

1. מטילים 3 קוביות תקינות.
 - א. יהי X משתנה מקרי המוגדר על-ידי סכום התוצאות שמתקבלות ב-3 הקוביות.
 1. מהם הערכים האפשריים של X ?
 2. מצא את $P\{X=2\}$, $P\{X=3\}$ ואת $P\{X=5\}$.
 - ב. יהי Y משתנה מקרי המקבל את הערך 1 כאשר 3 התוצאות בקוביות הן 3 מספרים עוקבים, ואחרת את הערך 0.
 1. מצא את פונקציית ההסתברות של Y .
 2. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y .
2. מטילים מטבע תקין פעמיים. לאחר מכן מטילים אותו שוב, כמספר הפעמים שהתקבל H בשתי ההטלות הראשונות. יהי X מספר ה- H ים הכולל שהתקבלו בכל ההטלות שבוצעו.
 - א. מצא את פונקציית ההסתברות של X .
 - ב. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X .
 - ג. חשב את התוחלת של X .
 - ד. חשב את $E[(X-2)^2]$.
 - ה. חשב את השונות של X .
 - ו. חשב את $E[(X-1.5)^2]$.
 - ז. חשב את $E[3X-4]$ ואת $\text{Var}(3X-4)$.
3. המרחק בין 2 מספרים i ו- j , מוגדר על-ידי $|i-j|$.
 - בחרים באקראי וללא החזרה שני מספרים מבין $0, 1, \dots, n$.
 - יהי X המרחק בין שני המספרים שנבחרו. חשב את התוחלת של X .
4. כד מכיל 30 כדורים ש-3 מהם לבנים. מוציאים מהכד כדור אחר כדור באופן מקרי וללא החזרה, עד להוצאת כל הכדורים הלבנים.
 - יהי X מספר הכדורים שהוצאו מהכד. מצא את פונקציית ההסתברות של X .
5. טורפים היטב חפיסת קלפים רגילה. הופכים את הקלפים שבחפיסה אחד-אחד, עד שמתגלה הקלף הראשון שצורתו לב. מצא את פונקציית ההסתברות של מספר הקלפים שיש להפוך במהלך הניסוי.
6. חתול רודף אחרי 4 עכברים, שאחד מהם מורעל. הוא תופס אותם בזה אחר זה, עד שלרוע מזלו הוא תופס ואוכל את העכבר המורעל.
 - מצא את פונקציית ההסתברות ואת התוחלת והשונות של מספר העכברים שהחתול תופס.
7. לאדם יש צרור של n מפתחות, שרק אחד מהם מתאים למנעול הדלת שעליו לפתוח. הוא בוחר מפתח אחד בכל פעם ומנסה לפתוח איתו את המנעול.
 - מהן תוחלת ושונות מספר הפעמים שינסה לפתוח את המנעול, אם –
 - א. יש לו זיכרון טוב ובכל פעם הוא מנסה מפתח שטרם ניסה אותו בנסיונותיו הקודמים;
 - ב. יש לו זיכרון קצר ובכל פעם הוא בוחר מפתח באופן מקרי מבין כל המפתחות שבצרור?

8. מטילים שתי קוביות תקינות שוב ושוב.
- א. מהי ההסתברות שהפעם הראשונה שבה יתקבל הסכום 5 תהיה בהטלה ה-10?
 - ב. מהי ההסתברות שהפעם הראשונה שבה יתקבל הסכום 5 תהיה לאחר ההטלה השמינית?
 - ג. רשום ביטוי כללי ל- $P\{X \leq i\}$, כאשר X הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p ($0 < p < 1$) וכאשר $i = 1, 2, \dots$.
9. א. יוסי מטיל 10 פעמים שתי קוביות.
1. מהי ההסתברות שבדיוק בשתי הטלות (של זוג הקוביות) סכום התוצאות יהיה 8?
 2. מהי שונות מספר ההטלות (של זוג הקוביות) שבהן סכום התוצאות שווה ל-8?
 - ב. שני אנשים מטילים 7 קוביות כל אחד.
- מהי ההסתברות שכל אחד מהם יקבל לפחות פעם אחת את התוצאה 3?
10. להלן תיאורו של משחק מוזל: מטילים קובייה 30 פעמים.
- אם תוצאת ההטלה היא 1 או 2 – זוכים ב-10 שקלים, בכל מקרה אחר – מפסידים 3 שקלים.
- נסמן ב- Y את הרווח במשחק זה.
- מהן התוחלת והשונות של Y ? רשום את פונקציית ההסתברות של Y .
11. נניח שלקוחות נכנסים לחנות מסוימת בהתאם להנחות של תהליך פואסון עם קצב של 20 לשעה.
- א. מהי ההסתברות שבחצי השעה הראשונה לפתיחת החנות לא ייכנס אף לקוח?
 - ב. מהי ההסתברות שברבע השעה שבין 10:30 ל-10:45 ייכנסו לפחות 3 לקוחות?
 - ג. מהי ההסתברות שבין 8:00 ל-9:00 ייכנסו 15 לקוחות ובין 9:00 ל-10:00 ייכנסו 25 לקוחות?
 - ד. ההסתברות שלקוח, שנכנס לחנות, יקנה בה מוצר כלשהו היא 0.3.
- אם בין 8:00 ל-9:00 נכנסו 18 לקוחות, מהי ההסתברות ש-6 מהם קנו מוצר כלשהו?
12. מטילים קובייה 5 פעמים. מנצחים במשחק אם לפחות ב-3 הטלות מתקבל 6.
- א. אהוד משחק את המשחק 10 פעמים: מהי ההסתברות שלא ינצח כלל?
 - ב. אהוד משחק את המשחק 200 פעמים: חשב קירוב להסתברות שינצח בדיוק 10 פעמים?
13. נתון כי $X \sim B(4, 1/2)$. מהי התוחלת של $(X-2)^2$ ומהי התוחלת של $(X-4)^2$?
14. X אנשים משתתפים בהגרלה, וידוע כי: $i = 1, 2, \dots, 100$, $P\{X = i\} = 0.01$.
- בהגרלה זו מוצעים למכירה 100 כרטיסים, בעלות של 15 ש"ח לכרטיס, ובדיוק אחד מ-100 הכרטיסים מזכה את קונהו בפרס של 500 ש"ח. כל אדם שמשתתף בהגרלה קונה כרטיס אחד בלבד, ואם מספר המשתתפים קטן מ-100, ייתכן שאף אחד ממשתתפי ההגרלה לא יזכה בפרס. במקרה כזה, שבו אף משתתף לא זוכה בפרס – הפרס נתרם לצדקה.
- בחירת הכרטיסים על-ידי משתתפי ההגרלה אקראית.
- א. מהי ההסתברות שאף אחד ממשתתפי ההגרלה לא יזכה בפרס?
 - ב. מהן תוחלת ושונות הרווח הנקי של מארגני ההגרלה?
 - ג. יוסי משתתף בהגרלה.
- האם המאורעות: "יוסי זוכה בפרס" $B =$ ו- $\{X = i\}$, עבור $i = 1, 2, \dots, 100$, בלתי-תלויים זה בזה?

15. אדם משכיר 3 חדרים לתיירים במחיר של \$30 לחדר. כדי להבטיח תפוסה מלאה בחדריו, הוא מקבל 4 הזמנות לאותו יום, ביוזעו שכאשר תייר מזמין חדר ליום מסוים, ההסתברות שהוא אכן יגיע באותו יום היא $\frac{3}{4}$, והגעתו בלתי-תלויה בהגעתם של תיירים אחרים, שהזמינו חדר לאותו יום. במקרה שכל 4 התיירים שהזמינו חדר לאותו יום מגיעים, בעל-החדרים משלם לתייר האחרון שהגיע פיצוי בגובה של \$30 ועוזר לו למצוא סידור חליפי.

נסמן ב- X את הרווח הנקי של בעל-החדרים באותו יום.

א. מצא את פונקציית ההסתברות של X וכן את תוחלתו ושונותו.

ב. מה היתה תוחלת הרווח של בעל- החדרים אילו היה מקבל רק 3 הזמנות לחדרים ביום אחד?

16. א. הוכח: אם N הוא משתנה מקרי שערכיו הם שלמים אי-שליליים, אז $E[N] = \sum_{i=1}^{\infty} P\{N \geq i\}$.

ב. חשב את התוחלת של משתנה מקרי גיאומטרי באמצעות הטענה המובאת בסעיף א.

17. א. יהי $X \sim Po(1)$. חשב את $E[|X-2|]$.

ב. יהי $X \sim B(n, p)$. חשב את $E\left[\frac{1}{X+1}\right]$.

18. בקופסה n פתקים ממוספרים מ-1 עד n . מוציאים מהקופסה פתק אחר פתק באופן אקראי ועם החזרה.

יהי X מספר הפתקים שהוצאו מהקופסה במהלך הניסוי.

א. אם מוציאים פתקים עד שהפתק הראשון שהוצא מוצא שוב, מהן התוחלת והשונות של X ?

ב. אם מוציאים פתקים עד שפתק כלשהו שהוצא כבר מוצא שוב, מהי פונקציית ההסתברות של X ?

19. מטילים מטבע, שההסתברות לקבל בו H היא $\frac{1}{4}$, עד שמקבלים בסה"כ $k+1$ פעמים H .

א. מהי ההסתברות להטיל את המטבע $4k$ פעמים?

ב. יהי Y מספר ה-T-ים שהתקבלו.

1. מצא את התוחלת ואת השונות של Y .

2. רשום את פונקציית ההסתברות של Y .

20. בכיתה יש 60 סטודנטים. 40% מהסטודנטים הם נשים ומחציתן מעשנות, ובסה"כ שליש מהסטודנטים מעשנים. בוחרים מדגם מקרי של 25 סטודנטים מהכיתה.

א. מהי ההסתברות שייבחרו למדגם בדיוק 3 גברים מעשנים?

ב. מהי שונות מספר הגברים המעשנים שנבחרים למדגם?

21. בבריכת דגים יש 100 דגים – 30 צהובים ו-70 אפורים.

א. מוציאים מהבריכה מדגם אקראי של 4 דגים.

חשב את ההסתברות שייבחר למדגם בדיוק דג אחד צהוב, כאשר –

1. הדגימה עם החזרה; 2. הדגימה ללא החזרה.

הסבר מדוע ההסתברויות דומות בערך.

ב. מוציאים מהבריכה מדגם אקראי של 20 דגים.

חשב את השונות של מספר הדגים הצהובים במדגם, כאשר –

1. הדגימה עם החזרה; 2. הדגימה ללא החזרה.

מדוע לדעתך השונות במקרה הראשון גדולה מן השונות במקרה השני?