תשובה 1

א. $x \subseteq y$ ב. $x \in y$ ג. $x \subseteq y$ ד. $x \in y$

ה. $x \subseteq y$ ו. לא זה ולא זה ז. $x \subseteq y$ ח. שניהם.

תשובה 2

דרך 1

מהגדרת $\oplus$,

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

בהתאם להדרכה לשאלה, נבחר קבוצה אוניברסלית U המכילה את A,B ונרשום

$= (A \cap B') \cup (B \cap A')$

בעזרת פילוג החיתוך מעל האיחוד (עמ' 17 בספר הלימוד)

$= (A \cup B) \cap (A \cup A') \cap (B' \cup B) \cap (B' \cup A')$

לפי טענה בתחתית עמ' 22 בספר, $A \cup A' = B \cup B' = U$. נציב זאת:

$= (A \cup B) \cap U \cap U \cap (B' \cup A')$

לפי שאלה 1.11 בעמ' 16 בספר, ניתן לזרוק את U מהחיתוך:

$= (A \cup B) \cap (B' \cup A')$

בעזרת כלל דה-מורגן (סעיף 1.4.3 בספר)

$= (A \cup B) \cap (B \cap A)'$

ולבסוף, שוב לפי הזהות שבהדרכה לשאלה

$= (A \cup B) - (B \cap A)$

דרך 2

עלינו להראות כי $x \in A \oplus B$ **<u>אם ורק אם</u>** $x \in ((A \cup B) - (A \cap B))$.

נתחיל באמירה $x \in A \oplus B$ ונרשום **סדרה של טענות שקולות**: כל טענה ברשימה מתקיימת **<u>אם ורק אם</u>** הטענה הקודמת לה מתקיימת. ליד כל טענה נרשום נימוק לכך שהיא שקולה לטענה הקודמת. בשלב מוקדם זה של הקורס, המעברים הלוגיים היחידים שנרשה לעצמנו לבצע בלי לציין נימוק הם מעברים בהם נשתמש בסעיפים א, ב, ג של "שקילויות שימושיות" בחוברת בלוגיקה (הזהויות לגבי שלילה כפולה, חילוף וקיבוץ). כל צעד אחר ילווה בנימוק.

(*i*) $x \in A \oplus B$

(*ii*) $x \in (A - B) \cup (B - A)$ (מהגדרת $\oplus$)

(*iii*) $(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$ (מהגדרת איחוד ומהגדרת הפרש קבוצות)

(*iv*) $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \wedge (x \notin B \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \notin A)$

(חוק הפילוג, סעיף ד' של "שקילויות שימושיות" בחוברת לוגיקה)

(v) $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \notin A)$. הסבר:

בתוך הביטוי שקיבלנו ב- (iv) נמצא הפסוק $x \in A \vee x \notin A$. לפי סעיף א של "טאוטולוגיות שימושיות" , ביטוי זה הוא טאוטולוגיה. לפי סעיף ט' של "שקילויות שימושיות" ניתן לזרוק טאוטולוגיה מתוך פסוק "וגם": $p \wedge t \equiv p$. נזרוק אפוא את $x \in A \vee x \notin A$ מתוך (iv) ונקבל ביטוי שקול ל- (iv). בצורה דומה נזרוק מביטוי זה את $x \in B \vee x \notin B$.

(vi) $(x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in B \wedge x \in A)$ (כלל דה-מורגן, שלילה של "וגם").

(vii) $(x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B)$ (מהגדרת איחוד והגדרת חיתוך).

$(viii)$ $x \in ((A \cup B) - (A \cap B))$ (מהגדרת הפרש קבוצות).

הגענו למבוקש!

תשובה 3

(i) **כיוון אחד:** נניח $X \cup B = Y \cup B$.

נבצע בשני האגפים הפרש עם הקבוצה B: $(X \cup B) - B = (Y \cup B) - B$.

מטענה שבעמ' 21 בכרך "תורת הקבוצות", מתחת לאיור 1.10 ,

$(X \cup B) - B = X - B$, $(Y \cup B) - B = Y - B$.

לפיכך קיבלנו $X - B = Y - B$, כמבוקש.

(ii) **כיוון שני:** נניח $X - B = Y - B$.

נבצע בשני האגפים איחוד עם B: $(X - B) \cup B = (Y - B) \cup B$.

כדי להמשיך אנו זקוקים לזהות הבאה: $(A - B) \cup B = A \cup B$.

הוכיחו זהות זו בעזרת בחירה של קבוצה אוניברסלית ושימוש בזהות $A - B = A \cap B'$ ובזהויות על קבוצות. סיימו מכאן את ההוכחה של סעיף זה.

תשובה 4

א. $A_0 = \varnothing$, $A_1 = \{5\}$, $A_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 5 \le x \le 7\}$, $A_3 = \{x \in \mathbf{R} \mid 5 \le x \le 9\}$.

$B_0 = A_1 - A_0 = \{5\} - \varnothing = \{5\}$, $B_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid 5 < x \le 7\}$ (מדוע?),

$B_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 7 < x \le 9\}$ (מדוע?) .

ב. $B_n = A_{n+1} - A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 5 \le x \le 2(n+1)+3\} - \{x \in \mathbf{R} \mid 5 \le x \le 2n+3\}$

$$= \{x \in \mathbf{R} \mid 5 \le x \le 2n+5\} - \{x \in \mathbf{R} \mid 5 \le x \le 2n+3\}$$

אם $5 \le 2n+3$ מובן שההפרש הזה שווה $\{x \in \mathbf{R} \mid 2n+3 < x \le 2n+5\}$.

המקרה היחיד בו לא מתקיים $5 \le 2n+3$ הוא כאשר $n = 0$. מקרה זה אינו מתאים לנוסחה שהצגנו ועלינו להוסיף אותו כמקרה מיוחד. לסיכום:

$B_0 = \{5\}$, ולכל $n > 0$ מתקיים $B_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 2n+3 < x \le 2n+5\}$.

ג. נוכיח: $\bigcup_{2\le n\in \mathbf{N}} B_n = \{x\in \mathbf{R} \mid 7<x\}$.

הכלה בכיוון אחד: נניח ש- x הוא אבר של אגף שמאל, נוכיח שהוא אבר של אגף ימין.

יהי $x \in \bigcup_{2\le n\in \mathbf{N}} B_n$.

משמע (מהגדרת איחוד של אוסף קבוצות) x שייך **לפחות לאחת** הקבוצות B_n כאשר $2 \le n$.

במלים אחרות, לפי סעיף ב, **קיים** $2 \le n$ כך ש- $x \in B_n = \{x\in \mathbf{R} \mid 2n+3 < x \le 2n+5\}$.

מכיון ש- $2 \le n$, מובן ש- $7 < x$.

הכלה בכיוון שני: נניח ש- $7 < x$ ונוכיח ש- $x \in \bigcup_{2\le n\in \mathbf{N}} B_n$.

להוכיח ש- $x \in \bigcup_{2\le n\in \mathbf{N}} B_n$ משמע להראות שקיים n, $2 \le n \in \mathbf{N}$, כך ש- $x \in B_n$.

כלומר עלינו להראות את הטענה הבאה:

אם $7 < x \in \mathbf{R}$ אז קיים n, $2 \le n \in \mathbf{N}$, כך ש- $2n+3 < x \le 2n+5$.

אינטואיטיבית ברור לנו שאוסף הקטעים B_n מכסה את כל הקרן הימנית המבוקשת על הישר.

בכל זאת אנו נדרשים להוכיח זאת. יש כמה דרכים להוכיח, הנה דרך אחת:

לכל $7 < x$ נתאים את המספר **האי-זוגי** הקרוב לו ביותר מימין, כלומר המספר האי-זוגי הקטן ביותר שאינו קטן מ- x.

דוגמאות: אם $x = 11.24$ נקבל 13. אם $x = 100$ נקבל 101. אם $x = 101$ נקבל 101.

המספר האי-זוגי שקיבלנו הוא לפחות 9 (מדוע?), לכן נוכל לרשום אותו כ- $2n+5$, כאשר $2 \le n \in \mathbf{N}$. הראו בעצמכם שזהו ה- n המבוקש, כלומר הראו ש- $2n+3 < x \le 2n+5$.

משתי ההכלות יחד מתקבל השוויון המבוקש.

ד. $\bigcup_{i\in I}(A_i') = (\bigcap_{i\in I} A_i)'$, $\bigcap_{i\in I}(A_i') = (\bigcup_{i\in I} A_i)'$.

נמקו בעזרת כללי דה-מורגן לכמתים, מהחוברת בלוגיקה.

ה. ניקח את $\mathbf{R}$ כקבוצה אוניברסלית. אז $D_n = B_n'$.

מכאן ומהסעיפים הקודמים:

$$\bigcap_{2\le n\in \mathbf{N}} D_n = \bigcap_{2\le n\in \mathbf{N}} (B_n)' = (\bigcup_{2\le n\in \mathbf{N}} B_n)' = \{x\in \mathbf{R} \mid 7<x\}' = \{x\in \mathbf{R} \mid x \le 7\}$$

המעבר השני הוא בעזרת כלל דה-מורגן שהוכחנו בסעיף הקודם.

איתי הראבן