

$$f(x) = \begin{cases} c & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2-x}{3} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{1. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:}$$

א. חשב את ערכו של c .

ב. חשב את ההסתברויות $P\{X > 0.75\}$ ו- $P\{0.5 < X < 1.5\}$.

ג. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X .

גזור את הפונקציה שקיבלת בתחומים השונים והשווה לפונקציית הצפיפות.

$$f_X(x) = c(4-x^2) \cdot I_{[0,2]}(x) \quad \text{2. תהי}$$

א. חשב את c .

ב. חשב את התוחלת ואת השונות של X .

ג. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X .

$$I_{[0,2]}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \quad x < 0, x > 2 \end{cases} \quad \text{שימו לב:}$$

$$f_X(x) = \frac{2}{x^3} \cdot I_{(1,\infty)}(x) \quad \text{3. תהי}$$

חשב את התוחלת ואת השונות של X .

$$f_X(x) = c|1-x| \cdot I_{(0,3)}(x) \quad \text{4. תהי}$$

א. חשב את c .

ב. חשב את $E[X]$.

$$f_X(x) = ce^{-2|x-3|} \cdot I_{(1,5)}(x) \quad \text{5. תהי}$$

א. חשב את c .

ב. מצא את $E[X]$.

ג. מהו החציון של X ?

$$f_X(x) = cxe^{-2x}, \quad 0 < x < 1.5 \quad \text{6. פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי } X, \text{ נתונה על-ידי:}$$

א. חשב את c .

ב. חשב את התוחלת של X .

ג. יהי $Y = X^2$. מצא את פונקציית הצפיפות של Y .

שימו לב:
בפתרון סעיפים א ו- ב יש שימוש
בשיטת האינטגרציה בחלקים

7. א. יהי X משתנה מקרי אחיד בקטע $[1,10]$. חשב את $P\{X > 5\}$.

ב. יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 0.2. חשב את $P\{X \geq 5\}$.

ג. יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 0.2. חשב את $P\{X \geq 5 \mid X > 2\}$.

8. א. משך הזמן (בדקות) שאדם שוהה ליד מכשיר כספומט, עד שהוא מסיים את פעולותיו, הוא משתנה מקרי אחיד בקטע (2,4), והוא בלתי-תלוי בזמני-שהייה של אנשים אחרים. אהוד מגיע לכספומט ומוצא שיש 5 אנשים בתור.

- 1) מהי ההסתברות שכל אחד מחמשת האנשים הללו ישהה, בתורו, יותר מ- 2.5 דקות ליד הכספומט?
 - 2) מהי ההסתברות שהשלישי בתור ישהה יותר מ- 3.5 דקות ליד הכספומט?
 - 3) מהי ההסתברות שהשלישי בתור יהיה הראשון מבין ה-5 שישהה יותר מ- 3.5 דקות ליד הכספומט?
 - 4) מהי שונות מספר האנשים (מבין ה-5 שבתור) שישהו בין 2.5 ל-3 דקות ליד הכספומט?
- ב. נניח עתה, שמשך הזמן (בדקות) שאדם שוהה ליד מכשיר הכספומט, עד שהוא מסיים את פעולותיו, הוא משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 0.4. אהוד מגיע לכספומט ומוצא שיש אדם אחד ליד המכשיר ואין אנשים נוספים בתור. מהן תוחלת ושונות הזמן שאהוד ימתין עד שהמכשיר יתפנה?
- ג. ידוע שזמני ההגעה של אנשים למכשיר הכספומט מקיימים את שלושת ההנחות של תהליך פואסון עם קצב של 20 מופעים לשעה. בשעה 8:00 המכשיר ריק.
1. מהי התפלגות הזמן (בשעות) שיעבור עד שיגיע האדם הראשון לכספומט (כלומר, הראשון שיגיע אחרי 8:00)?
 2. מהי התפלגות הזמן (בשעות) שיעבור עד שיגיע האדם ה- n -י לכספומט?

9. א. תהי $f_X(x) = ae^{-4x} I_{(0,\infty)}(x)$. זוהי ההתפלגות של המשתנה המקרי X ומצא את a .

ב. תהי $f_X(x) = ae^{\frac{-x^2+2x}{2}} I_{(-\infty,\infty)}(x)$. זוהי ההתפלגות של המשתנה המקרי X ומצא את a .

10. א. נתונה פונקציית הצפיפות $f_X(x) = e^{-x+1} \cdot I_{(1,\infty)}(x)$.

1) מהו הקשר בין ההתפלגות הנתונה להתפלגות המעריכית?

2) מצא את פונקציית הצפיפות של $Y = \frac{X+1}{2}$.

מהו הקשר בין ההתפלגות של Y להתפלגות המעריכית?

ב. יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר θ ויהי $Y = 2X$.

מצא את פונקציית הצפיפות של Y וזוהי את ההתפלגות.

ג. יהי X משתנה מקרי אחיד בקטע (0,1) ויהי $Y = \frac{X}{X+1}$. מצא את פונקציית הצפיפות של Y .

11. תהי $f_X(x) = \frac{1}{b} \left(1 - \left|\frac{x}{b}\right|\right) \cdot I_{(-b,b)}(x)$, כאשר $b > 0$ קבוע כלשהו.

א. צייר את פונקציית הצפיפות הנתונה.

ב. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X .

ג. יהי $Y = \frac{X}{b}$. מצא את פונקציית הצפיפות של Y .

ד. מצא את התוחלת ואת השונות של X .

12. יהי X משתנה מקרי ביתא עם הפרמטרים $a = 5$ ו- $b = 6$. חשב את $E\left[\frac{1}{X}\right]$.

13. חשב את $\int_0^{\infty} x^2 e^{-3x} dx$, אך לא באמצעות שיטת האינטגרציה בחלקים.

העזר בנוסחאות הקשורות להתפלגות מעריכית.

14. א. חשב את $\Phi(0.1357)$ ואת $\Phi(-1.4938)$.

ב. מצא את הערך של z בכל אחד מן המקרים הבאים:

1) $\Phi(z) = 0.879$ 2) $\Phi(z) = 0.93$ 3) $\Phi(z) = 0.635$.

ג. יהי X משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת 5 ושונות 4.

מצא את הערך של a בכל אחד מן המקרים הבאים:

1) $P\{X \leq a\} = 0.7$ 2) $P\{X \leq a\} = 0.06$ 3) $P\{X \leq a\} = 0.17$.

15. ידוע שהתפלגות הטמפרטורה בחורף בירושלים היא נורמלית עם תוחלת של 18° וסטיית-תקן של 4° . חברת

"המטייל" מתכוונת לערוך טיול בירושלים ביום חורף מסוים, והודיעה כי אם הטמפרטורה ביום זה תהיה

מעל 26° או מתחת ל- 12° , הטיול יבוטל. חברת "טיולים בכיף" עורכת טיול דומה באותו יום, והודיעה

שהטיול יתבטל אם הטמפרטורה תהיה נמוכה מ- 13° .

תייר מחו"ל מעוניין לצאת לטיול, אך יכול להירשם רק באחת משתי החברות.

א. באיזו חברה היית ממליץ לתייר להירשם?

ב. מהי ההסתברות ששני הטיולים יתבטלו?

16. במאפייה מסוימת אופים עוגות, שהתפלגות משקלן (בגרמים) היא נורמלית עם הפרמטרים 500 ו- 5^2 .

א. מהי ההסתברות שעוגה תשקול פחות מ-507 גרם?

ב. מהי ההסתברות שעוגה תשקול יותר מ-489 גרם?

ג. מהו המשקל ש-20% מהעוגות שוקלות יותר ממנו?

ד. מהו המשקל ש-3% מהעוגות שוקלות פחות ממנו?

ה. מהו המשקל ש-42% מהעוגות שוקלות פחות ממנו?

נניח שהמשקל של כל עוגה בלתי-תלוי במשקלן של עוגות אחרות.

ו. אתה מעוניין לקנות 4 עוגות "גדולות" שמשקל כל אחת מהן גבוה מ-507 גרם.

1) מהי ההסתברות שהמוכר ישקול 5 עוגות, עד שימצא את העוגה הגדולה הראשונה?

2) מהי ההסתברות שהמוכר ישקול 15 עוגות, עד שימצא את העוגה הגדולה הרביעית?

3) המוכר החליט לשקול בכל מקרה 15 עוגות, מהי ההסתברות שיימצאו ביניהן בדיוק 4 עוגות גדולות?

ז. מחיר עוגה שמשקלה גבוה מ-507 גרם הוא 40 ₪, ומחיר עוגה שמשקלה נמוך מ-507 גרם הוא 30 ₪.

ביום מסוים אתה קונה 10 עוגות שנבחרו באקראי ממדף העוגות.

מהן תוחלת ושונות המחיר הכולל של 10 העוגות?

17. חנות מסוימת קיבלה משלוח של 10,000 נורות:

2,500 נורות מתוצרת חברת "נור" ו-7,500 נורות מתוצרת חברת "אור-לי".

התפלגות אורך-החיים (בשעות) של נורה מתוצרת "נור" היא נורמלית עם תוחלת 130 ושונות 64, והתפלגות

אורך-החיים של נורה מתוצרת "אור-לי" היא נורמלית עם תוחלת 124 וסטיית-תקן 6.

א. בוחרים נורה אחת מהמשלוח באופן מקרי:

אם הנורה שנבחרה דולקת כבר 130 שעות, מהי ההסתברות שתדלוק עוד לפחות 6 שעות?

ב. בוחרים באקראי 100 נורות מתוצרת "נור". מהי תוחלת מספר הנורות מתוכן, שידלקו מעל ל-120 שעות?

18. התפלגות לחץ הדם של גברים היא נורמלית. ידוע כי ההסתברות שלחץ הדם של גבר יהיה גבוה מ-140 היא 0.0062, וההסתברות שלחץ הדם של גבר יהיה נמוך מ-86 היא 0.0228.
- א. חשב את הפרמטרים של ההתפלגות.
- ב. מהו אחוז הגברים בעלי לחץ-דם בין 100 ל-115?
- ג. נבחר גבר שלחץ-דמו נמוך מ-134. מהי ההסתברות שהוא בין 100 ל-115?
- ד. בבדיקה תקופתית שנערכה ל-250 גברים, נמדד לחץ-הדם של כל אחד מהם. לאחר הבדיקה הוחלט שגבר שלחץ-דמו גבוה מ-134 יקבל 5 כדורי הרגעה. חשב את התוחלת והשונות של המספר הכולל של כדורי ההרגעה שניתנו בבדיקה.
19. משתנה מקרי X מתפלג נורמלית עם תוחלת 10 ושונות 4.
- א. נניח שמתקיים השוויון $P\{a < X < b\} = 0.85$.
- (1) כמה ערכים של a ו- b מקיימים את השוויון האחרון? תן דוגמה לזוג ערכים כזה.
- (2) נניח, שבנוסף לשוויון שלעיל, מתקיים גם השוויון $P\{X < a\} = P\{X > b\}$.
- כמה ערכים של a ו- b מקיימים את שני השוויונות? תן דוגמה.
- ב. נניח שמתקיים השוויון $P\{X < c\} = 3P\{X > c\}$. מהו ערכו של c ?
20. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים (100, 0.25). חשב קירוב ל- $P\{20 \leq X < 40\}$.