שאלה 1

(15 נק׳) א. יהיו A, B קבוצות. נתון כי $A \cap B \neq \varnothing$ וכי לכל $x \in B$, הקבוצה $A \setminus \{x\}$ שקולה לקבוצה A. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

(i) A קבוצה אינסופית.

(ii) $A \setminus B$ קבוצה אינסופית.

(10 נק׳) ב. תהי S קבוצה. הוכיחו שאם $\{S\} \neq \{\varnothing\}$ אז $P(S) \setminus \{\varnothing\} \neq \varnothing$.

תשובה

א. (i) נראה שהטענה נכונה.

לפי הנתון $A \cap B \neq \varnothing$ לכן קיים איבר $x \in A \cap B$. אז $x \in A$ וגם $x \in B$.

מאחר ש- $x \in B$, הנתון מבטיח ש- $A \setminus \{x\}$ **שקולה ל-** A.

מצד שני $A \setminus \{x\}$ **חלקית ממש ל-** A, שכן $A \setminus \{x\} \subseteq A$ (לפי הגדרת ההכלה בין קבוצות) ובנוסף $x \in A$ אבל כמובן $x \notin A \setminus \{x\}$.

מצאנו אם כן קבוצה שחלקית ממש ל- A שהיא גם שקולה ל- A ולכן A אינסופית.

(ii) נראה שהטענה לא נכונה. נפריך אותה על-יד דוגמה נגדית.

נבחר $A = \mathbf{N}$ (קבוצת המספרים הטבעיים) ו- $B = \mathbf{N} \setminus \{1\}$. הקבוצות האלה מקיימות את תנאי השאלה, שכן $A \cap B = \mathbf{N} \setminus \{1\} \neq \varnothing$ ולכל $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, $A \setminus \{n\} = \mathbf{N} \setminus \{n\}$ שקולה ל- $A = \mathbf{N}$.

מפני למשל ההתאמה

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{N} & : & 1 & 2 & \cdots & n-1 & n & n+1 & \cdots \\ & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathbf{N} \setminus \{n\} & : & 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+1 & n+2 & \cdots \end{array}$$

היא חד-חד-ערכית.

אבל $A \setminus B = \mathbf{N} \setminus (\mathbf{N} \setminus \{1\}) = \{1\}$ היא קבוצה סופית. לכן הטענה מופרכת.

ב. אם $\{S\} \neq \{\varnothing\}$ אז $S \neq \varnothing$ לכן קיים $x \in S$. אז $\{x\} \in P(S)$. מצד שני $\{x\} \neq \varnothing$ ולכן $\{x\} \notin \{\varnothing\}$. לסיכום $\{x\} \in P(S)$ וגם $\{x\} \notin \{\varnothing\}$ לכן $\{x\} \in P(S) \setminus \{\varnothing\}$. מכאן שהקבוצה $P(S) \setminus \{\varnothing\}$ אינה ריקה (כי יש איבר השייך לה) במילים אחרות $P(S) \setminus \{\varnothing\} \neq \varnothing$.

שאלה 2

(13 נק׳) א. תהי $G = \{e, a, b, c\}$ חבורה בת ארבעה איברים ביחס לפעולה $*$, שבה e הוא איבר נטרלי נתון כי $a * a = b * c$. השלימו את לוח הפעולה של G. נמקו כל צעדיכם.

(12 נק׳) ב. על הקבוצה $A = \{3n \mid n \in \mathbf{N}\}$ מגדירים פעולה בינרית Δ כך:

לכל $x, y \in A$, $x \Delta y = x + 3y - 9$.

אלו מהתכונות שבהגדרת מושג החבורה מקיימת פעולה זו? נמקו כל טענותיכם.

תשובה

א. נשים לב תחילה ש- $a * a \neq a$ מפני שאם $a * a = a$ אז $a * a = a * e$ ועל-יש צמצום a משמאל נקבל ש- $a = e$ - סתירה.

מאחר שלפי הנתון $a*a=b*c$ נקבל שגם $b*c\neq a$.

כמו-כן $b*c\neq b$ כי אחרת, אם $b*c=b$ נקבל ש- $b*c=b*e$ ועל-ידי צמצום ב- b משמאל נקבל ש- $c=e$ - סתירה.

באופן דומה, $b*c\neq c$ כי אחרת, אם $b*c=c$ אז $b*c=e*c$ ועל-ידי צמצום ב- c מימין נקבל ש- $b=e$ - סתירה.

מאחר שבחבורה יש סגירות, $b*c\in G$ ומכיוון ש- $b*c\neq a,b,c$ נקבל שבהכרח $b*c=e$.

בחבורה, כידוע, איברים נגדיים מתחלפים לכן $c*b=e$.

לאחר שנרשום את כל התוצאות האלה בלוח הפעולה של G תוך שימוש בעובדה שבכל שורה ובכל טור, כל איבר מופיע בידוק פעם אחת, נקבל:

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

ב. 1. נראה שהפעולה מקיימת את תכונת הסגירות: שלכל $x,y\in A$ קיימים $m,n\in \mathbf{N}$ כך ש- $x=3m,\ y=3n$ לכן $x\Delta y=x+3y-9=3m+3\cdot 3n-9=3(m+3n-3)$.

המספר $k=m+3n-3$ הוא שלם וחיובי (כי $m\geq 1$ ו- $3n-3\geq 0$).

לכן $k\in \mathbf{N}$ ולכן $x\Delta y=3k\in A$.

2. הפעולה אינה קיבוצים מפני שלמשל:

$$(6\Delta 6)\Delta 6=(6+18-9)\Delta 6=15\Delta 6=15+18-9=24$$
$$6\Delta(6\Delta 6)=6\Delta(6+18-9)=6\Delta 15=6+45-9=42$$

3. קיום איבר נטרלי. נניח ש- $e\in A$ הוא איבר נטרלי. אז צריך למשל להתקיים $e\Delta 3=3$ כלומר $e\Delta 3=e+9-9=3$ ואז $e=3$. מכאן ש**אם קיים** איבר נטרלי אז הוא **בהכרח** 3.

מצד שני, $3\Delta 6=3+18-9=12$ לכן $3\Delta 6\neq 6$. מכאן שגם 3 לא יכול להיות נטרלי.

מסקנה: לא קיים ב-A איבר נטרלי ביחס לפעולה Δ.

4. לא קיים לאף איבר ב-A נגדי ביחס לפעולה Δ מפני שלא קיים איבר נטרלי.

שאלה 3

נתונות פונקציות $f,g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$. ידוע שלכל $n\in\mathbf{N}$ מתקיים $(g\circ f)(2n)=n$.

(9 נק') א. הוכיחו ש- g היא פונקציה על.

(7 נק') ב. הדגימו פונקציות $f,g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ המקיימות את תנאי השאלה, כך ש- f תהיה חד-חד-ערכית.

(9 נק') ג. הראו כי מנתוני השאלה לא נובע ש- f היא בהכרח חד-חד-ערכית.

תשובה

א. עלינו להראות שעבור כל $n\in\mathbf{N}$ קיים $x\in\mathbf{N}$ כך ש- $g(x)=n$.

אכן, לכל $n\in\mathbf{N}$ אם נבחר $x=f(2n)$ נקבל על סמך הנתון ש- $g(x)=g(f(2n))=(g\circ f)(2n)=n$. לכן g היא על.

ב. נבחר למשל $f=I_{\mathbf{N}}$ (פונקצית הזהות של $\mathbf{N}$) – ברור שאז f היא חד-חד-ערכית.

ונבחר $g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ המוגדרת כך:

$g(n)=n/2$ לכל n טבעי זוגי ו- $g(n)=1$ לכל n טבעי אי-זוגי.

אז לכל $n\in\mathbf{N}$, מפני ש- $2n$ זוגי, מתקיים $g(2n)=2n/2=n$ ולכן

$(g\circ f)(2n)=g(f(2n))=g(2n)=n$ כפי שנדרש.

ג. נבחר עכשיו $g=I_{\mathbf{N}}$ (פונקצית הזהות של $\mathbf{N}$) ונבחר $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ המוגדרת כך:

$f(n)=n/2$ לכל n טבעי זוגי ו- $f(n)=1$ לכל n טבעי אי-זוגי.

אז f היא לא חד-חד-ערכית כי למשל $f(1)=f(3)=1$,

ולכל $n\in\mathbf{N}$, מתקיים $(g\circ f)(2n)=g(f(2n))=g(n)=n$ כפי שנדרש.

שאלה 4

נתונות f,g איזומטריות של המישור שהופכות מגמת משולשים ו- A,B נקודות שונות במישור.

ידוע כי הנקודות A,B הן נקודות שבת של האיזומטריה $f\circ g$.

(15 נק') א. הוכיחו כי f ו- g הן איזומטריות הפוכות זו לזו.

(10 נק') ב. הוכיחו שאם לאיזומטריה f יש נקודת שבת אז $f=g$.

תשובה

א. מאחר ש- f,g הופכות מגמת משולשים (כלומר כל אחת מהן היא הרכבה של מספר אי-זוגי של שיקופים), נקבל ש- $f\circ g$ שומרת מגמת משולשים (כי זו תהיה הרכבה של מספר זוגי של שיקופים). מכן ש- $f\circ g$ יכולה להיות רק הזהות או סיבוב לא טריוויאלי או הזזה לא טריוויאלית. בנוסף, לפי הנתון יש ל- $f\circ g$ שתי נקודות שבת.

אבל לסיבוב לא טריוויאלי יש רק נקודת שבת אחד ולהזזה לא טריוויאלית אין נקודות שבת, לכן בהכרח מקבלים ש- $f\circ g$ היא הזהות כלומר $f\circ g=I$.

כידוע, כל איזומטריה היא פונקציה הפיכה, לכן קיימת למשל הפונקציה f^{-1}.

אז מתוך השוויון $f\circ g=I$ נקבל ש- $f^{-1}\circ(f\circ g)=f^{-1}\circ I$.

מכאן ש- $(f^{-1}\circ f)\circ g=f^{-1}\circ I$, לכן $I\circ g=f^{-1}$ ולכן $g=f^{-1}$.

מכאן ש- f ו- g הן איזומטריות הפוכות זו לזו.

ב. לפי הנתון f הופכת מגמת משולשים. לכן היא יכולה להיות רק שיקוף או שיקוף מוזז ומפני שלפי ההנחה בסעיף זה יש ל- f נקודת שבת, אז היא בהכרח שיקוף (לשיקוף מוזז אין נקודות שבת).

כידוע כל שיקוף הוא הופכי לעצמו (שכן $f\circ f=I$) לכן $f=f^{-1}$ ומפני שלפי הסעיף הקודם $g=f^{-1}$, נקבל ש- $f=g$.

שאלה 5

לפניכם מערכת אקסיומות שמושגי היסוד בה הם: "נקודה", "ישר" (כקבוצה של נקודות), והיחס "נמצאת על".

1. קיימים שני ישרים שונים ℓ_1, ℓ_2 ושתי נקודות שונות A, B כך ש- $A, B \in \ell_1$ וגם $A, B \in \ell_2$.
2. לא קיים ישר שעליו שתי נקודות בדיוק.
3. לכל ישר ℓ ולכל נקודה P שאינה על ℓ קיים לפחות ישר אחד אשר P נמצאת עליו ואין לו נקודה משותפת עם ℓ.

(5 נקי) א. הוכיחו שהמערכת חסרת סתירה.

(5 נקי) ב. הוכיחו שהמערכת אינה קטגורית.

(5 נקי) ג. הוכיחו שהמערכת היא בלתי תלויה.

(5 נקי) ד. הוכיחו שבמערכת מתקיים המשפט הבא: "קיימים לפחות שלושה ישרים שונים".

(5 נקי) ה. הוכיחו שהמשפט "קיימים ארבעה ישרים שונים" לא נובע מן המערכת הנתונה.

תשובה

א. המודל שבו הנקודות הן A, B, C, D והישרים בו הם $\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$, $\{C\}, \{D\}$ מקיים את כל אקסיומות המערכת, לכן המערכת חסרת סתירה.

ב. גם המודל שבו הנקודות הן A, B, C, D והישרים בו הם $\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$, $\{C\}, \{D\}$, $\varnothing$ מקיים את כל אקסיומות המערכת והוא לא שקול למודל מסעיף א' מפני שמספר הישרים בו גדול יותר. לכן המערכת לא קטגורית (כי יש לה שני מודלים לא שובלים).

ג. **1**. המודל שבו הנקודות הן A, B, C והישר היחיד שלו הוא $\{A, B, C\}$, מקיים את אקסיומות 2 ו- 3 ולא מקיים את אקסיומה 1 לכן אקסיומה 1 לא נובעת מן האקסיומות האחרות.

2. המודל שבו הנקודות הן A, B, C, D והישרים הם $\{A, B, C\}$, $\{A, B\}$, $\{C\}$ מקיים את אקסיומות 1 ו- 3 ולא מקיים אקסיומה 2 לכן אקסיומה 2 לא נובעת מן האקסיומות האחרות.

3. המודל שבו הנקודות הן A, B, C, D והישרים הם $\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$, מקיים את אקסיומות 1 ו- 2 ולא מקיים אקסיומה 3 לכן אקסיומה 3 לא נובעת מן האקסיומות האחרות.

לכן כל אחת מאקסיומות המערכת לא נובעת מן האקסיומות האחרות שלה ולכן המערכת בלתי תלויה.

ד. עלינו להראות שבכל מודל של המערכת קיימים ארבעה ישרים לפחות. נבחר לפי אקסיומה 1 קיימים שני ישרים שונים ℓ_1, ℓ_2 ושתי נקודות שונות A, B כך ש- $A, B \in \ell_1$ וגם $A, B \in \ell_2$. מפני ש- $\ell_1 \neq \ell_2$ קיימת נקודה C כך שלמשל $C \in \ell_1$ ו- $C \notin \ell_2$.

אז לפי אקסיומה 3 קיים ישר ℓ_3 כך ש- $C \in \ell_3$ כך שאין ל- ℓ_3 נקודה משותפת עם ℓ_2.

מאחר ש- $A, B \in \ell_2$ נקבל ש- $A, B \notin \ell_3$ ולכן ℓ_3 שונה מהישרים ℓ_1, ℓ_2 (שמכילים את הנקודות A, B). מכאן שבכל מודל של המערכת יש לפחות שלושה ישרים וטענה מוכחת.

ה. המודל שבו הנקודות הן A,B,C,D והישרים בו הם $\{A,B,C\}$, $\{A,B,C,D\}$, $\{D\}$ מקיים את כל אקסיומות המערכת הנתונה אך יש בו רק שלושה ישרים, לכן המשפט "קיימים ארבעה ישרים שונים" לא נובע מן המערכת.

שאלה 6

(12 נק') א. תהי $A=\{15,\ 21,35\}$. נסמן ב- A^* את הקבוצה הנוצרת מ- A על-ידי כפל.
הוכיחו ש**לא** קיים ב- A^* מספר אשר שארית החילוק שלו ב- 30 שווה ל- 7.

(13 נק') ב. הוכיחו באינדוקציה שלכל מספר טבעי $n \ge 4$ מתקיים: $3^n \ge (n-2)\cdot 2^{n+1}$.
האם הטענה נכונה לכל n טבעי?

תשובה

א. כל מספר ב- A^* הוא מהצורה $15^a21^b35^c = 3^{a+b}5^{a+c}7^{b+c}$ כאשר a,b,c מספרים שלמים אי-שליליים ולא כולם 0 . נניח ששארית החילוק ב- 30 של מספר ב- A^* היא 7 .
נקבל אז שקיימים שלמים $a,b,c,k \ge 0$ כאשר a,b,c לא כולם 0, כך ש-
$3^{a+b}5^{a+c}7^{b+c} = 30k+7$.
מאחר שאחד מהספרים a,b,c אינו אפס , $a+b>0$ או $a+c>0$.

אם $a+b>0$ אז המספר $3^{a+b}5^{a+c}7^{b+c}$ מתחלק ב- 3 (שארית החילוק שלו ב- 3 היא 0) בזמן שלמספר $30k+7=3(10k+2)+1$ יש שארית 1 בחילוק עם 3.

ואם $a+c>0$ אז המספר $3^{a+b}5^{a+c}7^{b+c}$ מתחלק ב- 5 (שארית החילוק שלו ב- 5 היא 0) בזמן שלמספר $30k+7=5(6k+1)+2$ יש שארית 2 בחילוק עם 5.

לכן הפרכנו את ההנחה שקיים ב- A^* מספר ששארית החילוק שלו ב- 30 היא 7 .

ב. עבור $n=4$ הטענה הנתונה היא: $3^4 \ge (4-2)\cdot 2^5$ כלומר $81 \ge 64$ וזה נכון.

נניח שהטענה נכונה עבור n מסוים כלומר $3^n \ge (n-2)\cdot 2^{n+1}$ (זו תהיה הנחה האינדוקציה)
ונוכיח שאז הטענה גם ל- $n+1$ כלומר $3^{n+1} \ge (n-1)\cdot 2^{n+2}$.
בעזרת הנחת האינדוקציה נקבל ש- $3^{n+1} = 3\cdot 3^n \ge 3(n-2)\cdot 2^{n+1}$.
לכן מספיק להראות ש- $3(n-2)\cdot 2^{n+1} \ge (n-1)\cdot 2^{n+2}$.
לאחר חילוק ב- 2^{n+1} נקבל שאי-שוויון זה שקול ל- $3(n-2) \ge (n-1)\cdot 2$ כלומר
$3n-6 \ge 2n-2$ וזה שקול ל- $n \ge 4$ שמתקיים על פי הנתון.
לכן הטענה נכונה ל- $n+1$ ולכן, על-פי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $n \ge 4$.
האי-שוויון $3^n \ge (n-2)\cdot 2^{n+1}$ מתקיים לכל n טבעי, מפני שהוא מתקיים לכל $n \ge 4$ וקל לבדוק שהוא מתקיים גם עבור $n=1,2,3$.