מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20276 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה - פרקים 6 - 7.3

משקל המטלה: 3 נקודות   מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: 30.4.99   סמסטר: 1999 ב

(ע)

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1

נסמן ב- B_n את קבוצת הסדרות באורך $2n$ שמכילות n אפסים ו- n אחדים והן בעלות התכונה הבאה: אם $s \in B_n$ אזי מספר האפסים בכל תת סידרה שפותחת את s גדול או שווה למספר האחדים בה.

לדוגמה: $010011 \in B_3$ כיוון ששש תת הסדרות הפותחות שלה

$$0\ ,\ 01\ ,\ 010\ ,\ 0100\ ,\ 01001\ ,\ 010011$$

מקיימות את התנאי האמור. נסמן ב- C_n (מספרים אלו נקראים מספרי קטלן) את מספר הסדרות הנ"ל, כלומר $C_n = |B_n|$.

בתרגיל זה נוכיח את יחס הרקורסיה הבא עבור C_n (מגדירים $C_0 = 1$):

$$C_n = \sum_{h=1}^{n} C_{h-1}C_{n-h} \qquad n \geq 1$$

I. לכל $s \in B_n$ נגדיר את $\rho(s)$ להיות השלם החיובי הקטן ביותר שעבורו תת הסידרה הפותחת באורך $2\rho(s)$ של s, מכילה בעצמה מספר שווה של אפסים ואחדים ($\rho(s)$ מכל אחד).

בדוגמה הנ"ל $\rho(010011) = 1$.

הוכיחו שמספר הסדרות s ב- B_n שעבורן $\rho(s) = n$ הוא C_{n-1}.

רמז: כל סידרה כזאת חייבת לפתוח באפס ולהסתיים ב-1. מדוע?

II. מיינו את כל הסדרות ב- B_n על פי הערך של ρ וקבלו מכאן את יחס הנסיגה המבוקש.

שאלה 2

I.מצאו ביטוי פשוט, כפונקציה של x, עבור הפונקציה היוצרת של הסידרה האינסופית

$1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 3\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ ......$

(כל אברי הסידרה המסומלים על ידי ... שווים ל 1-).

II.הוכיחו ש- $(1+x)^n$ היא הפונקציה היוצרת של הסדרה $\binom{n}{h}$ (n קבוע, $h \in N$).

(עבור $h > n$ נגדיר כמקובל $\binom{n}{h} = 0$).

III.השתמשו בסעיף ב׳ כדי להוכיח את הזהות

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

באמצעות פונקציות יוצרות. רמז: $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$.

שאלה 3

I.כיתבו פונקציה יוצרת עבור מספר האפשרויות להציג מספר טבעי $r \geq 1$ כסכום של מחוברים שלמים וחיוביים ללא חשיבות לסדר, שהגדול שבהם אינו עולה על שלוש (דוגמה: $2+2+2+2 = 2+3+3 = 3+3+1+1 = 8$ הן שלוש הצגות אפשריות של $r = 8$).

II.כיתבו פונקציה יוצרת עבור מספר האפשרויות להציג מספר טבעי $r \geq 1$ כסכום של שלושה מחוברים שלמים חיוביים ללא חשיבות לסדר

(דוגמה: $6+1+1 = 5+2+1 = 3+3+2 = 8$)

הדרכה: אם אין חשיבות לסדר ניתן לדרוש $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$

III.מה ניתן להסיק מהשוואת התשובות לסעיפים א׳ ו-ב׳? (התשובות אינן זהות!)

שאלה 4

I.הוכח בעזרת עקרון שובך היונים את הטענה (המובנת אינטואיטיבית): אם B, A קבוצות סופיות, $|A| > |B|$, ו- f פונקציה של A ל-B, אז f אינה חד-חד-ערכית.

II.תהי A תת-קבוצה בת $n+2$ איברים של $\{1,2,3,...,2n+1\}$, ויהי m האיבר הגדול ביותר של A. הוכח שקיימים ב-A שני איברים שונים שסכומם שווה m.

הדרכה: השתמש בניסוח עקרון שובך יונים שהובא בתחילת השאלה ובפונקציה של $A - \{m\}$

לתוך **N** המוגדרת על-ידי

$$f(k) = \begin{cases} k & k \leq \dfrac{m}{2} \\ m - k & k > \dfrac{m}{2} \end{cases}$$