

ה א ו נ י ב ר ס י ט ה ה פ ת ו ח ה

20585

**מבוא לתורת החישוביות  
והסיבוכיות**

חוברת הקורס - סתיו א2013

כתב: אלעזר בירנבוים

אוקטובר 2012 - סמסטר סתיו - תשע"ג



**פנימי – לא להפצה.**

כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה. ©

## תוכן העניינים

א	אל הסטודנטים
ב	1. לוח זמנים ופעילויות
ד	2. תיאור המטלות
ה	3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס
1	ממ"ן 11
5	ממ"ן 12
7	ממ"ן 13
11	ממ"ן 14
13	ממ"ן 15

## אל הסטודנטים,

אני מקדם את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים, אותם מפרסם מרכז ההוראה. בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ס בכתובת:

<http://telem.openu.ac.il>

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר

הספריה באינטרנט [www.openu.ac.il/Library](http://www.openu.ac.il/Library)

שעות הייעוץ בקורס מתקיימות בימי ראשון בשעות 18:00-20:00 בטלפון 04-6850321.

**אבקש מאד לא להתקשר לטלפון הזה בשעות לא סבירות ובשבתות.**

ניתן לפנות גם בדואר אלקטרוני: [elazar@openu.ac.il](mailto:elazar@openu.ac.il)

אני מאחל לכם הצלחה בלימודים.

בברכה,

*אלעזר גינזבורג*

מרכז ההוראה

**1. לוח זמנים ופעילויות (20585 / א2013)**

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
1	19.10.2012-14.10.2012	פרק 1		
2	26.10.2012-21.10.2012	פרק 1		
3	2.11.2012-28.10.2012	פרק 2	מפגש ראשון	ממ"ן 11 2.11.2012
4	9.11.2012-4.11.2012	פרק 2 פרק 3		
5	16.11.2012-11.11.2012	פרק 3	מפגש שני	
6	23.11.2012-18.11.2012	פרק 3 פרק 4		ממ"ן 12 23.11.2012
7	30.11.2012-25.11.2012	פרק 4	מפגש שלישי	
8	7.12.2012-2.12.2012	פרק 4		

\* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

לוח זמנים ופעילויות – המשך

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
9	14.12.2012-9.12.2012 (א-ו חנוכה)	פרק 4	מפגש רביעי	
10	21.12.2012-16.12.2012	פרק 4 פרק 5		ממ"ן 13 21.12.2012
11	28.12.2012-23.12.2012	פרק 5	מפגש חמישי	
12	4.1.2013-30.12.2012	פרק 5 פרק 6		ממ"ן 14 4.1.2013
13	11.1.2013-6.1.2013	פרק 6	מפגש שישי	
14	18.1.2013-13.1.2013	פרק 7		
15	25.1.2013-20.1.2013	פרק 7	מפגש שביעי	ממ"ן 15 25.1.2013

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

\* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

## 2. תיאור המטלות

קראו היטב עמודים אלו לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס - הבנה מעמיקה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. המטלות תיבדקנה על-ידי המנחה ותוחזרנה בצירוף הערות המתייחסות לתשובות.

המטלות מלוות את יחידות הלימוד בקורס. להלן פירוט המטלות, היחידות שאליהן מתייחסת כל מטלה ומשקלה היחסי. בחלק מהמטלות תופענה גם שאלות המתייחסות ליחידות שכבר נלמדו.

ממ"ן 11 - פרק 1 - 6 נקודות

ממ"ן 12 - פרקים 2, 3 - 6 נקודות

ממ"ן 13 - פרק 4 - 8 נקודות

ממ"ן 14 - פרק 5 - 4 נקודות

ממ"ן 15 - פרקים 6, 7 - 6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל של 24 נקודות לפחות.

**שימו לב שחובה להגיש את ממ"ן 13.**

ללא צבירת 24 נקודות בהגשת מטלות לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

**למען הסר ספק, יודגש שחל איסור על הכנה משותפת והעתקה של מטלות או חלקי מטלות.**  
(הנושא מפורט בתקנון משמעת לסטודנטים - נספח 1 של ידיעון האו"פ).

### לתשומת לבכם!

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן:

אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלה** בציון הנמוך ביותר, שציונה נמוך מציון הבחינה, לא תילקח בחשבון בעת שקלול הציון הסופי.

זאת בתנאי שמטלה זו **אינה חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו מגיע למינימום הנדרש.

**זכרו!** ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס. סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון שמספרו 09-7782222, או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא <http://www.openu.ac.il/sheilta> קורסים ⇨ ציוני מטלות ובחינות ⇨ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.



יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של ציוני המטלות והבחינה יהיה נמוך מ-60).

**כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.**

### **3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס**

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל כולל של 24 נקודות לפחות.

ב. ציון של לפחות 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.



# מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

מספר השאלות: 7

משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: 2013א

מועד אחרון להגשה: 2 נוב' 12

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

## שאלה 1 (14%)

אפשר להציע אלגוריתם נוסף להכרעת השפה  $A$  של דוגמה 3.7:

רושמים על ה-0-ים של הקלט תחילה את  $x$ , אחר כך את  $x^2$  (שני  $x$ -ים), אחר כך את  $x^4$  (ארבעה  $x$ -ים), אחר כך את  $x^8$  (שמונה  $x$ -ים), וכך הלאה.

ממשיכים בתהליך הזה עד שמגלים שמספר ה-0-ים שווה ל- $x^k$  עבור  $k$  כלשהו שהוא חזקה של 2 (ואז מקבלים את הקלט), או עד שמגלים אי-שוויון (ואז דוחים את הקלט).

תארו בעזרת איור (כמו איור 3.8 בספר) מכונת טיורינג שמממשת את האלגוריתם הזה. הקפידו על כך שהאיור יהיה גדול, בהיר, וללא קשתות נחתכות.

אתם רשאים להשמיט מעברים בלתי אפשריים (כדוגמת המעבר המתייחס לקריאת הסמל  $x$  במצב  $q_1$  של המכונה  $M_2$  באיור 3.8).

אלפבית הסרט יהיה  $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$ .

למכונה יהיו לא יותר משנים עשר מצבים (כולל  $q_{\text{accept}}$  ו- $q_{\text{reject}}$ ).

הסבירו היטב את פעולת המכונה, ולמה היא אכן מכריעה את השפה  $A$ .

## שאלה 2 (12%. כל סעיף 6%)

שפה  $L$  תיקרא מזוהה על-ידי עצירה אם קיימת מכונת טיורינג  $M$  שלכל  $w \in L$  עוצרת (ב- $q_{\text{accept}}$ ) או (ב- $q_{\text{reject}}$ ), ולכל  $w \notin L$  לא עוצרת.

א. נתון שהשפה  $L$  מזוהה על-ידי עצירה. האם בהכרח  $L$  היא שפה מזוהה-טיורינג? הוכיחו את תשובתכם.

ב. נתון ש- $L$  מזוהה טיורינג. האם בהכרח  $L$  מזוהה על-ידי עצירה? הוכיחו את תשובתכם.

### שאלה 3 (20%. סעיף א - 6%, סעיף ב - 14%)

נגדיר מודל חישובי חדש : מכונת טיורינג עם סרט אחד ועם כמה ראשים קוראים-כותבים. למכונה כזו יש סרט יחיד, אבל ייתכן שיש לה יותר מראש קורא-כותב אחד. אם יש למכונה  $k$  ראשים, הם ממוספרים מ-1 עד  $k$ . הראשים השונים נעים על הסרט באופן בלתי תלוי זה בזה. ייתכן שכמה ראשים יעמדו בו-זמנית על אותו מקום בסרט. פונקצית המעברים  $\delta$  של מכונה עם  $k$  ראשים מוגדרת כך :  $\delta: Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$ . כאשר המכונה נמצאת במצב  $q_i$ , והראשים עומדים על הסמלים  $a_1, a_2, \dots, a_k$  בסרט, פונקצית המעברים מגדירה לאיזה מצב  $q_j$  עוברים, אלו אותיות מודפסות, ומהי התנועה של כל ראש. אם לפי פונקצית המעברים, כמה ראשים מדפיסים סמלים שונים באותו מקום בסרט, יודפס הסמל של הראש שמספרו קטן ביותר.

א. הסבירו כיצד מכונה עם שני ראשים יכולה להכריע את השפה של תרגיל 3.8 סעיף b (עמוד 162 בספר) במעבר אחד על הקלט (כלומר, כל ראש יעבור פעם אחת על הקלט).

ב. הסבירו **בפירוט** כיצד מכונת טיורינג רגילה (עם ראש יחיד) יכולה לחקות את פעולתה של מכונה עם  $k$  ראשים.

### שאלה 4 (14%)

בנו מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית**, שכאשר היא מתחילה לפעול על הסרט הריק (סרט שכולו סימני רווח), בסיומו של כל מסלול חישוב שמסתיים במצב  $q_{\text{accept}}$ , כתובה על הסרט מילה  $w$  ששייכת לשפה  $A$  של דוגמה 3.7, ולכל מילה  $w$  ששייכת לשפה  $A$ , יש למכונה מסלול חישוב שמסתיים במצב  $q_{\text{accept}}$  ובסיומו  $w$  כתובה על הסרט של המכונה. כלומר, כאשר המכונה מתחילה את פעולתה על סרט ריק, היא יכולה לסיים ב- $q_{\text{accept}}$ , ועל הסרט תהיה כתובה המילה 0 או המילה 00 או המילה 0000, וכך הלאה; ולכל מילה  $w$  שבנויה ממספר 0-ים שהוא חזקה של 2, יש למכונה מסלול שמסתיים ב- $q_{\text{accept}}$  ועל הסרט כתובה המילה  $w$ . אלפבית הסרט יהיה  $\Gamma = \{0, \sqcup, x\}$ ; למכונה יהיו **לא יותר משמונה מצבים** (כולל  $q_{\text{accept}}$  ו- $q_{\text{reject}}$ ). תארו את המכונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של  $q_{\text{reject}}$  וכל הקשתות שנכנסות אליו). **הסבירו היטב** את פעולת המכונה, את התפקיד של כל מצב, את נקודות האי-דטרמיניזם, ולמה המכונה אכן מבצעת את הנדרש.

### שאלה 5 (14%)

בעיה 3.10 בספר (עמוד 162). הראו שמכונה עם סרט אינסופי בשני הכיוונים **שקולה בכוחה** למכונה עם סרט אינסופי בכיוון אחד : פרטו כיצד מכונה מאחד הסוגים יכולה לחקות את פעולתה של מכונה מן הסוג השני.

## שאלה 6 (14%)

בנו מונה (enumerator) לשפה  $A$  של דוגמה 3.7.

האלפבית  $\Sigma$  של סרט הפלט יהיה  $\{0\}$ ; האלפבית  $\Gamma$  של סרט העבודה יהיה  $\{0, x, \sqcup\}$ .

למונה יהיו **לא יותר משמונה מצבים** (כולל  $q_{\text{print}}$  ו- $q_{\text{halt}}$ ).

תארו את המונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של  $q_{\text{halt}}$  וכל הקשתות

שנכנסות אליו. אפשר לוותר על הציור של מעברים בלתי אפשריים).

להגדרה פורמלית של מונה, עיינו במדריך הלמידה.

**הסבירו היטב** את פעולת המונה ולמה הוא אכן מונה את השפה  $A$ .

## שאלה 7 (12%. כל סעיף 6%)

א. על המונה  $E$  נתון שהוא **מגיע** אי פעם למצב  $q_{\text{halt}}$ .

האם אפשר להסיק מכך שהשפה  $L(E)$  שהוא מפיק היא **שפה כריעה**? הוכיחו את תשובתכם.

ב. על המונה  $F$  נתון שהוא **לא מגיע** אף פעם למצב  $q_{\text{halt}}$ .

האם אפשר להסיק מכך שהשפה  $L(F)$  שהוא מפיק **איננה שפה כריעה**? הוכיחו את תשובתכם.



# מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 7

מועד אחרון להגשה: 23 נוב' 12

סמסטר: א2013

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

### שאלה 1 (10%)

מסמנים על-ידי  $|C|$  את הגודל (העוצמה) של הקבוצה  $C$ . מסמנים על-ידי  $L(M)$  את השפה שמזהה אוטומט סופי דטרמיניסטי  $M$ .

הוכיחו שהשפה  $G_{DFA}$  שלהלן היא שפה כריעה:

$$G_{DFA} = \{ \langle A, B \rangle \mid |L(A)| > |L(B)| \}; \text{ } A \text{ ו-} B \text{ הם אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים};$$

מילה מהצורה  $\langle A, B \rangle$  שייכת לשפה  $G_{DFA}$  אם  $A$  ו- $B$  הם תיאורים של אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים, והשפה שמזהה האוטומט  $A$  גדולה יותר מן השפה שמזהה האוטומט  $B$ .  
אם שתי השפות אינסופיות, אז  $|L(A)| = |L(B)|$ ; אם אחת סופית ואחת אינסופית, אז האינסופית גדולה מן הסופית; אם שניהן סופיות, אז  $|L(A)| > |L(B)|$  אם ורק אם מספר המילים ב- $L(A)$  גדול ממספר המילים ב- $L(B)$ .

### שאלה 2 (10%)

נסמן על-ידי  $\mathbb{N}_0$  את קבוצת המספרים הטבעיים עם 0:  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

הוכיחו שהפונקציה  $g$  הבאה היא התאמה (correspondence) של  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  ו- $\mathbb{N}_0$ :

$$g(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$$

(להגדרת התאמה עיינו בספר בהגדרה 4.12).

### שאלה 3 (15%)

הוכיחו: אם ימצא אלגוריתם פלאי להכרעת השפה  $A_{TM}$ , אפשר יהיה להיעזר בו כדי להכריע את השפה  $HALT_{TM}$  המוגדרת בעמוד 192 בספר.

**שאלה 4 (16% .סעיף א - 6%, סעיף ב - 10%)**

נגדיר את השפה  $L$  הבאה :

$$L = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ הוא תיאור של מכונת טיורינג} \}$$

$\{ \langle M \rangle \mid M \text{ רצה על } \langle M \rangle, \text{ היא מגיעה למצב } q_{\text{accept}}, \text{ ועל הסרט כתובה המילה הריקה} \}$

$L$  היא שפת המחרוזות שמתארות מכונות טיורינג  $M$  בעלות התכונה הבאה :

כש- $M$  רצה על  $\langle M \rangle$  כקלט, היא מסיימת במצב  $q_{\text{accept}}$ , ואז הסרט של המכונה מכיל רק סמלי רווח.

א. הוכיחו : השפה  $L$  **מזוהה-טיורינג**.

ב. הוכיחו **בעזרת שיטת האלכסון** שהשפה  $L$  **איננה כריעה**.

**הדרכה :** הניחו בשלילה שיש מכונה  $H$  שמכריעה את  $L$ . בנו מכונה  $D$  שתפעל הפוך מכל מכונה  $M$  שהיא.

**שאלה 5 (12%)**

הוכיחו : השפה המשלימה לשפה  $E_{\text{TM}}$  (השפה  $\overline{E_{\text{TM}}}$ ) היא שפה **מזוהה-טיורינג**.

**שאלה 6 (12%)**

האם  $ALL_{\text{LBA}}$  היא שפה **כריעה**? הוכיחו את תשובתכם.

$$(ALL_{\text{LBA}} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is an LBA and } L(M) = \Sigma^* \})$$

**שאלה 7 (25% .סעיף א - 8%, סעיף ב - 7%, סעיף ג - 7%, סעיף ד - 3%)**

נגדיר את השפה  $CF_{\text{TM}}$  :

$$CF_{\text{TM}} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is a TM and } L(M) \text{ is a context-free language} \}$$

א. הוכיחו **בעזרת משפט Rice** (ראו בעיה 5.28 בספר) שהשפה  $CF_{\text{TM}}$  **איננה כריעה**.

ב. הציגו רדוקצית מיפוי של  $A_{\text{TM}}$  ל- $CF_{\text{TM}}$  (הראו :  $A_{\text{TM}} \leq_m CF_{\text{TM}}$ ).

ג. הציגו רדוקצית מיפוי של  $A_{\text{TM}}$  ל- $\overline{CF_{\text{TM}}}$  (הראו :  $A_{\text{TM}} \leq_m \overline{CF_{\text{TM}}}$ ).

ד. הסיקו :  $CF_{\text{TM}}$  ו- $\overline{CF_{\text{TM}}}$  **אינן מזוהות-טיורינג**.



# מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

משקל המטלה: 8 נקודות

מספר השאלות: 8

מועד אחרון להגשה: 21 דצמ' 12

סמסטר: 2013א

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

### שאלה 1 (16%. כל סעיף 8%)

אפשר להציע אלגוריתם נוסף להכרעת השפה  $A = \{0^k 1^k \mid k \geq 0\}$ :

תחילה בודקים שבמילת הקלט אין 0-ים מימין ל-1-ים.

לאחר מכן סופרים את ה-0-ים ואת ה-1-ים, ובודקים שמספרם זהה.

א. הסבירו כיצד אפשר לממש את האלגוריתם הזה, במכונת טיורינג דטרמיניסטית בעלת סרט

אחד, כך שזמן הריצה יהיה  $O(n \log n)$ .

הדרכה: אם המונים של ה-0-ים וה-1-ים יהיו רחוקים מן הראש הקורא-כותב של המכונה, אז

ההגעה אליהם בכל פעם תדרוש מספר גדול של צעדי ריצה.

ב. הסבירו כיצד אפשר לממש את האלגוריתם הזה במכונת טיורינג דטרמיניסטית בעלת שני

סרטים כך שזמן הריצה יהיה  $O(n)$ .

### שאלה 2 (12%. כל סעיף 6%)

הוכיחו שהשפות הבאות שייכות למחלקה P:

א.  $EQ_{DFA}$  (ראו משפט 4.5 בספר).

ב.  $5-CLIQUE = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ is an undirected graph with a 5-clique} \}$ .

### שאלה 3 (8%)

האם לפי הידע שבידנו השפה הבאה שייכת ל-NP? הסבירו את תשובתכם.

$EXACT-TRIPLE-SAT = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ is a Boolean formula that has exactly 3 satisfying assignments} \}$

שאלה 4 (16% סעיף א - 5%, סעיף ב - 5%, סעיף ג - 6%)

א. הציעו מאמת (verifier) לשפה  $\overline{ALL_{CFG}}$  (ראו משפט 5.13 בספר).

ב. הסבירו מדוע המאמת שהצעתם איננו בהכרח בעל זמן ריצה פולינומיאלי בגודל הקלט.

ג. הוכיחו:  $\overline{ALL_{CFG}}$  לא שייכת ל-NP.

שאלה 5 (10%)

למה שווה מספר ההשמות המספקות של הנוסחה הבוליאנית המתקבלת על-ידי הרדוקציה של משפט Cook-Levin? הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 6 (10%)

הראו רדוקציה פולינומיאלית של  $VERTEX-COVER$  ל- $CLIQUE$ .  
( $VERTEX-COVER \leq_p CLIQUE$ )

שאלה 7 (8%)

ברדוקציה של הוכחת משפט 7.56 בספר, קבוצת המספרים  $S$  כוללת מופעים כפולים של מספרים ( $g_i = h_i$  לכל  $1 \leq i \leq k$ ). כלומר,  $S$  היא רב-קבוצה (multiset).  
שנו את הרדוקציה כך ש- $S$  לא תכיל מופעים כפולים. כלומר,  $S$  תהיה קבוצה (ולא רב-קבוצה).

שאלה 8 (20% כל סעיף 10%)

בעיית הקבוצה הבלתי תלויה ( $INDEPENDENT-SET$ ) מוגדרת בעמוד 94 במדריך הלמידה.

א. הוכיחו: בגרפים שבהם דרגת כל צומת  $\geq 2$  הבעיה שייכת ל-P.  
(דרגת צומת = מספר הקשתות שנוגעות בצומת).

עליכם לתאר אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי המקבל כקלט מספר טבעי  $k$  וגרף לא מכוון  $G$  שדרגת כל צומת שלו  $\geq 2$ , ובודק האם יש ב- $G$  קבוצה בלתי תלויה בגודל  $k$ .

ב. הוכיחו: בגרפים שבהם דרגת כל צומת  $\geq 3$  הבעיה היא NP-שלמה.

הדרכה: רדוקציה פולינומיאלית של  $3SAT$ :

יהיו הפסוקיות של הנוסחה  $C_1, \dots, C_m$  (בכל פסוקית שלושה ליטרלים).

לכל משתנה  $v$  בנוסחה, נסמן על-ידי  $k_v$  את מספר הפסוקיות שבהן הוא מופיע.

לכל משתנה  $v$  בונים מעגל בגודל  $2k_v$  שבו מופיעים הקדקודים  $T_{v,i}$  ו- $F_{v,i}$  לסירוגין, כאשר  $i$  עובר על מספרי הפסוקיות שבהן מופיע המשתנה  $v$ .

(למשל, אם המשתנה  $v$  מופיע בפסוקיות השנייה, החמישית והשמינית, אז בונים את

המעגל  $(T_{v,2} - F_{v,2} - T_{v,5} - F_{v,5} - T_{v,8} - F_{v,8} - T_{v,2})$ .

לכל פסוקית  $(l_1 \vee l_2 \vee l_3)$  בנוסחה  $(l_i)$  הוא ליטרל) בונים משולש.

מחברים בקשת כל ליטרל  $l$  של הפסוקית ה- $i$  לקדקוד המתאים לפסוקית ה- $i$  במעגל של המשתנה של  $l$ : אם הליטרל  $l$  הוא  $\neg v$ , מחברים אותו ל- $T_{v,i}$ ; אם הליטרל  $l$  הוא  $v$ , מחברים אותו ל- $F_{v,i}$ .

הראו שהרדוקציה המוצעת יכולה להתבצע בזמן פולנומיאלי בגודל הקלט.

הראו שדרגת כל צומת בגרף שנבנה על-ידי הרדוקציה  $\geq 3$ .

הראו שהנוסחה ספיקה אם ורק אם יש בגרף שנבנה על-ידי הרדוקציה קבוצה בלתי תלויה בגודל  $n$  (שאותו עליכם לקבוע).



# מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 4 ינו' 13

סמסטר: 2013א

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

### שאלה 1 (10%)

נגדיר:  $UHAMCIRCUIT = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ is an undirected graph that has a Hamiltonian circuit} \}$   
(זוהי שפת הגרפים הלא מכוונים שיש להם מעגל המילטון).

הוכיחו שהשפה  $UHAMCIRCUIT$  שייכת ל- $SPACE(n)$ .

הציגו אלגוריתם להכרעת השפה, הסבירו היטב כיצד הוא ימומש, והוכיחו שהמקום הדרוש הוא  $O(n)$ .

### שאלה 2 (10%)

הראו רדוקציה בעלת זמן ריצה  $O(n^2)$  של השפה  $SAT$  לשפה  $TQBF$ .  
הדרכה: זו לא הרדוקציה של הוכחת משפט 8.9.

### שאלה 3 (30%)

תזכורת:  $A_{LBA} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ is an LBA, } w \text{ is a string, and } M \text{ accepts } w \}$

א. הוכיחו: השפה  $A_{LBA}$  שייכת ל- $PSPACE$ .

ב. תהי  $A$  שפה ב- $PSPACE$ . תארו רדוקציה בעלת זמן ריצה פולינומיאלי של  $A$  ל- $A_{LBA}$ . (הראו כי

$A \leq_P A_{LBA}$  על-ידי הצגת רדוקציה פולינומיאלית של  $A$  ל- $A_{LBA}$ ).

ג. הסיקו:  $A_{LBA}$  היא שפה  $PSPACE$ -שלמה.

### שאלה 4 (10%)

האם המחלקה  $L$  סגורה לפעולת השרשור (concatenation)? הוכיחו את תשובתכם.

### שאלה 5 (20%)

נגדיר את השפה  $B$  הבאה:  $B = \{e \mid e \text{ is an expression of properly nested parentheses}\}$   
 $B$  היא שפת הביטויים האריתמטיים של מספרים שלמים אי-שליליים שבהם הסוגריים תקינים.  
האלפבית של  $B$  הוא  $\Sigma = \{+, -, \times, /, (, ), 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$   
דוגמאות למילים ששייכות ל- $B$ :  $143+5, (2-4), (2 \times 3+5-4)/3, (1+2+5)-(2/3)+((2)+((2-95)/14))$   
דוגמאות למילים שלא שייכות ל- $B$ :  $-6, (+)45, 89+, 234+156), 145+16(, (2+\times 5), ((2+5) \times (5/7))$   
הוכיחו שהשפה  $B$  שייכת למחלקה  $L$ .  
עליכם לתאר מכונה דטרמיניסטית, בעלת סיבוכיות מקום לוגריתמית, שמכריעה את  $B$ .

### שאלה 6 (20%)

בעיה 8.29 בספר (עמוד 336).

**הדרכה:** הראו:  $A_{NFA} \in NL$  ו-  $PATH \leq_L A_{NFA}$ .

# מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: סעיפים 9.1, 10.1 ו-10.2 בספר

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 7

מועד אחרון להגשה: 25 ינו' 13

סמסטר: 2013א

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

### שאלה 1 (12%)

הוכיחו שהפונקציה  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$  ניתנת לבנייה במגבלת מקום עצמית (space constructible).

### שאלה 2 (12%)

עיינו במכונה  $D$  שבהוכחת משפט 9.3 (עמוד 342).

א. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate  $M$  on  $w \dots$ " במשפט "Simulate  $M$  on  $\langle M \rangle \dots$ " (כלומר, במקום לבצע סימולציה של  $M$  על  $w = \langle M \rangle 10^k$ , נבצע סימולציה של  $M$  על  $\langle M \rangle$ ). האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate  $M$  on  $w \dots$ " במשפט "Simulate  $M$  on  $10^k \dots$ " (כלומר, במקום לבצע סימולציה של  $M$  על  $w = \langle M \rangle 10^k$ , נבצע סימולציה של  $M$  על  $10^k$ ). האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

### שאלה 3 (12%)

הסבירו כיצד אפשר לבנות מכונה עם שני סרטים, שכאשר היא מקבלת כקלט על הסרט הראשון את המילה  $1^n$ , היא מסיימת כאשר על הסרט השני כתוב הייצוג הבינרי של  $n$ .

הסרט הראשון הוא סרט לקריאה בלבד. הסרט השני הוא סרט לקריאה וכתובה והוא סרט הפלט. עליכם לבנות מכונה שזמן ריצתה יהיה  $O(n)$ .

עליכם להסביר היטב את אופן פעולת המכונה, ולהסביר מדוע זמן הריצה שלה הוא  $O(n)$ .

#### שאלה 4 (24%)

- לימדו את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה (עמודים 150-156).
- א. נסחו בעיית **הכרעה** של בעיית הסוכן הנוסע (כלומר, בעיה שהתשובה עליה היא "כן" או "לא").
- ב. הוכיחו: בעיית ההכרעה של בעיית הסוכן הנוסע **המטרית** היא בעיה NP-שלמה.
- הדרכה:** הוכיחו שהיא שייכת ל-NP, והראו רדוקציה פולינומיאלית של בעיית קיומו של מעגל המילטון בגרף לא מכוון.
- (מעגל המילטון בגרף לא מכוון  $G$  הוא מעגל פשוט שמכיל כל צומת של  $G$  פעם אחת ויחידה. אתם יכולים להשתמש בעובדה שבעיית קיומו של מעגל המילטון בגרף לא מכוון היא בעיה NP-שלמה).
- ג. הוכיחו: לכל בעיית סוכן נוסע **לא מטרית**, אפשר לבנות בזמן פולינומיאלי בעיית סוכן נוסע **מטרית** עם אותם צמתים, כך ש- $P$  הוא מסלול אופטימלי בבעיה המקורית (הלא מטרית), אם ורק אם  $P$  הוא מסלול אופטימלי בבעיה החדשה (המטרית).
- הדרכה:** הגדילו את משקלי הקשתות באופן שיתקיימו תנאי הבעיה המטרית.
- ד. הסבירו מדוע אין סתירה בין קיומו של אלגוריתם קירוב בעל יחס קירוב 2 (ואפילו 1.5) ובעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית הסוכן הנוסע המטרית, ובין אי-קיומו של אלגוריתם כזה לבעיה הכללית (הלא מטרית), לאור מה שהראיתם בסעיף הקודם (שיש דרך מהירה לעבור מהבעיה הכללית לבעיה המטרית, באופן שמשמר את המסלולים האופטימליים).

#### שאלה 5 (18%)

- הוכיחו: אם יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **ההכרעה**  $MAX-CUT$ , אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **האופטימיזציה**  $MAX-CUT$ .
- האלגוריתם לבעיית ההכרעה מקבל כקלט גרף לא מכוון  $G$  ומספר טבעי  $k$ .
- האלגוריתם מחזיר "כן" אם יש ב- $G$  חתך שגודלו לפחות  $k$ , ו-"לא" אחרת.
- האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה מקבל כקלט גרף לא מכוון  $G$ .
- האלגוריתם מחזיר חתך בעל גודל מקסימלי ב- $G$ , כלומר, חלוקה של קבוצת הצמתים של  $G$  לשתי תת-קבוצות זרות  $S$  ו- $T$ , כך שמספר הקשתות המחברות צומת מ- $S$  עם צומת מ- $T$  הוא מקסימלי.
- הדרכה:** האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה יהיה בנוי משני שלבים:
- בשלב הראשון קוראים לאלגוריתם ההכרעה כמה פעמים כדי למצוא את גודלו של החתך המקסימלי.
- בשלב השני, מבצעים בכל פעם שינויים (קלים) בגרף, וקוראים לאלגוריתם ההכרעה על הגרפים החדשים. לפי התשובות שהוא מחזיר, יודעים איזה צמתים שייכים לאותה תת-קבוצה ( $S$  או  $T$ ), ואיזה צמתים לא שייכים לאותה תת-קבוצה (כלומר, אם האחד שייך ל- $S$  אז השני שייך ל- $T$ ).



**שאלה 6 (10%)**

עיינו באלגוריתם *PRIME* בעמוד 379 בספר.

הוכיחו: אם  $t$  הוא מספר טבעי קטן מ- $p$  שאיננו זר ל- $p$  (המחלק המשותף המקסימלי של  $t$  ו- $p$  גדול מ-1), אז  $t$  הוא עד לפריקות של  $p$ . (כלומר, אם הוא ייבחר כאחד מ- $k$  המספרים בשלב 2 של האלגוריתם, האלגוריתם ידחה).

**שאלה 7 (12%)**

בעיה 10.20 בספר (עמוד 418).

כדי להוכיח את שוויון המחלקות, הראו הכלה כפולה.

