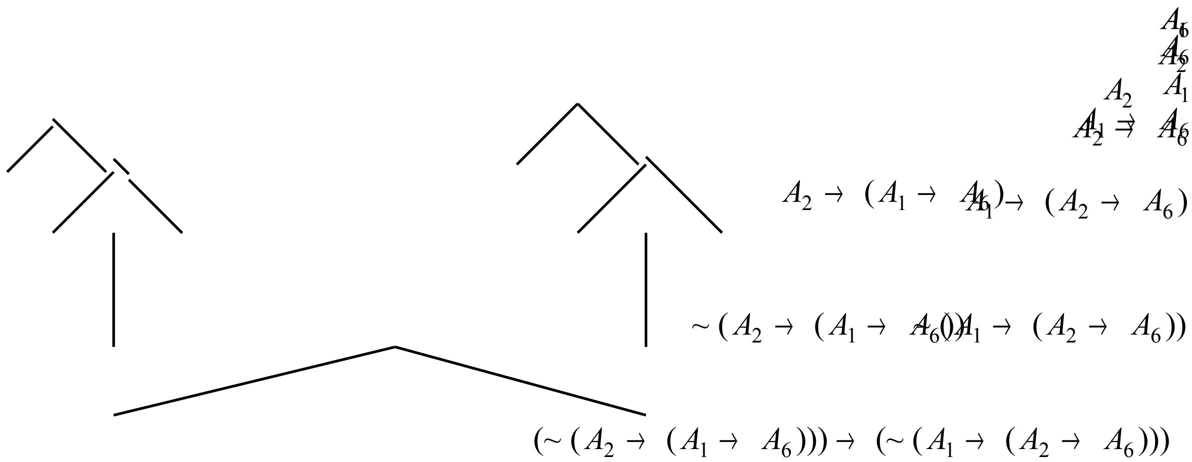
אביב ב *1999* פתרון ממ"ן *17* מתמטיקה דיסקרטית *20276*

תשובה *1*

א.



ב. כן. כדי לראות זאת בלי לרשום את כל טבלת האמת של הפסוק, אפשר לטעון כך :

תהי J אינטרפרטציה שבה הפסוק הנתון שקרי. לפי לוח האמת של $\to$,
בהכרח הפסוק $\sim(A_2 \to (A_1 \to A_6))$ אמיתי. לפיכך $A_2 \to (A_1 \to A_6)$ שקרי ב- J.
מכאן, שוב לפי הלוח של $\to$, כי A_2 אמיתי ב- J, בעוד ש- $A_1 \to A_6$ שקרי ב- J.
ומכאן, שוב לפי הלוח של $\to$, כי A_1 אמיתי ב- J ו- A_6 שקרי ב- J.
נחשב לפי ערכים אלה את ערכו של הפסוק $\sim(A_1 \to (A_2 \to A_6))$ ונקבל כי הוא אמיתי ב- J.
לפיכך הפסוק הנתון בשאלה הוא מהצורה $\alpha \to \beta$ כאשר α, β שניהם אמיתיים ב- J. לפיכך הפסוק אמיתי ב- J -סתירה להנחה שהוא שקרי ב- J. משמע - אין אינטרפרטציה שבה הפסוק שקרי.

תשובה *2*

א. *1*. לפסוק יסודי : $h[P] = 0$

2. לכל פסוק α : $h[\sim(\alpha)] = h[\alpha] + 1$

3. לכל שני פסוקים α, β : $h[(\alpha) \to (\beta)] = h[\alpha] + h[\beta]$

ב. *1*. לפסוק יסודי: $f[P] = 0$

2. לכל פסוק α : $f[\sim(\alpha)] = f[\alpha]$

3. לכל שני פסוקים α,β : $f[(\alpha)\to(\beta)] = f[\alpha] + f[\beta] + 1$

ג. *1*. לפסוק יסודי: $s[P] = 0$

2. לכל פסוק α : $s[\sim(\alpha)] = s[\alpha] + 1$

3. לכל שני פסוקים α,β : $s[(\alpha)\to(\beta)] = s[\alpha] + s[\beta] + 2$

ד. ההוכחה - באינדוקציה על בניית פסוק, ונעזרת בהגדרות הרקורסיביות א-ג.

1. עבור פסוק יסודי P , השוויון מתקיים מיידית מתוך סעיף *1* של א,ב,ג.

2. נניח כי עבור α מתקיים $s[\alpha] = h[\alpha] + 2f[\alpha]$, ונראה עבור $\sim(\alpha)$:

מ- ג *2* :

$$s[\sim(\alpha)] = s[\alpha] + 1$$

מההנחה עבור α :

$$= h[\alpha] + 2f[\alpha] + 1$$

ובהצבת האגפים הימניים של א *2* ו-ב *2* נקבל

$$= h[\sim(\alpha)] + 2f[\sim(\alpha)]$$

משמע הנוסחה נכונה גם עבור $\sim(\alpha)$.

3. נניח כי עבור α,β הנוסחה נכונה, ונחשב עבור $(\alpha)\to(\beta)$:

החישוב מקביל לגמרי צעד-צעד לנ"ל - השלימו בעצמכם.

תשובה *3*

1. A_1 (הנחה).

2. A_2 (הנחה).

3. $A_1 \wedge A_2$ (d_2 על *1,2*).

4. A_3 (הנחה).

5. $(A_1 \wedge A_2) \wedge A_3$ (d_2 על *3,4*).

6. $((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \to (A_1 \leftrightarrow (A_2 \wedge A_3))$ (אקסיומה: טאוטולוגיה מהצורה המותרת).

7. $A_1 \leftrightarrow (A_2 \wedge A_3)$ (MP על *5,6*).

תשובה 4

א. P_1 : מר כהן קנה את התקליטורים. P_2 : מרת כהן מכרה את המקטרות.

P_3 : מר כהן לווה כסף בבנק.

ההנחות: $P_1 \to (P_2 \vee P_3)$, $\sim P_3$.

המסקנה: $(\sim P_2) \to (\sim P_1)$.

המסקנה נובעת טאוטולוגית מההנחות. הוכחה ללא בדיקת לוחות אמת: נניח בשלילה קיום אינטרפרטציה בה ההנחות אמיתיות והמסקנה שקרית. מכך שהמסקנה שקרית, לפי לוח האמת של $\to$, יהיה P_2 שקרי ו- P_1 אמיתי. בנוסף, מכך שההנחות אמיתיות נובע ש- P_3 שקרי באינטרפרטציה. אולם מכל הנ"ל, לפי הלוחות של $\to$ ושל $\vee$ נובע כי ההנחה $P_1 \to (P_2 \vee P_3)$ שקרית - סתירה.

ב. P_1 : משה יצא לספארי. P_2 : שנת *2000* תהיה גדולה לתיירות.

P_3 : השמיים יהיו כחולים בכל שנת *2000*. P_4 : הקופים יחייכו.

ההנחות: $(\sim P_1) \vee P_2$, $P_1 \to (P_3 \wedge P_4)$, $P_4 \to P_2$.

המסקנה: $P_3 \vee P_2$.

המסקנה אינה נובעת טאוטולוגית מההנחות: באינטרפרטציה בה ארבעת הפסוקים היסודיים מקבלים F, כל ההנחות אמיתיות אך המסקנה שקרית.

תשובה 5

א. הפונקציה אינה חח"ע. קל לתת דוגמא נגדית אפילו בעזרת פסוקים יסודיים:

$$f_{m;n}(P_m) = f_{m;n}(P_n) = P_n \ .$$

נתון כי $m \neq n$, ולכן קיבלנו כאן שני פסוקים שונים P_m , P_n בעלי אותה תמונה.

ב. יהיו α , β פסוקים המקיימים $F_0(\alpha) = F_0(\beta)$. נראה כי $\alpha = \beta$:

פסוק הוא ביטוי סופי, לכן בפרט מספר הפסוקים היסודיים השונים המופיעים בפסוק הוא סופי.

יהי n מספר טבעי הגדול מהאינדקס i של כל פסוק יסודי P_i המופיע ב- α או ב- β.

בפרט, P_n אינו מופיע ב- α או ב- β. לפיכך, $f_{n;0}(\alpha) = \alpha$, $f_{n;0}(\beta) = \beta$.

מכאן, בעזרת ההנחה $F_0(\alpha) = F_0(\beta)$ נובע מיד כי $\alpha = \beta$ (מדוע?).

אִתַּי הראבן

יוני *1999*