פתרונות לממ"ן 16 - 2013ב - 20425

1. בהינתן המאורע ש- $X=x$, כלומר, בהינתן שנבחרו x קלפי **ט** למדגם, חייבים להיות במדגם עוד $9-x$ קלפים נוספים שאינם קלפי **ט**. לפיכך, מספר קלפי ה- **ס**, שיכולים להיבחר למדגם, יכול להיות בין 0 לבין $9-x$. כמו כן, הואיל ויש 2 קלפי **ס**, בין 6 הקלפים שאינם קלפי **ט**, ההסתברות שכל קלף נוסף במדגם יהיה קלף **ס**, <u>בהינתן ש- $X=x$</u> , הופכת להיות $\frac{2}{6}$.

מהאמור לעיל אפשר להסיק כי ההתפלגות של Y בהינתן $X=x$ היא בינומית עם הפרמטרים $9-x$ ו- $\frac{2}{6}$.

לפיכך:
$$E[Y \mid X=x]=(9-x)\cdot\tfrac{1}{3} \qquad ; \qquad \operatorname{Var}(Y \mid X=i)=(9-x)\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}$$
לכל $x=0,1,\ldots,9$.

2. א. נסמן ב- N את מספר הקונים המגיעים לסופרמרקט ביום ראשון ; $N\sim Po\,(1{,}000)$.

לפי נתוני הבעיה, X_i מסמן את מספר הבקבוקים שקונה i ממחזר, לכל $i=1,2,\ldots,N$, כאשר X_i מוגדר על-ידי $X_i=Y_i-1$, עבור $Y_i\sim Geo\,(0.2)$. לכן, לכל $i=1,2,\ldots,N$ מתקיים:

$$E[X_i]=E[Y_i-1]=E[Y_i]-1=\tfrac{1}{0.2}-1=4$$

ומספר הבקבוקים שממוחזרים ביום ראשון, נתון באמצעות <u>הסכום המקרי</u> $\sum_{i=1}^{N}X_i$.

לפיכך, לפי דוגמה 4ד (עמודים 375-376 בספר הקורס) מקבלים:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N}X_i\right]=E[N]E[X_1]=1{,}000\cdot 4=4{,}000$$

ב. לפי סימוני הסעיף הקודם ולפי תוצאת דוגמה 4יד (עמוד 386 בספר הקורס), נקבל כי:

$$\operatorname{Var}(X_i)=\operatorname{Var}(Y_i-1)=\operatorname{Var}(Y_i)=\tfrac{0.8}{0.2^2}=20 \qquad , \qquad i=1,2,...,N$$

ומכאן:
$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)=E[N]\operatorname{Var}(X_1)+(E[X_1])^2\operatorname{Var}(N)=1{,}000\cdot 20+4^2\cdot 1{,}000=36{,}000$$

ג. נשתמש כעת בסימוני סעיף א ובתוצאת דוגמה 6י (עמוד 399 בספר הקורס), ונקבל כי לכל $t<-\ln 0.8$ מתקיים:

$$M_{\sum_{i=1}^{N}X_i}(t)=E\left[\left(M_{X_1}(t)\right)^N\right]=E\left[\left(M_{Y_1-1}(t)\right)^N\right]=E\left[\left(e^{-t}M_{Y_1}(t)\right)^N\right]$$
$$=E\left[\left(e^{-t}\frac{0.2e^t}{1-0.8e^t}\right)^N\right]=E\left[\left(\frac{0.2}{1-0.8e^t}\right)^N\right]=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-1{,}000}\cdot\frac{1{,}000^n}{n!}\cdot\left(\frac{0.2}{1-0.8e^t}\right)^n$$
$$=e^{-1{,}000}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{200}{1-0.8e^t}\right)^n=e^{-1{,}000}\cdot e^{200/(1-0.8e^t)} \qquad , \qquad t<-\ln 0.8$$

לחישוב התוחלת בעזרת הפונקציה יוצרת המומנטים, נגזור אותה לפי t ונציב בנגזרת $t = 0$.

נקבל: $\frac{d}{dt}[e^{-1,000+200/(1-0.8e^t)}] = e^{-1,000+200/(1-0.8e^t)} \cdot \frac{200\cdot 0.8}{(1-0.8e^t)^2}$

ומכאן: $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = e^{-1,000+200/(1-0.8e^t)} \cdot \left.\frac{200\cdot 0.8}{(1-0.8e^t)^2}\right|_{t=0} = e^{-1,000+1,000} \cdot \frac{160}{0.04} = 4,000$

3. א. נגדיר: $X_i = \begin{cases} 1 & , \text{ המספר } i \text{ נבחר לפחות פעם אחת} \\ 0 & , \text{ אחרת} \end{cases}$ לכל $i = 1,\ldots,10$,

ונקבל כי: $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$ = מספר המספרים שנבחרו לפחות פעם אחת

לכל $i = 1,\ldots,10$ מתקיים: $E[X_i] = P\{X_i = 1\} = 1 - 0.9^{12} = 0.71757$

לכן: $E[X] = \sum_{i=1}^{10} E[X_i] = 10 \cdot 0.71757 = 7.1757$

ב. לכל $i = 1,\ldots,10$ מתקיים: $\text{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = 0.71757 \cdot 0.28243 = 0.20266$

ולכל $i, j = 1,\ldots,10$ כך ש- $i \neq j$ מתקיים:

$$P\{X_i = 1, X_j = 1\} = 1 - P\{X_i = 0 \cup X_j = 0\}$$
$$= 1 - \left(P\{X_i = 0\} + P\{X_j = 0\} - P\{X_i = 0 \cap X_j = 0\}\right)$$
$$= 1 - \left(0.9^{12} \cdot 2 - 0.8^{12}\right) = 0.50386$$

לכן: $\text{Cov}(X_i, X_j) = E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j]$

$$= P\{X_i = 1, X_j = 1\} - (P\{X_i = 1\})^2 = 0.50386 - 0.71757^2 = -0.011046$$

ומכאן: $\text{Var}(X) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = 10 \cdot \text{Var}(X_i) + 10 \cdot 9 \cdot \text{Cov}(X_i, X_j)$

$$= 10 \cdot 0.20266 - 10 \cdot 9 \cdot 0.011046 \cong 1.0324$$

ג. לפי ההגדרה של X ושל Y מתקיים השוויון $Y = 10 - X$. לכן: $\text{Var}(Y) = \text{Var}(X) = 1.0324$

4. א. לפי נתוני השאלה: $E[X] = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$; $E[Y \mid X = i] = \frac{i}{\frac{2}{3}} = \frac{3i}{2}$

$\text{Var}(X) = \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$; $\text{Var}(Y \mid X = i) = \frac{\frac{1}{3}i}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{3i}{4}$

לכן, לפי נוסחת התוחלת המותנית: $E[Y] = E[E[Y \mid X]] = E[\frac{3X}{2}] = \frac{3}{2}E[X] = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25$

ולפי נוסחת השונות המותנית:

$$\text{Var}(Y) = E[\text{Var}(Y \mid X)] + \text{Var}(E[Y \mid X])$$
$$= E[\tfrac{3X}{4}] + \text{Var}(\tfrac{3X}{2}) = \tfrac{3}{4}E[X] + \tfrac{9}{4}\text{Var}(X) = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{4} \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{45}{16} = 2.8125$$

ב. נתחיל בחישוב השונות המשותפת של X ו- Y. לצורך כך, נחשב את $E[XY]$:

$$E[XY] = E[E[XY \mid X]] \overset{(*)}{=} E[X\,E[Y \mid X]] = E[X \cdot \tfrac{3X}{2}] = \tfrac{3}{2}E[X^2] \qquad \text{[(*) לפי תרגיל ת26]}$$

$$= \tfrac{3}{2}\left(\mathrm{Var}(X) + (E[X])^2\right) = \tfrac{3}{2}(\tfrac{3}{4} + \tfrac{9}{4}) = 4.5$$

ומכאן:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 4.5 - 1.5 \cdot 2.25 = 1.125 = \tfrac{9}{8}$$

כעת, נחשב את מקדם המתאם בין X ל- Y:

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\frac{9}{8}}{\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{45}{16}}} = \sqrt{0.6} = 0.7746$$

ג. נמצא תחילה את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y, לפי ההתפלגויות הנתונות בתחילת השאלה. לכל i ו- j שלמים וחיוביים, המקיימים $1 \le i \le j$, מתקיים:

$$P\{X=i, Y=j\} = P\{Y=j \mid X=i\}P\{X=i\} = \binom{j-1}{i-1}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{i}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{j-i} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{i-1}\tfrac{2}{3} = \binom{j-1}{i-1}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{i+1}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{j-1}$$

כעת, נמצא את פונקציית ההסתברות השולית של Y. לכל j שלם וחיובי, מתקיים:

$$P\{Y=j\} = \sum_{i=1}^{j} P\{X=i, Y=j\} = \sum_{i=1}^{j}\binom{j-1}{i-1}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{i+1}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{j-1} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{j-1}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{2}\sum_{i=1}^{j}\binom{j-1}{i-1}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{i-1}$$

$$= \left(\tfrac{1}{3}\right)^{j-1}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{2}\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j-1}{i}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{i} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{j-1}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{2}\left(\tfrac{2}{3}+1\right)^{j-1} = \left(\tfrac{5}{9}\right)^{j-1}\tfrac{4}{9}$$

מהתוצאה שקיבלנו אנו למדים שההתפלגות של Y היא גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{4}{9}$.

כעת, נוכל למצוא את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $Y=j$. לכל i ו- j שלמים וחיוביים, המקיימים $1 \le i \le j$, מתקיים:

$$P\{X=i \mid Y=j\} = \frac{P\{X=i, Y=j\}}{P\{Y=j\}} = \frac{\binom{j-1}{i-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}}{\left(\frac{5}{9}\right)^{j-1}\frac{4}{9}} = \binom{j-1}{i-1}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{i-1}\left(\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{9}{5}\right)^{j-1} = \binom{j-1}{i-1}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{i-1}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{j-1}$$

לבסוף, נחשב את $E[X \mid Y=j]$, באמצעות פונקציית ההסתברות המותנית שמצאנו. נקבל:

$$E[X \mid Y=j] = \sum_{i=1}^{j} i\,P\{X=i \mid Y=j\} = \sum_{i=1}^{j} i\binom{j-1}{i-1}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{i-1}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{j-1} = \sum_{k=0}^{j-1}(k+1)\binom{j-1}{k}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{k}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{j-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{j-1}(k+1)\binom{j-1}{k}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{k}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{k}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{j-1-k} = \sum_{k=0}^{j-1}(k+1)\binom{j-1}{k}\left(\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{5}\right)^{k}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{j-1-k} = \sum_{k=0}^{j-1}(k+1)\binom{j-1}{k}\left(\tfrac{2}{5}\right)^{k}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{j-1-k}$$

נשים לב, שהסכום האחרון שקיבלנו שווה לתוחלת של $W+1$, כאשר W הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $j-1$ ו- $\frac{2}{5}$. ולכן, מקבלים כי לכל $j = 1,2,\ldots$, מתקיים:

$$E[X \mid Y=j] = \sum_{k=0}^{j-1}(k+1)\binom{j-1}{k}\left(\tfrac{2}{5}\right)^{k}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{j-1-k} \underset{W \sim B(j-1,\,2/5)}{=} E[W+1] = E[W]+1 = \tfrac{2}{5}(j-1)+1 = \tfrac{2}{5}j + \tfrac{3}{5}$$

5. נגדיר: $X_i = \begin{cases} 1 & , \text{שלב } i \text{ של המשחק הסתיים בהצלחה} \\ 0 & , \text{שלב } i \text{ של המשחק הסתיים בכשלון} \end{cases}$ לכל $i = 1,\ldots,n$

לפי נתוני הבעיה, ה-X_i-ים בלתי-תלויים זה בזה ו- $P\{X_i = 1\} = \frac{n-i}{n}$, לכל $i = 1,\ldots,n$.

כמו כן, הסכום $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ מבטא את מספר ההצלחות במשחק.

א. נחשב את התוחלת של X: $E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} P\{X_i = 1\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n} = n - \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n-1}{2}$

ב. וכעת את השונות של X: $\text{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = \left(1 - \frac{i}{n}\right) \cdot \frac{i}{n} = \frac{i}{n} - \frac{i^2}{n^2}$

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{i^2}{n^2}\right) = \frac{n(n+1)}{2n} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{(n+1)(3n-2n-1)}{6n} = \frac{n^2-1}{6n}$$

6. א. נשים לב, כי אם X_1, X_2, ... , X_r, הם משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, אז מתקיים:

$$M_{\sum_{j=1}^{r} X}(t) = \prod_{j=1}^{r} M_{X_j}(t) = \left(M_{X_1}(t)\right)^r$$

לכן, אפשר לראות שהפונקציה יוצרת המומנטים הנתונה היא פונקציה יוצרת מומנטים של סכום r משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות שלכל אחד מהם הפונקציה יוצרת המומנטים $M_{X_1}(t) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n} e^{ti}$.

עתה, הגדרת הפונקציה יוצרת המומנטים של משתנה מקרי בדיד היא:

$$M_{X_1}(t) = E[e^{tX_1}] = \sum_i e^{ti} P\{X_j = i\}$$

וממנה אפשר להסיק שהפונקציה יוצרת המומנטים $M_{X_1}(t)$ היא פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה מקרי אחיד בדיד בין 0 ל- n.

כלומר, אם נגדיר את X_1, X_2, ... , X_r, כמשתנים מקריים בלתי-תלויים שלכל אחד מהם התפלגות אחידה בדידה בין 0 ל- n, נקבל **שלסכומם** יש פונקציה יוצרת מומנטים כמו זו הנתונה בשאלה.

ב. לפי האמור בסעיף הקודם: $E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{r} X_i\right] = \sum_{i=1}^{r} E[X_i] = r \cdot \frac{n}{2}$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{r} X_i\right) \underset{\text{ה-}X_i\text{-ים בלתי-תלויים}}{=} \sum_{i=1}^{r} \text{Var}(X_i) = r \cdot \frac{(n+1)^2-1}{12}$$

הסבר: השונות של משתנה מקרי אחיד בדיד בין 0 ל-n שווה לשונות של משתנה מקרי אחיד בדיד בין 1 ל- $n+1$, וזו שווה ל- $\frac{(n+1)^2-1}{12}$. (ראה סיכום פרק 5 באתר הקורס.)

ג. $P\{X = 1\} = r \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^r$

הסבר: המשתנה המקרי X שווה ל-1, רק אם בדיוק אחד מה- X_i-ים שווה ל- 1 (יש r אפשרויות לבחירתו) והיתר שווים ל-0.