

בבחינה שני חלקים :

חלק א' : 5 שאלות במשקל של 20 נקודות כל אחת

חלק ב' : 4 שאלות במשקל של 5 נקודות כל אחת

עליך לענות על **ארבע** שאלות בחלק א'

ועל **כל** השאלות בחלק ב'.

יש לכתוב את הבחינה **בעט**.

**בהצלחה !**

## בחינה מס' 1

### חלק א'

**שאלה 1 (20 נקודות: סעיף א' - 15 נק'; סעיף ב' - 5 נק')**  
גנב פורץ לחנות של חפצי אמנות ומוצא בה את הפריטים הבאים:

פריט	משקל (בק"ג)	ערך (באלפי ש"ח)
1	5	30
2	8	40
3	3	20
4	7	25
5	4	35

הגנב רוצה להביא למקסימום את שווי השלל, אך הוא יכול לסחוב לכל היותר 15 ק"ג.  
אילו פריטים הגנב צריך לקחת?

א. פתור את הבעיה באמצעות אלגוריתם תכנון דינמי.

שרטט את הטבלה המתקבלת והראה איך ניתן למצוא מתוך הטבלה את הפריטים שהגנב ייקח. (הערה: אין צורך לכתוב את האלגוריתם.)

ב. הראה שאלגוריתם חמדני לא יצליח למצוא במקרה זה את הפתרון האופטימלי.

**שאלה 2 (20 נקודות: סעיף א' - 10 נק'; סעיפים ב', ג' - 5 נק' לכל אחד)**

מספר שלם  $x$  נקרא **מספר מושלם**, אם סכום המחלקים של  $x$  שווה ל- $x$ .

למשל, 28 הוא מספר מושלם, מפני שהמספרים המחלקים את 28 הם 1, 2, 4, 7, 14 ו- $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ .

נדון בבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: מספר שלם  $x$ .

השאלה: האם  $x$  הוא מספר מושלם?

א. כתוב אלגוריתם לפתרון הבעיה.

ב. מהי סיבוכיות הזמן של האלגוריתם?

האם סיבוכיות הזמן היא פולינומיאלית בגודל הקלט? הסבר את תשובתך.

ג. האם לדעתך הבעיה שייכת ל-NP? נמק.

שאלה 3 (20 נקודות: סעיף א' - 4 נק'; סעיף ב' - 16 נק')

קליק (clique) בגרף  $G = (V, E)$  הוא תת-קבוצה  $V'$  של  $V$ , כך שכל שני צמתים ב- $V'$  מחוברים על-ידי קשת ב- $E$ .

בעיית הקליק היא הבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: גרף בלתי מכוון  $G = (V, E)$  ומספר חיובי שלם  $k$  ( $k \leq |V|$ ).

השאלה: האם יש ב- $G$  קליק בגודל  $k$ ?

נגדיר את הבעיה המשלימה לבעיית הקליק (להלן - בעיית ה-clique):

הקלט לבעיה: גרף בלתי מכוון  $G = (V, E)$  ומספר חיובי שלם  $k$  ( $k \leq |V|$ ).

השאלה: האם אין ב- $G$  קליק בגודל  $k$ ?

א. ציין לפחות שתי מחלקות סיבוכיות, שבעיית ה-clique שייכת אליהן.

ב. סטודנט למדעי המחשב (שנה א') הציע את הרדוקציה הבאה מהבעיה של צביעת גרף בשלושה

צבעים לבעיית ה-clique: בהינתן גרף  $G$  שהוא הקלט לבעיה של צביעת גרף בשלושה צבעים,

הקלט המתאים לבעיית ה-clique יהיה אותו גרף  $G$  והמספר 4.

האם הרדוקציה נכונה? הוכח את תשובתך.

שאלה 4 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

א. נתונה בעיית הכרעה  $Q$ , שקלטיה הם מספרים שלמים חיוביים.

בידנו אלגוריתם  $A$  לפתרון הבעיה, ואנו רוצים להוכיח את נכונותו. ידוע שהאלגוריתם נכון

חלקית לכל קלט חוקי. כמו-כן, בידנו הוכחה שהאלגוריתם עוצר על כל הקלטים הגדולים או

שווים ל-1000, אך לא הצלחנו להרחיב את ההוכחה גם לקלטים הקטנים מ-1000.

האם ניתן להוכיח את נכונותו המלאה של האלגוריתם באמצעות הרצות של האלגוריתם על

הקלטים הקטנים מ-1000? הסבר את תשובתך.

ב. האם הבעיה  $Q$  היא בהכרח כריעה? נמק.

שאלה 5 (20 נקודות: סעיפים א', ב' - 4 נק' לכל אחד; סעיף ג' - 12 נק')

א. הסבר מדוע האלגוריתם לבדיקת ראשוניות המתואר בספר הוא אלגוריתם מונטה-קרלו.

ב. ידוע שקיים אלגוריתם מהיר לבדיקת ראשוניות בעל התכונה הבאה:

אם התשובה שהאלגוריתם מחזיר היא "כן" (כלומר, המספר הנבדק הוא ראשוני), אז זו בטוח

התשובה הנכונה; אם התשובה שהאלגוריתם מחזיר היא "לא" (כלומר, המספר הנבדק איננו

ראשוני), אז זו התשובה הנכונה בהסתברות  $1 - 1/2^{200}$ .

מהו ההבדל בין אלגוריתם זה לאלגוריתם המתואר בספר? האם אלגוריתם זה הוא גם כן מסוג

מונטה-קרלו?

ג. תאר אלגוריתם לאס-וגאס לפתרון בעיית הראשוניות

(הנח שעומד לרשותך האלגוריתם מסעיף ב').

## חלק ב'

סמן בכל אחת מהשאלות הבאות את התשובה שנראית לך הנכונה ביותר.  
הוסף נימוק קצר של שורה אחת לכל היותר :

### שאלה 1 (5 נקודות)

איזו מהבעיות הבאות היא יוצאת דופן?

- א. מציאת עץ פורש מינימלי
- ב. מיון רשימת מספרים
- ג. חיפוש ברשימה ממוינת
- ד. חיפוש ברשימה לא ממוינת

### שאלה 2 (5 נקודות)

איזו מהטענות הבאות היא יוצאת דופן?

- א.  $P = NP$
- ב.  $NP = co-NP$
- ג.  $IP = PSPACE$
- ד.  $RP = NP$

### שאלה 3 (5 נקודות)

איזו מהבעיות הבאות היא יוצאת דופן?

- א. בעיית התאמת המילים
- ב. בעיית נחש הדומינו במחצית המישור העליונה
- ג. בעיית העצירה
- ד. בעיית האימות

### שאלה 4 (5 נקודות)

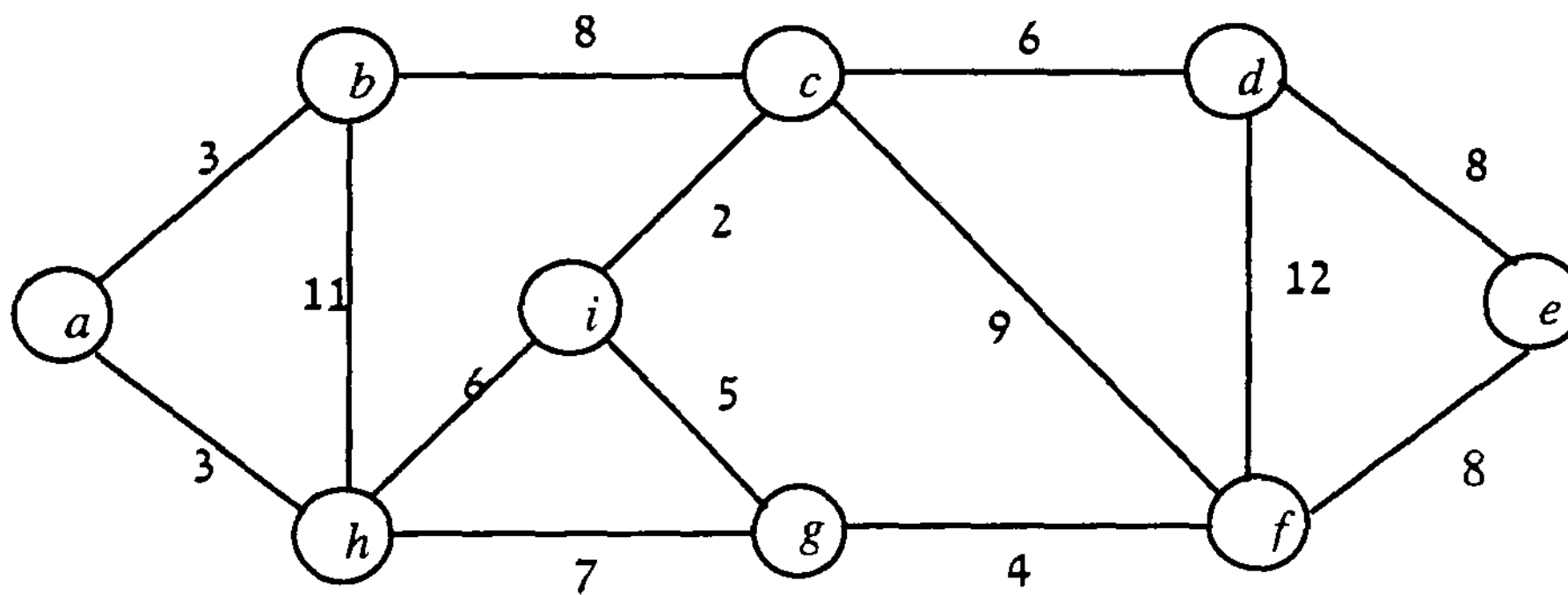
איזה מהמודלים החישוביים הבאים הוא יוצא דופן?

- א. מכונת טיורינג בעלת סרט אינסופי חד-כיווני
- ב. מכונת טיורינג שבה הראש הקורא-כותב יכול לנוע רק לכיוון אחד
- ג. מכונת טיורינג בעלת שני סרטים
- ד. מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית

## בחינה מספר 2

### חלק א'

שאלה 1 (20 נקודות: סעיף א' - 10 נק'; סעיפים ב', ג' - 5 נק' לכל אחד)  
שאלה זו מתייחסת לאלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי המתואר בספר.  
א. הרץ את האלגוריתם על הגרף הבא וצייר את העץ הפורש שמתקבל:



- ב. נסמן ב- $N$  את מספר הקשתות בגרף  $G$ . הסבר מדוע זמן הריצה של האלגוריתם הוא  $O(N^2)$ .  
ג. נניח שאם בשלב מסוים ניתן להוסיף לעץ יותר מקשת אחת (כלומר, מבין הקשתות שניתן להוסיף לעץ יש כמה קשתות זולות ביותר), האלגוריתם יבחר את אחת הקשתות באופן אקראי ויצרף אותה לעץ.  
יהא  $G$  גרף, שבו יש יותר מעץ פורש מינימלי אחד. יהא  $T$  עץ פורש מינימלי מסוים של  $G$ .  
הוכח שקיימת ריצה של האלגוריתם, כך שהעץ הפורש המינימלי שיוחזר יהיה  $T$ .

שאלה 2 (20 נקודות: סעיף א' - 15 נק'; סעיף ב' - 5 נק')

- א. כתוב אלגוריתם, המקבל מספר שלם  $x$  ומחשב את סכום הספרות של  $x$ .  
למשל, אם  $x = 3475$ , אז התשובה שהאלגוריתם יחזיר היא 19.  
ב. מהי סיבוכיות הזמן של האלגוריתם?  
האם סיבוכיות הזמן היא פולינומיאלית בגודל הקלט? הסבר את תשובתך.

שאלה 3 (20 נקודות)

- בעיית המעגל ההמילטוני היא הבעיה הבאה:  
הקלט לבעיה: גרף  $G = (V, E)$ .  
השאלה: האם יש ב- $G$  מעגל המילטוני?

הוכח שבעיית המעגל ההמילטוני היא שלמה ב-NP.

**שאלה 4 (20 נקודות: 4 נק' לכל סעיף)**

הוכח או הפרך:

- א. כל בעיה בעלת מספר סופי של קלטים היא כריעה.
- ב. כל בעיה בעלת מספר אינסופי של קלטים היא בלתי כריעה.
- ג. אם בבעיית התאמת המילים נתון שהא"ב הוא בגודל 1, אז הבעיה היא כריעה.
- ד. לכל בעיה כריעה יש אישורים דו-כיווניים (כלומר, גם כאשר התשובה של הבעיה על קלט מסוים היא "כן" וגם כאשר התשובה היא "לא" - יש לכך אישור שניתן לבדיקה בזמן סופי).
- ה. לא קיימת רדוקציה מבעיית הריצוף לבעיית הטוטליות.

**שאלה 5 (20 נקודות: סעיף א' - 8 נק'; סעיף ב' - 12 נק')**

- כידוע, כדי שאדם יוכל להשתמש במערכת ההצפנה RSA, עליו לפרסם את המפתח הציבורי שלו (ה"מנעול"), או להפיץ אותו בין המשתמשים האחרים.
- א. נניח שמנגנון פרסום המפתחות הציבוריים מתנהל ללא פיקוח, וכל אדם יכול להודיע ברבים, ש- "המפתח הציבורי של  $x$  הוא  $(Publ_x, Prod_x)$ ".
  - ב. בועז הוא משתמש במערכת RSA. הראה כיצד בועז יכול לשלוח הודעות בשם איה.
  - ג. אחד הפתרונות האפשריים לבעיה המוזכרת בסעיף א' הוא להקים רשות מוסמכת, שתהיה אחראית על המפתחות הציבוריים. כל משתמש חדש יצטרך לפנות לרשות המוסמכת ולקבל ממנה אישור מתאים. לרשות המוסמכת יהיה גם כן מפתח-ציבורי, שיהיה ידוע לכולם. למשל, נניח שאיה רוצה להתחיל להשתמש במערכת RSA. איה תפנה לרשות המוסמכת, תמסור לה את זוג המספרים  $Publ_A, Prod_A$  ואז היא תקבל מהרשות המוסמכת הודעה **חתומה**, הקובעת כי "המפתח הציבורי של איה הוא  $(Publ_A, Prod_A)$ ".
  - ד. נניח כעת, שאיה רוצה לשלוח הודעה חתומה לגליה, חברתה הטובה. מה איה צריכה לעשות, כדי שגליה תוכל לקרוא את ההודעה, ולהשתכנע בכך שהחתימה על ההודעה היא אמיתית? מה גליה תצטרך לעשות מצידה?

## חלק ב'

סמן בכל אחת מהשאלות הבאות את התשובה שנראית לך הנכונה ביותר.  
הוסף נימוק קצר של שורה אחת לכל היותר :

### שאלה 1 (5 נקודות)

איזו מהבעיות הבאות היא יוצאת דופן?

- א. בעיית המסלול הקצר ביותר
- ב. בעיית המסלול האוילריאני
- ג. בעיית המסלול ההמילטוני
- ד. בעיית העץ הפורש המינימלי

### שאלה 2 (5 נקודות)

איזו מהטענות הבאות היא יוצאת דופן?

- א.  $NP \cap co-NP = \emptyset$
- ב.  $P \cap NP \neq \emptyset$
- ג.  $NP \subseteq PSPACE$
- ד.  $IP = PSPACE$

### שאלה 3 (5 נקודות)

נניח שאיה רוצה לחתום על הודעה ולשלוח את ההודעה החתומה לבועז מבלי להצפין אותה.  
איזה תנאי צריך להתקיים כדי שאיה תוכל לעשות זאת?

- א.  $Encr_A(Decr_A(M)) = M$
- ב.  $Decr_B(Encr_B(M)) = M$
- ג. תשובות א' ו-ב' נכונות
- ד. אי אפשר לשלוח הודעה חתומה מבלי להצפין אותה

### שאלה 4 (5 נקודות)

מטרתו של מבחן טיורינג היא :

- א. לבדוק האם תכנית מחשב היא נכונה
- ב. לבדוק האם תכנית מחשב היא נכונה
- ג. לבדוק האם שתי תכניות מחשב הן זהות
- ד. לבדוק האם כוח החישוב של מכונת טיורינג שקול לכוח החישוב של מחשב אישי

### בחינה מספר 3

#### חלק א'

שאלה 1 (20 נקודות: סעיף א' - 5 נק'; סעיף ב' - 5 נק'; סעיף ג' - 10 נק')

רשימת המשכורות החודשיות של העובדים בקונצרן "כור" שמורה בווקטור  $V$  באורך  $n$ . מנהל הכספים של הקונצרן התבקש לבדוק, אם היחס בין המשכורת הגבוהה ביותר ברשימה למשכורת הנמוכה ביותר ברשימה גדול מ-100.

סטודנט למדעי המחשב (שנה א') הציע את האלגוריתם הבא לפתרון הבעיה:

(1) בצע את הפעולות הבאות  $n - 1$  פעמים:

$$x \leftarrow 1 \quad (1.1)$$

(1.2) כל עוד  $x < n$ , בצע את הפעולות הבאות:

(1.2.1) אם  $V[x + 1] < V[x]$  אז החלף ביניהם

$$x \leftarrow x + 1 \quad (1.2.2)$$

(2) אם  $V[n] / V[1] > 100$  אז הדפס: "יחס גדול מ-100".

(3) אחרת הדפס: "הכל בסדר".

א. מהו מספר ההחלפות שיבצע האלגוריתם במקרה הגרוע ובמקרה הטוב?

מהו מספר ההשוואות שיתבצעו בכל אחד מהמקרים?

ב. בצע שינוי קל באלגוריתם, כך שמספר ההשוואות המבוצעות יקטן בכ-50%.

ג. כתוב אלגוריתם איטרטיבי יעיל ככל האפשר, שזמן הריצה שלו טוב יותר (בסדר גודל) מהאלגוריתם המוצע.

חשב את המספר המדויק של ההשוואות שמבצע האלגוריתם שכתבת.

שאלה 2 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

א. כתוב אלגוריתם רקורסיבי, המקבל שני מספרים טבעיים  $x$  ו- $y$  ומחשב את מכפלתם באמצעות שימוש בפעולות חיבור, חיסור והשוואה בלבד.

ב. הוכח את נכונותו המלאה של האלגוריתם שכתבת.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתונה הבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: גרף  $G = (V, E)$  ומספר טבעי  $k$ .

השאלה: האם קיים עץ פורש של  $G$  בעל  $k$  עלים לכל היותר?

הוכח שהבעיה שלמה ב-NP. (רמז: השתמש ברדוקציה מבעיית המסלול ההמילטוני.)



**שאלה 4 (20 נקודות)**

בנה מכונת טיורינג, אשר מקבלת מספר בינרי  $x$  ומוסיפה לו 2.  
צייר את תרשים המעברים המתאים, והסבר את דרך פעולתה של המכונה.  
פרט גם את תפקידו של כל אחד ממצבי המכונה.

**שאלה 5 (20 נקודות: סעיף א' - 5 נקודות; סעיף ב' - 15 נק')**

נתון מערך  $A$  בגודל  $n$ . ידוע שהמקסימום מופיע במערך לפחות  $n/2$  פעמים.

א. כתוב אלגוריתם דטרמיניסטי למציאת המקסימום במערך.

מהי סיבוכיות הזמן של האלגוריתם?

ב. תאר אלגוריתם אקראי מסוג מונטה קרלו למציאת המקסימום במערך. נדרש שהסיכוי לטעות

יהיה קטן מ-  $1/1000$ .

## חלק ב'

סמן בכל אחת מהשאלות הבאות את התשובה שנראית לך הנכונה ביותר.  
הוסף נימוק קצר של שורה אחת לכל היותר :

### שאלה 1 (5 נקודות)

איזו מהבעיות הבאות היא יוצאת דופן?

- א. בעיית מגדלי האנוי
- ב. בעיית מחסום הדרכים
- ג. בעיית הספיקות של פסוק בלוגיקה פסוקית דינמית
- ד. בעיית הספיקות של פסוק באריתמטיקת פרסבורגר

### שאלה 2 (5 נקודות)

נניח שהוכח כי  $P = NP$ . איזו מהטענות הבאות תהיה במקרה זה יוצאת דופן?

- א.  $NP = co-NP$
- ב.  $P \cap NPC \neq \emptyset$
- ג. בעיית לוח הזמנים שייכת ל-P
- ד. בעיית הסוכן הנוסע אינה שייכת ל-P

### שאלה 3 (5 נקודות)

איזה מהמשפטים הבאים מתאר הנחה, שעליה מבוססת מערכת הצפנה באמצעות מפתח ציבורי?

- א. קיימת פונקצית מלכודת חד-כיוונית
- ב. לא קיימת פונקצית מלכודת חד-כיוונית
- ג. קל למצוא מספר ראשוני גדול
- ד. קשה לפרק מספר נתון לגורמים ראשוניים

### שאלה 4 (5 נקודות)

אילו מתוכניות המחשב הבאות היא יוצאת דופן?

- א. תוכנית לזיהוי כתב-יד
- ב. תוכנית תרגום
- ג. תוכנית לבקרת טיסה
- ד. מערכת מומחה

## בחינה מספר 4

### חלק א'

**שאלה 1 (20 נקודות: סעיף א' - 5 נק'; סעיף ב' - 10 נק'; סעיף ג' - 5 נק')**

נתונה רשימת המשכורות החודשיות של  $n$  העובדים הבכירים בבנק הפועלים. (עקב מגבלות של ייצוג מספרים גדולים במחשב, הרשימה אינה כוללת משכורות של יותר ממיליון ש"ח). ברצוננו למצוא את המשכורת הגבוהה ביותר ברשימה.

א. מהו החסם התחתון לבעיה? נמק את תשובתך.

ב. כתוב אלגוריתם לפתרון הבעיה המשתמש בשיטת הפרד ומשול.

ג. כתוב נוסחת נסיגה, המתארת את זמן הריצה של האלגוריתם. (אין צורך לפתור את נוסחת הנסיגה).

**שאלה 2 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)**

א. כתוב אלגוריתם איטרטיבי, המקבל מספר שלם  $x$  ומחשב את  $x \bmod 2$ .

מותר לאלגוריתם להשתמש בשלושה סוגי פעולות בלבד: חיבור, חיסור והשוואה.

ב. הוכח את נכונותו המלאה של האלגוריתם שכתבת.

**שאלה 3 (20 נקודות)**

נתונה הבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: גרף  $G = (V, E)$  ומספר טבעי  $k$ .

השאלה: האם יש ב- $G$  **לפחות** שני קליקים בגודל  $k$ ?

הוכח שהבעיה שלמה ב-NP.

**שאלה 4 (20 נקודות)**

בנה מכונת טיורינג, אשר מקבלת מספר בינרי  $x$  ( $x > 1$ ) ומחסירה ממנו 2.

צייר את תרשים המעברים המתאים, והסבר את דרך פעולתה של המכונה.

פרט גם את תפקידו של כל אחד ממצבי המכונה.

שאלה 5 (20 נקודות: סעיף א' - 15 נקודות; סעיף ב' - 5 נקודות)

נתונה רשימה מקושרת  $L$  באורך  $n$ . לכל איבר ברשימה יש שני שדות נלווים:

שדה בשם  $next$  המכיל מצביע לאיבר הבא ברשימה, ושדה בשם  $dist$ .

להלן נתון אלגוריתם מקבילי, המחשב לכל איבר  $x$  ברשימה  $L$  את  $dist(x)$ :

(1) לכל איבר  $i$  ב- $L$  בצע במקביל:

(1.1) אם  $next(i) = nil$  אז  $dist(i) \leftarrow 0$

(1.2) אחרת  $dist(i) \leftarrow 1$

(2) כל עוד קיים ב- $L$  איבר  $x$  כך ש- $next(x) \neq nil$  בצע:

(2.1) לכל איבר  $i$  ב- $L$  בצע במקביל:

(2.1.1) אם  $next(i) \neq nil$  אז בצע:

(2.1.1.1)  $dist(i) \leftarrow dist(i) + dist(next(i))$

(2.1.1.2)  $next(i) \leftarrow next(next(i))$

(3) חזור.

א. הדגם את פעולת האלגוריתם על רשימה באורך 8.

מה מבצע האלגוריתם? (כלומר, מהו הערך שיהיה רשום בשדה  $dist(x)$  של האיבר  $x$  בסוף

האלגוריתם?)

ב. נתח את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם.

## חלק ב'

סמן בכל אחת מהשאלות הבאות את התשובה שנראית לך הנכונה ביותר.  
הוסף נימוק קצר של שורה אחת לכל היותר:

### שאלה 1 (5 נקודות)

איזו מהבעיות הבאות היא יוצאת דופן?

- א. בעיית שיבוץ הקופים
- ב. בעיית הספיקות של פסוק בתחשיב הפסוקים
- ג. בעיית הפירוק לגורמים
- ד. בעיית לוח הזמנים

### שאלה 2 (5 נקודות)

נניח שהוכח כי  $P \neq NP$ . איזו מהטענות הבאות תהיה במקרה זה יוצאת דופן?

- א.  $NP \neq co-NP$
- ב.  $P \cap NPC = \emptyset$
- ג. אין רדוקציה פולינומיאלית מבעיית שיבוץ הקופים לבעיית המסלול האוילריאני
- ד. בעיית הסוכן הנוסע אינה שייכת ל-P

### שאלה 3 (5 נקודות)

נניח שאיה רוצה לחתום על הודעה ולשלוח אותה לבעו. מה צריכה איה לעשות?

- א. להפעיל על ההודעה את  $Encr_A$  ואח"כ את  $Decr_B$
- ב. להפעיל על ההודעה את  $Decr_B$  ואח"כ את  $Encr_A$
- ג. להפעיל על ההודעה את  $Decr_A$  ואח"כ את  $Encr_B$
- ד. להפעיל על ההודעה את  $Encr_B$  ואח"כ את  $Decr_A$

### שאלה 4 (5 נקודות)

תוכנת שחמט יכולה לשפר את איכות משחקה ע"י:

- א. בדיקת כל ההסתעפויות האפשריות בכל מצב לוח נתון
- ב. שיפור פונקציית ההערכה של מצבי הלוח
- ג. פיתוח דמיון ואינטואיציה
- ד. כל התשובות נכונות

## בחינה מספר 5

### חלק א'

שאלה 1 (20 נקודות: סעיפים א', ב' - 5 נק' לכל אחד; סעיף ג' - 10 נק')  
כיסוי ע"י צמתים (vertex cover) של גרף בלתי מכוון  $G = (V, E)$  הוא תת-קבוצה  $V' \subseteq V$  של צמתים, כך שלכל  $(u, v) \in E$  או  $u \in V'$  או  $v \in V'$  (או שניהם). כלומר, כל צומת "מכסה" את הקשתות הנוגעות בו, וכיסוי של  $G$  ע"י צמתים הוא קבוצת צמתים שמכסה את כל הקשתות ב- $E$ . הגודל של כיסוי ע"י צמתים הוא מספר הצמתים בכיסוי. בהינתן גרף  $G = (V, E)$ , ברצוננו למצוא כיסוי ע"י צמתים של  $G$  שגודלו מינימלי. להלן אלגוריתם לפתרון הבעיה:

$$V' \leftarrow \emptyset \quad (1)$$

(2) כל עוד  $E \neq \emptyset$  בצע:

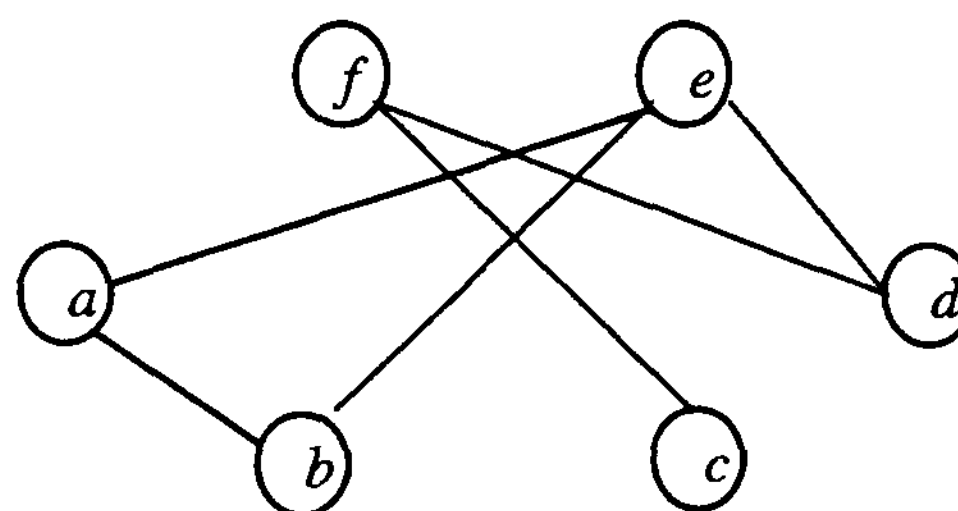
(2.1) בחר צומת  $u$  ב- $V$  שדרגתו (בגרף הנוכחי) מקסימלית

(2.2) הוסף את  $u$  ל- $V'$

(2.3) הוצא מ- $E$  את כל הקשתות הנוגעות ב- $u$

(3) החזר את  $V'$ .

- א. מהי השיטה האלגוריתמית שבה האלגוריתם משתמש? נמק את תשובתך.  
ב. הדגם את אופן פעולת האלגוריתם על הגרף הבא:



ג. תן דוגמה פשוטה, המוכיחה שהאלגוריתם המתואר לעיל לא תמיד מוצא את הפתרון האופטימלי.

**שאלה 2 (20 נקודות: סעיף א' - 5 נק'; סעיף ב' - 15 נק')**

נתון ווקטור  $A$  המכיל  $n$  מספרים שונים זה מזה. ידוע שהווקטור היה ממוין בסדר עולה, אך וירוס זדוני שהשתלט על המחשב הזיז כל אחד מהאיברים ב- $k$  מקומות ימינה באופן מעגלי ( $0 < k < n$ ). למשל, אם  $k = 3$ , אז הווקטור:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	15	19	28	31	36	44	68	71	85

יהפוך להיות:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
68	71	85	12	15	19	28	31	36	44

- בהנחה ש- $k$  ידוע - באיזה אינדקס בווקטור נמצא האיבר המקסימלי?
- בהנחה ש- $k$  אינו ידוע - כתוב אלגוריתם המוצא את האיבר המקסימלי של  $A$  בזמן  $O(\log n)$ . הסבר בקצרה את אופן הפעולה של האלגוריתם.

**שאלה 3 (20 נקודות)**

נתון אוסף של  $n$  פריטים. לפריט  $i$  יש משקל  $v_i$ . כמו-כן נתונים  $B$  תאים ומספר טבעי  $K$ . ברצוננו לדעת, אם ניתן להכניס את כל הפריטים לתאים, כך שמשקל הפריטים בכל תא לא יעלה על  $K$  (בעיה זו נקראת בעיית ה-Bin Packing). הוכח שהבעיה שלמה ב-NP. רמז: ניתן לבצע רדוקציה מבעיית החלוקה.

**שאלה 4 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)**

נדון בשתי הגרסאות הבאות של בעיית העצירה:

א. הקלט לבעיה: תכנית  $Q$ .

השאלה: האם  $Q$  לא עוצרת על אף קלט?

ב. הקלט לבעיה: תכנית  $Q$ .

השאלה: האם  $Q$  עוצרת על הקלט  $x = 7$ ?

קבע עבור כל אחת מהבעיות אם היא כריעה או לא. הוכח את תשובותיך.

**שאלה 5 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)**

א. נתון מספר טבעי  $n$ . כתוב אלגוריתם מקבילי מהיר ככל האפשר לחישוב  $n!$ .

הנח שעומד לרשותך מספר בלתי מוגבל של מעבדים.

ב. נתח את סיבוכיות הזמן המקבילית של האלגוריתם שכתבת.

מהו מספר המעבדים שבו משתמש האלגוריתם? מהי סיבוכיות המכפלה של האלגוריתם?

## חלק ב'

בחר בכל אחת מהשאלות הבאות את התשובה שנראית לך הנכונה ביותר.  
כתוב את התשובה במחברת הבחינה והוסף נימוק קצר של שתי שורות לכל היותר:

### שאלה 1 (5 נקודות)

איזו מהבעיות הבאות היא יוצאת דופן?

- א. מציאת עץ פורש מינימלי
- ב. מציאת מסלול קצר ביותר בין שני צמתים בגרף
- ג. מציאת מסלול המילטוני
- ד. מציאת מסלול אוילריאני

### שאלה 2 (5 נקודות)

נניח שהוכח כי  $P \neq NP$ . מה יהיה ניתן להסיק מכך?

- א.  $NP \neq co-NP$
- ב. כל הבעיות השייכות ל-NPC דורשות זמן על-פולינומיאלי
- ג. בעיית המסלול הקצר ביותר אינה שייכת ל-P
- ד. בעיית הראשוניות אינה שייכת ל-P

### שאלה 3 (5 נקודות)

עבור איזו מהמכונות הבאות ידוע, כי גרסתה הלא דטרמיניסטית מסוגלת להכריע מחלקה רחבה יותר של בעיות מאשר גרסתה הדטרמיניסטית?

- א. אוטומט סופי
- ב. אוטומט מחסנית סופי
- ג. מכונת טיורינג שזמן ריצתה פולינומיאלי
- ד. מכונת טיורינג שאינה מוגבלת בזמן

### שאלה 4 (5 נקודות)

נניח שבועז רוצה לקרוא הודעה חתומה שנשלחה אליו ע"י איה. מה צריך בועז לעשות ?

- א. להפעיל על ההודעה את  $Encr_A$  ואח"כ את  $Decr_B$
- ב. להפעיל על ההודעה את  $Decr_B$  ואח"כ את  $Encr_A$
- ג. להפעיל על ההודעה את  $Decr_A$  ואח"כ את  $Encr_B$
- ד. להפעיל על ההודעה את  $Encr_B$  ואח"כ את  $Decr_A$



## בחינה מספר 6

### חלק א'

שאלה 1 (20 נקודות: סעיף א' - 10 נק'; סעיפים ב', ג' - 5 נק' לכל אחד)

- תהי  $L$  שפה מעל הא"ב  $\{a, b\}$ . כלומר, המילים ב- $L$  מורכבות מהאותיות  $a$  ו- $b$ . נסמן ב- $f(n)$  את מספר המילים ב- $L$  באורך  $n$ , שאין בהן שני  $b$ -ים רצופים.
- א. כתוב נוסחה רקורסיבית לחישוב  $f(n)$ . רמז: ניתן לחלק את המילים ב- $L$  לשתי קבוצות: מילים המתחילות ב- $a$  ומילים המתחילות ב- $b$ .
- ב. כתוב אלגוריתם רקורסיבי לחישוב  $f(n)$ .
- ג. כתוב אלגוריתם תכנון דינמי לחישוב  $f(n)$ , וחשב באמצעותו את  $f(8)$ .

שאלה 2 (20 נקודות)

חברת ה- $start-up$  שבה עבד יוסי נסגרה לאחרונה. כדי לפנות לביטוח הלאומי בדרישה לקבלת דמי אבטלה, יוסי היה צריך למצוא את ששת תלושי המשכורת האחרונים שלו. בהזדמנות זו, יוסי החליט למיין את כל תלושי המשכורת שלו לפי הזמן, החל מהחודש הראשון לעבודתו ועד לחודש האחרון. יוסי שם לב לכך, שסדרת המשכורות שהתקבלה היא סדרה עולה-יורדת. כלומר, הסדרה עולה בצורה מונוטונית עד לנקודה מסוימת, וממנה והלאה היא יורדת בצורה מונוטונית. למשל, הסדרה הבאה (משמאל לימין) היא עולה-יורדת: 4, 10, 16, 21, 23, 18, 14, 12, 11, 9, 6. בלשכת העבודה יוסי פגש את דני, חברו הטוב (מנהל הפיתוח לשעבר). יוסי הראה לדני את תלושי המשכורת שלו וסיפר לו על התופעה המעניינת שגילה. דני שאל את יוסי מהי המשכורת הגבוהה ביותר שהוא קיבל. יוסי השיב כי אינו זוכר, אך טען כי ניתן למצוא את המשכורת המקסימלית בסדרת המשכורות בצורה יעילה. האם יוסי צודק?

כתוב אלגוריתם מהיר ככל האפשר המקבל סדרת מספרים עולה-יורדת באורך  $n$ , ומחזיר את המספר המקסימלי בסדרה. נתח את זמן הריצה של האלגוריתם.

שאלה 3 (20 נקודות: סעיף א' - 5 נק'; סעיף ב' - 15 נק')

- צביעה חוקית של גרף היא צביעה של צמתי הגרף, כך שאין צמתים שכנים הצבועים באותו צבע. נדון בבעיית הצביעה הבאה (להלן - בעיית הצביעה המאוזנת):
- הקלט לבעיה: גרף  $G = (V, E)$  בעל  $n$  צמתים ( $n = 3k$ )
- השאלה: האם ניתן לצבוע את  $G$  בשלושה צבעים (צביעה חוקית), כך שבדיוק  $n/3$  צמתים יהיו צבועים בכל אחד מהצבעים?
- א. הוכח שהבעיה שייכת ל-NP.
- ב. נתאר רדוקציה מהבעיה של צביעת גרף בשלושה צבעים לבעיה הנדונה:
- בהינתן גרף  $G = (V, E)$  המהווה קלט לבעיית הצביעה בשלושה צבעים, הקלט  $G'$  לבעיית הצביעה המאוזנת יהיה עותק של הגרף  $G$  ועוד  $2|V|$  צמתים בודדים (צמתים שדרגתם 0).

הוכח שהרדוקציה נכונה. (כלומר, יש להראות שהתשובה לבעיית הצביעה בשלושה צבעים

עבור  $G$  היא "כן" אם ורק אם התשובה לבעיית הצביעה המאוזנת עבור  $G'$  היא "כן").

מה ניתן להסיק מסעיפים א' ו-ב' ?

#### שאלה 4 (20 נקודות)

נדון בגרסה הבאה של מכונת טיורינג: בגרסה זו יש למכונה שני סרטים. לכל אחד מהסרטים יש ראש קורא-כותב משלו. המעברים מתבססים על שני הסימנים שרואים שני הראשים בו-זמנית. כלומר, בהינתן מצב מסוים שבו נמצאת המכונה ובהינתן שני הסימנים שקוראים שני הראשים, המעבר המתאים בתרשים המעברים יקבע לאיזה מצב המכונה תעבור, איזה סימן חדש ייכתב על כל אחד מהסרטים ולאיזה כיוון יזוז כל אחד מהראשים.

מעבר של המכונה יסומן כך:  $(q, \sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (q', \sigma'_1, \sigma'_2, L/R, L/R)$ .

עליך לתכנן מכונה, שמקבלת כקלט שני מספרים בינריים ומבצעת חיבור של שני המספרים. המספר הראשון מופיע על גבי הסרט הראשון והמספר השני מופיע על גבי הסרט השני. הנח שהראש הקורא-כותב של כל סרט ממוקם בהתחלה מול הסימן # שמשמאל למספר. מותר להניח ששני המספרים שווים באורכם. תוצאת החישוב תיכתב על גבי הסרט הראשון, והראש הקורא-כותב יעמוד בתום החישוב מול הסימן # שמשמאל לפלט. הסרט השני יהיה ריק. שרטט את תרשים המעברים המתאים, והסבר בקצרה את דרך פעולתה של המכונה.

#### שאלה 5 (20 נקודות: סעיף א' - 5 נק'; סעיף ב' - 15 נק')

איה ובעז מנהלים ביניהם צ'ט דרך רשת האינטרנט.

איה כותבת לבעז, שהיא מרגישה שהם "משדרים על אותו גל" ושיש ביניהם טלפתיה.

היא מציעה לבעז לבדוק את השערתה באמצעות הפרוטוקול הבא:

- (1) איה תחשוב על מספר כלשהו (שלם) שבין 1 ל-10.
  - (2) בעז ינסה לקלוט (דרך האינטרנט) את מחשבותיה של איה ויחשוב גם כן על מספר בין 1 ל-10.
  - (3) בעז ישלח לאיה את המספר שעליו הוא חשב.
  - (4) איה תגלה לבעז מהו המספר שעליו היא חשבה, וכך יתברר אם שניהם אכן חשבו על אותו מספר.
- א. הסבר מדוע הפרוטוקול אינו בטוח (כלומר, הראה שאחד המשתתפים בפרוטוקול יכול לרמות, ואז תוצאת הפרוטוקול תהיה מנוגדת למצב הדברים האמיתיים).
- ב. כתוב פרוטוקול חדש, שלא יאפשר למשתתפים בו לרמות.
- מותר להשתמש בהנחות הבאות:
1. קיימת פונקציה מלכודת חד-כיוונית  $f$  הידועה לאיה ולבעז.
  2. ניתן לחלק את התחום של  $f$  לעשרה תת-תחומים  $M_1, \dots, M_{10}$  שווים בגודלם, כך שבהינתן  $f(x)$  לא ניתן לגלות בזמן סביר לאיזה תת-תחום  $x$  שייך.
- הסבר מדוע הפרוטוקול החדש הוא בטוח.

## חלק ב'

סמן בכל אחת מהשאלות הבאות את התשובה שנראית לך הנכונה ביותר.  
הוסף נימוק קצר של שתי שורות לכל היותר:

### שאלה 1 (5 נקודות)

איזו מהבעיות הבאות היא יוצאת דופן?

- א. בעיית העצירה
- ב. בעיית הטוטליות
- ג. בעיית האימות של תכניות
- ד. בעיית האימות של נוסחאות באריתמטיקה מסדר ראשון

### שאלה 2 (5 נקודות)

נניח שיש רדוקציה פולינומיאלית מבעיה B לבעיה A, וידוע שבעיה A שייכת ל-NP.  
מה ניתן להסיק מכך על בעיה B?

- א. B גם-כן שייכת ל-NP
- ב. B שייכת ל-NPC
- ג. B אינה שייכת ל-NPC
- ד. B אינה שייכת ל-P

### שאלה 3 (5 נקודות)

נניח שהוכח כי  $P = NP$ . מה לא יהיה ניתן להסיק מכך?

- א.  $NP \cap NPC \neq \emptyset$
- ב.  $NP = co-NP$
- ג. ניתן לפתור את בעיית מגדלי האנוי בזמן פולינומיאלי
- ד. ניתן לפתור את בעיית שיבוץ הקופים בזמן פולינומיאלי

### שאלה 4 (5 נקודות)

העבודה (work) שמבצע אלגוריתם מקבילי מוגדרת ע"י הביטוי  $\sum_i w(p_i)$ , כאשר  $w(p_i)$  הוא

מספר הפעולות שמבצע המעבד  $p_i$  במהלך האלגוריתם (כלומר, העבודה שווה לסכום הפעולות שמבצעים כל המעבדים). יהא A אלגוריתם מיון מקבילי כלשהו.

נסמן ב-N את גודל הקלט ל-A ונסמן ב- $w(A)$  את העבודה ש-A מבצע. מה ניתן לומר על  $w(A)$ ?

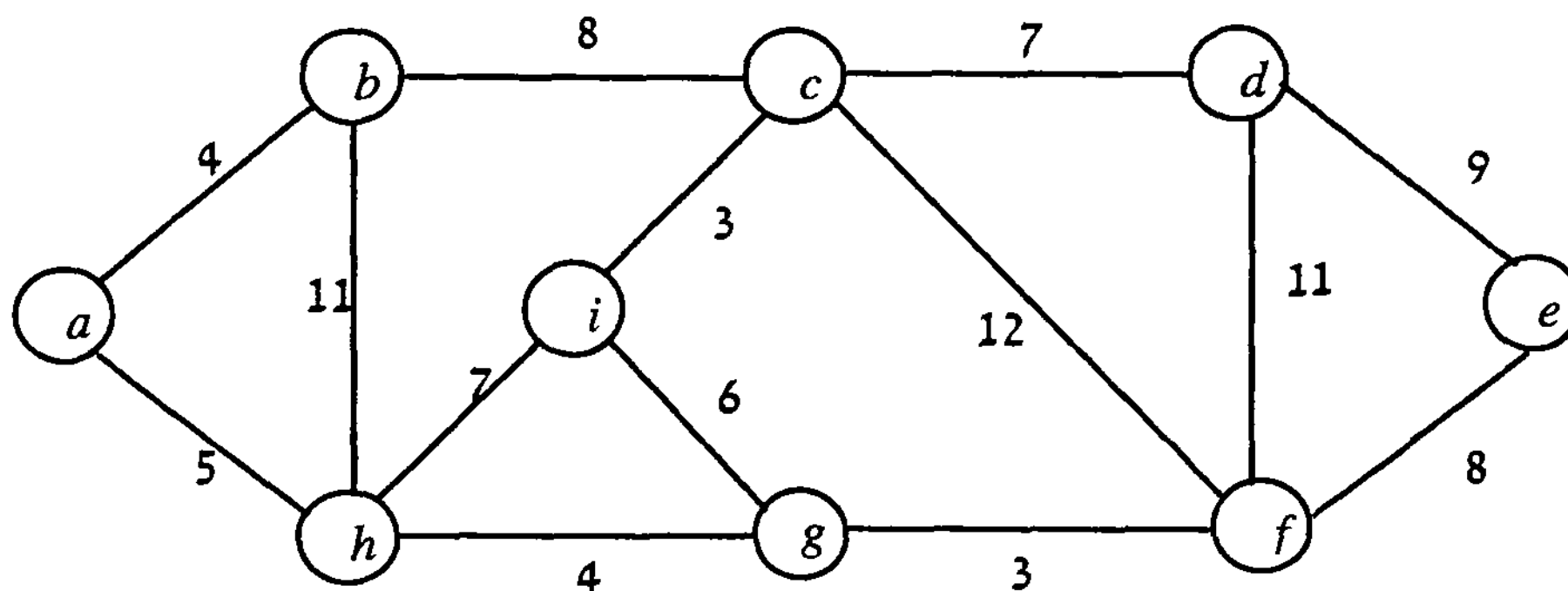
- א.  $w(A) \leq N \cdot \log N$
- ב.  $w(A) \leq N^2$
- ג.  $w(A) \geq N \cdot \log N$
- ד.  $w(A) \geq N^2$

## בחינה מספר 7

### חלק א'

שאלה 1 (20 נקודות: סעיפים א', ב' - 6 נק' לכל אחד; סעיף ג' - 8 נק')

א. מצא עץ פורש מכסימלי של הגרף הבא:



ב. מצא תת-קבוצה של קשתות מבין קשתות הגרף, שתכיל לפחות קשת אחת מכל מעגל בגרף, ומשקלה יהיה מינימלי. (רמז: העזר בתוצאה של סעיף א').

ג. נדון כעת בבעיה הכללית. נתון גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  עם משקלים על הקשתות. ברצוננו למצוא תת-קבוצה  $E' \subseteq E$  של קשתות, כך שהקבוצה  $E'$  תכיל לפחות קשת אחת מכל מעגל בגרף, ומשקלה יהיה מינימלי.

תאר אלגוריתם יעיל לפתרון הבעיה והסבר בקצרה מדוע הוא נכון.

שאלה 2 (20 נקודות: סעיף א' - 8 נק'; סעיף ב' - 12 נק')

נתון וקטור  $A$  באורך  $n$ , המכיל את המשכורות של עובדי מחלקת המים בעירית ת"א.

הפקיד יוסף התבקש ע"י מנהל המחלקה לכתוב שני אלגוריתמים:

א. אלגוריתם הבודק אם כל המספרים בווקטור שווים זה לזה.

ב. אלגוריתם הבודק אם כל המספרים בווקטור שונים זה מזה.

יוסף רוצה לכתוב אלגוריתמים שיהיו מהירים ככל האפשר ועל-כן הוא פונה אליך ומבקש את עזרתך. כתוב את שני האלגוריתמים ונתח את זמני הריצה שלהם.

שאלה 3 (20 נקודות)

נגדיר להלן שתי בעיות:

בעיית ה-  $SAT_{\geq}$ :

הקלט לבעיה: פסוק  $\phi$  בתחשיב הפסוקים ומספר טבעי  $k$ .

השאלה: האם ל-  $\phi$  יש לפחות  $k$  השמות מספקות?

בעיית ה-  $SAT_{=}$ :

הקלט לבעיה: פסוק  $\phi$  בתחשיב הפסוקים ומספר טבעי  $k$ .

השאלה: האם ל- $\phi$  יש בדיוק  $k$  השמות מספקות?

נניח שעומד לרשותנו אלגוריתם  $A$  לפתרון בעיית ה- $SAT_{\geq}$ . הוכח שבעזרת האלגוריתם  $A$  ניתן לפתור גם את בעיית ה- $SAT_{=}$ . (רמז: יש להפעיל את  $A$  פעמיים).

שאלה 4 (20 נקודות)

בנה מכונת טיורינג, אשר מקבלת כקלט מספר אונרי חיובי  $x$  ומחשבת את תוצאת החלוקה של  $x$  ב-3. כלומר, המכונה צריכה לחשב את הפונקציה  $f(x) = x \text{ div } 3$ . הנח שהראש הקורא-כותב של המכונה ממוקם בתחילת התהליך מול הסימן # שמשמאל לקלט. בסוף התהליך, הראש הקורא-כותב צריך לעמוד מול הסימן # שמשמאל לפלט. צייר את תרשים המעברים המתאים, והסבר בקיצור את דרך פעולתה של המכונה.

שאלה 5 (20 נקודות: סעיף א' - 2 נק'; סעיפים ב', ג', ד' - 6 נק' לכל אחד)

נתונה רשימת מספרים באורך  $N$ .

להלן נתון אלגוריתם מקבילי, אשר מוצא את המקסימום ברשימה באמצעות  $k$  מעבדים:

(1) עבור  $1 \leq i \leq k$  בצע במקביל:

(1.1) מצא את המקסימום של האיברים הנמצאים במקומות  $(i-1) \cdot (N/k) + 1$  עד  $i \cdot (N/k)$  ברשימה;

(1.2) הכנס את המקסימום שמצאת למקום ה- $i$  במערך  $A$ ;

(2) מצא את המקסימום במערך  $A$ ;

(3) החזר את הערך שמצאת בשורה (2).

הערות: ניתן להניח ש- $N$  מתחלק ב- $k$  ללא שארית.

מציאת המקסימום בשורות (1.1) ו-(2) מתבצעת ע"י מעבד יחיד.

א. הסבר בקצרה את עקרון הפעולה של האלגוריתם.

ב. נגדיר את העבודה (work) שמבצע אלגוריתם מקבילי כסכום הפעולות שמבצעים כל המעבדים.

כלומר:  $work = \sum_p w(p)$ , כאשר  $w(p)$  הוא מספר הפעולות שמבצע המעבד  $p$ .

חשב את כמות העבודה שמבצע האלגוריתם (התייחס רק לפעולות השוואה).

ג. חשב את זמן הריצה של האלגוריתם כפונקציה של  $N$  ו- $k$ .

ד. מהו ה- $k$  שעבורו זמן הריצה של האלגוריתם יהיה המהיר ביותר?

האם הושג שיפור לעומת זמן הריצה של אלגוריתם סדרתי לפתרון הבעיה?

המשק בצמוד הפא

## חלק ב'

סמן בכל אחת מהשאלות הבאות את התשובה שנראית לך הנכונה ביותר.  
הוסף נימוק קצר של שתי שורות לכל היותר :

### שאלה 1 (5 נקודות)

איזו מהבעיות הבאות היא יוצאת דופן?

- א. בעיית העצירה
- ב. בעיית הטוטליות
- ג. בעיית התאמת המילים
- ד. בעיית נחש הדומינו במחצית המישור העליונה

### שאלה 2 (5 נקודות)

נניח שיש רדוקציה פולינומיאלית מבעיה B לבעיה A, וידוע שבעיה B שייכת ל-NPC.

מה ניתן להסיק מכך על בעיה A?

- א. A גם-כן שייכת ל-NPC.
- ב. A שייכת ל-NP.
- ג. A שייכת ל-EXP.
- ד. אם ניתן לפתור את A בזמן פולינומיאלי אז  $P = NP$ .

### שאלה 3 (5 נקודות)

נניח שהוכח כי  $P \neq NP$ . מה יהיה ניתן להסיק מכך ?

- א.  $NP \neq co-NP$
- ב. בעיית הראשוניות אינה שייכת ל-P.
- ג. לא ניתן לפתור את בעיית שיבוץ הקופים בזמן פולינומיאלי.
- ד. לא ניתן לפתור את בעיית המסלול האוילריאני בזמן פולינומיאלי.

### שאלה 4 (5 נקודות)

נתון שיש לבעיה A אלגוריתם הסתברותי מסוג מונטה-קרלו. מה ניתן להסיק מכך?

- א. קיים לבעיה A אלגוריתם הסתברותי מסוג לאס-וגאס.
- ב. קיים לבעיה A אלגוריתם דטרמיניסטי שרץ בזמן פולינומי.
- ג. לא קיים לבעיה A אלגוריתם דטרמיניסטי שרץ בזמן פולינומי.
- ד. תשובות א, ב, ג אינן נכונות.

## בחינה מספר 8

### חלק א'

**שאלה 1 (20 נקודות: סעיף א' - 5 נק'; סעיף ב' - 5 נק'; סעיף ג' - 10 נק')**

- א. נתונות שתי רשימות ממוינות  $L_1$  ו- $L_2$ . נסמן את אורכי הרשימות ב- $n_1$  ו- $n_2$  בהתאמה. ברצוננו למזג את שתי הרשימות לרשימה ממוינת אחת. נתייחס לשגרת המיזוג המופיעה בפרק 4 במדריך הלמידה. הוכח כי במקרה הגרוע השגרה תבצע  $n_1 + n_2 - 1$  פעולות השוואה.
- ב. נתונות 3 רשימות ממוינות. אורכי הרשימות הם, בהתאמה,  $n_1, n_2, n_3$ . נתון ש- $n_1 < n_2 < n_3$ . הצע אלגוריתם למיזוג 3 הרשימות לרשימה ממוינת אחת, שיבצע (במקרה הגרוע) מספר מינימלי של השוואות. (ניתן להשתמש בשגרה למיזוג שתי רשימות כתת-שגרה.) מהו מספר ההשוואות שיבצע האלגוריתם שכתבת?
- ג. נתונות  $k$  רשימות ממוינות  $L_1, \dots, L_k$ . נסמן את אורכי הרשימות ב- $n_1, \dots, n_k$  בהתאמה. תאר אלגוריתם חמדן למיזוג הרשימות. (ניתן להשתמש בשגרה למיזוג שתי רשימות כתת-שגרה.)

**שאלה 2 (20 נקודות: סעיף א' - 15 נק'; סעיף ב' - 5 נק')**

- ניתן לבדוק אם מספר שלם מתחלק ב-9 ללא שארית באופן הבא:
- מחשבים את סכום הספרות של המספר. אם תוצאת החישוב איננה מספר חד-ספרתי, אז מחשבים את סכום הספרות של התוצאה וכך הלאה, עד שמתקבל מספר חד-ספרתי.
- אם תוצאת החישוב היא 9, אז המספר המקורי מתחלק ב-9.
- דוגמה: המספר 24507 מתחלק ב-9, מפני ש- $2 + 4 + 5 + 0 + 7 = 18$  ו- $1 + 8 = 9$ .
- א. כתוב אלגוריתם, המקבל כקלט מספר שלם  $x$  (בייצוג עשרוני) ובודק אם  $x$  מתחלק ב-9 ללא שארית (הדרכה: השתמש בשגרת-עזר, המחשבת את סכום הספרות של מספר).
- ב. האם זמן הריצה של האלגוריתם הוא פולינומיאלי בגודל הקלט? נמק את תשובתך.

**שאלה 3 (20 נקודות)**

נדון בבעיה הבאה:

**הקלט לבעיה:** גרף  $G = (V, E)$  ומספר שלם  $k$  ( $k \geq 0$ ).

**השאלה:** האם ניתן להוסיף לגרף  $k$  קשתות לכל היותר, כך שבגרף החדש יהיה מסלול המילטוני? הוכח שהבעיה שלמה ב-NP.

**שאלה 4 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)**

- א. בנה מכונת טיורינג, המקבלת כקלט מספר בינרי  $x$  ומחשבת את שארית החלוקה של  $x$  ב-4. כלומר, המכונה צריכה לחשב את הפונקציה  $f(x) = x \bmod 4$ . הראש הקורא-כותב ממוקם בהתחלה מול הספרה השמאלית ביותר של הקלט, ולאחר תום החישוב הוא צריך להימצא מול הספרה השמאלית ביותר של הפלט. הסבר בקצרה את אופן הפעולה של המכונה.
- ב. בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי, המקבל את כל המילים  $w$  מעל  $\Sigma = \{a,b,c\}$  שאורכן זוגי והן מכילות את המחרוזת "abc" לפחות פעם אחת.

**שאלה 5 (20 נקודות: סעיף א' - 5 נק'; סעיף ב' - 10 נק'; סעיף ג' - 5 נק')**

נדון בפתרון לבעיית הפילוסופים הסועדים, אשר משתמש בסמפור בינרי  $S$ . להלן הפרוטוקול עבור כל אחד מהפילוסופים:

(1) בצע פעולות חשיבה עד שתוצה לאכול

(2) request (S)

(3) אחוז במזלג השמאלי

(4) אחוז במזלג הימני

(5) אכול ספגטי

(6) הנח את המזלג השמאלי

(7) הנח את המזלג הימני

(8) release (S)

(9) חזור לשורה (1)

- א. מה צריך להיות ערכו ההתחלתי של  $S$  ?
- ב. הסבר מדוע הפתרון נכון. בפרט, הראה שלא יכול להיווצר מצב של קיפאון או הרעבה.
- ג. מהו החיסרון הבולט של הפתרון ?

**המשק בצמוד הבא**



## חלק ב'

סמן בכל אחת מהשאלות הבאות את התשובה שנראית לך הנכונה ביותר.  
הוסף נימוק קצר של שתי שורות לכל היותר :

### שאלה 1 (5 נקודות)

נניח שבבעיית נחש הדומינו (במחצית המישור האינסופי) מותר לשובב את המרצפות (כלומר, מותר להניח כל מרצפת בארבע צורות שונות). איך ישפיע השינוי על הסטטוס של הבעיה ?

- הבעיה תישאר בלתי כריעה.
- הבעיה תהפוך להיות כריעה.
- הבעיה תהפוך להיות כריעה וניתן יהיה לפתור אותה בזמן פולינומיאלי.
- הבעיה תהפוך להיות כריעה וניתן יהיה לפתור אותה בזמן קבוע.

### שאלה 2 (5 נקודות)

נניח שיש רדוקציה פולינומיאלית מבעיה B לבעיה A, וידוע שבעיה A שייכת ל-NPC. מה ניתן להסיק מכך על בעיה B?

- A. B גם-כן שייכת ל-NPC
- B. B שייכת ל-NP
- G. B אינה שייכת ל-EXP
- D. B אינה שייכת ל-P

### שאלה 3 (5 נקודות)

נניח שהוכח כי  $P = NP$ . מה לא יהיה ניתן להסיק מכך?

- A.  $NP = co-NP$
- B.  $RP = NP$
- G. ניתן לפתור את בעיית הסוכן הנוסע בזמן פולינומיאלי
- D. ניתן לפתור את בעיית מחסום הדרכים בזמן פולינומיאלי

### שאלה 4 (5 נקודות)

איזה אלגוריתם מיון מבין האלגוריתמים הבאים ניתן להפוך בקלות לאלגוריתם הסתברותי ?

- A. מיון-בועות
- B. מיון-מיזוג
- G. מיון-מהיר
- D. מיון-עץ

## נספח ב: תיקון טעויות במדריך הלמידה

### פרק 2

התשובה לשאלה 8, עמ' 165:

- שורה (3.2) לא צריכה להופיע באלגוריתם.

### פרק 4

שאלה 4, עמ' 37:

- בסעיף ב' - חסר המשקל של הקשת השמאלית בגרף; המשקל של הקשת הוא 1.
- בפתרון לסעיף א' בשאלה (עמ' 175): הקבוצה הנזכרת בשורה 6.1 באלגוריתם היא  $V-S$  ולא  $S-V$ .
- שאלה 5, עמ' 39:
- האלגוריתם שצריך לכתוב בסעיף א' איננו אלגוריתם תכנון דינמי אלא אלגוריתם חמדני.
- הגרף המופיע בסעיף ב' צריך להיות מכוון:
- הקשת האנכית המופיעה בגרף מכוונת מלמטה למעלה;
- שאר הקשתות מכוונות כך, שמעבר על כל אחת מהן יקרב אותנו מ- $s$  ל- $t$ .
- בפתרון לסעיף א' בשאלה (עמ' 176): הקשת הנזכרת בשורה 4.3 באלגוריתם היא  $v \rightarrow u$  ולא  $u \rightarrow v$ .
- התשובה לשאלה 9, עמ' 181:
- שורות (4.2.1) ו-(4.2.3) צריכות להתחלף זו עם זו.

### פרק 9

התשובה לשאלה 3, עמ' 226:

- בטור הימני, במעבר הרביעי מלמעלה: התו הנכתב על הסרט צריך להיות #.
- בטור השמאלי, במעבר השני מלמטה: התו הנכתב על הסרט צריך להיות 1.

### פרק 11

- בעמ' 147 בשורה השנייה בהוכחה, צריך להיות כתוב:  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$  ולא כפי שנכתב.
- בעמ' 147 בשורה הרביעית בהוכחה, צריך להיות כתוב:  $a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod n$  ולא כפי שנכתב.
- בעמ' 147 בשורה 7 מהסוף לפני המלים "לכל היותר שני שורשים" חסרות המלים "יש ל-1".
- בתשובה לשאלה 11 בעמ' 242, בשורה 3 מהסוף, צריך להיות כתוב:  $Y^4 = 37$ ;  $Y^5 = 16$  ולא כפי שנכתב.