ממן ~~[illegible]~~15

אשנב למתמטיקה 04101

גיא כרמי 301726154

23.08.2019

שאלה 1:

א. מהנתון, f אינה על, לכן קיים $y' \in A$ כך ש- $y' \notin f(A)$.

נניח בשלילה כי ההרכבה $f \circ g$ על, אז לכל $y \in A$ קיים $x \in A$ כך ש- $(f \circ g)(x) = y$, ובפרט קיים x' כך ש- $f(g(x')) = y'$.

ברור כי $g(x') \in A$ וקיבלנו ~~סת~~ סתירה (כי $y' \notin f(A)$)

לכן $f \circ g$ אינה על כנדרש.

יפה

ב. ברור כי לא קיים n המקיים $g(n) = 2 \in \mathbb{N}$.

נניח בשלילה כי קיים כזה, אז $2n-1=2$

אבל $n = 1.5 \notin \mathbb{N}$ מכאן ש- g אינה על $\mathbb{N}$.

נחשב את ההרכבה $f \circ g$:

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(2n-1) = \frac{(2n-1)+1}{2} = n$$

כי $2n-1$ תמיד אי זוגי

כלומר $f \circ g$ היא ~~[illegible]~~ פונקציית הזהות (מ-$\mathbb{N}$ ל-$\mathbb{N}$) ובפרט היא ודאי על.

יפה

ג. מכך ש- g אינה על נובע כי קיים b כך ש- $b \notin g(A)$.

f חח"ע לכן קיים z עבורו $f(b) = z$

ולא קיים $a \in A$ כך ש- $a \neq b$ וגם $f(a) = z$.

לכן לא קיים $x \in A$ כך ש- $(f \circ g)(x) = z$

כיוון שרק b מקיים $f(b) = z$ ואילו $g(x) \neq b$ לכל $x \in A$

כי $b \notin g(A)$.

יפה

שאלה ב:

א. f איזומטריה לכן $\overline{AC}=\overline{f(A)f(C)}$ לכן מהנתון $f(C)=A$ גם $\overline{AC}=\overline{f(A)A}$. וכמו כן $f(A)\in\{A,B,C,D\}$ כי היא קבוצת שבת. ברור כי $\overline{AD}\neq\overline{AC}$ מגיאומטריית הריבוע, לכן $\overline{AD}\neq\overline{f(A)A}$ לכן $D\neq f(A)$. באופן דומה מסק ש- $\overline{AB}\neq\overline{AC}$ מסיק $B\neq f(A)$. ברור כי $f(A)\neq A$ כי $\overline{AC}\neq 0$ לכן $f(A)=C$.
O הנו מרכז הישר AC, $f(O)$ הנו מרכז הישר $f(A)f(C)$. אבל $AC=f(C)f(A)$, כלומר זהו אותו ישר, לישר יש רק נקודת מרכז אחת לכן $f(O)=O$.

ב. אם $f(B)=B$ אז $f(D)=D$ כי $f(D)\in\{A,B,C,D\}$ ומחח"ע f מתי רק D עבור $f(D)$. כמו כן $f(O)=O$ לכן ל- f יש יותר מנק' שבת אחת (ראינו כבר 3) לכן עפ"י משפט זה f היא זהות או שיקוף. אך $f(A)\neq A$ לכן f אינה הזהות ומכאן שהיא שיקוף.

ג. נראה כי חצי סיבוב סביב O (נסמנו g) מקיים את הנתונים של תרגיל זה: ברור כי $\overline{OC}=\overline{OA}$ לכן מכיוון ש- A ו- C על אותו ישר אז חצי סיבוב מקיים $g(C)=A$, $g(A)=C$. באופן דומה $\overline{OB}=\overline{OD}$ ו- B,D על אותו ישר עם O לכן $g(B)=D$, $g(D)=B$. מאלו מתקיים גם כי $\{A,B,C,D\}$ קב' שבת. מכאן ש- g מעתיקה את $\triangle ACB$ ל- $\triangle CAD$, וגם f מעתיקה את $\triangle ACB$ ל- $\triangle CAD$ (ובנוסף $g(A)=f(A)$), $g(C)=f(C)$ ו- $g(B)=f(B)$, ממשפט כי $f=g$, לכן f סיבוב.

נימוק: כי איזומטריות המתלכדות על 3 נקודות לא קוויות הן זהות

ד. איזומטריה היא חח"ע והראינו כי $f(C)=A$ וכי $f(A)=C$. מכיוון ש- $B\neq A$ וגם $B\neq C$ אז לא ייתכן כי $f(B)=f(C)=A$ או $f(B)=f(A)=C$.

יפה מאד

שאלה 3:

א. ממשפט 3 גם g^{-1} איזומטריה, ממשפט 4 גם $g\circ f$ איזומטריה, ולכן גם $g\circ f\circ g^{-1}$ איזומטריה.

נניח כי g הופכת מגמה ו- f שומרת מגמה, אז עפ"י שאלה 32 ב'ת 6 סעיף א' גם g^{-1} הופכת מגמה, ועפ"י סעיף ג' $g\circ f$ הופכת מגמה. לכן עפ"י סעיף ב' f' שומרת מגמה.

נניח כי g,f שתיהן שומרות/הופכות מגמה, אז גם g^{-1} שומרת/הופכת מגמה לכן $g\circ f$ שומרת מגמה ו- f' שומרת/הופכת מגמה (בהתאמה).

נניח כי g שומרת מגמה ו- f הופכת מגמה, אז g^{-1} שומרת מגמה, $g\circ f$ הופכת מגמה לכן f' הופכת מגמה.
כלומר f שומרת מגמה אם ורק אם f' שומרת מגמה.

ב. נניח כי $A=f(A)$ ונראה כי $g(A)=f'(g(A))$:

$$f'(g(A)) = g(f(g^{-1}(g(A)))) = g(f(A)) = g(A)$$

כי $g^{-1}g$ הע"ז הזהות.

נניח כי $B=f'(B)$ ונראה כי $g^{-1}(B)=f(g^{-1}(B))$:

$$g^{-1}(B) = g^{-1}(f'(B)) = g^{-1}(g(f(g^{-1}(B)))) = f(g^{-1}(B))$$

$B=f'(B)$ כי $g^{-1}g$ זהות.

ג. מתשובה 53 ב'ת 6 ברור כי ניתן לקבוע באופן חח"ע את סוג האיזומטריה לפי שימור היפוך מגמה ומס' נקודות השבת.

מסעיף א' הראינו כי f שומרת מגמה $\Leftrightarrow$ f' שומרת מגמה.
מסעיף ב' הראינו כי על כל נק' שבת של f יש נק' שבת ל- f' ולהפך, לכן ל- f ו- f' יש מס' נקודות שבת שווה. מכך נובע כי f ו- f' הן איזומטריות מאותו סוג.

יפה!

שאלה 4:

א. נסמן $Sl_4 \cdot Sl_3 = a$, $Sl_2 \cdot Sl_1 = b$.

מהסיכום בעמ' 77 כיוון ש- l_4 ו- l_3 נחתכים, אז ההרכבה a היא סיבוב.

מהסיכום בעמ' 76 כיוון ש- l_2 ו- l_1 מקבילים אז ההרכבה b היא הזזה.

משאלה 50 בעמ' 78, ההרכבה $a \cdot b$ שהיא הרכבה של סיבוב והזזה (לא טריוויאלית כי כל הישרים בשאלה שונים) היא סיבוב.

ב. $Sl_1 \cdot Sl_2$ הופכי ל- $Sl_2 \cdot Sl_1$ עפ"י שאלה 43 בעמ' 75. נסמן $Sl_1 \cdot Sl_2 = x$ אז $Sl_2 \cdot Sl_1 = x^{-1}$.

כמו כן $Sl_3 = Sl_3^{-1}$ כי l_3 ישר ו- Sl_3 שיקוף,

מכאן ש-

$$Sl_3 \cdot x^{-1} = (x^{-1} Sl_3)^{-1} = x \cdot Sl_3^{-1} = x \cdot Sl_3$$

אז גם $Sl_4 \cdot Sl_3 \cdot x^{-1} = Sl_4 \cdot x \cdot Sl_3$ כנדרש.

יפה