הקבוצה הריקה

- קיימת קבוצה ללא איברים.
- קיימת בדיוק אחת כזו.

נסמן את הקבוצה הריקה באות $\emptyset$.

תרגיל

הוכיחו או הפריכו:

1. לכל A. $\phi \subseteq A$

תשובה

תהי A.

יהי x.

מהגדרת ϕ נובע $x \notin \phi$.

לכן הטענה "אם $x \in \phi$ אז $x \in A$"

נכונה באופן ריק.

לכן $\phi \subseteq A$.

מש"ל

פיוטה

מה צ"ל? לכל A. $\emptyset \subseteq A$.

תהא A צ"ל: $\emptyset \subseteq A$

לכל x.
אם $x \in \emptyset$
אז $x \in A$

תהא A. יהי x. צ"ל: אם $x \in \emptyset$ אז $x \in A$

תמיד
שקר.

2. לכל A. $\emptyset \subset A$

<u>תשובה</u>

נתבונן ב $\emptyset$.

בתרגיל (ג) הוכחנו כי לכל X. $\emptyset \subseteq X$.

בפרט $\underline{\emptyset \subseteq \emptyset}$.

לכן ($\emptyset \not\subseteq \emptyset$ או $\underline{\emptyset \subseteq \emptyset}$)

כלומר $\emptyset \not\subset \emptyset$.

לכן הטענה אינה נכונה.

מש"ל.

טיוטה

מה צ"ל? קיים A כך ש $\phi \not\subset A$.

נתבונן ב ϕ

$\boxed{\text{צ"ל: } \phi \not\subset \phi}$

מה זה אומר ש $\phi \subset \phi$?

$\phi \subseteq \phi$

וגם

$\phi \nsubseteq \phi$

לכן תרגום הטענה $\phi \not\subset \phi$ הוא:

$(\phi \subseteq \phi$ או $\phi \nsubseteq \phi)$

שוויון קבוצות

תהיינה A,B קבוצות.

נאמר כי A שווה ל B אם:

$B \subseteq A$ וגם $A \subseteq B$.

נסמן $A = B$.

תרגיל

הוכיחו או הפריכו:

לכל A, B. אם $A \neq B$ אז $A \nsubseteq B$.

תרגיל

תהיינה A, B.

נתון $A \neq B$.

הוכיחו או הפריכו: $A \nsubseteq B$.

תרגיל

תהיינה A, B.

נתון: $A \neq B$

הוכיחו או הפריכו: $A \not\subseteq B$.

תשובה

נתבונן ב $A=\{1\}$, $B=\{1,2\}$.

נוכיח $\{1\} \neq \{1,2\}$:

נתבונן ב 2.

$2 \in \{1,2\}$ וגם $2 \notin \{1\}$

לכן $\{1,2\} \not\subseteq \{1\}$ ולכן $A \neq B$. 1

נוכיח $\{1\} \subseteq \{1,2\}$:

יהי X.

נניח $X \in \{1\}$.

לכן $X = 1$.

$1 \in \{1,2\}$ ולכן $X \in \{1,2\}$.

מכאן $A \subseteq B$ ②

מ ①, ② נובע ש הטענה <u>אינה</u> נכונה.

מש״ל.

סעיף ה

הטענה בשאלה:

לכל A,B. אם $A\neq B$ אז $A\nsubseteq B$.

שלילתה:

$\boxed{\text{קיימות } A,B \text{ כך ש } A\neq B \text{ וגם } A\subseteq B.}$

נתבונן ב: $\{1\},\{1,2\}$

אז: $\{1\}\neq\{1,2\}$

וגם

$\{1\}\subseteq\{1,2\}$

$\{1\}\nsubseteq\{1,2\}$

או

$\{1,2\}\nsubseteq\{1\}$

לכל X. אם $X\in\{1\}$

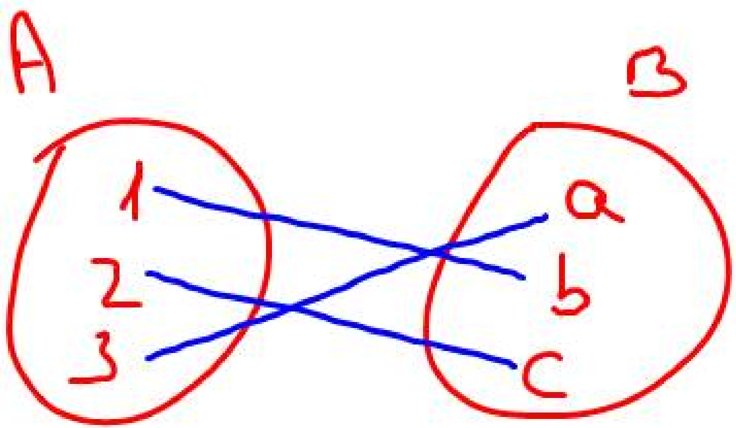
אז $X\in\{1,2\}$

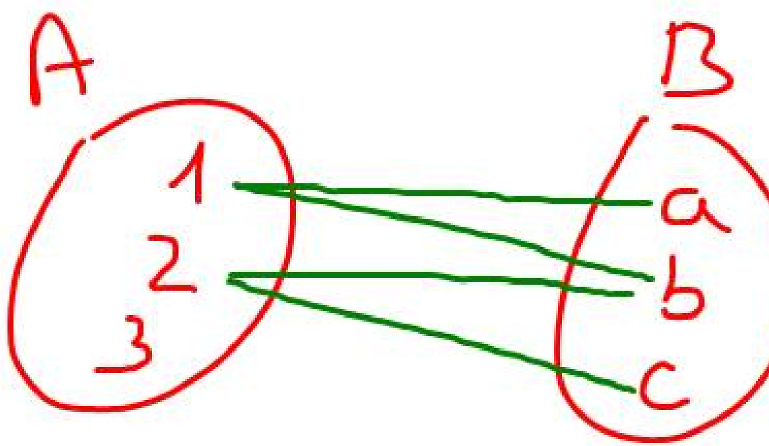
שקילות בין קבוצות

"הגדרה"

התאמה בין שתי קבוצות היא "משיכת קווים" בין איברי הקבוצות.

דוגמאות:





הגדרה נוספת:

התאמה בין A ל B תקרא חד חד ערכית

אם:

לכל איבר של A מותאם איבר אחד ויחיד של B

וגם

לכל איבר של B מותאם איבר אחד ויחיד של A.

הגדרה:

תהינה A,B קבוצות. נאמר כי A שקולה ל B

אם קיימת התאמה חד חד ערכית בין A ל B.

תרגיל

נסמן $A=\{2,4,8,16,32,\dots\}$

(1) הראו כי A שקולה ל $\mathbb{N}$.

תשובה

נתבונן בהתאמה הבאה:

$$\begin{array}{cccccccc} A: & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & \dots \\ & | & | & | & | & | & \\ \mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$

ההתאמה היא חד ערכי___ לכן A שקולה ל $\mathbb{N}$.

מש"ל.

2) האם כל התאמה בין A ל $\mathbb{N}$ היא
חד חד ערכית?

<u>תשובה</u>

נתבונן בהתאמה:

A: 2 4 8 16 32 ...

$\mathbb{N}$: 1 2 3 4 5 6 ...

ל $1 \in \mathbb{N}$ לא מותאם איבר ב A. לכן ההתאמה
אינה חד חד ערכית. לכן לא כל התאמה
בין A ל $\mathbb{N}$ היא חד חד ערכית.

מש"ל.

(3) האם כל התאמה חד ערכית בין A ל $\mathbb{N}$ תתאים את $3 \in \mathbb{N}$ ל $8 \in A$?

<u>תשובה</u>

נתבונן בהתאמה:

A:	2	4	8	16	32	64	...
$\mathbb{N}$:	1	2	3	4	5	6	...

ההתאמה היא חד חד ערכית

וגם 3 אינו מותאם ל 8.

לכן הטענה אינה נכונה.

מ.ש.ל.

קבוצה אינסופית

קבוצה A תקרא אינסופית אם:

קיימת קבוצה X כך ש ($X \subset A$ וגם X שקולה ל A)

קבוצה תקרא סופית אם היא אינה אינסופית.

שאלה ה

בתרגיל הקודם הוכחנו ש $A=\{2,4,8,16,\dots\}$

שקולה ל $\mathbb{N}$.

האם בכך הוכחנו ש $\mathbb{N}$ אינסופית?

תשובה

לא הוכחנו ש $A \subset \mathbb{N}$ ולכן לא הוכחנו

ש $\mathbb{N}$ אינסופית.

$$\{-1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, (-1)^5, \dots\}$$

פעולות בין קבוצות

תהיינה A,B קבוצות.

$x \in A \cup B$ תפורש $x \in A$ או $x \in B$

$x \notin A \cup B$ תפורש $x \notin A$ וגם $x \notin B$

$x \in A \cap B$ תפורש $x \in A$ וגם $x \in B$

$x \notin A \cap B$ תפורש $x \notin A$ או $x \notin B$

$x \in A \setminus B$ תפורש $x \in A$ וגם $x \notin B$

$x \notin A \setminus B$ תפורש $x \notin A$ או $x \in B$

תרגיל

תהיינה A, B, C.

נתון: $A \cup B \subseteq C$. (1)

הראו כי $A \subseteq C$ וגם $B \subseteq C$.

תשובה

נוכיח $A \subseteq C$:

יהי x.

נניח $x \in A$.

לכן $x \in A \cup B$.

מ (1) נובע $x \in C$.

לכן $A \subseteq C$.

בדומה $B \subseteq C$.

מש"ל.

תרגיל

תהיינה A, B, C.

נתון: $A \subseteq B \cap C$ (1)

הוכיחו או הפריכו: $A \subseteq B$.

תשובה

יהי x.

נניח $x \in A$.

מ (1) נובע $x \in B \cap C$.

לכן $x \in B$ וגם $x \in C$.

בפרט $x \in B$.

לכן $A \subseteq B$.

הטענה נכונה. מש"ל.

תרגיל

הפרכה

תהיינה A, B, C.

נתון: $A \subseteq B \cup C$ (1)

הוכיחו או הפריכו: $A \subseteq B$ או $A \subseteq C$.

תשובה

נניח $A \nsubseteq B$

יהי X.

נניח $X \in A$

לפי (1) נובע $X \in B \cup C$.

לכן $X \in B$ או $X \in C$. $\xrightarrow{\text{אני רוצה}}$ $X \in C$

מהו המקרה הבעייתי?

$A \nsubseteq B$.

קיים x שהוא

$X \in A$

$X \in B$

$X \notin C$

הוכחה

הטענה השגויה:

לכל A,B,C. אם $A\subseteq B\cup C$ אז $(A\subseteq B$ או $A\subseteq C)$

שלילתה:

קיימות A,B,C כך ש $A\subseteq B\cup C$ וגם $A\nsubseteq B$ וגם $A\nsubseteq C$.

תרגיל

תהיינה A, B, C.

נתון: $A \subseteq B \cup C$

הוכיחו או הפריכו: $A \subseteq B$ או $A \subseteq C$.

תשובה

נתבונן ב

$$A = \{1, 2\}$$
$$B = \{2\}$$
$$C = \{1\}$$

$B \cup C = \{1, 2\}$.

$A \subseteq B \cup C$ אבל $A \not\subseteq B$ וגם $A \not\subseteq C$.

הטענה אינה נכונה.

מש"ל.

שאלות הוכיחו או הפריכו:

תרגיל הוכיחו או הפריכו מעמת אותנו עם שתי טענות. הטענה הנתונה ושלילתה. מכללי השלילה נובע שאחת הטענות תהיה טענה כללית, והאחרת תהיה טענת קיום.

1. נתחיל ב"משחק" עם דוגמאות קונקרטיות.
אם מצאנו דוגמה לטענת הקיום - סיימנו. אחרת:

2. ננסה להוכיח את הטענה הכללית. אם הצלחנו - סיימנו. אחרת נחזור ל 1 באופן מושכל יותר.

לשבוע הבא!

יחידה 2 - לסיים.

לחזור היטב על החומר והתבניות.

תרגילים מקבוצת הדיון.