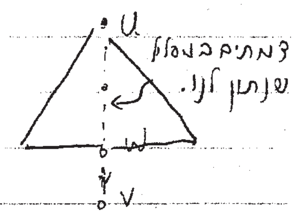
הרצאה 3
דף 1 מ 2
24.11.08
אלגוריתמים
9.11.08

אלגוריתמים- הרצאה 3

טענה: בעץ DFS מכוון, צומת v הוא צאצא של צומת u אמ"מ כאשר u סומן, ניתן להגיע ל- v מ-u במסלול שמכיל צמתים לא מסומנים.

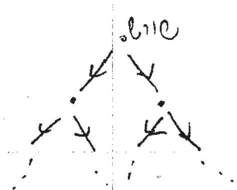
הוכחה: ⇐ נניח ש v צאצא של u אז:

⇒ נניח שיש מסלול מ u ל v של צמתים לא מסומנים. אבל v לא צאצא של u.
בלי הגבלת הכלליות נניח ש v הצומת הראשון במסלול שנתון לנו שאיננו צאצא של u ב- DFS
נניח ש w הוא הצומת שקודם ל v במסלול (ובהחלט יתכן ש u=w)



לפי הטענה שהוכחנו בשעור הקודם אם v היה מתגלה בין הביקור הראשון של מרכז הפעולות ועד לנסיגה של מרכז הפעולות מ-u, אזי v היה צאצא של u
כמובן, ידוע לנו ש v מתגלה אחרי u (כאשר u סומן v עדיין לא היה מסומן).
מסקנה: v סומן אחרי שמרכז הפעולות נסוג מ-u, אבל אין מרכז הפעולות יכול היה לסגת מ- w בלי לבדוק את הקשת v-w ולגלות ש v עדיין לא מסומן? סתירה.

דרגת הכניסה של כל צומת v שהוא לא שורש היא: 1.
דרגת הכניסה של שורש מהגדרה היא: 0
נניח שהגרף שמושרה ע"י המצביעים מכיל מעגל. אם המעגל מכוון אז אם המעגל לא מכיל שורש אז יהיה בו צומת שמתגלה מבחוץ למעגל ולצומת הזה תהיה דרגת כניסה גדולה מ-1 (בסתירה למה שידוע לנו). אם המעגל מכיל שורש אזי לשורש יש דרגת כניסה שהיא גדולה מאפס.
אם המעגל לא מכוון למשל  אז יש צומת עם דרגת כניסה שהיא גדולה מ-1 וזו כמובן סתירה.



מאותן סיבות העץ חייב להיות מכוון, כלומר מהצורה הבו:
אם העץ לא נראה כך נקבל צומת עם דרגת כניסה גדולה מ-1 או שורש עם דרגת כניסה שגדולה מאפס.

DFS בגרפים לא מכוונים

נניח שיש קשת a-b בגרף והקשת אינה שייכת לעץ DFS

נניח ש a התגלה לפני b (כלומר בין a ו b יש מסלול של צמתים שעוד לא התגלו).

אז b צאצא של a לפי הטענה. כלומר אין קשתות חוצות בגרף לא מכוון;

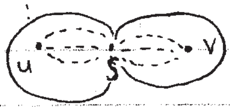
כי כל קשת או שהיא קשת עץ DFS או שהיא מגדירה יחס צאצא-אב קדמון.

ולכן מהגדרה אין קשתות קדמיות ולכן יש רק קשתות עץ או קשתות אחוריות.

רכיבים אי פריקים וצמתי הפרדה

קיים גרף $G=(V,E)$ לא מכוון וקשיר.

<u>צומת הפרדה:</u> צומת s הוא צומת הפרדה אם יש 2 צמתים u ו v כך שכל המסלולים בין u ל-v עוברים דרך s. דוג':

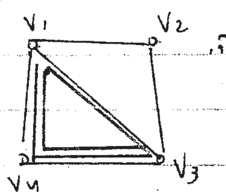


$G-\{s\}$ הוא גרף לא קשיר מההגדרה.

גרף שיש בו צומת הפרדה נקרא <u>גרף פריק</u>

<u>תת גרף מושרה</u> - (V',E') תת גרף מושרה אם (1) $V'\subset V$ (2) E' מוגדר להיות כל הקשתות של הצמתים (u,v) כך ש $u,v\in V'$, $(u,v)\in E$

דוגמה: הגרף הכחול הוא תת גרף לא מושרה.
הגרף הכתום הוא תת גרף מושרה.

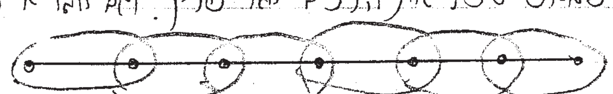


בהינתן גרף פריק, <u>רכיב אי פריק</u> מקיים את הדרישות הבאות:

1) הרכיב לא מכיל צומת הפרדה.

2) אין שום תת גרף מושרה שממש מכיל את הרכיב האי פריק. וגם הוא אי פריק.

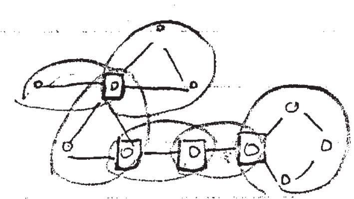
לדוגמה:



כל זוג הוא רכיב אי פריק.

צמתי הפרדה הן כל הצמתים פרט לשני צמתי הקצוות.

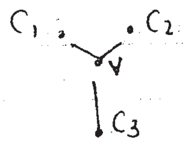
דוגמה נוספת:
הצמתים המסומנים בכחול הם
צמתי הפרדה.



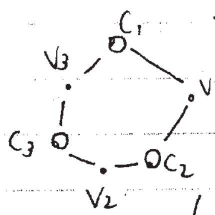
הקבוצות המסומנות בצבעים הן רכיבים אי פריקים.

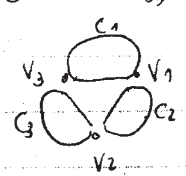
הרצאה 3
דף 2 מ 2
24.11.08
אלגוריתמים

כל צומת הפרדה נמצא בחיתוך שבין מספר רכיבים אי פריקים $H=(V,F)$
כל רכיב אי פריק V מוגדר ע"י צומת + צמתי הפרדה.
$F-(x,c)$ אם x צומת הפרדה ששייך לרכיב אי פריק c.



טענה: H הוא עץ. למה?
כי H הוא חסר מעגלים, נניח בשלילה שיש מעגל.

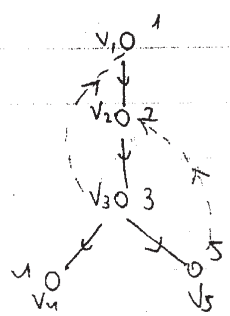




לכל צומת v נגדיר את $L(v)$ $(LowPoint(v))$
נתבונן בקבוצת הצמתים הבאה:
א) צומת v
ב) כל הצמתים שניתן להגיע אליהם מ-v ע"י הליכה על העץ קדימה + קשת אחורית אחת

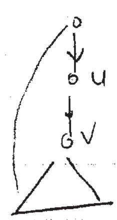
$$L(v)=\min_{u \in \text{קבוצה}}\{k(u)\}$$
האינדקס של DFS

דוגמה:



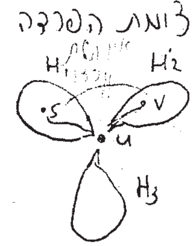
$L(V_2)=1$
באופן כללי: $L(v)\leq k(v)$
$L(V_3)=1$
$L(V_4)=4$
$L(V_5)=2$
ומהגדרה: $L(V_1)=1$

טענה: נניח ש: $k(u)\neq 1$, $s\neq u$ (u הוא לא השורש), $v\to u$, $\underbrace{L(v)\geq k(u)}$
כלומר אין קשת אחורית כמו זו המצוירת בציור.
אזי v צומת הפרדה.
הוכחה:



ולכן u מפריד בין v לבין s (השורש) כי $s\neq u$

טענה: אם u צומת הפרדה אז יש קשת על $v\to u$ כך ש $L(v)\geq k(u)$ $(u\neq s)$
הוכחה:



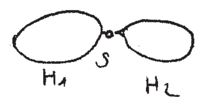
DFS מתחיל ב-s ומתישהו עובר ל H_2 דרך u, ויהיו v
הצומת הראשון ב H_2 ש-DFS מבקר בו. $L(v)\geq k(u)$
כי אין קשתות אחוריות שיוצאות מ-H_2

מתי השורש מהווה צומת הפרדה?

<u>טענה:</u> השורש s מהווה צומת הפרדה אמ"מ יש לו לפחות שני בנים.

<u>הוכחה:</u> ⇐: אם יש ל s שני בנים אזי s מפריד ביניהם כי אין קשתות חוצות בעץ.

⇒: אם s צומת הפרדה אז



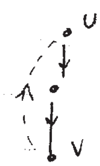
נניח ש DFS מבקר קודם ב-H_1

כדי להגיע ל H_2 צריך לצאת ב s ואז לעבור ל H_2 ואז יהיו לו 2 בנים.

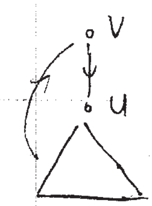
איך נחשב את $L(v)$?

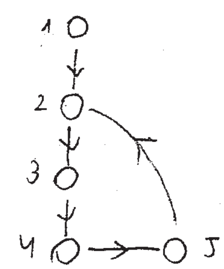
א) כאשר v מתגלה לראשונה. $L(v) \leftarrow k(v)$

ב) אם מגלים קשת אחורית $u \to v$ אז מעדכנים את $L(v)$ להיות $\min(L(v),k(u))$



ג) אם v לא השורש ; u הבן של v, כאשר DFS נסוג מ-u ל-v - $L(v) \leftarrow \min(L(v),L(u))$





דוגמה:

$L(5)=2$

ופה 5 צומת

שנסוג אליה

מתעדכן להיות: $L(v)=2$

$L(v)$ ידוע כאשר מבצע הפעולות נסוג מ-v.

יש מס' קבוע של פעולות ולכן $O(1)$ פעולות לכל פעולה קודמת.

ולכן סיבוכיות DFS נשארת $O(|E|+|V|)$.

הרצאה 3

אלגוריתם למציאת רכיבים בלתי פריקים וצמתי הפרדה

<u>קלט:</u> גרף בלתי מכוון סופי וקשיר $G(V,E)$ ($|V| \geq 2$) וצומת התחלה s.

<u>פלט:</u> רכיבים בלתי פריקים וצמתי הפרדה

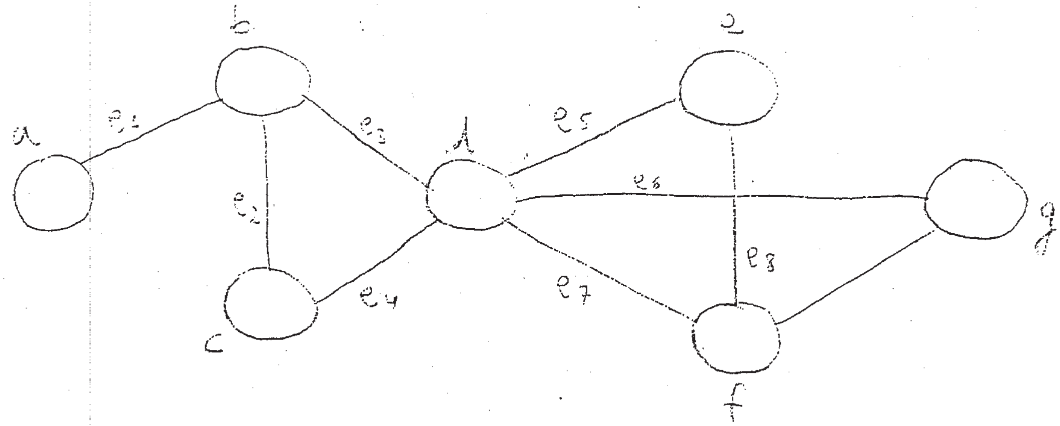
<u>האלגוריתם :</u>

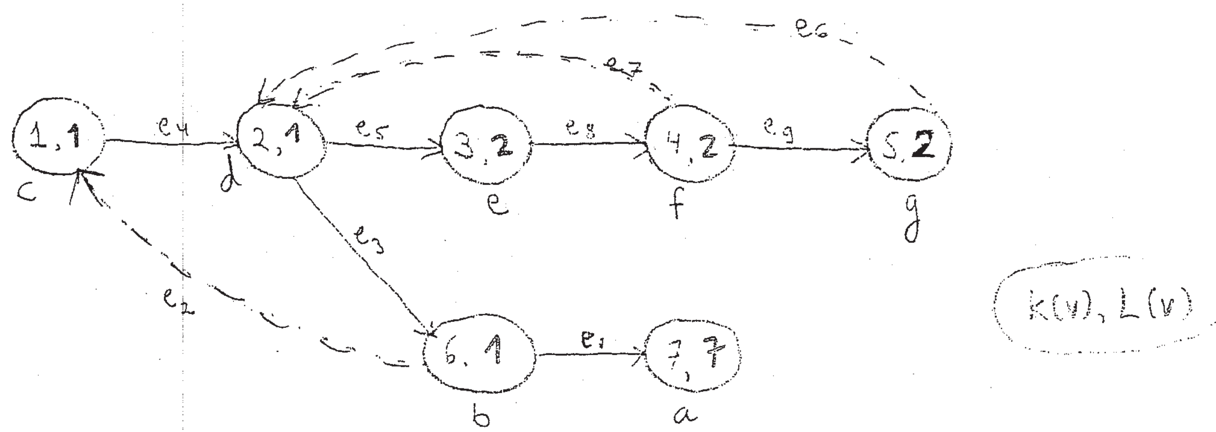
<u>מבנים ומשתנים מקומיים :</u> S – מחסנית;
$k(v)$ – מספר הצומת (בסדר התגלות הצמתים);
$f(v)$ – אב הצומת (ממנו v התגלה לראשונה);
$L(v)$ – מספר צומת נמוך ביותר, מבין אלה שיש להם מסלול מכוון מ-v ושיש במסלול לכל היותר קשת אחת אחורנית.

- <u>לכל</u> $e \in E$ סמן e "חדשה"
- רוקן את S. הכנס את s ל-S.
- <u>לכל</u> $u \in V$ <u>בצע</u> $k(u) \leftarrow 0$; סמן $f(u)$ "בלתי מוגדר"
- $v \leftarrow s;\quad k(s) \leftarrow 1;\quad i \leftarrow 2$
- <u>כל עוד</u> יש ל-v קשת חדשה <u>או</u> $f(v)$ מוגדר <u>בצע</u> :
  - ◦ <u>אם</u> יש ל-v קשת חדשה $v \overset{e}{—} u$ <u>אזי</u> <u>בצע</u> :
    - ⋆ סמן את e "ישנה"
    - ⋆ <u>אם</u> $k(u) = 0$ <u>אזי</u> <u>בצע</u> :
      - ◦ הכנס את u ל-S.
      - ◦ $k(u) \leftarrow i;\quad f(u) \leftarrow v;\quad L(u) \leftarrow i$
      - ◦ $i \leftarrow i+1;\quad v \leftarrow u$
    - ⋆ <u>אחרת</u> ($k(u) > 0$) <u>בצע</u> $L(v) \leftarrow \min\{L(v), k(u)\}$
  - ◦ <u>אחרת</u> ($f(v)$ מוגדר) <u>בצע</u>
    - ⋆ <u>אם</u> $L(v) \geq k(f(v))$ <u>אזי</u> <u>בצע</u> : בשורה זו מגלים ש-V הינו צומת הפרדה.
      - ◦ <u>אם</u> $f(v) \neq s$ <u>או</u> יש ל-s קשת חדשה <u>אזי</u> <u>בצע</u> :
        - ∗ הכרז: "$f(v)$ הוא צומת הפרדה"
      - ◦ הוצא מ-S את כל הצמתים עד v כולל
      - ◦ צרף לקבוצה זו את $f(v)$
      - ◦ הכרז: "קבוצה זו מהווה רכיב בלתי פריק"
    - ⋆ <u>אחרת</u> ($L(v) < k(f(v))$) <u>בצע</u> $L(f(v)) \leftarrow \min\{L(f(v)), L(v)\}$
    - ⋆ $v \leftarrow f(v)$

[illegible]

הרצה 3

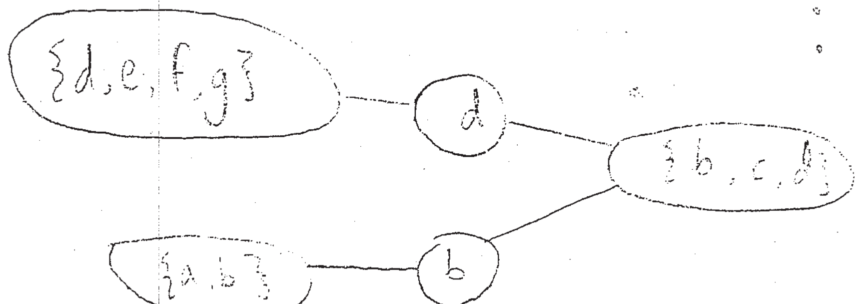




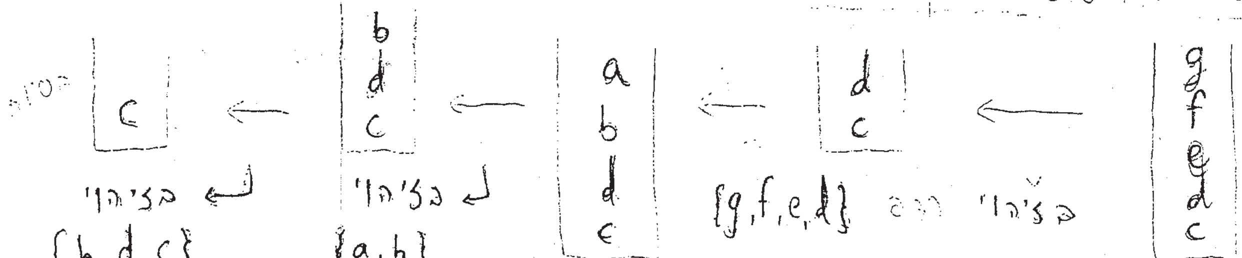
הרכיבים הבלתי פריקים: {d,e,f,g}, {b,c,d}, {a,b}

צמתי הפרדה: b, d

העץ $\tilde{G}$:



תכולת המחסנית במהלך הריצה:



בזיהוי רכ"ב {g,f,e,d}

בזיהוי {a,b}

בזיהוי {b,d,c}