

מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.

* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.

* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.

* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.
בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(6 נק') א. α, β הם פסוקים, וידוע שהפסוק $\alpha \wedge \beta$ הוא סתירה. מכאן נובע:

- [1] α הוא סתירה ו- β הוא סתירה.
- [2] בדיוק אחד משני הפסוקים α, β הוא סתירה.
- [3] התשובות הקודמות אינן נכונות, אבל לפחות אחד משני הפסוקים α, β הוא סתירה.
- [4] התשובות הקודמות אינן נכונות, אבל הפסוק α שקול לשלילתו של הפסוק β .
- [5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

(7 נק') ב. A, B הן קבוצות. f, g הן פונקציות של A ל- B .

$f : A \rightarrow B$ היא פונקציה חד-חד-ערכית שאינה על.

$g : A \rightarrow B$ היא פונקציה חד-חד-ערכית ועל.

(להסיר ספקות: זו אינה טעות, שתי הפונקציות בהן מדובר הן של A ל- B).

מכאן נובע:

- [1] $|A| = |B|$ והקבוצות A, B הן אינסופיות.
- [2] $|A| = |B|$ אבל A, B לא חייבות להיות אינסופיות.
- [3] $|A| \leq |B|$ ומהנתון לא ניתן לקבוע אם $|A| < |B|$ או $|A| = |B|$.
- [4] מצב כזה לא ייתכן – יש סתירה בנתונים.
- [5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק') ג. G הוא גרף (לא חייב להיות פשוט) על 55 צמתים, מתוכם:

20 צמתים בעלי דרגה 1, 15 צמתים בעלי דרגה 2,

10 צמתים בעלי דרגה 3, 10 צמתים בעלי דרגה 4.

מספר הקשתות ב- G הוא:

- [1] 54 [2] 60 [3] 120 [4] 240
- [5] אין די נתונים כדי לקבוע את מספר הקשתות.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

בכרך "תורת הקבוצות" בעמ' 94, שאלה 3.25א, מוכח שיחס ההכלה \subseteq הוא סדר-חלקי מעל כל קבוצה של קבוצות.

תהי $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ותהי K קבוצת כל היחסים (הרלציות) **האנטי-סימטריים** מעל A . לפי האמור, K סדורה בסדר-חלקי לגבי הכלה. השאלה מתייחסת לסדר-חלקי זה.

(7 נק') א. הראה שיש ב- K אבר קטן ביותר - מיהו? הוכח שהוא הקטן ביותר.

(10 נק') ב. מצא אבר מקסימלי ב- K . הוכח שהוא מקסימלי.

(10 נק') ג. הוכח שאין ב- K אבר גדול ביותר.

שאלה 3

מצאי את מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ בטבעיים, כאשר אף אחד מהמשתנים אינו שווה ל-3.

0 הוא מספר טבעי. כדאי לפתור בעזרת הפרדה והכלה. יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 4

יהי a_n מספר הסדרות באורך n , שאבריהן שייכים לקבוצה $\{1, 2, \dots, 8\}$, והמקיימות את התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים **זוגיים** זה בסמוך לזה.

למשל אם $n = 5$ הסדרה 11263 אינה מותרת, מכיון ש-2 מופיע ליד 6.

גם הסדרה 11223 אסורה, כי יש שתי הופעות צמודות של 2.

(10 נק') א. מצאו יחס נסיגה (יחס רקורסיה) עבור a_n . נמקו!

רשמו את a_0, a_1, a_2 . בדקו שהערך שרשמתם עבור a_0 מתאים ליחס הנסיגה שרשמתם.

(17 נק') ב. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור a_n . ביטויים כגון $\sqrt{48}$ יש

להעביר לצורה כגון $4\sqrt{3}$, ואין להציב במקומם קירובים עשרוניים כגון 6.93.

שאלה 5 בעמוד הבא

שאלה 5

תהי $A = \{1, 2, 3\}$. גרף G מוגדר כך:
קבוצת הצמתים של G היא $V = A \times A$. למשל הזוג הסדור $(2, 1)$ הוא צומת של G .
הקשתות של G : בין צומת (a, b) לצומת (c, d) יש קשת אם ורק אם $a + b \neq c + d$.
למשל יש קשת בין $(2, 1)$ לבין $(2, 2)$, ואין קשת בין $(2, 2)$ ל- $(1, 3)$.

- 5 נק' א. הוכח ש- G קשיר.
6 נק' ב. מה דרגת הצומת $(1, 1)$ ומה דרגת הצומת $(2, 3)$?
8 נק' ג. כמה קשתות יש ב- G ? הוכח.
8 נק' ד. הוכח שאין ב- G מסלול אוילר (לא מסלול אוילר פתוח ולא מעגל אוילר).

בהצלחה!