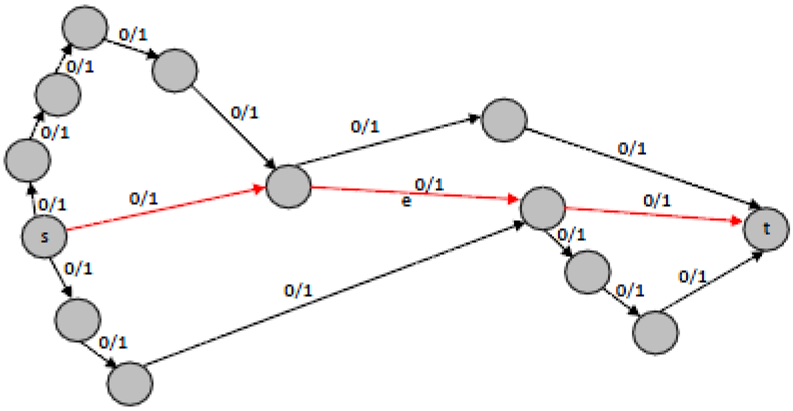
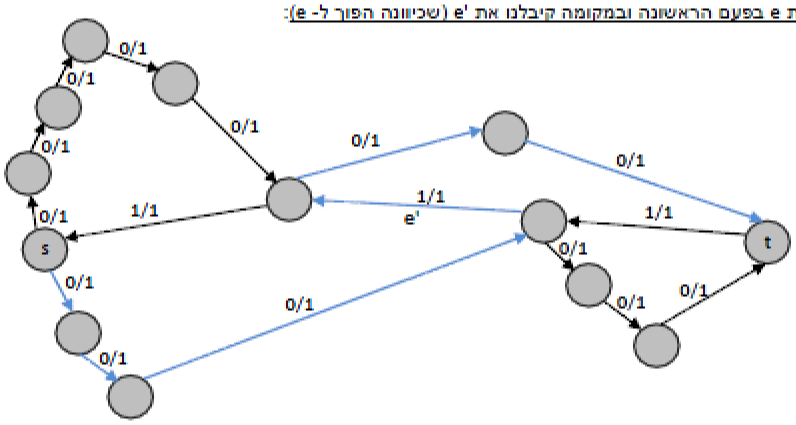
ממן 15

שאלה 1

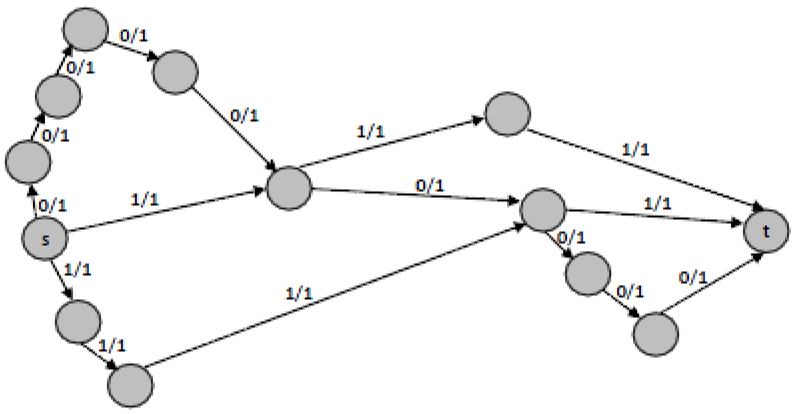
נתבון ברשת G הבאה, עם הקשת e והקיבולים המסומנים (הקשתות שמסומנות באדום יידונו בהמשך):



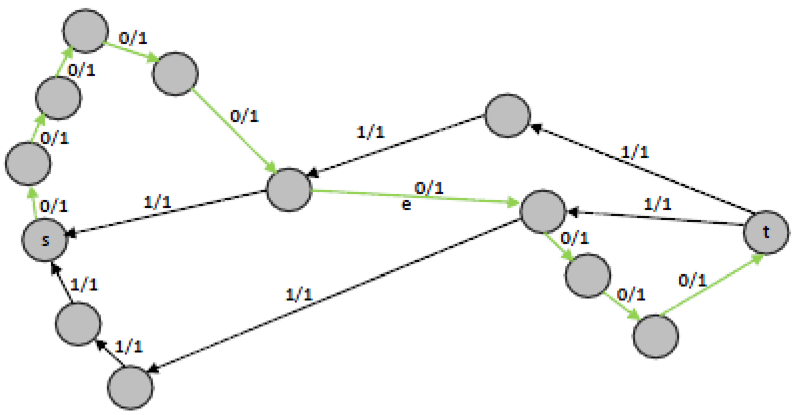
בשלב הראשוני, הרשת השיורית Gr תהיה זהה לרשת G ולכן הקשת e תופיע גם ברשת השיורית, כלומר <u>הקשת e הופיע לראשונה ברשת השיורית</u>. כמו כן, אנו יודעים כי באלגוריתם Edmonds-Karp בחורים בכל שלב את מסלול השיפור הקצר ביותר (למשל באמצעות BFS). לכן, מסלול השיפור הראשון שייבחר הוא המסלול המסומן באדום ברשת שלעיל. לאחר בחירת מסלול זה, נקבל את הרשת השיורית Gr הבאה, אשר בה <u>נעלמה הקשת e בפעם הראשונה ובמקומה קיבלנו את e' (שכיוונה הפוך ל- e)</u>:



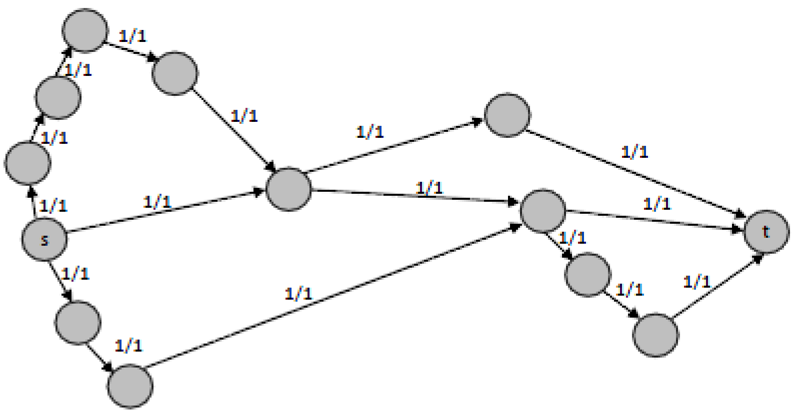
מסלול השיפור שייבחר הוא המסלול שמסומן בכחול ברשת שלעיל, ואז רשת הזרימה המעודכנת תהיה:



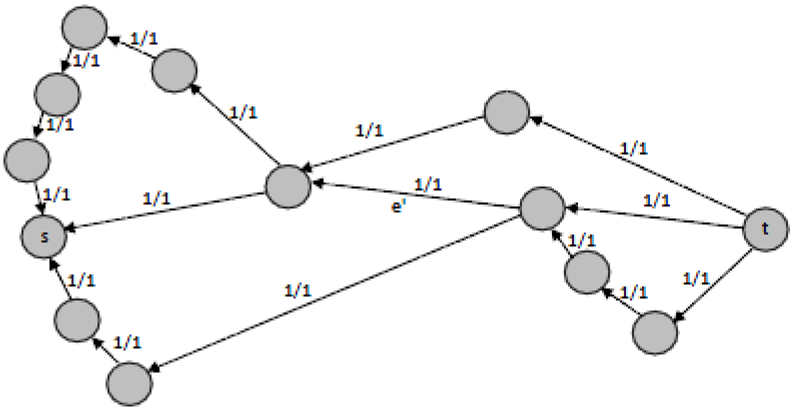
כעת נקבל שהרשת השיורית G_f היא:



<u>ניתן לראות שהקשת e חזרה לרשת השיורית בשנית.</u> כמו כן, מסלול השיפור כעת מסומן בירוק ברשת השיורית שלעיל. מכאן, שרשת הזרימה המעודכנת תהיה:



לכן, כעת נקבל את הרשת השיורית G_f הבאה:



ניתן לראות לעיל כי הקשת e נעלמה בפעם השניה מהרשת השיורית G_f ובמקומה הופיעה הקשת 'e (שכיוונה הפוך לכיוון הקשת e). כמו כן, אין יותר מסלולי שיפור.

לסיכום, נתנו דוגמה לרשת זרימה G ולקשת e, כך שבמהלך הרצת **Edmonds-Karp** על הרשת ישנן שתי איטרציות שבשתיהן e נעלמת מהרשת השיורית G_f.

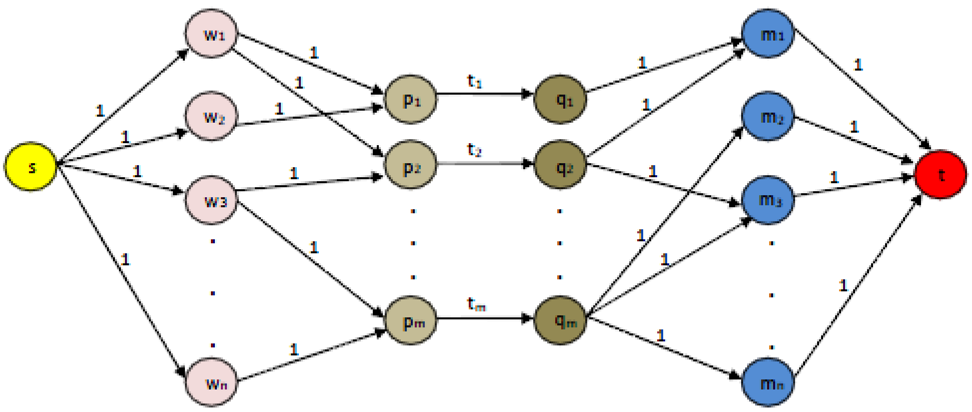
(הערה: בחלק מהשלבים שהצגנו לעיל, אלגוריתם BFS יכל לבחור באופן שרירותי מסלולים קצרים ביותר אחרים עם אורך זהה לאורך של המסלולים שהוא בחר בפועל).

שאלה 2

<u>האלגוריתם:</u>

- ראשית, נבנה עבור הבעיה הנתונה רשת זרימה באופן שיתואר להלן.
  1. ניצור צומת w_i עבור כל אישה i ‏($1 \le i \le n$), כלומר סה"כ n צמתים עבור הנשים.
  2. ניצור צומת m_i עבור כל גבר i ‏($1 \le i \le n$), כלומר סה"כ n צמתים עבור הגברים.
  3. ניצור צומת מקור s ונחבר קשת שקיבולה 1 מהמקור s לכל צומת w_i המייצג אישה ($1 \le i \le n$). כלומר ניצור n קשתות $e_i = (s, w_i)$ שקיבולן 1.
  4. ניצור צומת בור t ונחבר קשת שקיבולה 1 מכל צומת m_i המייצג גבר אל הבור t ‏($1 \le i \le n$). כלומר ניצור n קשתות $e'_i = (m_i, t)$ שקיבולן 1.
  5. עבור כל שדכן i ניצור שני צמתים p_i, q_i ‏($1 \le i \le m$) ונחבר קשת מ- p_i ל- q_i שקיבולה הוא t_i (הערכים t_i הם חלק מהקלט של הבעיה).
  6. עבור כל שדכן i ‏($1 \le i \le m$) וכל אישה j ‏($1 \le j \le n$): אם השדכן i והאישה j מכירים, ניצור קשת שקיבולה 1 מהצומת w_j אל הצומת p_i (כלומר ניצור קשת (w_j, p_i) שקיבולה 1).
  7. עבור כל שדכן i ‏($1 \le i \le m$) וכל גבר j ‏($1 \le j \le n$): אם השדכן i והגבר j מכירים ניצור, קשת שקיבולה 1 מהצומת q_i אל הצומת m_j (כלומר ניצור קשת (q_i, m_j) שקיבולה 1).

- בסיום הבניה, נקבל רשת בסגנון הרשת הבאה:



- כעת, לאחר שיצרנו את רשת הזרימה שלעיל, נחפש בה זרימה מקסימלית s-t באמצעות אלגוריתם פורד-פולקרסון. הזרימה המקסימלית שנמצא שווה לשידוך המירבי (עם מגבלת עומס על השדכנים).

<u>סיבוכיות זמן ריצה:</u>

יצירת n צמתים עבור הנשים, n צמתים עבור הגברים, $2m$ צמתים עבור השדכנים, צומת מקור וצומת בור מתבצעת בסיבוכיות זמן ריצה של $O(m+n)$. כמות הקשתות מהמקור לצמתי הנשים היא $O(n)$ וכך גם כמות הקשתות מצמתי הגברים לצומת הבור; כמות הקשתות בין צמתי p לצמתי q היא $O(m)$ (קשת אחת עבור כל שדכן); כמות הקשתות בין השדכנים לנשים היא $O(mn)$ כי במקרה הגרוע כל שדכן מכיר כל אישה; באותו אופן כמות הקשתות בין השדכנים לנשים היא $O(mn)$. לכן סיבוכיות זמן הריצה של בניית כל קשתות הרשת היא $O(n) + O(n) + O(m) + O(mn) + O(mn) = O(mn)$. לפי טענה (7.5) בעמוד 372 בספר הלימוד, סיבוכיות הרצת אלגוריתם פורד-פולקרסון על הרשת המתקבלת היא $O(mn^2) = O(mn*n)$ (כי מספר הקשתות הוא mn ו- $C=n$

כי יש n קשתות היוצאות מהמקור וקיבול כל אחת מהן הוא 1). **לפיכך, סה"כ סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצענו היא $O(mn^2)$.**

<u>נכונות האלגוריתם:</u>

כל שדכן מחובר בקשת לכל הנשים שהוא מכיר (באמצעות צומת ה- q של השדכן). מצד שני, כל שדכן מחובר בקשת לכל הגברים שהוא מכיר. הקיבול על הקשתות שבין שדכן לגבר או שדכן לאישה הוא 1 כי כל אישה יכולה להיות משודכת לגבר יחיד וכל גבר יכול להיות משודך לאישה יחידה. כמו כן, ישנה קשת בין כל צומת q_i לצומת p_j על מנת לאפשר את המשך הזרימה. אם קיבול הקשתות p_j - q_i היה ∞, אזי ברור כי בנינו רשת המאפשרת לפתור את בעיית הזיווג הדו צדדי <u>ללא</u> מגבלת עומס על השדכנים, ע"י מציאת זרימה מקסימלית ברשת. במילים אחרות, אם קיבול הקשתות p_j - q_i היה ∞, הזרימה המקסימלית ברשת הייתה זהה לזיווג הדו-צדדי המקסימלי. הסיבה לכך היא שהרשת שבנינו היא אותה הרשת שנבנית בסעיף 7.5 (עמוד 397 בספר הלימוד) על מנת לפתור את בעיית הזיווג ללא מגבלת עומס על השדכנים, פרט לצמתי השדכנים שהוספנו (q_i ו-p_j), אך עם קיבול ∞ על הקשתות p_j - q_i, צמתים אלו לא ייצרו מגבלת עומס על השדכנים ולכן מעשית נוכל להגיע לאותה זרימה מקסימלית. במקרה של בעיית הזיווג הדו צדדי <u>עם</u> עומס על השדכנים (כלומר בשאלה זו), על מנת ליצור מגבל עומס על השדכנים, הגבלנו את הזרימה האפשרית בכל קשת q_i - p_i ע"י קיבול t_i על הקשת. לכן, נובע כי הזרימה המקסימלית האפשרית ברשת שבנינו שווה לזיווג הדו-צדדי המקסימלי עם מגבלת עומס על השדכנים (מגבלת עומס t_i לשדכן i, כאשר $1 \le i \le m$).

שאלה 3

סעיף א

<u>האלגוריתם:</u>

1. בונים את הגרף השיורי G_f' (בהינתן הגרף G והזרימה f כקלט של האלגוריתם).
2. מנסים למצוא בגרף השיורי G_f' מסלול שיפור מ- s ל- t באמצעות השגרה augment (עמוד 369 בספר הלימוד).
3. אם לא מצאנו מסלול שיפור באמצעות augment נחזיר את הזרימה f.
4. אחרת (מצאנו מסלול שיפור באמצעות augment), מתקבלת זרימה f' חדשה, ונחזיר את f'.

<u>נכונות האלגוריתם:</u>

<u>טענה 1:</u>
תהי G' רשת הזרימה המתקבלת מהוספת 1 לקיבולה של הקשת e (הקשת e הנתונה). ערך הזרימה המקסימלית ב- G' יכול להיות $v(f)$ או $v(f) + 1$ (כאשר f היא הזרימה המירבית הנתונה בגרף G המקורי, הנתון גם הוא).

<u>הוכחה:</u>
ערכה של הזרימה המקסימלית ב- G' הוא לפחות $v(f)$ שכן f היא עדיין זרימה אפשרית ברשת זו. כמו כן, הערך הוא מספר שלם (לפי טענה (7.14) בעמוד 378 בספר הלימוד). לכן, די להראות שערכה של הזרימה המקסימלית ב- G' הוא לכל היותר $v(f) + 1$.
לפי המשפט "זרימה מקסימלית וחתך מינימאלי" (משפט 7.13 בעמוד 378 בספר הלימוד), יש ברשת הזרימה המקורית G חתך s-t כלשהו, המסומן (A, B) וקיבולו $v(f)$. כעת נראה מהו הקיבול של (A, B) ברשת הזרימה החדשה G': לכל הקשתות החוצות את (A, B) יש ב- G' אותו קיבול שהיה להן ב- G, להוציא אולי e (אם e חוצה את (A, B)). אולם c_e גדל ב- 1 בלבד, ולכן הקיבול של (A, B) ברשת הזרימה החדשה G' הוא לכל היותר $v(f)+1$.■

מטענה 1 קל לראות כי האלגוריתם שהראינו לעיל הוא אלגוריתם טבעי לפתרון הבעיה: בשורה 2 אנו מחפשים מסלול שיפור, אם לא מצאנו אנו יודעים כי f היא הזרימה המקסימלית (וערכה הוא $v(f)$) גם לאחר הגדלת הקיבולת של e ב- 1, ולכן אנו מחזירים את f בשורה 3. לעומת זאת, אם כן הצלחנו למצוא מסלול שיפור, מתקבלת זרימה f' שערכה הוא לפחות $v(f) + 1$. במקרה זה, אנו יודעים לפי טענה 1 כי ערך הזרימה f' הוא בידוק $v(f) + 1$ ‏$v(f') = v(f) + 1$ וש- f' היא אכן זרימה מקסימלית. לכן בשורה 4 אנו מחזירים את הזרימה f'. מכאן, שבכל מקרה, הזרימה שמחזיר האלגוריתם היא זרימה מקסימלית.

<u>סיבוכיות זמן ריצה של האלגוריתם:</u>

סעיפים 1 ו- 2 מתבצעים בסיבוכיות זמן ריצה של $O(m)$ (לפי עמוד 143 במדריך הלמידה - הפסקה שאחרי האלגוריתם). סעיפים 3 ו- 4 מתבצעים כמובן בסיבוכיות $O(1)$. לכן סה"כ סיבוכיות האלגוריתם היא $O(m)$, ומכאן שהאלגוריתם רץ בסיבוכיות ליניארית, כנדרש.

סעיף ב

<u>האלגוריתם:</u>

1. אם בזרימה f המקורית כמות הזרימה על הקשת e אינה שווה לקיבול של e (לפני ההקטנה ב-1) אזי הורדת c_e ב-1 לא משפיעה על v(f) ולכן נחזיר את f.
2. אחרת:
3. נמצא מסלול מ- s ל- t העובר דרך הקשת e ונוריד 1 מהזרימה בכל קשתות המסלול. נקבל זרימה חדשה f' אשר עומדת בתנאי הקיבול.
4. כעת, נבנה את הגרף השיורי $G_{f'}$ ונחפש בו מסלול שיפור באמצעות השגרה **augment**.
5. אם מצאנו מסלול שיפור והתקבלה זרימה חדשה *f שערכה גדול יותר, אזי נחזיר את *f, אחרת נחזיר את הזרימה f' שיצרנו בסעיף 3.

<u>נכונות האלגוריתם:</u>

ברור כי אם בזרימה f המקורית כמות הזרימה על הקשת e אינה שווה לקיבול של e (לפני ההקטנה ב-1), אזי הורדת c_e ב-1 לא משפיעה על v(f) ולכן האלגוריתם מחזיר את f במקרה זה.

נתבונן במקרה שבו בזרימה f המקורית כמות הזרימה על הקשת e שווה לקיבול של e (לפני ההקטנה ב-1), כלומר שהקשת e הייתה רוויה טרם הקטנת קיבולה. במקרה זה, בשורה 3 "תיקנו" את הזרימה כך שתעמוד בתנאי הקיבול. לכן, לאחר שורה 3, מתקיים v(f') = v(f) - 1. בשורה 4 אנו בונים את הגרף השיורי, מחפשים מסלול שיפור ומחזירים את הזרימה החדשה אם ישנו מסלול שיפור, או את הזרימה f' המקורית המתוקנת אם אין מסלול שיפור. נשים לב כי לא ייתכן מצב שבו ניתן למצוא יותר ממסלול שיפור אחד, כי אז היינו מקבלים שהזרימה קטנה ב-1 ואז גדלה ב-2 או יותר, ומקבלים זרימה שערכה גדול יותר מערך מהזרימה המקסימלית המקורית f ב- 1 או יותר. לכן, ברור כי אם השגרה **augment** בשורה 4 הצליחה למצוא מסלול שיפור, נקבל זרימה f' חוקית ומקסימלית כך ש- v(f') = v(f), ואחרת נקבל זרימה f' חוקית ומקסימלית כך ש- v(f') = v(f) - 1.

<u>סיבוכיות זמן ריצה:</u>

סעיף 1 מתבצע כמובן בסיבוכיות O(1).
סעיף 3 ניתן לביצוע בזמן <u>לינארי</u>: למשל, אם הקשת e יוצאת מהצומת u ונכנסת לצומת v, נוכל למצוא מסלול מ- s ל- u באמצעות הרצת אלגוריתם BFS כשאר צומת השכבה L_0 הוא s, וכמו כן נוכל למצוא מסלול מ- v ל- t ע"י הרצת אלגוריתם BFS כאשר צומת השכבה L_0 הוא v; נשרשר את שני המסלולים כאשר הקשת המחברת ביניהם היא הקשת e כמובן, וכך ביצענו את סעיף 3 בסיבוכיות של אלגוריתם BFS, כלומר בסיבוכיות לינארית.
סעיף 4 כולל בניית גרף שיורי והרצת שגרת **augment**, כל אחת מהפעולות מתבצעת בסיבוכיות לינארית ולכן הסעיף מתבצע בסיבוכיות <u>לינארית</u>.
סעיף 5 מתבצע בסיבוכית O(1).
לפיכך, סה"כ האלגוריתם מתבצע בסיבוכיות לינארית, כנדרש.

שאלה 4

נגדיר גרף $G = (L \cup P, E)$ כאשר L היא קבוצת צמתים המייצגת את הליטרלים $x_1,\dots,x_n$, P היא קבוצת צמתים המייצגת את הפסוקיות $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ ו- E היא קבוצת הקשתות, כך שיש קשת מצומת המייצג פסוקית לצומת המייצגת ליטרל אם ורק אם הליטרל מופיע בפסוקית. בנוסף, על פי הנתונים, $|L| = n$ ו- $|P| = m$.
נתון כי כל ליטרל מופיע בדיוק ב- 3 פסוקיות, כלומר יש 3m קשתות היוצאות מהקבוצה P לכיוון הקבוצה L. כמו כן, נתון כי בכל פסוקית יש 3 ליטרלים שונים, כלומר מספר הצמתים בקבוצה L יהיה שליש ממספר הקשתות הנכנסות אליה, דהיינו $m = |L|$. אולם על פי הנתון מתקיים גם $n = |L|$. לפיכך נוכל להסיק כי m=n.

כעת, תהי $A \subseteq P$ תת קבוצה כלשהי של קבוצת הפסוקיות. תהי $\Gamma(A)$ קבוצת הצמתים הסמוכים לצמתי הקבוצה A, כלומר קבוצת הליטרלים המופיעים בפסוקיות הקבוצה A. נתון שבכל פסוקית יש בדיוק 3 ליטרלים שונים ולכן מהקבוצה A יוצאות $3|A|$ קשתות. כמו כן, מהנתון שכל ליטרל מופיע בשלוש פסוקיות שונות נובע שלכל צומת ב- $\Gamma(A)$ נכנסת לפחות קשת אחת ועד 3 קשתות. אולם, מהגדרת $\Gamma(A)$ נובע ש- $\Gamma(A)$ חייבת לקבל את כל $3|A|$ הקשתות היוצאות מ- A.
לכל צומת ב- $\Gamma(A)$ נכנסת לכל הפחות קשת אחת (אחרת הצומת לא היה נמצא ב- $\Gamma(A)$, לפי הגדרת $\Gamma(A)$) ויש סה"כ $3|A|$ קשתות שנכנסות לקבוצה $\Gamma(A)$. לכן ב- $\Gamma(A)$ יש לכל היותר $3|A|$ צמתים. באופן דומה, לכל צומת ב- $\Gamma(A)$ נכנסות לכל היותר 3 קשתות (נובע מהנתון שכל ליטרל מופיע ב-3 פסוקיות) ויש סה"כ $3|A|$ קשתות שנכנסות לקבוצה $\Gamma(A)$. לכן ב- $\Gamma(A)$ יש לכל הפחות $|A|$ צמתים. דהיינו $|A| \le |\Gamma(A)| \le 3|A|$.

לפיכך, הראינו שלכל תת קבוצה $A \subseteq P$ מתקיים $|\Gamma(A)| \ge |A|$. לכן, לפי משפט הול לגרף *G* יש זיווג מושלם. במילים אחרות, לכל פסוקית ניתן להתאים באופן חד- חד ערכי ליטרל מייצג. אולם לפי ההגדרה כל פסוקית מסופקת אם לפחות אחד מהליטרלים שבה מסופק (הדבר נובע מכך שמבנה של פסוקית הוא $(\varphi_i = (z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee z_{i,3})$. לכן, בפרט מספיק שהליטרל המייצג של הפסוקית יהיה מסופק על מנת שהפסוקית תהיה מסופקת. לפי ההגדרה, על מנת שהנוסחא כולה תהיה מסופקת כל הפסוקיות שלה צריכות להיות מסופקות. אולם כבר הראינו כי על מנת לספק פסוקית כל שעלינו לעשות הוא לספק את הליטרל המייצג שלה (כלומר אם הליטרל הוא מהסוג x_i ניתן לו ערך *T*, ואם הוא מהסוג $\neg x_i$ ניתן לו ערך *F*).
לפיכך, כל נוסחה *3CNF* שבה על אחד מהליטרלים מופיע בדיוק בשלוש פסוקיות שונות, וכל פסוקית כוללת בדיוק שלוש ליטרלים שונים, הנה נוסחה ספיקה.

<u>האלגוריתם הנדרש אפוא למציאת השמה מספקת עבור נוסחה כנ"ל הוא:</u>

1. בניית גרף דו צדדי כמוסבר לעיל.
2. מציאת זיווג מושלם בגרף באמצעות רשת זרימה (כמוסבר באלגוריתם בעמודים 397-398 בספר הלימוד).
3. קביעת ערך *T* או *F* עבור הליטרל המייצג של כל פסוקית באופן שמוסבר לעיל.

<u>סיבוכיות האלגוריתם:</u>

סעיף 1 מתבצע בסיבוכיות $O(n)$ (יצירת $O(n)$ צמתים ו- $O(n)$ קשתות. נזכור גם כי הראינו ש- $m=n$). סעיף 2 מתבצע בסיבוכיות $O(n^2)$ (בעמוד 399 בספר מוסבר כי הסיבוכיות הדרושה היא $O(mn)$ אולם במקרה שלנו $m=O(n)$ ולכן אנו מקבלים $O(n^2)$). סעיף 3 מתבצע בסיבוכיות $O(n)$ (כי עוברים על כל $O(n)$ הליטרלים ולכל אחד קובעים השמה ב- $O(1)$). **לכן, סה"כ סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם היא $O(n^2)$.**

<u>נכונות האלגוריתם:</u>

נכונות האלגוריתם נובעת ישירות מההוכחה שלעיל.