

שאלה 1

א. $2^9 = 512$

ב. היחס רפלקסיבי וסימטרי אבל אינו טרנזיטיבי.

כדי להראות שאינו טרנזיטיבי מוצאים R_1, R_2, R_3 כך ש- R_1, R_2 מתחלפות

(כלומר $R_1 R_2 = R_2 R_1$), R_2, R_3 מתחלפות, אבל R_1, R_3 לא מתחלפות.

דרך נוחה לעשות זאת:

מוצאים R_1, R_3 כלשהן שאינן מתחלפות ובוחרים את R_2 להיות I_A או להיות \emptyset .

אפשר כמובן גם אחרת.

שאלה 2

הבעיה בהגדרה היא שתוצאת הפעולה תלויה בבחירת הנציגים (הקבוצות A, B).

את הבעיה אפשר להראות אפילו בקבוצות סופיות:

נחשב את $1 \oplus 1$ בשתי דרכים:

נבחר $A = B = \{1\}$. מתקיים $|A| = |B| = 1$. לכן ניתן לחשב בעזרת A, B את $1 \oplus 1$.

מההגדרה שבשאלה (!) נקבל: $1 \oplus 1 = |A \oplus B| = |\emptyset| = 0$.

מצד שני, נבחר $A = \{1\}, B = \{2\}$.

מתקיים $|A| = |B| = 1$. לכן ניתן לחשב בעזרת A, B את $1 \oplus 1$:

מההגדרה שבשאלה (!) נקבל: $1 \oplus 1 = |A \oplus B| = |\{1, 2\}| = 2$.

קיבלנו שתי תוצאות שונות, משמע הגדרת הפעולה תלויה בנציגים ולכן אינה חוקית.

אפשר כמובן גם להביא דוגמאות מסובכות יותר, כולל כאלה בהן כל הקבוצות שונות זו מזו,

וכלל דוגמאות בקבוצות אינסופיות.

המפתח להבנת השאלה הוא הבנת ההגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות, כולל ההערה

שמופיעה מיד אחרי כל אחת מהן. מי שלא קרא והבין לפחות אחת או שתיים מההגדרות הללו,

סביר שלא ענה נכון. על מה ירדו נקודות:

מי שכתב: "לא ניתן להגדיר פעולה על עוצמות בעזרת בחירה של קבוצות"

- לא נכון, הרי חיבור, כפל וחזקה הוגדרו בדיוק בצורה כזו. על כך ירדו הרבה נקודות.

מי שכתב: "בעצם ההגדרה בשאלה היא $k \oplus m = (k - m) + (m - k)$ "

- לא נכון, זו ממש לא ההגדרה. על כך ירדו הרבה נקודות.

מי שהביא דוגמא אחת ובמקום דוגמא שניה אמר שמצד שני "ברור" ש- $k \oplus k = 0$, בלי

שהוכיח זאת מתוך ההגדרה שבשאלה

- זה לא ברור מאליו, זה דורש הוכחה מתוך ההגדרה כמו כאן למעלה. על כך ירדו מעט נקודות.

שאלה 3

$$D(4,24) - 4D(4,13) + 6D(4,2) = 745$$

שאלה 4

יש שאלה זהה כמעט לגמרי בחוברת "אוסף תרגילים פתורים", עמ' 9 שאלה 4.
מי שראה זאת ונעזר בפתרון ששם, כמובן זה מקובל.

א. 2^{125}

ב. $D(5,3) = \binom{7}{3} = 35$

ג. פונקציה מקיימת את הדרישה בסעיף זה **אם ורק אם** היא מקבלת ערך קבוע בתוך כל מחלקת שקילות. לכן מספר הפונקציות המקיימות את התנאי הוא כמספר הפונקציות של קבוצת מחלקות השקילות לקבוצה $\{0,1\}$: 2^{35} .

שאלה 5

נסמן $|V| = n$.

$$\sum_{v \in V} (d_1(v) + d_2(v)) = \sum_{v \in V} d_1(v) + \sum_{v \in V} d_2(v)$$

$$= 2E_1 + 2E_2 = 2(n-1) + 2(n-1) = 4n - 4$$

(השלימו נימוקים).

כעת, אילו לכל v היה $d_1(v) + d_2(v) \geq 4$ אז הסכום $\sum_{v \in V} (d_1(v) + d_2(v))$ היה לפחות $4n$.

מכיון שהוא פחות מ- $4n$, חייב להיות לפחות צומת אחד עבורו $d_1(v) + d_2(v) \leq 3$.