פתרונות לממ"ן 15 - 2014א - 20425

1. $$\mathrm{Var}(M_n)=\mathrm{Var}\left(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\left(\tfrac{1}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)=\left(\tfrac{1}{n}\right)^2 n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$ [ה-X_i-ים בלתי-תלויים]

$$\mathrm{Cov}(X_1,M_n)=\mathrm{Cov}\left(X_1,\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_1,X_i)=\tfrac{1}{n}\mathrm{Var}(X_1)+0=\frac{\sigma^2}{n}$$

ומכאן:
$$\rho(X_1,M_n)=\frac{\mathrm{Cov}(X_1,M_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)\mathrm{Var}(M_n)}}=\frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\sqrt{\sigma^2\cdot\frac{\sigma^2}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

2. המשתנה המקרי X_m מוגדר על-ידי המספר הסידורי של ההטלה שבה התקבלה התוצאה H בפעם ה-m-ית והמשתנה המקרי X_n, עבור $m<n$, מוגדר על-ידי המספר הסידורי של ההטלה שבה התקבלה התוצאה H בפעם ה-n-ית. לכן, לשניהם יש התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים m או n, בהתאמה, ו-p.
כעת, נציג את המשתנה המקרי X_n על-ידי הסכום $X_n=X_m+X_{n-m}$, כאשר המשתנה המקרי X_{n-m} מוגדר על-ידי מספר ההטלות שנערכות לאחר שהתוצאה H התקבלה בפעם ה-m-ית ועד לקבלתה בפעם ה-n-ית. באופן כזה, אנו מקבלים שהמשתנים המקריים X_m ו-X_{n-m}, שסכומם הוא X_n, בלתי-תלויים זה בזה, וכי מתקיים:

$$\mathrm{Cov}(X_m,X_n)=\mathrm{Cov}(X_m,X_m+X_{n-m})=\mathrm{Var}(X_m)+\mathrm{Cov}(X_m,X_{n-m})=\mathrm{Var}(X_m)=\frac{m(1-p)}{p^2}$$

$$\rho(X_m,X_n)=\frac{\mathrm{Cov}(X_m,X_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_m)\mathrm{Var}(X_n)}}=\frac{\frac{m(1-p)}{p^2}}{\sqrt{\frac{m(1-p)}{p^2}\cdot\frac{n(1-p)}{p^2}}}=\sqrt{\frac{m}{n}}$$

3. נרשום תחילה את נתוני הבעיה:

$X\sim Geo(0.1)$

$Y\mid X=i\ \sim B(i-1\ ,\ 0.35)$

כאשר $P\{Y=0\mid X=1\}=1$

א. $P\{X-1\geq 8\}=P\{X\geq 9\}=P\{X>8\}=(1-0.1)^8=0.9^8=0.43047$

<u>פתרון I</u>

ב. לכל $i=1,2,\ldots$ מתקיים: $E[Y\mid X=i]=0.35\cdot(i-1)$

לכן: $E[Y]=E[E[Y\mid X]]=E[0.35(X-1)]=0.35E[X-1]=0.35\cdot 9=3.15$

ג. לכל $i=1,2,\ldots$ מתקיים: $\mathrm{Var}(Y\mid X=i)=0.35\cdot 0.65\cdot(i-1)$

לכן: $\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{Var}(E[Y\mid X])+E[\mathrm{Var}(Y\mid X)]$

$$=\mathrm{Var}(0.35(X-1))+E[0.35\cdot 0.65(X-1)]=0.35^2\,\mathrm{Var}(X)+0.35\cdot 0.65E[X-1]$$

$$=0.35^2\cdot 90+0.35\cdot 0.65\cdot 9=13.0725$$

פתרון II

ב. לכל $i=1,2,\ldots$, נגדיר אינדיקטור: $Y_i=\begin{cases}1 & \text{, ביצה } i \text{ בקעה והאפרוח בגר} \\ 0 & \text{, אחרת}\end{cases}$

לפי נתוני הבעיה מתקיים $Y=\sum_{i=1}^{X-1}Y_i$, כאשר X הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר 0.1.

כמו כן, אין תלות בין ה-Y_i-ים ובינם לבין X .

לכן: $E[Y]=E\left[\sum_{i=1}^{X-1}Y_i\right]=E[X-1]E[Y_1]=9\cdot 0.35=3.15$

ג. $\operatorname{Var}(Y)=\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{X-1}Y_i\right)=E[X-1]\operatorname{Var}(Y_1)+(E[Y_1])^2\operatorname{Var}(X-1)=9\cdot 0.2275+0.35^2\cdot 90=13.0725$

4. א. נגדיר תחילה סדרת אינדיקטורים ביחס למקומות ברשימה:

נגדיר כך: $X_i=\begin{cases}1 & \text{, במקומות } i \text{ ו- } i+1 \text{ ברשימה יש בנות} \\ 0 & \text{, אחרת}\end{cases}$ לכל $i=1,\ldots,29$.

ומתקיים: $X=\sum_{i=1}^{29}X_i$.

נגדיר סדרה נוספת של אינדיקטורים – אינדיקטור לכל בת בכיתה:

$Y_i=\begin{cases}1 & \text{, בת } i \text{ עולה מייד לאחר בת אחרת מהכיתה} \\ 0 & \text{, אחרת}\end{cases}$ לכל $i=1,...,10$.

ומתקיים: $X=\sum_{i=1}^{10}Y_i$.

ב. נחשב את התוחלת של X בעזרת שתי סדרות האינדיקטורים שהוגדרו בסעיף הקודם.

דרך I

לכל $i=1,\ldots,29$ מתקיים: $E[X_i]=P\{X_i=1\}=\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}=\frac{3}{29}$

לכן: $E[X]=\sum_{i=1}^{29}E[X_i]=29\cdot\frac{3}{29}=3$

דרך II

כעת, לכל $i=1,\ldots,10$ מתקיים: $E[Y_i]=P\{Y_i=1\}=\frac{29}{30}\cdot\frac{9}{29}+\frac{1}{30}\cdot 0=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$

ומכאן מקבלים: $E[X]=\sum_{i=1}^{10}E[Y_i]=10\cdot\frac{3}{10}=3$

ג. גם את השונות של X נחשב בעזרת שתי סדרות האינדיקטורים שהוגדרו בסעיף א.

דרך I

לכל $i=1,\ldots,29$ מתקיים: $\operatorname{Var}(X_i)=P\{X_i=1\}P\{X_i=0\}=\frac{3}{29}\cdot\frac{26}{29}=\frac{78}{841}$

ולכל $i\neq j$ מתקיים: $P\{X_i=1,X_j=1\}=\begin{cases}\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}\cdot\frac{8}{28}=\frac{6}{203} & , \quad j=i+1 \\ \frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}\cdot\frac{8}{28}\cdot\frac{7}{27}=\cdot\frac{2}{261} & , \quad j>i+1\end{cases}$

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} \frac{6}{203} - \left(\frac{3}{29}\right)^2 = \frac{111}{5{,}887} & , \quad j = i+1 \\ \frac{2}{261} - \left(\frac{3}{29}\right)^2 = \frac{-23}{7{,}569} & , \quad j > i+1 \end{cases}$$

לכן:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{29} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

$$= 29 \cdot \tfrac{78}{841} + \underbrace{2 \cdot 28 \cdot \tfrac{111}{5{,}887}}_{j=i+1} - \underbrace{2 \cdot \tfrac{27\cdot 28}{2} \cdot \tfrac{23}{7{,}569}}_{j>i+1} = \tfrac{42}{29} = 1.4483$$

<u>פתרון II</u>

לכל $i = 1,\ldots,10$ מתקיים: $\mathrm{Var}(Y_i) = P\{Y_i = 1\}P\{Y_i = 0\} = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{21}{100} = 0.21$

ולכל $i, j = 1,\ldots,10$ $(i \neq j)$ מתקיים:

$$E[Y_iY_j] = P\{Y_i = 1, Y_j = 1\} = \frac{28}{435} \cdot \overbrace{\frac{8}{28}}^{\text{לפני בנות } i \text{ ו-} j \text{ יש בת נוספת}} + \frac{29}{425} \cdot 0 + \frac{435-28-29}{435} \cdot \overbrace{\frac{8\cdot 7}{28\cdot 27}}^{\text{לפני בת } i \text{ ולפני בת } j \text{ יש בנות}} = \frac{12}{145}$$

בנות i ו-j במקומות סמוכים, אך אף אחת מהן לא במקום 1 ברשימה

אחת מהבנות i ו-j במקום 1 ברשימה

בין בנות i ו-j מפריד לפחות מקום אחד, ואף אחת מהן לא במקום 1 ברשימה

הסבר: יש בסך-הכל $\binom{30}{2} = 435$ זוגות שונים של מקומות ברשימה. 28 מזוגות אלו הם זוגות של מקומות סמוכים <u>שאינם בתחילת הרשימה</u> ו-29 מהם הם זוגות של מקומות <u>שאחד מהם הוא המקום הראשון ברשימה</u>. לכן, יש $435 - 28 - 29 = 378$ זוגות של מקומות שאינם סמוכים ואף אחד מהם אינו הראשון ברשימה.

כלומר: $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = E[Y_iY_j] - E[Y_i]E[Y_j] = \frac{12}{145} - \frac{9}{100} = -\frac{21}{2{,}900}$

לכן: $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{10} \mathrm{Var}(Y_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 10 \cdot \frac{21}{100} - 10 \cdot 9 \cdot \frac{21}{2{,}900} = \frac{42}{29} = 1.4483$

5. א. למשתנה המקרי N יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר 0.5, לכן: $E[N] = \frac{1}{0.5} = 2$

כמו כן, לכל $i = 1,2,\ldots,N$, למשתנה המקרי X_i יש התפלגות אחידה בדידה בין 1 ל-6. לכן, מתקיים:

$$E[X_i] = \tfrac{1+6}{2} = 3.5$$

ומכאן מקבלים כי: $E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1] = 2 \cdot 3.5 = 7$

ב. מהאמור בסעיף א נקבל כי: $\mathrm{Var}(N) = \frac{0.5}{0.5^2} = 2$

$$\mathrm{Var}(X_i) = \tfrac{6^2-1^2}{12} = 2\tfrac{11}{12} = 2.91\overline{6}$$

ומכאן: $\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\,\mathrm{Var}(N) = 2 \cdot 2.91\overline{6} + 3.5^2 \cdot 2 = 30.\overline{3}$

ג. המאורע $\{S=3\}$ מתרחש בכמה מקרים: 1) $N=1$ ו- $X_1=3$;
2) $N=2$ ו- $(X_1, X_2)=(1,2)$ או $(X_1, X_2)=(2,1)$;
3) $N=3$ ו- $(X_1, X_2, X_3)=(1,1,1)$.

לכן: $P\{S=3\}=0.5\cdot\frac{1}{6}+0.5^2\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2+0.5^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{169}{1{,}728}=0.0978$

כעת, המאורע $\{N=2, X_1=1, S=3\}$ מתרחש רק אם $N=2$ ו- $(X_1, X_2)=(1,2)$, כלומר בהסתברות $0.5^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$.

לפיכך: $P\{N=2, X_1=1 \mid S=3\}=\dfrac{P\{N=2, X_1=1, S=3\}}{P\{S=3\}}=\dfrac{0.5^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2}{\frac{169}{1{,}728}}=\dfrac{12}{169}=0.071$

ד. המשתנים המקריים N ו- S תלויים זה בזה, מכיוון שהם לא מקיימים את תנאי האי-תלות. למשל:
$P\{N=1, S=3\}=0.5\cdot\frac{1}{6} \quad\neq\quad P\{N=1\}P\{S=3\}=0.5\cdot\frac{169}{1{,}728}$

6. א. $E[X]=1\cdot\frac{3}{27}+2\cdot\frac{18}{27}+3\cdot\frac{6}{27}=\frac{19}{9}$

$E[Y]=1\cdot\frac{12}{27}+2\cdot\frac{6}{27}+3\cdot\frac{1}{27}=1$

$E[XY]=1\cdot 3\cdot\frac{1}{27}+2\cdot 1\cdot\frac{6}{27}+2\cdot 2\cdot\frac{6}{27}+3\cdot 1\cdot\frac{6}{27}=\frac{19}{9}$

לכן: $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=\frac{19}{9}-\frac{19}{9}\cdot 1=0$

כלומר, המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-מתואמים.

ב. $P\{Y=3\}=\frac{1}{27}$; $P\{Y=2\}=\frac{6}{27}$; $P\{Y=1\}=\frac{12}{27}$; $P\{Y=0\}=\frac{8}{27}$

לכן: $M_Y(t)=E[e^{tY}]=\frac{8}{27}+\frac{12}{27}e^t+\frac{6}{27}e^{2t}+\frac{1}{27}e^{3t}$, לכל t ממשי