תשובה 1

א. דוגמא: $R = I_A \cup \{(1,2)\,,(1,3)\} = \{(1,1)\,,(2,2)\,,(3,3)\,,(1,2)\,,(1,3)\}$

מתקיים: $R\cup R^{-1} = I_A \cup \{(1,2)\,,(1,3)\,,(2,1)\,,(3,1)\}$.

$R\cup R^{-1}$ אינו טרנזיטיבי כי נמצאים בו $(3,1)$ ו- $(1,2)$ אבל לא נמצא בו $(3,2)$.

ב. **רפלקסיביות**: לפי שאלה 2.18 א בספר, עמ' 48, אם R רפלקסיבית גם R^{-1} רפלקסיבית.

מכאן ומהגדרת רפלקסיביות, $I_A \subseteq R$ וגם $I_A \subseteq R^{-1}$. לפיכך $I_A \subseteq R \cap R^{-1}$,

משמע (שוב מהגדרת רפלקסיביות): $R \cap R^{-1}$ רפלקסיבית.

סימטריות: לפי שאלה 2.6 סעיף 2 בעמ' 36 בספר, $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

בפרט, לכל רלציה R: $(R \cap R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap R = R \cap R^{-1}$.

משמע, לפי הגדרת רלציה סימטרית, $R \cap R^{-1}$ היא סימטרית.

טרנזיטיביות: לפי שאלה 2.29 א בעמ' 53 בספר, אם R טרנזיטיבית אז כך גם R^{-1}.

מכאן, לפי שאלה 2.30 ג באותו העמוד, נקבל כי גם $R \cap R^{-1}$ היא טרנזיטיבית.

ג. דוגמא: $R = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$. מתקיים: $R^2 = \{(1,3),(2,1),(3,2)\}$.

לכן $R \cup R^2 = \{(1,2),(2,3),(3,1),(1,3),(2,1),(3,2)\}$.

יחס זה אינו טרנזיטיבי כי, למשל, נמצאים בו $(1,2)$ ו- $(2,1)$ אבל לא נמצא בו $(1,1)$.

תשובה 2

א. לא. למשל $f(2) = f(3) = 2$.

ב. f היא **על**: בהינתן $n \in \mathbf{N}^*$, נקח $x = 2^{n-1}$. מתקיים $x \in \mathbf{N}^*$ ו- $f(x) = n$.

ג. ל- 5 יש שני מחלקים שונים: הוא עצמו ו- 1. לפי מה שנאמר בפתח השאלה, תכונה זו היא בדיוק התכונה המגדירה מספרים ראשוניים. לכן המחלקה שבה נמצא 5 היא קבוצת כל המספרים הראשוניים.

ד. למספר 4 יש שלושה מחלקים שונים: 1, 2 והוא עצמו.

נוכיח שתכונה זו מאפיינת מספרים שהם **ריבוע של מספר ראשוני**.

כיוון אחד: נניח $n = p^2$ כאשר p ראשוני. אז n מתחלק ב- $1, p, p^2$. נראה ש- n אינו מתחלק באף מספר אחר: לפי ההדרכה שפורסמה לשאלה, כל מחלק k של n הוא מכפלה של

גורמים ראשוניים המופיעים ב- n, כאשר כל ראשוני מופיע ב- k מספר פעמים שאינו עולה על מספר הופעותיו ב- n.

מכיוון של- n יש רק גורם ראשוני אחד, p, המופיע פעמיים, האפשרויות היחידות הן $1, p, p^2$.

כיוון שני: נניח של- n יש בדיוק 3 מחלקים. כלומר פרט לעצמו ול- 1 הוא מתחלק בעוד מספר אחד בלבד. נקרא למספר זה p. אם p אינו ראשוני אז n מתחלק גם בכל גורם ראשוני של p ונקבל יותר מ- 3 מחלקים ל- n, בסתירה להנחה. לפיכך p ראשוני. בנוסף, מכיוון ש- n מתחלק ב- p נוכל לרשום $n = p \cdot q$ עבור q טבעי חיובי כלשהו. מכך ש- $p \neq n$ ו- $p \neq 1$ נובע $q \neq 1$ ו- $q \neq n$. לכן אם $q \neq p$ נקבל יותר מ- 3 מחלקים ל- n, בסתירה להנחה.

לכן $q = p$ כלומר $n = p^2$.

ה. לפי הדיון "יחס שקילות המושרה ע"י פונקציה" או לפי הדיון "העתק טבעי", מספר מחלקות השקילות ש- f משרה הוא כמספר האיברים בתמונה של f. ראינו ש- f היא **על**, כלומר תמונתה היא כל $\mathbf{N}^*$, לכן קבוצת מחלקות השקילות היא בהתאמה חד-חד-ערכית ועל לקבוצה $\mathbf{N}^*$, ולפיכך היא אינסופית.

ו. יהי x טבעי גדול מ- 1, המקיים $f(x) = n$, כאשר $1 < n \in \mathbf{N}$. נוכיח שהמחלקה שבה x נמצא היא אינסופית. יהי p ראשוני כלשהו. המספר p^{n-1} מתחלק בדיוק ב- n מספרים שונים: $1, p, p^2, \ldots, p^{n-1}$ (מסיבה דומה למה שנאמר בפתרון סעיף ד, כיוון ראשון). לכן p^{n-1} נמצא באותה מחלקה של x. במקום p נוכל להציב **כל מספר ראשוני**. עבור מספרים שונים p,q מובן ש- $p^{n-1} \neq q^{n-1}$. מכיוון שקבוצת המספרים הראשוניים היא אינסופית, קיבלנו אינסוף איברים שונים הנמצאים כולם במחלקה של x.

תשובה 3

א. רפלקסיביות: תהי $f \in F$. באופן טריביאלי, לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \leq f(n)$.
לכן $(f,f) \in K$.

אנטי-סימטריות: תהיינה $f, g \in F$, ונניח ש- $(f,g) \in K$ וגם $(g,f) \in K$.
כלומר לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \leq g(n)$ וגם לכל $n \in \mathbf{N}$, $g(n) \leq f(n)$.
משמע לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \leq g(n)$ וגם $g(n) \leq f(n)$.
לכן, מתכונת האנטי-סימטריות של היחס $\leq$ בטבעיים, לכל $n \in \mathbf{N}$, $g(n) = f(n)$.
כלומר $f = g$.

טרנזיטיביות: תהיינה $f, g, h \in F$, ונניח ש- $(f,g) \in K$ וגם $(g,h) \in K$.
כלומר לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \leq g(n)$ וגם לכל $n \in \mathbf{N}$, $g(n) \leq h(n)$.

משמע לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le g(n)$ וגם $g(n) \le h(n)$.

מתכונת הטרנזיטיביות של היחס $\le$ בטבעיים, לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le h(n)$.

כלומר $(f,h) \in K$.

ב. תהי $f(n) = n$ ותהי $g(n) = 7$ (הפונקציה הקבועה המחזירה ערך 7 עבור כל n).

מכיוון ש- $f(1) > g(1)$, $(f,g) \notin K$.

מצד שני $f(10) < g(10)$ ולכן $(g,f) \notin K$.

מצאנו שני איברים של F שהיחס K אינו משווה ביניהם, לכן K אינו סדר-מלא.

ג. אין כאלה. תהי $f \in F$, נראה ש- f **אינה** איבר מקסימלי.

נתבונן בפונקציה $g(n) = f(n) + 1$. מובן ש- $g \ne f$.

כעת, לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le g(n)$. לכן $(f,g) \in K$. לפיכך f אינה איבר מקסימלי.

מכיון שאין איבר מקסימלי, אין גם איבר גדול ביותר.

ד. הפונקציה הקבועה $f(n) = 0$ לכל n , היא האיבר הקטן ביותר ב- F :

תהי $g \in F$. לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = 0 \le g(n)$.

לכן $(f,g) \in K$.

קיבלנו ש- f עומדת ביחס K עם כל איבר של F, משמע f היא איבר קטן ביותר.

איבר קטן ביותר הוא גם איבר מינימלי (והוא יחיד).

ה. תהי $f \in F$. נגדיר פונקציה g כך:

$g(0) = f(0) + 1$, ולכל $n \ne 0$, $g(n) = f(n)$.

מהגדרת K מובן כי $(f,g) \in K$.

נוכיח שלא קיימת פונקציה h הנמצאת ממש "בין f לבין g " ,

כלומר h שונה מ- f,g ומקיימת $(f,h) \in K$ וגם $(h,g) \in K$:

אם $(f,h) \in K$ וגם $(h,g) \in K$, אז מהגדרת K,

לכל n טבעי, $f(n) \le h(n) \le g(n)$.

נציב באגף ימין את הגדרת g:

(i) $f(0) \le h(0) \le f(0) + 1$

(ii) לכל $n \ne 0$, $f(n) \le h(n) \le f(n)$.

מכיון ש- $h(0) \in \mathbf{N}$, תנאי *(i)* אומר: $h(0) = f(0)$ או $h(0) = f(0) + 1 = g(0)$.

תנאי *(ii)* אומר שלכל $n \ne 0$, $f(n) = h(n) = g(n)$.

יחד קיבלנו ש- h שווה לאחת משתי הפונקציות f,g .

בכך הראינו ש- g **מכסה** את f.

נראה ש- g אינה הפונקציה היחידה שעושה זאת.

בהגדרת g בתחילת הסעיף, הגדלנו ב- 1 את הערך של f בנקודה 0 , ורק שם.

בְּמקום בנקודה 0, יכולנו לבצע את השינוי הזה בנקודה בודדה אחרת כרצוננו, למשל להגדיל ב- 1 את הערך של f רק בנקודה $n = 7$.

מובן כי גם הפונקציה שנקבל כך מכסה את f.

כאמור, ניתן לבחור כרצוננו את הנקודה הבודדת בה נשנה את f, היא יכולה להיות כל מספר טבעי.

לכל $f \in F$ יש אפוא **אינסוף** פונקציות שונות המכסות אותה.

תשובה 4

בדיקה: נציב $n=0$: $3\cdot5^0+7\cdot2^0=3+7=10$.

נציב $n=1$: $3\cdot5^1+7\cdot2^1=15+14=29$.

בדקנו גם עבור $n=1$ (תודה ליוסי בוגין שהזכיר לי את הצורך לעשות זאת!) , כי בשלב המעבר אנו מתכוונים לבצע אינדוקציה תוך שימוש ב"שני צעדים אחורה" ולא רק צעד אחד.

מעבר: נניח שהטענה נכונה עבור n ועבור $n-1$ **(שניהם!)**

כלומר נניח $f(n) = 3\cdot5^n+7\cdot2^n$, $f(n-1) = 3\cdot5^{n-1}+7\cdot2^{n-1}$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר נוכיח ש- $f(n+1) = 3\cdot5^{n+1}+7\cdot2^{n+1}$.

מההגדרה הרקורסיבית של f,

$$f(n+1) = 7f(n)-10f(n-1)$$

נציב את הנחות האינדוקציה:

$$= 7(3\cdot5^n+7\cdot2^n) - 10(3\cdot5^{n-1}+7\cdot2^{n-1})$$

נפתח ונקבץ מחדש:

$$= (7\cdot3\cdot5-10\cdot3)5^{n-1} + (7\cdot7\cdot2-10\cdot7)2^{n-1}$$

$$=3\cdot25\cdot5^{n-1} + 7\cdot4\cdot2^{n-1}$$

$$=3\cdot5^{n+1} +7\cdot2^{n+1}$$

הוכחנו כי $f(n+1) = 3\cdot5^{n+1}+7\cdot2^{n+1}$, כלומר הראינו שהטענה נכונה עבור $n+1$.

לפי עקרון האינדוקציה השלמה, משני השלבים נובע שהטענה נכונה לכל n טבעי.

איתי הראבן