

פתרון שאלה 1

נסמן : $n = \text{length}[A]$

האלגוריתם מורכב משתי לולאות מקוננות, ולכן צריך להשתמש בשתי שמורות לולאה.

שמורת הלולאה של לולאת ה-for החיצונית :

בתחילת כל איטרציה של הלולאה, התת-מערך $A[j+1..n]$ מכיל את $n-j$ האיברים הגדולים ביותר ב-A בסדר ממוין.

נוכיח ששלוש הדרישות מתקיימות :

אתחול : כאשר $j = n$ הטענה מתקיימת באופן ריק.

תחזוקה : נניח ששמורת הלולאה מתקיימת לפני האיטרציה שבה $j = k$. כלומר, התת-מערך

$A[k+1..n]$ מכיל את $n-k$ האיברים הגדולים ביותר ב-A בסדר ממוין.

באיטרציה שבה $j = k$ מתבצעת לולאת for פנימית, שמזיזה את האיבר הגדול ביותר בתת-מערך $A[1..k]$ למקום ה-k במערך (נוכיח זאת בהמשך).

מכך נובע, שלאחר ביצוע האיטרציה התת-מערך $A[k..n]$ מכיל את $n-k+1$ האיברים הגדולים ביותר ב-A בסדר ממוין ושמורת הלולאה תתקיים גם לפני האיטרציה הבאה.

סיום : אם שמורת הלולאה מתקיימת לאחר היציאה מהלולאה (כאשר $j = 0$), אז התת-מערך $A[1..n]$ מכיל את n האיברים הגדולים ביותר ב-A בסדר ממוין ; כלומר, המערך A ממוין.

המשתנה swap בודק אם במהלך הלולאה הפנימית בוצעה לפחות החלפה אחת. אם לא בוצעה אף החלפה, אז ערכו של swap נשאר FALSE והאלגוריתם עוצר ומחזיר את המערך A.

נראה שזו התשובה הנכונה (כלומר, המערך A ממוין) :

בתחילת האיטרציה של הלואה החיצונית מתקיימת שמורת הלולאה – התת-מערך $A[j+1..n]$ מכיל את $n-j$ האיברים הגדולים ביותר ב-A בסדר ממוין. כלומר, התת-מערך $A[1..j]$ מכיל את j האיברים הקטנים ביותר ב-A. מכך שבמהלך הלולאה הפנימית לא בוצעה אף החלפה, נובע שהתת-מערך $A[1..j]$ ממוין. לכן המערך A כולו ממוין.

שמורת הלולאה של לולאת ה-for הפנימית :

בתחילת האיטרציה ה-i של הלולאה, האיבר $A[i]$ הוא האיבר המקסימלי בתת-מערך $A[1..i]$. נוכיח ששלוש הדרישות מתקיימות :

אתחול : כאשר $i = 1$ הטענה נכונה – האיבר $A[1]$ הוא האיבר המקסימלי בתת-מערך $A[1..1]$.

תחזוקה : נניח ששמורת הלולאה מתקיימת לפני האיטרציה ה-i של הלולאה. כלומר האיבר $A[i]$ הוא האיבר המקסימלי בתת-מערך $A[1..i]$.

באיטרציה ה-i האלגוריתם משווה את $A[i]$ ל- $A[i+1]$, ואם הוא גדול יותר הוא מחליף ביניהם.

לכן לאחר ביצוע האיטרציה האיבר $A[i+1]$ הוא האיבר המקסימלי בתת-מערך $A[1..i+1]$.

סיום : אם שמורת הלולאה מתקיימת לאחר היציאה מהלולאה (כאשר $i = j$) אז האיבר $A[j]$ הוא האיבר המקסימלי בתת-מערך $A[1..j]$, כפי שנדרש.