

שאלה 1 (25 נקודות)

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון עם פונקציית משקל $w : E \rightarrow R$, ללא מעגלים שליליים. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- בהכרח לא קיימים ב- G קשת e וצמתים u ו- v כך ש- e נמצאת על מסלול קל ביותר מ- u ל- v וגם על מסלול קל ביותר מ- v ל- u .
- יהי $s \in V$. עבור צומת $v \in V$ נסמן ב- $\Delta(v)$ את משקלו של מסלול פשוט כבד ביותר מ- s ל- v ב- G . אז לכל $v \neq s$ קיימת קשת (u, v) כך ש: $\Delta(v) = \Delta(u) + w(u, v)$.

שאלה 2 (25 נקודות)

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל כקלט גרף $G = (V, E)$ קשיר ולא מכוון עם פונקציית משקל $w : E \rightarrow R^+$ וצומת $u \in V$, ועונה האם קיים עץ פורש מינימלי של G שבו u הוא עלה. נתחו את סיבוכיות האלגוריתם והוכיחו את נכונותו.

שאלה 3 (25 נקודות)

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל כקלט גרף מכוון, קשיר וללא מעגלים (גמ"ל) $G = (V, E)$ ובודק האם קיים מסלול ב- G שעובר דרך כל צמתי הגרף, פעם אחת בדיוק בכל צומת. נתחו את סיבוכיות האלגוריתם והוכיחו את נכונותו.

שאלה 4 (25 נקודות)

הגדרה: בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, **כיסוי בצמתים** (vertex cover) של G הוא קבוצת צמתים $U \subseteq V$ כך שלכל קשת $(u, v) \in E$ מתקיים $u \in U$ או $v \in U$ (או שניהם).

בהינתן גרף לא מכוון דו-צדדי $G = (V, E)$ (כלומר, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, ואם $(u, v) \in E$ אז $u \in V_1$ ו- $v \in V_2$ או $u \in V_2$ ו- $v \in V_1$) נבנה ממנו רשת זרימה (מכוונת) $G' = (V', E')$ באופן הבא:

$$V' = V_1 \cup V_2 \cup \{s, t\}$$

$$E' = \{(s, u) \mid u \in V_1\} \cup \{(v, t) \mid v \in V_2\} \cup \{(u, v) \mid (u, v) \in E, u \in V_1, v \in V_2\}$$

קיבול הקשתות היוצאות מ- s והקשתות הנכנסות ל- t הוא 1, וקיבול שאר הקשתות הוא אינסופי.

יהי (S, T) חתך מינימלי ברשת שהוגדרה לעיל. יהיו $X = S \cap V_2$ ו- $Y = T \cap V_1$.

א. הראו שהקבוצה $X \cup Y$ היא כיסוי בצמתים של G .

ב. הראו שהקבוצה $X \cup Y$ היא כיסוי בצמתים **מינימלי** של G (כלומר, בכל כיסוי בצמתים אחר של G יש לפחות אותו מספר צמתים כמו ב- $X \cup Y$).

שאלה 5 (25 נקודות)

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל כקלט גרף מכוון $G=(V, E)$, קשת $e \in E$, צומת $v \in V$ ומספר חיובי שלם k , ומוצא את מספר המסלולים באורך k ש- e היא הקשת הלפני האחרונה בהם, ו- v מופיע בהם (לראשונה) במקום השני. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

בהצלחה !