סמסטר 2007ג - פתרון ממ"ן 12

פתרון שאלה 1

פרופ' כלומסקי לא יצליח לקבוע אם השערת גולדבך נכונה, מפני שאם ההשערה אכן נכונה, האלגוריתם שלו לא יעצור לעולם. (אם ההשערה איננה נכונה, הפרופסור יצליח להפריך אותה.)

פתרון שאלה 2

א. האלגוריתם pal2 אינו נכון באופן חלקי. עבור כל פלינדרום באורך אי-זוגי (למשל, המחרוזת 'a'), האלגוריתם יעצור ויחזיר במשתנה E את הערך false.

ב. האלגוריתם pal2 עוצר על כל מחרוזת קלט חוקית.

אם X איננו פלינדרום, אז באיזשהו שלב המשתנה E יקבל ערך false והלולאה תסתיים.

אם X הוא פלינדרום באורך זוגי, אז אורך המחרוזת X מתקצר ב-2 בכל איטרציה של הלולאה, עד שהוא מגיע ל-0. אם X הוא פלינדרום באורך אי-זוגי, אז אורך המחרוזת X מתקצר ב-2 בכל איטרציה של הלולאה, עד שהוא מגיע ל-1. בשלב זה E יקבל ערך false והלולאה תסתיים.

פתרון שאלה 3

נוכיח את נכונות האלגוריתם **Pwr2**.

הוכחת עצירה: המתכנס הוא e. בכל איטרציה של הלולאה e קטֵן לפחות ב-1 (ונשאר שלם אי-שלילי), וכאשר $e = 0$ הלולאה מסתיימת.

כדי להוכיח את נכונותו החלקית של האלגוריתם, נשתמש בטענות הביניים הבאות:

טענה 1 (לפני שורה (1)): m מספר שלם חיובי, n מספר טבעי

טענה 2 (לפני שורה (4)): $pw \times b^e = m^n$

טענה 3 (אחרי היציאה מהלולאה שבשורה (4)): $pw = m^n$

נוכיח שהטענות נשמרות:

1 ⇐ 2: זה מתקיים, כי לאחר ההצבות בשורות (1)-(3) $pw \times b^e = 1 \times m^n = m^n$.

2 ⇐ 2: עלינו להראות שאם טענה 2 נכונה, אז היא תישאר נכונה גם לאחר איטרציה נוספת, עבור הערכים החדשים של b, e ו-pw. נפריד לשני המקרים:

אם e זוגי: $pw \times (b^2)^{(e/2)} = pw \times b^e = m^n$

לפי ההנחה

אם e אי-זוגי: $(pw \times b) \times b^{(e-1)} = (pw \times b) \times b^e / b = pw \times b^e = m^n$

2 ⇐ 3: לפי ההנחה $pw \times b^e = m^n$. לאחר היציאה מהלולאה $e = 0$ ולכן $pw \times b^0 = pw \times 1 = m^n$.

פתרון שאלה 4

א. האלגוריתם מחשב את הממוצע החשבוני של המספרים ברשימה L באופן רקורסיבי –
הוא מחלק את הרשימה L לשני חלקים שווים, מחשב את הממוצע החשבוני של המספרים בכל חלק ומחשב את הממוצע החשבוני של שני המספרים המתקבלים.

ב. <u>הוכחת עצירה</u>: האלגוריתם עוצר, כי בכל קריאה רקורסיבית האורך של הרשימה L קטן פי 2.

<u>הוכחת נכונות חלקית</u>: באינדוקציה על האורך של L. נסמן $|L| = 2^i$.

בסיס: אם $i = 0$, אז $|L| = 1$ ומוחזר האיבר היחידי ברשימה.

צעד האינדוקציה: נניח שהאלגוריתם נכון עבור $i - 1$ ונראה שמכך נובעת נכונות עבור i.

$$(S_1 + S_2)/2 = \frac{1}{2}\left[\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{N/2})}{N/2} + \frac{(a_{N/2+1} + a_{N/2+2} + \ldots + a_N)}{N/2}\right] = \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_N)}{N}$$

הנחת האינדוקציה

ג. נוסחת הנסיגה המתקבלת: $C(N) = 2C(N/2) + 2$
נוסחה זו דומה לנוסחה המופיעה בעמ' 139 בספר, אך תנאי העצירה כאן הוא $C(2) = 2$.
הפתרון המתקבל הוא $C(N) = 2N - 2$.

פתרון שאלה 5

אלגוריתם המוצא את האינדקס הגבוה ביותר של איבר ברשימה L השווה ל-x:

(1) $low \leftarrow 1,\ hi \leftarrow N$;

(2) כל עוד $low \le hi$ בצע את הפעולות הבאות:

(2.1) $mid \leftarrow (low + hi) / 2$;

(2.2) אם $L[mid] < x$ או ($L[mid] = x$ וגם $L[mid + 1] = x$), אז $low \leftarrow mid + 1$;

(2.3) אחרת, אם $L[mid] > x$, אז $hi \leftarrow mid - 1$;

(2.4) אחרת, החזר את mid.

(3) כתוב "x לא נמצא ברשימה" ועצור.

סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם היא $O(\log N)$.
במהלך האלגוריתם מתבצעות לכל היותר logN איטרציות (כי בכל איטרציה של הלולאה אורך הרשימה קטן פי 2), ובכל איטרציה מתבצע מספר פעולות החסום על-ידי קבוע.

פתרון שאלה 6

בעיה אלגוריתמית **סגורה** היא בעיה שהחסם העליון שלה שווה לחסם התחתון; כלומר, קיים אלגוריתם הפותר את הבעיה, שסיבוכיות זמן הריצה שלו זהה לחסם התחתון של הבעיה.

- בעיה סגורה שסיבוכיות הזמן שלה לוגריתמית: חיפוש ברשימה ממוינת

  החסם התחתון: עמ' 145-146 בספר;

  אלגוריתם לפתרון הבעיה: חיפוש בינרי.

- בעיה סגורה שסיבוכיות הזמן שלה לינארית: חיפוש ברשימה לא ממוינת

  החסם התחתון: הערך שמחפשים יכול להופיע בכל מקום ברשימה, ולכן חייבים לבדוק את כל איברי הרשימה;

  אלגוריתם לפתרון הבעיה: אלגוריתם שעובר בצורה סדרתית על כל איברי הרשימה ומשווה כל אחד מהם לערך שמחפשים.

- בעיה סגורה שסיבוכיות הזמן שלה $O(\text{NlogN})$: בעיית המיון

  החסם התחתון: עמ' 148 בספר;

  אלגוריתם לפתרון הבעיה: מיון-מיזוג.

- בעיה סגורה שסיבוכיות הזמן שלה אקספוננציאלית: בעיית מגדלי האנוי

  החסם התחתון: עמ' 158 בספר;

  אלגוריתם לפתרון הבעיה: האלגוריתם הרקורסיבי המתואר בפרק 2 בספר.