2007א – מועד 90

.1

א. הטענה איננה נכונה, ונביא דוגמה נגדית.

נתבונן ב- $R=\{(1,2),(2,3)\}$ וב- $S=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$. מתקיים $R,S\in M$.

על פי שאלה 2.35 בכרך "קומבינטוריקה",

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3=\{(1,2),(2,3)\}\cup\{(1,3)\}\cup\varnothing=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$.

$t(S)=S\cup S^2\cup S^3=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}\cup\{(1,3)\}\cup\varnothing=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$.

מתקיים $t(R)=t(S)$, ובפרט מתקיים $t(S)\subseteq t(R)$, אך עם זאת $S\not\subseteq R$. בכך הפרכנו את הטענה.

ב. הטענה איננה נכונה, ונביא דוגמה נגדית.

נתבונן ב- $R=\{(1,2),(2,1)\}$. אכן, $R^2=\{(1,1),(2,2)\}$, ולכן,

$t(R^2)=\{(1,1),(2,2)\}\cup\{(1,1),(2,2)\}\cup\{(1,1),(2,2)\}=\{(1,1),(2,2)\}$.

עם זאת,

$$t(R)=R\cup R^2\cup R^3=\{(1,2),(2,1)\}\cup\{(1,1),(2,2)\}\cup\{(1,2),(2,1)\}=$$
$$=\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$$

ולכן $(t(R))^2=\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$, ומתקיים $t(R^2)\neq(t(R))^2$, ובכך הפרכנו את הטענה.

ג. (תודה רבה לרון הס על הפתרון לשאלה זו. ראו את הפתרון בלשונו בשאלה "2007א - מועד 90 - שאלה 1ג' " בפורום "לקראת הבחינה").

.2 תודה רבה לאיתי הראבן שפתר את השאלה בפורום: ראו הנושא "2007א', מועד 90, שאלה 2" בפורום "לקראת הבחינה".

.3

א. זהו מספר החליפות עם חזרות של חמישה איברים מתוך שישה סוגים, ולכן התשובה היא $6^5=7776$.

ב. כל מחלקת שקילות היא בעצם צירוף עם חזרות של חמישה איברים מתוך שישה סוגים – שכן כל האיברים באותה מחלקה זה כל האיברים מהצירוף, כשמשנים את הסדר ביניהם. לכן התשובה היא $D(6,5)=\binom{10}{5}=252$.

ג. זהו בעצם מספר התמורות עם חזרות של חמישה איברים, כאשר שלושה איברים זהים, ועוד שני איברים זהים. כלומר, התשובה היא $P(5;3,2)=\frac{5!}{2!3!}=10$.

ד. נתבונן במחלקת השקילות בה נמצאת המחרוזת abcdd. אכן, כל איבר במחלקת השקילות של המחרוזת הזו היא תמורה עם חזרות של abcdd. לכן, מספר האיברים במחלקה הוא $P(5;1,1,1,2)=\frac{5!}{2!}=60$, והיא עונה על הדרישות.

4. נשתמש בפונקציה יוצרת. עבור הארטיקים בטעם לימון ואננס, נמשיך את הפונקציה עד אינסוף – כי גם ככה לא נבחר גורמים שגדולים מ-20, כי יוסי צריך לבחור רק 20 ארטיקים. הפונקציה היוצרת המתאימה היא:

$(1+x+x^2+...)^2\cdot(1+x+x^2+...+x^8)^2$, ובה מחפשים את המקדם של x^{20}.

ע״פ נוסחה (i) בממ״ן 15,

$$(1+x+x^2+...)^2\cdot(1+x+x^2+...+x^8)^2=(1+x+x^2+...)^2\cdot\left(\frac{1-x^9}{1-x}\right)^2=$$

$$=(1+x+x^2+...)^2\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)^2\cdot(1-x^9)^2=$$

$$=(1+x+x^2+...)^2\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\cdot(1-x^9)^2$$

ועל פי נוסחה (iii) בממ״ן 15,

$$(1+x+x^2+...)^2\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\cdot(1-x^9)^2=(1+x+x^2+...)^4\cdot(1-x^9)^2=$$

$$=(1+x+x^2+...)^4\cdot(1-2x^9+x^{18})$$

נחפש מקדמים משלימים למקדמים בסוגריים מימין

עבור 1, נחפש את המקדם של x^{20} בביטוי $(1+x+x^2+...)^4$. על פי נוסחה (iii) בממ״ן 15, המקדם שווה ל- $1771=\binom{23}{3}=D(4,20)$.

עבור $-2x^9$, המקדם של x^{11} שווה ל- $364=\binom{14}{3}=D(4,11)$. נכפול אותו ב-(2-) ונקבל -728.

עבור x^{18}, המקדם של x^2 בביטוי $(1+x+x^2+...)^4$ הוא $10=\binom{5}{3}=D(4,2)$.

לכן התשובה הסופית היא $1771-728+10=1053$.