מבנה הבחינה: בבחינה **שש** שאלות.
עליך לענות על **חמש** מתוך שש השאלות.
כל שאלה מזכה ב- 20 נקודות.

הנחיות: כל תשובה תתחיל בעמוד **חדש**.
אין לכתוב בצבע אדום.
אין לכתוב בעיפרון.

שאלה 1

נתון מערך $A[m+n]$, כאשר m ו-n משתנים בלתי-תלויים זה בזה. נתונה השגרה הבאה:

What (A, m, n)
    if $n = 1$
        then return $A[m+1]$
    $a_1 \leftarrow$ What $(m, \lfloor n/2 \rfloor)$
    $a_2 \leftarrow$ What $(m + \lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil)$
    if $a_1 < a_2$
        then return a_1
        else return a_2

(10 נקי) א. מה מבצעת השגרה? הסבר.

(10 נקי) ב. כתוב נוסחת נסיגה עבור זמן הריצה של השגרה. פתור את נוסחת הנסיגה.

שאלה 2

נתונים מערך $A[n]$ של מספרים ממשיים ומספר ממשי נוסף z.

(5 נקי) א. כתוב שגרה (בפסֵידוקוד) למציאת אינדקס k $(1 \le k \le n)$ כך שהאיבר $A[k]$ יהיה מינימלי בין כל האיברים $A[i]$ המקיימים $z \le A[i]$; זמן הריצה הנדרש: $O(n)$.

(7 נקי) ב. כתוב שגרה (בפסֵידוקוד) לפתרון אותה בעיה, בהנחה הנוספת שהמערך A ממוין בסדר עולה (לא יורד); זמן הריצה הנדרש: $O(\lg n)$.

(8 נקי) ג. פתור את נוסחת הנסיגה:

$$\begin{cases} T(n) = T(n-5) + 2n \quad , & n \ge 5 \\ T(n) = 0 \quad , & n < 5 \end{cases}$$

שאלה 3

נתונה השגרה $MED3$, המוצאת את ערכי המיקום ה- $\lfloor n/3 \rfloor$ וה-$\lceil 2n/3 \rceil$ במערך בגודל n בזמן לינארי ($MED3$ פועלת כקופסה שחורה ולא ידוע שום דבר נוסף עליה).

(13 נק') א. כתוב אלגוריתם שמבצע קריאות ל- $MED3$ והמוצא את ערך המיקום ה- k (k נתון, $1 \le k \le n$) בזמן לינארי. הוכח את זמן הריצה.

(7 נק') ב. האם ניתן לכתוב אלגוריתם שרץ בזמן לינארי והמוצא את **כל** ערכי המיקום (מהמינימום ועד למקסימום) באמצעות קריאות ל- $MED3$? הוכח או הפרך.

שאלה 4

נתונה **ערימת מינימום** $H[n]$: לכל $i > 1$, $H[Parent(i)] \le H[i]$.

מכל איבר בערימה (פרט לשורש) מחסירים את ערך אביו. מתקבל מערך $D[n]$.

(8 נק') א. באיזה סדר עלינו להחסיר את האבות כך שיתאפשר שחזור הערימה המקורית **ללא** שימוש בזיכרון נוסף? כתוב שגרה לבנית המערך D ושגרה לשחזור המערך H.

(12 נק') ב. איך מתבצעת פעולת $INSERT\left(H,k\right)$ (הכנסת המפתח החדש k לערימה H) אם משתמשים בצורה D של הערימה? האם זמן הריצה נשמר? הוכח.

שאלה 5

נתונה קבוצה של N רשומות, כאשר כל רשומה R מכילה שני מפתחות מספריים: $key0[R]$ ו-$key1[R]$. יהי n מספר המפתחות $key0$ השונים זה מזה המופיעים ב-N הרשומות (N ו-n הם משתנים בלתי-תלויים זה בזה, $n \le N$).

(12 נק') א. הצע מבנה נתונים, המבוסס על עץ אדום-שחור, המאפשר את ביצוע הפעולות הבאות בזמנים הנדרשים (במקרה הגרוע):

$BUILD(S)$: בניית המבנה S; זמן: $O(N \cdot \lg n)$;

$SEARCH(S,k)$: חיפוש רשומה כלשהי R, המקיימת $key0[R] = k$, במבנה S; זמן: $O(\lg n)$;

$INSERT(S, k_0, k_1)$: הכנסת רשומה כלשהי R, המקיימת $key0[R] = k_0$, $key1[R] = k_1$, למבנה S; זמן: $O(\lg n)$;

$DELETE\ (S,p)$: מחיקת הרשומה R, שאליה מצביע p, מהמבנה S; זמן: $O(\lg n)$;

$OS(S,i)$: מציאת ערך המיקום ה-i בסדרת n המפתחות השונים $key0$; זמן: $O(\lg n)$;

$INORDER\ (S)$: הדפס את כל הרשומות במבנה S בסדר ממוין לפי $key0$; זמן: $O(N)$.

תאר כל פעולה באופן מלא.

(8 נק') ב. נניח כעת שלכל ערך מפתח $key0$, כל המפתחות $key1$ שונים זה מזה ומספרם לכל היותר m. הסבר איך ניתן לבצע באופן יעיל את הפעולות הבאות:

$SEARCH\ (S, k_0, k_1)$: חיפוש הרשומה R המקיימת את התנאים $key0[R] = k_0$, $key1[R] = k_1$;

$EXTENDED\text{–}OS(S, j)$: מציאת ערך המיקום ה-j בסדרת כל N הרשומות במבנה; לצורך זה נגדיר $R \le R'$ אם ורק אם $key0[R] < key0[R']$ או אם $key0[R] = key0[R']$ וגם $key1[R] \le key1[R']$.

לכל פעולה תן את זמן הריצה האסימפטוטי (במקרה הגרוע) כפונקציה של m ושל n.

שאלה 6

(12 נק׳) א. נתון עץ חיפוש בינרי T בעל N מפתחות; כל מפתח הוא מחרוזת המכילה m תווים לכל היותר. פעולת ההשוואה בין מחרוזות מבוססת על הסדר הלקסיקוגרפי ומבצעת מספר השוואות בין תווים כמספר התווים במחרוזת הקצרה יותר ועוד אחת. נתבונן בפעולות הבאות:

SEARCH (T,s) : חיפוש המחרוזת s בעץ T;

INSERT (T,s) : הכנסת המחרוזת s לעץ T;

DELETE (T,p) : מחיקת האיבר שאליו מצביע p מהעץ T.

ידוע שאחרי כל השוואה בין המחרוזת t שבעץ לבין המחרוזת s, מתבצעת השגרה *LCS-LENGTH*(s,t), המחשבת את אורך התת-מחרוזת המשותפת הארוכה ביותר של s ושל t (עליך להתייחס אל ״מחרוזת״ כאל ״סדרה״ ואל ״תת-מחרוזת״ כאל ״תת-סדרה״).

כל שגרה תחזיר את הערך המקסימלי המתקבל מכל הקריאות לשגרה LCS-LENGTH.

מהם זמני הריצה האסימפטוטיים של שלוש הפעולות כפונקציות של m ושל N? הוכח כל טענה.

(8 נק׳) ב. פתור את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$\begin{cases} T(n) = 2T\left(\sqrt{n}\right) + \lg n \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

הפתרון יינתן כחסם אסימפטוטי הדוק של $T(n)$.

סוף!