כ' בחשון תש"ף

18

מס' שאלון - 490

בנובמבר 2019

סמסטר 2019ג

מס' מועד 92

20476 / 4

שאלון בחינת גמר

20476 - מתמטיקה בדידה

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה 3 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים:

חלק א:
שאלת חובה. את התשובה לכל סעיף כתבו במחברת בלבד.

חלק ב:
עליכם לענות על שלוש מתוך ארבע השאלות.
אם תענו על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

שימו לב:
* בחלק ב יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד, וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
* אם ברצונכם להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליכם לחזור ולהוכיחן.
* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרתם אותם.

חומר עזר:
כל חומר עזר מותר בשימוש. אפשר להשתמש במחשבון מדעי.
אסור בשימוש כל מכשיר אלקטרוני שבאמצעותו ניתן לאצור מידע לרבות מכשיר טלפון נייד, מחשב נישא, שעון חכם וכד'.

בהצלחה !!!

אינכם חייבים
להחזיר את השאלון לאוניברסיטה הפתוחה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק') **א.** בשאלה זו המשתנים p, x, y מייצגים **מספרים טבעיים גדולים מ- 1.** 2, 3, 4, 5, 6...

את הפסוק "p **הוא מספר ראשוני**" ניתן להצרין כך:

[1] $\forall x \forall y((p = xy) \rightarrow ((p = x) \vee (y = 1)))$ אם $x = 1$ אז $y = p$.

[2] $\forall x \forall y((p = xy) \wedge ((p = x) \vee (p = y)))$

[3] $\forall x \forall y((p = xy) \rightarrow ((p \neq x) \vee (p = y)))$ אם $x = p$ אז $y \neq p$

[4] $\forall x \forall y(((x > 1) \wedge (y > 1)) \rightarrow (p \neq xy))$

(תזכורת: מספר טבעי $p > 1$ הוא ראשוני אם המחלקים **היחידים** שלו הם 1 ו- p)

(7 נק') **ב.** נסמן כרגיל: $\mathbf{R}$ קבוצת המספרים הממשיים, $\mathbf{Q}$ קבוצת המספרים הרציונליים.

המשלימים בשאלה זו הם ביחס ל- $\mathbf{R}$.

נתונה קבוצה $A \subseteq \mathbf{R}$ כך ש- A שקולה ל- $\mathbf{R}$. אז

[1] $|A \cap \mathbf{Q}| = \aleph_0$

$A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

[2] $|A \cap \mathbf{Q}^c| > \aleph_0$

[3] $|A^c \cap \mathbf{Q}| = \aleph_0$

$A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\bar{A} = \{0\}$

[4] $|A^c \cap \mathbf{Q}| < \aleph_0$

$A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\bar{A} = \mathbb{Q}$

(6 נק') **ג.** T הוא עץ מתויג בעל סדרת פרופר $(\dot{1},\dot{2},\dot{2},\dot{3},\dot{3},\dot{3},\dot{4},\dot{4},\dot{4},\dot{4})$. אז:

[1] הדרגה של כל צומת ב- T היא לכל היותר 4. 5

[2] מספר העלים ב- T שווה למספר הצמתים האחרים שלו. 8 עלים, 4 צמתים שאינם עלים

[3] כל שני צמתים ב- T שהם בעלי אותה דרגה הם בהכרח עלים.

[4] ב- T יש בדיוק 10 צמתים. 12 צמתים

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו : 81 נקודות

שאלה 2

נסמן $A = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. ($\mathbf{R}$ היא קבוצת כל המספרים הממשיים) על הקבוצה A מגדירים יחס R כך :

$(a_1,b_1)R(a_2,b_2)$ אם ורק אם $(a_1 - a_2) = 2(b_1 - b_2)$

(9 נק') א. הוכיחו ש- R יחס שקילות על A

(9 נק') ב. הוכיחו לכל $(a,b) \in R$ קיים מספר ממשי c כך ש- $(a,b)R(1,c)$. $c = \frac{2b-a+1}{2}$

(9 נק') ג. מיצאו את העוצמה של קבוצת מחלקות השקילות של R . אין

שאלה 3

(13 נק') א. בשמונה מקומות המסומנים ב- $1,2,3,4,5,6,7,8$ מסדרים את שמונת הסימנים $1,1,2,2,3,3,4,4$. מיצאו את מספר הסידורים שבהם אף אחד מהמספרים $1,2,3,4$ לא יושב במקום שמסומן במספר הזהה לו. 864

(14 נק') ב. מיצאו את מספר הפונקציות $f : \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \to \{1,2,3,4\}$ המקיימות $|f^{-1}[\{1\}]| = |f^{-1}[\{2\}]| = |f^{-1}[\{3\}]| = |f^{-1}[\{4\}]|$.

2,520

שאלה 4

בשאלה זו נתייחס לפתרונות בטבעיים של $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + 3x_8 + 3x_9 + 3x_{10} = n$

כאשר $x_4, x_5, x_6, x_7 \le 2$, (אין תנאים נוספים על שאר הנעלמים)

(14 נק') א. רישמו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות של המשוואה.

פשטו את הביטוי בעזרת : $1+x+x^2 = (1-x^3)/(1-x)$.

(13 נק') ב. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה .

שאלה 5

בשאלה זו נתייחס לגרף מישורי פשוט G , על 6 צמתים, שבו דרגות הצמתים הן 3,3,4,4,5,5.

(9 נק') א. הראו ש- G קשיר ומיצאו את מספר הפאות שלו. 8

(9 נק') ב. נסמן ב- G_1 את הגרף המתקבל מ- G על-ידי מחיקת צומת אחד שדרגתו 5, יחד עם כל הקשתות הסמוכות לו. מיצאו את מספר הפאות של G_1 . 4

(9 נק') ג. הוכיחו שבגרף G_1 קיים מסלול אוילר וקיים גם מסלול המילטון. נמקו את התשובה.

שולה 1 ו-6 דפיק 3

בהצלחה!