במהלך הלימוד של קורס זה, אתם נדרשים לעיתים לחשב אינטגרלים מסוימים. ייתכן שעבר זמן מאז שחלק מכם עסק בנושא זה. לכן, מובאת להלן רשימה של נוסחאות אינטגרציה מוכרות, שעשויות לשמש אתכם במהלך הקורס.

כמו כן, במהלך חישוב של אינטגרלים מסוימים, כאשר אתם נדרשים לחשב גבול של פונקציה נתונה, אפשר להשתמש בכל תוצאה ידועה ומוכרת מבלי להוכיח בתרגיל. (ראו את הדוגמאות המצורפות בעמוד זה.)

אינטגרציה בשיטת ההצבה

אם u היא פונקציה גזירה של x, אז : $\int \left[f(u)\frac{du}{dx} \right] dx = \int \left[f(u)u'(x) \right] dx = \int f(u)du$

כאשר משתמשים בשיטה זו, יש לשים לב לשינוי בגבולות האינטגרלים.

דוגמה 1 : $\int_0^\infty \underbrace{(e^{-x}+7)}_{u}{}^5 \underbrace{e^{-x}dx}_{-du} = -\int_8^7 u^5 du = \int_7^8 u^5 du = \frac{u^6}{6}\bigg|_7^8 = \frac{8^6-7^6}{6}$

כאשר $u = e^{-x}+7$ ולכן $du = -e^{-x}dx$.

במקרה זה, אם x מקבל ערכים בין 0 ל- ∞, אז u מקבל ערכים בין <u>8 ל-7</u>, מכיוון ש- $e^{-0}+7=8$ ו- $\lim_{x\to\infty} e^{-x}+7=7$. (כאשר הופכים את גבולות האינטגרל, המינוס שלפניו מתבטל.)

דוגמה 2 : $\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{F_X(x)}_{u} \underbrace{f_X(x)dx}_{du} = \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$

כאשר $F_X(x)$ ו- $f_X(x)$ הן פונקציית ההתפלגות המצטברת ופונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי X , בהתאמה. נסמן $u = F_X(x)$ ונקבל כי $du = f_X(x)\,dx$.

במקרה זה, אם x מקבל ערכים בין $-\infty$ ל- ∞, אז u, המוגדר כפונקציית התפלגות מצטברת, מקבל ערכים בין 0 ל-1, שכן $\lim_{x\to-\infty} F_X(x)=0$ ו- $\lim_{x\to\infty} F_X(x)=1$.

הנוסחה לאינטגרציה בחלקים

אם u ו- v הן פונקציות גזירות של x, אז : $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

אם נסמן $u=f(x)$ ו- $v=g(x)$, נוכל לרשום את הנוסחה כך :

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

דוגמה : $\int_0^\infty \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{-x}}_{v'}dx = \underbrace{x}_{u}\cdot(\underbrace{-e^{-x}}_{v})\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty (\underbrace{-e^{-x}}_{v})\cdot \underbrace{1}_{u'}dx = \left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_0^\infty = 0+1=1$

כאשר $u=x$ ו- $v'=e^{-x}$ ולכן $u'=1$ ו- $v=-e^{-x}$.

שימו לב: בחישוב אינטגרלים מסוימים בקורס זה, אין צורך להראות במפורש את חישוב הגבולות בשלב האחרון (באמצעות כללי לופיטל). כלומר, אפשר להציב ישירות את התוצאה הסופית, כפי שנעשה בדוגמה.

הרחבה בנושא "שיטות אינטגרציה" ודוגמאות נוספות אפשר למצוא בקורס חשבון אינפיניטסימלי I (יחידה 12).

נוסחאות אינטגרציה מוכרות

$$\int a\,dx = ax + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \neq 1$$

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad , \quad n \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C \quad , \quad x \neq 0$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad , \quad a > 0$$

פונקציית גמא

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}dx = \Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1) \qquad , \qquad t > 0$$

וכאשר n שלם וחיובי מקבלים:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = \Gamma(n) = (n-1)!$$

פונקציית ביתא

$$\int_0^\infty x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = B(a,b) \qquad , \qquad a,b > 0$$

והקשר לפונקציית גמא:

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$