פתרונות לממ"ן 16 - 2012א - 20425

1. א. מספר העוברים ליד המכונה בין השעות 16:00 ל- 19:00 הוא סכום של שלושה משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים 100, 20 ו-20. לכן, התפלגות הסכום היא פואסונית עם הפרמטר $100 + 2\cdot 20 = 140$. כעת, מכיוון שכל אדם העובר ליד המכונה קונה ממנה ממתק בהסתברות 0.08, מספר הממתקים שנמכרים במרווח-הזמן הנתון הוא משתנה מקרי, שנסמנו ב-M, והתפלגותו פואסונית עם הפרמטר $140 \cdot 0.08 = 11.2$ (ראה דוגמה 2ב במדריך, עמוד 138). לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא:

$$P\{M = 12\} = e^{-11.2} \cdot \frac{11.2^{12}}{12!} = 0.11122$$

ב. נסמן ב-M_1 את מספר הממתקים שנמכרים בין השעה 16:00 לשעה 17:00 וב-M_2 את מספר הממתקים שנמכרים בין השעה 17:00 לשעה 19:00. המשתנים המקריים M_1 ו-M_2 בלתי-תלויים זה בזה, למשתנה המקרי M_1 יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 8 ולמשתנה המקרי M_2 יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 3.2. לכן, לפי הטענה המופיעה בדוגמה 4ב במדריך הלמידה (עמודים 145-146), ההתפלגות המותנית של המשתנה המקרי M_1 בהינתן $M = 12$, כאשר M הוא המשתנה המקרי שהוגדר בסעיף הקודם, היא בינומית עם הפרמטרים 12 ו- $\frac{8}{11.2}$. לפיכך:

$$P\{M_1 = 12 \mid M = 12\} = \left(\frac{8}{11.2}\right)^{12} = 0.01764$$

אפשר גם לחשב את ההסתברות המבוקשת באופן ישיר. מקבלים:

$$P\{M_1 = 12 \mid M = 12\} = \frac{P\{M_1 = 12 \mid M = 12\}}{P\{M = 12\}} = \frac{P\{M_1 = 12, M_2 = 0\}}{P\{M = 12\}}$$

$$= \frac{e^{-8} \cdot \frac{8^{12}}{12!} \cdot e^{-3.2} \cdot \frac{3.2^0}{0!}}{e^{-11.2} \cdot \frac{11.2^{12}}{12!}} = 0.01764$$

ג. נסמן ב-X_1 את מספר הממתקים שנמכרים בין השעות 17:00 ל- 18:00, ב-X_2 את מספר הממתקים שנמכרים בין השעות 18:00 ל- 19:00 וב-X_3 את מספר הממתקים שנמכרים בין השעות 19:00 ל- 20:00. למשתנה המקרי X_i, לכל $i = 1,2,3$, יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 1.6 ואילו לסכום ה-X_i-ים יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 4.8. לכן:

$$P\left\{X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 2 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{3} X_i = 6\right\} = \frac{P\{X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 2\}}{P\left\{\sum_{i=1}^{3} X_i = 6\right\}}$$

[כי ה-X_i-ים בלתי-תלויים]

$$= \frac{P\{X_1 = 2\}P\{X_2 = 2\}P\{X_3 = 2\}}{P\left\{\sum_{i=1}^{3} X_i = 6\right\}}$$

[כי ה-X_i-ים שווי-התפלגות]

$$= \frac{\left(e^{-1.6} \cdot \frac{1.6^2}{2!}\right)^3}{e^{-4.8} \cdot \frac{4.8^6}{6!}} = \frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} \cdot \left(\frac{1.6}{4.8}\right)^6$$

$$= \frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 0.12346$$

הערה: נשים לב לכך, שקיבלנו כי ההתפלגות המשותפת המותנית של ה-X_i-ים בהינתן סכומם היא התפלגות מולטינומית עם הפרמטרים 6 ו- $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

2. א. נתון כי X_1 ו- X_2 הם משתנים מקריים בלתי-תלויים, ולכן :

$$P\{X_1=i\,,X_2=j\}=P\{X_1=i\}P\{X_2=j\}=\left(\tfrac{1}{3}\right)^2=\tfrac{1}{9}\qquad,\qquad i,j=1,2,3$$

מכאן נקבל את פונקציית ההסתברות של סכום שני משתנים מקריים אלו :

$$P\{X_1+X_2=2\}=P\{X_1=1\}P\{X_2=1\}=\tfrac{1}{9}$$
$$P\{X_1+X_2=3\}=P\{X_1=1\}P\{X_2=2\}+P\{X_1=2\}P\{X_2=1\}=\tfrac{2}{9}$$
$$P\{X_1+X_2=4\}=P\{X_1=1\}P\{X_2=3\}+P\{X_1=2\}P\{X_2=2\}+P\{X_1=3\}P\{X_2=1\}=\tfrac{3}{9}$$
$$P\{X_1+X_2=5\}=P\{X_1=2\}P\{X_2=3\}+P\{X_1=3\}P\{X_2=2\}=\tfrac{2}{9}$$
$$P\{X_1+X_2=6\}=P\{X_1=3\}P\{X_2=3\}=\tfrac{1}{9}$$

ב1. גם את פונקציית ההסתברות של Z נמצא בעזרת פונקציית ההסתברות המשותפת של X_1 ו- X_2.
הערכים האפשריים של Z הם 1, 2 ו-3. לפיכך, נקבל :

$$P\{Z=1\}=P\{X_1=1\}P\{X_2=1\}=\tfrac{1}{9}$$
$$P\{Z=2\}=P\{X_1=1\}P\{X_2=2\}+P\{X_1=2\}P\{X_2=1\}+P\{X_1=2\}P\{X_2=2\}=\tfrac{3}{9}$$
$$P\{Z=3\}=1-P\{Z\le 2\}=\tfrac{5}{9}$$

ב2. פונקציית ההסתברות המשותפת של X_1 ו- Z, היא :

$$P\{X_1=1\,,Z=1\}=P\{X_1=1\}P\{X_2=1\}=\tfrac{1}{9}$$
$$P\{X_1=1\,,Z=2\}=P\{X_1=1\}P\{X_2=2\}=\tfrac{1}{9}$$
$$P\{X_1=1\,,Z=3\}=P\{X_1=1\}P\{X_2=3\}=\tfrac{1}{9}$$
$$P\{X_1=2\,,Z=2\}=P\{X_1=2\}P\{X_2=1\}+P\{X_1=2\}P\{X_2=2\}=\tfrac{2}{9}$$
$$P\{X_1=2\,,Z=3\}=P\{X_1=2\}P\{X_2=3\}=\tfrac{1}{9}$$
$$P\{X_1=3\,,Z=3\}=P\{X_1=3\}P\{X_2=1\}+P\{X_1=3\}P\{X_2=2\}+P\{X_1=3\}P\{X_2=3\}=\tfrac{3}{9}$$

כאשר :
$$P\{X_1=2\,,Z=1\}=P\{X_1=3\,,X_2=1\}=P\{X_1=3\,,X_2=2\}=0$$

נסכם את ההסתברויות המשותפות בטבלה :

X_1 \ Z	1	2	3	p_{X_1}
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$
2	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$
3	0	0	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$
p_Z	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$	

ג. נשים לב שמתקיים :

$P\{Z\le 1\}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$ [כל המשתנים שווים ל-1]

$P\{Z\le 2\}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ [כל המשתנים שווים ל-1 או ל-2]

ומכאן נקבל את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Z:

$$F_Z(a) = \begin{cases} 0 & , \quad a < 1 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n & , \quad 1 \le a < 2 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n & , \quad 2 \le a < 3 \\ 1 & , \quad a \ge 3 \end{cases}$$

ואת פונקציית ההסתברות של Z:

$$P\{Z=1\} = P\{Z \le 1\} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^n$$

$$P\{Z=2\} = P\{Z \le 2\} - P\{Z \le 1\} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^n - \left(\tfrac{1}{3}\right)^n$$

$$P\{Z=3\} = P\{Z \le 3\} - P\{Z \le 2\} = 1 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^n$$

3. א.

$$P\{X=i \mid Y=1\} = \frac{P\{X=i, Y=1\}}{P\{Y=1\}} = \frac{(1-p)^i p(1-p)^{9-i}}{10p(1-p)^9} = \frac{1}{10} \qquad , \qquad i = 0,1,\ldots,9$$

ב1.

$$P\{X_1 \ge 5 \mid Y=2\} = \frac{P\{X_1 \ge 5, Y=2\}}{P\{Y=2\}} = \frac{(1-p)^5 \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3}{\binom{10}{2} p^2 (1-p)^8} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

ב2. לכל $i = 0,1,\ldots,8$ מתקיים:

$$P\{X_1 = i \mid Y=2\} = \frac{P\{X_1 = i, Y=2\}}{P\{Y=2\}} = \frac{(1-p)^i p \binom{9-i}{1} p(1-p)^{8-i}}{\binom{10}{2} p^2 (1-p)^8} = \frac{9-i}{45}$$

ב3. קל להיווכח, שההתפלגות של כל המשתנים המקריים המותנים X_1 , X_2 ו- X_3 בתנאי $Y=2$ היא ההתפלגות שנמצאה בסעיף ב2 של השאלה. ומכאן קל לראות, כצפוי, שמשתנים מקריים מותנים אלו תלויים זה בזה, שכן תנאי האי-תלות המותנית אינו מתקיים עבורם. למשל:

$$P\{X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0 \mid Y=2\} = 0 \quad \ne \quad \prod_{i=1}^{3} P\{X_i = 0 \mid Y=2\} = \left(\tfrac{9}{45}\right)^3 = 0.008$$

4. א. נסמן ב- X_j את התוצאה שיותם מקבל ביום ה-j-י של התחרות, לכל $j = 1,2,3,4$. מנתוני הבעיה, נובע כי כל ה-X_j-ים בלתי-תלויים זה בזה ולכל אחד מהם יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר 0.3.

כעת, לכל $i = 1,2,\ldots$, המאורע $\{Y \le i\}$ מתרחש, אם התוצאה הטובה ביותר של יותם בארבעת ימי-התחרות (שהיא התוצאה הנמוכה ביותר שהוא מקבל) אינה עולה על i, כלומר, קטנה או שווה ל-i. לפיכך, עלינו לחשב את ההסתברות שיש **לפחות** יום אחד (מתוך הארבעה) שבו הוא מקבל תוצאה קטנה או שווה ל- i. במקרה זה, קל יותר לחשב את ההסתברות של המאורע המשלים, **שבכל** ימי-התחרות יותם מקבל תוצאות גבוהות מ- i, וממנה למצוא את ההסתברות המבוקשת. ההסתברות שביום הראשון יותם יקבל תוצאה גבוהה מ- i היא: $P\{X_1 > i\} = 0.7^i$

ולכן, ההסתברות שבכל אחד מימי-התחרות יותם מקבל תוצאה גבוהה מ- i היא:

$$P\{Y > i\} = P\left\{\min_{j=1,\ldots,4} X_j > i\right\} = P\left\{\bigcap_{j=1}^{4} \{X_j > i\}\right\} \underset{\text{בלתי-תלויים}}{\underset{\downarrow}{=}} \prod_{j=1}^{4} P\{X_j > i\} = (0.7^i)^4 \qquad , \qquad i = 1,2,\ldots$$

וההסתברות שהתוצאה הטובה ביותר של יותם לא תעלה על i היא: $P\{Y \le i\} = 1 - 0.7^{4i}$

ב. $P\{Y=4\}=P\{Y\le 4\}-P\{Y\le 3\}=(1-0.7^{4\cdot 4})-(1-0.7^{4\cdot 3})=0.010518$

דרך פתרון נוספת: ההתפלגות של המשתנה המקרי $Y=\min\limits_{i=1,\dots,4} X_i$, כאשר ה-$X_i$-ים הם משתנים מקריים בלתי-תלויים שלכולם התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר 0.3, היא גיאומטרית עם הפרמטר $1-0.7^4=0.7599$. (ראה תרגיל 10ב בקובץ התרגילים לפרק 6, שנמצא באתר הקורס). לכן:

$$P\{Y=4\}=P\left\{\min_{i=1,\dots,4} X_i=4\right\}=(\underbrace{0.7^4}_{=0.0138})^3(\underbrace{1-0.7^4}_{=0.7599})=0.010518$$

ג. ההסתברות לקבל את התוצאה 1 ביום מסוים היא 0.3 וההסתברות לקבל את התוצאה 3 ביום מסוים היא $0.7^2\cdot 0.3=0.147$. עתה, נשתמש בפונקציית ההסתברות המולטינומית (דוגמה 1ג בעמוד 136 במדריך), כדי למצוא את ההסתברות המבוקשת. נקבל: $\frac{4!}{2!2!}\cdot 0.3^2\cdot 0.147^2=0.01167$

ד. לפי נתוני הבעיה, כל ה-X_i-ים בלתי-תלויים זה בזה ושווי-התפלגות, ולכן כל המאורעות מהצורה $X_{i_1}<X_{i_2}<X_{i_3}<X_{i_4}$ מתרחשים בהסתברויות שוות. למשל, המאורע $X_1<X_2<X_3<X_4$ והמאורע $X_3<X_1<X_2<X_4$ מתרחשים באותה הסתברות. כעת, אם מניחים שבוודאות אחד ממאורעות אלו מתרחש, ויש !4 מאורעות שונים מהצורה הזאת, שבשניים מהם מתקיים $X_{i_1}=X_2$ ו- $X_{i_4}=X_3$, אז ההסתברות המבוקשת היא בהכרח $\frac{2}{4!}=\frac{1}{12}$.