שאלה 1:

עבור:

$A = \{1\} \cup \{\text{קבוצת המספרים הטבעיים הזוגיים}\}$

$B = \{2\} \cup \{\text{קבוצת המספרים הטבעיים האי-זוגיים}\}$

כלומר:

$A = \{0,1,2,4,6,8,10 \ldots\}$ $\quad$ $B = \{1,2,3,5,7,9 \ldots\}$

אז:

① $A \cup B = \{1\} \cup \{\text{קבוצת המספרים הטבעיים הזוגיים}\} \cup \{2\} \cup \{\text{קבוצת המספרים הטבעיים האי-זוגיים}\} = \{1,2\} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$

② $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A) = \{0,4,6,8,10 \ldots\} \cup \{3,5,7,9,\ldots\} =$

$= \{0,3,4,5,6,7 \ldots\} = \mathbb{N} - \{1,2\}$

③ $A-B = \{0,4,6,8,10 \ldots\} = \{\text{קבוצת המספרים הטבעיים הזוגיים}\} - \{2\}$

Scanned by CamScanner

נראה שכל הקבוצות שונות:

עבור A:

① $0 \in A$ אבל $0 \notin B$ $\Leftarrow$ A שונה מ- B.

② $3 \in A \cup B$ אבל $3 \notin A$ $\Leftarrow$ A שונה מ- $A \cup B$.

③ $1 \in A$ אבל $1 \notin A \oplus B$ $\Leftarrow$ A שונה מ- $A \oplus B$.

④ $1 \in A$ אבל $1 \notin A - B$ $\Leftarrow$ A שונה מ- $A - B$.

עבור B:

① הראינו ש- B שונה מ- A.

② $4 \in A \cup B$ אבל $4 \notin B$ $\Leftarrow$ B שונה מ- $A \cup B$.

③ $2 \in B$ אבל $2 \notin A \oplus B$ $\Leftarrow$ B שונה מ- $A \oplus B$.

④ $2 \in B$ אבל $2 \notin A - B$ $\Leftarrow$ B שונה מ- $A - B$.

עבור $A \cup B$:

① הראינו ש- $A \cup B$ שונה מ- A.

② הראינו ש- $A \cup B$ שונה מ- B.

③ $2 \notin A \oplus B$ אבל $2 \in A \cup B$ $\Leftarrow$ $A \cup B$ שונה מ- $A \oplus B$.

④ $2 \notin A - B$ אבל $2 \in A \cup B$ $\Leftarrow$ $A \cup B$ שונה מ- $A - B$.

עבור $A \oplus B$:

①,②,③ הראינו ש- $A \oplus B$ שונה מ- A, מ- B, ומ- $A \cup B$.

④ $3 \in A \oplus B$ אבל $3 \notin A - B$ $\Leftarrow$ $A \oplus B$ שונה מ- $A - B$.

עבור $A - B$:

הראינו הכל - כלומר ש- $A - B$ שונה מ- A, B, $A \oplus B$, $A \cup B$

נחשב את עוצמת A:

$$A=\{1\}\cup\{0,2,4,6,8\ldots\}$$

לפי תרגיל בתרגול 1

$|\{1\}|=1$ וגם $|\{0,2,4,6,8\ldots\}|=\aleph_0$

שלב 1:

חיבור עוצמות של קבוצות זרות

לפי משפט 5.10

$$|A|=1+\aleph_0=\aleph_0$$

נחשב את עוצמת B:

ראשית נוכיח ש: $|\{$קבוצת המספרים הטבעיים האי-זוגיים$\}|=\aleph_0$

נסמן את קבוצת המספרים הטבעיים האי זוגיים ב- C.

נגדיר $f:\mathbb{N}\to C$ כך ש: $f(n)=2n+1$

נוכיח ש- f חח"ע:

יהיו $x,y\in\mathbb{N}$ כך ש- $f(x)=f(y)$, כלומר:

$$2x+1=2y+1 \overset{\text{חיסור 1}}{\Rightarrow} 2x=2y \overset{\text{חילוק ב-2}}{\Rightarrow} x=y$$

לכן f חח"ע.

נוכיח ש- f על:

יהי $x\in C$. x מספר טבעי, אי זוגי, לכן $x-1\geq 0$, והוא מספר טבעי זוגי, לכן קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $x-1=2k \Leftarrow \frac{x-1}{2}=k$. נציב את k ב- f ונקבל:

$$f(k)=f\left(\frac{x-1}{2}\right)=2\left(\frac{x-1}{2}\right)+1=x-1+1=\boxed{x}$$

לכן מצאנו $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $f(k)=x$ לכן f על.

לסיכום, f חח"ע ועל - לכן $|C|=|\mathbb{N}|=\aleph_0$ מש"ל.

המשך בדף הבא...

המשך:

$B=\{2\}\cup C \Rightarrow |B| = 1+\aleph_0 = \aleph_0$

- **נחשב את עוצמת $A\cup B$:**

$A\cup B=\mathbb{N}$ לכן $|A\cup B|=\aleph_0$

- **נחשב את עוצמת $A\oplus B$:**

ראינו ש- $A\oplus B=\{0,3,4,5,6,7...\}$, נוכיח ש- $A\oplus B$ בת מנייה:

נגדיר $f:A\oplus B\to\mathbb{N}$ כך:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ x-2 & x\neq 0\end{cases}$$

נוכיח ש- f חח"ע:

יהיו $x,y\in A\oplus B$ כך ש- $f(x)=f(y)$.

- אם $f(x)=f(y)=0$, אז בהכרח $x=y=0$, כי אם $x\neq0$ או $y\neq0$ אז $x\geq3$ או $y\geq3$ (בה"כ)
ולכן $f(x)=x-2\geq3-2\neq1$ או $f(y)=y-2\geq3-2=1$
כלומר $f(x)\neq0$ או $f(y)\neq0$ בסתירה להנחה ש- $f(x)=f(y)=0$.
לכן $x=y=0$.
- אם $f(x)=f(y)\neq0$, אז לפי מה שטענו, $x=y\neq0$, לכן $f(x)=x-2$
וגם $f(y)=y+2$, אז: $x-2=y-2 \Rightarrow x=y$ ~~כנדרש~~.
ובסה"כ מצאנו ש- f חח"ע.

נוכיח ש- f על:

יהי $n\in\mathbb{N}$. אם $n=0$, ברור ש- $f(n)=n$ $(n=0\in A\oplus B)$
אם $n\neq0$, נבחר $n+2$ (בקבוצה) מוגדר היטב כסכום של טבעיים
ואז: $f(n+2)=n+2-2=n$ $\left(n+2\in A\oplus B \text{ כי } \underset{n\neq0 \text{ לפי הנחה}}{n\geq1} \Leftarrow n+2\geq3\right)$

כלומר f על. לכן הוכחנו שהיא חח"ע ועל, כלומר: $|A\oplus B|=|\mathbb{N}|=\aleph_0$

נחשב את עוצמת $A-B$:

נגדיר $f: A-B \to \mathbb{N}$ כך ש:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \frac{x}{2}-1 & x\neq 0\end{cases}$$

נוכיח חח"ע:

יהיו $x,y\in A-B$ כך ש- $f(x)=f(y)$, נוכיח ש- $x=y$.

- אם $f(x)=f(y)=0$ אז נובע כי $x=y=0$, כי אם $x\neq 0$ או $y\neq 0$, אז $x\geq 4$ או $y\geq 4$ (טבעיים זוגיים)
ואז $f(x)=\frac{x}{2}-1\geq\frac{4}{2}-1=1$ או $f(y)=\frac{y}{2}-1\geq\frac{4}{2}-1=1$
כלומר $f(x)\geq 1$ או $f(y)\geq 1$, בסתירה להנחה ש- $f(x)=f(y)=0$, לכן $x=y=0$.
- אם $f(x)=f(y)\neq 0$, אז $x=y\neq 0$ (לפי מה שהוכחנו).
ולכן: $\frac{x}{2}-1=\frac{y}{2}-1 \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{2} \Rightarrow x=y$.

כלומר f חח"ע.

נוכיח ש- f על:

יהי $n\in\mathbb{N}$. אם $n=0$, אז $n\in A-B$ ומתקיים ש- $f(n)=f(0)=0$
אם $n\neq 0$, אז $n\geq 1 \Rightarrow n+1\geq 2 \Rightarrow 2(n+1)\geq 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(n+1)\in A-B$ (כי זה מספר זוגי גדול-שווה מ-4)
ולכן מתקיים:

$$f(2(n+1))=\frac{2(n+1)}{2}-1=n+1-1=n$$

כלומר מצאנו שלכל $0\neq n\in\mathbb{N}$, קיים מספר טבעי $2(n+1)$ בקבוצה $A-B$ כך ש- $f(2(n+1))=n$, כלומר f על.
לכן נקבל שהעוצמות שוות, כלומר: $|A-B|=|\mathbb{N}|=\aleph_0$

לסיכום, הראינו שהקבוצות שוות, ולכן העוצמה מניה, כלומר עוצמתן שווה ל- $\aleph_0$.

** הערה לגבי השאלה הבאה:

בשאלה ב, סעיף א', אני לא בטוח
ב- 100 % אם הפתרון שלי נכון, אם לא,
אשמח שתתן לי הערות, זה חשוב לי, כי
השקעתי הרבה זמן ומחשבה בסעיף הזה.
תודה.

2 א

נסמן ב- A את קבוצת תתי הקבוצות של N שגודלן הוא n.

יהי A' איבר ב- A, כלומר, A' הוא קבוצה בת n איברים טבעיים שונים, אי שליליים.

אז סכום האיברים ב- A' הוא לכל הפחות:

$$S = \underbrace{0+1+2+3+\dots+(n-1)}_{n \text{ מחוברים}}$$

כל איבר ב- A הוא תת-קבוצה של N בת n איברים שסכום איבריה הוא $S+a$, כאשר $a \in N$ טבעי כלשהו.

מספר הקומבינציות של מספרים טבעיים שונים, שסכומם הוא $S+a$, הוא כמובן סופי, כלומר:

עבור $a=0$, מספר הקומבינציות שניתן לבטא את $S+0$ הוא סופי.

כנ״ל עבור $a=1$, מספר הקומבינציות שניתן לבטא את $S+1$ הוא סופי.

ובאופן כללי, עבור כל $a \in N$, ניתן לבטא את הסכום $S+a$ ע״י מספר סופי של קומבינציות של מחוברים טבעיים שונים.

~~במילים אחרות, לכל $a \in N$~~ ,

נסמן:

עבור $0 \in N$, קיימים a_0 תתי-קבוצות בנות n איברים שסכומן הוא $S+0$.

עבור $1 \in N$, קיימים a_1 תתי-קבוצות בנות n איברים שסכומן הוא $S+1$.

ובאופן כללי: לכל $k \in N$, קיימים a_k תתי-קבוצות בנות n איברים שסכומן הוא $S+k$.

נעבור כעת לספירת הקבוצות:

ראשית, נספור קודם כל את קבוצת תתי-הקבוצות בנות n איברים שסכומן הוא $S+0$.
נסמנה A_0.

כאמור, בקבוצה זו יש a_0 איברים (תתי קבוצות של n איברים), כאשר a_0 הוא מספר סופי!

את כל איבר ב-A_0, נסדר בסדר עולה (כאמור כל קבוצה בת n איברים).
לאחר מכן, נסדר את כל הקבוצות (איברי A_0) בסדר מילוני.

~~את הקבוצה~~ את האיבר הראשון נסמן ב-t_1, את השני ב-t_2, וכך הלאה, עד האיבר האחרון, t_{a_0}.

באותו אופן, נסדר את קבוצת תתי קבוצות בנות n איברים שסכומן הוא $S+1$, נסמנה A_1.
רק שעכשיו, לאחר הסידור (סידור עולה ומילוני), את האיבר הראשון נסמן ב-t_{a_0+1}, השני ב-t_{a_0+2}, וכך הלאה, עד $t_{a_0+a_1}$.
כך נמשיך ונקבל [illegible] סידרה מהצורה:

$$(\underbrace{t_1,t_2,\dots,t_{a_0}}_{\text{איברי } A_0},\underbrace{t_{a_0+1},\dots,t_{a_0+a_1}}_{\text{איברי } A_1},\underbrace{t_{a_0+a_1+1},\dots,t_{a_0+a_1+a_2}}_{\text{איברי } A_2},\dots)$$

סידור זה מכסה את כל תתי-הקבוצות של $\mathbb{N}$ בנות n איברים. הצלחנו לספור את הקבוצה, ולכן A היא בת מנייה.

2

ד)

נסמן ב- B את קבוצת כל התת-קבוצות הסופיות של $\mathbb{N}$.

כל איבר ב- B הוא תת-קבוצה סופית של $\mathbb{N}$.

לפי סעיף ה קיימים אינסוף קבוצות בגודל n הנמצאות ב-B.

אוסף איחוד הקבוצות באורך n, הוא בעצם הקבוצה מסעיף ג'.

כלומר, B היא בעצם הקבוצה הבנויה מאיחוד כל הקבוצות התת-קבוצות של $\mathbb{N}$ שאורכן הוא n כלשהו, והקבוצה $\{\{\emptyset\}\}$.

כי $\{\{\emptyset\}\}$ היא קבוצה סופית באורך 0 של $\mathbb{N}$

אז נסמן ב- A_n את קבוצת התת-קבוצות של $\mathbb{N}$ שאורכן הוא n, אז:

$$B=\{\{\emptyset\}\}\cup A_1\cup A_2\cup A_3\cup\dots\cup A_n\cup\dots$$

הראנו כבר שכל A_n מקיים $|A_n|=\aleph_0$.

בנוסף ענינו $\{\{\emptyset\}\}$ מקיים $|\{\{\emptyset\}\}|=1$, לכן

$$|\{\{\emptyset\}\}\cup A_1| = 1+\aleph_0=\aleph_0$$

נסמן $A_{1\emptyset}=\{\{\emptyset\}\}\cup A_1$ אז:

$$B=A_{1\emptyset}\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup\dots\cup A_n\cup\dots$$

אז לפי שאלה 4.g, $|B|=\aleph_0$ (איחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה), כלומר B בת מנייה.

2) 1) נסמן ב-C את קבוצת כל תתי-קבוצות האינסופיות של N.

נסמן ב-B את הקבוצה מסעיף ב'.

יהי $a\in P(N)$.

בהכרח, או ש-a היא קבוצה סופית, או אינסופית.

אם סופית, אז $a\in B$.

אם אינסופית, אז $a\in C$.

נסיק מכך ש- $P(N)=B\cup C$.

בסעיף ב' מצאנו שהקבוצה B היא בת מניה.
אם C הייתה בת מניה אז גם $P(N)$ הייתה בת מניה כאיחוד קבוצות בנות מניה, וזו סתירה לכך ש-$P(N)$ אינה בת מניה.
כלומר - C אינה בת מניה - כנדרש.

3) נשתמש בסימונים מסעיף ג.

$$P(N)=A\cup B \Rightarrow |P(N)|=|A\cup B| \Rightarrow C=\aleph_0+k$$

נסמן $|B|=k$ לפי משפט 5.25, $|P(N)|=C$

בשלילה נניח ש-k היא עוצמה סופית, ונראה שנובע מכך ש-$\aleph_0+k=\aleph_0$.

נגדיר קבוצה D: $D=\{0,1,2,...,(k-1)\}$, אז $|D|=k$.

תהי הקבוצה $N-D$ ואז מתקיים $D\cap(N-D)=\emptyset$, כלומר הן זרות,
לכן $|N-D\cup D|=|N-D|+|D|$.

מצד שני, $N-D\cup D=N$, ולכן

$$|N-D\cup D|=|N-D|+|D|=\aleph_0$$

נגדיר פונקציה $f:N-D\to N$ כך: $f(x)=x-k$

נוכיח ש-f חח״ע ועל

השאלה, נציין את הקבוצה $N-D$!

$N-D = \{k, k+1, k+2, \dots\}$

נוכיח חח"ע:

יהיו $x,y \in N-D$ כך ש: $f(x)=f(y)$, אזי:

קיימים $a,b \in N$ כך ש- $x=k+a$ ו- $y=k+b$. אזי:

$f(x) = f(k+a) = k+a-k = a$

$f(y) = f(k+b) = k+b-k = b$

כלומר $a=b \Rightarrow y=k+a=x \Rightarrow y=x$, לכן f חח"ע.

נוכיח על:

יהי $n \in N$ נבחר את $n+k$ אז כמובן ש- $n+k \in N-D$ ומתקיים:

$f(n+k) = n+k-k = n$

כלומר, לכל $n \in N$ קיים מקור $n+k$ ב- $N-D$ כך ש- $f(n+k)=n$, לכן f על.

מצאנו אם כן, ש- $N-D$ בת מנייה,

כלומר $|N-D| = \aleph_0$, לכן מתקיים:

$\aleph_0 + k = |N-D \cup D| = |N| = \aleph_0$

כלומר $c = \aleph_0 + k = \aleph_0$, סתירה,

לכן הנחתנו ש- k היא עוצמה סופית,

שגויה, כלומר - k היא עוצמה אינסופית:

ולכן ממשפט 11.5, נקבל ש- $c = \aleph_0 + k \underset{\text{משפט 11.5}}{=} k$

כלומר $k = c \Rightarrow |C| = c$

הקבוצה C שהגדרנו בהתחלת השאלה, סליחה על הסימון המבלבל

2 ה

$$\left|\left\{\bigcup_{i\in\mathbb{N}-\{0\}}\{x\in P(\mathbb{N}) \mid |x| = i\}\right\}\right| = \aleph_0 \qquad (i)$$

$$\left|\{x\in P(\mathbb{N}) \mid |x| = \aleph_0\}\right| = C \qquad (ii)$$

3

כדי להראות שהפעולה כזו אינה אפשרית,
נראה שהתוצאה של $k\oplus m$ לפי הגדרה זו, תלויה
בנציגים.
לדוגמה:

$A=\{1,2\}$ $B=\{2,3,4\}$ $C=\{1,2\}$ $D=\{1,2,3\}$

אז מתקיים:

$|A| = |C| = 2$

$|B| = |D| = 3$

אז עבור $A\oplus B$ מתקיים, לפי ההגדרה:

$2\oplus 3 = |A\oplus B| = |\{1,3,4\}| = 3$

ועבור $C\oplus D$ מתקיים:

$2\oplus 3 = |C\oplus D| = |\{3\}| = 1$

וכמובן ש- $1\neq 3$
לכן ההגדרה אינה מוגדרת היטב.

4 (ג)

יהיו A_1, A_2, B_1, B_2 כך ש-

$|A_1| = k_1$ $|A_2| = k_2$ $|B_1| = m_1$ $|B_2| = m_2$

~~מכך ש- $k_1 \le k_2$, אז קיימת פונקציה חח"ע מ- A_1 ל- A_2~~

מכך ש- $k_1 \le k_2$, אז קיימת פונקציה חח"ע מ- A_1 ל- A_2.

לכן לפי שאלה 1.ב, קיימת קבוצה חלקית ל- A_2 נסמנה $A_2^{\le}$, כך ש- $k_1 = |A_1| = |A_2^{\le}|$

נתבונן בקבוצה $A_2 \times B_2$. כמובן מתקיים $A_2 \times B_2 \supseteq A_2^{\le} \times B_2$

לכן $|A_2 \times B_2| \ge |A_2^{\le} \times B_2| \Leftarrow \underbrace{k_2 \cdot m_2 \ge k_1 \cdot m_2}_{\text{נסמן (2)}}$.

בנוסף, קיימת קבוצה חלקית ל- B_2, נסמנה $B_2^{\le}$, כך ש- $m_1 = |B_1| = |B_2^{\le}|$ (כל זה מאותם שיקולים שעשינו עבור A_1 ו- A_2 ומכך ש- $m_1 \le m_2$)

נתבונן בקבוצה $A_1 \times B_2$, מתקיים $A_1 \times B_2 \supseteq A_1 \times B_2^{\le}$

לכן $|A_1 \times B_2| \ge |A_1 \times B_2^{\le}| \Leftarrow \underbrace{k_1 m_2 \ge k_1 m_1}_{\text{נסמן (3)}}$

מ- (2) ו- (3) נקבל ש- $k_2 m_2 \ge k_1 m_1$ כנדרש.

ה ב

שמאלה ימינה:

$A = \mathbb{N} \quad B = \mathbb{R} \Rightarrow |A| = \aleph_0 \quad |B| = C$

מכך ש- $B \supseteq A$ אזי $|B| \geq |A| \Leftarrow C \geq \aleph_0$.

וכמובן מתקיים גם $C \geq C$.

לכן לפי סעיף א', $C \geq \aleph_0 \cdot C \Leftarrow C \cdot C \geq \aleph_0 \cdot C$

$C \cdot C = C$ לפי טענה 5.15

בנוסף: $1 \leq \aleph_0$ וגם $C \geq C$ לכן שלפי אותו סעיף א',

$\Rightarrow \aleph_0 \cdot C \geq 1 \cdot C = C$

מטענה 5.15

לסיכום ש- $C \geq \aleph_0 \cdot C \geq C$, ולכן לפי קש״ב $\aleph_0 \cdot C = C$

ב

$C^C = (2^{\aleph_0})^C = 2^{\aleph_0 \cdot C} = 2^C$

משפט 5.26 | משפט 5.27 (ג) | לפי סעיף ג'