אלגוריתמים – תרגיל 5

תאריך הגשה: 19.1.06

1. נתונה רשת זרימה $G=(V,E)$ עם מקור s ובור t, וקיבולים שלמים על הקשתות, ונתונה זרימה מקסימלית f, כך שלכל $u,v\in V$, $f(u,v)$ שלם.
   א. נניח שמגדילים את הקיבול של קשת מסוימת e ב- 1. תארו אלגוריתם יעיל לעידכון הזרימה המקסימלית. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.
   ב. נניח שמקטינים את הקיבול של קשת מסוימת e ב- 1. תארו אלגוריתם יעיל לעידכון הזרימה המקסימלית. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

2. נתונה רשת זרימה שבה בנוסף לחסמים העליונים $c(e)$ על הקשתות יש גם חסם תחתון $b(e)$ על כל קשת, כלומר הזרימה בקשת e, $f(e)$, צריכה לקיים $b(e)\le f(e)\le c(e)$. מהם השינויים הנדרשים באלגוריתם של Ford-Fulkerson כדי להתאימו למציאת זרימה מקסימלית תחת תנאים אלה, כאשר נתונה זרימה חוקית ברשת? הוכיחו את נכונות האלגוריתם.

3. נתונה רשת זרימה עם מקור s ובור t, שבה, בנוסף לקיבולים $c(e)$ של הקשתות, יש גם קיבול $c'(v)$ לכל קודקוד פרט ל- s ו- t. תארו אלגוריתם יעיל למציאת זרימה מקסימלית ברשת כזו. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

4. הוכיחו את משפט מנגר עבור קודקודים:
יהי $G=(V,E)$ גרף (מכוון או לא), ו- $s,t\in V$, ונניח שאין בגרף קשת (s,t). אז המספר המקסימלי של מסלולים זרים בקודקודים מ- s ל- t שווה למספר המינימלי של קודקודים שצריך להסיר מ- G כדי לנתק את t מ- s.

5. תהי S קבוצה בת n איברים, ויהיו $A_1,A_2,\ldots,A_k$ ו- $B_1,B_2,\ldots,B_k$ שתי חלוקות של S ל- k תתי קבוצות זרות (כלומר, לכל $1 \le i\neq j \le k$, $A_i\cap A_j=\emptyset$ ו- $B_i\cap B_j=\emptyset$, ו- $A_1\cup\ldots\cup A_k = B_1\cup\ldots\cup B_k = S$). תארו אלגוריתם יעיל הבודק אם קיימת קבוצה של k איברים, שמכילה איבר מכל A_i ומכל B_i. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

6. במסיבה משתתפים n בנים ו- n בנות. כל בן מכיר בדיוק k בנות, וכל בת מכירה בדיוק k בנים, כאשר $k>0$, ויחס ההכרות הוא הדדי. הוכיחו:
   א. שכולם יכולים להשתתף בריקוד זוגות שבו כל זוג מורכב מבן ובת שמכירים זה את זה.
   ב. שניתן לארגן k ריקודים, כך שכולם ירקדו בדיוק פעם אחת עם כל מי שהם מכירים.