

## בחינה 4 (מתכונת ישנה!)

### מבנה הבחינה :

- \* יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- \* משקל כל שאלה 25% .
- \* אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

### משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

---

### שימו לב:

- \* יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נאמר במפורש בשאלה.
  - \* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
  - \* אפשר גם להסתמך על טענות מהמדור "עזרים ללמידה" באתר הקורס.
  - \* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
  - \* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
- 

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קראו בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

### שאלה 1

נגדיר שני יחסים (רלציות)  $S, T$  מעל  $P(\mathbb{N})$  : עבור  $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ ,

$(X, Y) \in S$  אם ורק אם  $1 \in X \oplus Y$  או  $X = Y$ .

$(X, Y) \in T$  אם ורק אם  $1 \notin X \oplus Y$ .

(הסימן  $\oplus$  מציין הפרש סימטרי, הוא הוגדר בכרך "תורת הקבוצות", שאלה 1.22 בעמ' 27)

8 (נק') א. הראו כי  $S$  אינו יחס שקילות מעל  $P(\mathbb{N})$ .

9 (נק') ב. הראו כי  $T$  הוא יחס שקילות מעל  $P(\mathbb{N})$ .

8 (נק') ג. לכמה מחלקות שקילות מחלק  $T$  את  $P(\mathbb{N})$ ? הוכיחו. תארו את המחלקות.

### שאלה 2

12 (נק') א. כידוע, קבוצת המספרים הרציונליים היא בת-מניה.

הוכיחו שקבוצת המספרים הממשיים **שאינם** רציונליים, עוצמתה  $C$ .

13 (נק') ב. תהי  $A$  קבוצת כל אותם מספרים ממשיים אשר הריבוע או החזקה השלישית

שלם הם מספרים טבעיים:  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 \in \mathbb{N}) \vee (x^3 \in \mathbb{N})\}$ .

מהי עוצמת  $A$ ? הנה דוגמאות לאיברים של  $A$ :  $1, -17, -\sqrt{5}, \sqrt[3]{7}$ .

### שאלה 3

חמשה אנשים מוכשרים (נקרא להם א, ב, ג, ד, ה) נדרשו לבצע ארבע משימות שונות (להלחין שיר, לפתח אפליקציה לאייפון, לנהל משא ומתן עם האוצר, לחדש את סימון השביל הכחול בנחל ערוגות). הם סיכמו שכל משימה תבוצע על ידי צוות של שני אנשים.

5 (נק') א. בכמה דרכים ניתן להגדיר צוותים לביצוע כל המשימות?

אין דרישה שכולם יעבדו.

למשל, לגיטימי שהצוות  $\{א, ב\}$  יבצע את כל המשימות.

20 (נק') ב. בכמה דרכים ניתן להגדיר צוותים לביצוע כל המשימות, כאשר אסור

שמישהו יתחמק לגמרי מעבודה? כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה.

**בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה סופית מספרית.**

#### שאלה 4

תהי  $B$  קבוצת המחרוזות באורך 5, הבנויות בעזרת האותיות  $a, b, c, d, e$  (לא כל האותיות חייבות להופיע). למשל  $aaeeb \in B$ .

נגדיר יחס שקילות מעל  $B$ : שתי מחרוזות ייקראו שקולות אם **קבוצת** האותיות המופיעות במחרוזת האחת **שווה** לקבוצת האותיות המופיעות במחרוזת השניה.

למשל  $aeeee$  שקולה ל- $aaeee$  ושקולה ל- $eeaae$ ,

מכיון שלכל אחת מהמחרוזות האלה, קבוצת האותיות המופיעות בה היא  $\{a, e\}$ .

סעיפים ב, ג, ד, ה עוסקים ביחס השקילות הזה. אינכם נדרשים להוכיח שזהו יחס שקילות.

(4 נק') א. כמה אברים יש ב- $B$ ?

(6 נק') ב. כמה מחלקות שקילות יש?

(5 נק') ג. כמה אברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת  $abcde$ ?

(5 נק') ד. כמה אברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת  $aaaab$ ?

(5 נק') ה. כמה אברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת  $aabcd$ ?

הוכיחו את תשובותיכם.

#### שאלה 5

$G$  הוא גרף פשוט **ולא קשיר** על  $n$  צמתים ( $n \geq 2$ ).

יש ב- $G$  בדיוק שני צמתים בעלי דרגה זוגית.

הוכיחו שבגרף **המשלים** של  $G$  יש מסלול אוילר שאינו מעגל.

נמקו **בצורה מדויקת** כל צעד בהוכחה.

הגרף המשלים הוגדר בחוברת "תורת הגרפים", הגדרה 1.4 בעמ' 12.

**בהצלחה!**