

מס' שאלון - 521

6

ביולי 2020

מס' מועד 72

סמסטר 2020ב

20585 / 4

שאלון בחינת גמר

20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

משך בחינה: 4 שעות

בשאלון זה 3 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה שש שאלות.

עליכם לענות על חמש שאלות בלבד.

משקל כל שאלה 20 נקודות.

בהצלחה !!!

שאלה 1

הציגו מונה (enumerator) בעל חמישה מצבים (כולל q_{print} ו- q_{halt}) לשפה $\{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$.
 (זוהי השפה $\{\epsilon, 00, 0000, 000000, 00000000, \dots\}$)
 קבוצת המצבים תהיה $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_{\text{print}}, q_{\text{halt}}\}$.
 אלפבית סרט ההדפסה יהיה $\Sigma = \{0\}$.
 אלפבית סרט העבודה יהיה $\Gamma = \{x, y, \sqcup\}$.
 תארו את המונה באיור (אפשר לוותר על הציור של q_{halt} וכל הקשתות שנכנסות אליו. אפשר לוותר על הציור של מעברים בלתי אפשריים).
 אם אין לכם אפשרות לצייר את המונה, תוכלו להסתפק ברישום של פונקציית המעברים שלו:
 $\delta(q, \gamma) = (q', \gamma', D, \sigma)$ רשמו $\gamma \in \Gamma$ ולכל q שונה מ- q_{halt} ולכל $q, \gamma = (q', \gamma', D, \sigma)$
 q' הוא המצב שאליו עוברים, γ' הוא הסמל שכותבים בסרט העבודה, D הוא כיוון התנועה של הראש על סרט העבודה ($D \in \{L, R\}$), σ הוא הסמל שכותבים בסרט ההדפסה. (σ יכול להיות 0 או ϵ (אם בצעד זה לא כותבים בסרט ההדפסה)).
 תוכלו לוותר על הרישום של מעברים בלתי אפשריים.
הסבירו היטב את פעולת המונה, ולמה הוא אכן מפיק את השפה $\{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$.

שאלה 2

נגדיר את השפה $UNION_{TM}$:
 $UNION_{TM} = \{ \langle M_1, M_2, M_3 \rangle \mid M_1, M_2 \text{ and } M_3 \text{ are TMs and } L(M_3) = L(M_1) \cup L(M_2) \}$
 מילה $\langle M_1, M_2, M_3 \rangle$ שייכת לשפה, אם M_1 , M_2 ו- M_3 הן מכונות טיורינג, והשפה ש- M_3 מזהה שווה לאיחוד השפות שמזהות M_1 ו- M_2 .
 א. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $UNION_{TM}$ (הראו: $A_{TM} \leq_m UNION_{TM}$).
 ב. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $\overline{UNION_{TM}}$ (הראו: $A_{TM} \leq_m \overline{UNION_{TM}}$).

שאלה 3

תזכורת: $SAT = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ is a satisfiable Boolean formula} \}$
 נגדיר את השפה $UNIQUE-SAT$:
 $UNIQUE-SAT = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ is a Boolean formula which has exactly one satisfying assignment} \}$
 מילה $\langle \phi \rangle$ שייכת לשפה $UNIQUE-SAT$, אם ϕ היא נוסחה בוליאנית, שיש לה הצבה מספקת אחת ויחידה (הצבה אחת ויחידה למשתני הנוסחה, שבה הנוסחה מקבלת את הערך 1).
 הוכיחו: אם $P=NP$, אזי $UNIQUE-SAT$ שייכת ל-P.

שאלה 4 (כל סעיף 10 נקודות)

צביעה חוקית של גרף לא מכוון $G=(V, E)$ היא השמה של צבע אחד ויחיד לכל צומת של הגרף, באופן שכל שני צמתים שמחוברים בקשת, אינם צבועים באותו הצבע.

השפה $3COLOR$ שלהלן היא NP-שלמה (בעיה 7.38 בספר הלימוד. במהדורה הקודמת, 7.27):

$$3COLOR = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ is colorable with 3 colors} \}$$

זוהי שפת הגרפים הלא מכוונים, שיש להם צביעה חוקית בשלושה צבעים.

בהגדרת השפה $3COLOR$ אין דרישה, שהגרף G יהיה **קשיר** (גרף לא מכוון G הוא קשיר, אם יש

ב- G מסלול מכל צומת לכל צומת). נגדיר את השפה $CONN-3COLOR$:

$$CONN-3COLOR = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ is a connected graph that is colorable with 3 colors} \}$$

זוהי שפת הגרפים הלא מכוונים **הקשירים**, שיש להם צביעה חוקית בשלושה צבעים.

א. הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של $3COLOR$ ל- $CONN-3COLOR$ ($3COLOR \leq_p CONN-3COLOR$).

ב. הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של $CONN-3COLOR$ ל- $3COLOR$ ($CONN-3COLOR \leq_p 3COLOR$).

בכל סעיף, תארו את הרדוקציה, והוכיחו שהיא תקפה וניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 5

אוטומט סופי דטרמיניסטי **דו-ראשי** (2DFA) הוא אוטומט סופי דטרמיניסטי שיש לו **שני ראשים קוראים**. הקלט לאוטומט כזה נתון על סרט בגודל מילת הקלט ועוד שני סימנים שמציינים את גבולות הקלט (מימין ומשמאל לקלט). בתחילת הריצה של האוטומט שני הראשים הקוראים נמצאים על הסמל השמאלי ביותר של הקלט. הראשים יכולים לנוע באופן בלתי תלוי זה בזה ימינה ושמאלה בתוך הגבולות של הסרט. הראשים הם לקריאה בלבד. האוטומט מקבל את מילת

הקלט על-ידי כניסה למצב מיוחד q_{accept} .

(אוטומט כזה מוגדר בבעיה 5.14 בספר. במהדורה הקודמת, 5.26).

הוכיחו שהשפה A_{2DFA} הבאה שייכת למחלקה L :

$$A_{2DFA} = \{ \langle M, x \rangle \mid M \text{ is a 2DFA and } M \text{ accepts } x \}$$

שאלה 6

תהיינה A, B ו- C שלוש שפות.

על השפה A נתון שהיא שייכת למחלקה RP .

א. נתון ש- $B \leq_p A$. האם אפשר להסיק ש- B שייכת ל- RP ? הוכיחו את תשובתכם.

ב. נתון ש- $A \leq_p C$. האם אפשר להסיק ש- C שייכת ל- RP ? הוכיחו את תשובתכם.