הוכחות לרשימת הטענות לבחינה (28.3.11)

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב - 20425

1. יהיו E ו- F מאורעות במרחב מדגם S. הוכח כי: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

הוכחה:

[חוק הפילוג] $E = E \cap S = E \cap (F \cup F^C) = (E \cap F) \cup (E \cap F^C)$

$P(E) = P((E \cap F) \cup (E \cap F^C))$

[אקס' 3 : שני החיתוכים זרים – האחד מוכל ב- F והשני מוכל ב- F^C] $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^C)$ (1)

[חוק הפילוג] $E \cup F = (E \cup F) \cap S = (E \cup F) \cap (F \cup F^C) = F \cup (E \cap F^C)$

$P(E \cup F) = P(F \cup (E \cap F^C))$

[אקס' 3 : שני החיתוכים זרים – האחד מוכל ב- F והשני מוכל ב- F^C] $P(E \cup F) = P(F) + P(E \cap F^C)$ (2)

מתוצאות (1) ו-(2) נקבל כי: $P(E \cup F) = P(F) + P(E \cap F^C) = P(F) + P(E) - P(E \cap F)$

2. יהיו F ו- G מאורעות זרים של ניסוי מקרי כלשהו. הוכח כי בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה, ההסתברות שהמאורע F יתרחש לפני המאורע G היא $\frac{P(F)}{P(F)+P(G)}$.

הוכחה I:

נסמן ב-E את המאורע "F יקרה לפני G", ונחשב את $P(E)$ על-ידי התניה בתוצאות האפשריות של החזרה הראשונה: F התרחש, G התרחש, לא F ולא G התרחשו. (לא ייתכן ש- $F \cap G$ יתרחש, כי F ו- G זרים).

לשם כך, נגדיר את המאורעות הבאים:

E_1 = המאורע F מתרחש בחזרה הראשונה

E_2 = המאורע G מתרחש בחזרה הראשונה

E_3 = לא F ולא G מתרחשים בחזרה הראשונה

מהגדרת המאורעות נובע כי: $P(E|E_1) = 1 \quad ; \quad P(E|E_2) = 0$

כעת, מכיוון שהחזרות בלתי-תלויות, הידיעה שבחזרה הראשונה לא F ולא G התרחשו לא משפיעה על החזרות שבאות אחריה. כלומר, ההסתברות שהמאורע F יתרחש לפני המאורע G נותרת בעינה גם בהינתן המאורע E_3. לפיכך: $P(E|E_3) = P(E)$

עתה, נחשב את $P(E)$. נעזר בנוסחת ההסתברות השלמה ונקבל:

[$E_1 \cup E_2 \cup E_3 = S$] $P(E) = P(E|E_1)P(E_1) + P(E|E_2)P(E_2) + P(E|E_3)P(E_3)$

$= 1 \cdot P(F) + 0 \cdot P(G) + P(E)P(F^C \cap G^C) = P(F) + P(E)[1 - P(F \cup G)]$

[המאורעות F ו- G זרים זה לזה] $= P(F) + P(E)[1 - P(F) - P(G)]$

ומכאן: $$P(E) = \frac{P(F)}{P(F)+P(G)}$$

הוכחה II:

לכל $i = 1,2,\ldots$, נסמן ב- E_i את המאורע ש- F מתרחש בחזרה ה-i-ית וב- $(i-1)$ החזרות שלפניה לא התרחשו F או G. המאורעות E_i זרים זה לזה ואיחודם הוא המאורע ש- F מתרחש לפני G, שנסמנו ב- E.

לפיכך:

$$P(E) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \qquad \text{[לפי אקסיומה 3: ה-}E_i\text{-ים זרים זה לזה]}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(F)[1 - P(F \cup G)]^{i-1} = P(F)\sum_{i=1}^{\infty}[1 - P(F \cup G)]^{i-1}$$

$$= P(F)\sum_{i=0}^{\infty}[1 - P(F \cup G)]^{i}$$

$$= \frac{P(F)}{P(F \cup G)} \qquad \text{[טור הנדסי אינסופי שמנתו, }1 - P(F\cup G)\text{, חיובית וקטנה מ-1]}$$

$$= \frac{P(F)}{P(F) + P(G)} \qquad \text{[המאורעות }F\text{ ו-}G\text{ זרים זה לזה]}$$

3. יהי X משתנה מקרי בדיד, שתוחלתו ושונותו סופיות, ויהיו a ו- b קבועים ממשיים. הוכח כי:

$$E[aX+b] = aE[X]+b \qquad ; \qquad \text{Var}(aX+b) = a^2\text{Var}(X)$$

הוכחה:

$$E[aX+b] = \sum_x (ax+b)p(x) \qquad \text{[לפי הטענה: } E[g(X)] = \sum_x g(x)p(x)\text{]}$$

$$= \sum_x \big(axp(x) + bp(x)\big) = \sum_x axp(x) + \sum_x bp(x)$$

$$= a\sum_x xp(x) + b\sum_x p(x) = a\cdot E[X] + b\cdot 1 = aE[X]+b$$

$$\text{Var}(aX+b) = E\left[\big((aX+b) - E[aX+b]\big)^2\right] \qquad \text{[לפי הגדרת השונות]}$$

$$= E\left[\big(aX + \cancel{b} - aE[X] + \cancel{b}\big)^2\right] = E[a^2(X - E[X])^2]$$

$$= a^2 E[(X - E[X])^2] \qquad \text{[לפי הטענה הקודמת: }(X-E[X])^2\text{ משתנה מקרי ו- }a^2\text{ קבוע]}$$

$$= a^2\text{Var}(X) \qquad \text{[לפי הגדרת השונות]}$$

4. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$. הוכח כי:

$$E[X] = np$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p)$$

הוכחה:

משתנה מקרי בינומי מוגדר על-ידי מספר ההצלחות ב- n חזרות בלתי-תלויות על ניסוי ברנולי עם הסתברות p להצלחה. לכן, נגדיר:

$$X_i = \begin{cases} 1 & , \quad \text{בחזרה } i \text{ התקבלה הצלחה} \\ 0 & , \quad \text{אחרת} \end{cases} \qquad \text{לכל } i = 1,\ldots,n$$

ה-X_i-ים בלתי-תלויים, מכיוון שהחזרות בלתי-תלויות, ומתקיים:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

נתחיל בחישוב התוחלת והשונות של ה-X_i-ים:

$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = p$$

$$\text{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\} - [P\{X_i = 1\}]^2 = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = p(1-p)$$

ומכאן: $E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np$

וגם: $\text{Var}(X) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{\text{ה-}X_i\text{-ים בלתי-תלויים}}{=} \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$

5. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X]=\lambda \quad ; \quad \text{Var}(X)=\lambda$

הוכחה:

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i\, p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}$$

$$= \lambda \cancel{e^{-\lambda}} \cdot \cancel{e^{\lambda}} = \lambda \qquad [\text{טור טיילור}]$$

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$$

$$= \lambda \cdot E[X+1] \qquad [\text{לפי הטענה: } E[g(X)] = \sum_i g(i)p(i)]$$

$$= \lambda \cdot (E[X]+1) = \lambda(\lambda+1) \qquad [\text{לפי הטענה: } E[aX+b] = aE[X]+b]$$

ומכאן: $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda$

6. יהי X משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים N , m ו- n . הוכח כי: $E[X] = n \cdot \frac{m}{N}$

הוכחה:

לפי תנאי הניסוי ההיפרגיאומטרי, נתונה אוכלוסייה בגודל N ובה m עצמים מיוחדים. לכן, נגדיר m אינדיקטורים כדלקמן:

$$X_i = \begin{cases} 1 & , \quad \text{העצם המיוחד ה-}i\text{-י נבחר למדגם} \\ 0 & , \quad \text{אחרת} \end{cases} \qquad \text{לכל } i = 1,\ldots,m$$

ונקבל כי $\sum_{i=1}^{m} X_i = X =$ מספר העצמים המיוחדים שעלו במדגם

כעת, התוחלת של ה-X_i-ים היא:

$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \frac{\binom{1}{1}\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{(N-1)!}{(n-1)!\,\cancel{(N-n)!}} \cdot \frac{n!\,\cancel{(N-n)!}}{N!} = \frac{n}{N}$$

ומכאן: $E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right] = \sum_{i=1}^{m} E[X_i] = \sum_{i=1}^{m} \frac{n}{N} = \frac{mn}{N}$

הערה: במקרה זה ה-X_i-ים תלויים זה בזה, מכיוון שבחירת המדגם היא עם החזרה.
התלות בין ה-X_i-ים אינה משפיעה על דרך חישוב התוחלת, אך היא משפיעה על דרך חישוב השונות של X.

7. יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X]=\frac{1}{\lambda}$; $\text{Var}(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

הוכחה:

$$E[X] = \int_0^\infty x f(x)dx = \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x}dx \underset{\substack{u=x\ ;\ dv=\lambda e^{-\lambda x} \\ du=1\ ;\ v=-e^{-\lambda x}}}{\overset{\downarrow}{=}} -xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = 0 - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 f(x)dx = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x}dx \underset{\substack{u=x^2\ ;\ dv=\lambda e^{-\lambda x} \\ du=2x\ ;\ v=-e^{-\lambda x}}}{\overset{\downarrow}{=}} -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx$$

$$= 0 + \frac{2}{\lambda}\underbrace{\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx}_{=E[X]} = \frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

ומכאן: $$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

8. הוכח: אם מאורע מסוים מתרחש בהתאם לַהנחות של תהליך-פואסון עם קצב λ, אז משך הזמן החולף עד להתרחשות המופע הראשון של המאורע (החל מזמן 0) הוא משתנה מקרי מעריכי עם אותו הפרמטר λ.

הוכחה:

נגדיר את המשתנים הבאים: X = הזמן החולף עד למופע הראשון (החל מזמן 0)

N_t = מספר המופעים המתרחשים החל מזמן 0 ועד לזמן t

המאורעות מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של תהליך פואסון עם קצב λ, לכן ל- N_t יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר λt. כעת, נמצא את ההתפלגות של X. לכל $t > 0$ מתקיים:

$$P\{X > t\} = P\{N_t = 0\} = e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

כלומר: $$F_X(t) = P\{X \le t\} = 1 - P\{X > t\} = 1 - e^{-\lambda t} \quad , \quad t > 0$$

וקיבלנו של- X יש פונקציית התפלגות מצטברת של התפלגות מעריכית עם הפרמטר λ, ומכאן שזוהי התפלגותו.

9. יהיו X ו-Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה.
הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda_X + \lambda_Y$.

הוכחה:

הערכים האפשריים של שני המשתנים הפואסוניים הם כל השלמים <u>האי-שליליים</u>, לכן אלו הם גם הערכים האפשריים של הסכום. לפיכך, לכל $n = 0,1,\ldots$, מתקיים:

$$P\{X + Y = n\} = \sum_{i=0}^{n} P\{X = i, Y = n - i\}$$ [הערכים האפשריים של X ו-Y שלמים אי-שליליים]

$$= \sum_{i=0}^{n} P\{X = i\}P\{Y = n - i\}$$ [X ו-Y בלתי-תלויים]

$$= \sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda_X}\cdot\frac{\lambda_X^i}{i!}\cdot e^{-\lambda_Y}\cdot\frac{\lambda_Y^{n-i}}{(n-i)!} = e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)}\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{\lambda_X^i}{i!}\cdot\frac{\lambda_Y^{n-i}}{(n-i)!}$$

$$= e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)} \cdot \frac{(\lambda_X+\lambda_Y)^n}{n!} \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \left(\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^i \cdot \left(\frac{\lambda_Y}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^{n-i}$$

$$= e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)} \cdot \frac{(\lambda_X+\lambda_Y)^n}{n!} \cdot \underbrace{\left(\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y} + \frac{\lambda_Y}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^n}_{=1} \qquad \text{[נוסחת הבינום]}$$

$$= e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)} \cdot \frac{(\lambda_X+\lambda_Y)^n}{n!} \qquad , \qquad n = 0,1,\ldots$$

קיבלנו שלסכום $X+Y$ יש פונקציית הסתברות פואסונית עם הפרמטר $\lambda_X+\lambda_Y$, ולכן זוהי התפלגותו.

10. יהיו X ו-Y משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.
הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות בינומית-שלילית עם הפרמטרים $r=2$ ו-p.

הוכחה:

הערכים האפשריים של שני המשתנים הגיאומטריים הם כל השלמים <u>החיוביים</u>, לכן הערכים האפשריים של סכומם הם השלמים שגדולים או שווים ל-2. לפיכך, לכל $n=2,3,\ldots$, מתקיים:

$$P\{X+Y=n\} = \sum_{i=1}^{n-1} P\{X=i, Y=n-i\} \qquad \text{[הערכים האפשריים של } X \text{ ו-} Y \text{ שלמים חיוביים]}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} P\{X=i\}P\{Y=n-i\} \qquad \text{[} X \text{ ו-} Y \text{ בלתי-תלויים]}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} p(1-p)^{i-1} \cdot p(1-p)^{n-i-1} = \sum_{i=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2}$$

$$= (n-1)p^2(1-p)^{n-2} \qquad \text{[איבר הסכימה קבוע ביחס ל-} i \text{]}$$

$$= \binom{n-1}{2-1} p^2(1-p)^{n-2} \qquad , \qquad n = 2,3,\ldots$$

קיבלנו שלסכום $X+Y$ יש פונקציית הסתברות בינומית-שלילית עם הפרמטרים $r=2$ ו-p, ולכן זוהי התפלגותו.

11. יהיו X ו-Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו-λ_Y, בהתאמה.
הוכח שלמשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X+Y=n$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו-$\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$.

הוכחה:

הערכים האפשריים של שני המשתנים הפואסוניים הם כל השלמים <u>האי-שליליים</u>.
לכן, בהינתן ש-$X+Y=n$, הערכים האפשריים של X הם כל השלמים בין 0 ל-n.
לפיכך, לכל $i=0,1,\ldots,n$, מתקיים:

$$P\{X=i \mid X+Y=n\} = \frac{P\{X=i, X+Y=n\}}{P\{X+Y=n\}} \qquad \text{[הערכים האפשריים של } X \text{ ו-} Y \text{ שלמים אי-שליליים]}$$

$$= \frac{P\{X=i, Y=n-i\}}{P\{X+Y=n\}} = \frac{P\{X=i\}P\{Y=n-i\}}{P\{X+Y=n\}} \qquad \text{[} X \text{ ו-} Y \text{ בלתי-תלויים]}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda_X}} \cdot \frac{\lambda_X^i}{i!} \cdot \cancel{e^{-\lambda_Y}} \cdot \frac{\lambda_Y^{n-i}}{(n-i)!}}{\cancel{e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)}} \cdot \frac{(\lambda_X+\lambda_Y)^n}{n!}} \qquad \text{[} X+Y \text{ מתפלג פואסונית עם } \lambda_X+\lambda_Y \text{]}$$

$$= \binom{n}{i} \cdot \left(\frac{\lambda_X}{\lambda_X + \lambda_Y}\right)^i \cdot \left(\frac{\lambda_Y}{\lambda_X + \lambda_Y}\right)^{n-i} \qquad , \qquad i = 0,1,...,n$$

קיבלנו של- X בהינתן $X+Y=n$ יש פונקציית הסתברות בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$, ולכן זוהי התפלגותו.

12. יהי X משתנה מקרי ששונותו חיובית וסופית, ויהי $Y = aX + b$, עבור a ו-b קבועים.

הראה כי:
$$\rho(X,Y) = \begin{cases} +1 & , \quad a > 0 \\ -1 & , \quad a < 0 \end{cases}$$

הוכחה:

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\text{Cov}(X,aX+b)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(aX+b)}}$$

$$= \frac{\text{Cov}(X,aX) + \text{Cov}(X,b)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(aX+b)}} = \frac{a\text{Var}(X) + 0}{\sqrt{\text{Var}(X)a^2\text{Var}(X)}}$$ [תכונות השונות והשונות המשותפת]

$$= \frac{a\,\cancel{\text{Var}(X)}}{\cancel{\text{Var}(X)}\sqrt{a^2}} = \begin{cases} +1 & , \quad a > 0 \\ -1 & , \quad a < 0 \end{cases}$$ [השונות חיובית]

13. יהיו X_1, X_2, ..., X_n משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת ושונות סופיות, μ ו- σ^2, בהתאמה. הוכח כי:
$$E[\overline{X}] = \mu \qquad ; \qquad \text{Var}(\overline{X}) = \sigma^2/n$$

הוכחה:

$$E[\overline{X}] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{1}{n} \cdot E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$ [תכונת הלינאריות של התוחלת]

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$ [התוחלות סופיות, לכן תוחלת הסכום שווה לסכום התוחלות]

$$= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$$ [המשתנים שווי-התפלגות ולכולם תוחלת μ]

$$\text{Var}(\overline{X}) = \text{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$ [תכונת השונות של פונקציה לינארית]

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i)$$ [השונויות סופיות והמשתנים בלתי-תלויים]

$$= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$ [המשתנים שווי-התפלגות ולכולם שונות σ^2]

14. יהיו X_1, X_2, ..., X_r משתנים מקריים בעלי פונקציית התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים n ו- p_1, p_2, ..., p_r.

הוכח: א. למשתנה המקרי X_i יש התפלגות שולית בינומית עם הפרמטרים n ו-p_i.

ב. למשתנה המקרי המותנה X_1 בהינתן $X_2 = j$, לכל $j = 0,1,...,n$, יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n-j$ ו- $p_1/(1-p_2)$.

ג. $Cov(X_i, X_j) = -np_ip_j$

הוכחה:

א. פונקציית ההסתברות המשותפת של המשתנים המקריים $X_1, X_2, \ldots, X_r$ היא:

$$P\{\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{n}\}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\ldots\cdot n_r!}\cdot p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r} \qquad , \qquad \text{כאשר } \sum_{i=1}^{r} n_i = n$$

נוכיח בלי הגבלת הכלליות, שההתפלגות השולית של המשתנה המקרי X_1 היא בינומית עם הפרמטרים n ו- p_1. לכל $j=0,1,\ldots,n$, מתקיים:

$$\begin{aligned}P\{X_1=j\} &= \sum_{\substack{n_2,\ldots,n_r:\\ n_2+\ldots+n_r=n-j}} P\{X_1=j, X_2=n_2, \ \ldots \ , X_r=n_r\}\\
&= \sum_{\substack{n_2,\ldots,n_r:\\ n_2+\ldots+n_r=n-j}} \frac{n!}{j!n_2!\cdot\ldots\cdot n_r!}\cdot p_1^{j}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r}\\
&= \frac{n!}{j!(n-j)!}\cdot p_1^{j} \sum_{\substack{n_2,\ldots,n_r:\\ n_2+\ldots+n_r=n-j}} \frac{(n-j)!}{n_2!\cdot\ldots\cdot n_r!}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r}\\
&= \binom{n}{j} p_1^j (p_2+\ldots+p_r)^{n-j} = \binom{n}{j} p_1^j (1-p_1)^{n-j} \qquad \text{[נוסחת המולטינום]}\end{aligned}$$

קיבלנו, אם כן, שההתפלגות השולית של X_1, היא בינומית עם הפרמטרים n ו- p_1.

ב. נמצא את פונקציית ההסתברות המותנית של X_1 בהינתן $X_2=j$, לכל $j=0,1,\ldots,n$.

בהינתן ש- $X_2=j$, לכל $j=0,1,\ldots,n$, הערכים האפשריים של X_1 הם בין 0 ל- $n-j$.

לכן, לכל $i=0,1,\ldots,n-j$ מתקיים:

$$P\{X_1=i\,|\,X_2=j\}=\frac{P\{X_1=i,X_2=j\}}{P\{X_2=j\}}=\frac{P\{X_1=i,X_2=j,X_3+\ldots+X_r=n-i-j\}}{P\{X_2=j,X_1+X_3+\ldots+X_r=n-j\}}$$

$$=\frac{\dfrac{\cancel{n}!}{i!\cdot\cancel{j}!\cdot(n-i-j)!}\cdot p_1^i\cdot\cancel{p_2^j}\cdot(1-p_1-p_2)^{n-i-j}}{\dfrac{\cancel{n}!}{\cancel{j}!\cdot(n-j)!}\cdot\cancel{p_2^j}\cdot(1-p_2)^{n-j}} \qquad \text{[ההסתברות לקבל תוצאה בין 3 ל-} r \text{ היא } 1-p_1-p_2\text{]}$$

$$=\binom{n-j}{i}\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)^i\left(\frac{1-p_1-p_2}{1-p_2}\right)^{n-j-i}$$

מצורת פונקציית ההסתברות המותנית שקיבלנו, נובע שההתפלגות המותנית של X_1 בהינתן $X_2=j$ היא התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n-j$ ו- $\frac{p_1}{1-p_2}$.

ג. נתון שלמשתנים המקריים $X_1, \ldots, X_r$ יש התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $(p_1, \ldots, p_r)$. לכן, לכל אחד מהם יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n וה- p_i המתאים לו; ולסכום של כל שניים מהם, X_i+X_j (עבור $i\neq j$), יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- p_i+p_j.

לפיכך: $\mathrm{Var}(X_i)=np_i(1-p_i)$

וגם: $\mathrm{Var}(X_i+X_j)=n(p_i+p_j)(1-p_i-p_j)$

ומצד שני: $\mathrm{Var}(X_i+X_j)=\mathrm{Var}(X_i)+\mathrm{Var}(X_j)+2\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$

ולכן: $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{2}[\mathrm{Var}(X_i + X_j) - \mathrm{Var}(X_i) - \mathrm{Var}(X_j)]$

כעת, נציב את נוסחאות השונות הבינומית ונקבל נוסחה לשונות המשותפת של X_i ו- X_j:

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{2}[n(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j) - np_i(1 - p_i) - np_j(1 - p_j)]$$

$$= \frac{1}{2}[-2np_i p_j] = -np_i p_j$$

15. יהיו X ו- Y משתנים מקריים בדידים בעלי תוחלות ושונויות סופיות.

הוכח: א. **נוסחת התוחלת המותנית** $E[X] = E[E[X \mid Y]]$

ב. **נוסחת השונות המותנית** $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

הוכחה:

א. התוחלת המותנית של X בהינתן $Y = y$ היא פונקציה של y, לכן נסמן $g(y) = E[X \mid Y = y]$

ונגדיר המשתנה המקרי $g(Y)$ כמשתנה שמקבל את הערכים $g(y)$ בהסתברויות $P\{Y = y\}$.

כעת, נחשב את התוחלת של המשתנה המקרי $g(Y)$, כלומר, את $E[g(Y)] = E[E[X \mid Y]]$.

נקבל: $E[g(Y)] = \sum_y g(y)P\{Y = y\} = \sum_y E[X \mid Y = y]P\{Y = y\}$

$= \sum_y \sum_x x P\{X = x \mid Y = y\}P\{Y = y\}$ [לפי הגדרת התוחלת המותנית]

$$= \sum_y \sum_x x \cdot \frac{P\{X = x, Y = y\}}{\cancel{P\{Y = y\}}} \cdot \cancel{P\{Y = y\}} = \sum_y \sum_x x \cdot P\{X = x, Y = y\}$$

$= \sum_x x \sum_y P\{X = x, Y = y\}$ [החלפת סדר הסכימה מותר בהנחה שהתוחלת סופית]

$$= \sum_x x P\{X = x\} = E[X]$$

ב. הנוסחה החלופית לחישוב השונות, תקפה גם להתפלגויות מותנות. כלומר, מתקיים:

$$\mathrm{Var}(X \mid Y = y) = E[X^2 \mid Y = y] - (E[X \mid Y = y])^2$$

ובאופן כללי, אפשר לרשום: $\mathrm{Var}(X \mid Y) = E[X^2 \mid Y] - (E[X \mid Y])^2$

נחשב תוחלת בשני אגפי המשוואה, ונקבל:

(1) $E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] = E[E[X^2 \mid Y]] - E[(E[X \mid Y])^2]$

$= E[X^2] - E[(E[X \mid Y])^2]$ [נוסחת התוחלת המותנית]

כעת, נחשב את השונות של התוחלת המותנית $g(Y) = E[X \mid Y]$, שהיא פונקציה של המשתנה המקרי Y. נקבל:

$$\mathrm{Var}(g(Y)) = E[g(Y)^2] - (E[g(Y)])^2$$

ולחלופין: (2) $\mathrm{Var}(E[X \mid Y]) = E[(E[X \mid Y])^2] - (E[E[X \mid Y]])^2$

$= E[(E[X \mid Y])^2] - (E[X])^2$ [נוסחת התוחלת המותנית]

נחבר את משוואות (1) ו-(2), ונקבל:

$$E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y]) = E[X^2] - \cancel{E[(E[X \mid Y])^2]} + \cancel{E[(E[X \mid Y])^2]} - (E[X])^2 = \mathrm{Var}(X)$$

16. הוכח: אם N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים אי-שליליים, ואם X_1, X_2, ... הם משתנים מקריים שווי-התפלגות, בעלי תוחלות ושונויות סופיות, ובלתי-תלויים זה בזה וב-N, אז מתקיים:

א. $$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]\,E[X_1]$$

ב. $$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\operatorname{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\operatorname{Var}(N)$$

הערה: כאשר $N=0$, סכום המשתנים שווה גם הוא ל-0.

הוכחה:

א. נחשב תחילה את תוחלת סכום ה-X_i-ים בהינתן $N=n$:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \middle| N=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$ [ה-X_i-ים ו-N בלתי-תלויים]

$$= \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n\cdot E[X_1]$$ [ה-X_i-ים שווי-התפלגות ותוחלתם סופית]

נחשב תוחלת בשני אגפי השוויון האחרון שקיבלנו:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N\right]\right]$$ [נוסחת התוחלת המותנית]

$$= E[N\cdot E[X_1]] = E[X_1]E[N]$$ [$E[X_1]$ קבועה ביחס לתוחלת החיצונית]

ב. כפי שהראינו בסעיף א של ההוכחה:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \middle| N=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$ [ה-X_i-ים ו-N בלתי-תלויים]

$$= \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n\cdot E[X_1]$$ [ה-X_i-ים שווי-התפלגות ותוחלתם סופית]

באופן דומה, נחשב כעת את שונות סכום ה-X_i-ים בהינתן $N=n$:

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N=n\right) = \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \middle| N=n\right) = \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$ [ה-X_i-ים ו-N בלתי-תלויים]

$$= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i)$$ [ה-X_i-ים בלתי-תלויים ושונותם סופית]

$$= n\cdot \operatorname{Var}(X_1)$$ [ה-X_i-ים שווי-התפלגות]

לחישוב שונות הסכום המקרי נשתמש בנוסחת השונות המותנית, כאשר ההתניה היא על N:

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E\left[\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N\right)\right] + \operatorname{Var}\left(E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N\right]\right)$$

$$= E\left[N\cdot\operatorname{Var}(X_1)\right] + \operatorname{Var}\left(N\cdot E[X_1]\right)$$

$$= \operatorname{Var}(X_1)E[N] + (E[X_1])^2\operatorname{Var}(N)$$ [$E[X_1]$ ו-$\operatorname{Var}(X_1)$ קבועות ביחס לתוחלת ולשונות החיצוניות]

17. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי:
$$M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n \qquad , \qquad -\infty < t < \infty$$

הוכחה: לכל t ממשי מתקיים:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{i=0}^{n} e^{ti}\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad [\text{לפי הטענה: } E[g(X)] = \sum_x g(x)p(x)]$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(pe^t)^i(1-p)^{n-i} = (pe^t + 1 - p)^n \qquad [\text{נוסחת הבינום}]$$

18. יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי:
$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \qquad , \qquad t < -\ln(1-p)$$

הוכחה:

$$M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{ti} p(1-p)^{i-1} \qquad [\text{לפי הטענה: } E[g(X)] = \sum_x g(x)p(x)]$$

$$= pe^t \sum_{i=1}^{\infty}[(1-p)e^t]^{i-1}$$

$$= pe^t \sum_{i=0}^{\infty}[(1-p)e^t]^{i} = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \qquad , \qquad t < -\ln(1-p) \qquad [\text{חישוב טור הנדסי שמנתו קטנה מ-1}]$$

הטור האחרון מתכנס, רק אם מנתו קטנה מ-1. כלומר, רק אם: $0 < (1-p)e^t < 1$

פתרון אי-השוויון האחרון מוביל לתנאי על t שמופיע בחישוב הפונקציה יוצרת המומנטים.

19. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$.

הוכח כי:
$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \qquad , \qquad -\infty < t < \infty$$

הוכחה: לכל t ממשי מתקיים:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ti} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \qquad [\text{לפי הטענה: } E[g(X)] = \sum_x g(x)p(x)]$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(e^t\lambda)^i}{i!} = e^{-\lambda}\cdot e^{e^t\lambda} = e^{\lambda(e^t-1)} \qquad [\text{טור טיילור}]$$