תשובה 1

הטענה ש- f היא **על** $\mathbf{R}$ פירושה:

לכל $y \in \mathbf{R}$ קיים **לפחות** x אחד ב- A המקיים $f(x) = y$.

הטענה ש- f **חד-חד-ערכית** פירושה:

לכל $y \in \mathbf{R}$ קיים **לכל היותר** x אחד ב- A המקיים $f(x) = y$.

לכן, כדי להוכיח ש- f היא חח"ע ועל $\mathbf{R}$, עלינו להראות ש-

לכל $y \in \mathbf{R}$ קיים x **אחד ויחיד** ב- A המקיים $f(x) = y$.

נתבונן אפוא במשוואה $f(x) = y$, כלומר $\frac{x}{1-x^2} = y$,

ונראה כי אכן לכל $y \in \mathbf{R}$ קיים x **אחד ויחיד** ב- A המקיים את המשוואה.

אם $y = 0$ רואים שהפתרון היחיד למשוואה הוא $x = 0$. ואכן $0 \in A$.

נניח כעת ש- $y \neq 0$.

לאחר סידור המשוואה נקבל $yx^2 + x - y = 0$.

זו משוואה ריבועית עבור הנעלם x. מנוסחת פתרון משוואה ריבועית:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4y^2}}{2y} = -\frac{1}{2y} \pm \sqrt{\frac{1}{4y^2}+1} = k \pm \sqrt{k^2+1}$$

כאשר סימַנו $k = -1/(2y)$ ($0 \neq k \in \mathbf{R}$).

עלינו להראות כי לכל $0 \neq k \in \mathbf{R}$, **בדיוק אחד** משני ערכי x המוגדרים ע"י המשוואה נמצא בתחום $-1 < x < 1$.

נשים לב ש- $\sqrt{k^2+1} > 1$ תמיד.

נפריד לשני מקרים:

(1) $k > 0$. אז $x_+ = k + \sqrt{k^2+1} > 1$ כלומר $x_+ \notin A$.

נראה כי במקרה זה $x_- \in A$:

מכיוון ש- $k > 0$, מתקיים $k^2 + 2k + 1 > k^2 + 1$,

כלומר $(k+1)^2 > k^2 + 1$

בהוצאת שורש (הביטויים חיוביים!) נקבל $k + 1 > \sqrt{k^2+1}$

כלומר $k - \sqrt{k^2+1} > -1$.

ברור גם כי $0 > k - \sqrt{k^2 + 1}$

וקיבלנו אפוא כי $0 > x\_ > -1$. לכן $x\_ \in A$.

(2) המקרה $k < 0$ מטופל באופן דומה (השלימו). לחילופין, נוכל לקבל את המקרה הזה מתוך המקרה הקודם בעזרת הסתכלות בתכונותיה של f ומעט עבודה.

תשובה 2

א. לא. למשל עבור $R_1 = \{(1,1)\}$ מתקיים $f(R_1) = R_1K = \{(1,1)\}$

ועבור $R_2 = \{(1,2)\}$ מתקיים $f(R_2) = R_2K = \{(1,1)\}$.

קיבלנו שני איברים שונים ב- M שיש להם אותה תמונה תחת f,

משמע f אינה חד-חד-ערכית.

ב. יהי $R \subseteq K$. עלינו להוכיח $f(R) = R$, כלומר עלינו להוכיח $RK = R$.

הוכחת הכלה בכיוון אחד, $RK \subseteq R$:

יהי $(x,y) \in RK$, וכאמור $R \subseteq K$. עלינו להראות כי $(x,y) \in R$.

מהנתון ומהגדרת כפל יחסים, קיים u כך ש- $(u,y) \in K$, $(x,u) \in R$.

מהגדרת K ומכך ש- $(u,y) \in K$ נובע $y = 1$.

מצד שני, נתון $R \subseteq K$, לכן, שוב מהגדרת K ומכך ש- $(x,u) \in R$ נובע $u = 1$.

קיבלנו $y = u = 1$. לכן בפרט $(x,y) = (x,u)$.

אם כך, מכיון שכאמור $(x,u) \in R$ אז $(x,y) \in R$, כמבוקש.

הוכחת הכלה בכיוון השני, $R \subseteq RK$:

יהי $(x,y) \in R$, וכאמור $R \subseteq K$. עלינו להראות כי $(x,y) \in RK$.

נתון $R \subseteq K$, מהגדרת K ומכך ש- $(x,y) \in R$ נובע $y = 1$.

בנוסף, מהגדרת K, $(1,1) \in K$.

מהגדרת כפל יחסים, מתוך $(1,1) \in K$, $(x,1) \in R$ מתקבל $(x,1) \in RK$

כלומר $(x,y) \in RK$, כמבוקש.

ג. היחס K מכיל את כל הזוגות מהצורה $(x,1)$, כאשר $x \in A$.

מכאן ומהגדרת כפל יחסים נובע שעבור כל יחס R, המכפלה RK חלקית ל- K .

כלומר לכל R מתקיים $f(R) \subseteq K$.

מצד שני, בסעיף הקודם ראינו שכל קבוצה חלקית ל- K נמצאת בתמונה של f :

אם $R \subseteq K$ אז $f(R) = R$, כלומר כל $R \subseteq K$ הוא תמונה של מישהו (של עצמו).

לפיכך התמונה של f היא בדיוק קבוצת הקבוצות החלקיות של K.

מכיון ש- $|K| = 3$, הרי $|P(K)| = 8$.

יש אפוא בדיוק 8 יחסים בתמונה של f : שמונה הקבוצות החלקיות ל- K.

ד. לפי הסעיף בספר (או הקובץ) שהוזכר בשאלה, יש התאמה **חד-חד-ערכית ועל** בין קבוצת מחלקות השקילות ש- f משרה לבין תמונת הפונקציה f :

בחלוקה המושרה ע"י f,

לכל מחלקת שקילות מתאים איבר אחד ויחיד בתמונת f,

למחלקות שקילות שונות מתאימים איברים שונים בתמונת f,

וכל איבר בתמונת f מותאם למחלקה כלשהי.

בסעיף הקודם ראינו שיש בדיוק 8 איברים בתמונת f. לכן מספר מחלקות השקילות הוא 8.

תשובה 3

א. יחס מעל A הוא קבוצה של זוגות סדורים של אברי A, לכן כל יחס מעל A, ובפרט כל יחס שקילות מעל A , **חלקי** לקבוצה $A \times A$. קל לבדוק ש- $A \times A$ עצמה היא יחס שקילות (זהו יחס השקילות שבו כל אברי A נמצאים באותה מחלקה). לכן $A \times A$ היא האיבר הגדול ביותר ב- K לגבי הכלה.

מצד שני, יחס שקילות הוא בפרט רפלקסיבי, כלומר **מכיל** את I_A .

קל לבדוק שהיחס I_A אף הוא יחס שקילות מעל A (זהו יחס השקילות שבו כל איבר של A נמצא במחלקה בפני עצמו). מכיון שכל יחס שקילות מעל A מכיל אותו, I_A הוא האיבר הקטן ביותר ב- K לגבי הכלה.

ג. היחס הריק מוכל בכל יחס, והוא אנטי-סימטרי (אם לא ברור לך מדוע הוא אנטי-סימטרי, ר' שאלות רב-ברירה בעניין זה באתר הקורס). לכן $\varnothing$ הוא איבר קטן ביותר ב- J לגבי הכלה.

לעומת זאת, **אין** ב- J איבר גדול ביותר לגבי הכלה. כדי להראות זאת, נראה שני איברים **מקסימליים** ב- J, שונים זה מזה (לפי שאלה 3.21 בעמ' 93 בספר, אם יש כמה איברים מקסימליים אז אין איבר גדול ביותר).

יהי $R = I_A \cup \{(1,2)\ ,(2,3)\ ,(1,3)\}$. מבדיקה ישירה, R הוא אנטי-סימטרי.

אם קיים ב- J איבר R_1 (כלומר יחס אנטי-סימטרי R_1) המכיל-ממש את R, אז R_1 חייב להכיל לפחות אחד מהזוגות $(3,2)$, $(3,1)$, $(2,1)$, כי אלה כל אברי $A \times A$ שמחוץ ל- R. אבל הוספה של כל אחד מהזוגות האלה ל- R מקלקלת את האנטי-סימטריות. לכן אין יחס אנטי-סימטרי מעל A המכיל את R. לפיכך R הוא **איבר מקסימלי** ב- J .

בדומה ל- R נוכל לקחת למשל את $S = I_A \cup \{(2,1) , (3,2) , (3,1)\} = R^{-1}$,

מסיבה דומה לגמרי, גם הוא איבר מקסימלי ב- J.

מצאנו שני איברים מקסימליים, לכן אין ב- J איבר גדול ביותר.

תשובה 4

א. **בדיקה**: נציב $n=1$: $3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$, מתחלק ב- 8

(אגב, הטענה נכונה גם עבור $n = 0$ ויכולנו להתחיל את הבדיקה שם).

מעבר: נניח שהטענה נכונה עבור n , כלומר נניח $3^{2n} - 1 = 8k$ כאשר $k \in \mathbf{N}$,

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר נוכיח ש- $3^{2(n+1)} - 1$ מתחלק ב- 8.

נפתֵח:

$$3^{2(n+1)} - 1 \;=\; 9 \cdot 3^{2n} - 1 \;=\; 8 \cdot 3^{2n} + 3^{2n} - 1$$

$$= \; 8 \cdot 3^{2n} + 8k \; = 8(3^{2n} + k)$$

במעבר מהשורה הראשונה לשניה נעזרנו בהנחת האינדוקציה.

הביטוי שקיבלנו הוא כפולה של 8 במספר טבעי, משמע מתחלק ב- 8.

הראינו שהטענה נכונה עבור $n+1$.

לפי עקרון האינדוקציה, משני השלבים נובע שהטענה נכונה לכל n טבעי.

ב. **בדיקה**: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \;>\; 16 = 2^4$.

מעבר: נניח שהטענה נכונה עבור n , כלומר נניח $n! \;>\; 2^n$ ובנוסף $n \geq 4$,

ונוכיח $(n+1)! \;>\; 2^{n+1}$.

נפתֵח:

$$(n+1)! \;=\; (n+1) \cdot n! \;>\; (n+1) \cdot 2^n \;>\; 4 \cdot 2^n \;>\; 2 \cdot 2^n \;=\; 2^{n+1}$$

המעבר הראשון הוא מהגדרת עצרת. המעבר השני - מהנחת האינדוקציה.

המעבר השלישי - מההנחה $n \geq 4$ נובע $n+1 > 4$.

הראינו שהטענה נכונה עבור $n+1$.

לפי עקרון האינדוקציה, משני השלבים נובע שהטענה נכונה לכל n טבעי.

איתי הראבן