

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 3-4

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה

משקל המטלה: 3 נקודות

מספר השאלות: 4

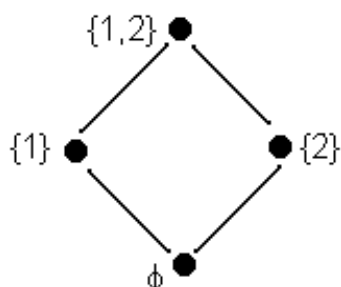
מועד אחרון להגשה: יום ו' 6.1.2012

סמסטר: 2012א

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1



באיור מופיעה דיאגרמת הסה ("תורת הקבוצות" עמ' 88) של

יחס ההכלה \subseteq מעל $P(\{1, 2\})$.

אנו רואים כי בדיאגרמה 4 קטעים.

תהי A קבוצה בת n איברים ($n > 0$). מצאי את מספר

הקטעים בדיאגרמת הסה של יחס ההכלה מעל $P(A)$.

את הביטוי המתקבל סכמי לביטוי פשוט שאינו מכיל סכומים,

בעזרת נוסחה המופיעה באחת השאלות בספר הלימוד.

שאלה 2

דנה, תלמידה בכיתה א', קראה בספר את המשפט המעניין: **דנה קמה דנה נמה**.

אחרי שקראה בהצלחה את המשפט, עלו בדעתה של דנה כמה שאלות מעניינות לא פחות:

א. (3 נק') בכמה דרכים אפשר לסדר את כל 12 האותיות שבמשפט הזה במחרוזת אחת

ללא רווחים, כגון **דנהקמהדנהנמה**.

ב. (4 נק') בכמה מהדרכים הללו מופיע בתוך המחרוזת הרצף **דמקה**?

ג. (18 נק') מה מספר הדרכים לסדר את 12 האותיות כך **שלא** תופיע בתוך המחרוזת

אף אחת מארבע המחרוזות הבאות: **דמקה**, **קהה**, **ממד**, **נננה**.

הדרכה: הכלה והפרדה.

שימו לב לצירופי מחרוזות שלא יכולים לקרות יחד, וכאלה שכן אפשריים.

בכל הסעיפים בשאלה זו יש להגיע לתשובה סופית מספרית. כמובן יש לפרט את הדרך.

שאלה 3

המשפחות שהכינו שיפודים וסטייקים בממ"ח 04 החליטו לחלק את האוכל בדרך אחרת: כל האוכל יחולק בין המשפחות, כאשר כל משפחה חייבת לקבל **משהו** - שיפוד או סטייק אחד לפחות. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת? הדרכה: הכלה והפרדה.
תזכורת: השיפודים זהים, הסטייקים זהים, אך שיפוד אינו זהה לסטייק.

שאלה 4

תהי A קבוצה של 100 מספרים טבעיים כלשהם.
הוכח שקיימת קבוצה חלקית לא-ריקה של A , **שסכום** איבריה מתחלק ב-100.
הדרכה: נמספר את אברי A : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$.
נסתכל בסכומים:

$$a_1$$

$$a_1 + a_2$$

$$a_1 + a_2 + a_3$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}$$

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20476 מתמטיקה דיסקרטית חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 6-7

מספר השאלות: 4 משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2012 מועד אחרון להגשה: יום ו' 13.1.2012

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

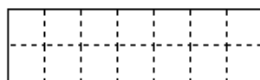
שאלה 1



בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×1



ומספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×2



עלינו לרצף מלבן שממדיו $n \times 2$:
(בציור $n = 7$).

אסור לחרוג מגבולות המלבן. בלוק של 2×1 אפשר להניח כרצוננו "שוכב" או "עומד".
יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

9 נק') א. רשום יחס נסיגה עבור a_n (הסבר אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

10 נק') ב. פתור את יחס הנסיגה.

6 נק') ג. חשב את a_4 בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א',

ומתוך הנוסחה המפורשת שקיבלת בסעיף ב'.

שאר הממ"ן עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בסוף הממ"ן רשימה של נוסחאות שימושיות.

שאלה 2

תהי $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. נתון: $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = -2$. שאר המקדמים אינם

ידועים. תהי g פונקציה המקיימת: $f(x) \cdot g(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2 + \dots$

נסמן $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$. חשב את b_0, b_1, b_2, b_3 .

שאלה 3

יהושע נוטל תרופות שונות: כדור נגד כאב-ראש: לכל היותר 3 ביום (אפשר 0). כדור מרץ: לכל היותר 3 ביום (אפשר 0). ויטמין C וויטמין B ללא הגבלה (אפשר 0), כל זה בכפוף לתנאי הבא, שלגביו הוא מחויב כחבר באגודת ההיפוכונדרים: מספר הכדורים הכולל, מכל 4 הסוגים יחד, שהוא לוקח כל יום יהיה בדיוק n . ערכו של n מוגדר מדי פעם בפרסומי האגודה. נסמן ב- a_n את מספר ההרכבים השונים של n כדורים שיכול יהושע לקחת ביום אחד, כאשר אין חשיבות לסדר נטילת התרופות, ותרופות מאותו סוג הן זהות.

א. מצא את הפונקציה היוצרת עבור הסדרה $\{a_n\}$. הסבר!

ב. מצא ביטוי מפורש עבור a_n (שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר הלימוד יכולה לסייע).

שאלה 4

דוגמא לתרגיל מסוג זה נמצאת בסוף הקובץ "מבוא לפונקציות יוצרות" שבאתר הקורס. חשב את המקדם של x^{2m} בכל אחד מאגפי הזהות האלגברית: $\frac{(1-x^2)^n}{(1-x)^n} = (1+x)^n$.

קבל מכאן זהות על סכומים של מקדמים בינומיים, מהצורה: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$.

בדוק את תשובתך עבור המקרה $n=5, m=2$ ועבור המקרה $n=5, m=3$. הדרכה: את אגף שמאל בזהות האלגברית הנתונה רשום כמכפלה. היעזר בנוסחאות שבתחתית העמוד.

להלן סיכום כמה נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות:

$$(i) \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad \text{ואינסופי} \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{סכום טור הנדסי סופי}$$

(ii) כפל פונקציות יוצרות:

$$\text{אם } f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i, \quad \text{ו-} \quad f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

$$\text{אז } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \quad (\text{ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד}).$$

$$(iii) \quad \frac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+\dots)^n = \sum_{k=0}^{\infty} D(n, k) x^k$$

במלים אחרות: המקדם של x^k בפיתוח הביטוי $\frac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n, k)$.
ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר.