תשובה 1

הטענות הנכונות: ב, ג, ה, ז, ט, י .

תשובה 2

א. התנאי $X \in P(A \cap B)$ שקול, לפי הגדרת קבוצת חזקה, לתנאי $X \subseteq A \cap B$.

לפי שאלה 1.10 ב', זה שקול ל-

$X \subseteq A$ **וגם** $X \subseteq B$.

שוב לפי הגדרת קבוצת חזקה, זה שקול ל-

$X \in P(A)$ **וגם** $X \in P(B)$.

ומהגדרת חיתוך, זה שקול ל-

$X \in P(A) \cap P(B)$.

קיבלנו: $X \in P(A \cap B)$ **אסם** (אם ורק אם) $X \in P(A) \cap P(B)$,
ולכן ,לפי הגדרה 1.1, שתי הקבוצות שוות.

ב. נכין שתי טענות-עזר:

a. אם $X \subseteq Y$ אז $X \cup Y = Y$. טענה זו הוכחה בעמ' 14 בספר.

b. אם $X \subseteq Y$ אז $P(X) \subseteq P(Y)$.

הוכחת b: נתון $X \subseteq Y$. תהי $M \in P(X)$, עלינו להראות $M \in P(Y)$.

$M \in P(X)$ פירושו $M \subseteq X$. מכאן יחד עם הנתון $X \subseteq Y$, בעזרת שאלה 1.6 בעמ' 8 בספר, נקבל כי $M \subseteq Y$, כלומר $M \in P(Y)$ כמבוקש.

כעת לשאלה עצמה:

נתון $A \subseteq B$ **או** $B \subseteq A$. ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) נניח $A \subseteq B$.

(**הסבר:** ב.ה.כ. פירושו: אנו אמנם **מוסיפים הנחה** מסוימת (למשל בוחרים באפשרות אחת מתוך כמה) אך ההנחה הנוספת אינה מגבילה אותנו באמת, כי אם היא אינה מתקיימת, ההוכחה שנציג תפעל בשינוי קטן **שצריך להיות ברור מאד לקורא**.

במקרה שלנו השינוי הוא: להחליף תפקידים בין A ל- B בהוכחה. הסיבה שאפשר להחליף תפקידים ביניהם קשורה כמובן לעובדה שהשוויון שנדרש להוכיח בשאלה זו אינו משתנה בהחלפת תפקידים בין A ל- B).

מההנחה, בעזרת טענת העזר a, $A \cup B = B$. לכן $P(A \cup B) = P(B)$.

שוב מההנחה, בעזרת טענת העזר b, $P(A) \subseteq P(B)$,

ומכאן שוב בעזרת טענה a, $P(A) \cup P(B) = P(B)$.

בסה"כ קיבלנו כי $P(A \cup B)$ ו- $P(A) \cup P(B)$ שווים שניהם ל- $P(B)$ ולכן הם שווים זה לזה.

ג. נניח בשלילה כי A אינה חלקית ל- B **וגם (!)** B אינה חלקית ל- A

- **זו שלילת האמירה** "$A \subseteq B$ **או** $B \subseteq A$" !

לומר ש- A אינה חלקית ל- B פירושו שקיים $a \in A$ המקיים $a \notin B$

לומר ש- B אינה חלקית ל- A פירושו שקיים $b \in B$ המקיים $b \notin A$.

הקבוצה $\{a,b\}$ שייכת ל- $P(A \cup B)$, אך

$\{a,b\} \notin P(A)$ כי $b \notin A$ ו- $\{a,b\} \notin P(B)$ כי $a \notin B$.

לכן $\{a,b\} \notin P(A) \cup P(B)$.

מצאנו אפוא קבוצה השייכת ל- $P(A \cup B)$ ואינה שייכת ל- $P(A) \cup P(B)$.

לפיכך $P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$.

תשובה 3

א. נפתח את אגף ימין לפי ההדרכה :

$$(X \cap Y) - (X \cap Z) = (X \cap Y) \cap (X \cap Z)'$$

בעזרת כלל דה-מורגן נקבל :

$$= (X \cap Y) \cap (X' \cup Z')$$

בעזרת פילוג האיחוד יחסית לחיתוך (סעיף 1.3.4) :

$$= (X \cap Y \cap X') \cup (X \cap Y \cap Z')$$

בעזרת תכונות החילוף והקיבוץ של החיתוך (עמ' 15) :

$$= ((X \cap X') \cap Y) \cup (X \cap Y \cap Z')$$

מנוסחה שבתחתית עמוד 22 בספר, $X \cap X' = \varnothing$,
ובעזרת $\varnothing \cap A = \varnothing$ (עמ' 15) ו- $\varnothing \cup A = A$ (עמ' 10), נקבל :

$$= X \cap Y \cap Z'$$

לפי קיבוץ החיתוך, ושוב לפי הזהות שבהדרכה,

$$= X \cap (Y - Z)$$

ב. השלימו את הנימוקים :

$$(A - B) \cap (C - D) = (A \cap B') \cap (C \cap D')$$

$$= (A \cap C) \cap (B' \cap D')$$

$$= (A \cap C) \cap (B \cup D)'$$

$$= (A \cap C) - (B \cup D)$$

ג.

$$A' \oplus B' = (A' - B') \cup (B' - A') = (A' \cap B) \cup (B' \cap A)$$

נשנה את סדר האיברים בעזרת חילופיות החיתוך וחילופיות האיחוד :

$$= (A \cap B') \cup (B \cap A') = (A - B) \cup (B - A) = A \oplus B$$

תשובה 4

א. $A_0 = \{x \mid -1 \le x \le -2\} = \varnothing$.

ב. נוכיח כי $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n = \mathbb{N}$:

הכלה בכיוון אחד: יהי $m \in \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$. כלומר, מהגדרת איחוד כללי, m שייך לפחות לאחת הקבוצות A_n. מהגדרת A_n, $A_n \subseteq \mathbb{N}$. לכן $m \in \mathbb{N}$.

הכלה בכיוון שני: יהי $m \in \mathbb{N}$. כדי להראות ש- $m \in \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ עלינו להראות ש- m שייך לפחות לאחת הקבוצות A_n. כלומר עלינו למצוא n טבעי כך ש- $n-1 \le m \le 2(n-1)$.

זה מתקיים עבור $n = m+1$, כי לכל m טבעי מתקיים $m \le m \le 2m$.

מצאנו n כך ש- $m \in A_n$, לכן $m \in \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$.

הראינו הכלה בשני הכיוונים, לכן $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n = \mathbb{N}$.

חלק שני של הסעיף: עצם כלשהו נמצא בחיתוך הכללי אםם הוא נמצא בכל הקבוצות שבחיתוך.

לפי סעיף א $A_0 = \varnothing$. לכן ודאי אין שום עצם משותף לכל הקבוצות, כלומר $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$.

ג. נחשב:

$A_0 = \varnothing$, $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{1,2\}$, $A_3 = \{2,3,4\}$, $A_4 = \{3,4,5,6\}$, $A_5 = \{4,5,6,7,8\}$

לכן:

$$B_0 = A_1 - A_0 = A_1 - \varnothing = \{0\}$$

$$B_1 = A_2 - A_1 = \{1,2\} - \{0\} = \{1,2\}$$

$$B_2 = A_3 - A_2 = \{2,3,4\} - \{1,2\} = \{3,4\}$$

$$B_3 = A_4 - A_3 = \{3,4,5,6\} - \{2,3,4\} = \{5,6\}$$

$$B_4 = A_5 - A_4 = \{4,5,6,7,8\} - \{3,4,5,6\} = \{7,8\}$$

ד. זהו איחוד 5 הקבוצות שמצאנו בסעיף הקודם, והוא שווה $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$
כלומר $\{n \in \mathbb{N} \mid 0 \le n \le 8\}$.

איתי הראבן