תשובה 1

א. $f(0,3) = f(2,0) = 6$, לכן f אינה חד-חד-ערכית.

נוכיח ש- f היא על.

אם n הוא שלם זוגי, $n = 2k$ כאשר k שלם. במקרה כזה $f(0,k) = n$.

אם n הוא שלם אי-זוגי, $n = 2k + 1$ כאשר k שלם.

במקרה כזה $f(1, k - 1) = 3 + 2k - 2 = n$.

מצאנו מקור תחת f לכל מספר שלם, לכן f היא **על** $\mathbf{Z}$.

הוכחה קצרה יותר ראו בשיחה על חיפוש חתולים, בפורום של מטלה זו.

ב.

$g(g(X)) = (X \oplus \mathbf{Z}) \oplus \mathbf{Z}$

לפי שאלה 1.22ב (אסוציאטיביות ההפרש הסימטרי) בעמ' 27 בספר

$= X \oplus (\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z})$

לפי טענה נוספת באותו סעיף שם (הפרש סימטרי של קבוצה עם עצמה)

$= X \oplus \varnothing$

ולפי טענה נוספת שם (הפרש סימטרי עם קבוצה ריקה)

$= X$

ג. נוכיח כללית שעבור קבוצה כלשהי A, ופונקציה $g : A \to A$ המקיימת :

לכל $x \in A$, $g(g(x)) = x$

היא חד-חד-ערכית ועל.

הוכחת חד-חד-ערכיות :

יהיו $x, y \in A$, המקיימים $g(x) = g(y)$.

מכיוון ש- g היא פונקציה, ניתן להפעיל g בשני האגפים : $g(g(x)) = g(g(y))$.

משמע $x = y$.

הוכחת על:

יהי $x \in A$. מכיוון ש- $g(g(x)) = x$, הרי קיים איבר ב- A (האיבר $g(x)$)

שתמונתו היא x.

תשובה 2

א. איברים של $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ שיש להם תמונות שונות תחת f נמצאים במחלקות שקילות שונות.
בשאלה 1א למעלה ראינו ש- f היא **על** $\mathbf{Z}$.
משמע לכל $n\in\mathbf{Z}$ קיים מקור תחת f ב- $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.
$\mathbf{Z}$ היא אינסופית, משמע קבוצת התמונות המתקבלות היא אינסופית, לכן מספר המקורות, השייכים כאמור למחלקות שקילות שונות, הוא אינסופי. לכן מספר מחלקות השקילות הוא אינסופי.

ב. באותה מחלקה עם $(0,0)$ נמצאים הזוגות $(m,n)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ המקיימים $3m+2n=0$.
יהי $m=2k$ שלם זוגי כלשהו. אז $n=-3k$ גם הוא שלם, ומתקיים $3m+2n=0$.
לכל ערך שלם של k נקבל כך פתרון מהצורה $(m,n)=(2k,-3k)$. פתרונות אלה שונים כולם זה מזה. לכן מספר הפתרונות אינסופי, כלומר מחלקת השקילות היא בת אינסוף איברים (אגב, לא קשה לראות שכל הפתרונות, כלומר כל אברי מחלקת השקילות הם מהצורה הנ"ל).

ג. עלינו להראות: $3(a+m)+2(b+n)=3a+2b$.
זה נובע מכך שלפי הנתון לגבי (m,n) , $3m+2n=0$.

ד. יהי (a,b) איבר של אחת ממחלקות השקילות, כלומר איבר כלשהו של $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. לפי סעיפים ב, ג , באותה מחלקה עם (a,b) נמצאים כל הזוגות מהצורה $(a+2k\ ,\ b-3k)$, לכל k שלם. זו קבוצה אינסופית של זוגות סדורים. לכן מחלקת השקילות היא אינסופית.

תשובה 3

יחס מעל A הוא קבוצה של זוגות סדורים של אברי A. לכן כל יחס מעל A, ובפרט כל יחס שקילות מעל A , **חלקי** לקבוצה $A\times A$. קל לבדוק ש- $A\times A$ עצמה היא יחס שקילות (זהו יחס השקילות שבו כל אברי A נמצאים באותה מחלקה). לכן $A\times A$ היא האיבר הגדול ביותר ב- K לגבי הכלה.

מצד שני, יחס שקילות הוא בפרט רפלקסיבי, כלומר **מכיל** את I_A .
היחס I_A אף הוא יחס שקילות מעל A (זהו יחס השקילות שבו כל איבר של A נמצא במחלקה בפני עצמו). מכיון שכל יחס שקילות מעל A מכיל אותו, I_A הוא האיבר הקטן ביותר ב- K לגבי הכלה.

ג. נפתור את (i) + (ii) + (iii)
נתבונן ביחס מעל $\mathbf{N}$ שמכיל זוג סדור אחד בלבד, כגון $\{(2,17)\}$.

זה ודאי יחס סופי מעל $\mathbf{N}$. הוא מכיל איבר אחד בלבד, לכן אין אף קבוצה חלקית לו ששייכת ל- M (היחס הריק אינו ב- M). לכן $\{(2,17)\}$ הוא **איבר מינימלי** ב- M.

מצד שני, יש כמובן עוד יחסים רבים מעל $\mathbf{N}$ שמכילים זוג סדור אחד בלבד, ולפי אותו שיקול כל אחד מהם הוא איבר מינימלי ב- M.

לפי שאלה 3.21 בעמ' 93 בספר, אם יש בקבוצה סדורה-חלקית יותר מאיבר מינימלי אחד, אז אין בקבוצה איבר קטן ביותר.

הראינו אפוא שיש ב- M איברים מינימליים רבים, ואין איבר קטן ביותר.

נראה כעת שב- M אין אף איבר מקסימלי. נניח בשלילה ש- X הוא מקסימלי ב- M.

X הוא יחס סופי מעל $\mathbf{N}$, כלומר קבוצה סופית שחלקית ל- $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$.

$\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ היא קבוצה אינסופית, לכן קיימים איברים ב- $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ שאינם ב- X. ניקח איבר אחד כזה ונצרף אותו ל- X. איחוד של קבוצה בת איבר אחד עם קבוצה סופית נותן קבוצה סופית. לכן הקבוצה שקיבלנו שייכת ל- M. היא מכילה-ממש את X, בסתירה להיות X איבר מקסימלי ב- M. לפיכך לא קיים X כזה.

הראינו שאין ב- M איבר מקסימלי . לכן ודאי שאין ב- M איבר גדול ביותר.

תשובה 4

בדיקה: נציב $n=0$: $3^0+7^0-2=1+1-2=0$, ואפס מתחלק ב- 8.

מעבר: נניח שהטענה נכונה עבור n , כלומר נניח $3^n+7^n-2=8k$ כאשר $k\in\mathbf{N}$,

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$. נפתח:

$$3^{n+1}+7^{n+1}-2 \;=\; 3\cdot 3^n+7\cdot 7^n-2$$

$$=\; 3\cdot(3^n+7^n-2)\;+4\cdot 7^n+4$$

$$=\; 3\cdot 8k\;+4\cdot(7^n+1)$$

במעבר האחרון נעזרנו בהנחת האינדוקציה. קיבלנו סכום של שני ביטויים. המחובר $3\cdot 8k$ כמובן מתחלק ב- 8 . בביטוי השני, 7^n+1 הוא מספר זוגי, לכן $4\cdot(7^n+1)$ מתחלק ב- 8.

לכן הסכום $3\cdot 8k\;+4\cdot(7^n+1)$ מתחלק גם הוא ב- 8.

הראינו שהטענה נכונה עבור $n+1$.

לפי עקרון האינדוקציה, משני השלבים נובע שהטענה נכונה לכל n טבעי.

איתי הראבן