

קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"
תאריך הבחינה: 8.7.2015 (סמסטר 2015 ב - מועד א 3 / 84)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפים: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

שאלה 1 (25 נקודות)

מגדילים ספרות בזו אחר זו ועם החזרה מתוך הקבוצה $\{0,1,\dots,9\}$.

- (6 נק') א. מהי ההסתברות שב-7 הספרות הראשונות אין ספרה שמופיעה יותר מפעם אחת?
(6 נק') ב. נתבונן על סדרת 20 הספרות שהוגרלו ראשונות.
מהי שונות מספר הספרות בסדרה זו, **החל מהספרה השנייה**,
ששוות לספרה הראשונה בסדרה?
(6 נק') ג. מהי תוחלת מספר הספרות שתוגרלנה (כולל הספרה הראשונה)
עד שהספרה הראשונה תוגרל שלוש פעמים **נוספות**?
(7 נק') ד. האם המשתנים המקריים "מספר ההגרלות עד לקבלת ה-4 הראשון"
ו- "מספר ההגרלות עד לקבלת ה-5 הראשון" בלתי-תלויים זה בזה?

שאלה 2 (25 נקודות)

- בוחרים באקראי מספר בן 8 ספרות.
כל ספרה במספר היא 1, 2 או 3 בהסתברויות שוות, ואין תלות בין 8 הספרות של המספר.
יהי S סכום הספרות של המספר הנבחר;
ויהי M מכפלת הספרות של המספר הנבחר.
(8 נק') א. חשב את ההסתברות ש- S מקבל ערך זוגי.
(8 נק') ב. חשב את $E[M^2]$.
(9 נק') ג. חשב את $E[S^2]$.

שאלה 3 (25 נקודות)

- אדם מטיל בו-זמנית קובייה ומטבע תקינים.
הוא חוזר על כך שוב ושוב, עד שהוא מקבל במטבע לראשונה H.
יהיו X = מספר ההטלות עד (וכולל) לקבלת ה-H הראשון במטבע;
 Y = מספר ה-6 שמתקבלים בקובייה [עד (וכולל) לפעם שמתקבל ה-H הראשון במטבע].
(8 נק') א. מהי פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y ?
(8 נק') ב. חשב את $P\{Y \geq 1\}$.
(9 נק') ג. חשב את השונות של המשתנה המקרי Y .

שאלה 4 (25 נקודות)

(11 נק') א. יהיו E ו- F מאורעות במרחב מדגם S .

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) \quad \text{הוכח כי:}$$

(14 נק') ב. נתונים 3 קלפים זהים בצורתם, אך שונים בצבעיהם:

האחד – אדום בשני צדדיו;

השני – כחול בשני צדדיו;

השלישי – אדום בצדו האחד וכחול בצדו השני.

1. בוחרים באקראי קלף אחד מתוך השלושה, ומניחים אותו על השולחן מבלי להתבונן בו. אם הצד העליון של הקלף שהונח אדום, מהי ההסתברות שצדו האחר כחול?
2. בוחרים באקראי שני קלפים מתוך השלושה, ומניחים אותם על השולחן מבלי להתבונן בהם. מהי ההסתברות שצבעי הצדדים העליונים של שני הקלפים שהונחו על השולחן שונים? (האחד אדום והשני כחול)

שאלה 5 (25 נקודות)

במאפיית "הלחם הטוב" אופים לחמניות, שהתפלגות הקוטר (בס"מ) של כל אחת מהן היא נורמלית עם תוחלת של 10 ס"מ וסטיות-תקן של 0.25 ס"מ. אין תלות בין קטרים של לחמניות שונות.

(7 נק') א. בוחרים באקראי 50 לחמניות מקריות שנאפו במאפייה.

מהי ההסתברות שבין הלחמניות שנבחרו יש בדיוק 9 לחמניות שקוטרן קטן מ- 9.8 ס"מ ובדיוק 35 לחמניות שקוטרן בין 9.8 ס"מ ל- 10.3 ס"מ?

(6 נק') ב. בוחרים לחמנייה באקראי, והאופה אומר שקוטר גדול מ- 9.8 ס"מ.

מהי ההסתברות שקוטר בין 10.2 ס"מ ל- 10.3 ס"מ?

(6 נק') ג. בוחרים 10 לחמניות מקריות ומסדרים אותן בשורה.

בין לחמנייה ללחמנייה משאירים רווח מדויק של 1 ס"מ.

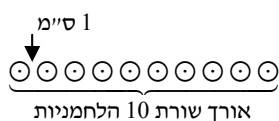
מהי השונות של אורך שורת-הלחמניות שתתקבל?

(6 נק') ד. חנות מסוימת מזמינה מהמאפייה 40 לחמניות:

על 30 מהלחמניות מפוזר שומשום ועל היתר פרג.

דנה מגיעה לחנות ובוחרת באקראי 6 לחמניות מתוך 40 לחמניות אלו.

מהי ההסתברות שבין הלחמניות שדנה תבחר תהיינה בדיוק 4 עם שומשום?



בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] \quad \text{נוסחת האינטרפולציה:}$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה - 20425

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה היוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}, \quad i=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t + 1 - p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1} \cdot p, \quad i=1,2,\dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i!, \quad i=0,1,\dots$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1} (1-p)^{i-r} \cdot p^r, \quad i=r, r+1, \dots$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r, \quad t < -\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i} / \binom{N}{n}, \quad i=0,1,\dots,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N} (1 - \frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n}, \quad i=m+1, m+2, \dots, m+n$	$m + (1+n)/2$	$(n^2 - 1)/12$	
אחידה	$1/(b-a), \quad a \leq x \leq b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt} - e^{at})/(tb - ta), \quad t \neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda - t), \quad t < \lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1, \dots, n_r} \cdot p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}, \quad \sum n_i = n, \sum p_i = 1$			

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \quad \text{נוסחת הבינום}$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \quad \text{כלל ההכלה וההפרדה}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{הסתברות מותנית}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \quad \text{נוסחת הכפל}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i) \quad , \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S \quad \text{נוסחת ההסתברות השלמה}$$

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)} \quad , \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S \quad \text{נוסחת בייס}$$

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx \quad \text{תוחלת}$$

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx \quad \text{תוחלת של פונקציה של מ"מ}$$

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2 \quad \text{שונות}$$

$$E[aX + b] = aE[X] + b \quad \text{תוחלת ושונות של פונקציה ליניארית}$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ .

$$P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\} \quad , \quad s, t \geq 0 \quad \text{תכונת חוסר-הזכרון}$$

$$E[X|Y=y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y) = \int x f_{X|Y}(x|y) dx \quad \text{תוחלת מותנית}$$

$\text{Var}(X Y = y) = E[X^2 Y = y] - (E[X Y = y])^2$	שונות מותנית
$E[X] = E[E[X Y]] = \sum_y E[X Y = y] p_Y(y)$	נוסחת התוחלת המותנית
$E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X Y]]$	(טענה מתרגיל 26, עמוד 430)
$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X Y)] + \text{Var}(E[X Y])$	נוסחת השונות המותנית
$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$	תוחלת של סכום משתנים מקריים
$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$	שונות משותפת
$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$	
$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$	שונות של סכום משתנים מקריים
$\rho(X, Y) = \text{Cov}(X, Y) / \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}$	מקדם המתאם הלינארי
$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$	פונקציה יוצרת מומנטים
$M_{X_1+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t) \quad :$ כאשר X_i מ"מ ב"ת מתקיים:	
$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X]$	תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי
$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\text{Var}(X) + (E[X])^2 \text{Var}(N)$	(כאשר X_i מ"מ ב"ת ש"ה)
$M_Y(t) = E\left[(M_X(t))^N\right]$	
$P\{X \geq a\} \leq E[X]/a \quad , \quad a > 0 \quad , \quad X$ מ"מ אי-שלילי	אי-שוויון מרקוב
$P\{ X - \mu \geq a\} \leq \sigma^2/a^2 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty$	אי-שוויון צ'בישב
$P\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)/\sqrt{n\sigma^2} \leq a\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a) \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty \quad , \quad X_i$ מ"מ ב"ת וש"ה	משפט הגבול המרכזי

<ul style="list-style-type: none"> אם A ו-B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A) + P(B)]$. סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר p הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי). סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני. סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי. ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X + Y = n$, כאשר X ו-Y מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית). 	

$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1 < x < 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = -\ln(1-x) \quad , \quad 0 < x < 1$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \neq -1 \quad ; \quad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$ $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \frac{1}{a \ln b} b^{ax} \quad ; \quad \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$ </div>	
$\log_n a = \log_m a / \log_m n \quad ; \quad \log_n(a^b) = b \cdot \log_n a \quad ; \quad \log_n(ab) = \log_n a + \log_n b$	