

## שאלה 1 (25 נקודות)

מסדרים במעגל 100 כדורים זהים בצורתם. הצבע של כל כדור הוא אדום בהסתברות 0.5 ואחרת כחול (בהסתברות 0.5). אין תלות בין הצבעים של כדורים שונים.

יהי  $X$  מספר הכדורים האדומים במעגל, שלימים יש כדור אדום נוסף.

- (6 נק') א. הסבר מדוע למשתנה המקרי  $X$  אין התפלגות בינומית. נמק את תשובתך.  
 (6 נק') ב. הראה כי  $E[X] = 25$ .  
 (7 נק') ג. חשב את השונות של  $X$ .  
 (6 נק') ד. חשב חסם תחתון (הטוב ביותר האפשרי) להסתברות של המאורע  $\{15 \leq X \leq 35\}$ .  
**הערה:** זכור כי ערכי  $X$  הם שלמים בלבד.

## שאלה 2 (25 נקודות)

- (10 נק') א. יהי  $X$  משתנה מקרי אחיד רציף על הקטע  $(0,1)$ .  
 קובעים ערך  $p$  ( $0 < p < 1$ ) למשתנה המקרי  $X$ ,  
 ומטילים 10 פעמים ברציפות מטבע, שההסתברות לקבל בו  $H$  היא  $p$ .  
 יהי  $N$  מספר הפעמים שהתוצאה  $H$  התקבלה ב-10 ההטלות הללו.  
 הוכח כי ל- $N$  יש התפלגות אחידה בדידה בין 0 ל-10,  
 כלומר, הוכח כי:  $P\{N = n\} = \frac{1}{11}$ ,  $n = 0, 1, \dots, 10$ .  
**רמז:** העזר בפונקציית ביתא.

- (15 נק') ב. 1. הוכח את הטענה:  
 לכל  $X$  ו- $Y$  שהם משתנים מקריים בעלי תוחלות ושונויות סופיות  
 מתקיים:  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, E[Y|X])$ .  
 ציין מהן טענות-העזר שעליהן מתבססת הוכחתך. את טענות העזר אין צורך להוכיח.  
 2. יהיו  $X_1, X_2, \dots$  משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, שלכולם תוחלת ושונות סופיות, ויהי  $N$  משתנה מקרי בדיד שערכיו האפשריים שלמים חיוביים והוא בלתי-תלוי בכל אחד מה- $X_i$  ים.

$$S = \sum_{i=1}^N X_i \quad \text{על-ידי: } S = \sum_{i=1}^N X_i.$$

$$\text{Cov}(N, S) = E[X_1] \text{Var}(N) \quad \text{הוכח כי:}$$

**רמז:** העזר בטענה מסעיף ב1.

### שאלה 3 (25 נקודות)

במטע A מגדלים תפוחים מזן "חרמון".

המשקל (בגרמים) של כל תפוח מקרי מיבול מטע A הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת 150 ושונויות 400. אין תלות בין משקלים של תפוחים שונים, הנבחרים באקראי מיבול המטע.

15% מיבול התפוחים במטע – אלו בעלי המשקל הקטן ביותר – נשלחים למפעל לייצור מיצים;

25% מיבול התפוחים במטע – אלו בעלי המשקל הגדול ביותר – נשלחים ליצוא;

והשאר, 60% מיבול התפוחים במטע, נשלחים לשיווק בארץ.

(6 נק') א. מהו המשקל המינימלי של התפוחים שנשלחים לשיווק בארץ?

(6 נק') ב. בוחרים באקראי 20 תפוחים מיבול המטע.

מהי ההסתברות ש-4 מהם יישלחו למפעל-המיצים ו-11 יישלחו לשיווק בארץ?

(7 נק') ג. בוחרים באקראי 20 תפוחים מיבול המטע ושוקלים אותם.

נניח שהתברר כי 8 מבין 20 התפוחים הללו שקלו יותר מ-155 גרם.

מהי ההסתברות שבין התפוחים, ששקלו פחות מ-155 גרם, יהיו 5 תפוחים שישקלו

פחות מ-140 גרם?

(6 נק') ד. טבח זקוק ל-5 תפוחים שמשקל כל אחד מהם לפחות 184 גרם.

הוא בוחר באופן אקראי תפוחים מיבול המטע, ושוקל אותם בזה אחר זה.

מהן תוחלת ושונויות מספר התפוחים שישקול עד שימצא את מבוקשו?

### שאלה 4 (25 נקודות)

נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת:

$$f(x, y) = \frac{cx^2}{y^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, y \geq 2$$

(8 נק') א. מצא את פונקציות הצפיפות השוליות של  $X$  ושל  $Y$ .

(8 נק') ב. נניח ש- $X_1, \dots, X_{10}$  הם משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם פונקציית הצפיפות

השולית  $f_X$  שמצאת בסעיף א.

חשב את התוחלת של סטטיסטי הסדר התשיעי של ה- $X_i$ -ים.

(9 נק') ג. חשב את  $P\{3X \leq Y \leq 4X\}$ .

## שאלה 5 (25 נקודות)

חברת כבלים ערכה סקר רב-משתתפים, בנושא "הרגלי צפייה בטלביזיה", בקרב מנויי שצופים בטלביזיה. כל אחד ממשתתפי הסקר סיווג את עצמו לפי הרגלי-הצפייה הקבועים שלו: צופה-בוקר, צופה-צהריים ו/או צופה-ערב. כל משתתף הורשה לבחור קטגוריות ללא הגבלה כלשהי (כלומר, בין 0 ל-3 קטגוריות).

התבררו התוצאות הבאות –

- 35% ממשתתפי הסקר סיווגו עצמם רק כצופי-ערב;
- 20% ממשתתפי הסקר לא סיווגו עצמם באף קטגוריה, כלומר, אין להם הרגלי צפייה קבועים;
- 5% ממשתתפי הסקר סיווגו עצמם כצופים בטלביזיה בכל חלקי היום (בכל הקטגוריות);
- 12% ממשתתפי הסקר סיווגו עצמם רק כצופי-צהריים;
- 20% ממשתתפי הסקר סיווגו עצמם כצופי-בוקר;
- 20% ממשתתפי הסקר סיווגו עצמם כצופי-צהריים וכצופים בזמן אחד נוסף לפחות;
- 60% מבין משתתפי הסקר שסיווגו עצמם כצופי-בוקר, סיווגו עצמם גם כצופי-ערב.

(11 נק') א. בחרו באקראי אחד ממשתתפי הסקר:

1. מהי ההסתברות שהוא מסווג כצופה-בוקר בלבד?
2. אם המשתתף אינו צופה-בוקר, מהי ההסתברות שהוא צופה-צהריים וצופה-ערב?

(8 נק') ב. בחרו באקראי שלושה ממשתתפי הסקר:

נתבונן על המאורע המוגדר על-ידי "אחד מהמשתתפים שנבחרו צופה-בוקר בלבד, משתתף נוסף צופה-צהריים בלבד והשלישי צופה-ערב בלבד".

1. הסבר מדוע אי-אפשר לחשב את ההסתברות המדויקת של המאורע הנתון בתחילת הסעיף. נמק את תשובתך, וכתוב מהו הנתון החסר לחישוב הנדרש.
2. תנאי הבעיה מאפשרים לחשב בקירוב את הסתברות המאורע. מהם התנאים המאפשרים את חישוב הקירוב?  
חשב קירוב להסתברות המאורע הנתון.

(6 נק') ג. נניח שבסקר השתתפו 10,000 מנויים.

אם ייבחר מתוכם מדגם אקראי של 100 מנויים, מה תהיה שונות מספר המנויים (מתוך ה-100) שסיווגו את עצמם כצופים בכל חלקי היום?

**בהצלחה!**