

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 2

משקל המטלה: 3 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: יום ב' 29.10.07

סמסטר: 2008א

אנא שים לב:

מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

"רלציה" בעברית: **יחס**.

שאלה 1 (18 נקודות)

הוכח או הפרך:

א. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

ב. $(A \times B) \cap C = (A \cap C) \times (B \cap C)$

שאלה 2 (28 נקודות)

עבור יחס R מעל קבוצה A , נסמן ב- R' את המשלים של R ב- $A \times A$.

א. הוכח: $(R')^{-1} = (R^{-1})'$.

בסעיפים הבאים, מצא את הטענה הנכונה והוכח אותה.

ב. אם R סימטרי אז R' :

(1) סימטרי (2) אנטי-סימטרי (3) לא חייב להיות סימטרי ולא חייב להיות אנטי-סימטרי.

ג. אם R אנטי-סימטרי אז R' :

(1) סימטרי (2) אנטי-סימטרי (3) לא חייב להיות סימטרי ולא חייב להיות אנטי-סימטרי.

ד. אם R מקיים $R \cap I_A = \emptyset$ אז R' מקיים:

(1) $R' \subseteq (R')^2$ (2) $(R')^2 \subseteq R'$ (3) $(R')^2 = R'$.

שאלה 3 (28 נקודות)

- א. A היא קבוצה סופית בת k איברים. כמה יחסים שונים יש מעל A ?
- ב. תן דוגמא לקבוצה סופית A וליחס R מעל A , המקיים: לכל n , $1 \leq n$, $R^{n+1} \neq R^n$. הוכח שהיחס שרשמת הוא אכן בעל תכונה זו.
- ג. הוכח שלא קיימת קבוצה סופית A ויחס R מעל A , המקיים:
 לכל n , $1 \leq n$, ולכל i בתחום $R^{n+1} \neq R^i$, $1 \leq i \leq n$
 (במילים: כל חזקה של R שונה מכל החזקות הקודמות לה).
- ד. תן דוגמא לקבוצה אינסופית A ויחס R מעל A , המקיים:
 לכל n , $1 \leq n$, ולכל i בתחום $R^{n+1} \neq R^i$, $1 \leq i \leq n$.

שאלה 4 (26 נקודות)

- א. יהי R יחס לא-ריק מעל קבוצה A . יהי S הסגור הסימטרי של R . נניח ש- S הוא טרנזיטיבי. הוכח שקיימת קבוצה אחת ויחידה B , המקיימת את התנאים הבאים:
 $B \subseteq A$, $S \subseteq B \times B$, ו- S הוא יחס שקילות מעל B .
 תאר את הקבוצה B בעזרת התחום והטווח של היחס המקורי R (עמ' 35 בספר).
- ב. תהי $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. יהי $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (1, 2), (3, 4), (4, 5), (3, 5)\}$. נתייחס לסימונים בהם נעזרנו בסעיף א. הראה ש- S הוא טרנזיטיבי. מצא את הקבוצה B . רשום את מחלקות השקילות שיחס השקילות S מגדיר ב- B .