## 20416 - תאריך הבחינה: 21.7.2011 (סמסטר 2011א - מועד 6א / 87)

**שאלה 1**

א. $P\{X_1 \cdot X_2 < 0.05\} =$

$$= P\{X_1 < 0.05, X_1 \cdot X_2 < 0.05\} + P\{X_1 \geq 0.05, X_1 \cdot X_2 < 0.05\}$$

$$= P\{X_1 < 0.05\} + P\{X_1 \geq 0.05, X_2 < 0.05/X_1\}$$

$$= 0.05 + \int_{0.05}^{1}\int_{0}^{0.05/x_1} 1 dx_2 dx_1 = 0.05 + \int_{0.05}^{1} x_2\Big|_0^{0.05/x_1} dx_1 = 0.05 + \int_{0.05}^{1} \frac{0.05}{x_1} dx_1$$

$$= 0.05 + 0.05 \ln x_1\Big|_{0.05}^{1} = 0.05 + 0.05 \cdot (0 + 2.9957) = 0.1998$$

ב. מכפלת המשתנים המקריים הנתונים היא אי-שלילית. לכן, נוכל להשתמש באי-שוויון מרקוב למציאת חסם למאורע $\{X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n > 0.05\}$. לשם כך, נחשב את התוחלת של מכפלת המשתנים המקריים. מכיוון שהם בלתי-תלויים, נקבל: $E[X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n] = E[X_1] \cdot E[X_2] \cdot ... \cdot E[X_n] = 0.5^n$

ומכאן: $P\{X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n > 0.05\} \leq P\{X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n \geq 0.05\} \leq \frac{0.5^n}{0.05}$

נבדוק כעת, אם קיים $N$, כך שלכל $n > N$ מתקיים $\frac{0.5^n}{0.05} < 0.6^n$ :

$$\frac{0.5^n}{0.05} < 0.6^n \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.05 \quad \Rightarrow \quad n \ln\frac{5}{6} < \ln 0.05 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\ln 0.05}{\ln\frac{5}{6}} = 16.43$$

קיבלנו אם כן, שלכל $n > N = 16$ , מתקיים אי-השוויון הנתון.

**שאלה 2**

א. $$P\{X = i, Y = j\} = \frac{\binom{12}{i}\binom{10}{j}\binom{8}{9-i-j}}{\binom{30}{9}} \quad , \quad i,j = 0,1,...,9 \;\; ; \;\; 1 \leq i + j \leq 9$$

ב. למשתנה המקרי $X$ יש התפלגות היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N = 30$ , $m = 12$ ו- $n = 9$ .

לכן, השונות של $X$ היא: $\text{Var}(X) = \frac{30-9}{30-1} \cdot 9 \cdot \frac{12}{30} \cdot \frac{18}{30} = \frac{1{,}134}{725} = 1.564$

ג. לפי תנאי הניסוי , המתואר בשאלה, מתקיים אי-השוויון $1 \leq X + Y \leq 9$. כלומר, ככל שהמשתנה $X$ מקבל ערך גבוה יותר, כך ערכו של $Y$ נמוך יותר. לפיכך, הסימן של מקדם המתאם הלינארי בין $X$ ל-$Y$ יהיה שלילי.

ד. בהינתן המידע, שנבחרו בדיוק שני כדורים כחולים, דהיינו בהינתן ש- $Y = 2$ , המשתנה המקרי המותנה $X$ מתאר את מספר הכדורים האדומים שייבחרו בנוסף ל- 2 הכחולים שכבר נבחרו. לפיכך, למשתנה המקרי $X$ בהינתן $Y = 2$ יש התפלגות היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N = 20$ , $m = 12$ ו- $n = 7$ . ומכאן, שהשונות המותנית של $X$ היא: $\text{Var}(X \mid Y = 2) = \frac{20-7}{20-1} \cdot 7 \cdot \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{20} = \frac{546}{475} = 1.1495$

**שאלה 3**

א. נסמן ב- $X_i$ את מספר התיקונים שיידרשו במשך שנה במכונה בת $i$ השנים, לכל $i = 1,2,3$ . ההתפלגות של המשתנה המקרי $X_i$ היא פואסונית עם הפרמטר $3i$, וה-$X_i$-ים ב לתי-תלויים זה בזה . לפיכך, סכום ה-$X_i$-ים מתפלג פואסונית עם הפרמטר $3+6+9=18$ , ומכאן :

$$P\left\{\sum_{i=1}^{3} X_i = 22\right\} = e^{-18} \cdot \frac{18^{22}}{22!} = 0.05597$$

ב1. נסמן ב-$X$ את משך הזמן העובר עד לתיקון הראשון . מכיוון שקצב התיקונים בשנה אחת לכל שלוש המכונות הוא 18, התפלגות הזמן (בשנים) עד לת יקון הראשון שיידרש במכונות הוא משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 18. לפיכך, ההסתברות שיעבור לפחות חודש אחד עד לתיקון הראשון היא :

$$P\{X > \tfrac{1}{12}\} = e^{-18/12} = e^{-1.5} = 0.223$$

ב2. התפלגות הזמן שיעבור עד לתיקון החמישי היא התפלגות גמא עם הפרמטרים $t = 5$ ו- $\lambda = 18$ .

לכן, השונות המבוקשת היא $\frac{5}{18^2}$ .

ג. נסמן ב- $Y_i$ את מספר התיקונים שיידרשו במשך חצי- שנה במכונה בת $i$ שנים, לכל $i = 1,2,3$ . ההתפלגות של המשתנה המקרי $Y_i$ היא פואסונית עם הפרמטר $1.5i$, וה-$Y_i$-ים בלתי- תלויים זה בזה . לפיכך, נקבל שסכום ה-$Y_i$-ים, מתפלג פואסו נית עם הפרמטר $1.5+3+4.5=9$ , וכי ההתפלגות המ שותפת של ה-$Y_i$-ים בהינתן $\sum_{i=1}^{3} Y_i = 10$ היא מולטינומית עם הפרמטרים 10 ו- $(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ . ומכאן :

$$P\left\{Y_1 = 2, Y_2 = 2, Y_3 = 6 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{3} Y_i = 10\right\} = \frac{10!}{2!2!6!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0.06076$$

ד. מספר התיקונים שיידרשו במשך שנה ב-5 המפעלים (הבלתי-תלויים) הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $18 \cdot 5 = 90$. נסמן ב- $S$ את סך-כל התיקונים שיידרשו ב-5 המפעלים, ונקבל ממשפט הגבול המרכזי, לאחר ביצוע תיקון-רציפות, את הקירוב :

$$P\{85 \le S \le 100\} = P\{84.5 \le S \le 100.5\} = \Phi\left(\tfrac{100.5-90}{\sqrt{90}}\right) - \Phi\left(\tfrac{84.5-90}{\sqrt{90}}\right) = \Phi(1.1068) - \Phi(-0.5798)$$

$$= 0.8658 - (1 - 0.7190) = 0.5848$$

**שאלה 4**

למשתנה המקרי $X_1$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 10 ו- 0.1 ;

ואילו המשתנה המקרי $S$ הוא <u>סכום מקרי</u> של תוצאות ההטלות של $X_1$ הקוביות שהיו בתא 1.

נסמן ב- $S_i$ את תוצאת ההטלה של הקובייה ה- $i$-ית שהיתה בתא 1, לכל $i = 1,2,\ldots,X_1$ .

בסימונים אלו, נתוני הבעיה הם : לכל $S_i$ התפלגות אחידה בדידה בין 1 ל-6 ; $X_1 \sim B(10, 0.1)$

$$S = \sum_{i=1}^{X_1} S_i$$

א.

$$P\{S = 2\} = P\{X_1 = 1, S_1 = 2\} + P\{X_1 = 2, S_1 = 1, S_2 = 1\}$$

$$= P\{S_1 = 2 \mid X_1 = 1\} P\{X_1 = 1\} + P\{S_1 = 1, S_2 = 1 \mid X_1 = 2\} P\{X_1 = 2\}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \binom{10}{1} \cdot 0.1 \cdot 0.9^9 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \binom{10}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^8 = 0.06995$$

ב. לפי נוסחת התוחלת של סכום מקרי :
$$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{X_1} S_i\right] = E[X_1] \cdot E[S_1] = 10 \cdot 0.1 \cdot 3.5 = 3.5$$

לפי נוסחת השונות של סכום מקרי :

$$\text{Var}(S) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{X_1} S_i\right) = E[X_1]\text{Var}(S_1) + (E[S_1])^2 \text{Var}(X_1) = 10 \cdot 0.1 \cdot \frac{35}{12} + 3.5^2 \cdot 10 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 13.942$$

ג.
$$\text{Cov}(X_1, X_2 + ... + X_{10}) = \text{Cov}(X_1, 10 - X_1) = 0 - \text{Var}(X_1) = -10 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = -0.9$$

**דרך נוספת:** ל-$X_i$-ים יש התפלגות משותפת מולטינומית עם $n = 10$ ווקטור הסתברויות שכל רכיביו שווים ל-0.1. לכן, לכל $i = 2,3,\ldots,10$ מתקיים :
$$\text{Cov}(X_1, X_i) = -10 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = -0.1$$

ומכאן :
$$\text{Cov}(X_1, X_2 + ... + X_{10}) = \sum_{i=2}^{10} \text{Cov}(X_1, X_i) = 9 \cdot (-0.1) = -0.9$$

**שאלה 5**

א1. לפי הגדרתו, המשתנה המקרי $Y$ מקבל ערכים בקטע $(-1,1)$. לכן, לכל $-1 < y < 1$ מתקיים :

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{1 - 2e^{-X} \le y\} = P\{e^{-X} \ge \tfrac{1-y}{2}\} = P\{X \le -\ln\tfrac{1-y}{2}\} = F_X(-\ln\tfrac{1-y}{2})$$
$$= 1 - \tfrac{1-y}{2} = \tfrac{1+y}{2}$$

ומכאן :
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y \le -1 \\ \frac{1+y}{2} & , \quad -1 < y < 1 \\ 1 & , \quad y \ge 1 \end{cases}$$

א2. לכל $-1 < y < 1$ מתקיים :
$$f_Y(y) = \tfrac{d}{dy} F_Y(y) = \tfrac{d}{dy} \tfrac{1+y}{2} = \tfrac{1}{2}$$

לכן, למשתנה המקרי $Y$ יש התפלגות אחידה רציפה על הקטע $(-1,1)$.

ב1.
$$E[U] = \int_{-1}^{0} y f_Y(y)dy + \int_{0}^{1} (1 - \tfrac{y}{2}) f_Y(y)dy = \int_{-1}^{0} y \cdot \tfrac{1}{2}dy + \int_{0}^{1} (1 - \tfrac{y}{2}) \cdot \tfrac{1}{2}dy$$
$$= \tfrac{1}{4} y^2 \Big|_{-1}^{0} + \left[\tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{8}y^2\right]_0^1 = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{8}$$

**דרך פתרון נוספת**

$$E[U] = E[U \mid Y < 0] \cdot P\{Y < 0\} + E[U \mid Y \ge 0] \cdot P\{Y \ge 0\}$$
$$= E[Y \mid Y < 0] \cdot P\{Y < 0\} + E[1 - \tfrac{Y}{2} \mid Y \ge 0] \cdot P\{Y \ge 0\} = -\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \left[1 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\right] \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8}$$

ב2. ראשית, נשים לב, שכאשר המשתנה המקרי $Y$ מקבל ערכים שליליים בקטע $(-1,0)$, גם המשתנה המקרי $U$ מקבל ערכים שליליים בקטע $(-1,0)$ ; אבל, כאשר $Y$ מקבל ערכים חיוביים בקטע $(0,1)$, $U$ מקבל ערכים חיוביים בקטע $[0.5,1)$. כלומר, תחום הערכים האפשריים של U מורכב משני הקטעים $(-1,0)$ ו- $[0.5,1)$.

לכן, לכל $-1 < a < 0$ מתקיים :
$$F_U(a) = P\{U \le a\} = P\{Y \le a\} = \tfrac{1+a}{2}$$

ולכל $0.5 \le a < 1$ מתקיים :

$$P\{0.5 \le U \le a\} = P\{0.5 \le 1 - \tfrac{Y}{2} \le a\} = P\{2(1-a) \le Y \le 1\} = 1 - F_Y(2(1-a)) = 1 - \tfrac{1+2(1-a)}{2} = a - \tfrac{1}{2}$$

לפיכך:

$$F_U(a) = F_U(0) + P\{0.5 \le U \le a\} = \tfrac{1}{2} + a - \tfrac{1}{2} = a$$

ולסיכום:

$$F_U(a) = \begin{cases} 0 & , \quad a \le -1 \\ \frac{1+a}{2} & , \quad -1 < a < 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad 0 \le a < \frac{1}{2} \\ a & , \quad \frac{1}{2} \le a < 1 \\ 1 & , \quad a \ge 1 \end{cases}$$