מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה

חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים – כל היחידה

מספר השאלות: 5

משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2012א

מועד אחרון להגשה: יום ה' 9.2.2012

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות מנחה (ממ"נים):

- שליחת הממ"ן באמצעות מערכת המטלות המקוונת - כניסה דרך אתר הקורס
- שליחת הממ"ן באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגש ההנחיה
  הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

סך הנקודות בממ"ן זה הוא 111 . לא יינתן ציון מעל 100, אבל ניתן להגיע לציון 100 על-ידי פתרון חלק או כל השאלות/הסעיפים כרצונכם.

ציון המטלה מצטבר מניקוד כל התשובות שכתבתם, גם תשובות עליהן קיבלתם ניקוד חלקי.

שאלה 1 (24 נקודות)

בשאלה 1 של ממ"ן 14 עסקנו בדיאגרמת הסה של יחס ההכלה מעל $P(A)$,

כאשר A היא קבוצה בת n אברים. נראה את הדיאגרמה הזו כגרף (גרף לא מכוון):

צמתי הגרף הם הקבוצות החלקיות של A . יש אפוא 2^n צמתים.

בין שני צמתים X,Y יש קשת אם ורק אם X מכסה את Y או Y מכסה את X.

נקרא לגרף זה H_n .

בממ"ן 14 חישבנו את מספר הקשתות ב- H_n . נחשב זאת כעת מחדש, בדרך אחרת.

א. הוכיחו ש- H_n הוא רגולרי. מה הדרגה של כל צומת?

ב. חשבו את מספר הקשתות ב- H_n **בעזרת סעיף א**

(בלי להסתמך על ממ"ן 14 ולא באותה דרך שהוצגה באתר הקורס בפתרון ממ"ן 14).

ג. עבור איזה ערכי n הגרף H_n הוא אוילרי?

שאלה 2 (24 נקודות)

יהיו $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ שני עצים על אותה קבוצת צמתים V.

לכל $v \in V$ תהי $d_1(v)$ הדרגה של v ב- G_1 ותהי $d_2(v)$ הדרגה של v ב- G_2 .

הוכיחו כי קיים $v \in V$ עבורו $d_1(v)+d_2(v) \le 3$.

הדרכה: חשבו את סכום כל הדרגות בשני העצים.

שאלה 3 (21 נקודות)

יהי M זיווג בגרף G. אם **לכל** קשת שאינה ב- M, האיחוד של M עם הקשת החדשה כבר אינו זיווג, נאמר ש- M הוא **זיווג שאינו ניתן להרחבה.**

א. הראו שזיווג שאינו ניתן להרחבה **אינו** בהכרח זיווג מקסימום:
תנו דוגמא פשוטה לגרף G וזיווג M ב- G, כך ש- M אינו ניתן להרחבה אך אינו זיווג מקסימום.
הוכיחו את טענותיכם לגבי M.

ב. הציגו מסלול שיפור עבור הזיווג M שהצגתם בסעיף הקודם.

ג. יהי M זיווג מקסימום בגרף G. האם בהכרח M אינו ניתן להרחבה? הוכיחו.

שאלה 4 (18 נקודות)

G הוא גרף מישורי על 11 צמתים. הוכיחו שהגרף המשלים שלו, $\overline{G}$, אינו מישורי.

שאלה 5 (24 נקודות)

יהי G גרף פשוט, שקבוצת הצמתים שלו היא V.
נניח שצבענו את G צביעה נאותה, בצבעים הלקוחים מקבוצת צבעים A.
$\bar{G}$ הוא הגרף המשלים של G.
בלי קשר לצביעה של G, צבענו את $\bar{G}$ צביעה נאותה, בצבעים הלקוחים מקבוצת צבעים B.

א. לכל $v \in V$ נתאים **זוג סדור** של צבעים: הראשון בזוג הוא הצבע של v בצביעה של G והשני בזוג הוא הצבע של v בצביעה של $\bar{G}$.

הוכיחו שבהתאמה זו, אין שני צמתים שונים שמותאם להם אותו זוג סדור של צבעים.

נסחו אמירה זו גם כטענה על **חד-חד-ערכיות** של פונקציה (פונקציה מהיכן להיכן?)

ב. יהי $n = |V|$. מסעיף א נובעת אחת הטענות הבאות. מצאו איזו, והוכיחו אותה.

(1) $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \geq n$

(2) $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n$

(3) $\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \geq n$

(4) $\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \leq n$

צביעה נאותה ומספר הצביעה, $\chi(G)$, הוגדרו שניהם בעמ' 59 בחוברת "תורת הגרפים".