

מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.

* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.

* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.

* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המתברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

6 נק') א. להלן ציטוט משיר ישן של אילן ואילנית:

P : לכל אדם, כוכב יש בשמיים, כוכב המתגלה עם רדת יום.

(להסיר ספק, הביטוי "כוכב יש בשמיים" הוא דרך פואטית לומר "יש כוכב בשמיים")

איזה מהטענות הבאות שקולה לשלילת P ?

- [1] לכל אדם כוכב יש בשמיים, כוכב שאינו מתגלה עם רדת יום.
- [2] לכל אדם, אם יש לו כוכב בשמיים אז הכוכב הזה לא מתגלה עם רדת יום.
- [3] לאף אדם אין בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום.
- [4] יש אדם שאין לו בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום.
- [5] יש בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום אבל אינו שייך לאף אדם.

7 נק') ב. R היא קבוצת המספרים הממשיים, Z היא קבוצת המספרים השלמים.

נסמן $A = (R \times Z) \cup (Z \times R)$, ויהי B המשלים של A ב- $R \times R$.

עוצמת B היא:

- [1] 0
- [2] מספר סופי כלשהו שאינו 0
- [3] \aleph_0
- [4] C
- [5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

6 נק') ג. בגרף פשוט G , מסלול מסוים הוא בעת ובעונה אחת מעגל אוילר ומעגל המילטון.

מכאן נובע:

- [1] G הוא מעגל פשוט.
- [2] G הוא מעגל, אבל הוא לא חייב להיות מעגל פשוט.
- [3] G הוא גרף פשוט, אבל הוא לא חייב להיות מעגל.
- [4] G הוא גרף בעל מספר זוגי של צמתים.
- [5] לא ייתכן גרף כזה.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

השאלה מתייחסת לפעולת ההפרש הסימטרי \oplus , שהוגדרה בכרך "תורת הקבוצות" בשאלה 1.22 בעמ' 27.

א. תהיינה X, Y קבוצות המוכלות בקבוצה אוניברסלית כלשהי.

$$\text{הוכיחו: } (X \oplus Y)' = (X \cap Y) \cup (X' \cap Y')$$

ב. נגדיר יחס β מעל $P(N)$:

$$\text{עבור } X, Y \subseteq N : (X, Y) \in \beta \text{ אם } 1 \notin X \oplus Y$$

הוכיחו ש- β הוא יחס שקילות מעל $P(N)$.

ג. לכמה מחלקות שקילות מחלק β את $P(N)$? הוכיחו. תארו את המחלקות.

שאלה 3

תהיינה $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

מיצאו כמה פונקציות $f: A \rightarrow B$ מקיימות את התנאי:

שלוש האותיות a, b, c נמצאות בתמונה של f

(במילים אחרות, כל אחת מהאותיות a, b, c מתקבלת על-ידי הפעלת f על אבר כלשהו של A).

ייתכן בהחלט שאברים נוספים ב- B מתקבלים גם הם.

דוגמאות:

(i) הפונקציה השולחת את כל אברי A אל האות b אינה מקיימת את התנאי.

(ii) הפונקציה f המוגדרת כך: $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = b$, $f(4) = g$, $f(5) = c$

מקיימת את התנאי.

כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה. אין הכרח להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 4

יהי a_n מספר הסדרות (או המחרוזות) באורך n , שאבריהן לקוחים מהקבוצה $\{a, b, c, 1, 2\}$ והמקיימות בעת ובעונה אחת את כל התנאים הבאים:
לא מופיע בסדרה הרצף $a1$, לא מופיע הרצף $b2$, ולא מופיע רצף של שתי ספרות.

דוגמאות לסדרות חוקיות באורך 4:

$1aaa$, $abbl$, $aaaa$ (הרצף $1a$ מותר).

דוגמאות לסדרות לא חוקיות באורך 4:

$aaal$ (הופעה של $a1$), $11cc$ (רצף של ספרות), $c121$ (רצף של ספרות).

(10 נק') א. מצאו יחס נסיגה עבור a_n (נמקו!) ומצאו תנאי התחלה מספיקים.

(13 נק') ב. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור a_n .

(4 נק') ג. חשבו בשתי דרכים את a_4 .

שאלה 5

תהי $A = \{1, 2, 3, 4\}$. G הוא גרף פשוט המוגדר כך: קבוצת הצמתים של G היא $P(A)$. למשל הקבוצה $\{1, 3, 4\}$ היא צומת של G והקבוצה הריקה היא צומת אחרת של G .

בין צמתים Y, X של G יש קשת אם ורק אם

$$X \subseteq Y \text{ ו- } 1 \leq |Y - X| \leq 2 \quad \text{או} \quad Y \subseteq X \text{ ו- } 1 \leq |X - Y| \leq 2.$$

למשל, יש קשת בין $\{1\}$ ל- $\{1, 3\}$, יש קשת בין $\{1\}$ ל- $\{1, 2, 3\}$.

אין קשת בין $\{1\}$ ל- $\{1, 2, 3, 4\}$ ואין קשת בין $\{1\}$ ל- $\{2, 3\}$.

א. לכל אחד מחמשת הצמתים הבאים, חשבו את הדרגה שלו:

$$\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}$$

ב. חשבו את מספר הקשתות ב- G .

ג. הוכיחו ש- G אינו גרף דו-צדדי.

ד. הוכיחו ש- G אינו מישורי.

הערה:

מטעמי סימטריה מובן שאם X, Y הם צמתים ב- G ו- $|X| = |Y|$ אז $\deg(X) = \deg(Y)$.

ניתן להסתמך על טענה זו ללא הוכחה.

בהצלחה!