פרק 7: תכונות של תוחלת (סיכום) (20425 / 9.9.08)

טענות:

1. תוחלת של פונקציה של X ו- Y. נניח כי $g(x,y)$ היא פונקציה ממשית של x ו- y.

אם ל-X ו-Y יש פונקציית הסתברות משותפת $p_{X,Y}$, אז:
$$E[g(X,Y)]=\sum_{y}\sum_{x}g(x,y)\,p_{X,Y}(x,y)$$

2. תוחלת של סכום משתנים מקריים

אם $E[X_i]$ סופית לכל $i=1,2,...,n$ אז:
$$E[X_1+X_2+...+X_n]=E[X_1]+E[X_2]+\ ...\ +E[X_n]$$

הערה: הטענה במקרה האינסופי תקפה, אם כל ה-X_i-ים הם משתנים מקריים אי-שליליים, או אם $\sum_{i=1}^{\infty}E[|X_i|]<\infty$.

השונות המשותפת של X ו-Y מוגדרת על-ידי:
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)&=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]\\&=E[XY]-E[X]E[Y]\end{aligned}$$

אם $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ אז X ו-Y נקראים **בלתי-מתואמים**.

תכונות השונות המשותפת:

1. $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$
2. $\mathrm{Cov}(X,X)=\mathrm{Var}(X)$
3. $\mathrm{Cov}(aX,Y)=a\,\mathrm{Cov}(X,Y)$
4. $\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{j=1}^{m}Y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Cov}(X_i,Y_j)$

טענות:

1. אם X ו-Y משתנים מקריים בלתי-תלויים, אז לכל שתי פונקציות ממשיות g ו-h מתקיים: $E[g(X)h(Y)]=E[g(X)]E[h(Y)]$
2. אם X ו-Y בלתי-תלויים זה בזה, אז הם בלתי-מתואמים (אך לא בהכרח להיפך).
3. אם $\underline{X}\sim Mult(n,\underline{p})$ אז לכל $i\neq j$ מתקיים $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=-np_ip_j$.

שונות של סכום סופי של משתנים מקריים

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\,,\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{i<j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+\sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

שונות של סכום סופי של משתנים מקריים בלתי-תלויים
$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)$$

מקדם המתאם של X ו-Y מוגדר על-ידי:
$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

טענות:

1. לכל X ו-Y מתקיים $-1\leq\rho(X,Y)\leq 1$.
2. אם $Y=aX+b$ אז $\rho(X,Y)=\begin{cases}1\ , & a>0\\-1\ , & a<0\end{cases}$.

אינדיקטור הוא משתנה מקרי שמקבל את הערכים 1 ו-0 בהסתברויות p $(0<p<1)$ ו- $1-p$, בהתאמה.

לכל אינדיקטור, שנסמנו ב-X, מתקיים: $E[X]=p \quad ; \quad E[X^2]=p \quad ; \quad \mathrm{Var}(X)=p(1-p)$

ולכל שני אינדיקטורים, שנסמנם ב-X_1 וב-X_2, מתקיים: $E[X_1X_2]=P\{X_1=1,X_2=1\}$

ולכן: $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=P\{X_1=1,X_2=1\}-P\{X_1=1\}P\{X_2=1\}$

תוחלת מותנית

אם ל-X ו-Y יש פונקציית הסתברות משותפת אז **התוחלת המותנית של X בהינתן $Y=y$** מוגדרת,

לכל y המקיים $P\{Y=y\}>0$, על-ידי: $E[X\mid Y=y]=\sum_x xP\{X=x\mid Y=y\}=\sum_x x\frac{P\{X=x,Y=y\}}{P\{Y=y\}}$

הערה: התוחלת המותנית של X בהינתן $Y=y$ היא פונקציה של הערך y.

תוחלת של תוחלת מותנית: $E[X]=E[E[X\mid Y]]$

כלומר, אם Y משתנה מקרי בדיד אז – $E[X]=\sum_y E[X\mid Y=y]P\{Y=y\}$

אפשר להשתמש בטענה זו, כדי לחשב הסתברויות של מאורעות על-ידי התניה במשתנה מקרי.

כלומר, אם E מסמן מאורע כלשהו ואם Y משתנה מקרי בדיד אז: $P(E)=\sum_y P(E\mid Y=y)P\{Y=y\}$

טענה (תרגיל ת26): $E[g(Y)X]=E[g(Y)E[X\mid Y]]$

נוסחת השונות המותנית: $\mathrm{Var}(X)=E[\mathrm{Var}(X\mid Y)]+\mathrm{Var}(E[X\mid Y])$

סכום מקרי

אם N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים אי-שליליים, ואם X_1, X_2, ... הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב-N, אז:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N}X_i\right]=E[N]E[X_1]$$ [כאשר $N=0$, סכום המשתנים שווה גם הוא ל- 0]

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)=E[N]\mathrm{Var}(X_1)+(E[X_1])^2\mathrm{Var}(N)$$

הפונקציה יוצרת המומנטים של משתנה מקרי X מוגדרת, לכל t ממשי, על-ידי: $M_X(t)=E[e^{tX}]$

המומנט מסדר r של משתנה מקרי X מוגדר על-ידי: $E[X^r]$

המומנט מסדר r של משתנה מקרי X מתקבל מהנגזרת ה-r-ית (לפי t) של $M_X(t)$ בנקודה $t=0$, אם הנגזרת קיימת בסביבת נקודה זו. כלומר, מתקיים השוויון: $M_X^{(r)}(t)\big|_{t=0}=E[X^r]$

פונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי של מ"מ ב"ת ש"ה $Y=\sum_{i=1}^{N}X_i$: $M_Y(t)=E\left[\left(M_{X_1}(t)\right)^N\right]$

פונקציות יוצרות מומנטים של התפלגויות מיוחדות

משתנה מקרי בינומי:	$M_X(t)=(pe^t+1-p)^n$, לכל t	$X\sim B(n,p)$
משתנה מקרי פואסוני:	$M_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$, לכל t	$X\sim Po(\lambda)$
משתנה מקרי גיאומטרי:	$M_X(t)=\dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$, $t<-\ln(1-p)$	$X\sim Geo(p)$
משתנה מקרי בינומי שלילי:	$M_X(t)=\left(\dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$, $t<-\ln(1-p)$	$X\sim NB(r,p)$
משתנה מקרי אחיד:	$M_X(t)=\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$, לכל $t\neq 0$	$X\sim U(a,b)$
משתנה מקרי מעריכי:	$M_X(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda-t}$, $t<\lambda$	$X\sim Exp(\lambda)$
משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי:	$M_X(t)=e^{t^2/2}$, לכל t	$X\sim N(0,1)$
משתנה מקרי נורמלי:	$M_X(t)=e^{\mu t+\sigma^2t^2/2}$, לכל t	$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

טענות: **1.** אם $Y=aX+b$, אז: $M_Y(t)=M_{aX+b}(t)=e^{bt}M_X(at)$

2. אם $X_1, X_2, \ldots, X_n$ הם משתנים מקריים בלתי-תלויים, אז: $M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t)=\prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$

3. קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין הפונקציות יוצרות המומנטים לפונקציות ההתפלגות המצטברת. כלומר, אם הפונקציה יוצרת המומנטים של משתנה מקרי X קיימת וסופית בסביבה כלשהי של $t=0$, אז ההתפלגות של X נקבעת באופן יחיד.

תוצאות: **1.** סכום של n משתנים מקריים בינומיים בלתי-תלויים עם הפרמטרים n_i ו- p, לכל $i=1,\ldots,n$, הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים Σn_i ו- p .

2. סכום של n משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_i, לכל $i=1,\ldots,n$, הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\Sigma\lambda_i$.

3. סכום של n משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים שלכולם הפרמטר p , הוא משתנה מקרי בינומי שלילי עם הפרמטרים n ו- p .

4. סכום של n משתנים מקריים נורמליים בלתי-תלויים עם הפרמטרים μ_i ו- σ_i^2 , הוא משתנה מקרי נורמלי עם הפרמטרים $\Sigma\mu_i$ ו- $\Sigma\sigma_i^2$.

יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכולם התפלגות F בעלת תוחלת μ ושונות σ^2.

נהוג לומר, שהמשתנים המקריים $X_1, X_2, \ldots, X_n$ הם **מדגם מקרי** מהתפלגות F .

ממוצע המדגם הוא $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, ומתקיים: $E[\bar{X}]=\mu$ ו- $\mathrm{Var}(\bar{X})=\sigma^2/n$

שונות המדגם היא $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2$, ומתקיים: $E[S^2]=\sigma^2$