פתרונות לממ"ן 14 - 2014א - 20425

1. א. מנתוני הבעיה נובע כי $X \sim Geo(p)$ ו- $Y \sim NB(3,p)$.

נשים לב, שהמאורע $P\{X = i, Y = j\}$ מתרחש אם הפגיעה הראשונה התרחשה בירייה ה-i-ית, הפגיעה השנייה בין ירייה $i+1$ לבין ירייה $j-2$ והפגיעה השלישית בירייה ה-j-ית.

לפיכך, לכל $1 \le i \le j-2$ מתקיים:

$$P\{X = i, Y = j\} = \underbrace{(1-p)^{i-1}p}_{1,2,\ldots,i} \cdot \underbrace{(j-i-1)(1-p)^{j-i-2}p^2}_{i+1,i+2,\ldots,j} = (j-i-1)(1-p)^{j-3}p^3$$

ב. מהסעיף הקודם נובע שלכל $i = 1,2,\ldots,j-2$, כאשר $j = 3,4,\ldots$, מתקיים:

$$P\{X = i \mid Y = j\} = \frac{P\{X = i, Y = j\}}{P\{Y = j\}} = \frac{(j-i-1)\cancel{(1-p)^{j-3}p^3}}{\binom{j-1}{2}\cancel{(1-p)^{j-3}p^3}} = \frac{2(j-i-1)}{(j-1)(j-2)}$$

ג. נעזר בפונקציית ההסתברות המשותפת שמצאנו, לחישוב ההסתברות המבוקשת. נקבל:

$$P\{Y - X = 9\} = P\{Y = X + 9\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = i, Y = i+9\} = \sum_{i=1}^{\infty}(i+9-i-1)(1-p)^{i+9-3}p^3$$

$$= 8(1-p)^7 p^3 \sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1} = 8(1-p)^7 p^3 \cdot \frac{1}{p} = 8(1-p)^7 p^2$$

אפשר להגיע לתוצאה האחרונה באופן ישיר, מכיוון שמשמעות המאורע $\{Y = X+9\}$ היא שנדרשו עוד 9 יריות, אחרי הפגיעה הראשונה, כדי להשיג 2 פגיעות נוספות. הואיל וכל היריות בלתי-תלויות זו בזו, הרי שזוהי הסתברות בינומית-שלילית עם $r = 2$ ו- p בנקודה 9, כפי שקיבלנו לעיל.

2. א. ההסתברות שאוטובוס יגיע בזמן לתחנה היא: $P\{4:15 < X < 4:30\} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

ההסתברות שאוטובוס יקדים להגיע לתחנה היא: $P\{X < 4:15\} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

מכיוון שאין חפיפה בין מרווחי הזמן שמגדירים את Y ואת W, ומכיוון שכל אוטובוס "מקדים", "מגיע בזמן" או "מאחר", נובע שלמשתנים המקריים Y ו- W יש פונקציית הסתברות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים 10 ו- $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, כאשר פרמטר ההסתברות האחרון הוא ההסתברות שאוטובוס יאחר.

לפיכך, לכל $i, j = 0,1,\ldots,10$, שמקיימים $0 \le i + j \le 10$, מתקיים:

$$P\{Y = i, W = j\} = \frac{10!}{i!\,j!\,(10-i-j)!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^j \left(\frac{1}{3}\right)^{10-i-j} = \binom{10}{i, j, 10-i-j}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

ב. מהתוצאה שקיבלנו בסעיף הקודם, נובע שההתפלגות המותנית של Y בהינתן $W = j$, לכל $j = 0,1,\ldots,10$, היא בינומית עם הפרמטרים $10 - j$ ו- $\frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}$ (ראה תרגיל 7 בקובץ התרגילים לפרק 6 באתר הקורס).

לכן, לכל $j=0,1,...,10$, מתקיים:

$$P\{Y=i\,|\,W=j\}=\binom{10-j}{i}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10-j} \qquad , \qquad i=0,1,...,10-j$$

ג. האדם יחכה בתחנה לכל היותר 5 דקות, אם בין 4:00 ל- 4:05 יגיע לפחות אוטובוס אחד מה-10. המאורע המשלים הוא שלא מגיע אף אוטובוס בזמן זה, כלומר, שכל האוטובוסים מגיעים בין 4:05 ל- 4:45, והסתברותו היא $\left(\frac{40}{45}\right)^{10}$. לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $1-\left(\frac{40}{45}\right)^{10}=1-0.3079=0.6921$

3. א. הערכים האפשריים של X הם 0, 1 ו- 2. הערכים האפשריים של Y הם 0, 1, 2 ו- 3.

הערכים של ההסתברויות המשותפות הם:

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0,Y=3\}=P\{X=2,Y=0\}=P\{X=2,Y=3\}=0$$

$P\{X=0,Y=1\}=\frac{2}{\binom{6}{3}}=\frac{2}{20}$ [אחת מהספרות 2 ו-4 רשומה ושתי הספרות 1 ו-5 רשומות]

$P\{X=0,Y=2\}=\frac{2}{\binom{6}{3}}=\frac{2}{20}$ [שתי הספרות 2 ו-4 רשומות ואחת מהספרות 1 ו-5 רשומה]

$P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{20}$ [הספרה 3 רשומה ושתי הספרות 1 ו-5 רשומות]

$P\{X=1,Y=1\}=\frac{1+2\cdot 2}{\binom{6}{3}}=\frac{5}{20}$ [הספרה 6 רשומה ושתי הספרות 1 ו-5 רשומות
או שהספרה 3 רשומה, אחת מהספרות 2 ו-4 רשומה ואחת מהספרות 1 ו-5 רשומה]

$P\{X=1,Y=2\}=\frac{1+2\cdot 2}{\binom{6}{3}}=\frac{5}{20}$ [הספרה 3 רשומה ושתי הספרות 2 ו-4 רשומות
או שהספרה 6 רשומה, אחת מהספרות 2 ו-4 רשומה ואחת מהספרות 1 ו-5 רשומה]

$P\{X=1,Y=3\}=\frac{1}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{20}$ [הספרות 2, 4 ו-6 רשומות]

$P\{X=2,Y=1\}=\frac{2}{\binom{6}{3}}=\frac{2}{20}$ [הספרות 3 ו-6 רשומות ואחת מהספרות 1 ו-5 רשומה]

$P\{X=2,Y=2\}=\frac{2}{\binom{6}{3}}=\frac{2}{20}$ [הספרות 3 ו-6 רשומות ואחת מהספרות 2 ו-4 רשומה]

נערוך את התוצאות שקיבלנו בטבלה:

X \ Y	0	1	2	3	p_X
0	0	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	0	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{5}$
2	0	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	0	$\frac{1}{5}$
p_Y	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	

ב. כדי לקבוע אם המשתנים המקריים X ו-Y בלתי-תלויים, נבדוק את תנאי האי-תלות. למשל:

$$P\{X=0,Y=0\}=0 \quad\neq\quad P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{20}=\frac{1}{100}$$

ולכן, המשתנים המקריים הללו תלויים.

4. א. ההסתברות שתהיינה 10 נקודות על חרוז מקרי היא : $e^{-10}\cdot\frac{10^{10}}{10!}=0.1251$

וההסתברות שתהיינה 11 נקודות על חרוז מקרי היא : $e^{-10}\cdot\frac{10^{11}}{11!}=0.1137$

לכן, ההסתברות שתהיינה על חרוז מקרי פחות מ-10 נקודות או יותר מ-11 נקודות היא 0.7612.

ומכאן, נקבל את ההסתברות המולטינומית המבוקשת :

$$\frac{20!}{3!\cdot 2!\cdot 15!}\cdot 0.1251^3\cdot 0.1137^2\cdot 0.7612^{15}=0.0655$$

ב1. אין תלות בין מספרי הנקודות על חרוזים שונים, ולכן, מספר הנקודות הכולל על 5 החרוזים הוא סכום של 5 משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים, והתפלגותו פואסונית עם הפרמטר $5\cdot 10=50$.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא : $e^{-50}\cdot\frac{50^{47}}{47!}=0.053$

ב2. לכל $i=1,\ldots,5$, נגדיר את המשתנים המקריים הבלתי-תלויים X_i , על-ידי מספר הנקודות המצוירות על חרוז i , וכמו כן, את המאורעות $A_i=\{X_i=12\}$. כעת, נחשב את ההסתברות המותנית המבוקשת, בעזרת כלל ההכלה וההפרדה : $P\left(A_1\cup\ldots\cup A_5 \mid \sum_{i=1}^{5}X_i=47\right)$

מתקיים : $P\left(A_1\middle|\sum_{i=1}^{5}X_i=47\right)=P\left\{X_1=12\middle|\sum_{i=1}^{5}X_i=47\right\}=\binom{47}{12}\cdot 0.2^{12}\cdot 0.8^{35}=0.0868$

$$P\left(A_1\cap A_2\middle|\sum_{i=1}^{5}X_i=47\right)=\frac{47!}{(12!)^2\cdot 23!}\cdot 0.2^{24}\cdot 0.6^{23}=0.005777$$

$$P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\middle|\sum_{i=1}^{5}X_i=47\right)=\frac{47!}{(12!)^3\cdot 11!}\cdot 0.2^{36}\cdot 0.6^{11}=0.00017$$

$$P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\middle|\sum_{i=1}^{5}X_i=47\right)=P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\middle|\sum_{i=1}^{5}X_i=47\right)=0$$

הערה: ההתפלגות (המותנית) של ה-X_i-ים בהינתן סכומם היא מולטינומית (או בינומית במקרה הראשון).

לפיכך : $P\left(A_1\cup\ldots\cup A_5 \mid \sum_{i=1}^{5}X_i=47\right)=5\cdot 0.0868-10\cdot 0.005777+10\cdot 0.00017=0.3779$

ב3. לפי דוגמה 2ב בעמוד 138 במדריך, מספר הנקודות האדומות על 5 החרוזים הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $50\cdot 0.2=10$. לכן, ההסתברות שתהיינה עליהם בסך-הכל 9 נקודות אדומות היא :

$$e^{-10}\cdot\frac{10^{9}}{9!}=0.1251$$

ב4. התשובה לא תשתנה, מכיוון שלפי דוגמה 2ב בעמוד 138 במדריך, אין תלות בין מספר הנקודות האדומות שעל 5 החרוזים לבין מספר הנקודות הלבנות שעליהם. לפיכך, המאורע הנתון אינו משפיע על ההסתברות המבוקשת.

5. כדי לענות על השאלה, נחשב, למשל, את $P\{X_1=1,X_2=1\}$.

נקבל: $$P\{X_1=1,X_2=1\}=\frac{150\cdot 149}{300\cdot 299}=\frac{149}{598}$$

לעומת זאת: $$P\{X_1=1\}P\{X_2=1\}=\left(\frac{150}{300}\right)^2=\frac{150}{600}=\frac{1}{4}$$

התוצאות של שני החישובים האחרונים שונות, ולכן תנאי אי-התלות לא מתקיים. לפיכך, X_1 ו- X_2 תלויים זה בזה. באופן דומה, אפשר להראות שכל זוג של משתנים מקריים תלויים זה בזה. כלומר, קיימת תלות בין 10 המשתנים המקריים הנתונים.