

אנא קראו בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

### שאלה 1

להלן טענות לגבי יחסים (רלציות) מעל הקבוצה  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .  
לכל טענה ציינו אם היא נכונה או לא.  
הוכיחו את הטענות הנכונות, הפריכו ע"י דוגמא נגדית את אלה שאינן נכונות.

(4 נק') א. אם  $R$  רפלקסיבית אז  $R^2$  רפלקסיבית.

(4 נק') ב. אם  $R^2$  רפלקסיבית אז  $R$  רפלקסיבית.

(4 נק') ג. אם  $R$  סימטרית אז  $R^2$  סימטרית.

(4 נק') ד. אם  $R^2$  סימטרית אז  $R$  סימטרית.

(4 נק') ה. אם  $R$  טרנזיטיבית אז  $R^2$  טרנזיטיבית.

(5 נק') ו. אם  $R^2$  טרנזיטיבית אז  $R$  טרנזיטיבית.

### שאלה 2

מצאי מה לא תקין בהגדרה הבאה.

בדומה להגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות, נגדיר פעולה של הפרש סימטרי בין עוצמות:  
תהיינה  $k, m$  עוצמות, לא בהכרח שונות זו מזו.

תהיינה  $A, B$  קבוצות המקיימות  $|A| = k$ ,  $|B| = m$ ,

נגדיר:  $k \oplus m = |A \oplus B|$ .

הגדרה כזו אינה אפשרית. עליך להסביר מה הבעיה בהגדרה, ולהראות ע"י דוגמא שההגדרה אינה תקינה. הדרכה: ראי ההגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות.

### שאלה 3

מהו מספר פתרונות המשוואה  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$  בטבעיים, כאשר אף אחד מהמשתנים

אינו שווה ל-5 ?

כדאי לפתור בעזרת הפרדה והכלה. 0 הוא מספר טבעי.

יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

#### שאלה 4

בידינו מספר לא מוגבל של מרצפות מכל אחד מהסוגים הבאים: מרצפות אדומות באורך 2, מרצפות ירוקות באורך 2, מרצפות סגולות באורך 2, מרצפות שחורות באורך 1 ומרצפות לבנות באורך 1. יהי  $a_n$  מספר הדרכים לרצף שביל ישר באורך  $n$  בעזרת מרצפות מהסוגים הללו. לא חייבים להשתמש בכל הסוגים.

(11 נק') א. רשום את  $a_0, a_1, a_2$ . רשום יחס נסיגה עבור  $a_n$ .  
ודא שיחס הנסיגה מתיישב עם ערכי ההתחלה שרשמת.

(14 נק') ב. פתור את יחס הנסיגה שקיבלת בסעיף הקודם ורשום ביטוי מפורש עבור  $a_n$ .

#### שאלה 5

השאלה עוסקת בתחשיב הפסוקים. כתיב מקוצר – מותר.  
לכל אחת מהטענות הבאות, קבע אם היא נכונה או לא.  
אם היא נכונה – הוכח אותה. אם היא אינה נכונה – תן דוגמא נגדית.

(8 נק') א. יהיו  $\alpha, \beta, \gamma$  פסוקים. אם  $\alpha \vee \beta \models \gamma$  אז  $\alpha \models \gamma$ .

(8 נק') ב. לא קיימים פסוקים  $\alpha, \beta$  כך ש-  $\alpha \models \beta$  ו-  $\beta \models \sim \alpha$ .

(9 נק') ג. בהנתן פסוקים  $\alpha, \beta, \gamma$  כלשהם, הפסוק  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\gamma \rightarrow \alpha))$  הוא טאוטולוגיה.

מה זה!



$$(x, x) \in R \quad x \in A \quad \text{דוג} \quad \Leftarrow \quad I_A \subseteq R \quad \text{י/ב} \quad (1) \quad (1c)$$

$$(x, x) \in R^2 \Leftarrow x R x R x \quad \Leftarrow$$

$$(2, 2) \notin R \quad -1 \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

לפי  $R$  זה דו־כיווני.

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow R^2 \text{ דו־כיווני}$$

ולכן האנקה היא נכונה.

$$(x, y) \in R \quad \text{או} \quad (y, x) \in R \Rightarrow \text{נכונה} \quad R \quad (3)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{נכונה} \quad \text{י/ב}$$

$$\text{י/ב} \quad (4)$$

$$(x, y) \text{ או } (y, x) \in R^2 \quad \text{נכונה} \quad R^2$$

$$\begin{matrix} (x, a) & (a, y) & (y, c) & (c, x) \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{matrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

נכונה  $R$ ,  $R^2$  נכונה.

$$(x, z) \in R \quad \text{או} \quad (x, y) \quad (y, z) \in R \quad \text{נכונה} \quad R \quad (5)$$



(2) מצא מהלך ק'ן בידרה הבאה

הפרט סימלי בין צדדים

$$|B|=m, |A|=k$$

גיה"ן ה A B, ה כו צד ה"ק"מ

$$k \oplus m = |A \oplus B|$$

$$A = \{x \mid x \geq 1, x \in \mathbb{N}\}$$

(I) נכח:

$$B = \mathbb{N}$$

$$|A| = |\mathbb{N} \setminus \{0\}| = x_0, |B| = x_0$$

$$k \oplus m = |A \oplus B| = |\{0\}| = 1$$

טפיהנה:

$$A = \{x \mid x' \text{ cis } \wedge x \in \mathbb{N}\}$$

(II) נכח

$$B = \{x \mid x' \text{ cis } \wedge x \in \mathbb{N}\}$$

$$|A| = x_0, |B| = x_0$$

$$1 \oplus m = |A \oplus B| = |\mathbb{N}| = x_0$$

טפיהנה:

לט I, II ישלנו טזיה וזכר הטנה לאנכנה.

הטנה לא זיה, נכונה מכוון ש:

$$A \oplus B \subseteq A \cup B \Rightarrow |A \oplus B| \leq |A \cup B|$$

באנחה מסתם הטנה:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

וכו צד א"ן מסוף חסר

זכר הטנה לאנכנה.



$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 20$$

(3)

מספר האפשרויות שבהן  $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 20$  הוא  $\binom{23}{20}$

$$S_0 = \binom{20+4-1}{20} = \binom{23}{20} = \frac{23!}{20!3!} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{2 \cdot 3} = 253$$

$S = \{X_i \mid A_i\}$  - מספר האפשרויות שבהן  $X_i = 0$

$$S_1 = |A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = \binom{15+3-1}{15} = \binom{17}{15} = 17$$

$$S_2 = \binom{4}{2} \cdot |A_1 \cap A_2| = 6 \cdot \binom{10+2-1}{10} = 6 \cdot \binom{11}{10} = 66$$

$$S_3 = \binom{4}{3} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{4}{3} \cdot 5 = 20$$

$$S_3 = 1$$

$$S_4 = \binom{4}{4} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$$

$$S_4 = 1$$

$$P = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = \frac{23!}{20!3!} - 4 \cdot \frac{17!}{15!2!} + 6 \cdot \frac{11!}{10!} - 20 + 1$$

$$\frac{23!}{20!3!} - 2 \cdot 17 \cdot 16 + 6 \cdot 11 - 20 + 1$$



Handwritten notes on graph paper showing a vertical line with points 1, 2, 2, 2, 1, 1 on the left and 1, 2, 3 on the right. A circled '4' is in the top right corner.