# דייקסטרה

## שאלה 1

א. האם דייקסטרה יעבוד על גרף עם משקלים שליליים ?

ב. האם הוספת ערך קבוע למשקלי כל הקשתות בגרף עלולה לשבש את תוצאות הרצת דייקסטרה ? והעלאה בריבוע ?

ג. הצג אלגוריתם שמחשב מסלולים קצרים ביותר בהתחשב במכפלת (במקום בסכום) משקלי הצמתים.

ד. נתון גרף מכוון וממושקל שבו כל המשקלים שליליים, אך אין מעגלים מכוונים.
הצג אלגוריתם לחישוב המסלולים הארוכים ביותר (כלומר הכי פחות שליליים) בין צומת נבחר s לבין כל צמתי הגרף.

## שאלה 2

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם מחיר (=משקל) אי-שלילי $c_e \geq 0$ לכל אחת מהצלעות $e \in E$, ועם קדקוד מקור $s \in V$. ברצוננו לחשב מסלולים מזעריים מ- $s$ לכל אחד מהקדקודים האחרים. מחירו של מסלול $P$ מ- $s$ ל- $v$ מוגדר כסכום מחירי הצלעות במסלול $c(P)=\sum_{e\in P} c_e$. מסלול מזערי הוא מסלול שבו $c(P)$ מזערי. בפרק העוסק בחמדנות בספר הקורס, מוצג האלגוריתם של **Dijkstra** למציאת מסלולים מזעריים מ- $s$ לכל יתר הקדקודים בגרף בזמן $\Theta(|E|\log|V|)$.

הציגו אלגוריתם <u>יעיל יותר מזה של **Dijkstra**</u> באופן ניכר, המחשב מסלולים מזעריים בגרף שבו המחירים מוגבלים לצורה $c_e \in \{1,2\}$.

## שאלה 3

נתון גרף מכוון $G=(V, E)$, ממושקל, וקבוצת צמתים $U\subseteq V$, ושני צמתים s ו-t. תאר אלגוריתם המוצא את אורך המסלול הקל ביותר מ-s ל-t, העובר דרך צומת אחת לפחות ב-U.

## שאלה 4

נתון גרף $G=(V,E)$ מכוון, עם משקלים חיוביים על הקשתות. כל קשת צבועה בירוק או בסגול. נתון צומת $s\in V$. הציעו אלגוריתם יעיל למציאת המרחקים הקצרים ביותר מהצומת s לכל צומת אחר בגרף, תחת המגבלה **שאין במק"ב שתי קשתות עוקבות מאותו צבע.** במילים אחרות, לכל $v\in V$ יש למצוא את אורך המסלול הקצר ביותר מ-s ל-v המורכב מקשתות ירוקות וסגולות לסירוגין. שימו לב, הקשת הראשונה במסלול יכולה להיות ירוקה או סגולה. תארו את האלגוריתם, הסבירו במספר שורות את נכונותו, ציינו ונמקו את סיבוכיות הזמן.

## שאלה 5

נתון גרף $G=(V,E)$ מכוון עם משקלים חיוביים על הקשתות.
כל קשת צבועה באדום או בכחול. נתון צומת s בגרף. הציעו
אלגוריתם יעיל למציאת המרחקים הקצרים ביותר מהצומת s
לכל צומת אחר בגרף תחת המגבלה שמספר הקשתות האדומות
במסלול יהיה זוגי ומספר הקשתות הכחולות יהיה אי זוגי.

## שאלה 6

יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון עם משקלות חיוביים על הקשתות, המיצג ע"י רשימות שכנות. הגרף מייצג מפת כבישים, כשמשקל כל קשת הוא אורך הקשת שהיא מייצגת.

בחלק מהצמתים נמצאות תחנות דלק.

תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המוצא לכל צומת בגרף תחנת דלק הכי קרובה ואת המרחק אליה.

## שאלה 7

נתונה רשת כבישים המתוארת על-ידי גרף $G=(V, E)$ מכוון, עם משקלים אי-שליליים על הקשתות. משקל הקשת $(u, v)$ מציין את המרחק מעיר $u$ לעיר $v$.

משאית עם מטען נוסעת בכבישים באילוצים הבאים: גובה משאית ללא מטען הוא 2 מטר, וגובה משאית עם מטען הוא 4 מטר.

הצמתים $V$ מסוגים לשני סוגים: צמתים שאם משאית עם מטען עוברת בהם, היא מורידה בהם את כל המטען, וצמתים רגילים, שאינם משנים את המטען במשאית.

הקשתות $E$ מסווגות אף הן לשני סוגים: קשתות שיש בהן גשר שגובהו 3 מטר, וקשתות שאין בהם גשר (משאית עם מטען לא יכולה לעבור בקשר בה יש גשר).

הצע אלגוריתם, שבהינתן צמתים $s, t \in V$ צמתים רגילים, מוצא את משקל המסלול הקצר ביותר (הקל ביותר) מ-$s$ ל-$t$, כאשר המשאית יוצאת לדרכה מ-$s$.

# שאלה 8

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$ עם מקור $s\in V$ ויעד $s\neq t\in V$, ועם משקל שלם $w(e)$ לכל צלע. ישנה צלע אחת ויחידה $e=\{u,v\}$ שמשקלה שלילי. הציגו אלגוריתם למציאת מסלול פשוט $P$ בעל משקל מזערי מהמקור ליעד (במסלול פשוט אף קדקוד לא מופיע פעמיים). לא יתקבל ניקוד על אלגוריתם עם זמן ריצה $\Theta(|E|\cdot|V|)$

## שאלה 9

נתון גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$. בהינתן $s,t \in V$ הציעו אלגוריתם יעיל המוצא מסלול בין $s$ ל-$t$ כך **שסכום הדרגות של הקודקודים במסלול** קטן ככל האפשר. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם ונתחו את סיבוכיותו.

## שאלה 10

***שאלה 3ג – מסלולים קצרים ביותר במשקל מזערי**. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם משקל (=מחיר) שלם $w(e)>0$ לכל אחת מהצלעות $e\in E$, ועם קדקודי מקור $s\in V$ ויעד $s\neq t\in V$. עבור מסלול $P$ בגרף נסמן כרגיל ב- $w(P)$ את סכום משקלי הצלעות במסלול וב- $\ell(P)$ את מספר הצלעות במסלול. הציגו אלגוריתם למציאת מסלול $P'$ במשקל מזערי מהמקור ליעד תחת הדרישה הבאה: על מספר הצלעות של $P'$ להיות מזערי מבין כלל המסלולים בעלי משקל מזערי. במלים אחרות אם $P''$ מסלול אחר במשקל מזערי (כלומר $w(P'')=w(P')$), אזי חייב להתקיים $\ell(P'')\geq\ell(P')$.

# שאלה 11

נתון גרף קשיר מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים חיוביים $c_v>0$ לכל אחד מהקדקודים $v\in V$.

משקלו של מסלול מוגדר כסכום משקלי הקדקודים לאורך המסלול. נתונים קדקודי מקור ויעד $s\neq t\in V$ וצלע מסוימת $e^*$. הציגו אלגוריתמים לפתרון הבעיות הבאות:

(א) מציאת מסלול במשקל מזערי מ- $s$ ל- $t$. (יש לדייק בהוכחת הנכונות). (15 נקו')

(ב) הכרעה האם $e^*$ נמצאת בכל מסלול במשקל מזערי מ- $s$ ל- $t$. (4 נקו')

(ג) הכרעה האם $e^*$ נמצאת באיזשהו מסלול במשקל מזערי מ- $s$ ל- $t$. (6 נקו')

## שאלה 12

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם מקור $s\in V$ ועם משקל=אורך=מחיר חיובי $w(e)>0$ לכל $e\in E$. נביט בקדקוד מסוים $s\neq t\in V$. יהי $T$ עץ המסלולים המזעריים שהאלגוריתם של Dijkstra בונה. יהי $P_1=(s,v_1,\ldots,v_k,t)$ המסלול היחיד ב- $T$ מהמקור אל $t$ (המסלול המזערי שהאלגוריתם מוצא). יהי $P_2=(s,u_1,\ldots,u_\ell,t)$ מסלול מזערי אחר מהמקור אל $t$ בגרף המקורי, כלומר מתקיים $w(P_1)=w(P_2)$. ידוע כי $k,\ell\geq 1$, וכי המסלולים $P_1,P_2$ זרים בקדקודים, כלומר מתקיים $u_i\neq v_j$ לכל $i,j$. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

"האלגוריתם של Dijkstra בהכרח מוסיף את הקדקוד $v_k$ ל- $T$ לפני שהוא מוסיף את $u_\ell$ ל- $T$."

האם הטענה נכונה (כן או לא)? _____

הוכחה מדויקת / הפרכה ע"י דוגמא: ____________________

# שאלה 13

א. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם מקור $s\in V$ ועם משקל=אורך=מחיר $w(e)$ לכל $e\in E$. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

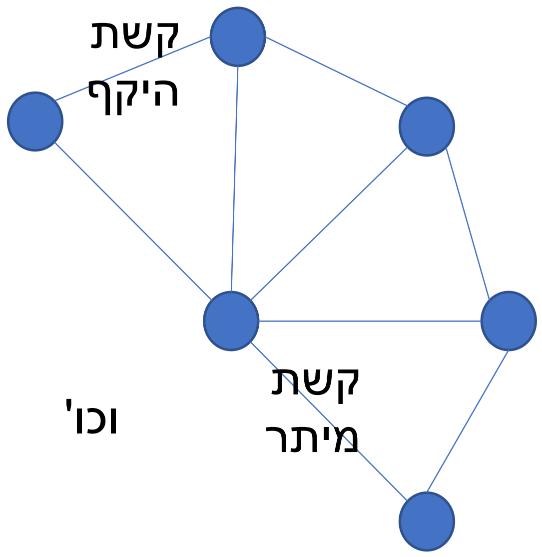
"אם ישנם משקלים שליליים רק על חלק/כל <u>הצלעות שיוצאות מהמקור</u> $s$, אז האלגוריתם של Dijkstra עדיין נכון, כלומר, הפלט שלו הינו עץ מסלולים מזעריים מהמקור $s$."

ב. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם מקור $s\in V$, יעד $s\neq t\in V$, ועם משקל שלם $w(e)$ לכל צלע $e\in E$. נתון כי בגרף אין מעגלים שליליים, וכי עבור צלעות שאינן נכנסות ליעד המשקל תמיד חיובי, כלומר $w(e)>0$. הציגו אלגוריתם למציאת מסלול בעל משקל מזערי מהמקור ליעד. לא יתקבל שום ניקוד על אלגוריתם עם זמן ריצה $\Theta(|E|\cdot|V|)$.

# פרים
# וקרוסקל

# שאלה 14

נתון גרף גלגל ובו צומת מרכזי יחיד ו-n צמתי היקף.
א. אם לכל המיתרים משקל 1 ולכל קשתות ההיקף משקל 2, כמה עפ"מים שונים יש לגרף ?
ב. אם לכל המיתרים משקל 2 ולכל קשתות ההיקף משקל 1, כמה עפ"מים שונים יש לגרף ?



## שאלה 15

נכון או לא נכון :

א. בגרף לא מכוון, קשיר וממושקל שאינו עץ, הקשת הכבדה ביותר אינה משתתפת לעולם בעפ"ם.

ב. אם לא כל המשקלים שונים אז לגרף יש לפחות שני עפ"מים שונים.

ג. אם ל-n הקשתות בעלות המשקלות הנמוכים ביותר יש משקלים שונים אז לגרף יש עפ"ם יחיד.

ד. הצלע הקלה ביותר בגרף (בהנחה שאין עוד צלע באותו משקל) מופיעה בכל עפ"ם שלו.

## שאלה 16

א. האם הוספת ערך קבוע למשקלי כל הקשתות בגרף עלולה לשבש את תוצאות הרצת פרים/קרוסקל ?

ב. האם פרים/קרוסקל יעבוד על גרף עם משקלים שליליים ?

ג. הצג אלגוריתם שמוצא עץ פורש מקסימלי.

על בסיס הלמה

## שאלה 17

### למת הפונקציה המונוטונית

יהי G גרף לא מכוון, תהי w פונקצית משקל על הצלעות, ותהי f פונקציה עולה ממש
אם נגדיר פונקצית משקל חדשה 'w באופן הבא:

$$w'(e) = f(w(e))$$

אזי עץ פורש של G הינו מינימלי ביחס ל-'w אם"ם הוא מינימלי ביחס ל-w.

הוכח את המשפט

### משפט:

יהיו $T_1$ ו-$T_2$ עצים פורשים מינימליים של גרף G ויהיו:

- $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{n-1}$ המשקלים של צלעות $T_1$,
- $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_{n-1}$ המשקלים של צלעות $T_2$.

אז $x_i = y_i$ לכל i. כלומר, שתי הסדרות זהות.

## שאלה 18

א. נתון גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$ עם משקל חיובי שלם $w(e)$ לכל צלע. נתונה גם תת-קבוצה $E'\subseteq E$ של "צלעות מועדפות". הציגו אלגוריתם שמוצא עץ פורש מזערי $T$, כך שמבין כל העצים הפורשים המזעריים, מתקיים ש- $T$ כולל מספר גדול ככל האפשר של צלעות מועדפות.

ב. <u>**עץ פורש מזערי עם דרגה מזערית לקדקוד נבחר**</u>. נתון גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$ עם משקלות על הצלעות ועם קדקוד $u\in V$. הציגו אלגוריתם למציאת עץ פורש מזערי ב-$G$ כך שדרגתו של $u$ בעץ תהיה מזערית: הפלט $T$ של האלגוריתם הוא עץ פורש מזערי, ולכל עץ פורש מזערי אחר $T'$ מתקיים: הדרגה של $u$ ב-$T$ קטנה או שווה לדרגה של $u$ ב-$T'$.

ג. נתון גרף קשיר, לא מכוון וממושקל $G=(V,E)$. תארו אלגוריתם יעיל אשר בודק האם ל- $G$ יש עפ"מ יחיד. מספיק למצוא אלגוריתם שסיבוכיות הזמן שלו הינה $O(|E|\log|V|)$.

# שאלה 19

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים שלמים וחיוביים $w(e)>0$ לכל צלע. עבור צלעות שונות $e_1 \neq e_2$ המשקלים שונים $w(e_1)\neq w(e_2)$. תהי $A\cup B=V$ חלוקה שרירותית של קבוצת הקדקודים לשתי קבוצות זרות $A\cap B=\emptyset$ ולא ריקות $A,B\neq\emptyset$. הוכיחו / הפריכו את הטענה הבאה: "אם $T_A$ הינו עפ"מ של $A$, $T_B$ הינו עפ"מ של $B$ ו-$e_{A,B}$ הינה הצלע בעלת המשקל המזערי מבין כל הצלעות שמחברת בין $A$ לבין $B$, אזי $T_A\cup T_B\cup\{e_{A,B}\}$ הינו עפ"מ של $G$".

## שאלה 20

נתון גרף $G=(V, E)$ לא מכוון, קשיר וממושקל. מצא עץ פורש בעל משקל מינימלי שני הכי טוב ב-$O(m \log n)$.

# שאלה 21

יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר לא מכוון עם משקולות על קשתות ויהיו $T_1 = (V, E_1)$ ו- $T_2 = (V, E_2)$ עצים פורשים מינימום שונים של G.

הוכיחו כי בגרף האיחוד $(V, E_1 \cup E_2)$ קיים מעגל בו לפחות זוג קשתות אחד בעל משקל זהה.

שאלה 22

**שאלה 1* – כיסוי צלעי (Edge Cover)**. כיסוי צלעי של גרף לא מכוון $G=(V,E)$ הינה תת-קבוצה $E'\subseteq E$ של צלעות "שנוגעות" בכל קדקודי הגרף: לכל $v\in V$ יש בכיסוי צלע מהצורה $e=\{u,v\}\in E'$. בבעיית הכיסוי הצלעי המזערי נתון גרף לא מכוון עם מחירים (=משקלים) חיוביים $w_e>0$ לכל אחת מהצלעות $e\in E$, ומעוניינים למצוא כיסוי צלעי $E'$ שמשקלו $\Sigma_{e\in E'}w(e)$ מזערי. (ניקוד. סעיף א' – 3 נקי, סעיף ב' – 3 נקי, סעיף ג' – 19 נקי).

(א) הסבירו מהו ההבדל המהותי בין כיסוי צלעי לבין עץ פורש. ______________________

(ב) תנו דוגמא לקלט שבו משקל כיסוי צלעי מזערי הוא בדיוק חצי ממשקל עץ פורש מזערי.

(ג) תזכורת (במסגרת ניתוח הנכונות של "אלגוריתם המחיקה לאחור" עבור בעיית העץ הפורש המזערי מוכיחים בספר הקורס את המשפט הבא): "אם $e^*$ נמצאת במעגל כלשהו $C$, ומשקלה של $e^*$ גדול ממש מזה של יתר הצלעות במעגל $C$, אזי $e^*$ לא נכללת באף עץ פורש מזערי".
הוכיחו / הפריכו את הטענה הדומה הבאה: " אם $e^*$ נמצאת במעגל כלשהו $C$, ומשקלה של $e^*$ גדול ממש מזה של יתר הצלעות במעגל $C$, אזי $e^*$ לא נכללת באף כיסוי צלעי מזערי".

שאלה 23

***שאלה 2ב* – כיסוי צלעי (Edge Cover)**. כיסוי צלעי של גרף לא מכוון $G=(V,E)$ הינה תת-קבוצה $E'\subseteq E$ של צלעות "שנוגעות" בכל קדקודי הגרף: לכל $v\in V$ יש בכיסוי צלע מהצורה $e=\{u,v\}\in E'$. (ההבדל בין עץ פורש של $G$ לבין כיסוי צלעי של $G$ הוא שעץ פורש הוא בהכרח קשיר, בעוד שהכיסוי הצלעי $E'$ עשוי להיות לא קשיר). בבעיית הכיסוי הצלעי המזערי נתון גרף לא מכוון עם מחירים (=משקלים) חיוביים $w_e>0$ לכל אחת מהצלעות $e\in E$, ומעוניינים למצוא כיסוי צלעי $E'$ שמשקלו $\Sigma_{e\in E'}w(e)$ מזערי.

(א - 3 נקי) הוכיחו כי כל כיסוי צלעי מזערי הינו יער.

(ב' – 22 נקי) הביטו בווריאציה הבאה של האלגוריתם של קרוסקאל:

(א) איתחול: היער הנוכחי $F$ מאותחל להיות יער ריק $F\leftarrow\varnothing$.
(ב) סורקים בלולאה את הצלעות $e\in E$ של $G$ לפי סדר עולה של משקל. עוצרים את הסריקה ברגע שכל הקדקודים מכוסים (כלומר $V(F)=V(G)$). עבור כל צלע $e=\{u,v\}$ מבצעים:
(ב1) בודקים האם $e$ מחברת בין שני קדקודים שכבר כוסו, כלומר האם $u,v\in V(F)$.
(ב2) אם כן – אז משאירים את $e$ מחוץ ליער הנוכחי $F\leftarrow F$.
(ב3) אם לא – אז מוסיפים את $e$ ליער הנוכחי $F\leftarrow F\cup\{e\}$.

הוכיחו/הפריכו את הטענה הבאה: האלגוריתם הרשום במסגרת מוצא כיסוי צלעי מזערי.

## שאלה 24

**<u>שאלה 3 - מזעור העומס המרבי במסלול (25 נק')</u>** נתון גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים אי-שליליים $c_e \geq 0$ לכל אחת מהצלעות $e \in E$. העומס המרבי $B(P)$ של מסלול $P$ מוגדר כמשקלה של הצלע הכבדה ביותר במסלול, כלומר $B(P)=\max_{e \in P}(c_e)$. אומרים שמסלול $P^*$ מ- $s$ ל- $t$ ממזער את העומס המרבי מ- $s$ ל- $t$, אם $B(P^*)=\min_{P \in P_{s,t}}(B(P))$, כש- $P_{s,t}$ הינה קבוצת כל המסלולים מ- $s$ ל- $t$. הציגו אלגוריתם, שבהנתן זוג קדקודים $s,t$ בגרף, רץ בזמן $O(|E|\ln|V|)$, ומחשב מסלול שממזער את העומס המרבי מ- $s$ ל- $t$. (בניתוח זמן הריצה הניחו כי כל פעולה אלמנטרית על המשקלים, כמו חיבור או השוואה, מתבצעת בזמן $\Theta(1)$).