מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 2,1

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2020ב **מועד הגשה:** 30.3.2020

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות;

- *שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס*
- *שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה*

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

תהי $\mathbb{N}$ קבוצת המספרים הטבעיים. נסמן: $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots\right\}=\left\{\frac{1}{2^n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. A קבוצה אינסופית.

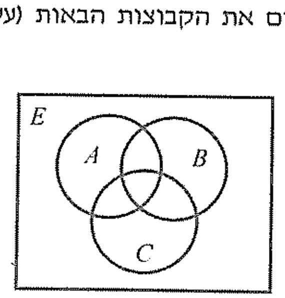
ב. הקבוצות A ו- $\mathbb{N}$ שקולות.

ג. כל התאמה בין A ל- $\mathbb{N}$ היא חד-חד-ערכית.

ד. קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין $\mathbb{N}$ ל- A המתאימה את 1 ל- $\frac{1}{4}$.

שאלה 2

באיור שלפניכם דיאגרמת ון. קווקו את השטחים המתארים את הקבוצות הבאות (עשו זאת בדיאגרמות נפרדות).



א. $(C\setminus B)\setminus(A\cap B)$

ב. $(C\setminus(B\setminus A))\setminus(A\setminus B)$

ג. $(A\setminus(B\cap C))\cap(B\setminus(A\cap C))$

ד. $(A\cup B^c(E))\cap(A\cup C^c(E))$

ה. $(A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A)$

שאלה 3

תהי A קבוצה חלקית לקבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$. נתון כי $1 \in A$ וכי לכל $x \in A$ גם $2x \in A$.

א. הוכיחו שהקבוצה $B = \{2x \mid x \in A\}$ היא חלקית ל- A ושקולה ל- A.

ב. הוכיחו ש- A קבוצה אינסופית.

ג. הדגימו קבוצה A השונה מ- $\mathbb{N}$, שמקיימת את תנאי השאלה.

שאלה 4

יהיו A,B קבוצות. נתון ש- $A \cap B$ שקולה ל- A. הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

א. אם $A \cup B \neq B$ אז A קבוצה אינסופית.

ב. אם $A \cup B \neq A$ אז B קבוצה אינסופית.

ג. אם A סופית אז $A \subseteq B$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 2,1

מספר השאלות: 24 | **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2020ב | **מועד הגשה: 05.4.2020**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא** בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: **א** - אם הטענה נכונה

ב - אם הטענה לא נכונה

במטלה זו A,B,C הן קבוצות ו- $\mathbb{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים.

שאלה 1

$1 \in \{1,\{1\}\}$

שאלה 2

$1 \in \{\{1\}\}$

שאלה 3

$\{1\} \in \{\{1\}\}$

שאלה 4

$\{2\} \subseteq \{1,\{1\},\{2\}\}$

שאלה 5

$\{\varnothing\} \subseteq \{1,\{\varnothing\}\}$

שאלה 6

$\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing,\{1\}\}$

שאלה 7

$\{1\} \in \{N\}$

שאלה 8

אם $A \not\subseteq B$ אז קיים $x \in B$ כך ש- $x \notin A$

שאלה 9

אם $A \neq B$ אז קיים $x \in B$ כך ש- $x \notin A$ וקיים $x \in A$ כך ש- $x \notin B$

שאלה 10

אם $A \in B$ אז $A \subseteq B$

שאלה 11

אם A שקולה ל- B אז כל התאמה בין A ל- B היא חד-חד-ערכית

שאלה 12

אם $A = \{2n | n \in N\}$ ו- $B = \{4n | n \in N\}$ אז כל התאמה חד-חד-ערכית בין A ל- B חייבת להתאים את 2 ל- 4 .

שאלה 13

הקבוצות $\{1, \varnothing\}$ ו- $\{1, \{\varnothing\}\}$ הן שקולות

שאלה 14

אם A קבוצה אינסופית ואם $B \subset A$ אז B שקולה ל- A

שאלה 15

אם A קבוצה סופית ואם $B \subset A$ אז B אינה שקולה ל- A

שאלה 16

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

שאלה 17

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

שאלה 18

$N \cap \{N\} = \varnothing$

שאלה 19

$\{N\} \setminus \{1,2\} \neq \{N\}$

שאלה 20

$A \subseteq P(A)$

שאלה 21

$\{\varnothing\} \subseteq P(A)$

שאלה 22

אם A אינסופית אז A שקולה ל- N

שאלה 23

אם A אינסופית אז $P(A)$ לא שקולה ל- A

שאלה 24

אם $A = \{2n | n \in N\}$, אז $P(A)$ שקולה ל- N .

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 3,2

מספר השאלות: 3 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2020ב **מועד הגשה:** 12.4.2020

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- *שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס*
- *שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה*

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (30 נקודות)

יהיו $A=\{\varnothing,1\}$, $B=\{\{\varnothing,1\},\{1\}\}$.

א. רישמו את $P(A)$ ו- $P(B)$ בעזרת צומדיים.

ב. רישמו את $P(A)\cap A$ ואת $P(A)\cap B$.

ג. רישמו את $B\setminus(A\cup P(A))$ ואת $P(B\setminus\{A\})$.

שאלה 2 (40 נקודות)

יהיו A , B , C קבוצות. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$

ב. אם $(A\setminus C)\cup(C\setminus B)\subseteq A\cap B$, אז $A\subseteq B$.

ג. אם $P(A)\subseteq P(A\setminus B)$ אז $A\cap B=\varnothing$.

ד. אם $\{A\}\subseteq P(B)$ אז $P(A)\subseteq P(B)$.

שאלה 3 (30 נקודות)

א. על קבוצת המספרים השלמים $\mathbf{Z}=\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}$ מגדירים פעולה בינרית Δ, כך:

לכל $a,b\in\mathbf{Z}$ $a\Delta b=a$ אם $a\geq 0$ ו- $a\Delta b=b$ אם $a<0$.

בדקו אם הפעולה Δ מקיימת את תכונות הסגירות, הקיבוציות, החילופיות, ואם קיים ב- $\mathbf{Z}$ איבר נטרלי ביחס לפעולה זו. נמקו את התשובה.

ב. תהי A קבוצה **לא ריקה**. על הקבוצה $P(A)$ מגדירים פעולה בינרית $*$ כך:

לכל $X,Y\in P(A)$, $X*Y=X\cap Y$.

בדקו אם הפעולה$*$ מקיימת את תכונות הסגירות, הקיבוציות והחילופיות, אם קיים ב- $P(A)$ איבר נטרלי ביחס ל- $*$ ואם לכל איבר ב- $P(A)$ יש נגדי ביחס לפעולה זו. נמקו את התשובה.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידה 3

מספר השאלות: 24 **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2020ב **מועד הגשה: 19.4.2020**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**

בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: **א** - אם הטענה נכונה

ב - אם הטענה לא נכונה

בשאלות 1,2 נתונה הקבוצה $A=\{a\}$ שעליה מוגדרת פעולה בינרית $*$ על-ידי $a*a=a$.

שאלה 1

הפעולה $*$ אינה קיבוצית כי אין שלושה איברים ב- A

שאלה 2

A חבורה ביחס לפעולה $*$

בשאלות 3, 4 נתונה $A=\{a,b\}$ עם הפעולה $*$ המוגדרת על-ידי הטבלה:

$*$	a	b
a	a	b
b	b	b

שאלה 3

הפעולה $*$ היא קיבוצית

שאלה 4

A חבורה ביחס לפעולה $*$

בשאלות 5, 6, 7 נתונה $A=\{a,b,c\}$ עם הפעולה $*$ המוגדרת על-ידי הטבלה:

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	a	a

שאלה 5

הפעולה $*$ היא קיבוצית

שאלה 6

לאיבר c יש שני נגדיים שונים ביחס לפעולה $*$

שאלה 7

לכל איבר של A קיים נגדי ביחס לפעולה $*$

בשאלות 8-12, A היא קבוצה לא ריקה

שאלה 8

פעולת החיתוך ב- $P(A)$ היא קיבוצית

שאלה 9

$\varnothing$ איבר נטרלי ב- $P(A)$ ביחס לפעולת החיתוך

שאלה 10

ל- A יש איבר נגדי ב- $P(A)$ ביחס לפעולת החיתוך

שאלה 11

פעולת ההפרש בין קבוצות ב- $P(A)$ היא קיבוצית

שאלה 12

$\varnothing$ איבר נטרלי ב- $P(A)$ ביחס לפעולת ההפרש בין קבוצות

בשאלות 13, 14 נתייחס לפעולה הבינרית $*$ המוגדרת על $\mathbb{N}$ כך: $m*n=m^n$ לכל $m,n\in\mathbb{N}$

שאלה 13

הפעולה $*$ קיבוצית

שאלה 14

קיים איבר נטרלי ביחס לפעולה $*$

בשאלות 15,16 $*$ היא פעולת הכפל מודולו 10 כלומר $m*n$ היא שארית החילוק של mn ב- 10.

ידוע שפעולה זו קיבוצית!

שאלה 15

הקבוצה $\{2,4,6,8\}$ היא חבורה ביחס ל-$*$

שאלה 16

הקבוצה $\{1,3,5,7,9\}$ היא חבורה ביחס ל-$*$

בשאלות 17-21 G היא קבוצה שעליה מוגדרת פעולה בינרית $*$.

נתון ש- G סגורה ביחס לפעולה $*$ ו- $e\in G$ איבר נטרלי.

שאלה 17

אם $a,b\in G$ ואם ו- $a*b=a$ אז $b=e$

שאלה 18

אם קיימים $a,b\in G$ כך ש- $a*b=b*a$ אז $*$ פעולה חילופית

שאלה 19

אם $a,b\in G$ ואם b נגדי ל- a אז a נגדי ל- b

שאלה 20

אם $x,y,z\in G$ ואם $x*y=x*z$ אז $y=z$

שאלה 21

אם ב- G יש שלושה איברים בדיוק ואם הפעולה $*$ מקיימת את חוקי הצמצום אז G חבורה

בשאלות 22-24 G היא חבורה שעליה מוגדרת פעולה בינרית $*$ ו- a,b הם איברים של G.

שאלה 22

באלכסון טבלת הפעולה של G מופיעים כל האיברים של G

שאלה 23

אם $(a*b)^{-1}\neq a^{-1}*b^{-1}$ אז G אינה חילופית

שאלה 24

אם $x,y,z\in G$ ואם $x*y=y*z$ אז $x=z$

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידה 3

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2020ב | **מועד הגשה: 25.4.2020**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות;

- *שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס*
- *שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה*

הסבר מפורט ב#נוהל הגשת מטלות מנחה#

סימונים: $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ - קבוצת המספרים השלמים,

$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \right\}$ - קבוצת המספרים הרציונליים.

שאלה 1

תהי G חבורה ביחס לפעולה $*$, ויהיו $a, b, c \in G$ איברים שונים זה מזה. נתון ש- $a * b = b * c$.

א. הוכיחו ש- G חבורה לא חילופית.

ב. הוכיחו שב- G יש לפחות חמישה איברים שונים.

ג. הוכיחו שאם a נגדי לעצמו אז גם c נגדי לעצמו.

שאלה 2

על קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbf{N}$ נתונה פעולה בינרית חילופית שנסמנה ב- $*$.

ידוע ש- $\mathbf{N}$ חבורה ביחס לפעולה $*$, ש- 2 הוא איבר נטרלי וש- 3 נגדי ל- 1 בחבורה זו.

על $\mathbf{N}$ מגדירים פעולה בינרית חדשה Δ באופן הבא: לכל $a, b \in \mathbf{N}$, $a \Delta b = (a * 1) * b$.

הוכיחו ש- $\mathbf{N}$ חבורה ביחס לפעולה Δ.

שאלה 3

א. תהי A קבוצת כל המספרים השלמים האי-זוגיים: $A = \{2n+1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$. על קבוצה זו מגדירים פעולה בינרית $*$ באופן הבא:

$$\text{לכל } a,b \in A \text{ ,} \quad a * b = \frac{(a-3)(b-3)}{2} + 3 \text{ .}$$

אלו מהתכונות שבהגדרת החבורה מתקיימות ב- A ביחס לפעולה $*$? נמקו את התשובה.

ב. ענו על אותה שאלה כאשר $A = \mathbf{Q} \setminus \{3\}$ (קבוצת כל המספרים הרציונליים השונים מ- 3).

שאלה 4

תהי G חבורה ביחס לפעולה $*$, ויהיו $a,b,c \in G$.

א. הוכיחו שאם $a*b$ נגדי לעצמו אז גם $b*a$ נגדי לעצמו.

ב. הוכיחו שאם a נגדי ל- $b*c$ ו- b נגדי ל- $a*c$ אז $b*a = a*b$.

ג. נניח ש- $G = \{e,a,b,c\}$, (בת ארבעה איברים שונים) ו- e איבר נטרלי.

(i) הוכיחו ש- $a*b \neq c*a$.

(ii) נניח ש- $a*b = c*c$. השלימו את לוח הפעולה של G. נמקו כל צעד.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 5,4

מספר השאלות: 24 **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2020ב **מועד הגשה: 10.5.2020**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא** בכתובת *www.openu.ac.il/sheilta*

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: **א** - אם הטענה נכונה ,

ב - אם הטענה לא נכונה

שאלה 1

השלשה $(\{a,b\},\{1\},\{(a,1)\})$ מגדירה פונקציה מ- $\{a,b\}$ ל- $\{1\}$.

שאלה 2

השלשה $(\{a,b\},\{1,2,3\},\{(a,1),(b,3)\})$ מגדירה פונקציה מ- $\{a,b\}$ ל- $\{1,2,3\}$.

שאלה 3

השלשה $(\mathbf{N},\mathbf{N},\{(n,n-1) \mid n \in \mathbf{N}\})$ מגדירה פונקציה מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$.

שאלה 4

השלשות $(\{1,2\},\mathbf{N},\{(1,5),(2,5)\})$, $(\{1,2\},\mathbf{Z},\{(1,5),(2,5)\})$ מגדירות פונקציות שוות.

שאלה 5

אם f,g פונקציות מ- A ל- B ואם $f(A) = g(A)$ אז $f = g$

בשאלות 6-10 נתונה פונקציה $f:\{a,b,c\} \to \{1,2,3\}$ המוגדרת כך:

$$f(a) = f(b) = 1 \text{ , } f(c) = 2$$

שאלה 6

$$f(\{a,b\}) = f(\{a,b,c\})$$

שאלה 7

$f(\varnothing)=\varnothing$

שאלה 8

$f^{-1}(\{2,3\}) = f^{-1}(\{2\})$

שאלה 9

$f^{-1}(\{3\}) = \{\varnothing\}$

שאלה 10

$\{b\} \in f^{-1}(\{2\})$

בשאלות 12-11 f היא פונקציה מ- $\{1,2,3\}$ ל- $\{1,2,3\}$

שאלה 11

$f(\{1,3\})\cap f(\{2\})=\varnothing$

שאלה 12

$f^{-1}(\{1,3\})\cap f^{-1}(\{2\})=\varnothing$

שאלה 13

$f^{-1}(f(\{2\}))=\{2\}$

בשאלות 15-14 נתונה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה המוגדרת על-ידי $f(x)=x^2-4x$.

שאלה 14

$f^{-1}(\{-4,-5\}) = \{2\}$

שאלה 15

$f^{-1}(\{-3,-4\}) = \{2,3\}$

בשאלות 18-16 נתונה $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}$ המוגדרת על - ידי $f(x)=\frac{x}{x-1}$ לכל $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$

שאלה 16

$f\circ f(x)=x$ לכל $x\in\mathbf{R}$.

שאלה 17

f היא פונקציה חד-חד-ערכית.

שאלה 18

f היא פונקציה על.

בשאלות 20-19 f היא פונקציה מקבוצה A לקבוצה B .

שאלה 19

אם לכל $x_1,x_2\in A$ מתוך $f(x_1)\neq f(x_2)$ נובע שגם $x_1\neq x_2$ אז f היא חד-חד-ערכית.

שאלה 20

f היא על אם ורק אם לכל $y\in B$ ולכל $x\in A$ מתקיים $f(x)=y$.

בשאלות 22-21 נתונה $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ המוגדרת על-ידי $f(n)=n+2$ לכל $n\in\mathbf{N}$.

שאלה 21

קיימת $g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ כך ש- $g\circ f$ היא פונקציית הזהות של $\mathbf{N}$.

שאלה 22

קיימת $g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ כך ש- $f\circ g$ היא פונקציית הזהות של $\mathbf{N}$.

בשאלות 24-23 f ו- g הן פונקציות מקבוצה A לקבוצה A .

שאלה 23

אם f היא על אז f היא חד-חד-ערכית.

שאלה 24

אם $f\circ g$ היא פונקציית הזהות של A אז f היא על.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 4,5

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2020ב **מועד הגשה: 17.5.2020**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות;

- *שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס*
- *שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה*

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

יהיו $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2\}$.

א. רישמו את כל הפונקציות מ- A ל- B שאינן על.

ב. רישמו את כל הפונקציות מ- B ל- A שאינן חד-חד-ערכיות.

ג. מיצאו פונקציות $f:A\to B$ ו- $g:B\to A$ כך ש- $f\circ g=I_B$ אך $g\circ f\neq I_A$.

(לכל קבוצה A, פונקצית הזהות שלה $I_A:A\to A$, מוגדרת כך : $I_A(x)=x$ לכל $x\in A$).

ד. מיצאו פונקציות $f:A\to B$ ו- $g:B\to A$ כך ש- $f\circ g$ חד-חד-ערכית ועל אך $f\circ g\neq I_B$.

שאלה 2

תהי פונקציה $f:A\to B$ ותהי $C\subseteq A$.

א. הוכיחו ש : $C\subseteq f^{-1}(f(C))$.

ב. הוכיחו שאם f היא חד-חד-ערכית אז $C=f^{-1}(f(C))$.

ג. הדגימו קבוצות A,B,C ופונקציה f שעבורן ההכלה מסעיף א' היא הכלה ממש.

שאלה 3

נתונות פונקציות $f,g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים).

ידוע כי לכל $n\in\mathbf{N}$ מתקיים: $f(n)=g(2n)$.

א. הוכיחו כי אם g היא חד-חד-ערכית אז גם f היא חד-חד-ערכית.

ב. הוכיחו כי אם f היא פונקציה על אז גם g היא פונקציה על.

ג. הדגימו פונקציות $f,g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ המקיימות את תנאי השאלה כך ש- g על אך f אינה על.

ד. הוכיחו כי אם f היא על אז g אינה חד-חד-ערכית.

שאלה 4

תהי $\mathbf{Q}$ קבוצת המספרים הרציונליים. הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

א. הפונקציה $f:\{x\in\mathbf{Q}\mid x\le 0\}\to\mathbf{Q}$ המוגדרת על-ידי $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$ היא חד-חד-ערכית.

ב. הפונקציה $g:\{x\in\mathbf{Q}\mid x>2\}\to\mathbf{Q}$ המוגדרת על-ידי $g(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$ היא חד-חד-ערכית.

ג. הפונקציה $h:\{x\in\mathbf{Q}\mid x>2\}\to\{x\in\mathbf{Q}\mid x>2\}$ המוגדרת על-ידי $h(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$ היא על.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 6,5

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2020ב **מועד הגשה: 31.5.2020**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- *שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס*
- *שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה*

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

נתונות פונקציות $f,g:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$ ($\mathbf{Q}$ היא קבוצת כל המספרים הרציונליים).

ידוע כי לכל $x\in\mathbf{Q}$ מתקיים: $g(x)=f(3x+2)$.

1. הוכיחו שאם f היא חד-חד-ערכית אז גם g היא חד-חד-ערכית.
2. הוכיחו שאם f היא פונקציה על אז גם g היא פונקציה על.
3. הוכיחו שאם f הפיכה, אז g הפיכה ולכל $y\in\mathbf{Q}$ מתקיים: $g^{-1}(y)=\dfrac{f^{-1}(y)-2}{3}$.

שאלה 2

תהי f איזומטריה של המישור השונה מאיזומטרית הזהות ויהיו O,A,B נקודות במישור שאינן על אותו ישר. ידוע כי O היא נקודת שבת של f וכי $\{O,A,B\}$ היא קבוצת שבת של f .

א. הוכיחו שהמשולש OAB הוא שווה שוקיים.

ב. הוכיחו שלאיזומטריה f יש נקודת שבת נוספת (שונה מ- O).

ג. תארו באופן מדויק את כל האיזומטריות f המקיימות את תנאי השאלה.

שאלה 3

יהיו f,g איזומטריות של המישור. ידוע כי f שיקוף וכי A נקודת שבת של g.

א. הוכיחו שקיימת נקודה B כך ש- $f(B)=A$.

ב. הוכיחו ש- B היא נקודת שבת של איזומטריה $f\circ g\circ f$.

ג. הוכיחו שאם g שיקוף אז גם $f\circ g\circ f$ שיקוף.

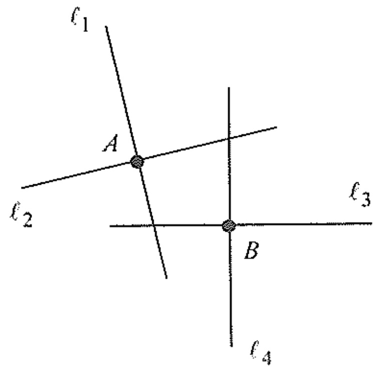
שאלה 4

יהיו A,B נקודות שונות במישור, ℓ_1,ℓ_2 שני ישרים מאונכים זה לזה העוברים דרך הנקודה A ו- ℓ_3,ℓ_4 שני ישרים מאונכים זה לזה העוברים דרך הנקודה B (ראו איור).

א. הוכיחו כי $S_{\ell_2}\circ S_{\ell_1}=S_{\ell_1}\circ S_{\ell_2}$.

ב. תארו באופן מדויק את האיזומטריה $S_{\ell_4}\circ S_{\ell_3}\circ S_{\ell_2}\circ S_{\ell_1}$. נמקו את התשובה.

ג. מיצאו ישר ℓ כך שהאיזומטריה $S_{\ell_4}\circ S_{\ell}\circ S_{\ell_3}$ תהיה שיקוף מוזז ביחס ל- ℓ_3 (כלומר: שיקוף ביחס ל- ℓ_3 שלאחריו הזזה במקביל ל- ℓ_3).



מטלת מחשב (ממ"ח) 04

הקורס: אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 7,6

מספר השאלות: 24 **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2020ב **מועד הגשה: 08.6.2020**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**

בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: **א** - אם הטענה נכונה ,

ב - אם הטענה לא נכונה

בשאלות 1-6, $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4$ הם ישרים ו- $S_{\ell_1},S_{\ell_2},S_{\ell_3},S_{\ell_4}$ הם שיקופים ביחס אליהם.

שאלה 1

אם $S_{\ell_2}\circ S_{\ell_1}$ ו- $S_{\ell_4}\circ S_{\ell_3}$ הן אותו סיבוב לא טריוויאלי אז בהכרח $\ell_1=\ell_3$, $\ell_2=\ell_4$

שאלה 2

אם $S_{\ell_2}\circ S_{\ell_1}$ ו- $S_{\ell_4}\circ S_{\ell_3}$ הן אותו סיבוב לא טריוויאלי אז ל- $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4$ יש נקודה משותפת

שאלה 3

אם $S_{\ell_2}\circ S_{\ell_1}$ הזזה ו- $S_{\ell_4}\circ S_{\ell_3}$ סיבוב אז ישנם ישרים ℓ'_3,ℓ'_4 כך ש- $\ell'_3\parallel\ell_1$ או $\ell'_3=\ell_1$ ו- $S_{\ell'_4}\circ S_{\ell'_3}=S_{\ell_4}\circ S_{\ell_3}$.

שאלה 4

אם $S_{\ell_2}\circ S_{\ell_1}$ הזזה ואם $S_{\ell_3}\circ S_{\ell_1}$ הזזה אז $S_{\ell_3}\circ S_{\ell_2}\circ S_{\ell_1}$ שיקוף.

שאלה 5

אם $S_{\ell_2}\circ S_{\ell_1}$ הזזה ואם $S_{\ell_3}\circ S_{\ell_1}$ סיבוב אז $S_{\ell_3}\circ S_{\ell_2}\circ S_{\ell_1}$ שיקוף.

שאלה 6

אם ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 אינם מקבילים זה לזה ואינם נחתכים כולם באותה נקודה, קיימים ישרים מקבלים ℓ'_2, ℓ'_3 וישר ℓ'_1 מאונך להם כך ש- $S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_3} = S_{\ell'_1} \circ S_{\ell'_2} \circ S_{\ell'_3}$.

שאלה 7

אם f איזומטריה של המישור אז f^{-1} היא איזומטריה מאותו סוג.

שאלה 8

קיימת איזומטריה f כך ש- $f \circ f$ היא שיקוף מוזז.

בשאלות 9-11 $\triangle ABC$ ו- $\triangle A'B'C'$ הם משולשים חופפים

שאלה 9

קיימת איזומטריה f שהופכת מגמה המעתיקה את $\triangle ABC$ על $\triangle A'B'C'$

שאלה 10

קיימת איזומטריה f בעלת נקודת שבת המעתיקה את $\triangle ABC$ על $\triangle A'B'C'$

שאלה 11

קיימות שתי איזומטריות שונות המעתיקות את $\triangle ABC$ על $\triangle A'B'C'$

שאלה 12

אם M אינה קבוצת שבת של איזומטריה f אז קיימת נקודה $x \in M$ כך ש- $f(x) = x$.

בשאלות 13- 20 A היא מערכת אקסיומות, α אקסיומה כלשהי ו- $\sim\alpha$ היא שלילת α.

שאלה 13

אם המערכת $A \cup \{\alpha\}$ היא חסרת סתירה אז A חסרת סתירה.

שאלה 14

אם A בעלת סתירה $A \cup \{\alpha\}$ בעלת סתירה.

שאלה 15

אם A שלמה אז $A \cup \{\alpha\}$ שלמה.

שאלה 16

אם A שלמה ואם $\alpha \in A$ אז $A \setminus \{\alpha\}$ לא שלמה.

שאלה 17

אם A שלמה ו- $\alpha \notin A$ אז $A \cup \{\alpha\}$ או $A \cup \{\sim\alpha\}$ תלויה.

שאלה 18

אם A שלמה אז $A \cup \{\alpha\}$ או $A \cup \{\sim\alpha\}$ בעלת סתירה.

שאלה 19

אם A חסרת סתירה ובלתי תלויה ואם $\alpha \in A$ אז $A \setminus \{\alpha\}$ לא שלמה.

שאלה 20

אם $A \cup \{\alpha\}$ חסרת סתירה וגם $A \cup \{\sim\alpha\}$ חסרת סתירה אז A לא שלמה.

בשאלות 24-20 נתייחס למערכת האקסיומות הבאה :

א. על כל ישר יש נקודה

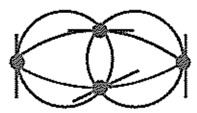
ב. לכל שלוש נקודות קיים בדיוק ישר אחד כך ששלושתן נמצאות עליו

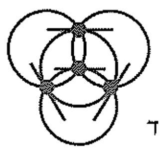
ג. לכל ישר m ונקודה P שאינה עליו, קיים בדיוק ישר דרך P ללא נקודה משותפת עם m

לפניכם ההמחשות הבאות (מעגלים וקשתות מגדירים ישרים) :


א


ב


ג


ד

שאלה 21

המחשה א מראה שהמערכת חסרת סתירה

שאלה 22

המחשה ב מראה שאקסיומה 2 לא נובעת מאקסיומות 1,3

שאלה 23

מן ההמחשות ג ו- ד ניתן להסיק שהמערכת אינה קטגורית.

שאלה 24

מן ההמחשות הנתונות אפשר להסיק שהמערכת אינה שלמה.

מטלת מנחה (ממ״ן) 16

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 7

מספר השאלות: 4

משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2020ב

מועד הגשה: 16.5.2020

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות;
- *שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס*
- *שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה*

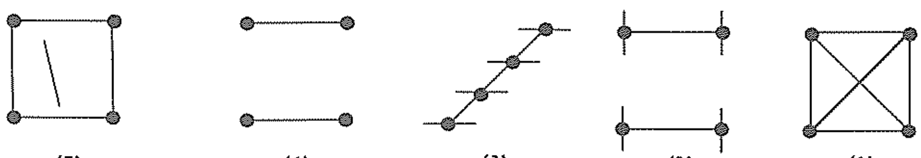
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (28 נקודות)

לפניכם מערכת אקסיומות, אשר מושגי היסוד שלה הם "נקודה", "ישר" (כקבוצה של נקודות) והיחס "נמצאת על".

1. יש בדיוק ארבע נקודות.
2. לכל ישר ℓ ולכל נקודה P שאינה על ℓ, קיים ישר יחיד, אשר P נמצאת עליו, ואין לו נקודה משותפת עם ℓ.
3. כל נקודה נמצאת על שני ישרים שונים לפחות.

א. עבור כל אחת מן ההמחשות הבאות, קבעו אם היא מגדירה מודל למערכת. אם לאו - ציינו את האקסיומות שאינן מתקיימות.



(5) (4) (3) (2) (1)

ב. הוכיחו שהמערכת אינה תלויה.

ג. הוכיחו שהמערכת אינה שלמה.

ד. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

1. בכל מודל של המערכת הנתונה, על כל ישר יש לפחות נקודה אחת.
2. קיים מודל למערכת שבו יש ישר שעליו נמצאות שלוש נקודות בדיוק.

שאלה 2 (16 נקודות)

לפניך מערכת אקסיומות, אשר מושגי היסוד שלה הם "נקודה", "ישר" והיחס "נמצאת על".

1. קיימת נקודה הנמצאת על שני ישרים שונים בדיוק.
2. לכל שתי נקודות שונות קיים ישר אחד ויחיד ששתיהן נמצאות עליו.
3. קיימים לפחות שלושה ישרים שונים.
4. לא כל הנקודות נמצאות על ישר אחד.

הוכיחו שהמערכת תלויה ולא שלמה.

שאלה 3 (28 נקודות)

בשאלה זו נתייחס למערכת אשר מושגי היסוד שלה הם "איבר" ו"פעולה בינרית", הכוללת את ארבע האקסיומות של החבורה כפי שהוגדרו ביחידה 3, ואותן נסמן על-פי סדרן ב- 1,2,3,4 ואת אקסיומה 5: "יש בדיוק 4 איברים".

א. הוכיחו שאקסיומה 2 אינה נובעת מן האקסיומות האחרות.

ב. הוכיחו שאקסיומה 4 אינה נובעת מן האקסיומות האחרות.

ג. הוכיחו שהקבוצות הבאות הן מודלים למערכת (1,2,3,4,5): הקבוצה $\{3,6,9,12\}$ יחד עם פעולת הכפל מודולו 15 והקבוצה $\{1,4,11,14\}$ יחד עם פעולת הכפל מודולו 15. (בשני המקרים, אין צורך להוכיח קיבוציות).

ד. הוכיחו שהמערכת (1,2,3,4,5) אינה קטגורית.

שאלה 4 (28 נקודות)

נתונה מערכת האקסיומות הבאה, אשר מושגי היסוד שלה הם "נקודה", "ישר" (כקבוצה של נקודות) והיחס "נמצאת על".

1. קיימים שני ישרים שונים שיש להם לפחות נקודה משותפת אחת (כלומר נקודה הנמצאת על שניהם).
2. לכל שני ישרים שונים ℓ_1, ℓ_2, אם קיימת נקודה A הנמצאת על שניהם אז קיימת נקודה נוספת B, שונה מ- A, הנמצאת אף היא על שני הישרים האלה.
3. לכל ישר ℓ ולכל נקודה P שאינה על ℓ קיים לפחות ישר אחד כך ש- P נמצאת עליו ואין לו נקודה משותפת עם ℓ.

א. הוכיחו שהמערכת היא חסרת סתירה.

ב. הוכיחו שהמערכת היא בלתי תלויה.

ג. הוכיחו שהמערכת אינה קטגורית.

ד. הוכיחו שבמערכת הנתונה מתקיים המשפט: "קיימות לפחות ארבע נקודות שונות".

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

הקורס: אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 9,8

מספר השאלות: 24 **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2020ב **מועד הגשה: 25.6.2020**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**

בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: **א** - אם הטענה נכונה

ב - אם הטענה לא נכונה

במטלה זו פירוש המילה "מישור" היא המישור הרגיל. נסמן ב- P את קבוצת הנקודות שלו.

בשאלות 1-8 נתייחס למודל שבו קבוצת הנקודות היא $M = P \setminus AB$ כאשר AB קטע מסוים במישור. הישרים במודל זה הם כל החיתוכים הלא ריקים של ישרים רגילים עם M.
(שימו לב שבמודל זה ישרים יכולים להיות גם איחוד של שתי קרניים).

שאלה 1

במודל זה מתקיימות כל אקסיומות החילה.

שאלה 2

המודל מדגים את האי-תלות של אקסיומת המקבילים באקסיומות החילה.

שאלה 3

המודל מקיים את כל אקסיומות הסדר.

שאלה 4

המודל מדגים את האי-תלות של אקסיומת פאש בשאר אקסיומות הסדר.

שאלה 5

המודל מקיים את אקסיומת החפיפה III-1 .

שאלה 6

המודל מקיים את אקסיומת החפיפה III-2 .

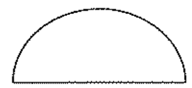
שאלה 7

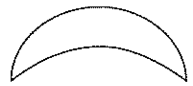
המודל מקיים את אקסיומת החפיפה III-3 .

שאלה 8

המודל מקיים את אקסיומת החפיפה III-4 .

בשאלות 9-10 נעסוק בהמחשות הבאות:

א 

ב 

הנקודות בכל המחשה הן הנקודות הפנימיות, ללא הנקודות שעל הקו המקיף. ישר הוא אותו חלק של ישר רגיל הנמצא בתוך קבוצת הנקודות הנתונה.

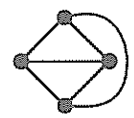
שאלה 9

המחשה א מקיימת את אקסיומת המקבילים.

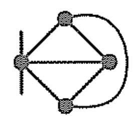
שאלה 10

המחשה ב מקיימת את אקסיומת פאש.

שאלה 11

ההמחשה  מתארת מודל שמקיים את אקסיומות החילה ואקסיומת המקבילים.

שאלה 12

ההמחשה  מתארת מודל שמקיים את אקסיומות החילה ואקסיומת המקבילים.

בשאלות 13-20 a,b,c הם מספרים טבעיים.

שאלה 13

אם $b|a$ ו- $c|a$ אז $bc|a^2$.

שאלה 14

אם $a|b$ ו- $a|c$ אז $a^2|bc$

שאלה 15

אם $a|bc$ ואם a לא מחלק את b אז a מחלק c .

שאלה 16

אם $a|(b+c)$ ואם a לא מחלק את b אז a לא מחלק את c .

שאלה 17

קיים מספר a כך ששארית החילוק של a^2 ב- 4 היא 3

שאלה 18

אם שארית החלוקה של a ב- b שווה לשארית החלוקה של a ב- c אז $b = c$.

שאלה 19

אם $b < c$ אז שארית החלוקה של a ב- b קטנה משארית החלוקה של a ב- c .

שאלה 20

אם שארית החלוקה של a ב- b היא r אז שארית החלוקה של $2a$ ב- $2b$ היא $2r$.

שאלה 21

הקבוצה הנוצרת מ- $\{2,-5\}$ על-ידי חיבור היא קבוצת כל המספרים השלמים .

שאלה 22

הקבוצה הנוצרת מ- $\{1,2,3,5,7,11,13\}$ על ידי כפל מכילה את קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מ- 100.

שאלה 23

אם n מספר טבעי גדול מ- 3 אז לפחות אחד מבין המספרים n , $n+2$, $n+4$ אינו ראשוני.

שאלה 24

קיימים מספרים טבעיים m,n,k כך ש- $15^{2m-1} \cdot 6^n \cdot 2^k = 5^k \cdot 9^n \cdot 2^m$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 17

הקורס: 04101 - אשנב למתמטיקה

חומר הלימוד למטלה: יחידות 9,8

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2020ב **מועד הגשה:** 03.7.2020

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות;
- *שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס*
- *שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה*

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

בשאלה זו נניח כי כל הנקודות נמצאות במישור אחד וכי מתקיימות אקסיומות החילה, הסדר ואקסיומת המקבילים. נאמר כי שני קטעים ST ו- XY הם מקבילים אם הישר המכיל את הנקודות S,T מקביל לישר המכיל את הנקודות X,Y. יהיו A,B,C נקודות לא קוויות.

א. הוכיחו שלכל נקודה E המקיימת את הסדר (AEB) קיימת נקודה F המקיימת את הסדר (AFC) כך שהקטע EF מקביל לקטע BC.

ב. נאמר כי נקודה P היא פנימית למשולש ΔABC אם קיימות נקודות E,F כך שהקטע EF מקביל לקטע BC וקיימים הסדרים (AEB), (AFC) ו- (EPF).
הוכיחו שאם P נקודה פנימית למשולש ΔABC אז על ישר המכיל את הנקודות A ו- P קיימת נקודה D כך ש- (BDC). הדרכה: היעזר במשולשים ΔBFE, ΔBFC והישר העובר דרך הנקודות A ו- P.

שאלה 2

a,b,d הם מספרים טבעיים. הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

א. אם שארית החילוק של a ב- d היא r_1 ושארית החילוק של b ב- d היא r_2 אז שארית החילוק של $a+b$ ב- d היא r_1+r_2.

ב. קיימים מספרים טבעיים a,b כך ש- $a^2=b^3$.

ג. אם p הוא מספר ראשוני, אם $a^2=b^3$ ואם $p\,|\,b$, אז $p^3\,|\,a$.

שאלה 3

א. הוכיחו שלא קיים מספר טבעי n כך ששארית החילוק של n^2+n ב- 5 היא 3 או 4.

ב. נסמן ב- A^* את הקבוצה הנוצרת על-ידי הכפל מ- $A=\{6,14\}$ ונסמן ב- B^* את הקבוצה הנוצרת על-ידי הכפל מ- $B=\{2,9,10\}$. הוכיחו כי $A^* \cap B^* = \{36^n \mid n \in \mathrm{N}\}$.

שאלה 4

א. מיצאו מספר טבעי a קטן ביותר שעבורו מתקיים $1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot a > 3^a$ והוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \geq a$ טבעי, מתקיים: $1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n > 3^n$.

ב. נתונים n ישרים במישור כך שאף שניים מהם אינם מקבילים ואף שלושה מהם אינם עוברים דרך אותה נקודה. נסמן ב- $S(n)$ את מספר האזורים השונים הנוצרים במישור על-ידי n הישרים האלה.

(i) מהו $S(3)$? בכמה יגדל מספר האזורים כאשר מוסיפים ישר רביעי? ובכמה יגדל $S(4)$ אם נוסיף ישר חמישי?

(ii) הוכיחו באינדוקציה שלכל n מתקיים: $S(n)=\dfrac{n^2+n+2}{2}$.