אוסף שאלות לתרגול עצמי

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 8

1. לאורך החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר $\frac{1}{500}$.
אין תלות בין נורות שונות מאותו הסוג.
אדם קנה 100 נורות מסוג זה.
מצא קירוב להסתברות שממוצע אורך החיים של 100 הנורות שנקנו יהיה בין 450 ל- 520 שעות.

2. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1,000.

א. חשב קירוב נורמלי להסתברות ש- X יקבל את הערך 1,000.
מדוע אפשר לחשב קירוב נורמלי במקרה זה?

ב. חשב חסם תחתון ל- $P\{|X-1{,}000|\le 40\}$, באמצעות אי-שוויון צ'בישב.

3. נתונים 5 משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, X_1, X_2, ..., X_5, שכל אחד מהם מקבל את הערכים 0, 3 ו- 6 בהסתברויות שוות (כלומר, הסתברות ⅓ לכל ערך).
נגדיר $Y=\sum_{i=1}^{5}X_i$. חשב חסם עליון ל- $P\{Y>25\}$:

א. בעזרת אי שוויון מרקוב;

ב. בעזרת אי שוויון צ'בישב.

4. א. יהי X משתנה מקרי אי-שלילי שתוחלתו μ סופית, ויהי $t>0$.
הוכח כי $P\{X\le \mu t\}\ge 1-\frac{1}{t}$.

ב. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n=1,2,\ldots)$, משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר p $(0<p<1)$.
הראה בעזרת אי-שוויון צ'בישב שמתקיים: $P\left\{\overline{X}_n\le \frac{2}{p}\right\}\ge 1-\frac{1-p}{n}$.

הערה: $\overline{X}_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$

5. הוכח, בעזרת משפט הגבול המרכזי, כי $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}e^{-n}\frac{n^i}{i!}=\frac{1}{2}$.

6. יהיו X_1 , X_2 , ... , X_{200} משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפונקציה יוצרת המומנטים: $M_X(t)=\left(\frac{e^t}{5-4e^t}\right)^2$, עבור $t<\ln 1.25$.

מצא קירוב ל- $P\left\{1{,}910 \le \sum_{i=1}^{200} X_i < 2{,}050\right\}$.

7. א. נתון ארגז ובו 120 כדורים שעליהם רשומים מספרים.

לכל $i=1,2,\ldots,15$, יש בארגז i כדורים שהמספר הרשום עליהם הוא i .

בוחרים כדורים מהארגז, בזה אחר זה **ועם החזרה**, כך שבכל בחירה יש לכל הכדורים סיכויים שווים להיבחר.

נניח שבוחרים (בשיטה המתוארת לעיל) בדיוק 100 כדורים.

יהי Y הסכום הכולל של 100 המספרים הרשומים על הכדורים שנבחרו.

חשב קירוב ל- $P\{1{,}000 \le Y \le 1{,}100\}$.

הערה: $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ב. מעגלים 50 מספרים שנבחרו באקראי, כל אחד לשלם הקרוב לו ביותר, ומסכמים את 50 המספרים המעוגלים.

אם לכל אחת משגיאות-העיגול יש התפלגות אחידה בקטע $(-0.5, 0.5]$, מהו קירוב להסתברות שההפרש <u>המוחלט</u> בין הסכום המתקבל לבין הסכום המדויק של 50 המספרים עולה על 3?

8. אורך-החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים מתפלג מעריכית עם הפרמטר 0.01, והוא אינו תלוי באורך-החיים של נורות אחרות.

כמה נורות מסוג זה עליך לקנות (בקירוב), אם ברצונך להבטיח 5,000 שעות-אור בהסתברות 0.95 לפחות?

הנח שאתה מתקין נורה אחת, ובהישרפה מחליף אותה מייד באחרת. זמן ההחלפה זניח.

9. נתונים שלושה ארגזים בלתי-תלויים.

לכל ארגז אפשר להכניס X קופסאות, כאשר ל- X יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 150.

א. חשב **קירוב** להסתברות שלשלושת הארגזים יחדיו יוכנסו לפחות 480 קופסאות.

ב. חשב **קירוב** להסתברות ש<u>ההפרש המוחלט</u> בין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז הראשון לבין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז השני יהיה גדול מ- 10.

בשני הסעיפים נמק את פתרונך.

10. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- 0.5, עבור $n>4$.

הוכח בעזרת אי שוויון צ'בישב שמתקיים: $P\{X \ge n-2\} \le \frac{n}{2(n-4)^2}$.

11. רשום את החסמים מלעיל הקטנים ביותר (המוכרים לך) עבור $P\{X \geq 14\}$, בכל אחד מן המקרים הבאים:

א. X הוא משתנה מקרי אי-שלילי ותוחלתו 7;

ב. X הוא משתנה מקרי המקיים $X \geq -2$ ותוחלתו 7;

ג. X הוא משתנה מקרי שתוחלתו 7 ושונותו 4.

12. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת סופית μ ושונות סופית σ^2.

הנח ש-n גדול וחשב **קירוב** ל- $P\left\{\bar{X} \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} + \mu\right\}$.

13. המשקל W (בטונות) של מטען, שגשר מסוים יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק, הוא משתנה מקרי נורמלי שתוחלתו 400 וסטיית התקן שלו 40. נניח שהמשקל (בטונות) של מכונית הוא משתנה מקרי שתוחלתו 3 וסטיית התקן שלו 0.3. אם ברגע מסוים ההסתברות לגרימת נזק במבנה הגשר עולה על 0.1, מהו (בקירוב) המספר המינימלי של מכוניות הנמצאות אז על הגשר?

הנח שאין תלות בין משקלי מכוניות שונות ובין המשקל של כל מכונית לעומס שהגשר יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק.

14. נתונה קופסה ובה 18 כדורים: 10 לבנים, 5 שחורים ו- 3 אדומים. כל הכדורים **שונים** זה מזה. בוחרים מהקופסה באקראי **וללא החזרה** 5 כדורים, רושמים את צבעיהם ומחזירים אותם לקופסה. חוזרים על התהליך 90 פעמים, כך שאין תלות בין החזרות השונות.

יהי Y המספר **הכולל** של הכדורים הלבנים שנבחרו במהלך 90 החזרות הללו.

חשב <u>חסם עליון</u> (הטוב ביותר האפשרי) להסתברות של המאורע $\{|Y - 250| \geq 13\}$.