ממ"ן 12 – פתרון שאלה 1

א'

$T(n) = 8T(n/16) + \sqrt{n+4}$

$a = 8\,,\ b = 16\,,\ \log_b a = 3/4\,,\ f(n) = \sqrt{n+4} = \Theta(n^{1/2}) = O(n^{3/4-\varepsilon})\,,\ 0 < \varepsilon < 1/4$

משפט האב, מקרה 1 : $T(n) = \Theta(n^{3/4})$

ב'

$T(n) = 49T(n/7) + n^2 + n + 1$

$a = 49\,,\ b = 7\,,\ \log_b a = 2\,,\ f(n) = n^2 + n + 1 = \Theta(n^2)$

משפט האב, מקרה 2 : $T(n) = \Theta(n^2 \cdot \lg n)$

ג'

$T(n) = 9T(n/3) + n^4 + 1$

$a = 9\,,\ b = 3\,,\ \log_b a = 2\,,\ f(n) = n^4 + 1 = \Theta(n^4)$

הפונקציה $f(n)$ רגולרית (ראו את מדריך הלמידה, פרק ג')

משפט האב, מקרה 3 : $T(n) = \Theta(n^4)$

ד'

$$T(n) = T(n-10) + \lg n + 10$$

בעזרת עץ הרקורסיה, או בחישוב ישיר:

$$T(n) = T(n-10) + \lg n + 10$$

$$T(n-10) = T(n-20) + \lg(n-10) + 10$$

$$\ldots$$

$$T(n-(\lfloor n/10 \rfloor -1)\cdot 10) = T(n-(\lfloor n/10 \rfloor \cdot 10) + \lg(n-(\lfloor n/10 \rfloor -1)\cdot 10) + 10$$

ולכן,

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-\lfloor n/10 \rfloor \cdot 10) + \lg n + \lg(n-10) + \ldots + \lg(n-(\lfloor n/10 \rfloor -1)\cdot 10) + (\lfloor n/10 \rfloor -1)\cdot 10 \\ &= \Theta(1) + \sum_{i=1}^{\lfloor n/10 \rfloor} \lg(n-(i-1)\cdot 10) + \Theta(n) \\ &= \Theta(n) + \sum_{i=1}^{\lfloor n/10 \rfloor} (\lg(n/10-(i-1)) - \lg 10) \\ &= \Theta(n) + \sum_{i=1}^{n/10} \lg i = \Theta(n \cdot \lg n) \end{aligned}$$

ה'

$$T(n) = n\sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + n^3 \cdot \lg^2 n$$

מחלקים את שני צידי המשוואה ב- n^3 ומקבלים:

$$\frac{T(n)}{n^3} = \frac{T(\sqrt{n})}{n\sqrt{n}} + \lg^2 n$$

מבצעים את החלפת המשתנים $n = 2^m$, $m = \lg n$; מסמנים $S(m) = \frac{T(2^m)}{2^{3m}}$ ומגיעים לנוסחת הנסיגה $S(m) = S(m/2) + m^2$. משיטת האב, מקרה 3, מתקבל הפתרון $S(m) = \Theta(m^2)$. מזה נובע $\frac{T(n)}{n^3} = \Theta(\lg^2 n)$ ופתרון הנוסחה המקורית $T(n) = \Theta(n^3 \cdot \lg^2 n)$.