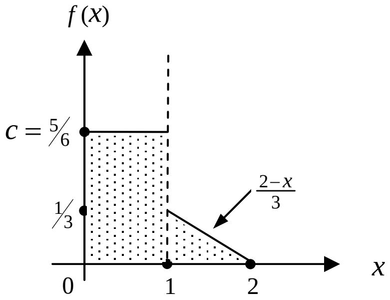
פרק 5: משתנים מקריים רציפים (פתרונות)

1. נצייר את פונקציית הצפיפות של X :



א. נחשב את השטח הכלוא מתחת לעקומת הצפיפות, כדי למצוא את ערכו של c.

$$c\cdot 1+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}=1 \qquad \Rightarrow \qquad c=\tfrac{5}{6}$$

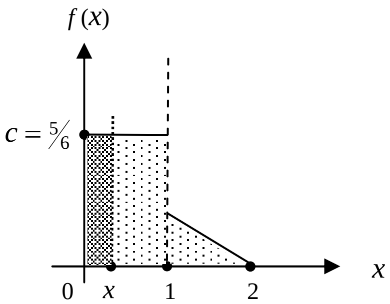
שימו לב של- $f(x)$ יש נקודת אי-רציפות (אחת בלבד) ב- $x=1$.

ב. נחשב את ההסתברויות המבוקשות באמצעות שטחים של צורות גיאומטריות. (מלבנים, משולשים וטרפזים, במקרה זה.)

$$P\{X>0.75\}=1-P\{X\le 0.75\}=1-\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{3}{4}=\tfrac{3}{8}$$

$$P\{0.5<X<1.5\}=P\{0.5<X<1\}+P\{1<X<1.5\}=\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{13}{24}=0.54167$$

ג. עד לערך 0 הצפיפות של המשתנה המקרי X שווה ל-0, ולכן פונקציית ההתפלגות המצטברת עד לנקודה זו שווה גם היא ל-0.
כאשר $0<x<1$, פונקציית הצפיפות של X חיובית, ולכן ההסתברות "מתחילה להיצבר".



$F_X(x)$ היא ההסתברות שנצברת עד לנקודה x, והיא שווה לשטח הכלוא מתחת לעקומת הצפיפות משמאל לנקודה x .

כלומר, לכל $0<x<1$, מתקיים: $F_X(x)=P\{X\le x\}=\tfrac{5}{6}x$ (ראה איור משמאל).

בדרך דומה מחשבים את הערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת עבור $x\ge 1$.

ופונקציית ההתפלגות המצטברת שמתקבלת היא:

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\le 0\\ \frac{5x}{6} & , \quad 0\le x\le 1\\ 1-\frac{(2-x)^2}{6} & , \quad 1\le x\le 2\\ 1 & , \quad x\ge 2\end{cases}$$

פונקציית הצפיפות $f_X(x)$ היא הנגזרת של פונקציית ההתפלגות המצטברת $F_X(x)$,
ומתקיים הקשר: $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx \quad ; \quad f_X(x)=\frac{d}{dx}F_X(x)$

2. א. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=\int_0^2 c(4-x^2)dx=c\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{16c}{3}=1 \qquad \Rightarrow \qquad c=\frac{3}{16}=0.1875$

ב. $E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)dx=\frac{3}{16}\int_0^2 x(4-x^2)dx=\frac{3}{16}\left[\frac{4x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\frac{3}{16}\cdot 4=\frac{3}{4}=0.75$

שימו לב: התוחלת של משתנה מקרי נמצאת תמיד בתחום ערכיו האפשריים.

$$E[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\ f_X(x)\,dx=\tfrac{3}{16}\int_0^2 x^2(4-x^2)\,dx=\tfrac{3}{16}\left[\tfrac{4x^3}{3}-\tfrac{x^5}{5}\right]_0^2=\tfrac{3}{16}\cdot\tfrac{64}{15}=\tfrac{4}{5}=0.8$$

$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2=0.8-0.75^2=0.2375$$

ג.
$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\le 0\\ \tfrac{3}{16}\left(4x-\tfrac{x^3}{3}\right) & , \quad 0\le x\le 2\\ 1 & , \quad x\ge 2\end{cases}$$

3. נחשב תחילה את התוחלת של X ואחר-כך את השונות.

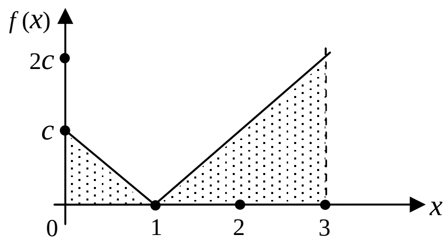
$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f_X(x)\,dx=\int_1^{\infty}\frac{2x}{x^3}dx=\int_1^{\infty}\frac{2}{x^2}dx=\left[\frac{2}{-x}\right]_1^{\infty}=0+2=2$$

$$E[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx=\int_1^{\infty}\frac{2x^2}{x^3}dx=\int_1^{\infty}\frac{2}{x}dx=\left[2\ln x\right]_1^{\infty}=\infty-0=\infty$$

קיבלנו ש- $E[X^2]=\infty$, לכן השונות של X שווה גם היא ל- ∞ .

שימו לב: התוחלת והשונות של משתנה מקרי אינן חייבות להיות סופיות. ייתכן שהן תהיינה אינסופיות וייתכן גם שלא תהיינה מוגדרות כלל.

4. נצייר את פונקציית הצפיפות הנתונה :



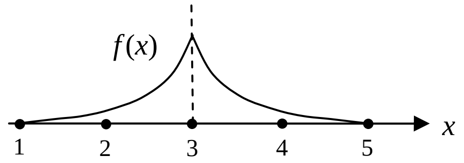
א.
$$\int_0^3 f_X(x)\,dx=\int_0^3 c|1-x|\,dx=c\int_0^1(1-x)\,dx+c\int_1^3(x-1)\,dx=c\left[x-\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1+c\left[\tfrac{1}{2}x^2-x\right]_1^3$$
$$=c\left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{9}{2}-3-\tfrac{1}{2}+1\right)=2.5c=1 \qquad\Rightarrow\qquad c=\tfrac{2}{5}$$

אפשר גם לחשב את השטח המנוקד וממנו לקבל את c :
$$S=\tfrac{c}{2}+\tfrac{4c}{2}=\tfrac{5c}{2}\quad\Rightarrow\quad c=\tfrac{2}{5}$$

ב.
$$E[X]=\tfrac{2}{5}\int_0^1 x(1-x)\,dx+\tfrac{2}{5}\int_1^3 x(x-1)\,dx=\tfrac{2}{5}\left[\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1+\tfrac{2}{5}\left[\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^3$$
$$=\tfrac{2}{5}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+9-\tfrac{9}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{29}{6}=\tfrac{29}{15}$$

5. א.
$$\int_1^5 f_X(x)\,dx=\int_1^5 c\,e^{-2|x-3|}\,dx=c\int_1^3 e^{-2(3-x)}\,dx+c\int_3^5 e^{-2(x-3)}\,dx=c\left[\frac{e^{-2(3-x)}}{2}\right]_1^3-c\left[\frac{e^{-2(x-3)}}{2}\right]_3^5$$
$$=c\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{e^{-4}}{2}\right)-c\left(\tfrac{e^{-4}}{2}-\tfrac{1}{2}\right)=c\left(1-e^{-4}\right)\qquad\Rightarrow\qquad c=\tfrac{1}{1-e^{-4}}$$

ב. נצייר את פונקציית הצפיפות הנתונה:



פונקציית הצפיפות **סימטרית סביב** $x = 3$ **וחסומה** בקטע הסופי $(1,5)$, שבו ערכיה חיוביים, ולכן התוחלת של X שווה ל-3.

אפשר גם לחשב את התוחלת של X באופן ישיר, אך אין צורך בכך.

שימו לב: קיימות פונקציות צפיפות שאינן חסומות מלעיל. פונקציות כאלה הן פונקציות צפיפות, כל עוד הן אי-שליליות והשטח הכלוא תחתיהן מתכנס ל-1.
דוגמה לפונקציית צפיפות מסוג זה, אפשר לראות בספר הקורס בעמוד 248.

ג. החציון של X הוא הערך m שמקיים את המשוואה $P\{X \le m\} = 0.5$, ולכן $m = 3$.

6. א. כדי למצוא את c, נחשב את האינטגרל על הצפיפות. נשתמש בשיטת האינטגרציה בחלקים, ונקבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = c\int_0^{1.5} \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{-2x}}_{v'}dx = c\left[\underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{(-\tfrac{1}{2}e^{-2x})}_{v}\Big|_0^{1.5} - \int_0^{1.5}\underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{(-\tfrac{1}{2}e^{-2x})}_{v}dx\right]$$

$$= c\left[-\tfrac{3}{4}e^{-3} + 0 - \left[\tfrac{1}{4}e^{-2x}\Big|_0^{1.5}\right]\right] = c\left[-\tfrac{3}{4}e^{-3} - \tfrac{1}{4}(e^{-3}-1)\right]$$

$$= c\cdot\tfrac{1}{4}(1-4e^{-3}) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c = \tfrac{4}{1-4e^{-3}}$$

הערה: מגדירים $u = x$ ו- $v' = e^{-2x}$ ולכן $u' = 1$ ו- $v = -\tfrac{1}{2}e^{-2x}$.

ב.
$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \tfrac{4}{1-4e^{-3}}\int_0^{1.5} x^2e^{-2x}dx = \tfrac{2}{1-4e^{-3}}\int_0^{1.5}\underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{2e^{-2x}}_{v'}dx$$

$$= \tfrac{2}{1-4e^{-3}}\left[\underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{(-e^{-2x})}_{v}\Big|_0^{1.5} - \int_0^{1.5}\underbrace{2x}_{u'}\cdot\underbrace{(-e^{-2x})}_{v}dx\right]$$

$$= \tfrac{2}{1-4e^{-3}}\cdot(-1.5^2)e^{-3} + \tfrac{4}{1-4e^{-3}}\int_0^{1.5} xe^{-2x}dx$$

$$= -\tfrac{4.5e^{-3}}{1-4e^{-3}} + \underbrace{\int_0^{1.5} f_X(x)dx}_{=1} = \tfrac{1-8.5e^{-3}}{1-4e^{-3}} = 0.72025$$

הערה: בשורה הראשונה של הפתרון: $u = x^2$ ו- $v' = 2e^{-2x}$ ולכן $u' = 2x$ ו- $v = -e^{-2x}$.

בשורה האחרונה, האינטגרל האחרון שנשאר לחישוב הוא אינטגרל על פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי X, שגבולותיו הם גבולות תחום הערכים האפשריים של X. לכן, הוא שווה ל-1.

ג. נחשב תחילה את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y. לכל $0 < y < 1.5^2 = 2.25$ מתקיים:

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\} = P\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\} = F_X(\sqrt{y}) - \underbrace{F_X(-\sqrt{y})}_{(Y>0)\quad =0} = F_X(\sqrt{y})$$

לכן, לכל $0 < y < 1.5^2 = 2.25$ מתקיים:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X(\sqrt{y}) = f_X(\sqrt{y})\cdot(\sqrt{y})' = \frac{4}{1-4e^{-3}}\cancel{\sqrt{y}}e^{-2\sqrt{y}}\frac{1}{2\cancel{\sqrt{y}}} = \frac{2}{1-4e^{-3}}e^{-2\sqrt{y}}$$

בדיקה: נבדוק שהפונקציה שקיבלנו היא אכן פונקציית צפיפות. נחשב את האינטגרל שקיבלנו <u>בשיטת ההצבה</u>. נקבל:

$$\int_0^{2.25} f_Y(y)dy = \frac{2}{1-4e^{-3}}\int_0^{2.25} e^{-2\sqrt{y}}dy = \frac{2}{1-4e^{-3}}\underbrace{\int_0^{2.25} e^{-2\sqrt{y}}dy} = \frac{2}{1-4e^{-3}}\int_0^{1.5} 2te^{-2t}dt$$

ההצבה: $t = \sqrt{y} \quad , \quad 0 < t < 1.5$

$dt = dy/2\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{y}\cdot dt = dy \quad \Rightarrow \quad 2t\,dt = dy$

$$= \frac{4}{1-4e^{-3}}\int_0^{1.5} te^{-2t}dt = \int_0^{1.5} f_X(x)dx = 1$$

7. א. $P\{X > 5\} = 1 - F_X(5) = 1 - \frac{5-1}{10-1} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

כלומר, ההסתברות ש-X גדול מ-5 שווה לחלק היחסי של קטע הערכים האפשריים של X שגדול מ-5.

ב. $P\{X \geq 5\} = 1 - F_X(5) = 1 - (1 - e^{-0.2\cdot 5}) = e^{-1} = 0.3679$

ג. מתכונת חוסר הזיכרון של ההתפלגות המעריכית מקבלים:

$P\{X \geq 5 | X > 2\} = P\{X \geq 3\} = 1 - F_X(3) = e^{-0.2\cdot 3} = e^{-0.6} = 0.5488$

8. א. 1) לפי נתוני השאלה, זמני-השהייה של חמשת האנשים בלתי-תלויים זה בזה, וכל אחד מהם שוהה ליד מכשיר הכספומט יותר מ-2.5 דקות בהסתברות $\frac{1.5}{2} = 0.75$. לכן, ההסתברות שכולם ישהו מעל ל-2.5 דקות היא $0.75^5 = 0.2373$.

2) בגלל האי-תלות בין זמני-השהייה של האנשים שבתור, ההסתברות היא $\frac{0.5}{2} = 0.25$.

3) במקרה זה, האדם השלישי בתור הוא **הראשון** ששוהה ליד מכשיר הכספומט יותר מ-3.5 דקות. לכן, בחישוב ההסתברות צריך להביא בחשבון גם את זמני-השהייה של שני האנשים שלפניו בתור. לפיכך, בגלל האי-תלות בין זמני-השהייה של האנשים שבתור, מקבלים את ההסתברות $(1-0.25)^2\cdot 0.25 = 0.140625$.

4) זמני-השהייה של חמשת האנשים בלתי-תלויים זה בזה וכל אחד מהם שוהה בין 2.5 ל-3 דקות ליד מכשיר הכספומט בהסתברות 0.25. לכן, מספר האנשים (מבין ה-5 שבתור) ששוהים בין 2.5 ל-3 דקות ליד הכספומט הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 5 ו- 0.25 ושונותו היא 0.9375.

ב. ההתפלגות המעריכית מקיימת את תכונת חוסר-הזיכרון. לכן, זמן השהייה של האדם שנמצא כבר ליד מכשיר הכספומט, מרגע הגיעו של אהוד ועד לסיום פעולותיו, גם הוא משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 0.4. ומכאן שתוחלת ושונות הזמן שאהוד ימתין עד שהמכשיר יתפנה הן $\frac{1}{0.4} = 2.5$ ו- $\frac{1}{0.4^2} = 6.25$, בהתאמה.

ג1. אם מניחים שמתקיימות שלוש ההנחות של תהליך פואסון, מקבלים כי התפלגות הזמן (בשעות) החולף משעה 8:00 ועד לרגע שבו מגיע האדם הראשון לכספומט היא התפלגות מעריכית עם הפרמטר 20. (ראה עמודים 244-245 בספר הקורס.)

ג2. אם מניחים שמתקיימות שלוש ההנחות של תהליך פואסון, מקבלים כי התפלגות הזמן (בשעות) החולף משעה 8:00 ועד לרגע שבו מגיע האדם ה-n-י לכספומט היא התפלגות גמא עם הפרמטרים n ו-20. (ראה עמודים 244-245 בספר הקורס.)

9. א. נשים לב, שהגורמים שתלויים ב-x, בפונקציית הצפיפות הנתונה, זהים לגורמים שתלויים ב-x בפונקציית צפיפות של משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 4, שצורתה $4e^{-4x}I_{(0,\infty)}(x)$. לכן, זוהי בהכרח ההתפלגות של המשתנה המקרי X. עתה, מכיוון שהשטח הכלוא מתחת לכל עקומת צפיפות שווה ל-1, הגורמים הקבועים בשתי הפונקציות חייבים להיות שווים. כלומר, ללא כל חישוב אפשר לקבוע כי $a=4$.

מסקנה: אם בפונקציית צפיפות נתונה, **כל** הגורמים שתלויים ב-x המופיעים בה, זהים לאלו המופיעים בפונקציית צפיפות של התפלגות מוכרת, חייבת להיות התאמה מוחלטת גם בגורמים הקבועים שבשתי פונקציות הצפיפות.

ב. במקרה הזה, הגורמים שתלויים ב-x, בפונקציית הצפיפות הנתונה, זהים לגורמים שתלויים ב-x בפונקציית צפיפות של משתנה מקרי נורמלי, שצורתה $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}I_{(-\infty,\infty)}(x)$, עבור μ ו-σ מסוימים.
לכן, עלינו למצוא את ערכי μ ו-σ המתאימים לפונקציית הצפיפות הנתונה, ואז למצוא את a. מצורת המעריך של האקספוננט בפונקציית הצפיפות הנתונה, ברור כי $\sigma^2=1$. כעת, נשלים לריבוע את הביטוי $-(x^2-2x)$, ונמצא את μ. מהשוויון $-(x^2-2x)-1=-(x-1)^2$ אנו רואים כי $\mu=1$. עתה, כל שנותר הוא למצוא את a.

פונקציית הצפיפות של התפלגות נורמלית עם הפרמטרים $\mu=1$ ו-$\sigma^2=1$ היא:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-1)^2}{2}}I_{(-\infty,\infty)}(x)$$

לכן:
$$f_X(x)=ae^{\frac{-x^2+2x}{2}}I_{(-\infty,\infty)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-1)^2}{2}}I_{(-\infty,\infty)}(x)$$

ומכאן מקבלים כי:
$$a=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$$

10. א. 1) ההתפלגות של המשתנה המקרי X היא הזזה ב-1 של התפלגות מעריכית עם הפרמטר 1. כלומר, $X=W+1$, כאשר W הוא משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 1, ומתקיים:

$$P\{X\le x\}=P\{W+1\le x\}=P\{W\le x-1\}=F_W(x-1)=1-e^{-(x-1)} \qquad , \qquad x>1$$

או לחלופין:
$$f_X(x)=\frac{d}{dx}P\{X\le x\}=e^{-(x-1)} \qquad , \qquad x>1$$

2) נתחיל בחישוב פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.

לכל $y > 1$ מתקיים: $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\frac{X+1}{2} \le y\} = P\{X \le 2y-1\} = F_X(2y-1)$

נגזור לפי y, ונקבל את פונקציית הצפיפות של Y:

$$f_Y(y) = \tfrac{d}{dy} F_Y(y) = \tfrac{d}{dy} F_X(2y-1) = 2 f_X(2y-1) = 2e^{-2y+2} = 2e^{-2(y-1)} \qquad , \qquad y > 1$$

> **שימו לב:** פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי קובעת באופן יחיד את התפלגותו. כלומר, אפשר לזהות התפלגות של משתנה מקרי לפי פונקציית ההתפלגות המצטברת שלו (ומכאן שגם לפי פונקציית הצפיפות שלו).

נמצא את הקשר בין ההתפלגות של Y להתפלגות המעריכית:

אפשר לראות, שלפונקציית הצפיפות הנתונה יש מבנה דומה לזה של פונקציית הצפיפות של התפלגות מעריכית עם הפרמטר 2. לפיכך, נסמן ב-W משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 2.

פונקציית הצפיפות של W היא: $f_W(y) = 2e^{-2w} \quad , \quad w > 0$

מהשוואת שתי פונקציות הצפיפות האחרונות (הן מבחינת הפונקציות עצמן והן מבחינת תחומי ההגדרה שלהן), אפשר "לנחש" שהקשר שקיים בין המשתנים הוא $Y = W + 1$.

נבדוק את ההשערה:

$$P\{W+1 \le y\} = P\{W \le y-1\} = F_W(y-1) = 1 - e^{-2(y-1)} \qquad , \qquad y > 1$$

$$f_{W+1}(y) = \tfrac{d}{dy} P\{W+1 \le y\} = 2e^{-2(y-1)} \qquad , \qquad y > 1$$

ואכן, קיבלנו שלמשתנים המקריים Y ו- $W+1$ יש בדיוק אותה פונקציית צפיפות. כלומר, ההתפלגות של המשתנה המקרי Y היא הזזה ב-1 של ההתפלגות המעריכית עם הפרמטר 2.

ב. נתחיל בחישוב פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.

לכל $y > 0$ מתקיים: $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{2X \le y\} = P\{X \le \frac{y}{2}\} = F_X(\frac{y}{2})$

נגזור לפי y, ונקבל את פונקציית הצפיפות של Y:

$$f_Y(y) = \tfrac{d}{dy} F_Y(y) = \tfrac{d}{dy} F_X(\tfrac{y}{2}) = \tfrac{1}{2} f_X(\tfrac{y}{2}) = \tfrac{\theta}{2} e^{-\frac{\theta}{2}y} \qquad , \qquad y > 0$$

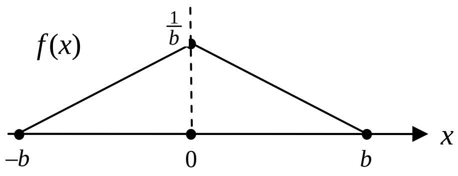
כלומר, למשתנה המקרי Y יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר $\frac{\theta}{2}$.

ג. נתחיל מחישוב פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה המקרי Y, וממנה נמצא את פונקציית הצפיפות שלו. לכל $0 < y < ½$ מתקיים:

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\tfrac{X}{X+1} \le y\} = P\{X \le \tfrac{y}{1-y}\} = F_X\left(\tfrac{y}{1-y}\right) = \tfrac{y}{1-y}$$

לכן, לכל $0 < y < ½$ מתקיים: $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy}\left[\frac{y}{1-y}\right] = \frac{1-y+y}{(1-y)^2} = \frac{1}{(1-y)^2}$

11. א.



ב. את פונקציית הצפיפות של X אפשר לכתוב כך:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{(b+x)}{b^2} & , \quad -b<x\le 0\\ \frac{(b-x)}{b^2} & , \quad 0\le x<b\\ 0 & , \quad x\le -b,\ x\ge b\end{cases}$$

לכן:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\le -b\\ \int\limits_{-b}^{x}\frac{(b+t)}{b^2}dt=\frac{(b+t)^2}{2b^2}\Big|_{-b}^{x}=\frac{(b+x)^2}{2b^2} & , \quad -b<x\le 0\\ 1-\int\limits_{x}^{b}\frac{(b-t)}{b^2}dt=1+\frac{(b-t)^2}{2b^2}\Big|_{x}^{b}=1-\frac{(b-x)^2}{2b^2} & , \quad 0\le x<b\\ 1 & , \quad x\ge b\end{cases}$$

אפשר למצוא את פונקציית ההתפלגות המצטברת גם באמצעות חישוב שטחים גיאומטריים.

ג. המשתנה המקרי Y מוגדר על-ידי $Y=\frac{X}{b}$, ולכן ערכיו האפשריים הם בתחום $(-1,1)$. לפיכך, לכל y בתחום זה מתקיים:

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\tfrac{X}{b}\le y\}\underset{b>0}{\underset{\downarrow}{=}}P\{X\le by\}=F_X(by)$$

מכאן מקבלים כי לכל $-1<y<1$ מתקיים:

$$f_Y(y)=\tfrac{d}{dy}F_Y(y)=\tfrac{d}{dy}F_X(by)=b\,f_X(by)$$

כלומר:

$$f_Y(y)=\begin{cases}1-|y| & , \quad -1<y<1\\ 0 & , \quad y\le -1,\ y\ge 1\end{cases}=\begin{cases}1+y & , \quad -1<y\le 0\\ 1-y & , \quad 0\le y<1\\ 0 & , \quad y\le -1,\ y\ge 1\end{cases}$$

ד. פונקצית הצפיפות של X (כמו גם זו של Y) סימטרית סביב הנקודה $x=0$ וחסומה בקטע הסופי שבו ערכיה חיוביים, ולכן התוחלת של X שווה ל-0.

עתה, נמצא את השונות של X. נעזר בקשר הנתון שבין X ל-Y:

$$E[Y^2]=\int\limits_{-1}^{0}y^2(1+y)\,dy+\int\limits_{0}^{1}y^2(1-y)\,dy=\left[\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{4}y^4\right]_{-1}^{0}+\left[\tfrac{1}{3}y^3-\tfrac{1}{4}y^4\right]_{0}^{1}=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{6}$$

ומכאן:

$$E[X^2]=E[(bY)^2]=b^2E[Y^2]=\tfrac{b^2}{6}$$

ולכן:

$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\tfrac{b^2}{6}-0=\tfrac{b^2}{6}$$

12.

$$E\left[\tfrac{1}{X}\right]=\int\limits_0^1\tfrac{1}{x}\cdot\frac{x^{5-1}(1-x)^{6-1}}{B(5,6)}\,dx=\frac{B(4,6)}{B(5,6)}\int\limits_0^1\frac{x^{4-1}(1-x)^{6-1}}{B(4,6)}\,dx=\underbrace{\frac{\Gamma(4)\Gamma(6)}{\Gamma(4+6)}\cdot\frac{\Gamma(5+6)}{\Gamma(5)\Gamma(6)}=\frac{3!\cdot 5!}{9!}\cdot\frac{10!}{4!\cdot 5!}}_{\text{(ראה עמודים 244 ו-249 בספר)}}=\tfrac{10}{4}=2.5$$

13. אם נניח כי $X\sim Exp(3)$, נקבל מצד אחד כי:

$$E[X^2]=\int\limits_0^\infty x^2 f_X(x)dx=\int\limits_0^\infty x^2\cdot 3e^{-3x}dx=3\int\limits_0^\infty x^2e^{-3x}dx$$

ומצד שני כי:

$$E[X^2]=\mathrm{Var}(X)+(E[X])^2=\tfrac{1}{3^2}+\left(\tfrac{1}{3}\right)^2=\tfrac{2}{9}$$

לכן: $\int_0^\infty x^2 e^{-3x}dx = \frac{1}{3}E[X^2] = \frac{2}{9\cdot 3} = \frac{2}{27}$

14. א. הערך 0.1357 נמצא בין $z = 0.13$ ל- $z = 0.14$, לכן, $\Phi(0.1357)$ יימצא בין $\Phi(0.13)$ ל- $\Phi(0.14)$.

נחשב את $\Phi(0.1357)$ בשיטת האינטרפולציה הלינארית:

$$\Phi(0.13\underline{\underline{57}}) = \Phi(0.13) + \underline{\underline{0.57}}\cdot[\Phi(0.14) - \Phi(0.13)]$$
$$= 0.5517 + \underline{\underline{0.57}}\cdot[0.5557 - 0.5517] = 0.5517 + 0.00228 = 0.55398$$

הסבר:

z	0.00 ⋯	0.03	0.04 ⋯
0.0		↓	↓
0.1	→	$\Phi(0.13) = 0.5517$	$\Phi(0.14) = 0.5557$
⋮		$\Phi(0.1357) \cong 0.554$	

באופן דומה נחשב את $\Phi(-1.4938)$, שנמצא בין $\Phi(-1.49)$ ל- $\Phi(-1.50)$. נקבל:

$$\Phi(-1.4938) = 1 - \Phi(1.49\underline{\underline{38}}) = 1 - \left(\Phi(1.49) + \underline{\underline{0.38}}\cdot[\Phi(1.5) - \Phi(1.49)]\right)$$
$$= 1 - \left(0.9319 + \underline{\underline{0.38}}\cdot[0.9332 - 0.9319]\right) = 0.067606$$

בפתרון הבעיה האחרונה השתמשנו בשוויון ההסתברויות: $\Phi(-z) = P\{Z \le -z\} = P\{Z > z\} = 1 - \Phi(z)$
הנובע מהסימטריה סביב 0 של ההתפלגות הנורמלית סטנדרטית.

ב. 1) נבדוק תחילה אם הערך המדויק 0.879 מופיע בגוף טבלת הקירובים. קל לראות שהוא מופיע בשורה "1.1" ובעמודה "0.07". לכן, אין כל צורך לבצע חישובים, ומקבלים באופן מיידי כי:

$\Phi(1.1 + 0.07) = \Phi(1.17) = 0.879$

2) בדיקה בגוף טבלת הקירובים מעלה שהערך המדויק 0.93 אינו מופיע בגוף הטבלה. אולם, הוא מופיע כאחד מן הערכים המיוחדים בטבלת העזר, שנמצאת מתחת לטבלת הקירובים. מטבלה זו מקבלים באופן מיידי כי: $\Phi(1.476) = 0.93$

טבלת העזר:

$\Phi(x)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
x	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(x)$	0.91	0.92	**0.93**	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
x	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

3) לעומת שני הערכים הקודמים, הערך המדויק 0.635 אינו מופיע בגוף טבלת הקירובים וגם לא בטבלת העזר. לכן, נצטרך להשתמש בשיטת האינטרפולציה הלינארית, כדי למצוא את ה- z שמקיים $\Phi(z) = 0.635$.

בטבלת הקירובים אפשר לראות שהערך **0.635** נמצא בין **0.6331** = $\Phi(0.34)$ ל- **0.6368** = $\Phi(0.35)$.

לכן, $0.34 < z < 0.35$. את הערך המדויק של z נמצא בשיטת האינטרפולציה הלינארית, כלומר, הערך של z יהיה בין 0.34 ל- 0.35 באותו מיקום יחסי שבו נמצא 0.635 בין 0.6331 ל- 0.6368.

לפיכך:
$$z = 0.34 + \underbrace{\frac{0.635-0.6331}{0.6368-0.6331}}_{\text{המיקום היחסי של 0.635 בין 0.6331 ל- 0.6368}} \cdot (0.35-0.34) = 0.34 + 0.00514 = 0.34514$$

ג. 1) נתרגם תחילה את הבעיה למונחים של משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי, כדי שנוכל למצוא לה פתרון באמצעות טבלת הקירובים של Φ. נקבל:

$$P\{X \le a\} = P\left\{\tfrac{X-5}{2} \le \tfrac{a-5}{2}\right\} = P\left\{Z \le \tfrac{a-5}{2}\right\} = \Phi\left(\tfrac{a-5}{2}\right) = \underline{\Phi(z) = 0.7}$$

כלומר, עלינו למצוא את z שמקיים $\Phi(z) = 0.7$, בדומה לבעיות שפתרנו בסעיף הקודם, כאשר z הוא פונקציה של a המבוקש, ומתקיים $z = \frac{a-5}{2}$.

את הערך של z קל למצוא במקרה הזה באמצעות טבלת העזר:

$$\Phi(0.524) = 0.7 \qquad \Rightarrow \qquad z = 0.524$$

לכן:
$$z = \tfrac{a-5}{2} = 0.524 \qquad \Rightarrow \qquad a = 5 + 0.524 \cdot 2 = 6.048$$

2) נתחיל בתרגום הבעיה למונחים של משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי:

$$P\{X \le a\} = P\left\{\tfrac{X-5}{2} \le \tfrac{a-5}{2}\right\} = P\left\{Z \le \tfrac{a-5}{2}\right\} = \Phi\left(\tfrac{a-5}{2}\right) = \underline{\Phi(z) = 0.06}$$

כעת, הערך הנתון של ההסתברות קטן מ- 0.5, ולכן ל- z שאותו אנו מחפשים יהיה ערך שלילי.

(נזכור שההתפלגות הנורמלית-סטנדרטית סימטרית סביב תוחלתה שהיא 0. לפיכך, אם ההסתברות עד לנקודה z קטנה מ- 0.5, הנקודה z חייבת להיות במחצית השמאלית של ההתפלגות הנורמלית סטנדרטית, ולכן ערכה יהיה שלילי.)

כאשר ל- z המבוקש יש ערך שלילי, נפתור את הבעיה הסימטרית לזו הנתונה. כלומר:

$$\Phi(z) = 0.06 \qquad \Rightarrow \qquad 1-\Phi(z) = 1-0.06 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\Phi(-z) = 0.94}$$

מטבלת העזר נקבל:
$$\Phi(1.555) = 0.94 \qquad \Rightarrow \qquad -z = 1.555$$

ולכן:
$$z = \tfrac{a-5}{2} = -1.555 \qquad \Rightarrow \qquad a = 5 - 1.555 \cdot 2 = 1.89$$

3)
$$P\{X \le a\} = P\left\{\tfrac{X-5}{2} \le \tfrac{a-5}{2}\right\} = P\left\{Z \le \tfrac{a-5}{2}\right\} = \Phi\left(\tfrac{a-5}{2}\right) = \underline{\Phi(z) = 0.17}$$

גם במקרה זה, הערך הנתון של ההסתברות קטן מ- 0.5, ולכן ל- z שאותו אנו מחפשים יהיה ערך שלילי. לפיכך, נעבור לבעיה הסימטרית לזו הנתונה, ונקבל:

$$\Phi(z) = 0.17 \qquad \Rightarrow \qquad 1-\Phi(z) = 1-0.17 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\Phi(-z) = 0.83}$$

הערך של z שמקיים את המשוואה $\Phi(-z) = 0.83$ לא נתון בטבלת העזר, ולכן נמצא אותו באמצעות טבלת הקירובים הגדולה, כשם שעשינו בסעיף ב3.

מתקיים: $\Phi(0.95)=0.8289 \quad < \quad \Phi(-z)=0.83 \quad < \quad \Phi(0.96)=0.8315$

לכן: $-z=0.95+\underbrace{\frac{0.83-0.8289}{0.8315-0.8289}}_{\text{המיקום היחסי של 0.83 בין 0.8289 ל- 0.8315}}\cdot(0.96-0.95)=0.9542 \quad \Rightarrow \quad z=-0.9542$

ומכאן כי: $z=\frac{a-5}{2}=-0.9542 \quad \Rightarrow \quad a=5-0.9542\cdot 2=3.0916$

15. נסמן ב- X את הטמפרטורה ביום-חורפי בירושלים ; $X\sim N(18,4^2)$.

א. נחשב את ההסתברויות שהטיול יערך בכל אחת מן החברות:

$$P\{12\le X\le 26\}=\Phi\left(\tfrac{26-18}{4}\right)-\Phi\left(\tfrac{12-18}{4}\right)=\Phi(2)-\Phi(-1.5)$$
$$=0.9772-(1-0.9332)=0.9104$$

$$P\{X\ge 13\}=1-\Phi\left(\tfrac{13-18}{4}\right)=1-\Phi(-1.25)$$
$$=\Phi(1.25)=0.8944$$

<u>הסברים</u>:

z	.00 · · ·	.05 · · ·	
1.2		.8944	$\rightarrow$ $\Phi(1.25)=0.8944$
2.0	.9772		$\rightarrow$ $\Phi(2)=0.9772$

לכן, נמליץ לתייר להירשם לטיול בחברת "המטייל".

ב. שני הטיולים מתבטלים, רק אם הטמפרטורה נמוכה מ- 12^{O}. לכן, ההסתברות המבוקשת היא:

$$P\{X\le 12\}=\Phi\left(\tfrac{12-18}{4}\right)=\Phi(-1.5)=1-0.9332=0.0668$$

16. נסמן ב- X את המשקל (בגרמים) של עוגה מקרית ; $X\sim N(500,5^2)$.

א. $P\{X<507\}=\Phi\left(\tfrac{507-500}{5}\right)=\Phi(1.4)=0.9192$

ב. $P\{X>489\}=1-\Phi\left(\tfrac{489-500}{5}\right)=1-\Phi(-2.2)=\Phi(2.2)=0.9861$

שימו לב שמתקיים: $\boxed{P\{Z\ge -z\}=1-\Phi(-z)=\Phi(z)}$

ג. כדי לענות על השאלה, צריך למצוא את המשקל a, שמקיים את השוויון:

$$P\{X>a\}=1-\Phi\left(\tfrac{a-500}{5}\right)=0.2 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\tfrac{a-500}{5}\right)=0.8\underset{\substack{\downarrow\\ \text{מטבלה I במדריך}\\ \text{(עמוד 105)}}}{=}\Phi(0.842)$$

לכן: $\frac{a-500}{5}=0.842 \quad \Rightarrow \quad a=504.21$

כלומר, 20% מהעוגות שוקלות יותר מ-504.21 גרם.

ד. כעת, עלינו למצוא את המשקל a, שמקיים את השוויון:

$$P\{X<a\}=\Phi\left(\tfrac{a-500}{5}\right)=0.03\underset{\downarrow}{=}\Phi(-1.881) \quad \Rightarrow \quad \frac{a-500}{5}=-1.881 \quad \Rightarrow \quad a=490.595$$

מטבלה I במדריך (עמוד 105):
$\Phi(1.881)=0.97$
$\Phi(-1.881)=1-\Phi(1.881)=1-0.97=0.03$

כלומר, 3% מהעוגות שוקלות פחות מ-490.595 גרם.

ה. נמצא את המשקל a, שמקיים את השוויון: $P\{X < a\} = \Phi\left(\frac{a-500}{5}\right) = 0.42$

במקרה זה, אי-אפשר להשתמש בטבלה I שבמדריך הלמידה, מכיוון ש-0.42 איננו אחד הערכים שמופיעים בה. לכן, נעזר בטבלה 5.1 שבספר הקורס (עמוד 230). נפתור תחילה את המשוואה $\Phi(b) = 0.58$ (מכיוון ש- $0.42 < 0.5$) ואחר-כך נמצא את הערך של a. בטבלה 5.1 רואים כי $\Phi(0.2) = 0.5793$ וכי $\Phi(0.21) = 0.5832$, ומכאן ש- $0.2 < z < 0.21$. נמצא את הערך של z באמצעות אינטרפולציה לינארית. מקבלים:

$$z = 0.2 + \frac{0.58-0.5793}{0.5832-0.5793}\cdot(0.21-0.2) = 0.201795 \quad\Rightarrow\quad \Phi\left(\frac{a-500}{5}\right) = 0.42 = \Phi(-0.201795)$$

$$\Rightarrow\quad a = 500 - 0.201795\cdot 5 = 498.9910$$

כלומר, 42% מהעוגות שוקלות פחות מ- 498.991 גרם.

ו. בסעיף א קיבלנו כי $P\{X < 507\} = 0.9192$ ולכן $P\{X > 507\} = 0.0808$.

1) המוכר שוקל 5 עוגות, עד למציאת העוגה הגדולה הראשונה, רק אם 4 העוגות הראשונות שהוא שוקל הן קטנות והחמישית גדולה. לכן, ההסתברות המבוקשת היא $0.9192^4\cdot 0.0808 = 0.05768$.
שימו לב, שזוהי הסתברות גיאומטרית בנקודה 5, כאשר $p = 0.0808$.

2) המוכר שוקל 15 עוגות, עד למציאת העוגה הגדולה הרביעית, רק אם בין 14 העוגות הראשונות שהוא שוקל יש 3 עוגות גדולות, והעוגה ה-15 שהוא שוקל גדולה.
לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $\binom{14}{3}0.9192^{11}\cdot 0.0808^4 = 0.006141$
שימו לב, שזוהי הסתברות בינומית-שלילית בנקודה 15, כאשר $r = 4$ ו- $p = 0.0808$.

3) ההסתברות שיימָצאו בין 15 העוגות שנבחרות באקראי בדיוק 4 עוגות גדולות היא:
$\binom{15}{4}0.9192^{11}\cdot 0.0808^4 = 0.02303$
שימו לב, שזוהי הסתברות בינומית בנקודה 4, כאשר $n = 15$ ו- $p = 0.0808$.

ז. נסמן ב- Y את מספר העוגות הגדולות מבין 10 העוגות שנבחרות באקראי מן המדף, ונסמן ב- W את המחיר הכולל של 10 עוגות אלו. מתקיים: $W = 40Y + 30(10-Y) = 10Y + 300$

כמו כן, התפלגות המשתנה המקרי Y היא בינומית עם הפרמטרים 10 ו- 0.0808. לכן:

$$E[W] = 10E[Y] + 300 = 10\cdot 10\cdot 0.0808 + 300 = 308.08$$

$$\mathrm{Var}(W) = 10^2\,\mathrm{Var}(Y) = 100\cdot 10\cdot 0.0808\cdot 0.9192 = 74.27136$$

17. נסמן ב- X_1 את אורך-החיים (בשעות) של נורה מקרית מתוצרת חברת "נור"; $X_1 \sim N(130,8^2)$,
וב- X_2 את אורך-החיים (בשעות) של נורה מקרית מתוצרת חברת "אור-לי"; $X_2 \sim N(124,6^2)$.

א. נסמן ב-A את המאורע שהנורה, שנבחרת מן המשלוח, היא מתוצרת חברת "נור";
נסמן ב- B_i את המאורע, שהנורה הנבחרת דולקת מעל ל- i שעות;
ונסמן וב-C את המאורע שהנורה דולקת לפחות 6 שעות מעבר לזמן שבו דלקה עד אותו הרגע.

$$P(B_{130}) = P(B_{130}|A)P(A) + P(B_{130}|A^C)P(A^C)$$
$$= P\{X_1 > 130\}\cdot 0.25 + P\{X_2 > 130\}\cdot 0.75$$
$$= \left[1-\Phi\left(\tfrac{130-130}{8}\right)\right]\cdot 0.25 + \left[1-\Phi\left(\tfrac{130-124}{6}\right)\right]\cdot 0.75$$
$$= \left[1-\Phi(0)\right]\cdot 0.25 + \left[1-\Phi(1)\right]\cdot 0.75 = 0.5\cdot 0.25 + 0.1587\cdot 0.75 = 0.244025$$

$$P(B_{136}) = P\{X_1 > 136\}\cdot 0.25 + P\{X_2 > 136\}\cdot 0.75$$
$$= \left[1-\Phi(0.75)\right]\cdot 0.25 + \left[1-\Phi(2)\right]\cdot 0.75 = 0.2266\cdot 0.25 + 0.0228\cdot 0.75 = 0.07375$$

ומכאן: $P(C\mid B_{130}) = \dfrac{P(B_{136})}{P(B_{130})} = \dfrac{0.07375}{0.244025} = 0.30222$

ב. ההסתברות שנורה מתוצרת "נור" תדלוק מעל ל-120 שעות היא:

$$P\{X_1 > 120\} = P\left\{Z > \tfrac{120-130}{8}\right\} = P\{Z > -1.25\} = \Phi(1.25) = 0.8944$$

לכן, מספר הנורות (מתוך ה-100) מתוצרת "נור" שדולקות מעל ל-120 שעות הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 100 ו- 0.8944. לכן, התוחלת המבוקשת שווה ל- $100\cdot 0.8944 = 89.44$.

18. נסמן ב- X את לחץ הדם של גבר מקרי ; $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

א. מהנתונים נובע כי: $P\{X < 86\} = 0.0228$; $P\{X > 140\} = 0.0062$

לכן: $\Phi\left(\frac{86-\mu}{\sigma}\right) = 0.0228$; $1-\Phi\left(\frac{140-\mu}{\sigma}\right) = 0.0062$

ומטבלה 5.1 מקבלים: $\Phi\left(\frac{86-\mu}{\sigma}\right) = 0.0228 = \Phi(-2)$; $\Phi\left(\frac{140-\mu}{\sigma}\right) = 0.9938 = \Phi(2.5)$

כלומר, צריך לפתור את מערכת המשוואות $\frac{140-\mu}{\sigma} = 2.5$ ו- $\frac{86-\mu}{\sigma} = -2$.

מקבלים $\mu = 110$ ו- $\sigma = 12$.

ב. $$P\{100 \le X \le 115\} = \Phi\left(\tfrac{115-110}{12}\right) - \Phi\left(\tfrac{100-110}{12}\right) = \Phi(0.4167) - \Phi(-0.8333)$$
$$= 0.6616 - (1-0.7976) = 0.4592$$

מטבלה 5.1 (עמ' 230 בספר):

$\Phi(0.41) = 0.6591$
$\Rightarrow 0.6628 - 0.6591 = \underline{0.0037}$
$\Phi(0.42) = 0.6628$

$\Phi(0.41\underline{67}) = 0.6591 + 0.\underline{67}\cdot \underline{0.0037} = 0.6616$

$\Phi(0.83) = 0.7967$
$\Rightarrow 0.7995 - 0.7967 = \underline{0.0028}$
$\Phi(0.84) = 0.7995$

$\Phi(0.83\underline{33}) = 0.7967 + 0.\underline{33}\cdot \underline{0.0028} = 0.7976$

ג. $$P\{100 \le X \le 115 \mid X < 134\} = \frac{P\{100\le X\le 115\}}{P\{X<134\}} = \frac{0.4592}{\Phi\left(\frac{134-110}{12}\right)} = \frac{0.4592}{0.9772} = 0.4699$$

ד. נסמן ב- Y את המשתנה המקרי, המוגדר על-ידי מספר הגברים שלחץ הדם שלהם גבוה מ-134.
ההתפלגות של המשתנה המקרי Y היא בינומית עם הפרמטרים 250 ו- 0.0228. כעת, נסמן ב- W את המספר הכולל של כדורי ההרגעה שניתנו בבדיקה. מתקיים $W = 5Y$.

לכן: $E[W] = 5E[Y] = 5\cdot 250\cdot 0.0228 = 28.5$

$$\mathrm{Var}(W) = 5^2\,\mathrm{Var}(Y) = 25\cdot 250\cdot 0.0228\cdot 0.9772 = 139.251$$

19. נתון כי $X \sim N(10, 2^2)$.

א. 1) אם מתקיים: $P\{a < X < b\} = 1 - P\{X \le a\} - P\{X \ge b\} = 0.85$

אז בהכרח: $P\{X \le a\} + P\{X \ge b\} = 0.15$

ומכאן שיש אינסוף זוגות של ערכים של a ו-b, שמקיימים את השוויון הנתון. למשל, a שמקיים $P\{X \le a\} = 0.11$ ו-b שמקיים $P\{X \ge b\} = 0.04$ או a שמקיים $P\{X \le a\} = 0.07$ ו-b שמקיים $P\{X \ge b\} = 0.08$, וכך הלאה.

נמצא את a ו-b המסוימים, המתאימים לדוגמה הראשונה:

$$P\{X \le a\} = 0.11 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\tfrac{a-10}{2}\right) = 0.11 = \Phi(-1.2263) \quad \Rightarrow \quad a = 7.5474$$

$$P\{X \ge b\} = 0.04 \quad \Rightarrow \quad 1 - \Phi\left(\tfrac{b-10}{2}\right) = 0.04 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\tfrac{b-10}{2}\right) = 0.96 = \Phi(1.751)$$
$$\Rightarrow \quad b = 13.502$$

2) במקרה זה, a ו-b מקיימים גם את השוויון: $P\{X \le a\} = P\{X \ge b\} = 0.075$

לכן, הערכים שלהם נקבעים ביחידות, והם $a = 10 - 2\cdot 1.44 = 7.12$ ו- $b = 10 + 2\cdot 1.44 = 12.88$.

ב. נפשט את השוויון הנתון: $P\{X \le c\} = 3P\{X > c\} = 3[1 - P\{X \le c\}] = 3 - 3P\{X \le c\}$

ומכאן: $P\{X \le c\} = 0.75 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\tfrac{c-10}{2}\right) = \Phi(0.674) \quad \Rightarrow \quad c = 11.348$

20. לפי הנתונים, למשתנה המקרי X יש התפלגות בינומית ומתקיים $np(1-p) = 18.75 > 10$. לכן, אפשר להשתמש במשפט הגבול של דה-מואבר – לפלאס, כדי לחשב קירוב להסתברות הנתונה.

כמו כן, המשתנה המקרי X הוא **משתנה מקרי בדיד**, **המקבל ערכים שלמים בלבד**, ולכן לפני חישוב הקירוב הנורמלי ***יש להקפיד לשים לב לסימני השוויון בגבולות הנתונים של ערכי*** X (כלומר, $20 \le X$ ו- $X < 40$ או לחלופין $X \le 39$) ולבצע תיקון רציפות מתאים (ראה עמודים 105-106 במדריך הלמידה).

מקבלים:

$$P\{20 \le X < 40\} = P\{20 \le X \le 39\} = P\{19.5 \le X < 39.5\}$$
$$\cong P\left\{\tfrac{19.5 - 100\cdot 0.25}{\sqrt{100\cdot 0.25\cdot 0.75}} \le Z \le \tfrac{39.5 - 100\cdot 0.25}{\sqrt{100\cdot 0.25\cdot 0.75}}\right\}$$
$$= \Phi(3.3486) - \Phi(-1.2702) = 0.9996 - (1 - 0.8980) = 0.8976$$

כאשר Z הוא משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי.

הסבר על "תיקון הרציפות" מובא בעמוד הבא.

את **תיקון הרציפות** עורכים, מכיוון שלמשתנה המקרי הבינומי יש ערכים אפשריים שלמים בלבד (בין 0 ל-n) ואילו הערכים האפשריים של ההתפלגות הנורמלית, שבאמצעותה מחשבים את הקירוב, כוללים את כל הישר הממשי.

נתבונן במקרה שבו מעוניינים לחשב קירוב נורמלי להסתברות של המאורע $\{X=k\}$, עבור k קבוע ושלם. במקרה זה, אם לא נבצע תיקון רציפות ונחשב קירוב נורמלי להסתברות של המאורע הנקודתי $\{X=k\}$, נקבל את התוצאה 0, שכן זהו ערכה של הסתברות נקודתית בהתפלגות רציפה. תפקידו של תיקון הרציפות הוא לגשר על ההבדלים בין ההתפלגות הבדידה להתפלגות הרציפה. לפי עקרון התיקון, במקום להתייחס למאורעות נקודתיים מהצורה $\{X=k\}$, מתייחסים למאורעות "מורחבים" שצורתם $\{k-0.5 \le X < k+0.5\}$. ההסתברויות המדויקות (הבינומיות) של שני המאורעות הללו שוות, אבל הקירובים הנורמליים המתאימים להם שונים זה מזה. ההסתברות של המאורע ה"מורחב" חיובית, בעוד שזו של המאורע הנקודתי שווה ל-0.

תיקון הרציפות שאנו עורכים מבוסס על משפט דה-מואבר – לפלאס, הקובע כי התפלגות המשתנה הבינומי S_n המתוקנן (דהיינו, לאחר הפחתת התוחלת וחלוקה בסטיית-התקן) היא בקירוב התפלגות נורמלית עם תוחלת 0 ושונות 1. ממשפט זה מקבלים כי הקירוב להסתברות של כל ערך אפשרי (ושלם) של המשתנה המקרי הבינומי S_n , הוא:

$$P\{S_n = k\} \overset{\uparrow}{=} P\{k-0.5 \le S_n \le k+0.5\} = P\left\{\frac{(k-0.5)-E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \le \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \le \frac{(k+0.5)-E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}\right\}$$

$$\cong P\left\{\frac{(k-0.5)-E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \le Z \le \frac{(k+0.5)-E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}\right\} = \Phi\left(\frac{(k+0.5)-E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}\right) - \Phi\left(\frac{(k-0.5)-E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}\right)$$

באיור המובא בהמשך, אפשר לראות את הקשר בין ההסתברויות הנקודתיות של ערכי המשתנה המקרי הבדיד X לבין הקירובים הנורמליים המתאימים להן.

באיור זה, הסתברות המאורע $\{X=k\}$ מסומנת ב- p_k ומתוארת על-ידי מקל בגובה p_k מעל לערך המתוקנן של הנקודה k, דהיינו מעל ל- $\frac{k-E[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$ (שהרי הקירוב הנורמלי מחושב לפי ההתפלגות הנורמלית סטנדרטית); הקירוב ל- $P\{X=k\}$ הוא השטח שמתחת לעקומה הנורמלית סטנדרטית שמשתרע מסביב לערך המתוקנן $\frac{k-E[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$, כלומר, הוא השטח שמתחת לעקומה הנורמלית סטנדרטית בתחום $\left(\frac{(k-0.5)-E[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}, \frac{(k+0.5)-E[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right)$.