20416 - תאריך הבחינה: 23.8.2010 (סמסטר 2010ב - מועד 92)

שאלה 1

א. $$\text{Var}(M_n) = \text{Var}\left(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) = \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 n\sigma^2 = \tfrac{\sigma^2}{n}$$ [ה-X_i-ים בלתי-תלויים]

$$\text{Cov}(X_1, M_n) = \text{Cov}\left(X_1, \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\text{Cov}(X_1, X_i) = \tfrac{1}{n}\text{Var}(X_1) + 0 = \tfrac{\sigma^2}{n}$$

ומכאן:
$$\rho(X_1, M_n) = \frac{\text{Cov}(X_1, M_n)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(M_n)}} = \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\sqrt{\sigma^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ב. $$E[S_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E\left[\frac{S_n}{n}\right] = 0$$

$$\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \text{Var}\left(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) = \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\underbrace{E[X_i^2]}_{\le M} - \underbrace{(E[X_i])^2}_{=0}\right) \le \tfrac{M}{n}$$ [ה-X_i-ים בלתי-תלויים]

לכן, נוכל לקבל מאי-שוויון צ'בישב, שלכל $\varepsilon > 0$, מתקיים:

$$0 \le P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - 0\right| > \varepsilon\right\} \le P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - 0\right| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} \le \frac{M}{n\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

כלומר:
$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} = 0$$

ג. $$E\left[\frac{X}{1+X}\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{i}{1+i}\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} i\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{(i+1)!} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$$
$$= \frac{1}{\lambda}\Big(E[X-1] - (0-1)P\{X=0\}\Big) = \frac{1}{\lambda}\left(\lambda - 1 + e^{-\lambda}\right) = 1 - \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$$

שאלה 2

נגדיר את המאורעות: A = הבת בוחרת בחוג משחקי כדור

B = הבת בוחרת בחוג שחייה

C = הבת בוחרת בחוג מוסיקה

נתוני השאלה הם: $P(A\cup B\cup C) = 0.95 \qquad \Rightarrow \qquad P(A^C\cap B^C\cap C^C) = 1 - 0.95 = 0.05$

$P(B) = 0.7$

$P(A^C) = 0.7 \qquad \Rightarrow \qquad P(A) = 0.3$

$$P((A\cap B\cap C)^C \mid B) = 1 - P(A\cap B\cap C \mid B) = 1 - \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B)} = 0.9$$

$\Rightarrow \qquad P(A\cap B\cap C) = 0.1\cdot 0.7 = 0.07$

$P(A\cap B\cap C^C) = 0.13$

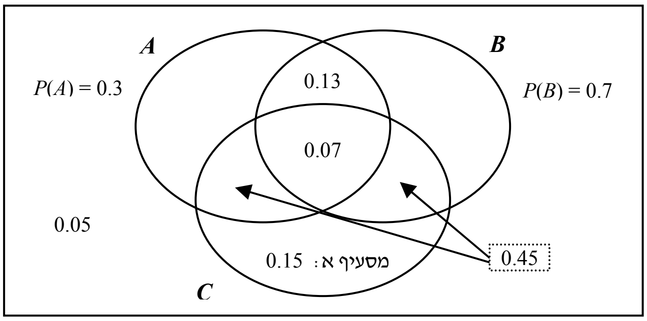
$$P(C\cap(A\cup B)) = P((C\cap A)\cup(C\cap B)) = P(C\cap A) + P(C\cap B) - P(A\cap B\cap C)$$

$$= P(A\cap B\cap C) + P(A\cap B^C\cap C) + P(A\cap B\cap C) + P(A^C\cap B\cap C) - P(A\cap B\cap C)$$

$$= P(A\cap B^C\cap C) + P(A^C\cap B\cap C) + P(A\cap B\cap C) = 0.52$$

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B^C\cap C) + P(A^C\cap B\cap C) = 0.45$$

דיאגרמת ון מתאימה לנתונים שלעיל היא:



א. $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.3 + 0.7 - 0.2 = 0.8$

$P(A^C\cap B^C\cap C) = 1 - P(A^C\cap B^C\cap C^C) - P(A\cup B) = 1 - 0.05 - 0.8 = 0.15$

ב. $P($ בוחרת בדיוק חוג אחד $| A^C\cup B^C\cup C^C)$

$$= \frac{\overbrace{P(A\cap B^C\cap C^C) + P(A^C\cap B\cap C^C)} + P(A^C\cap B^C\cap C)}{1 - P(A\cap B\cap C)}$$

$$= \frac{\overbrace{P(A\cup B) - P(A\cap B) - P(A\cap B^C\cap C) - P(A^C\cap B\cap C)} + P(A^C\cap B^C\cap C)}{1 - P(A\cap B\cap C)}$$

$$= \frac{0.8 - 0.2 - 0.45 + 0.15}{1 - 0.07} = \frac{0.3}{0.93} = 0.3226$$

ג. $$P(A^C\cap B^C\cap C^C \mid C^C) = \frac{P(A^C\cap B^C\cap C^C)}{1 - P(C)} = \frac{0.05}{1 - (0.15 + 0.07 + 0.45)} = \frac{0.05}{0.33} = 0.\overline{15}$$

ד. מדיאגרמת ון אפשר לראות כי:

$P\{X = 0\} = 0.05$

$P\{X = 250\} = 0.8 - 0.2 - 0.45 + 0.15 = 0.3$

$P\{X = 450\} = 0.45 + 0.13 = 0.58$

$P\{X = 600\} = 0.07$

לכן:

$E[X] = 250\cdot 0.3 + 450\cdot 0.58 + 600\cdot 0.07 = 378$

$E[X^2] = 250^2\cdot 0.3 + 450^2\cdot 0.58 + 600^2\cdot 0.07 = 161{,}400$

$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 161{,}400 - 378^2 = 18{,}516$

שאלה 3

א. נניח שהזוגות נבחרים לפי סדר, ונסמן ב- A_i את המאורע שהכדורים בזוג ה-i-י נושאים אותו המספר, לכל $i = 1,2,\ldots,10$. נראה שקיימת תלות בין A_1 ל- A_2 , ולכן המשתנה המקרי X אינו בינומי.

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{\binom{10}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{1}{19}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{\binom{10}{1}\binom{9}{1}}{\binom{20}{2}\binom{18}{2}} = \frac{1}{19} \cdot \frac{1}{17} \neq P(A_1)P(A_2) = \left(\frac{1}{19}\right)^2$$

ב. נגדיר:
$$X_i = \begin{cases} 1 \ , & \text{בזוג } i \text{ יש התאמה מספרית} \\ 0 \ , & \text{אחרת} \end{cases} \qquad \text{לכל } i = 1,\ldots,10$$

ונקבל כי: $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$ = מספר זוגות הכדורים שבהם שני הכדורים נושאים אותו המספר

עתה, לכל $i = 1,\ldots,10$ מתקיים: $E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \frac{10}{\binom{20}{2}} = \frac{1}{19}$

לכן: $E[X] = \sum_{i=1}^{10} E[X_i] = 10 \cdot \frac{1}{19} = 0.5263$

ג. המאורע $\{X = 5\}$ מתרחש אם בדיוק 5 מהזוגות מעורבים (כלומר, בצבעים אדום ושחור) ויש ביניהם התאמה מספרית. בשאר הזוגות אין התאמה מספרית (והם יכולים להיות מעורבים או לא-מעורבים).
כדי לחשב את ההסתברות המבוקשת, נתחיל בחישוב מספר האפשרויות לחלק לזוגות מקריים 10 כדורים, כך שלא תיווצר אף התאמה מספרית, כאשר 5 כדורים מתוך ה-10 אדומים וממוספרים ב-5 מספרים שונים ו-5 הכדורים האחרים שחורים וממוספרים באותם מספרים.
נניח שהזוגות נבחרים לפי סדר, ולכל $i = 1,2,\ldots,5$, נסמן ב- A_i את המאורע שהכדורים בזוג ה-i-י נושאים אותו המספר. עתה, עלינו לחשב את:

$$n(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) = \binom{10}{2,2,2,2,2} - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)$$

את החישוב נעשה בעזרת כלל ההכלה וההפרדה. נקבל:

$$n(A_1) = 5 \cdot \binom{8}{2,2,2,2} = 12{,}600 \qquad , \qquad n(A_1 \cap A_2) = 5 \cdot 4 \cdot \binom{6}{2,2,2} = 1{,}800$$

$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \binom{4}{2,2} = 360 \qquad , \qquad n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 5! = 120$$

$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = 5! = 120$$

ומכאן:

$$n(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C)$$
$$= \binom{10}{2,2,2,2,2} - \left[\binom{5}{1} \cdot 12{,}600 - \binom{5}{2} \cdot 1{,}800 + \binom{5}{3} \cdot 360 - \binom{5}{4} \cdot 120 + \binom{5}{5} \cdot 120\right] = 65{,}280$$

בחירת הזוגות שיש בהם התאמה

חלוקת השאר לזוגות שאין בהם אף התאמה

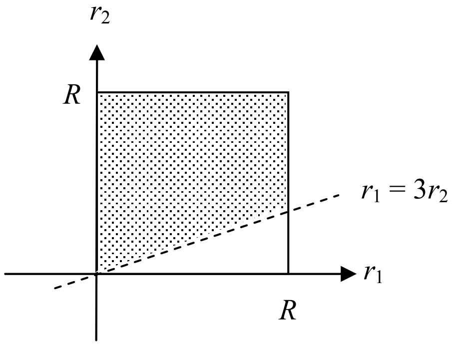
ולכן:
$$P\{X = 5\} = \frac{\binom{10}{5} \cdot \overbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}^{\text{בחירת המספרים לזוגות שיש בהם התאמה}} \cdot 65{,}280}{\binom{20}{2,2,\ldots,2}} = 0.0002094$$

שאלה 4

א. המשתנים המקריים R_1 ו- R_2 בלתי-תלויים זה בזה והתפלגותם אחידה על הקטע $(0, R)$. לכן :

$$f_{R_1,R_2}(r_1,r_2) = \frac{1}{R^2} \qquad , \qquad 0 < r_1,r_2 < R$$

נסמן בנקודות את התחום שבו מתרחש המאורע $P\{R_1 < 3R_2\}$:



כעת, מכיוון שפונקציית הצפיפות המשותפת קבועה בתחום ההתפלגות, נקבל כי :

$$P\{R_1 < 3R_2\} = 1 - \frac{R \cdot \frac{R}{3}}{2} \cdot \frac{1}{R^2} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

ואפשר לחשב גם כך :

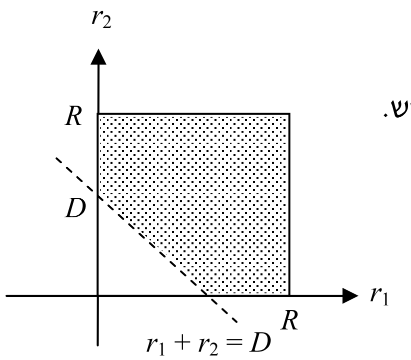
$$P\{R_1 < 3R_2\} = \int_0^R \int_{r_1/3}^R \frac{1}{R^2} dr_2 dr_1 = \int_0^R \frac{R - r_1/3}{R^2} dr_1 = \left.\frac{Rr_1 - r_1^2/6}{R^2}\right|_0^R = \frac{R^2 - R^2/6}{R^2} = \frac{5}{6}$$

ב. המאורע ששני המעגלים חותכים זה את זה שקול למאורע $\{R_1 + R_2 > D\}$, וההסתברות להתרחשותו תלויה ביחס שבין D ל- R.

מקרה 1: $\underline{D > 2R}$

במקרה זה, לא ייתכן שהמאורע שלעיל יתרחש. לכן, ההסתברות ששני המעגלים יחתכו זה את זה היא 0.

מקרה 2: $\underline{0 \le D \le R}$



במקרה זה, המעגלים יחתכו זה את זה, אם המאורע $\{R_1 + R_2 > D\}$ יתרחש.

כלומר, אם R_1 יקבל ערך כלשהו בקטע $[0,R]$ ו- R_2 יקבל ערך בקטע $[\max\{0, D - R_1\}, R]$.

נסמן בנקודות את התחום שבו מאורע זה מתרחש :

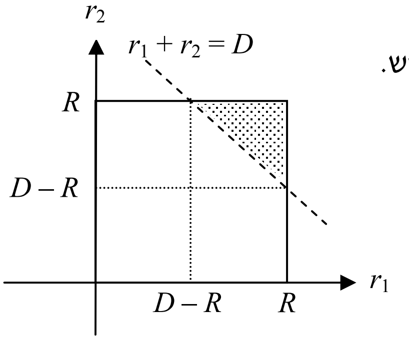
ומתקיים : $$P\{R_1 + R_2 > D\} = 1 - \frac{D \cdot D}{2} \cdot \frac{1}{R^2} = 1 - \frac{D^2}{2R^2}$$

ואפשר לחשב גם כך :

$$P\{R_1 + R_2 > D\} = 1 - P\{R_1 + R_2 \le D\} = 1 - \int_0^D \int_0^{D-r_1} \frac{1}{R^2} dr_2 dr_1 = 1 - \int_0^D \frac{D - r_1}{R^2} dr_1$$

$$= 1 - \left.\frac{Dr_1 - r_1^2/2}{R^2}\right|_0^D = 1 - \frac{D^2 - D^2/2}{R^2} = 1 - \frac{D^2}{2R^2}$$

מקרה 3: $R \le D \le 2R$



במקרה זה, המעגלים יחתכו זה את זה, אם המאורע $\{R_1 + R_2 > D\}$ יתרחש.

כלומר, אם R_1 יקבל ערך כלשהו בקטע $[D-R, R]$ ו- R_2 יקבל ערך בקטע $[D-R_1, R]$.

נסמן בנקודות את התחום שבו מאורע זה מתרחש:

ומתקיים:
$$P\{R_1 + R_2 > D\} = \frac{[R-(D-R)]^2}{2} \cdot \frac{1}{R^2} = \frac{(2R-D)^2}{2R^2}$$

ואפשר לחשב גם כך:

$$P\{R_1 + R_2 > D\} = \int_{D-R}^{R} \int_{D-r_1}^{R} \frac{1}{R^2} dr_2 dr_1 = \int_{D-R}^{R} \frac{R-D+r_1}{R^2} dr_1 = \left. \frac{(R-D)r_1 + r_1^2/2}{R^2} \right|_{D-R}^{R}$$
$$= \frac{(R-D)(2R-D) + R^2/2 - (D-R)^2/2}{R^2} = \frac{(2R-D)^2}{2R^2}$$

שאלה 5

א. נתון כי: $Y \sim U(0,1) \qquad ; \qquad X \mid Y = y \sim Po(y)$

מנוסחאות התוחלת והשונות המותנות נקבל:

$$E[X] = E[E[X \mid Y]] = E[Y] = \tfrac{1}{2}$$

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X \mid Y)] + \text{Var}(E[X \mid Y]) = E[Y] + \text{Var}(Y) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12} = \tfrac{7}{12}$$

ב.
$$P\{X = 1\} = \int_0^1 P\{X = 1 \mid Y = y\} \cdot f_Y(y) dy = \int_0^1 e^{-y} \frac{y^1}{1!} \cdot 1 \cdot dy = \int_0^1 e^{-y} \cdot y \, dy =$$
$$= -e^{-y} \cdot y \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-y} dy = -e^{-1} - e^{-y} \Big|_0^1 = 1 - 2e^{-1} \qquad \begin{bmatrix} u = y & ; & v' = e^{-y} \\ u' = 1 & ; & v = -e^{-y} \end{bmatrix}$$

ג. נשתמש במשפט הגבול המרכזי ובתוצאות סעיף א לחישוב הקירוב המבוקש. נערוך תיקון רציפות ונקבל:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \le 48\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \le 48.5\right\} \cong P\left\{Z \le \frac{48.5 - 100 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{100 \cdot \frac{7}{12}}}\right\} = P\{Z \le -0.1964\}$$
$$= \Phi(-0.1964) = 1 - \Phi(0.1964) = 1 - 0.57786 = 0.42214$$