אלגוריתמים 20417 – מבחן 3.3.2020

הנחיות: ענו על 4 מתוך 5 שאלות. לכל שאלה 25 נקודות. לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה.
על שאלות שמסומנות בכוכב – יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה), ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).
חומר עזר: אסור. דף נוסחאות מצ״ב. בהצלחה!

שאלה 1 – מסלולים מזעריים (Dijkstra) (25 נק׳).

נזכר בבעיית המסלולים המזעריים ממקור יחיד: בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים $w(e)>0$ בצלעות, ועם קדקוד מקור s, ברצוננו למצוא מסלולים מזערים מ-s ליתר קדקודי הגרף. נניח לשם פשטות, כי **אין בגרף** קדקודים שונים בעלי **אותו מרחק** מהמקור. יהי T העץ הזמני שהאלגוריתם של **Dijkstra** מתחזק במהלך הריצה שלו (T מורכב מהצלעות שנכללות במסלולים המזעריים שהאלגוריתם כבר סיים לחשב. לכן T פורש אך ורק את הקדקודים עבורם חושב כבר באופן סופי מסלול מזערי). הביטו בטענה הבאה:

> ״בכל איטרציה i של האלגוריתם של **Dijkstra** יש מספר ממשי d_i,
> כך שהעץ T פורש בסיום אותה איטרציה בדיוק את כל הקדקודים,
> שמרחקם מהמקור ב-G הינו לכל היותר d_i.״

האם הטענה נכונה (כן או לא): כן

נסמן $d_0=0$

הוכחה / הפרכה של הטענה: נוכיח באינדוקציה, עבור $i=0$ בסוף האיטרציה הראשונה כמובן שרק הקודקוד s יהיה ב-T ואין עוד קודקוד שמרחקו מ-s הוא 0 (משקלים חיוביים)
נניח שהטענה נכונה עבור כל i ונוכיח עבור $i+1$.
באיטרציה ה-$i+1$ אנו מוסיפים ל-T את המסלול הקצר ביותר שניתן להוסיף כיוון שכל מסלול אחר מ-s לכל שלא היה ב-T בתחילת האיטרציה יקר יותר מהדרך שבחרנו, נניח שמשקלה x, וזה אומר את הקודקוד שהוספנו נקבל מהנחת האינדוקציה שב-T (שלפני האיטרציה) יש $d_n=y$ כך שכל קודקוד ב-T (ורק הם) מרחקם מהמקור הוא y. באיטרציה הנוכחית הוספנו את המסלול הקצר ביותר לכן בסוף האיטרציה ה-$i+1$ נקבל ש-$d_{n+1}=x+y$ הוא מספר ממשי שמקיים, כל הקודקודים ב-T רחוק מ-s מקסימום $x+y$ (מהנחת האינדוקציה כל הקודקודים היו רחוקים y לפני, והקודקוד שהוספנו שווה ל-y) וכל קודקוד שלא ב-T רחוק מ-s מרחק שגדול מ $x+y$ (כי מהנחת האינדוקציה הם היו רחוקים ביותר מ-y לפני ההוספה ומכיוון שDijkstra בוחר בכל איטרציה את המסלול הקצר ביותר אזי בחר להוסיף את x אז בוודאי הם יהיו רחוקים יותר מ $x+y$

כי אין קשתות עם אותו משקל

נא לא לכתוב בשוליים

שאלון 460 87.20.15 M1

שאלה 2 – עצים פורשים מזעריים (ווריאנט של Kruskal) (25 נקי).

נתון גרף קשיר ולא-מכוון $G=(V,E)$, עם משקלי צלעות $w(e)>0$. המשקלים יחודיים (חח״ע), כלומר לצלעות שונות יש משקלים שונים. נזכר באלגוריתם של Kruskal למציאת עץ פורש מזערי:

(א) מאתחלים יער F, שבו כל קדקוד מהווה עץ נפרד.

(ב) ממשיכים באיטרציות, כשבכל איטרציה:

(ב1) **מוסיפים ליער F את הצלע** e^*, בעלת המשקל המזערי מבין כלל הצלעות ב-G, שמחברות בין שני עצים שונים T_1,T_2 של F. (כזכור G קשיר. לכן כל עוד ישנם עצים שונים ב-F, אז אכן ישנן ב-G צלעות שמחברות בין עצים שונים).

(ב2) **מאחדים, כמובן, לכדי עץ יחיד את שני העצים** T_1,T_2 שבינם עוברת הצלע e^*.

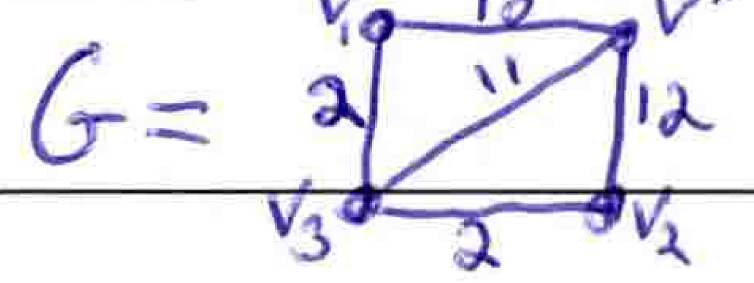
(ג) האיטרציות נפסקות ברגע שהיער F מורכב מעץ אחד ויחיד.

בהמשך נסמן ב-$T(v)$ את העץ היחיד ביער הנוכחי F, אליו שייך הקדקוד v. נביט בווריאנט של האלגוריתם המקורי, שזהה לאלגוריתם של Kruskal למעט השינוי של שלב (ב1):

> בשלב (ב1) בוחרים קדקוד כלשהו v^*,
>
> שממנו יוצאת לפחות צלע אחת אל מחוץ ל-$T(v^*)$.
>
> מוסיפים ליער את הצלע e^* **בעלת המשקל המזערי,**
>
> **מבין כל הצלעות שיוצאות מ-v^* אל מחוץ ל-$T(v^*)$.**
>
> (כזכור G קשיר. לכן כל עוד ישנם מספר עצים שונים ביער F, אז אכן ישנם ב-G קדקודים, בעלי צלע שמחברת בין העץ שלהם לבין עץ אחר ב-F.)

השאלה: **הוכיחו או הפריכו את נכונותו** של הווריאנט החדש. (בשאלה זו לא דנים ביעילות).

נפריך באמצעות דוגמה נגדית



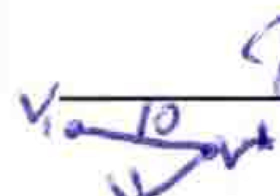
יהי הוא הקודקוד v^*

אז האלגוריתם החדש: נבחר את v^* וקודקוד

הצלע הראשונה שנבחר היא (v^*,v_1) שמשקלה 10

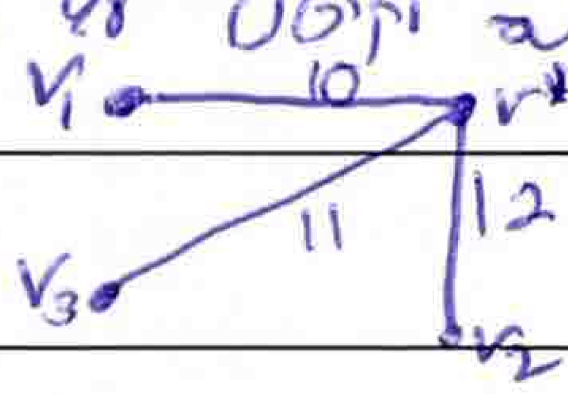
לאחר מכן נבחר שוב את v^* העץ $T(v)$ יהיה $v_1 \overset{10}{—} v^*$ והצלע שנבחר להוסיף

תהיה (v^*,v_3) שמשקלה 11 לכן לאחר נבחר שוב v^* העץ $T(v^*)$ נראה כך



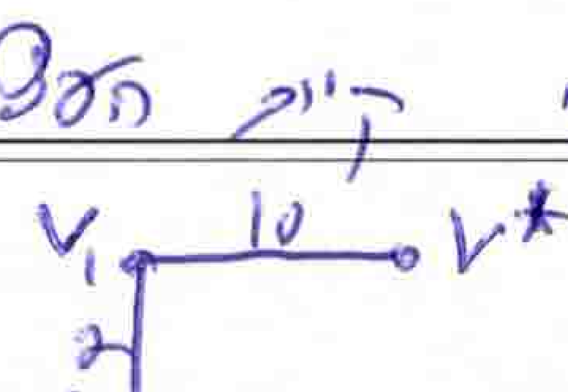
ובקשת הצלע היחידה שיוצאת מחוץ ל-$T(v)$ היא (v^*,v_2) במשקל 12

לכן נבחר אותה. ~~[illegible]~~ ויתקבל עץ פורש שנראה כך:



ומשקלו הוא 33.

כמובן שבהן זה עץ פורש מזערי כי קיים העץ הפורש



במשקל 14

14<33

87.20.15 M1 שאלון 460

נא לא לכתוב בשוליים

***שאלה 3* – אינטרפולציה באמצעות תכנון דינאמי** (25 נק׳).

פולינום ממשי מדרגה קטנה מ-n הינו ביטוי מהצורה $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$.
משפט נודע באלגברה קובע כי פולינום שכזה נקבע ביחידות לפי ערכו ב-n נקודות. למשל, כל קו ישר (כלומר כל פולינום מדרגה קטנה מ-2) נקבע ביחידות ע״י 2 נקודות דרכן הוא עובר. באופן כללי, בהינתן n נקודות $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ עבורן $x_i \neq x_j$ לכל $i \neq j$, קיים פולינום אחד ויחיד $p(x)$ מדרגה קטנה מ-n המקיים $p(x_1)=y_1,\ldots,p(x_n)=y_n$. פולינום זה נקרא פולינום האינטרפולציה של הנקודות. בבעיית האינטרפולציה נתונות הנקודות $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ המקיימות $x_i \neq x_j$, ויש לחשב את המקדמים $a_0,\ldots,a_{n-1}$ של פולינום האינטרפולציה.

(א) (15 נק׳) לכל $i \le j$ נסמן ב-$p_{i,j}$ את פולינום האינטרפולציה של הנקודות $(x_i,y_i),\ldots,(x_j,y_j)$.
מצאו 3 פולינומים פשוטים $q(x),r(x),s(x)$ מדרגה 0 או 1, עבורם מתקיים

$$p_{i,j+1}=\frac{q(x)p_{i,j}(x)-r(x)p_{i+1,j+1}(x)}{s(x)}$$

____

____

(ב) (10 נק׳) הציגו אלגוריתם תכנון דינאמי לבעיית האינטרפולציה, המבוסס על נוסחת הנסיגה מסעיף (א). לשם פשטות, החשיבו פעולות אריתמטיות על מספרים כפעולות אלמנטריות.

הגדרת המערך: ____

איתחול המערך: ____

עדכון המערך לפי נוסחת הנסיגה: ________________________________

____

____

____

יעילות: ____

____

נא לא לכתוב בשוליים

<u>שאלה 4 – שידוכים באמצעות שדכנים</u> (25 נק').

נתונה רשימה של n גברים, של n נשים ושל m שדכנים. עבור כל שדכן $1 \le i \le m$, נתונה רשימה של הגברים ושל הנשים המוכרים לו, ונתונה מגבלת עומס $1 \le t_i \le n$: שדכן מספר i יכול לשדך באופן חוקי בין כל גבר ואשה המוכרים לו, כל עוד מספר הזוגות הכולל שהוא משדך אינו עולה על t_i. הציגו אלגוריתם למציאת שידוך חוקי מרבי באמצעות השדכנים.

~~עמוד 9 במחברת 17-9~~

עמודים 9-17 במחברת

<u>שאלה 5 – הרצת FFT</u> (25 נק').

נביט בפולינום $p(x) = -3x^3 - x^2 + 3x + 1$. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) במסגרת הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום (22 נק'). בדקו את תשובתכם ע"י <u>הצבה ישירה</u> של הערכים המתאימים בפולינום (3 נק').

עמודים 5-6 במחברת

ב ה צ ל ח ה !

$i \cdot i = -1 \cdot i = -i$

נא לא לכתוב בשוליים

לשימוש הבודק

שאלה 5

$FFT((1,3,-1,-3), w=i)$

$Y_1 \leftarrow FFT((1,-1), w^2=-1) \overset{\mathrm{I}}{=} (0,2)$

$Y_2 \leftarrow FFT((3,-3), w^2=-1) \overset{\mathrm{II}}{=} (0,6)$

$F(1) = 0+1\cdot 0 = 0$

$F(i) = 2+i\cdot 6 = 2+6i$

$F(-1) = 0+(-1)\cdot 0 = 0$

$F(-i) = 2+(-i)\cdot 6 = 2-6i$

return $(0, 2+6i, 0, 2-6i)$

* הצבה ישירה בעמוד הבא

I $FFT((1,-1), w^2=-1)$

$Y_1 \leftarrow FFT((1), w^4=1) \overset{\mathrm{III}}{=} 1$

$Y_2 \leftarrow FFT((-1), w^4=1) \overset{\mathrm{IV}}{=} -1$

$F(1) = 1+1\cdot(-1) = 0$

$F(-1) = 1+(-1)\cdot(-1) = 2$

return $(0,2)$

II $FFT((3,-3), w^2=-1)$

$Y_1 \leftarrow FFT((3), w^4=1) \overset{\mathrm{V}}{=} 3$

$Y_2 \leftarrow FFT((-3), w^4=1) \overset{\mathrm{VI}}{=} -3$

$F(1) = 3+1\cdot(-3) = 0$

$F(-1) = 3+(-1)\cdot(-3) = 6$

return $(0,6)$

III $FFT((1), w^4=1)$

return 1

IV $FFT((-1), w^4=1)$

return -1

V $FFT((3), w^4=1)$

return 3

VI $FFT((-3), w^4=1)$

return -3

220181

לשימוש הבודק

המשך שאלה ב

הצבה ישירה

נציב 1

$$-3\cdot(1)^3-(1)^2+3\cdot(1)+1=0$$

נציב i

$$-3\cdot(i)^3-(i)^2+3\cdot i+1=(-3)\cdot(-i)-(-1)+3i+1$$

$$=3i+1+3i+1=2+6i$$

נציב -1

$$-3\cdot(-1)^3-(-1)^2+3\cdot(-1)+1=-3\cdot(-1)-1-3+1$$

$$=3-1-3+1=0$$

נציב $-i$

$$-3\cdot(-i)^3-(-i)^2+3\cdot(-1)+1=-3\cdot i-(-1)-3i+1$$

$$=-3i+1-3i+1=2-6i$$

אז קיבלנו אותם תשובות כמתבקש.

220181

לשימוש הבודק

שאלה 4

נתחיל ברדוקציה

נבנה רשת זרימה עם גרף G' עם קודקודי מקור ויעד מכוון וקיבולות אי שליליות $F(e) \geq 0$

נגדיר רשת G' באופן הבא:

הגדרת קודקודים

- כל גבר יוצג ע"י קודקוד בגרף G', לשם הנוחות נסמן קבוצת קודקודים אלו ב-M
- כל אשה יוצג ע"י קודקוד בגרף G', לשם הנוחות נסמן קבוצת קודקודים אלו ב-W
- כל שדכן יוצג בגרף G' ע"י 2 קודקודים, קודקוד d_1 וקודקוד d_2

נסמן לשם הנוחות את קבוצות הקודקודים ב D_1 ו- D_2

- נוסיף קודקוד מקור s וקודקוד יעד t

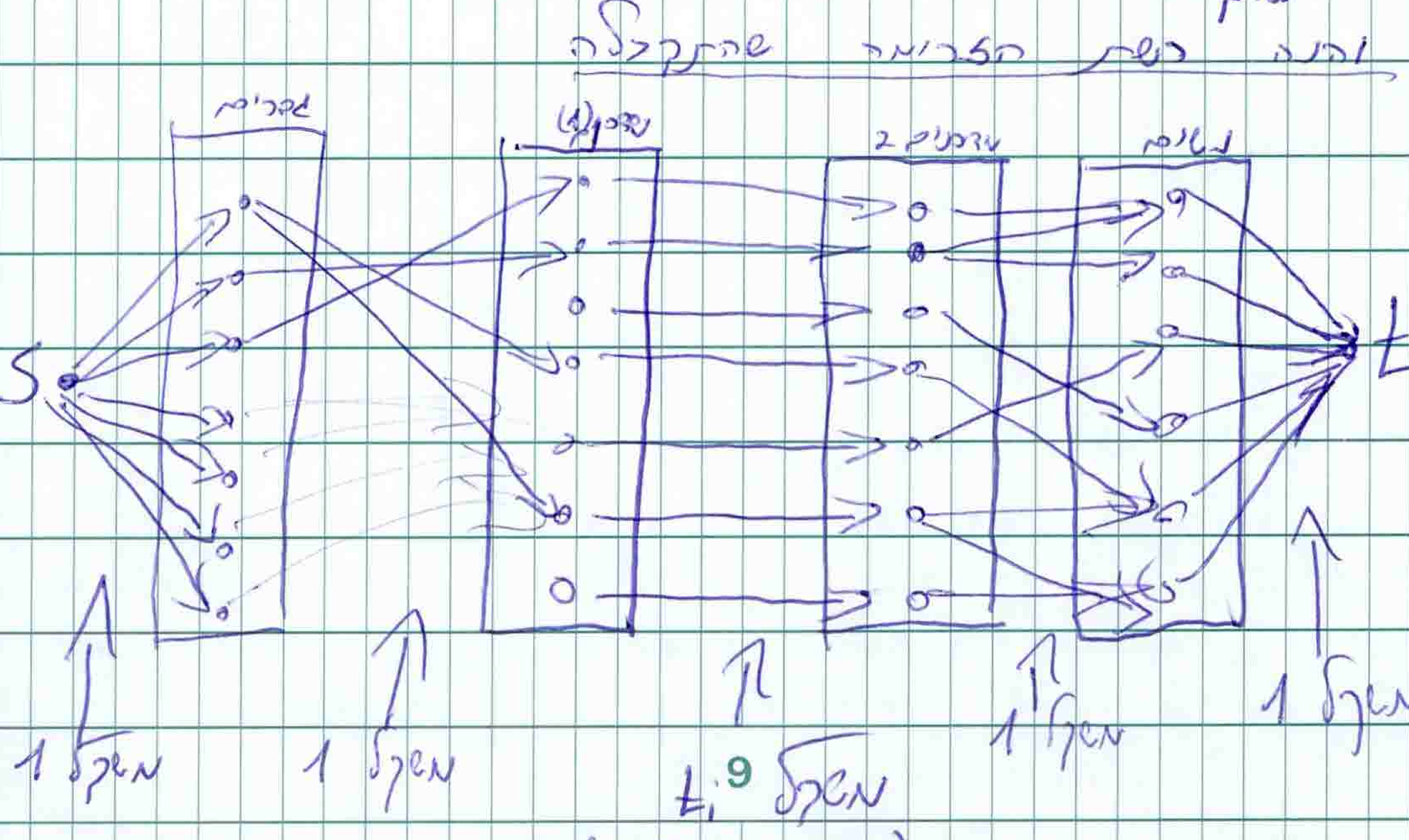
הגדרת קשתות ופונקציות משקל

- עבור כל קודקוד m מקבוצה M (גברים) נוסיף קשת מ-s אל m ונקבע $F((s,m)) = 1$
- עבור כל קודקוד w מקבוצה W (נשים) נוסיף קשת מ-w אל t ונקבע כי $F((w,t)) = 1$

~~עבור כל קודקוד d_1 מקבוצה D_1 נוסיף קשת~~

- עבור כל קודקוד m מקבוצה M (גברים) נוסיף קשת לכל שדכן מקבוצה D_1 שמכיר את m ונקבע כי $F((m,d_1)) = 1$
- עבור כל קודקוד w מקבוצה W (נשים) נוסיף קשת מכל שדכן מקבוצה D_2 שמכיר את האשה ונקבע כי $F((d_2,w)) = 1$
- לבסוף עבור כל שדכן d נוסיף קשת מ d_1 אל d_2 (כאשר d_1 ו- d_2 הם אותו שדכן d כמובן) ונקבע $F((d_1,d_2)) = t$ = מספר ההצעות המקסימלי שניתן לשדכן לשדך

והנה רשת הזרימה שהתקבלה



לשימוש הבודק

המשך שאלה 4

האלגוריתם

1. נבנה את רשת הזרימה שתוארה בהקודמת.
2. נריץ אדמונדס קארפ למציאת זרימה מקסימלית
3. נעבור על הגרף שקיבלנו ב-2 בלולאה בצורה הבאה:

(א) כשחוזר מסלול מ-t אל s

(1) נמחק את הקשת שיוצאת מ-t (המקורית) ואת הקשת שנכנסת ל-s (המקורית) מהגרף

(2) נכניס את האישה במסלול ואת הגבר במסלול ונוסיף אותם כשידוך לרשימת השידוכים הטובים.

(3) אם אין מסלול נוסף מ-t אל s נעצור את הלולאה

(4) נחזיר את רשימת השידוכים שמצאנו ב-3.

זמן ריצה

(1) נעבור על כל הזוגות של הנשים כל הגברים וכל ההיכרויות פעם אחת ונוסיף קשתות לבין הגברים למקור ונשים ליעד סה"כ ליניארי לגודל הקלט.

לכן מכיוון שכל שלב שדבן פונקציית ממש שלוקח זמן שווה ל-n נקבל שבסעיף (1) זמן הריצה של הבניה הוא $O(mn)$

הרצת אדמונדס-קארפ:

(2) $O(E^2|V|)$, נשים לב שמכיוון שהזרימה חסומה ב-n (מספר הקשתות שיוצאות מ-s) במילים אחרות, מספר השידוכים האפשריים ניתן בכלל לחסום את זמן הריצה ב $O(|E|\cdot n)$

(3) אם נשמור את כל הקשתות בגרף הסופי שקיבלנו ברשימת שכנויות מספר המסלולים זה! מקסימום מסלולים $=n$, קשתות בכל מסלול 5, לכן סה"כ עלות הסיבובים על השידוכים הוא $O(n)$

לכן זמן ריצת האלגוריתם הוא עלות אדמונדס-קארפ $O(|E|^2|V|)$ או עם ההערה שהוספתי, $O(|E|n)$

לשימוש הבודק

המשך שאלה 4

הוכחת נכונות

כיוון ראשון

נניח שמצאנו ~~בגרף~~ ברשת G זרימה מקסימלית, שמצאנו את המסלולים ומצאנו

את כל השידוכים, אבל בפועל קיימת דרך לשדך יותר זוגות

~~אז קיים זוג שאפשר לשדך כך שהוא יכול לשדך את הזוג המשודך~~

~~השדכן, אבל השדכן לא היה בקבוצה~~

אז בהכרח קיים זוג שאפשר לשדך ולא שודך אצלנו ושדכן שידך

אותם, אם השדכן הזה לא היה בקבוצה מקסימלית

של שידוכים ברשת הזרימה שלנו, אז זו סתירה לכך

שאדמונדס-קארפ מוצא זרימה מקסימלית כי הרי קיימת קשת

מ-s אל הגבר ומהגבר אל השדכן (כי הם מכירים) ומהשדכן (1) לאישה (2)

ניתן להעביר עוד שידוך, והשדכן מכיר את האישה לכן יוצאת קשת

ממנו אליה ומהאישה יוצאת קשת אל t. ואם השדכן היה

בקבוצת שידוכים מקסימלית אז בוודאי קיים שדכן אחר שלא

בקבוצה מקסימלית אצלנו (כי אצלנו כל השדכנים בקבוצה מקסימלית - אי אפשר

לשדך מספר שידוכים רב יותר) שניתן להעביר אליו את אחד מהשידוכים

אצלנו מהשדכן המקורי (אם לא אז אי-אפשרות לשדך יותר שידוכים

ממה שמצאנו) וזו סתירה כי האלגוריתם מריץ פורד-פולקרסון היה מוצא

את התיקון הזה בגרף השיורי מעביר את השידוך ומוסיף

את השידוך הנוסף לשדכן המקורי.

~~[illegible]~~

אם כן לא ניתן למצוא מספר רב מ-G שידוכים ממה

שמצאנו!

כיוון שני בעמוד הבא

לשימוש הבודק

המשך שאלה 4

כיוון שני

בשלילה

נניח כי יש לנו שידוך מקסימלי ונאמר אותו לרשת הזרימה
שבה כל שידוך יקבעו זרימה בערך 1 ומשדך מ-s אל-t
דרך הגבר האשה והמשדך (2,3) שהשתתפו בשידוך.
נניח שברשת שבנינו אין זרימה מקסימלית
~~אז קיים מסלול~~
אז ניתן להוסיף זרימה כמשקל 1 מ-s
דרך קודקוד מקבוצה M
דרך קודקוד מקבוצה D_1 ומקביל ב-D_2 אל האשה
שבודדה ומשם אל t, אבל מצב כזה מציין
שיש משדך מכיר גם את הגבר וגם את האשה (*) (אם
לא היו קודקודים שמחוברים מהגבר אל d_1 ומ-d_2
אל האשה כמו כן הצלחנו להעביר עוד זרימה מ-d_1
ל-d_2 סימן שהמשדך ~~[illegible]~~ הקורה לא
הגיע למקסימום הזרימה שלו. סתירה
להנחה שהיה לנו שידוך מקסימלי (כי מצאנו שידוך
נוסף שאפשר היה להוסיף ל"שידוך המקסימלי",
~~דרך הגבר האשה והמשדך ברשת הזרימה~~.
את השידוך הנוסף מצאנו ע"י משדך שמכיר גבר ואשה
שלא שודכו ושלא עבר את d_1 שלו)

(*) נציין כי האשה והגבר שמצאנו במסלול הנוסף לשמור מ-s
את הזרימה לא שודכו בשידוך המקסימלי אותו הנחנו
כי אז הכניסה שלהם היתה מספיקה זרימה בערך 1 מ-s
אל הגבר וזרימה בערך 1 מהאשה אל היעד ומכיון ש-2
קשתות אלה קיבולת שלהן 1 אז זה לא אפשרי!

המשך נכונות בעמוד הבא

המשך נכונות שאלה 4

~~[illegible]~~

הלולאה שבשלב 3 באלגוריתם תעצור, מאחר מכיוון

שבכל איטרציה אנחנו מורידים קשת שמובילה ל- t

ויש ~~[illegible]~~ בדיוק n קשתות מקודקוד השייך אל - t ולכן

מקסימום n קשתות שמובילות בזרימה מקודקוד השייך אל

t (או כמובן אחרות החתך שכן t נמצא לבד בקודקוד הזרימה המקסימלית

האפשרית בו (הקיבולת שלו) היא n) ולכן אם בכל איטרציה

נוריד קשת הלולאה תעצור אחרי מקסימום n איטרציות.