

מבנה הבחינה :

בבחינה חמש שאלות.
עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות.
לכל השאלות משקל שווה.

הנחיות :

כל תשובה צריכה להתחיל בעמוד **חדש**.
אין לכתוב בצבע אדום.
אין לכתוב בעיפרון.

אפשר להשתמש בכל עובדה או תוצאה המופיעה בספר הלימוד או במדריך הלמידה, ללא הוכחה או הסבר. חובה להוכיח או להסביר כל טענה אחרת.
אין צורך לכתוב פסידוקוד, אלא אם הדבר נדרש במפורש.

שאלה 1

נתון מערך $A[1..n]$ של מספרים.

א' הראו כיצד ניתן למצוא את ערכי המיקום ה- $\lfloor n/2^i \rfloor$, $i = 1, \dots, \lfloor \lg n \rfloor$, של המערך, בזמן כולל $O(n)$.

רמז: שימו לב שמציאת כל ערך מיקום כוללת גם חלוקה סביב ערך זה.

ב' הראו שמיון כל אחד מהקטעים שבהם מחולק המערך בסעיף א' יכול להתבצע בזמן כולל $O(n \lg n)$.

ג' כתבו שגרה למציאת ערך נתון במערך המתקבל בסעיף ב'; זמן הריצה הינו $O(\lg n)$.

שאלה 2

נתחו את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם מיון-מהיר עבור המערכים האלה:

$$A = [1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor, n, n-1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor + 1] \quad \text{א'}$$

$$B = [n, n-1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor + 1, 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor] \quad \text{ב'}$$

שאלה 3

נתונה קבוצה של n נקודות $p_i = (x_i, y_i)$ בחצי הימני של עיגול היחידה; כלומר, כל נקודה $p_i = (x_i, y_i)$ מקיימת את התנאים $0 < x_i \leq 1$, $0 < y_i \leq 1$, $x_i^2 + y_i^2 \leq 1$. נניח שהתפלגותן של הנקודות אחידה; כלומר, ההסתברות למצוא נקודה באזור נתון של חצי העיגול נמצאת ביחס ישר לשטחו של אזור זה.

נגדיר ב- θ_i את הזווית בין הכיוון החיובי של ציר ה- x לבין הקרן היוצאת מהראשית אל הנקודה p_i ($\tan \theta_i = y_i / x_i$). כתבו אלגוריתם שתוחלת זמן הריצה שלו היא $\Theta(n)$, למיון n הנקודות על-פי θ_i .

שאלה 4

תור קדימויות הוא מבנה נתונים S התומך בשלוש הפעולות הבאות:

$\text{INSERT}(S, z)$: הכנסת איבר z למבנה S ;

$\text{MIN}(S)$: החזרת המפתח המינימלי של המבנה S ;

$\text{DELETE-MIN}(S)$: מחיקת האיבר בעל המפתח המינימלי מהמבנה S .

בכל אחד משני הסעיפים הראו כיצד ניתן לממש תור קדימויות בעזרת מחסנית כך ששלוש הפעולות יתבצעו בזמנים הנדרשים:

א' הכנסה והחזרת המינימום בזמן $O(1)$, מחיקת המינימום בזמן $O(n)$.

ב' הכנסה בזמן $O(n)$, החזרת המינימום ומחיקת המינימום בזמן $O(1)$.

מותר להשתמש בזיכרון נוסף במקרה הצורך.

שאלה 5

הציעו מבנה נתונים S התומך בפעולות הבאות בזמנים הנדרשים (n מציין את מספר האיברים במבנה):

$\text{BUILD}(L, S)$: בניית המבנה S מתוך סדרה **ממוינת** L של מפתחות; זמן הריצה: $O(n)$;

$\text{MAX-COUNT}(S)$: החזרת המפתח בעל השכיחות המכסימלית ב- S ; זמן הריצה: $O(1)$;

$\text{COUNT}(S, k)$: החזרת שכיחות המפתח k ב- S ; זמן הריצה: $O(\lg n)$;

$\text{MERGE-MIN-MAX}(S, k)$: החלפת כל מפתח מינימלי וכל מפתח מכסימלי בערך k ; זמן

הריצה: $O(\lg n)$.

הערה: מבנה הנתונים S יכול להיות מורכב מכמה מבני נתונים יסודיים.