

שימו לב: ל- $P(A|B)$ כינויים רבים. למשל,

$$P(A|B) = \text{ההסתברות של המאורע } A \text{ בהינתן המאורע } B$$

$$= \text{ההסתברות של המאורע } A \text{ בתנאי המאורע } B$$

$$= \text{ההסתברות שהמאורע } A \text{ יתרחש אם ידוע שהמאורע } B \text{ התרחש}$$

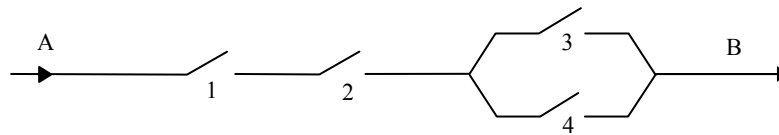
- יהיו A ו- B שני מאורעות המקיימים: $0 < P(A) < 1$ ו- $0 < P(B) < 1$. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
 - אם $P(A) = P(B)$ אז $P(A|B) = P(B|A)$;
 - אם $P(A|B) = P(B|A)$ אז $P(A) = P(B)$;
 - $P(A|B) + P(A|B^C) = 1$;
 - $P(A|B) + P(A^C|B) = 1$.
- א. נתון כי: $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.15$, $P(B|A^C) = 0.25$. חשב את $P(A \cap B)$.
 - ב. נתון כי: $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.25$, $P(B|A^C) = 0.25$. חשב את $P(A \cap B)$.
- יהי A מאורע במרחב מדגם S ויהיו B_1, B_2, \dots, B_n מאורעות זרים ולא ריקים ב- S , המקיימים $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$. הוכח כי $\min_{i=1, \dots, n} P(A|B_i) \leq P(A) \leq \max_{i=1, \dots, n} P(A|B_i)$.
- בבי"ס "התלמיד" לומדים 1,000 תלמידים, מתוכם 550 בנות. 800 מהתלמידים משתתפים לפחות בחוג אחד ומתוכם 25% משתתפים ביותר משני חוגים. הבנות שאינן משתתפות באף חוג מהוות 10% מהתלמידים, בעוד שהבנות שמשתתפות ביותר משני חוגים מהוות 5% מתלמידי ביה"ס. תלמיד אחד נבחר באופן מקרי:
 - א. מהי ההסתברות שהתלמיד משתתף ביותר משני חוגים?
 - ב. מהי ההסתברות שהתלמיד הוא בן שמשתתף ביותר משני חוגים?
 - ג. מהי ההסתברות שהתלמיד הוא בת או שהוא משתתף בחוג אחד לפחות?
 - ד. אם ידוע שהתלמיד משתתף ביותר משני חוגים, מהי ההסתברות שהוא בן?
- בסקר שנערך בין אזרחי המדינה התבררו הפרטים הבאים:

15% הם אקדמאים, 25% מעשנים ו- 50% הן נשים. מתוך הנשים – 20% מעשנות ו- 2% הן אקדמאיות מעשנות. מתוך הגברים – 20% אקדמאים. מתוך כלל האזרחים 5% הם אקדמאים מעשנים.

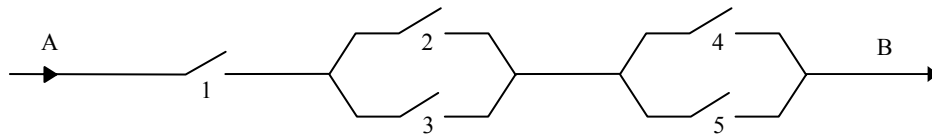
אזרח נבחר באופן מקרי:

 - א. מהי ההסתברות שהאזרח הנבחר הוא גבר אקדמאי?
 - ב. מהי ההסתברות שהאזרח הנבחר הוא אישה מעשנת?
 - ג. מהי ההסתברות שהאזרח הנבחר הוא גבר אקדמאי מעשן?
 - ד. התברר שהאזרח הנבחר אינו מעשן, מהי ההסתברות שהוא אקדמאי?
 - ה. התברר שהאזרח הנבחר הוא אקדמאי מעשן, מהי ההסתברות שהוא גבר?
 - ו. ידוע שהאזרח הנבחר הוא אקדמאי או מעשן, מהי ההסתברות שהוא גבר?

6. במעגל שלהלן, כל אחד מן הממסרים סגור בהסתברות 0.9 (ואז יכול לעבור בו זרם).
כמו כן, כל ממסר פועל באופן בלתי-תלוי באחרים.



- א. מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?
ב. אם לא עובר זרם מ-A ל-B, מהי ההסתברות שממסר 1 פתוח?
ג. אם לא עובר זרם מ-A ל-B, מהי ההסתברות שממסר 3 פתוח?
ד. אם ממסר 4 פתוח, מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?
7. במעגל שלהלן 5 ממסרים וידוע לגביהם כי –
ממסר 1 סגור בהסתברות 0.85 והוא בלתי-תלוי בכל הממסרים האחרים;
ממסר 2 סגור בהסתברות 0.9, אם ממסר 3 פתוח; וסגור בהסתברות 0.4, אם ממסר 3 סגור;
ממסר 3 סגור בהסתברות 0.95;
ממסרים 4 ו-5 פתוחים שניהם יחדיו בהסתברות 0.1 וכל אחד מהם בלתי-תלוי בממסר 2 ובממסר 3.



- א. מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?
ב. אם לא עובר זרם מ-A ל-B, מהי ההסתברות שממסר 2 פתוח?
ג. אם ממסר 2 פתוח, מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?
8. בארגז 60 קופסאות מלאות בסוכריות, 12 מהקופסאות מרובעות והיתר עגולות. בוחרים באקראי קופסה מהארגז ומוציאים ממנה סוכרייה באופן מקרי. ידוע כי מחצית מהסוכריות בכל קופסה מרובעת הן אדומות, 30% כחולות והיתר לבנות. כמו-כן, ידוע כי המאורעות "הקופסה שנבחרה מרובעת" ו"הסוכרייה שנבחרה כחולה" בלתי-תלויים, כי 36% מהסוכריות שבארגז הן לבנות, וכי בקופסאות עגולות יש סוכריות בצבעים כחול, לבן וצהוב.
א. בנה עץ הסתברות מתאים לבעיה.
ב. נבחרה סוכרייה לבנה. מהי ההסתברות שהיתה בקופסה עגולה?
ג. נבחרה סוכרייה צהובה. מהי ההסתברות שהיתה בקופסה עגולה?
ד. ביחס לנתוני הבעיה, הגדר שני מאורעות זרים זה לזה.
9. מבין המועמדים למשרה מסוימת, 40% הם דוברי צרפתית. $\frac{2}{3}$ מבין דוברי הצרפתית הם בעלי תואר אקדמי, וישנם גם בעלי תואר אקדמי מבין אלה שאינם דוברי צרפתית. כמו-כן ידוע כי מחצית מבעלי התואר האקדמי הינם דוברי צרפתית. מועמד אקראי נקרא לראיון:
א. מהי ההסתברות שהוא בעל תואר אקדמי?
ב. האם המאורעות: "המועמד דובר צרפתית" ו-"המועמד בעל תואר אקדמי" הם בלתי-תלויים?
ג. ההנהלה החליטה לזמן לראיון נוסף רק את אלו מבין המועמדים שהם דוברי צרפתית או בעלי תואר אקדמי. איזה אחוז מהמועמדים יזמן לראיון נוסף?

10. במשלוח המכיל 20 פריטים ישנם 5 פגומים. קיימת בדיקה לקביעת תקינות של פריט במשלוח – תוצאתה חיובית אם פריט הנבדק באמצעותה נמצא תקין, ושלילית אם הפריט נמצא פגום. אם הפריט אכן תקין, מתקבלת תוצאה שלילית בהסתברות 0.2, ואם הפריט פגום, תוצאת הבדיקה חיובית בהסתברות 0.1. שני פריטים נבחרים באופן מקרי:

- א. מה ההסתברות שהאחד תקין והשני פגום?
- ב. מה ההסתברות שבבדיקה תתקבלנה תוצאה אחת שלילית והשנייה חיובית?
- ג. אם ידוע שבבדיקה התקבלו תוצאה אחת שלילית והשנייה חיובית, מה ההסתברות ששני הפריטים תקינים?

11. בוחרים באקראי משפחה שבה שני ילדים. ידוע כי ל-30% ממשפחות אלו יש שתי בנות, ל-50% מהן יש בן אחד ובת אחת, וב-60% מהמשפחות הילד הבכור הוא בן.

- א. אם ידוע שלמשפחה שנבחרה יש בת צעירה, מהי ההסתברות שיש לה בן בכור?
- ב. אם ידוע שלמשפחה יש בדיוק בת אחת, מהי ההסתברות שהיא הצעירה מבין שני הילדים?
- ג. אם ידוע שלמשפחה יש לפחות בן אחד, מהי ההסתברות שיש לה שני בנים?
- ד. אם ידוע שלמשפחה יש לפחות בן אחד, מהי ההסתברות שיש לה בן בכור?

12. נתונים עשרה כרטיסי הגרלה, מתוכם שלושה נושאי פרסים. בהגרלה משתתפים עשרה אנשים וכל אחד בתורו בוחר כרטיס ולוקח אותו. לאחר שכל המשתתפים בוחרים כרטיסים, מכריזים על שלושת הזוכים.

- א. מהי ההסתברות שהשלישי בתור יזכה?
- ב. מהי ההסתברות שהשביעי בתור יזכה?
- ג. מהי ההסתברות שהשלישי בתור יזכה, אם ידוע שהשני בתור זכה?
- ד. מהי ההסתברות שהשני בתור יזכה, אם ידוע שהשלישי בתור זכה?

13. א. נתונים שני מאורעות בלתי-תלויים A ו- B , כך שמתקיים: $P(A) = P_A > 0$ ו- $P(B) = P_B > 0$. האם A ו- B זרים? מהי ההסתברות שיקרה בדיוק מאורע אחד?

ב. נתונים n מאורעות, A_1, A_2, \dots, A_n , כך שמתקיים $P(A_i) = p$ ($0 < p \leq 1/n$) לכל $i = 1, 2, \dots, n$. אם המאורעות בלתי-תלויים, מהי ההסתברות שיקרה בדיוק מאורע אחד? ומה אם הם זרים?

14. עורכים ניסוי המורכב מ- n ($n \geq 2$) חזרות בלתי-תלויות זו בזו. לכל חזרה שתי תוצאות אפשריות – הצלחה וכשלון – והן מתקבלות בהסתברויות שוות.

נגדיר את המאורעות: $A =$ במהלך הניסוי מקבלים לפחות הצלחה אחת ולפחות כשלון אחד;

$B =$ במהלך הניסוי מקבלים לכל היותר כשלון אחד.

הוכח שרק עבור $n = 3$ המאורעות A ו- B בלתי-תלויים זה בזה.

רמז: להוכחת התלות, כאשר $n > 3$, השתמש בנוסחת הבינום.

15. מטילים 3 קוביות תקינות פעמיים. מהי ההסתברות שבשתי ההטלות תתקבלנה אותן התוצאות, אם –

- א. כל הקוביות שונות זו מזו בצבען;
- ב. כל הקוביות זהות זו לזו ולא ניתן להבחין ביניהן?

16. נתון כד ובו b כדורים כחולים ו- w כדורים לבנים.

מוציאים באקראי את הכדורים מהכד בזה אחר זה וללא החזרה.

הוכח באינדוקציה ובעזרת נוסחת ההסתברות השלמה, שלכל $n = 1, 2, \dots, b+w$, ההסתברות שבבחירה

ה- n ית יוצא כדור כחול היא $\frac{b}{b+w}$.

17. מטפס הרים הלך לאיבוד באחד משני מדרונות של הר – הדרומי או המערבי. לרשות ראש-משלחת החיפושים עומדים 10 צוותי-חילוץ והוא מחליט לשלוח את כולם לחפש אחר המטפס האבוד. ראש המשלחת יודע שהמטפס עלה למדרון המערבי בהסתברות 0.7, ומניסיון העבר הוא יודע כי כל אחד מצוותי-החילוץ שיישלח למדרון המערבי ימצא את המטפס (אם הוא אכן שם) בהסתברות 0.6, ואילו צוות שיישלח למדרון הדרומי ימצא את המטפס (אם טיפס לשם) בהסתברות 0.4. נניח כי כל צוותי-החילוץ בלתי-תלויים זה בזה.

כמה צוותי-חילוץ על ראש-המשלחת לשלוח למדרון המערבי, אם ברצונו להביא למקסימום את ההסתברות שהמטפס יימצא?

18. נתונים 10 מטבעות: 6 תקינים ו-4 לא-תקינים, שההסתברות לקבל בכל אחד מהם H היא 0.8. בוחרים באקראי מטבע אחד מתוך ה-10 ומטילים אותו פעמיים.

האם קיימת תלות בין תוצאת ההטלה הראשונה לתוצאת ההטלה השנייה? נמק את תשובתך.

19. אוהד צריך לגשת לשתי בחינות – באנגלית ובחשבון.

אם יתכונן לשתי הבחינות, הוא יצליח בכל אחת מהן (באופן בלתי-תלוי) בהסתברות 0.9. אם לא יתכונן, הוא יצליח בכל אחת מהן (באופן בלתי-תלוי) בהסתברות 0.5. אמו של אוהד משערת שיתכונן לשתי הבחינות בהסתברות 0.8 ויודעת שלא ייתכן שיתכונן לבחינה אחת בלבד.

א. מהי ההסתברות שאוהד יצליח בבחינה בחשבון?

ב. מהי ההסתברות שאוהד יצליח בשתי הבחינות?

ג. אם ידוע שאוהד הצליח בבחינה באנגלית, מהי ההסתברות שהצליח גם בבחינה בחשבון?

ד. אם ידוע שאוהד הצליח בבחינה באנגלית, מהי ההסתברות שהתכונן לבחינות?

ה. תן הסבר מילולי קצר להבדל בין –

(1) ההסתברויות שקיבלת בסעיפים א ו-ג;

(2) ההסתברות שהתקבלה בסעיף ד להסתברות הנתונה שאוהד יתכונן לבחינות.

20. מטילים שתי קוביות תקינות.

נגדיר שלושה מאורעות כדלקמן: $A =$ בהטלת שתי הקוביות מתקבלות שתי תוצאות זוגיות;

$B =$ בהטלת שתי הקוביות מתקבל לפחות 3 אחד;

$C =$ בהטלת שתי הקוביות מתקבלות שתי תוצאות זהות.

(כל אחד מהמאורעות מתייחס להטלה אחת של שתי הקוביות).

מהי ההסתברות שבהטלות חוזרות ונשנות (ובלתי-תלויות) של שתי הקוביות –

א. המאורע A יתרחש לפני שהמאורע B יתרחש;

ב. המאורע A יתרחש לפני שהמאורע C יתרחש;

ג. המאורע C יתרחש לפני שהמאורע A יתרחש?

21. A, B, C ו- D דוברים אמת, בכל רגע נתון, בהסתברות $\frac{1}{3}$.

נניח ש- A אומר דבר-מה, ואז D אומר ש- C אמר ש- B אמר ש- A אמר אמת.

מהי ההסתברות ש- A אכן אמר אמת?