

תשובה 1

שרשור כזה אינו בהכרח מסלול: לפי הגדרת מסלול, אסור שקשת תופיע יותר מפעם אחת במסלול. אם יש קשת שנמצאת הן במסלול $P_{u \rightarrow v}$ והן במסלול $P_{v \rightarrow w}$, קשת זו תופיע פעמיים בשרשור שלהם, כלומר השרשור לא יהיה מסלול.

תשובה 2

- א. לפי התשובה לשאלה 2 בממ"ח 05, דרגת כל צומת בגרף היא מספר זוגי. לפי התשובה לשאלה 4 שם, הגרף קשיר. משני אלה, לפי משפט 3.1, הגרף הוא אוילרי.
- ב. מהתשובה לשאלה 2 בממ"ח 05, דרגת כל צומת בגרף היא יותר ממחצית מספר הצמתים בגרף (השלימו את הפרטים המספריים בקביעה זו). לפי משפט 3.3 (דירק) - הגרף המילטוני.

תשובה 3

- א. כמספר החלוקות (תורת הקבוצות סעיף 2.5) של קבוצה בת 6 אברים לשלוש קבוצות שבכל אחת מהן שני אברים: $\frac{6!}{2!2!2!3!} = 15$ (מדוע כך סופרים את החלוקות האלה?).
- או בדרך אחרת: $15 = 3! = \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2}$ (הסבירו במלים את השיקול שמביא לחישוב זה).
- ב. 720 (מדוע?)
- ג. $240 = 2 \cdot 5! = 2 \cdot 5! = 240$ (מדוע?)

תשובה 4

- א. $\binom{4}{2} = 6$ (מדוע?)
- ב. אין קשת בין צומת שסכום האברים שלו זוגי לצומת שסכום האברים שלו אי-זוגי (מדוע?)
- ג. יש מעגלים באורך 3, למשל: 0000 – 0011 – 0101 – 0000. לפי משפט 1.6, הגרף אינו דו-צדדי.
- ד. לפי מסקנה 5.5 בחוברת "תורת הגרפים", בגרף מישורי חייבת להיות צומת בעלת דרגה קטנה / שווה 5. בגרף שלנו, לפי התשובה לסעיף א, כל הדרגות הן 6.

תשובה 5

א. לצמתים v, w מותאמת אותה סדרה של אותיות A, B . נעבור על הסדרה אות-אות. האות הראשונה בסדרה של v שווה לאות הראשונה בסדרה של w , משמע v, w נמצאים באותו צד של הגרף G_1 , ולכן אין ביניהם קשת ב- G_1 . האות השנייה בסדרה של v שווה לאות השנייה בסדרה של w , משמע v, w נמצאים באותו צד של הגרף G_2 , ולכן אין ביניהם קשת ב- G_2 . וכן הלאה... קיבלנו שבאף אחד מהגרפים G_1, \dots, G_5 אין קשת בין v ל- w . לפי הגדרת הגרף G זה אומר שאין ב- G קשת בין v ל- w .

ב. נצבע כל צומת של G ב"צבע" שהוא סדרת האותיות שמותאמת לו. קבוצת הצבעים היא אפוא קבוצת הסדרות באורך 5 של אותיות A, B . סעיף א אומר בדיוק שהצביעה שהגדרנו כאן היא צביעה נאותה! מספר הסדרות הוא 32. צבענו את G צביעה נאותה ב- 32 צבעים, ולכן מספר הצביעה של G אינו יותר מ- 32.

ג. נוכיח ש- K_{32} , הגרף המלא על 32 צמתים, הוא כזה. ראשית מובן שמספר הצביעה של K_{32} הוא בדיוק 32. נראה ש- K_{32} הוא איחוד של חמישה גרפים דו-צדדיים: נחלק בצורה שרירותית את 32 הסדרות של אותיות A, B ל- 32 צמתי הגרף, סדרות שונות לצמתים שונים. (תלמידי מדעי המחשב יעדיפו את הגישה הבאה: נמספר את 32 הצמתים שרירותית במספרים $0, \dots, 31$, נרשום כל מספר בבסיס 2, נהפוך אותו למחרוזת ונרפד באפסים בתחילת המספר כדי להשלים לסדרה באורך 5)

השלימו מנקודה זו - באחד משני הנוסחים - את בניית הגרפים G_1, \dots, G_5 , שכל אחד מהם דו-צדדי והאיחוד שלהם הוא K_{32} .

בהצלחה בבחינה!

איתי הראבן