פתרונות לממ"ן 17 - 2011ב - 20425

1. א. נסמן ב- X_i את מספר המעדנים שיש לקנות עד לקבלת אות שטרם התקבלה במעדנים שנקנו קודם לכן.

מהגדרת X_i נובע ש- $i = 1,2,\ldots,5$ וה-X_i-ים בלתי-תלויים זה בזה; וכן $X_i \sim Geo(\frac{6-i}{5})$, כאשר $X_1 = 1$.

כעת, מספר המעדנים שיש לקנות עד לקבלת כל אותיות השם "תנובה" הוא סכום המשתנים המקריים הגיאומטריים שהוגדרו לעיל, כלומר, $\sum_{i=1}^{5} X_i$. לכן, התוחלת המבוקשת היא:

$$E\left[\sum_{i=1}^{5} X_i\right] = \sum_{i=1}^{5} E[X_i] = \sum_{i=1}^{5} \frac{5}{6-i} = 1 + \frac{5}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + \frac{5}{1} = 11\tfrac{5}{12}$$

ב1. נגדיר: $Y_i = \begin{cases} 1 , & \text{האות } i \text{ התקבלה לפחות פעם אחת ב-15 המכסים} \\ 0 , & \text{אחרת} \end{cases}$ לכל $i = 1,2,\ldots,5$.

כאשר $X = \sum_{i=1}^{5} Y_i$ = הוא מספר האותיות השונות שהתקבלו ב-15 המכסים.

כעת: $P\{Y_i = 1\} = 1 - P\{Y_i = 0\} = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{15} = 0.9648$

ומכאן: $E[X] = \sum_{i=1}^{5} P\{Y_i = 1\} = 5 \cdot 0.9648 = 4.8241$

ב2. כעת, לכל $i \neq j$ מתקיים:

$$\begin{aligned} P\{Y_i = 1, Y_j = 1\} &= 1 - P\{Y_i = 0 \cup Y_j = 0\} = 1 - P\{Y_i = 0\} - P\{Y_j = 0\} + P\{Y_i = 0, Y_j = 0\} \\ &= 1 - 2\left(\tfrac{4}{5}\right)^{15} + \left(\tfrac{3}{5}\right)^{15} = 0.9301 \end{aligned}$$

לכן: $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = P\{Y_i = 1, Y_j = 1\} - P\{Y_i = 1\}P\{Y_j = 1\} = 0.9301 - 0.9648^2 = -7.685 \cdot 10^{-4}$

ומכאן: $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{5} \mathrm{Var}(Y_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 5 \cdot 0.9648 \cdot 0.0352 - 5 \cdot 4 \cdot 7.685 \cdot 10^{-4} = 0.1544$

2. המשתנה המקרי N מסמן את מספר הציידים, ונתון כי $N \sim Po(5)$.

נסמן ב-X את המשתנה המקרי, המוגדר על-ידי מספר הברווזים בלהקה שנפגעים מאש הציידים.

נגדיר: $X_i = \begin{cases} 1 , & \text{ברווז } i \text{ בלהקה נפגע} \\ 0 , & \text{אחרת} \end{cases}$ לכל $i = 1,\ldots,m$

ונקבל כי מתקיים $X = \sum_{i=1}^{m} X_i$.

א. לפי הסימונים שלעיל, נתון כי $N = n$, וצריך לחשב את ההסתברות ש- $X_i = 0$, לכל $i = 1,2,...,m$.

נשים לב, שכל צייד בוחר כמטרה את הברווז ה-i-י בהסתברות $\frac{1}{m}$, ופוגע בברווז שבחר בהסתברות 0.6.

לכן, כל אחד מהציידים פוגע בברווז ה-i-י בהסתברות $\frac{0.6}{m}$. ומכאן, מקבלים כי:

$P\{X_i = 0 \mid N = n\} = \left(1 - \frac{0.6}{m}\right)^n$ [כל הציידים לא פוגעים בברווז ה-i-י]

ב. $$E[X \mid N=n] = E\left[\sum_{i=1}^{m} X_i \middle| N=n\right] = \sum_{i=1}^{m} E[X_i \mid N=n] = \sum_{i=1}^{m} P\{X_i = 1 \mid N=n\}$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\left(1 - P\{X_i = 0 \mid N=n\}\right) = m\left[1-\left(1-\tfrac{0.6}{m}\right)^n\right]$$

ג. לפי סעיף ב: $$E[X] = E[E[X \mid N]] = E\left[m\left[1-\left(1-\tfrac{0.6}{m}\right)^N\right]\right] = m\left(1-E\left[\left(1-\tfrac{0.6}{m}\right)^N\right]\right)$$

נחשב את התוחלת המופיעה בביטוי האחרון של המשוואה האחרונה. מקבלים:

$$E\left[\left(1-\tfrac{0.6}{m}\right)^N\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\tfrac{0.6}{m}\right)^n e^{-5}\tfrac{5^n}{n!} = e^{-5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(5-\tfrac{3}{m}\right)^n\tfrac{1}{n!} = e^{-5+5-\frac{3}{m}} = e^{-\frac{3}{m}}$$

ולכן: $$E[X] = m\left(1-e^{-\frac{3}{m}}\right)$$

3. מכיוון שלמשתנים המקריים X ו-Y יש התפלגויות נורמליות והם בלתי-תלויים זה בזה, נובע שגם למשתנה המקרי $W=2X-Y$, שהוא סכום של המשתנים המקריים הנורמליים הבלתי-תלויים $(-Y)$ ו- $2X$, יש התפלגות נורמלית עם הפרמטרים:

$$\mu_W = 2\mu_X - \mu_Y = 2\cdot 10 - 20 = 0$$
$$\sigma_W^2 = 2^2\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 4\cdot 1 + 4 = 8$$

א. $M_W(t) = e^{4t^2} \quad , \quad$ t ממשי

ב. $$P\{W \ge -2.5\} = P\{Z \ge \tfrac{-2.5-0}{\sqrt{8}}\} = P\{Z \ge -0.8839\} = \Phi(0.8839) = 0.81165$$

4. $$\rho(X,X+Y) = \frac{\text{Cov}(X,X+Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(X+Y)}} = \frac{\text{Var}(X)+\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)[\text{Var}(X)+\text{Var}(Y)+2\text{Cov}(X,Y)}}$$
$$= \frac{\text{Var}(X)+0}{\sqrt{\text{Var}(X)[\text{Var}(X)+\text{Var}(Y)+0]}} = \sqrt{\frac{[\text{Var}(X)]^2}{[\text{Var}(X)]^2+\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{[\text{Var}(X)]^2+\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}{[\text{Var}(X)]^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\text{Var}(Y)}{\text{Var}(X)}}}$$

5. א. נסמן ב- N את מספר המוזמנים שמגיעים למסיבה. ההתפלגות של המשתנה המקרי N היא בינומית עם הפרמטרים 400 ו-0.52. לכן, מתקיים:

$$E[N] = 400\cdot 0.52 = 208$$
$$\text{Var}(N) = 400\cdot 0.52\cdot 0.48 = 99.84$$

נסמן ב- X_i את סכום הקנייה של מוזמן i שהגיע למסיבה, לכל $i=1,2,\ldots,N$. לפי נתוני הבעיה:

$$E[X_i]=150 \quad ; \quad \text{Var}(X_i)=900 \quad , \quad i=1,2,\ldots,N$$

כמו כן, אין תלות בין ה-X_i-ים ובינם לבין N.

לכן, ההכנסה הכוללת של החנות מרכישותיהם של המוזמנים, שהגיעו למסיבת הפתיחה, נתונה באמצעות הסכום המקרי: $\sum_{i=1}^{N} X_i$

ומכאן, לפי דוגמה 4ד (עמודים 375-376 בספר הקורס) מקבלים כי:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X] = 400 \cdot 0.52 \cdot 150 = 31,200$$

ב. נשתמש בסימוני הסעיף הקודם ובתוצאת דוגמה 4יד (עמוד 386 בספר הקורס) ונקבל כי:

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\text{Var}(X) + (E[X])^2\,\text{Var}(N)$$

$$= 400 \cdot 0.52 \cdot 900 + 150^2 \cdot 400 \cdot 0.52 \cdot 0.48 = 2,433,600$$

6. א.

$$E[X] = 1 \cdot \tfrac{3}{27} + 2 \cdot \tfrac{18}{27} + 3 \cdot \tfrac{6}{27} = \tfrac{19}{9}$$

$$E[Y] = 1 \cdot \tfrac{12}{27} + 2 \cdot \tfrac{6}{27} + 3 \cdot \tfrac{1}{27} = 1$$

$$E[XY] = 1 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{27} + 2 \cdot 1 \cdot \tfrac{6}{27} + 2 \cdot 2 \cdot \tfrac{6}{27} + 3 \cdot 1 \cdot \tfrac{6}{27} = \tfrac{19}{9}$$

לכן: $\text{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \tfrac{19}{9} - \tfrac{19}{9} \cdot 1 = 0$

כלומר, המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-מתואמים.

ב. $P\{Y=0 \mid X=2\} = P\{Y=1 \mid X=2\} = P\{Y=2 \mid X=2\} = \frac{\frac{6}{27}}{\frac{18}{27}} = \frac{1}{3}$

לכן: $E[Y \mid X=2] = 1 \cdot \tfrac{1}{3} + 2 \cdot \tfrac{1}{3} = 1$

ג. $P\{Y=0\} = \tfrac{8}{27}$; $P\{Y=1\} = \tfrac{12}{27}$; $P\{Y=2\} = \tfrac{6}{27}$; $P\{Y=3\} = \tfrac{1}{27}$

לכן: $M_Y(t) = E[e^{tY}] = \tfrac{8}{27} + \tfrac{12}{27}e^t + \tfrac{6}{27}e^{2t} + \tfrac{1}{27}e^{3t}$, לכל t ממשי