

**מבנה הבחינה :**

- \* יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- \* משקל כל שאלה 25% .
- \* אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

**משך המבחן: 3 שעות.**

**חומר עזר:** כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

---

**שימו לב:**

- \* יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נאמר במפורש בשאלה.
  - \* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
  - \* אפשר גם להסתמך על טענות מהמדור "עזרים ללמידה" באתר הקורס.
  - \* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
  - \* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
- 

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

**אנא קראו בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !**

### **שאלה 1**

- בכל אחד מהסעיפים בשאלה זו,  $R$  הוא יחס (רלציה) מעל קבוצה  $A$ . **אין קשר בין הסעיפים.**
- (7 נק') א. הוכיחו או הפריכו: אם  $R$  רפלקסיבי אז  $R^2$  רפלקסיבי.
- (7 נק') ב. תנו דוגמא לקבוצה סופית  $A$  וליחס  $R$  מעל  $A$ , כך ש-  $R \cup R^2$  אינו טרנזיטיבי.
- (11 נק') ג. הוכיחו: אם  $R^3$  הוא אנטי-סימטרי אז  $R$  אנטי-סימטרי.  
(את סעיף ג' כדאי להוכיח בדרך השלילה)

### **שאלה 2**

תהייה  $k, m$  עוצמות שונות מאפס, ייתכן אינסופיות. הוכיחו:

(12 נק') א.  $k \leq k \cdot m$

(13 נק') ב.  $k \leq k^m$

**נמקו היטב ובפירוט כל צעד בהוכחה.** שימו לב לא להסתמך על טענות חשבוניות "מובנות מאליהן", שלא הוכחנו את נכונותן עבור עוצמות כלשהן. ראו בעמוד הפתיחה של הבחינה פירוט על מה מותר להסתמך.

### **שאלה 3**

מצאו כמה מספרים שלמים  $n$ , בתחום  $1 \leq n \leq 2100$ , מקיימים:  
 $n$  מתחלק ב-4, ואינו מתחלק **באף אחד** משלושת המספרים 5, 6, 7.  
הדרכה: בחרו את הקבוצה  $U$  בצורה שלא תקשה עליכם את החישוב.

### **שאלה 4**

מצאו את מספר פתרונות המשוואה  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 41$ ,  
כאשר שלושה מהמשתנים הם מספרים טבעיים **זוגיים**, שלושת המשתנים האחרים הם מספרים טבעיים **אי-זוגיים**, **ואף אחד** מהמשתנים אינו שווה 0, אינו שווה 1 ואינו שווה 2.  
לא נתון איזה מהמשתנים הם זוגיים ואיזה אי-זוגיים.  
אפשר לפתור בעזרת פונקציה יוצרת ואפשר בדרך אחרת. **יש להגיע לתשובה סופית מספרית.**

## שאלה 5

תהי  $L$  שפה חלקית לשפת תחשיב הפרדיקטים, ובה סימנים אלה: קשרים לוגיים, סוגרים, סימני משתנים  $x_1, x_2, \dots$ , סימן פרדיקט דו-מקומי אחד  $R$ , סימן הכמת  $\forall$ .  
אין סימני פונקציות או פרדיקטים נוספים ואין סימני קבועים אישיים.  
נתבונן בתבניות הבאות ב- $L$ , בכתיב מקוצר:

$$\psi_1 : \quad \forall x_1 R(x_1, x_1)$$

$$\psi_2 : \quad \forall x_1 \forall x_2 (R(x_1, x_2) \rightarrow R(x_2, x_1))$$

$$\psi_3 : \quad \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((R(x_1, x_2) \wedge R(x_2, x_3)) \rightarrow R(x_1, x_3))$$

15 נק') א. **כמה** אינטרפרטציות שונות  $J$  של השפה  $L$  קיימות, שעולמן (תחום האינטרפרטציה) הוא הקבוצה  $\{1,2,3\}$ , כך שהתבניות  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  כולן **אמיתיות** ב- $J$ ? נמק את תשובתך.

10 נק') ב. נוסף לשפה סימן פונקציה חד-מקומית  $f_1^1$  וסימן קבוע אישי  $a$ .  
התבניות  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  נשארות ללא שינוי.  
מה כעת התשובה לשאלה שבסעיף א? המספר שונה מהתוצאה של סעיף א, מכיוון שאנו סופרים אינטרפרטציות של **השפה**, ואינטרפרטציה צריכה כעת לתת פירוש גם לסימנים  $f_1^1, a$ .

בהצלחה!