

חליפות וצירופים עם חזרות

הגדרה של חליפה עם חזרות: יהי ישנם n עצמים שונים חליפה עם חזרות מסוג (n, k) היא k עצמים מתוכם מסודרים בשורה אבל מותר להשתמש באותו עצם כמה פעמים.

הגדרה: $(n)_k$ - מספר חליפות עם חזרות מסוג (n, k) .

n אפשרויות לשים את העצם הראשון, n אפשרויות לעצם השני וכך הלאה. כלומר:

$$n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_k = (n)_k$$

תרגיל: ישנם 10 סוגים של כדורים. כמה אפשרויות יש כדי לבחור מתוכם 13 ולסדר אותם בשורה?

פתרון: $(10)_{13} = 10^{13}$

הגדרה של צירוף עם חזרות: יהי ישנם n עצמים שונים צירוף עם חזרות מסוג (n, k) הוא k עצמים מתוכם אבל מותר להשתמש באותו עצם כמה פעמים..

הגדרה: $D(n, k)$ - מספר צירופים עם חזרות מסוג (n, k) .

כדי לחשב $D(n, k)$ נשים לב שבעיות הבאות הן שקולות:

1. למצוא כמות אפשרויות להוציא k עצמים מתוך n עם חזרות (וללא חשיבות לסדר).
2. למצוא כמות אפשרויות לפזר k כדורים זהים ב n כדים שונים.
3. למצוא כמות פתרונות שלמות אי-שליליות של משוואה $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$.

הסבר:

נסביר מדוע בעיה ראשונה שקולה ל בעיה שלישית:

בבחירת k עצמים מתוך n ללא חשיבות לסדר יש חשיבות רק לכמויות. ז"א כמה פעמים בחרנו כל אחד מעצמים.

נסמן כ x_1 היא כתות פעמים שבחרנו עצם 1.

נסמן כ x_2 היא כתות פעמים שבחרנו עצם 2.

נסמן כ x_3 היא כתות פעמים שבחרנו עצם 3.

...

נסמן כ x_n היא כתות פעמים שבחרנו עצם n .

מפני שס"כ יש לבחור בדיוק k עצמים אז $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$.

התשובה לכל אחת מהשאלות האלה היא $D(n, k)$. אבל הכי פשוט לפתור את הבעיה השנייה.

כי לפזר k כדורים זהים ב n כדים שונים זה אותו דבר שלסדר k כדורים זהים ו $n-1$ מחיצות בשורה.

נסביר מדוע בעיה שנייה שקולה ל בעיה שלישית:

בפיזור k כדורים ב n כדים, מפני שכדורים הם זהים, יש חשיבות רק לכמויות. ז"א כמה כדורים יש בכל אחד מהכדים.

נסמן כ x_1 היא כתות כדורים בכד 1.

נסמן כ x_2 היא כתות כדורים בכד 2.

נסמן כ x_3 היא כתות כדורים בכד 3.

...

נסמן כ x_n היא כתות כדורים בכד n .

מפני שס"כ יש לפזר בדיוק k כדורים אז $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$.

לכן כל שלוש בעיות הן שקולות.

התשובה לכל אחת מהשאלות האלה היא $D(n, k)$. אבל הכי פשוט לפתור את הבעיה השנייה.

כי לפזר k כדורים זהים ב n כדים שונים זה אותו דבר שלסדר k כדורים זהים ו $n-1$ מחיצות בשורה.

כדורים שלפני מחיצה ראשונה זה כיילו כדורים מהכד הראשון.
כדורים שבין מחיצה ראשונה ומחיצה שנייה זה כיילו כדורים מהכד השני.
כדורים שבין מחיצה שנייה ומחיצה שלישית זה כיילו כדורים מהכד השלישי.

...

וסיף סוף כדורים שהחרי מחיצה $n-1$ זה כיילו כדורים מהכד n .

ז"א $D(n, k)$ הוא כמות סדרות בעלות אורך $n+k-1$ מורכבות מ- k כדורים ו- $n-1$ מחיצות.

אבל כדי לבנות סדרה כזאת מספיק לבחור באיזה מקומות מתוך $n+k-1$ יהיו כדורים (ולשאר יהיו מחיצות). לכן תשובה היא

$$D(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$$

בטבלה הבאה נסכם כמה אפשרויות יש כדי לבחור k עצמים מתוך n במקרים שונים:

	יש חשיבות לסדר	אין חשיבות לסדר
בלי חזרות	$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
עם חזרות	$(n)_k = n^k$	$D(n, k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$

כמות אפשרויות לפזר k כדורים זהים ב n כדים שונים.
 כמות פתרונות שלמות אי-שליליות של משוואה $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$.