חזרה
למבחן
ב2019

2019א מועד ראשון

אלגוריתמים 2019א – ניקוד מועד 1

הנחיות: ענו על 4 מתוך 5 שאלות. לכל שאלה 25 נקודות. לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה.
על שאלות שמסומנות בכוכב - יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה), ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).
חומר עזר: אסור. דף נוסחאות מצ"ב. בהצלחה!

<u>שאלה 1 – מסלולים מזעריים זוגיים/אי-זוגיים</u> (25 נק')

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, עם מקור $s\in V$ ויעד $s\neq t\in V$, ונתונות גם שתי תתי-קבוצות זרות ולא ריקות של קדקודים $A,B\subseteq V$, המקיימות $s,t\notin A$, $s,t\notin B$. הציגו אלגוריתם שמוצא מסלול מהמקור ליעד, כך שאורכו של המסלול הינו מזערי מבין כל המסלולים, שמבקרים ב-A מספר זוגי של פעמים ומבקרים ב-B מספר אי-זוגי של פעמים. בשאלה זו מותרים מסלולים לא פשוטים, כלומר מותר למסלול לעבור דרך קדקוד או אפילו צלע יותר מפעם אחת. (למשל, עבור $A=\{v_1,v_2\}$ ועבור $B=\{v_3,v_4\}$, אזי המסלול $s\to v_1\to v_3\to v_1\to v_5\to t$ מבקר ב-A בדיוק פעמיים (מס' זוגי) ומבקר ב-B בדיוק פעם אחת (מס' אי-זוגי). תזכורת: אפס הינו מספר זוגי).

<u>שאלה 2 – עץ פורש מזערי (עפ"מ) עם דרגה מזערית לקדקוד נבחר</u> (25 נק')

נתון גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$ עם משקל שלם חיובי $w(e)>0$ לכל צלע $e\in E$. נתון גם קדקוד נבחר $u\in V$. הציגו אלגוריתם למציאת עפ"מ ב-G כך שדרגתו של u בעץ תהיה מזערית. כלומר, הפלט T של האלגוריתם הינו עפ"מ, ולכל עפ"מ אחר T' מתקיים: הדרגה של u ב-T קטנה או שווה לדרגה של u ב-T'.

<u>שאלה 3 – מיקום סוגריים בביטויים בוליאניים</u> (25 נק')

ביטוי בוליאני ללא סוגריים, הינו סדרה של הקבועים הלוגיים T,F (המייצגים, כרגיל, את הערכים $True,False$), כך שבין כל שני קבועים, מופיע אחד מהאופרטורים הלוגיים $\wedge,\vee,\otimes$ (המייצגים כרגיל את האופרטורים and, or, xor). אותו ביטוי בוליאני, עשוי לקבל ערך אמת שונה בהתאם למיקום הסוגריים. למשל, בביטוי $F\wedge T\otimes T$ ניתן למקם סוגריים בדיוק בשתי דרכים שונות: $(F\wedge T)\otimes T\equiv T$ בעוד ש-$F\wedge(T\otimes T)\equiv F$. הציגו אלגוריתם תכנון דינמי, שבהינתן ביטוי בוליאני ללא סוגריים, מחשב את <u>מספר הדרכים למיקום סוגריים</u> עבורן מתקבל הערך T. הניחו, לשם פשטות, שהקלט נתון במערך של הקבועים $A[1...n]$, ובמערך של האופרטורים $B[1...n-1]$. למשל הקלט $F\wedge T\otimes T$ נתון במערכים, שבהם $A[1]=F,\ A[2]=T,\ A[3]=T$ וכן $B[1]=\wedge,\ B[2]=\otimes$.

<u>שאלה 4 – זרימה – צלעות שמוסרות פעמיים מהרשת השיורית</u> (25 נק')

הציגו דוגמא פשוטה של רשת זרימה עם צלע e, שמקיימת את שתי התכונות הבאות: (א) במהלך הרצת **Edmonds-Karp** על הרשת ישנן שתי איטרציות שונות, שבהן תוספת הזרימה דרך e זהה לקיבולת השיורית של e. (ב) הצלע e מחברת בגרף המקורי בין שני קדקודים, שמרחקם מהמקור s שונה. (לא יינתן ניקוד על דוגמא שמתאימה להרצה של **Ford-Fulkerson** אבל לא מתאימה להרצה של **Edmonds-Karp**). נדרשת תשובה קצרה: <u>ציור</u> של הרשת, והסבר של <u>2-3 שורות</u> בלבד.

<u>שאלה 5 – הרצת FFT</u> (25 נק')

נביט בפולינום $p(x)=4x^3+3x^2+2x+1$. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) במסגרת הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום. בדקו את תשובתכם ע"י <u>הצבה ישירה</u> של הערכים המתאימים בפולינום.

תשובה 9 - מיקום סוגריים בביטויים בוליאניים

מיקום סוגריים בביטויים בוליאניים

ביטוי בוליאני ללא סוגריים, הינה סדרה של הקבועים הלוגיים T,F (המייצגים, כרגיל, את הערכים $True,False$), כך שבין כל שני קבועים, מופיע אחד מהאופרטורים הלוגיים $\wedge,\vee,\otimes$ (המייצגים כרגיל את האופרטורים, and, or, xor). אותו ביטוי בוליאני, עשוי לקבל ערך אמת שונה בהתאם למיקום הסוגריים. למשל, בביטוי $F\wedge T\otimes T$ ניתן למקם סוגריים בדיוק בשתי דרכים שונות: $(F\wedge T)\otimes T=T$ בעוד ש- $F\wedge(T\otimes T)=F$. הציגו אלגוריתם תכנון דינמי, שבהינתן ביטוי בוליאני ללא סוגריים, מחשב את <u>מספר הדרכים למיקום סוגריים</u> עבורן מתקבל הערך T. הניחו, לשם פשטות, שהקלט נתון במערך של הקבועים $A[1...n]$, ובמערך של האופרטורים $B[1...n-1]$. למשל הקלט $F\wedge T\otimes T$ נתון במערכים, שבהם $A[1]=F,\ A[2]=T,\ A[3]=T$ וכן $B[1]=\wedge,\ B[2]=\otimes$.

Let **T(i, j)** represents the number of ways to parenthesize the symbols between i and j (both inclusive) such that the subexpression between i and j evaluates to true.

Let **F(i, j)** represents the number of ways to parenthesize the symbols between i and j (both inclusive) such that the subexpression between i and j evaluates to false.

Base Cases:

```
T(i, i) = 1 if symbol[i] = 'T'
T(i, i) = 0 if symbol[i] = 'F'

F(i, i) = 1 if symbol[i] = 'F'
F(i, i) = 0 if symbol[i] = 'T'
```

$$T(i,j)=\sum_{k=i}^{j-1}\begin{cases} T(i,k)*T(k+1,j) & if \quad operator \quad [k] is'\&' \\ Total(i,k)*Total(k+1,j)-F(i,k)*F(k+1,j) & if \quad operator \quad [k] \quad is'|' \\ T(i,k)*F(k+1,j)+F(i,k)*T(k+1,j) & if \quad operator \quad [k] \quad is'\oplus' \end{cases}$$

Total(i,j)= T(i,j)+F(i,j)

$$F(i,j)=\sum_{k=i}^{j-1}\begin{cases} Total(i,k)*Total(k+1,j)-T(i,k)*T(k+1,j) & if \quad operator[k] \quad is'\&' \\ F(i,k)*F(k+1,j) & if \quad operator[k] \quad is'|' \\ T(i,k)*T(k+1,j)+F(i,k)*F(k+1,j) & if \quad operator[k] \quad is'\oplus' \end{cases}$$

Total(i,j)=T(i,j)+F(i,j)

2019א מועד שני

אלגוריתמים 2019א – מועד שני

הנחיות: ענו על 4 מתוך 5 שאלות. לכל שאלה 25 נקודות. לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה.
על שאלות שמסומנות בכוכב - יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה), ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).
חומר עזר: אסור. דף נוסחאות מצ״ב. בהצלחה!

שאלה 1 – הרצת FFT (25 נק׳).

נביט בפולינום $p(x)=2x^3+3x^2+4x+5$. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) במסגרת הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום. בדקו את תשובתכם ע״י <u>הצבה ישירה</u> של הערכים המתאימים בפולינום.

***שאלה 2 – מסלולים מזעריים –צלעות שליליות ביעד** (25 נק׳).

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם מקור $s\in V$, יעד $s\neq t\in V$, ועם משקל שלם $w(e)$ לכל צלע $e\in E$. נתון כי בגרף אין מעגלים שליליים, וכי עבור צלעות שאינן נכנסות ליעד המשקל תמיד חיובי, כלומר $w(e)>0$. הציגו אלגוריתם למציאת מסלול בעל משקל מזערי מהמקור ליעד. לא יתקבל שום ניקוד על אלגוריתם עם זמן ריצה $\Theta(|E|\cdot|V|)$.

שאלה 3 – תכנון כפל מטריצות (25 נק׳).

כזכור, המכפלה $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ של סדרת מטריצות מוגדרת רק כשישנה התאמה בין מספרי השורות והעמודות: אם מסמנים ב-r_i את מספר השורות במטריצה A_i, וב-c_i את מספר העמודות שלה, אז חייב להתקיים התנאי $r_{i+1}=c_i$ לכל $1\le i<n$. במקרה שכזה כל מכפלה $A_i\times A_{i+i}$ הינה מטריצה בת r_i שורות ו-c_{i+1} עמודות, והחישוב שלה (בהתאם להגדרת כפל מטריצות) ניתן לביצוע ע״י $\Theta(r_i\times c_i\times c_{i+1})$ פעולות אלמנטריות בלבד (של כפל/חיבור מספרים). כזכור, כפל מטריצות הוא גם אסוציאטיבי, כלומר, בהכפלה של סדרת מטריצות, הננו רשאים למקם את הסוגריים כרצוננו. למשל $(A_1\times A_2)\times A_3=A_1\times(A_2\times A_3)$.

(א) הציגו דוגמה של <u>שלוש</u> מטריצות, שבה מיקום מסוים של הסוגריים בחישוב המכפלה $A_1\times A_2\times A_3$ דורש פי אלף פעולות אלמנטריות מאשר המיקום האחר.

(ב) הציגו אלגוריתם תכנון דינאמי, שמקבל כקלט רשימה $(r_1,c_1),\ldots,(r_n,c_n)$ של מספרי השורות והעמודות בכל מטריצה, ומפיק כפלט מיקום אופטימלי של הסוגריים עבור ההכפלה $A_1\times\ldots\times A_n$. (שימו לב שאיננו מבצעים עדיין את הכפלת המטריצות, אלא רק מנסים <u>לקבוע את מיקום הסוגריים</u>, שימזער את מספר הפעולות האלמנטריות בזמן ההכפלה).

<u>שאלה 4 – בעיית הספיקות</u> (25 נק׳).

נתונה נוסחת 3CNF, שבה כל אחד מהמשתנים $x_1,...,x_n$ מופיע <u>בדיוק בשלוש</u> פסוקיות שונות, וכל פסוקית כוללת <u>בדיוק שלושה</u> משתנים שונים. הוכיחו כי הנוסחה ספיקה. הציגו עבור נוסחאות כאלו אלגוריתם למציאת השמה מספקת. הדרכה: העזרו במשפט **Hall**.

<u>תזכורת</u>: נוסחת 3CNF היא נוסחה מהצורה $\varphi=\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge...\wedge\varphi_m$, כשלכל פסוקית הצורה $\varphi_i=(z_{i,1}\vee z_{i,2}\vee z_{i,3})$, וכל $z_{i,j}$ הינו אחד מהליטרלים $x_1,...,x_n,\neg x_1,...,\neg x_n$. כך למשל $\varphi=(x_1\vee\neg x_2\vee x_3)\wedge(x_2\vee x_4\vee\neg x_5)$ הינה נוסחת 3CNF. השמה הינה פונקציה שמתאימה לכל משתנה x_i ערך "אמת" T או "שקר" F. בהינתן השמה מסוימת, אזי הליטרל x_i מסופק אמ"מ ההשמה מקיימת $x_i\leftarrow T$, והליטרל $\neg x_i$ מסופק אמ"מ $x_i\leftarrow F$. פסוקית $\varphi_i=(z_{i,1}\vee z_{i,2}\vee z_{i,3})$ מסופקת אמ"מ לפחות אחד מהליטרלים שבה $z_{i,1},z_{i,2},z_{i,3}$ מסופק. הנוסחא כולה $\varphi=\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ מסופקת אמ"מ כל הפסוקיות $\varphi_1,..,\varphi_m$ מסופקות. הנוסחא φ נקראת ספיקה, אמ"מ לפחות אחת מבין 2^n ההשמות האפשריות מספקת אותה).

<u>*שאלה 5* – קבוצה מנתקת מעגלים מזערית</u> (25 נק׳).

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$, שאיננו עץ, ונתונים משקלים שלמים וחיוביים $w(e)>0$ לכל הצלעות. קבוצת צלעות $F\subseteq E$ נקראת "מנתקת-מעגלים", אם לאחר הסרתה לא נותרים מעגלים בגרף, כלומר הגרף $G'=(V,E\setminus F)$ חסר-מעגלים. משקלה של קבוצת צלעות הינו סכום משקלי הצלעות בקבוצה $w(F)=\sum_{e\in F}w(e)$. הציגו אלגוריתם למציאת קבוצת צלעות מנתקת-מעגלים בעלת משקל מזערי. עליכם להיעזר בהדרכה שמופיעה להלן.

2019א מועד שלישי

שאלה 1 – בעיית הספיקות 2-SAT (25 נק').

הציגו אלגוריתם יעיל, שבהינתן נוסחה φ בצורת 2-CNF מוצא לה השמה מספקת, ואם אין השמה כזו - מדווח שהנוסחה איננה ספיקה. הדרכה: העזרו בגרף מכוון G שמותאם לנוסחה φ.

תזכורת: נוסחת 2-CNF היא נוסחה מהצורה $\varphi=\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\ldots\wedge\varphi_m$, כשלכל פסוקית הצורה $\varphi_i=(z_{i,1}\vee z_{i,2})$, וכל $z_{i,j}$ הינו אחד מהליטרלים $x_1,\ldots,x_n,\neg x_1,\ldots,\neg x_n$. למשל $\varphi=(x_1\vee\neg x_2)\wedge(x_1\vee\neg x_3)\wedge(\neg x_1\vee x_3)\wedge(\neg x_2\vee\neg x_3)$ הינה נוסחת 2-CNF עם $n=3$ משתנים, ו-$m=4$ פסוקיות. השמה הינה פונקציה שמתאימה לכל משתנה x_i ערך "אמת" T או "שקר" F. בהינתן השמה מסוימת, אזי הליטרל x_i מסופק אם ההשמה מקיימת $x_i\leftarrow T$, והליטרל $\neg x_i$ מסופק אם $x_i\leftarrow F$. הפסוקית $\varphi_i=(z_{i,1}\vee z_{i,2})$ מסופקת, אם לפחות אחד מהליטרלים שבה $z_{i,1},z_{i,2}$ מסופק. הנוסחה כולה φ מסופקת, אם כל הפסוקיות $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ מסופקות. הנוסחה נקראת ספיקה, אם לפחות אחת מבין 2^n ההשמות האפשריות מספקת אותה.

*__שאלה 2 – ספירת מסלולים מזעריים__ (25 נק').

בהינתן גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$ ושני קדקודים $u,v\in V$, הציגו אלגוריתם, שמחשב את מספרם של המסלולים המזעריים בין u ל-v ב-G.

*__שאלה 3 – תכנון דינאמי__ (25 נק').

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים אי-שליליים $c(e)\ge 0$ על הצלעות $e\in E$, ונתון קדקוד מסוים $r\in V$. הביטו באלגוריתם הבא:

(i) מאתחלים מערך חד-ממדי A באמצעות הכלל: $A[v]=\begin{cases}0, & v=r\\ \infty, & v\neq r\end{cases}$.

(ii) לולאה חיצונית: חוזרים שוב ושוב על הפעולה הבאה.

(1ii) לולאה פנימית: סורקים את הצלעות בסדר לקסיקוגרפי. לכל $e=(u,v)\in E$ מבצעים:

אם $A[v]>A[u]+c(e)$ אז מעדכנים $A[v]\leftarrow A[u]+c(e)$.

(2ii) אם בהרצה הנוכחית של כל הלולאה הפנימית לא בוצע אף עדכון, אז האלגוריתם מסיים.

(א) רישמו מה מחשב האלגוריתם (אין צורך להוכיח נכונות).

(ב) יהי $B(n)$ המספר המרבי של איטרציות שמתבצעות בלולאה החיצונית על גרפים בעלי n קדקודים. חשבו את $B(n)$, והציגו סדרת גרפים G_n עליהם מתבצעות בדיוק $B(n)$ איטרציות.

(ג) הציגו סדרת גרפים אחרת G'_n, עבורם נכנסים ללולאה החיצונית פעמיים בלבד, וזאת למרות שמספר הצלעות שלהם זהה לגרפים מהסעיף הקודם, כלומר $|E(G'_n)|=|E(G_n)|$ לכל n.

שאלה 4 – הקטנה מרבית של זרימה ברשת (25 נק').

נתונה רשת זרימה, כלומר גרף מכוון $G=(V,E)$ עם מקור ויעד $s \neq t \in V$, וקיבולות מוגבלות מהצורה $c_e \in \{0,1\}$ לכל $e \in E$. נתון בנוסף מספר טבעי $k \geq 1$. הציגו אלגוריתם, שמוצא k צלעות ברשת, שהסרתן מקטינה ככל הניתן את הזרימה המרבית. (לא יינתן ניקוד על אלגוריתם טריוויאלי, שבודק את כל האפשרויות להסיר k צלעות מהרשת).

***שאלה 5* – חציון של צמד רשימות ממוינות** (25 נק').

תזכורת: החציון של רשימת מספרים, הינו המספר המתקבל בדיוק באמצע הרשימה לאחר פעולת מיון. למשל, לאחר מיון הרשימה $(2,9,7,2,3)$ מתקבלת $(2,2,3,7,9)$, שבאמצעה ממוקם החציון $\text{Median}(2,9,7,2,3)=3$. כאשר אורך הרשימה זוגי, אזי ישנם שני איברים אמצעיים ברשימה הממוינת. במקרה שכזה, החציון מוגדר כמספר הקטן מבין השניים, למשל $\text{Median}(1,2,4,9)=2$ (ולא 4).

הבעיה: ברשותנו גישה לשני בסיסי נתונים נפרדים, שבכל אחד מהם מאוחסנת רשימה ממוינת של n מספרים. עלינו לחשב את החציון של כלל $2n$ המספרים, וברצוננו **<u>למזער את מספר הגישות לבסיסי הנתונים</u>**, משום שכל גישה אליהם יקרה ואיטית. בפרט, איננו קוראים מתוכם את כל $2n$ המספרים. במקום זאת, ביכולתנו לקבל מכל בסיס נתונים מענה מידי לשאילתות מהצורה: "מהו המספר במיקום m ברשימה הממוינת". הציגו אלגוריתם הפרד ומשול, שמחשב את החציון של כלל $2n$ המספרים, תוך ביצוע **<u>מספר לוגריתמי של</u>** $O(\log n)$ **<u>שאילתות</u>** בלבד.

(הניחו לשם פשטות, כי בכל הקריאות הרקורסיביות מטפלים ברשימות שאורכן אי-זוגי).

הגדרת האלגוריתם ______________________________

____

____

אבחנה עיקרית בטענת נכונות ______________________

____

____

____

יעילות האלגוריתם ______________________________

____

שאלה 14

<u>שאלה 1ג – גרפים, רדוקציה מחיפוש להכרעה</u>. נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$. <u>בצביעת קדקודים</u> חוקית מתאימים לכל קדקוד צבע, תחת האילוץ שאסור להעניק לשני קדקודים שכנים את אותו הצבע. למשל, כל גרף דו-צדדי ניתן לצבוע ב-2 צבעים בלבד, ולעומת זאת, כל צביעה חוקית של גרף שמכיל קליקה של 4 קדקודים מחייבת שימוש ב-4 צבעים לפחות. בהמשך נתמקד בצביעה באמצעות 3 צבעים R=red, G=green, B=blue, ונאמר שהגרף הינו 3-צביע אם ישנה פונקציית צביעה $c:V\rightarrow\{\mathrm{R,G,B}\}$, המקיימת $c(u)\neq c(w)$ לכל צלע $\{u,w\}\in E$. אלגוריתם <u>הכרעה</u> לבעייה לקבוע האם הגרף 3-צביע (האלגוריתם עונה "כן" או "לא"). אלגוריתם <u>חיפוש</u> לבעייה נדרש למצוא צביעת קדקודים חוקית ב-3 צבעים (כשהגרף 3-צביע, ואחרת - לדווח שהגרף אינו 3-צביע). הוכיחו שאם קיים אלגוריתם הכרעה יעיל לבעיית הצביעה ב-3 צבעים אז קיים גם אלגוריתם חיפוש יעיל לבעייה. הדרכה: הוסיפו לגרף משולש (שלושה קדקודים חדשים שכל שניים מהם מחוברים בצלע), והבחינו שבכל צביעה חוקית קדקודי המשולש חייבים להצבע ב-3 צבעים שונים.

תשובה 14

שאלה 1ג – גרפים, רדוקציה מחיפוש להכרעה. נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$. בצביעת קדקודים חוקית מתאימים לכל קדקוד צבע, תחת האילוץ שאסור להעניק לשני קדקודים שכנים את אותו הצבע. למשל, כל גרף דו-צדדי ניתן לצבוע ב-2 צבעים בלבד, ולעומת זאת, כל צביעה חוקית של גרף שמכיל קליקה של 4 קדקודים מחייבת שימוש ב-4 צבעים לפחות. בהמשך נתמקד בצביעה באמצעות 3 צבעים R=red, B=blue, G=green, ונאמר שהגרף הינו 3-צביע אם ישנה פונקציית צביעה $c:V\rightarrow\{R,G,B\}$, המקיימת $c(u)\neq c(w)$ לכל צלע $\{u,w\}\in E$. אלגוריתם הכרעה לבעייה לקבוע האם הגרף 3-צביע (האלגוריתם עונה "כן" או "לא"). אלגוריתם חיפוש לבעייה נדרש למצוא צביעת קדקודים חוקית ב-3 צבעים (כשהגרף 3-צביע, ואחרת - לדווח שהגרף אינו 3-צביע). הוכיחו שאם קיים אלגוריתם הכרעה יעיל לבעיית הצביעה ב-3 צבעים אז קיים גם אלגוריתם חיפוש יעיל לבעייה. הדרכה: הוסיפו לגרף משולש (שלושה קדקודים חדשים שכל שניים מהם מחוברים בצלע), והבחינו שבכל צביעה חוקית קדקודי המשולש חייבים להצבע ב-3 צבעים שונים.

תחילה נריץ את אלגוריתם ההכרעה על הגרף הנתון. אם נקבל תשובה שלילית - צביעה כמבוקש אינה אפשרית. אם נקבל תשובה חיובית - לא נותר עוד אלא לחפש את הצביעה המתבקשת.

מוסיפים לגרף שלושה צמתים חדשים ומחברים כל אחד מהם לשני האחרים.
לכל אחד מהצמתים הללו ניתן צבע אחר (נאמר אדום ירוק וכחול).

הלולאה הראשית: נסרוק את צמתי הגרף המקורי בסדר שרירותי. כל זמן שיש צומת שעדיין לא נצבע, נבחר אחד כזה באקראי (נקרא לו v) וננסה לקבוע לו צבע.

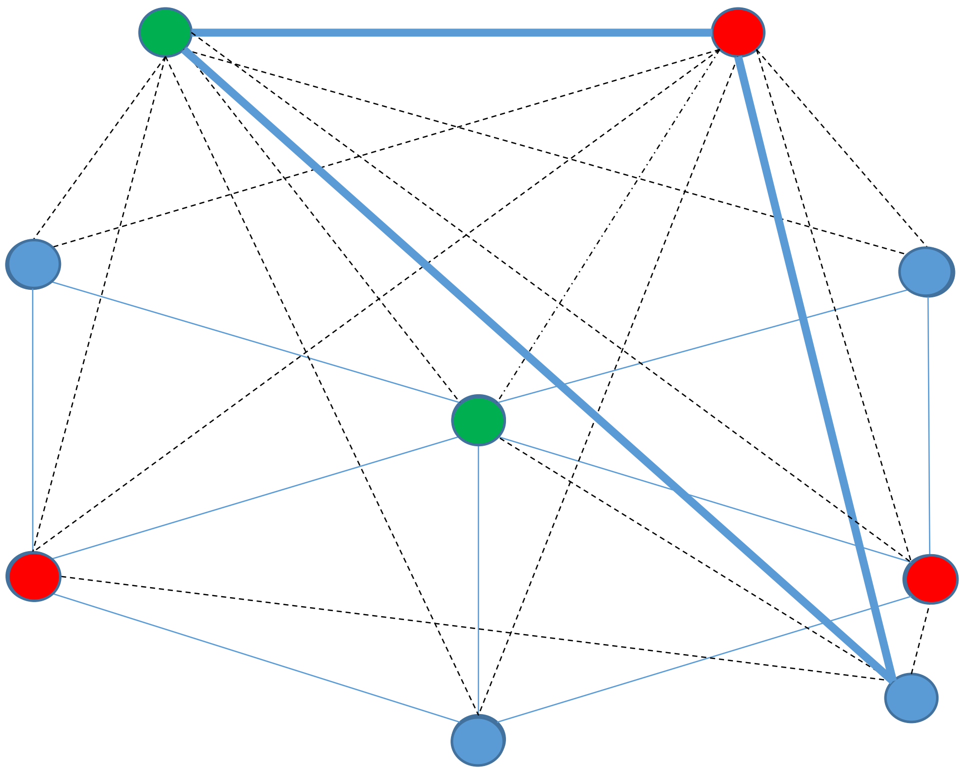
לשם כך נחבר את הצומת v לשניים מהצמתים החדשים (בה"כ האדום והירוק), ונפעיל את אלגוריתם ההכרעה (שנתון לנו שהוא יעיל).

אם האלגוריתם יחזיר תשובה חיובית (כלומר תיתכן צביעה של הגרף עם הקשתות החדשות), נצבע את הצומת v בצבע האחר מזה של שני הצמתים החדשים אליהם הוא חובר (כחול בדוגמה שלנו) ונמשיך בלולאה הראשית (כלומר נבחר צומת אחר מהגרף המקורי וננסה לצבוע אותו).

אם האלגוריתם יחזיר תשובה שלילית, נחבר את הצומת v לזוג אחר מהצמתים החדשים (נאמר הירוק והכחול), ושוב נפעיל את אלגוריתם ההכרעה.

אם האלגוריתם יחזיר תשובה חיובית (כלומר תיתכן צביעה של הגרף עם הקשתות החדשות), נצבע את הצומת v בצבע האחר מזה של שני הצמתים החדשים אליהם הוא חובר (אדום בדוגמה שלנו) ונמשיך בלולאה הראשית (כלומר נבחר צומת אחר מהגרף המקורי וננסה לצבוע אותו).

אם האלגוריתם יחזיר גם הפעם תשובה שלילית, נצבע את הצומת v בצבע היחיד שנשאר (ירוק בדוגמה שלנו), כיון שמובטח לנו שהגרף צביע - זה מה שאמר לנו אלגוריתם ההכרעה כבר בהתחלה. עדיין יש לחבר את הצומת v לזוג האחרון של הצמתים החדשים (האדום והכחול) לצורך המשך האלגוריתם.



שאלה 15

נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$. בצביעת קדקודים חוקית (או בקיצור "צביעה") של G מתאימים לכל קדקוד צבע, תחת האילוץ שאסור להעניק לשני קדקודים שכנים את אותו הצבע. פורמלית, k-צביעה הינה פונקציה $f:V\rightarrow\{c_1,\dots,c_k\}$, המקיימת $f(u)\neq f(v)$ לכל צלע $\{u,v\}\in E$. למשל, כל גרף דו-צדדי ניתן לצבוע ב-2 צבעים בלבד (כל הנשים בצבע אדום, כל הגברים בצבע כחול). אלגוריתם חיפוש לבעיית הצביעה ב- k צבעים מקבל את $G=(V,E)$ כקלט, ומחזיר צביעה חוקית של הקדקודים ב- k צבעים (או מדווח שאין צביעה כזו).

הראו שאם עבור $k\geq 4$ שרירותי קיים אלגוריתם חיפוש יעיל לבעיית הצביעה ב- k צבעים, אז קיים גם אלגוריתם חיפוש יעיל לבעיית הצביעה ב- 3 צבעים. ההוכחה חייבת להיות מבוססת על רדוקציה יעילה בין הבעיות. (אין צורך לנתח את יעילות הרדוקציה).

הגדרת הרדוקציה: ____

____

טענת נכונות הרדוקציה: ____

____

____

____

שאלה 16

***שאלה 1* – <u>רדוקציות יעילות בתורת הגרפים</u>** (25 נק'). נתון גרף לא מכוון G. <u>קליקה</u> בגרף G הינה תת-קבוצה של קדקודים $CL \subseteq V$, שכל שניים מהם מחוברים בצלע. כלומר לכל זוג $v_1, v_2 \in CL$ מתקיים $\{v_1, v_2\} \in E$. בעיה מרכזית במדעי המחשב היא למצוא קליקה מרבית בגרף (כלומר קליקה שמספר הקדקודים שבה $|CL|$ גדול ככל האפשר). <u>כיסוי-קדקודי</u> בגרף G הינה תת-קבוצה של קדקודים $VC \subseteq V$, שנוגעים בכל הצלעות בגרף. כלומר לכל צלע $\{v_1, v_2\} \in E$ מתקיים $v_1 \in VC$ ו/או $v_2 \in VC$. בעיה מרכזית במדעי המחשב היא למצוא כיסוי-קדקודי מזערי בגרף (כלומר כיסוי קדקודי שמספר הקדקודים שבו $|VC|$ קטן ככל האפשר).

<u>השאלה</u>: הראו שאם קיים אלגוריתם יעיל למציאת קליקה בגודל מרבי בגרף, אז קיים גם אלגוריתם יעיל למציאת כיסוי-קדקודי מזערי בגרף. תשובתכם חייבת להתבסס על <u>רדוקציה</u> בין אחת הבעיות לבין הבעיה האחרת.

שאלה 16

***שאלה 1* – רדוקציות יעילות בתורת הגרפים** (25 נק'). נתון גרף לא מכוון G. קליקה בגרף G הינה תת-קבוצה של קדקודים $CL \subseteq V$, שכל שניים מהם מחוברים בצלע. כלומר לכל זוג $v_1, v_2 \in CL$ מתקיים $\{v_1, v_2\} \in E$. בעיה מרכזית במדעי המחשב היא למצוא קליקה מרבית בגרף (כלומר קליקה שמספר הקדקודים שבה $|CL|$ גדול ככל האפשר). כיסוי-קדקודי בגרף G הינה תת-קבוצה של קדקודים $VC \subseteq V$, שנוגעים בכל הצלעות בגרף. כלומר לכל צלע $\{v_1, v_2\} \in E$ מתקיים $v_1 \in VC$ ו/או $v_2 \in VC$. בעיה מרכזית במדעי המחשב היא למצוא כיסוי-קדקודי מזערי בגרף (כלומר כיסוי קדקודי שמספר הקדקודים שבו $|VC|$ קטן ככל האפשר).

השאלה: הראו שאם קיים אלגוריתם יעיל למציאת קליקה בגודל מרבי בגרף, אז קיים גם אלגוריתם יעיל למציאת כיסוי-קדקודי מזערי בגרף. תשובתכם חייבת להתבסס על רדוקציה בין אחת הבעיות לבין הבעיה האחרת.

לגרף המשלים G^C אותם קדקודים כמו לגרף G.

לגבי הקשתות : $e \in E(G) \Leftrightarrow e \notin E(G^C)$

VC הינו כיסוי קדקודי בגרף G אמ"ם בגרף G אין אף צלע שמחברת שני קדקודים בקבוצה $V \setminus VC$ (שהרי אם יש צלע כזאת, אזי זהו אינו כיסוי קדקודי).

בגרף G אין אף צלע שמחברת שני קדקודים בקבוצה $V \setminus VC$ אמ"ם בגרף המשלים G^C קבוצת הקדקודים $V \setminus VC$ מהווה קליקה.

הגודל של VC מזערי כאשר הגודל של $V \setminus VC$ הינו מרבי.

לכן VC הנה כיסוי קדקודי מזערי ב-G אמ"ם $V \setminus VC$ הנה קליקה מרבית ב- G^C