א. משמעות התנאים היא בעצם זו:

לפני אות יכול לבוא כל תו, לפני 1 יכול לבוא רק b או c, לפני 2 יכול לבוא רק a או c.

נסתכל בסדרה חוקית באורך $n+1$.

אם התו האחרון בסדרה הוא אות (3 אפשרויות) אז לפניו יכולה להיות **כל סדרה חוקית** באורך n.

אם התו האחרון בסדרה הוא 1 אז לפניו b או c (שתי אפשרויות),

ולפני זה באה **כל סדרה חוקית** באורך $n-1$.

אם התו האחרון בסדרה הוא 2 אז לפניו a או c (שתי אפשרויות),

ולפני זה באה **כל סדרה חוקית** באורך $n-1$.

מכאן יחס הנסיגה: $a_{n+1} = 3a_n + 2\cdot 2a_{n-1}$.

תנאי התחלה: $a_0 = 1$ (הסדרה הריקה עומדת בתנאים!), $a_1 = 5$.

מי שלא בטוח לגבי a_0 יחשב: $a_2 = 25 - 6 = 19$.

ב. **המשוואה האפיינית**: $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$. פתרונותיה: $\lambda = 4, -1$.

לכן פתרון יחס הנסיגה הוא מהצורה $a_n = A\cdot 4^n + B\cdot(-1)^n$ **(*)**

בהצבת תנאי ההתחלה נקבל: $A + B = 1$, $4A - B = 5$.

מכאן $A = 6/5$, $B = -1/5$.

לאחר הצבה של $A, B, \lambda_1, \lambda_2$ בנוסחה (*) וקצת סידור: $a_n = \frac{1}{5}\left(6\cdot 4^n + (-1)^{n+1}\right)$.

מומלץ להציב ערכים לבדיקה, למשל לבדוק שעבור $n=2$ אכן נקבל 19, כמו למעלה.

תשובה 2

מהנתון ברור שהמשתנה יוצא הדופן נותן שארית 1 בחילוק ב- 3.

המשתנה יוצא הדופן יכול להיות כל אחד מחמשת המשתנים.

נניח שזהו x_5 וכדי לפצות על כך, **בסוף החישוב** נכפול את הפונקציה היוצרת ב- 5.

כל המשתנים מתחלקים אפוא ב- 3, פרט ל- x_5 שנותן שארית 1 בחילוק ב- 3.

נציב אפוא $x_i = 3y_i$ $(1 \le i \le 4)$, $x_5 = 3y_5 + 1$ ונקבל:

$3y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 1 = 3n + 1$ כאשר y_i הם **טבעיים כלשהם, ללא הגבלות**.

נפשט את המשוואה: $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = n$.

פונקציה יוצרת למספר הפתרונות של משוואה זו היא כידוע (תחתית עמ' 127 בספר):

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \dots)^5$$

את הטור שבתוך הסוגריים ניתן לסיים ב- x^n , אבל אין לנו עניין לעשות זאת, כי הנוסחה לטור הנדסי אינסופי פשוטה יותר מזו של טור הנדסי סופי:

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \dots)^5 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^5$$

(שאלה למחשבה: איך ייתכן שזה לא משנה אם בחרנו להשתמש בטור האינסופי או בטור סופי? אלה הרי פונקציות שונות).

כאמור בתחילת הפתרון עלינו לכפול ב- 5,

הפונקציה היוצרת העונה לשאלה היא אפוא $g(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^5$.

ב. אנו מחפשים את המקדם של x^{12} בפונקציה $g(x)$ אותה כתבנו זה עתה.

לפי נוסחה (iii) בסוף הממ"ן, המקדם הוא $5 \cdot D(5,12) = 5 \cdot \binom{16}{4} = 9{,}100$

תשובה 3

א. $f(x) = (x^5 + x^6 + x^7 + \dots x^{20})^4$

נמשיך ונפתח את הפונקציה

$$= \left(x^5(1 + x + x^2 + \dots x^{15})\right)^4 = x^{20}(1 + x + x^2 + \dots x^{15})^4$$

ניעזר בנוסחה לסכום טור הנדסי סופי: נוסחה (i) שמופיעה בסוף הממ"ן.

$$= x^{20}\left(\frac{1 - x^{16}}{1 - x}\right)^4$$

$$= x^{20} \cdot (1 - x^{16})^4 \cdot \left(\frac{1}{1 - x}\right)^4$$

ב. (i) אם $n = 20$ יש רק דרך אחת לחלק את הפלאפל: 5 כדורים לכל משפחה.

לבדיקה, המקדם של x^{20} בפונקציה $x^{20}(1 + x + x^2 + \dots x^{15})^4$ הוא המקדם של x^0 בפונקציה $(1 + x + x^2 + \dots x^{15})^4$ ומקדם זה הוא אכן 1.

(ii) אם $n = 21$ יש 4 דרכים לחלק את הפלאפל: עלינו לבחור משפחה שתקבל 6 כדורים.

לבדיקה, המקדם של x^{21} בפונקציה $x^{20}(1 + x + x^2 + \dots x^{15})^4$ הוא המקדם של x^1 בפונקציה $(1 + x + x^2 + \dots x^{15})^4$ ומקדם זה הוא אכן 4.

(iii) אם $n = 90$ לא ניתן לחלק את הפלאפל בהתאם לתנאים. ואמנם בפיתוח של

$x^{20}(1 + x + x^2 + \dots x^{15})^4$, החזקה הגבוהה ביותר של x היא 80,

לכן המקדם של x^{90} הוא 0.

ג. המקדם של x^{55} בפונקציה $x^{20} \cdot (1 - x^{16})^4 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^4$

הוא המקדם של x^{35} בפונקציה $(1 - x^{16})^4 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^4$ (*)

מנוסחת הבינום,

$$(1 - x^{16})^4 = 1 - 4x^{16} + \binom{4}{2}x^{32} - \binom{4}{3}x^{48} + x^{64}$$

מנוסחה (iii) שמופיעה בסוף הממ"ן ,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^4 = \sum_{i=0}^{\infty} D(4,i)x^i$$

נציב את שני הביטויים האלה בנוסחה (*)

$$\left(1 - 4x^{16} + \binom{4}{2}x^{32} - \binom{4}{3}x^{48} + x^{64}\right) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} D(4,i)x^i$$

אנו רוצים את המקדם של x^{35} בביטוי זה.

ניעזר בנוסחה לכפל פונקציות יוצרות - נוסחה (ii) בסוף הממ"ן.

נזרוק מחוברים שהחזקה של x בהם גדולה מ- 35, הם אינם יכולים לתרום ל- x^{35} .

נקבל

$$1 \cdot D(4, 35 - 0) - 4D(4,35 - 16) + \binom{4}{2}D(4,35 - 32)$$

$$= D(4, 35) - 4D(4,19) + \binom{4}{2}D(4,3)$$

$$= \binom{38}{3} - 4\binom{22}{3} + \binom{4}{2}\binom{6}{3} = 8,436 - 6,160 + 120 = 2,396$$

תשובה 4

א. (1) $f(x) = (1-x)^{10} = (1+(-x))^{10}$

מנוסחת הבינום נקבל $\sum_{i=0}^{\infty}\binom{10}{i}(-1)^i x^i = \sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(-x)^i = f(x)$.

המשכנו את הסכום עד אינסוף בעזרת הגדרת המקדמים הבינומיים החריגים בעמ׳ 30 בספר.

קיבלנו אפוא $a_i = (-1)^i\binom{10}{i}$.

(2) $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^9}$.

מנוסחה *(iii)* בסוף הממ״ן נקבל $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} D(9,i)x^i$.

לפיכך $b_i = D(9,i)$.

ב. המקדם של x^k במכפלה הוא $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (נוסחה *(ii)* בסוף הממ״ן).

נציב ונקבל:

$$c_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{10}{i}D(9,k-i)$$

הזהות שנקבל מכאן בעזרת ההסבר בסעיף ב׳ של השאלה היא:

עבור $1<k$, $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{10}{i}D(9,k-i) = 0$

ג. השלימו עצמאית את הבדיקה.

איתי הראבן