תשובה 1

דוגמא אפשרית: $A=\{1,2,3\}$, $R=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ (השלימו את הפרטים).

תשובה 2 (תקציר)

א. **לא**. השלימו נימוק: תנו שני יחסים שונים מעל A שיש להם אותו סגור טרנזיטיבי.

ב. **לא**. השלימו נימוק: תנו יחס מעל A שאינו טרנזיטיבי והסבירו מדוע זה מפריך את הטענה.

ג. **כן**: הסגור הטרנזיטיבי של יחס כלשהו הוא טרנזיטיבי, לכן לכל יחס R, היחס $t(R)$ הוא טרנזיטיבי. הסגור הטרנזיטיבי של יחס טרנזיטיבי הוא היחס עצמו, לכן $t(t(R))=t(R)$.

ד. **לא**. השלימו נימוק: תנו דוגמא נגדית.

תשובה 3

א. מובן שלא. למשל $f(2)=f(4)=\{2\}$.

ב. לא. אמנם כל תת-קבוצה סופית של K מתקבלת על-ידי f

(הוכחה לטענה זו: אם $X\neq\varnothing$ היא קבוצה סופית של ראשוניים, תהי m_X מכפלת כל אברי X. אז $f(m_X)=X$. נותר המקרה $X=\varnothing$, ולפי ההגדרה $f(1)=\varnothing$).

אבל קבוצת הראשוניים K מכילה גם תת-קבוצות **אינסופיות**, למשל K עצמה. אף קבוצה אינסופית של ראשוניים אינה בתמונה של f, כי לכל מספר טבעי יש רק מספר סופי של גורמים ראשוניים!

ג. החזקות של 5, כלומר כל המספרים מהצורה 5^n כאשר $1\le n\in\mathbf{N}$ (הראו זאת).

ד. כל המספרים מהצורה 2^m5^n כאשר $1\le m,n\in\mathbf{N}$ (הראו זאת).

תשובה 4

א. היחס הריק מעל A הוא סימטרי ואינו רפלקסיבי, לכן הוא אבר של K.

היחס הריק מוכל בכל יחס, לכן בפרט הוא מוכל בכל יחס השייך ל- K.

לכן $\varnothing$ הוא האבר הקטן ביותר ב- K.

ב. יהי $R_1=A\times A-\{(1,1)\}$.

R_1 הוא יחס סימטרי. הוא אינו רפלקסיבי כי הזוג $(1,1)$ לא נמצא בו.

היחס היחיד מעל A שמכיל-ממש את R_1 הוא $A\times A$, אבל $A\times A$ רפלקסיבי ולכן אינו אבר של K. הראינו ש- R_1 הוא אבר ב- K ואין אף אבר אחר של K שגדול ממנו, משמע R_1 הוא אבר מקסימלי ב- K.

ג. בדומה לסעיף הקודם מובן שגם $R_2 = (A\times A) - \{(2,2)\}$ הוא אבר מקסימלי ב- K , והוא שונה מ- R_1 . כעת, לפי שאלה 3.21 , אם בקבוצה סדורה-חלקית יש יותר מאבר מקסימלי אחד, אין בקבוצה אבר גדול ביותר.

תשובה 5

א. 720 (השלימו את החישוב).

ב. כדי לקצר את הכתיבה נשתמש בסימון Σ , שבקרוב נזדקק לו בקומבינטוריקה.
הסבר לסימון זה ראו באתר הקורס. אין הכרח להשתמש בסימון זה בהוכחה.

עלינו להוכיח את השוויון : $\sum_{k=1}^{n} k\cdot f(k) = f(n+1)-1$.

בדיקה עבור $n=1$:

ראשית נחשב את $f(1)$ ואת $f(2)$, בעזרת ההגדרה של f :

$f(1) = 1\cdot f(0) = 1\cdot 1 = 1$, $f(2) = 2\cdot f(1) = 2\cdot 1 = 2$

כעת לבדיקה עצמה : בטענה המבוקשת $\sum_{k=1}^{n} k\cdot f(k) = f(n+1)-1$ נקח $n=1$.

קיבלנו את השוויון $1\cdot f(1) = f(2)-1$.

בעזרת הערכים של $f(1)$, $f(2)$ שמצאנו, אנו רואים שהשוויון מתקיים.

מעבר:

נניח שהטענה נכונה עבור n, כלומר **נניח** $\sum_{k=1}^{n} k\cdot f(k) = f(n+1)-1$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר **נוכיח**: $\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot f(k) = f(n+2)-1$.

נפתֵח את אגף שמאל של השוויון שאנו רוצים להוכיח. נפרק את הסכום לשני חלקים :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot f(k) = (n+1)\cdot f(n+1) + \sum_{k=1}^{n} k\cdot f(k)$$

מהנחת האינדוקציה, $\sum_{k=1}^{n} k\cdot f(k) = f(n+1)-1$. נציב זאת באגף ימין בשורה הקודמת :

$$= (n+1)\cdot f(n+1) + f(n+1) \quad -1$$

נקבץ איברים

$$= (n+2)\cdot f(n+1) \quad -1$$

ומהגדרת f

$$= f(n+2) \quad -1$$

הוכחנו שהטענה נכונה עבור $n+1$.

לפי עקרון האינדוקציה, משני השלבים (הבדיקה והמעבר) יחד נובע שהטענה נכונה לכל n טבעי חיובי.

איתי הראבן