# חישוביות (20365) - בחינה לדוגמה מס' 1

בבחינה חמש שאלות. עליכם לענות על כולן.

1. $f: N \to N$ היא פונקציה **שלמה**. לכל $x > 100$ , $f(x) = x^2$ .
הוכיחו: $f$ היא פונקציה **פרימיטיבית רקורסיבית** (בלי תלות בערכי $f(x)$ עבור $x \le 100$).

2. $B$היא קבוצה נל"ר, $\mathrm{TOT} \subseteq B$ , $\mathrm{EMPTY} \subseteq \overline{B}$ .
הוכיחו: $B$ היא קבוצה m-שלמה.

3. הוכיחו (בעזרת רדוקציה) שהקבוצה המשלימה ל-TOT **איננה נל"ר**.

4. הוכיחו **בעזרת רדוקציה של בעיית עצירה של מכונות טיורינג** שלא קיים אלגוריתם המכריע לכל מכונת טיורינג $M$, האם $M$ עוצרת כאשר היא מתחילה לפעול על סרט ריק.

5. בעיית HITTING-SET היא הבעיה הבאה:
הקלט: 1. אוסף סופי $\{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ של קבוצות חלקיות של קבוצה סופית $S$.
(כלומר, לכל $1 \le i \le m$ , $C_i \subseteq S$).
2. מספר טבעי $k$.
השאלה: האם קיימת תת-קבוצה $T$ של $S$ כך ש- $|T| \le k$, ולכל $1 \le i \le m$ , $T \cap C_i \ne \emptyset$ .
הוכיחו כי HITTING-SET היא בעיה **NP**-שלמה.
**הדרכה**: כדי להוכיח שהיא **NP**-קשה, הראו רדוקציה של VERTEX-COVER.

## **חישוביות (20365) – קווים לפתרון בחינה לדוגמה מס׳ 1**

1. נסמן לכל $0 \le i \le 100$ : $y_i = f(i)$.

נגדיר את $f$ לפי מקרים :

$f(x) = y_i$ אם $x = i$, $0 \le i \le 100$ (יש כאן **101** מקרים) ;

$f(x) = x^2$ אם $x > 100$.

כעת משתמשים במסקנה 3.5.5 (הגדרה לפי מקרים) כדי להוכיח ש-$f$ היא פרימיטיבית רקורסיבית : הפרדיקטים שבהם משתמשים להבחנה בין המקרים הם כולם פרדיקט השוויון שהוא פרימיטיבי רקורסיבי. בדיקת השוויון נעשית מול מספרים, כלומר, מול פונקציות קבועות שהן פרימיטיביות רקורסיביות. הפונקציות שבהן משתמשים בהגדרה הן פונקציות קבועות שהן פרימיטיביות רקורסיביות והפונקציה $x^2$ שגם היא פרימיטיבית רקורסיבית. לכן, לפי מסקנה 3.5.5, $f$ היא פונקציה פרימיטיבית רקורסיבית.

2. כדי להוכיח ש-$B$ היא קבוצה m-שלמה יש להראות שהיא נל״ר ושלכל קבוצה נל״ר $C$ מתקיים $C \le_m B$.

נתון ש-$B$ נל״ר. כדי להוכיח שלכל קבוצה נל״ר $C$ מתקיים $C \le_m B$, נוכיח ש- $K \le_m B$. (על $K$ ידוע שהיא m-שלמה).

אפשר להראות שהרדוקציה של הוכחת משפט 4.6.6 היא רדוקציה של $K$ ל-$B$.

3. אפשר להראות שהרדוקציה של הוכחת משפט 4.6.6 היא רדוקציה של $K$ ל-TOT והיא רדוקציה של המשלימה של $K$ למשלימה של TOT. מכיוון שהמשלימה של $K$ איננה נל״ר ויש רדוקציה שלה למשלימה של TOT, מקבלים שגם המשלימה של TOT איננה נל״ר.

4. נניח בשלילה שקיים אלגוריתם כזה. נראה שבעזרתו אפשר להכריע את בעיית העצירה של מכונות טיורינג.

תהי $M$ מכונת טיורינג ותהי $w$ מילה. נניח שאנו מעוניינים לדעת האם $M$ עוצרת בריצתה על $w$ או לא.

נבנה מכונה $M'$ שעל הסרט הריק כותבת את $w$ ומריצה את $M$ על $w$. (על כל קלט אחר אפשר להחליט מה שרוצים ביחס לפעולתה של $M'$).

$M'$ עוצרת כאשר היא מתחילה לפעול על סרט ריק אם ורק אם $M$ עוצרת על $w$.

5. שייכות ל-**NP** : מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית תסמן באופן לא דטרמיניסטי מספר לא גדול מ-$k$ של איברים של $S$. לאחר מכן המכונה תעבור על כל הקבוצות החלקיות $C_i$ ותוודא שבכל תת-קבוצה כזו יש איבר מסומן. אם נמצאה תת-קבוצה שאין בה איבר מסומן, המכונה תיכנס ללולאה אינסופית. אם בכל תת-קבוצה יש איבר מסומן, המכונה תעצור.

זמן הריצה של השלב הראשון (סימון האיברים) לינארי בגודל הקלט.

זמן הריצה של השלב השני אינו גדול מגודל הקלט בשלישית (לכל איבר של ה-$C_i$-ים, משווים בינו לבין כל אחד מן האיברים המסומנים).

לכן המכונה שתיארנו מקבלת את השפה בזמן פולינומיאלי לא דטרמיניסטי. זה מוכיח שהשפה שייכת ל-**NP**.

רדוקציה פולינומיאלית של VERTEX-COVER :

הקבוצה $S$ תהיה קבוצת הצמתים של הגרף $G$.

לכל צלע $e_i = (u, v)$ בגרף נגדיר תת-קבוצה $C_i = \{u, v\}$.

ברור שהבנייה המתוארת ניתנת לביצוע בזמן פולינומיאלי בגודל של הגרף $G$.

כדי להשלים את ההוכחה, מראים שיש בגרף כיסוי קדקודים בגודל $\leq k$ אם ורק אם יש תת-קבוצה $T$ של $S$ כך ש- $|T| \leq k$ ולכל $i$, $T \cap C_i \neq \varnothing$.