תשובה 1

א. מהנתון, תהי $f: A-B \to B-A$ חד-חד-ערכית ועל.

כידוע (בעזרת פילוג החיתוך לגבי האיחוד) $A=(A\cap B')\cup(A\cap B)$,

כלומר $A=(A-B)\cup(A\cap B)$, וזהו איחוד זר. בדומה, $B=(B-A)\cup(A\cap B)$.

נגדיר $g: A\to B$ כך:
$$g(a)=\begin{cases} f(a) & a\in A-B \\ a & a\in A\cap B\end{cases}$$

מהנתון על f נקבל ש- g מעבירה את $A-B$ באופן חד-חד-ערכי על $B-A$,

ומכיוון ש- g פועלת כזהות על $A\cap B$, היא מעבירה את $A\cap B$ באופן חד-חד-ערכי על עצמו.

בהתחשב בכך ש- $B=(B-A)\cup(A\cap B)$, לא קשה להראות ש- g היא חד-חד-ערכית ועל B.

הוכחה של טענה כללית יותר, ממנה זה נובע, ראו בפרק 5, טענה 5.9 .

הראינו פונקציה **חד-חד-ערכית** מ- A **על** B , לכן הן שוות-עוצמה.

ב. כאמור, כללית $A=(A-B)\cup(A\cap B)$, וזהו איחוד זר,

וכן $B=(B-A)\cup(A\cap B)$ וזהו איחוד זר.

מכאן, אם A,B **סופיות**, ומתקיים $|A|=|B|$ אז:

$$|A-B|=|A|-|A\cap B|=|B|-|A\cap B|=|B-A|$$

חיסרנו כאן עוצמות: **זו פעולה שמוגדרת רק עבור עוצמות סופיות(!)**

ג. לדוגמא נקח $A=\mathbf{N}$, ו- B היא קבוצת הטבעיים הזוגיים (השלימו הבדיקה).

תשובה 2

מהגדרת B ,
$$B=A'=\left(\bigcap_{1\le i\le 100} A_i\right)'$$

ולפי כללי דה-מורגן בתורת הקבוצות $=\bigcup_{1\le i\le 100}(A_i')$

לפי הנתון, זהו איחוד של 100 קבוצות בנות מניה.

נוכיח שאיחוד כזה הוא בר-מניה. נתקדם לפי ההדרכה שפורסמה בפורום.

לפי "תורת הקבוצות" עמ' 119 שאלה 4.3ד, אם מתקיים התנאי (*) הבא:

(*) $|A|=|B|=\aleph_0$ **או** $|A|=\aleph_0$ ו- B סופית **או** $|B|=\aleph_0$ ו- A סופית **(*)**

ובנוסף לכך $A\cap B=\varnothing$, אז $|A\cup B|=\aleph_0$.

נקרא לטענה זו "הטענה על קבוצות זרות".

בשאלה שלנו, אילו היה נתון שהקבוצות $A_i{}'$ זרות זו לזו, אז על ידי שימוש חוזר בטענה על

קבוצות זרות היינו מקבלים ש- $\bigcup_{1\le i\le 100}(A_i{}')$ הוא בר-מניה.

מכיון שלא נתון שהקבוצות $A_i{}'$ זרות זו לזו, אנו זקוקים לטענה הבאה:

<u>טענה 1</u>

מתוך ההנחה (*) נובעת המסקנה $|A\cup B|=\aleph_0$ גם ללא ההנחה שהקבוצות זרות.

<u>הוכחת טענה 1</u>

נניח שמתקיים התנאי (*) ואיננו מניחים דבר על $A\cap B$. נוכיח ש- $|A\cup B|=\aleph_0$.

כידוע $A\cup B=A\cup(B-A)$, ובאגף ימין האיחוד הוא של שתי קבוצות זרות. לפיכך:

(*i*) מהנתון, A היא סופית או בת-מניה.

(*ii*) $B-A\subseteq B$, ומהנתון B היא סופית או בת-מניה. קבוצה המוכלת בקבוצה סופית או בת-מניה היא סופית או בת-מניה (טענה זו מופיעה בספר, ראו הפניה בתחילת ההדרכה לשאלה בפורום), לפיכך גם $B-A$ היא סופית או בת-מניה.

(*iii*) לא ייתכן שהקבוצה A והקבוצה $B-A$ שתיהן סופיות, כי אז האיחוד שלהן היה סופי, אבל האיחוד שלהן מכיל את A ואת B, שלפי הנתון לפחות אחת מהן אינסופית.

(*i*)+(*ii*)+(*ii*) יחד אומרים שהקבוצות הזרות A, $B-A$ מקיימות את התנאי (*), כאשר בתפקיד B נמצאת כעת $B-A$.

לפי "הטענה על קבוצות זרות", $|A\cup(B-A)|=\aleph_0$.

כאמור $A\cup B=A\cup(B-A)$, כלומר הוכחנו ש- $|A\cup B|=\aleph_0$.

עד כאן הוכחת טענה 1.

על ידי שימוש חוזר בטענה 1 (כלומר איחוד עם קבוצה בת-מניה אחת נוספת בכל שלב, שוב ושוב) נקבל שאיחוד של 100 קבוצות בנות-מניה הוא בר-מניה, גם ללא הנחה שהן זרות.
ניסוח פורמלי של שיקול זה הוא הוכחה באינדוקציה על מספר הקבוצות באיחוד:

<u>טענה 2</u>

יהי $1\le n\in\mathbf{N}$. איחוד של n קבוצות בנות-מניה הוא בר-מניה.

<u>הוכחת טענה 2</u>

באינדוקציה על n.

בדיקה עבור $n=1$: מה שיש להוכיח הוא בדיוק מה שנתון.

מעבר: נניח שעבור כל n קבוצות בנות-מניה, האיחוד שלהן הוא בר-מניה.

נוכיח שזה מתקיים גם עבור כל $n+1$ קבוצות בנות-מניה:

תהיינה $A_1,\dots,A_{n+1}$ קבוצות, שכל אחת מהן בת-מניה.

מהנחת האינדוקציה, האיחוד של n הראשונות, $A_1\cup\dots\cup A_n$ הוא בר-מניה.

מהנתון, A_{n+1} היא בת-מניה.

מכאן לפי טענה 1, $(A_1 \cup ... \cup A_n) \cup A_{n+1}$ היא בת-מניה.

הוכחנו את הטענה עבור $n+1$, לפי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $1 \le n \in \mathbf{N}$.

מכאן כאמור, בשאלה שלנו, $|B| = \aleph_0$.

תשובה 3

נתבונן במשלים של D: $D' = (A' \cap B' \cap C')' = A \cup B \cup C$

אגף ימין הוא איחוד של 3 קבוצות בנות מניה.

לפי טענה 2 שהוכחנו במהלך פתרון שאלה 2, איחוד כזה הוא קבוצה בת-מניה.

כעת נשים לב שמהגדרת משלים, $D = \mathbf{R} - D'$.

כידוע $|\mathbf{R}| = c \ne \aleph_0$, וכאמור $|D'| = \aleph_0$.

מכאן, לפי משפט 5.13ב בעמ' 12 בחוברת "פרק 5", $|D| = c$.

תשובה 4

א. יחס מעל קבוצה A הוא קבוצה חלקית של $A \times A$.

קבוצת כל היחסים מעל A היא אפוא $P(A \times A)$.

לכן הקבוצה בה מדובר בסעיף זה היא $P(\mathbf{N} \times \mathbf{N})$.

לפי שאלה 4.7א בעמ' 123 בספר, $|\mathbf{N} \times \mathbf{N}| = \aleph_0$.

מכאן, בעזרת משפט 5.23 (עמ' 21 בחוברת "פרק 5") , $|P(\mathbf{N} \times \mathbf{N})| = 2^{\aleph_0}$.

לפי משפט 5.26 שם, $2^{\aleph_0} = C$.

ב. נסמן ב- K את קבוצת היחסים האנטי-סימטריים מעל $\mathbf{N}$.

K חלקית לקבוצת כל היחסים מעל $\mathbf{N}$, שלפי סעיף א' עוצמתה C.

לכן **(*i*)** $|K| \le C$

מצד שני, לכל $A \subseteq \mathbf{N}$ נתבונן בקבוצה I_A. נראה את I_A כיחס מעל $\mathbf{N}$.

קל לראות שזהו יחס אנטי-סימטרי. ההתאמה $A \to I_A$ היא אפוא פונקציה של $P(\mathbf{N})$ ל- K.

פונקציה זו היא חד-חד-ערכית (מדוע?).

לכן , מהגדרת "קטן/שווה" בין עוצמות, $|P(\mathbf{N})| \le |K|$.

לפי משפט 5.25 קיבלנו: **(*ii*)** $C \le |K|$.

מתוך (*i*) + (*ii*) יחד, לפי משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין, $|K| = C$.

תשובה 5

א.   תהיינה A_1, A_2, B קבוצות שעוצמותיהן בהתאמה k_1, k_2, m . נתון $k_1 \le k_2$.

כדי לקצר מעט את ההוכחה ניעזר בטריק השימושי הבא: **אנו חופשים לבחור כראות עינינו את הקבוצות המייצגות את העוצמות, כל עוד הקבוצות שנבחר הן בעלות העוצמות הנדרשות.**

מכיוון ש- $k_1 \le k_2$, לפי שאלה 5.1א בחוברת "פרק 5" **קיימת** קבוצה חלקית של A_2 שעוצמתה שווה לעוצמת A_1 . לכן **ב.ה.כ. נבחר** $A_1 \subseteq A_2$ (!)

מהגדרת חזקה של עוצמות, $k_1{}^m$ היא עוצמת קבוצת הפונקציות של B ל- A_1 ,

ו- $k_2{}^m$ היא עוצמת קבוצת הפונקציות של B ל- A_2 .

מכיוון ש- $A_1 \subseteq A_2$, פונקציה של B ל- A_1 היא גם פונקציה של B ל- A_2 **(!)** (מדוע?)

כלומר קבוצת הפונקציות של B ל- A_1 מוכלת בקבוצת הפונקציות של B ל- A_2 .

לכן, בהסתמך על שאלה 5.1ב, עוצמת הקבוצה הראשונה קטנה / שווה לעוצמת הקבוצה השניה.

משמע $k_1{}^m \le k_2{}^m$.

ב.   מצד אחד, $\aleph_0 \le C$ ולכן בעזרת סעיף א, $\aleph_0{}^{\aleph_0} \le C^{\aleph_0} = C$

(השוויון ל- C הוא לפי טענה 5.28).

מצד שני $2 \le \aleph_0$ ולכן בעזרת סעיף א, $C = 2^{\aleph_0} \le \aleph_0{}^{\aleph_0}$ (השוויון ל- C הוא לפי משפט 5.26).

משני האי-שוויונים יחד, בעזרת קנטור-שרדר-ברנשטיין, מתקבל $\aleph_0{}^{\aleph_0} = C$.

איתי הראבן