פתרון ממ"ן 12

שאלה 1

א. יהיו A,B,C,D קבוצות.

הוכיחו שאם $A\Delta B\subseteq D$ ו- $B\Delta C\subseteq D$ אז $A\Delta C\subseteq D$.

על הקבוצה $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ נתונים שני יחסים R,S המוגדרים כך: לכל $A,B\in\mathcal{P}(\{1,2,3\})$:

ARB אם ורק אם $A\Delta B\subseteq\{1,2\}$ ו- ASB אם ורק אם $A\Delta\{1,2\}\subset B\Delta\{1,2\}$.

ב. קבעו אם אחד מהיחסים הוא יחס שקילות ואם התשובה חיובית, נמקו מדוע ומיצאו את מחלקות השקילות שלו.

ג. קבעו אם אחד היחסים הוא יחס סדר חלקי או מלא. נמקו את התשובה.

תשובה

א. נניח ש- $x\in A\Delta C$ אז ($x\in A$ וגם $x\notin C$) **או** ($x\notin A$ וגם $x\in C$).

נבחין בין שני המצבים הבאים המכסים את כל האופציות עבור x.

מצב 1: $x\in B$. אז מפני שבכל מקרה $x\notin C$ או $x\notin A$ נקבל ש- $x\in B\Delta C$ או $x\in A\Delta B$ ולפי הנתון נקבל ש- $x\in D$.

מצב 2: $x\notin B$. אז מפני שבכל מקרה $x\in A$ או $x\in C$ נקבל ש- $x\in A\Delta B$ או $x\in B\Delta C$ ושוב לפי הנתון נקבל ש- $x\in D$.

לסיכום מצאנו שלכל $x\in A\Delta C$ מתקיים $x\in D$ ולכן $A\Delta C\subseteq D$.

דרך אחרת: נשים לב שאם שתי קבוצות הן חלקיות לקבוצה D אז גם ההפרש הסימטרי שלהן חלקי לקבוצה D (שכן ההפרש הסימטרי של הקבוצות חלקי לאיחוד, שחלקי ל- D).

לכן, מתוך $A\Delta B\subseteq D$ ו- $B\Delta C\subseteq D$ נובע ש- $(A\Delta B)\Delta(B\Delta C)\subseteq D$.

לפי התכונות של ההפרש הסימטרי, $(A\Delta B)\Delta(B\Delta C)=A\Delta(B\Delta B)\Delta C=(A\Delta\varnothing)\Delta C=A\Delta C$

מכאן ש- $A\Delta C\subseteq D$.

ב. היחס R הוא יחס שקילות. נוכיח זאת:

R **רפלקסיבי**: לכל $A\in\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ $A\Delta A=\varnothing\subseteq\{1,2\}$ לכן ARA.

R **סימטרי**: לכל $A,B\in\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ אם ARB אז $A\Delta B\subseteq\{1,2\}$ ומפני ש- $A\Delta B=B\Delta A$ נסיק ש- $B\Delta A\subseteq\{1,2\}$ ולכן BRA.

R **טרנזיטיבי**: לכל $A,B,C\in\mathcal{P}(\{1,2,3\})$, אם ARB ו- BRC אז $A\Delta B\subseteq\{1,2\}$ ו- $B\Delta C\subseteq\{1,2\}$.

מסעיף א' נקבל שגם $B\Delta C\subseteq\{1,2\}$ כלומר ARC

מכאן ש- R רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי ולכן הוא יחס שקילות.

נמצא כעת את מחלקות השקילות של R. כל איבר של $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ שייך למחלקת שקילות מסויימת והמחלקה שלה הוא שייך מורכבת מכל האיברים הנמצאים ביחס אתו.

המחלקה שבה נמצאת $\varnothing$ היא:

$$S_{\varnothing}=\{X\in\mathcal{P}(\{1,2,3\})\mid XR\varnothing\}=\{X\in\mathcal{P}(\{1,2,3\})\mid X\Delta\varnothing\subseteq\{1,2\}\}$$

מאחר ש- $X\Delta\varnothing=X$ נובע ש- $XR\varnothing$ אם ורק אם $X\subseteq\{1,2\}$ לכן: $S_{\varnothing}=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.

נבחר כעת איבר מחוץ ל- $S_{\varnothing}$, למשל את $\{3\}$. המחלקה שבה נמצאת $\{3\}$ היא:

$S_{\{3\}}=\{X\in\mathcal{P}(\{1,2,3\})\mid XR\{3\}\}=\{X\in\mathcal{P}(\{1,2,3\})\mid X\Delta\{3\}\subseteq\{1,2\}\}$.

התנאי $X\Delta\{3\}\subseteq\{1,2\}$ שקול לכך ש- 3 הוא איבר של X. לכן $S_{\{3\}}=\{\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

שתי המחלקות שמצאנו מכסות את $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ לכן אלה הן כל מחלקות השקילות של R.

נשים לב שאכן המחלקות מגדירות חלוקה של $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ (הן לא ריקות, הן זרות זו לזו והאיחוד שלהן שווה ל- $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$).

ג. S הוא יחס סדר חלקי על $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$. נוכיח זאת:

S **אנטי רפלקסיבי**: לכל $A\in\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ מתקיים $A\Delta\{1,2\}=A\Delta\{1,2\}$ ולא ייתכן ש- $A\Delta\{1,2\}\subset A\Delta\{1,2\}$ ולכן $A\not S A$ ($\langle A,A\rangle\notin S$)

S **טרנזיטיבי**: לכל $A,B,C\in\mathcal{P}(\{1,2,3\})$, אם ASB ו- BSC אז $A\Delta\{1,2\}\subset B\Delta\{1,2\}$ ו- $B\Delta\{1,2\}\subset C\Delta\{1,2\}$. אז ברור שגם $A\Delta\{1,2\}\subset C\Delta\{1,2\}$ ולכן ASC.

לכל $A,B\in\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ ARB אם ורק אם $A\Delta B\subseteq\{1,2\}$ ו- ASB אם ורק אם $A\Delta\{1,2\}\subset B\Delta\{1,2\}$.

לכן S הוא יחס סדר. הוא **לא** סדר מלא מפני שלמשל $\{1\}\not S\{2\}$ וגם $\{2\}\not S\{1\}$ שכן

$\underbrace{\{2\}\Delta\{1,2\}}_{=\{1\}}\not\subset\underbrace{\{1\}\Delta\{1,2\}}_{=\{2\}}$ וגם $\underbrace{\{1\}\Delta\{1,2\}}_{=\{2\}}\not\subset\underbrace{\{2\}\Delta\{1,2\}}_{=\{1\}}$.

שאלה 2

על הקבוצה $A=\{\langle a,b\rangle\mid a,b\in\mathbf{N}\setminus\{0\}\}$ מגדירים שני יחסים R,T כך:

לכל $\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle\in A$, $\langle a_1,b_1\rangle R\langle a_2,b_2\rangle$ אם ורק אם $a_1b_2=a_2b_1$ ו- $\langle a_1,b_1\rangle T\langle a_2,b_2\rangle$ אם ורק אם $a_1b_2<a_2b_1$.

א. הוכיחו שאחד היחסים הוא יחס שקילות והאחר הוא יחס סדר.

ב. לכל $n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$ נסמן ב- $S_{\langle n,1\rangle}$ את מחלקת השקילות של $\langle n,1\rangle$ (לפי יחס השקילות מסעיף א') האם $S_{\langle n,1\rangle}\cap S_{\langle m,1\rangle}=\varnothing$ כאשר $m\neq n$? האם אוסף הקבוצות $\{S_{\langle n,1\rangle}\mid n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}\}$ הוא חלוקה של A? נמקו את התשובות.

ג. קבעו אם יחס הסדר שמצאתם בסעיף א' הוא סדר מלא והאם קיימים איברים מינימליים או מקסימליים. נמקו את התשובה.

תשובה

א. R הוא יחס שקילות על A. נוכיח זאת:

R **רפלקסיבי**: לכל $\langle a_1,b_1\rangle \in A$ מתקיים $\langle a_1,b_1\rangle R\langle a_1,b_1\rangle$, שכן $a_1b_1 = a_1b_1$.

R **סימטרי**: לכל $\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle \in A$ אם $\langle a_1,b_1\rangle R\langle a_2,b_2\rangle$ אז $a_1b_2 = a_2b_1$ ואז מתקיים גם $a_2b_1 = a_1b_2$ לכן $\langle a_2,b_2\rangle R\langle a_1,b_1\rangle$.

R **טרנזיטיבי**: לכל $\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle,\langle a_3,b_3\rangle \in A$, אם $\langle a_1,b_1\rangle R\langle a_2,b_2\rangle$ ו- $\langle a_2,b_2\rangle R\langle a_3,b_3\rangle$ אז $a_1b_2 = a_2b_1$ ו- $a_2b_3 = a_3b_2$. נכפול את השוויונות אגף אגף ונקבל $a_1b_2a_2b_3 = a_2b_1a_3b_2$. נצמצם ב- a_2b_2 (כל המספרים שונים מ- 0) ונקבל $a_1b_3 = b_1a_3$ כלומר $\langle a_1,b_1\rangle R\langle a_3,b_3\rangle$.

לכן R יחס שקילות.

T הוא יחס סדר על A. נוכיח זאת:

T **אנטי רפלקסיבי**: כל $\langle a,b\rangle \in A$ לא נמצא ביחס T עם $\langle a,b\rangle$ כי לא ייתכן ש- $ab < ab$.

T **טרנזיטיבי**: לכל $\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle,\langle a_3,b_3\rangle \in A$, אם $\langle a_1,b_1\rangle T\langle a_2,b_2\rangle$ ו- $\langle a_2,b_2\rangle T\langle a_3,b_3\rangle$ אז $a_1b_2 < a_2b_1$ ו- $a_2b_3 < a_3b_2$. כל המספרים חיוביים, מכפלת האגפים השמאליים קטנה ממכפלת האגפים הימניים: $a_1b_2a_2b_3 < a_2b_1a_3b_2$. נצמצם ב- a_2b_2 ונקבל $a_1b_3 < b_1a_3$ לכן $\langle a_1,b_1\rangle T\langle a_3,b_3\rangle$. הוכחנו אם כן ש- T יחס סדר.

ב. נניח ש- $\langle a,b\rangle \in A$ ו- $\langle a,b\rangle \in S_{\langle n,1\rangle} \cap S_{\langle m,1\rangle}$. אז $\langle a,b\rangle R\langle m,1\rangle$ וגם $\langle a,b\rangle R\langle n,1\rangle$.

אז מהגדרת R מקבלים ש- $a = bm$ וגם $a = bn$ אבל מכאן נקבל ש- $m = n = a/b$ בסתירה להנחה ש- $m \neq n$. מכאן ש- $S_{\langle n,1\rangle} \cap S_{\langle m,1\rangle} = \varnothing$ כלומר המחלקות של $\langle m,1\rangle$ ושל $\langle n,1\rangle$ הן זרות זו לזו כאשר $m \neq n$.

כדי שאוסף הקבוצות $\{S_{\langle n,1\rangle} \mid n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}\}$ יהיה חלוקה של A צריך בנוסף ש- $A = \bigcup\limits_{\mathbf{N}\setminus\{0\}} S_{\langle n,1\rangle}$.

אבל אם נסתכל למשל על הזוג $\langle 1,2\rangle \in A$ ונניח שקיים $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$ כך ש- $\langle 1,2\rangle \in S_{\langle n,1\rangle}$ כלומר $\langle 1,2\rangle R\langle n,1\rangle$ נקבל ש- $1\cdot 1 = 2n$ כלומר $n = 1/2$ וזאת סתירה.

לכן $A \neq \bigcup\limits_{\mathbf{N}\setminus\{0\}} S_{\langle n,1\rangle}$ ולכן אוסף הקבוצות $\{S_{\langle n,1\rangle} \mid n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\}$ הוא לא חלוקה של A.

ג. T הוא לא סדר מלא מפני שלמשל $\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle \in A$ אבל לא מתקיים $\langle 1,2\rangle T\langle 2,4\rangle$ וגם לא מתקיים $\langle 2,4\rangle T\langle 1,2\rangle$.

לכל $\langle a,b\rangle \in A$ מתקיים $\langle a,b\rangle T\langle 2a,b\rangle$ וגם $\langle a,2b\rangle T\langle a,b\rangle$ (כי $ab < 2ab$).

לכן $\langle a,b\rangle$ הוא לא מינימלי ולא מקסימלי ומכאן שאין ב- A איברים מינימליים או מקסימליים.

שאלה 3

בשאלה זו, לכל שתי קבוצות A,B ולכל פונקציה $f : A \to B$ נסמן ב- $g : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ את הפונקציה המוגדרת כך: לכל $D \in \mathcal{P}(B)$, $g(D) = f^{-1}[D]$.

א. הוכיחו ש- f היא על אם ורק אם g היא חד-חד ערכית. (אפשר להיעזר בשאלה 16 בספר)

ב. בסעיף זה נניח ש- $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ מוגדרת על-ידי $f(n) = n-1$ לכל $n > 0$ ו- $f(0) = 0$.
הוכיחו שבמקרה זה הפונקציה $g : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ המתאימה ל- f, היא חד-חד ערכית ותארו את הקבוצות: $g(\{0,1,2,\dots,n\})$, $g(\mathbf{N})$ ו- $g(\mathbf{N}\setminus\{0\})$.

ג. האם הפונקציה g מסעיף ב׳ היא על? נמקו את התשובה.

תשובה:

א. נניח ש- f היא על ונראה ש- g היא חד-חד ערכית. לשם כך נבחר $X,Y \in \mathcal{P}(B)$ כך ש- $g(X) = g(Y)$. עלינו להראות ש- $X = Y$.

אכן, אם $g(X) = g(Y)$ אז $f^{-1}[X] = f^{-1}[Y]$ ואז $f[f^{-1}[X]] = f[f^{-1}[Y]]$

מפני ש- f היא על לפי שאלה 16ד, לכל $D \in \mathcal{P}(B)$ מתקיים $f[f^{-1}[D]] = D$.

לכן מהשוויון $f[f^{-1}[X]] = f[f^{-1}[Y]]$ נובע ש- $X = Y$ ומכאן ש- g חד-חד ערכית.

להפך, נניח ש- g חד-חד ערכית ונראה ש- f היא על.

לשם כך נבחר איבר כלשהו $y \in B$. עלינו להראות שקיים $x \in A$ כך ש- $f(x) = y$.

מאחר שהקבוצה $\{y\}$ היא איבר של $\mathcal{P}(B)$ ושונה מ- $\varnothing$ שהיא גם איבר של $\mathcal{P}(B)$ ומאחר ש- g חד-חד ערכית נקבל ש- $g(\{y\}) \neq g(\varnothing)$ ולכן $f^{-1}[\{y\}] \neq f^{-1}[\varnothing]$.

כידוע $f^{-1}[\varnothing] = \varnothing$ ומכאן ש- $f^{-1}[\{y\}] \neq \varnothing$ כלומר קיים איבר $x \in f^{-1}[\{y\}]$. לפי הגדרת התמונה ההפוכה של קבוצה, $x \in A$ ו- $f(x) = y$. כך הוכחנו ש- f היא על.

ב. לפי סעיף א׳, כדי להוכיח ש- g היא חד-חד ערכית מספיק להראות ש- f היא על וזה אכן נכון, שכן לכל $y \in \mathbf{N}$ אם נבחר $x = y+1$ אז $x > 0$ ולפי הגדרת f נקבל ש- $f(x)=x-1=y$.
כעת ניעזר בהגדרות של f ושל g ונקבל:

$$g(\{0,1,2,\dots,n\}) = f^{-1}[\{0,1,2,\dots,n\}] = \{x \in \mathbf{N} \mid f(x) \in \{0,1,2,\dots,n\}\} = \{0,1,\dots,n,n+1\}$$

$g(\mathbf{N}) = f^{-1}[\mathbf{N}] = \mathbf{N}$ (זה נובע מכך ש- f היא על)

$g(\mathbf{N}\setminus\{0\}) = f^{-1}[\mathbf{N}\setminus\{0\}] = \{x \in \mathbf{N} \mid f(x) \in \mathbf{N}\setminus\{0\}\} = \{x \in \mathbf{N} \mid f(x) \geq 1\} = \mathbf{N}\setminus\{0,1\}$.

ג. נראה שלכל $D \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$, $g(D) \neq \mathbf{N}\setminus\{0\}$ וכך נקבל ש- g אינה על.

אכן, אם נניח שקיימת קבוצה $D \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ כך ש- $g(D) = \mathbf{N}\setminus\{0\}$ נקבל ש- $f^{-1}[D] = \mathbf{N}\setminus\{0\}$.

אז נקבל ש- $1 \in f^{-1}[D]$ לכן $f(1) = 0 \in D$. אבל מפני שגם $f(0) = 0 \in D$ נקבל ש-

$0 \in f^{-1}[D]$ כלומר $0 \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$ וזו כמובן סתירה. מכאן ש- g אינה על.

שאלה 4

נתונות הפונקציות $f, g\colon \mathbf{N} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ המוגדרת כך:

לכל $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{Z}$, $f\langle m,n\rangle = \langle m, 2m-n\rangle$ ו- $g\langle m,n\rangle = \langle m, m-2n\rangle$.

א. הוכיחו ש- f היא הפיכה ומיצאו את הפונקציה ההפכית שלה. נמקו את התשובה.

ב. הוכיחו ש- g אינה הפיכה. נמקו את התשובה.

ג. מיצאו את $g[\mathbf{N} \times \{0\}]$ ואת $g^{-1}[\mathbf{N} \times \{0\}]$.

תשובה

א. ננסה תחילה למצוא נוסחה לפונקציה שיכולה להיות הופכית ל- f , על ידי חיפוש מקור לאיבר כלשהו של $\mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ על-ידי f.

יהי $\langle x,y\rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$. נחפש $\langle m,n\rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ כך ש- $f\langle m,n\rangle = \langle m, 2m-n\rangle = \langle x,y\rangle$.

(צריכים להביע את $\langle m,n\rangle$ באמצעות $\langle x,y\rangle$).

מתוך $\langle m, 2m-n\rangle = \langle x,y\rangle$ נקבל ש- $m = x,\ n = 2x-y$. לכן המועמדת שלנו להיות פונקציה הופכית ל- f היא $h\colon \mathbf{N} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ המוגדרת כך: $h\langle x,y\rangle = \langle x, 2x-y\rangle$. נשים לב שבעצם $h = f$ כלומר ההפכית של f (אם יש כזו) אמורה להיות f עצמה.

ואכן לכל $\langle m,n\rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ מתקיים:

$(f \circ f)\langle m,n\rangle = (f(f\langle m,n\rangle)) = f(\langle m, 2m-n\rangle) = \langle m, 2m-(2m-n)\rangle = \langle m,n\rangle$.

מכאן ש- $f \circ f = I_{\mathbf{N}\times\mathbf{Z}}$ לכן f הפיכה ו- $f^{-1} = f$.

ב. נשים לב שלכל $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{Z}$ שני הרכיבים בזוג $g\langle m,n\rangle = \langle m, m-2n\rangle$ הם שניהם זוגיים או שניהם אי-זוגיים. לכן אם ננסה למצוא $\langle m,n\rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ כך ש- $g\langle m,n\rangle = \langle 1,0\rangle$ נקבל ש- $\langle m, m-2n\rangle = \langle 1,0\rangle$ כלומר $m=1$ ו- $1-2n = 0$. אבל אז $n = 1/2 \notin \mathbf{Z}$ וזו סתירה. g אינה על ולכן לא הפיכה.

ג. $g[\mathbf{N} \times \{0\}] = \{g\langle m,0\rangle | m \in \mathbf{N}\} = \{\langle m, m-2\cdot 0\rangle | m \in \mathbf{N}\} = \{\langle m,m\rangle | m \in \mathbf{N}\}$.

$$\begin{aligned} g^{-1}[\mathbf{N} \times \{0\}] &= \{\langle m,n\rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z} |\ g\langle m,n\rangle \in \mathbf{N} \times \{0\}\} \\ &= \{\langle m,n\rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}\ |\ \langle m, m-2n\rangle \in \mathbf{N} \times \{0\}\} \end{aligned}$$

התנאי $\langle m, m-2n\rangle \in \mathbf{N} \times \{0\}$ שקול לכך ש- $m = 2n$ כאשר $m \in \mathbf{N}$ ו- $n \in \mathbf{Z}$ וזה כמובן מחייב גם את n להיות טבעי. לכן $\langle m, m-2n\rangle = \langle 2n, 0\rangle$ כאשר $n \in \mathbf{N}$ ומכאן ש-

$g^{-1}[\mathbf{N} \times \{0\}] = \{\langle 2n,n\rangle \mid n \in \mathbf{N}\}$.