מספר התלמיד הנבחן
רשום את כל תשע הספרות

הדבק כאן את מדבקת הנבחן

האוניברסיטה הפתוחה

י"ח באדר ב' תשע"ט

25 במרץ 2019

מס' שאלון - 471

סמסטר 2019א

מס' מועד 91

20425 / 4

שאלון בחינת גמר

20425 - הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה **7** עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה חמש שאלות.

עליכם לענות על ארבע שאלות מתוכן.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם חשבו את התוצאה הסופית. כמובן, במידת האפשר.

לבחינה מצורפת טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית ודף נוסחאות .

חומר עזר:
מחשבון מדעי בלבד, שאינו אוצר מידע.

בהצלחה !!!

אינכם חייבים
להחזיר את השאלון לאוניברסיטה הפתוחה

שאלה 1 (25 נקודות)

X הינו משתנה מקרי רציף המתפלג אחיד בין a ל- b, עבור $a<b$.

(5 נק') א. הוכיחו כי: $E[X]=\frac{a+b}{2}$.

(10 נק') ב. הוכיחו כי: $Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$.

(5 נק') ג. חשבו את $P\{|X-E[X]|<\frac{b-a}{8}\}$.

(5 נק') ד. נסמן את M כרבעון העליון של X . הרבעון העליון מקיים: $P[X\geq M]=\frac{1}{4}$.
בטאו באמצעות הפרמטרים a ו- b את ערכו של M.

שאלה 2 (25 נקודות)

(8 נק') א. הוכיחו שהתפלגות סכום שני משתנים מקריים בלתי תלויים המתפלגים נורמלית, היא נורמלית.

(9 נק') ב. 5 חברים נפגשו במטרה לראות סרט ב- vod. ב- vod רשימה של 6 סרטים חדשים. כל חבר בוחר באקראי ובאופן בלתי תלוי באיזה סרט הוא מעוניין לצפות מתוך רשימת הסרטים אשר ב- vod. מה ההסתברות שכלל החברים יבחרו בדיוק 2 סרטים שונים מרשימת הסרטים?

(8 נק') ג. מטילים קובייה הוגנת עד אשר מקבלים את התוצאה 5.
בשלב הבא מטילים מטבע הוגן עד אשר מקבלים עץ כמספר הפעמים שהוטלה הקובייה. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר הטלות המטבע?

המשך הבחינה בעמוד הבא

שאלה 3 (25 נקודות)

ג'ו מתאמן לקראת תחרות.

האימון שלו כולל 12 מכשולים- 10 מכשולים של כוח ו-2 מכשולים של שיווי משקל, המסודרים בסדר אקראי.

ג'ו ינסה לעבור בהצלחה את כל 12 המכשולים, כל אחד מהם בדיוק פעם אחת. הסיכוי שלו לעבור בהצלחה מכשול של כוח הוא 0.9 באופן בלתי-תלוי במכשולים האחרים, הסיכוי שלו לעבור בהצלחה מכשול של שיווי משקל הוא 0.8 באופן בלתי-תלוי במכשולים האחרים.

(8 נק') א. נסמן ב- W את מספר המכשולים של שיווי משקל מבין 5 המכשולים הראשונים שג'ו מנסה. חשבו את $E\left[\sqrt{W}\right]$.

(9 נק') ב. נסמן ב- Y את מספר המכשולים שיצליח מבין 2 המכשולים הראשונים שניסה. מצאו את התפלגות Y.

(8 נק') ג. נסמן ב- S את מספר המכשולים שג'ו יצליח (מבין 12 המכשולים). מצאו את $E[S]$ ואת $Var(S)$.

שאלה 4 (25 נקודות)

רונית מכינה פופקורן. לצורך הכנת הפופקורן היא מכניסה לסיר גדול גרעיני תירס והם מתפוצצים לפופקורן טעים. בתהליך היווצרות הפופקורן קצב התפוצצות גרעיני התירס הוא 5 גרעינים בשנייה ומספר הגרעינים המתפוצצים בשנייה מתפלג פואסונית. תהליך היווצרות הפופקורן החל בשעה 8:00 והסתיים בשעה 8:07.

(7 נק') א. מה ההסתברות שהזמן בין ההתפוצצות גרעין התירס השלישי להתפוצצות גרעין התירס הרביעי ארך יותר מחצי שניה?

(7 נק') ב. מה התוחלת ומה השונות של מספר השניות החל מהשעה 8:00 ועד השעה 8:07 בהם התפוצצו לכל היותר 2 גרעיני תירס?

(11 נק') ג. נסמן ב- U_1 את מספר הגרעינים שהתפוצצו בין 8:00 ל 8:05 וב- U_2 את מספר הגרעינים שהתפוצצות בין 8:03 ל-8:07. חשבו את $COV(U_1+7,3U_2)$.

המשך הבחינה בעמוד הבא

שאלה 5 (25 נקודות)

משתנה מקרי Y המקבל ערכים שלמים בלבד מתפלג עם תוחלת 2. כמו כן ידוע שהערכים עבורם המשתנה המקרי מקבל הסתברות שאינה אפס הם: 5,..,2-3-.

(7 נק') א. מצאו חסם מלעיל להסתברות המאורע: $\{Y > 4\}$.

ב. נתון שסטיית התקן של Y היא 1.5.

(8 נק') 1. מצאו חסם מלרע להסתברות המאורע: $\{0 < Y \le 3\}$.

(10 נק') 2. דוגמים באופן מקרי 50 פעמים את המשתנה המקרי Y. חשבו בקירוב את ההסתברות למאורע: $\{\sum_{i=1}^{50} Y > 96\}$.

ב ה צ ל ח ה !

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \le z\} = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

נוסחת האינטרפולציה: $\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}[\Phi(z_2) - \Phi(z_1)]$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה - 20425

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1}\cdot p \quad , \quad i=1,2,\dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i! \quad , \quad i=0,1,\dots$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,\dots$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,\dots,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,\dots,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a\le x\le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\,,\,t\neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad -\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,\dots,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r} \quad , \quad \sum n_i=n\,,\,\sum p_i=1$			

נוסחת הבינום

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$$

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$$

כלל ההכלה וההפרדה

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

הסתברות מותנית

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

נוסחת הכפל

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n\mid A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})$$

נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i) \quad , \quad \{B_i\}$$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(A\mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)} \quad , \quad \{B_i\}$$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת

$$E[X]=\sum_x xp_X(x)=\int xf(x)dx$$

תוחלת של פונקציה של מ"מ

$$E[g(X)]=\sum_x g(x)p_X(x)=\int g(x)f(x)dx$$

שונות

$$\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית

$$E[aX+b]=aE[X]+b$$

$$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון

$$P\{X>s+t\mid X>t\}=P\{X>s\} \quad , \quad s,t\ge 0$$

תוחלת מותנית

$$E[X\mid Y=y]=\sum_x xp_{X|Y}(x\mid y)=\int xf_{X|Y}(x\mid y)dx$$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X \mid Y=y) = E[X^2 \mid Y=y] - (E[X \mid Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] = E[E[X \mid Y]] = \sum_y E[X \mid Y=y]p_Y(y)$

(טענה מתרגיל ת26, עמוד 430) $E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X \mid Y]]$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) \big/ \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$

כאשר X_i מ״מ ב״ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X]$

(כאשר X_i מ״מ ב״ת ש״ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X) + (E[X])^2 \mathrm{Var}(N)$

$$M_Y(t) = E\left[\left(M_X(t)\right)^N\right]$$

אי-שוויון מרקוב X מ״מ אי-שלילי , $a>0$, $P\{X \ge a\} \le E[X]/a$

אי-שוויון צ׳בישב $P\{|X-\mu| \ge a\} \le \sigma^2/a^2 \quad , \quad a>0 \ , \ \mu,\sigma^2 < \infty$

משפט הגבול המרכזי X_i מ״מ ב״ת ושו״ה , $\mu,\sigma^2 < \infty$, $P\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) \Big/ \sqrt{n\sigma^2} \le a \right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(a)$

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב״ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ״מ בינומיים (גיאומטריים) ב״ת עם אותו הפרמטר p הוא מ״מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ״מ פואסוניים ב״ת הוא מ״מ פואסוני.
- סכום של מ״מ נורמליים ב״ת הוא מ״מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ״מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב״ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \ , \ -1<x<1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = -\ln(1-x) \ , \ 0<x<1$$

$$\int (ax+b)^n\,dx = \tfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \ , \ n \ne -1 \quad ; \quad \int \tfrac{1}{ax+b}\,dx = \tfrac{1}{a}\ln(ax+b)$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

$$\int e^{ax}dx = \tfrac{1}{a}e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax}dx = \tfrac{1}{a\ln b}b^{ax} \quad ;$$

$$\log_n a = \log_m a / \log_m n \quad ; \quad \log_n(a^b) = b \cdot \log_n a \quad ; \quad \log_n(ab) = \log_n a + \log_n b$$