20425 - תאריך הבחינה: 16.7.2018 (סמסטר 2018ב - מועד א6 / 87)

שאלה 1

נתון כי X ו- Y משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר p $(0 < p < 1)$. כמו כן, מגדירים את המשתנה המקרי R על-ידי $R = |X - Y|$.

א. הערכים האפשריים של המשתנה המקרי R הם $0, 1, \ldots$.

לכל $j = 1,2,\ldots$ מתקיים:

$$P\{R=j\}=P\{|X-Y|=j\}=P\{X-Y=j\}+P\{Y-X=j\}=2P\{Y-X=j\}=2P\{Y=X+j\}$$

$$=2\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=i,Y=i+j\}=2\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=i\}P\{Y=i+j\}=2\sum_{i=1}^{\infty}p(1-p)^{i-1}\cdot p(1-p)^{i+j-1}$$

$$=2p^2(1-p)^j\sum_{i=1}^{\infty}[(1-p)^2]^{i-1}=2p^2(1-p)^j\sum_{i=0}^{\infty}[(1-p)^2]^{i}\underset{0<1-p<1}{\underset{\downarrow}{=}}\frac{2p^2(1-p)^j}{1-(1-p)^2}=\frac{2p(1-p)^j}{2-p}$$

ובאופן דומה מקבלים כי:

$$P\{R=0\}=P\{|X-Y|=0\}=P\{X=Y\}=\sum_{i=1}^{\infty}p^2[(1-p)^2]^{i-1}=p^2\sum_{i=0}^{\infty}[(1-p)^2]^{i}\underset{0<1-p<1}{\underset{\downarrow}{=}}\frac{p^2}{1-(1-p)^2}=\frac{p}{2-p}$$

ב. $$E[R]=\sum_{j=0}^{\infty}j\cdot P\{R=j\}=0+\frac{2p}{2-p}\sum_{j=1}^{\infty}j(1-p)^j=\frac{2(1-p)}{2-p}\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}jp(1-p)^{j-1}}_{=E[Geo(p)]}=\frac{2(1-p)}{2-p}\cdot\frac{1}{p}=\frac{2(1-p)}{p(2-p)}$$

שאלה 2

נתון כי למשתנה המקרי X יש התפלגות אחידה בדידה בין 70 ל- 100.

כמו כן, מנתוני הבעיה נובע כי למשתנה המקרי Y בהינתן $X = i$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים i ו- 0.75.

א. נסמן ב- A את המאורע שיש בארגז מספר זוגי של אגוזים וב- B את המאורע שיש בו יותר מ- 90 אגוזים.

מקבלים:
$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P\{92,94,\ldots,100\}}{P\{70,72,\ldots,100\}}=\frac{\frac{5}{31}}{\frac{16}{31}}=\frac{5}{16}$$

ב. לחישוב התוחלת נעזר בנוסחת התוחלת המותנית:

$$E[Y]=E[E[Y|X]]=E[0.75X]=0.75E[X]=0.75\cdot\tfrac{70+100}{2}=0.75\cdot 85=63.75$$

ג. לחישוב השונות נעזר בנוסחת השונות המותנית:

$$\mathrm{Var}(Y)=E[\mathrm{Var}(Y|X)]+\mathrm{Var}(E[Y|X])=E[0.75\cdot0.25X]+\mathrm{Var}(0.75X)$$

$$=0.1875E[X]+0.75^2\,\mathrm{Var}(X)=0.1875\cdot\tfrac{70+100}{2}+0.5625\cdot\tfrac{31^2-1}{12}$$

$$=0.1875\cdot85+0.5625\cdot80=60.9375$$

הערה: השונות של משתנה אחיד בדיד בין 70 ל- 100 שווה לשונות של משתנה אחיד בדיד בין 1 ל- 31.

ד. לחישוב השונות המשותפת נעזר בהתנייה על המשתנה המקרי X :

$$\text{Cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=E[E[XY\,|\,X]]-E[X]E[Y]=E[XE[Y\,|\,X]]-E[X]E[Y]$$
$$=E[X\cdot 0.75X]-E[X]E[Y]=0.75[\text{Var}(X)+(E[X])^2]-E[X]E[Y]$$
$$=0.75[80+85^2]-85\cdot 63.75=60$$

ומכאן :
$$\rho(X,Y)=\frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}=\frac{60}{\sqrt{80\cdot 60.9375}}=0.8593$$

דרך נוספת לפתרון סעיפים ב-ד

ב. נגדיר סדרת אינדיקטורים :
$$Y_i=\begin{cases}1 & , \text{ שירה הצליחה לפצח את אגוז } i\\ 0 & , \text{ אחרת}\end{cases} \quad \text{לכל} \quad i=1,2,\ldots$$

מתקיים : $Y=\sum_{i=1}^{X}Y_i=$ מספר האגוזים ששירה מצליחה לפצח.

בהנחה (הסבירה) שאין תלות בין המשתנה המקרי X לבין ההצלחות של שירה בפיצוח האגוזים, נוכל להשתמש בנוסחאות התוחלת והשונות של סכום מקרי.

ומכאן :
$$E[Y]=E\left[\sum_{i=1}^{X}Y_i\right]=E[X]E[Y_1]=\tfrac{70+100}{2}\cdot 0.75=85\cdot 0.75=63.75$$

ג. בהמשך לסעיף הקודם :

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{X}Y_i\right)=E[X]\text{Var}(Y_1)+(E[Y_1])^2\text{Var}(X)=85\cdot 0.75\cdot 0.25+0.75^2\cdot\tfrac{31^2-1}{12}=60.9375$$

ד. לחישוב השונות המשותפת נעזר בהתנייה על המשתנה המקרי X .

מתקיים :
$$E[XY]=E\left[X\sum_{i=1}^{X}Y_i\right]=E\left[E\left[X\sum_{i=1}^{X}Y_i\,\middle|\,X\right]\right]=E\left[X\,E\left[\sum_{i=1}^{X}Y_i\,\middle|\,X\right]\right]$$

כאשר :
$$E\left[\sum_{i=1}^{X}Y_i\,\middle|\,X=n\right]=E\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i\,\middle|\,X=n\right]=E\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i\right]=n\cdot E[Y_1]$$

ומכאן :
$$E[XY]=E\left[X\,E\left[\sum_{i=1}^{X}Y_i\,\middle|\,X\right]\right]=E\left[X\cdot X\cdot E[Y_1]\right]=E[Y_1]E[X^2]=0.75\cdot(80+85^2)=5478.75$$

ולכן :
$$\rho(X,Y)=\frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}=\frac{5478.75-85\cdot 63.75}{\sqrt{80\cdot 60.9375}}=0.8593$$

שאלה 3

א.
$$\frac{\binom{48}{28}}{\binom{50}{30}}=\frac{48!\cdot 30!}{50!\cdot 28!}=\frac{30\cdot 29}{50\cdot 49}=\frac{870}{2{,}450}=0.355$$

ב. התרחשות המאורע תלויה אך ורק במיקום של השאלונים בשורה. אין חשיבות לסדר של התלמידים. לפיכך, נחשב במכנה את מספר האפשרויות הכללי למקם את השאלונים מסוג B, ואילו במונה את מספר האפשרויות למקם אותם, כך שלא יהיו שניים סמוכים, דהיינו, שיהיו מפוזרים במרווחים בין השאלונים מסוג A. יש 29 מקומות בין כל שני תלמידים עם שאלונים מסוג A ו-2 מקומות נוספים בקצות השורה, כלומר, בסך-הכל 31 מקומות אפשריים שמתוכם נבחר 20 מקומות לשאלונים מסוג B.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא:
$$\frac{\binom{31}{20}}{\binom{50}{20}}=\frac{31!\cdot 30!}{50!\cdot 11!}=1.80\cdot 10^{-6}$$

ג. בהינתן המידע לגבי 25 התלמידים שנמצאים במקומות 1-25, מספר השאלונים מסוג A שמקבלים 10 התלמידים הראשונים מתוכם הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N=25$, $m=17$ ו- $n=10$. לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא:
$$\frac{\binom{17}{6}\binom{8}{4}}{\binom{25}{10}}=\frac{12{,}376\cdot 70}{3{,}268{,}760}=0.265$$

הערה: אפשר גם להגדיר התפלגות היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N=25$, $m=10$ ו- $n=17$, עבור מספר שאלוני A שממוקמים ב-10 המקומות הראשונים ("המיוחדים").

באופן הזה מקבלים:
$$\frac{\binom{10}{6}\binom{15}{11}}{\binom{25}{17}}=\frac{12{,}376\cdot 70}{3{,}268{,}760}=0.265$$

ד. אוהד יכול לשבת בקצה השורה או במקום "פנימי". ההסתברות שיישב בקצה היא 2/50 ואילו במקום פנימי היא 48/50. יתרה מזאת, הוא יכול לקבל שאלון מסוג A או שאלון מסוג B.
לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא:
$$\frac{2}{50}\cdot\left(\frac{30}{50}\cdot\frac{20}{49}+\frac{20}{50}\cdot\frac{30}{49}\right)+\frac{48}{50}\cdot\left(\frac{30}{50}\cdot\frac{20}{49}\cdot\frac{19}{48}+\frac{20}{50}\cdot\frac{30}{49}\cdot\frac{29}{48}\right)=\frac{312}{1{,}225}=0.0196+0.2351=0.2547$$

דרך נוספת לחישוב ההסתברות:
$$\frac{48\cdot\left[\binom{47}{29}+\binom{47}{28}\right]+2\cdot\left[2\cdot\binom{48}{29}\right]}{50\cdot\binom{50}{30}}=0.2547$$

דרך חישוב זו מבוססת על בחירת מקום לאוהד ולאחר מכן על חלוקת שאלוני B.

שאלה 4

א. למשתנה המקרי X יש התפלגות היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N=10$, $n=3$ ו- $m=5$.

לפיכך:
$$P\{X=i\}=\frac{\binom{5}{i}\binom{5}{3-i}}{\binom{10}{3}}\quad,\quad i=0,1,2,3$$
$$\mathrm{Var}(X)=\frac{10-3}{10-1}\cdot 3\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}=0.58\bar{3}$$

ב. המשתנה המקרי M מקבל את הערך i , אם כדור i נבחר וכן שני כדורים נוספים הנושאים מספר קטן מ-i.

לפיכך:
$$P\{M=i\}=\frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{(i-1)(i-2)}{240}\quad,\quad i=3,4,\ldots,10$$

ג. תחילה, ההסתברות שבחזרה יחידה על הניסוי ייבחר כדור 7 היא:
$$\frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{3\cdot 9\cdot 8}{10\cdot 9\cdot 8}=0.3$$

או:
$$\frac{1}{10}+\frac{9\cdot 1}{10\cdot 9}+\frac{9\cdot 8\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8}=\frac{3}{10}=0.3$$

מכאן כי למשתנה המקרי Y יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n = 20$ ו- $p = 0.3$, ומתקיים :

$$P\{Y=i\} = \binom{20}{i} \cdot 0.3^i \cdot 0.7^{20-i} \qquad , \qquad i = 0,1,\ldots,20$$

$$\text{Var}(Y) = 20 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 4.2$$

ד. בהמשך לסעיף ג, למשתנה המקרי W יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר $p = 0.3$, ולכן מתקיים :

$$P\{W=i\} = 0.3 \cdot 0.7^{i-1} \qquad , \qquad i = 1,2,\ldots$$

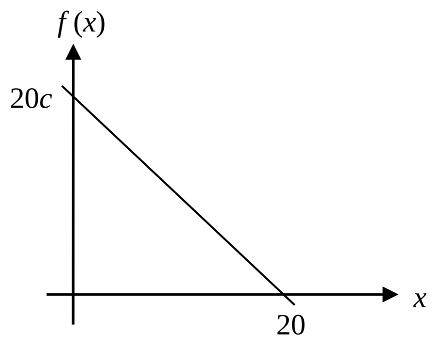
$$\text{Var}(W) = \frac{0.7}{0.3^2} = 7.\overline{7}$$

שאלה 5

א. הוכחת הטענה מובאת באתר הקורס.

ב. נתאר באיור את פונקציית הצפיפות הנתונה :

$$f_X(x) = \begin{cases} c(20-x) & , \quad 0 < x < 20 \\ 0 & , \quad else \end{cases}$$



1. $$\frac{20 \cdot 20c}{2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 200c = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c = 0.005$$

2. $$E[X] = \int_0^{20} 0.005(20x - x^2)dx = 0.005\left[\frac{20x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{20} = 0.005 \cdot (4000 - 2666.\overline{6}) = 6.\overline{6}$$

3. $$P\{X \le 15\} = 1 - P\{X > 15\} = 1 - \frac{5 \cdot 0.005 \cdot (20-15)}{2} = 1 - 0.0625 = 0.9375$$