

אלגוריתמים - תרגיל 9

24 בדצמבר 2003

תאריך אחרון להגשה: יום ה' 3.1
שורש יחידה n -י הוא מספר מרוכב ω המקיים $\omega^n = 1$ (כלומר שורש של הפולינום $x^n = 1$ בשדה המספרים המרוכבים). לכל פולינום ממעלה n יש n שורשים בשדה המספרים המרוכבים (המשפט היסודי של האלגברה). לכן יש n שורשי יחידה n -ים. לכל $x \in \mathbb{R}$ נגדיר

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

1. הוכיחו כי

$$e^{kix} = (e^{ix})^k$$

לכל מספר טבעי k .

2. הוכיחו כי $e^{2\pi ik/n}$ הוא שורש יחידה n -י, לכל $k = 0, \dots, n-1$.

3. נסמן $\omega_n = e^{2\pi i/n}$, אז $\omega_n^0, \dots, \omega_n^{n-1}$ הם שורשי היחידה ה- n ים. הוכיחו כי $\omega_n^{-1} = \omega_n^{n-1}$ הסיקו כי $\omega_n^i \omega_n^j = \omega_n^{(i+j) \bmod n}$.

4. הוכיחו כי עבור כל $n \geq 0$, $k \geq 0$ ו- $d > 0$

$$\omega_{dn}^{dk} = \omega_n^k$$

5. הראו כי לכל מספר טבעי זוגי $n > 0$ מתקיים

$$\omega_n^{n/2} = \omega_2 = -1$$

6. יהי $n > 0$ זוגי, הוכיחו כי ריבועי שורשי היחידה ה- n ים הם שורשי היחידה ה- $n/2$. כלומר

$$\{\omega_n^{2i}\}_{i=0}^{n-1} = \{\omega_{n/2}^j\}_{j=0}^{n/2-1}$$

(השיויון הוא שיויון של קבוצות).

7. הוכיחו כי לכל $n \geq 0$ ומספר שלם אי-שלילי k שלא מחלק את n מתקיים

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\omega_n^k)^j = 0$$