<u>פתרון ממ"ן 11</u>

שאלה 1.

יהי $v_0,...v_k$ מסלול ארוך ביותר בגרף. לכן כל השכנים של v_k שייכים לקבוצה $v_0,...v_{k-1}$. בפרט אורך המסלול הנדון גדול או שווה לדרגתו של v_k שהיא גדולה לפחות כמו הדרגה המינימלית בגרף. מכאן נובעת הטענה לגבי המסלול. יהי v_i קודקוד בעל אינדקס מינימלי כך שיש קשת בין v_i ל- v_k. אזי המעגל $v_i,...,v_k,...,v_i$ הוא מאורך לפחות $\delta(G)+1$. מש"ל.

שאלה 2.

אם G קשיר היטב אזי בין כל שני צמתים בגרף המכוון יש מסלול מכוון. לכם גרף התשתית קשיר. בהינתן קשת $(u,v)\in E$ יש מסלול מ- v ל- u (כי הגרף קשיר היטב). לכן הקשת הנדונה שייכת למעגל מכוון. מכיוון שהטענה הוכחה לקשת כלשהי הוכחנו את הכיוון הראשון הדרוש להוכחה.
נראה כעת כי אם התנאים מתקיימים אזי הגרף המדובר קשיר היטב. יהיו $u \neq v$ כלשהם. לפי הנתון קיים מסלול ביניהם בגרף התשתית $u-x_1-...-x_l-v$. בגרף המכוון בהכרח קיים מסלול מ- u ל- x_1.
מדוע ? אם קיימת הקשת (u,x_1) הטענה ברורה. אם לא קיימת הקשת הנדונה בהכרח קיימת הקשת (x_1,u) (לפי הגדרת גרף התשתית). לפי הנתון הקשת הזו שייכת למעגל מכוון. לכן קיים מסלול מ- u ל- x_1. בצורה דומה מוכיחים קיום מסלול בין x_i ל- x_{i+1} ומ x_l ל- v. בפרט יש מסלול בין u ל- v והטענה נובעת, שהרי $u \neq v$ נבחרו באופן שרירותי.

שאלה 3.

אם כל הקודקודים בגרף הם מדרגה 2 הטענה טריוויאלית. כעת נבצע על הגרף את השינוי הבא: בהנתן קודקוד מדרגה 2, u, נמחק את u ונחבר את שני שכניו בקשת. נחזור על התהליך כל עוד יש קודקודים מדרגה 2. בגרף הנותר יש רק קודקודים מדרגה 3 לפחות. נבחר קודקוד שרירותי v ונריץ ממנו BFS. מכיוון שלכל קודקוד לפחות שני שכנים, ומכיוון שאין קודקודים מדרגה 1, הרמה ה- i של עץ ה-BFS גדולה **בלפחות פי 2** מהרמה ה-$i-1$ (כאשר $i>0$). מכאן שעומק עץ ה-BFS הוא לכל היותר $\log n$ (אחרת היו בגרף יותר מ- n קודקודים!). נעבור על עץ ה BFS הנדון עד שנמצא קשת הסוגרת מעגל (חייבת להיות כזו ברמה האחרונה למשל). אורך המעגל הוא לכל היותר $2\log n$. מעגל זה מתרגם למעגל בגרף המקורי המכיל לכל היותר $2\log n$ קודקודים מדרגה לפחות 3. מש"ל.
הערה א. למעשה הוכחנו כאן כי אם גרף הוא d רגולרי ($d>2$) אזי הקוטר של הגרף (המרחק המקסימלי בין כל שני קודקודים) הוא לכל היותר $2\log n$.
הערה ב. מדובר בשאלה קשה.

שאלה 4.

נמיין את הקודקודים בסדר כלשהו $v_1,...v_n$. קשת (v_i,v_j) תקרא קשת **למעלה** אם $i<j$. אחרת היא תקרא קשת **למטה**. קבוצת הקשתות בגרף הם איחוד זר של קשתות למעלה וקשתות למטה. יתרה מזו, הגרף המושרה על קבוצת הקשתות למעלה אינו מכיל מעגלים (למה?) וכך גם הגרף המושרה על קבוצת הקשתות למטה. מכאן שאם נבחר את הקבוצה הגדולה יותר מבין השנים נוותר עם גרף חסר מעגלים המכיל לפחות $\frac{|E|}{2}$ קשתות. מש"ל.

שאלה 5.

פתרון תרגיל 1.2 במדריך.