2010ב' – מועד 82

1) א. הטענה נכונה. יהי $a\in A$, נוכיח $(a,a)\in R^2$.

מהנתון ש-R רפלקסיבי אנו מקבלים, על פי הגדרת רלציה רפלקסיבית ש- $(a,a)\in R$.

לכן, על פי הגדרת כפל רלציות, $(a,a)\in R^2$.

כלומר, לכל $a\in A$, $(a,a)\in R^2$, ולכן, על פי הגדרת רלציה רפלקסיבית, R^2 היא רפלקסיבית.
מ.ש.ל.

ב. ~~נתבונן ב-~~ $\cancel{A=\{\}}$, וב- $\cancel{R=\{(1,1),(2,1),(3,2),(3,3)\}}$

$\cancel{R^2=\{(1,1),(2,1),(3,2),(3,3)\}}$

~~אבל~~

נתבונן ב- $A=\{1,2,3,4\}$, וב- $R=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$.

אכן, $R^2=\{(1,3),(2,4)\}$, ו-

$R\cup R^2=\{(1,2),(2,3),(3,4),(1,3),(2,4)\}$.

אם כך, $(1,2)\in R$ וכן $(2,4)\in R$, אך $(1,4)\notin R$, ולכן, על פי הגדרת רלציה טרנזיטיבית, $R\cup R^2$ איננה טרנזיטיבית.
מ.ש.ל.

ד. נניח בשלילה ש-R אינו אנטי סימטרי, כלומר, קיימים $\cancel{a,b\in A}$ $a,b\in A$ כך ש- $(a,b)\in R$ וגם $(b,a)\in R$, אך עם זאת, $a\neq b$.

$R^3=R^2\cdot R$.

מהנתון $(a,b)\in R$ ו- $(b,a)\in R$ נקבל, על פי הגדרת כפל רלציות, ש- $(a,a)\in R^2$ ו- $(b,b)\in R^2$. ושוב, על פי הגדרת כפל רלציות נקבל ש- $(a,b)\in R^2\cdot R$ וגם $(b,a)\in R^2\cdot R$, או במילים אחרות, $(a,b),(b,a)\in R^3$. מהנתון ש- R^3 אנטי סימטרית, נקבל על פי הגדרת רלציה אנטי-סימטרית, ש- $a=b$, בסתירה להנחה.

כלומר, ההנחה שלנו שגויה, והוכחנו שאם R^3 אנטי-סימטרית, גם R אנטי-סימטרית.
מ.ש.ל.

③ נשתמש בעיקרון ההכלה וההפרדה.

תהי U קבוצת המספרים n בתחום $0\le n\le 2100$ שמתחלקים ב-4.

$$|U|=\frac{2100}{4}=525.$$

תהי A_i קבוצת המספרים n בתחום $0\le n\le 2100$ שמתחלקים ב-4 וב-i.

$$|A_5|=\frac{2100}{4\cdot 5}=105$$

$$\cancel{|A_6|=\frac{2100}{4\cdot 6}}$$

המספרים שמתחלקים ב-4 וגם ב-6 הם בעצם המספרים שמתחלקים ב- $4\cdot 3=12$.

$$|A_6|=\frac{2100}{12}=175$$

$$|A_7|=\frac{2100}{4\cdot 7}=75$$

כעת נחשב חיתוכים בזוגות. הכפולה המשותפת המינימלית של 4, 5 ו-6 (הוא 60).

$$|A_5\cap A_6|=\frac{2100}{60}=35$$

הכפולה המשותפת המינימלית של 4,5 ו-7 (הוא 140.

$$|A_5\cap A_7|=\frac{2100}{140}=15$$

הכפולה המשותפת המינימלית של 4, 6 ו-7 (הוא 84.

$$|A_6\cap A_7|=\frac{2100}{84}=25$$

הכפולה המשותפת המינימלית של 4,5,6 ו-7 (הוא 420.

$$|A_5\cap A_6\cap A_7|=\frac{2100}{420}=5$$

נחשב את S_i כפי שהוא מוגדר בכרך "קומבינטוריקה".

$$S_1=|A_5|+|A_6|+|A_7|=355$$

$$S_2=|A_5\cap A_6|+|A_5\cap A_7|+|A_6\cap A_7|=75$$

$$S_3=|A_5\cap A_6\cap A_7|=5$$

$A_5\cup A_6\cup A_7$ (הוא קבוצת המספרים בתחום $0\le n\le 2100$ שמתחלקים ב-4 ובאחד מהמספרים 5,6 ו-7. לכן אנו מחפשים את

$$|(A_5\cup A_6\cup A_7)'|=|A_5'\cap A_6'\cap A_7'|$$

לפי עקרון ההכלה וההפרדה:

$$|A_5'\cap A_6'\cap A_7'| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 = 525 - 355 + 75 - 5 = 240$$

כלומר, 240 מספרים בתחום עונים לדרישה.

4) נניח בה"כ ששלושת המשתנים הראשונים הם אלה הזוגיים, ואת התוצאה שנקבל נכפול במספר האפשרויות לבחור את המשתנים הזוגיים. מכיוון שכל ^{3} אחד מהמשתנים אינו 0,1 וגם, הפונקציה היוצרת המתאימה הוא זו שלהלן, כשמחפשים את המקדם של x^{41} בפיתוח.

$$\cancel{(1+x^2+x^4+\dots)^3\cdot(x+x^3+x^5+\dots)^3 =}$$

$$\boxed{(x^4+x^6+\dots)^3\cdot(x^3+x^5+\dots)^3} = (x^4\cdot(1+x^2+x^4+\dots))^3\cdot(x^3(1+x^2+\dots))^3 =$$

$$= x^{12}\cdot(1+x^2+x^4+\dots)^3\cdot x^9(1+x^2+x^4+\dots)^3 = x^{21}(1+x^2+x^4+\dots)^6$$

המקדם של x^{41} בפיתוח הפונקציה הזו הוא מקדם המקדם של $x^{41-21}=x^{20}$ בפיתוח הפונקציה $(1+x^2+x^4+\dots)^6$.

$\cancel{x^{41-21}=x^{20}}$

נסמן $x^2=y$, ונחפש את המקדם של y^{10}, הוא הוא המקדם של x^{20}.

$(1+y+y^2+\dots)^6$.

על פי נוסחה (iii) במאמ"ן 15, המקדם של 10 בפיתוח הפונקציה הזו הוא $D(6,10)$.

מכיוון שבחירת המשתנים הזוגיים (ובהתאם גם האי-זוגיים) יש $\binom{6}{3}=20$ אפשרויות, נכפול את התוצאה שקיבלנו ב־20, וזו תהיה התשובה.

מספר הפתרונות הוא $20\cdot D(6,10)$.