פתרונות לממ"ח 02 - 2020ב - 20425

1. המאורע $\{X=4\}$ מתרחש אם צבע 3 הקלפים הראשונים זהה, אך שונה מצבע הקלף הרביעי. לפיכך:

$$P\{X=4\}=\frac{20\cdot 4\cdot 3\cdot 15}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}=\frac{10}{323}$$

2. כאשר הבחירה נעשית ללא החזרה, הערכים האפשריים של X הם 2, 3, 4, 5 ו-6.

ההסתברויות לקבלת ערכים אלו הן:

$$P\{X=2\}=\frac{20\cdot 15}{20\cdot 19}=\frac{15}{19}=\frac{3,060}{3,876}=0.7895$$

$$P\{X=3\}=\frac{20\cdot 4\cdot 15}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{10}{57}=\frac{680}{3,876}=0.1754$$

$$P\{X=4\}=\frac{20\cdot 4\cdot 3\cdot 15}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}=\frac{10}{323}=\frac{120}{3,876}=0.03096$$

$$P\{X=5\}=\frac{20\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 15}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}=\frac{5}{1,292}=\frac{15}{3,876}=0.0039$$

$$P\{X=6\}=\frac{20\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}=\frac{1}{3,876}=0.00026$$

והשונות של X היא:

$$E[X]=(2\cdot 3,060+3\cdot 680+4\cdot 120+5\cdot 15+6\cdot 1)\cdot\tfrac{1}{3,876}=\tfrac{8,721}{3,876}=2.25$$

$$E[X^2]=(2^2\cdot 3,060+3^2\cdot 680+4^2\cdot 120+5^2\cdot 15+6^2\cdot 1)\cdot\tfrac{1}{3,876}=\tfrac{20,691}{3,876}=5.3382$$

$$\text{Var}(X)=E[X]-(E[X])^2=5.3382-2.25^2=0.2757$$

3. כאשר הבחירה נעשית עם החזרה, הערכים האפשריים של X הם 2, 3, ... , והתפלגותו היא הזזה ב-1 של התפלגות גיאומטרית עם הסתברות $\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$ להצלחה. כלומר, אם Y הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר $\frac{3}{4}$, אז מתקיים $X=Y+1$. לפיכך, פונקציית ההסתברות של X היא:

$$P\{X=i\}=P\{Y+1=i\}=P\{Y=i-1\}=\left(\tfrac{1}{4}\right)^{i-2}\cdot\tfrac{3}{4}\qquad,\qquad i=2,3,\ldots$$

ומתקיים:

$$P\{X=4\}=P\{Y=3\}=\left(\tfrac{1}{4}\right)^{2}\cdot\tfrac{3}{4}=\tfrac{3}{64}$$

4. בהמשך לאמור בפתרון השאלה הקודמת, השונות של המשתנה המקרי X היא:

$$\text{Var}(X)=\text{Var}(Y+1)=\text{Var}(Y)=\frac{\frac{1}{4}}{(\frac{3}{4})^2}=\frac{4}{9}$$

5. מספר המופעים במרווח-זמן שאורכו 5 דקות הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $\frac{24}{12}=2$.

לכן, ההסתברות שיתרחשו לפחות 2 מופעים של המאורע במרווח-זמן זה היא:

$$1-e^{-2}\cdot\frac{2^0}{0!}-e^{-2}\cdot\frac{2^1}{1!}=1-3e^{-2}=0.594$$

6. אם ידוע במשך 5 דקות התרחשו לפחות 2 מופעים של המאורע, אז הערכים האפשריים של i הם כל השלמים שגדולים או שווים ל- 2. נסמן ב- X את מספר המופעים שמתרחשים ב-5 דקות אלו, ונקבל את ההסתברות המבוקשת:

$$P\{X=i \mid X\geq 2\}=\frac{P\{X=i\}}{P\{X\geq 2\}}=\frac{e^{-2}\cdot\frac{2^i}{i!}}{1-\left(e^{-2}\cdot\frac{2^0}{0!}+e^{-2}\cdot\frac{2^1}{1!}\right)}=\frac{2^i}{(e^2-3)i!}\qquad,\qquad i=2,3,\ldots$$

7. נסמן ב-A את המאורע שבמשך שעה אחת מתרחשים בדיוק 20 מופעים וב-A_i את המאורע שברבע השעה ה-i-ית מתרחשים בדיוק 5 מופעים (מתוך ה-20), לכל $i = 1,2,3,4$. לפי ההנחות של תהליך פואסון, מספר המופעים בכל רבע שעה נתונה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 6 ואין תלות בין ה-A_i-ים. לפיכך, מתקיים:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4 \mid A)=\frac{P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)}{P(A)}=\frac{P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)}{P(A)}$$
$$=\frac{\left(e^{-6}\cdot\frac{6^5}{5!}\right)^4}{e^{-24}\cdot\frac{24^{20}}{20!}}=\frac{0.1606^4}{0.06238}=0.010671$$

8. המאורע $\{X = 3\}$ מתרחש אם נוצרים 3 זוגות של גברים, ולכן, 2 זוגות מעורבים ו- 3 זוגות של נשים. הואיל ואין הבדל בין זוגות בעלי הרכב דומה, יש $\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}/3!$ אפשרויות לבחירת 3 זוגות של גברים (נשים). את 2 הגברים ואת 2 הנשים, שנותרים מחוץ לזוגות אלו, אפשר לחלק לזוגות "מעורבים" ב-!2 אופנים.

לפיכך:
$$P\{X=3\}=\frac{\left[\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}/3!\right]^2\cdot 2!}{\binom{16}{2,\ldots,2}/8!}=\frac{352{,}800}{2{,}027{,}025}=0.174$$

9. הערכים האפשריים של המשתנה המקרי X , המוגדר בסעיף זה, הם 0, 1, ..., 4.
נחשב את ההסתברויות לקבלת כל אחד מערכים אלו:

$$P\{X=0\}=\frac{8!}{\binom{16}{2,\ldots,2}/8!}=\frac{40{,}320}{2{,}027{,}025}$$
[כל 8 הזוגות מעורבים]

$$P\{X=1\}=\frac{\binom{8}{2}^2\cdot 6!}{\binom{16}{2,\ldots,2}/8!}=\frac{564{,}480}{2{,}027{,}025}$$
[יש 6 זוגות מעורבים, זוג גברים וזוג נשים]

$$P\{X=2\}=\frac{\left[\binom{8}{2}\binom{6}{2}/2\right]^2\cdot 4!}{\binom{16}{2,\ldots,2}/8!}=\frac{1{,}058{,}400}{2{,}027{,}025}$$
[יש 4 זוגות מעורבים, 2 זוגות גברים ו-2 זוגות נשים]

$$P\{X=3\}=\frac{\left[\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}/3!\right]^2\cdot 2!}{\binom{16}{2,\ldots,2}/8!}=\frac{352{,}800}{2{,}027{,}025}$$
[יש 2 זוגות מעורבים, 3 זוגות גברים ו-3 זוגות נשים]

$$P\{X=4\}=\frac{\left[\binom{8}{2,2,2,2}/4!\right]^2}{\binom{16}{2,\ldots,2}/8!}=\frac{11{,}025}{2{,}027{,}025}$$
[יש 4 זוגות גברים ו-4 זוגות נשים]

לפיכך, התוחלת של המשתנה המקרי X היא:

$$E[X]=\frac{0\cdot 40{,}320+1\cdot 564{,}480+2\cdot 1{,}058{,}400+3\cdot 352{,}800+4\cdot 11{,}025}{2{,}027{,}025}=1.8\bar{6}$$

10. שמונת הזוגות בלתי-תלויים זה בזה, וכל אחד מהם עומד במשימה בהסתברות 0.8, לכן, מספר הזוגות שמבצעים את המשימה בהצלחה הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 8 ו- 0.8. נסמן משתנה מקרי בינומי זה ב-Y ונקבל כי:

$$E[Y] = 8 \cdot 0.8 = 6.4 \qquad ; \qquad \text{Var}(Y) = 8 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 1.28$$

11. בסימוני הסעיף הקודם, נקבל כי מספר האנשים, שמבצעים את המשימה בהצלחה, כפול ממספר הזוגות שמבצעים אותה בהצלחה. לכן, המשתנה המקרי שאת תוחלת ושונותו עלינו לחשב הוא $2Y$. ומכאן שמתקיים:

$$E[2Y] = 2E[Y] = 2 \cdot 6.4 = 12.8 \qquad ; \qquad \text{Var}(2Y) = 2^2\text{Var}(Y) = 4 \cdot 1.28 = 5.12$$

12. אם Y מסמן את מספר הזוגות, שמבצעים את המשימה בהצלחה, אז $8 - Y$ מהזוגות נכשלים בביצוע המשימה, והסכום הכולל שיש בידי הקבוצה בתום ביצוע המשימות הוא:

$$200 \cdot Y + 50(8 - Y) = 150Y + 400$$

תוחלת הסכום הכולל היא: $E[150Y + 400] = 150E[Y] + 400 = 150 \cdot 6.4 + 400 = 1{,}360$

והשונות: $\text{Var}(150Y + 400) = 150^2\,\text{Var}(Y) = 150^2 \cdot 1.25 = 28{,}800$

13. סכום 20 ההסתברויות של ערכי המשתנה המקרי X הוא 1, לפיכך:

$$\sum_{i=1}^{20} P\{X = i\} = \sum_{i=1}^{20} ci^2 = c \cdot \tfrac{20\cdot 21\cdot 41}{6} = 2{,}870c \qquad \Rightarrow \qquad c = \tfrac{1}{2{,}870}$$

14. נסמן ב-W את המאורע שמשתתף אקראי בהגרלה זוכה בפרס וב-A_i את המאורע שמספר המשתתפים בהגרלה הוא i, לכל $i = 1,2,\ldots,20$. מנוסחת ההסתברות השלמה נקבל כי:

$$P(W) = \sum_{i=1}^{20} P(W \mid A_i)P(A_i) = \sum_{i=1}^{20} \frac{1}{i} \cdot \frac{i^2}{2{,}870} = \sum_{i=1}^{20} \frac{i}{2{,}870} = \frac{20 \cdot 21}{2 \cdot 2{,}870} = \frac{3}{41} = 0.0732$$

15. מספר הפעמים שאדם כלשהו ישתתף בהגרלות עד שיזכה באחת מהן לראשונה הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר $p = \frac{3}{41}$ (ההסתברות חושבה בשאלה קודמת), שנסמנו ב-Y.

לפיכך: $\sigma(Y) = \sqrt{\text{Var}(Y)} = \sqrt{\dfrac{1 - \frac{3}{41}}{\left(\frac{3}{41}\right)^2}} = \sqrt{\dfrac{1{,}558}{9}} = \sqrt{173.\bar{1}} = 13.157$

16. $$E[2^X] = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i \cdot e^{-3} \cdot \tfrac{3^i}{i!} = e^{-3}\sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{6^i}{i!} = e^{-3} \cdot e^6 = e^3$$

$$E[2^{2X}] = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{2i} \cdot e^{-3} \cdot \tfrac{3^i}{i!} = e^{-3}\sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{12^i}{i!} = e^{-3} \cdot e^{12} = e^9$$

$$\text{Var}(2^X) = E[2^{2X}] - (E[2^X])^2 = e^9 - e^6$$

17. $$E[2^X] = \sum_{i=0}^{200} 2^i \cdot \binom{200}{i}\left(\tfrac{1}{9}\right)^i\left(\tfrac{8}{9}\right)^{200-i} = \sum_{i=0}^{200} \binom{200}{i}\left(\tfrac{2}{9}\right)^i\left(\tfrac{8}{9}\right)^{200-i} \underset{\text{נוסחת הבינום}}{=} \left(\tfrac{2}{9} + \tfrac{8}{9}\right)^{200} = \left(\tfrac{10}{9}\right)^{200}$$

לפיכך: $E[2^{X+3}] = E[2^3 \cdot 2^X] = 2^3 E[2^X] = 8\left(\tfrac{10}{9}\right)^{200}$

18. ההסתברות שבשקית תהיה לפחות סוכרייה סגולה אחת היא: $1-\left(\frac{7}{8}\right)^5=0.4871$

נסמן ב- X את מספר השקיות שפותחים עד למציאת 3 שקיות שיש בהם לפחות סוכרייה סגולה אחת.
ההתפלגות של המשתנה המקרי X היא בינומית-שלילית עם הפרמטרים 3 ו- 0.4871.

לכן: $P\{X=13\}=\binom{12}{2}\cdot 0.4871^3\cdot 0.5129^{10}=0.0096$

19. מספר השקיות מחנות A, שהחברה של שגית קיבלה, הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N=20$, $m=15$ ו- $n=7$. נסמן את המשתנה המקרי הזה ב- Y ונקבל:

$$\mathrm{Var}(Y)=7\cdot\frac{15}{20}\cdot\frac{5}{20}\cdot\frac{20-7}{20-1}=0.8980$$

20. ההסתברות שבשקית מקרית תהיינה רק סוכריות אדומות היא: $\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$

מספר השקיות (מתוך 1,000) שיש בהן רק סוכריות אדומות הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $n=1{,}000$ ו- $p=1/243$. לפיכך, נוכל להשתמש בקירוב פואסוני, כאשר $\lambda=1{,}000/243=4.115$, ולקבל כי ההסתברות המקורבת שתהיינה בדיוק 5 שקיות שבהן רק סוכריות אדומות היא:

$$e^{-4.115}\cdot\frac{4.115^5}{5!}=0.1605$$