פרק 8: משפטי גבול (סיכום)

(20416 / 4.3.09)

אי-שוויון מרקוב

אם X הוא משתנה מקרי אי-שלילי, אז לכל ערך חיובי a מתקיים:

$$P\{X \ge a\} \le \frac{E[X]}{a}$$

אי-שוויון צ'בישב

אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו μ ושונותו σ^2 סופיות, אז לכל ערך חיובי a מתקיים:

$$P\{|X-\mu| \ge a\} \le \frac{\sigma^2}{a^2}$$

אי-שוויון צ'בישב החד-צדדי

אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו 0 ושונותו σ^2 סופית, אז לכל ערך חיובי a מתקיים:

$$P\{X \ge a\} \le \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

החוק החלש של המספרים הגדולים

אם X_1, X_2, ... היא סדרה של משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, שלכל אחד מהם תוחלת סופית μ, אז לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים:

$$P\{|\overline{X}_n - \mu| \ge \varepsilon\} \to 0 \qquad \text{כאשר} \qquad n \to \infty$$

משפט הגבול המרכזי

אם X_1, X_2, ... היא סדרה של משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, שלכל אחד מהם תוחלת סופית μ ושונות סופית σ^2, אז:

$$P\left\{\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le a\right\} \to \Phi(a) \qquad \text{כאשר} \qquad n \to \infty$$

כלומר, כאשר n "גדול", למשתנה המקרי $Y_n = \dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ יש **בקירוב** התפלגות נורמלית סטנדרטית.

כמו כן, מתקיים השוויון:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

כאשר מחשבים קירוב להסתברות של משתנה מקרי בדיד באמצעות התפלגות רציפה (ההתפלגות הנורמלית במקרה זה), נוהגים לבצע **תיקון רציפות**. (הסבר נוסף אפשר למצוא במדריך הלמידה בעמודים 105-106 ובאתר הקורס בפתרונות לקובץ התרגילים לפרק 5).

החוק החזק של המספרים הגדולים

אם X_1, X_2, ... היא סדרה של משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, שלכל אחד מהם תוחלת סופית μ, אז לכל $\varepsilon > 0$ קיים n^* שעבורו מתקיים:

$$P\{|\overline{X}_n - \mu| \ge \varepsilon\} = 0 \qquad \text{לכל} \qquad n \ge n^*$$

אי-שוויון ינסן

אם $f(x)$ היא פונקציה ממשית קמורה, דהיינו $f''(x) \ge 0$ לכל x, אז $E[f(X)] \ge f(E[X])$, כל אימת שהתוחלות קיימות וסופיות.