פתרונות לממ"ן 14 - 2020א - 20425

.1

א. נגדיר עבומשני הצדדים של קובייה כחולה i יש קוביות אדומות אחרת

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{At least one of the letters is inside the correct envelope} \\ 0 & \text{Othewise} \end{cases}$$

$A_{i,1}$ = The first letter of envelope i is inside the correct envelope

$A_{i,1}$ = The second letter of envelope i is inside the correct envelope

מתקיים ש:

$$E[X_i] = P(X_i = 1) = P(A_{i,1} \cup A_{i,2}) =$$
$$= P(A_{i,1}) + P(A_{i,2}) - P(A_{i,1} \cap A_{i,2}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n^2}$$

ולסיכום:

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n \cdot \frac{2n-1}{n^2} = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

ב.

1. עבור $n = 10$ חשבו את $Var(X)$.

ראשית, עבור $n = 10$ מתקבל ש

$$E[X_i] = P(X_i = 1) = \frac{2 \cdot 10 - 1}{10^2} = \frac{19}{100} = 0.19$$
$$Var(X_i) = P(X_i = 1)(1 - P(X_i = 1)) = 0.19(1 - 0.19) = 0.1539$$

כמו כן:

$$P(X_i = 1, X_j = 1) = 1 - P((X_i = 0) \cup (X_j = 0)) =$$
$$= 1 - [P(X_i = 0) + P(X_j = 0) - P(X_i = 0, X_j = 0)]$$
$$P(X_j = 0) = P(X_i = 0) = 1 - P(X_i = 1) = 0.81$$

(ואפשר גם $P(X_i = 0) = P(\overline{A_{i,1}} \cap \overline{A_{i,2}}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = 0.81$)

כדי לחשב את $P(X_i = 0, X_j = 0)$ נשים לב שיש כמה מקרים:

- המעטפה ה-i מכילה גם את המכתב הוורוד ה-j וגם את המכתב הכחול ה-j. במקרה זה ברור שגם המעטפה ה-j איננה מכילה אף אחד מהמכתבים שלה. הסתברות: $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0.01$
- המעטפה ה-i מכילה את המכתב הוורוד ה-j ומכתב כחול שאיננו המכתב הכחול ה-i או ה-j. המעטפה ה-j איננה מכילה את המכתב הוורוד שלה, כדי ש $X_j = 0$ נדרוש שתכיל מכתב שאיננו המכתב הכחול ה-j ואיננו המכתב שנכנס למעטפה הקודמת. הסתברות: $\frac{1}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{64}{900}$.

* המעטפה ה-i מכילה את המכתב הכחול ה-j ומכתב ורוד שאיננו המכתב הוורוד ה-i או ה-j.

באופן דומה נקבל את ההסתברות $\frac{64}{900}=\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{1}{10}$.

* המעטפה ה-i מכילה שני מכתבים שאינם המכתבים ה-i או ה-j. כדי ש $X_j=0$ נדרוש שגם מעטפה זו תכיל מכתבים השונים מהמכתבים המיועדים לה והמכתבים שנכנסו למעטפה הקודמת. נקבל את ההסתברות: $\frac{4096}{8100}=\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{8}{10}$.

סך הכל נקבל:

$$P\left(X_i=0,X_j=0\right)=\frac{1}{100}+\frac{64}{900}+\frac{64}{900}+\frac{4096}{8100}=\frac{5329}{8100}$$

ומכאן ש:

$$P\left(X_i=1,X_j=1\right)=1-\left(0.81+0.81-\frac{5329}{8100}\right)=0.0379$$

$$COV\left(X_i,X_j\right)=P\left(X_i=1,X_j=1\right)-P\left(X_i=1\right)P\left(X_j=1\right)=$$
$$=0.0379-0.19^2=0.0018$$

ולסיכום:

$$Var\left(X\right)=Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=10\cdot 0.1539+2\binom{10}{2}\cdot 0.0018=1.701$$

2. מתקיים ש: $Y=10-X$. נשתמש בתכונות התוחלת והשונות ונקבל:

$$E\left[Y\right]=E\left[10-X\right]=10-E\left[X\right]=10-1.9=\boxed{8.1}$$
$$Var\left(Y\right)=Var\left(10-X\right)=(-1)^2Var\left(X\right)=Var\left(X\right)=\boxed{1.701}$$

.2

א. לפי הנתונים מתקבל שלשני המשתנים יש אותה התפלגות. עבור שניהם מתקבל $U,W\sim HG\left(12,6,3\right)$. מכאן ש: $E\left[U\right]=E\left[W\right]$ ולפי הלינאריות של התוחלת $E\left[U-W\right]=E\left[U\right]-E\left[W\right]=\boxed{0}$.

ב. המשתנה $U+W$ סופר את מספר כוסות היין האדום בששת המקומות 1,2,3,4,7,11 ולכן $U+W\sim HG\left(12,6,6\right)$. לפי נוסחת השונות של ההתפלגות ההיפר-גאומטרית:

$$Var\left(U+W\right)=6\cdot\frac{6}{12}\left(1-\frac{6}{12}\right)\cdot\frac{12-6}{12-1}=\boxed{\frac{9}{11}}$$

ג. לפי נוסחת השונות של ההתפלגות ההיפר-גאומטרית נקבל ש:

$$Var\left(U\right)=Var\left(W\right)=3\cdot\frac{6}{12}\left(1-\frac{6}{12}\right)\cdot\frac{12-3}{12-1}=\frac{27}{44}$$

כיוון ש:

$$Var\left(U+W\right)=Var\left(U\right)+Var\left(W\right)+2COV\left(U,W\right)$$

נקבל ש:

$$COV\left(U,W\right)=0.5\left[Var\left(U+W\right)-Var\left(U\right)-Var\left(W\right)\right]==0.5\left[\frac{9}{11}-\frac{27}{44}-\frac{27}{44}\right]=\boxed{-\frac{9}{44}}$$

3. א1. למשתנה המקרי X יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 60 ו- 0.5. לכן:

$$E[X^2] = \mathrm{Var}(X) + (E[X])^2 = 60\cdot 0.5\cdot 0.5 + (60\cdot 0.5)^2 = 915$$

א2. לפי הגדרת המשתנים המקריים X ו-Y, מתקיים הקשר הלינארי $X + Y = 60$, לכן:

$$\mathrm{Var}(3X-2Y) = \mathrm{Var}(3X-2(60-X)) = \mathrm{Var}(5X-120) = \mathrm{Var}(5X) = 25\mathrm{Var}(X) = 25\cdot 15 = 375$$

ב. תנאי הבעיה סימטריים ביחס ל-X ול-Y לפיכך: $P\{X<Y\} = \dfrac{1-P\{X=Y\}}{2}$

כעת, המאורע $\{X = Y\}$ מתרחש אם ורק אם $X = Y = 30$, לכן:

$$P\{X=Y\} = P\{X=30\} = \binom{60}{30}0.5^{60} = 0.1026$$

ומכאן: $$P\{X<Y\} = \frac{1-P\{X=Y\}}{2} = \frac{1-0.1026}{2} = 0.4487$$

ג. $$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,60-X) = \mathrm{Cov}(X,60) - \mathrm{Cov}(X,X) = 0 - \mathrm{Var}(X) = -15$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{-\mathrm{Var}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(60-X)}} = \frac{-\mathrm{Var}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(X)}} = \frac{-\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{Var}(X)} = -1$$

קיבלנו שמקדם המתאם הלינארי בין X ל- Y שווה ל- -1, וזאת מכיוון שקיים ביניהם קשר לינארי מלא, שהרי $Y = 60 - X$.

4. א. $$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c}{a^i} = c\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^i = \frac{c}{1-\frac{1}{a}} = \frac{ac}{a-1} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{a-1}{a}$$

ב. לכל $t < \ln a$ מתקיים:

$$M_Y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ti}\cdot\frac{c}{a^i} = c\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{e^t}{a}\right)^i \underset{e^t<a}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{c}{1-\frac{e^t}{a}} = \frac{ac}{a-e^t} = \frac{a}{a-e^t}\cdot\frac{a-1}{a} = \frac{a-1}{a-e^t}$$

ג. $$E[Y] = \frac{d}{dt}M_Y(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left[\frac{a-1}{a-e^t}\right]\Bigg|_{t=0} = \frac{(a-1)e^t}{(a-e^t)^2}\Bigg|_{t=0} = \frac{1}{a-1}$$

5. נגדיר את Y- מספר הטלות הקובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 5 . $Y \sim G(\frac{1}{6})$.

נגדיר את X- מספר הטלות המטבע. מספר הפעמים שנטיל את המטבע תלוי ב-Y :

$X \mid Y = j \sim NB(j, \frac{1}{2})$.

כדי לחשב את התוחלת והשונות של X נשתמש בנוסחאות התוחלת המותנית והשונות המותנית.

$$E\left[X\right] = E\left[E\left[X \mid Y\right]\right] = E\left[\frac{Y}{1/2}\right] = E\left[2Y\right] = 2E\left[Y\right] = 2\cdot\frac{1}{1/6} = \boxed{12}$$

$$Var\left(X\right)=E\left[Var\left(X\mid Y\right)\right]+Var\left(E\left[X\mid Y\right]\right)=E\left[\frac{(1-\frac{1}{2})Y}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}\right]+Var\left(\frac{Y}{\frac{1}{2}}\right)=E\left[2Y\right]+Var\left(2Y\right)=$$

$$2\cdot E\left[Y\right]+2^{2}\cdot Var\left(Y\right)=2\cdot\frac{1}{\frac{1}{6}}+2^{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^{2}}=12+120=\boxed{132}$$

6. נתון כי $N \sim Po(100)$ וכי $X \mid N = n \sim B(n\,,\,p)$.

לכן, כדי לחשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של X , נתנה ב- N .

הואיל וההתפלגות המותנית של המשתנה המקרי X בתנאי $N = n$ היא בינומית, נקבל כי לכל $n = 0,1,\ldots$,

מתקיים :
$$E[e^{tX} \mid N = n] = (pe^t + 1 - p)^n$$

ומכאן כי :
$$M_X(t) = E[e^{tX}] = E[E[e^{tX} \mid N]] = E[(pe^t + 1 - p)^N]$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ N \sim Po(100)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (pe^t + 1 - p)^n e^{-100} \frac{100^n}{n!} = e^{-100} e^{100(pe^t + 1 - p)} = e^{100p(e^t - 1)}$$

קיבלנו שהפונקציה יוצרת המומנטים של X היא פונקציה יוצרת מומנטים של התפלגות פואסונית עם הפרמטר $100p$. לפיכך, זוהי התפלגותו של המשתנה המקרי X .

<u>דרך חישוב נוספת</u>

$$M_X(t) = E[(pe^t + 1 - p)^N] = E[e^{N \cdot \ln(pe^t + 1 - p)}] = M_N(\ln(pe^t + 1 - p))$$

$$= e^{100 \cdot (pe^t + 1 - p - 1)} = e^{100p \cdot (e^t - 1)} \qquad , \qquad -\infty < t < \infty \qquad [\,N \sim Po(100)]$$

בדרך חישוב זאת, מנצלים את צורתה המוכרת של הפונקציה יוצרת המומנטים של ההתפלגות הפואסונית.