פתרונות לממ"ן 11 בקורס "אלגוריתמים", סמסטר ב׳2006

שימו לב: לעיתים חסרים פרטים בפתרון ואתם מתבקשים לוודא שהינכם יודעים להשלים את הפרטים החסרים. בכל מקרה כזה, הדבר מצויין במפורש, ואין לראות בפתרון הנתון תשובה מלאה.

שאלה 1

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם פונקציית משקל $w:E\rightarrow R$ ויהי $t\in V$. נתונה פונקציה $d:V\rightarrow R$, כלומר, לכל צומת נתון ערך ממשי.

כתבו אלגוריתם שעלותו $O(|V|+|E|)$, הבודק אם d היא פונקציית מרחקים קצרים ל-t, כלומר, אם לכל $v\in V$ מתקיים כי $d(v)$ הוא משקל מסלול קצר ביותר מ-v ל-t.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

תשובה

האלגוריתם:

0. אם $d(t)\neq 0$ החזר "לא".
1. לכל $e=(u, v)\in E$ בצע:
   אם $d(u)>d(v)+w(e)$ החזר "לא"
2. בנה גרף G' באופן הבא:
   3.1 לכל $v\in V$ הוסף ל-V' את v'.
   3.2 לכל $e=(u, v)\in E$: אם $d(u)=d(v)+w(e)$ הוסף ל-E' את (v', u').
3. בצע BFS על G' מ-t'
4. אם קיים צומת v כך שב-G' $d(v')=\infty$ החזר "לא"
   אחרת החזר "כן"

ניתוח סיבוכיות: עלות צעד 0 היא קבועה. צעד 1 דורש $O(|V|+|E|)$. הבנייה דורשת $O(|V|+|E|)$. זוהי גם סיבוכיות צעד 3 באלגוריתם, בגלל ביצוע BFS. לכן הסיבוכיות הכוללת היא $O(|V|+|E|)$.

הוכחת נכונות:

נניח שהאלגוריתם ענה "לא":

אם ענה בצעד 0, ברור שאכן d אינה פונקציית מרחקים קצרים ל-t, כי מרחקו של t מעצמו חייב להיות 0.

אם ענה "לא" בצעד 1: קיימת קשת $e=(u, v)$ כך ש-$d(u)>d(v)+w(e)$. נניח כעת בשלילה שהפונקציה d היא פונקציית מרחקים קצרים ל-t. בפרט, הערך $d(v)$ נכון. לכן קיים מסלול מ-v ל-t שמשקלו $d(v)$ ולכן גם קיים מסלול מ-u ל-t שמשקלו $d(v)+w(e)$. לכן אורך המסלול הקצר ביותר מ-u ל-t הוא לכל היותר $d(v)+w(e)$, ומנכונות ערכי d נקבל: $d(u)\leq d(v)+w(e)$, בסתירה לנתון.

אם ענה "לא" בצעד 4: כלומר, קיים צומת v כך שב-G' $d(v')=\infty$. נניח שוב בשלילה שהפונקציה d היא פונקציית מרחקים קצרים ל-t. מאחר שערכי d סופיים, אז לכל צומת, ובפרט ל-v קיים מסלול מ-v ל-t. יהי p מסלול קצר ביותר מ-v ל-t ותהי $e=(u_1, u_2)$ קשת כלשהי ב-p. נבדוק שלושה מקרים אפשריים:

א. $d(u_1)>d(u_2)+w(e)$: הראינו בהוכחת המקרה הקודם (תשובה שלילית בצעד 1) שאי-שוויון כזה לא ייתכן אם d היא פונקציה נכונה.

ב. $d(u_1)<d(u_2)+w(e)$: הסיפא של p מ-u_2 עד t היא בהכרח מסלול קצר ביותר (כי תת-מסלול של מסלול קצר ביותר אף הוא מסלול קצר ביותר) ולכן מנכונות d אורכה הוא $d(u_2)$. לכן, אורך הסיפא מ-u_1 עד t הוא $d(u_2)+w(e)$. אבל, אם $d(u_1)<d(u_2)+w(e)$ אז הסיפא של p מ-u_1 עד t אינה מסלול קצר ביותר, בסתירה לכך שתת-מסלול של מסלול קצר

ביותר אף הוא מסלול קצר ביותר.

ג. האפשרות היחידה שנותרה היא $d(u_1)=d(u_2)+w(e)$. במקרה כזה בגרף G' נמצאת הקשת (u_2', u_1').

אם כך, לכל קשת $e=(u_1, u_2)$ על המסלול p (שהוא מסלול קצר ביותר מ-v ל-t בגרף המקורי), קיימת בגרף G' הקשת (u_2', u_1'). לכן בגרף G' יש מסלול מ-t' ל-v' (בדיוק המסלול ההפוך ל-p), בסתירה לכך ש-$d(v')=\infty$.

נניח שהאלגוריתם ענה "כן":

תהי $d'(v)$ פונקציית המרחקים הנכונה. נרצה להראות שבהכרח $d'(v)=d(v)$ לכל v. יהי v צומת בגרף המקורי. מאחר שהאלגוריתם ענה "כן" אז יש בגרף G' מסלול מ-t' ל-v', ועבור כל קשת $e=(u_2', u_1')$ במסלול הזה מתקיים $d(u_1)=d(u_2)+w(e)$ (נסמן ב-(*) את השוויון). נראה שמכאן נובע שאורך המסלול הזה הוא $d(v)$.

ההוכחה היא באינדוקציה על אורך המסלול:

בסיס: אם אורך המסלול 1, אז הוא בעצם קשת $e=(t', v')$. מכך שהאלגוריתם לא ענה "לא" בצעד 1 נובע $d(t)=0$, וע"פ (*) $d(v)=d(t)+w(e)=0+w(e)=w(e)$. כלומר אורך המסלול (שהוא $w(e)$) אכן שווה ל-$d(v)$.

נניח נכונות למסלולים באורך i.

יהי p מסלול באורך $i+1$ ב-G' מ-t' ל-v'. נסמן $p=p'\cdot(u', v')$ כאשר p' מסלול באורך i ב-G' מ-t' ל-u'. מהנחת האינדוקציה אורכו של p' הוא $d(u)$. אורכו של p שווה לאורכו של p' ועוד משקל הקשת $e=(u', v')$, כלומר, אורכו של p שווה ל-$d(u)+w(e)$. אבל, ע"פ (*) $d(v)=d(u)+w(e)$, ולכן נקבל כי אורכו של p שווה ל-$d(v)$.

אם כך, הראינו כי לכל צומת v קיים בגרף המקורי מסלול מ-v ל-t שאורכו שווה ל-$d(v)$. לכן ברור כי לכל צומת v $d'(v)\leq d(v)$.

נניח בשלילה שקיים צומת v עבורו $d'(v)<d(v)$.

יהי p מסלול קצר ביותר מ-v ל-t בגרף המקורי. יהי x הצומת האחרון ב-p עבורו מתקיים $d'(x)<d(x)$. בוודאי יש לפחות צומת אחד כזה, כי האי-שוויון מתקיים עבור v, ומצד שני האי-שוויון אינו מתקיים עבור t, כי עבורו מתקיים $d(t)=d'(t)=0$. לכן x אינו הצומת האחרון ב-p. יהי y הצומת העוקב ל-x ב-p. מבחירת x מתקיים $d(y)=d'(y)$. קטע המסלול מ-y עד t אף הוא מסלול קצר ביותר, כי הוא תת-מסלול של מסלול קצר ביותר. לכן משקלו הוא $d'(y)$. מאותה סיבה, גם קטע המסלול מ-x עד t הוא מסלול קצר ביותר, ולכן משקלו הוא $d'(x)$. הקשת $e=(x, y)$ מקיימת $d'(x)=d'(y)+w(e)$ ובסה"כ נקבל:

$d(x)>d'(x)=d'(y)+w(e)=d(y)+w(e)$, כלומר $d(x)> d(y)+w(e)$.

אבל אז האלגוריתם היה צריך לענות "לא" בצעד 1, בסתירה לכך שענה "כן".

לכן לכל צומת v מתקיים $d(v)=d'(v)$, כלומר d אכן פונקציה נכונה.

שאלה 2

הגדרה: גרף **דו-צבעי** הוא גרף מכוון $G=(V,E)$ עם פונקציית צביעה $\chi: E\to\{R, B\}$, הצובעת כל קשת באדום (R) או בשחור (B). גרף דו-צבעי הוא **סגור** אם לכל צומת $v\in V$ יש לפחות קשת יוצאת אחת אדומה ולפחות קשת יוצאת אחת שחורה.

כתבו אלגוריתם שעלותו $O(|V|+|E|)$ המקבל כקלט גרף דו-צבעי $G=(V, E)$ עם פונקציית צביעה χ וקובע אם יש ל-G תת-גרף מושרה לא ריק שהוא סגור, כלומר, אם קיימת תת-קבוצה לא ריקה $V'\subseteq V$ כך שהגרף $G'=(V', E\cap(V'\times V'))$ עם הפונקציה χ המצומצמת על $E\cap(V'\times V')$ הוא סגור.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

תשובה

ראשית נבצע מעבר מקדים על רשימת השכנויות: לכל צומת נוסיף גם את רשימת הקשתות שנכנסות אליו, עם מצביע דו-כיווני אל הקשתות היוצאות. כלומר, לכל קשת (u, v), היא תופיע כרגיל ברשימת הקשתות היוצאות מ-u, ותופיע כעת גם ברשימת הקשתות הנכנסות ל-v ויהיה מצביע דו-כיווני בין שני המופעים הללו. ניתן לבצע את העדכון הזה בזמן $O(|V|+|E|)$, ע״י כך שעוברים לכל צומת על רשימת הקשתות היוצאות שלו, ולכל קשת ברשימה מוסיפים אותה עם הצבעה דו-כיוונית אל רשימת הקשתות הנכנסות של צומת היעד שלה.

עתה נבצע מעבר נוסף על רשימת השכנויות ונחלק לכל צומת כל אחת משתי הרשימות שלו (קשתות נכנסות וקשתות יוצאות) לשתי תתי-רשימות, של קשתות אדומות וקשתות שחורות.

נשמור רשימת צמתים מיועדים להסרה מהגרף.

1. לכל צומת v, אם אין קשתות אדומות שיוצאות ממנו או אין קשתות שחורות שיוצאות ממנו, נוסיף אותו לרשימת המיועדים להסרה.
2. עתה נעבור על רשימת המיועדים להסרה, לפי הסדר, כל עוד אינה ריקה, ונבצע:

   יהי u הצומת התורן ברשימת המיועדים להסרה. הורד את u מרשימת המיועדים להסרה והסר את u וכל הקשתות הנוגעות בו מהגרף. עבור כל קשת (v, u) שנמחקת מהגרף יש לבדוק אם ברשימות הקשתות היוצאות של v נותרה עוד לפחות קשת אדומה אחת וקשת שחורה אחת. אם לא, נוסיף את v לרשימת המיועדים להסרה.

ניתוח סיבוכיות: כאמור, עלות המעברים המקדימים היא $O(|V|+|E|)$. העלות של בדיקה עבור צומת מסוים אם נותרו עוד לפחות קשת שחורה אחת וקשת אדומה אחת שיוצאות ממנו היא קבועה (רק לבדוק אם הרשימות המתאימות אינן ריקות). עלות הסרת צומת וכל קשתותיו מהגרף היא $O(|V|+|E|)$ בחיוב כולל. סה״כ הסיבוכיות היא $O(|V|+|E|)$.

הוכחת נכונות (לא מלאה): האלגוריתם מסיר צמתים שעל פי ההגדרה לא יכולים להיות בתת-גרף דו-צבעי סגור, משום שאין להם גם קשת שחורה וגם קשת אדומה שיוצאות אל התת-גרף. כל צומת שנשאר בהכרח מקיים את ההגדרה – מלכתחילה היתה לו לפחות קשת אדומה אחת וקשת שחורה אחת יוצאות. גם אם במהלך צמצום הגרף ירדו ממנו קשתות יוצאות, עדיין נשמרת האינווריאנטה (שמורה) שיש לו לפחות קשת אדומה אחת וקשת שחורה אחת יוצאות ממנו אל תת הגרף. להוכחה מלאה צריך להגדיר את השמורה הבאה: בכל פעם שהאלגוריתם חוזר לצעד 2, יהי G' הגרף המושרה מהצמתים שעדיין לא הוסרו מהגרף (כולל הצמתים שעדיין קיימים ברשימת המיועדים להסרה). לכל צומת ב-G' שאינו ברשימת המיועדים להסרה, מתקיים שיש לו לפחות קשת אחת אדומה וקשת אחת שחורה שיוצאות ממנו אל G'. את יציבות השמורה צריך להוכיח באינדוקציה על ביצוע האלגוריתם (הבסיס הוא הפעם הראשונה שהאלגוריתם מגיע אל צעד 2 וצריך להראות שהטענה נשמרת אחרי ביצוע סיבוב שלם בלולאה). נכונות האלגוריתם כולו נובעת מכך, משום שבסיום הלולאה רשימת המיועדים להסרה ריקה ולכן נובע שלכל צומת ב-G' (אם G' אינו ריק) יש לפחות קשת אחת אדומה וקשת אחת שחורה יוצאות ממנו אל G', ולכן G' הוא תת-גרף דו-צבעי סגור.

שאלה 3

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון עם פונקציית משקל $w : E \rightarrow R$ ויהיו $t, t' \in V$. בנוסף, נתונה פונקצית מרחקים אל t: $d_t : V \rightarrow R$ (כלומר, לכל $v \in V$, $d_t(v)$ הוא משקל המסלול הקצר ביותר מ-v ל-t ב-G).

כתבו אלגוריתם שעלותו $O(|V| \lg |V| + |E|)$ המחשב לכל $v \in V$ את מרחקו של t' מ-v (בהתבסס כמובן על ערכי d_t הנתונים).

נתחו את סיבוכיות האלגוריתם והוכיחו את נכונותו.

רמז: הגדירו פונקצית משקל חדשה w': לכל $e = (u, v) \in E$: $w'(e) = w(e) - d_t(u) + d_t(v)$. האם יש קשר בין משקלי מסלולים ע״פ w וע״פ w'?

תשובה

אם הקשתות היו במשקל אי-שלילי אז ניתן היה לחשב את פונקציית המרחקים החדשה בעזרת האלגוריתם של דייקסטרא על הגרף המשוחלף עם t' כמקור. אבל, הקשתות הן במשקל ממשי כלשהו ולכן לא ניתן לעשות זאת. עם זאת, בעזרת הרמז ניתן לבצע רדוקציה לבעיית מסלולים קצרים ביותר בגרף עם משקלות אי-שליליים.

נגדיר פונקציית משקל חדשה כמו ברמז: לכל $e = (u, v) \in E$: $w'(e) = w(e) - d_t(u) + d_t(v)$.

נראה שכעת המשקלות הם אי-שליליים:

נניח בשלילה כי קיימת קשת e עבורה $w'(e)<0$. אז $w(e) - d_t(u) + d_t(v)<0$, כלומר $w(e) + d_t(v)< d_t(u)$. אבל, $d_t(v)$ הוא משקל מסלול קצר ביותר מ-v ל-t, ולכן קיים מסלול מ-u ל-t שאורכו $w(e) + d_t(v)$. לכן אורכו של המסלול הקצר ביותר מ-u ל-t בהכרח אינו עולה על $w(e) + d_t(v)$, כלומר, $w(e) + d_t(v)\geq d_t(u)$, והגענו לסתירה.

אם כך, פונקציית המשקל החדשה היא אי-שלילית, אבל עוד יש להראות שמסלולים קצרים אל t' ע״פ הפונקציה המקורית הם עדיין קצרים ביותר גם ע״פ הפונקציה החדשה. אם כך, יהי p מסלול בגרף מ-x ל-t'. אורכו (משקלו) לפי הפונקציה המקורית הוא $\sum_{e\in p} w(e)$. ע״פ הפונקציה החדשה משקלו הוא $\sum_{e=(u,v)\in p} w(e) - d_t(u) + d_t(v)$. כל הצמתים במסלול, פרט לראשון ולאחרון, מופיעים בסכימה הזאת פעמיים, פעם עם סימן –, בתפקיד צומת יעד של קשת במסלול, ופעם עם סימן +, בתפקיד צומת מקור של קשת במסלול. לכן בסה״כ נקבל:

$$(*) \quad w'(p) = (\sum_{e=(u,v)\in p} w(e)) - d_t(x) + d_t(t') = w(p) - d_t(x) + d_t(t')$$

יהיו p ו-p' שני מסלולים מ-x ל-t אז

$$w'(p) - w'(p') = w(p) - d_t(x) + d_t(t') - w(p') + d_t(x) - d_t(t') = w(p) - w(p')$$

לכן ההפרשים בין אורכי מסלולים לא השתנו ומסלול הוא קצר ביותר ע״פ הפונקציה המקורית אם ורק אם הוא קצר ביותר ע״פ הפונקציה החדשה.

חישוב הפונקציה החדשה עולה $O(|E|)$. כעת נסתכל על הגרף המשוחלף, (עם הפונקציה החדשה) ונחשב בו את אורכי המסלולים הקצרים ביותר מ-t'. ניתן לבצע זאת בעזרת האלגוריתם של דייקסטרא בעלות $O(|V| \lg |V| + |E|)$. כך נקבל לכל צומת v את אורכו של מסלול קצר ביותר מ-t' ל-v בגרף המשוחלף, ע״פ הפונקציה w', כלומר, את אורכו של מסלול קצר ביותר מ-v אל t' בגרף המקורי, ע״פ הפונקציה w'. ע״פ מה שהוכחנו לעיל, מובטח שזהו גם מסלול קצר ביותר ע״פ w. כדי לחשב את משקלו ע״פ w יש להוסיף לו את הערך $d_t(v) - d_t(t')$, ע״פ השוויון (*) שלעיל.

שאלה 4

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו, המקבל כקלט גרף לא-מכוון $G = (V, E)$ עם משקלות אי-שליליים על הקשתות, ובו כל קשת צבועה באחד משני צבעים: אדום ושחור. כמו כן, הקלט כולל צומת s בגרף. על האלגוריתם למצוא לכל צומת $v \in V$ את אורך המסלול הקצר ביותר מבין כל המסלולים מ-s ל-v המתחילים בקשת אדומה ומסתיימים בקשת שחורה.

נתחו את סיבוכיות האלגוריתם והוכיחו את נכונותו.

תשובה

נפתור את הבעיה ע״י רדוקציה לבעיית מסלולים קצרים בגרפים עם משקלות אי-שליליים על הקשתות.
נבנה מהגרף הנתון, גרף חדש G^* ללא צביעה על הקשתות, באופן הבא:
נגדיר גרף $G^*=(V^*, E^*)$ עבור $V^*=\{s\}\cup\{V'\}\cup\{V''\}$
כאשר V', V'' הם שכפולים של V, ונסמן לכל $v\in V$: $v'\in V'$, $v''\in V''$.
את E^* נגדיר באופן הבא:

לכל $(u, v)\in E$ נוסיף ל-E^* את (u', v'). בנוסף, אם (u, v) אדומה ו-$u=s$ אז נוסיף ל-E^* את (u, v') (כלומר, את (s, v')).
אם (u, v) שחורה נוסיף ל-E^* את (u', v'').
משקלות הקשתות החדשות יהיה כמשקל הקשתות המקבילות להן בגרף המקורי. כלומר,
$w(u, v')=w(u', v')=w(u', v'')=w(u, v)$.
סיבוכיות בניית G^* ליניארית, $|V^*|\le 2|V|, |E^*|\le 3|E|$.
נמצא מסלול קצר ביותר בגרף G^* מהצומת s לצומת v (ע״י האלגוריתם של דייקסטרא).

<u>סיבוכיות</u>: $O(|E^*|+|V^*|\log|V^*|)=O(|E|+|V|\log|V|)$

<u>נכונות (לא מלאה!)</u>: ראשית צריך להראות כי לכל מסלול ב-G המתחיל מ-s עם קשת אדומה ומסתיים ב-v בקשת שחורה מתאים מסלול ב-G^* המתחיל ב-s ומסתיים ב-v'' (מסלול כזה יעבור מ-s ל-V', יישאר שם עד הצומת לפני האחרון והקשת האחרונה תהיה מצומת ב-V' אל v''), <u>ולהיפך</u>. כלומר קבוצת המסלולים ב-G^* מ-s ל-V'' מתאימה לקבוצת המסלולים החוקיים המוגדרים בשאלה, והאלגוריתם של דייקסטרא מחזיר את אורך המסלול המינימלי מביניהם.

<u>שאלה 5</u>

מצאו חסם עליון וחסם תחתון הדוקים ביותר (כפונקציה של מספר הצמתים בגרף), עבור מספר הצמתים שדרגתם 1 בגרף קשיר לא מכוון כלשהו $G=(V,E)$ אשר מקיים $|V|>2$.

הוכיחו את נכונותם של החסמים. כלומר, הראו כי לא ייתכן גרף קשיר לא מכוון שבו מספר הצמתים שדרגתם 1 גדול מהחסם העליון, וכי קיים גרף קשיר ולא מכוון שבו מספר הצמתים שדרגתם 1 הוא כערך החסם העליון. ובדומה, הראו כי לא ייתכן גרף קשיר לא מכוון שבו מספר הצמתים שדרגתם 1 קטן מהחסם התחתון, וכי קיים גרף קשיר ולא מכוון שבו מספר הצמתים שדרגתם 1 הוא כערך החסם התחתון.

<u>תשובה</u>

החסם העליון הוא $|V|-1$. ראשית נראה גרף קשיר ולא מכוון בעל n צמתים שבו מספר הצמתים שדרגתם 1 הוא n-1. גרף כזה הוא למשל גרף כוכב, שבו יש צומת אחד שמחובר בקשת לכל אחד מ- n-1 הצמתים האחרים, ואין קשתות נוספות בגרף. נראה כעת כי בגרף קשיר לא מכוון, המכיל לפחות 3 צמתים, יש לפחות צומת אחד שדרגתו גדולה מ-1, ובכך נוכיח כי החסם שמצאנו הוא אכן הדוק. מאחר שהגרף קשיר, אז הפעלת BFS עליו תיתן עץ שבו לפחות 3 צמתים u, v ו-w ובין כל שניים מהם יש מסלול (יחיד) בעץ. נסתכל על המסלול בין u ל-w. אם הוא עובר דרך צומת שלישי, אז דרגתו של אותו צומת בגרף בהכרח גדולה מ-2, כי יש לו לפחות שני שכנים (הקודם לו והעוקב לו במסלול). אחרת, המסלול בין u ל-w הוא בן קשת אחת, ללא צמתי ביניים. נסתכל כעת על המסלול בין u ל-v. אם הוא מתחיל בקשת (u, w), אז בהכרח דרגתו של w גדולה מ-1 כי הוא צומת ביניים במסלול, ויש לו לפחות שני שכנים (הקודם והעוקב לו במסלול). אם המסלול מ-u ל-v אינו מתחיל בקשת (u, w) אלא בקשת אחרת, אז דרגתו של u גדולה מ-1 כי יש לו לפחות שני שכנים: w והעוקב לו במסלול מ-u אל v. בכל מקרה יש בגרף לפחות צומת אחד שדרגתו גדולה מ-1.
הוכחה נוספת: נניח בשלילה שדרגתם של כל הצמתים בגרף היא 1.
לפי למת לחיצת הידיים (תרגיל 5.4-1): $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|=|V|$

מכיוון שהגרף קשיר מתקיים: $|E|\ge|V|-1$

ומכאן: $\frac{|V|}{2}\ge|V|-1\Rightarrow|V|\ge 2|V|-2\Rightarrow|V|\le 2$

סתירה.

החסם התחתון הוא 0. ברור שהחסם אינו קטן מזה. נראה כי יש גרף קשיר לא מכוון ובו 0 צמתים שדרגתם 1: למשל, משולש של 3 צמתים.