

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל שעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.
 בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מילים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול לחביא להורדה של נקודה או שתיים.
 (6 נק') א. R הוא יחס מעל קבוצה A .

איזה מהפסוקים הבאים מביע את הטענה ש- R הוא יחס טרנזיטיבי

$$\forall x \forall y \exists z ((xRz) \wedge (zRy) \wedge (xRy)) \quad [1]$$

$$\forall x \forall y \exists z ((xRz) \wedge (zRy) \rightarrow (xRy)) \quad [2]$$

$$\forall x \forall y \forall z ((xRz) \wedge (zRy) \wedge (xRy)) \quad [3]$$

$$\forall x \forall y \forall z ((xRz) \rightarrow ((zRy) \rightarrow (xRy))) \quad [4]$$

$$\forall x \forall y \forall z ((xRz) \rightarrow ((zRy) \wedge (xRy))) \quad [5]$$

בכל הסעיפים, הכמתים מתייחסים לאיברים של A .

$$(7 נק') ב. נתונות הקבוצות $A = N^{(1,2,3)}$ ו- $B = \{1,2\}^N$$$

(ראו הגדרה 5.19 בפרק 5, תורת הקבוצות). בחרו את התשובה הנכונה:

$$|B| = |P(A)| \quad [3] \quad |A| = |B| \quad [2] \quad |B| < |A| \quad [1]$$

$$|B| < |A \times A| \quad [5] \quad |A| = |P(N)| \quad [4]$$

$$(6 נק') ג. G הוא גרף אוילרי. נחבר שני צמתים של G על ידי הוספת קשת.$$

נסמן ב- G_1 את הגרף החדש. בחרו את האמירה הנכונה:

$$G_1 \text{ הוא גרף אוילרי. } 2 \leq \text{דרגת } G_1 \leq 3 \quad [1]$$

$$G_1 \text{ אינו המילטוני בן-המחזור } [2]$$

$$[3] \text{ אם נחבר שני צמתים של } G_1 \text{ על ידי הוספת קשת נקבל גרף אוילרי.}$$

$$[4] \text{ אם נחבר שני צמתים של } G_1 \text{ על ידי הוספת קשת, נקבל גרף שאין בו מסלול}$$

אוילר.

$$[5] - \text{ כל האמירות הקודמות אינן נכונות.}$$

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

מסקל כל שאלה 27 נקודות. מסקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

נתונים יחס שקילות R על קבוצה A ויחס שקילות S על קבוצה B .
הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

- 9) נק' א. $R \cup S$ הוא יחס שקילות על הקבוצה $A \cup B$.
9) נק' ב. אם $A \cap B = \emptyset$ אז $R \cup S$ הוא יחס שקילות על $A \cup B$.
9) נק' ג. אם $A \cap B \neq \emptyset$ אז $R \cup S$ אינו יחס שקילות על $A \cup B$.

שאלה 3

במחלק של חנות מחשבים נמצאים n מחשבים ישנים וזחים. בעלי החנות מעמיסים את המחשבים הישנים על 3 רכבים שונים (הרכב של איציק, הרכב של בני והרכב של גילה), שבכל אחד מהם יש מקום ל-24 מחשבים לכל היותר.

- 9) נק' א. רשמו מונקציה יוצרת עבור מספר הדרכים לחלק את n המחשבים הזחים בין 3 הרכבים השונים (לא חייבים לנצל את כל הרכבים).
18) נק' ב. אם מספר המחשבים הוא 70, חשבו בעזרת סעיף א' את מספר הדרכים לחלק את המחשבים בין שלושת הרכבים. הגיעו לנשובה מספרית.

שאלה 4

- 9) נק' א. מוצאו את כל האיברים במיתוח של $(x + y + z)^2$ בעלי מקדם שווה למספר המילים באורך 7 הכתובות באותיות A, A, A, B, B, B, C . (ראו כרך IV פרק 3.2.1)
18) נק' ב. בכמה מילים באורך 7 הכתובות באותיות A, A, A, B, B, B, C לא מופיע אף אחד משלושת הרצפים ABC, BCA, CAB ?

שאלה 5

יחיד \bar{p}, \bar{q} מסמרים ראשוניים שונים. על קבוצת הצמתים $V = \{1, p, q, pq, p^2q, pq^2\}$ נגדיר גרף $G = (V, E)$ כך: לכל שני צמתים $x, y \in V$ קיימת קשת $\{x, y\} \in E$ אם ורק אם x מחלק את y .
הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

- 9) נק' א. G הוא גרף מישורי.
9) נק' ב. קיים ב- G מסלול אוילר.
9) נק' ג. G הוא גרף המילטוני.

בהצלחה!

הדבק כאן את
מדבקת הנבחן



מספר התלמיד הנבחן
רשום את כל תשע הספרות

האוניברסיטה
הפתוחה



י"ד בתמוז תשע"ח

מס' שאלון - 487

27

ביוני 2018

מס' מועד 83

מסטר 2018 ב

20476 / 4

שאלון בחינת גמר

20476 - מתמטיקה בדידה

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה 4 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים:

חלק א: שאלת חובה. את התשובה לכל סעיף כתבו במחברת בלבד.

חלק ב: עליכם לענות על שלוש מתוך ארבע השאלות.
אם תענו על יותר מ-3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות
הראשונות.
שימו לב:

- * בחלק ב יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
- * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל
התשובות לשאלות שבספרי הלימוד, וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים".
אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
- * אם ברצונכם להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליכם
לחזור ולהוכיחן.
- * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה,
גם אם לא פתרתם אותם.

חומר עזר:

כל חומר עזר מותר בשימוש. אפשר להשתמש במחשבון מדעי.
אסור בשימוש כל מכשיר אלקטרוני שבאמצעותו ניתן לאצור מידע
לרבות מכשיר טלפון נייד, מחשב נישא, שעון חכם וכד'.

בהצלחה !!!

אינכם חייבים

להחזיר את השאלון לאוניברסיטה הפתוחה



חלק א: שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.
בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

6 נק' א. נניח ש- α הוא פסוק. אז:

$$[1] \quad \alpha \rightarrow \neg \alpha \text{ הוא סתירה.}$$

$$[2] \quad \alpha \rightarrow \neg \alpha \text{ אינו טאוטולוגיה.}$$

$$[3] \quad (\alpha \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow \neg \alpha \text{ הוא טאוטולוגיה.}$$

$$[4] \quad (\alpha \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow \alpha \text{ הוא טאוטולוגיה.}$$

$$[4] \quad \text{אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.}$$

7 נק' ב. N היא קבוצת מהספרים הטבעיים, R היא קבוצת הממשיים ו- A היא קבוצה כך ש- $|A \cap R| = |N|$. אז:

$$[1] \quad |A| = |N| \quad [2] \quad A \subseteq R$$

$$[3] \quad R \not\subseteq A \quad [4] \quad |A \cup R| > |R|$$

6 נק' ג. G הוא גרף פשוט על 5 צמתים.

$$[1] \quad \text{אם } G \text{ אוילרי אז } G \text{ מישורי}$$

$$[2] \quad \text{אם } G \text{ לא מישורי אז } G \text{ אוילרי}$$

$$[3] \quad \text{אם } G \text{ לא מישורי אז קיים ב- } G \text{ מסלול אוילר}$$

$$[4] \quad \text{אם } G \text{ מישורי אז קיים ב- } G \text{ מסלול אוילר}$$

$$[5] \quad \text{אם } G \text{ המילטוני אז } G \text{ מישורי}$$

חלק ב: ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

R הוא סדר חלקי על הקבוצה $A = \{a, b, c, d\}$ (שבה 4 איברים שונים).

ידוע ש- $S = R \cup \{(a, b)\}$ הוא יחס שקילות מעל A .

(8 נק') א. מיצאו את האיברים המינימליים ואת האיברים המקסימליים לגבי היחס R

(6 נק') ב. מיצאו את מחלקות השקילות של S .

(7 נק') ג. האם היחס $S \cup \{(c, d)\}$ טרנזיטיבי? נמקו את התשובה.

(6 נק') ד. הוכיחו או הפריכו: יחס רפלקסיבי T מעל A המקיים $T^2 = T$ הוא בהכרח יחס שקילות או סדר חלקי מעל A .

שאלה 3

(10 נק') א. מיצאו את המקדם של x^5 בפיתוח של הפונקציה היוצרת: $f(x) = \frac{(1+x^2)^3}{(1-x)^3}$.

(10 נק') ב. מיצאו פונקציה יוצרת המתאימה לחישוב מספר הפתרונות של המשוואה

$$x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 = n, \text{ בטבעיים,}$$

כאשר $0 \leq x_i \leq 3$ לכל $1 \leq i \leq 3$ ו- y_1, y_2, y_3 זוגיים. (שימו לב, גם 0 זוגי)

(7 נק') ג. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה שבסעיף ב' כאשר $n = 5$.

שאלה 4

נסמן ב- a_n את מספר הסדרות באורך n , שאיבריהן הם האותיות a, b, c והספרות $1, 2, 3, 4, 5, 6$ שאין בהן הופעה של שתי ספרות הסמוכות זו לזו.

למשל $1a2b3$ היא סדרה מותרת באורך 5, אך $1a23b$ היא סדרה אסורה.

(7 נק') א. מיצאו בעזרת חישוב ישיר את a_0, a_1, a_2 .

(7 נק') ב. מיצאו יחס נסיגה ל- a_n ובדקו שהערכים של a_0, a_1, a_2 מתאימים ליחס הנסיגה.

(13 נק') ג. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n .

המשך הבחינה בעמוד הבא

שאלה 5

בשאלה זו נתייחס לכל העצים T בעלי 7 צמתים המתויגים במספרים $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

(9 נק') א. מיצאו את העץ בעל סדרת פרופר $(2, 2, 4, 6, 6)$.

(9 נק') ב. מהו מספר העצים המתויגים T שבהם הצומת המתויג ב-2 הוא לא עלה?

(9 נק') ג. מהו מספר העצים T , שבהם לפחות אחד מהצמתים $2, 4, 6$ הוא עלה? (אין כל תנאי לגבי שאר הצמתים)

ב ה צ ל ח ה !

100 1) א [3]

100 2) [1]

100 3) א ב ג ד ה

2

האם x^5 קיים במרחב הפולינומים?

$$3) 1c) f(x) = \frac{(1+x^2)^3}{(1-x)^3} = (1+x^2)^3 \cdot \frac{1}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} x^{2i} \cdot \sum_{d=0}^{\infty} \binom{2+d}{d} x^d$$

$i=0, i=1, i=2$ $d=3$ $d=3$ $d=1$ \leftarrow המצא x^5 במרחב

$$\binom{3}{0} \cdot \binom{2+5}{5} + \binom{3}{1} \cdot \binom{2+3}{3} + \binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1} = \binom{7}{5} + 3 \cdot \binom{5}{2} + 3 \cdot 3 =$$

$$= 21 + 30 + 9 = 60 \rightarrow 60\text{-המקום } x^5 \text{ קיים במרחב}$$

$$2) x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

$$0 \leq x_i \leq 3, y_1, y_2, y_3 \text{ חופשי}$$

$$1 \leq i \leq 3$$

האם x^0 קיים במרחב?

$$f(x) = (1+x+x^2+x^3)^3 (1+x^2+x^4+\dots)^3$$

$$d) \frac{(1-x^4)^3}{(1-x)^3} \cdot \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^3 =$$

$(1-x^4)^3$ \leftarrow x^4 קיים במרחב

$$= \frac{(1-x^4)^3}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^3} = \frac{(1-x^4)^3}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{(1-x)^3}$$

$$(1-x^4)^3 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} (-1)^i x^{4i} \cdot \sum_{d=0}^{\infty} \binom{2+d}{d} x^d \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2+n}{n} x^n$$

✓

הילך אלה (3) 2

$$\sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} (-1)^i x^{4i} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2+j}{j} x^j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2+n}{n} x^{2n}$$

נקים את המקדם של x^5 בצורה זו:

$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$j=1$	$j=1$	$j=3$	$j=5$
$n=2$	$n=0$	$n=1$	$n=0$

$$\binom{3}{0} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2} - \binom{3}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{0} + \binom{3}{0} \binom{5}{3} \binom{3}{1} + \binom{3}{0} \binom{7}{5} \binom{2}{0} =$$

$$= 3 \cdot 6 - 3 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 21 = 60$$

המקדם של x^5 הוא 60 ולכן למספר בינומי
הגדול אוה הוא 60.

✓

4) $a_n =$ מספר הספרות באלו n ספרות קטנות מ-6

$$A = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

הא

אזי תחילה 6 שם סדר

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 9$$

$$a_2 = 45$$

האזי תחילה 6 שם סדר

אזי תחילה 6 שם סדר

כל מילה יכולה להיות סדרה. בסדרה למי

2 מקום סדרה 9' אפוא. נחמיר אפוא

$$45 = 9 \cdot 6^2 \leq 6^2$$

$$7) a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)}$$

$$a_n^{(1)} \rightarrow \begin{matrix} \text{מספר} \\ \text{מילים} \\ \text{מספר} \end{matrix} \begin{matrix} \text{מספר} \\ \text{מילים} \\ \text{מספר} \end{matrix} \begin{matrix} \text{מספר} \\ \text{מילים} \\ \text{מספר} \end{matrix}$$

$$a_n^{(2)} \rightarrow \begin{matrix} \text{מספר} \\ \text{מילים} \\ \text{מספר} \end{matrix} \begin{matrix} \text{מספר} \\ \text{מילים} \\ \text{מספר} \end{matrix} \begin{matrix} \text{מספר} \\ \text{מילים} \\ \text{מספר} \end{matrix}$$

11

$$a_n = 3a_{n-1} + 18a_{n-2}$$

נניח כי a_n של n מקרים

אם a_n מילה אחת

אם a_n מילה אחת

אם a_n מילה אחת

אם a_n מילה אחת

אם a_n מילה אחת

אם a_n מילה אחת

אם a_n מילה אחת

אם a_n מילה אחת

אם a_n מילה אחת

$$= 45 \checkmark$$

אם a_n מילה אחת

אם a_n מילה אחת

11

אם a_n מילה אחת

$$c) a_n = 3a_{n-1} + 18a_{n-2}$$

נמצא את המשוואה החדשה

$$x^n = a_n \text{ נניח } x^n = a_n$$

$$x^n = 3x^{n-1} + 18x^{n-2} \quad | \quad x^{n-2} \text{ נחלק ב-}$$

$$x^2 = 3x + 18 \rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-18)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2}$$

$$x_1 = 6, x_2 = -3$$

$$a_n = a(6)^n + b(-3)^n$$

a, b נמצאים על ידי

$$a_0 = 1 \rightarrow 1 = a(6)^0 + b(-3)^0 \rightarrow a + b = 1$$

אנחנו נמצא את a, b

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 6a - 3b = 9 \end{cases}$$

$$a_1 = 9 \rightarrow 9 = a(6)^1 + b(-3)^1 \rightarrow 6a - 3b = 9$$

$$\begin{cases} 3a + 3b = 3 \\ 6a - 3b = 9 \end{cases} \rightarrow 3a + 6a + 3b - 3b = 9 + 3 \rightarrow \boxed{a = \frac{4}{3}}$$

$$a = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{4}{3} + b = 1 \rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{a_n = \frac{4}{3}(6)^n - \frac{1}{3}(-3)^n}$$

a_2 נבדוק

$$\checkmark a_2 = \frac{4}{3}(6)^2 - \frac{1}{3}(-3)^2 = 48 - \frac{1}{3} \cdot 9 = 48 - 3 = 45 \checkmark$$

חלק א: שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(6 נק') א. R הוא יחס סימטרי מעל קבוצה A אם ורק אם:

$$\forall x \forall y (-(xRy) \rightarrow -(yRx)) \quad [1]$$

$$\forall x \exists y ((xRy) \wedge (yRx)) \quad [2]$$

$$\forall x \forall y ((x \neq y) \rightarrow (xRy) \wedge (yRx)) \quad [3]$$

$$\forall x \forall y ((xRy) \wedge (yRx)) \quad [4]$$

בכל הסעיפים, הכמתים מתייחסים לאברים של A

(7 נק') ב. N היא קבוצת מהספרים הטבעיים, R היא קבוצת המספרים הממשיים ו- A

היא קבוצה כלשהי כך ש- $|A \cap R| = |R|$

$$|R - A| \leq |N| \quad [1]$$

$$|A - R| \leq |N| \quad [2]$$

$$A \text{ מכילה מספר ממשי חיובי} \quad [3]$$

$$|A| = |R| \quad [4]$$

$$|A| \geq |P(N)| \quad [5]$$

(6 נק') ג. יהי G גרף פשוט על n צמתים, $n \geq 5$.

נתון שיש ב- G לפחות שני צמתים בעלי דרגה $n-1$.

בחרו את האמירה הנכונה:

$$G \text{ אינו מישורי} \quad [1]$$

$$G \text{ אינו אוילרי} \quad [2]$$

$$G \text{ אינו דו-צדדי} \quad [3]$$

$$G \text{ לא קיים ב- } G \text{ מסלול אוילר} \quad [4]$$

חלק ב: ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

S הוא יחס שקילות מעל הקבוצה $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ כך ש- $1S2$ ו- $3S4$.

נסמן $R = S - \{(2, 1), (4, 3)\}$. נתון ש- R הוא סדר חלקי מעל A .

9 נקי' א. מיצאו את מחלקות השקילות של S (נמקו את התשובה)

9 נקי' ב. מיצאו את האיברים המינימליים ואת האיברים המקסימליים לגבי R .

9 נקי' ג. מיצאו את כל יחסי השקילות מעל A שמכילים את R .

ארו אותם בעזרת החלוקות שהם יוצרים על הקבוצה A .

שאלה 3

בשאלה זו נתייחס לכל המילים באורך 10 הכתובות באותיות $A, A, A, B, B, C, C, D, D, D$.

14 נקי' א. מיצאו את מספר המילים שאין בהן שלוש אותיות מאותו סוג הצמודות זו לזו.

13 נקי' ב. מיצאו את מספר המילים שבהן יש לפחות שתי אותיות מסוג A הצמודות זו לזו.

שאלה 4

9 נקי' א. רישמו פונקציה יוצרת עבור מספר פתרונות המשוואה

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k) + (y_1 + y_2 + \dots + y_k) = n \text{ בטבעיים,}$$

כאשר $0 \leq x_i \leq 2$, ו- y_i מתחלק ב-3 לכל $1 \leq i \leq k$. (גם 0 מתחלק ב-3).

9 נקי' ב. בעזרת הפונקציה שרשמתם מיצאו את מספר פתרונות המשוואה הנתונה בסעיף א'.

9 נקי' ג. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה $(x_1 + x_2 + \dots + x_k) + (y_1 + y_2 + \dots + y_k) = 4$

בטבעיים כאשר $0 \leq x_i \leq 3$ ו- y_i מתחלק ב-3 לכל $1 \leq i \leq k$.

שאלה 5

בשאלה זו נתייחס לכל העצים T בעלי 7 צמתים המתויגים במספרים $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

8 נקי' א. מיצאו את העץ T בעל סדרת פרופר $(5, 5, 6, 6, 7)$

8 נקי' ב. מיצאו את מספר העצים T שבהם קיימים שלושה עלים המתויגים ב- $1, 2, 3$

(שימו לב: ייתכנו עוד צמתים שהם עלים)

11 נקי' ג. מיצאו את מספר העצים T שבהם העלים הם $1, 2, 3, 4$ בלבד (אין עלים נוספים)

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 3

לשימוש הבדוק

ב. AAABBCDDDD
 ב. הנה המספר של המילים שניתנות להרכיב מהאותיות
 א, ב, ג, ד, ה, ו, ז, ח, ט, י, כ, ל, מ, נ, ס, ע, פ, צ, ק, ר, ש, ת.
 המילים הן אלו שיש להן אותיות חסרות.

$$|U| = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$$

נאמר שיש דקדוק של המילים כן יש 3 א וצונית גם
 למה כ'.

נאמר שיש דקדוק של המילים כן יש 3 א וצונית גם

$$|A'| = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$$

$$|B'| = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$$

למה המילה 'A'UB' היא המילה שיש לה אותיות חסרות
 דקדוק יש 3 א וצונית גם למה המילה 'A'UB' היא המילה שיש לה אותיות חסרות

$$|U - (A' \cup B')| = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} - \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} - \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$$

למה המילה 'A'UB' היא המילה שיש לה אותיות חסרות

נאמר שיש דקדוק של המילים כן יש 3 א וצונית גם למה המילה 'A'UB' היא המילה שיש לה אותיות חסרות

$$|A' \cup B'| = |A'| + |B'| - |A' \cap B'| = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} - \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$$

למה המילה 'A'UB' היא המילה שיש לה אותיות חסרות

$$|U - (A' \cup B')| = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} - \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} - \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 22,020$$

U

004085

המילה 'A'UB'

3 המסך

לשימוש הבודק

2. מספר המילים בן 10 אותיות שיש להן 2 אותיות מסוג A והמילה
 היא שיש להן 10 אותיות (10!) מסוג B המילה
 קבוצה של המילה A ל-3.

לכן, מספר המילים של המילה

$$10! \cdot 2! \cdot 10! = 10! \cdot 2! \cdot 10!$$

מספר המילים בן 10 אותיות של ה-A. מספר המילים בן 3
 = מספר המילים, מספר המילים של המילים המילים

$$\binom{10}{3} \cdot \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$$

מספר המילים של המילים
 מספר המילים של המילים
 מספר המילים של המילים

המספר של המילים של המילים

$$\frac{10!}{3! \cdot 3! \cdot 4!} - \binom{10}{3} \cdot \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 13,440$$

56-7

✓

א. $(x_1 + x_2 + \dots + x_k) + (y_1 + y_2 + \dots + y_k) = n$

$$(1 + x + x^2)^k \cdot (1 + x^3 + x^6 + \dots)^k = f(x)$$

\downarrow
 $0 \leq x_i \leq 2$

\downarrow
 $3 | y_i$

התוצאה של x^n בעת הולדתה היא $f(x)$ וזהו מספר
הפרטים (x_i, y_i) שבהם $x_i + y_i = n$ ו- $x_i \leq 2$ ו- $y_i \equiv 0 \pmod{3}$.

ב. $f(x) = \left(\frac{1-x^3}{1-x} \right)^k \cdot \left(\frac{1}{1-x^3} \right)^k$

המספר $f(x)$ הוא מספר x^n וזהו מספר x^n .

$$f(x) = \frac{(1-x^3)^k}{(1-x)^k} \cdot \frac{1}{(1-x^3)^k} = \frac{1}{(1-x)^k}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D(k, n) \cdot x^n$$

המספר $D(k, n)$ הוא מספר x^n וזהו מספר x^n .

מכאן x^n הוא מספר x^n וזהו מספר x^n .

$\underline{D(k, n)} \leftarrow$ מספר x^n

$\underline{f(x)}$

ג. $(x_1 + x_2 + \dots + x_k) + (y_1 + y_2 + \dots + y_k) = n$

$$(1 + x + x^2 + x^3)^k \cdot (1 + x^3 + x^6 + \dots)^k = g(x)$$

\downarrow
 $0 \leq x_i \leq 3$

\downarrow
 $3 | y_i$

✓

המספר $f(x)$

שאלון בחינת גמר

20476 - מתמטיקה בדידה

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה 4 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים:

חלק א: שאלת חובה. את התשובה לכל סעיף כתבו במחברת בלבד.

חלק ב: עליכם לענות על שלוש מתוך ארבע השאלות.
אם תענו על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.
שימו לב:

- * בחלק ב יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
- * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד, וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים".
- * אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
- * אם ברצונכם להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליכם לחזור ולהוכיחן.
- * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרתם אותם.

חומר עזר:

כל חומר עזר מותר בשימוש. אפשר להשתמש במחשבון מדעי.
אסור בשימוש כל מכשיר אלקטרוני שבאמצעותו ניתן לאצור מידע
לרבות מכשיר טלפון נייד, מחשב נישא, שעון חכם וכד'.

בהצלחה !!!

אינכם חייבים

להחזיר את השאלון לאוניברסיטה הפתוחה



חלק א - שאלת חובה (19 נקודות)

ענו על שאלה 1.

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.
 בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

6 נק' א. α, β הם פסוקים. נתון שהפסוק $\alpha \rightarrow \beta$ הוא סתירה. מכאן נובע:

[1] α הוא סתירה.

[2] $\beta \rightarrow \alpha$ הוא טאוטולוגיה ?

[3] β הוא טאוטולוגיה

[4] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

7 נק' ב. תהיינה A, B קבוצות חלקיות לקבוצת הממשיים R .

נתון ש- $A' \cup B' \subseteq Q$ (המשלימים הם יחסית ל- R). אז:

[1] $|A \cap B| < |Q|$

[2] $|A \cap B| = |Q|$

[4] $|A \cap B| < |A \times B|$

[3] $|A \cap B| = |A|$

6 נק' ג. G הוא גרף מישורי פשוט על 8 צמתים, שבו שני רכיבי קשירות G_1, G_2 .

ידוע ש- G_1, G_2 הם גרפים מלאים.

מספר הקשתות של G הוא:

[1] 8 [2] 13 [3] 12 [4] 17 [5] 21

המשך הבחינה בעמוד הבא

חלק ב (81 נקודות)

ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות 5-2.
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות.

שאלה 2

תהי $M = \{A \mid A \subset N, |A| = |N - A|\}$ כלומר M קבוצות כל הקבוצות החלקיות לקבוצת המספרים הטבעיים, שעוצמתן שווה לעוצמת המשלים שלהן ב- N .
למשל קבוצת כל מחספריים הטבעיים הזוגיים שייכת ל- M אבל קבוצת כל המספרים הטבעיים הגדולים מ-10 לא שייכת ל- M . בכרך "תורת הקבוצות" עמ' 94, שאלה 3.25, מוכח שהיחס ההכלה הוא סדר-חלקי מעל כל קבוצה של קבוצות ובפרט סדר חלקי מעל M . נסמן אותו ב- R .
הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

- קיים ב- M איבר מקסימלי לגבי R . (9 נק')
- לכל שתי קבוצות $A, B \in M$ קיימת קבוצה $C \in M$ כך ש- ARC וגם BRC . (9 נק')
- כל קבוצה $A \in M$ מכסה אינסוף קבוצות של M . (9 נק')

שאלה 3

- כתבו פונקציה יוצרת עבור מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = n$ כאשר x_1, x_2, x_3 יכולים לקבל רק את הערכים 3, 5, 7 וכאשר x_4, x_5, x_6 הם מספרים טבעיים המתחלקים ב-6. פשטו את הביטוי בעזרת הנוסחה $1 - x^6 = (1 - x^2)(1 + x^2 + x^4)$. (15 נק')
- מיצאו את מספר הפתרונות למשוואה מסעיף א' כאשר $n = 25$. (12 נק')

שאלה 4

- מיצאו את כל האיברים בפיתוח של $(x + y + z)^7$ בעלי מקדם ששווה למספר המילים באורך 7 הכתובות באותיות A, A, A, B, B, B, C . ראו כרך IV פרק 3.2.1. (9 נק')
- בכמה מילים באורך 7 הכתובות באותיות A, A, A, B, B, B, C לא מופיע אף אחד משלושת הרצפים ABC, BCA, CAB ? (18 נק')

המשך הבחינה בעמוד הבא

שאלה 5

יהיו p, q מספרים ראשוניים שונים.

על קבוצת הצמתים $V = \{1, p, q, pq, p^2q, pq^2\}$ נתון גרף פשוט $G = (V, E)$ המוגדר כך:

לכל שני צמתים $x, y \in V$ קיימת קשת $\{x, y\} \in E$ אם ורק אם x מחלק את y .

הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

99 נק' א. G הוא גרף מישורי.

99 נק' ב. קיים ב- G מסלול אוילר.

99 נק' ג. G הוא גרף המילטוני.

בהצלחה!

הדבק כאן את
מדבקת הנבחן



מספר התלמיד הנבחן
רשום את כל תשע הספרות

האוניברסיטה
הפתוחה



ב' בחשון תשע"ט

מס' שאלון - 487 11
באוקטובר 2018

מס' מועד 85

סמסטר 2018 ג

20476 / 4

שאלון בחינת גמר
20476 - מתמטיקה בדידה

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה 4 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים:

חלק א: שאלת חובה. את התשובה לכל סעיף כתבו במחברת בלבד.

חלק ב: עליכם לענות על שלוש מתוך ארבע השאלות.
אם תענו על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות
הראשונות.
שימו לב:

- * בחלק ב יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
- * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל
התשובות לשאלות שבספרי הלימוד, וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים".
- * אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
- * אם ברצונכם להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליכם
לחזור ולהוכיחן.
- * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה,
גם אם לא פתרתם אותם.

חומר עזר:

כל חומר עזר מותר בשימוש. אפשר להשתמש במחשבון מדעי.
אסור בשימוש כל מכשיר אלקטרוני שבאמצעותו ניתן לאצור מידע
לרבות מכשיר טלפון נייד, מחשב נישא, שעון חכם וכד'.

בהצלחה !!!

אינכם חייבים

להחזיר את השאלון לאוניברסיטה הפתוחה



חלק א: שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.
 בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.
 (6 נק') א. α, β הם פסוקים. נתון שהפסוק $\alpha \wedge \beta$ הוא סתירה. מכאן נובע:

- [1] α הוא סתירה ו- β הוא סתירה.
- [2] בדיוק אחד משני הפסוקים α, β הוא סתירה.
- [3] התשובות הקודמות אינן נכונות,
- אבל לפחות אחד משני הפסוקים α, β הוא סתירה.
- [4] התשובות הקודמות אינן נכונות,
- אבל הפסוק α שקול לשלילתו של הפסוק β .
- [5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

(7 נק') ב. יהיו: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ (קבוצת המספרים הממשיים בין 0 ל-1)

$$B = \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \text{ ו- } Q \text{ קבוצת המספרים הרציונליים.}$$

- [1] $|A - Q| = |A - B|$
- [2] $|A - Q| = \aleph_0$
- [3] $|A - Q| < |A - B|$
- [4] $|A - B| < |A|$

(6 נק') ג. G הוא עץ מתויג על 6 צמתים, התגים הם כמקובל המספרים 1, 2, 3, 4, 5, 6.

סדרת Prüfer של G היא $(1, x, 2, y)$ כאשר $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. לפיכך:

- [1] $x, y \in \{3, 4, 5, 6\}$ ובהכרח $x \neq y$.
- [2] $x, y \in \{3, 4, 5, 6\}$ וייתכן $x = y$.
- [3] $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ כאשר המגבלה היחידה היא $x \neq y$.
- [4] $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ואין עליהם כל מגבלה.
- [5] לא ייתכן: אורך סדרת Prüfer של G אינו 4.

חלק ב: ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות.

שאלה 2

על הקבוצה $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ מגדירים שני יחסים, R, S , כך:

xRy אם"ם קיים מספר טבעי i כך ש- $\frac{y}{x} = 3^i$. xSy אם"ם קיים מספר שלם j כך ש- $\frac{y}{x} = 3^j$.

(8 נק') א. הוכיחו שאחד משני היחסים הוא יחס שקילות.

(6 נק') ב. מיצאו את מחלקות השקילות של יחס השקילות שגיליתם בסעיף א'.

(7 נק') ג. הוכיחו שאחד משני היחסים הוא סדר חלקי.

(6 נק') ד. מיצאו את האיברים המינימליים ואת האיברים המקסימליים לגבי היחס האחרון.

שאלה 3

(15 נק') א. כתבו פונקציה יוצרת עבור מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k) + (y_1 + y_2 + \dots + y_k) = n$$

כאשר $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_k \leq 3$ ו- y_1, y_2, \dots, y_k מספרים זוגיים.

פשטו את הביטוי בעזרת הנוסחאות:

$$1 - x^4 = (1 - x^2)(1 + x^2) \quad \text{ו-} \quad 1 - x^4 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3)$$

(12 נק') ב. מיצאו את מספר הפתרונות למשוואה מסעיף א' כאשר $n = 4$.

שאלה 4

תהי $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n \geq 4$. בשאלה זו כל הפונקציות הן מלאות.

(7 נק') א. מהו מספר הפונקציות $f: A \rightarrow A$ המקבלות את הערך 1 פעמיים בדיוק.

(כלומר קיימים בדיוק שני מספרים $x_1, x_2 \in A$ כך ש- $f(x_1) = f(x_2) = 1$).

(10 נק') ב. מהו מספר הפונקציות $f: A \rightarrow A$ המקבלות את הערך 1 לפחות שלוש פעמים?

(10 נק') ג. מהו מספר הפונקציות $f: A \rightarrow A$ המקבלות את הערך 1 פעמיים בדיוק ואת כל

הערכים האחרים פעם אחת לכל היותר?

המשך הבחינה בעמוד הבא

שאלה 5

בגרף מישורי פשוט וקשיר G קיים מסלול אוילר באורך 9, שאינו מעגל.

ידוע שקיימים ב- G שני צמתים u, v שאינם סמוכים כך שהגרף $G \cup \{uv\}$ (המתקבל מ- G על

ידי הוספת הקשת uv) אינו גרף משורי. הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

(13 נק') א. קיים גרף G על 5 צמתים שמקיים את תנאי השאלה

(14 נק') ב. קיים גרף G על 6 צמתים שמקיים את תנאי השאלה

בהצלחה !

מבחן בג' 3'2018

שאלה 1

כ

א. [5]

הסבר: "תכן" α ^{למחיר} β סתירה, או אחוז קטן לכל
השני, ולכן לא בהכרח אחוז ממש צוקא.

כ

ב. [1]

$$|A| = \aleph_c$$

$$|B| = \aleph_0$$

$$|Q| = \aleph_0$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$$

$$B = \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$|Q| + |A \setminus Q| = |A|$$

$$\aleph_0 + |A \setminus Q| = \aleph_c$$

$$|A \setminus Q| = \aleph_c$$

$$|A \setminus B| = \aleph_c$$

$$|A \setminus Q| = |A \setminus B|$$

הנה

קט

כ

ג. [4]

2.10

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

A דרך R, S

$$\exists i \in \mathbb{N} \left(\frac{y}{x} = 3^i \right) \Leftrightarrow x R y$$

$$\exists j \in \mathbb{Z} \left(\frac{y}{x} = 3^j \right) \Leftrightarrow x S y$$

כל נוכח כי S יחס שקילות:

$$\forall x \in A \left(\frac{x}{x} = 1 \right) \quad \text{רפלקסיביות}$$

$$\Rightarrow \forall x \in A \left(\frac{x}{x} = 3^0 \right) \quad (\text{קיימת } j=0 \text{ כך ש} \frac{x}{x} = 3^j)$$

$$\Rightarrow x S x \quad (S \text{ סימטרית})$$

$$x S y \quad \text{טרנזיטיביות}$$

$$\Rightarrow \exists j \in \mathbb{Z} \left(\frac{y}{x} = 3^j \right)$$

$$\Rightarrow \exists j \in \mathbb{Z} \left(\frac{x}{y} = 3^{-j} \right)$$

נס' ושליל
נמצאם בקבוצה
המספרים הממשיים

$$\Rightarrow y S x$$

✓

לכנס' סיום

$$x \mid y \wedge y \mid z$$

$$\Rightarrow \exists_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{y}{x} = 3^j \right) \wedge \exists_{m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{z}{y} = 3^m \right)$$

$$\Rightarrow \exists_{j, m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y} = 3^j \cdot 3^m \right)$$

נכפיל את היחסים

$$\Rightarrow \exists_{j+m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{z}{x} = 3^{j+m} \right)$$

הטל את $j+m$ למספר מספר אלמ כי הטל חתמתי אל $n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow x \mid z$$

■

ה. (3N) איז מחלקות S:

$$[1] = \{1, 3, 9\}$$

$$[2] = \{2, 6\}$$

$$[4] = \{4\}$$

$$[5] = \{5\}$$

$$[7] = \{7\}$$

$$[8] = \{8\}$$

ג. נוכיח כי R סדר חלקי:

בזה לכונתו במסגרת סיום S

$$\forall x \in A \left(\frac{x}{x} = 1 \right) \Rightarrow \forall x \in A \left(\frac{x}{x} = 3^0 \right) \Rightarrow 0 \in \mathbb{N} \wedge \left(\frac{x}{x} = 3^0 \right)$$

$$\Rightarrow \forall x \in A (x R x)$$

■

$$xRy \wedge yRx$$

$$\Rightarrow \exists_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{y}{x} = 3^i \right) \wedge \exists_{m \in \mathbb{N}} \left(\frac{x}{y} = 3^m \right)$$

השקפה
R

$$\Rightarrow \exists_{i, m \in \mathbb{N}} \left(\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 3^i \cdot 3^m \right)$$

הכפל של
היחסים

$$\Rightarrow \exists_{i, m \in \mathbb{N}} (3^{i+m} = 1)$$

$$\Rightarrow i + m = 0$$

לפי "מבחן", $i = -m$, מכיון שאנחנו מחפשים את כלל הסתירה במקרה
של $(i, m) \in \mathbb{N}$, $i = 0, m = 0$ (ואם $0 + 0 = 0$).

$$\cdot \frac{x}{y} = 1 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = 3^0 \quad \text{במקרה}$$

הקשר (היחס) החד-חד

$$xRy \wedge yRz$$

$$\Rightarrow \exists_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{y}{x} = 3^i \right) \wedge \exists_{m \in \mathbb{N}} \left(\frac{z}{y} = 3^m \right)$$

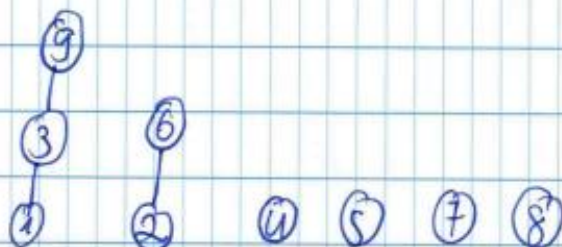
$$\Rightarrow \exists_{i, m \in \mathbb{N}} \left(\frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y} = 3^{i+m} \right)$$

הכפל של היחסים

$$\Rightarrow \exists_{i+m \in \mathbb{N}} \left(\frac{z}{x} = 3^{i+m} \right)$$

$$\Rightarrow xRz \quad \text{במקרה } i, m \in \mathbb{N}$$

3. האיברים המנותלים ביחס R , הם האיברים הקלים ביותר
 במעקבות שקלים של S ; והאיברים המקוטעים הם האיברים
 הנבדלים בזמן מזה שמקום שקלים של S .
 נראה את הסדר המסומן R על ציוריתם כדי לראות את S ואת R .



האיברים המנותלים R : 1, 2, 4, 5, 7, 8
 כי אם x הוא איבר המנותלים R ויש לו m מקומות xRm
 $x = m$ S

האיברים המקוטעים R : 3, 6, 9
 כי אם x הוא איבר המקוטעים R ויש לו g מקומות xRg
 $x = g$ S

$$n = (x_1 + x_2 + \dots + x_k) + (y_1 + y_2 + \dots + y_k)$$

$$0 \leq x_1, x_2, \dots, x_k \leq 3, \quad \text{אם}$$

$$\text{אם } y_1, y_2, \dots, y_k$$

נחשב פונקציה "צורה" עבור מס' הפתרונות של משוואה

$$f(x) = (x^0 + x^1 + x^2 + x^3)^k \cdot (x^0 + x^2 + x^4 + \dots)^k$$

$$= \left(\frac{1 - x^4}{1 - x} \right)^k \cdot \frac{1}{(1 - x^2)^k}$$

נוסחה עבור
לפי סדר
ההפרש וקטור
לפי סדר

$$= \left(\frac{1 - x^4}{(1 - x)(1 - x^2)} \right)^k$$

$$= \left(\frac{(1 - x^2)(1 + x^2)}{(1 - x)(1 - x^2)} \right)^k$$

$$= (1 + x^2)^k \cdot \frac{1}{(1 - x)^k}$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^k (x^2)^i \cdot x^i$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^k \underbrace{\binom{k}{i}}_{a_{2i}} x^{2i} \cdot \sum_{i=0}^k \underbrace{D(k, i)}_{b_i} x^i$$

✓

$$: n = u$$

(על ידי סדרת טור) סדרה

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{2i} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} D(k, i) x^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

בכיוון המעלה סדרה $n = u$ הוא המקרה x^u

$$c_u = \sum_{i=0}^u a_i b_{u-i}$$

(a_i מהסדרה b_i סדרה)

$$= a_0 b_u + a_1 b_{u-1} + a_2 b_{u-2} + a_3 b_{u-3} + a_u b_0$$

$$= \binom{k}{0} \cdot D(k, u) + \binom{k}{1} \cdot D(k, 2) + \binom{k}{2} \cdot D(k, 0)$$

$$= D(k, u) + k \cdot D(k, 2) + \binom{k}{2}$$

✓

הוא זה המושג

