

האוניברסיטה הפתוחה

20417

## **אלגוריתמים**

חוברת הקורס – אביב 2011ב

כתב: ד"ר דניאל רייכמן

מרץ 2011 – סמסטר אביב – תשע"א

**פנימי – לא להפצה.**

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

## תוכן העניינים

1	אל הסטודנט
2	1. לוח זמנים ופעילויות
4	2. הנחיות בקשר לכתיבת אלגוריתמים
4	3. תיאור המטלות
4	3.1 מבנה המטלות
5	3.2 חומר הלימוד הדרוש לפתרון המטלות
5	3.3 ניקוד המטלות
5	4. התנאים לקבלת נקודות זכות
7	ממ"ן 11
9	ממ"ן 12
11	ממ"ן 13
13	ממ"ן 14
15	ממ"ן 15



## אל הסטודנט,

אני מקדם את פניך בברכה עם הצטרפותך אל הלומדים בקורס "אלגוריתמים".

בחוברת זו תמצא את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ואת המטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים, אותם מפרסם/מת מרכז/ת ההוראה. בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:

<http://telem.openu.ac.il>

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספרייה באינטרנט [www.openu.ac.il/Library](http://www.openu.ac.il/Library).

שעות הייעוץ הן בכל יום ג' בשעות 00:15-00:17 בטלפון 09-7781222. (פגישה נא לתאם מראש).

ניתן לפנות גם בדוא"ל: [danielre@openu.ac.il](mailto:danielre@openu.ac.il).

אני מאחל לך לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה,

ד"ר דניאל רייכמן  
מרכז הקורס

**1. לוח זמנים ופעילויות (2017 / 2018)**

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ן (למנחה)
1	11.3.2011-6.3.2011	פרק 1		
2	18.3.2011-13.3.2011	פרק 2		
3	25.3.2011-20.3.2011	פרק 3		
4	1.4.2011-27.3.2011	פרק 3		ממ"ן 11 1.4.2011
5	8.4.2011-3.4.2011	פרק 4		
6	15.4.2011-10.4.2011	פרק 4		
7	22.4.2011-17.4.2011 (ג-ו פסח)	פרק 4		ממ"ן 12 22.4.2011
8	29.4.2011-24.4.2011 (א-ב פסח)	פרק 5		
9	6.5.2011-1.5.2011 (ב יום הזכרון לשואה)	פרק 5		

\* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים". אנא שבצו אותם בכתב ידכם. מרכז הלימוד ומספר הקבוצה מצוינים בהודעה ללומד שקיבלתם ממינהל שירותי הוראה.

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
10	13.5.2011-8.5.2011 (ב יום הזכרון) (ג יום העצמאות)	פרק 6		
11	20.5.2011-16.5.2011	פרק 6		ממ"ן 13 20.5.2011
12	27.5.2011-22.5.2011 (א ל"ג בעומר)	פרק 6		
13	3.6.2011-29.5.2011 (ד יום ירושלים)	פרק 7		ממ"ן 14 3.6.2011
14	10.6.2011-5.6.2011 (ג-ד שבועות)	פרק 7		
15	17.6.2011-12.6.2011	פרק 7		
16	26.6.2011-19.6.2011	חזרה		ממ"ן 15 26.6.2011

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

\* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים". אנא שבצו אותם בכתב ידכם. מרכז הלימוד ומספר הקבוצה מצוינים בהודעה ללומד שקיבלתם ממינהל שירותי הוראה.

## 2. הנחיות בקשר לכתיבת אלגוריתמים

יש לזכור חמישה דברים שחיוניים להצגת האלגוריתם:

1. הסבר אותו קודם, ואת הרעיונות שבו - בעברית (אלא אם כן האלגוריתם מאוד פשוט).
2. כתוב את האלגוריתם במילים, או במידת הצורך בפסאודו-קוד, בדומה לספר. רצוי לכתוב בקוד הוראות בעברית, אך המימוש צריך להיות חד-משמעי וברור. (לדוגמה: ניתן לכתוב "בחר את האיבר הראשון ברשימה, ואם הוא גדול מ-7 אז...").
3. אסור בשום אופן לכתוב "תכניות מחשב" במקום אלגוריתמים. עליך להתרגל לכתיבה בצורת פסאודו-קוד.
4. אם נתבקשת להוכיח את נכונות האלגוריתם עליך לעשות זאת בצורה פורמלית ומדויקת (למשל תוך שימוש באינדוקציה או בכלים מדויקים אחרים). **גם אם לא נתבקשת להוכיח, יש להסביר באופן כללי מדוע האלגוריתם עובד כשורה.**
5. בכל מקרה (גם אם לא צוין במפורש) יש לנתח את זמן הריצה של האלגוריתם. כמו כן, תמיד נסה להגיע לאלגוריתם יעיל ככל שניתן. אלגוריתם שהוא נכון, אך אינו יעיל, יזכה אותך רק בחלק מהנקודות.

## 3. תיאור המטלות

**קרא היטב עמודים אלו לפני שתתחיל לענות על השאלות**

בקורס זה 5 מטלות שעליך לפתור ולהגיש לבדיקה. להלן תמצא הסבר על אופן הפתרון הנדרש וכיצד לשלוח את המטלה למנחה.

### 3.1 מבנה המטלות

המטלות בקורס הן מסוג **ממ"ן רגיל**: תרגילים "יבשים" שאינם דורשים הרצת תכניות במחשב (אלא אם צוין אחרת בגוף המטלה). תרגילים אלו נועדו לבדוק את הבנתך בחומר הלימוד. את הפתרונות למטלה כזו עליך לרשום על דף נייר בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה.

אם השאלה בממ"ן אינה ברורה לך, אל תהסס להתקשר אל אחד מהמנחים (בשעות הייעוץ הטלפוני שלו) לצורך קבלת הסבר.



### 3.2 חומר הלימוד הדרוש לפתרון המטלות

בטבלה שלהלן תמצא מהו חומר הלימוד הנדרש (לפי פרקי הספר) לפתרון כל אחת מהמטלות.

#### שים לב:

אין להשתמש לפתרון המטלות בידע הנרכש בפרקי לימוד מתקדמים יותר  
מהפרקים בהם עוסקת הטבלה

מטלה	חומר הלימוד הנדרש לפתרונה
ממ"ן 11	פרקים א, ב
ממ"ן 12	פרק ג + פרק 17 (חומר מצולם)
ממ"ן 13	פרקים ד, ה
ממ"ן 14	פרק ו
ממ"ן 15	פרקים ז, ח

### 3.3 ניקוד המטלות

משקל כל מטלה 6 נקודות. ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל מינימלי של 18 נקודות לפחות.

ללא צבירת 18 נקודות  
לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

### 4. התנאים לקבלת נקודות זכות

- צבירת 18 נקודות זכות לפחות במטלות.
- ציון של לפחות 60 נקודות בבחינת הגמר.
- ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

#### **לתשומת לבכם!**

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן:

אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלות** בציון הנמוך ביותר, שציוניהן נמוכים מציון הבחינה (**עד שתי מטלות**), לא יילקחו בחשבון בעת שקלול הציון הסופי.

זאת בתנאי שמטלות אלה **אינן חלק מדרישות החובה בקורס** ושמשקל המטלות האחרות שהוגשו עובר את המינימום ההכרחי.

**זכרו!** ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.



# מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20417 – אלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1, 2 ו-3 בספר הלימוד.

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 1.4.2011

סמסטר: ב-2011

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

### שאלה 1 (20 נקודות)

יהי  $G = (V, E)$  גרף לא מכוון. נסמן את הדרגה המינימלית של קודקוד ב- $G$  ב- $\delta(G)$ . נניח כי  $\delta(G) \geq 2$ . הוכיחו כי ב- $G$  מסלול פשוט שאורכו לפחות  $\delta(G) + 1$  ומעגל פשוט שאורכו לפחות  $\delta(G) + 1$ .

### שאלה 2 (20 נקודות)

יהי  $G = (V, E)$  גרף מכוון. גרף התשתית של  $G$ , המסומן ב- $G'$ , הוא גרף לא מכוון פשוט שקבוצת קודקודיו זהה לזו של  $V$  וקיימת קשת בין  $u$  ל- $v$  אם"ם קיימת הקשת  $(u, v)$  או הקשת  $(v, u)$  בגרף  $G$ . הוכיחו:  $G$  קשיר היטב אם"ם  $G'$  קשיר וכל קשת ב- $G$  שייכת למעגל מכוון.

### שאלה 3 (20 נקודות)

הוכיחו: בהנתן גרף לא מכוון שאינו מכיל קודקודים מדרגה 1, קיים מעגל המכיל לכל היותר  $O(\log n)$  קודקודים שדרגתם גדולה מ-2. הראו כיצד למצוא מעגל כנ"ל בזמן  $O(|V| + |E|)$ . (רמז-הריצו BFS מקודקוד שדרגתו 3 לפחות).

### שאלה 4 (20 נקודות)

הוכיחו כי בהנתן גרף מכוון  $G = (V, E)$  קיימת קבוצה של לכל היותר  $|E|/2$  קשתות שהסרתן מהגרף מותירה גרף חסר מעגלים. הסבירו כיצד למצוא קבוצה כזו בזמן יעיל.

**שאלה 5 (20 נקודות)**

נניח כי בבעיית הזיווג היציב לכל הגברים רשימת העדפות זהה. חשב את מספר ההצעות באלגוריתם GS. האם הזיווג היציב במקרה זה יחיד?

# מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20417 - אלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרק 4 בספר הלימוד

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 22.4.2011

סמסטר: ב-2011

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

### שאלה 1 (20 נקודות)

פתרו את בעיה 4.11 בספר הלימוד.

### שאלה 2 (20 נקודות)

יהי  $G = (V, E)$  גרף לא מכוון עם משקלים ממשיים על הקשתות. הציעו אלגוריתם יעיל המוצא קבוצת קשתות בעלת משקל מקסימלי  $F \subseteq E$  עבורה  $H = (V, F)$  הוא יער (גרף חסר מעגלים). שימו לב כי ייתכנו קשתות בעלות משקל שלילי.

### שאלה 3 (20 נקודות)

משתמשים באלגוריתם הופמן כדי לקודד מילים ב- $\{a, b, c\}$ . לכל אחת מהקידודים הבאים מצא רשימת שכיחויות  $\{f_a, f_b, f_c\}$  שבעקבותיה מתקבל הקידוד הנתון או הוכח שהקוד בדוגמה לא יכול להתקבל.

א.  $\{0, 10, 11\}$

ב.  $\{0, 1, 00\}$

ג.  $\{10, 01, 00\}$

### שאלה 4 (20 נקודות)

נתון גרף  $G = (V, E)$  מכוון עם משקלות חיוביים על הקשתות. הציעו אלגוריתם יעיל המוצא את אורכו של מעגל קצר ביותר בגרף. כזכור, האורך של מעגל נתון הוא סכום משקלי קשתות המעגל. אם אין בגרף מעגל האלגוריתם מחזיר "לא קיים מעגל".

**שאלה 5 (20 נקודות)**

בבעיית תרמיל הגב השברית, נתונים לנו  $n$  פריטים  $a_1, \dots, a_n$ . לכל פריט  $a_i$  מותאמים שני מספרים רציונליים אי שליליים:  $\text{profit}(a_j)$  ו- $\text{size}(a_j)$ . מטרתנו לבחור **מספרים רציונליים**

כפוף לדרישה  $1 \leq j \leq n, x_j \in [0, 1]$ , על מנת להביא למקסימום את הביטוי  $\sum_{j=1}^n x_j \text{profit}(a_j)$

$$\text{כי } \sum_{j=1}^n x_j \text{size}(a_j) \leq 1.$$

א. הציעו אלגוריתם חמדן לבעיה. נתחו את סיבוכיות האלגוריתם שלכם.

ב. הוכיחו במדויק כי האלגוריתם החמדן פותר נכונה את הבעיה.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20417 - אלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרקים 5 ו-6 בספר הלימוד.

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 20.5.2011

סמסטר: ב-2011

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

### שאלה 1 (20 נקודות)

העזרו בפרוצדורה הרקורסיבית המבוססת על טרנספורם פורייה בע"מ 9-256 כדי לחשב את המכפלות הבאות:

$$(x+1)(x^2+1)$$

$$(1+x+2x^2)(2+3x)$$

### שאלה 2 (20 נקודות)

בהינתן שתי נקודות ב- $R^2$ ,  $(x_1, y_1)$  ו- $(x_2, y_2)$  מרחק  $L_\infty$  ביניהן מוגדר כ- $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ . הציעו אלגוריתם הפרד ומשול המוצא את זוג הנקודות הקרובות ביותר מבין  $n$  נקודות כאשר המרחק בין שתי נקודות הוא מרחק  $L_\infty$ . הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

### שאלה 3 (20 נקודות)

בהנתן שני מספרים שלמים אי שליליים  $a$  ו- $b$  המחלק המשותף המקסימלי שלהם  $\gcd(a, b)$  הוא השלם החיובי המקסימלי המחלק את שניהם. למשל  $\gcd(10, 15) = 5$ ,  $\gcd(17, 42) = 1$ . מכיוון שכל מספר מחלק את 0 הרי שלכל  $b > 0$ ,  $\gcd(0, b) = 0$ .

א. הוכיחו כי אם  $a$  ו- $b$  שניהם זוגיים אזי  $\gcd(a, b) = 2 \gcd(a/2, b/2)$

ב. הוכיחו כי אם  $a$  אי זוגי ו- $b$  זוגי אזי  $\gcd(a, b) = \gcd(a, b/2)$

ג. הוכיחו כי אם  $a$  ו- $b$  שניהם אי זוגיים ו- $a \geq b$  אזי  $\gcd(a, b) = \gcd((a-b)/2, b)$ .

ד. העזרו בסעיפים הקודמים על מנת לתת אלגוריתם הפרד ומשול המחשב את  $\gcd(a, b)$  עבור שני שלמים חיוביים כלשהם. הניחו כי האלגוריתם שלכם מבצע פעולות של חיסור, בדיקת זוגיות וחלוקה ב-2 בזמן קבוע. תחת הנחה זו הוכיחו כי זמן הריצה של האלגוריתם שלכם הוא  $O(\max\{\log a, \log b\})$ . שימו לב כי אורך הייצוג של מספר  $n$  בבסיס בינארי הוא  $O(\log n)$ .

#### שאלה 4 (20 נקודות)

נתונה סדרה של  $n$  מספרים ממשיים,  $a_1, \dots, a_n$ . תת סדרה של מספרים אלו היא תת קבוצה של מספרים אלו המסודרת בהתאם לסדר הסדרה המקורית,  $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ ,  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ . תת סדרה היא עולה באם  $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_k}$ . הציעו אלגוריתם תכנון דינמי המוצא את סדרה באורך מקסימלי. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

#### שאלה 5 (20 נקודות)

מסילת רכבת נבנית משרשור של חלקים. יש  $n$  סוגי חלקים  $\{1, \dots, n\}$ . לכל חלק  $i \in \{1, \dots, n\}$  יש פרמטר אורך  $d_i$ , מחיר  $p_i$ , צד ימין  $r_i$  וצד שמאל  $l_i$ . אפשר לחבר את  $i$  משמאל ל- $j$ , אם  $r_i = l_j$ . הציעו אלגוריתם תכנון דינמי המקבל ערך חיובי  $L$  ומוצא את המסילה הזולה ביותר שאורכה  $L$  אם מסילה כזו קיימת (האורך של מסילה שווה לסכום האורכים של חלקיה ומחיר המסילה שווה לסכום המחירים של חלקיה). הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם ונתחו את סיבוכיותו.



# מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20417 - אלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרק 6 בספר הלימוד

מספר השאלות: 5

משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: ב-2011

מועד אחרון להגשה: 3.6.2011

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (25 נקודות)

פתרו את בעיה 6.13 בספר הלימוד.

שאלה 2 (20 נקודות)

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל כקלט גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ , שני צמתים  $u, v \in V$ , ומוצא את מספר המסלולים הקצרים ביותר בין  $u$  ל- $v$  ב- $G$ . הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי  $G = (V, E)$  גרף מכוון עם פונקציית משקל  $w: E \rightarrow R$  ויהי  $t \in V$ . נתונה פונקציה  $d: V \rightarrow R$ , כלומר, לכל צומת נתון ערך ממשי. כתבו אלגוריתם שעלותו  $O(|E| + |V|)$ , הבודק אם  $d$  היא פונקציית מרחקים קצרים ל- $t$ , כלומר, אם לכל  $v \in V$  מתקיים כי  $d(v)$  הוא משקל מסלול קצר ביותר מ- $v$  ל- $t$ . הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

#### שאלה 4 (25 נקודות)

יהי  $G = (V, E)$  גרף מכוון עם משקלים ממשיים על הקשתות. בהינתן  $s, t \in V$  הציעו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו לבעיות הבאות:

א. חישוב המסלול הקצר ביותר בין  $s$  ל- $t$  המכיל מספר מינימלי של קשתות (אם יש מסלול כזה).

ב. חישוב המסלול הקצר ביותר בין  $s$  ל- $t$  מבין כל המסלולים בין  $s$  ל- $t$  המכילים מספר מינימלי של קשתות (אם יש מסלול כזה).  
הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

#### שאלה 5 (25 נקודות)

א. בהנתן מטבעות, בערכים שלמים חיוביים  $x_1, \dots, x_n$  ברצוננו לבדוק האם אנו יכולים ל"פרוט" שלם חיובי  $v$ , כלומר להציג את  $v$  כסכום של מטבעות מתוך הקבוצה. שים לב כי אנו יכולים להשתמש בכל מטבע יותר מפעם אחת-אין הגבלה על מספר המטבעות מכל סוג בו ניתן להשתמש. הציעו אלגוריתם תכנון דינמי יעיל לבעיה. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

ב. פתרו את סעיף א, כאשר מספר המטבעות בו ניתן להשתמש הוא לכל היותר  $k$  ( $k$  הוא חלק מהקלט). הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20417 - אלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

מספר השאלות: 5

משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: ב-2011

מועד אחרון להגשה: 26.6.2011

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

### שאלה 1 (20 נקודות)

ברצוננו לחשב  $n$  משימות  $t_1, t_2, \dots, t_n$  על-ידי שימוש בשני מחשבים  $A, B$  המקושרים ביניהם. לכל משימה  $t_i$  קיים זמן ריצה  $\alpha_i$  על מחשב  $A$  וזמן ריצה  $\beta_i$  על מחשב  $B$ . בנוסף, חלק מהמשימות מקושרות ודורשות תקשורת ביניהן, כלומר, לכל זוג משימות  $t_i, t_j$ , עבור  $1 \leq i < j \leq n$  קיים זמן תקשורת  $c_{ij}$  הנדרש אם ורק אם המשימות לא רצות על אותו מחשב. הציגו אלגוריתם למציאת החלוקה האופטימלית של משימות, (כלומר, האלגוריתם יקבע איזו משימה תרוץ על איזה מחשב), אשר תמזער את זמן הריצה הכולל (זמן הריצה הכולל = סכום זמני הריצה על המחשבים וזמן התקשורת). הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

### שאלה 2 (20 נקודות)

#### הגדרה

גרף זרימה עצי מתקבל מעץ מכוון (עץ מושרש, המכוון מכיוון השורש אל הצאצאים), שנוסף לו צומת חדש ונוספה קשת מכל עלה בעץ אל הצומת החדש. רשת זרימה עצית היא רשת זרימה המבוססת על גרף זרימה עצית, בתוספת פונקציית קיבול, כאשר המקור של הרשת הוא הצומת היחיד בגרף שדרגת הכניסה שלו 0 (כלומר, שורש העץ) והבור של הרשת הוא הצומת היחיד בגרף שדרגת היציאה שלו 0 (כלומר, הצומת החדש). כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל כקלט רשת זרימה עצית ומוצא בה זרימה מקסימלית. נמקו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

### שאלה 3 (20 נקודות)

בבית תוכנה מסויים עובדים עם מספר רב של תוכנות, כאשר כל תוכנה כתובה בשפת תכנות מסוימת. ניתן לסווג את התוכנות על-פי שפות התכנות באופן הבא :

יהיו  $pl_1, \dots, pl_n$  שפות התכנות הפעילות בבית התוכנה. ניתן לחלק את התוכנות שבבית התוכנה ל-  $n$  קבוצות  $G_1, \dots, G_n$  כך שכל התוכנות בקבוצה  $G_i$  כתובות בשפה  $pl_i$ .

בבית התוכנה עובדים  $m$  מתכנתים  $p_1, \dots, p_m$ . כל מתכנת  $p_i$  מכיר כמה שפות תכנות. הרשימה  $L_i$  של המתכנת  $p_i$  מכילה את שפות התכנות שהוא מכיר.

בנוסף, לכל מתכנת  $p_i$  יש מגבלה  $l_i$  של מספר התוכנות שהוא מסוגל לתחזק.

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו הבודק האם ניתן לחלק את האחריות על התוכנות השונות בין המתכנתים, כך שכל תוכנה תהיה באחריותו של מתכנת אחד המכיר את שפת התכנות בה היא כתובה. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

### שאלה 4 (20 נקודות)

הוכיחו את הטענה הבאה :

בהינתן רשת זרימה  $G = (V, E)$  עם מקור  $s$ , בור  $t$ , וקשת  $e = (u, v) \in E$  חוצה את כל חתכי המינימום ב- $G$  אם ורק אם לכל זרימה מקסימלית  $f$  ב- $G$  קיימים ברשת השירית  $G_f$  מסלול מ- $s$  ל- $u$  ומסלול מ- $v$  ל- $t$ .

### שאלה 5 (20 נקודות)

פתרו את שאלה 7.12 בספר הלימוד.