תשובה 1

א. **תנאי התחלה:** $a_0 = 1$ (סדרה ריקה! נוח להיעזר ב- a_0 בסעיף ב),

$a_1 = 3$, $a_2 = 3^2 - 2 = 7$.

יחס נסיגה: נתבונן בסדרה מותרת באורך $n+1$.

* אם היא מתחילה ב- 2, ההמשך יכול להיות כל סדרה מותרת באורך n.

מצב זה תורם אפוא a_n אפשרויות.

* אם היא מתחילה ב- 1, ההמשך יכול להיות כל סדרה מותרת באורך n.

גם מצב זה תורם אפוא a_n אפשרויות.

* אם היא מתחילה ב- 0, אחריו חייב לבוא 2 ואחריו יכולה לבוא סדרה מותרת באורך $n-1$.

משמע a_{n-1} אפשרויות.

בסה"כ קיבלנו: $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$.

נבדוק שזה תואם את תנאי ההתחלה שרשמנו: $2a_1 + a_0 = 6 + 1 = 7 = a_2$.

ב. המשוואה האפיינית: $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$. פתרונותיה: $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$.

לפיכך $a_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$.

בהצבת תנאי ההתחלה a_1, a_0 נקבל:

$1 = a_0 = A + B$, $3 = a_1 = A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2}) = A + B + \sqrt{2}(A-B)$.

משתי המשוואות יחד נקבל $A - B = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$,

ומכאן יחד עם המשוואה הראשונה: $A = (1+\sqrt{2})/2$, $B = (1-\sqrt{2})/2$.

לפיכך

$$a_n = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right)$$

תשובה 2

בחישוב כל מקדם ניעזר בנוסחה *(ii)* לפיתוח מכפלה, שהופיעה בסוף הממ"ן ובמקדמים הקודמים שכבר חישבנו.

$$1 = c_0 = a_0 b_0 = 1 \cdot b_0$$

לכן $b_0 = 1$. כעת,

$$0 = c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1 \cdot b_1 + 3 \cdot 1$$

נחלץ ונקבל $b_1 = -3$. נחזור ונציב:

$$0 = c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 1 \cdot b_2 + 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 1$$

נחלץ ונקבל $b_2 = 7$. נחזור ונציב:

$$0 = c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_2 = 1 \cdot b_3 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1$$

נחלץ ונקבל $b_3 = -13$.

תשובה 3

פתרון ללא פונקציות יוצרות

אף אחד מהמשתנים אינו שווה 0 ואינו שווה 1, במלים אחרות כל המשתנים גדולים/שווים 2.

לכן נציב $x_i = y_i + 2$ $(1 \le i \le 6)$,

ונקבל $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + 12 = 29$,

כלומר $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 17$, כאשר y_i הם טבעיים כלשהם, שהתנאי היחיד לגביהם הוא התנאי על הזוגיות, בו נטפל כעת.

בדיוק 3 מהמשתנים המקוריים היו זוגיים, לכן בדיוק 3 מהמשתנים החדשים הם זוגיים (חיסור 2 ממספר אינו משנה את הזוגיות שלו).

יש $\binom{6}{3} = 20$ דרכים לבחור את 3 המשתנים הזוגיים מתוך 6 המשתנים.

לאחר שבחרנו אותם, נניח ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) שאֵלה הם 3 המשתנים הראשונים.

נסמן אפוא: $y_i = 2z_i$ $(1 \le i \le 3)$, $y_i = 2z_i + 1$ $(4 \le i \le 6)$.

נקבל $2z_1 + 2z_2 + 2z_3 + 2z_4 + 2z_5 + 2z_6 + 3 = 17$,

כלומר $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = 7$, כאשר z_i הם טבעיים **ללא כל הגבלה**.

מספר הפתרונות של משוואה כזו חושב בסעיף 2.4 בספר, והוא $D(6,7) = \binom{12}{5} = 792$.

את זה עלינו לכפול במספר הדרכים לבחור מי יהיו המשתנים הזוגיים, שהוא כאמור 20.

תשובה סופית: $792 \cdot 20 = 15{,}840$.

דרך אחרת: התחלה של פתרון בעזרת פונקציות יוצרות

כמו בפתרון הקודם, נניח שהמשתנים הזוגיים הם 3 המשתנים הראשונים, ואת התוצאה שנקבל נכפול ב- $\binom{6}{3} = 20$.

מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$ תחת האילוצים הנתונים בשאלה הוא המקדם של x^{29} בפיתוח הפונקציה

$$f(x) = (x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^3 (x^3 + x^5 + x^7 + \ldots)^3$$

בסוגריים השמאליים נוציא גורם משותף x^2, שלאחר העלאה בחזקת 3 נותן x^6.

בסוגריים הימניים נוציא גורם משותף x^3, שלאחר העלאה בחזקת 3 נותן x^9.
קיבלנו

$$= x^6(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^3 \cdot x^9(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^3$$
$$= x^{15}(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^6$$

מכיון שהוצאנו החוצה x^{15}, המקדם של x^{29} בפיתוח הביטוי כולו שווה למקדם של $x^{29-15} = x^{14}$ בפיתוח של הגורם הימני $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^6$.
הטור ההנדסי כאן הוא טור אינסופי. מכאן השלימו את הפתרון בעצמכם.

תשובה 4

א. (1) $f(x) = (1-x)^9 = (1+(-x))^9$

מנוסחת הבינום נקבל $f(x) = \sum_{i=0}^{9}\binom{9}{i}(-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{9}{i}(-1)^i x^i$.
המשכנו את הסכום עד אינסוף בעזרת הגדרת המקדמים הבינומיים החריגים בעמ' 30 בספר.
קיבלנו אפוא $a_i = (-1)^i\binom{9}{i}$.

(2) $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{10}}$.

מנוסחה *(iii)* בסוף הממ"ן נקבל $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} D(10,i)x^i$.
לפיכך $b_i = D(10,i)$.

ב. המקדם של x^k במכפלה הוא $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (נוסחה *(ii)* בסוף הממ"ן).
נציב ונקבל:

$$c_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{9}{i}D(10,k-i)$$

מצד שני, כידוע

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

כלומר לכל k, $c_k = 1$.
הזהות שקיבלנו היא אפוא:

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{9}{i}D(10,k-i) = 1$$ לכל k,

ג. השלימו עצמאית את הבדיקה.

איתי הראבן