תשובה 1

א. מהנתון, תהי $f:\ A-B\ \to\ B-A$ חד-חד-ערכית ועל.

כידוע (בעזרת פילוג החיתוך לגבי האיחוד) $A=(A\cap B')\cup(A\cap B)$,

כלומר $A=(A-B)\cup(A\cap B)$, וזהו איחוד זר. בדומה, $B=(B-A)\cup(A\cap B)$.

נגדיר $g:A\to B$ כך :
$$g(a)=\begin{cases} f(a) & a\in A-B \\ a & a\in A\cap B \end{cases}$$

מהנתון על f נקבל ש- g מעבירה את $A-B$ באופן חד-חד-ערכי על $B-A$,

ומכיוון ש- g פועלת כזהות על $A\cap B$, היא מעבירה את $A\cap B$ באופן חד-חד-ערכי על עצמו.

בהתחשב בכך ש- $B=(B-A)\cup(A\cap B)$, לא קשה להראות ש- g היא חד-חד-ערכית ועל B.

הוכחה של טענה כללית יותר, ממנה זה נובע, ראו בפרק 5, טענה 5.9 .

הראינו פונקציה **חד-חד-ערכית** מ- A **על** B , לכן הן שוות-עוצמה.

ב. כאמור, כללית $A=(A-B)\cup(A\cap B)$, וזהו איחוד זר,

וכן $B=(B-A)\cup(A\cap B)$ וזהו איחוד זר.

מכאן, אם A,B **סופיות**, ומתקיים $|A|=|B|$ אז :

$$|A-B|=|A|-|A\cap B|=|B|-|A\cap B|=|B-A|$$

חיסרנו כאן עוצמות : **זו פעולה שמוגדרת רק עבור עוצמות סופיות(!)**

ג. לדוגמא נקח $A=\mathbf{N}$, ו- B היא קבוצת הטבעיים הזוגיים (השלימו הבדיקה).

תשובה 2

מהגדרת B ,
$$B=A'=\left(\bigcap_{1\le i\le 100}A_i\right)'$$

ולפי כללי דה-מורגן בתורת הקבוצות
$$=\bigcup_{1\le i\le 100}(A_i')$$

לפי הנתון, זהו איחוד של 100 קבוצות בנות מניה.

לפי טענה שפורסמה בפורום, איחוד כזה הוא בר-מניה.

תשובה 3

נתבונן במשלים של D:
$$D'=(A'\cap B'\cap C')'=A\cup B\cup C$$

אגף ימין הוא איחוד של 3 קבוצות בנות מניה.

לפי טענה 2 שהוכחנו במהלך פתרון שאלה 2, איחוד כזה הוא קבוצה בת-מניה.

כעת נשים לב שמהגדרת משלים, $D=\mathbf{R}-D'$.

כידוע $|\mathbf{R}|=c\neq\aleph_0$, וכאמור $|D'|=\aleph_0$.

מכאן, לפי משפט 5.13ב בעמ' 12 בחוברת "פרק 5", $|D|=c$.

תשובה 4

ההגדרה שמוצעת בשאלה היא **הגדרה בעזרת נציגים** : אנו מגדירים פעולה בין עוצמות בעזרת בחירה שרירותית של קבוצות המייצגות את העוצמות הנתונות. כפי שמוסבר בפרק 5 בסמוך להגדרות החיבור, הכפל והחזקה, בהגדרה מסוג זה יש להראות שהתוצאה אינה תלויה בבחירת הנציגים. במקרה של הפעולה שהוגדרה בשאלה, התוצאה בבירור תלויה בנציגים, קל לתת דוגמא לכך אפילו בקבוצות סופיות :

תהיינה $B_1 = \{2\}$, $A_1 = \{1\}$. מתקיים $A_1 \oplus B_1 = \{1,2\}$.

מההגדרה בשאלה נקבל $1 \oplus 1 = 2$.

מצד שני, נקח $A_2 = B_2 = \{1\}$. מתקיים $A_2 \oplus B_2 = \varnothing$.

מההגדרה בשאלה נקבל $1 \oplus 1 = 0$.

תוצאת הפעולה תלויה בנציגים, משמע הפעולה אינה מוגדרת היטב - ההגדרה אינה תקינה.

תשובה 5

א. תהיינה A_1, A_2, B קבוצות שעוצמותיהן בהתאמה k_1, k_2, m . נתון $k_1 \le k_2$.

כדי לקצר מעט את ההוכחה ניעזר בטריק השימושי הבא : **אנו חופשים לבחור כראות עינינו את הקבוצות המייצגות את העוצמות, כל עוד הקבוצות שנבחר הן בעלות העוצמות הנדרשות.** מכיוון ש- $k_1 \le k_2$, לפי שאלה 5.1א בחוברת "פרק 5" **קיימת** קבוצה חלקית של A_2 שעוצמתה שווה לעוצמת A_1 . לכן **ב.ה.כ. נבחר** $A_1 \subseteq A_2$ (!)

מהגדרת חזקה של עוצמות, k_1^m היא עוצמת קבוצת הפונקציות של B ל- A_1 ,

ו- k_2^m היא עוצמת קבוצת הפונקציות של B ל- A_2 .

מכיוון ש- $A_1 \subseteq A_2$, פונקציה של B ל- A_1 היא גם פונקציה של B ל- A_2 **(!)** (מדוע?)

כלומר קבוצת הפונקציות של B ל- A_1 מוכלת בקבוצת הפונקציות של B ל- A_2 .

לכן, בהסתמך על שאלה 5.1ב, עוצמת הקבוצה הראשונה קטנה / שווה לעוצמת הקבוצה השניה.

משמע $k_1^m \le k_2^m$.

ב. מצד אחד, $\aleph_0 \le C$ ולכן בעזרת סעיף א, $\aleph_0^{\aleph_0} \le C^{\aleph_0} = C$

(השוויון ל- C הוא לפי טענה 5.28).

מצד שני $2 \le \aleph_0$ ולכן בעזרת סעיף א, $C = 2^{\aleph_0} \le \aleph_0^{\aleph_0}$.

(השוויון ל- C הוא לפי משפט 5.26).

משני האי-שוויונים יחד, בעזרת קנטור-שרדר-ברנשטיין, מתקבל $\aleph_0^{\aleph_0} = C$.