

ה א ו נ י ב ר ס י ט ה ה פ ת ו ח ה

20585

**מבוא לתורת החישוביות
והסיבוכיות**

חוברת הקורס - אביב 2016

כתב: אלעזר בירנבוים

מרץ 2016 - סמסטר אביב - תשע"ו

פנימי – לא להפצה.

כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה. ©

תוכן העניינים

| | |
|----|-----------------------------------|
| א | אל הסטודנטים |
| ב | 1. לוח זמנים ופעילויות |
| ד | 2. תיאור המטלות |
| ה | 3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס |
| 1 | ממ"ן 11 |
| 5 | ממ"ן 12 |
| 7 | ממ"ן 13 |
| 11 | ממ"ן 14 |
| 13 | ממ"ן 15 |

אל הסטודנטים,

אני מקדם את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים.
בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.
פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ס בכתובת:

<http://telem.openu.ac.il>

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר

הספרייה באינטרנט www.openu.ac.il/Library

שעות הייעוץ בקורס מתקיימות בימי ראשון בשעות 18:00-20:00 בטלפון 04-6850321.

אבקש מאוד לא להתקשר לטלפון הזה בשעות לא סבירות ובשבתות.

ניתן לפנות גם בדואר אלקטרוני: elazar@openu.ac.il

אני מאחל לכם הצלחה בלימודים.

לתשומת לב הסטודנטים הלומדים בחו"ל:

למרות הריחוק הפיסי הגדול, נשתדל לשמור אתכם על קשרים הדוקים ולעמוד לרשותכם ככל האפשר. הפרטים החיוניים על הקורס נכללים בחוברת הקורס וכן באתר הקורס. מומלץ מאוד להשתמש באתר הקורס ובכל אמצעי העזר שבו וכמובן לפנות אלינו במידת הצורך.

בברכה,

אלעזר ג'רמלני

מרכז ההוראה

1. לוח זמנים ופעילויות (20585 / 2016 ב)

| שבוע לימוד | תאריכי שבוע הלימוד | יחידת הלימוד המומלצת | מפגשי ההנחיה* | תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה) |
|------------|------------------------------------|----------------------|---------------|----------------------------------|
| 1 | 11.3.2016-6.3.2016 | פרק 1 | | |
| 2 | 18.3.2016-13.3.2016 | פרק 1 | מפגש ראשון | |
| 3 | 25.3.2016-20.3.2016 (ה-ו פורים) | פרק 2 | | ממ"ן 11 25.3.2016 |
| 4 | 1.4.2016-27.3.2016 | פרק 2 | | |
| 5 | 8.4.2016-3.4.2016 | פרק 3 | מפגש שני | |
| 6 | 15.4.2016-10.4.2016 | פרק 3 | | ממ"ן 12 15.4.2016 |
| 7 | 22.4.2016-17.4.2016 (ו ערב פסח) | פרק 4 | מפגש שלישי | |
| 8 | 29.4.2016-24.4.2016 (א-ו פסח) | פרק 4 | | |

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

לוח זמנים ופעילויות – המשך

| שבוע לימוד | תאריכי שבוע הלימוד | יחידת הלימוד המומלצת | מפגשי ההנחיה* | תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה) |
|------------|--|----------------------|---------------|----------------------------------|
| 9 | 6.5.2016-1.5.2016 (ה יום הזכרון לשואה) | פרק 4 | מפגש רביעי | |
| 10 | 13.5.2016-8.5.2016 (ד יום הזיכרון) (ה יום העצמאות) | פרק 4 | | ממ"ן 13 13.5.2016 |
| 11 | 20.5.2016-15.5.2016 | פרק 5 | מפגש חמישי | |
| 12 | 27.5.2016-22.5.2016 (ה ל"ג בעומר) | פרק 5 | | |
| 13 | 3.6.2016-29.5.2016 | פרק 6 | מפגש שישי | ממ"ן 14 3.6.2016 |
| 14 | 10.6.2016-5.6.2016 (א יום ירושלים) | פרק 6 | | |
| 15 | 17.6.2016-12.6.2016 (א שבועות) | פרק 7 | | |
| 16 | 24.6.2016-19.6.2016 | פרק 7 | מפגש שביעי | ממ"ן 15 24.6.2016 |

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

2. תיאור המטלות

קראו היטב עמודים אלו לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס - הבנה מעמיקה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. המטלות תיבדקנה על-ידי המנחה ותוחזרנה בצירוף הערות המתייחסות לתשובות.

המטלות מלוות את יחידות הלימוד בקורס. להלן פירוט המטלות, היחידות שאליהן מתייחסת כל מטלה ומשקלה היחסי. בחלק מהמטלות תופענה גם שאלות המתייחסות ליחידות שכבר נלמדו.

ממ"ן 11 - פרק 1 - 6 נקודות

ממ"ן 12 - פרקים 2, 3 - 6 נקודות

ממ"ן 13 - פרק 4 - 8 נקודות

ממ"ן 14 - פרק 5 - 4 נקודות

ממ"ן 15 - פרקים 6, 7 - 6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל של 24 נקודות לפחות.

שימו לב שחובה להגיש את ממ"ן 13.

ללא צבירת 24 נקודות בהגשת מטלות לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

למען הסר ספק, יודגש שחל איסור על הכנה משותפת והעתקה של מטלות או חלקי מטלות.
(הנושא מפורט בתקנון משמעת לסטודנטים - נספח 1 של ידיעון האו"פ).

לתשומת לבכם!

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן: אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלה** בציון הנמוך ביותר, שציונה נמוך מציון הבחינה, לא תילקח בחשבון בעת שקלול הציון הסופי. זאת בתנאי שמטלה זו **אינה חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס. סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון שמשפרו 09-7782222, או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא <http://www.openu.ac.il/sheilta> קורסים ⇨ ציוני מטלות ובחינות ⇨ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.

יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות

שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של ציוני המטלות והבחינה יהיה נמוך מ-60).

כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל כולל של 24 נקודות לפחות.

ב. ציון של לפחות 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

מספר השאלות: 7 משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: 2016 מועד אחרון להגשה: 25 מרץ 16

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

בנו מכונת טיורינג המכריעה את השפה של תרגיל 3.8 סעיף a. $\{w \in \{0, 1\}^* \mid \#_0(w) = \#_1(w)\}$.

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, \sqcup, x\}$.

למכונה יהיו לא יותר משבעה מצבים (כולל q_{accept} ו- q_{reject}).

תארו את המכונה בעזרת איור מלא (כמו איור 3.8 בספר).

הקפידו על כך שהאיור יהיה גדול, בהיר, וללא קשתות נחתכות.

הסבירו היטב את פעולת המכונה, ולמה היא אכן מכריעה את השפה הדרושה.

שאלה 2 (20% סעיף א - 15%; סעיף ב - 5%)

א. בנו מכונת טיורינג שכאשר היא מקבלת כקלט מילה w מעל האלפבית $\{0, 1\}$, היא מסיימת

במצב q_{accept} ועל הסרט רשומה המילה $w\#w$.

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, x, \#, \sqcup\}$.

למכונה יהיו לא יותר משלושה עשר מצבים (כולל q_{accept} ו- q_{reject}).

תארו את המכונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{reject} וכל הקשתות

שנכנסות אליו).

הקפידו על כך שהאיור יהיה גדול, בהיר, וללא קשתות נחתכות.

הסבירו היטב את פעולת המכונה ולמה היא אכן מבצעת את הנדרש.

זכרו לטפל נכון גם במקרה ש- w היא המילה הריקה.

ב. מהי הפונקציה שמחשבת המכונה שבניתם בסעיף א?

הגדירו את הפונקציה בשלמות (תחום, טווח וכלל העתקה).

שאלה 3 (12%)

לפי ההגדרה של מכונת טיורינג שמופיעה בספר, כאשר מגיעים למצב המקבל q_{accept} או למצב הדוחה q_{reject} , המכונה עוצרת. כלומר, פונקצית המעברים איננה מוגדרת על מצבים אלה. (עיינו בפסקה האחרונה בעמוד 169 בספר).

נניח שנשנה את ההגדרה של פונקצית המעברים כך שכאשר מגיעים למצב המקבל או למצב הדוחה, לא בהכרח עוצרים. ייתכן שעל חלק מן הסמלים של אלפבית הסרט Γ יש המשך.

המכונה **מקבלת** מילה w רק אם במהלך החישוב של המכונה על w מגיעים למצב המקבל, ועל הסמל שנקרא כעת בסרט אין המשך מן המצב המקבל.

המכונה **לא מקבלת** מילה w , אם במהלך החישוב של המכונה על w מגיעים למצב הדוחה, ועל הסמל שנקרא כעת בסרט אין המשך מן המצב הדוחה, או אם המכונה אף פעם לא עוצרת.

האם למכונה שפועלת לפי ההגדרה החדשה **יש אותו הכוח** כמו למכונה רגילה?

אם עניתם שכן, הראו כיצד כל אחת מן המכונות יכולה לחקות את פעולתה של המכונה האחרת.

אם עניתם שלא, תנו דוגמה לשפה שאחת המכונות יכולה לזהות, והשנייה איננה יכולה לזהות.

שאלה 4 (16%)

מספר טבעי n נקרא **פריק** (composite) אם הוא לא ראשוני. (כלומר, אם הוא שווה ל-1, או שיש לו מחלקים שונים מ-1 וממנו עצמו).

א. תארו מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית** להכרעת השפה F הבאה:

$$F = \{a^n \mid n \geq 1; n \text{ is composite}\}$$

רמת הפירוט של תיאור פעולת המכונה צריכה להיות דומה למכונה M_3 מדוגמה 3.11 בספר. המכונה צריכה להשתמש באי-דטרמיניזם באופן שיקל על החישובים (לעומת מכונה דטרמיניסטית לאותה המשימה).

שימו לב שהמכונה שאתם מתארים **מכריעה** את השפה, ולא רק מזהה אותה.

ב. נניח שנחליף במכונה שהצעתם את התפקידים של המצבים q_{accept} ו- q_{reject} .

מהי השפה שמכריעה המכונה שתתקבל? **הצדיקו היטב** את תשובתכם.

שאלה 5 (18%)

בעמוד 178 בספר, בהוכחת משפט 3.16, מוסבר מדוע המכונה D איננה מממשת חיפוש לעומק בעץ הקונפיגורציות, אלא חיפוש לרוחב.

אם ידוע שאין בעץ הקונפיגורציות ענפים אינסופיים (המכונה הלא דטרמיניסטית N היא מכונה **מכריעה**. ראו ההגדרה בעמוד 180 בספר), אז אפשר לממש חיפוש לעומק.

יש יתרון לחיפוש לעומק על פני חיפוש לרוחב, משום שחיפוש לרוחב הוא בזבזני במובן שבכל פעם שסורקים חלק של ענף בעץ הקונפיגורציות, מתחילים את הסריקה משורש העץ. (ראו שלבים 2 ו-3 במכונה D בעמוד 179 בספר).

תארו מכונה דטרמיניסטית $D_{\text{depth-first}}$ שתבצע חיפוש לעומק בעץ הקונפיגורציות של המכונה הלא דטרמיניסטית N .
הניחו ש- N היא מכונה מכריעה.
המכונה $D_{\text{depth-first}}$ צריכה להכריע את השפה שמכריעה המכונה N .
למכונה $D_{\text{depth-first}}$ יהיו שני סרטים (ולא שלושה כמו למכונה D).
 $D_{\text{depth-first}}$ לא תתחיל את הסריקה משורש העץ בכל פעם (כמו שעושה המכונה D).
רמת התיאור של $D_{\text{depth-first}}$ צריכה להיות כמו התיאור של המכונה D בעמוד 179.
הוסיפו הסברים מפורטים כיצד יתבצע כל שלב של $D_{\text{depth-first}}$, כמו ההסברים שמופיעים בספר בהוכחת משפט 3.16 ביחס למכונה D .

שאלה 6 (12%)

בנו מונה (enumerator) לשפה A של דוגמה 3.7.
האלפבית Σ של סרט הפלט יהיה $\{0\}$; האלפבית Γ של סרט העבודה יהיה $\{0, x, \sqcup\}$.
למונה יהיו לא יותר משמונה מצבים (כולל q_{print} ו- q_{halt}).
תארו את המונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{halt} וכל הקשתות שנכנסות אליו. אפשר לוותר על הציור של מעברים בלתי אפשריים).
להגדרה פורמלית של מונה, עיינו במדריך הלמידה.
הסבירו היטב את פעולת המונה ולמה הוא אכן מונה את השפה A .

שאלה 7 (12%)

- א. בעיה 3.15 בספר סעיף c.
 - ב. בעיה 3.16 בספר סעיף c.
- הגדרת הפעולה כוכב מופיעה בספר בהגדרה 1.23 (עמוד 44).

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר

מספר השאלות: 7 משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: 2016 מועד אחרון להגשה: 15 אפר' 16

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (14%)

הוכיחו, בדרך שונה מן ההוכחה המופיעה בספר, שהשפה E_{DFA} המוגדרת בעמוד 196 בספר היא שפה כריעה. ההוכחה החדשה תתבסס על היותה של השפה A_{DFA} (מעמוד 194 בספר) שפה כריעה. (במקום האלגוריתם המוצע בהוכחת משפט 4.4 בספר, הציעו אלגוריתם שיריץ את האלגוריתם להכרעת A_{DFA} על מספר סופי של קלטים, ולפי תוצאות ההרצות הללו יקבע את השייכות ל- E_{DFA}). תארו את המכונה המתאימה להוכחה שלכם, והוכיחו את נכונות האלגוריתם שלפיו בניתם את המכונה.

שאלה 2 (16%)

נניח שנחליף בהוכחת משפט 4.11 את שלב 1 בתיאור של המכונה D באחת האפשרויות הבאות. קבעו ביחס לכל אחת מהן האם ההוכחה עדיין טובה או לא, והסבירו היטב את תשובתכם.

א. הרץ את H על $\langle M, \langle M^+ \rangle \rangle$ כאשר M^+ היא המכונה הבאה אחרי M (בסדר הסטנדרטי של תיאורי המכונות).

ב. הרץ את H על $\langle M^+, \langle M \rangle \rangle$ כאשר M^+ היא המכונה הבאה אחרי M (בסדר הסטנדרטי של תיאורי המכונות).

שאלה 3 (14%)

נתונה השפה K הבאה: $K = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ accepts } \langle M \rangle \}$

א. הוכיחו ש- K היא שפה מזוהה-טיורינג.

ב. הוכיחו בעזרת שיטת האלכסון ש- K איננה כריעה.

שאלה 4 (14%)

הציגו רדוקציה של $HALT_{TM}$ ל- E_{TM} .
(השפות הללו מוגדרות בעמודים 216 ו-217 בספר).

שאלה 5 (14%)

נגדיר את השפה $FIVE_{LBA}$:

$$FIVE_{LBA} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is an LBA, } |L(M)| = 5 \}$$

(זוהי שפת התיאורים של אוטומטים חסומים ליניארית שהשפה שהם מזהים מכילה בדיוק 5 מילים).

האם השפה $FIVE_{LBA}$ היא שפה **כריעה**? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 6 (18%)

ביחס לכל אחת מן השפות הבאות, קבעו האם אפשר להוכיח שהיא לא **כריעה בעזרת משפט Rice** (ראו בעיה 5.16 בספר) או לא.

אם קבעתם שאפשר, כתבו את ההוכחה. אם קבעתם שאי אפשר, הסבירו היטב למה אי אפשר.

א. $A = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is a TM and } |L(M)| = 5 \}$

(A היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג שמקבלות בדיוק 5 מילים).

ב. $B = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is a TM and there exists a string } w \text{ that } M \text{ accepts after exactly } |w| \text{ steps} \}$

(B היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג שיש מילה w שמתקבלת על-ידי המכונה לאחר

בדיוק $|w|$ צעדים).

ג. $REGULAR_{TM}$ (השפה מוגדרת בספר בעמוד 218).

שאלה 7 (20%)

השפה ALL_{TM} מוגדרת בבעיה 5.18 (סעיף c) בספר (עמוד 240).

א. הציגו רדוקציה מיפוי של A_{TM} ל- ALL_{TM} (הראו: $A_{TM} \leq_m ALL_{TM}$).

ב. הציגו רדוקציה מיפוי של A_{TM} ל- $\overline{ALL_{TM}}$ (הראו: $A_{TM} \leq_m \overline{ALL_{TM}}$).

הדרכה : אם מכונת טיורינג M לא מקבלת קלט w , אז לכל מספר של צעדים שמריצים את M

על w לא מגיעים למצב המקבל.

מכונת טיורינג R יכולה להתייחס לקלט שלה כאל מספר הצעדים שיש להריץ מכונה אחרת S .

(למשל, אם הקלט של R הוא v , אז R תריץ את S $|v|$ צעדים).

ג. האם יש רדוקציה מיפוי של ALL_{TM} ל- A_{TM} ? (האם $ALL_{TM} \leq_m A_{TM}$?) הוכיחו את תשובתכם.

ד. האם יש רדוקציה מיפוי של $\overline{ALL_{TM}}$ ל- A_{TM} ? (האם $\overline{ALL_{TM}} \leq_m A_{TM}$?) הוכיחו את תשובתכם.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

משקל המטלה: 8 נקודות

מספר השאלות: 8

מועד אחרון להגשה: 13 מאי 16

סמסטר: 2016

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (12%)

שפה A נקראת **co-finite** אם השפה המשלימה שלה (\bar{A}) היא שפה סופית.

א. הוכיחו: אם A היא שפה co-finite, אז A שייכת ל- $TIME(1)$ (במכונה עם סרט אחד).

ב. תנו דוגמה לשפה **אינסופית** B שגם המשלימה שלה (\bar{B}) היא שפה **אינסופית**, ו- B שייכת ל- $TIME(1)$ (במכונה עם סרט אחד).

ג. תנו דוגמה לשפה **רגולרית** C שלא שייכת ל- $TIME(1)$. הוכיחו ש- C לא שייכת ל- $TIME(1)$.

שאלה 2 (10%)

הוכיחו שהשפות הבאות שייכות למחלקה P :

א. $FINITE_{DFA} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is a DFA and } L(M) \text{ is a finite language} \}$

ב. $7\text{-VERTEX-COVER} = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ is an undirected graph that has a 7-node vertex cover} \}$

שאלה 3 (14%)

א. הציעו מאמת (verifier) לשפה $\overline{EQ_{CFG}}$ (ראו תרגיל 5.1 בספר).

ב. הסבירו מדוע המאמת שהצעתם איננו בהכרח בעל זמן ריצה פולינומיאלי בגודל הקלט.

ג. הוכיחו: $\overline{EQ_{CFG}}$ לא שייכת ל-NP.

שאלה 4 (14%)

נענין בשפה C הבאה :

$$C = \{ \langle p, n \rangle \mid p \text{ and } n \text{ are natural numbers and there is no prime number in the range } [p, p+n] \}$$

א. פרופסור מכובד הציע את ההוכחה הבאה לכך שהשפה C שייכת למחלקה NP :

לכל מילה $\langle p, n \rangle$ ששייכת ל- C יש אישור שמוכיח את השייכות שלה לשפה : האישור

מורכב ממחלק לא טריוויאלי לכל אחד מן המספרים בתחום $[p, p+n]$.

האם ההוכחה של הפרופסור טובה? **הסבירו היטב** את תשובתכם.

ב. הוכיחו שהשפה **המשלימה** לשפה C שייכת למחלקה NP.

ג. אם יוכח ש- $P = NP$, האם אפשר יהיה להסיק ש- C שייכת ל-NP?

הצדיקו היטב את תשובתכם.

ד. אם יוכח ש- $P \neq NP$, האם אפשר יהיה להסיק ש- C לא שייכת ל-NP?

הצדיקו היטב את תשובתכם.

שאלה 5 (12%)

נגדיר פונקציה מהצבות של ערכי אמת לקבוצה של משתנים בוליאניים לפסוקים בצורת 3CNF :

הפונקציה מקבלת הצבה של ערכי אמת לקבוצה של משתנים בוליאניים x_1, x_2, \dots, x_n , $n \geq 3$,

(כלומר, קביעת ערך 0 או 1 לכל אחד מן המשתנים הבוליאניים).

הפונקציה מחזירה פסוק (נוסחה בוליאנית) בצורת 3CNF שמקיים את כל התנאים הבאים :

- בפסוק מופיעים רק המשתנים x_1, x_2, \dots, x_n
- בכל פסוקית (clause) של הפסוק יש בדיוק שלושה ליטרלים
- שלושת הליטרלים בכל פסוקית הם **של משתנים שונים** (אין ליטרלים כפולים בפסוקית, ובאף פסוקית לא מופיעים ליטרלים משלימים זה לזה)
- הפסוק ספיק (יש לו הצבה שבה הערך של הפסוק הוא 1)
- ההצבה היחידה שמספקת את הפסוק היא ההצבה שאותה הפונקציה קיבלה כקלט

הוכיחו : הפונקציה הזו **ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי** בגודל הקלט.

שאלה 6 (15%)

- $CNF-SAT$ היא שפת הנוסחאות הבוליאניות הספיקות ב- CNF . מהוכחת מסקנה 7.42 בספר נובע שזו שפה NP -שלמה.
- א. בהוכחת משפט 7.32 מראים רדוקציה בזמן פולינומיאלי של $3SAT$ ל- $CLIQUE$. האם אפשר להראות באופן דומה רדוקציה של $CNF-SAT$ ל- $CLIQUE$? הוכיחו את תשובתכם. (כלומר, האם ההצטמצמות לנוסחאות ב- $3CNF$ נדרשת לצורך הרדוקציה?)
- ב. בהוכחת משפט 7.46 מראים רדוקציה בזמן פולינומיאלי של $3SAT$ ל- $HAMPATH$. האם אפשר להראות באופן דומה רדוקציה של $CNF-SAT$ ל- $HAMPATH$? הוכיחו את תשובתכם.
- ג. בהוכחת משפט 7.56 מראים רדוקציה בזמן פולינומיאלי של $3SAT$ ל- $SUBSETSUM$. האם אפשר להראות באופן דומה רדוקציה של $CNF-SAT$ ל- $SUBSETSUM$? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 7 (8%)

- הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של $VERTEX-COVER$ ל- $CLIQUE$.
($VERTEX-COVER \leq_p CLIQUE$)

שאלה 8 (15%)

- בעיית קיומו של מסלול המילטון בגרף מכון G ($EHAMPATH$) היא הבעיה הבאה:
הקלט: גרף מכון $G = (V, E)$
השאלה: האם יש ב- G מסלול המילטון (מסלול שמכיל כל צומת בגרף פעם אחת ויחידה).
- א. הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של $HAMPATH$ ל- $EHAMPATH$.
 $HAMPATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid G \text{ is a directed graph with a Hamiltonian path from } s \text{ to } t \}$
 $EHAMPATH = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ is a directed graph that contains a Hamiltonian path} \}$
עליכם להראות פונקציה חשיבה בזמן פולינומיאלי שעל קלט מהצורה $\langle G, s, t \rangle$ היא מחזירה תיאור של גרף מכון $\langle H \rangle$ ומתקיים: $\langle G, s, t \rangle \in HAMPATH \Leftrightarrow \langle H \rangle \in EHAMPATH$.
- ב. הוכיחו: $EHAMPATH$ היא בעיה NP -שלמה.
- ג. הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של $HAMPATH$ ל- $EHAMPATH$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 3 יוני 16

סמסטר: 2016ב

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

הוכיחו שהשפה $SUBSET-SUM$ שייכת ל- $SPACE(n)$.
הציגו אלגוריתם להכרעת השפה, הסבירו היטב כיצד הוא ימומש, והוכיחו שהמקום הדרוש הוא $O(n)$.

שאלה 2 (10%)

הוכיחו: אם A היא שפה רגולרית, אז $A \in SPACE(1)$.

שאלה 3 (15%)

בהגדרה של שפות $PSPACE$ -שלמות (הגדרה 8.8) משתמשים ברדוקציות **זמן** פולינומיאלי (סעיף 2 בהגדרה).
הראו שאם נשתמש ברדוקציות **מקום** פולינומיאלי (כלומר, כל A ב- $PSPACE$ ניתנת לרדוקציה **במקום** פולינומיאלי ל- B), אז SAT תהיה בעיה $PSPACE$ -שלמה.
הדרכה: SAT היא רק דוגמה.

שאלה 4 (25%)

בעיה 8.11 בספר (עמוד 358).
כל אחת מן השפות, הסבירו היטב את אופן פעולתה של מכונה שמשמשת במקום לוגריתמי בגודל הקלט ומכריעה את השפה.

שאלה 5 (15%)

הוכיחו: $CLIQUE \leq_L VERTEX-COVER$.

($CLIQUE$ הוגדרה לפני משפט 7.24 ; $VERTEX-COVER$ הוגדרה לפני משפט 7.44).

עליכם לתאר את הרדוקציה, להוכיח שהיא תקפה, ולהוכיח בפירוט שהיא יכולה להתבצע במקום לוגריתמי.

שאלה 6 (25%)

הבעיה E_{DFA} הוגדרה בספר לפני משפט 4.4.

הוכיחו: $\overline{E_{DFA}}$ היא שפה NL-שלמה.

הדרכה: הראו שהיא שייכת ל-NL, והראו כי $PATH \leq_L \overline{E_{DFA}}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: סעיפים 9.1, 10.1 ו-10.2 בספר

מספר השאלות: 7 משקל המטלה: 6 נקודות

מועד אחרון להגשה: 24 יוני 16

סמסטר: 2016ב

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20%)

א. יהי k מספר טבעי. מה יקרה כאשר נריץ את המכונה D מהוכחת משפט 9.3 על הקלט $\langle D \rangle^{10^k}$?
(כלומר, מריצים את המכונה D על התיאור שלה שאחריו רשומה המחרוזת 10^k).
הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. מה יקרה כאשר נריץ את המכונה D מהוכחת משפט 9.10 על הקלט $\langle D \rangle^{10^k}$?
הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 2 (8%)

האם ממה שנלמד בסעיף 9.1 בספר אפשר להסיק שכל שפה PSPACE-שלמה איננה שייכת ל-NL?
הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 3 (14%)

הוכיחו: $NP \neq SPACE(n)$.

שאלה 4 (10%)

- עיינו באלגוריתם A בעמוד 394 בספר הלימוד.
- כזכור, הוכח שאלגוריתם זה הוא בעל יחס קירוב $2 \geq$.
- הוכיחו שיחס הקירוב 2 הוא **הדוק** ביחס לאלגוריתם A (כלומר, יחס הקירוב $2 \leq$):
- הראו שלכל n טבעי גדול מ-0, יש גרף לא מכוון $G = (V, E)$ כך שמתקיים:
- $|V| = 2n$ (בגרף G יש $2n$ קדקודים);
 - יש תת-קבוצה U של V ($U \subseteq V$) המהווה כיסוי קדקודים מינימלי ו- $|U| = n$;
 - (יש בגרף כיסוי קדקודים מינימלי שגודלו n);
 - האלגוריתם A ימצא כיסוי שגודלו $2n$.

שאלה 5 (20%)

- לימדו את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה.
- הניחו שמחירי הקשתות בבעיית הסוכן הנוסע הם **חיוביים**.
- א. הוכיחו שעלות המסלול של הסוכן הנוסע שמוצא אלגוריתם הקירוב לבעיית הסוכן הנוסע המטריית **קטנה** מפעמיים עלות המסלול האופטימלי.
- הדרכה**: אם מורידים קשת אחת ממעגל המילטוני, מקבלים עץ פורש של הגרף.
- ב. כזכור, הוכח שאלגוריתם זה הוא בעל יחס קירוב $2 \geq$.
- הוכיחו שיחס הקירוב 2 הוא **הדוק** ביחס לאלגוריתם (כלומר, אי אפשר להצביע על חסם קטן יותר).
- הדרכה**: לכל n אי-זוגי גדול מ-5, התבוננו בגרף מלא בעל n צמתים, x_1, x_2, \dots, x_n , שהמחירים של הקשתות שלו הם כדלקמן: המחיר של כל קשת שנוגעת ב- x_1 הוא 1; המחיר של כל הקשתות מהצורה (x_i, x_{i+1}) הוא 1; המחיר של כל שאר הקשתות הוא 2.
- הוכיחו שבגרף זה מתקיים אי-שוויון המשולש.
- הוכיחו שהקירוב שהאלגוריתם משיג על גרף כזה הוא $2 - 2/n$.
- הסיקו את התוצאה הנדרשת.

שאלה 6 (8%)

- יהי p מספר ראשוני.
- א. הוכיחו **בעזרת אינדוקציה**, שלכל a טבעי או 0, $a^p \equiv a \pmod{p}$.
- ב. הסיקו את המשפט הקטן של פרמה (משפט 10.6) ממה שהוכחתם בסעיף א.

שאלה 7 (20%)

א. הוכיחו: אם $P = NP$, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיה הבאה:

הקלט: נוסחה בוליאנית ϕ .

הפלט: השמה מספקת של ϕ אם ϕ ספיקה. אם ϕ לא ספיקה, יוחזר "לא".

(האלגוריתם מקבל כקלט נוסחה בוליאנית ϕ . אם אין ל- ϕ השמה מספקת, מוחזר "לא". אם

יש ל- ϕ השמה מספקת, מוחזרת אחת ההשמות המספקות של ϕ . כלומר, מוחזרת הצבה של 0-

ים ו-1-ם למשתנים של ϕ כך שהערך של ϕ בהצבה הזו הוא 1).

הדרכה: אם $P = NP$, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי ל-SAT.

אפשר לקרוא לאלגוריתם הזה כמה פעמים כדי למצוא הצבה למשתנים של ϕ שתספק את ϕ .

ב. בעיה 10.11 בספר (עמוד 439).

הדרכה: התאימו את מה שהראיתם בסעיף א.