99 'א
מועד II

מבנה הבחינה:

- בבחינה חמש שאלות.

מתוכן יש לענות על **ארבע** שאלות.

משקל כל שאלה מפורט בגוף השאלון.

כל חומר עזר מותר בשימוש.

☠ חשוב לכתוב את האלגוריתם בצורה מרווחת, מחולקת לבלוקים, עם הסבר (מילולי, בעברית) תמציתי לפעולת הבלוק.

☠ בכל שאלה עליך לציין מהי הסיבוכיות של האלגוריתם.

ייבדקו ארבע התשובות הראשונות שיופיעו במחברת הבחינה.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1 (25 נקודות)

בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$ עם פונקצית משקל על הקשתות $\ell : E \rightarrow R^+$ (המשקלות אינם שליליים), ובהינתן מסלול $P = \langle v_1, \dots v_k \rangle$ בגרף זה, נגדיר את **צוואר הבקבוק** של המסלול P, להיות $\min(\ell(e_1), \dots, \ell(e_{k-1}))$, כאשר e_i $(1 \le i < k)$ היא הקשת המחברת את v_i ו- v_{i+1}.

כתוב אלגוריתם יעיל ככל האפשר אשר מקבל כקלט גרף $G = (V, E)$ בעל התכונות שתוארו לעיל, שני צמתים $s, t \in V$ ופלט האלגוריתם יהיה צוואר הבקבוק **הגדול** ביותר מבין כל המסלולים שבין s ל- t בגרף G.
הסבר את האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

שאלה 2 (25 נקודות)

כתוב אלגוריתם יעיל ככל האפשר אשר מקבל כקלט גרף לא מכוון $G = (V, E)$ עם פונקציית משקל על הקשתות $\ell : E \rightarrow R$, המקיים $|E| = |V| + K$ כאשר K קבוע, ונותן כפלט עץ פורש מינימלי ב- G.
הסבר את האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

שאלה 3 (25 נקודות)

א. תן דוגמה לגרף לא מכוון $G = (V, E)$, אשר מספר עצי ה- DFS השונים שלו הוא אי-זוגי.

גרף מכוון $G = (V, E)$ הוא **שרוך מכוון** אם הוא עץ שבו דרגת היציאה ודרגת הכניסה של כל צומת הן ≤ 1. למשל, הגרף הבא הוא שרוך מכוון:

גרף קשיר לא מכוון $G = (V, E)$ ייקרא **גרף שרוכי מכוון**, אם **כל** ביצוע אפשרי של DFS על הגרף נותן עץ DFS שהוא שרוך מכוון.

שרוכי

ב. הראה כי בגרף מכוון $G = (V, E)$ מספר עצי ה- DFS השונים הוא זוגי.

ג. הראה כי אם גרף הוא שרוכי מכוון, אז אחרי השמטת קשת כלשהי מהגרף, הגרף המתקבל כבר אינו שרוכי מכוון.

שאלה 4 (25 נקודות)

כתוב אלגוריתם יעיל ככל האפשר אשר מקבל כקלט גרף מכוון וקשיר $G = (V, E)$ ונותן כפלט את המספר המינימלי של קשתות שיש להוריד מ- G כך שיתקבל גרף לא קשיר.
הסבר את האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

שאלה 5 (25 נקודות)

בהינתן שתי מטריצות בגודל $n \times n$ A ו- B, **הקומוטטור של A ו- B**, המסומן ב- $[A, B]$ הוא:

$[A, B] = AB - BA$.

יהיו A ו- B מטריצות בגודל $n \times n$. יהי $S(n)$ הזמן הדרוש לחישוב הקומוטטור $[A, B]$.
הראה כי ניתן לכפול שתי מטריצות X ו- Y בגודל $n \times n$ בזמן $S(2n)$ לכל היותר.

בהצלחה!