ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20585

מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חוברת הקורס - אביב 2013ב

כתב: אלעזר בירנבוים

מרץ 2013 - סמסטר אביב - תשע"ג

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

אני מקדם את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים.
בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.
פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:
http://telem.openu.ac.il
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

שעות הייעוץ בקורס מתקיימות בימי ראשון בשעות 18:00-20:00 בטלפון 04-6850321.
אבקש מאד לא להתקשר לטלפון הזה בשעות לא סבירות ובשבתות.
ניתן לפנות גם בדואר אלקטרוני: elazar@openu.ac.il

אני מאחל לכם הצלחה בלימודים.

בברכה,

אלעזר בירנבוים

מרכז ההוראה

1. לוח זמנים ופעילויות (20585 / ב2013)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
1	8.3.2013-3.3.2013	פרק 1		
2	15.3.2013-10.3.2013	פרק 1	מפגש ראשון	
3	22.3.2013-17.3.2013	פרק 2		ממ"ן 11 22.3.2013
4	29.3.2013-24.3.2013 (ב-ו פסח)	פרק 2 פרק 3	מפגש שני	
5	5.4.2013-31.3.2013 (א-ב פסח)	פרק 3		
6	12.4.2013-7.4.2013 (ב יום הזכרון לשואה)	פרק 3 פרק 4	מפגש שלישי	ממ"ן 12 12.4.2013
7	19.4.2013-14.4.2013 (ב יום הזכרון) (ג יום העצמאות)	פרק 4		
8	26.4.2013-21.4.2013	פרק 4	מפגש רביעי	

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

לוח זמנים ופעילויות – המשך

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
9	3.5.2013-28.4.2013 (א ל"ג בעומר)	פרק 4		
10	10.5.2013-5.5.2013 (ד יום ירושלים)	פרק 4 פרק 5	מפגש חמישי	ממ"ן 13 10.5.2013
11	17.5.2013-12.5.2013 (ג-ד שבועות)	פרק 5		
12	24.5.2013-19.5.2013	פרק 5 פרק 6	מפגש שישי	ממ"ן 14 24.5.2013
13	31.5.2013-26.5.2013	פרק 6		
14	7.6.2013-2.6.2013	פרק 7		
15	14.6.2013-9.6.2013	פרק 7	מפגש שביעי	ממ"ן 15 14.6.2013

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

2. תיאור המטלות

קראו היטב עמודים אלו לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס - הבנה מעמיקה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. המטלות תיבדקנה על-ידי המנחה ותוחזרנה בצירוף הערות המתייחסות לתשובות.

המטלות מלוות את יחידות הלימוד בקורס. להלן פירוט המטלות, היחידות שאליהן מתייחסת כל מטלה ומשקלה היחסי. בחלק מהמטלות תופענה גם שאלות המתייחסות ליחידות שכבר נלמדו.

ממ"ן 11 - פרק 1 - 6 נקודות
ממ"ן 12 - פרקים 2, 3 - 6 נקודות
ממ"ן 13 - פרק 4 - 8 נקודות
ממ"ן 14 - פרק 5 - 4 נקודות
ממ"ן 15 - פרקים 6, 7 - 6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל של 24 נקודות לפחות.
שימו לב שחובה להגיש את ממ"ן 13.

ללא צבירת 24 נקודות בהגשת מטלות לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

למען הסר ספק, יודגש שחל איסור על הכנה משותפת והעתקה של מטלות או חלקי מטלות.
(הנושא מפורט בתקנון משמעת לסטודנטים - נספח 1 של ידיעון האו"פ).

לתשומת לבכם!
כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן:

אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלה** בציון הנמוך ביותר, שציונה נמוך מציון הבחינה , לא תילקח בחשבון בעת שקלול הציון הסופי.

זאת בתנאי שמטלה זו **אינה חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס.
סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון שמספרו 09-7782222, או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא http://www.openu.ac.il/sheilta קורסים ⇦ ציוני מטלות ובחינות ⇦ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.

יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של ציוני המטלות והבחינה יהיה נמוך מ-60).

כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל כולל של 24 נקודות לפחות.

ב. ציון של לפחות 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2013ב **מועד אחרון להגשה:** 22 מרץ 13

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 **(10%)**

בנו מכונת טיורינג **המכריעה** את השפה של תרגיל 3.8 סעיף a ($\{w \in \{0, 1\}^* \mid \#_0(w) = \#_1(w)\}$).

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, \sqcup, x\}$.

למכונה יהיו **לא יותר משבעה מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה בעזרת איור מלא (כמו איור 3.8 בספר).
הקפידו על כך שהאיור יהיה גדול, בהיר, וללא קשתות נחתכות.

הסבירו היטב את פעולת המכונה, ולמה היא אכן מכריעה את השפה הדרושה.

שאלה 2 **(20% סעיף א - 15%; סעיף ב - 5%)**

א. בנו מכונת טיורינג שכאשר היא מקבלת כקלט מילה w מעל האלפבית $\{0,1\}$, היא מסיימת במצב q_{accept} ועל הסרט רשומה המילה $w\#w$.

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, x, \#, \sqcup\}$.

למכונה יהיו **לא יותר משלושה עשר מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{reject} וכל הקשתות שנכנסות אליו).
הקפידו על כך שהאיור יהיה גדול, בהיר, וללא קשתות נחתכות.
הסבירו היטב את פעולת המכונה ולמה היא אכן מבצעת את הנדרש.
זכרו לטפל נכון גם במקרה ש-w היא המילה הריקה.

ב. מהי הפונקציה שמחשבת המכונה שבניתם בסעיף א?
הגדירו את הפונקציה בשלמות (תחום, טווח וכלל העתקה).

שאלה 3 (14%)

נעיין במודל החישובי הבא: מכונת טיורינג **עם מספר אינסופי של מצבים**.
מכונה כזו זהה למכונה רגילה, פרט לכך שמספר המצבים יכול להיות אינסופי (ולכן גם התחום והטווח של פונקצית המעברים יכולים להיות אינסופיים).

האם למכונה כזו **יש יותר כוח** מאשר למכונה רגילה?

אם עניתם שכן, עליכם להראות שמכונה כזו יכולה לזהות **כל שפה שהיא**. בנוסף עליכם להסביר מדוע אין בקיומה של מכונה כזו סתירה לתזה של צ'רץ'-טיורינג.
אם עניתם שלא, עליכם להראות כיצד מכונה עם מספר **סופי** של מצבים יכולה לחקות את פעולתה של מכונה עם מספר **אינסופי** של מצבים.

שאלה 4 (14%)

תארו מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית** לזיהוי השפה הבאה:

$$F = \{\#x_1\#x_2\# \ldots \#x_k \mid \text{each } x_i \in \{0, 1\}^* \text{ and } x_i = x_j \text{ for some } i \neq j\}$$

רמת הפירוט תהיה כמו בדוגמה 3.12 בספר.
המכונה צריכה להשתמש באי-דטרמיניזם באופן שיקל על החישובים (לעומת מכונה דטרמיניסטית לאותה המשימה).

שאלה 5 (16%)

תהי w מחרוזת סמלים. מסמנים על-ידי w^R את המחרוזת המתקבלת מ-w על-ידי היפוך סדר הסמלים ב-w.

דוגמה: $11001^R = 10011$

בנו מונה (enumerator) לשפה $D = \{w\#w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$.

האלפבית Σ של סרט הפלט יהיה $\{0, 1, \#\}$; האלפבית Γ של סרט העבודה יהיה $\{0, 1, \sqcup\}$.

למונה יהיו **לא יותר משנים עשר מצבים** (כולל q_{print} ו-q_{halt}).

תארו את המונה בעזרת איור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{halt} וכל הקשתות שנכנסות אליו. אפשר לוותר על הציור של מעברים בלתי אפשריים).
הקפידו על כך שהאיור יהיה גדול, בהיר, וללא קשתות נחתכות.
להגדרה פורמלית של מונה, עיינו במדריך הלמידה.

הסבירו היטב את פעולת המונה, ולמה הוא אכן מפיק את השפה D.

שאלה 6 (14%)

הוכיחו: שפה A היא מזוהה-טיורינג אם ורק אם יש מונה (enumerator) שמפיק את A וכל מילה ב-A מודפסת על-ידי המונה **פעם אחת ויחידה**. (כלומר, מילה ששייכת ל-A מודפסת פעם אחת; מילה שלא שייכת ל-A לא מודפסת אף פעם).

(ההבדל בין משפט 3.21 למה שאתם צריכים להוכיח בשאלה הוא הדרישה שכל מילה בשפה תודפס רק פעם אחת).

שאלה 7 (12%)

קראו בבעיה 3.9 בספר את ההגדרה של 2-PDA (אוטומט עם שתי מחסניות).

א. תארו אוטומט עם שתי מחסניות להכרעת השפה $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$.

ב. תארו אוטומט עם שתי מחסניות להכרעת השפה $\{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2013ב **מועד אחרון להגשה:** 12 אפר' 13

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (12%)

הוכיחו שהשפה G שלהלן היא **שפה כריעה**:

$G = \{<R> \mid$ R הוא ביטוי רגולרי; המילה 111 היא תת-מילה של **כל** מילה בשפה ש-R מתאר$\}$

(מילה מהצורה $<R>$ שייכת לשפה G, אם R הוא ביטוי רגולרי, וכל מילה w בשפה ש-R מתאר היא מהצורה $w = x111y$, כאשר x ו-y הן מילים כלשהן).

שאלה 2 (12%)

א. יהי Σ אלפבית **אינסופי בן מנייה** ($|\Sigma| = |\mathbb{N}|$).

האם קבוצת כל המחרוזות **הסופיות** מעל Σ היא קבוצה בת מנייה? הוכיחו את תשובתכם.

ב. יהי Σ אלפבית **סופי** המכיל יותר מאות אחת ($|\Sigma| > 1$).

האם קבוצת כל המחרוזות **האינסופיות בנות המנייה** מעל Σ היא קבוצה בת מנייה? הוכיחו.

שאלה 3 (18%)

נגדיר את השפה $HALT\text{-}ALL_{TM}$ הבאה:

$$HALT\text{-}ALL_{TM} = \{<M> \mid M \text{ is a TM that halts on all its inputs}\}$$

זוהי שפת התיאורים של מכונות טיורינג שעוצרות על כל קלט שלהן (במצב המקבל או במצב הדוחה).

נוכיח **בעזרת שיטת האלכסון** שהשפה $HALT\text{-}ALL_{TM}$ **איננה מזוהה-טיורינג**:

נניח בשלילה שהשפה $HALT\text{-}ALL_{TM}$ כן מזוהה-טיורינג.

אז לפי משפט 3.21, יש ל-$HALT\text{-}ALL_{TM}$ מונה (enumerator) E.

נזכור שאפשר לסדר את המחרוזות מעל אלפבית נתון Σ לפי סדר לקסיקוגרפי.

נבנה את המכונה M הבאה:

M = "על קלט w:

1. מצא את i כך ש-w היא המחרוזת ה-i לפי הסדר הלקסיקוגרפי.
2. הרץ את המונה E עד שהוא מדפיס את המחרוזת ה-i.
המחרוזת ה-i שהמונה הדפיס היא מחרוזת ששייכת ל-$HALT\text{-}ALL_{\text{TM}}$. כלומר, היא תיאור של מכונת טיורינג שעוצרת על כל קלט. נסמן אותה על-ידי A.
3. הרץ את A על w.
אם A קיבלה את w, דחה. אם A דחתה את w, קבל.

א. הוכיחו: המכונה M עוצרת על כל קלט.

ב. הסיקו: יש j כך שהמונה E ידפיס את $<M>$ כמחרוזת ה-j שהוא מדפיס.

ג. בדקו מה יקרה כאשר נריץ את M על המחרוזת ה-j לפי הסדר הלקסיקוגרפי, והגיעו לסתירה.

שאלה 4 (10%)

הציגו רדוקציה של $HALT_{\text{TM}}$ ל-A_{TM} (רדוקציה בכיוון הפוך מזה של הוכחת משפט 5.1).

שאלה 5 (18%)

ביחס לכל אחת מן השפות הבאות, קבעו האם אפשר להוכיח שהיא לא כריעה **בעזרת משפט Rice** (ראו בעיה 5.28 בספר) או לא.
אם קבעתם שאפשר, כתבו את ההוכחה. אם קבעתם שאי אפשר, הסבירו היטב למה אי אפשר.

א. $A = \{<M> \mid M \text{ is a TM and } |L(M)| < 50\}$
(A היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג שמקבלות פחות מ-50 מילים).

ב. $B = \{<M> \mid M \text{ is a TM and } M \text{ accepts every word } w \text{ within 1,000 steps}\}$
(B היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג שמקבלות כל מילה w בתוך 1,000 צעדים).

ג. $DECIDABLE_{\text{TM}} = \{<M> \mid M \text{ is a TM and } L(M) \text{ is a decidable language}\}$
(זוהי שפת התיאורים של מכונות טיורינג שהשפה שהן מזהות היא שפה כריעה).

שאלה 6 (12%)

תארו אוטומט חסום ליניארית (LBA) שמכריע את השפה A_{NFA} (המוגדרת בספר בעמוד 169).

שאלה 7 (18%)

בבעיה 5.30 בספר (עמוד 217) מוגדרת השפה $INFINITE_{\mathrm{TM}}$.

א. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $INFINITE_{\mathrm{TM}}$ (הראו: $A_{\mathrm{TM}} \leq_{\mathrm{m}} INFINITE_{\mathrm{TM}}$).

ב. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $\overline{INFINITE_{\mathrm{TM}}}$ (הראו: $A_{\mathrm{TM}} \leq_{\mathrm{m}} \overline{INFINITE_{\mathrm{TM}}}$).

הדרכה: אם מכונת טיורינג M מקבלת את הקלט w, אז כשמריצים את M על w מגיעים למצב המקבל לאחר מספר סופי של צעדים.

מכונת טיורינג N יכולה להתייחס לקלט שלה כאל מספר הצעדים שיש להריץ מכונה אחרת S.

(למשל, אם הקלט של N הוא v, אז N תריץ את S $|v|$ צעדים).

ג. הסיקו: $INFINITE_{\mathrm{TM}}$ ו- $\overline{INFINITE_{\mathrm{TM}}}$ **אינן מזוהות-טיורינג**.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 8 **משקל המטלה:** 8 נקודות

סמסטר: 2013ב **מועד אחרון להגשה:** 10 מאי 13

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (12%)

תהי w מחרוזת סמלים. מסמנים על-ידי w^{R} את המחרוזת המתקבלת מ-w על-ידי היפוך סדר הסמלים ב-w.

דוגמה: $11001^{\mathrm{R}} = 10011$

מילה w נקראת **פלינדרום** אם $w = w^{\mathrm{R}}$.

דוגמה: 1100011 היא פלינדרום; 110001 איננה פלינדרום.

נגדיר את השפה PAL:

$$PAL = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^{\mathrm{R}}\}$$

(זוהי שפת הפלינדרומים מעל האלפבית $\{0,1\}$).

מצאו פונקציה $t(n)$ מינימלית, כך ש- $PAL \in \mathrm{TIME}(t(n))$

א. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד.

ב. במכונה דטרמיניסטית עם שני סרטים.

ג. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד שיש לו שני ראשים קוראים-כותבים.

הסבירו את תשובותיכם.

שאלה 2 (10%)

הוכיחו שהשפות הבאות **שייכות למחלקה P**:

א. $FINITE_{\mathrm{DFA}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is a DFA and } L(M) \text{ is a finite language}\}$

ב. $7\text{-}VERTEX\text{-}COVER = \{\langle G \rangle \mid G \text{ is an undirected graph that has a 7-node vertex cover}\}$

שאלה 3 (10%)

הוכיחו שהשפה הבאה שייכת **למחלקה NP**:

$B = \{<n, m, k>$ | הראשוני ה-m בפירוק לגורמים ראשוניים של n גדול מ-$k\}$

שלשה $<n, m, k>$ של מספרים טבעיים שייכת ל-B אם הראשוני ה-m (לפי גודל) בפירוק של n לגורמים ראשוניים גדול מ-k. אם m גדול ממספר הראשוניים בפירוק לגורמים של n, אז $<n, m, k>$ לא שייכת ל-B.

למשל, $<3276, 3, 6> \in B$ ($3276 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$; הראשוני השלישי בפירוק לגורמים ראשוניים הוא 7 והוא גדול מ-6), $<3276, 4, 20> \notin B$, $<3276, 5, 0> \notin B$.

שאלה 4 (16%)

נאמר ששפה A **ניתנת לרדוקציה בזמן ליניארי** לשפה B אם יש פונקציה f **חשיבה בזמן ליניארי** כך שלכל w, $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$.

נאמר ששפה A **ניתנת לרדוקציה בזמן ריבועי** לשפה B אם יש פונקציה f **חשיבה בזמן ריבועי** כך שלכל w, $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$.

א. נתון ש-B שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n)$ ו-A ניתנת לרדוקציה בזמן **ליניארי** ל-B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n)$? הסבירו את תשובתכם.

ב. נתון ש-B שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n^2)$ ו-A ניתנת לרדוקציה בזמן **ליניארי** ל-B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n^2)$? הסבירו את תשובתכם.

ג. נתון ש-B שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n)$ ו-A ניתנת לרדוקציה בזמן **ריבועי** ל-B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n)$? הסבירו את תשובתכם.

ד. נתון ש-B שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n^2)$ ו-A ניתנת לרדוקציה בזמן **ריבועי** ל- B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n^2)$? הסבירו את תשובתכם.

שאלה 5 (16%)

עיינו בהגדרת השפה *3COLOR* בבעיה 7.27 בספר (עמוד 301).

הראו רדוקציה פולינומיאלית של *3COLOR* ל-*3SAT* (הראו כי $3COLOR \leq_P 3SAT$).

עליכם להראות רדוקציה ישירה, ולא רדוקציה כמו בהוכחת משפט Cook-Levin.

הדרכה: התאימו שלושה משתנים בוליאניים לכל צומת v בגרף - v_1, v_2 ו-v_3.

ערכו של המשתנה v_i ($i = 1, 2, 3$) יהיה 1 אם הצומת v צבוע בצבע i, ויהיה 0 אם הצומת v צבוע באחד משני הצבעים האחרים.

בנו פסוקיות (בגודל 2 או 3) שיאמרו:

- לכל צומת v בגרף, v צבוע בצבע אחד ויחיד
- לכל קשת (u, v) בגרף, u ו-v צבועים בצבעים שונים

תארו את הרדוקציה, הוכיחו שהיא תקפה, והראו שהיא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 6 (10%)

איך אפשר לדעת, מתוך עיון בנוסחה ϕ שמייצרת הרדוקציה של הוכחת משפט Cook-Levin (משפט 7.37), האם המכונה N שמכריעה את השפה A היא מכונה דטרמיניסטית או לא?
הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 7 (8%)

יהי Σ אלפבית נתון.

מצאו את כל השפות L כך ש- $L \equiv_P \Sigma^*$ ואת כל השפות K כך ש- $K \equiv_P \varnothing$.

הסבירו היטב את תשובותיכם.

(היחס $\equiv_P$ מוגדר במדריך הלמידה בעמוד 85).

שאלה 8 (18%)

א. הוכיחו שהשפה $NONDISJOINT_{\text{DFA}}$ שלהלן שייכת למחלקה P :

$$NONDISJOINT_{\text{DFA}} = \{<A, B> \mid A \text{ and } B \text{ are DFAs and } L(A) \cap L(B) \neq \varnothing\}$$

מילה $<A, B>$ שייכת לשפה אם A ו-B הם תיאורים של אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים שהשפות שהם מזהים אינן זרות זו לזו.

ב. הוכיחו שהשפה $NONEMPTY\text{-}INTER_{\text{DFA}}$ שלהלן היא שפה **NP-קשה** :

$$NONEMPTY\text{-}INTER_{\text{DFA}} = \{<A_1, ..., A_k> \mid A_1, ..., A_k \text{ are DFAs and } L(A_1) \cap \cdots \cap L(A_k) \neq \varnothing\}$$

מילה $<A_1, A_2, ..., A_k>$ שייכת לשפה אם A_1, A_2, ..., A_k הם תיאורים של אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים, ויש מילה ששייכת לכל אחת מן השפות של האוטומטים הללו.

הדרכה : הראו רדוקציה פולינומיאלית של $3SAT$.

אפשר לייצג השמה של ערכים בוליאניים ל-n משתנים בוליאניים x_1, x_2, ..., x_n בעזרת מחרוזות באורך n מעל $\{0, 1\}$: המקום ה-i במחרוזת יציין את ערכו של x_i.

לכל פסוקית בנו אוטומט שיזהה את שפת כל המחרוזות מעל $\{0, 1\}$ שמתאימות להשמות שמספקות את הפסוקית.

ג. הסבירו היטב מהו ההבדל בין השפה של סעיף א לשפה של סעיף ב שגורם לכך שהראשונה שייכת ל-P והשנייה היא NP-קשה. (תשובה בסגנון "פה יש שני אוטומטים ופה יש k אוטומטים" לא תתקבל כתשובה נכונה. זה לא מסביר את ההבדל).

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2013ב **מועד אחרון להגשה:** 24 מאי 13

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

הוכיחו שהשפה *SUBSET-SUM* שייכת ל-$\mathrm{SPACE}(n)$.
הציגו אלגוריתם להכרעת השפה, הסבירו היטב כיצד הוא ימומש, והוכיחו שהמקום הדרוש הוא $O(n)$.

שאלה 2 (10%)

הוכיחו: אם A היא שפה **רגולרית**, אז $A \in \mathrm{SPACE}(1)$.

שאלה 3 (15%)

בהגדרה של שפות PSPACE-שלמות (הגדרה 8.8) משתמשים ברדוקצית **זמן** פולינומיאלי (סעיף 2 בהגדרה).
הראו שאם נשתמש ברדוקצית **מקום** פולינומיאלי (כלומר, כל A ב-PSPACE ניתנת לרדוקציה **במקום** פולינומיאלי ל-B), אז SAT תהיה בעיה PSPACE-שלמה.

הדרכה: SAT היא רק דוגמה.

שאלה 4 (25%)

בעיה 8.22 בספר (עמוד 335).
לכל אחת מן השפות, הסבירו היטב את אופן פעולתה של מכונה שמשתמשת במקום לוגריתמי בגודל הקלט ומכריעה את השפה.

שאלה 5 (15%)

הוכיחו: $CLIQUE \leq_L VERTEX\text{-}COVER$.

($CLIQUE$ הוגדרה לפני משפט 7.24; $VERTEX\text{-}COVER$ הוגדרה לפני משפט 7.44).

עליכם לתאר את הרדוקציה, להוכיח שהיא תקפה, ולהוכיח בפירוט שהיא יכולה להתבצע במקום לוגריתמי.

שאלה 6 (25%)

הבעיה E_{DFA} הוגדרה בספר לפני משפט 4.4.

הוכיחו: $\overline{E_{\mathrm{DFA}}}$ היא שפה NL-שלמה.

הדרכה: הראו שהיא שייכת ל-NL, והראו כי $PATH \leq_L \overline{E_{\mathrm{DFA}}}$.

מטלת מנחה (ממ״ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: סעיפים 9.1, 10.1 ו-10.2 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2013ב **מועד אחרון להגשה:** 14 יוני 13

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1 (20%)

א. יהי k מספר טבעי. מה יקרה כאשר נריץ את המכונה D מהוכחת משפט **9.3** על הקלט $<D>10^k$?
(כלומר, מריצים את המכונה D על התיאור שלה שאחריו רשומה המחרוזת 10^k).
הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. מה יקרה כאשר נריץ את המכונה D מהוכחת משפט **9.10** על הקלט $<D>10^k$?
הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 2 (8%)

האם **ממה שנלמד בסעיף 9.1** בספר אפשר להסיק **שכל** שפה PSPACE-שלמה איננה שייכת ל-NL?
הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 3 (14%)

הוכיחו: $\text{NP} \neq \text{SPACE}(n)$.

שאלה 4 (10%)

עיינו באלגוריתם A בעמוד 372 בספר הלימוד.

כזכור, הוכח שאלגוריתם זה הוא בעל יחס קירוב ≤ 2.

הוכיחו שיחס הקירוב 2 הוא **הדוק** ביחס לאלגוריתם A (כלומר, יחס הקירוב ≤ 2):

הראו שלכל n טבעי גדול מ-0, יש גרף לא מכוון $G = (V, E)$ כך שמתקיים:

- $|V| = 2n$ (בגרף G יש $2n$ קדקודים);
- יש תת-קבוצה U של V ($U \subseteq V$) המהווה כיסוי קדקודים מינימלי ו- $|U| = n$ (יש בגרף כיסוי קדקודים מינימלי שגודלו n);
- האלגוריתם A ימצא כיסוי שגודלו $2n$.

שאלה 5 (20%)

לימדו את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה (עמודים 150-156).

א. הוכיחו שעלות המסלול של הסוכן הנוסע שמוצא אלגוריתם הקירוב המוצע בעמודים 155-156 **קטנה** מפעמיים עלות המסלול האופטימלי.
הדרכה: אם מורידים קשת אחת ממעגל המילטוני, מקבלים עץ פורש של הגרף.

ב. כזכור, הוכח שאלגוריתם זה הוא בעל יחס קירוב ≤ 2.
הוכיחו שיחס הקירוב 2 הוא **הדוק** ביחס לאלגוריתם (כלומר, אי אפשר להצביע על חסם קטן יותר).
הדרכה: לכל n אי-זוגי גדול מ-5, התבוננו בגרף מלא בעל n צמתים, $x_1, x_2, ..., x_n$, שהמחירים של הקשתות שלו הם כדלקמן: המחיר של כל קשת שנוגעת ב-x_1 הוא 1; המחיר של כל הקשתות מהצורה (x_i, x_{i+1}) הוא 1; המחיר של כל שאר הקשתות הוא 2.
הוכיחו שבגרף זה מתקיים אי-שוויון המשולש.
הוכיחו שהקירוב שהאלגוריתם משיג על גרף כזה הוא $2 - 2/n$.
הסיקו את התוצאה הנדרשת.

שאלה 6 (8%)

יהי p מספר ראשוני.

א. הוכיחו **בעזרת אינדוקציה**, שלכל a טבעי או 0, $a^p \equiv a \pmod p$.

ב. הסיקו את משפט פרמה הקטן (משפט 10.6) ממה שהוכחתם בסעיף א.

שאלה 7 (20%)

א. הוכיחו: אם $P = NP$, אז יש אלגוריתם **בעל זמן ריצה פולינומיאלי** לבעיה הבאה:

הקלט: נוסחה בוליאנית ϕ.

הפלט: השמה מספקת של ϕ אם ϕ ספיקה. אם ϕ לא ספיקה, יוחזר "לא".

(האלגוריתם מקבל כקלט נוסחה בוליאנית ϕ. אם אין ל-ϕ השמה מספקת, מוחזר "לא". אם יש ל-ϕ השמה מספקת, מוחזרת אחת ההשמות המספקות של ϕ. כלומר, מוחזרת הצבה של 0-ים ו-1-ים למשתנים של ϕ כך שהערך של ϕ בהצבה הזו הוא 1).

הדרכה: אם $P = NP$, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי ל-SAT.
אפשר לקרוא לאלגוריתם הזה כמה פעמים כדי למצוא הצבה למשתנים של ϕ שתספק את ϕ.

ב. בעיה 10.19 בספר (עמוד 418).

הדרכה: התאימו את מה שהראיתם בסעיף א.