20425 - תאריך הבחינה: 3.2.2011 (סמסטר 2011א - מועד 81/1א)

שאלה 1

א. הוכחת הטענה מובאת בספר הקורס.

ב. $$P(A\cup B\cup C)=P((A\cup B)\cup C))=P(A\cup B)+P(C)-P((A\cup B)\cap C))$$ [סעיף א]

$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(C)-P((A\cap C)\cup(B\cap C))$$ [סעיף א וחוק הפילוג]

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-[P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)]$$ [סעיף א]

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

ג. נסמן ב- A_i את המאורע, ששורה i על הלוח מלאה בדסקיות, לכל $i=1,2,\ldots,7$.

לחישוב ההסתברות המבוקשת נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה. נשים לב לתנאים הסימטריים של הבעיה ביחס לשורות-הלוח ולדסקיות, ולכך שתתכנה לכל היותר 4 שורות מלאות בדסקיות. נקבל:

$$P(A_1\cup\ldots\cup A_7)=7P(A_1)-\binom{7}{2}P(A_1\cap A_2)+\binom{7}{3}P(A_1\cap A_2\cap A_3)-\binom{7}{4}P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)+0$$

$$=7\frac{\binom{42}{22}}{\binom{49}{29}}-\binom{7}{2}\frac{\binom{35}{15}}{\binom{49}{29}}+\binom{7}{3}\frac{\binom{28}{8}}{\binom{49}{29}}-\binom{7}{4}\frac{\binom{21}{1}}{\binom{49}{29}}=0.1248$$

שאלה 2

א. למשתנה המקרי X יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 10 ו- 0.5 ;

למשתנה המקרי המותנה N בהינתן $X=i$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 20 ו- $\frac{i+1}{20}$.

לכן $N\mid X=6\sim B(20,0.35)$, ומתקיים: $P\{N=8\mid X=6\}=\binom{20}{8}\cdot 0.35^8\cdot 0.65^{12}=0.1614$

ב. לכל $i=0,1,\ldots,10$, מקבלים כי $0<\frac{i+1}{20}<1$. לכן, לכל $i=0,1,\ldots,10$ ו- $n=0,1,\ldots,20$, ההסתברות המשותפת שלהלן חיובית, ומתקיים:

$$P\{N=n,X=i\}=P\{N=n\mid X=i\}P\{X=i\}=\binom{20}{n}\cdot\left(\frac{i+1}{20}\right)^n\cdot\left(1-\frac{(i+1)}{20}\right)^{20-n}\cdot\binom{10}{i}\cdot 0.5^{10}$$

ג. $$E[N]=E[E[N\mid X]]=E[20\cdot\tfrac{X+1}{20}]=E[X+1]=E[X]+1=10\cdot 0.5+1=6$$

ד. $$\mathrm{Var}[N]=E[\mathrm{Var}(N\mid X)]+\mathrm{Var}(E[N\mid X])=E\left[20\cdot\tfrac{X+1}{20}\cdot\left(1-\tfrac{X+1}{20}\right)\right]+\mathrm{Var}(20\cdot\tfrac{X+1}{20})$$

$$=E[X+1]-E[0.05(X+1)^2]+\mathrm{Var}(X+1)$$

$$=E[X]+1-0.05\cdot(E[X^2]+2E[X]+1)+\mathrm{Var}(X)$$

$$=5+1-0.05\cdot(27.5+2\cdot 5+1)+2.5=6.575$$

$$E[X]=10\cdot 0.5=5$$
$$\mathrm{Var}(X)=10\cdot 0.5\cdot 0.5=2.5$$
$$E[X^2]=2.5+5^2=27.5$$

שאלה 3

א. הערכים האפשריים של X ושל Y הם 0, 1, 2 ו-3. ההסתברויות המשותפות לקבלת ערכים אלו הן:

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=1,Y=3\}=P\{X=2,Y=2\}=P\{X=2,Y=3\}$$
$$=P\{X=3,Y=1\}=P\{X=3,Y=2\}=P\{X=3,Y=3\}=0$$

$$P\{X=0,Y=1\}=\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{3}{84}$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{6}{84}$$

$$P\{X=0,Y=3\}=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{9}{3}}=\frac{1}{84}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{4}{84}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{24}{84}$$

$$P\{X=1,Y=2\}=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{12}{84}$$

$$P\{X=2,Y=0\}=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{12}{84}$$

$$P\{X=2,Y=1\}=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{18}{84}$$

$$P\{X=3,Y=0\}=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}=\frac{4}{84}$$

X \ Y	**0**	**1**	**2**	**3**	p_X
0	0	$\frac{3}{84}$	$\frac{6}{84}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{10}{84}$
1	$\frac{4}{84}$	$\frac{24}{84}$	$\frac{12}{84}$	0	$\frac{40}{84}$
2	$\frac{12}{84}$	$\frac{18}{84}$	0	0	$\frac{30}{84}$
3	$\frac{4}{84}$	0	0	0	$\frac{4}{84}$
p_Y	$\frac{20}{84}$	$\frac{45}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{1}{84}$	

ב. למשתנה המקרי X יש התפלגות היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N=9$, $m=4$ ו- $n=3$.

לכן, השונות של X היא: $\quad \text{Var}(X)=\frac{9-3}{9-1}\cdot 3\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{9}$

ג. לפי תנאי הניסוי המתואר בשאלה מתקיים אי-השוויון $1\le X+Y\le 3$. כלומר, ככל שהמשתנה X מקבל ערך גבוה יותר, כך ערכו של Y נמוך יותר. נשים לב, שאת מגמת הקשר בין X ל-Y קל לראות גם בטבלת ההסתברויות המשותפות. לפיכך, הסימן של מקדם המתאם הלינארי יהיה שלילי.

ד. בהינתן המידע, שנבחר בדיוק כדור כחול אחד, דהיינו בהינתן ש- $Y=1$, למשתנה המקרי המותנה X בהינתן $Y=1$ יש התפלגות היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N=6$, $m=4$ ו- $n=2$. ולכן, התוחלת המותנית של X היא: $\quad E[X\mid Y=1]=2\cdot\frac{4}{6}=\frac{4}{3}=1.\bar{3}$

דרך חישוב נוספת: מטבלת ההסתברויות המשותפות, נובע שהמשתנה המקרי המותנה X בהינתן $Y=1$ מקבל את הערכים 0, 1 ו-2 בהסתברויות $\frac{1}{15}$, $\frac{8}{15}$ ו- $\frac{6}{15}$. לפיכך: $\quad E[X\mid Y=1]=1\cdot\frac{8}{15}+2\cdot\frac{6}{15}=\frac{4}{3}$

שאלה 4

א. נמצא תחילה את ערכי הפרמטרים μ ו- σ.

$$P\{X > 110\} = P\{Z > \tfrac{110-\mu}{\sigma}\} = 1 - \Phi(\tfrac{110-\mu}{\sigma}) = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\tfrac{110-\mu}{\sigma}) = 0.5 = \Phi(0) \quad \Rightarrow \quad \mu = 110$$

$$P\{95 < X < 125\} = P\{\tfrac{95-110}{\sigma} < Z < \tfrac{125-110}{\sigma}\} = \Phi(\tfrac{15}{\sigma}) - \Phi(-\tfrac{15}{\sigma}) = 2\Phi(\tfrac{15}{\sigma}) - 1 = 0.6826$$

$$\Rightarrow \quad 2\Phi(\tfrac{15}{\sigma}) = 1.6826 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\tfrac{15}{\sigma}) = 0.8413 = \Phi(1) \quad \Rightarrow \quad \sigma = 15$$

כלומר, האורך (בס"מ) של לולב מקרי הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת 110 ושונות 15^2.

ב. $$P\{X > 120\} = P\{Z > \tfrac{120-110}{15}\} = 1 - \Phi(\tfrac{2}{3}) = 1 - \Phi(0.6667) = 1 - 0.7475 = 0.2525$$

נסמן ב- Y את מספר המדידות שייעשו עד למציאת 10 הלולבים הנדרשים. למשתנה המקרי Y יש התפלגות בינומית-שלילית עם הפרמטרים 4 ו-0.2525. לכן, ההסתברות המבוקשת היא:

$$P\{Y = 10\} = \binom{9}{3} \cdot 0.2525^4 \cdot 0.7475^6 = 0.0596$$

ג1. נתון כי התפלגות האורך של לולב מקרי היא נורמלית וכי 9 הלולבים בלתי-תלויים זה בזה. לכן, ההתפלגות של <u>סכום-אורכיהם</u> אף היא נורמלית. עתה, <u>ממוצע-האורכים</u> של 9 הלולבים הוא טרנספורמציה לינארית של סכום האורכים, שהרי $\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$, ולכן התפלגות הממוצע נותרת נורמלית.

כעת, מכיוון שמתקיים:

$$E[\overline{X}] = E[X] = 110 \qquad ; \qquad \text{Var}(\overline{X}) = \frac{\text{Var}(X)}{n} = \frac{15^2}{9} = 5^2$$

נקבל כי ל<u>ממוצע-האורכים</u> (בס"מ) יש התפלגות נורמלית עם הפרמטרים 110 ו- 5^2.

ג2. לפי נתוני הבעיה, הן ההתפלגות של אורך לולב מקרי והן ההתפלגות של ממוצע-האורכים של 9 לולבים מקריים הן התפלגויות נורמליות עם תוחלת 110. לפיכך, ההבדל היחיד בין שתי ההתפלגויות הוא בערך השונות, הקובעת את רוחב הפעמון-הנורמלי, או במילים אחרות, ההבדל בין ההתפלגויות הוא בפיזורן.

כעת, מכיוון שהערך 115 גדול מהתוחלת 110, השטח שיימצא מימין לערך 115 יגדל ככל שפיזור ההתפלגות יגדל או לחלופין ככל שהשונות תגדל.

כלומר, ההסתברות שממוצע-האורכים של 9 לולבים מקריים יעלה על 115 ס"מ תהיה **<u>קטנה</u>** מן ההסתברות שהאורך של לולב מקרי יעלה על 115 ס"מ.

שאלה 5

א. נסמן ב- A_i את המאורע שמתג i סגור (ויכול לעבור בו זרם), לכל $i = 1,2,3,4,5,6$. לפי הנתונים:

מתגים 1, 2 ו-3 בלתי-תלויים בינם לבין עצמם וגם בלתי-תלויים במתגים 4, 5 ו-6;

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0.6 \qquad ; \qquad P(A_4) = 0.9$$

$$P(A_5 \cup A_6 \mid A_4) = 0.8 \qquad \Rightarrow \qquad P(A_5^C \cap A_6^C \mid A_4) = 0.2$$

$$P(A_4^C \cup A_6^C \mid A_5^C) = 0.3$$

נסמן ב-B את המאורע שעובר זרם מ-A ל-B, ונחשב את הסתברותו:

$$P(B) = P((A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup (A_4 \cap (A_5 \cup A_6)))$$

$$= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) + P(A_4 \cap (A_5 \cup A_6)) - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)P(A_4 \cap (A_5 \cup A_6))$$ [אי-תלות בין הענפים]

כעת: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C)$

$$= 1 - P(A_1^C)P(A_2^C)P(A_3^C) = 1 - 0.4^3 = 0.936$$ [אי-תלות בין מתגים 1, 2 ו-3]

$$P(A_4 \cap (A_5 \cup A_6)) = P(A_5 \cup A_6 \mid A_4)P(A_4) = 0.8 \cdot 0.9 = 0.72$$ [נוסחת הכפל]

לכן: $P(B) = 0.936 + 0.72 - 0.936 \cdot 0.72 = 0.98208$

ב. $$P(B^C \mid A_5^C) = \frac{P(B^C \cap A_5^C)}{P(A_5^C)} = \frac{P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap (A_4^C \cup A_6^C) \cap A_5^C)}{P(A_5^C)}$$

$$= \frac{P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C)P((A_4^C \cup A_6^C) \cap A_5^C)}{P(A_5^C)}$$ [אי-תלות בין הענפים]

$$= P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C) \cdot \frac{P((A_4^C \cup A_6^C) \cap A_5^C)}{P(A_5^C)}$$

$$= P(A_1^C)P(A_2^C)P(A_3^C)P(A_4^C \cup A_6^C \mid A_5^C)$$ [אי-תלות בין מתגים 1, 2 ו-3 והגדרת ההסתברות המותנית]

$$= 0.4^3 \cdot 0.3 = 0.0192$$

ג. נראה שההסתברות המותנית של B בהינתן A_4^C שונה מההסתברות של B:

$$P(B \mid A_4^C) = \frac{P((A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4^C)}{P(A_4^C)} = \frac{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)\cancel{P(A_4^C)}}{\cancel{P(A_4^C)}}$$ [מתגים 1, 2 ו-3 בלתי-תלויים במתג 4]

$$= 1 - P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C) = 1 - 0.4^3 = 0.936$$ [מתגים 1, 2 ו-3 בלתי-תלויים זה בזה]

ואילו: $P(B) = 0.98208$

לכן, תנאי אי-התלות לא מתקיים ושני המאורעות תלויים זה בזה.