שאלה 1

סעיף א'

הוכיחו שאם כל הצלעות ב-$P_{s,v}$ שימושיות, אז $P_{s,v}$ מסלול מזערי.

תשובה

נוכיח באינדוקציה על אורך המסלול $P_{s,v}$.

- בסיס האינדוקציה – $n=1$:
  $P_{s,v}$ מורכב מצלע בודדת, שהינה שימושית.

  נניח בשלילה ש-$P_{s,v}$ איננו מסלול מזערי –

  כאמור, צלע שימושית הינה הצלע האחרונה של מסלול מזערי כלשהו.
  יהי $P_{s,w}$ המסלול ש-(s,v) הינה צלע שימושית בו.

  לפי הגדרת המשקל – $w(P_{s,w}) >= w((s,v))$ ולכן $w(P_{s,w}) >= w(P_{s,v})$, אך $P_{s,v}$ איננו מסלול מזערי לפי ההנחה ולכן ישנה צלע $P_{s,w}'$ המקיימת $w(P_{s,v}) > w(P_{s,w}')$ ולבסוף מתקיים $w(P_{s,w}) > w(P_{s,w}')$, בסתירה לכך ש-$P_{s,w}$ מסלול מזערי.

  לכן $P_{s,v}$ מסלול מזערי (מש"ל)

- הנחת האינדוקציה – לכל מסלול $P_{s,v}$ באורך $k<N$ מתקיים שאם כל הצלעות בו שימושיות, אזי הוא מסלול מזערי.

- צעד האינדוקציה – $n=N$:

  יהי מסלול $P_{s,w}$ באורך N שבו כל הצלעות שימושיות.
  יהי הקודקוד הלפני אחרון במסלול $P_{s,w}$ – t.
  מתקיים לפי הגדרה – $w(P_{s,w}) = w(P_{s,t}) + w((t,w))$.

  (*)אורך המסלול $P_{s,t}$ הינו $N-1$ וצלעותיו שימושיות ולכן, לפי הנחת האינדוקציה, $P_{s,t}$ הינו מסלול מזערי.

נניח בשלילה ש-$P_{s,w}$ איננו מסלול מזערי –
הצלע (t,w) היא שימושית לפי הגדרת $P_{s,w}$ – יהי המסלול המזערי $P'_{s,w}$ שהצלע (t,w) הינה הצלע האחרונה בו. יהי $P'_{s,t}$ המסלול $P'_{s,w}$ ללא הצלע האחרונה.
כלומר – $w(P'_{s,w}) = w(P'_{s,t}) + w((s,t))$
מאחר ש-$P_{s,w}$ איננו מסלול מזערי, מתקיים $w(P_{s,w}) > w(P'_{s,w})$, כלומר $w(P_{s,t}) + w((t,w)) > w(P'_{s,t}) + w((t,w))$, כלומר $w(P_{s,t}) > w(P'_{s,t})$ וזאת בסתירה לכך ש-$P_{s,t}$ מסלול מזערי (*).

לכן $P_{s,w}$ מסלול מזערי (מש"ל)

<u>סעיף ב'</u>

הוכיחו שאם יש צלע לא שימושית ב-$P_{s,v}$ (אחת או יותר), אז $P_{s,v}$ איננו מסלול מזערי.

<u>תשובה</u>

יהי מסלול $P_{s,v}$ עם צלע לא שימושית (w,t).
יהי $P_{s,t}$ המסלול שהוא הרישא של $P_{s,v}$ מ-s ל-t.
יהי $P_{t,v}$ המסלול שהוא הסיפא של $P_{s,v}$ מ-t ל-v.
הצלע (w,t) איננה שימושית ולכן, לפי הגדרה, $P_{s,t}$ איננו מסלול מזערי.
(*) לכן, קיים מסלול $P'_{s,t}$ המקיים $w(P'_{s,t}) < w(P_{s,t})$. יהי מסלול זה.
יהי $P'_{s,t}$ המסלול שהוא השרשור של $P'_{s,t}$ עם $P_{t,v}$.
מתקיים $w(P_{s,v}) = w(P_{s,t}) + w(P_{t,v})$ וגם $w(P'_{s,v}) = w(P'_{s,t}) + w(P_{t,v})$.

נניח בשלילה ש-$P_{s,v}$ הינו מסלול מזערי –
לכן מתקיים $w(P_{s,v}) <= w(P'_{s,v})$, כלומר,
$w(P_{s,t}) + w(P_{t,v}) <= w(P'_{s,t}) + w(P_{t,v})$.
לכן, לפי (*), מתקיים,
$w(P_{s,t}) + w(P_{t,v}) < w(P_{s,t}) + w(P_{t,v})$.
כלומר, $0 < 0$ (סתירה)
מש"ל.

<u>סעיף ג'</u>

הוכיחו שאם $P_{s,v}$ מסלול כמעט מזערי אז מופיעה בו צלע לא שימושית אחת ויחידה.

<u>תשובה</u>
יהי $P_{s,v}$ מסלול כמעט מזערי.

נניח בשלילה שאין בו צלעות לא שימושית –
כלומר, כל צלעותיו שימושיות.
כלומר, לפי סעיף א', הוא מסלול מזערי.
בסתירה לכך שהוא כמעט מזערי.

(1) לכן יש ב-$P_{s,v}$ לפחות צלע לא שימושית אחת.

- נניח בשלילה שיש ב-$P_{s,v}$ שתי צלעות לא שימושיות שונות -
  תהיינא צלעות אלה $(t1,w1)$, $(t2,w2)$.
  בה"ה נניח ש-$(t1,w1)$ באה לפני $(t2,w2)$ במסלול $P_{s,v}$.
  <u>טענה 1</u>
  יהי $P_{s,w1}$ המסלול שהוא הרישא של $P_{s,v}$ מ-s ל-w1.
  יהי $P_{w1,v}$ המסלול שהוא הסיפא של $P_{s,v}$ מ-w1 ל-v.
  $(t1,w1)$ איננה צלע שימושית $\Leftarrow$ $P_{s,w1}$ איננו מסלול מזערי (סעיף ב').
  (*)לכן קיים מסלול $P'_{s,w1}$ המקיים $w(P'_{s,w1}) < w(P_{s,w1})$. יהי מסלול זה.
  נגדיר את המסלול $P'_{s,v}$ כשרשור של $P'_{s,w1}$ עם $P_{w1,v}$.
  (a) מתקיים $w(P'_{s,v}) = w(P'_{s,w1}) + w(P_{w1,v})$.
  כלומר, לפי (*), מתקיים $w(P'_{s,v}) < w(P_{s,w1}) + w(P_{w1,v})$.
  כלומר, מתקיים $w(P'_{s,v}) < w(P_{s,v})$.
  <u>טענה 2</u>
  יהי $P_{s,w2}$ המסלול שהוא הרישא של $P_{s,v}$ מ-s ל-w2.
  יהי $P_{w1,w2}$ המסלול שהוא הסיפא של $P_{s,w2}$ מ-w1 ל-w2.
  $(t2,w2)$ איננה צלע שימושית $\Leftarrow$ $P_{w1,w2}$ איננו מסלול מזערי (סעיף ב').
  (**)לכן קיים מסלול $P''_{w1,w2}$ המקיים $w(P''_{w1,w2}) < w(P_{w1,w2})$. יהי מסלול זה. נגדיר את המסלול $P''_{s,v}$ כשרשור של $P'_{s,w1}$ עם $P''_{w1,w2}$ ועם $P_{w2,v}$.
  (b) מתקיים $w(P''_{s,v}) = w(P'_{s,w1}) + w(P''_{w1,w2}) + w(P_{w2,v})$.
  לפי (*) ולפי (**), מתקיים $w(P''_{s,v}) < w(P_{s,w1}) + w(P_{w1,w2}) + w(P_{w2,v}) = w(P_{s,v})$.
  כלומר, מתקיים $w(P''_{s,v}) < w(P_{s,v})$.

  <u>טענה 3</u>
  (a) מתקיים $w(P'_{s,v}) = w(P'_{s,w1}) + w(P_{w1,v})$.
  $\Leftarrow$ מתקיים $w(P'_{s,v}) = w(P'_{s,w1}) + w(P_{w1,w2}) + w(P_{w2,v})$
  (b) מתקיים $w(P''_{s,v}) = w(P'_{s,w1}) + w(P''_{w1,w2}) + w(P_{w2,v})$.
  (**) $w(P''_{w1,w2}) < w(P_{w1,w2})$.
  כלומר, מתקיים ש-$w(P''_{s,v}) < w(P'_{s,v})$.

  לבסוף, קיימים שני מסלולים בעלי משקלים שונים מ-s ל-v המקיימים שמשקלם קטן מ-$w(P_{s,v})$. כלומר $w(P''_{s,v}) < w(P'_{s,v}) < w(P_{s,v})$.
  זאת בסתירה להיותו של $P_{s,v}$ מסלול כמעט מזערי.

  מש"ל.

<u>סעיף ד'</u>

תהי e=(u1,u2) הצלע הלא שימושית היחידה במסלול כמעט מזערי Ps,v. הוכיחו שהרישא של Ps,v מ-s ל-u1 מהווה מסלול מזערי, וגם שהסיפא של Ps,v מ-u2 ל-v מהווה מסלול מזערי.

<u>תשובה</u>
יהי Ps,u1 המסלול שהוא הרישא של Ps,v מ-s ל-u1.
יהי Pu2,v המסלול שהוא הסיפא של Ps,v מ-u2 ל-v.

מאחר שזה נתון (ובשל סעיף ג', בהינתן ש-Ps,v כמעט מזערי), כל הצלעות ב-Ps,v מלבד (u1,u2) הינן שימושיות, כלומר, כל הצלעות ב-Ps,u1 , Pu2,v הינן שימושיות.

לכן, לפי סעיף א', Ps,u1 מסלול מזערי ו-Pu2,v מסלול מזערי.

מש"ל.

<u>סעיף ה'</u>

הציגו בעזרת הסעיפים הקודמים אלגוריתם למציאת מסלול כמעט מזערי מקדקוד מקור נתון s לקדקוד יעד נתון t, "בזמן" $\Theta(|E|*\log|V|)$. (בחישוב זמן הריצה מניחים שחיבור, חיסור והשוואה של משקלי צלעות – כולן פעולות אלמנטריות שמתבצעות בזמן $\Theta(1)$).

<u>תשובה</u>
לפי סעיף ג', האלגוריתם ימצא מסלול מ-s ל-t, בו יש צלע לא שימושית אחת ויחידה.

להלן השלבים:

1. נבצע הרצה של אלגוריתם דייקסטרה למציאת המסלולים המזעריים מ-s ל-t ונסמן את כל הצלעות שנוסיף ל-S כשימושיות – useful(u) = true.
   (זמן ריצה – $O(|E|*\log(|V|))$)
2. נהפוך את הצמתים בגרף G.
   (זמן ריצה – $O(|E|)$)
   נבצע הרצה של אלגוריתם דייקסטרה מ-t ל-s.
   נסמן את כל הצלעות שנוסיף ל-S כשימושיות – useful(u) = true.
   (זמן ריצה – $O(|E|*\log(|V|)$)
   נהפוך את הצמתים בגרף G בחזרה.
   (זמן ריצה – $O(|E|)$)
   הסיבה לשלב זה היא שבאלגוריתם דייקסטרה לא נמשיך במסלול אם נתקלנו בצלע לא שימושית. מאחר שיש רק צלע אחת – ההרצה ההפוכה "תעטוף" את הצלע הלא שימושית משני צידי המסלול בצלעות שמסומנות כשימושיות.
3. נבצע איטרציה על הצלעות הלא שימושיות (על כל הצלעות, אך נבצע פעולות רק על הלא שימושיות) ונבדוק עבור כל אחת מהן, e=(u,v), האם מתקיים d(s,u) + w(e) + d(v,t) הוא המרחק המינימלי שנמצא עד כה. אם כן, המסלול הזמני שנבחר הוא שרשור של המינימלי בין s ל-u, עם e ועם המינימלי בין v ל-t (דייקסטרה כבר הזין לנו את נתוני המסלול והמרחקים). בסוף הריצה נקבל את המסלול המינימלי שבו יש אך ורק צלע לא שימושית אחת.
   (זמן ריצה – $O(|E|)$ – לכל צלע יתבצעו לכל היותר מספר סופי של פעולות שליפת נתונים שנשמרו בעת הרצת דייקסטרה)

<u>זמן הריצה</u> הכולל של שלושת השלבים –
$O(|E|*\log(|V|)) + O(|E|) + O(|E|) = O(|E|*\log(|V|))$

פסאודו-קוד:

```
ALMOST-MIN(V,E,s,t):
for each e in E
   do useful(e) ← false
MY-DIEKSTRA(V,E,s,t) #diekstra with useful(e) marking
REVERT(E)
MY-DIEKSTRA(V,E,t,s) #diekstra with useful(e) marking
REVERT(E)
min ← 0
route ← null
for each e = (u,v) in E
   do if useful(e) = false
      then distance ← w(shortest(s,u)) + w(e) + w(shortest(v,t))
            if distance < min
               then min ← distance
                     route ← shortest(s,u) · e · shortest(v,t)
return route
```

שאלה 2

רעיון כללי: נניח תחילה שכל משקלי הקשתות שונים זה מזה. למעשה (ה.ר) אם ניקח שני קדקודים כלשהם של קודקודים, הקשת המינימלית המקשרת ביניהן חייבת להיות בכל עפ"מ. כנגד: האלגוריתם של קרוסקל מראה שניתן תמיד לקבל עפ"מ המתחיל עם ההוספה של קשת כזאת שחייבת להיות בעפ"מ. אם כן, בכל עפ"מ חייבת להיות אותה קשת ולכן יש עפ"מ יחיד.

אם כן, רק נחזה הנחה גם אחרי הורדה של קשת מהגרף והעפ"מ אותו שומרים של המקסימלות תנאי (ה.ר) לכל קשת ב-T ביחס לגרף G' (כי רק הסרנו קשתות ולכן זה לא ישפיע במינימליות של הקשתות שנותרו). לכן אותן קשתות שנותרו חייבות להישאר ב-T. אם כן, נותר לאחר הסרת הקשת למצוא קשת נוספת אחת שתקשר לנו את שני רכיבי הקשירות ותהיה המינימלית מבין הקשתות בין שני הרכיבים. אותה הקשת תהיה חייבת להיות בעפ"מ ולכן נקבל עפ"מ חדש. הדבר יישאר נכון גם כאשר יש כמה קשתות שוות משקל שכן נוכל להתייחס כאילו יש "שובר שוויון" כפי המוצג בממ"ן 16. כמובן שנצטרך לבצע את שבירת השוויון בצורה שבה ינתן לקשתות שנמצאות ב-T אלא בצורה עקרונית לא נצטרך לבצע את השינוי או יתרון ל-T כי האלגוריתם בכלל לא עובר על הקשתות של T. ולכן מספיק לשנות את הסכמים כמוצג בממ"ן 16.

אלגוריתם:

(1) נבצע את האלגוריתם למציאת כל הרכיבים הקשירים המוצג בממ"ן 16 ונסמן כל צומת באיזה רכיב קשירות הוא נמצא (מספרים מ-1 עד מספר רכיבי הקשירות) ולכן נשמור קבוצה של כל הצמתים בקבוצת קשירות מספר 1.

(2) עבור כל צומת בקבוצת קשירות 1:

(2.1) עבור כל קשת המחוברת לצומת הנוכחי

(2.1.1) אם הקשת מובילה לקבוצה אחרת והיא קטנה מבין הקשתות שנבדקו עד כה נשמור אותה.

(3) נוסיף את הקשת שנשמרה לעץ T'.

נכונות: כפי המוסבר ברעיון הכללי וההוכחה של קרוסקל. האלגוריתם עובד בהגדרת רעיון שהוא הוא אלגוריתם מוכח ... ; משום שבכל קבוצה ... הקשתות שהם ... בהם כל אחת ... ולכן יוצא עץ סופי.

כפי שהסברנו כל קשת שנותרה ב-T יכולה להישאר לעפ"מ כלשהו (כי היא חייבת ... משנים את המשקלים בצורה נכונה ... ולכן יכולה ...). ... כל קשת מינימלית בין שני הרכיבים הקשירים שנותרו ... עפ"מ (...).

ניתוח סיבוכיות: שלב (1) סיבוכיות $O(|V|+|E|)$, כידוע $E_T = V_T - 1$ כי הגרף ... ולכן מכיוון שהגרף הוא $|E|\leq|V|-1$ ... $O(|V|)$.

שלב (2) ... הצמתים ... הקשתות ... $O(|E|)$ ... סה"כ $O(|E|)$.

.3

נציג נוסחת 3-CNF עליה נכשל האלגוריתם המתואר בשאלה-

$$\varphi=\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\varphi_3\wedge\varphi_4\wedge\varphi_5\wedge\varphi_6\wedge\varphi_7$$

$$\begin{cases}\varphi_1=(x_1\vee x_2\vee x_3)\\ \varphi_2=(x_1\vee x_2\vee x_4)\\ \varphi_3=(x_2\vee x_3\vee x_4)\\ \varphi_4=(x_2\vee x_3\vee x_5)\\ \varphi_5=(x_3\vee x_4\vee x_5)\\ \varphi_6=(x_3\vee x_4\vee\neg x_5)\\ \varphi_7=(\neg x_1\vee\neg x_2\vee\neg x_3)\end{cases}$$

כלומר

$$\varphi=(x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(x_1\vee x_2\vee x_4)\wedge(x_2\vee x_3\vee x_4)\wedge(x_2\vee x_3\vee x_5)\wedge$$
$$(x_3\vee x_4\vee x_5)\wedge(x_3\vee x_4\vee\neg x_5)\wedge(\neg x_1\vee\neg x_2\vee\neg x_3)$$

נראה כי האלגוריתם אכן לא מספק נוסחה זו-

ראשית, עבור המשתנה x_1, יבחר האלגוריתם בהשמה $x_1\leftarrow T$, שכן השמה זו מספקת שני פסוקים חדשים- φ_1,φ_2, ואילו השמה הפוכה תספק רק פסוק חדש אחד- φ_7.

לאחר מכן, עבור המשתנה x_2, יבחר האלגוריתם בהשמה $x_2\leftarrow T$, שכן השמה זו מספקת שני פסוקים חדשים- φ_3,φ_4, ואילו השמה הפוכה תספק רק פסוק חדש אחד- φ_7.

לאחר מכן, עבור המשתנה x_3, יבחר האלגוריתם בהשמה $x_3\leftarrow T$, שכן השמה זו מספקת שני פסוקים חדשים- φ_5,φ_6, ואילו השמה הפוכה תספק רק פסוק חדש אחד- φ_7.

כבר בשלב זה ניתן לראות כי האלגוריתם יפיק קלט אשר לא יספק את φ, שכן לא משנה איזו השמה יבצע עבור המשתנים x_4,x_5, הפסוק φ_7 לא יסופק בכל מקרה.

כמו כן, נראה כי הנוסחה φ אכן ספיקה-

למשל, ההשמה

$$\begin{cases}x_1=F\\ x_2=T\\ x_3=T\\ x_4=T\\ x_5=T\end{cases}$$

אכן מספקת את הנוסחה φ.

אם כן, מצאנו נוסחא ספיקה אשר האלגוריתם מפיק עבורה פלט שאינו מספק אותה, ולכן עבור נוסחה זו נכשל האלגוריתם.

שאלה 4

יהי T עץ בינארי לחלוטין בעל n עלים. נוכיח על ידי בניית סדרת שכיחויות f מתאימה, שהעץ T הוא אחד מעצי הופמן של סדרת השכיחויות f.

תהי סדרת האותיות: $x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n$.

נגדיר את f להיות סדרת שכיחויות באופן הבא:

נסרוק את העץ T החל מהשורש ובכל קריאה רקורסיבית לבנים נגדיל את המונה depth ב-1 (המונה יהווה את העומק של הסריקה בכל צומת נתון). בנוסף נחזיק משתנה גלובאלי של האותיות שעדיין לא שויכו לעלה במבנה נתונים כלשהו (למשל תור קדימויות).

כאשר נגיע לעלה $z\in T$ (צומת שאין לו אף בן) אז נצמיד עבורו את האות הפנויה הבאה מסדרת האותיות שעוד לא שויכה לעלה, נסמנה f_{xi}, ונגדיר עבורה את השכיחות $f_{xi} = \frac{1}{2^{depth(z)}}$. כאשר depth(z) הוא משתנה העומק של הצומת בעץ שהזכרנו לעיל.

<u>טענת עזר:</u> סכום השכיחויות של הסדרה f הוא 1.

<u>הוכחה</u>: נוכיח באינדוקציה על גובה (עומק) העץ T.

כאשר depth = 0 הטענה ברורה.

כאשר depth = 1 לשורש יש 2 בנים (כיוון שזהו עץ בינארי לחלוטין) – לכל אחד מהם מוצמדת אות עם שכיחות 0.5 ולכן סכום השכיחויות הוא 1.

נניח את נכונות הטענה עבור n-1 ונוכיח שהיא מתקיימת לכל n טבעי.

מספר העלים בעומק ה-n הוא זוגי, מפני שהעץ בינארי לחלוטין אם יש צומת ברמה ה-n-1 אז יש לו בהכרח 2 בנים (עלים) ברמה ה-n-ית, ולכן סך כל העלים הוא זוגי.

לפיכך אם לכל זוג עלים אחים x,y נמחק את שני העלים ונאחד את השכיחויות שלהם לצומת ההורה נקבל שהשכיחות של צומת ההורה היא:

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

בכך שביצענו את הפעולה הזו לכל זוג עלים אחים, הפחתנו את רמת העץ ב-1 וקיבלנו עץ בעומק n-1 שמקיים את הנחת האינדוקציה לגבי השכיחויות, ומכך נובע שהנחת האינדוקציה נכונה וסכום השכיחויות בסך כל העץ הוא 1.

כעת כשהוכחנו שסדרת השכיחויות f שהגדרנו היא תקינה נותר להראות שהעץ T הוא אחד מעצי הופמן של הסדרה.

על ידי הרצת האלגוריתם של הופמן על הסדרה f שבנינו נקבל חזרה את העץ T (או עץ הופמן אחר ששקול לו). נתאר את ריצת האלגוריתם על הסדרה f:

ראשית האלגוריתם בשלב הראשון את זוג העלים שהשכיחות שלהם היא $\frac{1}{2^n}$, ויאחד אותם לזוג עלים ששכיחותם היא $\frac{1}{2^{n-1}}$.

לאחר מכן הוא ימשיך ויאחד את כל זוגות העלים הנותרים שהשכיחות שלהם היא $\frac{1}{2^n}$.

בהמשך האלגוריתם יבצע את אותן הפעולות על העלים ששכיחותם היא $\frac{1}{2^{n-1}}$, אח"כ $\frac{1}{2^{n-2}}$, וכך הלאה עד שתסתיים ריצת האלגוריתם ונקבל את העץ T ממנו הרכבנו את הסדרה f.

<u>הערה:</u> ייתכן והאלגוריתם של הופמן לא יחזיר בדיוק את העץ T שממנו הרכבנו את הסדרה, אלא עלים באותה רמה יקבלו אותיות שונות בסדרה. זהו פרט שניתן לתקנו בקלות ע"י סדרת החלפות (סופית) בין כל זוג צמתים z,y כאלה והתוצאה (ש-T הוא עץ הופמן של הסדרה) תישמר.

כלומר ייתכנו צמתים z,y אשר מקיימים $depth_T(z) = depth_T(y)$ ו-2 אותיות x_i,x_j המקיימות $f_{xi} = f_{xj}$ שהאות f_{xi} שויכה לצומת z והאות f_{xj} שויכה לצומת y. אם נסמן את העץ T^* כעץ שמתקבל לאחר ההחלפה בין האותיות שמשויכות לצמתים הללו נקבל עדיין ש-$ABL(T) = ABL(T^*)$ ולכן שני העצים הללו הם עצי הופמן של הסדרה f, ובפרט העץ T הוא אחד מעצי הופמן של הסדרה f כנדרש.