שאלה 1

תהי L שפה מעל אלפבית Σ.

מונה לפי אינסוף לשפה L הוא מונה המדפיס סדרת מילים אינסופית, $w_1, w_2, \ldots$, כך שמתקיים :

- אם w שייכת ל-L, אז היא תודפס **אינסוף** פעמים.
- אם w שייכת ל-$\overline{L}$, אז היא תודפס רק **מספר סופי גדול מ-0** של פעמים.

כל מילה ב-Σ^* מודפסת בסופו של דבר, משום שכל מילה כזו שייכת ל-L או ל-$\overline{L}$.

נתון ש-L היא שפה **מזוהה-טיורינג**. האם **בהכרח** יש ל-L מונה לפי אינסוף? **הוכיחו**!

שאלה 2

תהי C שפה. מילה w נקראת **מילה מינימלית** בשפה C, אם w שייכת ל-C, אבל **כל תחילית ממש** של w איננה שייכת ל-C.

(מילה v היא **תחילית** של מילה w, אם יש מילה u כך ש- $w=vu$. v היא **תחילית ממש** של w, אם u איננה המילה הריקה).

למשל, אם $C = \{00, 000, 001\}$, אז 00 היא מילה מינימלית ב-C. אבל 000 ו-001 אינן מינימליות, משום ש-00 היא תחילית ממש שלהן, ו-00 שייכת ל-C.

נגדיר את השפה $MINIMAL\text{-}WORD_{TM}$ הבאה :

$$MINIMAL\text{-}WORD_{TM} = \{<M, w> \mid M \text{ is a TM; } w \text{ is a minimal word in } L(M)\}$$

(מילה $<M, w>$ שייכת ל-$MINIMAL\text{-}WORD_{TM}$ אם M הוא תיאור של מכונת טיורינג, ו-w היא מילה מינימלית בשפה ש- M מזהה).

הראו **רדוקצית מיפוי** של **המשלימה של A_{TM}** ל-$MINIMAL\text{-}WORD_{TM}$.

($\overline{A_{TM}} \leq_m MINIMAL\text{–}WORD_{TM}$).

המשך הבחינה בעמוד הבא

שאלה 3

תזכורת: מעגל המילטון בגרף לא מכוון $G = (V, E)$ הוא מעגל פשוט, שבו כל צומת של הגרף מופיע פעם אחת ויחידה.

השפה *UHAMCIRCUIT* מוגדרת כך:

UHAMCIRCUIT = {<*G*> | *G* is an undirected graph that has a Hamiltonian circuit}

(זוהי שפת הגרפים הלא מכוונים, שיש להם מעגל המילטון).

שפה זו היא NP-שלמה.

הוכיחו: אם P=NP, אז יש אלגוריתם **בעל זמן ריצה פולינומיאלי** לבעיה הבאה:

הקלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$.

הפלט: מעגל המילטון בגרף G, אם מעגל כזה קיים. אם אין ב-G מעגל המילטון, יוחזר "לא".

האלגוריתם מקבל כקלט גרף לא מכוון $G = (V, E)$.

אם אין ב-G מעגל המילטון, מוחזר "לא".

אם יש ב-G מעגל המילטון, מוחזר אחד ממעגלי המילטון של G. כלומר, מוחזרת רשימת הצמתים של G, באופן שכל צומת מופיע ברשימה פעם אחת ויחידה, ויש קשת ב-G בין כל שני צמתים עוקבים ברשימה וגם בין הצומת האחרון והראשון ברשימה.

שאלה 4

תזכורת: שתי השפות הבאות הן שפות NP-שלמות:

– *CLIQUE* = {<*G*, *k*> | *G* is an undirected graph with a *k*-clique}

– *VERTEX-COVER* = {<*G*, *k*> | *G* is an undirected graph that has a *k*-node vertex cover}

הוכיחו: גם השפה *CLIQUE-OR-VERTEX-COVER* היא בעיה NP-שלמה:

CLIQUE-OR-VERTEX-COVER = {<*G*, *k*> | *G* is an undirected graph that has a *k*-node clique **or** a *k*-node vertex cover}

(מילה <*G*, *k*> שייכת לשפה *CLIQUE-OR-VERTEX-COVER*, אם G הוא גרף לא מכוון, ויש ב-G קליקה בגודל k או כיסוי בקדקודים בגודל k (או שניהם)).

המשך הבחינה בעמוד הבא

שאלה 5

תזכורת:

$SUBSET\text{-}SUM = \{<S, t> \mid S = \{x_1, ..., x_k\}$ and for some $\{y_1, ..., y_n\} \subseteq S$ we have $\Sigma y_i = t\}$

הראו: $3SAT \leq_L SUBSET\text{-}SUM$

(כלומר, הראו **רדוקציית מקום לוגריתמי** של *3SAT* ל- *SUBSET-SUM*).

שאלה 6

בעיית *MAX-IS* היא הבעיה הבאה:

הקלט: גרף לא מכוון $G=(V, E)$.

הפלט: קבוצת קדקודים בלתי תלויה ב-G **בעלת גודל מקסימלי**.

(כלומר, קבוצה $U \subseteq V$ בעלת גודל מקסימלי, כך שבין כל זוג קדקודים של U אין קשת ב-G).

תזכורות:

בבעיית *MIN-VERTEX-COVER* מעוניינים למצוא כיסוי בקדקודים **בעל גודל מינימלי** בגרף לא מכוון G (ראו עמוד 394 בספר. במהדורה הישנה יותר - עמוד 372).

לבעיה זו יש אלגוריתם קירוב פולינומיאלי בעל יחס קירוב 2.

$W \subseteq V$ היא כיסוי בקדקודים בגרף G, אם, ורק אם, $V-W$ היא קבוצה בלתי תלויה ב-G. (ראו תרגיל 4.10 במדריך הלמידה).

האם **מן הנתונים שנזכרו** אפשר להסיק, שלבעיית *MAX-IS* יש אלגוריתם קירוב פולינומיאלי בעל יחס קירוב קבוע כלשהו?

כלומר, האם מן הנתונים נובע, שיש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית *MAX-IS*, שהקבוצה הבלתי תלויה שהוא מחזיר היא בגודל לפחות $1/k$ מן הקבוצה הבלתי תלויה הגדולה ביותר בגרף, כאשר k הוא מספר טבעי קבוע כלשהו?

אם עניתם שכן, הסבירו היטב את פעולת אלגוריתם הקירוב.

אם עניתם שלא, הסבירו היטב למה לא.

שימו לב, השאלה איננה האם לבעיית *MAX-IS* יש אלגוריתם קירוב בעל זמן ריצה פולינומיאלי, אלא האם קיומו של אלגוריתם כזה נובע מקיומו של האלגוריתם לבעיה *MIN-VERTEX-COVER* ומן הקשר שקיים בין שתי הבעיות.

- סוף -