

ממ"ן 17 – שאלה 1

עץ חיפוש בינארי הוא עץ אדום-אדום-שחור אם הוא מקיים את תכונות האדום-אדום-שחור :

1. כל צומת הוא אדום או שחור ;
2. השורש הוא שחור ;
3. כל עלה (NIL) הוא שחור ;
4. אם צומת הוא אדום וההורה שלו גם הוא אדום, אזי שני בניו שחורים ;
5. כל המסלולים הפשוטים מצומת נתון כלשהו לצאצאים עלים מכילים אותו מספר של צמתים שחורים.

כמה צמתים פנימיים קיימים לכל היותר בעץ אדום-אדום-שחור שגובה-השחור שלו k ?
כמה קיימים לכל הפחות ?

פתרון:

מספר הצמתים הפנימיים הוא מקסימלי אם בעץ $3k + 1$ רמות, כשרמה i המקיימת $i \bmod 3 = 0$ מכילה צמתים שחורים ורמה i המקיימת $i \bmod 3 = 1$ או $i \bmod 3 = 2$ מכילה צמתים אדומים. הרמה התחתונה $3k$ מורכבת רק מעלים.
מספר הצמתים הפנימיים המקסימלי הוא לפיכך :

$$\sum_{i=0}^{3k-1} 2^i = 2^{3k} - 1$$

מספר הצמתים הפנימיים הוא מינימלי אם בעץ $k + 1$ רמות שכולן מכילות צמתים שחורים.
הרמה התחתונה k מורכבת רק מעלים.
מספר הצמתים הפנימיים המינימלי הוא לפיכך :

$$\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1$$