שאלה 1

X הינו משתנה מקרי רציף המתפלג אחיד בין a ל- b $(a<b)$.

א. הוכיחו $E[X]=\frac{a+b}{2}$.

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{x^2}{2(b-a)}\Bigg|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\boxed{\frac{a+b}{2}}$$

ב. הוכיחו $Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$.

$$E[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx=\frac{x^3}{3(b-a)}\Bigg|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{(b-a)\left(a^2+ab+b^2\right)}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

ג. חשבו את $P\{|X-E[X]|<\frac{b-a}{8}\}$.

$$P\{|X-E[X]|<\frac{b-a}{8}\}=P\{|X-\frac{a+b}{2}|<\frac{b-a}{8}\}=P\{-\frac{b-a}{8}<X-\frac{a+b}{2}<\frac{b-a}{8}\}=$$

$$P\{-\frac{b-a}{8}+\frac{a+b}{2}<X<\frac{b-a}{8}+\frac{a+b}{2}\}$$

$$=P\{\frac{a-b+4a+4b}{8}<X<\frac{b-a+4a+4b}{8}\}=P\{\frac{5a+3b}{8}<X<\frac{3a+5b}{8}\}$$

$$=F_X(\frac{3a+5b}{8})-F_X(\frac{5a+3b}{8})=\frac{\frac{3a+5b}{8}-a}{b-a}-\frac{\frac{5a+3b}{8}-a}{b-a}=\frac{\frac{2b-2a}{8}}{b-a}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

ד. נסמן את M כרבעון העליון של X. הרבעון העליון, M , מקיים: $P[X\geq M]=\frac{1}{4}$.

בטאו באמצעות הפרמטרים a ו- b את ערכו של M.

$$P[X\geq M]=\frac{1}{4}\Rightarrow P[X<M]=\frac{3}{4}\Rightarrow F_X(M)=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{M-a}{b-a}=\frac{3}{4}\Rightarrow M=\frac{3}{4}(b-a)+a=\boxed{\frac{a+3b}{4}}$$

שאלה 2

א. הוכיחו שהתפלגות סכום שני משתנים מקריים בלתי תלויים המתפלגים נורמלית, היא נורמלית .

נגדיר את המשתנים המקריים X ו- Y באופן הבא: $X \sim N(\mu_X,\sigma_X^2)$ ו- $Y \sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$. כמו כן X ו- Y בלתי תלויים זה בזה.

פונקציות יוצרות מומנטים של משתנים אלה: $M_X(t)=e^{\mu_X t+\frac{\sigma_X^2t^2}{2}}$ ו- $M_Y(t)=e^{\mu_Y t+\frac{\sigma_Y^2t^2}{2}}$.

X ו- Y בלתי תלויים זה בזה ולכן מקיימים את התכונה הבאה: $M_{X+Y}(t)=M_X(t)\cdot M_Y(t)$.

ובמקרה שלנו:

$$M_{X+Y}(t)=M_X(t)\cdot M_Y(t)=e^{\mu_X t+\frac{\sigma_X^2t^2}{2}}\cdot e^{\mu_Y t+\frac{\sigma_Y^2t^2}{2}}=e^{\mu_X t+\frac{\sigma_X^2t^2}{2}+\mu_Y t+\frac{\sigma_Y^2t^2}{2}}=e^{(\mu_X+\mu_Y)t+\frac{(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)t^2}{2}}$$

קיבלנו בעצם פונקציה יוצרת מומנטים שמתאימה לתבנית של פונקציית יוצרת מומנטים בהתפלגות הנורמלית כאשר התוחלת היא: $\mu_X+\mu_Y$ והשונות היא: $\sigma_X^2+\sigma_Y^2$. כיוון שפונקציית יוצרת מומנטים קובעת באופן יחיד את ההתפלגות של המשתנה המקרי , ניתן להגיד ש $X+Y\sim N(\mu_X+\mu_Y,\sigma_X^2+\sigma_Y^2)$. הוכחנו שסכום המשתנים המקריים מתפלג נורמלית כנדרש.

ב. 5 חברים נפגשו במטרה לראות סרט ב- vod. ב- vod רשימה של 6 סרטים חדשים. כל חבר בוחר באקראי ובאופן בלתי תלוי באיזה סרט הוא מעוניין לצפות מתוך רשימת הסרטים אשר ב- vod. מה ההסתברות שכלל החברים יבחרו בדיוק 2 סרטים שונים מרשימת הסרטים?

הניסוי הוא: בחירת 5 סרטים עם החזרה מתוך רשימה של 6 סרטים שונים. אי לכך, גודלו של מרחב המדגם הוא: $6^5=7,776$.

כעת ניגש לחישוב מספר התוצאות למאורע הנדרש: "ייבחרו בדיוק 2 סרטים שונים מרשימת הסרטים".

בשלב הראשון, נבחר את 2 הסרטים השונים שייבחרו מתוך הרשימה. מספר האפשרויות לכך, $\binom{6}{2}=15$.

בשלב השני, נאפשר לכל חבר לבחור סרט מבין 2 הסרטים שנבחרו. מספר האפשרויות לכך, 2^5. אנו לא מעוניינים בשני המקרים הנכללים ב 2^5 המקרים הללו בהם כול החברים בוחרים באותו הסרט . לכן מספר האפשרויות לבחור 2 סרטים שונים מרשימת הסרטים על ידי החברים הוא: $15\cdot(2^5-2)=450$, וההסתברות היא: $\boxed{\frac{25}{432}}=\frac{450}{7,776}$.

ג. מטילים קובייה הוגנת עד אשר מקבלים את התוצאה 5.
בשלב הבא מטילים מטבע הוגן עד אשר מקבלים עץ כמספר הפעמים
שהוטלה הקובייה. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר הטלות המטבע?

נגדיר את Y- מספר הטלות הקובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 5 . $Y \sim G(\frac{1}{6})$.

נגדיר את X- מספר הטלות המטבע. מספר הפעמים שנטיל את המטבע תלוי ב-Y :

$X \mid Y = j \sim NB(j, \frac{1}{2})$.

כדי לחשב את התוחלת והשונות של X נשתמש בנוסחאות התוחלת המותנית והשונות המותנית.

$$E[X] = E[E[X \mid Y]] = E\left[\frac{Y}{1/2}\right] = E[2Y] = 2E[Y] = 2 \cdot \frac{1}{1/6} = \boxed{12}$$

$$Var(X) = E[Var(X \mid Y)] + Var(E[X \mid Y]) = E\left[\frac{(1-1/2)Y}{(1/2)^2}\right] + Var\left(\frac{Y}{1/2}\right) = E[2Y] + Var(2Y) =$$

$$2 \cdot E[Y] + 2^2 \cdot Var(Y) = 2 \cdot \frac{1}{1/6} + 2^2 \cdot \frac{1-1/6}{(1/6)^2} = 12 + 120 = \boxed{132}$$

<u>שאלה 3</u>

ג'ו מתאמן לקראת תחרות .

האימון שלו כולל 12 מכשולים- 10 מכשולים של כוח ו-2 מכשולים של שיווי משקל, המסודרים בסדר אקראי.

ג'ו ינסה לעבור בהצלחה את כל 12 המכשולים, כל אחד מהם בדיוק פעם אחת. הסיכוי שלו לעבור בהצלחה מכשול של כוח הוא 0.9 באופן בלתי-תלוי במכשולים האחרים, הסיכוי שלו לעבור בהצלחה מכשול של שיווי משקל הוא 0.8 באופן בלתי-תלוי במכשולים האחרים.

א. נסמן ב- W את מספר המכשולים של שיווי משקל מבין 5 המכשולים הראשונים שג'ו מנסה. חשבו את $E\left(\sqrt{W}\right)$.

ראשית נשים לב ש $W \sim HG\left(12,2,5\right)$.

מכאן ש :

$$P\left(W=0\right)=\frac{\binom{10}{5}}{\binom{12}{5}}=\frac{21}{66} \qquad P\left(W=1\right)=\frac{\binom{2}{1}\binom{10}{4}}{\binom{12}{5}}=\frac{35}{66}$$

$$P\left(W=2\right)=\frac{\binom{2}{2}\binom{10}{3}}{\binom{12}{5}}=\frac{10}{66}$$

התוחלת המבוקשת :

$$E\left(\sqrt{W}\right)=\sqrt{0}\cdot\frac{21}{66}+\sqrt{1}\cdot\frac{35}{66}+\sqrt{2}\cdot\frac{10}{66}=\boxed{0.7446}$$

ב. נסמן ב- Y את מספר המכשולים שיצליח מבין 2 המכשולים הראשונים שניסה. מצאו את התפלגות Y.

נסמן X -מספר המכשולים מסוג שיווי משקל שנמצאים בשני המקומות הראשונים.

כמובן ש $X \sim HG(12,2,2)$ ולכן

$$P(X=0)=\frac{\binom{10}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{45}{66} \quad P(X=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{10}{1}}{\binom{12}{2}}=\frac{20}{66} \quad P(X=2)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{1}{66}$$

את ההסתברויות של הערכים השונים של Y נחשב בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה (אפשר גם לצייר עץ הסתברויות).

$$\begin{aligned}P(Y=0)&=P(Y=0\mid X=0)P(X=0)+P(Y=0\mid X=1)P(X=1)\\&+P(Y=0\mid X=2)P(X=2)=\\&=0.1^2\cdot\frac{45}{66}+0.1\cdot 0.2\cdot\frac{20}{66}+0.2^2\cdot\frac{1}{66}=\boxed{\frac{89}{6600}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(Y=2)&=P(Y=2\mid X=0)P(X=0)+P(Y=2\mid X=1)P(X=1)\\&+P(Y=2\mid X=2)P(X=2)=\\&=0.9^2\cdot\frac{45}{66}+0.9\cdot 0.8\cdot\frac{20}{66}+0.8^2\cdot\frac{1}{66}=\boxed{\frac{5149}{6600}}\end{aligned}$$

$$P(Y=1)=1-\left[P(Y=0)+P(Y=2)\right]=1-\left[\frac{89}{6600}+\frac{5149}{6600}\right]=\boxed{\frac{1362}{6600}}$$

ג. נסמן ב- S את מספר המכשולים שג'ו יצליח (מבין 12 המכשולים). מצאו את $E[S]$ ואת $Var(S)$.

נסמן:

S_1-מספר המכשולים שג'ו יצליח מבין 2 מכשולי שיווי המשקל.

S_2-מספר המכשולים שג'ו יצליח מבין 10 מכשולי הכוח.

מתקיים ש:

$$S_1 \sim B(2,0.8) \quad E[S_1] = 2\cdot 0.8 = 1.6 \quad Var(S_1) = 2\cdot 0.8\cdot 0.2 = 0.32$$
$$S_2 \sim B(10,0.9) \quad E[S_2] = 10\cdot 0.9 = 9 \quad Var(S_2) = 10\cdot 0.9\cdot 0.1 = 0.9$$
$$E[S] = E[S_1+S_2] = E[S_1]+E[S_2] = 1.6+9 = \boxed{10.6}$$

כיוון שהסיכוי להצליח במכשול מסוים בלתי-תלוי במכשולים האחרים נקבל שהמשתנים S_1 ו S_2 בלתי-תלויים ולכן

$$Var(S) = Var(S_1+S_2) = Var(S_1)+Var(S_2) = 0.32+0.9 = \boxed{1.22}$$

שאלה 4

רונית מכינה פופקורן. לצורך הכנת הפופקורן היא מכניסה לסיר גדול גרעיני תירס והם מתפוצצים לפופקורן טעים. בתהליך היווצרות הפופקורן קצב התפוצצות גרעיני התירס הוא 5 גרעינים בשנייה ומספר הגרעינים המתפוצצים בשנייה מתפלג פואסונית. תהליך היווצרות הפופקורן החל בשעה 8:00 והסתיים בשעה 8:07.

א. מה ההסתברות שהזמן בין ההתפוצצות גרעין התירס השליש להתפוצצות גרעין התירס הרביעי ארך יותר מ- 0.5 שניה?

אם מספר גרעיני התירס המתפוצצים בשנייה מתפלג פואסונית עם קצב של 5 גרעינים בשנייה, אזי הזמן בשניות בין התפוצצות גרעין אחד לגרעין אחר מתפלג מעריכית . נגדיר את X- הזמן בשניות בין גרעין התירס השלישי שמתפוצץ לגרעין התירס הרביעי שמתפוצץ. $X \sim \exp(5)$. לכן,

$$P\{X>0.5\}=1-F_X(0.5)=1-(1-e^{-5\cdot 0.5})=e^{-2.5}=\boxed{0.0821}$$

<u>דרך שניה :</u>

אם נרצה שהזמן בין ההתפוצצות גרעין התירס השליש להתפוצצות גרעין התירס הרביעי ארך יותר מ- 0.5 שניה נוכל להגיד שהדבר שקול לכך שבחצי שניה לא היו גרעינים שהתפוצצו. נגדיר את Y- מספר הגרעינים המתפוצצים ב-0.5 שניות . $Y \sim P(0.5\cdot 5=2.5)$. לכן,

$$P\{Y=0\}=\frac{e^{-2.5}\cdot 2.5^0}{0!}=\boxed{0.0821}.$$

ב. מה התוחלת ומה השונות של מספר השניות החל מהשעה 8:00 ועד השעה 8:07 בהם התפוצצו לכל היותר 2 גרעיני תירס?

נחשב את הסיכוי שבשנייה כלשהי יתפוצצו לכל היותר 2 גרעיני תירס.

נגדיר את R - מספר גרעיני הפופקורן שמתפוצצים בשנייה כלשהי. $R \sim P(5)$. על כן,

$$P\{R\le 2\}=\frac{e^{-5}\cdot 5^0}{0!}+\frac{e^{-5}\cdot 5^1}{1!}+\frac{e^{-5}\cdot 5^2}{2!}=01247$$

בין השעה 8:00 לשעה 8:07 יש בסך הכול $7\cdot 60=420$ שניות .

נסמן ב- W את מספר השניות שבהם התפוצצו לכל היותר 2 גרעיני תירס. $W \sim B(420,0.1247)$.

$$E[W]=420\cdot 0.1247=\boxed{49.86}$$

$$Var(W)=420\cdot 0.1247\cdot(1-0.1247)=\boxed{43.64}$$

ג. נסמן ב- U_1 את מספר הגרעינים שהתפוצצו בין 8:00 ל 8:05 וב - U_2 את מספר הגרעינים שהתפוצצו בין 8:03 ל 8:07. חשבו את $COV(U_1+7,3U_2)$.

נסמן:

- V_1 את מספר הגרעינים שהתפוצצו בין 8:00 ל 8:03.
- V_2 את מספר הגרעינים שהתפוצצו בין 8:03 ל 8:05.
- V_3 את מספר הגרעינים שהתפוצצו בין 8:05 ל 8:07.

אז מתקיים ש:

$$U_1 = V_1 + V_2 \qquad U_2 = V_2 + V_3$$

$$V_1 \sim P(3\cdot 60\cdot 5 = 900)$$
$$V_2 \sim P(2\cdot 60\cdot 5 = 600)$$
$$V_3 \sim P(2\cdot 60\cdot 5 = 600)$$

ובנוסף המשתנים V_1,V_2,V_3 בלתי תלויים.

כעת ניתן לחשב את השונות המשותפת המבוקשת:

$$\begin{aligned}COV(U_1+7,3U_2) &= 3COV(U_1,U_2) = 3COV(V_1+V_2,V_2+V_3)\\ &= 3\left(COV(V_1,V_2)+COV(V_1,V_3)+COV(V_2,V_2)+COV(V_2,V_3)\right)\\ &= 3\left(0+Var(V_2)+0+0\right) = 3Var(V_2) = 3\cdot 600 = \boxed{1800}\end{aligned}$$

שאלה 5

משתנה מקרי Y המקבל ערכים שלמים בלבד מתפלג עם תוחלת 2. כמו כן ידוע שהערכים עבורם המשתנה המקרי מקבל הסתברות שאינה אפס הם: 5,..,3-2-

א. מצאו חסם מלעיל להסתברות המאורע: $\{Y>4\}$.

כדי למצוא חסם מלעיל להסתברות הרצויה יש להשתמש באי שוויון מרקוב. אי שוויון מרקוב רלבנטי עבור משתנה מקרי אי שלילי ואילו המשתנה המקרי Y מקבל ערכים שלילים לכן נגדיר את המשתנה המקרי X להיות: $X=Y+3$.

אי לכך, מתקיים: $E[X]=E[Y+3]=E[Y]+3=2+3=5$.

כמו כן, $P\{Y>4\}=P\{X>4+3=7\}=P\{X\geq 8\}$. כעת נשתמש באי שוויון מרקוב

ונקבל: $\boxed{\frac{5}{8}}=\frac{E[X]}{8}\geq P\{X\geq 8\}$.

ב. נתון שסטיית התקן של Y היא 1.5.

1. מצאו חסם מלרע להסתברות המאורע: $\{0<Y\leq 3\}$.

כדי למצוא חסם מלרע להסתברות הרצויה יש להשתמש באי שוויון צ'בישב.

ראשית, נשים לב ש: $P\{0<Y\leq 3\}=P\{0<Y<4\}=P\{|Y-2|<2\}=P\{|Y-E[Y]|<2\}$

אי שוויון צ'בישב הוצג בקורס באופן הבא: $P\{|Y-E[Y]|\geq a\}\leq\frac{Var(Y)}{a^2}$.

לכן, $P\{|Y-E[Y]|<a\}\geq 1-\frac{Var(Y)}{a^2}$.

עבור הנתונים שלנו: $P\{|Y-E[Y]|<2\}\geq 1-\frac{Var(Y)}{a^2}=1-\frac{1.5^2}{2^2}=\boxed{0.4375}$

2. דוגמים באופן מקרי 50 פעמים את המשתנה המקרי Y. חשבו בקירוב את ההסתברות למאורע: $\{\sum_{i=1}^{50} Y_i > 96\}$.

כדי למצוא קירוב להסתברות הרצויה נעזר במשפט הגבול המרכזי.

נתחיל במציאת התוחלת והשונות של $\sum_{i=1}^{50} Y_i$:

$$E\left[\sum_{i=1}^{50} Y_i\right] = \sum_{i=1}^{50} E\left[Y_i\right] = 50 \cdot 2 = 100$$

$$Var(\sum_{i=1}^{50} Y_i) = \sum_{i=1}^{50} Var\{Y_i\} = 50 \cdot 1.5^2 = 112.5$$

<u>שימו לב:</u> המדגם הוא מקרי על כן, המשתנים המקריים הם בלתי תלויים זה בזה. לכן, שונות סכום המשתנים המקריים שווה לסכום השונויות שלהם.

לפי משפט הגבול המרכזי, $\sum_{i=1}^{50} Y_i$ מתפלג בקרוב נורמלית: $\sum_{i=1}^{50} Y_i \dot{\sim} N(100,112.5)$.

כיוון ש Y מקבל ערכים שלמים יש לבצע תיקון רציפות כך ש:

$$P\{\sum_{i=1}^{50} Y_i > 96\} \approx P\{Z > \frac{96.5-100}{\sqrt{112.5}} = -0.32998\} = P\{Z < 0.32998\} = \Phi\left(0.32998\right)$$

כעת נבצע אינטרפולציה לינארית:

$$\Phi\left(0.32998\right) \approx \Phi\left(0.32\right) + \frac{0.32998-0.32}{0.33-0.32}\left[\Phi\left(0.33\right) - \Phi\left(0.32\right)\right] =$$

$$0.6255 + \frac{0.32998-0.32}{0.33-0.32}\left[0.6293-0.6255\right] = \boxed{0.62929}$$