20425 - תאריך הבחינה: 14.7.2014 (סמסטר 2014ב - מועד א5 / 86)

שאלה 1

א. למשתנה המקרי T יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר 2.

לפיכך: $P\{T>0.25\}=e^{-2\cdot 0.25}=e^{-0.5}=0.6065$

ב. נתון שהשיחה הראשונה נכנסה למרכזייה A בזמן 0.5. הואיל ואין תלות בין המרכזיות, מספר השיחות שנכנסות למרכזייה B עד זמן 0.5 הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $0.5\cdot 2=1$, ומתקיים:

$$P\{X=2\,|\,T=0.5\}=e^{-1}\cdot\tfrac{1^2}{2!}=0.1839$$

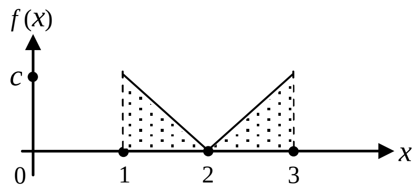
ג. נתבונן במשתנה המקרי המותנה $X\,|\,T=t$, לכל $t>0$. כפי שנאמר בסעיף הקודם, למשתנה מקרי זה יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $2t$. לפיכך: $E[X\,|\,T=t]=\text{Var}(X\,|\,T=t)=2t$

ובעזרת הנוסחאות המותנות של התוחלת והשונות נקבל:

$$E[X]=E[E[X\,|\,T]]=E[2T]=2E[T]=2\cdot\tfrac{1}{2}=1$$

$$\text{Var}(X)=E[\text{Var}(X\,|\,T)]+\text{Var}(E[X\,|\,T])=E[2T]+\text{Var}(2T)=2E[T]+4\text{Var}(T)=2\cdot\tfrac{1}{2}+4\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2=2$$

שאלה 2



א. נצייר את פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי X:

קל לראות שסך כל השטח המנוקד שווה ל- c.

לפיכך, מקבלים כי $c=1$.

אך אפשר גם לחשב את הערך של c באופן הבא:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=c\int_1^2(2-x)dx+c\int_2^3(x-2)dx=c\left[2x-\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2+c\left[\tfrac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3$$

$$=c(4-2-2+0.5+4.5-6-2+4)=c=1 \qquad \Rightarrow \qquad c=1$$

ב. למשתנה המקרי X פונקציית צפיפות סימטרית וחסומה מלעיל, המוגדרת על קטע סגור. לפיכך, התוחלת של המשתנה המקרי X חייבת להיות 2 (מרכז הסימטריה).

אפשר גם לחשב את התוחלת באופן הבא:

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx=\int_1^2 x(2-x)dx+\int_2^3 x(x-2)dx=\left[x^2-\tfrac{1}{3}x^3\right]_1^2+\left[\tfrac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$$

$$=4-\tfrac{8}{3}-1+\tfrac{1}{3}+9-9-\tfrac{8}{3}+4=2$$

ג. לפי חישובי שטחים של משולשים:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<1\\[2ex] \dfrac{1}{2}-\underbrace{\dfrac{(2-x)^2}{2}}_{\text{שטח המשולש בין } x \text{ ל-}2}=\dfrac{-x^2+4x-3}{2} & , \quad 1\le x\le 2\\[2ex] \dfrac{1}{2}+\underbrace{\dfrac{(x-2)^2}{2}}_{\text{שטח המשולש בין 2 ל-} x}=\dfrac{x^2-4x+5}{2} & , \quad 2\le x\le 3\\[2ex] 1 & , \quad x\ge 3\end{cases}$$

ד. נמצא תחילה את הקשר בין פונקציות ההתפלגות המצטברת של Y ושל X. לכל $0\le y\le 4$ מתקיים:

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{(X-1)^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X-1\le\sqrt{y}\}$$

$$=P\{0\le X-1\le\sqrt{y}\}=P\{1\le X\le 1+\sqrt{y}\}=F_X(1+\sqrt{y})$$

ומכאן:

$$F_Y(3.24)=F_X(1+\sqrt{3.24})=F_X(1+1.8)=F_X(2.8)=\frac{2.8^2-4\cdot 2.8+5}{2}=0.82$$

שאלה 3

א. לכל $i=1,2,\ldots,9$, מגדירים את המאורעות A_i על ידי "בהטלות i ו-$i+1$ התקבלה הצלחה".

לכן, לכל $i=1,2,\ldots,9$, מתקיים:

$$P(A_i)=P(\mathrm{HH}\cup\mathrm{TT})=2\cdot 0.5^2=0.5$$

כעת, נבדוק אם קיימת תלות בין המאורעות A_i ו-A_j, כאשר $i\ne j$. מתקיים:

$$P(A_i\cap A_j)=\begin{cases}P(\mathrm{HHH}\cup\mathrm{TTT})=2\cdot 0.5^3=0.25 & , \quad |i-j|=1 \quad ; \quad i,j=1,\ldots,9\\ [P(\mathrm{HH}\cup\mathrm{TT})]^2=(2\cdot 0.5^2)^2=0.5^2=0.25 & , \quad |i-j|>1 \quad ; \quad i,j=1,\ldots,9\end{cases}$$

לפיכך, לכל $i\ne j$, המקיימים $i,j=1,2,\ldots,9$, מתקיים:

$$P(A_i\cap A_j)=P(A_i)P(A_j)$$

והמאורעות A_i ו-A_j בלתי-תלויים זה בזה.

ב. נגדיר:

$$X_i=\begin{cases}1 & , \quad \text{בהטלות } i \text{ ו-} i+1 \text{ התקבלו HH או TT}\\ 0 & , \quad \text{אחרת}\end{cases} \qquad \text{לכל } i=1,\ldots,9$$

ונקבל כי: $X=\sum_{i=1}^{9}X_i=$ מספר זוגות ההטלות העוקבות שמתקבל בהן HH או TT.

לכל $i=1,\ldots,9$ מתקיים:

$$E[X_i]=P\{X_i=1\}=P(\mathrm{HH}\cup\mathrm{TT})=0.8^2+0.2^2=0.68$$

ומכאן:

$$E[X]=\sum_{i=1}^{9}E[X_i]=9\cdot 0.68=6.12$$

כעת, לכל $i=1,\ldots,9$ מתקיים:

$$\mathrm{Var}(X_i)=P\{X_i=1\}P\{X_i=0\}=0.68\cdot 0.32=0.2176$$

ולכל $1\le i,j\le 9$, כך ש-$i\ne j$, מתקיים:

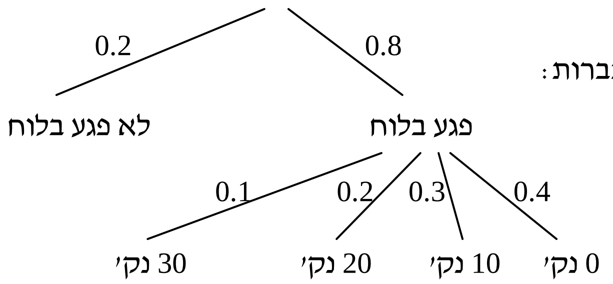
$$P\{X_i=1,X_j=1\} = \begin{cases} P(\text{HHH}\cup\text{TTT}) = 0.8^3+0.2^3 = 0.52 & , \quad |i-j|=1 \\ [P(\text{HH}\cup\text{TT})]^2 = (0.8^2+0.2^2)^2 = 0.68^2 = 0.4624 & , \quad |i-j|>1 \end{cases}$$

$$\text{Cov}(X_i,X_j) = \begin{cases} 0.52-0.68^2 = 0.0576 & , \quad |i-j|=1 \\ 0.68^2-0.68^2 = 0 & , \quad |i-j|>1 \end{cases}$$

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{9}\text{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j}\text{Cov}(X_i,X_j) = 9\cdot 0.2176 + 2\cdot 8\cdot 0.0576 = 2.88$$

שאלה 4

א. נתאר את הסתברויות הזכייה של הילד בעץ הסתברות:



לפיכך, ההסתברות שהילד יזכה ב-20 נקודות היא $0.8\cdot 0.2 = 0.16$.

ב. מספר הפעמים שהילד זוכה בנקודות הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 50 ו- $0.8\cdot 0.6 = 0.48$.

לפיכך, ההסתברות שיזכה 30 פעמים בנקודות היא: $\binom{50}{30}\cdot 0.48^{30}\cdot 0.52^{20} = 0.02695$

ג. כעת, נשתמש בפונקציית ההסתברות המולטינומית, כאשר $n=50$ ו- $\underline{p}=(0.52,0.24,0.16,0.08)$, ונקבל את ההסתברות המבוקשת: $\frac{50!}{23!14!9!4!}\cdot 0.52^{23}\cdot 0.24^{14}\cdot 0.16^{9}\cdot 0.08^{4} = 0.002696$

ד. למשתנים המקריים X_0, X_{10}, X_{20} ו- X_{30} יש התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים שצוינו בסעיף הקודם. לפיכך:

$$\text{Var}(X_0) = 50\cdot 0.52\cdot 0.48 = 12.48$$

$$\text{Var}(X_{10}) = 50\cdot 0.24\cdot 0.76 = 9.12$$

$$\text{Cov}(X_0,X_{10}) = -50\cdot 0.52\cdot 0.24 = -6.24$$

ומכאן:

$$\rho(X_0,X_{10}) = \frac{\text{Cov}(X_0,X_{10})}{\sqrt{\text{Var}(X_0)\text{Var}(X_{10})}} = \frac{-6.24}{\sqrt{12.48\cdot 9.12}} = -0.5849$$

שאלה 5

א. ההוכחה מובאת באתר הקורס.

ב1. המאורעות "התקבלה תוצאה זוגית" ו"התקבלה תוצאה שהיא כפולה של 3" אינם זרים זה לזה.
לפיכך, כדי לחשב את ההסתברות המבוקשת נגדיר את המאורעות הזרים:

F = התקבלה תוצאה זוגית שאיננה כפולה של 3 = $\{2,4\}$

G = התקבלה תוצאה שהיא כפולה של 3 = $\{3,6\}$

ולפי הטענה המובאת בסעיף א, נקבל שההסתברות שהמאורע F יתרחש לפני המאורע G, שהיא ההסתברות המבוקשת, היא $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=0.5$.

ב2. נסמן ב- A את המאורע שבהטלה השישית התקבלה לראשונה תוצאה שהיא כפולה של 3 ;
ונסמן ב- B את המאורע שהתקבלו 13 תוצאות שהן כפולה של 3 (בתוך 40 הטלות).

נקבל:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\binom{34}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\left(\frac{2}{3}\right)^{22}}{\binom{40}{13}\left(\frac{1}{3}\right)^{13}\left(\frac{2}{3}\right)^{27}}=\frac{\binom{34}{12}}{\binom{40}{13}}=0.0456$$