תשובה 1

שרשור כזה אינו בהכרח מסלול: לפי הגדרת מסלול, אסור שקשת תופיע יותר מפעם אחת במסלול. אם יש קשת שנמצאת הן במסלול $P_{u\to v}$ והן במסלול $P_{v\to w}$, קשת זו מופיעה פעמיים בשרשור שלהם, כלומר השרשור לא יהיה מסלול.

תשובה 2

א. יהיו A,B צמתים שונים ב- G, נראה שיש ביניהם מסלול.

אם יש קשת ביניהם – סיימנו.

אם אין קשת ביניהם, יש להם חיתוך לא ריק. לכן $|A\cup B|\le 5$.

לפיכך בקבוצה $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ יש לפחות 3 אברים **שאינם** ב- $A\cup B$.

נבחר 3 אברים כאלה. הקבוצה ש- 3 מספרים אלה הם אבריה היא שכן משותף של A,B.

לכן יש מסלול באורך 2 בין A ל- B.

ב. $\binom{5}{3}=10$.

ג. מספר **הצמתים** של G הוא $\binom{8}{3}=56$.

לפי "תורת הגרפים" טענה 1.3, מספר הקשתות בגרף הוא חצי מסכום הדרגות.

לכן מספר הקשתות ב- G הוא $(56\cdot 10)/2=280$.

ד. כן, כי הוא קשיר וכל הצמתים בו בעלי דרגות זוגיות.

תשובה 3

הגרף הוא דו צדדי, כאשר צד אחד הוא קבוצת האותיות והצד השני הוא קבוצת המספרים.

קבוצת השכנים של הקבוצה $\{a,b,c,d,e\}$ היא $\{1,2,3,4\}$.

מצאנו קבוצת צמתים בצד אחד של הגרף הדו-צדדי, שמספר שכניה קטן ממש ממספר אבריה.

לפי משפט Hall (או מסקנה 4.8), אין בגרף זה זיווג מושלם.

תשובה 4

לפי מסקנה 5.4 בעמ' 54 בספר, מספר הקשתות בגרף מישורי על 11 צמתים הוא לכל היותר $33-6=27$. בפרט, מספר הקשתות של G הוא לכל היותר 27.

בגרף המלא K_{11} יש $\binom{11}{2}=55$ קשתות.

לכן ב- $\overline{G}$ יש לפחות $55-27=28$ קשתות.

מכאן, לפי האמור בתחילת התשובה, $\overline{G}$ אינו מישורי.

תשובה 5

א. כתיבת הנחת השלילה הוא תרגיל טוב בשימוש בכללי דה-מורגן לכמתים, אותם למדנו לקראת סוף הפרק בלוגיקה.

נניח בשלילה **שקיים** צבע מתוך k הצבעים הנתונים, כך **שלכל** צומת v ב- G, שכניו של v **אינם** משתמשים בכל $k-1$ הצבעים הנותרים.

נקרא לצבע זה x, וקבוצת שאר הצבעים היא B.

נעבור על הגרף ונצבע מחדש **כל צומת הצבוע ב-** x, כך:

יהי v צומת כלשהו שצבעו הוא x. מכיון ששכניו של v אינם משתמשים בכל צבעי B,

נצבע את v עצמו באחד מצבעי B שאינו בשימוש אצל שכניו של v.

נחזור ונבצע זאת **לכל צומת v שצבעו הוא** x (שני צמתים שצבעם המקורי הוא x אינם שכנים בגרף, לכן החלפת הצבע של צומת שצבעו הוא x אינה מפריעה להחלפת הצבע של צומת אחר שצבעו גם הוא x).

בכך צבענו את G צביעה נאותה בצבעים שכולם מתוך B.

זו כמובן סתירה לכך ש- $\chi(G)=k$. לכן לא קיים צבע כזה.

ב. זה מוכיח מחדש את שאלה 1 מפרק 6 (חישבו בעצמכם מדוע).

ג. לפי סעיף א, לכל צבע x מתוך k הצבעים, יש ב- G צומת, נקרא לו v_x, ששכניו משתמשים **בכל** $k-1$ הצבעים הנותרים. בפרט, דרגתו של v_x היא לפחות $k-1$.

מכיוון ששכניו של v_x צבועים בכל $k-1$ הצבעים הנותרים, הצבע של v_x עצמו חייב להיות x.

לפיכך, עבור **צבעים** שונים x,y, **הצמתים** v_x,v_y שונים זה מזה.

קיבלנו אפוא k צמתים שונים, שדרגת כל אחד מהם לפחות $k-1$.

איתי הראבן