ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20585

מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חוברת הקורס - אביב 2020ב

כתב: אלעזר בירנבוים

מרץ 2020 - סמסטר אביב - תש״פ

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

אני מקדם את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים.
בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.
פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:
http://telem.openu.ac.il
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

שעות הייעוץ בקורס מתקיימות בימי ראשון בשעות 18:00-20:00 בטלפון 04-6850321.
אבקש מאוד לא להתקשר לטלפון הזה בשעות לא סבירות ובשבתות.
ניתן לפנות גם בדואר אלקטרוני: elazar@openu.ac.il

אני מאחל לכם הצלחה בלימודים.

לתשומת לב הסטודנטים הלומדים בחו"ל:
למרות הריחוק הפיסי הגדול, נשתדל לשמור אתכם על קשרים הדוקים ולעמוד לרשותכם ככל האפשר. הפרטים החיוניים על הקורס נכללים בחוברת הקורס וכן באתר הקורס. מומלץ מאד להשתמש באתר הקורס ובכל אמצעי העזר שבו, וכמובן, לפנות אלינו במידת הצורך.

בברכה,

אלעזר בירנבוים

מרכז ההוראה

1. לוח זמנים ופעילויות (20585 / 2020ב)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ״ן (למנחה)
1	20.03.2020-15.03.2020	פרק 1 במדריך הלמידה	מפגש ראשון	
2	27.03.2020-22.03.2020	פרק 1 פרק 2		
3	03.04.2020-29.03.2020	פרק 2	מפגש שני	ממ״ן 11 03.04.2020
4	10.04.2020-05.04.2020 (ד ערב פסח) (ה-ו פסח)	פרק 3		
5	17.04.2020-12.04.2020 (א-ד פסח)	פרק 3		
6	24.04.2020-19.04.2020 (ג יום הזכרון לשואה)	פרק 4	מפגש שלישי	ממ״ן 12 24.04.2020
7	01.05.2020-26.04.2020 (ג יום הזיכרון, ד יום העצמאות)	פרק 4		
8	08.05.2020-03.05.2020	פרק 4	מפגש רביעי	

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

.

לוח זמנים ופעילויות – המשך

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
9	15.05.2020-10.05.2020 (ג ל"ג בעומר)	פרק 4		
10	22.05.2020-17.05.2020	פרק 5	מפגש חמישי	ממ"ן 13 22.05.2020
11	29.05.2020-24.05.2020 (ו שבועות)	פרק 5		
12	05.06.2020-31.05.2020	פרק 6	מפגש שישי	ממ"ן 14 05.06.2020
13	12.06.2020-07.06.2020	פרק 6		
14	19.06.2020-14.06.2020	פרק 7		
15	26.06.2020-21.06.2020	פרק 7	מפגש שביעי	ממ"ן 15 26.06.2020

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

2. תיאור המטלות

קראו היטב עמודים אלו לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס - הבנה מעמיקה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. המטלות תיבדקנה על-ידי המנחה ותוחזרנה בצירוף הערות המתייחסות לתשובות.

המטלות מלוות את יחידות הלימוד בקורס. להלן פירוט המטלות, היחידות שאליהן מתייחסת כל מטלה ומשקלה היחסי. בחלק מהמטלות תופענה גם שאלות המתייחסות ליחידות שכבר נלמדו.

ממ״ן 11 - פרק 1 במדריך - 6 נקודות
ממ״ן 12 - פרקים 2, 3 - 6 נקודות
ממ״ן 13 - פרק 4 - 8 נקודות
ממ״ן 14 - פרק 5 - 4 נקודות
ממ״ן 15 - פרקים 6, 7 - 6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל של 24 נקודות לפחות.
שימו לב שחובה להגיש את ממ״ן 13.

ללא צבירת 24 נקודות בהגשת מטלות לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

למען הסר ספק, יודגש שחל איסור על הכנה משותפת והעתקה של מטלות או חלקי מטלות.
(הנושא מפורט בתקנון משמעת לסטודנטים - נספח 1 של ידיעון האו״פ).

לתשומת לבכם!
כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן: אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלה** בציון הנמוך ביותר, שציונה נמוך מציון הבחינה, לא תילקח בחשבון בעת שקלול הציון הסופי. זאת בתנאי שמטלה זו **אינה חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס.
סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון שמספרו 09-7782222, או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא http://www.openu.ac.il/sheilta
קורסים ⇦ ציוני מטלות ובחינות ⇦ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.
יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות

שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של ציוני המטלות והבחינה יהיה נמוך מ-60).

<u>כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.</u>

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל כולל של 24 נקודות לפחות.

ב. ציון של לפחות 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

מטלת מנחה (ממ״ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2020ב **מועד אחרון להגשה:** 3 אפר׳ 20

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1 (14%)

אפשר להציע אלגוריתם נוסף להכרעת השפה A של דוגמה 3.7 :

בכל שלב מוחקים את המחצית הימנית של ה-0-ים שעדיין רשומים על הסרט.

ממשיכים בתהליך הזה, עד שמגיעים למספר 0-ים אי-זוגי גדול מ-1, ואז דוחים, או עד שמגיעים ל-0 יחיד, ואז מקבלים.

הציגו **תיאור מלא** של מכונת טיורינג, שמממשת את האלגוריתם הזה (כמו איור 3.8 בספר).

אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$.

למכונה יהיו **לא יותר מעשרה מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

הסבירו היטב את פעולת המכונה, ולמה היא אכן מכריעה את השפה A.

שאלה 2 (14%)

בנו מכונת טיורינג, שכאשר היא מקבלת כקלט מילה w מעל האלפבית $\{0, 1\}$, היא מסיימת במצב q_{accept}, ועל הסרט רשומה המילה w ואחריה 0-ים כמספר ה-0-ים ב-w.

למשל, אם w=0110010, אז בסיום הריצה תהיה כתובה על הסרט המילה 01100100000.

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$.

למכונה יהיו **לא יותר מעשרה מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה באיור (אפשר לוותר על הציור של q_{reject} וכל הקשתות שנכנסות אליו, וכן על מעברים בלתי אפשריים).

הסבירו היטב את פעולת המכונה, ולמה היא אכן מבצעת את הנדרש.

זִכרו לטפל נכון גם במקרה ש-w היא **המילה הריקה**.

שימו לב לכך, שאלפבית הסרט הוא $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$.

שאלה 3 (10%)

א. מהי **השפה** שהמכונה שבניתם בתשובה לשאלה 2 **מזהה**?

ב. מהי **הפונקציה** שהמכונה שבניתם **מחשבת**?

שאלה 4 (14%)

נעיין במודל החישובי הבא: מכונת טיורינג **עם אינסוף מצבים**.
מכונה כזו זהה למכונה רגילה, פרט לכך שמספר המצבים יכול להיות אינסופי (ולכן גם התחום והטווח של פונקציית המעברים יכולים להיות אינסופיים).

האם למכונה כזו **יש יותר כוח** מאשר למכונה רגילה?

אם עניתם שכן, עליכם להראות, שמכונה עם אינסוף מצבים יכולה לזהות שפות, שאי אפשר לזהות אותן בעזרת מכונה עם מספר סופי של מצבים.
בנוסף, עליכם להסביר, מדוע אין בקיומה של מכונה כזו סתירה לתזה של צ'רץ'-טיורינג.

אם עניתם שלא, עליכם להראות, כיצד מכונה עם מספר **סופי** של מצבים, יכולה לחקות את פעולתה של מכונה עם **אינסוף** מצבים.

שאלה 5 (16%)

מספר טבעי n נקרא **פריק** (composite) אם הוא לא ראשוני. (כלומר, אם הוא שווה ל-1, או שיש לו מחלקים שונים מ-1 וממנו עצמו).

א. תארו מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית** להכרעת השפה F הבאה:

$$F = \{a^n \mid n \geq 1;\ n \text{ is composite}\}$$

רמת הפירוט של תיאור פעולת המכונה צריכה להיות דומה למכונה M_3 מדוגמה 3.11 בספר.
המכונה צריכה להשתמש באי-דטרמיניזם באופן שיקל על החישובים (לעומת מכונה דטרמיניסטית לאותה המשימה).
שימו לב, שהמכונה שאתם מתארים **מכריעה** את השפה, ולא רק מזהה אותה.

ב. נניח שנחליף במכונה שהצעתם את התפקידים של המצבים q_{accept} ו-q_{reject}.
מהי השפה שמכריעה המכונה שתתקבל? **הצדיקו היטב** את תשובתכם.

שאלה 6 (14%)

בנו מונה (enumerator) לשפה A של דוגמה 3.7.

האלפבית Σ של סרט הפלט יהיה $\{0\}$; האלפבית Γ של סרט העבודה יהיה $\{0, x, \sqcup\}$.

למונה יהיו **לא יותר משמונה מצבים** (כולל q_{print} ו-q_{halt}).

תארו את המונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{halt} וכל הקשתות שנכנסות אליו. אפשר לוותר על הציור של מעברים בלתי אפשריים).

להגדרה פורמלית של מונה, עיינו במדריך הלמידה.

הסבירו היטב את פעולת המונה ולמה הוא אכן מונה את השפה A.

שאלה 7 (18%)

תהי L שפה לא טריוויאלית מעל אלפבית Σ ($L\neq\emptyset$ וגם $L\neq\Sigma^*$).

מונה לסירוגין לשפה L הוא מונה המדפיס סדרת מילים אינסופית, $w_1, w_2, \ldots$, כך שמתקיים:

$L=\{w_1, w_3, w_5, \ldots\}$ וגם $\overline{L}=\{w_2, w_4, w_6, \ldots\}$. כלומר, המונה מדפיס לסירוגין מילה ששייכת ל-L ומילה שלא שייכת ל-L. כל מילה ב-Σ^* מודפסת בסופו של דבר, משום שכל מילה כזו שייכת ל-L או ל-$\overline{L}$. ייתכן שיש מילים, שמודפסות יותר מפעם אחת.

א. נתון שיש לשפה L מונה לסירוגין. האם L **בהכרח** שפה **כריעה**? **הוכיחו**!

ב. נתון ש-L היא שפה לא טריוויאלית **וכריעה**. האם **בהכרח** יש ל-L מונה לסירוגין? **הוכיחו**!

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2020ב **מועד אחרון להגשה:** 24 אפר' 20

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

מסמנים על-ידי $|C|$ את הגודל (העוצמה) של הקבוצה C. מסמנים על-ידי $L(M)$ את השפה שמזהה אוטומט סופי דטרמיניסטי M.

הוכיחו שהשפה G_{DFA} שלהלן היא **שפה כריעה**:

$$G_{DFA} = \{<A, B> \mid |L(A)|>|L(B)| \text{ ו- } \text{הם אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים } B\text{-ו } A\}$$

מילה מהצורה $<A, B>$ שייכת לשפה G_{DFA}, אם A ו-B הם תיאורים של אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים, והשפה שמזהה האוטומט A גדולה יותר מן השפה שמזהה האוטומט B.

אם שתי השפות אינסופיות, אז $|L(A)|=|L(B)|$; אם אחת סופית ואחת אינסופית, אז האינסופית גדולה מן הסופית; אם שתיהן סופיות, אז $|L(A)|>|L(B)|$ אם, ורק אם, מספר המילים ב-$L(A)$ גדול ממספר המילים ב-$L(B)$.

שאלה 2 (12%)

א. יהי Σ אלפבית **אינסופי בן מנייה** ($|\Sigma|=|\mathbb{N}|$).

האם קבוצת כל המחרוזות **הסופיות** מעל Σ היא קבוצה בת מנייה? **הוכיחו** את תשובתכם.

ב. יהי Σ אלפבית **סופי** המכיל יותר מאות אחת ($|\Sigma|>1$).

האם קבוצת כל המחרוזות **האינסופיות בנות המנייה** מעל Σ היא קבוצה בת מנייה? **הוכיחו**.

שאלה 3 (18%)

נגדיר את השפה $HALT\text{-}ALL_{\mathrm{TM}}$ הבאה:

$$HALT\text{-}ALL_{\mathrm{TM}} = \{<M> \mid M \text{ is a TM that halts on all its inputs}\}$$

זוהי שפת התיאורים של מכונות טיורינג, שעוצרות על כל קלט שלהן (במצב המקבל או במצב הדוחה).

נוכיח **בעזרת שיטת האלכסון**, שהשפה $HALT\text{-}ALL_{\mathrm{TM}}$ **איננה מזוהה-טיורינג**:

נניח בשלילה, שהשפה $HALT\text{-}ALL_{\mathrm{TM}}$ כן מזוהה-טיורינג.

אז לפי משפט 3.21, יש ל-$HALT\text{-}ALL_{\mathrm{TM}}$ מונה (enumerator) E.

נזכור, שאפשר לסדר את המחרוזות מעל אלפבית נתון Σ לפי הסדר הסטנדרטי.

נבנה את המכונה M הבאה:

M = "על קלט w:

1. מצא את i כך ש-w היא המחרוזת ה-i לפי הסדר הסטנדרטי.
2. הרץ את המונה E עד שהוא מדפיס את המחרוזת ה-i.
   המחרוזת ה-i שהמונה הדפיס היא מחרוזת ששייכת ל-$HALT\text{-}ALL_{\mathrm{TM}}$. כלומר, היא תיאור של מכונת טיורינג שעוצרת על כל קלט. נסמן אותה על-ידי A.
3. הרץ את A על w.
   אם A קיבלה את w, דחה. אם A דחתה את w, קבל.

א. הוכיחו: המכונה M עוצרת על כל קלט.

ב. הסיקו: יש j, כך שהמונה E ידפיס את $<M>$ כמחרוזת ה-j שהוא מדפיס.

ג. בִּדקו מה יקרה, כאשר נריץ את M על המחרוזת ה-j לפי הסדר הסטנדרטי, והגיעו לסתירה.

שאלה 4 (10%)

הציגו רדוקציה של $HALT_{\mathrm{TM}}$ ל-A_{TM} (רדוקציה בכיוון הפוך מזה של הוכחת משפט 5.1).

שאלה 5 (14%)

במסקנה 4.23 בספר הוכח שהשפה $\overline{A_{\mathrm{TM}}}$ איננה מזוהה-טיורינג.

א. תנו דוגמה לשפה **כריעה** B, כך ש- $B \subseteq \overline{A_{\mathrm{TM}}}$.

הציגו את השפה B, והוכיחו שהיא שפה כריעה ושהיא חלקית ל- $\overline{A_{\mathrm{TM}}}$.

ב. האם השפה $\overline{A_{\mathrm{TM}}} - B$ היא שפה **מזוהה-טיורינג**? **הוכיחו** את תשובתכם.

שאלה 6 (14%)

נגדיר את השפה $FIVE_{\text{LBA}}$:

$$FIVE_{\text{LBA}} = \{<M> \mid M \text{ is an LBA and } |L(M)|=5\}$$

(זוהי שפת התיאורים של אוטומטים חסומים לינארית, שבשפה שהם מזהים יש בדיוק 5 מילים).

האם השפה $FIVE_{\text{LBA}}$ היא שפה **כריעה**? **הוכיחו** את תשובתכם.

שאלה 7 (22%. סעיף א - 8%, סעיף ב - 12%, סעיף ג - 2%)

בבעיה 5.18 בספר (עמוד 240) מוגדרת השפה $INFINITE_{\text{TM}}$.

א. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $INFINITE_{\text{TM}}$ (הראו : $A_{\text{TM}} \leq_m INFINITE_{\text{TM}}$).

ב. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $\overline{INFINITE_{\text{TM}}}$ (הראו : $A_{\text{TM}} \leq_m \overline{INFINITE_{\text{TM}}}$).

הדרכה : אם מכונת טיורינג M מקבלת את הקלט w, אז כשמריצים את M על w מגיעים למצב המקבל לאחר מספר סופי של צעדים.

מכונת טיורינג N יכולה להתייחס לקלט שלה כאל מספר הצעדים שיש להריץ מכונה אחרת S.

(למשל, אם הקלט של N הוא v, אז N תריץ את S $|v|$ צעדים).

ג. הסיקו : $INFINITE_{\text{TM}}$ ו- $\overline{INFINITE_{\text{TM}}}$ **אינן מזוהות-טיורינג**.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 8 **משקל המטלה:** 8 נקודות

סמסטר: 2020ב **מועד אחרון להגשה:** 22 מאי 20

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (15%)

נגדיר את השפה B:

$$B = \{0^k 1^{k+m} 0^m \mid k, m \geq 0\}$$

מצאו פונקציה $t(n)$ מינימלית, כך ש- $B \in \mathrm{TIME}(t(n))$

א. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד.

ב. במכונה דטרמיניסטית עם שני סרטים.

ג. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד, שיש לו שני ראשים קוראים-כותבים.

הסבירו היטב את תשובותיכם.

שאלה 2 (10%)

הוכיחו שהשפות הבאות **שייכות למחלקה P**:

א. $FINITE_{\mathrm{DFA}} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is a DFA and } L(M) \text{ is a finite language}\}$

ב. $7\text{-}VERTEX\text{-}COVER = \{\langle G\rangle \mid G \text{ is an undirected graph that has a 7-node vertex cover}\}$

שאלה 3 (15%. כל סעיף 5%)

א. הציעו מאמת (verifier) לשפה $\overline{ALL_{\mathrm{CFG}}}$ (ראו משפט 5.13 בספר).

ב. הסבירו מדוע המאמת שהצעתם **איננו בהכרח** בעל זמן ריצה פולינומיאלי בגודל הקלט.

ג. הוכיחו: $\overline{ALL_{\mathrm{CFG}}}$ **לא שייכת ל-NP**.

שאלה 4 (8%)

הוכיחו שהשפה הבאה שייכת **למחלקה NP**:

B = {<n, m, k> | k-גדול מ m-הראשוני ה n בפירוק לגורמים ראשוניים של}

שלשה <n, m, k> של מספרים טבעיים שייכת ל-B, אם הראשוני ה-m (לפי גודל) בפירוק של n לגורמים ראשוניים גדול מ-k. אם m גדול ממספר הראשוניים בפירוק לגורמים של n, אז <n, m, k> לא שייכת ל-B.

למשל, $<3276, 3, 6> \in B$ ($3276 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$; הראשוני השלישי בפירוק לגורמים ראשוניים הוא 7, והוא גדול מ-6), $<3276, 4, 20> \notin B$, $<3276, 5, 0> \notin B$.

שאלה 5 (16%)

נאמר ששפה A **ניתנת לרדוקציה בזמן לינארי** לשפה B, אם יש פונקציה f **חשיבה בזמן לינארי**, כך שלכל w, $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$.

נאמר ששפה A **ניתנת לרדוקציה בזמן ריבועי** לשפה B, אם יש פונקציה f **חשיבה בזמן ריבועי**, כך שלכל w, $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$.

א. נתון ש-B שייכת ל- TIME(n) וש-A ניתנת לרדוקציה בזמן **לינארי** ל-B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- TIME(n)? **הסבירו** את תשובתכם.

ב. נתון ש-B שייכת ל- TIME(n^2) וש-A ניתנת לרדוקציה בזמן **לינארי** ל-B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- TIME(n^2)? **הסבירו** את תשובתכם.

ג. נתון ש-B שייכת ל- TIME(n) וש-A ניתנת לרדוקציה בזמן **ריבועי** ל-B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- TIME(n)? **הסבירו** את תשובתכם.

ד. נתון ש-B שייכת ל- TIME(n^2) וש-A ניתנת לרדוקציה בזמן **ריבועי** ל- B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- TIME(n^2)? **הסבירו** את תשובתכם.

שאלה 6 (8%)

איך אפשר לדעת, מתוך עיון בנוסחה ϕ שמייצרת הרדוקציה של הוכחת משפט Cook-Levin (משפט 7.37), האם המכונה N שמכריעה את השפה A היא מכונה דטרמיניסטית או לא?

הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 7 (10%)

הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של *3SAT* ל- *INDEPENDENT-SET*.

(*INDEPENDENT-SET* מוגדרת במדריך הלמידה בעמוד 78.)

שאלה 8 (18%)

א. בעיה 7.53 בספר (עמוד 328).

ב. הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של $\neq SAT$ ל- *SET-SPLITTING* (ראו בעיה 7.29 בספר).

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2020ב **מועד אחרון להגשה:** 5 יוני 20

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

בדוגמה 8.3 בספר מראים ש-*SAT* שייכת ל-SPACE(n).

האם אפשר להסיק מכך ומן העובדה ש-*SAT* היא בעיה NP-שלמה, ש- NP $\subseteq$ SPACE(n)?

הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 2 (10%)

הראו רדוקציה **בעלת זמן ריצה $O(n^2)$** של השפה *SAT* לשפה *TQBF*.

הדרכה: זו לא הרדוקציה של הוכחת משפט 8.9.

שאלה 3 (24%)

תזכורת: $A_{\text{LBA}} = \{<M, w> \mid M \text{ is an LBA, } w \text{ is a string, and } M \text{ accepts } w\}$

א. הוכיחו: השפה A_{LBA} שייכת ל-PSPACE.

ב. תהי A שפה ב-PSPACE. תארו רדוקציה, בעלת זמן ריצה פולינומיאלי, של A ל-A_{LBA}. (הראו כי $A \leq_P A_{\text{LBA}}$ באמצעות הצגת רדוקציה בזמן פולינומיאלי של A ל-A_{LBA}).

ג. הסיקו: A_{LBA} היא שפה PSPACE-שלמה.

שאלה 4 (20%)

בעיה 8.34 בספר (עמוד 360).

כדי להוכיח שהשפה B שייכת למחלקה L, עליכם לתאר בפירוט מכונה דטרמיניסטית, בעלת סיבוכיות מקום לוגריתמית, שמכריעה את B.

שאלה 5 (14%)

הוכיחו : $CLIQUE \leq_L VERTEX\text{-}COVER$.

($CLIQUE$ הוגדרה לפני משפט 7.24 ; $VERTEX\text{-}COVER$ הוגדרה לפני משפט 7.44).

עליכם לתאר את הרדוקציה, להוכיח שהיא תקפה, ולהוכיח בפירוט שהיא יכולה להתבצע במקום לוגריתמי.

שאלה 6 (22%)

הבעיה E_{DFA} הוגדרה בספר לפני משפט 4.4.

הוכיחו : $\overline{E_{DFA}}$ היא שפה NL-שלמה.

הדרכה : הראו שהיא שייכת ל-NL, והראו כי $PATH \leq_L \overline{E_{DFA}}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: סעיפים 9.1, 10.1 ו-10.2 בספר

מספר השאלות: 8 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2020ב **מועד אחרון להגשה:** 26 יוני 20

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

הוכיחו שהפונקציה $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ניתנת לבנייה **במגבלת מקום עצמית** (space constructible).

שאלה 2 (12%)

עיינו במכונה D שבהוכחת משפט 9.3 (עמוד 366).

א. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate M on w ..." במשפט "Simulate M on $<M>$ ..."
(כלומר, במקום לבצע סימולציה של M על $w = <M>10^k$, נבצע סימולציה של M על $<M>$).
האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? **הסבירו היטב** את תשובתכם.

ב. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate M on w ..." במשפט "Simulate M on 10^k ..."
(כלומר, במקום לבצע סימולציה של M על $w = <M>10^k$, נבצע סימולציה של M על 10^k).
האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? **הסבירו היטב** את תשובתכם.

שאלה 3 (8%)

האם **ממה שנלמד בסעיף 9.1** בספר אפשר להסיק **שכל** שפה PSPACE-שלמה איננה שייכת ל-NL?
הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 4 (24%)

לְמְדוּ את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה (עמודים 126-128).

א. נַסְּחוּ בעיית **הכרעה** של בעיית הסוכן הנוסע (כלומר, בעיה שהתשובה עליה היא "כן" או "לא").

ב. הוכיחו: בעיית ההכרעה של בעיית הסוכן הנוסע **המטרית** היא בעיה NP-שלמה.

הדרכה: הוכיחו שהיא שייכת ל-NP, והראו רדוקציה פולינומיאלית של בעיית קיומו של מעגל המילטון בגרף לא מכוון.

(מעגל המילטון בגרף לא מכוון G הוא מעגל פשוט שמכיל כל צומת של G פעם אחת ויחידה. אתם יכולים להשתמש בעובדה שבעיית קיומו של מעגל המילטון בגרף לא מכוון היא בעיה NP-שלמה).

ג. הוכיחו: לכל בעיית סוכן נוסע **לא מטרית**, אפשר לבנות בזמן פולינומיאלי בעיית סוכן נוסע **מטרית** עם אותם צמתים, כך ש-P הוא מסלול אופטימלי בבעיה המקורית (הלא מטרית), אם, ורק אם, P הוא מסלול אופטימלי בבעיה החדשה (המטרית).

הדרכה: הגדילו את משקלי הקשתות באופן שיתקיימו תנאי הבעיה המטרית.

ד. הסבירו מדוע אין סתירה בין קיומו של אלגוריתם קירוב בעל יחס קירוב 2 (ואפילו 1.5) ובעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית הסוכן הנוסע המטרית, ובין אי-קיומו של אלגוריתם כזה לבעיה הכללית (הלא מטרית), לאור מה שהראיתם בסעיף הקודם (שיש דרך מהירה לעבור מהבעיה הכללית לבעיה המטרית, באופן שמשמר את המסלולים האופטימליים).

שאלה 5 (15%)

הוכיחו: אם יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **ההכרעה** *MAX-CUT*, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **האופטימיזציה** *MAX-CUT*.

האלגוריתם לבעיית ההכרעה מקבל כקלט גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

האלגוריתם מחזיר "כן" אם יש ב-G חתך שגודלו לפחות k, ו-"לא" אחרת.

האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה מקבל כקלט גרף לא מכוון G.

האלגוריתם מחזיר חתך בעל גודל מקסימלי ב-G, כלומר, חלוקה של קבוצת הצמתים של G לשתי תת-קבוצות זרות S ו-T, כך שמספר הקשתות המחברות צומת מ-S עם צומת מ-T הוא מקסימלי.

הדרכה: האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה יהיה בנוי משני שלבים:

בשלב הראשון קוראים לאלגוריתם ההכרעה כמה פעמים, כדי למצוא את גודלו של החתך המקסימלי.

בשלב השני, מבצעים בכל פעם שינויים (קלים) בגרף, וקוראים לאלגוריתם ההכרעה על הגרפים החדשים. לפי התשובות שהוא מחזיר, יודעים איזה צמתים שייכים לאותה תת-קבוצה (S או T), ואיזה צמתים לא שייכים לאותה תת-קבוצה (כלומר, אם האחד שייך ל-S אז השני שייך ל-T).

שאלה 6 (8%)

יהי p מספר ראשוני.

א. הוכיחו **בעזרת אינדוקציה**, שלכל a טבעי או 0, $a^p \equiv a \pmod p$.

ב. הסיקו את המשפט הקטן של פרמה (משפט 10.6) ממה שהוכחתם בסעיף א.

שאלה 7 (8%)

עיינו באלגוריתם *PRIME* בעמוד 401 בספר.

הוכיחו: אם t הוא מספר טבעי קטן מ-p שאיננו זר ל-p (המחלק המשותף המקסימלי של t ו-p גדול מ-1), אז t הוא עֵד לפריקות של p. (כלומר, אם הוא ייבחר כאחד מ-k המספרים בשלב 2 של האלגוריתם, האלגוריתם ידחה).

שאלה 8 (15%)

בעיה 10.10 בספר (עמוד 439).

כדי להוכיח את שוויון המחלקות, הראו הכלה דו-כיוונית.