אלגוריתמים (20417)

מפגש 3 – פרק ב - מסלולים קצרים יותר

שאלה 1

- נתון גרף מכוון עם משקלים חיוביים על הקשתות.
- כמו כן נתונה פונקציית צביעה $c\colon V \to \{\mathbf{red}, \mathbf{black}\}$ על הצמתים.
- מסלול הוא חוקי אמ"מ מספר הצמתים האדומים בו הוא זוגי
- תן אלגוריתם יעיל ככל שתוכל המוצא את מרחקי הצמתים מצומת שחור כלשהו s

שאלה 1 - המשך

- נגדיר גרף חדש כלהלן $G' = (V, E)$

$$V_{odd} = \{v_o \mid v \in V\}$$
$$V_{even} = \{v_e \mid v \in V\}$$
$$V' = V_{odd} \cup V_{even}$$

$$E = \{(u_o, v_o), (u_e, v_e), \mid (u,v) \in E,\ v \text{ is } \textbf{black}\} \cup \{(u_o, v_e), (u_e, v_o) \mid (u,v) \in E,\ v \text{ is } \textbf{red}\}$$

מה הגרף הזה נותן?

הגדר במדויק את הרדוקציה והאלגוריתם המתקבל ממנה

שאלה 2

- נתון גרף מכוון ממושקל ללא מעגלים שליליים
- כתוב אלגוריתם המוצא את המעגל בעל המשקל המינימלי, נתח את סיבוכיותו והוכח את נכונותו

רדוקציה!

לכל $v \in V$ נגדיר את הגרף הבא $G_v = (V_v, E_v)$

$$G_v = \{v_s,\ v_t\} \cup V - \{v\}$$

$$E = E - \{(u,v),(v,u) \mid u \in V\} \cup \{(v_s,u) \mid (v,u) \in E\} \cup \{(u,\ v_t) \mid (u,v) \in E)$$

שאלה 3 - ארביטרא'ז

- ארביטראז' הינו ניצול הפרש מחירים בשווקים שונים בעולם. בשאלה זאת נעסוק בארביטרא'ז על שערי חליפין. להלן מספר שערי חליפין ("דוקומנטרי" מהיום...)

1$ = 0.52 £

1£ = 1.49 €

1 € = 149.99 ¥

1 ¥ = 0.00847 $

ומה יקרה אם נבצע זאת בכיוון השני?

מה יקרה אם ניקח 100$ ונמיר אותם כך:

100$ * 0.52 = 52 £

52 £ * 1.49 = 77.48 €

77.48 € = 11621.2252 ¥

11621.2252 ¥ * 0.00847 = 98.43$

יצאנו פריירים ☹

ארביטראז' - ההמשך

- הניחו כי נתונה לכם מטריצת שערי המרה $C^{N\times N}$ כך שמחיר מטבע i ל j מתבצעת כך $j = c[i,j] \cdot i$
  שימו לב – הפעם זה לאו דווקא סימטרי
- נסחו את הבעיה המתאימה בגרפים
- תנו אלגוריתם הבודק האם קיימת סדרת המרות "רווחית"

ארביטראז'

- גישה א' – שינוי Relax
- גישה ב' – רדוקציה ע"י שימוש בתכונות ה log

שאלה 4

- נתונים זמני טיסות בין מספר ערים בעולם. כמו כן לכל עיר נתונים זמני המתנה אופייניים (הניחו כי בכל עיר ממתינים זמן קבוע לטיסה הבאה ללא קשר למקור ולייעד). *המתנה זאת הינה לקראת טיסה*, כאשר נוחתים, ניתן לצאת מהטרמינל מיידית
- נסחו את הבעיה בגרפים, ותנו אלגוריתם יעיל המחשב את זמני ההגעה הקצרים ביותר מתל אביב לכל אחת מהערים הנתונות

שאלה 4 – הגדרת הבעיה

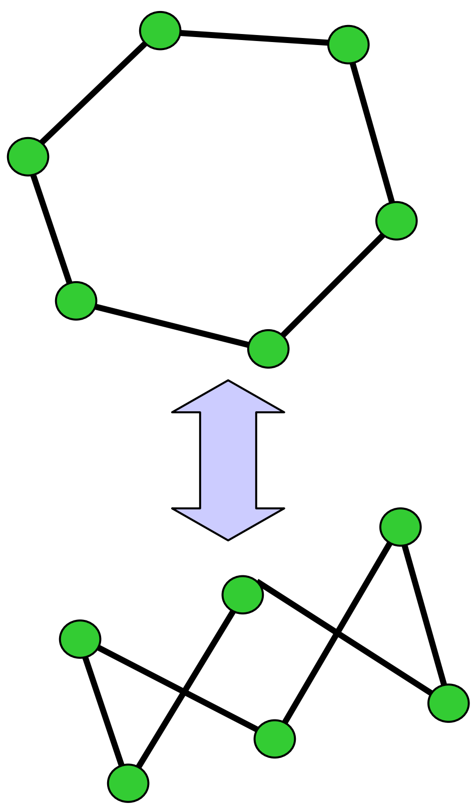
- תהי V קבוצת הערים. לכל $u,v \in V \times V$,
יהיו $w(u,v)$ זמן הטיסה בין u ל v,
ו $c(u)$ זמן ההמתנה בעיר u
זוהי הגדרה של גרף מכוון ונוכל אף לסמן $w(u,v) = \infty$
אם אין טיסה ישירה בין עיר u לעיר v

נגדיר פונקצית משקל חדשה w' כלהלן:

- $w'(u,v) = w(u,v) + c(u)$
- נשים לב כי זמן ההגעה מעיר x לעיר y היא $\delta(x,y)$ בגרף המתקבל עם פונקצית המשקל w' על הקשתות, כאשר כפי שנתון בהגדרה - בעיר היעד לא ממתינים לטיסה

שאלה 5

גרף בלתי מכוון $G(V,E)$ יקרא
דו צדדי אם ורק אם קיימת
חלוקה לא טריוויאלית $V = V_1 \cup V_2$, כך ש $(v,u) \in E$
אמ"מ $v \in V_1, u \in V_2$ או v
$\in V_2$ ו $u \in V_1$



הוכח:

גרף הוא דו צדדי אמ"מ הוא
אינו מכיל מעגל אי זוגי

שאלה 5 – כיוון א'

$\Leftarrow$ אם גרף הוא דו"צ, הוא אינו מכיל מעגל בעל מספר אי זוגי של קודקודים

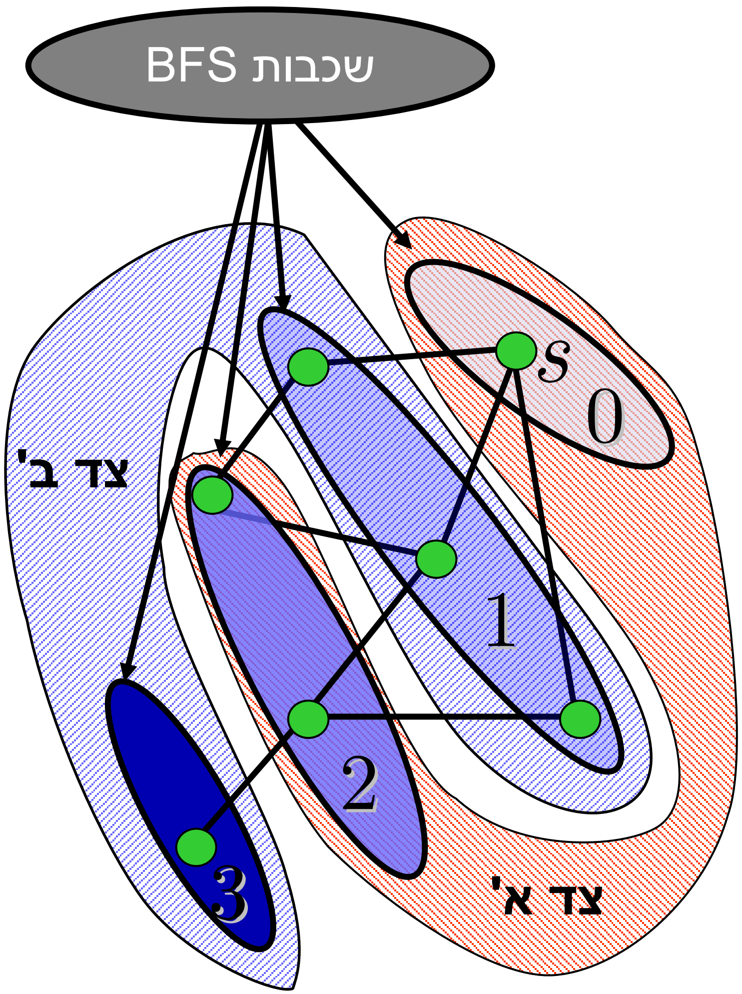
יהיו: $G(V,E)$ דו"צ, ו $(v_1,\ldots,v_k,v_{k+1})$ מעגל (פשוט) כך ש $v_1 = v_{k+1}$

נניח ללה"כ כי $v_1 \in V_1$, אזי כל v_i בעל i אי זוגי שייך ל V_1
וכל v_j בעל j זוגי שייך ל V_2 - אחרת קיימת קשת בתוך אותו צד

מכאן, אם k אי זוגי, נקבל כי v_1 ו v_{k+1} שייכים לצדדים שונים, בסתירה לכך שהם שווים

(מסתתרת בהוכחה אינדוקציה טריוויאלית למדי – המדקדקים יכולים להוכיח בעזרתה את הטענות)

שאלה 5 – כיוון ב'



$\Rightarrow$ אם גרף אינו מכיל מעגל בעל מספר אי זוגי של קודקודים הוא דו"צ

- נניח ללה"כ כי הגרף קשיר (מדוע אין זה מגביל את הכלליות?)
- נתבונן בקדקוד כלשהו s ובעץ ה BFS ששורשו ב s
- **אינטואיציה**: אם אין מעגל אין זוגי אז אין קשת בין שכבות שעומקן בעל אותה זוגיות, ומכאן נוכל לחלק את הגרף **לשני צדדים**, לפי זוגיות השכבות

בין שכבות שונות V_i, V_j (נניח $j > i$) בעלות אותה זוגיות לא תתכן קשת בשום גרף – אחרת V_j היתה מתגלית מייד אחרי V_i.
נראה עתה כי בגרף כאמור - לא תתכן קשת גם בתוך אותה שכבה

שאלה 5 – הוכחה פורמלית

$\Rightarrow$ אם גרף קשיר אינו מכיל מעגל בעל מספר אי זוגי של קודקודים הוא דו"צ

- יהי $G = (V, E)$ גרף כלעיל, יהי $s \in G$, k מרחק הצומת הרחוק ביותר מ s ויהיו $V_1, \ldots, V_k \subseteq V$ מוגדרות כלהלן:
  $Vi = \{v \,|\, \delta(s, v) = i\}$ (אלה הן שכבות ה BFS)
- מכיוון שהגרף קשיר מתקיים $\bigcup_{i=0}^{k} v_i = V$

טענת עזר:

- אין בגרף קשתות בין קבוצות V_i, V_j כך ש $(i - j) \bmod 2 = 0$
  (אין קשתות בין צמתים שזוגיות מרחקם מ s שווה)
- הטענה הראשית נובעת מטענת העזר (מדוע?)

שאלה 6 – הוכחה פורמלית (המשך)

הוכחת טענת העזר:

אין בגרף קשתות בין קבוצות $V_i,\ V_j$ כך ש $(i-j) \bmod 2 = 0$

יהיו $P_y = (s,\dots,x)$ ו $P_y = (s,\ \dots,\ y)$ מסלולים קצרים ביותר מ s ל x ו y בהתאמה

ונניח בשלילה כי קיימת קשת בין $x \in V_i$ ל $y \in V_j$, ו $(i-j) \bmod 2 = 0$

יהי w הקדקוד האחרון שמשותף ל P_x עם P_y (יתכן כי זהו s)

לפי למה 25.1 (תת מסלולים קצרים ביותר) תת המסלולים של P_x ו P_y עד w הם מסלולים קצרים ביותר מ s ל w ולכן אורכם זהה

מכאן

$$\delta(w,\ x) = \delta(s,x) - \delta(w,\ x)$$

$$\delta(w,\ y) = \delta(s,y) - \delta(w,\ y)$$

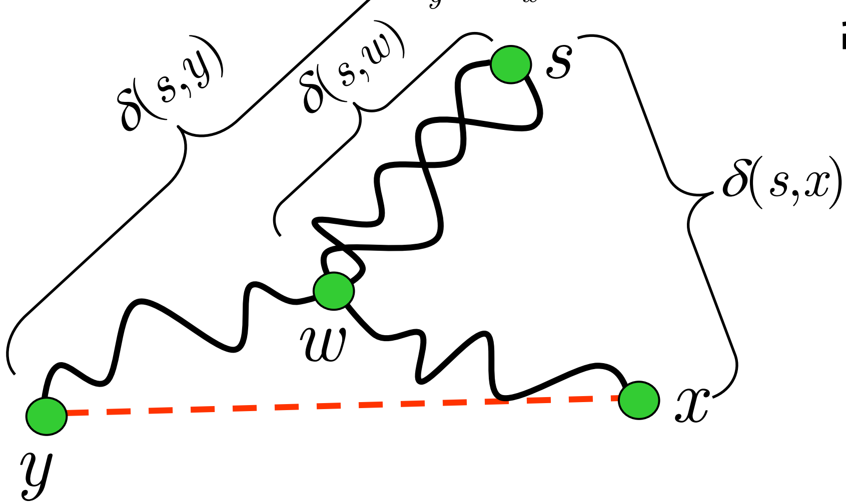
ולכן זוגיות $\delta(w,\ x)$ ו $\delta(w,\ y)$ שווה גם כן.

בנוסף – למסלולים $(w,\ \dots,x)$ ו $(w,\ \dots,y)$

יש קדקוד משותף אחד בדיוק,

על כן מספר הצמתים במעגל: $(x,\ \dots,w,\dots y,x)$

הוא אי זוגי, בסתירה להנחה ■



שאלה 8

- כתוב אלגוריתם המקבל גרף עם משקלות $1,2$ ומוצא מרחק בין s ל t
- פתרון

נבנה גרף חדש G' כך:

$$V(G') = V(G) \cup \{v^e | e \in E \textbf{ and } w(v) = 2\}$$

$$E(G') = (E(G) - \{e \mid w(e) = 2\}) \cup$$
$$\{(v^e,w),\ v^e,u) | e = (u,\ w)\}$$

נריץ BFS על G' ונחזיר את $d[t]$

מסקנות

- צמצום הבעיה עשוי לתת אלגוריתם טוב יותר ולאו דווקא המתבקש מיידית
- רדוקציה