לשימוש הבודק

## שאלה 4

נבדוק איברים ראשונים של הסדרה (כדי שנוכל לבדוק את $a_n$):

$a_0 = 0$

$a_1 = 8p$

$a_2 = 6p \cdot 8p - 5p^2 \cdot 0 = 48p^2$

$a_3 = 6p \cdot 48p^2 - 5p^2 \cdot 8p = 288p^3 - 40p^3 = 248p^3$

$a_4 = 6p \cdot 248p^3 - 5p^2 \cdot 48p^2 = 1488p^4 - 240p^4 = 1248p^4$

כעת, נחשב את $a_n$ לפי שימוש במשוואה האופיינית:

$$a_{n+2} = 6p \cdot a_{n+1} - 5p^2 \cdot a_n$$

נעבור למשוואה אופיינית

$$\alpha^{n+2} = 6p\alpha^{n+1} - 5p^2\alpha^n \quad /:\alpha^n$$

$$\alpha^2 = 6p\alpha - 5p^2 \quad /+(5p^2 - 6p\alpha)$$

$$\alpha^2 - 6p\alpha + 5p^2 = 0$$

נפתור את המשוואה הריבועית:

$$\alpha_{1,2} = \frac{6p \pm \sqrt{36p^2 - 20p^2}}{2} = \frac{6p \pm 4p}{2} = \begin{cases} 5p \\ p \end{cases}$$

לכן, כפי שמוצג בספר הקורס בפרק 6.3 (עמ' 117-118):

$$a_n = A \cdot (5p)^n + B \cdot p^n$$

נבדוק את המשוואה עבור ערכים שונים של n כדי שנמצא את A ו-B:

$0 = a_0 = A \cdot (5p)^0 + B \cdot p^0 = A + B \rightarrow \boxed{B = -A}$

$8p = a_1 = A \cdot (5p)^1 + B \cdot p^1 = A \cdot (5p) - A \cdot p = 4Ap \rightarrow 4Ap = 8p \rightarrow \boxed{A = 2}$

$\boxed{A = 2} \rightarrow \boxed{B = -2}$

לכן

$$a_n = 2 \cdot (5p)^n - 2p^n = (2 \cdot 5^n - 2)p^n$$

כדי להשתכנע נבדוק עבור $a_2, a_3$

$48p^2 = a_2 = (2 \cdot 5^2 - 2)p^2 = 48p^2$ ✓

$248p^3 = a_3 = (2 \cdot 5^3 - 2)p^3 = 248p^3$ ✓

לכן התשובה הנכונה והסופית היא:

$$a_n = (2 \cdot 5^n - 2) \cdot p^n$$

## שאלה 3

א. מספר הפונקציות החח"ע מ-X ל-Y שווה לבחירה של 4 מתוך 7 $\binom{7}{4}$,
כי 4 איברים מX יתאימו רק איברים בY, כפול $4!$, מכיוון שיש $4!$
דרכים שונות לחבר את ה4 מספרים מX ל4 מספרים בY, כאשר החח"ע
תשמר (לא יהיו איברים מX שיתאימו לאותו איבר בY, אחרת היינו מקבלים $4^2$)
לכן:

$$\binom{7}{4}\cdot 4! = \frac{7!}{4!3!}\cdot 4! = \frac{7!}{3!} = 4\cdot5\cdot6\cdot7 = 840$$

ב. נסמן $U$ = כל הפונקציות מX לY שבהם קיים $i\in X$ כך ש $f(i)=i$.

ונסמן $A_n$ מספר הפונקציות החח"ע שבהם $f(n)=n$.

$$|A_1| = \binom{6}{3}\cdot 3! = \frac{6!}{3!3!}\cdot 3! = \frac{6!}{3!} = 120$$

מכיוון שהתנאי $f(1)=1$, לכן יש לנו לבנות פונקציות חח"ע מ$\{2,3,4\}$
אל $\{2,3,4,5,6,7\}$, באותה דרך כמו שעשינו בא'

$$|A_1\cap A_2| = \binom{5}{2}\cdot 2! = \frac{5!}{2!3!}\cdot 2! = \frac{5!}{3!} = 20$$

הסבר דומה לקודם

$$|A_1\cap A_2\cap A_3| = \binom{4}{1}\cdot 1! = \frac{4!}{1!3!}\cdot 1! = 4$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4| = \binom{4}{0}\cdot 0! = 1$$

מתוך סימטריה, $|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|$ וגם כל החיתוכים שלהם, לכן:
(אפשר לראות את מספר החיתוכים כשאלה הבאה מספר קומבינטוריקה סע' 86)

$$U = 4\cdot|A_1| - 6\cdot|A_1\cap A_2| + 4|A_1\cap A_2\cap A_3| - |A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4| =$$
$$= 4\cdot120 - 6\cdot20 + 4\cdot4 - 1 = 375$$

מכיוון שמס' הפונקציות החח"ע הכולל הוא 840, ו"הרעות" הוא 375,
מספר הפונקציות החח"ע מX לY שבהם לכל $i\in X$, $f(x)\neq x$ הוא

$$840 - 375 = 465$$

לשימוש הבודק

## שאלה 2

**א. סימטריות:**

יהיו $a,b\in A$, נניח $aR^{-1}Rb$, צ"ל $bR^{-1}Ra$

ע"פ הגדרה 2.6 של רלציה הופכית, $aR^{-1}Rb \leftrightarrow b(R^{-1}R)^{-1}a$

ועפ"י עמ' 40 $(RS)^{-1}=S^{-1}R^{-1}$, לכן $(R^{-1}R)^{-1}=R^{-1}(R^{-1})^{-1}$

ועפ"י עמ' 36 שאלה 2.12ג, $(R^{-1})^{-1}=R$, לכן $(R^{-1}R)^{-1}=R^{-1}R$

לכן $b(R^{-1}R)^{-1}a \leftrightarrow bR^{-1}Ra$

מש"ל סימטריות.

**טרנזיטיביות:**

יהיו $a,b,c\in A$, נניח $aR^{-1}Rb$ וגם $bR^{-1}Rc$. צ"ל $aR^{-1}Rc$

מ $aR^{-1}Rb$ וגם $bR^{-1}Rc$, נובע עפ"י הגדרת הרכבת רלציות (2.7)

ש $aR^{-1}RR^{-1}Rc$.

נשים לב שמכיוון הרכבת $RR^{-1}$, מוכלת או שווה ב $I_A$ (עפ"י הנתון)

ונקבל $aR^{-1}I_ARc$, בעמ' 44 מוכח ש $I_AR=R$, לכן נקבל ש:

$aR^{-1}I_ARc=aR^{-1}Rc$

וקיבלנו את מה שצריך להוכיח.

**ב.** הוכחנו סימטריות וטרנזיטיביות, לכן צריך להוכיח רק רפלקסיביות כדי להגיע לשקילות.

**רפלקסיביות:**

יהי $a\in A$, צ"ל ש $aR^{-1}Ra$

$a\in A$, לכן, מכיוון ש $Range(R)=A$, נובע שקיים $b\in A$ כך ש: $bRa$

מהגדרת רלציה הופכית מתקיים $aR^{-1}b$.

ולכן מהגדרת הרכבת רלציות מכיוון ש $aR^{-1}b$ וגם $bRa$ נקבל ש $aR^{-1}Ra$

וקיבלנו שלכל $a\in A$ $aR^{-1}Ra$, לכן $R^{-1}R$ רפלקסיבית מעל $A$

מכיוון שהיא סימטרית, טרנזיטיבית ורפלקסיבית היא רלצית שקילות מעל $A$

## שאלה 1

**א** [3] אם אברהם שותה ונוהג - אין לו שכל (אם לאברהם היה שכל הוא לא היה עושה את זה)

שלב א ו-ב - אנחנו לא יודעים מה יקרה אם אין לו שכל, כך גם אחרים

שלב ג ו-ד - שום דבר לא צריך להתקיים לגבי שכל, יכול להיות שאדם

בלי שכל גם יהיה בסדר

**ב** [3] לפי 5.23 נציין ש $|R|=c$ אז $|P(R)|=2^c$

נתון $d=|P(R)|$ לכן $2^c=d$

נעלה את 2 הצדדים בחזקת c ונקבל:

$$(2^c)^c=d^c$$

לפי 5.27 ב' $(2^c)^c=2^{c\cdot c}$ ולפי 5.15 ב' $c\cdot c=c$, לכן $2^{c\cdot c}=2^c$:

ולכן קיבלנו ש $2^c=d^c$.

וראינו קודם ש $2^c=d$, לכן $d=d^c$

**ג** [3] 15

הגרף המלא $K_6$, כל צומת מחוברת בקשת לכל צומת אחרת,

לכן כל חלוקה של 6 הצמתים ל-3 זוגות היא זיווג מושלם.

נחלק 6 ל-3 זוגות:

$$\frac{6!}{\underbrace{2!2!2!}\,3!}=15$$

לא משנה הסדר בתוך כל זוג

לא משנה סדר הזוגות