במהלך הלימוד של קורס זה, אתם נדרשים לעיתים לחשב סכומים של טורים סופיים ואינסופיים. ייתכן שלחלק מכם חסר רקע תיאורטי בתחום זה, ועליכם להשלימו בכוחות עצמכם. כדי להקל עליכם את המשימה, הוספנו במדריך הלמידה את נספח ב, העוסק בטורים אינסופיים. בנספח זה, מופיעים קטעים נבחרים מתוך פרק 11 בספר "חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א" מאת הווארד אנטון. מטרת הנספח לספק לכם את הרקע התיאורטי הנדרש לחישוב סכומי טורים, שכמותם תפגשו במהלך הקורס. מומלץ מאוד לקרוא את הנספח!

להלן רשימת טורים שעליכם להכיר, ואחריה תרגילים לתירגול עצמי (ופתרונותיהם).

נוסחת הבינום (עמוד 8 בספר הקורס)

לכל x ו- y ממשיים ו-n טבעי:
$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

נוסחת המולטינום (עמוד 12 בספר הקורס)

לכל $x_1, x_2, \ldots, x_r$ ממשיים ו-n טבעי:
$$(x_1+x_2+\ldots+x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_r):\\ n_1+\ldots+n_r=n}} \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r} x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot x_r^{n_r}$$

טור הנדסי (גיאומטרי) סופי

לכל $x \neq 1$ ממשי:
$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

טור הנדסי (גיאומטרי) אינסופי

לכל $-1<x<1$:
$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

טור טיילור של אקספוננט

לכל x ממשי:
$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$$

ומכאן:
$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{[f(x)]^i}{i!} = e^{f(x)}$$

טורים נוספים

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

לכל $x \neq 1$ ממשי:
$$\sum_{i=1}^{n} ix^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx}[x^i] = \frac{d}{dx}\left[\sum_{i=1}^{n} x^i\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right] = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

לכל $-1<x<1$:
$$\sum_{i=1}^{\infty} ix^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dx}[x^i] = \frac{d}{dx}\left[\sum_{i=1}^{\infty} x^i\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1-x}\right] = \frac{1}{(1-x)^2}$$

תרגילים

.1

$$\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}$$

פתרון :

$$\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i} = \sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}1^i\,1^{10-i} = (1+1)^{10} = 2^{10} = 1{,}024$$

.2

$$\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}0.4^i\,0.6^{10-i}(2^{i+1}+3)$$

פתרון :

$$\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}0.4^i\,0.6^{10-i}(2^{i+1}+3) = \sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}0.4^i\,0.6^{10-i}\,2^{i+1} + \sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}0.4^i\,0.6^{10-i}\,3$$

$$= 2\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(\underbrace{2\cdot 0.4}_{0.8})^i\,0.6^{10-i} + 3\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}0.4^i\,0.6^{10-i}$$

$$= 2(0.8+0.6)^{10} + 3(0.4+0.6)^{10} = 83.9913$$

.3

$$\sum_{i=2}^{20}0.7\cdot 0.9^{i+3}$$

פתרון :

$$\sum_{i=2}^{20}0.7\cdot 0.9^{i+3} = \sum_{i=0}^{18}0.7\cdot 0.9^{i+5} = 0.7\cdot 0.9^5\sum_{i=0}^{18}0.9^i = 0.7\cdot 0.9^5\cdot\frac{1-0.9^{19}}{1-0.9} = 3.575065$$

.4

$$\sum_{i=k}^{\infty}p^i \qquad , \qquad 0<p<1$$

פתרון :

$$\sum_{i=k}^{\infty}p^i = \sum_{i=0}^{\infty}p^{i+k} = p^k\sum_{i=0}^{\infty}p^i = \frac{p^k}{1-p}$$

.5

$$\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{2i-1}p \qquad , \qquad 0<p<1$$

פתרון :

$$\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{2i-1}p = p(1-p)\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{2i-2} = p(1-p)\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{2(i-1)}$$

$$= p(1-p)\sum_{i=0}^{\infty}[(1-p)^2]^i = p(1-p)\cdot\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}$$

.6

$$\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^{i+2}\cdot\frac{3^i}{i!}$$

פתרון :

$$\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^{i+2}\cdot\frac{3^i}{i!} = (1-p)^2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{[3(1-p)]^i}{i!} = (1-p)^2e^{3(1-p)}$$

.7 $\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{3^i}{i!}$

פתרון : $\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{3^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{3^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^i}{(i-1)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{3^{i+1}}{i!} = 3\sum_{i=0}^{\infty} \frac{3^i}{i!} = 3e^3$

.8 $\sum_{i=0}^{\infty} |2-i| \cdot \frac{3^i}{i!}$

פתרון : $\sum_{i=0}^{\infty} |2-i| \cdot \frac{3^i}{i!} = (2-0) \cdot \frac{3^0}{0!} + (2-1) \cdot \frac{3^1}{1!} + \sum_{i=2}^{\infty} (i-2) \cdot \frac{3^i}{i!}$

$$= 2 + 3 + \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot \frac{3^i}{i!} - \sum_{i=2}^{\infty} 2 \cdot \frac{3^i}{i!} = 5 + \underbrace{3e^3 - (0+3)}_{\text{לפי תרגיל 7}} - 2 \cdot \underbrace{(e^3 - 1 - 3)}_{\text{לפי נוסחת טור טיילור של אקספוננט}} = 10 + e^3 = 30.0855$$

.9 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda x^2)^i}{i!}$

פתרון : $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda x^2)^i}{i!} = e^{\lambda x^2}$

.10 $\sum_{i=1}^{20} \frac{i(i+1)}{2}$

פתרון : $\sum_{i=1}^{20} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{20} i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{20} i = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{2 \cdot 6} + \frac{20 \cdot 21}{2 \cdot 2} = 1{,}540$

.11 $\sum_{i=1}^{20} (20-i)$

פתרון : $\sum_{i=1}^{20} (20-i) = \sum_{i=1}^{19} i = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$