הפרד ומשול

פרק 7 ב-Kleinberg/Tardos

קונוולוציה
מרחק עריכה

כפל פולינומים

הקלט: שני פולינומים ממעלה n-1

$$p(x) = a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

הפלט: פולינום המכפלה

$$p(x) \cdot q(x) = c_{2n-2} x^{2n-2} + c_{2n-3} x^{2n-3} + \cdots + c_0$$

שימו לב:

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$$

הווקטור c הוא קונוולוציה של a ו-b.

סימון:

$$c = a * b$$

הדגמה

a = 2 1 3

b = 2 2 0

2 1 3

0 2 2

הדגמה

a = 2 1 3

b = 2 2 0

2 1 3

0 2 2

הדגמה

a = 2 1 3

b = 2 2 0

2 1 3

0 2 2

0

הדגמה

a = 2 1 3

b = 2 2 0

2 1 3

0 2 2

0

הדגמה

$a = 2\ 1\ 3$

$b = 2\ 2\ 0$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ & 0 & 2 & 2 \\ & 6 & 0 \end{array}$$

הדגמה

a = 2 1 3

b = 2 2 0

2	1	3
0	2	2
	6	0

הדגמה

a = 2 1 3

b = 2 2 0

2 1 3

0 2 2

8 6 0

הדגמה

a = 2 1 3

b = 2 2 0

2 1 3

0 2 2

8 6 0

הדגמה

a = 2 1 3

b = 2 2 0

  2 1 3

0 2 2

6 8 6 0

הדגמה

a = 2 1 3

b = 2 2 0

2 1 3

0 2 2

6 8 6 0

הדגמה

a = 2 1 3

b = 2 2 0

		2	1	3
0	**2**	**2**		
4	6	8	6	0

הדגמה

$a = 2\ 1\ 3$

$b = 2\ 2\ 0$

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ 3 \\ \mathbf{0\ 2\ 2} \\ 4\ 6\ 8\ 6\ 0 \end{array}$$

במימוש פשוט מספר פעולות החשבון הדרושות:

$O(n^2)$

האצת חישוב קונוולוציה

1. נחשב את ערכי p ו-q ב- 2n נקודות $x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}$.

2. קל לחשב את ערכי $p \cdot q$ באותן נקודות ע"י $O(n)$ פעולות חשבון:
$(p \cdot q)(x_i) = p(x_i) \cdot q(x_i)$

3. עכשיו אפשר לשחזר את $p \cdot q$ - יש לנו 2n שורשים של הפולינום $x - p \cdot q$ שהוא ממעלה $2n-2$.

שאלה: איך מבצעים את צעדים 1 ו-3 ביעילות?

האצת חישוב קונוולוציה

1. נחשב את ערכי p ו-q ב- 2n נקודות $x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}$.

2. קל לחשב את ערכי $p \cdot q$ באותן נקודות ע"י $O(n)$ פעולות חשבון:
$(p \cdot q)(x_i) = p(x_i) \cdot q(x_i)$

3. עכשיו אפשר לשחזר את $p \cdot q$ - יש לנו 2n שורשים של הפולינום $x - p \cdot q$ שהוא ממעלה 2n-2.

שאלה: איך מבצעים את צעדים 1 ו-3 ביעילות?

הרעיון הכללי: נבחר קבוצת נקודות מיוחדת, שעבורה קל לחשב את כל הערכים ולשחזר את התוצאה במהירות.

שורשי יחידה מרוכבים

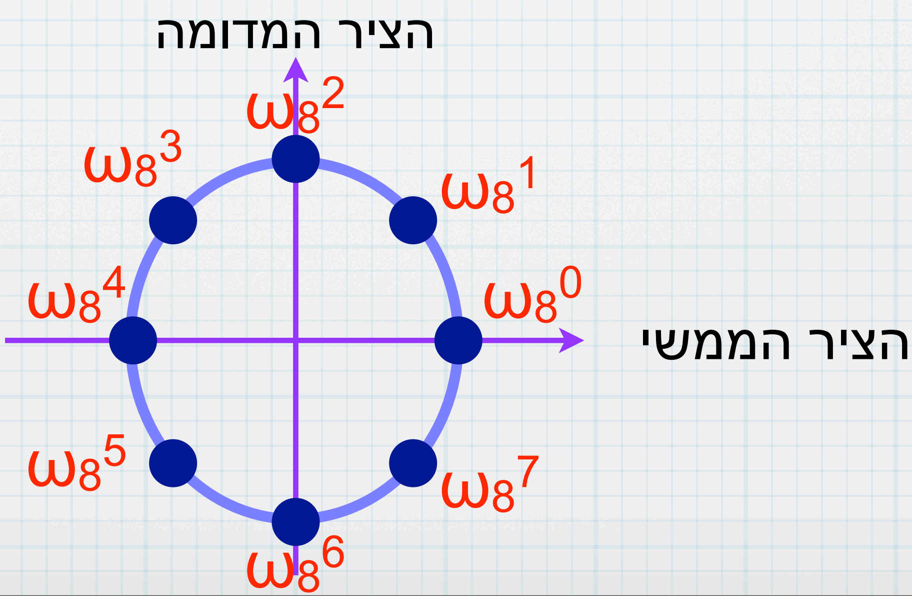
הגדרה: מספר מרוכב ω הוא שורש יחידה מסדר n אם מתקיים $\omega^n = 1$.

יש בדיוק n שורשי יחידה מסדר n. אלו המספרים $e^{2\pi ki/n}$ עבור $k=0,1,2,\ldots,n-1$.

שורש היחידה העיקרי מסדר n יסומן ב- $\omega_n = \omega_n^1 = e^{2\pi i/n}$.

כל שורשי היחידה הם $\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}$.

קבוצת השורשים תחת כפל היא חבורה איזומורפית ל- $(\mathbb{Z}_n,+)$.



תכונות של שורשי היחידה

1. אם n זוגי, אזי $(\omega_n^0)^2, (\omega_n^1)^2, (\omega_n^2)^2, \ldots, (\omega_n^{n-1})^2$ הם שורשי היחידה מסדר n/2 (יש רק n/2 מספרים שונים בסדרה).

2. הווקטורים $v^k = ((\omega_n^k)^0, (\omega_n^k)^1, (\omega_n^k)^2, \ldots, (\omega_n^k)^{n-1})$ עבור $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$ מהווים בסיס אורתוגונלי למרחב הווקטורי $\mathbb{C}^n$.

התמרת Fourier הדיסקרטית

הגדרה: הצגה של וקטור $a \in \mathbb{C}^n$ בבסיס $v^0, v^1, v^2, \ldots, v^{n-1}$
נקראת **התמרת Fourier** של a.

מקדמי Fourier הם ההטלות של a על אברי הבסיס:

$$Y_k(a) = a \cdot v^k = \sum a_i (\omega_n{}^k)^i$$

שימו לב: זו בדיוק הצבה של $\omega_n{}^k$ בפולינום

$$Y(a) = a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

חישוב התמרת Fourier הדיסקרטית

הנחה: n הוא חזקה של 2 (אחרת נוסיף אברי 0 ל-a).

נחלק את a ל-

$$a^0 = (a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{n-2})$$
$$a^1 = (a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{n-1})$$

נסמן

$$Y^0(x) = a_{n-2}\, x^{n/2-1} + a_{n-4}\, x^{n/2-2} + \cdots + a_2\, x + a_0$$
$$Y^1(x) = a_{n-1}\, x^{n/2-1} + a_{n-3}\, x^{n/2-2} + \cdots + a_3\, x + a_1$$

אזי

$$Y(x) = Y^0(x^2) + x\, Y^1(x^2)$$

כדי לחשב את

$$Y(\omega_n{}^0), Y(\omega_n{}^1), \ldots, Y(\omega_n{}^{n-1})$$

צריך לחשב את

$$Y^0((\omega_n{}^0)^2), Y^0((\omega_n{}^1)^2), \ldots, Y^0((\omega_n{}^{n-1})^2)$$
$$Y^1((\omega_n{}^0)^2), Y^1((\omega_n{}^1)^2), \ldots, Y^1((\omega_n{}^{n-1})^2)$$

אלו בדיוק מקדמי Fourier של a^0 , a^1 (רק n/2 ערכים שונים).

אלגוריתם FFT

```
FFT(a,n)
  if n = 1 then return a
  a^0 ← ( a_0 , a_2 , ... , a_{n-2} )
  a^1 ← ( a_1 , a_3 , ... , a_{n-1} )
  y^0 ← FFT(a^0,n/2)
  y^1 ← FFT(a^1,n/2)
  ω ← 1
  for k ← 0 to n/2 - 1 do
    y_k ← y_k^0 + ω y_k^1
    y_{k+n/2} ← y_k^0 - ω y_k^1
    ω ← ω · e^{2πi/n}
  end for
return y
```

שימושים נוספים:

- עיבוד אותות
- דחיסה (ADSL, JPEG)
- זיהוי תבניות

סיבוכיות

נסמן ב-$T(n)$ את זמן הריצה עבור $a \in \mathbb{C}^n$. אזי:

$T(n) = 2\,T(n/2) + O(n)$.

פתרון נוסחת הרקורסיה: $T(n) = O(n \log n)$.

חזרה לקונוולוציה

נתונים שני פולינומים p,q ממעלה n עם מקדמים a,b בהתאמה.

נסמן ב-c את מקדמי $p\cdot q$. כלומר, $c = a * b$

נתייחס לכל סדרות המקדמים a,b,c כאל וקטורים מממד $2n$.

משפט הקונוולוציה: לכל k מתקיים $Y_k(a * b) = Y_k(a) \cdot Y_k(b)$

$$a * b = FFT^{-1}(FFT(a) \odot FFT(b))$$

כפל אבר אבר

FFT^{-1}

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Y_0(c) \\ Y_1(c) \\ Y_2(c) \\ \vdots \\ Y_{2n-1}(c) \end{pmatrix}}_{\boxed{FFT(c)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_{2n} & \omega_{2n}^2 & \cdots & \omega_{2n}^{2n-1} \\ 1 & \omega_{2n}^2 & \omega_{2n}^4 & \cdots & \omega_{2n}^{2(2n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_{2n}^{2n-1} & \omega_{2n}^{2(2n-1)} & \cdots & \omega_{2n}^{(2n-1)^2} \end{pmatrix}}_{\boxed{V_{2n}}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{2n-1} \end{pmatrix}}_{\boxed{c}}$$

$c = V_{2n}^{-1} \cdot FFT(c)$

$V_{2n}^{-1}(j,k) = \omega_{2n}^{-jk} / 2n$

אלו מטריצות Vandermonde

החישוב דומה ל-FFT. הסיבוכיות הכוללת היא O(n log n).

מרחק עריכה

y \ x	ε	G	C	G	A	T	C
ε							
C							
G							
T							
T							
C							
A							

מרחק עריכה

y \ x	ε	G	C	G	A	T	C
ε	0	1	2	3	4	5	6
C	1						
G	2						
T	3						
T	4						
C	5						
A	6						

מרחק עריכה

y \ x	ε	G	C	G	A	T	C
ε	0	1	2	3	4	5	6
C	1	1	1	2	3	4	5
G	2	1	2	1	2	3	4
T	3	2	2	2	2	2	3
T	4	3	3	3	3	2	3
C	5	4	3	4	4	3	2
A	6	5	4	4	4	4	3

מרחק עריכה

y \ x	ε	G	C	G	A	T	C
ε	0	1	2	3	4	5	6
C	1	1	1	2	3	4	5
G	2	1	2	1	2	3	4
T	3	2	2	2	2	2	3
T	4	3	3	3	3	2	3
C	5	4	3	4	4	3	2
A	6	5	4	4	4	4	3

חיסכון בזיכרון

y x	ε	G	C	G	A	T	C	ε
ε								
C								
G								
T								
T								
C								
A								
ε								

חיסכון בזיכרון

y \ x	ε	G	C	G	A	T	C	ε
ε								
C								
G								
T	3	2	2	2	2	2	3	
T								
C								
A								
ε								

חיסכון בזיכרון

y ↓ x →	ε	G	C	G	A	T	C	ε
ε								
C								
G								
T	3	2	2	2	2	2	3	
T								
C								
A								
ε		6	5	4	3	2	1	0

חיסכון בזיכרון

y \ x	ε	G	C	G	A	T	C	ε
ε								
C								
G								
T	3	2	2	2	2	2	3	
T								
C								
A		5	4	3	2	2	1	1
ε								

חיסכון בזיכרון

y \ x	ε	G	C	G	A	T	C	ε
ε								
C								
G								
T	3	2	2	2	2	2	3	
T								
C		4	3	3	3	2	1	2
A								
ε								

חיסכון בזיכרון

y \ x	ε	G	C	G	A	T	C	ε
ε								
C								
G								
T	3	2	2	2	2	2	3	
T		4	4	3	2	1	2	3
C								
A								
ε								

חיסכון בזיכרון

y \ x	ε	G	C	G	A	T	C	ε
ε								
C								
G								
T	3	2	2	2	2	2	3	
T		4	4	3	2	1	2	3
C								
A								
ε								

חיסכון בזיכרון

y \ x	ε	G	C	G	A	T	C	ε
ε								
C								
G								
T	3	2	2	2	2	2	3	
T		4	4	3	2	1	2	3
C								
A								
ε								

סיבוכיות

נסמן ב-$T(m,n)$ את זמן הריצה עבור זוג מחרוזות באורך m ו-n בהתאמה. חישוב שתי השורות האמצעיות עולה $c \cdot mn$, עבור קבוע c כלשהו.

שתי הבעיות המתקבלות הן בגודל $m' \times n/2$ ו-$m-m' \times n/2$.

$$T(m,n) \leq c \cdot mn + T(m',n/2) + T(m-m',n/2) \leq c \cdot mn + c \cdot mn/2 + c \cdot mn/4 + \cdots = 2c \cdot mn = O(mn).$$

סיבוכיות המקום: $O(\min\{m,n\})$