פרק 8: משפטי גבול (פתרונות)

1. א. המשתנה המקרי X הוא אי-שלילי. לכן, מאי-שוויון מרקוב מקבלים כי:

$$P\{X>75\}\le P\{X\ge 75\}\le \frac{E[X]}{75}=\frac{25}{75}=\frac{1}{3}$$

כלומר, ייתכן ש- $P\{X>75\}=0.2$.

ב. כעת, נתונה גם השונות של המשתנה המקרי X , לכן אפשר להשתמש באי-שוויון צ'בישב החד-צדדי, עבור המשתנה המקרי $X-25$, שתוחלתו 0 ושונותו 25. מקבלים:

$$P\{X>75\}=P\{X-25>50\}\le P\{X-25\ge 50\}\le \frac{25}{25+50^2}=\frac{25}{2{,}525}=\frac{1}{101}=0.0099$$

כלומר, עתה לא ייתכן ש- $P\{X>75\}=0.2$.

ג. בסעיף זה, המשתנה המקרי X אינו אי-שלילי, לכן נגדיר את המשתנה המקרי $Y=X+3$, שהוא משתנה אי-שלילי שתוחלתו $E[Y]=E[X]+3=8$, ונוכל להשתמש באי-שוויון מרקוב כדי למצוא את החסם התחתון המבוקש.

נקבל:
$$P\{X<9\}=P\{Y-3<9\}=P\{Y<12\}\ge 1-\frac{E[Y]}{12}=1-\frac{8}{12}=\frac{1}{3}$$

2. א. למשתנה המקרי X יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 100 ו-0.25, ומכאן שתוחלתו 25 ושונותו 18.75. כמו כן, משתנה זה הוא **משתנה מקרי בדיד**, המקבל ערכים שלמים בלבד, ולכן לפני ההצבה באי-שוויון צ'בישב **יש להקפיד לשים לב לסימני השוויון בגבולות הנתונים של ערכי X** (במקרה זה $20\le X$ ו- $X<30$). עתה, נביא את ביטוי ההסתברות הנתון לצורה שתתאים להצבה באי-שוויון צ'בישב, ונקבל ממנו כי:

$$P\{20\le X<30\}\ge P\{20<X<30\}=P\{|X-25|<5\}$$
$$=1-P\{|X-25|\ge 5\}\ge 1-\frac{\mathrm{Var}(X)}{5^2}=1-\frac{18.75}{25}=0.25$$

ב. אם X הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 100 ו-0.25, אפשר להציגו כסכום של 100 משתנים מקריים ברנוליים בלתי-תלויים שלכל אחד מהם הפרמטר 0.25. לפיכך, אפשר להשתמש במשפט הגבול המרכזי, כדי לחשב קירובים להסתברויות הנוגעות ל- X , כדוגמת זאת הנתונה בשאלה.
בחישוב הקירוב ל- $P\{20\le X<40\}$ נבצע תיקון רציפות, מכיוון שהתפלגות המשתנה המקרי הבינומי היא <u>התפלגות בדידה, שערכיה האפשריים שלמים בלבד</u>, ואילו ההתפלגות הנורמלית (שבאמצעותה מחשבים את הקירוב) היא רציפה. נקבל:

$$P\left\{20\le \sum_{i=1}^{100}X_i<40\right\}=P\left\{19.5\le \sum_{i=1}^{100}X_i<39.5\right\}\cong P\left\{\tfrac{19.5-100\cdot 0.25}{\sqrt{100\cdot 0.25\cdot 0.75}}\le Z\le \tfrac{39.5-100\cdot 0.25}{\sqrt{100\cdot 0.25\cdot 0.75}}\right\}$$
$$=\Phi(3.3486)-\Phi(-1.2702)=0.9996-(1-0.8980)=0.8976$$

כאשר Z הוא משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי.

הערה: תיקון רציפות מבצעים רק בחישוב של קירוב באמצעות התפלגות רציפה להסתברויות של ערכי משתנה מקרי בדיד, ורק כאשר הערכים האפשריים של המשתנה הבדיד הם שלמים בלבד. במקרה כזה, הקירוב להסתברות של כל ערך אפשרי (ושלם) יחושב כך :

$$P\{X=n\} \overset{\text{בהנחה ש-}X\text{ מקבל ערכים שלמים בלבד}}{\uparrow}{=} P\{n-0.5 \le X \le n+0.5\} \cong P\left\{\frac{(n-0.5)-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le Z \le \frac{(n+0.5)-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}$$

הסבר מפורט יותר, הנוגע לתיקון הרציפות, נמצא בסוף קובץ הפתרונות לתרגילי פרק 5.

3. נסמן ב-Y את המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר התשובות הנכונות במבחן של ראובן. ההתפלגות של Y היא בינומית עם הפרמטרים 27 ו-0.25. המשתנה המקרי X, המוגדר בשאלה, הוא צירוף לינארי של המשתנה המקרי Y. קיים ביניהם הקשר הלינארי : $X = 3Y-(27-Y) = 4Y-27$

לכן :
$$E[X] = 4E[Y]-27 = 4\cdot27\cdot0.25-27 = 0$$
$$\text{Var}(X) = 4^2\,\text{Var}(Y) = 16\cdot27\cdot0.25\cdot0.75 = 81$$

א. $$P\{|X|\ge18\} = P\{|X-0|\ge18\} \le \frac{81}{18^2} = 0.25$$

ב. $$P\{|X|\ge18\} = P\{X\ge18\}+P\{X\le-18\} = P\{4Y-27\ge18\}+P\{4Y-27\le-18\}$$
$$= P\{4Y\ge45\}+P\{4Y\le9\} = P\{Y\ge11.25\}+P\{Y\le2.25\}$$

ההתפלגות של המשתנה המקרי Y היא בינומית עם הפרמטרים 27 ו-0.25. לכן, אפשר להציג את Y כסכום של 27 משתנים מקריים ברנוליים בלתי-תלויים שלכל אחד מהם הפרמטר 0.25. ומכאן נובע, שאפשר להשתמש במשפט הגבול המרכזי, כדי לחשב קירובים להסתברויות הנוגעות ל-Y.

מקבלים :
$$P\{|X|\ge18\} = P\{Y\ge11.25\}+P\{Y\le2.25\}$$
$$= P\{Y\ge12\}+P\{Y\le2\} \qquad [\,Y \text{ מקבל רק ערכים שלמים בין 0 ל-27}\,]$$
$$= P\{Y\ge11.5\}+P\{Y\le2.5\} \qquad [\,\text{תיקון רציפות}\,]$$
$$\cong P\left\{Z\ge\tfrac{11.5-27\cdot0.25}{\sqrt{27\cdot0.25\cdot0.75}}\right\}+P\left\{Z\le\tfrac{2.5-27\cdot0.25}{\sqrt{27\cdot0.25\cdot0.75}}\right\}$$
$$= 1-\Phi(2.1111)+\Phi(-1.8889) = 1-0.9826+1-0.9705 = 0.0469$$

4. נסמן ב-X_i את הביקוש למוצר מתוצרת AAA ביום i, לכל $i = 1,2,...,25$, ונסמן ב-S את המלאי של מוצרים אלו, שהסוחר מחזיק במחסניו. כדי שהמלאי יספיק לסוחר במשך 25 ימים בהסתברות שהיא לפחות 0.95, צריך להתקיים האי-שוויון :
$$P\left\{\sum_{i=1}^{25} X_i \le S\right\} \ge 0.95$$

נניח שה-X_i-ים בלתי-תלויים ומכיוון שהם שווי-התפלגות (לכולם התפלגות פואסונית עם הפרמטר 4), נוכל להשתמש במשפט הגבול המרכזי, כדי להעריך את S. כמו כן, הואיל והערכים האפשריים של S הם שלמים, נבצע תיקון רציפות.

מקבלים:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{25} X_i \le S\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{25} X_i \le S+0.5\right\} \cong P\left\{Z \le \frac{S+0.5-25\cdot 4}{\sqrt{25\cdot 4}}\right\}$$
$$= \Phi\left(\frac{S-99.5}{10}\right) \ge 0.95 = \Phi(1.645)$$

ומכאן:
$$\frac{S-99.5}{10} \ge 1.645 \qquad \Rightarrow \qquad S \ge 115.95$$

כלומר, הסוחר צריך להחזיק במלאי לפחות 116 פריטים מתוצרת AAA.

הערה1: לפי משפט הגבול המרכזי, הקירוב להסתברות של כל ערך אפשרי (ושלם) של המשתנה המקרי $X = \sum_i X_i$, שהוא סכום של משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, מחושב כך:

$$P\left\{X = \sum_i X_i = n\right\} \overset{\substack{\text{בהנחה ש-}X\text{ מקבל ערכים שלמים בלבד}\\ \uparrow}}{=} P\{n-0.5 \le X \le n+0.5\} \cong P\left\{\frac{(n-0.5)-E[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \le Z \le \frac{(n+0.5)-E[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right\}$$

הערה 2: שימו לב, שהפונקציה Φ היא מונוטונית עולה ולכן חד-חד-ערכית.

לפיכך, אם מתקיים $\Phi(a) > \Phi(b)$ אז בהכרח $a > b$.

5. א. נחשב את התוחלת והשונות של ממוצע אורך-החיים של 80 רכיבים, ואחר-כך נשתמש במשפט הגבול המרכזי לחישוב ההסתברות המקורבת.

נקבל:
$$E[\overline{X}_{80}] = E[X] = 30 \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(\overline{X}_{80}) = \tfrac{1}{80}\mathrm{Var}(X) = \tfrac{1}{80}\cdot 30^2 = \tfrac{90}{8} = 11.25$$

נשים לב, שבמקרה זה, אנו משתמשים במשפט הגבול המרכזי לחישוב קירוב להסתברות הנוגעת להתפלגות רציפה. לכן, אין צורך לערוך תיקון רציפות.

מקבלים:
$$P\left\{\overline{X}_{80} < 33\right\} \cong P\left\{Z < \tfrac{33-30}{\sqrt{11.25}}\right\} = \Phi(0.8944) = 0.8144$$

ב. כעת מתקיים:
$$E\left[\sum_{i=1}^{80} X_i\right] = 80E[X] = 80\cdot 30 = 2{,}400$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{80} X_i\right) = 80\mathrm{Var}(X) = 80\cdot 30^2 = 72{,}000$$

ולכן:
$$P\left\{\sum_{i=1}^{80} X_i \ge 2{,}600\right\} \cong P\left\{Z \ge \tfrac{2{,}600-2{,}400}{\sqrt{72{,}000}}\right\} = P\{Z \ge 0.7454\} = 1-\Phi(0.7454) = 0.22798$$

6. מהצורה של הפונקציה יוצרת המומנטים, נובע שהמשתנה המקרי שלו היא מתאימה הוא משתנה מקרי בדיד. נסמן את המשתנה המקרי הזה ב-X ונקבל:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_i e^{ti} P\{X=i\} = \tfrac{1}{4}e^{4t} + \tfrac{1}{5}e^{5t} + \tfrac{1}{6}e^{6t} + \tfrac{23}{60} \qquad , \quad t \text{ ממשי}$$

כלומר:
$$P\{X=4\} = \tfrac{1}{4} \quad ; \quad P\{X=5\} = \tfrac{1}{5} \quad ; \quad P\{X=6\} = \tfrac{1}{6} \quad ; \quad P\{X=0\} = \tfrac{23}{60}$$

ומכאן:
$$E[X] = 4\cdot\tfrac{1}{4} + 5\cdot\tfrac{1}{5} + 6\cdot\tfrac{1}{6} + 0 = 3$$

$$E[X^2] = 4^2 \cdot \tfrac{1}{4} + 5^2 \cdot \tfrac{1}{5} + 6^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 0 = 15 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Var}(X) = 15 - 3^2 = 6$$

כעת, כדי למצוא קירוב להסתברות המבוקשת נשתמש במשפט הגבול המרכזי. נבצע תיקון רציפות, מכיוון שה-X_i-ים בדידים. מקבלים:

$$P\left\{280 \le \sum_{i=1}^{100} X_i \le 310\right\} \cong P\left\{\tfrac{279.5-100\cdot 3}{\sqrt{100\cdot 6}} \le Z \le \tfrac{310.5-100\cdot 3}{\sqrt{100\cdot 6}}\right\} = \Phi(0.4287) - \Phi(-0.8369)$$
$$= 0.6659 - (1 - 0.7986) = 0.4645$$

7. נסמן ב-X את מספר הנשים במדגם שאינן אוכלות ארוחת בוקר וב-Y את מספר הגברים במדגם שאינם ארוחת בוקר. למשתנה המקרי X יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 200 ו-0.236, ולמשתנה המקרי Y יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 200 ו-0.252. לכן, נוכל לחשב קירובים "נורמליים" להסתברויות הבינומיות.

נחשב תחילה את התוחלות ואת השונויות של X ושל Y:

$$E[X] = 200 \cdot 0.236 = 47.2 \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(X) = 200 \cdot 0.236 \cdot 0.764 = 36.0608$$
$$E[Y] = 200 \cdot 0.252 = 50.4 \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(Y) = 200 \cdot 0.252 \cdot 0.748 = 37.6992$$

א. ההתפלגות של המשתנה המקרי X מקורבת להתפלגות נורמלית עם הפרמטרים 47.2 ו- 36.0608 וההתפלגות של המשתנה המקרי Y מקורבת להתפלגות נורמלית עם הפרמטרים 50.4 ו- 37.6992, ומכאן שהתפלגות הסכום שלהם (בהנחת אי-תלות בין X ל-Y) מקורבת להתפלגות נורמלית עם הפרמטרים $47.2 + 50.4 = 97.6$ ו- $36.0608 + 37.6992 = 73.76$.
כמו כן, מספר האנשים במדגם הכללי, שאינם אוכלים ארוחת בוקר הוא משתנה מקרי בדיד. לכן, בחישוב הקירוב להסתברות המאורע $\{X + Y \ge 110\}$ נבצע תיקון רציפות, ונקבל:

$$P\{X + Y \ge 110\} = P\{X + Y \ge 109.5\} \cong P\left\{Z \ge \tfrac{109.5-97.6}{\sqrt{73.76}}\right\} = 1 - \Phi(1.3856) = 1 - 0.9170 = 0.0830$$

ב. המאורע, שמספר הנשים שאינן אוכלות אף פעם ארוחת בוקר הוא לפחות כמספר הגברים שאינם אוכלים אף פעם ארוחת בוקר, שקול למאורע $\{X - Y \ge 0\}$. לכן, עלינו לחשב את ההסתברות שהמשתנה המקרי הבדיד $X - Y$ מקבל ערך אי-שלילי. בהנחת אי-תלות בין X ל-Y מקבלים, שההתפלגות המקורבת של המשתנה המקרי, המוגדר על-ידי $X - Y$, היא התפלגות נורמלית עם הפרמטרים $E[X - Y] = E[X] - E[Y] = -3.2$ ו- $\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 0 = 73.76$.
לפיכך:

$$P\{X - Y \ge 0\} = P\{X - Y \ge -0.5\} \cong P\left\{Z \ge \tfrac{-0.5+3.2}{\sqrt{73.76}}\right\} = 1 - \Phi(0.3144) = 1 - 0.6234 = 0.3766$$