האוניברסיטה הפתוחה

20417

אלגוריתמים

חוברת הקורס אביב 2015ב

כתב: ד"ר אסף נוסבוים

פברואר 2015 – סמסטר אביב – תשע"ה

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

אל הסטודנט

אני מקדם בברכה את הצטרפותך לקורס "**אלגוריתמים**".

בחוברת זו תמצא את לוח זמנים ופעילויות, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות. תאריכי המפגשים בקורס יישלחו בהמשך.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים. בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת: http://telem.openu.ac.il. מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library. ניתן לפנות אלי בשעות הקבלה הטלפונית (החל מפתיחת הסמסטר), בתאום מראש באמצעות המייל: assaf.nussbaum@gmail.com. (מספר הטלפון יפורסם באתר). לצורך בירורים אדמיניסטרטיביים נא לפנות לזמירה בטלפון: 09-7781220.

אני מאחל לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה ,

ד"ר אסף נוסבוים
מרכז הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20417 / ב2015)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ן (למנחה)
1	13.3.2015-10.3.2015	פרקים 1,2		
2	20.3.2015-15.3.2015	פרק 3		
3	27.3.2015-22.3.2015	"		ממ"ן 1 27.3.2015
4	3.4.2015-29.3.2015 (ו ערב פסח)	פרק 4		
5	10.4.2015-5.4.2015 (א-ו פסח)	"		
6	17.4.2015-12.4.2015 (ה יום הזכרון לשואה)	"		ממ"ן 2 17.4.2015
7	24.4.2015-19.4.2015 (ד יום הזכרון) (ה יום העצמאות)	פרק 5		
8	1.5.2015-26.4.2015	"		

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ״ן (למנחה)
9	8.5.2015-3.5.2015 (ה ל״ג בעומר)	״		ממ״ן 3 8.5.2015
10	15.5.2015-10.5.2015	פרק 6		
11	22.5.2015-17.5.2015 (א יום ירושלים)	״		
12	29.5.2015-24.5.2015 (א שבועות)	״		ממ״ן 4 29.5.2015
13	5.6.2015-31.5.2015	פרק 7		
14	12.6.2015-7.6.2015	״		
15	23.6.2015-14.6.2015	״		ממ״ן 5 14.6.2015

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

1. הנחיות כלליות להצגת אלגוריתם כפתרון למטלה

א. חובה להציג תחילה את הרעיון המרכזי של האלגוריתם בצורה בהירה.

ב. חובה **להוכיח נכונות** בצורה מדויקת.

ג. חובה להציג ניתוח מדויק של **זמן הריצה**.

ד. חובה להציג את האלגוריתם היעיל ביותר שהצלחתם לפתח.

ה. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות **הפעלה/תיקון** של אלגוריתם מוכר, פתרון שכזה עדיף על פני ניסוח מחדש של אלגוריתם.

ו. אסור לפתור תרגילים של פרק מוקדם באמצעות אלגוריתם שנלמד בפרק מאוחר.

להלן פרוט הפרקים המתורגלים בכל מטלה :

ממ"ן	פרק בספר הלימוד
11	1,3 (שידוכים, קשירות בגרפים)
12	4 (חמדנות – בדגש על מסלולים/עצים מזעריים)
13	5 (הפרד ומשול - בדגש על התמרת פורייה)
14	6 (תכנון דינאמי)
15	7 (זרימה)

3. ניקוד המטלות

משקל כל מטלה 6 נקודות. ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל כולל של 18 נקודות לפחות.

לתשומת לבכם!

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן :

אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלה** בציון הנמוך ביותר, שציונה נמוך מציון הבחינה , לא תילקח בחשבון בעת שקלול הציון הסופי.

זאת בתנאי שמטלה זו **אינה חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

4. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

א. הגשת מטלות במשקל כולל של 18 נקודות לפחות.

ב. ציון של 60 לפחות בבחינת גמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: **20417, אלגוריתמי קרוב**

חומר הלימוד למטלה: **פרקים 1,3 בספר**

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 6%**

סמסטר: 2015ב | **מועד הגשה: 27.3.2015**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלת מנחה"

שאלה מס' 1 (40%)

<u>ווריאנטים ויישומים לבעיית הזיווג היציב</u>.

(א) פתרו את שאלה 1.6 בספר הקורס (ע"מ 28).

(ב) פתרו את שאלה 1.8 בספר הקורס (ע"מ 30).

שאלה מס' 2 (20%)

<u>קשירות בגרף לא מכוון לעומת קשירות חזקה בגרף מכוון</u>.

(א) נתון $G=(V,E)$ גרף **<u>לא מכוון</u>**, קשיר, עם לפחות שני קדקודים. הוכיחו כי תמיד קיים קדקוד, שלאחר הסרתו מהגרף עדיין מתקבל גרף קשיר.

(ב) הציגו גרף **<u>מכוון</u>**, קשיר היטב, $H=(V,E)$ כך שלאחר הסרה של **<u>כל</u>** קדקוד $v\in V$ מהגרף, תמיד יתקבל גרף שאיננו קשיר היטב.

שאלה מס' 3 (20%)

<u>הכוונת צלעות</u>. הציגו אלגוריתם שמכריע, בהנתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, האם ניתן לכוון כל אחת מהצלעות, כך שבגרף המכוון שמתקבל, **<u>דרגת הכניסה</u>** של לכל קדקוד תהיה **<u>גדולה מאפס</u>**. (לכל צלע $\{u,v\}\in E$ ניתן לבחור כיוון יחיד: (u,v) או לחלופין (v,u)). כשהתשובה חיובית, על האלגוריתם להחזיר הכוונה של הצלעות, המקיימת את הנדרש.

שאלה מס' 4 (20%)

<u>מזעור סכום הדרגות במסלול</u>. בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ וצמד קדקודים $s,t\in V$ הציגו אלגוריתם, המוצא מסלול בין s ל- t שבו סכום הדרגות של הקדקודים לאורך המסלול מזערי.

מטלת מנחה (ממ״ן) 12

הקורס: **20417, אלגוריתמי קרוב**

חומר הלימוד למטלה: **פרק 4 בספר**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 6%**

סמסטר: 2015ב **מועד הגשה: 17.4.2015**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלת מנחה״

שאלה מס׳ 1 (25%)

<u>תיקון עץ פורש שהושמטה ממנו צלע</u>. נתון עץ פורש מזערי T עבור גרף $G=(V,E)$ לא מכוון עם משקלות חיוביים על הצלעות. תהי $e\in T$ צלע בעץ, ויהי $G'=(V,E')$ הגרף, המתקבל מ-G לאחר השמטתה של e (כלומר, $E'=E\setminus\{e\}$). נתון כי G' קשיר. הציגו אלגוריתם בסיבוכיות $O(|E|)$ שמתקן את T, כך שיתקבל ממנו עץ פורש מזערי T' עבור G'.

שאלה מס׳ 2 (25%)

<u>עץ פורש מזערי עם דרגה מזערית לקדקוד נבחר</u>. נתון גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$ עם משקלות על הצלעות ועם קדקוד $u\in V$. הציגו אלגוריתם למציאת עץ פורש מזערי ב-G כך שדרגתו של u בעץ תהיה מזערית: הפלט T של האלגוריתם הוא עץ פורש מזערי, ולכל עץ פורש מזערי אחר T' מתקיים: הדרגה של u ב-T קטנה או שווה לדרגה של u ב-T'.

שאלה מס׳ 3 (30%)

<u>קרוב מסלולים מזעריים באמצעות עץ פורש מזערי</u>. יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם מחירים (=משקלות) אי-שליליים $w:E\to\mathbb{R}^{\geq 0}$. יהי $s\in V$ קדקוד מקור. בתרגיל זה נברר האם ניתן להשתמש בעץ פורש מזערי T כדי לחשב (או לפחות לקרב) את אורכם של המסלולים המזעריים מ-s ליתר הקדקודים ב-G. (מסלולים אלו יקראו להלן בקצרה בשם ״המסלולים המזעריים״).

(א) בסעיף זה נוכיח שהמסלולים המזעריים בתוך עץ פורש מזערי (עפ״מ) עלולים להיות יקרים (=כבדים) יותר באופן ניכר מהמסלולים המזעריים בגרף כולו G: הציגו סדרת

גרפים עבורם קיימים זוגות s,t, כך שהיחס בין מחיר המסלול המזערי מ- s ל- t בכל עפ״מ T לבין מחירם ב- G הוא גדול ככל האפשר.

(ב) כזכור, כל עץ ובפרט כל עפ״מ הוא גרף ״דליל״ במיוחד: יש בו $|V|-1$ צלעות בלבד. בסעיף זה נראה שניתן להפיק גרף T' באמצעות הוספת צלעות ל-עפ״מ T, כך שהגרף המעובה T' (i) עדיין יהיה גרף דליל יחסית, אך מצד שני (ii) אורך **<u>המסלולים המזעריים ב-</u>** **<u>T'</u>** **<u>יהיה דומה לאורך המסלולים המזעריים ב-</u>** **<u>G</u>**: קיים קבוע c, כך שהמרחק $dist_{T'}(v)$ של כל קדקוד v מ- s ב- T' מתנפח ביחס למרחק $dist_G(v)$ בגרף המקורי לכל היותר בפקטור קבוע c, כלומר $dist_{T'}(v) \le c \cdot dist_G(v)$. (גרף המצטיין בתכונות (i),(ii) קרוי בספרות בשם spanner). פתרו את שאלה 4.31 בספר הקורס.
הדרכה: מותן של גרף מוגדר כאורכו של המעגל המזערי בגרף. למשל, אם בגרף אין אף משולש (אף מעגל באורך 3), אבל יש בו מרובע (מעגל באורך 4), אז המותן של הגרף הינו 4. בסיום הפתרון לסעיף זה הנכם רשאים להעזר במשפט הבא: אם המותן של גרף גדול ממש מ- k, אז מספר הצלעות בגרף חסום בצורה $|E| \le O(|V| \cdot |V|^{\frac{2}{k-1}})$.

שאלה מס׳ 4 (20%)

<u>קידוד הופמן</u>. עץ T נקרא בינארי לחלוטין אם לכל קדקוד שלו שאינו עלה יש שני בנים. הוכיחו כי לכל עץ בינרי לחלוטין T בעל n עלים, קיימת סדרת שכיחויות $f_1, f_2, ..., f_n$ כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא T.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20417, אלגוריתמי קרוב

חומר הלימוד למטלה: פרק 5 בספר

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 6%**

סמסטר: 2015ב **מועד הגשה: 8.5.2015**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלת מנחה"

שאלה מס' 1 (20%)

<u>DFT לאחר הצבה בפולינום</u>. נתונים הערכים $v_1,...,v_n$, המקיימים $DFT_n(p(x))=(v_1,...,v_n)$ עבור פולינום $p(x)$ מדרגה $\deg(p(x))<n$. חשבו את $DFT_{2n}(p(x^2))$.

שאלה מס' 2 (35%)

<u>הרצת FFT</u>. נביט בפולינום $p(x)=x^3+2x^2+3x+4$ שדרגתו קטנה מ-4. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) עבור:

(א) הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום.

(ב) הרצת INVERSE-FFT (הרצת $FFT(\cdot,(\omega_4)^{-1})$) על הערכים שהתקבלו בסעיף הקודם.

שאלה מס' 3 (30%)

<u>כפל מספרים שלמים בגישת FFT</u>: כפל מספרים שלמים הינה בברור בעיה אלגוריתמית בעלת חשיבות מעשית עליונה. לשם פשטות להלן נניח ששני המוכפלים שווי אורך (לשניהם ייצוג בינארי של n ביטים), ושניהם חיוביים. בתרגיל זה יוצגו עיקר הרכיבים באחד האלגוריתמים היעילים ביותר המוכרים כיום לכפל שלמים: <u>זמן הריצה</u> שלו הוא <u>$\Theta(n\log^2 n)$</u> בלבד. כזכור, האלגוריתם של Karatsuba מבוסס על פיצול הספרות של כל קלט לשני בלוקים שווי גודל, ורץ בזמן $\Theta(n^{\log_2 3})$. הציגו אלגוריתם משופר, שמחלק כל קלט ל- $\frac{n}{k}$ בלוקים בגודל k. היעזרו באלגוריתם ה-FFT לפתרון תתי-הבעיות המתקבלות. הניחו לשם פשטות (וללא הצדקה), כי ההכפלות שמתבצעות במהלך הקריאות הרקורסיביות אינן מגדילות את אורכם של המספרים, ולכן ניתן לממש הכפלות אלו בצורה תמימה תוך ביצוע $\Theta(k^2)$ פעולות על ביטים. בחרו לבסוף $k=\log n$ כגודל הבלוקים.

שאלה מס' 4 (15%)

<u>**כפל מטריצות ריבועיות (Strassen)**</u>. כזכור, כפל של שתי מטריצות ריבועיות A,B מסדר $n\times n$ (מעל שדה שרירותי) מניב מטריצה $C=A\times B$ אף היא מסדר $n\times n$, המוגדרת ע"י הכלל

$$.\ C_{i,j}=\sum_{1\le k\le n}A_{i,k}\times B_{k,j}$$

לכן <u>**מימוש ישיר**</u> של כפל מטריצות כרוך ב- $\Theta(n^3)$ פעולות אריתמטיות בסיסיות מעל השדה הנדון (כפל/חיבור/חיסור), ובפרט ב- $\Theta(n^3)$ פעולות כפל. בתרגיל זה נוכיח כי ניתן להכפיל מטריצות ריבועיות באמצעות <u>$\Theta(n^{\log_2 7})=O(n^{2.81})$ פעולות אריתמטיות בסיסיות בלבד</u>. פרטי ההוכחה מובאים להלן. נניח בה"כ כי n זוגי. נפרק כל מטריצה ל-4 תתי-מטריצות מסדר $\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$

$$.\ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

וודאו (לא להגשה) כי מהגדרת כפל מטריצות מתקיים:

$$\begin{aligned} r &= a\times e+b\times f \\ s &= a\times g+b\times h \\ t &= c\times e+d\times f \\ u &= c\times g+d\times h \end{aligned}$$

כעת נגדיר:

$$\begin{aligned} P_1 &= a\times(g-h) \\ P_2 &= (a+b)\times h \\ P_3 &= (c+d)\times e \\ P_4 &= d\times(f-e) \\ P_5 &= (a+d)\times(e+h) \\ P_6 &= (b-d)\times(f+h) \\ P_7 &= (a-c)\times(e+g) \end{aligned}$$

(ב) וודאו (לא להגשה) כי חישוב המטריצות $P_1,\ldots,P_7$, כרוך ב-7 פעולות כפל בלבד (וכן מספר מצומצם של פעולות חיבור/חיסור) של מטריצות מסדר $\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$.

(ג) וודאו (לא להגשה) כי מתקיים:

$$
\begin{aligned}
s &= P_1 + P_2 \\
t &= P_3 + P_4 \\
r &= P_4 + P_5 + P_6 - P_2 \\
u &= P_1 + P_5 - P_3 - P_7
\end{aligned}
$$

(ד) הוכיחו (כן להגשה) כי מספר הפעולות האלמנטריות של האלגוריתם הוא $\Theta(n^{\log_2 7})$ בלבד.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20417, אלגוריתמי קרוב

חומר הלימוד למטלה: פרק 6 בספר

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 6%**

סמסטר: 2015ב **מועד הגשה: 29.5.2015**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות: • שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס • שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה **הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלת מנחה"**

שאלה מס' 1 (25%)

<u>מסלולים מזעריים בשריג עם מחירים על קדקודים</u>. נתון שריג ריבועי מסדר $n\times n$ עם מחירים אי-שליליים על קדקודים: אברי השריג הם נקודות מהצורה (i, j) כאשר $1\le i, j\le n$, ולכל איבר מותאם מחיר $c(i, j)\ge 0$. השכבה התחתונה בשריג מורכבת מהנקודות בהן $i=1$, והשכבה העליונה מורכבת מהנקודות בהן $i=m$. ידוע שבשריג מותרת תנועה רק בצעדים מאחת הצורות הבאות $(i, j)\to(i+1, j-1),\ (i, j)\to(i+1, j),\ (i, j)\to(i+1, j+1)$. כלומר, מותרת תנועה רק מהצורות "למעלה", "למעלה ושמאלה", או "למעלה וימינה". הציגו אלגוריתם למציאת מסלול מזערי מהשכבה התחתונה לעליונה שמבצע $\Theta(n^2)$ פעולות אלמנטריות בלבד. הניחו שהמחירים $c(i, j)$ קטנים ולכן פעולות בסיסיות על המחירים, כמו חיבור מחירים, נחשבות לפעולות אלמנטריות.

שאלה מס' 2 (25%)

<u>פלינדרום מרבי</u>. פלינדרום הינה מחרוזת שנקראת בצורה זהה מימין לשמאל או משמאל לימין. למשל המחרוזת "ABBA" באנגלית, והמחרוזת הבאה בעברית "דעו מאביכם כי לא בוש אבוש שוב אשוב אליכם כי בא מועד" (כשמתעלמים מסימן הרווח). פלינדרום מרבי בתוך מחרוזת נתונה, היא תת-מחרוזת **<u>רצופה</u>**, שמהווה פלינדרום, ושאורכה מרבי. למשל בתוך המחרוזת abcbea, הפלינדרום המרבי הוא bcb (ולא abcba שאיננה תת-מחרוזת רצופה). הציגו אלגוריתם למציאת פלינדרום מרבי בתוך מחרוזת קלט באורך n. האלפבית הסופי נתון, ניתן למשל להניח בה"כ, שמדובר באלפבית האנגלי. בשאלה זו לא יינתן ניקוד על אלגוריתמים טריוויאליים, שרצים בזמן $\Theta(n^3)$ (הזמן הנדרש לבדיקת כל תתי המחרוזות הרצופות).

שאלה מס' 3 (25%)

<u>**אינטרפולציה באמצעות תכנון דינאמי**</u>: פולינום ממשי מדרגה קטנה מ- n הינו ביטוי מהצורה $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{n-1}x^{n-1}$. המשפט היסודי של האלגברה קובע כי פולינום שכזה נקבע ביחידות לפי ערכו ב- n נקודות. למשל, כל קו ישר (כלומר כל פולינום מדרגה קטנה מ-2) נקבע ביחידות ע"י 2 נקודות דרכן הוא עובר. באופן כללי, בהינתן n נקודות $(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)$ קיים פולינום אחד ויחיד $p(x)$ מדרגה קטנה מ- n המקיים $p(x_1)=y_1,...,p(x_n)=y_n$. פולינום זה נקרא פולינום האינטרפולציה (של הנקודות הנתונות). בבעיית האינטרפולציה נתונות הנקודות $(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)$ ויש לחשב את המקדמים $a_0,...,a_{n-1}$ של פולינום האינטרפולציה.

(א) לכל $i\le j$ נסמן ב- $p_{i,j}$ את פולינום האינטרפולציה של הנקודות $(x_i,y_i),...,(x_j,y_j)$.
מצאו 3 פולינומים פשוטים $q(x),r(x),s(x)$ מדרגה 0 או 1, עבורם מתקיים

$$p_{i,j+1}=\frac{q(x)p_{i,j}(x)-r(x)p_{i+1,j+1}(x)}{s(x)}$$

(ב) הציגו אלגוריתם יעיל לבעיית האינטרפולציה, המבוסס על נוסחת הנסיגה מהסעיף הקודם. לשם פשטות, החשיבו פעולות אריתמטיות על מספרים כפעולות אלמנטריות.

(ג) יהי $p(x)=x+2x^2+3x^3+4x^4$. הציבו ב- $p(x)$ את חמשת הערכים $-2,-1,0,1,2$, והריצו את אלגוריתם האינטרפולציה מהסעיף הקודם על חמש הנקודות שמתקבלות. וודאו שהאלגוריתם אכן מניב כפלט את מקדמיו של $p(x)$.

שאלה מס' 4 (25%)

<u>**תת-סדרה עולה מרבית**</u>. נתונה סדרה של n מספרים ממשיים $(a_1,...,a_n)$. תת סדרה של הסדרה המקורית הינה סדרה מהצורה $(a_{i_1},...,a_{i_k})$, כאשר $1\le i_1<i_2<....<i_k\le n$ (כלומר הסדר של האיברים בתת-הסדרה זהה לסדר בסדרה המקורית). תת סדרה נקראת עולה אם $a_{i_1}<a_{i_2}...<a_{i_k}$. הציגו אלגוריתם תכנון דינמי המוצא תת סדרה עולה שאורכה מרבי.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: **20417, אלגוריתמי קרוב**

חומר הלימוד למטלה: **פרק 7 בספר**

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה: 6%**

סמסטר: 2015ב **מועד הגשה: 14.6.2015**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלת מנחה"

שאלה מס' 1 (25%)

<u>צלעות שמוסרות, נוספות מחדש, ושוב מוסרות מהרשת השיורית</u>. הציגו דוגמא פשוטה של רשת זרימה ושל צלע e, כך שבמהלך הרצת Edmonds-Karp על הרשת קיימות שתי איטרציות, שבשתיהן e נעלמת מהרשת השיורית, כלומר בשתי האיטרציות תוספת הזרימה דרך e זהה לקיבולת השיורית של e.

שאלה מס' 2 (25%)

<u>שידוך עם מגבלת עומס על השדכנים</u>. הציגו אלגוריתם למציאת שידוך מרבי בתנאים הבאים. נתונה רשימה של n גברים, n נשים ושל m שדכנים. עבור כל שדכן $1 \le i \le m$ נתונה רשימת הגברים והנשים המוכרים לו, וביכולתו לשדך כל גבר ואשה המוכרים לו, כל עוד מספר הזוגות המשודכים אינו עולה על מספר נתון t_i.

שאלה מס' 3 (25%)

<u>תיקון זרימה מרבית נתונה</u>. נתונה רשת זרימה $G = (V, E)$ עם מקור ויעד s, t, ועם פונקציית **<u>קיבולות שלמות</u>** $c : E \to \mathbb{N}$. בנוסף נתונה זרימה מרבית f ברשת, ונתונה צלע מסוימת $e \in E$.

הציגו אלגוריתמים <u>בסיבוכיות ליניארית</u> עבור כל אחת מהבעיות הבאות.

(א) מציאת זרימה מרבית ברשת, המתקבלת <u>מהגדלת</u> הקיבולת של e ב-1.

(ב) מציאת זרימה מרבית ברשת, המתקבלת <u>מהקטנת</u> הקיבולת של e ב-1.

שאלה מס' 4 (25%)

<u>בעיית הספיקות</u>. נוסחת 3CNF היא נוסחה מהצורה $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_m$, כשלכל פסוקית הצורה $\varphi_i = (z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee z_{i,3})$, וכל $z_{i,j}$ הינו אחד מהליטרלים $x_1,...,x_n,\neg x_1,...,\neg x_n$. למשל $\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee \neg x_5)$. השמה הינה פונקציה שמתאימה לכל משתנה x_i ערך "אמת" T או "שקר" F. בהינתן השמה מסוימת, אזי הליטרל x_i מסופק אם ההשמה מקיימת $x_i \leftarrow T$, והליטרל $\neg x_i$ מסופק אם $x_i \leftarrow F$. פסוקית $\varphi_i = (z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee z_{i,3})$ מסופקת, כאשר <u>לפחות</u> אחד מהליטרלים שבה $z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}$ מסופק. הנוסחא כולה $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_m$ מסופקת, אם <u>כל</u> הפסוקיות $\varphi_1,..,\varphi_m$ מסופקות. הנוסחא $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_m$ נקראת <u>ספיקה</u>, אם לפחות אחת מבין 2^n ההשמות האפשריות מספקת אותה. הוכיחו כי לכל נוסחת 3CNF, שבה כל אחד מהמשתנים $x_1,...,x_n$ מופיע <u>בדיוק בשלוש</u> פסוקיות שונות, וכל פסוקית כוללת <u>בדיוק שלושה</u> משתנים שונים, הינה נוסחא ספיקה. הציגו עבור נוסחאות כאלו אלגוריתם למציאת השמה מספקת. הדרכה: העזרו במשפט Hall.