רשימת ההגדרות והמשפטים

1.9 משפט

1. פעולת האיחוד היא חילופית, דהיינו: $A\cup B=B\cup A$.

2. פעולת האיחוד היא חקיבוצית, דהיינו: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$. 32

1.10 משפט

א. לכל קבוצה A וקבוצה B , $A\subseteq A\cup B$ וגם $B\subseteq A\cup B$.

ב. לכל קבוצה A מתקיים: $A\cup A=A$.

ג. לכל קבוצה A מתקיים: $A\cup\varnothing=A$. 33

שאלה 12

הוכיחו את משפט 1.10

1.11 משפט

$A\subseteq B$ אם ורק אם $A\cup B=B$. 33

1.12 משפט

$A\cup B\subseteq C$ אם ורק אם $A\subseteq C$ וגם $B\subseteq C$. 33

1.13 הגדרה

החיתוך של הקבוצה A עם הקבוצה B הוא קבוצת כל העצמים, הנמצאים גם ב-A וגם ב-B . הסימון הוא $A\cap B$. בקיצור: $A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$. 34

1.14 הגדרה

נאמר שהקבוצות B,A הן **זרות** אם $A\cap B=\varnothing$. דהיינו, אם אין להן איברים משותפים. לחילופין נאמר ש-A זרה ל-B או ש-B זרה ל-A . 34

1.15. משפט

1.. פעולת החיתוך היא חילופית, דהיינו: $A\cap B=B\cap A$.

2.. פעולת החיתוך היא קיבוצית, דהיינו: $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$. 35

1.16 משפט

א. לכל קבוצה A וקבוצה B $A \cap B \subseteq A$ וגם $A \cap B \subseteq B$.

ב. לכל קבוצה A $A \cap A = A$.

ג. לכל קבוצה A $A \cap \varnothing = \varnothing$. 36

1.17 משפט

לכל B, A, $A \subseteq B$, אם ורק אם $A \cap B = A$. 36

1.18 משפט

לכל C, B, A, $C \subseteq A \cap B$, אם ורק אם $C \subseteq A$ וגם $C \subseteq B$. 37

1.19 משפט

אם A ו-B הן קבוצות סופיות, אז $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. 37

1.20 משפט (חוקי הפילוג של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך).

א. לכל שלוש קבוצות C,B,A , $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

ב. לכל שלוש קבוצות C,B,A , $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. 39

1.21 הגדרה

יהיו B, A קבוצות. $\boldsymbol{A}$ **פחות** $\boldsymbol{B}$ היא קבוצת איברי A, שאינם ב-B.

הסימון לקבוצה A פחות B הוא $A \setminus B$. $A \setminus B = \{x \in A | x \notin B\}$.

הפעולה שהגדרנו זה עתה נקראת בשם **פעולת ההפרש**. 41

1.22 הגדרה

תהי A קבוצה, החלקית לקבוצה האוניברסלית U. **הקבוצה המשלימה** ל-A ביחס ל-U

היא קבוצת איברי U, שאינם ב-A. הסימון יהיה $A^c(U)$. 44

1.23 משפט

לכל A מתקיים: א. $A \cup A^c = U$ ב. $A \cap A^c = \varnothing$. ג. $(A^c)^c = A$. 45

משפט 1.24

$A \setminus B = A \cap B^c$. 46

משפט 1.25

$A \subseteq B$ אם ורק אם $B^c \subseteq A^c$. 46

משפט 1.26 (כללי דה-מורגן)

א. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

ב. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ 47

הגדרה 1.27

תהי Γ קבוצה לא ריקה. לכל איבר α של Γ תהי A_α קבוצה.

(לאיברי Γ נקרא אינדקסים ובהקשר זה נאמר ש- α הוא האינדקס של A_α).

איחוד כל ה- A_α-ים, כאשר $\alpha \in \Gamma$, הוא קבוצת העצמים, הנמצאים ב- A_α ל- α אחד, לפחות, ב- Γ. הסימון הוא $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$.

לשון אחר: $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \{x \mid \exists \alpha \in \Gamma \ (x \in A_\alpha)\}$.

חיתוך כל ה- A_α-ים, כאשר $\alpha \in \Gamma$, הוא קבוצת האיברים המשותפים לכל ה- A_α.

הסימון הוא $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$.

לשון אחר: $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \{x \mid \forall \alpha \in \Gamma \ (x \in A_\alpha)\}$. 49

משפט 1.28

תהי Γ קבוצה לא ריקה של אינדקסים ויהי $\alpha_0 \in \Gamma$.

א. $A_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$

ב. $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \subseteq A_{\alpha_0}$ 50

הגדרה *1.27

תהי B קבוצה לא ריקה של קבוצות.

$\bigcup_{A \in B} A$, איחוד כל הקבוצות ב- B היא הקבוצה $\{x \mid \exists A \in B (x \in A)\}$.

$\bigcap_{A \in B} A$, חיתוך כל הקבוצות ב- B היא הקבוצה $\{x \mid \forall A \in B (x \in A)\}$.

גם כאן נרחיב ונגדיר: $\bigcup_{A \in \varnothing} A = \varnothing$. 50

1.28* משפט

תהי B קבוצה לא ריקה של קבוצות ותהי $A_0 \in B$.

א. $A_0 \subseteq \bigcup_{A \in B} A$

ב. $\bigcap_{A \in B} A \subseteq A_0$ 51

1.29 משפט (כללי הפילוג)

א. $B \cap (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} (B \cap A_\alpha)$

ב. $B \cup (\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} (B \cup A_\alpha)$ 51

1.30 משפט (כללי דה-מורגן)

א. $(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha{}^c$

ב. $(\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha{}^c$ 51

2.1 אקסיומה אקסיומת ה-n-יות הסדורות

יהי $n \geq 1$ מספר טבעי. לכל n-יה סדורה יש איבר ראשון יחיד, איבר שני יחיד וכן הלאה, ואיבר n-י יחיד. שתי n-יות סדורות הן שוות, אם ורק אם יש להן אותו איבר ראשון, אותו איבר שני, וכן הלאה, ואותו איבר n-י. 71

2.2 הגדרה מכפלה קרטזית

יהיו B, A קבוצות. **המכפלה הקרטזית** של A ב-B היא קבוצת הזוגות הסדורים שבהם משמאל מופיע איבר של A ומימין איבר של B.

המכפלה הקרטזית הנ"ל מסומנת $A \times B$. $A \times B = \{\langle a,b \rangle | a \in A \wedge b \in B\}$. 71

2.3 משפט

לכל C, B, A מתקיים:

א1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ א2. $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

ב1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ ב2. $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

ג1. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ ג2. $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$ 73

2.4 הגדרה   יחס

יהיו B, A קבוצות. **יחס דו-מקומי** מ-A ל-B הוא תת-קבוצה של $A \times B$.
יחס דו-מקומי מ-A ל-A נקרא גם יחס דו-מקומי על A 75

2.5 הגדרה   היחס ההופכי

יהי R יחס מהקבוצה A לקבוצה B. היחס ההופכי ל-R הוא היחס הבא מ-B ל-A

$\{\langle y,x\rangle | \langle x,y\rangle \in R\}$.   את היחס ההופכי ל-$R$ נסמן R^{-1}. 79

2.6 הגדרה   ריבוע היחס

יהי R יחס על קבוצה A. היחס R^2 על A הוא היחס המקיים את התכונה הבאה:
לכל $a,b \in A$ $\langle a,b\rangle \in \mathbf{R}^2$ אם ורק אם קיים $c \in A$ כך ש-$\langle a,c\rangle \in \mathbf{R}^2$ ו-$\langle c,b\rangle \in \mathbf{R}^2$.

לשון אחר: $aR^2b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbf{R}(aRx \wedge xRb)$. 82

2.7 הגדרה   רפלקסיביות

יחס R על קבוצה A נקרא **רפלקסיבי** אם לכל a ב-A מתקיים aRa.
תכונה זו של היחס R נקראת רפלקסיביות. 83

2.8 הגדרה   אנטי-רפלקסיביות

יחס R על קבוצה A נקרא **אנטי-רפלקסיבי** אם לשום a ב-A לא מתקיים aRa.
לשון אחר: אם אינו מכיל שום זוג סדור מהצורה $\langle a,a\rangle$.
תכונה זו נקראת **אנטי-רפלקסיביות**. 84

2.9 - הגדרה   סימטריה

יחס R על A ייקרא **סימטרי**, אם לכל b,a ב-A, המקיימים aRb, מתקיים גם bRa.
תכונה זו נקראת **סימטריה**. 85

2.10 הגדרה   אנטי-סימטריה

יחס R על A ייקרא **אנטי-סימטרי**, אם לא קיימים b,a ב-A כך ש-aRb וגם bRa.
לשון אחר: אם $R \cap R^{-1} = \varnothing$. תכונה זו תיקרא **אנטי-סימטריה**. 86

2.11 הגדרה   טרנזיטיביות
יחס R על קבוצה A ייקרא **טרנזיטיבי**, אם לכל c,b,a ב-A, $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$. 88

2.12 משפט

היחס R על A הוא טרנזיטיבי אם ורק אם $R^2 \subseteq R$. 88

2.13 הגדרה יחס שקילות

יחס על קבוצה A נקרא **יחס שקילות** אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי. 90

2.14 הגדרה חלוקה

תהי A קבוצה לא ריקה. **חלוקה** של A היא קבוצה של תת-קבוצות לא ריקות של A
שכל שתיים מהן זרות זו לזו ואיחודן הוא A כולה.
כל אחת מן הקבוצות הללו נקראת **תא** של החלוקה. 91

2.15 משפט

תהי A קבוצה לא ריקה ותהי π חלוקה של A.
יהי $\equiv_\pi$ היחס הבא על A: $x \equiv_\pi y$ אם ורק אם x ו-y נמצאים באותו תא של החלוקה π.
$\equiv_\pi$ הוא יחס שקילות על A. 91

2.16 משפט

אם R הוא יחס שקילות על קבוצה לא ריקה A, קיימת חלוקה יחידה π של A, כך ש-
$R = \equiv_\pi$, דהיינו שהיחס R מושרה על ידי π. 93

2.17 הגדרה מחלקות שקילות

יהי R יחס שקילות על קבוצה A ותהי π החלוקה של A המשרה את היחס R. 94
כל תא בחלוקה π נקרא **מחלקת שקילות** של R.

2.18 הגדרה קבוצת המנה

יהי E יחס שקילות מעל קבוצה A. קבוצת מחלקות השקילות של E נקראת **קבוצת המנה**
של A מעל E, וסימונה הוא A/E.
אם קבוצת המנה היא סופית, נכנה את מספר איבריה, דהיינו את מספר מחלקות השקילות,
בשם ה**אינדקס** של E. אם קבוצת המנה היא אינסופית, אומרים שהאינדקס אינסופי. 95

2.19 הגדרה - יחס סדר מלא

יחס R על קבוצה A נקרא **יחס סדר מלא** אם הוא

א. אנטי-רפלקסיבי ב. טרנזיטיבי ג. משווה, כלומר לכל b, a aRb או bRa או $a = b$. 97

2.20 הגדרה יחס סדר חלקי

יחס R על קבוצה A נקרא **יחס סדר חלקי** או בקיצור: **סדר חלקי**, אם הוא
א. אנטי-רפלקסיבי ב. טרנזיטיבי 99

2.21 הגדרה קבוצה סדורה וקבוצה סדורה חלקית

קבוצה סדורה חלקית היא זוג סדור $\langle A,\prec\rangle$, כאשר A היא קבוצה ו-$\prec$ הוא סדר חלקי על A. **קבוצה סדורה** היא זוג סדור $\langle A,\prec\rangle$, כאשר A היא קבוצה ו-$\prec$ הוא סדר מלא על A.

100

2.22 הגדרה - תת-קבוצה סדורה חלקית

תהי $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה חלקית. $\langle A',\prec'\rangle$ תיקרא **תת-קבוצה סדורה חלקית** של $\langle A,\prec\rangle$ אם $A'\subseteq A$ ולכל $a,b\in A'$, $a\prec' b$ אם ורק אם $a\prec' b$.

אם $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה, אז במקרה זה $\langle A',\prec'\rangle$ תיקרא **תת-קבוצה סדורה** של $\langle A,\prec\rangle$.

100

2.23 הגדרה איבר ראשון ואיבר אחרון

תהי $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה חלקית.

איבר a ב-A ייקרא **איבר ראשון** ב-$\langle A,\prec\rangle$ אם לכל x ב-A, $a\prec x$ או $a=x$.

איבר b ב-A ייקרא **איבר אחרון** ב-$\langle A,\prec\rangle$ אם לכל x ב-A, $x\prec b$ או $x=b$. 101

2.24 משפט

בקבוצה סדורה חלקית $\langle A,\prec\rangle$ אין יותר מאיבר ראשון אחד ואין יותר מאיבר אחרון אחד.

102

2.25 הגדרה איבר מינימלי ואיבר מקסימלי

תהי $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה חלקית.

איבר a ב-A ייקרא **איבר מינימלי** ב-$\langle A,\prec\rangle$ אם אין x ב-A אשר $x\prec a$.

איבר b ב-A ייקרא **איבר מקסימלי** ב-$\langle A,\prec\rangle$ אם אין x ב-A אשר $a\prec x$. 102

2.26 טענה

איבר ראשון ב-$\langle A,\prec\rangle$ הוא מינימלי ואיבר אחרון ב-$\langle A,\prec\rangle$ הוא מקסימלי. 102

2.27 טענה

בקבוצה סדורה (בסדר מלא) איבר הוא ראשון אם ורק אם הוא מינימלי ואיבר הוא אחרון אם ורק אם הוא מקסימלי. 103

2.28 משפט

בקבוצה סדורה חלקית סופית ולא ריקה $\langle A,\prec\rangle$ יש איבר מינימלי ואיבר מקסימלי. 104

2.29 הגדרה הרכבת יחסים

יהיו C,B,A קבוצות, ויהיו R_1 יחס מ-A ל-B ו-R_1 יחס מ-B ל-C.

ההרכבה R_1R_2 היא היחס מ-A ל-C.. המוגדר כך:

$R_1R_2=\{\langle a,c\rangle\in A\times C\,|\,\exists b\in B(\langle a,b\rangle\in R_1\wedge\langle b,c\rangle\in R_2\}$.

לשון אחר: $aR_1R_2c\Leftrightarrow\exists b\in B(aR_1b\wedge bR_2c)$. 105

3.1 הגדרה - פונקציה

פונקציה היא שלשה סדורה $\langle A,B,\mathcal{G}\rangle$ כאשר B,A הן קבוצות ו-$\mathcal{G}$ תת-קבוצה של $A\times B$, שלכל שלכל x ב-A יש y יחיד ב-B המקיים $\langle x,y\rangle\in\mathcal{G}$. 128

3.2 הגדרה

תהי f פונקציה מ-A ל-B ויהיו $x\in A$ ו-$y\in B$ כך ש-$f(x)=y$, דהיינו הזוג הסדור $\langle x,y\rangle$ שייך לגרף של f. נאמר ש-y הוא ה**דמות** של x על ידי f ו-x הוא **מקור** של y על ידי f. 131

3.3 הגדרה

יהיו $f:A\to B$ $C\subseteq A$ ו-$D\subseteq B$. ה**תמונה** של C על ידי f (שתסומן $f[C]$) היא קבוצת הדמויות של איברי C על ידי f, דהיינו $\{f(x)|x\in C\}$.

ה**תמונה** ה**הפוכה** של D על ידי f (שתסומן $f^{-1}[D]$) היא קבוצת המקורות של איברי D על ידי f, דהיינו $\{x\in A|\,f(x)\in D\}$. 131

3.4 הגדרה

פונקציה $f : A \to B$ תיקרא **פונקציה מ-** A **על** B, או, בקיצור, **פונקציה על**, אם $\mathrm{Im}(f) = B$. 133

3.5 הגדרה

פונקציה $f : A \to B$ תיקרא **חד-חד-ערכית**, אם לכל שני איברים שונים ב-A יש דמויות שונות.

לשון אחר: f תיקרא חד-חד-ערכית אם מ-$f(x_1) = f(x_2)$ נובע $x_1 = x_2$. 135

3.6 משפט

הפונקציה $f : A \to B$ היא חד-חד-ערכית, אם ורק אם לכל C ו-D, החלקיות ל-A מתקיים $f[C \cap D] = f[C] \cap f[D]$. 136

3.7 משפט

פונקציה $f : A \to B$ היא חד-חד-ערכית ועל אם ורק אם לכל C החלקית ל-A $f[C]^c = f[C^c]$. 137

3.8 משפט

תהי $f : A \to B$ פונקציה.

א. f חד-חד-ערכית אם ורק אם לכל תת-קבוצה C של A $C = f^{-1}[f[C]]$.

ב. f היא על אם ורק אם לכל תת-קבוצה D של B $f[f^{-1}[D]] = D$. 138

3.9 משפט

אם A היא קבוצה סופית ו-$f : A \to B$ היא פונקציה חד-חד-ערכית, אז מספר איברי A אינו עולה על מספר איברי B. 138

3.10 משפט

אם A היא קבוצה סופית ו-B קבוצה כלשהי ו-f היא פונקציה מ-A על B, אז B סופית ומספר איברי B אינו עולה על מספר איברי A. 138

3.11 משפט

אם A ו-B הן קבוצות סופיות אז:

$|A| = |B|$ אם ורק אם יש פונקציה חד-חד-ערכית מ-A על B.

$|A| \le |B|$ אם ורק אם יש פונקציה חד-חד-ערכית מ-A ל-B.

$|A| \le |B|$ אם ורק אם יש פונקציה מ-B על A. 139

3.12 משפט

תהי A קבוצה לא ריקה ויהי $\equiv$ יחס שקילות על A. קיימות קבוצה B ופונקציה $f : A \to B$, כך ש-$\equiv = \equiv_f$. 141

3.13 הגדרה

פונקציה $f : A \to B$ תיקרא **פונקציה קבועה** אם יש לה ערך אחד ויחיד, דהיינו בתמונה של f יש רק איבר אחד. 141

3.14 הגדרה

יהיו B, A קבוצות לא ריקות כך ש-$B \subseteq A$. **פונקציית הזהות** מ-A ל-B היא הפונקציה $f : A \to B$, שלכל x ב-A $f(x) = x$. 142

3.15 הגדרה

יהיו $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות לא ריקות ותהי $A = \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} A_i$. לכל k מ-1 עד n **ההטלה** של A **על הרכיב** ה-k-י היא הפונקציה $\pi_k : A \to A_k$, שלכל $a = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ ב-A $\pi_k(a) = a_k$. 143

3.16 הגדרה

תהי U קבוצה לא ריקה. לכל תת-קבוצה A הפונקציה האופיינית של A ביחס ל-U היא הפונקציה $\chi_A : U \to \{0,1\}$, שלכל x ב-U מתקיים:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$ 143

3.17 הגדרה

יהיו C, B, A קבוצות לא ריקות, כך ש-$A \subseteq B$. יהיו $g : A \to C$ ו-$f : B \to C$ פונקציות, שלכל x ב-A $f(x) = g(x)$, בתנאים אלה אנו אומרים ש-g הוא צמצום של f ל-A, וש-f היא הרחבה של g ל-B. 145

3.18 הגדרה

יהיו $f : B \to C$ ו-$g : A \to B$ פונקציות. ההרכבה $f \circ g$ (קרי: ההרכבה של f על g) היא הפונקציה מ-A ל-C, המעתיקה כל x ב-A ל-$f(g(x))$. 148

3.19 משפט

הרכבת פונקציות היא קיבוצית, כלומר, אם h פונקציה מ-A ל-B, g פונקציה מ-B ל-C
ו- f פונקציה מ-C ל-D, אז ההרכבות $f\circ(g\circ h),(f\circ g)\circ h$ מוגדרות והן שוות. 150

3.20 טענה

יהיו B,A קבוצות לא ריקות. אם I_A היא פונקציית הזהות מ-A ל-A (דהיינו $\mathrm{I}_A:A\to A$
ולכל x ב-A $\mathrm{I}_A(x)=x$) ו-I_B היא פונקציית הזהות מ-B ל-B, ו- f היא פונקציה מ-A ל-
B, אז $f\circ\mathrm{I}_A$ ו- $\mathrm{I}_B\circ f$ שתיהן מוגדרות ושוות שתיהן ל- f. 151

3.21 משפט

יהיו $f:B\to C$, $g:A\to B$ פונקציות.

א. אם g,f חד-חד-ערכיות, אז גם $f\circ g$. חד-חד-ערכית.

ב. אם g,f הן פונקציות על, אז גם $f\circ g$. היא פונקציה על. 151

3.22 משפט

אם $f:B\to C,\ g:A\to B$ הן פונקציות, אז:

א. אם $f\circ g$ חד-חד-ערכית, אז g חד-חד-ערכית.

ב. אם $f\circ g$ על, אז f על. 152

3.23 הגדרה

תהי $f:A\to B$ פונקציה.

נאמר ש- f **מצטמצמת משמאל** אם לכל שתי פונקציות h,g מקבוצה מסוימת ל-A,
מ- $f\circ g=f\circ h$ מתחייב $g=h$.

נאמר ש- f **מצטמצמת מימין** אם לכל שתי פונקציות h,g מ-B לקבוצה מסוימת
מ- $g\circ f=h\circ f$ מתחייב $g=h$. 153

3.24 הגדרה

תהי $f:A\to B$ פונקציה חד-חד-ערכית ועל. **הפונקציה ההופכית** ל- f היא הפונקציה
$f^{-1}:B\to A$, כך שלכל b ב-B, $f^{-1}(b)$ הוא ה-a היחיד ב-A שעבורו $f(a)=b$. 154

3.25 משפט

אם $f:A\to B$ חד-חד-ערכית ועל, אז $f^{-1}:B\to A$ חד-חד-ערכית ועל, ו- $(f^{-1})^{-1}=f$. 155

משפט 3.26

אם $f : A \to B$ חד-חד-ערכית ועל, אז $f^{-1} \circ f = \mathrm{I}_A$ ו- $f \circ f^{-1} = \mathrm{I}_B$.

(כזכור, I_A היא פונקציית הזהות מ-A על A, כלומר, לכל x ב-A $\mathrm{I}_A(x) = x$). 155

משפט 3.27

יהיו $f : A \to B$ ו- $g : B \to A$, כך ש- $g \circ f = \mathrm{I}_A$ ו- $f \circ g = \mathrm{I}_B$. אז f ו- g שתיהן חד-חד-ערכיות ועל ו- $f^{-1} = g$ (וכמובן $g^{-1} = f$, לפי משפט 3.25). 156

משפט 3.28

אם $f : A \to B$ ו- $g : B \to C$ ושתיהן הפיכות, אז $f^{-1} \circ g^{-1}$ הופכית ל- $g \circ f$, ובפרט, $g \circ f$ ו- $f^{-1} \circ g^{-1}$ שתיהן הפיכות. 157

משפט 3.29

אם B, A קבוצות סופיות, כך ש-B אינה ריקה, אז גם הקבוצה B^A היא סופית, ו- $\left|B^A\right| = |B|^{|A|}$.

לשון אחר: מספר הפונקציות מ-A ל-B הוא מספר איברי B בחזקת מספר איברי A. 158

3.30 טענה

יהיו B, A קבוצות סופיות, שמספר האיברים בכל אחת מהן הוא n ($n > 0$). מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות מ-A ל-B הוא מכפלת המספרים מ-1 עד n (הסימון למכפלה זו הוא $n!$, קרי: n עצרת). 159

הגדרה 3.31

יהיו A קבוצה לא ריקה ויהי n מספר טבעי. **סדרה באורך** n של איברים מ-A היא פונקציה מ- $\{k \in \mathbf{N} | k < n\}$ ל-A. **סדרה אינסופית** של איברים מ-A היא פונקציה מ-$\mathbf{N}$ ל-A. סדרה באורך n, כאשר $n \in \mathbf{N}$, תיקרא **סדרה סופית**. 161

הגדרה 3.32

לכל מספר טבעי n תהי A_n קבוצה. **המכפלה הקרטזית** של כל ה-A_n-ים (מ-0 ואילך

בסדר הרגיל), שתסומן $\underset{n=0}{\overset{\infty}{\times}} A_n$ היא קבוצת הסדרות האינסופיות שבהן לכל n מותאם איבר

של A_n. 162

ניתן להכליל הגדרה זו ולדבר על מושג כללי יותר של מכפלות קרטזיות.

3.32* הגדרה

תהי Γ קבוצה כלשהי, ולכל i ב-Γ תהי A_i קבוצה. המכפלה הקרטזית של כל ה-A_i-ים, שתסומן $\underset{i\in\Gamma}{\times} A_i$ היא קבוצת הפונקציות מ-Γ ל-$\underset{i\in\Gamma}{\cup} A_i$, שבהן לכל i ב-Γ מותאם איבר של A_i

162

4.1 הגדרה

יהיו A ו-B קבוצות. אם קיימת פונקציה חד-חד-ערכית מ-A על B, נאמר ש-A **שקולה** ל-B, והסימון יהיה $A\sim B$. נאמר גם ש-A **שוות עוצמה** ל-B. 181

4.2 משפט

א. כל קבוצה שקולה לעצמה, דהיינו $A\sim A$.

ב. אם A שקולה ל-B, אז B שקולה ל-A., דהיינו: אם $A\sim B$, אז $B\sim A$.

ג. אם A שקולה ל-B ו-B שקולה ל-C, אז A שקולה ל-C.

($A\sim B \wedge B\sim C \Rightarrow A\sim C$). 181

4.3 הגדרה

קבוצה נקראת **בת-מנייה** אם היא סופית, או שהיא שקולה ל-$\mathbf{N}$. 183

4.4 משפט

$\mathbf{Z}$ - קבוצת המספרים השלמים ו-$\mathbf{Q}$ - קבוצת המספרים הרציונליים הן בנות-מנייה ועוצמת כל אחת מהן היא $\aleph_0$. 186

4.5 משפט

כל קבוצה, החלקית לקבוצה בת-מנייה היא בת-מנייה. 186

טענה 4.16

אם A היא בת-מנייה ואינסופית, אז $A\times A\sim A$. 201

טענה 4.17

לכל קבוצה A, $A^{\mathbf{N}}\times A^{\mathbf{N}}\sim A^{\mathbf{N}}$. 202

טענה 4.18

$\mathbf{R}\times\mathbf{R}\sim\mathbf{R}$. 202

טענה 4.9

אם $A\triangleleft B$, $C\sim A$ ו-$D\sim B$, אז $C\triangleleft D$. 203

הגדרה 4.20

במקרה זה נאמר גם ש-$|B|\geq|A|$ (קרי: עוצמת B גדולה או שווה לעוצמת A).
נאמר ש-$|A|\leq|B|$ (קרי: עוצמת A קטנה או שווה לעוצמת B) אם $A\triangleleft B$. 203

משפט 4.21

א. $|A|\leq|A|$ ($\leq$ הוא רפלקסיבי).
ב. $|A|\leq|B|\wedge|B|\leq|C|\Rightarrow|A|\leq|C|$ ($\leq$ הוא טרנזיטיבי). 204

הגדרה 4.22

נאמר ש-$|A|<|B|$ (קרי: עוצמת A קטנה מעוצמת B) אם $|A|\leq|B|$ אבל $|A|\neq|B|$.

במקרה זה נאמר גם ש-$|B|>|A|$ (קרי: עוצמת B גדולה מעוצמת A). 204

משפט 4.23

אם B,A סופיות, $|A|<|B|$ אם ורק אם יש פונקציה חד-חד-ערכית מ-A ל-B, שאינה על.

205

טענה 4.24

לכל קבוצה A מתקיים $|A|<\left|\{0,1\}^A\right|$. 205

משפט 4.25 (משפט קנטור)

לכל קבוצה A מתקיים $|A|<|\mathcal{P}(A)|$. 206

4.26 משפט (משפט קנטור, שרדר ברנשטיין)

אם λ ו-μ הן עוצמות כך ש-$\lambda \le \mu$ וגם $\mu \le \lambda$, אז $\lambda = \mu$.

לשון אחר: אם A ו-B הן קבוצות כך ש-$A \triangleleft B$ וגם $B \triangleleft A$, אז $A \sim B$. 207

4.27 מסקנה (כלל הסנדוויץ')

אם $A \subseteq B \subseteq C$ ו-$A \sim C$ (לשון אחר: $|A|=|C|$), אז $A \sim B$ ו-$B \sim C$

($|A|=|B|$ ו-$|B|=|C|$). 210

4.28 משפט

א. יהיו λ_2,λ_1 עוצמות. לא יתכן שגם $\lambda_1<\lambda_2$ וגם $\lambda_2<\lambda_1$.

ב. אם $\lambda_3,\lambda_2,\lambda_1$ הן עוצמות ו-$\lambda_1<\lambda_2$ ו-$\lambda_2<\lambda_3$, אז $\lambda_1<\lambda_3$. (טרנזיטיביות של $<$). 212

4.29 משפט

קיימות אינסוף עוצמות אינסופיות. 212

4.30 הגדרה

יהיו κ_2,κ_1 עוצמות. יהיו A_2,A_1 קבוצות **זרות זו לזו**, כך ש-$|A_1|=\kappa_1$ ו-$|A_2|=\kappa_2$.

הסכום $\kappa_1+\kappa_2$, דהיינו $|A_1|+|A_2|$ יוגדר כ-$|A_1\cup A_2|$. 214

4.31 (דוגמאות לחיבור עוצמות)

א. לכל עוצמה κ, $\kappa+0=\kappa$.

ב. $\aleph_0+1=\aleph_0$

ג. $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

ד. $\aleph+\aleph=\aleph$ 215

4.32 משפט

א. חיבור עוצמות הוא חילופי (קומוטטיבי), דהיינו: $\kappa_1+\kappa_2=\kappa_2+\kappa_1$.

ב. חיבור עוצמות הוא קיבוצי (אסוציאטיבי), דהיינו: $(\kappa_1+\kappa_2)+\kappa_3=\kappa_1+(\kappa_2+\kappa_3)$. 216

4.33 משפט

תהי κ עוצמה אינסופית. $\kappa+\aleph_0=\kappa$. 216

4.34 משפט

א. יהיו B, A קבוצות, כך ש-$A \subseteq B$ ו- $|B| = \aleph_0$. אם $A \setminus B$ אינסופית, אז $|A \setminus B| = |A|$.

ב. אם A קבוצה, שאינה בת-מנייה, $B \subseteq A$ ו- $|B| = \aleph_0$, אז $|A \setminus B| = |A|$. 216

4.35 משפט

יהיו $\lambda_2, \lambda_1, \kappa_2, \kappa_1$ עוצמות. אם $\kappa_1 \le \kappa_2$ ו- $\lambda_1 \le \lambda_2$, אז $\kappa_1 + \lambda_1 \le \kappa_2 + \lambda_2$. 217

4.36 הגדרה

יהיו λ, κ עוצמות. המכפלה של κ ב- λ, שתסומן $\kappa \cdot \lambda$ או בקיצור $\kappa\lambda$ תוגדר כך:

תהי A קבוצה שעוצמתה κ ותהי B קבוצה שעוצמתה λ.

$\kappa \cdot \lambda = |A| \cdot |B| = |A \times B|$. 219

4.37 טענה (דוגמאות לכפל עוצמות)

א. לכל עוצמה κ $\kappa \cdot 0 = 0$ ו- $\kappa \cdot 1 = \kappa$.

ב.. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

ג.. $\aleph \cdot \aleph = \aleph$ 219

4.38 משפט

א. כפל עוצמות הוא חילופי: $\kappa\lambda = \lambda\kappa$.

ב. כפל עוצמות הוא קיבוצי: $(\kappa\lambda)\mu = \kappa(\lambda\mu)$. 219

4.39 משפט (חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור).

אם μ, λ, κ הן עוצמות אז $\kappa(\lambda + \mu) = \kappa\lambda + \kappa\mu$. 220

440 הגדרה

יהיו λ, κ עוצמות . יהיו B, A קבוצות בעלות העוצמות λ, κ, בהתאמה. נגדיר את העוצמה λ^κ (קרי: λ בחזקת κ) כך: $\lambda^\kappa = |B|^{|A|} = |B^A|$ (העוצמה של קבוצת הפונקציות מ-A ל-B).

221

441 טענת עזר

אם $|C| = |A|$ ו- $|D| = |B|$, אז $|D^C| = |B^A|$. (אם $C \sim A$ ו-$D \sim B$, אז $D^C \sim B^A$) 221

4.42 משפט

לכל קבוצה A $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. לשון אחר: אם $|A| = \kappa$, אז $|\mathcal{P}(A)| = 2^{\kappa}$. 222

4.43 משפט

לכל עוצמה κ, $\kappa < 2^{\kappa}$. 222

4.44 משפט (תכונות של העלאה בחזקה)

יהיו $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ עוצמות.

א. $(\kappa_1 \cdot \kappa_2)^{\kappa_3} = \kappa_1^{\kappa_3} \cdot \kappa_2^{\kappa_3}$.

ב. $\kappa_1^{\kappa_2+\kappa_3} = \kappa_1^{\kappa_2} \cdot \kappa_1^{\kappa_3}$.

ג. $\kappa_1^{\kappa_2 \cdot \kappa_3} = (\kappa_1^{\kappa_2})^{\kappa_3}$. 222

4.45 טענה

$\aleph^{\aleph_0} = \aleph$. 224