תשובה 1

מובן שלא ניתן להגיע למצב כזה בקבוצות סופיות. נקח אפוא קבוצות אינסופיות.
אחרי קצת ניסוי וטעיה אפשר למצוא קבוצות שמקיימות את הנדרש.
למשל, תהי $A = \mathbf{N}$ ותהי $B = \{0,-1,-2,-3,\ldots\} = \{-n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

אז $A \cup B = \mathbf{Z}$ (קבוצת המספרים השלמים),

$A - B = \mathbf{N} - \{0\}$, $A \oplus B = \mathbf{Z} - \{0\}$.

כל חמש הקבוצות האלה שונות זו מזו . למשל:

(-1) שייך ל- $A \oplus B$ ואינו שייך ל- $A - B$, לכן $A \oplus B \neq A - B$.

בדומה לגבי השאר.

הפונקציה $f(n) = -n$ היא פונקציה חח"ע של A על B. לכן $|B| = |A|$.

הפונקציה $g(n) = n+1$ היא פונקציה חח"ע של A על $A - B$. לכן $|A - B| = |A|$.

מהגדרת העוצמה $\aleph_0$, עוצמת A היא $\aleph_0$.

לפי שאלה 4.4 בעמ' 119 בספר, גם $|\mathbf{Z}| = \aleph_0$. כלומר $|A \cup B| = \aleph_0$.

נותר להראות שגם $|A \oplus B| = \aleph_0$. זה מתקבל למשל משאלה 4.3 סעיף ד (אפשר גם בדרכים אחרות).

תשובה 2

א. בחוברת "אוסף תרגילים פתורים" קבוצה 3 שאלה 10ה', מראים כי קבוצת **הסדרות הסופיות** של טבעיים היא בת-מניה. בשאלה שלפנינו עוסקים לא בסדרות אלא בתת-קבוצות של **N**. נתאים לכל קבוצה סופית של מספרים טבעיים - סדרה סופית: פשוט נסדר את אברי הקבוצה בסדר עולה. בכך הגדרנו פונקציה של הקבוצה K שבשאלה אל קבוצת הסדרות הסופיות של טבעיים. פונקציה זו אינה על (**מדוע?**) אך מובן שהיא חד-חד-ערכית.

לפיכך $|K| \leq \aleph_0$.

מצד שני, K היא אינסופית, מכיון שהיא מכילה את כל הקבוצות מהצורה $\{n\}$, לכל n טבעי.

מכאן לפי משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין $|K| = \aleph_0$ (למעשה אין כאן צורך במשפט הנ"ל, שהוא בגדר "תותח כבד". ניתן להראות בלעדיו, שקבוצה אינסופית המוכלת בקבוצה בת-מניה היא בת מניה).

ב. הפונקציה $g : L \to K$ המתאימה לכל קבוצה את **המשלים שלה ב- N** היא חח"ע ועל (**הוכיחו זאת!**). לפיכך $|L| = |K|$, ולפי סעיף א' עוצמה זו היא $\aleph_0$.

תשובה 3

א. נשים לב שהקבוצות K,L,M זרות זו לזו, ו- $K \cup L \cup M = P(\mathbf{N})$.

כעת, אילו M היתה בת-מניה, היינו מקבלים ש- $P(\mathbf{N})$ היא איחוד של 3 קבוצות זרות בנות-מניה. ע"י שימוש חוזר בשאלה 4.3ד בעמ' 119 בספר (איחוד שתי קבוצות זרות בנות-מניה הוא בר-מניה) היינו מקבלים כי $P(\mathbf{N})$ היא בת-מניה - בסתירה למשפט 5.25 , וכן בסתירה למשפט 5.6 (משפט קנטור). לכן M אינה בת-מניה.

ב. נסמן $B = K \cup L$. מהאמור בתחילת פתרון הסעיף הקודם, $M = P(\mathbf{N}) - B$.

בנוסף, B היא בת-מנייה, ו- $P(\mathbf{N})$ היא קבוצה אינסופית שאינה בת-מנייה.

הקבוצות $P(\mathbf{N})$, B מקיימות אפוא את תנאי משפט 5.13ב (עמ' 16 בחוברת "פרק 5") עבור הקבוצות A, B בהתאמה.

לכן $|P(\mathbf{N}) - B| = |P(\mathbf{N})| = C$.

כאמור $M = P(\mathbf{N}) - B$, כלומר $|M| = C$.

תשובה 4

א. תהיינה A_1, A_2 , B_1, B_2 קבוצות שעוצמותיהן בהתאמה k_1, k_2 , m_1, m_2.

כדי לקצר מעט את ההוכחה ניעזר בשאלה 5.1א, לפיה יש קבוצה חלקית של A_2 שעוצמתה k_1, ויש קבוצה חלקית של B_2 שעוצמתה m_1. לכן ב.ה.כ. נניח $A_1 \subseteq A_2$, $B_1 \subseteq B_2$.

כעת מהגדרת כפל עוצמות $k_1 \cdot m_1 = |A_1 \times B_1|$, $k_2 \cdot m_2 = |A_2 \times B_2|$.

אבל מהנחתנו ומהגדרת מכפלה קרטזית נקבל $A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$.

לכן , בהסתמך על שאלה 5.1ב, $k_1 \cdot m_1 \le k_2 \cdot m_2$.

ב. מצד אחד, $\aleph_0 \le C$ ולכן בעזרת סעיף א, $\aleph_0 \cdot C \le C \cdot C = C$.

מצד שני $1 \le \aleph_0$ ולכן בדומה $C = 1 \cdot C \le \aleph_0 \cdot C$.

משני הכיוונים יחד, בעזרת קנטור-שרדר-ברנשטיין, נובע המבוקש.

ג. לפי משפט 5.26, $2^{\aleph_0} = C$. נציב זאת ונקבל $C^C = (2^{\aleph_0})^C = 2^{\aleph_0 \cdot C} = 2^C$.

במעברים נעזרנו במשפט 5.27ג ובסעיף ב של שאלה זו.

איתי הראבן