

ט' באדר א' תשע"ט

מוס' שאלון - 468

14

בפברואר 2019

87 מוס' מועד

סמסטר א' 2019

20417 / 4

שאלון בחינת גמר

20417 - אלגוריתמים

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה 6 עמודים

מבנה הבחינה:

בחינה חמיש שאלות.

מתוכן יש לענות על ארבע שאלות.

25 נקודות לכל שאלה.

לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם הייעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקרה להציג אלגוריתם חדש לחלווטין).

על שאלות שמנסנות בכוכב - יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה) ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות.

לשאלון זה מצורפים דפי עזר.

חומר עזר:

כל חומר עזר אסור בשימוש.

הציגו

למשגיח את השאלון

וכל עזר אחר שקיבלתם בתור מחברת התשובות

בהצלחה !!!



אלגוריתמים 2019 – מועד שני

הנחיות: ענו על 4 מתוֹךְ 5 שאלות. לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה.
על שאלות שמשמעותן בכוכב - יש לענות בטופס השאלון במקומות המוקצה (ולא במחברת הבחינה), ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרונו שכזה (במקרה אלגוריתם חדש לחולוטין).
חומר עזר: אסור. דף נושאות מצ"ב. בהצלחה!

שאלה 1 – הרצת FFT 25 נק').

נביט בפולינום $5 + 4x + 3x^2 + 2x^3 = x(p)$. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרכיבים (לרבות הקריאה הרצת FFT מסדר 4 (הרצת (ω_4, \cdot)) על מקדמי הפולינום. בדקו את תשובה ישירה של הערכים המתאימים בפולינום.

*** שאלה 2* – מסלולים מזעריים – צלעות שליליות בלבד (25 נק').**

יתקבל שום ניקוד על אלגוריתם עם זמן ריצה $\Theta(|V| \cdot |E|)$.

91m ac

ANSWER

שאלה 3 – תכנון כפל מטריצות (25 נק').

כזכור, המכפלה $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ של סדרת מטריצות מוגדרת רק כשיעור התאמה בין מספרי השורות והעמודות: אם מסמנים ב- c_i את מספר השורות במטריצה A_i , וב- c_{i+1} את מספר העמודות שלה, אז חיבר להתקיים התנאי $c_i = c_{i+1}$ לכל $n < i \leq r$. במקרה שכזה כל מכפלה $A_i \times A_{i+1} \times \dots \times A_r$ הינה מטריצה בת c_i שורות ו- c_{i+1} עמודות, והчисוב שלה (בהתאם להגדרת כפל מטריצות) ניתן לביצוע ע"י $(A_i \times A_{i+1} \times \dots \times A_r) \Theta$ פעולות אלמנטריות בלבד (של כפל/חיבור מספרים). כזכור, כפל מטריצות הוא גם אסוציאטיבי, כלומר, בהכפלה של סדרת מטריצות, הננו רשאים למקם את הסוגרים כרצוננו. למשל $(A_1 \times A_2) \times A_3 = A_1 \times (A_2 \times A_3)$.

- (א) הציגו דוגמה של שלוש מטריצות, שבה מיקום מסויים של הסוגרים בחישוב המכפלה $A_1 \times A_2 \times A_3$ דורש פי אלף פעולות אלמנטריות מאשר המיקום الآخر.
- (ב) הציגו אלגוריתם תכנון דינامي, שמקבל כקלט רשימה $(r_1, c_1, \dots, r_n, c_n)$ של מספרי השורות והעמודות בכל מטריצה, ומפיק כפלט מיקום אופטימלי של הסוגרים עבור ההכפלה $A_1 \times \dots \times A_n$. (שימוש לב שאינו מבצעים עדין את הכפלת המטריצות, אלא רק מנסים לקבוע את מיקום הסוגרים, שימזר את מספר הפעולות האלמנטריות בזמן ההכפלה).

שאלה 4 – בעיית הספיקות (25 נק').

נתונה נוסחת 3CNF, שבה כל אחד מה משתנים x_1, \dots, x_n מופיע בבדיקה שלוש פסוקיות שונות, וכל פסוקית כוללת בבדיקה שלושה משתנים שונים. הוכיחו כי הנוסחה ספיקה. הציגו עבור נוסחאות כאלו אלגוריתם למציאת השמה מספקת. הדרכה: העזרו במשפט Hall.

- תזכורת: נוסחת 3CNF היא נוסחה מהצורה $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_m = \varphi$, כאשר כל פסוקית הצורה $(z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee z_{i,3}) = \varphi_i$, וכל $z_{i,j}$ הינו אחד מהלiterals x_1, \dots, x_n . כך למשל $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee x_5) = \varphi$ הינה נוסחת 3CNF. השמה הינה פונקציה שמתאימה לכל משתנה x ערך "אמת" T או "שקר" F . בהינתן השמה מסוימת, אזי הלiteral x_i מסופק אם"ם ההשמה מקיימת $T \leftarrow x_i$, והliteral $\neg x_i$ מסופק אם"ם $F \leftarrow x_i$. פסוקית $(z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee z_{i,3}) = \varphi_i$ מסופקת אם"ם לפחות אחד מהלiterals שבה $z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}$ מסופק. הנוסחה יכולה $\varphi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m$ מסופקת אם"ם כל הפסוקיות $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ מסופקות. הנוסחה φ נקראת ספיקה, אם"ם לפחות אחת מבין 2^m ההשומות האפשריות מספקת אותה).

*** שאלה 5* – קבוצה מנתקת מעגלים מזרית (25 נק').**

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$, ונתוני משקלים שלמים ו חיוביים |.
 לכל הצלעות קבוצת צלעות $E \subseteq F$ נקראת "מנתקת-מעגלים", אם לאחר הסרתה לא נותרים
 מעגלים בגרף, כלומר הגרף $G' = (V, E \setminus F)$ חסר-מעגלים. משקלה של קבוצת צלעות הינו סכום
 משקלי הצלעות בקבוצה $\sum_{e \in F} w(e)$. הציגו אלגוריתם למציאת קבוצת צלעות מנתקת-
 מעגלים בעלת משקל מזערני. עלייכם להיעזר בהדרכה שמופיעה להלן.

טענה מרכזית: אם F הינה קבוצה מנתקמת-מעגלים מזערית אז $G' = (V, E \setminus F)$ אנו סביר.

הוכחת הטענה המרכזית: רассмотрим G' . נניח כי G' לא מתקיים.

$|E| < |V|-1$ כיון ש- E מוגדרת כsubset של V . נסמן F כsubset של V כך ש- E מוגדרת כsubset של $V \setminus F$. נסמן G כsubset של V כך ש- E מוגדרת כsubset של $V \setminus G$. נסמן f כפונקציית המיפוי $f: V \rightarrow V \setminus G$.

נניח כי f חד-חד-עומדת. נסמן $e = f(v)$. נסמן v_1, v_2, \dots, v_n כvertices של G ו- v_{n+1} כvertex של G' . נסמן v_i^* כvertex של G אשר מושג על ידי $f(v_i)$. נסמן v_i^* כvertex של G' אשר מושג על ידי $f(v_i)$. נסמן v_i^* כvertex של G' אשר מושג על ידי $f(v_i)$.

נניח כי v_i^* מושג על ידי $f(v_j)$. נסמן $v_i^* = f(v_j)$. נסמן v_j^* כvertex של G' אשר מושג על ידי $f(v_j)$. נסמן v_j^* כvertex של G' אשר מושג על ידי $f(v_i)$.

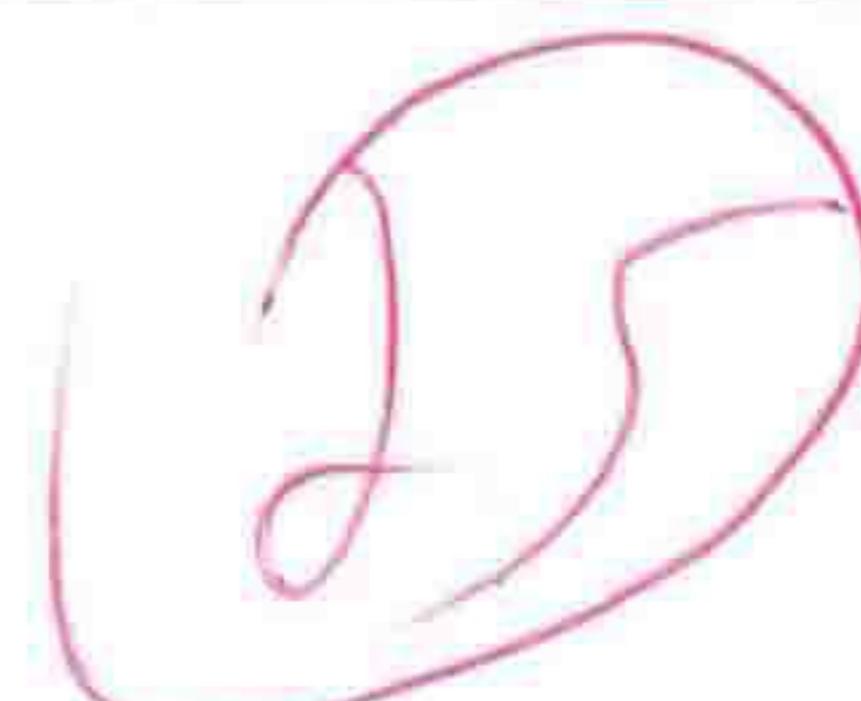
נניח כי $v_i^* = v_j^*$. נסמן $v_i^* = v_j^* = v$. נסמן v_i^* כvertex של G' אשר מושג על ידי $f(v_i)$. נסמן v_j^* כvertex של G' אשר מושג על ידי $f(v_j)$.

נניח כי $v_i^* \neq v_j^*$. נסמן $v_i^* = v_j^* = v$. נסמן v_i^* כvertex של G' אשר מושג על ידי $f(v_i)$. נסמן v_j^* כvertex של G' אשר מושג על ידי $f(v_j)$.

אלגוריתם למציאת קבוצת צלעות מנתקמת-מעגלים במשקל מזערי זרועה (וזרעה).

-זרועה (זרען) כט בעקבות פולין כהן ו-זרעה (זרען) כט בעקבות פולין כהן.

ה-זרען (זרען) כט בעקבות פולין כהן.



ב ה צ ל ח ה !

FFT

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$$

(או כפונקציית פולינום גיאומטרית)

$$n=4$$

$$\text{FFT}([s, h, z, 2], w_1=i)$$

$$\text{FFT}([s, z], w_2=-1)$$

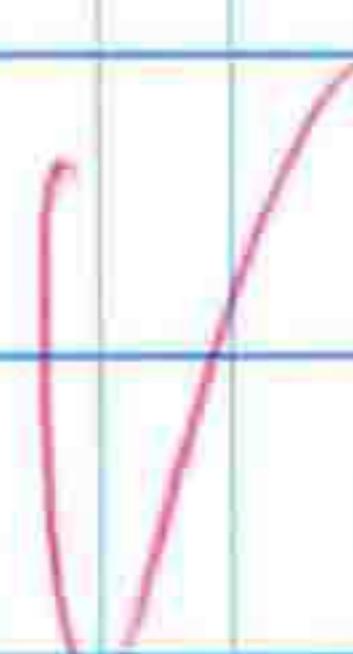
$$\text{FFT}([s], w_4=1)$$

return s

$$\text{FFT}([z], w_4=1)$$

return z

$$\text{return } [s+z, s-z] = \underline{[8, 2]}$$



$$\text{FFT}([h, z], w_2=-1)$$

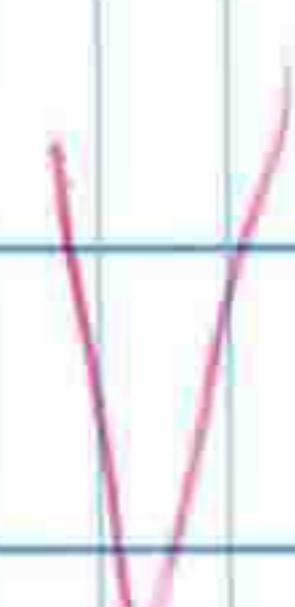
$$\text{FFT}([h], w_4=1)$$

return h

$$\text{FFT}([z], w_4=1)$$

return z

$$\text{return } [h+z, h-z] = \underline{[6, 2]}$$



$$\text{return } \underline{[h, z+2i, z, z-2i]}$$

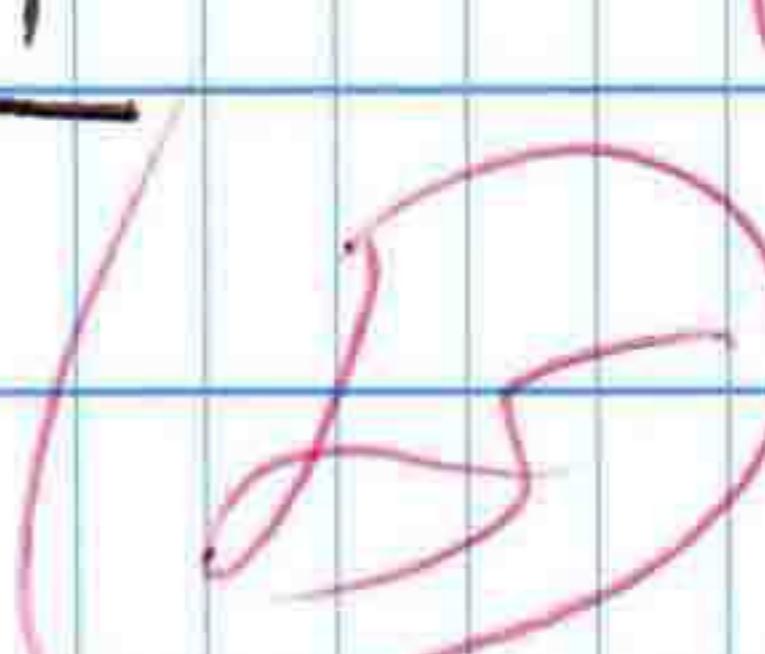
(ריבוע מוקטן הוא סכום של $k=3$)

$$P(1) = 2+3+4+5 = \underline{14}$$

$$P(i) = 2i^3 + 3i^2 + 4i + 5 = 2i \cdot (-1) - 3 + 4i + 5 = \underline{2+2i}$$

$$P(-1) = -2+3-4+5 = \underline{2}$$

$$P(-i) = 2 \cdot (-i)^3 + 3 \cdot (-i)^2 - 4i + 5 = \underline{2-2i}$$



1900 - 4.2%

רכאי כהן הונאה סבירה:

האלחוט

הבדים דוחן נאנס. 3 מזון כוונתית כה אדרט אדרט כוונתית נאנס.

וְיַעֲשֵׂה תְּמִימָה כִּי יְהִי אֶחָד בְּבָנָיו וְיַעֲשֵׂה גָּדוֹלָה

as ~~absorb~~ F ~~prod~~ ~~absorb~~ ~~FC~~

לעומת מילון ערך נרחב באנציקלופדיות מקצועיות ובספרות מדעית, המבוסס על מילון ערך נרחב באנציקלופדיות מקצועיות ובספרות מדעית, המבוסס על

אנו בראון וויליאם אוניברסיטה
הנורווגית. קראם ספרי FF פז

100% ✓

מגנום

G'

: Hall won of all 2015 new pl. for 2016

$\mathcal{N}(x) \geq x$ whenever $x \in [223, 127]$ for $x \in [2115, 11]$.

لهم اذ دعك مني فامنعني

$|n| = |m| \neq 0 \rightarrow$ العددان n و m مختلفان

new this year for

~~1900 57 PNL 3 JUL 1900 1900 1900 3CNF 1900~~

لپج F ۱۰۰) رخی رک ت ۱۰۰) نام خی رک

האם $\text{f}(x) = \text{f}(y)$?

- אם $\text{f}(x) = \text{f}(y)$ אז $x = y$ (ולו דווקא).
 אם $x = y$ אז $\text{f}(x) = \text{f}(y)$ (ולו דווקא).
 אם $\text{f}(x) = \text{f}(y)$ אז $x = y$ (ולו דווקא).
 אם $x = y$ אז $\text{f}(x) = \text{f}(y)$ (ולו דווקא).

כגון $\text{f}(x) = \text{f}(y)$ נקבע בדעתנו $\text{f}(x) = \text{f}(y)$.

כל $x \in \mathbb{R}$ נקבע $\text{f}(x) = \text{f}(x)$.

כל $x \in \mathbb{R}$ נקבע $\text{f}(x) = \text{f}(x)$ (ולו דווקא).

כל $x \in \mathbb{R}$ נקבע $\text{f}(x) = \text{f}(x)$.

$\text{f}(x) = \text{f}(x)$ מתקיים.



$$|E| + |V| = O(n)$$

$$-\text{f}^*(x) = -\text{f}^*(x)$$

$$\text{f}(x) \geq \text{f}^*(x) \text{ כיוון } \text{f}(x) \geq \text{f}^*(x)$$

$$|E| \cdot \text{f}^* = 3n \cdot n = 3n^2 = O(n^2)$$



(D)