

מבנה הבחינה :

- * עליך לענות על 4 מתוך 6 השאלות, כאשר בין 4 השאלות שבחרת, **חייבת להופיע שאלה מס' 3 או שאלה מס' 4 או שתיהן.**
- * משקל כל שאלה 25% .
- * אם תשיב על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- * יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
 - * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
 - * אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
 - * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
-

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

תהי $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.

להלן יחסים (רלציות) שונים המוגדרים מעל $P(A)$ (שים לב: מעל $P(A)$, לא מעל A).
בכל סעיף, קבע אם היחס המוגדר באותו סעיף הוא:

(i) רפלקסיבי? (ii) סימטרי? (iii) אנטי-סימטרי? (iv) טרנזיטיבי? **נמק כל תשובה.**
בכל תת-סעיף, ציין בבירור ובהזדגשה את התשובה הסופית.

(8 נק') א. היחס S המוגדר כך: $(X, Y) \in S$ אם $1 \in X$
(אין כאן טעות - בכוונה Y אינו מופיע).

(8 נק') ב. היחס T המוגדר כך: $(X, Y) \in T$ אם $X \notin P(Y)$.

(8 נק') ג. היחס K המוגדר כך: $(X, Y) \in K$ אם

קיים מספר שלם (לאו דווקא חיובי) c , כך ש- $Y = \{x + c \mid x \in X\}$.

(1 נקודה: בהירות הנימוקים).

תזכורת: העובדה שיחס הוא סימטרי אינה מונעת ממנו להיות אנטי-סימטרי.

שאלה 2

(15 נק') א. תהי $A \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ קבוצת כל השלשות הסדורות מהצורה

$$(x + y\sqrt{2}, x - y\sqrt{2}, z\sqrt{3})$$

כאשר x, y, z שלמים.

הוכח ש- A היא בת-מניה.

(10 נק') ב. נסמן ב- B את המשלים של A ב- $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. האם B בת-מניה? הוכח.

שאלה 3

(16 נק') א. נתונה סדרה a_n המקיימת את יחס הנסיגה (הרקורסיה):

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + (1 - c^2)a_n = 0$$

נתון כי $c > 0$, $c \neq 1$, וכי $a_0 = 0$, $a_1 = 2$.

פתרי את יחס הנסיגה, ומצאי נוסחה מפורשת המביעה את a_n בעזרת c .

(9 נק') ב. חשבי את a_3 בשתי דרכים: פעם אחת מתוך הנוסחה המפורשת

שקיבלת בסעיף הקודם ופעם אחת ישירות מתוך יחס הנסיגה.

(התוצאה היא ביטוי התלוי ב- c).

שאלה 4

(20 נק') א. חשב את המקדם של x^k בכל אחד מאגפי הזהות האלגברית:

$$(1-x)^{10} \cdot \frac{1}{(1-x)^5} = (1-x)^5$$

קבל מכאן זהות על סכומים של מכפלות של מקדמים בינומיים.

(5 נק') ב. בדוק את תשובתך עבור המקרה $k = 2$.

שאלה 5

נתונה שפה של תחשיב הפרדיקטים, שבה סימן פרדיקט דו-מקומי R וסימן פונקציה חד-מקומית f . בנוסף נמצא בשפה פרדיקט השוויון A_1^2 ("לוגיקה" אמצע עמוד 104), שלמען הקיצור אפשר לרשום אותו פשוט כשוויון, כגון $f(x) = f(y)$ או כגון $(x = y) \sim$ (מי שזה מפריע לו יכול להשתמש בסימן A_1^2).
אין בשפה עוד סימני פונקציות, פרדיקטים או קבועים.
כרגיל, נמצאים בשפה הקשרים הלוגיים $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$, סוגריים, שני הכמתים \forall, \exists וסימני משתנים כגון x, y, z .
נתונה אינטרפרטציה J של השפה, שעולמה הוא קבוצה לא-ריקה A .

בכל אחד מהסעיפים א-ד, כתוב תבנית בשפה הנ"ל המייצגת את הנאמר באותו סעיף. כתיב מקוצר - מותר. הקפד לשים סוגרים במקרה שייתכן ספק בקריאה. **אין צורך לנמק.**

- 5 (נק') א. היחס R הוא אנטי-סימטרי.
 - 6 (נק') ב. היחס R הוא רלציית היחידה I_A מעל העולם A .
 - 5 (נק') ג. $x \notin \text{Domain}(R)$.
 - ר' "תורת הקבוצות" עמ' 35. שים לב ש- R מתפרש כרלציה "מ- A אל A ".
 - 5 (נק') ד. הפונקציה f אינה על עולם האינטרפרטציה.
 - 4 (נק') ה. לכל אחת מהתבניות בסעיפים א-ד ציין אם היא **פסוק**. אין צורך לנמק.
- הערה:** אין צורך בסימן האומר " x הוא איבר של A ", מכיוון ש- A היא עולם האינטרפרטציה.

שאלה 6

N היא קבוצת המספרים הטבעיים. תהי M קבוצת הטבעיים הזוגיים. נחלק את $P(N)$ לשתי מחלקות:
במחלקה K_1 נמצאות כל הקבוצות $X \in P(N)$ המקיימות: $M \subseteq X$.
במחלקה K_2 נמצאים כל שאר אברי $P(N)$.
בכל אחד מהסעיפים א', ב', מתוארת דרך להפוך את $P(N)$ לגרופואיד. בכל סעיף, קבע אם החלוקה $\{K_1, K_2\}$ היא חלוקה מותרת של הגרופואיד. **נמק.**
אם החלוקה מותרת – רשום את לוח הכפל של גרופואיד המנה.

13 (נק') א. הפעולה היא איחוד.

12 (נק') ב. הפעולה היא חיתוך.

בהצלחה!