תשובה 1

א. מספר כל התת-קבוצות של $\{1,2,\ldots,10\}$ הוא 2^{10} ("תורת הקבוצות" שאלה 1.7 עמ' 9).
מספר כל התת-קבוצות של $\{2,4,6,8,10\}$ הוא 2^5 . לפיכך מספר התת-קבוצות של $\{1,2,\ldots,10\}$ המכילות לפחות שלם אי-זוגי אחד הוא (חישבו והבינו מדוע!): $2^{10} - 2^5 = 992$.

ב. לפי שאלה 2.41 בספר הלימוד והנוסחה עבור $P(n\,; k_1, k_2, \ldots k_n)$ בתחתית עמ' 44 שם,

מספר כל הסידורים האפשריים של האותיות הנתונות: $\frac{11!}{4!4!2!} = 34{,}650$.

נחשב את מספר הסידורים האסורים, בהם מופע רצף של 4 S-ים:

כללית, בשאלות סידור עצמים, אם מתוך n העצמים שיש לסדר, k עצמים מסוימים צריכים להיות זה ליד זה בסדר נתון, נוכל לראות את k העצמים הללו כעצם יחיד. מספר העצמים לסידור יהיה אז $n+1-k$. במקרה שלנו, נחשוב על 4 ה- S-ים הצמודים כעל עצם יחיד. מספר כל העצמים הוא אפוא 8, ונקבל כי מספר הסידורים האסורים הוא: $\frac{8!}{4!2!} = 840$.

לפיכך מספר הסידורים המותרים הוא: $34{,}650 - 840 = 33{,}810$.

תשובה 2

א. יחס דו-מקומי מעל A הוא תת-קבוצה של $A \times A$. קבוצת היחסים הדו-מקומיים מעל A היא אפוא $P(A \times A)$. לפי שאלה 1.7 בעמ' 9 בכרך "תורת הקבוצות", ולפי נוסחה באמצע עמוד 30 שם: $P(A \times A) = 2^{n^2}$.

ב. לפי שאלה 3.19 בעמ' 91 בכרך "תורת הקבוצות": כמספר הדרכים לסדר n עצמים שונים בשורה. לפי "קומבינטוריקה", ראש עמ' 23 , מספר זה הוא $n!$.

ג. k^n : ר' "קומבינטוריקה" שאלה 1.32 בעמ' 17.

ד. ב.ה.כ . (בלי הגבלת כלליות) נניח כי $A = \{1,2,\ldots,n\}$.

בחירת פונקציה **חח"ע** של A הנ"ל ל- B כמוה כבחירת n- יה **סדורה** (!) של איברים מתוך B, כלומר חליפה של n מתוך k . לפי הגדרת "חליפה" ("קומבינטוריקה" עמ' 18) מספר החליפות הנ"ל הוא: $P(k,n) = k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)$.

שימו לב שנוסחה זו נכונה גם אם $k<n$: במקרה כזה הנוסחה נותנת 0 כפי שצריך, כי אחד הגורמים במכפלה יהיה $k-k=0$.

ה. $\frac{n!}{(3!)^k k!}$: השווה שאלה 2.28 (הנוסחה השניה - ר' ההסבר עבורה) ושאלה 2.29 בספר הלימוד, עמ' 37, 157.

תשובה 3

א. זהו מספר האפשרויות לחלק 60 חפצים **זהים** (איננו מעוניינים בהצבעה של כל תושב, אלא רק בהתפלגות) לשלושה תאים שונים. לחילופין - זהו מספר הפתרונות השלמים האי-שליליים למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 60 \;\; (x_i \geq 0)$.

התשובה בסעיף 2.4 בספר: $D(3,60) = \binom{62}{2} = 1891$.

ב. יש 3 אפשרויות למועמד בעל רוב מוחלט. בכל אחת מהן נותרו $60 - 31 = 29$ קולות לחלק בין שלושת המועמדים: $D(3,29) = \binom{31}{2} = 465$. תשובה סופית: $3 \cdot 465 = 1395$.

תשובה 4

נמיין את הדרכים להציג את 19 כנדרש, לפי מספר ההופעות של 2 ומספר ההופעות של 3 בהצגה. מיון זה מביא למשוואה $2n + 3m = 19$. ראשית נמצא את כל הפתרונות בטבעיים למשוואה הנ"ל. מהמשוואה רואים כי $0 \leq m \leq 6$. מטעמי זוגיות נקבל (מדוע?) כי m חייב להיות אי-זוגי. כלומר $m = 1,3,5$. בהתאמה, $n = 8,5,2$.

כל פתרון (n,m) למשוואה $2n+3m=19$ תורם $\binom{n+m}{n} = \frac{(n+m)!}{n!\,m!}$ פתרונות לבעיה שלנו:

זהו מספר הדרכים לסדר את n ההופעות הזהות של 2 ו- m ההופעות הזהות של 3 בסדרה.

לכן התשובה סה"כ: $86 = \binom{7}{2} + \binom{8}{5} + \binom{9}{8}$.

תשובה 5

נתייחס לדיאגרמות המופיעות בכרך "תורת הקבוצות" עמ' 169, בתשובה לשאלה 3.17.

לכל דיאגרמה נספור כמה רלציות סדר-חלקי שונות מתוארות ע"י אותה דיאגרמה.

- הדיאגרמה הימנית מתארת סדר מלא. אם נקבע שיבוץ כלשהו של המספרים $1,2,3$ בדיאגרמה זו, כל סידור מחדש יתן לנו רלצית סדר שונה. מספר הרלציות המתאימות הוא אפוא כמספר התמורות של שלושת המספרים, כלומר $3! = 6$.
- בדיאגרמה השניה מימין, החלפה בין שני המספרים היושבים בשני הקדקדים התחתונים אינה משנה את הרלציה. במלים אחרות, בחירת המספר היושב בקדקד העליון מגדירה לגמרי את הרלציה. לכן יש 3 רלציות סדר-חלקי המתאימות לדיאגרמה זו.
- הדיאגרמה הבאה: באופן דומה, 3 רלציות.
- בדיאגרמה הבאה (זו הבנויה משני חלקים), כל שינוי בשיבוץ האברים משנה את הרלציה, משמע 6 רלציות שונות.
- הדיאגרמה האחרונה מתארת את רלצית הזהות. תמורות של 3 המספרים לא משנות - רלצית הזהות היא יחידה.

סה"כ: $6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 19$.

איתי הראבן