ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20425

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חוברת הקורס - אביב 2015ב

כתבה: נעמי מילאנו-רוזנטל

מרץ 2015 - סמסטר אביב - תשע״ה

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

נספחים

אל הסטודנטים,

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב".

בחוברת זו תמצאו תיאור, מלא ככל האפשר, של הקורס וכן פרטים על כלל פעילויותיכם במהלך הלימודים. רצוי שתראו בה מעין מדריך אישי, שתפקידו להבהיר לכם עניינים שונים. קראו בעיון רב את כל הסעיפים שלהלן, לפני שתתחילו בלימודיכם.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: http://telem.openu.ac.il .

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

בכל בעיה שמתעוררת תוכלו לפנות למרכזת ההוראה בקורס – נעמי מילאנו-רוזנטל, בטלפון 09-7781428, בפקס 09-7780631 או בדואר האלקטרוני לכתובת naomimi@openu.ac.il .

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה,

צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (קורס 20425 / סמסטר 2015ב)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	 ממ"ן (למנחה)
*1	10.3.2015 - 13.3.2015 (ג פתיחת הסמסטר)	1			
2	15.3.2015 - 20.3.2015	2 + 1			
3	22.3.2015 - 27.3.2015	2			
4	29.3.2015 - 3.4.2015 (ו ערב פסח)	3 + 2			
5	5.4.2015 - 10.4.2015 (א-ו פסח)	3		ממ"ח 01 5.4.2015	
6	12.4.2015 - 17.4.2015 (ה יום הזכרון לשואה)	3			
7	19.4.2015 - 24.4.2015 (ד יום הזכרון, ה יום העצמאות)	4			
8	26.4.2015 - 1.5.2015	4			ממ"ן 11 26.4.2015
9	3.5.2015 - 8.5.2015 (ה ל"ג בעומר)	5			
10	10.5.2015 - 15.5.2015	5		ממ"ח 02 10.5.2015	
11	17.5.2015 - 22.5.2015 (א יום ירושלים)	6			
12	24.5.2015 - 29.5.2015 (א שבועות)	6			ממ"ן 12 24.5.2015
13	31.5.2015 - 5.6.2015	7			
14	7.6.2015 - 12.6.2015	7			ממ"ן 13 7.6.2015
15	14.6.2015 - 19.6.2015	7 + 8			
	21.6.2015 - 23.6.2015 (ג סיום הסמסטר)	8			ממ"ן 14 21.6.2015

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים, מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

נקודות זכות

הקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב" מקנה למסיימים אותו 4 נקודות זכות.

הדרישות לקבלת 4 נקודות זכות הן:

א. הגשת מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות.

ב. ציון מינימלי 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון מינימלי 60 בקורס.

הגשת מטלות

הקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב" כולל חוברת קורס ובה 6 מטלות להגשה, המיועדות לתרגול רוב נושאי הלימוד של הקורס, ואוסף שאלות לתרגול עצמי של נושאי הלימוד של פרק 8.

עליכם להגיש מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות.

המשקל של כל **מטלת מנחה הוא 6 נקודות** והמשקל של כל **מטלה ממוחשבת הוא 3 נקודות**.

המועד האחרון להגשה של כל מטלה מופיע בכותרתה.

שימו לב, **בקורס זה לא ניתנות מטלות השלמה!**

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ״ח) 01

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1 ו- 2

קומבינטוריקה; חישובי הסתברויות קומבינטוריים

מספר השאלות: 20 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2015 ב **מועד אחרון להגשה:** 5.4.2015

שלחו את התשובות לממ״ח באמצעות מערכת שאילתא בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

שאלות 1-4 מתייחסות לבעיה הבאה:

לחיותה קופסה ובה 18 צמידים <u>שונים זה מזה</u>:

3 צמידים מזהב, 3 מכסף, 3 מנחושת, 3 מעץ, 3 מעורו- 3 מפלסטיק.

בבוקר חיותה בוחרת באקראי 4 צמידים מתוך ה- 18 שבקופסה,

ועונדת אותם באופן אקראי על ידיה – 2 צמידים על כל יד.

הערה: יש להבחין בין הצמידים שעל יד שמאל לבין אלו שעל יד ימין.

<u>שאלה 1</u>

בכמה מהתוצאות האפשריות חיותה עונדת על כל אחת מידיה שני צמידים מאותו הסוג?

א. 270 ב. 1,350 ג. 540 ד. 1,080

<u>שאלה 2</u>

בכמה מהתוצאות האפשריות חיותה עונדת לידיה צמידים בדיוק מ-2 סוגים שונים?

א. 900 ב. 1,350 ג. 540 ד. 1,080

<u>שאלה 3</u>

בכמה מהתוצאות האפשריות חיותה עונדת לידיה צמידים בדיוק מ-4 סוגים שונים?

א. 1,215 ב. 11,664 ג. 1,944 ד. 7,290

<u>שאלה 4</u>

בכמה מהתוצאות האפשריות חיותה עונדת לידיה צמידים בדיוק מ-3 סוגים שונים?

א. 450 ב. 15,120 ג. 1,800 ד. 9,720

שאלות 5-8 מתייחסות לבעיה הבאה:

בכיתה של 10 ילדים המורה מחלקת לילדים 11 בלונים **זהים** באופן אקראי.

<u>שאלה 5</u>

כמה אפשרויות חלוקה שונות קיימות?

א. $\binom{20}{9}$ ב. $\binom{20}{10}$ ג. 10^{11} ד. 11^{10}

<u>שאלה 6</u>

מהי ההסתברות שילד אחד יקבל בלון אחד, ילד אחר יקבל 10 בלונים וכל השאר לא יקבלו אף בלון?

א. $99 \cdot 10^{-10}$ ב. $9 \cdot 10^{-10}$ ג. $5.36 \cdot 10^{-4}$ ד. $1.19 \cdot 10^{-5}$

<u>שאלה 7</u>

קבע מהו הסימן החסר בין ההסתברויות הבאות:

P{ילד אחד מקבל בלון אחד וילד אחר מקבל 10 בלונים} $\square$ P{ילד אחד מקבל את כל הבלונים}

א. $<$ ב. $>$ ג. $=$ ד. לא ניתן לדעת

<u>שאלה 8</u>

מהי ההסתברות שבדיוק ילד אחד לא יקבל אף בלון?

א. 0.45 ב. 0.003 ג. 0.314 ד. 0.042

שאלות 9-13 מתייחסות לבעיה הבאה:

10 אנשים, וביניהם רון ודליה, נכנסים למסעדה ומתיישבים באופן מקרי ליד דלפק שבו 20 מקומות ישיבה, המסודרים בשורה.

<u>שאלה 9</u>

מהי הסתברות שבארבעת המקומות הימניים ביותר בשורה יישב לפחות אדם אחד?

א. 0.9567 ב. 0.2 ג. 0.5 ד. 0.2477

<u>שאלה 10</u>

מהי הסתברות שרון ודליה יתפסו שני מקומות כלשהם מתוך חמשת המקומות הימניים ביותר בשורה?

א. $\frac{5}{76}$ ב. $\frac{1}{38}$ ג. $\frac{1}{20}$ ד. $\frac{1}{19}$

<u>שאלה 11</u>

מהי הסתברות שלפחות אחד מהשניים, רון ודליה, יישב בקצה של השורה?

א. $\frac{1}{10}$ ב. $\frac{37}{190}$ ג. $\frac{1}{5}$ ד. $\frac{36}{190}$

<u>שאלה 12</u>

מהי הסתברות שיהיו בין רון לדליה בדיוק 10 מקומות ישיבה?

א. $\frac{7}{76}$ ב. $\frac{9}{76}$ ג. $\frac{9}{190}$ ד. $\frac{1}{19}$

<u>שאלה 13</u>

מהי הסתברות שאף אחד לא יישב במקום סמוך לדליה?

א. $\frac{2}{38}$ ב. $\frac{9}{38}$ ג. $\frac{11}{38}$ ד. $\frac{10}{38}$

שאלות 14-17 מתייחסות לבעיה הבאה:

מחלקים באופן אקראי 20 ילדים ל-4 קבוצות, המונות 5 ילדים כל אחת.

כל הקבוצות מבצעות בדיוק אותה המטלה.

כמו כן, נניח שקבוצת 20 הילדים כוללת 8 בנות ו- 12 בנים.

<u>שאלה 14</u>

כמה אפשרויות חלוקה שונות קיימות?

א. $\binom{20}{5}^4$ ב. $5!^4$ ג. $\frac{20!}{(5!)^4}$ ד. $\frac{20!}{4!\cdot(5!)^4}$

<u>שאלה 15</u>

מהי ההסתברות שילדים A ו- B לא ישתייכו לאותה הקבוצה?

א. $\frac{5}{76}$ ב. $\frac{15}{19}$ ג. $\frac{18}{19}$ ד. $\frac{4}{19}$

<u>שאלה 16</u>

בכמה מהחלוקות נוצרות: קבוצת-בנים, קבוצת-בנות ושתי קבוצות <u>מעורבות</u> ?

א. 44,352 ב. 4,656,960 ג. 11,176,704 ד. 133,056

<u>שאלה 17</u>

מהי ההסתברות <u>שבכל אחת</u> מהקבוצות יהיה לפחות בן אחד?

א. 0.139 ב. 0.129 ג. 0.996 ד. 0.986

שאלות 18-20 מתייחסות לבעיה הבאה:

במשחק מזל מגרילים מספר בן חמש ספרות (בין 00000 ל- 99999).
בחירת המספר נעשית על-ידי סיבוב חמש חוגות.
כל אחת מהחוגות נעצרת על אחת מהספרות 0, 1, ..., 9 בהסתברויות שוות.
חמש הספרות שעליהן נעצרות החוגות קובעות את המספר הנבחר.

<u>שאלה 18</u>

כמה מספרים אפשריים כוללים את הספרות 2 ו- 7? (את שתיהן ולא רק אחת מהן.)

א. 1,000 ב. 20,000 ג. 14,670 ד. 67,232

<u>שאלה 19</u>

כמה מספרים אפשריים כוללים רק את הספרות 2 ו- 7, אבל לא רק אחת מהן?

א. 30 ב. 32 ג. 34 ד. 28

<u>שאלה 20</u>

בכמה מהמספרים האפשריים כל אחת מהספרות 2 ו- 7 מופיעה בדיוק פעמיים?

א. 120 ב. 30 ג. 240 ד. 960

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 2 ו- 3

דיאגרמת ון וטענות הסתברות בסיסיות; הסתברות מותנית

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2015 ב **מועד אחרון להגשה:** 26.4.2015

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

לכלי רכב מסוים יש 3 גלגלים: שניים אחוריים – ימני ושמאלי – ואחד קדמי.

לכלי הרכב הזה אסור לעלות על הכביש, אם לחץ האוויר אינו תקין לפחות בשניים מגלגליו.

ידוע כי עבור כלי רכב מסוג זה מתקיימים התנאים הבאים –

לחץ האוויר תקין בכל אחד (בנפרד) מגלגליו האחוריים בהסתברות 0.85;

לחץ האוויר אינו תקין בשני הגלגלים האחוריים (בו-זמנית) בהסתברות 0.06;

לחץ האוויר תקין לפחות באחד מהגלגלים בהסתברות 0.96;

ההסתברות שלחץ האוויר אינו תקין בגלגל הקדמי וגם בגלגל האחורי-ימני שווה להסתברות שלחץ האוויר אינו תקין בגלגל הקדמי וגם בגלגל האחורי-שמאלי;

ההסתברות שלחץ האוויר אינו תקין רק בגלגל האחורי הימני קטנה פי 0.75 מההסתברות שלחץ האוויר אינו תקין רק בגלגל הקדמי;

אם לחץ האוויר בגלגל האחורי הימני אינו תקין, ההסתברות שלרכב אסור לעלות על הכביש היא 0.6.

(8 נק') א. הגדר <u>שלושה</u> מאורעות מתאימים לבעיה המתוארת בשאלה, צייר עבורם דיאגרמת ון, המתארת את הבעיה, ומלא בשטחים החלקיים שנוצרים בדיאגרמה את כל ההסתברויות <u>הנובעות</u> מנתוני הבעיה (ישירות או באמצעות חישוב).

הסבר <u>בקצרה</u> את דרך חישוב ההסתברויות שרשמת בדיאגרמה, **באמצעות טענות הסתברות בסיסיות**.

בכל אחד מהסעיפים שלהלן בטא את המאורע המתואר בסעיף <u>באמצעות המאורעות שהגדרת בסעיף א</u>.

(3 נק') ב. מהי ההסתברות שלחץ האוויר אינו תקין בגלגל הקדמי וגם בגלגל האחורי-ימני?

(3 נק') ג. מהי ההסתברות שלחץ האוויר אינו תקין רק בגלגל הקדמי?

(3 נק') ד. מהי ההסתברות שלרכב מותר לעלות על הכביש?

(3 נק') ה. בהינתן שלפחות באחד מגלגלי הרכב לחץ האוויר אינו תקין, מהי ההסתברות שיוכל לעלות על הכביש?

שאלה 2 (24 נקודות)

ברשותך מאגר של מתגים, שכל אחד מהם **סגור** בהסתברות 0.8, ואז **יכול לעבור בו זרם**.

אין תלות בין מתגים שונים.

(6 נק׳) א. צייר מעגל שההסתברות שיעבור בו זרם היא $1 - 0.2^5$.

(6 נק׳) ב. צייר מעגל שההסתברות שיעבור בו זרם היא $3 \cdot 0.8 - 3 \cdot 0.8^2 + 0.8^3$.

(6 נק׳) ג. צייר מעגל שההסתברות שיעבור בו זרם היא $0.8^2 + 0.8^3 - 0.8^5$.

(6 נק׳) ד. צייר מעגל שההסתברות שיעבור בו זרם היא $0.8^2 \cdot (1 - 0.2^3)$.

שאלה 3 (14 נקודות)

מטילים שתי קוביות תקינות: האחת לבנה והשנייה שחורה.

לאחר מכן, בוחרים באקראי מספר שלם בין התוצאה הקטנה שהתקבלה לבין התוצאה הגדולה שהתקבלה.

למשל, אם התקבלו התוצאות 3 ו- 6, בוחרים באקראי אחד מבין המספרים $\{3,4,5,6\}$.

(7 נק׳) א. מהי ההסתברות שייבחר המספר 5?

(7 נק׳) ב. אם ידוע שנבחר המספר 6, מהי ההסתברות שבקובייה הלבנה התקבל 6?

שאלה 4 (21 נקודות)

בקופסה 10 מטבעות ממוספרים מ-1 עד 10.

בוחרים מטבע מהקופסה (לפי ההסתברויות הרשומות בהמשך), ומטילים אותו n $(n > 2)$ פעמים.

נניח כי לכל $i = 1,2,...,10$, בוחרים במטבע i בהסתברות $\frac{2^{10-i}}{1{,}023}$ וההסתברות לקבל בו H היא $\frac{1}{2^i}$.

(7 נק׳) א. מהי ההסתברות שבהטלה הראשונה של המטבע שנבחר יתקבל H?

(7 נק׳) ב. אם בהטלה הראשונה של המטבע שנבחר התקבל H, מהי ההסתברות שגם בהטלה השנייה שלו יתקבל H?

(7 נק׳) ג. האם תוצאת ההסתברות המותנית, שחישבת בסעיף הקודם, מעידה על תלות בין התוצאות של שתי ההטלות הראשונות? נמק את תשובתך.

שאלה 5 (21 נקודות)

נתון מרחב מדגם S.

הוכח או הפרך את הטענות שלהלן.

הנח שכל המאורעות המופיעים בשאלה הם בעלי הסתברויות חיוביות שקטנות מ- 1.

(7 נק׳) א. אם $A \subset B$ אז A ו- B בלתי-תלויים זה בזה.

(7 נק׳) ב. אם $P(A) < P(B)$ אז $P(A|C) < P(B|C)$.

(7 נק׳) ג. אפשר לבטא את S כאיחוד של n מאורעות בלתי-תלויים, $A_1, A_2, \dots, A_n$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 4

מספר השאלות: 20 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2015 ב **מועד אחרון להגשה:** 10.5.2015

שלחו את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת שאילתא בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

שאלות 1-3 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתונים 19 תפוזים – 16 תקינים ו- 3 פגומים.

מניחים באקראי את התפוזים ב-3 סלים: בסל הראשון 9 תפוזים, בשני 6 תפוזים, ובשלישי 4 תפוזים.

יהי X מספר הסלים שיש בהם לפחות תפוז פגום אחד.

<u>שאלה 1</u>

מהי $P\{X=1\}$?

א. 0.1115 ב. 0.2125 ג. 0.0089 ד. 0.5496

<u>שאלה 2</u>

מהי $P\{X=3\}$?

א. 0.1687 ב. 0.1225 ג. 0.0169 ד. 0.2229

<u>שאלה 3</u>

מהי סטיית התקן של X ?

א. 4.78 ב. 0.322 ג. 0.567 ד. 2.114

שאלות 4-5 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתון ארגז ובו 1,000 כדורים ממוספרים מ-1 עד 1,000.

בוחרים באקראי כדורים מהארגז בזה אחר זה **<u>ועם החזרה</u>** ,

עד אשר נבחר לראשונה כדור שמספרו לא עולה על 20 (קטן מ-20 או שווה לו).

<u>שאלה 4</u>

חשב את ההסתברות שיידרשו פחות מ-48 בחירות עד לבחירת הכדור המבוקש.

א. 0.3869 ב. 0.0077 ג. 0.6131 ד. 0.6208

<u>שאלה 5</u>

עורכים 7 חזרות בלתי-תלויות על הניסוי.

מהי ההסתברות שיידרשו לכך בסך-הכל 360 בחירות של כדורים?

א. 0.1500 ב. 0.0029 ג. 0.1087 ד. קטן מ- 0.0001

שאלות 6-9 מתייחסות לבעיה הבאה:

יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 5.

נגדיר את המשתנה המקרי Y על-ידי: $Y = \begin{cases} X & , \quad X \le 1 \\ 5^X & , \quad X \ge 2 \end{cases}$

<u>שאלה 6</u>

האם Y הוא משתנה מקרי פואסוני?

א. כן ב. לא ניתן לדעת ג. רק בחלק מערכיו ד. לא

<u>שאלה 7</u>

מהי $P\{Y > 5\}$?

א. $1 - 5e^{-5}$ ב. $1 - 91.417e^{-5}$ ג. 0.5 ד. $1 - 6e^{-5}$

<u>שאלה 8</u>

מהי $E[Y]$?

א. $25 - 120e^{-5}$ ב. $5 + 5^5$ ג. $e^{20} - 21e^{-5}$ ד. $e^{20} + 5e^{-5}$

<u>שאלה 9</u>

השלם את הסימן החסר בביטוי הבא: $\text{Var}(Y) \;\square\; \text{Var}(X)$

א. $>$ ב. $<$ ג. $=$ ד. לא ניתן לדעת

שאלות 10-12 מתייחסות לבעיה הבאה:

מטילים **פעמיים** מטבע, **שההסתברות לקבל בו T היא *p*** $(0 < p < 1)$.

אם ב-2 ההטלות הללו מקבלים לפחות פעם אחת H, מטילים שוב את המטבע עד שמקבלים לראשונה H;

אך אם לא מקבלים אף H, מטילים שוב את המטבע עד שמקבלים לראשונה T.

יהי W המשתנה המקרי המוגדר על-ידי <u>סך-כל ההטלות</u> שמבוצעות במשחק (כולל 2 ההטלות הראשונות);

ויהי S המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר ה-H שמתקבלים במשחק (כולל 2 ההטלות הראשונות).

<u>שאלה 10</u>

מהי $P\{W=4\}$?

א. $2p(1-p)$ ב. $p^3(1-p)+(1-p)^3p$ ג. $p(1-p)$ ד. $2p^2(1-p)^2$

<u>שאלה 11</u>

מהי $P\{W>17\}$?

א. $(1-p)^{15}p^2+p^{15}(1-p^2)$ ב. $p^{15}+(1-p)^{15}$ ג. $p^{17}+(1-p)^{17}$ ד. $(1-p)^{14}p^3+p^{14}(1-p^2)(1-p)$

<u>שאלה 12</u>

נניח כי המטבע תקין, כלומר שמתקיים $p=0.5$. חשב את התוחלת של S .

א. 2 ב. 3 ג. 4 ד. 5

שאלות 13-15 מתייחסות לבעיה הבאה:

<u>להלן משחק מזל</u>: מטילים **3 פעמים** מטבע **תקין**.

אם ב-3 ההטלות הללו מקבלים יותר פעמים H מאשר T :

מטילים שוב את המטבע עד שמקבלים לראשונה H,

אך אם מקבלים יותר פעמים T מאשר H :

מטילים שוב את המטבע עד שמקבלים לראשונה T.

יהי Y המשתנה המקרי המוגדר על-ידי <u>סך-כל ההטלות</u> שמבוצעות במשחק (כולל 3 ההטלות הראשונות).

<u>שאלה 13</u>

מהי פונקציית ההסתברות של Y?

א. $0.5^{j-3}\ ,\ j=4,5,...$ ב. $0.5^{j-3}\ ,\ j=3,4,...$ ג. $0.5^{j}\ ,\ j=1,2,...$ ד. $0.5^{j}\ ,\ j=4,5,...$

<u>שאלה 14</u>

מהי התוחלת של Y?

א. 10 ב. 5 ג. 2 ד. 4

<u>שאלה 15</u>

מהי השונות של Y?

א. 10 ב. 5 ג. 2 ד. 4

שאלות 16-19 מתייחסות לבעיה הבאה:

בוחרים באקראי 10 מספרים בזה אחר זה מתוך הקבוצה $\{-9, -8, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 8, 9\}$.

יהי A_7 המאורע שתוצאת המכפלה של 10 המספרים הנבחרים מתחלקת ב-7 ללא שארית.

<u>שאלה 16</u>

אם הבחירה נעשית **עם החזרה**, מהי ההסתברות שהמאורע A_7 יתרחש?

א. 0.3868 ב. 0.6712 ג. 0.8207 ד. 0.3363

<u>שאלה 17</u>

אם הבחירה נעשית **ללא החזרה**, מהי ההסתברות שהמאורע A_7 יתרחש?

א. 0.3715 ב. 0.7895 ג. 0.9133 ד. 0.5263

<u>שאלה 18</u>

בוחרים שוב ושוב 10 מספרים **עם החזרה**, עד שהמאורע A_7 מתרחש 30 פעמים.

מהי ההסתברות שהמאורע $\boldsymbol{A_7^C}$ יתרחש בדיוק 10 פעמים במהלך החזרות על הניסוי.

א. 0.058 ב. 0.060 ג. 0.078 ד. 0.080

<u>שאלה 19</u>

בוחרים שוב ושוב 10 מספרים **עם החזרה**, עד שהמאורע A_7 מתרחש 30 פעמים.

מהי שונות מספר הפעמים שהמאורע $\boldsymbol{A_7^C}$ מתרחש במהלך החזרות על הניסוי.

א. 4.415 ב. 7.986 ג. 6.621 ד. 21.895

<u>שאלה 20</u>

כל אחד מ- $(4n + 3)$ לקוחות בלתי-תלויים מחליט לקבל מחברה לייצור מזגנים הצעה לרכישת מזגן מפוצל בהסתברות 0.5 ולדחות אותה בהסתברות 0.5. לקוח שמקבל את ההצעה בוחר באקראי אחד מ- $2n$ סוכנים של החברה, ודרכו הוא רוכש את המזגן.

בהנחה ש- n גדול מאוד, חשב <u>קירוב</u> להסתברות שהסוכן הצעיר ביותר (מתוך $2n$ הסוכנים) יקבל הזמנות לרכישת מזגנים מ-2 לקוחות בדיוק.

א. 0.225 ב. 0.184 ג. 0.076 ד. 0.049

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 5

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2015 ב **מועד אחרון להגשה:** 24.5.2015

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (30 נקודות)

יהי X משתנה מקרי רציף, שפונקציית הצפיפות שלו נתונה על-ידי: $f_X(x) = ae^{-x/9} \quad , \quad x > 9$

ויהי Y משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר $\frac{1}{9}$.

(6 נק') א. חשב את a.

(6 נק') ב. מהו הקשר הפונקציונלי בין X ל-Y? (כלומר, מהי הפונקציה שמקשרת בין X ל-Y?)
הוכח את טענתך.

(6 נק') ג. חשב את התוחלת ואת השונות של X.

(6 נק') ד. חשב את $P\{X < 15 \mid X > 13\}$.

(6 נק') ה. נגדיר את המשתנה המקרי W על-ידי: $W = X^2$.
חשב את התוחלת של W.

שאלה 2 (22 נקודות)

נתונה <u>פונקציית ההתפלגות המצטברת</u> של המשתנה המקרי X, עבור $\theta > 0$:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \theta^x - 1 & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

(5 נק') א. מצא את הערך של θ בעזרת פונקציית ההתפלגות המצטברת הנתונה בלבד, כלומר, מבלי למצוא את פונקציית הצפיפות של X. נמק את תשובתך.

(5 נק') ב. מצא את פונקציית הצפיפות של X.

(6 נק') ג. חשב את התוחלת של X.

(6 נק') ד. חשב את פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי $Y = 2^X - 1$, וזהה את התפלגותו.

שאלה 3 (24 נקודות)

במטע מסוים מגדלים תפוחים מזן "חרמון".

המשקל (בגרמים) של כל תפוח מקרי שגודל במטע הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת 150 ושונות 400.

אין תלות בין משקלים של תפוחים שונים, הנבחרים באקראי מהמטע.

15% מיבול התפוחים במטע, אלו בעלי המשקל הקטן ביותר, נשלחים למפעל לייצור מיצים;

25% מיבול התפוחים במטע, אלו בעלי המשקל הגדול ביותר, נשלחים ליצוא;

והשאר, 60% מיבול התפוחים במטע, נשלחים לשיווק בארץ.

(6 נק') א. בוחרים 3 תפוחים באקראי.

מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם ישקול יותר מ- 168.5 גרם?

(6 נק') ב. מהו המשקל המינימלי של התפוחים שנשלחים לשיווק בארץ?

ג. בוחרים באקראי 20 תפוחים מיבול המטע.

(6 נק') 1. מהי ההסתברות ש-4 מהם יישלחו למפעל-המיצים ו-11 יישלחו לשיווק בארץ?

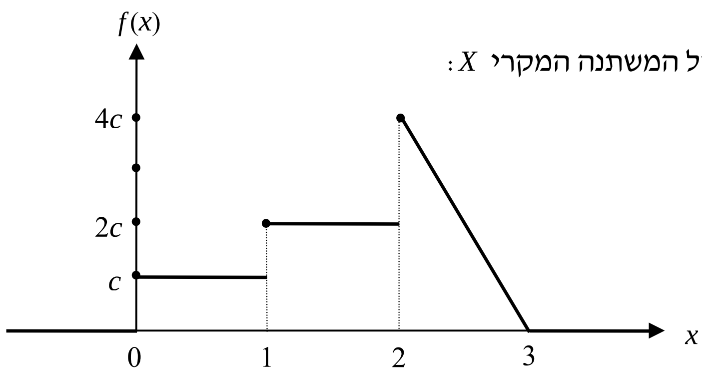
(6 נק') 2. ידוע ש-5 מתוך 20 תפוחים אלו שוקלים פחות מ-130 גרם.

מהי ההסתברות שהמשקל של 3 מהתפוחים יהיה בין 120 גרם ל-130 גרם?

הערה: בכל סעיפי השאלה, ערוך <u>אינטרפולציה לינארית</u> היכן שהיא נדרשת.

שאלה 4 (24 נקודות)

באיור שלהלן מתוארת פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי X:



(6 נק') א. מצא את c.

(6 נק') ב. חשב את $P\{0.25 \le X \le 1.5\}$.

(6 נק') ג. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X ורשום אותה באופן מדויק.

(6 נק') ד. חשב את התוחלת של X.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 6

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2015 ב **מועד אחרון להגשה:** 7.6.2015

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (24 נקודות)

בוחרים באקראי בזה אחר זה **<u>וללא החזרה</u>** 3 מספרים מתוך הקבוצה $\{1,2,\ldots,10\}$.

יהי X_i משתנה מקרי המוגדר על-ידי המספר שנבחר בבחירה ה-i-ית, לכל $i=1,2,3$.

(6 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X_1 , X_2 ו- X_3 .
רשום אותה באופן מדויק: ערכים אפשריים והסתברויות משותפות.

(6 נק') ב. מצא את פונקציית ההסתברות השולית של X_3 . רשום אותה באופן מדויק.

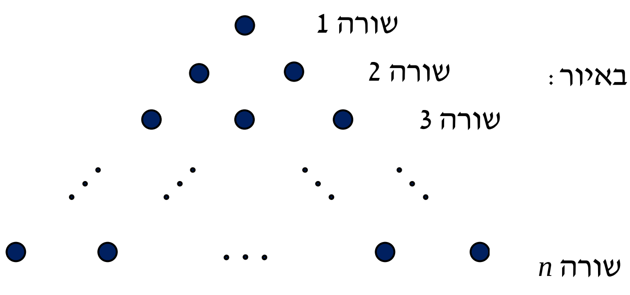
(6 נק') ג. חשב את $P\{X_1 < X_2 ,\ X_1 < X_3\}$.

(6 נק') ד. חשב את $P\{X_3 = 8 \mid X_2 < X_3\}$.

שאלה 2 (24 נקודות)

נתונים כדורים, המסודרים במבנה משולש כמתואר באיור:

<u>בוחרים באקראי אחד מהכדורים</u>.



יהיו: X = השורה שממנה נבחר הכדור;
Y = המקום בשורה שממנו נבחר הכדור.

נניח כי $n > 5$, וכי המקומות בשורה i $(i = 1,2,\ldots,n)$ ממוספרים משמאל לימין, מ-1 עד i .

(6 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.

(6 נק') ב. מצא את פונקציות ההסתברות השולית של X ושל Y.

(6 נק') ג. האם המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה?
נמק את תשובתך.

(6 נק') ד. חשב את $P\{Y \le 2 \mid X \ge 4\}$.

שאלה 3 (24 נקודות)

בחבילת עוגיות יש 50 עוגיות.

בכל עוגייה יש X פצפוצי-שוקולד, כאשר X הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 6.

אין תלות בין עוגיות שונות מאותה חבילה או בין עוגיות מחבילות שונות.

(6 נק׳) א. מה שונות מספר פצפוצי-השוקולד שיש בחבילת עוגיות שלמה?

(6 נק׳) ב. כל פצפוץ-שוקולד הוא חום בהסתברות 0.8 ולבן בהסתברות 0.2.
מהי שונות מספר פצפוצי-השוקולד הלבנים שיש בחבילת עוגיות שלמה?

(6 נק׳) ג. אם בשלוש עוגיות יש בסך-הכל 20 פצפוצי-שוקולד, מהי ההסתברות שבעוגייה אחת (כלשהי) יש 9 פצפוצים, באחרת 6 ובשלישית 5?

(6 נק׳) ד. מהי ההסתברות, שבחבילה מקרית של עוגיות, המספר המינימלי של פצפוצי-שוקולד בעוגייה אחת יהיה בדיוק 2?

שאלה 4 (14 נקודות)

נתון מטבע, שההסתברות לקבל בו H היא $\frac{X+1}{20}$,

כך ש- X הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 10 ו- 0.5.

מטילים את המטבע 20 פעמים. יהי N מספר הפעמים שהתוצאה H התקבלה ב-20 הטלות אלו.

(7 נק׳) א. חשב את $P\{N=8 \mid X=6\}$.

(7 נק׳) ב. מצא ביטוי כללי להסתברות $P\{N=n, X=i\}$.
עבור אלו ערכים של n ו- i הסתברות זו מקבלת ערכים חיוביים?

שאלה 5 (14 נקודות)

נתונים ארבעה סלים, המסומנים באותיות A, B, C ו-D.

בתחילת הניסוי יש בסל A 50 כדורים ואילו סלים B, C ו-D ריקים מכדורים.

כעת, מוציאים מסל A X_1 כדורים ומעבירים אותם לסל B;

אחר-כך, מוציאים מסל B X_2 כדורים ומעבירים אותם לסל C;

ולבסוף, מוציאים מסל C X_3 כדורים ומעבירים אותם לסל D.

נניח שבכל שלב של הניסוי, שבו מעבירים כדורים, כל כדור שנמצא בסל שממנו מוציאים כדורים, מוצא ממנו בהסתברות p, ללא תלות במספר הכדורים שיש בסל או בהוצאות כדורים אחרות.

(6 נק׳) א. זהה את ההתפלגויות של X_1, של X_2 בהינתן $X_1=i$ ושל X_3 בהינתן $X_2=j$.

(8 נק׳) ב. מצא ביטוי כללי ל- $P\{X_1=i, X_2=j, X_3=k\}$, עבור i, j ו- k שלמים, המקיימים $0 \le k \le j \le i \le 50$.

זהה את פונקציית ההסתברות המשותפת שקיבלת.
כתוב את שמה ואת ערכי הפרמטרים המתאימים לה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2015 ב **מועד אחרון להגשה:** 21.6.2015

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (24 נקודות)

n אנשים, וביניהם יונתן ודן, מסתדרים בשורה באופן אקראי. (הנח ש- $n > 5$)

יהי X מספר האנשים שעומדים בין יונתן ודן.

(6 נק') א. חשב את $P\{X \le 1\}$.

(6 נק') ב. חשב את התוחלת של X .

(6 נק') ג. נניח שכל שני אנשים סמוכים עומדים במרחק של 2 מטר האחד מן השני.
אם נסמן ב- Y את המרחק בין יונתן לדן, מהי התוחלת של Y?

(6 נק') ד. חשב את השונות של X .

שאלה 2 (10 נקודות)

יהיו X ו- Y משתנים מקריים בלתי-תלויים.

למשתנה המקרי X התפלגות פואסונית עם הפרמטר 4 ;

ולמשתנה המקרי Y התפלגות פואסונית עם הפרמטר 5.

חשב את $\mathrm{Var}(XY)$.

שאלה 3 (14 נקודות)

יהי X משתנה מקרי בדיד, המקבל כל אחד מהערכים 0, 0.1, 0.4, 0.8 ו- 1 בהסתברויות שוות.

כעת, נניח שנתון מטבע, שההסתברות לקבל בו H היא X .

מטילים את המטבע הנתון פעם אחת.

יהי A המאורע שהתקבל H בהטלת המטבע.

חשב את $E[X \mid A]$.

שאלה 4 (18 נקודות)

N ציידים משתתפים בציד ברווזים. כאשר חולפת מעליהם להקת-ברווזים, בוחר כל צייד, באקראי ובלי תלות באחרים, את מטרתו (דהיינו ברווז אחד מהלהקה), וכל הציידים יורים בבת-אחת. כל צייד, בלי תלות באחרים, פוגע **במטרתו** בהסתברות 0.6. הנח שמספר הציידים הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 5, וכי להקת-הברווזים מונה m ברווזים.

(5 נק') א. אם n ציידים משתתפים בציד הברווזים (n הוא מספר קבוע), מהי ההסתברות שהברווז ה-i-י בלהקה ($i = 1,2,...,m$) לא ייפגע מהירי של אף אחד מהציידים?

(5 נק') ב. אם n ציידים משתתפים בציד הברווזים (n הוא מספר קבוע), מהי תוחלת מספר הברווזים שנפגעים מהירי של n הציידים?

(8 נק') ג. מהי תוחלת מספר הברווזים בלהקה, שנפגעים מהירי של N הציידים?
שימו לב, שכעת מספר הציידים איננו קבוע, אלא משתנה מקרי, כמתואר בתחילת השאלה.

שאלה 5 (12 נקודות)

יהי X משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת 10 ושונות 1,

ויהי Y משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת 20 ושונות 4 ;

ונניח כי X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה.

נגדיר את המשתנה המקרי W על-ידי : $W = 2X - Y$.

(6 נק') א. חשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של המשתנה המקרי W .

(6 נק') ב. חשב את $P\{W \geq -2.5\}$. החישוב צריך להיות מדויק עד כמה שאפשר.

שאלה 6 (10 נקודות)

יהיו X ו- Y משתנים מקריים בלתי-מתואמים בעלי תוחלות ושונויות סופיות.

הראה כי :
$$\rho(X, X+Y) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{Var}(Y)}{\mathrm{Var}(X)}}}$$

שאלה 7 (12 נקודות)

למסיבת פתיחה של חנות חדשה הוזמנו 400 אנשים.

כל אחד מהמוזמנים מגיע למסיבה בהסתברות 0.52 ובאופן בלתי-תלוי במוזמנים אחרים.

כל אחד מהאנשים שמגיעים למסיבה קונה בחנות מוצרים בסכום מקרי שתוחלתו 150 ₪ ושונותו 900 ₪.

נניח שאין תלות בין סכומי-הקנייה של מוזמנים שונים וכן בין מספר המוזמנים המגיעים למסיבה לבין סכומי-הקנייה של כל אחד ואחד מהם.

(6 נק') א. חשב את תוחלת ההכנסות של החנות מרכישות המוזמנים, שמגיעים למסיבת הפתיחה.

(6 נק') ב. חשב את שונות ההכנסות של החנות מרכישות המוזמנים, שמגיעים למסיבת הפתיחה.

אוסף שאלות לתרגול עצמי

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 8

.1 לאורך החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר $\frac{1}{500}$.
אין תלות בין נורות שונות מאותו הסוג.
אדם קנה 100 נורות מסוג זה.
מצא קירוב להסתברות <u>שממוצע</u> אורך החיים של 100 הנורות שנקנו יהיה בין 450 ל- 520 שעות.

.2 יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1,000.

א. חשב קירוב נורמלי להסתברות ש- X יקבל את הערך 1,000.
מדוע אפשר לחשב קירוב נורמלי במקרה זה?

ב. חשב חסם תחתון ל- $P\{|X-1{,}000|\le 40\}$, באמצעות אי-שוויון צ׳בישב.

.3 נתונים 5 משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, X_1 , X_2 , ... , X_5 , שכל אחד מהם מקבל את הערכים 0, 3 ו- 6 בהסתברויות שוות (כלומר, הסתברות ⅓ לכל ערך).
נגדיר $Y=\sum_{i=1}^{5} X_i$. חשב חסם עליון ל- $P\{Y>25\}$:

א. בעזרת אי שוויון מרקוב;

ב. בעזרת אי שוויון צ׳בישב.

.4 א. יהי X משתנה מקרי אי-שלילי שתוחלתו μ סופית, ויהי $t>0$.
הוכח כי $P\{X\le \mu t\}\ge 1-\frac{1}{t}$.

ב. יהיו X_1 , X_2 , ... , X_n $(n=1,2,\ldots)$, משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר p $(0<p<1)$.
הראה בעזרת אי-שוויון צ׳בישב שמתקיים: $P\left\{\overline{X}_n\le \frac{2}{p}\right\}\ge 1-\frac{1-p}{n}$.

הערה: $\overline{X}_n=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

.5 הוכח, בעזרת משפט הגבול המרכזי, כי $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} e^{-n}\frac{n^i}{i!}=\frac{1}{2}$.

6. יהיו X_1 , X_2 , ... , X_{200} משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפונקציה יוצרת המומנטים: $M_X(t)=\left(\frac{e^t}{5-4e^t}\right)^2$, עבור $t<\ln 1.25$.

מצא קירוב ל- $P\left\{1{,}910\le\sum_{i=1}^{200}X_i<2{,}050\right\}$.

7. א. נתון ארגז ובו 120 כדורים שעליהם רשומים מספרים.

לכל $i=1,2,\ldots,15$, יש בארגז i כדורים שהמספר הרשום עליהם הוא i .

בוחרים כדורים מהארגז, בזה אחר זה **ועם החזרה**, כך שבכל בחירה יש לכל הכדורים סיכויים שווים להיבחר.

נניח שבוחרים (בשיטה המתוארת לעיל) בדיוק 100 כדורים.

יהי Y הסכום הכולל של 100 המספרים הרשומים על הכדורים שנבחרו.

חשב קירוב ל- $P\{1{,}000\le Y\le 1{,}100\}$.

הערה: $\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ב. מעגלים 50 מספרים שנבחרו באקראי, כל אחד לשלם הקרוב לו ביותר, ומסכמים את 50 המספרים המעוגלים.

אם לכל אחת משגיאות-העיגול יש התפלגות אחידה בקטע $(-0.5,\ 0.5]$, מהו קירוב להסתברות שההפרש <u>המוחלט</u> בין הסכום המתקבל לבין הסכום המדויק של 50 המספרים עולה על 3?

8. אורך-החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים מתפלג מעריכית עם הפרמטר 0.01, והוא אינו תלוי באורך-החיים של נורות אחרות.

כמה נורות מסוג זה עליך לקנות (בקירוב), אם ברצונך להבטיח 5,000 שעות-אור בהסתברות 0.95 לפחות?

הנח שאתה מתקין נורה אחת, ובהישרפה מחליף אותה מייד באחרת. זמן ההחלפה זניח.

9. נתונים שלושה ארגזים בלתי-תלויים.

לכל ארגז אפשר להכניס X קופסאות, כאשר ל- X יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 150.

א. חשב **קירוב** להסתברות שלשלושת הארגזים יחדיו יוכנסו לפחות 480 קופסאות.

ב. חשב **קירוב** להסתברות ש<u>ההפרש המוחלט</u> בין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז הראשון לבין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז השני יהיה גדול מ- 10.

בשני הסעיפים נמק את פתרונך.

10. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- 0.5, עבור $n>4$.

הוכח בעזרת אי שוויון צ'בישב שמתקיים: $P\{X\ge n-2\}\le\frac{n}{2(n-4)^2}$.

11. רשום את החסמים מלעיל הקטנים ביותר (המוכרים לך) עבור $P\{X \ge 14\}$, בכל אחד מן המקרים הבאים:

א. X הוא משתנה מקרי אי-שלילי ותוחלתו 7;

ב. X הוא משתנה מקרי המקיים $X \ge -2$ ותוחלתו 7;

ג. X הוא משתנה מקרי שתוחלתו 7 ושונותו 4.

12. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת סופית μ ושונות סופית σ^2.

הנח ש-n גדול וחשב **קירוב** ל- $P\left\{\bar{X} \le \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} + \mu\right\}$.

13. המשקל W (בטונות) של מטען, שגשר מסוים יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק, הוא משתנה מקרי נורמלי שתוחלתו 400 וסטיית התקן שלו 40. נניח שהמשקל (בטונות) של מכונית הוא משתנה מקרי שתוחלתו 3 וסטיית התקן שלו 0.3. אם ברגע מסוים ההסתברות לגרימת נזק במבנה הגשר עולה על 0.1, מהו (בקירוב) המספר המינימלי של מכוניות הנמצאות אז על הגשר?

הנח שאין תלות בין משקלי מכוניות שונות ובין המשקל של כל מכונית לעומס שהגשר יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק.

נספחים

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

דף הנוסחאות יצורף לכל בחינה.

גירסת דף הנוסחאות, המובאת בחוברת מטלות זו, נכונה לחודש אוקטובר 2010.

לקראת הבחינה מומלץ לבדוק באתר הקורס אם לא חלו שינויים בדף הנוסחאות שיצורף לבחינה.

נספח ב: רשימת טענות להוכחה בבחינה

בכל בחינה עשויות להופיע טענות, מן הרשימה המובאת להלן, שאותן תִּדָּרשו להוכיח במדויק.

ההוכחות של כל הטענות מן הרשימה מובאות באתר הקורס בקובץ נפרד.

משקל הטענות שתופענה בבחינה לא יעלה על 25 נקודות.

הטענות עשויות להופיע ביותר מאשר שאלה אחת.

גירסת רשימת הטענות, המובאת בחוברת מטלות זו, נכונה לחודש פברואר 2011.

לקראת הבחינה מומלץ לבדוק באתר הקורס אם לא חלו שינויים ברשימת הטענות לבחינה.

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

התפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,\ldots,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1}\cdot p \quad , \quad i=1,2,\ldots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i! \quad , \quad i=0,1,\ldots$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,\ldots$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,\ldots,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,\ldots,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a\le x\le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\ , t\neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \ -\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,\ldots,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r} \quad , \ \sum n_i=n\ , \sum p_i=1$			

נוסחת הבינום
$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$$

$$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^C)$$

כלל ההכלה וההפרדה
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

הסתברות מותנית
$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

נוסחת הכפל
$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n\mid A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})$$

נוסחת ההסתברות השלמה
$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)$$
, $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס
$$P(B_j\mid A)=\frac{P(A\mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)}$$
, $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת
$$E[X]=\sum_x x\,p_X(x)=\int x\,f(x)dx$$

תוחלת של פונקציה של מ"מ
$$E[g(X)]=\sum_x g(x)\,p_X(x)=\int g(x)\,f(x)dx$$

שונות
$$\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית
$$E[aX+b]=aE[X]+b$$
$$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון
$$P\{X>s+t\mid X>t\}=P\{X>s\} \qquad , \qquad s,t\ge 0$$

תוחלת מותנית
$$E[X\mid Y=y]=\sum_x x\,p_{X|Y}(x\mid y)=\int x\,f_{X|Y}(x\mid y)dx$$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X\,|\,Y=y) \;=\; E[X^2\,|\,Y=y]-(E[X\,|\,Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] = E[E[X\mid Y]] = \sum_y E[X\mid Y=y]\,p_Y(y)$

(טענה מתרגיל ת26, עמוד 430) $E[X\cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X\mid Y]]$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X\,|\,Y)]+\mathrm{Var}(E[X\,|\,Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]=E[XY]-E[X]E[Y]$

$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Cov}(X_i,Y_j)$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{i<j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)\Big/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t)=E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t)=e^{bt}M_X(at)$

כאשר X_i מ״מ ב״ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t)\cdot\ldots\cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right]=E[N]E[X]$

(כאשר X_i מ״מ ב״ת ש״ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)=E[N]\mathrm{Var}(X)+(E[X])^2\,\mathrm{Var}(N)$

$M_Y(t)=E\left[\left(M_X(t)\right)^N\right]$

אי-שוויון מרקוב $P\{X\ge a\}\le E[X]/a \quad , \quad a>0$, X מ״מ אי-שלילי

אי-שוויון צ׳בישב $P\{|X-\mu|\ge a\}\le \sigma^2/a^2 \quad , \quad a>0 \;,\; \mu,\sigma^2<\infty$

משפט הגבול המרכזי $P\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right)\Big/\sqrt{n\sigma^2} \le a\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(a) \quad , \quad \mu,\sigma^2<\infty$, X_i מ״מ ב״ת וש״ה

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב״ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ״מ בינומיים (גיאומטריים) ב״ת עם אותו הפרמטר p הוא מ״מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ״מ פואסוניים ב״ת הוא מ״מ פואסוני.
- סכום של מ״מ נורמליים ב״ת הוא מ״מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ״מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב״ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}=e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1<x<1$

$\int (ax+b)^n\,dx=\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \quad , \quad n\ne -1 \quad ; \quad \int \frac{1}{ax+b}\,dx=\frac{1}{a}\ln(ax+b)$

$\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax}dx=\frac{1}{a\ln b}b^{ax}$

נוסחת האינטגרציה בחלקים :

$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$

$\log_n a=\log_m a/\log_m n \quad ; \quad \log_n(a^b)=b\cdot\log_n a \quad ; \quad \log_n(ab)=\log_n a+\log_n b$

נספח ב: טענות להוכחה בבחינה

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב - 20425

ההוכחות של הטענות, המובאות ברשימה שלהלן, נמצאות בקובץ נפרד באתר הקורס.

1. יהיו E ו- F מאורעות במרחב מדגם S. הוכח כי: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

2. יהיו F ו- G מאורעות זרים של ניסוי מקרי כלשהו. הוכח כי בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה, ההסתברות שהמאורע F יתרחש לפני המאורע G היא: $\dfrac{P(F)}{P(F)+P(G)}$

3. יהי X משתנה מקרי בדיד, שתוחלתו סופית, ויהיו a ו- b קבועים ממשיים. הוכח כי:

$$E[aX+b] = aE[X]+b \quad ; \quad \mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$$

4. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$. הוכח כי:

$$E[X] = np \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

5. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \lambda \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda$

6. יהי X משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים N, m ו- n. הוכח כי: $E[X] = n \cdot \frac{m}{N}$

7. יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

8. הוכח: אם מאורע מסוים מתרחש בהתאם לַהנחות של תהליך-פואסון עם קצב λ, אז משך הזמן החולף עד להתרחשות המופע הראשון של המאורע (החל מזמן 0) הוא משתנה מקרי מעריכי עם אותו הפרמטר λ.

9. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה.
הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda_X + \lambda_Y$.

10. יהיו X ו- Y משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.
הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים $(2, p)$.

11. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה.
הוכח שלמשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X+Y=n$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$.

12. יהי $Y = a + bX$, ונניח כי $\sigma_X^2 > 0$. הראה כי:

$$\rho(X,Y) = \begin{cases} +1 & , \quad b > 0 \\ -1 & , \quad b < 0 \end{cases}$$

13. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת ושונות סופיות, μ ו- σ^2, בהתאמה.

הוכח כי:
$$E[\overline{X}] = \mu \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2 / n$$

14. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_r$ משתנים מקריים בעלי פונקציית התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $p_1, p_2, \ldots, p_r$.

הוכח: א. למשתנה המקרי X_i יש התפלגות שולית בינומית עם הפרמטרים n ו- p_i.

ב. למשתנה המקרי המותנה X_1 בהינתן $X_2 = j$, לכל $j = 0,1,\ldots,n$, יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n-j$ ו- $p_1/(1-p_2)$.

ג. $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$

15. יהיו X ו- Y משתנים מקריים בדידים בעלי תוחלות ושונויות סופיות.

הוכח:
$$E[X] = E[E[X \mid Y]]$$
$$\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$$

16. הוכח: אם N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים אי-שליליים, ואם $X_1, X_2, \ldots$ הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב-N, אז מתקיים:
$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1]$$
$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2 \mathrm{Var}(N)$$

הערה: כאשר $N = 0$, סכום המשתנים שווה גם הוא ל-0.

17. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי:
$$M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n \qquad , \qquad -\infty < t < \infty$$

18. יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי:
$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \qquad , \qquad t < -\ln(1-p)$$

19. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$.

הוכח כי:
$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \qquad , \qquad -\infty < t < \infty$$

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z)=P\{Z\le z\}=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt \qquad ; \qquad \Phi(-z)=1-\Phi(z) \qquad ; \qquad Z\sim N(0,1)$$

נוסחת האינטרפולציה: $\Phi(z)\approx\Phi(z_1)+\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}[\Phi(z_2)-\Phi(z_1)]$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326