

## תרגיל 9-10.3 מהספר

כדי לקבוע את המיקום האופטימלי של צינור הנפט, מספיק למצוא את החציון של קואורדינטות ה- $y$  של הבארות. (נוכיח זאת מיד.)  
ניתן למצוא חציון של רשימת מספרים בזמן לינארי באמצעות האלגוריתם SELECT, ולכן ניתן לקבוע את המיקום האופטימלי של צינור הנפט בזמן לינארי.

**טענה:** קואורדינטת ה- $y$  האופטימלית של הצינור היא:  
אם  $n$  אי-זוגי: קואורדינטת ה- $y$  של הבאר שהקואורדינטה שלה היא החציון.  
אם  $n$  זוגי: קואורדינטת ה- $y$  של הבאר שהקואורדינטה שלה היא החציון התחתון או קואורדינטת ה- $y$  של הבאר שהקואורדינטה שלה היא החציון העליון או בין שניהן (לא משנה איפה).

### הוכחה:

**כאשר  $n$  אי-זוגי:** נניח שהצינור הראשי עובר דרך הבאר שקואורדינטת ה- $y$  שלה היא החציון ונראה מה יקרה אם "נזיז" את הצינור ב- $d$  יחידות ( $d > 0$ ) כלפי מעלה.  
כל הבארות שקואורדינטת ה- $y$  שלהן שווה לחציון או קטנה ממנו יתרחקו  $d$  יחידות מהצינור, ויש לפחות  $(n+1)/2$  בארות כאלה (זו שקואורדינטת ה- $y$  שלה היא החציון ועוד  $(n-1)/2$  בארות שקואורדינטת ה- $y$  שלהן קטנה מהחציון או שווה לו).  
יש לכל היותר  $(n-1)/2$  בארות שנמצאות מעל החציון, וכל אחת מבארות אלה עשויה להתקרב ב- $d$  יחידות לכל היותר לצינור. (נשים לב, שהיא עלולה גם להתרחק מהצינור!)  
נסמן ב- $s$  את האורך הכולל של השלוחות כאשר הצינור הראשי עובר דרך החציון ונסמן ב- $s'$  את האורך הכולל של השלוחות לאחר הזזת הצינור הראשי. מקבלים:

$$s' \geq s + d(n+1)/2 - d(n-1)/2 = s + d > s$$

כלומר: הזזת הצינור ב- $d$  יחידות כלפי מעלה מגדילה **ממש** את האורך הכולל של השלוחות.  
ניתן להראות באופן סימטרי, שהזזת הצינור ב- $d$  יחידות כלפי מטה גם כן תגדיל ממש את האורך הכולל של השלוחות, ולכן המסקנה היא שהמיקום האופטימלי של הצינור הראשי הוא החציון.

**כאשר  $n$  זוגי:** ראשית, נראה שכל המיקומים של הצינור שנמצאים בין שני החציונים שקולים זה לזה. נניח שהצינור הראשי עובר דרך הבאר שקואורדינטת ה- $y$  שלה היא החציון העליון או דרך הבאר שקואורדינטת ה- $y$  שלה היא החציון התחתון או איפה שהוא בין שניהן.  
אם "נזיז" את הצינור ב- $d$  יחידות כלפי מטה או כלפי מעלה (מבלי לחצות את החציון התחתון או העליון, בהתאמה), אז  $n/2$  בארות יתקרבו ב- $d$  יחידות לצינור ו- $n/2$  בארות יתרחקו ב- $d$  יחידות מהצינור. כלומר, האורך הכולל של השלוחות לא ישתנה.

נניח כעת (ללא הגבלת הכלליות) שהצינור הראשי עובר דרך הבאר שקואורדינטת ה- $y$  שלה היא החציון העליון. מה יקרה אם נזיז את הצינור ב- $d$  יחידות ( $d > 0$ ) כלפי מעלה?  
כל הבארות שקואורדינטת ה- $y$  שלהן שווה לחציון העליון או קטנה ממנו יתרחקו  $d$  יחידות מהצינור, ויש לפחות  $n/2 + 1$  בארות כאלה (זו שקואורדינטת ה- $y$  שלה היא החציון העליון ועוד  $n/2$  בארות שקואורדינטת ה- $y$  שלהן קטנה מהחציון התחתון או שווה לו).  
יש לכל היותר  $n/2 - 1$  בארות שנמצאות מעל החציון העליון, וכל אחת מבארות אלה עשויה להתקרב ב- $d$  יחידות לכל היותר לצינור.

כמו קודם, נסמן ב- $s$  את האורך הכולל של השלוחות במצב ההתחלתי ונסמן ב- $s'$  את האורך הכולל של השלוחות לאחר הזזת הצינור הראשי. מקבלים:

$$s' \geq s + d(n/2 + 1) - d(n/2 - 1) = s + 2d > s$$

כלומר: הזזת הצינור ב- $d$  יחידות כלפי מעלה מגדילה **ממש** את האורך הכולל של השלוחות.  
(ניתן להראות באופן סימטרי, שאם בהתחלה הצינור הראשי יעבור דרך הבאר שקואורדינטת ה- $y$  שלה היא החציון התחתון ונזיז אותו ב- $d$  יחידות כלפי מטה, האורך הכולל של השלוחות גם כן יגדל ממש.)  
המסקנה היא לפיכך, שהמיקום האופטימלי של הצינור הראשי הוא על אחד משני החציונים או ביניהם.  
**מ.ש.ל.**