מגמה. לכן $f \circ g \circ f$ הופכת מגמה.

בדומה למקרה הראשון, x נקודה שבת של $f \circ g \circ f$.

ולפי מיון איזומטריות $f \circ g \circ f$ שיקוף.

מש"ל.

עריכה אחרת של ההוכחה:

נניח $f \circ g \circ f$ הופכת מגמה:

ידוע f שומרת מגמה או f אינה שומרת מגמה.

מקרה 1: f שומרת מגמה

⋮

מקרה 2: f אינה שומרת מגמה

⋮

לכן $f \circ g \circ f$ אינה שומרת מגמה.

נניח כי x נקודת שבת של $f \circ g \circ f$:

תרגיל

תהי F איזומטריה.

תהאנה A, B, C שונות שאינן קוויות.

נתון כי

$$F(A) = B$$

$$F(B) = C$$

$$F(C) = A$$

(1) הראו כי ABC משולש שווה צלעות.

תשובה

מהגדרת איזומטריה:

$$\overline{AB} = \overline{F(A)F(B)} = \overline{BC}$$

כמו כן:

$$\overline{BC} = \overline{\mathcal{F}(B)\mathcal{F}(C)} = \overline{CA}$$

לכן $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ ולכן $\triangle ABC$

שווה צלעות.

② הראו כי $\mathcal{F}$ סיבוב.

תשובה

תהא P מרכז המעגל החוסם את המשולש.

$\mathcal{F}$ איזומטריה, לכן:

$$\overline{AP} = \overline{\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(P)} = \overline{B\mathcal{F}(P)}$$

$$\overline{BP} = \overline{F(B)F(p)} = \overline{CF(p)}$$

$$\overline{CP} = \overline{F(C)F(p)} = \overline{AF(p)}$$

P מרכז מעגל חוסם לכן:

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

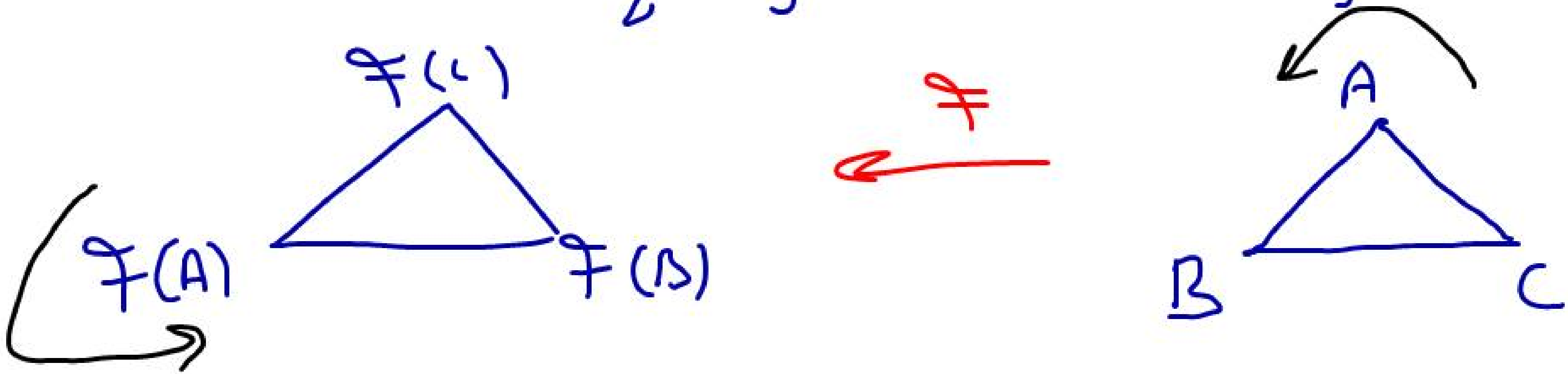
ומהשוויונות לעיל נובע:

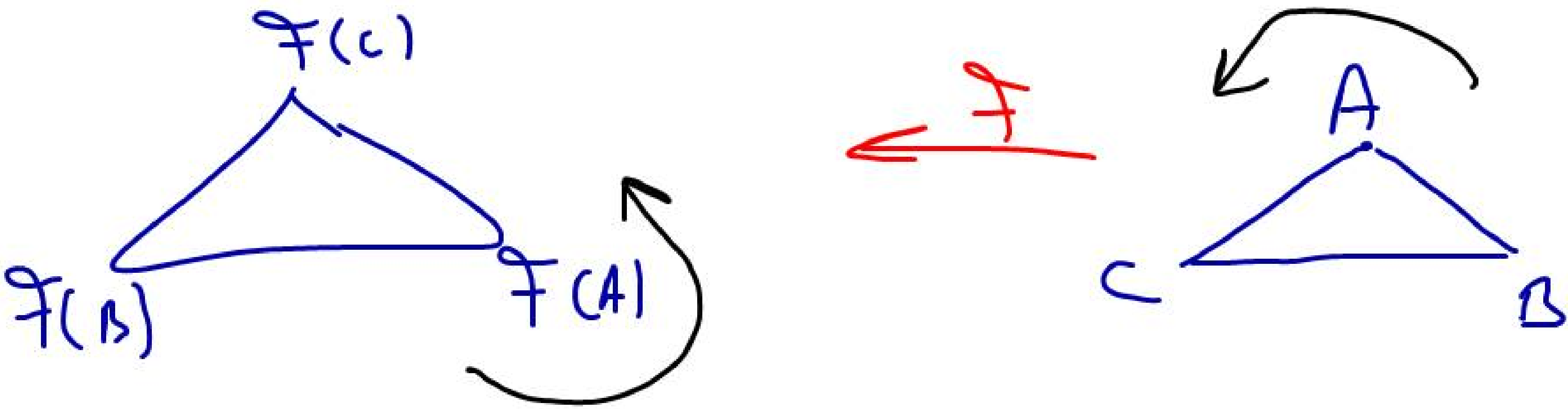
$$\overline{AF(p)} = \overline{BF(p)} = \overline{CF(p)}$$

מכאן $F(p)$ מרכז המעגל החוסם את המשולש ולכן

$F(p)=p$. לכן ל F יש נקודת שבת.

מבחינת מגמה, יש שני מקרים:





לכן f שומרת מגמה. לכן f סיבוב, הזזה או
זהות. לf נקודת שבת לכן אינה הזזה, כמו כ

כיוון ש A,B,C אינן קוויות נובע $A \neq B$

ולכן $A \neq F(A)$ ואינה נקודת שבת לכן F

אינה זהות.

ולכן F סיבוב.

הוכחה נוספת:

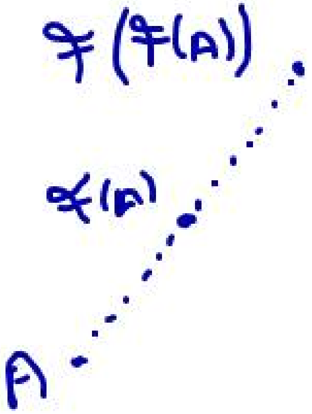
באותו אופן מוכיחים ש F שומרת מגמה.

נוכיח ש F אינה זהות: כיוון ש A,B,C אינן

קוויות נובע ש $A \neq B$ לכן $A \neq F(A)$ ולכן F

אינה זהות.

נוכיח ש F אינה הזזה:



נניח בשלילה ש-F הזזה.

לכן $A, F(A), F(F(A))$ קוויות.

כלומר A, B, C קוויות בסתירה לנתון.

לכן F אינה הזזה, ולכן F סיבוב.

הוכחה נוספת (2):

נוכיח שמרכז המעגל החוסם את $\triangle ABC$ הוא

נקודת שבת בדיוק כמו בהוכחה הראשונה.

מכאן נמצא של F יש נקודת שבת.

לכן F שיקוף, סיבוב או זהות.

נוכיח כמו קודם ש $\mathcal{F}$ איננה לינארית.

נותר להוכיח ש $\mathcal{F}$ איננה שיקוף:

דרך 1:

נניח בשלילה ש $\mathcal{F}$ שיקוף.

אז $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = I$.

לכן:

$$C = \mathcal{F}(\mathcal{F}(A)) = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(A) = A$$

בסתירה לכך ש A, B, C לא קוליניאריות.

דרך 2:

נניח בשלילה ש $\mathcal{F}$ שיקוף.

נניח $F(A)=B$,

לכן צ.ר השיקוף הוא האנך האמצעי.

לקטע AB, וכיוון ש-$\triangle ABC$ שווה צלעות,

האנך האמצעי לקטע AB עובר דרך C.

לכן C על צ.ר השיקוף ולכן $C=F(C)=A$

בסתירה לכך ש-A,B,C אינן קווית.

לכן F אינה שיקוף ולכן F סיבוב.

מש"ל.

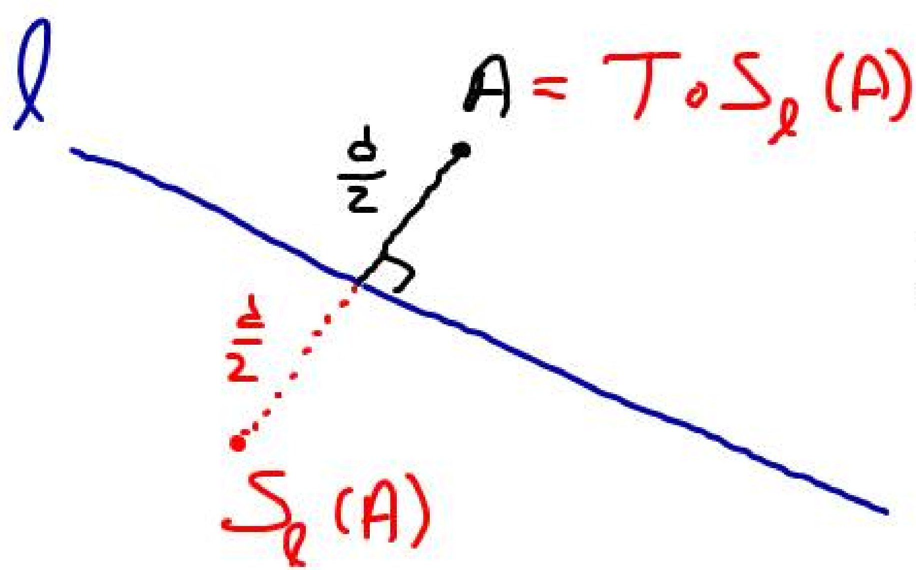
תרגיל

יהי ℓ ישר ויהי T הזזה במרחק $d>0$ בכיוון המאונך ל ℓ.

הראו כי $T\circ S_\ell$ שיקוף.

הוכחה

יהי A נקודה שמרחקה מ ℓ הוא $\frac{d}{2}$ וגם כיוון ההזזה הוא מ ℓ אל A.



לכן A ישר שבת של $T \circ S_\ell$.

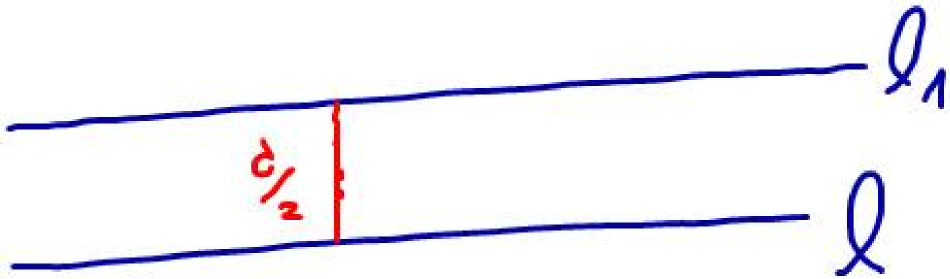
S_ℓ שיקוף לכן הופכת מגמה.

T הזזה ולכן שומרת מגמה.

לכן $T \circ S_\ell$ הופכת מגמה ויש לה ישר שבת

ולכן $T \circ S_\ell$ שיקוף לפי סיווג איזומטריות.

הוכחה נוספת:



יהי l_1 מקביל
ל l במרחק $c/2$
כך שכיוון ההזזה הוא
מ l אל l_1.

לכן $T = S_{l_1} \circ S_l$.

לכן: $T \circ S_l = (S_{l_1} \circ S_l) \circ S_l = S_{l_1} \circ (S_l \circ S_l) =$

$= S_{l_1} \circ I = S_{l_1}$ לכן $T \circ S_l$ שיקוף.

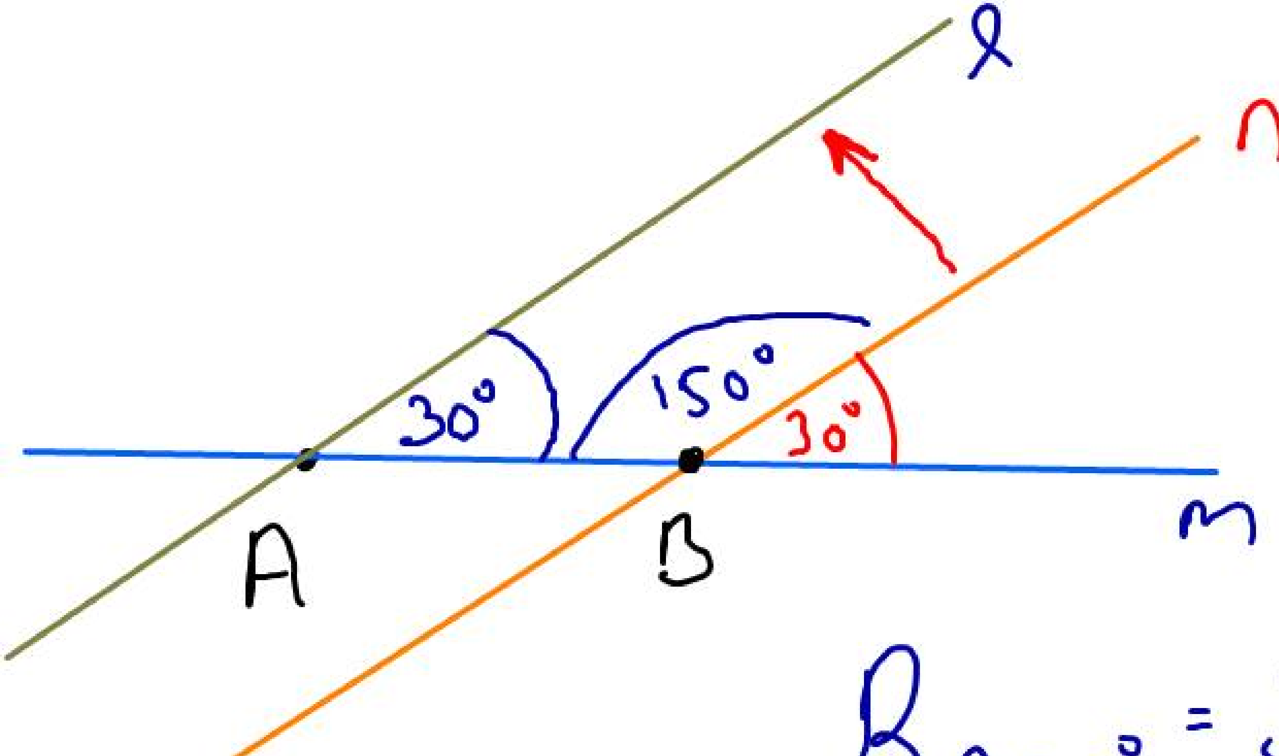
תרגיל

תהיינה A,B נקודות שונות.

מצאו את $R_{A,60^\circ} \circ R_{B,300^\circ}$

תשובה

נתבונן בישרים l,m,n בציור.



$$R_{A,60^\circ} = S_l \circ S_m$$

$$R_{B,300^\circ} = S_m \circ S_n$$

ולכן

$$R_{A,60^\circ} \circ R_{B,300^\circ} = (S_l \circ S_m) \circ (S_m \circ S_n)$$

$$= S_l \circ (S_m \circ S_m) \circ S_n =$$

$$= S_l \circ S_n$$

ולכן $R_{A,60^\circ} \circ R_{B,300^\circ}$ הזזה במרחק ששווה פעמיים...

המרחק בין ℓ ל ח ובכיוון מאונך ל

ℓ מ ח ל ℓ.

אקסיומות (יחידת 8/9)

שפה

מילון

שמות עצם.
פונקציות יסוד.
יחסי יסוד.

לי: מה שמבדיל
בין שפות שונות.

מערכת אקסיומות

נוצרת תוך שימוש ביחסי היסוד.

~~טענה בשפה (אינטואיטיבית)~~

~~מורכבת מטענות אטומיות על ידי שימוש~~
~~בקשרים, משתנים וכמתים.~~

טענה בשפה היא טענה שניתן לנסח אותה
על ידי שימוש בטענות אטומיות, קשרים, משתנים
וכמתים בלבד.

קבוצה סופית של טענות תקרא מערכת.

דוגמאות

(1) תורת הקבוצות

מושג יסוד: קבוצה.

יחס יסוד: שייכות.

דוגמה לטענה בתורת הקבוצות:

לכל A, B, C.

אם ((לכל x. אם $x \in A$ אז $x \in B$) וגם (לכל x.

אם $x \in B$ אז $x \in C$)) אז (לכל x. אם $x \in A$ אז $x \in C$)

יהיו A,B,C. אם ($A\subseteq B$ וגם $B\subseteq C$) אז $A\subseteq C$.

(2) **שפת תורת החבורות**

שמות עצם: איברים

פונקציות יסוד: $*$ (פעולה בינארית)

יחס יסוד: $=$

דוגמה לטענה:

קיים e שלכל x. $x = e * x$ וגם $x = x * e$.

הערה:

ביחידה 4 הגדרנו:

פעולה בינארית על קבוצה A היא התאמה המתאימה לכל זוג סדור תוצאה אחת ויחידה.

בעצם:

פעולה בינארית היא פונקציה שתחומה $A \times A$.

3 שפת הגאומטריה

מושג יסוד: נקודה, ישר

יחס יסוד: נקודה נמצא על ישר.

שוויון.

דוגמה לטענה:

לכל ישר l לכל ישר m. אם (לא $m=l$) אז

(לכל נקודה x. לכל נקודה y. אם (x נמצא על l

וגם x נמצא על m וגם y נמצא על l וגם y נמצא

על m) אז $x=y$)

לכל שני ישרים שונים יש לכל היותר נקודה
משותפת אחת.

השאלה המרכזית: מתי טענה נובעת מטענות אחרות?

הגישה שנקטנו מה עד עכשיו בקורס: **הוכחה**.

טענה נובעת מטענות אחרות אם יש לה הוכחה
העושה שימוש בטענות אלו בלבד.

מודל לשפה

מודל לשפה הוא מבנה שבה ניתן פירוש לכל אחד ממושגי היסוד.

דוגמה בשפה של פעולה בינארית:

$$M = \{0, 1, 2, +_{mod 3}\}$$

איברים: 0, 1, 2

פעולה: $+_{mod 3}$

דוגמה למודל לשפה של גיאומטריה:

$$M = \{0, 1, 2, \{0\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \in\}$$

נקודות: $0, 1, 2$

ישרים: $\{0\}, \{0,1\}, \{1,2\}$

נמצא על: $\in$

במודל זה הנקודה 2 נמצא על הישר $\{1,2\}$.

המחשה למודל

המחשה למודל היא תיאור גרפי של מודל לפי כללי עבודה מוסכמים מראש.
מטרת ההמחשה להקל על הקריאות.

דוגמה להמחשה בשפה של תורת החבורות:

$+_{mod 3}$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

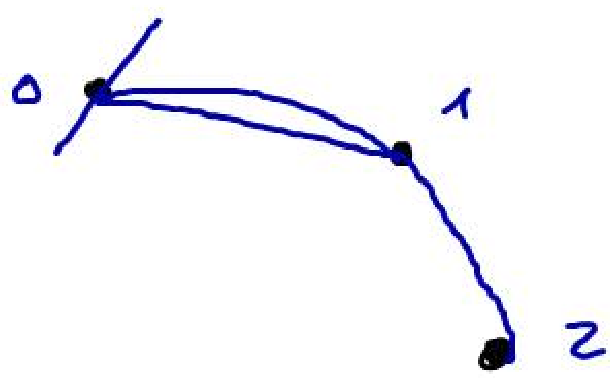
מוסכמות עבודה בגיאומטריה:

בהמחשה, כל עקום שאינו שבור מייצג ישר אחד במודל.

דוגמה:

$$M = \{0,1,2,\{0\},\{0,1\},\{0,1,2\},\in\}$$

המחשה למודל זה,



נקודות: $0,1,2$

ישרים: $\{0\},\{0,1\}$

$\{0,1,2\}$

(יחס) על: $\in$

מוסכמת עבודה נוספת לגבי מודלים:

המודלים לשפה של גיאומטריה בהם אנחנו נעסוק

יהיו מורכבים מ:

① עודות.

② קבוצות החלקיות לקבוצת הנקודות יהיו ישרים.

③ נמצא על תמיד יפורש בעזרת שייכות.

לכן את המודל מהעמוד הקודם נתאר פשוט על ידי:

$$M = \{0,1,2,\{0\},\{0,1\},\{0,1,2\}\}$$

תרגיל

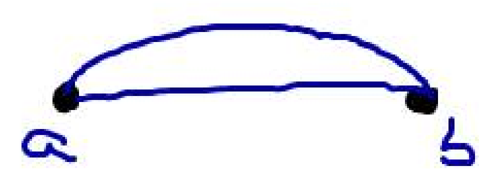
נתונה המערכת הבאה:

① קיימים לפחות שני ישרים.

② לכל שני ישרים שונים יש נקודה משותפת.

איזה מהמודלים הבאים מקיים את המערכת?

①

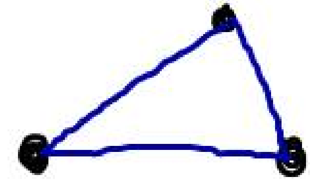


$M=\{a,b,\{a,b\}\}$

במודל יש רק ישר אחד

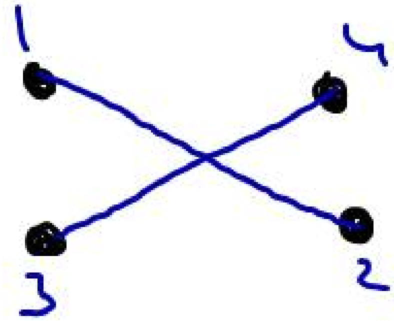
לכן אקסיומה (1) אינה מתקיימת.

2



המודל מקיים את המערכת.

3



$$M = \{1,2,3,4,\{1,2\},\{3,4\}\}$$

לישרים $\{1,2\}$ ו $\{3,4\}$

אין נקודה משותפת.

<u>למפגש הבא:</u>

ממ"ן 15 - לעוד שבועיים. <u>13.6</u>

לקרוא היטב יחידה 8/9.