

תשובה 1

א. נתבונן בסדרה באורך n המקיימת את התנאים. במקום האחרון נמצאת ספרה 0 או 1: אלו שתי אפשרויות. כעת:

(i) אם במקום הלפני-אחרון נמצאת שוב ספרה הרי שהסדרה החלקית, מהמקום הראשון ועד הלפני-אחרון, גם היא סדרה מותרת; כל סדרה מותרת באורך $n-1$ יכולה להיות שם. לכן תרומת אפשרות זו (כולל שתי האפשרויות האמורות למעלה לספרה ה- n עצמה) היא $2a_{n-1}$.
(ii) אם במקום הלפני-אחרון נמצא סימן פעולה (4 אפשרויות), הרי לפניו מופיעה ספרה, ולכן הסדרה החלקית מהמקום הראשון עד המקום ה- $n-2$ היא סדרה מותרת; כל סדרה מותרת באורך $n-2$ יכולה להיות שם. לכן תרומת אפשרות זו היא $2 \cdot 4a_{n-2} = 8a_{n-2}$.

$$\text{בסה"כ קיבלנו } a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}.$$

תנאי התחלה: $a_0 = 0$ (הסדרה הריקה אינה מקיימת את התנאים, כי אינה נפתחת ומסתיימת בספרה). $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 24$.

$$\text{ב. המשוואה האפיינית: } \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0.$$

פתרונותיה: $-2, 4$. לכן a_n הוא מהצורה $a_n = A \cdot 4^n + B \cdot (-2)^n$ (*).
נציב את תנאי ההתחלה:

$$0 = a_0 = A \cdot 1 + B \cdot 1 = A + B$$

$$2 = a_1 = A \cdot 4 + B \cdot (-2) = 4A - 2B$$

נחלץ ונקבל $A = 1/3$, $B = -1/3$. בהצבה במשוואה (*) נקבל:

$$a_n = \frac{1}{3}(4^n - (-2)^n) \quad n = 0, 1, 2, 3 \quad \text{בדיקה מפורשת עבור } n = 0, 1, 2, 3 \quad \text{מתאימה למה שקיבלנו בסעיף א.}$$

תשובה 2

צונזר

תשובה 3

א. מספר הדרכים לחלק את המחשבים הוא כמספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה

$$x_1 + x_2 + x_3 = n, \text{ בכפוף לתנאי } x_i \leq 24, (i=1,2,3).$$

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^{24})^3 = \left(\frac{1-x^{25}}{1-x} \right)^3 : \text{ הפונקציה היוצרת:}$$

ב. זהו המקדם של x^{70} בפונקציה הנ"ל. נמשיך לפתח את הפונקציה:

$$\left(\frac{1-x^{25}}{1-x} \right)^3 = (1-x^{25})^3 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} = (1-3 \cdot x^{25} + 3 \cdot x^{50} - x^{75}) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} D(3,i)$$

במעבר האחרון, נעזרנו בנוסחת הבינום עבור הגורם השמאלי, ובנוסחה (iii) מהממ"ן עבור הגורם הימני.

כאמור, אנו רוצים את המקדם של x^{70} , לכן נוכל להתעלם ממחזורים בעלי חזקה גדולה יותר. המקדם המבוקש הוא:

$$1 \cdot D(3,70) - 3 \cdot D(3,45) + 3 \cdot D(3,20) = \binom{72}{2} - 3 \cdot \binom{47}{2} + 3 \cdot \binom{22}{2} = 2,556 - 3,243 + 693 = 6$$

תוצאה קצת מפתיעה !

נבדוק מדוע המספר כה קטן: כנראה זה אומר שמספר המחשבים בכל רכב אינו יכול להיות קטן בהרבה מ-24. ואמנם, אם ברכב כלשהו יש 21 מחשבים או פחות, אז בשני כלי הרכב האחרים יחד יש $70 - 21 = 49$ מחשבים או יותר, ולכן (שובך יונים) באחד מאותם שני כלי רכב יש יותר מ-24 מחשבים, בסתירה לדרישה. לכן כדי להעמיס את 70 המחשבים, בכל רכב צריכים לשים לפחות 22 מחשבים.

משמע מספר המחשבים בכל רכב יכול לקבל אחד משלושה ערכים בלבד: 22, 23 או 24. כעת קל לבדוק ישירות שיש רק שתי דרכים להציג את 70 כסכום של 3 מספרים מתוך הנ"ל, תוך התעלמות מסדר המחזורים: $23 + 23 + 24$ או $22 + 24 + 24$. עם התחשבות בסדר המחזורים, נקבל 6 אפשרויות.

אפשר גם לומר כך:

נתבונן במשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 70$, בכפוף לתנאים שמצאנו: $22 \leq x_i \leq 24, (i=1,2,3)$.

לכל i , נציב $x_i = y_i + 22$. נקבל שאנו מחפשים את מספר הפתרונות של

$$y_1 + y_2 + y_3 = 4, \text{ בכפוף לתנאים } 0 \leq y_i \leq 2, (i=1,2,3).$$

שוב בבדיקה ישירה, הפתרונות ללא חשיבות לסדר הם: $0 + 2 + 2$ או $1 + 1 + 2$.

כל אחד משני הפתרונות הללו נותן 3 פתרונות אם נייחס חשיבות לסדר. מכאן התוצאה 6.

אגב, יש עוד דרכים לפתור את השאלה הזו !

תשובה 4

צונזר

איתי הראבן