נפתר ע"י צחי אבנור

<u>פתרון למבחן גמר 26.8.99 מועד 97</u>

שאלה 1:

(א) כיוון ראשון: נניח ש $f(R)=\varnothing$. נוכיח שהיא סימטרית:

$$f(R)=\varnothing \Leftrightarrow R\oplus R^{-1}=\varnothing \Leftrightarrow (R-R^{-1})\bigcup(R^{-1}-R)=\varnothing \Leftrightarrow R-R^{-1}=\varnothing, R^{-1}-R=\varnothing$$

. מכך ש $R-R^{-1}=\varnothing$ נסיק ש $R\subseteq R^{-1}$. מכך ש $R^{-1}-R=\varnothing$ נסיק ש $R^{-1}\subseteq R$ ומשתי ההכלות $R=R^{-1}$. כלומר, R סימטרית. כוון שני: R סימטרית, אזי $R=R^{-1}$ ולכן $f(R)=R\oplus R^{-1}=R\oplus R=\varnothing$ (הפרש סימטרי של R עם עצמו הוא קבוצה ריקה לפי הספר).

(ב) נניח ש S בתמונת f ונראה שהיא סימטרית. מהנחתנו נובע שקיים R כך ש $f(R)=S$, כלומר $R\oplus R^{-1}=S$. לפי זהות מ"אוסף תרגילים פתורים" ע"מ 1 שאלה 3ד $(R\bigcup R^{-1})-(R\bigcap R^{-1})=S$. יהי $(x,y)\in S$, נוכיח סימטריות ע"י כך שנוכיח שגם $(y,x)\in S$. ב.ה.כ $(x,y)\in R-R\bigcap R^{-1}$, לכן $(y,x)\in R^{-1}-R\bigcap R^{-1}$, אבל מהביטוי שנמצא שתי שורות למעלה אנו רואים ש $(y,x)\in S$. בכך הוכחנו ש S סימטרית.

(ג) בסעיף ב' הוכחנו שאם S תמונה של f היא סימטרית. לכן $f(R)=S_{imetric}$ אבל בסעיף א' הוכחנו שתמונה של רלציה סימטרית היא הקבוצה הריקה, לכן $f(f(R)=f(S_{imetric})=\varnothing$.

(ד) בסעיף ב' ראינו שאם S בתמונת f מתקיים $(R\bigcup R^{-1})-(R\bigcap R^{-1})=S$. כלומר $(x,y)\notin S\Leftrightarrow (x,y)\in R\bigcap R^{-1}$. איזה איברים ישנם בחיתוך רלציה וההפכית שלה? קל לראות שאלה איברים מהצורה (x,x) . נוכיח: $(x,y)\in R\bigcap R^{-1}\Rightarrow (x,y)\in R,(x,y)\in R^{-1},(y,x)\in R^{-1}$ אבל $(x,y)=(y,x)\Leftrightarrow y=x$. לכן, הוכחנו ש ב S אין איברים מהצורה (x,x) . לעומת זאת, ברלציית היחידה יש רק איברים מהצורה (x,x) . ולכן ברור אם כן ש $S\bigcap I_A=\varnothing$.

(ה) ראינו שאם S בתמונת f אז היא סימטרית וגם $S\bigcap I_A=\varnothing$. נניח ש S סימטרית וגם $S\bigcap I_A=\varnothing$. אזי S תראה כך: $S=\{(x,y)\,and\,(y,x)\,|\,x\neq y\}$. נגדיר את R כך: $R=\{(x,y)\,and\,not\,(y,x)\,|\,x\neq y\,\,and\,(x,y)\in S\}$, כלומר R תכיל רק חצי מהזוגות של S ותהיה אנטי-סימטרית. נבדוק את $f(R)$.

$$f(R)=R\oplus R^{-1}=\{(x,y)\in S\}\bigcup\{(y,x)\}-\{(x,x)\}=\{(x,y),(y,x)\,|\,(x,y)\in S\}-\varnothing=S$$

למעשה באיחוד עם ההפכי של R החזרנו לו את כל הזוגות שלקחנו כדי לקבל אנטי-סימטריות והפגנו את R ל S הסימטרית בחזרה.

שאלה 2:

(א) לפי טענה בספר (שאלה 4.9) עוצמת איחוד $\aleph_0$ קבוצות זרות , שעוצמת כל אחת מהן $\aleph_0$, היא $\aleph_0$. נסתכל בחלוקה הבאה של $N\times N$: $(1,n),(2,n)...(n,n)\,|\,n\in N$ כלומר, כל מחלקה מוגדרת עפ"י האיבר הראשון בזוג הסדור. ברור שכל מחלקה אינסופית ושיש $\aleph_0$ מחלקות. מאחר ש $|N\times N|=|N|$ נוכל להגדיר פונקציה חח"ע מ N על $N\times N$ ונגדיר את החלוקה הבאה של N ל $\aleph_0$ מחלקות: במחלקה אחת נמצאים האיברים שתמונותיהם נמצאים במחלקה אחת של $N\times N$. מהזרות של המחלקות ב $N\times N$ נובעת הזרות שלהן ב N וכנ"ל האינסופיות $\aleph_0$ (כי יש העתק חח"ע ועל בין המחלקות המקבילות). הוכחנו אם כן שקיימת חלוקה של N כנדרש.

(ב) תשובה נמצאת ב"אוסף תרגילים פתורים" ע"מ 25 סעיף ה'.

שאלה 3:

נפתור זאת לפי עיקרון ההכלה וההפרדה. נגדיר U סה"כ האפשרויות להגיש 6 ממנים.

$|U|=\binom{11}{6}+\binom{11}{7}+\ldots+\binom{11}{11}=2^{10}$. נגדיר A_i מס' האפשרויות לפתור 6 ממנים ללא ממנים מקבוצה I.

נחשב: $|A_c|=\binom{7}{6}+\binom{7}{7}=7+1=8$, $|A_g|=\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}=28+8+1=37$,

ולכן $|A_l|=|A_s|=\binom{9}{6}+\binom{9}{7}+\binom{9}{8}+\binom{9}{9}=84+36+9+1=130$

$S_1=8+37+130+130=305$. נגדיר A_{ij} מספר האפשרויות לבחור לפחות 6 ממנים לא מהקבוצות I ו J. $|A_{gc}|=0$, $|A_{g(l/s)}|=\binom{6}{6}=1$, $|A_{ls}|=\binom{7}{6}+\binom{7}{7}=7+1=8$. לכן $S_2=1+1+8=10$. יותר מזה כבר אי אפשר כי אם לא נבחר ממנים מ 3 קבוצות מסוימות בחיים לא נוכל לבחור 6 ממנים.

לכן, לפי עקרון ההכלה והפרדה: $|A_c'\bigcap A_g'\bigcap A_l'\bigcap A_s'|=|U|-S_1+S_2=1024-305+10=729$.

שאלה 4:

(א) נתבונן בטור הפורמלי $f(x)=(1+x+x^2+x^3+\ldots)^n$ (n קבוע טבעי חיובי).

מהו המקדם של x^k בפיתוח פונקציה זו ?

שוב עלינו לבחור מחובר אחד מתוך כל זוג סוגרים, לכפול את כל הגורמים שבחרנו, ולבסוף לחבר את כל המכפלות. במכפלה כלשהי יתקבל x בחזקת k אם סכום החזקות של x שנבחרו מכל הגורמים הוא בדיוק k. מכיוון שמכל גורם $(1+x+x^2+x^3+\ldots)$ יש לנו אפשרות לבחור חזקה טבעית של x כרצוננו, וכל חזקה טבעית מופיעה פעם אחת ויחידה בטור $(1+x+x^2+x^3+\ldots)$, הרי שמספר הדרכים לקבל במכפלה את x בחזקת k הוא כמספר הדרכים להציג את k כסכום של n מספרים טבעיים, עם חשיבות לסדר.

כלומר - כמספר פתרונות המשוואה $t_1+t_2+\ldots+t_n=k$ בטבעיים.

כידוע, מספר זה הוא $D(n,k)=\binom{n+k-1}{k}$.

לפיכך $(1+x+x^2+x^3+\ldots)^n=\sum_{k=0}^{\infty}D(n,k)x^k$.

ראינו בסעיף 2 כי $1+x+x^2+x^3+\ldots=1/(1-x)$

לכן: $\sum_{k=0}^{\infty}D(n,k)x^k=\left(\frac{1}{1-x}\right)^n$.

ובניסוח של פונקציות יוצרות:

יהי n טבעי קבוע. הפונקציה $\left(\frac{1}{1-x}\right)^n$ היא הפונקציה היוצרת עבור הסדרה $a_k=D(n,k)$.

(לקוח מ"מבוא לפונקציות יוצרות" שפרסם איתי הראבן).

(ב) באגף ימין: $D(n+m,k)$. באגף שמאל:

$\sum_{i=0}^{k}D(n,i)D(m,k-i)=D(n,0)D(m,k)+D(n,1)D(m,k-1)+\ldots+D(n,k)D(m,0)$. מאחר

שהביטויים זהים, לכל x^k המקדמים בשני הצדדים שווים ולכן $\sum_{i=0}^{k} D(n,i)D(m,k-i) = D(n+m,k)$ כנדרש.

שאלה 5:

לא פתרתי כי פרדיקטים לא למבחן.

שאלה 6:

כיוון ראשון: נניח ש G קומוטטיבית. נוכיח ש K חבורה. לפי משפט בספר תת-גרופואיד של אגודה הוא אגודה. לכן נוכיח סגירות (שהוא גרופואיד). יהיו $(g,g^{-1}),(h,h^{-1}) \in K$ אזי $(g,g^{-1})(h,h^{-1}) = (gh,g^{-1}h^{-1}) = (gh,(hg)^{-1}) = (gh,(gh)^{-1})$ במעבר האחרון התבססנו על כך ש G קומוטטיבית. כמו כן K מונואיד כי יש בו איבר יחידה (e,e) (זה ברור). נוכיח כעת שלכל איבר יש הפכי: יהי $(g,g^{-1}) \in K$ אזי גם $(g^{-1},g) \in K$ (כי g הפיך). וכן $(g,g^{-1})(g^{-1},g) = (gg^{-1},g^{-1}g) = (e,e)$. לכן K הוא חבורה ותת-חבורה של GXG.

כיוון שני: נניח ש K תת-חבורה של GXG ונוכיח ש G קומוטטיבית. ראינו מהסגירות ש $(g,g^{-1})(h,h^{-1}) = (gh,(gh)^{-1})$ ולכך אפשר להגיע (פשוט נלך את השוויון שלמעלה בכיוון השני) אם"ם G קומוטטיבית (כי נקבל ש $gh = hg \Leftrightarrow (gh)^{-1} = (hg)^{-1}$). לכן G קומוטטיבית.