תשובה 1

א. $x \subseteq y$ ב. $x \in y$ ג. $x \subseteq y$ ד. $x \in y$

ה. $x \subseteq y$ ו. $x \subseteq y$ ז. $x \subseteq y$ ח. שניהם.

תשובה 2

א. מהגדרת $\oplus$,

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

לפי ההדרכה לשאלה, נבחר U המכילה את A,B ונרשום

$= (A \cap B') \cup (B \cap A')$

בעזרת דיסטריבוטיביות החיתוך מעל האיחוד (עמ' 17 בספר הלימוד)

$= (A \cup B) \cap (A \cup A') \cap (B' \cup B) \cap (B' \cup A')$

לפי טענה בתחתית עמ' 22 בספר, $A \cup A' = B \cup B' = U$.

לפי שאלה 1.11 בעמ' 16 בספר, ניתן לזרוק את U מהחיתוך.

נקבל בהמשך לשוויון המקורי,

$= (A \cup B) \cap (B' \cup A')$

בעזרת כלל דה-מורגן (סעיף 1.4.3 בספר)

$= (A \cup B) \cap (B \cap A)'$

ולבסוף, שוב לפי ההדרכה לשאלה

$= (A \cup B) - (B \cap A)$

ב. נתחיל בעזרת ההדרכה לשאלה:

$(A - B) \cup (B - C) = (A \cap B') \cup (B \cap C')$

מכאן בעזרת שימוש חוזר בפילוג (דיסטריבוטיביות, סעיף 1.3.4 בספר) של האיחוד מעל החיתוך:

$= (A \cup B) \cap (A \cup C') \cap (B' \cup B) \cap (B' \cup C')$

נזרוק את $B' \cup B$ (נימוק ר' בצעד דומה בהוכחת סעיף א' למעלה):

$= (A \cup B) \cap (A \cup C') \cap (B' \cup C')$

שימוש בכלל דה-מורגן בגורם הימני, וכינוס שני האיברים השמאליים בעזרת חוק הפילוג:

$= (A \cup (B \cap C')) \cap (B \cap C)'$

ובעזרת ההדרכה לשאלה

$= (A \cup (B - C)) - (B \cap C)$

ג. נתחיל בעזרת ההדרכה לשאלה :

$$(A-B)\cap(C-D)=(A\cap B')\cap(C\cap D')$$

בעזרת קיבוץ (אסוציאטיביות) וחילוף (קומוטטיביות, עמ' 15 בספר) החיתוך :

$$=(A\cap C)\cap(B'\cap D')$$

ולפי כלל דה-מורגן :

$$=(A\cap C)\cap(B\cup D)'$$

ושוב לפי ההדרכה לשאלה :

$$=(A\cap C)-(B\cup D)$$

תשובה 3

א. נניח $X\oplus A=Y\oplus A$. נבצע בשני האגפים הפרש סימטרי עם A :

$$(X\oplus A)\oplus A=(Y\oplus A)\oplus A$$

לפי שאלה 1.22ב (אסוציאטיביות) נקבל

$$X\oplus(A\oplus A)=Y\oplus(A\oplus A)$$

מהמשך סעיף ב' באותה שאלה, $A\oplus A=\varnothing$, ולכן קיבלנו :

$$X\oplus\varnothing=Y\oplus\varnothing$$

ולפי טענה אחרת באותו סעיף (הפרש סימטרי עם הקבוצה הריקה) קיבלנו

$X=Y$.

הערה : הפרש סימטרי הוא פעולה חילופית (שוב 1.22ב) ,

לכן קיבלנו שנוכל לצמצם גם משמאל, כלומר : אם $A\oplus X=A\oplus Y$ אז $X=Y$.

ב. כיוון אחד (אם $A=B$) מיידי משאלה 1.22ב : $A\oplus A=\varnothing$.

כיוון שני : אם $A\oplus B=\varnothing$ משמע $A\oplus B=A\oplus A$ (כי כאמור $A\oplus A=\varnothing$).

מכאן לפי כלל הצמצום משמאל שהוכחנו למעלה בסעיף א' : $B=A$.

ג. אם $A=B'$, ניעזר בשאלה 2א בממ"ן זה ונקבל המבוקש (השלימו הפרטים) !

כיוון שני : נובע מהכיוון הראשון בעזרת כלל הצמצום, בדומה לסעיף ב' :

נניח $A\oplus B=U$. כאמור בכיוון הראשון של סעיף זה, $A\oplus A'=U$.

לכן $A\oplus B=A\oplus A'$. לפי כלל הצמצום מסעיף א' : $B=A'$.

ד. כיוון אחד : אם $B=\varnothing$ אז $A\oplus B=A$ לפי שאלה 1.22ב (הפרש סימטרי עם הקבוצה הריקה). כיוון שני : נובע מהכיוון הראשון בעזרת כלל הצמצום, בדומה לסעיפים ב, ג.

תשובה 4

א. $B_n = \{n\cdot k \mid k \in \mathbf{N}^*\}$, משמע B_n היא קבוצת כל הכפולות של n.

$B_n \cap B_m$ היא אפוא קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מ- 0, והמתחלקים הן ב- n והן ב- m:

$$B_n \cap B_m = \{nk \mid k \in \mathbf{N}^*\} \cap \{ms \mid s \in \mathbf{N}^*\}.$$

מכאן, לפי הטענה שבהדרכה, נובע שכל אבר של $B_n \cap B_m$ מתחלק ב $c(n,m)$. משמע:

$$B_n \cap B_m \subseteq B_{c(n,m)}.$$

מצד שני, כל אבר של $B_{c(n,m)}$ מתחלק ב- $c(n,m)$, ולכן ודאי מתחלק הן ב- n והן ב- m. לפיכך

$$B_{c(n,m)} \subseteq B_n \cap B_m.$$

משתי ההכלות: $B_n \cap B_m = B_{c(n,m)}$.

את הטענה שבהדרכה (כל כפולה משותפת של n, m מתחלקת בכפולה המשותפת המינימלית שלהם) ניתן להוכיח למשל בעזרת פירוק של n, m לגורמים ראשוניים, ובניית $c(n, m)$ מתוך פירוק זה. נושא זה אינו מענייננו בקורס הנוכחי.

ב. נראה כי לכל $m \in \mathbf{N}^*$, m **אינו** שייך לחיתוך הנ"ל. יהי $m \in \mathbf{N}^*$.

מהגדרת B_m, כל אברי B_m גדולים או שווים m. מובן אפוא כי $m \notin B_{m+1}$.

לפיכך m אינו שייך לחיתוך כל ה- B_n-ים.

ג. יהי $n \in \mathbf{N}^*$. אם קיימים $m,k \in \mathbf{N}^*$ כך ש- $n = km$ אז מובן כי $B_n \subseteq B_m$.

אם $1 < m < n$ אז מכך ש- $B_n \subseteq B_m$ ומהגדרת D_n נקבל כי $D_n = \phi$.

לפיכך D_n ריקה עבור כל n המתחלק במספר טבעי השונה מ- 1 ומ- n,

כלומר עבור כל n שאינו ראשוני.

מצד שני, נראה כי אם n ראשוני, אז D_n אינה ריקה:

אם n ראשוני, אז לכל m טבעי המקיים $1 < m < n$, n אינו מתחלק ב- m, ולכן $n \notin B_m$.

מצד שני, תמיד $n \in B_n$. מהגדרת D_n נקבל אפוא $n \in D_n$, ולכן D_n אינה ריקה.

הראינו אפוא שקבוצת ערכי n עבורם $D_n \neq \varnothing$ היא קבוצת המספרים הראשוניים.

איתי הראבן