תשובה 1

הטענה ש- f היא **על** $\mathbf{R}$ פירושה:

לכל $y \in \mathbf{R}$ קיים **לפחות** x אחד ב- A המקיים $f(x) = y$.

הטענה ש- f **חד-חד-ערכית** פירושה:

לכל $y \in \mathbf{R}$ קיים **לכל היותר** x אחד ב- A המקיים $f(x) = y$.

לכן, כדי להוכיח ש- f היא חח"ע ועל $\mathbf{R}$, עלינו להראות ש-

לכל $y \in \mathbf{R}$ קיים x **אחד ויחיד** ב- A המקיים $f(x) = y$.

נתבונן אפוא במשוואה $f(x) = y$, כלומר $\frac{x}{1-x^2} = y$,

ונראה כי אכן לכל $y \in \mathbf{R}$ קיים x **אחד ויחיד** ב- A המקיים את המשוואה.

אם $y = 0$ רואים שהפתרון היחיד למשוואה הוא $x = 0$. ואכן $0 \in A$.

נניח כעת ש- $y \neq 0$.

לאחר סידור המשוואה נקבל $yx^2 + x - y = 0$.

זו משוואה ריבועית עבור הנעלם x. מנוסחת פתרון משוואה ריבועית:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4y^2}}{2y} = -\frac{1}{2y} \pm \sqrt{\frac{1}{4y^2}+1} = k \pm \sqrt{k^2+1}$$

כאשר סימַנו $k = -1/(2y)$ ($0 \neq k \in \mathbf{R}$).

עלינו להראות כי לכל $0 \neq k \in \mathbf{R}$, **בדיוק אחד** משני ערכי x המוגדרים ע"י המשוואה נמצא בתחום $-1 < x < 1$.

נשים לב ש- $\sqrt{k^2+1} > 1$ תמיד.

נפריד לשני מקרים:

(1) $k > 0$. אז $x_+ = k + \sqrt{k^2+1} > 1$ כלומר $x_+ \notin A$.

נראה כי במקרה זה $x_- \in A$:

מכיוון ש- $k > 0$, מתקיים $k^2 + 2k + 1 > k^2 + 1$,

כלומר $(k+1)^2 > k^2 + 1$

בהוצאת שורש (הביטויים חיוביים!) נקבל $k + 1 > \sqrt{k^2+1}$

כלומר $k - \sqrt{k^2+1} > -1$.

ברור גם כי $0 > k - \sqrt{k^2+1}$

וקיבלנו אפוא כי $0 > x\_ > -1$. לכן $x\_ \in A$.

(2) המקרה $k < 0$ מטופל באופן דומה (השלימו). לחילופין, נוכל לקבל את המקרה הזה מתוך המקרה הקודם בעזרת הסתכלות בתכונותיה של f ומעט עבודה.

תשובה 2

א. לא. למשל $f(2) = f(3) = 2$.

ב. f היא **על**: בהינתן $n \in \mathbf{N}^*$, נקח $x = 2^{n-1}$. מתקיים $x \in \mathbf{N}^*$ ו- $f(x) = n$.

ג. ל- 5 יש שני מחלקים שונים: הוא עצמו ו- 1. לפי מה שנאמר בפתח השאלה, תכונה זו היא בדיוק התכונה המגדירה מספרים ראשוניים. לכן המחלקה שבה נמצא 5 היא קבוצת כל המספרים הראשוניים.

ד. למספר 4 יש שלושה מחלקים שונים: 1, 2 והוא עצמו.

נוכיח שתכונה זו מאפיינת מספרים שהם **ריבוע של מספר ראשוני**.

כיוון אחד: נניח $n = p^2$ כאשר p ראשוני. אז n מתחלק ב- $1, p, p^2$. נראה ש- n אינו מתחלק באף מספר אחר: לפי ההדרכה שפורסמה לשאלה, כל מחלק k של n הוא מכפלה של גורמים ראשוניים המופיעים ב- n, כאשר כל ראשוני מופיע ב- k מספר פעמים שאינו עולה על מספר הופעותיו ב- n.

מכיוון של- n יש רק גורם ראשוני אחד, p, המופיע פעמיים, האפשרויות היחידות הן $1, p, p^2$.

כיוון שני: נניח של- n יש בדיוק 3 מחלקים. כלומר פרט לעצמו ול- 1 הוא מתחלק בעוד מספר אחד בלבד. נקרא למספר זה p. אם p אינו ראשוני אז n מתחלק גם בכל גורם ראשוני של p ונקבל יותר מ- 3 מחלקים ל- n, בסתירה להנחה. לפיכך p ראשוני. בנוסף, מכיוון ש- n מתחלק ב- p נוכל לרשום $n = p \cdot q$ עבור q טבעי חיובי כלשהו. מכך ש- $p \neq n$ ו- $p \neq 1$ נובע $q \neq 1$ ו- $q \neq n$. לכן אם $q \neq p$ נקבל יותר מ- 3 מחלקים ל- n, בסתירה להנחה.

לכן $q = p$ כלומר $n = p^2$.

ה. לפי הדיון "יחס שקילות המושרה ע"י פונקציה" או לפי הדיון "העתק טבעי", מספר מחלקות השקילות ש- f משרה הוא כמספר האיברים בתמונה של f. ראינו ש- f היא **על**, כלומר תמונתה היא כל $\mathbf{N}^*$, לכן קבוצת מחלקות השקילות היא בהתאמה חד-חד-ערכית ועל לקבוצה $\mathbf{N}^*$, ולפיכך היא אינסופית.

ו. יהי x טבעי גדול מ- 1, המקיים $f(x) = n$, כאשר $1 < n \in \mathbf{N}$. נוכיח שהמחלקה שבה x נמצא היא אינסופית. יהי p ראשוני כלשהו. המספר p^{n-1} מתחלק בדיוק ב- n מספרים

שונים : $1, p, p^2, \ldots, p^{n-1}$ (מסיבה דומה למה שנאמר בפתרון סעיף ד, כיוון ראשון). לכן p^{n-1} נמצא באותה מחלקה של x. במקום p נוכל להציב **כל מספר ראשוני**. עבור מספרים שונים p,q מובן ש- $p^{n-1} \neq q^{n-1}$. מכיוון שקבוצת המספרים הראשוניים היא אינסופית, קיבלנו אינסוף איברים שונים הנמצאים כולם במחלקה של x.

תשובה 3

א. תכונת **הרפלקסיביות** $X \subseteq X$ הוזכרה בעמ׳ 6 בספר הלימוד.

אנטי-סימטריות: אם $X \subseteq Y$ ו- $Y \subseteq X$ אז $X = Y$: זו שאלה 1.3 בעמ׳ 6 בספר.

טרנזיטיביות: אם $X \subseteq Y$ ו- $Y \subseteq Z$ אז $X \subseteq Z$: הוכח בשאלה 1.6 בעמ׳ 8 בספר.

ב. יחס מעל A הוא קבוצה של זוגות סדורים של אברי A, לכן כל יחס מעל A, ובפרט כל יחס שקילות מעל A, **חלקי** לקבוצה $A \times A$. קל לבדוק ש- $A \times A$ עצמה היא יחס שקילות (זהו יחס השקילות שבו כל אברי A נמצאים באותה מחלקה). לכן $A \times A$ היא האיבר הגדול ביותר ב- K לגבי הכלה.

מצד שני, יחס שקילות הוא בפרט רפלקסיבי, כלומר **מכיל** את I_A.

קל לבדוק שהיחס I_A אף הוא יחס שקילות מעל A (זהו יחס השקילות שבו כל איבר של A נמצא במחלקה בפני עצמו). מכיון שכל יחס שקילות מעל A מכיל אותו, I_A הוא האיבר הקטן ביותר ב- K לגבי הכלה.

ג. היחס הריק מוכל בכל יחס, והוא אנטי-סימטרי (אם לא ברור לך מדוע הוא אנטי-סימטרי, ר׳ שאלות רב-ברירה בעניין זה באתר הקורס). לכן הוא איבר קטן ביותר ב- J לגבי הכלה.

לעומת זאת, **אין** ב- J איבר גדול ביותר לגבי הכלה. כדי להראות זאת, נראה שני איברים **מקסימליים** ב- J, שונים זה מזה (לפי שאלה 3.21 בעמ׳ 93 בספר, אם יש כמה איברים מקסימליים אז אין איבר גדול ביותר).

יהי $R = I_A \cup \{(1,2)\,,(2,3)\,,(1,3)\}$. מבדיקה ישירה, R הוא אנטי-סימטרי.

אם קיים ב- J איבר R_1 (כלומר יחס אנטי-סימטרי R_1) המכיל-ממש את R, אז R_1 חייב להכיל לפחות אחד מהזוגות $(3,2)\,,(3,1)\,,(2,1)$, כי אלה כל אברי $A \times A$ שמחוץ ל- R. אבל הוספה של כל אחד מהזוגות האלה ל- R מקלקלת את האנטי-סימטריות. לכן אין יחס אנטי-סימטרי מעל A המכיל את R. לפיכך R הוא **איבר מקסימלי** ב- J.

בדומה ל- R נוכל לקחת למשל את $S = I_A \cup \{(2,1)\,,(3,2)\,,(3,1)\} = R^{-1}$,

מסיבה דומה לגמרי, גם הוא איבר מקסימלי ב- J.

מצאנו שני איברים מקסימליים, לכן אין ב- J איבר גדול ביותר.

תשובה 4

בדיקה: נציב $n=0$: $3^0+7^0-2=1+1-2=0$, ואפס מתחלק ב- 8.

מעבר: נניח שהטענה נכונה עבור n , כלומר נניח $3^n+7^n-2=8k$ כאשר $k\in\mathbf{N}$,

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$. נפתח:

$$3^{n+1}+7^{n+1}-2 = 3\cdot3^n+7\cdot7^n-2$$

$$= 3\cdot(3^n+7^n-2) + 4\cdot7^n+4$$

$$= 3\cdot8k + 4\cdot(7^n+1)$$

במעבר האחרון נעזרנו בהנחת האינדוקציה. קיבלנו סכום של שני ביטויים. המחובר $3\cdot8k$ כמובן מתחלק ב- 8 . בביטוי השני, 7^n+1 הוא מספר זוגי, לכן $4\cdot(7^n+1)$ מתחלק ב- 8.

לכן הסכום $3\cdot8k + 4\cdot(7^n+1)$ מתחלק גם הוא ב- 8.

הראינו שהטענה נכונה עבור $n+1$.

לפי עקרון האינדוקציה, משני השלבים נובע שהטענה נכונה לכל n טבעי.

איתי הראבן