קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"

תאריך הבחינה: 15.2.2016 (סמסטר 2016א - מועד א4 / 85)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.
כל השאלות זהות במשקלן.
בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפים: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

שאלה 1 (25 נקודות)

נתונים חמישה מאורעות במרחב מדגם S: A_1 , A_2 , A_3 , B ו- C.

המאורעות A_1 , A_2 ו- A_3 הם מאורעות זרים ואיחודם שווה למרחב המדגם.

כמו כן, נתון כי –

$$P(A_1) = P(A_2) = 2P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap B) = 2P(A_2 \cap B) = 6P(A_3 \cap B) \qquad P(B) = 0.6$$

$$P(C \mid A_2 \cap B) = \tfrac{1}{2} \qquad P(C \mid A_2 \cap B^C) = \tfrac{8}{11}$$

$$P(C \mid A_3) = 0.6 \qquad P(B \mid C \cap A_3) = \tfrac{1}{6}$$

$$P(B \cup C \mid A_1) = 0.95 \qquad P(B \cap C \mid A_1) = 0.15$$

חשב את ההסתברויות שלהלן:

א. $P(C)$ ב. $P(A_1 \cap B^C \cap C^C)$ ג. $P(A_2 \mid B \cup C)$ ד. $P(B \cap C \mid A_3)$

שאלה 2 (25 נקודות)

נתונה פונקצית הצפיפות הבאה: $f_X(x) = c(6-x) \quad , \quad 0 \le x \le 2$

(6 נק') א. חשב את הערך של c .

(6 נק') ב. חשב את השונות של X .

(6 נק') ג. חשב את $P\{X > 1 \mid X > 0.5\}$.

(7 נק') ד. יהיו $X_1, \ldots, X_{30}$ משתנים מקריים בלתי-תלויים,
שלכל אחד מהם פונקציית הצפיפות המוגדרת בתחילת השאלה.
מהי **בקירוב** ההסתברות שסכומם גדול מ- 30?

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p ($p > 0$).

(8 נק') א. חשב את $P\{X \le 16 \mid X > 7\}$. שים לב לסימני אי-השוויון.

(9 נק') ב. מהי פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $X \le n$ ($n = 1,2,\ldots$) ?

(8 נק') ג. יהי n שלם חיובי מסוים.
נגדיר את המשתנה המקרי Y על-ידי: $Y = \begin{cases} X & , \quad X < n \\ n & , \quad X \ge n \end{cases}$

השלם ב- $<$, $>$ או $=$ את הסימן החסר בביטוי $E[X] \;\square\; E[Y]$.
נמק את בחירתך.

שאלה 4 (25 נקודות)

נתונים n כדים ממסופרים מ-1 עד n , ונתונים n כדורים ממסופרים מ-1 עד n .
מכניסים באקראי את הכדורים לכדים – כדור אחד לכל כד.

יהי X מספר הכדים שהמספר שהם נושאים **שווה** למספר שעל הכדור שהוכנס לתוכם;
ויהי Y מספר הכדים שהמספר שהם נושאים **גדול** מהמספר שעל הכדור שהוכנס לתוכם.

(9 נק') א. נניח כי $n = 10$: חשב את $P\{X = 5\}$.

(8 נק') ב. עבור n $(n > 1)$ כללי: חשב את $E[Y]$.

(8 נק') ג. עבור n $(n > 1)$ כללי: האם המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה?

שאלה 5 (25 נקודות)

(13 נק') א. יהיו X_1 , X_2 , ... , X_r משתנים מקריים בעלי פונקציית התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים n ו- p_1 , p_2 , ... , p_r .

הוכח כי לכל $j = 0,1,...,n$, למשתנה המקרי המותנה X_1 בהינתן $X_2 = j$,
יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n - j$ ו- $\frac{p_1}{1-p_2}$.

(12 נק') ב. יהי p $(0 < p < 1)$ קבוע.
מספר הלקוחות הנכנסים לחנות במשך שעה הוא משתנה מקרי בינומי שלילי עם הפרמטרים 10 ו- p .
כל לקוח שנכנס לחנות, קונה בה מוצר/ים בהסתברות p , ואחרת, אינו קונה בה דבר (בהסתברות $1 - p$).
נניח שאין תלות בין לקוחות שונים הנכנסים לחנות.

יהי X מספר הלקוחות שקונים בחנות במשך שעה.
מהן התוחלת והשונות של X ?

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z)=P\{Z\le z\}=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt \qquad ; \qquad \Phi(-z)=1-\Phi(z) \qquad ; \qquad Z\sim N(0,1)$$

נוסחת האינטרפולציה: $\Phi(z)\approx\Phi(z_1)+\frac{z-z_1}{z_2-z_1}[\Phi(z_2)-\Phi(z_1)]$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה - 20425

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1}\cdot p \quad , \quad i=1,2,\dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i! \quad , \quad i=0,1,\dots$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,\dots$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,\dots,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,\dots,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a\le x\le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\,,\,t\neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad -\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,\dots,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r} \quad , \quad \sum n_i=n\,,\,\sum p_i=1$			

נוסחת הבינום
$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$$

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$$

כלל ההכלה וההפרדה
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

הסתברות מותנית
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

נוסחת הכפל
$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})$$

נוסחת ההסתברות השלמה
$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i) \quad , \quad \{B_i\}\text{ זרים ואיחודם הוא }S$$

נוסחת בייס
$$P(B_j|A)=\frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)} \quad , \quad \{B_i\}\text{ זרים ואיחודם הוא }S$$

תוחלת
$$E[X]=\sum_x x\,p_X(x)=\int x\,f(x)dx$$

תוחלת של פונקציה של מ"מ
$$E[g(X)]=\sum_x g(x)\,p_X(x)=\int g(x)\,f(x)dx$$

שונות
$$\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית
$$E[aX+b]=aE[X]+b$$

$$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון
$$P\{X>s+t|X>t\}=P\{X>s\} \quad , \quad s,t\ge 0$$

תוחלת מותנית
$$E[X|Y=y]=\sum_x x\,p_{X|Y}(x|y)=\int x\,f_{X|Y}(x|y)dx$$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X\mid Y=y) = E[X^2\mid Y=y]-(E[X\mid Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] = E[E[X\mid Y]] = \sum_y E[X\mid Y=y]p_Y(y)$

$E[X\cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X\mid Y]]$ (טענה מתרגיל ת26, עמוד 430)

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X\mid Y)]+\mathrm{Var}(E[X\mid Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]=E[XY]-E[X]E[Y]$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Cov}(X_i,Y_j)$$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{i<j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)\big/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t)=E[e^{tX}]$; $M_{aX+b}(t)=e^{bt}M_X(at)$

כאשר X_i מ״מ ב״ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t)\cdot\ldots\cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right]=E[N]E[X]$

(כאשר X_i מ״מ ב״ת ש״ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)=E[N]\mathrm{Var}(X)+(E[X])^2\mathrm{Var}(N)$

$$M_Y(t)=E\left[\left(M_X(t)\right)^N\right]$$

אי-שוויון מרקוב X מ״מ אי-שלילי , $a>0$, $P\{X\ge a\}\le E[X]/a$

אי-שוויון צ׳בישב $\mu,\sigma^2<\infty$, $a>0$, $P\{|X-\mu|\ge a\}\le \sigma^2/a^2$

משפט הגבול המרכזי X_i מ״מ ב״ת וש״ה , $\mu,\sigma^2<\infty$, $P\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-n\mu\right)\Big/\sqrt{n\sigma^2}\le a\right\}\underset{n\to\infty}{\to}\Phi(a)$

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב״ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ״מ בינומיים (גיאומטריים) ב״ת עם אותו הפרמטר p הוא מ״מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ״מ פואסוניים ב״ת הוא מ״מ פואסוני.
- סכום של מ״מ נורמליים ב״ת הוא מ״מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ״מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב״ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}=e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i=\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i=\frac{1}{1-x}\ ,\ -1<x<1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{i}=-\ln(1-x)\ ,\ 0<x<1$$

$$\int (ax+b)^n dx=\tfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}\ ,\ n\ne -1 \quad ; \quad \int \tfrac{1}{ax+b}dx=\tfrac{1}{a}\ln(ax+b)$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים:

$$\int e^{ax}dx=\tfrac{1}{a}e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax}dx=\tfrac{1}{a\ln b}b^{ax} \quad ; \quad \boxed{\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx}$$

$$\log_n a=\log_m a/\log_m n \quad ; \quad \log_n(a^b)=b\cdot\log_n a \quad ; \quad \log_n(ab)=\log_n a+\log_n b$$