מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20276 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 3-4

משקל המטלה: 3 נקודות מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 26.3.99 סמסטר: ב 1999

(ע)

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1

תהי A קבוצה, R רלציה מעל A, I רלציית היחידה מעל A. נאמר ש-R מכילה מעגל אם קיים $a \in A$ וקיים $n > 1$ כך ש- $a(R-I)^n a$.

(לפני שאתה מתחיל לפתור, הסבר לעצמך את מקור הכינוי "מעגל" בהקשר זה).

I. הראה שרלציית סדר חלקי אינה מכילה מעגל.

II. הוכח כי עבור R רפלקסיבית, התנאים הבאים שקולים:

- R אינה מכילה מעגל.
- הסגור הטרנזיטיבי של R הוא סדר חלקי מעל A.

נסח את ההוכחה באופן מדויק, שים לב לפרטים.

שאלה 2

תהי E קבוצת כל רלציות השקילות מעל $\{1,2,3,4\}$.

רלציית ההכלה, $\subseteq$, מגדירה סדר-חלקי על E.

I. הראה שקיימים ב-E איבר קטן ביותר ואיבר גדול ביותר לגבי הסדר החלקי הנ"ל. מיהם?

II. מצא את כל איברי E המכסים (עמוד 88 בספר הלימוד) את האיבר הקטן ביותר של E. תאר אותם פשוט על ידי החלוקות שהם מגדירים.

III. מצא רלציות שקילות $E_1, E_2, E_3, E_4 \in$ E, כך ש- E_1 מכסה את E_2, E_2 מכסה את E_3 ו- E_3 מכסה את E_4.

שאלה 3

קבוצת המספרים הרציונליים, **Q**, סדורה בסדר מלא על ידי $\leq$. בסדר זה, לאף איבר אין איבר המכסה אותו. האם ניתן להגדיר מעל **Q** סדר-מלא אחר, שבו לכל איבר יהיה איבר אחד ויחיד המכסה אותו? הוכח.

שאלה 4

תהי D קבוצה של קבוצות סופיות. הראה כי אם ההכלה $\subseteq$, היא סדר-מלא על D, אז $|D|$ הוא לכל היותר $\aleph_0$.

הדרכה: הראה כי הפונקציה של D אל **N**, המתאימה לכל קבוצה את מספר אבריה, היא חד-חד-ערכית.

שאלה 5

לכל אחת מהקבוצות הבאות, קבע אם עצמתה היא:

סופית / $\aleph_0$ / C / גדולה מ-C / לא ניתן לקבוע. נמק בקיצור.

I. **R** – **Z** (**Z** היא קבוצת המספרים השלמים).

II. **Z** × **R**.

III. קבוצת התת-קבוצות הסופיות של **N**.

IV. קבוצת הפונקציות של **R** ל-**R**.

V. קבוצת הפונקציות של **N** ל-**N**.