תשובה 1

א. שאלה 3.17 בספר הלימוד אומרת: $\sum_{k=0}^{j}\binom{n+k}{k}=\binom{n+j+1}{j}$ (*) .

מכאן, בהצבת $m-1$ במקום n, ו- n במקום j:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k-1}{k}=\binom{m+n}{n}$$

מצד שני, בהצבת $n-1$ במקום n, ו- m במקום j במשוואה (*), נקבל:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k-1}{k}=\binom{m+n}{m}=\binom{m+n}{n}$$

השוויון המבוקש נובע כעת ע"י חיסור 1 (המתאים למחובר $k=0$) משני השוויונים האחרונים.

ב. $$\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n+1}\binom{m}{n} = \sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \sum_{n=0}^{m}\frac{m!}{(n+1)!\,(m-n)!}$$

נארגן ביטוי זה כך שיהיה דומה למקדם בינומי:

$$= \sum_{n=0}^{m}\frac{m+1}{m+1}\cdot\frac{m!}{(n+1)!(m-n)!} = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}\frac{(m+1)!}{(n+1)!(m-n)!} = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}\binom{m+1}{n+1}$$

נחליף משתנה בסכום האחרון, $i=n+1$:

$$= \frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m+1}\binom{m+1}{i} = \frac{1}{m+1}(2^{m+1}-1)$$

בצעד האחרון נעזרנו בכך ש- $2^{m+1} = \sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i}$ (השווה סוף פתרון הסעיף הקודם),

בעוד שבסכום שאצלנו חסר המחובר $i=0$.

תשובה 2

א. $\frac{12!}{4!3!2!2!} = 831{,}600$.

ב. אם הרצף **דמקה** מופיע, נתייחס אליו כאל "תו מיוחד" בודד.
יחד איתו יש בסה"כ 9 תוים, מתוכם 3 זהים **(ה)** ועוד 3 זהים **(נ)**.

מספר הסידורים: $\frac{9!}{3!3!} = 10{,}080$.

ג. תהי U קבוצת כל הדרכים לסדר את 12 התוים ללא הגבלה. מסעיף א: $|U| = 831{,}600$.

נסמן - A_1 : קבוצת הדרכים לסדר את המחרוזת כך שמופיע הרצף **דמקה**,

A_2 : קבוצת הדרכים לסדר את המחרוזת כך שמופיע הרצף **קהה**,

A_3 : קבוצת הדרכים לסדר את המחרוזת כך שמופיע הרצף **ממד**,

A_4 : קבוצת הדרכים לסדר את המחרוזת כך שמופיע הרצף **ננהה**.

אלה הסידורים שאינם מותרים כעת. אנו רוצים למצוא את $|U - \bigcup_{i=1}^{4} A_i|$.

ניעזר בהכלה והפרדה.

(i) מסעיף ב, $|A_1| = 10{,}080$. בצורה דומה נקבל:

$$|A_2| = \frac{10!}{3!(2!)^3} = 75{,}600 \quad , \quad |A_3| = \frac{10!}{4!3!} = 25{,}200 \quad , \quad |A_4| = \frac{8!}{(2!)^3} = 5{,}040 \ .$$

(ii) חישוב החיתוכים דורש קצת זהירות. למשל **דמקה** ו- **קהה** יכולים להופיע באותה מחרוזת, אבל רק כרצף **דמקהה** . לעומת זאת **דמקה** ו- **ממד** לא יכולים להופיע באותה מחרוזת.
דמקה ו- **ננהה** יכולים להופיע באותה מחרוזת, כשני "תוים מיוחדים" בלתי תלויים זה בזה.
בדומה עוברים על שאר החיתוכים.
החיתוכים הלא ריקים של זוגות הם:

$$|A_1 \cap A_2| = \frac{8!}{3!2!} = 3{,}360 \quad , \quad |A_1 \cap A_4| = 5! = 120 \quad , \quad |A_2 \cap A_3| = \frac{8!}{3!2!} = 3{,}360 \ ,$$

$$|A_2 \cap A_4| = \frac{6!}{2!2!} = 180 \quad , \quad |A_3 \cap A_4| = \frac{6!}{2!} = 360 \ .$$

(iii) החיתוכים הלא ריקים של שלישיות הם:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 4! = 24 \quad , \quad |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4! = 24 \ .$$

(iv) חיתוך ארבעת הקבוצות יחד הוא ריק.

כעת בעזרת הכלה והפרדה, מספר הסידורים המותרים הוא:

$$|U| - \sum_{i=1}^{4}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le 4}|A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le 4}|A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

$$= 831{,}600 - (10{,}080 + 75{,}600 + 25{,}200 + 5{,}040) +$$

$$+ (3{,}360 + 120 + 3{,}360 + 180 + 360) - (24 + 24)$$

$$= 723{,}012$$

תשובה 3

צונזר

תשובה 4

לעבודה הראשונה מתחלקים 17 תלמידים ל- 4 צוותים. לפי עקרון שובך היונים קיים צוות שבו **לפחות 5 תלמידים** (הוכחה ישירה: אילו מס' התלמידים בכל צוות היה קטן או שווה 4, מספר התלמידים הכולל היה קטן או שווה $4 \cdot 4$ כלומר 16).
לצורך העבודה השניה יש לחלק את התלמידים שוב ל- 4 צוותים. כאמור, בעבודה הראשונה היה צוות שבו לפחות 5 תלמידים. כאשר נפזר צוות זה בין 4 צוותים, יהיו לפחות שניים ממנו באותו צוות (שימוש טריביאלי בשובך היונים).

איתי הראבן