



מספר התלמיד הנבחן
רשום את כל תשע הספרות

הדבק כאן את
מדבקת הנבחן

האוניברסיטה
הפתוחה



י"ד בתמוז תשע"ח

מס' שאלון - 513

27

ביוני 2018

סמסטר 2018 ב

מס' מועד 83

20585 / 4

שאלון בחינת גמר

20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה 3 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה שש שאלות.

עליכם לענות על חמש שאלות בלבד.

משקל כל שאלה 20 נקודות.

חומר עזר:

כל חומר עזר מותר בשימוש.
אסור בשימוש כל מכשיר אלקטרוני שבאמצעותו ניתן לאצור מידע
לרבות מכשיר טלפון נייד, מחשב נישא, שעון חכם וכד'.

בהצלחה !!!

החזירו

למשגיח את השאלון

וכל עזר אחר שקיבלתם בתוך מחברת התשובות



שאלה 1

תזכורת: מסמנים על-ידי $L(M)$ את השפה שמזהה מכונת טיורינג M .
תהי $D = \{ \langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle, \langle M_3 \rangle, \dots \}$ שפה אינסופית מזוהה-טיורינג, שכל המילים שלה הן תיאורים של מכונות טיורינג. (כל $\langle M_i \rangle$ הוא תיאור של מכונת טיורינג M_i).
הוכיחו: האיחוד של כל השפות שמזהות המכונות ב- D ($L(M_1) \cup L(M_2) \cup L(M_3) \cup \dots$) הוא שפה מזוהה-טיורינג.
הדרכה: לכל שפה מזוהה-טיורינג יש מונה (enumerator) שמפיק אותה.

שאלה 2

נגדיר את השפה C הבאה:
 $C = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ היא מכונת טיורינג; קבוצת המילים ש-} M \text{ לא עוצרת עליהן היא אינסופית} \}$
האם C מזוהה-טיורינג? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 3

צביעה של קשתות גרף לא מכוון $G=(V, E)$ היא השמה של צבע לכל אחת מן הקשתות של הגרף. למשל, אם הגרף הוא משולש (שלושה צמתים שיש קשת בין כל שניים מהם), אז אפשר לצבוע את שלוש הקשתות באותו הצבע, אפשר לצבוע שתיים מהן בצבע אחד, ואת השלישית בצבע אחר, ואפשר לצבוע כל קשת בצבע משלה.
כאשר נתון גרף לא מכוון $G=(V, E)$, ונתונה צביעה של הקשתות, אפשר לצבוע את הצמתים של הגרף. קשת (u, v) תיקרא תקינה, אם שני הצמתים שלה, u ו- v , צבועים בצבע של הקשת. למשל, אם הגרף הוא משולש, שכל הקשתות שלו צבועות באותו הצבע, אז אפשר לצבוע גם את שלושת הצמתים בצבע הזה, וכל הקשתות תהיינה תקינות. אם רק לשתי קשתות יש אותו הצבע, אז אפשר לצבוע את הצמתים באופן ששתי קשתות תהיינה תקינות. אם לכל קשת צבע משלה, אז בכל צביעה של הצמתים, לכל היותר קשת אחת תהיה תקינה.
נענין בבעיה הבאה: נתון גרף לא מכוון $G=(V, E)$ ומספר טבעי k , ונתונה צביעה של קשתות הגרף. האם יש צביעה של צומתי הגרף, שבה k קשתות הן קשתות תקינות?
נציג את הבעיה כשפה:
 $\{ \langle G, c, k \rangle \mid G \text{ גרף לא מכוון; } c \text{ צביעה של הקשתות; יש צביעה של הצמתים כך ש-} k \text{ קשתות הן תקינות} \}$
הוכיחו: השפה הזו היא NP-שלמה.
הדרכה: הוכיחו שהיא שייכת ל-NP, והראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של 3SAT. ברדוקציה בנו גרף דו-צדדי, שבצד האחד שלו יהיו המשתנים הבוליאניים של הנוסחה, ובצד השני שלו יהיו הפסוקיות של הנוסחה.

שאלה 4

שאלה זו עוסקת במחלקה $NP \cup coNP$.

נאמר ששפה B היא **שלמה** במחלקה $NP \cup coNP$, אם:

1. B שייכת ל- $NP \cup coNP$ ($B \in coNP$ או $B \in NP$).

2. לכל שפה A ב- $NP \cup coNP$, $A \leq_p B$.

הוכיחו: יש שפה שלמה במחלקה $NP \cup coNP$, אם, ורק אם, $NP = coNP$.

זכרו שעליכם להוכיח שני כיוונים. יש כאן טענת "אם ורק אם".

שאלה 5

נאמר שמכונת טיורינג M **זוללת מקום** בריצתה על מילה w , אם כאשר M רצה על w , הראש הקורא-

כותב של M מגיע לאינסוף ריבועים על הסרט של M .

על מכונה M נתון: אם M מקבלת מילה w , אז מספר הריבועים שבהם מבקר הראש הקורא-כותב

עד לעצירה במצב המקבל הוא פולינומיאלי. אם M לא מקבלת את w , אז M זוללת מקום בריצתה

על w .

האם אפשר להסיק מהנתון הזה שהשפה $L(M)$ **שייכת ל- $PSPACE$** ? הוכיחו את תשובתכם.

(תזכורת: $L(M)$ היא השפה ש- M מזהה.)

שאלה 6

עיינו בשאלה 3. נקרא לשפה שהוגדרה בשאלה 3 F .

הוכיחו: אם קיים אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי להכרעת השייכות ל- F , אז קיים

אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי, שמחזיר צביעה של הצמתים, שבה יש k קשתות תקינות,

אם יש צביעה כזו של הצמתים.

האלגוריתם מקבל כקלט גרף לא מכון G , צביעה c של הקשתות של G , ומספר טבעי k . אם אין

אפשרות לצבוע את הצמתים, כך שתהיינה k קשתות תקינות, האלגוריתם מחזיר "לא". אם יש

צביעה של הצמתים שבה יש k קשתות תקינות, האלגוריתם מחזיר צביעה כזו (השמה של צבע לכל

צומת של הגרף).

האלגוריתם יכול להשתמש באלגוריתם להכרעת השייכות לשפה F של שאלה 3. אסור לו להשתמש

באלגוריתמים לבעיות NP-שלמות אחרות. זמן הריצה שלו חייב להיות פולינומיאלי בגודל הקלט.

- סוף -

נניח כי השפה C אינה מלאה אורכי. נניח כי C כזקוקה השפה $\overline{A_{tm}}$ של השפה אינה מלאה אורכי. נניח כי פונקציה חשבה M_f :

$M_f = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ הוא } M' \text{ ו-} w \text{ מילה} \}$
 1. נניח $M' = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ הוא } M' \}$

$M' = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ הוא } M' \}$

1. הניח כי w של M

2. אם קיבלה קבל

3. אם בחרה בחרה אלמנטר "אונסקופ"

2. בחרה את $\langle M' \rangle$

הפונקציה חשבה כי אלו הן הן של מכלול אורכי

והפונקציה חשבה תמיד וכן בצמנטסיה

הפונקציה חשבה:

אם $\langle M, w \rangle \in \overline{A_{tm}} \Leftrightarrow \langle M, w \rangle \in A_{tm}$ וכן המכונה M'

הצורה או תכנס אלמנטר אונסקופיה של $\langle M, w \rangle$ וכן $M' \in C$ או נכון. $\langle M' \rangle$

אם $\langle M, w \rangle \in \overline{A_{tm}} \Leftrightarrow \langle M, w \rangle \in A_{tm}$ וכן המכונה M' תהיה את

של קבל וכן M' של תכנס אלמנטר אונסקופיה $\langle M' \rangle \in C-1$

הכאן כי $\overline{A_{tm}} \leq_m C$ של 5.29 בסדר C אינה

מלאה אורכי.

ה

ה

ה

ה

ה

ה

ה

ה

ה

ה

ה

נראה כי השפה Φ היא NP שלמה Φ רצוקציה

פולינומאלית Φ SAT-N

סמל $\langle \Phi \rangle$ כולל Φ הוא נוסחה בצורת 3CNF

1. בן Φ Φ כולל Φ $\Phi \in \Phi$ וזה קצרה ב-G

אם Φ לילה וזה עם קצרה ב-G. (ומה של קצרה

משה

של פסוקים עם הקצרה של הילה (עם אם הוג

לילה) (בסך כל הקצרה בן של קצרה שילב לילה

משה

תהיה כאלו בן וזה קצרה שילב לילה של אלו לילה

משה

תהיה בסך אלו וזה הקצרה של לילה שונים

תהיה בסך שונה. $\forall k = \text{מסר הסקיות}$

2. החר $\langle G, C, R \rangle$



נראה כי הרצוקציה נכונה

החר חזק מזה מסר קצרה שזה פולינומאלית

החר. בנוסף מסר הקצרה עם צמיח הקצרה הוא

פולינומאלית במסר הקצרה וזה פולינומאלית

החר.

נכונה:

בנוסף Φ SAT-N כולל Φ אלו החר

של החר לילה, Φ Φ וזה לילה אלו Φ וזה

משה

לילה וזה קצרה מסר צמיח אלו של החר

ואלו של החר. אם קימה השפה Φ SAT-N Φ של

פסוקים קיים לילה אלו Φ שנסק אלו וזה

הפסוקים Φ שזה חזק צמיח בסך של הילה

מכיוון של הקצרה שילב אלו הפסוקים הם בצמיח שונים

הן קצרה אלו Φ Φ צמיח וזה צמיח

באלו

מכיוון שהם אין השמה זה אכן (וכל צורה קבוצה)
 כק k -e קשתות היו נקודות ואכן היחיד לא יורה
 מלפני

המכיוון כי k -color-edge הוא שפה NP שמה

לאלה 1

$$T =$$

נוכח כי $(L(M_1) \cup L(M_2))^* \cap L(M_3)$ היא שפה מצומת איננה.
 על ידי בניית מונח שיטה את השפה נתון כי D היא
 מצומת איננה לכן קיים E_0 מונח המונח את השפה
 נבנה מונח פשוט T .

0. אותה את $I = A$ (מונח הצדדים) 1.

1. תהי' את E_0 צדד אחד אם הפסים תואר מונח

1.1 ישמח את תואר המונח

1.2 אלס את מונח המונח

2 עבר כי מונח תהי' אותה I צדדים מתחילה הפאסיל

מסר הסטנדרט I את קימה מילה שפה הפסים אותה

3 קדם את מונח הצדדים

4. תוצר $F-1$.

המונח שבנינו פאסיל כחן יסמל את E_0 מספיק צדדים

כך שהיא יצפים תואר מונח תבנים ועבר כי מונח נסמל

את חזרת מסר צדדים הולך וטלה וניתן לה פרוט סף

יותר קלים כך שאם מילה נמצאת $A-T$ באינסוף

שם הטל תבנים.

נראה כי יש להם אמת מתחת $NP \cup CoNP$ אם ורק אם $NP = CoNP$

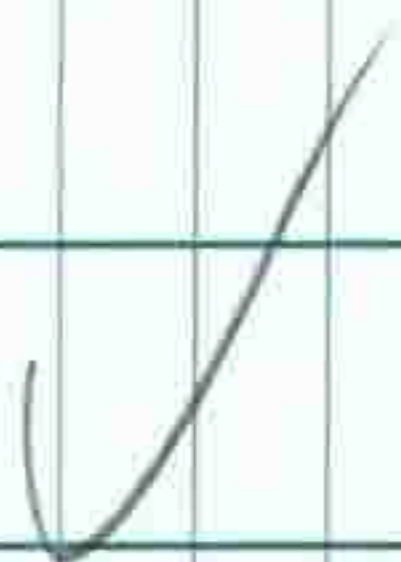


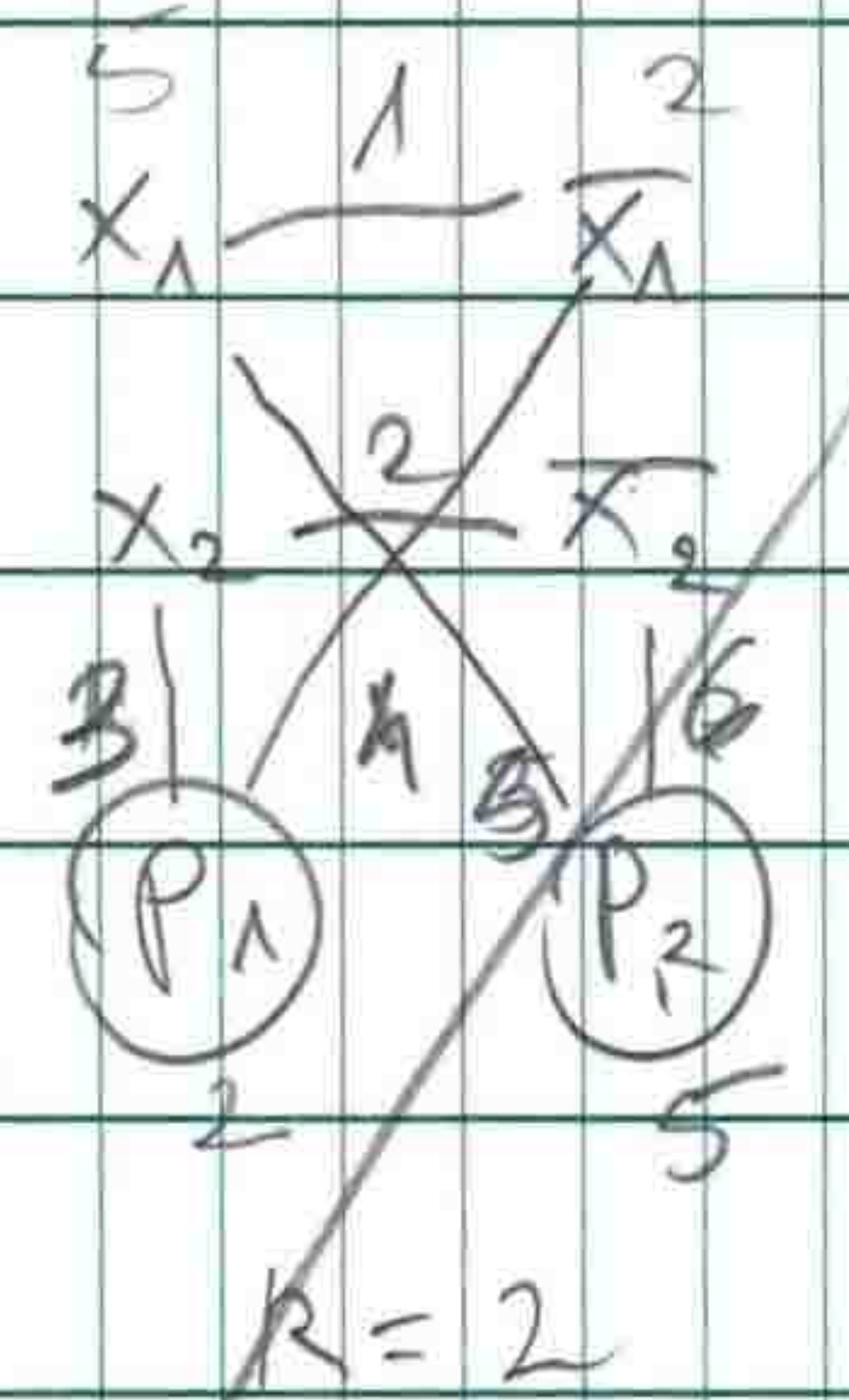
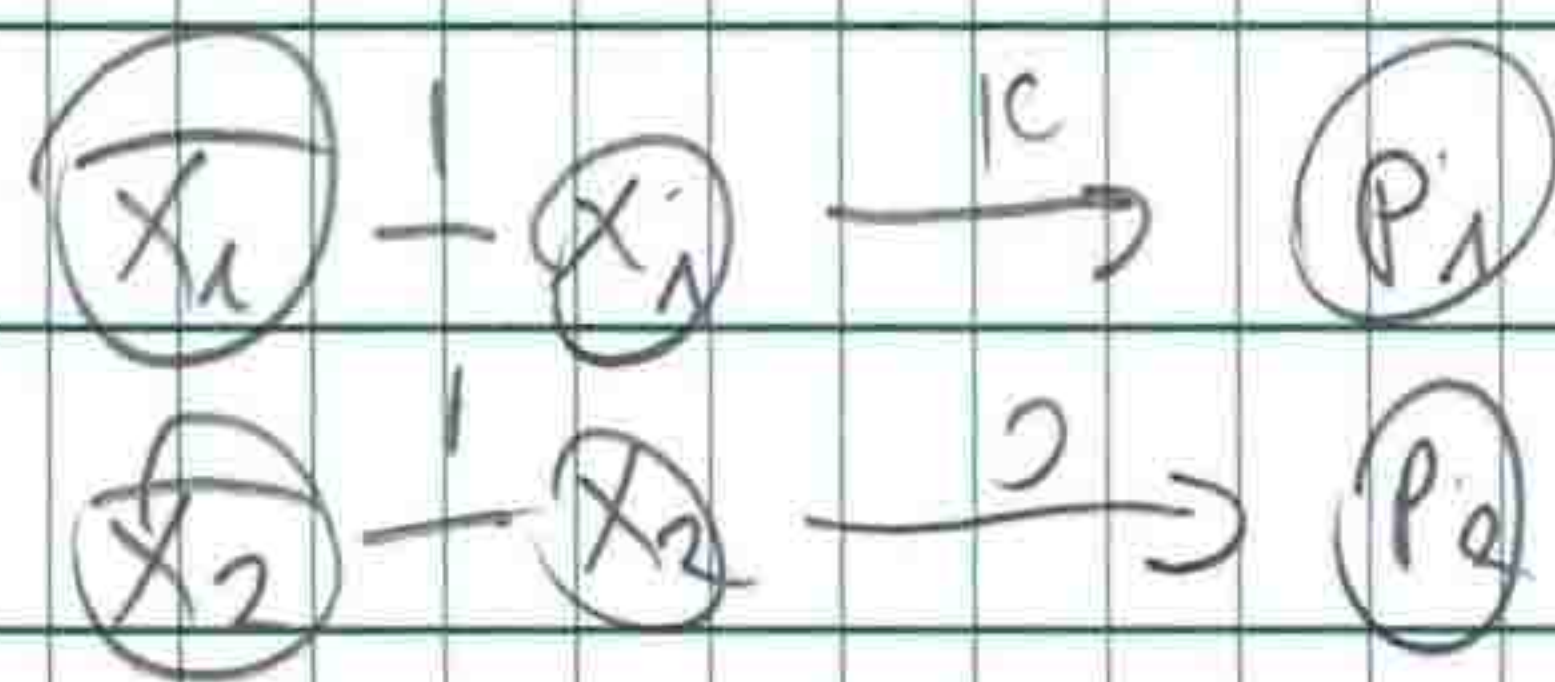
טוב, אולי נניח כי $NP = CoNP$ אז נניח B שיהיה NP ונניח
 כי לכל A שיהיה NP יש תוכנית פולינומלית A - B .
 נניח C שיהיה $CoNP$ נניח כי $NP = CoNP$ אז $C \in NP$
 ומכאן קיים $A \leq_p B$. מכאן A - NP וכן NP - A .
 נניח $B \in NP \cup CoNP$. הטוב, אז

טוב, נניח כי קיימת $B \in NP \cup CoNP$ וכל A שיהיה
 $A \leq_p B$ $A \in NP \cup CoNP$

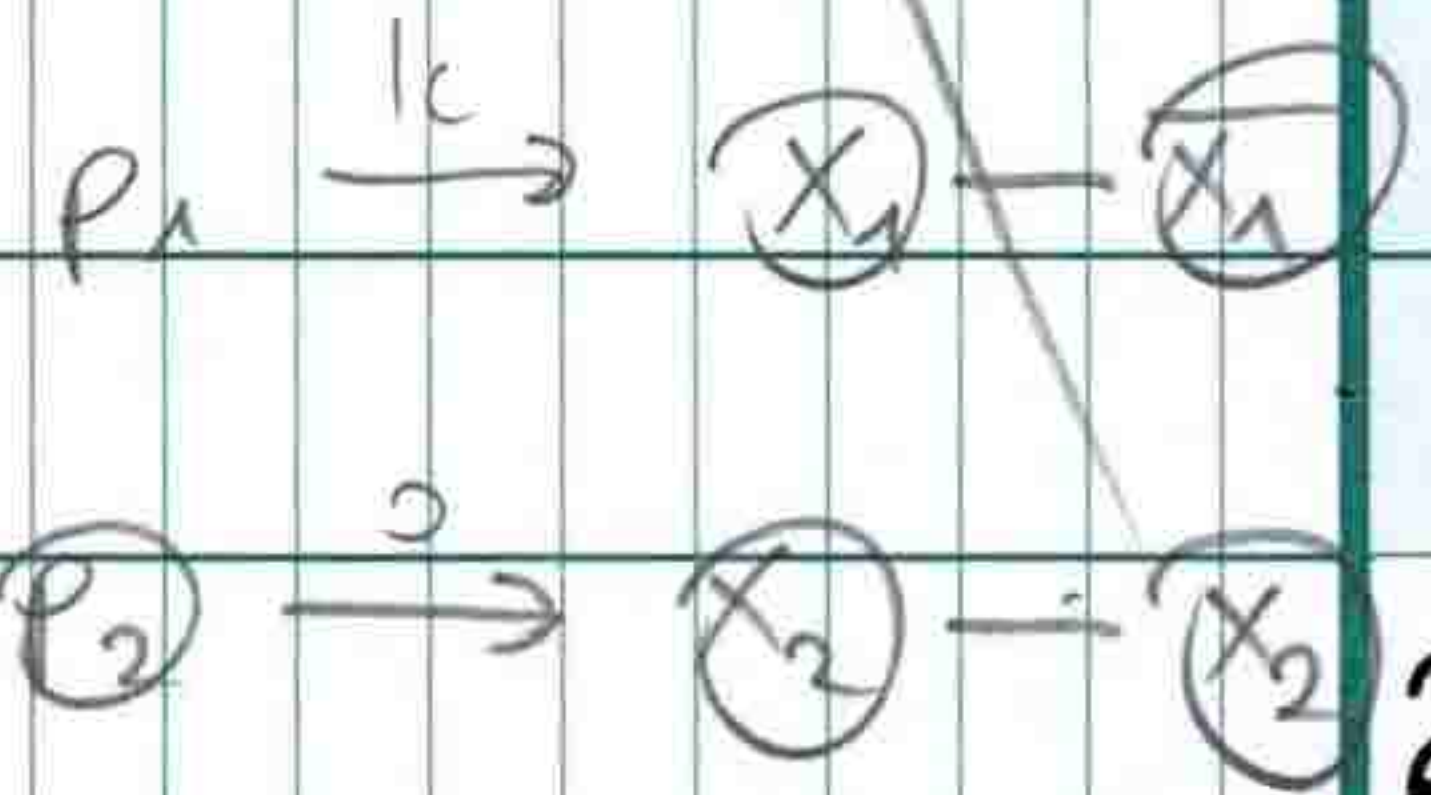
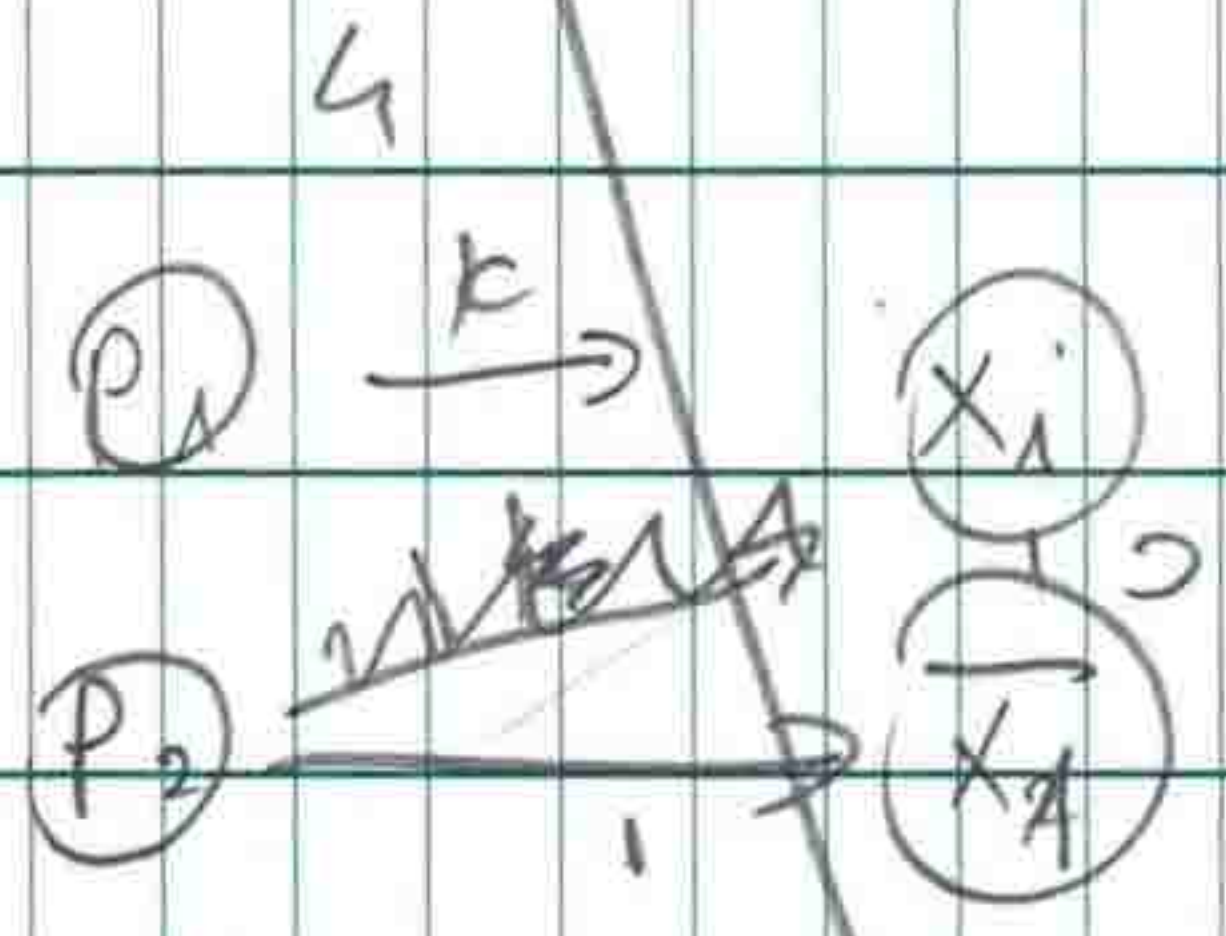
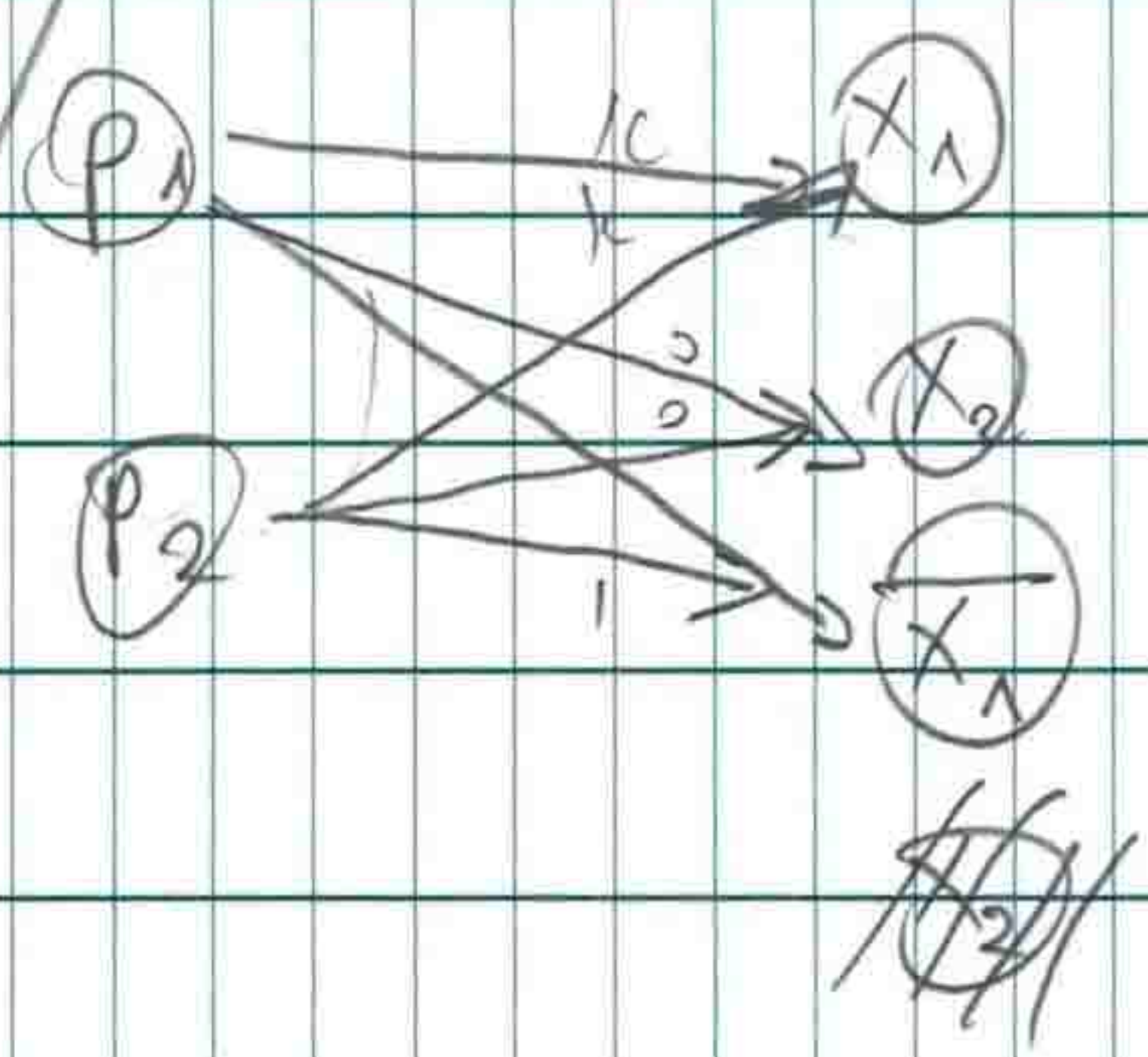
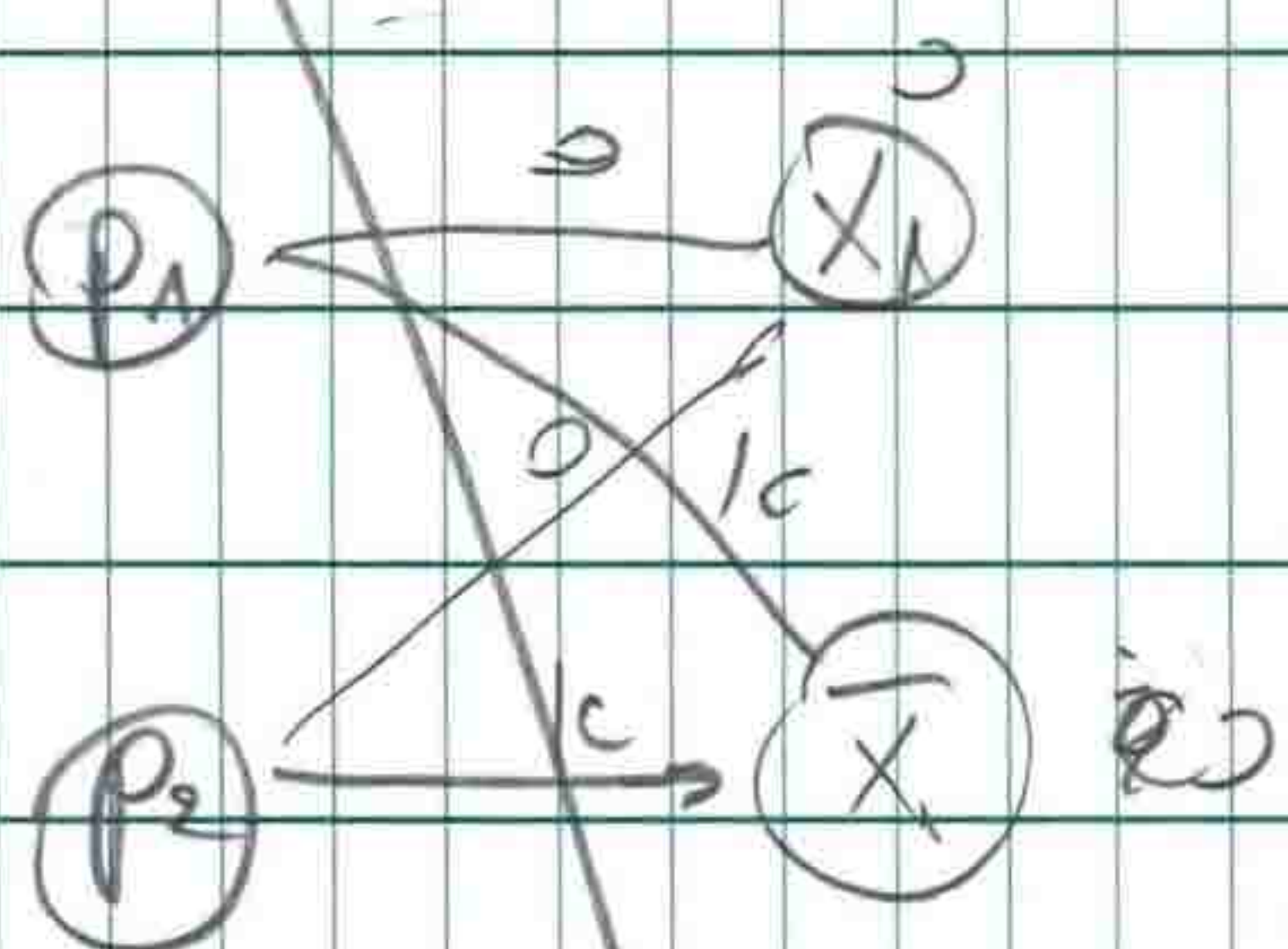
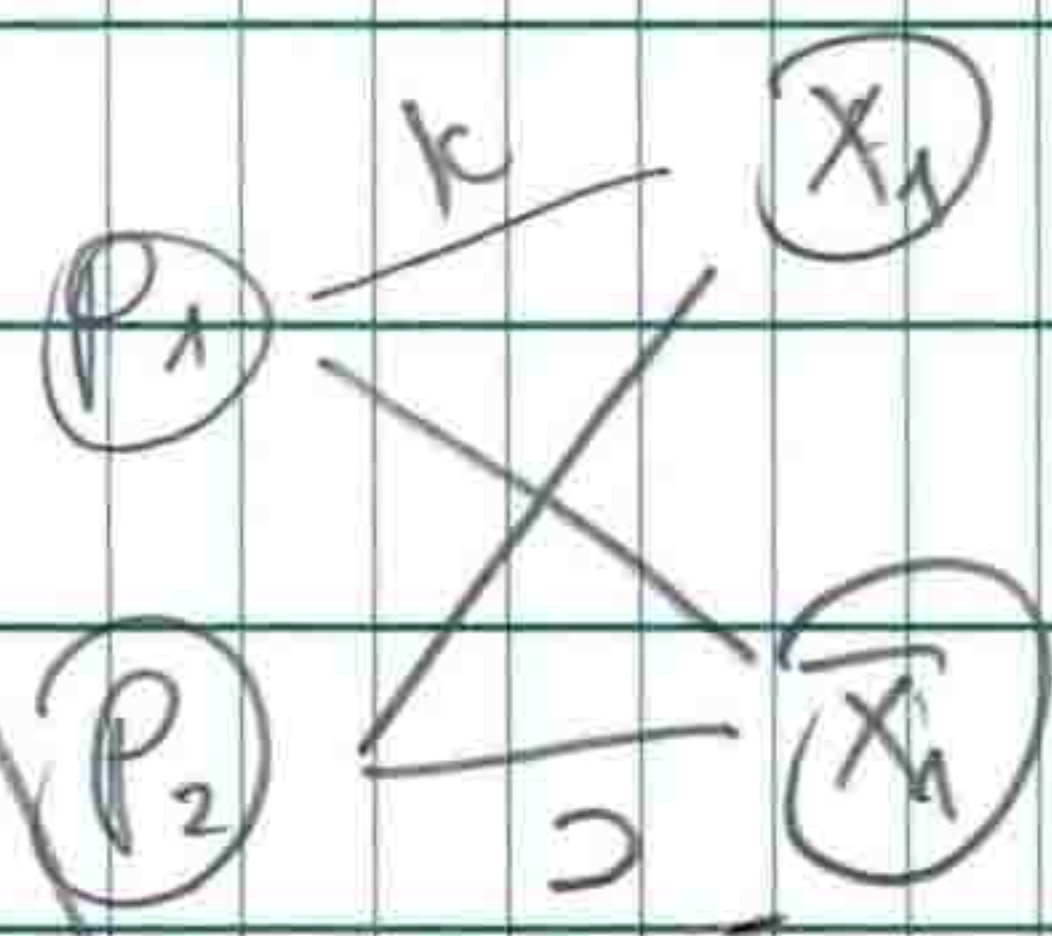
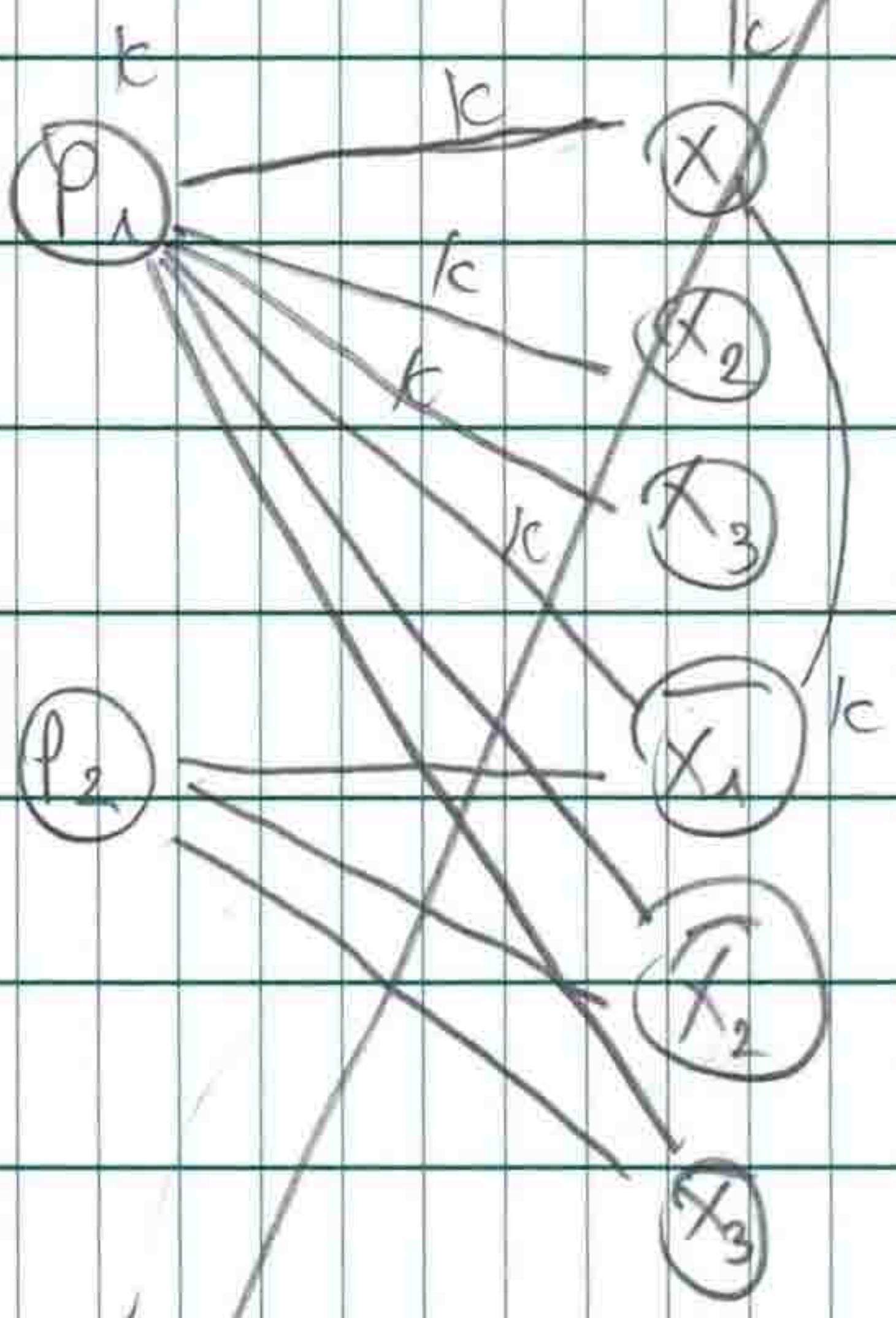
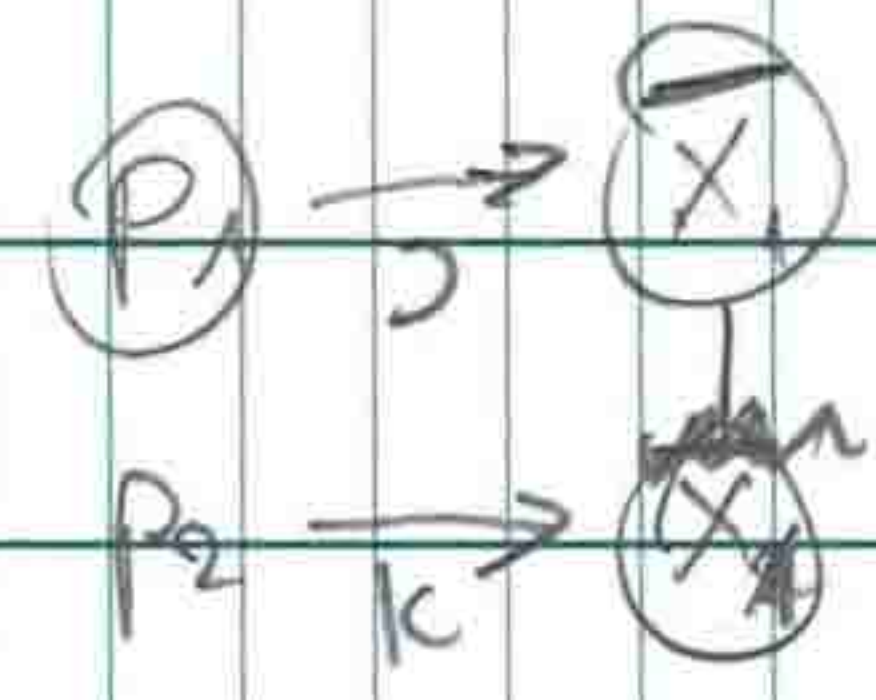
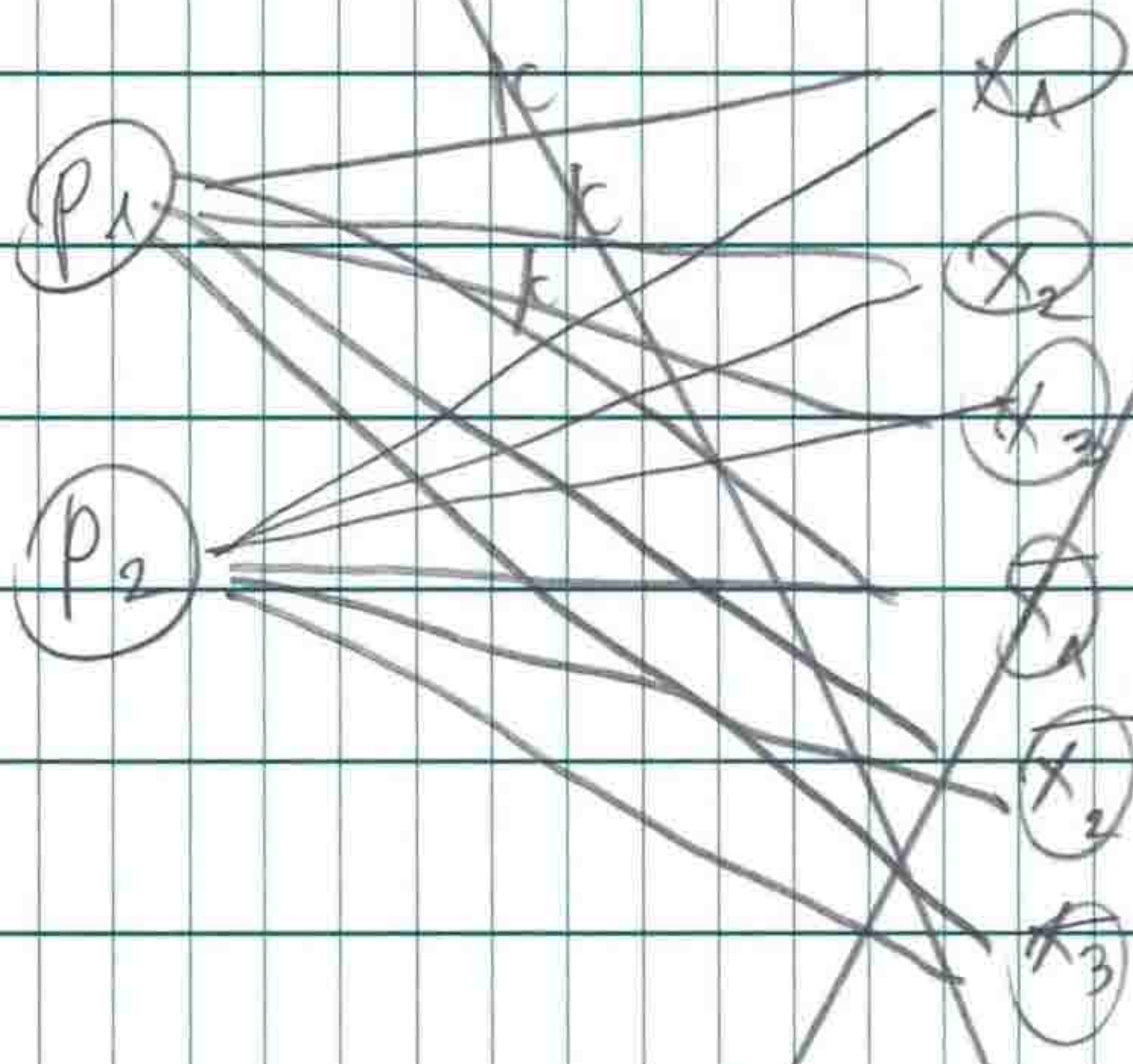
אולי נניח
 אולי $B \in NP$
 ? NP - A

נניח כי $B \in NP$ נניח כי $A \in CoNP$ שיהיה $A \leq_p B$
 תוכנית פולינומלית A - B וכן $CoNP \subseteq NP$. מכאן $NP = CoNP$
 כי $A \leq_p B$ וכן $A \in NP$ וכן $CoNP = NP$.
 נניח הפכו $CoNP = NP$ כי





$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$



גליון תשובות לשאלות רב-ברריות

הקף במעגל את התשובה שבחרת (לכל שאלה יש רק תשובה אחת נכונה).
אם תרצה לבטל תשובה שבחרת, סמן עליה X.

דוגמה לתשובה שבחרת: א ב ג $\textcircled{\text{ד}}$ ה ו ז ח ט
דוגמה לתשובה שבטלת: א ב ג ד ה \otimes ז ח ט

שאלה	תשובה	שאלה	תשובה
1	א ב ג ד ה ו ז ח ט	21	א ב ג ד ה ו ז ח ט
2	א ב ג ד ה ו ז ח ט	22	א ב ג ד ה ו ז ח ט
3	א ב ג ד ה ו ז ח ט	23	א ב ג ד ה ו ז ח ט
4	א ב ג ד ה ו ז ח ט	24	א ב ג ד ה ו ז ח ט
5	א ב ג ד ה ו ז ח ט	25	א ב ג ד ה ו ז ח ט
6	א ב ג ד ה ו ז ח ט	26	א ב ג ד ה ו ז ח ט
7	א ב ג ד ה ו ז ח ט	27	א ב ג ד ה ו ז ח ט
8	א ב ג ד ה ו ז ח ט	28	א ב ג ד ה ו ז ח ט
9	א ב ג ד ה ו ז ח ט	29	א ב ג ד ה ו ז ח ט
10	א ב ג ד ה ו ז ח ט	30	א ב ג ד ה ו ז ח ט
11	א ב ג ד ה ו ז ח ט	31	א ב ג ד ה ו ז ח ט
12	א ב ג ד ה ו ז ח ט	32	א ב ג ד ה ו ז ח ט
13	א ב ג ד ה ו ז ח ט	33	א ב ג ד ה ו ז ח ט
14	א ב ג ד ה ו ז ח ט	34	א ב ג ד ה ו ז ח ט
15	א ב ג ד ה ו ז ח ט	35	א ב ג ד ה ו ז ח ט
16	א ב ג ד ה ו ז ח ט	36	א ב ג ד ה ו ז ח ט
17	א ב ג ד ה ו ז ח ט	37	א ב ג ד ה ו ז ח ט
18	א ב ג ד ה ו ז ח ט	38	א ב ג ד ה ו ז ח ט
19	א ב ג ד ה ו ז ח ט	39	א ב ג ד ה ו ז ח ט
20	א ב ג ד ה ו ז ח ט	40	א ב ג ד ה ו ז ח ט

לשימוש פנימי

מספר התשובות הנכונות: _____ ציון: _____

שם הבודק: _____ 273347