פתרון שאלות בממ"ן 14 סמסטר 2017א

שאלה 3

א. אפשר להציע את האלגוריתם הבא כדי להכריע האם האוטומטים הדטרמיניסטיים A ו-B מזהים אותה השפה:

בונים אוטומט מכפלה C של שני האוטומטים A ו-B.

מגדירים את המצבים המקבלים של C כך ש-C יזהה את $(L(A)–L(B))\cup(L(B)–L(A))$.

בודקים האם השפה ש-C מזהה ריקה.

אם כן, מקבלים; אחרת, דוחים.

המקום שבו משתמש האלגוריתם הזה חסום על-ידי ריבוע גודל הקלט (מספר המצבים של אוטומט המכפלה C הוא מכפלת מספרי המצבים של A ו-B). לכן EQ_{DFA} שייכת ל- $\text{SPACE}(n^2)$.

ב. נראה שהשפה המשלימה ל- EQ_{NFA} שייכת ל- $\text{NSPACE}(n)$. כלומר, נראה שקיימת מכונה **לא דטרמיניסטית** שמכריעה את $\overline{EQ_{\text{NFA}}}$ בסיבוכיות מקום ליניארית. לפי משפט Savitch (משפט 8.5), EQ_{NFA} שייכת ל- $\text{SPACE}(n^2)$.

יהיו A ו-B שני האוטומטים הלא דטרמיניסטיים שהם הקלט לבעיה. נסמן על-ידי m את מספר המצבים של A ועל-ידי k את מספר המצבים של B.

יש אוטומטים דטרמיניסטיים שקולים ל-A ול-B שמספר המצבים שלהם איננו גדול מ-2^m ומ-2^k, בהתאמה.

אם נבנה את אוטומט המכפלה של שני האוטומטים הדטרמיניסטיים הללו (בדרך המוצעת בתשובה לסעיף א), נקבל אוטומט דטרמיניסטי שמספר מצביו אינו גדול מ- $2^m\cdot2^k = 2^{m+k}$.

השפות של שני האוטומטים המקוריים שונות זו מזו, אם ורק אם השפה של אוטומט המכפלה הזה איננה ריקה.

אם השפה שלו איננה ריקה, אז יש בה מילה באורך שאינו גדול מ- 2^{m+k} (מילה שמביאה מן המצב ההתחלתי למצב מקבל ללא שום לולאות בדרך).

לפי דרך הבנייה של אוטומט המכפלה הזה, מילה זו שייכת לשפה שמזהה אחד האוטומטים המקוריים, והיא איננה שייכת לשפה שמזהה האוטומט השני.

מסקנה: אם שתי השפות של האוטומטים המקוריים שונות זו מזו, אז יש מילה שאורכה אינו גדול מ- 2^{m+k} ששייכת לשפה של אחד האוטומטים ואיננה שייכת לשפה של האוטומט השני.

המכונה הלא דטרמיניסטית תנסה למצוא מילה ששייכת לשפה של אחד האוטומטים ולא שייכת לשפה של האוטומט השני.

לשם כך היא תשמור את האות הבאה במילה הזו, את המצב שבו נמצא האוטומט שמקבל את המילה ואת קבוצת המצבים שבהם יכול להיות האוטומט שלא מקבל את המילה. בנוסף היא תשמור מונה שיספור את האותיות של המילה עד עתה.

בכל שלב רושמים באופן לא דטרמיניסטי את האות הבאה של המילה (במקום האות שכתובה), מעדכנים את המצב שבו נמצאים באוטומט המקבל (זה לא דטרמיניסטי) ואת קבוצת המצבים שבהם יכולים להיות באוטומט הלא מקבל, ומגדילים את המונה ב-1.
אם בשלב כלשהו מגיעים למצב מקבל באוטומט המקבל ולקבוצת מצבים שכולם לא מקבלים באוטומט הלא מקבל, עוצרים ומקבלים.
אם המונה הגיע ל- 2^{m+k}, עוצרים ודוחים.
המכונה שתיארנו פועלת במקום לינארי והיא מכריעה את השפה $\overline{EQ_{\mathrm{NFA}}}$.

שאלה 4

בשלב ראשון בודקים את תקינות הסוגריים מכל סוג לחוד. כלומר, עוברים על הקלט פעמיים. בפעם הראשונה בודקים את התקינות של הסוגריים העגולים בפני עצמם (בעזרת האלגוריתם של פתרון בעיה 8.33), ובפעם השנייה בודקים את התקינות של הסוגריים המרובעים בפני עצמם (בעזרת אותו אלגוריתם). אם נמצאה אי-תקינות באחת הבדיקות, דוחים.
אם שתי הבדיקות היו תקינות, נותר לבדוק שאין מקרה שמול פותח עגול יש סוגר מרובע או להפך (כמו במילה ([ )( ])).
לשם כך מאתחלים ל-1 מונה ראשון ששומר את המיקום במילת הקלט שעד אליו כבר בדקנו.
בכל פעם מעתיקים את המונה הראשון למונה שני, ומתקדמים על מילת הקלט מתחילתה, תוך כדי חיסור 1 מן המונה השני על כל סמל שקוראים, עד שהמונה השני מתאפס. אז אנו נמצאים על הסמל שעליו מצביע המונה הראשון.
אם הסמל הזה הוא סוגר (עגול או מרובע), מקדמים את המונה הראשון ב-1, וחוזרים על הלולאה.
אם הסמל הזה הוא פותח (עגול או מרובע), מאתחלים את המונה השני ל-1, ומתקדמים מן הפותח שאליו הגענו, תוך כדי תוספת 1 על כל פותח (משני הסוגים) וחיסור 1 על כל סוגר (משני הסוגים), עד שהמונה השני מתאפס.
בנקודת האיפוס בודקים את סוג הסוגר שאליו הגענו. אם הוא לא מאותו הסוג של הפותח, דוחים.
אחרת, מקדמים ב-1 את המונה הראשון, וחוזרים על הלולאה.
ברגע שהגענו לסוף המילה, מקבלים.

שאלה 5

הרדוקציה:

"על קלט $<G, k>$ כאשר $G=(V, E)$ הוא גרף לא מכוון ו-k הוא מספר טבעי:

1. בנה את הקלט הבא לבעיית *HITTING-SET*:
2. הקבוצה S תהיה קבוצת הצמתים V.
3. לכל קשת $e=(u, v)$ תהיה קבוצה S_e: $S_e=\{u, v\}$.
4. החזר את $S=V$ ואת קבוצת הקבוצות S_e לכל $e \in E$."

הרדוקציה תקפה: יש ב-G כיסוי קדקודים בגודל k, אם ורק אם יש קבוצת צמתים U ($U \subseteq V$) כך ש- $|U|=k$, ולכל קשת $e=(u, v)$ ב-E, או ש- $u \in U$ או ש- $v \in U$ (או שניהם), אם ורק אם לכל קבוצה $S_e=\{u, v\}$, או ש- $u \in U$ או ש- $v \in U$ (או שניהם), אם ורק אם לכל קבוצה $S_e=\{u, v\}$, החיתוך של S_e עם U איננו ריק ($T=U$).

הרדוקציה ניתנת לחישוב במקום לוגריתמי: למעשה, מעתיקים לסרט הפלט את קבוצת הצמתים V (זו הקבוצה S), ויוצרים מכל קשת (u, v) בסרט הקלט קבוצה $\{u, v\}$ בסרט הפלט.

הפעולות האלה דורשות מעבר על קבוצת הצמתים V ומעבר על קבוצת הקשתות E.

את המעברים האלה אפשר לממש בעזרת מונה בגודל קבוצת הצמתים ומונה בגודל קבוצת הקשתות. זה דורש מקום לוגריתמי בגודל הקלט.

שאלה 6

השפה שייכת ל-NL:

עוברים, בעזרת שני מונים, על כל הזוגות הסדורים של צמתים בגרף G.

לכל זוג סדור של צמתים (s, t), מראים מסלול מכוון מ-s ל-t, בעזרת המכונה הלא דטרמיניסטית להכרעת השפה *PATH* (דוגמה 8.19).

רדוקצית מקום לוגריתמי של *PATH* ל- *STRONGLY-CONNECTED*:

כאשר נתון גרף G וצמתים s ו-t קלט לבעיית *PATH*, בונים את הגרף H הבא:

הצמתים של H הם הצמתים של G;

H מכיל את כל הקשתות של G. בנוסף, לכל צומת v, מוסיפים את הקשת המכוונת (t, v) ואת הקשת המכוונת (v, s) (אם הן לא קיימות כבר).

הוכיחו שהרדוקציה תקפה ושהיא ניתנת לביצוע במקום לוגריתמי.