פתרון ממ"ן 15 – נכתב על-ידי ודים רומר

שאלה 1:

יהי G גרף לא מכוון חסר קדקודים מבודדים. יהי $\xi(G)$ הגודל המינימאלי של כיסוי בקשתות ב - G, ו $v(G)$ הוא הגודל המקסימאלי של זיווג ב –G. נבחן את $v(G)$. מספר הצמתים שנמצאים ב $v(G)$ הוא $2(v(G))$ (לכל קשת צומת בכל אחד מקצותיה). כעת נסתכל על $\xi(G)$. נחשב את גודלו של הכיסוי בקשתות F כלשהו. ניתן לחשב את גודלו של כיסוי כלשהו בקשתות ע"י חיבור של כל קשתות הזיווג עם מספר השווה לכל הצמתים שאינם בזיווג, בהנחה שכל צומת כזה מוסיף קשת אחת לכיסוי (אין צמתים מבודדים – נתון). לכל כיסוי בקשתות F מתקיים:

$\xi(G) \leq F$. ולכן,

(i)

$\xi(G) \leq |F| = v(G) + \left(|V| - 2v(G)\right) = v(G) + |V| - 2v(G) = |V| - v(G)$. כעת נסתכל על הביטוי

$\xi(G) + v(G)$.

נציב בביטוי זה את (i) ונקבל: (i.1)

$\xi(G) + v(G) \leq |F| + v(G) = |V| - v(G) + v(G) = |V|;$

אם F הוא כיסוי בקשתות בגודל מינימאלי אז, עבור M שהוא גודלו של זיווג מקסימאלי בגרף,

(ii)

$\xi(G) = |F| = |M| + (|V| - 2|M|) \geq v(G) + \left(|V| - 2v(G)\right) = |V| - v(G);$

כעת, (ii.1)

$\xi(G) + v(G) = |V| - |M| + v(G) \geq |V| - v(G) + v(G) = |V|;$

מ (i.1) ו – (ii.1) נקבל ש:

$\xi(G) + v(G) \leq |V|;\ \xi(G) + v(G) \geq |V|;$

ולכן - $\xi(G) + v(G) = |V|$.

הדרך שבה הוכח השוויון המבוקש מתארת אלגוריתם שזמן ריצתו פולינומיאלי לחישוב כיסוי בקשתות מינימאלי בגרף דו צדדי:

- נחשב את את הזיווג המקסימאלי v(G) בזמן O(mn).
- עבור כל צומת שאינו קצה של קשת ב – v(G) נוסיף קשת כלשהי שסמוכה אליו O(m).

סה"כ זמן ריצה – O(mn), זמן ריצה פולינומיאלי.

שאלה 2

א. יהי G גרף לא מכוון קשיר. אם ב G צומת אחת, אז אי אפשר לפרק את G לרכיבי קשירות – צומת אחת לא מתפרקת. מכאן, שאם ל G קיים חתך מינימאלי, אז קיימים בו לפחות שני צמתים. אבל שוב, אם נבצע פעולה אחת של כיווץ ונצמצם שני צמתים, נקבל צומת אחת שלא מתפרקת לרכיבי קשירות, לכן, על מנת שנוכל לבצע כל G פעולות של כיווץ ועדיין לקבל גרף שיש לו חתך מינימום, על G להכיל מספר צמתים הגדול מ 3. יהי, אם כן, G גרף לא מכוון וקשיר על $k\geq3$ צמתים, ונוכיח שלא משנה כמה פעולות של כיווץ נבצע, לא נוכל להקטין את חתך המינימום בגרף.

יהי $t(G)$ חתך המינימום בגרף G נתון. אם $t(G)=1$, אז הקטנת החתך בעצם תפרק את הגרף ךרכיבי קשירות. אך הגרף לא יכול להתפרק לרכיבי קשירות מפעולת כיווץ. אם נניח בשלילה שקיימת קשת שברגע שנכווץ אותה, הגרף יתפרק לרכיבי קשירות, נגיע לסתירה, כי ברגע שנקבץ קשת זו, שני חלקי הגרף אותם היא מחברת לא יתפרקו, אלא יהיו כעת מחוברים בצומת. זה נובע מהגדרת הכיווץ. לכן, נגביל את הדיון שלנו ל $t(G)>1$, ונוכיח באינדוקציה כי אחרי כל פעולת כיווץ מתקיים $t(G)\leq t(G')$.

בסיס האינדוקציה הוא פעולת כיווץ ראשונה של קשת. נבדוק מה קורה לגרף בעת ביצוע פעולת כיווץ זו: במצב ההתחלתי, חתכו המינימאלי של G הוא $t(G)$, ולכן על מנת שהגרף יתפרק לרכיבי קשירות יש למחוק מהגרף $t(G)$ קשתות. בפרט, על מנת למחוק כל אחד מצמתי הגרף יש למחוק לפחות $t(G)$ קשתות המחוברות לצומת מסויים זה.

יהיו u ו v שני צמתים אותם רוצים לכווץ בגרף. החתך המינימאלי בגרף הוא $t(G)$, ולכן מספר הקשתות המחברות את v ו u לשאר הגרף הוא $t(G)$ לפחות, ואותם הצמתים יחברו את צומת האיחוד w לשאר הגרף, לפחות $t(G)$ צמתים. זאת מכיוון שניתן להתיחס לשני הצמתים המיועדים למחיקה כאל רכיב קשירות בודד, ולכן מראש ניתן להתיחס אליו כאל עצם יחיד כלשהו. שינויים בפנים עצם זה לא יכולים להביא לשינויי קשירות אותו העצם לשאר הגרף בפעולת כיווץ כמו שתוארה בשאלה.

נעמיק את המבט אל תוך רכיב הקשירות המיועד. לאחר פעולת הכיווץ יתקבל צומת משותף, שנסמנו מעתה ואילך ב w. בעת הכיווץ, הקשת (u,v) נעלמת. כל שכני u הופכים לשכני v, וכל שכני v הופכים לשכני u, כאשר קשירותם של כל שאר הצמתים אחד ביחס לשני לא משתנה כלל. זאת מכיוון שהקשת היחידה שנעלמת היא הקשת בין v ל u. אם, נניח, ל v לא היו שכנים (דבר שלא יתכן מעצמו, כיוון שהגבלנו את עצמינו ל $t(G)>1$), אז ל u בודאי היה שכן אחד לפחות שלו שכן אחד לפחות פרט ל v, כי בגרף הקשיר שלנו לפחות 3 צמתים. בגרף שלנו מספר השכנים של כל אחד מצמתים אלה גם הוא גדול מ 1. נניח שלכל אחד $t(G)$ שכנים בדיוק, כאשר v הוא אחד משכני u ו u הוא אחד משכני v. במצב זה, לאחר הכיווץ, לכל אחד מהצמתים $t(G)-1$ שכנים, ולצומת המאוחד w $2(t(G)-1)=2t(G)-2$ שכנים. עבור עבור $t(G)>1$ מתקיים $2t(G)-2\geq t(G)$. כלומר, מספר השכנים שיש לצומת החדש שהוא איחוד של שני צמתים יכול להשאר בלא שינוי או לגדול. נשים לב לכך, שאם לצמתים u ו v שכנים משותפים, אז ל w יהיו קשתות מקבילות – w מקבל אל עצמו את כל הקשתות שאינן הקשת הנמחקת. מכאן שאין זה משנה כלל אם שכני u ו v הם אותם השכנים, או שכנים זרים.

נניח שכיווצנו את הגרף k פעמים, ונוכיח שלאחר פעולת הכיווץ ה k+1 החתך המינימאלי לא יקטן. יהי G′ גרף שהתקבל לאחר k כיווצים, ויהי t(G′) חתך המינימום בגרף זה לאחר k כיווצים. אז, ההוכחה לכך שלא ניתן לכווץ את הגרף בצורה כזאת שחתכו המינימאלי יקטן היא זהה לחלותין להוכחה עבור הכיווץ הראשון, פרט להתיחסות לשני מקרים נוספים: (i) ב G′ קיימות קשת עצמי בעקבות פעולות כיווץ ו (ii) ב G′ קיימות קשתות מקבילות בעקבות פעולות כיווץ קודמות.

(i) עבור מקרה זה – אם קיימת קשת עצמית, סימן שכיווצנו קשת המחברת שני צמתים, כשקיימת קשת נוספת המחברת צמתים אלה. דרגת הקשת היא לפחות t(G′) כולל הקשת העצמית. אך, מכיוון שבהנחת האינדוקציה מניחים שחתך הגרף לא קטן, והרי קשת עצמית אינה משפיע על חתך הגרף, נאמר שדרגתה של קשת כזאת היא לפחות t(G′)+1. מכאן, שנוכל להתעלם מהקשת העצמית, ולהתיחס לצומת כאל צומת בעל דרגה t(G′) לפחות, שאין לה קשת עצמית.

(ii) עבור שני צמתים u′ ו v′ שרוצים לכווץ – אם הקשתות היחידות בגרף מחברות רק את u′ ו v′ אז בגרף שני צמתים, ופעולת הכיווץ תביא מגרף בעל צומת יחיד, שלא מתפרק לגרמי קשירות. אם קיימת בגרף עוד צומת, t, אז u′ ו v′ מחוברות ל t ב t(G′) קשתות לפי הנחת האינדוקציה, ולכן גם הצומת המאוחד יהיה מחובר ל t במספר קשתות כזה.

אם קיימים עוד צמתים בגרף, אז דרגת כל אחד מהם היא לפחות t(G′). לא קיימת קשת שמחיקתה תפרק את הגרף לרכיבי קשירות, ובטח שלא קיימת קשת מתוך הקשתות שמחברות את הצמתים שרוצים לאחד, שמחיקתה תביא לפרוק לרכיבי קשירות. לאחר הכיווץ כל הקשתות פרת לקשת המכווצת יהפכו לקשתות עצמיות, ולצומת המאוחדת יהיו שכנים כמספר השכנים השונים שיש לכל אחת מהן בנפרד, או אם לדייק מספר הקשתות שהיו מחוברות ל w′ יהיה כמספר הקשתות המחוברות ל u′ שלא מחוברות ל v′ ולהיפך.

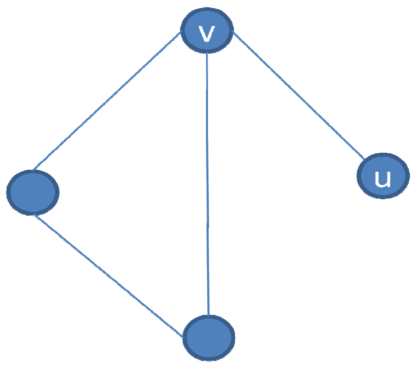
מכיוון שהחתך בגרף הוא t(G′), ל u′ וגם ל v′, מספר הקשתות המחברות את שני הצמתים האלה עם שאר הגרף ללא הקשת ביניהם הוא לפחות t(G′), לפי הנחת האינדוקציה. לכן, גם הצומת המאוחד יהיה מחובר לשאר הגרף ב t(G′) קשתות.

שאר הצמתים בגרף בעת הכיווץ כלל לא נפגעים. הם לא מאבדים קשתות, ולכן קשירותם לגרף לא משתנה. לא נוצרת צומת שניתן לנתקה מהגרף בפחות מ t(G) מחיקות.

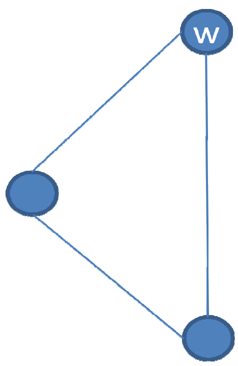
כמו כן, הגרף לא מקבל לאחר האיחוד חתך קטן מהחתך שהיה, כיוון שלא נעלמות קשתות פנימיות בגרף, והראינו שמספר הקשתות של הצומת המאוחד רק הולכות וגדלות, או נשארות אותו הדבר.

כעת, נבדוק מה קורה לאחר k פעולות כיווץ, בפעולת הכיווץ ה k+1.

ב. נראה דוגמה נגדית:



(i)



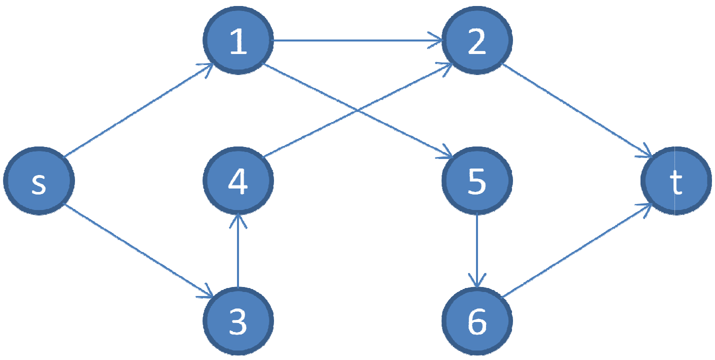
(ii)

(i) G הוא גרף קשיר נתון: הצמתים u ו v הם שני צמתים שאת הקשת e המחברת אותם ברצונינו לכווץ. גודל החתך המינימאלי ב G, הוא 1.

(ii) גרף G’ הוא גרף שהתקבל לאחר שכיווצנו את הקשת e. בגרף הזה גודל החתך המינימאלי הוא 2.

שאלה 3

נראה שקיים גרף מכוון G כזה, שאם נפעיל עליו BFS ונמחק את קשתות המסלול הראשון שנמצא, לא נוכל למצוא מסלולים נוספים שהם שונים בקשתות, למרות שיש כאלה, ויחזיר מספר מסלולים שהוא קטן מהמספר המקסימלי של מסלולים זרים בקשתות בין s ל t. ההוכחה מסתמכת על כך, ש BFS מוצא את המסלולים הקצרים ביותר בגרף. נתבונן בגרף G הבא:



אם נפעל על פי האלגוריתם בשאלה, לאחר שנריץ את BFS בפעם הראשונה, המסלול שיחזיר האלגוריתם יהיה s-1-2-t. זהו המסלול הקצר ביותר בגרף, ולכן BFS ימצא אותו ראשון. לאחר שנמחק את המסלול, לא נוכל למצוא את המסלולים: s-3-4-2-t ו s-1-5-6-t, שהם שני מסלולים השונים בקשתות ב G.

זאת מכיוון ששני המסלולים הנ"ל משתמשים בקשתות, שהאלגוריתם שמתארת השאלה מוחק לפניי שיש לו הזדמנות למצוא אותם.

שאלה 4

נתיחס לצמתי רשת הזרימה כאל "תחנות", שכל אחת מהן יכולה להוציא כמות זרימה חלקית לכמות הזרימה אותה היא מחזיקה. הצומת s יכול להוציא כמות אינסופית של זרימה (כמות זרימה השווה לפחות לסכום הקיבולים היוצאים מהצומת), והצומת t אינו מוציא זרימה כלל, אך ידוע לנו מה כמות הזרימה אותה הוא מחזיק. לכל צומת אחר – כמות הזרימה אותה צומת מוציא לא יכולה להיות גדולה מכמות הזרימה אותה צומת עוגר.

לשם כך, עבור כל צומת, נרשום את כמות הזרימה אותה הוא מחזיק בכל רגע נתון. ברגע שנכנסת זרימה לצומת, כמות הזרימה שהצומת מחזיק תגדל בכמות הזרימה הנכנסת, וברגע שתצא זרימה מהצומת, כמות הזרימה תקטן בכמות הזרימה היוצאת. כמות הזרימה שצומת עוגר לא יכולה להיות קטנה מ – 0, ואינה מוגבלת מבחינת הכמות החיובית שלה.

נהפוך את הגרף על ראשו. כלומר, נהפוך את צומת t להיות s, ואת צומת s להיות t. כמו כן, נהפוך את כל כיווני קשתות הגרף, שילכו מהמקור החדש אל הבור החדש, בדיוק ההיפך מכיוונן ברשת המקורית. כעת, נשים לב שברשת החדשה ההפוכה, אין אף מסלול מ s ל t שצמתיו מתפצלים למספר תת מסלולים.
קיימים רק מסלולים אשר בהם מספר קשתות "מתנקזות" לקשת יחידה. כעת, נפעיל BFS על s.
בעת הרצת BFS, בכל פעם שנתקל בצומת חדשה – נשים אותה בשכבה המתאימה, ונגדיל את הזרימה אותה הצומת עוגר. אם צומת מתגלה מספר פעמים, לא נוסיף אותו שוב לשכבה מסויימת, אך נגדיל את כמות הזרימה הנכנסת אליו, אם צריך בכל פעם שהוא מתגלה.

כאשר אנחנו חוקרים צומת, אז אם הצומת הנחקר הוא s, כל שכניו יקבלו מטען בגודל הקיבול המקסימאלי של כל אחת מהקשתות היוצאות מתוך s. כאשר אנחנו חוקרים צומת v שאינו s, אז הזרימה המקסימאלית שיכולה לצאת ממנו היא כמות הזרימה אותה v אוגר. נשים לב לכך, שבבניה אותה עשינו, כמות הקשתות היוצאות מכל צומת היא לכל היותר 1. ולכן, לכל צומת ש BFS חוקר יתכן שכן יחיד.
אומנם, שכן זה יכול להיות משותף למספר לא מוגבל של צמתים. כעת, נוכל לבחון שני מקרים:

(i) גודל הקיבול של הקשת היוצאת מ v≠s מקיימת: $c(v) \leq c(e)$, ו
(ii) גודל הקיבל של הקשת היוצאת מ v≠s מקיימת: $c(v) > c(e)$. נבדוק כל אחד מהמקרים.

(i) במקרה זה, פשוט נזרים לתוך הקשת את כל הקיבול שנמצא בצומת v, יתכן 0, ונעלה את הקיבול בצומת u שכן של v ב c(v), בנוסף למה שכבר יש בו ברגע ההזרמה, כמובן.
(ii) נזרים את כמות הזרם שמסוגלת לקלוט הקשת e, ונעלה את הקיבול בצומת u שכן של v ב c(e), בנוסף למה שכבר יש בו ברגע ההזרמה.

האלגוריתם יגיע אל סיומו, כאשר אין עוד צמתים לחקור. כמות הזרימה שיעגור t, כלומר כמות הזרימה שהגיע אל t תהיה הכמות המקסימאלית של זרימה שאפשר להעביר בגרף.

<u>נכונות האלגוריתם:</u>

נשווה את הזרימה המקסימלית שמחזיר האלגוריתם עבור זרימה מקסימלית המקורי, עם הזרימה אותה מחזיר האלגוריתם שלנו. האלגוריתם זרימה, בכל שלב, מחפש מסלול בין s ל t ומזרים בו את הזרימה שערכה כערך צוואר הבקבוק במסלול. האלגוריתם שלנו מזרים את הזרימה הכי גדולה שהוא יכול בכל הקשתות שהוא פוגש בזמן יציאתו מ s, והזרימה המגיע אל t עוברת במסלולים שונים אך קבועים מראש, ללא אפשרות בחירת מסלול (כיוון שכל קשת שיוצאת מ v בנו של s ברשת שלנו מחוברת בקשת יחידה לעבר בן יחיד), והזרימה שעוברת בכל קשת היא לכל היותר כמות הזרימה המקסימאלית שיכולה לעבור בקשת. מכאן שכאשר נגיע לקשת בעלת הקיבולת המינימאלית, נמלא אותה בזרימה, לעבר u שהוא צאצא יחיד של v בקשת (v,u), בתוך u הזה יתווספו כל הזרימות מכל הקשתות האחרות המחוברות ל u, ורק הזרימה שיכולה לעבור בקשת היחידה היוצאת מ u תמשיך הלאה.

ניתן היה לכתוב את האלגוריתם בצורה אחרת – אין צורך לבחור מסלול, צריך רק לבחור קשת (s,v), כיוון שכל מסלול הוא קבוע, ובחירת הקשת הראשונה קובעת מסלול יחיד. אז בחירת מסלול BFS ע"י האלגוריתם המקורי שקולה לבחירת קשת (s,v) ברשת שלנו, כך ש (s,v) ברשת שלנו הוא אותה הקשת (v,t) שהיא הקשת האחרונה שמוצא BFS, והזרמת כמות הזרימה השקולה לצוואר הבקבוק של מסלול זה, היא פעולה השקולה להזרמת זרימה מקסימאלית שניתן להזרים דרך הצומת (s,v) ברשת שלנו, מכיוון שבסופו של דבר יגיע ל t (s במסלול המקורי) כמות זרימה השקולה לכמות הזרימה שתעבור בצוואר

הבקבוק של אותו מסלול ברשת המקורית. כאשר מזרימים זרימה דרך המסלול הבא, אז אם צוואר הבקבוק הוא קשת משותפת לשני המסלולים, כמות הזרימה שתגיע ל t לא תעלה.

זהו מצב שקול למציאת מסלול שני ע"י BFS ברשת המקורית, חיפוש צוואר בקבוק והזרמת זרימה, מכיוון שאם צוואר הבקבוק משותף, המסלול החדש לא ימצא ע"י BFS, מכאן שבוודאי לא נוכל להזרים בו זרימה ובטח לא להגדיל את הזרימה העוברת דרך (s,v), שהוא (v,t) ברשת שיצרנו. לכן אם ימצא מסלול, הוא יהיה בעל צוואר בקבוק אחר מהמסלול הראשון. מכיוון שיהיה מסלול, בוודאי שתהיה בו זרימה. אם המסלול החדש משתמש באותה קשת (s,v) בגרף המקורי, אז אותו המסלול ברשת שלנו ישתמש בקשת (v,t), שהיא אותה הקשת רק בכיוון ההפוך.

צוואר הבקבוק שמוצא המסלול הנוסף החדש יכול להיות על קשת שכבר הייתה בשימוש, אך נותרו לה יחידות זרימה נוספות. זה שקול למקרה שלנו – כאשר נמלא בזרימה מסלול נוסף, אז כמות הזרימה הכי גדולה שתעבור תהיה בעובי צוואר הבקבוק, שיתכן שהוא כמות זרימה שנותרה ללא שימוש בקשת מסוימת במסלול. באופן כללי, ביגלל שהמסלולים נקבעים באופן יחיד באלגוריתם שלנו, ובגלל שדרך כל קשת עוברת כמות זרימה שהקשת מאפשרת, כולל אפשרות להעביר זרימה ממספר מקורות שונים (סכום הזרימות), אין בעיה להזרים את כל הזרימות בו זמנית, כמו שמבצע האלגוריתם שהצענו.

נסכם:

- המסלולים באלגוריתם שלנו נקבעים באופן יחיד, בדיוק כמו שהמסלולים נקבעים באופן יחיד ע"י BFS.
- המקרה שבו BFS מוצא מסלול ומזרים בו זרימה השווה לצוואר הבקבוק באותו מסלול, לא ישתמש אלגוריתם למציאת זרימה באותו מסלול שוב, וזה שקול למקרה שבו נזרים זרימה במסלול כלשהו באלגוריתם שלנו.
- ברגע שצוואר הבקבוק בשני מסלולים שונים זהה, או שהוא הופך לזהה לאחר שמזרימים זרם במסלול הראשון (יתכן שצוואר הבקבוק הוא '0' לאחר ההזרמה במסלול אחר), רק אחד מבין שני מסלולים אלה ימצא ע"י BFS, וזה שקול למקרה שבו אם צוואר הבקבוק בשני מסלולים שונים זהה, או אם מילוי מסלול מסוים בזרימה הוביל לכך שנוצרה קשת מלאה בזרימה והיא קשת בשני המסלולים, כמות הזרימה המגיע אל t לא תעלה לאחר שנזרים זרימה דרך מסלול שני זה – בשלב מסויים הזרימה תבלם.
- קשת שחלק מהזרימה שלה בשימוש יכולה לבוא לשימוש במסלול אחר, כאשר כמות הזרימה שיכול לעבור בה הוא גודל הקיבול שלה פחות כמות הזרימה שעבר בה בעבר הן באלגוריתם המקורי, והן באלגוריתם שלנו.

הנכונות של האלגוריתם שהוצע נובעת מהשקילות בין הדרך שבא יעבוד האלג' המוצע לבין אופן העבודה של האלגוריתם המקורי.

<u>זמן ריצה:</u>

זמן הריצה באלגוריתם הוא מעבר אחד על כל קשתות הגרף (ע"י סריקת DFS למשל) כדי לכוון הפוך $O(n)$, ועוד מעבר BFS אחד כדי לצור זרימה – $O(n)$. הזמן הכולל הוא $O(n)$.

שאלה 5

נעשה רדוקציה לבעיית זיווג דו צדדי. נצור גרף דו צדדי G=(XUY,E), כאשר בקבוצה X נמצאות פסוקיות מהצורה φ_i, 1≤i≤m, ובקבוצה Y נמצאים הליטרלים x_j, 1≤j≤n. נחבר בקשת בין φ_i ל x_j אם x_i הוא אחד מהליטרלים ב φ_i. כמובן שמתקיים |X|=m, |Y|=n. מכל פסוקית של X ישנן שלש קשתות. מכאן שמספר הקשתות היוצאות מ X הוא 3m. כל שלש קשתות מחוברות לצומת יחיד ב Y, ולכן מספר הצמתים ב Y הוא שליש ממספר הקשתות המגיעות ל Y, שהוא שווה ל m. מכאן נסיק ש m=n. תהי A תת קבוצת של קדקודים מ- X, ו Γ(A) קבוצת שכני A. מכך שכל איבר ב A מחובר לשלשה איברים ב Γ(A) ולכל איבר ב Γ(A) שלשה מקורות שונים ב A לכל היותר נובע, כי מספר שכני A, נסמן אותו ב k, מקיים אחד מהשניים: כל איברי Γ(A) מחוברים לשלשה מקורות כל אחד בדיוק, או קיים איבר ב Γ(A) לו פחות משלשה מקורות.

אם כל איברי Γ(A) מחוברים בדיוק לשלה מקורות, אז מספר השכנים של A הוא מינימאלי אפשרי, והוא שווה לשליש ממספר הקשתות הנכנסות. נסמן את מספר איברי A ב l (L קטנה). אז, מכיוון שכל איבר ב l מוציא שלש קשתות בדיוק, מספר הקשתות הנכנסות אל Γ(A) הוא 3l, מכאן שמספר צמתי Γ(A) הוא l.

נאמר שקיים איבר ב Γ(A) לו פחות משלשה מקורות. מכיוון שהמקרה הקודם מתיחס למצב בו מספר שכני A הוא המספר המינימאלי אפשרי, וראינו כי במקרה זה מתקיים |A|=|Γ(A)|, נסיק שבכל מקרה אחר בוודאי |A|<|Γ(A)|.

כעת, לאחר שכל תנאי משפט Hall מתקיימים, נוכל לאמר שקיים זיווג מושלם ב G. מקיום זיווג מושלם נסיק שכל פסוקית מקושרת לליטרל יחיד ולכל ליטרל מקור יחיד שהוא פסוקית. ליטרל יחיד זה יכול לקבל '0' או '1', וקביעת ערך בליטרל יחיד זה מספיקה על מנת שכל הפסוקית תהיה שווה ל '1'. לכל פסוקית ליטרל בודד הוא מספיק על מנת לקבוע את ערכה ל '1', ומכיוון שלכל פסוקית ישנו ליטרל, נוכל לקבוע ערך '1' לכל פסוקית, ובכך לקבוע ערך '1' לכל הביטוי מהצורה:

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \dots \wedge \varphi_m;$$

בכך, למעשה, הראינו שהנוסחה המקיימת את דרישות השאלה תמיד ספיקה.

כעת, נפעיל אלגוריתם למציאת זיווג מושלם, בין קבוצת הפסוקיות לקבוצת הליטרלים, ובכך נמצא את קבוצת הליטרלים שבעזרה נוכל למצוא השמה ספיקה עבור הנוסחה.

זמן ריצה:

יצירת גרף עורכת: מעבר יחיד על קבוצת הפסוקיות בגודל m, מעבר על קבוצת הליטרלים שהראינו קודם שגדלה הוא כגודל קבוצת הפסוקיות – m, ויצירת 3m (גם, הראינו קודם) קשתות, סה"כ זמן של O(m). הפגעלת אלג' לזרימה מקסימלית – במקרה שלנו הזרימה היא בגודל m, ותמיד קיים זיווג מושלם, ולכן זמן הריצה יהיה O(m). בכך, למעשה נוכל למצוא את ההשמה המספקת של הנוסחה כולה בזמן פולינומיאלי, כנדרש.