

שימו לב: במועד זה מתקיימות שתי בחינות במתמטיקה דיסקרטית, האחת בקורס הישן שמספרו 20276 והשנייה בקורס החדש שמספרו 20283. **טופס הבחינה שבידיך הוא של הקורס החדש, לנבחנים שלמדו את הקורס בסמסטר 2003ב.**

אם למדת את הקורס מתמטיקה דיסקרטית בסמסטר 2003א או לפני כן, טופס זה אינו מיועד לך, בקש/י מיד לקבל את הטופס המתאים.

מבנה הבחינה:

- * יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- * משקל כל שאלה 25%.
- * אם תשיב/י על יותר מ-4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- * יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
 - * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
 - * אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
 - * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
-

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

תהי A קבוצה לא-ריקה, R יחס (רלציה) מעל A .
נסמן ב- R' את המשלים של R ב- $A \times A$.
בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצא את הטענה הנכונה ונמק בקיצור. אין צורך בהוכחה מלאה.
(6 נק') א. אם R יחס רפלקסיבי אז R' :

- (1) רפלקסיבי
(2) אינו רפלקסיבי
(3) יכול להיות רפלקסיבי ויכול לא להיות רפלקסיבי.

(6 נק') ב. אם R סימטרי אז R' :

- (1) סימטרי
(2) אנטי-סימטרי
(3) לא חייב להיות סימטרי ולא חייב להיות אנטי-סימטרי.

(6 נק') ג. אם R אנטי-סימטרי אז R' :

- (1) סימטרי
(2) אנטי-סימטרי
(3) לא חייב להיות סימטרי ולא חייב להיות אנטי-סימטרי.

(7 נק') ד. אם R אנטי-סימטרי אז הסגור הטרנזיטיבי של R :

- (1) אנטי-סימטרי
(2) אינו אנטי-סימטרי
(3) יכול להיות אנטי-סימטרי ויכול לא להיות אנטי-סימטרי.

שאלה 2

N היא קבוצת המספרים הטבעיים.
 R היא קבוצת המספרים הממשיים, שעוצמתה C .
תהי A קבוצת כל הפונקציות של N לקבוצה $P(R)$.
תהי B קבוצת כל הפונקציות של $\{1,2,3\}$ לקבוצה $P(R \times R)$.
לכל אחת מהקבוצות A, B קבעי אם עוצמתה היא :
 \aleph_0 / C / 2^C / יותר מ- 2^C / עוצמה אחרת
הוכיחי בפירוט, נמקי כל מעבר. אפשר להסתמך על ממ"ן 14.

שאלה 3

4 אנשים שונים (ששמותיהם 1,2,3,4) אחראים יחד על ביצוע של 5 משימות שונות (משימות א,ב,ג,ד,ה). לביצוע כל משימה נדרשים בדיוק שני אנשים. אין הבדל בין תפקידי שני האנשים בצוות המבצע משימה נתונה.

(8 נק') א. בכמה דרכים ניתן להקצות את 5 המשימות לצוותים של שני אנשים ?

הנה כמה דוגמאות לדרכים לגיטימיות לעשות זאת :

דוגמא 1 : הצוות {1,2} יבצע את כל 5 המשימות !

דוגמא 2 : הצוות {1,2} יבצע את משימות א,ב , הצוות {1,3} את משימות ג,ד

והצוות {2,3} את משימה ה.

דוגמא 3 : הצוות {1,2} יבצע את משימות א,ב , הצוות {3,4} את משימות ג,ד

והצוות {2,3} את משימה ה.

(17 נק') ב. בכמה דרכים ניתן להקצות את 5 המשימות לצוותים של שני אנשים, אם אסור

שמישהו יתחמק לגמרי מעבודה : כל אחד מ-4 האנשים חייב לקחת חלק במשימה

אחת לפחות (דוגמאות 1, 2 בסעיף א אינן חוקיות כעת. דוגמא 3 - חוקית).

הדרכה לסעיף ב : הכלה והפרדה.

בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 4

בידינו מספר לא מוגבל של מרצפות מכל אחד מהסוגים הבאים : מרצפות אדומות באורך 2, מרצפות ירוקות באורך 2, מרצפות סגולות באורך 2, מרצפות שחורות באורך 1 ומרצפות לבנות באורך 1.

יהי a_n מספר הדרכים לרצף שביל ישר באורך n בעזרת מרצפות מהסוגים הללו.

לא חייבים להשתמש בכל הסוגים.

(10 נק') א. רשום את a_0, a_1, a_2 . רשום יחס נסיגה עבור a_n .

וודא שיחס הנסיגה מתיישב עם ערכי ההתחלה שרשמת.

(11 נק') ב. פתור את יחס הנסיגה שקיבלת בסעיף הקודם ורשום ביטוי מפורש עבור a_n .

(4 נק') ג. חשב **בשתי דרכים** את a_4 : פעם אחת בעזרת הביטוי עבור a_n שמצאת בסעיף ב

ופעם אחת על ידי שימוש חוזר ביחס הנסיגה שמצאת בסעיף א.

שאלה 5

תהי L שפה חלקית לשפת תחשיב הפרדיקטים, ובה בין השאר סימני משתנים x, y, z , סימן

פרדיקט דו-מקומי A_1^2 וסימן פונקציה דו-מקומית f_1^2 .

תהי J אינטרפרטציה של L , שתחומה הוא N (המספרים הטבעיים), ובה f_1^2 מתפרש

כפונקציה \max , כלומר $f_1^2(x, y)$ מתפרש כגדול מבין x, y .

A_1^2 מתפרש כשוויון.

תהי ϕ התבנית $A_1^2(x, y) \rightarrow A_1^2(f_1^2(x, y), y)$. תהי ψ התבנית $\exists y \forall x (\phi)$.

(4 נק') א. האם ϕ היא פסוק? האם ψ היא פסוק? נמק.

(7 נק') ב. האם ϕ אמיתית ב- J ? האם ψ שקרית ב- J ?

נמק תוך שימוש בהגדרה 3.17 ("לוגיקה" עמ' 117).

(7 נק') ג. האם ψ אמיתית ב- J ? האם ψ שקרית ב- J ?

נמק בפירוט כנ"ל. אפשר להסתמך גם על הדיון בסעיף 3.7.3.

(7 נק') ד. הוכח ש- ψ אינה אמיתית לוגית ("לוגיקה" הגדרה 3.18 בעמ' 119).

שים לב ש- A_1^2 חייב להתפרש כשוויון בכל אינטרפרטציה שתבחר.

בהצלחה!