נושאים במתמטיקה לתלמידי מח"ר - 10444

סמסטר 2009ב

פתרון ממ"ן 13

****

תשובה 1

א. תהי $f : A \to B$ הפונקציה בעלת הגרף $\left\langle\begin{matrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}\right\rangle$

ותהי $g : B \to B$ הפונקציה בעלת הגרף $\left\langle\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{matrix}\right\rangle$.

g אינה פונקציה חד-חד-ערכית כי $g(3) = g(4)$. אך הפונקציה $g \circ f : A \to B$ היא הפונקציה שהגרף שלה הוא $\left\langle\begin{matrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}\right\rangle$ וזוהי פונקציה חד-חד-ערכית כי לאותיות שונות מותאמים מספרים שונים.

ב. תהי הפונקציה $k : B \to A$ בעלת הגרף $\left\langle\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & c \end{matrix}\right\rangle$

ותהי $h : B \to B$ בעלת הגרף $\left\langle\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{matrix}\right\rangle$.

h אינה על כי למספר 4 בטווח אין מקור.

הפונקציה $k \circ h : B \to A$ היא בעלת הגרף $\left\langle\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & c \end{matrix}\right\rangle$ וזוהי פונקציה על, כי לכל אחד מאברי A יש מקור.

ג. נניח **שיש** שתי פונקציות $k : B \to A$ ו- $h : B \to B$ והרכבתן היא הפונקציה $k \circ h : B \to A$.

$k \circ h$ **אינה חד-חד-ערכית**. נסביר זאת:

$k \circ h$ היא פונקציה שתחום הגדרתה הוא קבוצה בת 4 איברים והטווח שלה הוא קבוצה בת 3 איברים. לכן, יש **לפחות** שני איברים בתחום שמתאים להם **אותו** איבר בטווח וזה, לפי ההגדרה משמעות הדבר – הפונקציה $k \circ h$ **אינה** חד-חד-ערכית.

ההוכחה ש- $k \circ h : B \to A$ אינה חד-חד-ערכית פשוטה, והיא מסתמכת על הטענה שבראש עמ' 76 בספר הלימוד. לפי טענה זו אם $k \circ h$ חד-חד-ערכית, אז $|B| \le |A|$ אך אצלנו $|B| = 4$ ו- $|A| = 3$, לכן $|B| > |A|$ ו- $k \circ h$ אינה חד-חד-ערכית.

תשובה 2

א. נוכיח ש- f אינה חד-חד-ערכית:

$$f(2)=1=f(1)$$

ב. f היא על.

f היא על אם ורק אם $imf=A$ (עמ' 73 בספר הלימוד), והרי לכל $n\in\mathbf{N}_1$ נבחר $x=2n-1$. $x=2n-1\in\mathbf{N}_1$ (כי $n\geq 1$ טבעי, לכן $2n-1\geq 1$ טבעי.)

ומתקיים:

$$f(x)=f(2n-1)\underset{\uparrow}{=}\frac{(2n-1)+1}{2}=n$$

$2n-1$ תמיד אי זוגי

ג. 1) הטענה נכונה. הוכחה:

לכל $n\in\mathbf{N}_1$ מתקיים: $f\circ g(n)=f\left(g(n)\right)=f(2n-1)\underset{\uparrow}{=}n$

כפי שראינו בסעיף ב'

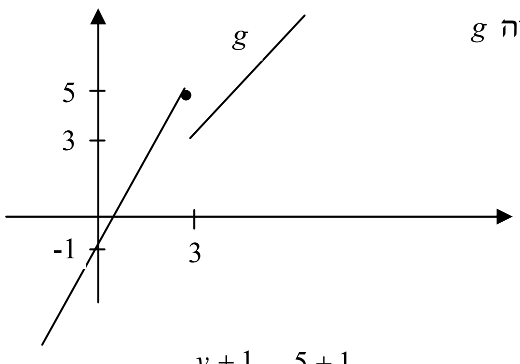
ולכן, $f\circ g=id_{\mathbf{N}_1}$.

2) הטענה אינה נכונה.

עבור $n=2\in\mathbf{N}_1$ מתקיים: $g\circ f(2)=g\left(f(2)\right)=g(1)=1\neq 2$

כלומר, $g\circ f(2)\neq 2$, ולא מתקיים השוויון בטענה.

תשובה 3



א. במקרה זה כדאי להיעזר בשרטוט גרף הפונקציה g

ונראה ש- $g(3)=5=g(5)$

ולכן g **אינה** חד-חד-ערכית.

g היא על $\mathbf{R}$. נוכיח זאת:

אם $y\leq 5$: נמצא $x\leq 3$ כך ש- $g(x)=y$:

אם נבחר $x=\frac{y+1}{2}$ הרי שאכן מתקיים $x=\frac{y+1}{2}\leq\frac{5+1}{2}=3$ ולכן

$$g(x)=g\left(\frac{y+1}{2}\right)\underset{\uparrow}{=}2\left(\frac{y+1}{2}\right)-1=y$$

לפי הגדרת g עבור $x\leq 3$

ואם $\boldsymbol{y > 5}$: הרי שלכל y כזה קיים $x = y$ כך ש- $g(x) = y$ כי:

$$g(x) = x = y$$
$$\uparrow$$
לפי הגדרת g עבור $x = y > 5 > 3$

והראנו שלכל y ממשי יש מקור ב- $\mathbf{R}$.

ב. $\varphi_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ מוגדרת על-ידי:

$$\varphi_1(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 2f(x)-1 & f(x) \le 3 \\ f(x) & f(x) > 3 \end{cases}$$

נציב $f(x) = x - 1$ ונקבל:

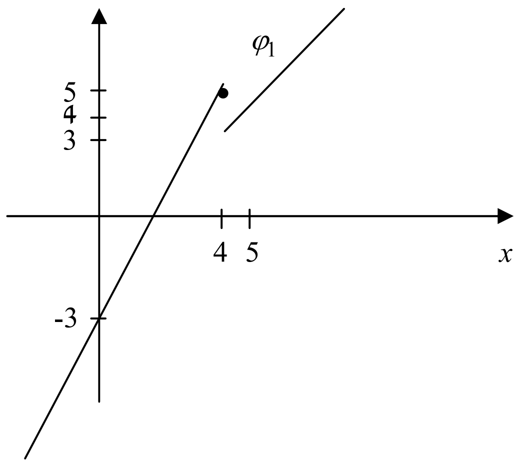
$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 2x-3 & x \le 4 \\ x-1 & x > 4 \end{cases}$$

$\varphi_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ מוגדרת על-ידי:

$$\varphi_2(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x) - 1$$

ולכן

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 2x-2 & x \le 3 \\ x-1 & x > 3 \end{cases}$$



תשובה 4

א. $f(3) = \{x \in \mathbf{N} : x \le 3\} = \{0,1,2,3\}$.

עבור $A = \{0,2\}$, לפי ההגדרה בעמ' 71:

$$f[A] = \{f(x) : x \in A\} = \{f(0), f(2)\} = \{\{0\}, \{0,1,2\}\}$$

ב. אם m , n הם טבעיים המקיימים $n \le m$ אזי:

$$f(n) = \{x \in \mathbf{N} : x \le n\} = \{0,1,2,\ldots,n\}$$

$$f(m) = \{x \in \mathbf{N} : x \le m\} = \{0,1,2,\ldots,m\}$$

נוכיח כי $f(n) \subseteq f(m)$.

יהי $x \in f(n)$. אם $x \in f(n)$ הרי ש- $x \in \mathbf{N}$ וגם $x \le n$. אך $n \le m$, לכן $x \in \mathbf{N}$ וגם $x \le m$, כלומר $x \in f(m)$.

הוכחנו שלכל $x \in f(n)$ מתקיים גם $x \in f(m)$, כלומר $f(n) \subseteq f(m)$.

ג. f היא פונקציה חד-חד-ערכית אך אינה פונקציה על.

(1) נוכיח ש-f חד-חד-ערכית:

עלינו להוכיח שאם עבור $m, k \in \mathbf{N}$ מתקיים $f(m) = f(k)$ אזי $m = k$.

אך אם מתקיים $f(m) = \{0,1,2,..., m\} = \{0,1,2,..., k\} = f(k)$ אזי $m = k$ ולכן f חד-חד-ערכית.

ניתן גם להוכיח בשלילה.

(2) $f : \mathbf{N} \to P(\mathbf{N})$ אינה על כי למשל הקבוצה $\{10\} \in P(\mathbf{N})$ (כי $\{10\}$ היא קבוצה חלקית ל- $\mathbf{N}$) אך לא קיימת נקודה m ב- $\mathbf{N}$ כך ש-$f(m) = \{10\}$,

כי לכל m טבעי מתקיים: $f(m) = \{0,1,2,..., m\} \neq \{10\}$, ולכן f אינה פונקציה על.

תשובה 5

א. f אינה חד-חד-ערכית $f(\{1,2\}) = \{2\} = f(\{2,3\})$, בעוד $\{1,2\} \neq \{2,3\}$.

ב. f אינה פונקציה על. למשל, נניח **בשלילה** ש - f על. לכן לקבוצה $Y = \{1\}$ ב- $P(A)$ יש מקור, כלומר קיימת C ב- $P(A)$ כך ש- $f(C) = \{1\}$. הרי $f(C) = C \setminus \{1,3\}$ ו- $1 \notin C \setminus \{1,3\}$, לכן $1 \notin f(C)$. מכאן ש- $f(C) \neq \{1\}$, וקבלנו סתירה, לכן f אינה על .

ג. הקבוצות המקיימות את הדרוש הן הקבוצות החלקיות ל- A המכילות את 4 בצירוף המספרים 1 או 3 (או אף אחד מהם). ואלה הן : $\{4\}, \{1,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}$.

תשובה 6

א. תהי: $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(\langle x, y \rangle) = (x-1) \cdot y$.

f אינה חח"ע כי למשל: $f(\langle 4,3 \rangle) = 9 = f(\langle 2,9 \rangle)$.

נוכיח כי f על: יהי m מספר שלם, נמצא $\langle x, y \rangle \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ (כלומר x, y שלמים) כך ש-:

$f(\langle x, y \rangle) = m$.

שיויון זה אומר כי $m = (x-1) \cdot y$, לכן נקבע למשל: $x = 2$ ו- $y = m$ ואז מתקיים

$\langle 2, m \rangle \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ו- $f(\langle 2, m \rangle) = m$.

ב. תהי: $f : \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_1 \to \mathbf{Z}$, $f(\langle x, y \rangle) = (x-1) \cdot y$.

מאותה סיבה כמו קודם f אינה חח"ע.

f אינה על כי, למשל, עבור $z=-2\in\mathbf{Z}$ לא קיים $\langle x,y\rangle\in\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}_1$ שעבורו

$f(\langle x,y\rangle)=-2$. נוכיח זאת: לכל $\langle x,y\rangle\in\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}_1$ מתקיים $y>0$, $x-1\geq 0$,

ולכן $f(\langle x,y\rangle)=(x-1)\cdot y\ \geq 0\cdot 1=0$, כלומר $f(\langle x,y\rangle)\geq 0$ ולכן $f(\langle x,y\rangle)\neq -2$.

<u>תשובה 7</u>

א. 2 , 3 ו- c (נסמן ב- c את השורש השלישי של הפולינום) הם השורשים של הפולינום ולכן:

$$mx^3-5x^2-13nx+30=m(x-2)(x-3)(x-c)$$

לכן,

$$\begin{aligned}mx^3-5x^2-13nx+30&=m(x^2-5x+6)(x-c)\\&=m(x^3-5x^2+6x-x^2c+5cx-6c)\\&=m(x^3-(5+c)x^2+(5c+6)x-6c)\end{aligned}$$

וקיבלנו כי:

$$mx^3-5x^2-13nx+30=mx^3-m(5+c)x^2+(5c+6)mx-6mc$$

הפולינומים בשני האגפים מתלכדים לכל x ממשי, לכן מקדמי המונומים שווים זה לזה בהתאמה, כלומר:

$$(*)\qquad\begin{cases}m=m\\m(5+c)=5\\13n=-(5c+6)m\\-6mc=30\end{cases}$$

$-6mc=30$, לכן $mc=-5$ $\Leftarrow$ $m=-\dfrac{5}{c}$.

נציב זאת במשוואה השנייה ונקבל $-\dfrac{5(5+c)}{c}=5$

$\Leftarrow \dfrac{5+c}{c}=-1$ ולכן $5+c=-c$ או $2c=-5$ ו- $c=-2\frac{1}{2}$.

לכן $m=-\dfrac{5}{c}=-\dfrac{5}{-2\frac{1}{2}}=2$ (**)

ו- $13n=-(5\cdot(-2\frac{1}{2})+6)2=13$

$\Leftarrow n=1$

קיבלנו, אם כן, $m=2$, $n=1$

והשורש השלישי של הפולינום הוא $-2\frac{1}{2}$ (כי לפי (**), $c=-\dfrac{5}{m}=-\dfrac{5}{2}$).

שים לב – אם נציב את m , n ו- c שקיבלנו במערכת המשוואות (*) נראה שהם אכן כל הפתרונות של מערכת זו.

ב. הפולינום הנתון הוא ממעלה 3 ולכן יש לו לכל היותר 3 שורשים.
ננחש תחילה שורש אחד (כשאנו מנחשים ננסה תחילה את 0 , אחר כך את 1 ו- 1- ואז את 2 ו- 2- וכו') קל לראות ש- 1- הוא שורש של הפולינום הנתון כי,

$$2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 = -2 + 3 - 1 = 0$$

לכן, לפי משפט 14, $x + 1$ מחלק את הפולינום הנתון. נחלק:

$$2x^3 + 3x^2 - 1 : x + 1$$

נבצע חילוק ארוך (כדוגמת החילוק בעמ' 97 בספר הלימוד) ונקבל את התוצאה $2x^2 + x - 1$ ולכן

$$2x^3 + 3x^2 - 1 = (x + 1)(2x^2 + x - 1)$$

וכל שנותר הוא למצוא את פתרונות המשוואה הריבועית $2x^2 + x - 1 = 0$

שפתרונותיה הם $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$

ולכן $x_1 = -1$ ו- $x_2 = \frac{1}{2}$.

לכן כל הפתרונות של המשוואה הנתונה הם 1- , 1- , $\frac{1}{2}$, ז"א -1 ו- $\frac{1}{2}$.

<u>תשובה 8</u>

א. למעשה עלינו להוכיח כי לכל n טבעי $2 \mid n3^{n+1} - (n+1)3^n + 1$
נוכיח את הטענה הנתונה בדומה לפתרון שאלה 4.3 בספר הלימוד.
בסיס האינדוקציה הוא הטענה עבור $n = 0$: $2 \mid 0 \cdot 3^1 - 1 \cdot 3^0 + 1$ כלומר $2 \mid 0$, וזה נכון.
הנחת האינדוקציה היא שלאיזשהו k , $2 \mid k3^{k+1} - (k+1)3^k + 1$, ובהנחה זו נרצה להראות ש- $2 \mid (k+1)3^{k+2} - (k+2)3^{k+1} + 1$.

$$\begin{aligned}(k+1)3^{k+2} - (k+2)3^{k+1} + 1 &= k3^{k+2} + 3^{k+2} - (k+1)3^{k+1} - 3^{k+1} + 1 = \\ &= 3k3^{k+1} - 3(k+1)3^k + 3 - 3 + 3^{k+2} - 3^{k+1} + 1 \\ &= 3\left(k3^{k+1} - (k+1)3^k + 1\right) + 3 \cdot 3^{k+1} - 3^{k+1} - 2 \\ &= 3\left(k3^{k+1} - (k+1)3^k + 1\right) + 3^{k+1}(3-1) - 2 \\ &= 3\left(k3^{k+1} - (k+1)3^k + 1\right) + 2(3^{k+1} - 1)\end{aligned}$$

המחובר הראשון מתחלק ב-2 לפי הנחת האינדוקציה, וגם המחובר השני מתחלק ב-2 (מיידי),
לכן הסכום מתחלק ב-2 , כלומר זוגי, כנדרש.
ובכך הוכחנו את הטענה הנתונה.

ב. **בסיס האינדוקציה** הוא הטענה עבור $n=1$: צ.ל. $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n+1}{n+2}$

אך $\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1(1+1)}+\frac{1}{2(2+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}=\frac{1+1}{1+2}$

והוכח השוויון הדרוש.

הנחת האינדוקציה :

לאיזשהו $m\geq 1$ מתקיים, $\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{m+1}{m+2}$

ובהנחה זו **עלינו להוכיח כי** : $\sum_{k=1}^{m+2}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{m+2}{m+3}$

נעשה זאת :

$$\sum_{k=1}^{m+2}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{הנחת האינדוקציה}}}{=}\frac{m+1}{m+2}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}=\frac{(m+1)(m+3)+1}{(m+2)(m+3)}$$

$$=\frac{m^2+4m+4}{(m+2)(m+3)}=\frac{(m+2)^2}{(m+2)(m+3)}$$

$$=\frac{m+2}{m+3}$$

ובכך הוכח הדרוש.

ג. **חשוב:** לפני שאגש לפתרון , ברצוני לציין **שסטודנטים שמתקשים לעבוד עם סיגמאות** (עם סימן הסכימה) , מוטב שיעבדו עם סכומים. לדוגמא, את השוויון שיש להוכיח בשאלה זו ניתן "לתרגם" ל- $n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(3n)=2n(2n+1)$
ולהוכיח שוויון זה.

בסיס האינדוקציה : נבדוק עבור $n=1$: באגף שמאל $\sum_{k=0}^{2}(1+k)=1+2+3=6$

ומצד שני: $2\cdot 3=6$.

לכן השיוויון נכון עבור $n=1$.

הנחת האינדוקציה : נניח שמתקיים עבור $m\geq 1$, $\sum_{k=1}^{2m}(m+k)=2m(2m+1)$

צעד האינדוקציה: נוכיח עבור $m+1$, ז"א נוכיח כי:

$$\sum_{k=0}^{2(m+1)}\left((m+1)+k\right)=2(m+1)\left(2(m+1)+1\right)$$

כלומר, נוכיח שמתקיים:

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{2m+2}\left(m+1+k\right)=2\,(m+1)\left(2m+3\right)$$

נתחיל מהאגף השמאלי ונפתח אותו עד שנגיע לאגף הימני:

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{2m+2}\left(m+1+k\right)=\sum_{k=0}^{2m}\left(m+1+k\right)+(m+1+(2m+1))+(m+1+(2m+2))$$

$$=\sum_{k=0}^{2m}\left((m+k)+1\right)+(3m+2)+(3m+3)$$

$$=\sum_{k=0}^{2m}\left(m+k\right)\ +\sum_{k=0}^{2m}1\ \ +(3m+2)+(3m+3)$$

$$\underset{\uparrow}{=}2m(2m+1)+(2m+1)+(3m+2)+(3m+3)$$

עפ"י הנחת האינדוקציה

וכללי הסכימה (עמ' 102 בשיעור I)

$$=4m^2+10m+6=(2m+2)(2m+3)$$

הוכחנו את $(*)$ ולכן השיויון נכון לכל $n\ge 1$.

ד. נוכיח כי כל $n\ge 0$ טבעי מתקיים $2^{n-1}+2^{2n-1}\ge 3^n$.

בסיס האינדוקציה: עבור $n=0$: $2^{-1}+2^{-1}=1\ge 3^0=1$ לכן נכון עבור $n=0$.

הנחת האינדוקציה: נניח נכונות עבור $n=k$ כלשהו.

צעד האינדוקציה: נוכיח עבור $n=k+1$ ז"א נוכיח שמתקיים: $2^n+2^{2k+1}\ge 3^{k+1}$

$$2^k+2^{2k+1}=2\cdot 2^{k-1}+2^2\cdot 2^{2k-1}=2(2^{k-1}+2^{2k-1})+2\cdot 2^{2k-1}$$

והרי $2^{2k}=4^k$, לכן,

$$=\underbrace{2(2^{k-1}+2^{2k-1})}_{\ge 2\cdot 3^k}+4^k\ge 2\cdot 3^k+4^k\ge 2\cdot 3^k+3^k$$

עפ"י הנחת האינדוקציה

וקיבלנו, $2^k+2^{2k+1}\ge 3\cdot 3^k=3^{k+1}$

ולכן האי-שוויון מתקיים לכל $n\ge 0$ טבעי.