אלף בית / מקלדת - קבוצה של סימנים (יכולה להיות אינסופית)

מחרוזת - סדרה סופית של אותיות מעל הא"ב

שפה בא"ב - קבוצה של מחרוזות מעל הא"ב [$L \subseteq \Sigma^*$, כאשר Σ^* היא קבוצת כל המחרוזות בא"ב]

השפה הפסוקית

אלף בית / מקלדת - $\Sigma = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), P_1 \dots P_n\}$

הגדרת השפה ברקורסיה:

פסוק אלמנטרי - כל פסוק אלמנטרי הוא פסוק בשפה

קשר השלילה – כל שלילת פסוק בשפה הוא פסוק בשפה

קשר דו מקומי – כל פסוק המוגדר ע"י 2 פסוקים וקשר דו מקומי הוא פסוק בשפה

הגדרת השפה – הגדרה מדורגת(אינדוקציה):

$\boldsymbol{E_0}$ – קבוצת הפסוקים האלמנטריים [עומק קשרי = 0]

הנחת האינדוקציה - $\boldsymbol{E_{n-1}}$ **מוגדרת** כראוי [עומק קשרי = $n-1$]

$\boldsymbol{E_n}$ – היא קבוצת הפסוקים הבאה:

$$E_n = \{\varphi | \varphi \in E_{n-1}\} \cup \{\neg\varphi | \varphi \in E_{n-1}\} \cup \{(\rho @ \varphi) | \varphi, \rho \in E_{n-1}\}$$

עומק קשרי $\boldsymbol{d(\varphi)}$ – ה n הקטן ביותר כך ש $\varphi \in E_n$

משפט ההוכחה באינדוקציה מבנית:

עבור תכונה כלשהיא R, אם מתקיים:

א. כל פסוק אלמנטרי מקיים את תכונה R

ב. אם הפסוק φ המקיים את R, אז גם הפסוק ¬φ מקיים את R

ג. לכל קשר דו מקומי – אם φ, ρ מקיימים את R, אז גם הפסוק (ρ@φ) מקיים את R

אזי כל פסוק בשפה מקיים את R

למת ספירת הסוגרים:

כל פסוק הוא **מאוזן סוגרים** [מספר סוגרים שמאליים שווה למספר סוגרים ימיניים]

עבור פסוק כלשהו - בכל רישא, מספר הסוגריים השמאליים גדול או שווה למספר הסוגריים הימיניים.

בכל סיפא, ההיפך.

עבור קשר דו מקומי – משמאלו יש יותר סוגרים שמאליים ומימינו יותר סוגרים ימיניים

משפט הקריאה היחידה:

א. כל פסוק הוא אחד משלושת הסוגים – אלמנטרי, שלילה או מקושר.

ב. כל פסוק מקושר הינו מהצורה (ρ@φ), כאשר @ הוא הקשר הראשי

קשר ראשי – הקשר היחיד, שלאחר מחיקת הסוגריים החיצוניים, הרישא משמאלו מאוזנת סוגרים

אלגוריתם לניתוח הפסוק – עץ המבנה

1. נרשום את הפסוק ללא סוגריים חיצוניים
2. נפריד למקרים:
   2.1. אם קיבלנו פסוק אלמנטרי: נקיף אותו בריבוע
   2.2. אם קיבלנו פסוק שלילה: נכתוב את הפסוק ללא השלילה מתחתיו
   2.3. אם קיבלנו פסוק מקושר: נמצא את הקשר הראשי
   נכתוב את הפסוק מימין לקשר הראשי מתחת הפסוק בצד ימין
   נכתוב את הפסוק משמאל לקשר הראשי מתחת הפסוק בצד שמאל
3. נחזור על שלב 2 עבור כל פסוק שאינו אלמנטרי
4. אם יש צורך - נסמן מלמטה למעלה עומק קשרי [הפסוק האלמנטרי ה"נמוך" ביותר הוא בעומק קשרי 0]

משפט ההגדרה באינדוקציה מבנית:

עבור קבוצה כלשהיא A, קבוצת הפסוקים האלמנטריים E

עבור הפונקציות $f_E: E \to A,\ \ f_\neg: A \to A,\ \ f_@: AxA \to A$

קיימת פונקציה אחת ויחידה f מקבוצת כל הפסוקים ל A כך ש:

- אם φ פסוק אלמנטרי אז: $f(\varphi) = f_E(\varphi)$
- אם φ פסוק שלילה ¬ρ אז: $f(\varphi) = f_\neg(f(\varphi))$
- אם φ פסוק מקושר ω@ρ אז: $f(\varphi) = f_@\big(f(\omega), f(\rho)\big)$

משפט לוקליות ההגדרה באינדוקציה:

יהיו L_1, L_2 שפות פסוקיות (יכולות להיות זהות) ותהי A קבוצה

אם הפונקציות המוגדרות באינדוקציה מבנית $F_1: L_1 \to A,\ \ F_2: L_2 \to A$

מגדירות את אותן פונקציות פנימיות $f_E, f_\neg, f_@$ (ע"פ הגדרת האינדוקציה המבנית)

אזי מתקיים $F_1(\varphi) = F_2(\varphi)$

[תוצאת ההגדרה באינדוקציה מבנית תלויה רק בפסוקים האלמנטריים והקשרים המופיעים בפסוק]

למת המחרוזת החלקית:

עבור פסוק φ ומחרוזת חלקית שלו a

אם a פסוק אזי $a = \varphi$ או ש a מחרוזת חלקית של מרכיב ראשי של φ

משפט התת מחרוזת:

ω פסוק חלקי של φ אם ורק אם ω מחרוזת חלקית של φ

אלגוריתם לבדיקת האם מחרוזת היא פסוק חוקי:

סמן כל פסוק אלמנטרי ב – 0, אם אין כאלו המחרוזת אינה פסוק

סמן כל פסוק $\neg 0$ או $0@0$ בספרה 1 וכן הלאה עד למציאת פסוק $\neg k$ או $k@k$ [זהו הקשר הראשי - עומק קשרי K]

אם קיבלנו מחרוזת שאינה מהצורה הנ"ל – היא איננה פסוק

משפט החלפת תת פסוק:

עבור פסוק φ ותת מחרוזת שלו ω [פסוק חלקי של φ]

המחרוזת המתקבלת ע"י החלפת ω בפסוק כלשהו ρ היא גם פסוק

[החלפת פסוק חלקי בפסוק היא פסוק]

הצבה [מקרה פרטי של החלפת תת מחרוזת שהיא פסוק אלמנטרי]:

φ' מתקבלת ממחרוזת φ ע"י אחת מההצבות הבאות:

הצבה יחידה – החלפת מופע אחד בלבד של ω במחרוזת ρ [ω מופיע לפחות פעם אחת ב φ]

הצבה (מלאה) $\boldsymbol{\varphi[\rho/\omega]}$ – החלפת כל מופעי ω במחרוזת ρ [ω לא בהכרח מופיעה ב φ]

הכללה- עבור הפסוקים $\rho_1 \dots \rho_n$ (אינם בהכרח שונים זה מזה),

הפסוק $\varphi[\rho_1/\omega_1, \dots \rho_n/\omega_n]$ מתקבל ע"י סדרת הצבות יחדות של כל הפסוקים האלמנטריים $\omega_1 \dots \omega_n$

משפט ההצבה:

אם φ, ρ פסוקים אזי

$\varphi[\rho/\omega]$ וגם $\varphi[\rho_1/\omega_1, \dots \rho_n/\omega_n]$ וגם הצבה יחידה של ρ במקום פסוק אלמנטרי הוא פסוק

מודולריות ההגדרה באינדוקציה:

אם ω, φ פסוקים ו ρ פסוק חלקי של φ, כך ש $H(\omega) = H(\rho)$ [H מוגדרת באינדוקציה מבנית]

אזי מתקיים $H(\varphi[\rho\backslash\omega]) = H(\varphi)$

אם ω, φ פסוקים כך ש $H(\omega) = H(\rho)$ [H מוגדרת באינדוקציה מבנית]

אזי $H(\varphi[\omega\backslash Q]) = H(\varphi[\rho\backslash Q])$ [Q אלמנטרי]

[ניתן להחליף כל תת פסוק בפסוק השקול לו]

סדרת בנייה:

סדרה סופית של פסוקים $\varphi_1 \dots \varphi_n$ היא סדרת בנייה אם ורק אם כל פסוק φ_i הוא אחד מהשלוש:

1. **$\boldsymbol{\varphi_i}$ אלמנטרי**
2. $\boldsymbol{\varphi_i = \neg\varphi_j}$ - שלילה של פסוק φ_j , כאשר $j < i$
3. $\boldsymbol{\varphi_i = \varphi_j @ \varphi_k}$ - פסוק מקושר של φ_j ו φ_k, כאשר $j, k < i$

משפט סדרת הבנייה:

כל מחרוזת שיש לה סדרת בנייה היא פסוק

רישא של סדרת בנייה היא סדרת בנייה ולכן כל שלב בסדרה הוא פסוק

לכל פסוק φ יש סדרת בנייה שכל שלביה הם פסוקים חלקיים של φ

לכל פסוק φ מתקיים כי כל פסוק חלקי של φ מופיע בכל סדרת בניה של φ

מודל בשפה - פונקציה M מקבוצת הפסוקים האלמנטריים לקבוצה ערכי האמת $\{T,F\}$

$M \models \varphi$ - φ יכיח ב M [M מודל של Q]

<u>מודל של קבוצת פסוקים:</u>

עבור קבוצת פסוקים **K** ופונקציה $\boldsymbol{M}$ מתקיים:

$K \models M$ אם ורק אם כל פסוקי K נכונים בM, כלומר

M מודל של K אם ורק אם לכל פסוק $\varphi \in K$ מתקיים $M \models \varphi$

<u>משפט הלוקליות:</u>

עבור השפות הפסוקיות L_1, L_2 ופסוק φ השייך לשתיהן,

אם קיימים מודלים $M_1 \models L_1,\ M_2 \models L_2$, כך שלכל פסוק אלמנטרי Q המופיע ב φ : $M_1(\mathrm{Q}) = M_2(\mathrm{Q})$

אז $M_1(\varphi) = M_2(\varphi)$

[זהו מקרה פרטי של משפט לוקליות ההגדרה באינדוקציה,

משפט זה קובע כי ער האמת של פסוק תלוי אך ורק בפסוקיו האלמנטריים]

<u>משפט ההצבה:</u>

עבור פסוק φ וההצבה $\varphi[\rho\backslash\omega]$ מתקיים עבור כל מודל M:

אם $M(\rho) = M(\omega)$ אזי $M(\varphi) = M(\varphi[\rho\backslash\omega])$ [ההצבה היא תקינה ומחליפה פסוק בפסוק]

טאוטולוגיה - φ יקרא טאוטולוגיה אם ורק אם הוא נכון בכל מודל, סימון: $\models \boldsymbol{\varphi}$

סתירה לוגית - φ יקרא סתירה לוגית או שקרי אם ורק אם הוא אינו נכון בכל מודל

[הכוונה בכל מודל הינה בכל מודל המגדיר ערכי אמת לכל פסוקיו האלמנטריים של φ]

שקילות לוגית - φ ו- ω שקולים לוגית אם ורק אם הם נכונים בדיוק באותם מודלים, סימון: $\boldsymbol{\varphi \equiv \omega}$

[במילים אחרות – הם שקולים אם ורק אם הם מקבלים את אותם ערכי אמת בכל מודל (בכל שורה בטבלת האמת שלהם)]

אם לפסוקים φ ו- ω יש את אותם פסוקים אלמנטריים אז: $\omega \equiv \varphi$ אם ורק אם $\omega \leftrightarrow \varphi$ טאוטולוגיה

<u>מודולריות השקילות:</u>

עבור פסוק φ החלפת פסוק חלקי שלו ω בפסוק ω' המקיים: $\omega \equiv \omega'$ תיתן פסוק שקול ל φ

<u>הסתפקות בשני קשרים:</u>

כל פסוק φ שקול לוגית לפסוק בעל אותם פסוקים אלמנטריים והקשרים $\neg, \vee$ בלבד

כל פסוק φ שקול לוגית לפסוק בעל אותם פסוקים אלמנטריים והקשרים $\neg, \rightarrow$ בלבד

<u>פסוק דיסיונקטיבי נורמלי:</u>

קוניונקציה פשוטה – קוניונקציה מרובה של פסוקים בסיסיים (אלמנטריים או שלילתם) $(\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$

פסוק דיסיונקטיבי נורמלי – דיסיונקציה של קוניונקציות פשוטות $(\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3)$

קוניונקציה פשוטה מלאה – כל הפסוקים האלמנטריים מופיעים בה בדיוק פעם אחת [יש בדיוק 2^n כאלו]

משפט 3.5 – צורה דיסיונקטיבית נורמלית ומושלמות השפה:

כל פסוק שקול לוגית לפסוק דיסיונקטיבי נורמלי

אלגוריתם לנרמול דיסיונקטיבי נורמלי:

1. נמיר כל קשר $\leftrightarrow$, $\rightarrow$ ע"פ שקילויות 3,5,12
2. "נכניס" פנימה כל שלילה המופיעה לפני סוגריים
3. "נכניס" קוניונקציות פנימה לתוך סוגריים ע"י שקילויות

בכל שלב ניתן למחוק שלילה כפולה או פסוק כפול

נביעה לוגית: φ נובע לוגית מ- $\boldsymbol{\omega}$ אם ורק אם לכל מודל M: אם $M \models \omega$ אז $M \models \varphi$

$\boldsymbol{\omega} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi}$ אם ורק אם $\models(\boldsymbol{\omega} \rightarrow \boldsymbol{\varphi})$

φ נובע לוגית מקבוצת פסוקים **K** אם ורק אם לכל מודל M: אם $M \models \mathrm{K}$ אז $M \models \varphi$

$\mathbf{K} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi}$ אם ורק אם $\models \boldsymbol{K}$

משפט הקומפקטיות:

אם קיימת קבוצת פסוקים K (יכולה להיות אינסופית) ופסוק φ כך ש $\mathrm{K} \models \varphi$

אזי קיימת תת קבוצה **סופית** $\mathrm{K}' \subseteq \mathrm{K}$ כך ש $\mathrm{K}' \models \varphi$

[אם K קבוצת פסוקים (יתכן אינסופית) שאיננה ספיקה, אז יש לה תת קבוצה סופית שאיננה ספיקה]

תחשיב הילברט

סדרת הוכחה:

סדרת הוכחה מתוך קבוצת פסוקים K היא סדרת פסוקים $\varphi_1 \dots \varphi_n$, כך שכל פסוק הוא אחד מהשלוש:

1. אקסיומה לוגית
2. פסוק מתוך הקבוצה K
3. מתקבל משני פסוקים קודמים בסדרה ע"י כלל הניתוק

[סדרה מתוך 1 או 3 בלבד (מתוך הקבוצה הריקה) היא **סדרת הוכחה בתחשיב**, סדרת הוכחה מתוך 2 היא **סדרת הוכחה מתוך *K***]

פסוק יכיח/משפט: $K \vdash \varphi$ (פסוק φ יכיח מתוך K) אם ורק אם יש לו סדרת הוכחה מתוך K

משפט 4.1 – התכונות היסודיות של הוכחות:

1. אם $\varphi_1 \dots \varphi_n$ סדרת הוכחה אזי לכל $i \le n$, $\varphi_1 \dots \varphi_i$ היא גם סדרת הוכחה (ולכן $K \vdash \varphi_i$)

   אם $\varphi_1 \dots \varphi_n$ וגם $\omega_1 \dots \omega_m$ סדרות הוכחה אזי $\varphi_1 \dots \varphi_n, \omega_1 \dots \omega_m$ גם סדרת הוכחה
2. אם מתקיים $K \vdash \varphi$ וקיימת $K \subseteq K'$ אזי $K' \vdash \varphi$

   אם מתקיים $K \vdash \varphi_1 \dots \varphi_n$ ומתקיים $K \cup \{\varphi_1 \dots \varphi_n\} \vdash \omega$ אזי $K \vdash \omega$ [נכון גם עבור פסוק φ בודד]
3. אם מתקיים $K \vdash \varphi$ אז קיימת $K' \subseteq K$ כך ש $K' \vdash \varphi$ [אם K סופית אז $K' = K$, אם היא אינסופית אז K' סופית]

למה 4.2:

1. אם φ אקסיומה לוגית או שמתקיים $\varphi \in K$ אזי $K \vdash \varphi$
2. אם $K \vdash \omega$ וגם $K \vdash (\omega \to \varphi)$ אזי $K \vdash \varphi$
3. אם $K \vdash \varphi$ אזי לכל פסוק ω מתקיים $K \vdash (\omega \to \varphi)$ [ע"פ אקסיומה 1]
4. לכל פסוק φ מתקיים $K \vdash (\varphi \to \varphi)$ [ע"פ האקסיומות וכלל הניתוק]

משפט 4.2 – משפט הדדוקציה:

$K \cup \{\omega\} \vdash \varphi$ אם ורק אם $K \vdash (\omega \to \varphi)$

קבוצה עקבית: K קבוצה עקבית אם ורק אם **לכל** פסוק φ מתקיים: $K \vdash \varphi$ או $K \vdash \neg\varphi$ אך לא שניהם

K לא עקבית אם ורק אם **קיים** פסוק φ ומתקיים: $K \vdash \varphi$ וגם $K \vdash \neg\varphi$

למה (בנושא קבוצה עקבית):

תהי K קבוצת פסוקים אינסופית

אם כל קבוצה סופית $K' \subseteq K$ עקבית אז K קבוצה עקבית

אם K אינה קבוצה עקבית אז קיימת קבוצה סופית $K' \subseteq K$ שאיננה עקבית

משפט 4.4 – משפט ההוכחה בדרך השלילה:

1. לכל פסוק φ מתקיים $\{\omega, \neg\omega\} \vdash \varphi$ [ע"פ תכונות 1,3 של למה 4.2 , אקסיומה 3 וכלל הניתוק]
2. **קבוצה לא עקבית מוכיחה כל פסוק**
3. אם $K \cup \{\neg\varphi\}$ לא עקבית אזי $K \vdash \varphi$

משפט 4.5 – משפט הנאותות: [אם ורק אם יחד עם משפט השלמות 4.8]

1. אם $K \vdash \varphi$ אזי $K \models \varphi$ [כל טענה הניתנת להוכחה מתוך K היא אמתית]
2. אם לקבוצת פסוקים K יש מודל אז K עקבית

תורה - K היא תורה (או מערכת אקסיומות) אם ורק אם K קבוצה עקבית

תורה שלמה - K היא תורה שלמה אם ורק אם **כל** פסוק בה ניתן **להוכחה** או **להזחה** (הוכחת שלילתו)

משפט 4.6 - אם K היא תורה שלמה אז יש לה מודל **אחד ויחיד**

משפט 4.7 - ניתן להרחיב כל תורה K לתורה שלמה K' ומתקיים $K \subseteq K'$

אלגוריתם להרחבת תורה לתורה שלמה:

1. נסדר את כל הפסוקים ב K (כי היא בת מניה) כך $\varphi_1 \dots \varphi_n$
2. נסמן $K = K_0$ (מתחילים מקבוצה ריקה)
3. נבדוק האם $K_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ עקבית או לא
   a. אם היא עקבית: $K_{n+1} = K_n$
   b. אם היא לא עקבית: $K_{n+1} = K_n \cup \{\neg\varphi\}$

משפט 4.8 – משפט השלמות: [אם ורק אם יחד עם משפט הנאותות 4.5]

1. אם $K \models \varphi$ אזי $K \vdash \varphi$
2. אם K עקבית אז לקבוצת פסוקים K יש מודל

משפט 4.9 – משפט הקומפקטיות (גרסה נוספת ל 3.6):

עבור קבוצת פסוקים K מתקיים:

אם **לכל** קבוצה חלקית סופית שלה **קיים** מודל אז **קיים** מודל בו כל פסוקי K נכונים

שפות שמות עצם – תחביר ופירוש

הסימנים הלוגים בשפה

שמות משתנים - $v_1 \dots v_k$

סימני פיסוק - (,)

סימני חותם(סיגנטורה):

שמות של (עצמים) קבועים – סדרה של סימנים [יכולה להיות ריקה, סופית או אינסופית]

שמות של פונקציות – עבור סדרה של n סימנים [יכולה להיות ריקה, סופית או אינסופית]

שם עצם (הגדרה ברקורסיה):

שם עצם אלמנטרי — **מחרוזת** t של סימן יחיד שהוא **משתנה** או **שם של קבוע** [עומק מבני 0, $d(t) = 0$]

שם עצם — אם $t_1 \dots t_k$ הם **שמות עצם** ו- F היא פונקציה k-מקומית
אז **המחרוזת** $F(t_1, \dots, t_k)$ היא **שם עצם** [$d(t) = \max\{d(t_1) \dots d(t_k)\} + 1$]

משפט 5.1 – הוכחה והגדרה באינדוקציה:

1. מגדירים פונקציה $H(t)$ **לכל** שם עצם אלמנטרי [כלומר, לכל משתנה ולכל שם של קבוע בשפה]
2. נגדיר את $H(F(t_1, \dots, t_k))$ **לכל** פונקציה F k-מקומית [כלומר, **לכל שם עצם** שאינו אלמנטרי] [$F(t_1, \dots, t_k)$ היא **מחרוזת**]

הצבה – מוגדרת ע"י 3 האפשריות הבאות:

1. הצבת המחרוזת β במקום הסימן t_i במחרוזת $t_1 \dots t_i \dots t_k$
2. $\alpha[\beta\backslash d]$ – הצבת המחרוזת β במקום כל מופעי סימן הא"ב d במחרוזת α
3. $t[s\backslash x]$ – הצבת שם העצם s במקום המשתנה x בשם העצם t

משפט 5.2 – לוקליות ההגדרה באינדוקציה:

עבור הפונקציות H ו H'

1. עבור שם העצם t מתקיים: אם H ו H' **זהות** עבור שמות **עצם אלמנטריים ומשתנים ב t** אז
$H'(t) = H(t)$ [H ו H' **יכולות להיות** נבדלות בשמות עצם אלמנטריים ומשתנים שאינם ב t]
2. עבור שמות העצם s, t והמשתנה x ב t מתקיים: אם $H(s) = H(x)$ אז $H(t) = H(t[s\backslash x])$

מודל בשפה (מבנה) - $M = \{A;\ c_1^M \dots ; F_1^M \dots\}$

A - תחום של המבנה

$C_1^M \dots$ - התאמה לכל שם עצם פרטי c בשפה, עצם במבנה [מעוניינים בשם העצם ששמו c ולא במחרוזת c]

$F_1^M \dots$ - התאמה לכל סימן פונקציה F בשפה, פונקציה במבנה באותה ערכיות [כלומר, בעלת אותה כמות מקומות]

השמה:

השמה במודל (במבנה) – $S(x)$

התאמת כל שם של משתנה [מתוך קבוצת המשתנים בשפה שיכולה להיות ריקה] לעצם במבנה

$S(x)$ – זהו סימון העצם במבנה שהותאם למשתנה x, נקרא – הפירוש של x בהשמה

השמה S רלוונטית לשם עצם t

אם ההשמה S מתאימה לכל משתנה במחרוזת t עצם במבנה, אז היא רלוונטית ל t

אם t הוא שם עצם קבוע וללא משתנים, אזי כל השמה רלוונטית לגביו (גם הריקה)

פירוש במודל ופירוש בהשמה – פירוש במודל הוא רחב יותר ונותן **שמות קבועים לפונקציות** במודל עליו מדברים ואילו פירוש בהשמה הוא ההחלטה לאילו עצמים יתייחסו המשתנים המופעים בשם עצם נותן **בהקשר שאנו עוסקים בו כרגע**

לוקליות הגדרת ההשמה - כל שתי השמות במודל נתון, מפרשות את הקבועים בשפה באותו אופן

משפט 5.3 :

1. אם ההשמות S_1, S_2 רלוונטיות ל t אז $S_1(t) = S_2(t)$
2. אם t שם עצם קבוע אזי כל ההשמות רלוונטיות לגביו ונותנות לו את אותו הערך

שפת היחסים – לוגיקה מסדר ראשון

שמות עצם משתנים ושמות עצם קבועים הם שמות עצם **בסיסיים**

עבור שמות העצם $t_1 \dots t_k$ והפונקציה F המחרוזת $F(t_1, \dots, t_k)$ היא **שם עצם**

נוסחאות עבור יחס K-מקומי R, המחרוזת $R(t_1, \dots, t_k)$ היא **נוסחה אטומית**

לכל נוסחה φ גם $\neg\varphi$ היא נוסחה

לכל 2 נוסחאות φ, ω גם $\varphi@\omega$ היא נוסחה

לכל נוסחה φ ומשתנה x גם $\exists x\varphi$ וגם $\forall x\varphi$ הם נוסחאות

<u>משפט 5.4 – הוכחה והגדרה באינדוקציה</u>

הגדרה באינדוקציה מבנית פונקציה H לכל נוסחה ע"פ ההגדרה הרקורסיבית לעיל

משתנה קשור – משתנה הנקשר ע"י הכמתים בנוסחה. בכל נוסחה (מקושרת ע"י קשר דו מקומי או שלילה), הכמתים ממשיכים לקשור בדיוק את אותם המשתנים שהם קשרו בנוסחאות המרכיבות

משתנה חופשי - x משתנה חופשי ב φ אם ורק אם יש לו מופע חופשי אחד לפחות

פסוק - נוסחה φ היא פסוק אם ורק אם אין בה משתנה חופשי (כל המשתנים קשורים)

הצבה $\varphi[t\backslash x]$ – החלפת כל מופע חופשי של x בנוסחה φ

הצבה כשרה – הצבה היא כשרה אם ורק אם היא לא קושרת אף משתנה שלא היה קשור

מודל בשפה (מבנה) - $M = \{A;\ c_1^M \dots; F_1^M \dots, R_1^M \dots\}$

ההגדרה הורחבה למודל בשפת היחסים ע"י התאמת יחסים $R_1^M \dots$ ליחסים המקוריים

לוגיקה עם שוויון – יחס השוויון , שהוא יחס דו מקומי, הינו חלק מהשפה והוא מגדיר כי כל משתנה או שם עצם "שווה" לעצמו אך לא לאף אחד אחר. **שפת היחסים – לוגיקה ללא שוויון**

השמה S רלוונטית לנוסחה φ – אם ורק אם היא מתאימה בן זוג לכל משתנה חופשי ב φ

ערך האמת של נוסחה במודל, עבור השמה רלוונטית:

נוסחה אטומית $R(t_1, \dots, t_k)$: הנוסחה אמתית בהשמה S אם ורק אם $t_1, \dots, t_k \in R$

נוסחת שלילה $\neg\varphi$: הנוסחה אמתית בהשמה S אם ורק אם φ לא נכונה

נוסחת מקושרת: הנוסחה אמתית בהשמה S אם ורק אם הנוסחה אמיתית ע"פ הגדרת הקשר

נוסחת $\exists x\varphi$: הנוסחה אמתית בהשמה S אם ורק אם קיים איבר a, כך ש φ אמתית בהשמה$\varphi[x\backslash a]$

נוסחת $\forall x\varphi$: הנוסחה אמתית בהשמה S אם ורק אם לכל איבר a, φ אמתית בהשמה $\varphi[x\backslash a]$

משפט 5.5 :

1. לכל שתי השמות מתקיים:

אם הן רלוונטיות ל φ ומתלכדות על המשתנים החופשיים של φ, אזי הן נותנת לφ אותו ערך אמת

2. אם φ פסוק אז כל ההשמות במודל [כולן רלוונטיות עבורו] נותנת לφ אותו ערך אמת

הגדרת נכונות במודל לנוסחה ולפסוק

נוסחה φ **נכונה במודל** M אם ורק אם φ נכונה בכל השמה רלוונטית S במודל

$\varphi \models$ M - **פסוק** φ **נכון במודל** M אם ורק אם φ נכון בהשמה אחת [ולכן נכון בכל ההשמות]

פסוק φ **אינו נכון במודל** M אם ורק אם φ אינו נכון בהשמה אחת [ולכן אינו נכון בכל ההשמות]

הסגור הכולל של φ

אם $x_1, \ldots, x_k$ הם כל המשתנים החופשיים ב φ אזי הפסוק $\forall x_1 \ldots \forall x_k$ הוא **הסגור הכולל של φ**

משפט 5.6 – הסוגר הכולל של נוסחה:

תהי φ נוסחה, x משתנה ו M מודל:

א. φ נכונה במודל M אם ורק אם $\forall x\varphi$ נכונה במודל

ב. φ נכונה במודל M אם ורק אם הסגור הכולל $\forall x_1 \ldots \forall x_k$ נכון במודל M

$\models \varphi$ **- אמת לוגית**: נוסחה φ היא אמת לוגית אם ורק אם היא נכונה בכל מודל [בפרט נכון גם עבור פסוקים]

$\varphi \equiv \omega$ **- שקילות לוגית:** נוסחאות φ, ω שקולות לוגית אם ורק אם הנוסחה $(\varphi \leftrightarrow \omega)$ היא אמת לוגית

משפט 5.8 :

אם מתקיים $\varphi \equiv \omega$ אזי שלילה קשר דו מקומי וכמתים שומרים על השקילות

עבור נוסחה φ, החלפת תת נוסחה שלה בנוסחה שקולה לה, תיתן נוסחה φ' כך ש $\varphi \equiv \varphi'$

משפט 5.9 – טאוטולוגיה של שפת היחסים :

הצבה של נוסחאות $\omega_1, \ldots, \omega_k$ בפסוק משפת הפסוקים שהוא טאוטולוגיה נותנת פסוק שהוא טאוטולוגיה של שפת היחסים

משפט 5.12 – כל נוסחה שקולה לוגית לנוסחה שכל קשריה הם $\neg, \rightarrow$ והכמת $\forall$

[נכון גם עבור $\wedge$ או $\vee$ במקום $\rightarrow$ וגם נכון עבור $\exists$ במקום $\forall$]

משפט 5.13 – כל נוסחה שקולה לוגית **לנוסחה פרנקסית** ולנוסחה **פרנקסית נורמלית**

צורה פרנקסית – כל הכמתים מצד שמאל

צורה פרנקסית נורמלית – צורה פרנקסית שבה הנוסחה הפנימית היא DNF ["או" של "וגם-ים"]

אלגוריתם - המרת חצים ← הכנסת שלילות פנימה ← ריענון משתנים ← נעביר לצורה פרנקסית נורמלית ע"י שקילויות