לשימוש הבודק

שאלה 1

4:09
4:44

א) J יחס מעל N

$J(x,y)\in J$ אמ"ם קיים $n\in N$ כך ש $x-y=3n$

R

אינו יחס שקילות

J אינו סימטרי: נתבונן ב $(3,0)$. $3-0=3\cdot 1$, $1\in N$, לכן $(3,0)\in J$

אבל לא קיים $n\in N$ כך ש $0-3=3n$ כי $\boxed{-3=3n \\ n=-1}$ $-1\notin N$

לכן $(0,3)\notin J$! J אינו סימטרית.

3 6 9

ב) K מעל Z $(x,y)\in K$ אמ"ם קיים $n\in Z$ כך ש $x-y=3n$

$\frac{x-y}{3}=n$

טרנזיטיביות: $\forall a,b,c\in Z((a,b)\wedge(b,c)\to(a,c))$

$\frac{9-6}{3}=1$

נניח ש $a,b,c\in Z$ ו $(a,b),(b,c)\in K$ לכן $a-b=3x$, $b-c=3y$

רואים שההפרש בין a,b ובין b,c מתחלקים ב-3.

$\frac{a-b}{3}=x$ $\frac{b-c}{3}=y$

$a=3x+b$ $c=-3y+b$

10-7=3

7-10=-3

$a-c=3x+\cancel{b}+(+3y-\cancel{b})=3x+3y=3(x+y)$

לכן K טרנזיטיבית.

$a=3n-b$

$b-(3n-b)=-3n$

רפלקסיביות: לכל $x\in Z$ $x-x=3\cdot 0$, $0\in Z$ לכן K רפלקסיבית.

סימטריות: נוכיח ש לכל $a,b\in Z$ $(a,b)\in K$ אמ"ם $(b,a)\in K$

נניח $(a,b)\in K \Leftrightarrow$ קיים $n\in Z$ כך ש $a-b=3n \Leftrightarrow b-a=3\cdot(-n) \Leftrightarrow (b,a)\in K$

ג) M אינו יחס שקילות. נתבונן ב $(1,1)$, לא קיים $n\in Z$ כך ש $1+1=3n$

כי $2=3n$, $n=\frac{2}{3}$ ו $\frac{2}{3}\notin Z$.

ד) L אינו יחס שקילות. נתבונן בזוגות $(1,1)$ ו $(2,2)$.

$(1,1),(2,2)\in L$ לכן $1-1=3\cdot 0$, $2-2=3\cdot 0$

אבל לא קיים $n\in Z$ כך ש $1-2=3n$, $1-2=5n$, $2-1=3n$, $2-1=5n$ כי $-\frac{1}{3}\notin Z$, $-\frac{1}{5}\notin Z$, $\frac{1}{3}\notin Z$, $\frac{1}{5}\notin Z$

לכן L אינו טרנזיטיבי

ולכן אינו יחס שקילות

כדי להראות שאינו טרנזיטיבי צריך שלוש דוגמאות כמו שרשמת: $(a,b),(b,c)\in L$ אבל $(a,c)\notin L$

דוגמה נגדית מוטעית

0

לשימוש הבודק

$2+2=4$ $\quad$ 4
$2+3=5$ $\quad$ 6
$3+3=6$ $\quad$ 9

1,1

$|A| \times |B| \geq 4 = n$ $\qquad$ $a_1 = (a_1, b_{n-1})$

4:45
4:59

~~שאלה 2~~

$\longrightarrow |B|$

$|A| \downarrow$

$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ $A = \{a_1, a_2, a_3\}$

$a_1b_1 \quad a_1b_2 \quad a_1b_3 \quad a_1b_4$
$a_2b_1 \quad a_2b_2 \quad a_2b_3 \quad a_2b_4$
$a_3b_1 \quad a_3b_2 \quad a_3b_3 \quad a_3b_4$

לשימוש הבודק

שאלה 3

4:59
5:15

הגאי נשוים בה מרה

א ב ג ד
0 0 0 00

$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{}\ \_\ \_$
1 2 3 4 5 6 7

א) $\frac{7!}{4!} = 7\cdot6\cdot5 = 210$ V (19)

ב) $5\cdot5\cdot5\cdot D(5,4) = 5^3\cdot\binom{5+4-1}{4} = 5^3\cdot\binom{8}{4} = 5^3\cdot\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2}$

$5^3\cdot70 = 8750$ V

הפנוע על חמה

ג) $5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2 = 15000$ (4)

ד) $D(5,4)\cdot5\cdot4\cdot3 = \binom{8}{4}\cdot5\cdot4\cdot3 = 70\cdot60 = 4200$ V

הוזנתי את נקודות כי זומה הנואי שאין טוו שם נייזו מוכו.

לשימוש הבודק

שאלה 4

5:15
6:15

סט, סס

(א)

7

$\binom{3}{2}=3$

$a_0 = \cancel{\phi}\ 1 \quad = 1$ ✓

$a_1 = 0, 1, 2 \quad = 3$ ✓ $\quad 2(a_{n-1}-n)$

$a_2 = 10, 20, 11, 21, 02, 12, 22 \quad = 7$ ✓

$a_3 = 5+5+7 = 10+7 = 17 \quad (2\cdot7)+3$

$(2\cdot5)=10 \quad 2\cdot(7-2)=10$

$n \geq 1 \{ \quad a_n = \quad + a_{n-1}$

$a_4 = 12+12+17 = 41 = 34+7$

$a_1 = 2(1-1)+3$

$2\cdot(17-5)=24$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_0=1 \quad a_1=3 \quad n\geq 2 \\ a_n = \quad 2\cdot a_{n-1} + a_{n-2} \end{array}}$$ ✓

$a_4 \quad a_3 \quad +a_3$

מנומק!

(ב)

15

$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$a_n = 2\cdot a_{n-1} + a_{n-2}$

$(n-1)+(n+2)$

$\alpha^n = 2\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} \quad / \alpha^{n-2}$

$\dfrac{2\pm\sqrt{4+4}}{2} = \dfrac{2\pm\sqrt{8}}{2} = \dfrac{x\pm x\sqrt{2}}{x}$

$\alpha^2 = 2\alpha + 1$

$\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$

$1\pm\sqrt{2}$

$\alpha_1, \alpha_2 = 1\pm\sqrt{2}$ ✓

$a_n = A\cdot(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$ ✓

$n=0 \quad A\cdot 1 + B\cdot 1 = 1$

$n=1 \quad A\cdot(1+\sqrt{2}) + B\cdot(1-\sqrt{2}) = 3$

$B = 1 - A$

$A\cdot(1+\sqrt{2}) + (1-A)(1-\sqrt{2}) = 3$

$\cancel{A} + A\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} - \cancel{A} + A\sqrt{2} = 3$

$2A\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 3$

$\quad -1 \ +\sqrt{2} \quad -1 \ +\sqrt{2}$

$2A\sqrt{2} = 2+\sqrt{2}$

$A = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

$B = 1 - \dfrac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

$a_n = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\cdot(1+\sqrt{2})^n + \left(1-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)(1-\sqrt{2})^n$

✓ ✓

לשימוש הבודק

נסמן $K=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

שאלה 5

17.5 6:15 16.5

$|A\cap B|=1$ $|V|=\binom{7}{3}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2}=35$ $G=(V,E)$

(א) נוכיח ש G קשיר. כלומר שבין כל שני צמתים קיים מסלול. $|A\cap B|=1$ סימון. גם $|A\cap B|=3$ סימון.
נניח ש $|A\cap B|=0$ לכן אין קשת בין A ל B. נבחר $a\in A$ ו $b\in B$. $A\cap B=\emptyset$ לכן
$|A\cup B|=6$ וגם $K-A\cup B$ קיים בדיוק איבר אחד, נקרא לו c. נגדיר צומת $C=\{a,b,c\}$
קל להראות ש $|A\cap C|=1$ וגם $|B\cap C|=1$ לכן קיים מסלול $A-C-B$.
נניח ש $|A\cap B|=2$, כלומר קיים a כך ש $a\in A\wedge a\notin B$ וקיים b כך ש $b\in B\wedge b\notin A$.
קל להראות ש $|A\cup B|=4$ לכן קיים $c\in K$ כך ש $c\notin A\wedge c\notin B$. נגדיר צומת ש
$C=\{a,b,c\}$. $|A\cap C|=1$; $|B\cap C|=1$ לכן קיים מסלול $A-C-B$.
לכן הגרף קשיר.

8

(ב) אם $|A\cap B|=1$ קיים קשת בין A ל B. אם נבחר מספר a להיות את האיבר המשותף
אז קיים $\binom{6}{2}$ דרכים להשלים לקבוצה של שלוש איברים. לכן קיים $\binom{6}{2}=\frac{6\cdot5}{2}=15$
צמתים כך ש a משותף ביניהם. לכן דרגת כל צומת היא 14. handshaking lemma

0

(ג) $|K|=7$ לכן $2|E|=7\cdot14=49$ (סכום דרגות) $2|E|=\sum_{v\in V}\deg(v)$

0

(ד) לפי משפט דירק אם $|V|\geq3$ ודרגת כל צומת לפחות $\frac{n}{2}$
נחלק את הגרף ל 7 תת גרפים באופן הבא: תת גרף מוגדר
על ידי איבר a שמשותף לכל הצמתים.
כל תת גרף כזה הוא בעצם גרף מלא על 15 צמתים ולפי משפט אור
קיים בו מעגל המילטון. עכשיו נבחר ~~קשת~~ לחבר בין כל אחד
מ 7 תתי גרפים האלה. הצמתים בקצה של כל גשר כזה יהיו התחלה וסיום
של מסלול.

?

0