תשובה 1

א. נכון. ההוכחה אנלוגית לגמרי, צעד-צעד, להוכחת סעיף 2 בשאלה 2.1 , עמ׳ 31 בספר.
שימו לב שהטענה שלנו **אינה מסקנה** משאלה 2.1 הנ״ל, כי מכפלה קרטזית אינה חילופית.

ב. לא נכון, ודי ברור מראש שזו אינה זהות כללית. למשל: $A = B = C = \{1\}$.
אז $(A \times B) \cap C = \varnothing$, בעוד ש- $(A \cap C) \times (B \cap C) = \{(1,1)\}$.

תשובה 2

א. נרשום סדרה של תנאים שקולים (שני תנאים, כלומר טענות, א׳, ב׳, נקראים **שקולים** אם מתוך א׳ נובע ב׳ ומתוך ב׳ נובע א׳ . במלים אחרות, ״ א׳ **אם ורק אם** ב׳ ״ . ובקיצור: ״ א׳ **אםם** ב׳ ״).

נתחיל מ- $(x,y) \in (R')^{-1}$.

לפי הגדרת יחס הפוך, זה שקול ל- $(y,x) \in R'$.

לפי הגדרת משלים של קבוצה, זה שקול ל- $(y,x) \notin R$.

וזה שקול ל- $(x,y) \notin R^{-1}$

מדוע המעבר האחרון תקף? כללית מהגדרת יחס הפוך,
$(y,x) \in R$ שקול ל- $(x,y) \in R^{-1}$;
מכאן נסיק כללית ש- $(y,x) \notin R$ שקול ל- $(x,y) \notin R^{-1}$.
אנו מסתמכים על כך שאם **א שקול ל- ב** אז **לא- א שקול ל- לא- ב**.
קל להראות זאת בדרך השלילה, כאשר נזכור ש- ״א שקול ל-ב״ פירושו:
״אם א אז ב , ואם ב אז א״.

נמשיך את הפיתוח -
לפי הגדרת משלים של קבוצה, התנאי הקודם שקול ל- $(x,y) \in (R^{-1})'$.

קיבלנו: $(x,y) \in (R')^{-1}$ **אםם** $(x,y) \in (R^{-1})'$. משמע $(R')^{-1} = (R^{-1})'$.

ב. התשובה היא 1.

הוכחה: נתון ש- R סימטרי, כלומר לפי הגדרת יחס סימטרי נתון $R^{-1} = R$.

עלינו להראות ש- R' סימטרי, כלומר עלינו להראות ש- $(R')^{-1} = R'$.

לפי סעיף א בשאלה זו, $(R')^{-1} = (R^{-1})'$.

כאמור, $R^{-1} = R$. קיבלנו אפוא $(R')^{-1} = R'$, כמבוקש.

ג. התשובה היא 3.

המשלים של יחס אנטי-סימטרי אינו חייב להיות סימטרי:

למשל, היחס $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ מעל $A=\{1,2\}$ הוא אנטי-סימטרי.

המשלים שלו אינו סימטרי, כי הוא מכיל את $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ולא את $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

המשלים של יחס אנטי-סימטרי גם אינו חייב להיות אנטי-סימטרי:

היחס הריק מעל $A=\{1,2\}$ הוא אנטי-סימטרי.

המשלים שלו אינו אנטי-סימטרי, כי הוא מכיל את $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ וגם את $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

ד. התשובה היא 1.

מהנתון נובע (למעשה זהו תנאי שקול לנתון) ש- R' הוא רפלקסיבי.

בעמ' 48 בספר, מיד אחרי הגדרת רפלקסיביות מוכח שיחס רפלקסיבי מוכל בריבוע של עצמו.

משמע טענה 1 נכונה.

כדי להשלים את התשובה יש להראות שטענות 2, 3 אינן נכונות.

די לתת דוגמא נגדית לטענה 2, דוגמא כזו היא בהכרח גם דוגמא נגדית לטענה 3.

יהי $R=\left\{\begin{matrix}1&2&3&1&2&3\\1&2&3&2&3&1\end{matrix}\right\}$ מעל $A=\{1,2,3\}$. מתקיים $R\cap I_A=\varnothing$,

אבל $R'=\left\{\begin{matrix}2&3&1\\1&2&3\end{matrix}\right\}$, ובדיקה מראה ש- $(R')^2$ אינו מוכל ב- R' (מדוע? השלימו).

תשובה 3

א. יחס (הכוונה תמיד ליחס דו-מקומי) מעל A הוא קבוצה חלקית של $A\times A$.

קבוצת כל היחסים מעל A היא אפוא $P(A\times A)$.

לפי נוסחה באמצע עמוד 30 בספר, $|A\times A|=k^2$.

לפי שאלה 1.7 בעמ' 9 בספר, $|P(A\times A)|=2^{k^2}$.

ב. תהי $A=\{1,2\}$ ויהי $R=\{(1,2)\,,(2,1)\}$ יחס מעל A.

חישוב ישיר נותן: $R^2=\{(1,1)\,,(2,2)\}=I_A$,

$R^3=R^2R=I_AR=R$, $R^4=R^3R=RR=R^2=I_A$

קל לראות (הוכחה פורמלית: באינדוקציה), שכל החזקות הזוגיות החיוביות של R שוות ליחס הזהות, וכל החזקות האי-זוגיות של R שוות ל- R. במלים אחרות, לכל n טבעי חיובי

$R^{2n} = I_A$, $R^{2n+1} = R$.

מכאן שאף שתי חזקות עוקבות של R אינן שוות זו לזו.

ג. יהי $|A| = k$. בסעיף א ראינו שמספר היחסים מעל A הוא סופי, ושווה 2^{k^2}.
נקרא למספר זה m.
יהי R יחס שכל חזקה שלו שונה מכל הקודמות לה.
נתבונן ביחסים $R, R^2, R^3, \ldots, R^{m+1}$.
שים לב שלא רק R^{m+1} שונה מכל הקודמים לו, אלא **כל היחסים האלה שונים כולם זה מזה**,
כי לפי ההנחה **כל אחד מהם** שונה מכל הקודמים לו (נניח בשלילה $R^p = R^q$ כאשר $1 \le p \le m+1$, $1 \le q \le m+1$, $p \ne q$. ב.ה.כ. נניח $p < q$. ההנחה $R^p = R^q$ היא בסתירה לנתון ש- R^q שונה מכל היחסים R^i, עבור $i < q$. לכן לא ייתכן ש- $R^p = R^q$).
קיבלנו אפוא $m+1$ יחסים שונים מעל A, בסתירה לכך שיש רק m יחסים מעל A.
לכן לא קיים R כזה.

ד. נקח $A = \mathbf{N}$, ויהי $R = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), \ldots\}$ יחס מעל $\mathbf{N}$.
קל להראות (הראו זאת באינדוקציה) כי לכל n טבעי, $(0, n+1) \in R^{n+1}$,
ובנוסף $(0, n+1)$ אינו איבר באף אחד מהיחסים R^i, עבור $1 \le i < n$.
לכן R^{n+1} שונה מכל החזקות של R הקודמות לו, כמבוקש.
למעשה, לא קשה לראות ש- R הוא הפונקציה $j \to j+1$,
ולכל n טבעי חיובי, R^n הוא הפונקציה $j \to j+n$.
הפונקציות הללו, עבור ערכים שונים של n, שונות זו מזו.

תשובה 4

א. נסמן $B = Domain(R) \cup Range(R)$.
מכיוון ש- $Domain(R)$, $Range(R)$ הן קבוצות חלקיות ל- A, מובן כי $B \subseteq A$.
נראה כעת כי $S \subseteq B \times B$:
S הוא הסגור הסימטרי של R, ולפי שאלה 2.34ב בעמ' 55 בספר, $S = R \cup R^{-1}$.

קל לראות (הראו זאת!) שהתחום של איחוד שני יחסים הוא איחוד התחומים שלהם, והטווח של איחוד שני יחסים הוא איחוד הטווחים שלהם.

לכן $Domain(S) = Domain(R) \cup Domain(R^{-1})$,

$Range(S) = Range(R) \cup Range(R^{-1})$.

מכאן בעזרת שאלה 2.6ב בעמ' 36 בספר, נקבל:

$Domain(S) = Domain(R) \cup Range(R) = B$

$Range(S) = Range(R) \cup Domain(R) = B$.

הראינו שהתחום והטווח של S שניהם שווים B. לפיכך $S \subseteq B \times B$.

נראה כעת ש- S הוא יחס שקילות מעל B.

מהנתון, S הוא יחס סימטרי וטרנזיטיבי מעל A.

תכונות אלה נשארות בעינן כאשר אנו רואים את S כיחס מעל B (השלימו הוכחת טענה זו).

נוכיח ש- S הוא רפלקסיבי מעל B:

יהי $x \in B$, נוכיח ש- $(x,x) \in S$.

מהגדרת B, $x \in B$ פירושו $x \in Domain(R)$ או $x \in Range(R)$.

אם $x \in Domain(R)$, משמע מהגדרת תחום וטווח, שקיים $y \in Range(R)$

כך ש- $(x,y) \in R$.

מהגדרת יחס הפוך, $(y,x) \in R^{-1}$.

בפרט, (x,y), $(y,x) \in S$ שניהם.

נתון ש- S טרנזיטיבי, ומכאן $(x,x) \in S$.

ההוכחה במקרה ש- $x \in Range(R)$ דומה לגמרי - השלימו.

הראינו ש- S רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי מעל B, כלומר הוא יחס שקילות מעל B.

ב. בסימוני סעיף א:

$B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$S = R \cup R^{-1} = I_B \cup \{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(3,5),(5,3)\}$

מחלקות השקילות הן: $\{7\}$, $\{6\}$, $\{3,4,5\}$, $\{1,2\}$.

איתי הראבן