מבנה הבחינה: בבחינה **שש** שאלות. עליכם לענות על **חמש** מהן.

שאלה 1

לפי ההגדרה של מכונת טיורינג שלמדנו, כאשר מגיעים למצב המקבל q_{accept} או למצב הדוחה q_{reject}, המכונה עוצרת. כלומר, פונקצית המעברים איננה מוגדרת על מצבים אלה.
נניח שנשנה את ההגדרה של פונקצית המעברים כך שכאשר מגיעים למצב המקבל או למצב הדוחה, לא בהכרח עוצרים. ייתכן שעל חלק מן הסמלים של אלפבית הסרט Γ יש המשך.
המכונה **מקבלת** מילה w רק אם במהלך החישוב של המכונה על w מגיעים למצב המקבל, ועל הסמל שנקרא כעת בסרט אין המשך מן המצב המקבל.
המכונה **לא מקבלת** מילה w, אם במהלך החישוב של המכונה על w מגיעים למצב הדוחה, ועל הסמל שנקרא כעת בסרט אין המשך מן המצב הדוחה, או אם המכונה אף פעם לא עוצרת.
האם למכונה שפועלת לפי ההגדרה החדשה **יש אותו הכוח** כמו למכונה רגילה?
אם עניתם שכן, הראו כיצד כל אחת מן המכונות יכולה לחקות את פעולתה של המכונה האחרת.
אם עניתם שלא, תנו דוגמה לשפה שאחת המכונות יכולה לזהות, והשנייה איננה יכולה לזהות.

שאלה 2

ביחס לכל שפה שלהלן, קִבעו האם אפשר להוכיח שהיא לא כריעה **בעזרת משפט Rice**. אם קבעתם שכן, כתבו את ההוכחה. אם קבעתם שלא, **הסבירו היטב** למה לא.

א. B = {<M> | M is a TM and M accepts every word w within 1,000 steps}
(B היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג שמקבלות כל מילה w בתוך 1,000 צעדים).

ב. $DECIDABLE_{TM}$ = {<M> | M is a TM and $L(M)$ is a decidable language}
(זוהי שפת התיאורים של מכונות טיורינג שהשפה שהן מזהות היא שפה כריעה).

שאלה 3

מספר טבעי n נקרא **משוכלל** (perfect number), אם הוא שווה לסכום מחלקיו הקטנים ממנו. למשל, 6 הוא משוכלל, כי 1+2+3=6. גם 28 הוא מספר משוכלל.

הוכיחו שהשפה הבאה **שייכת ל-NP**: {<n> | n is a perfect natural number}

הדרכה: היעזרו בידיעה הבאה: אם הפירוק של n לגורמים ראשוניים הוא $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$, $k \geq 2$, אז סכום המחלקים של n, כולל n עצמו, הוא

$$(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{m_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{m_2})\cdots(1+p_k+p_k^2+\cdots+p_k^{m_k})$$

שאלה 4

בעיית קיומו של מסלול המילטון בגרף מכוון G (*EHAMPATH*) היא הבעיה הבאה:

הקלט: גרף מכוון $G = (V, E)$

השאלה: האם יש ב-G מסלול המילטון (מסלול שמכיל כל צומת בגרף פעם אחת ויחידה)?

הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של *EHAMPATH* ל- *HAMPATH*.

$HAMPATH = \{\langle G, s, t\rangle \mid G \text{ is a directed graph with a Hamiltonian path from } s \text{ to } t\}$)

$EHAMPATH = \{\langle G\rangle \mid G \text{ is a directed graph that contains a Hamiltonian path}\}$

שאלה 5

האם המחלקה L סגורה לפעולת השרשור (concatenation)? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 6

בספר הלימוד (בעמוד 394) מוצע אלגוריתם A לבעיית *MIN-VERTEX-COVER*.

כזכור, הוכח שאלגוריתם זה הוא בעל יחס קירוב ≤ 2.

הוכיחו שיחס הקירוב 2 הוא **הדוק** ביחס לאלגוריתם A (כלומר, יחס הקירוב ≤ 2):

הראו שלכל n טבעי גדול מ-0, יש גרף לא מכוון $G = (V, E)$ כך שמתקיים:

- $|V|=2n$ (בגרף G יש $2n$ קדקודים);
- יש תת-קבוצה U של V ($U \subseteq V$) המהווה כיסוי קדקודים מינימלי ו- $|U|=n$ (יש בגרף כיסוי קדקודים מינימלי שגודלו n);
- האלגוריתם A ימצא כיסוי שגודלו $2n$.