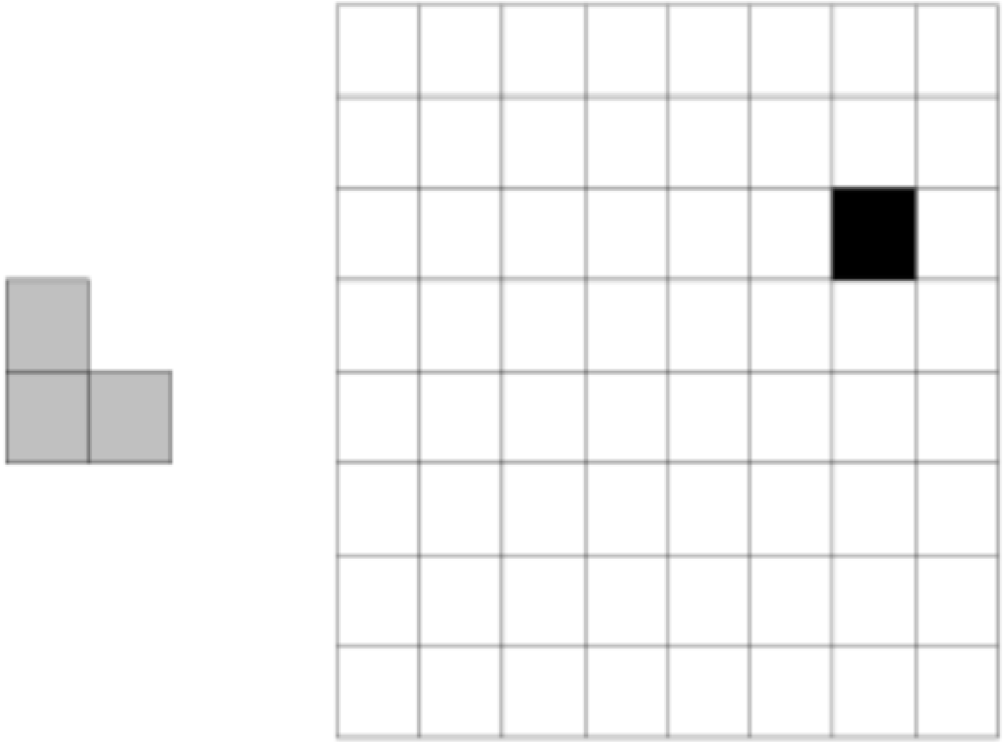
פרק 5
הפרד ומשול

שאלה 1

Tromino puzzle A tromino is an L-shaped tile formed by adjacent 1-by-1 squares. The problem is to cover any 2^n-by-2^n chessboard with one missing square (anywhere on the board) with trominoes. Trominoes should cover all the squares of the board except the missing one with no overlaps.



Design a divide-and-conquer algorithm for this problem.

שאלה 2

1. a. For the one-dimensional version of the closest-pair problem, i.e., for the problem of finding two closest numbers among a given set of n real numbers, design an algorithm that is directly based on the divide-and-conquer technique and determine its efficiency class.

   b. Is it a good algorithm for this problem?

שאלה 3

נסמן ב- $S+T = \{z \mid \exists x \in S\ \exists y \in T \text{ such that } x+y=z\}$ את הסכום של שתי קבוצות מספרים S,T. נתון כי $S,T \subseteq \{1,\dots,n\}$ וכי $|S|,|T| = \Theta(n)$. הציגו אלגוריתם לחישוב $S+T$ שמבצע $\Theta(n\log n)$ פעולות אלמנטריות בלבד. (פעולה אלמנטרית על מספרים הינה פעולה של חיבור, חיסור, כפל, חילוק או השוואה).

Z

שאלה 4

תהי A מטריצה מסדר $n \times n$.

א. הוכיחו כי אם $n = 2$ ניתן לחשב את A^2 בעזרת 5 פעולות כפל של מספרים ממשיים.

ב. פרופסור תחכמוני טוען כי ברשותו אלגוריתם הפרד ומשול המחשב את A^2 עבור מטריצה מסדר $n \times n$ (n טבעי) בזמן $O(n^{\lg 5})$. הפרופסור מציע להשתמש בגישת רקורסיבית כך שבעזרת סעיף א, מתקבלות 5 תת בעיות מגודל $n/2$. האם האלגוריתם שהפרופסור מציע אכן פותר את הבעיה בסיבוכיות הנדרשת? הסבירו את תשובתכם.

שאלה 5

בהינתן טקסט $T = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ באורך n, ותבנית $P = p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}$ באורך m, מא"ב $\{a, b\}$, תארו אלגוריתם יעיל המוצא לכל אינדקס $0 \leq j \leq n - m$ את מספר האי-התאמות בין התבנית P לבין המחרוזת $t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{m+j-1}$.

למשל, אם התבנית P היא *aabba* והטקסט T הוא *ababab*, אז האלגוריתם צריך לתת את הפלט הבא:

אינדקס 0: 2

אינדקס 1: 3

אם T הוא *bbbbbbb* ו-P היא *aabba*, האלגוריתם צריך לתת את הפלט הבא:

אינדקס 0: 3

אינדקס 1: 3

אינדקס 2: 3

רמז: התאימו את a ל- 1 ואת b ל- -1.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

בונוס: בהינתן טקסט T באורך n ותבנית P באורך m, בא"ב בן k אותיות, תארו אלגוריתם יעיל, המוצא את כל האינדקסים $0 \leq j \leq n - m$ כך ש:

$$p_0 \cdots p_{m-1} = t_j \cdots t_{m+j-1}$$

שאלה 6

חשב את הביטויים הבאים:

א. $DFT_m(x^n)$ לכל $n \le m$ כך ש-m מחלק את n.

ב. $DFT_{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n} x^j\right)$ (ערכי הפולינום הנתון בשרשי היחידה מסדר n+1)

ג. $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k$ (סכום כל שרשי היחידה מסדר n)

ד. $\prod_{k=0}^{n-1} \omega_n^k$ (מכפלת כל שרשי היחידה מסדר n)

שאלה 7

(א) נתון כי $n \mid m$, כלומר הטבעי m מחלק את הטבעי n. מהו הפלט של טרנספורם פורייה הדיסקרטי DFT_m מסדר m, כשהקלט הוא ווקטור המקדמים של הפולינום $p(x)=x^n$. (12 נק׳)

(ב) נביט בפולינום $p(x)=-x^3+x^2+2x-2$. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) במסגרת הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום. בדקו את תשובתכם ע״י <u>הצבה ישירה</u> של הערכים המתאימים בפולינום. (13 נק׳)

שאלה 8

<u>הרצת FFT</u>. נביט בפולינום $p(x)=x^3+2x^2+3x+4$ שדרגתו קטנה מ-4. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) עבור:

(א) הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום.

(ב) הרצת INVERSE-FFT (הרצת $FFT(\cdot,(\omega_4)^{-1})$) על הערכים שהתקבלו בסעיף הקודם.