תשובה 1

א. מנוסחת הבינום: $(1+c)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}c^i$, $(1-c)^n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}c^i$.

בחיסור $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}c^i - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}c^i$ נופלות כל החזקות **הזוגיות** של c, כי יש להן אותו מקדם בשני הביטויים. נישאר עם החזקות האי-זוגיות ($i = 2k+1$), עבורן המקדם הוא בעל סימן הפוך, ובחיסור הוא מסתכם ל- $2\cdot\binom{n}{i}$. קיבלנו:

$$(1+c)^n - (1-c)^n = \sum_{2k+1\le n} 2\binom{n}{2k+1}c^{2k+1} = 2c\sum_{2k+1\le n}\binom{n}{2k+1}c^{2k}$$

ב. נובע מהגדרת המקדמים הבינומיים במקרים חריגים ("קומבינטוריקה" עמ' 30):

$\binom{n}{i} = 0$ עבור $i > n$.

ג. בהצבת $c = 1$ בסעיף א, נקבל $(1+1)^n - (1-1)^n = 2\sum_{2k+1\le n}\binom{n}{2k+1}\cdot 1^{2k}$.

לאחר חילוק שני האגפים ב- 2: $\sum_{2k+1\le n}\binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$.

שימו לב שקיבלנו בדיוק חצי מהסכום המוכר (אמצע עמ' 70 בספר): $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$.

ד. בסעיף הקודם קיבלנו שסכום המקדמים הבינומיים $\binom{n}{i}$ כאשר i מקבל רק ערכים **אי-זוגיים** הוא **חצי מסכום כל המקדמים** $\binom{n}{i}$. לכן בהכרח סכום המקדמים הנותרים גם הוא חצי מסכום כל המקדמים. המקדמים הנותרים הם אלה בהם i מקבל ערכים זוגיים.

התשובה היא אפוא 2^{n-1}.

תשובה 2

א. $7\cdot6\cdot5\cdot4=840$.

ב. תהי U קבוצת הפונקציות החד-חד-ערכיות של X ל-Y. מסעיף א, $|U|=840$.

לכל $i\in X$, תהי A_i קבוצת הפונקציות החד-חד-ערכיות של X ל-Y המקיימות $f(i)=i$.
למשל A_1 היא קבוצת הפונקציות החד-חד-ערכיות של X ל-Y המקיימות $f(1)=1$.

המספר שאנו נדרשים לחשב הוא $|A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4'|$.
או במלים אחרות $|(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)'|$.

נכין נתונים לשימוש בהכלה והפרדה. נתחיל בחישוב $|A_1|$.
אם התמונה של 1 חייבת להיות 1, אז כדי לקבוע פונקציה חד-חד-ערכית של X ל-Y נותר לנו לבחור תמונות עבור 2,3,4 . תמונות אלה צריכות להבחר מתוך הקבוצה $Y-\{1\}$, והן צריכות להיות שונות זו מזו. מספר האפשרויות לעשות זאת הוא כמספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של קבוצה בת 3 איברים לקבוצה בת 6 איברים, כלומר $6\cdot5\cdot4=120$.
מובן כי אותה תוצאה נכונה לא רק ל- A_1 אלא לכל אחת מהקבוצות A_i .
משמע: $|A_i|=120$, ויש לנו 4 קבוצות A_i .

בצורה דומה, $|A_i\cap A_j| \;=\; 5\cdot4=20$ $(i\neq j)$. יש לנו 6 חיתוכים כאלה.
בדומה, $|A_i\cap A_j\cap A_k| \;=\; 4$ (i,j,k שונים זה מזה) . יש לנו 4 חיתוכים כאלה.
ולבסוף , יש פונקציה אחת ויחידה השולחת כל איבר ב- X לעצמו: $|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4| \;=\; 1$.

מעקרון ההכלה וההפרדה, מספר הפונקציות המבוקש הוא
$840-4\cdot120+6\cdot20-4\cdot4+1 \;=\; 465$.

תשובה 3

תהי U קבוצת כל הדרכים לחלק את **כל** האוכל למשפחות, ללא כל הגבלה.
לפי פתרון ממ"ן 15 שאלה 3ב, $|U| = 100{,}100$.

(i) תהי A_i $(i=1,\dots,4)$ קבוצת החלוקות ב- U, בהן משפחה i אינה מקבלת דבר.

$|A_i| = D(3,12)\cdot D(3,9) = \binom{14}{12}\binom{11}{9} = 91\cdot 55 = 5{,}005$. יש 4 קבוצות A_i.

(ii) $|A_i \cap A_j| = D(2,12)\cdot D(2,9) = \binom{13}{12}\binom{10}{9} = 13\cdot 10 = 130$ $(i \neq j)$. יש 6 חיתוכים כאלה.

(iii) חיתוך של 3 קבוצות A_i שונות הוא מצב יחיד, בו משפחה אחת מקבלת את כל האוכל.
יש 4 חיתוכים משולשים.

(iv) החיתוך של כל ארבעת ה- A_i הוא ריק (כי יש לחלק את האוכל).

סיכום: לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מספר החלוקות המקיימות את הדרישה הוא:
$100{,}100 - 4\cdot 5{,}005 + 6\cdot 130 - 4\cdot 1 = 80{,}856$

תשובה 4

א. תהי B חלקית ל- A. אם $B \neq \emptyset$, הרי הסכום הקטן ביותר האפשרי של איבריה הוא 4, המתקבל עבור $B=\{4\}$. הסכום הגדול ביותר האפשרי מתקבל עבור $B=\{53, 54, \dots, 61\}$ ושווה 513. מספר הסכומים האפשריים לתת-קבוצות **לא-ריקות** של A הוא אפוא **לכל היותר** $513-4+1=510$. בצירוף הקבוצה הריקה: 511.

מצד שני, מספר הקבוצות החלקיות של A הוא $2^9 = 512$.
מכיוון שיש יותר קבוצות מסכומים אפשריים, הרי לפי עקרון שובך היונים, יש לפחות שתי קבוצות בעלות אותו סכום.

ב. בסעיף א קיבלנו שבהינתן A כמתואר, קיימות $B,C \subseteq A$, $B \neq C$, בעלות אותו סכום. נזרוק מ- B ומ- C את כל האיברים השייכים לחיתוך שלהן, ונקבל שתי קבוצות שונות וזרות בעלות אותו סכום.

איתי הראבן