פרק 6: התפלגות משותפת של משתנים מקריים (סיכום) (20416 / 20.2.10)

אם X ו- Y הם משתנים מקריים בדידים, אז **פונקציית ההסתברות המשותפת** שלהם מוגדרת, לכל x ו- y ממשיים, על-ידי $p_{X,Y}(x,y)=P\{X=x,Y=y\}$, כאשר $\sum_{x,y} p_{X,Y}(x,y)=1$.

את פונקציות ההסתברות השולית של X ושל Y, p_X ו- p_Y בהתאמה, אפשר לקבל מפונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y על-ידי:

$$p_X(x)=\sum_y P\{X=x,Y=y\}=\sum_y p_{X,Y}(x,y)$$

$$p_Y(y)=\sum_x P\{X=x,Y=y\}=\sum_x p_{X,Y}(x,y)$$

כאשר p_X ו- p_Y נקראות פונקציות ההסתברות השולית של X ושל Y, בהתאמה.

אם X ו- Y הם משתנים מקריים רציפים, **פונקציית הצפיפות המשותפת** שלהם $f_{X,Y}(x,y)$ היא פונקציה אי-שלילית, המוגדרת לכל x ו- y ממשיים ומקיימת לכל C, שהיא קבוצה במישור הדו-מימדי, את התכונה

$$P\{(X,Y)\in C\}=\iint_{(x,y)\in C} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \text{ . לכן, } \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=1 \text{ .}$$

את פונקציות הצפיפות השולית של X ושל Y, f_X ו- f_Y בהתאמה, אפשר לקבל מפונקציית הצפיפות המשותפת של X ו- Y על-ידי:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \quad ; \quad f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת של משתנים מקריים X ו- Y (בדידים או רציפים) מוגדרת, לכל a ו- b ממשיים, על-ידי:

$$F_{X,Y}(a,b)=P\{X\le a,Y\le b\}$$

אם X ו-Y משתנים מקריים בדידים אז –

$$F_{X,Y}(a,b)=\sum_{y:y\le b}\sum_{x:x\le a} p_{X,Y}(x,y)$$

אם X ו-Y משתנים מקריים רציפים אז –

$$F_{X,Y}(a,b)=\int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{a} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

ואפשר להראות כי:

$$f_{X,Y}(a,b)=\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial b}F_{X,Y}(a,b)$$

כמו כן:

$$F_X(a)=P\{X\le a,Y<\infty\}=F_{X,Y}(a,\infty) \quad ; \quad F_Y(b)=P\{X<\infty,Y\le b\}=F_{X,Y}(\infty,b)$$

כאשר F_X ו- F_Y נקראות פונקציות ההתפלגות המצטברת השולית של X ושל Y, בהתאמה.

את כל האמור לעיל אפשר להכליל ל**התפלגות משותפת של n משתנים מקריים**.

ההתפלגות המולטינומית: (התפלגות משותפת בדידה)

נאמר שלמשתנים המקריים הבדידים X_1 , X_2 , ... , X_r יש התפלגות משותפת מולטינומית, אם פונקציית ההסתברות המשותפת שלהם היא:

$$P\{X_1=n_1,\dots,X_r=n_r\}=\frac{n!}{n_1!\cdot\ldots\cdot n_r!}\cdot p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r}$$

כאשר, $p_1, p_2, \dots, p_r$ מסמנים הסתברויות שסכומן 1, וכן $\sum_{i=1}^{r} n_i=n$ עבור n שלם וחיובי.

ניסוי מקרי מולטינומי: ניסוי מקרי המורכב מ- n חזרות בלתי-תלויות על ניסוי, בעל r תוצאות אפשריות שונות, המתקבלות בהסתברויות p_1, p_2, ... ,p_r .

המשתנה המקרי X_i, לכל $i = 1,...,r$, מוגדר כמספר החזרות בניסוי המולטינומי שבהן מתקבלת התוצאה i .

המאורע $\{X_1 = n_1, \dots, X_r = n_r\}$ מתאר את מספר הפעמים שכל אחת מ-r התוצאות מתקבלת בניסוי המולטינומי.

הערות:
1. אם לווקטור המשתנים המקריים $\underline{X}$ יש התפלגות מולטינומית, מסמנים $\underline{X} \sim Mult(n, \underline{p})$.
2. אם $r = 2$ ההתפלגות המולטינומית אינה אלא התפלגות בינומית עם הפרמטרים (n, p_1).
3. ההתפלגות השולית של כל X_i היא התפלגות בינומית עם הפרמטרים (n, p_i), כאשר $i = 1,...,r$.
4. ההתפלגות של כל סכום $X_i + X_j$ היא התפלגות בינומית עם הפרמטרים $(n, p_i + p_j)$, כאשר $i \neq j$.
5. המשתנים המקריים X_1, X_2, ... ,X_r תלויים זה בזה.
6. ההתפלגות המותנית של $X_i \mid X_j = k$, לכל $k = 0,...,n$, היא בינומית עם הפרמטרים $(n - k, \frac{p_i}{1-p_j})$.
7. לכל $i \neq j$ מתקיים $\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$. (פרק 7)

משתנים מקריים בלתי-תלויים

המשתנים המקריים X ו-Y נקראים בלתי-תלויים אם לכל x ו- y ממשיים מתקיים :

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

אם X ו- Y הם משתנים מקריים בדידים, תנאי אי-תלות שקול הוא : $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y)$

ואם X ו- Y הם משתנים מקריים רציפים, תנאי אי-תלות שקול הוא : $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y)$

המשתנים המקריים הבדידים X_1, X_2, ... ,X_n נקראים **בלתי-תלויים** אם לכל תת-קבוצה של r משתנים מקריים מתוכם $(r = 2,...,n)$ ולכל r מספרים ממשיים x_1, x_2, ... ,x_r מתקיים :

$$P\{X_{i_1} = x_1, \dots, X_{i_r} = x_r\} = P\{X_{i_1} = x_1\} \cdot \ldots \cdot P\{X_{i_r} = x_r\}$$

ותנאי אי-תלות שקול הוא : $P\{X_{i_1} \le x_1, \dots, X_{i_r} \le x_r\} = P\{X_{i_1} \le x_1\} \cdot \ldots \cdot P\{X_{i_r} \le x_r\}$

הערה: יחס האי-תלות הוא יחס סימטרי. כלומר, אם X בלתי-תלוי ב-Y, אז כמובן Y בלתי-תלוי ב-X .

טענה (2.1): המשתנים המקריים הבדידים (הרציפים) X ו- Y בלתי-תלויים אם ורק אם ניתן לרשום את פונקציית ההסתברות המשותפת שלהם $p_{X,Y}$ (פונקציית הצפיפות המשותפת שלהם $f_{X,Y}$) בצורה –

$p_{X,Y}(x, y) = h(x)\, g(y)$, לכל x ו- y ממשיים

טענה (דוגמה 2ב): אם מספר המופעים שמתרחשים במרווח-זמן נתון הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ, ואם תכונה מסוימת מתקיימת בכל אחד מהמופעים המתרחשים בהסתברות p , אז –

מספר המופעים שמתקיימת בהם התכונה במרווח-הזמן הנתון הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λp ;

מספר המופעים שלא מתקיימת בהם התכונה במרווח-זמן זה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\lambda(1-p)$;

ושני המשתנים המקריים הפואסוניים האלו בלתי-תלויים זה בזה.

סכום של משתנים מקריים

יהיו X ו-Y משתנים מקריים בדידים. ההתפלגות של המשתנה המקרי $X+Y$ מתקבלת מאחת מן המשוואות $P\{X+Y=a\}=\sum_x P\{X=x, Y=a-x\}$ או $P\{X+Y=a\}=\sum_y P\{X=a-y, Y=y\}$, לכל a ממשי.

ואם X ו-Y בלתי-תלויים מקבלים כי $P\{X+Y=a\}=\sum_x P\{X=x\}P\{Y=a-x\}=\sum_y P\{X=a-y\}P\{Y=y\}$ לכל a ממשי.

יהיו X ו-Y משתנים מקריים רציפים בלתי-תלויים. ההתפלגות של המשתנה המקרי $X+Y$ מתקבלת מן המשוואות $F_{X+Y}(a)=\int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y)f_Y(y)dy$ ו- $f_{X+Y}(a)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)f_Y(y)dy$ לכל a ממשי.

<u>**טענות**</u> (סכום של משתנים מקריים בלתי-תלויים)

1. **דוגמה 3ד:** אם X_i הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ_i לכל $i=1,2,...,n$, ואם X_1 , X_2 , ... , X_n בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$.
2. **דוגמה 3ה:** אם X_i הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים (n_i, p) לכל $i=1,2,...,n$, ואם X_1 , X_2 , ... , X_n בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right)$.
3. **תרגיל ת6:** אם X_i הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p לכל $i=1,2,...,n$, ואם X_1 , X_2 , ... , X_n בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא משתנה מקרי בינומי שלילי עם הפרמטרים n ו-p .
4. **טענה 3.2:** אם X_i הוא משתנה מקרי נורמלי עם הפרמטרים μ_i ו-σ_i^2 לכל $i=1,2,...,n$, ואם X_1 , X_2 , ... , X_n בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא משתנה מקרי נורמלי עם הפרמטרים $\sum_{i=1}^{n}\mu_i$ ו- $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$.
5. **טענה 3.1:** אם X_i הוא משתנה מקרי גמא עם הפרמטרים t_i ו-λ לכל $i=1,2,...,n$, ואם X_1 , X_2 , ... , X_n בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא משתנה מקרי גמא עם הפרמטרים $\sum_{i=1}^{n} t_i$ ו-λ.
מכאן מקבלים, כי אם X_1 , X_2 , ... , X_n הם משתנים מקריים מעריכיים בלתי-תלויים שלכולם הפרמטר λ, אז $\sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא משתנה מקרי גמא עם הפרמטרים (n,λ). (דוגמה 3ב)
6. אם Z_1 , Z_2 , ... , Z_n הם משתנים מקריים נורמליים סטנדרטיים בלתי-תלויים, אז $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ הוא משתנה מקרי חי-בריבוע עם n דרגות-חופש. כלומר, משתנה מקרי גמא עם הפרמטרים $(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$. (עמודים 295 - 294)

בכל הטענות שלעיל, מוכיחים ישירות את הטענה עבור $n=2$ ואחר-כך מכלילים אותה באינדוקציה ל-n כללי.

התפלגויות מותנות

אם X ו-Y הם משתנים מקריים בדידים, **פונקציית ההסתברות המותנית של X בתנאי $Y=y$** מוגדרת לכל y שעבורו $P\{Y=y\}>0$ ולכל x ממשי על-ידי:

$$p_{X|Y}(x\mid y)=P\{X=x\mid Y=y\}=\frac{P\{X=x,Y=y\}}{P\{Y=y\}} \qquad ; \qquad \sum_x p_{X|Y}(x\mid y)=1$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת של X בתנאי $Y=y$ היא:

$$F_{X|Y}(a\,|\,y)=P\{X\le a\,|\,Y=y\}=\sum_{x:x\le a}P\{X=x\,|\,Y=y\}$$

אם X ו- Y הם משתנים מקריים רציפים, **פונקציית הצפיפות המותנית של X בתנאי $Y=y$** מוגדרת לכל y שעבורו $f_Y(y)>0$ ולכל x ממשי על-ידי:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_{X|Y}(x\,|\,y)\,dx=1 \qquad ; \qquad f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת של X בתנאי $Y=y$ היא:

$$F_{X|Y}(a\,|\,y)=P\{X\le a\,|\,Y=y\}=\int_{-\infty}^{a}f_{X|Y}(x\,|\,y)\,dx$$

הערה: אם X ו-Y בדידים ובלתי-תלויים זה בזה מקבלים כי:

$$P\{X=x\,|\,Y=y\}=P\{X=x\}$$

$$P\{Y=y\,|\,X=x\}=P\{Y=y\}$$

אם X ו-Y רציפים ובלתי-תלויים זה בזה מקבלים כי:

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=f_X(x)$$

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=f_Y(y)$$

כלומר, אם המשתנים המקריים X ו-Y בלתי-תלויים זה בזה, ההתפלגות המותנית של X בהינתן $Y=y$ אינה תלויה ב- y ושווה להתפלגות השולית של X, ולהיפך. ובמילים אחרות, לערך הידוע של משתנה מקרי אחד אין השפעה על ההתפלגות של המשתנה המקרי השני.

אם X הוא משתנה מקרי רציף ואם Y הוא משתנה מקרי בדיד, אז –

לכל y שעבורו $P\{Y=y\}>0$ ולכל x ממשי מתקיים:

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{P\{Y=y\,|\,X=x\}\cdot f_X(x)}{P\{Y=y\}}$$

ולכל x שעבורו $f_X(x)>0$ ולכל y ממשי מתקיים:

$$p_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f_{X|Y}(x\,|\,y)\cdot P\{Y=y\}}{f_X(x)}$$

טענה (דוגמה 4ב): אם X ו- Y הם משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_1 ו-λ_2, בהתאמה, אז ההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X+Y=n$ היא בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

הכללת הטענה האחרונה: אם X_1, X_2 ו- X_3 הם משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_1, λ_2 ו- λ_3, בהתאמה, אז ההתפלגות המשותפת המותנית של המשתנים המקריים X_1, X_2 ו- X_3 בהינתן $\sum_{i=1}^{3}X_i=n$ היא מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3},\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3},\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)$.

טענה: אם X ו- Y הם משתנים מקריים בינומיים בלתי-תלויים עם הפרמטרים (n_X,p) ו- (n_Y,p), בהתאמה, אז ההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X+Y=n$ היא היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N=n_X+n_Y$, $m=n_X$ ו- $n=n$.

סטטיסטֵי סדר

נניח כי X_1 , X_2 , ... , X_n הם משתנים מקריים רציפים בלתי-תלויים שלכולם אותה פונקציית צפיפות f ואותה פונקציית התפלגות מצטברת F. סטטיסטי הסדר הם המשתנים המקריים המוגדרים על-ידי –

$X_{(1)}$ = הקטן מבין $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$X_{(2)}$ = השני בקטנותו מבין $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$\vdots$

$X_{(n)}$ = הגדול מבין $X_1, X_2, \ldots, X_n$

ההתפלגות המשותפת של n סטטיסטי הסדר, ההתפלגויות המשותפות של כל שניים מהם וההתפלגויות השוליות של כל אחד מהם נתונות על-ידי פונקציות הצפיפות שלהלן:

$$f_{X_{(1)},\ldots,X_{(n)}}(x_1,\ldots,x_n) = n!\cdot f(x_1)\cdot\ldots\cdot f(x_n)$$, לכל $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ ממשיים

$$f_{X_{(i)}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\cdot\left[F(x)\right]^{i-1}\left[1-F(x)\right]^{n-i} f(x)$$, לכל x ממשי

$$F_{X_{(i)}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\int_{-\infty}^{x}\left[F(y)\right]^{i-1}\left[1-F(y)\right]^{n-i} f(y)\,dy$$, לכל x ממשי

$$f_{X_{(i)},X_{(j)}}(x_i,x_j) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}\cdot\left[F(x_i)\right]^{i-1}\left[F(x_j)-F(x_i)\right]^{j-i-1}\left[1-F(x_j)\right]^{n-j} f(x_i)f(x_j)$$

לכל $x_i < x_j$ ממשיים.

לסדרת משתנים מקריים בלתי-תלויים X_1 , X_2 , ... , X_n , שלכל אחד מהם פונקציית התפלגות מצטברת F, קוראים **מדגם מקרי** של התפלגות F .

הטווח של מדגם מקרי מוגדר על-ידי המשתנה המקרי $R = X_{(n)} - X_{(1)}$.

החציון של מדגם מקרי מוגדר על-ידי המשתנה המקרי $Md = X_{(m)}$ כאשר $n = 2m+1$;

וכאשר $n = 2m$, אז חציון-המדגם מוגדר על-ידי $Md = \frac{X_{(m)} + X_{(m+1)}}{2}$.

אמצע הטווח של מדגם מקרי מוגדר על-ידי המשתנה המקרי $M = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$.

התפלגות משותפת של פונקציות של משתנים מקריים

אם X_1 ו- X_2 הם משתנים מקריים רציפים, ואם $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$ ו- $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$ הם משתנים מקריים המוגדרים כפונקציות של X_1 ו- X_2 , כאשר g_1 ו- g_2 הן פונקציות ממשיות המוגדרות לכל ערך אפשרי של (X_1, X_2), ואפשר לחלץ מהן את X_1 ו- X_2 באופן יחיד, אז פונקציית הצפיפות המשותפת של Y_1 ו- Y_2 היא:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\left|J(x_1,x_2)\right|^{-1}$$

כאשר $x_i = h_i(y_1,y_2)$ לכל $i = 1,2$ ו- $J(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0$.