תשובה 1

א. תהי $X \in P(A)$ ויהי $|X| = i$.

ל-X יש בדיוק i תת-קבוצות בגודל $i-1$ (נזרוק בכל פעם איבר אחד מ-X).

אלה אברי $P(A)$ שאותם X מכסה.

אברי $P(A)$ המכסים את X הם קבוצות בגודל $i+1$ המכילות את A.

יש בדיוק $k-i$ קבוצות כאלה (נוסיף ל-X בכל פעם איבר אחד שמחוץ ל-X).

בסה"כ מספר השכנים של X הוא $i+(k-i)=k$, מספר שאינו תלוי ב-X.

משמע הגרף הוא רגולרי מדרגה k.

ב. בגרף יש 2^k צמתים, ודרגת כל צומת היא k.

סכום כל הדרגות בגרף הוא אפוא $k \cdot 2^k$.

מכאן שמספר הקשתות הוא $\frac{1}{2}k \cdot 2^k = k \cdot 2^{k-1}$.

ג. צד אחד הוא הקבוצות בעלות מספר זוגי של אברים והצד השני הוא הקבוצות בעלות מספר אי-זוגי של אברים (השלימו את הנימוק).

תשובה 2

נחשב:

$$\sum_{v \in V}\left(d_1(v)+d_2(v)\right) = \sum_{v \in V} d_1(v) + \sum_{v \in V} d_2(v)$$

לפי טענה 1.3 בעמ' 10 בחוברת נקבל

$$=2E_1+2E_2$$

כאשר E_1, E_2 הם מספרי הקשתות בכל אחד מהעצים.

מכיון שמדובר בעצים, ושניהם על אותה קבוצת צמתים V, נקבל מעמוד 19 משפט 2.5 סעיף 4:

$$=2(|V|-1)+2(|V|-1) = 4|V|-4$$

קיבלנו: $\sum_{v \in V}\left(d_1(v)+d_2(v)\right) = 4|V|-4$

אילו **לכל** $v \in V$ היה $d_1(v)+d_2(v) \ge 4$, היה בהכרח $\sum_{v \in V}\left(d_1(v)+d_2(v)\right) \ge 4|V|$,

בסתירה למה שקיבלנו. לכן לא ייתכן **שלכל** $v \in V$ יהיה $d_1(v)+d_2(v) \ge 4$.

במלים אחרות, **קיים** $v \in V$ עבורו $d_1(v)+d_2(v) \le 3$.

תשובה 3

הגרף הוא דו צדדי, כאשר צד אחד הוא קבוצת האותיות והצד השני הוא קבוצת המספרים.

קבוצת השכנים של הקבוצה $\{a,b,c,d,e\}$ היא $\{1,2,3,4\}$.

מצאנו קבוצת צמתים בצד אחד של הגרף הדו-צדדי, שמספר שכניה קטן ממש ממספר אבריה.

לפי משפט Hall (או מסקנה 4.8), אין בגרף זה זיווג מושלם.

תשובה 4

לפי מסקנה 5.4 בעמ' 54 בספר, מספר הקשתות בגרף מישורי על 11 צמתים הוא לכל היותר $33-6=27$. בפרט, מספר הקשתות של G הוא לכל היותר 27.

בגרף המלא K_{11} יש $\binom{11}{2}=55$ קשתות.

לכן ב- $\overline{G}$ יש לפחות $55-27=28$ קשתות.

מכאן, לפי האמור בתחילת התשובה, $\overline{G}$ אינו מישורי.

תשובה 5

א. כתיבת הנחת השלילה הוא תרגיל טוב בשימוש בכללי דה-מורגן לכמתים, אותם למדנו לקראת סוף הפרק בלוגיקה.

נניח בשלילה **שקיים** צבע מתוך k הצבעים הנתונים, כך **שלכל** צומת v ב- G, שכניו של v **אינם** משתמשים בכל $k-1$ הצבעים הנותרים.

נקרא לצבע זה x, וקבוצת שאר הצבעים היא B.

נעבור על הגרף ונצבע מחדש **כל צומת הצבוע ב- x**, כך:

יהי v צומת כלשהו שצבעו הוא x. מכיון ששכניו של v אינם משתמשים בכל צבעי B,

נצבע את v עצמו באחד מצבעי B שאינו בשימוש אצל שכניו של v.

נחזור ונבצע זאת **לכל צומת v שצבעו הוא x** (שני צמתים שצבעם המקורי הוא x אינם שכנים בגרף, לכן החלפת הצבע של צומת שצבעו הוא x אינה מפריעה להחלפת הצבע של צומת אחר שצבעו גם הוא x).

בכך צבענו את G צביעה נאותה בצבעים שכולם מתוך B.

זו כמובן סתירה לכך ש- $\chi(G)=k$. לכן לא קיים צבע כזה.

ב. זה מוכיח מחדש את שאלה 1 מפרק 6 (הסבירו בעצמכם מדוע!).

ג. לפי סעיף א, לכל צבע x מתוך k הצבעים, יש ב- G צומת, נקרא לו v_x, ששכניו משתמשים **בכל** $k-1$ הצבעים הנותרים. בפרט, דרגתו של v_x היא לפחות $k-1$.

מכיוון ששכניו של v_x צבועים בכל $k-1$ הצבעים הנותרים, הצבע של v_x עצמו חייב להיות x.

לפיכך, עבור **צבעים** שונים x,y, **הצמתים** v_x, v_y שונים זה מזה.

קיבלנו אפוא k צמתים שונים, שדרגת כל אחד מהם לפחות $k-1$.

איתי הראבן