פתרון ממ"ן 14

שאלה 1

נסמן $B_0=1$ ולכל $n>0$ טבעי נסמן ב- B_n את מספר החלוקות השונות של הקבוצה $\{1,2,...,n\}$.

(חלוקה היא קבוצה של קבוצות חלקיות לא ריקות וזרות זו לזו שאיחודן הוא $\{1,2,...,n\}$)

א. יהי $0\le k<n+1$. הביעו בעזרת B_{n-k} את מספר החלוקות של הקבוצה $\{1,2,...,n,n+1\}$ שבהן למחלקה של 1 יש בדיוק $k+1$ איברים.

ב. הוכיחו ש- $B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$.

ג. היעזרו בנוסחה מסעיף ב' ומיצאו את מספר יחסי השקילות השונים שניתן להגדיר על הקבוצה בעלת 6 איברים.

פתרון

א. במחלקה של 1 יש לפחות איבר אחד (שהרי 1 בעצמו שייך לה). מספר האפשרויות שבהן יש במחלקה זו $k+1$ איברים הוא כמספר הבחירות של k איברים נוספים (שונים מ- 1) מתוך הקבוצה $\{1,2,...,n,n+1\}$ ומספר זה שווה ל- $\binom{n}{k}$. לכל בחירה של מחלקה בגודל $k+1$ מתוך הקבוצה $\{1,2,...,n,n+1\}$ נשארת קבוצה של $n-k$ איברים שאותם עדיין לא סידרנו במחלקות. מספר החלוקות של הקבוצה הנותרת הוא B_{n-k} ומכאן שמספר החלוקות של $\{1,2,...,n,n+1\}$ שבהן יש למחלקה של 1 בדיוק $k+1$ איברים הוא $\binom{n}{n-k}B_{n-k}$.

ב. אם נספור את מספר החלוקות של $\{1,2,...,n,n+1\}$ לפי מספר האיברים השייכים למחלקה של אחד (שאותו נסמן ב- $k+1$ כאשר $0\le k\le n$) הרי שלפי סעיף א', לכל k כזה יש $\binom{n}{n-k}B_{n-k}$ חלוקות אפשריות. לכן אם נסכם את כל התוצאות האפשריות עבור $0\le k\le n$ נקבל שמספר כל החלוקות של $\{1,2,...,n,n+1\}$ הוא: $B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}B_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$.

(כאשר k מקבל את כל הערכים בין 0 ל- k גם $n-k$ מקבל בדיוק אותם הערכים)

ג. עלינו לחשב את B_6 לכן נציב $n=5$ בנוסחה מסעיף ב'. ברור שדרושים לנו הערכים של $B_0,B_1,...,B_5$. $B_0=1$ לפי הנתון. ברור ש- $B_1=1$.

מספר החלוקות של קבוצה בת שני איברים הוא 2 (כי יש רק 2 אפשרויות: או מחלקה אחת

שבה שני איברים או שתי מחלקות בנות איבר אחד). ואכן: $B_2=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}B_k=2$.

$B_3=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}B_k=\binom{2}{0}\cdot1+\binom{2}{1}\cdot1+\binom{2}{2}\cdot2=5$ (כדאי לבדוק זאת גם ישירות, ללא הנוסחה)

$$B_4=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}B_k=\binom{3}{0}\cdot1+\binom{3}{1}\cdot1+\binom{3}{2}\cdot2+\binom{3}{3}\cdot5=15$$

$$B_5=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}B_k=\binom{4}{0}\cdot1+\binom{4}{1}\cdot1+\binom{4}{2}\cdot2+\binom{4}{3}\cdot5+\binom{4}{4}\cdot15=52$$

$$B_6=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}B_k=\binom{5}{0}\cdot1+\binom{5}{1}\cdot1+\binom{5}{2}\cdot2+\binom{5}{3}\cdot5+\binom{5}{4}\cdot15+\binom{5}{5}\cdot52=203$$

שאלה 2

(כל הפונקציות בשאלה זו הן מלאות, כלומר מוגדרות על כל איברי התחום)

תהי A קבוצה בעלת n איברים ותהי $B=\{0,1,2,3\}$.

א. מיצאו את מספר הפונקציות f מ- A ל- B המקיימות $\{1,2,3\}\subseteq Range(f)$

ב. מיצאו את מספר השלשות הסדורות (A_1,A_2,A_3) כך ש- A_1,A_2,A_3 קבוצות לא ריקות שחלקיות ל- A וזרות זו לזו. רמז: לכל שלשה (A_1,A_2,A_3) התאימו פונקציה f מ- A ל- B כך ש- $f(x)=i$ אם $x\in A_i$ (עבור כל $1\le i\le 3$) ו- $f(x)=0$ אחרת.

ג. בכמה דרכים אפשר לבחור שלוש קבוצות לא ריקות של איברים מתוך A שהן זרות זו לזו, כאשר אין חשיבות לסדר הקבוצות שבחרנו.

פתרון

א. נסמן ב- U את קבוצת כל הפונקציות מ- A ל- B. כידוע, $|U|=|B^A|=|B|^{|A|}=4^n$.

אנו מחפשים מספר כל הפונקציות מ- A ל- B המקבלות את שלושת הערכים $1,2,3$.

עבור כל $1\le i\le 3$ נסמן ב- S_i את קבוצת הפונקציות מ- A ל- B שאינן מקבלות את הערך i .

אז $S_1\cup S_2\cup S_3$ היא קבוצת כל הפונקציות מ- A ל- B שאינן המקבלות לפחות אחד מבין שלושת הערכים $1,2,3$.

נשים לב ש- $|S_i|=|B-\{i\}|^{|A|}=3^n$, שעבור $i\neq j$, $|S_i\cap S_j|=|B-\{i,j\}|^{|A|}=2^n$ ו-

$|S_1\cap S_2\cap S_3|=|\{0\}^A|=|\{0\}|^{|A|}=1^n=1$. לכן לפי עקרון ההכלה וההפרדה, נקבל שמספר כל הפונקציות מ- A ל- B המקבלות את כל הערכים $1,2,3$ הוא:

$$|U-(S_1\cup S_2\cup S_3)|=4^n-\binom{3}{1}3^n+\binom{3}{2}2^n-\binom{3}{3}\cdot1^n=4^n-3^{n+1}+3\cdot2^n-1$$

ב. לכל בחירה של שלשה סדורה (A_1,A_2,A_3) נתאים פונקציה f מ- A ל- B כך ש- $f(x)=i$ אם $x\in A_i$ (עבור כל $1\le i\le 3$) ו- $f(x)=0$ אחרת. כל שלשה מגדירה פונקציה יחידה כזו, ומאחר שהקבוצות A_1,A_2,A_3 לא ריקות, f מקבלת כל אחד מן הערכים $1,2,3$.
להפך, לכל פונקציה f מ- A ל- B המקיימות $\{1,2,3\}\subseteq Range(f)$ נתאים את השלשה הסדורה של קבוצות לא ריקות $(f^{-1}(\{1\}), f^{-1}(\{2\}), f^{-1}(\{3\}))$ שחלקיות ל- A. זו התאמנה חד-חד ערכית ועל בין קבוצת הפונקציות שבחרנו לבין קבוצת השלשות הנ״ל.
מכאן שמספר השלשות הסדורות (A_1,A_2,A_3) כך ש- A_1,A_2,A_3 קבוצות לא ריקות שחלקיות ל- A שווה למספר הפונקציות שמצאנו בסעיף א׳ כלומר ל- $4^n-3^{n+1}+3\cdot 2^n-1$.

ג. נשים לב שלכל בחירה של קבוצות לא ריקות A_1,A_2,A_3 של איברים מתוך A שהן זרות זו לזו מתאימות $3!$ שלשות סדורות של קבוצות כאלה. לכן התשובה היא: $\dfrac{4^n-3^{n+1}+3\cdot 2^n-1}{6}$.
הערה: המונה בביטוי האחרון הוא מספר זוגי שמתחלק ב- 3 לכן הוא מתחלק ב- 6 ולכן התוצאה שקיבלנו היא מספר שלם כפי שניתן היה לצפות.

שאלה 3

מצאו כמה מספרים שלמים n, $1\le n\le 7770$, הם בעלי התכונה:
n מתחלק ב- 7, והוא **<u>אינו</u>** מתחלק באף מספר טבעי k המקיים $2\le k\le 10 \ \wedge\ k\ne 7$.

פתרון

הדרישה שקולה לדרישה ש- n יתחלק ב- 7 ולא יתחלק באף אחד מהמספרים 2,3,5 **(מדוע?)**.

תהי $U=\{n\in \mathbf{N} \mid 1\le n\le 7770,\ 7\mid n\}$.
$|U|=1{,}110$.

עבור $i=2,3,5$ נסמן ב- A_i את קבוצת אברי U המתחלקים ב- i.

נכין את הנדרש לחישוב בעזרת הכלה והפרדה:

$|A_i|=7770/7i$. יש 3 קבוצות כאלה.

$|A_i\cap A_j|=7770/7ij$ $(i\ne j)$. יש 3 חיתוכים כאלה.

$|A_2\cap A_3\cap A_5|=7770/(7\cdot 2\cdot 3\cdot 5)$.

לפי עקרון ההכלה וההפרדה, גודל הקבוצה הנדרשת הוא

$$|U|-\left(|A_2|+|A_3|+|A_5|\right)+\left(|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_5|+|A_3\cap A_5|\right)-|A_2\cap A_3\cap A_5|$$

השלימו את החישוב.

שאלה 4

א. מתוך 2000 המספרים שבתחום $1 \le n \le 2000$ מישהו בחר 1001 מספרים שונים. הוכיחו שבקבוצת 1001 המספרים שנבחרו, בהכרח יש שני אברים שונים x,y כך ש- y מתחלק ב- x ללא שארית.

ב. אדם פזיז ניסה ליישם את ההוכחה של סעיף א' על בחירה של 1001 מספרים שונים מתוך 2000 המספרים שבתחום $2001 \le n \le 4000$. הוא טען שגם במקרה זה בקבוצת 1001 המספרים שנבחרו, בהכרח חייבים להיות שני אברים שונים a,b כך ש- a מתחלק ב- b ללא שארית. הוא הוכיח זאת באותה דרך של סעיף א'. מצאו את הטעות בהוכחה במקרה זה.

פתרון

א. נבחרו 1001 מספרים. לפי ההדרכה, נתאים לכל אחד מהם את ה- b שלו.

b הוא מספר אי-זוגי בתחום $1 \le b \le 2000$, לכן יש עבורו 1000 ערכים אפשריים.

לכן, לפי עקרון שובך היונים, בין 1001 המספרים שנבחרו יש לפחות שניים שמותאם להם אותו b.

זה עדיין לא מוכיח את הטענה שהתבקשה. נמשיך: נתבונן בשני מספרים שונים כאלה, שיש להם אותו b. נאמר שאחד מהם הוא $n_1 = 2^k \cdot b$ והאחר הוא $n_2 = 2^m \cdot b$.

מכיון ש- $n_1 \ne n_2$ נובע $k \ne m$. בלי הגבלת כלליות נניח $k < m$.

כעת, $n_2 / n_1 = 2^{m-k}$ ומכיון ש- $k < m$ זהו מספר שלם.

ב. הערכים האפשריים עבור b כעת הם מספרים אי-זוגיים בתחום שבין 1 ל- 4000.

למשל עבור $n = 2048 = 2^{11} = 2^{11} \cdot 1$ מתקיים $b = 1$.

ועבור $n = 3999$ מתקיים $b = 3999$.

בתחום זה יש 2000 מספרים אי-זוגיים.

זה יותר מ- 1001 ולכן לא ניתן ליישם את שובך היונים בצורה שעשינו קודם.