מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 1

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2012 א **מועד אחרון להגשה:** 6.11.2011

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (16 נקודות)

רשום כמה תוצאות אפשריות יש במרחב המדגם של כל אחד מהניסויים שלהלן:

(8 נק') א. **ניסוי 1:** נתון ארגז ובו 20 כדורים זהים. מוציאים i $(0 \le i \le 20)$ כדורים מהארגז ומפזרים אותם ב-5 תאים ממוספרים מ-1 עד 5.

הערה: בחירת הערך של i היא חלק מן הניסוי. לכן, מרחב המדגם כולל את כל התוצאות האפשריות לכל ערכי i האפשריים.

(8 נק') ב. **ניסוי 2:** נתון ארגז ובו כדורים זהים. מוציאים כדורים מהארגז ומפזרים אותם ב-10 תאים ממוספרים מ-1 עד 10, כך שבתא 1 יש מספר כדורים **קטן או שווה** למספר הכדורים שבתא 2, בתא 2 יש מספר כדורים **קטן או שווה** למספר הכדורים שבתא 3, ... , בתא 9 יש מספר כדורים **קטן או שווה** למספר הכדורים שבתא 10 ובתא 10 יש לכל היותר 20 כדורים.

הנח שבארגז יש מספיק כדורים לכל אפשרות פיזור שעונה על הדרישות.

רמז: חשוב על סכום סדרת ההפרשים של כמויות הכדורים בתאים סמוכים. ההפרש הראשון שווה למספר הכדורים בתא הראשון.

שאלה 2 (27 נקודות)

מפזרים באקראי 10 כדורים ממוספרים מ-1 עד 10 בשורה של 8 תאים.
אין הגבלה על מספר הכדורים שיכולים להימצא בכל אחד מהתאים.

(6 נק') א. כמה פיזורים שונים של הכדורים קיימים?

(7 נק') ב. בכמה מהפיזורים האפשריים יש בתא הראשון בדיוק 2 כדורים?

(7 נק') ג. בכמה מהפיזורים האפשריים התא הראשון ריק ובתא השני יש לפחות כדור אחד?

(7 נק') ד. בכמה מהפיזורים האפשריים יש לפחות 6 תאים ריקים?

שאלה 3 (27 נקודות)

מפזרים באקראי $2n$ כדורים זהים ב- n תאים $(n > 2)$.

(6 נק׳)   א.   כמה אפשרויות פיזור שונות קיימות במרחב המדגם?

(7 נק׳)   ב.   בכמה מאפשרויות הפיזור יש בדיוק שני תאים ריקים?

(7 נק׳)   ג.   בכמה מאפשרויות הפיזור, שבמרחב המדגם, יש בכל תא מספר זוגי של כדורים?

(7 נק׳)   ד.   בכמה מאפשרויות הפיזור יש בדיוק שלושה תאים <u>סמוכים</u> לא-ריקים ושאר התאים ריקים?

שאלה 4 (30 נקודות)

בוחרים באקראי 10 מספרים מתוך הקבוצה $\{-9, -8, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 8, 9\}$.

(12 נק׳)   א.   כמה אפשרויות בחירה קיימות אם –

1. הבחירה היא עם החזרה ויש חשיבות לסדר בחירת המספרים?
2. הבחירה היא עם החזרה ואין חשיבות לסדר בחירת המספרים?
3. הבחירה היא ללא החזרה ויש חשיבות לסדר בחירת המספרים?
4. הבחירה היא ללא החזרה ואין חשיבות לסדר בחירת המספרים?

נניח שהבחירה היא <u>עם החזרה</u> <u>ויש חשיבות</u> לסדר בחירת המספרים.

בכמה מאפשרויות הבחירה הקיימות –

(6 נק׳)   ב.   הערך המוחלט של המספר הראשון שנבחר שווה לערך המוחלט של המספר האחרון שנבחר?

(6 נק׳)   ג.   סכום שלושת המספרים האחרונים שנבחרים הוא זוגי?

(6 נק׳)   ד.   <u>בדיוק</u> שלושה מהמספרים שנבחרים הם כפולות של 3?

הערה: כפולה של 3 היא כל מספר שמתחלק ב-3 ללא שארית (ובכלל זה המספר אפס ומספרים שליליים).

מטלת מנחה (ממ״ן) 12

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 2

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2012 א **מועד אחרון להגשה:** 20.11.2011

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1 (20 נקודות)

הווטרינרית העירונית ערכה סקר בקרב תושבי העיר, וקיבלה את התוצאות הבאות :

ל- 45% מהתושבים יש כלב/ים או חתול/ים ;

ל- 30% מהתושבים יש לפחות כלב אחד ;

ל- 25% מהתושבים יש לפחות חתול אחד ;

ל- 6% מהתושבים יש לפחות שני חתולים ;

אין תושבים שיש להם יותר מחתול אחד וגם כלב/ים ;

ל- 9% מהתושבים יש לפחות שני כלבים ;

ול- 2% מהתושבים יש בדיוק חתול אחד ולפחות שני כלבים.

כל בעל-חיים (כלב או חתול) רשום על-שמו של תושב אחד בלבד.

(8 נקי) א. הגדר בדיוק 4 מאורעות המתאימים לבעיה, פרט באמצעותם את רשימת הנתונים שלעיל, ותאר באמצעותם את ממצאי הסקר בדיאגרמת ון.
רשום בדיאגרמה את כל ההסתברויות המתאימות לשטחים החלקיים שנוצרים בה.
הסבר בקצרה את דרך חישוב ההסתברויות הרשומות בדיאגרמה ווַדא שסכומן הוא 1.

**** בסעיפים הבאים, כשכתוב בעל-חיים הכוונה היא לכלב או לחתול ****

בוחרים באופן מקרי תושב של העיר –

(3 נקי) ב. מהי ההסתברות שלתושב הנבחר אין בכלל בעלי-חיים?

(3 נקי) ג. מהי ההסתברות שלתושב הנבחר יש בעלי-חיים משני הסוגים?

(3 נקי) ד. מהי ההסתברות שלתושב הנבחר יש רק בעל-חיים אחד והוא חתול?

(3 נקי) ה. מהי ההסתברות שלתושב הנבחר יש יותר מבעל-חיים אחד?

שאלה 2 (34 נקודות)

ליוסי 8 קופסאות בצבעים שונים ו- 15 גולות שונות זו מזו.

יוסי מפזר באקראי את הגולות בקופסאות.

(6 נק') א. מהי ההסתברות שיוסי ישים את כל הגולות באותה הקופסה?

(7 נק') ב. מהי ההסתברות שהגולות יוכנסו ל- 2 קופסאות בלבד?

(7 נק') ג. מהי ההסתברות שבדיוק 2 קופסאות יישארו ריקות?

(7 נק') ד. מהי ההסתברות שבכל אחת מ-4 הקופסאות: הצהובה, הירוקה, האדומה והכחולה – יהיה מספר שווה של גולות?

(7 נק') ה. מהי ההסתברות שהמספר הכולל של הגולות בקופסאות: הצהובה, הירוקה, האדומה והכחולה – יהיה גדול ממספר הגולות ב- 4 הקופסאות האחרות?

שאלה 3 (30 נקודות)

מחלקים באקראי 8 כדורים צבעוניים ושונים זה מזה ל- 4 ילדים – 2 כדורים לכל ילד.

(7 נק') א. כמה תוצאות אפשריות יש במרחב המדגם?

נניח ש-2 כדורים הם כחולים, 2 אדומים, 2 צהובים ו-2 ירוקים וכי כל הכדורים **שונים** זה מזה.

(7 נק') ב. מהי ההסתברות שכל אחד מהילדים יקבל שני כדורים מאותו הצבע?

(8 נק') ג. מהי ההסתברות שלפחות ילד אחד יקבל שני כדורים מאותו הצבע?

(8 נק') ד. מהי ההסתברות שבדיוק ילד אחד יקבל כדורים שצבעיהם צהוב ואדום?

שאלה 4 (16 נקודות)

תמר מחלקת באקראי 10 גולות **זהות** ל-5 חברותיה.

(8 נק') א. כמה אפשרויות חלוקה קיימות?

האם החלוקות שוות-הסתברות? נמק את טענתך.

(8 נק') ב. מהי ההסתברות שתהיינה בדיוק שתי חברות שתקבלנה 4 גולות כל אחת?

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 3

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

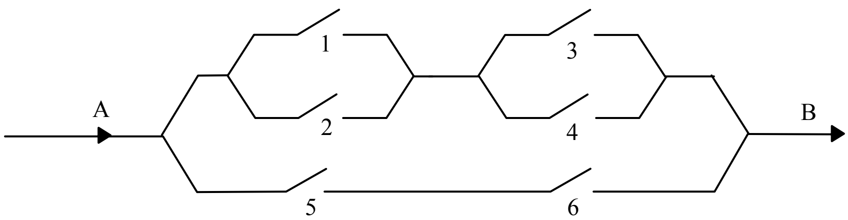
סמסטר: 2012 א **מועד אחרון להגשה:** 4.12.2011

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

בחלק מהשאלות המופיעות בממ"ן זה **מומלץ** לצייר עצי-הסתברות.

שאלה 1 (28 נקודות)

במעגל שלהלן, כל אחד מן הממסרים **סגור** בהסתברות 0.8 ואז **יכול לעבור בו זרם**.
כמו כן, כל ממסר פועל באופן בלתי-תלוי באחרים.



(7 נק') א. מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?

(7 נק') ב. אם לא עובר זרם מ-A ל-B, מהי ההסתברות שממסרים 3 ו- 4 פתוחים?

(7 נק') ג. אם ממסר 4 פתוח, מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?

(7 נק') ד. מפעילים 8 מעגלים מהסוג המתואר לעיל.
אם המעגלים בלתי-תלויים זה בזה, מהי ההסתברות שבדיוק ב- 2 מהם לא יעבור זרם מ-A ל-B?

שאלה 2 (14 נקודות)

יעל, תמר ודפנה קבעו להיפגש בשעה חמש אחר-הצהריים.

יעל לא מאחרת אף פעם לפגישות.

ההסתברות שאף אחת מהן לא תאחר לפגישה היא 0.4.

אם ידוע שלפחות אחת מהבנות תאחר, ההסתברות שדפנה תהיה בין המאחרות היא 0.6.

אם ידוע שדפנה תאחר, ההסתברות שהיא תהיה היחידה שתאחר היא $\frac{5}{6}$.

(7 נק') א. מהי ההסתברות שרק תמר תאחר לפגישה?

(7 נק') ב. אם ידוע שבדיוק שתיים מהבנות הגיעו בזמן לפגישה, מהי ההסתברות שהיתה זו דפנה שאחרה להגיע?

שאלה 3 (21 נקודות)

בעיר קטנה יש שלושה מפעלים שמזהמים מדי פעם את האוויר.

מפעל A מזהם את האוויר ב- 20% מהימים ומידת הזיהום היא 60 יחידות;

מפעל B מזהם את האוויר ב- 5% מהימים ומידת הזיהום היא 80 יחידות;

מפעל C מזהם את האוויר ב- 10% מהימים ומידת הזיהום היא 140 יחידות.

אם ביום מסוים מפעל B מזהם את האוויר, אז בוודאות גם מפעל A מזהם את האוויר באותו היום.

אם ביום מסוים מפעל B מזהם את האוויר, אז בוודאות מפעל C אינו מזהם את האוויר באותו היום.

אין תלות בין מפעלים A ו-C ואין תלות בין מידות הזיהום בימים שונים.

אם ביום מסוים יותר ממפעל אחד מזהם את האוויר, יחידות הזיהום מצטברות.

(7 נקי) א. מהי ההסתברות שביום מקרי תתקבל מדידת-זיהום נמוכה מ- 70 יחידות?

(7 נקי) ב. ב- 2.12.2006 נמדד זיהום של 140 יחידות בדיוק.
מהי ההסתברות שמפעל C אחראי לזיהום הזה?

(7 נקי) ג. ב- 8.12.2006 נמצא שהאוויר מזוהם (לפחות ע"י מפעל אחד מהשלושה).
מהי ההסתברות שבדיוק שני מפעלים (מהשלושה) אחראים לזיהום הזה?

שאלה 4 (28 נקודות)

המלכה נשאית של מחלת ההמופיליה בהסתברות 0.5 (אחרת, אינה נשאית ואינה חולה) ואילו המלך אינו לוקה במחלה ואינו נשא שלה *.

כמו כן, נניח שבכל לידה, נולד למלכה בן זכר בהסתברות 0.5.

כעת, אם המלכה נשאית: כל **נסיך** שיוולד לה יהיה חולה בהסתברות 0.5;
וכל **נסיכה** שתיוולד לא תחלה במחלה.

נניח גם, שבהינתן מצבה הרפואי של האם ('לא נשאית' או 'נשאית'), אין תלות בין לידות שונות שלה.

(7 נקי) א. מהי ההסתברות שבלידה מקרית, ייוולד למלכה נסיך (זכר) חולה?

(7 נקי) ב. נניח שלמלכה נולדו 3 ילדים (נסיכים או נסיכות).
מהי ההסתברות שבדיוק אחד מהם חולה?

(7 נקי) ג. אם המלכה ילדה 2 נסיכים (זכרים) שאינם לוקים במחלה, מהי ההסתברות שהיא נשאית?

(7 נקי) ד. אם המלכה ילדה 2 נסיכים (זכרים) שאינם לוקים במחלה, מהי ההסתברות שהילד השלישי שתלד יהיה חולה?

* **הערה:** גברים אינם יכולים להיות נשאים של מחלת ההמופיליה, מכיוון שמחלה נישאת על כרומוזום X בלבד. כלומר, כאשר לגבר יש כרומוזום X הנושא את המחלה, הוא בהכרח חולה.
(אישה יכולה להיות נשאית, כאשר יש לה כרומוזום X אחד בדיוק הנושא את המחלה).

שאלה 5 (9 נקודות)

יהיו A ו- B מאורעות במרחב מדגם S, ומתקיים: $P(B|A)=\frac{2}{5}$, $P(B|A^C)=\frac{1}{2}$ ו- $P(A|B)=\frac{4}{9}$.

חשב את $P(B)$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 4

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2012 א **מועד אחרון להגשה:** 18.12.2011

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (28 נקודות)

מפעל ממתקים מייצר סוכריות צבעוניות, הנארזות בשקיות המכילות 5 סוכריות כל אחת.
שליש מהסוכריות שנארזות בשקיות הן אדומות, ושמינית מהסוכריות הנארזות הן סגולות.
פיזור הצבעים בשקיות הוא אקראי, וכל שקית של 5 סוכריות עולה 5 ש"ח.

(7 נק') א. מהי ההסתברות שבשקית מקרית יהיו לפחות שתי סוכריות אדומות?

(7 נק') ב. שגית החליטה שבכל יום תקנה שקית סוכריות אחת. לאחר הקנייה, היא תפתח את השקית שקנתה, ואם לא יהיו בה לפחות שתי סוכריות אדומות, היא תמכור אותה לאחיה הקטן ב-3 ש"ח.
מהן התוחלת וסטיית-התקן של ההוצאה הכספית הכוללת של שגית, לאחר 8 ימים שבהם תנהג לפי אסטרטגיה זו?

(7 נק') ג. בוחרים באקראי שקיות של סוכריות, ופותחים אותן בזו אחר זו עד למציאת 3 שקיות (לאו דווקא ברצף) שיש בהן לפחות סוכרייה סגולה אחת.
1. מהי ההסתברות שיצטרכו לפתוח בדיוק 13 שקיות עד למציאת 3 שקיות כאלה?
2. מהן תוחלת ושונות מספר השקיות שיצטרכו לפתוח?

(7 נק') ד. שגית קנתה לה ולחברתה 20 שקיות של סוכריות – 15 בחנות A ו-5 בחנות B.
היא בחרה באקראי 7 מתוך 20 השקיות האלה ונתנה אותן לחברתה.
1. מהי ההסתברות שהחברה של שגית תקבל בדיוק 5 שקיות שנקנו בחנות A?
2. מהי שונות מספר השקיות מחנות A שהחברה של שגית תקבל?

שאלה 2 (14 נקודות)

(7 נק') א. יהי $X \sim Po(3)$.
חשב את התוחלת והשונות של 2^X.

(7 נק') ב. יהי $X \sim B(200, \frac{1}{9})$.
חשב את התוחלת של 2^X ואת התוחלת של 2^{X+3}.

שאלה 3 (14 נקודות)

כל אחד מ- $(4n+3)$ לקוחות בלתי-תלויים מחליט לקבל מחברה לייצור מזגנים הצעה לרכישת מזגן מפוצל בהסתברות 0.5 ולדחות אותה בהסתברות 0.5. לקוח שמקבל את ההצעה בוחר באקראי אחד מ- $2n$ סוכנים של החברה, ודרכו הוא רוכש את המזגן.

(8 נק׳) א. אם $n=10$, מהי ההסתברות שהסוכן הצעיר ביותר (מתוך $2n$ הסוכנים) יקבל הזמנות לרכישת מזגנים מ-2 לקוחות בדיוק?
השווה את ההסתברות שקיבלת להסתברות <u>המקורבת</u> שמתקבלת באמצעות קירוב פואסון.

(6 נק׳) ב. בהנחה ש- n גדול מאוד, חשב <u>קירוב</u> להסתברות שהסוכן הצעיר ביותר (מתוך $2n$ הסוכנים) יקבל הזמנות לרכישת מזגנים מ-2 לקוחות בדיוק.

שאלה 4 (35 נקודות)

בוחרים באקראי, בזה אחר זה ועם החזרה מספרים מתוך $\{-9,-8,\ldots,-1,0,1,\ldots,8,9\}$.

(7 נק׳) א. מהי ההסתברות שתדרשנה לפחות 12 בחירות עד שלראשונה ייבחר המספר 0?

(7 נק׳) ב. מהי שונות מספר הבחירות שתדרשנה עד לבחירה הראשונה של מספר שגדול מ-5?

בוחרים באקראי 10 מספרים (עם החזרה) מתוך הקבוצה הנתונה בתחילת השאלה.
נסמן ב- A_7 את המאורע שתוצאת המכפלה של 10 המספרים הנבחרים מתחלקת ב-7 ללא שארית.
חוזרים על בחירת 10 המספרים שוב ושוב, עד שהמאורע A_7 מתרחש 30 פעמים.
יהי W מספר הפעמים שהמאורע A_7^C מתרחש במהלך סדרת 30 החזרות על הניסוי.

(7 נק׳) ג. מהי ההסתברות שהמאורע A_7 יתרחש?

(7 נק׳) ד. מצא את פונקציית ההסתברות של W. מהי קבוצת הערכים האפשריים של W?

(7 נק׳) ה. מצא את התוחלת והשונות של W.

שאלה 5 (9 נקודות)

בקופסה 50 מטבעות: 38 תקינים ו-12 לא-תקינים שההסתברות לקבל H בכל אחד מהם היא ¼.
בוחרים באקראי אחד ממטבעות אלו ומטילים אותו עד לקבלת ה-H הראשון.
מהי ההסתברות שהמטבע הנבחר יוטל בדיוק 4 פעמים?

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 5

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2012 א **מועד אחרון להגשה:** 1.1.2012

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (8 נקודות)

יהי Z משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי.

חשב את ההסתברות $P\{-0.564 \le Z \le -0.073\}$;

ומצא את הערך של a המקיים את המשוואה $P\{Z \ge a\} = 0.325$.

השתמש בטבלת הקירובים של ההתפלגות הנורמלית סטנדרטית <u>ובשיטת האינטרפולציה הלינארית</u>.
פרט את דרך החישוב.

שאלה 2 (24 נקודות)

אורך של קיסם (בס"מ), שמיוצר במכונה מסוימת, הוא משתנה מקרי X, שהתפלגותו נורמלית עם תוחלת של 7 ס"מ וסטיית-תקן σ.

(6 נק') א. אם מתקיים $P\{6.736 \le X \le 7.264\} = 0.34$, מהו הערך של σ?

(6 נק') ב. מהו האורך של קיסם, שההסתברות שהמכונה תייצר קיסם קצר ממנו היא 0.57?

(6 נק') ג. אם ידוע שהאורך של קיסם גדול מ- 7.5 ס"מ, מהי ההסתברות שהוא קטן מ- 8.1 ס"מ?

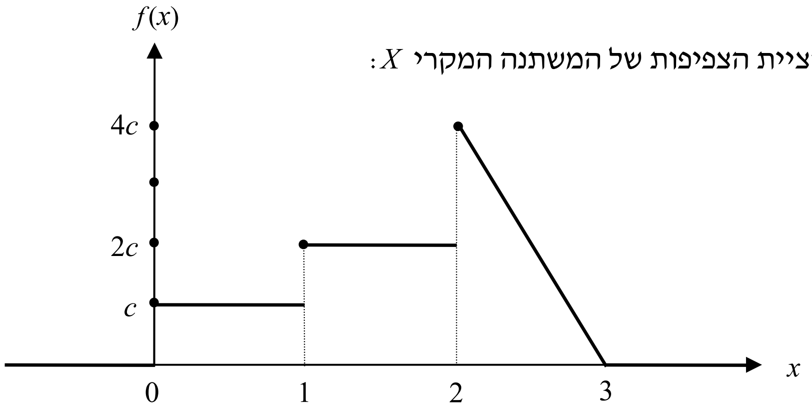
הקיסמים נארזים באופן אקראי בחבילות של 20 יחידות ואין תלות בין אורכי קיסמים שונים שהמכונה מייצרת או שנארזים בחבילות.

(6 נק') ד. מהי ההסתברות שהאורך של הקיסם הקצר ביותר בחבילה מקרית יהיה קטן מ- 6.36 ס"מ?

בכל סעיפי השאלה החישובים צריכים להיות <u>מדויקים</u>, עד כמה שאפשר.

שאלה 3 (30 נקודות)

באיור שלהלן מתוארת פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי X:



(6 נק')   א.   מצא את c.

(6 נק')   ב.   חשב את $P\{0.25 \le X \le 1.5\}$.

(6 נק')   ג.   רשום את פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי X.

(6 נק')   ד.   מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X ורשום אותה באופן מדויק.

(6 נק')   ה.   חשב את התוחלת של X.

שאלה 4 (8 נקודות)

נניח כי למשתנה המקרי X יש התפלגות אחידה על הקטע $(2,8)$.

נגדיר את המשתנה המקרי Y על-ידי $Y = 2X - 8$.

מצא את פונקציית הצפיפות של Y וזהה את התפלגותו.

הסבר את דרך הפתרון ורשום את פונקציית הצפיפות שקיבלת באופן מדויק.

שאלה 5 (30 נקודות)

נתונה פונקציית הצפיפות:
$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}e^{\lambda y} & , \quad y < 0 \\ \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda y} & , \quad y \ge 0 \end{cases}$$
עבור $\lambda > 0$.

(6 נק')   א.   חשב את התוחלת של Y, **באמצעות נוסחת התוחלת של משתנה מקרי מעריכי**.

כלומר, זכור כי השוויון $E[X] = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$, מתקיים עבור $X \sim Exp(\lambda)$.

(6 נק')   ב.   חשב את השונות של Y, **באמצעות נוסחאות התוחלת והשונות של משתנה מקרי מעריכי**.

רמז: השתמש בנוסחה ל- $E[X^2]$, עבור $X \sim Exp(\lambda)$, הנובעת מתוך נוסחאות התוחלת והשונות של X.

(6 נק')   ג.   מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.

(6 נק')   ד.   נגדיר $W = |Y|$.

זהה את ההתפלגות של W.

(6 נק')   ה.   השתמש בתוצאת הסעיף הקודם, כדי לחשב את $P\left\{W \le \frac{2}{\lambda^2} \middle| W \ge \frac{1}{\lambda^2}\right\}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 6

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2012 א **מועד אחרון להגשה:** 15.1.2012

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (21 נקודות)

מכונה לממכר ממתקים מוצבת על מדרכת רחוב. כל אדם העובר ליד המכונה קונה ממנה ממתק בהסתברות 0.08. מספר העוברים ליד המכונה במהלך שעה אחת בין השעות 8:00 ל- 17:00 הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 100 ומספר העוברים במהלך שעה אחת בין השעות 17:00 ל- 8:00 (למחרת) הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 20.

אין תלות בין מספר העוברים ליד המכונה בשעות שונות.

(7 נק') א. מהי ההסתברות שבשעות 16:00 עד 19:00 יימכרו בדיוק 12 ממתקים?

(7 נק') ב. אם בשעות 16:00 - 19:00 נמכרו 12 ממתקים, מהי ההסתברות שכולם נמכרו בשעה 16:00 - 17:00?

(7 נק') ג. אם בשעות 17:00 - 20:00 נמכרו 6 ממתקים, מהי ההסתברות שבכל שעה נמכרו בדיוק 2 ממתקים?

שאלה 2 (27 נקודות)

נניח כי X_1 ו- X_2 הם משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות אחידה בדידה על הערכים 1, 2 ו-3. (כלומר, כל אחד מהמשתנים הללו מקבל את הערכים 1, 2 ו-3 בהסתברויות שוות.)

(6 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות של $X_1 + X_2$.

ב. יהי $Z = \max\{X_1, X_2\}$.

(7 נק') 1. מצא את פונקציית ההסתברות של Z .

(7 נק') 2. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X_1 ו- Z.

(7 נק') ג. נניח כעת ש- X_1 , X_2 , ... , X_n הם משתנים מקריים בלתי-תלויים שלכל אחד מהם התפלגות אחידה בדידה על הערכים 1, 2 ו-3.

יהי $Z = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$.

מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Z ואת פונקציית ההסתברות של Z .

שאלה 3 (24 נקודות)

עורכים סדרה של 10 ניסויי ברנולי בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הסתברות p להצלחה $(0 < p < 1)$.
נסמן ב-Y את מספר ההצלחות שמתקבלות בסדרת 10 ניסויים אלו.

(6 נק׳) א. נניח שידוע כי $Y = 1$, ונסמן ב-X את מספר הכשלונות שמתקבלים לפני ההצלחה הראשונה (והיחידה, כמובן).
מצא את פונקציית ההסתברות של X בהינתן $Y = 1$.

ב. נניח שידוע כי $Y = 2$.
נסמן ב- X_1 את מספר הכשלונות שמתקבלים לפני ההצלחה הראשונה ;
ב- X_2 את מספר הכשלונות שמתקבלים בין שתי ההצלחות ;
וב- X_3 את מספר הכשלונות שמתקבלים אחרי ההצלחה השנייה.

(6 נק׳) 1. תחת ההנחה ש- $Y = 2$, חשב את ההסתברות שבחמשת הניסויים הראשונים (מתוך ה-10) מתקבלים כשלונות בלבד.

(6 נק׳) 2. מצא את פונקציית ההסתברות של X_1 בהינתן $Y = 2$.

(6 נק׳) 3. האם, בהינתן ש- $Y = 2$, המשתנים המקריים X_1 , X_2 ו- X_3 בלתי-תלויים זה בזה? נמק את תשובתך.

שאלה 4 (28 נקודות)

יותם משתתף בתחרות שנמשכת 4 ימים.
בכל יום של התחרות עליו להצליח לעבור מכשול מסוים (תמיד אותו מכשול). בכל יום יותם מנסה לעבור את המכשול שוב ושוב עד שהוא מצליח בפעם הראשונה. מספרו הסידורי של הניסיון שבו הוא מצליח לעבור את המכשול בפעם הראשונה נרשם כתוצאה היומית שלו. **ככל שמספר הנסיונות קטן יותר, התוצאה נחשבת טובה יותר**. כמו כן, נניח כי בכל אחד מנסיונותיו לעבור את המכשול הוא מצליח בהסתברות 0.3, וכל הנסיונות במשך התחרות בלתי-תלויים זה בזה.
נסמן ב- Y את התוצאה הטובה ביותר שיותם משיג בארבעת ימי התחרות.

(7 נק׳) א. חשב את $P\{Y \le i\}$ לכל $i = 1,2,...$.

(7 נק׳) ב. חשב את $P\{Y = 4\}$. העזר בתוצאת סעיף א.

(7 נק׳) ג. מהי ההסתברות, שבארבעת ימי התחרות, יותם ישיג פעמיים את התוצאה 1 ופעמיים את התוצאה 3?

(7 נק׳) ד. נניח שיותם משיג ארבע תוצאות שונות בארבעת ימי-התחרות.
מהי ההסתברות שהתוצאה הטובה ביותר התקבלה ביום התחרות השני והגרועה ביותר ביום השלישי?

מטלת מנחה (ממ"ן) 17

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2012 א **מועד אחרון להגשה:** 29.1.2012

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (35 נקודות)

נתונים 10 פתקים ממוספרים מ- 1 עד 10, שבעזרתם מבצעים את הניסוי בן 10 השלבים שלהלן:
בשלב n של הניסוי, לכל $n = 1,2,...,10$, שמים בקופסה את פתקים 1 עד n בלבד ובוחרים מתוכה, באקראי ועם החזרה, פתק אחר פתק, עד שלראשונה נבחר פתק n.

(7 נק') א. יהי S המספר הכולל של "בחירות-הפתקים" במהלך הניסוי (כלומר, בכל 10 השלבים יחדיו).
חשב את התוחלת ואת השונות של S.

ב. יהיו X = מספר "בחירות הפתקים" **בשלב 7** של הניסוי;
Y = מספר הפעמים שפתק מספר 4 נבחר במהלך **שלב 7** של הניסוי.

(7 נק') 1. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.
כלומר, רשום ביטוי ל- $P\{X=i\,,\,Y=j\}$ וציין באופן מדויק את הערכים של i ו- j, שעבורם הסתברות משותפת זו חיובית.

(7 נק') 2. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של Y בהינתן $X=i$, לכל $i=1,2,...$.
רשום אותה באופן מדויק **וזהה** את ההתפלגות שקיבלת.

(7 נק') 3. חשב את התוחלת והשונות המותנות של Y בהינתן $X=i$, לכל $i=1,2,...$.

(7 נק') 4. חשב את התוחלת והשונות של Y.

שאלה 2 (10 נקודות)

הגדר משתנה מקרי X, שמתאימה לו הפונקציה יוצרת המומנטים:

$$M_X(t) = \left(\frac{0.25e^t}{1-0.75e^t}\right)^4 e^{-2t} \qquad , \qquad t < -\ln 0.75$$

וחשב את $P\{X=8\}$.

שאלה 3 (14 נקודות)

5 ילדים מוזמנים להשתתף בחידון. במהלך החידון המנחה שואל את 5 הילדים שהגיעו N שאלות בזו אחר זו, כאשר N הוא משתנה מקרי עם תוחלת 15 ושונות 2. בכל פעם המנחה שואל שאלה אחת וכל אחד מהילדים עונה עליה. לכל ילד ולכל שאלה, ההסתברות שילד יענה נכון על שאלה היא 0.4, ואין תלות בין הילדים, בין השאלות ובין הילדים לשאלות.

נסמן ב-X את מספר השאלות שיש לפחות ילד אחד שענה עליהן נכון.

(7 נקי)   א.   חשב את $E[X]$.

(7 נקי)   ב.   חשב את $\mathrm{Var}(X)$.

שאלה 4 (21 נקודות)

בכל שבוע סבתא ברכה מחלקת 10 סוכריות לשלושת נכדיה – יוסי, נאוה וחמוטל.
חלוקת הסוכריות אקראית ואין תלות בין שבועות שונים.

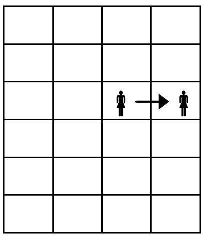
(7 נקי)   א.   מהי שונות מספר הסוכריות שמקבל יוסי במשך 5 שבועות?

(7 נקי)   ב.   המשקל של כל סוכרייה (בגרמים) הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת 10 ושונות 1.
אם נאוה מקבלת 5 סוכריות, מהי ההסתברות שהמשקל הכולל שלהן עולה על 47 גרם?
פרט את הנחותיך ואת הטענות שעליהן אתה מבסס את תשובתך.

(7 נקי)   ג.   נסמן ב-Y את המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הילדים שלא מקבלים אף סוכרייה בשבוע מסוים. חשב את השונות של Y, באמצעות הצגה של המשתנה המקרי Y <u>כסכום של אינדיקטורים</u>.

הערה: תוכל לאשר את תשובתך על-ידי חישוב ישיר של פונקציית ההסתברות של Y.

שאלה 5 (20 נקודות)



קבוצה של 24 אנשים – 14 נשים ו-10 גברים מסתדרת באופן אקראי במבנה מלבני בן 6 שורות ו-4 טורים.
נסמן ב-X את מספר הנשים שבמקום <u>הצמוד</u> להן <u>מצד ימין באותה השורה</u> עומדת אישה נוספת.

(4 נקי)   א.   1.   הגדר סדרה של **14** אינדיקטורים, שסכומם הוא X .

2.   הגדר סדרה אחרת של **18** אינדיקטורים, שסכומם הוא X .

(6 נקי)   ב.   חשב את התוחלת של X .

(10 נקי)   ג.   חשב את השונות של X .

מטלת מנחה (ממ"ן) 18

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 8

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2012 א **מועד אחרון להגשה:** 5.2.2012

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (15 נקודות)

לאורך החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר $\frac{1}{500}$.

אין תלות בין נורות שונות מאותו הסוג.

אדם קנה 100 נורות מסוג זה.

מצא קירוב להסתברות שממוצע אורך החיים של 100 הנורות שנקנו יהיה בין 450 שעות ל-520 שעות.

שאלה 2 (20 נקודות)

יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1,000.

(10 נקי) א. חשב קירוב נורמלי להסתברות ש-X יקבל את הערך 1,000.
מדוע אפשר לחשב קירוב נורמלי במקרה זה?

(10 נקי) ב. חשב חסם תחתון ל- $P\{|X-1{,}000|\le 40\}$, באמצעות אי-שוויון צ'בישב.

שאלה 3 (15 נקודות)

נתונים 5 משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, X_1, X_2, ..., X_5, שכל אחד מהם מקבל את הערכים 0, 3 ו- 6 בהסתברויות שוות (כלומר, הסתברות ⅓ לכל ערך).

נגדיר $Y=\sum_{i=1}^{5} X_i$.

חשב חסם עליון ל- $P\{Y>25\}$:

(5 נקי) א. בעזרת אי שוויון מרקוב;

(10 נקי) ב. בעזרת אי שוויון צ'בישב.

שאלה 4 (25 נקודות)

(10 נק׳)   א.   יהי X משתנה מקרי אי-שלילי שתוחלתו μ סופית, ויהי $t > 0$.

הוכח כי $P\{X \le \mu t\} \ge 1 - \frac{1}{t}$.

(15 נק׳)   ב.   יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n = 1,2,\ldots)$, משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.

הראה בעזרת אי-שוויון צ׳בישב שמתקיים: $P\left\{\overline{X}_n \le \frac{2}{p}\right\} \ge 1 - \frac{1-p}{n}$.

הערה: $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

שאלה 5 (25 נקודות)

(15 נק׳)   א.   נתון ארגז ובו 120 כדורים שעליהם רשומים מספרים.

לכל $i = 1,2,\ldots,15$, יש בארגז i כדורים שהמספר הרשום עליהם הוא i.

בוחרים כדורים מהארגז, בזה אחר זה **ועם החזרה**, כך שבכל בחירה יש לכל הכדורים סיכויים שווים להיבחר.

נניח שבוחרים (בשיטה המתוארת לעיל) בדיוק 100 כדורים.

יהי Y הסכום הכולל של 100 המספרים הרשומים על הכדורים שנבחרו.

חשב קירוב ל- $P\{1{,}000 \le Y \le 1{,}100\}$.

הערה: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(10 נק׳)   ב.   מעגלים 50 מספרים שנבחרו באקראי, כל אחד לשלם הקרוב לו ביותר, ומסכמים את 50 המספרים המעוגלים. אם לכל אחת משגיאות-העיגול יש התפלגות אחידה בקטע $(-0.5, 0.5)$, מהו קירוב להסתברות שההפרש <u>המוחלט</u> בין הסכום המתקבל לבין הסכום המדויק של 50 המספרים עולה על 3?

נספחים

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

דף הנוסחאות יצורף לכל בחינה.

גירסת דף הנוסחאות, המובאת בחוברת מטלות זו, נכונה לחודש אוקטובר 2010.

לקראת הבחינה מומלץ לבדוק באתר הקורס אם לא חלו שינויים בדף הנוסחאות שיצורף לבחינה.

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,...,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1}\cdot p \quad , \quad i=1,2,...$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i! \quad , \quad i=0,1,...$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,...$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,...,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,...,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a\le x\le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\ , t\neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \ -\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,...,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot...\cdot p_r^{n_r} \quad , \ \sum n_i=n\ , \sum p_i=1$			

נוסחת הבינום $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}$

$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^C)$

כלל ההכלה וההפרדה $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)$

הסתברות מותנית $P(A\,|\,B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

נוסחת הכפל $P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\,|\,A_1)P(A_3\,|\,A_1\cap A_2)\cdot...\cdot P(A_n\,|\,A_1\cap A_2\cap...\cap A_{n-1})$

נוסחת ההסתברות השלמה $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\,|\,B_i)P(B_i) \quad , \quad$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס $P(B_j\,|\,A)=\dfrac{P(A\,|\,B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\,|\,B_i)P(B_i)} \quad , \quad$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת $E[X]=\sum_x x\,p_X(x)=\int x f(x)dx$

תוחלת של פונקציה של מ"מ $E[g(X)]=\sum_x g(x)\,p_X(x)=\int g(x)f(x)dx$

שונות $\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית $E[aX+b] = aE[X]+b$

$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון $P\{X>s+t\,\big|\,X>t\}=P\{X>s\} \quad , \quad s,t\ge 0$

תוחלת מותנית $E[X\,|\,Y=y]=\sum_x x\,p_{X|Y}(x\,|\,y)=\int x f_{X|Y}(x\,|\,y)dx$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X|Y=y) = E[X^2|Y=y]-(E[X|Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] = E[E[X \mid Y]] = \sum_y E[X \mid Y = y]p_Y(y)$

(טענה מתרגיל ת26, עמוד 430) $E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X \mid Y]]$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X|Y)] + \mathrm{Var}(E[X|Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY]-E[X]E[Y]$

$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)\Big/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(at)$

כאשר X_i מ"מ ב"ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t)\cdot\ldots\cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X]$

(כאשר X_i מ"מ ב"ת ש"ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X) + (E[X])^2\mathrm{Var}(N)$

$M_Y(t) = E\left[\left(M_X(t)\right)^N\right]$

אי-שוויון מרקוב $P\{X \ge a\} \le E[X]/a \quad , \quad a>0$, X מ"מ אי-שלילי

אי-שוויון צ'בישב $P\{|X-\mu| \ge a\} \le \sigma^2/a^2 \quad , \quad a>0 \ , \ \mu,\sigma^2<\infty$

משפט הגבול המרכזי X_i מ"מ ב"ת וש"ה , $\mu,\sigma^2<\infty$, $P\left\{ (\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu)\Big/\sqrt{n\sigma^2} \le a \right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(a)$

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר p הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני.
- סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1<x<1$$

$$\int (ax+b)^n\,dx = \tfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \ , \quad n \ne -1 \quad ; \quad \int \tfrac{1}{ax+b}\,dx = \tfrac{1}{a}\ln(ax+b)$$

$$\int e^{ax}\,dx = \tfrac{1}{a}e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax}\,dx = \tfrac{1}{a\ln b}b^{ax} \quad ;$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

$$\log_n a = \log_m a/\log_m n \quad ; \quad \log_n(a^b) = b\cdot\log_n a \quad ; \quad \log_n(ab) = \log_n a + \log_n b$$

נספח ב: רשימת טענות להוכחה בבחינה

בכל בחינה עשויות להופיע טענות, מן הרשימה המובאת להלן, שאותן תִּדָרשו להוכיח במדויק.

ההוכחות של כל הטענות מן הרשימה מובאות באתר הקורס בקובץ נפרד.

משקל הטענות שתופענה בבחינה לא יעלה על 25 נקודות, ובדרך-כלל הוא בין 10 ל-13 נקודות.

הטענות עשויות להופיע ביותר מאשר שאלה אחת.

גירסת רשימת הטענות, המובאת בחוברת מטלות זו, נכונה לחודש פברואר 2011.

לקראת הבחינה מומלץ לבדוק באתר הקורס אם לא חלו שינויים ברשימת הטענות לבחינה.

טענות להוכחה בבחינה

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב - 20425

ההוכחות של הטענות, המובאות ברשימה שלהלן, נמצאות בקובץ נפרד באתר הקורס.

1. יהיו E ו-F מאורעות במרחב מדגם S. הוכח כי: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

2. יהיו F ו-G מאורעות זרים של ניסוי מקרי כלשהו. הוכח כי בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה, ההסתברות שהמאורע F יתרחש לפני המאורע G היא: $\dfrac{P(F)}{P(F)+P(G)}$

3. יהי X משתנה מקרי בדיד, שתוחלתו סופית, ויהיו a ו-b קבועים ממשיים. הוכח כי:

$$E[aX+b] = aE[X]+b \qquad ; \qquad \text{Var}(aX+b) = a^2\text{Var}(X)$$

4. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו-p $(0 < p < 1)$. הוכח כי:

$$E[X] = np \qquad ; \qquad \text{Var}(X) = np(1-p)$$

5. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \lambda \;\; ; \;\; \text{Var}(X) = \lambda$

6. יהי X משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים N, m ו-n. הוכח כי: $E[X] = n \cdot \frac{m}{N}$

7. יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \frac{1}{\lambda} \;\; ; \;\; \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

8. הוכח: אם מאורע מסוים מתרחש בהתאם לַהנחות של תהליך-פואסון עם קצב λ, אז משך הזמן החולף עד להתרחשות המופע הראשון של המאורע (החל מזמן 0) הוא משתנה מקרי מעריכי עם אותו הפרמטר λ.

9. יהיו X ו-Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו-λ_Y, בהתאמה. הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda_X + \lambda_Y$.

10. יהיו X ו-Y משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.
הוכח כי למשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים $(2, p)$.

11. יהיו X ו-Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו-λ_Y, בהתאמה. הוכח שלמשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X+Y=n$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו-$\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$.

12. יהי $Y = a + bX$, ונניח כי $\sigma_X^2 > 0$. הראה כי:

$$\rho(X,Y) = \begin{cases} +1 & , \quad b > 0 \\ -1 & , \quad b < 0 \end{cases}$$

13. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת ושונות סופיות, μ ו- σ^2, בהתאמה.

הוכח כי:
$$E[\overline{X}] = \mu \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2/n$$

14. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_r$ משתנים מקריים בעלי פונקציית התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $p_1, p_2, \ldots, p_r$.

הוכח: א. למשתנה המקרי X_i יש התפלגות שולית בינומית עם הפרמטרים n ו- p_i.

ב. למשתנה המקרי המותנה X_1 בהינתן $X_2 = j$, לכל $j = 0,1,\ldots,n$, יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n-j$ ו- $p_1/(1-p_2)$.

ג. $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$

15. יהיו X ו- Y משתנים מקריים בדידים בעלי תוחלות ושונויות סופיות.

הוכח:
$$E[X] = E[E[X \mid Y]]$$
$$\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$$

16. הוכח: אם N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים אי-שליליים, ואם $X_1, X_2, \ldots$ הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב-N, אז מתקיים:
$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1]$$
$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\,\mathrm{Var}(N)$$

הערה: כאשר $N = 0$, סכום המשתנים שווה גם הוא ל-0.

17. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי:
$$M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n \qquad , \qquad -\infty < t < \infty$$

18. יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי:
$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \qquad , \qquad t < -\ln(1-p)$$

19. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$.

הוכח כי:
$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \qquad , \qquad -\infty < t < \infty$$

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \le z\} = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt \qquad ; \qquad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \qquad ; \qquad Z \sim N(0,1)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326