

## קווים לפתרון כמה שאלות בממ"ן 13 סמסטר ב2011

### שאלה 4

מסמך אישור קצר שיכול לאמת שייכות של מילה לשפה  $B$  הוא הפירוק של  $n$  לגורמים ראשוניים. מספר הגורמים הראשוניים של  $n$  איננו גדול מ- $\log_2 n$ . אורך הייצוג של כל אחד מהם איננו גדול מאורך הייצוג של  $n$ . לכן גודל מסמך האישור פולינומיאלי בגודל הייצוג של  $n$ . (גודל הייצוג של  $n$  הוא  $O(\log n)$ ).

מאמת לשפה יקבל בנוסף למילת הקלט את מסמך האישור - הפירוק של  $n$  לגורמים ראשוניים. המאמת יודא שכל הגורמים בפירוק הם אכן ראשוניים. אם לא, הוא ידחה. לאחר מכן הוא יודא שמכפלתם שווה ל- $n$ . אם לא, הוא ידחה. לאחר מכן הוא יודא שהראשוני ה- $m$  בפירוק לגורמים ראשוניים גדול מ- $k$ . אם כן, הוא יקבל. אם לא, הוא ידחה.

זמן הריצה של כל אחד מן השלבים פולינומיאלי בגודל הקלט. הצגנו מאמת בעל זמן ריצה פולינומיאלי לשפה  $B$ . לכן  $B$  שייכת ל-NP.

### שאלה 5

א. אפשר להסיק ש- $A$  שייכת ל- $TIME(n)$ . להלן מכונה המכריעה את  $A$  בזמן  $O(n)$ :  
"על קלט  $w$  :

1. חשב את  $f(w)$ .

2. בדוק האם  $f(w)$  שייכת ל- $B$ . אם כן, קבל (את  $w$ ). אם לא, דחה (את  $w$ ).  
זמן החישוב של  $f(w)$  בשלב 1 ליניארי ב- $|w|$ . לכן גם האורך של  $f(w)$  ליניארי ב- $|w|$ .  
זמן החישוב של שלב 2 ליניארי ב- $|f(w)|$ , ולכן גם ליניארי ב- $|w|$ .

ב. אפשר להסיק ש- $A$  שייכת ל- $TIME(n^2)$ . להלן מכונה המכריעה את  $A$  בזמן  $O(n^2)$ :  
"על קלט  $w$  :

1. חשב את  $f(w)$ .

2. בדוק האם  $f(w)$  שייכת ל- $B$ . אם כן, קבל (את  $w$ ). אם לא, דחה (את  $w$ ).  
זמן החישוב של  $f(w)$  בשלב 1 ליניארי ב- $|w|$ . לכן גם האורך של  $f(w)$  ליניארי ב- $|w|$ .  
זמן החישוב של שלב 2 ריבועי ב- $|f(w)|$ , ולכן גם ריבועי ב- $|w|$ .

ג. אי אפשר להסיק ש- $A$  שייכת ל- $TIME(n)$ .

חישוב הרדוקציה דורש זמן ריבועי ב- $|w|$ . לכן האורך של  $f(w)$  עשוי להיות ריבועי ב- $|w|$ .  
הזמן הדרוש להכרעת השייכות של  $f(w)$  ל- $B$  ליניארי ב- $|f(w)|$ . זמן זה עשוי להיות ריבועי ב- $|w|$ .  
לכן הזמן הדרוש להכרעת השייכות של  $|w|$  ל- $A$  עלול להיות ריבועי ולא ליניארי.

ד. אי אפשר להסיק ש- $A$  שייכת ל- $TIME(n^2)$ .

חישוב הרדוקציה דורש זמן ריבועי ב- $|w|$ . לכן האורך של  $f(w)$  עשוי להיות ריבועי ב- $|w|$ .

הזמן הדרוש להכרעת השייכות של  $f(w)$  ל- $B$  ריבועי ב- $|f(w)|$ . זמן זה איננו ריבועי ב- $|w|$ .  
 לכן הזמן הדרוש להכרעת השייכות של  $|w|$  ל- $A$  עלול להיות יותר מריבועי.

## שאלה 7

נוכל לדעת האם  $N$  דטרמיניסטית או לא בעזרת התבוננות בחלק  $\phi_{\text{move}}$  של הנוסחה  $\phi$ .  
 אם המכונה דטרמיניסטית, אז לכל שלשה מהצורה  $aqb$  (אות-מצב-אות) יש חלון חוקי יחיד שזו השלשה העליונה שלו: כאשר נמצאים במצב  $q$  וקוראים את הסמל  $b$ , פעולת המכונה היא אחת ויחידה.

אם המכונה לא דטרמיניסטית, אז יש שלשה מהצורה  $aqb$  שמופיעה כשלשה עליונה ביותר מחלון חוקי אחד: יש מצב  $q$  וסמל  $b$  כך שכאשר נמצאים במצב  $q$  וקוראים את הסמל  $b$  יש במכונה יותר מאפשרות פעולה אחת.

## שאלה 8

מחליפים בכל  $h_i$  את הספרה 1 בספרה 2.

מחליפים כל 3 ב-4.

## שאלה 9

א. להלן מכונה מכריעה לשפה  $NONDISJOINT_{DFA}$ :

"על קלט  $\langle A, B \rangle$  כאשר  $A$  ו- $B$  הם אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים:

1. בנה את אוטומט המכפלה  $C$  לחיתוך של השפות שמוזהים  $A$  ו- $B$ .  $L(C) = L(A) \cap L(B)$ .

2. בדוק, בעזרת מכונה לשפה  $E_{DFA}$ , האם  $L(C) = \emptyset$ . אם כן, דחה. אם לא, קבל."

כל אחד מן השלבים מתבצע פעם אחת. זמן הריצה של כל שלב פולינומיאלי בגודל הקלט.

ב. רדוקציה של  $3SAT$ :

"על קלט  $\langle \phi \rangle$  כאשר  $\phi$  היא נוסחה ב- $3CNF$ :

1. יהי  $n$  מספר המשתנים בנוסחה  $\phi$ , ויהי  $k$  מספר הפסוקיות ב- $\phi$ .

2. לכל פסוקית  $C_i$  ב- $\phi$ ,  $C_i = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ , בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי  $A_i$  שמוזהה את

שפת כל המחרוזות הבינריות שאורכן  $n$  והן מייצגות השמות שמספקות את  $C_i$ .

3. החזר את  $\langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle$ ."

נסביר מהי השפה שמוזהה האוטומט  $A_i$ :

כל מחרוזת בינרית באורך  $n$  מייצגת השמה של 0-ים ו-1-ים ל- $n$  המשתנים של הנוסחה.

השמה כזו מספקת את הפסוקית  $C_i = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$  אם לפחות באחד המקומות המתאימים

לליטרלים של הפסוקית יש בהשמה ערך שהופך את הליטרל הזה ל-1.

מספר המצבים של האוטומט  $A_i$  ליניארי ב- $n$ : על משתנים שלא מופיעים בפסוקית אפשר

לעבור ממצב למצב גם על 0 וגם על 1. על משתנים שכן מופיעים בפסוקית יש התפצלות. על

הערך שמספק את הליטרל שבפסוקית עוברים למצב שמאפשר קריאה של 0-ים ו-1-ים עד להשלמת האורך של המחרוזת ל- $n$ , ואז כניסה למצב המקבל היחיד של האוטומט. על הערך שלא מספק את הליטרל שבפסוקית ממשיכים לליטרל הבא. אם מדובר בליטרל השלישי, עוברים למצב מלכודת לא מקבל. למצב הזה עוברים גם מן המצב המקבל בקריאה של כל סמל (מחרוזת הקלט ארוכה מ- $n$ ).

**הרדוקציה תקפה:**  $\phi$  ספיקה אם ורק אם יש השמה של 0-ים ו-1-ים למשתני הנוסחה שבה בכל פסוקית יש לפחות ליטרל אחד שערכו 1, אם ורק אם החיתוך של קבוצות ההשמות שמספקות כל אחת מן הפסוקיות לא ריק, אם ורק אם  $L(A_1) \cap L(A_2) \cap \dots \cap L(A_k) \neq \emptyset$ , אם ורק אם  $\langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle$  שייכת ל- $NONDISJOINT_{DFA}$ .

**הרדוקציה חשיבה בזמן פולינומיאלי:** כל אחד מן השלבים של הרדוקציה מתבצע פעם אחת. שלב 1 ושלב 3 פולינומיאליים. גם שלב 2 פולינומיאלי, כי מספר האוטומטים שבונים שווה למספר הפסוקיות, והגודל של כל אחד מהם ליניארי במספר המשתנים.

ג. ההבדל הוא שמספר האוטומטים בשפה של סעיף א הוא קבוע (2), ואילו מספר האוטומטים בשפה של סעיף ב איננו נתון מראש (הוא חלק מן הקלט).  
הזמן הדרוש לבניית אוטומט מכפלה של שני אוטומטים ריבועי בגודל האוטומטים. לכן זמן הריצה של המכונה של סעיף א יכול להיות  $O(n^2)$  (לא במכונת טיורינג עם סרט אחד, אבל כן במכונה יותר משוכללת). זהו זמן פולינומיאלי בגודל הקלט.  
אם נרצה לבנות אוטומט מכפלה ל- $k$  האוטומטים בסעיף ב, הזמן שיידרש הוא לפחות מסדר גודל של  $n^k$ , משום שזה סדר הגודל של מספר המצבים של אוטומט המכפלה הזה. זמן זה איננו **פולינומיאלי בגודל הקלט**, משום שהמערך  $k$  איננו מספר קבוע אלא תלוי בקלט.