31547840 4
מספר התלמיד הנבחן
רשום את כל תשע הספרות

ש N101519152
ת.ז: 315478404 מספר סידורי: 10

האוניברסיטה הפתוחה

כ"ט בשבט תש"ף

24
בפברואר 2020

מס' שאלון - 460

סמסטר 2020א

מס' מועד 85

20417 / 4

שאלון בחינת גמר

20417 - אלגוריתמים

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה 6 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה חמש שאלות.

מתוכן יש לענות על ארבע שאלות.

25 נקודות לכל שאלה.

לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).

על שאלות שמסומנות בכוכב - יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה) ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות.

לשאלון זה מצורפים דפי עזר.

חומר עזר:
כל חומר עזר אסור בשימוש.

בהצלחה !!!

החזירו
למשגיח את השאלון
וכל עזר אחר שקיבלתם בתוך מחברת התשובות

460 שאלון 85.57.202 M4

אלגוריתמים 20417 – מבחן 24.2.2020

הנחיות: ענו על 4 מתוך 5 שאלות. לכל שאלה 25 נקודות. לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה.
על שאלות שמסומנות בכוכב – יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה), ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).
חומר עזר: אסור. דף נוסחאות מצ״ב. בהצלחה!

<u>שאלה 1* – תכנון דינאמי (בניית מגדל יציב מתיבות)</u> (25 נק׳).

נתונה רשימה של n תיבות מלבניות: לכל $1 \le i \le n$ נתון האורך $\ell(i)$, הרוחב $w(i)$ והגובה $h(i)$ של התיבה מספר i. כל הרוחבים שונים, כל האורכים שונים וכל הגבהים שונים. ברצוננו לבנות מגדל בגובה מרבי באמצעות הנחה של תיבות זו מעל זו. המגדל נחשב יציב כאשר תיבה j מונחת רק מעל תיבה i שמקיימת $w(j) < w(i)$ וגם $\ell(j) < \ell(i)$. (כלומר כשמימדי הבסיס של התיבה התחתונה גדולים מאלו של העליונה). הציגו אלגוריתם תכנון-דינאמי לבניית מגדל יציב בגובה מרבי, לרבות ניסוח של נוסחת נסיגה מתאימה. האלגוריתם נדרש לרוץ בזמן $\Theta(n^2)$. (בהקשר זה פעולות חיבור, חיסור והשוואה של מימדים $\ell(i)$, $w(i)$, $h(i)$ נחשבות פעולות אלמנטרית, שמתבצעת בזמן $\Theta(1)$).

נא לא לכתוב בשוליים

שאלון 460 85.57.202 M4

שאלה 2 – הרצת FFT (25 נקי).

נביט בפולינום $p(x) = -5x^3 + 4x^2 - 3x + 2$. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) במסגרת הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום (22 נקי). בדקו את תשובתכם ע״י <u>הצבה ישירה</u> של הערכים המתאימים בפולינום.

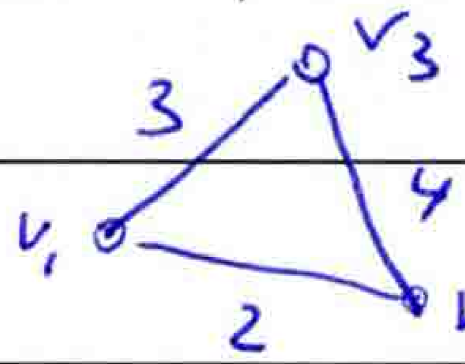
***שאלה 3* – עצים פורשים מזעריים (ווריאנט של Kruskal)** (25 נקי).

נתון גרף קשיר ולא-מכוון $G = (V, E)$, עם משקלי צלעות $w(e) > 0$ יחודיים (חח״ע): לצלעות שונות יש משקלים שונים. נביט בווריאנט הבא של האלגוריתם המקורי של Kruskal למציאת עץ פורש מזערי. ההבדל היחיד בין הווריאנט החדש לבין האלגוריתם המקורי ממוסגר להלן:

בכל איטרציה בווריאנט החדש: **<u>בוחרים באקראי בהתפלגות אחידה את אחד העצים</u>** T ביער, ואז בוחרים צלע מזערית e, מבין הצלעות שמחברות את T ליתר הגרף, ומוסיפים את e ליער.

(כמו באלגוריתם המקורי של Kruskal גם בווריאנט החדש: (א) מאתחלים יער, שבו כל קדקוד מהווה עץ נפרד, (ב) כשמוסיפים ליער צלע e שמחברת בין שני עצים שונים T_1, T_2, אז העצים T_1, T_2 מתאחדים לכדי עץ יחיד, (ג) האיטרציות נפסקות ברגע שהיער מורכב מעץ אחד ויחיד).

השאלה: **<u>הפריכו או הוכיחו את נכונותו של הווריאנט</u>** החדש. שימו לב שמדובר באלגוריתם הסתברותי. לכן, צריך או (א) להציג קלט מסוים וסדרה אפשרית של בחירות אקראיות עבורם הווריאנט מפיק פלט שגוי, או, לחלופין, (ב) להוכיח שלכל קלט, ולכל סדרה אפשרית של בחירות אקראיות מתקיים שהווריאנט מפיק פלט נכון. (בשאלה זו לא דנים בכלל ביעילות).



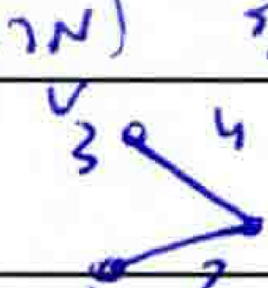
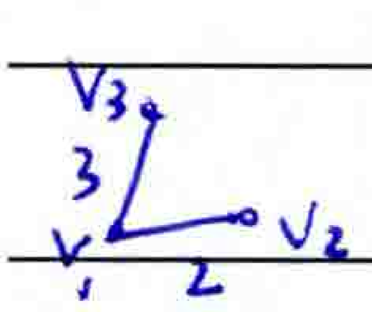
האלגוריתם לא עובד. עבור קלט כמו בציור

ובחירת ורטי — v_1, v_2, v_3 האלגוריתם יפיק פלט שגוי. בשלב 1 יבחר

בוחר

v_1 והצלע (v_1, v_2) תיכנס לעץ בשלב 2 יבחר v_2 ולא תיכנס

הצלע (v_2, v_3) לעץ למרות שצלע זו בחירה מינימלית.

העץ שיתקבל הוא:  למרות שהעץ המינימלי הוא 

לא נכון!

האלגוריתם עדיין [illegible]
תכונת החתך.

0

<u>שאלה 4 – שיבוץ מרצים</u> (25 נק').

בחוג לספרות n מרצים ונלמדים בו $2n$ קורסים. כל מרצה מגיש רשימה של כל הקורסים אותם הוא מעוניין ללמד. ברצוננו לשבץ את המרצים לקורסים, כך שישובץ מרצה יחיד לכל קורס וכל מרצה ישובץ <u>לשני קורסים בדיוק</u> (כמובן, רק מבין הקורסים בהם הוא מעונין). הציגו אלגוריתם, שמוצא שיבוץ חוקי של מרצים לקורסים כשהדבר אפשרי, ואחרת - מדווח שהדבר לא אפשרי.

<u>שאלה 5 – מסלולים מזעריים (בדיקת עץ נתון)</u> (25 נק').

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים $w(e)>0$ בצלעות, ועם קדקוד מקור s. כזכור, בבעיית המסלולים-המזעריים מהמקור s, ברצוננו למצוא עץ T של מסלולים-מזעריים, כלומר למצוא עץ מכוון T שמושרש במקור s, כך שלכל קדקוד $v\in V$ יתקיים התנאי הבא: המסלול היחיד בעץ T מ-s ל-v, הינו מסלול-מזערי מ-s ל-v בגרף המקורי G.

השאלה: נניח שנתון לנו כחלק מהקלט גם עץ-פורש מכוון T שמושרש במקור s. הציגו אלגוריתם שבודק **<u>האם T הינו אכן עץ מסלולים מזעריים</u>** (עמ"מ). האלגוריתם שלכם חייב לרוץ **<u>מהר יותר אסימפטוטית</u>** מאשר אלגוריתם כמו Dijkstra, שמנסה לחשב עמ"מ בכוחות עצמו. נדרש מכם אלגוריתם-הכרעה בלבד, שהפלט שלו הוא "כן (Accept)" או "לא (Reject)". כאשר האלגוריתם שלכם מכריע כי T איננו עמ"מ, אז אינכם נדרשים לחשב עמ"מ בעצמכם.

ב ה צ ל ח ה !

3 - ערמה
4 - חשבון ד
5 - הפרד ומשול
6 - תכנון דינאמי
7 - [illegible] / זרימה

אלגוריתמים 20417 – דף נוסחאות – גרפים

<u>סימונים</u>. ההגדרות הבאות מתאימות גם לגרפים לא מכוונים וגם לגרפים מכוונים. בגרף $G=(V,E)$ קבוצת הקדקודים (=צמתים) הינה V, וקבוצת הצלעות (=קשתות) הינה E. מסמנים $|V|=n, |E|=m$. כל הגרפים בקורס זה הם "פשוטים" במובן הבא: אין "לולאות עצמיות" (= אין צלע מקדקוד לעצמו) ואין "צלעות כפולות" (צלע יכולה להופיע או לא להופיע, אך לא יכולה להופיע מספר רב של פעמים).

<u>מסלולים</u>. מסלול (=מסילה) בגרף הוא סדרת קדקודים $(v_0,...,v_k)$ כך שיש בגרף צלע מ-v_{i-1} ל-v_i לכל $1\le i\le k$. אפשר לחשוב על אותו מסלול כסדרת צלעות $(e_1,...,e_k)$ שבה לכל $1\le i\le k$ הצלע e_i מחברת בגרף את v_{i-1} ל-v_i. מסלול פשוט הוא מסלול שאף קדקוד לא מופיע בו פעמיים (ומעלה). מעגל הוא מסלול שבו $v_0=v_k$. מעגל פשוט הוא מסלול שאף קדקוד לא מופיע בו פעמיים (ומעלה) למעט $v_0=v_k$. שני מסלולים נקראים זרים בקדקודים אם אין להם אף קדקוד משותף, ונקראים זרים בצלעות אם אין להם אף צלע משותפת. קדקוד t נקרא נגיש מקדקוד s אם קיים בגרף מסלול מ-s ל-t. גרף לא-מכוון נקרא קשיר (ובדומה גרף מכוון נקרא קשיר במובן החזק) אם כל זוג קדקודים נגישים האחד מהשני.

<u>משקלים</u>. בגרף ממושקל לכל צלע e מוגדר משקל $w(e)$ (=אורך $\ell(e)$, =מחיר $c(e)$). בגרף לא ממושקל אורך מסלול = מספר הצלעות במסלול. בגרף כן ממושקל אורך מסלול = סכום משקלי הצלעות במסלול. בגרף כן/לא ממושקל מסלול מזערי (=מינימלי) מ-s ל-t הינו מסלול מ-s ל-t שאורכו מזערי. עץ מרחקים מזעריים T עם שורש $s\in V$ הוא עץ פורש כך שלכל קדקוד $t\in V$, המרחק (=אורך מסלול מזערי) מ-s ל-t ב-T שווה למרחק מ-s ל-t ב-G. אבחנה מרכזית: בגרף כן/לא ממושקל: אם $s\longrightarrow u\longrightarrow v\longrightarrow t$ מסלול מזערי מ-s ל-t, אז תת-המסלול $u\longrightarrow v$ הינו מסלול מזערי מ-u ל-v (כאן $\longrightarrow$ מסמן תת-מסלול). עץ פורש מזערי (עפ"מ) בגרף ממושקל ולא-מכוון הוא עץ פורש, שסכום משקלי הצלעות שלו מזערי מבין כל העצים הפורשים.

<u>רשתות זרימה</u>. ברשת זרימה נתונים גרף מכוון $G=(V,E)$ עם קדקודי מקור $s\in V$ ויעד $s\ne t\in V$ וקיבולות אי-שליליות $c(e)\ge 0$ על הצלעות. זרימה חוקית הינה פונקציה $f:E\to\mathbb{R}$ שמכבדת את מגבלת הקיבולת: $f(e)\le c(e)$ לכל צלע e, ואת חוק שימור הזרימה: $f_{in}(v)=f_{out}(v)$ לכל קדקוד $v\ne s,t$. כאן $f_{in}(v)$ הינו סכום הזרימות בצלעות שנכנסות ל-v, ו-$f_{out}(v)$ הינו סכום הזרימות בצלעות שיוצאות מ-v. חתך $(S,T=V\setminus S)$ ברשת הינה חלוקה של קבוצת הקדקודים שבה $s\in S, t\in T$. קיבולת $c(S,T)$ של חתך הינה סכום הקיבולות של צלעות שיוצאות מ-S ונכנסות ל-T. זרימה $f(S,T)$ של חתך הינה ההפרש בין סכום הזרימות של צלעות שיוצאות מ-S ונכנסות ל-T לבין סכום הזרימות של צלעות שנכנסות ל-S ויוצאות מ-T. לכל חתך (S,T) גודלה של זרימה חוקית f הינו $val(f)=f_{out}(s)=f_{in}(t)=f(S,T)$. משפט מרכזי: גודל זרימה מרבית (max-flow) = גודל חתך מזערי (min-cut).

קלט	פלט	אלגוריתם, זמן ריצה	תכונות, הערות
גרף מכוון G קדקוד מקור $s \in V$	עץ פורש T של הקדקודים הנגישים מ- s	סריקה לרוחב BFS $\|E\|+\|V\|$	T הינו עץ מרחקים מזעריים מהמקור s
		סריקה לעומק DFS $\|E\|+\|V\|$	בגרף לא-מכוון: כל צלע של G שאינה ב- T בהכרח מחברת בין אב-קדמון לבין צאצא שלו ב- T. בגרף מכוון חסר מעגלים: מחשב מיון טופולוגי
גרף מכוון G ממושקל (עם/בלי מקור $s \in V$) $w(e) \geq 0$	עץ T של מרחקים (ומסלולים) מזעריים מהמקור s לקדקודים הנגישים מ- s	דייקסטרא Dijkstra $\|E\|+\|V\|\log\|V\|$	
$w(e)$ כללי		בלמן-פורד Bellman-Ford $\|E\|\|V\|$	מדווחים על קיומם של מעגלים שמשקלם שלילי
	מרחקים (ומסלולים) מזעריים בין כל זוגות הקדקודים	פלויד-וורשאל Floyd-Warshall $\|V\|^3$	
גרף לא-מכוון G עם משקלים אי-שליליים $w(e) \geq 0$	עפ"מ של הגרף (עץ פורש מזערי)	פרים Prim $\|E\|+\|V\|\log\|V\|$	אם e צלע שמשקלה מזערי מבין כל הצלעות שחוצות חתך מסוים, אז יש עפ"מ שכולל את e. (אם e צלע יחידה כנ"ל, אז כל עפ"מ כולל את e).
		קרוסקאל Kruskal $\|E\|\log\|V\|$	אם e צלע שמשקלה מרבי מבין כל הצלעות במעגל מסוים, אז יש עפ"מ שלא כולל את e. (אם e צלע יחידה כנ"ל, אז אין עפ"מ שכולל את e).
גרף מכוון G עם מקור $s \in V$ ויעד $s \neq t \in V$ קיבולות אי-שליליות $c(e) \geq 0$	זרימה חוקית מרבית	אדמונדס-קארפ Edmonds-Karp $\|E\|^2\|V\|$	וריאנט של פורד-פלקרסון Ford–Fulkerson
זוג וקטורים $\vec{a}=(a_0,\ldots,a_{n-1})$ $\vec{b}=(b_0,\ldots,b_{n-1})$	הקונבולוציה הציקלית $\vec{a}\otimes\vec{b}=$ $(c_0,\ldots,c_{2n-2})$ שבה $c_k=\Sigma_{0\leq i\leq k}a_i b_{k-i}$	טרנספורם פורייה FFT המהיר $n\log n$	מתאים לכפל פולינומים $(\sum_{0\leq i\leq n-1} a_i x^i)(\sum_{0\leq j\leq n-1} b_j x^j)$ $=(\sum_{0\leq k\leq 2n-2} c_k x^k)$ כאשר $c_k=\Sigma_{0\leq i\leq k}a_i b_{k-i}$

נא לא לכתוב בשוליים

נא לא לכתוב בשוליים