להלן רשימת נוסחאות לחישוב טורים סופיים ואינסופיים, ואחריה תרגילים לתירגול עצמי (ופתרונותיהם).

נוסחת הבינום (עמוד 8 בספר הקורס)

לכל x ו- y ממשיים ו-n טבעי:
$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}$$

נוסחת המולטינום (עמוד 12 בספר הקורס)

לכל x_1, x_2, ... , x_r ממשיים ו-n טבעי:
$$(x_1+x_2+\ldots+x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_r):\\ n_1+\ldots+n_r=n}}\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r}x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot x_r^{n_r}$$

טור הנדסי (גיאומטרי) סופי

לכל $x \neq 1$ ממשי:
$$\sum_{i=0}^{n}x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

טור הנדסי (גיאומטרי) אינסופי

לכל $-1<x<1$:
$$\sum_{i=0}^{\infty}x^i = \frac{1}{1-x}$$

טור טיילור של אקספוננט

לכל x ממשי:
$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!} = e^x$$

ומכאן:
$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{[f(x)]^i}{i!} = e^{f(x)}$$

טורים נוספים

$$\sum_{i=0}^{n}i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n}i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n}i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

לכל $x \neq 1$ ממשי:
$$\sum_{i=1}^{n}ix^{i-1} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx}[x^i] = \frac{d}{dx}\left[\sum_{i=1}^{n}x^i\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right] = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

לכל $-1<x<1$:
$$\sum_{i=1}^{\infty}ix^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dx}[x^i] = \frac{d}{dx}\left[\sum_{i=1}^{\infty}x^i\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1-x}\right] = \frac{1}{(1-x)^2}$$

תרגילים

1.

$$\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}$$

פתרון:

$$\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}=\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}1^i\,1^{10-i}=(1+1)^{10}=2^{10}=1{,}024$$

2.

$$\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}0.4^i\,0.6^{10-i}(2^{i+1}+3)$$

פתרון:

$$\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}0.4^i\,0.6^{10-i}(2^{i+1}+3)=\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}0.4^i\,0.6^{10-i}\,2^{i+1}+\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}0.4^i\,0.6^{10-i}\,3$$

$$=2\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(\underbrace{2\cdot 0.4}_{0.8})^i\,0.6^{10-i}+3\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}0.4^i\,0.6^{10-i}$$

$$=2(0.8+0.6)^{10}+3(0.4+0.6)^{10}=83.9913$$

3.

$$\sum_{i=2}^{20}0.7\cdot 0.9^{i+3}$$

פתרון:

$$\sum_{i=2}^{20}0.7\cdot 0.9^{i+3}=\sum_{i=0}^{18}0.7\cdot 0.9^{i+5}=0.7\cdot 0.9^5\sum_{i=0}^{18}0.9^i=0.7\cdot 0.9^5\cdot\frac{1-0.9^{19}}{1-0.9}=3.575065$$

4.

$$\sum_{i=k}^{\infty}p^i\qquad,\qquad 0<p<1$$

פתרון:

$$\sum_{i=k}^{\infty}p^i=\sum_{i=0}^{\infty}p^{i+k}=p^k\sum_{i=0}^{\infty}p^i=\frac{p^k}{1-p}$$

5.

$$\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{2i-1}p\qquad,\qquad 0<p<1$$

פתרון:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{2i-1}p=p(1-p)\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{2i-2}=p(1-p)\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{2(i-1)}$$

$$=p(1-p)\sum_{i=0}^{\infty}[(1-p)^2]^i=p(1-p)\cdot\frac{1}{1-(1-p)^2}=\frac{1-p}{2-p}$$

6.

$$\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^{i+2}\cdot\frac{3^i}{i!}$$

פתרון:

$$\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^{i+2}\cdot\frac{3^i}{i!}=(1-p)^2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{[3(1-p)]^i}{i!}=(1-p)^2e^{3(1-p)}$$

.7 $\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{3^i}{i!}$

פתרון: $\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{3^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{3^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^i}{(i-1)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{3^{i+1}}{i!} = 3\sum_{i=0}^{\infty} \frac{3^i}{i!} = 3e^3$

.8 $\sum_{i=0}^{\infty} |2-i| \cdot \frac{3^i}{i!}$

פתרון: $\sum_{i=0}^{\infty} |2-i| \cdot \frac{3^i}{i!} = (2-0) \cdot \frac{3^0}{0!} + (2-1) \cdot \frac{3^1}{1!} + \sum_{i=2}^{\infty} (i-2) \cdot \frac{3^i}{i!}$

$$= 2 + 3 + \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot \frac{3^i}{i!} - \sum_{i=2}^{\infty} 2 \cdot \frac{3^i}{i!} = 5 + \underbrace{3e^3 - (0+3)}_{\text{לפי תרגיל 7}} - 2 \cdot \underbrace{(e^3 - 1 - 3)}_{\text{לפי נוסחת טור טיילור של אקספוננט}} = 10 + e^3 = 30.0855$$

.9 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda x^2)^i}{i!}$

פתרון: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda x^2)^i}{i!} = e^{\lambda x^2}$

.10 $\sum_{i=1}^{20} \frac{i(i+1)}{2}$

פתרון: $\sum_{i=1}^{20} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{20} i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{20} i = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{2 \cdot 6} + \frac{20 \cdot 21}{2 \cdot 2} = 1{,}540$

.11 $\sum_{i=1}^{20} (20-i)$

פתרון: $\sum_{i=1}^{20} (20-i) = \sum_{i=1}^{19} i = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$