תשובה 1

א. ביטוי לא תקין: מספר הארגומנטים של f_1^2 אינו מתאים: הוא צריך לקבל שני ארגומנטים.

ב. ביטוי לא תקין: הארגומנטים של סימן פרדיקט צריכים להיות שמות-עצם.
כאן אחד הארגומנטים, $\sim(x_2)$, אינו שם-עצם אלא בעצמו ביטוי לא תקין,
כי שם-עצם אינו מכיל קשרים לוגיים.

ג. תבנית לא אטומית שאינה פסוק (יש משתנה חפשי).

ד. תבנית אטומית שאינה פסוק (יש משתנה חפשי).

ה. ביטוי לא תקין: הארגומנטים של סימן פונקציה צריכים להיות שמות-עצם.
כאן אחד הארגומנטים (הראשון) הוא תבנית.

ו. תבנית לא אטומית שהיא פסוק.

ז. ביטוי לא תקין: אחרי סימן כמת והמשתנה שלו צריך לבוא סימן פותח של תבנית: כמת נוסף או סימן פרדיקט או סימן השלילה. כאן מופיע אחרי הכמת סימן פונקציה. במלים אחרות: **הביטוי שעליו "פועל" הכמת צריך להיות תבנית ולא פונקציה** (בכתיב מלא יבוא אחרי הכמת והמשתנה סוגר שמאלי. אבל הסימן כאן גם אינו סוגר שמאלי אלא כאמור סימן פונקציה).

ח. תבנית לא אטומית שהיא פסוק.

תשובה 2

א. סימן הפרדיקט הדו-מקומי R מתפרש ב- J כיחס (רלציה) דו-מקומי $J(R)$ מעל הקבוצה $\{1,2,3\}$. שלושת הפסוקים הנתונים אמיתיים ב- J אם ורק אם $J(R)$ היא רלציית שקילות מעל העולם של J. מכיוון ש- R הוא הסימן היחיד בשפה שיש לתת לו ערך באינטרפרטציה, הרי שמספר האינטרפרטציות המקיימות את התנאי הוא כמספר יחסי השקילות השונים שניתן להגדיר מעל $\{1,2,3\}$. את אלה אפשר לספור ע"י ספירה ישירה של כל החלוקות האפשריות של הקבוצה $\{1,2,3\}$. נקבל שמספר החלוקות השונות, ולכן מספר יחסי השקילות השונים, הוא 5 .

ב. בנוסף לפירוש עבור R, עלינו לתת כעת פירוש ל- Q כיחס דו-מקומי כלשהו מעל $\{1,2,3\}$.
לפי שאלה 1א בממ"ן 15, מספר היחסים הדו-מקומיים מעל $\{1,2,3\}$ הוא 2^9 .
לכן מספר האינטרפרטציות המקיימות את הנדרש הוא $5 \cdot 2^9 = 2{,}560$.

ג. הסימן a צריך להתפרש כאיבר בעולם, ויכול לקבל 3 ערכים שונים.
הסימן f_1^1 צריך להתפרש כפונקציה של $\{1,2,3\}$ אל $\{1,2,3\}$, וכידוע יש 3^3 פונקציות כאלה.
סה"כ $3 \cdot 27 \cdot 2{,}560 = 207{,}360$ אינטרפרטציות מקיימות את הנדרש.

תשובה 3

פירוש מתאים ל- K, המאפשר להשלים את כתיבת התבניות הוא:

$K(x,y)$ מתפרש כ - "הדף x מכיל קישור לדף y".

K הוא אפוא סימן יחס (פרדיקט) דו-מקומי.

התבניות (ייתכנו כמה תשובות בכל סעיף, להלן תשובה אפשרית לכל סעיף):

1. $\exists x\big(U(x)\wedge \sim D(x)\big) \wedge \exists x\big(D(x)\wedge \sim U(x)\big)$

יכולנו גם לכתוב זאת כך: $\exists x\big(U(x)\wedge \sim D(x)\big) \wedge \exists y\big(D(y)\wedge \sim U(y)\big)$.

שני הניסוחים האלה שקולים לוגית!

2. $\forall x\big(U(x) \rightarrow \textbf{(}\exists y\ (K(x,y) \wedge (D(y) \vee U(y)))\textbf{)}\big)$

3. $\exists x \forall y\big(D(y) \rightarrow\ \sim K(x,y)\big)$

4. $\forall x\big(K(x,x) \rightarrow \sim U(x)\big)$

5. $\exists x \forall y\big(K(x,y) \rightarrow\ \sim K(y,x)\big)$

תשובה 4

א. תהי J אינטרפרטציה של השפה לעולם $\{1,2\}$, שבה R מתפרש כ"להיות שווה 1",

ו- S מתפרש כ- "להיות שווה 2".

הפסוק $\big(\exists x R(x)\big)\wedge\big(\exists x S(x)\big)$ אמיתי ב- J, כי קיים בעולם הזה איבר השווה 1, וקיים בעולם הזה איבר השווה 2.

לעומת זאת, הפסוק $\exists x(R(x)\wedge S(x))$ שקרי ב- J, כי לא קיים בעולם הזה איבר השווה הן ל- 1 והן ל- 2.

לכן הפסוקים אינם שקולים לוגית.

ב. נוכיח ש- $\exists x(R(x)\wedge S(x))$ גורר לוגית את $\big(\exists x R(x)\big)\wedge\big(\exists x S(x)\big)$:

תהי J אינטרפרטציה שבה אמיתי $\exists x(R(x)\wedge S(x))$. משמע קיים בעולם איבר המקיים בו זמנית את התנאי R ואת התנאי S. לפיכך קיים בעולם איבר המקיים את התנאי R (אותו האיבר הנ"ל) וקיים בעולם איבר המקיים את התנאי S (אותו האיבר).

משמע $\big(\exists x R(x)\big)\wedge\big(\exists x S(x)\big)$ אמיתי ב- J.

ג. נוכיח שהפסוקים שקולים לוגית.

כיוון אחד:

תהי J אינטרפרטציה שבה $\exists x(R(x)\vee S(x))$ אמיתי.

כלומר קיים בעולם של J איבר המקיים את התנאי $R(x)\vee S(x)$.

לפי לוח האמת של "או", האיבר הזה מקיים את R או שהוא מקיים את S. נפריד לשני המקרים.

(i) אם הוא מקיים את R , אז הפסוק $\exists x R(x)$ אמיתי ב- J .

לכן, מהלוח של "או", הפסוק $(\exists x R(x))\vee(\exists x S(x))$ אמיתי ב- J .

(ii) אם הוא מקיים את S אז הפסוק $\exists x S(x)$ אמיתי ב- J .

לכן, מהלוח של "או", הפסוק $(\exists x R(x))\vee(\exists x S(x))$ אמיתי ב- J .

בשני המקרים קיבלנו ש- $(\exists x R(x))\vee(\exists x S(x))$ אמיתי ב- J , כמבוקש.

כיוון שני:

תהי J אינטרפרטציה שבה $(\exists x R(x))\vee(\exists x S(x))$ אמיתי.

השלימו את ההוכחה של כיוון זה, בדומה לכיוון הראשון.

איתי הראבן