נפתר ע"י צחי אבנור

<u>פתרון למבחן גמר 21.1.99 מועד 89</u>

שאלה 1:

לא פתרתי אותה מאחר ו"סגור של רלציה" אינו בחומר לבחינה.

שאלה 2:

(א) בספר הוכח ש $|N|=|Z|$ (שאלה 4.4). לכן קיימת פונקציה f חח"ע מ N על Z. נגדיר את יחס הסדר הבא ונוכיח שהוא אכן סדר מלא ללא איבר מינימלי וללא איבר מקסימלי. נגדיר את R כך: $n_1Rn_2 \Leftrightarrow f(n_1)\le f(n_2)$. נוכיח ש R סדר מלא: רפלקסיבי: $nRn \Leftrightarrow f(n)\le f(n)$ ומאחר ש $\le$ רפלקסיבי גם R רפלקסיבי. באתו אופן מוכיחים רפלקסיביות ואנטי-סימטריות. כנ"ל מוכיחים ש R סדר-מלא. נוכיח כעת שאין איבר מינימלי (ראשון) תחת R: נניח בשלילה שקיים איבר כזה, a. ב Z מתקיים: $f(a)-1\le f(a)$. מאחר ש f על קיים b כך ש $f(b)=(f(a)-1)$. ולפי הגדרת R מתקיים bRa. אם כן מצאנו איבר שהמינימלי מכסה אותו בסתירה לכך ש a מינימלי. את אותו תהליך מפעילים על b המינימלי החדש שמצאנו ומאחר ש Z אינסופית אנו מגלים שאין איבר מינימלי. ההוכחה שאין איבר מקסימלי אנלוגית לחלוטין, רק שנתבסס על הקשר הבא ב Z: $x\le x+1$.

(ב) שאלה זו נשאלה בממ"ן 13 שאלה 3. התשובה היא שאפשר. הרעיון: מאחר ש $|N|=|Q|$ אפשר למצוא פונקציה חח"ע ועל מ N על Q ומאחר שאת הרציונלים ניתן לסדר בסדר צפוף, נסדר את N בסדר הבא: $n_1Sn_2 \Leftrightarrow f(n_1)\le f(n_2)$. כעת נותר להוכיח באופן פורמלי ש S סדר צפוף ומלא.

שאלה 3:

(א) נחלק לשלושה מקרים: (1) מונטגיו עומד בראש התור. מלפניו נבחר 1 מ 6 הרגילים. נותר לנו לסדר 5 רגילים ו4 בני קפולט באופן חופשי (הנחה: בני קפולט שונים זה מזה, כנ"ל הרגילים). נקבל לפי עיקרון הכפל ונוסחת התמורות: $C(6,1)\cdot 9!=6\cdot 9!$. (2) מונטגיו עומד בסוף התור. באותו אופן $C(6,1)\cdot 9!=6\cdot 9!$. (3) מונטגיו עומד באמצע התור. נבחר רגילים מלפניו מאחוריו: $C(6,1)C(5,1)=6\cdot 5=30$ (יש חשיבות לסדר). את הסנדוויץ' של מונטגיו נסדר כעת יחד עם 4 רגילים ו 4 בני קפולט: $30\cdot 9!$. כעת נחשב את סכום שלושת המקרים: $42\cdot 9!$.

(ב) נסמן: מ (קפולט או מונטגיו), ר (רגיל) – (מקום ריק). נסדר אותם בשורה: -ר-ר-ר-ר-ר-ר- . ראשית יש !6 תמורות של הרגילים בינם לבין עצמם. כעת נפזר את 5 בני המשפחות אל 7 התאים. כלומר: נבחר 5 תאים עם חשיבות לסדר. כלומר: מס' חליפות. לכן לפי עקרון הכפל נקבל

$$6!P(7,5)=6!\cdot\frac{7!}{(7-5)!}=6!7!/2!=181440.$$

שאלה 4:

קל לראות ש $b_n=d_n$ שכן הכנסת 0 או 1 ל x_k קובעת אם k יהיה בסכום. נשים לב שכל ה k שונים זה מזה. וזה הרי מספר הדרכים להציג את n כסכום של טבעיים שונים זה מזה.

לפי הדיון בספר קומבינטוריקה בע"מ 132 אנו רואים ש $a_n=c_n$.

לפי שאלה 7.20 אנו רואים שהפונקציה היוצרת של e_n למעשה מתארת את מספר האפשרויות להציג את n כסכום של מספרים טבעיים חיוביים השונים זה מזה וזה הרי ההגדרה של b_n. לכן $b_n=d_n=e_n$.

שאלה 5:

פתרתי את סעיפים א' ו ב' בלבד כי תחשיב הפרדיקטים לא נכלל בחומר לבחינה.
סעיף א': נעזר בזהות $\alpha \vee \beta = (\sim(\alpha)) \to (\beta)$ בע"מ 33 בספר לוגיקה ונרשום
$\chi = (\sim((P_1) \to (P_2))) \to ((\sim(P_0)) \to (P_2))$. להלן עץ הבנייה:

$\chi = (\sim((P_1) \to (P_2))) \to ((\sim(P_0)) \to (P_2))$			
$\sim((P_1) \to (P_2))$		$(\sim(P_0)) \to (P_2)$	
$(P_1) \to (P_2)$		$\sim(P_0)$	P_2
P_1	P_2	P_0	

סעיף ב': נבנה לוח אמת של הפסוק (נשתמש בכתיב המקוצר):

P_0	P_1	P_2		P_1	→	P_2	או	$\sim P_0$	→	P_2
T	T	T		T	T	T	T	F	T	T
T	T	F		T	F	F	T	F	T	F
T	F	T		F	T	T	T	F	T	T
T	F	F		F	T	F	T	F	T	F
F	T	T		T	T	T	T	T	T	T
F	T	F		T	F	F	F	T	F	F
F	F	T		F	F	T	T	T	T	T
F	F	F		F	T	F	T	T	F	F

הפסוק הנ"ל לא טאוטולוגיה ולא סתירה.

שאלה 6:

לפי טענה בשאלה 3.24 חיתוך של שתי תת-חבורות של G הוא גם תת-חבורה של G. לפי משפט לגרנז' הסדר של $H_1 \cap H_2$ מחלק את הסדר של H_1 ואת הסדר של H_2. אבל 124 ו 125 (הסדרים של התת-חבורות הנ"ל) זרים זה לזה, כלומר המחלק הגדול ביותר המשותף להם הוא 1. מכאן נובע שהסדר של $H_1 \cap H_2$ הוא 1 ומאחר שתת-חבורה שומרת על היחידה של G, נובע שקיים בה e ומכיוון שסידרה 1 לא קיימים בה איברים אחרים פרט אליו. לכן $H_1 \cap H_2 = \{e\}$.