20425 - תאריך הבחינה: 28.6.2010 (סמסטר 2010ב - מועד א/83)

שאלה 1

א. מכיוון ש-X הוא משתנה מקרי מעריכי, הוא מקיים את תכונת חוסר הזכרון, ולכן:

$$P\{X \le 0.5 \mid X > 0.25\} = P\{X \le 0.25\} = 1 - e^{-6\cdot 0.25} = 0.7769$$

ב.
$$E[Y] = E[1-e^{-X}] = 1 - E[e^{-X}] = 1 - \int_0^\infty e^{-x}\cdot 6e^{-6x}dx = 1 - \tfrac{6}{7}\underbrace{\int_0^\infty 7e^{-7x}dx}_{=1} = \tfrac{1}{7}$$

ג. לכל $0 < y < 1$ מתקיים:

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{1-e^{-X} \le y\} = P\{e^{-X} \ge 1-y\} = P\{X \le -\ln(1-y)\}$$

$$= F_X\left(-\ln(1-y)\right) = 1 - \exp\{-6\cdot[-\ln(1-y)]\} = 1 - \exp\{6\cdot\ln(1-y)\}$$

$$= 1 - \exp\{\ln(1-y)^6\} = 1-(1-y)^6$$

כלומר:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y \le 0 \\ 1-(1-y)^6 & , \quad 0 < y < 1 \\ 1 & , \quad y \ge 1 \end{cases}$$

ד. מהסעיף הקודם נובע כי, לכל $0 < y < 1$ מתקיים:

$$f_Y(y) = \tfrac{d}{dy}F_Y(y) = \tfrac{d}{dy}\left[1-(1-y)^6\right] = 6(1-y)^5$$

ולכל y אחר, מתקיים $f_Y(y) = 0$.

שאלה 2

א.
$$\frac{\binom{26}{10} - 2\cdot\binom{13}{10}}{\binom{52}{10}} = 0.000336$$

ב. נגדיר:
$$X_i = \begin{cases} 1 & , \quad \text{ בבחירות ה- } i \text{ וה- } i+1 \text{ נבחרו קלפים מאותו הסוג} \\ 0 & , \quad \text{אחרת} \end{cases}$$ לכל $i = 1,\ldots,9$,

ונקבל כי: $X = \sum_{i=1}^{9} X_i$ = מספר הקלפים שאחריהם נבחר קלף מאותו הסוג

לכל $i = 1,\ldots,9$ מתקיים:
$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \frac{4\cdot 13\cdot 12}{52\cdot 51} = \frac{12}{51}$$

לכן:
$$E[X] = \sum_{i=1}^{9} E[X_i] = 9\cdot\tfrac{12}{51} = \tfrac{108}{51} = 2.1176$$

ג. לכל $i = 1,\ldots,9$ מתקיים:
$$\text{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = \tfrac{12}{51}\cdot\tfrac{39}{51} = \tfrac{468}{2{,}601} = 0.1799$$

ולכל $i,j=1,\ldots,9$ כך ש- $i \neq j$ מתקיים:

$$P\{X_i=1,X_j=1\}=\begin{cases}\dfrac{4\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{52\cdot 51\cdot 50}=\dfrac{22}{425}=0.05176 & , \quad |i-j|=1\\[2ex] \dfrac{4\cdot 13\cdot 12\cdot(11\cdot 10+3\cdot 13\cdot 12)}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}=\dfrac{68}{1{,}225}=0.0555 & , \quad |i-j|>1\end{cases}$$

לכן:

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E[X_iX_j]-E[X_i]E[X_j]=P\{X_i=1,X_j=1\}-(P\{X_i=1\})^2$$

$$=\begin{cases}\dfrac{22}{425}-\left(\dfrac{12}{51}\right)^2=\dfrac{-234}{65{,}025}=-0.003599 & , \quad |i-j|=1\\[2ex] \dfrac{68}{1{,}225}-\left(\dfrac{12}{51}\right)^2=\dfrac{468}{3{,}186{,}225}=0.0001469 & , \quad |i-j|>1\end{cases}$$

ומכאן:

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{9}X_i\right)=9\cdot\mathrm{Var}(X_i)+\sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

$$=9\cdot 0.1799-2\cdot 8\cdot 0.003599+2\cdot 28\cdot 0.0001469\cong 1.5700$$

שאלה 3

א. נסמן ב-X את מספר החרקים שמגיעים לעלה אחד בעשר דקות. ההתפלגות של המשתנה המקרי X היא פואסונית עם הפרמטר $\frac{9}{6}=1.5$. לפיכך, התפלגות מספר החרקים שמגיעים לחמישה עלים שונים ב-5 דקות היא פואסונית עם הפרמטר $5\cdot 1.5=7.5$ (זהו סכום של 5 משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים).

ומכאן: $e^{-7.5}\cdot\frac{7.5^8}{8!}=0.1373$

ב. נשתמש בסימוני סעיף א ונחשב את ההסתברות המותנית, שלעלה מסוים הגיע בדיוק חרק אחד, אם ידוע שהגיע אליו לפחות חרק אחד.

נקבל: $P\{X=1\mid X\geq 1\}=\dfrac{P\{X=1\}}{P\{X\geq 1\}}=\dfrac{1.5e^{-1.5}}{1-e^{-1.5}}=0.4308$

כעת, למספר העלים, שהגיע אליהם בדיוק חרק אחד, בהינתן שהגיע לכל אחד מהם לפחות חרק אחד, יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 60 ו- 0.2872. לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא:

$\binom{60}{20}\cdot 0.4308^{20}\cdot 0.5692^{40}=0.033$

ג. נסמן ב- X_1 את מספר החרקים שמגיעים ל-10 העלים העליונים של הצמח במשך דקה אחת וב- X_2 את מספר החרקים שמגיעים ל-50 העלים התחתונים של הצמח במשך דקה אחת.

שני המשתנים, המוגדרים לעיל, בלתי-תלויים, מכיוון שהם מוגדרים על עלים שונים של הצמח, ל- X_1 יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $10\cdot\frac{9}{60}=1.5$ ול- X_2 יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $50\cdot\frac{9}{60}=7.5$.

לכן, ההתפלגות המותנית של X_1 בהינתן $X_1+X_2=10$ היא התפלגות בינומית עם הפרמטרים 10 ו- $\frac{1.5}{1.5+7.5}=\frac{1}{6}$ ומתקיים: $P\{X_1=0\mid X_1+X_2=10\}=\left(1-\frac{1}{6}\right)^{10}=0.1615$

ד. מספר החרקים שמגיעים לצמח כולו במשך שעה אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $540 = 9 \cdot 60$.
מכיוון שאין תלות בין החרקים, נקבל שמספר החרקים ה״ארוכים״ שמגיעים לצמח כולו במשך שעה אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $162 = 0.3 \cdot 540$. ומכאן, ששונות מספר החרקים ה״ארוכים״ שמגיעים לצמח כולו במשך שעה אחת שווה לפרמטר ההתפלגות האחרונה, דהיינו ל-162.

שאלה 4

א. נסמן ב- X_n , לכל $n = 1,2,3$, את התוצאה בסיבוב ה-n-י של הסביבון.
הסביבון תקין, ולכן $P\{X_n = i\} = 0.25$, לכל $n = 1,2,3$ ולכל $i = 1,2,3,4$.
הערכים האפשריים של Y הם 1, 2, 3 ו-4.
לצורך חישוב ההסתברויות, עלינו להניח שאין תלות בין הסיבובים השונים של הסביבון.

$P\{Y \le 1\} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ [כל ה- X_i-ים שווים בהכרח ל-1]

$P\{Y \le 2\} = \left(\frac{2}{4}\right)^3 = \frac{8}{64}$ [כל ה- X_i-ים שווים לכל היותר ל-2]

$P\{Y \le 3\} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$ [כל ה- X_i-ים שווים לכל היותר ל-3]

$P\{Y \le 4\} = 1$ [כל ה- X_i-ים שווים לכל היותר ל-4]

כלומר:

$$F_Y(y) = p\{Y \le y\} = \begin{cases} 0 & , \quad y < 1 \\ \frac{1}{64} & , \quad 1 \le y < 2 \\ \frac{8}{64} & , \quad 2 \le y < 3 \\ \frac{27}{64} & , \quad 3 \le y < 4 \\ 1 & , \quad y \ge 4 \end{cases}$$

ב. מהסעיף הקודם נקבל כי:

$$P\{Y = 1\} = P\{Y \le 1\} = \frac{1}{64}$$

$$P\{Y = 2\} = P\{Y \le 2\} - P\{Y \le 1\} = \frac{8}{64} - \frac{1}{64} = \frac{7}{64}$$

$$P\{Y = 3\} = P\{Y \le 3\} - P\{Y \le 2\} = \frac{27}{64} - \frac{8}{64} = \frac{19}{64}$$

$$P\{Y = 4\} = P\{Y \le 4\} - P\{Y \le 3\} = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$$

ובכל מקרה אחר, פונקציית ההסתברות שווה לאפס.

ג. מכיוון שהמשתנים המקריים בלתי-תלויים זה בזה, נוכל להשתמש במשפט הגבול המרכזי לחישוב הקירוב.

מתקיים:

$$E[\overline{Y}] = E[Y] = 1 \cdot \frac{1}{64} + 2 \cdot \frac{7}{64} + 3 \cdot \frac{19}{64} + 4 \cdot \frac{37}{64} = \frac{220}{64} = 3.4375$$

$$E[Y^2] = 1^2 \cdot \frac{1}{64} + 2^2 \cdot \frac{7}{64} + 3^2 \cdot \frac{19}{64} + 4^2 \cdot \frac{37}{64} = \frac{792}{64} = 12.375$$

$$\text{Var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 12.375 - 3.4375^2 = 0.5586$$

$$\text{Var}(\overline{Y}) = \frac{\text{Var}(Y)}{50} = \frac{0.5586}{50} = 0.01117 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma(\overline{Y}) = \sqrt{0.01117} = 0.1057$$

ומכאן נקבל כי:

$$P\{3.4 \le \overline{Y} \le 3.5\} \cong P\left\{\frac{3.4-3.4375}{0.1057} \le Z \le \frac{3.5-3.4375}{0.1057}\right\} = P\{-0.3548 \le Z \le 0.5913\}$$

$$= \Phi(0.5913) - \Phi(-0.3548) = 0.7228 - (1 - 0.6387) = 0.3615$$

שאלה 5

א. הוכחת הטענות מובאת בספר הקורס.

ב1. נסמן ב- X את מספר ימי-הטיפוס המוצלחים של המטפס בתקופה הנתונה של 10 הימים.
ההתפלגות של המשתנה המקרי X היא בינומית עם הפרמטרים 10 ו- 0.4. כעת, נסמן ב-Y את הדרך הכוללת שהמטפס עובר ב-10 ימי טיפוס. מתקיים :

$$Y = 200X + 100(10 - X) = 100X + 1{,}000$$

לכן :

$$P\{Y \geq 1{,}200\} = P\{100X + 1{,}000 \geq 1{,}200\} = P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X \leq 1\}$$

$$= 1 - 0.6^{10} - 10 \cdot 0.4 \cdot 0.6^{9} = 0.9536$$

ב2. מהסעיף הקודם נקבל כי :

$$E[Y] = 100E[X] + 1{,}000 = 100 \cdot 10 \cdot 0.4 + 1{,}000 = 1{,}400$$

$$\text{Var}(Y) = 100^{2}\,\text{Var}(X) = 10{,}000 \cdot 10 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 24{,}000$$