פרק 2 : אקסיומות ההסתברות (פתרונות) (20425 / 3.2.11)

1. משחק 1 : לחישוב מספר התוצאות השייכות למאורע נתבונן על הכדורים שהוצאו, מהאחרון לראשון. יש שני מקרים אפשריים. במקרה הראשון – שני הכדורים האחרונים לבנים ובמקרה השני – שניהם ירוקים. לכן, מקבלים $\frac{2\cdot1\cdot4+3\cdot2\cdot4}{6\cdot5\cdot4}=\frac{4}{15}$.

משחק 2 : כדי לזכות יש להוציא שני כדורים ירוקים ושניים שאינם ירוקים, ואין חשיבות לסדר ההוצאה. לכן, ההסתברות היא $\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{2}}{\binom{6}{4}}=\frac{9}{15}$.

משחק 3 : יש שני מקרים שבהם זוכים. הראשון הוא כאשר צבע הכדור הראשון שמוצא הוא שחור, והשני הוא כאשר צבע הכדור השני שמוצא הוא שחור. לכן, מספיק להתבונן בשני הכדורים הראשונים שמוצאים, כדי לקבוע את ההסתברות לזכייה. מקבלים $\frac{1\cdot5+5\cdot1}{6\cdot5}=\frac{1}{3}$.

הערה: ניסוי של הוצאת חפצים בזה אחר זה **ללא החזרה** (מתוך מאגר סופי של חפצים) שקול לניסוי שבו מסדרים את כל החפצים שבמאגר בשורה. כל סידור של החפצים בשורה שקול לתוצאה שבה החפצים מוּצָאים מן המאגר לפי אותו סדר שיש בשורה. כלומר, החפץ שממוקם בשורה במקום ה-i-י הוא כביכול החפץ שמוּצָא בבחירה ה-i-ית (כאשר מוציאים את החפצים בזה אחר זה וללא החזרה).

השקילות בין שני הניסויים הללו עשויה לסייע בחישובי הסתברויות כגון זו שחושבה במשחק 3. ההסתברות לזכות במשחק היא ההסתברות שהכדור השחור ימוקם במקום הראשון או השני בשורה, ומכיוון שהכדור השחור ממוקם בכל מקום בשורה בהסתברות $\frac{1}{6}$, נקבל שהסתברות הזכייה היא $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

2. לכלי הראשון יש 64 משבצות פנויות, לשני 63 משבצות פנויות וכך הלאה.
לכן, $n(S)=64\cdot63\cdot\ldots\cdot57=(64)_8$.

א. כדי לחשב את הסתברות המאורע שבסעיף זה, נתחיל בסידור הכלים השחורים ואחר-כך נסדר את הכלים הלבנים. נקבל שההסתברות היא $\frac{4!\cdot\binom{60}{4}\cdot4!}{\binom{64}{8}\cdot8!}=\frac{1}{\binom{64}{4}}=1.574\cdot10^{-6}$.

כלומר, כדי לקבל את ההסתברות, אנו רואים שמספיק להתייחס אל המקומות שנבחרים עבור הכלים השחורים (בארבע הפינות) ואין חשיבות לסידור הפנימי שלהם או לסידור של הכלים הלבנים.

ב. במקרה זה, צריך להתייחס לסידור הפנימי של הכלים השחורים. תחילה נמקם על הלוח את הצריח השחור (4 אפשרויות), אחר-כך את הרץ השחור (אפשרות 1) ולבסוף את שני הכלים השחורים האחרים (!2 אפשרויות). מכאן ומתוצאת סעיף א נקבל את ההסתברות $\frac{1}{\binom{64}{4}}\cdot\frac{4\cdot2!}{4!}=5.25\cdot10^{-7}$.

ג. הכלי הראשון יכול להימצא בכל אחת מהמשבצות, הכלי השני לא יכול להימצא בשורה או בעמודה של הכלי הראשון, הכלי השלישי לא יכול להימצא בשתי השורות ובשתי העמודות שבהן נמצאים שני הכלים הראשונים, וכך הלאה. לכן, ההסתברות היא $\frac{8^2\cdot 7^2\cdot\ldots\cdot 1^2}{64\cdot 63\cdot\ldots\cdot 57}=9.1095\cdot 10^{-6}$.

אפשר לחשב את ההסתברות גם כך: יש 8 אפשרויות לבחור משבצת בשורה הראשונה, 7 אפשרויות לבחור משבצת בשורה השנייה וכך הלאה. עתה, מכיוון שכל שמינייה של משבצות (שאפשר לבחור) נספרת בשיטה זו פעם אחת בלבד, נחלק את המונה ב- $\binom{64}{8}$, ונקבל אותה תוצאה שקיבלנו קודם לכן.

ד. נמצא תחילה את הסתברות המאורע המשלים, שאין אף כלי-משחק בשורה השישית. מקבלים $\frac{\binom{56}{8}}{\binom{64}{8}}$.

ולכן, ההסתברות שיש לפחות כלי-משחק אחד בשורה השישית היא $1-\frac{\binom{56}{8}}{\binom{64}{8}}=0.67907$.

ה. בכל שורה יש 7 צמדים של מקומות סמוכים, ויש 8 שורות. לכן, יש בלוח 56 צמדים של מקומות סמוכים הנמצאים באותה שורה. באותו אופן מקבלים, שיש בלוח 56 צמדים של מקומות סמוכים הנמצאים באותה עמודה. כלומר, שני הכלים האלו (שאותם אין צורך לבחור מתוך שמונת הכלים הנתונים) יכולים להימצא באחד מ-112 צמדים של מקומות על הלוח. מכאן, שההסתברות המבוקשת היא $\frac{112}{\binom{64}{2}}=\frac{1}{18}$.

ו. כל שני כלים יכולים להימצא באותה השורה או בשתי שורות שונות. אם הם נמצאים בשתי שורות שונות כל אחד מהם נמצא בשורה הגבוהה יותר באותה ההסתברות. לכן, נחשב את ההסתברות ששני הכלים נמצאים באותה השורה, וממנה נמצא את ההסתברות המבוקשת.

שני הכלים נמצאים באותה השורה בהסתברות $\frac{8\cdot 8\cdot 7}{64\cdot 63}=\frac{1}{9}$. לכן, ההסתברות שהרץ הלבן נמצא בשורה גבוהה מזו של הצריח השחור היא $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{4}{9}$.

ז. נבחר מקום אחד בכל אחת משלוש השורות הראשונות, ואחר-כך חמישה מקומות ביתר השורות (ביחד). מכאן, מקבלים שההסתברות המבוקשת היא $\frac{\binom{8}{1}^3\cdot\binom{40}{5}}{\binom{64}{8}}=0.07612$.

ח. נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה, כדי לחשב את ההסתברות המבוקשת.

נסמן ב- A_i את המאורע שבשורה i יש לפחות כלי-משחק אחד, לכל $i=1,2,3$, ונחשב את ההסתברות של המאורע $A_1\cap A_2\cap A_3$. תנאי הבעיה סימטריים, לכן:

$$\begin{aligned}P(A_1\cap A_2\cap A_3)&=1-P(A_1^C\cup A_2^C\cup A_3^C)\\&=1-\left[\binom{3}{1}P(A_1^C)-\binom{3}{2}P(A_1^C\cap A_2^C)+\binom{3}{3}P(A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C)\right]\\&=1-\left[3\cdot\frac{\binom{56}{8}}{\binom{64}{8}}-3\cdot\frac{\binom{48}{8}}{\binom{64}{8}}+\frac{\binom{40}{8}}{\binom{64}{8}}\right]=1-0.724406=0.275594\end{aligned}$$

3. אחרי הבחירה הראשונה יש בכד 5 כדורים מסומנים ו-3 כדורים שאינם מסומנים. לכן, כדי שהמאורע יתרחש, צריכים להוציא בבחירה השנייה 2 כדורים מתוך חמשת המסומנים וכדור 1 מתוך שלושת אלה שאינם מסומנים. כלומר, $\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{28} = 0.5357$.

4. נסמן ב- A_1 , A_2 ו- A_3 את המאורעות שהסטודנט בוחר שני גרביים שחורים, כחולים או חומים, בהתאמה. המאורע שאת הסתברותו אנו מחפשים הוא איחוד המאורעות $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. אולם, נשים לב, ששלושת המאורעות המוגדרים לעיל זרים זה לזה, ולכן, ההסתברות שהסטודנט יגיע עם זוג גרביים מאותו הצבע היא:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{\binom{2}{2}+\binom{6}{2}+\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{17}{45} = 0.3778$$

5. א. $n(S) = \frac{12!}{(4!)^3} \cdot (4!)^3 = 12!$

שימו לב, למקרה הזה שבו הכסאות מסומנים. במקרה כזה, למרות שהשולחנות עגולים, הבעיה הנתונה שקולה לבעיה שבה ממקמים 12 עצמים שונים ב-12 מקומות שונים (שהרי לכל כסא יש ייחוד, שהוא צבע ומספר). כלומר, מספר התוצאות במרחב המדגם שווה למספר התוצאות האפשריות של ניסוי שבו, למשל, מסדרים 12 עצמים בשורה.

ב. כדי שהמאורע יתרחש, צריך להבטיח ש-A ו-B יישבו סביב השולחן האדום. משנבחרו עבורם מקומות, כל ה״המשכים״ אפשריים. כמו כן, אין חשיבות לסדר הישיבה סביב השולחן האדום. לכן, נחשב את ההסתברות המבוקשת כך, $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{4 \cdot 3}{12 \cdot 11} = \frac{1}{11}$.

ג. מהתוצאה בסעיף ב נקבל שההסתברות המבוקשת היא $\frac{3}{11}$.

ד. במאורע הזה יש חשיבות למקומות בשולחן שנבחרים עבור A ו-B, אך לא לסידור הישיבה של A ו-B במקומות אלו. מכיוון שיש 2 אפשרויות שונות לבחור זוג מקומות לא סמוכים בשולחן הלבן (לצורך העניין, מקומות 1 ו-3 או מקומות 2 ו-4), ההסתברות המבוקשת היא $\frac{2}{\binom{12}{2}} = \frac{4}{12 \cdot 11} = \frac{1}{33}$.

ה. במאורע הזה יש חשיבות לסדר הישיבה של A ו-B בשני המקומות שנבחרים עבורם, שכן A יושב ליד השולחן הלבן ו-B יושב ליד השולחן הכחול. מכיוון שכך, ל-A יש 4 מקומות ישיבה אפשריים מתוך 12, ומשנבחר מקום ל-A, יש ל-B 4 מקומות ישיבה אפשריים מתוך 11 (שהרי מקום אחד תפוס על-ידי A). לכן, ההסתברות היא $\frac{4 \cdot 4}{12 \cdot 11} = \frac{4}{33}$.

הערה: אילו היינו מחשבים את ההסתברות ש-A ו-B יישבו האחד ליד השולחן הלבן והאחר ליד השולחן הכחול (ללא חשיבות לזהות היושב ליד כל שולחן), הפתרון היה $\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{8}{33}$.

(כמובן, פי 2 מן התוצאה הקודמת.)

6. אם הוצאת הכדורים היא עם החזרה, אז $n(S) = 10^3 = 1{,}000$;

אם הוצאת הכדורים היא ללא החזרה ובלי חשיבות לסדר ההוצאה, אז $n(S) = \binom{10}{3} = 120$;

אם הוצאת הכדורים היא ללא החזרה ויש חשיבות לסדר ההוצאה, אז $n(S) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

א. $\frac{\binom{1}{1}\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}} = 0.3$

ב. נמצא את ההסתברות בעזרת המאורע המשלים. מקבלים $1-\frac{9^3}{10^3}=1-0.9^3=0.271$.

ג. כדי שהמאורע הזה יתרחש, צריכים להיבחר שני כדורים שהמספרים עליהם קטנים מ-5 והכדור שמספרו 5. לכן, ההסתברות היא $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}}=0.05$.

ד. אין הכרח שהמספרים הוצאו בסדר עוקב, אלא רק שנבחרו שלושה מספרים עוקבים. יש 8 שלישיות של מספרים עוקבים, ולכן ההסתברות היא $\frac{8}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{15}=0.0667$.

7. א. יש בסך-הכל !17 אפשרויות לסדר את כל הכדורים בשורה. עתה, כדי שהכדור הצהוב יהיה במקום ה-i-י בשורה, נמקם אותו שם (אפשרות אחת), ואז נסדר את יתר הכדורים (!16 אפשרויות). לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא $\frac{16!}{17!}=\frac{1}{17}$.

שימו לב, להסתברות שהתקבלה, דהיינו לתוצאה $\frac{1}{17}$. למעשה, התוצאה הסופית שקיבלנו מבוססת אך ורק על מיקום הכדור הצהוב, שהוא הפרט היחיד שלפיו נקבעת התרחשות המאורע "הכדור הצהוב נמצא במקום ה-i-י בשורת הכדורים". כלומר, בחישוב ההסתברות יכולנו, במקרה זה, "להתעלם" מסידור הכדורים שאינם צהובים ולהתייחס רק למיקום הכדור הצהוב.

הערה: בתרגיל זה לא נתון אם כדורים מאותו צבע שונים זה מזה או זהים זה לזה. למרות זאת, אפשר לפתור את הבעיה המובאת בתרגיל, מכיוון שנתון זה <u>אינו דרוש לחישוב ההסתברויות של המאורעות</u> המוגדרים בבעיה. <u>בשני המקרים</u> (שונים או זהים) <u>ההסתברויות של המאורעות שוות</u>.
בפתרון המובא לשאלה זו, אנו מניחים שהכדורים שונים זה מזה, כדי להקל על חישובי ההסתברויות. הנחה זו אינה פוגעת בכלליות הפתרון.
חשוב לזכור, שאילו היינו נדרשים <u>למנות</u> את מספר התוצאות במאורע זה או אחר (ולא לחשב הסתברות), נתון זה היה חסר, שהרי המנייה שונה בשני המקרים (שונים או זהים). במרחב המדגם שמתייחס לכדורים זהים, יש מטבע הדברים פחות תוצאות אפשריות.

ב. נניח שהכדורים שונים זה מזה. (ראה הערה לפני סעיף זה)
נבחר כדור אדום שיהיה במקום ה-i-י בשורה (6 אפשרויות) ונסדר את יתר הכדורים (!16 אפשרויות).
באופן כזה, נקבל שהסתברות המאורע היא $\frac{6}{17}=\frac{6\cdot 16!}{17!}$.

מסקנה: ההסתברות שיהיה כדור אדום במקום מסוים בשורה, שווה לחלק של הכדורים האדומים בקבוצת הכדורים הכוללת.

ג. כדי לחשב את הסתברות המאורע, שהכדור הצהוב נמצא במקום גבוה יותר מכל המקומות של הכדורים האדומים, נסדר את שורת 17 הכדורים בשלבים. בשלב ראשון, נסדר בשורה רק את 7 הכדורים ש"קובעים" את התרחשות המאורע, דהיינו את הכדור הצהוב ואת 6 הכדורים האדומים. בשלב שני, נסדר בין 7 הכדורים ה"קובעים" את 10 הכדורים הכחולים.
לשלב הראשון יש !7 תוצאות אפשריות, וב-!6 מתוכן מתרחש המאורע הנתון. בשני המקרים – בין אם מתרחש המאורע ובין אם לאו – לשלב השני יש בסך-הכל $\binom{17}{10}\cdot 10!$ תוצאות אפשריות.

שימו לב, שבשלב השני מתייחסים אל 7 הכדורים (הצהוב והאדומים) כאל מחיצות של 8 תאים ממוספרים, ואז מפזרים בהם את 10 הכדורים הכחולים. תחילה, קובעים את כמות הכדורים הכחולים בכל תא, ואחר-כך את הסידור הפנימי שלהם, בהתאם לכמויות שנקבעו. כמו כן, שימו לב, שההכפלה בגורם שמתייחס לשלב השני מיותרת, מכיוון שגורם זה זהה במונה ובמכנה. (אילו היו במאורע מגבלות נוספות, שנוגעות לסידור הכדורים בשלב השני, היה הכרח לכפול בגורם שמתאים לשלב זה.)

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא $\frac{1}{7}=\frac{6!\cdot\cancel{\binom{17}{10}\cdot 10!}}{7!\cdot\cancel{\binom{17}{10}\cdot 10!}}$.

שימו לב: ההסתברות שהכדור הצהוב יהיה גבוה מכל הכדורים האדומים איננה תלויה בכדורים הכחולים והיא נקבעת אך ורק על-ידי הכדורים שמיקומם קובע את התרחשות המאורע (דהיינו, הכדור הצהוב והכדורים האדומים).

<u>והערה אחרונה</u>: אפשר גם למנות את מספר הסידורים, שבהם מתקיים המאורע הנתון, ולחלק ב- $17!$, כלומר, $\frac{1}{7}=\frac{6!\cdot\binom{17}{10}\cdot 10!}{17!}$.

ד. בדומה לפתרון הסעיף הקודם, אפשר להראות, שלכל i, ההסתברות שהכדור הצהוב יהיה במקום i, ביחס ל-7 הכדורים ה"קובעים", שכוללים את הכדור הצהוב עצמו ואת הכדורים האדומים, היא $\frac{1}{7}$.
לכן, ההסתברות שבקבוצת כל המקומות שלשמאל הכדור הצהוב יהיו לכל היותר 3 כדורים אדומים, היא הסתברות איחוד המאורעות הזרים, שהכדור הצהוב נמצא במקום 1, 2, 3 או 4, ביחס לכדורים ה"קובעים". כלומר, $\frac{4}{7}$.

ה. כפי שכתוב בהערה הממוסגרת בסוף הפתרון של תרגיל 1, ניסוי של הוצאת חפצים <u>בזה אחר זה</u> **<u>וללא החזרה</u>** (מתוך מאגר סופי של חפצים) שקול לניסוי שבו מסדרים את כל החפצים שבמאגר בשורה. כלומר, החפץ שממוקם בשורה במקום ה-i-י הוא כביכול החפץ שמוּצָא בבחירה ה-i-ית (כאשר מוציאים את החפצים בזה אחר זה וללא החזרה). לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא ההסתברות שחושבה בסעיף ב, דהיינו $\frac{6}{17}$.

8. א1. אם כל הכדורים **שונים** זה מזה, יש במרחב המדגם בסך-הכל $4^8=65{,}536$ פיזורים אפשריים.

א2. נבחר תחילה 3 כדורים מתוך ה-8 שיהיו בתאים 1 ו-2 ("הראשונים"), אחר-כך נפזר אותם בשני תאים אלו, ולבסוף נפזר את 5 הכדורים הנותרים ב-2 התאים האחרונים. בדרך זו, נקבל שמספר הפיזורים המבוקש הוא $\binom{8}{3}\cdot 2^3\cdot 2^5=14{,}336$.

א3. מרחב המדגם של בעיה זו הוא מרחב מדגם בעל תוצאות שוות-הסתברות. לכן נוכל לקבל את ההסתברות המבוקשת משני הסעיפים הראשונים.

כלומר, ההסתברות היא $0.21875=\frac{14{,}336}{65{,}536}=\frac{\binom{8}{3}\cdot 2^3\cdot 2^5}{4^8}$.

ב1. אם כל 8 הכדורים **זהים** זה לזה ויש 4 תאים ממוספרים (כלומר, 3 מחיצות בין התאים), יש במרחב המדגם בסך-הכל $\binom{8+3}{8}=\binom{11}{8}=165$ פיזורים אפשריים שונים.

ב2. כאשר כל הכדורים זהים זה לזה, אין צורך לבחור את הכדורים שיהיו בכל תא ותא, אלא רק להביא בחשבון את כמויות הכדורים בתאים. יש 4 פיזורים שונים של 3 כדורים בשני התאים הראשונים [שנובעים מהחלוקות (0,3), (1,2), (2,1) ו-(3,0)] ו-6 פיזורים שונים של 5 הכדורים הנותרים בשני התאים האחרונים [שנובעים מהחלוקות (0,5), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) ו-(5,0)]. לפיכך יש $4\cdot 6 = 24$ פיזורים שונים שיש בהם בסך-הכל 3 כדורים בשני התאים הראשונים.

ב3. שלא כמו במקרה שבו כל הכדורים שונים זה מזה, במקרה שבו הכדורים זהים זה לזה מרחב המדגם של הבעיה **<u>אינו</u>** מרחב מדגם בעל תוצאות שוות-הסתברות.

למשל, לפיזור שבו יש 3 כדורים בתא הראשון, 0 כדורים בתא השני ו-5 כדורים בסך-הכל בשני התאים האחרונים יש הסתברות $\frac{\binom{8}{3}\cdot 2^5}{4^8} = \frac{1,792}{65,536} = 0.027344$ (הנגזרת מן המקרה שבו כל הכדורים שונים זה מזה). לעומת זאת, לפיזור שבו יש כדור אחד בתא הראשון, 2 כדורים בתא השני ו-5 כדורים בסך-הכל בשני התאים האחרונים יש הסתברות $\frac{\binom{8}{3}\cdot 3\cdot 2^5}{4^8} = \frac{3\cdot 1,792}{65,536} = 0.08203$.

הסבר: למרות שלמראית עין כל 8 הכדורים זהים זה לזה, בכל זאת מדובר ב-8 עצמים שונים, שלכל אחד מהם יש 4 אפשרויות מיקום, כמספר התאים הממוספרים. בבואנו לחשב הסתברות של מאורע הנוגע לפיזור כדורים זהים, עלינו להביא בחשבון את כל ההרכבים של הכדורים בתאים, גם אם הם זהים למראה ומשוּיָכים לאותה התוצאה.

מסקנה: במקרה כזה, שבו מעוניינים לחשב **הסתברות של מאורע הנוגע לפיזור של כדורים זהים בתאים ממוספרים** (בניגוד לחישוב מספר התוצאות השונות השייכות למאורע), מחשבים את ההסתברות "דרך" ניסוי שקול של פיזור כמות זהה של כדורים <u>שונים</u> במספר זהה של תאים ממוספרים. בדרך זו, פותרים את הבעיה הנוצרת מכך שהתוצאות במרחב המדגם אינן שוות-הסתברות.

לפיכך, במקרה שבו הכדורים זהים, ההסתברות המבוקשת שווה להסתברות שחושבה בסעיף א3, כלומר ל- 0.21875.

ב4. כעת, מוסיפים את ההנחה שכל התוצאות במרחב המדגם שוות-הסתברות. כאשר קיימת הנחה כזו, כל האמור בסעיף הקודם בטל, ומסעיפים ב1 ו-ב2 נובע שההסתברות המבוקשת היא $\frac{24}{165} = 0.1\overline{45}$.

9. א. כל ילד יכול לבחור אחד מארבעה חוגים, לכן יש $4^6 = 4,096$ אפשרויות בחירה.

ב. יש $\binom{6}{3} = 20$ אפשרויות לבחור 3 ילדים שילכו לחוג מדע, ולכל אחד מהילדים האחרים יש 3 אפשרויות בחירה. לכן, ההסתברות היא $\frac{20\cdot 3^3}{4^6} = 0.13184$.

ג. יש $\binom{4}{2} = 6$ אפשרויות לקבוע מיהם החוגים שלא נבחרים על-ידי הילדים, וכל אחד מהילדים בוחר אחד משני החוגים האחרים. לכן, $\frac{6\cdot(2^6-2)}{4^6} = 0.09082$. (מפחיתים את שתי האפשרויות שבהן כל הילדים בוחרים באותו חוג.)

ד. ההסתברות שאף ילד לא יבחר בחוג יצירה היא $\frac{3^6}{4^6} = 0.75^6 = 0.17798$.

ה. כעת יש $\binom{4}{2}^2 \cdot 4^4 = 6^2 \cdot 4^4 = 9,216$ אפשרויות בחירה.

ו. לילדים הבוגרים יש $\binom{3}{2} = 3$ אפשרויות בחירה, לכן $\frac{3^2 \cdot 3^4}{6^2 \cdot 4^4} = 0.07910$.

ז. נבחין בין שלושה מקרים אפשריים. שני ילדים צעירים בוחרים בחוג המדע, ילד צעיר וילד בוגר בוחרים בחוג המדע ושני הילדים הבוגרים בוחרים בחוג המדע. נחשב את ההסתברות לכל מקרה בנפרד.

ההסתברות שחוג מדע ייבחר רק על-ידי שני ילדים צעירים היא $\frac{486}{9,216} = \frac{3^2 \cdot \binom{4}{2} \cdot 3^2}{6^2 \cdot 4^4}$;

ההסתברות שחוג מדע ייבחר רק על-ידי ילד אחד צעיר וילד אחד בוגר היא $\frac{1,944}{9,216} = \frac{\binom{2}{1} \cdot 3^2 \cdot \binom{4}{1} \cdot 3^3}{6^2 \cdot 4^4}$;

וההסתברות שחוג מדע ייבחר רק על-ידי שני ילדים בוגרים היא $\frac{729}{9,216} = \frac{3^2 \cdot 3^4}{6^2 \cdot 4^4}$.

לכן, ההסתברות שבדיוק שניים מהילדים יבחרו בחוג מדע היא $0.34277 = \frac{3,159}{9,216}$.

10. יש $10!$ אפשרויות חלוקה שונות.

א. יש רק חלוקה אחת שעונה על הדרישה של המאורע, ולכן ההסתברות היא $\frac{1}{10!}$.

ב. אפשר להחליף רק בין משלוחים זהים, לכן ההסתברות היא $\frac{3!}{10!}$.

ג. יש $252 = \binom{10}{5}$ לקבוע מיהם הילדים שמקבלים את המשלוח שלהם. נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה, כדי למנות את מספר אפשרויות החלוקה של 5 המשלוחים האחרים.

נסמן ב- A_i את המאורע שילד i מקבל את המשלוח שלו, לכל $i = 1,2,3,4,5$, ונחשב את מספר החלוקות השייכות למאורע $A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C$. תנאי הבעיה סימטריים, לכן:

$$\begin{aligned} n(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) &= 5! - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) \\ &= 5! - \left[\binom{5}{1} n(A_1) - \binom{5}{2} n(A_1 \cap A_2) + \ldots + \binom{5}{5} n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)\right] \\ &= 5! - [5 \cdot 4! - 10 \cdot 3! + 10 \cdot 2! - 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1] = 120 - 76 = 44 \end{aligned}$$

ומכאן מקבלים את ההסתברות המבוקשת, שהיא $0.0030556 = \frac{252 \cdot 44}{10!}$.

ד. מרחב המדגם בסעיף זה שונה ממרחב המדגם בסעיפים הקודמים של השאלה. במקרה זה, המורה מניחה (באופן אקראי) 2 משלוחים על כל שולחן. ולכן, יש $113,400 = \binom{10}{2,2,2,2,2}$ חלוקות אפשריות. כעת, יש $2^5 = 32$ אפשרויות לבחור את הילדים שיקבלו את המשלוח שלהם (אחד מכל זוג). את יתר המשלוחים, חמישה בסך-הכל, שכל אחד מהם שייך לזוג אחר, צריך לחלק כך שלא תהיה אף התאמה. בסעיף ג של השאלה ראינו שיש 44 אפשרויות לחלק 5 פריטים ללא אף התאמה. לכן, ההסתברות המבוקשת היא $0.012416 = \frac{32 \cdot 44}{\binom{10}{2,2,2,2,2}}$.

11. א. נגדיר 3 מאורעות, לפי פרטי הבעיה, וננסח בעזרתם את נתוני בבעיה.

הנתונים הם : A = התושב הוא אישה $\qquad P(A) = 0.5$

B = התושב מובטל $\qquad P(B) = 0.2$

C = התושב אקדמאי $\qquad P(C) = 0.62$

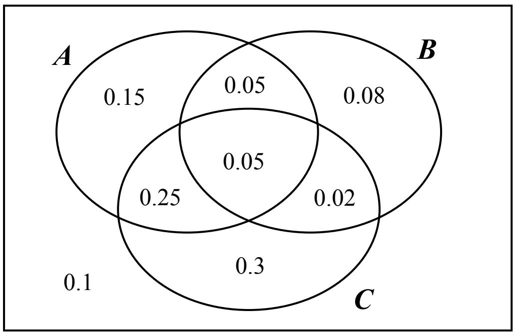
$P(A\cap B\cap C) = 0.05$

$P(A\cap B^C) = 0.4 \quad\Rightarrow\quad P(A\cap B) = P(A) - P(A\cap B^C) = 0.5 - 0.4 = 0.1$

$P(A^C\cap C^C) = 0.18 \quad\Rightarrow\quad P(A\cup C) = 1 - 0.18 = 0.82 \quad\Rightarrow\quad P(A\cap C) = 0.5 + 0.62 - 0.82 = 0.3$

$P(B^C\cap C) = 0.55 \quad\Rightarrow\quad P(B\cap C) = P(C) - P(B^C\cap C) = 0.62 - 0.55 = 0.07$

כעת, נוכל לצייר דיאגרמת ון מתאימה לבעיה :



ב. $P(B\cup C^C) = P(B) + P(C^C) - P(B\cap C^C) = 0.2 + 0.38 - (0.05 + 0.08) = 0.45$

ג. $P(A\cap B^C\cap C^C) = 0.15$

ד. $P((A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)) = P(A\cap B^C) + P(A\cap C^C) - P(A\cap B^C\cap C^C)$

$= (0.15 + 0.25) + (0.15 + 0.05) - 0.15 = 0.45$

ה. $P(A\cup B\cup C^C) = 1 - P(A^C\cap B^C\cap C) = 1 - 0.3 = 0.7$

ו. $P(A\cap B^C\cap C) + P(A^C\cap B\cap C) + P(A^C\cap B^C\cap C^C) = 0.25 + 0.02 + 0.1 = 0.37$

ז. נשתמש בתוצאות שקיבלנו בסעיפים ה ו-ו. הפרש התוצאות האלו ייתן את ההסתברות המבוקשת.
כלומר, $P\{\text{ה}\} - P\{\text{ו}\} = 0.7 - 0.37 = 0.33$.