מטלת מנחה (ממ״ן) 19

הקורס: 20283 - **מתמטיקה דיסקרטית**

חומר הלימוד למטלה: לוגיקה פרק 3.1-3.10

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2006ב **מועד אחרון להגשה:** *יום ו' 14.7.06*

אנא שים לב: מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ״ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה *1* *(24 נקודות)*

קבע לכל אחד מהביטויים הבאים אם הוא שם-עצם, תבנית אטומית, תבנית שאינה אטומית, פסוק, או שאינו עונה על אף אחת מהגדרות אלו. כתיב מקוצר - מותר. שים לב שביטוי יכול להתאים ליותר מהגדרה אחת: פסוק יכול להיות תבנית אטומית או תבנית לא אטומית.

א. $f_1^3(x_1, f_1^2(x_2)\,,\, a_1)$ *ב.* $A_1^3(x_1, \sim(x_2)\,,\, a_1)$ *ג.* $\sim A_1^3(x_1, x_2\,,\, a_1)$

ד. $A_1^3(x_1, f_1^1(x_2)\,,\, a_1)$ *ה.* $f_1^3(A_1^3(x_1\,, x_2, a_1), x_2, a_1)$ *ו.* $\exists\, x_1 A_1^3(a_1, a_2, x_1)$

ז. $\forall\, x_1 f_1^1(x_1)$ *ח.* $\forall\, x_1\big(A_1^3(x_1, a_1, a_1) \quad \forall\, x_2 A_1^3(x_1, x_2, a_1)\big)$

שאלה 2 *(26 נקודות)*

תהי L שפה חלקית לשפת תחשיב הפרדיקטים, ובה סימנים אלה: קשרים לוגיים, סוגרים, סימני משתנים $x_1, x_2, \dots$, סימן פרדיקט דו-מקומי R, סימן פרדיקט דו-מקומי A_1^2 המתפרש כרגיל ***כשוויון*** *וסימני הכמתים $\forall, \exists$. אין סימני פונקציות או פרדיקטים נוספים ואין סימני קבועים אישיים.*

רשום 3 פסוקים ψ_1, ψ_2, ψ_3 בשפה זו, כך שהפסוק $\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3$ מביע את הטענה ש- R ***אינו*** *יחס שקילות מעל עולם האינטרפרטציה. מגבלה נדרשת: בכל אחד מהפסוקים ψ_1, ψ_2, ψ_3 אסור שהסימן הראשון יהיה סימן השלילה (הכנס את השלילה פנימה בעזרת זהויות ידועות).*

שאלה 3 (***26*** נקודות)

תהי J אינטרפרטציה של שפת תחשיב הפרדיקטים, שבה: העולם הוא $P(\mathbf{N})$ (קבוצת כל הקבוצות של מספרים טבעיים). הסימן A_1^2 מתפרש כרגיל כשוויון. הסימן f_1^2 ***מתפרש כחיתוך קבוצות***. x,y,z הם סימני משתנים בשפה.

(7 נק׳) א. מצא השמה σ למשתנה x כך שהתבנית $\forall y\left(A_1^2(x,\ f_1^2(x,y))\right)$ אמיתית תחת σ באינטרפרטציה J שתוארה למעלה. הוכח שההשמה שמצאת ל- x היא ***היחידה*** המקיימת זאת.

(7 נק׳) ב. הוכח שבאינטרפרטציה J ***הנ״ל***, התבנית $\forall y \exists z\left(A_1^2(f_1^2(y,z)\,,\ x)\right)$ גם היא אמיתית בהשמה σ שמצאת בסעיף א׳ למשתנה x, ***ורק בהשמה זו***! (שים לב – שני כיוונים).

(7 נק׳) ג. תהי J_1 אינטרפרטציה הנבדלת מ- J רק בכך ש- f_1^2 תתפרש כפונקציה המחזירה תמיד את הארגומנט הראשון: $f_1^2(x,y) = x$.

הראה שהתבנית מסעיף א׳ אמיתית ב- J_1 והתבנית מסעיף ב׳ שקרית ב- J_1

(״לוגיקה״ עמ׳ 117 הגדרה 3.17).

(5 נק׳) ד. האם התבניות מסעיפים א, ב אמיתיות לוגית? שקריות לוגית? (עמ׳ 119).

האם הן שקולות לוגית זו לזו? (עמ׳ 122).

שאלה 4 (***24*** נקודות)

השאלה עוסקת בשפה של תחשיב הפרדיקטים, שבה $R,\ S$ הם סימני פרדיקטים חד-מקומיים.

א. הוכח שהפסוק $\exists x(R(x) \quad S(x))$ והפסוק $\left(\exists x R(x)\right) \quad \left(\exists x S(x)\right)$

אינם שקולים לוגית זה לזה.

כדי להוכיח עליך להציג אינטרפרטציה שבה לשני הפסוקים ערכי אמת שונים זה מזה.

ב. הראה כי אחד משני הפסוקים הנ״ל (**איזה?**) גורר לוגית את האחר.

אין צורך בהוכחה פורמלית מלאה, די בהסבר מילולי.

ג. האם הפסוק $\exists x(R(x) \quad S(x))$ שקול לוגית לפסוק $\left(\exists x R(x)\right) \quad \left(\exists x S(x)\right)$?

אם לא, הוכח בעזרת אינטרפרטציה מתאימה. אם כן, תן הסבר מילולי.