ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20476

מתמטיקה בדידה

חוברת הקורס סתיו 2015א

כתב: איתי הראבן

אוקטובר 2014- סמסטר סתיו תשע"ה

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מתמטיקה בדידה".
אנא קראו בעיון את כל הסעיפים לפני שתתחילו בלימודיכם. פרטים לגבי נהלים המקובלים באוניברסיטה הפתוחה מפורטים בידיעון האקדמי. תיאורי הקורסים מופיעים בקטלוג הקורסים.

<u>הערה:</u> על חלק מספרי הלימוד וחלק מחומרי העזר של הקורס מופיעים מספרי קורס 20276, 20283. חומרים אלה הועברו לקורס שלנו מקורס שפעל באו"פ בשנים קודמות.

קורס זה מתוקשב במסגרת הפעילות של מחלקת תלם (תקשוב ללימוד מרחוק).
קורס מתוקשב כולל, נוסף על יחידות הלימוד הכתובות, גם פעילות באתר הקורס באינטרנט.
פעילות זו כוללת: אינטראקציה בין הסטודנטים לצוות ההוראה באמצעות קבוצות דיון ודואר אלקטרוני, הפניות למאגרי מידע ולאתרים ברשת האינטרנט, חומרי לימוד והעשרה. הפעילות באתר הקורס אינה חובה אך האתר יכול לסייע מאוד בלימוד הקורס.
כתובת אתרי הקורסים: **http://telem.openu.ac.il**.
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מרכז ההוראה בקורס הוא איתי הראבן.
ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון **02-6733210** בימי ד', בין השעות 19:00 - 20:00.
- דרך אתר הקורס.
- בדואר אלקטרוני itaiha@openu.ac.il
- פקס: **09-7780631** , לרשום "עבור איתי"

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה ,
צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20476/ 2015א)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח	
				ממ״ח (לאו״פ)	ממ״ן (למנחה)
1	24.10.2014-21.10.2014	החוברת ״מבוא מהיר ללוגיקה״			
2	31.10.2014-26.10.2014	תורת הקבוצות פרק 1		ממ״ח 01 יום ו׳ 31.10.2014	
3	7.11.2014-2.11.2014	תורת הקבוצות סעיפים 2.1- 2.4			ממ״ן 11 יום ה׳ 6.11.2014
4	14.11.2014-9.11.2014	תורת הקבוצות סעיפים 2.5 -3.1		ממ״ח 02 יום ו׳ 14.11.2014	
5	21.11.2014-16.11.2014	תורת הקבוצות סעיפים 3.2- 3.5		ממ״ח 03 יום ו׳ 21.11.2014	
6	28.11.2014-23.11.2014	תורת הקבוצות סעיף 4.1			ממ״ן 12 יום ו׳ 28.11.2014
7	5.12.2014-30.11.2014	תורת הקבוצות פרק 5 (חוברת נפרדת)			
8	12.12.2014-7.12.2014	חזרה על החומר			
9	19.12.2014-14.12.2014 (ד-ו חנוכה)	קומבינטוריקה סעיפים 1.1- 2.3			ממ״ן 13 יום ב׳ 15.12.2014

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח	
				ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
10	26.12.2014-21.12.2014 (א-ד חנוכה)	קומבינטוריקה סעיפים 2.4- 3.2			
11	2.1.2015-28.12.2014	קומבינטוריקה פרקים 4 - 5		ממ"ח 04 יום ג' 30.12.2014	
12	9.1.2015-4.1.2015	קומבינטוריקה פרקים 6- 7			ממ"ן 14 יום ג' 6.1.2015
13	16.1.2015-11.1.2015	תורת הגרפים פרקים 1-2			ממ"ן 15 יום ה' 16.1.2015
14	23.1.2015-18.1.2015	תורת הגרפים פרקים 3-4			
15	2.2.2015-25.1.2015			ממ"ח 05 יום ו' 2.2.2015	ממ"ן 16 יום א' 4.2.2015

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

מטלות הקורס

קראו היטב עמודים אלה לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס. הבנה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. מטלות המנחה (ממנ״ים) יבדקו על-ידי המנחה ויוחזרו לכם בצירוף הערות המתייחסות לתשובות. על מטלות המחשב (ממ״חים) תקבלו רק פירוט תשובות נכונות ולא נכונות.

מבנה המטלות

כל מטלה מורכבת מכמה שאלות. משקל כל השאלות זהה אלא אם כן צוין אחרת.
את הפתרונות לממ״ן עליכם לרשום על דף בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. לחילופין ניתן להגיש את המטלות מודפסות במעבד תמלילים, בתנאי שכל הסימונים המתמטיים ברורים. אין להשתמש בסימונים שאינם מופיעים ביחידות.

ניקוד המטלות

בקורס 6 מטלות מנחה (ממ״נים) ו- 5 מטלות מחשב (ממ״חים).
משקלי המטלות: משקל כל ממ״ן הוא 3 נקודות, פרט לממ״ן 12 שמשקלו 4 נקודות.
משקל כל ממ״ח הוא 2 נקודות, פרט לממ״ח 05 שמשקלו 3 נקודות.
בהגשת כל המטלות ניתן אפוא לצבור 30 נקודות.

דרישות חובה בהגשת המטלות

חובה להגיש מטלות במשקל של 20 נקודות לפחות.
בין המטלות שתגישו חייבות להיות לפחות ארבע מטלות מנחה (ממ״נים)

התנאים לקבלת נקודות זכות

א. להגיש מטלות במשקל של 20 נק׳ לפחות. כאשר מתוכן **לפחות ארבע מטלות מנחה (ממ״נים)**

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.

ג. לקבל בציון הסופי 60 נקודות לפחות.

הערות חשובות לתשומת לבך!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"

מספר השאלות: 13 | **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2015א | **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 31.10.2014

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בשאלות המסומנות בסולמית (#) מופיעות שתי טענות. בשאלות אלה סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה | ב - אם רק טענה 2 נכונה

ג - אם שתי הטענות נכונות | ד - אם שתי הטענות אינן נכונות

שאלה 1 #

1. האמירה המספרים 6, 7 הם מספרים זוגיים היא פסוק.
2. הביטוי המתמטי $1+2+3+4$ הוא פסוק.

שאלה 2 #

1. **שלילת** הפסוק הכד נמצא על השולחן
   היא הפסוק הכד נמצא מתחת לשולחן
2. **שלילת** הפסוק איציק שפך את המים מהכד
   היא הפסוק איציק מילא את הכד במים

שאלה 3 #

1. הפסוק $1+1=2$ **וגם** $2+3>5$ הוא אמת.
2. הפסוק $1+1=2$ **או** $3+3>2$ הוא אמת.

שאלה 4 #

1. הפסוק **אם** $3=2$ **אז** $1+1=2$ הוא אמת.
2. הפסוק **אם** $3=2$ **אז** $10=2$ הוא אמת.

שאלה 5 #

1. לוח האמת של הפסוק הפורמלי $(p \to q) \vee (r \to q)$ הוא:

p	q	r	$(p \to q) \vee (r \to q)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**T**
F	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**T**

2. הפסוק הפורמלי $(\neg p) \wedge \neg(p \to q)$ הוא סתירה.

שאלה 6 #

1. הפסוק הפורמלי $\neg(p \to q)$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $p \wedge \neg q$.

2. הפסוק הפורמלי $p \leftrightarrow q$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $(p \wedge q) \vee \big((\neg p) \wedge (\neg q)\big)$.

שאלה 7 #

1. $\neg\big((p \vee q) \wedge r\big)$ שקול טאוטולוגית ל- $\big((\neg p) \wedge (\neg q)\big) \vee \neg r$.

2. $p \wedge \neg(p \wedge q)$ שקול טאוטולוגית ל- $p \wedge \neg q$.

שאלה 8 #

1. **שלילת** הפסוק **האוכל היה חם וטעים**
   שקולה לפסוק **האוכל לא היה חם והאוכל לא היה טעים.**

2. **שלילת** הפסוק **רצחתָ וגם ירשתָ** שקולה לפסוק **לא רצחתָ או לא ירשתָ**

שאלה 9 #

1. מתוך הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p$ נובע טאוטולוגית הפסוק r .

2. מתוך הפסוק r נובע טאוטולוגית הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p$.

שאלה 10 #

1. את הפסוק "הריבוע של מספר לעולם אינו קטן מ- 0"
אפשר לרשום כך : $\forall x \neg (x^2 < 0)$.

2. את הפסוק "קיים מספר גדול מ- 0 שהריבוע שלו הוא 9 "
אפשר לרשום כך : $(\exists x(\mathrm{x} > 0)) \wedge (\exists x(x^2 = 9))$.

בשאלות 11 – 13 אין זוגות של טענות, פשוט בחרו את התשובה הנכונה.

שאלה 11

נתבונן בפסוק :

לכל מספר הגדול/שווה 0 , קיים מספר שאם נעלה אותו בריבוע נקבל את המספר המקורי.

ניתן להצרין פסוק זה כך :

א. $\forall x\left(x \ge 0 \wedge \exists y\ (y^2 = x)\right)$

ב. $(\forall x\ (x \ge 0)) \wedge \left(\exists y\ (y^2 = x)\right)$

ג. $\forall x\left(x \ge 0 \to \exists y\ (y^2 = x)\right)$

ד. $(\forall x\ (x \ge 0)) \to \left(\exists y\ (y^2 = x)\right)$

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

שאלה 12

1. את **שלילת** הפסוק **לכל x קיים y שהוא השורש הריבועי של x**

ניתן לנסח כך:

א. **לכל x לא קיים y שהוא השורש הריבועי של x .**

ב. **קיים x כך שלכל y , y אינו השורש הריבועי של x .**

ג. **קיים x כך שקיים y שאינו השורש הריבועי של x .**

ד. **לכל x קיים y שאינו השורש הריבועי של x .**

ה. **לא לכל y קיים x כך ש- y הוא השורש הריבועי של x .**

שאלה 13

נתבונן בטענה:

A: **לכל סנדלר קיים אדם, שכל הנעלים שלו עברו תיקון אצל הסנדלר הזה.**

טענה השקולה **לשלילת** A היא:

א. לכל אדם קיים סנדלר, שלא תיקן אף נעל של אותו אדם.

ב. לכל סנדלר קיים אדם, שאף אחת מהנעלים שלו לא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

ג. לכל סנדלר קיים אדם, שלפחות נעל אחת שלו לא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

ד. קיים סנדלר כך שלכל אדם יש לפחות נעל אחת שלא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

ה. קיים סנדלר שמעולם לא תיקן שתי נעלים של אותו אדם.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרק 1

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2015א | **מועד אחרון להגשה:** יום ה' 6.11.2014

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (20 נק')

שאלה זו נועדת לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות ולחדד כמה נקודות שכדאי להבינן בשלב מוקדם:
* ההבדל בין A לבין $\{A\}$ (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא A).
  * מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה $\varnothing$ לבין $\{\varnothing\}$.
* ההבדל בין "x איבר של y" לבין "x חלקי ל- y".

תהיינה: $X = \{1,2\}$, $Y = \{X, \{3\}\}$, $Z = \{X\}$.

לכל אחת מהטענות הבאות קבע אם היא נכונה.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $X \in Y$ ב. $Z \in Y$ ג. $X \subseteq Y$

ד. $Z \subseteq Y$ ה. $\varnothing \in Z$ ו. $|Y| = 2$

ז. $P(X) \subseteq P(Y)$ ח. $\{\varnothing\} \subseteq P(X)$

שאלה 2 (28 נק')

א. הוכיחו: אם $X \subseteq Y$ אז $P(X) \subseteq P(Y)$.

ב. הוכיחו: $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$. נמקו היטב כל שלב בהוכחה.

לגבי **איחוד** לא מתקיימת טענה כללית הדומה לזו שבסעיף ב': ר' החוברת "אוסף תרגילים פתורים" עמ' 1 שאלה 2 . בסעיפים הבאים נבדוק מתי בדיוק כן מתקיים שוויון כזה עבור איחוד .

ג. הוכיחו **שאם** $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$ **אז** $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

ד. הוכיחו את הכיוון ההפוך לטענה שבסעיף ב', כלומר הוכיחו

שאם $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ **אז** $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$.

הדרכה: נוח להוכיח סעיף זה בדרך השלילה. מהי בדיוק הנחת השלילה במקרה זה?

שאלה 3 (24 נק')

תנו **שתי הוכחות** לשוויון $A \oplus B = A' \oplus B'$. הוכחה אחת מהצורה "יהי x איבר של אגף ימין, נראה שהוא איבר של אגף שמאל ... ולהיפך...", והוכחה שניה בעזרת אלגברה של קבוצות, ללא שימוש במושג "איבר". בהוכחה הראשונה היעזרו בטענות שלמדנו בתחשיב הפסוקים כדי לעבור מביטוי לביטוי שקול. בהוכחה השניה היעזרו בטענות מפרק 1 בתורת הקבוצות.

הסימן $\oplus$ (הפרש סימטרי) מוגדר בשאלה 1.22 בכרך "תורת הקבוצות".

שאלה 4 (28 נק')

איחוד של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בהגדרה 1.6 בעמוד 12 בספר.

במלים פשוטות ההגדרה היא:

$x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ אםם x שייך **לפחות** לאחת הקבוצות A_i, כאשר i מקבל ערכים ב- I.

במלים אחרות: $\boxed{x \in \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{אםם} \quad \exists i \left(i \in I \ \wedge \ x \in A_i \right)}$

חיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בעמוד 16 בספר. במלים פשוטות ההגדרה היא:

$x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ אםם x שייך **לכל** הקבוצות A_i, כאשר i מקבל ערכים ב- I.

במלים אחרות: $\boxed{x \in \bigcap_{i \in I} A_i \quad \text{אםם} \quad \forall i \left(i \in I \ \rightarrow \ x \in A_i \right)}$

השאלה שלפניכם מתרגלת את השימוש בשני מושגים האלה.

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים (כולל 0).

לכל $n \in \mathbf{N}$, תהי $A_n = \left\{ x \in \mathbf{N} \ | \ 2 \le x \le 3n+1 \right\}$, ותהי $B_n = A_{n+1} - A_n$.

(4 נק') א. חשבו את A_0, A_1, A_2, A_3 ואת B_0, B_1, B_2.

(4 נק') ב. יהי $n > 0$. רשמו במפורש את אברי הקבוצה B_n (הם תלויים כמובן ב- n)

(10 נק') ג. חשבו את $\bigcup_{1 \le n \in \mathbf{N}} B_n$. הוכיחו את תשובתכם בעזרת הכלה דו-כיוונית.

(8 נק') ד. בעזרת ההגדרות של איחוד וחיתוך כלליים בתחילת השאלה **ובעזרת כללי דה-מורגן לכמתים** $\forall, \exists$, אותם למדנו בלוגיקה, נסחו והוכיחו הכללה של כללי דה-מורגן לקבוצות, עבור **איחוד וחיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות**, שכולן חלקיות לקבוצה אוניברסלית U:

$$\bigcup_{i \in I} (A_i') = ? \quad , \quad \bigcap_{i \in I} (A_i') = ? \ .$$

(6 נק') ה. נסמן $D_n = \mathbf{N} - B_n$. חשבו בעזרת הסעיפים הקודמים את $\bigcap_{1 \le n \in \mathbf{N}} D_n$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרק 2

מספר השאלות: 11 | **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2015א | **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 14.11.2014

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

"רלציה" בעברית: **יחס**.

בשאלות המסומנות בסולמית (#) מופיעות שתי טענות. בשאלות אלה סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה | ב - אם רק טענה 2 נכונה

ג - אם שתי הטענות נכונות | ד - אם שתי הטענות אינן נכונות

בשאלות ללא סימון סולמית בחרו את התשובה הנכונה מתוך האפשרויות.

שאלה 1

יהי $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(2,2)\}$. נתבונן בשוויון $R = X \times Y$.

א. אם $X = \{1\}$, $Y = \{1,2,3\}$ אז $R = X \times Y$.

ב. אם $X = \{1,2\}$, $Y = \{1,2,3\}$ אז $R = X \times Y$.

ג. השוויון $R = X \times Y$ מתקיים עבור X,Y מסוימים, שאינם אלה שהוצגו בתשובות א, ב.

ד. לא קיימות קבוצות X,Y כך ש- $R = X \times Y$.

שאלה 2

תהי $A = \{1,2,3,4\}$ ויהי R היחס הבא מ- A ל- A: $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,4),(4,2)\}$.

$Domain(R) \cap Range(R)$ הוא:

א. $\{1\}$ ב. $\{1,2,4\}$ ג. $\varnothing$ ד. $\{1,2\}$ ה. A

שאלה 3

A, R הם אלה שהוגדרו בשאלה 2. S הוא יחס מעל A המקיים $SR = RS$. מכאן **נובע**(!):

א. $S = \varnothing$ ב. $S = I_A$ ג. $S = R$

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 4

R,A הם אלה שהוגדרו בשאלה 2. טענה (i): $RR^{-1} = I_A$. טענה (ii): $R^{-1}R = I_A$.

א. רק טענה (i) נכונה.
ב. רק טענה (ii) נכונה.
ג. שתי הטענות (i), (ii) נכונות.
ד. אף אחת מהטענות (i), (ii) אינה נכונה.

שאלה 5

R,A הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

א. $R = R^2$.
ב. $R \neq R^2$ אבל $R^2 = R^3$.
ג. $R^2 \neq R^3$ אבל $R^3 = R^4$.
ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 6

R,A הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

טענה (i): $R \cup R^2$ הוא רפלקסיבי. טענה (ii): $R \cup R^2$ הוא סימטרי.

א. רק טענה (i) נכונה.
ב. רק טענה (ii) נכונה.
ג. שתי הטענות (i), (ii) נכונות.
ד. אף אחת מהטענות (i), (ii) אינה נכונה.

שאלה 7

R,A הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

טענה (i): $R \cup R^2$ הוא אנטי-סימטרי. טענה (ii): $R \cup R^2$ הוא טרנזיטיבי.

א. רק טענה (i) נכונה.
ב. רק טענה (ii) נכונה.
ג. שתי הטענות (i), (ii) נכונות.
ד. אף אחת מהטענות (i), (ii) אינה נכונה.

שאלה 8

היחס $R = \{(1,1),(2,2)\}$ מעל $A = \{1,2,3\}$ הוא:

א. רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.
ב. סימטרי ורפלקסיבי אך לא טרנזיטיבי.
ג. סימטרי וטרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי.
ד. רפלקסיבי וטרנזיטיבי אך לא סימטרי.
ה. טרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי ולא סימטרי.

שאלה 9 #

R,S הם יחסים מעל קבוצה A ומתקיים $R \subseteq S$.

טענה (*i*): אם S סימטרי אז R סימטרי.

טענה (*ii*): אם S אנטי-סימטרי אז R אנטי-סימטרי

שאלה 10

R הוא יחס טרנזיטיבי ולא ריק מעל קבוצת הטבעיים **N**. מכאן ניתן להסיק:

א. ב- R יש לפחות שני זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש R כזה שבו בדיוק שני זוגות.

ב. ב- R יש לפחות שלושה זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש R כזה שבו בדיוק 3 זוגות.

ג. ב- R יש אינסוף זוגות סדורים.

ד. $R^2 = R$.

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 11

R הוא יחס מעל קבוצה כלשהי, וידוע ש- R **אינו** טרנזיטיבי.

מכאן ניתן להסיק:

א. ב- R יש לפחות שני זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש R כזה שבו בדיוק שני זוגות.

ב. ב- R יש לפחות 3 זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש R כזה שבו בדיוק 3 זוגות.

ג. ב- R יש לפחות 4 זוגות סדורים.

ד. מהנתון נובע ש- A אינסופית וב- R יש אינסוף זוגות סדורים.

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: "תורת הקבוצות" פרקים 2-3
מספר השאלות: 12 | **משקל המטלה:** 2 נקודות
סמסטר: 2015א | **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 21.11.2014

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

"רלציה" בעברית: יחס.

שאלה 1

יהיו: $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $R = \{(1,2),(1,3),(2,3),(5,6)\}$, $E = I_A \cup R \cup R^{-1}$.

החלוקה שיחס השקילות E משרה ב- A היא:

א. $\{\{1,2,3\},\{5,6\}\}$ ב. $\{\{1,2,3\},\{5,6\},\{4\},\{7\}\}$

ג. $\{\{1,2,3,5,6\}\}$ ד. $\{\{1,2,3\},\{5,6\},\{4,7\}\}$

ה. $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{5,6\}\}$

ו. E אינו יחס שקילות מעל A ולכן אינו משרה חלוקה של A.

שאלה 2

נגדיר יחס M מעל $\mathbf{N}-\{0\}$:

עבור n,m טבעיים חיוביים, $(n,m) \in M$ אםם $n \cdot m$ הוא מספר זוגי.

מספר מחלקות השקילות ש- M משרה ב- $\mathbf{N}-\{0\}$ הוא:

א. 1 ב. 2 ג. יש אינסוף מחלקות שקילות. ד. 4

ה. M אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

שאלה 3

נגדיר יחס K מעל קבוצת המספרים השלמים $\mathbf{Z}$:

עבור n,m שלמים, $(n,m) \in K$ אםם $4n-4m$ מתחלק ב- 3.

מספר מחלקות השקילות ש- K משרה ב- $\mathbf{Z}$ הוא:

א. יש אינסוף מחלקות שקילות. ב. 2 ג. 3 ד. 4

ה. K אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

הבהרה: המושג "מתחלק" מוגדר גם עבור שלמים שליליים, למשל -12 מתחלק ב- 3.
ההגדרה היא: a מתחלק ב- b אם ורק אם קיים מספר שלם k כך ש- $a = kb$.

שאלה 4

נתבונן ביחסי שקילות מעל הקבוצה $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, בהם אחת ממחלקות השקילות היא בדיוק הקבוצה $\{1,2\}$, בעוד המספרים 3,4,5 נמצאים יחד במחלקת שקילות אחרת (לאו דווקא לבדם).

מספר יחסי השקילות האלה הוא:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. 4 ה. 5 ו. 6

שאלה 5

$\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים. נגדיר פונקציה f מ- $\mathbf{Z}$ ל- $\mathbf{Z}$: $f(k) = (k-1)(k+2)$.

f היא:

א. חד-חד-ערכית ועל

ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית.

ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbf{Z}$ ל- $\mathbf{Z}$.

שאלה 6

נסמן $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$. תהי $g(x) = \dfrac{1+x}{1+5x}$, $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$.

g היא:

א. חד-חד-ערכית ועל

ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית.

ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbf{R}^+$ ל- $\mathbf{R}^+$.

שאלה 7

תהי $f(X) = X \cup \mathbf{N}$, $f : P(\mathbf{R}) \to P(\mathbf{R})$.

f היא:

א. חד-חד-ערכית ועל

ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית.

ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $P(\mathbf{R})$ ל- $P(\mathbf{R})$.

שאלה 8

בעמ' 85 בכרך "תורת הקבוצות" מוגדרת φ_A, **הפונקציה האופיינית** של A ב- U .

ניקח את $\mathbf{N}$ להיות הקבוצה האוניברסלית U, ותהיינה $A,B \subseteq \mathbf{N}$.

נתבון בטענה $\forall n \left(\varphi_A(n) \le \varphi_B(n) \right)$. איזו מהטענות הבאות **שקולה** לטענה זו?

א. $|A| \le |B|$

ב. כל אברי A קטנים או שווים לכל אברי B .

ג. $A \subseteq B$

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 9

יהיו $X,Y \subseteq \mathbf{N}$. נאמר ש- $(X,Y) \in D$ **אםם (אם ורק אם)** $X \subseteq Y$. היחס D הוא:

א. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$ ואינו סדר-מלא מעל $P(\mathbf{N})$.

ב. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$, שהוא גם סדר-מלא מעל $P(\mathbf{N})$.

ג. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$, שהוא גם יחס שקילות מעל $P(\mathbf{N})$.

ד. אינו סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$.

שאלה 10

יהיו $x,y \in \mathbf{N}-\{0\}$. נאמר ש- $(x,y) \in D$ **אםם** x מתחלק ב- y **או** y מתחלק ב- x.

היחס D הוא:

א. סדר מלא מעל $\mathbf{N}-\{0\}$.

ב. יחס סדר-חלקי מעל $\mathbf{N}-\{0\}$, שאינו סדר מלא מעל $\mathbf{N}-\{0\}$.

ג. אינו סדר-חלקי מעל $\mathbf{N}-\{0\}$ (ולכן גם אינו סדר מלא מעל $\mathbf{N}-\{0\}$).

ד. אינו יחס מעל $\mathbf{N}-\{0\}$.

שאלה 11

R הוא סדר-חלקי על קבוצה כלשהי A.

a,b הם שני אברים שונים של A, ושניהם אברים מקסימליים לגבי R . מכאן נובע:

א. $|A|=2$.

ב. R הוא סדר מלא מעל A .

ג. R אינו סדר מלא מעל A.

ד. A היא אינסופית.

ה. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

שאלה 12

R הוא סדר-חלקי על קבוצה כלשהי A.

a,b הם שני אברים שונים של A, ושניהם אברים גדולים ביותר לגבי R . מכאן נובע:

א. $|A|=2$.

ב. R הוא סדר מלא מעל A .

ג. R אינו סדר מלא מעל A.

ד. A היא אינסופית.

ה. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרקים 2- 3

מספר השאלות: 5 | **משקל המטלה: 4 נקודות**

סמסטר: 2015א | **מועד אחרון להגשה: יום ו' 28.11.2014**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

"רלציה" בעברית: **יחס**

שאלה 1 (6 נקודות)

תן דוגמא לקבוצה סופית A וליחס R מעל A, כך ש- $R \cup R^2$ **אינו** טרנזיטיבי.
יש לנמק מדוע הדוגמא שהבאת מקיימת את הנדרש.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $A = \{1,2,3\}$ ותהי M קבוצת כל היחסים מעל A.

תהי $t: M \to M$ הפונקציה המתאימה לכל $R \in M$ את הסגור הטרנזיטיבי שלו.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. t היא חד-חד-ערכית ב. t היא **על** M ג. לכל $R \in M$, $t(t(R)) = t(R)$

ד. לכל $R, S \in M$, $t(RS) = t(R)t(S)$ (הכפל הוא כפל יחסים)

שאלה 3 (24 נקודות)

הגדרה: מספר טבעי חיובי נקרא **ראשוני** (prime) אם הוא שונה מ- 1, ומתחלק ללא שארית רק בעצמו וב- 1. כבר ליוונים היה ידוע שקבוצת המספרים הראשוניים היא אינסופית.
שימו לב ש- 1 אינו נחשב ראשוני. קבוצת הראשוניים "מתחילה" כך: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...
משפט ידוע קובע שכל מספר טבעי הגדול מ- 1 ניתן להצגה כמכפלה של מספרים ראשוניים, ויש רק דרך אחת להציג אותו כך, עד כדי החלפת סדר הגורמים במכפלה (מה היה מתקלקל במשפט זה אילו 1 היה נחשב ראשוני?). נסמן ב- K את קבוצת המספרים הראשוניים.

נסמן $M = \mathbf{N} - \{0,1\}$. תהי $f: M \to P(K)$ הפונקציה המתאימה לכל $n \in M$ את **קבוצת** הגורמים הראשוניים של n (המספרים הראשוניים בהם n מתחלק ללא שארית).

למשל $f(140) = \{2,5,7\}$. (המשך השאלה בעמ' הבא)

0המשך שאלה 2)

א. האם f היא חד-חד-ערכית? ב. האם f היא **על** $P(K)$?

בהמשך לאמור, הפונקציה f מחלקת את M למחלקות שקילות, בעזרת התנאי: n,m שייכים לאותה מחלקה אםם $f(n)=f(m)$. ראו הסעיף "העתק טבעי" בעמ' 84 בספר, וראו הסבר מפורט יותר באתר הקורס, מאגר המשאבים, עזרים ללמידה - "יחס שקילות המושרה על-ידי פונקציה". המשך השאלה מתייחס לחלוקה זו.

ג. מיהם כל המספרים הנמצאים באותה מחלקה עם המספר 125 ?

ד. מיהם כל המספרים הנמצאים באותה מחלקה עם המספר 20 ?

שאלה 4 (27 נקודות)

תהי $A=\{1,2,3,4\}$ ותהי K קבוצת כל היחסים מעל A **שהם סימטריים אך אינם רפלקסיביים**. בכרך "תורת הקבוצות" בעמ' 94, שאלה 3.25א, מוכח שיחס ההכלה $\subseteq$ הוא סדר-חלקי מעל כל קבוצה של קבוצות. מכיון שיחס הוא סוג מסוים של קבוצה (קבוצה של זוגות סדורים), מתקבל מהאמור שיחס ההכלה $\subseteq$ הוא סדר-חלקי מעל K . השאלה מתייחסת לסדר-חלקי זה.

א. הראה שיש ב- K אבר קטן ביותר - מיהו? הוכח שהוא הקטן ביותר.

ב. מצא אבר מקסימלי ב- K. הוכח שהוא מקסימלי.

ג. הוכח שאין ב- K אבר גדול ביותר.

שאלה 5 (23 נקודות)

פונקציה $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ מוגדרת ברקורסיה כך:

$f(0)=1$, ולכל $k\in\mathbf{N}$: $f(k+1)=(k+1)\cdot f(k)$

(בהמשך הקורס נחזור לפונקציה זו ונקרא לה בשם "עצרת").

(5 נק') א. חשבי את $f(6)$.

(18 נק') ב. הוכיחי באינדוקציה: $1\cdot f(1)+2\cdot f(2)+3\cdot f(3)+\ldots+n\cdot f(n)=f(n+1)-1$

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרקים 4-5

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2015א **מועד אחרון להגשה:** יום ב' 15.12.2014

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

חלק מהממ"ן מסתמך על החוברת "פרק 5" שנמצאת בידיכם.

חוברת זו משלימה את פרק 4 בתורת הקבוצות ומחליפה חלק ממנו.

שאלה 1 (27 נק')

$\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

בכל סעיף מצא את עוצמת הקבוצה הרשומה בו. הוכח את תשובותיך.

(8 נק') א. $K = \{x \in \mathbf{R} \mid 0.3 + 3x \in \mathbf{N}\}$

(8 נק') ב. $L = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x + y = 5\}$

(9 נק') ג. $M = \{ (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 2x + y \in \mathbf{N}$ וגם $x - 2y \in \mathbf{N} \}$

הדרכה: נסמן $2x + y = n$, $x - 2y = m$ ו"נפתור" את מערכת המשוואות.

שאלה 2 (12 נק')

נתונות 100 קבוצות $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$, שכולן חלקיות לקבוצת הממשיים $\mathbf{R}$.

נתון שלכל i ($1 \le i \le 100$), **<u>המשלים</u>** של A_i ב- $\mathbf{R}$ הוא קבוצה בת-מניה.

נסמן $A = \bigcap_{1 \le i \le 100} A_i$. נסמן ב- B את **<u>המשלים</u>** של A ב- $\mathbf{R}$.

עוצמת B היא:

[1] 0 **[2]** מספר טבעי כלשהו שאינו 0 **[3]** $\aleph_0$

[4] C **[5]** התשובה תלויה בבחירת הקבוצות $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$.

מצאו את התשובה הנכונה **ונמקו**.

את שתי השאלות הקודמות ניתן (וכדאי) לפתור רק בעזרת פרק 4, עמ' 116 – 128.
שלוש השאלות הבאות מסתמכות על פרק 5 .

שאלה 3 (16 נק')

תהיינה A,B,C קבוצות **בנות מניה**, החלקיות לקבוצת הממשיים $\mathbf{R}$.
נסמן: $D = A' \cap B' \cap C'$ (המשלימים הם יחסית ל- $\mathbf{R}$). עוצמת D היא:

[1] 0 **[2]** מספר טבעי כלשהו שאינו 0 **[3]** $\aleph_0$

[4] C **[5]** התשובה תלויה בבחירת הקבוצות A,B,C .

מצאו את התשובה הנכונה **ונמקו**.

שאלה 4 (21 נק')

(9 נק') א. הוכיחי שקבוצת היחסים (רלציות) מעל הקבוצה $\mathbf{N}$, עוצמתה C .
הדרכה: כדאי להיזכר בהגדרה של יחס מעל קבוצה.

(12 נק') ב. הוכיחי שקבוצת היחסים **הרפלקסיביים** מעל $\mathbf{N}$, עוצמתה C .

שאלה 5 (24 נק')

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים, $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

א. תהי A קבוצת כל הפונקציות של $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{R}$. עוצמת A היא:

[1] מספר סופי כלשהו **[2]** $\aleph_0$ **[3]** C

[4] 2^C **[5]** אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

ב. תהי B קבוצת כל הפונקציות של $P(\mathbf{N})$ ל- $P(\mathbf{R})$. עוצמת B היא:

[1] אפס (אין פונקציות כאלה) **[2]** C **[3]** 2^C

[4] עוצמה גדולה מ- 2^C **[5]** אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

הוכיחו את תשובתיכם.

מטלת מחשב (ממ״ח) 04

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה
מספר השאלות: 11
סמסטר: 2015א

חומר הלימוד למטלה: ״קומבינטוריקה״ פרקים 1-2
משקל המטלה: 2 נקודות
מועד אחרון להגשה: יום ג׳ 30.12.2014

את התשובות לממ״ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת״א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ״ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ״ח למנחה!

בשאלות 1 – 4 A,B הן קבוצות סופיות, $|A|=5$, $|B|=3$.

שאלה 1

מספר הפונקציות של B ל- A הוא:

א. 8 ב. 10 ג. 15 ד. 125 ה. 243

שאלה 2

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של B ל- A הוא:

א. 3 ב. 8 ג. 60 ד. 120 ה. 240

שאלה 3

מספר היחסים שהם בעת ובעונה אחת **רפלקסיביים וסימטריים** מעל A הוא:

א. 25 ב. 32 ג. 2^{10} ד. 2^{15} ה. 2^{20}

שאלה 4

נניח ש- $A=\{1,2,3,4,5\}$.

מספר יחסי הסדר המלא מעל A שבכל אחד מהם 5 **<u>אינו</u>** האבר הגדול ביותר, הוא:

א. 0 ב. 5 ג. 24 ד. 96 ה. 120

שאלות 5- 7 עוסקות בדרכים שונות לסדר את המחרוזת aaabccdd (להלן: "המחרוזת").

שאלה 5

מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת הוא:

א. 8 ב. 11 ג. 1,680 ד. 40,309 ה. 40,320

שאלה 6

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת כאשר צמד האותיות dd חייב להופיע ברצף?

א. 7 ב. 420 ג. 5,030 ד. 5,040 ה. 12,520

שאלה 7

בנוסף לדרישה שבשאלה 6, נדרוש גם **שלא** יופיע הרצף aaa.

מספר הסידורים האפשריים כעת קטן ממספר הסידורים שמצאתם בשאלה 6. **בכמה הוא קטן?**

א. 5 ב. 60 ג. 120 ד. 410 ה. 5,030

בכל אחת מהשאלות 8 – 10 נתונים לנו 10 כדורים **זהים**, 7 קוביות **זהות**,
וארבעה ארגזים **שונים** הממוספרים 1- 4.

שאלה 8

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לחלק את כל 10 הכדורים בין הארגזים?

א. $D(4,10)=\binom{13}{3}$ ב. $D(4,10)=\binom{13}{4}$ ג. 1,000 ד. 4^{10} ה. $D(10,4)$

שאלה 9

נסמן את התשובה לשאלה הקודמת ב- x.

בכמה דרכים ניתן לחלק את כל הכדורים והקוביות לארגזים?

א. $x+210$ ב. $x+120$ ג. $x\cdot 210$ ד. $x\cdot 120$

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 10

בכמה דרכים ניתן לחלק את כל הכדורים לארגזים, אם בארגז מס׳ 1 חייבים להיות לפחות 3 כדורים, ואף ארגז לא יכול להישאר ריק?

א. 12 ב. 15 ג. 120 ד. 150 ה. 180

שאלה 11

מהו מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 7x_5 + 10x_6 = 13$?

תזכורת: בקורס זה, 0 הוא מספר טבעי.

הדרכה: במחוברים $7x_5$, $10x_6$ אפשר לטפל ע״י הפרדה למקרים.

א. 466 ב. 664 ג. 4660 ד. 6460 ה. 6640

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה

חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 3-4

מספר השאלות: 4

משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2015א

מועד אחרון להגשה: יום ג' 6.1.2015

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (27 נקודות)

יהי $n \geq 3$. נתבונן בזהות $\binom{n}{3} = \sum_{i=2}^{n-1}(i-1)(n-i)$. ניתן להוכיח אותה כך:

אגף שמאל הוא מספר האפשרויות לבחור 3 מספרים **שונים** מתוך הקבוצה $A = \{1,2,\ldots,n\}$ **ללא חשיבות לסדר**. אגף ימין מייצג דרך קצת מיוחדת לספור את האפשרויות הללו:

ראשית נבחר מספר i בתחום $2 \leq i \leq n-1$. זה יהיה המספר **האמצעי בגודלו** מבין השלושה.

כעת נבחר מספר כלשהו ב- A הקטן מ- i (לכך יש $i-1$ אפשרויות),

ומספר כלשהו ב- A הגדול מ- i (לכך יש $n-i$ אפשרויות).

מספר האפשרויות לבחירת קבוצה בת 3 איברים, אשר האמצעי בגודלו מביניהם הוא i, הוא אפוא $(i-1)(n-i)$. נסכם את האפשרויות עבור כל ערכי i, ומכאן השוויון!

(6 נק') א. בדוק את השוויון עבור $n=3$ ועבור $n=4$.

(21 נק') ב. נכליל את התהליך הנ"ל, למקרה של בחירת $2k+1$ מספרים שונים מתוך $A = \{1,2,\ldots,n\}$ (כאשר $n \geq 2k+1$), ללא חשיבות לסדר.

נתחיל שוב מבחירת האיבר שיהיה האמצעי בגודלו מבין הנבחרים. השלם את הזהות הבאה (החלף את חמשת סימני השאלה בביטויים מתאימים) והוכח אותה באופן דומה לנ"ל:

$$\binom{n}{2k+1} = \sum_{i=?}^{?}\binom{?}{k}\binom{?}{?}$$

בדוק את תשובתך בעזרת 3 המקרים הבאים ורשום בכל מקרה את התוצאה:

(1) $k=0$ (2) $k=1$ (3) $n=2k+1$.

שאלה 2 (27 נקודות)

תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. מיצאו כמה פונקציות $f:A\to A$ מקיימות את התנאי:

שלושת המספרים 1,2,3 נמצאים בתמונה של f (כלומר כל אחד מהמספרים 1,2,3 מתקבל על-ידי הפעלת f על אבר כלשהו של A). ייתכן בהחלט שאברים נוספים ב- A מתקבלים גם הם.

דוגמאות: *(i)* הפונקציה השולחת את כל אברי A ל- 1 **אינה** מקיימת את התנאי.

(ii) פונקציית הזהות, השולחת כל אבר לעצמו, מקיימת את התנאי.

(iii) הפונקציה f המוגדרת כך: $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1$, $f(5)=2$, $f(6)=3$ מקיימת את התנאי.

כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה. אין הכרח להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 3 (27 נקודות)

במערכת מחשב מסוימת, סיסמת משתמש היא באורך של **לפחות 3 תוים ולכל היותר 100 תוים**.

התוים המותרים: a-z, A-Z, 0-9 (יש אפוא $26+26+10=62$ תוים מותרים).

סיסמא חייבת להכיל **לפחות אות קטנה אחת, לפחות אות גדולה אחת ולפחות ספרה אחת**.

ביום מסוים, באג מוזר בתהליך בדיקת הסיסמא גרם לכך שבכניסה למערכת **לא היתה התייחסות לסדר התוים ולא היתה התייחסות לחזרות**. למשל, המערכת לא הבחינה בין הסיסמאות BA1Aa11, aAB1, 1AAAABBBaa, כי בשלושתן מופיעים בדיוק אותם תוים.

עוד דוגמאות: נניח שהסיסמא של משה היא **abA122**. באותו יום מוזר:

אם משה הקליד בטעות 22aAab111b , המערכת קיבלה אותו.

אם משה הקליד בטעות abA123, המערכת לא קיבלה אותו, כי התו 3 לא נמצא בסיסמא שלו.

אם משה הקליד בטעות aba122, המערכת לא קיבלה אותו, כי חסר התו A שנמצא בסיסמא שלו.

כמה סיסמאות שונות היו אפשריות **בפועל** באותו יום? "אפשריות בפועל" משמע **סיסמאות שהמערכת לא מבחינה ביניהן נחשבות כאותה סיסמא**.

מדובר רק על סיסמאות חוקיות, המקיימות את הדרישות שבתחילת השאלה.

כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה. אין הכרח להגיע לתשובה מספרית, אבל תשובה שמכילה סכומים (או סיגמא) של עשרות גורמים לא תתקבל: יש לפשט אותה או למצוא דרך אחרת לפתור את השאלה...

שאלה 4 (19 נקודות)

לטקס בוגרים של האוניברסיטה הגיעו בוגרים ואורחים שונים. במהלך הערב חלק מהאנשים הללו לחצו ידים זה לזה. הוכח שיש לפחות שני אנשים שלחצו בדיוק אותו מספר ידים.

הבהרות: אדם לא לוחץ יד לעצמו, שני אנשים אינם לוחצים יד זה לזה יותר מפעם אחת.

מטלת מנחה (ממ״ן) 15

הקורס: 20476 מתמטיקה דיסקרטית **חומר הלימוד למטלה**: קומבינטוריקה פרקים 6-7

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2015א **מועד אחרון להגשה:** יום ה׳ 16.1.2015

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (25 נק׳)

יהי a_n מספר הסדרות באורך n, שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0,1,2\}$,
אשר אין בהן הופעה של **00** ואין בהן הופעה של **01** (מותרת הופעה של 10).
דוגמאות לסדרות **מותרות** באורך 5: 12211 , 11110 .
דוגמאות לסדרות **אסורות** באורך 5: 12011 , 11100.

(10 נק׳) א. רשמי בעזרת חישוב ישיר את $a_0\,,a_1,a_2$. רשמי יחס נסיגה עבור a_n.
בדקי שהערכים שרשמת עבור $a_0\,,a_1,a_2$ מתאימים ליחס הנסיגה.

(15 נק׳) ב. פתרי את יחס הנסיגה וקבלי נוסחה מפורשת עבור a_n.
ביטויים כגון $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ יש להשאיר כפי שהם.
ביטויים כגון $\sqrt{12}$ יש להעביר לצורה $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=2\sqrt{3}$.

שאר הממ״ן עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בסוף הממ״ן רשימה של נוסחאות שימושיות.

שאלה 2 (23 נק׳)

תהי $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$. נתון: $a_0=1,\ a_1=3,\ a_2=2,\ a_3=-2$. שאר המקדמים אינם ידועים. תהי g פונקציה המקיימת: $f(x)\cdot g(x)=1=1+0x+0x^2+\ldots$.

נסמן $g(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i$. חשבי את $b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3$.

שאלה 3 (25 נק')

מצאו את מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$,

כאשר 3 מהמשתנים הם מספרים טבעיים **זוגיים**,

3 המשתנים האחרים הם מספרים טבעיים **אי-זוגיים**,

ואף אחד מהמשתנים אינו שווה 0 ואינו שווה 1 .

לא נתון איזה מהמשתנים הם זוגיים ואיזה אי-זוגיים.

אפשר לפתור בעזרת פונקציה יוצרת ואפשר בדרך אחרת. **יש להגיע לתשובה סופית מספרית**.

שאלה 4 (27 נק')

דוגמא לתרגיל מסוג זה נמצאת בסוף הקובץ "מבוא לפונקציות יוצרות" שבאתר הקורס.

(8 נק') א. נרשום את הפיתוחים הבאים :

$$f(x) = (1-x)^9 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \qquad g(x) = \frac{1}{(1-x)^{10}} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

מצאו את a_i ואת b_i, לכל i טבעי.

(16 נק') ב. נשים לב ש- $f(x)\cdot g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (*)

יהי $k \in \mathbf{N}$. את המקדם של x^k בפונקציה $f(x)\cdot g(x)$ אפשר לחשב בשתי דרכים :

- מתוך אגף שמאל של (*), ע"י כפל פונקציות יוצרות.
- מתוך אגף ימין של (*), בפיתוח הידוע של $\dfrac{1}{1-x}$.

השוו את שתי התוצאות וקבלו זהות מהצורה $? = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{?}{?} \cdot D(?\,,?)$.

(3 נק') בדקו את הזהות שקיבלתם עבור המקרה $k=2$.

להלן כמה נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות :

(*i*)! סכום טור הנדסי סופי : $\sum_{i=0}^{n} x^i = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ואינסופי : $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \dfrac{1}{1-x}$

(*ii*)! כפל פונקציות יוצרות :

אם $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, ו- $f(x)\cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

אז $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד).

(*iii*)! $\sum_{k=0}^{\infty} D(n,k)x^k = (1+x+x^2+\ldots)^n = \dfrac{1}{(1-x)^n}$ (במלים אחרות : המקדם של x^k

בפיתוח הביטוי $\dfrac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$. ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר).

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה
חומר הלימוד למטלה: "תורת הגרפים" פרקים 1- 3
מספר השאלות: 11
משקל המטלה: 3 נקודות
סמסטר: 2015א
מועד אחרון להגשה: יום ו' 2.2.2015

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

שאלה 1

נתאר לעצמנו גרף על 7 צמתים, שדרגותיהם : 0,1,2,2,3,4,5.

א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.
ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.
ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.
ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.
ה. לא קיים גרף כזה.

שאלה 2

G הוא גרף (לא חייב להיות פשוט) על 55 צמתים, מתוכם :

20 צמתים בעלי דרגה 1, 15 צמתים בעלי דרגה 2,
10 צמתים בעלי דרגה 3, 10 צמתים בעלי דרגה 4.

מספר הקשתות ב- G הוא :

א. 54 ב. 60 ג. 120 ד. 240
ה. אין די נתונים כדי לקבוע את מספר הקשתות.

שאלה 3

גרף G מוגדר כך : הצמתים של G הם הקבוצות בנות בדיוק 3 איברים מתוך $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

למשל הקבוצה $\{1,4,7\}$ היא צומת של G. מספר הצמתים של G הוא אפוא $\binom{7}{3}$.

בין שני צמתים שונים A,B יש קשת אם ורק אם $|A\cap B|=1$.

למשל יש קשת בין $\{1,4,7\}$ לבין $\{2,3,4\}$.

דרגת כל צומת ב- G היא :

א. 6 ב. 18 ג. 35 ד. 36
ה. G אינו גרף רגולרי - לא לכל הצמתים אותה דרגה.

שאלה 4

בהתייחס לגרף מהשאלה הקודמת, מספר הקשתות בגרף הוא:

א. 34 ב. 35 ג. 108 ד. 153 ה. 315

שאלה 5

הגרף משאלה 3 הוא:

א. יער שאינו עץ ב. עץ ג. גרף לא קשיר שאינו יער

ד. גרף דו-צדדי ה. אף אחת מהאפשרויות הקודמות אינה נכונה

שאלה 6

השאלה עוסקת באיזומורפיזם של גרפים שאינם מתויגים ("תורת הגרפים" הגדרה 2.7).

נזכור שלכל גרף G, המשלים שלו ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4) מסומן $\overline{G}$.

C_n הוא גרף שהוא מעגל פשוט על n צמתים.

א. $\overline{C_5}$ איזומורפי ל- C_5 ו- $\overline{C_6}$ איזומורפי ל- C_6 .

ב. $\overline{C_5}$ איזומורפי ל- C_5 אבל $\overline{C_6}$ אינו איזומורפי ל- C_6 .

ג. $\overline{C_5}$ אינו איזומורפי ל- C_5 אבל $\overline{C_6}$ איזומורפי ל- C_6 .

ד. $\overline{C_5}$ אינו איזומורפי ל- C_5 ו- $\overline{C_6}$ אינו איזומורפי ל- C_6 .

שאלה 7

G הוא יער על קבוצה של 10 צמתים, ויש לו בדיוק שני רכיבי קשירות.

x,y הם צמתים השייכים לרכיבי קשירות **שונים** של G. ניצור גרף חדש על-ידי כך ש"נדביק" את x ל- y: שניהם ייחשבו כעת כצומת אחד; קבוצת הקשתות השכנות לצומת זה היא איחוד קבוצת הקשתות שהיו שכנות ל- x עם קבוצת הקשתות שהיו שכנות ל- y. הצמתים של G פרט ל- x,y והקשתות של G שאינן שכנות ל- x או ל- y נשארים כולם ללא שינוי בגרף החדש.

קיבלנו גרף חדש על 9 צמתים. גרף זה הוא:

א. יער שאינו עץ **ב.** עץ **ג.** K_9, גרף מלא על 9 צמתים

ד. גרף שאינו יער (ובפרט אינו עץ) ואינו K_9

ה. כדי לדעת איזה מהאפשרויות א - ד מתקיימת נדרש עוד מידע על G.

שאלה 8

בחוברת "תורת הגרפים" בעמ' 29 , בתשובה לשאלה 7, מופיע עץ מתויג.

נוסיף לעץ הזה עלה שמספרו 9 ונחבר אותו לצומת שמספרה 1.

סדרת Prüfer של העץ החדש היא:

א. $(4,4,3,4,4,2,1)$ ב. $(1,4,4,3,4,4,2)$

ג. $(4,4,4,4,3,2,1)$ ד. $(4,4,3,4,2,4,1)$

ה. $(4,3,4,4,2,4,1)$ ו. $(4,3,4,4,4,2,1)$

שאלה 9

G הוא גרף קשיר על 8 צמתים. **דרגות** הצמתים הן: $2,2,3,4,4,5,6,6$.

מכאן נובע:

א. **יש** ב- G מעגל אוילר. **יש** ב- G גם מסלול אוילר שאינו מעגל.

ב. **יש** ב- G מעגל אוילר. **אין** ב- G מסלול אוילר שאינו מעגל.

ג. **אין** ב- G מעגל אוילר. **יש** ב- G מסלול אוילר שאינו מעגל.

ד. **אין** ב- G מעגל אוילר. **אין** ב- G מסלול אוילר שאינו מעגל.

ה. כדי לדעת איזה מהאפשרויות א – ד מתקיימת נדרש עוד מידע על G.

שאלה 10

G הוא גרף המילטוני (כלומר יש בו מעגל המילטון), ויש ב- G גם מסלול המילטון שאינו מעגל.

א. זה לא מעניין, בכל גרף המילטוני יש גם מסלול המילטון שאינו מעגל.

ב. טענה א' אינה נכונה, אבל יש גרף פשוט המקיים את הדרישות הללו.

ג. יש גרף כזה, אבל לא גרף פשוט.

ד. לא ייתכן גרף כזה.

שאלה 11

הגדרה: צומת מפריד בגרף הוא צומת שאם נמחק מהגרף אותו ואת הקשתות הסמוכות לו, נקבל גרף בעל מספר רכיבי קשירות גדול יותר מזה של הגרף המקורי.

א. גרף שיש בו צומת מפריד אינו אוילרי ואינו המילטוני.

ב. גרף שיש בו צומת מפריד אינו אוילרי אבל יכול להיות המילטוני.

ג. גרף שיש בו צומת מפריד אינו המילטוני אבל יכול להיות אוילרי.

ד. יש גרף אוילרי שיש בו צומת מפריד ויש גרף המילטוני שיש בו צומת מפריד.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20476 – מתמטיקה בדידה

חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים – כל היחידה

מספר השאלות: 4   **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2015א   **מועד אחרון להגשה:** יום א' 4.2.2015

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (25 נקודות)

בהנתן גרף כלשהו, הנה אלגוריתם לבניית מסלול בגרף:

פתיחה: נבחר צומת כלשהו כרצוננו. בצומת זה מתחיל המסלול.

התקדמות: מצומת שאנו נמצאים בו נתקדם לצומת שכֵן לאורך קשת כלשהי, נקפיד רק <u>לא לחזור על קשת שכבר הלכנו בה</u>. אם יש כמה קשתות אפשריות, נבחר אחת מהן כרצוננו. כל עוד זה אפשרי, נמשיך להתקדם בגרף.

סיום: כאשר נגיע לצומת שכבר לא ניתן להתקדם ממנו - סיימנו.

האלגוריתם מחזיר את (כלומר התוצאה שלו היא) המסלול שנוצר.

(12 נק') א. הוכיחו שבגרף שכל צמתיו בעלי דרגה זוגית, אלגוריתם זה מחזיר תמיד מעגל (אפשר להניח שהגרף פשוט, אם כי זה לא חיוני).

(13 נק') ב. כידוע, גרף קשיר שכל צמתיו בעלי דרגה זוגית הוא אוילרי. הראו שהאלגוריתם שהבאנו **אינו** פותר את הבעיה של מציאת מעגל אוילר, כי הוא עשוי להחזיר מעגל שאינו מעגל אוילר: **תנו דוגמא** לגרף פשוט וקשיר, שכל צמתיו בעלי דרגה זוגית, ומסלול **שאינו** מעגל אוילר, שעשוי להתקבל על ידי האלגוריתם. ציינו בבירור היכן תחילת המסלול שלכם.

שאלה 2 (15 נקודות)

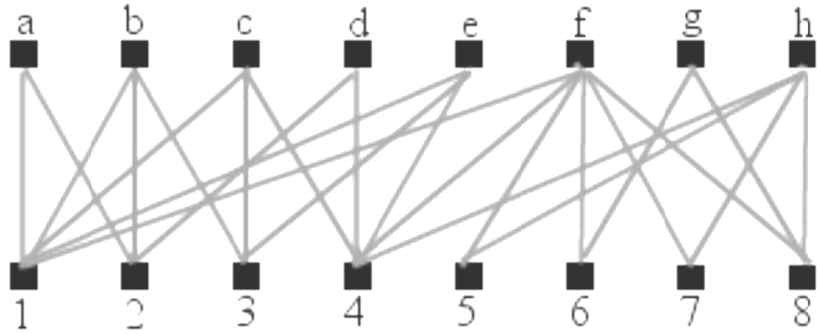
השאלה מתייחסת לגרף שהוגדר בממ"ח 05 , שאלה 3. אפשר להסתמך על פתרון הממ"ח.

(5 נק') א. האם יש בגרף זה מעגל אוילר? הוכח

(10 נק') ב. האם יש בגרף זה מעגל המילטון? הוכח

שאלה 3 (15 נקודות)

הוכיחו כי בגרף הבא לא קיים זיווג מושלם.



שאלה 4 (45 נקודות)

G הוא גרף פשוט על קבוצת הצמתים $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

בין כל שני צמתים שונים i,j המקיימים $1 \le i \le 4$ וגם $1 \le j \le 4$ יש קשת של G.

בין כל שני צמתים שונים i,j המקיימים $5 \le i \le 9$ וגם $5 \le j \le 9$ יש קשת של G.

בנוסף על כל הקשתות הללו יש ב- G **עוד בדיוק חמש קשתות** (בסעיף ה׳ נקרא להן ״הקשתות המיוחדות״).

יהי $H=\overline{G}$ הגרף המשלים של G.

א. הוכיחי ש- H הוא דו-צדדי.

ב. מהו מספר הצביעה של H? הוכח.

ג. חשבי את מספר הקשתות של H.

ד. בהנחה ש- H קשיר, הוכיחי ש- H אינו מישורי.

ה. נחזור לעסוק בגרף המקורי, G. בסעיף זה בלבד נניח שלחמש ה״קשתות המיוחדות״ של G יש צומת משותף (צומת שהוא שכן של כל אחת מחמש הקשתות).
בהנחה זו, מהו מספר הצביעה של G? הוכיחי.