

ה א ו נ י ב ר ס י ט ה ה פ ת ו ח ה

20425

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חוברת הקורס - אביב 2019

כתב: ברק קנדל

פברואר 2019 - סמסטר אביב - תשע"ט

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

א	אל הסטודנטים
ב	לוח זמנים ופעילויות
ג	נקודות זכות
ג	הגשת מטלות

1	(פרקים 1 ו-2)	01	ממ"ח
5	(פרקים 2 ו-3)	11	ממ"ן
9	(פרק 4)	02	ממ"ח
15	(פרק 5)	12	ממ"ן
17	(פרק 6)	13	ממ"ן
19	(פרק 7)	14	ממ"ן

נספחים

22	דף נוסחאות לבחינה	נספח א
24	רשימת טענות להוכחה בבחינה	נספח ב
26	טבלת קירובים לערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית	נספח ג

אל הסטודנטים,

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב".

בחוברת זו תמצאו תיאור, מלא ככל האפשר, של הקורס וכן פרטים על כלל פעילויותיכם במהלך הלימודים. רצוי שתראו בה מעין מדריך אישי, שתפקידו להבהיר לכם עניינים שונים. קראו בעיון רב את כל הסעיפים שלהלן, לפני שתתחילו בלימודיכם.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת:

<http://www.openu.ac.il/shoham> .

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספרייה באינטרנט www.openu.ac.il/Library .

בכל בעיה שמתעוררת אפשר לפנות למרכז ההוראה בקורס ברק קנדל, בטלפון 09-7781428, בפקס 09-780631 או בדואר האלקטרוני, לכתובת: kandell@openu.ac.il .

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה ,

צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (2019/2025)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון ממו"ח (לאו"פ)	למשלוח ממו"ח (למנחה)
1	1.3.2019-24.2.2019	1			
2	8.3.2019-3.3.2019	2			
3	15.3.2019-10.3.2019	2-3			
4	22.3.2019-17.3.2019 (ה-ו פורים)	3		ממו"ח 01 17.3.2019	
5	29.3.2019-24.3.2019	3-4			
6	5.4.2019-31.3.2019	4		ממו"ח 11 31.3.2019	
7	12.4.2019-7.4.2019	4-5			
8	19.4.2019-14.4.2019 (ו ערב פסח)	5		ממו"ח 02 14.4.2019	
9	26.4.2019-21.4.2019 (א-ו פסח)	5			
10	3.5.2019-28.4.2019 (ה יום הזכרון לשואה)	5-6			
11	10.5.2019-5.5.2019 (ד יום הזיכרון, ה יום העצמאות)	6		ממו"ח 12 5.5.2019	
12	17.5.2019-12.5.2019	6-7			
13	24.5.2019-19.5.2019 (ה לייג בעומר)	7			
14	31.5.2019-26.5.2019	7		ממו"ח 13 26.5.2019	
15	7.6.2019-2.6.2019	7-8			
16	14.6.2019-9.6.2019 (א שבועות)	8		ממו"ח 14 10.6.2019	

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

נקודות זכות

הקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב" מקנה למסיימים אותו 4 נקודות זכות.

הדרישות לקבלת 4 נקודות זכות הן:

א. הגשת מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות.

ב. ציון מינימלי 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון מינימלי 60 בקורס.

הגשת מטלות

הקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב" כולל חוברת קורס ובה 6 מטלות להגשה, המיועדות לתרגול רוב נושאי הלימוד של הקורס, ואוסף שאלות לתרגול עצמי של נושאי הלימוד של פרק 8.

עליכם להגיש מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות.

המשקל של כל מטלת מנחה הוא 6 נקודות והמשקל של כל מטלה ממוחשבת הוא 3 נקודות.

המועד האחרון להגשה של כל מטלה מופיע בכותרתה.

שימו לב, בקורס זה לא ניתנות מטלות השלמה!

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.

ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

**אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית
למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.**

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1 ו-2

קומבינטוריקה; חישובי הסתברויות קומבינטוריים

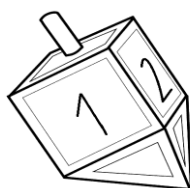
מספר השאלות: 20

משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2019 ב

מועד אחרון להגשה: 17.3.2019

שלחו את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת שאלתא בכתובת www.openu.ac.il/sheilta



שאלות 1-4 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתון סביבון תקין בעל 4 פאות, שעליהן רשומים המספרים 1, 2, 3 ו-4. מסובבים את הסביבון 5 פעמים.

שאלה 1

מהי ההסתברות שכל ארבע התוצאות האפשריות תתקבלנה בחמשת הסיבובים?

ד. $\frac{15}{128}$

ג. $\frac{15}{64}$

ב. $\frac{15}{32}$

א. $\frac{15}{16}$

שאלה 2

מהי ההסתברות שהתוצאה 3 תתקבל לפחות פעמיים?

ד. $\frac{377}{512}$

ג. $\frac{135}{512}$

ב. $\frac{47}{128}$

א. $\frac{619}{1,024}$

שאלה 3

מהי ההסתברות שבשני הסיבובים הראשונים (מתוך ה-5 שנעשו) התקבלו תוצאות שונות ובסך-הכל התקבלו כל ארבע התוצאות בחמשת הסיבובים?

ד. $\frac{27}{128}$

ג. $\frac{18}{128}$

ב. $\frac{12}{128}$

א. $\frac{9}{128}$

שאלה 4

מהי ההסתברות שב-5 הסיבובים התקבלו בדיוק שתיים מהתוצאות האפשריות?

ד. $\frac{1}{32}$

ג. $\frac{75}{256}$

ב. $\frac{3}{16}$

א. $\frac{45}{256}$



שאלות 5-9 מתייחסות לבעיה הבאה:

10 ילדים, שהם 5 זוגות של אחים, מתיישבים באקראי ליד 5 שולחנות. ליד כל שולחן יש בדיוק שני כסאות: אחד אדום והשני ירוק.

שאלה 5

מהי ההסתברות שיואב ורועי, שניים מן הילדים, יתיישבו ליד אותו השולחן?

- א. $\frac{1}{9}$ ב. $\frac{2}{9}$ ג. $\frac{1}{5}$ ד. $\frac{2}{5}$

שאלה 6

מהי ההסתברות שיהיו בדיוק שלושה שולחנות שבכל אחד מהם יישבו שני ילדים שהם אחים?

- א. $\frac{1}{1,008}$ ב. $\frac{1}{189}$ ג. $\frac{4}{189}$ ד. $\frac{3}{512}$

שאלה 7

נתבונן על יואב ורועי. מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם יישב על כסא אדום?

- א. $\frac{2}{9}$ ב. $\frac{1}{2}$ ג. $\frac{7}{9}$ ד. $\frac{8}{9}$

שאלה 8

מהי ההסתברות שלא יהיו שני אחים שיישבו על כסאות מאותו הצבע?

- א. $\frac{1}{120}$ ב. $\frac{8}{63}$ ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{7}{9}$

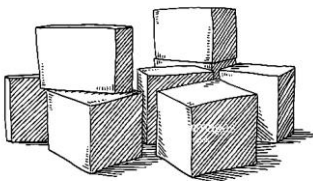
שאלה 9

מהי ההסתברות שליד השולחן הימני ביותר (בהנחה שיש שולחן אחד כזה) יישבו ילדים שהם אחים?

- א. $\frac{1}{18}$ ב. $\frac{1}{10}$ ג. $\frac{1}{9}$ ד. $\frac{1}{8}$

שאלות 10-13 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתון ארגז ובו 30 קוביות זהות בצורתן: 25 לבנות, 3 כחולות ו-2 אדומות. קוביות מאותו הצבע זהות למראה.



שאלה 10

בוחרים באקראי וללא החזרה **קבוצה** של 4 קוביות מהארגז. כמה תוצאות בחירה שונות למראה קיימות?

- א. 11 ב. 71 ג. 264 ד. 312

שאלה 11

בוחרים באקראי וללא החזרה **קבוצה** של 4 קוביות מהארגז.
מהי ההסתברות שתבחרנה קוביות בדיוק משני צבעים, כך שתהיינה בדיוק 2 קוביות מכל צבע?

א. $\frac{48}{312}$ ב. $\frac{3}{11}$ ג. $\frac{18}{71}$ ד. $\frac{401}{9,135}$

שאלה 12

מסדרים באקראי את הקוביות בשורה.
מהי ההסתברות שלא תהיינה שתי קוביות צבעוניות (כחולות או אדומות) במקומות סמוכים?

א. 0.2017 ב. 0.2983 ג. 0.3728 ד. 0.4616

שאלה 13

מסדרים באקראי את הקוביות במעגל.
מהי ההסתברות שלא תהיינה שתי קוביות צבעוניות (כחולות או אדומות) במקומות סמוכים?

א. 0.0124 ב. 0.0154 ג. 0.4474 ד. 0.5539

אבגדהו
זחטיכל
מוסטפצ
קרשת

שאלות 14-17 מתייחסות לבעיה הבאה:

ילד קטן מקליד את 22 האותיות העבריות מ- א' עד ת' (ללא אותיות סופיות) בסדר אקראי.
כל אחת מ- 22 האותיות מופיעה בדיוק פעם אחת ברצף ההקלדה.

שאלה 14

מהי ההסתברות שהאות **ד** תופיע במקום הרביעי ברצף-ההקלדה והאות **ו** תופיע עד המקום השישי (ובכלל זה המקום השישי) ברצף-ההקלדה?

א. $\frac{1}{462}$ ב. $\frac{5}{462}$ ג. $\frac{6}{462}$ ד. $\frac{12}{462}$

שאלה 15

מהי ההסתברות שברצף-ההקלדה תופיע לפחות אחת משתי המילים "מערה" ו- "פתח"?

א. $\frac{17! \cdot 7,181}{22!}$ ב. $\frac{19! \cdot 21}{22!}$ ג. $\frac{17! \cdot 2}{22!}$ ד. $1 - \frac{4! \cdot 3!}{22!}$

שאלה 16

מהי ההסתברות שברצף-ההקלדה האותיות **א**, **ב** ו- **ג** תופענה כולן עד (וכולל) למקום העשירי?
(שלוש האותיות לא חייבות להופיע במקומות סמוכים או בסדר מסוים).

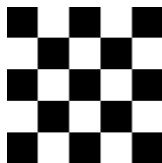
א. $\frac{8}{77}$ ב. $\frac{1}{15}$ ג. $\frac{6}{77}$ ד. $\frac{1}{120}$

שאלה 17

מהי ההסתברות שברצף-ההקלדה האות **ד** תופיע לפני האות **ה** וגם האות **ח** תופיע לפני האות **ט**?
(האותיות לא חייבות להופיע במקומות סמוכים).

א. $\frac{1}{16}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{2}$

שאלות 18-20 מתייחסות לבעיה הבאה:



נתון לוח משובץ בגודל 5×5 (כלומר, לוח שבו 5 שורות ובכל שורה 5 משבצות).
על כל משבצת בלוח כותבים באקראי אחת מהספרות 0 או 1.

שאלה 18

מהי ההסתברות שתהיה בלוח לפחות שורה אחת שכולה אפסים?

א. $1 - (1 - 0.5^5)^5$ ב. $1 - 0.5^{25}$ ג. $(1 - 0.5^5)^5$ ד. $5 \cdot 0.5^5$

שאלה 19

מהי ההסתברות שתהיינה בלוח בדיוק 15 משבצות שעליהן הספרה 1?

א. $\binom{25}{15} \cdot 0.5^{15}$ ב. $\binom{25}{15} \cdot 0.5^{25}$ ג. $\binom{25}{15} \cdot 0.2^{25}$ ד. 0.5^{25}

שאלה 20

מהי ההסתברות שלפחות בשורה אחת סכום הספרות יהיה בדיוק 3?

א. $1 - \frac{11^5}{2^{20}}$ ב. $\frac{\binom{5}{3} \cdot 5}{2^{25}}$ ג. $\frac{\binom{5}{3} \cdot 5}{2^5}$ ד. $1 - \frac{20}{2^5}$

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 2 ו-3

דיאגרמת ון וטענות הסתברות בסיסיות; הסתברות מותנית

מספר השאלות: 5 משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: 2019 ב מועד אחרון להגשה: 31.03.2019

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
 - שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

הוטרנירית העירונית ערכה סקר בקרב תושבי העיר, וקיבלה את התוצאות הבאות:

ל- 45% מהתושבים יש כלבים או חתולים;

ל- 70% מהתושבים אין כלבים;

ל- 9% מהתושבים יש לפחות שני כלבים;

ל- 25% מהתושבים יש לפחות חתול אחד;

ל- 76% מבין התושבים שיש להם לפחות חתול אחד, יש בדיוק חתול אחד;

אם לתושב יש כלבים, אז אין לו יותר מחתול אחד;

ול- 2% מהתושבים יש בדיוק חתול אחד ולפחות שני כלבים.

נניח שכל בעל-חיים בעיר (כלב או חתול) רשום על-שמו של תושב אחד בלבד.

(8 נק') א. הגדר ארבעה מאורעות מתאימים לבעיה המתוארת בשאלה, צייר עבורם דיאגרמת ון,

המתארת את הבעיה, ומלא בשטחים החלקיים שנוצרים בדיאגרמה את כל ההסתברויות

הנובעות מנתוני הבעיה (ישירות או באמצעות חישוב).

הסבר בקצרה את דרך חישוב ההסתברויות שרשמת בדיאגרמה, באמצעות טענות הסתברות

בסיסיות.

**** בסעיפים הבאים, כשכתוב בעל-חיים הכוונה היא לכלב או לחתול ****

בכל אחד מהסעיפים שלהלן בטא את המאורע המתואר בסעיף באמצעות המאורעות שהגדרת בסעיף א.

בוחרים באופן מקרי תושב של העיר –

(3 נק') ב. מהי ההסתברות שלתושב הנבחר יש בדיוק כלב אחד ובדיוק חתול אחד?

(3 נק') ג. מהי ההסתברות שלתושב הנבחר יש לפחות שני בעלי-חיים?

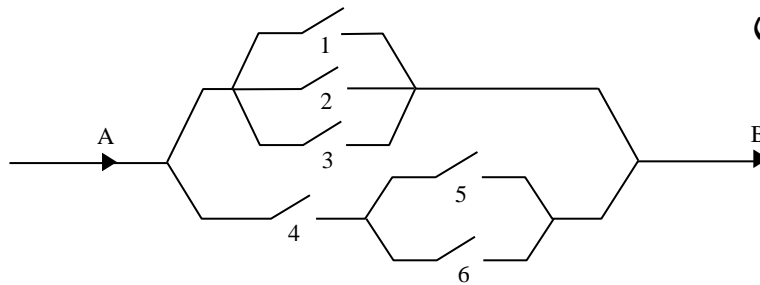
(3 נק') ד. אם לתושב הנבחר יש לפחות חתול אחד, מהי ההסתברות שיש לו יותר מכלב אחד?

(3 נק') ה. אם לתושב הנבחר יש יותר מבעל-חיים אחד,

מהי ההסתברות שיש לו בעלי-חיים משני הסוגים?

שאלה 2 (21 נקודות)

נתון המעגל הבא:



מצבי המתגים 1, 2 ו-3 בלתי-תלויים זה בזה וכל אחד מהם **סגור** בהסתברות 0.6 (ואז יכול לעבור בו זרם);

מצבי המתגים 1, 2 ו-3 בלתי-תלויים במצבי המתגים 4, 5 ו-6;

אם מתג 4 **סגור**, אז לפחות אחד ממתגים 5 ו-6 **סגור** בהסתברות 0.8;

מתג 4 **סגור** בהסתברות 0.9;

אם מתג 5 **פתוח**, אז לפחות אחד ממתגים 4 ו-6 **פתוח** בהסתברות 0.3.

7 נק' א. מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?

7 נק' ב. אם מתג 5 פתוח, מהי ההסתברות שלא עובר זרם מ-A ל-B?

7 נק' ג. האם המאורעות: "מתג 4 פתוח" ו-"במעגל עובר זרם" בלתי-תלויים זה בזה?

הוכח את טענתך.

שאלה 3 (20 נקודות)

בכיתה 8 בניס ו-8 בנות. אהוד ואפרת הם שניים מתלמידי הכיתה.

מחלקים באקראי את הכיתה ל-8 זוגות.

7 נק' א. מהי ההסתברות שייווצרו בדיוק שני זוגות מעורבים, המורכבים מבן ובת?

7 נק' ב. אם נוצרו בדיוק שני זוגות מעורבים (המורכבים מבן ובת),

מהי ההסתברות שאהוד ואפרת לא יהיו באותו הזוג?

6 נק' ג. בוחרים באקראי 5 ילדים מתוך 20 ילדי הכיתה.

אם אפרת נבחרה, מהי ההסתברות שאהוד לא נבחר?

שאלה 4 (21 נקודות)

נתון ארגז ובו כדורים זהים. מוציאים כדורים מהארגז ומפזרים אותם ב-10 תאים ממוספרים

מ-1 עד 10, כך שבתא 1 יש מספר כדורים קטן (ממש) מאשר בתא 2, בתא 2 יש מספר כדורים קטן (ממש)

מאשר בתא 3, ..., בתא 9 יש מספר כדורים קטן (ממש) מאשר בתא 10 ובתא 10 יש לכל היותר 20 כדורים.

הנח שבארגז יש מספיק כדורים לכל אפשרות פיזור שעונה על הדרישות.

7 נק' א. כמה אפשרויות פיזור שונות קיימות?

הערה: תא 1 יכול להיות ריק.

נניח שכל הפיזורים האפשריים מתקבלים בהסתברויות שוות.

7 נק' ב. מהי ההסתברות שבתא 7 יש בדיוק 15 כדורים?

7 נק' ג. ידוע שבתא האחרון יש בדיוק 15 כדורים. מהי ההסתברות שמספר הכדורים הכולל בשני

התאים הראשונים (1 ו-2) הוא בדיוק 4?

שאלה 5 (18 נקודות)

נתונים שלושה מאורעות, A , B ו- C , במרחב מדגם S .
נניח שידוע לגבי מאורעות אלו כי –

$$P(A) = 0.8$$

$$P(B) = 0.5$$

$$P(C) = 0.5$$

$$P(A \cap C) = 0.4$$

$$P(A^C \cap B \cap C) = 0.05$$

A ו- B בלתי-תלויים

B ו- C בלתי-תלויים בתנאי A

(6 נק') א. חשב את $P(B^C \cap C)$.

(6 נק') ב. אם ידוע שהמאורע A מתרחש, מהי ההסתברות שמתרחש לפחות עוד מאורע אחד מבין

המאורעות B ו- C ?

(6 נק') ג. האם שלושת המאורעות A , B ו- C בלתי-תלויים זה בזה?

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 4

מספר השאלות: 20

משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2019 ב

מועד אחרון להגשה: 14.4.2019

שלחו את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת שאלתא בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

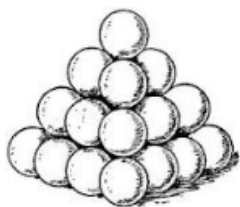
שאלות 1-4 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתונה קופסה ובה 18 כדורים: 10 לבנים, 5 שחורים ו-3 אדומים.

כל הכדורים שונים זה מזה.

בוחרים מהקופסה באקראי 7 כדורים.

יהי X מספר הכדורים הלבנים שנבחרים.



שאלה 1

אם הבחירה היא עם החזרה, מהי $P\{X=4\}$?

א. 0.0066 ב. 0.1125 ג. 0.2927 ד. 0.3695

שאלה 2

אם הבחירה היא עם החזרה, מהי השונות של X ?

א. 1.118 ב. 1.728 ג. 2.469 ד. 3.673

שאלה 3

אם הבחירה היא ללא החזרה, מהי $P\{X=4\}$?

א. 0.0066 ב. 0.1125 ג. 0.2927 ד. 0.3695

שאלה 4

אם הבחירה היא ללא החזרה, מהי השונות של X ?

א. 1.118 ב. 1.728 ג. 2.469 ד. 3.673

שאלות 5-8 מתייחסות לבעיה הבאה:

בפארק גדול מסתובבים 3 נמרים, שאותם צריך ללכוד. לשם כך הוזמן לפארק לוכד-נמרים מנוסה. לוכד-הנמרים מנסה פעם אחר פעם ללכוד את הנמרים, ובכל נסיון שלו הוא לוכד לכל היותר נמר אחד. כאשר לוכד-הנמרים מצליח ללכוד נמר – הנמר מוצא מהפארק (ואין צורך ללכוד אותו שוב). כל עוד יש בפארק לפחות נמר אחד, לוכד הנמרים ממשיך בנסיונות-הלכידה שלו. כל אחד מנסיונותיו מסתיים בהצלחה, כלומר בלכידת נמר, בהסתברות 0.4. אין תלות בין התוצאות של נסיונות-לכידה שונים של לוכד-הנמרים.



שאלה 5

מה ההסתברות שלוכד-הנמרים יצליח ללכוד את כל הנמרים ב-5 נסיונות לכל היותר?

- א. 0.3174 ב. 0.1382 ג. 0.1254 ד. 0.4480

שאלה 6

אם ידוע שלוכד הנמרים הצליח ללכוד את כל הנמרים ב-5 נסיונות לכל היותר, מהי ההסתברות שהוא נזקק לשם כך לכל 5 הנסיונות?

- א. 0.1382 ב. 0.4355 ג. 0.1837 ד. 0.5143

שאלה 7

מהי שונות מספר הנסיונות שהלוכד יבצע עד לתפיסתם של כל הנמרים?

- א. 0.72 ב. 3.33 ג. 18.75 ד. 11.25

שאלה 8

נניח שכל נסיון כושל של הלוכד (שבו הוא אינו מצליח ללכוד אף נמר) אורך 15 דקות, וכי כל נסיון מוצלח (שבו הוא מצליח ללכוד נמר) אורך 30 דקות. מהי תוחלת הזמן (בדקות) שהלוכד ישקיע בנסיונות-הלכידה? (הכוונה לנסיונות מוצלחים וכושלים גם יחד, שיעשה עד ללכידת כל הנמרים.)

- א. 63 ב. 102.5 ג. 157.5 ד. 202.5

שאלה 9

בקופסה 50 מטבעות: 38 תקינים ו-12 לא-תקינים שההסתברות לקבל H בכל אחד מהם היא $\frac{1}{4}$. בוחרים באקראי אחד ממטבעות אלו ומטילים אותו עד לקבלת ה-H הראשון. מהי ההסתברות שהמטבע הנבחר יוטל בדיוק 4 פעמים?



- א. 0.1680 ב. 0.2913 ג. 0.0728 ד. 0.0916

שאלות 10-11 מתייחסות לבעיה הבאה:

למספר הביצים, שמטילים חרקים מזון מסוים על כל אחד מן העלים של עץ-הדר, יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 3. אין תלות בין מספרי הביצים על עלים שונים.

שאלה 10

קוטפים באופן מקרי 3 עלים מהעץ.

מהי ההסתברות שעל אחד יהיו 4 ביצים ועל כל אחד משני העלים האחרים יהיו 3 ביצים?

א. $e^{-9} \cdot \frac{3^{11}}{864}$ ב. $e^{-9} \cdot \frac{3^{10}}{864}$ ג. $e^{-9} \cdot \frac{3^{10}}{432}$ ד. $e^{-9} \cdot \frac{3^{10}}{36}$

שאלה 11

קוטפים עלה, ומבחינים שיש עליו לפחות 2 ביצים.

מהי ההסתברות שיש עליו בדיוק i ($i = 2, 3, \dots$) ביצים?

א. $\frac{e^{-3} \cdot 3^i}{i! \cdot (1 - 8.5e^{-3})}$ ב. $\frac{e^{-3} \cdot 3^i}{i! \cdot (1 - 4e^{-3})}$ ג. $\frac{2 \cdot 3^{i-2}}{i!}$ ד. $\frac{e^{-3} \cdot 3^i}{i!}$

שאלה 12

חרק מזון אחר מטיל ביצים בקבוצות גדולות מאוד, אך רק מחלק קטן מהן בוקע חרק צעיר. נניח שחרק מסוג כזה הטיל 1,500 ביצים, וכי ההסתברות שמכל אחת מהביצים שהטיל יבקע חרק צעיר היא 0.01. מהי בקירוב ההסתברות שמהביצים שחרק זה הטיל יבקעו בדיוק 11 חרקים צעירים.

הערה: בחר בתשובה הקרובה ביותר.

א. 0.066874 ב. 0.066569 ג. 0.066175 ד. 0.066287

שאלות 13-15 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתונה קופסה ובה 10 כדורים שונים.

מוציאים מהקופסה כדורים עם החזרה ובה אחר זה, עד שאותו כדור מוצא פעמיים ברציפות.

יהי X מספר הוצאות הכדורים שנעשות בניסוי.



שאלה 13

מהי פונקציית ההסתברות של X ?

א. $0.1 \cdot 0.9^{i-2}$ ב. $0.1^2 \cdot 0.9^{i-2}$ ג. $0.1 \cdot 0.9^{i-1}$ ד. $\frac{1}{9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{i-1}$
 $i = 2, 3, \dots$ $i = 2, 3, \dots$ $i = 1, 2, \dots$ $i = 1, 2, \dots$

שאלה 14

מהי התוחלת של X ?

- א. $12\frac{2}{9}$ ב. $1\frac{2}{9}$ ג. 11 ד. 10

שאלה 15

מהי השונות של X ?

- א. 61.617 ב. 19.606 ג. 90 ד. 72

שאלות 16-18 מתייחסות לבעיה הבאה:

שני גברים, ששמותיהם אבי ובני, ו- $n-2$ נשים מתיישבים באקראי בשורה; נניח כי $n \geq 4$.
יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הנשים שיושבות ליד אבי.



שאלה 16

מהי $P\{X=1\}$?

- א. $\frac{1}{n-1}$ ב. $\frac{n-2}{n(n-1)}$ ג. $\frac{2(n-2)}{n(n-1)}$ ד. $\frac{4(n-2)}{n(n-1)}$

שאלה 17

מהי $P\{X=2\}$?

- א. $\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}$ ב. $\frac{n-3}{n-1}$ ג. $\frac{(n-2)^2(n-3)}{n^2(n-1)}$ ד. $\frac{(n-2)^2}{n^2}$

שאלה 18

נניח כי $n=6$. מהי השונות של X ?

- א. $\frac{4}{3}$ ב. $\frac{32}{15}$ ג. $\frac{16}{45}$ ד. $\frac{12}{15}$

שאלות 19-20 מתייחסות לבעיה הבאה:

יהי X משתנה מקרי אחיד בדיד בין 10 ל-20.
 אם $X < 15$, עלות ביצוע הניסוי היא 200 ש"ח; אחרת, עלות ביצועו היא 300 ש"ח.
 נסמן ב- Y את עלות ביצוע הניסוי.



שאלה 19

מהי השונות של עלות ביצוע הניסוי?

- א. 2,479.34 ב. 2,500 ג. 64,750 ד. 67,018.18

שאלה 20

בכל סעיף נתונים שני ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה המקרי Y .
 מהו הסעיף שבו שני הערכים הנתונים נכונים?

- א. $F_Y(200) = 0$ ב. $F_Y(250) = \frac{1}{2}$ ג. $F_Y(150) = 0$ ד. $F_Y(150) = 0$
 $F_Y(325) = 1$ $F_Y(325) = 1$ $F_Y(225) = \frac{5}{11}$ $F_Y(325) = 0$

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 5

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: 5.5.2019

סמסטר: 2019 ב

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
 - שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (24 נקודות)

יהי X_1 משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 1 ויהי X_2 משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 2.

נגדיר את המשתנה המקרי Y באמצעות פונקציית הצפיפות: $f_Y(y) = 1.25e^{-y} - 0.5e^{-2y}$, $y > 0$

(8 נק') א. הראה כי f_Y היא אכן פונקציית צפיפות.

(8 נק') ב. חשב את התוחלת של Y , באמצעות נוסחת התוחלת של משתנה מקרי מעריכי.

כלומר, זכור כי השוויון $E[X] = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$, מתקיים עבור $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

(8 נק') ג. חשב את השונות של Y , באמצעות נוסחאות התוחלת והשונות של משתנה מקרי מעריכי.

כלומר, השתמש בנוסחה ל- $E[X^2]$, עבור $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, הנובעת מנוסחאות התוחלת והשונות

של X .

שאלה 2 (28 נקודות)

פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי X נתונה על-ידי:

$$f_X(x) = \begin{cases} c & , 0 \leq x \leq 1 \\ c(2-x) & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

(7 נק') א. חשב את c .

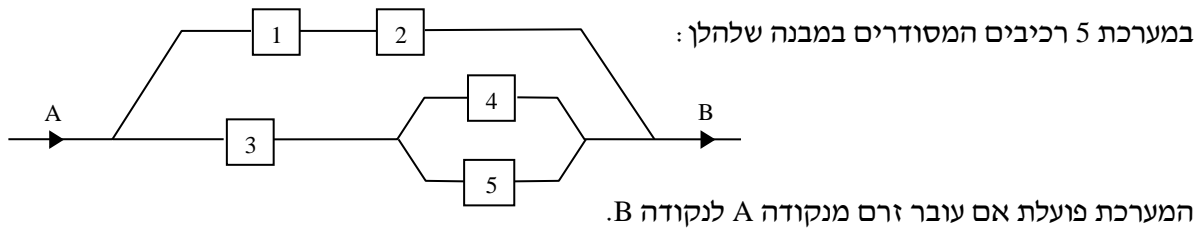
(7 נק') ב. חשב את התוחלת של X .

(7 נק') ג. מצא את $F_X(x)$. רשום את ערכי הפונקציה לכל x ממשי.

(7 נק') ד. יהי $Y = X^2$. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y .

רשום את ערכי הפונקציה לכל y ממשי.

שאלה 3 (16 נקודות)



נסמן ב- X_i את אורך-החיים (בשנים) של רכיב i , לכל $i = 1, 2, 3, 4, 5$. אין תלות בין רכיבים שונים. כמו כן, לכל אחד מהמשתנים המקריים X_1 ו- X_2 יש ההתפלגות נורמלית עם תוחלת 2.5 ושונות 1, ולכל אחד מהמשתנים המקריים X_3, X_4 ו- X_5 יש ההתפלגות אחידה בין 1 ל- 3. מפעילים מערכת שכל הרכיבים בה חדשים. אין אפשרות להחליף במערכת רכיב שהתקלקל.

- (8 נק') א. מהי ההסתברות שהמערכת עדיין פועלת לאחר שנתיים מיום הפעלתה?
 (8 נק') ב. אם לאחר שנתיים המערכת עדיין פועלת, מהי ההסתברות שרכיב 4 תקין בזמן זה?

שאלה 4 (32 נקודות)

בקופסה של נרות-דקורטיביים יש 12 נרות, שהאורך של כל אחד מהם מקרי. התפלגות האורך (בס"מ) של נר מקרי היא נורמלית עם הפרמטרים 15 ו- 2^2 . אין תלות בין אורכי נרות שונים.

- (8 נק') א. עלות הייצור של נר (בש"ח) שווה לעשירית מאורכו (בס"מ) ועוד עלות קבועה של 10 אגורות. מהן התוחלת והשונות של עלות הייצור של נר מקרי?
 (8 נק') ב. מהי ההסתברות שבחבילה מקרית יהיו בדיוק 4 נרות שאורכם גדול מ- 17.5 ס"מ?
 (8 נק') ג. מהו אורך הנר שההסתברות שנר מקרי יהיה ארוך ממנו היא 0.89?
 (8 נק') ד. נניח שהתפלגות האורך (בס"מ) של נר מקרי היא נורמלית עם הפרמטרים 15 ו- σ^2 . אם מעוניינים שההסתברות שבחבילה מקרית יהיה לפחות נר אחד שאורכו קצר מ- 11 ס"מ לא תעלה על 0.1, מה צריך להיות הערך המקסימלי של σ ?

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 6

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 26.5.2019

סמסטר: 2019 ב

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
 - שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (24 נקודות)

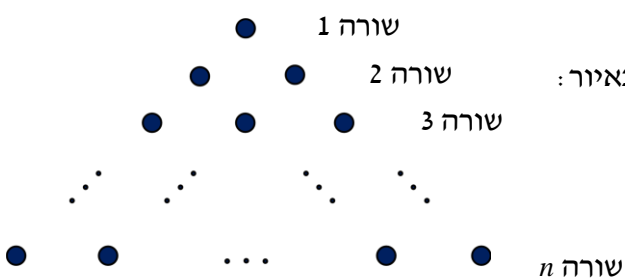
בוחרים באקראי בזה אחר זה וללא החזרה 3 מספרים מתוך הקבוצה $\{1, 2, \dots, 10\}$. יהי X_i משתנה מקרי המוגדר על-ידי המספר שנבחר בבחירה ה- i , לכל $i = 1, 2, 3$.

- מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X_1, X_2 ו- X_3 . (6 נק')
- רשום אותה באופן מדויק: ערכים אפשריים והסתברויות משותפות.
- מצא את פונקציית ההסתברות השולית של X_3 . רשום אותה באופן מדויק. (6 נק')
- חשב את $P\{X_1 < X_2, X_1 < X_3\}$. (6 נק')
- חשב את $P\{X_3 = 8 | X_2 < X_3\}$. (6 נק')

שאלה 2 (24 נקודות)

נתונים כדורים, המסודרים במבנה משולש כמתואר באיור:

בוחרים באקראי אחד מהכדורים.



יהיו: X = השורה שממנה נבחר הכדור;

Y = המקום בשורה שממנו נבחר הכדור.

נניח כי $n > 5$, וכי המקומות בשורה i ($i = 1, 2, \dots, n$) ממוספרים משמאל לימין, מ-1 עד i .

- מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y . (6 נק')
- מצא את פונקציות ההסתברות השוליות של X ושל Y . (6 נק')
- האם המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה? נמק את תשובתך. (6 נק')
- חשב את $P\{Y \leq 2 | X \geq 4\}$. (6 נק')

שאלה 3 (24 נקודות)

בחבילת עוגיות יש 50 עוגיות.

בכל עוגייה יש X פצפוצי-שוקולד, כאשר X הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 6.

אין תלות בין עוגיות שונות מאותה חבילה או בין עוגיות מחבילות שונות.

(6 נק') א. מה שונות מספר פצפוצי-השוקולד שיש בחבילת עוגיות שלמה?

(6 נק') ב. כל פצפוצי-שוקולד הוא חום בהסתברות 0.8 ולבן בהסתברות 0.2.

מהי שונות מספר פצפוצי-השוקולד הלבנים שיש בחבילת עוגיות שלמה?

(6 נק') ג. אם בשלוש עוגיות יש בסך-הכל 20 פצפוצי-שוקולד, מהי ההסתברות שבעוגייה אחת (כלשהי)

יש 9 פצפוצים, באחרת 6 ובשלישית 5?

(6 נק') ד. מהי ההסתברות, שבחבילה מקרית של עוגיות, המספר המינימלי של פצפוצי-שוקולד בעוגייה

אחת יהיה בדיוק 2?

שאלה 4 (14 נקודות)

נתון מטבע, שההסתברות לקבל בו H היא $\frac{X+1}{20}$,

כך ש- X הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 10 ו-0.5.

מטילים את המטבע 20 פעמים. יהי N מספר הפעמים שהתוצאה H התקבלה ב-20 הטלות אלו.

(7 נק') א. חשב את $P\{N=8 | X=6\}$.

(7 נק') ב. מצא ביטוי כללי להסתברות $P\{N=n, X=i\}$.

עבור אלו ערכים של n ו- i הסתברות זו מקבלת ערכים חיוביים?

שאלה 5 (14 נקודות)

נתונים ארבעה סלים, המסומנים באותיות A, B, C ו- D .

בתחילת הניסוי יש בסל A 50 כדורים ואילו סלים B, C ו- D ריקים מכדורים.

כעת, מוציאים מסל A X_1 כדורים ומעבירים אותם לסל B ;

אחר-כך, מוציאים מסל B X_2 כדורים ומעבירים אותם לסל C ;

ולבסוף, מוציאים מסל C X_3 כדורים ומעבירים אותם לסל D .

נניח שבכל שלב של הניסוי, שבו מעבירים כדורים, כל כדור שנמצא בסל שממנו מוציאים כדורים, מוצא ממנו

בהסתברות p , ללא תלות במספר הכדורים שיש בסל או בהוצאות כדורים אחרות.

(6 נק') א. זהה את ההתפלגויות של X_1 , של X_2 בהינתן $X_1 = i$ ושל X_3 בהינתן $X_2 = j$.

(8 נק') ב. מצא ביטוי כללי ל- $P\{X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k\}$, עבור i, j ו- k שלמים, המקיימים

$$0 \leq k \leq j \leq i \leq 50$$

זהה את פונקציית ההסתברות המשותפת שקיבלת.

כתוב את שמה ואת ערכי הפרמטרים המתאימים לה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 10.6.2019

סמסטר: 2019 ב

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
 - שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (24 נקודות)

מטילים מטבע תקין 50 פעמים.

יהיו X = מספר ה-H שהתקבלו ב-50 הטלות המטבע;

Y = מספר ה-H שהתקבלו ב-20 ההטלות הראשונות של המטבע.

(8 נק') א. האם X ו- Y בלתי-מתואמים?

(8 נק') ב. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של Y בהינתן $X = i$, לכל $i = 0, 1, \dots, 50$.
זוהי את ההתפלגות המותנית שקיבלת. רשום את שמה ואת הפרמטרים המתאימים לה.

(8 נק') ג. 1. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $Y = j$, לכל $j = 0, 1, \dots, 20$.

2. חשב את $E[X | Y = j]$, לכל $j = 0, 1, \dots, 20$.

הערה: בסעיפים ב ו-ג, הקפד לכתוב את תחומי הערכים אפשריים של ההתפלגויות המותנות.

שאלה 2 (18 נקודות)

התפלגות המשקל (בגרמים) של תפוח ירוק היא נורמלית עם תוחלת 100 וסטיית-תקן 10.

התפלגות המשקל (בגרמים) של תפוח אדום היא נורמלית עם תוחלת 150 וסטיית-תקן 20.

יעל הולכת לירקן כדי לקנות 10 תפוחים – 5 תפוחים ירוקים ו-5 תפוחים אדומים. היא בוחרת באקראי את כל התפוחים: תחילה את התפוחים הירוקים ואחר-כך את האדומים, ושמה את כולם בשקית אחת. (תפוחים מצבעים שונים מסודרים בערמות שונות.)

נניח שאין תלות בין משקלי תפוחים שונים וכי משקל השקית הריקה זניח, ונסמן ב- X את המשקל הכולל (בק"ג) של השקית המלאה.

(6 נק') א. חשב את $P\{X < 1.3\}$.

(6 נק') ב. מהי הפונקציה יוצרת המומנטים של X ?

(6 נק') ג. קילוגרם אחד של תפוחים (מכל זן) עולה 6 ₪.

מהי הפונקציה יוצרת המומנטים של מחיר השקית המלאה?

שאלה 3 (16 נקודות)

נתונה קופסה ובה 10 כדורים ממוספרים מ-1 עד 10. מוציאים באקראי כדור אחד מהקופסה. יהי X את המספר הרשום על הכדור שהוצא. לאחר מכן, כל אחד מ- X אנשים מטיל מטבע תקין עד שהוא מקבל H בפעם הראשונה. אין תלות בין ההטלות של אנשים שונים.

נסמן ב- Y את סך כל ההטלות שנעשות בניסוי המתואר לעיל.

(8 נק') א. מהי התוחלת של Y ?

(8 נק') א. מהי השונות של Y ?

שאלה 4 (16 נקודות)

בזה אחר זה הופכים את הקלפים בחפיסה רגילה של 52 קלפים טרופים, המונחים כשפניהם כלפי מטה. **הערה:** בחפיסת קלפים רגילה יש קלפים מ-4 צורות – לב, תלתן, עלה ויהלום. מכל צורה יש 13 קלפים שונים – אס, 2, 3, ..., 10, נסיך, מלכה ומלך.

(8 נק') א. חשב את התוחלת של מספר הקלפים שיש להפוך עד שמתגלים כל קלפי המלכים והמלכות (בסה"כ 8 קלפים).

(8 נק') ב. חשב את השונות של מספר הקלפים שיש להפוך עד שמתגלים כל קלפי המלכים והמלכות (בסה"כ 8 קלפים).

שאלה 5 (10 נקודות)

בין שני עמודים לצד הדרך מתוחים 2 כבלי חשמל, האחד מעל השני. התפלגות מספר הציפורים שיושבות על כל אחד מן הכבלים היא בינומית עם הפרמטרים 30 ו-0.5. אין תלות בין מספרי הציפורים על כל אחד מן הכבלים.

יהיו: X = מספר הציפורים על הכבל התחתון;

Y = מספר הציפורים על שני הכבלים יחדיו.

חשב את $\rho(X, Y)$.

שאלה 6 (16 נקודות)

מטילים קובייה תקינה 21 פעמים. נגדיר שני משתנים מקריים:

X_1 – מספר ההטלות שהתקבלו בהן התוצאות 1 או 2;

X_2 – מספר ההטלות שהתקבלו בהן התוצאות 3, 4, 5 או 6.

(8 נק') א. חשב את מקדם המתאם בין X_1 ל- X_2 .

(8 נק') ב. נגדיר $Y_i = (-1)^{X_i}$ לכל $i = 1, 2$.

חשב את השונות המשותפת של Y_1 ו- Y_2 .

נספחים

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

דף הנוסחאות יצורף לכל בחינה.

לקראת הבחינה מומלץ לבדוק באתר הקורס אם לא חלו שינויים בדף הנוסחאות שיצורף לבחינה.

נספח ב: רשימת טענות להוכחה בבחינה

בכל בחינה עשויות להופיע טענות, מן הרשימה המובאת להלן, שאותן תדרשו להוכיח במדויק.

ההוכחות של כל הטענות מן הרשימה מובאות באתר הקורס בקובץ נפרד.

משקל הטענות שתופענה בבחינה לא יעלה על 25 נקודות.

הטענות עשויות להופיע ביותר מאשר שאלה אחת.

גירסת רשימת הטענות, המובאת בחוברת מטלות זו, נכונה לחודש פברואר 2018.

לקראת הבחינה מומלץ לבדוק באתר הקורס אם לא חלו שינויים ברשימת הטענות לבחינה.

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה היוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}, \quad i=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t + 1 - p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1} \cdot p, \quad i=1,2,\dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t / (1 - (1-p)e^t), \quad t < -\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i!, \quad i=0,1,\dots$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1} (1-p)^{i-r} \cdot p^r, \quad i=r, r+1, \dots$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$(pe^t / (1 - (1-p)e^t))^r, \quad t < -\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i} / \binom{N}{n}, \quad i=0,1,\dots,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N} (1 - \frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n}, \quad i=m+1, m+2, \dots, m+n$	$m + (1+n)/2$	$(n^2 - 1)/12$	
אחידה	$1/(b-a), \quad a \leq x \leq b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt} - e^{at})/(tb - ta), \quad t \neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda - t), \quad t < \lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1, \dots, n_r} \cdot p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}, \quad \sum n_i = n, \sum p_i = 1$			

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \quad \text{נוסחת הבינום}$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \quad \text{כלל ההכלה וההפרדה}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{הסתברות מותנית}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \quad \text{נוסחת הכפל}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i) \quad , \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S \quad \text{נוסחת ההסתברות השלמה}$$

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)} \quad , \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S \quad \text{נוסחת בייס}$$

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx \quad \text{תוחלת}$$

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx \quad \text{תוחלת של פונקציה של מ"מ}$$

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2 \quad \text{שונות}$$

$$E[aX + b] = aE[X] + b \quad \text{תוחלת ושונות של פונקציה ליניארית}$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ .

$$P\{X > s+t | X > t\} = P\{X > s\} \quad , \quad s, t \geq 0 \quad \text{תכונת חוסר-הזכרון}$$

$$E[X | Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y) = \int x f_{X|Y}(x|y) dx \quad \text{תוחלת מותנית}$$

$$\text{Var}(X | Y = y) = E[X^2 | Y = y] - (E[X | Y = y])^2 \quad \text{שונות מותנית}$$

$$E[X] = E[E[X | Y]] = \sum_y E[X | Y = y] p_Y(y) \quad \text{נוסחת התוחלת המותנית}$$

$$E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X | Y]] \quad (\text{טענה מתרגיל 26, עמוד 430})$$

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X | Y)] + \text{Var}(E[X | Y]) \quad \text{נוסחת השונות המותנית}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] \quad \text{תוחלת של סכום משתנים מקריים}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y] \quad \text{שונות משותפת}$$

$$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j) \quad \text{שונות של סכום משתנים מקריים}$$

$$\rho(X, Y) = \text{Cov}(X, Y) / \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)} \quad \text{מקדם המתאם הלינארי}$$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at) \quad \text{פונקציה יוצרת מומנטים}$$

$$M_{X_1+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t) \quad : \text{כאשר } X_i \text{ מ"מ ב"ת מתקיים}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X_1] \quad \text{תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי}$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\text{Var}(X_1) + (E[X_1])^2 \text{Var}(N) \quad (\text{כאשר } X_i \text{ מ"מ ב"ת ש"ה})$$

$$M_{X_1+\dots+X_N}(t) = E\left[\left(M_{X_1}(t)\right)^N\right]$$

$$P\{X \geq a\} \leq E[X]/a \quad , \quad a > 0 \quad , \quad X \text{ מ"מ אי-שלילי} \quad \text{אי-שוויון מרקוב}$$

$$P\{|X - \mu| \geq a\} \leq \sigma^2/a^2 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty \quad \text{אי-שוויון צ'בישב}$$

$$P\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)/\sqrt{n\sigma^2} \leq a\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a) \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty \quad , \quad X_i \text{ מ"מ ב"ת וש"ה} \quad \text{משפט הגבול המרכזי}$$

• אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A) + P(B)]$.

• סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר p הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי).

• סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני.

• סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי.

• ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X + Y = n$, כאשר X ו- Y מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1 < x < 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = -\ln(1-x) \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \neq -1 \quad ; \quad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b) \quad \text{נוסחת האינטגרציה בחלקים}$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \frac{1}{a \ln b} b^{ax} \quad \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\log_n a = \log_m a / \log_m n \quad ; \quad \log_n (a^b) = b \cdot \log_n a \quad ; \quad \log_n (ab) = \log_n a + \log_n b$$

נספח ב: טענות להוכחה בבחינה

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב - 20425

ההוכחות של הטענות, המובאות ברשימה שלהלן, נמצאות בקובץ נפרד באתר הקורס.

1. יהיו E ו- F מאורעות במרחב מדגם S . הוכח כי: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$
2. יהיו F ו- G מאורעות זרים של ניסוי מקרי כלשהו. הוכח כי בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה, ההסתברות שהמאורע F יתרחש לפני המאורע G היא: $\frac{P(F)}{P(F) + P(G)}$
3. יהי X משתנה מקרי בדיד, שתוחלתו סופית, ויהיו a ו- b קבועים ממשיים. הוכח כי: $E[aX + b] = aE[X] + b$; $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$
4. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p ($0 < p < 1$). הוכח כי: $E[X] = np$; $\text{Var}(X) = np(1-p)$
5. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ ($\lambda > 0$). הוכח כי: $E[X] = \lambda$; $\text{Var}(X) = \lambda$
6. יהי X משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים N , m ו- n . הוכח כי: $E[X] = n \cdot \frac{m}{N}$
7. יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ ($\lambda > 0$). הוכח כי: $E[X] = \frac{1}{\lambda}$; $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
8. יהי X משתנה מקרי אחיד (רציף) על הקטע (a, b) , עבור $a < b$. הוכח כי: $E[X] = \frac{a+b}{2}$; $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
9. הוכח: אם מאורע מסוים מתרחש בהתאם להנחות של תהליך-פואסון עם קצב λ , אז משך הזמן החולף עד להתרחשות המופע הראשון של המאורע (החל מזמן 0) הוא משתנה מקרי מעריכי עם אותה הפרמטר λ .
10. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y , בהתאמה. הוכח כי למשתנה המקרי $X + Y$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda_X + \lambda_Y$.
11. יהיו X ו- Y משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפרמטר p ($0 < p < 1$). הוכח כי למשתנה המקרי $X + Y$ יש התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים $(2, p)$.
12. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y , בהתאמה. הוכח שלמשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X + Y = n$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_X}{\lambda_X + \lambda_Y}$.
13. יהי $Y = a + bX$, ונניח כי $\sigma_X^2 > 0$. הראה כי: $\rho(X, Y) = \begin{cases} +1 & , b > 0 \\ -1 & , b < 0 \end{cases}$

14. יהיו X_1, X_2, \dots, X_n משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת ושונות סופיות, μ ו- σ^2 , בהתאמה.

הוכח כי: $E[\bar{X}] = \mu$; $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$

15. יהיו X_1, X_2, \dots, X_r משתנים מקריים בעלי פונקציית התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים p_1, p_2, \dots, p_r .

הוכח: א. למשתנה המקרי X_i יש התפלגות שולית בינומית עם הפרמטרים n ו- p_i .

ב. למשתנה המקרי המותנה X_1 בהינתן $X_2 = j$, לכל $j = 0, 1, \dots, n$, יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n-j$ ו- $p_1/(1-p_2)$.

ג. $\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$

16. יהיו X ו- Y משתנים מקריים בדידים בעלי תוחלות ושונויות סופיות.

הוכח: $E[X] = E[E[X|Y]]$
 $\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X|Y)] + \text{Var}(E[X|Y])$

17. הוכח: אם N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים אי-שליליים, ואם X_1, X_2, \dots הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב- N , אז מתקיים:

$$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X_1]$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\text{Var}(X_1) + (E[X_1])^2 \text{Var}(N)$$

הערה: כאשר $N = 0$, סכום המשתנים שווה גם הוא ל-0.

18. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p ($0 < p < 1$).

הוכח כי: $M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n$, $-\infty < t < \infty$

19. יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p ($0 < p < 1$).

הוכח כי: $M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t}$, $t < -\ln(1-p)$

20. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ ($\lambda > 0$).

הוכח כי: $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$, $-\infty < t < \infty$

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

נוסחת האינטרפולציה:

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)]$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326