# אלגוריתמים – פתרונות לתרגיל 1

1. נמיין לפי סדר מחירים לא עולה. נניח המחירים הממוינים הם $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$. הזוגות שנציג יהיו $(x_1,x_2),(x_3,x_4),\ldots$.
נכונות: יהי A פיתרון אופטימלי. נראה שיש פיתרון לא יותר יקר מ- A שבו $(x_1,x_2)$ זוג. אם $(x_1,x_2)$ זוג ב- A אז סיימנו. אחרת, קיימים $3 \leq i,j \leq n$ כך ש- $(x_1,x_i)$ ו- $(x_2,x_j)$ זוגות ב- A. על שני זוגות אלה אנו מרוויחים $\frac{1}{2} x_i + \frac{1}{2} x_j$. נסתכל על פיתרון B זהה ל- A, פרט לכך שבמקום הזוגות $(x_1,x_i)$ ו- $(x_2,x_j)$ יהיו ב- B הזוגות $(x_1,x_2)$ ו- $(x_i,x_j)$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $x_i \leq x_j$. אז הרווח שלנו על שני זוגות אלה הוא $\frac{1}{2} x_i + \frac{1}{2} x_2$, ומכיוון ש- $x_2 \geq x_j$ אז זה רווח לא יותר קטן מאשר ב- A. ההמשך – באינדוקציה.
זמן ריצה $O(n \log n)$.

2. נחשב לכל $1 \leq i \leq n$ את $s_i$, הסכום המינימלי של תת-סידרה שמקיימת את הדרישות ומסתיימת ב- $x_i$, באופן הבא:
   - $s_1 = x_1$
   - $s_2 = x_1 + x_2$
   - לכל $3 \leq i \leq n$, $s_i = x_i + \min(s_{i-1}, s_{i-2})$.

   הסכום המינימלי הוא $s_n$, וכדי למצוא את תת-הסידרה עצמה נבדוק בכל שלב מי נתן את המינימום.
זמן הריצה: $O(n)$.

3. חישוב f:
איתחול: $f(0,0)=1$, ולכל $j \neq 0$, $f(0,j)=0$.
לכל $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq k$: $f(i,j) = f(i-1,j) \vee f(i-1,j-a_i)$, כאשר אם $j-a_i<0$ נגדיר ש- $f(i-1,j-a_i)=0$.
התשובה: $f(n,k)$.
הסבר: יש שתי אפשרויות לקבל תת-קבוצה של $\{a_1,\ldots,a_i\}$ שסכומה j:
   1. $a_i$ לא בתת-קבוצה – ואז זו תת-קבוצה של $\{a_1,\ldots,a_{i-1}\}$ שסכומה j.
   2. $a_i$ בתת-קבוצה – ואז היתר הם תת-קבוצה של $\{a_1,\ldots,a_{i-1}\}$ שסכומה $j-a_i$.

   זמן ריצה: $O(nk)$.

4. נבנה גרף לא מכוון שקודקודיו המספרים שעל אבני הדומינו, ולכל אבן שמספריה i ו- j תהיה בגרף קשת $(i,j)$. ניתן לסדר את האבנים בשורה אחת באופן חוקי אם ורק אם הגרף שקיבלנו מכיל מסלול או מעגל אוילר.

5. נניח שהגרף קשיר, אחרת נראה לכל רכיב קשירות בנפרד. כל הדרגות 4, לכן יש בגרף מעגל אוילר. נלך על מעגל האוילר החל מקודקוד u כלשהו, ונצבע את הקשתות בכחול ובאדום לסירוגין. עבור כל $v \neq u$ עוברים דרך v פעמיים, וכל פעם צובעים קשת אחת בכחול ואחת באדום, לכן נקבל 2 קשתות כחולות ושתיים אדומות. עבור u צריך גם להראות שלקשתות הראשונה והאחרונה במעגל צבעים שונים, וזה מתקיים כי מספר הקשתות זוגי, מכיוון ש: $2|E|$ = סכום הדרגות = $4|V|$.

6. נוסיף k קשתות, בין זוגות קודקודים מדרגה אי-זוגית. קיבלנו גרף קשיר שבו כל הדרגות זוגיות, לכן יש בו מעגל אוילר. אם נסיר את הקשתות שהוספנו, המעגל יתפרק ל- k מסלולים.
ניתן להחליף את תנאי הקשירות בדרישה שכל רכיב קשירות יכיל קודקודים מדרגה אי-זוגית. אם רכיב קשירות מכיל קודקודים מדרגה אי-זוגית הוא חייב להכיל מספר זוגי של קודקודים כאלה (כי סכום הדרגות ברכיב קשירות זוגי), נניח 2m, ואז ניתן לחלק את קשתות הרכיב ל- m מסלולים זרים. סה"כ, בכל רכיבי הקשירות ביחד, נקבל k מסלולים.