פתרונות לממ"ן 11 - 2019ב - 20425

1. נגדיר את המאורעות: A = לתושב הנבחר יש לפחות כלב אחד

$B \subseteq A$ = לתושב הנבחר יש לפחות שני כלבים

C = לתושב הנבחר יש לפחות חתול אחד

$D \subseteq C$ = לתושב הנבחר יש לפחות שני חתולים

המאורעות הבסיסיים המוגדרים לעיל, מציינים את הפרמטרים שנבדקו אצל התושבים, וכל אחד מהם מתקיים או לא מתקיים לגבי כל אחד מהתושבים. את כל המאורעות האחרים, המוגדרים בבעיה, אפשר לבטא באמצעות מאורעות אלו, לכן אין צורך בהגדרת מאורעות בסיסיים נוספים.

הנתונים הם:

$P(A\cup C) = 0.45 \quad \Rightarrow \quad P(A^C\cap C^C) = 1-0.45 = 0.55$

$P(A^C) = 0.7 \quad \Rightarrow \quad P(A) = 1-0.7 = 0.3$

$P(B) = 0.09$

$P(C) = 0.25 \quad \Rightarrow \quad P(A\cap C) = P(A)+P(C)-P(A\cup C) = 0.3+0.25-0.45 = 0.1$

$$P(C\cap D^C \mid C) = \frac{P(D^C\cap C)}{P(C)} = \frac{P(C)-P(C\cap D)}{P(C)} = \frac{0.25-P(C\cap D)}{0.25} = 0.76$$

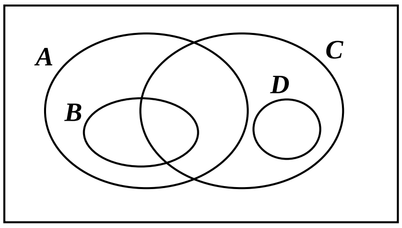
$\Rightarrow \quad P(C\cap D) = P(D) = 0.06 \qquad [\, D\subseteq C \,]$

$P(D\mid A) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(A\cap D) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(B\cap D) = 0 \qquad [\, B\subseteq A \,]$

$P(C\cap D^C\cap B) = P(C\cap B) = 0.02$ [$B\cap D=\varnothing$ לכן $B\subseteq D^C$]

$\Rightarrow \quad P(B\cap C^C) = P(B)-P(B\cap C) = 0.09-0.02 = 0.07$

נתאר תחילה את הצורה הכללית של דיאגרמת ון שמתאימה לבעיה. מכיוון שמתקיימות ההכלות: $B\subseteq A$ ו- $D\subseteq C$ וכן המאורע D זר למאורע A (ולכן גם למאורע B), מתקבלת דיאגרמה שבה ארבעת מאורעות, כדלקמן:

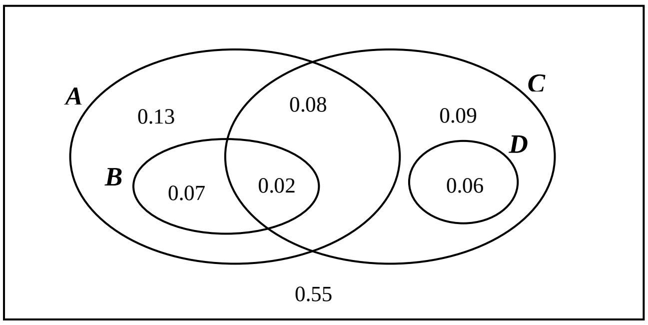


כעת, נסיים לחשב את ההסתברויות המתאימות לשטחי הדיאגרמה:

$P(A\cap C\cap B^C) = P(A\cap C)-P(A\cap C\cap B) = 0.1-0.02 = 0.08$

$P(A\cap C^C\cap B^C) = 0.3-0.1-0.07 = 0.13$

$P(C\cap A^C\cap D^C) = 0.25-0.1-0.06 = 0.09$



ב. $P(A \cap B^C \cap C \cap D^C) = 0.08$

ג. $P(A \cup C) - P(A \cap C^C \cap B^C) - P(C \cap A^C \cap D^C) = 0.45 - 0.13 - 0.09 = 0.23$

ד. $$P(B \mid C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{0.02}{0.25} = 0.08$$

ה. $$P(A \cap C \mid \text{יותר מבע"ח אחד}) = \frac{P(A \cap C)}{0.23} = \frac{0.1}{0.23} = 0.4348$$

2. א. נסמן ב- A_i את המאורע שמתג i סגור (ויכול לעבור בו זרם), לכל $i = 1,2,3,4,5,6$. לפי הנתונים :

מתגים 1, 2 ו-3 בלתי-תלויים בינם לבין עצמם וגם בלתי-תלויים במתגים 4, 5 ו-6 ;

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0.6 \qquad ; \qquad P(A_4) = 0.9$$

$$P(A_5 \cup A_6 \mid A_4) = 0.8 \qquad \Rightarrow \qquad P(A_5^C \cap A_6^C \mid A_4) = 0.2$$

$$P(A_4^C \cup A_6^C \mid A_5^C) = 0.3$$

נסמן ב-B את המאורע שעובר זרם מ-A ל-B, ונחשב את הסתברותו :

$$P(B) = P((A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup (A_4 \cap (A_5 \cup A_6)))$$

$$= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) + P(A_4 \cap (A_5 \cup A_6)) - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)P(A_4 \cap (A_5 \cup A_6))$$ [אי-תלות בין הענפים]

כעת :
$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C)$$

$$= 1 - P(A_1^C)P(A_2^C)P(A_3^C) = 1 - 0.4^3 = 0.936$$ [אי-תלות בין מתגים 1, 2 ו-3]

$$P(A_4 \cap (A_5 \cup A_6)) = P(A_5 \cup A_6 \mid A_4)P(A_4) = 0.8 \cdot 0.9 = 0.72$$ [נוסחת הכפל]

לכן :
$$P(B) = 0.936 + 0.72 - 0.936 \cdot 0.72 = 0.98208$$

ב. $$P(B^C \mid A_5^C) = \frac{P(B^C \cap A_5^C)}{P(A_5^C)} = \frac{P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap (A_4^C \cup A_6^C) \cap A_5^C)}{P(A_5^C)}$$

$$= \frac{P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C)P((A_4^C \cup A_6^C) \cap A_5^C)}{P(A_5^C)}$$ [אי-תלות בין הענפים]

$$= P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C) \cdot \frac{P((A_4^C \cup A_6^C) \cap A_5^C)}{P(A_5^C)}$$

$$= P(A_1^C)P(A_2^C)P(A_3^C)P(A_4^C \cup A_6^C \mid A_5^C)$$ [אי-תלות בין מתגים 1, 2 ו-3 והגדרת ההסתברות המותנית]

$$= 0.4^3 \cdot 0.3 = 0.0192$$

ג. נראה שההסתברות המותנית של B בהינתן A_4^C שונה מההסתברות של B :

$$P(B \mid A_4^C) = \frac{P((A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4^C)}{P(A_4^C)} = \frac{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)\, \cancel{P(A_4^C)}}{\cancel{P(A_4^C)}}$$ [מתגים 1, 2 ו-3 בלתי-תלויים במתג 4]

$$= 1 - P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C) = 1 - 0.4^3 = 0.936$$ [מתגים 1, 2 ו-3 בלתי-תלויים זה בזה]

ואילו :
$$P(B) = 0.98208$$

לכן, תנאי אי-התלות לא מתקיים ושני המאורעות תלויים זה בזה.

3. א. מספר אפשרויות החלוקה לזוגות (בלי חשיבות לסדר הזוגות) הוא $2,027,025 = \frac{\frac{16!}{2^8}}{8!} = \frac{\binom{16}{2,\ldots,2}}{8!}$.

כעת, נמנה את מספר החלוקות שיש בהן בדיוק שני זוגות מעורבים. יש $784 = \binom{8}{2}^2$ אפשרויות לבחור 2 בנים ו-2 בנות ו-!2 אפשרויות ליצור מהם זוגות מעורבים. לאחר יצירת הזוגות המעורבים, יש $225 = \left(\frac{\binom{6}{2,2,2}}{3!}\right)^2$ אפשרויות ליצור זוגות לא-מעורבים מהבנים והבנות שנותרו. לכן ההסתברות היא:

$$\frac{784 \cdot 2! \cdot 225}{2,027,025} = 0.17405$$

ב. נסמן ב-A את המאורע שנוצרו בדיוק 2 זוגות מעורבים וב-B את המאורע שאהוד ואפרת לא באותו הזוג.

עלינו לחשב את ההסתברות המותנית $P(B|A)$, אולם קל יותר לחשב את ההסתברות המשלימה לה, דהיינו את $P(B^C|A)$.

מקבלים: $$P(B^C \mid A) = \frac{n(A \cap B^C)}{n(A)} = \frac{7^2 \cdot \cancel{225}}{\binom{8}{2}^2 \cdot 2! \cdot \cancel{225}} = \frac{49}{1,568} = 0.03125$$

כלומר: $$P(B \mid A) = 1 - P(B^C \mid A) = 1 - 0.03125 = 0.96875$$

הסבר: בחישוב $n(A \cap B^C)$ אנו מונים את מספר החלוקות שיש בהן בדיוק שני זוגות מעורבים ואחד מהזוגות הללו מורכב מאהוד ואפרת. יש 7^2 אפשרויות לבחור זוג מעורב נוסף (שאינו אהוד ואפרת). לאחר יצירת שני הזוגות המעורבים, יש $225 = \left(\frac{\binom{6}{2,2,2}}{3!}\right)^2$ אפשרויות ליצור זוגות לא-מעורבים מהבנים והבנות שנותרו. לכן, $n(A \cap B^C) = 49 \cdot 225$.

הערה: אפשר לראות שבחישוב ההסתברות יכולנו להתייחס אך ורק לבחירת התלמידים שמרכיבים את הזוגות המעורבים. כלומר, אפשר היה "להתעלם" מהחלוקה של הזוגות הלא-מעורבים.

ג. נסמן ב-C את המאורע שאפרת נבחרת וב-D את המאורע שאהוד נבחר.

המאורע $C \cap D^C$ מתרחש אם אפרת נבחרת ואהוד אינו נבחר. כלומר, אם נבחרים עוד 4 תלמידים מבין אלה שאינם אפרת או אהוד. באופן דומה, המאורע C מתרחש אם אפרת נבחרת ונבחרים עוד 4 תלמידים מבין 15 הנותרים.

לפיכך: $$P(D^C \mid C) = \frac{n(C \cap D^C)}{n(A)} = \frac{\binom{14}{4}}{\binom{15}{4}} = \frac{11}{15} = 0.7\bar{3}$$

4. א. מכיוון שבכל תא יש מספר קטן יותר של כדורים מאשר בתא שאחריו, מספר אפשרויות הפיזור הוא כמספר האפשרויות לבחור 10 מספרים שונים מתוך הקבוצה $\{0,1,2,\ldots,20\}$. כלומר, מספר אפשרויות הפיזור הוא $352,716 = \binom{21}{10}$.

ב. אם בתא 7 יש בדיוק 15 כדורים, אז בתאים 1 עד 6 יש פחות מ-15 כדורים (בין 0 ל-14 כדורים) ובתאים 8 עד 10 יש יותר מ-15 כדורים (בין 16 ל-20 כדורים). לכן, ההסתברות המבוקשת היא:

$$\frac{\binom{15}{6}\binom{5}{3}}{\binom{21}{10}} = \frac{50,050}{352,716} = 0.1419$$

ג. נסמן ב- n_i את מספר הכדורים בתא i , לכל $i = 1,2,\ldots,10$. נקבל:

$$P\{n_1 + n_2 = 4 \mid n_{10} = 15\} = \frac{P\{n_1 = 0, n_2 = 4, n_{10} = 15\} + P\{n_1 = 1, n_2 = 3, n_{10} = 15\}}{P\{n_{10} = 15\}}$$

$$= \frac{\binom{10}{7}+\binom{11}{7}}{\binom{15}{9}} = \frac{450}{5{,}005} = 0.08991$$

5. א. המאורעות B ו- C בלתי-תלויים בתנאי A והמאורעות A ו- B בלתי-תלויים. לכן:

$$P(B \cap C \mid A) = P(B \mid A)P(C \mid A) = P(B)P(C \mid A) = P(B) \cdot \tfrac{P(C \cap A)}{P(A)} = 0.5 \cdot \tfrac{0.4}{0.8} = 0.25$$

$\Leftarrow$ $$P(B \cap C \cap A) = P(B \cap C \mid A)P(A) = 0.25 \cdot 0.8 = 0.2$$

$\Leftarrow$ $$P(B \cap C) = P(B \cap C \cap A) + P(B \cap C \cap A^C) = 0.2 + 0.05 = 0.25$$

$\Leftarrow$ $$P(B^C \cap C) = P(C) - P(B \cap C) = 0.5 - 0.25 = 0.25$$

ב. $$P(B \cup C \mid A) = P(B \mid A) + P(C \mid A) - P(B \cap C \mid A) = 0.5 + \tfrac{0.4}{0.8} - 0.25 = 0.75$$

ג. מתקיים:

$$P(B \cap C \cap A) = P(A)P(B)P(C) = 0.2$$

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ [נתון]

$$P(A \cap C) = P(A)P(C) = 0.4$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C) = 0.25$$

לכן, שלושת המאורעות בלתי-תלויים זה בזה.