פתרון ממ"ן 12

שאלה 1

על קבוצת המספרים $A=\{1,2,3,\ldots,20\}$ מגדירים שני יחסים, R,S כך:

xRy אם"ם קיים מספר **טבעי** i כך ש- $\frac{y}{x}=2^i$. xSy אם"ם קיים מספר **שלם** j כך ש- $\frac{y}{x}=2^j$.

א. הוכיחו שאחד משני היחסים הוא יחס שקילות.

ב. מיצאו את מחלקות השקילות של יחס השקילות שגיליתם בסעיף א'.

ג. הוכיחו שאחד משני היחסים הוא סדר חלקי.

ד. מיצאו את האיברים המינימליים ואת האיברים המקסימליים לגבי היחס האחרון

פתרון

א. נוכיח ש- S הוא יחס שקילות.

רפלקסיביות: לכל $x\in A$ מתקיים $\frac{x}{x}=2^0$ לכן xSx.

סימטריה: לכל $x,y\in A$ אם xSy אז יש j שלם כך ש- $\frac{y}{x}=2^j$.

אז $\frac{x}{y}=2^{-j}$ (כאשר $-j$ שלם) ולכן ySx.

טרנזיטיביות: לכל $x,y,z\in A$ אם xSy ו- ySz אז קיימים j,k שלמים כך ש- $\frac{y}{x}=2^j$ ו- $\frac{z}{y}=2^k$ ועל ידי כפל נקבל ש- $\frac{z}{x}=2^{j+k}$, כאשר $j+k$ שלם ולכן xSz.

מכאן ש- S הוא יחס שקילות.

ב. לפי הגדרת S שני מספרים נמצאים ביחס הזה אם ורק אם המנה שלהם היא כפולה שלמה של 2. לכן מחלקות השקילות הן:

$\{1,2,4,8,16\}$; $\{3,6,12\}$; $\{5,10,20\}$; $\{7,14\}$; $\{9,18\}$; $\{11\}$; $\{13\}$; $\{15\}$; $\{17\}$; $\{19\}$

ג. נוכיח ש R הוא סדר חלקי.

רפלקסיביות: לכל $x \in A$ מתקיים $\frac{x}{x} = 2^0$ (ו- 0 הוא טבעי) לכן xRx.

אנטי-סימטריה: לכל $x, y \in A$ אם xRy ו- yRx אז יש j,k טבעיים כך ש- $\frac{y}{x} = 2^j$ ו-

$\frac{x}{y} = 2^k$. מכאן נובע ש- $\frac{y}{x} \geq 1$ וגם $\frac{x}{y} \geq 1$ לכן $x = y$.

טרנזיטיביות: לכל $x, y, z \in A$ אם xRy ו- yRz אז קיימים j,k טבעיים כך ש- $\frac{y}{x} = 2^j$ ו-

$\frac{z}{y} = 2^k$ ועל ידי כפל נקבל ש- $\frac{z}{x} = 2^{j+k}$ (כאשר $j + k$ טבעי) ולכן xRz.

לפיכך R הוא סדר חלקי.

ד. לפי הגדרת R, איבר y מכסה איבר x אם ורק אם $y = 2x$.

האיברים המינימליים הם אלה שלא מכסים אף איבר אחר (והם אלה שאינם כפולות של 2).

מכאן שהאיברים המינימליים הם כל **המספרים האי-זוגיים** שבקבוצה A.

האיברים המקסימליים הם אלה שאף איבר אחר אינו מכסה אותם כלומר אותם המספרים $x \in A$ כך ש- $2x \notin A$. לכן האיברים המקסימליים אל כל אברי A **שגדולים** מ- 10

שאלה 2

יהי R הסדר המלא הרגיל על קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbf{N}$. במילים אחרות: לכל $x, y \in \mathbf{N}$, xRy אם ורק אם $x \leq y$.

נניח בנוסף ש- $m \notin \mathbf{N}$ ונסמן: $S = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & m \end{pmatrix}$

א. מיצאו את RS, את SR ואת $(R \cup S)^2$

ב. הוכיחו ש- $R \cup S$ הוא סדר חלקי על $\mathbf{N} \cup \{m\}$

ג. האם קיים איבר מקסימלי לגבי הסדר $R \cup S$? האם הוא מקסימלי יחיד?

ד. האם קיים איבר גדול ביותר לגבי הסדר $R \cup S$? נמקו את התשובה.

פתרון

א. נניח ש- $aRSb$. אז קיים $x \in \mathrm{N} \cup \{m\}$ כך ש- aRx, xSb.

מתוך aRx נובע $x \in \mathbf{N}$ ומתוך xSb נובע ש- $x \in \{0, m\}$. לכן $x = 0$.

לכן האופציות שנתרו הן $aR0$ ו- $0Sb$.

$aR0$ מחייב ש- $a = 0$. $0Sb$ מחייב ש- $b = m$. מכאן נקבל ש- $RS = \{(0, m)\}$.

נניח כעת ש- $aSRb$. אז קיים $x \in \mathrm{N} \cup \{m\}$ כך ש- aSx, xRb. שיקול דומה לקודם, מראה ש- $x = 0$. לכן האופציות שנתרו הן $aS0$ ו- $0Rb$. אך לא קיים איבר a כך ש- $aS0$. לכן $SR = \varnothing$.

נשים לב ש- $R^2 = R$ (שכן R סדר חלקי, לכן טרנזיטיבי ולכן $R^2 \subseteq R$ ומצד שני R

רפלקסיבי לכן $I \subseteq R$ ולכן $IR \subseteq RR$ כלומר $R \subseteq R^2$)

כמו כן $S^2 = S$ כי חישוב ישיר מראה ש- $\begin{pmatrix} 0 & m \\ m & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & m \\ m & m \end{pmatrix}$.

כעת נחשב את $(R \cup S)^2$. ניעזר בשאלה 2.10 ב ונקבל:

$$(R \cup S)^2 = (R \cup S)(R \cup S) = R(R \cup S) \cup S(R \cup S)$$
$$= R^2 \cup RS \cup SR \cup S^2$$

מאחר ש- $R^2 = R$, $S^2 = S$, $RS = \{(0,m)\} \subseteq S$ ו- $SR = \varnothing$ נקבל ש-

$(R \cup S)^2 = R \cup S$.

ב. נראה ש- $R \cup S$ הוא סדר חלקי על הקבוצה $\mathbf{N} \cup \{m\}$.

רפלקסיביות: לכל $x \in \mathbf{N}$ מתקיים $(x,x) \in R$ כי R רפלקסיבי ובנוסף $(m,m) \in S$.

לכן $R \cup S$ מכיל את רלציית היחידה של $\mathbf{N} \cup \{m\}$ ולכן הוא רפלקסיבי.

אנטי סימטריה: יהיו $x, y \in \mathbf{N} \cup \{m\}$.

אם $(x,y) \in R \cup S$ וגם $(y,x) \in R \cup S$ אז לפי ההגדרות של היחסים R,S ייתכנו רק

שני מצבים: **או ש-** $(x,y) \in R$ וגם $(y,x) \in R$ **או ש-** $(x,y) \in S$ וגם $(y,x) \in S$.

אבל שני היחסים הם אנטי-סימטריים לכן בשני המקרים נקבל ש- $x = y$. , מה שמוכיח ש-

$R \cup S$ אנטי-סימטרי.

טרנזיטיביות: הוכחנו בסעיף ב' ש- $(R \cup S)^2 = R \cup S$ ולכן $R \cup S$ טרנזיטיבי.

מכאן ש- $R \cup S$ הוא סדר חלקי.

ג. התשובה חיובית: m הוא איבר מקסימלי מפני שיש איבר היחיד $x \in \mathbf{N} \cup \{m\}$ המקיים

xRm וזה $x = m$ בלבד.

כל איבר $k \in \mathbf{N}$ אינו מקסימלי מפני ש- $kR(k+1)$, כלומר $k(R \cup S)(k+1)$.

לכן m הוא איבר **מקסימלי יחיד**.

ד. התשובה לסעיף זה שלילית:

כל איבר $k \in \mathbf{N}$ אינו גדול ביותר כי אינו מקסימלי, כפי שראינו בסעיף הקודם.

אבל גם m אינו גדול ביותר מפני שלמשל $(1,m) \notin R \cup S$.

לכן לא קיים ב- $\mathbf{N} \cup \{m\}$ איבר גדול ביות לגבי $R \cup S$ למרות שקיים איבר מקסימלי יחיד

(תופעה שכזו יכולה להתרחש רק בקבוצות אינסופיות)

שאלה 3

הגדרה: מספר טבעי חיובי נקרא **ראשוני** (prime) אם הוא שונה מ- 1, ומתחלק ללא שארית רק בעצמו וב- 1. כבר ליוונים היה ידוע שקבוצת המספרים הראשוניים היא אינסופית.
שימו לב ש- 1 אינו נחשב ראשוני. קבוצת הראשוניים "מתחילה" כך: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...
משפט ידוע קובע שכל מספר טבעי הגדול מ- 1 ניתן להצגה כמכפלה של מספרים ראשוניים, ויש רק דרך אחת להציג אותו כך, עד כדי החלפת סדר הגורמים במכפלה (מה היה מתקלקל במשפט זה אילו 1 היה נחשב ראשוני?). נסמן ב- K את קבוצת המספרים הראשוניים.

נסמן $M = \mathbf{N} - \{0,1\}$. תהי $f : M \to P(K)$ הפונקציה המתאימה לכל $n \in M$ את **קבוצת** הגורמים הראשוניים של n (המספרים הראשוניים בהם n מתחלק ללא שארית).
למשל $f(140) = \{2,5,7\}$.

א. האם f היא חד-חד-ערכית? ב. האם f היא **על** $P(K)$?

בהמשך לאמור, הפונקציה f מחלקת את M למחלקות שקילות, בעזרת התנאי: n,m שייכים לאותה מחלקה אםם $f(n) = f(m)$.

ג. מיהם כל המספרים הנמצאים באותה מחלקה עם המספר 125 ?

ד. מיהם כל המספרים הנמצאים באותה מחלקה עם המספר 20 ?

פתרון

א. f היא לא חד-חד-ערכית מפני שהיא מתאימה אותה קבוצה לכל שני מספרים טבעיים שיש להם אותם הגורמים הראשוניים. למשל $f(140) = \{2,5,7\}$ וגם $f(70) = \{2,5,7\}$

ב. f היא לא על מפני שלמשל הקבוצה K שייכת ל- $P(K)$ אך לא קיים מספר טבעי n כך ש- $f(n) = K$ שכן, לא קיים מספר טבעי כך שכל המספרים הראשוניים הם גורמים שלו.

ג. ל- 125 יש רק גורם ראשוני יחיד והוא 5. לכן $f(125) = \{5\}$. אם $n \in M = \mathbf{N} - \{0,1\}$ אז $f(n) = \{5\}$ אםם הגורם הראשוני היחיד של n הוא 5 כלומר n הוא חזקה של 5.
לכן המחלקה של 125 היא $\{5^k \mid k \in \mathbf{N} - \{0\}\} = \{5, 5^2, 5^3, \ldots\}$

ד. $f(20) = \{2,5\}$ ולכן אם $n \in M = \mathbf{N} - \{0,1\}$ אז $f(n) = \{2,5\}$ אםם למספר n יש בדיוק שני גורמים ראשוניים: 2 ו- 5. מכאן שהמחלקה של 20 היא $\{2^j 5^k \mid j,k \in \mathbf{N} - \{0\}\}$.

שאלה 4

א. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי יהי $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

ב. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי קיים מספר טבעי k ומספרים $a_0, a_1, ..., a_k \in \{0,1\}$ כך ש- $n = \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i$.

פתרון

א. הטענה נכונה ל- $n = 0$ שכן, $\sum_{i=0}^{0} 2^0 = 2^0 = 1$ וגם $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$.

נניח שהטענה נכונה ל- n מסוים כלומר $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

נראה שהיא נכונה ל- $n+1$ כלומר $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{n+2} - 1$.

אכן, על ידי שימוש בהנחה עבור n נקבל:

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} = (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

מכאן שהטענה נכונה לכל n טבעי.

ב. הטענה נכונה ל- $n = 0$ שכן $0 = a_0 2^0$ כאשר $a_0 = 0$.

נניח שהטענה נכונה ל- n מסוים כלומר:

נניח שקיים מספר טבעי k ומספרים $a_0, a_1, ..., a_k \in \{0,1\}$ כך ש- $n = \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i$.

נוכיח שהיא נכונה ל- $n+1$ כלומר:

נוכיח שקיים m טבעי ומספרים $b_0, b_1, ..., b_m \in \{0,1\}$ כך ש- $n+1 = \sum_{i=0}^{m} b_i 2^i$

נבחין כעת בין שני מקרים:

1. $a_0 = 0$. אז $n+1 = (0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \cdots + a_k \cdot 2^k) + 1 = 1 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \cdots + a_k \cdot 2^k$

מה שמוכיח שהטענה ל- $n+1$ נכונה במקרה זה.

2. $a_0 = 1$. במקרה זה נסמן ב- j את האינדקס הקטן ביותר בביטוי $n = \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i$ שעבורו $a_j = 0$. אם כל המספרים $a_0, a_1, ..., a_k$ הם שונים מ- 0 אז נבחר $j = k+1$. ברור ש- $j > 0$.

תוך שימוש בהנחת האינדוקציה נוכל לרשום:

$n+1 = (1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + \cdots + 1 \cdot 2^{j-1} + 0 \cdot 2^j + \cdots + a_k \cdot 2^k) + 1 =$.

לפי סעיף א' $1\cdot 2^0+1\cdot 2^1+\cdots+1\cdot 2^{j-1}=2^j-1$. לכן

$$n+1=(2^j-1+0\cdot 2^{j+1}\cdots+a_k\cdot 2^k)+1=1\cdot 2^j+\cdots+a_k\cdot 2^k$$

ולכן הטענה נכונה ל- $n+1$ גם במקרה זה.

הערה: אם $j=k+1$ כלומר כל המספרים $a_0,a_1,...,a_k$ הם שונים מ- 0, אז

$n=1\cdot 2^0+1\cdot 2^1+\cdots+1\cdot 2^k$ ואז $n+1=1+(1+2^1+\cdots+2^k)=1+(2^{k+1}-1)=2^{k+1}$

במילים אחרות $n+1=\sum_{i=0}^{k+1}b_i 2^i$ כאשר $b_0,b_1,...,b_k$ כולם 0 ו- $b_{k+1}=1$.