פתרון שאלה 4

הערך הנתון עשוי להופיע בכל אחד מ-n המקומות האפשריים בסדרה וכמו כן הוא יכול "לא להופיע" בכל אחד מ- $n+1$ המקומות האפשריים הנמצאים **בין** איברי הסדרה (כלומר, הערך עשוי להיות קטן מ- $A[1]$, גדול מ-$A[n]$, או גדול מ- $A[i]$ וקטן מ- $A[i+1]$ עבור i כלשהו שבין 1 ל- $n-1$).

לכן לאלגוריתם (כלשהו) המחפש את הערך יש $2n+1$ תוצאות אפשריות ובעץ ההחלטה המתאים לאלגוריתם יהיו $2n+1$ עלים.

נוכיח שגובהו של עץ בינרי בעל $2n+1$ עלים הוא $\Omega(\lg n)$.

ההוכחה דומה מאד להוכחה שמופיעה בספר:

נסמן את גובה עץ ההחלטה ב-h. עץ בינרי שגובהו h מכיל לכל היותר 2^h עלים ולכן:

$2n+1 \le 2^h$

$\lg(2n+1) \le h$

$h = \Omega(\lg n)$

לפיכך, כל אלגוריתם מבוסס השוואות המחפש ערך נתון בסדרה ממוינת בת n איברים, יבצע במקרה הגרוע $\Omega(\lg n)$ השוואות.

הערה: הנחנו (כמו בספר) שהאלגוריתם מבצע השוואות מסוג $\le$ ולכן עץ ההחלטה המתקבל הוא בינרי.

אפשר להרחיב את ההוכחה גם לאלגוריתמים שבהם להשוואה בין שני איברים יש **שלוש** תוצאות אפשריות ($<$, $>$ או $=$) ואז עץ ההחלטה המתקבל הוא **טֶרנרי**.