

שאלה 1 (25 נקודות)

א. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ ($\lambda > 0$).

(5 נק') 1. הוכח כי $E[X] = \lambda$.

(8 נק') 2. הוכח כי $\text{Var}(X) = \lambda$.

ב. נתון ארגז ובו 1,000 כדורים ממוספרים מ-1 עד 1,000.

בוחרים באקראי כדורים מהארגז בזה אחר זה ועם החזרה,

עד אשר נבחר לראשונה כדור שמספרו לא עולה על 20 (קטן מ-20 או שווה לו).

(6 נק') 1. חשב את ההסתברות שיידרשו פחות מ-48 בחירות עד לבחירת הכדור המבוקש.

(6 נק') 2. עורכים 7 חזרות בלתי-תלויות על הניסוי.

מהי ההסתברות שיידרשו לכך בסך-הכל 360 בחירות של כדורים?

שאלה 2 (25 נקודות)

n אנשים, וביניהם יונתן ודן, מסתדרים בשורה באופן אקראי. (הנח ש- $n > 5$)

יהי X מספר האנשים שעומדים בין יונתן ודן.

(7 נק') א. חשב את $P\{X \leq 1\}$.

(6 נק') ב. חשב את התוחלת של X .

(6 נק') ג. נניח שכל שני אנשים סמוכים עומדים במרחק של 2 מטר האחד מן השני.

אם נסמן ב- Y את המרחק בין יונתן לדן, מהי התוחלת של Y ?

(6 נק') ד. חשב את ההסתברות שאמנון ותמר (עוד שניים מבין n האנשים) יעמדו במקומות שבין יונתן לדן.

(ייתכן שבין יונתן לדן יהיו אנשים נוספים מלבד אמנון ותמר).

שאלה 3 (25 נקודות)

בוחרים באקראי בזה אחר זה וללא החזרה 3 מספרים מתוך הקבוצה $\{1, 2, \dots, 10\}$.

יהי X_i משתנה מקרי המוגדר על-ידי המספר שנבחר בבחירה ה- i , לכל $i = 1, 2, 3$.

(7 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X_1, X_2 ו- X_3 .

רשום אותה באופן מדויק: ערכים אפשריים והסתברויות משותפות.

(6 נק') ב. מצא את פונקציית ההסתברות השולית של X_3 . רשום אותה באופן מדויק.

(6 נק') ג. חשב את $P\{X_1 < X_2, X_1 < X_3\}$.

(6 נק') ד. חשב את $P\{X_3 = 8 | X_2 < X_3\}$.

שאלה 4 (25 נקודות)

במטע A מגדלים תפוחים מזן "חרמון".

המשקל (בגרמים) של כל תפוח מקרי מיבול מטע A הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת 150 ושונויות 400. אין תלות בין משקלים של תפוחים שונים, הנבחרים באקראי מיבול המטע. 15% מיבול התפוחים במטע, אלו בעלי המשקל הקטן ביותר, נשלחים למפעל לייצור מיצים; 25% מיבול התפוחים במטע, אלו בעלי המשקל הגדול ביותר, נשלחים ליצוא; והשאר, 60% מיבול התפוחים במטע, נשלחים לשיווק בארץ.

(6 נק') א. מהו המשקל המינימלי של התפוחים שנשלחים לשיווק בארץ?

ב. בוחרים באקראי 20 תפוחים מיבול המטע.

(6 נק') 1. מהי ההסתברות שהמשקל של 3 מהם יהיה בין 120 גרם ל-130 גרם?

(6 נק') 2. מהי ההסתברות ש-4 מהם יישלחו למפעל-המיצים ו-11 יישלחו לשיווק בארץ?

(7 נק') ג. **במטע B** מגדלים תפוחים מזן "חרמון" שתוחלת המשקל (בגרמים) של כל אחד מהם היא 160 ושונויות המשקל (בגרמים) של כל אחד מהם היא 625.

אין תלות בין משקלים של תפוחים שונים, הנבחרים באקראי מיבול המטע.

בוחרים באקראי 3 תפוחים **ממטע A** ו-5 תפוחים **ממטע B**.

1. מהן התוחלת וסטיית-התקן של המשקל הכולל של 8 תפוחים אלו?

איזו הנחה נוספת נדרשת כדי לחשב את סטיית-התקן של המשקל הכולל?

2. בעזרת אי-שוויון צ'בישב, חשב חסם תחתון להסתברות שהמשקל הכולל של 8 התפוחים יהיה בין 1,150 גרם ל-1,350 גרם.

שאלה 5 (25 נקודות)

ברשותך מאגר של מתגים, שכל אחד מהם **סגור** בהסתברות 0.8, ואז **יכול לעבור בו זרם**. אין תלות בין מתגים שונים.

(5 נק') א. צייר מעגל שההסתברות שיעבור בו זרם היא $1 - 0.2^5$.

(5 נק') ב. צייר מעגל שההסתברות שיעבור בו זרם היא $0.8^3 + 3 \cdot 0.8^2 \cdot 0.2 - 3 \cdot 0.8 \cdot 0.2^2 + 0.2^3$.

(5 נק') ג. צייר מעגל שההסתברות שיעבור בו זרם היא 0.8^4 .

(5 נק') ד. צייר מעגל שההסתברות שיעבור בו זרם היא $0.8^5 - 0.8^3 + 0.8^2$.

(5 נק') ה. צייר מעגל שההסתברות שיעבור בו זרם היא $0.8^2 \cdot (1 - 0.2^3)$.

בהצלחה!