תשובה *1*

א. ביטוי לא תקין: מספר הארגומנטים של f_1^2 אינו מתאים.

ב. ביטוי לא תקין: הארגומנטים של סימן פרדיקט צריכים להיות שמות-עצם.
כאן אחד הארגומנטים, $\sim(x_2)$, אינו שם-עצם אלא בעצמו ביטוי לא תקין,
כי שם-עצם אינו מכיל קשרים לוגיים.

ג. תבנית לא אטומית שאינה פסוק (יש משתנה חפשי) .

ד. תבנית אטומית שאינה פסוק (יש משתנה חפשי) .

ה. ביטוי לא תקין: הארגומנטים של סימן פונקציה צריכים להיות שמות-עצם.
כאן אחד הארגומנטים הוא תבנית.

ו. תבנית לא אטומית שהיא פסוק.

ז. ביטוי לא תקין: אחרי סימן כמת והמשתנה שלו צריך לבוא סימן פותח של תבנית: כמת נוסף או סימן פרדיקט או סימן השלילה. כאן מופיע אחרי הכמת סימן פונקציה. במלים אחרות: **הביטוי שעליו "פועל" הכמת צריך להיות תבנית ולא פונקציה** (בכתיב מלא יבוא אחרי הכמת והמשתנה סוגר שמאלי. אבל הסימן כאן גם אינו סוגר שמאלי).

ח. תבנית לא אטומית שהיא פסוק.

תשובה *2*

ψ_1: היחס R אינו רפלקסיבי: $\sim\forall x R(x,x)$. **זה שקול לוגית ל:** $\exists x(\sim R(x,x))$.

ψ_2: היחס R אינו סימטרי: $\sim\forall x\forall y\big(R(x,y)\to R(y,x)\big)$.

זה שקול לוגית ל: $\exists x\exists y\big(R(x,y)\quad \sim R(y,x)\big)$.

ψ_3: היחס R אינו טרנזיטיבי: $\sim\forall x\forall y\forall z\big((R(x,y)\quad R(y,z))\to R(x,z)\big)$.

זה שקול לוגית ל: $\exists x\exists y\exists z\big(R(x,y)\quad R(y,z)\quad \sim R(x,z)\big)$

תשובה *3*

א. פירוש התבנית באינטרפרטציה הנתונה הוא:
לכל קבוצה y של טבעיים, החיתוך של y עם הקבוצה x שווה לקבוצה x.
שימו לב ש- x מופיע **חפשי** בתבנית, לכן התבנית אומרת משהו על x, מתארת תכונה של x,
בעוד ש- y מופיע רק באופן קשור (מכומת), לכן y הוא משתנה עזר בלבד: התבנית אינה אומרת דבר על ערכו של y ! **ראו הדיון בעמ' *113* בספר** - חשוב להבין אותו. כדי להדגיש נקודה זו,

נציין שאם נרשום z במקום y בכל מקום בתבנית הנ"ל, נקבל תבנית **שקולה לוגית** לתבנית המקורית.

משתנה מכומת בלוגיקה דומה למשתנה סכימה באריתמטיקה - הוא משתנה עזר בלבד.

לפיכך מה שמעניין אותנו הוא השמת ערך ל- x בלבד. הערך שניתן ל- y אינו רלבנטי (פורמלית, ראו הגדרה *3.14* מקרה *4*, ושימו לב שמחליפים שם את ההשמה של המשתנה הקשור בכל השמה אפשרית, לכן ערכו בהשמה הנתונה אינו רלבנטי).

בהשמה $\sigma(x) =$ נקבל את הטענה כי החיתוך של כל קבוצה עם שווה .

זו טענה נכונה בעולם $P(¥)$, לכן התבנית אמיתית באינטרפרטציה הנ"ל תחת הנ"ל.

מצד שני, אם $\sigma(x) \neq$ אז למשל $\neq \sigma(x)$ $=$ $\sigma(x)$,

כלומר התבנית אינה אמיתית בהשמה בה $\sigma(x) \neq$.

לכן ההשמה $\sigma(x) =$ היא **היחידה** שבה התבנית אמיתית.

יש כמובן חופש לתת למשתנים y,z כל ערך שנרצה.

ב. פירוש התבנית באינטרפרטציה הנתונה הוא:

לכל קבוצה y של טבעיים, קיימת קבוצה z של טבעיים, כך שהחיתוך של y עם z שווה לקבוצה x.

שוב x הוא המשתנה החפשי היחיד, והתבנית "מתארת תכונה שלו".

כדי להדגיש זאת, ניתן לומר בתחילת הפירוש הנ"ל: " x היא קבוצה המקיימת ש- ....".

קל לראות, בדומה לסעיף הקודם, ש- היא הקבוצה היחידה המקיימת זאת.

כלומר ההשמה $\sigma(x) =$ היא ההשמה היחידה עבור המשתנה x בה תבנית זו אמיתית.

ג. לאחר שניעזר במשמעות הפונקציה f_1^2, פירוש התבנית מסעיף א ב- J_1 הוא:

לכל קבוצה x $y,$ שווה x ...

זה כמובן נכון בכל השמה שניתן ל- x, לכן התבנית הראשונה אמיתית ב- J_1 .

התבנית השנייה מתפרשת ב- J_1 כטענה קצת מוזרה:

(x היא קבוצה המקיימת ש-) לכל y קיים z כך ש- y שווה x .

זה אינו נכון באף השמה $\sigma(x)$!

אין אף קבוצה x השווה **לכל** קבוצה y שניקח (גם אם נבחר בדרך קבוצה z כלשהי...).

לכן התבנית השנייה שקרית ב- J_1 .

ד. בסעיפים א, ב ראינו שבאינטרפרטציה J, שתי התבניות הללו אמיתיות בהשמה $\sigma(x) =$ ושקריות בהשמות אחרות. לכן הן אינן אמיתיות לוגית ואינן שקריות לוגית.

בסעיף ג ראינו שב- J_1 התבנית הראשונה אמיתית והשניה שקרית (בכל ההשמות), לכן הן אינן שקולות לוגית.

תשובה 4

א. תהי J אינטרפרטציה של השפה לעולם $\{1,2\}$, שבה R מתפרש כ"להיות שווה *1*" ,

ו- S מתפרש כ- "להיות שווה *2*" .

הפסוק $(\exists x R(x)) \quad (\exists x S(x))$ אמיתי ב- J, כי קיים בעולם הזה איבר השווה *1* , וקיים בעולם הזה איבר השווה *2*.

לעומת זאת, הפסוק $\exists x(R(x) \quad S(x))$ שקרי ב- J, כי לא קיים בעולם הזה איבר השווה הן ל- *1* והן ל- *2* .

לכן הפסוקים אינם שקולים לוגית.

ב. נוכיח ש- $\exists x(R(x) \quad S(x))$ גורר לוגית את $(\exists x R(x)) \quad (\exists x S(x))$:

תהי J אינטרפרטציה שבה אמיתי $\exists x(R(x) \quad S(x))$. משמע קיים בעולם איבר המקיים בו זמנית את התנאי R ואת התנאי S. לפיכך קיים בעולם איבר המקיים את התנאי R (אותו האיבר הנ"ל) וקיים בעולם איבר המקיים את התנאי S (אותו האיבר).

משמע $(\exists x R(x)) \quad (\exists x S(x))$ אמיתי ב- J.

ג. נוכיח שהפסוקים שקולים לוגית.

כיוון אחד:

תהי J אינטרפרטציה שבה $\exists x(R(x) \quad S(x))$ אמיתי.

כלומר קיים בעולם של J איבר המקיים את התנאי $R(x) \quad S(x)$.

לפי לוח האמת של "או", האיבר הזה מקיים את R או שהוא מקיים את S. נפריד לשני המקרים.

(*i*) אם הוא מקיים את R , אז הפסוק $\exists x R(x)$ אמיתי ב- J .

לכן, מהלוח של "או", הפסוק $(\exists x R(x)) \quad (\exists x S(x))$ אמיתי ב- J .

(*ii*) אם הוא מקיים את S אז הפסוק $\exists x S(x)$ אמיתי ב- J .

לכן, מהלוח של "או", הפסוק $(\exists x R(x)) \quad (\exists x S(x))$ אמיתי ב- J .

בשני המקרים קיבלנו ש- $(\exists x R(x)) \quad (\exists x S(x))$ אמיתי ב- J , כמבוקש.

כיוון שני:

תהי J אינטרפרטציה שבה $(\exists x R(x)) \quad (\exists x S(x))$ אמיתי.

השלימו את ההוכחה של כיוון זה, בדומה לכיוון הראשון.

איתי הראבן