# מטלת מנחה (ממ"ן) 11

**הקורס:** 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

**חומר הלימוד למטלה:** פרקים 1-4

**מספר השאלות:** 6 **משקל המטלה:** 7 נקודות

**סמסטר:** 2005א **מועד אחרון להגשה:** 8.10.2004

| |
|---|
| אנא שימו לב: |
| מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. |
| העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל. |

**שאלה 1 (10 נקודות)**

הראו כיצד ניתן לעשות סימולציה של לולאת "for" באמצעות לולאת "while-do".

**שאלה 2 (20 נקודות)**

**סריקת-ביקור-ראשון** של עץ בינרי זהה לסריקת-ביקור-שני המוגדרת בספר, פרט לכך שערכו של כל צומת מודפס בעת הביקור **הראשון** בצומת.

א. כתבו אלגוריתם רקורסיבי המבצע סריקת-ביקור-ראשון של עץ בינרי T.

ב. כתבו אלגוריתם איטרטיבי המבצע סריקת-ביקור-ראשון של עץ בינרי T.

הדרכה: השתמשו במחסנית.

| |
|---|
| הפעולות שניתן לבצע על מחסנית הן: |
| • בדיקה אם המחסנית ריקה |
| • הכנסת איבר חדש לראש המחסנית |
| • הוצאת האיבר שבראש המחסנית |

**שאלה 3 (20 נקודות)**

קבוצה של צמתים בעץ נקראת **בלתי תלויה**, אם אין בקבוצה שני צמתים שאחד מהם הוא בן של השני. בהינתן עץ כלשהו (לאו דווקא בינרי), ברצוננו למצוא קבוצה בלתי תלויה של צמתים שגודלה מכסימלי.

א. הוכיחו שבכל עץ קיימת קבוצה בלתי תלויה מכסימלית של צמתים, המכילה את כל **העלים** של העץ.

ב. תארו אלגוריתם חמדני למציאת קבוצה בלתי תלויה מכסימלית של צמתים בעץ.

**שאלה 4 (25 נקודות)**

שאלה זו מתייחסת לאלגוריתם לפתרון בעיית תרמיל הגב בשלמים המופיע בעמודים 180-181 במדריך הלמידה.

א. הפעילו את האלגוריתם על הקלט המופיע בשאלה 10. ציירו את הטבלה המתקבלת והראו באילו פריטים כדאי לגנב לבחור.

הערה: אין צורך לצייר טבלה בעלת 51 עמודות. ניתן להשתמש בטבלה בעלת 11 עמודות.

ב. כתבו אלגוריתם, הפותר את בעיית תרמיל הגב בשלמים ללא שימוש בטבלה, אלא באמצעות שני מערכי עזר **בלבד**. הסבירו מהם השינויים שבצעתם באלגוריתם המופיע במדריך הלמידה.

הערה: הכוונה בסעיף זה היא רק לחלק הראשון של האלגוריתם – מציאת השווי המכסימלי האפשרי של פריטים שהגנב יכול לקחת.

**שאלה 5 (25 נקודות)**

שתי קבוצות הכדורסל Detroit Pistons (להלן – קבוצה A) ו- Los Angeles Lakers (להלן – קבוצה B) מתחרות ביניהן על אליפות ה-NBA בסדרת "הטוב משבעה"; כלומר, הקבוצה הראשונה שתנצח בארבעה משחקים תזכה באליפות. נניח ששתי הקבוצות שוות בכוחן, ולכן לכל אחת מהן יש סיכוי של 50% לנצח בכל משחק בודד. נסמן ב- $p(i, j)$ את הסיכוי שקבוצה A תזכה באליפות כאשר A זקוקה לעוד i ניצחונות ו-B זקוקה לעוד j ניצחונות.

למשל, אם התוצאה בהתמודדות היא 2:1 לטובת A, אז A זקוקה לעוד 2 ניצחונות ו-B זקוקה לעוד 3 ניצחונות, ולכן הסיכוי ש-A תזכה בסופו של דבר באליפות הוא $p(2, 3)$.

א. כתבו נוסחה רקורסיבית לחישוב $p(i, j)$ והסבירו מדוע היא נכונה.

ב. כתבו אלגוריתם רקורסיבי לחישוב $p(i, j)$.

ג. כתבו אלגוריתם תכנון דינמי המחשב את $p(i, j)$ לכל ערך אפשרי של i ו-j.
ציירו את הטבלה המתקבלת.

**שאלה 6 (שאלת בונוס)**

גרף לא מכוון $G = (V, E)$ נקרא **דו-צדדי**, אם ניתן לחלק את צמתיו לשתי קבוצות S ו- $V-S$, כך שכל הקשתות בגרף מחברות צומת ב-S לצומת ב- $V-S$.

גרף לא מכוון $G = (V, E)$ נקרא **2-צביע**, אם ניתן לצבוע את צמתיו בשני צבעים, כך שכל שני צמתים שכנים יהיו צבועים בצבע שונה.

יהא G גרף לא מכוון. הוכיחו ששלוש הטענות הבאות שקולות זו לזו:

1. G הוא דו-צדדי.
2. G הוא 2-צביע.
3. אין ב-G מעגל באורך אי-זוגי.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 12

**הקורס:** 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

**חומר הלימוד למטלה:** פרקים 6-5

**מספר השאלות:** 5      **משקל המטלה:** 7 נקודות

**סמסטר:** 2005א      **מועד אחרון להגשה:** 5.11.2004

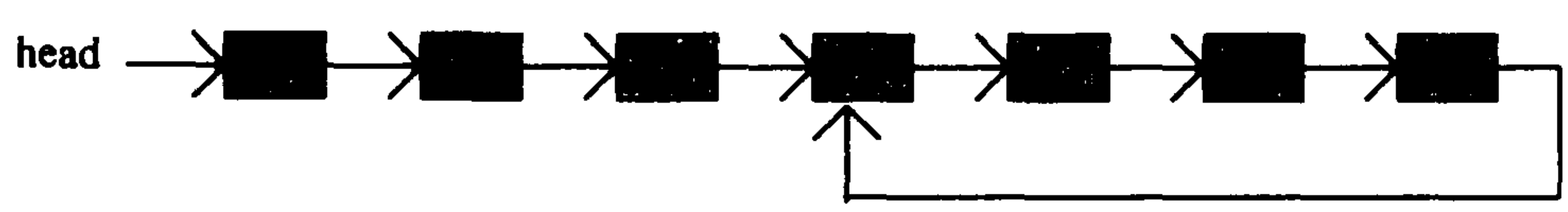
| |
|---|
| אנא שימו לב:<br>מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.<br>העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל. |

**שאלה 1 (15 נקודות)**

הוכיחו את נכונותו המלאה של האלגוריתם **Pwr1** לחישוב $m^n$ המופיע בפרק 6 במדריך הלמידה.

**שאלה 2 (20 נקודות)**

**שבלול** היא רשימה מקושרת, שבה האיבר אחרון מצביע על איבר כלשהו בתוך הרשימה.
למשל, הרשימה הבאה היא שבלול:




(שימו לב, שרשימה מקושרת מעגלית היא מקרה פרטי של שבלול.)

בהינתן רשימה מקושרת L, יש לבדוק אם הרשימה היא שבלול או רשימה מקושרת רגילה.
להלן אלגוריתם לפתרון הבעיה:

(1) $p \leftarrow head(L)$
(2) $q \leftarrow next(p)$
(3) $even \leftarrow False$
(4) כל עוד $q \neq NULL$ וגם $q \neq p$ בצע:
    (4.1) $q \leftarrow next(q)$
    (4.2) אם $even = True$ אז בצע:
        (4.2.1) $p \leftarrow next(p)$
    (4.3) $even \leftarrow not\ (even)$
(5) אם $q = NULL$ אז כתוב: "רשימה מקושרת רגילה" ועצור.
(6) אחרת כתוב: "שבלול" ועצור.

א. תארו את אופן הפעולה של האלגוריתם והסבירו מדוע הוא נכון.
ב. נתחו את זמן הריצה של האלגוריתם כפונקציה של אורך הרשימה.

**שאלה 3 (15 נקודות)**

נדון בבעיית החיפוש הבאה:

הקלט לבעיה הוא רשימה **ממוינת** באורך N. ייתכן שיש ברשימה כפילויות; כלומר, איבר כלשהו יכול להופיע ברשימה יותר מפעם אחת. בהינתן איבר x, יש לבדוק אם x נמצא ברשימה.

אם x נמצא ברשימה, יש להחזיר את האינדקס **הגבוה ביותר** של איבר ברשימה השווה ל-x.

אם x לא נמצא ברשימה, יש להחזיר "לא".

כתבו אלגוריתם **יעיל** לפתרון הבעיה ונתחו את זמן ריצתו.

**שאלה 4 (30 נקודות)**

א. כתבו אלגוריתם המקבל כקלט מספר N, ומדפיס את כל המספרים הראשוניים בתחום 2..N.

האלגוריתם יפעל בשיטה הבאה: הקבוצה ההתחלתית היא קבוצת כל המספרים בתחום 2..N.
בשלב הראשון, האלגוריתם ימחק את כל המספרים המתחלקים ב-2 (פרט ל-2 עצמו).
בשלב הבא הוא ימחק את כל המספרים המתחלקים ב-3 (פרט ל-3 עצמו). לאחר מכן יימחקו כל הכפולות של 5 וכך הלאה. כלומר, בכל שלב האלגוריתם מוצא את המספר הקטן ביותר שלא נמחק ומוחק את כל הכפולות שלו. (שיטה זו נקראת **שיטת הנָפָה של אֶרָטוֹסְטֶנֶס**.)

ב. נסמן ב- $\pi(N)$ את מספר המספרים הראשוניים הקטנים או שווים ל-N (למשל, $\pi(10) = 4$, מפני שקיימים ארבעה מספרים ראשוניים הקטנים או שווים ל-10).

נסמן ב- $p_i$ את המספר הראשוני ה-i (כלומר, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ וכו').

ידוע שמתקיים: $\ln \ln N \cong \sum_{i=1}^{\pi(N)} \frac{1}{p_i}$.

השתמשו בשוויון זה כדי לחשב את סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שכתבתם בסעיף א'.

**שאלה 5 (20 נקודות)**

נתונה רשת של N מחשבים. כל אחד מהמחשבים יכול לשדר ולקלוט הודעות.

ניתן לתאר את רשת המחשבים באמצעות גרף בלתי מכוון, כך שכל מחשב מיוצג ע"י צומת בגרף.

בין שני צמתים בגרף תהיה קשת, אם ורק אם שני המחשבים המתאימים הם שכנים (כלומר, הם יכולים לשדר זה לזה). יש להעביר הודעה מאחד המחשבים ברשת לכל שאר המחשבים.

נתון שבכל מחזור זמן, כל אחד מהמחשבים יכול לשדר את ההודעה רק לאחד משכניו.

המטרה היא להעביר את ההודעה לכל שאר המחשבים ברשת במספר מינימלי של מחזורים.

א. **גרף מסלול** הוא גרף שבו לשני צמתים יש דרגה 1, ודרגת כל שאר הצמתים היא 2.

(**דרגה** של צומת בגרף בלתי מכוון היא מספר השכנים של הצומת.)

הוכיחו שאם הגרף המתאר את רשת המחשבים הוא גרף מסלול, אז לא ניתן להעביר את ההודעה לכל המחשבים ברשת בפחות מ- $N - 1$ מחזורים (במקרה הגרוע).

ב. גרף **שלם** הוא גרף שבו יש קשת בין כל שני צמתים. הוכיחו שאם הגרף המתאר את רשת המחשבים הוא גרף שלם, אז ניתן להעביר את ההודעה לכל המחשבים ברשת בזמן $\log_2 N$.

ניתן להניח שמספר המחשבים ברשת הוא חזקה שלמה של 2.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 13

**הקורס:** 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

**חומר הלימוד למטלה:** פרקים 7-9

**מספר השאלות:** 7 **משקל המטלה:** 9 נקודות

**סמסטר:** 2005א **מועד אחרון להגשה:** 17.12.2004

| |
|---|
| אנא שימו לב: |
| מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. |
| העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל. |

**שאלה 1 (10 נקודות)**

**קבוצה בלתי תלויה** בגרף $G = (V, E)$ היא תת-קבוצה $V'$ של $V$, כך שבין כל שני צמתים ב- $V'$ אין קשת ב-$E$.

בעיית **הקבוצה הבלתי תלויה** (the independent set problem) היא הבעיה הבאה:

**הקלט לבעיה:** גרף בלתי מכוון $G = (V, E)$ ומספר חיובי שלם $k$.

**השאלה:** האם יש ב-$G$ קבוצה בלתי תלויה בגודל $k$ ?

הוכיחו שבעיית הקבוצה הבלתי תלויה שייכת ל-NP.

יש לתאר מסמך אישור קצר ולהסביר איך ניתן לבדוק את המסמך בזמן פולינומיאלי.

**שאלה 2 (15 נקודות)**

מלכה במשחק השחמט יכולה לנוע בקווים ישרים או באלכסון.

בעיית $N$ **המלכות** דנה בשאלה הבאה:

האם ניתן להציב $N$ מלכות על-פני לוח משובץ בגודל $N \times N$, כך שאף אחת מהמלכות לא "תאיים" על מלכה אחרת (כלומר, אף מלכה לא תימצא במסלול התנועה של מלכה אחרת) ?

א. תארו רדוקציה מבעיית $N$ המלכות לבעיית הקבוצה הבלתי תלויה.

ב. ידוע שבעיית הקבוצה הבלתי תלויה היא NP-שלמה.

האם מקיום הרדוקציה ניתן להסיק שבעיית $N$ המלכות שייכת ל-NP ? נמקו את תשובתכם.

**שאלה 3 (20 נקודות)**

נדון בבעיה הבאה:

**הקלט לבעיה:** פסוק $\varphi$ בתחשיב הפסוקים.

**השאלה:** האם קיימות עבור $\varphi$ לפחות **שלוש** השמות מספקות ?

הוכיחו שהבעיה שלמה ב-NP.

**שאלה 4 (20 נקודות)**

להלן נתונות שתי גרסאות של בעיית נחש הדומינו במחצית העליונה של המישור האינסופי:

א. הקלט לבעיה: קבוצת מרצפות T ושתי משבצות V, W.

השאלה: האם **לא** קיים "נחש דומינו" של מרצפות מ-T המחבר בין V ל-W?

ב. הקלט לבעיה: קבוצת מרצפות T, מרצפת ספציפית t ושתי משבצות V ו-W.

השאלה: האם קיים "נחש דומינו" של מרצפות מ-T המחבר בין V ל-W והמתחיל במרצפת t?

הוכיחו שגם גרסאות אלה של הבעיה הן בלתי כריעות.

**שאלה 5 (10 נקודות)**

להלן נתון תרשים המעברים של מכונת טיורינג בעלת שני סרטים, שבה הראש הקורא-כותב של כל אחד מהסרטים יכול גם להישאר במקום.

המכונה מקבלת שני מספרים אונריים (גדולים מאפס) x ו-y.

המספר הראשון נתון על גבי הסרט הראשון והמספר השני נתון על גבי הסרט השני.

הראש הקורא-כותב של כל סרט ממוקם בהתחלה מול הסימן # שמשמאל למספר.

מצאו מה מחשבת המכונה והסבירו בקצרה את דרך פעולתה.

$(start, \#, \#) \rightarrow (M_R, \#, \#, R, R)$

$(M_R, 1, 1) \rightarrow (M_R, 1, 1, R, R)$

$(M_R, 1, \#) \rightarrow (M_L, 1, \#, S, L)$

$(M_R, \#, \#) \rightarrow (YES, \#, \#, S, S)$

$(M_R, \#, 1) \rightarrow (NO, \#, 1, S, S)$

$(M_L, 1, 1) \rightarrow (M_L, 1, 1, R, L)$

$(M_L, 1, \#) \rightarrow (M_R, 1, \#, S, R)$

$(M_L, \#, \#) \rightarrow (YES, \#, \#, S, S)$

$(M_L, \#, 1) \rightarrow (NO, \#, 1, S, S)$

**שאלה 6 (25 נקודות)**

כתבו תכנית מונים, אשר מקבלת מחרוזת ספרות המייצגת מספר עשרוני N, ובודקת אם המחרוזת היא פלינדרום.

יש לכתוב את התכנית במודל "המשופר" (ראו בעמוד 241 בספר), שבו מותר להשתמש גם בהוראות $X \leftarrow X \times 10$ ו- $X \leftarrow X / 10$.

**שאלה 7 (שאלת בונוס)**

להלן נתון אלגוריתם לפתרון בעיית תרמיל הגב בשלמים:

(1) הפעל על הקלט לבעיה את האלגוריתם החמדני והצב את הפתרון המוחזר ב-x.

(2) סמן את הפריט בעל הערך הגבוה ביותר ב- $v_{max}$.

(3) החזר את $\max(x, v_{max})$.

נסמן ב- OPT את הפתרון האופטימלי לבעיית תרמיל הגב בשלמים.

הוכיחו שערכו של הפתרון שמחזיר האלגוריתם הוא לפחות $\frac{OPT}{2}$.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 14

**הקורס:** 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

**חומר הלימוד למטלה:** פרקים 10-12

**מספר השאלות:** 6 **משקל המטלה:** 7 נקודות

**סמסטר:** 2005א **מועד אחרון להגשה:** 14.1.2005

| |
|---|
| אנא שימו לב: <br> מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. <br> העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל. |

**שאלה 1 (20 נקודות)**

נתבונן שוב בבעיית החיפוש שהוגדרה בממ"ן 12:

הקלט לבעיה הוא רשימה **ממוינת** באורך N. ייתכן שיש ברשימה כפילויות; כלומר, איבר כלשהו יכול להופיע ברשימה יותר מפעם אחת. בהינתן איבר x, יש לבדוק אם x נמצא ברשימה.

אם x נמצא ברשימה, יש להחזיר את האינדקס **הגבוה ביותר** של איבר ברשימה השווה ל-x.

אם x לא נמצא ברשימה, יש להחזיר "לא".

תארו אלגוריתם מקבילי, המשתמש ב-N מעבדים ופותר את הבעיה בזמן מקבילי $O(1)$ (כלומר, זמן **קבוע**, בלתי תלוי ב-N). הסבירו מדוע האלגוריתם שהצעתם הוא נכון.

**שאלה 2 (20 נקודות)**

נדון בפתרון לבעיית הקטע הקריטי עבור שני מעבדים.

הפתרון מבוסס על שימוש בשני משתנים מבוזרים $X_1$ ו- $X_2$.

להלן הפרוטוקול עבור $P_1$ (הפרוטוקול עבור $P_2$ הוא סימטרי – יש להחליף בין $X_1$ ו- $X_2$):

(1) בצע פעולות פרטיות עד שתרצה להיכנס לקטע הקריטי;

(2) חכה עד אשר $X_2$ הופך ל-לא;

(3) כן $\leftarrow X_1$;

(4) בצע את הקטע הקריטי;

(5) לא $\leftarrow X_1$;

(6) חזור לשורה (1);

א. מהו ההבדל בין פתרון זה לפתרון המופיע בספר?

ב. האם הפתרון נכון? הסבירו את תשובתכם.

ג. האם הפתרון יהיה נכון אם נחליף בין שורות (2) ו- (3) בפרוטוקול? הסבירו את תשובתכם.

**שאלה 3 (10 נקודות)**

פרופ׳ כלומסקי עיין בספר מתמטיקה עתיק וגילה בו את המשפט הבא (משפט וילסון, 1770):

״מספר N הוא ראשוני אם ורק אם הוא מחלק את $(N-1)!+1$.״

פרופ׳ כלומסקי שמח על הגילוי והציע להשתמש במשפט לצורך בדיקת ראשוניות (ע״י ביצוע פעולת החילוק ובדיקת השארית המתקבלת).

חוו דעתכם (בצורה מנומקת) על הצעתו של הפרופסור.

**שאלה 4 (10 נקודות)**

איה משתמשת במערכת ההצפנה RSA. המפתח הציבורי של איה הוא: $(Publ_A, Prod_A) = (7, 187)$.

נניח שגיליתם דרך לפרק מספר לגורמים בזמן סביר. מצאו את המפתח הסודי של איה.

**שאלה 5 (30 נקודות)**

במדינת רוריטניה יש רשת של ערים וכבישים המחברים בין הערים.

מכיוון שרוריטניה נמצאת במלחמה מתמדת עם שכנותיה, הוצאות הביטחון שלה הן גבוהות במיוחד. כדי לממן את הוצאות הביטחון, הוחלט במיניסטריון הכלכלה להפוך את כל הכבישים במדינה לכבישי אגרה ולמכור זיכיונות לתפעול הכבישים לחברות פרטיות.

במדינת רוריטניה יש ארבע חברות המעוניינות לתפעל כבישי אגרה.

ראש מיניסטריון הכלכלה החליט לחלק את הכבישים בין ארבע החברות, אך הוא קבע דרישה נוספת: כל שני כבישים היוצאים מאותה עיר יוקצו לחברות שונות. (המטרה היא להשאיר בידי כל תושב את החופש לבחור למי מארבע החברות ברצונו לשלם.)

השאלה היא, אם ניתן להקצות את הכבישים לארבע החברות, כך שהדרישה הנ״ל תתקיים.

א. הציגו את הבעיה כבעיה בגרפים.

ב. מיניסטריון הכלכלה מוכן לשלם $1000\$$ למי שיוכל להוכיח שיש פתרון לבעיה.

במקרה זה, יינתן תשלום נוסף של $5000\$$ למי שיציג פתרון אפשרי.

בהנחה שיש פתרון לבעיה – הסבירו כיצד ניתן לזכות ב-$1000\$$ מבלי לאבד את הסיכוי לזכות ב-$5000\$$. (כלומר, המטרה היא לשכנע את פקידי מיניסטריון הכלכלה שקיימת חלוקה של הכבישים העונה על הדרישות, מבלי לגלות להם כל מידע על אופן החלוקה!)

**שאלה 6 (10 נקודות)**

בשנת 2003 נערך דו-קרב בשחמט בין אלוף העולם באותה עת, גארי קספרוב, לבין תוכנת המחשב הישראלית "Deep Junior". הדו-קרב הסתיים בתיקו 3:3.

מדוע לדעתכם, המחשב הצליח להתמודד מול קספרוב כשווה מול שווה, אך לא הצליח עד היום לעבור את מבחן טיורינג? האם יש סיכוי שמצב עניינים זה ישתנה בעתיד הנראה לעין?