פתרון ממ"ן 11

שאלה 1

לכל אחת מהטענות הבאות קבעו אם היא נכונה או לא.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $\{1,2\} \subseteq \{\{1\},\{2\}\}$ ב. $\{2\} \subseteq \{\{1\},2\}$ ג. $\{\{1\},\{2\}\} \in \{\{\{1\},\{2\}\}\}$ ד. $\varnothing \subseteq \{\varnothing\} \setminus \{\varnothing\}$

ה. $\varnothing \in \{\varnothing\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$ ו. $\{2\} \in \{\mathbf{N}\}$ ז. $|\{1,\mathbf{N}\}| = |\{\mathbf{N}\}|$ ח. $\{1,2\} \cap \mathcal{P}(\{1,2\}) \neq \varnothing$

תשובה

א. לא נכון כי למשל $1 \in \{1,2\}$ אבל $1 \notin \{\{1\},\{2\}\}$

ב. נכון, כי האיבר היחיד של $\{2\}$ הוא 2 ו- $2 \in \{\{1\},2\}$.

ג. נכון מפני לקבוצה $\{\{\{1\},\{2\}\}\}$ יש רק איבר אחד והוא $\{\{1\},\{2\}\}$.

ד. נכון כי חלקית לכל קבוצה.

ה. נכון מפני ש- $\varnothing \in \{\varnothing\}$ אבל $\varnothing \notin \{\{\varnothing\}\}$.

ו. לא נכון כי לקבוצה $\{\mathbf{N}\}$ יש רק איבר אחד והוא $\mathbf{N}$.

ז. לא נכון. לקבוצה $\{\mathbf{N}\}$ יש רק איבר אחד לכן $|\{\mathbf{N}\}| = 1$.

מצד שני $|\{1,\mathbf{N}\}| = 2$ כי בקבוצה הנתונה יש שני איברים: 1 ו- $\mathbf{N}$. לכן $|\{1,\mathbf{N}\}| = 2$

ח. לא נכון כי $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$, לכן $1,2 \notin \mathcal{P}(\{1,2\})$ ולכן $\{1,2\} \cap \mathcal{P}(\{1,2\}) = \varnothing$.

שאלה 2

יהיו A,B,C קבוצות. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $(A \cup B) \setminus (C \setminus B) = B \cup (A \setminus C)$.

ב. $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\varnothing\}$.

ג. אם A,B קבוצות סופיות אז $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A \cap B)| \cdot |\mathcal{P}(A \setminus B)|$

תשובה

א. נוכיח את השוויון על ידי שתי הכלות.

נניח קודם ש- $x \in (A \cup B) \setminus (C \setminus B)$. אז $x \in A \cup B$ וגם $x \notin C \setminus B$ לכן ($x \in A$ או $x \in B$) וגם ($x \notin C$ או $x \in B$). במצב זה נבחין בין שני מקרים:

1. $x \in B$ ואז ברור ש- $x \in B \cup (A \setminus C)$.
2. $x \notin B$ ואז בהכרח $x \in A$ וגם $x \notin C$ לכן $x \in A \setminus C$ ולכן $x \in B \cup (A \setminus C)$.

הוכחנו אם כן שלכל $x \in (A \cup B) \setminus (C \setminus B)$ מתקיים $x \in B \cup (A \setminus C)$ ולכן $(A \cup B) \setminus (C \setminus B) \subseteq B \cup (A \setminus C)$.

להפך, נניח ש- $x \in B \cup (A \setminus C)$. אז $x \in B$ או $x \in A \setminus C$ כלומר $x \in B$ או ($x \in A$ וגם $x \notin C$).

במקרה הראשון, אם $x \in B$ אז $x \in A \cup B$ וגם $x \notin C \setminus B$ לכן $x \in (A \cup B) \setminus (C \setminus B)$.

ובמקרה השני, אם $x \in A$ וגם $x \notin C$ אז $x \in A \cup B$ (כי $x \in A$) ו- $x \notin C \setminus B$ (כי $x \notin C$) לכן

$x \in (A\cup B)\setminus(C\setminus B)$. כך קיבלנו שלכל $x \in B\cup(A\setminus C)$ מתקיים $x \in (A\cup B)\setminus(C\setminus B)$ לכן $(A\cup B)\setminus(C\setminus B) \subseteq B\cup(A\setminus C)$ וביחד עם ההכלה הראשונה שהוכנו זה מבטיח שוויון בין שתי הקבוצות.

פתרון אחר. אפשר להניח ששלוש הקבוצות חלקיות לקבוצה אוניברסלית מתאימה (למשל לאיחוד שלהן) ולכן ניתן להיעזר במשלימים ובזהיות אחרות המוכרות מהספר:

$$(A\cup B)\setminus(C\setminus B) = (A\cup B)\cap(C\setminus B)^c = (A\cup B)\cap(C\cap B^c)^c =$$
$$=(A\cup B)\cap(C^c\cup B^{cc}) = (A\cup B)\cap(C^c\cup B) =$$
$$=(A\cap C^c)\cup B = B\cup(A\setminus C)$$

ב. נניח ש- $X \in \mathcal{P}(A\setminus B)$. אז $X \subseteq A\setminus B$. אז לכל $x \in X$ מתקיים $x \in A$ ומכאן ש- $X \subseteq A$.

אם $X=\varnothing$ אז ברור ש- $X \in (\mathcal{P}(A)\setminus\mathcal{P}(B))\cup\{\varnothing\}$.

אם $X \neq \varnothing$, קיים $t \in X$ לכן $t \in A\setminus B$ ולכן $t \in A$ וגם $t \notin B$. לסיכום, $X \subseteq A$ אבל $X \not\subseteq B$, מכאן ש- $X \in \mathcal{P}(A)$ ו- $X \notin \mathcal{P}(B)$. לכן $X \in (\mathcal{P}(A)\setminus\mathcal{P}(B))$ ולכן $X \in (\mathcal{P}(A)\setminus\mathcal{P}(B))\cup\{\varnothing\}$.

הוכחנו שלכל $X \in \mathcal{P}(A\setminus B)$ מתקיים $X \in (\mathcal{P}(A)\setminus\mathcal{P}(B))\cup\{\varnothing\}$

כלומר $\mathcal{P}(A\setminus B) \subseteq (\mathcal{P}(A)\setminus\mathcal{P}(B))\cup\{\varnothing\}$.

ג. כידוע $A=(A\cap B)\cup(A\setminus B)$ כאשר $A\cap B$ ו- $A\setminus B$ קבוצות סופיות זרות. לכן: $|A|=|A\cap B|+|A\setminus B|$. מכאן ש-

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^{|A\cap B|+|A\setminus B|} = 2^{|A\cap B|}\cdot 2^{|A\setminus B|} = |\mathcal{P}(A\cap B)|\cdot|\mathcal{P}(A\setminus B)|$$

שאלה 3

יהיו A,B,C קבוצות חלקיות לקבוצה אוניברסלית U. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $A\cup B^c \neq U$ ו- $B\cup A^c \neq U$ אז $|A\Delta B| \geq 2$.

ב. אם $A\Delta B \subseteq A\Delta C$ אז $A\cap C \subseteq B \subseteq A\cup C$.

ג. אם $A\Delta\{1,2\} = B\Delta\{2,3\}$ אז $A\Delta B = \{1,3\}$.

תשובה

א. אם $A\cup B^c \neq U$ אז $(A\cup B^c)^c \neq \varnothing$ (שכן אם $(A\cup B^c)^c = \varnothing$ אז $(A\cup B^c)^{cc} = \varnothing^c$ ואז לפי משפט 1.23 ג' וההערות שלפניו נקבל ש- $A\cup B^c = U$ בסתירה לנתון).

מאחר ש- $(A\cup B^c)^c = A^c\cap(B^c)^c = A^c\cap B = B\setminus A$ הרי מצאנו ש- $B\setminus A \neq \varnothing$ ולכן קיים איבר $x \in B\setminus A$ לכן $|B\setminus A| \geq 1$.

באופן דומה (על ידי החלפת תפקידים בין A ל- B) מהנתון $B\cup A^c \neq U$ נקבל שקיים איבר $y \in A\setminus B$ ולכן $|A\setminus B| \geq 1$. מאחר ש- $x \in B\setminus A$. מאחר שהקבוצות $A\setminus B$ ו- $B\setminus A$ הן זרות, נוכל לסכם ש- $|A\Delta B| = |(A\setminus B)\cup(B\setminus A)| = |A\setminus B| + |B\setminus A| \geq 2$.

ב. נוכיח קודם ש- $A \cap C \subseteq B$.

נניח ש- $x \in A \cap C$. אז $x \in A$ וגם $x \in C$. אם נניח בנוסף ש- $x \notin B$ נקבל ש- $x \in A \Delta B$. אבל אז מהנתון נקבל ש- $x \in A \Delta C$ וזה סותר את ההנחה ש- $x \in A \cap C$. מכאן שבהכרח $x \in B$.

ראינו אם כן שלכל $x \in A \cap C$ מתקיים $x \in B$ כלומר $A \cap C \subseteq B$.

נראה כעת ש- $B \subseteq A \cup C$.

נניח ש- $x \in B$. אם $x \in A$ אז ברור ש- $x \in A \cup C$. אם $x \notin A$ אז $x \in B \setminus A$ לכן $x \in A \Delta B$ ואז מהנתון נקבל ש- $x \in A \Delta C$ לכן בהכרח $x \in C$ (כי $x \notin A$) ולכן $x \in A \cup C$.

הוכחנו אם כן שלכל $x \in B$ מתקיים $x \in A \cup C$ כלומר $B \subseteq A \cup C$.

ג. נשים לב שלכל שלוש קבוצות X, Y, Z , מהשוויון $X \Delta Y = Z$ נובע ש- $X = Z \Delta Y$.

הנה ההסבר (מבוסס על התכונות המוצגות בספר בשאלות 31 ו- 32):

אם $X \Delta Y = Z$ אז $(X \Delta Y) \Delta Y = Z \Delta Y$ לכן $X \Delta (Y \Delta Y) = Z \Delta Y$.

מאחר ש- $Y \Delta Y = \varnothing$ ו- $X \Delta \varnothing = X$ נקבל ש- $X = Z \Delta Y$.

לפיכך אם $A \Delta \{1,2\} = B \Delta \{2,3\}$ אז $A = (B \Delta \{2,3\}) \Delta \{1,2\}$ לכן $A = B \Delta (\{2,3\} \Delta \{1,2\})$.

אבל $\{2,3\} \Delta \{1,2\} = \{1,3\}$ לכן $A = B \Delta \{1,3\}$. מכאן ש- $\{1,3\} \Delta B = A$ וכפי שהראנו קודם, מתוך השוויון הזה נובע ש- $\{1,3\} = A \Delta B$.

שאלה 4

בשאלה זו, קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbf{N}$ היא הקבוצה האוניברסלית.

לכל $k \in \mathbf{N}$ נסמן $\{2^{nk} \mid n \in \mathbf{N}\} = \left\{2^0, 2^k, 2^{2k}, 2^{3k}, \ldots\right\} = A_k$.

בכל אחד מן הסעיפים הבאים, מיצאו מספר טבעי k כך שהקבוצה באותו סעיף תהיה שווה ל- A_k .
נמקו טענותיכם.

א. $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ ב. $\bigcap_{k=2}^{5} A_k$ ג. $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ ד. $\{ \frac{x}{8} \mid x \in (A_1 \setminus A_2) \cap A_3 \}$

תשובה

א. נראה ש- $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = A_1$. מהגדרת האיחוד ברור ש- $A_1 \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$.

להפך, נניח ש- $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$. אז קיים $k \in \mathbf{N}$ כך ש- $x \in A_k$ ומהגדרת A_k נקבל שקיים $n \in \mathbf{N}$ כך ש- $x = 2^{nk}$. מאחר ש- nk מספר טבעי ו- A_1 היא קבוצת כל החזקות עם מעריך טבעי של 2 נובע ש- $x \in A_1$. מכאן שלכל $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ מתקיים $x \in A_1$. לפיכך $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \subseteq A_1$.

משתי ההכלות שהוכחנו מקבלים ש- $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = A_1$.

ב. נראה ש- $\bigcap_{k=2}^{5} A_k = A_{60}$ (60 הוא המספר הקטן ביותר המתחלק בכל המספרים 2,3,4,5).

נניח $x \in A_{60}$. אז קיים $k \in \mathbf{N}$ כך ש- $x = 2^{60k}$.

לכן נוכל לרשום ש- $x = 2^{2(30k)} = 2^{3(20k)} = 2^{4(15k)} = 2^{5(12k)}$.

מכאן ש- $x \in A_2$, $x \in A_3$, $x \in A_4$. $x \in A_5$ כלומר $x \in \bigcap_{k=2}^{5} A_k$. מכאן ש- $A_{60} \subseteq \bigcap_{k=2}^{5} A_k$.

להפך נניח ש- $x \in \bigcap_{k=2}^{5} A_k$. אז $x \in A_2$, $x \in A_3$, $x \in A_4$, $x \in A_5$ לכן קיים $m \in \mathbf{N}$ כך ש-

$x = 2^m$ כאשר m מתחלק בכל אחד מהמספרים 2,3,4,5. אבל אז בהכרח m מתחלק ב- 60 ,

לכן קיים $k \in \mathbf{N}$ כך ש- $m = 60k$ ולכן $x = 2^{60k}$, כלומר $x \in A_{60}$. מכאן ש- $\bigcap_{k=2}^{5} A_k \subseteq A_{60}$.

משתי ההכלות שהוכחנו מקבלים ש- $\bigcap_{k=2}^{5} A_k = A_{60}$.

ג. נוכיח ש- $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_0$.

מצד אחד, $A_0 = \{1\}$ ו- $1 \in A_k$ עבור כל $k \in \mathbf{N}$ לכן $1 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ ולכן $A_0 \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

מצד שני, אם $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ אז $x \in A_k$ לכל $k \in \mathbf{N}$. כלומר קיים $m \in \mathbf{N}$ כך ש- $x = 2^m$

כאשר m מתחלק בכל מספר טבעי. המספר הטבעי היחיד שהוא כפולה של כל טבעי הוא 0 .

(כי $0 = 0 \cdot k$ לכל $k \in \mathbf{N}$). מכאן ש- $x = 2^0 = 1$, לכן $x \in A_0$ ולכן $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq A_0$. משתי

ההכלות שהוכחנו נובע ש- $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_0$.

ד. נניח ש- $y \in \{ \frac{x}{8} \mid x \in (A_1 \setminus A_2) \cap A_3\}$. אז קיים $x \in (A_1 \setminus A_2) \cap A_3$ כך ש- $y = \frac{x}{8}$.

נשים לב שאם $x \in A_1 \setminus A_2$ אז $x = 2^m$ כאשר m הוא מספר טבעי אי-זוגי. לכן אם

$y \in (A_1 \setminus A_2) \cap A_3$ אז $y = 2^m$ כאשר m הוא מספר טבעי אי-זוגי המתחלק ב- 3 כלומר

$m = 3(2k+1)$ עבור איזשהו מספר טבעי k . לכן $x = 2^{6k+3} = 8 \cdot 2^{6k}$ ולכן $y = \frac{x}{8} = 2^{6k}$

ומכאן ש- $y \in A_6$. הוכחנו אם כן ש- $\{ \frac{x}{8} \mid x \in (A_1 \setminus A_2) \cap A_3\} \subseteq A_6$.

מצד שני, אם $y \in A_6$ אז $y = 2^{6k}$ עבור איזשהו $k \in \mathbf{N}$. לכן $8 \cdot y = 8 \cdot 2^{6k} = 2^{3(2k+1)}$.

נסמן $x = 8y$. בדומה שראינו קודם $2^{3(2k+1)} \in (A_1 \setminus A_2) \cap A_3$ (כי זו חזקה של 2 עם

מעריך אי-זוגי שמתחלק ב- 3). מכאן ש- $x \in (A_1 \setminus A_2) \cap A_3$ ומכאן ש- $y = \frac{x}{8}$ כאשר

$x \in (A_1 \setminus A_2) \cap A_3\}$. במילים אחרות $y \in \{ \frac{x}{8} \mid x \in (A_1 \setminus A_2) \cap A_3\}$.

ובכן מצאנו ש- $A_6 \subseteq \{ \frac{x}{8} \mid x \in (A_1 \setminus A_2) \cap A_3\}$.

משתי ההכלות שהוכחנו נובע ש- $\{ \frac{x}{8} \mid x \in (A_1 \setminus A_2) \cap A_3\} = A_6$.