פתרונות לממ"ן 14 - 2013א - 20425

1. א. הפונקציה $f_1(x)$ איננה פונקציית צפיפות, מכיוון שבקטע $(0,1)$ היא מקבלת ערכים שליליים.

הפונקציה $f_2(x)$ איננה פונקציית צפיפות, מכיוון שהשטח הכלוא תחתיה שווה ל-2 ולא ל-1.

הפונקציה $f_3(x)$ היא פונקציית צפיפות, מכיוון שהיא אי-שלילית והשטח הכלוא תחתיה שווה ל-1.

$$\int_1^\infty f_3(x)\,dx = \int_1^\infty \tfrac{1}{x^2}\,dx = -\tfrac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1$$

הפונקציה $f_4(x)$ היא פונקציית צפיפות של משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר $\lambda = 0.5$.

ב1. התוחלת של ההתפלגות המוגדרת על-ידי פונקציית הצפיפות $f_3(x)$ היא :

$$E[X_3] = \int_1^\infty x\, f_3(x)\,dx = \int_1^\infty \tfrac{x}{x^2}\,dx = \int_1^\infty \tfrac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_1^\infty = \infty$$

והתוחלת של התפלגות מעריכית עם הפרמטר 0.5 היא $1/0.5 = 2$.

ב2. נתחיל בחישוב ההסתברות המותנית להתפלגות המוגדרת על-ידי $f_3(x)$.

מההסתברות :

$$P\{X_3 > x\} = \int_x^\infty f_3(t)\,dt = \int_x^\infty \tfrac{1}{t^2}\,dt = -\tfrac{1}{t}\Big|_x^\infty = \tfrac{1}{x} \qquad , \qquad x > 1$$

נקבל כי :

$$P\{X_3 > 3 \mid X_3 > 2\} = \frac{P\{X_3 > 3\}}{P\{X_3 > 2\}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

כעת, נחשב אותה הסתברות מותנית, עבור ההתפלגות המעריכית עם הפרמטר 0.5.

מתכונת חוסר-הזיכרון נקבל כי :

$$P\{X_4 > 3 \mid X_4 > 2\} = P\{X_4 > 1\} = e^{-0.5\cdot 1} = 0.6065$$

ג. הפונקציה $F_1(x)$ איננה פונקציית התפלגות מצטברת, מכיוון שאיננה רציפה מימין :

$$\lim_{x\to\infty} F(1+\tfrac{1}{x}) \neq F(1)$$

הפונקציה $F_2(x)$ היא פונקציית התפלגות מצטברת של משתנה מקרי אחיד (רציף) על הקטע $(0,4)$.

הפונקציה $F_3(x)$ היא פונקציית התפלגות מצטברת של משתנה מקרי בדיד, שערכיו האפשריים הם -1, 0 ו-2, וההסתברויות לקבלתם הן ¼, ¼ ו- ½, בהתאמה.

הפונקציה $F_4(x)$ איננה פונקציית התפלגות מצטברת, מכיוון שהיא פונקציה יורדת.

ד. התוחלת והשונות של משתנה מקרי אחיד על הקטע $(0,4)$ הן :

$$E[X] = 2 \qquad , \qquad \mathrm{Var}(X) = \tfrac{4^2}{12} = \tfrac{4}{3}$$

התוחלת והשונות של ההתפלגות המוגדרת על-ידי $F_3(x)$ הן :

$$E[X] = \tfrac{-1}{4} + \tfrac{0}{4} + \tfrac{2}{2} = \tfrac{3}{4} \qquad , \qquad \mathrm{Var}(X) = \tfrac{(-1)^2}{4} + \tfrac{0^2}{4} + \tfrac{2^2}{2} - \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{16} = \tfrac{27}{16} = 1.6875$$

2. א. נסמן את האורך (בס"מ) של נר מקרי ב- X. לפי הנתון $X \sim N(13, 0.1^2)$.

1. $P\{12.82 < X < 13.06\} = P\{-1.8 < Z < 0.6\}$

$$= \Phi(0.6) - \Phi(-1.8) = 0.7257 - (1 - 0.9641) = 0.6898$$

הסבר:

z	0.00	0.01	0.02	$\cdots$
$\vdots$	$\downarrow$			
1.8	$\rightarrow \Phi(1.8) =$ **0.9641**			
$\vdots$				

הסבר:

z	0.00	0.01	0.02	$\cdots$
$\vdots$	$\downarrow$			
0.6	$\rightarrow \Phi(0.6) =$ **0.7257**			
$\vdots$				

- מספר הנרות בחבילה שאורכם בתחום הנתון הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 45 ו 0.6898.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $\binom{45}{30} \cdot 0.6898^{30} \cdot 0.3102^{15} = 0.1186$

2. נפתור את המשוואה: $P\{X < a\} = \Phi\left(\frac{a-13}{0.1}\right) = 0.92$

מטבלת העזר של הקירובים הנורמלים נקבל כי: $\Phi(1.405) = 0.92$

לפיכך: $\Phi\left(\frac{a-13}{0.1}\right) = \Phi(1.405)$

ומכאן כי: $a = 13 + 1.405 \cdot 0.1 = 13.1405$ ס"מ

ב. נסמן ב-Y את האורך (בס"מ) של נר מקרי מתוצרת מפעל ב. מתקיים $Y \sim N(15, \sigma^2)$.

כעת, אם הנר הקצר ביותר בחבילה של 45 נרות ארוך מ-14.6 ס"מ, משמעות הדבר שכל 45 הנרות בחבילה ארוכים מ-14.6 ס"מ. בגלל אי-התלות בין הנרות, ההסתברות שכל 45 הנרות בחבילה יהיו ארוכים מ-14.6 ס"מ היא:

$$\left(P\{Y > 14.6\}\right)^{45} = \left(P\left\{Z > \tfrac{14.6-15}{\sigma}\right\}\right)^{45} = \left(P\left\{Z > \tfrac{-0.4}{\sigma}\right\}\right)^{45} = \left(\Phi\left(\tfrac{0.4}{\sigma}\right)\right)^{45} = 0.354206$$

כלומר: $\Phi\left(\frac{0.4}{\sigma}\right) = \sqrt[45]{0.354206} = 0.9772 = \Phi(2)$

ומכאן כי: $\frac{0.4}{\sigma} = 2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 0.2$

הסבר:

z	0.00	0.01	0.02	$\cdots$
$\vdots$	$\uparrow$			
2.0	$\leftarrow \Phi(2) =$ **0.9772**			
$\vdots$				

3. א. $$\int_{-\infty}^{\ln a} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\ln a} \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_{-\infty}^{\ln a} = \frac{e^{2\ln a}}{4} = \frac{a^2}{4} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad a = 2$$

(לא ייתכן, כמובן, כי $a = -2$, כי אז התחום בו הצפיפות חיובית אינו מוגדר.)

ב. $$E[X] = \int_{-\infty}^{\ln 2} x\, f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\ln 2} \frac{xe^{2x}}{2}\,dx \underset{\downarrow}{=} \left[\frac{xe^{2x}}{4}\right]_{-\infty}^{\ln 2} - \int_{-\infty}^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{4}\,dx = \ln 2 - \left[\frac{e^{2x}}{8}\right]_{-\infty}^{\ln 2} = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x \;,\; v' = e^{2x}/2 \\ u' = 1 \;,\; v = e^{2x}/4 \end{array}}$$

ג. $E[8X+4]=8E[X]+4=8\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)+4=8\ln 2=5.5452$

ד. $E[e^X]=\int_{-\infty}^{\ln 2} e^x f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\ln 2}\frac{e^x e^{2x}}{2}dx=\int_{-\infty}^{\ln 2}\frac{e^{3x}}{2}dx=\left[\frac{e^{3x}}{6}\right]_{-\infty}^{\ln 2}=\frac{e^{3\ln 2}}{6}=\frac{e^{\ln 8}}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

4. נסמן ב- X_1 את זמן ההמתנה (בדקות) לאוטובוס, כאשר התנועה אינה עמוסה, $X_1\sim Exp(0.1)$;
נסמן ב- X_2 את זמן ההמתנה (בדקות) לאוטובוס, כאשר התנועה עמוסה, $X_2\sim Exp(0.05)$;
ונסמן ב-Y את זמן של ההמתנה של נוסע מקרי המגיע לתחנה.

א. לפי נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P\{Y>15\}=0.82P\{X_1>15\}+0.18P\{X_2>15\}=0.82e^{-0.1\cdot 15}+0.18e^{-0.05\cdot 15}=0.268$$

ב. כאשר התנועה עמוסה, ההסתברות שההמתנה תארך מעל ל-15 דקות היא $e^{-0.05\cdot 15}=0.4724$.
כמו כן, בסעיף הקודם מצאנו שההסתברות שזמן המתנה מקרי יעלה על 15 דקות היא 0.268.

לכן: $P\{\text{התנועה עמוסה}\mid Y>15\}=\frac{0.18\cdot 0.4724}{0.268}=0.3173$

ג. $P\{Y\le 15\mid Y\ge 8\}=\frac{P\{8\le Y\le 15\}}{P\{Y\ge 8\}}=\frac{P\{Y\le 15\}-P\{Y\le 8\}}{1-P\{Y\le 8\}}=\frac{(1-0.268)-0.5109}{1-0.5109}=0.4521$

כאשר: $P\{Y\le 8\}=0.82P\{X_1\le 8\}+0.18P\{X_2\le 8\}=0.82(1-e^{-0.1\cdot 8})+0.18(1-e^{-0.05\cdot 8})$

$$=1-0.82e^{-0.1\cdot 8}-0.18e^{-0.05\cdot 8}=0.5109$$