

האוניברסיטה הפתוחה

20290

**אלגוריתמיקה -
יסודות מדעי המחשב
חוברת הקורס – קיץ 2019**

כתב: אייל משיח

יולי 2019 - סמסטר קיץ – תשע"ט

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

א	אל הסטודנט
ב	1. לוח זמנים ופעילויות
ג	2. תיאור המטלות
ד	3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס
1	ממ"ן 11
3	ממ"ן 12
5	ממ"ן 13
7	ממ"ן 14
9	ממ"ן 15

אל הסטודנט,

אנו מברכים אותך עם הצטרפותך אל הלומדים בקורס "אלגוריתמיקה - יסודות מדעי המחשב".

הקורס בסמסטר קיץ נמשך 9 שבועות בלבד, ולכן חשוב להקפיד על לימוד החומר והגשת המטלות בקצב שקבענו כדי להבטיח סיום מוצלח של הקורס. **בגלל משך הסמסטר הקצר, אין אפשרות לדחות את הגשת המטלות.**

ברצוננו להפנות תשומת לבך לשתי נקודות חשובות:

- במהלך הקורס יש להגיש תרגילי בית. מספיק להגיש שלושה מתוך חמשת הממ"נים שבחוברת, אך מומלץ להגיש את כולם. יש להקפיד על הגשת הממ"נים במועד.
 - הקורס "אלגוריתמיקה" הוא קורס מתקדם. לקורס יש אתר-בית הכולל לוח הודעות, קבוצת דיון, מאגר משאבים והפניות לאתרים אחרים ברשת. לתשומת לבך, אתר הקורס הוא ערוץ תקשורת "רשמי". יש להתייחס להודעות ועדכונים שיופיעו בלוח ההודעות שבאתר כאילו שנשלחו בדואר. פרטים על למידה מתקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: <http://telem.openu.ac.il>.
- מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספרייה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

לתשומת לב הסטודנטים הלומדים בחו"ל:

למרות הריחוק הפיסי הגדול, נשתדל לשמור אתכם על קשרים הדוקים ולעמוד לרשותכם ככל האפשר.

הפרטים החיוניים על הקורס נכללים בחוברת הקורס וכן באתר הקורס. מומלץ מאוד להשתמש באתר הקורס ובכל אמצעי העזר שבו וכמובן לפנות אלינו במידת הצורך.

צוות הקורס ישמח לעמוד לרשותך בכל שאלה שתתעורר.

ניתן לפנות אלי ביום ג', בשעות 11:00-13:00, בטלפון 09-7781233, או ב-e-mail.

כתובתי היא: eyalma@openu.ac.il.

פגישות יש לתאם מראש.

בברכה,

אייל משיח
מרכז הקורס

1. לוח זמנים ופעילויות (2019 / 2020)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	פרקי הלימוד המומלצים	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן למנחה
1	12.7.2019-7.7.2019	פרקים 1-3		
2	19.7.2019-14.7.2019	פרק 4	מפגש 1	ממ"ן 11 19.7.2019
3	26.7.2019-21.7.2019	פרק 5	מפגש 2	
4	2.8.2019-28.7.2019	פרק 6	מפגש 3	ממ"ן 12 2.8.2019
5	9.8.2019-4.8.2019	פרק 7	מפגש 4	
6	16.8.2019-11.8.2019 (יום א' צום ט' באב)	פרק 8	מפגש 5	ממ"ן 13 16.8.2019
7	23.8.2019-18.8.2019	פרק 9	מפגש 6	ממ"ן 14 23.8.2019
8	30.8.2019-25.8.2019	פרק 10	מפגש 7	
9	6.9.2019-1.9.2019	פרק 11	מפגש 8	ממ"ן 15 6.9.2019

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

2. תיאור המטלות

הממ"נים בקורס הם ממ"נים **רגילים**: כל מטלה מורכבת ממספר תרגילים "יבשים" **שאינם** דורשים הרצת תכניות במחשב. תרגילים אלו נועדו לבדוק את הבנתך בחומר הלימוד. את הפתרון למטלה כזו יש לכתוב **בעט** על דף נייר בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. (אפשר ורצוי, כמובן, להדפיס את הפתרון למטלה). אם השאלה בממ"ן אינה ברורה לך, ניתן להתקשר אל אחד מהמנחים (בשעת הייעוץ הטלפוני שלו) לצורך קבלת הסבר או לנסות להיעזר בקבוצת הדיון של הקורס. בטבלה שלהלן תמצא מהו חומר הלימוד הנדרש (לפי פרקי הספר) לפתרון כל אחת מהמטלות, ומשקל כל מטלה בחישוב הציון של הקורס.

שים לב!

בעת כתיבת פתרון למטלה אין להסתמך על פרקי לימוד **מתקדמים** יותר מהפרקים בהם עוסקת המטלה.

מטלה	חומר הלימוד הנדרש לפתרון	משקל המטלה
ממ"ן 11	פרקים 1-4	6 נקודות
ממ"ן 12	פרקים 5-6	6 נקודות
ממ"ן 13	פרק 7	6 נקודות
ממ"ן 14	פרקים 8-9	6 נקודות
ממ"ן 15	פרקים 10-12	6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש שלוש מטלות מתוך החמש.

לתשומת לבכם!

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן:

אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלות** בציון הנמוך ביותר, שציוניהן נמוכים מציון הבחינה (**עד שתי מטלות**), לא יילקחו בחשבון בעת שקלול הציון הסופי.

זאת בתנאי שמטלות אלה **אינן חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו, מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליך לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל של 18 נקודות לפחות.

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון של 60 לפחות.

ג. לקבל ציון סופי של 60 לפחות.

לתשומת לבכם:

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס. סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימאלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע

בטלפון 09-7782222 או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא <http://www.openu.ac.il/sheilta>

קורסים ⇨ ציוני מטלות ובחינות ⇨ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.

יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של המטלות והבחינה יהיה נמוך מ-60).

כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1-4

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 19.7.2019

סמסטר: 2019ג

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (15 נקודות)

א. קראו את סעיף 1 במאמר "The Theory of Computing: A Scientific Perspective".
ב. תנו שתי דוגמאות למוצרים טכנולוגיים שפותחו במהלך מהפכת המחשוב של 40 השנים האחרונות. עבור כל אחד ממוצרים אלה – כתבו בקיצור איך הוא השפיע עליכם, ואיך לדעתכם הוא השפיע (לטוב וגם לרע) על החברה שבה אנו חיים.

שאלה 2 (20 נקודות)

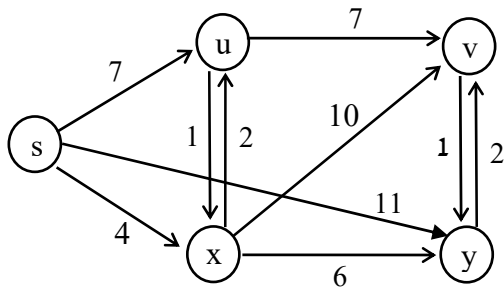
מחרוזות בצורת זיגזג היא מחרוזת מהצורה $010101\dots$ או מהצורה $101010\dots$.
נתונה מחרוזת של אפסים ואחדים, המכילה n אפסים ו- n אחדים ($n > 1$). יש להביא את המחרוזת לצורת זיגזג באמצעות פעולות של החלפה בין שני איברים (לאו דווקא סמוכים) במחרוזת. כלומר, הפעולה הבסיסית שבה מותר להשתמש היא החלפה בין שני איברים במחרוזת. מעוניינים למצוא את המספר המינימלי של החלפות שצריך לבצע כדי להביא את המחרוזת לצורת זיגזג (מותר להביא את המחרוזת לכל אחת משתי הצורות האפשריות).
תארו אלגוריתם לפתרון הבעיה והסבירו מדוע הוא מבצע את הנדרש.

שאלה 3 (20 נקודות)

בשאלה זו עליכם לכתוב אלגוריתם לחישוב הציון הסופי של סטודנט בקורס "אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב". בקורס יש חמישה ממ"נים, ומתוכם חובה להגיש שלושה (אפשר גם להזין ציון 0). הקלט לאלגוריתם מורכב מרשימה G באורך s , המכילה את הציונים של הסטודנט בממ"נים ובבחינה הסופית. מספר שלילי במקום ה- i ברשימה פירושו שהסטודנט לא הגיש את הממ"ן ה- i , או לא ניגש לבחינה (אם $i = 6$).
הפלט המבוקש הוא הציון הסופי של הסטודנט, או הודעה שהסטודנט לא עבר את הקורס.
הערה: לפני שאתם ניגשים לפתרון השאלה, אנא קראו בעיון את סעיפים 2 ו-3 בחוברת הקורס.

שאלה 4 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

א. נתון הגרף הבא:



הריצו את האלגוריתם של דייקסטרה על הגרף ומצאו את אורכי המסלולים הקצרים ביותר מהצומת s לשאר הצמתים בגרף. הציגו בטבלה את ערכי המשתנים לאורך ריצת האלגוריתם.

ב. האם לדעתכם האלגוריתם של דייקסטרה הוא חמדני או מבוסס על תכנון דינמי? נמקו את תשובתכם.

שאלה 5 (25 נקודות)

אמיר סיים בהצלחה את לימודיו בחוג לכלכלה באוניברסיטה, והוא מתכוון לצאת לטיול ברחבי העולם. כחלק מההכנות לטיול, הוא הכין רשימה ממוספרת של N ערים בהן הוא מעוניין לבקר. בכל שלב בטיול אמיר יכול לעבור מעיר i לעיר j רק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

$$1. j > i$$

2. יש טיסה ישירה מעיר i לעיר j

אמיר מעוניין לדעת מהו מספר המסלולים האפשריים המתחילים בעיר מס' 1 ומסתיימים בעיר מס' N . (שימו לב שמסלול אינו חייב לעבור דרך כל הערים.)

הוא הכין מטריצה בוליאנית בגודל $N \times N$, שבה רשום אם יש טיסה ישירה בין כל שתי ערים. כלומר:

$$M[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{if there is a direct flight from } i \text{ to } j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

תארו אלגוריתם תכנון דינמי, המקבל את המטריצה M ומחשב את מספר המסלולים כמוגדר לעיל.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

נסמן ב- $T_a(n)$ את המספר הקטן ביותר שניתן להצגה כסכום של שתי חזקות שלישיות של מספרים חיוביים ב- n צורות שונות. מתקיים:

$$T_a(1) = 2 = 1^3 + 1^3$$

$$T_a(2) = 1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$$

א. כתבו אלגוריתם למציאת $T_a(3)$.

ב. תרגמו את האלגוריתם שכתבתם לתכנית מחשב והריצו אותה. מהו הפלט של התכנית?

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 5-6

מספר השאלות: 6 משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: 2019 מועד אחרון להגשה: 2.8.2019

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (15 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 10 נק')

נתון כד המכיל W כדורים לבנים ו-B כדורים שחורים. נתבונן בתהליך הבא:

(1) כל עוד נשארו בכד לפחות שני כדורים, בצע את הפעולות הבאות:

(1.1) הוצא מהכד שני כדורים כלשהם;

(1.2) אם שני הכדורים שהוצאת הם בעלי אותו צבע, שים במקומם כדור שחור חדש;

(1.3) אחרת, החזר לכד את הכדור הלבן;

א. לאחר כמה שלבים התהליך יסתיים? נמקו את תשובתכם.

ב. מה יהיה הצבע של הכדור האחרון שיישאר בכד? נמקו את תשובתכם.

שאלה 2 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

א. כתבו אלגוריתם, הקורא מהקלט n מספרים חיוביים ומחזיר את מספר ההופעות של

המקסימום. אין לשמור את נתוני הקלט באיזשהו מבנה נתונים ומותר לקרוא אותם

פעם אחת בלבד!

ב. הסבירו בקצרה את דרך פעולתו של האלגוריתם שכתבתם והוכיחו את נכונותו.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתונים שני מערכים בגודל n: מערך A הממוין בסדר עולה ומערך B הממוין בסדר יורד.

כתבו אלגוריתם לינארי המוצא את כל האיברים המופיעים גם ב-A וגם ב-B.

הסבירו מדוע האלגוריתם שכתבתם הוא נכון (אין צורך בהוכחה פורמלית).

שאלה 4 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

נתונה קבוצת מספרים טבעיים A . מעוניינים לבנות רשימה **ממוינת** L שתכיל את כל הסכומים החלקיים של A .

למשל, עבור הקבוצה $\{2, 7, 3\}$ רשימת הפלט תהיה $\langle 0, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 12 \rangle$.
להלן מופיע אלגוריתם לפתרון הבעיה:

בנה-סכומים חלקיים-של A

(1) אתחל רשימה ריקה L ;

(2) $\text{insert}(L, 0)$;

(3) כל עוד נשארו איברים ב- A בצע:

(3.1) הוצא את האיבר הבא מ- A והכנס אותו ל- x ;

(3.2) אתחל רשימה ריקה L' ;

(3.3) לכל איבר a ב- L בצע $\text{insert}(L', x+a)$;

(3.4) $L \leftarrow \text{Merge}(L, L')$;

(4) החזר את L .

הערה: השגרה למיזוג שתי רשימות מופיעה בתשובה לשאלה 7 בפרק 4 במדריך הלמידה.

א. הריצו את האלגוריתם על הקבוצה $S = \{6, 1, 4\}$. תארו כל שלב של הריצה בפירוט.

ב. נסמן ב- N את מספר האיברים ב- A . חשבו את מספר פעולות החיבור ומספר פעולות ההשוואה שמבצע האלגוריתם (במקרה הגרוע). מהו זמן הריצה הכולל של האלגוריתם?

שאלה 5 (25 נקודות: סעיף א' – 5 נק', סעיף ב' – 20 נק')

א. המערך הבא התקבל אחרי ביצוע שגרת החלוקה במיון-מהיר: $[6, 1, 3, 7, 8, 12, 15, 10]$.
אילו מהאיברים של המערך היו יכולים לשמש כאיבר הציר בשגרת החלוקה?
נמקו את תשובתכם.

ב. בהינתן מערך המתקבל אחרי ביצוע שגרת החלוקה במיון-מהיר, תארו אלגוריתם **לינארי** למציאת כל האיברים שהיו יכולים לשמש כאיבר הציר בשגרת החלוקה.
רמז: השתמשו באלגוריתם שכתבתם בשאלה 3.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

משחק שש-בש בין שני שחקנים הגיע למצב שבו n אבני שש-בש של השחקן הראשון נמצאות בנקודה 1 בלוח. בהנחה שהשחקן הראשון ניצח במשחק, מהו הסיכוי שהזריקה האחרונה שלו הייתה דאבל? כתבו נוסחת נסיגה מתאימה ונסו לפתור אותה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 16.8.2019

סמסטר: 2019

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (15 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 10 נק')

- א. תארו אלגוריתם נאיבי לפתרון בעיית הסכום החלקי ונתחו את זמן ריצתו.
- ב. תארו אלגוריתם הפותר את הבעיה בזמן פולינומי באמצעות "מטבע קסם".
- הערה: בעיית הסכום החלקי מוגדרת בפרק 7 במדריך הלמידה.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתבונן בגרסה הבאה של בעיית הספיקות:

הקלט לבעיה: פסוק ϕ בתחשיב הפסוקים

השאלה: האם קיימות לפחות **שלוש** השמות המספקות את ϕ ?

הוכיחו שהבעיה שלמה ב-NP.

שאלה 3 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

נגדיר את שתי בעיות ההכרעה הבאות:

1. בעיית ה-5-Clique

הקלט לבעיה: גרף לא מכוון G

השאלה: האם קיימת ב- G קליקה בגודל 5?

2. בעיית ה-5-Coloring

הקלט לבעיה: גרף לא מכוון G

השאלה: האם קיימת צביעה חוקית של G ב-5 צבעים?

א. פרופ' כלומסקי מצא אלגוריתם פולינומי לפתרון בעיית ה-5-Clique.

האם אפשר להסיק מכך ש- $P = NP$? נמקו את תשובתכם.

ב. האם תשובתכם לסעיף א' תשתנה אם מדובר על בעיית ה-5-Coloring?

שאלה 4 (20 נקודות: סעיפים א', ב' – 5 נק' לכל אחד; סעיף ג' – 10 נק')

- נדון בבעיה של מציאת קליקה בגודל k בגרף לא מכוון G בעל n צמתים.
- א. הציעו אלגוריתם פולינומי לבעיה כאשר k קבוע.
- ב. האם לדעתכם קיים אלגוריתם פולינומי לבעיה כאשר k אינו קבוע (כלומר, הוא תלוי ב- n)?
- ג. נניח שעומדת לרשותכם שגרת "קופסה שחורה", העונה בזמן קבוע על השאלה אם בגרף נתון קיימת קליקה בגודל k .
- הראו כיצד אפשר להשתמש בשגרה כדי למצוא קליקה כזאת בזמן $O(n)$.

שאלה 5 (25 נקודות: סעיפים א', ב' – 5 נק' לכל אחד; סעיף ג' – 15 נק')

- א. קראו את סעיף 5.2 במאמר "The Theory of Computing: A Scientific Perspective".
- ב. נתבונן בבעיה הבאה:
- הקלט לבעיה: מספר טבעי n ושני מספרים a, b ($a < b$)
- השאלה: האם קיים גורם של n הנמצא בין a ל- b ?
- (כלומר, האם קיים מספר טבעי m , כך ש- $a \leq m \leq b$ ו- $n \bmod m = 0$)
- הוכיחו שהבעיה שייכת ל-NP.
- ג. השתמשו בסעיף ב' כדי להוכיח את הטענה המופיעה בסעיף 5.2 במאמר (בעמ' 10 למטה):
- אם אפשר לפתור ביעילות את בעיית המשוואות הריבועיות, אז נובע מכך שאפשר לפרק ביעילות מספרים גדולים לגורמים.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

- תארו אלגוריתם הפותר את בעיית הסכום החלקי בזמן $O(2^{n/2})$.
- רמז: השתמשו באלגוריתם המופיע בשאלה 4 בממ"ן 12.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 8-9

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 23.8.2019

סמסטר: 2019ג

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (15 נקודות: סעיף א' – 10 נק'; סעיף ב' – 5 נק')

נתבונן בגרסה הבאה של בעיית התאמת המילים:

הקלט לבעיה: שתי סדרות מילים X ו- Y ומספר טבעי N

השאלה: האם קיימת סדרת אינדקסים שאורכה חסום על-ידי N , כך שאם נשרשר את

המילים המתאימות מ- X ומ- Y תתקבל אותה מילה?

א. הוכיחו שהבעיה כריעה.

ב. לאיזו מחלקת סיבוכיות הבעיה שייכת?

שאלה 2 (20 נקודות)

נתבונן בגרסה הבאה של בעיית נחש הדומינו במחצית המישור האינסופי:

הקלט לבעיה: קבוצה סופית T של סוגי מרצפות, שתי משבצות V ו- W במחצית המישור

ושתי מרצפות t_1 ו- t_2

השאלה: האם קיים נחש דומינו המתפתל (במחצית המישור) בין V ל- W , כך שבאיזשהו מקום

לאורך הנחש מרצפת מסוג t_1 סמוכה למרצפת מסוג t_2 ?

הוכיחו שגם גרסה זו של בעיית נחש הדומינו היא בלתי כריעה.

שאלה 3 (20 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

א. הגדירו את בעיית הטוטליות.

ב. הוכיחו שהבעיה איננה כריעה באמצעות רדוקציה מבעיית העצירה.

שאלה 4 (20 נקודות)

מספר ראשוני p נקרא **ראשוני ז'רמן** אם גם $2p + 1$ הוא מספר ראשוני. למשל, המספר 11 הוא ראשוני ז'רמן, מפני ש-23 הוא מספר ראשוני. השאלה אם קיימים אינסוף מספרים שהם ראשוני ז'רמן היא בעיה פתוחה בתורת המספרים. הראו כיצד אפשר להכריע את הבעיה באמצעות אורקל לבעיית הטוטליות.

שאלה 5 (25 נקודות)

בשאלה זו עליכם לבנות מכונת טיורינג המקבלת מספר בינרי x ומחשבת את הפונקציה $f(x) = \lceil x/2 \rceil$. ציירו את תרשים המעברים של המכונה והסבירו את דרך פעולתה.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

נדון בגרסה של בעיית התאמת המילים, שבה הא"ב הוא בן אות אחת בלבד. נניח שלא קיים אינדקס שבו המילה בסדרה X זהה למילה המתאימה בסדרה Y , אך קיימים שני אינדקסים i ו- j כך שמתקיים:

$$d_i = |x_i| - |y_i| > 0$$

$$d_j = |y_j| - |x_j| > 0$$

הניחו שלא ידוע דבר על המילים באינדקסים אחרים בסדרה. מצאו את סדרת האינדקסים **הקצרה ביותר** שמהווה התאמת מילים חוקית. מהו אורך הסדרה שמצאתם?

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 10-12

מספר השאלות: 6 משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: 2019 מועד אחרון להגשה: 6.9.2019

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (15 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 10 נק')

- א. כתבו גרסה מקבילית של האלגוריתם מיון-מהיר (Quicksort).
- ב. נתחו את זמן ריצתו של האלגוריתם במקרה הטוב ובמקרה הגרוע.

שאלה 2 (20 נקודות: סעיף א' – 8 נק'; סעיף ב' – 12 נק')

- במשרד החינוך הקימו ועדה לצורך הכנת תכנית לרפורמה מקיפה בשכר המורים. יו"ר הועדה ביקשה לברר בשלב ראשון כמה מורים משתכרים פחות מ- 5,300 ₪ לחודש (שכר המינימום). נתונה רשימה L באורך N , המכילה את משכורת חודש מרץ של כל המורים העובדים במשרד החינוך. יש למצוא את מספר האיברים ברשימה הקטנים מ-5300.
- תארו אלגוריתם מקבילי, המקבל את הרשימה L ופותר את הבעיה באמצעות:
- א. $O(\sqrt{N})$ מעבדים.
- ב. $O(N/\log N)$ מעבדים.
- בכל אחד משני הסעיפים – סיבוכיות המכפלה של האלגוריתם צריכה להיות שווה לחסם התחתון הסדרתי של הבעיה, $O(N)$.
- השוו את זמן הריצה וסיבוכיות הגודל של שני האלגוריתמים. איזה מהם עדיף לדעתכם?

שאלה 3 (20 נקודות)

- נתבונן בבעיית הקטע הקריטי עבור שלושה מעבדים. בגרסה זו של הבעיה יכולים להימצא בקטע הקריטי בכל רגע נתון מעבד אחד או שניים, אך לא כל שלושת המעבדים. הסבירו מהם השינויים שצריך לעשות בפרוטוקול המופיע בספר (עמ' 279-278), כדי להתאים אותו לגרסה זו של הבעיה.

שאלה 4 (20 נקודות: 4 נק' לכל סעיף)

נתון מערך A בגודל n המכיל מספרים שונים זה מזה. מעוניינים לבדוק אם המערך ממוין בסדר עולה.

להלן תיאור של אלגוריתם אקראי לפתרון הבעיה:

(1) בחר באופן אקראי אינדקס i מהקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$;

(2) בצע חיפוש בינרי של $A[i]$ במערך A ;

(3) אם החיפוש הבינרי הסתיים בהצלחה, אז כתוב "המערך ממוין" ועצור.

(4) אחרת, כתוב "המערך איננו ממוין" ועצור.

א. הסבירו בקצרה את הרעיון שעליו מבוסס האלגוריתם.

ב. מהו סוג הטעות שהאלגוריתם עלול לעשות? איך נקרא אלגוריתם מסוג זה?

ג. מהו זמן הריצה של האלגוריתם? האם זמן הריצה הוא טוב יותר בסדר גודל מזמן הריצה של אלגוריתם דטרמיניסטי לפתרון הבעיה?

ד. נתבונן במערך הבא:

1	2	3	4	5	6	7
2	5	4	3	8	7	6

מהו הסיכוי שהאלגוריתם יחזיר תשובה נכונה במקרה זה? נמקו את תשובתכם.

ה. הסבירו איך אפשר באופן כללי להקטין את הסיכוי לשגיאה באלגוריתם.

שאלה 5 (25 נקודות: 5 נק' לכל סעיף)

א. קראו את סעיף 5.3 במאמר "The Theory of Computing: A Scientific Perspective".

ב. בסעיף 5.3 במאמר מתואר פרוטוקול הוכחה אינטראקטיבי, שבאמצעותו מומחה ליין יכול

לשכנע אדם שאינו מומחה ששני בקבוקי יין נתונים אינם זהים (כלומר, מכילים יינות שונים).

כתבו את הפרוטוקול בצורה פורמלית (שלב אחר שלב). מיהם המוכיח והמאמת בפרוטוקול זה?

ג. הראו שאם שני בקבוקי היין אינם זהים, המוכיח יצליח לשכנע את המאמת בנכונות טענה זו.

ד. הוכיחו שאם שני בקבוקי היין זהים זה לזה, המומחה יצליח לרמות את המאמת ולשכנע אותו

שהם אינם זהים בהסתברות הקטנה מ-0.004.

ה. הסבירו מדוע הפרוטוקול הנ"ל הוא פרוטוקול אפס-ידע.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

נדון בגרסה של המשחק איקס-מיקס-דריקס, שבה השחקן הראשון שמשלים שלשה רצופה של סימנים הוא המפסיד.

הציעו לשחקן הראשון אסטרטגיה שתבטיח לו לפחות תיקו.