תשובה 1

א. $x \subseteq y$	ב. $x \in y$	ג. $x \subseteq y$	ד. $x \in y$
ה. $x \subseteq y$	ו. $x \subseteq y$	ז. $x \subseteq y$	ח. שניהם.

תשובה 2

א. נתחיל בעזרת ההדרכה לשאלה:

$(A-B)\cup(B-C)=(A\cap B')\cup(B\cap C')$

מכאן בעזרת שימוש חוזר בפילוג (דיסטריבוטיביות, סעיף 1.3.4 בספר) של האיחוד מעל החיתוך:

$=(A\cup B)\cap(A\cup C')\cap(B'\cup B)\cap(B'\cup C')$

נזרוק את $B'\cup B$ (נימוק ר' בצעד דומה בהוכחת סעיף א' למעלה):

$=(A\cup B)\cap(A\cup C')\cap(B'\cup C')$

שימוש בכלל דה-מורגן בגורם הימני, וכינוס שני האיברים השמאליים בעזרת חוק הפילוג:

$=(A\cup(B\cap C'))\cap(B\cap C)'$

ובעזרת ההדרכה לשאלה

$=(A\cup(B-C))-(B\cap C)$

ב. נתחיל בעזרת ההדרכה לשאלה:

$(A-B)\cap(C-D)=(A\cap B')\cap(C\cap D')$

בעזרת קיבוץ (אסוציאטיביות) וחילוף (קומוטטיביות, עמ' 15 בספר) החיתוך:

$=(A\cap C)\cap(B'\cap D')$

ולפי כלל דה-מורגן:

$=(A\cap C)\cap(B\cup D)'$

ושוב לפי ההדרכה לשאלה:

$=(A\cap C)-(B\cup D)$

תשובה 3

א. מהגדרת $\oplus$,

$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

כמו בשאלה 2, נבחר U המכילה את A,B ונרשום

$=(A\cap B')\cup(B\cap A')$

בעזרת דיסטריבוטיביות החיתוך מעל האיחוד (עמ' 17 בספר הלימוד)

$=(A\cup B)\cap(A\cup A')\cap(B'\cup B)\cap(B'\cup A')$

לפי טענה בתחתית עמ' 22 בספר, $A\cup A'=B\cup B'=U$.

לפי שאלה 1.11 בעמ' 16 בספר, ניתן לזרוק את U מהחיתוך.

נקבל בהמשך לשוויון המקורי,

$$= (A \cup B) \cap (B' \cup A')$$

בעזרת כלל דה-מורגן (סעיף 1.4.3 בספר)

$$= (A \cup B) \cap (B \cap A)'$$

ולבסוף, שוב לפי ההדרכה לשאלה

$$= (A \cup B) - (B \cap A)$$

ב. נניח $X \oplus A = Y \oplus A$. נבצע בשני האגפים הפרש סימטרי עם A:

$$(X \oplus A) \oplus A = (Y \oplus A) \oplus A$$

לפי שאלה 1.22ב (אסוציאטיביות) נקבל

$$X \oplus (A \oplus A) = Y \oplus (A \oplus A)$$

מהמשך סעיף ב' באותה שאלה, $A \oplus A = \varnothing$, ולכן קיבלנו:

$$X \oplus \varnothing = Y \oplus \varnothing$$

ולפי טענה אחרת באותו סעיף (הפרש סימטרי עם הקבוצה הריקה) קיבלנו

$X = Y$.

הערה: הפרש סימטרי הוא פעולה חילופית (שוב 1.22ב),

לכן קיבלנו שנוכל לצמצם גם משמאל, כלומר: אם $A \oplus X = A \oplus Y$ אז $X = Y$.

ג. כיוון אחד (אם $A = B$) מיידי משאלה 1.22ב: $A \oplus A = \varnothing$.

כיוון שני: אם $A \oplus B = \varnothing$ משמע $A \oplus B = A \oplus A$ (כי כאמור $A \oplus A = \varnothing$).

מכאן לפי כלל הצמצום משמאל שהוכחנו למעלה בסעיף א': $B = A$.

ד. כיוון אחד: אם $B = \varnothing$ אז $A \oplus B = A$ לפי שאלה 1.22ב (הפרש סימטרי עם הקבוצה הריקה). כיוון שני: נובע מהכיוון הראשון בעזרת כלל הצמצום, בדומה לסעיף ג (השלימו!)

תשובה 4

א. $B_n = \{n \cdot k \mid k \in \mathbf{N}^*\}$, משמע B_n היא קבוצת כל הכפולות של n.

$B_n \cap B_m$ היא אפוא קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מ- 0, והמתחלקים הן ב- n והן ב- m:

$$B_n \cap B_m = \{nk \mid k \in \mathbf{N}^*\} \cap \{ms \mid s \in \mathbf{N}^*\}.$$

מכאן, לפי הטענה שבהדרכה, נובע שכל אבר של $B_n \cap B_m$ מתחלק ב $c(n,m)$. משמע:

$$B_n \cap B_m \subseteq B_{c(n,m)}.$$

מצד שני, יהי $x \in B_{c(n,m)}$, משמע x מתחלק ב- $c(n,m)$.

מהגדרתו של $c(n,m)$ הוא מתחלק הן ב- n והן ב- m.

משתי האמירות יחד: x מתחלק הן ב- n והן ב- m.

לפיכך

$$B_{c(n,m)} \subseteq B_n \cap B_m .$$

משתי ההכלות: $B_n \cap B_m = B_{c(n,m)}$.

על תכונות הכפולה המשותפת המינימלית ראו

http://mathworld.wolfram.com/LeastCommonMultiple.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Least_common_multiple

ב. נראה כי **לכל** $m \in \mathbf{N}^*$, m **אינו** שייך לחיתוך הנ״ל. יהי $m \in \mathbf{N}^*$.

כללית, מהגדרת B_n, מובן שכל אברי B_n גדולים או שווים n.

בפרט מובן כי $m \notin B_{m+1}$.

לפיכך m אינו שייך לחיתוך כל ה- B_n-ים.

זה נכון לכל $m \in \mathbf{N}^*$. אין אף $m \in \mathbf{N}^*$ השייך לחיתוך הנ״ל. לפיכך החיתוך הוא ריק!

ג. קבוצה זו היא קבוצת המספרים הראשוניים. נוכיח זאת:

כיוון אחד: יהי $n \in \mathbf{N}^*$ מספר **שאינו** ראשוני, נוכיח כי $D_n = \varnothing$.

יהי $x \in D_n$, נראה שלא ייתכן x כזה:

ההנחה ש- n אינו ראשוני פירושה שקיימים $m,k \in \mathbf{N}^*$, $1 < m,k < n$, כך ש- $n = km$.

מכיון ש- n מתחלק ב-m, כל מספר המתחלק ב- n מתחלק ב- m. בפרט $x \in B_m$.

מכיון ש- $1 < m < n$ אז מהגדרת D_n נקבל כי $x \notin D_n$, בסתירה להנחה.

הראינו ש- D_n ריקה עבור כל n שאינו ראשוני.

מצד שני, אם n ראשוני, נראה כי $n \in D_n$ ולכן בפרט $D_n \neq \varnothing$:

לכל $n \in \mathbf{N}^*$ מתקיים $n \in B_n$.

אם n ראשוני, אז לכל m טבעי המקיים $1 < m < n$, n אינו מתחלק ב- m, ולכן $n \notin B_m$.

מהגדרת D_n נקבל אפוא כי $n \in D_n$, ולכן D_n אינה ריקה.

משני הכיוונים יחד, הראינו שקבוצת ערכי n עבורם $D_n \neq \varnothing$ היא קבוצת המספרים הראשוניים.

איתי הראבן