ה א ו נ י ב ר ס י ט ה ה פ ת ו ח ה

20425

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חוברת הקורס - סתיו 2019א

כתבה: נעמי מילאנו-רוזנטל

אוקטובר 2018 - סמסטר סתיו - תשע״ט

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

נספחים

אל הסטודנטים,

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב".

בחוברת זו תמצאו תיאור, מלא ככל האפשר, של הקורס וכן פרטים על כלל פעילויותיכם במהלך הלימודים. רצוי שתראו בה מעין מדריך אישי, שתפקידו להבהיר לכם עניינים שונים. קראו בעיון רב את כל הסעיפים שלהלן, לפני שתתחילו בלימודיכם.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: http://www.openu.ac.il/shoham .

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

בכל בעיה שמתעוררת אפשר לפנות למרכז ההוראה בקורס, בטלפון 09-7781428, בפקס 09-7780631 או בדואר האלקטרוני, שפרטיו מובאים באתר הקורס.

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה,

צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (קורס 20425 / סמסטר 2019א)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	 ממ"ן (למנחה)
1	19.10.2018-14.10.2018	1			
2	26.10.2018-21.10.2018	2			
3	2.11.2018-28.10.2018	2			
4	9.11.2018-4.11.2018	3			
5	16.11.2018-11.11.2018	3		ממ"ח 01 11.11.2018	
6	23.11.2018-18.11.2018	4			
7	30.11.2018-25.11.2018	4			ממ"ן 11 25.11.2018
8	7.12.2018-2.12.2018 (ב-ו חנוכה)	5			
9	14.12.2018-9.12.2018 (א-ב חנוכה)	5		ממ"ח 02 9.12.2018	
10	21.12.2018-16.12.2018	6			
11	28.12.2018-23.12.2018	6			ממ"ן 12 23.12.2018
12	4.1.2019-30.12.2018	7			
13	11.1.2019-6.1.2019	7			ממ"ן 13 6.1.2019
14	18.1.2019-13.1.2019	8			ממ"ן 14 20.1.2019

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים, מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

נקודות זכות

הקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב" מקנה למסיימים אותו 4 נקודות זכות.

הדרישות לקבלת 4 נקודות זכות הן:

א. הגשת מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות.

ב. ציון מינימלי 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון מינימלי 60 בקורס.

הגשת מטלות

הקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב" כולל חוברת קורס ובה 6 מטלות להגשה, המיועדות לתרגול רוב נושאי הלימוד של הקורס, ואוסף שאלות לתרגול עצמי של נושאי הלימוד של פרק 8.

עליכם להגיש מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות.

המשקל של כל **מטלת מנחה הוא 6 נקודות** והמשקל של כל **מטלה ממוחשבת הוא 3 נקודות**.

המועד האחרון להגשה של כל מטלה מופיע בכותרתה.

שימו לב, **בקורס זה לא ניתנות מטלות השלמה!**

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית
למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1 ו- 2

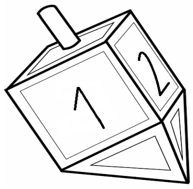
קומבינטוריקה; חישובי הסתברויות קומבינטוריים

מספר השאלות: 20 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2019 א **מועד אחרון להגשה:** 11.11.2018

שלחו את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת שאילתא בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

שאלות 1-4 מתייחסות לבעיה הבאה:



נתון סביבון תקין בעל 4 פאות, שעליהן רשומים המספרים 1, 2, 3 ו- 4.

מסובבים את הסביבון 5 פעמים.

<u>שאלה 1</u>

מהי ההסתברות שכל ארבע התוצאות האפשריות תתקבלנה בחמשת הסיבובים?

א. $\frac{15}{16}$ ב. $\frac{15}{32}$ ג. $\frac{15}{64}$ ד. $\frac{15}{128}$

<u>שאלה 2</u>

מהי ההסתברות שהתוצאה 3 תתקבל לפחות פעמיים?

א. $\frac{619}{1,024}$ ב. $\frac{47}{128}$ ג. $\frac{135}{512}$ ד. $\frac{377}{512}$

<u>שאלה 3</u>

מהי ההסתברות שבשני הסיבובים הראשונים (מתוך ה-5 שנעשו) התקבלו תוצאות שונות ובסך-הכל התקבלו כל ארבע התוצאות בחמשת הסיבובים?

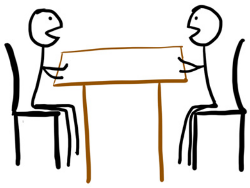
א. $\frac{9}{128}$ ב. $\frac{12}{128}$ ג. $\frac{18}{128}$ ד. $\frac{27}{128}$

<u>שאלה 4</u>

מהי ההסתברות שב-5 הסיבובים התקבלו <u>בדיוק</u> שתיים מהתוצאות האפשריות?

א. $\frac{45}{256}$ ב. $\frac{3}{16}$ ג. $\frac{75}{256}$ ד. $\frac{1}{32}$

שאלות 5-9 מתייחסות לבעיה הבאה:



10 ילדים, שהם 5 זוגות של אחים, מתיישבים באקראי ליד 5 שולחנות.
ליד כל שולחן יש בדיוק שני כסאות: אחד אדום והשני ירוק.

<u>שאלה 5</u>

מהי ההסתברות שיואב ורועי, שניים מן הילדים, יתיישבו ליד אותו השולחן?

א. $\frac{1}{9}$ ב. $\frac{2}{9}$ ג. $\frac{1}{5}$ ד. $\frac{2}{5}$

<u>שאלה 6</u>

מהי ההסתברות שיהיו בדיוק שלושה שולחנות שבכל אחד מהם יישבו שני ילדים שהם אחים?

א. $\frac{1}{1{,}008}$ ב. $\frac{1}{189}$ ג. $\frac{4}{189}$ ד. $\frac{3}{512}$

<u>שאלה 7</u>

נתבונן על יואב ורועי. מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם יישב על כסא אדום?

א. $\frac{2}{9}$ ב. $\frac{1}{2}$ ג. $\frac{7}{9}$ ד. $\frac{8}{9}$

<u>שאלה 8</u>

מהי ההסתברות שלא יהיו שני אחים שיישבו על כסאות מאותו הצבע?

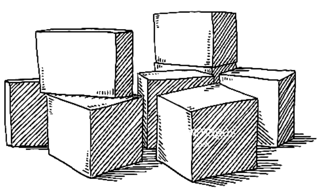
א. $\frac{1}{120}$ ב. $\frac{8}{63}$ ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{7}{9}$

<u>שאלה 9</u>

מהי ההסתברות שליד השולחן הימני ביותר (בהנחה שיש שולחן אחד כזה) יישבו ילדים שהם אחים?

א. $\frac{1}{18}$ ב. $\frac{1}{10}$ ג. $\frac{1}{9}$ ד. $\frac{1}{8}$

שאלות 10-13 מתייחסות לבעיה הבאה:



נתון ארגז ובו 30 קוביות זהות בצורתן: 25 לבנות, 3 כחולות ו- 2 אדומות.
קוביות מאותו הצבע זהות למראה.

<u>שאלה 10</u>

בוחרים באקראי וללא החזרה **קבוצה** של 4 קוביות מהארגז.
כמה תוצאות בחירה <u>שונות למראה</u> קיימות?

א. 11 ב. 71 ג. 264 ד. 312

<u>שאלה 11</u>

בוחרים באקראי וללא החזרה **קבוצה** של 4 קוביות מהארגז.

מהי ההסתברות שתבחרנה קוביות בדיוק משני צבעים, כך שתהיינה בדיוק 2 קוביות מכל צבע?

א. $\frac{48}{312}$ ב. $\frac{3}{11}$ ג. $\frac{18}{71}$ ד. $\frac{401}{9,135}$

<u>שאלה 12</u>

מסדרים באקראי את הקוביות בשורה.

מהי ההסתברות שלא תהיינה שתי קוביות צבעוניות (כחולות או אדומות) במקומות סמוכים?

א. 0.2017   ב. 0.2983   ג. 0.3728   ד. 0.4616

<u>שאלה 13</u>

מסדרים באקראי את הקוביות במעגל.

מהי ההסתברות שלא תהיינה שתי קוביות צבעוניות (כחולות או אדומות) במקומות סמוכים?

א. 0.0124   ב. 0.0154   ג. 0.4474   ד. 0.5539

שאלות 14-17 מתייחסות לבעיה הבאה:

ילד קטן מקליד את 22 האותיות העבריות מ- א' עד ת' (ללא אותיות סופיות) בסדר אקראי.

כל אחת מ- 22 האותיות מופיעה בדיוק פעם אחת ברצף ההקלדה.

<u>שאלה 14</u>

מהי ההסתברות שהאות **ד** תופיע במקום הרביעי ברצף-ההקלדה והאות **ו** תופיע <u>עד</u> המקום השישי (ובכלל זה המקום השישי) ברצף-ההקלדה?

א. $\frac{1}{462}$ ב. $\frac{5}{462}$ ג. $\frac{6}{462}$ ד. $\frac{12}{462}$

<u>שאלה 15</u>

מהי ההסתברות שברצף-ההקלדה תופיע לפחות אחת משתי המילים "מערה" ו- "פתח"?

א. $\frac{17!\cdot 7,181}{22!}$ ב. $\frac{19!\cdot 21}{22!}$ ג. $\frac{17!\cdot 2}{22!}$ ד. $1-\frac{4!\cdot 3!}{22!}$

<u>שאלה 16</u>

מהי ההסתברות שברצף-ההקלדה האותיות **א**, **ב** ו- **ג** תופענה כולן עד (וכולל) למקום העשירי?

(שלוש האותיות <u>לא חייבות</u> להופיע במקומות סמוכים או בסדר מסוים).

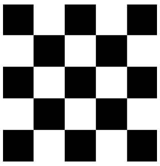
א. $\frac{8}{77}$ ב. $\frac{1}{15}$ ג. $\frac{6}{77}$ ד. $\frac{1}{120}$

<u>שאלה 17</u>

מהי ההסתברות שברצף-ההקלדה האות **ד** תופיע לפני האות **ה** וגם האות **ח** תופיע לפני האות **ט**?
(האותיות <u>לא חייבות</u> להופיע במקומות סמוכים).

א. $\frac{1}{16}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{2}$

שאלות 18-20 מתייחסות לבעיה הבאה:



נתון לוח משובץ בגודל 5×5 (כלומר, לוח שבו 5 שורות ובכל שורה 5 משבצות).
על כל משבצת בלוח כותבים באקראי אחת מהספרות 0 או 1.

<u>שאלה 18</u>

מהי ההסתברות שתהיה בלוח לפחות שורה אחת שכולה אפסים?

א. $1-(1-0.5^5)^5$ ב. $1-0.5^{25}$ ג. $(1-0.5^5)^5$ ד. $5\cdot 0.5^5$

<u>שאלה 19</u>

מהי ההסתברות שתהיינה בלוח בדיוק 15 משבצות שעליהן הספרה 1?

א. $\binom{25}{15}\cdot 0.5^{15}$ ב. $\binom{25}{15}\cdot 0.5^{25}$ ג. $\binom{25}{15}\cdot 0.2^{25}$ ד. 0.5^{25}

<u>שאלה 20</u>

מהי ההסתברות שלפחות בשורה אחת סכום הספרות יהיה בדיוק 3?

א. $1-\frac{11^5}{2^{20}}$ ב. $\frac{\binom{5}{3}\cdot 5}{2^{25}}$ ג. $\frac{\binom{5}{3}\cdot 5}{2^{5}}$ ד. $1-\frac{20}{2^5}$

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 2 ו- 3

דיאגרמת ון וטענות הסתברות בסיסיות; הסתברות מותנית ואי-תלות

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2019 א **מועד אחרון להגשה:** 25.11.2018

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

מנהל מחלקה לאיכות הסביבה בעירייה החליט לבדוק את נכונות תושבי העיר למחזר חומרים שונים:

1. עיתונים;
2. בקבוקי משקה משפחתיים;
3. מיכלי משקה אישיים (בקבוקים קטנים ופחיות);
4. סוללות.

הוא ערך סקר בין תושבי העיר ומצא כי –

כל מי שמוכן למחזר סוללות מוכן גם למחזר מיכלי משקה אישיים;

כל מי שמוכן למחזר מיכלי משקה אישיים מוכן גם למחזר בקבוקי משקה משפחתיים;

59% מהתושבים מוכנים למחזר עיתונים;

10% מהתושבים מוכנים למחזר את כל החומרים ברשימה;

מבין התושבים שמוכנים למחזר סוללות, 50% מוכנים למחזר גם עיתונים;

80% מהתושבים מוכנים למחזר לפחות חומר אחד מהרשימה שלעיל, כאשר רבע **מהם** מוכנים למחזר רק עיתונים, שמינית **מהם** מוכנים למחזר רק בקבוקי משקה משפחתיים והשאר מוכנים למחזר לפחות שני חומרים מהרשימה;

$\frac{1}{3}$ מהתושבים שמוכנים למחזר בדיוק 3 חומרים מהרשימה, לא ממחזרים סוללות.

א. הגדר ארבעה מאורעות מתאימים לבעיה, ובטא רק באמצעותם את רשימת הנתונים שלעיל.
צייר דיאגרמת ון מתאימה, ורשום בה את כל ההסתברויות הנובעות מרשימת הנתונים.
הסבר **באמצעות טענות הסתברות** את דרך החישוב של ההסתברויות, וודא שסכומן הוא 1.

בוחרים באקראי אחד מתושבי העיר –

ב. מהי ההסתברות שהתושב הנבחר אינו מוכן למחזר מיכלי משקה אישיים?

ג. אם התושב הנבחר אינו ממחזר לפחות חומר אחד מהרשימה שלעיל,
מהי ההסתברות שהוא מוכן למחזר בדיוק חומר אחד מבין הארבעה שברשימה?

ד. ידוע שהתושב הנבחר ממחזר עיתונים ובקבוקים משפחתיים.
מהי ההסתברות שהוא מוכן למחזר גם סוללות?

שאלה 2 (16 נקודות)

מטילים 10 פעמים מטבע תקין.

לכל $i = 1,2,\ldots,9$, נגדיר את המאורעות A_i על ידי: "בהטלות i ו- $i+1$ התקבלו אותן התוצאות".

האם לכל $i \neq j$ $(i, j = 1,2,\ldots,9)$, המאורעות A_i ו- A_j בלתי-תלויים זה בזה? הוכח את טענתך.

שאלה 3 (16 נקודות)

שני חברים, המשתתפים בשעשועון "מונית הכסף", נשאלים שאלה זהה בנוגע לסרט שבו צפו.

לשאלה שתי תשובות אפשריות: "כן" או "לא".

כל אחד מהחברים משיב נכון על השאלה בהסתברות p $(0 < p < 1)$, באופן בלתי תלוי בתשובת חברו.

החברים מתלבטים ביניהם, כיצד יענו על השאלה. עומדות בפניהם שתי אפשרויות:

1. לבחור באקראי את התשובה של אחד מהם ולומר אותה למנחה השעשועון;
2. להתייעץ ביניהם, בטרם יענו, ולהחליט לפי השיטה הבאה –
   אם ענו אותה התשובה, לומר אותה למנחה;
   אם ענו תשובות שונות, לבחור באקראי אחת מהתשובות ולומר אותה.

באיזו משתי האפשרויות כדאי להם לנקוט?

שאלה 4 (24 נקודות)

מטילים קובייה תקינה שוב ושוב.

(8 נק') א. מהי ההסתברות שתתקבל תוצאה זוגית לפני שתתקבל תוצאה שהיא כפולה של 3?

ב. נתבונן על 40 ההטלות הראשונות:

(8 נק') 1. אם בהטלות אלו התקבלו 13 תוצאות שהן כפולה של 3,
מהי ההסתברות שבהטלה השישית (מתוך ה- 40)
התקבלה לראשונה תוצאה שהיא כפולה של 3?

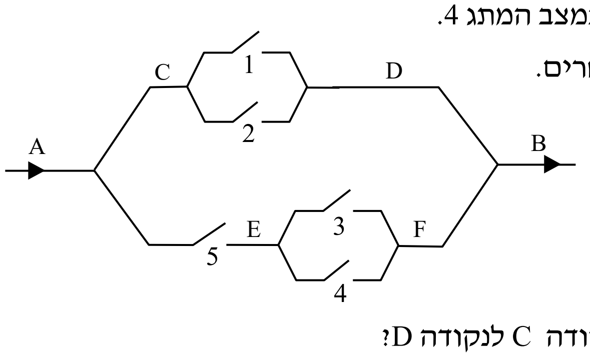
(8 נק') 2. אם ידוע שהתקבלה תוצאה זוגית בדיוק 15 פעמים ב- 30 ההטלות הראשונות מתוכן,
מהי ההסתברות שתתקבל תוצאה זוגית בדיוק 22 פעמים במהלך 40 ההטלות הללו?

שאלה 5 (24 נקודות)

נתונה המערכת המתוארת באיור. כל אחד ממתגים 1, 3 ו- 5 **סגור** בהסתברות 0.9 (ואז **עובר בו זרם**).

מצב המתג 1 (2) בלתי-תלוי במצב המתג 3 ובלתי-תלוי במצב המתג 4.

מצב מתג 5 בלתי-תלוי במצב של כל אחד מהמתגים האחרים.



אם מתג 1 סגור, אז מתג 2 סגור בהסתברות 0.9.

אם מתג 3 סגור, אז מתג 4 סגור בהסתברות 0.9.

אם מתג 1 פתוח, אז מתג 2 סגור בהסתברות 0.3.

אם מתג 3 פתוח, אז מתג 4 סגור בהסתברות 0.3.

(8 נק') א. מהי ההסתברות שעובר זרם במערכת מנקודה C לנקודה D?

(8 נק') ב. אם מתג 2 פתוח, מהי ההסתברות שעובר זרם במערכת מנקודה C לנקודה D?

(8 נק') ג. מהי ההסתברות שעובר זרם במערכת מנקודה A לנקודה B?

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 4

מספר השאלות: 20 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2019 א **מועד אחרון להגשה:** 9.12.2018

שלחו את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת שאילתא בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

שאלות 1-3 מתייחסות לבעיה הבאה:

מטילים שוב ושוב מטבע, שההסתברות לקבל בו H היא 0.2.

לכל $i = 1,2,\ldots$, נגדיר את המשתנים המקריים X_i על-ידי:

"מספר ההטלה שבה התקבל H בפעם ה-i-ית" (בסה"כ ולא בהכרח ברציפות)

<u>שאלה 1</u>

מהי $P\{X_1 > 8\}$?

א. 0.8^9 ב. 0.8^8 ג. $0.2 \cdot 0.8^7$ ד. $0.2 \cdot 0.8^8$

<u>שאלה 2</u>

מהי $P\{X_3 > 12\}$?

א. 0.2457 ב. 0.2835 ג. 0.5583 ד. 0.7165

<u>שאלה 3</u>

מהי $\text{Var}(X_7)$?

א. 1.4 ב. 9.8 ג. 20 ד. 140

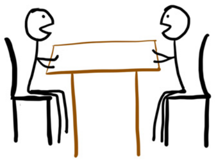
<u>שאלה 4</u>

ראובן מטיל שוב ושוב מטבע, שההסתברות לקבל בו H היא 0.6, עד שהוא מקבל H בפעם השנייה בסה"כ (לאו דווקא ברציפות).

נסמן ב- Y את מספר ה- T שראובן מקבל במשחק, ונגדיר את הרווח שלו במשחק על-ידי 2^Y .

מהי תוחלת הרווח של ראובן?

א. 2.52 ב. 2.67 ג. 6.08 ד. 9



שאלות 5-7 מתייחסות לבעיה הבאה:

10 ילדים, שהם 5 זוגות של אחים, מתיישבים באקראי ליד 5 שולחנות.

ליד כל שולחן יושבים בדיוק 2 ילדים.

יהי X המשתנה המקרי המוגדר על ידי מספר השולחנות שיושבים בהם שני ילדים שהם אחים.

<u>שאלה 5</u>

מהי $P\{X=1\}$?

א. 0.069 ב. 0.111 ג. 0.317 ד. 0.347

<u>שאלה 6</u>

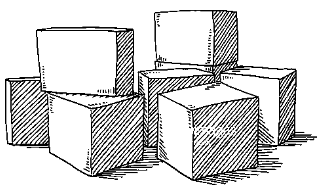
מהי התוחלת של X ?

א. 0.556 ב. 0.778 ג. 1 ד. 1.222

<u>שאלה 7</u>

מהי השונות של מספר הילדים (מתוך ה-10) שלא יושבים באותו השולחן עם האח/ות שלהם?

א. $10-2\text{Var}(X)$ ב. $4\text{Var}(X)$ ג. $\text{Var}(5-X)$ ד. $2\text{Var}(X)$



שאלות 8-13 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתון ארגז ובו 30 קוביות זהות בצורתן:

25 לבנות, 3 כחולות, 1 אדומה ו- 1 צהובה.

<u>שאלה 8</u>

בוחרים באקראי ו<u>ללא החזרה</u> 10 קוביות מהארגז.

יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הקוביות הלבנות שנבחרות. מהי $\text{Var}(X)$?

א. 0.958 ב. 1.389 ג. 2.400 ד. 8.333

<u>שאלה 9</u>

בוחרים באקראי ו<u>עם החזרה</u> 10 קוביות מהארגז.

יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הקוביות הלבנות שנבחרות. מהי $\text{Var}(X)$?

א. 0.958 ב. 1.389 ג. 2.400 ד. 8.333

<u>שאלה 10</u>

בוחרים באקראי וללא החזרה 4 קוביות מהארגז.

יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר צבעי הקוביות שנבחרים. מהי $E[X]$?

א. 1.066 ב. 1.308 ג. 1.626 ד. 2.026

<u>שאלה 11</u>

בוחרים באקראי, עם החזרה ובזו אחר זו קוביות מהארגז.

יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הבחירה שבה תתקבל לראשונה קובייה צהובה.

מהי $\mathrm{Var}(X)$?

א. 30 ב. 74.92 ג. 870 ד. 900

<u>שאלה 12</u>

בוחרים באקראי, עם החזרה ובזו אחר זו קוביות מהארגז.

יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הבחירה שבה תתקבל בפעם הרביעית קובייה צהובה.

מהי $\mathrm{Var}(X)$?

א. 120 ב. 299.67 ג. 3480 ד. 3600

<u>שאלה 13</u>

בוחרים באקראי ועם החזרה 400 קוביות מהארגז.

יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הקוביות האדומות שנבחרות.

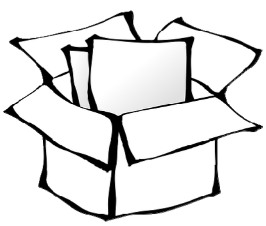
מהי **בקירוב** הסתברות המאורע $\{X = 15\}$?

א. 0.0631 ב. 0.0744 ג. 0.0859 ד. 0.0927

שאלות 14-15 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתון ארגז ובו 100 פתקים, הממוספרים מ-1 עד 100.

בוחרים באקראי וללא החזרה 15 פתקים מתוך 100 הפתקים שבארגז.



<u>שאלה 14</u>

מהי שונות מספר הפתקים שייבחרו, שעליהם מספר שהוא כפולה של 5?

א. 1.94 ב. 2.06 ג. 2.40 ד. 2.55

<u>שאלה 15</u>

מהי ההסתברות שייבחרו 6 פתקים, שעליהם מספר שהוא כפולה של 5 **או** כפולה של 7?

א. 0.1671   ב. 0.1763   ג. 0.1837   ד. 0.1965

שאלות 16-20 מתייחסות לבעיה הבאה:

יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 2.

נגדיר את המשתנה המקרי Y על-ידי:
$$Y = \begin{cases} 2X & , \quad X \le 3 \\ X & , \quad X \ge 4 \end{cases}$$

<u>שאלה 16</u>

מהו הערך של $P\{Y=2\}$?

א. e^{-1} ב. $\frac{1}{2}e^{-2}$ ג. e^{-2} ד. $2e^{-2}$

<u>שאלה 17</u>

מהו הערך של $P\{Y=6\}$?

א. $\frac{4}{45}e^{-2}$ ב. $\frac{4}{3}e^{-2}$ ג. $\frac{64}{45}e^{-2}$ ד. e^{-3}

<u>שאלה 18</u>

נגדיר שני מאורעות: $A=\{Y \le 5\}$ ו- $B=\{X \ge 2\}$.

מהו הערך של $P(A \mid B)$?

א. 0.3970   ב. 0.5940   ג. 0.6683   ד. 0.7397

<u>שאלה 19</u>

מהי $E[Y]$?

א. $E[X] + P\{X \le 3\}$ ב. $E[X](1 + P\{X \le 3\})$ ג. $E[X] + 10e^{-2}$ ד. $E[X] + 12\frac{2}{3} \cdot e^{-2}$

<u>שאלה 20</u>

מהי $E[Y^2]$?

א. $E[X^2] + 3P\{X \le 3\}$ ב. $E[X^2](1 + 3P\{X \le 3\})$ ג. $E[X^2] + 19e^{-2}$ ד. $E[X^2] + 66e^{-2}$

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 5

מספר השאלות: 4   **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2019 א   **מועד אחרון להגשה:** 23.12.2018

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (35 נקודות)

פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי X נתונה על-ידי: $1 \le x \le 3 \quad , \quad f_X(x) = c|x-2|$

(7 נק') א. חשב את הערך של c .

(7 נק') ב. מהי $E[X]$?

(7 נק') ג. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X . רשום אותה באופן מדויק (לכל x ממשי).

(7 נק') ד. מהי $P\{X < 2.5 \mid X > 2\}$?

(7 נק') ה. יהי $Y = (X-1)^2$.

חשב את $F_Y(3.24)$.

שאלה 2 (16 נקודות)

לאורך החיים (בשבועות) של רכיב מסוג מסוים יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר $\frac{1}{250}$.

אין תלות בין רכיבים שונים מאותו הסוג.

(10 נק') א. רכיב מסוים פועל כבר 200 שבועות –

1. מהי ההסתברות שיפעל עוד 100 שבועות לפחות?
2. מהן תוחלת ושונות אורך החיים של רכיב זה בהינתן המידע שבתחילת הסעיף?

(6 נק') ב. במנוע מסוים מורכבים 3 רכיבים מהסוג שלעיל. המנוע פועל כל עוד לפחות רכיב אחד תקין.
נניח שאי אפשר להחליף רכיב שהתקלקל,
מהי ההסתברות שהמנוע יפעל לפחות 400 שבועות?

שאלה 3 (14 נקודות)

יהי X משתנה מקרי אחיד (רציף) על הקטע $(-4, 7)$.

(7 נק') א. חשב את $P\{X^2 - 16 > 0 \mid X > 0\}$.

(7 נק') ב. חשב את $E[\mid X^2 - 16 \mid]$.

שאלה 4 (35 נקודות)

משקל צנצנת ממרח שוקולד מתוצרת מסוימת מתפלג נורמלית עם תוחלת μ וסטיית-תקן של 12 גרם.

נניח כי ידוע, שההסתברות שצנצנת ממרח שוקולד תשקול יותר מ- 364.16 גרם היא 0.119.

כמו כן, נניח כי אין תלות בין משקלים של צנצנות ממרח שוקולד שונות.

(7 נק') א. חשב את μ.

(7 נק') ב. החברה, המייצרת את צנצנות הממרח, מתחייבת שלכל היותר 4% מהצנצנות ישקלו מתחת ל- 330 גרם. האם היא עומדת בהתחייבותה?

(7 נק') ג. מהו המשקל ש- 25% מצנצנות הממרח שוקלות פחות ממנו?

(7 נק') ד. אם נתון שצנצנת מסוימת שוקלת מתחת ל- 365 גרם,
מהי ההסתברות שמשקלה גבוה מ- 355 גרם?

(7 נק') ה. נתונות 30 צנצנות ממרח שוקולד מקריות.
אם שוקלים את הצנצנות בזאת אחר זאת, מהי ההסתברות שהצנצנת האחרונה שתשקל, דהיינו הצנצנת ה- 30, תהיה הצנצנת העשירית שמשקלה יהיה נמוך מ- 345 גרם?

הערה: בצע אינטרפולציה לינארית בחישוביך, היכן שהיא נדרשת.

מטלת מנחה (ממ״ן) 13

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 6

מספר השאלות: 4   **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2019 א   **מועד אחרון להגשה:** 6.1.2019

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1 (28 נקודות)

יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכולם התפלגות אחידה בדידה בין 0 ל- 10.

(7 נק׳) א. חשב את $P\left\{2 \le \min\limits_{i=1,\ldots,10} X_i \le 4\right\}$.

(7 נק׳) ב. חשב את $P\left\{X_1 = 7, \max\limits_{i=1,\ldots,10} X_i = 7\right\}$.

(7 נק׳) ג. חשב את $P\left\{X_1 = 3, \max\limits_{i=1,\ldots,10} X_i = 8\right\}$.

(7 נק׳) ד. חשב את $P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i = 97\right\}$.

שאלה 2 (20 נקודות)

מטילים שוב ושוב מטבע, שההסתברות לקבל בו H היא 0.6.

לכל $i = 1,2,\ldots$, נגדיר את המשתנים המקריים X_i על-ידי:

״מספר ההטלה שבה התקבל H בפעם ה-i-ית״.

שימו לב: הכוונה ש-H התקבל בסה״כ i פעמים, ולא בהכרח ברציפות.

(6 נק׳) א. האם X_2 ו- X_5 בלתי-תלויים? הוכח את טענתך.

(7 נק׳) ב. חשב את $P\{X_2 = i, X_8 = j\}$, לכל i ו- j שלמים וחיוביים.

(7 נק׳) ג. לכל $j = 8,9,\ldots$, חשב את $P\{X_2 = i \mid X_8 = j\}$, לכל i שלם וחיובי.

שאלה 3 (28 נקודות)

מטילים 30 פעמים שלוש קוביות תקינות.

יהיו: X = מספר ההטלות שבהן לא מתקבלת התוצאה 4 באף אחת מהקוביות;

Y = מספר ההטלות שבהן התוצאה 4 מתקבלת בדיוק באחת משלוש הקוביות;

Z = מספר ההטלות שבהן התוצאה 4 מתקבלת בדיוק בשתיים משלוש הקוביות.

(7 נק׳) א. חשב את $P\{X=16, Y=11, Z=2\}$.

(7 נק׳) ב. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו-Y. רשום אותה באופן מדויק.

(7 נק׳) ג. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של Y בהינתן $Z=3$. רשום אותה באופן מדויק.

(7 נק׳) ד. חשב את שונות מספר ההטלות שמתקבלות בהן לכל היותר שתי תוצאות 4.

שאלה 4 (24 נקודות)

במשרד כלשהו עובדים 5 פקידים.

מספר הודעות הדוא״ל שמקבל כל פקיד במהלך יום אחד הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 10.

נניח שאין תלות בין מספרי ההודעות שמקבלים פקידים שונים, ושכל הודעה מגיעה בדיוק לאחד מהם.

בוחרים יום מקרי בשבוע –

(6 נק׳) א. מהי ההסתברות שיתקבלו במשרד בסה״כ 45 הודעות (אצל כל 5 הפקידים יחד)?

ב. אם התקבלו במשרד בסה״כ 45 הודעות –

(6 נק׳) 1. מהי ההסתברות שרמי (אחד מן הפקידים) קיבל בדיוק 9 מתוכן?

(6 נק׳) 2. מהי ההסתברות שכל אחד מהפקידים קיבל בדיוק 9 הודעות?

(6 נק׳) ג. ההסתברות שכל הודעה שמתקבלת במשרד תגיע עם בקשה לאישור-קריאה היא 0.1.

מהי ההסתברות שבמשך היום תגענה בסה״כ 6 הודעות עם אישורי-קריאה?

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2019 א **מועד אחרון להגשה:** 20.1.2019

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (24 נקודות)

יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 5, ויהי Y משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 10.

המשתנים המקריים X ו-Y בלתי-תלויים זה בזה.

מציירים מלבן שרוחבו X ס"מ ואורכו Y ס"מ.

(6 נק') א. חשב את ההסתברות ש**היקף** המלבן, דהיינו $2(X+Y)$, שווה ל- 28 ס"מ.

(6 נק') ב. נתון ש**היקף** המלבן הוא 28 ס"מ.
מהי השונות של רוחבו?

(6 נק') ג. חשב את תוחלת **שטח** המלבן, דהיינו את $E[XY]$.

(6 נק') ד. חשב את שונות **שטח** המלבן.

שאלה 2 (18 נקודות)

יהיו X, Y ו-Z משתנים נורמליים סטנדרטיים בלתי-תלויים.

נגדיר את המשתנים המקריים V ו-U על ידי $V=-Y+2Z$ ו- $U=X+Y$.

(6 נק') א. זהה את ההתפלגות של המשתנה המקרי V.
רשום את שמה ואת ערכי הפרמטרים שלה.

(6 נק') ב. מהו a שמקיים את השוויון $P\{V>a\}=0.8$?

(6 נק') ג. חשב את מקדם המתאם בין המשתנים המקריים V ו-U.

שאלה 3 (20 נקודות)

מספר הקונים המגיעים ביום ראשון לסניף מסוים של סופרמרקט הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1,500.

הקונה ה-i-י, שמגיע ביום ראשון לסניף זה ממחזר X_i בקבוקים, לכל $i = 1,2,\ldots$, כאשר המשתנים המקריים X_i , מוגדרים על-ידי $X_i = Y_i - 1$, עבור Y_i-ים שהתפלגותם גיאומטרית עם הפרמטר 0.4.

כמו כן, נניח שאין תלות בין מספר הבקבוקים שקונים שונים ממחזרים, וגם כי אין תלות בין מספר הקונים שמגיעים לסניף ביום ראשון למספר הבקבוקים שכל אחד מהם ממחזר.

(6 נק׳) א. חשב את תוחלת מספר הבקבוקים הממוחזרים ביום ראשון.

(6 נק׳) ב. חשב את שונות מספר הבקבוקים הממוחזרים ביום ראשון.

(8 נק׳) ג. מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים של מספר הבקבוקים הממוחזרים ביום ראשון.

שאלה 4 (16 נקודות)

מטילים 10 פעמים מטבע, שההסתברות לקבל בו H היא 0.8.

יהי X מספר הזוגות של שתי הטלות עוקבות, שמתקבלת בהן אותה התוצאה.

למשל: אם מקבלים $\mathrm{HT}\underline{\mathrm{H}\overline{\mathrm{H}}}\overline{\mathrm{H}}\mathrm{TH}\underline{\mathrm{TT}}\mathrm{H}$, אז $X = 3$.

(8 נק׳) א. מהי התוחלת של X ?

(8 נק׳) ב. מהי השונות של X ?

שאלה 5 (22 נקודות)

שתי מרכזיות טלפון: A ו- B, פועלות באופן בלתי-תלוי זו בזו.

בשתי המרכזיות מתקבלות שיחות טלפון בזמנים המקיימים את שלוש ההנחות של תהליך פואסון עם קצב של 2 שיחות לדקה.

מתחילים לעקוב אחר שיחות הנכנסות לשתי המרכזיות החל מזמן 0.

יהיו: T = הזמן החולף (בדקות) מזמן 0 ועד שנכנסת השיחה הראשונה **למרכזייה A** ;

X = מספר השיחות שנכנסות **למרכזייה B** מזמן 0 ועד שנכנסת השיחה הראשונה **למרכזייה A**.

(5 נק׳) א. חשב את $P\{T > 0.25\}$.

(5 נק׳) ב. חשב את $P\{X = 2 \mid T = 0.5\}$.

(12 נק׳) ג. מהן התוחלת והשונות של המשתנה המקרי X ?

אוסף שאלות לתרגול עצמי

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 8

1. לאורך החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר $\frac{1}{500}$.
אין תלות בין נורות שונות מאותו הסוג.
אדם קנה 100 נורות מסוג זה.
מצא קירוב להסתברות שממוצע אורך החיים של 100 הנורות שנקנו יהיה בין 450 ל- 520 שעות.

2. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1,000.

א. חשב קירוב נורמלי להסתברות ש- X יקבל את הערך 1,000.
מדוע אפשר לחשב קירוב נורמלי במקרה זה?

ב. חשב חסם תחתון ל- $P\{|X-1{,}000|\le 40\}$, באמצעות אי-שוויון צ'בישב.

3. נתונים 5 משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, $X_1, X_2, \ldots, X_5$, שכל אחד מהם מקבל את הערכים 0, 3 ו- 6 בהסתברויות שוות (כלומר, הסתברות ⅓ לכל ערך).
נגדיר $Y=\sum_{i=1}^{5} X_i$. חשב חסם עליון ל- $P\{Y>25\}$:

א. בעזרת אי שוויון מרקוב;

ב. בעזרת אי שוויון צ'בישב.

4. א. יהי X משתנה מקרי אי-שלילי שתוחלתו μ סופית, ויהי $t>0$.
הוכח כי $P\{X\le \mu t\}\ge 1-\frac{1}{t}$.

ב. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n=1,2,\ldots)$, משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר p $(0<p<1)$.
הראה בעזרת אי-שוויון צ'בישב שמתקיים: $P\left\{\overline{X}_n\le \frac{2}{p}\right\}\ge 1-\frac{1-p}{n}$.

הערה: $\overline{X}_n=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

5. הוכח, בעזרת משפט הגבול המרכזי, כי $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} e^{-n}\frac{n^i}{i!}=\frac{1}{2}$.

.6 יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_{200}$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפונקציה יוצרת המומנטים:

$M_X(t) = \left(\dfrac{e^t}{5-4e^t}\right)^2$, עבור $t < \ln 1.25$.

מצא קירוב ל- $P\left\{1{,}910 \le \sum_{i=1}^{200} X_i < 2{,}050\right\}$.

.7 א. נתון ארגז ובו 120 כדורים שעליהם רשומים מספרים.

לכל $i = 1,2,\ldots,15$, יש בארגז i כדורים שהמספר הרשום עליהם הוא i .

בוחרים כדורים מהארגז, בזה אחר זה **ועם החזרה**, כך שבכל בחירה יש לכל הכדורים סיכויים שווים להיבחר.

נניח שבוחרים (בשיטה המתוארת לעיל) בדיוק 100 כדורים.

יהי Y הסכום הכולל של 100 המספרים הרשומים על הכדורים שנבחרו.

חשב קירוב ל- $P\{1{,}000 \le Y \le 1{,}100\}$.

הערה: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

ב. מעגלים 50 מספרים שנבחרו באקראי, כל אחד לשלם הקרוב לו ביותר, ומסכמים את 50 המספרים המעוגלים.

אם לכל אחת משגיאות-העיגול יש התפלגות אחידה בקטע $(-0.5, 0.5)$, מהו קירוב להסתברות שההפרש <u>המוחלט</u> בין הסכום המתקבל לבין הסכום המדויק של 50 המספרים עולה על 3?

.8 אורך-החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים מתפלג מעריכית עם הפרמטר 0.01, והוא אינו תלוי באורך-החיים של נורות אחרות.

כמה נורות מסוג זה עליך לקנות (בקירוב), אם ברצונך להבטיח 5,000 שעות-אור בהסתברות 0.95 לפחות?

הנח שאתה מתקין נורה אחת, ובהישרפה מחליף אותה מייד באחרת. זמן ההחלפה זניח.

.9 נתונים שלושה ארגזים בלתי-תלויים.

לכל ארגז אפשר להכניס X קופסאות, כאשר ל- X יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 150.

א. חשב **קירוב** להסתברות שלשלושת הארגזים יחדיו יוכנסו לפחות 480 קופסאות.

ב. חשב **קירוב** להסתברות ש<u>ההפרש המוחלט</u> בין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז הראשון לבין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז השני יהיה גדול מ- 10.

בשני הסעיפים נמק את פתרונך.

.10 יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- 0.5, עבור $n > 4$.

הוכח בעזרת אי שוויון צ'בישב שמתקיים: $P\{X \ge n-2\} \le \dfrac{n}{2(n-4)^2}$.

11. רשום את החסמים מלעיל הקטנים ביותר (המוכרים לך) עבור $P\{X \geq 14\}$, בכל אחד מן המקרים הבאים:

א. X הוא משתנה מקרי אי-שלילי ותוחלתו 7;

ב. X הוא משתנה מקרי המקיים $X \geq -2$ ותוחלתו 7;

ג. X הוא משתנה מקרי שתוחלתו 7 ושונותו 4.

12. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת סופית μ ושונות סופית σ^2.

הנח ש-n גדול וחשב **קירוב** ל- $P\left\{\bar{X} \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} + \mu\right\}$.

13. המשקל W (בטונות) של מטען, שגשר מסוים יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק, הוא משתנה מקרי נורמלי שתוחלתו 400 וסטיית התקן שלו 40. נניח שהמשקל (בטונות) של מכונית הוא משתנה מקרי שתוחלתו 3 וסטיית התקן שלו 0.3. אם ברגע מסוים ההסתברות לגרימת נזק במבנה הגשר עולה על 0.1, מהו (בקירוב) המספר המינימלי של מכוניות הנמצאות אז על הגשר?

הנח שאין תלות בין משקלי מכוניות שונות ובין המשקל של כל מכונית לעומס שהגשר יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק.

14. נתונה קופסה ובה 18 כדורים: 10 לבנים, 5 שחורים ו- 3 אדומים. כל הכדורים **שונים** זה מזה.

בוחרים מהקופסה באקראי **וללא החזרה** 5 כדורים, רושמים את צבעיהם ומחזירים אותם לקופסה.

חוזרים על התהליך 90 פעמים, כך שאין תלות בין החזרות השונות.

יהי Y המספר **הכולל** של הכדורים הלבנים שנבחרו במהלך 90 החזרות הללו.

חשב <u>חסם עליון</u> (הטוב ביותר האפשרי) להסתברות של המאורע $\{|Y-250| \geq 13\}$.

נספחים

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

דף הנוסחאות יצורף לכל בחינה.

גירסת דף הנוסחאות, המובאת בחוברת מטלות זו, נכונה לחודש אוקטובר 2010.

לקראת הבחינה מומלץ לבדוק <u>באתר הקורס</u> אם לא חלו שינויים בדף הנוסחאות שיצורף לבחינה.

נספח ב: רשימת טענות להוכחה בבחינה

בכל בחינה עשויות להופיע טענות, מן הרשימה המובאת להלן, שאותן תִּדָּרשו להוכיח במדויק.

ההוכחות של כל הטענות מן הרשימה מובאות באתר הקורס בקובץ נפרד.

משקל הטענות שתופענה בבחינה לא יעלה על 25 נקודות.

הטענות עשויות להופיע ביותר מאשר שאלה אחת.

גירסת רשימת הטענות, המובאת בחוברת מטלות זו, נכונה לחודש פברואר 2011.

לקראת הבחינה מומלץ לבדוק <u>באתר הקורס</u> אם לא חלו שינויים ברשימת הטענות לבחינה.

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,\ldots,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1}\cdot p \quad , \quad i=1,2,\ldots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i! \quad , \quad i=0,1,\ldots$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,\ldots$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,\ldots,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,\ldots,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a\le x\le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\ , t\neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi\sigma})\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad -\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,\ldots,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r} \quad , \ \sum n_i=n \ , \sum p_i=1$			

נוסחת הבינום $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}$

$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^C)$

כלל ההכלה וההפרדה $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$

הסתברות מותנית $P(A\,|\,B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

נוסחת הכפל $P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\,|\,A_1)P(A_3\,|\,A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n\,|\,A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})$

נוסחת ההסתברות השלמה $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\,|\,B_i)P(B_i) \quad ,$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס $P(B_j\,|\,A)=\dfrac{P(A\,|\,B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\,|\,B_i)P(B_i)} \quad ,$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת $E[X]=\sum_x x\,p_X(x)=\int x\,f(x)dx$

תוחלת של פונקציה של מ"מ $E[g(X)]=\sum_x g(x)\,p_X(x)=\int g(x)f(x)dx$

שונות $\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית $E[aX+b] = aE[X]+b$

$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון $P\{X>s+t\,|\,X>t\}=P\{X>s\} \quad , \quad s,t\ge 0$

תוחלת מותנית $E[X\,|\,Y=y]=\sum_x x\,p_{X|Y}(x\,|\,y)=\int x\,f_{X|Y}(x\,|\,y)dx$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X\mid Y=y) = E[X^2\mid Y=y]-(E[X\mid Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] = E[E[X\mid Y]] = \sum_y E[X\mid Y=y]p_Y(y)$

(טענה מתרגיל ת26, עמוד 430) $E[X\cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X\mid Y]]$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X\mid Y)]+\mathrm{Var}(E[X\mid Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right] = \sum_{i=1}^{n}E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]=E[XY]-E[X]E[Y]$

$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{j=1}^{m}Y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Cov}(X_i,Y_j)$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{i<j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)\big/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t)=E[e^{tX}]\quad;\quad M_{aX+b}(t)=e^{bt}M_X(at)$

כאשר X_i מ״מ ב״ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t)\cdot\ldots\cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N}X_i\right]=E[N]E[X_1]$

(כאשר X_i מ״מ ב״ת ש״ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)=E[N]\mathrm{Var}(X_1)+(E[X_1])^2\mathrm{Var}(N)$

$M_{X_1+\ldots+X_N}(t)=E\left[\left(M_{X_1}(t)\right)^N\right]$

אי-שוויון מרקוב $P\{X\ge a\}\le E[X]/a\quad,\quad a>0$, X מ״מ אי-שלילי

אי-שוויון צ׳בישב $P\{|X-\mu|\ge a\}\le\sigma^2/a^2\quad,\quad a>0\ ,\ \mu,\sigma^2<\infty$

משפט הגבול המרכזי $P\left\{(\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu)\big/\sqrt{n\sigma^2}\le a\right\}\underset{n\to\infty}{\to}\Phi(a)\quad,\quad\mu,\sigma^2<\infty$, X_i מ״מ ב״ת וש״ה

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב״ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ״מ בינומיים (גיאומטריים) ב״ת עם אותו הפרמטר p הוא מ״מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ״מ פואסוניים ב״ת הוא מ״מ פואסוני.
- סכום של מ״מ נורמליים ב״ת הוא מ״מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ״מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב״ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$\sum_{i=0}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}\quad;\quad\sum_{i=0}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\quad;\quad\sum_{i=0}^{n}i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}=e^x\quad;\quad\sum_{i=0}^{n}x^i=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\quad;\quad\sum_{i=0}^{\infty}x^i=\frac{1}{1-x}\ ,\ -1<x<1\quad;\quad\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{i}=-\ln(1-x)\ ,\ 0<x<1$

$\int(ax+b)^n\,dx=\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}\ ,\ n\ne-1\quad;\quad\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\ln(ax+b)$

$\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}\quad;\quad\int b^{ax}dx=\frac{1}{a\ln b}b^{ax}$

נוסחת האינטגרציה בחלקים:

$\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$

$\log_n a=\log_m a/\log_m n\quad;\quad\log_n(a^b)=b\cdot\log_n a\quad;\quad\log_n(ab)=\log_n a+\log_n b$

נספח ב: טענות להוכחה בבחינה

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב - 20425

ההוכחות של הטענות, המובאות ברשימה שלהלן, נמצאות בקובץ נפרד באתר הקורס.

1. יהיו E ו- F מאורעות במרחב מדגם S. הוכח כי: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

2. יהיו F ו- G מאורעות זרים של ניסוי מקרי כלשהו. הוכח כי בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה, ההסתברות שהמאורע F יתרחש לפני המאורע G היא: $\dfrac{P(F)}{P(F)+P(G)}$

3. יהי X משתנה מקרי בדיד, שתוחלתו סופית, ויהיו a ו- b קבועים ממשיים. הוכח כי:

$$E[aX+b] = aE[X]+b \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$$

4. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$. הוכח כי:

$$E[X] = np \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

5. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \lambda \;\; ; \;\; \mathrm{Var}(X) = \lambda$

6. יהי X משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים N, m ו- n. הוכח כי: $E[X] = n \cdot \frac{m}{N}$

7. יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \frac{1}{\lambda} \;\; ; \;\; \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

8. יהי X משתנה מקרי אחיד (רציף) על הקטע (a, b), עבור $a < b$.

הוכח כי: $E[X] = \frac{a+b}{2} \;\; ; \;\; \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

9. הוכח: אם מאורע מסוים מתרחש בהתאם לַהנחות של תהליך-פואסון עם קצב λ, אז משך הזמן החולף עד להתרחשות המופע הראשון של המאורע (החל מזמן 0) הוא משתנה מקרי מעריכי עם אותו הפרמטר λ.

10. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה.
הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda_X + \lambda_Y$.

11. יהיו X ו- Y משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.
הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים $(2, p)$.

12. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה.
הוכח שלמשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X+Y=n$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$.

13. יהי $Y = a + bX$, ונניח כי $\sigma_X^2 > 0$. הראה כי: $\rho(X,Y) = \begin{cases} +1 & , \quad b > 0 \\ -1 & , \quad b < 0 \end{cases}$

14. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת ושונות סופיות, μ ו- σ^2, בהתאמה.

הוכח כי:
$$E[\overline{X}] = \mu \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2/n$$

15. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_r$ משתנים מקריים בעלי פונקציית התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $p_1, p_2, \ldots, p_r$.

הוכח: א. למשתנה המקרי X_i יש התפלגות שולית בינומית עם הפרמטרים n ו- p_i.

ב. למשתנה המקרי המותנה X_1 בהינתן $X_2 = j$, לכל $j = 0,1,\ldots,n$, יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n-j$ ו- $p_1/(1-p_2)$.

ג. $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$

16. יהיו X ו- Y משתנים מקריים בדידים בעלי תוחלות ושונויות סופיות.

הוכח:
$$E[X] = E[E[X \mid Y]]$$
$$\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$$

17. הוכח: אם N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים אי-שליליים, ואם $X_1, X_2, \ldots$ הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב-N, אז מתקיים:
$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1]$$
$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\,\mathrm{Var}(N)$$

הערה: כאשר $N = 0$, סכום המשתנים שווה גם הוא ל-0.

18. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי:
$$M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n \qquad , \qquad -\infty < t < \infty$$

19. יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי:
$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \qquad , \qquad t < -\ln(1-p)$$

20. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$.

הוכח כי:
$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \qquad , \qquad -\infty < t < \infty$$

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z)=P\{Z\le z\}=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt \qquad ; \qquad \Phi(-z)=1-\Phi(z) \qquad ; \qquad Z\sim N(0,1)$$

נוסחת האינטרפולציה: $\Phi(z)\approx\Phi(z_1)+\frac{z-z_1}{z_2-z_1}[\Phi(z_2)-\Phi(z_1)]$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326