פתרונות לממ"ן 17 - 2012א - 20425

1. א. נסמן ב- X_n את מספר בחירות-הפתקים בשלב n של הניסוי, לכל $n = 1,2,...,10$. ההתפלגות של כל X_n היא גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{1}{n}$ וה-X_n-ים בלתי-תלויים זה בזה. כמו כן, מתקיים: $S = \sum_{n=1}^{10} X_n$

לכן:
$$E[S] = \sum_{n=1}^{10} E[X_n] = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \sum_{n=1}^{10} n = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

$$\text{Var}(S) = \sum_{n=1}^{10} \text{Var}(X_n) = \sum_{n=1}^{10} \frac{\frac{n-1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \sum_{n=1}^{10} n(n-1) = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - \frac{10 \cdot 11}{2} = 330$$

ב1. המאורע $\{X = i, Y = j\}$ מתרחש אם ב- $i - 1$ הבחירות הראשונות לא נבחר הפתק 7, אך ב-j מתוכן נבחר הפתק 4, ואם בבחירה האחרונה (בחירה i) נבחר הפתק 7. לכן, לכל $0 \le j \le i - 1$ מתקיים:

$$P\{X = i, Y = j\} = \binom{i-1}{j} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{7}\right)^j}_{4} \cdot \underbrace{\left(\frac{5}{7}\right)^{i-1-j}}_{1,2,3,5,6} \cdot \underbrace{\frac{1}{7}}_{7}$$

ב2. נזהה את ההתפלגות המותנית של Y בהינתן $X = i$, לכל $i = 1,2,...$. למשתנה המקרי X יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{1}{7}$. לכן, לכל $0 \le j \le i - 1$ מתקיים:

$$P\{Y = j \mid X = i\} = \frac{\binom{i-1}{j} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^j \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{i-1-j} \cdot \frac{1}{7}}{\left(\frac{6}{7}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{7}} = \binom{i-1}{j} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^j \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1-j}$$

ומכאן שלמשתנה המקרי Y בהינתן $X = i$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $i - 1$ ו- $\frac{1}{6}$.

ב3. מתוצאת הסעיף הקודם מקבלים כי:
$$E[Y \mid X = i] = \tfrac{i-1}{6}$$
$$\text{Var}(Y \mid X = i) = \tfrac{5(i-1)}{36}$$

ב4.
$$E[Y] = E[E[Y \mid X]] = E[\tfrac{X-1}{6}] = \tfrac{E[X]-1}{6} = \tfrac{7-1}{6} = 1$$

$$\text{Var}(Y) = E[\text{Var}(Y \mid X)] + \text{Var}(E[Y \mid X]) = E\left[\tfrac{5(X-1)}{36}\right] + \text{Var}\left(\tfrac{X-1}{6}\right)$$
$$= \tfrac{5E[X]-5}{36} + \tfrac{\text{Var}(X)}{6^2} = \tfrac{5 \cdot 7 - 5}{36} + \tfrac{42}{36} = \tfrac{72}{36} = 2$$

2. ראשית נשים לב, שאם Y הוא משתנה מקרי בינומי שלילי עם הפרמטרים r ו-p, אז הפונקציה יוצרת המומנטים שלו היא $M_Y(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$, עבור $t < -\ln(1-p)$.

כמו כן, אם $X = aY + b$, אז $M_X(t) = M_{aY+b}(t) = e^{bt} M_Y(at)$.

ולכן, אם נגדיר $X = Y - 2$, כאשר Y הוא משתנה מקרי בינומי שלילי עם הפרמטרים 4 ו- 0.25, נקבל כי:

$$M_X(t) = \left(\frac{0.25e^t}{1 - 0.75e^t}\right)^4 e^{-2t}$$

ומתקיים: $P\{X=8\}=P\{Y-2=8\}=P\{Y=10\}=\binom{9}{3}\cdot 0.25^4\cdot 0.75^6=0.0584$

3. נגדיר: $X_i=\begin{cases}1 & , \text{לפחות ילד אחד ענה נכון על שאלה } i\\ 0 & , \text{אחרת}\end{cases}$, לכל $i=1,\ldots,N$.

לפי הגדרה זו מתקיים $X=\sum_{i=1}^{N}X_i$. כלומר, אפשר לבטא את המשתנה המקרי X כסכום מקרי.

כמו כן, לכל $i=1,\ldots,N$, מתקיים: $P\{X_i=1\}=1-P\{X_i=0\}=1-0.6^5$

לפיכך: $E[X_i]=1-0.6^5 \quad ; \quad \mathrm{Var}(X_i)=(1-0.6^5)\cdot 0.6^5$

א. לפי דוגמה 4ד, עמוד 375 בספר הקורס, מתקיים:

$$E[X]=E\left[\sum_{i=1}^{N}X_i\right]=E[N]E[X_1]=15\cdot(1-0.6^5)=13.8336$$

ב. לפי דוגמה 4יד, עמוד 386 בספר הקורס, מתקיים:

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)=E[N]\mathrm{Var}(X_1)+(E[X_1])^2\mathrm{Var}(N)$$
$$=15\cdot(1-0.6^5)\cdot 0.6^5+(1-0.6^5)^2\cdot 2=2.777$$

4. א. התפלגות מספר הסוכריות שמקבל יוסי בשבוע היא בינומית עם הפרמטרים 10 ו-⅓, ואין תלות בין שבועות שונים. לכן, מספר הסוכריות שמקבל יוסי במשך 5 שבועות הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 50 ו-⅓. לפיכך, השונות המבוקשת היא: $50\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{100}{9}=11.111$

ב. אם מניחים שמשקלי-הסוכריות בלתי-תלויים זה בזה, אז למשקל הכולל (בגרמים) של חמש סוכריות יש התפלגות נורמלית עם תוחלת $5\cdot 10=50$ ושונות $5\cdot 1=5$. לכן, ההסתברות שהמשקל הכולל של חמש סוכריות מקריות עולה על 47 גרם היא:

$$P\left\{Z>\frac{47-50}{\sqrt{5}}\right\}=P\{Z>-1.3416\}=1-\Phi(-1.3416)=\Phi(1.3416)=0.9102$$

כאשר Z הוא משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי.

ג. נציג את המשתנה המקרי Y כסכום של 3 אינדיקטורים. לכל $i=1,2,3$, נגדיר:

$$Y_i=\begin{cases}1 & , \text{ילד } i \text{ לא קיבל אף סוכרייה}\\ 0 & , \text{ילד } i \text{ קיבל לפחות סוכרייה אחת}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad Y=\sum_{i=1}^{3}Y_i$$

לכל $i=1,2,3$, מתקיים: $E[Y_i]=P\{Y_i=1\}=\frac{2^{10}}{3^{10}}$

$$\mathrm{Var}(Y_i)=P\{Y_i=0\}P\{Y_i=1\}=\frac{(3^{10}-2^{10})2^{10}}{3^{20}}$$

ולכל $i\neq j$, מתקיים: $P\{Y_i=1,Y_j=1\}=\frac{1^{10}}{3^{10}}$

$$\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)=\frac{1}{3^{10}}-\left(\frac{2^{10}}{3^{10}}\right)^2=\frac{3^{10}-2^{20}}{3^{20}}$$

לכן: $\mathrm{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{Var}(Y_i)+\sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)=3\cdot\frac{(3^{10}-2^{10})2^{10}}{3^{20}}+6\cdot\frac{3^{10}-2^{20}}{3^{20}}=\frac{19{,}146{,}182}{3^{18}}\cong 0.04942$

הערה: אפשר לחשב את השונות של Y גם באמצעות פונקציית ההסתברות של Y. מקבלים:

$$P\{Y=2\}=3\cdot\tfrac{1}{3^{10}}=\tfrac{1}{3^9} \quad ; \quad P\{Y=1\}=3\cdot\tfrac{2^{10}-2}{3^{10}}=\tfrac{2^{10}-2}{3^9} \quad ; \quad P\{Y=0\}=1-\tfrac{1}{3^9}-\tfrac{2^{10}-2}{3^9}=\tfrac{3^9-2^{10}+1}{3^9}$$

5. א. נגדיר:

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{, לימין אישה } i \text{ עומדת אישה נוספת} \\ 0 & \text{, אחרת}\end{cases} \quad \text{לכל } i=1,\ldots,14 .$$

ומתקיים: $X=\sum_{i=1}^{14}X_i$.

כדי להגדיר סדרה אחרת של 18 אינדיקטורים, נניח שהמקומות במבנה המלבני ממוספרים – שורה אחר שורה, ובכל שורה משמאל לימין. כלומר, מקומות 4 - 1 הם בשורה הראשונה (מקום 1 משמאל ומקום 4 מימין), מקומות 8 - 5 הם בשורה השנייה (מקום 5 משמאל ומקום 8 מימין), וכך הלאה. עתה נגדיר את האינדיקטורים כך:

$$Y_i=\begin{cases}1 & \text{, במקומות } i \text{ ו- } i+1 \text{ עומדות נשים} \\ 0 & \text{, אחרת}\end{cases} \quad \text{לכל } i=1,2,3,5,6,7,\ldots,21,22,23 .$$

בסדרה זו יש בסך-הכל 18 אינדיקטורים, וסכומם הוא X .

ב. נראה את חישוב התוחלת לפי כל אחת מהגדרות האינדיקטורים.

$$P\{X_i=1\}=\underbrace{\tfrac{6}{24}}_{\text{עומדת במקום הכי ימני בשורה}}\cdot 0+\underbrace{\tfrac{18}{24}}_{\text{לא עומדת במקום הכי ימני בשורה}}\cdot\tfrac{13}{23}=\tfrac{39}{92} \quad\Rightarrow\quad E[X]=14\cdot\tfrac{39}{92}=\tfrac{273}{46}=5.9348$$

$$P\{Y_i=1\}=\tfrac{14}{24}\cdot\tfrac{13}{23}=\tfrac{91}{276} \quad\Rightarrow\quad E[X]=18\cdot\tfrac{91}{276}=\tfrac{273}{46}=5.9348$$

ג. גם את חישוב השונות נראה בשתי הדרכים:

דרך I: $\mathrm{Var}(X_i)=P\{X_i=1\}P\{X_i=0\}=\tfrac{39}{92}\cdot\tfrac{53}{92}=\tfrac{2{,}067}{8{,}464}$

$$P\{X_i=1,X_j=1\}=\underbrace{\frac{\binom{24}{2}-\binom{18}{2}}{\binom{24}{2}}}_{\text{לפחות אחת מנשים } i \text{ ו-} j \text{ עומדת במקום הימני ביותר בשורה}}\cdot 0+\underbrace{\frac{\binom{18}{2}-12}{\binom{24}{2}}\cdot\frac{12}{22}\cdot\frac{11}{21}}_{i \text{ ו-} j \text{ לא עומדות במקומות סמוכים באותה השורה ואף אחת מהן לא עומדת במקום הימני ביותר בשורה}}+\underbrace{\frac{12}{\binom{24}{2}}\cdot\frac{12}{22}}_{i \text{ ו-} j \text{ עומדות במקומות סמוכים באותה השורה ואף אחת מהן לא עומדת במקום הימני ביותר בשורה}}=\frac{601}{3{,}542}$$

הסבר: יש בסך הכל $\binom{24}{2}$ אפשרויות לבחור 2 מקומות במבנה המלבני המתואר בשאלה. ב-$\binom{18}{2}$ מאפשרויות הבחירה האלו, אף אחד מ-2 המקומות הנבחרים אינו נמצא בטור הימני ביותר במלבן. כמו כן, יש 12 זוגות של מקומות סמוכים, שאף אחד מהם לא נמצא בטור הימני ביותר במלבן.

כעת: $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=\tfrac{601}{3{,}542}-\left(\tfrac{39}{92}\right)^2=-\tfrac{6{,}533}{651{,}728}$

ומכאן: $\mathrm{Var}(X)=\sum_{i=1}^{14}\mathrm{Var}(X_i)+\sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=14\cdot\tfrac{2{,}067}{8{,}464}-14\cdot 13\cdot\tfrac{6{,}533}{651{,}728}=1.59456$

דרך II:

$$\mathrm{Var}(Y_i) = P\{Y_i = 1\}P\{Y_i = 0\} = \tfrac{91}{276} \cdot \tfrac{185}{276} = \tfrac{16,835}{76,176}$$

$$P\{Y_i = 1, Y_j = 1\} = \begin{cases} \tfrac{14}{24} \cdot \tfrac{13}{23} \cdot \tfrac{12}{22} = \tfrac{91}{506} & , \quad |i-j| = 1 \\ \tfrac{14}{24} \cdot \tfrac{13}{23} \cdot \tfrac{12}{22} \cdot \tfrac{11}{21} = \tfrac{91}{966} & , \quad |i-j| > 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \begin{cases} \tfrac{91}{506} - \left(\tfrac{91}{276}\right)^2 = 0.071133 & , \quad |i-j| = 1 \\ \tfrac{91}{966} - \left(\tfrac{91}{276}\right)^2 = -0.0145059 & , \quad |i-j| > 1 \end{cases}$$

ומכאן:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{18} \mathrm{Var}(Y_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$$

$$= 18 \cdot \tfrac{16,835}{76,176} + 2 \cdot 12 \cdot 0.071133 - 2 \cdot \left[\binom{18}{2} - 12\right] \cdot 0.0145059 = 1.59456$$