נפתר ע"י צחי אבנור

<u>פתרון למבחן גמר 9.7.98 מועד 91</u>

שאלה 1:

(א) הטענה שגויה, יהיה $X,B\subseteq U$ אזי:

$$f(f(X)) = f((X\cap B)') = (X\cap B)'\cap B)' = ((X\cap B)')'\cup B' =$$
$$= (X\cap B)\cup B' = (X\cup B')\cap(B\cup B') = (X\cup B')\cap U = X\cup B'$$

השתמשנו כאן בכללי דה-מורגן ובדיסטריבוטיביות. כעת נמצא X,U,B כך ש $X\neq X\cup B'$. והרי דוגמה נגדית:
$U=\{1,2,3\}$ $X=\{1\}$ $B=\{1\}$ $B'=\{2,3\}$ $\{1\}=X\neq X\cup B'=\{1,2,3\}$.

(ב) הטענה נכונה. נוכיח:

$$f(f(f(X))) = f(X\cup B') = ((X\cup B')\cap B)' = (X\cup B')'\cup B' =$$
$$= (X'\cap B)\cup B' = (X'\cup B')\cap(B\cup B') = (X'\cup B')\cap U =$$
$$= (X'\cup B') = (X\cap B)' = f(X)$$

הצבנו בהתחלה $f(f(x)=X\cup B'$ לפי סעיף א' ושוב השתמשנו בדה-מורגן ובדיסטריבוטיביות.

שאלה 2:

(א) גודל D קבוצת הפונקציות של B ל C: $|D|=|C|^{|B|}=1^5=1$. גודל קבוצת הפונקציות של A ל D:
$|D|^{|A|}=1^2=1$.

(ב) גודל D קבוצת הפונקציות של B על A: יש סה"כ 2^5 פונקציות, מתוכן 2 פונקציות שלא על: פונקציה המתאימה לכל איברי B את a_1 ופונקציה המתאימה לכל איברי B את a_2. לכן, $|D|=2^5-2=32-2=30$. גודל קבוצת הפונקציות של C ל D: $|D|^{|C|}=30^1=30$.

(ג) גודל D קבוצת הפונקציות החח"ע של A ל B: נוכל להסתכל על זה כך – נבחר 2 איברים מתוך B עם חשיבות לסדר, את הראשון נתאים ל a_1 ואת השני ל a_2, זה בעצם מספר החליפות של 2 איברים מתוך 5, לכן: $|D|=P(5,2)=5!/3!=20$. גודל קבוצת הפונקציות של A ל D:
$|D|^{|A|}=20^2=400$.

שאלה 3:

(א) כזכור, יחס סדר חלקי הוא רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי-סימטרי. הרלציה $\models$ היא רפלקסיבית וטרנזיטיבית אך לא סימטרית. נוכיח.

רפלקסיביות – ברור שכל פסוק גורר טאוטולוגית את עצמו.

טרנזיטיביות – יהיו $\alpha,\beta,\gamma\in K$ כך ש $\alpha\models\beta,\beta\models\gamma$. אזי נסתכל על כל שורה בלוח האמת שבה α אמיתית: באותה שורה גם β אמיתית, ובגלל ש β אמיתית באותה שורה גם γ אמיתית. קיבלנו אם כן שבכל שורה שבה α אמיתית גם γ אמיתית וזו היא הרי גרירה טאוטולוגית, לכן $\alpha\models\gamma$ ובזה הוכחה הטרנזיטיביות.

אנטי סימטריות – נפריך תכונה זו. נניח בשלילה ש $\models$ היא אכן אנטי סימטרית. יהיו $\alpha=P\vee P,\beta=P\wedge P$. ברור ש $\alpha\models\beta,\beta\models\alpha$ ומהאנטי סימטריות נובע ש $\alpha=\beta$ אבל זו סתירה כי $\alpha\neq\beta$ ולכן $\models$ היא לא אנטי סימטרית וכתוצאה מכך גם לא סדר חלקי.

(ב) לא. נימוק: נניח בשלילה שקיימת R סדר חלקי כך ש $R\subseteq\models$. ראינו ש $\models$ לא אנטי סימטרית ולכן קיימים $\alpha,\beta\,|\,\alpha\neq\beta$ כך ש $\alpha\models\beta,\beta\models\alpha$. מאחר ש $R\subseteq\models$ נובע ש $\alpha R\beta,\beta R\alpha$ ומהאנטי

סימטריות של R (הרי הוא סדר חלקי) נובע ש $\alpha = \beta$ בסתירה לשונותם. לכן הנחתנו שגויה ולא קיימת R סדר חלקי המכילה את $\models$.

שאלה 4:
מאחר ותחשיב הפרדיקטים לא נכלל בחומר למבחן שאלה זו לא נפתרה.

שאלה 5:
(א) לפי טענה בשאלה 2.2 תת-גרופואיד של אגודה אף הוא אגודה. יתרה מזו, לפי טענה בשאלה 2.25 קבוצת האיברים ההפיכים (קל לראות ש H היא כזו) במונואיד (ובפרט בחבורה) היא תת-מונואיד עם אותה היחידה. נותר לנו להוכיח סגירות ושכל האיברים הפיכים. סגירות: יהי $h_1, h_2 \in H$, נוכיח ש $h_1h_2 \in H$. כלומר, ש $(h_1h_2)^2 = e$. נרשום $h_1h_2h_1h_2 = h_1h_1h_2h_2$ (קומוטטיביות) ומאחר ש $h_1, h_2 \in H$ נובע ש $h_1^2h_2^2 = ee = e$ ולכן $h_1h_2 \in H$. הפיכות כל איבר: לכל איבר קיים הופכי והוא עצמו (נובע ישירות מהגדרת H). ראינו אם כן ש H הוא גרופואיד אסוציאטיבי עם אותה יחידה של G, וכל איבריו הפיכים ולכן הוא חבורה.

(ב) נסמן : $h_i \in H, g_i \in G - H$. נרשום: $G = g_1...g_kh_{k+1}...h_n$ אין חשיבות לסדר האיברים כי G קומוטטיבי. כעת כל האיברים ב G-H הם איברים שההפכי שלהם הוא לא עצמם. כלומר, עבור כל g_i קיים $g_j \neq g_i$ כך ש $g_ig_j = g_jg_i = e$ (נזכור כי G חבורה). ברור שלא קיים h כזה כי לכל איבר בחבורה יש הפכי יחיד ו h כאמור הוא הפכי של עצמו. נסדר מחדש את מכפלת איברי G-H כך שלצד כל איבר יופיע ההפכי שלו, ונקבל: $G = g_1g_1^{-1}...h_{k+1}...h_n = eh_{k+1}...h_n = h_{k+1}...h_n = H$ וראינו אם כן שמכפלת איברי G שווה למכפלת איברי H.

שאלה 6:
(א) זו למעשה בעיה קלאסית של חלוקת k עצמים זהים ל n תאים שונים. לגביי השיפודים: $D(3,10)$ ולגבי הסטייקים: $D(3,9)$. ולפי עיקרון הכפל נקבל $D(3,10)\cdot D(3,9) = 66\cdot 55 = 3630$.

(ב) כאן נאלץ להשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה. תהי U קבוצת סך החלוקות האפשריות, לפי סעיף א' $|U| = 3630$. תהיינה A_i קבוצת החלוקה בה משפחה i לא מקבלת כלום. נחשב את גודלה: $|A_i| = D(2,10)D(2,9) = 11\cdot 10 = 110$. יש 3 קבוצות כאלה ולכן $S_1 = 330$. נחשב כעת את גודל הקבוצות A_{ij} בהן המשפחות i, j לא מקבלות כלום: למעשה, רק משפחה אחת מקבלת ואת הכל, לכן יש רק חלוקה אחת לכל A_{ij}. יש $C(3,2) = 3$ קבוצות כאלה ולכן $S_2 = 3$. נסתכל על הקבוצה שבה אף משפחה לא מקבלת כלום. מצב זה בלתי אפשרי – הרי חייבים לחלק את האוכל. לכן אין אף חלוקה המתאימה למצב הזה ו $S_3 = 0$. נרשום את עקרון ההכלה וההפרדה:

$|A_1'\bigcap A_2'\bigcap A_3'| = U - S_1 + S_2 - S_3 = 3630 - 330 + 3 - 0 = 3303$.

שאלה 7:
(א) נוכיח את מה שביקשו. נראה מתי $a\Delta b = ab - a + b + 2 = 1$. נפשט בעזרת אלגברה: $ab - a - b + 2 = 1 \Rightarrow ab - a = b - 1 \Rightarrow a(b-1) = b - 1$ מאחר ש $b \neq 1$ נוכל לצמצם ב $(b-1)$ ונקבל ש $a = 1$ אבל $a \neq 1$ וזו סתירה. באותו אופן, רק עם חילופי תפקידים בין b ל a נגיע לסתירה, ולכן $a\Delta b = ab - a + b + 2 \neq 1$ עבור $a, b \in G$. מכאן שהוכחנו סגירות. לכן (G, Δ) הוא גרופואיד.

(ב) נוכיח הומומורפיזם:

$$ab+1=\varphi(ab)=\varphi(a)\Delta\varphi(b)=(a+1)\Delta(b+1)=(a+1)(b+1)-(a+1)-(b+1)+2=$$
$$ab+a+b+1-a-1-b-1+2=ab+1$$

נוכיח חח"ע: $a=b \Leftrightarrow a+1=b+1 \Leftrightarrow \varphi(a)=\varphi(b)$. נוכיח שהיא על: יהי $b\in G$, ונראה שקיים $a\in R^*$ כך ש $\varphi(a)=b$. נשים לב ש $\varphi(0)=1$ ושהתמונה של האיבר מחוץ לתחום של R^* היא האיבר מחוץ לתחום של G. יהי $a=b-1$, אזי $\varphi(a)=\varphi(b-1)=b-1+1=b$ ובכך הראינו שהיא על. הראינו ש φ הוא הומומורפיזם חח"ע ועל של R^* על G ולכן איזומורפיזם.

(ג) הוכחנו ש G גרופואיד. נבדוק האם הוא אגודה.

$$(a\Delta b)\Delta c=(ab-a-b+2)\Delta c=abc-ac-bc+2c-ab+a+b-2-c+2$$
$$a\Delta(b\Delta c)=a\Delta(bc-b-c+2)=abc-ab-ac+2a-bc+b+c-2-a+2$$

וקל לראות שאכן $(a\Delta b)\Delta c=a\Delta(b\Delta c)$ ולכן הוא אגודה. כמו כן הוא מונואיד כי 2 איבר יחידה: $a\Delta 2=2a-a-2+2=a$ (זה מספיק כי הפעולה קומוטטיבית). כעת נותר להראות שלכל איבר יש הפכי. $a\Delta b=ab-a-b+2=2\Rightarrow ab-a-b=0\Rightarrow a(b-1)=b$ ומאחר ש $b-1\neq 0$ כי $b\neq 1$ נוכל לחלק בו ונקבל ש $b^{-1}=a=\dfrac{b}{b-1}$. מאחר שהפעולה קומוטטיבית אין צורך להראות זאת בחילופי תפקידים. רק נוודא שהתוצאה אכן נכונה:

$\dfrac{b}{b-1}\Delta b=\dfrac{b^2}{b-1}-\dfrac{b}{b-1}-b+2=\dfrac{b^2-b-b(b-1)}{b-1}+2=2$ וראינו שלכל איבר יש הפכי.

לכן (G,Δ) הוא חבורה.

דרך קצרה יותר (באדיבות עודד הנסון): המבנה $(R^*,\cdot)$ הינו חבורה, ע"פ משפט 3.11 תמונה הומומורפית של חבורה היא חבורה. מכיוון שאנו מדברים כאן על איזומורפיזם על G הרי ש G חבורה.