פרק 7: תכונות של תוחלת (פתרונות)

1. נרשום בטבלה את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y:

X \ Y	0	1	p_X
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
3	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
5	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
p_Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

א. $E[W]=E[3XY]=3E[XY]=3\cdot\frac{1}{6}(1+3+5)=4.5$

ב. $E[S]=E[X+Y]=E[X]+E[Y]=3.5+0.5=4$

כדי למצוא את השונות של $X+Y$, נמצא תחילה את פונקציית ההסתברות של הסכום. מקבלים:

$$P\{X+Y=2\}=\tfrac{2}{6}\quad;\quad P\{X+Y=4\}=\tfrac{2}{6}\quad;\quad P\{X+Y=6\}=\tfrac{2}{6}$$

לכן:
$$E[(X+Y)^2]=\tfrac{2}{6}(2^2+4^2+6^2)=18.66\overline{6}$$

$$\text{Var}(X+Y)=E[(X+Y)^2]-(E[X+Y])^2$$
$$=18.66\overline{6}-16=2.66\overline{6}$$

אפשר לחשב את שונות הסכום גם באמצעות הנוסחה $\text{Var}(X+Y)=\text{Var}(X)+\text{Var}(Y)+2\text{Cov}(X,Y)$.

מקבלים:
$$\text{Var}(X)=2.9167\quad;\quad \text{Var}(Y)=0.25$$
$$\text{Cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=\tfrac{1}{6}(1+3+5)-3.5\cdot 0.5=-0.25$$
$$\text{Var}(X+Y)=2.916\overline{6}+0.25+2\cdot(-0.25)=2.666\overline{6}$$

2. א. בפרק הקודם ציינו כי אם למשתנים המקריים $X_1,\ \dots,\ X_r$ יש התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $(p_1,\ \dots\ ,p_r)$, אז לכל אחד מהם יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n וה- p_i המתאים לו; ולסכום של כל שניים מהם, X_i+X_j (עבור $i\neq j$), יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- p_i+p_j (ראה תרגיל 8 בקובץ התרגילים לפרק 6). לכן:

$$\text{Var}(X_i)=np_i(1-p_i)$$

וגם:
$$\text{Var}(X_i+X_j)=n(p_i+p_j)(1-p_i-p_j)$$

ומצד שני:
$$\text{Var}(X_i+X_j)=\text{Var}(X_i)+\text{Var}(X_j)+2\text{Cov}(X_i,X_j)$$

ולכן:
$$\text{Cov}(X_i,X_j)=\tfrac{1}{2}[\text{Var}(X_i+X_j)-\text{Var}(X_i)-\text{Var}(X_j)]$$

כעת, נציב את נוסחאות השונות הבינומית ונקבל נוסחה לשונות המשותפת של X_i ו- X_j:

$$\text{Cov}(X_i,X_j)=\tfrac{1}{2}[n(p_i+p_j)(1-p_i-p_j)-np_i(1-p_i)-np_j(1-p_j)]$$
$$=\tfrac{1}{2}[-2np_ip_j]=-np_ip_j$$

הערה: דרך נוספת לחישוב השונות המשותפת מובאת בספר הקורס, עמוד 370, דוגמה 3ז.

ב. אם למשתנים המקריים X_1, X_2 ו- X_3 יש התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים 100 ו- $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{10}$, אז ההתפלגות השולית של כל אחד מה- X_i-ים היא בינומית עם הפרמטרים 100 וה- p_i המתאים, ולכן ידועות לנו כל התוחלות והשונויות של ה- X_i-ים. כמו כן, השונות המשותפת של כל שני X_i-ים נתונה על-ידי הנוסחה $-np_ip_j$ (ראה סעיף א). לפיכך:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y_1) &= \mathrm{Var}(X_1) + (-2)^2\,\mathrm{Var}(X_2) - 2\cdot 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2)\\ &= 100\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + 4\cdot 100\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{4}{5} - 4\cdot\left(-100\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}\right) = 129\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y_2) &= \mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_3) + 2\mathrm{Cov}(X_2, X_3)\\ &= 100\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{4}{5} + 100\cdot\tfrac{3}{10}\cdot\tfrac{7}{10} + 2\cdot\left(-100\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{3}{10}\right) = 25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) &= \mathrm{Cov}(X_1 - 2X_2, X_2 + X_3)\\ &= \mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{Cov}(X_1, X_3) - 2\mathrm{Var}(X_2) - 2\mathrm{Cov}(X_2, X_3)\\ &= -100\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5} - 100\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{10} - 2\cdot\left(100\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{4}{5}\right) + 2\cdot\left(100\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{3}{10}\right) = -45\end{aligned}$$

ומכאן:

$$\rho(Y_1, Y_2) = \frac{\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_1)\mathrm{Var}(Y_2)}} = \frac{-45}{\sqrt{129\cdot 25}} = -0.7924$$

3. א. נסמן ב- X_{n-m} את מספר ההצלחות ב- $n-m$ החזרות האחרונות על הניסוי. משתנה מקרי זה בלתי-תלוי במשתנה המקרי X_m (שמוגדר על חזרות אחרות) ומתקיים $\mathrm{Cov}(X_m, X_{n-m}) = 0$ וגם $X_n = X_m + X_{n-m}$.
כמו כן, לכל אחד מה- X_i-ים יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים i ו- p. לכן, נקבל כי:

$$\rho(X_m, X_n) = \frac{\mathrm{Cov}(X_m, X_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_m)\mathrm{Var}(X_n)}} = \frac{\mathrm{Cov}(X_m, X_m + X_{n-m})}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_m)\mathrm{Var}(X_n)}} = \frac{\mathrm{Cov}(X_m, X_m) + \mathrm{Cov}(X_m, X_{n-m})}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_m)\mathrm{Var}(X_n)}}$$

$$= \frac{\mathrm{Var}(X_m) + 0}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_m)\mathrm{Var}(X_n)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X_m)}{\mathrm{Var}(X_n)}} = \sqrt{\frac{mp(1-p)}{np(1-p)}} = \sqrt{\frac{m}{n}}$$

ב. נסמן ב- X_{2t} את מספר המופעים שהתרחשו במרווח-הזמן $[t, 3t)$. המשתנים המקריים X_t ו- X_{2t} בלתי-תלויים זה בזה, מכיוון שהם מוגדרים על מרווחי-זמן שאינם חופפים. יתרה מזאת, מתקיים השוויון $X_{3t} = X_t + X_{2t}$, ולכל אחד מה- X_{it}-ים יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $i\lambda t$. לכן, נקבל:

$$\rho(X_t, X_{3t}) = \frac{\mathrm{Cov}(X_t, X_{3t})}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_t)\mathrm{Var}(X_{3t})}} = \frac{\mathrm{Cov}(X_t, X_t + X_{2t})}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_t)\mathrm{Var}(X_{3t})}} = \frac{\mathrm{Cov}(X_t, X_t) + \mathrm{Cov}(X_t, X_{2t})}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_t)\mathrm{Var}(X_{3t})}}$$

$$= \frac{\mathrm{Var}(X_t) + 0}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_t)\mathrm{Var}(X_{3t})}} = \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X_t)}{\mathrm{Var}(X_{3t})}} = \sqrt{\frac{\lambda t}{3\lambda t}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

ג. על-סמך תוצאות הסעיפים הקודמים נוכל לנסח את הטענה הבאה:

אם X ו- Y משתנים מקריים בלתי-תלויים, אז מתקיים: $\rho(X, X+Y) = \sqrt{\dfrac{\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)}}$

4. נסמן ב- X_i את הרווח של המהמר במשחק ה-i-י, לכל $i=1,\ldots,n$.

מתקיים: $X_i = \begin{cases} i & , \text{המהמר זוכה במשחק ה-}i\text{-י} \\ -\frac{i}{2} & , \text{המהמר מפסיד במשחק ה-}i\text{-י} \end{cases}$

כאשר ה-X_i-ים בלתי-תלויים זה בזה, $P\{X_i=i\}=p$ ו- $P\{X_i=-\frac{i}{2}\}=1-p$.

הסכום $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$ מסמן את הרווח הכולל של המהמר בסדרת n המשחקים.

נחשב את התוחלת של X: $E[X]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i]=\sum_{i=1}^{n}[ip-\frac{i}{2}(1-p)]=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{2}p-\frac{1}{2}\right)i=\frac{n(n+1)(3p-1)}{4}$

ואת השונות של X: $E[X_i^2]=[i^2p+\frac{i^2}{4}(1-p)]=\left(\frac{3}{4}p+\frac{1}{4}\right)i^2$

$$\text{Var}(X_i)=\left(\frac{3}{4}p+\frac{1}{4}\right)i^2-\left(\frac{3}{2}p-\frac{1}{2}\right)^2i^2=\frac{9}{4}p\left(1-p\right)i^2$$

$$\text{Var}(X)=\sum_{i=1}^{n}\text{Var}(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{9}{4}p\left(1-p\right)i^2=\frac{3}{8}p(1-p)n(n+1)(2n+1)$$ [ה-X_i-ים בלתי-תלויים]

5. יהיו A_1 , A_2 ו- A_3 מאורעות במרחב מדגם S , שההסתברויות להתרחשותם הן $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ ו- $\frac{1}{6}$, בהתאמה, ונגדיר את המשתנה המקרי N על-ידי מספר המאורעות, מבין A_1 , A_2 ו- A_3, שמתרחשים.

א. כדי למצוא את פונקציית ההסתברות של N, צריך לדעת את הסתברויות החיתוכים של כל שני מאורעות מהשלושה וכן את הסתברות החיתוך של שלושת המאורעות. לכן, מהנתונים שמופיעים בשאלה, אי-אפשר למצוא את פונקציית ההסתברות של N.

ב. נגדיר: $X_i=\begin{cases}1 & , \text{המאורע } A_i \text{ מתרחש} \\ 0 & , \text{המאורע } A_i \text{ אינו מתרחש}\end{cases}$ לכל $i=1,2,3$

ונקבל כי: $N=\sum_{i=1}^{3}X_i=$ מספר המאורעות שמתרחשים.

לכן: $E[N]=E\left[\sum_{i=1}^{3}X_i\right]=\sum_{i=1}^{3}E[X_i]=\sum_{i=1}^{3}P\{X_i=1\}=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{7}{10}=0.7$

ג. נציג שוב את המשתנה המקרי N כסכום של המשתנים המקריים X_1 , X_2 ו- X_3, שהוגדרו בסעיף ב.

מקבלים: $\text{Var}(N)=\sum_{i=1}^{3}\text{Var}(X_i)+2\sum_{i<j}\text{Cov}(X_i,X_j)$

כאשר, לכל $i=1,2,3$ מתקיים: $\text{Var}(X_i)=P\{X_i=1\}P\{X_i=0\}=P(A_i)P(A_i^C)$

ולכל $1\le i<j\le 3$ מתקיים: $\text{Cov}(X_i,X_j)=E[X_iX_j]-E[X_i]E[X_j]$

$$=P\{X_i=1,X_j=1\}-P\{X_i=1\}P\{X_j=1\}=P(A_i\cap A_j)-P(A_i)P(A_j)$$

1) אם המאורעות A_1 , A_2 ו- A_3 בלתי-תלויים זה בזה, אז לכל $1\le i<j\le 3$ מתקיים השוויון $\text{Cov}(X_i,X_j)=0$. לכן:

$$\text{Var}(N)=\sum_{i=1}^{3}\text{Var}(X_i)+2\sum_{i<j}\text{Cov}(X_i,X_j)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+0=\frac{469}{900}=0.5211$$

2) אם המאורעות A_1 , A_2 ו- A_3 זרים זה לזה, אז לכל $1 \le i < j \le 3$ מתקיים $P(A_i \cap A_j) = 0$ ולכן $\text{Cov}(X_i, X_j) = -P(A_i)P(A_j)$. לפיכך:

$$\text{Var}(N) = \sum_{i=1}^{3} \text{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \text{Cov}(X_i, X_j) = \tfrac{469}{900} - 2\left(\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{6}\right) = 0.21$$

3) אם המאורעות A_1 , A_2 ו- A_3 מוכלים זה בזה, אז לכל $1 \le i < j \le 3$ מתקיים $P(A_i \cap A_j) = P(A_j)$ ולכן $\text{Cov}(X_i, X_j) = P(A_j) - P(A_i)P(A_j) = P(A_j)P(A_i^C)$. לפיכך:

$$\text{Var}(N) = \sum_{i=1}^{3} \text{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \text{Cov}(X_i, X_j) = \tfrac{469}{900} + 2\left(\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{5}\right) = \tfrac{1{,}149}{900} = 1.2767$$

6. נגדיר: $X_i = \begin{cases} 1 & , \text{הבחירה ה-}i\text{-ית היתה של פרט מיוחד} \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$ לכל $i = 1,\ldots,n$,

ונקבל כי: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ = מספר הפרטים המיוחדים שנבחרו למדגם.

חישוב התוחלת של X באמצעות אינדיקטורים אלו, נעשה בספר הקורס, עמוד 349, דוגמה 2ז. כעת, נחשב את השונות של X . לכל $1 \le i \ne j \le n$, נקבל:

$$P\{X_i = 1, X_j = 1\} = \tfrac{m}{N}\cdot\tfrac{m-1}{N-1} = \tfrac{m(m-1)}{N(N-1)}$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \tfrac{m(m-1)}{N(N-1)} - \left(\tfrac{m}{N}\right)^2 = -\tfrac{m(N-m)}{N^2(N-1)}$$

ומכאן:
$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) + \sum_{i\ne j} \text{Cov}(X_i, X_j) = n\cdot\tfrac{m(N-m)}{N^2} - n\cdot(n-1)\cdot\tfrac{m(N-m)}{N^2(N-1)}$$

$$= \tfrac{nm(N-m)(N-\cancel{1}-n+\cancel{1})}{N^2(N-1)} = \tfrac{N-n}{N-1}\cdot n\cdot\tfrac{m}{N}\cdot\tfrac{N-m}{N}$$

7. נתחיל מחישוב התוחלת והשונות של X .

נגדיר: $X_i = \begin{cases} 1 & , \text{האורח } i \text{ קיבל מפתח מתאים לחדרו} \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$ לכל $i = 1,\ldots,2n$

ונקבל כי: $X = \sum_{i=1}^{2n} X_i$ = מספר האורחים המקבלים מפתח מתאים לחדרם.

כמו כן, לכל $i = 1,\ldots,2n$ מתקיים:
$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \binom{2}{1}\Big/\binom{2n}{1} = \tfrac{2}{2n} = \tfrac{1}{n}$$

$$\text{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = \tfrac{n-1}{n^2}$$

ולכל $i, j = 1,\ldots,2n$ $(i \ne j)$ מתקיים:

$$P\{X_i = 1, X_j = 1\} = \begin{cases} \tfrac{2}{2n}\cdot\tfrac{1}{2n-1} = \tfrac{1}{n(2n-1)} & , \text{האורחים } i \text{ ו- } j \text{ הם זוג} \\ \tfrac{2}{2n}\cdot\tfrac{2}{2n-1} = \tfrac{2}{n(2n-1)} & , \text{האורחים } i \text{ ו- } j \text{ אינם זוג} \end{cases}$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} \tfrac{1}{n(2n-1)} - \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 = -\tfrac{n-1}{n^2(2n-1)} & , \text{האורחים } i \text{ ו- } j \text{ הם זוג} \\ \tfrac{2}{n(2n-1)} - \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 = \tfrac{1}{n^2(2n-1)} & , \text{האורחים } i \text{ ו- } j \text{ אינם זוג} \end{cases}$$

לכן:
$$E[X]=\sum_{i=1}^{2n}E[X_i]=2n\cdot\tfrac{1}{n}=2$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)&=\sum_{i=1}^{2n}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{i<j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^{2n}\mathrm{Var}(X_i)+\sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)\\&=2n\cdot\tfrac{n-1}{n^2}-2n\cdot\tfrac{n-1}{n^2(2n-1)}+2n(2n-2)\cdot\tfrac{1}{n^2(2n-1)}=\tfrac{4(n-1)}{2n-1}\end{aligned}$$

הערה: יש בסך-הכל $\binom{2n}{2}=n(2n-1)$ אפשרויות שונות לבחור 2 אורחים מתוך $2n$ אורחים.
ב-n מתוך הבחירות האלו, שני האורחים הנבחרים הם בני-זוג, ולכן יש $n(2n-1)-n = n(2n-2)$
אפשרויות לבחור שני אורחים שאינם בני-זוג.

כעת, נחשב את התוחלת של Y:

נגדיר: $Y_i=\begin{cases}1 & ,\ \text{בני-הזוג } i \text{ יכולים להיכנס לחדרים}\\ 0 & ,\ \text{אחרת}\end{cases}$ לכל $i=1,\ldots,n$

ונקבל כי: $Y=\sum_{i=1}^{n}Y_i=$ מספר הזוגות שיכולים להיכנס לחדרים.

לכל $i=1,\ldots,n$ מתקיים:
$$E[Y_i]=P\{Y_i=1\}=1-\frac{\binom{2n-2}{2}}{\binom{2n}{2}}=1-\frac{(2n-2)(2n-3)}{2n(2n-1)}=\frac{4n-3}{n(2n-1)}$$

לכן:
$$E[Y]=\sum_{i=1}^{n}E[Y_i]=n\cdot\tfrac{4n-3}{n(2n-1)}=\tfrac{4n-3}{2n-1}$$

8. א. נגדיר: $X_i=\begin{cases}1 & ,\ \text{במקומות } i \text{ ו-} i+1 \text{ יושב זוג מעורב}\\ 0 & ,\ \text{אחרת}\end{cases}$ לכל $i=1,\ldots,14$

ונקבל כי: $X=\sum_{i=1}^{14}X_i=$ מספר הזוגות המעורבים בשורה.

עתה, לכל $i=1,\ldots,14$ מתקיים:
$$E[X_i]=P\{X_i=1\}=\tfrac{8}{15}\cdot\tfrac{7}{14}+\tfrac{7}{15}\cdot\tfrac{8}{14}=\tfrac{8}{15}$$
$$\mathrm{Var}(X_i)=P\{X_i=1\}P\{X_i=0\}=\tfrac{8}{15}\cdot\tfrac{7}{15}=\tfrac{56}{225}$$

ולכל $1\le i,j\le 14$, כך ש- $i\neq j$, מתקיים:

$$P\{X_i=1,X_j=1\}=\begin{cases}\tfrac{8}{15}\cdot\tfrac{7}{14}\cdot\tfrac{7}{13}+\tfrac{7}{15}\cdot\tfrac{8}{14}\cdot\tfrac{6}{13}=\tfrac{4}{15} & ,\quad |i-j|=1\\ 2^2\cdot\tfrac{8}{15}\cdot\tfrac{7}{14}\cdot\tfrac{7}{13}\cdot\tfrac{6}{12}=\tfrac{56}{195} & ,\quad |i-j|>1\end{cases}$$

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=\begin{cases}\tfrac{4}{15}-\left(\tfrac{8}{15}\right)^2=-\tfrac{4}{225} & ,\quad |i-j|=1\\ \tfrac{56}{195}-\left(\tfrac{8}{15}\right)^2=\tfrac{8}{2{,}925} & ,\quad |i-j|>1\end{cases}$$

לכן:
$$E[X]=\sum_{i=1}^{14}E[X_i]=14\cdot\tfrac{8}{15}=\tfrac{112}{15}=7.466\overline{6}$$

$$\mathrm{Var}(X)=\sum_{i=1}^{14}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{i<j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=14\cdot\tfrac{56}{225}-2\cdot13\cdot\tfrac{4}{225}+2\cdot78\cdot\tfrac{8}{2{,}925}=\tfrac{776}{225}=3.448\overline{8}$$

הסבר: יש בסך-הכל $\binom{14}{2}=91$ זוגות שונים של i ו- j, כאשר $i<j$, וב-13 מתוכם מתקיים $j=i+1$.
לכן, יש 78 זוגות שונים של i ו- j שמקיימים $j>i+1$.

ב. נניח שהמקומות בשורה ממוספרים משמאל לימין.

<u>דרך I</u>

נגדיר: $Y_i=\begin{cases}1 & , \text{במקום } i \text{ יושבת אישה ובמקום } i+1 \text{ יושב גבר} \\ 0 & , \text{אחרת}\end{cases}$ לכל $i=1,\ldots,14$

ונקבל כי: $Y=\sum_{i=1}^{14}Y_i=$ מספר הנשים בשורה שלימינן יושב גבר.

עתה, לכל $i=1,\ldots,14$ מתקיים:

$$E[Y_i]=P\{Y_i=1\}=\tfrac{7}{15}\cdot\tfrac{8}{14}=\tfrac{4}{15}$$

$$\text{Var}(Y_i)=P\{Y_i=1\}P\{Y_i=0\}=\tfrac{4}{15}\cdot\tfrac{11}{15}=\tfrac{44}{225}$$

ולכל $1\le i\le j\le 14$ מתקיים:

$$P\{Y_i=1,Y_j=1\}=\begin{cases}0 & , \quad |i-j|=1 \\ \tfrac{7}{15}\cdot\tfrac{8}{14}\cdot\tfrac{6}{13}\cdot\tfrac{7}{12}=\tfrac{14}{195} & , \quad |i-j|>1\end{cases}$$

$$\text{Cov}(Y_i,Y_j)=\begin{cases}0-\left(\tfrac{4}{15}\right)^2=-\tfrac{16}{225} & , \quad |i-j|=1 \\ \tfrac{14}{195}-\left(\tfrac{4}{15}\right)^2=\tfrac{2}{2{,}925} & , \quad |i-j|>1\end{cases}$$

לכן:

$$E[Y]=\sum_{i=1}^{14}E[Y_i]=14\cdot\tfrac{4}{15}=\tfrac{56}{15}=3.73\overline{3}$$

$$\text{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{14}\text{Var}(Y_i)+2\sum_{i<j}\text{Cov}(Y_i,Y_j)=14\cdot\tfrac{44}{225}-2\cdot 13\cdot\tfrac{16}{225}+2\cdot 78\cdot\tfrac{2}{2{,}925}=\tfrac{224}{225}$$

<u>דרך II</u>

נגדיר: $X_i=\begin{cases}1 & , \text{לימין אישה } i \text{ יושב גבר} \\ 0 & , \text{אחרת}\end{cases}$ לכל $i=1,\ldots,7$

ונקבל כי: $Y=\sum_{i=1}^{7}X_i=$ מספר הנשים בשורה שלימינן יושב גבר.

עתה, לכל $i=1,\ldots,7$ מתקיים:

$$E[X_i]=P\{X_i=1\}=\tfrac{1}{15}\cdot 0+\tfrac{14}{15}\cdot\tfrac{8}{14}=\tfrac{8}{15}$$

$$\text{Var}(X_i)=P\{X_i=1\}P\{X_i=0\}=\tfrac{8}{15}\cdot\tfrac{7}{15}=\tfrac{56}{225}$$

ולכל $1\le i,j\le 7$ מתקיים:

$$P\{X_i=1,X_j=1\}=\tfrac{14}{105}\cdot 0+\tfrac{13}{105}\cdot 0+\tfrac{78}{105}\cdot\tfrac{8}{13}\cdot\tfrac{7}{12}=\tfrac{4}{15}$$

הסבר: יש בסך-הכל $\binom{15}{2}=105$ אפשרויות לבחור שני מקומות לבנות i ו- j, כאשר $i\neq j$.
ב-14 מתוך 105 אפשרויות אלו הבנות נמצאות במקומות סמוכים וב-13 מהאפשרויות הללו הבנות אינן במקומות סמוכים, אך אחת מהן נמצאת במקום הימני ביותר בשורה. לכן, יש $14+13=27$ אפשרויות מיקום לבנות, שבהן לא ייתכן שלימין שתי הבנות יעמדו גברים. בשאר האפשרויות, 78 במספר, ייתכן שלימין כל אחת מהבנות יעמוד גבר.

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{4}{15} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = -\frac{4}{225}$$

לכן:
$$E[Y] = \sum_{i=1}^{7} E[X_i] = 7 \cdot \frac{8}{15} = \frac{56}{15} = 3.73\overline{3}$$

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^{7} \text{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j) = 7 \cdot \frac{56}{225} - 7 \cdot 6 \cdot \frac{4}{225} = \frac{224}{225}$$

9. א. לפי הנתונים בסעיף זה, מתקיים:
$$P\{Y=2\} = 0.4 \quad ; \quad P\{Y=5\} = 0.6$$

לכן:
$$E[Y] = 2 \cdot 0.4 + 5 \cdot 0.6 = 0.8 + 3 = 3.8$$

$$E[Y^2] = 2^2 \cdot 0.4 + 5^2 \cdot 0.6 = 1.6 + 15 = 16.6$$

$$\text{Var}(Y) = 16.6 - 3.8^2 = 2.16$$

עתה נחשב את התוחלת והשונות של X באמצעות התניה בערך של Y. למשתנה המקרי X בהינתן $Y=j$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $j+3$ ו- $\frac{1}{6}$. לכן, מתקיים:

$$E[X \mid Y=j] = \frac{j+3}{6} \qquad ; \qquad \text{Var}(X \mid Y=j) = (j+3) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5(j+3)}{36}$$

ומכאן:
$$E[X] = E[E[X \mid Y]] = E\left[\frac{Y+3}{6}\right] = \frac{1}{6}E[Y] + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \cdot 3.8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{15} = 1.1333$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(E[X \mid Y]) + E[\text{Var}(X \mid Y)] = \text{Var}\left(\frac{Y+3}{6}\right) + E\left[\frac{5(Y+3)}{36}\right] = \frac{1}{36}\text{Var}(Y) + \frac{5}{36}E[Y] + \frac{15}{36}$$
$$= \frac{1}{36} \cdot 2.16 + \frac{5}{36} \cdot 3.8 + \frac{15}{36} = \frac{226}{225} = 1.00\overline{4}$$

ב. גם במקרה זה, למשתנה המקרי X בהינתן $Y=j$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $j+3$ ו- $\frac{1}{6}$.
אולם כעת, $E[Y] = 3$ ו- $\text{Var}(Y) = 3$.

לכן, מתקיים:
$$E[X] = E[E[X \mid Y]] = E\left[\frac{Y+3}{6}\right] = \frac{1}{6}E[Y] + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(E[X \mid Y]) + E[\text{Var}(X \mid Y)] = \text{Var}\left(\frac{Y+3}{6}\right) + E\left[\frac{5(Y+3)}{36}\right] = \frac{1}{36}\text{Var}(Y) + \frac{5}{36}E[Y] + \frac{15}{36}$$
$$= \frac{1}{36} \cdot 3 + \frac{5}{36} \cdot 3 + \frac{15}{36} = \frac{33}{36}$$

10. למשתנה המקרי X יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{1}{2}$.

לכן, מתקיים:
$$E[X] = \frac{n}{2} \qquad ; \qquad \text{Var}(X) = \frac{n}{4}$$

למשתנה המקרי המותנה Y בהינתן $X=i$ (לכל $i = 0,1,...,n$) יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים i ו- $\frac{1}{n}$.
(במקרה שבו $i=0$, המשתנה המקרי Y בהינתן $X=i$ מקבל את הערך 0 בלבד בהסתברות 1. ולכן, במקרה זה, תוחלתו ושונותו של המשתנה המקרי המותנה שוות ל-0.)

לפיכך, נוכל לרשום:
$$E[Y \mid X=i] = \frac{i}{n} \qquad ; \qquad \text{Var}(Y \mid X=i) = \frac{i(n-1)}{n^2}$$

ומכאן:
$$E[Y] = E[E[Y \mid X]] = E\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{1}{n}E[X] = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(E[Y \mid X]) + E[\text{Var}(Y \mid X)] = \text{Var}\left(\frac{X}{n}\right) + E\left[\frac{X(n-1)}{n^2}\right]$$
$$= \frac{1}{n^2}\text{Var}(X) + \frac{n-1}{n^2}E[X] = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{4} + \frac{n-1}{n^2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{4n} + \frac{n-1}{2n} = \frac{2n-1}{4n}$$

נותר עוד לחשב את תוחלת המכפלה XY . נעזר בתוצאת תרגיל ת26 (עמוד 430 בספר הקורס), ונקבל:

$$E[XY]=E[E[XY\mid X]]\underset{\substack{\downarrow\\ \text{ת}26}}{=}E[XE[Y\mid X]]=E\left[X\cdot\tfrac{X}{n}\right]=\tfrac{1}{n}E[X^2]=\tfrac{1}{n}\cdot\left(\tfrac{n}{4}+\tfrac{n^2}{4}\right)=\tfrac{n+1}{4}$$

ומכאן:

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}=\frac{\frac{n+1}{4}-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}\cdot\frac{2n-1}{4n}}}=\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$$

11. א1. נסמן ב-X את מספר השקיות ששחר יקנה עד שיהיו ברשותו לפחות גולה אחת מכל צבע. נוכל לבטא את X על-ידי הסכום הבא: $X=1+X_1+X_2$, כאשר X_1 הוא מספר השקיות ששחר יקנה עד שיקבל גולה מצבע שונה מזה שקיבל בשקית הראשונה; ו-X_2 הוא מספר השקיות ששחר יקנה לאחר מכן, עד שיקבל גולה מהצבע השלישי (והאחרון).

ואז:

$$E[X]=E[1+X_1+X_2]=1+E[X_1]+E[X_2]$$

המשתנים המקריים שהגדרנו, X_1 ו-X_2, בלתי-תלויים זה בזה, מכיוון שהשקיות בלתי-תלויות זו בזו. כמו כן, ל-X_1 יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{2}{3}$ ול-X_2 יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{1}{3}$.

לפיכך:

$$E[X]=1+\tfrac{3}{2}+3=5.5$$

א2. כבסעיף הקודם, נסמן ב-X את מספר השקיות ששחר יקנה עד שיהיו ברשותו לפחות שתי גולות ירוקות; ונבטא את X כסכום של שני משתנים מקריים, X_1 ו-X_2, כאשר X_1 הוא מספר השקיות ששחר יקנה עד שיקבל שקית שיש בה לפחות גולה ירוקה אחת (השלב הראשון); ו-X_2 הוא מספר השקיות ששחר יקנה לאחר מכן, עד להשגת מבוקשו (השלב השני).

את התוחלת נחשב באותו אופן כמקודם:

$$E[X]=E[X_1+X_2]=E[X_1]+E[X_2]$$

למשתנה המקרי X_1 יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר $1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$ (השווה להסתברות המשלימה של המאורע שאין בשקית אף גולה ירוקה), ולכן $E[X_1]=\frac{16}{7}=2\frac{2}{7}$.

ההתפלגות של X_2 , לעומת זאת, תלויה בתוכן השקית האחרונה שנקנתה בשלב הראשון. לכן, נַתנה את ההתפלגות של X_2 בתוכן שקית זו. נגדיר את המאורעות:

A_1 = בשקית האחרונה בשלב הראשון יש שתי גולות ירוקות;

A_2 = בשקית האחרונה בשלב הראשון יש גולה ירוקה אחת בלבד.

ונגדיר את המשתנה המקרי Y על ידי:

$$Y=\begin{cases}1 & ,\ \text{המאורע } A_1 \text{ התרחש בסוף השלב הראשון}\\ 2 & ,\ \text{המאורע } A_2 \text{ התרחש בסוף השלב הראשון}\end{cases}$$

נחשב את פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי Y, שהגדרנו לעיל, ונתנה בו כדי לחשב את התוחלת של המשתנה המקרי X_2, המציין את אורכו של השלב השני. נשים לב, שהמאורעות A_i מתייחסים לתוכן **השקית האחרונה שנקנית בשלב הראשון**. לכן, בהכרח הם מתייחסים למצב שבו יש בשקית לפחות גולה ירוקה אחת. כלומר, בחישוב ההסתברויות של ה-A_i-ים עלינו להתנות במאורע שיש בשקית האחרונה לפחות גולה ירוקה אחת. ההסתברות של מאורע זה היא $1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$, ולכן נקבל כי:

$$P(A_1)=P\{Y=1\}=\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\big/\tfrac{7}{16}=\tfrac{1}{7}\qquad;\qquad P(A_2)=P\{Y=2\}=2\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{4}\big/\tfrac{7}{16}=\tfrac{6}{7}$$

עתה, נפנה לחישוב התוחלת של X_2 :

$$E[X_2]=E[E[X_2\,|\,Y]]=E[X_2\,|\,Y=1]P\{Y=1\}+E[X_2\,|\,Y=2]P\{Y=2\}$$

כאשר אנו מביאים בחשבון את תוכן השקית האחרונה בשלב הראשון, שקובע את ההתפלגות המותנית של X_2 .

כלומר, מתקיים :

$$X_2\,|\,Y=1 \quad \equiv \quad 0$$ [אין צורך בשלב שני]

$$X_2\,|\,Y=2 \quad \sim \quad Geo\left(1-\left(\tfrac{3}{4}\right)^2=\tfrac{7}{16}\right)$$ [הצלחה בשלב שני = לפחות גולה ירוקה אחת]

ומכאן נקבל כי : $E[X_2]=0+\frac{16}{7}\cdot\frac{6}{7}=1\frac{47}{49}=1.9592$

ולכן התוחלת של X היא : $E[X]=E[X_1]+E[X_2]=2\frac{2}{7}+1\frac{47}{49}=4\frac{12}{49}=4.2449$

ב. לכל אחת מ-25 הגולות שאינן כחולות נגדיר :

נגדיר : $X_i=\begin{cases}1 & , \text{גולה } i \text{ הוצאה לפני הכחולה האחרונה} \\ 0 & , \text{אחרת}\end{cases}$ לכל $i=1,\ldots,25$

כעת, כדי לחשב את ההסתברות ש- X_i יקבל את הערך 1, נתבונן רק על הגולות ש"קובעות" את ההתרחשות של מאורע זה. אלו הן 5 הגולות הכחולות והגולה i. ההסתברות שהגולה i תוצא אחרונה מבין 6 גולות אלו היא $\frac{1}{6}$ (כי כולן אחרונות בסיכויים שווים); ולכן ההסתברות שהגולה i לא תוצא אחרונה מבין 6 הגולות האלו היא $\frac{5}{6}$, לכל $i=1,2,\ldots,25$. כלומר: $P\{X_i=1\}=\frac{5}{6}$

הערה: החישוב המלא של $P\{X_i=0\}$ הוא : $$P\{X_i=0\}=\frac{5!\cdot\binom{30}{24}\cdot 24!}{6!\cdot\binom{30}{24}\cdot 24!}=\frac{1}{6}$$

שלבי הניסוי הם כדלקמן – מסדרים בשורה רק את 6 הגולות ה"קובעות" (ב-!5 מתוך !6 הסידורים האפשריים הגולה i היא האחרונה); מתייחסים אל 6 גולות אלו כאל מחיצות של 7 תאים ממוספרים, ומפזרים ב-7 התאים את 24 הגולות (יש $\binom{30}{24}$ אפשרויות לקביעת כמויות של גולות בכל תא ו- !24 אפשרויות לסדר אותן בהתאם לכמויות שנקבעו).

כעת, אם נסמן ב- X את מספר הגולות ששחר יוציא, מתקיים : $X=5+\sum_{i=1}^{25}X_i$

ומכאן : $$E[X]=5+\sum_{i=1}^{25}E[X_i]=5+\sum_{i=1}^{25}P\{X_i=1\}=5+25\cdot\tfrac{5}{6}=25\tfrac{5}{6}=25.8\overline{3}$$

עתה, נפנה לחישוב השונות : $\mathrm{Var}(X_i)=P\{X_i=1\}P\{X_i=0\}=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$

$$E[X_iX_j]=P\{X_i=1,X_j=1\}=\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{6}{7}=\tfrac{5}{7} \qquad , \qquad i\neq j\ ;\ i,j=1,2,...,25$$

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E[X_iX_j]-E[X_i]E[X_j]=\tfrac{5}{7}-\left(\tfrac{5}{6}\right)^2=\tfrac{5}{252} \qquad , \qquad i\neq j\ ;\ i,j=1,2,...,25$$

ומכאן:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\left(5+\sum_{i=1}^{25} X_i\right) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right) = \sum_{i=1}^{25}\mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

$$= 25\cdot\tfrac{5}{36} + 25\cdot 24\cdot\tfrac{5}{252} = 15.377$$

12. נסמן ב- A_i את המאורע שצבע הכדור ה-i-י שהוצא הוא אדום, לכל $i = 1,2$, וב- R_i אינדיקטור המקבל את הערך 1 כאשר המאורע A_i מתרחש.

א. <u>דרך I</u>

$$P(A_1) = P\{R_1 = 1\} = \sum_{i=0}^{100} P\{R_1 = 1 \mid X = i\}P\{X=i\} = \sum_{i=0}^{100}\tfrac{i}{100}\cdot P\{X=i\}$$

$$= \tfrac{1}{100}\sum_{i=0}^{100} i\cdot P\{X=i\} = \tfrac{1}{100}\cdot E[X] = \tfrac{1}{4}$$

<u>דרך II</u>

$$P(A_1) = P\{R_1=1\} = E[R_1] = E[E[R_1 \mid X]] = E\left[\tfrac{X}{100}\right] = \tfrac{E[X]}{100} = \tfrac{25}{100} = 0.25$$

ב. נחשב את הסתברות החיתוך של שני המאורעות ואחר-כך נשווה אותה למכפלת ההסתברויות שלהם. מקבלים:

$$P(A_1\cap A_2) = P\{R_1=1, R_2=1\} = \sum_{i=0}^{100} P\{R_1=1, R_2=1 \mid X=i\}P\{X=i\}$$

$$= \sum_{i=0}^{100}\left(\tfrac{i}{100}\right)^2\cdot P\{X=i\} = \left(\tfrac{1}{100}\right)^2 E[X^2]$$

ואילו: $P(A_1)P(A_2) = \left(\tfrac{1}{100}\right)^2 (E[X])^2$

לכן, שני המאורעות הללו בלתי-תלויים, רק אם מתקיים השוויון: $E[X^2] = (E[X])^2$

או לחלופין השוויון: $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 0$

מכאן נובע, שהמאורעות A_1 ו-A_2 בלתי-תלויים זה בזה, אם ורק אם המשתנה המקרי X מקבל ערך יחיד בהסתברות 1 (ולכן שונותו שווה לאפס).

ג.

$$P(A_1\cap A_2) = \sum_{i=0}^{100} P\{R_1=1, R_2=1 \mid X=i\}P\{X=i\} = \sum_{i=0}^{100}\tfrac{i}{100}\cdot\tfrac{i-1}{99}\cdot P\{X=i\}$$

$$= \tfrac{1}{9{,}900}\Big(E[X^2]-E[X]\Big) = \tfrac{1}{9{,}900}(25+25^2-25) = \tfrac{25}{396} = 0.06313$$

13. נשתמש בפונקציית הצפיפות המותנית שהתקבלה בתרגיל 16 בקובץ התרגילים לפרק 6, ונקבל כי לכל $0 < x < 1$ מתקיים:

$$E[Y \mid X=x] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y\mid x)\,dy = \int_{1-x}^{1}\frac{y}{x}\,dy = \frac{y^2}{2x}\bigg|_{1-x}^{1} = \frac{1-(1-x)^2}{2x} = \frac{2-x}{2}$$

ולכל $1 < x < 2$ מתקיים:

$$E[Y \mid X=x] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y\mid x)\,dy = \int_{x-1}^{1}\frac{y}{2-x}\,dy = \frac{y^2}{2(2-x)}\bigg|_{x-1}^{1} = \frac{1-(x-1)^2}{2(2-x)} = \frac{x}{2}$$

14. התוחלת של Y היא $E[Y]=3$. כדי לחשב את התוחלת של X , נמצא תחילה את התוחלת המותנית של X

בהינתן $Y=y$. מקבלים: $E[X \mid Y=y]=\int_0^y x f_{X|Y}(x \mid y)\,dx=\int_0^y \frac{2x^2}{y^2}\,dx=\left.\frac{2x^3}{3y^2}\right|_0^y=\frac{2y}{3}$

לכן: $E[X]=E[E[X \mid Y]=E\left[\frac{2}{3}Y\right]=\frac{2}{3}\cdot 3=2$

כעת, חשב את השונויות של X ו-Y. השונות של Y היא: $\text{Var}(Y)=\frac{(4-2)^2}{12}=\frac{1}{3}$

ואת השונות של X נחשב בעזרת נוסחת השונות המותנית:

$$\text{Var}(X)=E[\text{Var}(X \mid Y)]+\text{Var}(E[X \mid Y])$$

בתחילת הפתרון קיבלנו כי $E[X \mid Y=y]=\frac{2}{3}y$, עתה נחשב את $\text{Var}(X \mid Y=y)$. מפונקציית הצפיפות המותנית של X בהינתן $Y=y$ מקבלים:

$$E[X^2 \mid Y=y]=\int_0^y x^2 f_{X|Y}(x \mid y)\,dx=\int_0^y \frac{2x^3}{y^2}\,dx=\left.\frac{2x^4}{4y^2}\right|_0^y=\frac{y^2}{2}$$

ולכן: $\text{Var}(X \mid Y=y)=E[X^2 \mid Y=y]-(E[X \mid Y=y])^2=\frac{1}{2}y^2-(\frac{2}{3}y)^2=\frac{1}{18}y^2$

ומכאן: $\text{Var}(X)=E[\text{Var}(X \mid Y)]+\text{Var}(E[X \mid Y])=E[\frac{1}{18}Y^2]+\text{Var}(\frac{2}{3}Y)$

$$=\frac{1}{18}\left[\text{Var}(Y)+(E[Y])^2\right]+\frac{4}{9}\text{Var}(Y)=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}+9\right)+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

נותר עוד לחשב את תוחלת המכפלה של X ו-Y:

$$E[XY]=\int_2^4\int_0^y xy f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=\int_2^4\int_0^y xy f_{X|Y}(x \mid y) f_Y(y)\,dx\,dy$$

$$=\int_2^4\int_0^y xy\frac{2x}{y^2}\cdot\frac{1}{2}\,dx\,dy=\int_2^4\int_0^y \frac{x^2}{y}\,dx\,dy=\int_2^4 \left.\frac{x^3}{3y}\right|_0^y dy=\int_2^4 \frac{y^2}{3}\,dy=\left.\frac{y^3}{9}\right|_2^4=\frac{64-8}{9}=\frac{56}{9}=6.22\overline{2}$$

לחישוב תוחלת המכפלה, אפשר גם להעזר בתוצאת <u>תרגיל ת26</u> מעמוד 430 בספר:

$$E[XY]=E[E[XY \mid Y]=E[YE[X \mid Y]=E\left[Y\cdot\frac{2}{3}Y\right]=E\left[\frac{2}{3}Y^2\right]=\frac{2}{3}E[Y^2]$$

$$=\frac{2}{3}\left(\text{Var}(Y)+(E[Y])^2\right)=\frac{2}{3}(\frac{1}{3}+3^3)=6.22\overline{2}$$

מכאן נקבל את השונות המשותפת של X ו-Y:

$$\text{Cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=\frac{56}{9}-2\cdot 3=\frac{2}{9}$$

ולסיום נחשב את מקדם המתאם בין X ל-Y: $\rho(X,Y)=\frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}=\frac{\frac{2}{9}}{\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{3}=0.4714$

15. א. $E[Y]=E[Y \mid X=0]P\{X=0\}+E[Y \mid X=1]P\{X=1\}=E[Y](1-p)+E[Y \mid X=1]\,p$

לכן: $E[Y \mid X=1]=\frac{E[Y]-E[Y](1-p)}{p}=E[Y]$

ב. נראה ש-X ו-Y בלתי-מתואמים, על-ידי כך שנראה כי $E[XY]=E[X]E[Y]$.

לפי סעיף א, לכל $i=0,1$, מתקיים: $E[XY \mid X=i]=E[iY \mid X=i]=iE[Y \mid X=i]=iE[Y]$

ולכן אפשר לרשום באופן כללי את השוויון: $E[XY \mid X] = X\,E[Y]$

ומכאן מקבלים: $E[XY] = E[E[XY \mid X] = E[X\,E[Y]] = E[Y]E[X]$

16. נסמן ב-N את המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הבקשות שהטכנאי מקבל ביום אחד ובעקבותיהן הוא מגיע לבית הלקוח. למשתנה המקרי N יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $15\cdot 0.8 = 12$, ולכן תוחלתו ושונותו שוות ל-12. כמו כן, נסמן ב-X_1, X_2, ... , X_N את זמן התיקון של המקררים שהטכנאי מתקן בבית לקוחותיו (ביום אחד). לכל אחד מה-X_i-ים יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר 1.65, ולכן התוחלת של כל אחד מהם היא $1/1.65$ והשונות $1/1.65^2$. כמו כן, ה-X_i-ים בלתי-תלויים זה בזה ובלתי תלויים ב-N.

לפיכך, אפשר להציג את הזמן הכולל שהטכנאי מקדיש לתיקון מקררים ביום אחד, באמצעות הסכום המקרי $\sum_{i=1}^{N} X_i$. לחישוב התוחלת והשונות של הסכום הזה, נשתמש בתוצאות שמתקבלות בדוגמה 4ד (עמוד 375 בספר) ובדוגמה 4יד (עמוד 386 בספר). נקבל:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1] = 12\cdot\tfrac{1}{1.65} = 7.\overline{27} \qquad [\text{ה-}X_i\text{-ים שווי-התפלגות}]$$

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\operatorname{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\operatorname{Var}(N) = 12\cdot\tfrac{1}{1.65^2} + \left(\tfrac{1}{1.65}\right)^2\cdot 12 = 8.815$$

17. א. לכל t ממשי, מתקיים:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{i=1}^{n} e^{ti}P\{X=i\} = \sum_{i=1}^{n} e^{ti}\binom{n}{i}\cdot\frac{1}{2^n-1} = \frac{1}{2^n-1}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}e^{ti} = \frac{1}{2^n-1}[\underbrace{(1+e^t)^n-1}_{\text{לפי נוסחת הבינום}}]$$

ב. נגזור את הפונקציה יוצרת המומנטים של X לפי t: $M'_X(t) = \dfrac{n(1+e^t)^{n-1}e^t}{2^n-1}$

נמצא את ערך הנגזרת בנקודה $t=0$. מקבלים: $E[X] = M'_X(0) = \dfrac{n(1+1)^{n-1}}{2^n-1} = \dfrac{2^{n-1}n}{2^n-1}$

כעת, נחשב את התוחלת של X באופן ישיר:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot\frac{i}{2^n-1} = \frac{1}{2^n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} = \frac{1}{2^n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n!}{i!(n-i-1)!}$$

$$= \frac{n}{2^n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} = \frac{n}{2^n-1}(1+1)^{n-1} = \frac{2^{n-1}n}{2^n-1}$$

ג. המשתנה המקרי Y הוא הזזה ב-4 של המשתנה המקרי X. כלומר, מתקיים $Y = X+4$, לכל ערך של n.

נראה את הקשר בין המשתנים: $P\{Y=j\} = P\{X+4=j\} = P\{X=j-4\} = \dbinom{n}{j-4}\cdot\dfrac{1}{2^n-1}$

לפיכך, אפשר להשתמש בפונקציה יוצרת המומנטים של X, כדי למצוא את זו של Y.

$$M_Y(t) = M_{X+4}(t) = E[e^{t(X+4)}] = e^{4t}E[e^{tX}] = e^{4t}M_X(t) = \frac{e^{4t}}{2^n-1}[(1+e^t)^n-1]$$

18. נסמן ב-W את המשקל (בגרמים) של ארגז מלא וב-Y את המשקל (בגרמים) של ארגז ריק. כמו כן, לכל $i = 1,\ldots,10$, נסמן ב-X_i את המשקל (בגרמים) של חבילת עדשים מקרית, ונקבל כי $W = Y + \sum_{i=1}^{10} X_i$.

לפי נתוני הבעיה לכל אחד מן המשתנים המקריים X_1, X_2, ... , X_{10} ו-Y יש התפלגות נורמלית. לכן, אם מניחים שכל המשתנים המקריים הללו בלתי-תלויים זה בזה, מקבלים שגם לסכום W יש התפלגות נורמלית. התוחלת של W ושונותו מתקבלות מסכומי התוחלות והשונויות של X_1, X_2, ... , X_{10} ו-Y, בהתאמה. (ראה את הטענה המובאת במדריך הלמידה בעמוד 171.)

כלומר, למשתנה המקרי W יש התפלגות נורמלית עם הפרמטרים: $\mu = 100 + 10\cdot 200 = 2{,}100$

$\sigma^2 = 5^2 + 10\cdot 10^2 = 1{,}025$

19. נסמן ב-X_1, X_2, ... , X_{10} את אורכי-החיים של הנורות בקופסה. משתנים מקריים אלו מהווים מדגם מקרי מהתפלגות מעריכית עם הפרמטר $\frac{1}{6}$. לכן: $E[\overline{X}_{10}] = E[X_1] = 6$

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_{10}) = \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{10} = \frac{36}{10} = 3.6$$

שימו לב, שהתנודות בערכי הממוצע קטנות מהתנודות של כל אחד ממשתני המדגם המקרי.

20. א. למשתנים המקריים X_1 ו-X_2 יש התפלגות משותפת דו-נורמלית עם הפרמטרים:

$$\mu_1 = 0 \quad ; \quad \mu_2 = 1 \quad ; \quad \sigma_1^2 = 4 \quad ; \quad \sigma_2^2 = 9 \quad ; \quad \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = 0$$

המשתנים המקריים X_1 ו-X_2 בלתי-תלויים, מכיוון ש-$\rho = 0$ (ראה בספר תרגיל ת22 בעמוד 337, שפתרונו מובא במדריך, או תרגיל ת40 בעמוד 432).

לכן: $$P\{X_2 < 0 \mid X_1 < 0\} = P\{X_2 < 0\} = \Phi\left(\tfrac{0-1}{3}\right) = 1 - 0.6306 = 0.3694$$

ב. גם למשתנים המקריים X_2 ו-X_3 יש התפלגות משותפת דו-נורמלית, אך הם תלויים זה בזה, מכיוון שמקדם המתאם ביניהם אינו שווה ל-0. כדי לחשב את ההסתברות המבוקשת נשתמש במסקנות המתקבלות בדוגמה 5ד (עמוד 392 בספר).

נתון כי: $$\mu_2 = 1 \quad ; \quad \mu_3 = 2 \quad ; \quad \sigma_2^2 = 9 \quad ; \quad \sigma_3^2 = 4 \quad ; \quad \mathrm{Cov}(X_2, X_3) = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho = \tfrac{1}{2\cdot 3} = \tfrac{1}{6}$$

לכן, למשתנה המקרי המותנה X_2 בהינתן $X_3 = 0$ יש התפלגות נורמלית ומתקיים:

$$E[X_2 \mid X_3 = 0] = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_3}(0 - \mu_3) = 1 + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot(-2) = \tfrac{1}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X_2 \mid X_3 = 0) = \sigma_2^2(1 - \rho^2) = 9\cdot\left(1 - \tfrac{1}{36}\right) = 8.75$$

ומכאן מקבלים: $$P\{X_2 < 0 \mid X_3 = 0\} = \Phi\left(\frac{0 - \frac{1}{2}}{\sqrt{8.75}}\right) = \Phi(-0.1690) = 1 - 0.5671 = 0.4329$$

ג. אם למשתנים המקריים X_1, X_2 ו-X_3 יש התפלגות משותפת רב-נורמלית (עמוד 403 בספר), אז כל אחד מהם הוא צירוף לינארי של n משתנים מקריים נורמליים סטנדרטיים בלתי-תלויים, Z_1, Z_2, ... , Z_n.

המשתנים המקריים Y_1 ו-Y_2 הם צירופים לינאריים של X_1, X_2 ו-X_3, ולכן כל אחד מהם הוא גם צירוף לינארי של Z_1, Z_2, ... , Z_n, שלעיל. לפיכך, גם ל-Y_1 ו-Y_2 יש התפלגות משותפת רב-נורמלית או כפי שהיא נקראת במקרה הדו-מימדי, התפלגות דו-נורמלית.

הפרמטרים של ההתפלגות הם: $E[Y_1]=E[X_1]+2E[X_2]-E[X_3]=0+2-2=0$

$$E[Y_2]=E[X_2]+E[X_3]=1+2=3$$

$$\mathrm{Var}(Y_1)=\mathrm{Var}(X_1)+4\mathrm{Var}(X_2)+\mathrm{Var}(X_3)+4\mathrm{Cov}(X_1,X_2)-2\mathrm{Cov}(X_1,X_3)-4\mathrm{Cov}(X_2,X_3)$$
$$=4+4\cdot 9+4+4\cdot 0-2\cdot 1-4\cdot 1=38$$

$$\mathrm{Var}(Y_2)=\mathrm{Var}(X_2)+\mathrm{Var}(X_3)+2\mathrm{Cov}(X_2,X_3)=9+4+2=15$$

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)=\mathrm{Cov}(X_1,X_2)+\mathrm{Cov}(X_1,X_3)+2\mathrm{Var}(X_2)+2\mathrm{Cov}(X_2,X_3)-\mathrm{Cov}(X_3,X_2)-\mathrm{Var}(X_3)$$
$$=0+1+2\cdot 9+2\cdot 1-1-4=16$$

21. א. המשתנה המקרי $Y=X_1+X_2+...+X_n$ הוא סכום של n משתנים מקריים נורמליים בלתי-תלויים.

לכן, התפלגותו נורמלית, ומתקיים: $E[Y]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i]=n\cdot 0=0$

$$\mathrm{Var}(Y)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)=n\cdot 1=n$$

המשתנה המקרי $W=X_1^2+X_2^2+...+X_n^2$ הוא סכום של n ריבועים של משתנים מקריים נורמליים סטנדרטיים בלתי-תלויים, ולכן יש לו התפלגות חי-בריבוע עם n דרגות-חופש (ראה עמוד 294 בספר).

ב. עלינו לחשב את: $P\{W>3\mid Y=2\}=P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i^2>3\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n}X_i=2\right\}$

נשים לב, שמתקיים: $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}X_i=n\bar{X}$

וגם: $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{n}{n-1}\bar{X}^2 \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}X_i^2=(n-1)S^2+n\bar{X}^2$

לכן, מקבלים: $P\left\{(n-1)S^2+n\bar{X}^2>3\,\middle|\,n\bar{X}=2\right\}=P\left\{(n-1)S^2+\frac{4}{n}>3\,\middle|\,n\bar{X}=2\right\}$

$$=P\left\{(n-1)S^2+\frac{4}{n}>3\right\}$$ [$\bar{X}$ ו-S^2 בלתי-תלויים, לפי טענה 7.1 (עמוד 406 בספר)]

$$=P\left\{(n-1)S^2>3-\frac{4}{n}\right\}$$

$$=\int_{3-4/n}^{\infty}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\frac{e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n-1}{2}-1}}{2^{\frac{n-1}{2}}}\,dx$$ [ל-$(n-1)S^2$ יש התפלגות חי-בריבוע עם $n-1$ דרגות-חופש]

הערה: התפלגות חי-בריבוע עם $n-1$ דרגות-חופש היא התפלגות גמא עם $t=\frac{n-1}{2}$ ו- $\lambda=\frac{1}{2}$.