פתרון שאלות בממ"ן 13 סמסטר 2014א

שאלה 2

א. נציע את האלגוריתם הבא להכרעת השפה A_{NFA}:

"על קלט $<A, w>$ כאשר A הוא אוטומט סופי לא דטרמיניסטי ו-w מילה:

1. סמן את המצב ההתחלתי של A.
2. תהי $w = w_1 w_2 \cdots w_k$. ל-i מ-1 עד k:
3. לכל מצב מסומן q, סמן את כל המצבים שאפשר להגיע אליהם מ-q על-ידי קריאת w_i.
   אם אין אפשרות להגיע ל-q עצמו ממצב מסומן על-ידי קריאת w_i, הסר את הסימון מ-q.
4. בדוק האם יש מצב מקבל בקבוצת המצבים המסומנים. אם כן, קבל. אם לא, דחה."

הרעיון: לכל תחילית v של w, לאחר קריאת v, מסומנת קבוצת המצבים שבהם האוטומט יכול להימצא לאחר שהוא קרא את v.

לאחר שהסתיימה קריאת w כולה, בודקים האם בקבוצת המצבים המסומנים כרגע (המצבים שבהם האוטומט יכול להימצא לאחר קריאת w כולה) יש מצב מקבל. אם כן, יש מסלול חישוב על w שמסתיים במצב מקבל. אם לא, אין מסלול חישוב כזה.

זמן הריצה: שלב 1 - פולינומיאלי; שלב 3 מתבצע $|w|$ פעמים. זמן הריצה של כל פעם פולינומיאלי; שלב 4 - פולינומיאלי.

ב. נבצע את השינויים הבאים באלגוריתם D מהוכחת משפט 7.16. שינויים אלה יהפכו את האלגוריתם לכזה שמתאים לשפה שבשאלה. זמן הריצה יישאר $O(n^3)$.

הרעיון: בכל כניסה בטבלה שומרים לכל משתנה את מספר האפשרויות לגזור ממנו את התת-מילה שמתאימה לכניסה הזו בטבלה. (לשם פשטות נניח שבכל כניסה בטבלה יש משתנה מטיפוס שלם לכל משתנה של הדקדוק).

- הקלט לאלגוריתם יהיה גם המילה w וגם הדקדוק G (הנתון בצורה הנורמלית של חומסקי).
- שלב 1: If $w = \varepsilon$ *reject*.
- לפני שלב 2 משימים בכל אחת מן הכניסות בטבלה 0 לכל משתנה A של הדקדוק.
- שלב 5: If so, replace 0 by 1 for A in *table*(i, i).
- שלב 11: If in *table*(i, k) B>0 and in *table*$(k+1, j)$ C>0, then in table(i, j) set $A = A+B \cdot C$
- שלב 12: If in *table*$(1, n)$ S>1, *accept*. Otherwise, *reject*.

שאלה 4

א. לכל מילה $<G, H>$ השייכת לשפה $\overline{EQ_{\text{CFG}}}$ (G ו-H הם דקדוקים חסרי הקשר שהשפות שהם יוצרים שונות), יש מילה c ששייכת לשפה של אחד הדקדוקים, ולא שייכת לשפה של הדקדוק השני.

המאמת V מקבל כקלט שלשה $<G, H, c>$, ובודק (בעזרת האלגוריתם להכרעת A_{CFG}) האם המילה c נוצרת על-ידי הדקדוק G ולא נוצרת על-ידי הדקדוק H, או נוצרת על-ידי הדקדוק H ולא נוצרת על-ידי הדקדוק G. אם כן, הוא מקבל; אחרת, הוא דוחה.

$$\overline{EQ_{\text{CFG}}} = \{<G, H> \mid V \text{ accepts } <G, H, c> \text{ for some string } c\}$$

ב. אי אפשר לחסום את גודל המילה c שמוכיחה את השייכות של $<G, H>$ ל- $\overline{EQ_{\text{CFG}}}$.

ג. EQ_{CFG} איננה כריעה. מכאן נובע שגם $\overline{EQ_{\text{CFG}}}$ איננה כריעה.

כל שפה ב-NP היא כריעה. לכן $\overline{EQ_{\text{CFG}}}$ לא שייכת ל-NP.

שאלה 5

א. ההוכחה של הפרופסור איננה טובה, משום שגודל האישור איננו מוגבל על-ידי פולינום בגודל הקלט. גודל הקלט הוא $O(\log p + \log n)$. גודל האישור הוא לפחות n.

ב. אישור שייכות לשפה המשלימה של C יכול להיות מספר ראשוני בתחום $[p, p+n]$ + הוכחה לראשוניותו של מספר זה. גודל האישור פולינומיאלי בגודל הקלט.

ג. אם יוכח ש- $\text{P} = \text{NP}$, אז השפה המשלימה של C שייכת ל-P (כי היא שייכת ל-NP). מכיוון ש-P סגורה למשלים, גם C שייכת ל-P, וממילא גם ל-NP.

ד. אם יוכח ש- $\text{P} \neq \text{NP}$, אי אפשר יהיה להסיק ש-C לא שייכת ל-NP.

ייתכן שגם המשלימה של C וגם C שייכות שתיהן ל-NP. (ייתכן אפילו ששתיהן שייכות ל-P).

שאלה 7 סעיף א

a. תהי σ השמת-$\neq$. בכל פסוקית יש ליטרל שערכו 1 ויש ליטרל שערכו 0.

אם נהפוך את הערך שנתנו לכל משתנה, יהיה בכל פסוקית ליטרל שערכו 0 וליטרל שערכו 1.

לכן גם זו השמת-$\neq$.

b. הרדוקציה המוצעת תקפה:

נניח שהנוסחה המקורית ספיקה. נוכיח שלנוסחה שנבנתה על-ידי הרדוקציה יש השמת-$\neq$:

לנוסחה המקורית יש השמה שבה לפחות אחד מתוך y_1, y_2, y_3 מקבל ערך 1.

נקבע ל-b ערך 0.

אם ל-y_1 או ל-y_2 נקבע ערך 1, אז נקבע ל-z_i ערך 0.

אם גם ל-y_1 וגם ל-y_2 נקבע ערך 0, אז בהכרח ל-y_3 נקבע ערך 1. במקרה זה נקבע ל-z_i ערך 1.

בכל מקרה יש לנוסחה שנבנתה השמת-$\neq$.

נניח שלנוסחה שנבנתה על-ידי הרדוקציה יש השמת-$\neq$, ונוכיח שהנוסחה המקורית ספיקה:

לפי מה שהראינו בסעיף a, אפשר להניח שבהשמת-$\neq$ של הנוסחה שנבנתה ערכו של b הוא 0.

אם ערכו של z_i הוא 0, אז אחד מתוך y_1, y_2 חייב לקבל ערך 1.

אם ערכו של z_i הוא 1, אז ערכו של y_3 חייב להיות 1.

בכל מקרה, לפחות אחד מתוך y_1, y_2, y_3 מקבל ערך 1. כלומר, הנוסחה המקורית ספיקה.

קל להראות שהרדוקציה המוצעת ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

c. הרדוקציה של סעיף b ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי. לכן $3SAT \leq_P \neq SAT$.

הוכיחו ש- $\neq SAT$ שייכת ל-NP ותקבלו ש- $\neq SAT$ היא NP-שלמה.

שאלה 8

א. הרדוקציה: על קלט $<G, s, t>$ לבעיית $UHAMPATH$, נבנה את הגרף H קלט לבעיית $UHAMCIRCUIT$:

H יכיל את כל הצמתים והקשתות של G. בנוסף יהיה ב-H צומת אחד נוסף v ושתי קשתות נוספות (v, s) ו-(t, v).

הרדוקציה תקפה: אם ב-G יש מסלול המילטון מ-s ל-t, אז ב-H יש מעגל המילטון שבנוי מן הקשתות של המסלול מ-s ל-t ומהקשתות (v, s) ו-(t, v).

אם ב-H יש מעגל המילטון, הוא כולל גם את הצומת v. v שייך בדיוק לשתי קשתות. לכן שתי הקשתות הללו חייבות להיות חלק מן המעגל. לכן יש מסלול המילטון מ-s ל-t.

הרדוקציה ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי: הוספנו צומת אחד ושתי קשתות.

ב. נותר להראות שהשפה שייכת ל-NP.

מסמך אישור קצר: רשימת הצמתים של מעגל המילטון לפי הסדר של המעגל.

מאמת יוכל לוודא בזמן פולנומיאלי שכל צומת של הגרף מופיע ברשימה פעם אחת ויחידה, ושיש קשת בגרף בין כל שני צמתים עוקבים ברשימה וגם בין הצומת האחרון ברשימה והצומת הראשון.