ממן 12 בדידה

שאלה 1

א. עלינו למצוא אם R או S

- רפלקסיבי:

R: לפי הנתון $A \in P(\{1,2,3,4\})$ מאן ARA מתקיים מכיוון שהיחס $A \cap \{1,2\} = A \cap \{1,2\}$ לכן R רפלקסיבי

S: אינו רפלקסיבי, ניקח $A \in P(\{1,2,3,4\})$, כאשר $A = \{1\}$, היחס ASA לא מתקיים בגלל שA אינו ממש חלקי לעצמו. ולכן S אינו רפלקסיבי

- סימטרי:

R: ניקח 2 קבוצות $A, B \in P(\{1,2,3,4\})$, כאשר ARB כן מתקיים. וננסה למצוא אם BRA מתקיים. בגלל שARB מתקיים אז $A \cap \{1,2\} = B \cap \{1,2\}$, ושיוויון הוא חלופי ולכן אפשר לכתוב גם כך $B \cap \{1,2\} = A \cap \{1,2\}$, מכאן BRA גם מתקיים.ולכן R הוא סימטרי.

S: בגלל שהוכחנו שS אינה רפלקסיבית אז היא אינה יכולה להיות יחס שקילות.

- טרנזיטיבי

R: ניקח 3 קבוצות כך $A, B, C \in P(\{1,2,3,4\})$, היחס מתקיים ב ARB וBRC ולכן בגלל שבשוויון מתקיים את הכלל הטרנזיטיביות $A = C$, לכן R הוא טרנזיטיבי.

המחלקות שקילות של R:

$$\overline{0} = \{\phi, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}\}$$
$$\overline{1} = \{\{1\}, \{1,3\}, \{1,4\}\}$$
$$\overline{2} = \{\{2\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$$

ב. בגלל שהוכחנו בסעיף א שR הוא רפלקסיבי ויחס סדר חלקי, הוא אנטי-רפלקסיבי וטרנזיטיבי. לכן R אינו יכול להיות יחס סדר חלקי. מכאן, צריך לבדוק אם S הוא יחס סדר חלקי.
ננסה להוכיח שS:

אנטי-רפלקסיבי:

ניתן דוגמא נגדית בה לא מתקיים הרפלקסיביות. $A = 1$, מכאן על מנת שהיחס ASA יתקיים בהכרח $A \subset A$ דבר שאינו יכול להיות בגלל שאינו קיים x שנמצא בA אך לא שייך לA. לכן S הוא אנטי-רפלקסיבי.

טרנזיטיבי:

ניקח 3 קבוצות כך $A, B, C \in P(\{1,2,3,4\})$, היחס מתקיים ב ASB וBSC. לכן גם אם A היא הקבוצה הריקה ובגלל שקבוצה ריקה היא חלקית לכל הקבוצות לכן, S היא טרנזיטיבית.

מכאן S הוא יחס סדר חלקי

שאלה 2

א. ננסה להוכיח ש – R ו S:

- **רפלקסיבי:**

R: על מנת ש-R יהיה רפלקסיבי $\in R$ xRx מכאן $xRx = x/x = 2^0 \Rightarrow i = 0$.
מהנתון $i > 0$. לכן R אינו רפלקסיבי.

S: על מנת שיהיה רפלקסיבי $\in S$ xSx מכאן, $xSx = x/x = 2^0 \Rightarrow j = 0$. מכיוון שנתון לנו $j \in Z$, לכן S רפלקסיבי

- **סימטרי:**

S: נניח ש $\in S$ xSy כך שמתקיים xSy, ננסה למצוא האם מתקיים ySx. מכיוון שxSy מתקיים לכן $xSy = y/x = 2^j$. לכן $ySx = x/y = 2^{(-j)}$, מהנתון j ∈ Z לכן j- כן מתקיים ולכן היחס הוא סימטרי.

- **טרנזיטיבי:**

S: נניח ש– ySz ו $x\ S\ y$ מתקיימים, מכאן $xSy = y/x = 2^j \Leftrightarrow y = x * 2^j$ ומכיוון שגם ySz גם מתקיים לכן $ySz = z/y = 2^k \Leftrightarrow z = y * 2^k \Leftrightarrow z = x * 2^{(j+k)}$.

מכיוון שR אינו רפלקסיבי הוא אינו יכול להיות יחס שקילות. לכן S הוא יחס שקילות.

ב. עלינו למצוא את המחלקות שקילות ליחס S.

נסתכל על j, על מנת לקיים את הנתון $j \in \mathbb{Z}$, החילוק של xSy חייב להיות שלם ומתחלק ב2.
לכן $\bar{1} = 1,2,4,8,16$ .... לכן וכו $\bar{2} = \bar{4} = \bar{8}$. לכן המחלקות השקילות הם כאשר מספרים ראשוניים כגון $\bar{3} = 3,6,12,24,48$ ... וגם ... $\bar{5} = 5,10,20,40$, כל מחלקת שקילות נוצרת לאחר כפל ב $\bar{1}$ עם המספר הראשוני.

ג. בגלל שבסעיף א הוכחנו שS הוא רפלקסיבי, ויחס סדר חלקי הוא אנטי רפלקסיבי. הוא אינו יכול להיות סדר חלקי. לכן עלינו למצוא אם R הינו יחס סדר חלקי.

אנטי-רפלקסיבי: מכיוון ש $xRy = y/x = 2^i$, ונתון לנו $i > 0$ לכן $2^i > 1$. מכאן $x \neq y$, לכן לא מתקיים yRy או xRx. מכאן היחס הוא אנטי-רפלקסיבי

טרנזיטיבי: עלינו למצוא $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.
נניח ש– xRy מתקיים, לכן $y = x * 2^i$. בנוסף נניח ש– yRz מתקיים, מכאן:
$yRz = z/y = 2^k \Leftrightarrow z = y * 2^k \Leftrightarrow z = x * 2^i * 2^k$
מכיוון 2^k וגם 2^i הינם זוגיים, לכן xRz גם מתקיים. לכן R טרנזיטיבי.
לכן R הוא יחס סדר חלקי

ד. אין איבר מקסימלי, בגלל שאין שום יחס שנמצא בסוף R. 2^j יותר גדול מהיחס הקודם.
לכן אין יחס שהוא מקסימלי בגלל שהמספרים הם אינסופיים.

איבר מינימלי, הם כל המספרים האי זוגיים. מכיוון שקיים מספר אי זוגי a וננסה להפעיל את היחס R עליו.

$$aRb \leftrightarrow b/a = 2^j$$

שאלה 3

א. נניח בשלילה שf היא חח"ע מכאן על פי הגדרה של פונקציה חחע $F(A_n) = F(A_m)$, לכן לכל מקור יש תמונה. ניקח את קצי של כל קבוצה n וm, מכאן נובע ש$f(n) = f(m)$. לכן n=m, אך זו סתירה לנתון ש $n \neq m$.

נניח בשלילה ש$f(A_n) = f(A_m)$, מכיוון ש A_mוA_n קבוצות, ז"א שלכל מקור יש תמונה אחת ויחידה. וכדי שהתמונות יהיו שוות. בהכרח $A_n = A_m$, אחרת קיימים מקורות בלי תמונה כלל ולכן f לא תיהיה חח"ע. ונתון לנו ש$n \neq m$ כך שהתמונות יהיו שונות

ב. אם f על אז $f^{-1}(A_n) \neq f^{-1}(A_m)$. נוכיח דרך השלילה ש- $f^{-1}(A_n) = f^{-1}(A_m)$ מכאן קבוצת המקורות של A_n וA_m שוות. כלומר $A_m = A_n$ דבר שסותר את הנתון,$n \neq m$. לכן קבוצת המקורות צריך להיות שונות.

אם $f^{-1}(A_n) \neq f^{-1}(A_m)$ אז f על.
נוכיח בדרך השלילה ש-f היא אינה פונקציה על, כלומר קיים y טבעי כך שלכל x טבעי מתקיים $f(x) \neq y$. כלומר $f^{-1}(y) = \phi$. מכאן $y \in A_n$ ו $y \notin A_m$, נניח ש- $n > m$ כלומר מספר האיברים גדול יותר בA_n. בנוסף $A_m \subset A_n$. לכל $f^{-1}(A_m) \neq \phi$ ו- $f^{-1}(A_n/A_m) = \phi$, מכאן נובע ש$f^{-1}(A_n) = f^{-1}(A_m)$ דבר שסותר את הנתון. לכן f היא על

שאלה 4

א. הפונקציה לא על, ננסה למצוא $f < m_1, n_1 > = < 1,1 >$
מכאן $3m_1 + 2n_1 = 1$ וגם $2m_1 + 3n_1 = 1$. ננסה למצוא את ערכי n_1 ו m_1.

$$3m_1 + 2n_1 = 1 \Leftrightarrow 3\mathrm{m}_1 = 1 - 2\mathrm{n}_1 \Leftrightarrow \mathrm{m}_1 = \frac{1 - 2n}{3} ------(1)$$

עכשיו ננסה למצוא ב$2m_1 + 3n_1 = 1$ ונשתמש ב(1).

$$2m_1 + 3n_1 = 1 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1-2n_1}{3}\right) + 3n_1 = 1 \Leftrightarrow \frac{2-4n_1}{3} + 3n_1 = 1 \Leftrightarrow 2 - 4\mathrm{n}_1 + 9\mathrm{n}_1 = 3$$
$$\Leftrightarrow 5\mathrm{n}_1 = 1 \Leftrightarrow \mathrm{n}_1 = \frac{1}{5}$$

עפ"י נתון $m_1, \mathrm{n}_1 \in \mathbb{Z}$, לכן לא קיים מספר ששייך ל$\mathbb{Z}$ שייתן לנו את הסוג סדור $< 1,1 >$ לכן הפונקציה לא על.

נוכיח ש- f חח"ע.

כדי להוכיח ש f חח"ע יש להראות שלכל $f < m_1, n_1 > = f < m_2, n_2 >$ מתקיים $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$
קיימים $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ מקיים את f ולכן:

$$\langle m_1, n_1 \rangle = \langle \mathrm{m}_2, \mathrm{n}_2 \rangle$$

נשווה בין שני הסוג סדור $n_1 = n_2$ ו $m_1 = m_2$ מכאן:

$$2m_1 + 3n_1 = 2m_2 + 3n_2$$
$$2m_1 + 3n_1 - 2m_2 - 3n_2 = 0$$
$$2(m_1 - m_2) + 3(n_1 - n_2) = 0$$
$$\boldsymbol{(m_1 - m_2) = \frac{-3(n_1 - n_2)}{2}}$$

$$3m_1 + 2n_1 = 3m_2 + 2n_2$$
$$3m_1 + 2n_1 - 3m_2 - 2n_2 = 0$$
$$3(m_1 - m_2) + 2(n_1 - n_2) = 0$$
$$3\left(-\frac{3(n_1 - n_2)}{2}\right) + 2(n_1 - n_2) = 0$$
$$-9n_1 + 9n_2 + 4n_1 - 4n_2 = 0$$
$$-5n_1 + 5n_2 = 0$$
$$n_1 = n_2$$

מצאנו את ש$n_1 = n_2$ עכשיו נציב במשוואה הראשונה:

$$2m_1 + 3n_1 - 2m_2 - 3n_2 = 0$$
$$2m_1 + 3n_1 - 2m_2 - 3n_1 = 0$$
$$2m_1 - 2m_2 = 0$$
$$m_1 = m_2$$

לכן f היא חח"ע.

ב. נוכיח ש- $\pi_1 \circ f$ אינו חח"ע. נעשה זאת ע"י דוגמה נגדית.
כאשר $m = 1$ ו $n = -1$

$$\pi_1 \circ f\langle 1,0 \rangle = \pi_1\langle -1,1 \rangle = -1$$

כאשר $m = 4$ ו $n = -3$

$$\pi_1 \circ f\langle 4,-3 \rangle = \pi\langle -1,6 \rangle = -1$$

לכן $\pi_1 \circ f$ אינו חח"ע.
עלינו להוכיח ש- $\boldsymbol{\pi_1 \circ f}$ על.
כדי להוכיח זאת, צריך למצוא תמונה אשר יש לה מקור לכן:

$$\pi_1 \circ f\langle m, n \rangle = z$$

על פי נתון $\pi_1\langle m, n \rangle = m$ ולכן $z = 2m + 3n$.

מכיוון שנתון ש- $m,n \in \mathbb{Z}$ לכן אפשר לתאר כל מספר שלם ע"י הכפל $2m + 3n$

ג. על מנת להוכיח שפונקציה הפיכה, עלינו להראות שהיא חח"ע ועל.
ניתן להסתמך על סעיף א' בו הוכחנו שהפונקציה היא חח"ע. ולכן נשאר לנו רק להוכיח שהפונקציה היא על.

הפונקציה היא על, נרצה להגיע מ$\langle a,b\rangle = g\langle x , y \rangle$ ננסה להגיע מa ו b למקור x ו y.

$$2x + 3y = a$$
$$x = \frac{a\text{-}3y}{2}$$

לאחר שמצאנו את x עלינו למצוא את y:

$$3x + 2y = b$$
$$3\left(\frac{a\text{-}3y}{2}\right) + 2y = b$$
$$3a - 9y + 4y = 2b$$
$$-5y = 2b - 3a$$
$$y = \frac{3a\ \text{-}2b}{5}$$

עכשיו נציב את y במשוואה של x ונקבל:

$$x = \frac{a\text{-}3y}{2}$$
$$x = \frac{a - 3\left(\frac{3a\ \text{-}2b}{5}\right)}{2}$$
$$x = \frac{5a\ \text{-}9a\ + 6b}{10}$$
$$x = \frac{\text{-}2a\ +\ 3b}{5}$$

על מנת שנוכל לקבל את הסוג הסדור $\langle a,b\rangle$ עלינו x ו y חייבים להיות בערך נה"ל. כלומר הפונקציה על בגלל תחום של הפונקציה הוא $\mathbb{Q}\ X\ \mathbb{Q} \ \rightarrow \mathbb{Q}\ X\ \mathbb{Q}$.

כדי שנוכל למצוא את הפונקציה ההפוכה לg צריך רק להציב את הנוסחאות שקיבלנו.
לכן – $g^{-1}\langle a,b\rangle = \left\langle\frac{\text{-}2a + 3b}{5}, \frac{3a\ \text{-}2b}{5}\right\rangle$