מתמטיקה דיסקרטית 20283 פתרון ממ"ן 12 אביב 2005ב

תשובה 1

א. הכלה בכיוון אחד: יהי $x \in C$, נראה ש- $x \in A$, $x \in B$:

מכיוון ש- $x \in C$, אז מהגדרת מכפלה קרטזית, $(x,x) \in C \times C$. מכאן ומהנתון בשאלה:

$(x,x) \in (A \times B) \cup (B \times A)$. מהגדרת איחוד , $(x,x) \in (A \times B)$ או $(x,x) \in (B \times A)$.

בכל מקרה, מהגדרת מכפלה מקבלים $x \in A$ וגם $x \in B$. לפיכך $C \subseteq A,B$.

הכלה בכיוון שני: יהי $x \in A$, נראה ש- $x \in C$:

מכיוון שנתון ש- B אינה ריקה, יהי $y \in B$. אז $(x,y) \in (A \times B)$, לכן מהגדרת איחוד,

$(x,y) \in (A \times B) \cup (B \times A)$. מכאן ומהנתון בשאלה, $(x,y) \in C \times C$, ולפי הגדרת מכפלה

בפרט $x \in C$. ההוכחה עבור B - בדומה. לפיכך $A,B \subseteq C$.

משני הכיוונים מתקבל השוויון המבוקש.

הערה: ההנחה בשאלה כי A,B אינן ריקות היא חיונית: אם למשל $A = C = \varnothing$ אז **לכל**

קבוצה B יתקיים: $(A \times B) \cup (B \times A) = \varnothing = C \times C$, כלומר הטענה **אינה נכונה** במקרה זה !

יש לשים לב שאכן אנו משתמשים בהוכחה בהנחה ששתי הקבוצות אינן ריקות, אחרת יסתבר

ש"הוכחנו" טענה שאינה נכונה ! זו הסיבה לכך שהוכחת הכיוון השני נוסחה בזהירות, ולא

"במכה אחת" עבור A ו- B.

ב. לא נכון. דוגמא נגדית "קטנה": $A = B = \{1\}$, $C = \varnothing$ (השלימו הפרטים !).

קל גם לתת דוגמאות שבהן C אינה ריקה.

ראו גם אתר הקורס, שאלוני רב-ברירה, שאלון "תורת הקבוצות - יחסים", שאלה 2.

תשובה 2

א. דוגמא נגדית: $R = \varnothing$ כאשר $A \neq \varnothing$ כלשהי.

דוגמא אחרת: $A = \{1,2\}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ב. **כיוון אחד:**

נניח $\mathrm{Domain}(R) = A$. יהי $a \in A$, עלינו להראות ש- $(a,a) \in RR^{-1}$.

מכיוון ש- $\mathrm{Domain}(R) = A$, בפרט $a \in \mathrm{Domain}(R)$, כלומר קיים $b \in A$ המקיים $(a,b) \in R$.

מהגדרת היחס ההפוך, $(b,a) \in R^{-1}$.

מכאן, מהגדרת כפל יחסים, $(a,a) \in RR^{-1}$ כמבוקש.

כיוון שני: נניח RR^{-1} רפלקסיבית, נוכיח $\text{Domain}(R) = A$.

יהי $a \in A$. מכיוון ש- RR^{-1} רפלקסיבית, $(a,a) \in RR^{-1}$.

כלומר, לפי הגדרת כפל יחסים, קיים $b \in A$ המקיים $(a,b) \in R$, $(b,a) \in R^{-1}$.

בפרט $(a,b) \in R$, כלומר $a \in \text{Domain}(R)$, כמבוקש.

ג. יחס הוא סימטרי אס"ם הוא שווה ליחס ההפוך לו (ר' הגדרת יחס סימטרי) .

לפי שאלה 2.8 בעמ' 40 בספר, כללית, $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$.

מכאן: $(RR^{-1})^{-1} = (R^{-1})^{-1}R^{-1} = RR^{-1}$ - כמבוקש!

ד. תהי $A = \mathbb{N}$, וניקח $R = \{(n\,,\,n+1) \;\;|\;\; n \in \mathbb{N}\}$

(אגב, היחס R הנ"ל הוא גם פונקציה. בכתיב של פונקציות: $R(n) = n+1$).

אז $RR^{-1} \;=\; I_{\mathbb{N}}$ (השלימו: הוכיחו זאת ע"י הכלה דו-כיוונית!)

אך $R^{-1}R \;=\; \{(n,n) \;\;|\;\; 1 \le n \in \mathbb{N}\} \;\ne I_{\mathbb{N}}$ (השלימו באופן דומה !)

תשובה 3

א.

* R **רפלקסיבי**: לכל $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, n מתחלק בעצמו ללא שארית, כלומר $(n,n) \in R$.

* R **אינו סימטרי**: למשל $(2,1) \in R$ אך $(1,2) \notin R$.

מכיוון ש- R אינו סימטרי, הוא אינו יחס שקילות.

* R הוא **אנטי-סימטרי**: לכל $m,n \in \mathbb{N} - \{0\}$, אם m מתחלק ב- n וגם n מתחלק ב- m

אז $n = m$ (תכונה ידועה. אפשר להוכיח אותה למשל מתוך כך שאם m מתחלק ב- n אז $n \le m$, והיחס $\le$ הוא אנטי-סימטרי).

שימו לב ש**מתוך כך ש- R אנטי-סימטרי לא נובע שהוא אינו סימטרי !**

ראו דוגמאות בעניין זה בשאלון רב-ברירה בנושא יחסים, באתר הקורס.

* R **טרנזיטיבי**: אם m מתחלק ב- n , משמע $m = n \cdot a$ עבור a טבעי חיובי כלשהו.

אם n מתחלק ב- k משמע $n = k \cdot b$ עבור b טבעי חיובי כלשהו.

ביחד נקבל $m = k \cdot b \cdot a$. $b \cdot a$ הוא טבעי שונה מאפס, לכן m מתחלק ב- k .

ב. מהגדרת S ומתכונות ידועות של כפל במספרים ממשיים, $(x,y) \in S$ אס"ם x,y בעלי אותו סימן (שניהם חיוביים או שניהם שליליים). נחלק אפוא את הממשיים השונים מאפס לשתי מחלקות: חיוביים ושליליים. כאמור, $(x,y) \in S$ **אס"ם** x,y **שייכים לאותה מחלקה** של החלוקה הנ"ל.

כעת, לפי משפט 2.19 בעמ' 61 בספר, S הוא יחס שקילות, המתאים לחלוקה זו !

לכן הוא רפלקסיבי , סימטרי וטרנזיטיבי. שימו לב שלא בדקנו את 3 התכונות המאפיינות יחס שקילות, אלא **הוכחנו שזהו יחס שקילות ע"י כך שמצאנו חלוקה שמשרה אותו**.
זוהי דרך לגיטימית לגמרי.

לסיום הסעיף, S **אינו** אנטי-סימטרי כי $(1,2) \in S$, $(2,1) \in S$ ו- $1 \neq 2$.

תשובה 4

א. דוגמא: $R = I_A \cup \{(1,2) , (1,3)\} = \{(1,1) , (2,2) , (3,3) , (1,2) , (1,3)\}$

מתקיים: $R \cup R^{-1} = I_A \cup \{(1,2) , (1,3) , (2,1) , (3,1)\}$.

$R \cup R^{-1}$ אינו טרנזיטיבי כי נמצאים בו $(3,1)$ ו- $(1,2)$ אבל לא נמצא בו $(3,2)$.

ב. **רפלקסיביות**: לפי שאלה 2.18 א בספר, עמ' 48 , אם R רפלקסיבית גם R^{-1} רפלקסיבית.

מכאן ומהגדרת רפלקסיביות, $I_A \subseteq R$ וגם $I_A \subseteq R^{-1}$. לפיכך $I_A \subseteq R \cap R^{-1}$,

משמע (שוב מהגדרת רפלקסיביות): $R \cap R^{-1}$ רפלקסיבית.

סימטריות: לפי שאלה 2.6 סעיף 2 בעמ' 36 בספר, $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

בפרט, לכל רלציה R: $(R \cap R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap R = R \cap R^{-1}$.

משמע, לפי הגדרת רלציה סימטרית, $R \cap R^{-1}$ היא סימטרית.

טרנזיטיביות: לפי שאלה 2.29 א בעמ' 53 בספר, אם R טרנזיטיבית אז כך גם R^{-1} .

מכאן, לפי שאלה 2.30 ג באותו העמוד, נקבל כי גם $R \cap R^{-1}$ היא טרנזיטיבית.

ג. דוגמא: $R = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$. מתקיים: $R^2 = \{(1,3),(2,1),(3,2)\}$.

לכן $R \cup R^2 = \{(1,2),(2,3),(3,1),(1,3),(2,1),(3,2)\}$.

יחס זה אינו טרנזיטיבי כי , למשל, נמצאים בו $(1,2)$ ו- $(2,1)$ אבל לא נמצא בו $(1,1)$.

ד. מהגדרת E , שני איברים של A השייכים לאותה מחלקה עומדים ביחס E זה לזה,
ושני איברים של A שאינם באותה מחלקה אינם עומדים ביחס E זה לזה.

לכן, אם נרשום $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$, כאשר באגף ימין אלו 5 המחלקות,

אז מתקיים: $E = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup (A_3 \times A_3) \cup (A_4 \times A_4) \cup (A_5 \times A_5)$.

זהו איחוד זר (איחוד של קבוצות זרות) , לכן

$$| E | = | A_1 \times A_1 | + | A_2 \times A_2 | + | A_3 \times A_3 | + | A_4 \times A_4 | + | A_5 \times A_5 |$$

$$= 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 27$$

ראו בעניין זה גם החוברת "אוסף תרגילים פתורים" עמ' 4 שאלה 4ב.

איתי הראבן