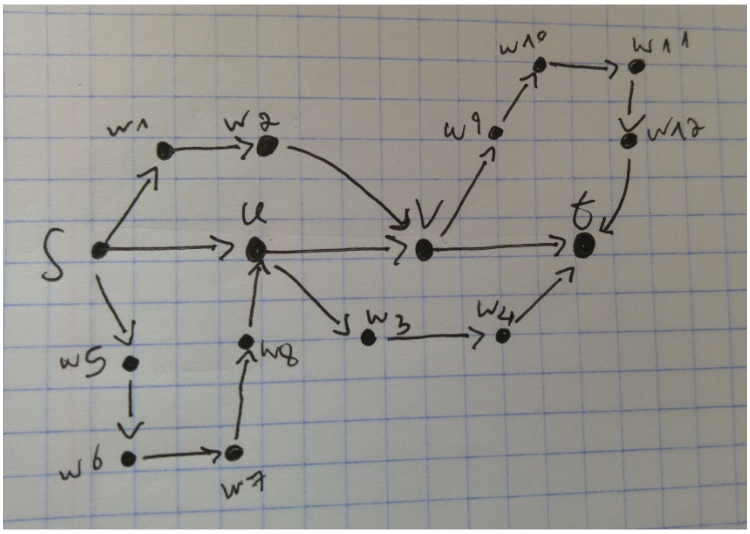
ממן 15

שאלה 1

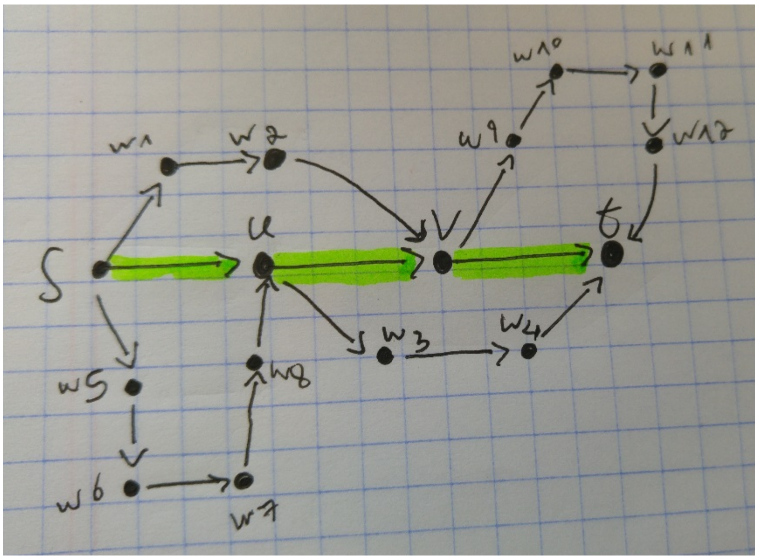
הגרף G הוא הגרף הבא:



נסמן את הקשת e בתור הקשת e=(u,v).

בנוסף, נגדיר שהקיבולת של כל קשת היא 1, כלומר לכל α∈E מתקיים c(α) = 1.

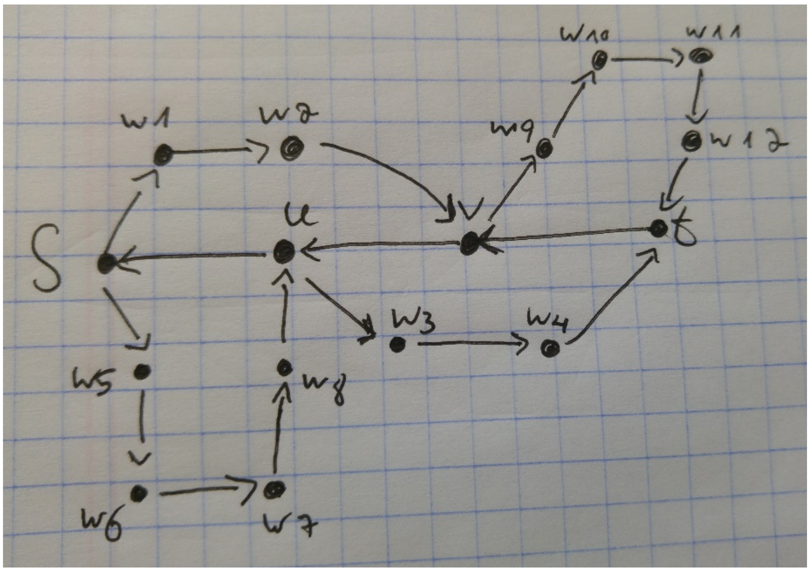
באיטרציה הראשונה של Edmonds-Karp המסלול הקצר ביותר מ-s ל-t הוא המסלול המסומן s-u-v-t:



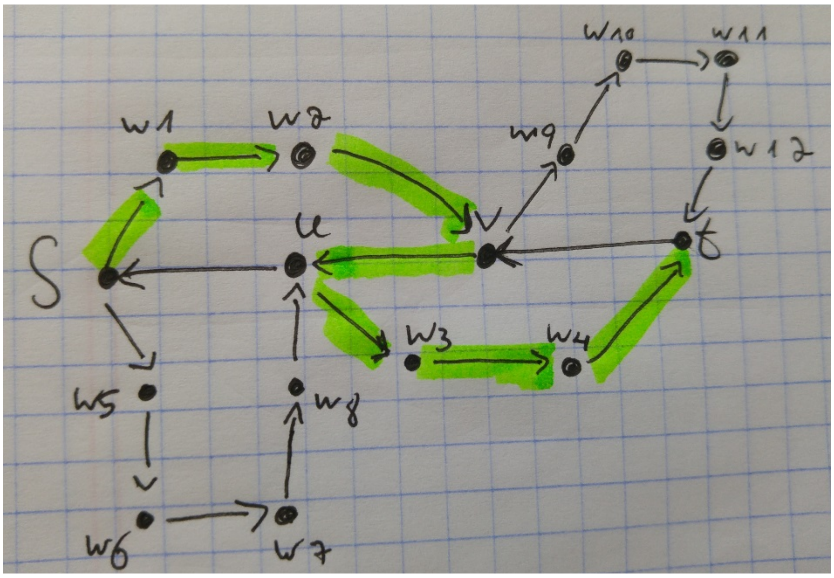
צוואר הבקבוק הוא 1, כיוון שהקיבולת של כל הקשתות הוא 1 – ולפיכך נזרים 1 דרך s. באיטרציה זו תוספת הזרימה דרך e זהה לקיבולת השיורית שלה (1).

f(e)=1 ולכן בגרף השיורי נמחק את הקשת הקדמית e ונהפוך אותה לקשת אחורית (v,u) בעלת קיבולת שיורית 1 (כנ"ל עבור (s,u) ו-(v,t)).

הגרף השיורי של G:

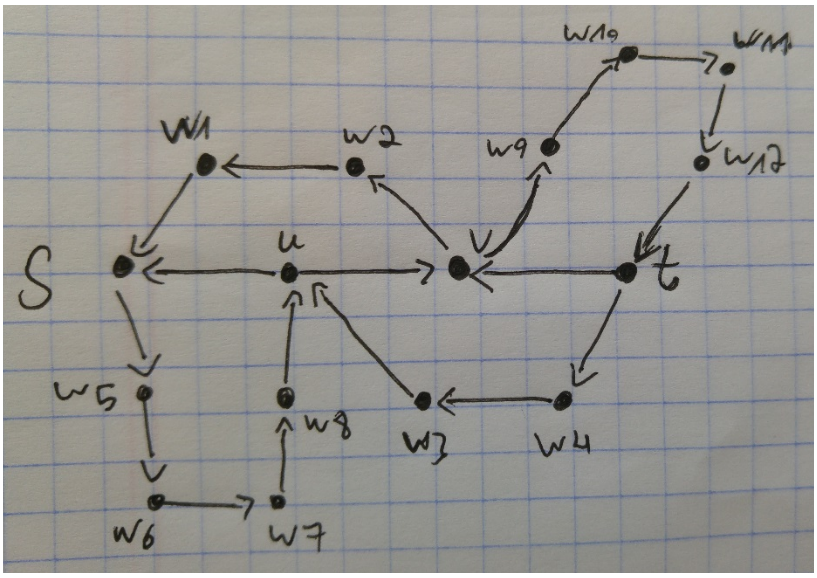


באיטרציה השנייה המסלול הקצר ביותר מ-s ל-t הוא המסלול המסומן s-w1-w2-v-u-w3-w4-t (כי הוא באורך 7 וכל השאר באורך 8):

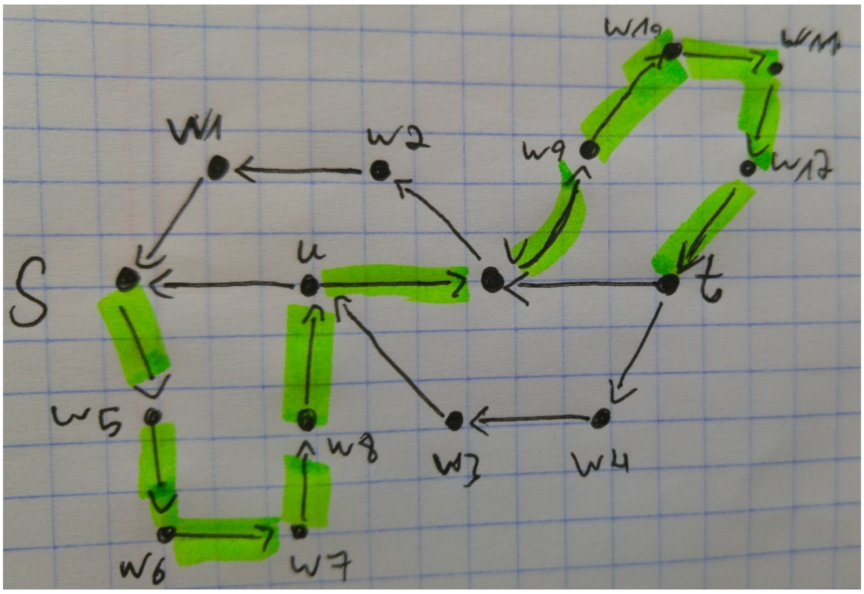


כמו מקודם צוואר הבקבוק הוא 1, כיוון שהקיבולת של כל הקשתות הוא 1 – ולפיכך נזרים 1 דרך s. באיטרציה זו אנו עוברים דרך הקשת האחורית (v,u) ומחסרים 1 מ-f(e), כלומר f(e) שווה לאפס – ולכן אנו מחזירים את (u,v) חזרה לגרף השיורי הבא ומוחקים את הקשת האחורית (v,u) (ובנוסף מטפלים בשאר הקשתות שהיו במסלול בהתאם).

הגרף השיורי של G:



באיטרציה השלישית המסלול הקצר ביותר מ-s ל-t הוא המסלול היחיד שנותר, המסלול המסומן s-w5-w6-w7-w8-u-v-w9-w10-w11-w12-t:



נזרים 1 דרך s (כי הקיבולת 1 לכל הקשתות). באיטרציה זו תוספת הזרימה דרך e שווה לקיבולת השיורית שלה (1) בפעם השנייה – כפי שנדרשנו.

לאחר האיטרציה הזו האלגוריתם מסיים את ריצתו כי לא קיימים מסלולים בגרף השיורי מ-s אל t.

שאלה 2

א. תהי f זרימה חוקית ברשת. אם קיימת זרימה חוקית ברשת בפרט קיים מסלול P מ-s ל-t.
יהי P המסלול הנ"ל, נסמן אותו באופן הבא:

$P = s\text{->}v_1\text{->}v_2\text{->}\ldots\text{->}v_{n-1}\text{->}v_n\text{->}t$

לכל קשת במסלול $e \in P$ נגדיר f^* זרימה חדשה ברשת באופן הבא:

$f^*(e) = f(e) + c$

כאשר $c > 0$ מספר שלם.

לכל קשת אחרת $e \in E$ שלא במסלול P נגדיר $f^*(e) = f(e)$.

כדי להראות ש-f^* זרימה חוקית נראה שהיא מקיימת את תנאי הקיבול ותנאי השימור.

(1) תנאי הקיבול:

לפי הגדרת f^* מתקיים:

$f(e) \geq f^*(e)$

וכיוון ש-f זרימה חוקית אז:

$c(e) \geq f(e)$

ולכן תנאי הקיבול מתקיים כנדרש:

$c(e) \geq f(e) \geq f^*(e)$

(2) תנאי השימור:

לכל צומת פנימי במסלול P אנו מגדילים את $f^{*in}(e)$ וגם את $f^{*out}(e)$ ב-c, לפיכך אם ב-f נשמר השוויון $f^{in}(e) = f^{out}(e)$ לכל קשת, אז השוויון מתקיים גם עבור f^*:

$f^{*in}(e) = f^{in}(e) + c = f^{out}(e) + c = f^{*out}(e)$

לכל צומת שלא חלק מ-P ברור כי התנאי נשמר כי אין שינוי בין f ל-f^*.

קיבלנו שגם תנאי השימור מתקיים.

לפיכך שני התנאים מתקיימים ולכן f^* זרימה חוקית. ניתן לבחור את הקבוע c להיות מספר שלם גדול כפי שנרצה ובכך לקבל זרימה חוקית גדולה כרצוננו.

ב. תיאור האלגוריתם:

ראשית נספק את תנאי הקיבול. נגדיר זרימה f שבה לכל קשת $e \in E$ מתקיים $f(e) = c(e)$.
באופן הזה אנו מקבלים שכל קשת מקיימת $f(e) \geq c(e)$ כנדרש.
כעת כשקיבלנו זרימה שמקיימת את תנאי הקיבול יש לדאוג לכך שהיא תקיים גם את תנאי השימור.
האלגוריתם יעבור על כל הצמתים $v \in V$ המקיימים $f(v) < 0$, כלומר $f^{out}(v) < f^{in}(v)$ - נכנס אליהם יותר זרם מאשר יוצא, ויזרים דרכם עוד זרם לכיוון t.
כדי להזרים עוד זרם לכיוון t אנו נדרשים להחזיק לכל צומת את הקשת שמובילה ממנו אל t.
לשם כך נריץ BFS מ-t (ב-G^{rev}) ונעבור על הצמתים (למעט s) מהצומת הרחוק ביותר מ-t ועד לצומת הקרוב ביותר ל-t.
לאחר מכן נעבור על כל הצמתים המקיימים $f(v) > 0$, כלומר $f^{out}(v) > f^{in}(v)$ - נכנס אליהם פחות זרם מאשר יוצא, ונזרים אליהם עוד זרם מהצומת שמוביל אליהם במסלול s…v.
לשם כך נריץ BFS מ-s ונעבור על הצמתים (למעט t) מהצומת הרחוק ביותר מ-s ועד לצומת הקרוב ביותר ל-s.
בסיום 2 ריצות ה-BFS נקבל שכל הצמתים מקיימים $f(v) = 0$, כלומר $f^{in}(v)=f^{out}(v)$ – תנאי השימור מתקיים כנדרש.
בנוסף, במהלך המעבר על הצמתים אנו רק מגדילים את הזרימה בכל קשת ולכן אם בהתחלה קיימנו את תנאי הקיבול גם בסיום האלגוריתם נקיים אותו.

<u>האלגוריתם:</u>

1. לכל קשת $e=(u,v)\in E$ בצע
   1.1. $f(e) \leftarrow c(e)$
   1.2. $f(u) \leftarrow f(u) + c(e)$
   1.3. $f(v) \leftarrow f(v) - c(e)$
2. נריץ BFS על G^{rev} מ-t ונתחזק לכל צומת $v\in V$ את הקשת ממנה הגענו ל-v ב-$e(v)$ ואת המרחק מ-t ב-$d(v)$.
3. עבור על כל הצמתים (למעט t) כך שמתקיים עבורם $f(v) < 0$, <u>בסדר יורד</u> עבור ערך $d(v)$ ובצע
   3.1. $(v,u) \leftarrow e(v)^{rev}$ (הקשת ההפוכה ממנה הגענו מ-u ל-v ב-G^{rev})
   3.2. $f((v,u)) \leftarrow f((v,u)) + |f(v)|$
   3.3. $f(u) \leftarrow f(u) - |f(v)|$
   3.4. $f(v) \leftarrow 0$
4. נריץ BFS על G מ-s ונתחזק לכל צומת $v\in V$ את הקשת ממנה הגענו ל-v ב-$e(v)$ ואת המרחק מ-s ב-$d(v)$.
5. עבור על כל הצמתים (למעט s) כך שמתקיים עבורם $f(v) > 0$, <u>בסדר יורד</u> עבור ערך $d(v)$ ובצע
   5.1. $(u,v) \leftarrow e(v)$ (הקשת ממנה הגענו מ-u ל-v ב-G)
   5.2. $f((u,v)) \leftarrow f((u,v)) + f(v)$
   5.3. $f(u) \leftarrow f(u) + f(v)$
   5.4. $f(v) \leftarrow 0$
6. החזר את f

<u>הוכחת נכונות:</u>

כפי שהסברנו בתחילת התיאור – תנאי הקיבול מתקיים בתחילת האלגוריתם בכך שאנו מאתחלים את $f(e)$ להיות $c(e)$ לכל קשת e בגרף בשלב 1.
במהלך ריצת האלגוריתם בשלבים 3.2 ו-5.2 אנו מבצעים $f(e) = f(e) + c$ כאשר $c>0$ (כי אנו מוסיפים את $f(v)$ כאשר $f(v) > 0$ או את $|f(v)|$ כאשר $f(v) < 0$).
לפיכך מתקיים $f(e) \geq c(e)$ כנדרש לתנאי הקיבול.

נוכיח כעת כי הזרימה מקיימת את חוק השימור.
בתחילת האלגוריתם אנו מאתחלים את $f(v)$ לכל צומת v בגרף.
לאחר מכן אנו עוברים על כל הצמתים שמקיימים $f(v) < 0$ ומרחקם מ-t יורד ע"פ סריקת ה-BFS שהרצנו בשלב 3.
כל צומת v שאנו עוברים עליו בשלב 3 הוא צומת <u>שהזרימה ממנו קטנה מהזרימה אליו</u>, לפיכך כדי לתקן את המצב אנו צריכים להזרים ממנו עוד זרם. כיוון שיש לנו את הקשת שיוצאת מ-v אל u בדרך ל-t אנו יכולים להוסיף לה את הזרם שחסר כך שיתקיים $f(v) = 0$.
אנו מבצעים הוספה של $|f(v)|$ לקשת (v,u) וכך מאזנים את $f(v) = f(v) + |f(v)| = 0$ (כי $f(v)<0$).
כדי לעדכן את המצב הקיים בזרימה אנו מעדכנים את הצומת הבא u כך שכעת מתקיים $f(u) = f(u) - |f(v)|$, כיוון שהזרימה אל u <u>גדלה</u> ב-$|f(v)|$.

בסיום האיטרציה $f(v) = 0$, ו-$f(u) = x$ כאשר x מספר שלם.
אם $x=0$ אז המצב תקין.
אם $x<0$ אז נטפל בצומת u באיטרציה הבאה, כי מתקיים $d(v) > d(u)$ ואנו עוברים בסדר יורד על ערכי $d(v)$ לכל הצמתים.
אם $x>0$ נטפל בצומת u בשלב 5.
בסיום שלב 3 כל הצמתים (למעט s,t) מקיימים $f(v) \geq 0$ כפי שהוסבר לעיל.

לאחר מכן אנו עוברים על כל הצמתים שמקיימים $f(v) > 0$ ומרחקם מ-s יורד ע"פ סריקת ה-BFS שהרצנו בשלב 4.
כל צומת v שאנו עוברים עליו בשלב 5 הוא צומת שהזרימה ממנו גדולה מהזרימה אליו, לפיכך כדי לתקן את המצב אנו צריכים להזרים אליו עוד זרם. כיוון שיש לנו את הקשת שיוצאת מ-u אל v אנו יכולים להוסיף לה את הזרם שחסר כך שיתקיים $f(v) = 0$.
אנו מבצעים הוספה של $f(v)$ לקשת (u,v) וכך מאזנים את $f(v) = f(v) - f(v) = 0$.
כדי לעדכן את המצב הקיים בזרימה אנו מעדכנים את הצומת הקודם u כך שכעת מתקיים $f(u) = f(u) + f(v)$, כיוון שהזרימה מ- u גדלה ב-$f(v)$.

בסיום האיטרציה $f(v) = 0$, ו-$f(u) = x$ כאשר x מספר שלם גדול שווה לאפס.
(x לא יכול להיות קטן מאפס כיוון שאנו מגדילים אותו במספר חיובי, וכבר הובטח לנו בסיום שלב 3 שכל הצמתים מקיימים $f(v) \geq 0$).
אם $x=0$ אז המצב תקין.
אם $x>0$ אז נטפל בצומת u באיטרציה הבאה, כי מתקיים $d(v) > d(u)$ ואנו עוברים בסדר יורד על ערכי $d(v)$ לכל הצמתים.
בסיום שלב 5 כל הצמתים (למעט s,t) מקיימים $f(v) = 0$ כפי שהוסבר לעיל.

לסיכום: בסיום שלב 5 קיבלנו ש-$f(v) = 0$ למעט s,t. כלומר מתקיים חוק השימור.
קיבלנו זרימה חוקית כנדרש.

זמן ריצה:
האלגוריתם עובר על כל הקשתות בשלב 1 ומבצע עבודה קבועה – $O(|E|)$.
בשלבים 2-3 ו-4-5 האלגוריתם מבצע BFS בזמן $O(|V|+|E|)$ ובנוסף מבצע מעבר על לכל היותר כל הצמתים בגרף - בזמן $O(|V|)$.

לסיכום: זמן הריצה הוא $O(|V| + |E|)$.

ג. תיאור האלגוריתם:
כדי למצוא זרימה חוקית מזערית בגרף G נחשב את הזרימה *f הבאה:
$$f^*(e) = f(e) – g(e)$$
כאשר f היא זרימה חוקית בגרף G לפי האלגוריתם של סעיף ב'.
ו-g היא זרימה חוקית מקסימלית של הגרף *G הבא:
$$G^* = (V,E^*)$$
$$E^* = \{(u,v) \mid (v,u)\in E\} = E^{rev}$$
ולכל קשת $e^*\in E^*$ הקיבולת המקסימלית תהיה:
$$c(e^*) = f(e) – c(e)$$
($c(e)$ היא הקיבולת המינימלית ב-G).

*f תהיה זרימה חוקית מזערית.

האלגוריתם:
1. נריץ את האלגוריתם מסעיף ב' על G ונקבל ב-f זרימה חוקית.
2. נבנה את הגרף *G באופן הבא
   2.1. $V^* = V$
   2.2. $E^* =\{(u,v) \mid (v,u)\in E\} = E^{rev}$
   2.3. לכל קשת *e נגדיר את הקיבולת: $c(e^*) = f(e) – c(e)$
3. נריץ את אלגוריתם Edmonds-Karp למציאת הזרימה המקסימלית ב-*G.
4. נבנה את *f באופן הבא לכל קשת e:
   4.1. $f^*(e) = f(e) – g(e)$
5. נחזיר את *f

<u>הוכחת נכונות:</u>

ראשית נוכיח כי הזרימה f^* מקיימת את תנאי הקיבול.

$f(e) \geq c(e)$ כי f זרימה חוקית לפי סעיף ב'.

$g(e) \leq c(e^*) = f(e) - c(e)$ כי g זרימה מקסימלית חוקית ב-G^*.

לכן מתקיים:

$$f^*(e) = f(e) - g(e) \geq f(e) - (f(e) - c(e)) = 2f(e) - c(e) \geq 2c(e) - c(e) = c(e)$$

$f^*(e) \geq c(e)$ כנדרש לתנאי הקיבול.

כעת נוכיח כי f^* מקיימת את תנאי השימור.

אם f מקיימת שימור זרימה ו-g מקיימת שימור זרימה אז בהכרח גם f^* מקיימת שימור זרימה כי מתקיים לכל צומת v (למעט s,t):

$$f^{*out}(v) = f^{out}(v) + g^{out}(v) = f^{in}(v) + g^{in}(v) = f^{*in}(v)$$

כנדרש לתנאי השימור.

לבסוף כשהוכחנו שזו זרימה חוקית, נוכיח כעת כי הזרימה היא מזערית.

נניח בשלילה שהזרימה לא מינימלית – אזי קיים מסלול P מ-s ל-t שניתן היה להחסיר מכל קשת במסלול P כמות מסוימת של זרם ועדיין לעמוד בקיבולת המינימלית בכל קשת.

אמנם מכך נובע שבמהלך ריצת שלב 3 באלגוריתם, היינו יכולים לשפר את הזרימה המקסימלית שאלגוריתם Edmonds-Karp מצא בגרף G^*.

מנכונותו של אלגוריתם Edmonds-Karp אנו מקבלים סתירה להנחת השלילה, ומסיקים מכך שזוהי זרימה <u>חוקית מזערית</u>.

<u>זמן ריצה:</u>

שלב 1 רץ בזמן $O(|V| + |E|)$ כפי שהוכחנו בסעיף ב'.

בניית הגרף G^* רצה בזמן לינארי גם היא $O(|V| + |E|)$.

אלגוריתם Edmonds-Karp רץ בזמן $O(|V|*|E|^2)$.

שלב 4 עובר על כל הקשתות בזמן $O(|E|)$.

<u>לסיכום: זמן הריצה הוא $O(|V|*|E|^2)$.</u>

שאלה 3

א. תיאור האלגוריתם:

בהינתן זרימה מרבית f וצלע מסוימת e*=(u,v) שהקיבולת שלה גדלה ב-1, יש צורך למצוא את המסלול P מ-s ל-t בגרף השיורי שעובר דרך e* ולהריץ augment(f,P) עם הנתונים שיש בידינו.

התוצאה תהיה f' – הלוא היא הזרימה המרבית החדשה ברשת.

האלגוריתם:

נתון: זרימה מרבית f לרשת הזרימה בגרף G מ-s ל-t, וקשת e*=(u,v).

1. נבנה את הגרף השיורי G' באמצעות הזרימה המרבית הנתונה f ועדכון הקיבולת של הקשת e* ב-1.
2. נריץ BFS בגרף השיורי מ-v ונשמור לכל צומת את הקשת ממנה הגענו אליו – נעצור כאשר נגיע אל הצומת t או כאשר ריצת BFS תסתיים.
   2.1. אם האלגוריתם הסתיים ולא הגענו לצומת t, אזי אין מסלול שיפור – נחזיר את f.
3. נבנה את המסלול T ע"י מעקב אחר הקשת שממנה הגענו אל t וכך הלאה עד v (כך שנקבל T = v->…->t).
4. נריץ BFS בגרף השיורי מ-s ונשמור לכל צומת את הקשת ממנה הגענו אליו – נעצור כאשר נגיע אל הצומת u או כאשר ריצת BFS תסתיים.
   4.1. אם האלגוריתם הסתיים ולא הגענו לצומת u, אזי אין מסלול שיפור – נחזיר את f.
5. נבנה את המסלול Q ע"י מעקב אחר הקשת שממנה הגענו אל u וכך הלאה עד s (כך שנקבל Q = s->…->u).
6. נשרשר את 2 המסלולים יחד עם הצומת e* ונקבל מסלול P = s->…->u->v->…->t.
7. נריץ augment(f,P) על הגרף השיורי ונקבל חזרה את f'
8. נחזיר f'

הוכחת נכונות:

ראשית נוכיח כי הזרימה המרבית ברשת יכולה לגדול לכל היותר ב-1.

הוכחה: לפי טענה (7.13) בספר הערך המקסימלי של הזרימה s-t שווה לקיבול המינימלי של החתך s-t. אם נניח שהקשת e* היא חלק מהחתך המינימלי (A,B) אז נובע ש:

(נסמן c*(A,B) להיות החתך המינימלי החדש לאחר הגדלת הקיבולת של e* ב-1).

$$c^*(A,B) = \sum_{e\ out\ of\ A} c_e = \Big(\sum_{e\ out\ of\ A-\{e*\}} c_e\Big) + c(e*) = \Big(\sum_{e\ out\ of\ A-\{e*\}} c_e\Big) + c(e) + 1 = c(A,B) + 1$$

כלומר קיבלנו שהחתך המינימלי גדל ב-1 לאחר הגדלת הקיבולת של e* ב-1.

אחרת אם e* היא לא חלק מהחתך המינימלי (A,B) אז הזרימה המרבית לא תשתנה.

כעת כשהוכחנו שהזרימה יכולה לגדול לכל היותר ב-1 נוכיח שהאלגוריתם מבצע את הנדרש:

לפי טענה (7.3) בספר וההנחה שהקיבולות של הקשתות הן מספרים שלמים ניתן להסיק שבכל איטרציה של פורד-פולקרסון הזרימה המקסימלית גדלה לפחות ב-1.

אם מצאנו מסלול P בגרף השיורי בין s ל-t העובר בקשת e* - אז לאחר ריצת augment(f,P) נקבל רשת זרימה f' שבה הזרימה המקסימלית גדלה לפחות ב-1 (כי זוהי בדיוק איטרציה

של פורד-פולקרסון) – וכיוון שהוכחנו שהיא לא יכולה לגדול ביותר מ-1 נסיק שהיא גדלה ב-1 בדיוק.

אם לא מצאנו מסלול P כזה בגרף השיורי, זהו המקרה שבו e^* היא לא חלק מהחתך המינימלי ולכן הזרימה המקסימלית נשארה כפי שהיא – f.

בשני המקרים החזרנו זרימה ששווה לקיבול של החתך המינימלי – ולכן זוהי זרימה מקסימלית כנדרש.

<u>זמן ריצה:</u>

בניית הגרף השיורי מתבצעת ב-$O(|E|)$ – לכל קשת $e \in E$ בונים את הקשתות המתאימות בגרף השיורי בהתאם ל-$f(e)$ ו-$c(e)$.

חלקים 2-6 אשר מבצעים BFS, בונים את המסלולים ומשרשרים אותם יחדיו רצים בזמן לינארי של $O(|V|+|E|)$ – זמן ריצת BFS ומעבר על הקשתות במסלולים פעמיים.

ריצת augment על הגרף השיורי מתבצעת בזמן $O(n)$ – כי המסלול הפשוט P מורכב מ-n-1 קשתות לכל היותר.

<u>לסיכום: זמן הריצה הוא לינארי $O(|V|+|E|)$ כנדרש.</u>

ב. <u>תיאור האלגוריתם:</u>

ראשית יש לבדוק אם $f(e^*) < c(e^*)$ – במידה וכן לא נדרש לבצע דבר והזרימה f נשארת תקינה.
אחרת – $f(e^*) = c(e^*)$ ויש להפחית את הזרימה ב-1 לכל אורך המסלול P מ-s ל-t המכיל את *e ולעדכן בהתאם את f.
לאחר מכן יש לעדכן את הגרף השיורי ולבדוק האם קיים מסלול שיפור 'P מ-s ל-t שאיננו מכיל את *e וניתן להעביר דרכו את הזרימה שזה עתה הפחתנו.
במידה וכן נריץ augment(f,P') ונחזיר את 'f, במידה ולא נחזיר את f המעודכן.

<u>האלגוריתם:</u>

<u>נתון:</u> זרימה מרבית f לרשת הזרימה בגרף G מ-s ל-t, וקשת $e^*=(u,v)$.

1. אם $f(e^*) < c(e^*)$ אז
   1.1. החזר f
2. נבנה את הגרף השיורי 'G באמצעות הזרימה המרבית הנתונה f <u>ללא עדכון *e</u> (כדי לקבל גרף שיורי תקין)
3. נריץ BFS בגרף 'G מ-u ונשמור לכל צומת את הקשת ממנה הגענו אליו – נעצור כאשר נגיע אל הצומת s.
4. נבנה את המסלול T ע"י מעקב אחר הקשת שממנה הגענו אל s וכך הלאה עד u (כך שנקבל $T = u\text{->}\ldots\text{->}s$).
5. נריץ BFS בגרף 'G מ-t ונשמור לכל צומת את הקשת ממנה הגענו אליו – נעצור כאשר נגיע אל הצומת v.
6. נבנה את המסלול Q ע"י מעקב אחר הקשת שממנה הגענו אל v וכך הלאה עד t (כך שנקבל $Q = t\text{->}\ldots\text{->}v$).
7. נשרשר את Q יחד עם T ועם הצומת e^{*rev} ונקבל מסלול $P = t\text{->}\ldots\text{->}v\text{->}u\text{->}\ldots\text{->}s$.
8. לכל קשת $e \in P$ בצע
   8.1. $f(e) \leftarrow f(e) - 1$
9. נעדכן את הגרף השיורי 'G לאחר עדכון f
10. אם קיים מסלול P פשוט מ-s ל-t בגרף השיורי 'G (בדיקה ע"י BFS)
    10.1. נריץ augment(f,P) ונחזיר 'f המוחזר מהאלגוריתם
11. נחזיר את f

<u>הוכחת נכונות:</u>

המקרה שבו $f(e^*) < c(e^*)$ ברור – ניתן להפחית את הקיבולת ללא שינוי בזרימה כלל – וכיוון ש-f זרימה מקסימלית זוהי התוצאה.

נוכיח בדומה לסעיף הקודם כי הזרימה המרבית ברשת יכולה לקטון לכל היותר ב-1.

<u>הוכחה:</u> לפי טענה (7.13) בספר הערך המקסימלי של הזרימה s-t שווה לקיבול המינימלי של החתך s-t. אם נניח שהקשת *e היא חלק מהחתך המינימלי (A,B) אז נובע ש:

(נסמן $c^*(A,B)$ להיות החתך המינימלי החדש לאחר הקטנת הקיבולת של *e ב-1).

$$c^*(A,B) = \sum_{e\ out\ of\ A} c_e = \left(\sum_{e\ out\ of\ A-\{e*\}} c_e\right) + c(e*) = \left(\sum_{e\ out\ of\ A-\{e*\}} c_e\right) + c(e) - 1 = c(A,B) - 1$$

כלומר קיבלנו שהחתך המינימלי קטן ב-1 לאחר הקטנת הקיבולת של *e ב-1.

אחרת אם *e היא לא חלק מהחתך המינימלי (A,B) אז הזרימה המרבית לא תשתנה.

<u>כעת כשהוכחנו שהזרימה יכולה לקטון לכל היותר ב-1 נוכיח שהאלגוריתם מבצע את הנדרש:</u>

תחילה נראה שלאחר העדכון של f הזרימה נשארת חוקית.

לכל קשת $e\in P$ במסלול מ-s ל-t העובר דרך *e החסרנו את f(e) ב-1.

כיוון שכל הקשתות היו במסלול **מ-t ל-s** בגרף השיורי אז בוודאי עוברת זרימה במסלול הנ"ל – ולכן $f(e) \geq 1$ לכל הקשתות בו. לאחר העדכון נקבל:

$0 \leq f(e) \leq c(e)$

כנדרש לתנאי הקיבול.

תנאי שימור הזרימה מתקיים כי לכל הקשתות במסלול P אנו מבצעים חיסור של 1 לזרימה, כלומר לכל קשת פנימית v במסלול P מתקיים $f^{out}(v) - 1$ וגם $f^{in}(v) -1$, כלומר האיזון נשמר. מכיוון שהזרימה f היא חוקית – תנאי השימור נשמר.

קיבלנו עד כה (לאחר שלב 8 באלגוריתם) זרימה חוקית שהקטנו את הזרימה בה ב-1. ייתכן מצב שבו *e היא לא חלק מהחתך המינימלי (A,B) – כלומר ניתן להגדיל חזרה את הזרימה שהפחתנו דרך מסלול שיפור אחר.

נעדכן את הגרף השיורי ונבדוק אם קיים מסלול שיפור כזה P מ-s ל-t. במידה וכן נקרא ל-augment(f,P) ונחזיר זרימה חדשה ומקסימלית f'.

במידה ואין מסלול כזה אז *e הייתה חלק מהחתך המינימלי והפחתנו אותו ב-1, אז הזרימה העדכנית f היא המקסימלית ונחזיר אותה.

<u>זמן ריצה:</u>

בניית הגרף השיורי מתבצעת ב-O(|E|) – לכל קשת $e\in E$ בונים את הקשתות המתאימות בגרף השיורי בהתאם ל-f(e) ו-c(e).

חלקים 3-7 אשר מבצעים BFS, בונים את המסלולים ומשרשרים אותם יחדיו רצים בזמן לינארי של O(|V|+|E|) – זמן ריצת BFS ומעבר על הקשתות במסלולים פעמיים.

חלק 8 של עדכון הקשתות במסלול P חסום ע"י מס' הקשתות – O(|E|).

עדכון הגרף השיורי – O(|E|) כפי שהוסבר לעיל.

BFS למציאת מסלול שיפור s-t – O(|V|+|E|).

ריצת augment על הגרף השיורי מתבצעת בזמן O(n) – כי המסלול הפשוט P מורכב מ-n-1 קשתות לכל היותר.

<u>לסיכום: זמן הריצה הוא לינארי O(|V|+|E|) כנדרש.</u>

<u>שאלה 4</u>

נציג בנייה של גרף G אשר יהווה פתרון מקביל למציאת נוסחה ספיקה לנוסחת 3-CNF הנתונה.

נגדיר גרף G באופן הבא:

$V = \{s, x_1,\ldots, x_n, m_1,\ldots, m_n, t\}$

$E = \{(s,x_i), (m_i,t) , (x_j,m_k) \mid 1\le i\le n, (x_j,m_k) \leftrightarrow (x_j\in m_k$ או $\neg x_j\in m_k) \}$

$c(e) = 1$ לכל קשת

או במילים:

נגדיר גרף דו-צדדי שצד אחד שלו יהיה קבוצת הליטרלים $X = \{ x_1,\ldots, x_n \}$ והצד השני שלו יהיה קבוצת הפסוקיות $Y = \{ m_1,\ldots, m_n \}$.

נחבר קשת בין צומת המקור s לכל אחד מהליטרלים וקשת בין כל אחד מהפסוקיות לצומת הבור t. בנוסף נגדיר קשת (x_j,m_k) אם"ם הליטרל x_j או שלילתו מופיע בפסוקית m_k.

<u>הערה:</u> כיוון שיש n משתנים וכל משתנה מופיע <u>בדיוק בשלוש פסוקיות</u> שונות, וכל פסוקית כוללת <u>בדיוק שלושה משתנים</u> שונים, נובע מכך שמספר הפסוקיות שווה למספר הליטרלים.

לפי ההערה נובע ש- $|X| = |Y|$.

לפי טענה (7.39) בספר לגרף הדו-צדדי $G=(V,E)$ יש זיווג מושלם אם לכל $A\subseteq X$ מתקיים $|\Gamma(A)|\ge|A|$.

<u>נוכיח שלגרף שבנינו יש תמיד זיווג מושלם.</u>

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה שקיימת תת-קבוצה $A\subseteq X$ שעבורה $|\Gamma(A)|<|A|$.

לפי הנתון כל ליטרל נמצא בדיוק ב-3 פסוקיות, משמע לכל צומת $v\in X$ יש בדיוק 3 שכנים, ומתקיים עבורו $|\Gamma(v)|=3$.

תהי A קבוצה כזאת בת k איברים, כלומר $|\Gamma(A)|<k$.

לפי מה שנאמר לעיל $|\Gamma(A)|$ לפחות בגודל 3 – כי $|\Gamma(v)|=3$ לצומת בודד.

בנוסף נסיק מכך ש-k לפחות בגודל 4 כדי שהנחת השלילה תתקיים.

כדי שמספר השכנים של הקבוצה A יהיה קטן ממש ממספר האיברים שלה, <u>לפחות 4 צמתים שונים צריכים להצביע על אותו הצומת</u>. אמנם זה סתירה לנתון שכל פסוקית כוללת בדיוק שלושה משתנים שונים.

קיבלנו סתירה להנחת השלילה ולכן לגרף G יש זיווג מושלם בין הקבוצות X ו-Y.

<u>טענה:</u> הנוסחה הנתונה ספיקה אם"ם יש בגרף G זיווג מושלם בין הקבוצות X ו-Y.

<u>כיוון 1:</u> נניח שישנו זיווג מושלם בגרף G ונוכיח שישנה השמה המספקת את הנוסחה.

נעבור על כל הקשתות מהצורה עבורם $f((x_j,m_k))=1$, לכל קשת כזו נבדוק באיזה מצב הליטרל x_j נמצא בפסוקית m_k.

אם שלילתו נמצאת בפסוקית m_k אז נגדיר בהשמה

$$x_j = F$$

אחרת נגדיר

$$x_j = T$$

בזיווג המושלם כל ליטרל מופיע פעם אחת בלבד עם פסוקית אחת בלבד, ולכן כל ליטרל מקבל ערך השמה יחיד ומספק פסוקית אחת ויחידה.

נקבל השמה בגודל n אשר מספקת n פסוקיות שונות. כיוון שזהו המספר הכולל של הפסוקיות נובע שההשמה מספקת את הנוסחה, כלומר הנוסחה ספיקה כנדרש.

<u>כיוון 2:</u> נניח שהנוסחה ספיקה ונוכיח שבגרף G יש זיווג מושלם.

מההנחה נובע שישנה השמה מספקת לנוסחה הנתונה, כלומר יש n זוגות שבהם ליטרל x_{j_i} (או שלילתו $\neg x_{j_i}$) מספק את הפסוקית m_{k_i}, וכל $x_{j_i} \neq x_{j_h}$.

$$\left(x_{j_1},m_{k_1}\right),\ldots,\left(x_{j_n},m_{k_n}\right)$$

<u>הערה:</u> אם אותו ליטרל מספק את אותה הפסוקית, זאת אומרת שישנו ליטרל שלא השתמשנו בו לסיפוק אחת הפסוקיות וניתן להחליפו ע"י סדרה סופית של פעולות החלפה.

אם x_{j_i} (או שלילתו) מספק את m_{k_i} אז בגרף G נעדכן את הזרימה לאורך המסלול הבא ב-1:

$$s \rightarrow x_{j_i} \rightarrow m_{k_i} \rightarrow t\ .$$

לכל $1 \leq i \leq n$.

תנאי השימור מתקיים כי אנו מגדילים את הזרימה ב-1 לכל אורך המסלול מ-s ל-t, ולכן כל הצמתים הפנימיים שומרים על איזון (למעט s,t).

חוק הקיבול מתקיים כי כיוון שטענו שכל ליטרל מספק פסוקית אחת בלבד – אז נעביר זרם 1 לכל היותר בין כל ליטרל לפסוקית, וזהו הקיבול המקסימלי של קשת.

נקבל זרימה חוקית f לפי הגרף שבנינו והזרימה היא בגודל n (כמספר הליטרלים) – הלוא היא הזרימה המקסימלית ב-G.

לפי טענה (7.37) בספר גודלו של זיווג מקסימלי ב-G שווה לערכה של זרימה מקסימלית ב-G שבנינו, והזיווג הוא בין הצמתים שמחוברים ע"י הקשתות בין קבוצת הצמתים X לקבוצת הצמתים Y.

לפיכך קיבלנו זרימה מקסימלית <= זיווג מקסימלי <= זיווג מושלם, כנדרש.

<u>האלגוריתם:</u>

1. נבנה את הגרף G לפי התיאור לעיל.
2. מציאת זיווג מושלם באמצעות אלגוריתם פורד-פולקרסון בגרף דו-צדדי .
3. בניית ההשמה המספקת עבור הנוסחה הנתונה באמצעות ההסבר בהוכחה לעיל.

<u>הוכחת נכונות:</u>

הנכונות נובעת מההוכחה לעיל שלגרף G תמיד יש זיווג מושלם, הטענה שהנוסחה ספיקה אם"ם בגרף G יש זיווג מושלם ומטענה (7.38) בספר שניתן להשתמש באלגוריתם פורד-פולקרסון בגרף דו-צדדי למציאת זיווג מקסימלי (זיווג מושלם במקרה שלנו).

<u>זמן ריצה:</u>

יש בגרף 2n+2 צמתים ו-5n קשתות – לכן בניית הגרף חסומה ע"י $O(n)$.

לפי טענה (7.38) בספר חלק 2 באלגוריתם רץ בזמן של $O(mn)$. כיוון שm=5n סה"כ זמן הריצה הוא $O(n^2)$.

חלק 3 חסום ע"י מספר הקשתות – $O(n)$.

<u>לסיכום: זמן הריצה הוא $O(n^2)$</u>