20425 - תאריך הבחינה: 15.2.2016 (סמסטר 2016א - מועד 4א / 85)

שאלה 1

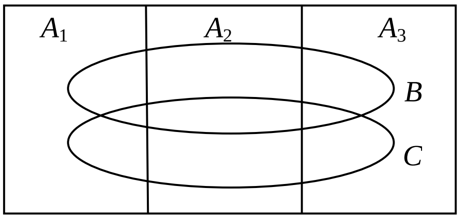
A_1 , A_2 , A_3 , B ו- C הם חמישה מאורעות במרחב מדגם S .

המאורעות A_1 , A_2 ו- A_3 הם מאורעות זרים, שאיחודם שווה למרחב המדגם והם מקיימים :

$P(A_1) = P(A_2) = 2P(A_3)$

ולכן : $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 5P(A_3) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A_1) = P(A_2) = 0.4 \quad ; \quad P(A_3) = 0.4$

ודיאגרמת ון שתתאים למקרה הזה היא :



כעת, נתון כי –

$P(A_1 \cap B) = 2P(A_2 \cap B) = 6P(A_3 \cap B)$ $\qquad$ $P(B) = 0.6$

$P(C \mid A_2 \cap B) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(C \mid A_2 \cap B^C) = \frac{8}{11}$

$P(C \mid A_3) = 0.6$ $\qquad$ $P(B \mid C \cap A_3) = \frac{1}{6}$

$P(B \cup C \mid A_1) = 0.95$ $\qquad$ $P(B \cap C \mid A_1) = 0.15$

לכן :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) = 10P(A_3 \cap B) = 0.6$$

$$\Rightarrow \quad P(A_1 \cap B) = 0.36 \quad ; \quad P(A_2 \cap B) = 0.18 \quad ; \quad P(A_3 \cap B) = 0.06$$

$$\Rightarrow \quad P(C \cap A_2 \cap B) = P(C \mid A_2 \cap B)P(A_2 \cap B) = 0.5 \cdot 0.18 = 0.09$$

$$\Rightarrow \quad P(C^C \cap A_2 \cap B) = P(A_2 \cap B) - P(C \cap A_2 \cap B) = 0.18 - 0.09 = 0.09$$

כמו כן : $P(A_2 \cap B^C) = P(A_2) - P(A_2 \cap B) = 0.4 - 0.18 = 0.22$

$$\Rightarrow \quad P(C \cap A_2 \cap B^C) = P(C \mid A_2 \cap B^C)P(A_2 \cap B^C) = \frac{8}{11} \cdot 0.22 = 0.16$$

וגם : $P(B \cap C \cap A_3) = P(B \mid C \cap A_3)\underbrace{P(C \mid A_3)P(A_3)}_{=P(C \cap A_3)=0.12} = \frac{1}{6} \cdot 0.6 \cdot 0.2 = 0.02$

$$P(B^C \cap C \cap A_3) = P(C \cap A_3) - P(B \cap C \cap A_3) = 0.12 - 0.02 = 0.1$$

$$P(B \cap C^C \cap A_3) = P(B \cap A_3) - P(B \cap C \cap A_3) = 0.06 - 0.02 = 0.04$$

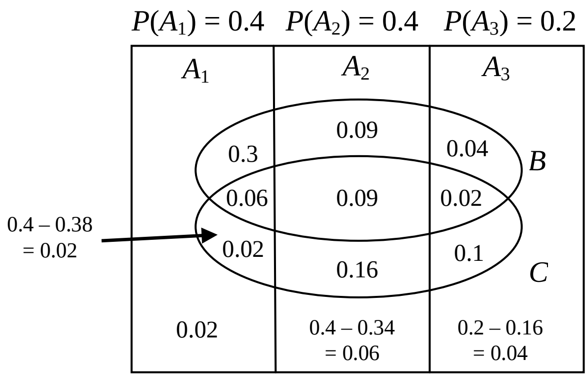
וכן : $P(B \cap C \cap A_1) = P(B \cap C \mid A_1)P(A_1) = 0.15 \cdot 0.4 = 0.06$

$$\Rightarrow \quad P(C^C \cap A_1 \cap B) = P(A_1 \cap B) - P(C \cap A_1 \cap B) = 0.36 - 0.06 = 0.3$$

$$P((B \cup C) \cap A_1) = P(B \cup C \mid A_1)P(A_1) = 0.95 \cdot 0.4 = 0.38$$

$$\Rightarrow \quad P(B^C \cap C^C \cap A_1) = P(A_1) - P((B \cup C) \cap A_1) = 0.4 - 0.38 = 0.02$$

נמלא את ההסתברויות שקיבלנו בדיאגרמת ון :



ומכאן :

א. $P(C) = 0.12 + 0.25 + 0.08 = 0.45$

ב. $P(A_1 \cap B^C \cap C^C) = 0.02$

ג. $P(A_2 \mid B \cup C) = \dfrac{P(A_2 \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)} = \dfrac{0.09 + 0.09 + 0.16}{1 - (0.02 + 0.06 + 0.04)} = \dfrac{0.34}{0.88} = 0.38\overline{63}$

ד. $P(B \cap C \mid A_3) = \dfrac{P(B \cap C \cap A_3)}{P(A_3)} = \dfrac{0.02}{0.2} = 0.1$

שאלה 2

א. $\int_0^2 f_X(x)dx = \int_0^2 c(6-x)dx = c[6x - \frac{x^2}{2}]_0^2 = c(12-2) = 10c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 0.1$

ב. $E[X] = \int_0^2 x f_X(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{10} x(6-x)dx = \frac{1}{10}\left[\frac{6x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{10}(12 - \frac{8}{3}) = \frac{14}{15}$

$E[X^2] = \int_0^2 x^2 f_X(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{10} x^2(6-x)dx = \frac{1}{10}\left[\frac{6x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{10}(16-4) = 1.2$

$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{6}{5} - (\frac{15}{14})^2 = \frac{74}{225}$

ג. $P\{X > 1 \mid X > 0.5\} = \dfrac{P\{X > 1\}}{P\{X > 0.5\}} = \dfrac{\frac{1}{10}\int_1^2 (6-x)dx}{\frac{1}{10}\int_{0.5}^2 (6-x)dx} = \dfrac{\left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2}{\left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_{0.5}^2} = \dfrac{12 - 2 - 6 + \frac{1}{2}}{12 - 2 - 3 + \frac{1}{8}} = \dfrac{36}{57}$

ד. נעזר במשפט הגבול המרכזי ובתוצאות סעיף ב, כדי לחשב את הקירוב המבוקש :

$$P\left\{\sum_{i=0}^{30} X_i > 30\right\} = P\left\{Z > \frac{30 - 30 \cdot \frac{14}{15}}{\sqrt{30 \cdot \frac{74}{225}}}\right\} = P\{Z > 0.6367\} = 1 - \Phi(0.6367) = 1 - 0.7378 = 0.2622$$

שאלה 3

א. $$P\{X \le 16 \mid X > 7\} = \frac{P\{7 < X \le 16\}}{P\{X > 7\}} = \frac{P\{X \le 16\} - P\{X \le 7\}}{P\{X > 7\}}$$

$$= \frac{1 - P\{X > 16\} - 1 + P\{X > 7\}}{P\{X > 7\}} = \frac{(1-p)^7 - (1-p)^{16}}{(1-p)^7} = 1 - (1-p)^9$$

חישוב דרך המשלים:

$$P\{X \le 16 \mid X > 7\} = 1 - P\{X > 16 \mid X > 7\} = 1 - \frac{P\{X > 16\}}{P\{X > 7\}} = 1 - \frac{(1-p)^{16}}{(1-p)^7} = 1 - (1-p)^9$$

ב. $$P\{X = i \mid X \le n\} = \begin{cases} \dfrac{P\{X = i\}}{P\{X \le n\}} & , \quad i \le n \\ 0 & , \quad i > n \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{p(1-p)^{i-1}}{1-(1-p)^n} & , \quad i \le n \\ 0 & , \quad i > n \end{cases}$$

ג. תחילה, נשים לב כי:

$$P\{Y = i\} = \begin{cases} P\{X = i\} & , \quad i = 1,\ldots,n-1 \\ P\{X \ge n\} & , \quad i = n \end{cases} = \begin{cases} p(1-p)^{i-1} & , \quad i = 1,\ldots,n-1 \\ \sum\limits_{i=n}^{\infty} p(1-p)^{i-1} & , \quad i = n \end{cases}$$

ולכן, מצד אחד: $$E[Y] = \sum_{i=1}^{n} iP\{Y = i\} = \sum_{i=1}^{n-1} ip(1-p)^{i-1} + \sum_{i=n}^{\infty} np(1-p)^{i-1}$$

ומצד שני: $$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} iP\{X = i\} = \sum_{i=1}^{n-1} ip(1-p)^{i-1} + \sum_{i=n}^{\infty} ip(1-p)^{i-1}$$

הואיל ומתקיים: $$\sum_{i=n}^{\infty} ip(1-p)^{i-1} > \sum_{i=n}^{\infty} np(1-p)^{i-1}$$

הרי שמתקיים: $$E[X] > E[Y]$$

שאלה 4

א. המאורע מתרחש אם יש בדיוק 5 התאמות בין כדים לכדורים ובדיוק 5 אי-התאמות.

לחישוב ההסתברות המבוקשת, נעזר בכלל ההכלה וההפרדה.

נסמן ב- A_i את המאורע שכדור i נמצא בכד i, לכל $i = 1,\ldots,5$ (כאשר הכוונה לחמישה כדים כלשהם),

ונמנה את מספר האפשרויות להיווצרות של 5 אי-התאמות:

$$n(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) = 5! - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)$$

$$= 5! - \left[\binom{5}{1}n(A_1) - \binom{5}{2}n(A_1 \cap A_2) + \ldots + \binom{5}{5}n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)\right]$$

$$= 5! - [5 \cdot 4! - 10 \cdot 3! + 10 \cdot 2! - 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1] = 120 - 76 = 44$$

ומכאן, שההסתברות המבוקשת היא: $$\frac{\binom{10}{5} \cdot 44}{10!} = 0.0030\bar{5}$$

ב. נחשב את התוחלת של Y באמצעות הגדרת אינדיקטורים.

נגדיר: $Y_i = \begin{cases} 1 & , \text{בכד } i \text{ נמצא כדור שמספרו קטן מ-} i \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$ לכל $i = 1,\ldots,n$

ונקבל כי: $\sum_{i=1}^{n} Y_i = Y =$ מספר הכדים שהמספר שהם נושאים **גדול** מהמספר שעל הכדור שהוכנס לתוכם.

לכל $i = 1,\ldots,n$ מתקיים: $E[Y_i] = P\{Y_i = 1\} = \frac{i-1}{n}$

לכן: $E[Y] = \sum_{i=1}^{n} E[Y_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} = \frac{(n-1)n}{2n} = \frac{n-1}{2}$

ג. המשתנים המקריים X ו- Y תלויים זה בזה, שכן ההתפלגות השולית של X אינה זהה להתפלגותו המותנית בערך ידוע של Y. אפשר לראות זאת באמצעות השוואת הערכים שאפשריים של שתי ההתפלגויות. הערך האפשרי המקסימלי של המשתנה המקרי X הוא n, אולם בהינתן, למשל, ש- $Y = 1$, ערכו המקסימלי הופך ל- $n-2$. כלומר: $P\{X = n\} = \frac{1}{n!} \neq P\{X = n \mid Y = 1\} = 0$

שאלה 5

א. הוכחת הטענה מובאת באתר הקורס.

ב. נסמן ב- Y את מספר הלקוחות שנכנסים לחנות במשך שעה.

לפי נתוני הבעיה, לכל $0 < p < 1$, מתקיים: $X \mid Y = i \sim B(i, p)$; $Y \sim NB(10, p)$

לפיכך, נוכל לחשב את התוחלת ואת השונות של X בעזרת נוסחאות התוחלת והשונות המותנות. נקבל:

$$E[X] = E[E[X \mid Y]] = E[pY] = pE[Y] = p \cdot \frac{10}{p} = 10$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y]) = E[p(1-p)Y] + \mathrm{Var}(pY) \\ &= p(1-p)E[Y] + p^2\mathrm{Var}(Y) = p(1-p) \cdot \frac{10}{p} + p^2 \cdot \frac{10(1-p)}{p^2} = 20(1-p)\end{aligned}$$