מתמטיקה דיסקרטית 20276
אביב 1999ב
פתרון ממ"ן 13

תשובה 1

צונזרה לסמסטר 2004א...

תשובה 2

הערה: כללית, אם X היא קבוצה של קבוצות אז הרלציה $\subseteq$ היא סדר-חלקי על X. קל להוכיח זאת ישירות מהגדרת סדר-חלקי.

א. נסמן $A = \{1,2,3,4\}$. רלצית שקילות מעל A היא בפרט רלציה מעל A כלומר קבוצה חלקית של $A \times A$. מכאן שכל רלציה מעל A מוכלת ב"רלציה המלאה" $A \times A$. קל לראות ש- $A \times A$ היא רלצית שקילות מעל A, ולפיכך זהו האיבר הגדול ביותר ב- E.

אבר קטן ביותר: רלצית שקילות היא רפלקסיבית, כלומר מכילה את I_A. קל לוודא ש- I_A עצמה היא רלצית שקילות. מכיוון שכאמור היא מוכלת בכל אבר של E, הרי שהיא האבר הקטן ביותר ב- E.

ב. יש 6 איברים כאלה ב- E. החלוקות המתאימות הן:

$\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$, $\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$, $\{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$,

$\{\{2,3\},\{1\},\{4\}\}$, $\{\{2,4\},\{1\},\{3\}\}$, $\{\{3,4\},\{1\},\{2\}\}$.

כל אחת מרלציות השקילות המתאימות לחלוקות אלו, היא בעלת התכונה שלא קיימת רלצית שקילות המוכלת בה ממש פרט ל- I_A. לפיכך כולן מכסות את האיבר הקטן ביותר I_A.

ג. E_1 מגדירה את החלוקה $\{\{1,2,3,4\}\}$ שבה כל האיברים שייכים לאותה מחלקה (מדוע יש שני זוגות סוגרים?) משמע $E_1 = A \times A$.

את E_2 נבחר להיות הרלציה המגדירה את החלוקה $\{\{1,2,3\},\{4\}\}$.

את E_3 נבחר להיות הרלציה המגדירה את החלוקה $\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$.

E_4 היא הרלציה המגדירה את החלוקה $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$, כלומר $E_4 = I_A$.

תשובה 3

בשאלה 4.8 בספר (עמ' 126) ראינו כי $\mathbf{Q}$ היא בת-מניה.

משמע, קיימת פונקציה חח"ע f של $\mathbf{Q}$ על $\mathbf{N}$.

כללית ביותר, אם קיימת פונקציה חח"ע ועל בין שתי קבוצות, הרי נוכל להעתיק בעזרתה כל מבנה המוגדר בקבוצה האחת אל הקבוצה השניה.

למשל, בעזרת f הנ"ל נוכל "להשרות" את הסדר הרגיל של המספרים הטבעיים על הקבוצה $\mathbf{Q}$:

יהיו $x,y \in \mathbf{Q}$. נאמר ש- xRy אםם $f(x) \leq f(y)$, כאשר $\leq$ הוא הסדר הרגיל בטבעיים.

ברור, וקל להראות, ש- R המוגדרת כך היא סדר-מלא על $\mathbf{Q}$, ו- $\mathbf{Q}$ הסדורה כך איזומורפית (עמ' 97) לקבוצה $\mathbf{N}$ הסדורה בסדר הרגיל.

תשובה 4

תהי f הפונקציה של D ל- $\mathbf{N}$ המתאימה לכל איבר של D את עוצמתו: $f(A) = |A|$.

f היא אכן פונקציה ל- $\mathbf{N}$ מכיוון שנתון ש- D היא קבוצה של קבוצות **סופיות**.

נראה כי f היא חח"ע: אם $f(A) = f(B)$ משמע $|A| = |B|$. נתון כי ההכלה היא סדר-מלא מעל D, לפיכך אחת מהקבוצות A,B מכילה את רעותה. משמע, A,B הן קבוצות **סופיות** בעלות אותה עוצמה, שאחת מהן מכילה את השניה. מכאן ש- $A = B$ (כפי שראינו בפרק 4, יתכן בהחלט שלקבוצה **אינסופית** תהיה תת-קבוצה-ממש בעלת אותה עוצמה. אך עבור קבוצה סופית זה לא ייתכן - ראה שאלה 4.2 בעמ' 118 בספר).

f היא אפוא פונקציה חח"ע של D לתוך $\mathbf{N}$.

מכאן לפי הגדרת $\leq$ בין עוצמות (עמ' 129 בספר): $|D| \leq |\mathbf{N}|$.

תשובה 5

א. $\mathbf{R} - \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$, ולכן $|\mathbf{R} - \mathbf{Z}| \leq |\mathbf{R}| = c$. מצד שני $\mathbf{R} - \mathbf{Z}$ מכילה את הקטע הפתוח שבין 0 ל- 1, ועצמת קטע זה אף היא c (עמ' 127 בספר). מכאן לפי שרדר-ברנשטיין, $|\mathbf{R} - \mathbf{Z}| = c$.

ב. $\mathbf{R} \times \mathbf{Z} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, ולכן $|\mathbf{R} \times \mathbf{Z}| \leq |\mathbf{R} \times \mathbf{R}| = c$ (שאלה 4.10 ד עמ' 128 בספר).

מצד שני, $\mathbf{R} \times \mathbf{Z}$ מכילה את הקבוצה $\mathbf{R} \times \{0\}$, שעוצמתה כמובן כעוצמת $\mathbf{R}$, כלומר c.

מכאן לפי שרדר-ברנשטיין, $|\mathbf{R} \times \mathbf{Z}| = c$.

ג. נראה קודם שקבוצת **הסדרות** הסופיות של מספרים טבעיים היא בת-מניה:

סדרה באורך n של מספרים טבעיים היא בדיוק איבר של $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \ldots \times \mathbf{N}$ (n גורמים).

בעמ' 122 בספר מוכח כי $|\mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \ldots \times \mathbf{N}| = \aleph_0$. משמע, קבוצת כל הסדרות באורך n של טבעיים היא בת-מניה. נסמן $\mathbf{N}^n = \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \ldots \times \mathbf{N}$. קבוצת כל הסדרות הסופיות של טבעיים (כולל הסדרה הריקה) היא $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{N}^n$. לפי שאלה 4.9 בעמ' 126 בספר, עצמת איחוד זה אף היא $\aleph_0$.

כעת נעבור לשאלה בדבר קבוצת **הקבוצות** הסופיות של טבעיים. לכל קבוצה סופית של טבעיים נוכל להתאים סדרה סופית של טבעיים, פשוט ע"י סידור אברי הקבוצה בסדר עולה. מובן כי התאמה זו היא חח"ע (אך אינה על: התמונה היא רק הסדרות הסופיות העולות-ממש!). לפיכך עוצמת קבוצת הקבוצות הסופיות של טבעיים היא לכל היותר $\aleph_0$.

מצד שני, ע"י הסתכלות בקבוצות בנות איבר אחד, מובן כי עוצמת קבוצת הקבוצות הסופיות של טבעיים היא לפחות $\aleph_0$. לפי שרדר-ברנשטיין, העוצמה היא אפוא $\aleph_0$.

ד. קבוצת הפונקציות של **R** ל- **R** מכילה את קבוצת הפונקציות של **R** לקבוצה $\{0,1\}$.

פונקציות אלו נקראות (עמ' 85 בספר) פונקציות אפייניות (של תת-קבוצות של **R**).

לכל תת-קבוצה A של **R** נוכל להתאים את הפונקציה האפיינית φ_A.

התאמה זו היא חח"ע: לתת-קבוצות שונות מתאימות פונקציות אפייניות שונות (מדוע?)

לפיכך $|P(\mathbf{R})|$ (עוצמת קבוצת החזקה של **R**) קטנה או שווה לעוצמת קבוצת הפונקציות של **R** ל- **R**. אולם משפט קנטור (משפט 4.8 עמ' 136 בספר) קובע כי $|P(\mathbf{R})|$ גדולה ממש מעוצמת **R**. לפיכך עוצמת קבוצת הפונקציות האמורה אף היא גדולה ממש מ- c.

ה. פונקציה של **N** ל- **N** היא בדיוק **סדרה אינסופית** של מספרים טבעיים.

נסמן את קבוצת הסדרות האינסופיות של טבעיים באות F.

(1) לכל מספר ממשי x בקטע $\{x \mid 0 \le x < 1\}$, נתבונן בפיתוח העשרוני (למשל) של x. אם הפיתוח סופי, נשלים אותו לזנב אינסופי של אפסים. לא נרשה פיתוח בעל זנב אינסופי של 9 (למספר כזה תמיד יש גם פיתוח סופי, ולכן נייצג אותו בעזרת זנב של אפסים). בכך הגדרנו פונקציה של הקטע הנ"ל אל קבוצת הסדרות האינסופיות של ספרות מתוך $\{0,\ldots,9\}$. קבוצה זו כמובן חלקית-ממש ל- F. מהבניה מובן כי פונקציה זו חח"ע. לפיכך $c \le |F|$.

(עוצמת הקטע הממשי הנ"ל היא c: ראה שאלה 4.10 בעמ' 128 בספר).

(2) כדי להראות את האי-שוויון ההפוך, ניעזר בקבוצת כל הסדרות האינסופיות של 0 ו- 1,

שנסמן אותה באות G . נַראה כי $|F| \le |G| \le c$:

לכל איבר של F נתאים איבר של G : לסדרה $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ נתאים את הסדרה הפותחת ב-

a_1 1 -ים, אחריהם 0 , אחריו a_2 1 -ים, אחריהם 0 , וכו'. מהבנייה מובן כי זו התאמה חח"ע,

ולכן $|F| \le |G|$.

לכל איבר של G נתאים מספר ממשי בין 0 ל- 1, פשוט ע"י שרשור כל אברי הסדרה, הוספת **0.**

בראש המחרוזת, ופירוש המחרוזת כמספר עשרוני. אף זו התאמה חח"ע, ולכן $|G| \le c$.

מכיוון ש- $|F| \le |G|$ ו- $|G| \le c$ הרי $|F| \le c$ (מדוע ?!).

מתוך (1), (2) יחד, לפי שרדר-ברנשטיין, נובע $|F| = c$.

אִתַּי הראבן
אפריל 1999