

שאלה 1

תור קדימויות מוגדר כמבנה נתונים S התומך בשתי הפעולות הבאות:
 $\text{INSERT}(z, S)$: הכנסת המפתח z למבנה S ;
 $\text{DELETE} - \text{MIN}(S)$: מציאת, החזרת ומחיקת המפתח המינימלי מהמבנה S .
 כידוע, ניתן לממש תור קדימויות בערימה בינרית.

- 7 (נק') א. איך ניתן לממש תור קדימויות בעזרת
- רשימה מקושרת רגילה;
 - רשימה מקושרת ממוינת;
 - עץ חיפוש בינרי;
 - עץ אדום-שחור?
- 6 (נק') ב. מהו זמן הריצה של כל פעולה בכל מימוש?
- 7 (נק') ג. איזה מימוש עדיף אם
- מספר פעולות המחיקה הוא קבוע;
 - מספר פעולות המחיקה הוא בסדר גודל של מספר פעולות ההכנסה?

שאלה 2 (20 נקודות)

נתון עץ בינרי T . הרמה d - של העץ מוגדרת כאוסף כל הצמתים הנמצאים בעומק d (יחסית לשורש). לדוגמא: הרמה 0 מכילה את השורש, הרמה 1 מכילה את הבנים של השורש; הרמה $d + 1$ מכילה את כל הבנים של הצמתים שברמה d .
סריקה ברמות של העץ T היא פעולה על העץ המחזירה את הצמתים של כל רמה משמאל לימין, החל מהרמה 0 ועד הרמה המכסימלית.
 כתבו אלגוריתם המבצע סריקה ברמות של העץ T בזמן $O(n)$ (n הוא מספר הצמתים בעץ).
 הסבירו מדוע האלגוריתם שהצעתם פועל נכון.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתונה סדרה של n תת-קטעים

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]$$

של הקטע $[0, 1]$.

כתבו אלגוריתם המחשב את מספר הזוגות (i, j) , $1 \leq i, j \leq n$ המקיימים את התנאי $b_i < a_j$.
 (במילים אחרות, אנו רוצים לדעת כמה זוגות של תת-קטעים זרים זה לזה קיימים בסדרה).
 האלגוריתם חייב לרוץ בזמן $O(n \lg n)$ במקרה הגרוע.

שאלה 4

בהינתן מערך S של n מספרים ממשיים שונים זה מזה ומספר ממשי נוסף z :
(10 נק') א. כתבו אלגוריתם שזמן ריצתו $\Theta(n \lg n)$, הסופר את מספר הזוגות (x, y) של איברים ב- S המקיימים את התנאי $x + y \leq z$.

(10 נק') ב. כתבו אלגוריתם שזמן ריצתו $\Theta(n^2)$, הסופר את מספר השלושות (u, v, w) של איברים ב- S המקיימות את התנאי $u + v + w = z$.

הערה: מותר להתעלם מההבדל בין זוג סדור / לא סדור ובין שלשה סדורה / לא סדורה (כלומר, מותר לספור את הזוג (x, y) וגם את הזוג (y, x) ; בדומה עבור שלשות).
אין חובה לכתוב פסידוקוד.

שאלה 5

נניח שממשים ערימות בינריות בעצים (בעזרת מצביעים) במקום במערכים.
ברצוננו למזג שתי ערימות שלמות: H_a בת $2^a - 1$ צמתים ו- H_b בת $2^b - 1$ צמתים, כך שהתוצאה תהיה גם היא ערימה בינרית בת $2^a + 2^b - 2$ צמתים.

- (6 נק') א. כתבו אלגוריתם למיזוג שתי הערימות עבור המקרה $a = b$, שרץ בזמן $O(\lg n)$.
(6 נק') ב. כתבו אלגוריתם למיזוג שתי הערימות עבור המקרה $|a - b| = 1$, שרץ בזמן $O(\lg n)$.
(8 נק') ג. כתבו אלגוריתם למיזוג שתי הערימות עבור a, b כלשהם, שרץ בזמן $O(\lg^2 n)$.
הערה: אין חובה לכתוב פסידוקוד.

שאלה 6

נתונים n פריטים. משקלו של הפריט ה- i הוא w_i (w_i שלם). בהינתן מספר שלם נוסף W , ברצוננו לקבוע אם קיימת תת-קבוצה של הפריטים, כך שמשקל הפריטים בתת-קבוצה הוא בדיוק W .
(במקרה שקיימת תת-קבוצה כזו, ברצוננו לדעת את הרכבה).
למשל, כאשר $W = 10$ ומשקלי הפריטים הם $\{5, 2, 6, 3\}$, ניתן להגיע למשקל של 10 ע"י בחירת הפריטים שמשקליהם 5, 2, 3.
(12 נק') א. כתבו אלגוריתם תכנון דינמי לפתרון הבעיה, שרץ בזמן $O(nW)$.
(8 נק') ב. הריצו את האלגוריתם שכתבתם על הדוגמא לעיל, והראו כיצד האלגוריתם מוצא את הפתרון לבעיה.

סוף!