20416 - תאריך הבחינה: 24.6.2013 (סמסטר 2013ב - מועד א / 82)

שאלה 1

א. $$P(A\,|\,C)=P(A\,|\,C\cap B)P(B\,|\,C)+\underbrace{P(A\,|\,C\cap B^C)}_{=0}P(B^C\,|\,C)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{n}=\frac{1}{n}$$

ב. כדי לחשב את ההסתברות המותנית המבוקשת נתנה במספר הכולל של חברי הקבוצה שבחרו בכדור אדום. לשם כך, לכל $i=1,2,\ldots,n$, נגדיר את המאורע C_i = i מחברי הקבוצה בחרו בכדור אדום.

לפי נוסחת ההסתברות השלמה <u>למאורעות מותנים</u>, נקבל:

$$P(A\,|\,B)=\sum_{i=1}^{n}P(A\,|\,B\cap C_i)P(C_i\,|\,B)=\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{i}\binom{n-1}{i-1}p^{i-1}(1-p)^{n-i}=\sum_{i=1}^{n}\tfrac{(n-1)!}{i!(n-i)!}p^{i-1}(1-p)^{n-i}$$

$$=\tfrac{1}{np}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}=\tfrac{1}{np}[1-(1-p)^n]$$

ג. לפי נוסחת ההסתברות השלמה, נקבל:

$$P(A)=P(A\,|\,B)P(B)+P(A\,|\,B^C)P(B^C)$$

$$=\frac{1-(1-p)^n}{n\cancel{p}}\cdot\cancel{p}+\frac{1}{n}\cdot(1-p)^{n-1}\cdot(1-p)=\frac{1-(1-p)^n+(1-p)^n}{n}=\frac{1}{n}$$

הסבר לחישוב $P(A\,|\,B^C)$:

נסמן ב- C את המאורע שלפחות אחד מחברי הקבוצה בחר בכדור אדום.

נשתמש שוב בנוסחת ההסתברות השלמה למאורעות מותנים, ונקבל:

$$P(A\,|\,B^C)=P(A\,|\,B^C\cap C)P(C\,|\,B^C)+P(A\,|\,B^C\cap C^C)P(C^C\,|\,B^C)=0+\tfrac{1}{n}(1-p)^{n-1}$$

שימו לב, שאפשר להגיע לתוצאה האחרונה שקיבלנו גם באופן אינטואיטיבי.
אם איתמר לא בחר בכדור אדום, אז הוא יכול להיות חבר הקבוצה שנבחר אם ורק א ם כל חברי הקבוצה לא בחרו בכדור אדום. לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא ההסתברות שכל חברי הקבוצה (שאינם איתמר) בחרו בכדור שחור ושאיתמר הוא זה שנבחר מביניהם.

שאלה 2

א. $$\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}\cdot\frac{1}{2!}\cdot10\cdot9\cdot8+\binom{5}{3}\cdot10\cdot9\cdot8+\binom{5}{2}\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{10^5}=\frac{9\cdot8\cdot(\frac{3}{2}+1+7)}{10^3}=0.684$$

ב. $$\frac{\binom{10}{5}2^5}{\binom{20}{5}}=\frac{20\cdot18\cdot16\cdot14\cdot12}{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}=0.5201$$

ג. נניח שאלון פותח את האריזות שקנה בזו אחר זו.

נגדיר: $X_i=\begin{cases}1 & \text{, מדבקה מסוג } i \text{ נמצאת באריזות שאלון קנה}\\ 0 & \text{, אחרת}\end{cases}$ לכל $i=1,\ldots,10$

ונקבל כי: $\sum_{i=1}^{10}X_i = X =$ מספר סוגי המדבקות שאלון יקבל

עתה, לכל $i = 1,\ldots,10$ מתקיים:
$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = 1 - \left(\tfrac{9}{10}\right)^{15} = 0.79411$$

לכן:
$$E[X] = \sum_{i=1}^{10} E[X_i] = 10\left[1 - \left(\tfrac{9}{10}\right)^{15}\right] = 7.9411$$

כמו כן, לכל $i \neq j$, כך ש- $i, j = 1,\ldots,10$, מתקיים:

$$P\{X_i = 1, X_j = 1\} = 1 - P\{X_i = 0 \cup X_j = 0\} = 1 - P\{X_i = 0\} - P\{X_j = 0\} + P\{X_i = 0, X_j = 0\}$$
$$= 1 - 2\left(\tfrac{9}{10}\right)^{15} + \left(\tfrac{8}{10}\right)^{15} = 0.6234$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = P\{X_i = 1, X_j = 1\} - P\{X_i = 1\}P\{X_j = 1\} = 0.6234 - 0.7941^2 = -0.007207$$

לכן:

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{10} \text{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j) = 10 \cdot 0.79411 \cdot (1 - 0.79411) - 10 \cdot 9 \cdot 0.007207 = 0.9864$$

שאלה 3

א. נגדיר $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$ ו- $Y_2 = X_1 + X_2$, ונמצא את פונקציית הצפיפות המשותפת של Y_1 ו- Y_2 באמצעות משוואה (7.1), המובאת בספר הקורס בעמוד 310.

נסמן:
$$x_1 = h_1(y_1, y_2) = y_1 y_2 \qquad y_1 = g_1(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_1 + x_2}$$
$$x_2 = h_2(y_1, y_2) = y_2 - y_1 y_2 = y_2(1 - y_1) \qquad y_2 = g_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

למשתנים המקריים X_1 ו- X_2 יש התפלגות גמא עם הפרמטרים (λ, t_1) ו- (λ, t_2), בהתאמה, לכן ערכיהם האפשריים הם בקטע $(0,\infty)$. מכאן אפשר להסיק כי הערכים האפשריים של Y_1 הם בקטע $(0,1)$ ואילו הערכים האפשריים של Y_2 הם בקטע $(0,\infty)$.

עתה, נחשב את $|J(x_1, x_2)|$. נקבל:
$$|J(x_1, x_2)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x_2}{(x_1+x_2)^2} & \frac{-x_1}{(x_1+x_2)^2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{x_1 + x_2}{(x_1 + x_2)^2} = \frac{1}{x_1 + x_2}$$

כמו כן, לכל $x_1 > 0$ ו- $x_2 > 0$ מתקיים:
$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$$
$$= \frac{\lambda e^{-\lambda x_1}(\lambda x_1)^{t_1 - 1}}{\Gamma(t_1)} \cdot \frac{\lambda e^{-\lambda x_2}(\lambda x_2)^{t_2 - 1}}{\Gamma(t_2)} = \frac{\lambda^{t_1 + t_2} e^{-\lambda(x_1 + x_2)} x_1^{t_1 - 1} x_2^{t_2 - 1}}{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)}$$

ומכאן, שלכל $0 < y_1 < 1$ ו- $y_2 > 0$ מתקיים:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)|J(x_1, x_2)|^{-1} = \frac{\lambda^{t_1 + t_2} e^{-\lambda(y_1 y_2 + y_2 - y_1 y_2)} (y_1 y_2)^{t_1 - 1}[y_2(1 - y_1)]^{t_2 - 1}}{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)} \cdot y_2$$
$$= \frac{\lambda^{t_1 + t_2} e^{-\lambda y_2} y_1^{t_1 - 1}(1 - y_1)^{t_2 - 1} y_2^{t_1 + t_2 - 1}}{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)}$$

ב. מפונקציית הצפיפות המשותפת שק יבלנו בסעיף הקודם , עולה שהמשתנים המקריים Y_1 ו- Y_2 בלתי-תלויים זה בזה, הואיל ואפשר להציג את הפונקציה כמכפלה של שתי פונקציות – האחת תלויה רק ב- y_1 והשנייה רק ב- y_2 . כמו כן , לא קיימת תלות בין המשתנים , הנובעת מתחום ההגדרה של ההתפלגות המשותפת. אם כך, נוכל להתבונן בפונקציית הצפיפות המשותפת ולראות שהגורמים התלויים ב- y_1 בלבד וגם תחום ההגדרה של המשתנה המקרי Y_1 $(0 < y_1 < 1)$ מתאימים שניהם להתפלגות ביתא עם הפרמטרים t_1 ו- t_2 . לפיכך : $E[Y_1] = \dfrac{t_1}{t_1 + t_2}$

אפשר גם למצוא את פונקציית הצפיפות השולית של Y_1 בדרך ישירה, ואז לזהות את ההתפלגותו.

הדרך הישירה:

לכל $0 < y_1 < 1$ מתקיים :

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_0^\infty f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)dy_2$$

$$= \frac{y_1^{t_1-1}(1-y_1)^{t_2-1}}{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)} \cdot \frac{\Gamma(t_1+t_2)}{(y_1+1)^{t_1+t_1}} \cdot \underbrace{\int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda y_2}(\lambda y_2)^{t_1+t_2-1}}{\Gamma(t_1+t_2)}dy_2}_{=1}$$

$$= \frac{\Gamma(t_1+t_2)}{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)} \cdot y_1^{t_1-1}(1-y_1)^{t_2-1} = \frac{1}{B(t_1,t_2)} \cdot y_1^{t_1-1}(1-y_1)^{t_2-1}$$

קיבלנו פונקציית צפיפות של התפלגות ביתא עם הפרמטרים t_1 ו- t_2 . לפיכך : $E[Y_1] = \dfrac{t_1}{t_1 + t_2}$

שאלה 4

נסמן ב- A_i את המאורע שרכיב i פועל לכל היותר x שבועות, לכל $i = 1,2,\ldots,10$ ולכל $x > 0$.

מתקיים :

$$P(A_i) = P\{X_i \le x\} = 1 - e^{-\lambda x} \qquad , \qquad i = 1,2,...,10$$

ולפי הנתון כל ה- A_i-ים בלתי-תלויים.

א. נמצא את התפלגות אורך-החיים של הענף העליון.

נסמן ב- Y_1 את אורך-החיים של הענף העליון, ונקבל כי :

$$F_{Y_1}(y) = P\{Y_1 \le y\} = 1 - P\{Y_1 > y\} = 1 - P(A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_5) = 1 - (e^{-\lambda y})^5 = 1 - e^{-5\lambda y} \qquad , \qquad y > 0$$

מפונקציית ההתפלגות המצטברת שמצאנו, עולה כי התפלגות אורך-החיים של הענף העליון היא מעריכית עם הפרמטר 5λ.

ב. נסמן ב- W את אורך-החיים של המערכת וב- Y_2 את אורך-החיים של הענף התחתון , ונקבל כי לכל $w > 0$ מתקיים :

$$F_W(w) = P\{W \le w\} = P\{Y_1 \le w, Y_2 \le w\} = P\{Y_1 \le w\}P\{Y_2 \le w\} = (1 - e^{-5\lambda w})^2$$

לפיכך :

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & , \quad w \le 0 \\ (1 - e^{-5\lambda w})^2 & , \quad w > 0 \end{cases}$$

ג. $$f_W(w)=2(1-e^{-5\lambda w})\cdot(-e^{-5\lambda w})\cdot(-5\lambda)=10\lambda(e^{-5\lambda w}-e^{-10\lambda w})\qquad,\qquad w>0$$

$$E[W]=f_W(w)=\int_0^\infty 10\lambda w(e^{-5\lambda w}-e^{-10\lambda w})dw=2\underbrace{\int_0^\infty 5\lambda we^{-5\lambda w}dw}_{=E[Exp(5\lambda)]}-\underbrace{\int_0^\infty 10\lambda we^{-10\lambda w}dw}_{=E[Exp(10\lambda)]}=\frac{2}{5\lambda}-\frac{1}{10\lambda}=\frac{3}{10\lambda}$$

ד. בסימוני הסעיפים הקודמים:

$$P\{W>b\,|\,Y_1>a\}=1-P\{W\le b\,|\,Y_1>a\}=1-\frac{P\{W\le b,Y_1>a\}}{P\{Y_1>a\}}=1-\frac{P\{\{Y_1\le b\}\cap\{Y_2\le b\}\cap\{Y_1>a\}\}}{P\{Y_1>a\}}$$

$$=1-\frac{P\{\{a<Y_1\le b\}\cap\{Y_2\le b\}\}}{P\{Y_1>a\}}=1-\frac{P\{a<Y_1\le b\}P\{Y_2\le b\}}{P\{Y_1>a\}}$$

$$=1-\frac{[F_{Y_1}(b)-F_{Y_1}(a)]F_{Y_2}(b)}{1-F_{Y_1}(a)}=1-\frac{(e^{-5\lambda a}-e^{-5\lambda b})(1-e^{-5\lambda b})}{e^{-5\lambda a}}$$

$$=1-(1-e^{-5\lambda(b-a)})(1-e^{-5\lambda b})=e^{-5\lambda(b-a)}+e^{-5\lambda b}-e^{-10\lambda b+5\lambda a}$$

שאלה 5

נתונה הפונקציה: $$P\{X=m,Y=n\}=e^{-7}\cdot\frac{4^m}{m!}\cdot\frac{3^{n-m}}{(n-m)!}\qquad,\qquad n=0,1,2,...\quad;\quad m=0,1,...,n$$

א. לכל $m=0,1,2,\ldots$ מתקיים:

$$P\{X=m\}=\sum_{n=m}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m}^{\infty}e^{-7}\cdot\frac{4^m}{m!}\cdot\frac{3^{n-m}}{(n-m)!}=e^{-7}\cdot\frac{4^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}=e^{-7}\cdot\frac{4^m}{m!}\cdot e^3=e^{-4}\cdot\frac{4^m}{m!}$$

לפיכך, למשתנה המקרי X יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 4.

ב. נמצא תחילה את פונקציית ההסתברות השולית של Y. לכל $n=0,1,2,\ldots$ מתקיים:

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=0}^{n}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=0}^{n}e^{-7}\cdot\frac{4^m}{m!}\cdot\frac{3^{n-m}}{(n-m)!}=e^{-7}\cdot\frac{3^n}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\left(\frac{4}{3}\right)^m$$

$$=e^{-7}\cdot\frac{3^n}{n!}\left(1+\frac{4}{3}\right)^n=e^{-7}\cdot\frac{3^n}{n!}\cdot\frac{7^n}{3^n}=e^{-7}\cdot\frac{7^n}{n!}$$

קיבלנו שלמשתנה המקרי Y יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 7, ומכאן שלכל $n=0,1,2,\ldots$ מתקיים:

$$P\{X=m\,|\,Y=n\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}=\frac{e^{-7}\cdot\frac{4^m}{m!}\cdot\frac{3^{n-m}}{(n-m)!}}{e^{-7}\cdot\frac{7^n}{n!}}=\binom{n}{m}\left(\frac{4}{7}\right)^m\left(\frac{3}{7}\right)^{n-m}\qquad,\qquad m=0,1,...,n$$

מהתוצאה האחרונה אפשר להסיק שלמשתנה המקרי המותנה X בהינתן $Y=n$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- 4/7. לפיכך: $$E[X\,|\,Y=n]=\tfrac{4}{7}n\qquad,\qquad n=0,1,2,...$$

ג. ראשית, נשים לב שאפשר להציג את תחום הערכים האפשריים גם בדרך נוספת , כך שיתקיים $m \le n$.
במקום $m = 0,1,\ldots,n$ ו- $n = 0,1,\ldots$ אפשר להגדיר $m = 0,1,2,\ldots$ ו- $n = m, m+1,\ldots$.

לפיכך, לכל $i = 0,1,2,\ldots$ ו- $i + j = i, i+1,\ldots$ או לחלופין לכל $i = 0,1,2,\ldots$ ו- $j = 0,1,\ldots$ מתקיים:

$$P\{X = i, Y - X = j\} = P\{X = i, Y = i + j\} = e^{-7} \cdot \frac{4^i}{i!} \cdot \frac{3^{i+j-i}}{(i+j-i)!} = e^{-7} \cdot \frac{4^i}{i!} \cdot \frac{3^j}{j!} \quad , \quad i, j = 0,1,\ldots$$

קיבלנו פונקציית הסתברות משותפת, שאפשר להציג אותה כמכפלה של שתי פונקציות – האחת תלויה רק ב- i והשנייה רק ב- j . כמו כן, גם תחום הערכים המשותפים של הפונקציה בר- הפרדה ולא קיימת תלות בין הערכים האפשריים להצבה ב- i לאלו האפשריים להצבה ב- j . לפיכך, X ו- $Y - X$ בלתי-תלויים.

ד. נשתמש בכל התוצאות שקיבלנו בסעיפים הקודמים, ונקבל:

$$0 = \mathrm{Cov}(X, Y - X) = \mathrm{Cov}(X, Y) - \mathrm{Var}(X)$$

לפיכך:
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Var}(X)$$

ומכאן:
$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{Var}(Y)}}$$