

קורס: 20416 "תורת ההסתברות"

תאריך הבחינה: 26.7.2007 (סמסטר ב 2007 - מועד 5א/94)

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

(לבחינה מצורפת טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית.)

שאלה 1 (25 נקודות)

המלכה נשאת של מחלת ההמופיליה בהסתברות 0.5 (ואחרת אינה נשאת ואינה חולה) ואילו המלך אינו לוקה במחלה ואינו נשא שלה*.

כמו כן, נניח שבכל לידה, נולד למלכה בן זכר בהסתברות 0.5.

כעת, אם המלכה נשאת –

כל נסיך שייוולד לה יהיה חולה בהסתברות 0.5;

כל נסיכה שתיוולד לא תחלה במחלה.

נניח גם, שבהינתן מצבה הרפואי של האם ('לא נשאת' או 'נשאת'), אין תלות בין לידות שונות שלה.

6 נק' א. מהי ההסתברות שבלידה מקרית, ייוולד למלכה נסיך (זכר) חולה?

6 נק' ב. נניח שלמלכה נולדו 3 ילדים (נסיכים או נסיכות).

מהי ההסתברות שבדיוק אחד מהם חולה?

6 נק' ג. אם המלכה ילדה 2 נסיכים (זכרים) שאינם לוקים במחלה, מהי ההסתברות שהיא נשאת?

7 נק' ד. אם המלכה ילדה 2 נסיכים (זכרים) שאינם לוקים במחלה, מהי ההסתברות שהילד השלישי שתלד יהיה חולה?

* הערה: גברים אינם יכולים להיות נשאים של מחלת ההמופיליה, מכיוון שמחלה נישאת על כרומוזום X בלבד. כלומר, כאשר לגבר יש כרומוזום X הנושא את המחלה, הוא בהכרח חולה. (אישה יכולה להיות נשאת, כאשר יש לה כרומוזום X אחד בדיוק הנושא את המחלה).

שאלה 2 (25 נקודות)

בארון 5 חליפות בגדים: אדומה, ירוקה, צהובה, כחולה ושחורה.

כל חליפה כוללת חולצה ומכנסיים (באותו הצבע).

בוחרים באקראי מהארון 2 חולצות ו-2 זוגות מכנסיים (לאו דווקא השייכים לאותן החליפות).

נגדיר את המשתנים המקריים: X = מספר החליפות השלמות שנבחרו

Y = מספר הפריטים האדומים שנבחרו

14 נק' א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .

5 נק' ב. האם המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-תלויים? נמק את תשובתך.

6 נק' ג. מתוך 4 הפריטים שנבחרו באקראי מהארון, בוחרים באקראי חולצה אחת וזוג מכנסיים אחד.

אם ידוע ש- $Y=2$ עבור 4 הפריטים שנבחרו, מהי ההסתברות ששני הפריטים שנבחרו

מתוכם מהווים חליפה, כלומר הם מאותו הצבע?

שאלה 3 (25 נקודות)

נתון לוח משובץ בגודל 5×5 , כלומר, לוח שבו 5 שורות ובכל שורה 5 משבצות.

א. על כל משבצת בלוח כותבים באקראי את אחת מהספרות 0 או 1.

(6 נק') 1. מהי ההסתברות שלפחות בשורה אחת סכום הספרות יהיה בדיוק 3?

(6 נק') 2. מהי שונות מספר השורות בלוח שסכום הספרות בהן הוא בדיוק 3?

ב. מפזרים באקראי על משבצות הלוח 25 דסקיות (דסקית אחת על כל משבצת).

על 10 מהדסקיות רשומה הספרה 1 ועל 15 הדסקיות האחרות רשומה הספרה 0.

(6 נק') 1. מהי ההסתברות שבכל השורות יתקבל בדיוק אותו סכום של הספרות?

(7 נק') 2. מהי ההסתברות שלפחות בשורה אחת סכום הספרות יהיה בדיוק 3?

שאלה 4 (25 נקודות)

פונקציית הצפיפות המשותפת של המשתנים המקריים X ו- Y נתונה על ידי:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , \quad 0 \leq x < 1 ; 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{1}{6} & , \quad 1 \leq x < 2 ; 0 \leq y \leq 2 \\ \frac{1}{9} & , \quad 2 \leq x \leq 3 ; 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

(6 נק') א. צייר את התחום שבו הפונקציה הנתונה חיובית, והראה שהיא אכן פונקציית צפיפות משותפת.

(12 נק') ב. מצא את פונקציות הצפיפות השוליות של X ושל Y .

(7 נק') ג. חשב את $P\{X < Y\}$.

שאלה 5 (25 נקודות)

מטילים מטבע תקין עד שלראשונה מתקבל H. יהי N מספר ההטלות המטבע שנעשו.

לאחר מכן, מטילים קובייה תקינה N פעמים.

נסמן ב- X_i , לכל $i = 1, 2, \dots, N$, את התוצאה שהתקבלה בהטלת הקובייה ה- i -ית.

$$S = \sum_{i=1}^N X_i \quad \text{נגדיר}$$

(6 נק') א. חשב את התוחלת של S .

(7 נק') ב. חשב את השונות של S .

(6 נק') ג. חשב את $P\{S = 4 \mid N \text{ זוגי}\}$.

(6 נק') ד. חשב קירוב ל- $P\{S = 170 \mid N = 50\}$.

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(x)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
x	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(x)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
x	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326