פתרונות לממ"ן 11 - 2013א - 20425

1. א. בגלל שיבוץ השלישיות לימי השבוע השונים, יש חשיבות לסדר בחירת השלישיות. לכן, נבחר את השלישיות בזו אחר זו, ונקבל שמספר האפשרויות שעומדות בפני המורה הוא :

$$\binom{12}{3,3,3,3} = \binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3} = \frac{12!}{(3!)^4} = 369,600$$

ב. נבחר שני ימים (ללא סדר) לשלישיות של הבנים ונשבץ בהם שתי שלישיות כאלה (בחירת שלישיות הבנים לימים שנבחרו נעשית לפי סדר). לבסוף נשבץ בשני הימים הנותרים שתי שלישיות נוספות (שבכל מקרה אין ביניהן שלישיות של בנים). נקבל :

$$\binom{4}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{3}\binom{6}{3} = 16,800$$

ג. בגלל מספרן הנמוך של הבנות, קל יותר לחשב את ההסתברות של המאורע המשלים, שיש שלישייה אחת של בנות. לשם כך, נבחר יום, נשבץ בו שלישיית בנות, ואחר-כך נחלק את יתר השלישיות. נקבל :

$$\binom{12}{3,3,3,3} - 4\binom{5}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3} = 369,600 - 67,200 = 302,400$$

אפשר גם לחשב את ההסתברות באופן ישיר. ייתכנו שני מקרים שבהם אין אף שלישייה של בנות : במקרה הראשון יש שלישייה אחת עם 2 בנות ובכל השלישיות האחרות יש בת אחת בלבד ; במקרה השני יש שתי שלישיות עם 2 בנות ושלישייה נוספת עם בת אחת. בשני המקרים, ניצור את השלישיות המתאימות ונשבץ אותן בארבעת ימי השבוע השונים. לפיכך, נקבל :

$$\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{חלוקת הבנות}} \cdot \underbrace{7 \cdot \binom{6}{2,2,2}}_{\text{חלוקת הבנים}} \underset{\text{מקרה 1:}}{\cdot 4! +} \underbrace{\binom{5}{1,2,2} \cdot \frac{1}{2!}}_{\text{חלוקת הבנות}} \cdot \underbrace{\binom{7}{2,1,1,3}}_{\text{חלוקת הבנים}} \underset{\text{מקרה 2:}}{\cdot 4!} = 302,400$$

2. א. יש $12!/12 = 11!$ אפשרויות לסדר את הבובות השונות במעגל, ומכיוון שגם הכפיות שונות, יש $12!$ אפשרויות שונות לחלק להן אותן. כלומר, מספר אפשרויות הסידור הוא $12! \cdot 11!$.

ב. יש $11!$ אפשרויות לסדר את הבובות השונות במעגל, ויש $7! \cdot 5!$ אפשרויות לחלק לבובות כהות השיער את הכפיות הירוקות וכמובן לבהירות השיער את הכפיות האדומות. כלומר, מספר אפשרויות הסידור הוא $7! \cdot 5! \cdot 11!$.

ג. תחילה נסדר את 7 הבובות בהירות השיער במעגל. יש לכך $6!$ אפשרויות שונות. בשלב השני נסדר את הבובות כהות השיער ביניהן. בין כל שתי בובות בהירות שיער יכולה להיות בובה כהת שיער אחת לכל היותר. לכן, יש $6! \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 720 \cdot 2{,}520 = 1{,}814{,}400$ אפשרויות לסדר את הבובות כנדרש. כעת, מכיוון שהרכב צבעי הכפיות דומה להרכב צבעי השיער של הבובות, יש גם 1,814,400 אפשרויות לסדר במעגל את הכפיות כנדרש. ולבסוף, נשלב את הסידורים זה בזה באחת מ-12 אפשרויות שונות.

לכן, יש בסך-הכל $1{,}814{,}400^2 \cdot 12$ סידורים שונים מתאימים.

דרך פתרון נוספת: בשלב ראשון מסדרים את הבובות כהות השיער במעגל ($4!$ אפשרויות). בשלב שני קובעים את מספר הבובות בהירות השיער שיהיו בין כל שתי בובות כהות שיער. תחילה, קובעים 5 מקומות לבובות בהירות שיער שיפרידו בין כל שתי בובות כהות שיער (מקום אחד בין כל שתי בובות כהות שיער) ואז נותר לבחור עוד 2 מקומות לבובות בהירות השיער. בחירת המקומות הזו שקולה לפיזור 2 כדורים זהים ב-5 תאים ממוספרים ($\binom{6}{2}=15$ אפשרויות). בשלב האחרון, מסדרים את 7 הבובות בהירות השיער במקומות שנקבעו להן ($7!$ אפשרויות). ומכאן, שיש $4!\cdot 15\cdot 7!$ סידורים אפשריים לבובות. באופן דומה לסעיף הקודם, יש מספר זהה של סידורים לכפיות ו-12 אפשרויות לשלב בין הסידורים.

3. א. נחלק את הניסוי לשלושה שלבים: בכל שלב נבחר קבוצת ילדים שיחבשו כובעים מצבע מסוים. מכיוון שכל הכובעים מאותו הצבע זהים זה לזה, אין חשיבות לסדר שבו הילדים בכל קבוצה נבחרים. לפיכך, נבחר 10 ילדים שיחבשו כובעים אדומים, אחר-כך עוד 5 ילדים שיחבשו כובעים כחולים, ולבסוף ייוותרו הילדים שיחבשו את הכובעים הירוקים. כלומר: $n(S)=\binom{20}{10}\binom{10}{5}\binom{5}{5}=\frac{20!}{10!5!5!}=46,558,512$

נשים לב, שמרחב המדגם של הבעיה מכיל תוצאות שוות-הסתברות.

ב. כדי לחשב את ההסתברות, מספיק להביא בחשבון את בחירת הילדים שיחבשו את הכובעים הכחולים.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{\binom{10}{5}}{\binom{20}{5}}=\frac{10!\cdot 15!}{5!\cdot 20!}=0.01625$

ג. המאורע המשלים למאורע הנתון הוא המאורע שבו כל הכובעים האדומים ניתנים לבנות או שכולם ניתנים לבנים. ההסתברות שכל הכובעים האדומים יינתנו לבנות שווה להסתברות שכולם יינתנו לבנים.

לפיכך, בדומה לסעיף הקודם, נקבל: $1-2\cdot\frac{\binom{10}{10}}{\binom{20}{10}}=0.99999$

ד1. כעת, הבעיה הנתונה שקולה לסידור של הכובעים בשורה. מכיוון שכובעים מאותו הצבע זהים זה לזה, אפשר לחלק את הניסוי לשלבים, שבכל אחד מהם נקבעים המקומות בשורה שבהם ימוקמו הכובעים מכל צבע. לכן, במרחב המדגם של הבעיה הזאת יש $\binom{20}{10}\binom{10}{5}\binom{5}{5}$ תוצאות שוות-הסתברות, בדומה למרחב המדגם של בעית חלוקת הכובעים לילדים, המתוארת בתחילת השאלה.

כדי לחשב את ההסתברות המבוקשת בסעיף זה, מספיק להביא בחשבון את המקומות בשורה שנקבעים לכובעים הירוקים. כלומר: $\frac{\binom{10}{5}}{\binom{20}{5}}=\frac{10!\cdot 15!}{5!\cdot 20!}=0.01625$

ד2. את ההסתברות המבוקשת כאן אפשר לחשב בשתי דרכים:

דרך I

נחשב את ההסתברות תחת ההנחה שהכובעים שונים זה מזה. הנחה זו אינה משנה את הסתברות המאורע שמוגדר בבעיה, מכיוון שלכל סידור בשורה של הכובעים הזהים מתאימים $10!5!5!$ סידורים בשורה של הכובעים השונים. (זו גם הסיבה ששני מרחבי המדגם מורכבים מתוצאות שוות-הסתברות.)

כדי לחשב את מונה ההסתברות, נסדר תחילה את הכובעים שאינם ירוקים בשורה (!15 אפשרויות). כעת, נבחר 5 מקומות מתוך המקומות שבין הכובעים הלא-הירוקים ומשני צידי שורת הכובעים הלא-ירוקים ונמקם בהם את הכובעים הירוקים, כך שלא יהיו שני כובעים ירוקים סמוכים ($16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12$ אפשרויות). מכאן, נקבל את ההסתברות:

$$\frac{15!\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12}{20!}=\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12}{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}=\frac{91}{323}=0.2817$$

דרך II

נחשב את ההסתברות ביחס למרחב המדגם שהוגדר בסעיף ד1.

נסדר בשורה את 5 הכובעים הירוקים ונשמור בין כל שניים מהם מרווח אחד לכובע לא-ירוק (אפשרות 1). כעת, נמקם בשורה שנוצרה עוד 11 מרווחים לכובעים הנותרים. המרווחים הללו יכולים להיות בין כל שני כובעים ירוקים או משני הצדדים של שורת הכובעים הירוקים. לפיכך, הבעיה שקולה לפיזור של 11 כדורים זהים ב- 6 תאים ממוספרים ($\binom{16}{11}$ אפשרויות). אפשר להמשיך ולסדר במרווחים שנבחרו את הכובעים האדומים והכחולים, אך אין בכך צורך, כפי שיראה החישוב שלהלן:

$$\frac{\binom{16}{11}\cdot\cancel{\binom{15}{10}\cdot\binom{5}{5}}}{\binom{20}{5}\cdot\cancel{\binom{15}{10}\cdot\binom{5}{5}}}=0.2817$$

(שימו לב, שכדי להדגים את "חוסר הנחיצות" בסידור הכובעים האדומים והכחולים, חושב המכנה לפי חלוקת הניסוי לשלבים הבאים: בחירת מקומות לכובעים הירוקים, בחירת מקומות לכובעים האדומים, ולבסוף בחירת מקומות לכובעים הכחולים. בהבדל מסדר השלבים שהוגדר בסעיף ד1.)

4. א. מספר אפשרויות החלוקה של המפתחות הוא: $\binom{14}{2,2,\ldots,2}=\frac{14!}{2^7}=681{,}080{,}400$

כי יש $\binom{14}{2}$ אפשרויות לבחור שני אורחים שיקבלו מפתחות לחדר הראשון, $\binom{12}{2}$ אפשרויות לבחור שני אורחים שיקבלו מפתחות לחדר השני, וכך הלאה.

ב. תחילה נבחר 5 זוגות שיקבלו מפתחות תואמים. יש $\binom{7}{5}$ אפשרויות לבחירת 5 זוגות אלו. נשארים 4 אורחים ויש 2 אפשרויות לחלק אותם לזוגות, כך שלא ייווצר ביניהם זוג של אורחים נשואים. ולבסוף, יש !7 אפשרויות לחלק את 7 הזוגות הללו ל-7 החדרים (כל זוג מקבל שני מפתחות זהים). לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $\binom{7}{5}\cdot2\cdot7!\Big/\binom{14}{2,2,\ldots,2}\ =\ 0.0003108$

ג. נחלק 7 מפתחות שונים לגברים ו-7 מפתחות שונים לנשים ונקבל בחדרים 7 זוגות מעורבים. לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $(7!)^2\Big/\binom{14}{2,2,\ldots,2}\ =\ 0.0373$

ד. נתחיל בבחירת שני הזוגות שמקבלים מפתחות תואמים. יש $\binom{7}{2}$ אפשרויות לבחירת שני זוגות אלו ו- $7\cdot6$ אפשרויות לבחור עבורם מפתחות. כעת, נמנה את מספר האפשרויות לחלק ל-5 הזוגות האחרים את יתר המפתחות (10 בסך-הכל), כך שאף אחת מן הנשים בזוגות הללו לא תקבל מפתח זהה לזה שיקבל בעלה. למניית מספר האפשרויות הזה נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה (שמובא בספר בתרגיל ה9 בעמוד 73). לכל $i=1,2,3,4,5$, נסמן ב- A_i את המאורע שזוג i מקבל מפתחות תואמים.

$n(A_1) = 5 \cdot \frac{8!}{2^4} = 12,600$ [יש 5 זוגות של מפתחות תואמים שזוג 1 יכול לקבל]

$n(A_1 \cap A_2) = 5 \cdot 4 \cdot \frac{6!}{2^3} = 1,800$ [אם זוג 1 קיבל מפתחות תואמים, אז יש 4 זוגות של מפתחות תואמים לזוג 2]

$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{4!}{2^2} = 360$

$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

לכן, לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מספר האפשרויות לחלק את המפתחות, כך שאף זוג מתוך ה-5 לא יקבל מפתחות תואמים, הוא: $n(A_1^C \cap \ldots \cap A_5^C) = \frac{10!}{2^5} - n(A_1 \cup \ldots \cup A_5)$

$$= \frac{10!}{2^5} - \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i+1} \binom{5}{i} n(A_1 \cap \ldots \cap A_i)$$

$$= \frac{10!}{2^5} - (5 \cdot 12,600 - 10 \cdot 1,800 + 10 \cdot 360 - 5 \cdot 120 + 120) = 65,280$$

מכאן, נקבל את ההסתברות המבוקשת: $\binom{7}{2} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 65,280 \bigg/ \frac{14!}{2^7} = 0.08454$