

קורס 20407
סמסטר 2012א
מועד ב' (90)

מבנה הבחינה :

בבחינה חמש שאלות.
עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות.
לכל השאלות משקל שווה.

הנחיות :

כל תשובה צריכה להתחיל בעמוד **חדש**.
אין לכתוב בצבע אדום.
אין לכתוב בעיפרון.

אפשר להשתמש בכל עובדה או תוצאה הנמצאת בספר הלימוד או במדריך הלמידה, ללא הוכחה או הסבר. חובה להוכיח או להסביר כל טענה אחרת. אין צורך לכתוב פסידוקוד, אלא אם נדרש במפורש.

שאלה 1

(10 נק') א. פתרו את נוסחת הנסיגה

$$\begin{cases} T(1) = c > 0 \\ T(n) = 8 \cdot T(n/2) + f(n) \end{cases}$$

$$\text{כאשר } f(n) = n^2 \cdot \lg^3 n + n^3 \cdot \lg^2 n.$$

(15 נק') ב. בהינתן מערך ממוין A בן n איברים, ובהינתן שני מספרים a ו- b , $a < b$, כתבו שגרה המחזירה אינדקס i , $1 < i < n$, המקיים $A[i-1] \leq a < b \leq A[i+1]$ (או NIL אם אינדקס כזה לא קיים). זמן הריצה הנדרש של השגרה הוא $O(\lg n)$.

שאלה 2

הציעו מבנה נתונים התומך בפעולות הבאות בזמנים הנדרשים:

- $\text{BUILD}(L, S)$: בניית המבנה S מרשימה לא ממוינת L בת n איברים; זמן ריצה: $\Theta(n)$;
- $\text{INSERT}(z, S)$: הכנסת מפתח z קטן מהחציון לתוך המבנה S ; זמן ריצה: $\Theta(\lg n)$;
- $\text{DELETE-MAX}(S)$: מחיקת האיבר המכסימלי מהמבנה S ; זמן ריצה: $\Theta(\lg n)$;
- $\text{MEDIAN}(S)$: החזרת ערך החציון (התחתון) של המבנה S ; זמן ריצה: $\Theta(1)$;
- $\text{INCR-ALL}(d, S)$: הוספת קבוע $d > 0$ לכל המפתחות במבנה S ; זמן ריצה: $\Theta(1)$;
- $\text{DECR-LOW}(d, S)$: הורדת קבוע $d > 0$ מכל $\lceil n/2 \rceil$ המפתחות הקטנים של המבנה S ; זמן ריצה: $\Theta(1)$.

דרישה נוספת: אין לאחסן את מפתחות המבנה יותר מפעם אחת.
הערה: מבנה הנתונים S יכול להיות מורכב מכמה מבנים יסודיים.

שאלה 3

- נתון מערך של מספרים $A[1..n]$, שאיבריו לא בהכרח שונים זה מזה. ברצוננו למצוא ב- A שני ערכים x ו- z , המקיימים את התנאים הבאים:
- $x < z$;
 - לא קיים במערך A אף ערך y המקיים $x < y < z$;
 - הערכים x ו- z מופיעים, ביחד, יותר מ- $(n/2)$ פעמים במערך (כלומר, אם x מופיע n_x פעמים ב- A ו- z מופיע n_z פעמים ב- A , אזי $n_x + n_z > n/2$).
- (10 נק') א. הוכיחו שאם קיימים במערך A שני ערכים x ו- z כמתואר לעיל, אז אחד מהם הוא החציון (התחתון) של A .
- (15 נק') ב. כתבו אלגוריתם שזמן ריצתו לינארי, למציאת הערכים x ו- z .

שאלה 4

- הציעו מבנה נתונים S התומך בפעולות הבאות בזמנים הנדרשים (n מציין את מספר האיברים במבנה):
- $BUILD(S)$: בניית המבנה S מתוך סדרה נתונה של n מפתחות; זמן הריצה: $O(n \cdot \lg n)$;
 - $SEARCH(S, k)$: חיפוש במבנה S אחר המפתח k ; זמן הריצה: $O(\lg n)$;
 - $INSERT(S, k)$: הכנסת המפתח k למבנה S ; זמן הריצה: $O(\lg n)$;
 - $DELETE(S, p)$: מחיקת האיבר שאליו מצביע p מהמבנה S ; זמן הריצה: $O(\lg n)$;
 - $DECREASE-UPTO(S, k, d)$: הקטנה בערך $d > 0$ של כל המפתחות במבנה S שערכיהם קטנים מ- k או שווים ל- k ; זמן הריצה: $O(\lg n)$.

שאלה 5

- נתון עץ אדום-שחור מורחב T : כל צומת x בעץ מכיל את השדות $color, key, left, right, p$ ובנוסף את השדה $lsize$ המכיל את מספר הצמתים בתת-עץ המורש ב- x שהם בנים שמאליים של אבותיהם (לא כולל את הצומת x עצמו).
- (10 נק') א. כתבו שגרה בפסידוקוד המעדכנת את השדות $lsize$ בעץ T בעת ביצוע סיבוב שמאלי ובעת ביצוע סיבוב ימני.
- (15 נק') ב. כתבו שגרה בפסידוקוד המקבלת מצביע לצומת z והמחזירה את מספר הצמתים בעץ T שהם בנים שמאליים של אבותיהם ומפתחותיהם אינם גדולים מהמפתח של z .

בהצלחה !