אלגוריתמיקה (20290)

סמסטר ב98 – מועד א5 – פתרון הבחינה

שאלה 1

א. האלגוריתם הוא חמדני, מפני שהוא מנסה "לדחוס" מספר מקסימלי של קורסים לכל אולם מבלי להפעיל ראיה ארוכת טווח. בחירת הקורסים שישובצו לאולם מסוים נעשית באמצעות קריאה לשגרה **בחר-אוסף**, שהיא עצמה גם-כן חמדנית.
השגרה **בחר-אוסף** בוחרת בכל פעם את הקורס שזמן הסיום שלו הוא מינימלי ומוסיפה אותו ל-S' . זו בחירה חמדנית במובן זה, שכאשר בוחרים את הקורס שזמן הסיום שלו הוא מינימלי, הזמן הנותר שבו ניתן לשבץ קורסים באותו אולם הוא מקסימלי.

ב. האלגוריתם אינו מוצא אתהפתרון האופטימלי לבעיה.
דוגמה נגדית: נתבונן בארבעה קורסים שמתקיימים בשעות הבאות:

c_1: $8-10$

c_2: $8-11$

c_3: $11-12$

c_4: $10-14$

האלגוריתם ישבץ את הקורסים באופן הבא:
c_1, c_3 ישובצו לאולם מס' 1.
c_2 ישובץ לאולם מס' 2.
c_4 ישובץ לאולם מס' 3.

אבל ניתן לשבץ את הקורסים לשני אולמות בלבד באופן הבא:
אולם מס' 1: c_1, c_4
אולם מס' 2: c_2, c_3

שאלה 2

א. כן. למעשה מתבצע ברשת שלב אחד של מיון-בועות, ובסיומו המספר הקטן ביותר נמצא ב- b_1 .

ב. לא. למשל, אם a_1 הוא המספר המקסימלי, אז הוא יגיע ל- b_2 ולא ל- b_5 .

ג. לא. (אותה דוגמה כמו בסעיף ב')

ד. כן. b_1 ו- b_2 הם הפלט של המשווה האחרון.

ה. לא. למשל, אם $a_3 = 3$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$ נקבל ש- $b_5 = 2$ ו- $b_4 = 3$.

ו. כן. אם a_2 הוא המינימום, אז b_3 הוא המינימום מבין a_3, a_4, a_5 .

שאלה 3

א. הבעיה איננה כריעה.

נוכיח זאת באמצעות רדוקציה מבעיית העצירה: נניח שקיים אורקל A הפותר את הבעיה הנתונה ונבנה אלגוריתם 'A שיכריע את בעיית העצירה.

האלגוריתם 'A מקבל תכנית Q וקלט x, וצריך לקבוע אם Q עוצרת על x:

(1) הפעל את האורקל A על Q ו- x

(2) אם A החזיר 'כן' (כלומר, Q אינה עוצרת על x) – החזר 'לא'.

(3) אחרת (כלומר, Q עוצרת על x) – החזר 'כן'.

ברור שהאלגוריתם 'A מכריע את בעיית העצירה, מכיוון שהוא מחזיר 'כן' אם ורק אם Q עוצרת על x. הראינו שאם קיים אורקל הפותר את הבעיה המתוארת בשאלה, אז ניתן להכריע את בעיית העצירה. אבל בעיית העצירה איננה כריעה, ולכן אורקל כזה לא יכול להיות קיים והבעיה המתוארת בשאלה איננה כריעה.

ב. הבעיה כריעה.

כדי להכריע את הבעיה, נריץ את התוכנית Q על הקלט x פקודה אחר פקודה, ונספור את מספר הפקודות.

אם Q עוצרת לאחר שבוצעו 2^n פקודות או פחות – נחזיר 'כן'.

אם בוצעו 2^n פקודות ו-Q לא עצרה – נעצור את ריצתה של Q ונחזיר 'לא'.

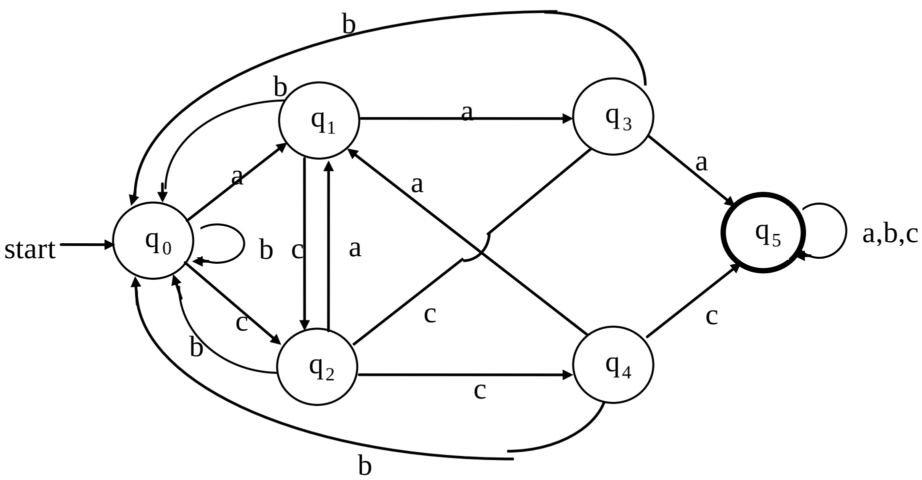
שאלה 4

א. האוטומט מקבל את כל המילים שהספרה '1' מופיעה בהן בדיוק פעם אחת.

בייצוג בינרי אלו הם כל המספרים שהם חזקה של 2.

בייצוג דצימלי אלו הם כל המספרים שהם חזקה של 10.

ב.



שאלה 5

א. לא. קיים אלגוריתם פולינומיאלי הבודק אם יש או אין מעגל אוילר בגרף ללא קשר להנחה שבשאלה.

ב. לא. ניתן אמנם להסיק שאפשר לפתור את בעיית שיבוץ הקופים בזמן פולינומיאלי (באמצעות רדוקציה לבעיית המעגל ההמילטוני ופתרון בעיית המעגל ההמילטוני), אך לא בטוח שהזמן יהיה $O(\mathrm{n}^4)$. ייתכן שהרדוקציה תדרוש זמן ארוך יותר מ- $O(\mathrm{n}^4)$.

ג. כן. בעיית המעגל ההמילטוני היא בעיה NP-שלמה, ולכן אם קיים אלגוריתם פולינומיאלי הפותר אותה, אז P = NP.

ד. כן. אם ההנחה שבשאלה מתקיימת, אז נובע מכך (על-פי סעיף ג') ש- P = NP. מכיוון שבעיית הראשוניות שייכת ל-NP, אז אפשר במקרה זה לפתור אותה בזמן פולינומיאלי.

ה. לא. לבעיית מגדלי האנוי יש חסם תחתון אקספוננציאלי, ולכן אי אפשר לפתור אותה בזמן פולינומיאלי.