תשובה 1

א. מהנתון, תהי $f:A-B\to B-A$ חד-חד-ערכית ועל.

בעזרת פילוג החיתוך לגבי האיחוד, $A=(A\cap B')\cup(A\cap B)$,

כלומר $A=(A-B)\cup(A\cap B)$, וזהו **איחוד זר** (איחוד של שתי קבוצות זרות).

בדומה, $B=(B-A)\cup(A\cap B)$.

נגדיר $g:A\to B$ כך:
$$g(a)=\begin{cases} f(a) & a\in A-B \\ a & a\in A\cap B \end{cases}$$

מהנתון לגבי f נקבל ש- g מעבירה את $A-B$ באופן **חד-חד-ערכי על** $B-A$,

ומכיוון ש- g פועלת כזהות על $A\cap B$, היא מעבירה את $A\cap B$ באופן חד-חד-ערכי על עצמו.

בהתחשב בכך ש- $B=(B-A)\cup(A\cap B)$, לא קשה להראות ש- g היא חד-חד-ערכית ועל B.

הוכחה של טענה כללית יותר, ממנה זה נובע, ראו בפרק 5, טענה 5.9 !

הראינו פונקציה **חד-חד-ערכית** מ- A **על** B , לכן הן שוות-עוצמה.

ב. כאמור, כללית $A=(A-B)\cup(A\cap B)$, וזהו איחוד זר,

וכן $B=(B-A)\cup(A\cap B)$ וזהו איחוד זר.

מכאן, אם A,B **סופיות**, ומתקיים $|A|=|B|$ אז:
$$|A-B|=|A|-|A\cap B|=|B|-|A\cap B|=|B-A|$$

ג. לדוגמא נקח $A=\mathbf{N}$, ו- B היא קבוצת הטבעיים הזוגיים (השלימו הבדיקה).

תשובה 2

א. בחוברת "אוסף תרגילים פתורים" קבוצה 3 שאלה 10ה', מראים כי קבוצת **הסדרות הסופיות** של טבעיים היא בת-מניה. בשאלה שלפנינו עוסקים לא בסדרות אלא בתת-קבוצות של $\mathbf{N}$. נתאים לכל קבוצה סופית של מספרים טבעיים - סדרה סופית: פשוט נסדר את אברי הקבוצה בסדר עולה. בכך הגדרנו פונקציה של הקבוצה K שבשאלה אל קבוצת הסדרות הסופיות של טבעיים. פונקציה זו אינה על (מדוע?) אך מובן שהיא חד-חד-ערכית. לפיכך $|K|\le\aleph_0$.

מצד שני, K היא אינסופית, מכיון שהיא מכילה את כל הקבוצות מהצורה $\{n\}$, לכל n טבעי.

מכאן לפי משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין $|K|=\aleph_0$ (למעשה אין כאן צורך במשפט הנ"ל, שהוא בגדר "תותח כבד". ניתן להראות בלעדיו, שקבוצה אינסופית המוכלת בקבוצה בת-מניה היא בת-מניה).

ב. הפונקציה $g: L \to K$ המתאימה לכל קבוצה את **המשלים שלה ב- $\mathbf{N}$** היא חח"ע ועל (מדוע?). לפיכך $|L|=|K|$, ולפי סעיף א' עוצמה זו היא $\aleph_0$.

תשובה 3

א. ניעזר בקבוצות K,L מהשאלה הקודמת.

הקבוצות K,L,M זרות זו לזו, ו- $K \cup L \cup M = P(\mathbf{N})$.

כעת, אילו M היתה בת-מניה, היינו מקבלים ש- $P(\mathbf{N})$ היא איחוד של 3 קבוצות זרות בנות-מניה. ע"י שימוש חוזר בשאלה 4.3ד בעמ' 119 בספר (איחוד שתי קבוצות זרות בנות-מניה הוא בר-מניה) היינו מקבלים כי $P(\mathbf{N})$ היא בת-מניה - בסתירה למשפט 5.25 , וכן בסתירה למשפט 5.6 (משפט קנטור). לכן M אינה בת-מניה.

ב. נסמן $B = K \cup L$. מהאמור בתחילת פתרון הסעיף הקודם, $M = P(\mathbf{N}) - B$.

בנוסף, B היא בת-מנייה, ו- $P(\mathbf{N})$ היא קבוצה אינסופית שאינה בת-מנייה.

הקבוצות $P(\mathbf{N})$, B מקיימות אפוא את תנאי משפט 5.13ב (עמ' 16 בחוברת "פרק 5") עבור הקבוצות A, B בהתאמה. לכן $|P(\mathbf{N}) - B| = |P(\mathbf{N})| = C$. כאמור $M = P(\mathbf{N}) - B$, כלומר $|M| = C$.

תשובה 4

א. תהיינה A_1, A_2 , B_1, B_2 קבוצות שעוצמותיהן בהתאמה k_1, k_2 , m_1, m_2.

נתון $k_1 \le k_2$, $m_1 \le m_2$.

כדי לקצר מעט את ההוכחה ניעזר בטריק השימושי הבא: **אנו חופשים לבחור כראות עינינו את הקבוצות המייצגות את העוצמות השונות, כל עוד הקבוצות שנבחר הן בעלות העוצמות הנדרשות.** מתוך הנתון, לפי שאלה 5.1א בחוברת "פרק 5", **קיימת** קבוצה חלקית של A_2 שעוצמתה שווה לעוצמת A_1 , **וקיימת** קבוצה חלקית של B_2 שעוצמתה שווה לעוצמת B_1.

לכן **ב.ה.כ. נניח** $A_1 \subseteq A_2$, $B_1 \subseteq B_2$ (!)

כעת מהגדרת כפל עוצמות $k_1 \cdot m_1 = |A_1 \times B_1|$, $k_2 \cdot m_2 = |A_2 \times B_2|$.

אבל מכיוון ש- $A_1 \subseteq A_2$, $B_1 \subseteq B_2$, מהגדרת מכפלה קרטזית נקבל $A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$.

לכן , בהסתמך על שאלה 5.1ב, $k_1 \cdot m_1 \le k_2 \cdot m_2$.

ב. מצד אחד, $\aleph_0 \le C$ ולכן בעזרת סעיף א, $\aleph_0 \cdot C \le C \cdot C = C$.

מצד שני $1 \le \aleph_0$ ולכן בדומה $C = 1 \cdot C \le \aleph_0 \cdot C$.

משני הכיוונים יחד, בעזרת קנטור-שרדר-ברנשטיין, נובע המבוקש.

ג. לפי משפט 5.26, $2^{\aleph_0} = C$. נציב זאת ונקבל

$$C^C = (2^{\aleph_0})^C = 2^{\aleph_0 \cdot C} = 2^C .$$

במעברים נעזרנו במשפט 5.27ג ובסעיף ב של שאלה זו.

איתי הראבן