

# מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 3,4,5

משקל המטלה: 3 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: יום ו' 14.12.07

סמסטר: 2008א

אנא שים לב:

מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.  
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (27 נקודות)

בהמשך לשאלה 4 בממ"ן 15:

בכמה דרכים ניתן לחלק את כל האוכל בין המשפחות, אם כל משפחה חייבת לקבל **משהו** (שיפוד או סטייק אחד לפחות). הדרכה: הכלה והפרדה.

שאלה 2 (27 נקודות)

מצאי כמה מספרים שלמים  $n$ , בתחום  $1 \leq n \leq 2100$ , מקיימים:  
 $n$  מתחלק ב-4, ואינו מתחלק באף אחד משלושת המספרים 5, 6, 7.  
הדרכה: הכלה והפרדה.

שאלה 3 (36 נקודות)

תהי  $f: A \rightarrow A$  ותהי  $x \in A$ . אם  $f(x) = x$  אומרים ש- $x$  היא נקודת שבת של  $f$ .  
דוגמא: הנקודות  $x=0$ ,  $x=1$  הן נקודות שבת של הפונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ ,  
ואלו הן נקודות השבת היחידות של פונקציה זו.

(המשך השאלה בעמוד הבא)

(המשך שאלה 3)

כעת תהי  $A$  קבוצה סופית בת  $n$  איברים. נתבונן בתמורות של  $A$ , כלומר פונקציות חח"ע של  $A$  על  $A$ . כידוע קיימות  $n!$  תמורות של  $A$ . לחלק מהתמורות הללו אין נקודות שבת כלל: תמורות כאלה נקראות "אי-סדר מלא". נסמן את מספר התמורות האלה  $\psi(n)$ .

$$\text{מהספר, סעיף 4.2.1: } \psi(n) = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}.$$

לעומת זאת, יש תמורה אחת ויחידה מעל  $A$  שיש לה  $n$  נקודות שבת: פונקצית הזהות.

עבור  $0 \leq k \leq n$ , יהי  $s(n, k)$  מספר התמורות מעל קבוצה בת  $n$  איברים, שלכל אחת מהן בדיוק  $k$  נקודות שבת. למשל מהאמור:  $s(n, 0) = \psi(n)$ ,  $s(n, n) = 1$ .  
לכל  $n$ ,  $s(n, n-1) = 0$  (מדוע?).

א. השלם את הנוסחה הבאה ונמק:  $s(n, k) = (?) \cdot \psi(n-k)$ .

ב. (טענת עזר כללית) תהי  $g$  פונקציה כלשהי. הוכח על-ידי החלפת משתנה סכימה כי

$$\sum_{k=0}^n g(n-k) \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n g(k) \binom{n}{k}$$

ג. נמיין את כל התמורות מעל  $A$  לפי מספר נקודות השבת שלהן, ונסכם את מספר התמורות מכל סוג. בסה"כ נקבל את מספר כל התמורות מעל  $A$ , כלומר  $n!$ .  
רישמו שוויון זה, כשאתם נעזרים בסעיפים הקודמים, בשלב כלשהו הציבו את הביטוי המפורש

$$\text{עבור } \psi: \text{ קבלו מכך זהות, שלאחר צמצום היא מהצורה: } 1 = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k ? ?$$

ד. בידקו את הזהות שקיבלתם עבור המקרה  $n=3$ .

בפורום הקורס יהיה דיון נוסף בעקבות שאלה זו, בשאלה מהו המספר הממוצע של נקודות שבת של תמורה. התשובה מפתיעה!

#### שאלה 4 (10 נקודות)

נסח את פתרון שאלה 3 בממ"ן 12 בעזרת עקרון שובך היונים.