2010א – מועד 85

1.

א. בעמודים 46, 47 בכרך "תורת הקבוצות" מוסבר שמספר האיברים השונים בסדרה $R, R^2, R^3,...$ כאשר R היא רלציה מעל A, שעוצמתה סופית, הוא מספר סופי.

כלומר, קיימות שתי רלציות בסדרה זו שיקיימו $R^i = R^j, i \neq j$, כלומר, קיימים שני מספרים חיוביים שונים שלא יקיימו את השוויון. בכך, הוכחנו את הטענה.

ב. נוכיח את הטענה באינדוקציה.

בסיס האינדוקציה: נראה את נכונות הטענה עבור $k=1$. אכן, $R^1 = R$, ומתקיים $R^1 = \{(n,n+1) \mid n \in N\}$, כלומר, הטענה נכונה.

נניח שהטענה נכונה עבור $k=m$ כלשהו, ונוכיח את נכונות הטענה עבור $m+1$.

עלינו להוכיח ש- $R^{m+1} = \{(n,n+m+1) \mid n \in N\}$.

$$(a,b) \in R^{m+1} \Leftrightarrow$$
$$\exists c((a,c) \in R^m \wedge (c,b) \in R) \Leftrightarrow$$
$$\exists c(b = c+1 \wedge c = a+m) \Leftrightarrow$$
$$b = a+m+1 \Leftrightarrow$$
$$(a,b) = (a,a+m+1)$$

ובכך הוכחנו את הטענה.

ג. על פי שאלה 2.35, $T = R \cup R^2 \cup R^3 \cup ...$.

כעת,
$$(n,m) \in T \Leftrightarrow$$
$$(n,m) \in R \vee (n,m) \in R^2 \vee (n,m) \in R^3 \vee ... \Leftrightarrow$$
$$\exists k \in N(k \geq 1 \wedge m = n+k)$$

כלומר, $(n,m) \in T$ **אם ורק אם** קיים $k \in N, k \geq 1$ המקיים $m = n+k$.

2. (רק סעיפים א', ב' – לא הוכחות):

א. A היא קבוצת הטבעיים הזוגיים, B היא קבוצת הטבעיים האי-זוגיים. $A \oplus B = N$.

ב. $A = N, B = N - \{0\}$. $|A \oplus B| = 1$.

3.

א. זהו מספר התמורות עם חזרות של 10 איברים, כשיש שתי חזרות, שלוש חזרות, וארבע חזרות. כלומר, $P(10;2,3,4,1) = \frac{10!}{2!3!4!} = 12{,}600$.

ב. נתייחס אל 333 כאל תו בודד, ובדומה לסעיף א', נקבל: $P(8;2,4,1,1) = \frac{8!}{2!4!} = 840$.

ג. נשתמש בעיקרון ההכלה וההפרדה.

תהי U קבוצת הסידורים של המחרוזת ללא הגבלות. על פי סעיף א׳, $|U|=12{,}600$.

תהי A_i קבוצת הסידורים של המחרוזת כאשר כל המופעים של i הם ברצף. נחשב בדומה את A_i :

$$|A_2|=P(9;3,4,1,1)=2520$$
$$|A_3|=840$$
$$|A_4|=P(7;2,3,1,1)=420$$

נחשב חיתוכים בזוגות :

$$|A_2\cap A_3|=P(7;4;1;1;1)=210$$
$$|A_2\cap A_4|=P(6;3,1,1,1)=120$$
$$|A_3\cap A_4|=P(5;2,1,1,1)=60$$

בדומה, $|A_1\cap A_2\cap A_3|=4!=24$.

נחשב את S_i , כפי שהוא מוגדר בעמוד 87 :

$$S_1=|A_2|+|A_3|+|A_4|=3780$$
$$S_2=|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_4|+|A_3\cap A_4|=390$$
$$S_3=24$$

אנו מחפשים את

$$|A_1'\cap A_2'\cap A_3'|=|U|-S_1+S_2-S_3=12{,}600-3780+390-24=9186\ .$$

כלומר, התשובה לסעיף היא 9186.

4.

א. בעצם, עלינו לחלק את תשעת התלמידים הנתורים לקבוצות, ללא הגבלות (פרט ל-3 תלמידים בקבוצה). נבחר תלמיד אחד באופן אקראי. לציוות עוד זוג תלמידים אליו, יש $\binom{8}{2}=28$ אפשרויות. נבחר תלמיד נוסף (מתוך השישה הנותרים). לציוות עוד זוג תלמידים אליו יש $\binom{5}{2}=10$ אפשרויות. הקבוצה השלישית נקבעת בעקבות החלוקות שכאן, באופן מוחלט.

כלומר, סך כל האפשרויות לחלוקה הוא $28\cdot 10=280$.

ב. ״נשים״ כל אחד מהם בקבוצה משלו. לבחירת עוד זוג שיהיו יחד עם א׳ יש $\binom{9}{2}=36$ אפשרויות. לבחירת הזוג הנוסף שיהיה יחד עם ב׳ יש $\binom{7}{2}=21$ אפשרויות. לבחירת

הזוג הנוסף שיהיה יחד עם ג׳ יש $\binom{5}{2}=10$ אפשרויות. הקבוצה השלישית נקבעת בעקבות הבחירות שעשינו עד כה. לכן, סך כל האפשרויות הוא $36\cdot21\cdot10=7560$ אפשרויות.

ג. בחירת ראשי הקבוצות מהווה בעצם בחירת ״שם״ לקבוצה. כל ראשי הקבוצות בכל חלוקה הם בעצם תת-קבוצה (שונה מהתת-קבוצה הזו בחלוקות אחרות) בת ארבעה איברים של 12 (ללא חשיבות לסדר). כלומר, יש $\binom{12}{4}=495$ אפשרויות לבחירת ראשי הקבוצות. על כל ראש קבוצה, נראה כמה אפשרויות יש להתאים לו זוג נוסף. עבור ראש קבוצה אחד, יש $\binom{8}{2}=28$ אפשרויות, וכן הלאה: $\binom{6}{2}=15, \binom{4}{2}=6, \binom{2}{2}=1$. סך הכל קיבלנו: $495\cdot28\cdot15\cdot6=1{,}247{,}400$ אפשרויות לחלוקות.

ד. בחלוקת הקבוצות עבור העבודה הראשונה, יש, על פי עקרון שובך היונים, לפחות קבוצה אחת שיש בה לפחות $\left\lceil\frac{50}{6}\right\rceil=9$ תלמידים. בחלוקת הקבוצות לעבודה השנייה, כל אחד מהם חייב להיות בקבוצה שונה. אך שוב על פי עיקרון שובך היונים, מכיוון שיש רק 8 קבוצות, יש לפחות קבוצה אחת בה יהיה שני תלמידים שהיו ביחד בקבוצה של לפחות 9 התלמידים. לכן, לא ניתן לקיים את הדרישות של המדריך.