תשובה 1

א. מהגדרת B_n, כל סדרה השייכת ל- B_n מתחילה ב- 0 (ברור) ומסתיימת ב- 1 (אילו היתה מסתיימת ב- 0, אז התת-סדרה הפותחת באורך $2n-1$ היתה מכילה יותר הופעות של 1 מאשר של 0).

בהנתן סדרה s ב- B_{n-1}, נתבונן בסדרה $t = 0s1$, המתקבלת ע"י הוספת 0 בתחילת הסדרה ו- 1 בסופה. כל רישא-ממש של t (רישא הוא כינוי מקובל לתת-סדרה פותחת; רישא-ממש היא רישא שאינה שווה לסדרה כולה) היא מהצורה $0r$ כאשר r היא רישא של s. מכיון ש- $s \in B_{n-1}$, מספר ההופעות של 0 ב- r גדול או שווה למספר ההופעות של 1. לפיכך מספר ההופעות של 0 בסדרה $0r$ גדול-ממש ממספר ההופעות של 1. במלים אחרות:

(*) מספר ההופעות של 0 ברישא-ממש של t גדול-ממש ממספר ההופעות של 1.
בנוסף מובן כי:

(**) בסדרה $0s1$ כולה יש n הופעות של 0 ו- n הופעות של 1.

שתי טענות אלו יחד אומרות כי הסדרה $0s1$ שייכת ל- B_n וכי $\rho(0s1) = n$.

נראה כעת כי כל סדרה $t \in B_n$ המקיימת $\rho(t) = n$ היא מהצורה $t = 0s1$, כאשר $s \in B_{n-1}$:
ראשית, כפי שאמרנו בפתח התשובה, כל אברי B_n מתחילים ב- 0 ומסתיימים ב- 1, כלומר ניתן לכתוב $t = 0s1$; עלינו להראות כי מהתנאי $\rho(t) = n$ נובע $s \in B_{n-1}$. נניח בשלילה כי $s \notin B_{n-1}$. אז יש רישא r של s, שמספר ההופעות של 0 בה קטן ממספר ההופעות של 1. לפיכך מספר ההופעות של 0 בסדרה $0r$, שהיא רישא-ממש של t, קטן או שווה למספר ההופעות של 1. אם קטן - זה סותר את היות $t \in B_n$. ואם שווה - זה סותר את התנאי $\rho(t) = n$. בכל מקרה הגענו לסתירה, ולכן $s \in B_{n-1}$.

קיבלנו אפוא פונקציה חח"ע של B_{n-1} על קבוצת הסדרות s ב- B_n המקיימות $\rho(s) = n$ (מהי הפונקציה ומדוע היא חח"ע ועל?). לפיכך שתי הקבוצות בעלות אותה עוצמה.

ב. לצורך ההסבר, נסמן ב- D_m את קבוצת אברי B_m שהם בעלי $\rho = m$. נשים לב כי אם סדרה $t \in B_n$ מקיימת $\rho(t) = m$, אז הרישא באורך $2m$ של t הוא איבר ב- D_m, והחלק של t המתקבל ע"י מחיקת רישא זו הוא איבר של B_{n-m}. ולהיפך, בהינתן איבר של D_m ואיבר של B_{n-m}, שרשורם (כתיבתם זה אחר זה) נותן סדרה השייכת ל- B_n, שאף היא בעלת $\rho = m$

. מובן שכל בחירה של איבר של D_m ואיבר של B_{n-m} נותנת סדרה שונה ב- B_n. לפיכך, אם נמיין את כל אברי B_n לפי ערכי ρ שלהם, ונסכם את גדלי הקבוצות המתקבלות, נקבל:

$|B_n| = \sum_{m=1}^{n} (|D_m||B_{n-m}|)$. אך בסעיף א ראינו $|D_m| = C_{m-1}$. נציב, וקיבלנו את המבוקש.

תשובה 2

א. מהגדרת פונקציה יוצרת:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + 3x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$$

$$= 2x^3 + \sum_{i=0}^{\infty} x^i = 2x^3 + \frac{1}{1-x}$$

ב. מנוסחת הבינום, $(1+x)^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} x^h$.

אך בעזרת התאפסות המקדמים הבינומיים במקרים חריגים ניתן להמשיך את הסכום כך:

$(1+x)^n = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{n}{h} x^h$. מהגדרת פונקציה יוצרת, זהו בדיוק המבוקש בשאלה.

ג. נתבונן כללית בפעולה של כפל פונקציות יוצרות, נושא שמן הראוי להכירו: תהיינה $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ פונקציות יוצרות. בראש עמוד *122* בספר הלימוד מופיע פיתוח המכפלה $f(x)g(x)$. כפי שרואים שם, המקדם של x^k בפיתוח זה הוא $\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

כעת לתרגיל: נשווה בין המקדמים של x^n המופיעים בפיתוח כל אחד מאגפי הזהות $(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n$:

לפי סעיף ב, המקדם של x^n באגף שמאל הוא $\binom{2n}{n}$.

לפי האמור על מכפלה (ושוב לפי סעיף ב), המקדם של x^n באגף ימין הוא $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$.

מכיוון ש- $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$, קיבלנו את המבוקש. שימו לב שבחרנו לחשב את המקדם של x^n,

עבורו קיבלנו זהות פשוטה, אך יכולנו באותה מידה לחשב את המקדם של x^k כלשהו, ולקבל זהות בינומית כללית יותר.

תשובה 3

א. עבור הצגה של r כסכום באופן המבוקש, נסמן ב- n_1 את מספר הפעמים בהם מופיע המחובר *1*, ב- n_2 את מספר הפעמים בהם מופיע *2*, וב- n_3 את מספר ההופעות של *3* ($0 \geq n_{1,2,3}$) .

ערכי $n_{1,2,3}$ קובעים באופן יחיד את ההצגה.

מספר ההצגות הוא אפוא כמספר הפתרונות בטבעיים של $n_1 + 2n_2 + 3n_3 = r$ ($n_{1,2,3} \geq 0$).

הפונקציה היוצרת לבעיה זו תוארה <u>במהלך</u> פתרון שאלה *7.12* בעמוד *130* בספר:

$$f(x) = (1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x^3+x^6+\dots)$$

ב. בעזרת הרמז נקבל כי סעיף זה דומה לגמרי לשאלה 7.12 , בהבדל היחיד כי המשתנה הקטן ביותר צריך אצלנו להיות גדול או שווה *1*, בעוד שבשאלה 7.12 הוא גדול או שווה *0*.

מהסתכלות בבניה שבשאלה *7.12* אנו רואים כי משתנה זה (t_1 שם), תורם לפונקציה היוצרת את הגורם $(1+x^3+x^6+\dots)$. כדי להביא בחשבון את התנאי $t_1 \geq 1$ (כלומר t_1 חייב להופיע בסכום, משמע החזקה המתאימה של x חיובית), יש להשמיט את המחובר *1* מהגורם המתאים בפונקציה היוצרת, כלומר התרומה אצלנו היא $(x^3+x^6+\dots)$. שני הגורמים האחרים בתשובה לשאלה *7.12* אינם משתנים. נסמן פונקציה זו $g(x)$:

$$g(x) = (1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)(x^3+x^6+x^9+\dots)$$

ג. נשים לב כי ע"י הוצאת גורם, $g(x) = x^3 f(x)$. מכאן כי מספר ההצגות של ***r*** בתנאי סעיף א שווה למספר ההצגות של ***r+3*** בתנאי סעיף ב ! כדאי לבדוק ערכים קטנים ולהשתכנע שזה נכון.

עוד כדאי לשים לב, שאם היינו דורשים בסעיף א שהמחובר הגדול ביותר שווה ל- *3* (במקום שווה לכל היותר *3*), היה מתקבל שוויון בין תוצאות שני הסעיפים: החיוב של *3* להופיע מסלק מ- f את המחובר *1* שבגורם $(1+x^3+x^6+\ldots)$, ומתקבלת פונקציה זהה ל- g.

תשובה 4

א. ראשית ראוי לזכור כי טענה זו נובעת מיד מהגדרת אי-שוויון בין עוצמות בפרק 4 בכרך "תורת הקבוצות", הגדרה התקֵפה כמובן גם לקבוצות סופיות. כאן אנו רוצים לחזור ולקבל את הטענה במקרה הסופי, מתוך עקרון שובך היונים.

תהי f פונקציה של קבוצה סופית A אל קבוצה סופית B. f מגדירה רלצית שקילות על A: נאמר ש- $a_1 \sim a_2$ אם $f(a_1) = f(a_2)$. קל לראות שזו רלצית שקילות: ר' הנושא העתק טבעי, בכרך "תורת הקבוצות" עמ' 84. לפי הגדרת ~ הנ"ל, מספר מחלקות השקילות הוא $|B|$. כעת משובך היונים, כפי שמופיע בעמ' 104 בכרך "קומבינטוריקה", קיימת מחלקה שמספר אבריה גדול או שווה $|A|/|B|$. מכאן, אם $|A| > |B|$, ומכיוון שמספר האיברים במחלקה הוא שלם, נובע שיש מחלקה בת יותר מאיבר אחד, משמע f אינה חח"ע.

ב. נתבונן בפונקציה f הנתונה. מכיון ש- m הוא האבר הגדול ביותר ב- A, הרי $m - k \geq 0$.

בנוסף, עבור $k > m/2$, $m/2 > m - k$.

מכאן כי תמונת f מוכלת בקבוצה $B = \{i \in \mathbf{N} \mid 0 \leq i \leq m/2\}$.

נראה אפוא את f כפונקציה של $A - \{m\}$ לקבוצה B הנ"ל.

כעת, $|A - \{m\}| = n + 1$ בעוד ש- $|B| \leq n$.

מכאן, לפי שובך היונים, קיימים $k_1, k_2 \in A - \{m\}$, $k_1 \neq k_2$, $f(k_1) = f(k_2)$.

אבל מהגדרת f מובן כי במקרה כזה $k_2 = m - k_1$. מכאן המבוקש.

אִתַּי הראבן
מאי 1999

בעמודים הבאים - שאלות מ- 3 מבחנים שנערכו בשנים האחרונות.