תשובה 1

כיוון אחד: נניח $A \subseteq B$ **או** $B \subseteq A$.

מקרה (*i*): $A \subseteq B$.

במקרה זה, לפי טענה באמצע עמ' 14 בספר, $A \cup B = B$.

לכן $(A \cup B) \times (A \cup B) = B \times B$.

מצד שני, כאשר $A \subseteq B$, מהגדרת כפל קבוצות מקתבל באופן מיידי $A \times A \subseteq B \times B$.

לכן, שוב לפי אותה טענה באמצע עמ' 14 בספר, $(A \times A) \cup (B \times B) = B \times B$.

קיבלנו ששני האגפים שווים ל- $B \times B$ ולכן הם שווים זה לזה.

מקרה (*ii*) : $B \subseteq A$. ההוכחה זהה להוכחת מקרה (*i*) בהחלפה בין A,B בכל מקום.

כיוון שני: נניח שהתנאי $A \subseteq B$ **או** $B \subseteq A$ **אינו** מתקיים,

כלומר A **אינה** חלקית ל- B **וגם** (!) B **אינה** חלקית ל- A.

משמע קיים $a \in A$, $a \notin B$ וקיים $b \in B$, $b \notin A$.

מהגדרת כפל קבוצות, $(a,b) \in (A \cup B) \times (A \cup B)$, אך $(a,b) \notin (A \times A) \cup (B \times B)$.

לכן $(A \cup B) \times (A \cup B) \neq (A \times A) \cup (B \times B)$.

תשובה 2

א. **נכון:** R רפלקסיבי פירושו $I_A \subseteq R$. נתון $R \subseteq S$. לכן $I_A \subseteq S$.

ב. **לא נכון,** למשל $S = I_A$ רפלקסיבי , $R = \{(1,1) , (2,2)\}$ אינו רפלקסיבי, ו- $R \subseteq S$.

ג. **לא נכון**, למשל $R = \varnothing$ הוא סימטרי, $S = \{(1,2)\}$ אינו סימטרי, ומתקיים $R \subseteq S$.

ד. **לא נכון,** למשל $R = \{(1,2)\}$ אינו סימטרי, $S = \{(1,2) , (2,1)\}$ הוא סימטרי, ו- $R \subseteq S$.

ה. **לא נכון,** למשל $R = \{(1,2)\}$ הוא אנטי-סימטרי, $S = \{(1,2) , (2,1)\}$ אינו אנטי-סימטרי,

ומתקיים $R \subseteq S$ (אגב אפשר גם לקחת $R = \varnothing$ בדוגמא זו!).

ו. **נכון**: יהי S יחס אנטי-סימטרי ויהי $R \subseteq S$. נוכיח ש- R אנטי-סימטרי.

עלינו להראות שאם $(x,y) \in R$ וגם $(y,x) \in R$ אז $x = y$.

מכיוון ש- $R \subseteq S$, מההנחה $(x,y) \in R$, $(y,x) \in R$ נובע $(x,y) \in S$, $(y,x) \in S$.

נתון ש- S אנטי-סימטרי, לכן $x = y$.

ז. **לא נכון.** דוגמא נגדית: $R = \varnothing$, $S = \{(1,2)\}$.

ח. **נכון**: יהי K היחס הנתון בסעיף זה. נחשב את K^{-1} :

לפי שאלה 2.6ג סעיף 3 (עמ' 36 בספר),

$$K^{-1} = ((R^{-1} \cap S) \cup (S^{-1} \cap R))^{-1} = (R^{-1} \cap S)^{-1} \cup ((S^{-1} \cap R))^{-1}$$

לפי סעיף ג 2 באותה שאלה, יחד עם סעיף א שם,

$$= (R \cap S^{-1}) \cup (S \cap R^{-1})$$

ולפי חילופיות החיתוך וחילופיות האיחוד

$$= (R^{-1} \cap S) \cup (S^{-1} \cap R) = K$$

הראינו $K = K^{-1}$, לכן K סימטרי (זו הגדרת יחס סימטרי !)

ט. **נכון**. נובע ממשפט 2.12 בעמ' 50 בספר, כאשר $R = S$.

י. **לא נכון.** דוגמא נגדית: $R = \{(1,2)\}$ אינו סימטרי אבל $R^2 = \varnothing$ הוא סימטרי.

תשובה 3

א. R **רפלקסיבי**: לכל $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, n מתחלק בעצמו ללא שארית, כלומר $(n,n) \in R$.

R **אינו סימטרי**: למשל $(2,1) \in R$ אך $(1,2) \notin R$.

מכיון ש- R אינו סימטרי, הוא **אינו** יחס שקילות.

R הוא **אנטי-סימטרי**: לכל $m,n \in \mathbf{N} - \{0\}$, אם m מתחלק ב- n וגם n מתחלק ב- m

אז $n = m$ (תכונה ידועה. אפשר להוכיח אותה למשל מתוך כך שאם m מתחלק ב- n אז $n \le m$, והיחס $\le$ הוא אנטי-סימטרי).

שימו לב שמתוך כך ש- R אנטי-סימטרי לא נובע שהוא אינו סימטרי !

ראו דוגמאות בעניין זה בשאלון רב-ברירה בנושא יחסים, באתר הקורס.

R **טרנזיטיבי**: אם m מתחלק ב- n , משמע $m = n \cdot a$ עבור a טבעי חיובי כלשהו.

אם n מתחלק ב- k משמע $n = k \cdot b$ עבור b טבעי חיובי כלשהו.

ביחד נקבל $m = k \cdot b \cdot a$, לכן m מתחלק ב- k .

ב. הסגור הסימטרי של R הוא $R \cup R^{-1}$.

בסעיף הקודם ראינו ש- R רפלקסיבי, כלומר $I_A \subseteq R$. כעת, $R \subseteq R \cup R^{-1}$

לכן גם $I_A \subseteq R \cup R^{-1}$, כלומר גם $R \cup R^{-1}$ **רפלקסיבי** (ובקיצור: לפי שאלה 2א בממ"ן זה...).

$R \cup R^{-1}$ **סימטרי** לפי שאלה 2.23 בעמ' 50 בספר הלימוד.

$R \cup R^{-1}$ **אינו** אנטי-סימטרי, כי $(1,2)$ וגם $(2,1)$ שייכים אליו, ו- $2 \neq 1$.

$R \cup R^{-1}$ **אינו** טרנזיטיבי: למשל $(2,1) \in R \cup R^{-1}$, $(1,3) \in R \cup R^{-1}$ (כי $(3,1) \in R$),

אך $(2,3) \notin R \cup R^{-1}$.

ג.   מהגדרת S ומתכונות ידועות של כפל במספרים ממשיים, $(x,y)\in S$ אם"ם x,y בעלי אותו סימן (שניהם חיוביים או שניהם שליליים). נחלק אפוא את הממשיים השונים מאפס לשתי מחלקות: החיוביים והשליליים. כאמור, $(x,y)\in S$ **אם"ם** x,y **שייכים לאותה מחלקה** של החלוקה הנ"ל.

כעת, לפי משפט 2.19 בעמ' 61 בספר, S הוא יחס שקילות, המתאים לחלוקה זו !

לכן הוא **רפלקסיבי , סימטרי וטרנזיטיבי**.

שימו לב שלא בדקנו את 3 התכונות המאפיינות יחס שקילות, אלא הוכחנו שזהו יחס שקילות ע"י כך שמצאנו את החלוקה המתאימה, והראינו שמתקיימים תנאי משפט 2.19 .

זוהי דרך לגיטימית לגמרי.

לבסוף, S **אינו** אנטי-סימטרי כי $(1,2)\in S$, $(2,1)\in S$ ו- $1\neq 2$.

תשובה 4

א. **לא נכון**. דוגמא: היחס $R=\{(1,2)\}$ מעל $A=\{1,2\}$.

R טרנזיטיבי (מדוע?) , לכן $R=t(R)$, ויש ב- R רק זוג סדור אחד.

ב. **לא נכון**. דוגמא: יהי $R=\{(1,2),(2,3)\}$ מעל קבוצת הטבעיים $\mathbf{N}$.

R אינו ריק ואינו טרנזיטיבי.

הסגור הטרנזיטיבי שלו הוא $t(R)=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$ **(מדוע?)** ,

והוא מכיל רק 3 זוגות סדורים.

תשובה 5

הטענה אינה נכונה. דוגמא נגדית: תהי $A=\{1,2,3\}$ ויהי $R=\begin{pmatrix}1&2&3&1&2\\1&2&3&2&1\end{pmatrix}$.

R הוא יחס שקילות - זהו יחס השקילות המתקבל מהחלוקה הבאה של A: $\{\{1,2\},\{3\}\}$.

ממנו נקבל $R^*=\begin{pmatrix}1&2&3&1&3&2&3\\1&2&3&3&1&3&2\end{pmatrix}$.

יחס זה אינו יחס שקילות כי הוא אינו טרנזיטיבי (הראו זאת!).

איתי הראבן