סמסטר 2010א

ממ"ן 11 – פתרון שאלה 4

נשים לב לעובדות הבאות:

(1) $\lg((\lg\lg n)^{\lg n}) = \lg n \cdot \lg\lg\lg n = \lg(n^{\lg\lg\lg n})$, לכן $(\lg\lg n)^{\lg n} = n^{\lg\lg\lg n}$;

(2) $(n!)^{1/\lg n} = \Omega((2^n)^{1/\lg n}) = \Omega(2^{n/\lg n}) = \Omega(2^{\sqrt{n}})$;

וכמו-כן: $(n!)^{1/\lg n} = O((n^n)^{1/\lg n}) = O((n^{1/\lg n})^n) = O(2^n) = O(3^n)$

(3)

$$1 \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1^2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{7^2}\right) + \left(\frac{1}{8^2} + \ldots + \frac{1}{15^2}\right) + \ldots.$$
$$< \frac{1}{1^2} + 2\cdot\frac{1}{2^2} + 4\cdot\frac{1}{4^2} + 8\cdot\frac{1}{8^2} + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots < 2$$

או אחרת:

$$1 \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i-1)} = 1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$$

לכן $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = \Theta(1)$;

(4) $\lg(2^{\sqrt{n}}) = \sqrt{n} = \left(\sqrt{n}/\lg n\right)\cdot \lg n = \lg(n^{\sqrt{n}/\lg n})$, לכן $2^{\sqrt{n}} = n^{\sqrt{n}/\lg n}$;

(5) $\lg(n^n \cdot n!) = n\cdot\lg n + \lg(n!) = \Theta(n\cdot\lg n)$;

(6) $n\cdot\lg n = \Theta(n\cdot\lg n)$;

(7) $\lg\left(n^{\frac{\lg\lg\lg n}{\lg n}}\right) = \frac{\lg\lg\lg n}{\lg n}\cdot\lg n = \lg\lg\lg n$, לכן $n^{\frac{\lg\lg\lg n}{\lg n}} = \lg\lg n$;

(8) $\lg(3^n) = n\cdot\lg 3 = (n\lg 3/\lg n)\cdot\lg n = \lg(n^{n\lg 3/\lg n})$, לכן $3^n = n^{n\lg 3/\lg n}$;

(9) $1/n = \Theta(1/n)$;

(10) $n^2 + n\cdot\lg^3 n = \Theta(n^2)$.

נסמן ב- $f(n) << g(n)$ את היחס $f(n)=o(g(n))$ וב- $f(n) == g(n)$ את היחס $f(n)=\Theta(g(n))$.

מ-(3), (5), (6), (7), (9), (10) מתקבל

$$1/n << \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} << n^{\frac{\lg\lg\lg n}{\lg n}} << \lg(n^n \cdot n!) == n\cdot\lg n << n^2 + n\cdot\lg^3 n$$

מהשוואת החזקות ב-(1), (2), (4), (8) נובע

$$\lg\lg\lg n << \sqrt{n}/\lg n << (n+1/2)/\lg n - n\lg e/\lg^2 n == (n+1/2)/\lg n << n\lg 3/\lg n,$$

ומזה מתקבל

$$(\lg\lg n)^{\lg n} << 2^{\sqrt{n}} << (n!)^{1/\lg n} << 3^n$$

אם מוסיפים גם את היחס $n^2 + n\cdot\lg^3 n << (\lg\lg n)^{\lg n}$, מתקבל הסידור המלא של כל הפונקציות:

$$1/n << \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} << n^{\frac{\lg\lg\lg n}{\lg n}} << \lg(n^n \cdot n!) == n\cdot\lg n << n^2 + n\cdot\lg^3 n << (\lg\lg n)^{\lg n} << 2^{\sqrt{n}} << (n!)^{1/\lg n} << 3^n$$