20425 - תאריך הבחינה: 13.7.2009 (סמסטר 2009ב - מועד א4/85)

שאלה 1

א. הוכחת הטענה מופיעה בספר הקורס.

ב1. ל-X ול-Y יש התפלגויות בינומיות עם הפרמטרים 60 ו-0.5 והם מקיימים את השוויון $X+Y=60$. לכן,

לכל i מתקיים: $P\{X=i,Y=60-i\}=P\{X=60-i,Y=i\}$

ומכאן שמתקיים: $P\{X<Y\}=P\{X>Y\}$

כמו כן, מתקיים: $P\{X<Y\}+P\{X=Y\}+P\{X>Y\}=1$

לכן, נוכל לחשב את ההסתברות המבוקשת כך:

$$P\{X>Y\}=\frac{1-P\{X=Y\}}{2}=\frac{1-P\{X=30,Y=30\}}{2}=\frac{1-\binom{60}{30}0.5^{60}}{2}=0.4487$$

ב2. נשים לב שמתקיים: $X^2+Y^2=(X+Y)^2-2XY=60^2-2X(60-X)=3,600-120X+2X^2$

לכן:

$$E[X^2+Y^2]=3,600-120E[X]+2\cdot\underbrace{E[X^2]}_{=\mathrm{Var}(X)+(E[X])^2}=3,600-120\cdot30+2\cdot(15+30^2)=1,830$$

ואפשר גם לחשב את התוחלת האחרונה כך:

$$E[X^2+Y^2]=E[X^2]+E[Y^2]=2\cdot(15+30^2)=1,830$$

שאלה 2

א. $$P\{X=2\}=\frac{\binom{5}{2}\binom{5}{3}}{\binom{10}{5}}=\frac{25}{63}=0.3968$$

ב. התפלגות המשתנה המקרי X היא היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N=10$, $m=5$, $n=5$. לכן:

$$\mathrm{Var}(X)=\tfrac{10-5}{10-1}\cdot5\cdot\tfrac{5}{10}\cdot\tfrac{5}{10}=\tfrac{25}{36}=0.69\overline{4}$$

ג. $$P\{X=i,Y=j\}=\frac{\binom{5}{i}\binom{2}{j}\binom{3}{5-i-j}}{\binom{10}{5}}\quad,\quad i=0,1,...,5\ ;\ j=0,1,2\ ;\ 2\le i+j\le5$$

ד. בהינתן שנבחרו למשלחת 3 ביולוגים, נותר רק לבחור עוד 2 חברי משלחת מבין 3 הכימאים ו-2 הפיזיקאים.

לכן, ההתפלגות של Y בהינתן $X=3$ היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N=5$, $m=2$, $n=2$, ומתקיים:

$$\mathrm{Var}(Y\mid X=3)=\tfrac{5-2}{5-1}\cdot2\cdot\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{5}=0.36$$

שאלה 3

א. ראשית, יש !6 תוצאות שונות במרחב המדגם.

שנית, כדי למנות את מספר התוצאות השייכות למאורע המתואר בסעיף זה, נבחר את ארבעת הספלים שיונחו על התחתיות המתאימות להם ונדאג שהשניים האחרים לא יונחו על התחתיות שלהם (כלומר, כל אחד מהשניים יונח על התחתית של הספל האחר – אפשרות אחת בלבד).

לפיכך, נקבל: $\frac{\binom{6}{4}}{6!} = \frac{15}{720} = \frac{1}{48}$

ב. אם שני הספלים הקטנים ביותר מונחים על תחתיותיהם, נותר רק להניח את שאר 4 הספלים האחרים על התחתיות הנותרות. לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{4!}{6!} = \frac{1}{30}$

ג. אם שלושת הספלים הקטנים ביותר מונחים על שלוש התחתיות של הספלים הגדולים ביותר, אז מתקיים ההיפך לגבי הספלים הגדולים ביותר. כלומר, את שלושת הספלים הקטנים ביותר מניחים על 3 תחתיות אפשריות וכך גם את שלושת הספלים הגדולים ביותר.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{(3!)^2}{6!} = \frac{1}{20} = 0.05$

ד. כדי שבדיוק ספל אחד יונח על תחתית מתאימה, כל הספלים האחרים צריכים להיות על תחתיות לא-מתאימות להם. נחשב את ההסתברות המבוקשת באמצעות כלל ההכלה וההפרדה, לאחר שנבחר את הספל שיונח על התחתית המתאימה.

נסמן ב- A_i את המאורע שספל i מונח על התחתית שלו, לכל $i = 1,2,3,4,5$, ונחשב את מספר התוצאות השייכות למאורע $A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C$. תנאי הבעיה סימטריים, לכן:

$$n(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) = 5! - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)$$
$$= 5! - \left[\binom{5}{1}n(A_1) - \binom{5}{2}n(A_1 \cap A_2) + \ldots + \binom{5}{5}n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)\right]$$
$$= 5! - [5 \cdot 4! - 10 \cdot 3! + 10 \cdot 2! - 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1] = 120 - 76 = 44$$

ומכאן, מקבלים את ההסתברות המבוקשת: $\frac{6 \cdot 44}{6!} = 0.3\overline{6}$

שאלה 4

נסמן ב-X את הגובה (בס"מ) של צמח מקרי , $X \sim N(30, \sigma^2)$.

כמו כן, נתון כי $P\{19.15 \le X \le 40.85\} = 0.97$.

א. נשתמש בהסתברות הנתונה כדי למצוא את סטיית-התקן:

$$P\{19.15 \le X \le 40.85\} = \Phi\left(\tfrac{40.85-30}{\sigma}\right) - \Phi\left(\tfrac{19.15-30}{\sigma}\right) = \Phi\left(\tfrac{10.85}{\sigma}\right) - \Phi\left(\tfrac{-10.85}{\sigma}\right)$$
$$= 2\Phi\left(\tfrac{10.85}{\sigma}\right) - 1 = 0.97$$

כלומר: $\Phi\left(\tfrac{10.85}{\sigma}\right) = 0.985 = \Phi(2.17)$

ומכאן שסטיית-התקן היא: $\sigma = \tfrac{10.85}{2.17} = 5$

ב. $$P\{X > 33.89\} = P\left\{Z > \frac{33.89 - 30}{5}\right\} = 1 - \Phi(0.778) = 1 - 0.78172 = 0.21828$$

ג1. לפי הגדרת המשתנה המקרי Y, מתקיים הקשר $Y = 3X$. לכן, כדי למצוא את הפונקציה יוצרת המומנטים של Y, נוכל להשתמש בזו של X . למשתנה המקרי X יש התפלגותו נורמלית עם הפרמטרים 30 ו- 5^2, לפיכך לכל t ממשי מתקיים:

$$M_Y(t) = M_{3X}(t) = E[e^{t3X}] = M_X(3t) = \exp\left\{30 \cdot 3t + \frac{5^2 \cdot (3t)^2}{2}\right\} = \exp\left\{90t + 112.5t^2\right\}$$

ג2. המשתנה המקרי Y הוא טרנספורמציה לינארית של X ולכן גם הוא משתנה מקרי נורמלי עם הפרמטרים $\mu = 3\cdot 30 = 90$ ו- $\sigma^2 = 3^2 \cdot 5^2 = 225$.

נסמן ב- Y_i את כמות המים שהצמח ה-i-י צורך, לכל $i = 1,2,\ldots,10$, ונקבל:

$$E\left[\sum_{i=1}^{10} Y_i\right] = \sum_{i=1}^{10} E[Y_i] = 10 \cdot 90 = 900$$

כמו כן, ה-Y_i-ים בלתי-תלויים, ולכן:

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{10} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{10} \text{Var}(Y_i) = 10 \cdot 225 = 2{,}250$$

שאלה 5

א. לפי נתוני הבעיה:

$$P(A) = p$$

$$P(B_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad , \qquad k = 0,1,2,...,n$$

$$P(A \cap B_k) = p \cdot \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \qquad , \qquad k = 0,1,2,...,n$$

נבדוק באלו תנאים מתקיים תנאי אי-התלות:

$$P(A)P(B_k) \stackrel{?}{=} P(A \cap B_k)$$

$$\Leftarrow \qquad p \cdot \binom{n}{k} \cancel{p^k (1-p)^{n-k}} \stackrel{?}{=} \binom{n-1}{k-1} \cancel{p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$\Leftarrow \qquad p = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k}{n}$$

כלומר, לכל $k = 0,1,2,\ldots,n$, המאורעות A ו- B_k בלתי-תלויים זה בזה אם ורק אם מתקיים $p = \frac{k}{n}$.

ב. יהי A המאורע שהקלף ה-15 שהילד משיג הוא מסוג שטרם יש לו כמותו.

לחישוב ההסתברות של A, נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה, כאשר אנו מתנים בסוג הקלף ה-15 שהילד השיג. לכל $i = 1,2,\ldots,10$, יהי B_i המאורע שהקלף ה-15 הוא מסוג i. מתקיים:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{10} P(A \mid B_i)P(B_i) = \left(1 - \tfrac{1}{3}\right)^{14} \cdot \tfrac{1}{3} + \sum_{i=2}^{10} \left(1 - \tfrac{2}{27}\right)^{14} \cdot \tfrac{2}{27} = \tfrac{1}{3}\left(1 - \tfrac{1}{3}\right)^{14} + \tfrac{2}{3}\left(1 - \tfrac{2}{27}\right)^{14} = 0.2281$$