תשובה 1

א. תנאי התחלה:

$a_0 = 1$ (סדרה ריקה! נוח להיעזר ב- a_0 לסעיף ב)

$a_1 = 2$ (בלוק עומד לבן או ירוק)

אפשר גם לחשב את a_2: שני בלוקים עומדים (4 אפשרויות) או שני בלוקים שוכבים (3 אפשרויות), סה"כ $a_2 = 7$.

יחס נסיגה: נתבונן בריצוף באורך $n+1$.

* אם הוא מסתיים בבלוק עומד (2 אפשרויות), אז לפני הבלוק הזה יכול לבוא כל ריצוף חוקי באורך n, כלומר a_n ריצופים אפשריים.
* אם הוא מסתיים בבלוק שוכב אז בהכרח מדובר בשני בלוקים שוכבים זה מעל זה, ויש 3 אפשרויות לעשות זאת. לפניהם יכול לבוא כל ריצוף באורך $n-1$, כלומר a_{n-1} ריצופים אפשריים.

בסה"כ קיבלנו: $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$

נבדוק שזה תואם את a_2 שחישבנו: $a_2 = 2a_1 + 3a_0 = 4 + 3 = 7$.

ב. המשוואה האפיינית: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. פתרונותיה: $3, -1$.

לכן $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-1)^n$ (*)

בהצבה של $n = 0$ ושל $n = 1$, יחד עם תנאי ההתחלה $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ נקבל:

$$A + B = 1, \quad 3A - B = 2$$

נחלץ ונקבל: $B = 1/4$, $A = 3/4$.

נציב חזרה ב- (*):

$$a_n = \frac{3}{4}3^n + \frac{1}{4}(-1)^n = \frac{1}{4}\left(3^{n+1} + (-1)^n\right)$$

מומלץ לבדוק את התשובה עבור כמה ערכים של n!

תשובה 2

א. בחישוב כל מקדם ניעזר במקדמים הקודמים שכבר חישבנו ובנוסחה *(ii)* לפיתוח מכפלה, שהופיעה בסוף הממ"ן.

$$1 = c_0 = a_0 b_0 = 1 \cdot b_0$$

לכן $b_0 = 1$. כעת,

$$0 = c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1 \cdot b_1 + 3 \cdot 1$$

נחלץ ונקבל $b_1 = -3$. נציב במקדם הבא:

$$0 = c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 1 \cdot b_2 + 3 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1$$

נחלץ ונקבל $b_2 = 11$. נציב במקדם הבא:

$$0 = c_3 = a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_2 = 1\cdot b_3 + 3\cdot 11 + (-2)\cdot(-3) + (-10)\cdot 1$$

נחלץ ונקבל $b_3 = -29$.

ב. דרך קצרה לפתרון: כפל פונקציות יוצרות הוא אסוציאטיבי, לכן

$$4f(x)\cdot f(x)\cdot g(x) = 4f(x)\cdot\big(f(x)\cdot g(x)\big) = 4f(x)\cdot 1 = 4f(x)$$

לכן המקדם המבוקש הוא פשוט $4a_3 = -40$.

תשובה 3 (תקציר)

הזהות המתקבלת: $\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\binom{m}{6-i} = -\binom{m}{3}$

בדיקה עבור $m=4$: אגף שמאל הוא

$$0 - 0 + \binom{4}{2}\binom{4}{4} - \binom{4}{3}\binom{4}{3} + \binom{4}{2}\binom{4}{4} - 0 + 0 = 6\cdot 1 - 4\cdot 4 + 6\cdot 1 = -4$$

ואגף ימין הוא $-4 = -\binom{4}{3}$.

תשובה 4

א. מספר הדרכים לחלק את המחשבים הוא כמספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = n$, בכפוף לתנאי $x_i \le 24$, $(i = 1,2,3)$.

הפונקציה היוצרת: $f(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{24})^3 = \left(\frac{1-x^{25}}{1-x}\right)^3$

ב. זהו המקדם של x^{70} בפונקציה הנ"ל. נמשיך לפתח את הפונקציה:

$$\left(\frac{1-x^{25}}{1-x}\right)^3 = (1-x^{25})^3\cdot\frac{1}{(1-x)^3} = (1 - 3\cdot x^{25} + 3\cdot x^{50} - x^{75})\cdot\sum_{i=0}^{\infty}D(3,i)$$

במעבר האחרון, נעזרנו בנוסחת הבינום עבור הגורם השמאלי, ובנוסחה *(iii)* מהממ"ן עבור הגורם הימני.

מכיון שאנו רוצים את המקדם של x^{70}, נוכל להתעלם ממחוברים בעלי חזקה גדולה יותר.
המקדם המבוקש הוא:

$$1\cdot D(3,70) - 3\cdot D(3,45) + 3\cdot D(3,20) = \binom{72}{2} - 3\cdot\binom{47}{2} + 3\cdot\binom{22}{2} = 2{,}556 - 3{,}243 + 693 = 6$$

תוצאה קצת מפתיעה!

נבדוק מדוע המספר כה קטן: כנראה זה אומר שמספר המחשבים בכל רכב אינו יכול להיות קטן בהרבה מ- 24. ואמנם, אם ברכב כלשהו יש 21 מחשבים או פחות, אז בשני כלי הרכב האחרים יחד יש $70-21=49$ מחשבים או יותר, ולכן (שובך יונים!) באחד מאותם שני כלי רכב יש יותר מ- 24 מחשבים, בסתירה לדרישה. לכן כדי להעמיס את 70 המחשבים, בכל רכב צריכים לשים **לפחות** 22 מחשבים.

לפיכך, מספר המחשבים בכל רכב יכול לקבל אחד משלושה ערכים בלבד: 22, 23 או 24 .

כעת קל לבדוק ישירות שיש רק שתי דרכים להציג את 70 כסכום של 3 מספרים מתוך הנ"ל, תוך התעלמות מסדר המחוברים: $24+23+23$ או $24+24+22$.

עם התחשבות בסדר המחוברים נקבל 6 אפשרויות .

אפשר גם לומר כך:

נתבונן במשוואה $x_1+x_2+x_3=70$, בכפוף לתנאים שמצאנו: $22 \le x_i \le 24$, $(i=1,2,3)$.

לכל i , נציב $x_i=y_i+22$. נקבל שאנו מחפשים את מספר הפתרונות של

$y_1+y_2+y_3=4$, בכפוף לתנאים $0 \le y_i \le 2$, $(i=1,2,3)$.

שוב בבדיקה ישירה, הפתרונות ללא חשיבות לסדר הם: $2+2+0$ או $2+1+1$.

כל אחד משני הפתרונות הללו נותן 3 פתרונות אם נייחס חשיבות לסדר. מכאן התוצאה 6.

יש דרכים נוספות לפתור את השאלה הזו.

איתי הראבן