פתרונות לממ"ן 13 - 2012ב - 20425

1. א. לכל $i = 1,2,3,4,5$, המאורע $\{X = i\}$ מתרחש אם ב i תאים בדיוק יש לפחות כדור אחד וב- $(5 - i)$ תאים אין אף כדור. כלומר, כדי לחשב את ההסתברות של מאורע זה, נבחר i תאים שיהיו בהם כדורים, נשים בכל אחד מהם כדור אחד, ונפזר באקראי את שאר הכדורים הזהים בתאים האלו. נקבל:

$$P\{X=i\}=\frac{\binom{5}{i}\binom{10-i+i-1}{10-i}}{\binom{10+4}{10}}=\frac{\binom{5}{i}\binom{9}{10-i}}{\binom{14}{10}}\qquad , \qquad i=1,2,3,4,5$$

מפונקציית ההסתברות שקיבלנו, אפשר לראות שההתפלגות של המשתנה המקרי X היא התפלגות היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N = 14$, $m = 5$ ו- $n = 10$.

ב. מכיוון שזיהינו את ההתפלגות של X, נוכל להשתמש בנוסחאות התוחלת והשונות של ההתפלגות ההיפרגיאומטרית, ולקבל כי:

$$E[X]=\tfrac{m}{N}\cdot n=\tfrac{5}{14}\cdot 10=\tfrac{50}{14}=3.57143$$

$$\text{Var}(X)=\tfrac{N-n}{N-1}\cdot\tfrac{m}{N}\cdot\tfrac{N-m}{N}\cdot n=\tfrac{4}{13}\cdot\tfrac{5}{14}\cdot\tfrac{9}{14}\cdot 10=\tfrac{1{,}800}{2{,}548}=0.70644$$

הערה: אם לא מזהים את ההתפלגות של X , אפשר לחשב באופן ישיר את התוחלת והשונות בעזרת פונקציית ההסתברות שנמצאה בסעיף א, באופן הבא:

$$P\{X=1\}=\tfrac{5}{1{,}001}\ ;\ P\{X=2\}=\tfrac{90}{1{,}001}\ ;\ P\{X=3\}=\tfrac{360}{1{,}001}\ ;\ P\{X=4\}=\tfrac{420}{1{,}001}\ ;\ P\{X=5\}=\tfrac{126}{1{,}001}$$

התוחלת של X:

$$E[X]=1\cdot\tfrac{5}{1{,}001}+2\cdot\tfrac{90}{1{,}001}+3\cdot\tfrac{360}{1{,}001}+4\cdot\tfrac{420}{1{,}001}+5\cdot\tfrac{126}{1{,}001}=\tfrac{3{,}575}{1{,}001}=3.57143$$

והשונות של X:

$$E[X^2]=1^2\cdot\tfrac{5}{1{,}001}+2^2\cdot\tfrac{90}{1{,}001}+3^2\cdot\tfrac{360}{1{,}001}+4^2\cdot\tfrac{420}{1{,}001}+5^2\cdot\tfrac{126}{1{,}001}=\tfrac{13{,}475}{1{,}001}=13.46154$$

$$\text{Var}(X)=\tfrac{13{,}475}{1{,}001}-\left(\tfrac{3{,}575}{1{,}001}\right)^2=0.70644$$

ג. מספר התאים שנשארים ריקים הוא $5 - X$. לכן, אם נסמן ב-Y את הפרס הכולל שמתקבל מפיזור אקראי של הכדורים נקבל כי:

$$Y = 5(5 - X) = 25 - 5X$$

1.
$$E[Y] = 25 - 5E[X] = 25 - 5\cdot 3.57143 = 7.143$$

$$\text{Var}(Y) = (-5)^2\cdot\text{Var}(X) = 25\cdot 0.70644 = 17.661$$

2. ההסתברות לקבל פרס גבוה מ-5 ש"ח בכל חזרה של הניסוי היא:

$$P\{Y\ge 2\}=P\{X\le 3\}=\tfrac{455}{1{,}001}$$

לכן, ההסתברות לקבל לראשונה פרס גבוה מ-5 ש"ח לאחר החזרה השישית היא למעשה ההסתברות לקבל פרס שלא עולה על 5 ש"ח בשש החזרות הראשונות. דהיינו, ההסתברות המבוקשת היא:

$$\left(1-\tfrac{455}{1{,}001}\right)^6=0.0263$$

2. א. ההסתברות לא לקבל בכלל את התוצאה 4, כאשר מטילים שתי קוביות היא $\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36}$. לכן, למשתנה המקרי, המוגדר על-ידי מספר ההטלות בשלב הראשון של המשחק שבהן לא מתקבל אף 4, יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 10 ו- $\frac{25}{36}$. נסמן משתנה מקרי זה ב- X ונקבל כי :

$$P\{X=6\}=\binom{10}{6}\left(\tfrac{25}{36}\right)^6\left(\tfrac{11}{36}\right)^4=0.2053$$

ב. נסמן ב- R את המשתנה המקרי המוגדר על-ידי הרווח (בש״ח) בשלב הראשון של המשחק. נשים לב, שהמשתנה המקרי R הוא למעשה פונקציה של המשתנה המקרי X (שהוגדר בסעיף א), כאשר $R=3^X$.

לכן, אפשר לחשב את התוחלת של R כך :

$$E[R]=E[3^X]=\sum_{i=0}^{10}3^i\cdot P\{X=i\}=\sum_{i=0}^{10}3^i\cdot\binom{10}{i}\left(\tfrac{25}{36}\right)^i\left(\tfrac{11}{36}\right)^{10-i}=\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}\left(3\cdot\tfrac{25}{36}\right)^i\left(\tfrac{11}{36}\right)^{10-i}$$

$$=\left(3\cdot\tfrac{25}{36}+\tfrac{11}{36}\right)^{10}=6{,}052.84 \qquad \text{[נוסחת הבינום]}$$

ג. מספר ההטלות בשלב השני, שנסמנו ב- Y, הוא משתנה מקרי בינומי-שלילי עם הפרמטרים 10 ו- $\frac{25}{36}$.

המשתנה המקרי, המוגדר על-ידי סך-כל ההטלות שנעשות במשחק, הוא פונקציה של Y ושווה ל- $Y+10$ (מכיוון שבשלב הראשון נעשות 10 הטלות באופן קבוע). לפיכך, התוחלת והשונות של סך-כל ההטלות במשחק הן :

$$E[Y+10]=\frac{10}{\frac{25}{36}}+10=24.4 \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(Y+10)=\mathrm{Var}(Y)=\frac{10\cdot\frac{11}{36}}{\left(\frac{25}{36}\right)^2}=6.336$$

3. א. הערכים האפשריים של X הם 0, 1 ו-2. את חישוב ההסתברויות של כל אחד מן הערכים נפריד לשני מקרים – אבי יושב בקצה השורה ואבי אינו יושב בקצה השורה. לכן, כל חישוב מורכב משני מחוברים, שהם ההסתברויות של המאורעות הזרים שאיחודם הוא המאורע $\{X=i\}$.

מקבלים :

$$P\{X=0\}=\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n-1}+\frac{n-2}{n}\cdot 0=\frac{2}{n(n-1)}$$

$$P\{X=1\}=\frac{2}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}+\frac{n-2}{n}\cdot 2\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n-2}=\frac{4(n-2)}{n(n-1)}$$

$$P\{X=2\}=\frac{2}{n}\cdot 0+\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}=\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}$$

בדיקה :

$$\sum_{i=0}^{2}P\{X=i\}=\frac{2+4(n-2)+(n-2)(n-3)}{n(n-1)}=\frac{n^2-n}{n(n-1)}=1$$

ב. עבור $n=6$ מקבלים :

$$P\{X=0\}=\tfrac{2}{30}=\tfrac{1}{15} \quad ; \quad P\{X=1\}=\tfrac{16}{30}=\tfrac{8}{15} \quad ; \quad P\{X=2\}=\tfrac{12}{30}=\tfrac{6}{15}$$

ולכן :

$$E[X]=0\cdot\tfrac{1}{15}+1\cdot\tfrac{8}{15}+2\cdot\tfrac{6}{15}=\tfrac{20}{15}=\tfrac{4}{3}$$

$$E[X^2]=0^2\cdot\tfrac{1}{15}+1^2\cdot\tfrac{8}{15}+2^2\cdot\tfrac{6}{15}=\tfrac{32}{15}=2.1\overline{3}$$

$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\tfrac{32}{15}-\tfrac{16}{9}=\tfrac{96-80}{45}=\tfrac{16}{45}=0.3\overline{5}$$

4. א. נסמן את המשתנה המקרי המוגדר על-ידי עלות ביצוע הניסוי ב-Y. פונקציית ההסתברות של Y היא:

$$P\{Y=200\}=P\{X<15\}=5\cdot\tfrac{1}{11}=\tfrac{5}{11} \qquad ; \qquad P\{Y=300\}=P\{X\geq 15\}=6\cdot\tfrac{1}{11}=\tfrac{6}{11}$$

והתוחלת והשונות של Y הן:

$$E[Y]=200\cdot\tfrac{5}{11}+300\cdot\tfrac{6}{11}=254.\overline{54}$$

$$E[Y^2]=200^2\cdot\tfrac{5}{11}+300^2\cdot\tfrac{6}{11}=67{,}272.\overline{72}$$

$$\text{Var}(Y)=67{,}272.\overline{72}-254.\overline{54}^2=2{,}479.339$$

ב. פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה המקרי Y, שהוגדר בסעיף הקודם היא:

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & , \quad y<200\\ \frac{5}{11} & , \quad 200\leq y<300\\ 1 & , \quad y\geq 300\end{cases}$$

ג. מספר האנשים שמשתתפים בניסוי הוא $2X$. לכן, נוכל למצוא את פונקציית ההסתברות של משתנה מקרי זה מתוך פונקציית ההסתברות של X. נקבל:

$$P\{2X=i\}=\tfrac{1}{11} \qquad , \qquad i=20,22,24,\ldots,40$$

5. נסמן ב- X את מספר הביצים שהחרקים מטילים על עלה אחד. ל- X יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 3.

א. מנתוני הבעיה נובע שאין תלות בין עלים שונים, לכן נוכל לכפול את ההסתברויות שנוגעות לכל עלה בנפרד. מכיוון שיש 3 אפשרויות לבחור את העלה שעליו יהיו 4 ביצים, מקבלים את ההסתברות:

$$3\cdot\left(e^{-3}\cdot\tfrac{3^4}{4!}\right)\cdot\left(e^{-3}\cdot\tfrac{3^3}{3!}\right)^2=0.0253$$

ב1. לכל $i=2,3,\ldots$, מתקיים:

$$P\{X=i\mid X\geq 2\}=\frac{P\{X=i\}}{P\{X\geq 2\}}=\frac{e^{-3}\cdot\frac{3^i}{i!}}{1-e^{-3}-e^{-3}\cdot 3}=\frac{\frac{3^i}{i!}\cdot e^{-3}}{1-4e^{-3}}$$

ב2. נשתמש בפונקציית ההסתברות שמצאנו בסעיף ב1, כדי לחשב את התוחלת של Y. נקבל:

$$E[Y]=\sum_{i=2}^{\infty}i\,P\{Y=i\}=\frac{1}{1-4e^{-3}}\cdot\underset{X\sim Po(3)}{\underset{\downarrow}{\sum_{i=2}^{\infty}i\cdot\frac{3^i}{i!}\cdot e^{-3}}}=\frac{1}{1-4e^{-3}}\cdot(\underbrace{E[X]}_{=3}-0-3e^{-3})=\frac{3-3e^{-3}}{1-4e^{-3}}=3.55951$$

ג. מספר הביצים שמהן בוקע חרק צעיר הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $n=1{,}500$ ו-$p=0.01$. זוהי התפלגות בינומית עם מספר ניסויים גדול והסתברות להצלחה קטנה. לכן, אפשר להשתמש בקירוב הפואסוני להתפלגות הבינומית, ולהניח, שמספר הביצים שמהן בוקע חרק צעיר הוא בקירוב משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\lambda=1{,}500\cdot 0.01=15$. לפיכך, אם נסמן ב-$X$ את מספר הביצים שמהן בוקע חרק צעיר, נקבל כי:

$$P\{X=11\}\cong e^{-15}\tfrac{15^{11}}{11!}=0.0662874$$