דף סיכום בחינה

2020B - Moed 72

מזהה קורס: 20585   שם קורס: מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

מספר שאלה	ציון מירבי	ציון שאלה סופי
1	20.00	20.00
2	20.00	20.00
3	20.00	20.00
4	20.00	8.00
5	20.00	
6	20.00	20.00

ציון בחינה סופי : 88.00

הבחינה הבדוקה בעמודים הבאים

פתרון למבחן במבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

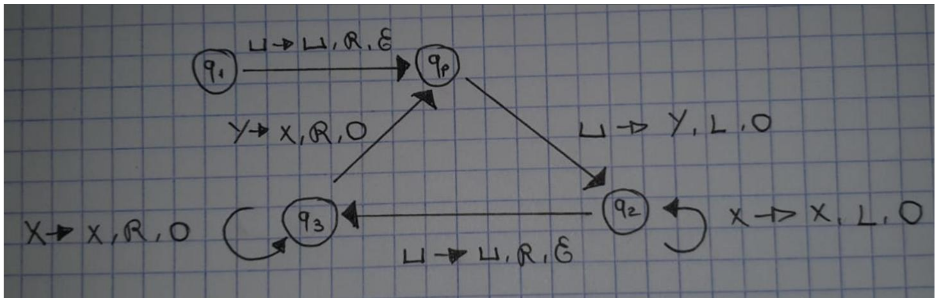
שאלה 1

נציג מונה בעל חמישה מצבים לשפה $\{0^{2n}|n \geq 0\}$, כאשר

$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_{print} = q_p, q_{halt}\}$

$\Sigma = \{0\}$

$\Gamma = \{x, y, \_\}$



תיאור מילולי של פונקציית המעברים והסבר של המונה:

- מתחילים עם סרט עבודה ריק. במעבר מ-q_1 קוראים תו רווח ועוברים ל-q_{print}. משאירים את תו הרווח הראשון בסרט (לא נמחק אותו בשום שלב, כדי לזכור את הגבול השמאלי של סרט העבודה). לא כותבים דבר על סרט הפלט ומדפיסים את אפסילון.
- ע"י מעבר ממצב הדפסה למצב q_2 מוסיפים Y (אשר יסמל לנו את הגבול הימיני של סרט העבודה) בסוף המחרוזת הנוכחית בסרט העבודה (באיטרציה הראשונה המחרוזת היא רק רווח וביתר האיטרציות המחרוזת תהיה רצף של איקסים). מוסיפים 0 אחד בסרט ההדפסה בעת המעבר. בשלב זה הראש הקורא יהיה בין הרווח ומחרוזת האיקסים (שוב, באיטרציה הראשונה אין מחרוזת איקסים) לבין תו ה-Y;
- ע"י חזרה על מצב q_2 ננוע שמאלה בסרט העבודה, ועבור כל X שנראה נוסיף 0 לסרט ההדפסה.
עד כאן הדפסנו אפסים כמספר תווי ה-X במחרוזת פלוס 1 (עבור תו ה-Y);
- ברגע שנתקל בתו הרווח המסמל את הגבול השמאלי של סרט העבודה, נזיז את הראש הקורא ימינה כך שהוא יהיה מיד לאחר תו הרווח המסמל את הגבול, ע"י מעבר ממצב q_2 למצב q_3;
- נחזור על מצב q_3 כל עוד אנחנו נעים ימינה ורואים X נוסף, על X כזה נוסיף 0 לסרט ההדפסה;
- ברגע שהראש הקורא יהיה לפני תו ה-Y הבודד בסרט העבודה (המסמל את הגבול הימיני של המחרוזת בסרט העבודה), נחליף אותו ב-X נוסיף עבורו 0 נוסף אחרון לסרט ההדפסה, ונעבור למצב הדפסה;
- **כשנגיע למצב הדפסה יהיו על סרט ההדפסה אפסים באורך שהוא פעמיים ממספר תווי ה-X במחרוזת פלוס 2 (עבור תו ה-Y). לכן לכל אורך של מחרוזת תווי ה-X (0,1,2) נדפיס:**
  - |_|=0 לכן נדפיס 0*2+2 = 2 אפסים
  - |X|=1 לכן נדפיס 1*2+2 = 4 אפסים
  - |XX|=2 לכן נדפיס 2*2 + 2 = 6 אפסים וכן הלאה עד אינסוף

שאלה 2

סעיף א:

נציג $A_{TM} \leq_m UNION_{TM}$:

קלט הרדוקציה $<M,w>$ כאשר M מ"ט ו-w מילה מעל א"ב M.

נבנה 2 מ"ט חדשות:

M_1 = בהינתן קלט x:

1. אם $x \neq w$ הרץ את M על x והחזר אותה תשובה;
2. אחרת, דחה.

M_2 = בהינתן קלט x:

1. אם $x \neq w$ דחה;
2. **אחרת, קבל.**

פלט הרדוקציה: $< M_1, M_2, M >$

נכונות: במקרה שבו $< M, w > \in A_{TM}$ מתקיים $w \in L(M)$. לכל $x \neq w$ אם $x \in L(M)$ נקבל כי $x \in L(M_1)$ ומשום ש-M_2 מקבלת דיפולטית רק את w נקבל כי $L(M_2) = w$ ולכן $L(M_1) \cup L(M_2) = L(M)$, כלומר $< M_1, M_2, M > \in UNION_{TM}$.

במקרה שבו $< M, w > \notin A_{TM}$ מתקיים $w \notin L(M)$. לכל $x \neq w$ אם $x \in L(M)$ נקבל כי $x \in L(M_1)$ ומשום ש-M_2 מקבלת דיפולטית את w נקבל כי $L(M_2) = w$, כלומר המילה w מתקבלת ע"י האיחוד $L(M_1) \cup L(M_2)$ ולכן $L(M_1) \cup L(M_2) \neq L(M)$ כלומר $< M_1, M_2, M > \notin UNION_{TM}$.

סעיף ב:

נציג $A_{TM} \leq_m \overline{UNION_{TM}}$:

קלט הרדוקציה $<M,w>$ כאשר M מ"ט ו-w מילה מעל א"ב M.

נבנה 2 מ"ט חדשות:

M_1 = בהינתן קלט x:

3. אם $x \neq w$ הרץ את M על x והחזר אותה תשובה;

4. אחרת, דחה.

M_2 = בהינתן קלט x:

3. דחה.

פלט הרדוקציה: $< \boldsymbol{M_1, M_2, M} >$

נכונות: במקרה שבו $< M, w >\in A_{TM}$ מתקיים $w \in L(M)$. אבל גם M_1 וגם M_2 לא מקבלות את w ולכן $L(M_1) \cup L(M_2) \neq L(M)$ כלומר $< M_1, M_2, M >\in \overline{UNION_{TM}}$.

במקרה שבו $< M, w >\notin A_{TM}$ מתקיים $w \notin L(M)$. לכל $x \neq w$ אם $x \in L(M)$ נקבל כי $x \in L(M_1)$ ומשום ש-M_2 לא מקבלת אף מילה $L(M_1) \cup L(M_2) = L(M_1) = L(M)$, כלומר $< M_1, M_2, M >\in UNION_{TM}$, ולכן $< M_1, M_2, M >\notin \overline{UNION_{TM}}$.

לא הסברת למה הרדוקציות ניתנות לחישוב

20

(2)

שאלה 3

כדי להראות כי $UNION-SAT$ שייכת ל-P, נראה כי קיימים אלגוריתמים פולינומיאלים לפתרון השפות:

1. SAT, שפת הנוסחאות הבוליאניות שקיימת להן השמה מספקת (אחת או יותר);
2. L_2, שפת הנוסחאות הבוליאניות כך שיש להן 2 או יותר השמות מספקות.

ומשום כך, ניתן להריץ על כל נוסחא את שני האלגוריתמים, ובמידה ונקבל כי הנוסחא ב-SAT אך אינה ב-L_2, נובע כי הנוסחא היא כן ב-$UNION-SAT$.

שלב 1: נראה מ"ט M_2 המכריעה את L_2 בזמן פולינומיאלי.

ראשית נראה כי L_2 ב-NP. נראה זאת על ידי כך שנראה מאמת V_2 לשפה.

מאמת V_2: בהינתן $< \varphi, s_1, s_2 >$ כך ש-φ נוסחא ו-s_1, s_2 השמות:

1. בדוק שאכן φ נוסחא בוליאנית ו-s_1, s_2 הן השמות חוקיות לליטרלים של φ (כלומר בכל השמה בפני עצמה מופיעים כל הליטרלים של הנוסחא, ולא יותר מזה, ללא חזרות, וכל ליטרל מקבל ערך T או F אחד בלבד); צריך גם לבדוק ששתי ההשמות שונות זו מזו
2. הצב את השמות s_1, s_2 ב-φ , בזו אחר זו, אם הנוסחא קיבלה בשתי ההשמות ערך 1 -קבל, אחרת דחה.

נכונות: שלב 1 בודק שאכן הקלט שהמאמת קיבל חוקי. שלב 2 בודק האם בכל השמה s משתי ההשמות הנבדקות על נוסחא φ נקבל כי הנוסחא ספיקה. אם כן, סימן שיש לנוסחא φ לפחות שתי השמות מספקות. אם אין לנוסחא 2 השמות מספקות, לא משנה באילו 2 השמות נבחר המאמת ידחה.

זמן ריצה: שלב 1 אורך זמן פולינומיאלי באורך הקלט. שלב 2 אורך זמן לינארי (פעמיים) באורך הקלט. לכן סה"כ נקבל זמן ריצה פולינומיאלי באורך הקלט (בפרט המאמת יעצור ויחזיר תשובה לכל קלט).

משום שהוכחנו כי קיים מאמת לשפה, הוכחנו כי $L_2 \in NP$ מאמת בעל זמן ריצה פולינומיאלי

מהנחת השאלה NP=P ולכן משום שהראינו $L_2 \in NP$ נובע **קיימת מ"ט M_2 המכריעה את L_2 בזמן פולינומיאלי.**

שלב 2: נראה מ"ט M_{SAT} המכריעה את SAT בזמן פולינומיאלי.

ידוע כי $SAT \in NP$ (לא נוכיח זאת משום שיש הוכחה מלאה וארוכה בספר הלימוד), ומהנחת השאלה כי NP=P נובע כי משום ש-$SAT \in NP$ נובע **קיימת מ"ט M_{SAT} המכריעה את SAT בזמן פולינומיאלי.**

שלב 3: כעת נבנה מ"ט M אשר תכריע את $UNION-SAT$ בזמן פולינומיאלי.

M= בהינתן קלט φ, נוסחא בוליאנית:

1. הרץ את M_{SAT} על φ, אם דחתה -דחה;
2. הרץ את M_2 על φ, והחזר תשובה הפוכה.

נכונות: אם $<\varphi>\in UNION-SAT$ אז הרצה של M_{SAT} על φ תחזיר תשובה חיובית (כי קיימת השמה ספיקה לנוסחא), והרצה של M_2 על φ תחזיר תשובה שלילית (כי קיימת רק השמה ספיקה אחת לנוסחא), ומשום ש-M מחזירה תשובה הפוכה מ-M_2, M תקבל.

אם $<\varphi>\notin UNION-SAT$, זה יכול לנבוע משתי סיבות: הנוסחא לא ספיקה, או שקיימת יותר מהשמה אחת המספקת את הנוסחא. לכן או שבשלב 1 M_{SAT} תדחה את הנוסחא, ולכן גם M תדחה, או שבשלב 2 M_2 תקבל את הנוסחא ולכן M תדחה את הנוסחא.

זמן ריצה: שני השלבים דורשים הרצה של אלגוריתם בזמן פולינומיאלי ביחס ל-φ (כלומר סה"כ שתי הרצות כל אחת בזמן פולינומיאלי) ולכן זמן הריצה היא פולינומיאלי ביחס לאורך הקלט.

20

(3)

שאלה 4 -לא סיימתי לפתור את השאלה

סעיף א: נראה את הרדוקציה $3COLOR \leq_P CONN - 3COLOR$.

תהי מ"ט M המבצעת את הרדוקציה בזמן פולינומיאלי –

M: בהינתן $<G,k>$ כאשר $G=(V,E)$ גרף לא מכוון ו-k מספר טבעי, בצע: **לא נכון**

1. תהי קבוצה U ריקה, $i=0$, וכן $v_1 = X, v_2 = X, v_3 = X$ (מצביעים שמצביעים על ערך סרק);
2. נגדיר $G'=(V,E')$. בתחילה $E'=E$;
3. כל עוד $\cup_{j=0}^{i} U_j \neq V$:
   א. אם $i \neq 0$, הגדר $v_1 = v_2$ ולאחר מכן $v_2 = X$, $v_3 = X$;
   ב. בחר קודקוד $v \in V(\cup_{j=0}^{i} U_j)$ ובצע BFS מ-v. במהלך הסריקה:
      i. צור קבוצה של כל הקודקודים אליהם הגענו במהלך הסריקה, נקרא לה U_i;
      ii. בדוק מה דרגתו (נגדיר דרגה של קודקוד כמספר הדרגות אליהן הוא מחובר בקשת ישירה) של כל קודקוד אליו הגענו בסריקה. אם הגענו לקודקוד v' שדרגתו קטנה מ-2 נגדיר $v_2 = v'$. אם הדרגה של v_2 היא 1 נגדיר $v_3 = v_2$. אחרת נמשיך בסריקה באותו אופן עד שנמצא קודקוד נוסף v' שדרגתו קטנה מ-2 ונגדיר $v_3 = v'$. משלב זה אין צורך לבדוק דרגות של קודקודים יותר ואפשר להמשיך בהרצת BFS "רגיל";
      iii. בסוף הסריקה הכנס את U_i ל-U;
      iv. אם בסוף הסריקה $v_2 = X$ בחר קודקוד אקראי v' ב-U_i (שדרגתו בדיוק 2), הסר מ-E את אחת מהקשתות אליו v' מחובר, ונגדיר $v_2 = v'$;
      v. הוסף ל-E את הקשת (v_1, v_2)
      vi. אם בסוף הסריקה $v_3 = X$, בחר קודקוד אקראי v' ב-U_i (שדרגתו בדיוק 2), הסר מ-E את אחת מהקשתות אליו v' מחובר, ונגדיר $v_3 = v'$.

   למה חייבים להיות צמתים בעלי דרגה נמוכה?

   ג. הגדל את i ב-1 וחזור לתחילת שלב 3.
4. החזר $<G',k>$.

זמן ריצה: שלב 1 אורך זמן קבוע. שלב 2 דורש העתקה של הגרף המקורי, ולכן זה פולינומיאלי באורך הקלט. שלב 3 רץ מספר סופי של איטרציות (לכל היותר $|V|$), ובכל איטרציה:

- אנחנו מגדירים השמות למשתנים, זמן קבוע;
- אנחנו בוחרים קודקוד על ידי איחוד איברי U והשוואה ל-V, שזו פעולה ריבועית ביחס ל-$|V|$;
- מבצעים BFS, נאמר על ידי מבנה של תור, ותוך כדי בודקים דרגת הקודקוד אליו הגענו וזה אורך זמן פולינומיאלי באורך הקלט;
- שלבים iii ואילך הם גם כן שלבים לינאריים באורך הקלט;
- שלב ג אורך זמן קבוע באורך הקלט.

שלב 4 גם באורך קבוע. לכן בסה"כ נקבל זמן ריצה פולינומיאלי באורך הקלט.

נכונות: אם $<G,k> \in 3-COLOR$ אז כל רכיב קשירות של G הוא $3-COLOR$. לכן גם הגרף לאחר הסרה והוספת קשתות ל-E' יהיה 3-צביע, משום שאם נצבע את רכיב הקשירות הראשון, אמנם הגבלנו את צבע הקודקוד בו השתמשנו לצורך קישור בין רכיב הקשירות הראשון לשני, אבל אם רכיב הקשירות השני היה צביע לפני כן, ניתן היה לעשות פרמוטציה לצבעים כך שרכיב הקשירות

השני לא יפר את חוקיות הצביעה וכן הלאה. כמו כן אנחנו מקשרים בין כל שני רכיבי קשירות ולכן יוצרים גרף קשיר, כלומר $<G',k>\in CONN-3COLOR$

אם $<G,k>\notin 3-COLOR$

סעיף ב:

8

(4)

שאלה 6

סעיף א - $B \in RP$. נראה זאת ע"י שנראה מ"ט עבור B ונוכיח ש-M מקיימת את תנאי RP.

נתון:

- $B \leq_P A$ ולכן קיימת מ"ט M_1 המבצעת רדוקציה בזמן פולינומיאלי מ-B ל-A;
- $A \in RP$ לכן קיימת מ"ט M_2 מסוג RP עבור B המקיימת את 3 תנאי RP:
  - עבור קלט השייך ל-B הסבירות שיתקבל ע"י M_2 גדולה או שווה ל-$\frac{1}{2}$;
  - עבור קלט שלט שייך ל-B הסבירות שידחה ע"י M_2 היא בדיוק 1;
  - M_2 רצה בזמן פולינומיאלי באורך הקלט.

M (עבור השפה B) = בהינתן קלט x:

1. הרץ את M_1 על x, נקרא לתוצאה *f(x)*;
2. הרץ את מ"ט M_2 על *f(x)* והחזר אותה תוצאה.

נכונות: אם $x \in B$ נובע מהרדוקציה הפולינומיאלית כי $f(x) \in A$. משום כך אם נריץ את M_2 על x הסבירות שיתקבל גדולה או שווה ל-$\frac{1}{2}$. אם $x \notin B$ נובע מהרדוקציה הפולינומיאלית כי $f(x) \notin A$. משום כך אם נריץ את M_2 על x הסבירות שידחה היא בדיוק 1.

זמן ריצה: שלב 1 אורך זמן פולינומיאלי ביחס ל-x. נשים לב שתוצאת הרדוקציה היא פולינומיאלית באורך הקלט (משום שאורכה חסום ע"י זמן ריצתה, שהוא פולינומיאלי) ולכן אורך הפלט הוא $O(|x|^{k_1})$ עבור k_1 כלשהו. שלב 2 אורך זמן פולינומיאלי ביחס לאורך הקלט שלו, שהוא *f(x)* כלומר $O(f(x)^{k_1}) = O\left(|x|^{k_1^{K_2}}\right) = O(|x|^{k_1 k_2})$ עבור k_2 כלשהו, ולכן גם שלב 2 אורך זמן פולינומיאלי ביחס ל-x . כלומר בסך הכל נקבל זמן ריצה פולינומיאלי.

לכן M מקיימת את 3 התנאים של RP ולכן היא שייכת ל-RP.

סעיף ב -לא ניתן להסיק כי $C \in RP$. תהי $A \in RP$, מכאן נובע כי $A \in NP$ בפרט אפשרי כי $A \in P$ למשל -שפת כל קידודי המכונות כך שהמצב ההתחלתי שלהן הוא המצב המקבל.

תהי מכונה M_1 ששייכת ל-A (כלומר המצב ההתחלתי שלה הוא המצב המקבל) ותהי מכונה M_2 שלא שייכת ל-A (כלומר המצב ההתחלתי שלה הוא ~~לא~~ המצב הדוחה).

נבחר A_{TM}=C

הרדוקציה בין A ל-C יכולה להיות:

קלט: <M>

פלט: $<M,\varepsilon>$

זמן ריצה: לינארי באורך הקלט

נכונות: אם <M> שייכת ל-A אז המצב ההתחלתי שלה מקבל ולכן $<M,\varepsilon>$ שייכת ל-A_{TM}

אם <M> לא שייכת ל-A אז המצב ההתחלתי שלה דוחה ולכן $<M,\varepsilon>$ לא שייכת ל-A_{TM}

RP מוכלת ב-NP אבל A_{TM} לא כריעה ולא שייכת ל-NP. לכן C היא דוגמא לשפה המקיימת את תנאי השאלה אך אינה ב-RP.

20
(6)