תשובה 1

א. יהיו A,B צמתים שונים, נראה שיש מסלול ביניהם.

אם יש קשת ביניהם – סיימנו. אם אין קשת ביניהם, החיתוך שלהם ריק או בעל שני אברים.

נבדוק כל אחד מהמקרים:

(*i*) אם $A \cap B = \varnothing$, אז ב- $(A \cup B)' = \{1,2,\ldots,7\} - (A \cup B)$ יש בדיוק אבר אחד, נקרא לו x.

נצרף ל- x אבר אחד של A ואבר אחד של B. קיבלנו שלישיה שהיא שכן משותף של A,B.

(*ii*) אם $|A \cap B| = 2$, אז ב- $(A \cup B)'$ יש בדיוק 4 אברים. נבחר אחד מהם, נקרא לו x .

נצרף ל- x את האבר של A שאינו ב- B ואת האבר של B שאינו ב- A .

קיבלנו שלישיה שהיא שכן משותף של A,B.

בכל מקרה מצאנו מסלול בין A ל- B .

ב. נמצא ב- G מעגל בעל אורך אי-זוגי, לפי משפט 1.6 זה שקול לכך ש- G אינו דו-צדדי.

מעגל בעל אורך 3 לדוגמה: $\{1,2,3\} \to \{3,4,5\} \to \{3,6,7\} \to \{1,2,3\}$.

ג. הגרף הוא רגולרי, דרגת כל צומת ב- G היא $3 \cdot \binom{4}{2} = 18$ (השלימו כאן נימוק).

מכיון שהגרף קשיר וכל הדרגות זוגיות - הגרף אוילרי.

ד. הדרגה של כל צומת היא יותר ממחצית מספר הצמתים בגרף.

לפי משפט דירק הגרף המילטוני.

תשובה 2

א. יהיו $m,n \geq 1$, $m \neq n$. נתבונן בגרף הדו-צדדי המלא $K_{2m,\,2n}$.

זהו גרף קשיר שבו כל הדרגות זוגיות, לכן הוא אוילרי.

יחד עם זאת זהו גרף דו צדדי, שבו שני הצדדים **אינם** בעלי אותו מספר צמתים, לכן (חלק טריביאלי של מסקנה 4.8 בחוברת הלימוד, או פשוט מהגדרת זיווג מושלם) - אין בו זיווג מושלם.

ב. נוכיח את הטענה בהנחה חלשה יותר: נניח שב- G יש מסלול המילטוני שאינו בהכרח מעגל (זו הנחה חלשה יותר, כי אם יש לנו מעגל המילטוני נתעלם מהקשת האחרונה הסוגרת את המעגל, וקיבלנו מסלול המילטוני שאינו מעגל!).

לאורך מסלול המילטוני שאינו מעגל, נמספר לפי הסדר את הצמתים מ- 1 עד $2n$.

לכל צומת שמספרו אי-זוגי נשדך את הצומת הבא אחריו במסלול. סיימנו!

תשובה 3

א. בגרף בעל מספר אי-זוגי של צמתים אין זיווג מושלם.

ב. 120 (מדוע?)

ג. 24 (מדוע?)

תשובה 4

א. אם נמקם את u על הדף "מעל" המסלול P ואת v "מתחת" ל- P, קל לשרטט את הקשתות ללא חיתוכים.

ב. אפשר להוכיח בדרכים שונות, הנה דרך נחמדה ללא חישובים:

נניח בשלילה ש- H מישורי.

נשמיט מ- H את 16 הקשתות המחברות את u,v עם 8 הצמתים המסומנים ב- *

ולגרף המתקבל נקרא L.

מכיון ש- H מישורי גם L, שהוא תת-גרף של H, מישורי.

הגרף L בנוי כך: הצמתים u,v,w מחוברים שלושתם זה לזה בקשתות,

כל אחד מהם מחובר בקשת ל- x ובקשת ל- y, ובין x ל- y נמצא המסלול המקורי P.

זהו כמעט K_5, פרט לכך שבין x ל- y אין קשת בודדת אלא מסלול P.

בדיוק לשם כך הומצא המושג "העדנה": המסלול P הוא עידון חוזר של קשת xy.

לפיכך L הוא **עידון** של K_5.

לפי טענה 5.7, מכיון ש- L מישורי גם K_5 מישורי -

בסתירה לטענה 5.2 לפיה K_5 אינו מישורי!

הגענו לסתירה, לכן ההנחה ש- H מישורי שגויה.

תשובה 5

א. 2 ב. 4 ג. 5 השלימו את הנימוקים!

איתי הראבן