גלעד ברנע ת.ז. 203627310

ממ"ן 11

תרגיל מעולה!

היי,

אני ממש מצטער על ההגשה המאוחרת.

זה לא הולך להיות הרגל, קרה משהו ספציפי שגרר את זה.

מקווה שזה לא מאוחר מידי

זה בסדר:)
אני פועלת לפי ההנחיות של אבלין, והיא אישרה להגיש באיחור

שוב מתנצל, ותודה!

1

א: לא נכון

ב: נכון

ג: לא נכון

ד: נכון

ה: לא נכון

ו: לא נכון

ז: נכון

ח: לא נכון

2

א

Prove:
$(A\setminus B) \cup (B\setminus C) = (A \cup B) \setminus (B \cap C)$

First: expanding left-hand side $(A\setminus B) \cup (B\setminus C)$

$(A \cap \neg B) \cup (B \cap \neg C)$ // difference definition
$(A \cup B) \cap (A \cup \neg C) \cap (\neg B \cup B) \cap (\neg B \cup \neg C)$ // distributivity
$(A \cup B) \cap (A \cup \neg C) \cap (\neg B \cup \neg C)$ // $(\neg B \cup B) \equiv T$
$\mathbf{(A \cup B) \cap [(A \cap \neg B) \cup \neg C]}$ // dist.

Second: expanding right-hand side $(A \cup B) \setminus (B \cap C)$

$(A \cup B) \cap \overline{(B \cap C)}$
$(A \cup B) \cap (\neg B \cup \neg C)$
$(A \cap \neg B) \cup (A \cap \neg C) \cup (B \cap \neg B) \cup (B \cap \neg C)$ // dist
$(A\setminus B) \cup (A \cap \neg C) \cup (B \cap \neg C)$ // $(B \cap \neg B) \equiv \varnothing$

$(A\setminus B) \cup [(A \cup B) \cap \neg C]$ // dist
$[(A\setminus B) \cup (A \cup B)] \cap [(A \cap \neg B) \cup \neg C]$ // dist
// I'll now prove that $[(A\setminus B) \cup (A \cup B)] \equiv (A \cup B)$,
// then get back to expanding the full statement

Since $(A\setminus B) \subseteq A$ and $A \subseteq (A \cup B) \Rightarrow$
$(A\setminus B) \subseteq (A \cup B)$
Therefore
$(A\setminus B) \cup (A \cup B) = (A \cup B)$

תשובה מצויינת, מבחינת סימונים יש כאן קצת ערבוב של שפה לוגית עם שפה של קבוצות. למשל שימוש בT שהוא ערך אמת במקום U שהיא קבוצה. או שימוש בסימן השלילה במקום בסימן המשלים.

$(A \cup B) \cap [(A \cap \neg B) \cup \neg C]$

We see that left-hand side ≡ right-hand side, therefore
$(A\setminus B) \cup (B\setminus C) = (A \cup B) \setminus (B \cap C)$

ב

Prove:
if $P(A) \vee P(B) = P(C)$, then $(C=A) \vee (C=B)$

I'll be proving:
$(C\subseteq A \wedge A\subseteq C) \vee (C\subseteq B \wedge B\subseteq C)$
Since it's equivalent to
$(C=A) \vee (C=B)$

First: proof that $C\subseteq A \vee C\subseteq B$

$C \in P(C)$ // power set definition
$P(C) = P(A) \vee P(B) \Rightarrow C \in (P(A) \vee P(B))$
$C \in P(A) \vee C \in P(B)$
$C\subseteq A \vee C\subseteq B$

Second: proof that $A\subseteq C \vee B\subseteq C$

$A \in P(A)$
$P(A) \subseteq P(A) \cup P(B)$ // union definition
$A \in P(A) \cup P(B)$
Given $P(C) = (P(A) \cup P(B)) \Rightarrow A \in P(C)$
$A\subseteq C$
$B \in P(B)$
$P(B) \subseteq P(A) \cup P(B)$ // union definition
$B \in P(A) \cup P(B)$
Given $P(C) = (P(A) \cup P(B)) \Rightarrow B \in P(C)$
$B\subseteq C$

Since $C \subseteq A \lor C \subseteq B$ and $A \subseteq C$ and $B \subseteq C$,
// More formally: $(C \subseteq A \lor C \subseteq B) \land (A \subseteq C \land B \subseteq C)$
it follows that:
$(C=A) \lor (C=B)$

ג

Prove:
if A,B are finite and $|P(A)| = 2 \cdot |P(A \setminus B)|$, then $|A \cap B| = 1$

---

(1)

$A \setminus B \equiv A \setminus (A \cap B)$ // by definition

(2)

We know that for any two sets X,Y, if $Y \subseteq X$ then $|X \setminus Y| = |X| - |X \cap Y|$
Certainly $(A \cap B) \subseteq A$, so
$|A \setminus (A \cap B)| = |A| - |A \cap B|$.

(3)

Assuming $|A \cap B| = 1$, if follows that:
$|A| - |A \cap B| = |A| - 1$, therefore using (1) and (2):
$|A \setminus B| = |A \setminus (A \cap B)| = |A| - |A \cap B| = |A| - 1$, so
$|P(A \setminus B)| = 2^{|A \setminus B|} = 2^{(|A| - 1)}$

(4): Expanding $2 \cdot |P(A \setminus B)|$

$2 \cdot |P(A \setminus B)| = 2 \cdot 2^{(|A| - 1)} = 2^{|A|}$

(5)

$|P(A)| = 2^{|A|}$ // by definition

(6): Putting it all together

$|P(A)| = 2 \cdot |P(A \setminus B)|$

3

א

Prove: if $(A \subset B)$, then $(A \cup \neg B) \neq U$

Since A is a **proper** subset of B, then $(B \setminus A) \neq \varnothing$.
Expanding $(B \setminus A) = (B \cap \neg A) = (\neg A \cap B) = \overline{(A \cup \neg B)}$ // DeMorgan

Therefore $\overline{(A \cup \neg B)} \neq \varnothing$

Since the complement of a given set X is the universal set (U) if and only if $X=\varnothing$, it follows that the complement of a given set Y is **not** U if and only if $Y\neq\varnothing$.
Because $\overline{(A \cup \neg B)} \neq \varnothing$, then the complement of $\overline{(A \cup \neg B)} \neq U$, therefore $\mathbf{(A \cup \neg B) \neq U}$.

ב

Prove: if $(\neg A \Delta B) = (\neg B \Delta C)$, then $A=C$.

We know that $(\neg A \Delta B) = (\neg B \Delta A)$, because:
$(\neg A \Delta B) = (\neg A \cap \neg B) \cup (A \cap \neg\neg B) =$
$(\neg A \cap \neg B) \cup (B \cap A)$ // double negation
Similarly,
$(\neg B \Delta A) = (\neg B \cap \neg A) \cup (\neg\neg B \cap A) =$
$(\neg A \cap \neg B) \cup (B \cap A)$ // double negation, comm.

It's given that $(\neg A \Delta B) = (\neg B \Delta C)$, so
$(\neg B \Delta A) = (\neg B \Delta C)$ // replaced $(\neg A \Delta B)$ with $(\neg B \Delta A)$

Since for any sets X, Y, Z:
$(X \Delta Y) = (X \Delta Z) \Rightarrow X = Z$
It follows that
$(\neg B \Delta A) = (\neg B \Delta C) \Rightarrow A = C$
Therefore $\mathbf{A = C}$.

3

Prove:

$A\cap B \subseteq A\Delta B\Delta C \Longrightarrow (A\cap B)\subseteq C$

Expanding $A\Delta B\Delta C$

$A\Delta B\Delta C = (A\Delta B)\Delta C =$

$[(A\Delta B)\cap \bar{C}]\cup[C\cap\overline{(A\Delta B)}] =$ // הגדרת ההפרש סימטרי

$[(A\Delta B)\cup C]\cap[\bar{C}\cup\overline{(A\Delta B)}] =$ // פיצוץ, חילוף

$[(A\Delta B)\cup C]\cap[C\cup(A\Delta B)]$ // דה מורגן

נשמע: יש x שייך ל $(A\Delta B)\cup C$ אבל אינו שייך ל $A\cap(A\Delta B)$.

נתרכז בחלק השמאלי הנמקה:

$x\in(A\Delta B)\cup C =$

$x\in A\Delta B$ or $x\in C$ // הגדרת איחוד

$x\in(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)$ or $x\in C$ // הגדרת ההפרש סימטרי

$x\in(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}$ or $x\in C$ // דה מורגן על הפרש הסימטרי

$[x\in(A\cup B)$ and $x\notin(A\cap B)]$ or $x\in C$

כלומר אחרת, יש x שעונה על לפחות אחת מהתנאים הבאים:

א) שייך ל C

ב) שייך ל $A\cup B$ אבל אינו שייך ל $A\cap B$.

לפי הנתון, אם יש $x\in A\cap B$ אזי הוא שייך ל $A\Delta B\Delta C$,

כלומר $x\in A\cap B \rightarrow [x\in(A\cup B)\wedge x\notin(A\cap B)] \vee x\in C$

בגלל הנתוני הסעיפים המיוחסים הוא שלא שכן נתון ש $x\in A\cap B$,

מכיוון ש p or False $= p$, נותרנו עם

$x\in A\cap B \rightarrow x\in C \Longrightarrow (A\cap B)\subseteq C.$

4

א) $k=1 \Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2\cdot k} = A_2 \quad (\{0,2,4,\dots\})$

ההכלה A_2 מכילה רק מספרים זוגיים, לכן

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$ מכילה רק מספרים זוגיים, לכן $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k} \subseteq A_2$.

בנוסף, קבוצת הזוגיות שלם מכיל את $k=1$ מתכלל את A_2,

אומר ש- A_2 הוא תת-קבוצה של $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$, כלומר $A_2 \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$.

מכאן ש $A_2 \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k} \subseteq A_2$, $\Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k} = A_2$.

ב) $k=60 \Longrightarrow \bigcap_{k=1}^{5} A_k = A_{60}$.

ההתכלות $\bigcap_{k=1}^{5} A_k$ מכילה את איחוד כל הכפולות 60 ו-1, כל

הכפולות 60 בין ... ל-5. בגלל לחלק, ההתכלות A_{60}

60 שווה במקום ה-j מתוך כל המספרים המתאים ה-j

60 ההתכלות $A_1, A_2, \dots, A_5$, כלומר $\bigcap_{k=1}^{5} A_k \subseteq A_{60}$

$A_1 = \{0, 1, 2, \dots, 60, \dots, 120, \dots\}$

$A_2 = \{0, 2, 4, \dots, 60, \dots, 120, \dots\}$

$A_3 = \{0, 3, 6, \dots, 60, \dots, 120, \dots\}$

$A_4 = \{0, 4, 8, \dots, 60, \dots, 120, \dots\}$

$A_5 = \{0, 5, 10, \dots, 60, \dots, 120, \dots\}$

$A_{60} = \{0, 60, 120, \dots\}$

בנוסף, כל מספר ב-A_{60} קיים

בכל אחת מ $A_1, A_2, \dots, A_5$,

כלומר $A_{60} \subseteq \bigcap_{k=1}^{5} A_k$.

מכן נובע ש $A_{60} = \bigcap_{k=1}^{5} A_k$.

4 ב) $k=0 \Longrightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_0$

לפי ההגדרה, $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ הוא קבוצת כל המספרים

המלאים כל המספרים מ-1 עד ∞, כלומר כל המספרים הטבעיים בלבד. יחד עם 0 עוד כל ההגדרה הוא (כפולה של כל מספר טבעי).

כלומר לאחר, קבוצת כל המספרים המלאים כל המספרים הטבעיים הוא בדיוק $A_0 = \{0\}$, ולכן $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq \{0\}$.

בנוסף, לפי ההגדרה, 0 הוא תמיד המספר בכל קבוצה לכל $k \geq 1$ כלשהו, ולכן $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \supseteq \{0\}$ מכאן נובע

$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_0$

ג) $k=3 \Longrightarrow A_6 \cup \{x+3 \mid x \in A_6\} = A_3$.

כאן A_6 הוא קבוצת הכפולות של 6 כולל 0, ההגדרה $\{x+3 \mid x \in A_6\}$ (מעתיקה: 3) נותנת לה שכבר שם אותה המקום ה-i בדיוק מאותה A_6 ב-3+ ומוסיפה לתשובה 3 כתוספת של A_6.

מכיוון שהכפולות של 6 הוא קבוצת הכפולות של 3 במספר גדול

ניתן להגדיר $A_6 = \{2n \cdot 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$. $A_6 = \{0, 6, 12, \dots\}$

בנוסף, מכיוון שהקבוצה S הוא המקבילה של A_6 ב 3+, ניתן לרשום: $S = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$. $S = \{3, 9, 15, \dots\}$

המשמעות 3 מתוקן ב-6 ולכן $S = \{(1+2n)3 \mid n \in \mathbb{N}\}$, כלומר קבוצת הכפולות

של 3 במספר אי-זוגי.

הם הנתון לחלוקה ב-2, אז עוד קבוצה מלבד המספרים הזוגיים

וקבוצת המספרים האי-זוגיים, ולכן $A_6 \cup S = A_3 \Longrightarrow A_6 \cup \{x+3 \mid x \in A_6\} = A_3$.