

פתרונות לממ"ח 01 - 2019 - 20425

1. מסובבים חמש פעמים סביבון תקין בעל 4 פאות. לפיכך: $n(S) = 4^5$
 כדי שכל התוצאות תתקבלנה, צריך שתוצאה אחת (מתוך ה-4) תתקבל פעמיים, וכל יתר התוצאות תתקבלנה פעם אחת כל אחת. לפיכך, נבחר את התוצאה שתתקבל פעמיים, ואת הסיבובים שבהם היא תתקבל, ולבסוף נסדר את שאר התוצאות. ומכאן נקבל:

$$\frac{4 \cdot \binom{5}{2} \cdot 3!}{4^5} = \frac{240}{1,024} = \frac{15}{64} = 0.234375$$
2. נעזר במאורע המשלים, שהתוצאה 3 לא מתקבלת בכלל או שהתוצאה 3 מתקבלת בדיוק פעם אחת, ונקבל:

$$1 - \frac{3^5}{4^5} - \frac{5 \cdot 3^4}{4^5} = 1 - \frac{243 + 405}{1,024} = \frac{47}{128} = 0.3672$$
3. עלינו למנות את מספר האפשרויות שב-5 הסיבובים כל התוצאות מתקבלות, כך שבשני הסיבובים הראשונים התוצאות שונות זו מזו. ייתכנו שני מקרים:
 - התוצאה שמתקבלת פעמיים היא אחת משתי התוצאות שהתקבלו בשני הסיבובים הראשונים
 - התוצאה שמתקבלת פעמיים איננה אחת משתי התוצאות שהתקבלו בשני הסיבובים הראשונים
 לפיכך:

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot \binom{3}{1} \cdot 2 \cdot 2! + 4 \cdot 3 \cdot \binom{3}{2} \cdot 2!}{4^5} = \frac{3 \cdot \binom{3}{1} \cdot 2 + 3 \cdot \binom{3}{2}}{2 \cdot 4^3} = \frac{18 + 9}{128} = \frac{27}{128} = 0.2109$$
4. נמנה את מספר האפשרויות שבהן מתקבלות בדיוק שתיים מהתוצאות. יש $\binom{4}{2}$ אפשרויות לבחור את שתי התוצאות ואח"כ צריך להבטיח שבכל הסיבובים התוצאות הללו תתקבלנה, אך לא רק אחת מהן. לפיכך:

$$\frac{\binom{4}{2} \cdot (2^5 - 2)}{4^5} = \frac{6 \cdot 30}{1,024} = \frac{45}{256} = 0.1758$$
5. יואב חייב לבחור אחד מ-10 מקומות ואילו רועי חייב להתיישב לצידו. לפיכך:

$$\frac{10 \cdot 1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{9}$$
6. נבחר 3 שולחנות ו-3 זוגות אחים, נתאים בין זוגות האחים לשולחנות ונמקם את האחים בשולחנות שהותאמו להם. אחר-כך נושיב את 4 הילדים שנותרו, כך שכל שני אחים יישבו בשולחנות שונים. נקבל:

$$\frac{\binom{5}{3} \binom{5}{3} \cdot 3! \cdot 2^3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2}{10!} = \frac{4}{189} = 0.0212$$
7. נחשב את הסתברות המאורע המשלים, ששניהם יושבים על כסאות ירוקים:

$$1 - \frac{5 \cdot 4}{10 \cdot 9} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$
8. נבחר ילד אחד מכל זוג אחים (2^5 אפשרויות) ואת 5 הילדים הנבחרים נושיב על הכסאות האדומים ($5!$ אפשרויות). לבסוף נושיב את 5 הילדים הנותרים על הכסאות הירוקים ($5!$ אפשרויות). נקבל:

$$\frac{2^5 \cdot (5!)^2}{10!} = \frac{8}{63}$$
9. על הכסא הירוק יכול לשבת כל אחד מ-10 הילדים ועל הכסא האדום חייב לשבת אחיו. לפיכך:

$$\frac{10 \cdot 1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{9}$$

10. נמנה את מספר התוצאות השונות שיכולות להתקבל, באמצעות הפרדה למקרים המוגדרים לפי מספר הקוביות הלבנות בתוצאה: בין 0 קוביות לבנות ל-4 קוביות לבנות.

נבחרו 0 קוביות לבנות – יש 2 אפשרויות לבחירת הקוביות הצבעוניות: 3 כח' / 1 אד' / 2 כח' + 2 אד'
 נבחרו 1 קוביות לבנות – יש 3 אפשרויות לבחירת הקוביות הצבעוניות: 3 כח' / 2 כח' + 1 אד' / 1 כח' + 2 אד'
 נבחרו 2 קוביות לבנות – יש 3 אפשרויות לבחירת הקוביות הצבעוניות: 2 כח' / 1 כח' + 1 אד' / 2 אד'
 נבחרו 3 קוביות לבנות – יש 2 אפשרויות לבחירת הקוביות הצבעוניות: 1 כח' / 1 אד'
 נבחרו 4 קוביות לבנות – אין קוביות צבעוניות
 ומכאן, שבסך-הכל יש 11 תוצאות שונות למראה.

11. יש שלוש אפשרויות להרכב הצבעים של הקוביות בתוצאה: 2 לב' + 2 כח' / 2 לב' + 2 אד' / 2 כח' + 2 אד'

$$\frac{\binom{25}{2}\binom{3}{2} + \binom{25}{2}\binom{2}{2} + \binom{3}{2}\binom{2}{2}}{\binom{30}{4}} = \frac{1,203}{27,405} = \frac{401}{9,135} = 0.0439$$

לפיכך:

12. נסדר את הקוביות הלבנות בשורה (!25 אפשרויות), נבחר ביניהן ו/או משני צידי השורה 5 מקומות לקוביות הצבעוניות ($\binom{26}{5}$ אפשרויות), ולבסוף נמקם בהם את הקוביות הצבעוניות (!5 אפשרויות).

$$\frac{25! \cdot \binom{26}{5} \cdot 5!}{30!} = 0.4616$$

נקבל:

13. נסדר את הקוביות הלבנות במעגל (!24 אפשרויות), נבחר ביניהן 5 מקומות לקוביות הצבעוניות ($\binom{25}{5}$ אפשרויות), ולבסוף נמקם בהם את הקוביות הצבעוניות (!5 אפשרויות).

$$\frac{24! \cdot \binom{25}{5} \cdot 5!}{29!} = 0.4474$$

נקבל:

14. נניח שהאות ד ממוקמת במקום הרביעי, ונמקם את האות ו באחד מ-5 מקומות אפשריים.

$$\frac{1 \cdot 5}{22 \cdot 21} = \frac{5}{462} = 0.0108$$

נקבל:

15. נסמן ב- A את המאורע שהמילה "מערה" מופיעה ברצף האותיות וב- B את המאורע שהמילה "פתח" מופיעה ברצף האותיות. נעזר בכלל ההכלה וההפרדה, כדי לקבל את ההסתברות המבוקשת. מקבלים:

$$P(A) = \frac{(22-4+1)!}{22!} = \frac{19!}{22!} = \frac{17! \cdot 342}{22!}$$

$$P(B) = \frac{(22-3+1)!}{22!} = \frac{20!}{22!} = \frac{17! \cdot 6,840}{22!}$$

$$P(A \cap B) = \frac{(22-7+2)!}{22!} = \frac{17!}{22!}$$

$$P(A \cup B) = \frac{17! \cdot (342 + 6,840 - 1)}{22!} = \frac{17! \cdot 7,181}{22!} = 0.00227$$

ומכאן כי:

16. האותיות א, ב ו- ג יכולות לתפוס כל 3 מקומות ברצף 22 האותיות. אולם, כדי שאותיות אלו תופענה עד למקום העשירי, הן צריכות לתפוס 3 מ-10 המקומות הראשונים.

$$\frac{\binom{10}{3}}{\binom{22}{3}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{22 \cdot 21 \cdot 20} = \frac{6}{77} = 0.0779$$

לפיכך, ההסתברות היא:

17. נתבונן רק על 4 המקומות שבהם נמצאות האותיות ד, ה, ח ו-ט. לאותיות הללו יש 4! סידורים פנימיים, ביחס לכל סידור של כלל האותיות. לפיכך, נבחן בכמה מתוך 4! הסידורים הללו מתקיים המאורע המתואר בשאלה. אם כך, במקום הראשון (מבין 4 המקומות שתופסות האותיות הנ"ל) חייבת להיות אחת מהאותיות ד ו-ח. משנבחרה האות שתהיה במקום הראשון, בת-הזוג שלה (ה או ח, בהתאמה) יכולה להיות בכל אחד מ-3 המקומות הפנויים. נותרים 2 מקומות פנויים ו-2 האותיות הנותרות יכולות להתמקם בהם בסידור יחיד.

$$\frac{2 \cdot 3}{4!} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad \text{לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא:}$$

18. נעזר במאורע המשלים שאין בלוח אף שורה שכולה אפסים. יש 2^5 אפשרויות לבחור את הספרות בשורה ובתוכן אפשרות יחידה שבכל השורה יש רק אפסים. לפיכך, יש $2^5 - 1$ אפשרויות שבשורה תהיה לפחות משבצת אחת שעליה הספרה 1. החישוב האחרון נכון לכל 5 השורות בלוח, ומכאן שיש $(2^5 - 1)^5$ אפשרויות למלא את הלוח, כך שבכל אחת משורותיו תהיה לפחות משבצת אחת שעליה הספרה 1. ומכאן כי ההסתברות

$$1 - \frac{(2^5 - 1)^5}{2^{25}} = 1 - \left(\frac{2^5 - 1}{2^5} \right)^5 = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^5} \right)^5 = 1 - (1 - 0.5^5)^5 \quad \text{המבוקשת היא:}$$

19. ראשית, יש 2^{25} תוצאות אפשריות שונות במרחב המדגם.

שנית, מספר התוצאות שיש בהן בדיוק 15 משבצות שעליהן הספרה 1, הוא כמספר אפשרויות הבחירה של

$$15 \text{ משבצות בלוח (שעליהן תהיה הספרה 1). לכן, ההסתברות המבוקשת היא: } \frac{\binom{25}{15}}{2^{25}} = \binom{25}{15} \cdot 0.5^{25}$$

20. נתחיל מחישוב ההסתברות שאין בלוח אף שורה שסכום ספרותיה הוא 3:

בכל שורה, יש $\binom{5}{3}$ אפשרויות שסכום הדסקיות יהיה 3 (כמספר האפשרויות למקם במשבצותיה שלוש פעמים את הספרה 1). לכן, יש $2^5 - \binom{5}{3} = 22$ אפשרויות, שסכום הדסקיות בשורה מסוימת יהיה שונה מ-3. ומכאן, שיש 22^5 אפשרויות, שבכל אחת מ-5 השורות בלוח סכום הדסקיות יהיה שונה מ-3.

כעת, נחשב את ההסתברות שיש בלוח לפחות שורה אחת שסכום ספרותיה שווה ל-3.

$$1 - \frac{22^5}{2^{25}} = 1 - \frac{11^5}{2^{20}} \quad \text{זוהי ההסתברות המשלימה להסתברות שחושבה בתחילת הפתרון. דהיינו:}$$