אלגוריתמים 1 (234247) – סמסטר אביב 2005

תרגיל בית 5

מתרגל אחראי על התרגיל: יאיר קורן, שעת קבלה: יום ב' 30: 14-15:30, yair_k@cs.

תאריך חלוקה: יום רביעי 25/5/05.

תאריך הגשה: יום רביעי 8/6/05, שעה 12:00 בצהריים.

הערות:

- יש להגיש את התרגיל בזוגות.
- שאלות על התרגיל נא להפנות למתרגל האחראי על התרגיל.
- נא לוודא שהפתרון המוגש קריא. פתרונות לא-קריאים לא ייבדקו!
- נא לצרף לפתרון את דף השער המופיע באתר הקורס.
- יש להוכיח כל טענה שלא נלמדה בהרצאה או בתרגול.
- כל אלגוריתם יש לתאר תחילה בקצרה (מה הרעיון מאחוריו) ואחר כך בפירוט (תיאור מילולי, או פסאודו-קוד).
- יש להוכיח נכונות ולנתח סיבוכיות של כל אלגוריתם.
- לא כל השאלות יבדקו.

שאלה 1

א. יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון חסר מעגלים. הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(V+E)$ המחשב מסלול ארוך ביותר ב- G. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

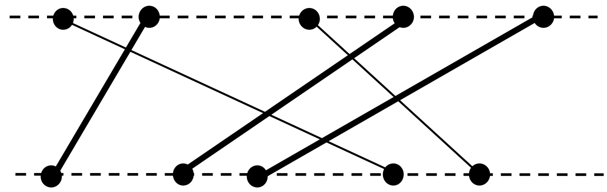
ב. גרף לא-מכוון יקרא קליק (גרף מלא) אם הוא פשוט ובין כל זוג צמתים קיימת קשת.
נתון גרף מכוון וחסר מעגלים מכוונים $G=(V,E)$, כך ש- $|V|=n$. נתון גם כי G הוא טרנזיטיבי, כלומר אם $(u\to v)\in E$ ו- $(v\to w)\in E$, אז $(u\to w)\in E$. הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(V+E)$ המוצא את מספר הצמתים הגדול ביותר כך שתת-הגרף המושרה על-ידם בגרף התשתית של G הוא קליק. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.
רמז: מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך שקבוצת צמתים בגרף מכוון, חסר מעגלים וטרנזיטיבי מגדירה קליק בתת-הגרף המושרה על ידה בגרף התשתית.

ג. יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון, חסר מעגלים וממושקל $w:E\to\mathbb{R}$. כיצד יש לשנות את האלגוריתם שהצעתם בסעיף א' כך שיחשב (באותה סיבוכיות) מסלול כבד ביותר ב- G. הסבירו בקצרה (אין צורך בהוכחת נכונות מלאה).

ד. נתון אוסף תיבות $\{b_1,b_2,...,b_n\}$ כך שהגודל של התיבה ה- i הוא $x_i\times y_i\times z_i$ (לכל $i=1,2,...,n$).
הציעו אלגוריתם המחזיר את גובה המגדל המירבי שניתן לבנות באמצעות אוסף התיבות, כאשר מותר להניח תיבה b_i על תיבה b_j רק באופן כזה שהפאה של b_i קטנה ממש במימדיה (ברוחב ובאורך) מהפאה של b_j בה היא נוגעת. הניחו כי ניתן לסובב את התיבות וכי יש מספר לא מוגבל של עותקים מכל תיבה.
הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

שאלה 2

נתונות שתי קבוצות ערים, כל אחת בגודל n המסודרות על שני קווים מקבילים. בנוסף, נתונים קווי תעופה בין הערים, כך שכל עיר בקבוצה האחת מחוברת בקו תעופה לעיר אחת בדיוק בקבוצה השנייה, ולהיפך. לדוגמה:



רוצים לקבוע גובה לכל קו תעופה כך ששני קווי תעופה הנחתכים ביניהם יהיו בגובה שונה. לשם כך הוצע האלגוריתם הבא:

1. $i \leftarrow 1$.
2. חשב קבוצה גדולה ביותר של קווי תעופה שאינם נחתכים.
3. קבע גובה i לכל קווי התעופה בקבוצה שנמצאה ומחק אותם.
4. אם נותרו קווי תעופה $i \leftarrow i+1$ וחזור ל-2.

למשל, עבור הדוגמה לעיל יקבע גובה 1 לכל קווי התעופה העבים וגובה 2 לשאר קווי התעופה.

א. הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(n^2)$ שבהינתן קבוצות ערים וקווי תעופה כנ"ל מחשב קבוצה גדולה ביותר של קווי תעופה שאינם נחתכים (שלב 2 באלגוריתם).
רמז: אם נסמן את הערים בקבוצה אחת ב-$1,2,...,n$ לפי הסדר, אז קבוצת הערים השנייה מגדירה פרמוטציה על n.

ב. האם האלגוריתם המוצע מוצא את המספר הקטן ביותר של גבהים שונים לכל קלט כנ"ל? אם כן, הוכיחו זאת, ואם לא, הראו דוגמה נגדית.

ג. נניח שבקבוצה אחת n_1 ערים, בשנייה n_2 ערים, וכל עיר עשויה להשתתף ביותר מקו תעופה אחד. נסמן את סה"כ מספר קווי התעופה ב-m. הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(m^2)$ המחשב את שלב 2 באלגוריתם תחת הנחות אלה. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

שאלה 3

בהינתן גרף לא-מכוון $G=(V,E)$,

- **שידוך** (matching) הוא קבוצה של קשתות $M \subseteq E$ כך שאין שתי קשתות ב-M בעלות צומת קצה משותף.
- שידוך $M \subseteq E$ נקרא **שידוך מקסימום** (maximum matching) אם לכל שידוך אחר M' מתקיים $|M| \ge |M'|$.

הציעו אלגוריתם <u>המבוסס על תכנות דינאמי</u> בסיבוכיות $O(V)$ למציאת שידוך מקסימום **<u>בעץ</u>**. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

שאלה 4

נתון בניין בן n קומות. ידוע שקיימת קומה f כך שאם נשליך ביצה מקומה זו או מקומה גבוהה יותר הביצה תישבר, אך אם נשליך את הביצה מקומה נמוכה מ- f הביצה לא תשבר (יתכן ש- $f=1$ כלומר הביצה נשברת החל מהקומה הראשונה, ויתכן ש- $f=n+1$, כלומר הביצה לא נשברת מאף קומה). אנו מעוניינים לחשב את f.

נניח שלרשותנו עומדות k ביצים זהות והפעולה היחידה שמותר לנו לבצע היא השלכה של ביצה מקומה כלשהי וצפייה בתוצאת ההשלכה. כמובן שלא ניתן להשתמש שנית בביצה שנשברה.

נסמן ב- $E(n,k)$ את המספר המינימלי של השלכות שתמיד יספיק על מנת למצוא את f בהינתן בניין בן n קומות ו- k ביצים.

למשל, $E(9,2)\le 4$ כי ניתן לפעול על פי האסטרטגיה הבאה:

נטיל את הביצה הראשונה מקומה 4.

אם נשברה נטיל את הביצה השנייה החל מקומה 1.

אחרת, נטיל את הביצה הראשונה מקומה 7.

אם נשברה, נטיל את הביצה השנייה החל מקומה 5.

אחרת, נטיל את הביצה הראשונה החל מקומה 8.

ניתן לראות כי בכל מקרה מספיק 4 הטלות לכל היותר. ניתן גם להראות ש-3 הטלות עשויות לא להספיק ולכן $E(9,2)=4$.

הציעו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו שבהינתן n ו- k מחשב את $E(n,k)$. הוכיחו נכונות ונתחו את סיבוכיות האלגוריתם שהצעתם כפונקציה של n ו- k. האם זמן הריצה פולינומיאלי ביחס לגודל הקלט?

שאלה 5

נתונים n מספרים טבעיים $a_1,a_2,\ldots,a_n$, ומספר טבעי נוסף A. הציעו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המכריע האם קיימת קבוצה $S\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$ כך ש- $A=\sum_{i\in S}a_i$. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות. האם זמן הריצה פולינומיאלי ביחס לגודל הקלט?