

מבנה הבחינה : בבחינה **חמש** שאלות.
עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות.
כל שאלה מזכה ב- 25 נקודות.

הנחיות : כל תשובה תתחיל בעמוד **חדש**.
אין לכתוב בצבע אדום.
אין לכתוב בעיפרון.

אין צורך לכתוב פסידוקוד, אלא אם נדרש במפורש.
חובה להוכיח (או להסביר) כל טענה.

שאלה 1

נתון מערך של מספרים $A[1..n]$.

כתבו אלגוריתם למציאת שלושה אינדקסים $1 \leq i < j < k \leq n$ כך שמתקיים
 $A[i] + A[k] = 2 \cdot A[j]$. זמן הריצה הנדרש הינו $\Theta(n^2)$.

שאלה 2

פתרו את נוסחת הנסיגה הבאה :

$$\begin{cases} T(1) = \Theta(1) \\ T(n) = 8n\sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + n^3 \cdot \lg^3 n \end{cases}$$

רמז: $U(n) = T(n)/n^3$.

שאלה 3

הציעו מבנה נתונים S שמפתחותיו n שלמים חיוביים, התומך בפעולות הבאות בזמנים הנדרשים:

- BUILD(S): בניית המבנה S מתוך סדרה של n שלמים חיוביים; זמן הריצה: $O(n)$;
- INSERT(S, k): הכנסת המפתח k למבנה S ; זמן הריצה: $O(\lg n)$;
- MEDIAN(S): החזרת חציון המפתחות; זמן הריצה: $O(1)$;
- ODD-MEDIAN(S): החזרת חציון המפתחות האי-זוגיים; זמן הריצה: $O(1)$;
- EVEN-MEDIAN(S): החזרת חציון המפתחות הזוגיים; זמן הריצה: $O(1)$;
- DEL-MEDIAN(S): מחיקת חציון המפתחות מתוך המבנה S ; זמן הריצה: $O(\lg n)$;
- DEL-ODD-MEDIAN(S): מחיקת חציון המפתחות האי-זוגיים מתוך המבנה S ; זמן הריצה: $O(\lg n)$;
- DEL-EVEN-MEDIAN(S): מחיקת חציון המפתחות הזוגיים מתוך המבנה S ; זמן הריצה: $O(\lg n)$;
- INCREASE(S, p): קידום ב-1 של מפתח האיבר שאליו מצביע p ; זמן ריצה: $O(\lg n)$.

הערה: מבנה הנתונים S יכול להיות מורכב מכמה מבני נתונים יסודיים.

שאלה 4

נתונים מערך $A[1..n]$ של מספרים ממשיים ומספר טבעי m המקיים $2m < n$.
כתבו אלגוריתם הבודק האם קיים ב- A איבר z המקיים את שני התנאים הבאים:
(1) A מכיל לפחות $n - 2m$ איברים קטנים מ- z ;
(2) z מופיע יותר מ- m פעמים ב- A .
זמן הריצה הנדרש של האלגוריתם הינו $\Theta(n)$.

שאלה 5

הציעו מבנה נתונים S התומך בפעולות הבאות בזמנים הנדרשים (n מציין את מספר האיברים במבנה):
BUILD(S): בניית המבנה S מתוך סדרה נתונה של n איברים; זמן הריצה: $O(n \cdot \lg n)$;
SEARCH(S, k): חיפוש במבנה S אחר המפתח k ; זמן הריצה: $O(\lg n)$;
INSERT(S, k): הכנסת המפתח k למבנה S ; זמן הריצה: $O(\lg n)$;
DELETE(S, p): מחיקת האיבר שאליו מצביע p מהמבנה S ; זמן הריצה: $O(\lg n)$;
DECREASE-UPTO(S, k, d): הקטנה בערך $d > 0$ של כל המפתחות במבנה S שערכיהם קטנים מ- k או שווים ל- k ; זמן הריצה: $O(\lg n)$.
כתבו בפסידוקוד את השגרה DECREASE-UPTO(S, k, d).

בהצלחה !