

מבנה הבחינה :

- * יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- * משקל כל שאלה 25% .
- * אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- * יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
 - * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
 - * אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
 - * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
-

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

- תהי $A = \{1, 2, 3\}$. תהי M קבוצת כל היחסים (הרלציות) מעל A .
תהי $f: M \rightarrow M$ הפונקציה המתאימה לכל $R \in M$ את הסגור הרפלקסיבי שלו (הכרך "תורת הקבוצות" עמ' 55).
- (5 נק') א. מהו $|M|$?
- (8 נק') ב. האם f היא חד-חד-ערכית? האם f היא על M ?
- (7 נק') ג. הוכח שיש בדיוק 64 רלציות שונות בתמונה של f (התמונה של f היא קבוצת אברי M שניתן לקבל אותם כתוצאה של הפעלת f).
- (5 נק') ג. נתבונן ביחס השקילות המושרה ב- M על-ידי f (יחס זה מוגדר כך : $R, S \in M$ שייכים לאותה מחלקת שקילות אם $f(R) = f(S)$. אינך נדרש להוכיח שזהו יחס שקילות).
- לכמה מחלקות שקילות מתחלקת M על-ידי היחס הזה ?
- יש לנמק את כל התשובות!

שאלה 2

- תהי k עוצמה כלשהי, ייתכן אינסופית .
- (15 נק') א. הוכח בפירוט, בעזרת הגדרת כפל עוצמות והגדרת חיבור עוצמות, את השוויון $k \cdot 2 = k + k$.
- ההוכחה בסעיף זה אמורה להתחיל כך : "תהי A קבוצה שעוצמתה k ...".
בסעיף זה אין להסתמך על משפט 5.17 שבחוברת "פרק 5 בתורת הקבוצות".
- (10 נק') ב. חזור והוכח את השוויון $k \cdot 2 = k + k$, הפעם בעזרת משפט 5.17, באופן "אלגברי" ככל האפשר. נמק היטב כל מעבר.

שאלה 3

בכל סעיפי השאלה $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

(8 נק') א. מצא כמה פונקציות f של A ל- B הן בעלות התכונה הבאה :

לכל $x \in A$, $x + f(x)$ הוא מספר **אי-זוגי** .

(8 נק') ב. מצא כמה פונקציות f של A ל- B הן בעלות התכונה הבאה :

לכל $x \in A$, $x \cdot f(x)$ הוא מספר **זוגי** .

(3 נק') ג. הוכח שפונקציה של A ל- B המקיימת את התנאי של סעיף א , מקיימת גם את התנאי של סעיף ב.

(6 נק') ד. כמה פונקציות f של A ל- B אינן מקיימות אף אחד משני התנאים א, ב ?

יש לנמק את התשובות. בסעיפים א', ב', ד' יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 4

מצאי כמה מספרים שלמים n , בתחום $1 \leq n \leq 2205$, מקיימים :

n אינו מתחלק באף אחד משלושת המספרים 7, 9, 11 .

שאלה 5

השאלה עוסקת בתחשיב הפסוקים. **הפסוקים היסודיים** הם הסימנים P_i , לכל $i \in \mathbb{N}$.

בכל הסעיפים, α, β, γ הם פסוקים, **לא בהכרח שונים זה מזה**, ולא בהכרח פסוקים יסודיים.

אין קשר בין הסעיפים α, β, γ יכולים להיות שונים מסעיף לסעיף.

כתיב מקוצר - מותר.

(7 נק') א. תן דוגמא לפסוקים α, β, γ בשפה הנ"ל, כך שמתקיים :

$\alpha \vee \beta \models \gamma$, אך $\alpha \vee \beta$ אינו שקול טאוטולוגית ל- γ .

הוכח שהדוגמא שלך מקיימת את הדרישות הללו.

(9 נק') ב. הוכח או הפרך (זהירות - חשוב היטב לפני שתענה !) :

אם $\alpha \vee \beta \models \gamma$, אז $\alpha \models \gamma$ וגם $\beta \models \gamma$.

(9 נק') ג. הוכח **בלי לרשום לוח אמת בעל 8 שורות** :

אם α, β, γ פסוקים **כלשהם**,

אז הפסוק $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\gamma \rightarrow \alpha))$ הוא טאוטולוגיה.

בהצלחה!