

**מבנה הבחינה :**

בבחינה שני חלקים.

**חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.**

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

**משך המבחן: 3 שעות.**

**חומר עזר:** כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

---

**שימו לב:**

\* בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.

\* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.

\* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.

\* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.

---

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

## חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

### שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס.  
**בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה.** אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(6 נק') א. הסימון  $K(x)$  פירושו "ל- $x$  יש תכונה מסוימת, הנקראת  $K$ ".

הסימון  $L(x)$  פירושו "ל- $x$  יש תכונה מסוימת, הנקראת  $L$ ".

יהי  $p$  הפסוק  $\neg \forall x (K(x) \leftrightarrow L(x))$ .

לאיזה מהפסוקים הבאים שקול  $p$ ?

[1]  $\forall x \neg (K(x) \leftrightarrow L(x))$       [2]  $\forall x (K(x) \leftrightarrow \neg L(x))$

[3]  $\exists x (\neg K(x)) \leftrightarrow \exists x (\neg L(x))$       [4]  $\exists x (K(x) \wedge \neg L(x))$

[5]  $\exists x ((K(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg K(x)))$

(7 נק') ב.  $N$  היא קבוצת המספרים הטבעיים,  $R$  היא קבוצת המספרים הממשיים.

נסמן  $R^+ = \{x \in R \mid x > 0\}$ .

תהי  $A = \{(x, y) \in R^+ \times R^+ \mid x \cdot y \in N\}$ . עוצמת  $A$  היא:

[1] מספר סופי כלשהו      [2]  $\aleph_0$       [3]  $C$

[4]  $2^C$       [5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק') ג.  $K_n$  הוא הגרף המלא על  $n$  צמתים. נתבונן באיחוד זר של  $K_5$  עם  $K_3$ :

גרף בעל 8 צמתים, שיש לו שני רכיבי קשירות: רכיב קשירות אחד הוא עותק של  $K_5$

ורכיב הקשירות השני הוא עותק של  $K_3$ .

נוסיף לגרף זה קשתות: נחבר בקשת כל צומת של  $K_5$  עם כל צומת של  $K_3$ .

הגרף המתקבל הוא:

[1]  $K_8$ , והוא דו-צדדי: צד אחד - הצמתים של  $K_5$ , צד שני - הצמתים של  $K_3$ .

[2]  $K_8$ , והוא דו-צדדי, אבל הצדדים שלו אינם אלה שהוזכרו בסעיף הקודם.

[3]  $K_8$ , והוא אינו דו-צדדי.      [4] גרף דו-צדדי שאינו  $K_8$ .

[5] גרף שאינו דו-צדדי ואינו  $K_8$ .

**חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות**  
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

## שאלה 2

(13 נק') א. יהי  $R_1$  יחס (רלציה) אנטי-סימטרי מעל  $A = \{1,2,3\}$

ויהי  $R_2$  יחס אנטי-סימטרי מעל  $B = \{1,2,3,4,5\}$ .

מצאו את הטענה הנכונה מבין 1 – 4 והוכיחו אותה.  $R_1 \cup R_2$  הוא:

- (1) יחס אנטי-סימטרי מעל  $B$ .
- (2) יחס מעל  $B$  שאינו אנטי-סימטרי.
- (3) יחס מעל  $B$  שיכול להיות אנטי-סימטרי ויכול לא להיות אנטי-סימטרי.
- (4) אינו יחס מעל  $B$ .

(14 נק') ב. יהי  $E_1$  יחס שקילות מעל  $A = \{1,2,3\}$

ויהי  $E_2$  יחס שקילות מעל  $B = \{1,2,3,4,5\}$ .

מצאו את הטענה הנכונה מבין 1 – 4 והוכיחו אותה.  $E_1 \cup E_2$  הוא:

- (1) יחס שקילות מעל  $B$ .
- (2) יחס מעל  $B$  שאינו יחס שקילות מעל  $B$ .
- (3) יחס מעל  $B$  שיכול להיות שקילות מעל  $B$ , ויכול לא להיות שקילות מעל  $B$ .
- (4) אינו יחס מעל  $B$ .

למנוע עגמת נפש:

שאלות 2.27, 2.40 בכרך "תורת הקבוצות" עוסקות במצב שונה מזה המתואר כאן.

## שאלה 3

במערכת מחשב מסוימת המשתמש נדרש לבחור סיסמא שתקיים את הדרישות הבאות:

אורך הסיסמא הוא 6 או 7 תווים. התווים המותרים הם:

26 האותיות הלטיניות הקטנות a-z, 26 האותיות הלטיניות הגדולות A-Z, עשר הספרות 0-9. יש אפוא 62 תווים מותרים.

סיסמא חייבת להכיל לפחות אות קטנה אחת, לפחות אות גדולה אחת ולפחות ספרה אחת.

כמה סיסמאות חוקיות שונות אפשר ליצור?

אין צורך להגיע לתשובה מספרית.

#### שאלה 4

תהי  $B$  קבוצת המחרוזות באורך 4, הבנויות בעזרת האותיות  $a, b, c, d, e$ . למשל  $aeeb \in B$ .

(3 נק') א. כמה אברים יש ב-  $B$ ?

סעיפים ב, ג, ד, ה של השאלה עוסקים ביחס שקילות מעל  $B$ , המוגדר כך:

שתי מחרוזות השייכות ל-  $B$  ייקראו שקולות אם **קבוצת** האותיות המופיעות במחרוזת האחת

**שווה לקבוצת** האותיות המופיעות במחרוזת השנייה.

למשל  $aeee$  שקולה ל-  $aaee$  ושקולה ל-  $eaada$ ,

מכיון שלכל אחת מהמחרוזות האלה, קבוצת האותיות המופיעות בה היא  $\{a, e\}$ .

אינכם נדרשים להוכיח שזהו יחס שקילות.

(6 נק') ב. כמה מחלקות שקילות יש?

(6 נק') ג. כמה אברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת  $abcd$ ?

(6 נק') ד. כמה אברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת  $aaab$ ?

(6 נק') ה. כמה אברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת  $aabc$ ?

הוכיחו את תשובותיכם.

#### שאלה 5

יהי  $G$  גרף פשוט, שיכול להיות קשיר או לא קשיר.

$a, b$  הם צמתים שונים ב-  $G$ , שהמסלול הקצר ביותר ביניהם הוא באורך 3 או יותר

(תזכורת: אורך מסלול הוא מספר הקשתות במסלול). ייתכן שאין כלל מסלול בין  $a, b$ .

$\overline{G}$  הוא הגרף המשלים של  $G$  ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4).

(6 נק') א. הוכיחו שב-  $\overline{G}$ , הצמתים  $a, b$  נמצאים באותו רכיב קשירות.

(21 נק') ב. הוכיחו ש-  $\overline{G}$  הוא קשיר.

**בהצלחה!**