נוסחאות נסיגה

MADE BY:TAL KATZ, OMER STERN,YUVAL COHN,AMIT SHAFRAN

$T(n) = 25T(n/5) + 125n^2$	1
$T(n) = 16T(n^{1/4}) + (\lg n)^4 \cdot \lg\lg n$	2
$T(1) = c \geq 1 \;;\; T(n) = 2T(n/2) + (\lg n)^8$	3
$T(0) = 0 \;;\; T(n) = 2T(n-1) + 1$	4
$8(T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$ אחרת	5
$2\cdot T\left(\frac{n-1}{2}\right)+1$ $n>1$ אי-זוגי $2\cdot T\left(\frac{n}{2}\right)$ זוגי $n>1$	6
$T(n) = a\cdot T\left(\sqrt{n}\right) + \lg^2 n$	7
$T(n)=0 \;,\; n<5$ $T(n) = T(n-5)+2n \;,\; n\geq 5$	8
$T(n) = 2T\left(\sqrt{n}\right) + \lg n$	9
$T(n) = 4\cdot T\left(\sqrt[8]{n}\right) + \sqrt[3]{\lg n}\cdot\left(\sqrt[3]{\lg n} + (\lg\lg n)^3\right)$	10
.$U(n)=T(n)/n^3$:רמז $T(n) = 8n\sqrt{n}\cdot T\left(\sqrt{n}\right) + n^3\cdot\lg^3 n$	11
$T(n) = 4T(n/8) + \sqrt{n\cdot\lg^3 n} + \sqrt[5]{n^3\cdot\lg^4 n}$	12
$T(n) = 16T(n/8) + n\sqrt[3]{n} + n\cdot\lg^4 n + \lg^8 n$	13
$T(n) = 81T(n/3) + n^6\cdot\lg n + n^4\cdot\lg^2 n$	14
$T(n) = T(n-2) + n^2 + 2\lg n$	15
$T(n) = n^3\cdot T(\sqrt{n}) + (5n^2\lg^3 n + \lg^5 n)\cdot(n^4\lg n + 5\lg^5 n)$	16
($a>1$,קבוע a) $T(n) = T(n-a) + T(a) + n^2$	17
($0<c<1$,קבוע c) $T(n) = T(cn) + T((1-c)n) + n^2$	18
$T(n) = 2T(n/2) + n^2\lg n + n\lg^2 n$	19
$T(n) = 4T(n/2) + n^2\lg n + n\lg^2 n$	20

נוסחאות נסיגה

21	$T(n)=2T\left(n/\sqrt{2}\right)+n^4\lg^2 n+n^2\lg^4 n$
22	$T(n)=2T\left(\sqrt{n^{\sqrt{2}}}\right)+\lg^2 n$
23	$T(n)=8T(n/16)+\sqrt{n+4}$
24	$T(n)=49T(n/7)+n^2+n+1$
25	$T(n)=9T(n/3)+n^4+1$
26	$T(n)=T(n-10)+\lg n+10$
27	$T(n)=n\sqrt{n}\cdot T(\sqrt{n})+n^3\cdot\lg^2 n$
28	
29	
30	
31	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

1 $\lg_b a = 2$ ולכן, לפי מקרה 2 של משפט האב, מקבלים ש- $T(n) = \Theta(n^2 \lg n)$.

2 נשתמש בהחלפת משתנים. נסמן $m = \lg n$ ונקבל:

$$T(n) = T(2^m) = 16T(2^{m/4}) + m^4 \cdot \lg m$$

עתה נסמן $S(m) = T(2^m)$ ונקבל את נוסחת הנסיגה החדשה:

$$S(m) = 16S(m/4) + m^4 \cdot \lg m$$

כדי שנוכל להשתמש במקרה 3 של משפט האב, יש להוכיח רגולריות של $f(m) = m^4 \cdot \lg m$.

כלומר, צריך להראות שקיים קבוע $c < 1$ כך שמתקיים $a \cdot f(m/b) \le c \cdot f(m)$

עבור $b = 4$, $a = 16$:

$$16 f(\frac{m}{4}) \le c \cdot f(m)$$

$$16 (\frac{m}{4})^4 \cdot \lg \frac{m}{4} \le c \cdot m^4 \lg m$$

$$\lg(\frac{m}{4}) \le 16c \cdot \lg m$$

$$\lg m - 2 \le 16c \cdot \lg m$$

ואפשר לבחור

$$c = \frac{1}{16}$$

כעת ניתן ליישם את מקרה 3 של משפט האב ונקבל ש- $S(m) = \Theta(m^4 \cdot \lg m)$.

נחזור מ- $S(m)$ ל- $T(n)$: $T(n) = T(2^m) = S(m) = \Theta(m^4 \cdot \lg m) = \Theta(\lg^4 n \cdot \lg\lg n)$

3 נשתמש במשפט האב. בנוסחה זו: $a = 2$, $b = 2$, $n^{\lg_b a} = n^1 = n$, $f(n) = (\lg n)^8$.

$f(n) = (\lg n)^8 = O(n^{1-\varepsilon})$ (למשל, עבור $\varepsilon = 0.5$), ולכן $T(n) = \Theta(n)$ (משפט האב, מקרה 1).

4 נשתמש בשיטת האיטרציה:

$$T(n) = 2T(n-1) + 1 = 2[2T(n-2)+1] + 1 = 4T(n-2) + 3 = 4[2T(n-3)+1] + 3 =$$
$$= 8T(n-3) + 7 = \ldots = 2^i T(n-i) + 2^i - 1 = \ldots = 2^n T(0) + 2^n - 1 = 2^n - 1$$

שימו לב שנוסחת הנסיגה מתארת את זמן הריצה של האלגוריתם הרקורסיבי לפתרון בעיית מגדלי האנוי.

5

א. T(n)=8(T(n2)+n3)   n>1 ע"פ נוסחאת האב:
a=8   b=2 והרי ש nlog28=n3
לכן מדובר במקרה השני של נוסחאת האב (עמוד 63) T(n)=(n3logn)

6

ב. לכל n זוגי ע"פ נוסחאת האב   b=2   a=2ולכן   nlog22=n לכן מדובר בבמקרה הראשון של נוסחאת האב (עמוד 63)   T(n)=(n) לכל nאי זוגי ע"פ נוסחאת האב (ונציב -m=n
b=2   a=2 (1ולכן mlog22=m=n-1=n לכן מדובר בבמקרה הראשון של נוסחאת האב (עמוד 63)
T(n)=(n) כלומר בכל מקרה קיבלנו .   T(n)=(n)

7

נשתמש בשיטת החלפת המשתנים : $m=\lg n,\ \ n=2^m$. מתקבלת נוסחת הנסיגה

$$T(2^m)=a\cdot T\left(2^{m/2}\right)+m^2$$

אחרי הסימון $S(m)=T\left(2^m\right)$, מתקבלת הנוסחה

$$S(m)=a\cdot S\left(m/2\right)+m^2$$

נשתמש בשיטת האב. ההפרדה למקרים השונים מתבצעת לפי הערך $\log_b a=\lg a$.

1) אם $a>4$, אזי $\lg a>2$, אנחנו במקרה 1, ומתקבל הפתרון $S(m)=\Theta\left(m^{\lg a}\right)$;

2) אם $a=4$, אזי $\lg a=2$, אנחנו במקרה 2, ומתקבל הפתרון $S(m)=\Theta\left(m^2\cdot\lg m\right)$;

3) אם $a<4$, אזי $\lg a<2$, אנחנו במקרה 3, ומתקבל הפתרון $S(m)=\Theta\left(m^2\right)$.

עבור נוסחת הנסיגה המקורית, מתקבלים הפתרונות

1) אם $a>4$, $T(n)=\Theta\left(\lg^{\lg a} n\right)=\Theta\left(a^{\lg\lg n}\right)$;

2) אם $a=4$, $T(n)=\Theta\left(\lg^2 n\cdot\lg\lg n\right)$;

3) אם $a<4$, $T(n)=\Theta\left(\lg^2 n\right)$.

8

(ג) נשתמש בשיטת האיטרציה:

$$T(n)=T(n-5)+2n$$
$$=T(n-10)+4n-10=\cdots$$
$$=T(n-5k)+2kn-2\cdot 5\cdot\sum_{i=1}^{k-1} i$$

עבור $k=\lfloor n/5\rfloor$:

$$T(n)=T(n-5\cdot\lfloor n/5\rfloor)+2n\lfloor n/5\rfloor-5\lfloor n/5\rfloor\cdot(\lfloor n/5\rfloor-1)$$
$$=\Theta(n^2)$$

9

מחליפים $n=2^m$ ($m=\lg n$); מתקבלת נוסחת הנסיגה:

$$S(m)=T(2^m)=2T(2^{m/2})+m=2S(m/2)+m$$

פתרון הנוסחה (לפי שיטת האב, מקרה 2):

$$S(m)=O(m\cdot\lg m)$$

ומכאן נקבל הפתרון: $T(n)=O(\lg n\cdot\lg\lg n)$

10

מציבים $m = \lg n$ ומשתמשים בשיטת האב מקרה 2: $\Theta(\lg^{2/3} n \cdot \lg\lg n)$.

11

משתמשים ברמז ומקבלים לאחר הצבה $U(n) = 8 \cdot U(\sqrt{n}) + \lg^3 n$. עושים עוד הצבה $m = \lg n, S(m) = U(2^m)$ ומקבלים $S(m) = 8 \cdot S(\frac{m}{2}) + m^3$. את המשוואה האחרונה פותרים עם שיטת האב מקרה 2 ומקבלים $S(m) = \Theta(m^3 \lg m)$. אחרי חזרה לפונקציה המקורית מקבלים $T(n) = \Theta(n^3 \lg^3 n \lg\lg n)$.

12

$$T(n) = 4T(n/8) + \sqrt{n \cdot \lg^3 n} + \sqrt[5]{n^3 \cdot \lg^4 n}$$

לפי שיטת האב: $a = 4$, $b = 8$, $f(n) = \sqrt{n \cdot \lg^3 n} + \sqrt[5]{n^3 \cdot \lg^4 n} = \Theta(n^{3/5} \cdot \lg^{4/5} n)$;

$\log_b a = \log_8 4 = 2/3 > 3/5$, לכן מתקיים מקרה 1:

$$T(n) = \Theta(n^{2/3})$$

13

$$T(n) = 16T(n/8) + n\sqrt[3]{n} + n \cdot \lg^4 n + \lg^8 n$$

לפי שיטת האב: $a = 16$, $b = 8$, $f(n) = n\sqrt[3]{n} + n \cdot \lg^4 n + \lg^8 n = \Theta(n^{4/3})$;

$\log_b a = \log_{16} 4 = 4/3$, לכן מתקיים מקרה 2:

$$T(n) = \Theta(n^{4/3} \cdot \lg n)$$

14

$$T(n) = 81T(n/3) + n^6 \cdot \lg n + n^4 \cdot \lg^2 n$$

לפי שיטת האב: $a = 81$, $b = 3$, $f(n) = n^6 \cdot \lg n + n^4 \cdot \lg^2 n = \Theta(n^6 \cdot \lg n)$;

$\log_b a = \log_3 81 = 4 < 6$, לכן מתקיים מקרה 3 (לפי תרגיל ג-11 במדריך הלמידה, מתקיים גם תנאי הרגולריות):

$$T(n) = \Theta(n^6 \cdot \lg n)$$

15

$$T(n) = T(n-2) + n^2 + 2\lg n$$

בשיטת האיטרציה:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-2) + n^2 + 2\lg n \\ &= T(n-4) + (n-2)^2 + 2\lg(n-2) + n^2 + 2\lg n \\ &= \ldots = \Theta(1) + [n^2 + (n-2)^2 + \ldots] + 2[\lg n + \lg(n-2) + \ldots] \end{aligned}$$

הקבוע $\Theta(1)$ מייצג את $T(0)$ (אם n זוגי) או את $T(1)$ (אם n אי-זוגי).

אם $n = 2k$, אזי

$$n^2 + (n-2)^2 + \ldots = 4[k^2 + (k-1)^2 + \ldots] = k(k-1) = \Theta(k^3) = \Theta(n^3)$$

$$\begin{aligned} \lg n + \lg(n-2) + \ldots &= \lg(2k) + \lg(2(k-1)) + \ldots = [1 + \lg k] + [1 + \lg(k-1)] + \ldots \\ &= k + \lg(k!) = k + \Theta(k \cdot \lg k) = \Theta(k \cdot \lg k) = \Theta(n \cdot \lg n) \end{aligned}$$

15

אם $n=2k+1$, אזי

$$n^2+(n-2)^2+...>4[k^2+(k-1)^2+...]=\Theta(k^3)=\Theta(n^3)$$

$$n^2+(n-2)^2+...<4[(k+1)^2+k^2+(k-1)^2+...]=k(k+1)=\Theta(k^3)=\Theta(n^3)$$

$$\lg n+\lg(n-2)+...>\lg(2k)+\lg(2(k-1))+...=\Theta(k\cdot\lg k)=\Theta(n\cdot\lg n)$$

$$\lg n+\lg(n-2)+...<\lg(2(k+1))+\lg(2k)+\lg(2(k-1))+...=\Theta(k\cdot\lg k)=\Theta(n\cdot\lg n)$$

לכן, בכל המקרים

$$T(n)=\Theta(n^3)$$

16

$$T(n)=n^3\cdot T(\sqrt{n})+(5n^2\lg^3 n+\lg^5 n)\cdot(n^4\lg n+5\lg^5 n)$$

מחלקים ב- n^6 ומקבלים

$$\frac{T(n)}{n^6}=\frac{T\left(\sqrt{n}\right)}{n^3}+\left(\frac{5}{n}\cdot\lg^3 n+\frac{1}{n^3}\cdot\lg^5 n\right)\cdot\left(n\lg n+\frac{5}{n^3}\cdot\lg^5 n\right)$$

מסמנים $U(n)=\dfrac{T(n)}{n^6}$; נשים לב כי

$$\left(\frac{5}{n}\cdot\lg^3 n+\frac{1}{n^3}\cdot\lg^5 n\right)\cdot\left(n\lg n+\frac{5}{n^3}\cdot\lg^5 n\right)=\Theta\left(\frac{\lg^3 n}{n}\right)\cdot\Theta\left(n\cdot\lg n\right)=\Theta(\lg^4 n)$$

מתקבלת נוסחת הנסיגה

$$U(n)=U\left(\sqrt{n}\right)+\Theta(\lg^4 n)$$

מבצעים את החלפת המשתנים $n=2^m$, $m=\lg n$, היוצרת את נוסחת הנסיגה

$$U(2^m)=U\left(2^{m/2}\right)+\Theta(m^4)$$

מסמנים $S(m)=U(2^m)$ ומקבלים

$$S(m)=S(m/2)+\Theta(m^4)$$

לפי שיטת האב, $a=1$, $b=2$, $f(m)=\Theta(m^4)$; $\log_b a=0$, לכן מתקיים מקרה 3(גם תנאי הרגולריות מתקיים):

$$S(m)=\Theta(m^4)$$

מזה נובע

$$U(n)=\Theta(\lg^4 n)$$

ולכן,

$$T(n)=\Theta(n^6\cdot\lg^4 n)$$

נכתוב קודם את נוסחת הנסיגה בצורה כללית יותר: 17

$$T(n-(i-1)a)=T(n-ia)+T(a)+\left(n-(i-1)a\right)^2 \quad (i=1,2,\ldots,\lfloor n/a\rfloor)$$

נסכום את הביטויים בצד שמאל ובצד ימין לכל $i=1,2,\ldots,\lfloor n/a\rfloor$:

$$\sum_{i=1}^{\lfloor n/a\rfloor}T\left(n-(i-1)a\right)=\sum_{i=1}^{\lfloor n/a\rfloor}T\left(n-ia\right)+\lfloor n/a\rfloor\cdot T(a)+\sum_{i=1}^{\lfloor n/a\rfloor}\left(n-(i-1)a\right)^2$$

או בצורה אחרת:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/a\rfloor-1}T\left(n-ia\right)=\sum_{i=1}^{\lfloor n/a\rfloor}T\left(n-ia\right)+\lfloor n/a\rfloor\cdot T(a)+\sum_{i=0}^{\lfloor n/a\rfloor-1}\left(n-ia\right)^2$$

נחסיר מכל אגף את האיברים המשותפים ונקבל:

$$T(n)=T\left(n-\lfloor n/a\rfloor\cdot a\right)+\lfloor n/a\rfloor\cdot T(a)+\lfloor n/a\rfloor\cdot n^2-2an\cdot\sum_{i=0}^{\lfloor n/a\rfloor-1}i+a^2\cdot\sum_{i=0}^{\lfloor n/a\rfloor-1}i^2$$

נשתמש בנוסחה (א.3) (עמוד 270 בספר) ונקבל:

$$\begin{aligned}T(n)=T\left(n-\lfloor n/a\rfloor\cdot a\right)+\lfloor n/a\rfloor\cdot T(a)+\\ \lfloor n/a\rfloor\cdot n^2-an\cdot\lfloor n/a\rfloor\cdot\left(\lfloor n/a\rfloor-1\right)+a^2\cdot\lfloor n/a\rfloor\cdot\left(\lfloor n/a\rfloor-1\right)\cdot\left(2\lfloor n/a\rfloor-1\right)/6\end{aligned}$$

מכיוון ש-$0\le n-\lfloor n/a\rfloor\cdot a<a$, אפשר לכתוב $T\left(n-\lfloor n/a\rfloor\cdot a\right)=\Theta(1)$;

מקבלים:

$$T(n)=\Theta(1)+\lfloor n/a\rfloor\cdot T(a)+n^2\cdot\lfloor n/a\rfloor-an\cdot\lfloor n/a\rfloor^2+a^2\cdot\lfloor n/a\rfloor^3/3=\Theta\left(n^3\right)$$

ומכאן:

$$T(n)=\Theta\left(n^3\right)$$

נשתמש בשיטת עכרה-באזי: $a_1=a_2=1$; $b_1=1/c$, $b_2=1/(1-c)$; $f(n)=n^2$, 18

$f'(n)=2n=O(n^1)$. לכן, קיים $p=1$ כך שמתקיים $\frac{a_1}{b_1^p}+\frac{a_2}{b_2^p}=c+(1-c)=1$

הפתרון הינו

$$T(n)=\Theta\left(n\cdot\left(1+\int_1^n\frac{f(x)}{x^{p+1}}dx\right)\right)=\Theta\left(n^2\right)$$

$a=b=1$, לכן $\log_b a=1$; $f(n)=n^2\lg n+n\lg^2 n=\Theta(n^2\lg n)$ ומתקיים תנאי הרגולריות. לפי משפט האב, מקרה 3: $T(n)=\Theta(n^2\lg n)$ 19

$a=4,b=2$, לכן $\log_b a=2$; $f(n)=n^2\lg n+n\lg^2 n=\Theta(n^2\lg n)$. לפי משפט האב, מקרה 2 המורחב: $T(n)=\Theta(n^2\lg^2 n)$ 20

$a=2,b=\sqrt{2}$, לכן $\log_b a=2$; $f(n)=n^4\lg^2 n+n^2\lg^4 n=\Theta(n^4\lg^2 n)$ ומתקיים תנאי הרגולריות. לפי משפט האב, מקרה 3: $T(n)=\Theta(n^4\lg^2 n)$ 21

22

מבצעים את החלפת המשתנים $n=2^m, m=\lg n$; מתקבלת נוסחת הנסיגה

$$T\left(2^m\right)=2T\left(2^{m/\sqrt{2}}\right)+m^2$$

נסמן $S(m)=T\left(2^m\right)$; נוסחת הנסיגה מקבלת את הצורה

$$S(m)=2S\left(m/\sqrt{2}\right)+m^2$$

$a=2, b=\sqrt{2}$, לכן $\log_b a=2$; $f(m)=m^2$. לפי משפט האב, מקרה 2 : $S(m)=\Theta(m^2\lg m)$;

לכן, פתרון הנוסחה המקורית הינו $T(n)=\Theta(\lg^2 n\cdot\lg\lg n)$

23

$$a=8,\ b=16,\ \log_b a=3/4,\ f(n)=\sqrt{n+4}=\Theta(n^{1/2})=O(n^{3/4-\varepsilon}),\ 0<\varepsilon<1/4$$

משפט האב, מקרה 1 : $T(n)=\Theta(n^{3/4})$

24

$$a=49,\ b=7,\ \log_b a=2,\ f(n)=n^2+n+1=\Theta(n^2)$$

משפט האב, מקרה 2 : $T(n)=\Theta(n^2\cdot\lg n)$

25

$$a=9,\ b=3,\ \log_b a=2,\ f(n)=n^4+1=\Theta(n^4)$$

הפונקציה $f(n)$ רגולרית (ראו את מדריך הלמידה, פרק ג')

משפט האב, מקרה 3 : $T(n)=\Theta(n^4)$

26

בעזרת עץ הרקורסיה, או בחישוב ישיר :

$$T(n)=T(n-10)+\lg n+10$$

$$T(n-10)=T(n-20)+\lg(n-10)+10$$

...

$$T(n-(\lfloor n/10\rfloor-1)\cdot 10)=T(n-(\lfloor n/10\rfloor\cdot 10)+\lg(n-(\lfloor n/10\rfloor-1)\cdot 10)+10$$

ולכן,

$$\begin{aligned}T(n)&=T(n-\lfloor n/10\rfloor\cdot 10)+\lg n+\lg(n-10)+\ldots+\lg(n-(\lfloor n/10\rfloor-1)\cdot 10)+(\lfloor n/10\rfloor-1)\cdot 10\\&=\Theta(1)+\sum_{i=1}^{\lfloor n/10\rfloor}\lg(n-(i-1)\cdot 10)+\Theta(n)\\&=\Theta(n)+\sum_{i=1}^{\lfloor n/10\rfloor}(\lg(n/10-(i-1))-\lg 10)\\&=\Theta(n)+\sum_{i=1}^{n/10}\lg i=\Theta(n\cdot\lg n)\end{aligned}$$

מחלקים את שני צידי המשוואה ב- n^3 ומקבלים:

$$\frac{T(n)}{n^3} = \frac{T(\sqrt{n})}{n\sqrt{n}} + \lg^2 n$$

מבצעים את החלפת המשתנים $n = 2^m$, $m = \lg n$; מסמנים $S(m) = \frac{T(2^m)}{2^{3m}}$ ומגיעים לנוסחת הנסיגה $S(m) = S(m/2) + m^2$. משיטת האב, מקרה 3, מתקבל הפתרון $S(m) = \Theta(m^2)$. מזה נובע $\frac{T(n)}{n^3} = \Theta(\lg^2 n)$ ופתרון הנוסחה המקורית $T(n) = \Theta(n^3 \cdot \lg^2 n)$.