שאלה 4 (30 נקודות)

נתון עץ בינרי **מלא** T בן n צמתים; נסמן ב-h את הגובה של T, ב-$I(T)$ את מספר הצמתים הפנימיים שלו וב-$E(T)$ את מספר העלים שלו. הוכיחו שמתקיימות התכונות הבאות:

1. $h+1 \le E(T) \le 2^h$
2. $h \le I(T) \le 2^h - 1$
3. $2h+1 \le n \le 2^{h+1} - 1$
4. $\lg(n+1) - 1 \le h \le (n-1)/2$

בהנחה ש-T הוא גם עץ חיפוש בינרי, מהם מיקומיהם של מפתחות הצמתים הפנימיים ביחס לאלה של העלים? הסבירו את תשובתכם.

פתרון:

בכל עץ בינרי מלא T מתקיים התנאי $E(T) = 1 + I(T)$.

הסבר: לכל צומת פנימי בעץ שני בנים בדיוק, אבל שורש העץ אינו בן של צומת אחר. לכן, $2 \cdot I(T) = I(T) + E(T) - 1$ ומזה נובע התנאי.

המספר המכסימלי של צמתים בעץ T בגובה h הוא $2^{h+1} - 1$, כי עץ בינרי שלם בגובה h מכיל 2^h עלים ו-$2^h - 1$ צמתים פנימיים.

מצד שני, קיימת לפחות שרשרת אחת של צמתים מהשורש עד לעלה בעומק (רמה) h; שרשרת זו מכילה h צמתים פנימיים ועלה אחד. מכיוון שהעץ מלא, לכל צומת בשרשרת (חוץ מהעלה) בן נוסף שהוא עלה בעצמו או אב קדמון של יותר מעלה אחד; לכן, העץ מכיל לפחות h צמתים פנימיים ו-$h+1$ עלים. מזה נובע כי:

1. $h+1 \le E(T) \le 2^h$
2. $h \le I(T) \le 2^h - 1$
3. $2h+1 \le n \le 2^{h+1} - 1$

מהאי-שוויון השמאלי ב-(3) מתקבל $h \le (n-1)/2$.

מהאי-שוויון הימני ב-(3) מתקבל $\lg(n+1) - 1 \le h$. מזה נובע כי:

4. $\lg(n+1) - 1 \le h \le (n-1)/2$.

כאשר T עץ חיפוש בינרי, מפתחות העלים נמצאים במקומות האי-זוגיים ברשימה הממוינת ומפתחות הצמתים הפנימיים נמצאים במקומות הזוגיים.

הסבר: הרשימה הממוינת של המפתחות מתקבלת ע"י סריקה תוכית של T;

ברור שהסריקה התוכית מתחילה בעלה; העוקב של עלה (אם הוא קיים) הוא תמיד צומת פנימי; בעץ בינרי מלא לכל צומת פנימי יש בן ימני ולכן העוקב שלו הוא עלה.