תשובה 1

א. $a_0 = 1$: הסדרה הריקה היא "ריצוף באורך 0" !

$a_1 = 2$: ברור.

$a_2 = 7$: מרצפת אחת באורך 2 : שלוש אפשרויות (אדום, ירוק, סגול),

שתי מרצפות באורך 1 : ארבע אפשרויות (שחור-שחור, לבן-לבן, שחור-לבן, לבן-שחור).

יחס הנסיגה: נתבונן בריצוף באורך n :

(i) אם הוא מסתיים במרצפת באורך 1 (2 אפשרויות) אז לפני מרצפת זו יכול לבוא כל ריצוף באורך $n-1$. כלומר אפשרות זו תורמת $2a_{n-1}$.

(ii) אם הוא מסתיים במרצפת באורך 2 (3 אפשרויות) אז לפני מרצפת זו יכול לבוא כל ריצוף באורך $n-2$. כלומר אפשרות זו תורמת $3a_{n-2}$.

קיבלנו $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$.

בדיקה עבור הערכים שמצאנו : $7 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1$.

ב. קיבלנו יחס נסיגה ליניארי. המשוואה האפיינית היא $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$.

פתרונותיה : $\lambda = 3, -1$.

לכן פתרון יחס הנסיגה הוא מהצורה : $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-1)^n$ (*).

את A,B נמצא מתנאי ההתחלה:

$$a_0 : \quad 1 = A \cdot 3^0 + B \cdot (-1)^0 = A + B$$

$$a_1 : \quad 2 = A \cdot 3^1 + B(-1)^1 = 3A - B$$

נחבר את שתי המשוואות אגף-אגף : $3 = 4A$, כלומר $A = 3/4$.

בהצבה נקבל $B = 1/4$.

נציב בנוסחה (*) :
$$a_n = \frac{3}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4} \cdot (-1)^n = \frac{1}{4}(3^{n+1} + (-1)^n)$$

ג. משימוש חוזר ביחס הנסיגה, $a_3 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 20$, $a_4 = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 7 = 61$.

ומהנוסחה המפורשת : $a_4 = \frac{1}{4}(3^5 + (-1)^4) = 61$.

תשובה 2

כמו בפתרון שאלה 4 בממ"ן 15, נניח שהמשתנים הזוגיים הם 3 הראשונים, ונכפול את התוצאה שנקבל ב- $\binom{6}{3} = 20$.

מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$ תחת האילוצים הנתונים בשאלה הוא המקדם של x^{29} בפיתוח הפונקציה $f(x) = (x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^3(x^3 + x^5 + x^7 + \ldots)^3$.

בסוגריים השמאליים נוציא גורם משותף x^2 , שלאחר העלאה בחזקת 3 נותן x^6 .

בסוגריים הימניים נוציא גורם משותף x^3 , שלאחר העלאה בחזקת 3 נותן x^9 .

קיבלנו

$$f(x) = x^6(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^3 \cdot x^9(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^3$$
$$= x^{15}(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^6$$

המקדם של x^{29} בפונקציה זו הוא המקדם של x^{14} בפונקציה $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^6$.

בהצבת $y = x^2$, זהו המקדם של y^7 בפונקציה $(1 + y + y^2 + y^3 + \ldots)^6$.

לפי נוסחה *(iii)* שבסוף הממ"ן, המקדם הזה הוא $D(6,7) = \binom{12}{5} = 792$.

כאמור בתחילת הפתרון, את זה עלינו לכפול ב- 20 . תשובה סופית: $792 \cdot 20 = 15{,}840$.

תשובה 3

הפונקציה היא: $f(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^9)^4$

בעזרת הנוסחה לטור הנדסי סופי (נוסחה *(i)* בסוף הממ"ן) נקבל

$$= \left(\frac{1 - x^{10}}{1 - x}\right)^4 = \left(\frac{1}{1 - x}\right)^4 \cdot (1 - x^{10})^4$$

קיבלנו מכפלה, נפתח כל אחד מהגורמים. את הגורם השמאלי בעזרת נוסחה *(iii)* שבסוף הממ"ן. את הגורם הימני בעזרת נוסחת הבינום.

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} D(4,i)x^i\right) \cdot \left(1 - 4 \cdot x^{10} + \binom{4}{2}x^{20} - \binom{4}{3}x^{30} + x^{40}\right)$$

המקדם של x^{20} במכפלה הוא סכום גורמים שהמעריכים שלהם מסתכמים ל- 20 (ר' נוסחה *ii* בסוף הממ"ן), כלומר

$$D(4,20) - 4D(4,10) + 6D(4,0) = \binom{23}{3} - 4\binom{13}{3} + 6\binom{3}{3} = 1{,}771 - 4 \cdot 286 + 6 = 633$$

תשובה 4

באגף שמאל של הזהות האלגברית הנתונה מופיעה מכפלה של שתי פונקציות. נחשב את המקדם של x^i בכל אחת מהפונקציות, וניעזר בנוסחה (ii) שנתונה בסוף הממ"ן כדי לקשר בין מקדמים אלה למקדם של x^n באגף ימין.

מנוסחת הבינום, $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$. בעזרת התאפסות המקדמים הבינומיים במקרים חריגים ("קומבינטוריקה" עמ' 30) ניתן להמשיך את הסכום כך:

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i \qquad (*)$$

בהצבת $(-x)$ במקום x בנוסחה זו נקבל:

$$(1-x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n}{i} x^i \qquad (**)$$

בהצבת x^2 במקום x בנוסחה $(**)$ נקבל:

$$(1-x^2)^n = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n}{i} x^{2i} = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i}\, x^{2i} \qquad (***)$$

כאשר אנו מסמנים: $c_{2i} = (-1)^i \binom{n}{i}$. קיבלנו פיתוח שבו מופיעות רק חזקות זוגיות של x.

אם נרצה, נוכל להגדיר $c_{2i+1} = 0$ לכל i.

בפרט, עבור $m = 2b$,

$$c_m = (-1)^b \binom{n}{b}.$$

כעת מנוסחאות $(*)$, $(**)$, בעזרת נוסחה (ii) לפיתוח מכפלה, המופיעה בממ"ן, נקבל שהמקדם של x^m הוא:

$$c_m = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{n}{i} \cdot \binom{n}{m-i}$$

מכיוון ש- m זוגי, אפשר לרשום $(-1)^i$ במקום $(-1)^{m-i}$.

נציב $m = 2b$, נשווה זאת עם הביטוי עבור c_m למעלה ונקבל את הזהות המבוקשת:

$$\sum_{i=0}^{2b} (-1)^i \binom{n}{i} \cdot \binom{n}{2b-i} = (-1)^b \binom{n}{b}$$

בבדיקה עבור $n=3$, $m=4$ $(b=2)$ מקבלים ששני האגפים שווים 3.

איתי הראבן