

## קווים לפתרון שאלות בממ"ן 12 סמסטר 2013

### שאלה 3

- א. כדי להוכיח שהמכונה  $M$  עוצרת על כל קלט, נראה שכל שלב של המכונה  $M$  מסתיים. אין במכונה  $M$  אפשרות של חישוב אינסופי.
- בשלב 1 עוברים על המילים לפי הסדר הלכסיקוגרפי עד שמגיעים למילה  $w$ .  
 $w$  היא מילה מעל האלפבית, ועוברים על המילים לפי סדר. לכן חייב להיות שנגיע ל- $w$  ונמצא את המיקום שלה בסדר הלכסיקוגרפי. (נמצא את  $i$ ).
- בשלב 2 מריצים את  $E$  עד שהוא מדפיס את המחרוזת  $i$ - $E$ .  
מכיוון שהשפה  $HALT-ALL_{TM}$  אינסופית (יש אינסוף מכונות שעוצרות על כל קלט שלהן), ו- $E$  מפיק את השפה הזו, אז חייב להיות שתודפס המחרוזת  $i$ - $E$ .  
מחרוזת זו היא מילה ששייכת לשפה  $HALT-ALL_{TM}$ . היא תיאור של מכונה  $A$  שעוצרת על כל קלט שלה. לכן בשלב 3, כאשר מריצים את  $A$  על  $w$ , בהכרח  $A$  תעצור (במצב המקבל או במצב הדוחה), ואז גם המכונה  $M$  תעצור.
- ב. מכיוון ש- $M$  היא מכונה שעוצרת על כל קלט שלה, אז  $\langle M \rangle$  שייכת לשפה  $HALT-ALL_{TM}$ . המונה  $E$  מפיק את השפה הזו. לכן  $E$  ידפיס את  $\langle M \rangle$ . לכן יש מספר  $j$  כך שהמחרוזת  $j$ - $E$  מדפיס את  $\langle M \rangle$ .
- ג. כאשר נריץ את  $M$  על המילה  $w$  שהיא המילה  $j$ - $E$  לפי הסדר הלכסיקוגרפי, נמצא בשלב 1 של  $M$  את המספר  $j$ . בשלב 2 נריץ את  $E$  עד להדפסת המחרוזת  $j$ - $E$  של  $E$  מדפיס. מחרוזת זו היא התיאור של המכונה  $M$ . בשלב 3 נריץ את  $M$  על  $w$ . אם  $M$  מקבלת את  $w$ , נדחה. אם  $M$  דוחה את  $w$ , נקבל.  
קיבלנו ש- $M$  מקבלת את  $w$  אם ורק אם  $M$  דוחה את  $w$ . זו סתירה.

### שאלה 4

- נראה שאם יש מכונה מכריעה  $R$  לשפה  $A_{TM}$ , אז אפשר לבנות מכונה מכריעה לשפה  $HALT_{TM}$ :  
"על קלט  $\langle M, w \rangle$  כאשר  $M$  היא מכונת טיורינג ו- $w$  מילה:
1. בנה מכונה  $K$  שזהה בכל למכונה  $M$ , פרט לכך שכל כניסה ל- $q_{reject}$  מוחלפת בכניסה ל- $q_{accept}$ .
  2. בעזרת המכונה  $R$  קבע האם  $\langle K, w \rangle$  שייכת ל- $A_{TM}$ .  
אם כן, קבל; אם לא, דחה."

## שאלה 5

א. אפשר להשתמש במשפט Rice :

$P$  תהיה השפה של התיאורים של מכונות טיורינג שיש בשפה שהן מזהות פחות מ-50 מילים.  
יש מכונות טיורינג שהתיאור שלהן שייך ל- $P$  ויש מכונות שהתיאור שלהן לא שייך ל- $P$ .  
אם שתי מכונות מזהות אותה השפה, אז או שהתיאורים של שתיהן שייכים ל- $P$  או שהתיאורים של שתיהן לא שייכים ל- $P$ .  
לפי משפט Rice,  $P$  איננה כריעה.  $P$  זהה לשפה  $A$ .

ב. אי אפשר להשתמש במשפט Rice, משום שתכונת השייכות ל- $B$  איננה תכונה של השפה שמכונה מזהה, אלא תכונה של המכונה עצמה - ייתכנו שתי מכונות שמזהות אותה השפה, ואחת מהן שייכת ל- $B$  ואילו השנייה איננה שייכת ל- $B$ .  
דוגמה: תהייה  $M_1$  ו- $M_2$  שתי מכונות שמקבלות כל מילה מעל אלפבית נתון  $\Sigma$  - השפה של שתיהן היא  $\Sigma^*$ .

$M_1$  נכנסת מיד למצב המקבל - על כל קלט היא מבצעת צעד אחד. לכן  $\langle M_1 \rangle$  שייכת ל- $B$ .  
 $M_2$  קוראת את הקלט עד שהיא מגיעה לסמל הרווח שמימין למילת הקלט, ואז נכנסת למצב המקבל. על כל מילה  $w$  היא מבצעת  $|w|+1$  צעדים. לכן  $\langle M_2 \rangle$  לא שייכת ל- $B$ .

ג. אפשר להשתמש במשפט Rice :

$P$  תהיה השפה של כל התיאורים של מכונות טיורינג שהשפה שהן מזהות היא שפה כריעה.  
יש מכונות טיורינג שהתיאור שלהן שייך ל- $P$  ויש מכונות שהתיאור שלהן לא שייך ל- $P$ .  
אם שתי מכונות מזהות אותה השפה, אז או שהתיאורים של שתיהן שייכים ל- $P$  או שהתיאורים של שתיהן לא שייכים ל- $P$ .  
לפי משפט Rice,  $P$  איננה כריעה.  $P$  זהה לשפה  $C$ .

## שאלה 6

"על קלט  $\langle A, w \rangle$  כאשר  $A$  הוא אוטומט סופי לא דטרמיניסטי ו- $w$  מילה :

1. סמן את המצב ההתחלתי של  $A$ .
2. תהי  $w = w_1 w_2 \dots w_k$ . ל- $i$  מ-1 עד  $k$ :
3. לכל מצב מסומן  $q$ , סמן את כל המצבים שאפשר להגיע אליהם מ- $q$  על-ידי קריאת  $w_i$ .  
אם אין אפשרות להגיע ל- $q$  עצמו ממצב מסומן על-ידי קריאת  $w_i$ , הסר את הסימון מ- $q$ .
4. בדוק האם יש מצב מקבל בקבוצת המצבים המסומנים. אם כן, קבל. אם לא, דחה."

**הרעיון:** לכל תחילית  $v$  של  $w$ , לאחר קריאת  $v$ , מסומנת קבוצת המצבים שבהם האוטומט יכול להימצא לאחר שהוא קרא את  $v$ .

לאחר שהסתיימה קריאת  $w$  כולה, בודקים האם בקבוצת המצבים המסומנים כרגע (המצבים שבהם האוטומט יכול להימצא לאחר קריאת  $w$  כולה) יש מצב מקבל. אם כן, יש מסלול חישוב על  $w$  שמסתיים במצב מקבל. אם לא, אין מסלול חישוב כזה.  
**המקום הנדרש ליניארי בגודל הקלט.** (צריכים להיות מסוגלים לסמן מצבים).

## שאלה 7

א. רדוקצית מיפוי של  $A_{TM}$  ל- $INFINITE_{TM}$ :

"על קלט  $\langle M, w \rangle$  כאשר  $M$  היא מכונת טיורינג ו- $w$  היא מחרוזת:

1. בנה את המכונה  $M_1$  הבאה:

$$M_1 = \text{"על קלט } x:$$

1. הרץ את  $M$  על  $w$  וקבל (את  $x$ ) אם  $M$  קיבלה את  $w$ ."

2. החזר את  $\langle M_1 \rangle$ ."

**הסבר:** אם  $\langle M, w \rangle$  שייכת ל- $A_{TM}$ , אז  $M_1$  מקבלת כל קלט שלה, ולכן  $\langle M_1 \rangle$  שייכת ל- $INFINITE_{TM}$ .

אם  $\langle M, w \rangle$  לא שייכת ל- $A_{TM}$ , אז  $M_1$  לא מקבלת אף קלט שלה, ולכן  $\langle M_1 \rangle$  לא שייכת ל- $INFINITE_{TM}$ .

ב. רדוקצית מיפוי של  $A_{TM}$  למשלימה של  $INFINITE_{TM}$ :

"על קלט  $\langle M, w \rangle$  כאשר  $M$  היא מכונת טיורינג ו- $w$  היא מחרוזת:

1. בנה את המכונה  $M_2$  הבאה:

$$M_2 = \text{"על קלט } x:$$

1. הרץ את  $M$  על  $w$   $|x|$  צעדים.

2. אם  $M$  קיבלה את  $w$  בתוך  $|x|$  צעדים, דחה (את  $x$ ); אחרת, קבל (את  $x$ )."

2. החזר את  $\langle M_2 \rangle$ ."

**הסבר:** אם  $\langle M, w \rangle$  שייכת ל- $A_{TM}$ , אז יש מספר צעדים  $y$  כך שלאחר ש- $M$  רצה  $y$  צעדים, היא מקבלת את  $w$ . לכן על קלט  $x$  כך ש- $|x| \geq y$ ,  $M_2$  תדחה, ולכן  $\langle M_2 \rangle$  לא שייכת ל- $INFINITE_{TM}$ .

אם  $\langle M, w \rangle$  לא שייכת ל- $A_{TM}$ , אז לכל מספר צעדים  $y$ , לאחר ש- $M$  רצה  $y$  צעדים, היא לא מקבלת את  $w$ . לכן  $M_2$  תקבל כל קלט  $x$ , ולכן  $\langle M_2 \rangle$  שייכת ל- $INFINITE_{TM}$ .

ג.  $INFINITE_{TM}$  איננה מזוהה-טיורינג, כי הרדוקציה של סעיף ב היא גם רדוקציה של המשלימה

של  $A_{TM}$  ל- $INFINITE_{TM}$ , והמשלימה של  $A_{TM}$  איננה מזוהה-טיורינג.

המשלימה של  $INFINITE_{TM}$  איננה מזוהה-טיורינג, כי הרדוקציה של סעיף א היא גם רדוקציה

של המשלימה של  $A_{TM}$  למשלימה של  $INFINITE_{TM}$ , והמשלימה של  $A_{TM}$  איננה מזוהה-טיורינג.