תשובה 1

א. $|K| = \aleph_0$. הוכחה: הפונקציה $f(x) = 4x$ מתאימה לכל אבר של K מספר שלם.

לכן זוהי פונקציה $f : K \to \mathbf{Z}$. היא חד-חד-ערכית ועל (הוכיחו זאת!).

לכן עוצמת K שווה לעוצמת $\mathbf{Z}$, שהיא כידוע $\aleph_0$.

ב. $|L| = C$. הוכחה: נתאים לכל מספר ממשי x את הזוג הסדור $(x, 4x-5)$.

קל לראות שלכל x ממשי, $(x, 4x-5) \in L$.

ההתאמה שלנו היא אפוא פונקציה $g : \mathbf{R} \to L$.

(i) נוכיח ש- g היא **על**: יהי $(x, y) \in L$. מהגדרת L, $4x - y = 5$. כלומר $y = 4x - 5$.

לכן $g(x) = (x, 4x-5) = (x, y)$. מצאנו מקור ל- (x, y) שהוא אבר כלשהו של L.

משמע g היא **על** L.

(ii) נוכיח ש- g היא חד-חד-ערכית: יהיו $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ונניח $g(x_1) = g(x_2)$.

משמע $(x_1, 4x_1 - 5) = (x_2, 4x_2 - 5)$.

מהגדרת שוויון בין זוגות סדורים (אמצע עמ' 29 בספר), בפרט מתקיים שוויון ברכיב הראשון,
כלומר $x_1 = x_2$. לפיכך g היא חד-חד-ערכית.

ג. $|M| = \aleph_0$. הוכחה: נגדיר פונקציה $h : M \to \mathbf{Z}$ כלהלן:

לכל $(x, y) \in M$, $h(x, y) = x + y$.

מהגדרת M, $h(x, y)$ הוא מספר שלם ולכן h היא אכן פונקציה של M ל- $\mathbf{Z}$.

נוכיח (בבת אחת) ש- h היא **חד-חד-ערכית ועל**.

נעשה זאת על ידי כך שנראה שלכל $n \in \mathbf{Z}$ קיים תחת h מקור **אחד ויחיד** ב- M. במלים אחרות,
נראה שלכל $n \in \mathbf{Z}$ קיים $(x, y) \in M$ **אחד ויחיד** המקיים $h(x, y) = n$.

מדוע אם נראה זאת, זה יוכיח את הנדרש?

הטענה שלכל $n \in \mathbf{Z}$ **קיים** $(x, y) \in M$ כך ש- $h(x, y) = n$, פירושה ש- h היא **על** $\mathbf{Z}$.

הטענה שלכל $n \in \mathbf{Z}$ **יש לכל היותר** $(x, y) \in M$ יחיד כזה, פירושה ש- h היא **חד-חד-ערכית**.

ובכן יהי $n \in \mathbf{Z}$. אנו רוצים להראות שקיים $(x, y) \in M$ **אחד ויחיד** המקיים $h(x, y) = n$.

מהגדרת M, מה שעלינו להראות הוא שקיים $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ אחד ויחיד המקיים את כל
התנאים הבאים: $4x - y = 5$, $x + y \in \mathbf{Z}$, $h(x, y) = n$.

את התנאי $x + y \in \mathbf{Z}$ אפשר להשמיט, כי הוא נובע מהדרישה $h(x, y) = n$.

קיבלנו מערכת של שתי משוואות: $x+y=n$, $4x-y=5$.

למערכת זו יש אכן פתרון **אחד ויחיד**, כלומר זוג סדור אחד ויחיד (x,y) המקיים את המערכת.

הראו זאת על-ידי פתרון מערכת המשוואות עם n כפרמטר, והשלימו את ההוכחה.

תשובה 2

נמשיך את ההוכחה.

מכיוון ש- $k,m\geq 2$, יהי $a_2\in A$, $a_2\neq a_1$ ויהי $b_2\in B$, $b_2\neq b_1$.

נגדיר $f:A\cup B\to A\times B$ כך:

$$f(x)=\begin{cases}(x,b_1) & x\in A\,,\ x\neq a_1\\ (a_2,b_2) & x=a_1\\ (a_1,x) & x\in B\end{cases}$$

השלימו: הראו ש- f היא חד-חד-ערכית ועל.

תשובה 3

א. יחס מעל קבוצה A הוא קבוצה חלקית של $A\times A$.

קבוצת כל היחסים מעל A היא אפוא $P(A\times A)$.

לכן הקבוצה בה מדובר בסעיף זה היא $P(\mathbf{N}\times\mathbf{N})$.

לפי שאלה 4.7א בעמ' 123 בספר, $|\mathbf{N}\times\mathbf{N}|=\aleph_0$.

מכאן, בעזרת משפט 5.23 (עמ' 21 בחוברת "פרק 5") , $|P(\mathbf{N}\times\mathbf{N})|=2^{\aleph_0}$.

לפי משפט 5.26 שם, $2^{\aleph_0}=C$.

ב. נסמן ב- T את קבוצת היחסים הטרנזיטיביים מעל $\mathbf{N}$.

T חלקית לקבוצת כל היחסים מעל $\mathbf{N}$, שעוצמתה C. לכן עוצמת T היא לכל היותר C.

מצד שני, לכל $A\subseteq\mathbf{N}$ נתבונן בקבוצה I_A. נראה את I_A כיחס מעל $\mathbf{N}$.

קל לראות שזהו יחס טרנזיטיבי.

ההתאמה $A\to I_A$ היא אפוא פונקציה של $P(\mathbf{N})$ ל- T .

פונקציה זו היא חד-חד-ערכית (מדוע?).

לכן , מהגדרת "קטן/ שווה" בין עוצמות, $|P(\mathbf{N})|\leq|T|$.

כלומר, לפי משפט 5.25 , $C\leq|T|$.

קיבלנו שעוצמת T היא לפחות C. בתחילת ההוכחה ראינו שעוצמת T היא לכל היותר C.

משני הדברים, לפי משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין, $|T|=C$.

תשובה 4

א.   תהיינה A_1, A_2, B קבוצות שעוצמותיהן בהתאמה k_1, k_2, m . נתון $k_1 \le k_2$.

כדי לקצר מעט את ההוכחה ניעזר בטריק השימושי הבא: **אנו חופשים לבחור כראות עינינו את הקבוצות המייצגות את העוצמות, כל עוד הקבוצות שנבחר הן בעלות העוצמות הנדרשות.**

מכיוון ש- $k_1 \le k_2$, לפי שאלה 5.1א בחוברת "פרק 5" **קיימת** קבוצה חלקית של A_2 שעוצמתה שווה לעוצמת A_1 . לכן **ב.ה.כ. נבחר** $A_1 \subseteq A_2$ **(!)**

מהגדרת חזקה של עוצמות, k_1^m היא עוצמת קבוצת הפונקציות של B ל- A_1 ,

ו- k_2^m היא עוצמת קבוצת הפונקציות של B ל- A_2 .

מכיוון ש- $A_1 \subseteq A_2$, פונקציה של B ל- A_1 היא גם פונקציה של B ל- A_2 **(!)** (מדוע?)

כלומר קבוצת הפונקציות של B ל- A_1 מוכלת בקבוצת הפונקציות של B ל- A_2 .

לכן, בהסתמך על שאלה 5.1ב, עוצמת הקבוצה הראשונה קטנה / שווה לעוצמת הקבוצה השניה.

משמע $k_1^m \le k_2^m$.

ב.   מצד אחד, $\aleph_0 \le C$ ולכן בעזרת סעיף א, $\aleph_0^{\aleph_0} \le C^{\aleph_0} = C$

(השוויון ל- C הוא לפי טענה 5.28).

מצד שני $2 \le \aleph_0$ ולכן בעזרת סעיף א, $C = 2^{\aleph_0} \le \aleph_0^{\aleph_0}$.

(השוויון ל- C הוא לפי משפט 5.26).

משני האי-שוויונים יחד, בעזרת קנטור-שרדר-ברנשטיין, מתקבל $\aleph_0^{\aleph_0} = C$.

איתי הראבן