פתרונות לממ"ן 13 - 2013א - 20425

1. א. התפלגות מספר הגפרורים בכל קופסה היא פואסונית עם הפרמטר 20, לכן :

$$e^{-20}\cdot\frac{20^{24}}{24!}=0.0557$$

ב. אין תלות בין הקופסאות, לכן ההסתברות שלא תהיה אף קופסה שיש בה בדיוק 24 גפרורים היא :

$$(1-0.0557)^{10}=0.564$$

ומכאן, שההסתברות שתהיה לפחות קופסה אחת שיש בה בדיוק 24 גפרורים היא $1-0.564=0.436$.

ג. מספר הבחירות שתעשינה עד למציאת 5 קופסאות כנדרש הוא משתנה מקרי בינומי-שלילי עם הפרמטרים 5 ו- 0.0557. לכן, ההסתברות שתדרשנה 100 בחירות היא : $\binom{99}{4}\cdot 0.0557^5\cdot 0.9443^{95}=0.00872$

ד. נסמן ב- A את המאורע שאף אחד מחברי הקבוצה לא יקבל קופסת גפרורים שיש בה בדיוק 24 גפרורים. לחישוב ההסתברות של A נתנה במאורעות $B_i=\{N=i\}$, לכל $i=1,\dots,10$, שהם מאורעות זרים וכוללים, ונשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה. נקבל :

$$P(A)=\sum_{i=1}^{10}P(A\mid B_i)P(B_i)=\sum_{i=1}^{10}P\{A\mid N=i\}P\{N=i\}=\sum_{i=1}^{10}\underbrace{(1-0.0557)}_{=0.9443}{}^{i}\cdot 0.1$$

$$=0.1\cdot 0.9443\cdot\sum_{i=0}^{9}0.9443^i=0.09443\cdot\left(\frac{1-0.9443^{10}}{0.0557}\right)=0.7396$$

2. א. הערכים האפשריים של המשתנה המקרי Y הם 1, 2, ... ההסתברויות לקבלת ערכים אלו נגזרים מפונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X , מכיוון ש-Y הוא פונקציה של X .

מקבלים :

$$P\{Y=1\}=P\{X=1\}=p$$

$$P\{Y=2\}=P\{X=2\}+P\{X=3\}=(1-p)p+(1-p)^2p=(1-p)(2-p)p$$

$$P\{Y=i\}=P\{X=i+1\}=(1-p)^ip\qquad,\qquad i=3,4,\dots$$

ב. נחשב את התוחלת של Y :

$$E[Y]=\sum_{i=1}^{\infty}iP\{Y=i\}$$

$$=p+2(1-p)(2-p)p+\sum_{i=3}^{\infty}i(1-p)^ip$$

$$=p+2(1-p)(2-p)p+(1-p)\underbrace{\sum_{i=3}^{\infty}i(1-p)^{i-1}p}_{=E[X]-P\{X=1\}-2P\{X=2\}}\qquad[\text{נתון כי } X\sim Geo(p)]$$

$$=p+2(1-p)(2-p)p+(1-p)\left[\frac{1}{p}-p-2(1-p)p\right]$$

$$=\cancel{p}+2(1-p)p[\underbrace{(2-p)-(1-p)}_{=1}]+\frac{1-p}{p}-(\cancel{1}-p)p=p(2-p)+\frac{1-p}{p}$$

אפשר גם לחשב את התוחלת באמצעות הטענה: $E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(i)P\{X=i\}$

מקבלים: $E[Y] = E[g(X)]$

$$= 1\cdot P\{X=1\} + 2\cdot P\{X=2\} + \left(E[X-1] - (1-1)\cdot P\{X=1\} - (2-1)\cdot P\{X=2\}\right)$$

$$= p + 2(1-p)p + \frac{1}{p} - 1 - 0 - (1-p)p = \frac{1-p}{p} + p(2-p)$$

3. א. אם המשתנה המקרי X מוגדר על-ידי מספר הבנות שמקבלות כובעים אדומים, אז הערכים האפשריים שלו הם 0, 1, ..., 10. ההסתברות המתאימה לכל אחד מהערכים היא:

$$P\{X=i\} = \frac{\binom{10}{i}\binom{10}{10-i}}{\binom{20}{10}} \qquad , \qquad i = 0,1,\ldots,10$$

קיבלנו פונקציית הסתברות היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N = 20$ (כמספר הילדים), $m = 10$ (כמספר הבנות) ו- $n = 10$ (כמספר הכובעים האדומים).

ב. לפי הסעיף הקודם, השונות המבוקשת היא:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{20-10}{20-1}\cdot 10\cdot\frac{10}{20}\cdot\frac{10}{20} = \frac{25}{19} = 1.3158$$

4. א1. הערכים האפשריים של X הם 3, 4, 5, 6 ו-7. נחשב את ההסתברויות שבהן X מקבל ערכים אלו:

$P\{X=3\} = 0.25^3 = 0.015625$ [נכשל ב-3 הנסיונות הראשונים]

$P\{X=4\} = \binom{3}{1}\cdot 0.75\cdot 0.25^3 = 0.035156$ [הצליח בנסיון 1 ונכשל ב-3 (בהכרח נכשל באחרון)]

$P\{X=5\} = \binom{4}{2}\cdot 0.75^2\cdot 0.25^3$ [הצליח ב-2 נסיונות ונכשל ב-3 (בהכרח נכשל באחרון)]

$+ 0.75^5 = 0.290039$ [הצליח ב-5 נסיונות ולא נכשל בכלל]

$P\{X=6\} = \binom{5}{3}\cdot 0.75^3\cdot 0.25^3$ [הצליח ב-3 נסיונות ונכשל ב-3 (בהכרח נכשל באחרון)]

$+ \binom{5}{1}\cdot 0.75^5\cdot 0.25 = 0.362549$ [הצליח ב-5 נסיונות (בהכרח הצליח באחרון) ונכשל ב-1]

$P\{X=7\} = \binom{6}{4}\cdot 0.75^4\cdot 0.25^3$ [הצליח ב-4 נסיונות ונכשל ב-3 (בהכרח נכשל באחרון)]

$+ \binom{6}{2}\cdot 0.75^5\cdot 0.25^2 = 0.296631$ [הצליח ב-5 נסיונות (בהכרח הצליח באחרון) ונכשל ב-2]

א2. כעת, נחשב את השונות של X:

$$E[X] = \sum_{i=3}^{7} i\,P\{X=i\} = 5.889405$$

$$E[X^2] = \sum_{i=3}^{7} i^2 P\{X=i\} = 35.540779$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 35.540779 - 5.889405^2 = 0.85569$$

ב. משתתף בתחרות מנסה לקלוע למטרה 7 פעמים בסך-הכל בשלושה מקרים :

1) אם הצליח לעבור את השלב הראשון ב-5 קליעות בלבד ואת השלב השני ב-2 קליעות ;

2) אם הצליח לעבור את השלב הראשון ב-6 קליעות בלבד ואת השלב השני בקליעה אחת ;

3) אם נכשל בשלב הראשון לאחר 7 קליעות.

מנתוני הבעיה נובע שאין תלות בין שלבי התחרות, מכיוון שאין תלות בין הקליעות של כל משתתף. לפיכך, בכל אחד מן המקרים שלעיל, נוכל לכפול את ההסתברויות הנוגעות לשני השלבים של התחרות. לבסוף, נחבר את ההסתברויות של שלושת המקרים, ונקבל :

$$0.75^5 \cdot 0.4 \cdot 0.6 + \binom{5}{1} \cdot 0.75^5 \cdot 0.25 \cdot 0.6 + \binom{6}{4} \cdot 0.75^4 \cdot 0.25^3 = 0.0569 + 0.1780 + 0.0742 = 0.3091$$

5. א. התפלגות מספר האנשים שאסף לוחץ להם יד היא בינומית עם הפרמטרים $n-1$ ו- p .

לכן, השונות המבוקשת היא : $(n-1)\,p(1-p)$

ב. התפלגות מספר לחיצות הידיים בקרב חברי הקבוצה היא בינומית עם הפרמטרים $\binom{n}{2}$ ו- p .

לכן, השונות המבוקשת היא : $\binom{n}{2} p(1-p)$

ג1. נסמן ב- X את מספר האנשים שאסף לוחץ להם יד.

לפי האמור בסעיף א, ההתפלגות של המשתנה המקרי X היא בינומית עם הפרמטרים 1,000 ו- 0.005.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא :

$$P\{X=3 \mid X \ge 1\} = \frac{P\{X=3\}}{P\{X \ge 1\}} = \frac{\binom{1{,}000}{3} \cdot 0.005^3 \cdot 0.995^{997}}{1-0.995^{1{,}000}} = 0.14124$$

ג2. ההתפלגות של X היא בקירוב פואסונית עם הפרמטר $\lambda = 1{,}000 \cdot 0.005 = 5$. לכן :

$$P\{X=3 \mid X \ge 1\} = \frac{P\{X=3\}}{P\{X \ge 1\}} \cong \frac{e^{-5} \cdot \frac{5^3}{3!}}{1-e^{-5}} = 0.14133$$