תשובה 1

כל קטע בדיאגרמת הסה של קבוצה סדורה-חלקית מייצג זוג איברים, שאחד מהם מכסה את השני. מהגדרת המושג "מכסה", קבוצה $B \in P(A)$ מכסה קבוצה $C \in P(A)$ לגבי יחס ההכלה אם ורק אם מתקיים:

$C \subset B$ ואין אף קבוצה $D \in P(A)$ המקיימת $C \subset D \subset B$ (הכלות-ממש).

עבור B, C **סופיות**, קל לראות שתנאי זה מתקיים אם ורק אם קיים:

$C \subset B$ ומספר אברי C קטן ב- 1 ממספר אברי B.

יהי k מספר טבעי בתחום $0 \le k \le n$.

לקבוצה הנתונה A שהיא בת n איברים יש $\binom{n}{k}$ תת-קבוצות בנות k איברים,

כלומר ב- $P(A)$ יש $\binom{n}{k}$ איברים שעוצמתם k.

אם B בת k איברים, יש לה k תת-קבוצות בנות $k-1$ איברים (ע"י השמטת איבר אחד של B בכל פעם. נשים לב שזה נכון גם אם B ריקה). כלומר כל קבוצה בגודל k מכסה בדיוק k קבוצות אחרות.

לכן מספר הקטעים בדיאגרמת הסה של רלצית ההכלה מעל $P(A)$ הוא $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

לפי שאלה 3.9 בעמ' 71 בספר הלימוד, סכום זה שווה $n \cdot 2^{n-1}$.

תשובה 2

א. $\frac{12!}{4!3!2!2!} = 831{,}600$.

ב. אם הרצף **דמקה** מופיע, נתייחס אליו כאל "תו מיוחד" בודד.
יחד איתו יש בסה"כ 9 תוים, מתוכם 3 זהים (**ה**) ועוד 3 זהים (**נ**) .

מספר הסידורים: $\frac{9!}{3!3!} = 10{,}080$.

ג. תהי U קבוצת כל הדרכים לסדר את 12 התוים ללא הגבלה. מסעיף א: $|U| = 831,600$.

נסמן - A_1 : קבוצת הדרכים לסדר את המחרוזת כך שמופיע הרצף **דמקה**,

A_2 : קבוצת הדרכים לסדר את המחרוזת כך שמופיע הרצף **קהה**,

A_3 : קבוצת הדרכים לסדר את המחרוזת כך שמופיע הרצף **ממד**,

A_4 : קבוצת הדרכים לסדר את המחרוזת כך שמופיע הרצף **ננהה**.

אלה הסידורים שאינם מותרים כעת. אנו רוצים למצוא את $|U - \bigcup_{i=1}^{4} A_i|$.

ניעזר בהכלה והפרדה.

(i) מסעיף ב, $|A_1| = 10,080$. בצורה דומה נקבל:

$$|A_2| = \frac{10!}{3!(2!)^3} = 75,600 \quad , \quad |A_3| = \frac{10!}{4!3!} = 25,200 \quad , \quad |A_4| = \frac{8!}{(2!)^3} = 5,040 .$$

(ii) חישוב החיתוכים דורש קצת זהירות. למשל **דמקה** ו- **קהה** יכולים להופיע באותה מחרוזת, אבל רק כרצף **דמקהה**. לעומת זאת **דמקה** ו- **ממד** לא יכולים להופיע באותה מחרוזת. **דמקה** ו- **ננהה** יכולים להופיע באותה מחרוזת, כשני "תוים מיוחדים" בלתי תלויים זה בזה. בדומה עוברים על שאר החיתוכים.

החיתוכים הלא ריקים של זוגות הם:

$$|A_1 \cap A_2| = \frac{8!}{3!2!} = 3,360 \quad , \quad |A_1 \cap A_4| = 5! = 120 \quad , \quad |A_2 \cap A_3| = \frac{8!}{3!2!} = 3,360 \quad ,$$

$$|A_2 \cap A_4| = \frac{6!}{2!2!} = 180 \quad , \quad |A_3 \cap A_4| = \frac{6!}{2!} = 360 .$$

(iii) החיתוכים הלא ריקים של שלישיות הם:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 4! = 24 \quad , \quad |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4! = 24 .$$

(iv) חיתוך ארבעת הקבוצות יחד הוא ריק.

כעת בעזרת הכלה והפרדה, מספר הסידורים המותרים הוא:

$$|U| - \sum_{i=1}^{4}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le 4}|A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le 4}|A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

$$= 831,600 - (10,080 + 75,600 + 25,200 + 5,040) +$$
$$+ (3,360 + 120 + 3,360 + 180 + 360) - (24 + 24)$$
$$= 723,012$$

תשובה 3

תהי U קבוצת כל הדרכים לחלק את **כל** האוכל למשפחות, ללא כל הגבלה.

בעזרת התשובות לממ"ח 04 שאלות 8, 9, נקבל אחרי ביצוע החישוב: $|U| = 100{,}100$.

(*i*) תהי A_i $(i = 1,\ldots,4)$ קבוצת החלוקות ב- U, בהן משפחה i אינה מקבלת דבר.

$|A_i| = D(3,12)\cdot D(3,9) = \binom{14}{12}\binom{11}{9} = 91\cdot 55 = 5{,}005$. יש 4 קבוצות A_i .

(*ii*) $|A_i \cap A_j| = D(2,12)\cdot D(2,9) = \binom{13}{12}\binom{10}{9} = 13\cdot 10 = 130$ $(i \neq j)$. יש 6 חיתוכים כאלה.

(*iii*) חיתוך של 3 קבוצות A_i שונות הוא מצב יחיד, בו משפחה אחת מקבלת את כל האוכל.

יש 4 חיתוכים משולשים.

(*iv*) החיתוך של כל ארבעת ה- A_i הוא ריק (כי יש לחלק את האוכל).

סיכום: לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מספר החלוקות המקיימות את הדרישה הוא:

$$100{,}100 - 4\cdot 5{,}005 + 6\cdot 130 - 4\cdot 1 = 80{,}856$$

תשובה 4

יהיו $a_1,\ldots,a_{100}$ כל אברי A (בסדר שרירותי כלשהו, לאו דווקא סדר עולה).

לכל $1 \le k \le 100$, יהי $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$.

לכל k, נתבונן בשארית של S_k בחילוק ב- 100 .

אם קיים k עבורו השארית היא 0, סיימנו (מדוע?).

אם אף שארית אינה 0, לפנינו סדרה באורך 100 של מספרים S_k, ורק 99 שאריות שונות אפשריות. לפי שובך היונים יש לפחות שני איברים בסדרה, נאמר S_m ו- S_n, שהם בעלי אותה שארית בחילוק ב- 100.

ב.ה.כ. נניח $n < m$. כעת, $S_m - S_n$ מתחלק ב- 100 .

הוא אמנם לא אחד ה- S-ים שלנו אבל הוא בהחלט סכום של אברי A: $S_m - S_n = \sum_{i=n+1}^{m} a_i$.

איתי הראבן