פתרון שאלה 1

א'

נכתוב קודם את נוסחת הנסיגה בצורה כללית יותר:

$$T(n-(i-1)a)=T(n-ia)+T(a)+\left(n-(i-1)a\right)^2 \quad (i=1,2,\ldots,\lfloor n/a\rfloor)$$

נסכום את הביטויים בצד שמאל ובצד ימין לכל $i=1,2,\ldots,\lfloor n/a\rfloor$:

$$\sum_{i=1}^{\lfloor n/a\rfloor}T\left(n-(i-1)a\right)=\sum_{i=1}^{\lfloor n/a\rfloor}T\left(n-ia\right)+\lfloor n/a\rfloor\cdot T(a)+\sum_{i=1}^{\lfloor n/a\rfloor}\left(n-(i-1)a\right)^2$$

או בצורה אחרת:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/a\rfloor-1}T\left(n-ia\right)=\sum_{i=1}^{\lfloor n/a\rfloor}T\left(n-ia\right)+\lfloor n/a\rfloor\cdot T(a)+\sum_{i=0}^{\lfloor n/a\rfloor-1}\left(n-ia\right)^2$$

נחסיר מכל אגף את האיברים המשותפים ונקבל:

$$T(n)=T\left(n-\lfloor n/a\rfloor\cdot a\right)+\lfloor n/a\rfloor\cdot T(a)+\lfloor n/a\rfloor\cdot n^2-2an\cdot\sum_{i=0}^{\lfloor n/a\rfloor-1}i+a^2\cdot\sum_{i=0}^{\lfloor n/a\rfloor-1}i^2$$

נשתמש בנוסחה (א.3) (עמוד 270 בספר) ונקבל:

$$T(n)=T\left(n-\lfloor n/a\rfloor\cdot a\right)+\lfloor n/a\rfloor\cdot T(a)+$$
$$\lfloor n/a\rfloor\cdot n^2-an\cdot\lfloor n/a\rfloor\cdot\left(\lfloor n/a\rfloor-1\right)+a^2\cdot\lfloor n/a\rfloor\cdot\left(\lfloor n/a\rfloor-1\right)\cdot\left(2\lfloor n/a\rfloor-1\right)/6$$

מכיוון ש- $0\le n-\lfloor n/a\rfloor\cdot a<a$, אפשר לכתוב $T\left(n-\lfloor n/a\rfloor\cdot a\right)=\Theta(1)$;

מקבלים:

$$T(n)=\Theta(1)+\lfloor n/a\rfloor\cdot T(a)+n^2\cdot\lfloor n/a\rfloor-an\cdot\lfloor n/a\rfloor^2+a^2\cdot\lfloor n/a\rfloor^3/3=\Theta\left(n^3\right)$$

ומכאן:

$$T(n)=\Theta\left(n^3\right)$$

ב'

נשתמש בשיטת עכרה-באזי: $a_1=a_2=1$; $b_1=1/c$, $b_2=1/(1-c)$; $f(n)=n^2$,

$f'(n)=2n=O(n^1)$. לכן, קיים $p=1$ כך שמתקיים $\frac{a_1}{b_1^{\,p}}+\frac{a_2}{b_2^{\,p}}=c+(1-c)=1$

הפתרון הינו

$$T(n)=\Theta\left(n\cdot\left(1+\int_1^n\frac{f(x)}{x^{p+1}}dx\right)\right)=\Theta\left(n^2\right)$$

ג'

$a=b=1$, לכן $\log_b a=1$; $f(n)=n^2\lg n+n\lg^2 n=\Theta(n^2\lg n)$ ומתקיים תנאי הרגולריות. לפי משפט האב, מקרה 3: $T(n)=\Theta(n^2\lg n)$

ד'

$a=4,b=2$, לכן $\log_b a=2$; $f(n)=n^2\lg n+n\lg^2 n=\Theta(n^2\lg n)$. לפי משפט האב, מקרה 2 המורחב: $T(n)=\Theta(n^2\lg^2 n)$

ה'

$a=2, b=\sqrt{2}$, לכן $\log_b a = 2$; $f(n)=n^4\lg^2 n + n^2\lg^4 n = \Theta(n^4\lg^2 n)$ ומתקיים תנאי הרגולריות. לפי משפט האב, מקרה 3 : $T(n)=\Theta(n^4\lg^2 n)$

ו'

מבצעים את החלפת המשתנים $n=2^m, m=\lg n$; מתקבלת נוסחת הנסיגה

$$T\left(2^m\right)=2T\left(2^{m/\sqrt{2}}\right)+m^2$$

נסמן $S(m)=T\left(2^m\right)$; נוסחת הנסיגה מקבלת את הצורה

$$S(m)=2S\left(m/\sqrt{2}\right)+m^2$$

$a=2, b=\sqrt{2}$, לכן $\log_b a = 2$; $f(m)=m^2$. לפי משפט האב, מקרה 2 : $S(m)=\Theta(m^2\lg m)$;

לכן, פתרון הנוסחה המקורית הינו $T(n)=\Theta(\lg^2 n\cdot\lg\lg n)$

פתרון שאלה 2

א' כאשר יותר מ- $n/2$ שבבים הם פגומים :

אם הפגומים תמיד יגידו זה על זה שהם תקינים ושבב פגום תמיד יגיד על שבב תקין שהוא פגום, לא תהיה לפרופסור כל דרך להבחין בין שבב פגום לתקין.

ב' כאשר יותר מ- $n/2$ שבבים הם תקינים, הפרופסור יחלק את השבבים לזוגות וייתן לשבבים בכל זוג לבדוק זה את זה. אם התשובה שהוא יקבל היא תקין-תקין (כלומר, שני השבבים תקינים או שניהם פגומים), הוא יבחר אחד מהם (לא משנה איזה) וישים בצד את השני. אחרת (לפחות שבב אחד הוא פגום), הוא ישים בצד את שני השבבים.

מתקיימת השמורה הבאה : בכל שלב יותר מ- $n/2$ שבבים הם תקינים.

הוכחה : בזוגות שאינם "ממשיכים לשלב הבא" מספר הפגומים אינו קטן ממספר התקינים. מזה נובע שבשאר הזוגות המספר הכולל של השבבים התקינים הוא גדול יותר, ולכן מספר הזוגות שבהם שני השבבים הם תקינים גדול ממספר הזוגות שבהם שני השבבים הם פגומים.

לכן גם בשלב הבא מספר השבבים התקינים יהיה גדול לפחות ב-1 ממספר השבבים הפגומים.

ג' בהמשך לסעיף ב', הפרופסור יפעל על-פי האלגוריתם הבא :

1. אם $n = 1$ אז השבב שבידך הוא תקין ; השתמש בו כדי לבדוק את כל שאר השבבים.
2. אחרת בצע :
3. חלק את השבבים שבידיך לזוגות ותן לשבבים בכל זוג לבדוק זה את זה;
4. אם התשובה שקיבלת היא תקין-תקין אז בחר באופן שרירותי את אחד השבבים שבזוג ושים בצד את השני ;
5. אחרת (לפחות שבב אחד הוא פגום) שים בצד את שני השבבים ;
6. חזור לשורה 1 ;

נוסחת הנסיגה עבור מספר הבדיקות שמתבצעות בשורה 3 : $T(n)=T(n/2)+n/2$

פתרון הנוסחה (משפט האב, מקרה 3) : $T(n)=\Theta(n)$

בשורה 1 מתבצעות עוד $n-1$ בדיקות, ולכן מספר הבדיקות הכולל הוא $\Theta(n)$.