לוגיקה - תזכורת

שני פסוקים הם שקולים אם יש להם את אותה טבלת אמת

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

זהות לוגית.

גרירה טאוטולוגית

הטענות $p_1, p_2, \dots, p_n$ גוררות טאוטולוגית את המסקנה q

אם כל פעם ש- $p_1, p_2, \dots, p_n$ נכונים אזי גם q נכון.

במילים אחרות

$$\underbrace{\underbrace{p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n}_{F} \to \underbrace{q}_{?}}_{T}$$

טאוטולוגיה

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{p_1}_{T} \wedge \underbrace{p_2}_{T} \dots \wedge \underbrace{p_n}_{T}}_{T} \to \underbrace{q}_{T}}_{T}$$

דוגמא: $p\wedge q \Rightarrow p\vee q$ $\neq$

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

$$p\to q \equiv \neg p\vee q$$

$$p\leftrightarrow q \equiv (p\to q)\wedge(q\to p)$$

דוגמאות:

① $p\wedge q \Rightarrow p$, $p\wedge q \Rightarrow q$

② $p \Rightarrow p\vee q$, $q \Rightarrow p\vee q$

③ $(p\vee q), \neg q \Rightarrow p$ $\qquad (p\vee q), \neg p \Rightarrow q$

Modus Ponens

④ $p, p\to q \Rightarrow q$

אני עייפה

אם אני עייפה אני הולכת לישון

אני הולכת לישון

⑤ $p \to q,\ \neg q \Rightarrow \neg p$ Modus Tollens

אם יורד גשם אני אקח מטריה
לא לקחתי מטריה

לא יורד גשם

⑥ $p \to q,\ q \to r \Rightarrow p \to r$ טרנזיטיביות

אם יורד גשם אקח מטריה

אם אקח מטריה אהיה מוגן מהגשם

אם יורד גשם, אני מוגן מהגשם.

p	q	r	$p\to q$	$q\to r$	$p\to r$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

$$\underbrace{(p\to q)}_{P_1} \wedge \underbrace{(q\to r)}_{P_2} \longrightarrow \underbrace{(p\to r)}_{q}$$

טאוטולוגיה.

① "כל" מספר יש ריבוע חיובי" פסוק לא אמיתי ($x=0$)

$$\forall x \, (x^2>0)$$

② "קיים" מספר שהריבוע שלו הוא גדול מ- 3" פסוק אמת

$$\exists x \, (x^2>3)$$

$$\forall x \quad (x\neq 0) \to (\exists y \, (xy=1))$$

③ "לכל מספר שונה מ-0 קיים הופכי יחיד"

$$\forall x \quad (x\neq 0) \to \Big(\exists y \Big(\underbrace{(xy=1)}_{\text{יש הופכי}} \wedge \underbrace{(\forall z \ (xz=1)\to(z=y))}_{\text{ההופכי יחיד}}\Big)\Big)$$

④ יש מספר שהוא גדול יותר מכל המספרים האחרים

$$\neq \begin{cases} \exists x \ \forall z \quad (x>z) \\ \exists x \ \forall z \quad (x\neq z) \to (x>z) \end{cases}$$

מהי השלילה של המשפט? אין מספר שהוא גדול יותר מכל האחרים.

במילים אחרות, לכל מספר ממשי קיים מספר מספר ממשי אחר שהוא
גדול ממנו.

$$\forall x\ \exists y\ \ (x \neq y) \rightarrow (y > x) \quad ✗$$

$$\forall x\ \exists y\ \ (x \neq y) \wedge (x < y) \quad ✓$$

המשפט

$$\neg\left(\exists x\ \forall y\ \ (x \neq y) \rightarrow (y < x)\right)$$

חוקי דה מורגן לכמתים

$$\neg \forall x\ \varphi \equiv \exists x (\neg \varphi)$$

$$\neg \exists x\ \varphi \equiv \forall x\ (\neg \varphi)$$

$$\neg\left(\exists x\ \forall y\ \ (x \neq y) \rightarrow (y < x)\right) \equiv \forall x\ \exists y\ \left(\neg\left((x \neq y) \rightarrow (y < x)\right)\right) \equiv$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$\equiv \forall x\ \exists y\ \left(\neg\left(\neg(x \neq y) \vee (y < x)\right)\right) \equiv$$

דה מורגן

$$\equiv \forall x\ \exists y\ \ (x \neq y) \wedge (y \geq x) \equiv \underline{\forall x\ \exists y\ \ (x \neq y) \wedge (y > x)}$$

תורת הקבוצות

קבוצה: אוסף של איברים

רשימה של איברים $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

תכונה $A=\{\underbrace{\quad}_{\text{סוג איברים}} \overset{\text{כך ש}}{:} \underbrace{\quad}_{\text{תכונה}}\}$

$A=\{x \underset{\text{שייך}}{\in} \underset{\text{המספרים הטבעיים}}{\mathbb{N}} : 1\le x\le 7\}$

<u>הגדרה</u>: הסימן "שייך"

$a\in A$ אם האיבר a שייך לקבוצה A. אחרת $a\notin A$

<u>דוגמא</u>:

$B=\{1,4,9,16,25\}$

ריבוע של המספרים הטבעיים בין 1 ל-5

✗ $B=\{x^2\in\mathbb{N} : (1\le x\le 5)\}$ לא נכון כי $x=\sqrt{2} \rightarrow x^2=2\in\mathbb{N}$

✓ $B=\{x^2 : (x\in\mathbb{N})\wedge(1\le x\le 5)\}$

תרגיל:

$A = \{1, 2, \{1,2,3\}\}$

- $1 \in A$ ✓
- $\{1\} \in A$ ✗
- $3 \in A$ ✗
- $\{1,2\} \in A$ ✗.

הכלה בין קבוצות: A מוכלת בקבוצה B $(A \subseteq B)$ אם כל איבר ב-A שייך גם ל-B.

$$(A \subseteq B) := \forall x \ (x \in A) \to (x \in B)$$

השלילה $A \not\subseteq B$

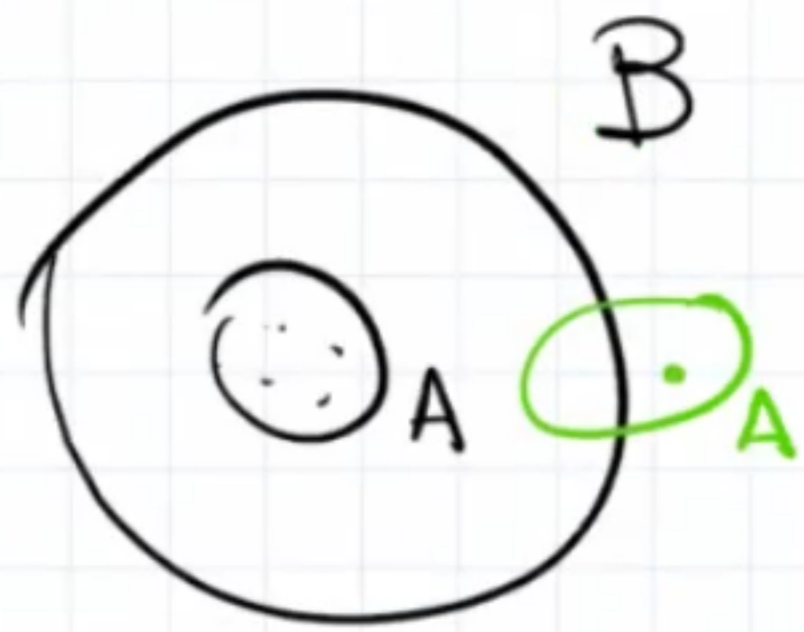
$$\neg \forall x \ (x \in A) \to (x \in B) \equiv \exists x \ \neg \left(\neg (x \in A) \vee (x \in B)\right)$$

דה מורגן

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

$$\equiv \exists x \ (x \in A) \wedge (x \notin B)$$

$$\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$



תרגיל קל + קל :

$A = \{1, 2, \{1,2,3\}\}$

$\{1,2,3\} \in A$ ✓

• $\{1\} \subseteq A$ ✓

• $\{1,2,3\} \subseteq A$ ✗

• $2 \subseteq A$ ✗

$\underbrace{\quad}_{\text{קבוצה}} \in \underbrace{\quad}_{\text{איבר}}$

$\underbrace{\quad}_{\text{קבוצה}} \subseteq \underbrace{\quad}_{\text{קבוצה}}$

שוויון בין קבוצות :

$$(A = B) = (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

הכלה חריפה (ממש) : A מוכל ממש ב- B

$$(A \subset B) := (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$$

$\subsetneq$

הערות ① הסדר אינו חשוב $\{1,2\} = \{2,1\}$

② להתעלם מחזרות $\{1,1,1,2\} = \{1,2\}$

הקבוצה הריקה

קבוצה ריקה היא קבוצה שאין בה איברים.

טענת עזר: אם E קבוצה ריקה, אז $E \subseteq A$ לכל קבוצה A.

$$\underbrace{\forall x \quad \underbrace{\underbrace{(x \in E)}_{F} \to (x \in A)}_{T}}_{T}$$

טענה: קיימת קבוצה ריקה אחת ויחידה

נניח כי E, F שתי קבוצות ריקות נוכיח $E = F$

E ריקה $\Leftarrow$ $E \subseteq F$

F ריקה $\Leftarrow$ $F \subseteq E$

$$(E \subseteq F) \wedge (F \subseteq E) \Downarrow E = F$$

סימון: $\varnothing$.

תרגיל:

- $\emptyset \in \emptyset$ ✗
- $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ✓
- $\emptyset \subseteq \emptyset$ ✓
- $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ ✓
- $\emptyset \subseteq \{1\}$ ✓
- $\emptyset \in \{1\}$ ✗
- $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ✓
- $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ✓

$$\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

איבר $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

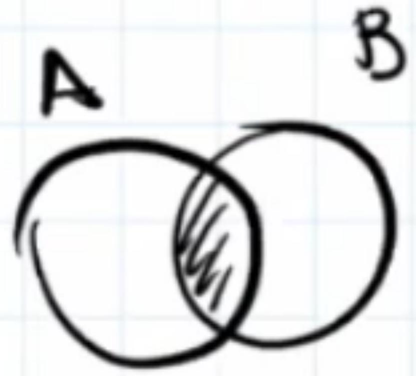
פעולות בין קבוצות

① איחוד

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

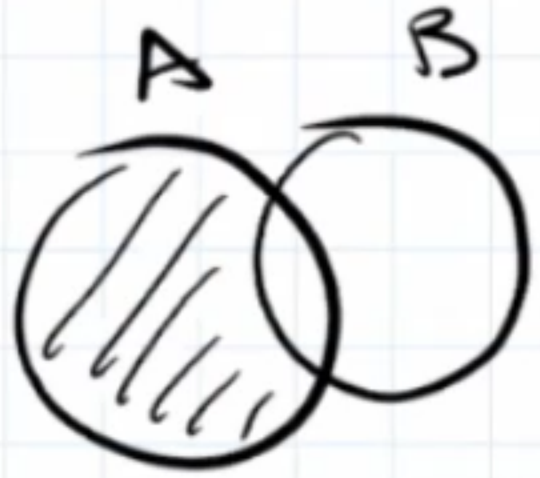
2 חיתוך

$A\cap B = \{x : (x\in A)\wedge(x\in B)\}$



3 הפרש

$A\setminus B = \{x\in A : (x\in A)\wedge(x\notin B)\}$



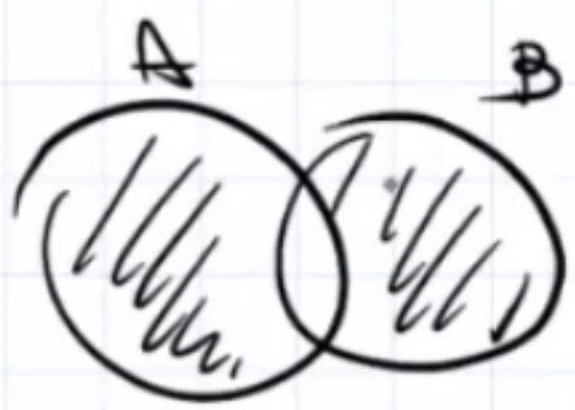
4 המשלים X - הקבוצה האוניברסלית

$A^c = \{x\in X : x\notin A\} =$

$A\setminus B = A\cap B^c$

5 ההפרש הסימטרי

$A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$



תרגיל קטן + קל :

$A = \{1,2,\ldots,10\}$

$B = \{2,4,6,8,10,12,14,16\}$

$A \cup B = \{1,2,\ldots,10,12,14,16\}$

$A \setminus B = \{1,3,5,7,9\}$

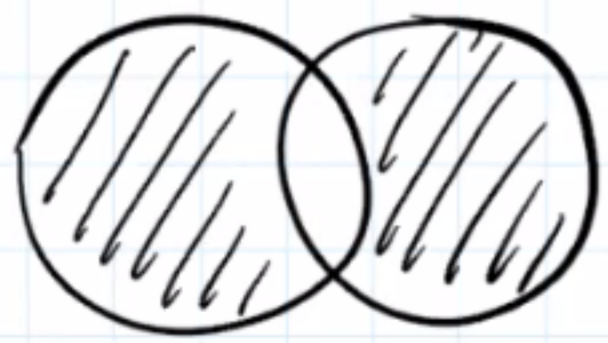
$A \cap B = \{2,4,6,8,10\}$

$B \setminus A = \{12,14,16\}$

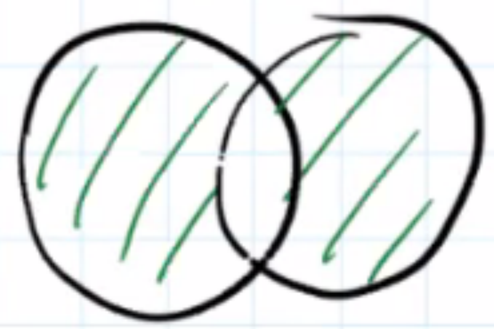
$A \Delta B = \{1,3,5,7,9,12,14,16\}$

תרגיל :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



$A \Delta B$



$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$$x \in A \Delta B \equiv (x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A) \equiv \underbrace{\left((x \in A) \wedge (x \notin B)\right)}_{p} \vee \left((x \in B) \wedge (x \notin A)\right) \underset{\text{פילוג}}{\equiv}$$

$$\equiv \left(\left(\left((x \in A) \wedge (x \notin B)\right) \vee (x \in B)\right) \wedge \left(\left((x \in A) \wedge (x \notin B)\right) \vee (x \notin A)\right)\right) \equiv$$ פילוג

$$\equiv \Big(\big(\overbrace{(x\in A) \vee (x\in B)}^{P} \big) \wedge \big(\overbrace{(x\notin B) \vee (x\in B)}^{T} \big) \Big) \wedge \Big(\big(\underbrace{(x\in A) \vee (x\notin A)}_{T} \big) \wedge \big((x\notin B) \vee (x\notin A) \big) \Big)$$

$p \wedge T \equiv p$

$$\equiv \big((x\in A) \vee (x\in B) \big) \wedge \big((x\notin B) \vee (x\notin A) \big)$$

$$\equiv (x \in A\cup B) \wedge \big(\neg (x\in B) \vee \neg (x\in A) \big) \equiv (x\in A\cup B) \wedge \neg \big((x\in A) \wedge (x\in B) \big)$$

$$\equiv (x\in A\cup B) \wedge \neg (x\in A\cap B) \equiv x \in (A\cup B) \setminus (A\cap B) \quad //$$