סמסטר 2007ג - פתרון ממ"ן 13

פתרון שאלה 1

על-פי משפט אוילר, בגרף קשיר קיים מסלול אוילריאני אם ורק אם דרגות כל הצמתים זוגיות או שדרגות כל הצמתים זוגיות פרט לשני צמתים. (ראו בעמוד 170 בספר הלימוד.)

בגרף שלם בעל n צמתים ($n > 2$) קיים מסלול אוילריאני אם ורק אם n אי-זוגי, כי אז הדרגה של כל אחד מהצמתים היא זוגית. בגרף שלם בעל שני צמתים קיים כמובן מסלול אוילריאני.

בגרף גלגל בעל n צמתים ($n > 3$) לא קיים מסלול אוילריאני, כי הדרגה של כל אחד מהצמתים (פרט, אולי, לצומת המרכזי) היא 3. בגרף גלגל בעל שלושה צמתים קיים מסלול אוילריאני.

פתרון שאלה 2

ראשית, נראה שהבעיה שייכת ל-NP. מסמך אישור קצר יהיה חלוקה של הפריטים ל-B קבוצות כך שהקבוצה ה-j ($1 \le j \le B$) מכילה את הפריטים שיוכנסו לתא ה-j.

כדי לבדוק את מסמך האישור, צריך לוודא שכל אחד מהפריטים נמצא בדיוק בקבוצה אחת ושמשקל הפריטים בכל קבוצה אינו עולה על W. בדיקה זו יכולה להיעשות בזמן פולינומיאלי ב-n.

נראה כעת שהבעיה שלמה ב-NP על-ידי רדוקציה מבעיית החלוקה.

הקלט לבעיית החלוקה הוא רשימה של n מספרים טבעיים $a_1, a_2, \ldots a_n$. ראשית, נוודא שסכום המספרים הוא זוגי. (אם סכום המספרים איננו זוגי, אז ברור שאין פתרון לבעיית החלוקה. במקרה זה אפשר לתת לבעיית ה- Bin Packing איזשהו קלט שעבורו התשובה היא "לא".)

במקרה שסכום המספרים זוגי, ניתן לבעיית ה- Bin Packing את הקלט הבא:

רשימת משקלים $a_1, a_2, \ldots a_n$ (משקלו של הפריט ה-i הוא a_i), $B = 2$, $W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$.

נוכיח שהרדוקציה נכונה:

כיוון אחד: נניח שקיימת חלוקה של המספרים $a_1, a_2, \ldots a_n$ לשתי קבוצות, כך שסכום האיברים בקבוצה הראשונה שווה לסכום האיברים בקבוצה השנייה. במקרה זה קיים פתרון לבעיית ה- Bin Packing – הפריטים שמשקליהם מתאימים למספרים שבקבוצה הראשונה יוכנסו לתא הראשון והפריטים שמשקליהם מתאימים למספרים שבקבוצה השנייה יוכנסו לתא השני.

משקל הפריטים בכל אחד משני התאים יהיה $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$, כנדרש.

כיוון שני: נניח שניתן להכניס את n הפריטים בבעיית ה- Bin Packing לשני תאים כך שמשקל הפריטים בכל תא יהיה לכל היותר $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$. ברור שמשקל הפריטים שבכל אחד מהתאים חייב להיות **בדיוק** $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$, מפני שאם משקל הפריטים באחד התאים יהיה קטן יותר מ- $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$, אז משקל הפריטים בתא השני יהיה גדול יותר מ- $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$, בניגוד להנחה.

מכאן נובע שאפשר לחלק את המספרים $a_1, a_2, \ldots a_n$ לשתי קבוצות, כך שסכום האיברים בקבוצה הראשונה שווה לסכום האיברים בקבוצה השנייה. כלומר, קיים פתרון לבעיית החלוקה.

פתרון שאלה 3

ככל הנראה אין סיכוי ממשי לזכות בפרס.

ראשית, הבעיה היא NP-שלמה. הבעיה הכללית שתוארה בשאלה בעצם זהה לבעיית הקליקה – הבעיה של מציאת קליקה בגודל k בגרף בעל n צמתים. כדי לתרגם את בעיית שיבוץ הסטודנטים לבעיית הקליקה נתאים לכל סטודנט צומת בגרף, ונחבר שני צמתים בגרף אם שני הסטודנטים המתאימים מסתדרים זה עם זה. התרגום של בעיית הקליקה לבעיית שיבוץ הסטודנטים הוא סימטרי.

שנית, הקלט הוא די גדול ($n = 200, k = 100$). מבחינה מעשית, אם הגרף הוא מאד "דליל" (כלומר, רק מעט מאד סטודנטים מסתדרים זה עם זה) או מאד "צפוף" (כמעט כל הסטודנטים מסתדרים זה עם זה), אז אפשר יהיה לפתור את הבעיה בזמן קצר יחסית; אחרת, יידרשו שנים ארוכות כדי לפתור את הבעיה ועד אז רוב הסטודנטים כבר יסיימו את לימודיהם ולא יזדקקו למעונות.

פתרון שאלה 4

א. לא נובע מכך ש- $P = NP$. בעיית ה- 10-Clique שייכת ל-P ולכן אין רבותא בכך שפרופ' כלומסקי מצא אלגוריתם פולינומיאלי לבעיה.

כדי לבדוק אם בגרף נתון G בעל n צמתים קיימת קליקה בגודל 10 מספיק לבדוק $\binom{n}{10}$ קבוצות צמתים (מספר האפשרויות לבחור 10 צמתים מתוך n כשאין חשיבות לסדר הבחירה). מספר זה הוא מסדר גודל של n^{10}. מכיוון שהבדיקה אם קבוצה נתונה של 10 צמתים היא קליקה נעשית בזמן קבוע, זמן הבדיקה הכולל הוא פולינומיאלי.

ב. כן, כי בעיית ה- 10-Coloring שייכת ל-NPC (ראו בעמוד 173 בספר).

לכן אם יימצא אלגוריתם פולינומיאלי עבורה, המסקנה תהיה ש- $P = NP$!

פתרון שאלה 5

נשים לב לעובדה הבאה: בתום האלגוריתם, יכול להיות לכל היותר תא אחד שהוא "חצי מלא" (כלומר, תא שהמשקל הכולל של הפריטים הנמצאים בו אינו עולה על W/2).

לא יכולים להיות שני תאים כאלה, מפני שהאלגוריתם היה יכול להכניס את הפריטים הנמצאים בתא השני לתא הראשון (התא שהאינדקס שלו קטן יותר).

אם כך, כל התאים, פרט אולי לתא אחד, הם לפחות חצי מלאים. בפתרון האופטימלי כל התאים הם מלאים, ולכן מספר התאים שבהם ישתמש האלגוריתם הוא לכל היותר פי שניים ממספר התאים בפתרון האופטימלי. כלומר, האלגוריתם משיג יחס קירוב של 2.

פתרון שאלה 6

המחלקה co-P היא מחלקת הבעיות שהבעיות המשלימות שלהן שייכות ל-P. (באופן בלתי פורמלי, בעיה משלימה לבעיה A היא הבעיה שהקלטים שלה זהים לאלו של A, אך תשובות ה"כן" והלא" הוחלפו.) כדי להוכיח ש- $P = co\text{-}P$ צריך להוכיח שכל אחת מהקבוצות מוכלת בשנייה.

ההוכחה נמצאת בקובץ coduals1 הנמצא במאגר המשאבים.