קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"

תאריך הבחינה: 8.7.2008 (סמסטר 2008ב - מועד 86/א4)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.
כל השאלות זהות במשקלן.
בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפים: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית
ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

שאלה 1 (25 נקודות)

נתונה <u>פונקציית ההתפלגות המצטברת</u> של המשתנה המקרי X , עבור $\theta > 0$:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \theta^x - 1 & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

(6 נקי) א. מצא את הערך של θ בעזרת פונקציית ההתפלגות המצטברת הנתונה בלבד, כלומר, מבלי למצוא את פונקציית הצפיפות של X . נמק את תשובתך.

(6 נקי) ב. מצא את פונקציית הצפיפות של X .

(6 נקי) ג. חשב את התוחלת של X .

(7 נקי) ד. חשב את פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי $Y = 2^X - 1$, וזהה את התפלגותו.

הערות: $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$; $\int a^x dx = a^x / \ln a$; $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\ln b}{\ln a}$; $a^{\log_a b} = b$

שאלה 2 (25 נקודות)

(13 נקי) א. הוכח, בעזרת משפט הגבול המרכזי, כי $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} e^{-n} \frac{n^i}{i!} = \frac{1}{2}$.

(12 נקי) ב. רשום את החסמים מלעיל הקטנים ביותר (המוכרים לך) עבור $P\{X \ge 14\}$, בכל אחד מן המקרים הבאים :

1. X הוא משתנה מקרי אי-שלילי ותוחלתו 7 ;
2. X הוא משתנה מקרי המקיים $X \ge -2$ ותוחלתו 7 ;
3. X הוא משתנה מקרי שתוחלתו 7 ושונותו 4.

שאלה 3 (25 נקודות)

מחלקים באופן אקראי 20 ילדים ל-4 קבוצות, המונות 5 ילדים כל אחת.
כל הקבוצות מבצעות בדיוק אותה המטלה.

(7 נקי) א. כמה אפשרויות חלוקה קיימות?

(6 נקי) ב. מהי ההסתברות שילדים A ו-B לא ישתייכו לאותה הקבוצה?

נניח שקבוצת 20 הילדים כוללת 8 בנות ו-12 בנים –

(6 נקי) ג. מהי ההסתברות שבחלוקה האקראית (ל- 4 הקבוצות שוות-הגודל) תיווצרנה : קבוצת-בנים, קבוצת-בנות ושתי קבוצות <u>מעורבות</u> ?

(6 נקי) ד. מהי ההסתברות <u>שבכל אחת</u> מהקבוצות יהיה לפחות בן אחד?

שאלה 4 (25 נקודות)

משקל גביע גבינה לבנה מתוצרת מסוימת מתפלג נורמלית עם תוחלת של 260 גרם וסטיית-תקן של 5 גרם. אין תלות בין משקלים של גביעי גבינה שונים.

(6 נק׳) א. אם החברה, המייצרת את גביעי הגבינה, מתחייבת שלכל היותר 2.5% מהגביעים ישקלו מתחת ל-250 גרם, האם היא עומדת בהתחייבותה?

(6 נק׳) ב. אם נתון שגביע מסוים שוקל מתחת ל-265 גרם, מהי ההסתברות שמשקלו גבוה מ-255 גרם?

ג. נתונים 30 גביעי גבינה מקריים –

(7 נק׳) 1. אם שוקלים את הגביעים בזה אחר זה, מהי ההסתברות שהגביע האחרון שיישקל, דהיינו הגביע ה-30, יהיה הגביע העשירי שמשקלו נמוך מ-257 גרם?

(6 נק׳) 2. מהי ההסתברות שבדיוק 10 מהגביעים ישקלו פחות מ-257 גרם?

שאלה 5 (25 נקודות)

(9 נק׳) א. יהי W משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים N, m ו-n.

הוכח כי התוחלת של W שווה ל- $\frac{nm}{N}$.

ב. 15 נבחנים מגיעים לבחינה בהסתברות.

עבור בחינה זו הודפסו מבעוד מועד 21 שאלונים: 7 מסוג **א**, 7 מסוג **ב** ו-7 מסוג **ג**.

כל אחד מהנבחנים מקבל שאלון אחד מתוכם באופן אקראי.

יהיו: X = מספר הנבחנים שקיבלו שאלון מסוג **א**;

Y = מספר הנבחנים שקיבלו שאלון מסוג **ב**.

(10 נק׳) 1. מהי פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו-Y,

ומהי פונקציית ההסתברות השולית של X?

רשום את שתי הפונקציות באופן מדויק.

(6 נק׳) 2. <u>נניח שידוע</u> שבדיוק 4 נבחנים (מתוך ה-15) קיבלו שאלונים מסוג **ג**.

<u>בהינתן</u> מידע זה –

I) מהו $\rho(X,Y)$?

II) מהו $\text{Cov}(X,Y)$?

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\, dy$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(x)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
x	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(x)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
x	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב - 20425

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,...,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1} \cdot p \quad , \quad i=1,2,...$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i! \quad , \quad i=0,1,...$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r} \cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,...$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i} \Big/ \binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,...,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,...,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a \le x \le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\ , t \neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \ -\infty < x < \infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,...,n_r} \cdot p_1^{n_1} \cdot ... \cdot p_r^{n_r} \quad , \ \sum n_i = n \ , \sum p_i = 1$			

נוסחת הבינום $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$

כלל ההכלה וההפרדה $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$

הסתברות מותנית $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

נוסחת הכפל $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot ... \cdot P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$

נוסחת ההסתברות השלמה $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$, $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס $P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$, $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת $E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx$

תוחלת של פונקציה של מ"מ $E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx$

שונות $\mathrm{Var}(X) = E[(X-E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית $E[aX+b] = aE[X]+b$

$\mathrm{Var}(aX+b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון $P\{X > s+t \mid X > t\} = P\{X > s\} \quad , \quad s,t \ge 0$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] = E[E[X \mid Y]]$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) \big/ \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

תוחלת ושונות של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X]$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X) + (E[X])^2 \mathrm{Var}(N)$$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t) = E[e^{tX}]$

אי-שוויון מרקוב X מ״מ אי-שלילי , $a > 0$, $P\{X \geq a\} \leq E[X]/a$

אי-שוויון צ׳בישב $\mu, \sigma^2 < \infty$, $a > 0$, $P\{|X - \mu| \geq a\} \leq \sigma^2 / a^2$

משפט הגבול המרכזי X_i מ״מ ב״ת וש״ה , $\mu, \sigma^2 < \infty$, $P\left\{ (\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu) \Big/ \sqrt{n\sigma^2} \leq a \right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(a)$

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות, שבחזרות בלתי-תלויות על הניסוי, המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ״מ בינומיים (גיאומטריים) ב״ת עם אותו הפרמטר p הוא מ״מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ״מ פואסוניים ב״ת הוא מ״מ פואסוני.
- סכום של מ״מ נורמליים ב״ת הוא מ״מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ״מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב״ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1 < x < 1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \tfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \neq -1 \quad ; \quad \int \tfrac{1}{ax+b} dx = \tfrac{1}{a}\ln(ax+b)$$

$$\int e^{ax} dx = \tfrac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \tfrac{1}{a \ln b} b^{ax}$$