

**קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"**  
**תאריך הבחינה: 18.7.2016 (סמסטר 2016 ב - מועד א 5 / 86)**

**חומר העזר המותר:** מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

**לבחינה מצורפים:** טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

## שאלה 1 (25 נקודות)

(10 נק') א. יהי  $X$  משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ).

**הוכח כי:**  $E[X] = \lambda$  ו-  $\text{Var}(X) = \lambda$

(15 נק') ב. מבצעים  $n$  ( $n > 2$ ) חזרות בלתי-תלויות על ניסוי ברנולי,

שההסתברות לקבל בו הצלחה היא  $p$  ( $0 < p < 1$ ).

יהי  $i$  שלם חיובי, ונניח שמתקיים  $1 < i < n$ .

1. איזו הסתברות גדולה יותר?

ההסתברות לקבל בדיוק  $i$  הצלחות ב-  $n$  החזרות שבוצעו

או ההסתברות לקבל את ההצלחה ה- $i$  ית בחזרה ה- $n$  ית (האחרונה)?

2. מהי ההסתברות לקבל בדיוק  $i$  ( $i \geq 2$ ) הצלחות ב-  $n$  החזרות,

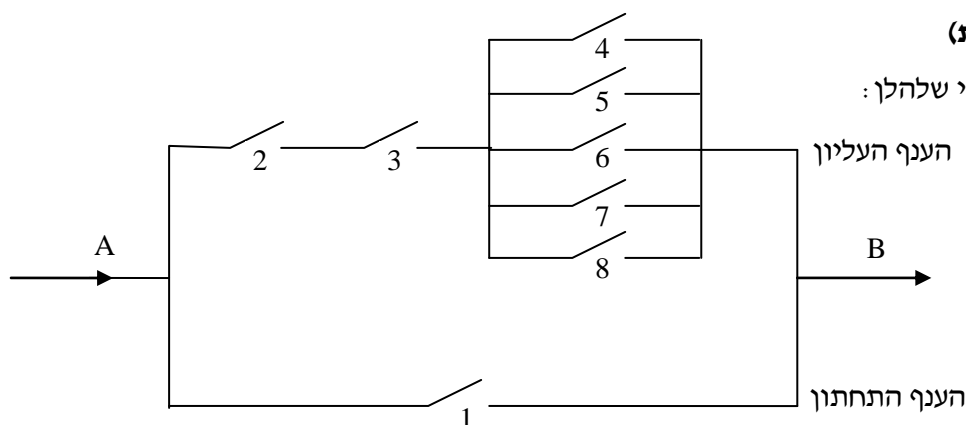
כך ששתיים מהן תהיינה בשתי החזרות הראשונות?

3. ידוע שבשתי החזרות הראשונות התקבלו הצלחות.

מהי ההסתברות לקבל בדיוק  $i$  ( $i \geq 2$ ) הצלחות ב-  $n$  החזרות?

## שאלה 2 (25 נקודות)

נתון המעגל החשמלי שלהלן:



כל אחד משמונת המתגים המרכיבים את המעגל סגור בהסתברות 0.4, ואז יכול לעבור בו זרם.

אין תלות בין המצבים – פתוח או סגור – של מתגים שונים.

זרם יכול לעבור במעגל מנקודה A לנקודה B דרך הענף העליון, דרך הענף התחתון או דרך שניהם,

בהתאם למצבי המתגים.

יהי  $X$  מספר המתגים הסגורים במעגל כולו;

ויהי  $Y$  מספר הענפים שיכול לעבור דרכם זרם.

(12 נק') א. מהן פונקציות ההסתברות השולית של  $X$  ושל  $Y$ ?

(8 נק') ב. 1. חשב את ההסתברות **המשותפת**  $P\{X = 2, Y = 0\}$ .

2. חשב את ההסתברות **המותנית**  $P\{Y = 1 | X = 3\}$ .

(5 נק') ג. האם המשתנים המקריים  $X$  ו- $Y$  בלתי-תלויים? נמק את תשובתך.

### שאלה 3 (25 נקודות)

יהי  $X$  משתנה מקרי אחיד (רציף) על הקטע  $(0, a)$ , עבור  $a > 0$ .

נגדיר את המשתנה המקרי  $Y$  על-ידי  $Y = -\ln X$ .

- (7 נק') א. מהי פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה המקרי  $Y$ ?
- (6 נק') ב. מהי פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי  $Y$ ?
- (6 נק') ג. האם יש  $a > 0$  שעבורו ההתפלגות של המשתנה המקרי  $Y$  תקיים את תכונת חוסר הזיכרון?
- (6 נק') ד. חשב את התוחלת של המשתנה המקרי  $Y$ .

### שאלה 4 (25 נקודות)

בקיוסק יש מקפיא ובו ארטיקים בארבעה טעמים: תות, בננה, לימון ומסטיק.

מכל טעם יש במקפיא 200 ארטיקים, ונניח שלא ניתן להבחין בין ארטיקים שונים מאותו הטעם. קבוצה של 100 ילדים מגיעה לקיוסק, כדי לקנות בו ארטיקים.

(15 נק') א. כמה אפשרויות קנייה שונות קיימות בכל אחד מהמקרים המתוארים להלן:

- כל ילד קונה בדיוק ארטיק אחד.
- כל ילד קונה ארטיק אחד או שני ארטיקים או אף לא ארטיק אחד.
- הערה:** אם ילד קונה שני ארטיקים, אין חשיבות לסדר שבו הוא בוחר אותם.
- בדיוק 50 ילדים קונים ארטיק בטעם לימון, וכל ילד קונה בדיוק ארטיק אחד.

(5 נק') ב. אם כל ילד קונה בדיוק ארטיק אחד,

כמה צירופים שונים של ארטיקים יכולים להישאר בקיוסק לאחר שהם מסיימים את הקנייה?

(5 נק') ג. אם כל ילד קונה לכל היותר ארטיק אחד,

כמה צירופים שונים של ארטיקים יכולים להישאר בקיוסק לאחר שהם מסיימים את הקנייה?

**הערה:** צירוף של ארטיקים הוא, למשל, (180 תות, 190 בננה, 160 לימון, 170 מסטיק).

### שאלה 5 (25 נקודות)

תהליך מסוים מורכב משני חלקים המתבצעים בזה אחר זה.

התפלגות משך הזמן (בימים) שאורך החלק הראשון של התהליך היא גיאומטרית עם תוחלת 10.

בהינתן שחלקו הראשון של התהליך ארך  $i$  ימים ( $i = 1, 2, \dots$ ),

התפלגות משך הזמן (בימים) של חלקו השני של התהליך היא גיאומטרית עם תוחלת  $2i - 1$ .

- (8 נק') א. מהי תוחלת משך הזמן שאורך התהליך כולו (על שני חלקיו)?
- (8 נק') ב. מהי השונות המשותפת בין משך הזמן שאורך החלק הראשון של התהליך לבין משך הזמן שאורך חלקו השני?
- (9 נק') ג. מהי שונות משך הזמן שאורך התהליך כולו (על שני חלקיו)?

**בהצלחה!**

**ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית,  $\Phi(z)$**

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] \quad \text{נוסחת האינטרפולציה:}$$

$z$	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
$z$	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
$z$	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

## דף נוסחאות לבחינה - 20425

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}, \quad i=0,1,\dots,n$	$np$	$np(1-p)$	$(pe^t + 1 - p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1} \cdot p, \quad i=1,2,\dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i!, \quad i=0,1,\dots$	$\lambda$	$\lambda$	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1} (1-p)^{i-r} \cdot p^r, \quad i=r, r+1, \dots$	$r/p$	$(1-p)r/p^2$	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r, \quad t < -\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i} / \binom{N}{n}, \quad i=0,1,\dots,m$	$nm/N$	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N} (1 - \frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n}, \quad i=m+1, m+2, \dots, m+n$	$m + (1+n)/2$	$(n^2 - 1)/12$	
אחידה	$1/(b-a), \quad a \leq x \leq b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt} - e^{at})/(tb - ta), \quad t \neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty$	$\mu$	$\sigma^2$	$\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda - t), \quad t < \lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1, \dots, n_r} \cdot p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}, \quad \sum n_i = n, \sum p_i = 1$			

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

נוסחת הבינום

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

כלל ההכלה וההפרדה

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

הסתברות מותנית

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

נוסחת הכפל

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i), \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S$$

נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}, \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S$$

נוסחת בייס

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx$$

תוחלת

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx$$

תוחלת של פונקציה של מ"מ

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

שונות

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב  $\lambda$  ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר  $\lambda$ .

$$P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\}, \quad s, t \geq 0$$

תכונת חוסר-הזכרון

$$E[X | Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y) = \int x f_{X|Y}(x|y) dx$$

תוחלת מותנית

$\text{Var}(X   Y = y) = E[X^2   Y = y] - (E[X   Y = y])^2$	שונוות מותנית
$E[X] = E[E[X   Y]] = \sum_y E[X   Y = y] p_Y(y)$	נוסחת התוחלת המותנית
$E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X   Y]]$	(טענה מתרגיל 26, עמוד 430)
$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X   Y)] + \text{Var}(E[X   Y])$	נוסחת השונוות המותנית
$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$	תוחלת של סכום משתנים מקריים
$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$	שונוות משותפת
$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$	
$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$	שונוות של סכום משתנים מקריים
$\rho(X, Y) = \text{Cov}(X, Y) / \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}$	מקדם המתאם הלינארי
$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$	פונקציה יוצרת מומנטים
$M_{X_1+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t) \quad :$ כאשר $X_i$ מ"מ ב"ת מתקיים	
$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X]$	תוחלת, שונוות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי
$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\text{Var}(X) + (E[X])^2 \text{Var}(N)$	(כאשר $X_i$ מ"מ ב"ת ש"ה)
$M_Y(t) = E[(M_X(t))^N]$	
$P\{X \geq a\} \leq E[X]/a \quad , \quad a > 0 \quad , \quad X$ מ"מ אי-שלילי	אי-שוויון מרקוב
$P\{ X - \mu  \geq a\} \leq \sigma^2/a^2 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty$	אי-שוויון צ'בישב
$P\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)/\sqrt{n\sigma^2} \leq a\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a) \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty \quad , \quad X_i$ מ"מ ב"ת וש"ה	משפט הגבול המרכזי
<hr/>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>אם <math>A</math> ו-<math>B</math> מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע <math>A</math> יתרחש לפני המאורע <math>B</math> היא <math>P(A)/[P(A) + P(B)]</math>.</li> <li>סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר <math>p</math> הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי).</li> <li>סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני.</li> <li>סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי.</li> <li>ההתפלגות המותנית של <math>X</math> בהינתן <math>X + Y = n</math>, כאשר <math>X</math> ו-<math>Y</math> מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו <math>p</math>) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).</li> </ul>	
<hr/>	
$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	
$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1 < x < 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = -\ln(1-x) \quad , \quad 0 < x < 1$	
$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \neq -1 \quad ; \quad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$	נוסחת האינטגרציה בחלקים:
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \frac{1}{a \ln b} b^{ax} \quad ; \quad \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$	
$\log_n a = \log_m a / \log_m n \quad ; \quad \log_n (a^b) = b \cdot \log_n a \quad ; \quad \log_n (ab) = \log_n a + \log_n b$	