20416 - תאריך הבחינה: 24.8.2009 (סמסטר 2009ב - מועד 90)

שאלה 1

א. נחשב תחילה את ההסתברות שיש בקופסה מקרית בדיוק 20 גפרורים: $e^{-20}\cdot\frac{20^{20}}{20!}=0.0888$

כעת, נסמן ב-A את המאורע שאף אחד מ-N חברי הקבוצה לא מקבל קופסת גפרורים שיש בה בדיוק 20 גפרורים. לחישוב ההסתברות של A נתנה בערכו של N ונשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה. נקבל:

$$P(A)=\sum_{n=1}^{10}P\{A\mid N=n\}P\{N=n\}=\sum_{n=1}^{10}\underbrace{(1-0.0888)}_{=0.9112}{}^{n}\cdot 0.1$$

$$=0.1\cdot 0.9112\cdot\sum_{n=0}^{9}0.9112^{n}=0.09112\cdot\left(\frac{1-0.9112^{10}}{0.0888}\right)=0.6212$$

ב. נסמן ב- X_1, X_2, ... , X_N את מספר הגפרורים בכל אחת מהקופסאות שקיבלו N האנשים.

מנתוני הבעיה נובע שה-X_i-ים בלתי-תלויים זה בזה ובלתי תלויים ב-N. לפיכך, אפשר להציג את מספר הגפרורים הכולל שמקבלים N אנשי הקבוצה, באמצעות הסכום המקרי $\sum_{i=1}^{N}X_i$.

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)=E[N]\text{Var}(X_1)+(E[X_1])^2\,\text{Var}(N)=\tfrac{1+10}{2}\cdot 20+20^2\cdot\tfrac{10^2-1}{12}=3{,}410$$ [ה-X_i-ים שווי-התפלגות]

ג. בסימוני הסעיף הקודם, נקבל כי:

$$M_{\Sigma X_i}(t)=E\left[\left(M_{X_1}(t)\right)^N\right]=E\left[(e^{20(e^t-1)})^N\right]=\sum_{n=1}^{10}0.1\cdot(e^{20(e^t-1)})^n=0.1\left(\frac{1-e^{20\cdot 11(e^t-1)}}{1-e^{20(e^t-1)}}-1\right)$$

שאלה 2

א. תחילה נמצא את פונקציית הצפיפות של Y בהינתן $N=n$ (לכל $n=1,2,\ldots$). נגזור את פונקציית ההתפלגות המצטברת המותנית הנתונה, ונקבל:

$$f(y\mid n)=\tfrac{d}{dy}y^n=ny^{n-1}\qquad,\qquad 0<y<1$$

כעת:

$$f(y)=\sum_{n=1}^{\infty}f(y\mid n)P\{N=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}ny^{n-1}\cdot\frac{5}{6^n}=5\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{6}\cdot\left(\frac{y}{6}\right)^{n-1}=5\cdot\frac{d}{dy}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{y}{6}\right)^n\right]$$

$$=5\cdot\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{1-\frac{y}{6}}-1\right]=5\cdot\frac{d}{dy}\left[\frac{6}{6-y}-1\right]=5\cdot\left[\frac{6}{(6-y)^2}\right]=\frac{30}{(6-y)^2}\qquad,\qquad 0<y<1$$

ב. עלינו למצוא פונקציית צפיפות משותפת $f_{X,Y}$ המקיימת: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy=e^{x-\theta}$

דוגמה פשוטה שמקיימת את השוויון האחרון היא: $\int_{-\infty}^{x}e^{y-\theta}\,dy=e^{x-\theta}$

לכן, פונקציית צפיפות משותפת מתאימה היא: $f_{X,Y}(x,y)=e^{y-\theta}\qquad,\qquad y<x<\theta$

פונקציה זו קובעת תלות בין X ל-Y, בגלל תחום ההגדרה שלה, שאינו ניתן להפרדה לשני תחומי-הגדרה – האחד תלוי רק ב-X והשני רק ב-Y. כמו כן, הפונקציה המוצעת אי-שלילית ומתקיים :

$$\int_{-\infty}^{\theta}\int_{-\infty}^{x} e^{y-\theta}\,dydx = \int_{-\infty}^{\theta} e^{y-\theta}\Big|_{-\infty}^{x} dx = \int_{-\infty}^{\theta} e^{x-\theta}dx = e^{y-\theta}\Big|_{-\infty}^{\theta} = 1-0=1$$

שאלה 3

א. נסמן ב-A_i את המאורע שמתג i סגור, לכל $i=1,2,\ldots,6$, וב-B את המאורע שעובר זרם מ-A ל-B.

כמו כן, נתון שה-A_i-ים בלתי-תלויים וכי $P(A_i)=0.7$, לכל i . לכן :

$$P(B\mid A_3\cup A_4) = P((A_1\cup A_2)\cap(A_5\cup A_6))$$ [כל המתגים בלתי-תלויים]

$$= P(A_1\cup A_2)P(A_5\cup A_6)$$ [כל המתגים בלתי-תלויים]

$$= P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)+P(A_5)+P(A_6)-P(A_5\cap A_6)$$

$$= (2\cdot 0.7-0.7)^2 = 0.91^2 = 0.8281$$

ב. תחילה, נחשב את ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B, בהינתן ששני המתגים 3 ו-4 פתוחים, ואז נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה, כדי למצוא את ההסתברות הלא-מותנית שעובר זרם מ-A ל-B. נקבל :

$$P(B\mid A_3^C\cap A_4^C) = P((A_1\cap A_5)\cup(A_2\cap A_6))$$ [כל המתגים בלתי-תלויים]

$$= P(A_1\cap A_5)+P(A_2\cap A_6)-P(A_1\cap A_5\cap A_2\cap A_6)$$ [כל המתגים בלתי-תלויים]

$$= 2\cdot 0.7^2-0.7^4 = 0.7399$$

כעת, מנוסחת ההסתברות השלמה, נקבל כי :

$$P(B) = P(B\mid A_3\cup A_4)P(A_3\cup A_4)+P(B\mid A_3^C\cap A_4^C)P(A_3^C\cap A_4^C)$$

$$= 0.8281\cdot(1-0.3^2)+0.7399\cdot 0.3^2 = 0.820162$$

ג.

$$P(A_1\cap A_6\mid B) = \frac{P((A_1\cap A_6)\cap(A_2\cup(A_3\cup A_4)\cup A_5))}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1\cap A_6)P(A_2\cup(A_3\cup A_4)\cup A_5)}{P(B)}$$ [כל המתגים בלתי-תלויים]

$$= \frac{P(A_1\cap A_6)[1-P(A_2^C\cap(A_3\cup A_4)^C\cap A_5^C)]}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1)P(A_6)[1-P(A_2^C)P(A_3^C\cap A_4^C)P(A_5^C)]}{P(B)}$$ [כל המתגים בלתי-תלויים]

$$= \frac{0.7^2[1-0.3^4]}{0.820162} = \frac{0.486031}{0.820162} = 0.5926$$

שאלה 4

א. אם ידוע שעל הכבל העליון עומדת לפחות ציפור אחת, אז יכולות לעמוד עליו בין 1 ל-30 ציפורים, בהסתברות :

$$P\{X=i\mid X\geq 1\} = \frac{P\{X=i\}}{P\{X\geq 1\}} = \frac{\binom{30}{i}\cdot 0.1^i\cdot 0.9^{30-i}}{1-0.9^{30}} = \frac{\binom{30}{i}\cdot 0.1^i\cdot 0.9^{30-i}}{0.95761} \quad , \quad i=1,2,...,30$$

לכן, התוחלת המבוקשת היא :

$$E[X \mid X \geq 1] = \sum_{i=1}^{30} i \cdot P\{X = i \mid X \geq 1\} = \frac{1}{0.95761} \cdot \sum_{i=1}^{30} i \cdot \binom{30}{i} \cdot 0.1^i \cdot 0.9^{30-i}$$

$$= 1.04427 \cdot \sum_{i=1}^{30} i \cdot \binom{30}{i} \cdot 0.1^i \cdot 0.9^{30-i} = 1.04427 \cdot (\underbrace{E[X]}_{=30\cdot 0.1} - 0 \cdot 0.9^{30}) = 3.1329$$

ב. לפי נתוני הבעיה, אין תלות בין מספרי הציפורים שיושבות על כל אחד מן הכבלים. לכן, מספר הציפורים שיושבות על שני הכבלים יחדיו הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 60 ו- 0.1. ומכאן, שההסתברות שעל שני הכבלים יישבו בסך-הכל 27 ציפורים היא : $\binom{60}{7} \cdot 0.1^7 \cdot 0.9^{53} = 0.1451$

ג1. נסמן ב-X^* את מספר הציפורים שיושבות על הכבל העליון. מתקיים : $Y = X + X^*$

כאשר, המשתנים המקריים X ו-X^* בלתי-תלויים ויש לכל אחד מהם התפלגות בינומית עם הפרמטרים 30 ו-0.1, ולמשתנה המקרי Y יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 60 ו-0.1. לפיכך, מתקיים :

$$\rho(X,Y) = \rho(X, X + X^*) = \frac{\text{Cov}(X, X + X^*)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\text{Var}(X) + \overbrace{\text{Cov}(X, X^*)}^{=0}}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

$$= \frac{30 \cdot 0.1 \cdot 0.9}{\sqrt{30 \cdot 0.1 \cdot 0.9 \cdot 60 \cdot 0.1 \cdot 0.9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ג2. $$P\{X = 3 \mid Y = 7\} = \frac{P\{X = 3, X^* = 4\}}{P\{Y = 7\}} = \frac{\binom{30}{3} \cdot 0.1^3 \cdot 0.9^{27} \cdot \binom{30}{4} \cdot 0.1^4 \cdot 0.9^{26}}{\binom{60}{7} \cdot 0.1^7 \cdot 0.9^{53}} = \frac{\binom{30}{3} \cdot \binom{30}{4}}{\binom{60}{7}} = 0.2881$$

שאלה 5

א. מכיוון ש-X הוא משתנה מקרי אי-שלילי, שערכיו האפשריים בקטע $[0,1]$, הערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת בנקודות 0 ו-1 מכתיבים את ערכו של θ.

על-מנת שיתקיים : $F_X(0) = \theta^0 - 1 = 0$ ו- $F_X(1) = \theta^1 - 1 = 1$, כנדרש, מקבלים כי בהכרח $\theta = 2$.

ב. כדי למצוא את פונקציית הצפיפות של X , נגזור את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X . נקבל:

$$f_X(x) = \tfrac{d}{dx} F_X(x) = \tfrac{d}{dx}[2^x - 1] = 2^x \ln 2 \qquad , \qquad 0 \leq x \leq 1$$

ג. $$E[X] = \int_0^1 x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 2^x \ln 2\,dx \underset{\substack{u=x\ ;\ v'=2^x \ln 2 \\ u'=1\ ;\ v=2^x}}{=} x \cdot 2^x \Big|_0^1 - \int_0^1 2^x\,dx$$

$$= 2 - 0 - \frac{2^x}{\ln 2}\bigg|_0^1 = 2 - \frac{2-1}{\ln 2} = 2 - \frac{1}{\ln 2} = 0.5573$$

ד. נחשב תחילה את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y וממנה נמצא את פונקציית הצפיפות של Y.

לכל $0 \leq y \leq 1$ מתקיים :

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{2^X - 1 \leq y\} = P\{2^X \leq y + 1\} = P\{X \leq \log_2(y+1)\}$$

$$= F_X(\log_2(y+1)) = 2^{\log_2(y+1)} - 1 = y + 1 - 1 = y$$

קיבלנו שלמשתנה המקרי Y יש התפלגות אחידה על הקטע $[0,1]$, ולכן פונקציית הצפיפות שלו שווה ל-1 על קטע זה.