פתרון מטלת מנחה (ממ"ן) 13

שאלה 1

מיצאו את העוצמות של כל אחת מן הקבוצות הבאות. נמקו את התשובות.

א. קבוצת כל המספרים הממשיים בקטע $A \subseteq (0,1)$ אשר בפיתוח שלהם כשבר עשרוני אינסופי כל ספרה מופיעה בסמיכות לספרה השווה לה. (למשל, אם בפיתוח מופיע הרצף $a3c$ אז לפחות אחת מהספרות a,c היא 3).

ב. $(\mathbf{N} \times (0,1)) \cap (\mathbf{R} \times \mathbf{Q})$

ג. $\mathcal{P}((0,1) \setminus \mathbf{I})$, כאשר $\mathbf{I}$ היא קבוצת כל המספרים הממשיים האי-רציונליים.

ד. $\mathcal{P}((0, 10^{-10}) \setminus \mathbf{Q})$

תשובה

א. נסמן ב- A את הקבוצה כל המספרים הממשיים בקטע $(0,1)$ אשר בפיתוח שלהם כשבר עשרוני אינסופי כל ספרה מופיעה בסמיכות לספרה השווה לה.

$A \subseteq (0,1)$ לכן $|A| \le |(0,1)|$.

מצד שני, הפונקציה $f : (0,1) \to A$ המוגדרת על ידי $f(0.a_1a_2a_3...) = 0.a_1a_1a_2a_2a_3a_3...$ היא חד-חד-ערכית, לכן $|(0,1)| \le |A|$.

לכן ממשפט קנטור ברנשטיין מקבלים ש- $\aleph = |A| = |(0,1)|$.

ב. נתאר תחילה את איברי הקבוצה התנונה.

$\langle x,y\rangle \in (\mathbf{N} \times (0,1)) \cap (\mathbf{R} \times \mathbf{Q})$ אם ורק אם $\langle x,y\rangle \in (\mathbf{N} \times (0,1))$ וגם $\langle x,y\rangle \in (\mathbf{R} \times \mathbf{Q})$

כלומר ($x \in \mathbf{N}$ ו- $y \in (0,1)$) וגם ($x \in \mathbf{R}$ ו- $y \in \mathbf{Q}$) וזה שקול לכך ש- $x \in \mathbf{N} \cap \mathbf{R} = \mathbf{N}$ ו- $y \in (0,1) \cap \mathbf{Q}$. לפיכך $(\mathbf{N} \times (0,1)) \cap (\mathbf{R} \times \mathbf{Q}) = \mathbf{N} \times ((0,1) \cap \mathbf{Q})$

מאחר ש- $(0,1) \cap \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}$ נקבל ש- $|(0,1) \cap \mathbf{Q}| \le |\mathbf{Q}| = \aleph_0$.

מצד שני $\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},...\} \subseteq (0,1) \cap \mathbf{Q}$ לכן $\aleph_0 = |\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},...\}| \le |(0,1) \cap \mathbf{Q}|$

ולכן ממשפט קנטור ברנשטיין מקבלים ש- $|(0,1) \cap \mathbf{Q}| = \aleph_0$.

ואז מטענה 4.16 מקבלים ש- $|\mathbf{N} \times ((0,1) \cap \mathbf{Q})| = \aleph_0$ (כי זו מכפלה קרטזית של קבוצות בנות מניה אינסופיות).

לסיכום: $|(\mathbf{N} \times (0,1)) \cap (\mathbf{R} \times \mathbf{Q})| = \aleph_0$.

ג. $(0,1) \setminus \mathbf{I}$ היא קבוצת כל המספרים הרציונליים שבקטע $(0,1)$.

במילים אחרות $(0,1) \setminus \mathbf{I} = (0,1) \cap \mathbf{Q}$ ולכן כפי שראינו בסעיף ב׳ , $|(0,1) \setminus \mathbf{I}| = \aleph_0$

אז, משפט 4.14 נובע ש- $\mathcal{P}((0,1) \setminus \mathbf{I})$ שקולה ל- $\{0,1\}^{(0,1)\setminus\mathbf{I}}$ ומטענה 4.15 מקבלים שזו

קבוצת בעלת עוצמה $\aleph$.

לסיכום, $|\mathcal{P}((0,1)\setminus \mathbf{I})| = \aleph$.

ד. לפי טענה ה שלאחר משפט 4.7 כל קטע לא מנוון שקול ל- $\mathbf{R}$ לכן $(0,10^{-10})$ שקול ל- $\mathbf{R}$

כלומר $|(0,10^{-10})| = \aleph$.

נמצא כעת את $|(0,10^{-10})\setminus \mathbf{Q}|$.

נסמן $A=(0,10^{-10})$ ו- $B=(0,10^{-10})\cap \mathbf{Q}$. אז $B\subseteq A$ ו- $|B|=\aleph_0$ לכן לפי משפט 4.34, $|A\setminus B| = |A|$.

מאחר ש- $|A|=\aleph$ ו- $A\setminus B=(0,10^{-10})\setminus\mathbf{Q}$ נסיק ש- $|(0,10^{-10})\setminus \mathbf{Q}|=\aleph$.

לכן לפי משפט 4.42 נקבל: $|\mathcal{P}((0,10^{-10})\setminus\mathbf{Q})| = 2^{|(0,10^{-10})\setminus\mathbf{Q}|} = 2^{\aleph} = \aleph'$

שאלה 2

נתונות הקבוצות הבאות (המשלימים המופיעים להלן הם ביחס לקבוצה $\mathbf{N}$)

$K=\{A\in\mathcal{P}(\mathbf{N}) \mid |A^c|=\aleph_0\}$ ו- $M=\{A\in\mathcal{P}(\mathbf{N}) \mid |A|=\aleph_0 \ \wedge\ |A^c|=\aleph_0\}$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

א. $|K|=\aleph_0$

ב. $|M|=\aleph_0$

ג. $|\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus K|=\aleph_0$

ד. $|\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus M|=\aleph_0$

תשובה

א. נסמן $\mathbf{E}=\{2n \mid n\in\mathbf{N}\}$. אז לכל קבוצה $B\subseteq \mathbf{E}$ מתקיים $\mathbf{E}^c\subseteq B^c$. מפני ש- $\mathbf{E}^c$ היא קבוצת כל המספרים הטבעיים האי-זוגיים נקבל ש- B^c קבוצה אינסופית (שחלקית ל- $\mathbf{N}$) ולכן $|B^c|=\aleph_0$. מכאן שכל קבוצה שחלקית ל- $\mathbf{E}$ שייכת ל- K.

מכאן ש- $\mathcal{P}(\mathbf{E})\subseteq K$ ולכן $|\mathcal{P}(\mathbf{E})|\le|K|$. מאחר ש- $|\mathbf{E}|=\aleph_0$ נקבל ש- $|\mathcal{P}(\mathbf{E})| = 2^{|\mathbf{E}|} = 2^{\aleph_0}$. לכן $2^{\aleph_0}\le|K|$ ולכן הטענה ש- $|K|=\aleph_0$ מופרכת.

ב. נסמן $\mathbf{E}=\{2n \mid n\in\mathbf{N}\}$ ו- $F=\{4n+2 \mid n\in\mathbf{N}\}$. אם B קבוצה כך ש- $F\subseteq B\subseteq \mathbf{E}$ אז $|B^c|=\aleph_0$ (כמו בסעיף א') וגם $|B|=\aleph_0$, שכן B קבוצה אינסופית שחלקית ל- $\mathbf{N}$). מכאן ש- $B\in M$ ולכן $\{B\in\mathcal{P}(\mathbf{N}) \mid F\subseteq B\subseteq \mathbf{E}\}\subseteq M$.

נשים לב שהקבוצה $\{B\in\mathcal{P}(\mathbf{N}) \mid F\subseteq B\subseteq \mathbf{E}\}$ שקולה ל- $\mathcal{P}(\mathbf{E}\setminus F)$ מפני שהפונקציה

$f:\{B\in\mathcal{P}(\mathbf{N})\mid F\subseteq B\subseteq\mathbf{E}\}\to\mathcal{P}(\mathbf{E}\setminus F)$ המוגדרת על ידי $f(B)=B\setminus F$ היא חד-חד-ערכית ועל). מאחר ש- $\mathbf{E}\setminus F=\{4n\mid n\in\mathbf{N}\}$ הרי ש- $|\mathbf{E}\setminus F|=\aleph_0$.

לכן $|\mathcal{P}(\mathbf{E}\setminus F)|=2^{\aleph_0}=\aleph$. מכאן שהקבוצה $\{B\in\mathcal{P}(\mathbf{N})\mid F\subseteq B\subseteq\mathbf{E}\}$ היא בעלת עוצמה $\aleph$. קבוצה זו חלקית ל- M לכן $|M|\geq\aleph$ ולכן הטענה בסעיף זה לא נכונה.

ג. K היא קבוצת כל הקבוצות החלקיות ל- $\mathbf{N}$ שהמשלים שלהן אינסופי, לכן $\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus K$ היא קבוצת כל הקבוצות החלקיות ל- $\mathbf{N}$ שהמשלים שלהן סופי.

נסמן ב- $\mathcal{S}(\mathbf{N})$ את קבוצת כל הקבוצות הסופיות שחלקיות ל- $\mathbf{N}$.

הפונקציה $g:\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus K\to\mathcal{S}(\mathbf{N})$ המוגדרת על ידי $g(A)=A^c$ היא חד-חד-ערכית ועל לכן $|\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus K|=|\mathcal{S}(\mathbf{N})|$.

נשים לב שכל קבוצה סופית של מספרים טבעיים חלקית לאחת הקבוצות $\{0,1,2,...,n\}$ עבור n טבעי מתאים. לכן $\mathcal{S}(\mathbf{N})=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\mathcal{P}(\{0,1,2,...,n\})$. זו קבוצה בת מניה, כאיחוד של מספר בן מניה של קבוצות בנות מניה.

מפני שזו קבוצה אינסופית נקבל ש- $|\mathcal{S}(\mathbf{N})|=\aleph_0$ ולכן גם $|\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus K|=\aleph_0$.

ד. לפי הנתון $M=\{A\in\mathcal{P}(\mathbf{N})\mid |A|=\aleph_0 \ \wedge\ |A^c|=\aleph_0\}$ לכן $\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus M$ היא קבוצת כל הקבוצות שחלקיות ל- $\mathbf{N}$ שהן סופיות או שהמשלים שלהן סופי. לכן אם נסמן $L=\{A\in\mathcal{P}(\mathbf{N})\mid |A|=\aleph_0\}$ נקבל ש-

$$\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus M=(\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus K)\cup(\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus L)$$

$(\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus L)$ היא קבוצת כל הקבוצות הסופיות שחלקיות ל- $\mathbf{N}$ ולכן כפי שראינו בסעיף הקודם, $|\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus L|=\aleph_0$. כמו-כן ראינו שם ש- $|\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus K|=\aleph_0$

זו קבוצת כל הקבוצות האינסופיות שחלקיות ל- $\mathbf{N}$.

נשים לב ש- $|\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus L|$ היא בעצם קבוצת כל הקבוצות הסופיות שחלקיות ל- $\mathbf{N}$ ולכן כפי שראינו $|\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus L|=\aleph_0$.

מכאן שגם $|\mathcal{P}(\mathbf{N})\setminus M|=\aleph_0$ כאיחוד של קבוצות בעלות עוצמה $\aleph_0$.

שאלה 3

נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{A_i\mid i\in\mathbf{N}\}$ כאשר $A_i\subseteq\mathbf{N}$, $A_i\neq A_j$ ו- $A_i\cap A_j=\varnothing$ לכל $i,j\in\mathbf{N}$, $i\neq j$.

B - קבוצה של קטעים פתוחים לא ריקים ב- $\mathbf{R}$ כך שלאף שניים מהם אין נקודה משותפת.

C - קבוצה אינסופית של קטעים פתוחים ב- $\mathbf{R}$ שאינה בת מניה.

א. הוכיחו ש- $|B|\leq|A|$.

ב. הוכיחו שקיימים קטעים $I,J\in C$ כך ש- $|I\cap J|=|\mathbf{R}|$

תשובה

א. נראה תחילה ש- $|A| = \aleph_0$.

הפונקציה $f: \mathbf{N} \to A$ המוגדרת על ידי $f(i) = A_i$ לכל $i \in \mathbf{N}$ היא על (כי כל קבוצה ב- A היא אחת מהקבוצות A_i עבור $i \in \mathbf{N}$ מסוים).

בנוסף זו פונקציה חח"ע, שכן, אם $i, j \in \mathbf{N}$ ו- $i \neq j$, מתקיים $A_i \neq A_j$ כלומר $f(i) \neq f(j)$.

מכאן ש- A שקולה ל- $\mathbf{N}$ ולכן $|A| = \aleph_0$.

נסמן כעת $B = \{B_\alpha \mid \alpha \in I\}$ כאשר I קבוצת אינדקסים מתאימה. אז כמובן, $|B| = |I|$ כי הפונקציה $g: I \to B$ המוגדרת על-ידי $g(\alpha) = B_\alpha$ לכל $\alpha \in I$ היא חד-חד-ערכית ועל.

לכל $\alpha \in I$ הקבוצה B_α היא קטע פתוח לא ריק וכידוע כל קטע כזה מכיל מספר רציונלי.

לכן לכל $\alpha \in I$ קיים מספר $q_\alpha \in \mathbf{Q}$ כך ש- $q_\alpha \in B_\alpha$.

הפונקציה $h: I \to \mathbf{Q}$ המוגדרת על-ידי $g(\alpha) = q_\alpha$ לכל $\alpha \in I$ היא חד-חד ערכית, שכן אם נניח ש- $g(\alpha) = g(\beta)$ עבור $\alpha, \beta \in I$ כאשר $\alpha \neq \beta$ נקבל ש- $q_\alpha = q_\beta$.

אבל $q_\alpha \in B_\alpha$ ו- $q_\beta \in B_\beta$ ואז $q_\alpha \in B_\alpha \cap B_\beta$ בסתירה להנחה שלכל שני קטעים שונים ב- B אין נקודה משותפת.

מאחר ש- $h: I \to \mathbf{Q}$ חח"ע, $|I| \leq |\mathbf{Q}| = \aleph_0$ לכן $|B| \leq \aleph_0$ ומכאן ש- $|B| \leq |A|$.

ב. אם C קבוצה אינסופית של קטעים פתוחים ב- $\mathbf{R}$ שאינה בת מניה אז לפי סעיף א' קיימים $I, J \in C$ כך ש- $I \cap J \neq \varnothing$ (כי אם לאף שניים מהם אין נקודה משותפת אז לפי סעיף א' קבוצת הקטעים חייבת להיות בת מניה).

נסמן $I = (a,b)$ ו- $J = (c,d)$. אפשר להניח למשל ש- $a \leq c$. מאחר ש- $I \cap J \neq \varnothing$, מתקיים $c < b$ ואז $I \cap J = (c,b)$. כפי שמוכח בספר, כל קטע לא מנוון שקול ל- $\mathbf{R}$ לכן $|I \cap J| = |(b,c)| = |\mathbf{R}|$ כפי שרצינו להוכיח.