20425 - תאריך הבחינה: 20.7.2015 (סמסטר 2015ב - מועד א6 / 87)

שאלה 1

א. לניסוי המתואר בשאלה יש !10 תוצאות אפשריות. כלומר: $n(S)=10!$

קיימת רק תוצאה אחת של התאמה מלאה, ולכן, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{1}{10!}$

ב. נבחר תחילה את הכדורים שעבורם תתקבל התאמה מספרית ($\binom{10}{7}$ אפשרויות), ואחר-כך נפזר את 3 הכדורים הנותרים, כך שלא תיווצר עבורם אף התאמה (2 אפשרויות).

נקבל את ההסתברות: $\frac{\binom{10}{7}\cdot 2}{10!}=\frac{1}{7{,}560}$

ג. יש !5 אפשרויות לפזר את הכדורים הזוגיים בקופסאות הזוגיות, ו- !5 אפשרויות לפיזור הכדורים האי-זוגיים בקופסאות האחרות (האי-זוגיות). לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{5!\cdot 5!}{10!}=\frac{1}{252}=0.004$

ד. **חישוב ישיר**

האפשרות הראשונה היא שכדור 1 יוכנס לאחת מקופסאות 3-10 (8 אפשרויות) וכדור 2 לאחת מהקופסאות האחרות שאינן קופסה 2 (8 אפשרויות); והאפשרות השנייה היא שכדור 1 יוכנס לקופסה 2 (אפשרות אחת) וכדור 2 לאחת מהקופסאות האחרות שאינן קופסה 2 (9 אפשרויות).

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{8\cdot 8+1\cdot 9}{10\cdot 9}=\frac{73}{90}=0.8\bar{1}$

חישוב דרך המאורע המשלים

המאורע המשלים הוא שלפחות אחת מכדורים 1 ו- 2 מוכנס לקופסה המתאימה לו מבחינה מספרית.

ההסתברות שכדור 1 (כדור 2) יוכנס לקופסה המתאימה לו היא $\frac{1}{10}$; וההסתברות שכדורים 1ו-2 יוכנסו לקופסאות המתאימות להם היא $\frac{1}{10\cdot 9}=\frac{1}{90}$.

לכן, לפי כלל ההכלה וההפרדה, ההסתברות המבוקשת היא: $1-2\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{90}=\frac{73}{90}=0.8\bar{1}$

שאלה 2

א. נסמן ב- X את מספר הבחירות שמבוצעות עד שאמיר זוכה להטיל את המטבע או לחלופין עד שאמיר בוחר את הכדור השחור. למשתנה המקרי X יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{1}{n}$.

כעת, בהינתן $X=i$, ההתפלגות המותנית של המשתנה המקרי Y היא בינומית עם הפרמטרים i ו- p.

כלומר: $X\sim Geo(\frac{1}{n})\qquad ; \qquad Y\,|\,X=i\sim B(i,p)$

ומכאן: $E[Y]=E[E[Y\,|\,X]]=E[X\,p]=pE[X]=\frac{p}{\frac{1}{n}}=np$

ב. בהמשך לאמור בסעיף א:

$$\mathrm{Var}(Y)=E[\mathrm{Var}(Y\,|\,X)]+\mathrm{Var}(E[Y\,|\,X])=E[X\,p(1-p)]+\mathrm{Var}(X\,p)=p(1-p)E[X]+p^2\mathrm{Var}(X)$$
$$=\frac{p(1-p)}{\frac{1}{n}}+\frac{p^2\cdot\frac{n-1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}=np(1-p)+p^2n(n-1)=np(1-2p+np)$$

ג. בהמשך לאמור בסעיף א:

$$P\{Y=0\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{Y=0\,|\,X=i\}P\{X=i\}=\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^i\tfrac{1}{n}(\tfrac{n-1}{n})^{i-1}=\tfrac{1}{n}(1-p)\sum_{i=1}^{\infty}\left(\tfrac{(n-1)(1-p)}{n}\right)^{i-1}$$

$$=\tfrac{1}{n}(1-p)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\tfrac{(n-1)(1-p)}{n}\right)^{i}=\tfrac{1}{n}(1-p)\cdot\frac{1}{1-\frac{(n-1)(1-p)}{n}}=\tfrac{1}{\cancel{n}}(1-p)\cdot\frac{\cancel{n}}{n-(n-1)(1-p)}=\frac{1-p}{1+p(n-1)}$$

שאלה 3

א. הוכחת הטענה מובאת באתר הקורס.

ב. כאשר הבחירה היא **עם** החזרה, אז מספר הקוביות שנבחרות עד לבחירת הקובייה הכחולה העשירית הוא משתנה מקרי בינומי-שלילי עם הפרמטרים 10 ו- 0.25. לפיכך, ההסתברות שמשתנה מקרי זה יקבל את הערך 30 היא: $\binom{29}{9}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{20}=0.0303$

כאשר הבחירה היא **ללא** החזרה, אז הקובייה הכחולה העשירית נבחרת בבחירה ה- 30, אם לפניה נבחרו כל שאר הקוביות הכחולות. לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{\binom{29}{9}}{\binom{40}{10}}=0.0118$

שאלה 4

א. לפי נתוני הבעיה: $N\sim Po(6)$ ו- $Y\,|\,N=n\sim B(n,⅓)$.

לפיכך, לכל $n=0,1,\ldots$ ו- $j=0,1,\ldots,n$ מתקיים:

$$P\{Y=j,N=n\}=P\{Y=j\,|\,N=n\}P\{N=n\}=\binom{n}{j}\left(\tfrac{1}{3}\right)^j\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-j}\cdot e^{-6}\cdot\tfrac{6^n}{n!}$$

ב. כאשר $X=1$, פירוש הדבר, שכל הלקוחות שנכנסו לסניף פנו בדיוק לאחד מהאשנבים (1, 2 או 3).

לפיכך, לכל $n=1,2,\ldots$ מתקיים: $P\{X=1,N=n\}=P\{X=1\,|\,N=n\}P\{N=n\}=3\left(\tfrac{1}{3}\right)^n\cdot e^{-6}\cdot\tfrac{6^n}{n!}$

ג. משמעות המאורע $P\{X=2\ ,\ Y=4\ ,\ N=8\}$ היא, שנכנסו 8 לקוחות לסניף, כך ש- 4 מהם פנו לאשנב 1, ו- 4 האחרים פנו כולם לאחד משני האשנבים האחרים (2 או 3). כמו כן, נשים לב, שבהינתן מספר הלקוחות הנכנסים לסניף, ההתפלגות המשותפת של מספר הפונים לכל אחד מן האשנבים היא מולטינומית. לפיכך:

$$P\{X=2,Y=4,N=8\}=P\{X=2,Y=4\,|\,N=8\}P\{N=8\}=2\cdot\tfrac{8!}{4!4!}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^8\cdot e^{-6}\cdot\tfrac{6^8}{8!}=0.0022$$

שאלה 5

א.
$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^4\le y\}=P\{X\le y^{1/4}\}=\tfrac{1}{3}y^{1/4}\qquad,\qquad 0<y<81$$

$$f_Y(y)=\tfrac{d}{dy}F_Y(y)=\tfrac{d}{dy}\left[\tfrac{1}{3}y^{1/4}\right]=\tfrac{1}{12}y^{-3/4}\qquad,\qquad 0<y<81$$

ב.
$$P\{Y<7\,|\,Y>4\}=\frac{P\{4<Y<7\}}{P\{Y>4\}}=\frac{F_Y(7)-F_Y(4)}{1-F_Y(4)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 7^{1/4}-\frac{1}{3}\cdot 4^{1/4}}{1-\frac{1}{3}\cdot 4^{1/4}}=\frac{0.0708}{0.5286}=0.1339$$

ג. $$E[Y]=\int_0^{81} y f_Y(y)\,dy=\int_0^{81} y\cdot\tfrac{1}{12}y^{-3/4}dy=\tfrac{1}{12}\int_0^{81} y^{1/4}dy=\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{4}{5}y^{5/4}\Big|_0^{81}=\tfrac{243}{15}=16.2$$

ד. הואיל ואורכי הקטעים שווי-הסתברות ובלתי-תלויים זה בזה, נוכל להשתמש במשפט הגבול המרכזי.

נקבל: $$P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i>160\right\}\cong P\left\{Z>\tfrac{160-100\cdot 1.5}{\sqrt{100\cdot\frac{9}{12}}}\right\}=P\{Z>1.1547\}=1-0.8759=0.1241$$