תשובה 1

א. חישוב לפי ההגדרה הרקורסיבית נותן 2.

ב. $f[\varphi]$ מתארת את מספר הקטעים במסלול הקצר ביותר משורש העץ ל"עלה" כלשהו.
כדי להוכיח זאת, נרשום הגדרה רקורסיבית של פונקציה המתארת את אורך המסלול הקצר ביותר בעץ מהשורש לעלה כלשהו. **נקבל בדיוק את ההגדרה שניתנה בשאלה עבור f !**
שתי פונקציות שיש להן אותה הגדרה רקורסיבית – מתלכדות (ר' הסבר בסוף סעיף ג').

ג. עבור פסוק כלשהו φ, נסמן ב- $g[\varphi]$ את **העומק המינימלי של פסוק יסודי** ב- φ, כפי שהוגדר בסעיף ג' בשאלה. נוכיח: $f[\varphi] = g[\varphi]$. ההוכחה – באינדוקציה על בניית פסוק:

(i) עבור פסוק יסודי P, $f[P]=0$, ולפי ההגדרה גם $g[P] = 0$.

(ii) יהי α פסוק, יהי $\varphi = \sim(\alpha)$, ונניח $f[\alpha] = g[\alpha]$.
התווים "~)" שבתחילת φ , והתו ")" שבסיום, אינם פסוקים יסודיים. לכן כדי לחשב את $g[\varphi]$ עלינו להתבונן בהופעות של פסוקים יסודיים ב- α, ולחשב את העומק שלהם בביטוי $\sim(\alpha)$. מהגדרת עומק (משקל, עמ' 41 – 42 בספר) מובן שכל הופעה של פסוק יסודי ב- α היא בעלת עומק גדול ב- 1 בביטוי $\sim(\alpha)$ לעומת העומק שלה בביטוי α. לכן גם העומק המינימלי של פסוק יסודי בביטוי גדל ב- 1 , כלומר $g[\varphi] = g[\alpha]+1$. מצד שני, $f[\varphi] = f[\alpha]+1$. לכן $g[\varphi]=f[\varphi]$.

(iii) יהיו α, β פסוקים, $\varphi = (\alpha) \to (\beta)$, ונניח $f[\alpha] = g[\alpha]$, $f[\beta] = g[\beta]$.
חמשת התוים שמחוץ ל- α ו- β בביטוי $(\alpha) \to (\beta)$ אינם פסוקים יסודיים, ולכן כדי לחשב את $g[\varphi]$ עלינו להתבונן בהופעות של פסוקים יסודיים ב- α וב- β ולחשב את העומק שלהם בביטוי $(\alpha) \to (\beta)$. כמו בסעיף הקודם, כל הופעה של פסוק יסודי ב- α היא בעלת עומק גדול ב- 1 בביטוי $(\alpha) \to (\beta)$ לעומת העומק שלה בביטוי α. בנוסף, נזכור ש- α מאוזן מבחינת הסוגריים **(משפט 2.4 !)** ולכן גם המחרוזת (α) מאוזנת. לכן כל הופעה של פסוק יסודי ב- β היא בעלת עומק גדול ב- 1 בביטוי $(\alpha) \to (\beta)$ לעומת העומק שלה ב- β.
מכל זה מתקבל ש- $g[\varphi]=1+\min\{g[\alpha],g[\beta]\}$. מצד שני, $f[\varphi]=1+\min\{f[\alpha],f[\beta]\}$.
לכן $g[\varphi]=f[\varphi]$.

בסך-הכל הראינו באינדוקציה על בניית פסוק, **שלכל** פסוק φ, $g[\varphi]=f[\varphi]$.

אגב, אם נזרוק מהוכחה זו את כל הפרטים הספציפיים, נוכל לקבל ממנה הוכחה באינדוקציה על בניית פסוק של הטענה הכללית שהזכרנו בהוכחת סעיף ב׳: שתי פונקציות שיש להן אותה הגדרה רקורסיבית – מתלכדות.

תשובה 2

א. מלוח האמת של "חץ", הפסוק $P_0 \to P_1$ שקרי אםם P_0 אמיתי ו- P_1 שקרי.

לכן $\sim (P_0 \to P_1)$ אמיתי אםם P_0 אמיתי ו- P_1 שקרי.

בדומה $\sim (P_0 \to P_2)$ אמיתי אםם P_0 אמיתי ו- P_2 שקרי.

מכאן לא קשה לרשום את לוח האמת של $(\sim (P_0 \to P_1)) \vee (\sim (P_0 \to P_2))$.

בעזרת הלוח או בעזרת מה שנאמר כאן, אנו רואים שהפסוק הנ"ל אמיתי בדיוק ב- 3 מתוך 8 השורות של לוח האמת:

כל השורות בהן P_0 אמיתי, פרט לשורה בה P_0, P_1, P_2 אמיתיים כולם.

מכאן לפי האלגוריתם 2.30 בספר, **צורה דיסיונקטיבית נורמלית (צד"נ)** לפסוק היא:

$(P_0 \wedge P_1 \wedge (\sim P_2)) \vee (P_0 \wedge (\sim P_1) \wedge P_2) \vee (P_0 \wedge (\sim P)_1 \wedge (\sim P_2))$.

צד"נ של פסוק אינה יחידה: ייתכנו צורות רבות כאלה!

צד"נ אחרת אפשרית לפסוק זה, שניתן לקבל אותה ישירות מהפסוק הנתון היא:

$(P_0 \wedge (\sim P_1)) \vee (P_0 \wedge (\sim P_2))$ (*)

בצורה זו לא כל הפסוקים היסודיים הנתונים מופיעים בכל מרכיב - זה לגיטימי!

ב. **צורה קוניונקיטיבית נורמלית (צק"נ)** לפסוק: לפי המתכון שבתשובה לשאלה 2.33 נקבל צורה אחת אפשרית, שהיא קוניונקציה של 5 פסוקים שכל אחד מהם מכיל את כל 3 הפסוקים היסודיים, עם הופעות שונות של סימני שלילה על חלק מהם.

נדגים כאן דווקא צק"נ אחרת לפסוק המקורי: $P_0 \wedge ((\sim P_1) \vee (\sim P_2))$!

הגענו לפסוק זה על-ידי שימוש בחוק הפילוג על הפסוק (*) ופישוט הפסוק שהתקבל בעזרת שקילויות שונות.

תשובה 3

א. נסמן: L: לוגיקה היא מקצוע קשה. S: רוב הסטודנטים אוהבים לוגיקה.

D: דיסקרטית הוא קורס קל.

אנו רואים את L,S,D כפסוקים יסודיים. תרגום הטענות בשאלה:

(i) $L \vee S$ *(ii)* $D \to (\sim L)$ *(iii)* $(\sim S) \to (\sim D)$

ב. ניתן לענות על השאלה בעזרת לוח אמת בעל 8 שורות.
למען העניין, נראה דרך אחרת:
עלינו לבדוק אם בכל אינטרפרטציה שבה $(i)+(ii)$ אמיתיים, גם (iii) אמיתי.
נבדוק אם קיימת אינטרפרטציה J שבה $(i)+(ii)$ אמיתיים ו- (iii) שקרי.
נתבונן ב- (iii). לפי הלוח של "חץ",
פסוק "חץ" הוא **שקרי** ב- J כלשהי אסם המרכיב השמאלי שלו אמיתי ב- J והימני שקרי ב- J.
במקרה שלנו זה אומר: $\sim S$ אמיתי ב- J ו- $\sim D$ שקרי ב- J.
כלומר $J(S) = \mathrm{F}$, $J(D) = \mathrm{T}$.
הנחנו ש- (ii) אמיתי ב- J, ויחד עם התוצאה $J(D) = \mathrm{T}$, נקבל מהלוח של "חץ" שגם
$J(\sim L) = \mathrm{T}$. כלומר $J(L) = \mathrm{F}$.
קיבלנו $J(L) = \mathrm{F}$ וקודם קיבלנו $J(S) = \mathrm{F}$. מהלוח של "או" יוצא שגם פסוק (i) שקרי ב- J,
בסתירה להנחתנו !
הגענו לסתירה, לכן לא קיימת J שבה $(i)+(ii)$ אמיתיים ו- (iii) שקרי.
כלומר בכל אינטרפרטציה שבה $(i)+(ii)$ אמיתיים, גם (iii) אמיתי.
משמע - התוצאה (iii) **נובעת טאוטולוגית** מההנחות $(i) + (ii)$!

תשובה 4

א. לא נכון. דוגמא נגדית: ניקח $\gamma = P_1 \wedge P_2$, $\beta = P_2$, $\alpha = P_1$.
מתקיים $\{P_1, P_2\} \models P_1 \wedge P_2$: בכל אינטרפרטציה בה P_1 ו- P_2 מקבלים שניהם T גם $P_1 \wedge P_2$
מקבל T. אבל אף אחד מהפסוקים P_1, P_2 לבדו אינו גורר טאוטולוגית את $P_1 \wedge P_2$ (מדוע?).

ב. נכון: מתקבל משאלה 2.25 + משפט 2.22 (שניהם בעמ' 57 בספר).
לחלופין, הנה תחילתה של הוכחה ישירה: נניח $\{\alpha, \beta\} \models \gamma$ ונניח בשלילה כי $\alpha \to (\beta \to \gamma)$
אינו טאוטולוגיה. אז קיימת אינטרפרטציה J בה $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ שקרי. מהלוח של "חץ",
α אמיתי ב- J בעוד ש- $\beta \to \gamma$ שקרי ב- J. המשיכו באותה צורה והגיעו לסתירה !

ג. **נכון**! ההנחה $\alpha \models \sim \beta$ פירושה שבכל אינטרפרטציה שבה α אמיתי, β הוא שקרי.
כלומר אין אף אינטרפרטציה שבה α, β אמיתיים שניהם. לכן נוכל לומר שבכל אינטרפרטציה
בה שניהם אמיתיים מתקיים מה שנרצה, למשל: γ אמיתי, ולמשל: γ שקרי...
זו גרירה טאוטולוגית המתקיימת באופן ריק.

ד. **נכון**! פירוש ההנחות הוא, שבכל אינטרפרטציה שבה α ו- β שניהם אמיתיים, גם γ אמיתי וגם γ~ אמיתי. כמובן, **אין אף אינטרפרטציה** שבה γ ו- $\sim\gamma$ שניהם אמיתיים. לכן כדי לקיים את התנאים, צריך שלא תהיה אף אינטרפרטציה שבה α ו- β שניהם אמיתיים !
אם אין אינטרפרטציה שבה α ו- β שניהם אמיתיים, משמע בכל אינטרפרטציה שבה α אמיתי, β הוא שקרי, כמבוקש (לא בהכרח קיימת אינטרפרטציה בה α אמיתי - זה לא משנה).

אגב, כאשר אין אף אינטרפרטציה שבה α,β אמיתיים שניהם, אומרים שהקבוצה $\{\alpha, \beta\}$ **אינה עקבית**.

הנה דוגמא למצב המתואר בשאלה: $\alpha = P_0$, $\beta = \sim P_0$, ו- γ פסוק כלשהו.
שלישייה זו מקיימת את הדרישות: מכיון **שאין** אף אינטרפרטציה שבה P_0 ו- $\sim P_0$ אמיתיים שניהם, נוכל לומר שבכל אינטרפרטציה בה שניהם אמיתיים γ אמיתי, וגם γ~ אמיתי...

איתי הראבן