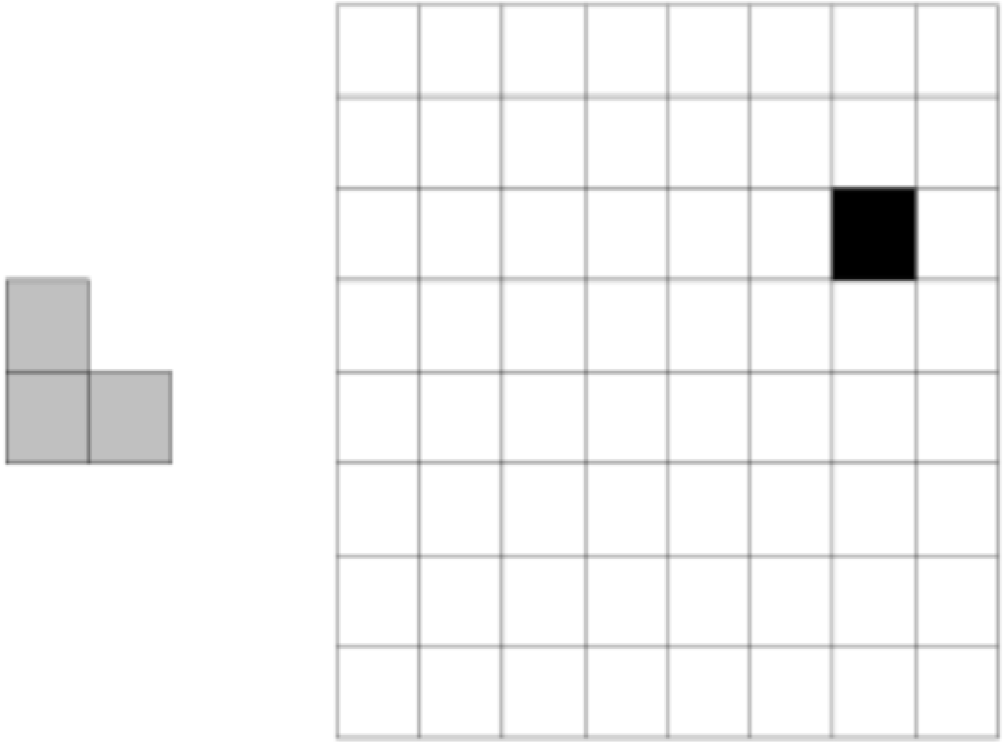
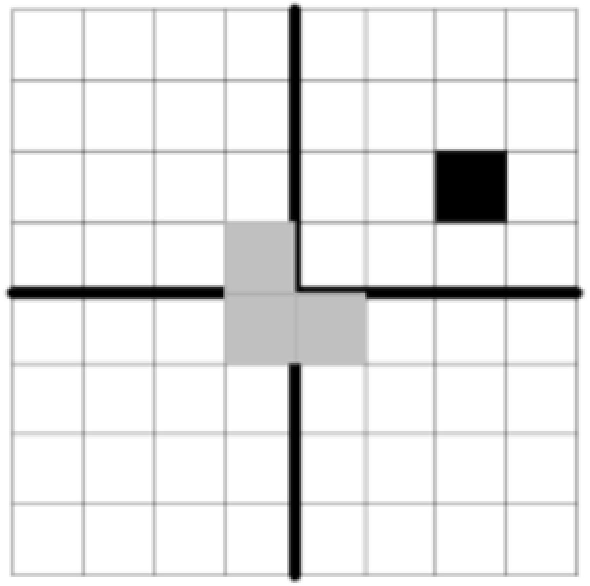
פרק 5
הפרד ומשול

שאלה 1

Tromino puzzle A tromino is an L-shaped tile formed by adjacent 1-by-1 squares. The problem is to cover any 2^n-by-2^n chessboard with one missing square (anywhere on the board) with trominoes. Trominoes should cover all the squares of the board except the missing one with no overlaps.



Design a divide-and-conquer algorithm for this problem.



בריבוע עם N>1 משבצות נחלק את הלוח לארבעה חלקים שווים.
נשים L במרכז כך שהמשבצות שהוא יכסה ישתייכו לאותם שלושה חלקים שבהם לא נמצאת המשבצת המושחרת.

במקום בעיית מילוי לוח שבו N^2 משבצות קיבלנו 4 בעיות של מילוי לוח שבו (N-1)^2 משבצות.

נמשיך ברקורסיה עם כל אחד מארבעת החלקים של הלוח (או חלקו) עבורו ניסינו לפתור את הבעייה.

נעצור כאשר נשארנו עם חלק מהלוח שגודלו 2X2, שם הפתרון טריוויאלי – לשים צורת L על המשבצות שאינן מכוסות.

שאלה 2

1. a. For the one-dimensional version of the closest-pair problem, i.e., for the problem of finding two closest numbers among a given set of n real numbers, design an algorithm that is directly based on the divide-and-conquer technique and determine its efficiency class.

   b. Is it a good algorithm for this problem?

תשובה 2

א. בהנחה שרשימת הנקודות ממויינת בסדר עולה, ניתן למצוא את המרחק בין זוג הנקודות הקרובות ביותר זו לזו ע"י השוואה בין שלושה ערכים :

המרחק בין שתי הנקודות הקרובות ביותר זו לזו בחציה הראשון של הרשימה,

המרחק בין שתי הנקודות הקרובות ביותר זו לזו בחציה השני של הרשימה,

המרחק בין הנקודה הימנית ביותר בחציה הראשון של הרשימה לבין הנקודה השמאלית ביותר בחציה השני של הרשימה.

עבור כל מחצית של הרשימה נמשיך לבדוק ברקורסיה עד שנגיע לרשימה באורך 2.

האלגוריתם ייראה כך :

Algorithm *ClosestNumbers*$(P[l..r])$
//A divide-and-conquer alg. for the one-dimensional closest-pair problem
//Input: A subarray $P[l..r]$ $(l \le r)$ of a given array $P[0..n-1]$
// of real numbers sorted in nondecreasing order
//Output: The distance between the closest pair of numbers
if $r = l$ **return** ∞
else if $r - l = 1$ **return** $P[r] - P[l]$
else return $min\{ClosestNumbers(P[l..\lfloor (l+r)/2 \rfloor]),$
$ClosestNumbers(P[(\lfloor (l+r)/2 \rfloor + 1..r]),$
$P[\lfloor (l+r)/2 \rfloor + 1] - P[\lfloor (l+r)/2 \rfloor]\}$

הסיבוכיות שלו היא O(N), אך הוא מניח שרשימת הנקודות ממויינת, מה שדורש סה"כ סיבוכיות של O(NlogN).

ב. הנה אלגוריתם יותר פשוט לפתרון הבעייה :
בהנחה שרשימת הנקודות ממויינת בסדר עולה, השווה את המרחק בין כל זוג נקודות סמוכות ברשימה הממויינת. החזר את המרחק המינימלי.

הסיבוכיות כאן - בדיוק כמו מקודם.

שאלה 3

נסמן ב- $S+T=\{z \mid \exists x\in S\ \exists y\in T \text{ such that } x+y=z\}$ את הסכום של שתי קבוצות מספרים S,T. נתון כי $S,T\subseteq\{1,\dots,n\}$ וכי $|S|,|T|=\Theta(n)$. הציגו אלגוריתם לחישוב $S+T$ שמבצע $\Theta(n\log n)$ פעולות אלמנטריות בלבד. (פעולה אלמנטרית על מספרים הינה פעולה של חיבור, חיסור, כפל, חילוק או השוואה).

Z

תשובה 3

נסמן ב- $S+T=\{z \mid \exists x\in S\ \exists y\in T \text{ such that } x+y=z\}$ את הסכום של שתי קבוצות מספרים S,T. נתון כי $S,T\subseteq\{1,\dots,n\}$ וכי $|S|,|T|=\Theta(n)$. הציגו אלגוריתם לחישוב $S+T$ שמבצע $\Theta(n\log n)$ פעולות אלמנטריות בלבד. (פעולה אלמנטרית על מספרים הינה פעולה של חיבור, חיסור, כפל, חילוק או השוואה).

נגדיר שני פולינומים :

$P_S = \sum_{i\in S} x^i$

$P_T = \sum_{j\in T} x^j$

נכפיל את שני הפולינומים בעזרת FFT – סיבוכיות O(nlogn).

בפולינום התוצאה מתקיים :

המקדם של x^k אינו אפס אמ"ם מופיעים x^iב-P_S ו-xj ב-P_T.

כלומר המקדם של x^k אינו אפס אמ"ם קיימים $i\in S$ ו $j\in T$

כך ש- i+j=k, כלומר $k \in S+T$.

דוגמה :

$S = \{2, 3, 4\}$

$T = \{5, 6\}$

$P_S = x^2+x^3+x^4$

$P_T = x^5+x^6$

$Ps * Pt = X^7 + 2x^8 + 2x^9 + x^{10}$

ואכן

$S + T = \{7,8,9,10\}$

שאלה 4

תהי A מטריצה מסדר $n\times n$.

א. הוכיחו כי אם $n=2$ ניתן לחשב את A^2 בעזרת 5 פעולות כפל של מספרים ממשיים.

ב. פרופסור תחכמוני טוען כי ברשותו אלגוריתם הפרד ומשול המחשב את A^2 עבור מטריצה מסדר $n\times n$ (n טבעי) בזמן $O(n^{\lg 5})$. הפרופסור מציע להשתמש בגישת רקורסיבית כך שבעזרת סעיף א, מתקבלות 5 תת בעיות מגודל $n/2$. האם האלגוריתם שהפרופסור מציע אכן פותר את הבעיה בסיבוכיות הנדרשת? הסבירו את תשובתכם.

תשובה 4

תהי A מטריצה מסדר $n\times n$.

א. הוכיחו כי אם $n=2$ ניתן לחשב את A^2 בעזרת 5 פעולות כפל של מספרים ממשיים.

ב. פרופסור תחכמוני טוען כי ברשותו אלגוריתם הפרד ומשול המחשב את A^2 עבור מטריצה מסדר $n\times n$ (n טבעי) בזמן $O(n^{\lg 5})$. הפרופסור מציע להשתמש בגישת רקורסיבית כך שבעזרת סעיף א, מתקבלות 5 תת בעיות מגודל $n/2$. האם האלגוריתם שהפרופסור מציע אכן פותר את הבעיה בסיבוכיות הנדרשת? הסבירו את תשובתכם.

א. נסמן את המטריצה A מחדש כ M כדי לא ליצור בלבול עם הסימונים למטה. נכתוב את המטריצה M באופן הבא:

$$M^2=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_0a_0+a_1b_0 & a_0a_1+a_1b_1 \\ b_0a_0+b_1b_0 & b_0a_1+b_1b_1 \end{pmatrix}$$

אז מתקיים:

$$A=(a_0+a_1)\cdot(a_0+b_0)=a_0a_0+a_0b_0+a_1a_0+a_1b_0$$
$$B=(a_1+b_1)\cdot(b_1+b_0)=a_1b_1+a_1b_0+b_1b_1+b_1b_0$$
$$C=(b_0+a_1)\cdot a_0=a_0b_0+a_0a_1$$
$$D=(a_1+b_0)\cdot b_1=a_1b_1+b_0b_1$$
$$E=(a_0+b_1)\cdot a_1=a_1a_0+a_1b_1$$

מכאן קל לראות שמתקיים:

$$A-C=a_0a_0+a_0b_0+a_1a_0+a_1b_0-a_0b_0-a_0a_1=a_0a_0+a_1b_0=[M^2]_{0,0}$$
$$B-D=a_1b_1+a_1b_0+b_1b_1+b_1b_0-a_1b_1-b_0b_1=a_1b_0+b_1b_1=[M^2]_{1,1}$$
$$C+D-E = a_0b_0+a_0a_1+a_1b_1+b_0b_1-a_0a_1-a_1b_1=a_0b_0+b_0b_1=[M^2]_{1,0}$$
$$E=a_0a_1+a_1b_1=[M^2]_{0,1}$$

באמצעות 5 פעולות כפל קיבלנו את $A^2=M^2$ כמבוקש.

ב.

אין אפשרות להשתמש בגישה רקורסיבית שמבוססת על סעיף א' מכיוון שלאחר פירוק הבעיה בגודל n ל 5 תת בעיות בגודל n/2 מקבלים מכפלות שאינן ריבועיות ולכן אין אפשרות להמשיך את הרקורסיה.

לדוגמא, אם נניח ש M מטריצה ריבועית עם n איברים (נניח ש n הוא חזקה שלמה של 2 לצורך הפשטות) ונחלק את M ל 4 מטריצות בגודל n/2 אז נקבל:

$$M^2=\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

כעת נמשיך כפי שעשינו בסעיף א' וניצור מטריצות בגודל n/2 כדי לקבל 5 מכפלות:

$$A=(M_{1,1}+M_{1,2})\times(M_{1,1}+M_{2,1})$$
$$B=(M_{1,2}+M_{2,2})\times(M_{2,2}+M_{2,1})$$
$$C=(M_{2,1}+M_{1,2})\times M_{1,1}$$
$$D=(M_{1,2}+M_{2,1})\times M_{2,2}$$
$$E=(M_{1,1}+M_{2,2})\times M_{1,2}$$

כעת אנחנו בבעיה כי המטריצות שמרכיבות את המכפלות אינן בהכרח זהות ולכן הבעיה הופכת מבעיה של למצוא ריבוע של מטריצה לבעיה של כפל מטריצות רגיל ואין אפשרות להמשיך ברקורסיה (לפחות לא לפי השיטה שהוצגה בסעיף א').

שאלה 5

בהינתן טקסט $T = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ באורך n, ותבנית $P = p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}$ באורך m, מא"ב $\{a, b\}$, תארו אלגוריתם יעיל המוצא לכל אינדקס $0 \le j \le n - m$ את מספר האי-התאמות בין התבנית P לבין המחרוזת $t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{m+j-1}$.

למשל, אם התבנית P היא $aabba$ והטקסט T הוא $ababab$, אז האלגוריתם צריך לתת את הפלט הבא:

אינדקס 0: 2

אינדקס 1: 3

אם T הוא $bbbbbbb$ ו-P היא $aabba$, האלגוריתם צריך לתת את הפלט הבא:

אינדקס 0: 3

אינדקס 1: 3

אינדקס 2: 3

רמז: התאימו את a ל- 1 ואת b ל- -1.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

בונוס: בהינתן טקסט T באורך n ותבנית P באורך m, בא"ב בן k אותיות, תארו אלגוריתם יעיל, המוצא את כל האינדקסים $0 \le j \le n - m$ כך ש:

$$p_0 \cdots p_{m-1} = t_j \cdots t_{m+j-1}$$

תשובה 5

בהינתן טקסט $T = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ באורך n, ותבנית $P = p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}$ באורך m, מא"ב $\{a, b\}$, תארו אלגוריתם יעיל המוצא לכל אינדקס $0 \le j \le n - m$ את מספר האי-התאמות בין התבנית P לבין המחרוזת $t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{m+j-1}$.

למשל, אם התבנית P היא *aabba* והטקסט T הוא *ababab*, אז האלגוריתם צריך לתת את הפלט הבא:

אינדקס 0: 2

אינדקס 1: 3

אם T הוא *bbbbbbb* ו-P היא *aabba*, האלגוריתם צריך לתת את הפלט הבא:

אינדקס 0: 3

אינדקס 1: 3

אינדקס 2: 3

רמז: התאימו את *a* ל- 1 ואת *b* ל- -1.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

בונוס: בהינתן טקסט T באורך n ותבנית P באורך m, בא"ב בן k אותיות, תארו אלגוריתם יעיל, המוצא את כל האינדקסים $0 \le j \le n - m$ כך ש:

$$p_0 \cdots p_{m-1} = t_j \cdots t_{m+j-1}$$

תחילה נציג פתרון בסיבוכיות $O(n\log n)$. בהמשך לרמז, נחליף את *a* ב-1 ואת *b* ב- (-1), ונבנה מהטקסט T פולינום $t(x)$ שמקדמיו נקבעים על ידי תווי המחרוזת T, כלומר $t(x)=t_{n-1}x^{n-1}+\ldots+t_1x+t_0$. באופן דומה, נבנה מהתבנית Reverse(P), שהיא המחרוזת P בהיפוך סדר התווים (כלומר, "נקרא" את P מהסוף להתחלה), פולינום $p(x)=p_0x^{m-1}+\ldots+p_{m-2}x+p_{m-1}$.

כעת נחשב את פולינום המכפלה $r(x)=t(x)\cdot p(x)$ בסיבוכיות $O(n\log n)$ (על ידי DFT). דרגת פולינום המכפלה תהיה $(n-1)+(m-1)=n+m-2$ ונסמן אותו $r(x)=r_{n+m-2}x^{n+m-2}+\ldots+r_1x+r_0$. אנו מעוניינים במקדמים r_j רק עבור $m-1\le j\le n-1$ כיוון שהם מוגדרים על ידי $r_j=p_0t_{j-(m-1)}+\ldots+p_{m-2}t_{j-1}+p_{m-1}t_j$. סכום זה קשור למספר ההתאמות בין התבנית $p_0,\ldots,p_{m-1}$ לקטע הטקסט $t_{j-(m-1)},\ldots,t_j$ כדלקמן: כל התאמה ביניהם תורמת +1 לסכום, וכל אי-התאמה תורמת (-1) לסכום.

קיבלנו כי המקדם r_j הוא ההפרש בין מספר ההתאמות למספר האי-התאמות. נזכור כי הסכום של מספר ההתאמות ושל מספר האי-התאמות הוא בדיוק m, ולכן נוכל לחשב את מספר האי-התאמות, שנסמן אותו על ידי q_j, כדלקמן: ברור שמספר ההתאמות הוא $m-q_j$, ולכן מתקיים כי $r_j=1\cdot(m-q_j)+(-1)\cdot q_j=m-2q_j$. אם כן, מספר האי-התאמות הוא $q_j=(m-r_j)/2$.

שאלה 6

חשב את הביטויים הבאים:

א. $DFT_m(x^n)$ לכל $n \le m$ כך ש-m מחלק את n.

ב. $DFT_{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n} x^j\right)$ (ערכי הפולינום הנתון בשרשי היחידה מסדר n+1)

ג. $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k$ (סכום כל שרשי היחידה מסדר n)

ד. $\prod_{k=0}^{n-1} \omega_n^k$ (מכפלת כל שרשי היחידה מסדר n)

תשובה 6אב

חשב את הביטויים הבאים:

א. $DFT_m(x^n)$ לכל $n \le m$ כך ש-m מחלק את n.

א. DFT מחזיר את ערכי הפולינום x^n ב-m שורשי היחידה מסדר m. התוצאה תהיה וקטור באורך m: $(1,1,...,1)$.

$$0 \le k \le m-1 \qquad (\omega_m^k)^n = (e^{i\frac{2\pi k}{m}})^n = e^{i2\pi k'} = 1 \qquad (k' = nk/m \quad \text{is an integer})$$

ב. $DFT_{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n} x^j\right)$ (ערכי הפולינום הנתון בשרשי היחידה מסדר $n+1$)

ב. עבור $x\neq 1$ הפולינום מקיים את נוסחת הסכום של סדרה הנדסית: $\sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

לכן עבור $1\le k\le n$:
$$\sum_{j=0}^{n}(\omega_{n+1}^k)^j = \frac{1-(w_{n+1}^k)^{n+1}}{1-w_{n+1}^k} = \frac{1-e^{\frac{2\pi i}{n+1}k(n+1)}}{1-w_{n+1}^k} = \frac{1-e^{2\pi i k}}{1-w_{n+1}^k} = \frac{1-1}{1-w_{n+1}^k} = 0$$

עבור $k=0$ התוצאה היא: $\sum_{j=0}^{n}(\omega_{n+1}^0)^j = \sum_{j=0}^{n}(1)^j = n+1$

ולפיכך הוקטור המבוקש הוא $(n+1, 0, 0, ..., 0)$.

תשובה 6גד

חשב את הביטויים הבאים:

ג. $\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^k$ (סכום כל שרשי היחידה מסדר n)

ג. $\omega_n \neq 1$, ולכן גם כאן מדובר בסכום של סדרה הנדסית: $\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^k = \frac{1-\omega_n^n}{1-\omega_n} = \frac{1-e^{(2\pi i/n)n}}{1-\omega_n} = \frac{1-1}{1-\omega_n} = 0$

ד. $\prod_{k=0}^{n-1}\omega_n^k$ (מכפלת כל שרשי היחידה מסדר n)

ד. $\prod_{k=0}^{n-1}\omega_n^k = (\omega_n)^{0+1+\ldots+n-1} = \omega_n^{\frac{(n-1)n}{2}} = e^{\frac{2\pi i}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}} = e^{\pi i(n-1)}$

ידוע כי $e^{\pi i} = -1$ ולכן הפתרון תלוי בזוגיות של n.

$$\prod_{i=0}^{n-1}\omega_n^i = (-1)^{n-1} = \begin{cases} -1 & n \text{ is even} \\ 1 & n \text{ is odd} \end{cases}$$

<u>שאלה 5 – תכונות DFT, הרצת FFT</u> (25 נקי').

(א) נתון הפלט $(v_1,\dots,v_n)$ של טרנספורם פורייה הדיסקרטי DFT_n מסדר n על מקדמי הפולינום $p(x)$, שדרגתו לכל היותר $n-1$. מהו הפלט של הטרנספורם DFT_{2n} מסדר $2n$ על מקדמי הפולינום $p(x^2)$. (12 נקי')

(ב) נביט בפולינום $p(x)=-x^3+x^2+2x-2$. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) במסגרת הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום. בדקו את תשובתכם ע"י <u>הצבה ישירה</u> של הערכים המתאימים בפולינום. (13 נקי')

תשובה 7

(א) נתון הפלט $(v_1,\dots,v_n)$ של טרנספורם פורייה הדיסקרטי DFT_n מסדר n על מקדמי הפולינום $p(x)$, שדרגתו לכל היותר $n-1$. מהו הפלט של הטרנספורם DFT_{2n} מסדר $2n$ על מקדמי הפולינום $p(x^2)$. (12 נקי')

נתונים ערכים $(v_1,v_2,\dots v_n)$ המקיימים

$$DFT_n(p(x)) = (v_1,v_2,\dots v_n)$$

כלומר עבור

$$0 <= k <= n-1$$

מתקיים

$$DFT_n(p(x)) = p(w_n^k) = p(e^{\frac{2\pi ik}{n}}) = (v_1,v_2,\dots v_n)$$

כעת נחשב את $DFT_{2n}(p(x^2))$:

$$DFT_{2n}(p(x^2)) = p((w_{2n}^k)^2) = p(e^{\frac{2\pi i2k}{2n}}) = p(e^{\frac{2\pi ik}{n}})$$

ניתן לראות כי הערכים זהים, אך טווח הפתרונות של $DFT_{2n}(p(x^2))$ הינו 0..2n-1

לכן עבור

$$0 <= k <= n-1$$

מתקיים

$$p((e^{\frac{2\pi ik}{n}})^2) = v_k$$

ועבור

$$n <= k <= 2n$$

נגדיר

$$k = n + s$$

כאשר

$$0 <= s <= n-1$$

ועכשיו עבור

$$n <= k <= 2n-1$$

מתקיים

$$p(e^{\frac{2\pi ik}{n}}) =$$

$$p(e^{\frac{2\pi in}{n}} * e^{\frac{2\pi is}{n}}) =$$

$$p(1 * e^{\frac{2\pi is}{n}}) =$$

$$V_s = V_{k-n}$$

כלומר עבור

$$0 <= k <= 2n-1$$

הפתרונות הם

$$DFT_{2n}(p(x^2)) = (v_1,v_2,\dots v_n,v_1,v_2,\dots v_n)$$

שאלה 8

<u>הרצת FFT</u>. נביט בפולינום $p(x)=x^3+2x^2+3x+4$ שדרגתו קטנה מ-4. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) עבור:

(א) הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום.

(ב) הרצת INVERSE-FFT (הרצת $FFT(\cdot,(\omega_4)^{-1})$) על הערכים שהתקבלו בסעיף הקודם.

תשובה 8א

הרצת FFT. נביט בפולינום $p(x)=x^3+2x^2+3x+4$ שדרגתו קטנה מ-4. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) עבור:

(א) הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום.

(ב) הרצת INVERSE-FFT (הרצת $FFT(\cdot,(\omega_4)^{-1})$) על הערכים שהתקבלו בסעיף הקודם.

הרצת FFT על הווקטור [4,3,2,1] , n=4 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{4}} = i$:

1. Calling FFT ((4,3,2,1,), $\omega = i$)
   - i. Calling FFT ((4,2), $\omega^2 = -1$)
     - a. Calling FFT ((4), $\omega^4 = 1$) , return (4)
     - b. Calling FFT ((2), $\omega^4 = 1$) , return (2)
     - c. Calculate (4+1*2, 4-1*2), return (6,2)
   - ii. Calling FFT ((3,1), $\omega^2 = -1$)
     - a. Calling FFT ((3), $\omega^4 = 1$) , return (3)
     - b. Calling FFT((1), $\omega^4 = 1$) , return (1)
     - c. Calculate (3+1*1, 3-1*1), return (4,2)
   - iii. Calculate: f(1)= 6+1*4= 10 f(-1)= 6-1*4=2
     f(i)= 2+i*2=2+2i f(-i)= 2-2i
   - iv. Return (10,2+2i,2,2-2i)

תשובה 8ב

הרצת FFT. נביט בפולינום $p(x)=x^3+2x^2+3x+4$ שדרגתו קטנה מ-4. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) עבור:

(א) הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום.

(ב) הרצת INVERSE-FFT (הרצת $FFT(\cdot,(\omega_4)^{-1})$) על הערכים שהתקבלו בסעיף הקודם.

הרצת FFT((10,2+2i,2,2-2i),ω^{-1})

1. Calling FFT ((10,2+2i,2,2-2i),$\omega^{-1}=-i$)
   - i. Calling FFT ((10,2), $\omega^{-2}=-1$)
     - a. Calling FFT ((10), $\omega^{-4}=1$) , return (10)
     - b. Calling FFT ((2), $\omega^{-4}=1$) , return (2)
     - c. Calculate (10+1*2, 10-1*2), return (12,8)
   - ii. Calling FFT ((2+2i,2-2i), $\omega^{-2}=-1$)
     - a. Calling FFT ((2+2i), $\omega^{-4}=1$) , return (2+2i)
     - b. Calling FFT((2-2i), $\omega^{4}=1$) , return (2-2i)
     - c. Calculate (2+2i+1*(2-2i), 2+2i-1*(2-2i)), return (4,4i)
   - iii. Calculate: f(1)= 12+1*4= 16 f(-1)= 12+ ω^{-2}*4=8

     f(i)= 8+ ω^{-1}*4i=12 f(-i)= 8+ω^{-3}*4i=4
   - iv. Return (16,12,8,4)