ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20585

מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חוברת הקורס - סתיו 2015א

כתב: אלעזר בירנבוים

אוקטובר 2014 - סמסטר סתיו - תשע"ה

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

אני מקדם את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים.
בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.
פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:
http://telem.openu.ac.il
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

שעות הייעוץ בקורס מתקיימות בימי ראשון בשעות 18:00-20:00 בטלפון 04-6850321.
אבקש מאוד לא להתקשר לטלפון הזה בשעות לא סבירות ובשבתות.
ניתן לפנות גם בדואר אלקטרוני: elazar@openu.ac.il

אני מאחל לכם הצלחה בלימודים.

בברכה,

אלעזר הירנבוים

מרכז ההוראה

1. **לוח זמנים ופעילויות** (20585 / 2015א)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ״ן (למנחה)
1	24.10.2014-21.10.2014	פרק 1		
2	31.10.2014-26.10.2014	פרק 1		
3	7.11.2014-2.11.2014	פרק 2	מפגש ראשון	ממ״ן 11 7.11.2014
4	14.11.2014-9.11.2014	פרק 2 פרק 3		
5	21.11.2014-16.11.2014	פרק 3	מפגש שני	
6	28.11.2014-23.11.2014	פרק 3 פרק 4		ממ״ן 12 28.11.2014
7	5.12.2014-30.11.2014	פרק 4	מפגש שלישי	
8	12.12.2014-7.12.2014	פרק 4		

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

לוח זמנים ופעילויות – המשך

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ״ן (למנחה)
9	19.12.2014-14.12.2014 (ד-ו חנוכה)	פרק 4	מפגש רביעי	
10	26.12.2014-21.12.2014 (א-ד חנוכה)	פרק 4 פרק 5		ממ״ן 13 26.12.2014
11	2.1.2015-28.12.2014	פרק 5	מפגש חמישי	
12	9.1.2015-4.1.2015	פרק 5 פרק 6		ממ״ן 14 9.1.2015
13	16.1.2015-11.1.2015	פרק 6	מפגש שישי	
14	23.1.2015-18.1.2015	פרק 7		
15	2.2.2015-25.1.2015	פרק 7	מפגש שביעי	ממ״ן 15 2.2.2015

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

2. תיאור המטלות

קראו היטב עמודים אלו לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס - הבנה מעמיקה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. המטלות תיבדקנה על-ידי המנחה ותוחזרנה בצירוף הערות המתייחסות לתשובות.

המטלות מלוות את יחידות הלימוד בקורס. להלן פירוט המטלות, היחידות שאליהן מתייחסת כל מטלה ומשקלה היחסי. בחלק מהמטלות תופענה גם שאלות המתייחסות ליחידות שכבר נלמדו.

ממ״ן 11 - פרק 1 - 6 נקודות
ממ״ן 12 - פרקים 2, 3 - 6 נקודות
ממ״ן 13 - פרק 4 - 8 נקודות
ממ״ן 14 - פרק 5 - 4 נקודות
ממ״ן 15 - פרקים 6, 7 - 6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל של 24 נקודות לפחות.
שימו לב שחובה להגיש את ממ״ן 13.

ללא צבירת 24 נקודות בהגשת מטלות לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

למען הסר ספק, יודגש שחל איסור על הכנה משותפת והעתקה של מטלות או חלקי מטלות.
(הנושא מפורט בתקנון משמעת לסטודנטים - נספח 1 של ידיעון האו״פ).

לתשומת לבכם!
כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן: אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלה** בציון הנמוך ביותר, שציונה נמוך מציון הבחינה, לא תילקח בחשבון בעת שקלול הציון הסופי. זאת בתנאי שמטלה זו **אינה חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס.
סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון שמספרו 09-7782222, או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא http://www.openu.ac.il/sheilta קורסים ⇦ ציוני מטלות ובחינות ⇦ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.
יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות

שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של ציוני המטלות והבחינה יהיה נמוך מ-60).

<u>כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.</u>

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל כולל של 24 נקודות לפחות.

ב. ציון של לפחות 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2015א **מועד אחרון להגשה:** 7 נוב' 14

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (15%)

תהי w מחרוזת סמלים. מסמנים על-ידי w^R את המחרוזת המתקבלת מ-w על-ידי היפוך סדר הסמלים ב-w.

דוגמה: $11001^R = 10011$

מילה w נקראת **פלינדרום** אם $w = w^R$.

דוגמה: 1100011 היא פלינדרום; 110001 איננה פלינדרום.

נגדיר את השפה PAL: $PAL = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R\}$

(זוהי שפת הפלינדרומים מעל האלפבית $\{0, 1\}$).

בנו מכונת טיורינג **המכריעה** את PAL.

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$.

למכונה יהיו **לא יותר משמונה מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה **באופן מלא** בעזרת איור (כמו איור 3.8 בספר). הקפידו שלא תהיינה קשתות נחתכות באיור.

הסבירו היטב את פעולת המכונה ולמה היא אכן מכריעה את PAL.

שאלה 2 (20%)

א. כמה פעמים תקרא המכונה מאיור 3.10 בספר את הסמל # אם מילת הקלט היא מהצורה $w\#w$ (כלומר, מילה ששייכת לשפה) ו- $|w| = n$ ($|w|$ מסמן את האורך של w)?

הצדיקו את תשובתכם.

ב. הציעו דרך לבנות מכונה שבה מספר הפעמים הזה יהיה **קטן פי שניים**.

אינכם צריכים לבנות את המכונה, רק להסביר כיצד היא תפעל.

שאלה 3 (20%. סעיף א - 6%, סעיף ב - 14%)

נגדיר מודל חישובי חדש : מכונת טיורינג עם סרט אחד ועם כמה ראשים קוראים-כותבים.

למכונה כזו יש סרט יחיד, אבל ייתכן שיש לה יותר מראש קורא-כותב אחד.

אם יש למכונה k ראשים, הם ממוספרים מ-1 עד k.

הראשים השונים נעים על הסרט באופן בלתי תלוי זה בזה.

ייתכן שכמה ראשים יעמדו בו-זמנית על אותו מקום בסרט.

פונקצית המעברים δ של מכונה עם k ראשים מוגדרת כך : $\delta: Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{\mathrm{L, R, S}\}^k$.

כאשר המכונה נמצאת במצב q_i, והראשים עומדים על הסמלים $a_1, a_2, ..., a_k$ בסרט, פונקצית המעברים מגדירה לאיזה מצב q_j עוברים, אלו אותיות מודפסות, ומהי התנועה של כל ראש.

אם לפי פונקצית המעברים, כמה ראשים מדפיסים סמלים שונים באותו מקום בסרט, יודפס הסמל של הראש שמספרו קטן ביותר.

א. הסבירו כיצד מכונה עם שני ראשים יכולה להכריע את השפה של תרגיל 3.8 סעיף b (עמוד 188 בספר) במעבר אחד על הקלט (כלומר, כל ראש יעבור פעם אחת על הקלט).

ב. הסבירו **בפירוט** כיצד מכונת טיורינג רגילה (עם ראש יחיד) יכולה לחקות את פעולתה של מכונה עם k ראשים.

שאלה 4 (16%)

בנו מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית**, שכאשר היא מתחילה לפעול על הסרט הריק (סרט שכולו סימני רווח), בסיומו של כל מסלול חישוב שמסתיים במצב q_{accept}, כתובה על הסרט מילה w ששייכת לשפה A של דוגמה 3.7, ולכל מילה w ששייכת לשפה A, יש למכונה מסלול חישוב שמסתיים במצב q_{accept} ובסיומו w כתובה על הסרט של המכונה.

כלומר, כאשר המכונה מתחילה את פעולתה על סרט ריק, היא יכולה לסיים ב-q_{accept}, ועל הסרט תהיה כתובה המילה 0, היא יכולה לסיים ב-q_{accept}, ועל הסרט תהיה כתובה המילה 00, היא יכולה לסיים ב-q_{accept}, ועל הסרט תהיה כתובה המילה 0000, וכך הלאה ; ולכל מילה w שבנויה ממספר 0-ים שהוא חזקה של 2, יש למכונה מסלול שמסתיים ב-q_{accept} ועל הסרט כתובה המילה w.

אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, \sqcup, x\}$; למכונה יהיו **לא יותר משמונה מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{reject} וכל הקשתות שנכנסות אליו).

הסבירו היטב את פעולת המכונה, את התפקיד של כל מצב, את נקודות האי-דטרמיניזם, ולמה המכונה אכן מבצעת את הנדרש.

שאלה 5 (15%)

בעיה 3.18 בספר (עמוד 189).

הראו שמכונה עם סרט אינסופי בשני הכיוונים **שקולה בכוחה** למכונה עם סרט אינסופי בכיוון אחד : פרטו כיצד מכונה מאחד הסוגים יכולה לחקות את פעולתה של מכונה מן הסוג השני.

שאלה 6 (14%)

א. על המונה (enumerator) E נתון שהוא **מגיע** אי פעם למצב q_{halt}.

האם אפשר להסיק מכך שהשפה $L(E)$ שהוא מפיק היא **שפה כריעה**? הוכיחו את תשובתכם.

ב. על המונה F נתון שהוא **לא מגיע** אף פעם למצב q_{halt}.

האם אפשר להסיק מכך שהשפה $L(F)$ שהוא מפיק **איננה שפה כריעה**? הוכיחו את תשובתכם.

מטלת מנחה (ממ״ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר

מספר השאלות: 7   **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2015א   **מועד אחרון להגשה:** 28 נוב׳ 14

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1 (10%)

מסמנים על-ידי $|C|$ את הגודל (העוצמה) של הקבוצה C. מסמנים על-ידי $L(M)$ את השפה שמזהה אוטומט סופי דטרמיניסטי M.

הוכיחו שהשפה G_{DFA} שלהלן היא **שפה כריעה**:

$G_{\text{DFA}} = \{<A, B> \mid |L(A)| > |L(B)|$; הם אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים A ו-$B\}$

מילה מהצורה $<A, B>$ שייכת לשפה G_{DFA} אם A ו-B הם תיאורים של אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים, והשפה שמזהה האוטומט A גדולה יותר מן השפה שמזהה האוטומט B.

אם שתי השפות אינסופיות, אז $|L(A)| = |L(B)|$; אם אחת סופית ואחת אינסופית, אז האינסופית גדולה מן הסופית; אם שתיהן סופיות, אז $|L(A)| > |L(B)|$ אם ורק אם מספר המילים ב-$L(A)$ גדול ממספר המילים ב-$L(B)$.

שאלה 2 (10%)

נסמן על-ידי $\mathbb{N}_0$ את קבוצת המספרים הטבעיים עם 0: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

הוכיחו שהפונקציה g הבאה היא **התאמה** (correspondence) של $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ו-$\mathbb{N}_0$:

$$g(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$$

(להגדרת התאמה עיינו בספר בהגדרה 4.12).

שאלה 3 (15%)

הוכיחו: אם יימצא אלגוריתם פלאי להכרעת השפה A_{TM}, אז אפשר יהיה להיעזר בו כדי להכריע את השפה $HALT_{\text{TM}}$ המוגדרת בעמוד 216 בספר.

שאלה 4 (15%. סעיף א - 5%, סעיף ב - 10%)

נגדיר את השפה L הבאה:

$L = \{<M> \mid$ M הוא תיאור של מכונת טיורינג;

כאשר M רצה על $<M>$, היא מגיעה למצב q_{accept}, ועל הסרט כתובה המילה הריקה$\}$

L היא שפת המחרוזות שמתארות מכונות טיורינג M בעלות התכונה הבאה:

כש-M רצה על $<M>$ כקלט, היא מסיימת במצב q_{accept}, ואז הסרט של המכונה מכיל רק סמלי רווח.

א. הוכיחו: השפה L **מזוהה-טיורינג**.

ב. הוכיחו **בעזרת שיטת האלכסון** שהשפה L **איננה כריעה**.

הדרכה: הניחו בשלילה שיש מכונה H שמכריעה את L. בנו מכונה D שתפעל הפוך מכל מכונה M שהיא.

שאלה 5 (14%)

עובדה: אפשר להוכיח את משפט Rice (ראו בעיה 5.16 בספר) מבלי להסתמך על כך ש- A_{TM} איננה כריעה. (ההוכחה איננה בעזרת רדוקציה של A_{TM}, אלא בעזרת משפט הרקורסיה שמופיע בפרק 6 בספר).

הוכיחו **בעזרת משפט Rice** ש-A_{TM} איננה כריעה.

(בפרק 4 בספר הוכח ש-A_{TM} איננה כריעה בעזרת שיטת האלכסון. פה אתם מתבקשים להוכיח שהיא לא כריעה בעזרת משפט Rice).

שאלה 6 (12%)

האם ALL_{LBA} היא שפה **כריעה**? הוכיחו את תשובתכם.

($ALL_{LBA} = \{<M> \mid M$ is an LBA and $L(M) = \Sigma^*\}$)

שאלה 7 (24%. סעיף א - 7%, סעיף ב - 7%, סעיף ג - 7%, סעיף ד - 3%)

נגדיר את השפה CF_{TM}:

$$CF_{TM} = \{<M> \mid M \text{ is a TM and } L(M) \text{ is a context-free language}\}$$

א. הוכיחו **בעזרת משפט Rice** (ראו בעיה 5.16 בספר) שהשפה CF_{TM} **איננה כריעה**.

ב. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- CF_{TM} (הראו: $A_{TM} \leq_m CF_{TM}$).

ג. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $\overline{CF_{TM}}$ (הראו: $A_{TM} \leq_m \overline{CF_{TM}}$).

ד. הסיקו: CF_{TM} ו- $\overline{CF_{TM}}$ **אינן מזוהות-טיורינג**.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 8 **משקל המטלה:** 8 נקודות

סמסטר: 2015א **מועד אחרון להגשה:** 26 דצמ' 14

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (16%)

אפשר להציע אלגוריתם נוסף להכרעת השפה $A = \{0^k1^k \mid k \geq 0\}$:

תחילה בודקים שבמילת הקלט אין 0-ים מימין ל-1-ים.

לאחר מכן סופרים את ה-0-ים ואת ה-1-ים, ובודקים שמספרם זהה.

א. הסבירו כיצד אפשר לממש את האלגוריתם הזה, במכונת טיורינג דטרמיניסטית בעלת סרט אחד, כך שזמן הריצה יהיה $O(n \log n)$.

הדרכה: אם המונים של ה-0-ים וה-1-ים יהיו רחוקים מן הראש הקורא-כותב של המכונה, אז ההגעה אליהם בכל פעם תדרוש מספר גדול של צעדי ריצה.

ב. הסבירו כיצד אפשר לממש את האלגוריתם הזה במכונת טיורינג דטרמיניסטית בעלת שני סרטים כך שזמן הריצה יהיה $O(n)$.

שאלה 2 (12%)

הוכיחו שהשפות הבאות שייכות למחלקה P :

א. $FINITE_{\mathrm{DFA}} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is a DFA and } L(M) \text{ is a finite language}\}$

ב. $TREE\text{-}VERTEX\text{-}COVER = \{\langle T, k\rangle \mid T \text{ is an undirected } \textbf{tree} \text{ that has a } k\text{-node vertex cover}\}$

(גרף לא מכוון T הוא **עץ** אם T קשיר (יש מסלול מכל צומת לכל צומת) ואין ב-T מעגלים.

כיסוי בצמתים (vertex cover) של גרף לא מכוון מוגדר בעמוד 312 בספר).

שאלה 3 (15%)

א. הציעו מאמת (verifier) לשפה $\overline{ALL_{\text{CFG}}}$ (ראו משפט 5.13 בספר).

ב. הסבירו מדוע המאמת שהצעתם **איננו בהכרח** בעל זמן ריצה פולינומיאלי בגודל הקלט.

ג. הוכיחו: $\overline{ALL_{\text{CFG}}}$ **לא שייכת ל-NP**.

שאלה 4 (8%)

האם השפה C שלהלן שייכת למחלקה NP? הוכיחו את תשובתכם.

$C = \{<n, m> \mid$ m-מספר הראשוניים השונים בפירוק לגורמים ראשוניים של n איננו גדול מ$\}$

(למשל, $<3276, 4> \in C$ ‏($3276 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$), ‏$<3276, 3> \notin C$).

שאלה 5 (12%)

בהוכחת משפט Cook-Levin (משפט 7.37: SAT היא NP-שלמה) בונים נוסחה בוליאנית ϕ שהיא AND של ארבע נוסחאות: $\phi = \phi_{\text{cell}} \wedge \phi_{\text{start}} \wedge \phi_{\text{move}} \wedge \phi_{\text{accept}}$

הנוסחה ϕ_{cell} נראית מיותרת: שלוש הנוסחאות האחרות אומרות שהשורה הראשונה מתאימה לקונפיגורציה ההתחלתית (ϕ_{start}), שהמעבר משורה לשורה נעשה לפי פונקצית המעברים של המכונה (ϕ_{move}), ושיש שורה שמתאימה לקונפיגורציה מקבלת (ϕ_{accept}). זה נראה מספיק כדי לקבוע שמילת הקלט מתקבלת על-ידי המכונה.

הסבירו היטב למה צריך גם את ϕ_{cell}.

שאלה 6 (7%)

ברדוקציה של הוכחת משפט 7.56 בספר, קבוצת המספרים S כוללת מופעים כפולים של מספרים ($g_i = h_i$ לכל $1 \le i \le k$). כלומר, S היא רב-קבוצה (multiset).

שנו את הרדוקציה כך ש-S לא תכיל מופעים כפולים. כלומר, S תהיה קבוצה (ולא רב-קבוצה).

שאלה 7 (12%)

בעיה 7.39 בספר (עמודים 326-327).

שאלה 8 (18%)

בעיית הקבוצה הבלתי תלויה (*INDEPENDENT-SET*) מוגדרת בעמוד 78 במדריך הלמידה.

א. הוכיחו: בגרפים שבהם דרגת כל צומת ≤ 2 הבעיה **שייכת ל-P**.

(דרגת צומת = מספר הקשתות שנוגעות בצומת).

עליכם לתאר אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי המקבל כקלט מספר טבעי k וגרף לא מכוון G שדרגת כל צומת שלו ≤ 2, ובודק האם יש ב-G קבוצה בלתי תלויה בגודל k.

ב. הוכיחו: בגרפים שבהם דרגת כל צומת ≤ 3 הבעיה היא **NP-שלמה**.

הדרכה: רדוקציה פולינומיאלית של *3SAT*:

יהיו הפסוקיות של הנוסחה $C_1, ..., C_m$ (בכל פסוקית שלושה ליטרלים).

לכל משתנה v בנוסחה, נסמן על-ידי k_v את מספר הפסוקיות שבהן הוא מופיע.

לכל משתנה v בונים מעגל בגודל $2k_v$ שבו מופיעים הקדקודים $T_{v,\,i}$ ו- $F_{v,\,i}$ לסירוגין, כאשר i עובר על מספרי הפסוקיות שבהן מופיע המשתנה v.

(למשל, אם המשתנה v מופיע בפסוקיות השנייה, החמישית והשמינית, אז בונים את המעגל $(T_{v,2} – F_{v,2} – T_{v,5} – F_{v,5} – T_{v,8} – F_{v,8} – T_{v,2})$.

לכל פסוקית $(l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ בנוסחה (l_i הוא ליטרל) בונים משולש.

מחברים בקשת כל ליטרל l של הפסוקית ה-i לקדקוד המתאים לפסוקית ה-i במעגל של המשתנה של l: אם הליטרל l הוא v, מחברים אותו ל-$T_{v,\,i}$; אם הליטרל l הוא $\neg v$, מחברים אותו ל- $F_{v,\,i}$.

הראו שהרדוקציה המוצעת יכולה להתבצע בזמן פולנומיאלי בגודל הקלט.

הראו שדרגת כל צומת בגרף שנבנה על-ידי הרדוקציה ≤ 3.

הראו שהנוסחה ספיקה אם ורק אם יש בגרף שנבנה על-ידי הרדוקציה קבוצה בלתי תלויה בגודל n (שאותו עליכם לקבוע).

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2015א **מועד אחרון להגשה:** 9 ינו' 15

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

הוכיחו שהשפה *SUBSET-SUM* שייכת ל-$\mathrm{SPACE}(n)$.
הציגו אלגוריתם להכרעת השפה, הסבירו היטב כיצד הוא ימומש, והוכיחו שהמקום הדרוש הוא $O(n)$.

שאלה 2 (10%)

הוכיחו: אם A היא שפה **רגולרית**, אז $A \in \mathrm{SPACE}(1)$.

שאלה 3 (15%)

בהגדרה של שפות PSPACE-שלמות (הגדרה 8.8) משתמשים ברדוקצית **זמן** פולינומיאלי (סעיף 2 בהגדרה).
הראו שאם נשתמש ברדוקצית **מקום** פולינומיאלי (כלומר, כל A ב-PSPACE ניתנת לרדוקציה **במקום** פולינומיאלי ל-B), אז *SAT* תהיה בעיה PSPACE-שלמה.

הדרכה: *SAT* היא רק דוגמה.

שאלה 4 (25%)

בעיה 8.11 בספר (עמוד 358).
לכל אחת מן השפות, הסבירו היטב את אופן פעולתה של מכונה שמשתמשת במקום לוגריתמי בגודל הקלט ומכריעה את השפה.

שאלה 5 (15%)

הוכיחו: $CLIQUE \leq_L VERTEX\text{-}COVER$.

($CLIQUE$ הוגדרה לפני משפט 7.24; $VERTEX\text{-}COVER$ הוגדרה לפני משפט 7.44).

עליכם לתאר את הרדוקציה, להוכיח שהיא תקפה, ולהוכיח בפירוט שהיא יכולה להתבצע במקום לוגריתמי.

שאלה 6 (25%)

הבעיה E_{DFA} הוגדרה בספר לפני משפט 4.4.

הוכיחו: $\overline{E_{DFA}}$ היא שפה NL-שלמה.

הדרכה: הראו שהיא שייכת ל-NL, והראו כי $PATH \leq_L \overline{E_{DFA}}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: סעיפים 9.1, 10.1 ו-10.2 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2015א **מועד אחרון להגשה:** 2 פבר' 15

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (12%)

הוכיחו שהפונקציה $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ניתנת לבנייה **במגבלת מקום עצמית** (space constructible).

שאלה 2 (12%)

עיינו במכונה D שבהוכחת משפט 9.3 (עמוד 366).

א. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate M on w ..." במשפט "Simulate M on $<M>$ ..."
(כלומר, במקום לבצע סימולציה של M על $w = <M>10^k$, נבצע סימולציה של M על $<M>$).
האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate M on w ..." במשפט "Simulate M on 10^k ..."
(כלומר, במקום לבצע סימולציה של M על $w = <M>10^k$, נבצע סימולציה של M על 10^k).
האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 3 (12%)

הסבירו כיצד אפשר לבנות מכונה עם שני סרטים, שכאשר היא מקבלת כקלט על הסרט הראשון את המילה 1^n, היא מסיימת כאשר על הסרט השני כתוב הייצוג הבינרי של n.

הסרט הראשון הוא סרט לקריאה בלבד. הסרט השני הוא סרט לקריאה וכתיבה והוא סרט הפלט.
עליכם לבנות מכונה שזמן ריצתה יהיה $O(n)$.

עליכם להסביר היטב את אופן פעולת המכונה, ולהסביר מדוע זמן הריצה שלה הוא $O(n)$.

שאלה 4 (24%)

לימדו את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה (עמודים 126-128).

א. נסחו בעיית **הכרעה** של בעיית הסוכן הנוסע (כלומר, בעיה שהתשובה עליה היא "כן" או "לא").

ב. הוכיחו: בעיית ההכרעה של בעיית הסוכן הנוסע **המטרית** היא בעיה NP-שלמה.

הדרכה: הוכיחו שהיא שייכת ל-NP, והראו רדוקציה פולינומיאלית של בעיית קיומו של מעגל המילטון בגרף לא מכוון.

(מעגל המילטון בגרף לא מכוון G הוא מעגל פשוט שמכיל כל צומת של G פעם אחת ויחידה. אתם יכולים להשתמש בעובדה שבעיית קיומו של מעגל המילטון בגרף לא מכוון היא בעיה NP-שלמה).

ג. הוכיחו: לכל בעיית סוכן נוסע **לא מטרית**, אפשר לבנות בזמן פולינומיאלי בעיית סוכן נוסע **מטרית** עם אותם צמתים, כך ש-P הוא מסלול אופטימלי בבעיה המקורית (הלא מטרית), אם ורק אם P הוא מסלול אופטימלי בבעיה החדשה (המטרית).

הדרכה: הגדילו את משקלי הקשתות באופן שיתקיימו תנאי הבעיה המטרית.

ד. הסבירו מדוע אין סתירה בין קיומו של אלגוריתם קירוב בעל יחס קירוב 2 (ואפילו 1.5) ובעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית הסוכן הנוסע המטרית, ובין אי-קיומו של אלגוריתם כזה לבעיה הכללית (הלא מטרית), לאור מה שהראיתם בסעיף הקודם (שיש דרך מהירה לעבור מהבעיה הכללית לבעיה המטרית, באופן שמשמר את המסלולים האופטימליים).

שאלה 5 (16%)

הוכיחו: אם יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **ההכרעה** *MAX-CUT*, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **האופטימיזציה** *MAX-CUT*.

האלגוריתם לבעיית ההכרעה מקבל כקלט גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

האלגוריתם מחזיר "כן" אם יש ב-G חתך שגודלו לפחות k, ו-"לא" אחרת.

האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה מקבל כקלט גרף לא מכוון G.

האלגוריתם מחזיר חתך בעל גודל מקסימלי ב-G, כלומר, חלוקה של קבוצת הצמתים של G לשתי תת-קבוצות זרות S ו-T, כך שמספר הקשתות המחברות צומת מ-S עם צומת מ-T הוא מקסימלי.

הדרכה: האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה יהיה בנוי משני שלבים:

בשלב הראשון קוראים לאלגוריתם ההכרעה כמה פעמים כדי למצוא את גודלו של החתך המקסימלי.

בשלב השני, מבצעים בכל פעם שינויים (קלים) בגרף, וקוראים לאלגוריתם ההכרעה על הגרפים החדשים. לפי התשובות שהוא מחזיר, יודעים איזה צמתים שייכים לאותה תת-קבוצה (S או T), ואיזה צמתים לא שייכים לאותה תת-קבוצה (כלומר, אם האחד שייך ל-S אז השני שייך ל-T).

שאלה 6 (10%)

עיינו באלגוריתם *PRIME* בעמוד 401 בספר.

הוכיחו: אם t הוא מספר טבעי קטן מ-p שאיננו זר ל-p (המחלק המשותף המקסימלי של t ו-p גדול מ-1), אז t הוא עד לפריקות של p. (כלומר, אם הוא ייבחר כאחד מ-k המספרים בשלב 2 של האלגוריתם, האלגוריתם ידחה).

שאלה 7 (14%)

בעיה 10.10 בספר (עמוד 439).

כדי להוכיח את שוויון המחלקות, הראו הכלה דו-כיוונית.