

מבנה הבחינה :

- * יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- * משקל כל שאלה 25% .
- * אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- * יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
 - * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
 - * אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
 - * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
-

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

איזה מהיחסים הבאים הם רפלקסיביים? איזה מהיחסים הם יחסי שקילות?
איזה מהיחסים הם אנטי-סימטריים? נמק את תשובותיך.

(6 נק') א. היחס D מעל $N - \{0\}$ המוגדר כך:

$$(n, m) \in D \text{ אם } n \text{ מתחלק ב- } m \text{ ללא שארית.}$$

(6 נק') ב. היחס G שהוא הסגור הסימטרי של היחס D מסעיף א, מעל אותה קבוצה.

(6 נק') ג. היחס T מעל $N \times N$ המוגדר כך:

$$(a, b) \in T \text{ אם } a = d \text{ ו- } b = c.$$

(7 נק') ד. היחס $T \cup T^2$, כאשר T הוא היחס מסעיף ג', מעל אותה קבוצה.

שאלה 2

N היא קבוצת המספרים הטבעיים. R היא קבוצת המספרים הממשיים, שעוצמתה C .

א. תהי A_1 קבוצת הפונקציות של N ל- R . תהי A_2 קבוצת הפונקציות של N ל- A_1 .

תהי A_3 קבוצת הפונקציות של N ל- A_2 .

האם עוצמת A_3 היא: \aleph_0 / C / 2^C / יותר מ- 2^C / עוצמה אחרת ?

ב. תהי B_1 קבוצת הפונקציות של R ל- R . תהי B_2 קבוצת הפונקציות של R ל- B_1 .

תהי B_3 קבוצת הפונקציות של R ל- B_2 .

האם עוצמת B_3 היא: \aleph_0 / C / 2^C / יותר מ- 2^C / עוצמה אחרת ?

בשני הסעיפים יש להוכיח בפירוט ולנמק כל מעבר. אפשר להסתמך על ממ"ן 14.

שאלה 3

- א. (3 נק') מהו מספר הדרכים לסדר את המחרוזת 112233445 ?
(שימו לב ש-5 מופיע רק פעם אחת).
- ב. (3 נק') מהו מספר הדרכים לסדר את המחרוזת הנ"ל כך ששתי ההופעות של 1 יהיו צמודות זו לזו? דוגמאות לסידור כזה: 112233445, 241132354.
- ג. (19 נק') מהו מספר הדרכים לסדר את המחרוזת הנ"ל כך שלא יהיו שתי ספרות צמודות שוות, כלומר: לא תופיע המחרוזת 11, לא תופיע המחרוזת 22, לא 33 ולא 44. הדרכה: עקרון ההכלה וההפרדה.
- בכל הסעיפים בשאלה זו יש להגיע לתשובה סופית מספרית.**

שאלה 4

- יהי a_n מספר המחרוזות באורך n , שהתווים שלהן לקוחים מהקבוצה $\{1,2,3,a,b,c,d\}$ כאשר אסור שתהיה במחרוזת הופעה של ספרות זו ליד זו. אותיות יכולות להופיע זו ליד זו. דוגמאות למחרוזות מותרות ($n=8$): המחרוזת 1aaab1c3 והמחרוזת aaaaaaaa. דוגמאות למחרוזות אסורות ($n=8$): המחרוזת 1aab12c3 והמחרוזת 11111111.
- א. (10 נק') רשמי את a_0, a_1, a_2 . רשמי יחס הנסיגה עבור a_n . בדקי שיחס הנסיגה מתיישב עם ערכי ההתחלה שרשמת.
- ב. (15 נק') פתרי את יחס הנסיגה וקבלי ביטוי מפורש עבור a_n .

שאלה 5

תהי L שפה חלקית לשפת תחשיב הפרדיקטים, ובה בין השאר סימני משתנים X, Y, Z , סימן פרדיקט דו-מקומי A_1^2 וסימן פרדיקט דו-מקומי R .
תהי J אינטרפרטציה של L , שתחומה הוא $P(N)$, ובה $R(X, Y)$ מתפרש כ- $X \subseteq Y$.
 A_1^2 מתפרש כרגיל כשוויון.

(9 נק') א. תהי φ התבנית: $\forall X (R(X, Y) \rightarrow A_1^2(X, Y))$

שים לב שבתבנית זו, המשתנה החפשי (כלומר המופיע לא-קשור) היחיד הוא Y , ולכן התבנית "אומרת" משהו על Y , ואינה אומרת משהו על X , שהוא משתנה קשור. הראה שיש השמה אחת ויחידה σ (עבור המשתנה Y), המקיימת:
 φ אמיתית באינטרפרטציה J שהוגדרה למעלה תחת σ .
מכיון שהמשתנה X קשור, אין זה משנה איזה ערך הוא יקבל בהשמה – עליך לתת ערך רק ל- Y . נמק את תשובתך.

(8 נק') ב. תהי ψ התבנית: $\forall X (R(Y, X) \rightarrow R(X, Y))$

הראה שיש השמה אחת ויחידה σ (עבור המשתנה Y), המקיימת:
 ψ אמיתית באינטרפרטציה J שהוגדרה למעלה תחת σ .
מהי השמה זו? שים לב שהיא שונה מההשמה שמצאת בסעיף הקודם. נמק את תשובתך.

(8 נק') ג. נתבונן בתבנית $\varphi \wedge \psi$, כאשר φ, ψ הן אלו שהוגדרו בסעיפים הקודמים.

הוכח שתבנית זו שקרית ב- J הנתונה למעלה ("לוגיקה" הגדרה 3.17 בעמ' 117), אך אינה שקרית לוגית ("לוגיקה" הגדרה 3.18 בעמ' 119).
זכור ש- A_1^2 מתפרש כשוויון בכל אינטרפרטציה.

בהצלחה!