

קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"
תאריך הבחינה: 19.2.2009 (סמסטר א' 2009 - מועד 3א/85)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

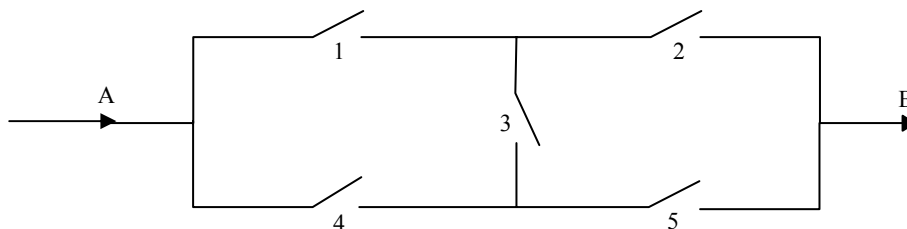
בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפים: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

שאלה 1 (25 נקודות)

במעגל שלהלן, כל אחד מחמשת המתגים סגור בהסתברות 0.7 (ואז יכול לעבור בו זרם). כמו כן, כל מתג פועל באופן בלתי-תלוי באחרים.



6 נק' א. אם מתג 3 פתוח, מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?

6 נק' ב. אם מתג 3 סגור, מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?

6 נק' ג. מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?

רמז: השתמש בתוצאות שני הסעיפים הקודמים.

7 נק' ד. אם לא עובר זרם, מהי ההסתברות שבדיוק 3 מתגים סגורים?

שאלה 2 (25 נקודות)

בחבילת נרות-חנוכה יש 45 נרות, שהאורך של כל אחד מהם מקרי. אין תלות בין אורכי נרות שונים.

א. **במפעל א** מייצרים נרות-חנוכה, שהתפלגות האורך (בס"מ) של כל אחד מהם היא נורמלית עם הפרמטרים 13 ו- 0.1^2 .

7 נק' 1. מהי ההסתברות שבחבילה מקרית יהיו בדיוק 30 נרות שהאורך שלהם בין 12.82 ס"מ ל-13.06 ס"מ?

7 נק' 2. מהו אורך-הנר ש-92% מהנרות קצרים ממנו?

11 נק' ב. **במפעל ב** מייצרים נרות-חנוכה, שהתפלגות האורך (בס"מ) של כל אחד מהם היא נורמלית עם הפרמטרים 15 ו- σ^2 .

ידוע שההסתברות שהנר הקצר ביותר בחבילה מקרית (של 45 נרות) אורך מ-14.6 ס"מ היא 0.354206.

מצא את σ .

שאלה 3 (25 נקודות)

(12 נק') א. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y , בהתאמה.

הוכח כי למשתנה המקרי $X + Y$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda_X + \lambda_Y$.

ב. בין שני עמודים לצד הדרך מתוחים 2 כבלי חשמל, האחד מעל השני.

התפלגות מספר הציפורים שיושבות על כל אחד מן הכבלים היא בינומית עם הפרמטרים

30 ו-0.5.

אין תלות בין מספרי הציפורים על כל אחד מן הכבלים.

(6 נק') 1. מהי ההסתברות שעל שני הכבלים יחדיו יושבות בסך-הכל 27 ציפורים?

(7 נק') 2. יהיו: X = מספר הציפורים על הכבל התחתון ;

Y = מספר הציפורים על שני הכבלים יחדיו.

חשב את $\rho(X, Y)$.

שאלה 4 (25 נקודות)

נתונה קבוצה של 30 אנשים – 15 גברים ו-15 נשים.

מחלקים באקראי את הקבוצה לזוגות.

יהי X מספר הזוגות המעורבים (כלומר, זוגות המורכבים מגבר ואישה) שנוצרים בחלוקה.

(7 נק') א. חשב את $P\{X = 15\}$.

(9 נק') ב. חשב את התוחלת של X .

(9 נק') ג. חשב את השונות של X .

שאלה 5 (25 נקודות)

נתונה קבוצה של 20 ילדים – 10 בנים ו-10 בנות.

מחלקים לילדים באקראי 20 כובעים צבעוניים – 10 אדומים, 5 כחולים ו-5 ירוקים.

כל אחד מהילדים מקבל כובע אחד, ואין הבדל בין כובעים מאותן הצבע.

(8 נק') א. מהי ההסתברות שכל הכובעים הכחולים יינתנו לִבָּנִים?

(9 נק') ב. יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הבנות שמקבלות כובעים אדומים.

1. מצא את פונקציית ההסתברות של X .

2. חשב את השונות של X .

רמז: זהה את ההתפלגות של X .

(8 נק') ג. לאחר שמחלקים לילדים את הכובעים, הם מסתדרים באופן אקראי בשורה.

מהי ההסתברות שלא יהיו בשורה שני ילדים סמוכים שלשניהם כובעים ירוקים?

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

| x | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |

| | | | | | | | | | |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\Phi(x)$ | 0.50 | 0.55 | 0.60 | 0.65 | 0.70 | 0.75 | 0.80 | 0.85 | 0.90 |
| x | 0.0 | 0.126 | 0.253 | 0.385 | 0.524 | 0.674 | 0.842 | 1.036 | 1.282 |
| $\Phi(x)$ | 0.91 | 0.92 | 0.93 | 0.94 | 0.95 | 0.96 | 0.97 | 0.98 | 0.99 |
| x | 1.341 | 1.405 | 1.476 | 1.555 | 1.645 | 1.751 | 1.881 | 2.054 | 2.326 |

דף נוסחאות לבחינה

| ההתפלגות | פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות | התוחלת | השונות | הפונקציה יוצרת המומנטים |
|----------------|--|---------------|---|--|
| בינומית | $\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}, \quad i=0,1,\dots,n$ | np | $np(1-p)$ | $(pe^t + 1 - p)^n$ |
| גיאומטרית | $(1-p)^{i-1} \cdot p, \quad i=1,2,\dots$ | $1/p$ | $(1-p)/p^2$ | $pe^t / (1 - (1-p)e^t), \quad t < -\ln(1-p)$ |
| פואסונית | $e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i!, \quad i=0,1,\dots$ | λ | λ | $\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$ |
| בינומית שלילית | $\binom{i-1}{r-1} (1-p)^{i-r} \cdot p^r, \quad i=r, r+1, \dots$ | r/p | $(1-p)r/p^2$ | $(pe^t / (1 - (1-p)e^t))^r, \quad t < -\ln(1-p)$ |
| היפרגיאומטרית | $\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i} / \binom{N}{n}, \quad i=0,1,\dots,m$ | nm/N | $\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N} (1 - \frac{m}{N})$ | |
| אחידה בדידה | $\frac{1}{n}, \quad i=m+1, m+2, \dots, m+n$ | $m + (1+n)/2$ | $(n^2 - 1)/12$ | |
| אחידה | $1/(b-a), \quad a \leq x \leq b$ | $(a+b)/2$ | $(b-a)^2/12$ | $(e^{bt} - e^{at}) / (tb - ta), \quad t \neq 0$ |
| נורמלית | $(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty$ | μ | σ^2 | $\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2/2\}$ |
| מעריכית | $\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$ | $1/\lambda$ | $1/\lambda^2$ | $\lambda/(\lambda - t), \quad t < \lambda$ |
| מולטינומית | $\binom{n}{n_1, \dots, n_r} \cdot p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}, \quad \sum n_i = n, \sum p_i = 1$ | | | |

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \quad \text{נוסחת הבינום}$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \quad \text{כלל ההכלה וההפרדה}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{הסתברות מותנית}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \quad \text{נוסחת הכפל}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i) \quad , \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S \quad \text{נוסחת ההסתברות השלמה}$$

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)} \quad , \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S \quad \text{נוסחת בייס}$$

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx \quad \text{תוחלת}$$

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx \quad \text{תוחלת של פונקציה של מ"מ}$$

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2 \quad \text{שונות}$$

$$E[aX + b] = aE[X] + b \quad \text{תוחלת ושונות של פונקציה לינארית}$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ .

$$P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\} \quad , \quad s, t \geq 0 \quad \text{תכונת חוסר-הזכרון}$$

$$E[X | Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y) = \int x f_{X|Y}(x|y) dx \quad \text{תוחלת מותנית}$$

$$\text{Var}(X | Y = y) = E[X^2 | Y = y] - (E[X | Y = y])^2 \Sigma \quad \text{שונות מותנית}$$

$$E[X] = E[E[X | Y]] = \sum_y E[X | Y = y] p_Y(y) \quad \text{נוסחת התוחלת המותנית}$$

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X | Y)] + \text{Var}(E[X | Y]) \quad \text{נוסחת השונות המותנית}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] \quad \text{תוחלת של סכום משתנים מקריים}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y] \quad \text{שונות משותפת}$$

$$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j) \quad \text{שונות של סכום משתנים מקריים}$$

$$\rho(X, Y) = \text{Cov}(X, Y) / \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)} \quad \text{מקדם המתאם הלינארי}$$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at) \quad \text{פונקציה יוצרת מומנטים}$$

$$M_{X_1 + \dots + X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t) \quad \text{כאשר } X_i \text{ מ"מ ב"ת מתקיים:}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X] \quad \text{תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי}$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\text{Var}(X) + (E[X])^2 \text{Var}(N) \quad (\text{כאשר } X_i \text{ מ"מ ב"ת ש"ה})$$

$$M_Y(t) = E\left[(M_X(t))^N\right]$$

$$P\{X \geq a\} \leq E[X]/a \quad , \quad a > 0 \quad , \quad \text{מ"מ אי-שלילי} \quad \text{אי-שוויון מרקוב}$$

$$P\{|X - \mu| \geq a\} \leq \sigma^2/a^2 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty \quad \text{אי-שוויון צ'בישב}$$

$$P\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)/\sqrt{n\sigma^2} \leq a\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a) \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty \quad , \quad X_i \text{ מ"מ ב"ת וש"ה} \quad \text{משפט הגבול המרכזי}$$

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A) + P(B)]$.
- סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר p הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני.
- סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X + Y = n$, כאשר X ו- Y מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1 < x < 1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \neq -1 \quad ; \quad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים:

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \frac{1}{a \ln b} b^{ax} \quad ; \quad \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$