

מטלת מנחה (ממ"ן)

13

הקורס: 20276 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 3

משקל המטלה: 3 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: יום ו' 28.4.06

סמסטר: 2006

אנא שים לב:

מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.

העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (21 נקודות)

א. הוכח שהפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, אינה חד-חד-ערכית.

ב. הראה שתמונת f (קבוצת כל אברי \mathbb{R} המתקבלים כתמונה על-ידי הפעלת f)

מכילה רק מספרים גדולים או שווים ל-1. האם f היא על \mathbb{R} ?

ג. תהי g פונקציה הנתונה ע"י אותו ביטוי כמו f , אך **תחום** הגדרתה הוא קבוצת

הממשיים הגדולים-ממש מ-0. בנוסף, בזכות סעיף ב נקח את **הטווח** של g להיות קבוצת

הממשיים הגדולים-ממש מ-1. הוכח ש- g המוגדרת כך היא חד-חד-ערכית ועל.

שאלה 2 (24 נקודות)

תהי f פונקציה של קבוצה A לקבוצה B . נגדיר פונקציה $f^*: P(A) \rightarrow P(B)$ כך:

לכל $X \in P(A)$, $f^*(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$.

הוכח כי f היא חד-חד-ערכית **אם** f^* היא חד-חד-ערכית.

(תרגיל דומה יפורסם באתר הקורס וייפתר במפגש ההנחיה).

שאלה 3 (30 נקודות)

תהי F קבוצת כל הפונקציות של N ל- N . נגדיר יחס K מעל F :

עבור $f, g \in F$: $(f, g) \in K$ אם ורק אם $f(n) \leq g(n)$, $n \in N$ לכל .

(5 נק') א. הוכח ש- K הוא סדר-חלקי מעל F .

(5 נק') ב. הוכח ש- K אינו סדר-מלא מעל F .

(10 נק') ג. הוכח שאין ב- F איברים מקסימליים לגבי היחס K .

(10 נק') ד. יהיו $f, g \in F$. הוכח שקיים $h \in F$ המקיים :

$(f, h) \in K$ וגם $(g, h) \in K$.

הערה : h אינו איבר קבוע של F אלא תלוי ב- f, g .

שאלה 4 (25 נקודות)

בהתייחס לשאלה 4 בממ"ן 12 :

הוכח באינדוקציה שלכל $n, 1 \leq n$, $D_1^n = D_n$. שים לב שיש להראות הכלה דו-כיוונית.

כדאי להיעזר בשאלה 3 בממ"ן 11.