הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל הפקולטה למדעי המחשב

אלגוריתמים 1 (234247) – סמסטר אביב 2005

בחינת סוף סמסטר – מועד א' 3/7/2005

הוראות:

1. משך הבחינה 3 שעות.
2. הבחינה מכילה 5 שאלות.
3. אסור שימוש בכל חומר עזר למעט דף A4 יחיד כתוב משני צדדיו.
4. אם הנכם מסתמכים על טענות שנלמדו בהרצאה או בתרגול, צטטו אותן. כל טענה אחרת יש להוכיח.

שאלה 1 (18 נקודות)

נתונה סדרה של n מספרים חיוביים $S=(a_1,a_2,...,a_n)$. תת-סדרה של S נקראת **חוקית** אם אינה מכילה שני איברים שכנים ב- S. ערך תת-סדרה של S הוא סכום המספרים בתת-הסדרה. הציעו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המחשב תת-סדרה חוקית שערכה מקסימלי. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

דוגמה: אם $S=(3,1,7,9,5)$ אז תת-הסדרה החוקית המקסימלית היא $(3,7,5)$ (ערכה 15), בעוד שתת-הסדרה $(3,9,5)$ אינה חוקית, משום ש- 5 ו- 9 שכנים ב- S.

שאלה 2 (20 נקודות)

יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון ותהא $L:V\to\mathbb{R}$ פונקציה המתאימה לכל צומת מספר ממשי. לכל צומת $v\in V$ נסמן ב- $R(v)$ את קבוצת הצמתים אליהם יש מסלול מכוון מ- v ונגדיר $\ell(v)=\min_{u\in R(v)}\{L(u)\}$.

א. הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(V+E)$ שבהינתן גרף מכוון **וחסר מעגלים** $G=(V,E)$ ופונקציה L כנ"ל, מחשב לכל צומת $v\in V$ את $\ell(v)$. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות (10 נקודות).

ב. הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(V+E)$ שבהינתן גרף מכוון (לאו דווקא חסר מעגלים), $G=(V,E)$ ופונקציה L כנ"ל, מחשב לכל צומת $v\in V$ את $\ell(v)$. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות (10 נקודות).

<u>שאלה 3 (19 נקודות)</u>

יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון עם משקלים חיוביים על הקשתות, ויהא $s\in V$ צומת ב- G. לכל צומת $v\in V$ נסמן ב- $\delta(v)$ את המרחק הקל ביותר מ- s ל- v ב- G.

תהא $e\in E$ קשת ב- G, ויהא G' הגרף המתקבל כאשר הופכים את כיוונה של e. לכל צומת $v\in V$ נסמן ב- $\delta'(v)$ את המרחק הקל ביותר מ- s ל- v ב- G'.

א. האם יתכן כי קיים צומת $v\in V$ כך ש- $\delta'(v)<\delta(v)$? הוכיחו או הפריכו (4 נקודות).

בסעיפים הבאים נניח כי קיים צומת $t\in V$ כך ש- e נמצאת על מסלול קל ביותר מ- s ל- t.

הערה: למעשה, ההנחה רלוונטית רק לסעיף ג'.

ב. הראו שאם קיים צומת $v\in V$ כך ש- $\delta'(v)<\delta(v)$ אז קיימת קשת $e'=(u,w)$ ב- G', כך ש- $\delta'(u)\geq\delta(u)$ וגם $\delta'(w)<\delta(w)$ (5 נקודות).

ג. הוכיחו שלא קיים צומת $v\in V$ כך ש- $\delta'(v)<\delta(v)$ (10 נקודות).

רמז: היעזרו בסעיף הקודם והפרידו למקרים בהם $e=e'$ ו- $e\neq e'$.

<u>שאלה 4 (22 נקודות)</u>

נתונה קבוצה בת k אנשים הנמצאים בתוך בניין. בזמן 0 פורצת בבניין שריפה המאיימת לכלותו תוך T יחידות זמן. הניחו כי כל האנשים נמצאים בחדר אחד s ולבניין יציאה אחת בחדר t. בבניין ישנם n חדרים (כך שכל חדר יכול להכיל את כל האנשים) ו- m מסדרונות, כך שכל מסדרון מחבר שני חדרים. הניחו כי כל מסדרון הינו חד-סיטרי (כלומר, ניתן לעבור בו בכיוון אחד בלבד).

בנוסף, כל מסדרון j מאופיין על ידי מספרים שלמים וחיובים c_j ו- δ_j, שמשמעותם שבכל יחידת זמן שלמה $\tau\geq 0$ יכולים להיכנס למסדרון לכל היותר c_j אנשים, ושאנשים שנכנסו למסדרון בזמן τ יצאו ממנו בזמן $\tau+\delta_j$. הניחו שרק ביחידות זמן שלמות ניתן להיכנס למסדרון (לדוגמה, לא יתכן שלאחר 2.4 יחידות זמן מרגע פריצת השריפה יצאו אנשים מחדר x לכיוון חדר y דרך המסדרון ביניהם).

כמו כן, הניחו שהזמן הדרוש לחצות חדר הוא 0 יחידות זמן.

דוגמה: נניח ש- $k=10$, $T=6$ וישנו חדר אחד נוסף v, כך שיש מסדרון אחד מ- s ל- v שיכול להכיל 5 אנשים ודרושות 3 יחידות זמן לחצות אותו, ומסדרון נוסף מ- v ל- t שיכול להכיל 5 אנשים ודרושות 2 יחידות זמן לחצות אותו.

אם בזמן 0 יצאו 5 אנשים מ- s ל- v ובזמן 1 יצאו יתר חמשת אנשים מ- s ל- v, אז הקבוצה הראשונה תגיע לחדר v בזמן 3 ותוכל להגיע ממנו ל- t בזמן 5. הקבוצה השנייה תגיע לחדר v בזמן 4 ולכן תוכל להגיע לחדר t בזמן 6. כלומר האנשים יכולים להיחלץ מן הבניין תוך 6 יחידות זמן.

הציעו אלגוריתם יעיל המכריע האם יכולים כל האנשים להיחלץ מן הבניין הבוער תוך T יחידות זמן. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

רמז: הגדירו גרף שבו הצומת $v_{i,j}$ מייצג את החדר ה- i בזמן j.

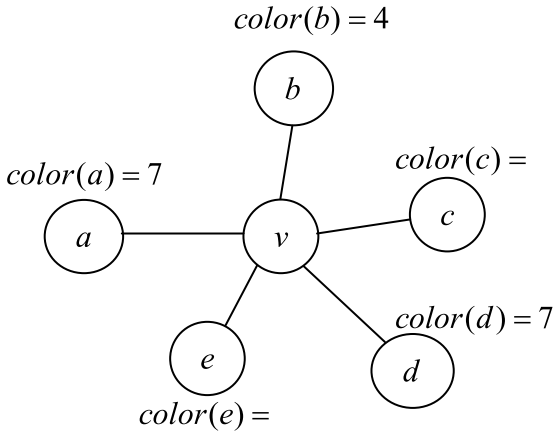
שאלה 5 (24 נקודות)

תזכורת: **צביעה** של גרף היא התאמה של צבע לכל צומת, כך שכל שני צמתים שכנים צבועים בצבעים שונים זה מזה. **צביעה אופטימלית** של גרף היא צביעה של הגרף תוך שימוש במספר הקטן ביותר האפשרי של צבעים.

בתרגול ראינו אלגוריתם חמדני שבהינתן גרף כלשהו וסדר של צמתיו, צובע את הצמתים לפי הסדר כך שהצומת הנוכחי v נצבע בצבע הקטן ביותר (מספר שלם גדול מ-0) שלא נעשה בו שימוש לצביעת שכניו של v שכבר נצבעו.

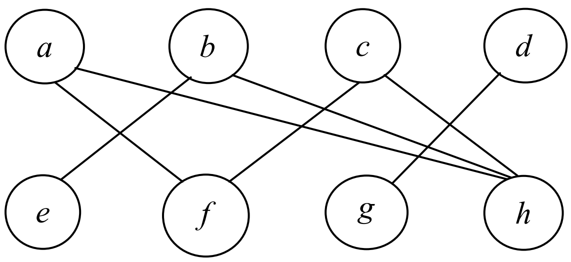
כמו כן, ראינו שבהינתן גרף דו-צדדי (כלומר 2-צביע) האלגוריתם החמדני עלול שלא לצבוע את הגרף בצביעה אופטימלית. בשאלה זו ננסה לפתור בעיה זו.

בהינתן צביעה של (חלק מ-) צמתי הגרף, נגדיר את **דרגת הרוויה** (degree saturation) של צומת v כמספר הצבעים השונים המשמשים לצביעת שכניו. למשל, דרגת הרוויה של v בדוגמה הבאה היא 2, כי ל-v שני שכנים הצבועים בצבע 7 (a ו- d), שכן אחד הצבוע בצבע 4 (b), ושני שכנים שכלל אינם צבועים (c ו- e).



נבצע את השינוי הבא באלגוריתם החמדני: הצומת שייצבע בכל שלב הוא צומת שדרגת הרוויה שלו היא הגבוהה ביותר מבין הצמתים הלא צבועים (אם יש שיוויון בין מספר צמתים, למשל בהתחלה, נבחר ביניהם שרירותית). נסמן את האלגוריתם החדש ב- A.

א. הריצו את A על הגרף הבא ורשמו את הצבע שהתקבל לכל צומת (2 נקודות).



ב. הוכיחו שבהפעלת A על גרף קשיר, לכל צומת שנצבע, למעט הראשון, יש ברגע צביעתו לפחות שכן צבוע אחד (5 נקודות).

ג. הוכיחו כי בהפעלת A על גרף דו-צדדי וקשיר מתקבלת צביעה אופטימלית (10 נקודות).

ד. הוכיחו כי בהפעלת A על גרף דו-צדדי כלשהו (לאו דווקא קשיר) מתקבלת צביעה אופטימלית (4 נקודות).

ה. נניח כי אלגוריתם A מומש על ידי מבנה נתונים בו הצמתים שלא נצבעו מוחזקים בערימה (heap) הממויינת לפי דרגת הרוויה. מהי הסיבוכיות של מימוש זה? נמקו את תשובתכם (3 נקודות).

בהצלחה!