בחינה 2015א מועד א שני (מועד 86)

שאלה 1

א. תשובה [ד] היא הנכונה $\forall x\forall y\big((x,y)\in R\to(y,x)\in R\big)$ פשוט לפי הגדרת יחס סימטרי

ב. אפשר לבנות פונקציה חד חד ערכית ועל בין המספרים הראשוניים ל N $\begin{matrix}1&2&3&4&\dots\\1&3&5&7&\dots\end{matrix}$ ולכן קבוצת הראשונים עוצמתה $\aleph_0$ ולכן ע"פ משפט 5.23 עוצמת P(A) של הקבוצה הוא C=$2^{\aleph_0}$ ע"פ משפט 5.25
ולכן התשובה היא: [3]

ג. אפשר להגיע מכל צומת לכל צומת אם הוא באותו גרף בגלל שהוא קשיר ואם הוא בגרף השני ע"י הצומת $v_1\cap v_2$. ולכן G קשיר
כיוון שG_1,G_2 יש מעגל אוילרי דרגת כל צומת שלהם זוגית לכך גם באיחודם דרגת כל צומת זוגית, ולכן כיוון ש G קשיר בG יש מעגל אוילר
ולכן התשובה היא [1]

שאלה 2

א. R אינו רפלקסיבי - כיוון שקיימות קבוצות שבחיתוכם עם עצמם אין 5 כגון: $\{1,2\}$
R אינו אנטי סימטרי - כיוון שקיים $x\neq y$ אך xRy וyRx כגון: $x=\{5\},y=\{1,5\}$: $x\neq y$ אך $5\in x\cap y=y\cap x=\{5\}$
R טרנזיטיבי - כיוון שאם yRz ו xRy אז $5\in y\cap z$ וגם $5\in x\cap y$ <- $5\in z$ וגם $5\in y$ וגם $5\in y$ וגם $5\in x$ <- $5\in z$ וגם $5\in x$ <- $5\in x\cap z$ <-xRz

ב. S אינו רפלקסיבי - כיוון שקיימות קבוצות שבאיחודם עם עצמם אין 5 כגון: $\{1,2\}$
S אינו אנטי סימטרי - כיוון שקיים $x\neq y$ אך xSy וySx כגון: $x=\{2\},y=\{1\}$: $x\neq y$ אך $5\notin x\cup y=y\cup x=\{1,2\}$
S טרנזיטיבי - כיוון שאם ySz ו xSy אז $5\notin y\cup z$ ו $5\notin x\cup y$ ← $5\notin z$ ו $5\notin y$ ו $5\notin y$ ו $5\notin x$ ← $5\notin x\cup z$ ← xSz

ג. K אינו רפלקסיבי- כיוון שקיימות קבוצות שלא מקיימות $min(x)=max(x)$ כגון: $\{1,2\}$ $max(x)=2\neq 1=min(x)$
K אנטי סימטרי - כיוון שאם xKy ו yKx *min(x)=max(y)* ו$\min(y)=\max(x)$ ->
$\min(x)=\max(y)\geq\max(x)=\min(y)$ ->$\max(y)\leq\geq\min(y)$->
$\min(x)=\max(y)=\min(x)=\max(y)$ -> לכך מוכרח שב*x,y* יש את אותו איבר אחד ולכך *x=y*
K אינו טרנזיטיבי- כיוון שקיימת קבוצות כגון:
$x=\{5,6\},y=\{4,5\},z=\{3,4\}$:xKy כיוון ש$\min(x)=\max(y)=5$, yKz כיוון ש$\min(y)=\max(z)=4$
אך לא מתקיים xKz כיוון ש $\min(x)=5\neq 4=\max(z)$

ד. T אינו רפלקסיבי- כיוון שקיים $x=\{1,2\}$ כך שxTx לא מהוה חלוקה של *A* כיוון ש$x\neq A$
T אינו אנטי סימטרי- כיוון שקיימים קבוצות: $x=\{1,2,3,4,5\},y=\{6,7,8,9,10\}$
x ו *y* שונים ולמרות זאת *xTy* ו*yTx* מהווים חלוקה
T אינו טרנזיטיבי- כיוון שקיימות קבוצות:$x=\{1\},y=\{2,3,4,5,6,7,8,9\},z=\{1\}$ xTy וyTz כיוון שהם מהווים חלוקה, אך xTz לא מתקיים כיוון ש$\{1\}$ לא מהוה חלוקה

שאלה 3

א. $a_1=2$ - אפשר למלא או בעומד ירוק או בעומד לבן
$a_2=2\cdot 2+3=7$ -אפשר למלא ע"י 2 עומדים כאשר צריך לבחור לכל אחד צבע מתוך 2 או 2 שוכבים ולכך 3 אפשרויות או שניהם ירוקים או שניהם כחולים או ירוק ועליו כחול
$a_n=2\cdot a_{n-1}+3\cdot a_{n-2}$ - אפשר למלא או ע"י מילוי 2 התאים האחרונים בעומד אחד(ולכך יש שתי אפשרויות כמו שהוסבר קודם) או ע"י מילוי 4 התאים האחרונים בשני שוכבים ולכך יש 3 אפשרויות (כמו שהוסבר קודם)

ב. נציב $a_n=\alpha^n$

$$\alpha^n=2\cdot\alpha^{n-1}+3\cdot\alpha^{n-2}$$

נצמצם ב α^{n-2}

$$\alpha^2-2\alpha-3=0$$

$$\alpha_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}$$

$$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -1$$
$$a_n = A(3)^n + B(-1)^n$$

נציב את התנאים התחיליים:

$$n = 1, a_1 = 2, 2 = 3A - B$$
$$n = 2, a_2 = 7, 7 = 9A + B$$
$$9 = 12A \Rightarrow A = \frac{3}{4}$$
$$2 = \frac{9}{4} - B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

הפתרון הוא:

$$a_n = \frac{3 \cdot 3^n}{4} + \frac{(-1)^n}{4} = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4}$$

עבור n=1 : $a_1 = \frac{9-1}{4} = 2$

שאלה 4

עבור 1+1+1+1+1+1: ישנה אפשרות אחת לחלוקות (וממילא ליחסי שקילות ע"פ עמ' 62)

עבור 1+1+1+1+2: צריך לבחור את הקבוצה של ה2 ושאר האיברים יהיו ממילא באחדות לכך האפשרויות הם $15 = \binom{6}{2}$

עבור 1+1+2+2: צריך לבחור את שני הקבוצות ש2 וכיוון שלא משנה הסדר לחלק ב2: $\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}}{2} = \frac{15\cdot 6}{2} = 45$

עבור2+2+2: צריך לבחור את שתי קבוצות וממילא את השלישית ולחלק ב3! כיוון שלא משנה הסדר: $\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}}{3!} = \frac{15\cdot 6}{6} = 15$

עבור 3+1+1+1: צריך לבחור את קבוצת השלוש וממילא השאר יהיו באחדות : $\binom{6}{3} = 20$

עבור 3+2+1 צריך לבחור את השלוש ואת השתים וממילא את האחד: $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 20 \cdot 3 = 60$

עבור 3+3 צריך לבחור את ה3 וממילא את ה3 השני ולחלק ב2 כיוון שלא משנה הסדר:$\frac{\binom{6}{3}}{2} = 10$

לכך מספר יחסי השקילות הוא $1 + 15 + 45 + 15 + 20 + 60 + 10 = 166$

שאלה 5

א. עבור צומת v_i השכנים הם:
שוים האיבר הראשון ובשני האיברי ם הנותרים כדי שיהיו שונים יש שתי אפשרויות לכל אחד 3 פחות האיבר שקיים בv_i כנ"ל כאשר רק האיבר השני שווה וכנ"ל לשלישי. לכך מספר האפשרויות הוא $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.
לכך לכל צומת 12 שכנים(וממילא קשתות) ולכך דרגת כל צומת 12.

ב. מספר הצמתים בגרף הוא מספר הסדרות האפשריות: $3^3 = 27$
ב$\bar{G}$ יש קשת בין כל צומת לצמתים שאינם שכניה בG (שאינם שווים ב1 בדיוק- או ב2 או כלל לא) כיוון שלכל צומת מספר הצמתים האחרים 26=27-1 לכך יש לכל צומת ב$\bar{G}$ 14=26-12 צמתים.
לפי משפט 3.3(דירק) אם דרגת כל צומת לפחות *n/2* מכל הצמתים הגרף המילטוני. לכך כיוון שב$\bar{G}$ לכל צומת דרגת כל צומת 14 : $27/2 = 13.5 < 14$ לכך $\bar{G}$ המילטוני ויש מעגל המילטוני נחק מהמעגל קשת אחת ויצא מסלול שבו כל צומת או שווה ב2 בדיוק או לא שווה כלל לצומת הקודמת לה במסלול.