

תקציר פתרון בחינה 4

שאלה 1

א. S אינו טרנזיטיבי (הוא כן רפלקסיבי וסימטרי).

ב. לגבי T : רפלקסיבי וסימטרי קל להראות.

הוכחה שהוא טרנזיטיבי : נניח $1 \notin X \oplus Y$ וגם $1 \notin Y \oplus Z$.

ההנחה $1 \notin X \oplus Y$ פירושה : $1 \notin X \cup Y$ או $1 \in X \cap Y$ (מדוע?)

בדומה נפרק את ההנחה $1 \notin Y \oplus Z$.

הנתון $1 \notin X \oplus Y$ וגם $1 \notin Y \oplus Z$ מתפרק אפוא ל-4 אפשרויות.

נבדוק כל אחת מהן בנפרד, ונגלה שבכל אחת מהן $1 \notin X \oplus Z$ (השלימו).

לפיכך T טרנזיטיבי.

ג. בדיוק שתי מחלקות : במחלקה אחת נמצאות כל הקבוצות של מספרים טבעיים ש-1 הוא

אבר שלהן ובמחלקה השניה כל הקבוצות של מספרים טבעיים ש-1 לא אבר שלהן.

שאלה 2

א. מתקבל מיידית מתוך משפט 5.13 ב בחוברת "פרק 5 בתורת הקבוצות".

ב. \aleph_0 (לכל מספר טבעי יש שני שורשים ריבועיים ושורש שלישי יחיד).

שאלה 3

א. לכל משימה יש $\binom{5}{2} = 10$ דרכים לבחור צוות. לארבע המשימות : 10^4 דרכים.

ב. A_i : קבוצת הבחירות של צוותים בהן אדם i מתחמק מעבודה.

$$\text{הכלה והפרדה: } \binom{5}{2}^4 - 5 \cdot \binom{4}{2}^4 + \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2}^4 - \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2}^4$$

שאלה 4

- א. יש 5^5 מחרוזות כאלה מפני שבכל מחרוזת יש 5 מקומות ובכל מקום יכולה להופיע כל אחת מן האותיות a, b, c, d, e .
- ב. כל מחלקה נקבעת לחלוטין על ידי קבוצת האותיות אחת מתוך a, b, c, d, e (כל המילים שבהן מופיעות אך ורק האותיות מאותה קבוצה הן באותה מחלקה). לכן מספר המחלקות שווה למספר הקבוצות הלא ריקות של אותיות מתוך a, b, c, d, e (כי בכל מחרוזת חייבים להשתמש באות אחת לפחות).
- מספר כל הקבוצות הלא ריקות שחלקיות לקבוצה בעלת 5 איברים הוא $2^5 - 1 = 31$.
- ג. במחלקת השקילות של המחרוזת $abcde$ מופיעות אך ורק המחרוזות באורך 5 שבהן מופיעות כל האותיות a, b, c, d, e לכן מספר המחרוזות במחלקה זו שווה למספר כל התמורות על 5 עצמים, כלומר שווה ל- $5!$.
- ד. במחלקת השקילות של $aaaab$ נמצאות אך ורק המחרוזות שבהן מופיעות שתי האותיות a, b (כאשר כל אחת משתי האותיות מופיעה לפחות פעם אחת).
- מספר המילים באורך 5 הכתובות באותיות a, b הוא 2^5 אך בתוכן יש שתי מילים שבהן אחת האותיות לא מופיעה כלל ($aaaaa$ ו- $bbbbbb$).
- לכן מספר המחרוזות במחלקה של $aaaab$ הוא $2^5 - 2 = 30$.
- ה. במחלקה של $aabcd$ נמצאות כל המחרוזות שבהן כל אחת מהאותיות a, b, c, d מופיעה לפחות פעם אחת. הדרישה הזו מחייבת אות אחת מבין הארבע להופיע פעמיים ואת שלוש אחרות להופיע פעם אחת. מספר המחרוזות שבהן a מופיעה פעמיים ושאר האותיות פעם אחת הוא כמספר התמורות עם חזרות של a, a, b, c, d וזה שווה ל- $\frac{5!}{2!}$.
- יש 4 אפשרויות לבחירת האות שתופיע פעמיים לכן מספר המחרוזות במחלקה של $aabcd$ הוא: $4 \cdot \frac{5!}{2!} = 2 \cdot 5! = 240$.

שאלה 5

- G אינו קשיר, לכן \overline{G} קשיר (שאלה 4 בפרק 1 בתורת הגרפים).
- מהנתון, ב- G יש בדיוק $n - 2$ צמתים בעלי דרגה אי-זוגית.
- מספר הצמתים בעלי דרגה אי-זוגית בגרף הוא זוגי (שאלה 1 בפרק 1 בתורת הגרפים).
- לכן $n - 2$ הוא זוגי.
- לפיכך $n - 1$ הוא אי-זוגי.
- בכל גרף, לכל צומת v , $\deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) = n - 1$.
- מכאן ומכיוון ש- $n - 1$ הוא אי-זוגי, נקבל שהזוגיות של דרגת צומת ב- G הפוכה מהזוגיות של הדרגה שלו ב- \overline{G} (כלומר אם האחד זוגי השני אי-זוגי ולהיפך).

לכן ב- \bar{G} יש בדיוק שני צמתים בעלי דרגה אי-זוגית.

הראינו ש- \bar{G} מקיים את תנאי שאלה 1 בפרק 3 בתורת הגרפים, לכן יש בו מסלול אוילר לא סגור.