20425 - תאריך הבחינה: 19.2.2015 (סמסטר 2015א - מועד 4א / 85)

שאלה 1

נסמן ב- X את האורך (במטרים) של לוח מקרי. מתקיים $X \sim N(\mu, \sigma^2)$;

נסמן ב- Y את הרוחב (במטרים) של לוח מקרי. מתקיים $X \sim N(\mu/2, \sigma^2/4)$.

א. נתון כי: $P\{X > 2.15\} = 1 - \Phi\left(\frac{2.15-\mu}{\sigma}\right) = 0.2266 = \Phi(-0.75) = 1 - \Phi(0.75)$

ולכן: $\mu = 2.15 - 0.75\sigma$

כמו כן, נתון כי: $P\{Y < 0.95\} = \Phi\left(\frac{0.95-\mu/2}{\sigma/2}\right) = 0.3085 = \Phi(-0.5)$

לפיכך: $\frac{\mu}{2} = 0.95 + \frac{\sigma}{4} \quad \Rightarrow \quad \mu = 1.9 + \frac{\sigma}{2}$

נפתור את שתי המשוואות הנובעות מן הנתונים, ונקבל: $\sigma = 0.2 \quad ; \quad \mu = 2$

ב. השטח (במ"ר) של לוח מקרי הוא XY , כאשר X ו- Y בלתי-תלויים. לפיכך:

$$E[XY] = E[X]E[Y] = 2 \cdot 1 = 2$$

$$E[X^2Y^2] = E[X^2]E[Y^2] = [\text{Var}(X) + (E[X])^2][\text{Var}(Y) + (E[Y])^2] = (0.2^2 + 2^2) \cdot (0.1^2 + 1^2) = 4.0804$$

$$\text{Var}(XY) = E[X^2Y^2] - (E[XY])^2 = 4.0804 - 4 = 0.0804$$

ג. המחיר (בש"ח) של לוח מקרי הוא $150XY$. לפיכך:

$$E[150XY] = 150 \cdot 2 = 300 \qquad ; \qquad \text{Var}(150XY) = 150^2\,\text{Var}(XY) = 22500 \cdot 0.0804 = 1{,}809$$

ד. לפי אי-שוויון צ'בישב: $P\{|XY - 2| \ge 0.8\} = P\{|XY - E[XY]| \ge 0.8\} \le \frac{\text{Var}(XY)}{0.8^2} = \frac{0.0804}{0.64} = 0.1256$

שאלה 2

לפי נתוני הבעיה, למשתנה המקרי N יש התפלגות אחידה בדידה על-פני הערכים 1, 2, ..., n .

למספר ה- H , שמתקבלים ב- $N = j$ הטלות המטבע, יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים j ו- p .

א. נסמן ב- A את המאורע שמתקבלים רק H בהטלות המטבע. נעזר בנוסחת ההסתברות השלמה, ונקבל:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P\{A \mid N = j\} P\{N = j\} = \sum_{j=1}^{n} p^j \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{1-p^{n+1}}{1-p} - 1\right] = \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{\cancel{1} - p^{n+1} - \cancel{1} + p}{1-p}\right] = \frac{p(1-p^n)}{n(1-p)}$$

ב. מתקיים $X \mid N = j \sim B(j, p)$. לפיכך, נוכל להעזר בנוסחת השונות המותנית, ובהתפלגות הידועה של N , כדי לקבל את השונות המבוקשת:

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X \mid N)] + \text{Var}(E[X \mid N]) = E[Np(1-p)] + \text{Var}(Np)$$

$$= p(1-p) \cdot \tfrac{n+1}{2} + p^2 \cdot \tfrac{n^2-1}{12} = p \cdot \tfrac{n+1}{2} \cdot [1 - p + \tfrac{p}{6}(n-1)] = p \cdot \tfrac{n+1}{2} \cdot [1 + \tfrac{p}{6}(n-7)]$$

ג. בהמשך לאמור בסעיף הקודם, נקבל כי לכל $i = 0,1,\ldots,j$ ו- $j = 1,2,\ldots,n$ מתקיים:

$$P\{X = i, N = j\} = P\{X = i \mid N = j\} P\{N = j\} = \binom{j}{i} \cdot p^i (1-p)^{j-i} \cdot \tfrac{1}{n}$$

בכל מקרה אחר, ההסתברות המשותפת שווה ל- 0.

שאלה 3

א. הוכחת הטענה מובאת בספר הקורס.

ב. **דרך I:**

$$E[X \mid X>0]=\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot P\{X=i \mid X>0\}=\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot\frac{P\{X=i\}}{P\{X>0\}}=\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot\frac{P\{X=i\}}{P\{X>0\}}=\frac{E[X]}{P\{X>0\}}=\frac{1}{1-e^{-1}}$$

$$E[X^2 \mid X>0]=\sum_{i=1}^{\infty} i^2\cdot P\{X=i \mid X>0\}=\sum_{i=1}^{\infty} i^2\cdot\frac{P\{X=i\}}{P\{X>0\}}=\frac{E[X^2]}{P\{X>0\}}=\frac{\operatorname{Var}(X)+(E[X])^2}{P\{X>0\}}=\frac{2}{1-e^{-1}}$$

ומכאן :

$$\operatorname{Var}(X \mid X>0)=E[X^2 \mid X>0]-(E[X \mid X>0])^2=\frac{2}{1-e^{-1}}-\left(\frac{1}{1-e^{-1}}\right)^2=\frac{2-2e^{-1}-1}{(1-e^{-1})^2}=\frac{1-2e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}$$

דרך II:

נחשב תחילה את פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי המותנה $X \mid X>0$, עבור משתנה מקרי X שהתפלגותו פואסונית עם הפרמטר 1.

לכל $i=1,2,\ldots$ מתקיים :

$$P\{X=i \mid X>0\}=\frac{P\{X=i\}}{P\{X>0\}}=\frac{e^{-1}\cdot\frac{1^i}{i!}}{1-e^{-1}\cdot\frac{1^0}{0!}}=\frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})\cdot i!}$$

לכן :

$$E[X \mid X>0]=\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot P\{X=i \mid X>0\}=\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot\frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})\cdot i!}=\frac{1}{1-e^{-1}}\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot\frac{e^{-1}}{i!}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-1}}\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot\frac{e^{-1}}{i!}}_{=E[X]=1}=\frac{1}{1-e^{-1}}$$

וגם :

$$E[X^2 \mid X>0]=\sum_{i=1}^{\infty} i^2\cdot P\{X=i \mid X>0\}=\sum_{i=1}^{\infty} i^2\cdot\frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})\cdot i!}=\frac{1}{1-e^{-1}}\sum_{i=1}^{\infty} i^2\cdot\frac{e^{-1}}{i!}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-1}}\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} i^2\cdot\frac{e^{-1}}{i!}}_{=E[X^2]=1+1}=\frac{2}{1-e^{-1}}$$

ומכאן (כמו בדרך I) :

$$\operatorname{Var}(X \mid X>0)=E[X^2 \mid X>0]-(E[X \mid X>0])^2=\frac{1-2e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}$$

שאלה 4

א. נסמן ב- A_i את המאורע שרכיב i תקין, לכל $i=1,2,3,4$, וב- B את המאורע שעובר זרם מ-A ל-B.

לפי הנתון $P(A_i)=0.9$ לכל i , והמאורעות A_i בלתי-תלויים זה בזה.

$$P(B)=P(A_4\cup(A_3\cap(A_1\cup A_2)))=P(A_4)+P(A_3)P(A_1\cup A_2)-P(A_4)P(A_3)P(A_1\cup A_2)$$

$$=0.9+0.9\cdot(1-0.1^2)-0.9\cdot0.9\cdot(1-0.1^2)=0.9891$$ [מצבי הרכיבים בלתי-תלויים זה בזה]

ב. נחשב את ההסתברות המותנית שיעבור זרם במערכת, אם ידוע שרכיב 2 תקין. הואיל וכל רכיבי המערכת בלתי-תלויים, בהינתן שרכיב 2 תקין, יעבור זרם במערכת אם רכיבים 3 או 4 יהיו תקינים. לפיכך:

$$P(B\,|\,A_2)=P(A_3\cup A_4\,|\,A_2)=P(A_3\cup A_4)=1-P(A_3^C\cap A_4^C)=1-0.1^2=0.99$$

ג. נסמן ב- T_2 את המאורע שבדיוק שני רכיבים במערכת תקינים. עלינו לחשב את ההסתברות המותנית:

$$P(B\,|\,T_2)=\frac{P(B\cap T_2)}{P(T_2)}$$

קל יותר לחשב את הסתברות המאורע המשלים, דהיינו את $P(B^C\,|\,T_2)$, הואיל והמאורע $B^C\cap T_2$ מתרחש רק אם רכיבים 1 ו-2 הם שני הרכיבים היחידים שתקינים במערכת. בכל המקרים האחרים עובר זרם במערכת.

לפיכך:

$$P(B\,|\,T_2)=1-P(B^C\,|\,T_2)=1-\frac{P(B^C\cap T_2)}{P(T_2)}=1-\frac{0.9^2\cdot 0.1^2}{\binom{4}{2}\cdot 0.9^2\cdot 0.1^2}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

אפשר גם לחשב את ההסתברות בדרך ישירה:

כדי לחשב את הסתברות החיתוך שבמונה, נפריד בין שני מקרים, שבהם יש בדיוק שני רכיבים תקינים, שמאפשרים מעבר של זרם:

1. רכיב 4 וגם בדיוק אחד מהרכיבים האחרים תקינים (3 אפשרויות שונות);
2. רכיב 3 וגם אחד מהרכיבים 1 או 2 תקינים, ואילו רכיב 4 אינו תקין (2 אפשרויות שונות).

לכל אחת מהאפשרויות המתוארות מעלה יש הסתברות שווה להתרחש, והיא $0.9^2\cdot 0.1^2$, מכיוון שכל הרכיבים בלתי-תלויים זה בזה ולכולם יש אותה הסתברות להיות תקינים. כמו כן, שני המקרים המתוארים מעלה זרים זה לזה, ולכן כדי למצוא את הסתברות החיתוך, נסכום את ההסתברויות של שני המקרים הללו.

מקבלים:

$$P(B\,|\,T_2)=\frac{(3+2)\cdot 0.9^2\cdot 0.1^2}{\binom{4}{2}\cdot 0.9^2\cdot 0.1^2}=\frac{5}{6}$$

ד. מספר הרכיבים הלא-תקינים במערכת הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 4 ו- 0.1.
לפיכך, אם נסמן ב- X את מספר הרכיבים הלא-תקינים במערכת, נקבל:

$$P\{X\geq 2\,|\,X\geq 1\}=\frac{P\{X\geq 2\}}{P\{X\geq 1\}}=\frac{1-P\{X=0\}-P\{X=1\}}{1-P\{X=0\}}=\frac{1-0.9^4-4\cdot 0.1\cdot 0.9^3}{1-0.9^4}=\frac{0.0523}{0.3439}=0.1521$$

שאלה 5

נתון כי למשתנה המקרי X יש התפלגות אחידה רציפה על הקטע $(0,1)$.

א. נמצא תחילה את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y. לכל $y>1$ מתקיים:

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{\tfrac{1}{\sqrt{X}}\leq y\}=P\{\tfrac{1}{X}\leq y^2\}\underset{X,y>0}{\overset{\downarrow}{=}}P\{\tfrac{1}{y^2}\leq X\}=1-F_X(\tfrac{1}{y^2})=1-\tfrac{1}{y^2}$$

לכן:

$$f_Y(y)=\tfrac{d}{dy}[F_Y(y)]=\tfrac{d}{dy}\left[1-\tfrac{1}{y^2}\right]=\tfrac{2}{y^3}\qquad,\qquad y>1$$

ב. $P\{Y>2\mid Y<4\}=\frac{P\{2<Y<4\}}{P\{Y<4\}}=\frac{F_Y(4)-F_Y(2)}{F_Y(4)}=\frac{F_X(\frac{1}{2^2})-F_X(\frac{1}{4^2})}{1-F_X(\frac{1}{4^2})}=\frac{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}}{1-\frac{1}{4^2}}=\frac{0.1875}{0.9375}=0.2$

ג. $E[Y]=\int_1^\infty y\,f_Y(y)dy=\int_1^\infty \frac{2y}{y^3}dy=\int_1^\infty \frac{2}{y^2}dy=\left.\frac{-2}{y}\right|_1^\infty=0+2=2$

ד. $E[Y^2]=\int_1^\infty y^2 f_Y(y)dy=\int_1^\infty \frac{2y^2}{y^3}dy=\int_1^\infty \frac{2}{y}dy=\left.2\ln y\right|_1^\infty=\infty-0=\infty$

לפיכך, מתקיים $\mathrm{Var}(Y)=\infty$.