סיכום טאוטולוגיות

בהינתן $p_1, p_2, \dots, p_n$ בור כלשהי טאוטולוגיה q אם כל נוסח
ש $p_1, p_2, \dots, p_n$ כפסקים אז גם q כפיון.
כלומר אחרינו $p_1 \wedge \dots \wedge p_n \to q$

דוגמאות: לכל $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

דוגמאות:

1. $p \wedge q \Rightarrow p$, $p \wedge q \Rightarrow q$
2. $p \Rightarrow p \vee q$, $q \Rightarrow p \vee q$
3. $\neg q \Rightarrow (p \vee q)$, $\neg p \Rightarrow (p \vee q)$
4. $p, p \to q \Rightarrow q$ — Modus ponens
5. $\neg q, p \to q \Rightarrow \neg p$ — Modus Tollens
6. $p \to q, q \to r \Rightarrow p \to r$ טרנזיטיביות

כללים נוספים:

4. אי סתירה, אם אין סתירה אין הוכחה לשלילה => הכלל לשלילה
5. אם יורד שלם אין אותה שטרה, לא לקחתי שטרה => לא יורד שלם
6. אם יורד שלם אין אותה שטרה, אם אותה שטרה אחרי מישהו => אם יורד שלם אז אין מישהו שלם

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$r \to p$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

טבלת אמת של פונקציה G: $r \to p$ <= $r \to q$, $q \to p$

~~דוגמה~~

לכל מספר יש ריבוע חיובי: כמות כל אלינו: $(x=0)$

$\forall x\,(x^2>0)$

קיים מספר שריבוע שלו הוא פלוס מ3: כמות אחד

$\exists x\,(x^2>3)$

~~תרגיל~~:

1. לכל מספר (מעל 1) קיים הופכי: $\forall x\,\exists y\,(y=1)$

2. לכל מספר (מעל 1) שרב לו קיים הופכי: $\forall x\,(x\neq 0) \to \exists y\,(y=1)$

3. לכל מספר שקרב לו קיים הופכי. יתר: $\forall x\,(x\neq 0) \to \forall y\,(y=1) \vee \exists z\,(z=x)$

4. לכל מספר חיובי אבל יתר מכל הנמספים האחרים: $\exists x\,\forall z\,((z\neq x) \to (z\geq x))$

מה: הכלל של הדלפון: ~~אין מספר שהוא גדול יותר מכל המספרים~~

~~בנוסף אחרים: לכל מספר מעל קיים מספר מעל אחר שהוא גדול ממנו.~~

$\forall x\,\exists y\,(y\neq x) \vee (y\neq x)$

המשכון: $\neg(\forall x\,\exists y\,(x\neq y) \to (y\neq x))$

חוק: דב מורגן לכמתים: $\neg\forall x = \exists x\,\neg$

$\neg\exists x\,\forall = \forall x\,\neg$

$\neg(\forall x\,\exists y\,(x\neq y) \to (y\neq x)) \equiv \exists x\,\forall y\,(x\neq y) \wedge (y\neq x)$

$\neg\exists x\,\forall y\,(x\neq y) \wedge (y\neq x) \Rightarrow$

$$\equiv \forall x \exists y \left(x \neq y\right) \wedge \left(y \geq x\right)$$

$$\equiv \forall x \exists y \left(x \neq y\right) \wedge \left(y > x\right)$$

~~תזכורת הקבוצות~~

קבוצה: אוסף של איברים

רשימה של איברים

תכונה $A = \{ \underbrace{\quad}_{\text{איברים}} : \underbrace{\quad}_{\text{תכונה}} \}$

$A = \{ x \in N : 1 \leq x \leq 7 \}$

איברים

רשימה

הגדרה: הסימן "שייך"

$a \in A$ אם האיבר a שייך לקבוצה A, אחרת $a \notin A$

דוגמה: $B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$ ← הרשימה של המספרים הריבועיים בין 1 ל 5

$B = \{x^2 : (x \in N) \wedge (1 < x < 5)\}$

קבוצה: $A = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$

$1 \in A$ ✓

$\{1\} \in A$ ✗

$3 \in A$ ✗

$\{1, 2\} \in A$ ✗

~~הגדרה בין הקבוצות~~

A מוכל בקבוצה B ($A \subseteq B$) אם כל איבר בA שייך גם לB.

$$(A \subseteq B) = \forall x (x \in A) \rightarrow (x \in B)$$

שלילה: $A \not\subseteq B$

$$\neg \forall x (x \in A) \rightarrow (x \in B)$$

$$\equiv \exists x \neg \left((x \in A) \rightarrow (x \in B)\right)$$ $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

$$\equiv \exists x \neg \left(\neg (x \in A) \vee (x \in B)\right)$$ דה מורגן

$$\equiv \exists x (x \in A) \wedge (x \notin B)$$

יהי $A = \{1,2,\{1,2,3\}\}$

✓ $A \subseteq \{1\}$ — איבר $\in$ קבוצה

✗ $A \subseteq \{1,2,3\}$ — קבוצה $\subseteq$ קבוצה

✗ $\emptyset \subseteq A$

~~הגדרה (שמאל)~~

~~שווין בין קבוצות:~~

$$(A=B) = (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

~~הגדרה (שמאל) $A \subset B$ אם A מוכל ממש ב-B~~

$$(A \subset B) = (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$$

בשביל ! בסדר שיהיו בשוב $\{1,2,\{1,2,3\}\}$

2 לקבוצות שיהיו $\{2,2,1,2,1,3\}$

~~הקבוצה הריקה~~ $\emptyset$

הקבוצה הריקה היא הקבוצה שאין בה איברים

~~טענה עבור~~ אם E הקבוצה הריקה אז לכל x, אם $E \subseteq A$ לכל קבוצה A...

$$\underbrace{\forall x \underbrace{(x \in E)}_{F} \rightarrow (x \in A)}_{T}$$

~~טענה:~~ קיימת קבוצה ריקה אחת ויחידה

נניח כי E, F שתי הקבוצות הריקות. נראה $E=F$

E ריקה $\leftarrow$ $E \subseteq F$

F ריקה $\leftarrow$ $F \subseteq E$

$$(E \subseteq F) \wedge (F \subseteq E) \Rightarrow E = F$$

נתון:

✗ $\emptyset \in \emptyset$

✓ $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

✓ $\emptyset \subseteq \emptyset$

✓ $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$

✓ $\{1\} \subseteq \emptyset$

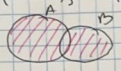
✗ $\{1\} \in \emptyset$

✓ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset\}$ הקבוצה ל-ל כדי שכל איבר שלה יהיה איבר בקבוצה כלשהי אם ל איבר כלשהי

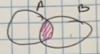
✓ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset\}$ איבר שלישי הקבוצה שהם איבר אחד שלהם הקבוצה ריקה, בודקים אם ל ~~[illegible]~~ הקבוצה כלשהי

פעולות בין קבוצות

1. איחוד: $A\cup B=\{x:(x\in A)\vee(x\in B)\}$



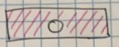
2. חיתוך: $A\cap B=\{x:(x\in A)\wedge(x\in B)\}$



3. הפרש: $A\setminus B=\{x\in A:(x\in A)\wedge(x\notin B)\}$

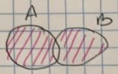
4. הנשלם: X = הקבוצה האוניברסלית

$A^c=\{x\in X: x\notin A\}$



$A\setminus B=A\cap B^c$

5. הפרש סימטרי: $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$



- $A=\{1,2,\dots,10\}$:דוגמה
- $B=\{2,4,6,8,10,12,14,16\}$

$A\cup B=\{1,2\dots 10,12,14,16\}$

$A\cap B=\{2,4,6,8,10\}$

$A\setminus B=\{1,3,5,7,9\}$

$B\setminus A=\{12,14,16\}$

$A\triangle B=\{1,3,5,7,9,12,14,16\}$

הוכחה: $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

$$x\in A\triangle B\equiv(x\in A\setminus B)\vee(x\in B\setminus A)\equiv\big((x\in A)\wedge(x\notin B)\big)\vee\big((x\in B)\wedge(x\notin A)\big)$$

$$\equiv\big((x\in A)\wedge(x\notin B)\big)\vee(x\in B)\wedge\big((x\in A)\wedge(x\notin B)\vee(x\notin A)\big)$$

$$\equiv\big((x\in A)\vee(x\in B)\big)\wedge\big((x\notin B)\vee(x\in B)\big)\wedge\Big(\big((x\in A)\vee(x\notin A)\big)\wedge\big(x\notin B)\vee(x\notin A)\big)\Big)$$

$$\equiv\big((x\in A)\vee(x\in B)\big)\wedge\big((x\notin B)\vee(x\notin A)\big)\equiv\cancel{(x\in A\cup B)\wedge(\neg}$$

$$\equiv (x \in A \cup B) \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in A))$$

$$\equiv (x \in A \cup B) \wedge \neg((x \in A \wedge (x \in B))$$

$$\equiv (x \in A \cup B) \wedge \neg(x \in A \cap B)$$

$$\equiv x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

הוכח

מ.נ.ש. 23.7