שאלה 1 (25 נקודות)

יהי X משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 6.

נגדיר את המשתנה המקרי Y על-ידי: $Y = 1 - e^{-X}$.

(6 נק') א. חשב את $P\{X \le 0.5 \mid X > 0.25\}$.

(6 נק') ב. חשב את התוחלת של Y.

(7 נק') ג. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y. **רשום את ערכיה לכל מספר ממשי.**

(6 נק') ד. מצא את פונקציית הצפיפות של Y.

שאלה 2 (25 נקודות)

בוחרים באקראי ובזה אחר זה 10 קלפים מתוך חפיסת קלפים רגילה, הכוללת 52 קלפים: 13 בצורת לב, 13 בצורת יהלום, 13 בצורת עלה ו-13 בצורת תלתן.

(8 נק') א. מהי ההסתברות שייבחרו קלפים רק מהצורות לב ויהלום, כך שיהיה לפחות קלף אחד מכל צורה?

יהי X משתנה מקרי, המוגדר על-ידי מספר הקלפים שנבחרים, שמייד אחריהם נבחר קלף בדיוק מאותה הצורה.

(8 נק') ב. מצא את התוחלת של X.

(9 נק') ג. מצא את השונות של X.

שאלה 3 (25 נקודות)

לצמח מסוים יש בסך-הכל 60 עלים.

בשעות האור, מספר החרקים שמגיעים **לכל עלה** מקיים את שלושת ההנחות של תהליך פואסון עם קצב של 9 לשעה.

נניח שאין תלות בין החרקים שמגיעים לצמח, ובין מספרי החרקים שמגיעים לעלים שונים (באותו הזמן ובזמנים שונים).

(6 נק') א. מהי ההסתברות שמשעה 12:00 עד השעה 12:10 יגיעו **לחמשת העלים העליונים ביותר של הצמח** בסך-הכל 8 חרקים? (בדיוק 8, לא פחות ולא יותר.)

(6 נק') ב. נניח שבעשר דקות מסוימות הגיע **לכל עלה של הצמח** חרק אחד לפחות.
מהי ההסתברות שבדיוק ל-20 עלים של הצמח (מתוך 60 עליו) הגיע חרק אחד בדיוק?

(7 נק') ג. בדקה מסוימת הגיעו **לצמח** 10 חרקים בסך-הכל.
מהי ההסתברות שאף לא אחד מהם הגיע ל-10 העלים העליונים ביותר של צמח?

(6 נק') ד. נניח שהאורך של כל חרק שמגיע לצמח עולה על 3 מ"מ בהסתברות 0.3.
מהי שונות מספר החרקים ה"ארוכים" (שאורכם עולה על 3 מ"מ) שמגיעים לצמח במשך שעה אחת?

שאלה 4 (25 נקודות)

מסובבים שלוש פעמים סביבון תקין, שעל ארבע פאותיו רשומים המספרים 1, 2, 3 ו- 4.

יהי Y המספר הגבוה ביותר שהתקבל בשלושת הסיבובים של הסביבון.

(9 נק') א. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y . **רשום את ערכיה לכל מספר ממשי.**
מהן ההנחות שיש להניח לצורך החישוב?

(6 נק') ב. מצא את פונקציית ההסתברות של Y .

(10 נק') ג. נניח כי המשתנים המקריים $Y_1, Y_2, ..., Y_{50}$ בלתי-תלויים זה בזה וכי לכל אחד מהם התפלגות הזהה לזו של Y הנתון בתחילת השאלה.

נסמן ב- $\overline{Y}$ את הממוצע של 50 המשתנים המקריים הנתונים.

חשב **קירוב** להסתברות ש- $3.4 \le \overline{Y} \le 3.5$.

ערוך אינטרפולציה לינארית היכן שהיא נדרשת.

שאלה 5 (25 נקודות)

(13 נק') א. יהי X משתנה מקרי בדיד, שתוחלתו ושונותו סופיות, ויהיו a ו- b קבועים ממשיים.

הוכח כי: .1 $E[aX+b] = aE[X]+b$

.2 $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$

(12 נק') ב. מטפס-הרים מטפס על הר במשך 10 ימים.

ביום-טיפוס מוצלח הוא עושה דרך של 200 מטר וביום לא-מוצלח דרך של 100 מטר בלבד.

נניח שאין תלות בין ימי-הטיפוס, ושכל יום-טיפוס הוא יום מוצלח בהסתברות 0.4.

1. מהי ההסתברות שהמטפס יעבור ב-10 הימים דרך כוללת של 1,200 מטר לפחות?
2. מהן התוחלת והשונות של הדרך הכוללת שהמטפס יעבור ב-10 ימי הטיפוס?

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(x)$

$$\Phi(z) = P\{Z \le z\} = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt \qquad ; \qquad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \qquad ; \qquad Z \sim N(0,1)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
Z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,...,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1}\cdot p \quad , \quad i=1,2,...$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i! \quad , \quad i=0,1,...$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,...$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,...,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,...,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a\le x\le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\, , t\neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , -\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,...,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot...\cdot p_r^{n_r} \quad , \sum n_i=n\, , \sum p_i=1$			

נוסחת הבינום $\quad (x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$

כלל ההכלה וההפרדה $\quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)$

הסתברות מותנית $\quad P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

נוסחת הכפל $\quad P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\cdot...\cdot P(A_n\mid A_1\cap A_2\cap...\cap A_{n-1})$

נוסחת ההסתברות השלמה $\quad P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i) \quad ,$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס $\quad P(B_j\mid A)=\frac{P(A\mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)} \quad ,$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת $\quad E[X]=\sum_x xp_X(x)=\int xf(x)dx$

תוחלת של פונקציה של מ"מ $\quad E[g(X)]=\sum_x g(x)p_X(x)=\int g(x)f(x)dx$

שונות $\quad \mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית $\quad E[aX+b]=aE[X]+b$

$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון $\quad P\{X>s+t\mid X>t\}=P\{X>s\} \quad , \quad s,t\ge 0$

תוחלת מותנית $\quad E[X\mid Y=y]=\sum_x xp_{X|Y}(x\mid y)=\int xf_{X|Y}(x\mid y)dx$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X \mid Y=y) = E[X^2 \mid Y=y]-(E[X \mid Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] = E[E[X \mid Y]] = \sum_y E[X \mid Y=y]p_Y(y)$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY]-E[X]E[Y]$

$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i,Y_j)$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i,X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)\big/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(at)$

כאשר X_i מ״מ ב״ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t)\cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X]$

(כאשר X_i מ״מ ב״ת ש״ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X) + (E[X])^2\,\mathrm{Var}(N)$

$M_Y(t) = E\left[\left(M_X(t)\right)^N\right]$

אי-שוויון מרקוב $P\{X \ge a\} \le E[X]/a \quad , \quad a>0$, X מ״מ אי-שלילי

אי-שוויון צ׳בישב $P\{|X-\mu| \ge a\} \le \sigma^2/a^2 \quad , \quad a>0$, $\mu,\sigma^2<\infty$

משפט הגבול המרכזי $P\left\{ (\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu)\Big/\sqrt{n\sigma^2} \le a \right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(a) \quad , \quad \mu,\sigma^2<\infty$, X_i מ״מ ב״ת וש״ה

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב״ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ״מ בינומיים (גיאומטריים) ב״ת עם אותו הפרמטר p הוא מ״מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ״מ פואסוניים ב״ת הוא מ״מ פואסוני.
- סכום של מ״מ נורמליים ב״ת הוא מ״מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ״מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב״ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1<x<1$

$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \ne -1 \quad ; \quad \int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b)$

$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax}dx = \frac{1}{a\ln b}b^{ax} \quad ;$

נוסחת האינטגרציה בחלקים:

$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$