3 0 5 4 7 8 6 3 8

מספר התלמיד הנבחן
רשום את כל תשע הספרות

ש N101122580

ת.ז: 305478638 מספר סידורי: 18

האוניברסיטה הפתוחה

כ"ג בשבט תשע"ח

מס' שאלון - 473

8

בפברואר 2018

סמסטר 2018א

מס' מועד 83

20417 / 4

שאלון בחינת גמר

20417 - אלגוריתמים

משך בחינה: 3 שעות

<u>בשאלון זה 5 עמודים</u>

מבנה הבחינה:

בבחינה חמש שאלות.

מתוכן יש לענות על ארבע שאלות.

25 נקודות לכל שאלה.

לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).

על שאלות שמסומנות בכוכב - יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה) ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות.

לשאלון זה מצורפים דפי עזר.

חומר עזר:
כל חומר עזר אסור בשימוש.

בהצלחה !!!

החזירו
למשגיח את השאלון
וכל עזר אחר שקיבלתם בתוך מחברת התשובות

שאלון 473 83.26.7

$0 \quad n-$

$1 \quad n+1$

$0 \quad n-$

$n-2 \quad 2n-2$

אלגוריתמים 2018א – מועד 83

הנחיות: ענו על **4 מתוך 5 שאלות**. לכל שאלה 25 נקודות. לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה.
על שאלות שמסומנות בכוכב - יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה), ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).
חומר עזר: אסור. דף נוסחאות מצ״ב.

שאלה 1 – קשירות, חמדנות (25 נק׳).

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$ עם מקור $s\in V$ ויעד $s\neq t\in V$, ועם משקל שלם $w(e)$ לכל צלע. ישנן בדיוק צלע אחת $e=\{u,v\}$ שמשקלה שלילי. הציגו אלגוריתם למציאת מסלול P בעל משקל מזערי מהמקור ליעד. לא יתקבל ניקוד על אלגוריתם עם זמן ריצה $\Theta(|E|\cdot|V|)$.

שאלה 2 – יחידות העץ הפורש המזערי (25 נק׳).

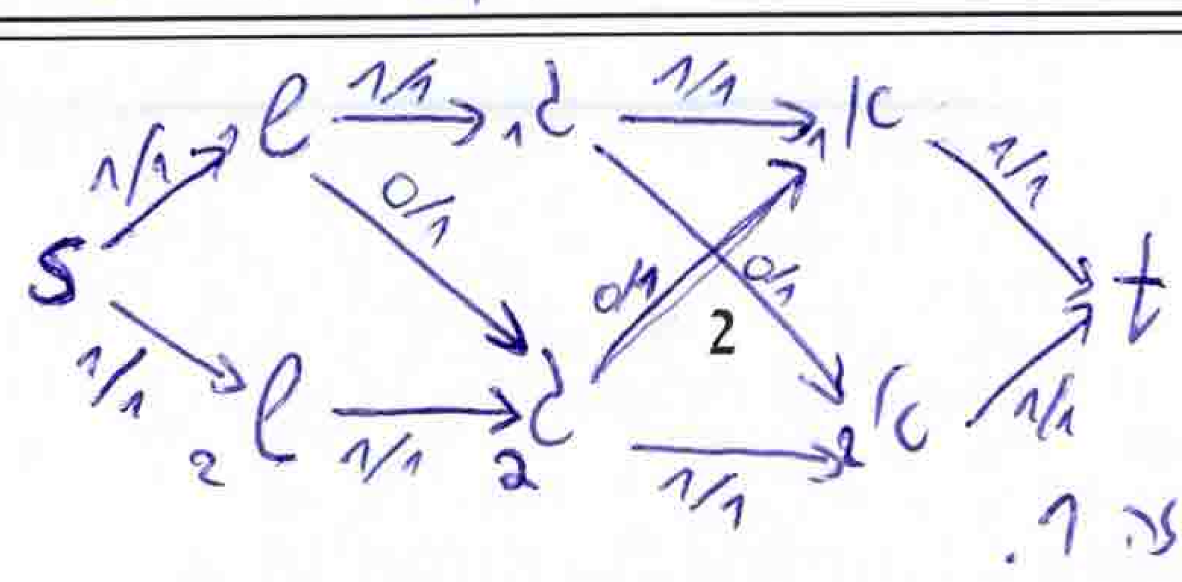
נתון גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$ עם משקל=מחיר אי-שלילי $c_e\geq 0$ לכל אחת מהצלעות $e\in E$. המשקלים נקראים חד-חד ערכיים (חח״ע), אם לצלעות שונות $e_1\neq e_2$ מתאימים משקלים שונים $c_{e_1}\neq c_{e_2}$. הוכיחו שכשהמשקלים חח״ע, אז לגרף יש עץ פורש מזערי יחיד.

***שאלה 3* – רשתות זרימה – שידוך עם מגבלת עומס על השדכנים (25 נק׳).**

ברצוננו למצוא שידוך מרבי בהינתן רשימה של n גברים, n נשים ו-m שדכנים. עבור כל שדכן $1\leq i\leq m$, נתונה רשימת הגברים והנשים המוכרים לו, ונתונה מגבלת עומס $1\leq t_i\leq m$: שדכן מספר i יכול לשדך בין כל גבר ואשה המוכרים לו, כל עוד מספר הזוגות הכולל שהוא משדך אינו עולה על t_i. נביט באלגוריתם הבא: בונים רשת זרימה עם הצלעות הבאות בלבד: (א) המקור s מחובר לכל שדכן i בצלע עם קיבולת t_i, (ב) כל שדכן מחובר בצלע עם קיבולת 1 לכל הגברים שהוא מכיר, (ג) כל גבר מחובר בצלע עם קיבולת 1 לכל אישה שמכירה שדכן שמוכר לאותו הגבר, (ד) כל אישה מחוברת בצלע עם קיבולת 1 ליעד t. <u>הוכיחו</u> כי האלגוריתם המוצע שגוי: גודלה של זרימה מרבית ברשת שונה מגודלו של שידוך חוקי מרבי. נדרשת תשובה של 4-5 שורות.

האלגוריתם שגוי כי יתכן שיהיה שדכן מסויים w שמאפשר לו לשדך זוגות יותר
מהכמות שהוא מכיר בפועל כי שקיים מסלול ממנו אל t דרך נשים שהוא לא מכיר!
והמסלול קיים בגלל שדכן אחר בגלל שמכיר גבר m_i ואישה f_j בעוד ש-w מכיר
רק את m_i אבל לא מכיר את f_j, דוגמה: 2 שדכנים: 1: $t_1=1$
2: $t_2=1$ 1: מכיר 2 גברים ו-2 נשים. 2: מכיר גבר אחד ואישה אחת

נקבל:



זרימה מקסימלית 2
למרות שעדיין יתכן
רק שידוך אחד, כי רק ש2
מכיר גם אישה וגם גבר ו-t_i שלו זה 1.

נא לא לכתוב בשוליים

for i=1 to n {
max ← 0
for k=i down to 1
{ if A[k].l < A[i].l and A[k].x > max
max ← A[k].x }
A[i].x ← A[i].h + max }
}

פסאודו: אחרי מיון לפי W ואתחול (*)

***שאלה 4 – תכנון דינאמי – בניית מגדל יציב מתיבות (25 נק').**

נתונה רשימה של n תיבות מלבניות: לכל $1 \le i \le n$ נתון האורך $\ell(i)$, הרוחב $w(i)$ והגובה $h(i)$ של התיבה מספר i. כל הרוחבים שונים, כל האורכים שונים וכל הגבהים שונים. ברצוננו לבנות מגדל בגובה מרבי באמצעות הנחה של תיבות זו מעל זו. המגדל נחשב יציב כאשר תיבה j מונחת רק מעל תיבה i שמקיימת $w(j) < w(i)$ וגם $\ell(j) < \ell(i)$. (כלומר כשמימדי הבסיס של התיבה התחתונה גדולים מאלו של העליונה). הציגו אלגוריתם תכנון דינאמי לבניית מגדל יציב בגובה מרבי, לרבות ניסוח של נוסחת נסיגה מתאימה. האלגוריתם נדרש לרוץ בזמן $\Theta(n^2)$. (פעולות חיבור, חיסור והשוואה של מימדים $\ell(i)$, $w(i)$, $h(i)$ נחשבות פעולות אלמנטרית שמתבצעת בזמן $\Theta(1)$).

(*) מיון מיזוג – $n\log n$

1. נמיין את התיבות לפי רוחב-W מהגדול לקטן (*), נשים אותם ממוינות במערך A שלכל תא יש שדה אורך-l, גובה-h, ושדה נוסף x שישמור את הגובה המקסימלי של המגדל שתיבה זו בראשו, נשים לב שבגלל המיון, לכל תיבה, התיבות שיכולות אולי להיות מעליה נמצאות רק לפניה במערך. (**) ונעבור לכל A[i] נעבור מימין לשמאל לתחילת המערך עם משתנה max שמאותחל ל-0 ואם A[k].l > A[i].l (2) וגם A[k].x > max נשים A[k].x → max, ובסוף המעבר, נבצע max + A[i].h → A[i].x

אחרי שביצענו את (**) נמצא את ה-x הכי מקסימלי וזה הגובה המקסימלי של מגדל יציב.

נכונות: באינדוקציה על מספר האיטרציות – שבסוף האיטרציה ה-i ה-x של A[i] מייצג מגדל מקסימלי יציב שתיבה זו בראשו:

i=1: זו התיבה הכי רחבה ולכן שום תיבה אחרת לא יכולה להיות מתחתיה ולכן המגדל המקסימלי שהיא יכולה להיות בראשו הוא היא עצמה.

זמן ריצה: מיון (nlogn) ומעבר על המערך:
$\sum_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2)$
$\Theta(n^2)$ כנדרש!

שאלה 5 – הכפלת מטריצה מעגלית בווקטור (25 נק').

מטריצה ריבועית A נקראת מעגלית, אם כל שורה של A מתקבלת על-ידי הזזה מעגלית של השורה שמעליה עמודה אחת ימינה. כלומר, אם השורה הראשונה היא $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, אז השורה השנייה היא $(a_{n-1}, a_0, \ldots, a_{n-2})$, השורה השלישית היא $(a_{n-2}, a_{n-1}, a_0, \ldots, a_{n-3})$ וכך הלאה, עד השורה האחרונה שהיא $(a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_0)$. נתונה מטריצה מעגלית A מסדר $n \times n$ וכן וקטור עמודה $\vec{v} = (v_0, \ldots, v_{n-1})$. הציגו אלגוריתם שמחשב את המכפלה $A\vec{v}$, תוך ביצוע $O(n \log n)$ פעולות אריתמטיות בסיסיות בלבד (של חיבור, חיסור, כפל, חילוק או השוואה של מספרים).

i=n $0 \le i \le n$

בהצלחה!

$n-2$ $n+n-2$ $2n-2$

$i-2$ $n+i-2$

$c^i + c^{n+i}$ c_{n-1}

0 n
1 n+1

שאלון 473 83.26.7

אלגוריתמים 20417 – דף נוסחאות – גרפים

סימונים. ההגדרות הבאות מתאימות גם לגרפים לא מכוונים וגם לגרפים מכוונים. בגרף $G=(V,E)$ קבוצת הקדקודים (=צמתים) הינה V, וקבוצת הצלעות (=קשתות) הינה E. מסמנים $|V|=n, |E|=m$. כל הגרפים בקורס זה הם "פשוטים" במובן הבא: אין "לולאות עצמיות" (=אין צלע מקדקוד לעצמו) ואין "צלעות כפולות" (צלע יכולה להופיע או לא להופיע, אך לא יכולה להופיע מספר רב של פעמים).

מסלולים. מסלול (=מסילה) בגרף הוא סדרת קדקודים $(v_0,...,v_k)$ כך שיש בגרף צלע מ- v_{i-1} ל- v_i לכל $1 \le i \le k$. אפשר לחשוב על אותו מסלול כסדרת צלעות $(e_1,...,e_k)$ שבה לכל $1 \le i \le k$ הצלע e_i מחברת בגרף את v_{i-1} ל- v_i. מסלול פשוט הוא מסלול שאף קדקוד לא מופיע בו פעמיים (ומעלה). מעגל הוא מסלול שבו $v_0 = v_k$. מעגל פשוט הוא מסלול שאף קדקוד לא מופיע בו פעמיים (ומעלה) למעט $v_0 = v_k$. שני מסלולים נקראים זרים בקדקודים אם אין להם אף קדקוד משותף, ונקראים זרים בצלעות אם אין להם אף צלע משותפת. קדקוד t נקרא נגיש מקדקוד s אם קיים בגרף מסלול מ- s ל- t. גרף לא-מכוון נקרא קשיר (ובדומה גרף מכוון נקרא קשיר במובן החזק) אם כל זוג קדקודים נגישים האחד מהשני.

משקלים. בגרף ממושקל לכל צלע e מוגדר משקל $w(e)$ (=אורך $\ell(e)$, =מחיר $c(e)$). בגרף לא ממושקל אורך מסלול = מספר הצלעות במסלול. בגרף כן ממושקל אורך מסלול = סכום משקלי הצלעות במסלול. בגרף כן/לא ממושקל מסלול מזערי (=מינימלי) מ- s ל- t הינו מסלול מ- s ל- t שאורכו מזערי. עץ מרחקים מזעריים T עם שורש $s \in V$ הוא עץ פורש כך שלכל קדקוד $t \in V$, המרחק (=אורך מסלול מזערי) מ- s ל- t ב- T שווה למרחק מ- s ל- t ב- G. אבחנה מרכזית: בגרף כן/לא ממושקל: אם $s \longrightarrow u \longrightarrow v \longrightarrow t$ מסלול מזערי מ- s ל- t, אז תת-המסלול $u \longrightarrow v$ הינו מסלול מזערי מ- u ל- v (כאן $\longrightarrow$ מסמן תת-מסלול). עץ פורש מזערי (עפ"מ) בגרף ממושקל ולא-מכוון הוא עץ פורש, שסכום משקלי הצלעות שלו מזערי מבין כל העצים הפורשים.

רשתות זרימה. ברשת זרימה נתונים גרף מכוון $G=(V,E)$ עם קדקודי מקור $s \in V$ ויעד $s \ne t \in V$ וקיבולות אי-שליליות $c(e) \ge 0$ על הצלעות. זרימה חוקית הינה פונקציה $f: E \to \mathbb{R}$ שמכבדת את מגבלת הקיבולת: $f(e) \le c(e)$ לכל צלע e, ואת חוק שימור הזרימה: $f_{in}(v) = f_{out}(v)$ לכל קדקוד $v \ne s,t$. כאן $f_{in}(v)$ הינו סכום הזרימות בצלעות שנכנסות ל- v, ו- $f_{out}(v)$ הינו סכום הזרימות בצלעות שיוצאות מ- v. חתך $(S, T = V \setminus S)$ ברשת הינה חלוקה של קבוצת הקדקודים שבה $s \in S, t \in T$. קיבולת $c(S,T)$ של חתך הינה סכום הקיבולות של צלעות שיוצאות מ- S ונכנסות ל- T. זרימה $f(S,T)$ של חתך הינה ההפרש בין סכום הזרימות של צלעות שיוצאות מ- S ונכנסות ל- T לבין סכום הזרימות של צלעות שנכנסות ל- S ויוצאות מ- T. לכל חתך (S,T) גודלה של זרימה חוקית f הינו $val(f) = f_{out}(s) = f_{in}(t) = f(S,T)$.

משפט מרכזי: גודל זרימה מרבית (max-flow) = גודל חתך מזערי (min-cut).

קלט	פלט	אלגוריתם + זמן ריצה	תכונות + הערות
גרף מכוון G קדקוד מקור $s \in V$	עץ פורש T של הקדקודים הנגישים מ- s	סריקה לרוחב BFS $\|E\|+\|V\|$	T הינו עץ מרחקים מזעריים מהמקור s
		סריקה לעומק DFS $\|E\|+\|V\|$	בגרף לא-מכוון: כל צלע של G שאינה ב- T בהכרח מחברת בין אב-קדמון לבין צאצא שלו ב- T. בגרף מכוון חסר מעגלים: מחשב מיון טופולוגי
גרף מכוון G ממושקל (עם/בלי מקור $s \in V$) $w(e) \ge 0$	עץ T של מרחקים (ומסלולים) מזעריים מהמקור s לקדקודים הנגישים מ- s	דייקסטרא Dijkstra $\|E\|+\|V\|\lg\|V\|$	
$w(e)$ כללי		בלמן-פורד Bellman-Ford $\|E\|\|V\|$	מדווחים על קיומם של מעגלים שמשקלם שלילי
	מרחקים (ומסלולים) מזעריים בין כל זוגות הקדקודים	פלויד-וורשאל Floyd-Warshall $\|V\|^3$	
גרף לא-מכוון G עם משקלים אי-שליליים $w(e) \ge 0$	עפ״מ של הגרף (עץ פורש מזערי)	פרים Prim $\|E\|+\|V\|\lg\|V\|$	אם e צלע שמשקלה מזערי מבין כל הצלעות שמחברות בין $S,V\setminus S$ אז יש עפ״מ שכולל את e.
		קרוסקאל Kruskal $\|E\|\lg\|V\|$	אם e צלע שמשקלה מרבי מבין כל הצלעות במעגל מסוים אז יש עפ״מ שלא כולל את e.
גרף מכוון G עם מקור $s \in V$ ויעד $s \ne t \in V$ וקיבולות אי-שליליות $c(e) \ge 0$	זרימה חוקית מרבית	אדמונדס-קארפ Edmonds-Karp $\|E\|^2\|V\|$	ווריאנט של פורד-פלקרסון Ford–Fulkerson
זוג וקטורים $\vec{a}=(a_0,\ldots,a_{n-1})$ $\vec{b}=(b_0,\ldots,b_{n-1})$	הקונבולוציה הציקלית $\vec{a}\otimes\vec{b}=(c_0,\ldots,c_{2n-2})$ שבה $c_k=\Sigma_{0\le i\le k}a_ib_{k-i}$	טרנספורם פורייה המהיר FFT $n\lg n$	מתאים לכפל פולינומים $(\sum_{0\le i\le n-1}a_ix^i)(\sum_{0\le j\le n-1}b_jx^j)=(\sum_{0\le k\le 2n-2}c_kx^k)$ כאשר $c_k=\Sigma_{0\le i\le k}a_ib_{k-i}$

שאלון 473

83.26.7

נא לא לכתוב בשוליים