

מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.

* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.

* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי וידיאו, עליך לחזור ולהוכיחן.

* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (22 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(7 נק') א. יחס R הוא סדר-חלקי מעל קבוצה A . כזכור מפרק 3 בתורת הקבוצות, אם בנוסף לכך R גם **משווה** בין כל שני איברים של A , אומרים ש- R הוא **סדר-מלא** מעל A . איזה מהטענות הבאות פירושה ש- R משווה בין כל שני איברים של A ? במלים אחרות: מתוך 5 הטענות הבאות, מיהי הטענה שאם נצרף אותה לדרישה ש- R הוא סדר-חלקי, נקבל ביחד **בדיוק** את האמירה ש- R הוא **סדר מלא** מעל A ?

$$\forall x \forall y ((x \neq y) \rightarrow R(x, y)) \quad [1]$$

$$\forall x \forall y ((R(x, y) \wedge R(y, x)) \rightarrow x = y) \quad [2]$$

$$\forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x)) \quad [3]$$

$$\forall x \forall y ((x = y) \rightarrow (R(x, y) \wedge R(y, x))) \quad [4]$$

$$(\forall x \forall y R(x, y)) \vee (\forall x \forall y R(y, x)) \vee (\forall x \forall y (x \neq y)) \quad [5]$$

בכל הנוסחאות הכמתים מתייחסים לקבוצה A , למשל "קיים x " פירושו "קיים x ב- A ".

(8 נק') ב. \mathbf{R} היא קבוצת המספרים הממשיים, \mathbf{N} היא קבוצת המספרים הטבעיים.

נסמן $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^4 \in \mathbf{N}\}$. הנה כמה איברים של A : $1, -17, \sqrt{5}, -\sqrt[4]{7}$. מהי עוצמת A ?

$$\aleph_0 \quad [1] \quad C \quad [2] \quad 2^C \quad [3] \quad \text{מספר סופי כלשהו} \quad [4]$$

$$[5] \quad \text{עוצמה } k \text{ המקיימת } \aleph_0 < k < C.$$

(7 נק') ג. $G_1 = (V_1, E_1)$ הוא גרף פשוט, $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ ודרגת כל צומת ב- G_1 היא 2.

$G_2 = (V_2, E_2)$ הוא גרף פשוט, $V_2 = \{4, 5, 6, 7\}$ ודרגת כל צומת ב- G_2 היא 2.

G הוא גרף על $V_1 \cup V_2$, קבוצת הקשתות שלו היא $E_1 \cup E_2$. מכאן:

$$[1] \quad G \text{ המילטוני ודו-צדדי} \quad [2] \quad G \text{ המילטוני אך לא דו-צדדי}$$

$$[3] \quad G \text{ דו-צדדי אך לא המילטוני} \quad [4] \quad G \text{ אינו המילטוני ואינו דו-צדדי}$$

$$[5] \quad \text{כדי לקבוע אם } G \text{ דו-צדדי ואם הוא המילטוני נדרש מידע נוסף.}$$

תזכורת: גרף המילטוני הוא גרף שיש בו מעגל המילטון.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 26 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 78 נקודות

שאלה 2

(13 נק') א. R הוא יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל קבוצה לא ריקה A .

הוכיחו: $R \cap R^{-1}$ הוא יחס שקילות מעל A .

אפשר למצוא בספר כמה טענות רלבנטיות שיקצרו קצת את ההוכחה.

(13 נק') ב. בסעיף זה בלבד $A = \{1, 2, 3\}$.

תנו דוגמא ליחס R שהוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל A , אבל $R \cup R^{-1}$ אינו יחס שקילות מעל A . כמובן יש להראות שהיחס שמצאתם מקיים את כל הנדרש.

שאלה 3

לפנינו ארבע קופסאות שונות. על הקופסה הראשונה כתוב "5", על השניה כתוב "10", על השלישית "15" ועל הרביעית לא כתוב דבר. עלינו לחלק 30 גפרורים זהים בין 4 הקופסאות, כאשר לגבי 3 הקופסאות הראשונות, אסור שמספר הגפרורים בקופסה יהיה שווה למספר הכתוב על הקופסה. על הקופסה הרביעית לא כתוב כלום, לכן אין הגבלה לגביה. אפשר שקופסה או כמה קופסאות יישארו ריקות. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת? יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 4

כתבו פונקציה יוצרת עבור מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ בשלמים, כאשר $1 \leq x_1 \leq 5$, $2 \leq x_2 \leq 6$, $0 \leq x_3 \leq 4$, $0 \leq x_4 \leq 4$.

ארגנו את הפונקציה שקיבלתם בצורה הבאה: $x^2 \cdot (1 - x^2)^2 \left(\frac{1}{1 - x} \right)^2$

בעזרת הפונקציה שרשמתם מצאו את מספר פתרונות המשוואה הנ"ל בתנאים הנ"ל, כאשר $n = 12$. יש להגיע לתשובה סופית מספרית. יש לפתור בעזרת פונקציה יוצרת ולא אחרת.

שאלה 5

G הוא גרף בעל 5 רכיבי קשירות.

הראו שהגרף המשלים של G ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4) אינו מישורי.

בהצלחה!