קורס 20476 סמסטר 2016ב מועד 87

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות:

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- **בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
- **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
- **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי וידיאו, עליך לחזור ולהוכיחן.**
- **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נקי) **א.** לפנינו פסוקים α, β, γ. α אינו טאוטולוגיה ואינו סתירה.

β הוא טאוטולוגיה. γ הוא סתירה.

הפסוק $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ הוא:

[1] טאוטולוגיה **[2]** סתירה

[3] שקול ל- α **[4]** שקול לשלילת α

[5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(7 נקי) **ב.** $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים, $\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים.

תהי A קבוצת הפונקציות של $\mathbf{R}$ לקבוצה $\{0,1\}$, המקיימות:

לכל $x \in \mathbf{Z}$, $f(x) = 0$ (עבור x שאינו שלם, $f(x)$ יכול להיות 0 או 1).

עוצמתה של A היא:

[1] מספר סופי **[2]** $\aleph_0$ **[3]** C

[4] 2^C **[5]** גדולה מ- 2^C.

(6 נקי) **ג.** G הוא **יער** על 14 צמתים, ובו בדיוק 14 קשתות.

[1] G הוא עץ.

[2] ל- G יש בדיוק שני רכיבי קשירות.

[3] ל- G יש בדיוק 13 רכיבי קשירות.

[4] לא ייתכן יער כזה.

[5] ייתכן יער כזה אבל נחוץ מידע נוסף כדי לקבוע כמה רכיבי קשירות יש ל- G.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו : 81 נקודות

שאלה 2

השאלה עוסקת בביטויים מהצורה הבאה :

A_1 , $A_1 \oplus A_2$, $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$, $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4$, וכללית $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$.

כל A_i היא קבוצה ו- $\oplus$ הוא הפרש סימטרי (שאלה 1.22 עמ' 27 בכרך "תורת הקבוצות").

לפי שאלה 1.22 הפרש סימטרי הוא אסוציאטיבי, לכן בביטויים שלמעלה אין צורך בסוגריים.

הוכיחו **באינדוקציה** את הטענה הבאה : לכל $n \geq 1$ טבעי,

$x \in A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ **אם ורק אם** $\left|\{i \mid x \in A_i \ \wedge \ 1 \leq i \leq n\}\right|$ הוא מספר **אי-זוגי**.

יש להוכיח את הטענה באינדוקציה ולא בדרכים אחרות.

שאלה 3

10 קופסאות **שונות** מסודרות בשורה. ארבע מהקופסאות כחולות ושש לבנות.

הקופסאות **שונות** זו מזו (למשל לפי המקום שלהן בשורה), גם אם יש להן אותו צבע.

לפנינו גם 6 חפצים **שונים**, חפץ אחד מכל סוג : כפתור, מטבע, שרוך, עט, עפרון, מחק.

עלינו לפזר את כל החפצים בקופסאות.

(13 נק') א. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת, אם אסור שכל 6 החפצים יהיו בקופסאות בעלות אותו צבע?

(14 נק') ב. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת, אם אסור שמספר החפצים בקופסאות הכחולות יהיה שווה למספר החפצים בקופסאות הלבנות? אל תשכחו שהחפצים שונים זה מזה.

בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה מספרית.

אין הכרח להיעזר בהכלה והפרדה או בפונקציה יוצרת, אפשר לפתור בדרכים אלמנטריות.

להסיר ספק : הדרישה של סעיף א' אינה בתוקף בסעיף ב'.

שאלה 4

תהי $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. נתון: $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = a_4 = 0, a_5 = 2$.

שאר המקדמים בפיתוח אינם ידועים.

מצאו את המקדם של x^2 ואת המקדם של x^5 בפיתוח כל אחת מהפונקציות היוצרות הבאות:

(5 נקי) א. $k(x) = (3 - 8x^2) \cdot f(x)$.

(6 נקי) ב. $g(x) = f(-x)$. הדרכה: $f(-x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-x)^i$

(8 נקי) ג. $h(x) = f(x^2)$. הדרכה: רעיון דומה לסעיף הקודם.

(8 נקי) ד. $r(x) = f(x) \cdot f(x)$.

בכל הסעיפים נדרשת תשובה מספרית (וכמובן נימוק או חישוב).

שאלה 5

עשרה אנשים יושבים סביב שולחן עגול.

בהינתן שני אנשים, נגיד שהם **יושבים קרוב זה לזה** אם ורק אם מתקיים אחד התנאים הבאים:

(i) הם יושבים זה ליד זה (ii) יושב ביניהם בדיוק אדם אחד.

לפי הגדרה זו, לכל אדם בשולחן יש בדיוק ארבעה אנשים היושבים קרוב אליו.

נבנה גרף פשוט G כך: קבוצת הצמתים של G היא קבוצת האנשים.

בין שני אנשים שונים יש קשת אם ורק אם הם יושבים קרוב זה לזה לפי ההגדרה הנ"ל.

(10 נקי) א. הראו ש- G הוא מישורי על-ידי שרטוט של G במישור.

(17 נקי) ב. כזכור, $\chi(G)$ הוא מספר הצבעים המינימלי בצביעה נאותה של G.

ללא שימוש במשפט ארבעת הצבעים, הוכיחו: $\chi(G) = 4$.

הדרכה: הוכיחו שצריך לפחות 3 צבעים,

אחרי כן הוכיחו שצריך לפחות 4 צבעים,

ואז הדגימו צביעה ב- 4 צבעים.

בכל חלקי השאלה אין צורך בכלים כבדים, השאלה אינה דורשת ידע פרט להבנה של המושגים.

בהצלחה!