ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20585

מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חוברת הקורס - סתיו 2018א

כתב: אלעזר בירנבוים

אוקטובר 2017 - סמסטר סתיו - תשע״ח

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

אני מקדם את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים.
בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.
פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:
http://telem.openu.ac.il
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

שעות הייעוץ בקורס מתקיימות בימי ראשון בשעות 00 :18-00 :20 בטלפון 04-6850321.
אבקש מאוד לא להתקשר לטלפון הזה בשעות לא סבירות ובשבתות.
ניתן לפנות גם בדואר אלקטרוני: elazar@openu.ac.il

אני מאחל לכם הצלחה בלימודים.

לתשומת לב הסטודנטים הלומדים בחו"ל:
למרות הריחוק הפיסי הגדול, נשתדל לשמור אתכם על קשרים הדוקים ולעמוד לרשותכם ככל האפשר. הפרטים החיוניים על הקורס נכללים בחוברת הקורס וכן באתר הקורס. מומלץ מאד להשתמש באתר הקורס ובכל אמצעי העזר שבו וכמובן לפנות אלינו במידת הצורך.

בברכה,

אלעזר בירנבוים

מרכז ההוראה

1. לוח זמנים ופעילויות (20585 / 2018א)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
1	20.10.2017-17.10.2017	פרק 1		
2	27.10.2017-22.10.2017	פרק 1	מפגש ראשון	
3	3.11.2017-29.10.2017	פרק 2		ממ"ן 11 3.11.2017
4	10.11.2017-5.11.2017	פרק 2 פרק 3	מפגש שני	
5	17.11.2017-12.11.2017	פרק 3		
6	24.11.2017-19.11.2017	פרק 3 פרק 4	מפגש שלישי	ממ"ן 12 24.11.2017
7	1.12.2017-26.11.2017	פרק 4		
8	8.12.2017-3.12.2017	פרק 4	מפגש רביעי	

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

.

לוח זמנים ופעילויות – המשך

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ״ן (למנחה)
9	15.12.2017-10.12.2017 (ד-ו חנוכה)	פרק 4		
10	22.12.2017-17.12.2017 (א-ד חנוכה)	פרק 4 פרק 5	מפגש חמישי	ממ״ן 13 22.12.2017
11	29.12.2017-24.12.2017	פרק 5		
12	5.1.2018-31.12.2017	פרק 5 פרק 6	מפגש שישי	ממ״ן 14 5.1.2018
13	12.1.2018-7.1.2018	פרק 6		
14	19.1.2018-14.1.2018	פרק 7		
15	29.1.2018-21.1.2018	פרק 7	מפגש שביעי	ממ״ן 15 29.1.2018

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

2. תיאור המטלות

קראו היטב עמודים אלו לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס - הבנה מעמיקה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. המטלות תיבדקנה על-ידי המנחה ותוחזרנה בצירוף הערות המתייחסות לתשובות.

המטלות מלוות את יחידות הלימוד בקורס. להלן פירוט המטלות, היחידות שאליהן מתייחסת כל מטלה ומשקלה היחסי. בחלק מהמטלות תופענה גם שאלות המתייחסות ליחידות שכבר נלמדו.

ממ"ן 11 - פרק 1 - 6 נקודות
ממ"ן 12 - פרקים 2, 3 - 6 נקודות
ממ"ן 13 - פרק 4 - 8 נקודות
ממ"ן 14 - פרק 5 - 4 נקודות
ממ"ן 15 - פרקים 6, 7 - 6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל של 24 נקודות לפחות.
שימו לב שחובה להגיש את ממ"ן 13.

ללא צבירת 24 נקודות בהגשת מטלות לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

למען הסר ספק, יודגש שחל איסור על הכנה משותפת והעתקה של מטלות או חלקי מטלות.
(הנושא מפורט בתקנון משמעת לסטודנטים - נספח 1 של ידיעון האו"פ).

לתשומת לבכם!
כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן: אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלה** בציון הנמוך ביותר, שציונה נמוך מציון הבחינה, לא תילקח בחשבון בעת שקלול הציון הסופי. זאת בתנאי שמטלה זו **אינה חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס.
סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון שמספרו 09-7782222, או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא http://www.openu.ac.il/sheilta
קורסים ⇦ ציוני מטלות ובחינות ⇦ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.
יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות

שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של ציוני המטלות והבחינה יהיה נמוך מ-60).

<u>כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.</u>

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל כולל של 24 נקודות לפחות.

ב. ציון של לפחות 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2018א **מועד אחרון להגשה:** 3 נוב' 17

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (15%)

בדוגמה 3.7 בספר מוצגת מכונת טיורינג (M_2) שמכריעה את השפה $A=\{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$.

אלפבית הסרט של M_2 הוא $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$.

בנו מכונת טיורינג לשפה A, שאלפבית הסרט שלה יהיה $\Gamma = \{0, \sqcup\}$.

למכונה יהיו **לא יותר מעשרה מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה באיור. אתם רשאים להשמיט מעברים בלתי אפשריים (אם במצב q לא ייתכן שהראש הקורא-כותב יראה את הסמל b, אז אפשר לוותר על כתיבת הקשת עם הסמל b מהמצב q). אבל המצב הדוחה q_{reject} וכל הקשתות שנכנסות אליו חייבים להופיע.
הקפידו על כך שהאיור יהיה גדול, בהיר וללא קשתות נחתכות.

הסבירו היטב את פעולת המכונה ולמה היא אכן מכריעה את השפה A.

שימו לב שהמכונה תעצור על כל קלט (שהמכונה תהיה מכונה **מכריעה**).

הדרכה: אפשר להפוך את ה-0 הראשון לרווח, כדי לסמן את תחילת ה-0-ים (כמו במכונה שבספר).
לא חייבים לממש את האלגוריתם של המכונה M_2 (מחיקת כל 0 שני). אפשר למחוק בכל שלב את המחצית הימנית של ה-0-ים, עד שנשאר מספר אי-זוגי גדול מ-1 של 0-ים (ואז דוחים), או עד שנשאר 0 יחיד (ואז מקבלים).
זִכְרוּ שכאשר הראש הקורא-כותב נמצא בריבוע השמאלי ביותר בסרט, תנועה שמאלה לא מתבצעת.

שאלה 2 (20%)

א. מיהן כל השפות, מעל אלפבית נתון Σ, **הניתנות להכרעה** בעזרת מכונת טיורינג שיש לה **שני מצבים** (מכונת טיורינג שקבוצת המצבים שלה היא $Q = \{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}$)?
הסבירו את תשובתכם.

ב. מיהן כל השפות, מעל האלפבית $\Sigma=\{0\}$, **הניתנות להכרעה** בעזרת מכונת טיורינג שיש לה **שלושה מצבים** (מכונת טיורינג שקבוצת המצבים שלה היא $Q = \{q, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}$), ואלפבית הסרט שלה הוא $\Gamma = \{0, \sqcup\}$?
הסבירו את תשובתכם.

ג. הראו שאם בסעיף ב נאפשר אלפבית סרט Γ גדול יותר, אז אפשר יהיה להכריע שפות נוספות על אלה שציינתם בתשובתכם לסעיף ב.
הדרכה: היעזרו בהגדרה של התוצאה של תנועה שמאלה במכונת טיורינג' כאשר הראש הקורא-כותב נמצא בריבוע השמאלי ביותר של הסרט.

שאלה 3 (15%)

תארו מכונת טיורינג **דטרמיניסטית בעלת שני סרטים** שמכריעה את השפה D הבאה:

$$D = \{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

אלפבית הקלט של המכונה הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; את אלפבית הסרט אתם יכולים לבחור כרצונכם.
עליכם לתאר מכונה (בעלת שני סרטים) שמספר הצעדים שהיא מבצעת **לינארי** בגודל הקלט. (על מילת קלט באורך n, מספר הצעדים צריך להיות $O(n)$).
תיאור המכונה צריך להיות ברמת הפירוט של המכונה M_3 מדוגמה 3.11 בספר.
הסבירו היטב למה מספר צעדי החישוב הוא $O(n)$, כאשר n הוא אורך מילת הקלט.

שאלה 4 (15%)

בנו מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית** להכרעת השפה D משאלה 4.
אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, \sqcup, x\}$; למכונה יהיו **לא יותר מ-12 מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).
תארו את המכונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{reject} וכל הקשתות שנכנסות אליו).
הסבירו היטב את פעולת המכונה, את התפקיד של כל מצב, את נקודות האי-דטרמיניזם, ולמה המכונה אכן מכריעה את D.

שאלה 5 (15%)

בתרגיל 1.10 במדריך הלמידה הוכח, ששפה A היא כריעה, אם, ורק אם, יש מונה שמדפיס את המילים של A לפי הסדר הסטנדרטי.

הוכיחו **בעזרת מונים** שאם A ו-B הן שפות כריעות, אז גם $A\cup B$ ו-$A\cap B$ הן שפות כריעות. זִכְרוּ לטפל נכון גם במקרה שאחת השפות או שתיהן סופיות.

אל תשתמשו בהוכחה בתוצאה שלכל מונה יש מכונת טיורינג שקולה, ולהפך.

למונים שאתם בונים ל-$A\cup B$ ול-$A\cap B$ יכול להיות יותר מסרט עבודה אחד.

שאלה 6 (20%)

נעיין במחלקת השפות **הלא כריעות** מעל אלפבית נתון Σ.

א. האם המחלקה הזו סגורה **למשלים**? (כלומר, אם L לא כריעה, האם בהכרח גם המשלימה של L לא כריעה?)

ב. האם המחלקה הזו סגורה **לאיחוד**? (כלומר, אם L_1 ו-L_2 אינן כריעות, האם בהכרח $L_1\cup L_2$ איננה כריעה?)

ג. האם המחלקה הזו סגורה **לחיתוך**? (כלומר, אם L_1 ו-L_2 אינן כריעות, האם בהכרח $L_1\cap L_2$ איננה כריעה?)

ד. האם המחלקה הזו סגורה **לשרשור**? (כלומר, אם L_1 ו-L_2 אינן כריעות, האם בהכרח L_1L_2 איננה כריעה?)

הוכיחו את תשובותיכם.

מטלת מנחה (ממ״ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה : פרקים 4 ו-5 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2018א **מועד אחרון להגשה:** 24 נוב׳ 17

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1 (12%)

הוכיחו שהשפה G שלהלן היא **שפה כריעה** :

$G = \{\langle R\rangle \mid$ הוא ביטוי רגולרי ; המילה 111 היא תת-מילה של **כל** מילה בשפה ש-R מתאר $R\}$

(מילה מהצורה $\langle R\rangle$ שייכת לשפה G, אם R הוא ביטוי רגולרי, וכל מילה w בשפה ש-R מתאר היא מהצורה $w = x111y$, כאשר x ו-y הן מילים כלשהן).

שאלה 2 (12%)

א. יהי Σ אלפבית **אינסופי בן מנייה** ($|\Sigma| = |\mathbb{N}|$).

האם קבוצת כל המחרוזות **הסופיות** מעל Σ היא קבוצה בת מנייה? הוכיחו את תשובתכם.

ב. יהי Σ אלפבית **סופי** המכיל יותר מאות אחת ($|\Sigma| > 1$).

האם קבוצת כל המחרוזות **האינסופיות בנות המנייה** מעל Σ היא קבוצה בת מנייה? הוכיחו.

שאלה 3 (18%)

נגדיר את השפה $HALT\text{-}ALL_{TM}$ הבאה:

$$HALT\text{-}ALL_{TM} = \{<M> \mid M \text{ is a TM that halts on all its inputs}\}$$

זוהי שפת התיאורים של מכונות טיורינג שעוצרות על כל קלט שלהן (במצב המקבל או במצב הדוחה).

נוכיח **בעזרת שיטת האלכסון** שהשפה $HALT\text{-}ALL_{TM}$ **איננה מזוהה-טיורינג**:

נניח בשלילה שהשפה $HALT\text{-}ALL_{TM}$ כן מזוהה-טיורינג.

אז לפי משפט 3.21, יש ל-$HALT\text{-}ALL_{TM}$ מונה (enumerator) E.

נזכור שאפשר לסדר את המחרוזות מעל אלפבית נתון Σ לפי הסדר הסטנדרטי.

נבנה את המכונה M הבאה:

M = "על קלט w:

1. מצא את i כך ש-w היא המחרוזת ה-i לפי הסדר הסטנדרטי.
2. הרץ את המונה E עד שהוא מדפיס את המחרוזת ה-i.
   המחרוזת ה-i שהמונה הדפיס היא מחרוזת ששייכת ל-$HALT\text{-}ALL_{TM}$. כלומר, היא תיאור של מכונת טיורינג שעוצרת על כל קלט. נסמן אותה על-ידי A.
3. הרץ את A על w.
   אם A קיבלה את w, דחה. אם A דחתה את w, קבל.

א. הוכיחו: המכונה M עוצרת על כל קלט.

ב. הסיקו: יש j כך שהמונה E ידפיס את $<M>$ כמחרוזת ה-j שהוא מדפיס.

ג. בדקו מה יקרה כאשר נריץ את M על המחרוזת ה-j לפי הסדר הסטנדרטי, והגיעו לסתירה.

שאלה 4 (10%)

הציגו רדוקציה של $HALT_{TM}$ ל-A_{TM} (רדוקציה בכיוון הפוך מזה של הוכחת משפט 5.1).

שאלה 5 (12%)

במסקנה 4.23 בספר הוכח שהשפה $\overline{A_{TM}}$ איננה מזוהה-טיורינג.

א. תנו דוגמה לשפה **כריעה** B, כך ש- $B \subseteq \overline{A_{TM}}$.

הציגו את השפה B, והוכיחו שהיא שפה כריעה ושהיא חלקית ל- $\overline{A_{TM}}$.

ב. האם השפה $\overline{A_{TM}} - B$ היא שפה **מזוהה-טיורינג**? **הוכיחו** את תשובתכם.

שאלה 6 (12%)

במשפט 5.10 הוכח שהשפה E_{LBA} איננה כריעה.

א. האם E_{LBA} היא שפה **מזוהה-טיורינג**? הוכיחו את תשובתכם.

ב. האם השפה **המשלימה** (השפה $\overline{E_{LBA}}$) היא שפה **מזוהה-טיורינג**? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 7 (24%. סעיף א - 6%, סעיף ב - 8%, סעיף ג - 8%, סעיף ד - 2%)

נגדיר את השפה $EPSILON_{TM}$:

$$EPSILON_{TM} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ accepts the empty word}\}$$

זוהי שפת התיאורים של מכונות טיורינג, שמקבלות את המילה הריקה. (כש-M מתחילה לפעול על סרט שכולו רווחים, היא מסיימת במצב המקבל).

א. האם אפשר להוכיח **בעזרת משפט Rice** (ראו בעיה 5.16 בספר) ש-$EPSILON_{TM}$ איננה כריעה? אם עניתם שכן, כִּתְבוּ את ההוכחה. אם עניתם שלא, הסבירו היטב למה לא.

ב. הציגו רדוקציית מיפוי של A_{TM} ל-$EPSILON_{TM}$ ($A_{TM} \leq_m EPSILON_{TM}$).

ג. הציגו רדוקציית מיפוי של $EPSILON_{TM}$ ל-A_{TM} ($EPSILON_{TM} \leq_m A_{TM}$).

ד. הסיקו: $EPSILON_{TM}$ היא שפה **מזוהה-טיורינג ולא כריעה**.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 9 **משקל המטלה:** 8 נקודות

סמסטר: 2018א **מועד אחרון להגשה:** 22 דצמ' 17

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (12%)

נגדיר את השפה B:

$$B = \{0^k 1^{k+m} 0^m \mid k, m \geq 0\}$$

מצאו פונקציה $t(n)$ מינימלית, כך ש- $B \in \mathrm{TIME}(t(n))$

א. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד.

ב. במכונה דטרמיניסטית עם שני סרטים.

ג. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד שיש לו שני ראשים קוראים-כותבים.

הסבירו את תשובותיכם.

שאלה 2 (10%)

הוכיחו שהשפות הבאות **שייכות למחלקה P**:

א. $EVEN_{\mathrm{DFA}} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is a DFA; } |w| \text{ is even for all } w \in L(M)\}$

($\langle M\rangle$ שייכת לשפה, אם M הוא אוטומט סופי דטרמיניסטי, וכל המילים שהאוטומט מקבל הן בעלות אורך זוגי).

ב. $DEGREE\text{-}5\text{-}CLIQUE = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ is an undirected graph with a } k\text{-clique; the degree of every node of } G \leq 5\}$

($\langle G, k\rangle$ שייכת לשפה, אם G הוא גרף לא מכוון, שדרגת כל צומת שלו איננה גדולה מ-5, ויש ב-G קליקה בגודל k. (דרגה של צומת = מספר הקשתות שהצומת נוגע בהן)).

שאלה 3 (10%)

נעיין בשפה $\overline{EQ_{CFG}} = \{<G,H> \mid G \text{ and } H \text{ are CFGs and } L(G) \neq L(H)\}$

א. הציעו מאמת (verifier) לשפה $\overline{EQ_{\mathrm{CFG}}}$.

ב. הוכיחו: **לא קיים** לשפה $\overline{EQ_{\mathrm{CFG}}}$ מאמת בעל זמן ריצה פולינומיאלי בגודל הקלט.

שאלה 4 (8%)

הוכיחו שהשפה הבאה שייכת **למחלקה NP**:

B = {<n, m, k> | הראשוני ה-m בפירוק לגורמים ראשוניים של n גדול מ-k}

שלשה <n, m, k> של מספרים טבעיים שייכת ל-B, אם הראשוני ה-m (לפי גודל) בפירוק של n לגורמים ראשוניים גדול מ-k. אם m גדול ממספר הראשוניים בפירוק לגורמים של n, אז <n, m, k> לא שייכת ל-B.

למשל, B ∋ <3276, 3, 6> ($3276 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$; הראשוני השלישי בפירוק לגורמים ראשוניים הוא 7 והוא גדול מ-6), B ∉ <3276, 4, 20>, B ∉ <3276, 5, 0>.

שאלה 5 (16%)

נאמר ששפה A **ניתנת לרדוקציה בזמן ליניארי** לשפה B, אם יש פונקציה f **חשיבה בזמן ליניארי**, כך שלכל w, $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$.

נאמר ששפה A **ניתנת לרדוקציה בזמן ריבועי** לשפה B, אם יש פונקציה f **חשיבה בזמן ריבועי**, כך שלכל w, $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$.

א. נתון ש-B שייכת ל- TIME(n) ו-A ניתנת לרדוקציה בזמן **ליניארי** ל-B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- TIME(n)? הסבירו את תשובתכם.

ב. נתון ש-B שייכת ל- TIME(n^2) ו-A ניתנת לרדוקציה בזמן **ליניארי** ל-B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- TIME(n^2)? הסבירו את תשובתכם.

ג. נתון ש-B שייכת ל- TIME(n) ו-A ניתנת לרדוקציה בזמן **ריבועי** ל-B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- TIME(n)? הסבירו את תשובתכם.

ד. נתון ש-B שייכת ל- TIME(n^2) ו-A ניתנת לרדוקציה בזמן **ריבועי** ל- B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- TIME(n^2)? הסבירו את תשובתכם.

שאלה 6 (10%)

איך אפשר לדעת, מתוך עיון בנוסחה ϕ שמייצרת הרדוקציה של הוכחת משפט Cook-Levin (משפט 7.37), האם המכונה *N* שמכריעה את השפה *A* היא מכונה דטרמיניסטית או לא?
הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 7 (10%)

הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של *3SAT* ל- *INDEPENDENT-SET*.

(*INDEPENDENT-SET* מוגדרת במדריך הלמידה בעמוד 78).

שאלה 8 (16%)

א. בעיה 7.53 בספר (עמוד 328).

ב. הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של $\neq SAT$ ל- *SET-SPLITTING* (ראו בעיה 7.29 בספר).

שאלה 9 (8%)

הסבירו היטב למה אי אפשר להשתמש ברדוקציה הבאה להוכחת משפט 7.55, במקום הרדוקציה שמופיעה בהוכחת המשפט:

"על קלט $<G, s, t>$ כאשר *G* הוא גרף מכוון ו-*s* ו-*t* צמתים של *G*:

1. החלף כל קשת מכוונת ב-*G* בקשת לא מכוונת מקבילה. יהי *H* הגרף הלא מכוון המתקבל.
2. החזר את $<H, s, t>$."

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2018א **מועד אחרון להגשה:** 5 ינו' 18

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

הוכיחו שהשפה *SUBSET-SUM* שייכת ל-$\text{SPACE}(n)$.
הציגו אלגוריתם להכרעת השפה, הסבירו היטב כיצד הוא ימומש, והוכיחו שהמקום הדרוש הוא $O(n)$.

שאלה 2 (10%)

הוכיחו: אם A היא שפה **רגולרית**, אז $A \in \text{SPACE}(1)$.

שאלה 3 (15%)

בהגדרה של שפות PSPACE-שלמות (הגדרה 8.8) משתמשים ברדוקצית **זמן** פולינומיאלי (סעיף 2 בהגדרה).
הראו שאם נשתמש ברדוקצית **מקום** פולינומיאלי (כלומר, כל A ב-PSPACE ניתנת לרדוקציה **במקום** פולינומיאלי ל-B), אז SAT תהיה בעיה PSPACE-שלמה.

הדרכה: SAT היא רק דוגמה.

שאלה 4 (25%)

בעיה 8.11 בספר (עמוד 358).
לכל אחת מן השפות, הסבירו היטב את אופן פעולתה של מכונה שמשתמשת במקום לוגריתמי בגודל הקלט ומכריעה את השפה.

שאלה 5 (15%)

הוכיחו : $CLIQUE \leq_L VERTEX\text{-}COVER$.

($CLIQUE$ הוגדרה לפני משפט 7.24 ; $VERTEX\text{-}COVER$ הוגדרה לפני משפט 7.44).

עליכם לתאר את הרדוקציה, להוכיח שהיא תקפה, ולהוכיח בפירוט שהיא יכולה להתבצע במקום לוגריתמי.

שאלה 6 (25%)

הבעיה E_{DFA} הוגדרה בספר לפני משפט 4.4.

הוכיחו : $\overline{E_{DFA}}$ היא שפה NL-שלמה.

הדרכה : הראו שהיא שייכת ל-NL, והראו כי $PATH \leq_L \overline{E_{DFA}}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: סעיפים 9.1, 10.1 ו-10.2 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2018א **מועד אחרון להגשה:** 29 ינו' 18

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (12%)

הוכיחו שהפונקציה $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ניתנת לבנייה **במגבלת מקום עצמית** (space constructible).

שאלה 2 (12%)

עיינו במכונה D שבהוכחת משפט 9.3 (עמוד 366).

א. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate M on w ..." במשפט "Simulate M on $<M>$ ..."
(כלומר, במקום לבצע סימולציה של M על $w = <M>10^k$, נבצע סימולציה של M על $<M>$).
האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate M on w ..." במשפט "Simulate M on 10^k ..."
(כלומר, במקום לבצע סימולציה של M על $w = <M>10^k$, נבצע סימולציה של M על 10^k).
האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 3 (12%)

הסבירו כיצד אפשר לבנות מכונה עם שני סרטים, שכאשר היא מקבלת כקלט על הסרט הראשון את המילה 1^n, היא מסיימת כאשר על הסרט השני כתוב הייצוג הבינארי של n.

הסרט הראשון הוא סרט לקריאה בלבד. הסרט השני הוא סרט לקריאה וכתיבה והוא סרט הפלט.
עליכם לבנות מכונה שזמן ריצתה יהיה $O(n)$.

עליכם להסביר היטב את אופן פעולת המכונה, ולהסביר מדוע זמן הריצה שלה הוא $O(n)$.

שאלה 4 (24%)

לִמְדוּ את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה (עמודים 126-128).

א. נַסְּחוּ בעיית **הכרעה** של בעיית הסוכן הנוסע (כלומר, בעיה שהתשובה עליה היא "כן" או "לא").

ב. הוכיחו: בעיית ההכרעה של בעיית הסוכן הנוסע **המטרית** היא בעיה NP-שלמה.

הדרכה: הוכיחו שהיא שייכת ל-NP, והראו רדוקציה פולינומיאלית של בעיית קיומו של מעגל המילטון בגרף לא מכוון.

(מעגל המילטון בגרף לא מכוון G הוא מעגל פשוט שמכיל כל צומת של G פעם אחת ויחידה. אתם יכולים להשתמש בעובדה שבעיית קיומו של מעגל המילטון בגרף לא מכוון היא בעיה NP-שלמה).

ג. הוכיחו: לכל בעיית סוכן נוסע **לא מטרית**, אפשר לבנות בזמן פולינומיאלי בעיית סוכן נוסע **מטרית** עם אותם צמתים, כך ש-P הוא מסלול אופטימלי בבעיה המקורית (הלא מטרית), אם ורק אם P הוא מסלול אופטימלי בבעיה החדשה (המטרית).

הדרכה: הגדילו את משקלי הקשתות באופן שיתקיימו תנאי הבעיה המטרית.

ד. הסבירו מדוע אין סתירה בין קיומו של אלגוריתם קירוב בעל יחס קירוב 2 (ואפילו 1.5) ובעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית הסוכן הנוסע המטרית, ובין אי-קיומו של אלגוריתם כזה לבעיה הכללית (הלא מטרית), לאור מה שהראיתם בסעיף הקודם (שיש דרך מהירה לעבור מהבעיה הכללית לבעיה המטרית, באופן שמשמר את המסלולים האופטימליים).

שאלה 5 (16%)

הוכיחו: אם יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **ההכרעה** *MAX-CUT*, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **האופטימיזציה** *MAX-CUT*.

האלגוריתם לבעיית ההכרעה מקבל כקלט גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

האלגוריתם מחזיר "כן" אם יש ב-G חתך שגודלו לפחות k, ו-"לא" אחרת.

האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה מקבל כקלט גרף לא מכוון G.

האלגוריתם מחזיר חתך בעל גודל מקסימלי ב-G, כלומר, חלוקה של קבוצת הצמתים של G לשתי תת-קבוצות זרות S ו-T, כך שמספר הקשתות המחברות צומת מ-S עם צומת מ-T הוא מקסימלי.

הדרכה: האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה יהיה בנוי משני שלבים:

בשלב הראשון קוראים לאלגוריתם ההכרעה כמה פעמים כדי למצוא את גודלו של החתך המקסימלי.

בשלב השני, מבצעים בכל פעם שינויים (קלים) בגרף, וקוראים לאלגוריתם ההכרעה על הגרפים החדשים. לפי התשובות שהוא מחזיר, יודעים איזה צמתים שייכים לאותה תת-קבוצה (S או T), ואיזה צמתים לא שייכים לאותה תת-קבוצה (כלומר, אם האחד שייך ל-S אז השני שייך ל-T).

שאלה 6 (10%)

עיינו באלגוריתם *PRIME* בעמוד 401 בספר.

הוכיחו: אם t הוא מספר טבעי קטן מ-p שאיננו זר ל-p (המחלק המשותף המקסימלי של t ו-p גדול מ-1), אז t הוא עד לפריקות של p. (כלומר, אם הוא ייבחר כאחד מ-k המספרים בשלב 2 של האלגוריתם, האלגוריתם ידחה).

שאלה 7 (14%)

בעיה 10.10 בספר (עמוד 439).

כדי להוכיח את שוויון המחלקות, הראו הכלה דו-כיוונית.