קבוצות יוצרים

$A=\{a,b,c\}$ $a,b,c\in\mathbb{R}$.

נגדיר את הקבוצה הנוצרת מ A על ידי חיבור להיות:

$$A^{+}=\{a\cdot n+b\cdot m+c\cdot k \mid n,m,k\in\mathbb{N}_0,\ \text{לא כולם } 0\}$$

נגדיר את הקבוצה הנוצרת מ A על ידי כפל להיות:

$$A^{*}=\{a^{n}b^{m}c^{k} \mid n,m,k\in\mathbb{N}_0,\ \text{לא כולם } 0\}$$

תרגיל

נגדיר $A=\{3,4\}$ $B=\{n\in\mathbb{N} \mid n>8\}$

1. הראו כי $B\subseteq A^{+}$

תשובה

יהי $n\in B$. $n\in\mathbb{N}$ ולכן ממשפט החלוקה בשארית קיימים $q\in\mathbb{N}_0$ יחיד ו $r\in\mathbb{N}_0$ יחיד

כך ש $n=3q+r$, וגם $0\le r<3$.

מקרה 1: נניח $r=0$

אז $n=3q$. $n>8$ ולכן $q\neq 0$.

נתבונן ב $0, q$:

$q,0\in\mathbb{N}_0$ ולא שניהם 0 וכמו כן $n=3q+4\cdot 0$

ולכן $n\in A^+$.

<u>מקרה 2: $r=1$</u>

אז $n=3q+1$. $n>8$ לכן $q>2$. כלומר

$q-1>1$ ולכן $q-1\in\mathbb{N}$ ובפרט $q-1\in\mathbb{N}_0$.

נתבונן ב $1, q-1$:

$q-1,1\in\mathbb{N}_0$ לא שניהם 0 וכמו כן $n=3(q-1)+4\cdot 1$

לכן $n\in A^+$.

מקרה 3: נניח $r=2$

אז $n=3q+2$. $n>8$ לכן $q>2$

ולכן $q-2>0$ ומכאן $q-2\in\mathbb{N}_0$.

נתבונן ב $q-2,2$:

$q-2,2\in\mathbb{N}_0$ לא שניהם 0 ומתקיים $n=3(q-2)+4\cdot 2$

לכן $n\in A^+$.

מש"ל.

(2) הראו כי $A^* \subset A^+$.

תשובה

נוכיח $A^* \subseteq A^+$:

יהי $n \in A^*$.

לכן קיימים $m,k \in \mathbb{N}_0$ לא שניהם 0.

כך ש: $n = 3^m \cdot 4^k$

כלו' $m \neq 0$ או $k \neq 0$.

מקרה 1: $m \neq 0$

$m \geq 1$ ולכן $m-1 \geq 0$ וגם $k \geq 0$

ולכן

$3^{m-1}\cdot 4^k \in \mathbb{N}$.

נתבונן ב $3^{m-1}\cdot 4^k, 0$:

$3^{m-1}\cdot 4^k, 0 \in \mathbb{N}_0$ לפי שניהם ס וכמו כן

$$n = 3(3^{m-1}\cdot 4^k) + 4\cdot 0 \in A^+$$

מקרה 2: $k\neq 0$

$k\geq 1$ ולכן $k-1\geq 0$ מכאן $3^m\cdot 4^{k-1}\in \mathbb{N}$.

נתבונן ב $0, 3^m\cdot 4^{k-1}$:

$0, 3^m\cdot 4^{k-1} \in \mathbb{N}_0$ לפי שניהם ס עמוק:

$$n = 3\cdot 0 + 4\cdot\left(3^{m}\cdot 4^{k-1}\right) \in A^{+}$$

לכן $A^{*} \subseteq A^{+}$.

נוכיח $A^{+} \not\subseteq A^{*}$:

נתבונן ב 10.

$10 = 3\cdot 2 + 4\cdot 1 \in A^{+}$.

נניח בשלילה $10 \in A^{*}$.

לכן קיימים $m,k \in \mathbb{N}_0$ לא שניהם 0

שגם $10 = 3^{M}\cdot 4^{k}$

$$2\cdot 5 = 3^m \cdot 2^{2k}$$

בסתירה ליחידות ההצגה כמכפלת ראשוניים

מהמשפט היסודי:

מכאן $A^+ \nsubseteq A^*$

ולכן $A^* \subset A^+$.

מש"ל.

תרגיל

$A = \{15, 33\}$.

הראו כי לכל $n \in A^*$.

אם $55|n$ אז $9|n$

תשובה

יהי $n \in A^*$.

נניח $55|n$.

אז קיים $k \in \mathbb{N}$ עם $n = 55k$.

לכן $n = 5 \cdot 11 \cdot k$ ואם $k \neq 1$

אז $n = 5\cdot 11\cdot \left(\begin{matrix}\text{הפירוק}\\ \text{של א}\end{matrix}\right)$

בכל מקרה $5,11$ [1] מופיעים בפירוק של n לגורמים ראשוניים.

$n\in A^*$ לכן קיימים $x,y\in \mathbb{N}_0$ לא שניהם 0 כך ש

$$n = 15^x\cdot 33^y$$

$$n = 3^x\cdot 5^x\cdot 3^y\cdot 11^y$$

$$n = 3^{x+y}\cdot 5^x\cdot 11^y$$

מ (1) ומיחידות ההצגה כמכפלת ראשוניים נובע $x,y\geq 1$.

לכן $x+y\geq 2$. מכאן $x, y, x+y-2 \in \mathbb{N}_0$

ולכן $3^{x+y-2}\cdot 5^{x}\cdot 11^{y} \in \mathbb{N}$

ומכאן: $n = 9\left(3^{x+y-2}\cdot 5^{x}\cdot 11^{y}\right)$

ולכן $9 \mid n$.

מש"ל.

אינדוקציה

T טענה על מספרים טבעיים.

נניח שמתקיים:

1. $T(1)$ נכונה. → שלב בסיס / תנאי התחלה

2. לכל $n \in \mathbb{N}$ אם $T(n)$ נכונה אז $T(n+1)$ נכונה. → שלב המעבר

הנחת האינדוקציה

במקרה זה $T(n)$ נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$.

טענה

יהי $a>-1$.

הראו כי לכל $n\in\mathbb{N}$. $(1+a)^n \geq 1+na$

תשובה

נוכיח הטענה באינדוקציה על $n\in\mathbb{N}$.

נוכיח נכונות הטענה עבור $n=1$:

$$(1+a)^1 = 1+a \geq 1+1\cdot a$$

לכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

יהי $n\in\mathbb{N}$.

נניח נכונות הטענה עבור n. ננ.ה $(1+a)^n \geq 1+na$.

נוכיח נכונות הטענה עבור $n+1$:

צ"ל: $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$

מהנחת האינדוקציה ידוע:

$$(1+a)^{n} \geq 1+na$$

$a>-1$ לכן $1+a>0$. נכפול את האי-שוויון לעיל ב $1+a$:

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+\underline{na+a}+na^2$$

אי שלילי

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$$

לכן הטענה נכונה עבור $n+1$.

לפי עקרון האינדוקציה נכונה הטענה לכל $n\in\mathbb{N}$.

טענה

הראו כי לכל $n \in \mathbb{N}$.

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

הוכחה

נוכיח הטענה באינדוקציה על $n \in \mathbb{N}$:

נוכיח נכונות עבור $n=1$:

צד שמאל: 1

צד ימין: $\frac{1}{6}(2)(3)=1$

לכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

עבודה עם סכומים של סדרים

1. איבר ראשון

2. איבר אחרון

3. מעבר מאיבר לאיבר.

$$1+2+3+\dots+3n$$

למה שווה הסכום כאשר $n=1$?

$$1+2+3=6$$

יהי $n\in\mathbb{N}$. נניח נכונות הטענה עבור n:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

נוכיח נכונות עבור $n+1$:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}(n+2)\underbrace{(2(n+1)+1)}_{2n+3}$$

$$\overbrace{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}^{\text{הנחת האינדוקציה}}+(n+1)^2=$$

$$=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+(n+1)^2$$

$$=\frac{n+1}{6}\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]$$

$$= \frac{n+1}{6}\left[2n^2+n+6n+6\right]$$

$$= \frac{n+1}{6}\left[2n^2+7n+6\right]$$

$$= \frac{n+1}{6}\left[2n^2+4n+3n+6\right]$$

$$= \frac{n+1}{6}\left[2n\underline{(n+2)}+3\underline{(n+2)}\right]$$

$$= \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3)$$

למי שנוח עם האלגברה

למה צריך להגיע ? $\frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3)$

מה יש לי ? $\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+(n+1)^2$

$$\frac{n+1}{6}\left(2n^2+7n+6\right)$$

$$\frac{2n^3+7n^2+6n+2n^2+7n+6}{6}$$

$$\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$$

$$\frac{n}{6}\left(2n^2+3n+1\right)+n^2+2n+1$$

$$\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+\frac{6n^2+12n+6}{6}$$

$$\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$$

ולכן הטענה נכונה עבור $n+1$.

לפי עקרון האינדוקציה הטענה לכל n טבעי.

תרגיל

יהי $x \neq 1$.

הראו כי לכל $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

תשובה

נוכיח הטענה באינדוקציה על $n \in \mathbb{N}$.

נוכיח נכונות עבור $n = 1$:

צד שמאל: $1 + x$

צד ימין: $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

לכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

יהי $n\in\mathbb{N}$. נניח נכונות הטענה עבור n.

$$1+x+x^2+\dots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

נוכיח נכונות עבור $n+1$:

$$1+x+\dots+x^n+x^{n+1}=\frac{x^{n+2}-1}{x-1}$$

$$\overbrace{1+x+x^2+\dots+x^n}^{\text{הנחת האינדוקציה}}+x^{n+1}=$$

$$=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}+x^{n+1}=\frac{\cancel{x^{n+1}}-1+x^{n+2}-\cancel{x^{n+1}}}{x-1}$$

$$= \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}$$

לכן הטענה נכונה עבור $n+1$.

לפי עקרון האינדוקציה נכונה הטענה לכל $n \in \mathbb{N}$.

הוכחה נוספת:

יהי $n \in \mathbb{N}$.

$$S = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad / \cdot x$$

צ"ל: $S = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

$$xS = x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1}$$

$$(x-1)S = -1 + x^{n+1} \rightarrow S = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

הכללת עקרון האינדוקציה חלק א'.

אם במקום להוכיח נכונות עבור 1
הוכחנו עבור $k \in \mathbb{N}$ אז מהוכחה נובעת
נכונות לכל $n \geq k$.

תרגיל

$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$

$\parallel$

1. מצאו $n\in\mathbb{N}$ עבורו $3^n \le n!$.

תשובה

$3^7 = 2187$

$7! = 5040$

לכן $3^7 \le 7!$

2. הראו כי לכל $n \geq 7$ טבעי, מתקיים $3^n \le n!$

תשובה: נוכיח הטענה באינדוקציה על $n \geq 7$ טבעי.

נוכיח שהטענה עבור $n=7$:

$3^7=2187$ $7!=5040$ לכן $3^7 \le 7!$

לכן הטענה נכונה עבור $n=7$.

יהי $n \geq 7$ טבעי נניח נכונות הטענה עבור n.

$$3^n \leq n!$$

נוכיח נכונות עבור $n+1$:

מהנחת האינדוקציה:

$$3^n \leq n! \quad / \cdot 3$$

$$3^{n+1} \leq 3 \cdot n!$$

$n+1 \geq 8 \geq 3$ לכן אם נכפול ב $n!$ נקבל: $(n+1) \cdot n! \geq 3 \cdot n!$

לכן:

$$3^{n+1} \le (n+1)\,n! = (n+1)!$$

לכן הטענה נכונה עבור $n+1$.

לכן לפי עקרון האינדוקציה נכונה הטענה לכל $n \geq 7$ טבעי:

הכללת עקרון האינדוקציה - חלק ב'

גם בשלב המעבר אפשר, במקרים, מ n ל $n+1$
לעבור מ n ל $n+k$ עשה ולפי תנאי ההתחלה
לקבל את הקבוצה עבורה ההוכחה מוכיחה את הטענה.

<u>דוגמה:</u>

אם תנאי התחלה עבור $n=1$ ובמעבר עוברים מ n ל $n+2$ $\leftarrow$ ההוכחה מוכיחה נכונות לכל n אי-זוגי.

אם תנאי התחלה עבור $n=3$ ובמעבר עוברים מ n ל $n+3$ הוכחנו נכונות לכל n המתחלק ב 3.

תרגיל

הראו כי לכל $n\in\mathbb{N}$ זוגי, $16 \mid 13^n-3^n$

תשובה

נוכיח הטענה באינדוקציה על $n\in\mathbb{N}$ זוגי.

נוכיח נכונה עבור $n=2$:

נתבונן ב 10:

$$13^2-3^2=16\cdot 10$$

לכן $16 \mid 13^2-3^2$.

לכן הטענה נכונה עבור $n=2$.

יהי $n\in\mathbb{N}$ זוגי. נניח נכונות הטענה עבור n.

$$16 \mid 13^n - 3^n$$

נוכיח הטענה עבור $n+2$:

$$13^{n+2} - 3^{n+2} = 13^2 \cdot 13^n - 3^2 \cdot 3^n$$

$$= 169 \cdot 13^n - 9 \cdot 3^n$$

$$= 160 \cdot 13^n + 9 \cdot 13^n - 9 \cdot 3^n$$

$$= 16 \cdot 10 \cdot 13^n + 9\left(13^n - 3^n\right)$$

מהנחת האינדוקציה $16 \mid 13^n - 3^n$ לכן

קיים $K \in \mathbb{N}$ כך ש $16 \cdot k = 13^n - 3^n$

ומכאן:

$$13^{n+2} - 3^{n+2} = 16\left(10 \cdot 13^n + 9K\right)$$

לכן:

$$16 \mid 13^{n+2} - 3^{n+2}$$

לכן הטענה נכונה עבור $n+2$ ולפי עקרון האינדוקציה

נכונה הטענה לכל $n \in \mathbb{N}$ זוגי.

טענה

לכל $n \in \mathbb{N}$. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$.

תשובה

נוכיח נכונות הטענה באינדוקציה על $n \in \mathbb{N}$.

נוכיח נכונות עבור $n=1$:

צד שמאל: $\frac{1}{2}$

צד ימין: $\frac{1}{2}$

אכן $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

יהי $n \in \mathbb{N}$. נניח נכונות הטענה עבור n:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2}$$

נוכיח נכון עבור $n+1$:

צ"ל: $$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2(n+1)}\geq\frac{1}{2}$$

מהנחה:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2}$$

נוסיף לשני האגפים: $$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

נקבל:

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n+2}\geq$$

$$\geq \frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}+\underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{\frac{1}{2(n+1)}}-\frac{1}{n+1}\geq$$

נשים לב ש: $0<2n+1\leq 2n+2$

לכן $\frac{1}{2n+1}\geq\frac{1}{2n+2}>0$

$$\geq \frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+2}}_{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}$$

לכן הטענה נכונה עבור $n+1$ ולפי עקרון
האינדוקציה נכונה הטענה לכל n טבעי.

טענה

לכל $n\in\mathbb{N}$. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2}$.

תשובה

יהי $n\in\mathbb{N}$.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{n+1}\geq\frac{1}{2n}\\ \frac{1}{n+2}\geq\frac{1}{2n}\\ \vdots\\ \frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}\end{array}\right\}+$$

n אי שוויונים

$$\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}\geq n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

תרגיל

$A=\{a,b\}$.

① A^+ סגורה לחיבור.

② $A \subseteq A^+$

תרגיל

③ לכל B. אם B מקיים את (1) ו (2)

אז $A^+ \subseteq B$.

הוכחת 3:

תהא B ונניח כי B מקיים את (1) ו (2).

צ"ל להוכיח כי לכל $n,m\in\mathbb{N}_0$ שלא
שניהם 0 מתקיים $na+mb\in B$.

טענה:
לכל $n\in\mathbb{N}_0$. לכל $m\in\mathbb{N}_0$. אם ($n\neq 0$ או $m\neq 0$)
אז $na+mb\in B$.

הוכחה

נוכיח הטענה באינדוקציה על n:

נוכיח נכונות עבור $n=0$:

צ"ל: לכל $m\in\mathbb{N}$ מתקיים $mb\in B$.

נוכיח הטענה מאינדוקציה על m:

נוכיח עבור $m=1$:

ידוע ש $A \subseteq B$ לכן $b \in B$

כלומר $0 \cdot a + 1 \cdot b \in B$.

יהי $m \in \mathbb{N}$. נניח נכונות עבור m. $mb \in B$.

נוכיח עבור $m+1$:

מהנחת האינדוקציה $mb \in B$. ידוע $b \in B$

ונתון כי B סגורה לחיבור. לכן

$b(m+1) = bm + b \in B$.

לפי עקרון האינדוקציה נכונה הטענה לכל $m\in\mathbb{N}$.

לכן לכל $m\in\mathbb{N}$. $0\cdot a+m\cdot b\in B$.

לכן הטענה המקורית נכונה עבור $n=0$.

יהי $n\in\mathbb{N}_0$

נניח נכונות הטענה עבור n. נוכיח עבור $n+1$:

הנחנו $na+mb\in B$ לכל $m\in\mathbb{N}_0$.

צ"ל: $(n+1)a+mb\in B$ לכל $m\in\mathbb{N}_0$.

$$(na+mb)+a$$

להמשיך מבג...

שאלה	נושא
1	יח' 1-2
2	יח' 4
3	יח' 5-6
4	יח' 7
5	יח' 8/9/10
6	יח' 12