בחינה לדוגמה 4 סמסטר 2020ב

מבנה הבחינה: בבחינה **שש** שאלות. עליכם לענות על **חמש** מהן.

שאלה 1

פונקציית המעברים של מכונת טיורינג הוגדרה כך (הגדרה 3.3 בספר):

$$\delta : Q\times\Gamma \rightarrow Q\times\Gamma\times\{L,R\}$$

הפונקציה קובעת, לכל מצב שבו המכונה נמצאת ולכל סמל סרט שנמצא תחת הראש הקורא-כותב, איזה סמל סרט ייכתב, לאיזה כיוון ינוע הראש הקורא-כותב, ולאיזה מצב המכונה תעבור.

ב**מכונת טיורינג מילולית** פונקציית המעברים מוגדרת כך:

$$\delta : Q\times\Gamma^* \rightarrow Q\times\Gamma\times\{L,R\}$$

הצעד של המכונה נקבע לפי המצב שבו המכונה נמצאת ולפי **המילה** שכתובה על הסרט מהסמל שבריבוע השמאלי ביותר של הסרט ועד הריבוע שעליו נמצא הראש הקורא-כותב.

למשל, אם תוכן הסרט הוא $\$\$a \sqcup ab \sqcup a$, והראש נמצא על ה-\$ השמאלי, אזי הצעד הבא של המכונה נקבע לפי המצב שבו המכונה נמצאת ולפי המילה $\$ \sqcup ab \sqcup a$.

הוכיחו: אפשר לבנות מכונות טיורינג מילוליות לזיהוי שפות **שאינן מזוהות-טיורינג**.

הדרכה: הוכיחו שאפשר לבנות מכונת טיורינג מילולית **לכל שפה שהיא**.

שאלה 2

נגדיר את השפה $EPSILON_{\mathrm{TM}}$:

$$EPSILON_{\mathrm{TM}} = \{<M> \mid M \text{ accepts the empty word}\}$$

זוהי שפת התיאורים של מכונות טיורינג, שמקבלות את המילה הריקה. (כש-M מתחילה לפעול על סרט שכולו רווחים, היא מסיימת במצב המקבל).

א. הציגו רדוקציית מיפוי של A_{TM} ל-$EPSILON_{\mathrm{TM}}$ ($A_{\mathrm{TM}} \leq_m EPSILON_{\mathrm{TM}}$).

ב. הציגו רדוקציית מיפוי של $EPSILON_{\mathrm{TM}}$ ל-A_{TM} ($EPSILON_{\mathrm{TM}} \leq_m A_{\mathrm{TM}}$).

שאלה 3

נעיין בשפה $\overline{EQ_{CFG}} = \{<G,H> \mid G \text{ and } H \text{ are CFGs and } L(G) \neq L(H)\}$

א. הציעו מאמת (verifier) לשפה $\overline{EQ_{\mathrm{CFG}}}$.

זִכְרוּ שמאמת **תמיד עוצר** (ומקבל, אם האימות c שכנע אותו שמילת הקלט שייכת לשפה, ודוחה, אם c לא שכנע אותו שמילת הקלט שייכת לשפה).

ב. הוכיחו: **לא קיים** לשפה $\overline{EQ_{\mathrm{CFG}}}$ מאמת בעל זמן ריצה פולינומיאלי בגודל הקלט.

שאלה 4

בעיית הקבוצות הנחתכות (XS) היא הבעיה הבאה:

הקלט: n קבוצות סופיות ומספר טבעי k ($k \leq n$).

השאלה: האם יש ב-n הקבוצות הסופיות k קבוצות, **שכל שתים מהן אינן זרות זו לזו** (החיתוך של כל שתיים מהן איננו ריק)?

נציג את הבעיה כשפה:

$XS = \{<S_1, S_2, \ldots, S_n, k> \mid$ $S_1, \ldots, S_n$ הן קבוצות סופיות; יש מהן k קבוצות, שכל שתיים לא זרות זו לזו$\}$

הוכיחו: XS היא **NP-שלמה.**

הדרכה: הוכיחו שהיא שייכת ל-NP, והראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של $CLIQUE$.

שאלה 5

הבעיה $HITTING\text{-}SET$ מוגדרת כך:

הקלט: קבוצה סופית S; אוסף $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ של תת-קבוצות של S (כל S_i היא תת-קבוצה של S); מספר טבעי k.

השאלה: האם יש ל-S תת-קבוצה T בגודל k כך שלכל $1 \leq i \leq m$, $T \cap S_i \neq \emptyset$? (כלומר, האם יש ל-$S$ תת-קבוצה בגודל k, שהחיתוך שלה עם כל אחת מן התת-קבוצות S_i איננו ריק?)

הוכיחו: $VERTEX\text{-}COVER \leq_L HITTING\text{-}SET$.

($VERTEX\text{-}COVER$ מוגדרת בעמוד 312 בספר).

עליכם לתאר את הרדוקציה, להוכיח שהיא תקפה, ולהוכיח בפירוט שהיא יכולה להתבצע **במקום לוגריתמי**.

שאלה 6

הוכיחו: אם P=NP, אז יש אלגוריתם **בעל זמן ריצה פולינומיאלי** לבעיה הבאה:

הקלט: נוסחה בוליאנית ϕ.

הפלט: השמה מספקת של ϕ אם ϕ ספיקה. אם ϕ לא ספיקה, יוחזר "לא".

(האלגוריתם מקבל כקלט נוסחה בוליאנית ϕ. אם אין ל-ϕ השמה מספקת, מוחזר "לא". אם יש ל-ϕ השמה מספקת, מוחזרת אחת ההשמות המספקות של ϕ. כלומר, מוחזרת הצבה של 0-ים ו-1-ים למשתנים של ϕ, כך שהערך של ϕ בהצבה הזו הוא 1).

הדרכה: אם P=NP, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי ל-SAT.

אפשר לקרוא לאלגוריתם הזה כמה פעמים, כדי למצוא הצבה למשתנים של ϕ שתספק את ϕ.