ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20425

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חוברת הקורס - סתיו 2020א

כתב: ברק קנדל

נובמבר 2019 - סמסטר סתיו – תש״פ

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנטים			א
לוח זמנים ופעילויות			ב
נקודות זכות			ג
הגשת מטלות			ג
ממ"ח	01	(פרקים 1 ו- 2)	1
ממ"ן	11	(פרקים 2 ו- 3)	5
ממ"ח	02	(פרק 4)	9
ממ"ן	12	(פרק 5)	13
ממ"ן	13	(פרק 6)	15
ממ"ן	14	(פרק 7)	17

נספחים

נספח א	דף נוסחאות לבחינה	24
נספח ב	רשימת טענות להוכחה בבחינה	26
נספח ג	טבלת קירובים לערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית	28

אל הסטודנטים,

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב".

בחוברת זו תמצאו תיאור, מלא ככל האפשר, של הקורס וכן פרטים על כלל פעילויותיכם במהלך הלימודים. רצוי שתראו בה מעין מדריך אישי, שתפקידו להבהיר לכם עניינים שונים. קראו בעיון רב את כל הסעיפים שלהלן, לפני שתתחילו בלימודיכם.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: http://www.openu.ac.il/shoham .

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

בכל בעיה שמתעוררת אפשר לפנות למרכז ההוראה בקורס ברק קנדל, בימי ד' בין השעות 13:00 -15:00 בטלפון 09-7781428, בפקס 09-780631 או בדואר האלקטרוני, לכתובת: kandell@openu.ac.il .

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה,

צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20425 / 2020א)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	תאריך אחרון למשלוח ממ"ן (למנחה)
1	8.11.2019-3.11.2019	1			
2	15.11.2019-10.11.2019	2			
3	22.11.2019-17.11.2019	2-3			
4	29.11.2019-24.11.2019	3		01 24.11.2019	
5	6.12.2019-1.12.2019	3-4			11 5.12.2019
6	13.12.2019-8.12.2019	4			
7	20.12.2019-15.12.2019	4-5		02 15.12.2019	
8	27.12.2019-22.12.2019 (ב-ו חנוכה)	5			
9	3.1.2020-29.12.2019 (א-ב חנוכה)	5-6			12 2.1.2020
10	10.1.2020-5.1.2020	6			
11	17.1.2020-12.1.2020	6-7			13 16.1.2020
12	24.1.2020-19.1.2020	7			
13	31.1.2020-26.1.2020	7			14 30.1.2020
14	7.2.2020-2.2.2020	8			

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

נקודות זכות

הקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב" מקנה למסיימים אותו 4 נקודות זכות.

הדרישות לקבלת 4 נקודות זכות הן:

א. הגשת מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות.

ב. ציון מינימלי 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון מינימלי 60 בקורס.

הגשת מטלות

הקורס "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב" כולל חוברת קורס ובה 6 מטלות להגשה, המיועדות לתרגול רוב נושאי הלימוד של הקורס, ואוסף שאלות לתרגול עצמי של נושאי הלימוד של פרק 8.

עליכם להגיש מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות.

המשקל של כל **מטלת מנחה הוא 6 נקודות** והמשקל של כל **מטלה ממוחשבת הוא 3 נקודות**.

המועד האחרון להגשה של כל מטלה מופיע בכותרתה.

שימו לב, **בקורס זה לא ניתנות מטלות השלמה!**

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ״ח) 01

הקורס: **20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב**

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1 ו- 2

קומבינטוריקה; חישובי הסתברויות קומבינטוריים

מספר השאלות: 20 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2020 א **מועד אחרון להגשה:** 24.11.2019

שלחו את התשובות לממ״ח באמצעות מערכת שאילתא בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

שאלות 1-5 מתייחסות לבעיה הבאה:

חפיסת קלפים מכילה 30 קלפים ב- 3 צבעים: צהוב, אדום וירוק.

מכל צבע יש 10 קלפים ממוספרים מ- 1 עד 10.

אמנון ותמר משחקים בחפיסת קלפים זו.

בתחילת המשחק, כל אחד מהשניים מקבל 4 קלפים אקראיים מהחפיסה.

(אין חשיבות לסדר שבו הקלפים ניתנים לכל אחד מהם.)

<u>שאלה 1</u>

בכמה מהחלוקות האפשריות אמנון מקבל יותר קלפים שעליהם המספר 7 מאשר תמר מקבלת?

א. 93,243,150 ב. 109,389,150 ג. 95,665,050 ד. 204,852,375

<u>שאלה 2</u>

בכמה מהחלוקות האפשריות שני השחקנים מקבלים מספר שווה של קלפים שעליהם המספר 5?

א. 190,926,450 ב. 155,405,250 ג. 175,405,450 ד. 160,380,350

<u>שאלה 3</u>

מהי ההסתברות שתמר תקבל לפחות שלושה קלפים ירוקים?

א. $\frac{2,610}{27,405}$ ב. $\frac{2,400}{27,405}$ ג. $\frac{3,240}{27,405}$ ד. $\frac{27,195}{27,405}$

<u>שאלה 4</u>

בכמה מהחלוקות האפשריות **בדיוק** אחד מהשחקנים מקבל **בדיוק** קלף אחד שעליו המספר 8?

א. 807,300 ב. 31,081,050 ג. 43,728,750 ד. 191,330,100

<u>שאלה 5</u>

מהי ההסתברות שכל אחד מהשחקנים יקבל לפחות שלושה קלפים ירוקים?

א. 0.003895 ב. 0.003903 ג. 0.004313 ד. 0.005687

שאלות 6-9 מתייחסות לבעיה הבאה:

מפזרים באקראי 12 כדורים שונים ב- 10 תאים ממסופרים מ- 1 עד 10.

<u>שאלה 6</u>

מהי ההסתברות שיהיו בדיוק 9 תאים מלאים (כלומר, שיש בהם לפחות כדור אחד)?

א. 0.9^{12} ב. $\frac{10\cdot 9^{12}}{10^{12}}$ ג. 0.5820 ד. 0.0808

<u>שאלה 7</u>

מהי ההסתברות שמספר הכדורים הכולל בתאים 1-5 גדול (ממש) ממספר הכדורים הכולל בתאים 6-10?

א. 0.5 ב. 0.3872 ג. 0.4412 ד. 0.4023

<u>שאלה 8</u>

מהי ההסתברות שתא מספר 1 ריק ובתא מספר 2 יש לפחות שני כדורים?

א. 0.2301 ב. 0.1106 ג. 0.0709 ד. 0.2051

<u>שאלה 9</u>

מהי ההסתברות שאין אף תא שיש בו בדיוק 4 כדורים?

א. 0.7933 ב. 0.7869 ג. 0.7745 ד. 0.8134

שאלות 10-11 מתייחסות לבעיה הבאה:

בוחרים באקראי ו<u>עם החזרה</u> 3 מספרים מתוך הקבוצה $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

הערה: אפס הוא מספר זוגי.

<u>שאלה 10</u>

מהי ההסתברות שסכום המספרים הנבחרים זוגי?

א. $\binom{4}{3}\Big/\binom{8}{3}$ ב. $2\cdot 0.5^3$ ג. $3\cdot 0.5^3$ ד. $4\cdot 0.5^3$

<u>שאלה 11</u>

מהי ההסתברות שמכפלת המספרים הנבחרים זוגית וחיובית?

א. $0.375\cdot 0.875^2$ ב. 0.375^3 ג. $0.875^3-0.5^3$ ד. $1-0.5^3$

שאלות 12-13 מתייחסות לבעיה הבאה:

בוחרים באקראי ו<u>ללא החזרה</u> 3 מספרים מתוך הקבוצה $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

<u>שאלה 12</u>

מהי ההסתברות שסכום המספרים הנבחרים זוגי?

הערה: אפס הוא מספר זוגי.

א. $\binom{4}{3}\Big/\binom{8}{3}$ ב. $2\cdot\dfrac{4\cdot 3\cdot 2}{8\cdot 7\cdot 6}$ ג. 0.5 ד. $4\cdot 6\Big/\binom{8}{3}$

<u>שאלה 13</u>

מהי ההסתברות שמכפלת המספרים הנבחרים שווה לאפס?

א. 0.375 ב. 0.5 ג. 0.625 ד. 0.125

שאלות 14-16 מתייחסות לבעיה הבאה:

נתונה כיתה של 20 סטודנטים: 8 מת"א, 4 מירושלים, 4 מחיפה ו- 4 מבאר-שבע.

מסדרים באקראי את כל 20 הסטודנטים בשורה.

<u>שאלה 14</u>

בכמה מהסידורים אין שני סטודנטים מת"א שעומדים זה לצד זה?

א. $\binom{14}{9}\cdot 12!\cdot 8!$ ב. $\binom{13}{8}\cdot 12!\cdot 8!$ ג. $8!\cdot\binom{12}{7}\cdot 7!\cdot 9^5$ ד. $8!\cdot\binom{12}{7}\cdot 7!\cdot 16^5$

<u>שאלה 15</u>

בכמה מהסידורים הסטודנטים מחיפה עומדים בשורה בשני זוגות נפרדים?

א. $\binom{17}{2}\cdot 4!\cdot 16!$ ב. $\binom{17}{2}\binom{4}{2}\cdot 16!$ ג. $\binom{4}{2}\cdot 18!$ ד. $4!\cdot 18!$

<u>שאלה 16</u>

בכמה מהסידורים כל הסטודנטים מחיפה עומדים במקומות שנמצאים במחצית השמאלית של השורה?

א. $\dfrac{10!\cdot 20!}{4!\cdot 6!}$ ב. $\dfrac{10!\cdot 16!}{4!\cdot 6!}$ ג. $4!\cdot 16!$ ד. $\dfrac{10!\cdot 16!}{6!}$

שאלות 17-20 מתייחסות לבעיה הבאה:

ילד בוחר באקראי 20 מטבעות שוקולד מתוך צנצנת שבה 65 מטבעות.

ל- 30 מהמטבעות שבצנצנת יש עטיפה ירוקה, ל- 15 יש עטיפה צהובה וליתר יש עטיפה אדומה.

נניח כי <u>אי-אפשר להבחין</u> בין מטבעות מאותו הצבע (כלומר, הם זהים במראה זה לזה).

<u>שאלה 17</u>

כמה תוצאות בחירה אפשריות <u>שונות</u> יש במרחב המדגם?

א. $\binom{22}{20}$ ב. $\frac{65!}{45!}$ ג. $\binom{22}{20}-\binom{6}{4}$ ד. $\binom{65}{20}$

<u>שאלה 18</u>

מהי ההסתברות שהילד יבחר 20 מטבעות, שכולם באותו הצבע?

א. $9.26\cdot10^{-3}$ ב. $8.66\cdot10^{-3}$ ג. $1.06\cdot10^{-9}$ ד. $7.06\cdot10^{-17}$

<u>שאלה 19</u>

מהי ההסתברות שהילד יבחר 20 מטבעות משני צבעים בדיוק?

א. 0.001775 ב. 0.01298 ג. 0.013889 ד. 0.02115

<u>שאלה 20</u>

נניח שהילד מוציא את המטבעות אחד-אחד, כלומר, לפי סדר.

מהי ההסתברות ששלושת המטבעות הראשונים ושלושת המטבעות האחרונים יהיו ירוקים?

א. 0.00967 ב. 0.00719 ג. 0.00875 ד. 0.00905

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 2 ו- 3

דיאגרמת ון וטענות הסתברות בסיסיות; הסתברות מותנית

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2020 א **מועד אחרון להגשה:** 5.12.2019

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (22 נקודות)

יוסף ניגש למבחן המורכב משלוש שאלות המסומנות ב-A, B ו- C.

נתון כי:

ליוסף אין אף תשובה נכונה במבחן בהסתברות 0.02;

כל התשובות שלו במבחן נכונות בהסתברות 0.4;

הוא עונה נכון לפחות על אחת מהשאלות A ו-B בהסתברות 0.93;

אם הוא עונה נכון לפחות על אחת מהשאלות A ו- B, אז הוא עונה נכון על שתיהן גם יחד בהסתברות $\frac{20}{31}$;

אם הוא עונה נכון על שאלה C, אז הוא עונה נכון גם על שאלה A בהסתברות 0.8.

הוא עונה נכון על שאלה A וגם עונה לא נכון על שאלה C בהסתברות 0.3;

וההסתברות שיענה נכון על שאלה A גדולה פי 1.28 מההסתברות שיענה נכון על שאלה C.

(10 נק') א. הגדר <u>שלושה</u> מאורעות מתאימים לבעיה המתוארת בשאלה, צייר עבורם דיאגרמת ון, המתארת את הבעיה, ומלא בשטחים החלקיים שנוצרים בדיאגרמה את כל ההסתברויות <u>הנובעות</u> מנתוני הבעיה.

הסבר <u>בקצרה</u> את דרך חישוב ההסתברויות שרשמת בדיאגרמה, **באמצעות טענות הסתברות בסיסיות**.

(3 נק') ב. האם בין המאורעות שהגדרת בסעיף א, יש כאלה שהם בלתי-תלויים זה בזה?

בכל אחד מהסעיפים שלהלן בטא את המאורע המתואר בסעיף <u>באמצעות המאורעות שהגדרת בסעיף א</u>.

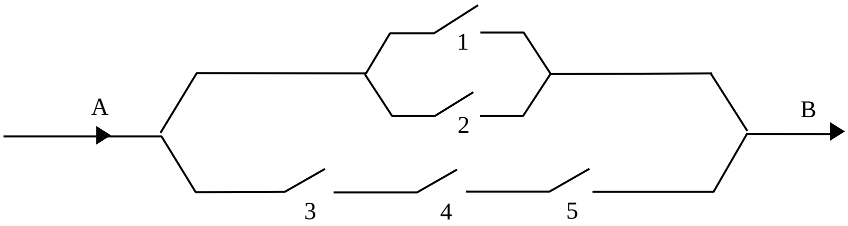
(3 נק') ג. מהי ההסתברות שיוסף יענה נכון על שאלה אחת לכל היותר?

(3 נק') ד. מהי ההסתברות שיוסף יענה נכון על כל השאלות, אם ידוע שענה נכון לפחות על שתיים מהן?

(3 נק') ה. אם יוסף ענה לא נכון לפחות על שאלה אחת, מהי ההסתברות שענה נכון על שאלה A?

שאלה 2 (21 נקודות)

נתון המעגל הבא :



ההסתברות שמתג 3 סגור (ואז יכול לעבור בו זרם) היא 0.95.

אם מתג 3 סגור, אז מתגים 4 ו- 5 בלתי-תלויים זה בזה וכל אחד מהם סגור בהסתברות 0.9.

אם מתג 3 פתוח, אז בוודאות גם מתג 4 פתוח.

ההסתברות שמתג 1 סגור (ואז יכול לעבור בו זרם) היא 0.8.

אם מתג 1 פתוח, אז ההסתברות שמתג 2 סגור היא 0.2.

כמו כן, נניח שאין תלות בין מצבי המתגים בענף העליון של המעגל למצבי המתגים בענף התחתון.

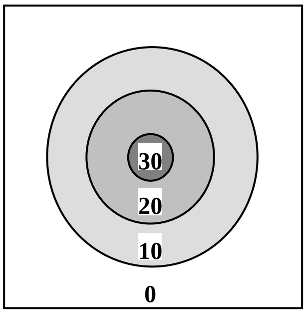
(7 נק׳)   א.   מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?

(7 נק׳)   ב.   אם מתג 4 פתוח, מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?

(7 נק׳)   ג.   אם מתג 4 סגור, מהי ההסתברות שעובר זרם בענף התחתון של המעגל?

שאלה 3 (24 נקודות)

אדם מנסה את כוחו בקליעה למטרה המסומנת על לוח ריבועי, כפי שמתואר באיור שמשמאל.



בכל נסיון-קליעה, ההסתברות שלא יפגע כלל בלוח היא 0.2.

אם הוא פוגע בלוח, ההסתברות שיפגע באיזור שמזכה בנקודות היא 0.9.

ואם הוא פוגע באיזור שמזכה בנקודות, ההסתברות שיפגע באיזור המזכה ב- 10 נקודות היא 0.2, ב- 20 נקודות היא 0.3 וב- 30 נקודות היא 0.5.

(6 נק׳)   א.   מהי ההסתברות שבנסיון קליעה מקרי יזכה הקולע למטרה ב- 10 נקודות?

(6 נק׳)   ב.   נניח שבנסיון כלשהו הקולע למטרה לא זכה באף נקודה.
מהי ההסתברות שהסיבה לכך היא שפגע בלוח, אך באיזור שאינו מזכה בנקודות?

(6 נק׳)   ג.   הקולע למטרה מנסה את מזלו 5 פעמים.
אם אין תלות בין נסיונות הקליעה שלו, מהי ההסתברות שלפחות באחד מהם לא יזכה באף נקודה (מכל סיבה אפשרית)?

(6 נק׳)   ד.   מהי ההסתברות שבשתי קליעות למטרה, שאינן תלויות זו בזו, יזכה הקולע ב- 30 נקודות בסך-הכל?

שאלה 4 (33 נקודות)

גננת מכינה ל- 20 ילדי הגן 20 כריכים : 10 כריכים עם ממרח שוקולד, 5 כריכים עם חומוס ו- 5 עם גבינה.
הגננת מחלקת באקראי את הכריכים לילדים : כריך אחד לכל ילד.
נניח כי אין הבדל בין כריכים מאותו הסוג.

(5 נק׳) א. מהו מספר החלוקות האפשריות?

(7 נק׳) ב. מהי ההסתברות שחן יקבל כריך עם שוקולד, אם ידוע שלא קיבל כריך עם חומוס?

(7 נק׳) ג. שי לא אוהב כריך עם שוקולד וחן לא אוהב כריך עם חומוס.
מהי ההסתברות שהם יקבלו כריכים המרוחים בממרח שאהוב עליהם?

ד. הילדים יושבים סביב 4 שולחנות בצבעים שונים, 5 ילדים סביב כל שולחן.

(7 נק׳) 1. ידוע שהילדים בשולחן האדום קיבלו לפחות 3 כריכים עם שוקולד.
מהי ההסתברות שהם קיבלו בדיוק 3 כריכים עם שוקולד?

(7 נק׳) 2. מהי ההסתברות שבכל אחד מהשולחנות יהיה לפחות ילד אחד שיקבל כריך עם שוקולד?

מטלת מחשב (ממ״ח) 02

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 4

מספר השאלות: 20 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2020 א **מועד אחרון להגשה:** 15.12.2019

שלחו את התשובות לממ״ח באמצעות מערכת שאילתא בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

שאלות 1-4 מתייחסות לבעיה הבאה:

13 בנים ו-7 בנות מסתדרים בשורה.

<u>שאלה 1</u>

יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הבנות בחמשת המקומות הימניים בשורה.

מהי $P\{X=i\}$ לכל $i=0,1,\ldots,5$?

א. $\binom{5}{i}\cdot\left(\frac{7}{20}\right)^{i}\left(\frac{13}{20}\right)^{5-i}$ ב. $\frac{i}{7}$ ג. $\frac{\binom{7}{i}\binom{13}{5-i}}{\binom{20}{5}}$ ד. $\frac{\binom{7}{i}\binom{13}{5-i}\cdot 5!}{\binom{20}{5}}$

<u>שאלה 2</u>

נניח שהמקומות בשורה ממוספרים.

יהי Y המשתנה המקרי המוגדר על-ידי המספר הקטן ביותר של מקום שבו נמצאת בת.

מהי $P\{Y=j\}$ לכל $j=1,2,\ldots,14$?

א. $\left(\frac{13}{20}\right)^{j-1}\frac{7}{20}$ ב. $\frac{1}{14}$ ג. $\frac{\binom{13}{j-1}\cdot 7}{\binom{20}{j}}$ ד. $\frac{\binom{20-j}{6}}{\binom{20}{7}}$

<u>שאלה 3</u>

יהי W המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הבנות בשורה שלימינן עומד בן.

מהי $P\{W=4\}$?

א. 0.323 ב. 0.215 ג. 0.092 ד. 0.025

<u>שאלה 4</u>

יהי W המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הבנות בשורה שלימינן עומד בן.

מהי ההתפלגות של W?

א. בינומית ב. אחידה בדידה ג. היפרגיאומטרית

ד. אף אחת מההתפלגויות בסעיפים א-ג

שאלות 5-8 מתייחסות לבעיה הבאה:

שחר מטיל 2 קוביות שוב ושוב עד שהוא מקבל לראשונה את הסכום 8 (בשתי הקוביות יחד).

יהי X מספר הפעמים ששחר קיבל סכום <u>שונה</u> מ-8.

<u>שאלה 5</u>

מהי ההסתברות ששחר יטיל את הקוביות יותר מ-7 פעמים?

א. 0.057 ב. 0.158 ג. 0.351 ד. 0.408

<u>שאלה 6</u>

מהי התוחלת של X ?

א. 5.2 ב. 6.2 ג. 7.2 ד. 8.2

<u>שאלה 7</u>

מהי $E[(X-4)^2]$?

א. 22.44 ב. 39.8 ג. 44.48 ד. 49.48

<u>שאלה 8</u>

ידוע ששחר הטיל את הקוביות לפחות פעמיים. לאור מידע זה, מהי $P\{X=8\}$?

א. 0.042 ב. 0.049 ג. 0.057 ד. 0.066

שאלות 9-10 מתייחסות לבעיה הבאה:

מסדרים באקראי 20 כדורים שונים בשורה: 5 כחולים ו- 15 אדומים.

<u>שאלה 9</u>

מהי תוחלת מספר הכדורים הכחולים שנמצאים בחמשת המקומות השמאליים ביותר בשורה?

א. 0.25 ב. 0.33 ג. 1 ד. 1.25

<u>שאלה 10</u>

מהי שונות מספר הכדורים הכחולים שנמצאים בחמשת המקומות השמאליים ביותר בשורה?

א. 0.740 ב. 0.938 ג. 1.250 ד. 3.75

שאלות 11-14 מתייחסות לבעיה הבאה:

שיכור הולך בצעדים אקראיים לאורך ציר ישר שעליו הנקודות 0, ±1, ±2, ..., באופן הבא:

הוא מתחיל מנקודה 0.

בכל שלב הוא עושה צעד באורך 1: צעד לימין בהסתברות 0.4 וצעד לשמאל בהסתברות 0.6.

צעדיו של השיכור בלתי-תלויים זה בזה.

נסמן ב- X את הנקודה על הציר שעליה נמצא השיכור לאחר 50 צעדים.

<u>שאלה 11</u>

מהי $P\{X=-10\}$?

א. 0.002 ב. 0.053 ג. 0.091 ד. 0.115

<u>שאלה 12</u>

מהי השונות של X ?

א. 12 ב. 24 ג. 48 ד. 80

<u>שאלה 13</u>

מהי ההסתברות שהצעד האחרון שיעשה (צעד 50) יהיה הצעד ה- 27 לכיוון שמאל?

א. 0.042 ב. 0.078 ג. 0.130 ד. 0.156

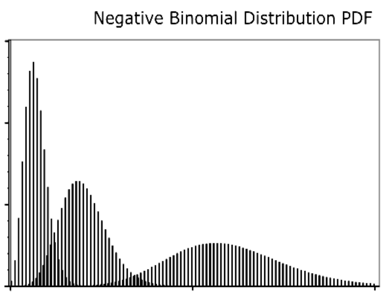
<u>שאלה 14</u>

נניח שבכל צעד שהשיכור עושה יש הסתברות 0.01 שייפול.

אם השיכור צועד 2,000 צעדים, מהי **בקירוב** ההסתברות שייפול בדיוק 23 פעמים במהלכם?

א. 0.058 ב. 0.067 ג. 0.072 ד. 0.083

שאלות 15-16 מתייחסות לבעיה הבאה:



יהי X משתנה מקרי בינומי-שלילי עם הפרמטרים r $(r=1,2,\ldots)$ ו- ½.

נגדיר את המשתנה המקרי Y על-ידי:
$$Y=\begin{cases} X & , \quad X\le r+1 \\ X-1 & , \quad X\ge r+2 \end{cases}$$

<u>שאלה 15</u>

מהי $P\{Y=r+1\}$?

א. $r\left(\frac{1}{2}\right)^{r+1}$ ב. $r\left(\frac{1}{2}\right)^{r+2}$ ג. $r(r+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{r+3}$ ד. $r(r+5)\left(\frac{1}{2}\right)^{r+3}$

<u>שאלה 16</u>

מהי $E[Y]$?

א. $2r-\frac{1}{2}$ ב. $2r-1-\frac{r+2}{2^r}$ ג. $2r-1+\frac{r+2}{2^{r+1}}$ ד. $2r-1-\frac{r(r+3)}{2^{r+1}}$

שאלות 17-20 מתייחסות לבעיה הבאה:

גשם של מטאורים נופל על שטח עגול, שרדיוסו 10 ק״מ, כך שכל מטאור נופל בנקודה אקראית בתוך השטח, וללא תלות בנקודות נפילה של מטאורים אחרים. נניח שמספר המטאורים, שנופלים בתוך השטח העגול שלעיל, הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 2, וכי מתקיימות שלוש ההנחות של תהליך פואסון, **ביחס לשטח** שבו נופלים המטאורים.

<u>שאלה 17</u>

מהי ההסתברות שייפלו <u>בדיוק</u> 3 מטאורים בשטח העגול הנתון?

א. $2e^{-2}$ ב. $\frac{4}{3}e^{-2}$ ג. $3e^{-3}$ ד. $\frac{9}{2}e^{-3}$

<u>שאלה 18</u>

בתוך השטח העגול הנתון מסמנים עיגול ברדיוס 6 ק״מ, שכולו בתחומי השטח הנתון.
מהי ההסתברות שבגבולות השטח העגול ה״קטן״ שסומן לא ייפול אף מטאור?

א. 0.030 ב. 0.049 ג. 0.301 ד. 0.487

<u>שאלה 19</u>

בתוך השטח העגול הנתון מסמנים עיגול ברדיוס 6 ק״מ, שכולו בתחומי השטח הנתון.

אם ידוע שבתחומי השטח ה״גדול״ נפלו בדיוק 4 מטאורים,
מהי ההסתברות שבדיוק אחד מהם נפל בתחומי השטח ה״קטן״, שסומן בתוך השטח ה״גדול״?

א. 0.011 ב. 0.034 ג. 0.360 ד. 0.377

<u>שאלה 20</u>

נניח שתופעת גשם המטאורים חוזרת על עצמה 5 פעמים, בדיוק באותם התנאים המתוארים לעיל, כך שאין תלות בין החזרות השונות.
מהי ההסתברות ש<u>לפחות</u> פעמיים (מתוך ה- 5) ייפלו <u>לפחות</u> 3 מטאורים, בתחומי השטח העגול?

א. 0.179 ב. 0.195 ג. 0.324 ד. 0.519

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 5

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2020 א **מועד אחרון להגשה:** 2.1.2020

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

נתון משתנה מקרי X המתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ ax-b & 2\le x<4 \\ 0 & 4\le x \end{cases}$$

נתון ש $a>0$ ו $b>0$.

(5 נקי) א. מה צריכים לקיים הפרמטרים a ו- b כדי שפונקציית הצפיפות תהיה חוקית?

(5 נקי) ב. חשבו את $P(X\ge 2.5)$, שימו לב שהתשובה יכולה להכיל את הפרמטרים a ו- b.

(10 נקי) ג. ידוע ש $E[X]=3.2$.

1. מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b.
2. חשבו את $E\left[\sqrt{X}\right]$.

שאלה 2 (15 נקודות)

יהי X משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי.

חשב את $E[e^{-2X}]$.

הערה: <u>בכל סעיפי שתי השאלות הבאות, ערוך אינטרפולציה לינארית היכן שזה נדרש</u>.

שאלה 3 (25 נקודות)

נורית קנתה באביב שני שתילים של עץ מזן מסוים ושתלה אותם בגינתה – האחד מימין והשני משמאל.
המוכר במשתלה אמר לנורית, כי גובה כל עץ מזן זה (במטרים), שנה מיום שתילתו,
הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת 1 וסטיית-תקן 0.13, וכי אין תלות בין גובהם של עצים שונים.

(5 נק׳) א. מהו הגובה (במטרים) ש- 23% מהעצים בני השנה (מזן זה) גבוהים ממנו?

(5 נק׳) ב. נורית שמה לב, שלאחר שנה מזמן השתילה, גובה העץ שנשתל מימין עלה על 1.1 מטרים.
מהי ההסתברות שגובהו של עץ זה נמוך מ- 1.25 מטרים?

לאחר שנה מזמן השתילה, נורית החליטה לשתול בגינתה שתילי-עצים נוספים מאותו הסוג.
היא החליטה למדוד את העץ ששתלה משמאל (בדיוק שנה אחת קודם לכן) ולעשות כך :
אם גובה העץ בן השנה יעלה על 1.2 מטרים היא תקנה 6 שתילים חדשים מאותו הסוג ;
אם גובהו יהיה בין 0.9 מטרים ל- 1.2 מטרים היא תקנה 3 שתילים חדשים מאותו הסוג ;
ואם גובהו יהיה נמוך מ- 0.9 מטרים היא לא תקנה אף שתיל.

(15 נק׳) ג. מהי תוחלת מספר שתילי העצים שנורית תקנה?

שאלה 4 (15 נקודות)

נפח החלב בקרטון חלב מתפלג נורמלית עם תוחלת של 1000 מ״ל וסטיית תקן של 8 מ״ל.
נפח החלב בקרטונים שונים בלתי תלוי זה בזה.

(8 נק׳) א. מהו המספר M כך שבהסתברות של 5% נפח החלב במ״ל יהיה נמוך מ- M?

(7 נק׳) ב. מה ההסתברות שנפח החלב בקרטון חלב יהיה מעל 1016 מ״ל או מתחת ל- 996 מ״ל?

שאלה 5 (25 נקודות)

יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 5.
נגדיר את המשתנה המקרי Y על-ידי $Y = 8 - 5X$.

(5 נק׳) א. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.

(5 נק׳) ב. מצא את פונקציית הצפיפות של Y.

(5 נק׳) ג. חשב את התוחלת ואת השונות של Y.

(5 נק׳) ד. חשב את $P\{Y > 0 \mid X > 1\}$.

(5 נק׳) ה. חשב את $E\,[(Y-8)^2\,]$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 6

מספר השאלות: 5   **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2020 א   **מועד אחרון להגשה:** 16.1.2020

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

מכוניות מגיעות לצומת בהתאם ל- 3 ההנחות של תהליך פואסון עם קצב של 500 לשעה.

כמו כן, ההסתברות שהצבע של כל מכונית שמגיעה לצומת הוא ירוק היא 0.02.

(6 נק') א. מהי ההסתברות שבין השעות 16:00 ל- 19:00 יגיעו לצומת בדיוק 40 מכוניות ירוקות?

(7 נק') ב. אם בין השעות 16:00 ל- 19:00 הגיעו לצומת 1,400 מכוניות, מהי שונות מספר המכוניות (מביניהן) שהגיעו בין השעות 16:00 ל- 17:00?

(7 נק') ג. אדם נעמד בצומת בשעה 16:00 וצופה במכוניות המגיעות אליו.
מהי ההסתברות שהמכונית <u>הירוקה</u> השנייה שיִרְאֶה, תגיע לצומת אחרי השעה 16:15 ולפני השעה 17:00?
(בהנחה, שהאדם נמצא בצומת לפחות עד 17:00 ורואה את כל המכוניות המגיעות אליו.)

שאלה 2 (20 נקודות)

יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר 0.2,

ויהי Y משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר 0.5.

נניח כי המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה,

ונגדיר את המשתנה המקרי Z, על-ידי $Z = X + Y$.

(10 נק') א. מצא ביטוי כללי להסתברות $P\{Z = n\}$, לכל $n = 2,3,\ldots$.
פשט את התוצאה עד כמה שאפשר.

(10 נק') ב. חשב את הסתברות המאורע $\{X = Y\}$.

שאלה 3 (20 נקודות)

במסלול 'נינג'ה ישראלי' ישנם 4 מכשולים. מתמודד שמנסה לעבור את המסלול מנסה לעבור את המכשולים בזה אחר זה , עד למכשול הראשון שבו הוא נכשל. אם מתמודד נכשל בשלב כלשהו, הוא איננו יכול לגשת לשלב הבא.

כלומר, הוא מנסה לעבור את המכשול הראשון, אם הוא מצליח אותו הוא מנסה לעבור את המכשול השני, אם הוא מצליח לעבור אותו הוא מנסה את המכשול השלישי וכך הלאה. לאחר המכשול הרביעי בכל מקרה נגמר המסלול.

שני מתמודדים : יפתח ואלכס מנסים לעבור את המסלול.

כל אחד מהמתמודדים מצליח כל אחד מהמכשולים בסיכוי 0.6 באופן בלתי-תלוי במתמודד האחר.

נסמן ב :

X – מספר המתמודדים מתוך השניים שהגיעו למכשול השלישי.

Y – מספר המכשול המתקדם ביותר אליו יפתח ניגש.

למשל, אם :

- יפתח סיים את המסלול, אלכס הגיע למכשול השני ונכשל בו אז $X=1, Y=4$.
- יפתח הגיע למכשול השני ונכשל בו, אלכס נכשל במכשול הראשון, אז $X=0, Y=2$.

(15נק') א. מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של (X,Y).

(5 נק') ב. אם יפתח נכשל במכשול השלישי , מה תהיה התוחלת של X ?

שאלה 4 (20 נקודות)

(7 נק') א. מטילים 40 פעמים קובייה תקינה.

מהי ההסתברות שבדיוק בארבע מההטלות התקבל 4 ובדיוק בחמש מהן התקבל 5?

ב. מטילים 4 פעמים קובייה תקינה.

יהי Y המספר <u>הקטן</u> ביותר שהתקבל בארבע ההטלות של הקובייה.

(7 נק') 1. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.

רשום את ערכיה לכל מספר ממשי.

(6 נק') 2. מצא את פונקציית ההסתברות של Y .

שאלה 5 (20 נקודות)

יהיו X_1 , X_2 , ... , X_{10} משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכולם התפלגות אחידה בדידה בין 0 ל-10. (כלומר, כל אחד מן המשתנים מקבל את הערכים 0, 1, ..., 10 בהסתברויות שוות).

א. חשב את $P\left\{\min_{i=1,\ldots,10} X_i \le 2\right\}$.

ב. מה ההסתברות שמבין 10 ה-X_i-ים יהיו בדיוק 5 שיקבלו ערך שאינו עולה על 4 ובדיוק 3 שיקבלו ערך בין 5 ל-8 (כולל 5 וכולל 8)?

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2020 ב **מועד אחרון להגשה:** 30.1.2020

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (25 נקודות)

הפקיד קירק מכניס n מכתבים ורודים ו n מכתבים כחולים (סך הכל $2n$ מכתבים), ל- n מעטפות.
על כל מעטפה רשומה כתובת שונה. על כל אחד מהמכתבים רשומה אחת מ- n הכתובות,
כאשר לכל כתובת מיועדים בדיוק 2 מכתבים, אחד ורוד ואחד כחול. קירק שהוא פקיד מפוזר,
בוחר באקראי איזה מכתבים להכניס לכל מעטפה,
ורק מקפיד להכניס לכל מעטפה מכתב אחד ורוד ומכתב אחד כחול.
נסמן ב- X את מספר המעטפות שהכתובת על לפחות אחד מהמכתבים בתוכה זהה לכתובת המעטפה.

(5נק') א. חשבו את $E[X]$.

(20 נק') ב. עבור $n=10$.

1. חשבו את $Var(X)$.
2. נסמן ב- Y את מספר המעטפות שהכתובת על אף אחד מהמכתבים בתוכן זהה לכתובת המעטפה. מצאו את התוחלת והשונות של Y.

שאלה 2 (15 נקודות)

מיכל מסדרת על השולחן בסדר <u>אקראי</u> שורה של 12 כוסות משקה: 2 כוסות שמפנייה, 4 כוסות של יין לבן ו-6 כוסות של יין אדום.

נסמן ב- U את מספר הכוסות של יין אדום במקומות 1,2,3. וב- W את מספר הכוסות של יין אדום במקומות 4,7,11.

א. חשבו את $E[U-W]$.

ב. חשבו את $Var(U+W)$.

ג. חשבו את $Cov(U,W)$.

שאלה 3 (20 נקודות)

מטילים קובייה תקינה 60 פעמים.

נגדיר את המשתנים המקריים: X = מספר התוצאות הזוגיות שהתקבלו;

Y = מספר התוצאות האי-זוגיות שהתקבלו.

(8 נק׳) א. חשב את 1. $E[X^2]$

2. $\mathrm{Var}(3X-2Y)$

(6 נק׳) ב. חשב את $P\{X<Y\}$.

(6 נק׳) ג. חשב את $\mathrm{Cov}(X,Y)$ ואת $\rho(X,Y)$.

הסבר את התוצאה האחרונה שקיבלת.

שאלה 4 (20 נקודות)

יהי Y משתנה מקרי בדיד, שפונקציית ההסתברות שלו נתונה, לכל $a>1$, על-ידי:

$$P\{Y=i\}=\frac{c}{a^i} \qquad , \qquad i=0,1,...$$

(6 נק׳) א. חשב את c.

(7 נק׳) ב. מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים של Y. **רשום עבור אלו ערכים של t היא קיימת**.

(7 נק׳) ג. חשב את התוחלת של Y, באמצעות הפונקציה יוצרת המומנטים.

שאלה 5 (10 נקודות)

מטילים קובייה הוגנת עד אשר מקבלים את התוצאה 5.

בשלב הבא מטילים מטבע הוגן עד אשר מקבלים עץ כמספר הפעמים

שהוטלה הקובייה. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר הטלות המטבע?

שאלה 6 (10 נקודות)

יהי N משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 100.

מטילים N פעמים מטבע שההסתברות לקבל בו H היא p $(0<p<1)$.

יהי X מספר ה- H שמתקבלים ב- N הטלות המטבע.

מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים של X,

וזהה באמצעותה את ההתפלגות של X.

מטלה לתרגול עצמי

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 – חלק בלתי נפרד מחולק הלימוד של הקורס

1. לאורך החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר $\frac{1}{500}$.
אין תלות בין נורות שונות מאותו הסוג.
אדם קנה 100 נורות מסוג זה.
מצא קירוב להסתברות שממוצע אורך החיים של 100 הנורות שנקנו יהיה בין 450 ל- 520 שעות.

2. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1,000.

א. חשב קירוב נורמלי להסתברות ש- X יקבל את הערך 1,000.
מדוע אפשר לחשב קירוב נורמלי במקרה זה?

ב. חשב חסם תחתון ל- $P\{|X-1{,}000|\le 40\}$, באמצעות אי-שוויון צ'בישב.

3. נתונים 5 משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, $X_1, X_2, \ldots, X_5$, שכל אחד מהם מקבל את הערכים 0, 3 ו- 6 בהסתברויות שוות (כלומר, הסתברות ⅓ לכל ערך).
נגדיר $Y=\sum_{i=1}^{5} X_i$. חשב חסם עליון ל- $P\{Y>25\}$:

א. בעזרת אי שוויון מרקוב;

ב. בעזרת אי שוויון צ'בישב.

4. א. יהי X משתנה מקרי אי-שלילי שתוחלתו μ סופית, ויהי $t>0$.
הוכח כי $P\{X\le \mu t\}\ge 1-\frac{1}{t}$.

ב. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n=1,2,\ldots)$, משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר p $(0<p<1)$.
הראה בעזרת אי-שוויון צ'בישב שמתקיים: $P\left\{\overline{X}_n\le \frac{2}{p}\right\}\ge 1-\frac{1-p}{n}$.

הערה: $\overline{X}_n=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

5. הוכח, בעזרת משפט הגבול המרכזי, כי $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} e^{-n}\frac{n^i}{i!}=\frac{1}{2}$.

.6 יהיו X_1 , X_2 , ... , X_{200} משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפונקציה יוצרת המומנטים: $M_X(t)=\left(\frac{e^t}{5-4e^t}\right)^2$, עבור $t<\ln 1.25$.

מצא קירוב ל- $P\left\{1,910\le\sum_{i=1}^{200}X_i<2,050\right\}$.

.7 א. נתון ארגז ובו 120 כדורים שעליהם רשומים מספרים.

לכל $i=1,2,\dots,15$, יש בארגז i כדורים שהמספר הרשום עליהם הוא i .

בוחרים כדורים מהארגז, בזה אחר זה **ועם החזרה**, כך שבכל בחירה יש לכל הכדורים סיכויים שווים להיבחר.

נניח שבוחרים (בשיטה המתוארת לעיל) בדיוק 100 כדורים.

יהי Y הסכום הכולל של 100 המספרים הרשומים על הכדורים שנבחרו.

חשב קירוב ל- $P\{1,000\le Y\le 1,100\}$.

הערה: $\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ב. מעגלים 50 מספרים שנבחרו באקראי, כל אחד לשלם הקרוב לו ביותר, ומסכמים את 50 המספרים המעוגלים.

אם לכל אחת משגיאות-העיגול יש התפלגות אחידה בקטע $[-0.5,\ 0.5)$, מהו קירוב להסתברות שההפרש <u>המוחלט</u> בין הסכום המתקבל לבין הסכום המדויק של 50 המספרים עולה על 3?

.8 אורך-החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים מתפלג מעריכית עם הפרמטר 0.01, והוא אינו תלוי באורך-החיים של נורות אחרות.

כמה נורות מסוג זה עליך לקנות (בקירוב), אם ברצונך להבטיח 5,000 שעות-אור בהסתברות 0.95 לפחות?

הנח שאתה מתקין נורה אחת, ובהישרפה מחליף אותה מייד באחרת. זמן ההחלפה זניח.

.9 נתונים שלושה ארגזים בלתי-תלויים.

לכל ארגז אפשר להכניס X קופסאות, כאשר ל- X יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 150.

א. חשב **קירוב** להסתברות שלשלושת הארגזים יחדיו יוכנסו לפחות 480 קופסאות.

ב. חשב **קירוב** להסתברות ש<u>ההפרש המוחלט</u> בין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז הראשון לבין מספר הקופסאות שיוכנסו לארגז השני יהיה גדול מ- 10.

בשני הסעיפים נמק את פתרונך.

.10 יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- 0.5, עבור $n>4$.

הוכח בעזרת אי שוויון צ'בישב שמתקיים: $P\{X\ge n-2\}\le\frac{n}{2(n-4)^2}$.

11. רשום את החסמים מלעיל הקטנים ביותר (המוכרים לך) עבור $P\{X \geq 14\}$, בכל אחד מן המקרים הבאים:

א. X הוא משתנה מקרי אי-שלילי ותוחלתו 7;

ב. X הוא משתנה מקרי המקיים $X \geq -2$ ותוחלתו 7;

ג. X הוא משתנה מקרי שתוחלתו 7 ושונותו 4.

12. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת סופית μ ושונות סופית σ^2.

הנח ש-n גדול וחשב **קירוב** ל- $P\left\{\bar{X} \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} + \mu\right\}$.

13. המשקל W (בטונות) של מטען, שגשר מסוים יכול לשאת בלי שמבנהו ייגזק, הוא משתנה מקרי נורמלי שתוחלתו 400 וסטיית התקן שלו 40. נניח שהמשקל (בטונות) של מכונית הוא משתנה מקרי שתוחלתו 3 וסטיית התקן שלו 0.3. אם ברגע מסוים ההסתברות לגרימת נזק במבנה הגשר עולה על 0.1, מהו (בקירוב) המספר המינימלי של מכוניות הנמצאות אז על הגשר?

הנח שאין תלות בין משקלי מכוניות שונות ובין המשקל של כל מכונית לעומס שהגשר יכול לשאת בלי שמבנהו ייגזק.

נספחים

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

דף הנוסחאות יצורף לכל בחינה.

נספח ב: רשימת טענות להוכחה בבחינה

בכל בחינה תופענה טענות מן הרשימה המובאת להלן, שאותן תִדָרשו להוכיח במדויק.

ההוכחות של כל הטענות מן הרשימה מובאות באתר הקורס בקובץ נפרד.

משקל הטענות שתופענה בבחינה לא יעלה על 15 נקודות.

הטענות עשויות להופיע ביותר מאשר שאלה אחת.

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

נספח א: דף נוסחאות לבחינה

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1}\cdot p \quad , \quad i=1,2,\dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i! \quad , \quad i=0,1,\dots$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,\dots$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,\dots,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,\dots,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a\le x\le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)$, $t\neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad -\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,\dots,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot\dots\cdot p_r^{n_r} \quad , \quad \sum n_i=n , \sum p_i=1$			

נוסחת הבינום $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$

$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^C)$

כלל ההכלה וההפרדה $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\dots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n)$

הסתברות מותנית $P(A\,|\,B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

נוסחת הכפל $P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\,|\,A_1)P(A_3\,|\,A_1\cap A_2)\cdot\dots\cdot P(A_n\,|\,A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1})$

נוסחת ההסתברות השלמה $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\,|\,B_i)P(B_i)$, $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס $P(B_j\,|\,A)=\dfrac{P(A\,|\,B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\,|\,B_i)P(B_i)}$, $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת $E[X]=\sum_x x\,p_X(x)=\int x\,f(x)dx$

תוחלת של פונקציה של מ"מ $E[g(X)]=\sum_x g(x)\,p_X(x)=\int g(x)\,f(x)dx$

שונות $\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית $E[aX+b]=aE[X]+b$

$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון $P\{X>s+t\,|\,X>t\}=P\{X>s\} \quad , \quad s,t\ge 0$

תוחלת מותנית $E[X\,|\,Y=y]=\sum_x x\,p_{X|Y}(x\,|\,y)=\int x\,f_{X|Y}(x\,|\,y)dx$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X\,|\,Y=y) \;=\; E[X^2\,|\,Y=y]-(E[X\,|\,Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] = E[E[X\mid Y]] = \sum_y E[X\mid Y=y]\,p_Y(y)$

(טענה מתרגיל ת26, עמוד 430) $E[X\cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X\mid Y]]$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X\,|\,Y)] + \mathrm{Var}(E[X\,|\,Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY]-E[X]E[Y]$

$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i,Y_j)$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)\Big/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(at)$

כאשר X_i מ"מ ב"ת מתקיים : $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t)\cdot\ldots\cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1]$

(כאשר X_i מ"מ ב"ת ש"ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\,\mathrm{Var}(N)$

$M_{X_1+\ldots+X_N}(t) = E\left[\left(M_{X_1}(t)\right)^N\right]$

אי-שוויון מרקוב $P\{X \ge a\} \le E[X]/a \quad , \quad a>0$, X מ"מ אי-שלילי

אי-שוויון צ'בישב $P\{|X-\mu| \ge a\} \le \sigma^2/a^2 \quad , \quad a>0 \;,\; \mu,\sigma^2<\infty$

משפט הגבול המרכזי $P\left\{ (\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu)\Big/\sqrt{n\sigma^2} \le a \right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(a) \quad , \quad \mu,\sigma^2<\infty$, X_i מ"מ ב"ת וש"ה

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר p הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני.
- סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \;,\; -1<x<1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = -\ln(1-x) \;,\; 0<x<1$

$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \;,\; n\neq -1 \quad ; \quad \int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b)$

$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax}dx = \frac{1}{a\ln b}b^{ax}$

נוסחת האינטגרציה בחלקים :

$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$

$\log_n a = \log_m a/\log_m n \quad ; \quad \log_n(a^b) = b\cdot\log_n a \quad ; \quad \log_n(ab) = \log_n a + \log_n b$

נספח ב: טענות להוכחה בבחינה

הסתברות לתלמידי מדעי המחשב - 20425

ההוכחות של הטענות, המובאות ברשימה שלהלן, נמצאות בקובץ נפרד באתר הקורס.

1. יהיו E ו- F מאורעות במרחב מדגם S. הוכח כי: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

2. יהיו F ו- G מאורעות זרים של ניסוי מקרי כלשהו. הוכח כי בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה, ההסתברות שהמאורע F יתרחש לפני המאורע G היא: $\dfrac{P(F)}{P(F)+P(G)}$

3. יהי X משתנה מקרי בדיד, שתוחלתו סופית, ויהיו a ו- b קבועים ממשיים. הוכח כי:

$$E[aX+b] = aE[X]+b \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$$

4. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$. הוכח כי:

$$E[X] = np \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

5. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \lambda \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda$

6. יהי X משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים N, m ו- n. הוכח כי: $E[X] = n \cdot \frac{m}{N}$

7. יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$. הוכח כי: $E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

8. יהי X משתנה מקרי אחיד (רציף) על הקטע (a, b), עבור $a < b$.

הוכח כי: $E[X] = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

9. הוכח: אם מאורע מסוים מתרחש בהתאם לַהנחות של תהליך-פואסון עם קצב λ, אז משך הזמן החולף עד להתרחשות המופע הראשון של המאורע (החל מזמן 0) הוא משתנה מקרי מעריכי עם אותו הפרמטר λ.

10. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה.
הוכח כי למשתנה המקרי $X + Y$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda_X + \lambda_Y$.

11. יהיו X ו- Y משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.
הוכח כי למשתנה המקרי $X + Y$ יש התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים $(2, p)$.

12. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y, בהתאמה.
הוכח שלמשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X + Y = n$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$.

13. יהי $Y = a + bX$, ונניח כי $\sigma_X^2 > 0$. הראה כי: $\rho(X,Y) = \begin{cases} +1 & , \quad b > 0 \\ -1 & , \quad b < 0 \end{cases}$

.14 יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת ושונות סופיות, μ ו- σ^2, בהתאמה.

הוכח כי: $$E[\overline{X}] = \mu \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2/n$$

.15 יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_r$ משתנים מקריים בעלי פונקציית התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $p_1, p_2, \ldots, p_r$.

הוכח: א. למשתנה המקרי X_i יש התפלגות שולית בינומית עם הפרמטרים n ו- p_i.

ב. למשתנה המקרי המותנה X_1 בהינתן $X_2 = j$, לכל $j = 0,1,\ldots,n$, יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n-j$ ו- $p_1/(1-p_2)$.

ג. $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$

.16 יהיו X ו- Y משתנים מקריים בדידים בעלי תוחלות ושונויות סופיות.

הוכח: $$E[X] = E[E[X \mid Y]]$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$$

.17 הוכח: אם N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים אי-שליליים, ואם $X_1, X_2, \ldots$ הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב-N, אז מתקיים:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1]$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + (E[X_1])^2 \mathrm{Var}(N)$$

הערה: כאשר $N = 0$, סכום המשתנים שווה גם הוא ל-0.

.18 יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי: $$M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n \qquad , \qquad -\infty < t < \infty$$

.19 יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.

הוכח כי: $$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \qquad , \qquad t < -\ln(1-p)$$

.20 יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ $(\lambda > 0)$.

הוכח כי: $$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \qquad , \qquad -\infty < t < \infty$$

נספח ג: ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z)=P\{Z\le z\}=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt \qquad ; \qquad \Phi(-z)=1-\Phi(z) \qquad ; \qquad Z\sim N(0,1)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326