

קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"  
תאריך הבחינה: 7.2.2008 (סמסטר א 2008 - מועד 4א/85)

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

(לבחינה מצורפת טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית.)

### שאלה 1 (25 נקודות)

במאפיית "הלחם הטוב" מייצרים לחמניות שמשקל כל אחת מהן מתפלג נורמלית עם תוחלת של 100 גרם וסטיית-תקן של 10 גרם.

- א. בוחרים באקראי 20 לחמניות שנאפו במאפייה. (אין תלות בין הלחמניות).  
 1. מהי ההסתברות שמשקלן הכולל של 20 הלחמניות יעלה על 2,020 גרם? (7 נק')  
 2. שוקלים את 20 הלחמניות בזו אחר זו. מהי ההסתברות שהלחמנייה הרביעית שתישקל תהיה הראשונה שמשקלה עולה על 98 גרם? (6 נק')  
 ב. מהו המשקל (בגרם) שֶׁ- 70% מהלחמניות משקל קטן ממנו? (6 נק')  
 ג. אם ידוע שמשקלה של לחמנייה מסוימת עולה על 98 גרם, מהי ההסתברות שמשקלה אינו עולה על 110 גרם? (6 נק')

### שאלה 2 (25 נקודות)

נתון לוח של  $3 \times 3$  משבצות. הצבע של כל משבצת בלוח (מתוך 9 המשבצות שיש בו) הוא לבן בהסתברות 0.5 או שחור בהסתברות 0.5. אין תלות בין צבעי משבצות שונות.

נגדיר שני משתנים מקריים כדלהלן:

$X$  = מספר השורות הלבנות בלוח (כלומר, שורות שיש בהן רק משבצות לבנות);

$N$  = מספר המשבצות הלבנות בלוח כולו.

- א. חשב את  $P\{X = 0, N = 3\}$ . (6 נק')  
 ב. חשב את  $P\{X = 0 \mid N = 5\}$ . (7 נק')  
 ג. עבור אלו ערכים של  $n$  מתקיים  $E[X \mid N = n] = 0$ ? נמק את תשובתך. (6 נק')  
 ד. עבור אלו ערכים של  $n$  מתקיים  $\text{Var}(X \mid N = n) = 0$ ? נמק את תשובתך. (6 נק')

### שאלה 3 (25 נקודות)

10 אנשים נכנסים למסעדה ומתיישבים באופן מקרי ליד דלפק שבו 20 מקומות ישיבה, המסודרים בשורה.

- א. אם שניים מ-10 האנשים הללו הם רון ודליה, מהי ההסתברות שהם יתפסו שני מקומות כלשהם מתוך חמשת המקומות הימניים ביותר בשורה? (6 נק')  
 ב. מהי ההסתברות שבארבעת המקומות הימניים ביותר בשורה יישב לפחות אדם אחד? (6 נק')  
 ג. מהי תוחלת מספר האנשים בשורה שאיש אינו יושב לידם? (13 נק')

#### שאלה 4 (25 נקודות)

נתונה סדרה של  $n$  משתנים מקריים ברנוליים בלתי-תלויים,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , שלכולם אותו הפרמטר  $p$  ( $p > 0$ ). כלומר,  $P\{X_i = 1\} = 1 - P\{X_i = 0\} = p$ , לכל  $i = 1, 2, \dots, n$ .

(9 נק') א. אם  $P\left\{\sum_{i=1}^n X_i = 4\right\} = 8 \cdot P\left\{\sum_{i=1}^n X_i = 3\right\}$ , מהו  $p$ ?

הנח כי  $n \geq 4$ .

ב. עבור  $p$  כללי, חשב את –

1.  $P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i = 3 \mid \sum_{i=1}^{15} X_i = 5\right\}$  (8 נק')

2.  $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \mid \sum_{i=1}^{15} X_i = 5\right)$  (8 נק')

**רמז:** העזר בתוצאת סעיף 1, כדי לזהות את ההתפלגות המותנית.

#### שאלה 5 (25 נקודות)

יהיו  $a$  ו- $b$  קבועים ממשיים, כאשר  $a < 0$ ; ויהי  $X$  משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר  $-a$ . נגדיר את המשתנה המקרי  $Y$  על-ידי  $Y = aX + b$ .

(8 נק') א. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של  $Y$ .

(8 נק') ב. מצא את פונקציית הצפיפות של  $Y$ .

(9 נק') ג. חשב את התוחלת ואת השונות של  $Y$ .

**בהצלחה!**

**ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית,  $\Phi(x)$**

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

$x$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(x)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
$x$	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(x)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
$x$	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326