ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20425

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חוברת הקורס - סתיו 2013א

כתבה: נעמי מילאנו-רוזנטל

אוקטובר 2012 - סמסטר סתיו – תשע"ג

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנטים			א
לוח זמנים ופעילויות			ב
נקודות זכות			ג
הגשת מטלות			ג
ממ"ן	11	(פרקים 1 ו- 2)	1
ממ"ן	12	(פרקים 2 ו- 3)	3
ממ"ן	13	(פרק 4)	7
ממ"ן	14	(פרק 5)	9
ממ"ן	15	(פרק 6)	13
ממ"ן	16	(פרק 7)	15
אוסף שאלות לתרגול עצמי		(פרק 8)	17

נספחים

נספח א	דף נוסחאות לבחינה	22
נספח ב	רשימת טענות להוכחה בבחינה	24
נספח ג	טבלת קירובים לערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית	26

אל הסטודנטים,

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב".

בחוברת זו תמצאו תיאור, מלא ככל האפשר, של הקורס וכן פרטים על כלל פעילויותיכם במהלך הלימודים. רצוי שתראו בה מעין מדריך אישי, שתפקידו להבהיר לכם עניינים שונים. קראו בעיון רב את כל הסעיפים שלהלן, לפני שתתחילו בלימודיכם.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: http://telem.openu.ac.il .

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

בכל בעיה שמתעוררת תוכלו לפנות למרכזת ההוראה בקורס – נעמי מילאנו-רוזנטל, בטלפון 09-7781428, בפקס 09-7780631 או בדואר האלקטרוני לכתובת naomimi@openu.ac.il .

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה,

צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (מס' קורס 20425 / 2013א)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן למנחה
1	19.10.2012-14.10.2012	1		
2	26.10.2012-21.10.2012	2 + 1		
3	2.11.2012-28.10.2012	2		
4	9.11.2012-4.11.2012	3 + 2		ממ"ן 11 4.11.2012
5	16.11.2012-11.11.2012	3		
6	23.11.2012-18.11.2012	4 + 3		
7	30.11.2012-25.11.2012	4		ממ"ן 12 25.11.2012
8	7.12.2012-2.12.2012	5 + 4		
9	14.12.2012-9.12.2012 (א-ו חנוכה)	5		ממ"ן 13 9.12.2012
10	21.12.2012-16.12.2012	6 + 5		
11	28.12.2012-23.12.2012	6		ממ"ן 14 23.12.2012
12	4.1.2013-30.12.2012	7 + 6		
13	11.1.2013-6.1.2013	7		ממ"ן 15 6.1.2013
14	18.1.2013-13.1.2013	7		
15	25.1.2013-20.1.2013	8		ממ"ן 16 20.1.2013

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים, מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

נקודות זכות

הקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב" מקנה למסיימים אותו 4 נקודות זכות.

הדרישות לקבלת 4 נקודות זכות הן:

א. הגשת מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות.

ב. ציון מינימלי 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון מינימלי 60 בקורס.

הגשת מטלות

הקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב" כולל חוברת קורס ובה 6 מטלות להגשה, המיועדות לתרגול רוב נושאי הלימוד של הקורס, ואוסף שאלות לתרגול עצמי של נושאי הלימוד של פרק 8.

עליכם להגיש מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות, כאשר המשקל של כל מטלה להגשה הוא 5 נקודות (כלומר, עליכם להגיש לפחות 3 ממטלות ההגשה). המועד האחרון להגשה של כל מטלה מופיע בכותרתה. שימו לב, **בקורס זה לא ניתנות מטלות השלמה!**

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1 ו- 2

קומבינטוריקה; חישובי הסתברויות קומבינטוריים

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: א 2013 **מועד אחרון להגשה:** 4.11.2012

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (21 נקודות)

מורה מעוניין ש- 12 ילדים יבצעו משימה כלשהי.

לשם כך, הוא מחלק את 12 ילדי הקבוצה, שהם 7 בנים ו- 5 בנות, לארבע שלישיות.

על כל שלישייה הוא מטיל לבצע את המשימה **באחד** מהימים ראשון עד רביעי, כך שבכל יום בדיוק אחת מן השלישיות מבצעת את המשימה, ובסך-הכל כל השלישיות מבצעות אותה.

(7 נק') א. כמה אפשרויות חלוקה ושיבוץ שונות יש למורה?

(7 נק') ב. בכמה מאפשרויות החלוקה והשיבוץ ייווצרו שתי שלישיות של בנים?

(7 נק') ג. בכמה מאפשרויות החלוקה והשיבוץ אין אף שלישייה של בנות?

שאלה 2 (20 נקודות)

דפנה מסדרת במעגל 12 בובות **שונות**: 7 בהירות שיער ו- 5 כהות שיער.

אחר-כך, היא מחלקת להן 12 כפיות **שונות**: 7 אדומות ו- 5 ירוקות. כפית אחת לכל בובה.

(6 נק') א. מהו מספר הסידורים השונים שהיא יכולה ליצור?

(6 נק') ב. מהו מספר הסידורים השונים, שבהם כל הבובות כהות השיער מקבלות כפיות ירוקות?

(8 נק') ג. מהו מספר הסידורים השונים שבהם אין שתי בובות כהות שיער זו ליד זו ואין שתי כפיות ירוקות שניתנות לבובות סמוכות?

רמז: סדרו בנפרד את הבובות ואת הכפיות ואז שלבו בין הסידורים.

שאלה 3 (30 נקודות)

נתונה קבוצה של 20 ילדים – 10 בנים ו- 10 בנות.

מחלקים לילדים באקראי 20 כובעים צבעוניים – 10 אדומים, 5 כחולים ו- 5 ירוקים.

כל אחד מהילדים מקבל כובע אחד, ואין הבדל בין כובעים <u>מאותו</u> הצבע.

(6 נק׳) א. כמה אפשרויות חלוקה קיימות?

(6 נק׳) ב. מהי ההסתברות שכל הכובעים הכחולים יינתנו לְבָנים?

(6 נק׳) ג. מהי ההסתברות שלפחות בן אחד ולפחות בת אחת יקבלו כובעים אדומים?

ד. לאחר שמחלקים לילדים את הכובעים, הם מסתדרים באופן אקראי בשורה.

(6 נק׳) 1. מהי ההסתברות שכל הילדים שקיבלו כובעים ירוקים יעמדו במחצית השמאלית של השורה (כלומר, במקומות 1- 10)?

(6 נק׳) 2. מהי ההסתברות שלא יהיו בשורה שני ילדים סמוכים שלשניהם כובעים ירוקים?

שאלה 4 (29 נקודות)

באכסניה 7 חדרים זוגיים. לבעל האכסניה יש 14 מפתחות לחדרים – 2 מפתחות זהים לכל חדר.

בערב מגיעים לאכסניה 14 אורחים, 7 נשים ו- 7 גברים, שהם 7 זוגות נשואים, כדי ללון בה.

בעל האכסניה אינו יודע שמדובר ב-7 זוגות נשואים ומחלק להם באקראי את 14 המפתחות.

(7 נק׳) א. כמה חלוקות שונות יש במרחב המדגם?

(7 נק׳) ב. מהי ההסתברות שבדיוק ב- 5 זוגות האישה תקבל מפתח זהה לזה שקיבל בעלה?

(7 נק׳) ג. מהי ההסתברות שבכל אחד מהחדרים יהיו גבר ואישה (כלומר, זוג מעורב אך לאו דווקא זוג נשוי)?

(8 נק׳) ד. מהי ההסתברות שבדיוק ב- 2 זוגות האישה תקבל מפתח זהה לזה שקיבל בעלה?

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 2 ו- 3

דיאגרמת ון וטענות הסתברות בסיסיות; הסתברות מותנית

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2013א **מועד אחרון להגשה:** 25.11.2012

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

בחלק מהשאלות המופיעות בממ"ן זה **מומלץ** לצייר עצי-הסתברות.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהליך ייצור של רכיב מסוים מורכב משלושה שלבים, שבכל אחד מהם הוא עלול להיפגם.
הפגם הנוצר בכל שלב אופייני רק לאותו שלב.
אין דרך לבחון את הפגמים במהלך הייצור, אלא רק בסופו.
נניח שידוע כי – ההסתברות שהרכיב לא ייפגם בשלב השלישי היא 0.8;
ההסתברות שהרכיב ייפגם רק בשלבים הראשון והשני היא 0.06;
הסתברות שהרכיב ייפגם בשלב הראשון ובשלב השלישי היא 0.15;
ההסתברות שהרכיב ייפגם בדיוק בשני שלבים היא 0.15;
אם הרכיב נפגם בשלב השלישי, ההסתברות שלא ייפגם בשלבים האחרים היא 0.05;
אם הרכיב לא נפגם בשלב השלישי,
ההסתברות שלא ייפגם גם בשלבים האחרים היא 0.9;
ואם הרכיב נפגם בשלב השני, אז בהכרח הוא ייפגם לפחות בשלב נוסף אחד.

(12 נק') א. הגדר בדיוק <u>3 מאורעות</u> המתאימים לבעיה ופרט באמצעותם את רשימת הנתונים שלעיל.
צייר דיאגרמת ון מתאימה למאורעות שהגדרת, ורשום בה את <u>כל</u> ההסתברויות המתאימות לשטחים החלקיים שנוצרים בה. (במידת האפשר וביחס לנתוני הבעיה.)
הסבר <u>בקצרה</u>, את דרך החישוב של ההסתברויות הרשומות בדיאגרמה, וּוַדא שסכומן הוא 1. <u>נסח את ההסברים באמצעות טענות הסתברות</u>.

(2 נק') ב. מהי ההסתברות שיהיו ברכיב מקרי כל שלושת הפגמים האפשריים?

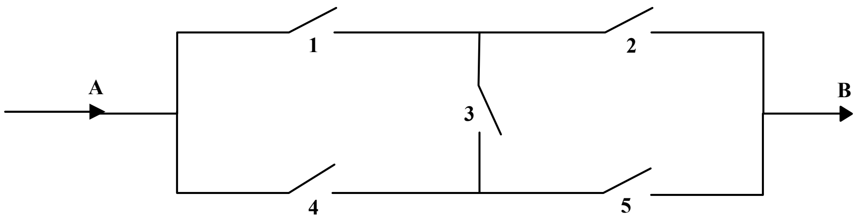
(2 נק') ג. מהי ההסתברות שרכיב מקרי ייפגם בשלב הראשון או בשלב השני?

(2 נק') ד. מהי ההסתברות שרכיב מקרי ייפגם בשלב השני, אם ידוע שלא נפגם בשלב הראשון?

(2 נק') ה. אם ידוע שרכיב מקרי לא נפגם לפחות באחד מהשלבים, מהי ההסתברות שנפגם בשלב הראשון?

שאלה 2 (24 נקודות)

במעגל שלהלן, כל אחד מחמשת המתגים **סגור** בהסתברות 0.7 (ואז יכול לעבור בו זרם).
כמו כן, כל מתג פועל באופן בלתי-תלוי באחרים.



(6 נק׳)   א.   אם מתג 3 פתוח, מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?

(6 נק׳)   ב.   אם מתג 3 סגור, מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?

(6 נק׳)   ג.   מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?

(6 נק׳)   ד.   אם לא עובר זרם, מהי ההסתברות שבדיוק 3 מתגים סגורים?

שאלה 3 (24 נקודות)

בארצות הברית נערך מחקר שמטרתו לבחון את טיבה של שיטה חדשה לבדיקת זיהומים במי-נהרות. בימים שבהם יש זיהום קשה במיוחד במי-נהר, נוהגים לאסור על הדיג בנהר. כשאין זיהום במי-הנהר לא אוסרים אף פעם על הדיג במימיו.

כדי לבחון את שיטת הבדיקה החדשה, נלקחת דגימת מים מנהר מסוים בכל יום. הדגימה ממי-הנהר נבדקת בשתי שיטות. שיטת הבדיקה הראשונה מסובכת למדי, אך תוצאתה מהימנה במאת האחוזים ואילו שיטת הבדיקה השנייה היא השיטה החדשה שאותה בוחנים.

מתברר כי –

מי-הנהר מזוהמים (ברמה זו או אחרת) ב- 20% מהימים שבהם הם נבדקים;

ב- 75% מן הימים שבהם המים מזוהמים מתגלה הזיהום גם בשיטת הבדיקה החדשה,

אך שיטה זו מגלה זיהומים גם ב- 10% מן הימים שבהם מי-הנהר אינם מזוהמים כלל;

ב- 90% מהימים שבהם מתגלה זיהום בשתי שיטות הבדיקה, אוסרים על הדיג בנהר;

וב- 20% מהימים שבהם מי-הנהר מזוהמים, אך בשיטת הבדיקה החדשה לא נמצא כל זיהום, אוסרים על הדיג בנהר.

אם אין תלות בין ימים שונים ונבחר יום מקרי מבין ימי-הבדיקה –

(8 נק׳)   א.   מהי ההסתברות שביום זה התגלה זיהום במי-הנהר באמצעות שיטת הבדיקה החדשה?

(8 נק׳)   ב.   מהי ההסתברות שביום הנבחר נאסר הדיג בנהר?

(8 נק׳)   ג.   נניח שבשיטת הבדיקה החדשה לא נמצא כל זיהום במי-הנהר ביום שנבחר.
מהי ההסתברות, שלמרות זאת, הדיג נאסר ביום זה?

שאלה 4 (10 נקודות)

בעיר מסוימת יש מוניות בשני צבעים. 15% מהמוניות ירוקות והיתר כחולות.

בתאונת פגע-וברח שהתרחשה בעיר היתה מעורבת מונית מקומית.

עד ראייה שנכח במקום טען, שהמונית המעורבת בתאונה היתה ירוקה.

כדי לבחון את אמינות העד, נערכו לו מבחני ראייה ונמצא בהם שהוא מזהה נכון את צבע המונית ב- 70% מהמקרים.

מהי ההסתברות שהמונית המעורבת אכן ירוקה?

שאלה 5 (12 נקודות)

לצוות של בעל ואישה, המשתתף בחידון טלביזיה, מוצגת שאלה, שהתשובות האפשריות עליה הן "אמת" או "שקר". הבעל והאישה ישיבו, כל אחד ובאופן בלתי-תלוי, תשובה נכונה בהסתברות p.

באיזו מן הדרכים הבאות כדאי לזוג לנקוט?

1. בוחרים באקראי אחד מהם והוא משיב על השאלה.
2. שניהם דנים בשאלה.
   אם הם תמימי דעים, הם משיבים את התשובה המשותפת;
   אם הם חלוקים בדעותיהם, הם מטילים מטבע תקין כדי לבחור בתשובה שישיבו.

שאלה 6 (10 נקודות)

מטילים מטבע תקין 20 פעמים.

מהי ההסתברות שהתוצאה H תתקבל בדיוק 10 פעמים (ב- 20 ההטלות), אם ידוע שהיא התקבלה בדיוק 5 פעמים במהלך 8 ההטלות הראשונות (מתוך ה- 20)?

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: **20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב**

חומר הלימוד למטלה: פרק 4

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: א 2013 **מועד אחרון להגשה:** 9.12.2012

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (26 נקודות)

נתונה קבוצה של N אנשים, כאשר N הוא משתנה מקרי אחיד בדיד בין 1 ל-10.

(כלומר, הערכים האפשריים של המשתנה המקרי N הם 1, 2, ..., 10, וכל אחד מתקבל בהסתברות 0.1.)

נותנים לכל אחד מאנשי הקבוצה קופסת גפרורים אחת.

מספר הגפרורים בכל קופסה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 20, ואין תלות בין הקופסאות.

(6 נק') א. מהי ההסתברות שבקופסה מקרית יהיו בדיוק 24 גפרורים?

(6 נק') ב. בוחרים באקראי 10 קופסאות גפרורים.
מהי ההסתברות שתהיה ביניהן לפחות קופסה אחת שיש בה בדיוק 24 גפרורים?

(6 נק') ג. בוחרים באקראי קופסאות גפרורים, בזו אחר זו, עד למציאת 5 קופסאות שיש בהן בדיוק 24 גפרורים.
מהי ההסתברות שתדרשנה לשם כך בדיוק 100 בחירות של קופסאות גפרורים?

(8 נק') ד. מחלקים לאנשי הקבוצה קופסאות גפרורים: לכל אחד – קופסה אחת.
מהי ההסתברות שאף לא אחד מאנשי הקבוצה יקבל קופסת גפרורים שיש בה בדיוק 24 גפרורים?

שאלה 2 (16 נקודות)

יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.

נגדיר את המשתנה המקרי Y על-ידי:
$$Y = \begin{cases} X & , \quad X \le 2 \\ X-1 & , \quad X \ge 3 \end{cases}$$

(8 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות של Y.
רשום אותה באופן מדויק.

(8 נק') ב. הראה כי $E[Y] = p(2-p) + \frac{1-p}{p}$.

שאלה 3 (12 נקודות)

נתונה קבוצה של 20 ילדים – 10 בנים ו- 10 בנות.

מחלקים לילדים באקראי 20 כובעים צבעוניים – 10 אדומים, 5 כחולים ו- 5 ירוקים.

כל אחד מהילדים מקבל כובע אחד, ואין הבדל בין כובעים מאותו הצבע.

יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הבנות שמקבלות כובעים אדומים.

(6 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות של X.

(6 נק') ב. חשב את השונות של X.

שאלה 4 (22 נקודות)

בתחרות קליעה למטרה, כדי לעבור את השלב הראשון, על כל משתתף להצליח בקליעותיו למטרה 5 פעמים. אולם, לפי כללי התחרות, המשתתף רשאי לנסות לקלוע למטרה לכל היותר 7 פעמים. כעת, אם הקליעה המוצלחת החמישית של משתתף בשלב הראשון מתרחשת לפני שביצע את כל 7 נסיונותיו – הוא מפסיק לנסות לקלוע ועובר לשלב השני. לעומת זאת, אם המשתתף בשלב הראשון צובר (בדיוק) 3 קליעות לא-מוצלחות (לא בהכרח רצופות) – אין סיכוי שיעבור לשלב הבא, ולכן הוא מפסיק מייד לנסות לקלוע ופורש מן התחרות. (נניח שאין אף משתתף שפורש מן התחרות בנסיבות אחרות.)

בשלב השני של התחרות, כל משתתף (שהגיע לשלב הזה) קולע למטרה רק עד להצלחה הראשונה.

נניח שאין תלות בין קליעות שונות של משתתף, וכי כל נסיון קליעה למטרה של משתתף בתחרות מסתיים בהצלחה בהסתברות 0.75 בשלב הראשון ובהסתברות 0.6 בשלב השני.

(14 נק') א. נסמן ב-X את מספר הפעמים שמשתתף אקראי בתחרות מנסה לקלוע למטרה בשלב הראשון שלה.

1. מצא את פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X.

2. חשב את השונות של X.

(8 נק') ב. מהי ההסתברות שמשתתף אקראי בתחרות ינסה לקלוע למטרה בסך-הכל 7 פעמים במהלך התחרות?

שאלה 5 (24 נקודות)

נתונה קבוצה של n אנשים, וביניהם אסף.

כל שניים מחברי-הקבוצה לוחצים ידיים בהסתברות p $(0 < p < 1)$.

אין תלות בין זוגות שונים של אנשים מהקבוצה.

(6 נק') א. מהי שונות מספר האנשים בקבוצה שאסף לוחץ להם יד?

(6 נק') ב. מהי שונות מספר לחיצות הידיים שמתבצעות בקרב חברי-הקבוצה?

ג. נניח כי $n = 1{,}001$ וכי $p = 0.005$.

ידוע שאסף לחץ יד עם חבר-קבוצה אחד לפחות.

(6 נק') 1. מהי ההסתברות שאסף לחץ יד עם 3 בדיוק מחברי-הקבוצה?

(6 נק') 2. חשב קירוב פואסוני להסתברות המותנית שאסף לחץ יד עם 3 בדיוק מחברי-הקבוצה?

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 5

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: א 2013 **מועד אחרון להגשה:** 23.12.2012

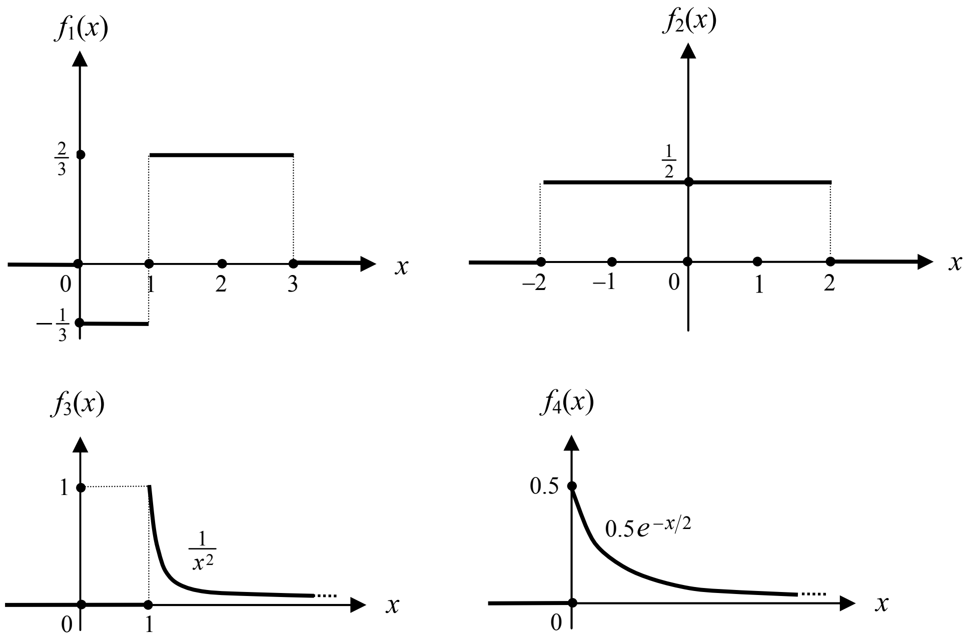
שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (36 נקודות)

נתונות ארבע פונקציות $f_X(x)$:



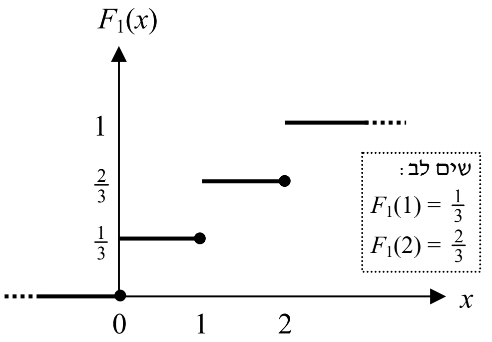
(8 נק') א. קבע לגבי כל אחת מהפונקציות, האם היא פונקציית צפיפות. נמק את קביעותיך.

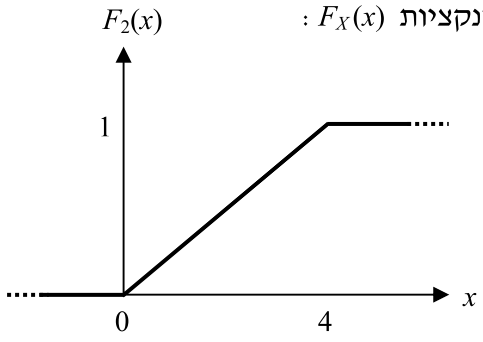
ב. לכל פונקציה, שקבעת שהיא פונקציית צפיפות –

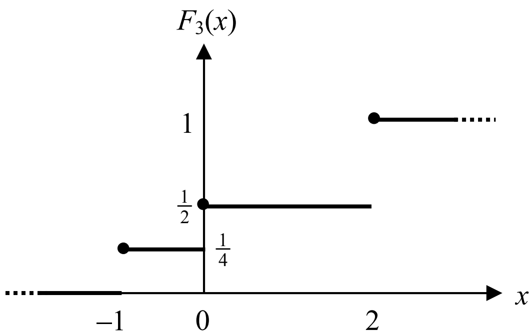
(8 נק') 1. חשב את התוחלת המתאימה לה;

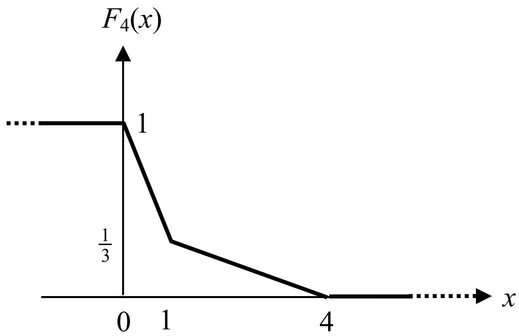
(4 נק') 2. חשב את $P\{X > 3 \mid X > 2\}$.

נתונות ארבע פונקציות $F_X(x)$:









(8 נק׳) ג. קבע לגבי כל אחת מהפונקציות, האם היא פונקציית התפלגות מצטברת. בכל מקרה, נמק את קביעתך.

(8 נק׳) ד. לכל פונקציה, שקבעת שהיא פונקציית התפלגות מצטברת, חשב את התוחלת ואת השונות של המשתנה המקרי שזוהי פונקציית ההתפלגות המצטברת שלו.

שאלה 2 (20 נקודות)

בחבילת נרות-חנוכה יש 45 נרות, שהאורך של כל אחד מהם מקרי.
אין תלות בין אורכי נרות שונים.

א. **במפעל א** מייצרים נרות-חנוכה, שהתפלגות האורך (בס״מ) של כל אחד מהם היא נורמלית עם הפרמטרים 13 ו- 0.1^2.

(6 נק׳) 1. מהי ההסתברות שבחבילה מקרית יהיו בדיוק 30 נרות שהאורך שלהם בין 12.82 ס״מ ל- 13.06 ס״מ?

(6 נק׳) 2. מהו אורך-הנר ש- 92% מהנרות קצרים ממנו?

(8 נק׳) ב. **במפעל ב** מייצרים נרות-חנוכה, שהתפלגות האורך (בס״מ) של כל אחד מהם היא נורמלית עם הפרמטרים 15 ו- σ^2.
ידוע שההסתברות, שהנר הקצר ביותר בחבילה מקרית (של 45 נרות) ארוך מ- 14.6 ס״מ, היא 0.354206. מצא את σ.

שאלה 3 (24 נקודות)

נתונה פונקציית הצפיפות: $-\infty < x < \ln a$, $f_X(x) = \frac{e^{2x}}{2}$

(6 נק׳) א. חשב את הערך של a .

(6 נק׳) ב. חשב את $E[X]$.

(6 נק׳) ג. חשב את $E[8X+4]$.

(6 נק׳) ד. חשב את $E[e^X]$.

שאלה 4 (20 נקודות)

זמן ההמתנה (בדקות) לאוטובוס בתחנה מסוימת (מרגע ההגעה לתחנה ועד לרגע שבו האוטובוס מגיע אליה), הוא משתנה מקרי מעריכי עם תוחלת 10.

אולם, אם התנועה עמוסה במיוחד, תוחלת זמן ההמתנה עולה ל- 20 דקות.

ההסתברות, שהתנועה תהיה עמוסה בזמן ההמתנה לאוטובוס, היא 0.18.

(6 נק׳) א. מהי ההסתברות שאדם המגיע בזמן מקרי לתחנה יחכה בה יותר מרבע שעה?

(7 נק׳) ב. אם אדם מחכה כבר בתחנה יותר מ-15 דקות, מהי ההסתברות שהתנועה עמוסה?

(7 נק׳) ג. אדם מגיע ביום מקרי לתחנה ולאחר 8 דקות עדיין נמצא בה.
מהי ההסתברות שייאלץ להמתין להגעת האוטובוס 7 דקות נוספות לכל היותר?

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 6

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2013 א **מועד אחרון להגשה:** 6.1.2013

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (24 נקודות)

מפזרים באקראי n כדורים שונים ב- n תאים ממוספרים. נניח כי $n > 2$.

יהיו X = מספר הכדורים בתא 1 ;

Y = מספר הכדורים בתא 2 ;

W = מספר התאים הריקים.

(6 נק') א. האם המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-תלויים? נמק בפירוט את תשובתך.

(6 נק') ב. האם המשתנים המקריים X ו- W בלתי-תלויים? נמק בפירוט את תשובתך.

(6 נק') ג. רשום באופן מדויק את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .

(6 נק') ד. חשב את $P\{XY = 0\}$.

שאלה 2 (20 נקודות)

מטילים 30 פעמים שלוש קוביות תקינות.

יהיו: X = מספר ההטלות שבהן לא מתקבלת התוצאה 4 באף אחת מהקוביות ;

Y = מספר ההטלות שבהן התוצאה 4 מתקבלת בדיוק באחת משלוש הקוביות ;

Z = מספר ההטלות שבהן התוצאה 4 מתקבלת בדיוק בשתיים משלוש הקוביות.

(8 נק') א. חשב את $P\{X = 16, Y = 11, Z = 2\}$.

(6 נק') ב. רשום את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.

כלומר, רשום ביטוי כללי ל- $P\{X = i\ , Y = j\}$.

(6 נק') ג. חשב את $\mathrm{Var}\,(X + Y + Z)$.

שאלה 3 (28 נקודות)

נתונה קופסה ובה 20 כדורים:

10 כדורים אדומים ממוספרים מ-1 עד 10 ו- 10 כדורים כחולים ממוספרים מ-1 עד 10.

מוציאים מהקופסה 4 כדורים, באקראי וללא החזרה.

נסמן ב- X את מספר זוגות הכדורים שנבחרים,

כאשר שני כדורים נחשבים ל"זוג" אם רשום עליהם אותו המספר;

ונסמן ב- Y את מספר הכדורים שנבחרים הנושאים את המספרים 1 או 2.

(12 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y ואת פונקציות ההסתברות השולית של X ו- Y.

ערוך את תשובתך בטבלה ובדוק שסכום ההסתברויות המשותפות שווה ל-1.

(4 נק') ב. האם המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-תלויים? נמק את תשובתך.

(6 נק') ג. אם ידוע שנבחר בדיוק זוג כדורים אחד, מהי ההסתברות שזהו זוג כדורים הנושא את המספרים 1 או 2?

(6 נק') ד. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $Y = 2$.

שאלה 4 (10 נקודות)

נניח כי X_1, X_2, X_3 ו- X_4 הם משתנים מקריים בלתי-תלויים שכל אחד מהם מקבל את הערכים 1, 2 או 3 בהסתברויות שוות (כלומר, הסתברות ⅓ לכל ערך אפשרי);

ונגדיר את המשתנה המקרי $Y = \min_{i=1,\dots,4} X_i$.

מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X_1 ו- Y.

שאלה 5 (18 נקודות)

מספר הגברים הנפגעים בתאונות דרכים במהלך שנה אחת, בקטע כביש מסוים, הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 4; מספר הנשים הנפגעות בתאונות דרכים, במהלך שנה אחת באותו קטע כביש, הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 3.

אין תלות בין מספר הנפגעים/ות בקטע כביש זה באותה השנה או בשנים שונות.

(6 נק') א. מהי ההסתברות שבשנה מסוימת ייפגעו בקטע הכביש הזה 9 או 10 בני אדם?

(6 נק') ב. אם בארבע שנים נפגעו בקטע כביש זה 30 בני אדם בסך-הכל, מהי ההסתברות שבין הנפגעים בשנתיים הראשונות (מתוך ארבע השנים האלו) היו בדיוק 4 נשים ובשנתיים האחרונות היו בדיוק 6 נשים?

(6 נק') ג. ההסתברות שהגיל של אישה, שנוסעת בקטע כביש זה, גבוה מ-50 היא 0.4 (ואין תלות בין גיל האישה לסיכוייה להיפגע). מהי ההסתברות שבשנה מסוימת ייפגעו בקטע הכביש הזה לפחות 2 נשים שגילן גבוה מ-50?

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: א 2013 **מועד אחרון להגשה:** 20.1.2013

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (28 נקודות)

נניח שההתפלגות של המשתנה המקרי X היא פואסונית עם הפרמטר λ, ונניח שההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה Y בהינתן $X=i$ היא גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{2^i}{2^i+1}$, לכל $i=0,1,\ldots$.

נגדיר את המשתנה המקרי W על-ידי $W = 2^{-X}$.

(7 נק') א. חשב את $P\{Y \le n \mid X = i\}$, לכל $n=1,2,\ldots$ ו- $i=0,1,\ldots$.

(7 נק') ב. חשב את התוחלת ואת השונות של W.

(7 נק') ג. חשב את התוחלת של Y.

(7 נק') ד. חשב את השונות של Y.

שאלה 2 (14 נקודות)

נתונה קבוצה של N אנשים, כאשר N הוא משתנה מקרי אחיד בדיד בין 1 ל-10.
(כלומר, הערכים האפשריים של המשתנה המקרי N הם 1, 2, ..., 10, וכל אחד מתקבל בהסתברות 0.1.)

נותנים לכל אחד מאנשי הקבוצה קופסת גפרורים אחת.
מספר הגפרורים בכל קופסה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 20.

אין תלות בין קופסאות גפרורים שונות ואין תלות בין קופסאות הגפרורים למספר האנשים בקבוצה.

(7 נק') א. חשב את התוחלת של מספר הגפרורים הכולל שמקבלים N אנשי הקבוצה.

(7 נק') ב. חשב את השונות של מספר הגפרורים הכולל שמקבלים N אנשי הקבוצה.

שאלה 3 (18 נקודות)

נתונה קבוצה של 30 אנשים – 15 גברים ו-15 נשים.
מחלקים באקראי את הקבוצה לזוגות.

יהי X מספר הזוגות המעורבים (כלומר, זוגות המורכבים מגבר ואישה) שנוצרים בחלוקה.

(8 נק׳) א. חשב את התוחלת של X.

(10 נק׳) ב. חשב את השונות של X.

שאלה 4 (10 נקודות)

בין שני עמודים לצד הדרך מתוחים 2 כבלי חשמל, האחד מעל השני.
התפלגות מספר הציפורים שיושבות <u>על כל אחד</u> מן הכבלים היא בינומית עם הפרמטרים 30 ו- 0.5.
אין תלות בין מספרי הציפורים על כל אחד מן הכבלים.

יהיו: X = מספר הציפורים על הכבל התחתון ;
Y = מספר הציפורים על שני הכבלים יחדיו.

חשב את $\rho(X,Y)$.

שאלה 5 (16 נקודות)

מטילים קובייה תקינה 21 פעמים. נגדיר שני משתנים מקריים :

X_1 – מספר ההטלות שהתקבלו בהן התוצאות 1 או 2 ;
X_2 – מספר ההטלות שהתקבלו בהן התוצאות 3, 4, 5 או 6.

(8 נק׳) א. חשב את מקדם המתאם בין X_1 ל- X_2.

(8 נק׳) ב. נגדיר $Y_i = (-1)^{X_i}$ לכל $i = 1,2$.
חשב את השונות המשותפת של Y_1 ו- Y_2.

שאלה 6 (14 נקודות)

הפונקציה יוצרת המומנטים של המשתנה המקרי X קיימת לכל t ממשי ונתונה על-ידי :

$$M_X(t) = \left(\frac{1+e^{t-\theta}}{1+e^{-\theta}}\right)^{3n} \quad , \quad -\infty < \theta < \infty \; ; \; n = 1,2,...$$

(7 נק׳) א. חשב את התוחלת של X.

(7 נק׳) ב. זהה את ההתפלגות של X.

אוסף שאלות לתרגול עצמי

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 8

1. לאורך החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר $\frac{1}{500}$.

אין תלות בין נורות שונות מאותו הסוג.

אדם קנה 100 נורות מסוג זה.

מצא קירוב להסתברות ש<u>ממוצע</u> אורך החיים של 100 הנורות שנקנו יהיה בין 450 ל- 520 שעות.

2. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1,000.

א. חשב קירוב נורמלי להסתברות ש- X יקבל את הערך 1,000.

מדוע אפשר לחשב קירוב נורמלי במקרה זה?

ב. חשב חסם תחתון ל- $P\{|X-1{,}000|\le 40\}$, באמצעות אי-שוויון צ'בישב.

3. נתונים 5 משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, X_1, X_2, ... , X_5 , שכל אחד מהם מקבל את הערכים 0, 3 ו- 6 בהסתברויות שוות (כלומר, הסתברות ⅓ לכל ערך).

נגדיר $Y=\sum_{i=1}^{5}X_i$. חשב חסם עליון ל- $P\{Y>25\}$:

א. בעזרת אי שוויון מרקוב;

ב. בעזרת אי שוויון צ'בישב.

4. א. יהי X משתנה מקרי אי-שלילי שתוחלתו μ סופית, ויהי $t>0$.

הוכח כי $P\{X\le \mu t\}\ge 1-\frac{1}{t}$.

ב. יהיו X_1, X_2, ... , X_n $(n=1,2,\ldots)$, משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר p $(0<p<1)$.

הראה בעזרת אי-שוויון צ'בישב שמתקיים: $P\left\{\overline{X}_n\le \frac{2}{p}\right\}\ge 1-\frac{1-p}{n}$.

הערה: $\overline{X}_n=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$

5. הוכח, בעזרת משפט הגבול המרכזי, כי $\frac{1}{2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}e^{-n}\frac{n^i}{i!}$.

6. יהיו X_1 , X_2 , ... , X_{200} משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפונקציה יוצרת המומנטים: $M_X(t) = \left(\frac{e^t}{5-4e^t}\right)^2$, עבור $t < \ln 1.25$.

מצא קירוב ל- $P\left\{1,910 \le \sum_{i=1}^{200} X_i < 2,050\right\}$.

7. א. נתון ארגז ובו 120 כדורים שעליהם רשומים מספרים.

לכל $i = 1,2,\ldots,15$, יש בארגז i כדורים שהמספר הרשום עליהם הוא i .

בוחרים כדורים מהארגז, בזה אחר זה **ועם החזרה**, כך שבכל בחירה יש לכל הכדורים סיכויים שווים להיבחר.

נניח שבוחרים (בשיטה המתוארת לעיל) בדיוק 100 כדורים.

יהי Y הסכום הכולל של 100 המספרים הרשומים על הכדורים שנבחרו.

חשב קירוב ל- $P\{1,000 \le Y \le 1,100\}$.

הערה: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ב. מעגלים 50 מספרים שנבחרו באקראי, כל אחד לשלם הקרוב לו ביותר, ומסכמים את 50 המספרים המעוגלים.

אם לכל אחת משגיאות-העיגול יש התפלגות אחידה בקטע $[-0.5, 0.5)$, מהו קירוב להסתברות שההפרש <u>המוחלט</u> בין הסכום המתקבל לבין הסכום המדויק של 50 המספרים עולה על 3?

8. אורך-החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים מתפלג מעריכית עם הפרמטר 0.01, והוא אינו תלוי באורך-החיים של נורות אחרות.

כמה נורות מסוג זה עליך לקנות (בקירוב), אם ברצונך להבטיח 5,000 שעות-אור בהסתברות 0.95 לפחות?

הנח שאתה מתקין נורה אחת, ובהישרפה מחליף אותה מייד באחרת. זמן ההחלפה זניח.

9. נתונים שלושה ארגזים בלתי-תלויים.

לכל ארגז אפשר להכניס X קופסאות, כאשר ל- X יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 150.

א. חשב **קירוב** להסתברות שלשלושת הארגזים יחדיו יוכנסו לפחות 480 קופסאות.

ב. חשב **קירוב** להסתברות ש<u>ההפרש המוחלט</u> בין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז הראשון לבין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז השני יהיה גדול מ- 10.

בשני הסעיפים נמק את פתרונך.

10. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- 0.5, עבור $n > 4$.

הוכח בעזרת אי שוויון צ'בישב שמתקיים: $P\{X \ge n-2\} \le \frac{n}{2(n-4)^2}$.

11. רשום את החסמים מלעיל הקטנים ביותר (המוכרים לך) עבור $P\{X \geq 14\}$, בכל אחד מן המקרים הבאים:

א. X הוא משתנה מקרי אי-שלילי ותוחלתו 7;

ב. X הוא משתנה מקרי המקיים $X \geq -2$ ותוחלתו 7;

ג. X הוא משתנה מקרי שתוחלתו 7 ושונותו 4.

12. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת סופית μ ושונות סופית σ^2.

הנח ש-n גדול וחשב **קירוב** ל- $P\left\{\bar{X} \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} + \mu\right\}$.

13. המשקל W (בטונות) של מטען, שגשר מסוים יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק, הוא משתנה מקרי נורמלי שתוחלתו 400 וסטיית התקן שלו 40. נניח שהמשקל (בטונות) של מכונית הוא משתנה מקרי שתוחלתו 3 וסטיית התקן שלו 0.3. אם ברגע מסוים ההסתברות לגרימת נזק במבנה הגשר עולה על 0.1, מהו (בקירוב) המספר המינימלי של מכוניות הנמצאות אז על הגשר?

הנח שאין תלות בין משקלי מכוניות שונות ובין המשקל של כל מכונית לעומס שהגשר יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק.

נספחים

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

דף הנוסחאות יצורף לכל בחינה.

גירסת דף הנוסחאות, המובאת בחוברת מטלות זו, נכונה לחודש אוקטובר 2010.

לקראת הבחינה מומלץ לבדוק באתר הקורס אם לא חלו שינויים בדף הנוסחאות שיצורף לבחינה.

נספח ב: רשימת טענות להוכחה בבחינה

בכל בחינה עשויות להופיע טענות, מן הרשימה המובאת להלן, שאותן תִּדָרשו להוכיח במדויק.

ההוכחות של כל הטענות מן הרשימה מובאות באתר הקורס בקובץ נפרד.

משקל הטענות שתופענה בבחינה לא יעלה על 25 נקודות.

הטענות עשויות להופיע ביותר מאשר שאלה אחת.

גירסת רשימת הטענות, המובאת בחוברת מטלות זו, נכונה לחודש פברואר 2011.

לקראת הבחינה מומלץ לבדוק באתר הקורס אם לא חלו שינויים ברשימת הטענות לבחינה.

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}\quad,\quad i=0,1,...,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1}\cdot p\quad,\quad i=1,2,...$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i!\quad,\quad i=0,1,...$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r\quad,\quad i=r,r+1,...$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n}\quad,\quad i=0,1,...,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n}\quad,\quad i=m+1,m+2,...,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a)\quad,\quad a\le x\le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\ ,\ t\neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\quad,\ -\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x}\quad,\quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t)\quad,\quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,...,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot...\cdot p_r^{n_r}\quad,\ \sum n_i=n\ ,\ \sum p_i=1$			

נוסחת הבינום $(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$

כלל ההכלה וההפרדה $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)$

הסתברות מותנית $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

נוסחת הכפל $P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\cdot...\cdot P(A_n\mid A_1\cap A_2\cap...\cap A_{n-1})$

נוסחת ההסתברות השלמה $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)\quad,$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס $P(B_j\mid A)=\frac{P(A\mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)}\quad,$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת $E[X]=\sum_x x\,p_X(x)=\int x\,f(x)dx$

תוחלת של פונקציה של מ"מ $E[g(X)]=\sum_x g(x)p_X(x)=\int g(x)f(x)dx$

שונות $\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית $E[aX+b]=aE[X]+b$

$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון $P\{X>s+t\mid X>t\}=P\{X>s\}\quad,\quad s,t\ge 0$

תוחלת מותנית $E[X\mid Y=y]=\sum_x x\,p_{X|Y}(x\mid y)=\int x\,f_{X|Y}(x\mid y)dx$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X \mid Y=y) \;=\; E[X^2 \mid Y=y]-(E[X \mid Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] = E[E[X \mid Y]] = \sum_y E[X \mid Y=y]p_Y(y)$

(טענה מתרגיל ת26, עמוד 430) $E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X \mid Y]]$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) \;=\; E[\mathrm{Var}(X \mid Y)]+\mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY]-E[X]E[Y]$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) \big/ \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(at)$

כאשר X_i מ״מ ב״ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t)\cdot\ldots\cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X]$

(כאשר X_i מ״מ ב״ת ש״ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X) + (E[X])^2\mathrm{Var}(N)$

$$M_Y(t) = E\left[\left(M_X(t)\right)^N\right]$$

אי-שוויון מרקוב $P\{X \ge a\} \le E[X]/a \quad , \quad a>0$, X מ״מ אי-שלילי

אי-שוויון צ'בישב $P\{|X-\mu| \ge a\} \le \sigma^2/a^2 \quad , \quad a>0 \;,\; \mu,\sigma^2 < \infty$

משפט הגבול המרכזי $P\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) \Big/ \sqrt{n\sigma^2} \le a \right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(a) \quad , \quad \mu,\sigma^2 < \infty$, X_i מ״מ ב״ת וש״ה

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב״ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ״מ בינומיים (גיאומטריים) ב״ת עם אותו הפרמטר p הוא מ״מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ״מ פואסוניים ב״ת הוא מ״מ פואסוני.
- סכום של מ״מ נורמליים ב״ת הוא מ״מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ״מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב״ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1<x<1$$

$$\int (ax+b)^n\,dx = \tfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \ne -1 \quad ; \quad \int \tfrac{1}{ax+b}\,dx = \tfrac{1}{a}\ln(ax+b)$$

$$\int e^{ax}\,dx = \tfrac{1}{a}e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax}\,dx = \tfrac{1}{a\ln b}b^{ax}$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים :

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

$$\log_n a = \log_m a/\log_m n \quad ; \quad \log_n(a^b) = b\cdot\log_n a \quad ; \quad \log_n(ab) = \log_n a + \log_n b$$

נספח ב: טענות להוכחה בבחינה

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב - 20425

ההוכחות של הטענות, המובאות ברשימה שלהלן, נמצאות בקובץ נפרד באתר הקורס.

1. יהיו E ו- F מאורעות במרחב מדגם S. הוכח כי: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

2. יהיו F ו- G מאורעות זרים של ניסוי מקרי כלשהו. הוכח כי בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה, ההסתברות שהמאורע F יתרחש לפני המאורע G היא: $\dfrac{P(F)}{P(F)+P(G)}$

3. יהי X משתנה מקרי בדיד, שתוחלתו סופית, ויהיו a ו- b קבועים ממשיים. הוכח כי:

$$E[aX+b] = aE[X]+b \quad ; \quad \mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$$

4. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$. הוכח כי:

$$E[X] = np \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

5. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \lambda \; ; \; \mathrm{Var}(X) = \lambda$

6. יהי X משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים N, m ו- n. הוכח כי: $E[X] = n \cdot \frac{m}{N}$

7. יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \frac{1}{\lambda} \; ; \; \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

8. הוכח: אם מאורע מסוים מתרחש בהתאם לַהנחות של תהליך-פואסון עם קצב λ, אז משך הזמן החולף עד להתרחשות המופע הראשון של המאורע (החל מזמן 0) הוא משתנה מקרי מעריכי עם אותו הפרמטר λ.

9. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה.
הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda_X + \lambda_Y$.

10. יהיו X ו- Y משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.
הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים $(2, p)$.

11. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה.
הוכח שלמשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X+Y=n$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$.

12. יהי $Y = a + bX$, ונניח כי $\sigma_X^2 > 0$. הראה כי:

$$\rho(X,Y) = \begin{cases} +1 & , \quad b > 0 \\ -1 & , \quad b < 0 \end{cases}$$

13. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת ושונות סופיות, μ ו- σ^2, בהתאמה.

הוכח כי: $E[\overline{X}] = \mu \quad ; \quad \mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2/n$

14. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_r$ משתנים מקריים בעלי פונקציית התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $p_1, p_2, \ldots, p_r$.

הוכח: א. למשתנה המקרי X_i יש התפלגות שולית בינומית עם הפרמטרים n ו-p_i.

ב. למשתנה המקרי המותנה X_1 בהינתן $X_2 = j$, לכל $j = 0,1,\ldots,n$, יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n-j$ ו- $p_1/(1-p_2)$.

ג. $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$

15. יהיו X ו-Y משתנים מקריים בדידים בעלי תוחלות ושונויות סופיות.

הוכח:

$$E[X] = E[E[X \mid Y]]$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$$

16. הוכח: אם N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים אי-שליליים, ואם $X_1, X_2, \ldots$ הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב-N, אז מתקיים:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1]$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\mathrm{Var}(N)$$

הערה: כאשר $N = 0$, סכום המשתנים שווה גם הוא ל-0.

17. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי: $M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n \quad , \quad -\infty < t < \infty$

18. יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי: $M_X(t) = \dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \quad , \quad t < -\ln(1-p)$

19. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$.

הוכח כי: $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \quad , \quad -\infty < t < \infty$

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z)=P\{Z\le z\}=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt \qquad ; \qquad \Phi(-z)=1-\Phi(z) \qquad ; \qquad Z\sim N(0,1)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326