ממן 15

שאלה 1: נתונות פונקציות $f,g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ היא קבוצת כל הרציונליים).
ידוע כי לכל $x\in\mathbb{Q}$ מתקיים: $f(x)=g(2x+3)$.

1. הוכח שאם f חד-חד-ערכית g חד-חד-ערכית:
   נניח f חד-חד-ערכית. ויהיו $x,y\in\mathbb{Q}$ שונים זה מזה.
   בגלל שf חד-חד-ערכית $f(x)\neq f(y)$.
   ובגלל שבפרט אם לכל $x,y\in\mathbb{Q}$: מתקיים $3x+2=3y+2$
   $3x=3y$
   $x=y$
   ומסגירות כפל וחיבור רציונליים: $f(3x+2)\neq f(3x+2)$
   כלומר מתקיים: $g(x)\neq g(y)$, כלומר, גם g חד-חד-ערכית.
2. הוכח שאם f על אזי g על:
   נניח f פונקציה על.
   לכן מתקיים $f(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$
   כלומר $f(x\mid x\in\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$
   ובגלל שהפעולות חיבור וכפל סגורות עבור רציונליים, בהכרח מתקיים: $f(3x+2\mid x\in\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$
   שלמעשה זהה לביטוי: $g(x\mid x\in\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ (לפי הגדרת $\mathbb{Q}$ וg)
   כלומר $g(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$, כלומר, g היא פונקציה על.
3. הוכח שאם f הפיכה, אז גם g הפיכה ולכל $y\in\mathbb{Q}$ מתקיים: $g^{-1}(y)=\frac{f^{-1}(y)-2}{3}$.
   נניח f הפיכה.
   לכן f חד-חד-ערכית ועל, ובצורה זהה לסעיפים הקודמים גם g חד-חד-ערכית ועל, כלומר g הפיכה.

   בגלל שg הפיכה, מתקיים: $g\circ g^{-1}=I$ (כי I הניטרלי ביחס לפעולת ההרכבה)
   ולכן מתקיים שלכל $y\in\mathbb{Q}$: $g\circ g^{-1}(y)=I(y)$
   כלומר $g\left(g^{-1}(y)\right)=I(y)$
   כלומר, לפי ההנחה $g\left(\frac{f^{-1}(y)-2}{3}\right)=I(y)$
   כלומר $f\left(3\left(\frac{f^{-1}(y)-2}{3}\right)+2\right)=I(y)$
   כלומר $f((f^{-1}(y)-2)+2)=I(y)$
   כלומר $f\left(f^{-1}(y)\right)=I(y)$
   כלומר $f\circ f^{-1}=I$ וטענה זו נכונה, בגלל שלפי ההנחה f הפיכה ובנוסף I הניטרלי ביחס לפעולת ההרכבה.

שאלה 2: תהי f איזומטריה של המישור השונה מאיזומטרית הזהות, ויהיו $O,A,B\in\mathbb{R}^2$ שאינן על אותו ישר. ידוע כי O נקודת שבת של f וכי $\{O,A,B\}$ קבוצת שבת של f.

1. הוכח שהמשולש OAB שווה שוקיים:
   בגלל ש $\{O,A,B\}$ קבוצת שבת של f מתקיים ש$f(\{O,A,B\})=\{O,A,B\}$ ובגלל ש$f(O)=O$ (כי O נקודת שבת) וגם A,B,O לא קוויות, אם $f(A)=A$ היה מתקיים $f(B)=B$ ואז f הייתה למעשה איזומטרית הזהות, אך היא מוגדרת כלא כזאת וזוהי סתירה).
   לכן $f(A)=B, f(B)=A$.
   בגלל שf איזומטריה, והיא שומרת מרחק, מתקיים: $\overline{AO}=\overline{f(A)f(O)}=\overline{f(A)O}=\overline{BO}$.
   כלומר $AO=BO$, ולכן ABO משולש שווה שוקיים (על פי הגדרה).

2. נגדיר ישר ℓ שעובר דרך נקודה O ואנך לקטע AB בנקודה P. בגלל שABO משולש שווה שוקיים, PO הוא אנך אמצעי של משולש שווה השוקיים ABO, ולכן בהכרח $AP = BP$.
בגלל שA משתקפת על B ביחס לישר ℓ (AB אנך ומחולק ל2 חצאים בנקודת חיתוכו עם הישר)
וגם קיימת נקודת שבת על הישר ℓ ($f(O) = O$) ניתן להגיד שאיזומטריה f היא איזומטרית השיקוף S_ℓ - כלומר – איזומטרית שיקוף ביחס לישר ℓ (הוכח בהרצאה)
באיזומטרית שיקוף, ישר השיקוף מורכב מנקודות שבת. בפרט, $P \in \ell$, ולכן P היא נקודת שבת על הישר.
3. כל איזומטריות השיקוף ביחס לישר שעליו נמצא קטע האמצעים של המשולש ABO (כלומר, הישר עובר במרחק שווה מA וB).

<u>שאלה 3:</u> יהיו f, g איזומטריות של המישור. ידוע כי f שיקוף וכי A נקודת שבת של g.

1. הוכיחו שקיימת נקודה B כך ש$f(B) = A$:
ניח שקיימת נקודה B כך ש$f(B) = A$.
בגלל שf איזומטריה מתקיים: $\overline{AB} = \overline{f(A)f(B)} = \overline{f(A)A}$
בגלל שf שיקוף והנחנו $f(B) = A$ וגם A שונה מB בלתי אפשרי ש$f(B) = B$ (כי אז $A = B$ וזוהי סתירה). לכן, בגלל ש$f(B) = A$ בהכרח מתקיים $f(A) = B$ (כי f שיקוף).
לכן, $\overline{f(A)A} = BA$
כלומר, $\overline{BA} = \overline{AB}$ ובגלל שf איזומטריה הטענה נכונה (תכונת הסימטריה).
2. הוכיחו שB נקודת שבת של $f \circ g \circ f$:
בדומה להסבר בסעיף קודם אנו יודעים שמתקיים: $f(A) = B$
ובגלל ש$g(A) = A$ (A נקודת שבת של g): $f(A) = f\big(g(A)\big) = B$
ולפי ההוכחה בסעיף קודם $f(B) = A$: $f(A) = f\big(g(A)\big) = f\Big(g\big(f(B)\big)\Big) = B$.
כלומר: $f \circ g \circ f(B) = B$ (לפי הגדרת ההרכבה).
3. הוכח שאם g שיקוף אז גם $f \circ g \circ f$ שיקוף.
נניח g שיקוף.
אם $f \circ g \circ f$ שיקוף, אזי מתקיימת המשוואה $f \circ g \circ f \circ f \circ g \circ f = I$ (שהרי שיקוף שיקופה של נקודה היא הנקודה עצמה)
בגלל שf, g שיקופים, בהכרח $f \circ f = I, g \circ g = I$.
כלומר: $f \circ g \circ f \circ f \circ g \circ f = f \circ g \circ I \circ g \circ f = f \circ g \circ g \circ f = f \circ I \circ f = f \circ f = I$.
וגם $f \circ g \circ f \neq I$ (שהרי $f \circ f = I$, כלומר אם $f \circ g \circ f = I$ אזי $g = I$ אבל g שיקוף וזוהי סתירה!)
ולכן, בגלל שאם הרכבת איזומטריה עם עצמה שווה לזהות אזי האיזומטריה היא הזהות או שיקוף, ובגלל שהאיזומטריה $f \circ g \circ f$ איננה הזהות, היא בהכרח איזומטרית שיקוף.

<u>שאלה 4:</u> יהיו A, B נקודות במישור, ℓ_1, ℓ_2 שני ישרים מאונכים זה לזה העוברים דרך נקודה A ו-ℓ_1, ℓ_2 שני ישרים מאונכים זה לזה העוברים דרך נקודה B (לפי האיור במטלה).

1. הוכיחו כי $S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2} = S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$:
תהי נקודה $C \in \mathbb{R}^2$
בגלל שכל שיקוף הוא למעשה סיבוב ביחס לנקודה כלשהי על ישר השיקוף (שהרי הוא מעתיק נקודה באופן סימטרי ביחס לישר השיקוף), אם נגדיר α הזווית בין הנקודה C לבין הישר ℓ_1 מתקיים:

$$S_{\ell_1} = R_{A,2\alpha}, \;\; S_{\ell_2} = R_{A,2(90-\alpha)} = R_{A,180-2\alpha}$$

כלומר, $S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2} = R_{A,2\alpha} \circ R_{A,180-2\alpha} = R_{A,2\alpha+180-2\alpha} = R_{A,180}$
ובנוסף, אם נגדיר α הזווית בין הנקודה C לבין הישר ℓ_1 מתקיים:

$$S_{\ell_2} = R_{A,2\alpha}, \;\; S_{\ell_1} = R_{A,2(90-\alpha)} = R_{A,180-2\alpha}$$
$$S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2} = R_{A,180-2\alpha} \circ R_{A,2\alpha} = R_{180-2\alpha+2\alpha} = R_{A,180}$$

בגלל שסיבוב ב$180°$ הוא למעשה חצי סיבוב, ושני חצאים הם שלם, הנקודה תגיע לאותו מקום בכל מקרה ללא תלות בכיוון, ולכן ההרכבות למעשה שוות.

2. האיזומטריה $S_{\ell_4} \circ S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ היא למעשה הרכבה של שתי איזומטריות סיבוב: $R_{A,180} \circ R_{B,180}$.
הוכחתי בסעיף 1 ש$S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ היא למעשה $R_{A,180}$. בדומה לכך, בגלל שגם $\ell_3 \perp \ell_4$ גם $S_{\ell_4} \circ S_{\ell_3}$ היא למעשה $R_{B,180}$ (שהרי נקודת החיתוך של הישרים ℓ_3 וℓ_4 היא B).
בנוסף, אנו יודעים שפעולת ההרכבה היא פעולה קיבוצית, ולכן מתקיים:
$$S_{\ell_4} \circ S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1} = (S_{\ell_4} \circ S_{\ell_3}) \circ (S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}) = R_{B,180} \circ R_{A,180}$$
3. נגדיר ישר ℓ כישר על המישור כך ש$\ell_4 \neq \ell$ וגם $\ell_4 \parallel \ell$.
בצורה כזאת, כל נקודה תשתקף ביחס לℓ_3 וגם תזוז (כיוון שS_ℓ תזיז אותה במקביל כי היא מקבילה לS_{ℓ_4} וℓ_4 מאונך לℓ_3 או שS_{ℓ_4} תזיז אותה)