תשובה 1

כל קטע בדיאגרמת הסה של קבוצה סדורה-חלקית מייצג זוג איברים, שאחד מהם מכסה את השני. מהגדרת המושג "מכסה", קבוצה $B \in P(A)$ מכסה קבוצה $C \in P(A)$ לגבי יחס ההכלה אם ורק אם מתקיים:

$B \subset C$ ואין אף קבוצה $D \in P(A)$ המקיימת $B \subset D \subset C$ (הכלות-ממש).

עבור B,C **סופיות**, קל לראות שתנאי זה מתקיים אם ורק אם קיים:

$B \subset C$ ומספר אברי C קטן ב- 1 ממספר אברי B.

יהי k מספר טבעי בתחום $0 \le k \le n$.

לקבוצה הנתונה A שהיא בת n איברים יש $\binom{n}{k}$ תת-קבוצות בנות k איברים,

כלומר ב- $P(A)$ יש $\binom{n}{k}$ איברים שעוצמתם k .

אם B בת k איברים, יש לה k תת-קבוצות בנות $k - 1$ איברים (ע"י השמטת איבר אחד של B בכל פעם. נשים לב שזה נכון גם אם B ריקה). כלומר כל קבוצה בגודל k מכסה בדיוק k קבוצות אחרות.

לכן מספר הקטעים בדיאגרמת הסה של רלצית ההכלה מעל $P(A)$ הוא $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

לפי שאלה 3.9 בעמ' 71 בספר הלימוד, סכום זה שווה $n \cdot 2^{n-1}$.

תשובה 2

א. $\dfrac{12!}{4!3!2!2!} = 831,600$.

ב. אם הרצף **דמקה** מופיע, נתייחס אליו כאל "תו מיוחד" בודד.

יחד איתו יש בסה"כ 9 תוים, מתוכם 3 זהים (**ה**) ועוד 3 זהים (**נ**) .

מספר הסידורים: $\dfrac{9!}{3!3!} = 10,080$.

ג. תהי U קבוצת כל הדרכים לסדר את *12* התוים ללא הגבלה. מסעיף א: $|U| = 831{,}600$.

נסמן - A_1 : קבוצת הדרכים לסדר את המחרוזת כך שמופיע הרצף **דמקה**,

A_2 : קבוצת הדרכים לסדר את המחרוזת כך שמופיע הרצף **קהה**,

A_3 : קבוצת הדרכים לסדר את המחרוזת כך שמופיע הרצף **ממד**,

A_4 : קבוצת הדרכים לסדר את המחרוזת כך שמופיע הרצף **ננהה**.

אלה הסידורים שאינם מותרים כעת. אנו רוצים למצוא את $|U - \bigcup_{i=1}^{4} A_i|$.

ניעזר בהכלה והפרדה.

(i) מסעיף ב, $|A_1| = 10{,}080$. בצורה דומה נקבל:

$$|A_2| = \frac{10!}{3!(2!)^3} = 75{,}600 \quad , \quad |A_3| = \frac{10!}{4!3!} = 25{,}200 \quad , \quad |A_4| = \frac{8!}{(2!)^3} = 5{,}040 \; .$$

(ii) חישוב החיתוכים דורש קצת זהירות. למשל **דמקה** ו- **קהה** יכולים להופיע באותה מחרוזת, אבל רק כרצף **דמקהה** . לעומת זאת **דמקה** ו- **ממד** לא יכולים להופיע באותה מחרוזת.
דמקה ו- **ננהה** יכולים להופיע באותה מחרוזת, כשני "תוים מיוחדים" בלתי תלויים זה בזה.
בדומה עוברים על שאר החיתוכים.
החיתוכים הלא ריקים של זוגות הם:

$$|A_1 \cap A_2| = \frac{8!}{3!2!} = 3{,}360 \quad , \quad |A_1 \cap A_4| = 5! = 120 \quad , \quad |A_2 \cap A_3| = \frac{8!}{3!2!} = 3{,}360 \; ,$$

$$|A_2 \cap A_4| = \frac{6!}{2!2!} = 180 \quad , \quad |A_3 \cap A_4| = \frac{6!}{2!} = 360 \; .$$

(iii) החיתוכים הלא ריקים של שלישיות הם:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 4! = 24 \quad , \quad |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4! = 24 \; .$$

(iv) חיתוך ארבעת הקבוצות יחד הוא ריק.

כעת בעזרת הכלה והפרדה, מספר הסידורים המותרים הוא:

$$|U| - \sum_{i=1}^{4} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le 4} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

$$= 831{,}600 - (10{,}080 + 75{,}600 + 25{,}200 + 5{,}040) +$$

$$+ (3{,}360 + 120 + 3{,}360 + 180 + 360) - (24 + 24)$$

$$= 723{,}012$$

תשובה 3

תהי U קבוצת כל פתרונות המשוואה בטבעיים, ללא מגבלות.

$|U| = D(6,20) = \binom{25}{5} = 53,130$.

תהי A_i $(i = 1,2,3)$ קבוצת הפתרונות בהם $x_i = y_i = 0$.

אנו מחפשים את גודל הקבוצה $A_1' \cap A_2' \cap A_3'$.

נחשב: $|A_i| = D(4,20) = \binom{23}{3} = 1,771$

עבור $i \neq j$, $|A_i \cap A_j| = D(2,20) = \binom{21}{1} = 21$ (את זה אפשר כמובן לומר גם בלי D...).

ולבסוף $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

לפי הכלה והפרדה,

$$|A_1' \cap A_2' \cap A_3'| = 53,130 - 3 \cdot 1,771 + 3 \cdot 21 - 0 = 47,880$$

תשובה 4

יהיו $a_1,\ldots,a_{100}$ כל אברי A (בסדר שרירותי כלשהו, לאו דווקא סדר עולה).

לכל $1 \le k \le 100$, יהי $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$.

לכל k, נתבונן בשארית של S_k בחילוק ב- *100* .

אם קיים k עבורו השארית היא *0*, סיימנו (מדוע?).

אם אף שארית אינה *0*, לפנינו סדרה באורך *100* של מספרים S_k, ורק *99* שאריות שונות אפשריות. לפי שובך היונים יש לפחות שני איברים בסדרה, נאמר S_m ו- S_n, שהם בעלי אותה שארית בחילוק ב- *100*.

ב.ה.כ. נניח $n < m$. כעת, $S_m - S_n$ מתחלק ב- *100* .

הוא אמנם לא אחד ה- S-ים שלנו אבל הוא בהחלט סכום של אברי A: $S_m - S_n = \sum_{i=n+1}^{m} a_i$.

איתי הראבן