שאלה 1 (25 נקודות)

יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.

(12 נק׳) א. הוכיחו : $t < -\ln(1-p)$, $M_X(t) = \dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$.

(5נק׳) ב. הוכיחו : $E\left[X\right] = \dfrac{1}{p}$.

(8 נק׳) ג. הוכיחו : $Var\left(X\right) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

פתרון:

א. יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.

[לפי הטענה : $E[g(X)] = \sum_x g(x)p(x)$]

$$M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{ti} p(1-p)^{i-1}$$

$$= pe^t \sum_{i=1}^{\infty} [(1-p)e^t]^{i-1}$$

[חישוב טור הנדסי שמנתו קטנה מ-1] $t < -\ln(1-p)$,

$$= pe^t \sum_{i=0}^{\infty} [(1-p)e^t]^i = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

הטור האחרון מתכנס, רק אם מנתו קטנה מ-1. כלומר, רק אם : $0 < (1-p)e^t < 1$

פתרון אי-השוויון האחרון מוביל לתנאי על t שמופיע בחישוב הפונקציה יוצרת המומנטים.

ב. נגזור את פונקציית יוצרת המומנטים :

$$\frac{pe^t}{(1-qe^t)^2} = \frac{pe^t(1-qe^t) + pe^tqe^t}{(1-qe^t)^2} \overset{q=1-p}{\uparrow\!=} M_X'(t).$$

כעת ניצור את המומנט הראשון :

$$\frac{1}{p} = \frac{p}{p^2} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{pe^0}{(1-qe^0)^2} = M_X'(0) = E\left[X\right].$$

ג. נגזור פעם נוספת :

$$M''_X(t) \overset{q=1-p}{\uparrow\!=} \frac{pe^t(1-qe^t)^2 + pe^t 2qe^t(1-qe^t)}{(1-qe^t)^4} = \frac{pe^t(1+qe^t)}{(1-qe^t)^3}$$

ניצור את המומנט השני :

$$E\left[X^2\right] = M''_X(0) = \frac{pe^0(1+qe^0)}{(1-qe^0)^3} = \frac{p(1+q)}{(1-q)^3} = \frac{p(1+1-p)}{p^3} = \frac{(2-p)}{p^2}$$

נציב בנוסחת השונות ונקבל :

$$Var(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = \frac{(2-p)}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

<u>שאלה 2 (25 נקודות)</u>

נתון משתנה מקרי X המתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה :

$$f_X(x)=\begin{cases}0 & x<2\\ ax-b & 2\le x<4\\ 0 & 4\le x\end{cases}$$

<u>נתון ש</u> $a>0$ ו $b>0$.

(5 נקי) א. מה צריכים לקיים הפרמטרים a ו- b כדי שפונקציית הצפיפות תהיה חוקית?

(5 נקי) ב. חשבו את $P(X\ge 2.5)$, שימו לב שהתשובה יכולה להכיל את הפרמטרים a ו- b.

(15 נקי) ג. ידוע ש $E[X]=3.2$.

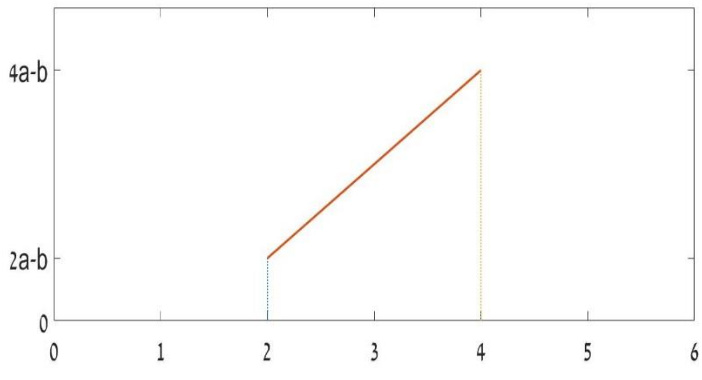
1. מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .
2. חשבו את $E\left[\sqrt{X}\right]$.
3. דגמו באופן מקרי 100 פעמים את המשתנה המקרי X .

   מה בקרוב תהיה ההתפלגות של $\sum_{i=1}^{100} X_i$?

   במידה וההתפלגות מיוחדת , רשמו את הפרמטרים שלה.

<u>פתרון</u> :

א. נשרטט את פונקציית הצפיפות :



כיוון שסך השטח מתחת לפונקציית הצפיפות שווה ל-1, נקבל ששטח הטרפז שווה ל-1 ולכן :

$$\frac{\left((2a-b)+(4a-b)\right)\cdot 2}{2}=1$$

כלומר קיבלנו : $\boxed{6a-2b=1}$.

בנוסף , פונקציית צפיפות היא אי- שלילית . לכן $2a-b\ge 0$.

ב. ההסתברות הדרושה שווה לשטח הטרפז מימין ל 2.5, ולכן :

$$P\left(X\geq 2.5\right)=\frac{\left(2.5a-b+4a-b\right)\cdot 1.5}{2}=0.75\left(6.5a-2b\right)=\boxed{4.875a-1.5b}$$

ג.

1. נחשב את התוחלת של המשתנה ונשתמש בנתון :

$$E\left[X\right]=\int_2^4\left(ax-b\right)xdx=\int_2^4\left(ax^2-bx\right)dx=\left[\frac{ax^3}{3}-\frac{bx^2}{2}\right]_2^4=$$

$$\frac{64}{3}a-8b-\frac{8a}{3}+2b=\frac{56a}{3}-6b=3.2$$

לפי סעיף א : $6a-2b=1$.

פתרון שתי המשוואות נותן : $b=\boxed{0.4}\quad a=\boxed{0.3}$

2. $$E\left[\sqrt{X}\right]=\int_2^4\sqrt{x}\cdot f(x)dx=\int_2^4\sqrt{x}\cdot(0.3x-0.4)dx=\left[\frac{0.3x^{2.5}}{2.5}-\frac{0.4x^{1.5}}{1.5}\right]_2^4=\boxed{1.782}$$

3. לפי משפט הגבול המרכזי סכום 100 התצפיות שנדגמו מקרית מתפלג בקירוב נורמלית.

ראשית, נחשב את השונות של X :

$$Var\left(X\right)=E\left[X^2\right]-3.2^2=\int_2^4 x^2\cdot f(x)-3.2^2=\int_2^4 x^2\cdot(0.3x-0.4)-3.2^2=$$

$$\left[\frac{0.3x^4}{4}-\frac{0.4x^3}{3}\right]_2^4-3.2^2=10.533-3.2^2=0.293$$

נחשב את התוחלת והשונות של סכום המשתנים המקריים :

$$E\left[\sum_{i=1}^{100}X_i\right]=100\cdot 3.2=320\qquad Var(\sum_{i=1}^{100}X_i)=100\cdot 0.293=29.3$$

$\sum_{i=1}^{100}X_i$ מתפלג בקירוב נורמלית עם תוחלת 320 ושונות 29.3 .

<u>שאלה 3 (25 נקודות)</u>

במסלול 'נינג'ה ישראל' ישנם 4 מכשולים. מתמודד שמנסה לעבור את המסלול מנסה לעבור את המכשולים בזה אחר זה , עד למכשול הראשון שבו הוא נכשל. אם מתמודד נכשל בשלב כלשהו, הוא איננו יכול לגשת לשלב הבא. כלומר, הוא מנסה לעבור את המכשול הראשון, אם הוא מצליח אותו הוא מנסה לעבור את המכשול השני, אם הוא מצליח לעבור אותו הוא מנסה את המכשול השלישי וכך הלאה. לאחר המכשול הרביעי בכל מקרה נגמר המסלול.

שני מתמודדים : יפתח ואלכס מנסים לעבור את המסלול.

כל אחד מהמתמודדים מצליח כל אחד מהמכשולים בסיכוי 0.6 באופן בלתי-תלוי במתמודד האחר.

נסמן ב :

X – מספר המתמודדים מתוך השניים שהגיעו למכשול השלישי.

Y – מספר המכשול המתקדם ביותר אליו יפתח ניגש.

למשל, אם :

- יפתח סיים את המסלול, אלכס הגיע למכשול השני ונכשל בו אז $X=1, Y=4$.
- יפתח הגיע למכשול השני ונכשל בו, אלכס נכשל במכשול הראשון, אז $X=0, Y=2$.

(12נק') א. מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של (X,Y).

(5 נק') ב. אם יפתח נכשל במכשול השלישי , מה תהיה התוחלת של X ?

(8 נק') ג. חשבו את $COV(2X+3, 3X+2Y+5)$.

<u>פתרון :</u>

א. ראשית, נמצא את ההתפלגויות השוליות.

הסיכוי של מתמודד להגיע למכשול השלישי הוא $0.6^2=0.36$. כיוון שהמתמודדים בלתי-תלויים אחד בשני $X \sim B(2, 0.36)$.

מכאן נקבל :

$$P(X=0)=0.4096 \quad P(X=1)=0.4608 \quad P(X=2)=0.1296$$

ההתפלגות השולית של Y :

$$P(Y=1)=0.4 \quad P(Y=2)=0.6\cdot 0.4=0.24$$
$$P(Y=3)=0.6^2\cdot 0.4=0.144 \quad P(Y=4)=0.6^3=0.216$$

נמלא את ההסתברויות השוליות ואת ההסתברויות המשותפות שהינן 0 .

		X			P_Y
		0	1	2	
Y	1			0	0.4
	2			0	0.24
	3	0			0.144
	4	0			0.216
P_X		0.4096	0.4608	0.1296	

נחשב הסתברויות המשותפות הבאות :

המאורע $X=2, Y=4$ - יפתח הגיע למכשול הרביעי, כלומר הצליח את שלושת הראשונים בהסתברות 0.6^3. אלכס הגיע למכשול השלישי, כלומר הצליח את שני הראשונים בהסתברות 0.6^2 ולכן :

$$P(X=4, Y=2)=0.6^3\cdot 0.6^2=0.07776$$

המאורע $X=0, Y=1$ - יפתח הגיע ונכשל במכשול הראשון בהסתברות 0.4 . אלכס לא הגיע למכשול השלישי, כלומר נכשל באחד משני הראשונים בהסתברות $0.4+0.6\cdot 0.4$. לכן :

$$P(X=0, Y=1)=0.4(0.4+0.6\cdot 0.4)=0.256$$

את שאר ההסתברויות ניתן לחשב בעזרת השלמה להסתברויות השוליות.

		X			P_Y
		0	1	2	
Y	1	0.256	0.144	0	0.4
	2	0.1536	0.0864	0	0.24
	3	0	0.09216	0.05184	0.144
	4	0	0.13824	0.07776	0.216
P_X		0.4096	0.4608	0.1296	

ב. אם יפתח נכשל במכשול השלישי אז נתון ש $Y=3$ ומבקשים את $E[X\,|\,Y=3]$.

$$P\{X=1\,|\,Y=3\}=\frac{P\{X=1\cap Y=3\}}{P\{Y=3\}}=\frac{0.09216}{0.144}=0.64$$

$$\Rightarrow P\{X=2\,|\,Y=3\}=1-0.64=0.36\Rightarrow$$

$$E[X\,|\,Y=3]=1\cdot 0.64+2\cdot 0.36=\boxed{1.36}$$

ג. נפשט את הביטוי על סמך התכונות של השונות המשותפת:

$$COV(2X+3,3X+2Y+5)=COV(2X,3X+2Y)=6V(X)+4COV(X,Y)$$

נחשב את השונות המשותפת:

לפי השוליות:

$$E[X]=2\cdot 0.36=0.72$$
$$E[Y]=1\cdot 0.4+2\cdot 0.24+3\cdot 0.144+4\cdot 0.216=2.176$$

מהטבלה:

$$\begin{aligned}E[X\cdot Y]&=1\cdot 1\cdot 0.144+1\cdot 2\cdot 0.0864+1\cdot 3\cdot 0.09216+1\cdot 4\cdot 0.13824\\&+2\cdot 3\cdot 0.05184+2\cdot 4\cdot 0.07776=2.07936\end{aligned}$$

ולבסוף:

$$COV(X,Y)=0.51264-0.72\cdot 2.176=0.51264$$

לפי נוסחת השונות של ההתפלגות הבינומית:

$$Var(X)=2\cdot 0.36\cdot 0.64=0.4608$$

נציב ונקבל:

$$COV(2X+3,3X+2Y+5)=6\cdot 0.4608+4\cdot 0.51264=\boxed{4.81536}$$

שאלה 4 (25 נקודות)

מספר תאונות הדרכים בכביש 90 מתפלג פואסונית עם קצב של 2 תאונות בשבוע . מספר תאונות הדרכים בכביש 4 מתפלג פואסונית עם קצב של תאונה אחת בשבוע. אין תלות בין מספר תאונות הדרכים בכביש 90 למספר תאונות הדרכים בכביש 4 בשבוע.

(8 נק׳) א. נסמן ב- X את מספר תאונות הדרכים בכביש 4 בשבוע כלשהו. מצאו את $E\left[|X-3|\right]$.

(8 נק׳) ב. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר השבועות בשנה (הניחו שבשנה 52 שבועות) בהם אין תאונות דרכים בכביש 90?

(9 נק׳) ג. כל תאונת דרכים בכביש 90 היא תאונת דרכים קשה בהסתברות של 0.2. מה ההסתברות שבחודש פברואר (בחודש זה 4 שבועות בדיוק) יהיו בכביש 90 בדיוק 5 תאונות דרכים שאחת מהן תאונת דרכים קשה?

א.

$$E\left[|X-3|\right]=\sum_{i=0}^{\infty}|i-3|\cdot\frac{e^{-1}\cdot 1^i}{i!}=\sum_{i=0}^{2}(3-i)\cdot\frac{e^{-1}\cdot 1^i}{i!}+\sum_{i=3}^{\infty}(i-3)\cdot\frac{e^{-1}\cdot 1^i}{i!}=$$

$$3e^{-1}+2e^{-1}+\frac{1}{2}e^{-1}+\sum_{i=0}^{\infty}(i-3)\cdot\frac{e^{-1}\cdot 1^i}{i!}-(-3e^{-1}-2e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-1})=$$

$$6e^{-1}+4e^{-1}+e^{-1}+\sum_{i=0}^{\infty}(i-3)\cdot\frac{e^{-1}\cdot 1^i}{i!}=$$

$$\frac{11}{e}+E\left[X-3\right]=\frac{11}{e}+E\left[X\right]-3=\frac{11}{e}+1-3=\boxed{\frac{11}{e}-2}$$

ב.

נסמן ב W את מספר תאונות הדרכים בשבוע כלשהו בכביש 90. נחשב את הסיכוי שבשבוע כלשהו אין תאונות דרכים בכביש 90 : $P\{W=0\}=\frac{e^{-2}\cdot 2^0}{0!}=\frac{1}{e^2}$

לפי התכונות של ההתפלגות הפואסונית אין תלות בין השבועות השונים מבחינת מספר תאונות הדרכים בכל שבוע . נגדיר את R להיות מספר השבועות בשנה בהם אין תאונות בכביש 90 . משתנה זה מתפלג בינומית עם $n=52$ ו- $p=\frac{1}{e^2}$. לכן, $Var(R)=52\cdot\frac{1}{e^2}\cdot(1-\frac{1}{e^2})=\boxed{6.09}$ $E\left[R\right]=\frac{52}{e^2}=\boxed{7.04}$.

ג.

לפי תכונות ההתפלגות הפואסונית מספר תאונות הדרכים בכביש 90 במשך 4 שבועות מתפלג פואסונית עם קצב של $2\cdot 4=8$. מספר התאונות הקשות במשך 4 שבועות מתפלג פואסונית עם קצב של $8\cdot 0.2=1.6$, מספר התאונות הלא קשות במשך 4 שבועות אינו תלוי במספר התאונות הקשות ומתפלג פואסונית עם קצב של $8-1.6=6.4$. נסמן ב Y מספר התאונות בחודש פברואר בכביש 90. נסמן ב Y_1 את מספר התאונות הקשות בחודש פברואר בכביש 90 ו נסמן ב Y_2 את מספר התאונות הלא קשות בחודש פברואר בכביש 90.

כעת נענה על השאלה :

$$P\{Y=5\cap Y_1=1\}=P\{Y_2=4\cap Y_1=1\}=P\{Y_2=4\}\cdot P\{Y_1=1\}=$$

$$\frac{e^{-6.4}\cdot 6.4^4}{4!}\cdot\frac{e^{-1.6}\cdot 1.6^1}{1!}=\boxed{0.0375}$$

שאלה 5 (25 נקודות)

28 מתמודדים הגיעו לגמר של 'נינג'ה ישראלי' וחולקו באקראי ל-7 מקבצים שכל אחד מהם כולל בדיוק 4 מתמודדים.

מבין 28 המתמודדים ישנם 6 טפסנים .

<u>מקבץ טוב</u> הוא מקבץ שמכיל לפחות 2 טפסנים.

נגדיר את X - מספר המקבצים הטובים מתוך 7 המקבצים של הגמר.

(5 נק') א. יהי X_i אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם המקבץ ה- i הוא טוב , $1 \le i \le 7$.

חשבו את $E[X_i]$.

(3 נק') ב. חשבו את $E[X]$.

(17 נק') ג. חשבו את $Var(X)$.

<u>פתרון:</u>

א.

$$1 \le i \le 7 \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{group i is a good group} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i \in \{1,\ldots,7\} \quad E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{\binom{6}{4} + \binom{6}{3}\binom{22}{1} + \binom{6}{2}\binom{22}{2}}{\binom{28}{4}} = \boxed{\frac{112}{585}}$$

ואפשר גם

$$i \in \{1,\ldots,7\} \quad E(X_i) = P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) =$$

$$= 1 - \frac{\binom{22}{4} + \binom{22}{3}\binom{6}{1}}{\binom{28}{4}} = \frac{112}{585}$$

ב.

$$E(X) = 7 \cdot E(X_i) = 7 \cdot \frac{112}{585} = \boxed{1\frac{199}{585}}$$

ג. שוניות האינדיקטורים:

$$i \in \{1,\dots,7\} \quad V\left(X_i\right)=P\left(X_i=1\right)\left(1-P\left(X_i=1\right)\right)=\frac{112}{585}\cdot\frac{473}{585}=\frac{52976}{342225}$$

כדי לחשב את ההסתברות $P\left(X_i=1, X_j=1\right)$ נפריד למקרים לפי מספר הטפסנים במקבץ i:

- במקבץ ה-i יש 4 טפסנים $\binom{6}{4}$ אפשרויות. במקרה זה במקבץ ה-j חייבים להיות 2 טפסנים ו-2 לא-טפסנים, ולכך $\binom{22}{2}\binom{2}{2}$ אפשרויות.
- במקבץ ה-i יש 3 טפסנים ו-1 לא-טפסן $\binom{22}{1}\binom{6}{3}$ אפשרויות. במקרה זה במקבץ ה-j יכולים להיות 3 טפסנים ו-1 לא-טפסן $\binom{21}{1}\binom{3}{3}$ אפשרויות, או 2 טפסנים ו-2 לא-טפסנים $\binom{21}{2}\binom{3}{2}$ אפשרויות.
- במקבץ ה-i יש 2 טפסנים ו-2 לא טפסנים - $\binom{22}{2}\binom{6}{2}$ אפשרויות. במקרה זה במקבץ ה-j יכולים להיות 4 טפסנים $\binom{4}{4}$ אפשרויות, או 3 טפסנים ו-1 לא-טפסן $\binom{20}{1}\binom{4}{3}$ או 2 טפסנים ו-2 לא-טפסנים $\binom{20}{2}\binom{4}{2}$.

נסכם:

$$P\left(X_i=1, X_j=1\right)=\frac{\binom{6}{4}\left(\binom{2}{2}\binom{22}{2}\right)+\binom{6}{3}\binom{22}{1}\left(\binom{3}{3}\binom{21}{1}+\binom{3}{2}\binom{21}{2}\right)}{\binom{28}{4}\binom{24}{4}}+$$

$$\frac{\binom{6}{2}\binom{22}{2}\left(\binom{4}{4}+\binom{4}{3}\binom{20}{1}+\binom{4}{2}\binom{20}{2}\right)}{\binom{28}{4}\binom{24}{4}}=\frac{1957}{94185}$$

דרך אחרת:

$$P\left(X_i=1, X_j=1\right)=1-P\left(X_i=0 \cup X_j=0\right)=$$
$$=1-\left[P\left(X_i=0\right)+P\left(X_j=0\right)-P\left(X_i=0, X_j=0\right)\right]$$

לפי סעיף א:

$$P\left(X_i=0\right)=1-P\left(X_i=1\right)=1-\frac{112}{585}=\frac{473}{585}$$

ובאופן דומה

$$P\left(X_j=0\right)=\frac{473}{585}$$

כדי לחשב את $P\left(X_i=0, X_j=0\right)$ נפריד שוב למקרים, לפי מספר הטפסנים שהיו במקבץ ה-i .

- במקבץ ה-i אין טפסנים ו-4 לא-טפסנים $\binom{22}{4}$ אפשרויות. במקבץ ה-j אין טפסנים ו-4 לא-טפסנים $\binom{18}{4}$ אפשרויות או 1 טפסן ו-3 לא טפסנים $\binom{6}{1}\binom{18}{3}$ אפשרויות.
- במקבץ ה-i 1 טפסן ו-3 לא-טפסנים $\binom{6}{1}\binom{22}{3}$ אפשרויות. במקבץ ה-j אין טפסנים ו-4 לא-טפסנים $\binom{19}{4}$ אפשרויות או 1 טפסן ו-3 לא טפסנים $\binom{5}{1}\binom{19}{3}$ אפשרויות.

נסכם :

$$P\left(X_i=0, X_j=0\right)=\frac{\binom{22}{4}\left(\binom{18}{4}+\binom{6}{1}\binom{18}{3}\right)}{\binom{28}{4}\binom{24}{4}}+\frac{+\binom{6}{1}\binom{22}{3}\left(\binom{19}{4}+\binom{5}{1}\binom{19}{3}\right)}{\binom{28}{4}\binom{24}{4}}=\frac{60078}{94185}$$

ושוב :

$$P\left(X_i=1, X_j=1\right)=1-\left[2\cdot\frac{473}{585}-\frac{60078}{94185}\right]=\frac{1957}{94185}$$

השונות המשותפת :

$$COV\left(X_i, X_j\right)=\frac{1957}{94185}-\frac{112}{585}\cdot\frac{112}{585}=-0.01588$$

לבסוף, נחשב את השונות :

$$V\left(X\right)=7\cdot\frac{52976}{342225}+2\binom{7}{2}\left(-0.01588\right)=\boxed{0.4168}$$