# פרק 5: משתנים מקריים רציפים (סיכום) (20425 / 26.1.09)

**משתנה מקרי רציף:** משתנה מקרי שקבוצת ערכיו האפשריים אינה בת-מניה.
ברוב המקרים קבוצה זו היא קטע של מספרים ממשיים (או מספר סופי של קטעים).

**פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי רציף:** אם $X$ הוא משתנה מקרי רציף, אז פונקציית הצפיפות שלו היא פונקציה ממשית $f(x)$ המוגדרת לכל $x$ ומקיימת:

א. $f(x) \geq 0$ לכל $x$.

ב. לכל מאורע $B$ מתקיים $P\{X \in B\} = \int_B f(x)\,dx$. כלומר, לכל $a < b$ ממשיים: $P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)\,dx$.
לפיכך, $P\{a \leq X \leq b\}$ היא השטח שמתחת לעקומת הצפיפות $f(x)$, המשתרע מהנקודה $a$ ועד לנקודה $b$.

ג. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ ; כלומר, השטח שמתחת לעקומת הצפיפות $f(x)$ (ומעל לציר $x$) שווה ל-1.

<u>הערות</u>: 1. אם $X$ הוא משתנה מקרי רציף אז לכל $a$ ממשי $P\{X = a\} = 0$, ולכן $P\{X \leq a\} = P\{X < a\}$.

2. פונקציית הצפיפות אינה חייבת להיות חסומה מלעיל, כל עוד השטח הכלוא תחתיה מתכנס ל-1.

**פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי רציף:** $F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ לכל $x$.

**הקשר בין פונקציית ההתפלגות המצטברת לפונקציית הצפיפות:** $\boxed{f(x) = \frac{d}{dx}F(x)}$ לכל $x$.

**תוחלת:** התוחלת של $X$ מסומנת ב- $E[X]$, ומוגדרת על-ידי $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$.

אם $X$ הוא משתנה מקרי אי-שלילי, כלומר $P\{X \geq 0\} = 1$, אז $E[X] = \int_0^{\infty} P\{X > x\}dx$.

**תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי:**

אם $g(x)$ היא פונקציה ממשית המוגדרת לכל הערכים האפשריים של משתנה מקרי $X$,
אז $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$.

לכן, התוחלת מקיימת את השוויון $E[aX + b] \;=\; aE[X] + b$.

**שונות:** השונות של $X$ מסומנת ב- $\mathrm{Var}(X)$, ומוגדרת על-ידי $\mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x)\,dx$.

אפשר להראות שמתקיים $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (E[X])^2$.

השונות מקיימת את השוויון $\mathrm{Var}(aX + b) \;=\; a^2\,\mathrm{Var}(X)$.

**סטיית-תקן:** סטיית התקן של $X$ היא השורש החיובי של שונותו. סימון: $\mathrm{SD}(X)$ או $\sigma_X$.
סטיית התקן מקיימת את השוויון $\mathrm{SD}(aX + b) \;=\; |a|\,\mathrm{SD}(X)$.

**התפלגות של פונקציה של משתנה מקרי:** יהי $X$ משתנה מקרי רציף, ויהי $Y = g(X)$ פונקציה של $X$.

אם $g$ היא פונקציה מונוטונית עולה, אז $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = P\{X \leq g^{-1}(y)\} = F_X(g^{-1}(y))$ ;

ואם $g$ היא פונקציה מונוטונית יורדת, אז $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = P\{X \geq g^{-1}(y)\} = 1 - F_X(g^{-1}(y))$.

מ- $F_Y$ אפשר לקבל את $f_Y$ על-ידי גזירה.

## משתנים מקריים מיוחדים

**משתנה מקרי אחיד:** $a$ ו- $b$ ממשיים ו- $a<b$ $\qquad X \sim U(a\,,b)$

$a \le x \le b$ $\qquad f(x)=\frac{1}{b-a} \quad ; \quad F(x)=\frac{x-a}{b-a}$

$\mathrm{Var}(X)=\frac{(b-a)^2}{12} \qquad E[X]=\frac{a+b}{2}$

**שימו לב:** לא תיתכן התפלגות אחידה על קטע אינסופי.

**משתנה מקרי מעריכי:** $\lambda>0$ $\qquad X \sim Exp(\lambda)$

$x>0$ $\qquad f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \quad ; \quad F(x)=1-e^{-\lambda x}$

$E[X]=\frac{1}{\lambda}$ $\qquad \mathrm{Var}(X)=\frac{1}{\lambda^2} \qquad \Rightarrow \qquad E[X^2]=\int_0^\infty x^2 f(x)dx=\frac{1}{\lambda^2}+\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{2}{\lambda^2}$

**תכונת חוסר-הזיכרון:**

משתנה מקרי $X$ נקרא חסר-זיכרון אם לכל $s$ ו- $t$ אי-שליליים מתקיים $P\{X>s+t|X>t\}=P\{X>s\}$.

המשתנה המקרי המעריכי הוא המשתנה היחיד שמקיים את תכונת חוסר-הזיכרון.

**הערה:** המשתנה המקרי הגיאומטרי מקיים את תכונת חוסר-הזיכרון, אך רק עבור $s$ ו- $t$ **שלמים** אי-שליליים. (לכן, אינו נקרא חסר-זיכרון.)

**טענה:** אם המופעים, המתרחשים במרווח-זמן כלשהו, מקיימים את שלושת ההנחות של תהליך פואסון עם קצב $\lambda$, אז הזמן החולף (מתחילת מרווח-הזמן) עד להתרחשות המופע הראשון הוא משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר $\lambda$.

**משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי:** $\qquad Z \sim N(0,1)$

$z$ ממשי $\qquad f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{z^2}{2}} \quad ; \quad F(z)=\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

$\mathrm{Var}(Z)=1 \qquad E[Z]=0$

**הערה:** $f(z)$ סימטרית סביב 0, לכן מתקיים $P\{Z\le -z\}=P\{Z\ge z\}$, כלומר, $\Phi(-z)=1-\Phi(z)$.

**משתנה מקרי נורמלי:** $\mu$ ממשי ו- $\sigma^2>0$ $\qquad X \sim N(\mu\,,\sigma^2)$

$x$ ממשי $\qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad ; \quad F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$\mathrm{Var}(X)=\sigma^2 \qquad E[X]=\mu$

**טענה:** אם $X \sim N(\mu\,,\sigma^2)$ אז $aX+b \sim N(a\mu+b\,,a^2\sigma^2)$.

**תוצאה:** אם $X \sim N(\mu\,,\sigma^2)$ אז $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ ולכן:

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}=P\left\{Z\le\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$