ממ"ן 13 – פתרון שאלה 5

א' נסמן ב- $b_0, b_1,..., b_n$ את הסדרה הממוינת של המספרים $a_0, a_1,..., a_n$.

נגדיר $d_i = b_i - b_{i-1}$ $(1 \le i \le n)$ ונתבונן בסדרת ההפרשים $< d_1, d_2,..., d_n >$.

הביטוי $\frac{M-m}{n}$ הוא הממוצע של איברי סדרת ההפרשים (כלומר, זהו ההפרש הממוצע בין האיברים בסדרה הממוינת). בכל קבוצת איברים חייב להיות איבר שקטן מהממוצע או שווה לו, ולכן קיים i כך ש- $d_i \le \frac{M-m}{n}$. מכאן נובעת הטענה.

ב' הרעיון הכללי הוא לחלק את סדרת המספרים סביב החציון, ולחפש את שני האיברים (באופן רקורסיבי) בחצי שבו ההפרש בין המינימום למקסימום קטן יותר.

ההפרש הממוצע (בין האיברים הממוינים) בקבוצה זו קטן יותר מההפרש הממוצע בקבוצה המקורית, ולכן, על-פי סעיף א', קיימים בה שני איברים שההפרש ביניהם קטן יותר מ- $\frac{M-m}{n}$.

ממשיכים באותו אופן עד שמגיעים לתת-מערך בגודל 2.

יש נקודה עדינה שצריך לשים לב אליה: החציון יכול להיות אחד משני האיברים המבוקשים, ולכן צריך להכליל אותו בכל אחד משני החצאים, כדי שהוא יישאר צמוד לשני השכנים שלו.

אין צורך לחשב בכל שלב את המינימום והמקסימום של שני החצאים:

המינימום של החצי השמאלי והמקסימום של החצי הימני ידועים מהשלב הקודם;

המקסימום של החצי השמאלי והמינימום של החצי הימני ידועים גם כן – זהו החציון.

זמן הריצה: $T(n) = T(\frac{n}{2}) + \Theta(n) = \Theta(n)$