פתרון ממ"ן 11

שאלה 1

לכל אחת מהטענות הבאות קבעו אם היא נכונה או לא.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $2 \in \{\{1\},\{2\}\}$ ב. $\{2\} \in \{\{1\},\{2\}\}$ ג. $\{2,3\} \subseteq \{1,\{2,3\}\}$ ד. $\varnothing \subseteq \{1,\{2\}\}$

ה. $\{\varnothing\} \subseteq \{\{1\}\}$ ו. $\{1,2\} \subseteq \{\mathbf{N}\}$ ז. $|\{1,\mathbf{N}\}| = |\{1,\varnothing\}|$ ח. $\{1,\{2\}\} \cap \mathcal{P}(\{1,2\}) \neq \varnothing$

תשובה

א. לא נכון מפני האיברים היחידים של הקבוצה $\{\{1\},\{2\}\}$ הם $\{1\}$ ו- $\{2\}$.

ב. נכון, לפי מה שהסברנו בסעיף א.

ג. לא נכון מפני שלמשל $2 \in \{2,3\}$ אבל $2 \notin \{1,\{2,3\}\}$.

ד. נכון, הקבוצה הריקה חלקית לכל קבוצה.

ה. לא נכון מפני ש- $\varnothing \in \{\varnothing\}$ אבל $\varnothing \notin \{\{1\}\}$.

ו. לא נכון מפני שלמשל $1 \in \{1,2\}$ אבל $1 \notin \{\mathbf{N}\}$ (שימו לב: האיבר **היחיד** של $\{\mathbf{N}\}$ הוא $\mathbf{N}$)

ז. נכון, כי לכל אחת משתי הקבוצות יש בדיוק שני איברים.

ח. נכון מפני ש- $\{2\} \in \{1,\{2\}\}$ וגם $\{2\} \in \mathcal{P}(\{1,2\})$.

שאלה 2

יהיו A,B,C קבוצות. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (B \cap C)$.

ב. אם $\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ אז $C = A$ או $C = B$.

ג. אם A,B קבוצות סופיות ואם $|\mathcal{P}(A)| = 2 \cdot |\mathcal{P}(A \setminus B)|$ אז $|A \cap B| = 1$.

תשובה

א. נראה שכל אחת משתי הקבוצות חלקית האחרת.

נניח קודם ש- $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

אז $x \in (A \setminus B)$ **או** $x \in (B \setminus C)$ כלומר ($x \in A$ **וגם** $x \notin B$) **או** ($x \in B$ **וגם** $x \notin C$). נביט כעת על כל אחד משני המצבים האפשריים הנ"ל. במקרה הראשון $x \in A$ **וגם** $x \notin B$ לכן $x \in A \cup B$ (כי $x \in A$) ו- $x \notin B \cap C$ (כי $x \notin B$). מכאן ש- $x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C)$.

במקרה השני, $x \in B$ **וגם** $x \notin C$ לכן $x \in A \cup B$ (כי $x \in B$) ו- $x \notin B \cap C$ (כי $x \notin C$). מכאן שגם במקרה זה $x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C)$. לפיכך הוכנו שלכל $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ מתקיים $x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C)$ כלומר $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus (B \cap C)$.

להפך נניח ש- $x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C)$. אז $x \in A \cup B$ **וגם** $x \notin B \cap C$.

נבחין כעת בין שני מקרים שבכל אופן מכסים את כל האופציות האפשריות עבור x.

מקרה 1: $x \notin B$

מאחר ש- $x \in A \cup B$ הרי שבמקרה זה, בהכרח $x \in A$ ולכן $x \in A \setminus B$.

מקרה 2: $x \in B$

מאחר ש- $x \notin B \cap C$, מקרה זה מחייב ש- $x \notin C$ ואז ברור ש- $x \in B \setminus C$.

בשני המקרים מצאנו ש- $x \in A \setminus B$ או $x \in B \setminus C$ כלומר $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

לפיכך הוכנו שלכל $x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C)$ מתקיים $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ כלומר $(A \cup B) \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$. משתי ההכלות שהוכחנו נובע השוויון הנדרש.

ב. $C \in \mathcal{P}(C)$ (מפני ש- $C \subseteq C$) לכן מהנתון נובע ש- $C \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. לכן $C \in \mathcal{P}(A)$ או $C \in \mathcal{P}(B)$ ומכאן ש- $C \subseteq A$ או $C \subseteq B$.

נניח ש- $C \subseteq A$. מפני ש- $A \in \mathcal{P}(A)$ נקבל ש- $A \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ לכן מהנתון, $A \in \mathcal{P}(C)$ ולכן $A \subseteq C$. משתי ההכלות נובע ש- $C = A$.

במקרה ש- $C \subseteq B$ נקבל בדרך דומה ש- $C = B$.

ג. ידוע שלכל קבוצה סופית A, $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

כמו כן, לכל שתי קבוצות A, B מתקיים $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ (קל להוכיח שוויון זה כי כל איבר של A יש שני מצבים אפשריים בלבד: או ששייך ל- B (ואז הוא איבר של $A \cap B$) או שלא שייך ל- B (ואז הוא איבר של $A \setminus B$). ברור שהקבוצות $A \cap B$ ו- $A \setminus B$ הן זרות זו לזו (אין להן איברים משותפים) ולכן $|A| = |A \cap B| + |A \setminus B|$.

מכאן ש- $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A} = 2^{|A \cap B| + |A \setminus B|} = 2^{|A \cap B|} \cdot 2^{|A \setminus B|} = 2^{|A \cap B|} \cdot |\mathcal{P}(A \setminus B)|$.

לפי הנתון $|\mathcal{P}(A)| = 2 \cdot |\mathcal{P}(A \setminus B)|$ לפיכך $2^{|A \cap B|} = 2$ דבר שמחייב ש- $|A \cap B| = 1$.

שאלה 3

יהיו A, B, C קבוצות חלקיות לקבוצה אוניברסלית U. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $A \subset B$ אז $A \cup B^c \neq U$.

ב. $A^c \Delta B = B^c \Delta C$ אז $A = C$.

ג. אם $A \cap B \subseteq A \Delta B \Delta C$ אז $A \cap B \subseteq C$.

תשובה

א. אם $A \subset B$ אז קיים $x \in B$ כך ש- $x \notin A$. במילים אחרות $x \in B$ וגם $x \in A^c$ כלומר $x \in A^c \cap B$ ולכן $A^c \cap B \neq \varnothing$.

מכאן ש- $(A^c \cap B)^c \neq U$ (שכן אם $(A^c \cap B)^c = U$ נקבל ש- $A^c \cap B = U^c = \varnothing$ - סתורה).

לפי חוקי דה מורגן $(A^c \cap B)^c = A^{cc} \cup B^c = A \cup B^c$. לכן $A \cup B^c \neq U$.

ב. לפי הטענה שבשאלה 41, מתקיים $A^c \Delta B = A \Delta B^c$.

לכן $A^c \Delta B = B^c \Delta A$ (שכן ההפרש הסימטרי הוא חילופי).

לפי הנתון $A^c\Delta B = B^c\Delta C$ נחליף כאן את $A^c\Delta B$ ב- $B^c\Delta A$ ונקבל: $B^c\Delta A = B^c\Delta C$.

אז על ידי שימוש בחוק הצמצום של הפעולה Δ (שאלה 32 ג) נקבל ש- $A = C$.

ג. ההפרש הסימטרי הוא קיבוצי לכן נוכל לרשום את הנתון כך: $A \cap B \subseteq (A\Delta B)\Delta C$.

מכאן שלכל $x \in A \cap B$ מתקיים $x \in (A\Delta B)\Delta C$ ומהגדרה ההפרש הסימטרי נובע ש- $x \in A\Delta B$ או $x \in C$ (ו- x לא שייך לשתי הקבוצות גם יחד).

אבל, אם $x \in A \cap B$ אז לא ייתכן ש- $x \in A\Delta B$ (שכן $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$) מכאן שבהכרח $x \in C$.

הראנו אם כן שלכל $x \in A \cap B$ מתקיים $x \in C$ ומכאן ש- $A \cap B \subseteq C$.

שאלה 4

בשאלה זו, קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbf{N}$ היא הקבוצה האוניברסלית.

לכל $k \in \mathbf{N}$ נסמן $A_k = \{0k, 1k, 2k, 3k, \ldots\} = \{nk \mid n \in \mathbf{N}\}$.

בכל אחד מן הסעיפים הבאים, מיצאו מספר טבעי k כך שהקבוצה באותו סעיף תהיה שווה ל- A_k. נמקו טענותיכם.

א. $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$ ב. $\bigcap_{k=1}^{5} A_k$ ג. $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ ד. $A_6 \cup \{x+3 \mid x \in A_6\}$

תשובה

א. נראה ש- $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k} = A_2$

מצד אחד, A_2 היא אחת הקבוצות המשתתפת באיחוד הנתון (מקבלים אותה עבור $k = 1$),

לכן $A_2 \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$.

מצד שני, לכל $k \in \mathbf{N}$ הקבוצות A_{2k} מכילות אך ורק מספרים טבעיים זוגיים, לכן גם $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$ מכיל רק מספרים טבעיים זוגיים ולכן הקבוצה $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$ חלקית ל- A_2 (כי A_2 היא קבוצת כל המספרים הטבעיים הזוגיים). במילים אחרות $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k} \subseteq A_2$.

משתי ההכלות שהוכחנו נובע $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k} = A_2$.

ב. נראה ש- $\bigcap_{k=1}^{5} A_k = A_{60}$.

לשם כך נשים לב שלכל $k \geq 1$, A_k היא קבוצת כל המספרים הטבעיים המתחלקים ב- k (אומרים אז גם שהם כפולות של k) שימו לב: 0 מתחלק ב- (הוא כפולה של) כל מספר טבעי!

מכאן ש- $\bigcap_{k=1}^{5} A_k$ הוא קבוצת המספרים המחלקים בו זמנית ב- 1,2,3,4,5.

כל מספר שמתחלק ב- 3,4,5 מתחלק ב- 60 ולכן $\bigcap_{k=1}^{5} A_k \subseteq A_{60}$.

מצד שני כל מספר $x \in A_{60}$ מתחלק ב- 60 לכן מחלק בכל אחד מן המפרים 1,2,3,4,5 ולכן

הוא שייך ל- A_1 , A_2 , A_3 , A_4 ו- A_5 כלומר שייך ל- $\bigcap_{k=1}^{5} A_k$. במילים אחרות: $A_{60} \subseteq \bigcap_{k=1}^{5} A_k$.

משתי ההכלות שהוכנו נובע ש- $\bigcap_{k=1}^{5} A_k = A_{60}$.

ג. נראה ש- $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_0$.

נשים לב שלפי הנתון $A_0 = \{0\}$.

כמו כן, לכל $k \geq 1$, A_k היא קבוצת כל המספרים הטבעיים המתחלקים ב- k.

לכן אם $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ אז x מתחלק בכל מספר טבעי $k \geq 1$.

אין מספר טבעי שיכול להתחלק **בכל** מספר טבעי חיובי למעט 0 לכן $x = 0$.

מכאן ש- $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq \{0\}$. מצד שני, לפי ההגדה, $x \in A_k$ עבור כל $k \geq 1$, לכן $\{0\} \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

משתי ההכלות נובע ש- $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{0\} = A_0$.

ד. נראה ש- $A_6 \cup \{x+3 \mid x \in A_6\} = A_3$.

לפי הנתון $A_6 = \{6n \mid n \in \mathbf{N}\} = \{3 \cdot 2n \mid n \in \mathbf{N}\}$ וזו קבוצות כל הכפולות של 3 במספר זוגי.
(גם 0 זוגי!)

מצד שני מפני ש- $A_6 = \{6n \mid n \in \mathbf{N}\}$ נקבל ש- $\{x+3 \mid x \in A_6\} = \{6n+3 \mid n \in \mathbf{N}\}$ ומכאן ש-
$\{x+3 \mid x \in A_6\} = \{3(2n+1) \mid n \in \mathbf{N}\}$ וזו קבוצת כל הכפולות של 3 במספר אי-זוגי.

לפיכך $A_6 \cup \{x+3 \mid x \in A_6\}$ היא קבוצת כל הכפולות של 3 (גם זוגיות וגם אי-זוגיות) ולכן
$A_6 \cup \{x+3 \mid x \in A_6\} = A_3$.