

האוניברסיטה הפתוחה

20407

מבני נתונים
ומבוא לאלגוריתמים
חוברת הקורס סתיו 2018

כתב: ליאור קמה

אוקטובר 2017 – סמסטר סתיו – תשע"ח

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

א	אל הסטודנטים
ג	1. לוח זמנים ופעילויות
ה	2. תיאור המטלות
ה	2.1 מבנה המטלות
ה	2.2 חומר הלימוד הדרוש לפתרון המטלות
ו	2.3 ניקוד המטלות
ז	2.4 הנחיות לכתיבת אלגוריתמים
ז	2.5 הנחיות לכתיבת פרויקט הרצה
ח	3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס
1	ממ"ן 11
3	ממ"ן 12
5	ממ"ן 13
7	ממ"ן 14
11	ממ"ן 15
13	ממ"ן 16 – פרויקט מסכם

אל הסטודנטים,

אנו מברכים אתכם עם הצטרפותכם לקורס "מבני-נתונים ומבוא לאלגוריתמים" באוניברסיטה הפתוחה. על מנת לסייע לכם לעבור את הקורס בהצלחה, ברצוננו להפנות את תשומת לבכם למספר נקודות חשובות:

- נוכחות במפגשי ההנחיה אינה חובה. יחד עם זאת, מומלץ מאוד להגיע באופן סדיר למפגשי ההנחיה. המפגשים כוללים תרגול רב והשתתפות בהם תסייע לכם בפתרון המטלות. כמו כן, ניסיון העבר מלמד, כי קיים מתאם גבוה בין נוכחות סדירה במפגשי ההנחיה לבין הצלחה במבחן הסופי.
 - במהלך הקורס יש להגיש תרגילי בית. כדי להיות זכאי לגשת לבחינה, יש להגיש שלוש מתוך המטלות 11, 12, 13, 14, 15, ובנוסף לכך את מטלה 16, שהיא מטלת חובה. הכנת המטלות מהווה הכנה מצוינת לבחינה ולכן מומלץ להגיש כמה שיותר מהן. (כל מטלה נוספת שתוגש מעבר למינימום הנדרש תוכל רק לשפר את ציון המגן).
- יש להקפיד על הגשת המטלות במועד.

לקורס קיים אתר אינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים, אותם מפרסם מרכז ההוראה. בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו במערכת אופ"ל בכתובת: <http://opal.openu.ac.il>

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספרייה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מומלץ לעקוב אחרי ההודעות המתפרסמות בלוח ההודעות שבאתר. מאגר המשאבים שבאתר מתעדכן באופן שוטף במהלך הסמסטר, והוא מכיל פתרונות לשאלות מספר הלימוד, בחינות לדוגמה וכדומה.

צוות הקורס ישמח לעמוד לרשותכם בכל שאלה שתתעורר.

ניתן לפנות למנחים בשעות ההנחיה הטלפונית שלהם, או אל מרכז הקורס ליאור קמה ביום א' בשעות 10:00-12:00 בטלפון 09-7781270, או במייל lior.kamma@openu.ac.il פגישות יש לתאם מראש.

לתשומת לב הסטודנטים הלומדים בחו"ל:

למרות המרחק הפיסי הגדול, נשתדל לשמור אתכם על קשרים הדוקים ולעמוד לרשותכם ככל האפשר.

הפרטים החיוניים על הקורס נכללים בחוברת הקורס וכן באתר הקורס. מומלץ מאוד להשתמש באתר הקורס ובכל אמצעי העזר שבו וכמובן לפנות אלינו במידת הצורך.

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

בברכה,

ליאור קמה
מרכז ההוראה בקורס

1. לוח זמנים ופעילויות (20407/ 2018א)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
1	20.10.2017-17.10.2017	פרק א' (מדריך הלמידה) פרקים 1 – 2		
2	27.10.2017-22.10.2017	פרק ב' (מדריך הלמידה) פרק 3 (ספר הלימוד)	מפגש ראשון	
3	3.11.2017-29.10.2017	פרק ג' (מדריך הלמידה) פרק 4 (ספר הלימוד)		ממ"ן 11 29.10.2017
4	10.11.2017-5.11.2017	פרק ד' (מדריך הלמידה) פרק 6 (ספר הלימוד)	מפגש שני	
5	17.11.2017-12.11.2017	פרק ה' (מדריך הלמידה) פרק 7 (ספר הלימוד)		
6	24.11.2017-19.11.2017	פרקין ה', ו' פרקים 7, 9		ממ"ן 12 19.11.2017
7	1.12.2017-26.11.2017	פרק ו' (מדריך הלמידה) פרק 9 (ספר הלימוד)	מפגש שלישי	
8	8.12.2017-3.12.2017	פרק ז' (מדריך הלמידה) פרק 8 (ספר הלימוד)		

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
9	15.12.2017-10.12.2017 (ד-ו חנוכה)	פרק ח' (מדריך הלמידה) פרק 10 (ספר הלימוד)	מפגש רביעי	ממ"ן 13 10.12.2017
10	22.12.2017-17.12.2017 (א-ד חנוכה)	פרק ט' (מדריך הלמידה) פרק 11 (ספר הלימוד)		
11	29.12.2017-24.12.2017	פרק י' (מדריך הלמידה) פרק 12 (ספר הלימוד)	מפגש חמישי	
12	5.1.2018-31.12.2017	פרק י"א (מדריך הלמידה) פרק 13 (ספר הלימוד)		ממ"ן 14 31.12.2017
13	12.1.2018-7.1.2018	פרקים י"א, י"ב פרקים 13, 14	מפגש שישי	
14	19.1.2018-14.1.2018	פרק י"ב (מדריך הלמידה) פרק 14 (ספר הלימוד)		
15	29.1.2018-21.1.2018	חזרה	מפגש שביעי	ממ"ן 15 21.1.2018

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

ממ"ן 16 פרויקט מסכם- תאריך הגשה ב – 25.2.2018

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

2. תיאור המטלות

קראו היטב עמודים אלו לפני שתתחיל לענות על השאלות

חוברת זו מכילה חמש מטלות תיאורטיות ומטלה מעשית שניתן להגיש במהלך הקורס. **המטלה המעשית (ממ"ן 16) היא מטלת חובה.** מבין חמש המטלות הנותרות יש לפתור **שלוש לפחות**.

2.1 מבנה המטלות

מטלה תיאורטית (מטלות 11-15)

כל מטלה מורכבת מכמה שאלות. פתרון השאלות במטלה כזו אינו דורש הרצת תוכניות במחשב. את הפתרון של המטלות ניתן להקליד או לכתוב בכתב יד **בעט** על דף נייר, **בכתב ברור** ובצורה מסודרת. רצוי לכתוב ברווחים ולהשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. אם שאלה כלשהי בממ"ן אינה ברורה די הצורך, תוכלו להיעזר בקבוצת הדיון של הקורס, או ליצור קשר עם אחד המנחים או מרכז ההוראה (במייל או בשעת ההנחיה הטלפונית).

פרויקט הרצה (מטלה 16)

במטלה כזו עליכם לכתוב ולהריץ במחשב תוכנית בשפת C/C++ או Java. מובן שעל התוכנית לעבור הידור (קומפילציה) ולבצע את הנדרש ממנה ללא טעויות. עליכם לשלוח למנחה: 1. הדפסה של קובץ התוכנית
2. דוגמאות מייצגות של קלטים/פלטים אפשריים
3. קובץ התוכנית וקובץ הרצה של התוכנית.

הערה: מומלץ להתחיל לעבוד על הפרויקטים לפחות שבועיים לפני מועד ההגשה.

2.2 חומר הלימוד הדרוש לפתרון המטלות

מ ט ל ה	חומר הלימוד הנדרש לפתרונה (בספר הלימוד)
ממ"ן 11	פרקים 1,2,3
ממ"ן 12	פרקים 4,6,7
ממ"ן 13	פרקים 8,9
ממ"ן 14	פרקים 10,11,12
ממ"ן 15	פרקים 13,14

הערות:

- לצורך פתרון המטלה, יש להשתמש רק בחומר שנלמד עד למועד הגשת המטלה ולא בחומר הנמצא בפרקים מתקדמים יותר.
- בעת פתרון שאלות, ניתן להסתמך על תוצאות **מוכחות** מתוך ספר הלימוד ומדריך הלמידה של הקורס. במקרה זה יש לציין את המקור עליו מסתמכים (אין צורך במראה מקום מדויק).

2.3 ניקוד המטלות

משקל כל אחד מהממ"נים התיאורטיים 11-15 הוא 4 נקודות.

משקלו של ממ"ן 16 הוא 6 נקודות

כאמור, חובה להגיש את ממ"ן 16 ועוד שלושה ממ"נים תיאורטיים.

הכנת המטלות התיאורטיות חייבת להיעשות על-ידי כל סטודנט **בנפרד**. במקרה שתוגשנה שתי מטלות זהות, המטלות תיפסלנה ותוגש תלונה לוועדת המשמעת.

הכנת הפרויקט (ממ"ן 16) יכולה להיעשות בזוגות.

לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן תצליחו להשיב באופן חלקי בלבד.

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי. ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

2.4 הנחיות כלליות לכתיבה וניתוח של אלגוריתמים במטלות התיאורטיות

במרבית השאלות בממ"נים הרגילים יש לכתוב **אלגוריתם**. להלן מספר הנחיות לגבי אופן הכתיבה.

(1) **לפני** ההצגה המפורטת של האלגוריתם (בפסאודוקוד) יש להציג תיאור מילולי של הרעיון המרכזי באלגוריתם (תיאור High-Level) על התיאור להיות כתוב באופן רהוט וברור, ומטרתו לאפשר לקוראים לקבל תמונה ברורה של אופן פעולת האלגוריתם, גם ללא קריאת התיאור המפורט בפסאודוקוד.

(2) יש לכתוב את האלגוריתם בפסאודוקוד, בדומה לספר. מותר לשלב הוראות בעברית, במידה שהמימוש שלהן חד-משמעי וברור. (לדוגמה: ניתן לכתוב "בחר את האיבר הראשון ברשימה; אם הוא גדול מ-7 אז...").

(3) אסור **בשום אופן** לכתוב תוכניות בשפת תכנות במקום בפסאודוקוד.

(4) גם אם לא נדרשתם במפורש, יש להוכיח כי האלגוריתם מקיים את הדרוש בשאלה.

(א) יש **לנסח** תחילה באופן **פורמלי מדויק** את הטענות המרכזיות שאתם מעוניינים להוכיח. (למשל: "לכל ℓ . בשלב (איטרציה) ה- ℓ בהרצה, אורך המערך בו האלגוריתם מחפש את ערך הקלט אינו עולה על $n/2^\ell$ ")

(ב) עבור כל טענה שניסחתם, יש לכתוב הוכחה פורמלית ומדויקת. אם הטענה פשוטה מאוד, מספיק הסבר קצר ומשכנע.

(5) יש לנתח את סיבוכיות האלגוריתם (סיבוכיות זמן ריצה וסיבוכיות מקום).

(א) גם אם לא התבקשתם מפורשות, יש לנתח את זמן הריצה של האלגוריתם. את סיבוכיות המקום יש לנתח רק במקומות בהם התבקשתם באופן מפורש.

(ב) אם לא נאמר באופן מפורש אחרת, יש לנתח את סיבוכיות המקרה הגרוע ביותר (worst case analysis)

(ג) יש **לנסח** תחילה באופן **פורמלי מדויק** את הטענות המרכזיות שאתם מעוניינים להוכיח.

(ד) עבור כל טענה שניסחתם, יש לכתוב הוכחה פורמלית ומדויקת. אם הטענה פשוטה מאוד, מספיק הסבר קצר.

(ה) יש לנסות ולתכנן אלגוריתמים יעילים ככל האפשר.

2.5 הנחיות לכתיבת פרויקט הרצה

ההנחיות נחלקות לשני נושאים עיקריים:

1. כתיבת הקוד: תכנות פשוט וקריא, מודולריות, תכנות מלמעלה למטה.

2. תיעוד: תיעוד כללי, תיעוד בגוף התוכנית.

1. כתיבת הקוד

תכנות פשוט וקריא

לאחר קריאת התיעוד, על התכנית להיות מובנת גם למי שלא היה שותף לכתיבתה!

לכן יש להקפיד על הכללים הבאים:

- א. יש לתת למשתנים שמות משמעותיים.
- ב. אין להשתמש באותו משתנה למטרות שונות (יוצאים מן הכלל בעניין זה הם משתנים המשמשים כאינדקסים).
- ג. אם משתנה מקבל במהלך התכנית ערכים בתחום מסוים, יש להגדיר תחום זה.
- ד. כדאי להשתמש ב- `enumerated type` בעל משמעות בכל מקום שאפשר. למשל, בשפת C/C++, במקום: `int month[12]` נשתמש ב- `enum month = {jan, feb, ..., dec}`.
- ה. מומלץ להעביר פרמטרים בין הפונקציות השונות ומותר להשתמש במשתנים גלובליים במקרה הצורך.

מודולריות

את התוכנית יש לחלק לפונקציות בהתאם לכללים הבאים:

- א. אם קטע קוד או פעולה חוזרים על עצמם בשינויים קלים, יש לכתוב אותם פעם אחת כפונקציה.
- ב. מספר המשפטים בפונקציה צריך להיות מוגבל, כך שניתן לקרוא ולהבין את פעולתה בקלות.
- ג. יש להשתדל לרכז את פעולות הקלט/פלט בתוך פונקציות ספציפיות למטרות אלו.
- ד. הפונקציה הראשית צריכה להיות מורכבת אך ורק מקריאות לפונקציות.

תכנות מלמעלה למטה (Top-Down)

לאחר כתיבת האלגוריתם לפתרון הבעיה המוצגת בממ"ן, יש "לתרגם" את האלגוריתם לתוכנית מחשב.

רצוי לכתוב את התוכנית באופן הבא:

- שלב א - תכנון המבנה הכללי של התוכנית, וחלוקה לפונקציות עיקריות (מודולים).
- שלב ב - תכנון כל מודול וחלוקה לתת-מודולים. (יש להחליט בשלב זה אילו ערכים מועברים בין המודולים).
- שלב ג - כתיבת הקוד לתוכנית בסדר שבו היא תוכננה: מתחילים בפונקציה הראשית ומסיימים בפונקציות העזר.
- שלב ד - ניפוי שגיאות, בדיקת נכונות התוכנית באמצעות הרצתה על קלטים שונים, כתיבת התיעוד.

2. תיעוד

התיעוד צריך להיות מורכב משני חלקים :

1. תיעוד כללי :

- תיאור הבעיה והגישה הכללית של התוכנית לפתרונה.
- תיאור מבני הנתונים העיקריים שבהם התוכנית משתמשת.
- תיאור כללי של הפונקציות המרכיבות את התוכנית והקשרים ביניהן (מי קורא למי וכו').

2. תיעוד בגוף התכנית :

לכל פונקציה יש להוסיף מספר שורות, המסבירות באופן כללי מה מבצעת השגרה ומהו תפקיד המשתנים המוגדרים בה. כמו כן יש להוסיף הסברים נוספים לפי הצורך.

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

- א. הגשת ממו"ן 16, וקבלת ציון 60 לכל הפחות במטלה.
- ב. הגשת שלושה ממו"נים לפחות מתוך חמשת הממו"נים הרגילים.
- ג. ציון של 60 לפחות בבחינת הגמר.
- ד. הציון המשוקלל של המטלות והבחינה נדרש להיות 60 לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20407 - מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1,2,3 בספר הלימוד

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: 29.10.2017

סמסטר: א2018

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שאלה 1 (25 נקודות)

בחברת הפיננסים "חוכמה בדיעבד" מעוניינים באלגוריתם שיקבע לאחר גמר יום העסקים, מה היתה נקודת הזמן הטובה ביותר לקנות מנייה נתונה, ומה היתה נקודת הזמן הטובה ביותר למכור אותה.

על האלגוריתם לקבל מערך $A[1, \dots, n]$ באורך n , המייצג את מחירה של המנייה ב n זמנים שונים במהלך יום המסחר. מטרת האלגוריתם למצוא אינדקסים i, j כך ש $i < j$ וגם $A[j] - A[i]$ מקסימלי.

(10 נק') א. כתבו אלגוריתם המבצע את הדרוש, וזמן ריצתו במקרה הגרוע ביותר הוא $\Theta(n^2)$.

(10 נק') ב. כתבו אלגוריתם המבצע את הדרוש, וזמן ריצתו במקרה הגרוע ביותר הוא $\Theta(n)$.

(5 נק') ג. כתבו אלגוריתם המבצע את הדרוש, ומבצע מעבר אחד על מערך הקלט. במלים אחרות, באלגוריתם יש לולאה אחת בלבד.

שאלה 2 (30 נקודות)

עבור על זוג של פונקציות $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ קבעו את נכונות כל אחת מהטענות הבאות

(a) $f = O(g)$ (b) $f = \Omega(g)$ (c) $f = \Theta(g)$ (d) $f = \omega(g)$ (e) $f = o(g)$

הוכיחו את קביעתכם.

א. $f(n) = n$, $g(n) = 0.001n^2$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

ב. $f(n) = n \log^{100} n$, $g(n) = n^{1.001}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

ג. $f(n) = n^{\frac{1}{\log n}}$, $g(n) = 50$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

ד. $f(n) = \begin{cases} n^{1000} & n < 10^{10} \\ \log^7 n & n \geq 10^{10} \end{cases}$, $g(n) = \begin{cases} \log^2 n & n < 10^{10} \\ n^{100} & n \geq 10^{10} \end{cases}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

שאלה 3 (30 נקודות)

התבוננו באלגוריתם sieve הנתון בשגרה הבאה.

sieve(n)

1. let $A[1, 2, \dots, n]$ be an array of size n such that $A[1] = 0$ and $A[j] = 1$ for all $2 \leq j \leq n$.
2. $index, mult \leftarrow 2$
3. for $index = 2$ to n
4. if $A[index] = 1$ then
5. for $mult = 2$ to $\lfloor \frac{n}{index} \rfloor$
6. $A[index \cdot mult] = 0$
7. return candidate

(15 נק') א. הוכיחו כי בסיום הריצה, המערך A מקיים כי לכל $1 \leq j \leq n$, $A[j] = 1$ אם ורק אם j ראשוני.

(5 נק') ב. הוכיחו כי זמן הריצה של האלגוריתם במקרה הגרוע הוא $O(n^2)$.

(10 נק') ג. הוכיחו כי זמן הריצה של האלגוריתם במקרה הגרוע הוא $O(n \log n)$.

שאלה 4 (15 נקודות)

תהאנה $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ פונקציות עולות (כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $f(n+1) > f(n)$ וגם $g(n+1) > g(n)$). נגדיר פונקציה $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ על ידי $h(n) = \max\{f(n), g(n)\}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו או הפריכו: $h = O(f)$ או $h = O(g)$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4,6,7 בספר הלימוד.

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: 19.11.2017

סמסטר: 2018א

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שאלה 1 (25 נקודות)

מִצְאָו חסמים אסימפטוטיים הדוקים עבור פונקציות המקיימות את נוסחאות הנסיגה הבאות.

- $T(n) = 9T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log n$
- $T(n) = 12T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$
- $T(n) = 25T\left(\frac{n}{5}\right) + n^2 \log^2 n$
- $T(n) = T(n-1) + \frac{n}{\log n}$
- $T(n) = T(\sqrt{n}) + 5n$

שאלה 2 (30 נקודות)

מערך $A[1, \dots, n]$ ייקרא d -ממויין (עבור $d \leq n$) אם כל מפתח במערך נמצא במרחק לא יותר מ d ממקומו במערך A לו היה ממויין. נרצה לתכנן אלגוריתם המקבל מערך d -ממויין באורך n וממין אותו.

(10 נק') א. כתבו אלגוריתם שזמן הריצה שלו במקרה הגרוע ביותר הוא $\Theta(nd)$.

(20 נק') ב. כתבו אלגוריתם שזמן הריצה שלו במקרה הגרוע ביותר הוא $\Theta(d + (n-d) \log d)$.

שאלה 3 (30 נקודות)

בשאלה זו עליכם לתכנן אלגוריתם המקבל ערימת מינימום בת n איברים, ומספר שלם $k \leq n$, ומחזיר את k האיברים הקטנים ביותר בערימה בסדר ממויין. סיבוכיות המקום של האלגוריתם היא $\Theta(k)$.

(10 נק') א. פתבו אלגוריתם שזמן ריצתו במקרה הגרוע ביותר הוא $\Theta(k^2)$.

(20 נק') ב. פתבו אלגוריתם שזמן ריצתו במקרה הגרוע ביותר הוא $\Theta(k \log k)$.

הערה: שימו לב כי החסמים עבור זמן ומקום אינם תלויים כלל ב n .

שאלה 4 (15 נקודות)

פתבו אלגוריתם המקבל כקלט מערך בגודל n ומסדר את האיברים לפי שארית החלוקה ב 10. על האלגוריתם לרוץ בזמן $\Theta(n)$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 8,9 בספר הלימוד

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: 10.12.2017

סמסטר: 2018א

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שאלה 1 (15 נקודות)

הקבירו כיצד ניתן לממש את אלגוריתם SELECT בסיבוכיות מקום $\Theta(1)$.

שאלה 2 (30 נקודות)

פתבו אלגוריתם המקבל כקלט מצביעים ל k מערכים $(k = \Theta(n))$ A_1, A_2, \dots, A_k באורכים $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$ בהתאמה, המקיימים (1) כל אברי המערכים הם שלמים בין 1 ל n ; וגם (2) $\sum_{1 \leq j \leq k} \ell_j = \Theta(n)$ וממין את המערכים. זמן הריצה של האלגוריתם במקרה הגרוע ביותר הוא $\Theta(n)$.

הערה 1: שימו לב כי האלגוריתם לא אמור להחזיר מערך אחד ממוין, שהוא מיזוג המערכים הנתונים, אלא k מערכים ממויינים, כאשר כל אחד מכיל את האיברים המקוריים.

הערה 2: שימו לב כי הרצה של מיון מנייה על כל אחד מהמערכים בנפרד לא עונה על התנאים, כיוון שזמן הריצה הוא $\Theta(n^2)$.

שאלה 3 (30 נקודות)

נתון מערך $A[1, \dots, n]$ ומספר $1 \leq k \leq n$. פתבו אלגוריתם המוצא את k האיברים ב A הקרובים ביותר לחציון. כלומר, אותם k איברים במערך שההפרש בינם לבין האיבר החציוני בערך מוחלט הוא הקטן ביותר. על האלגוריתם לרוץ בזמן $\Theta(n)$ ובסיבוכיות מקום $\Theta(n)$.

שאלה 4 (25 נקודות)

כתבו אלגוריתם המקבל מערך בגודל n , עליו מובטח שפרט ל \sqrt{n} איברים, כל האיברים הם שלמים בתחום שבין 10 ל $10n$, וממין את המערך. על האלגוריתם לרוץ בזמן $\Theta(n)$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 10,11,12 בספר הלימוד

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: 31.12.2017

סמסטר: 2018א

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שאלה 1 (30 נקודות)

ידוע שאחת הבעיות הנוצרות כאשר מממשים מחסנית על ידי שימוש במערך היא מצב הגלישה הנגרם ע"י ניסיון להכניס איבר חדש למערך מלא.

נבחן את האלגוריתם הבא, שנקרא *אלגוריתם ההכפלה*, לפתרון בעיית הגלישה.

בכל פעם שהמערך מתמלא, האלגוריתם מבצע את הפעולות הבאות.

1. מייצר מערך חדש, בגודל כפול מהמערך הנוכחי.
2. מעתיק את כל אברי המחסנית מהמערך הישן למערך החדש (עם שמירת סדר האיברים: בסיס אל בסיס, ראש אל ראש).

(5 נק') א. הראו כי זמן הריצה של פעולת הכנסה של איבר למחסנית בגודל n במקרה הגרוע ביותר הוא $\Theta(n)$.

(10 נק') ב. הראו כי זמן הריצה הכולל עבור ביצוע סדרה של n הכנסות למחסנית ריקה הוא $\Theta(n)$. האם אין כאן סתירה לזמן הריצה שחישבנו בסעיף א'?

(15 נק') ג. עדינו את אלגוריתם ההכפלה כך שכל פעולת הכנסה תתבצע בזמן קבוע במקרה הגרוע ביותר.

שאלה 2 (30 נקודות)

בחברת הפיננסים "חכמה בדיעבד" שוב מעוניינים לשכור את שירותיכם.

הפעם מעוניינים בחברה באלגוריתם, המקבל בסיום יום המסחר ערכי מנייה נתונה במהלך אותו יום, ובונה מערך של נקודות זמן ביום המסחר שבו בכל נקודת זמן מופיעה נקודת הזמן הראשונה בה משתלם למכור את המנייה, בהנתן שנקנתה בנקודת זמן זו.

באופן פורמלי, האלגוריתם מקבל מערך $A[1, \dots, n]$ באורך n , המייצג את מחירה של המנייה ב n זמנים שונים במהלך יום המסחר.

על האלגוריתם לבנות מערך חדש $B[1, \dots, n]$, גם הוא באורך n כך שלכל $1 \leq j \leq n$ שווה לאינדקס הקטן ביותר $i < j$ המקיים $A[j] < A[i]$ (אם אין כזה, אז $B[j] = n + 1$), ופירוש הדבר שאם המנייה נקנתה בזמן j , לא ניתן למכור אותה ברווח ביום המסחר הנוכחי.
 (10 נק') א. פתבו אלגוריתם המבצע את הדרוש, וזמן ריצתו במקרה הגרוע ביותר הוא $\Theta(n^2)$.
 (20 נק') ב. פתבו אלגוריתם המבצע את הדרוש, וזמן ריצתו במקרה הגרוע ביותר הוא $\Theta(n)$.

שאלה 3 (30 נקודות)

בתרגיל זה נתכנן אלגוריתם לבדיקת מספר השלבים הדרושים לשמועה להתפשט בין קבוצה של אנשים. הקלט לבעיה הוא מטריצה, בה כל תא מייצג אדם בקבוצה. האנשים מתחלקים לשלוש קבוצות. אלה שאינם מתעניינים בהעברת שמועה, אלה המתעניינים בשמועה וטרם שמעו אותה, ואלה המתעניינים בשמועה, שמעו אותה ומעוניינים להפיץ אותה הלאה. אלה האחרונים יפיצו את השמועה לאנשים המקורבים אליהם.

באופן פורמלי הקלט לבעיה הוא מטריצה $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ בגודל $n \times n$ המקיימת כי לכל $a_{ij} \in \{0, 1, 2\}$, $1 \leq i, j \leq n$.

1. אם $a_{ij} = 0$ פירוש הדבר שהאדם בתא ij אינו מעוניין לקחת חלק בהעברת השמועה.
2. אם $a_{ij} = 1$ פירוש הדבר שהאדם בתא ij יודע מה השמועה ומעוניין להעביר אותה הלאה.
3. אם $a_{ij} = 2$ פירוש הדבר שהאדם בתא ij מתעניין בשמועה וטרם שמע אותה.

בכל שלב בתהליך, אדם ij שיודע את השמועה יעביר את השמועה לאנשים בתאים הסמוכים אליו מלמעלה, מלמטה ומהצדדים המעוניינים בשמועה. אנו מתעניינים במספר השלבים עד שכל האנשים שמעוניינים בשמועה ידעו אותה. נתבונן בדוגמה הבאה. מטריצת הקלט היא

$$a_{32} \text{ והתא } a_{12}, a_{14} \text{ בשלב הראשון, התא } a_{13} \text{ מספר את השמועה לתאים } a_{12}, a_{14} \text{ והתא } a_{32}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מספר את השמועה לתאים a_{22}, a_{33} . לכן בסיום השלב הראשון המטריצה תראה כך

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ , ותהליך } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ באופן דומה בסיום השלב השני המטריצה תראה כך}$$

העברת השמועה הסתיים.

כתבו אלגוריתם המקבל את המטריצה כקלט ומחזיר את מספר השלבים הנדרשים לצורך העברת

השמועה. אם לא ניתן להעביר את השמועה לכל מי שמעוניין בה, למשל במטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

האלגוריתם צריך לדווח על כך. על האלגוריתם לרוץ בזמן $\Theta(n^2)$.

שאלה 4 (10 נקודות)

יהי $m \geq 2$, ותהא $h: U \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ פונקציית גיבוב המקיימת את הנחת גיבוב אחיד פשוט

(עמוד 191 בספר הלימוד). נסמן ב X את מספר התאים הריקים בטבלה לאחר הכנסה של m

איברים. הראו כי $E[X] \geq m/4$.

רמז: הגדירו משתנים מציינים מתאימים, והיעזרו בעובדה כי הסדרה $\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m$ עולה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 13,14 בספר הלימוד

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: 21.1.2018

סמסטר: א2018

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

כתבו אלגוריתם המקבל כקלט רשימה מקושרת ממויינת ובונה עץ אדום שחור מהמפתחות שברשימה. על האלגוריתם לרוץ בזמן לינארי באורך הקלט.

שאלה 2 (20 נקודות)

תכננו מבנה נתונים S שבאמצעותו ניתן לממש את כל אחת מהפעולות הבאות בסיבוכיות הזמן הנדרשת. N מציין את מספר האיברים במבנה, ו n מציין את מספר האיברים השונים במבנה. אם מעדכנים מבנה נתונים שנלמד בקורס, יש לציין רק מה העדכונים שבצעתם במבנה.

$init(S, A[1, \dots, N])$ – מקבל כקלט מערך ובו N איברים ובונה את המבנה S . זמן הריצה $\Theta(N \log n)$.

$insert(S, x)$ – מכניס את המפתח x למבנה. זמן הריצה $\Theta(\log n)$.

$freq(S, x)$ – מחזיר את מספר הפעמים שהמפתח x מופיע במבנה (0 אם x אינו מופיע במבנה). זמן הריצה $\Theta(\log n)$.

$mostFreq(S)$ – מחזיר את המפתח בעל השכיחות הגבוהה ביותר במבנה. זמן הריצה $\Theta(1)$.

שאלה 3 (30 נקודות)

נתונים שני עצי חיפוש בינאריים. העץ T_1 ובו n_1 צמתים וגובהו h_1 והעץ T_2 ובו n_2 צמתים וגובהו h_2 .

בשאלה זו תתכננו אלגוריתם המקבל מצביעים לשני העצים ובונה עץ אדום שחור המכיל את צמתי שני העצים. זמן הריצה של האלגוריתם הוא $\Theta(\max(n_1, n_2))$.

10 נק') א. כתבו אלגוריתם שסיבוכיות המקום שלו היא $\Theta(\max(n_1, n_2))$.

20 נק') ב. כתבו אלגוריתם שסיבוכיות המקום שלו היא $\Theta(\max(h_1, h_2))$.

הערה: ניתן להניח שכל המפתחות בשני העצים שונים זה מזה.

שאלה 4 (30 נקודות)

תכננו מבנה נתונים S שבאמצעותו ניתן לממש את כל אחת מהפעולות הבאות בסיבוכיות זמן

ריצה של $\Theta(\log n)$, כאשר n מציין את מספר האיברים במבנה.

אם מעדכנים מבנה נתונים שנלמד בקורס, יש לציין רק מה העדכונים שבצעתם במבנה.

$insert(S, x)$ – מכניס את המפתח x למבנה.

$find(S, x)$ – בודק האם המפתח x נמצא במבנה, ומחזיר מצביע לאיבר שמפתחו x במקרה

שהתשובה היא כן.

$decrement(S, x, \sigma)$ – מוסיף ערך שלילי $\sigma < 0$ לכל אברי המבנה S שהמפתח שלהם קטן מ x .

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

פרויקט מסכם

הקורס: 20407 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

מספר השאלות: 1

משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: 2018

מועד אחרון להגשה: 25.2.2018

קיימות שתי אפשרויות להגשת המטלות:

- שליחת המטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת המטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות המנחה"

בפרויקט זה נתכנן אלגוריתם מקוון (*Online*) מוגבל מקום עבור הבעיה הבאה.

מציאת החציון

קלט: מערך של מספרים באורך n .

פלט: הערך החציוני במערך.

אלגוריתמים מקוונים. המודל של אלגוריתמים מקוונים מדמה מצב בו אין לנו מידע על כל הקלט מראש. לדוגמה, ב"בעיית המועמדים", המוצגת בפרק 5.1 בספר הלימוד על האלגוריתם לקבל בכל רגע נתון החלטה על זהות המועמד הטוב ביותר עד כה. אלגוריתם מקוון מקבל את הקלט בחלקים, ולא כיחידה אחת. בכל שלב האלגוריתם מקבל פיסה חדשה של קלט, ומאבד גישה לקלט מהשלבים הקודמים. אחת הדרכים לדמות אלגוריתם כזה היא לתכנן אלגוריתם העובר על הקלט פעם אחת בדיוק (*One-Pass*). כך, למשל, אלגוריתם *Hire-Assistant* בעמוד 77 בספר מדמה (*Emulates*) אלגוריתם מקוון ל"בעיית המועמדים". מכיוון שאלגוריתם מקוון אינו יודע את "העתיד", בכל שלב בריצת האלגוריתם הוא אמור להיות מסוגל לתת תשובה על מה שראה עד כה. אלגוריתם *Hire-Assistant* שבעמוד 77 מחזיק בכל רגע נתון במשתנה *best* את המועמד הטוב ביותר שבחן עד כה.

תכנון האלגוריתם. האלגוריתם שנתכנן מקבל כקלט מצביע למערך $A[1, \dots, n]$ ושלוש נקודות

בדיקה $n_1 < n_2 < n_3 < n$.

על האלגוריתם לעבור על המערך במעבר אחד ולהדפיס את הערך החציוני עד לנקודות הבדיקה

n_1, n_2, n_3 במערך.

בכל רגע נתון על האלגוריתם להיות מסוגל לשלוח את הערך החציוני בזמן קבוע.

לשם כך עליכם לתכנן מבנה נתונים, התומך בפעולות הבאות.
 $insert(x)$ – הכנסת מפתח x . סיבוכיות זמן הריצה $\Theta(\log n)$.
 $printMedian()$ – הדפסת הערך החציוני מבין הערכים שנבחנו עד כה. סיבוכיות זמן הריצה $\Theta(1)$.

הריצו את האלגוריתם שתכנתם על שלושה מערכים A, B, C באורכים 200,400,800 בהתאמה.
מלאו את המערכים בעזרת פונקציית ספרייה המיועדת ליצירת מספרים אקראיים; כל מערך יכול
איברים בתחום 0..1023.

עבור כל מערך כקלט, הפעילו את האלגוריתם שכתבתם עם הערכים $k = 10, 50, 100$ ועם
נקודות בדיקה $n_1 = \frac{n}{4}, n_2 = \frac{n}{2}, n_3 = \frac{3n}{4}$.