קורס 20476 סמסטר 2013ב מועד 82

מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- **בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
- **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
- **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
- **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק') **א.** α,β הם פסוקים. בלוח אמת משותף שלהם, בכל שורה שבה α מקבל ערך **F**, גם β מקבל ערך **F**. אין מידע על שורות אחרות בלוח. לפיכך:

[1] הפסוק $(\neg\alpha)\vee(\neg\beta)$ הוא טאוטולוגיה.

[2] הפסוק $\alpha\to\beta$ הוא טאוטולוגיה והפסוק $\beta\to\alpha$ גם הוא טאוטולוגיה.

[3] $\alpha\to\beta$ הוא טאוטולוגיה, אבל $\beta\to\alpha$ לא חייב להיות טאוטולוגיה.

[4] $\beta\to\alpha$ הוא טאוטולוגיה, אבל $\alpha\to\beta$ לא חייב להיות טאוטולוגיה.

[5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

(7 נק') **ב.** נתונות 100 קבוצות $A_1,A_2,\ldots,A_{100}$, שכולן חלקיות לקבוצת הממשיים **R** .

נתון שלכל i ($1\le i\le 100$), **המשלים** של A_i ב- **R** הוא קבוצה בת-מניה.

נסמן $A=\bigcap_{1\le i\le 100} A_i$. נסמן ב- B את **המשלים** של A ב- **R** . עוצמת B היא:

[1] 0 **[2]** מספר סופי כלשהו שאינו 0

[3] $\aleph_0$ **[4]** C

[5] התשובה תלויה בבחירת הקבוצות $A_1,A_2,\ldots,A_{100}$.

(6 נק') ג. בגרף הדו-צדדי המלא $K_{6,6}$ קיימות $6!$ דרכים שונות ליצור זיווג מושלם.

נזרוק מהגרף $K_{6,6}$ קשת אחת (הצמתים שבקצות הקשת נשארים בגרף).

כמה זיווגים מושלמים ניתן להגדיר בגרף שהתקבל?

[1] ללא שינוי: $6!$

[2] $5!$

[3] $6!-1$

[4] $6!-5!$

[5] בגרף שהתקבל אין זיווג מושלם.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו : 81 נקודות

שאלה 2

תהי U קבוצה בת 10 אברים ותהי $B \subseteq U$, $|B| = 3$.

בעזרת B נגדיר חלוקה π_B של $P(U)$:

בחלוקה π_B , קבוצות $X,Y \in P(U)$ הן באותה מחלקה אם ורק אם $X \cap B = Y \cap B$.

שימו לב: זו לא חלוקה של U אלא חלוקה של $P(U)$.

קל לראות שזו אכן חלוקה של $P(U)$, אינכם נדרשים להוכיח זאת.

(9 נק') א. הוכיחו: אם $X,Y \subseteq B$ ו- $X \neq Y$,

אז בחלוקה π_B , X,Y **אינם** באותה מחלקת שקילות.

(18 נק') ב. כמה מחלקות שקילות יש בחלוקה π_B ?

הוכיחו את תשובתכם בפירוט.

שאלה 3

נתבונן בסדרות באורך 6, שהאברים שלהן לקוחים מהקבוצה $\{1,2,3,4,5,6\}$.

דוגמאות לסדרות כאלה: (*i*) 113124 (*ii*) 464612 (*iii*) 222666 .

(5 נק') א. כמה סדרות כאלה יש?

(22 נק') ב. מיצאו בכמה מהסדרות האלה נמצאות שלוש הספרות 1,2,3 .

הספרות 4,5,6 יכולות אבל לא חייבות להימצא.

דוגמא (*i*) למעלה מקיימת תנאי זה, דוגמאות (*ii*), (*iii*) לא מקיימות אותו.

בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

את סעיף ב' כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה.

שאלה 4

(4 נקי) א. בהינתן $n \geq 1$, מה מספר הפתרונות של המשוואה $x+y+z=n$,
כאשר x,y,z הם שלמים **גדולים מאפס**?

(3 נקי) ב. בהינתן $n \geq 1$, מה מספר הפתרונות של המשוואה $u+v=n$,
כאשר u,v הם שלמים **גדולים מאפס**?

(20 נקי) ג. כמה פתרונות יש למשוואה $(x+y+z)\cdot(u+v)=36$,
כאשר x,y,z,u,v הם שלמים **גדולים מאפס**?
דוגמא לפתרון של המשוואה: $x=y=u=v=1$, $z=16$
יש להגיע לתשובה סופית מספרית. הדרכה: כדאי לחלק למקרים.

שאלה 5

על קבוצת צמתים V מוגדרים חמישה גרפים שונים G_1,G_2,G_3,G_4,G_5 , שכל אחד מהם הוא גרף **דו-צדדי**. החלוקה של V לשני צדדים **אינה** בהכרח אותה חלוקה בחמשת הגרפים:
הצדדים של G_1 הם A_1,B_1 , הצדדים של G_2 הם A_2,B_2 , וכן הלאה.
כמובן לכל $1 \leq i \leq 5$, $A_i \cup B_i = V$, $A_i \cap B_i = \varnothing$.
נסמן ב- G את האיחוד של חמשת הגרפים: קבוצת הצמתים של G היא V, וקבוצת הקשתות של G היא איחוד קבוצות הקשתות של הגרפים G_1,G_2,G_3,G_4,G_5 (כדי ש- G יהיה פשוט, אם קיבלנו בין שני צמתים יותר מקשת אחת, נזרוק את הכפילויות ונשאיר קשת יחידה).

(10 נקי) א. לכל $v \in V$ נתאים **סדרה** של חמש אותיות A,B . נדגים את ההתאמה:
אם v שייך לקבוצות A_1,B_2,B_3,A_4,A_5 , אז הסדרה המותאמת לו תהיה $ABBAA$.
כללית: במקום ה- i בסדרה של v תופיע האות A אם $v \in A_i$,
ותופיע האות B אם $v \in B_i$.
הוכיחו:
אם לצמתים $v,w \in V$ מותאמת אותה סדרה של אותיות, אז **אין** ב- G קשת בין v ל- w.

(17 נקי) ב. מהסעיף הקודם נובע שמספר הצביעה של G הוא לכל היותר:
32 / 25 / 10 / 120 / 5 / 2
מצאו את התשובה הנכונה **והוכיחו אותה בפירוט**.

בהצלחה!