

שאלה 1 (25 נקודות)

15 נבחנים מגיעים לבחינה בהסתברות ומתיישבים בשורה.
מחלקים לנבחנים באקראי 15 שאלונים: 9 מסוג א ו-6 מסוג ב.
(8 נק') א. מהי ההסתברות שלא יהיו בשורה שני נבחנים סמוכים שיקבלו (שניהם) שאלונים מסוג ב?

יהי X מספר הנבחנים שמקבלים בחינה מסוג שונה מזה שמקבל הנבחן שיושב לימינם בשורה.

(8 נק') ב. חשב את התוחלת של X .

(9 נק') ג. חשב את השונות של X .

שאלה 2 (25 נקודות)

(13 נק') א. הוכח, בעזרת משפט הגבול המרכזי, כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n e^{-n} \frac{n^i}{i!} = \frac{1}{2}$.

(12 נק') ב. רשום את החסמים מלעיל הקטנים ביותר (המוכרים לך) עבור $P\{X \geq 14\}$, בכל אחד מן המקרים הבאים:

1. X הוא משתנה מקרי אי-שלילי ותוחלתו 7;

2. X הוא משתנה מקרי המקיים $X \geq -2$ ותוחלתו 7;

3. X הוא משתנה מקרי שתוחלתו 7 ושונותו 4.

שאלה 3 (25 נקודות)

א. נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת הבאה:

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)}, \quad x > 0, y > 0$$

(8 נק') 1. מהי פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי $S = X + Y$?
נמק את תשובתך.

אם הנימוק מסתמך על טענות כלשהן, רשום אותן בקצרה, אך אין צורך להוכיחן.

(8 נק') 2. יהי a מספר ממשי כלשהו.

מהי פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי $W = a(X + Y)$?

הערה (ורמז): אל תשכח להפריד בין ערכים חיוביים ושליליים של a .

(9 נק') ב. נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת הבאה:

$$f_{X,Y}(x,y) = 2, \quad 0 \leq y \leq x \leq 1$$

נגדיר את המשתנה מקרי Z על-ידי $Z = \max\{X, Y\}$.

מצא את פונקציית הצפיפות של Z .

שאלה 4 (25 נקודות)

מספר שברי-האגוזים בקובייה אחת של שוקולד-אגוזים הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 2. בחפיסת שוקולד-אגוזים יש 20 קוביות שוקולד, ונניח כי אין תלות בין מספר שברי האגוזים בקוביות שונות של השוקולד.

6 נק' א. מהי ההסתברות שבקובייה מקרית של שוקולד-אגוזים יהיה לכל היותר שבר-אגוזים אחד?

6 נק' ב. בשורה אחת של חפיסת-השוקולד יש 4 קוביות. אם ידוע שיש בשורה מסוימת בסך-הכל 10 שברי-אגוזים, מהי שונות מספר שברי-האגוזים שנמצאים בקובייה הראשונה בשורה?

6 נק' ג. יובל מקבל מאמו 5 קוביות שוקולד-אגוזים. הוא אוכל אותן אחת-אחת. אם בכל אחת משתי הקוביות הראשונות שאכל היו פחות מ-3 שברי-אגוזים, מהי ההסתברות שבקובייה החמישית שיאכל יהיו לפחות 3 שברי-אגוזים?

7 נק' ד. חשב קירוב להסתברות שבחפיסת-שוקולד מקרית יהיו בין 35 ל-48 שברי-אגוזים.

שאלה 5 (25 נקודות)

באיזור מסוים בדרום, בימי החורף, נחשמים לעיתים שני כבישים – כביש א וכביש ב. לחסימת הכבישים שתי סיבות – שטפון בעקבות גשמים ותריל צבאי שנערך באיזור. כאשר כביש א נחסם בעקבות שטפון, כביש ב נחסם אף הוא באופן קבוע מאותה הסיבה. אולם, כאשר כביש ב נחסם בעקבות שטפון, לא בהכרח כביש א נחסם מסיבה זו.

ההסתברות שכביש א יהיה חסום בגלל שטפון באיזור היא 0.1.

ההסתברות שכביש ב יהיה חסום בגלל שטפון באיזור היא 0.163.

7 נק' א. אם כביש א אינו חסום בגלל שטפון, מהי ההסתברות שכביש ב דווקא חסום מסיבה זו?

6 נק' ב. מהי ההסתברות שאף אחד משני הכבישים הללו לא ייחסם בעקבות שטפון?

6 נק' ג. אדם נוסע דרך כביש א מדי יום.

מהי תוחלת מספר הימים שיחלפו החל מתחילת תקופת ימי החורף ועד ליום הראשון שבו ייתקל בכביש חסום עקב שטפון? הנח שאין תלות בין ימים שונים. נמק את תשובתך.

6 נק' ד. ללא תלות במצב השטפונות, נערך מדי פעם בסביבת הכבישים תרגיל צבאי. במקרה כזה, נחשמים תמיד שני הכבישים. ההסתברות שיערך תרגיל צבאי באיזור, בכל אחד מימי החורף, היא 0.2.

מהי ההסתברות שביום חורף מקרי שני הכבישים יהיו חסומים (עקב שטפון או תרגיל צבאי)?

בהצלחה!