שאלה 1 ✓

סטודנט בקורס "מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות" קנה סימולטור של מכונות טיורינג.

הסימולטור מקבל תיאור של מכונת טיורינג (קבוצת המצבים, אלפבית הקלט, אלפבית הסרט, פונקצית המעברים, המצב ההתחלתי, המצב המקבל והמצב הדוחה) וכן מחרוזות קלט למכונה. הסימולטור מבצע סימולציה של ריצת המכונה הנתונה על הקלטים הנתונים.

לאחר כמה זמן הסטודנט הרגיש שהתוצאות המתקבלות על-ידי הסימולטור שגויות.

בדיקת הסימולטור העלתה שמדי פעם, כאשר הראש הקורא-כותב נע ימינה (לפי פונקצית המעברים של המכונה), לא מתבצעת ההדפסה, והסמל בריבוע שממנו נע הראש הקורא-כותב לא משתנה. (כאשר מבצעים צעד מן הצורה $\delta(q, a) = (p, b, \mathrm{R})$ לא מתבצעת ההחלפה של a ב-b).

התופעה הזו לא קורה תמיד ואפילו לא ברוב המקרים, אך קורה מפעם לפעם.

הסטודנט פנה לשני מומחים בתחום החישוביות.

פרופסור פסימוס טוען שיש שפות שהן מזוהות-טיורינג, ואי אפשר יהיה לזהות אותן בעזרת הסימולטור המקולקל.

פרופסור אופטימוס טוען שכל שפה מזוהה-טיורינג אפשר יהיה לזהות גם בעזרת הסימולטור המקולקל. ייתכן שיידרשו שינויים במכונה המזהה, כך שהיא תתאים לתקלה של הסימולטור, אך עדיין אפשר לזהות בעזרת הסימולטור כל שפה מזוהה-טיורינג.

מי משני המומחים צודק? **הוכיחו** את תשובתכם.

שאלה 2 ✓

הוכיחו שהשפה $SHORTEST_{\mathrm{TM}}$ שלהלן **איננה מזוהה-טיורינג**.

$SHORTEST_{\mathrm{TM}} = \{<M, n> \mid$ היא מכונת טיורינג; אורך המילה הקצרה ביותר ש-M מקבלת הוא n $M\}$

שאלה 3 ✓

תזכורת: $\mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$ היא מחלקת השפות C כך שגם C וגם המשלימה של C ($\overline{C}$) שייכות ל-NP.

עוד תזכורת: ההפרש הסימטרי של שתי שפות A ו-B מוגדר כך (עמוד 171 בספר):

$$A \oplus B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

על השפות A ו-B נתון שהן שייכות למחלקה $\mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$.

האם **בהכרח** גם השפה $A \oplus B$ שייכת למחלקה הזו? **הוכיחו** את תשובתכם.

שאלה 4

תזכורת: $SUBSET\text{-}SUM = \{<S, t> \mid S = \{x_1, ..., x_k\} \text{ and for some } \{y_1, ..., y_n\} \subseteq S \text{ we have } \Sigma y_i = t\}$

נגדיר את השפה $PARTITION$:

$$PARTITION = \{<S> \mid S = \{x_1, ..., x_k\} \text{ and for some } \{y_1, ..., y_n\} \subseteq S \text{ we have } \Sigma y_i = (\Sigma x_j)/2\}$$

המילים בשפה $PARTITION$ הן קבוצות S של מספרים טבעיים, כך שיש ל-S תת-קבוצה שסכום המספרים שלה שווה למחצית סכום המספרים ב-S.

(למשל, $\{1,2,3\}$ שייכת ל-$PATRITION$; $\{1, 2, 3, 8\}$ לא שייכת ל-$PARTITION$).
מותרים מופעים כפולים של מספרים ב-S. (S היא רב-קבוצה – multiset).

הציגו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של $SUBSET\text{-}SUM$ ל-$PARTITION$ ($SUBSET\text{-}SUM \leq_P PARTITION$).
תארו את הרדוקציה, והוכיחו שהיא תקפה ושהיא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 5

תזכורת: $PATH = \{<G, s, t> \mid G \text{ is a directed graph that has a directed path from } s \text{ to } t\}$.

נגדיר את השפה $SHORTEST\text{-}PATH$:

$$SHORTEST\text{-}PATH = \{<G, s, t, k> \mid \text{the shortest path from } s \text{ to } t \text{ in } G \text{ has length exactly } k\}$$

מילה $<G, s, t, k>$ שייכת לשפה, אם $G = (V, E)$ הוא גרף מכוון, s ו-t הם צמתים ב-V, k הוא מספר טבעי, ואורך המסילה **הקצרה ביותר** מ-s ל-t הוא k. (אורך של מסילה = מספר הקשתות במסילה).

הוכיחו: $SHORTEST\text{-}PATH$ שייכת ל-NL.
בתשובתכם אתם רשאים להשתמש בשוויון NL=coNL.

שאלה 6

עיינו בהגדרה של השפה $PARTITION$ בשאלה 4.

הוכיחו: אם יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי להכרעת השייכות ל-$PARTITION$, אז אפשר לבנות **בעזרתו** אלגוריתם **בעל זמן ריצה פולינומיאלי** לבעיה הבאה (של **מציאת** התת-קבוצה):

הקלט: קבוצה S של מספרים טבעיים, $S = \{x_1, ...x_k\}$.

הפלט: תת-קבוצה של S, $\{y_1, ..., y_n\} \subseteq S$, כך ש- $\Sigma y_i = (\Sigma x_j)/2$, אם תת-קבוצה כזו קיימת. אם לא קיימת תת-קבוצה כזו, מוחזר "לא".

(האלגוריתם מקבל כקלט קבוצת מספרים S. אם אין ל-S תת-קבוצה שסכום המספרים שלה שווה למחצית סכום המספרים ב-S, האלגוריתם יחזיר "לא". אם יש ל-S תת-קבוצה כזו, האלגוריתם יחזיר את **רשימת האיברים של תת-קבוצה כזו**).

הדרכה: האלגוריתם יקרא מספר פולינומיאלי של פעמים לאלגוריתם ההכרעה של $PARTITION$, כל פעם עם קלט מעט שונה. (אלגוריתם ההכרעה עונה רק "כן" או "לא" על הקלט שלו).

- סוף -