פתרון ממ"ן 15

שאלה 1

א. הוכיחו שלא ניתן לבחור 28 נקודות בקובייה בעלת צלע באורך 3 כך שכל שתי נקודות יימצאו במרחק של 1.75 לפחות.

ב. נתונה קבוצה $A \subseteq \mathbf{N}$ כך ש- $|A| = 20$ וכך ש- $1 \le k \le 63$ לכל $k \in A$.

הוכיחו שקיימים 4 **זוגות שונים** $\{m_i, n_i\}$, $1 \le i \le 4$ של מספרים מתוך A כך שבכל הזוגות האלה, ההפרש בין המספר הגדול לבין המספר הקטן בזוג שווה לאותו מספר שלם חיובי כלומר ארבעת המספרים $|m_i - n_i|$, $1 \le i \le 4$ חיוביים ושווים זה לזה.

תשובה

א. נניח שבחרנו באופן אקראי 28 נקודות בתוך הקובייה הנתונה. נחלק אותה ל- 27 קוביות קטנות זהות בעלות צלע באורך 1. לפי עקרון שובך היונים, לפחות שתיים מן הנקודות שבחרנו חייבות להימצא באחת מעשרים ושבע הקוביות הקטנות. המרחק בין שתי הנקודות האלה לא יכול להיות גדול מאורך האלכסון של אותה קובייה שהוא $\sqrt{3}$.

מאחר ש- $\sqrt{3} < 1.75$ נובע שלפחות שתיים מהנקודות שנמצאות במרחק קטן מ- 1.75 .

ב. נבחר קבוצה כלשהי A של 20 מספרים בין 1 ל- 63. עלינו לבחור זוגות של מספרים מתוך A ולבחון בכל אחד מהם את ההפרש בין המספר הגדול לבין המספר הקטן בזוג.

מספר הזוגות השונים של מספרים מתוך קבוצה של 20 איברים הוא $\binom{20}{2} = 190$.

ספרנו רק קבוצות של שני איברים שונים זה מזה כי אנו מתעניינים רק בזוגות שבהן ההפרש בין המספר הגדול לבין המספר הקטן הוא חיובי. הספירה היא ללא חשיבות לסדר כי בשאלה מדובר בקבוצות $\{m,n\}$ ולא בזוגות סדורים.

מאחר ש- $1 \le m,n \le 63$ ו- $m \ne n$ מתקיים $1 \le |m-n| \le 62$.

לכן לכל בחירה של 20 מספרים מתוך ההפרשים $|m-n|$ יכולים לקבל לכל היותר 62 ערכים.

אם נניח שלכל מספר $1 \le k \le 62$ יש לכל היותר שלוש קבוצות שונות $\{m,n\}$ המקיימות $|m-n| = k$ נקבל שמספר כל הקבוצות $\{m,n\}$ בנות שני איברים שונים שניתן לבנות מאיברי A הוא לכל היותר $62 \cdot 3 = 186$. זו סתירה כי יש 190 קבוצות $\{m,n\}$.

במילים אחרות לא ניתן לפזר 190 קבוצות ב- 62 תאים מבלי שבתא אחד יהיו לפחות 4 קבוצות שונות (כלומר עם הפרש זהה בין המספר הגדול לבין מהספר הקטן בכל קבוצה).

שאלה 2

תהי A קבוצת כל המספרים הטבעיים שבהם מופיעות רק הספרות 1,2,3. נסמן :

a_n את מספר איברי A שהם בעלי n ספרות והספרה 2 מופיעה בהם מספר זוגי של פעמים.

b_n את מספר איברי A שהם בעלי n ספרות והספרה 2 מופיעה בהם מספר אי- זוגי של פעמים.

א. מיצא את $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$.

ב. לכל $n \ge 2$ הביעו את a_n בעזרת a_{n-1} ו- b_{n-1}, את b_n בעזרת a_{n-1} ו- b_{n-1}

ג. היעזרו בתוצאות של סעיף ב' כדי למצוא יחסי נסיגה עבור כל אחת מהסדרות a_n , b_n.

ד. פתרו את יחסי הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n , b_n.

ה. בדקו ש- $a_n + b_n$ שווה למספר האיברים של A שהם בעלי n ספרות.

תשובה

א. המספרים ב- A בעלי ספרה אחת הם : $1,2,3$. לכן $a_1 = 2$, $b_1 = 1$.(לא לשכוח, אפס הוא מספר זוגי לכן במספרים 1 ו- 3 הספרה 2 מופיעה מספר זוגי של פעמים (אפס פעמים)

ב- A יש 9 מספרים בעלי שתי ספרות. מתוכם יש בדיוק 4 שבהם הספרה 2 מופיעה מספר אי- זוגי של פעמים : $12,21,23,32$, לכן $b_2 = 4$ ו- $a_2 = 5$.

ב- A יש 27 מספרים בעלי שלוש ספרות. מתוכם יש 12 שבהם הספרה 2 מופיעה בדיוק פעם אחת ועוד אחד שבו הספרה 2 מופיעה שלוש פעמים. לכן $b_3 = 13$ ומכאן ש- $a_3 = 14$. מיצא את $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$.

ב. נניח $n \ge 2$.

כדי לתאר את a_n נחלק את המספרים ב- A בעלי n ספרות שבהם הספרה 2 מופיעה מספר זוגי של פעמים לשני סוגים :

1. המספרים שבהם הספרה הראשונה משמאל היא 2 . בכל מספר כזה הספרה 2 חייבת להופיע מספר אי- זוגי של פעמים ב- $n-1$ המקומות הנותרים. לכן יש b_{n-1} מספרים כאלה.

2. המספרים שבהם הספרה הראשונה משמאל היא 1 או 3. בכל מספר כזה הספרה 2 חייבת להופיע מספר זוגי של פעמים ב- $n-1$ המקומות הנותרים. לכן יש $2a_{n-1}$ מספרים כאלה.

לפיכך $a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}$.

כדי לתאר את b_n נחלק את המספרים ב- A בעלי n ספרות שבהם הספרה 2 מופיעה מספר אי-זוגי של פעמים לשני סוגים :

1. המספרים שבהם הספרה הראשונה משמאל היא 2 . בכל מספר כזה הספרה 2 חייבת להופיע מספר זוגי של פעמים ב- $n-1$ המקומות הנותרים. לכן יש a_{n-1} מספרים כאלה.

2. המספרים שבהם הספרה הראשונה משמאל היא 1 או 3. בכל מספר כזה הספרה 2 חייבת להופיע מספר אי-זוגי של פעמים ב- $n-1$ המקומות הנותרים. לכן יש $2b_{n-1}$ מספרים כאלה.

לפיכך $b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$.

ג. מתוך השוויון הראשון, $a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}$, נובע ש- $b_{n-1} = a_n - 2a_{n-1}$.

על-ידי הצבת $n+1$ במקום n נקבל בנוסף ש- $b_n = a_{n+1} - 2a_n$.

נציב תוצאות אלה בשוויון $b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$ ונקבל $a_{n+1} - 2a_n = a_{n-1} + 2(a_n - 2a_{n-1})$.

מכאן ש- $a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1}$.

בדרך דומה, מהשוויון השני, $b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$ נובע ש- $a_{n-1} = b_n - 2b_{n-1}$.

על-ידי הצבת $n+1$ במקום n נקבל ש- $a_n = b_{n+1} - 2b_n$.

נציב תוצאות אלה בשוויון $a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}$ ונקבל $b_{n+1} - 2b_n = 2(b_n - 2b_{n-1}) + b_{n-1}$.

מכאן ש- $b_{n+1} = 4b_n - 3b_{n-1}$ (אותה נוסחת נסיגה כמו ל- a_n, רק השוני בין שתי הסדרות נקבע על-ידי האיברים הראשונים בכל סדרה).

ד. המשוואה האופיינית לשתי הסדרות היא $x^2 - 4x + 3 = 0$.

הפתרונות שלה הם $x_1 = 3, x_2 = 1$.

לכן $a_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot 1^n$ כאשר $a_1 = 2$ ו- $a_2 = 5$.

לכן $3\alpha + \beta = 2$ ו- $9\alpha + \beta = 5$. מכאן ש- $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ו- $a_n = \frac{1}{2}(3^n + 1)$.

באופן דומה, $b_n = \gamma \cdot 3^n + \delta \cdot 1^n$ כאשר $b_1 = 1$ ו- $b_2 = 4$.

לכן $3\alpha + \beta = 1$ ו- $9\alpha + \beta = 4$. מכאן ש- $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ ו- $b_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$.

ה. האיברים של A שהם בעלי n ספרות הם כל הסדרות באורך 3 הכתובות בספרות 1,2,3.

מספרן הוא 3^n . ואכן, $a_n + b_n = \frac{1}{2}(3^n + 1) + \frac{1}{2}(3^n - 1) = 3^n$.

שאלה 3

נתונה $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ המקיימת: $1 + x(7 + 8x)f(x) = f(x)$

א. מיצאו יחס רקורסיה עבור a_n .

ב. חשבו את a_n לכל $n \geq 0$.

תשובה

א. מהשוויון $1 + x(7 + 8x)f(x) = f(x)$ נובע ש- $1 + 7xf(x) + 8x^2 f(x) = f(x)$ כלומר

$$1 + 7x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots) + 8x^2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots) =$$
$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

נסדר את האגף השמאלי לפי חזקות של x ונקבל:

$$1+7a_0\,x + (7a_1+8a_0)x^2 + (7a_2+8a_1)x^3 + \cdots + (7a_{n-1}+8a_{n-2})x^n + \cdots =$$
$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

נשווה את מקדמי החזקות של x בשני האגפים ונקבל ש-

$a_0=1$, $a_1 = 7a_0$ (כלומר $a_1 = 7$) ו- $a_n = 7a_{n-1}+8a_{n-2}$ לכל $n \ge 2$.

ב. המשוואה האופיינית המתאימה לנוסחת הנסיגה היא $x^2-7x-8=0$ והפתרונות שלה הם

$x_2=-1$, $x_1=8$ לכן $a_n = \alpha\cdot 8^n + \beta\cdot(-1)^n$ כאשר $a_0=1$ ו- $a_1=7$.

נציב $n=0$ ו- $n=1$ ונקבל ש- $\alpha+\beta=1$ ו- $8\alpha-\beta=7$. מכאן ש- $\alpha=\dfrac{8}{9}$ ו- $\beta=\dfrac{1}{9}$.

לכן $\dfrac{8^{n+1}+(-1)^n}{9} = \dfrac{8}{9}\cdot 8^n + \dfrac{1}{9}\cdot(-1)^n = a_n$ לכל $n\ge 0$.

שאלה 4

א. מיצאו את המקדם של x^{13} בפיתוח של $\dfrac{1}{(1-x^2-x^3+x^5)^n}$. (פרקו את המכנה לגורמים).

ב. חשבו את מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+\cdots+x_n+y_1+y_2+\cdots+y_n=13$

כאשר $x_1,x_2,\ldots,x_n$ הם מספרים זוגיים ו- $y_1,y_2,\ldots,y_n$ מתחלקים ב- 3.

תשובה

א. $(1-x^2)(1-x^3) = 1-x^2-x^3(1-x^2) = 1-x^2-x^3+x^5$.

לכן $\dfrac{1}{(1-x^2)^n(1-x^3)^n} = \dfrac{1}{(1-x^2-x^3+x^5)^n}$.

ניעזר כעת בפיתוח המוכר: $\dfrac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+\cdots)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-1+k}{k}x^k$.

על ידי החלפת x ב- x^2 נקבל: $\dfrac{1}{(1-x^2)^n} = (1+x^2+x^4+\cdots)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-1+k}{k}x^{2k}$

ועל ידי החלפת x ב- x^3 נקבל: $\dfrac{1}{(1-x^3)^n} = (1+x^3+x^6+\cdots)^n = \sum_{m=0}^{\infty}\binom{n-1+m}{k}x^{3m}$

לכן $$\frac{1}{(1-x^2)^n(1-x^3)^n} = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-1+k}{k}x^{2k}\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty}\binom{n-1+m}{m}x^{3m}\right]$$

את x^{13} במכפלה הנ"ל נקבל מכל הביטויים מהצורה $\binom{n-1+k}{k}\binom{n-1+m}{m}x^{2k+3m}$

בתנאי ש- $2k+3m=13$. זה יכול רק כאשר $k=2, m=3$ ו- $k=5, m=1$.

לכן המקדם של x^{13} בפיתוח של $\frac{1}{(1-x^2-x^3+x^5)^n}$ הוא: $\binom{n+1}{2}\binom{n+2}{3}+\binom{n+4}{5}\binom{n}{1}$

.

ב. כל אחד מהנעלמים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ יכול לקבל רק ערכים מהסדרה $0,2,4,6,8,10,14,16,\ldots$ לכן החלק של הפונקציה היוצרת המתאים לתיאור הביטוי $x_1+x_2+\cdots+x_n$ הוא:

$$\frac{1}{(1-x^2)^n}=(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{14}+x^{16}+\cdots)^n .$$

מצד שני, כל אחד מהנעלמים $y_1, y_2, \ldots, y_n$ יכול לקבל רק ערכים מהסדרה $0,3,6,9,12,\ldots$

לכן החלק של הפונקציה היוצרת המתאים לתיאור הביטוי $y_1+y_2+\cdots+y_n$ הוא:

$$\frac{1}{(1-x^3)^n}=(1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+x^{15}+x^{18}+\cdots)^n$$

הפונקציה היוצרת המתאימה למשוואה הנתונה היא $f(x)=\frac{1}{(1-x^2)^n(1-x^3)^n}$.

מספר פתרונות המשוואה הוא המקדם של x^{13} בפיתוח של $f(x)$ שאותו מצאנו בסעיף א':

$$\begin{aligned}&\binom{n+1}{2}\binom{n+2}{3}+\binom{n+4}{5}\binom{n}{1}\\&=\frac{(n+2)(n+1)^2n^2}{12}+\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n^2}{120}=\\&=\frac{(n+2)(n+1)n^2}{12}\left[(n+1)+\frac{(n+4)(n+3)}{10}\right]\\&=\frac{(n+2)(n+1)n^2(n^2+17n+22)}{120}\end{aligned}$$

שאלה 5

בשאלה זו נתייחס לפתרונות בטבעיים של $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+3x_8+3x_9+3x_{10}=n$

כאשר $x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \le 2$, (אין תנאים נוספים על שאר הנעלמים)

א. רישמו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות של המשוואה.

פשטו את הביטוי בעזרת: $1+x+x^2=(1-x^3)/(1-x)$.

ב. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה.

תשובה

א. הנעלמים x_1, x_2 יכולים לקבל כל ערך טבעי לכן התרומה שלהם בפונקציה יוצרת היא

$$\frac{1}{(1-x)^2}=(1+x+x^2+\cdots)^2 .$$

חמשת הנעלמים x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 יכולים לקבל רק את הערכים $0,1,2$ לכן הביטוי המתאים

לכל אחד מהם בפונקציה היוצרת הוא $1+x+x^2=(1-x^3)\big/(1-x)$ ולכן התרומה הכוללת שלהם בפונקציה זו היא $\frac{(1-x^3)^5}{(1-x)^5}$

הגורם בפונקציה היוצרת המתאים לחלק $3x_8+3x_9+3x_{10}$ שבמשוואה התנונה הוא $\frac{1}{(1-x^3)^3}=(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)^3$.

לסיכום, הפונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות של המשוואה היא:

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{(1-x^3)^5}{(1-x)^5}\cdot\frac{1}{(1-x^3)^3}=\frac{(1-x^3)^2}{(1-x)^7}$$

ב. מספר פתרונות המשוואה הנתונה הוא המקדם של x^n בפיתוח של $f(x)=\frac{(1-x^3)^2}{(1-x)^7}$.

מאחר ש- $(1-x^3)^2=1-2x^3+x^6$ ו- $\frac{1}{(1-x)^7}=(1+x+x^2+\cdots)^7=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{6+k}{k}x^k$

נקבל שהמקדם של x^n בביטוי $(1-2x^3+x^6)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{6+k}{k}x^k$ הוא:

$$1\cdot\binom{6+n}{n}-2\cdot\binom{6+n-3}{n-3}+1\cdot\binom{6+n-6}{n-6}=\binom{n+6}{6}-2\binom{n+3}{6}+\binom{n}{6}$$