פתרונות לממ"ן 11 - 2020ב - 20425

1. נגדיר את המאורעות : A = לחץ-האוויר תקין בגלגל האחורי-שמאלי
B = לחץ-האוויר תקין בגלגל האחורי-ימני
C = לחץ-האוויר תקין בגלגל הקדמי

הנתונים הם :

$P(A) = P(B) = 0.85$

$P(A^C \cap B^C) = 0.06 \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = 1 - P(A^C \cap B^C) = 1 - 0.06 = 0.94$

$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 2 \cdot 0.85 - 0.94 = 0.76$

$\Rightarrow \quad P(A \cap B^C) = P(A) + P(A \cap B) = 0.85 - 0.76 = 0.09$

$P(A \cup B \cup C) = 0.96 \quad \Rightarrow \quad P(A^C \cap B^C \cap C^C) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0.96 = 0.04$

$\Rightarrow \quad P(A^C \cap B^C \cap C) = P(A^C \cap B^C) - P(A^C \cap B^C \cap C^C) = 0.06 - 0.04 = 0.02$

$$P(A^C \cup C^C \mid B^C) = \frac{P((A^C \cap B^C) \cup (C^C \cap B^C))}{P(B^C)} = \frac{P(A^C \cap B^C) + P(C^C \cap B^C) - P(A^C \cap B^C \cap C^C)}{P(B^C)}$$

$$= \frac{0.06 + P(C^C \cap B^C) - 0.04}{0.15} = 0.6 \qquad \Rightarrow \qquad P(C^C \cap B^C) = 0.07$$

$\Rightarrow \quad P(A \cap B^C \cap C^C) = P(B^C \cap C^C) - P(A^C \cap B^C \cap C^C) = 0.07 - 0.04 = 0.03$

$\Rightarrow \quad P(A \cap B^C \cap C) = P(A \cap B^C) - P(A \cap B^C \cap C^C) = 0.09 - 0.03 = 0.06$

$P(A^C \cap C^C) = P(B^C \cap C^C)$

$\Rightarrow \quad P(A^C \cap B \cap C^C) + P(A^C \cap B^C \cap C^C) = P(A \cap B^C \cap C^C) + P(A^C \cap B^C \cap C^C)$

$\Rightarrow \quad P(A^C \cap B \cap C^C) = P(A \cap B^C \cap C^C) = 0.03$

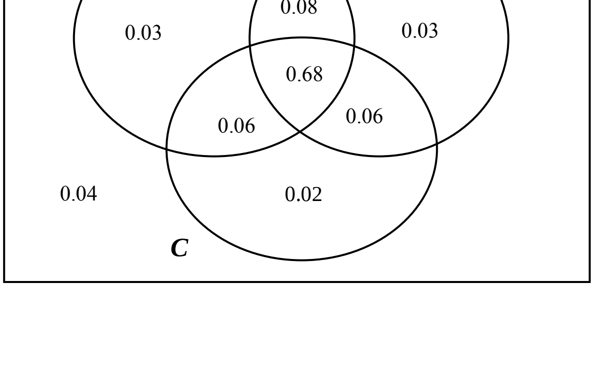
$\Rightarrow \quad P(A^C \cap B \cap C) = P(B) - P(A \cap B) - P(A^C \cap B \cap C^C) = 0.85 - 0.76 - 0.03 = 0.06$

$P(A \cap B^C \cap C) = 0.75 \cdot P(A \cap B \cap C^C)$

$$\Rightarrow \qquad P(A \cap B \cap C^C) = \frac{P(A \cap B^C \cap C)}{0.75} = \frac{0.06}{0.75} = 0.08$$

$\Rightarrow \quad P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C^C) = 0.76 - 0.08 = 0.68$

נתאר את התוצאות שקיבלנו בדיאגרמת ון מתאימה :



ב. $P(B^C\cap C^C) = P(A\cap B^C\cap C^C) + P(A^C\cap B^C\cap C^C) = 0.03 + 0.04 = 0.07$

ג. $P(A\cap B\cap C^C) = 0.08$

ד. $P(A\cap B\cap C) + P(A\cap B\cap C^C) + P(A\cap B^C\cap C) + P(A^C\cap B\cap C) = 0.68 + 0.08 + 2\cdot 0.06 = 0.88$

ה. $P(\text{יוכל לעלות על הכביש} \mid A^C\cup B^C\cup C^C) = \dfrac{P(A^C\cap B\cap C)+P(A\cap B^C\cap C)+P(A\cap B\cap C^C)}{1-P(A\cap B\cap C)}$

$$= \frac{0.06+0.06+0.08}{1-0.68} = \frac{0.2}{0.32} = 0.625$$

2. א. נסמן ב-A_i את המאורע שמתג i סגור (ויכול לעבור בו זרם), לכל $i = 1,2,3,4,5,6$. לפי הנתונים :

מתגים 1, 2 ו-3 בלתי-תלויים בינם לבין עצמם וגם בלתי-תלויים במתגים 4, 5 ו-6 ;

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=0.6 \qquad ; \qquad P(A_4)=0.9$$

$$P(A_5\cup A_6 \mid A_4)=0.8 \qquad \Rightarrow \qquad P(A_5^C\cap A_6^C \mid A_4)=0.2$$

$$P(A_4^C\cup A_6^C \mid A_5^C)=0.3$$

נסמן ב-B את המאורע שעובר זרם מ-A ל-B, ונחשב את הסתברותו :

$$P(B)=P((A_1\cup A_2\cup A_3)\cup(A_4\cap(A_5\cup A_6)))$$

$$=P(A_1\cup A_2\cup A_3)+P(A_4\cap(A_5\cup A_6))-P(A_1\cup A_2\cup A_3)P(A_4\cap(A_5\cup A_6))$$ [אי-תלות בין הענפים]

כעת : $P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C)$

$$=1-P(A_1^C)P(A_2^C)P(A_3^C)=1-0.4^3=0.936$$ [אי-תלות בין מתגים 1, 2 ו-3]

$$P(A_4\cap(A_5\cup A_6))=P(A_5\cup A_6\mid A_4)P(A_4)=0.8\cdot 0.9=0.72$$ [נוסחת הכפל]

לכן : $P(B)=0.936+0.72-0.936\cdot 0.72=0.98208$

ב. $P(B^C\mid A_5^C)=\dfrac{P(B^C\cap A_5^C)}{P(A_5^C)}=\dfrac{P(A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C\cap(A_4^C\cup A_6^C)\cap A_5^C)}{P(A_5^C)}$

$$=\frac{P(A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C)P((A_4^C\cup A_6^C)\cap A_5^C)}{P(A_5^C)}$$ [אי-תלות בין הענפים]

$$=P(A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C)\cdot\frac{P((A_4^C\cup A_6^C)\cap A_5^C)}{P(A_5^C)}$$

$$=P(A_1^C)P(A_2^C)P(A_3^C)P(A_4^C\cup A_6^C\mid A_5^C)$$ [אי-תלות בין מתגים 1, 2 ו-3 והגדרת ההסתברות המותנית]

$$=0.4^3\cdot 0.3=0.0192$$

ג. נראה שההסתברות המותנית של B בהינתן A_4^C שונה מההסתברות של B :

$$P(B\mid A_4^C)=\frac{P((A_1\cup A_2\cup A_3)\cap A_4^C)}{P(A_4^C)}=\frac{P(A_1\cup A_2\cup A_3)\cancel{P(A_4^C)}}{\cancel{P(A_4^C)}}$$ [מתגים 1, 2 ו-3 בלתי-תלויים במתג 4]

$$=1-P(A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C)=1-0.4^3=0.936$$ [מתגים 1, 2 ו-3 בלתי-תלויים זה בזה]

ואילו : $P(B)=0.98208$

לכן, תנאי אי-התלות לא מתקיים ושני המאורעות תלויים זה בזה.

3. א. מספר אפשרויות החלוקה לזוגות (בלי חשיבות לסדר הזוגות) הוא $2,027,025 = \frac{\frac{16!}{2^8}}{8!} = \frac{\binom{16}{2,\ldots,2}}{8!}$.

כעת, נמנה את מספר החלוקות שיש בהן בדיוק שני זוגות מעורבים. יש $\binom{8}{2}^2 = 784$ אפשרויות לבחור 2 בנים ו-2 בנות ו-!2 אפשרויות ליצור מהם זוגות מעורבים. לאחר יצירת הזוגות המעורבים, יש $225 = \left(\frac{\binom{6}{2,2,2}}{3!}\right)^2$ אפשרויות ליצור זוגות לא-מעורבים מהבנים והבנות שנותרו. לכן ההסתברות היא:

$$\frac{784 \cdot 2! \cdot 225}{2,027,025} = 0.17405$$

ב. נסמן ב-A את המאורע שנוצרו בדיוק 2 זוגות מעורבים וב-B את המאורע שאהוד ואפרת לא באותו הזוג.

עלינו לחשב את ההסתברות המותנית $P(B|A)$, אולם קל יותר לחשב את ההסתברות המשלימה לה, דהיינו את $P(B^C|A)$.

מקבלים:
$$P(B^C \mid A) = \frac{n(A \cap B^C)}{n(A)} = \frac{7^2 \cdot \cancel{225}}{\binom{8}{2}^2 \cdot 2! \cdot \cancel{225}} = \frac{49}{1,568} = 0.03125$$

כלומר:
$$P(B \mid A) = 1 - P(B^C \mid A) = 1 - 0.03125 = 0.96875$$

הסבר: בחישוב $n(A \cap B^C)$ אנו מונים את מספר החלוקות שיש בהן בדיוק שני זוגות מעורבים ואחד מהזוגות הללו מורכב מאהוד ואפרת. יש 7^2 אפשרויות לבחור זוג מעורב נוסף (שאינו אהוד ואפרת).
לאחר יצירת שני הזוגות המעורבים, יש $225 = \left(\frac{\binom{6}{2,2,2}}{3!}\right)^2$ אפשרויות ליצור זוגות לא-מעורבים מהבנים והבנות שנותרו. לכן, $n(A \cap B^C) = 49 \cdot 225$.

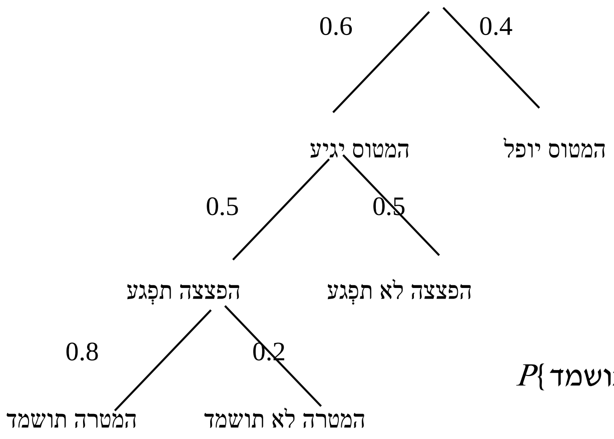
הערה: אפשר לראות שבחישוב ההסתברות יכולנו להתייחס אך ורק לבחירת התלמידים שמרכיבים את הזוגות המעורבים. כלומר, אפשר היה "להתעלם" מהחלוקה של הזוגות הלא-מעורבים.

ג. נסמן ב-C את המאורע שאפרת נבחרת וב-D את המאורע שאהוד נבחר.
המאורע $C \cap D^C$ מתרחש אם אפרת נבחרת ואהוד אינו נבחר. כלומר, אם נבחרים עוד 4 תלמידים מבין אלה שאינם אפרת או אהוד. באופן דומה, המאורע C מתרחש אם אפרת נבחרת ונבחרים עוד 4 תלמידים מבין 15 הנותרים.

לפיכך:
$$P(D^C \mid C) = \frac{n(C \cap D^C)}{n(A)} = \frac{\binom{14}{4}}{\binom{15}{4}} = \frac{11}{15} = 0.7\overline{3}$$

4. א. אם נשלח מטוס אחד עם פצצה אחת, אז :

$$P\{\text{המטרה תושמד}\} = 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.8 = 0.24$$



ב. אם נשלחים 5 מטוסים, אז לפי סעיף א :

$$P\{\text{המטרה תושמד}\} = 1 - P\{\text{המטרה לא תושמד}\}$$
$$= 1 - (1 - 0.24)^5 = 0.74645$$

ג. אם נשלח מטוס אחד עם 5 פצצות, אז :

$$P\{\text{המטרה תושמד}\} = 1 - P\{\text{המטרה לא תושמד}\}$$
$$= 1 - P\{\text{המטרה לא תושמד} \mid \text{המטוס יופל}\}P\{\text{המטוס יופל}\}$$
$$- P\{\text{המטרה לא תושמד} \mid \text{המטוס יגיע}\}P\{\text{המטוס יגיע}\}$$
$$= 1 - 1 \cdot 0.4 - (1 - 0.5 \cdot 0.8)^5 \cdot 0.6 = 0.553344$$