פרק 7: תכונות של תוחלת (תרגילים) (20416 / 23.1.12)

1. מטילים קובייה תקינה פעם אחת. יהי X תוצאת ההטלה ונגדיר $Y = 0$ אם התוצאה זוגית ו- $Y = 1$ אם היא אי-זוגית.
   א. חשב את התוחלת של המשתנה המקרי $W = 3XY$.
   ב. חשב את התוחלת ואת השונות של המשתנה המקרי $S = X+Y$.

2. א. יהיו $X_1 , \ldots , X_r$ משתנים מקריים שהתפלגותם המשותפת היא התפלגות מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $(p_1, \ldots , p_r)$, בהתאמה.
   מצא נוסחה ל- $\mathrm{Cov}(X_i , X_j)$, לכל $i \neq j$, מתוך הנוסחה הידועה ל- $\mathrm{Var}(X_i + X_j)$.
   ב. יהיו X_1 , X_2 ו- X_3 משתנים מקריים שהתפלגותם המשותפת היא התפלגות מולטינומית עם הפרמטרים 100 ו- $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}$, בהתאמה.
   חשב את מקדם המתאם של Y_1 ו- Y_2, כאשר $Y_1 = X_1 - 2X_2$ ו- $Y_2 = X_2 + X_3$.

3. א. מבצעים n חזרות בלתי-תלויות על ניסוי, שההסתברות להצליח בו היא p .
   יהיו X_n = מספר ההצלחות שמתקבלות ב- n החזרות ;
   X_m = מספר ההצלחות שמתקבלות ב- m החזרות הראשונות (מתוך ה-n), כאשר $m < n$.
   חשב את $\rho(X_m , X_n)$.
   ב. מוֹפָעים של מאורע מסוים מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של תהליך פואסון עם קצב λ (ליחידת זמן אחת) . יהיו : X_{3t} = מספר המופעים שמתרחשים במרווח-הזמן $[0, 3t]$;
   X_t = מספר המופעים שמתרחשים במרווח-הזמן $[0, t]$.
   חשב את $\rho(X_t , X_{3t})$.
   ג. התבונן בפתרון שני הסעיפים הקודמים ונסח לפיהם טענה כללית לחישוב $\rho(X , X + Y)$, כאשר X ו-Y, הם משתנים מקריים בלתי-תלויים.

4. מהמר משחק n משחקים בלתי-תלויים בזה אחר זה, וההסתברות לזכייה בכל אחד מהם שווה ל- p $(0 < p < 1)$. לכל $i = 1,...,n$, אם המהמר זוכה במשחק ה-i-י הוא מרוויח i שקלים, ואם הוא מפסיד בו הוא נאלץ להיפרד מ- $i/2$ שקלים.
   יהי X הרווח הכולל של המהמר בסוף סדרת המשחקים המתוארים לעיל.
   חשב את התוחלת ואת השונות של X .

5. יהיו A_1 , A_2 ו- A_3 מאורעות במרחב מדגם S , שההסתברויות להתרחשותם הן $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ ו- $\frac{1}{6}$, בהתאמה, ונגדיר את המשתנה המקרי N על-ידי מספר המאורעות, מבין A_1 , A_2 ו- A_3, שמתרחשים.
   א. האם אפשר למצוא את פונקציית ההסתברות של N ?
   ב. חשב את התוחלת של N .
   ג. חשב את השונות של N בכל אחד מהמקרים הבאים :
   1) המאורעות A_1 , A_2 ו- A_3 בלתי-תלויים זה בזה ;
   2) המאורעות A_1 , A_2 ו- A_3 זרים זה לזה ;
   3) המאורעות A_1 , A_2 ו- A_3 מוכלים זה בזה, כלומר $A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1$.

6. יהי X משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים N , m ו- n .
הצג את X כסכום של אינדיקטורים, והראה בעזרת הצגה זו כי $\mathrm{Var}(X)=\frac{N-n}{N-1}\cdot n\cdot\frac{m}{N}\cdot\frac{N-m}{N}$.

7. $2n$ אנשים, שהם n זוגות, מגיעים לבית מלון. לכל זוג מובטח מראש חדר משותף מסוים בבית המלון.
פקידת הקבלה מעט מבולבלת ומחלקת להם באקראי $2n$ מפתחות. לכל אחד מ-n החדרים מתאימים שני מפתחות זהים (מתוך $2n$ המפתחות) הפותחים רק את דלתו.
יהיו X – מספר האורחים שקיבלו מפתח שמתאים לדלת חדרם ;
Y – מספר הזוגות שיוכלו להיכנס לחדרם המשותף,
כלומר, מספר הזוגות שבהם לפחות אחד משני בני הזוג קיבל את המפתח המתאים לחדרו.
חשב את התוחלת והשונות של X ואת התוחלת של Y.

8. כל אחד מ-8 רווקים נחשקים ו-7 רווקות יפהפיות קונה כרטיס להצגה בתיאטרון (במיקום אקראי באולם).
כל המקומות המסומנים בכרטיסים אלו הם באותה השורה באולם, ובכל שורה יושבים בדיוק 15 אנשים.
א. מהן התוחלת והשונות של מספר הזוגות המעורבים שנוצרים בשורה?
זוג מעורב הם גבר ואישה היושבים בשני מקומות סמוכים.
(לדוגמה, אם הסידור בשורה הוא גגאאאגאאגגגאאגאג, אז יש בשורה 8 זוגות מעורבים.)
ב. מהן התוחלת והשונות של מספר הנשים בשורה שלימינן יושב גבר?

9. מטילים קובייה תקינה $Y+3$ פעמים.
יהי X מספר ה-5-ים שמתקבלים בהטלות הקובייה האלו.
חשב את $E[X]$ ואת $\mathrm{Var}(X)$ בכל אחד מן המקרים הבאים.
א. המשתנה המקרי Y מקבל את הערכים 2 ו- 5 בהסתברויות 0.4 ו- 0.6, בהתאמה.
ב. המשתנה המקרי Y מתפלג פואסונית עם הפרמטר 3.

10. מטילים מטבע תקין n פעמים.
יהי X מספר ה-H-ים שמתקבלים ב-n ההטלות של המטבע התקין.
לאחר מכן, מטילים X פעמים מטבע מוטֶה שההסתברות לקבל בו H היא $\frac{1}{n}$.
יהי Y מספר ה-H-ים שמתקבלים ב-X ההטלות של המטבע המוטֶה.
חשב את מקדם המתאם בין X ל- Y.

11. לשחר אוסף של גולות.
א. שחר מעוניין להעשיר את האוסף שברשותו, ולכן החליט לקנות בכל יום שקית אחת של גולות.
אין תלות בין השקיות ששחר קונה בימים שונים.
מהי תוחלת מספר השקיות שיקנה, אם –
1. בכל שקית יש **גולה אחת**, באחד מ-3 הצבעים : אדום, ירוק או כחול, בהסתברויות שוות ;
ושחר יקנה שקיות עד שיקבל **לפחות גולה אחת מכל צבע**?
2. בכל שקית יש **שתי גולות**, ולכל אחת מהגולות אחד מ- 3 צבעים אפשריים : אדום, ירוק או כחול,
בהסתברויות $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$ ו- $\frac{5}{8}$, בהתאמה ; ושחר יקנה שקיות עד שיקבל **לפחות שתי גולות ירוקות**?
ב. נניח שלשחר יש קופסה ובה 30 גולות : 15 אדומות, 10 ירוקות ו- 5 כחולות.
שחר מוציא מהקופסה את הגולות בסדר מקרי ובזו אחר זו, עד שבידיו כל הגולות הכחולות.
מהן תוחלת ושונות מספר הגולות שיוציא?

12. קופסה מכילה 100 כדורים, X אדומים והשאר כחולים.

ההתפלגות של המשתנה המקרי X אינה ידועה, אך ידוע כי $X = 0,1,...,100$ וכי $E[X] = 25$.

מוציאים מהקופסה שני כדורים באקראי, בזה אחר זה ועם החזרה.

א. מהי ההסתברות שצבע הכדור הראשון שמוצא הוא אדום?

ב. האם שני המאורעות "צבע הכדור ה-i-י אדום", עבור $i = 1,2$, בלתי-תלויים?

נניח כעת, כי $\text{Var}(X) = 25$ וכי מוציאים מהקופסה באקראי שני כדורים, בזה אחר זה וללא החזרה.

ג. מהי ההסתברות שמוציאים שני כדורים אדומים?

13. נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת: $f_{X,Y}(x,y) = x \cdot I_{(0,1)}(y) \cdot I_{(1-y,1+y)}(x)$

חשב את התוחלת של Y בהינתן $X = x$. **(העזר בתוצאת תרגיל 16 מקובץ התרגילים של פרק 6.)**

14. יהי Y משתנה מקרי אחיד בקטע $[2,4]$, ויהי X בהינתן $Y = y$ משתנה מקרי רציף בעל פונקציית הצפיפות המותנית $f_{X|Y}(x|y) = \frac{2x}{y^2} \cdot I_{[0,y]}(x)$. חשב את מקדם המתאם בין X ל-Y.

15. נניח ש- X הוא משתנה מקרי ברנולי עם הפרמטר p, ונניח עוד כי $E[Y \mid X = 0] = E[Y]$.

א. האם גם $E[Y \mid X = 1] = E[Y]$?

ב. האם X ו- Y בלתי-מתואמים?

16. מספר הבקשות לתיקון מקררים, שמקבל טכנאי מסוים במשך יום אחד, הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 15. הטכנאי עונה לכל אדם הפונה אליו בבקשה כזו, אך לא בכל מקרה הוא נדרש להגיע לביתו של הלקוח (כדי לתקן מקרר הנמצא שם). ההסתברות שהטכנאי יגיע לתקן מקרר בבית לקוח, שפנה אליו, היא 0.8, והתפלגות זמן-התיקון (בשעות) של כל מקרר מקולקל היא מעריכית עם הפרמטר 1.65.

הנח שהטכנאי נדרש לתקן מקרר אחד בכל פעם, וכי אין תלות בין פניות שונות או בין הפניות עצמן למספר הפניות שהטכנאי מקבל במשך היום.

חשב את התוחלת ואת השונות של הזמן הכולל שמקדיש הטכנאי לתיקון מקררים, בבתי לקוחות שפנו אליו, במשך יום אחד.

17. א. מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים של המשתנה המקרי X, המוגדר באמצעות פונקציית ההסתברות $P\{X = i\} = \binom{n}{i} \cdot \frac{1}{2^n - 1}$, לכל $i = 1,2,...,n$.

ב. חשב את התוחלת של המשתנה המקרי שלעיל, בעזרת הפונקציה יוצרת המומנטים שלו.
בדוק את התוצאה שקיבלת, בעזרת חישוב ישיר של התוחלת.

ג. יהי Y משתנה מקרי המוגדר באמצעות פונקציית ההסתברות:

$$P\{Y = j\} = \binom{n}{j-4} \cdot \frac{1}{2^n - 1} \qquad , \qquad j = 5,6,...,n+4 \quad (n = 1,2,...)$$

מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים של Y.

18. התפלגות המשקל (בגרמים) של חבילת עדשים מקרית היא נורמלית עם תוחלת 200 וסטיית-תקן 10. אם ארגז קרטון מכיל 10 חבילות עדשים, ואם המשקל (בגרמים) של ארגז ריק מתפלג נורמלית עם תוחלת 100 וסטיית-תקן 5, מהי התפלגות המשקל (בגרמים) של ארגז מלא? אלו הנחות אתה מניח?

19. בקופסה יש 10 נורות שהתפלגות אורך-החיים (בחודשים) של כל אחת מהן היא מעריכית עם תוחלת 6. כמו כן, אין תלות בין נורות שונות.
מהן התוחלת והשונות של ממוצע אורך-החיים של 10 הנורות שבקופסה?

הערה:
אם למשתנים המקריים X_1 , X_2 , ... , X_n יש התפלגות משותפת רב-נורמלית, אז לכל שניים מהם יש התפלגות משותפת דו-נורמלית עם התוחלות והשונויות המשותפות המתאימות להם.
כדי להוכיח שלמשתנים המקריים X_i ו- X_j (כאשר $i \neq j$) יש התפלגות דו-נורמלית, אפשר לחשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של שני משתנים אלו (בדרך דומה לזו המוצגת בספר בעמודים 403 - 404) ולחשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של ההתפלגות הדו-נורמלית (עם הפרמטרים המתאימים) בעזרת פונקציית הצפיפות המשותפת המגדירה אותה (ראה בספר עמוד 392). בשני המקרים מתקבלת אותה פונקציה יוצרת מומנטים. מכיוון שהפונקציה יוצרת המומנטים קובעת את ההתפלגות באופן יחיד, נובע שלשני המשתנים הללו יש התפלגות דו-נורמלית.

20. יהי $\mathbb{X} = (X_1, X_2, X_3)^t$ וקטור של משתנים מקריים שיש להם התפלגות משותפת רב-נורמלית עם הפרמטרים $\underline{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ו- $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

הערה: הווקטור הנתון הוא וקטור התוחלות של X_1, X_2 ו- X_3. כלומר: $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

המטריצה הנתונה היא מטריצת השונויות המשותפות של X_1, X_2 ו- X_3. כלומר, אם נסמן את איבריה ב- σ_{ij}, אז $\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$, לכל i ו- j.

א. חשב את $P\{X_2 < 0 \mid X_1 < 0\}$.
ב. חשב את $P\{X_2 < 0 \mid X_3 = 0\}$.
ג. זהה את ההתפלגות המשותפת של $Y_1 = X_1 + 2X_2 - X_3$ ושל $Y_2 = X_2 + X_3$, ורשום את הפרמטרים שלה.

21. יהיו X_1, X_2, ... , X_n משתנים מקריים נורמליים סטנדרטיים בלתי-תלויים.
א. מהן ההתפלגויות של $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ ושל $W = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$?
ב. הצג את $P\{W > 3 \mid Y = 2\}$ באמצעות אינטגרל, אך אל תחשב אותו.