ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20417

אלגוריתמים

חוברת הקורס – אביב 2013ב

כתב: ד"ר דניאל רייכמן

מרץ 2013 – סמסטר אביב – תשע"ג

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנט,

אני מקדם את פניך בברכה עם הצטרפותך אל הלומדים בקורס "אלגוריתמים ".

בחוברת זו תמצא את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ואת המטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים, אותם מפרסם/מת מרכז/ת ההוראה. בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:

http://telem.openu.ac.il

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

שעות הייעוץ הן בכל יום ג' בשעות 15:00-17:00 בטלפון 09-7781222. (פגישה נא לתאם מראש).
ניתן לפנות גם בדוא"ל: danielre@openu.ac.il

אני מאחל לך לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה,

ד"ר דניאל רייכמן
מרכז הקורס

1. לוח זמנים ופעילויות (20417 / ב2013)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ן (למנחה)
1	8.3.2013-3.3.2013	פרק 1		
2	15.3.2013-10.3.2013	פרק 2		
3	22.3.2013-17.3.2013	פרק 3		
4	29.3.2013-24.3.2013 (ב-ו פסח)	פרק 3		ממ"ן 11 29.3.2013
5	5.4.2013-31.3.2013 (א-ב פסח)	פרק 4		
6	12.4.2013-7.4.2013 (ב יום הזכרון לשואה)	פרק 4		
7	19.4.2013-14.4.2013 (ב יום הזכרון) (ג יום העצמאות)	פרק 4		ממ"ן 12 19.4.2013
8	26.4.2013-21.4.2013	פרק 5		
9	3.5.2013-28.4.2013 (א ל"ג בעומר)	פרק 5		

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ״ן (למנחה)
10	10.5.2013-5.5.2013 (ד יום ירושלים)	פרק 6		
11	17.5.2013-12.5.2013 (ג-ד שבועות)	פרק 6		ממ״ן 13 17.5.2013
12	24.5.2013-19.5.2013	פרק 6		
13	31.5.2013-26.5.2013	פרק 7		ממ״ן 14 31.5.2013
14	7.6.2013-2.6.2013	פרק 7		
15	14.6.2013-9.6.2013	חזרה		ממ״ן 15 14.6.2013

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

2. הנחיות בקשר לכתיבת אלגוריתמים

יש לזכור חמישה דברים שחיוניים להצגת האלגוריתם:

1. הסבר אותו קודם, ואת הרעיונות שבו - בעברית (אלא אם כן האלגוריתם מאוד פשוט).
2. כתוב את האלגוריתם במילים, או במידת הצורך בפסאודו-קוד, בדומה לספר. רצוי לכתוב בקוד הוראות בעברית, אך המימוש צריך להיות חד-משמעי וברור. (לדוגמה: ניתן לכתוב "בחר את האיבר הראשון ברשימה, ואם הוא גדול מ- 7 אז...").
3. אסור בשום אופן לכתוב "תכניות מחשב" במקום אלגוריתמים. עליך להתרגל לכתיבה בצורת פסאודו-קוד.
4. אם נתבקשת להוכיח את נכונות האלגוריתם עליך לעשות זאת בצורה פורמלית ומדויקת (למשל תוך שימוש באינדוקציה או בכלים מדויקים אחרים). **גם אם לא נתבקשת להוכיח, יש להסביר באופן כללי מדוע האלגוריתם עובד כשורה**.
5. בכל מקרה (גם אם לא צוין במפורש) יש לנתח את זמן הריצה של האלגוריתם. כמו כן, תמיד נסה להגיע לאלגוריתם יעיל ככל שניתן. אלגוריתם שהוא נכון, אך אינו יעיל, יזכה אותך רק בחלק מהנקודות.

3. תיאור המטלות

קרא היטב עמודים אלו לפני שתתחיל לענות על השאלות

בקורס זה 5 מטלות שעליך לפתור ולהגיש לבדיקה. להלן תמצא הסבר על אופן הפתרון הנדרש וכיצד לשלוח את המטלה למנחה.

3.1 מבנה המטלות

המטלות בקורס הן מסוג **ממ"ן רגיל:** תרגילים "יבשים" **שאינם** דורשים הרצת תכניות במחשב (אלא אם צוין אחרת בגוף המטלה). תרגילים אלו נועדו לבדוק את הבנתך בחומר הלימוד.
את הפתרונות למטלה כזו עליך לרשום על דף נייר בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה.

אם השאלה בממ"ן אינה ברורה לך, אל תהסס להתקשר אל אחד מהמנחים (בשעות הייעוץ הטלפוני שלו) לצורך קבלת הסבר.

3.2 חומר הלימוד הדרוש לפתרון המטלות

בטבלה שלהלן תמצא מהו חומר הלימוד הנדרש (לפי פרקי הספר) לפתרון כל אחת מהמטלות.

<u>**שים לב:**</u>

אין להשתמש לפתרון המטלות בידע הנרכש בפרקי לימוד מתקדמים יותר מהפרקים בהם עוסקת הטבלה

מטלה	חומר הלימוד הנדרש לפתרונה
ממ״ן 11	פרקים 1,2,3
ממ״ן 12	פרק 4
ממ״ן 13	פרקים 5,4
ממ״ן 14	פרק 6
ממ״ן 15	פרק 7

3.3 ניקוד המטלות

משקל כל מטלה 6 נקודות. ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל מינימלי של 18 נקודות לפחות.

ללא צבירת 18 נקודות
לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

לתשומת לבכם!

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן:

אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלות** בציון הנמוך ביותר, שציוניהן נמוכים מציון הבחינה (**עד שתי מטלות**), לא יילקחו בחשבון בעת שקלול הציון הסופי.

זאת בתנאי שמטלות אלה **אינן חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו, מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

4. התנאים לקבלת נקודות זכות

א. צבירת 18 נקודות זכות **לפחות** במטלות.

ב. ציון של לפחות 60 נקודות בבחינת הגמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20417 – **אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1, 2 ו-3 בספר הלימוד.

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: ב-2013 **מועד אחרון להגשה:** 29.03.2013

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות: • שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס • שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה **הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"**

שאלה 1 (20 נקודות)

נתון גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$. הקוטר של $G=(V,E)$ הוא המרחק המקסימלי בין שני צמתים ב- G. $T=(V,F)$ הוא עץ פורש של G אם T קשיר וחסר מעגלים ובנוסף $F\subseteq E$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א) **לכל** גרף $G=(V,E)$ כנ"ל **קיים** עץ פורש T שקוטרו גדול **לכל היותר פי שתיים** מקוטרו של G.

ב) **לכל** גרף $G=(V,E)$ כנ"ל **קיים** עץ פורש T שקוטרו **שווה** לקוטרו של G.

אם התשובה חיובית בכל אחד מהסעיפים, כתבו אלגוריתם יעיל המוצא עץ כזה. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 2 (20 נקודות)

גרף מכוון $G=(V,E)$ נקרא k-מרחיב אם **לכל** שתי קבוצות זרות $A,B\subseteq V$ כך ש $|A|,|B|\geq k$ יש לפחות קשת אחת המחברת צומת מ- A לצומת ב- B. מטרתנו בשאלה זו להוכיח כי בכל גרף שהוא k-מרחיב יש מסלול מכוון פשוט באורך לפחות $n-2k+1$.

א. בהנתן ריצה של אלגוריתם DFS על G, נסמן ב- S את קבוצת כל השכנים שהוצאו מהמחסנית, ב- U את קבוצת הצמתים בתוך המחסנית וב- T את שאר הצמתים. הוכיחו כי בכל שלב במהלך ריצת הDFS אין קשת מכוונת בין S ל- T. הוכיחו גם כי קבוצת הצמתים ב- U היא מסלול מכוון באורך $|U|$.

ב. הוכיחו כי בסיום כל איטרציה של האלגוריתם קיים צומת **יחיד** העובר מ- U ל- S או מ- T ל- U.

ג. הוכיחו כי במהלך ריצת ה DFS בהכרח יש שלב בו $|S|=|T|$.

ד. העזרו בסעיפים הקודמים כדי להוכיח: **בכל גרף שהוא k-מרחיב יש מסלול מכוון פשוט באורך לפחות $n-2k+1$.**

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון קשיר. הוכיחו כי בהכרח קיים צומת v כך הגרף המתקבל לאחר מחיקת v קשיר.

שאלה 4 (20 נקודות)

כזכור עץ, הוא גרף לא מכוון קשיר חסר מעגלים. כתבו אלגוריתם יעיל המחשב את הקוטר של עץ $T=(V,F)$. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

שאלה 5 (20 נקודות)

בהנתן עץ $T=(V,F)$ כתבו אלגוריתם יעיל המוצא צומת $u \in V$ כך שבגרף $T=(V\setminus\{u\},F)$ גודלו של כל רכיב קשירות הוא $|V|/2$ לכל היותר. הוכיחו נכונות ונתחו את סיבוכיות האלגוריתם שלכם.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20417 - אלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרק 4 בספר הלימוד

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: ב-2013 **מועד אחרון להגשה:** 19.04.2013

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

א. פרופסור גולם טוען כי אפשר להשתמש באלגוריתם של דייקסטרה כדי לפתור את בעיית המסלול הקצר ביותר על גרפים בהם יש קשתות במשקל שלילי כדלקמן. נוסיף קבוע חיובי גדול דיו לכל משקלי הקשתות בגרף. נבחר קבוע המבטיח שמשקל כל קשתות הגרף יהיה אי שלילי. כעת נריץ את אלגוריתם דייקסטרה על הגרף עם המשקלים החדשים ונחזיר את המסלול הקצר ביותר המתקבל. האם האלגוריתם של פרופסור גולם פותר נכונה את בעיית המסלול הקצר ביותר על גרפים בעלי משקלים שליליים? אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמה נגדית.

ב. פרופסור שולם טוען שהאלגוריתם של דייקסטרה יעבוד נכונה אם ברצוננו לחשב מסלול קצר ביותר בין s ל-t אם מובטח לנו שכל הקשתות בעלות משקל שלילי בגרף (אם יש כאלה) יוצאות מ-s. האם הפרופסור צודק? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.

שאלה 2 (20 נקודות)

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון בעל משקלים אי שליליים על הקשתות. בהנתן שני צמתים s,t שונים זה מזה כתבו אלגוריתם יעיל המוצא מבין כל המסלולים **הקצרים ביותר** בין s ל-t מסלול המכיל מספר **קטן ככל האפשר של קשתות**. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 3 (20 נקודות)

בהנתן גרף לא מכוון, $G=(V,E)$ בעל משקלים אי שליליים על הקשתות, ברצוננו למצוא קבוצת קשתות בעלת משקל מינימלי $E'\subseteq E$ כך ש $G'=(V,E\setminus E')$ הינו גרף חסר מעגלים. כתבו אלגוריתם לבעיה. הוכיחו את נכונותו ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 4 (20 נקודות)

נתבונן בבעיית קוד הופמן בה למילה ה- i יש שכיחות f_i **ועלות קידוד** c_i כאשר $c_i, f_i \geq 0$.

עלות הקידוד של קוד בו למילה ה- i אורך l_i היא $\sum_{i=1}^{n} f_i c_i l_i$ (אנו מניחים כי יש n מילים).

כתבו אלגוריתם יעיל המוצא קוד תחיליות בעלות קידוד מינימאלית. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 5 (20 נקודות)

פתרו את שאלה 4.11 בספר הלימוד.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: **20417 - אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר הלימוד.

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: ב-2013 **מועד אחרון להגשה:** 17.05.2013

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

נדון בבעיה הבאה. בהינתן שתי קבוצות A,B שכל אחת מהן היא תת-קבוצה בגודל n של הקבוצה $U=\{1,2,3,...,10n\}$, יש למצוא את קבוצת כל הסכומים האפשריים של איבר מ-A ואיבר מ-B, כלומר $A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$.

<u>דוגמה</u>: אם $B=\{3,7,10\}$ $A=\{1,5,8\}$ אזי $A+B=\{4,8,11,12,15,18\}$.

א. הראו כי גודל קבוצת הפלט הוא $O(n)$.

ב. כתבו אלגוריתם הפותר את הבעיה הנ"ל בסיבוכיות $O(n\cdot\log n)$. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו (רמז-FFT).

שאלה 2 (20 נקודות)

נתון גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$ עם משקלים אי שליליים על הקשתות וקודקוד $s\in V$. כמו כן, לכל קודקוד v, נתון מספר ממשי $f(v)$. כתבו אלגוריתם יעיל הבודק האם לכל $v\in V$, $f(v)$ הוא משקלו של מסלול **קצר ביותר** בין s ל-v. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 3 (20 נקודות)

פתרו את שאלה 5.2 בספר הלימוד.

שאלה 4 (20 נקודות)

פתרו את שאלה 4.26 בספר הלימוד.

שאלה 5 (20 נקודות)

נתונה קבוצה A של n שלמים חיוביים $A=\{a_1,...,a_n\}$. כתבו אלגוריתם תכנון דינמי הבודק

האם קיימת חלוקה של A לשלוש קבוצות זרות I,J,K כך ש $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_j = \sum_{k\in K} a_k = \frac{\sum_{l=1}^{n} a_i}{3}$.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם ונתחו את סיבוכיותו.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20417 - אלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרק 6

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: ב-2013 **מועד אחרון להגשה:** 31.05.2013

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

בהנתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, קבוצה בלתי תלויה היא קבוצת צמתים I כך **שלכל** שני צמתים ב I $u,v \in I$, $(u,v) \notin E$. במילים: קבוצה בלתי תלויה היא קבוצה שאינה פורשת אף קשת.

בהינתן **יער** $H=(V,F)$ כתבו אלגוריתם תכנון דינמי המחשב במדויק את מספר הקבוצות הבלתי תלויות ב H. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 2 (20 נקודות)

פתרו את בעיה 6.27 בספר הלימוד.

שאלה 3 (20 נקודות)

פתרו את בעיית 6.29 בספר הלימוד.

שאלה 4 (20 נקודות)

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכל לבעיה הבאה. בהינתן כקלט גרף מכוון $G=(V,E)$ עם משקל (כלומר אורך) $w(e)$ לכל קשת e, צומת x בגרף ושתי קבוצות S,T של צמתים בגרף, יש למצוא מסלול קצר ביותר בין צומת כלשהו ב-S לצומת כלשהו ב-T העובר דרך הצומת x.

התייחס בתשובתך למקרים הבאים:

א. משקלות הקשתות אי-שליליים.

ב. אין הגבלה על משקלות הקשתות (כלומר עשויים להיות שליליים).

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 5 (20 נקודות)

בהנתן גרף **מכוון** $G=(V,E)$ **חסר מעגלים מכוונים** עם משקלים כלשהם על הקשתות, כתבו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המחשב את מסלול ארוך ביותר בין שני צמתים $s,t\in V$. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20417 - אלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: ב-2013 **מועד אחרון להגשה:** 14.06.2013

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (40 נקודות)

נתון גרף **דו צדדי** $G=(V,E)$. **כיסוי על ידי קודקודים** של G הוא קבוצת צמתים C כך ש**לכל** קשת ב- $e \in E$, $e \cap C \neq \phi$. במילים אחרות, כיסוי על ידי קודקודים מכיל לפחות קודקוד אחד מכל קשת.

א. הוכיחו כי גודל הזיווג **המקסימלי** ב- G שווה לגודלו של כיסוי על ידי קודקודים **מינימלי**. (הדרכה: בנו רשת זרימה מתאימה והעזרו במשפט מנגר).

ב. הסריג הדו ממדי מסדר n, T_n הוא הגרף שקבוצת הקודקודים שלו היא

$$\{a,b \mid 1 \le a,b \le n; a,b \in N\}$$

כלומר כל זוגות המספרים השלמים בין 1 ל- n. שני צמתים $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ מחוברים אס"ם $|a_1-a_2|=1$ ו- $|b_1-b_2|=0$ או $|a_1-a_2|=0$ ו- $|b_1-b_2|=1$. הוכיחו כי T_n גרף **דו צדדי**.

ג. נניח כי n **זוגי**. הוכיחו כי הגודל של כיסוי על ידי קודקודים **מינימלי** ב T_n הוא $n^2/2$.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונים המספרים $d_1^{out},d_2^{out},...,d_n^{out}$, והמספרים $d_1^{in},d_2^{in},...,d_n^{in}$. אנו מעוניינים לברר אם קיים גרף מכוון בעל n קדקודים $V_1,...,V_n$ כך שלכל i $d_{in}(V_i)=d_i^{in}$ וגם $d_{out}(V_i)=d_i^{out}$, כלומר, כך ש- d_i^{out}, d_i^{in} הם דרגות הכניסה והיציאה של הקודקודים.

כתבו אלגוריתם שמוצא, בהינתן הסדרות של d_i^{out} ו- d_i^{in}, אם יש גרף כזה. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 3 (20 נקודות)

הקשירות בקודקודים של גרף **לא מכוון** קשיר $G=(V,E)$ הוא השלם החיובי המינימלי k כך שלכל זוג קודקודים ב- G יש k מסלולים זרים בקודקודים ביניהם. כתבו אלגוריתם המחשב את הקשירות בקודקודים של G. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

שאלה 4 (20 נקודות)

נתונה רשת זרימה עם זרימה חוקית ברשת. כתבו אלגוריתם יעיל ככל האפשר הבודק האם הזרימה הנתונה היא **זרימת מקסימום**. הוכיחו נכונות ונתחו את סיבוכיות האלגוריתם שלכם.