

הדקן את מדבקת הנבחן

מלא את הפרטים בכל המיקומות הדרושים

N101017085



ת.ז: 205782667 מס' סידורי: 5 מס' תעודה: 205782667

83

מועד

20426

מספר הקורס

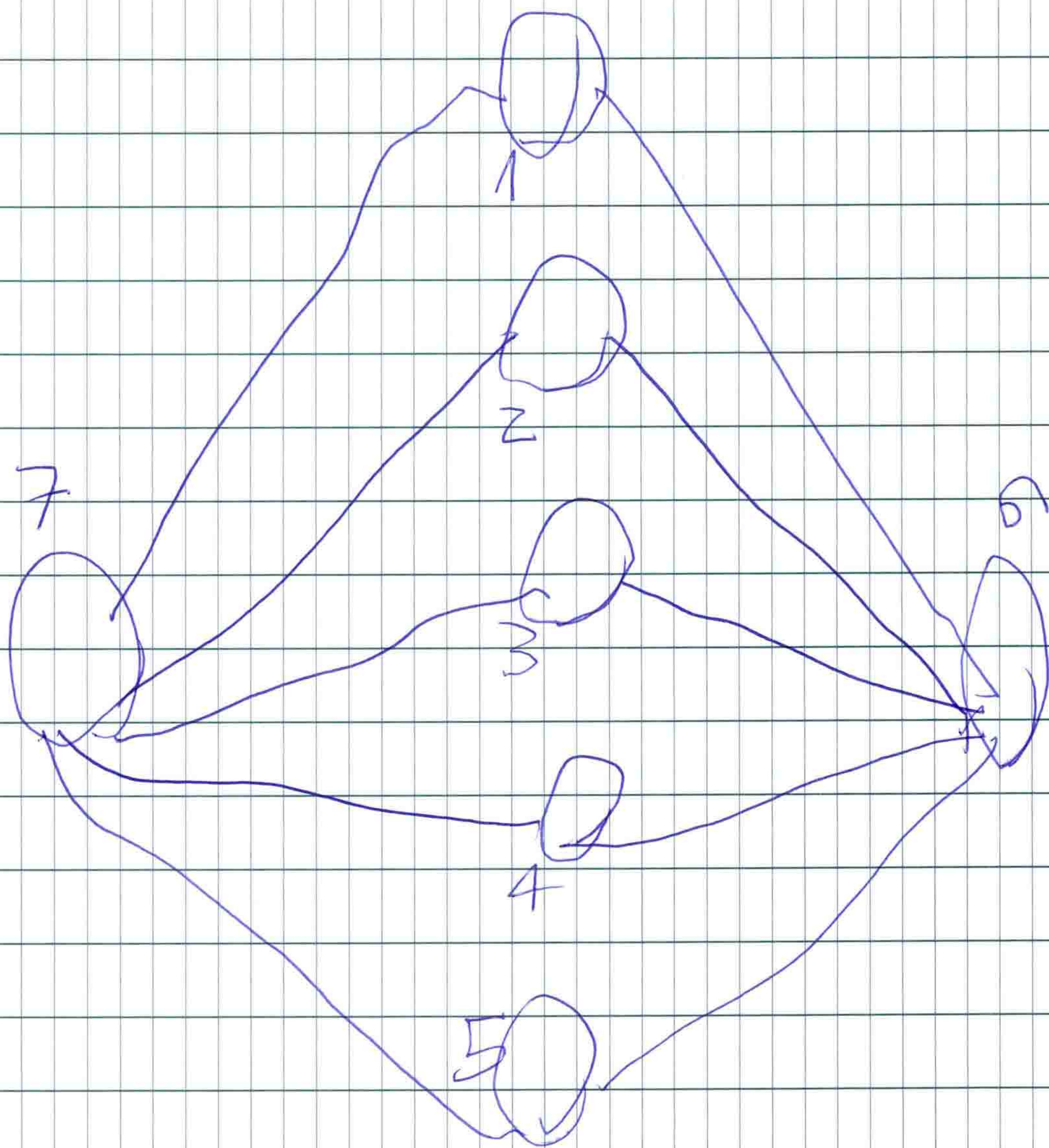
205782667

מספר תעודה זהה (9 ספרות)

205782667

לשימוש הבודק

210 גולן → 5 גולן



183860



**בפתרון בחינה זה 3 עותדים + איור נלווה לשאלת 5 במחברת**

二

## שאלה 1

[4] x

[3] ב

[4] x

### שאלה 3

.N

$$(1) \quad (1+x)^m(1-x)^m = (1-x^2)^m$$

### **פיתוח אגן שמאל של (1):**

$$(1-x^2)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} 1^{m-i} \cdot (-x^2)^i = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^i x^{2i} = (*) \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} (-1)^i x^{2i}$$

(\*) כי עבור  $m > i$  מתקיים  $0$

(2) המקבdem של  $x^6$  בביטוי זה הוא האיבר עבור  $\alpha = 3$  כלומר

## **פיתוח אגד ימי של (1):**

$$\begin{aligned}
 (1+x)^m(1-x)^m &= \left( \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} 1^{m-i} x^i \right) \left( \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} 1^{m-i} (-x)^i \right) \\
 &= \left( \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \right) \left( \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^i x^i \right) \\
 &= (*) \left( \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} x^i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} (-1)^i x^i \right)
 \end{aligned}$$

(\*) כי עבור  $m > i$  מתקיים 0

המתקדם של  $x^6$  בביטוי זה הוא סכום של המתקדם של  $x^k$  בביטוי  $\left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} x^i\right)$  כפול המתקדם של  $x^{-6}$  בביטוי  $\left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} (-1)^i x^i\right)$  עבור  $k=0,1,2,3,4,5,6$


$$(3) \sum_{k=0}^6 \binom{m}{k} \binom{m}{k-6} (-1)^{k-6}$$

נשווה את ביטויים (2) ו-(3) ונקבל את הזהות הקומבינטורית:

$$(4) \sum_{k=0}^6 \binom{m}{k} \binom{m}{\cancel{6-k}} (-1)^{6-k} = - \binom{m}{3}$$

IP

.2



נכיב ב-4  $m=4$  ונקבל:

$$(5) \quad \sum_{k=0}^6 \binom{4}{k} \binom{4}{6-k} (-1)^{6-k} = -\binom{4}{3}$$

чисוב אגף שמאל של (5):

$$-\binom{4}{3} = -4$$

чисוב אגף ימין של (5):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^6 \binom{4}{k} \binom{4}{6-k} (-1)^{6-k} \\ &= \binom{4}{0} \binom{4}{6} (-1)^6 + \binom{4}{1} \binom{4}{5} (-1)^5 + \binom{4}{2} \binom{4}{4} (-1)^4 + \binom{4}{3} \binom{4}{3} (-1)^3 \\ &+ \binom{4}{2} \binom{4}{4} (-1)^4 + \binom{4}{5} \binom{4}{1} (-1)^1 + \binom{4}{6} \binom{4}{0} (-1)^0 \\ &= 0 - 0 + \binom{4}{2} \binom{4}{4} - \binom{4}{3} \binom{4}{3} + \binom{4}{2} \binom{4}{4} - 0 + 0 = -4 \end{aligned}$$

שני האגפים של (5) שוויים, ובזה נבדקה זהות (4) עבור  $m=4$ 

שאלה 4:

א. הכללה והפרדה: הקבוצה האוניברסלית  $U$  היא מספר ה途徑ים לחלק 10 כדורים זהים ל-4 תאים שונים.

$$נסמן (4 \leq i \leq 13) A_i - בתא i יש יותר מ-3 כדורים כלומר לפחות 4 כדורים$$

$$S_i = D(4,10) = \binom{13}{3}$$

(4) סכום כל  $\binom{4}{i}$  הקבוצות שבהם יש חיתוך של  $i$  קבוצות מבין  $A_1, \dots, A_4$   $\forall i = 1, 2, 3, 4$   
 לכן  $\binom{4}{3} = \binom{4}{13-4i} = \binom{4}{10-4i} = S_i$  עבור  $i = 1, 2$  (כי אחרי ששמנו בכל אחד מ- $i$  תאים 4 כדורים נותרו  $10-4i$  כדורים להכניס ל-4 תאים) ו-  $0 = S_i$  עבור  $i = 3, 4$  (כי אין אפשרות לסדר 10 כדורים כך שב-3 או 4 תאים יהיו 4 כדורים או יותר).


הגודל המבוקש בשאלה הוא

$$\begin{aligned} |A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3 \cap A'_4| &= |(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)'| = |U| - \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} S_i \\ &= \binom{13}{3} - \binom{4}{1} \binom{9}{3} + \binom{4}{2} \binom{5}{3} - 0 + 0 = 10 \end{aligned}$$

ב. הערה: הסימון בסעיף זה אינו קשור לסימון בסעיף א.  
 הכללה והפרדה: הקבוצה האוניברסלית  $U$  היא מספר ה途徑ים לחלק 10 כדורים זהים ל-4 תאים שונים.

$$|U| = D(4,10) = \binom{13}{3}$$

נסמן ( $1 \leq i \leq 4$ )  $A_i$  – בתא  $i$  יש בדיקות 3 כדורים  
 (4) סכום כל  $\binom{4}{i}$  הקבוצות שבהם יש חיתוך של  $i$  קבוצות מבין  $A_1, \dots, A_4$   $\forall i = 1, 2, 3, 4$   
 לכן  $\binom{4}{i} = \binom{4}{10-3i+4-i-1} = \binom{4}{3-i} = \binom{13-4i}{3-i}$



אחרי ששמננו בכל אחד מ-i תאים 3 כdots נותרו i-3-10 כdots להכניס ל-i-4 תאים) ו-  
 $S_i = 0$  עבור 4=? (כי אין אפשרות לסדר 10 כdots כך שב- 4 תאים יהיו 3 כdots בכל  
תא).

הגודל המבוקש בשאלת הוא

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} S_i = \binom{4}{1} \binom{9}{2} - \binom{4}{2} \binom{5}{1} + \binom{4}{3} \binom{1}{0} = 118$$

### שאלה 5

.א.

הגרף הדו צדי מחלק ל-2 צדים. נסמן ב-A את הצד שיש בו פחות קודקודים.  
בגרף יש 7 צמתים, لكن האפשרות למשם הצמתים ב-Aוב- B בין:

1. ב-A צומת אחת, ב-B יש 6 צמתים – זה לא יתכן, כי נתון שב-G יש מסלול אoilר,  
ובגרף  $K_{1,6} = G$  יש 6 צמתים שדרגתם 1 – אי זוגית וכן בו אין מסלול אoilר כי בגרף  
שיש בו מסלול אoilר מספר הצמתים שדרגתם אי זוגית יכול להיות 2 (אם יש בו מסלול  
αιoilר שאינו מעגל) או 0 (אם יש בו מעגל אoilר) (\*). – בסתריה לנตอน שב-G יש מעגל  
αιoilר

2. ב-A יש 2 צמתים, ב-B יש 5 צמתים.

3. ב-A יש 3 צמתים, ב-B יש 4 צמתים – זה לא יתכן כי הגרף  $K_{3,4} = G$  מכיל את הגרף  
 $K_{3,3}$  שאינו מישורי לפי שאלה 3 בפרק 6 בספר תורה הגרפים וכן G אינו מישורי כי  
גרף המכיל תת גרף לא מישורי אינו מישורי.

קיבלו שאפשרות 2 היא האפשרות היחידה שתיתכן. לכן  $K_{2,5} = G$ . G הוא אכן מישורי – ראה שיכן  
מישורי שלו במחברת הבדיקה תחת הכותרת "שאלה 5 – אior נלווה". כמו כן ב-G יש רק 2 צמתים  
לهم יש דרגה אי זוגית, וליתר יש דרגה זוגית, וכך, לפי שאלה 1 בפרק 3 בספר תורה הגרפים, ב-G  
יש מסלול אoilר.

יש קשת ב-G בין כל צומת ב-A לצומת ב-B. לכן, מס' הקשתות (צלעות) ב-G הוא  $10 = 5 \cdot 2$ .

(\*) לא מצאתי את טענה זו בספר, אך אוכיח אותה: אם ב-G יש מסלול אoilר, אז בכל צומת של G  
שאינה צומת הכניסה או היציאה, מספר הדרגות בה חייב להיות זוגי, כי מס' הפעמים שהמסלול נכנס  
אליה שווה למס' הפעמים שהמסלול יוצא ממנו. אם מדובר במועל אoilר (צומת ההתחלה שווה  
לצוט הסיום, אז שיקול זה נכון גם לגבי צומת ההתחלה והסיום וכן גם דרגת הצומת, ואם מדובר  
במסלול אoilר שאינו מעגל, רק דרגת צומתי ההתחלה והסיום אי זוגית.

.ב.


לפי משפט 5.3, מס' הפיאות הוא

$$f = |E| - |V| + 2 = 10 - 7 + 2 = 5$$

.ג.

מספר הצבעה של G הוא 2. נימוק: יש ב-G קשת בין הצמתים ב-A לצמתים ב-B, אך לא יכול  
להיות שמספר הצבעה הוא 1. אם נקבע של כל הצמתים ב-A בצבע מסוים ואת כל צומי B בצבע  
אחר, נקבל צבעה נאותה, אך, מספר הצבעה של G הוא 2.

סוף



26/11/16

10-31

1 1 2 | 3 | 4

4 4 4 4

1 2 2 2

3 3 3 3

3 3 3


3 3 3

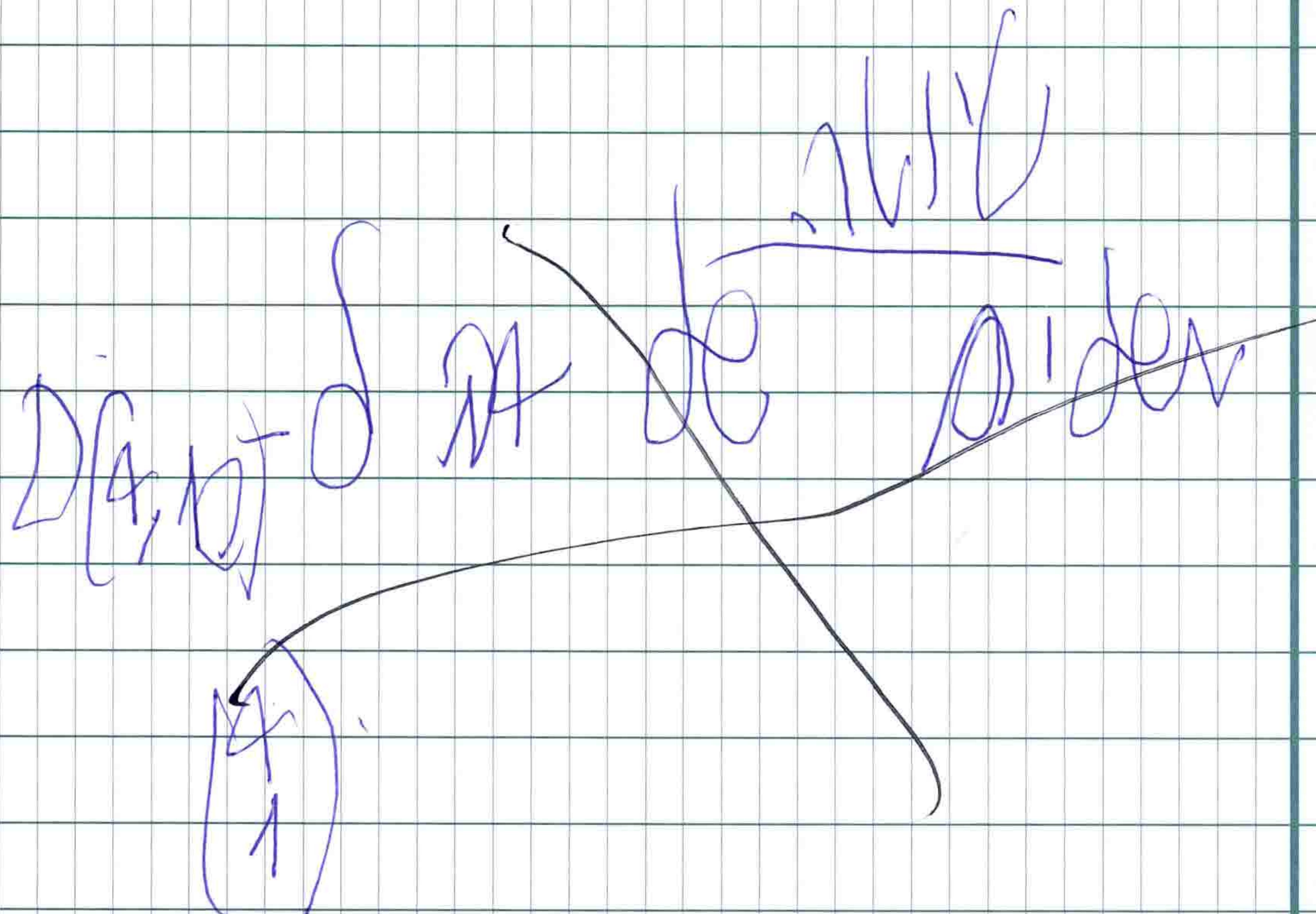
1 2 2 3 3 3

3 3 3 2 2 3  
1 2 3

2 3 3 3 3

11  
2/1/1/1  
10/10/10  
7. 1 KWT  
~~D(3,2)~~  
A<sub>11</sub>, A<sub>12</sub> (4) 1/2 (2)  
D(1,1) - (4) 1/1 (2)  
+ (4) 1/1 (1)  
3  
2





183860



**לשימוש הבודק**

183860

**לשימוש הבודק**

183860

**לשימוש הבודק**

183860

**לשימוש הבודק**

183860

**לשימוש הבודק**

## גלוון תשובות לשאלות רב-ברורתיות

הקלף במעגל את התשובה שבחרת (לכל שאלה יש רק תשובה אחת נכונה).

אם תרצה לבטל תשובה שבחרת, סמן עליה X.

דוגמה לתשובה שבחרת: א ב ג ד ה ז ח ט

דוגמה לתשובה שבטלת: א ב ג ד ה ז ח ~~ט~~

שאלות	תשובה	שאלות	תשובה	שאלות
21	א ב ג ד ה ז ח ט	21	א ב ג ד ה ז ח ט	1
22	א ב ג ד ה ז ח ט	22	א ב ג ד ה ז ח ט	2
23	א ב ג ד ה ז ח ט	23	א ב ג ד ה ז ח ט	3
24	א ב ג ד ה ז ח ט	24	א ב ג ד ה ז ח ט	4
25	א ב ג ד ה ז ח ט	25	א ב ג ד ה ז ח ט	5
26	א ב ג ד ה ז ח ט	26	א ב ג ד ה ז ח ט	6
27	א ב ג ד ה ז ח ט	27	א ב ג ד ה ז ח ט	7
28	א ב ג ד ה ז ח ט	28	א ב ג ד ה ז ח ט	8
29	א ב ג ד ה ז ח ט	29	א ב ג ד ה ז ח ט	9
30	א ב ג ד ה ז ח ט	30	א ב ג ד ה ז ח ט	10
31	א ב ג ד ה ז ח ט	31	א ב ג ד ה ז ח ט	11
32	א ב ג ד ה ז ח ט	32	א ב ג ד ה ז ח ט	12
33	א ב ג ד ה ז ח ט	33	א ב ג ד ה ז ח ט	13
34	א ב ג ד ה ז ח ט	34	א ב ג ד ה ז ח ט	14
35	א ב ג ד ה ז ח ט	35	א ב ג ד ה ז ח ט	15
36	א ב ג ד ה ז ח ט	36	א ב ג ד ה ז ח ט	16
37	א ב ג ד ה ז ח ט	37	א ב ג ד ה ז ח ט	17
38	א ב ג ד ה ז ח ט	38	א ב ג ד ה ז ח ט	18
39	א ב ג ד ה ז ח ט	39	א ב ג ד ה ז ח ט	19
40	א ב ג ד ה ז ח ט	40	א ב ג ד ה ז ח ט	20

### לשימוש פנימי

מספר התשובות הנכונות: ציון:

שם הבודק: 183860