

## תקציר פתרון בחינה 1

### תשובה 1

א:  $S$  [4]

ב:  $\aleph_0$  [3]

ג: [1] נשאר אוילרי, כי לכל אחד מ-3 הצמתים הוספנו בדיוק 2 קשתות.

### תשובה 2

א. לא (אינו רפלקסיבי ואינו טרנזיטיבי)

ב. לא

ג. כן: אם  $(X, Y) \in K$  וגם  $(Y, X) \in K$  אז בהכרח יש ב- $X$  רק איבר אחד, ו- $X = Y$ .

ד. כן

### תשובה 3

א. לכל משימה יש  $\binom{5}{2} = 10$  דרכים לבחור צוות. לארבע המשימות:  $10^4$  דרכים.

ב.  $A_i$ : קבוצת הבחירות של צוותים בהן אדם  $i$  מתחמק מעבודה.

$$\binom{5}{2}^4 - 5 \cdot \binom{4}{2}^4 + \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2}^4 - \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2}^4 \quad \text{הכלה והפרדה:}$$

### תשובה 4

תשובה

- א.  $f$  היא על מפני שלכל  $a \in A$  קיים  $x \in A$  כך ש- $f(x) = a$  (פשוט ניקח  $x = f(f(a))$ ).  
פונקציה מקבוצה סופית לעצמה שהיא על חייבת להיות גם חד-חד-ערכית (שכן אם  $f$  לא חד-חד-ערכית אז לפחות לשניים מאיברי  $A$  יש אותה תמונה, ואז מספר האיברים ב- $f(A)$  יהיה 11 לכל היותר. אבל אז  $f$  לא על!).
- ב. נשים לב שאם פונקציה המקיימת את התנאי הנתון אז לכל  $a \in A$ ,  $f(f(f(a))) = a$  ו- $f(f(a)) \neq a$  או  $f(a) \neq a$  וגם  $f(f(a)) \neq f(a)$  (אחרת נקבל סתירה לתנאי הנתון).  
נניח ש- $f$  אחת הפונקציות המקיימות את תנאי השאלה. נסתכל  $a \in A$ . מאחר ש- $f(a) \neq a$ , הרי שיש בדיוק 11 אפשרויות לבחור את התמונה של  $a$  (את  $f(a)$ ) ומאחר ש- $f(f(a)) \neq f(a)$ , נותרו בדיוק 10 אפשרויות לבחירת התמונה של  $f(a)$  (כלומר של  $f(f(a))$ ). אבל על פי תנאי השאלה, לתמונה של  $f(f(a))$  יש רק אפשרות אחת (שכן  $f(f(f(a))) = a$ ). סיכום ביניים: יש  $11 \cdot 10$  אופציות להגדיר את  $f$  על שלושת האיברים  $a, f(a), f(f(a))$ .  
נותרו עוד 9 איברים בקבוצה. נבחר איבר  $b$  מתוכם. שיקול דומה מראה שיש  $8 \cdot 7$  אפשרויות להגדיר את  $f$  על שלושת האיברים  $b, f(b), f(f(b))$ .

באופן דומה, עם נבחר איבר  $c$  מתוך 6 האיברים הנותרים נקבל שיש  $5 \cdot 4$  אפשרויות להדיר את  $f$  על שלושת האיברים  $c, f(c), f(f(c))$ , ולבסוף אם נבחר איבר  $c$  מתוך 3 האיברים האחרונים, נקבל עוד  $2 \cdot 1$  אפשרויות להגדיר את  $f$  על  $d, f(d), f(f(d))$ . מפני שבכל אחד מהשלבים, היו פתוחות לבחירה כל האופציות של השלב הבא, נקבל שמספר האפשרויות לבחירת  $f$  הוא מכפלת כל האפשרויות שהיו בכל שלב כלומר:

$$(11 \cdot 10) \cdot (8 \cdot 7) \cdot (5 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 1) = 246,400.$$

שיקול אחר, המסתמך על אותו רעיון של בניית פונקציה  $f$  על-ידי חלוקת הקבוצה ל-4

$$\frac{12!}{(3!)^4 4!} \cdot 2^4 = \frac{12!}{3^4 4!} = 246,400$$

מוביל לתוצאה  $a, f(a), f(f(a))$  שלשות מהסוג

(יש לשים לב בכל שלשה יש שתי אופציות סידור שונות אך אין חשיבות לסדר שבין השלשות השונות).

## תשובה 5

יהיו  $x, y, z$  צמתים שונים ברכיב קשירות אחד ויהיו  $a, b, c$  צמתים שונים ברכיב הקשירות השני. במשלים של  $G$ , כל אחד מהצמתים  $x, y, z$  מחובר בקשת לכל אחד מהצמתים  $a, b, c$ . המשלים מכיל אפוא עותק של הגרף הדו-צדדי  $K_{3,3}$ .

לפי שאלה בחוברת,  $K_{3,3}$  אינו מישורי.

גרף שמכיל אותו אינו יכול להיות מישורי.