ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20476

מתמטיקה בדידה

חוברת הקורס קיץ 2016ג

כתב: איתי הראבן

יולי 2016 - סמסטר קיץ תשע"ו

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מתמטיקה בדידה".
אנא קראו בעיון את כל הסעיפים לפני שתתחילו בלימודיכם. פרטים לגבי נהלים המקובלים באוניברסיטה הפתוחה מפורטים בידיעון האקדמי. תיאורי הקורסים מופיעים בקטלוג הקורסים.
__הערה:__ על חלק מספרי הלימוד וחלק מחומרי העזר של הקורס מופיעים מספרי קורס 20276, 20283. חומרים אלה הועברו לקורס שלנו מקורס שפעל באו"פ בשנים קודמות.

קורס זה מתוקשב במסגרת הפעילות של מחלקת תלם (תקשוב ללימוד מרחוק).
קורס מתוקשב כולל, נוסף על יחידות הלימוד הכתובות, גם פעילות באתר הקורס באינטרנט.
פעילות זו כוללת: אינטראקציה בין הסטודנטים לצוות ההוראה באמצעות קבוצות דיון ודואר אלקטרוני, הפניות למאגרי מידע ולאתרים ברשת האינטרנט, חומרי לימוד והעשרה. הפעילות באתר הקורס אינה חובה אך האתר יכול לסייע מאוד בלימוד הקורס.
כתובת אתרי הקורסים: **http://telem.openu.ac.il**.
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

לתשומת לבכם:
סמסטר הקיץ נמשך 9 שבועות בלבד ולכן יידרש מכם מאמץ ניכר לעמוד בעומס ובלוח הזמנים של הקורס. חשוב להקפיד על לימוד החומר והגשת המטלות בקצב שקבענו, כדי להבטיח סיום מוצלח של הקורס. בגלל משך הסמסטר הקצר, אין אפשרות לפגר בהגשת מטלות.

פרטים נוספים בהמשך החוברת.

מרכז ההוראה בקורס הוא ישראל פרידמן. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 09-7781431, בימי א' בשעות 13:00 – 15:00 (ניתן גם לנסות בימים אחרים).
- דרך אתר הקורס.
- בפקס 09-7780631

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה ,
צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20476 / 2016ג)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי הנחיה*	תאריך אחרון למשלוח: ממ"ח (לאו"פ)	תאריך אחרון למשלוח: ממ"ן (למנחה)
1	22.7.2016-17.7.2016	החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"			
2	29.7.2016-24.7.2016	תורת הקבוצות פרקים 1 - 2.1		ממ"ח 01 יום ג' 26.7.2016	
3	5.8.2016-31.7.2016	תורת הקבוצות פרקים 2.2 - 3		ממ"ח 02 יום ו' 5.8.2016	ממ"ן 11 **יום א'** **31.7.2016**
4	12.8.2016-7.8.2016	תורת הקבוצות פרקים 4 — 5		ממ"ח 03 יום ו' 12.8.2016	
5	19.8.2016-14.8.2016 (א צום ט' באב)	קומבינטוריקה פרקים 1 - 2			ממ"ן 12 יום ב' 15.8.2016
6	26.8.2016-21.8.2016	קומבינטוריקה פרקים 3 - 5		ממ"ח 04 יום ו' 26.8.2016	ממ"ן 13 **יום א'** **21.8.2016**
7	2.9.2016-28.8.2016	קומבינטוריקה פרקים 6- 7			ממ"ן 14 יום א' 28.8.2016
8	9.9.2016-4.9.2016	תורת הגרפים פרקים 1 - 3			ממ"ן 15 יום א' 4.9.2016
9	16.9.2016-11.9.2016	תורת הגרפים פרקים 4- 6		ממ"ח 05 יום ו' 16.9.2016	ממ"ן 16 יום ה' 22.9.2016

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

מטלות הקורס

קראו היטב עמודים אלה לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס. הבנה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. מטלות המנחה (ממ״ים) יבדקו על-ידי המנחה ויוחזרו לכם בצירוף הערות המתייחסות לתשובות. על מטלות המחשב (ממ״חים) תקבלו רק פירוט תשובות נכונות ולא נכונות.

מבנה המטלות

בכל מטלה כמה שאלות. משקל כל השאלות במטלה זהה אלא אם כן צוין אחרת.
את הפתרונות לממ״ן עליכם לרשום על דף בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. לחלופין ניתן להגיש את המטלות מודפסות במעבד תמלילים, בתנאי שכל הסימונים המתמטיים ברורים. אין להשתמש בסימונים שאינם מופיעים ביחידות.

ניקוד המטלות

בקורס שש מטלות מנחה (ממ״נים) וחמש מטלות מחשב (ממ״חים).
משקל כל ממ״ן הוא 3 נקודות, משקל כל ממ״ח הוא נקודה אחת.
בהגשת כל המטלות ניתן אפוא לצבור 23 נקודות.

דרישות חובה בהגשת המטלות:

חובה להגיש מטלות במשקל של 12 נקודות לפחות.
ללא הגשת מטלות במשקל זה לפחות,
אי-אפשר לעבור את הקורס.

תנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

א. להגיש מטלות במשקל של 12 נק׳ לפחות.
ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.
ג. לקבל בציון הסופי 60 נקודות לפחות.

הערות חשובות לתשומת לבך!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ג

חומר הלימוד למטלה: הפרק "מבוא מהיר ללוגיקה"

מספר השאלות: 16 **משקל המטלה**: נקודה אחת

מועד אחרון להגשה: יום ג' 26.7.2016

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

הערה כללית: בחוברת זו, כל ממ"ח שהגשתו היא ביום ו', ניתן להגישו עד מוצ"ש בחצות.

שאלות 1 - 12 מסומנות ב- #. בשאלות אלה מופיעות שתי טענות, סמנו:

א - אם רק טענה (*i*) נכונה, ב - אם רק טענה (*ii*) נכונה,

ג - אם שתי הטענות נכונות, ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

בשאר השאלות, שאינן מסומנות בסולמית, פשוט בחרו את התשובה הנכונה.

שאלה 1 #

(*i*) הביטוי $3400+250-12$ הוא פסוק.

(*ii*) הביטוי $5^3 \ge 3^5$ הוא פסוק.

שאלה 2 #

(*i*) הפסוק משה קיבל 40 בבחינה
הוא **שלילתו** של הפסוק משה הצליח בבחינה

(*ii*) הפסוק הכלב רדף אחר החתול
הוא **שלילתו** של הפסוק החתול רדף אחר הכלב

שאלה 3 #

(*i*) הפסוק $1+4=5$ **וגם** $2+2=10$ הוא אמת.

(*ii*) הפסוק $1+4=5$ **או** $2+2=10$ הוא אמת.

שאלה 4 #

(*i*) הפסוק **אם** $3=2$ **אז** בעולם חיים כיום יותר ממיליארד בני אדם הוא אמת.

(*ii*) הפסוק **אם** $3=2$ **אז** בעולם חיים כיום פחות ממיליארד בני אדם הוא אמת.

שאלה 5 #

(i) לוח האמת של הפסוק הפורמלי $(p \wedge \neg q) \to (r \to q)$ הוא:

p	q	r	$(p \wedge \neg q) \to (r \to q)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**T**
F	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**T**

(ii) הפסוק הפורמלי $(\neg p) \to p$ הוא סתירה.

שאלה 6 #

(i) הפסוק הפורמלי $(\neg p) \to q$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $p \vee \neg q$.

(ii) הפסוק הפורמלי $p \to (\neg q)$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $\neg(p \wedge q)$.

שאלה 7 #

(i) $\neg(r \wedge (p \vee q))$ שקול טאוטולוגית ל- $((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$.

(ii) $(p \vee q) \wedge (\neg q)$ שקול טאוטולוגית ל- $p \wedge (\neg q)$.

שאלה 8 #

(i) **שלילת** הפסוק זה יקרה מחר או מחרתיים
שקולה לפסוק זה לא יקרה מחר **ו**לא יקרה מחרתיים.

(ii) **שלילת** הפסוק ארדוף, אשיג **ו**אחלק שלל
שקולה לפסוק לא ארדוף, לא אשיג, ולא אחלק שלל.

שאלה 9 #

(*i*) מתוך הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge r$ נובע טאוטולוגית הפסוק p .

(*ii*) מתוך הפסוק p נובע טאוטולוגית הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge r$.

שאלה 10 #

נתבונן בפסוק: **כל מספר הגדול מ- 7, גדול מ- 6.**

(*i*) את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x(x > 7 \;\; \wedge \;\; x > 6)$.

(*ii*) את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x(x > 7 \;\; \to \;\; x > 6)$.

שאלה 11 #

נתבונן שוב בפסוק: **כל מספר הגדול מ- 7 הוא גדול מ- 6.**

(*i*) את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $(\forall x(x > 7)) \to (\forall x(x > 6))$.

(*ii*) את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $(\forall x(x > 7)) \wedge 7 > 6$.

שאלה 12 #

(*i*) את **שלילת** הפסוק **קיים חייזר שהוא רעב או צמא**
ניתן לנסח כך: **כל חייזר אינו רעב ואינו צמא**

(*ii*) את **שלילת** הפסוק **כל מי שגר באוסטרליה ביקר לפחות פעם אחת במלבורן**
ניתן לנסח כך: **כל מי שגר באוסטרליה לא ביקר מעולם במלבורן**

שאלות 13 – 16 שבעמוד הבא הן חלק מהממ"ח למרות שאינן עוסקות בלוגיקה.
מטרתן לוודא שמידע בסיסי שעשוי להיות נחוץ לכם במהלך הסמסטר ידוע וזמין לכם.
בחרו בכל שאלה את התשובה הנכונה. את התשובות תוכלו למצוא באתר הקורס.
האתר נמצא בתוך סביבת הלמידה, שכתובתה http://opal.openu.ac.il
בתוך האתר ראו בפרט עמוד "שאלות נפוצות".

שאלה 13
היכן אני מוצא פרטים ליצירת קשר עם המנחה שלי והיכן המנחה כותב הודעות לקבוצה?

א. את פרטי המנחה מחפשים בגוגל והודעות הוא שולח בדואר שליחים.

ב. פרטי המנחה: שואלים זה את זה עד שמוצאים מישהו שיודע.
הודעות המנחה: בבלוג האישי של המנחה, בכתובת blog_shel_manche.com

ג. פרטי המנחה: בדף צוות הקורס, המקושר מאתר הקורס.
הודעות המנחה: בקבוצת הדיון של המנחה, באתר הקורס.

שאלה 14
האם אפשר להגיש מטלת מנחה (ממ"ן) **במערכת המטלות** כקובץ סרוק?

א. רק ביום ששי ה- 13 לחודש ב. ממש לא ג. בשום אופן

ד. במערכת המטלות יש להגיש טקסט מוקלד בלבד, אלא אם המנחה שלך הודיע במפורש שהוא מוכן לקבל סרוק.

שאלה 15
שלחתי מטלה למנחה, לא קיבלתי עדיין ציון, לא ברור לי מה קרה עם המטלה.
למי עלי לפנות בשלב ראשון?

א. למרכֵּז ההוראה של הקורס ב. לאחראי האקדמי של הקורס

ג. לנשיא האו"פ ד. למנחה או הבודק שאליו הוגשה המטלה.

שאלה 16
אני זקוק לדחיה בממ"ן בגלל נסיבות מיוחדות כגון מילואים או מחלה. למי עלי לפנות?

א. למרכֵּז ההוראה של הקורס ב. לאחראי האקדמי של הקורס

ג. למנחה, אלא אם יש בודק שאינו המנחה, ואז פונים אליו.

ד. למנחה, גם אם יש בודק שאינו המנחה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ג

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 1

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום א' 31.7.2016

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל.

מי שדילג על ממ"ח 01 מתבקש לקרוא כעת בעיון את שאלות 13 – 16 שבעמוד הקודם ולוודא שהתשובות להן ידועות לו.

שאלה 1 (16 נק')

שאלה זו נועדת לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות ולחדד כמה נקודות שכדאי להבין בשלב מוקדם:

* ההבדל בין A לבין $\{A\}$ (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא A).

* מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה $\varnothing$ לבין $\{\varnothing\}$.

* ההבדל בין "x איבר של y" לבין "x חלקי ל- y".

בכל אחד מהזוגות $x\ ;\ y$ הבאים, קבע אם $x \in y$ וקבע אם $x \subseteq y$.

ייתכן ששני היחסים יתקיימו בעת ובעונה אחת, וייתכן גם שאף אחד משניהם לא יתקיים.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק.

א. $\varnothing\ ;\ \varnothing$

ב. $\{\{\varnothing\}\}\ ;\ \{\varnothing\}$

ג. $\{\varnothing,\{1\}\}\ ;\ \{\varnothing\}$

ד. $\{\varnothing,\{1\}\}\ ;\ \{1\}$

ה. $\{\varnothing,\{1\}\}\ ;\ \{\{1\}\}$

ו. $\{\varnothing,\{1\}\}\ ;\ \{\varnothing,\{1\}\}$

ז. $P(\{1\})\ ;\ \{\varnothing\}$

ח. $P(P(\varnothing))\ ;\ P(\varnothing)$

שאלה 2 (21 נק')

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. כדי להפריך טענה - הבא דוגמא נגדית.

לטענות הנכונות - תן הוכחה מסודרת המסתמכת בכל צעד על טענות והגדרות בספר .

א. $(A - B) - B = A - B$

ב. $A - (B - A) = A$

ג. $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

שאלה 3 (32 נק׳)

הוכח את הטענות א׳-ד׳. הסימן $\oplus$ מוגדר בשאלה 1.22 בספר הלימוד. רצוי להיעזר בתכונות של ההפרש הסימטרי המוכחות באותה שאלה, ולתת הוכחות אלגבריות ללא שימוש במושג ״איבר״ - זה יכול לחסוך הרבה עבודה. U היא קבוצה אוניברסלית, המכילה את כל הקבוצות שבשאלה.
שים לב: **בטענות ״אם ורק אם״ יש להוכיח שני כיוונים**.

א. כלל הצמצום: אם $X \oplus A = Y \oplus A$ אז $X = Y$.
הדרכה: היעזר באסוציאטיביות של $\oplus$ ובתכונות אחרות שלה.

ב. $A \oplus B = \varnothing$ אם ורק אם $A = B$.

ג. $A \oplus B = U$ אם ורק אם $A = B'$.

ד. $A \oplus B = A$ אם ורק אם $B = \varnothing$.

שאלה 4 (31 נק׳)

סעיפים ב-ג בשאלה זו מתייחסים להגדרה 1.6 בעמ׳ 12 בספר הלימוד,
ולהגדרה הדומה עבור חיתוך, בעמוד 16 בספר הלימוד.

תהי $\mathbf{N}^*$ קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מ- 0. לכל $n \in \mathbf{N}^*$ נגדיר קבוצה:

$$B_n = \{n \cdot k \mid k \in \mathbf{N}^*\}$$

(קבוצת כל המספרים שצורתם $n \cdot k$, כאשר $k \in \mathbf{N}^*$).

(10 נק׳) א. הוכח כי $B_n \cap B_m = B_{c(n,m)}$ כאשר $c(n,m)$ הוא הכפולה המשותפת המינימלית של n, m (המספר הטבעי החיובי הקטן ביותר המתחלק ללא שארית ב- n וב- m).

הדרכה: ניתן להסתמך על הטענה כי כל כפולה משותפת של n, m מתחלקת בכפולה המשותפת המינימלית שלהן. 5 נקודות בונוס למי שיצרף הוכחה קבילה לטענה זו.

(10 נק׳) ב. הסבר מדוע $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} B_n = \varnothing$.

(11 נק׳) ג. לכל $n \geq 2$ נסמן $D_n = B_n - \bigcup_{1<i<n} B_i$ (בפרט: $D_2 = B_2$, $D_3 = B_3 - B_2$).
עבור איזה ערכים של n קיים: $D_n \neq \varnothing$? כלומר מצא את $\{n \in \mathbf{N}^* \mid D_n \neq \varnothing\}$.
אל תשכח להראות שתשובתך כוללת את **כל** הערכים המקיימים זאת (״הכלה דו-כיוונית״).

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ג

חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" סעיפים 2.1 – 2.4

מספר השאלות: 12 **משקל המטלה**: נקודה אחת

מועד אחרון להגשה: יום ו' 5.8.2016

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

הערה כללית: בחוברת זו, כל ממ"ח שהגשתו היא עד יום ו', ניתן להגישו עד מוצ"ש בחצות.

מינוח: המלה העברית ל"רלציה" היא "יחס".

שאלה 1

יהי $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(2,2)\}$. נתבונן בשוויון $R = X \times Y$.

א. אם $X = \{1\}$, $Y = \{1,2,3\}$ אז $R = X \times Y$.

ב. אם $X = \{1,2\}$, $Y = \{1,2,3\}$ אז $R = X \times Y$.

ג. השוויון $R = X \times Y$ מתקיים עבור X,Y מסוימים, שאינם אלה שהוצגו בתשובות א, ב.

ד. לא קיימות קבוצות X,Y כך ש- $R = X \times Y$.

שאלה 2

תהי $A = \{1,2,3,4\}$ ויהי R היחס הבא מ- A ל- A: $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,4),(4,3)\}$.

$Domain(R) \cap Range(R)$ הוא:

א. $\{1\}$ ב. $\{1,2,4\}$ ג. $\varnothing$ ד. $\{1,2\}$ ה. A

שאלה 3

A, R הם **אלה שהוגדרו בשאלה 2**. S הוא יחס מעל A. השוויון $RS = I_A$ מתקיים עבור:

א. $S = I_A$ ב. $S = R^{-1}$ ג. $S = R$

ד. אינו מתקיים עבור שום S ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

שאלה 4

R הוא יחס כלשהו מעל קבוצה כלשהי. השוויון $R^3R^2 = R^5$

א. נכון תמיד ב. נכון **רק** אם $R = I_A$ ג. נכון **רק** אם $R = \varnothing$

ד. נכון **רק** אם $R = A \times A$ ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

שאלה 5

R הוא יחס כלשהו מעל קבוצה A כלשהי. התנאי $RR^{-1} = I_A$ **שקול** (!) לתנאי

א. $R^{-1}R = I_A$ ב. $R = I_A$ ג. $R \neq \varnothing$

ד. $Domain(R) = A$ ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

שאלה 6 # (הסבר על שאלות סולמית ראו בתחילת ממ"ח 01)

תהי $A = \{1,2,3\}$ ויהי R היחס הבא מ- A ל- A: $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,1)\}$.

טענה (*i*): $R \cup R^2$ הוא רפלקסיבי. **טענה (*ii*)**: $R \cup R^2$ הוא סימטרי.

שאלה 7 #

A, R הם אלה שהוגדרו בשאלה 6.

טענה (*i*): $R \cup R^2$ הוא אנטי-סימטרי. **טענה (*ii*)**: $R \cup R^2$ הוא טרנזיטיבי.

שאלה 8

היחס $R = \{(1,1),(2,2)\}$ מעל $A = \{1,2,3\}$ הוא:

א. רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.
ב. סימטרי ורפלקסיבי אך לא טרנזיטיבי.
ג. סימטרי וטרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי.
ד. רפלקסיבי וטרנזיטיבי אך לא סימטרי.
ה. טרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי ולא סימטרי.

שאלה 9 #

R,S הם יחסים מעל קבוצה A ומתקיים $R \subseteq S$.

טענה (*i*): אם S סימטרי אז R סימטרי. **טענה (*ii*)**: אם S אנטי-סימטרי אז R אנטי-סימטרי

שאלה 10

R הוא יחס טרנזיטיבי מעל קבוצה A, וידוע ש- $R \neq \emptyset$.

מכאן ניתן להסיק:

א. ב- R יש לפחות 3 זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש R כזה שבו בדיוק 3 זוגות.

ב. $R \neq A \times A$

ג. R אינו סימטרי

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 11 #

R,S הם יחסים מעל קבוצה A.

הסימן $\oplus$ (הפרש סימטרי) הוגדר בשאלה 1.22 בעמ' 27 בכרך "תורת הקבוצות".

טענה (*i*): אם R,S אנטי-סימטריים אז $R \oplus S$ אנטי-סימטרי.

טענה (*ii*): אם R,S טרנזיטיביים אז $R \oplus S$ טרנזיטיבי.

שאלה 12

R הוא יחס. איזה מהפסוקים הבאים מביע את הטענה ש- R הוא יחס סימטרי?

א. $\forall x \forall y \left((x,y) \in R \land (y,x) \in R \right)$

ב. $\forall x \exists y \left((x,y) \in R \to (y,x) \in R \right)$

ג. $\left(\forall x \forall y \ (x,y) \in R \right) \to \left(\forall x \forall y \ (y,x) \in R \right)$

ד. $\forall x \forall y \ \left((x,y) \in R \to (y,x) \in R \right)$

ה. $\exists x \exists y \left((x,y) \in R \to (y,x) \in R \right)$

תזכורת חשובה

ללא עמידה בדרישת הגשת המטלות לא ניתן לעבור את הקורס.

הדרישות מפורטות בתחילת החוברת.

הבהרות:

א. אין ציון "עובר" במטלה, כל מטלה שהוגשה נרשמת כמטלה שהוגשה.

ב. אין להגיש מטלה ריקה, מטלה כזו לא תתקבל.

ג. מטלה שלא הוגשה אינה מקבלת ציון 0 אלא היא מטלה שלא הוגשה.

בסוף כל סמסטר, סטודנטים בודדים נאלצים להירשם מחדש לקורס כי לא הגישו מטלות במכסה הנדרשת. חסכו לעצמכם את העלות הכספית ואת אבדן הסמסטר, הגישו מטלות לפי הנדרש.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ג

חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" מסעיף 2.5 עד סוף פרק 3

מספר השאלות: 10 **משקל המטלה**: נקודה אחת

מועד אחרון להגשה: יום ו' 12.8.2016

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

"רלציה" בעברית: יחס.

שאלה 1

יהיו: $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $R=\{(1,2),(1,3),(2,3),(5,6)\}$, $E=I_A\cup R\cup R^{-1}$.

החלוקה שיחס השקילות E משרה ב- A היא:

א. $\{\{1,2,3\},\{5,6\}\}$ ב. $\{\{1,2,3\},\{4\},\{5,6\}\}$

ג. $\{\{1,2,3,5,6\}\}$ ד. $\{\{1,2,3,4,5,6\}\}$

ה. $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{5,6\}\}$

ו. E אינו יחס שקילות מעל A ולכן אינו משרה חלוקה של A.

שאלה 2

נגדיר יחס L מעל $\mathbf{N}$: $(n,m)\in L$ אםם $n+m$ מתחלק ללא שארית ב- 3.

מספר מחלקות השקילות ש- L משרה ב- $\mathbf{N}$ הוא:

א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. יש אינסוף מחלקות שקילות.

ה. L אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

שאלה 3

נגדיר יחס M מעל $\mathbf{N}-\{0\}$:

עבור n,m טבעיים חיוביים, $(n,m)\in M$ אםם $n\cdot m$ מתחלק ללא שארית ב- 10.

מספר מחלקות השקילות ש- M משרה ב- $\mathbf{N}-\{0\}$ הוא :

א. 1 ב. 2 ג. 10 ד. יש אינסוף מחלקות שקילות.

ה. M אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

שאלה 4

נגדיר פונקציה f מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$: $f(k)=k^2+k$.

f היא :

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$.

שאלה 5

תהי $g(x)=x^2+2x-1000$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

g היא :

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbf{R}$ ל- $\mathbf{R}$.

שאלה 6

תהי $f(X)=X\cap\mathbf{N}$, $f:P(\mathbf{R})\to P(\mathbf{N})$.

f היא :

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $P(\mathbf{R})$ ל- $P(\mathbf{N})$.

שאלה 7 # (הסבר על שאלות סולמית ראו בתחילת ממ"ח 01)

תהיינה $A,B\subseteq U$ שונות זו מזו, ומתקיים: $\{A,B\}$ היא **חלוקה** של U.

בעמ' 85 בכרך "תורת הקבוצות" מוגדרת φ_A, **הפונקציה האופיינית** של A ב- U.

טענה ***(i)***: מהנתון נובע שלכל $x\in U$, $\varphi_A(x)+\varphi_B(x)=1$.

טענה ***(ii)***: מהנתון נובע שלכל $x\in U$, $\varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x)=0$.

שאלה 8

תהי $A=\{1,2,3,4\}$ ויהיו $X,Y\subseteq A$.

נאמר ש- $(X,Y)\in D$ **אסם (אם ורק אם)** $X\subseteq Y$. היחס D הוא:

א. סדר-חלקי מעל $P(A)$ ואינו סדר-מלא מעל $P(A)$.

ב. סדר-חלקי מעל $P(A)$, שהוא גם סדר-מלא מעל $P(A)$.

ג. סדר-חלקי מעל $P(A)$, שהוא גם יחס שקילות מעל $P(A)$.

ד. אינו יחס מעל $P(A)$.

שאלה 9

מעל קבוצה כלשהי A מוגדר סדר-חלקי R, **שאינו** סדר-מלא. מכאן נובע:

א. $|A|=1$.

ב. $|A|=2$.

ג. $|A|\geq 2$.

ד. מספר הזוגות הסדורים ב- R הוא אינסופי.

ה. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

שאלה 10

R הוא סדר-חלקי על קבוצה כלשהי A.

a,b הם שני אברים שונים של A, ושניהם אברים מינימליים לגבי R. מכאן נובע:

א. $|A|=2$.

ב. R הוא סדר מלא מעל A.

ג. R אינו סדר מלא מעל A.

ד. A היא אינסופית.

ה. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

התדריכים השבועיים

באתר הקורס יש תדריכים לכל פרק בחומר. התדריכים נותנים דגשים, הבהרות, הפניות לחומר עזר נוסף באתר. פה ושם הם מחדדים הגדרה לא מעודכנת שנמצאת בספר (למשל ההגדרה של המושג "פונקציה").

בנוסף לעדכונים, התדריכים משקפים את נקודת המבט של מרכז ההוראה על הקורס.
מכיון שמרכז ההוראה כותב את הבחינה, משתלם להבין את נקודת המבט שלו.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ג

חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" פרקים 2- 3

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ב' 15.8.2016

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1 (30 נקודות)

$\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים, $\mathbf{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$.

$\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

א. תהי $f(x,y)=3x+2y$, $f:\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$.

הוכח ש- f **אינה** חד-חד-ערכית , והוכח ש- f היא **על** .

ב. תהי $g(X)=X\oplus\mathbf{Z}$, $g:P(\mathbf{R})\to P(\mathbf{R})$.

הוכח: לכל $X\in P(\mathbf{R})$, $g(g(X))=X$

הדרכה: ר' תכונות של הפרש סימטרי בעמ' 27 בכרך "תורת הקבוצות".

הוכחה אלגברית קצרה הרבה יותר במקרה זה מאשר הוכחה ע"י "יהי x איבר...".

ג. האם g היא חד-חד-ערכית? האם g היא על ?

שאלה 2 (32 נקודות)

נגדיר יחס E מעל $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$: שני איברים של $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ עומדים ביחס E זה לזה אם ורק אם הפונקציה f מסעיף א של השאלה הקודמת שולחת אותם לאותו איבר של $\mathbf{Z}$.

E הוא **יחס שקילות**: זה נובע מהסעיף "העתק טבעי" בעמ' 84 בספר. ראו הסבר מפורט יותר באתר הקורס, מאגר המשאבים, עזרים ללמידה - "יחס שקילות המושרה על-ידי פונקציה". השאלה מתייחסת ליחס השקילות הזה.

א. האם מספר מחלקות השקילות אליהן E מחלקת את $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ הוא סופי או אינסופי ?

ב. הוכח שמחלקת השקילות שבה נמצא $(0,0)$ היא אינסופית, כלומר מכילה אינסוף איברים.

(המשך השאלה בעמ' הבא)

(המשך שאלה 2)

ג. יהי $(a,b) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ ויהי $(m,n) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

הוכח: אם (m,n) נמצא באותה מחלקת שקילות עם $(0,0)$,

אז $(a+m, b+n)$ נמצא באותה מחלקת שקילות עם (a,b).

ד. הוכח **שכל** מחלקות השקילות אליהן E מחלקת את $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ הן אינסופיות.

שאלה 3 (24 נקודות)

בשאלה 3.25א בעמ' 94 בספר מוכח שיחס ההכלה $\subseteq$ הוא סדר-חלקי מעל כל קבוצה של קבוצות.

א. תהי A קבוצה לא ריקה, ותהי K קבוצת כל **יחסי השקילות** מעל A.
לפי האמור בתחילת השאלה, K סדורה בסדר-חלקי לגבי הכלה (אברי K הם קבוצות, כי יחס מעל קבוצה גם הוא קבוצה: קבוצה של זוגות סדורים). הראה שיש ב- K איבר קטן ביותר ואיבר גדול ביותר ("תורת הקבוצות" עמ' 93). מיהם?
הוכח שהאיברים שאתה מציין אכן שייכים ל- K.

ב. תהי M קבוצת כל היחסים **הסופיים** מעל $\mathbf{N}$, פרט ליחס הריק (יחס סופי: יחס שהוא קבוצה סופית, כלומר שיש בו מספר סופי של זוגות סדורים. בקבוצה M שהוגדרה כאן נמצאים כל היחסים הסופיים מעל $\mathbf{N}$, חוץ מהיחס הריק).
לפי האמור בתחילת השאלה, M סדורה בסדר-חלקי לגבי הכלה.
(*i*) האם יש ב- M איבר קטן ביותר? איבר גדול ביותר? אם כן, מיהם ?
(*ii*) אם לא מצאת איבר קטן ביותר, האם יש איברים מינימליים? אם כן, ציין מיהם והסבר מדוע הם אינם קטנים ביותר. אם אין איברים מינימליים, הסבר מדוע אין.
(*iii*) אם לא מצאת איבר גדול ביותר, האם יש איברים מקסימליים? אם כן, ציין מיהם והסבר מדוע הם אינם גדולים ביותר. אם אין איברים מקסימליים, הסבר מדוע אין.

שאלה 4 (14 נקודות)

פונקציה $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ מוגדרת ברקורסיה כך:

$f(0)=1$, ולכל $k\in\mathbf{N}$: $f(k+1)=(k+1)\cdot f(k)$

(בהמשך הקורס נחזור לפונקציה זו ונקרא לה בשם "עצרת").

(3 נקי) א. חשבי את $f(5)$.

(11 נקי) ב. הוכיחי באינדוקציה: $1\cdot f(1)+2\cdot f(2)+3\cdot f(3)+\ldots+n\cdot f(n)=f(n+1)-1$

מטלת מנחה (ממ״ן) 13

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ג

חומר הלימוד למטלה: ״תורת הקבוצות״ פרקים 4,5

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום א׳ 21.8.2016

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״)

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שימו לב: חלק ממטלה זו מתייחס לפרק 5 בתורת הקבוצות, שנמצא בידיכם בחוברת נפרדת.

שאלה 1 (27 נק׳)

א. הוכח שאם $|A-B|=|B-A|$ אז $|A|=|B|$.

הדרכה: לא נתון שהקבוצות סופיות, לכן יש לעבוד לפי הגדרת שוויון עוצמות.

ההנחה על A,B פירושה שקיימת פונקציה חח״ע ועל מסוימת, ועלינו להראות שמכך נובע שקיימת פונקציה חח״ע ועל אחרת...

ב. הראה שאם A,B **סופיות** ו- $|A|=|B|$ אז $|A-B|=|B-A|$.

ג. הראה ע״י דוגמא שטענת סעיף ב אינה נכונה בהכרח עבור A,B שאינן סופיות.

שאלה 2 (18 נק׳)

נתונות 100 קבוצות $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$, שכולן חלקיות לקבוצת הממשיים $\mathbf{R}$.

נתון שלכל i ($1 \le i \le 100$), **המשלים** של A_i ב- $\mathbf{R}$ הוא קבוצה בת-מניה.

נסמן $A = \bigcap_{1\le i\le 100} A_i$. נסמן ב- B את **המשלים** של A ב- $\mathbf{R}$.

עוצמת B היא:

[1] 0 **[2]** מספר טבעי כלשהו שאינו 0 **[3]** $\aleph_0$

[4] C **[5]** התשובה תלויה בבחירת הקבוצות $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$.

מצאו את התשובה הנכונה **ונמקו**.

שאלה 3 (18 נק')

תהיינה A,B,C קבוצות **בנות מניה**, החלקיות לקבוצת הממשיים $\mathbf{R}$.

נסמן: $D = A' \cap B' \cap C'$ (המשלימים הם יחסית ל- $\mathbf{R}$). עוצמת D היא:

[1] 0 **[2]** מספר טבעי כלשהו שאינו 0 **[3]** $\aleph_0$

[4] C **[5]** התשובה תלויה בבחירת הקבוצות A,B,C .

מצאו את התשובה הנכונה **ונמקו**.

שאלה 4 (12 נקודות)

מצאו **מה לא תקין** בהגדרה הבאה.

בדומה להגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות בפרק 5, נגדיר הפרש סימטרי בין עוצמות:

תהיינה k,m עוצמות, לא בהכרח שונות זו מזו. נגדיר את $k \oplus m$ באופן הבא:

תהיינה A,B קבוצות המקיימות $|A| = k$, $|B| = m$,

נגדיר את ההפרש הסימטרי של העוצמות k,m להיות עוצמת ההפרש הסימטרי של הקבוצות A,B:

$k \oplus m = |A \oplus B|$.

הגדרה כזו אינה אפשרית. עליכם להסביר מה הבעיה בהגדרה, ולהראות ע"י דוגמא שההגדרה **אינה תקינה**. הדרכה: ראו ההגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות.

שימו לב: התשובה אינה יכולה להיות "ההפרש הסימטרי של העוצמות לא יוצא מה שהוא צריך להיות": לא ברור מראש מה הוא צריך להיות, ובכל מקרה מדובר בנסיון להגדיר מושג חדש.

השאלה שאתם מתבקשים לענות עליה אינה אם ההגדרה תואמת לציפיות (אם יש כאלה) אלא האם בכלל הצלחנו להגדיר כאן משהו.

שאלה 5 (25 נק')

(12 נק') א. תהיינה k_1, k_2, m עוצמות. נתון $k_1 \le k_2$. הוכח: $k_1^m \le k_2^m$.

(13 נק') ב. הוכח: $\aleph_0^{\aleph_0} = C$. כדאי להיעזר בסעיף א.

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ג

חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 1,2

מספר השאלות: 11 **משקל המטלה:** נקודה אחת

מועד אחרון להגשה: יום ו' 26.8.2016

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בשאלות 1 – 4 A,B הן קבוצות, $|A|=5$, $|B|=3$.

שאלה 1

מספר הפונקציות של B ל- A הוא:

א. 15 ב. 120 ג. 125 ד. 243 ה. 512

שאלה 2

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של B ל- A הוא:

א. 5 ב. 15 ג. 20 ד. 60 ה. 120

שאלה 3

מספר היחסים הרפלקסיביים מעל A הוא:

א. 5 ב. 25 ג. 32 ד. 5^5 ה. 2^{20}

שאלה 4

מספר יחסי הסדר המלא מעל A הוא:

א. 5 ב. 25 ג. 32 ד. 120 ה. 3,125

שאלות 5- 7 עוסקות בדרכים שונות לסדר את המחרוזת 1223334444 (להלן: "המחרוזת").

שאלה 5

מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת הוא:

א. 10 ב. $1!+2!+3!+4!$ ג. $10!$ ד. $\frac{10!}{2!3!4!}$

ה. $10!-(1!+2!+3!+4!)$

שאלה 6

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת כאשר הספרות 22 חייבות להיות צמודות זו לזו?

א. 25 ב. 252 ג. 2520 ד. 12,520 ה. 125,200

שאלה 7

בנוסף לדרישה שבשאלה 6, נדרוש גם **שלא** יופיע הרצף 333.

מספר הסידורים האפשריים כעת קטן ממספר הסידורים שמצאתם בשאלה 6. **בכמה הוא קטן?**

א. 10 ב. 210 ג. 2100 ד. 12,100 ה. 122,100

בכל אחת מהשאלות 8 – 10 נתונה קבוצה של כדורים בצבעים אדום, סגול ולבן, ועליכם למצוא **בכמה דרכים ניתן לבחור מהקבוצה הנתונה 10 כדורים**, ללא חשיבות לסדר הבחירה.

כדורים בעלי אותו צבע נחשבים זהים.

שאלה 8

יש מספר בלתי מוגבל של כדורים מכל צבע.

א. 3^{10} ב. $\frac{10!}{3!}$ ג. 10^3 ד. $D(10,3)$ ה. $D(3,10)$

שאלה 9

נסמן את התשובה לשאלה הקודמת ב- x.

כעת לרשותנו רק 8 כדורים אדומים, 8 כדורים סגולים ו- 7 כדורים לבנים.

התשובה כעת היא:

א. $x-7$ ב. $x-10$ ג. $x-12$ ד. ללא שינוי, x.

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 10

לרשותנו שוב 8 כדורים אדומים, 8 כדורים סגולים ו- 7 כדורים לבנים.

הפעם כל צבע חייב להיבחר לפחות פעם אחת.

א. 15 ב. 25 ג. 35 ד. 45 ה. 55

שאלה 11

מהו מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=13$?

א. 65 ב. 1,287 ג. 2,380 ד. 6,188 ה. 154,440

תזכורת: בקורס זה, 0 הוא מספר טבעי.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ג

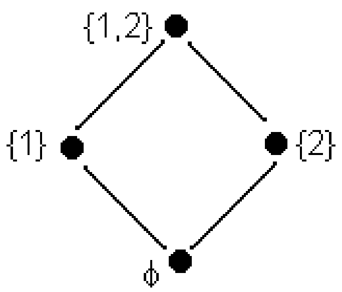
חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 3,4,5

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום א' 28.8.2016

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1 (26 נק')



באיור מופיעה דיאגרמת הסה ("תורת הקבוצות" עמ' 88) של יחס ההכלה $\subseteq$ מעל $P(\{1,2\})$.
אנו רואים כי בדיאגרמה 4 קטעים.

תהי A קבוצה בת n איברים $(n > 0)$. מצא את מספר הקטעים בדיאגרמת הסה של יחס ההכלה מעל $P(A)$.

את הביטוי המתקבל סכם לביטוי פשוט, שאינו מכיל סכומים, בעזרת נוסחה המופיעה באחת השאלות בספר הלימוד.

שאלה 2 (24 נק')

חשבי את פונקצית אוילר $\Theta(600)$ בשתי דרכים:

א. בעזרת הנוסחה שבתחתית עמוד 93 בספר הלימוד.

ב. באופן ישיר בעזרת הכלה והפרדה.

שאלה 3 (26 נק׳)

קראו באתר הקורס את החישוב של מספר הפונקציות של קבוצה סופית A **על** קבוצה סופית B,
כאשר $|A| = n$, $|B| = k$.

החישוב הוא בעזרת הכלה והפרדה, והתוצאה היא $\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$.

א. הראו את השוויון הבא **בלי** לחשב בפירוש את הסכום שבאגף שמאל:

$$5^2 - 5 \cdot 4^2 + \binom{5}{2} \cdot 3^2 - \binom{5}{3} \cdot 2^2 + 5 \cdot 1 = 0$$

ב. נסחו הכללה של משוואה זו: מיהם כל הסכומים מסוג זה השווים אפס?
תנו תשובה כללית ככל שניתן, שאף קבוע מספרי אינו מופיע בה.

שאלה 4 (24 נק׳)

A היא קבוצה בת 9 איברים, החלקית לקבוצה $\{4, 5, 6, \ldots, 60, 61\}$.

א. הראה כי קיימות (לפחות) שתי תת-קבוצות שונות של A, שסכום איבריהן שווה.
(הדרכה: עקרון שובך היונים).
שים לב שהשאלה מתייחסת לתת-קבוצות של הקבוצה הלא-ידועה A,
לא לתת-קבוצות כלשהן של $\{4, 5, 6, \ldots, 60, 61\}$!

ב. הראה כי קיימות (לפחות) שתי קבוצות **זרות** כאלו.
הדרכה: נובע בקלות מסעיף א׳ ללא שיקולים קומבינטוריים!

מטלת מנחה (ממ״ן) 15

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ג

חומר הלימוד למטלה: ״קומבינטוריקה״ פרקים 6 – 7.3

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום א׳ 4.9.2016

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״)

- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1 (26 נק׳)

יהי a_n מספר הסדרות באורך n, שאבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,\ldots,8\}$, והמקיימות את התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים **זוגיים** זה בסמוך לזה. למשל אם $n=5$ הסדרה $(1,1,2,6,3)$ אינה מותרת, מכיון ש- 2 מופיע ליד 6.

גם הסדרה $(1,1,2,2,3)$ אסורה, כי יש שתי הופעות צמודות של 2.

א. מצא יחס נסיגה (יחס רקורסיה) עבור a_n. רשום את $a_0,\ a_1,\ a_2$.

בדוק שהערך שרשמת עבור a_0 מתאים ליחס הנסיגה שרשמת.

ב. רשום את המשוואה האופיינית (״קומבינטוריקה״ עמ׳ 117), פתור את יחס הנסיגה, וקבל ביטוי מפורש עבור a_n. ביטויים כגון $\sqrt{48}$ יש להעביר לצורה כגון $4\sqrt{3}$, <u>ואין</u> להציב במקומם קירובים עשרוניים כגון 6.93.

המשך המטלה עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בעמוד הבא רשימה של נוסחאות שימושיות.

שאלה 2 (24 נק׳)

תהי $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i x^i$, ותהי $g(x)=\dfrac{f(x)}{1-x}=\sum_{i=0}^{\infty}b_i x^i$.

א. הביעי את b_n (לכל n טבעי) בעזרת ה-a_i-ים.

ב. הביעי את a_n (לכל n טבעי) בעזרת ה-b_i-ים.

שאלה 3 (25 נק'. ראו תרגיל דומה בסוף הקובץ "מבוא לפונקציות יוצרות" באתר הקורס)

פתחו לטורים את שני אגפי הזהות

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^n \cdot (1+x)^{2n} = (1+x)^n$$

וקבלו ע"י השוואת המקדמים בשני האגפים זהות מהצורה:

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i D(?,?)\binom{2n}{?} = \binom{?}{?}$$

בדקו זהות זו עבור המקרה $n = 6$, $k = 4$.

שאלה 4 (25 נק')

במחסן של חנות מחשבים נמצאים n מחשבים ישנים **זהים**. בעלי החנות מעמיסים את המחשבים הישנים על 3 רכבים **שונים** (הרכב של איציק, הרכב של בני והרכב של גילה), שבכל אחד מהם יש מקום ל- 24 מחשבים לכל היותר.

(9 נק') א. רשום פונקציה יוצרת עבור מספר הדרכים לחלק את n המחשבים הזהים בין 3 הרכבים השונים (לא חייבים לנצל את כל הרכבים).

(16 נק') ב. אם מספר המחשבים הוא 70, חשב בעזרת סעיף א' או בדרך אחרת את מספר הדרכים לחלק את המחשבים בין הרכבים. תן תשובה סופית מספרית.

להלן נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות:

(*i*)! סכום טור הנדסי סופי: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ואינסופי: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

(*ii*)! כפל פונקציות יוצרות:

אם $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, ו- $f(x)\cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

אז $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד).

(*iii*)! $\sum_{k=0}^{\infty} D(n,k)x^k = (1+x+x^2+\ldots)^n = \frac{1}{(1-x)^n}$.

במלים אחרות: המקדם של x^k בפיתוח הביטוי $\frac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$.

(ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר).

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ג

חומר הלימוד למטלה: "תורת הגרפים" פרקים 1- 3

מספר השאלות: 10 **משקל המטלה**: נקודה אחת

מועד אחרון להגשה: יום ו' 16.9.2016

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

שאלה 1

נתאר לעצמנו גרף על 6 צמתים, שדרגותיהם: 1,1,2,2,2,3.

א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.

ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.

ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.

ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.

ה. לא קיים גרף כזה.

שאלה 2

נתאר לעצמנו גרף על 8 צמתים, שדרגותיהם: 0,1,2,2,3,4,7,7 .

א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.

ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.

ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.

ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.

ה. לא קיים גרף כזה.

שאלה 3

בהנתן $n > 0$ טבעי, יהי Q_n הגרף הפשוט הבא:

הצמתים של Q_n הם הסדרות באורך n שאבריהן 0, 1 (מספר הצמתים הוא אפוא 2^n).

שני צמתים מחוברים בקשת אם ורק אם הם נבדלים זה מזה בקואורדינטה אחת בדיוק.

למשל, ב- Q_6 יש קשת בין הצומת $(0,0,1,0,1,1)$ לצומת $(0,1,1,0,1,1)$, כי שתי הסדרות הללו נבדלות זו מזו רק בקואורדינטה השניה. מספר **הקשתות** של Q_6 הוא:

א. 63 ב. 128 ג. 192 ד. 720

שאלה 4

K_n הוא הגרף המלא על n צמתים ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4).

נתבונן באיחוד זר של K_3 עם K_5 : גרף בעל 8 צמתים, שיש לו שני רכיבי קשירות:

רכיב קשירות אחד הוא עותק של K_3 ורכיב הקשירות השני הוא עותק של K_5 .

נוסיף לקשתות הקיימות בגרף עוד קשתות: נחבר בקשת כל צומת של K_3 עם כל צומת של K_5 .

הגרף שנקבל הוא:

א. K_8 , והוא דו-צדדי, הצדדים שלו הם הגרפים K_5, K_3 מהם התחלנו.

ב. K_8 , והוא דו-צדדי, אבל הצדדים שלו **אינם** הגרפים K_5, K_3 מהם התחלנו.

ג. K_8 , והוא אינו דו-צדדי.

ד. גרף דו-צדדי שאינו K_8 .

ה. גרף שאינו דו-צדדי ואינו K_8 .

שאלה 5

G הוא **יער** על 53 צמתים, ובו בדיוק 50 קשתות.

א. G הוא עץ.

ב. ל- G יש בדיוק שני רכיבי קשירות.

ג. ל- G יש בדיוק שלשה רכיבי קשירות.

ד. נחוץ מידע נוסף כדי לקבוע כמה רכיבי קשירות יש ל- G.

ה. לא ייתכן יער כזה.

שאלה 6 # (הסבר על שאלות סולמית ראו בתחילת ממ"ח 01)

בגרף פשוט וקשיר G, **דרגות הצמתים** (לא סדרת Prüfer !) הן: 1,1,1,2,2,3 .

גם לגרף הפשוט והקשיר H יש בדיוק אותה סדרת דרגות. הגרפים אינם מתוייגים.

טענה ***(i)***: G,H הם בהכרח עצים. טענה ***(ii)***: G,H בהכרח איזומורפיים זה לזה.

שאלה 7

בפרק 2 של החוברת "תורת הגרפים", בתשובה לשאלה 8, מופיע עץ מתויג

נוסיף לעץ הזה עלה שמספרו 9 ונחבר אותו לצומת שמספרה 6.

סדרת Prüfer של העץ החדש היא:

א. $(4,4,3,4,4,2,6)$ ב. $(4,4,3,4,4,2,9)$

ג. $(6,4,4,3,4,4,2)$ ד. $(6,4,4,4,3,2,4)$

ה. $(4,4,4,4,3,2,6)$ ו. $(4,4,4,2,4,3,6)$

שאלה 8 #

הגרף הדו-צדדי המלא $K_{p,q}$ הוגדר ב"תורת הגרפים" הגדרה 1.5 .

טענה **(*i*)**: $K_{6,2}$ הוא אוילרי טענה **(*ii*)**: $K_{6,2}$ הוא המילטוני

שאלה 9

G הוא גרף אוילרי (כלומר יש בו מעגל אוילר), ויש ב- G גם מסלול אוילר שאינו מעגל.

א. זה לא מעניין, בכל גרף אוילרי יש גם מסלול אוילר שאינו מעגל.

ב. טענה א' אינה נכונה, אבל יש גרף פשוט המקיים את הדרישות הללו.

ג. יש גרף כזה, אבל לא גרף פשוט.

ד. לא ייתכן גרף כזה.

שאלה 10

G הוא גרף המילטוני (כלומר יש בו מעגל המילטון), ויש ב- G גם מסלול המילטון שאינו מעגל.

א. זה לא מעניין, בכל גרף המילטוני יש גם מסלול המילטון שאינו מעגל.

ב. טענה א' אינה נכונה, אבל יש גרף פשוט המקיים את הדרישות הללו.

ג. יש גרף כזה, אבל לא גרף פשוט.

ד. לא ייתכן גרף כזה.

לקראת סוף הסמסטר ייפתח באתר הקורס פורום "לקראת הבחינה",
אפשר להעלות בו שאלות שעולות במהלך חזרה על החומר לקראת הבחינה.

עוד ראו באתר הקורס הנחיות כיצד להתכונן לבחינה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2016ג

חומר הלימוד למטלה: "תורת הגרפים" , כל החוברת

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ה' 22.9.2016

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1 (15 נקודות)

בממ"ן 14 שאלה 1 הסתכלנו בדיאגרמת הסה של יחס ההכלה מעל קבוצה A בת k איברים.

כדי לפשט את הסימון נניח $A=\{1,2,\ldots,k\}$.

נסתכל שוב באותה דיאגרמת הסה, והפעם נראה אותה כגרף. צמתי הגרף הם איברי $P(A)$.

א. הראו שהגרף הוא רגולרי (כלומר לכל הצמתים אותה דרגה). מהי הדרגה?

ב. בממ"ן 14 חישבנו את מספר הקשתות בגרף. חשבו אותו מחדש, הפעם על ידי שיקול פשוט של תורת הגרפים.

ג. הוכיחו שהגרף הוא דו-צדדי: הראו חלוקה של הצמתים לשני צדדים.

שאלה 2 (15 נקודות)

יהיו $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ שני עצים על אותה קבוצת צמתים V.

לכל $v\in V$ תהי $d_1(v)$ הדרגה של v ב- G_1 ותהי $d_2(v)$ הדרגה של v ב- G_2 .

הוכיחו כי קיים $v\in V$ עבורו $d_1(v)+d_2(v)\le 3$.

הדרכה: חשבו את סכום כל הדרגות בשני העצים.

שאלה 3 (25 נקודות)

לכנס הגיעו 100 אנשים מ- 20 מדינות שונות, מכל מדינה הגיעו בדיוק חמישה אנשים.
בארוחת הצהרים חילקו את 100 האנשים **בצורה שרירותית** לשולחנות של חמישה, לאו דווקא לפי השיוך למדינה.
דינה ודני הם סטודנטים (אינם בין המשתתפים בכנס), לפרנסתם הם עובדים בקייטרינג של ארועים וזה קצת משעמם אותם.
דינה אומרת: לא הסתכלתי בדיוק מי יושב היכן, אבל אני בטוחה שאם אנסה - אצליח לבחור מכל שולחן אדם אחד, כך ש- 20 האנשים שאבחר ייצגו את 20 המדינות. כלומר אפשר לבחור עשרים אנשים, אחד מכל שולחן, כך שלא ייבחרו שניים מאותה מדינה.
דני אומר: גם אני לא הסתכלתי בדיוק מי יושב היכן, אולי יש לך מזל והם יושבים בצורה שמאפשרת לעשות את מה שתיארת אבל אני משוכנע שזה לא חייב להיות, יש דרך להושיב את 100 האנשים, חמישה בכל שולחן, כך שיהיה בלתי אפשרי לבצע מה שתיארת.

מי משניהם צודק? הוכיחו את תשובתכם.

הדרכה: חשבו על גרף דו-צדדי שצד אחד שלו הוא קבוצת המדינות וצד שני הוא קבוצת השולחנות. הגדירו בצורה נבונה מתי יש קשת בין מדינה לשולחן.
כעת בדקו אם תנאי משפט Hall מתקיימים או שאינם מתקיימים.

שאלה 4 (20 נקודות)

G הוא גרף מישורי על 11 צמתים. הוכיחו שהגרף המשלים שלו, $\overline{G}$, אינו מישורי.

רשות (בונוס 5 נקודות. אין ציון מעל 100 אבל הבונוס יכול לקזז נקודות שירדו):
הוכיחו טענה זו כאשר במקום 11, מספר הצמתים בגרף הוא מספר כלשהו הגדול מ- 10.

שאלה 5 (25 נקודות)

צבענו (צביעה נאותה) ב- k צבעים גרף G, המקיים $\chi(G) = k$.

(12 נק׳) א. הראו שלכל צבע מתוך k הצבעים, יש ב- G צומת, ששכניו משתמשים **בכל** $k-1$ הצבעים הנותרים. הדרכה: הוכיחו בדרך השלילה.
נסחו היטב ובבירור את טענת השלילה.

(8 נק׳) ב. איזו טענה מספר הלימוד מוכיח סעיף א ?

(5 נק׳) ג. הראו כי ב- G יש לפחות k צמתים שדרגת כל אחד מהם היא לפחות $k-1$.