20425 - תאריך הבחינה: 18.7.2016 (סמסטר 2016ב - מועד א5 / 86)

שאלה 1

א. הוכחת הטענה מובאת באתר הקורס.

ב. 1. **דרך I**

ההסתברות לקבל בדיוק i הצלחות ב- n החזרות שבוצעו היא: $\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$

ההסתברות לקבל את ההצלחה ה-i-ית בחזרה ה-n-ית היא: $\binom{n-1}{i-1}p^i(1-p)^{n-i}$

לפיכך, עלינו להשוות את שני המקדמים הבינומיים: $\binom{n}{i} \; ? \; \binom{n-1}{i-1}$

מתקיים: $\dfrac{n!}{i!\cancel{(n-i)!}} \; ? \; \dfrac{(n-1)!}{(i-1)!\cancel{(n-i)!}} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{n}{i} > 1 \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{i} > \binom{n-1}{i-1}$

לפיכך ההסתברות הראשונה גדולה מהשנייה.

דרך II

נסמן ב- A את המאורע ש"התקבלו בדיוק i הצלחות ב- n חזרות" וב- B את המאורע ש"ההצלחה ה-i-ית התקבלה בחזרה ה-n-ית". המאורע A מכיל ממש את המאורע B, ולכן $P(B) < P(A)$.

2. הואיל והחזרות בלתי תלויות מקבלים: $p^2 \cdot \binom{n-2}{i-2}p^{i-2}(1-p)^{n-i} = \binom{n-2}{i-2}p^i(1-p)^{n-i}$

3. החזרות בלתי-תלויות זו בזו, ולכן, אין תלות בין שתי החזרות הראשונות לבין החזרות שאחריהן. לפיכך, מקבלים כי ההסתברות המותנית המבוקשת היא למעשה ההסתברות לקבל $i-2$ הצלחות ב- $n-2$ החזרות האחרונות. כלומר: $\binom{n-2}{i-2}p^{i-2}(1-p)^{n-i}$

שאלה 2

א. למשתנה המקרי X יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 8 ו- 0.4. לפיכך:

$$P\{X=i\} = \binom{8}{i}0.4^i 0.6^{8-i} \qquad , \qquad i=0,1,\ldots,8$$

נסמן ב- B_1 את המאורע שזרם יכול לעבור דרך הענף העליון וב- B_2 את המאורע שזרם יכול לעבור דרך הענף התחתון. כמו כן, לכל $i=1,\ldots,8$, נסמן ב- A_i את המאורע שמתג i סגור. מתקיים:

$$P(B_1) = P(A_2 \cap A_3 \cap (A_4 \cup \ldots \cup A_8))$$

$$= P(A_2)P(A_3)P(A_4 \cup \ldots \cup A_8) \qquad \text{[אין תלות בין מצבי המתגים]}$$

$$= P(A_2)P(A_3)[1 - P(A_4^C \cap \ldots \cap A_8^C)]$$

$$= P(A_2)P(A_3)[1 - P(A_4^C)\cdot \ldots \cdot P(A_8^C)] \qquad \text{[אין תלות בין מצבי המתגים]}$$

$$= 0.4^2(1-0.6^5) = 0.1476$$

$$P(B_2) = P(A_1) = 0.4$$

נשים לב, שאין תלות בין מתגי שני הענפים, ולכן אין גם תלות בין מצבי הענפים. לפיכך:

$$P\{Y=0\}=P(B_1^C\cap B_2^C)=P(B_1^C)P(B_2^C)=0.8524\cdot 0.6=0.5114$$

$$P\{Y=2\}=P(B_1\cap B_2)=P(B_1)P(B_2)=0.1476\cdot 0.4=0.059$$

$$P\{Y=1\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=2\}=1-0.5114-0.059=0.4296$$

ב1. אם יש שני מתגים סגורים ולא עובר זרם באף אחד משני הענפים, בהכרח הם נמצאים בענף העליון, והם יכולים להיות כל שניים מבין שבעת המתגים בענף זה. כל ששת המתגים האחרים פתוחים. לפיכך:

$$P\{X=2,Y=0\}=\binom{7}{2}0.4^2 0.6^6=0.1568$$

ב2. אם יש שלושה מתגים סגורים ועובר זרם בדיוק באחד מהענפים, ייתכנו שני מקרים:

I. מתגים 2, 3 ואחד ממתגים 4-8 סגורים;

II. מתג 1 סגור ועוד שני מתגים מבין מתגים 2-8.

לפיכך:

$$P\{Y=1|X=3\}=\frac{P\{Y=1,X=3\}}{P\{X=3\}}=\frac{\left[\binom{5}{1}+\binom{7}{2}\right]0.4^3 0.6^5}{\binom{8}{3}0.4^3 0.6^5}=\frac{5+21}{56}=0.4643$$

ג. **דרך I**

נראה שתנאי אי-התלות אינו מתקיים. למשל:

$$P\{X=2,Y=0\}=\binom{7}{2}0.4^2 0.6^6=0.1568\neq P\{X=2\}P\{Y=0\}=\binom{8}{2}0.4^2 0.6^6\cdot 0.5114=0.1069$$

ומכאן ששני המשתנים המקריים תלויים זה בזה.

דרך II

בסעיפים קודמים קיבלנו: $P\{Y=1|X=3\}=0.4643 \quad \neq \quad P\{Y=1\}=0.4296$

ומכאן שתנאי אי-התלות אינו מתקיים והמשתנים המקריים תלויים.

שאלה 3

א. לכל $-\ln a<y<\infty$ מתקיים:

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{-\ln X\le y\}=P\{\ln X\ge -y\}=P\{X\ge e^{-y}\}=1-F_X(e^{-y})=1-\frac{e^{-y}}{a}$$

ולכל $y<-\ln a$ מתקיים: $F_Y(y)=0$

ב. לכל $-\ln a<y<\infty$ מתקיים: $f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{e^{-y}}{a}$

ג. כאשר $a=1$ מקבלים שלמשתנה המקרי Y יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר $\lambda=1$.

במקרה הזה, ההתפלגות של המשתנה המקרי Y תקיים את תכונת חוסר הזיכרון, ולכן זה ייתכן.

ד. $$E[Y]=\int_{-\ln a}^{\infty}\frac{ye^{-y}}{a}dy=\left.\frac{-ye^{-y}}{a}\right|_{-\ln a}^{\infty}+\int_{-\ln a}^{\infty}\frac{e^{-y}}{a}dy=-\ln a-\left.\frac{e^{-y}}{a}\right|_{-\ln a}^{\infty}=-\ln a+1$$

שאלה 4

א1. יש יותר מ-100 ארטיקים מכל טעם, ולכן כל ילד יכול לבחור טעם כרצונו.

לפיכך, מספר אפשרויות הקנייה הוא 4^{100}.

א2. גם כאן אין מגבלה על הבחירות של הילדים, מכיוון שיש מספיק ארטיקים מכל טעם.

אם כך, נמנה את מספר אפשרויות הקנייה של ילד אחד: הוא יכול לא לקנות דבר (אפשרות אחת); הוא יכול לקנות ארטיק אחד (4 אפשרויות); והוא יכול לקנות שני ארטיקים ($4+\binom{4}{2}=10$ אפשרויות).

לפיכך, מספר אפשרויות הקנייה הוא 15^{100}.

א3. יש $\binom{100}{50}$ אפשרויות לבחור את הילדים שיקנו ארטיק בטעם לימון ולשאר הילדים יש 3^{50} אפשרויות קנייה. לפיכך, מספר אפשרויות הקנייה הוא $\binom{100}{50}\cdot 3^{50}$.

ב. הבעיה שקולה לפיזור (ללא הגבלות) של 100 כדורים זהים ב- 4 תאים ממוספרים (3 מחיצות).

לפיכך, מספר הצירופים השונים האפשריים הוא: $\binom{103}{3}=176,851$

ג. הבעיה שקולה לפיזור (ללא הגבלות) של 100 כדורים זהים ב- 5 תאים ממוספרים (4 מחיצות).

לפיכך, מספר הצירופים השונים האפשריים הוא: $\binom{104}{4}=4,598,126$

שאלה 5

נסמן ב- X את האורך (בימים) של החלק הראשון של התהליך וב- Y את האורך (בימים) של החלק השני שלו.

לפי נתוני הבעיה מתקיים: $X\sim Geo(\frac{1}{10})\qquad ;\qquad Y\mid X=i\sim Geo(\frac{1}{2i-1})\quad ,\quad i=1,2,...$

א. תוחלת האורך (בימים) של החלק הראשון של התהליך היא: $E[X]=10$

ושל החלק השני היא: $E[Y]=E[E[Y\mid X]]=E[2X-1]=2E[X]-1=20-1=19$

ומכאן שתוחלת אורך התהליך כולו (בימים) היא: $E[X+Y]=E[X]+E[Y]=10+19=29$

ב. נתחיל בחישוב תוחלת מכפלת המשתנים המקריים שהגדרנו:

$$E[XY]=E[E[XY\mid X]]=E[XE[Y\mid X]]=E[X(2X-1)]=2E[X^2]-E[X]$$
$$=2(\mathrm{Var}(X)+(E[X])^2)-E[X]=2\cdot\left(\frac{\frac{9}{10}}{(\frac{1}{10})^2}+100\right)-10=370$$

ומכאן: $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=370-10\cdot 19=180$

ג. הואיל ומתקיים: $\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$

עלינו לחשב את השונויות של המשתנים המקריים X ו- Y:

$$\mathrm{Var}(Y)=E[\mathrm{Var}(Y\mid X)]+\mathrm{Var}(E[Y\mid X])=E\left[\frac{1-\frac{1}{2X-1}}{\left(\frac{1}{2X-1}\right)^2}\right]+\mathrm{Var}(2X-1)$$
$$=E[(2X-1)(2X-2)]+\mathrm{Var}(2X-1)=E[4X^2-6X+2]+4\mathrm{Var}(X)$$
$$=4\cdot 190-6\cdot 10+2+4\cdot 90=1,062$$

ומכאן נקבל: $\mathrm{Var}(X+Y)=90+1,062+2\cdot 180=1,512$