

שאלה 1 (25 נקודות)

מסדרים במעגל 50 כדורים באופן אקראי.

נניח שהמקומות במעגל ממוספרים מ-1 עד 50;

נניח שכל אחד מהכדורים יכול להיות אדום (בהסתברות 0.5) או כחול (בהסתברות 0.5);
ונניח שאין תלות בין הכדורים.

(8 נק') א. נגדיר שני מאורעות:

A_1 = במקום 1 במעגל מתחיל רצף של 3 כדורים אדומים. (הרצף מסתיים במקום 3)

A_2 = במקום 4 במעגל יש כדור כחול.

האם שני המאורעות, המוגדרים לעיל, בלתי-תלויים זה בזה?

יהי X מספר הרצפים באורך 2 (בדיוק) של כדורים אדומים, שהתקבלו במעגל.

(7 נק') ב. חשב את התוחלת של X .

(10 נק') ג. חשב את השונות של X .

שאלה 2 (25 נקודות)

בארגו גדול יש כדורים בכמות בלתי-מוגבלת.

מוציאים מהארגו X כדורים, כאשר X הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 10.

את X הכדורים (שהוצאו מהארגו) מטיילים באקראי לתוך 3 תאים ממוספרים מ-1 עד 3.

יהי Y מספר הכדורים שהוכנסו לתא מספר 1.

(9 נק') א. רשום ביטוי כללי להסתברות המשותפת $P\{X = i, Y = j\}$.

מהם הערכים של i ו- j , שעבורם ההסתברות המשותפת הזאת חיובית?

(9 נק') ב. מצא את ההתפלגות השולית של Y , וזהה אותה.

(7 נק') ג. האם המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-תלויים?

הוכח את טענתך.

שאלה 3 (25 נקודות)

(13 נק') א. הוכח: אם מאורע מסוים מתרחש בהתאם להנחות של תהליך-פואסון עם קצב λ ($\lambda > 0$),

אז משך הזמן החולף החל מזמן 0 ועד להתרחשות המופע הראשון של המאורע

הוא משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ .

(12 נק') ב. אחת מתכונותיה של פונקציית ההתפלגות המצטברת F היא הרציפות מימין.

1. תן דוגמה ל- F שהיא רציפה (ולא רק רציפה מימין).

2. תן דוגמה ל- F שהיא רציפה מימין בלבד (ולא רציפה).

בשני המקרים אין צורך להוכיח את טענתכם, אלא מספיק לרשום דוגמאות מתאימות.

שאלה 4 (25 נקודות)

פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי X נתונה על-ידי: $f_X(x) = \frac{8\theta^2}{x^3}$, $x \geq 2\theta > 0$

- (6 נק') א. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X .
 רשום אותה באופן מלא ומדויק (דהיינו, לכל ערך ממשי).
 (6 נק') ב. חשב את התוחלת של X .
 (6 נק') ג. חשב את $P\{X > 3\theta \mid X < 5\theta\}$.
 (7 נק') ד. יהיו X_{50}, \dots, X_2, X_1 משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם ההתפלגות של X .

לכל $i = 1, 2, \dots, 50$, נגדיר את המשתנה המקרי Y_i על-ידי: $Y_i = \begin{cases} 1 & , X_i \leq E[X] \\ 0 & , X_i > E[X] \end{cases}$

חשב את הערך המדויק של $P\left\{36 \leq \sum_{i=1}^{50} Y_i \leq 37\right\}$.

שאלה 5 (25 נקודות)

- נתונה קופסה ובה 18 כדורים: 10 לבנים, 5 שחורים ו-3 אדומים.
 כל הכדורים **שונים** זה מזה.
 בוחרים מהקופסה באקראי **וללא החזרה** 5 כדורים.
 (6 נק') א. מהי שונות מספר הכדורים הלבנים שייבחרו?
 (6 נק') ב. ידוע שנבחרו 2 כדורים אדומים.
 מהי ההסתברות שנבחרו גם לפחות 2 כדורים לבנים?
 (6 נק') ג. לאחר בחירת 5 הכדורים, בוחרים פעם נוספת 5 כדורים **מתוך הכדורים שנותרו בקופסה** (לאחר הבחירה הראשונה).
 גם הבחירה השנייה נעשית באקראי וללא החזרה.
 מהי ההסתברות שבין 5 הכדורים שייבחרו בפעם השנייה יהיו בדיוק 2 אדומים?
 (7 נק') ד. חוזרים 90 פעמים על הניסוי מתחילת השאלה, שבו בוחרים 5 כדורים ללא החזרה מתוך ה-18 שבקופסה. (לאחר כל חזרה, מחזירים לקופסה את הכדורים שנבחרו).
 נניח שאין תלות בין החזרות.
 נסמן ב- Y את המספר הכולל של הכדורים הלבנים שייבחרו במהלך 90 החזרות הללו.
 חשב חסם עליון (הטוב ביותר האפשרי) להסתברות של המאורע $\{ |Y - 250| \geq 13 \}$.

בהצלחה!