דף סיכום בחינה

מזהה קורס: 20407 שם קורס: מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

מספר שאלה	ציון מירבי	ציון שאלה סופי
1.1	9.00	9.00
1.2	8.00	8.00
1.3	8.00	8.00
2.1	8.00	
2.2	8.00	
2.3	9.00	
3.1	5.00	5.00
3.2	8.00	8.00
3.3	12.00	12.00
4.1	5.00	5.00
4.2	5.00	3.00
4.3	5.00	5.00
4.4	5.00	5.00
4.5	5.00	5.00
5	25.00	25.00

ציון בחינה סופי : 98.00

הבחינה הבדוקה בעמודים הבאים

1 א

$$T(n) = T(n-1) + \lg n = T(n-2) + \lg(n-1) + \lg n$$
$$= T(n-3) + \lg(n-2) + \lg(n-1) + \lg n$$
$$\dots = T(0) + \lg(1) + \lg(2) + \dots + \lg(n-1) + \lg(n)$$
$$= \Theta(1) + \lg(1\cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)\cdot n) = \Theta(1) + \lg(n!)$$
$$\underset{\uparrow}{=} \Theta(1) + \Theta(n\lg n) = \Theta(n \lg n)$$
סטירלינג

9
(1.1)

ב נבצע מבחן גבול:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{[2n\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+1)]\cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = \infty$$

לכן $(2n)! = \omega(n!)$

8
(1.2)

ג תהי $h(n) = o(f(n))$, לכן עבור כל $c>0$ קיים $n_0>0$ כך שעבור כל $n>n_0$, $f(n) \geq c\cdot h(n)$
יהי c כזה. נוסיף $c\cdot f(n)$ לכל אגף.

$$f(n) + cf(n) \geq c\cdot h(n) + c\cdot f(n) \Rightarrow (c+1)\cdot f(n) \geq c(h(n)+f(n))$$
$$\Rightarrow \frac{c+1}{c}\cdot f(n) \geq h(n) + f(n)$$

לכן עבור כל $n>n_0$ מתקיים, עם הקבוע $\frac{c+1}{c}$, וזו ההגדרה ע"פ O,
כלומר $f(n) + h(n) = O(f(n))$.

אנו עוסקים בפונקציות חיוביות, לכן $h(n) \geq 0$
$$h(n) + f(n) \geq f(n)$$
לכן עבור $c=1$ ו- $n>0$ הא"י שוויון מתקיים, ועל פי הגדרה $h(n)+f(n) = \Omega(f(n))$.
וסה"כ $h(n)+f(n) = \Theta(f(n))$
כלומר, $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$, כנדרש.

8
(1.3)

3 א) בכל איטרציה זמן הריצה הוא $\Theta(n)$, מפני ש- SELECT
ו-PARTITION רצות בזמן לינארי (הכוונה כ- n היא
לערך n באיטרציה הנוכחית). בסוף כל איטרציה מחלקים
את n ב-2, לכן נוסחת הנסיגה היא:

$$T(n)=T(n/2)+\Theta(n)$$

$$a=1,\ b=2,\ \log_b a=0\ ;\ n^{\log_b a}=n^0\ ;\ f(n)=\Theta(n)$$

$$\Theta(n)=\Omega(n^{0+0.5}) \qquad \varepsilon=0.5$$

5 (3.1)

לכן מדובר במקרה 3 בשיטת האב. במדריך הלמידה
מראים כי תנאי הרגולריות מתקיים לנוסחאות
נסיגה מסוג זה. ולכן $T(n)=\Theta(n)$.

ב) איטרציה I:

$n=8$, $\lfloor n/2 \rfloor=4$, pivot ערך 5

[-17, 5, 34, 2, 9, 10, -21, 15]

$-17<5$ אז מתחלף עם עצמו, $5<34$ אז אין שינוי, $2<5$ אז
מתחלף עם 34:

[-17, 5, 2, 34, 9, 10, -21, 15]

$9>5$, $10>5$ אז אין שינוי, $-21<5$ אז מתחלף עם 34:

[-17, 5, 2, -21, 9, 10, 34, 15]

$15>5$ אז אין שינוי ולבסוף 5 מתחלף עם -21:

[-17, -21, 2, 5, 9, 10, 34, 15]

איטרציה II:

$n=4$, $\lfloor n/2 \rfloor=2$, pivot ערך -17

[-17, -21, 2, 5]

$-21<17$ ומתחלף עם עצמו, $2>-17$ ו- $5>-17$ אז אין שינוי,
ולבסוף -21 ו- -17 מתחלפים:

[-21, -17, 2, 5]

איטרציה III:

$n=2$, $\lfloor n/2 \rfloor=1$, pivot ערך -21

8 (3.2)

[-21, -17]

אין שינוי. לכן המערך הסופי:

[-21, -17, 2, 5, 9, 10, 34, 15]

③ ④ נניח כי גודל המערך $n=2^i$. לכן בערמה האחרונה יהיה איבר יחיד, נציב בו את המקסימום. כעת נותרו 2^i-1 איברים לסדר, ונוכל לסדרם בעזרת השגרה בשאלה.

שמורת לולאה: בתחילת איטרציה, n האיברים הראשונים קטנים משארית האיברים במערך.

<u>התחלה:</u> הצבנו את המקסימום לפני תחילת הלולאה, לכן בתחילת האיטרציה הראשונה. אכן $n-1$ האיברים הראשונים הקטנים מהאחרון.

<u>תחזוק:</u> נניח כי 2^i-1 האיברים הראשונים קטנים מהנשאר. ה-pivot שיבחר הינו ערך מיקום $2^{i-1}-1$, ועליו יבוצע PARTITION, כלומר בסוף האיטרציה אכן $2^{i-1}-1$ האיברים הראשונים יהיו קטנים מהשאר.

<u>סיום:</u> בסוף האיטרציה האחרונה נותר כי השורש קטן משאר איברי המערך, איברי הרמה השנייה קטנים מהשאר וכן הלאה. כלומר, קיבלנו ערמה לפי הדרוש.

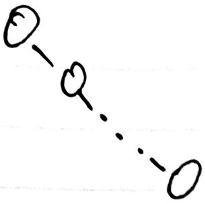
זמן הריצה של השגרה המתוארת בשאלה הוא $\Theta(n)$, על פי סעיף ג', וגם מציאת המקסימום היא $\Theta(n)$. לכן סה"כ זמן הריצה של בניית ערמה כזו הוא $\Theta(n)$, והוכחנו כי ניתן לבנות ערמת מינימום כדרוש בזמן לינארי.

12
(3.3)

(*) הערה: ערמה היא מערך ולכן האלגוריתם הנ"ל משלים את בניית הערימה הקלאסית.

5
(4.1)

④ א) לא נכון, דוגמה נגדית:



אם מדובר בשרוך כפי שמצויר ונרצה
למצוא את המקסימום, ידרשו $O(n)$ השוואות.

ב) נכון. נוכל לבצע סריקה תוכית על פי מבנה העץ ולהביא
את המערך לאחר מיון בהתאם.

-2
(4.2)
מה זה אומר? תשובה חסרה

ג) נכון. מציאת חציון במערך ממוין היא $O(1)$. לכן נמצא
את החציון, נציבו כשורש העץ ומכאן והלאה נקרא רקורסיבית
לשני המערכים מצדדיו, נמצא את החציונים שלהם ונציבם
כבנים שלו, עד שנגיע למערכים בגודל 1. בצורה כזו אנו
בונים עץ אשר כל הרמות שלו מלאות למעט האחרונה (שאינה
מלאה בהכרח). לכן את כל הרמות נצבע בשחור למעט האחרונה
שנצבע באדום.

5
(4.3)

ד) לא נכון. מקרה זה דומה לפרדוקס יום ההולדת. לכן
ההסתברות להתנגשות בעת הכנסת האיבר הבא אינה
בדיוק ½, אלא יותר גבוהה (תלוית ב- m).

5
(4.4)

מקבל למרות שהתשובה לא מלאה

ה) לא נכון, אם זה היה אפשרי יכולנו לסדר מערך בגודל n
איברים כתור קדימויות ב- $O(n)$ ולאחר מכן להוציא n
פעמים בזמן קבוע את המינימום. סה"כ היינו מקבלים
מערך ממוין ב- $O(n)$ בסתירה לחסם התחתון עבור מיונים
מבוססים השוואות ($\Omega(n\log n)$).

5
(4.5)

5) המבנה S יהיה מורכב מערמת מינימום עבור כל האיברים, ומשתי ערימות נוספות - ערימת מינימום שתכיל את $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ האיברים הגדולים ביותר, וערימת מקסימום אשר תכיל את $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ האיברים הקטנים ביותר - והשורש שלה יהיה החציון.
בנוסף, נחזיק משתנים עבור מספר האיברים בכל ערימה.

BUILD(S): תחילה נעשה SELECT למציאת החציון, $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, ו-PARTITION עליו כדי שמצדיו יהיו איברים קטנים ממנו משמאל וגדולים ממנו מימין.
כעת נבנה ערימה כללית כפי שתואר בספר, ובמקביל נבנה מ-$\lceil \frac{n}{2} \rceil$ האיברים הראשונים במערך ערמת מקסימום, ונוסיף שדות נתונים נלווים כדי לשמור מצביעים דו כיווניים בין האיברים המתאימים בערמות. לדוגמה, כאשר נגיע לאיברים הגדולים מהחציון, נבנה מהם ערמת מינימום ונקשר אותם לערימה הגדולה עם מצביעים דו כיווניים.
בכל איטרציה נעדכן גם משתני גודל מתאים.
על פי הספר, בניית ערימה היא $O(n)$, ובמקרה זה $O(n)+O(\frac{n}{2})+O(\frac{n}{2})$, וסה"כ $O(n)$.
(*) ערך ~~המיקום~~ ה-$\lceil \frac{n}{2} \rceil$, כלומר החציון, ממוקם בשורש ערמת המקס' ע"י הבנייה.

MIN(S): נבחר את השורש של הערימה הכללית, מפני שהוא המינימום של כל איברי המבנה. ברור כי מדובר בזמן ריצה $O(1)$.

DEL-MEDIAN(S): החציון ממוקם בשורש ערמת המקסימום, לכן נמחק אותו ואת הצמתים המתאימים מהערימה הגדולה.
כעת נחשב את $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ עבור מספר האיברים בערימה הגדולה, ונשווה לגודל ערימת המקסימום. אם שווה - אין צורך בשינוי: מפני שהשורש של ערימת המקסימום עדיין החציון במבנה כולו.
אם $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ גדול מגודל ערימת המקסימום, נמחק את שורש ערימת המינימום, מפני שמדובר באיבר ~~[illegible]~~ הקטן ביותר בערימת המינימום, אך עדיין גדול מכל איברי ערימת המקסימום. וכעת נוסיפו לערמת המקסימום, שם יתמקם כשורש, ואכן מדובר בחציון של המבנה. כל מחיקה והוספה לערימה הינה $O(\lg n)$ ואנו מבצעים מספר קבוע של פעולות כאלו, לכן סה"כ $O(\lg n)$.

המשך שאלה 5

OS-MED7(S): אנו יודעים כי החציון הוא שורש ערימת המקס'.
לכן נרצה למצוא את ערך מיקום 7 בערימת המינימום. ~~ערך שיקום~~ איבר זה יהיו באחת מ-7 הרמות הראשונות, על פי תכונות ערימת מינימום.
לכן נעתיק את 7 הרמות הללו למערך עזר, נמיין ונחזיר את האיבר השביעי.
האינדקסים הדרושים הם 1 עד 2^7-1, כלומר 1 עד 127. מפני שמדובר בקבוע אין משמעות ~~[illegible]~~ לאיזה מיון נבחר, מפני שזמן הריצה יהיה קבוע גם כן. לכן סה"כ $O(1)$.

25
(5)