פרק ח: פולינומים והתמרת פוריה המהירה

קרא ולמד את פרק 32 מתחילתו עד סוף סעיף 32.1.

פרק זה עוסק בהתמרת פוריה המהירה (FFT) ומראה כיצד ניתן להשתמש בה כדי לכפול שני פולינומים בזמן $\Theta(n \log n)$.

נוסחת לאגראנז'

בהינתן הייצוג של פולינום $A(x)$ על פי ערכי נקודות:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1),, ..., (x_{n-1}, y_{n-1})$$

נוסחת לאגראנז' היא:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)}$$

נוכל לראות כי לכל $0 \le t \le n-1$, $A(x_t) = y_t$. נבדוק זאת: ב-$A(x)$ מופיע סכום של n איברים. נתבונן באיבר ה-s בסכום. לכל $s \neq t$ נקבל:

$$\frac{y_s \cdot \prod_{j \neq s} (x_t - x_j)}{\prod_{j \neq s} (x_s - x_j)}$$

הואיל והמכפלה מתבצעת עבור כל ה-j השונים מ-s, ו-$t \neq s$, הרי שבפרט מופיע במכפלה הביטוי $x_t - x_t = 0$, ולכן כל המכפלה מתאפסת. אולם עבור $s = t$ נקבל:

$$\frac{y_t \cdot \prod_{j \neq t} (x_t - x_j)}{\prod_{j \neq t} (x_t - x_j)} = y_t$$

ולכן, כל איברי הסכום מתאפסים, פרט לאיבר המתאים לאינדקס $s = t$, שהוא y_t.
קיבלנו אפוא את השוויון הנדרש $A(x_t) = y_t$.

בכך הוכחנו למעשה את נוסחת לאגראנז', שכן ישנו **פולינום יחיד** $A(x)$ מסדר $n-1$ המקיים $A(x_t) = y_t$ לכל $0 \leq t \leq n-1$.

נדון כעת במספר הפעולות הדרוש לחישוב מקדמי פולינום $A(x)$ הנתון בייצוג של ערכי נקודות בעזרת שיטת לאגראנז'. החישוב מבוסס על כך שניתן לחלק במהירות כל פולינום $P(x)$ בפולינום לינארי $(x - x_0)$ ממעלה 1. זהו חילוק עם שארית שבו השארית היא מספר ממשי, כלומר, פולינום ממעלה 0.

נזכיר כיצד מחלקים פולינום בפולינום לינארי בעזרת הדוגמה שלהלן. נחלק את הפולינום $x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ בפולינום $x-3$.

$$\begin{array}{l|l}
\quad\quad x^2 + x + 6 & \\
\hline
x^3 - 2x^2 + 3x + 4 & x - 3 \\
x^3 - 3x^2 & \\
\quad\quad x^2 + 3x & \\
\quad\quad x^2 - 3x & \\
\quad\quad\quad\quad 6x + 4 & \\
\quad\quad\quad\quad 6x - 18 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 22 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad == &
\end{array}$$

כופלים את $x-3$ ב-x^2, כדי "לבטל" את x^3. ההפרש בין $x^3 - 2x^2$ ל-$x^3 - 3x^2$ הוא x^2. לפיכך כופלים את $x-3$ ב-x, כדי לבטל את x^2, וההפרש הוא $6x$, וכן הלאה. מקבלים אפוא כי:

$$(x^3 - 2x^2 + 3x + 4) = (x^2 + x + 6)(x - 3) + 22$$

קל לראות כי מספר הפעולות הדרושות לחילוק הפולינום $A(x)$ בפולינום לינארי $(x - x_0)$ הוא $\Theta(n)$, שכן עוברים על $A(x)$ משמאל לימין, ועבור כל איבר ב-$A(x)$ מתבצעות $\Theta(1)$ פעולות. נשתמש בכך כדי להראות שניתן לחשב את מקדמי הפולינום $A(x)$ בעזרת נוסחת לאגראנז' בזמן $\Theta(n^2)$.

השיטה היא לחשב את הפולינום:

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(x - x_j\right)$$

ואז לבצע n פעולות חילוק ב-$(x - x_k)$, עבור $0 \le k \le n-1$, כדי לקבל את n האיברים $\prod_{j \ne k}\left(x - x_j\right)$ הנדרשים בסכום.

שאלה 1

השלם את פרטי החישוב, והראה כיצד ניתן לחשב את $A(x)$ באמצעות $\Theta(n^2)$ פעולות בעזרת נוסחת לאגראנז'.

התשובה בעמ' 196

הערה: כפי שנראה בהמשך, ניתן לבחור נקודות "מיוחדות" כך שבהינתן הייצוג של A בעזרת ערכי נקודות ב-n הנקודות הללו, חישוב המקדמים a_i של A מתבצע באמצעות $\Theta(n \log n)$ פעולות בלבד. זוהי אפוא שיטה מהירה יותר מזו שתוארה לעיל. הנקודות המיוחדות הללו הן n שורשי היחידה.

שורשי היחידה

בפרק זה אנו עוסקים בפולינומים מעל שדה המספרים המרוכבים. מעל המרוכבים, לכל פולינום יש n שורשים, ובפרט, לפולינום $x^n = 1$ יש n שורשים, הקרויים n שורשי היחידה מסדר n, שכן הם מקיימים את המשוואה $x = \sqrt[n]{1}$. אחת הדרכים למצוא את שורשיו של פולינום היא לפרק את הפולינום לגורמים לינאריים. לדוגמה, נתבונן במשוואה $x^n = 1$ עבור $n = 4$:

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)\,(x^2 + 1) = (x - 1)\,(x + 1)\,(x - i)\,(x + i) = 0$$

ולפיכך פתרונות המשוואה הם $x = 1$, $x = i$, $x = -1$, $x = -i$ (כאשר $i = \sqrt{-1}$), ואלה הם ארבעת השורשים מסדר 4 של היחידה.

ישנה דרך קצרה לתיאור שורשי היחידה. נזכיר את ההגדרה הבאה (ראו גם הקורס אלגברה לינארית I, קורס 20109 של האוניברסיטה הפתוחה, יחידה 4):

$$e^{\alpha i} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

נתבונן בערכים $e^{\frac{2\pi i}{n}j}$ עבור $0 \le j \le n-1$. עבור $n = 4$ נקבל:

עבור $j = 0$: $e^{0i} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

עבור $j = 1$: $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

עבור $j = 2$: $e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

עבור $j = 3$: $e^{\frac{3\pi}{2}i} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$

כלומר, השורשים מסדר 4 של היחידה הם $e^{\frac{2\pi i}{4}j}$ עבור $j = 0, 1, 2, 3$.

ובאופן כללי, עבור n שלם וחיובי, נסמן $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, ואז n שורשי היחידה מסדר n הם:

$$\omega_n^0 = 1 = e^{0i},\quad \omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}},\quad \omega_n^2 = e^{\frac{2\pi i}{n}\cdot 2},\quad \omega_n^3 = e^{\frac{2\pi i}{n}\cdot 3},\ \ldots,$$
$$\omega_n^{n-1} = e^{\frac{2\pi i}{n}\cdot(n-1)}$$

לדוגמה, עבור $n = 3$ נקבל את שורשי היחידה הבאים:

$$\omega_3^0 = 1, \quad \omega_3 = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad \omega_3^2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

כלומר:

$$1, \quad -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

שאלה 2

תאר את השורשים מסדר 5 של היחידה. אין צורך לחשב במפורש את ערכי ה-cos וה-sin.

התשובה בעמ' 196

התמרת פוריה הבדידה

בהתמרת פוריה נתון פולינום $A(x)$ ממעלה n, וכן n נקודות $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$; מטרת ההתמרה היא לחשב את ערכי A, $A(x_0), A(x_1), ..., A(x_{n-1})$, ב-$n$ הנקודות הנתונות.

כפי שראינו, את הערך של A בנקודה בודדת ניתן לחשב באמצעות $\Theta(n)$ פעולות. לכן נוכל כמובן לחשב את הערכים של A בכל n הנקודות בעזרת $\Theta(n^2)$ פעולות. אולם, מתברר כי חישוב הערך של A ב-n **שורשי היחידה** ניתן לביצוע בעזרת $\Theta(n \log n)$ פעולות בלבד!

כדי להדגים את התמרת פוריה, נתבונן בפולינום $A(x) = x^4 + x + 1$ ונחשב את התמרת פוריה שלו בארבעת שורשי היחידה מסדר 4, שהם $1, i, -1, -i$. ערכי הפולינום בנקודות אלה הם:

$$A(1) = 3, \quad A(i) = 2 + i, \quad A(-1) = 1, \quad A(-i) = 2 - i$$

לפיכך תוצאת התמרת פוריה של הפולינום $A(x) = x^4 + x + 1$ בשורשי היחידה היא הווקטור $(3, 2 + i, 1, 2 - i)$.

פעולת **האינטרפולציה** היא הפעולה ההפוכה לפעולת ההתמרה. בפעולת האינטרפולציה מקבלים את ערך הפולינום A ב-n נקודות, $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$. כלומר, נתונים הערכים $A(x_0), A(x_1), ..., A(x_{n-1})$, ויש לחשב את מקדמי הפולינום. דהיינו, אם $A(x) = a_0 + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1}$, יש לחשב את ערכי ה-$a_i$. ובסיכום: בפעולת האינטרפולציה נתון ייצוג של פולינום בעזרת ערכי נקודות, ויש למצוא את מקדמי הפולינום.

בתחילת הפרק הראינו כי בעזרת נוסחת לאגראנז' ניתן לבצע אינטרפולציה בזמן $\Theta(n^2)$. כפי שכבר הזכרנו, מתברר שחישוב אינטרפולציה ניתן לביצוע באופן מהיר יותר, כאשר הנקודות שבהן נתונים ערכי הפולינום הן n שורשי היחידה. לפיכך ניתן לכפול שני פולינומים A ו-B במהירות בשיטה המתוארת באיור 32.1 בספר.

כפל פולינום בשיטה זו מתבצע על פי השלבים הבאים:

א. מתייחסים אל הפולינומים A ו-B כאל פולינומים ממעלה $2n-1$:

$$A(x) = a_0 + \cdots + a_{n-1}\, x^{n-1} + 0 \cdot x^n + \ldots + 0 \cdot x^{2n-1}$$

$$B(x) = b_0 + \cdots + b_{n-1}\, x^{n-1} + 0 \cdot x^n + \ldots + 0 \cdot x^{2n-1}$$

ב. מחשבים את התמרות פוריה המתאימות, כלומר, מחשבים את הערכים של A ו-B ב-$2n$ שורשי היחידה מסדר $2n$:

$$\omega_{2n}^0, \omega_{2n}^1, \omega_{2n}^2, \ldots, \omega_{2n}^{2n-1}$$

ג. כופלים נקודתית את ערכי A ו-B, כלומר, מחשבים את הווקטור:

$$(A(\omega_{2n}^0) \cdot B(\omega_{2n}^0), A(\omega_{2n}^1) \cdot B(\omega_{2n}^1), \ldots, A(\omega_{2n}^{2n-1}) \cdot B(\omega_{2n}^{2n-1})) \qquad (1)$$

ואלה הם ערכי פולינום המכפלה $A(x) \cdot B(x)$ ב-$2n$ שורשי היחידה מסדר $2n$.

ד. מבצעים את פעולת האינטרפולציה המתאימה, כלומר, מחשבים על פי הווקטור (1) את מקדמי פולינום המכפלה.

ברור כי יש להשלים את הפרטים ולהסביר כיצד לבצע ביעילות את שלבים (א)-(ד).

שאלה 3

תאר כיצד מחשבים את מכפלת הפולינומים $x + 1$ ו-$x - 1$ בשיטה שלעיל, בעזרת שורשי היחידה.

התשובה בעמ' 197

קרא ולמד את סעיף 32.2 עד התת-סעיף התמרת פוריה המהירה ("ה-FFT").

נדגים את למה 32.3 עבור $n = 4$, $d = 2$, $k = 1$.

ובכן, $dn = 8$, $\omega_{dn} = \omega_8 = e^{\frac{2\pi i}{8}}$.

וכמו כן, $dk = 2$, ולכן:

$$(\omega_{dn})^{dk} = (\omega_8)^2 = \left[e^{\frac{\pi i}{4}}\right]^2 = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$$

לעומת זאת:

$$\omega_n = \omega_4 = e^{\frac{2\pi i}{4}}$$

כלומר:

$$\omega_n = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$$

ולכן:

$$(\omega_n)^k = (i)^1 = i$$

ואכן קיבלנו כי:

$$(\omega_{dn})^{dk} = (\omega_n)^k$$

שאלה 4 (תרגיל 32.2-1 מהספר)

הוכח את מסקנה 32.4.

התשובה בעמ' 198

נדגים עתה את למת המחצית עבור $n = 4$ ו- $\frac{n}{2} = 2$. ובכן, ארבעת שורשי היחידה מסדר 4 הם $1, i, -1, -i$. אם נעלה אותם בריבוע נקבל $1, -1, 1, -1$. אך 1 ו-1– הם שורשי היחידה מסדר 2. כלומר, כאשר מעלים בריבוע את ארבעת שורשי היחידה, מקבלים את שני שורשי היחידה מסדר $\frac{n}{2} = 2$, וכל שורש מסדר 2 מתקבל פעמיים.

שאלה 5

ודא את נכונותה של למת המחצית עבור $n = 8$.

התשובה בעמ' 198

שאלה 6

ודא את נכונותה של למה 32.6 עבור $n = 3$ ו-$k = 2$.

התשובה בעמ' 199

התמרת פוריה המהירה

קרא ולמד את תחילת התת-סעיף
התמרת פוריה המהירה ("ה-FFT")
עד השגרה RECURSIVE-FFT.

נתאר ביתר פירוט את הדרך לביצוע התמרת פוריה ב-n שורשי היחידה.
נתבונן בפולינום:

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1}$$

נפריד את $A(x)$ לשני פולינומים המורכבים מהחזקות הזוגיות והאי-זוגיות של x.
(במהלך ההסבר כולו נניח (למשל) כי n זוגי).

$$A(x) = A^{[even]}(x) + A^{[odd]}(x)$$

כאשר:

$$A^{[odd]}(x) = a_1x + a_3x^3 + ... + a_{n-1}x^{n-1}$$

$$A^{[even]}(x) = a_0 + a_2x^2 + ... + a_{n-2}x^{n-2}$$

ועתה:

$$A^{[odd]}(x) = x(a_1 + a_3x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-2})$$

נסמן:

$$A^{[0]}(x) = A^{[even]}(x)$$

וכן:

$$A^{[1]}(x) = A^{[odd]}(x)/x = a_1 + a_3x^2 + a_5x^4 + ... + a_{n-1}x^{n-2}$$

ונקבל:

$$A(x) = A^{[0]}(x) + x \cdot A^{[1]}(x)$$

אם כן, $A^{[0]}(x)$ ו-$A^{[1]}(x)$ הם שני פולינומים ממעלה $n-2$, המכילים **רק חזקות זוגיות** של x. גם האיברים הקבועים a_0 ו-a_1 המופיעים ב-$A^{[0]}(x)$ וב-$A^{[1]}(x)$, בהתאמה, הם למעשה חזקות זוגיות של x, שכן $a_0 = a_0x^0$ ו-$a_1 = a_1x^0$, ו-0 הוא מספר זוגי.

נסמן $y = x^2$ ונקבל:

$$A^{[0]}(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + ... + a_{n-2}x^{n-2}$$

$$= a_0 + a_2y + a_4y^2 + \dots + a_{n-2}y^{\frac{n-2}{2}}$$

אם כן, נניח כי אנו רוצים לחשב את ערך הפולינום $A^{[0]}(x)$ בנקודה נתונה x_0. נסמן $y_0 = x_0^2$ ואז:

$$A^{[0]}(x_0) = a_0 + a_2y_0 + a_4y_0^2 + \dots + a_{n-2}y_0^{\frac{n-2}{2}}$$

באופן דומה:

$$A^{[1]}(x_0) = a_1 + a_3x_0^2 + a_5x_0^4 + \dots + a_{n-1}x_0^{n-2}$$

$$= a_1 + a_3y_0 + a_5y_0^2 + \dots + a_{n-1}y_0^{\frac{n-2}{2}}$$

עתה נגדיר שני פולינומים ממעלה $\frac{n}{2} - 1$, $A_s^{[0]}$ ו- $A_s^{[1]}$, באופן הבא:

$$A_s^{[0]}[z] = a_0 + a_2z + \dots + a_{n-2}z^{\frac{n}{2}-1}$$

$$A_s^{[1]}[z] = a_1 + a_3z + \dots + a_{n-1}z^{\frac{n}{2}-1}$$

קיבלנו אפוא כי לכל x_0:

$$A(x_0) = A^{[0]}(x_0) + x_0 \cdot A^{[1]}(x_0)$$

ולכן:

$$A(x_0) = A_s^{[0]}(x_0^2) + x_0 \cdot A_s^{[1]}(x_0^2)$$

לכן, כדי לחשב את הערך של A ב-x_0, יש לחשב $y_0 = x_0^2$, והערך של A ב-x_0 הוא $A_s^{[0]}(y_0) + x_0A_s^{[1]}(y_0)$.

דוגמה:

נחשב בשיטה שלעיל את ערך הפולינום הבא בנקודה $x_0 = 2$:

$$A(x) = -3 + 4x - 2x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 4x^5 + x^6$$

$$A(x) = A^{[0]}(x) + x\,A^{[1]}(x)$$

$$= (-3 - 2x^2 - 3x^4 + x^6) + x(4 + 2x^2 + 4x^4)$$

ועתה:

$$A_s^{[0]}(z) = -3 - 2z - 3z^2 + z^3$$

$$A_s^{[1]}(z) = 4 + 2z + 4z^2$$

אבל $y_0 = x_0^2 = 4$, ולכן:

$$A(2) = A_s^{[0]}(4) + 2 \cdot A_s^{[1]}(4)$$

$$= 5 + 2 \cdot 76 = 157$$

(ודא כי אכן $A(2) = 157$.)

שאלה 7

חשב את ערך הפולינום:

$$A(x) = -2 + 3x - 3x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 2x^5 + x^6$$

בנקודה $x_0 = 2$ בשיטה שלעיל.

התשובה בעמ' 199

בסיכום: בעיית חישוב הערך של פולינום A בנקודה x_0 עברה רדוקציה לבעיית חישוב הערך של שני הפולינומים $A_s^{[0]}$ ו- $A_s^{[1]}$ בנקודה $y_0 = x_0^2$. נשים לב כי $A_s^{[0]}$ ו- $A_s^{[1]}$ הם פולינומים ממעלה $\frac{n}{2} - 1$, כמחצית מ-n.

נזכור שאנו מעוניינים לחשב את הערך של A לא רק בנקודה בודדת אלא ב-n נקודות, שהן n שורשי היחידה. כזכור, n שורשי היחידה הם $\omega_n^0, \omega_n^1, \ldots, \omega_n^{n-1}$. לפיכך עלינו לחשב את ערכי הפולינומים $A_s^{[0]}$ ו- $A_s^{[1]}$ בנקודות $\left(\omega_n^0\right)^2, \left(\omega_n^1\right)^2, \ldots, \left(\omega_n^{n-1}\right)^2$.

כאן מתגלה התועלת שבבחירת שורשי היחידה. כזכור (למה 32.5), כאשר מעלים בריבוע את n שורשי היחידה מסדר n, מקבלים את $\frac{n}{2}$ שורשי היחידה מסדר $\frac{n}{2}$, כאשר כל שורש כזה מופיע פעמיים. כלומר, הסדרה $\left(\omega_n^0\right)^2, \left(\omega_n^1\right)^2, \ldots, \left(\omega_n^{n-1}\right)^2$ היא בת $\frac{n}{2}$ איברים בלבד, ורק בהם אנו צריכים לחשב את הפולינום. אם כן, עלינו לחשב את ערכי $A_s^{[0]}$ ו- $A_s^{[1]}$ ב- $\frac{n}{2}$ נקודות בלבד, ואנו חוסכים כמחצית מהחישובים.

שתי הבעיות שהתקבלו, כלומר, חישוב הערכים של $A_s^{[0]}$ ב-$\frac{n}{2}$ שורשי היחידה וחישוב הערכים של $A_s^{[1]}$ ב-$\frac{n}{2}$ שורשי היחידה, הן בעיות מהסוג שבו פתחנו: חישוב הערכים של פולינום ממעלה $k-1$ נתונה, ב-k שורשי היחידה מסדר k.

נוכל לסכם אפוא כי הבעיה של התמרת פוריה בשורשי היחידה, כלומר, חישוב ערכי הפולינום בשורשי היחידה, עברה רדוקציה לשתי בעיות של חישוב הערכים של שני פולינומים ממעלה $\frac{n}{2}-1$ ב-$\frac{n}{2}$ שורשי היחידה מסדר $\frac{n}{2}$. כך הקטנו למחצית את גודל הבעיות שעלינו לפתור (ופתרון הבעיות הללו מתבצע ברקורסיה).

קרא ולמד את המשך הסעיף עד התת-סעיף "אינטרפולציה בשורשי היחידה המרוכבים".

נסביר ביתר פירוט את מהלך האלגוריתם RECURSIVE-FFT.

נעבור על שורות האלגוריתם בזו אחר זו. נשים לב כי בשורה 13, ω עובר על כל שורשי היחידה, שכן הערך ההתחלתי של ω הוא 1 (שורה 5), ובכל ביצוע של שורה 13, ω מוכפל ב-ω_n (ולכן ω יקבל את הערכים $e^{\frac{2\pi i}{n}j}$ עבור $0 \le j \le n-1$).

הנקודה העיקרית שיש להבהיר היא כיצד מתבצע באלגוריתם חישוב הערך $A(\omega)$ של הפולינום A בנקודה ω. ובכן, בשורות 6 ו-7 מגדירים למעשה את שני הפולינומים $A_s^{[0]}$ ו-$A_s^{[1]}$ שהמקדמים שלהם הם $a^{[0]} = (a_1, a_3, ..., a_{n-1})$ ו-$a^{[1]} = (a_0, a_2, ..., a_{n-2})$, בהתאמה. פולינומים אלה הם ממעלה $\frac{n}{2}-1$, ואורך הווקטורים המתאימים להם הוא $\frac{n}{2}$.

כזכור, הראינו כי לכל ω:

$$A(\omega) = A_s^{[0]}[\omega^2] + \omega A_s^{[1]}(\omega^2)$$

נראה כיצד שוויון זה בא לידי ביטוי במהלך האלגוריתם. מה מחזירות הקריאות הרקורסיביות בשורות 8 ו-9? ובכן, הקריאות הללו מתבצעות עם שני הווקטורים $a^{[0]}$ ו-$a^{[1]}$ שאורכם $\frac{n}{2}$. וקטורים אלה מתאימים לשני הפולינומים $A_s^{[0]}$

ו- $A_s^{[1]}$, שמעלתם $\frac{n}{2}-1$. לפיכך בתוך הרקורסיה מחושבים כל הערכים של $A_s^{[0]}$ ו- $A_s^{[1]}$ ב- $\frac{n}{2}$ שורשי היחידה **מסדר** $\boldsymbol{\frac{n}{2}}$. אם כן, אם נסמן את איברי הווקטור $y^{[0]}$ כך:

$$y^{[0]} = \left(y_0^0, y_1^0, \ldots, y_{\frac{n}{2}-1}^0\right)$$

אזי, מה יהיה, למשל, הערך של $y_1^{[0]}$? ובכן:

$$y_1^{[0]} = A_s^{[0]}(\omega_{n/2})$$

ובמילים: $y_1^{[0]}$ שווה לערך של הפולינום $A_s^{[0]}$ בנקודה $\omega_{n/2}$, שהיא שורש היחידה הראשי מסדר $\frac{n}{2}$. כזכור, $\omega_{n/2}$ מוגדר כך:

$$\omega_{n/2} = e^{\frac{2\pi i}{n/2}} = e^{\frac{4\pi i}{n}}$$

ולכן:

$$y_1^{[0]} = A_s^{[0]}(e^{\frac{4\pi i}{n}})$$

באופן דומה, $y_0^{[0]} = A_s^{[0]}(1)$ ו- $y_1^{[1]} = A_s^{[1]}(\omega_{n/2})$, וכן הלאה.

בסיכום: הווקטורים $y^{[0]}$ ו-$y^{[1]}$ יכילו את ערכי הפולינומים $A_s^{[0]}$ ו- $A_s^{[1]}$ בשורשי היחידה מסדר $\frac{n}{2}$.

עתה נדגים את פעולת שורות 10-12. נתבונן לדוגמה במקרה שבו $k = 1$ בלולאת ה-**for** שבשורה 10. לכן בשלב זה, $\omega = \omega_n$.

עבור $k = 1$ מתבצעת בשורה 11 הפעולה:

$$y_1 \leftarrow y_1^{[0]} + \omega_n y_1^{[1]}$$

וכאמור (ראה לעיל), $y_1^{[0]} = A_s^{[0]}(\omega_{n/2})$ ו- $y_1^{[1]} = A_s^{[1]}(\omega_{n/2})$.

ובכן, ההשמה שבוצעה היא:

$$y_1 \leftarrow A_s^{[0]}(\omega_{n/2}) + \omega_n \cdot A_s^{[1]}(\omega_{n/2}) \qquad (2)$$

נזכור כי ב-y_1 יש לחשב את הערך $A(\omega_n)$. עוד נזכור את השוויון:

$$A(\omega_n) = A_s^{[0]}(\omega_n^2) + \omega_n \cdot A_s^{[1]}(\omega_n^2) \qquad (3)$$

כיצד קשורים שוויונים (2) ו-(3)? על פי למת המחצית, $\omega_n^2 = \omega_{n/2}$, ולכן:

$$A_s^{[0]}(\omega_n^2) + \omega_n A_s^{[1]}(\omega_n^2)$$

$$= A_s^{[0]}(\omega_{n/2}) + \omega_n A_s^{[1]}(\omega_{n/2})$$

ולפיכך ההשמה (2) אכן מציבה ב-y_1 את הערך $A(\omega_n)$, כדרוש.

לפני שנדון בשורה 12 נזכיר כי על פי מסקנה 32.4:

$$\omega_n^{1+n/2} = \omega_n \cdot \omega_n^{n/2} = -\omega_n \qquad (4)$$

וכמו כן מתקיים:

$$A(\omega_n^{1+n/2}) = A_s^{[0]}(\omega_n^{2+n}) + \omega_n^{1+n/2} \cdot A_s^{[1]}(\omega_n^{2+n})$$

עתה, הואיל ו- $\omega_n^{2+n} = \omega_n^2$, נקבל:

$$A(\omega_n^{1+n/2}) = A_s^{[0]}(\omega_n^2) - \omega_n A_s^{[1]}(\omega_n^2) \qquad (5)$$

$$= A_s^{[0]}(\omega_{n/2}) - \omega_n A_s^{[1]}(\omega_{n/2})$$

בספר מוכיחים שוויון דומה ל-(5) עבור $A(\omega_n^{k+\frac{n}{2}})$, לכל k.

עתה נחזור לשורה 12 באלגוריתם. עבור $k = 1$, מתבצעת בשורה זו הפעולה:

$$y_{1+n/2} \leftarrow y_1^{[0]} - \omega_n y_1^{[1]}$$

$$= A_s^{[0]}(\omega_{n/2}) - \omega_n A_s^{[1]}(\omega_{n/2})$$

$$= A(\omega_n^{1+n/2})$$

השוויון האחרון נובע מ-(5).

בכך הוכנס הערך הנכון $A(\omega_n^{1+n/2})$ ל-$y_{1+n/2}$. ובאופן כללי, ההוכחה כי הערכים מחושבים נכון לכל ערכי k, דומה למקרה $k = 1$.

שאלה 8

הדגם את ריצת האלגוריתם לחישוב FFT של הפולינום $A(x) = 1 + x - 2x^2 + x^3$ בארבעת שורשי היחידה מסדר 4.

התשובה בעמ' 200

אינטרפולציה בשורשי היחידה המרוכבים

קרא ולמד את התת-סעיף "אינטרפולציה בשורשי היחידה המרוכבים".

שאלה 9

השתמש במשפט 32.7 וחשב את המטריצה ההופכית למטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_3 & \omega_3^2 \\ 1 & \omega_3^2 & \omega_3^4 \end{pmatrix}$$

תשובה בעמ' 201

במשוואה (32.11) בספר יש לחשב את ערכי הפולינום:

$$P(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k x^k \qquad (6)$$

בנקודות ω_n^{-j} עבור $0 \le j \le n-1$. כאן אין מדובר בחישוב הרגיל של ערכי הפולינום בשורשי היחידה ω_n^j, אלא בחישוב ערכיו ב- ω_n^{-j}.

אבל נזכור כי:

$$\omega_n^{-1} = \omega_n^{n-1}$$

יתר על כן, כמו בהעלאת ω_n בחזקת j, גם בהעלאת ω_n^{-1} בחזקת j, עבור כל $0 \le j \le n-1$, מתקבלים n שורשי היחידה, שכן:

$$\omega_n^{-j} = \omega_n^{(n-1)j} = \omega_n^k$$

כאשר $k = (n-1)\, j \bmod(n)$. דהיינו, מתקבלת חזקה נתונה של ω_n, שורש היחידה הראשי.

לפיכך למת המחצית תקפה עבור אוסף הנקודות ω_n^{-j}. בהעלאת ω_n^{-j} בריבוע, לכל $0 \le j \le n-1$ מתקבלים $\frac{n}{2}$ שורשי היחידה מסדר $\frac{n}{2}$, וכל שורש מתקבל פעמיים.

ניתן אפוא להשתמש באלגוריתם Recursive-FFT לחישוב ערכי $P(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k x^k$ ב- ω_n^{-j} לכל j, באופן הבא:

נגדיר פולינום חדש שמקדמיו $(y_0, ..., y_{n-1})$. נחליף את ω_n ב- ω_n^{-1}. השינוי העיקרי הוא בשורה 13 באלגוריתם שתוחלף בשורה $\omega \leftarrow \omega \cdot \omega_n^{-1}$. כל ההסברים לגבי תקפות האלגוריתם לחישוב ערכי $P(x)$ בנקודות ω_n^{-j} זהים להסברים לגבי האלגוריתם הרגיל. לבסוף, בתום חישוב ערכי הפולינום ב- ω_n^{-j}, לכל j, יש לחלק ב-n את הערכים המתקבלים (ראה משוואה (6)).

שאלה 10

נתון ה-FFT של ארבעת שורשי היחידה עבור פולינום $P(x)$:

$P(1) = 2$, $\quad P(i) = -2i$,

$P(-1) = 2$, $\quad P(-i) = 2i$

חשב את $P(x)$ בעזרת האלגוריתם Recursive-FFT המתוקן, כפי שהוסבר לעיל.

התשובה בעמ' 202

תשובות לפרק ח

תשובה 1

חישוב הביטוי $P(x) = \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j)$ דורש $\Theta(n^2)$ פעולות. כמו כן, כל פעולת חילוק של $P(x)$ ב-$(x - x_j)$ דורשת $\Theta(n)$ פעולות (ראה הדיון הקודם לשאלה). ישנן n פעולות חילוק כאלה, ולכן בסך הכל מתבצעות $\Theta(n^2)$ פעולות.

עתה עומדים לרשותנו כל הפולינומים הדרושים מהצורה $R_k(x) = \prod_{j \neq k}(x - x_j)$.

כמו כן אנו זקוקים לחישוב הערכים $\prod_{j \neq k}(x_k - x_j)$ עבור $0 \le k \le n{-}1$. לשם כך יש לחשב את הערך $R_k(x_k)$ של $R_k(x)$ ב-x_k. לפי שיטת הורנר, הדבר דורש $\Theta(n)$ פעולות לכל $0 \le k \le n{-}1$, ובסך הכל $\Theta(n^2)$ פעולות.

לבסוף, החישוב הסופי של:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{\prod_{j \neq k}(x - x_j)}{\prod_{j \neq k}(x_k - x_j)}$$

דורש n פעולות של חיבור פולינומים, והדבר מתבצע ב-$\Theta(n^2)$ פעולות נוספות. בסך הכל נדרשות $\Theta(n^2)$ פעולות.

תשובה 2

לכל n, שורשי היחידה מסדר n הם:

$$e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot j} = \cos\frac{2\pi i}{n}\, j + i \sin\frac{2\pi i}{n}\, j$$

עבור $0 \le j \le n{-}1$.

עבור $n = 5$ נקבל:

$$1, \quad \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5},$$

$$\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}, \quad \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$$

$$\cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$$

תשובה 3

נסמן $A(x) = 1 + x$, $B(x) = -1 + x$, $M(x) = A(x) \cdot B(x)$.

שלב א:

כזכור, יש להתייחס אל A ואל B כאל פולינומים ממעלה 3. כלומר, ל-A נתאים את הווקטור $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 0, 0)$, שבו הוספנו שני אפסים מימין. בכך אנו מייצגים את $A(x)$ באופן הבא:

$$A(x) = 1 + x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

באותו אופן נתאים ל-B את הווקטור $(b_0, b_1, b_2, b_3) = (-1, 1, 0, 0)$

שלב ב:

חישוב הערכים. יש לחשב את ערכי A ו-B בארבעת שורשי היחידה מסדר 4, שהם 1, i, -1 ו-$-i$:

$$(A(1), A(i), A(-1), A(-i)) = (2, i+1, 0, -i+1)$$

$$(B(1), B(i), B(-1), B(-i)) = (0, i-1, -2, -i-1)$$

שלב ג:

כופלים נקודתית את הווקטורים שהתקבלו:

$$(M(1), M(i), M(-1), M(-i))$$

$$= (A(1) \cdot B(1), A(i) \cdot B(i), A(-1) \cdot B(-1), A(-i) \cdot B(-i))$$

$$= (0, -2, 0, -2)$$

שלב ד:

שחזור הפולינום $M(x)$.

הפולינום היחיד שעבורו $M(1) = M(-1) = 0$ ו-$M(i) = M(-i) = -2$ הוא $-1 + x^2$.

תשובה 4

עבור $k = 1$, נקבל על פי למה 32.3 את השוויון:

$$\omega_{dn}^{d} = \omega_n$$

נציב $n = 2$ ונקבל:

$$\omega_{2d}^{d} = \omega_2$$

כלומר, עבור $t = 2d$, נקבל:

$$\omega_t^{t/2} = \omega_2$$

המסקנה היא שלכל t (או n) זוגי, $\omega_t^{t/2} = \omega_2$, כנדרש. עוד נשים לב כי:

$$\omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{2}} = e^{\pi i}$$
$$= \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

ובכך התקבל השוויון הנדרש.

תשובה 5

שורשי היחידה מסדר 8 הם:

$$1,\ \cos\frac{2\pi}{8} + i\sin\frac{2\pi}{8},\ \cos\frac{4\pi}{8} + i\sin\frac{4\pi}{8},$$

$$\cos\frac{6\pi}{8} + i\sin\frac{6\pi}{8},\ \cos\frac{8\pi}{8} + i\sin\frac{8\pi}{8},$$

$$\cos\frac{10\pi}{8} + i\sin\frac{10\pi}{8},\ \cos\frac{12\pi}{8} + i\sin\frac{12\pi}{8},$$

כלומר, השורשים הם :

$$1, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad i, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$-1, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -i, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

בהעלאה בריבוע נקבל את הערכים :

$$1,\ i,\ -1,\ -i,\ 1,\ i,\ -1,\ -i$$

ואכן, מתקבלים ארבעת שורשי היחידה מסדר 4, $1, i, -1, -i$, כשכל שורש מתקבל פעמיים.

תשובה 6

עבור $n = 3$, $\omega_3 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, ולכן $\omega_n^k = \omega_3^2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$; לפיכך :

$$\sum_{j=0}^{2}(e^{\frac{4\pi i}{3}})^j = 1 + e^{\frac{4\pi i}{3}} + e^{\frac{8\pi i}{3}}$$

כמו כן :

$$e^{\frac{4\pi i}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{\frac{8\pi i}{3}} = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

והסכום הוא 0, כנדרש.

תשובה 7

$$A(x) = (-2 - 3x^2 - 3x^4 + x^6) + x(3 + 2x^2 + 2x^4)$$

כלומר:

$$A^{[0]}(x) = -2 - 3x^2 - 3x^4 + x^6$$

$$A^{[1]}(x) = 3 + 2x^2 + 2x^4$$

ולכן:

$$A_s^{[0]}(z) = -2 - 3z - 3z^2 + z^3$$

$$A_s^{[1]}(z) = 3 + 2z + 2z^2$$

ולכן:

$$A(2) = A_s^{[0]}(4) + 2 \cdot A_s^{[1]}(4)$$

$$= 2 + 2 \cdot 43 = 88$$

תשובה 8

בשורה 4 של האלגוריתם מגדירים:

$$\omega_n \leftarrow e^{\frac{2\pi i}{4}} = i$$

ו- $\omega \leftarrow 1$.

בשורות 6 ו-7 נקבע כי: $a^{[0]} = (1, -2)$

המתאים לפולינום: $A_s^{[0]}(z) = 1 - 2z$

וכן כי: $a^{[1]} = (1, 1)$

המתאים לפולינום: $A_s^{[1]}(z) = 1 + z$

בשורה 8 מתבצעת קריאה רקורסיבית ל-Recursive-FFT עם הווקטור $a^{[0]} = (1, -2)$, ווקטור זה מתאים לפולינום $1 - 2z$. הווקטור המוחזר הוא ערכי $A_s^{[0]}$ בשני שורשי היחידה מסדר 2, שהם 1 ו--1:

$$y^{[0]} \leftarrow (A_s^{[0]}(1),\ A_s^{[0]}(-1)) = (1 - 2 \cdot 1,\ 1 - 2 \cdot (-1)) = (-1, 3)$$

באופן דומה נקבל $a^{[1]} = (1, 1)$ ו- $A_s^{[1]}(x) = 1 + z$, ולכן:

$$y^{[1]} \leftarrow (A_s^{[1]}(1),\ A_s^{[1]}(-1)) = (1+1,\ 1-1) = (2,\ 0)$$

בשורה 11 ו-12, עבור $k = 0$, מתבצעות הפעולות:

$$y_0 \leftarrow y_0^{[0]} + 1 \cdot y_0^{[1]} = -1 + 2 = 1$$

$$y_2 \leftarrow y_0^{[0]} - 1 \cdot y_0^{[1]} = -1 - 2 = -3$$

עתה, בשורה 13, ω מקבל את הערך ω_4, כלומר, $\omega \leftarrow i$; ובשורות 11 ו-12 מתבצעות הפעולות הבאות עבור $k = 1$:

$$y_1 \leftarrow y_1^{[0]} + i \cdot y_1^{[1]} = 3 + i \cdot 0 = 3$$

$$y_3 = y_1^{[0]} - i \cdot y_1^{[1]} = 3 - i \cdot 0 = 3$$

לפיכך: $y = (1, 3, -3, 3)$

כלומר: $A(1) = 1, A(i) = 3, A(-1) = -3$

$A(-i) = 3$

ואכן, לדוגמה,

$$A(i) = i^3 - 2i^2 + i + 1$$
$$= -i + 2 + i + 1 = 3$$

תשובה 9

נסמן ב-B את המטריצה ההופכית ל-A. במקרה שלנו, $n = 3$:

$$\omega_n = \omega_3 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

אם כן, נקבל בשורה 0 במטריצה כי:

$$b_{00} = \frac{\omega_3^0}{3} = \frac{1}{3}$$

$$b_{01} = \frac{\omega_3^0}{3} = \frac{1}{3}$$

$$b_{02} = \frac{\omega_3^0}{3} = \frac{1}{3}$$

ובשורה 1 נקבל:

$$b_{10} = \frac{\omega_3^0}{3} = \frac{1}{3}$$

$$b_{11} = \frac{\omega_3^{-1}}{3} = \frac{e^{\frac{-2\pi i}{3}}}{3} = \frac{e^{\frac{4\pi i}{3}}}{3}$$

$$b_{12} = \frac{\omega_3^{-2}}{3} = \frac{e^{\frac{-4\pi i}{3}}}{3} = \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{3}$$

ובשורה השלישית:

$$b_{20} = \frac{1}{3}$$

$$b_{21} = \frac{e^{\frac{-4\pi i}{3}}}{3} = \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{3}$$

$$b_{22} = \frac{e^{\frac{-8\pi i}{3}}}{3} = \frac{e^{\frac{4\pi i}{3}}}{3}$$

לדוגמה, עבור b_{31}, $j = 3$ ו-$k = 1$, ולכן $-kj = -3$, ונקבל:

$$b_{21} = \frac{\omega_3^{-2}}{3} = \frac{(e^{\frac{2\pi i}{3}})^{-2}}{3} = \frac{e^{\frac{-4\pi i}{3}}}{3} = \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{3}$$

לפיכך:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{e^{\frac{4\pi i}{3}}}{3} & \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{3} & \frac{e^{\frac{4\pi i}{3}}}{3} \end{pmatrix}$$

ואכן, קל לוודא ישירות כי A ו-B הופכיות.

תשובה 10

בדוגמה שלנו,

$$y_0 = P(1) = 2, \qquad y_1 = P(i) = -2i$$

$y_2 = P(-1) = 2, \qquad y_3 = P(-i) = 2i$

נסמן את מקדמי P ב-a_0, a_1, a_2, a_3, כלומר $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

לצורך חישוב המקדמים של $P(x)$ מבצעים FFT על הפולינום $Q(x)$ הבא:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{3} y_k x^k$$

$$= 2 - (2i)x + 2x^2 + 2ix^3$$

שמקדמיו הם ה-y_i. יש לחשב את ערכי $Q(x)$ בכל החזקות $(\omega_4^{-1})^j$ של ω_4^{-1}. נשים לב כי $\omega_4^{-1} = \omega_4^3 = (i)^3 = -i$. אם כן, בשורה 13 נכפול ב- $\omega_4^{-1} = -i$ ולא ב-$\omega_4 = i$ כמו באלגוריתם FFT הרגיל. את תוצאות החישוב יש לחלק ב- $n = 4$, ובכך יתקבלו a_i, מקדמי הפולינום P.

בשורות 6 ו-7 נקבל:

$a^{[0]} = (2, 2)\ , \quad Q_s^{[0]}(z) = 2 + 2z$

$a^{[1]} = (-2i\ , 2i)\ , \quad Q_s^{[1]}(z) = -2i + 2iz$

בקריאה הרקורסיבית בשורות 8 ו-9 מחושבים ערכי $Q_s^{[0]}$ ו- $Q_s^{[1]}$ ב-1 ו-1–, שני שורשי היחידה מסדר 2.

ובכן:

$y^{[0]} \leftarrow (4, 0)$

$y^{[1]} \leftarrow (0, -4i)$

עתה, עבור $k = 0$, מתבצע בשורה 11 באלגוריתם החישוב הבא:

$y_0 \leftarrow y_0^{[0]} + 1 \cdot y_0^{[1]} = 4$

כדי לקבל את המקדם הראשון של P, a_0, יש לחלק את תוצאת החישוב ב-4 (ראה שוויון 32.11 בספר). ולכן,

$a_0 = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$

ובשורה 12 מתבצע החישוב:

$$y_2 \leftarrow y_0^{[0]} - 1 \cdot y_0^{[1]} = 4$$

ולכן:

$$a_2 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

עתה, בשורה 13, $\omega \leftarrow \omega_4^{-1}$, כלומר, $\omega_4^{-1} = \omega_4^3$:

$$\omega_4^{-1} = (i)^3 = -i$$

לכן בשורות 11 ו-12 מתבצעות הפעולות הבאות עבור $k = 1$:

$$y_1 \leftarrow y_1^{[0]} + (-i) y_1^{[1]} = -4$$

ולכן $a_1 = -1$.

וכמו כן:

$$y_3 \leftarrow y_1^{[0]} + i\, y_1^{[1]} = 4$$

ולכן $a_3 = 1$.

בסיכום, הפולינום המבוקש הוא:

$$P[x] = 1 - x + x^2 + x^3$$