20416 - תאריך הבחינה: 14.7.2014 (סמסטר 2014ב - מועד 5א / 86)

שאלה 1

א. למשתנה המקרי T_1 יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר 2, ולמשתנה המקרי המותנה $X_1 \mid T_1 = t$, כאשר $t > 0$, יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $2t$. לפיכך, נוכל להשתמש במשוואה (4.7), שבעמוד 380 בספר, ולקבל:

$$P\{X_1 = 2\} = \int_0^\infty P\{X_1 = 2 \mid T_1 = t\} f_{T_1}(t)dt = \int_0^\infty e^{-2t} \cdot \frac{(2t)^2}{2!} \cdot 2e^{-2t}dt = \int_0^\infty t^2 \cdot 4e^{-4t}dt = 0.125$$

האינטגרל האחרון שקיבלנו הוא למעשה תוחלת ריבוע של משתנה מעריכי עם הפרמטר 4, ומכאן שהוא שווה ל- $\frac{2}{4^2} = 0.125$.

ב. כעת, נתבונן במשתנים המקריים T_2 ו- $X_2 \mid T_2 = t$, לכל $t > 0$. למשתנה המקרי T_2 יש התפלגות גמא עם הפרמטרים $t = 2$ ו- $\lambda = 2$; ואילו למשתנה המקרי המותנה $X_2 \mid T_2 = t$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $2t$.

לפיכך:

$$E[T_2] = \tfrac{2}{2} = 1 \qquad , \qquad \text{Var}(T_2) = \tfrac{2}{2^2} = 0.5$$

$$E[X_2 \mid T_2 = t] = \text{Var}(X_2 \mid T_2 = t) = 2t$$

נשתמש בנוסחאות המותנות של התוחלת והשונות נקבל:

$$E[X_2] = E[E[X_2 \mid T_2]] = E[2T_2] = 2E[T_2] = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\text{Var}(X_2) = E[\text{Var}(X_2 \mid T_2)] + \text{Var}(E[X_2 \mid T_2]) = E[2T_2] + \text{Var}(2T_2)$$
$$= 2E[T_2] + 4\text{Var}(T_2) = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0.5 = 4$$

ג. לפי משוואה (5.1), בעמוד 303 בספר, נקבל:

$$f_{T_1|X_1}(t \mid n) = \frac{P\{X_1 = n \mid T_1 = t\}}{P\{X_1 = n\}} f_{T_1}(t) = \frac{P\{X_1 = n \mid T_1 = t\}}{P\{X_1 = n\}} f_{T_1}(t)$$
$$= \frac{e^{-2t} \cdot \frac{(2t)^n}{n!}}{P\{X_1 = n\}} \cdot 2e^{-2t} = C \cdot e^{-4t}t^n$$

קיבלנו פונקציית צפיפות, שהגורמים שבה התלויים ב- t מעידים על כך שהיא פונקציית צפיפות של משתנה מקרי גמא עם הפרמטרים $(n+1,4)$. לפיכך זוהי התפלגותו של המשתנה המקרי המותנה $T_1 \mid X_1 = i$.

כעת, נתבונן במשתנים המקריים T_2 ו- $X_2 \mid T_2 = t$, לכל $t > 0$. למשתנה המקרי T_2 יש התפלגות גמא עם הפרמטרים $t = 2$ ו- $\lambda = 2$; ואילו למשתנה המקרי המותנה $X_2 \mid T_2 = t$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $2t$.

שאלה 2

מסובבים חמש פעמים סביבון תקין בעל 4 פאות. לפיכך: $n(S) = 4^5$

א. כדי שכל התוצאות תתקבלנה, צריך שתוצאה אחת (מתוך ה-4) תתקבל פעמיים, וכל יתר התוצאות תתקבלנה פעם אחת כל אחת. לפיכך, נבחר את התוצאה שתתקבל פעמיים, ואת הסיבובים שבהם היא תתקבל, ולבסוף נסדר את שאר התוצאות. ומכאן נקבל:

$$\frac{4\cdot\binom{5}{2}\cdot 3!}{4^5} = \frac{240}{1{,}024} = \frac{15}{64} = 0.234375$$

ב. נעזר במאורע המשלים, שהתוצאה 3 לא מתקבלת בכלל, ונקבל:

$$1-\frac{3^5}{4^5} = 1-0.75^5 = 0.7627$$

ג. במונה עלינו למנות את מספר האפשרויות שב-5 הסיבובים כל התוצאות מתקבלות, כך שבשני הסיבובים הראשונים התוצאות שונות זו מזו. ייתכנו שני מקרים:

- התוצאה שמתקבלת פעמיים היא אחת משתי התוצאות שהתקבלו בשני הסיבובים הראשונים
- התוצאה שמתקבלת פעמיים איננה אחת משתי התוצאות שהתקבלו בשני הסיבובים הראשונים

במכנה עלינו למנות את מספר האפשרויות שבהן שתי התוצאות הראשונות (מתוך ה-5) שונות זו מזו.

$$\frac{4\cdot 3\cdot\binom{3}{1}\cdot 2\cdot 2! + 4\cdot 3\cdot\binom{3}{2}\cdot 2!}{4\cdot 3\cdot 4^3} = \frac{12+6}{64} = \frac{9}{32} = 0.28125$$

ד. במונה נמנה את מספר האפשרויות שבהן מתקבלות בדיוק שתיים מהתוצאות, ובמכנה נעזר במשלים (שכל ארבע התוצאות מתקבלות) כדי למנות את מספר האפשרויות שבהן לא מתקבלת לפחות אחת מארבע התוצאות.

$$\frac{\binom{4}{2}\cdot(2^5-2)}{4^5-4\cdot\binom{5}{2}\cdot 3!} = \frac{180}{784} = \frac{45}{196} = 0.2296$$

שאלה 3

א. מספר ההטלות של כל חבר, ובפרט של הראשון, הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר 0.5.

לפיכך, שונות מספר ההטלות המבוקשת שווה ל- $\frac{0.5}{0.5^2} = 2$.

ב. בהנחה שאין תלות בין מספרי ההטלות של שני החברים, סך-כל ההטלות שמבוצעות על-ידם הוא משתנה מקרי בינומי-שלילי עם הפרמטרים 2 ו- 0.5. נסמן את המשתנה המקרי הזה ב- X , ונקבל:

$$P\{X=10\} = \binom{9}{1}\cdot 0.5^2\cdot 0.5^8 = 0.00879$$

ג. בהמשך לסעיף הקודם, אם נסמן ב- Y את מספר ה-T ששני החברים מקבלים, מתקיים: $Y = X-2$

לפיכך:

$$E[Y] = E[X-2] = E[X]-2 = \tfrac{2}{0.5}-2 = 4-2 = 2$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X-2) = \mathrm{Var}(X) = \tfrac{2\cdot 0.5}{0.5^2} = 4$$

ד. נסמן ב- X_1 את מספר ההטלות של החבר הראשון וב- X_2 את מספר ההטלות של החבר השני.
בהנחת אי-תלות בין שני המשתנים נקבל:

$$\begin{aligned}P\{|X_1-X_2|=5\} &= P\{X_1=X_2+5\}+P\{X_2=X_1+5\}=2P\{X_1=X_2+5\}\\ &=2\sum_{i=1}^{\infty}P\{X_1=i+5,X_2=i\}=2\sum_{i=1}^{\infty}P\{X_1=i+5\}P\{X_2=i\}=2\sum_{i=1}^{\infty}0.5^{i+5}0.5^i\\ &=2\sum_{i=1}^{\infty}0.5^{2i+5}=2\cdot 0.5^5\sum_{i=1}^{\infty}0.5^{2i}=0.5^4\sum_{i=1}^{\infty}0.25^i=0.5^4\left(\tfrac{1}{1-0.25}-1\right)=\tfrac{1}{48}=0.0208\bar{3}\end{aligned}$$

שאלה 4

א. לכל $i=1,2,\ldots,9$, מגדירים את המאורעות A_i על ידי "בהטלות i ו- $i+1$ התקבלה הצלחה".

לכן, לכל $i=1,2,\ldots,9$, מתקיים: $P(A_i)=P(\text{HH}\cup\text{TT})=2\cdot 0.5^2=0.5$

כעת, נבדוק אם קיימת תלות בין המאורעות A_i ו- A_j, כאשר $i\neq j$. מתקיים:

$$P(A_i\cap A_j)=\begin{cases}P(\text{HHH}\cup\text{TTT})=2\cdot 0.5^3=0.25 & , \quad |i-j|=1 \;;\; i,j=1,\ldots,9\\ [P(\text{HH}\cup\text{TT})]^2=(2\cdot 0.5^2)^2=0.5^2=0.25 & , \quad |i-j|>1 \;;\; i,j=1,\ldots,9\end{cases}$$

לפיכך, לכל $i\neq j$, המקיימים $i, j=1,2,\ldots,9$, מתקיים: $P(A_i\cap A_j)=P(A_i)P(A_j)$

והמאורעות A_i ו- A_j בלתי-תלויים זה בזה.

ב. נגדיר: $X_i=\begin{cases}1 & , \text{בהטלות } i \text{ ו- } i+1 \text{ התקבלו HH או TT}\\ 0 & , \text{אחרת}\end{cases}$ לכל $i=1,\ldots,9$

ונקבל כי: $X=\sum_{i=1}^{9}X_i=$ מספר זוגות ההטלות העוקבות שמתקבל בהן HH או TT.

לכל $i=1,\ldots,9$ מתקיים: $E[X_i]=P\{X_i=1\}=P(\text{HH}\cup\text{TT})=0.8^2+0.2^2=0.68$

ומכאן: $E[X]=\sum_{i=1}^{9}E[X_i]=9\cdot 0.68=6.12$

כעת, לכל $i=1,\ldots,9$ מתקיים: $\text{Var}(X_i)=P\{X_i=1\}P\{X_i=0\}=0.68\cdot 0.32=0.2176$

ולכל $1\le i,j\le 9$, כך ש- $i\neq j$, מתקיים:

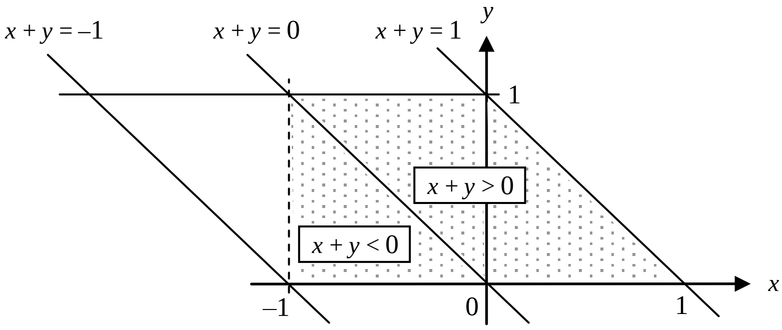
$$P\{X_i=1,X_j=1\}=\begin{cases}P(\text{HHH}\cup\text{TTT})=0.8^3+0.2^3=0.52 & , \quad |i-j|=1\\ [P(\text{HH}\cup\text{TT})]^2=(0.8^2+0.2^2)^2=0.68^2=0.4624 & , \quad |i-j|>1\end{cases}$$

$$\text{Cov}(X_i,X_j)=\begin{cases}0.52-0.68^2=0.0576 & , \quad |i-j|=1\\ 0.68^2-0.68^2=0 & , \quad |i-j|>1\end{cases}$$

$$\text{Var}(X)=\sum_{i=1}^{9}\text{Var}(X_i)+2\sum_{i<j}\text{Cov}(X_i,X_j)=9\cdot 0.2176+2\cdot 8\cdot 0.0576=2.88$$

שאלה 5

א.	נצייר את התחום שבו פונקציית הצפיפות המשותפת מקבלת ערכים חיוביים:



$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx\,dy = c\int_{-1}^{0}\int_{0}^{-x} -(x+y)\,dy\,dx + c\int_{0}^{1}\int_{-y}^{1-y}(x+y)\,dx\,dy$$

$$= c\int_{-1}^{0}\left[-xy-\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{-x}dx + c\int_0^1\left[\tfrac{1}{2}x^2+xy\right]_{-y}^{1-y}dy$$

$$= c\int_{-1}^{0}(x^2-\tfrac{1}{2}x^2)dx + c\int_0^1(\tfrac{1}{2}(1-y)^2+(1-y)y-\tfrac{1}{2}y^2+y^2)dy$$

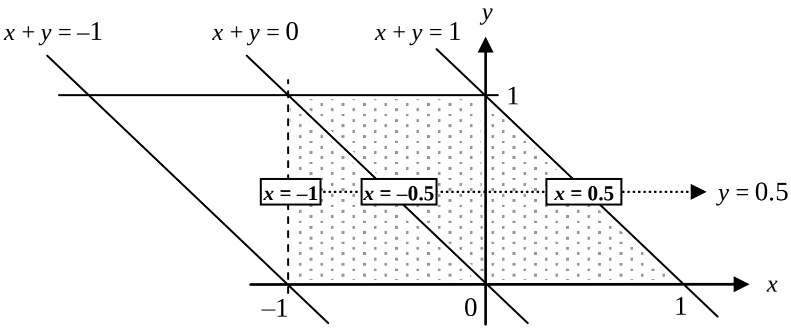
$$= c\int_{-1}^{0}\tfrac{1}{2}x^2dx + c\int_0^1\tfrac{1}{2}dy = c\left[\tfrac{1}{6}x^3\right]_{-1}^{0} + c\left[\tfrac{1}{2}x\right]_0^1 = c(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{2}) = \tfrac{2}{3}c = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c = 1.5$$

ב.	נמצא תחילה את פונקציית הצפיפות השולית של Y. לכל $0 \le y \le 1$ מתקיים:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = c\int_{-1}^{-y} -(x+y)dx + c\int_{-y}^{1-y}(x+y)dx$$

$$= c\left[-\tfrac{1}{2}x^2-xy\right]_{-1}^{-y} + c\left[\tfrac{1}{2}x^2+xy\right]_{-y}^{1-y}$$

$$= c[-\tfrac{1}{2}y^2+y^2+\tfrac{1}{2}-y+\tfrac{1}{2}(1-y)^2+(1-y)y-\tfrac{1}{2}y^2+y^2] = c[\tfrac{1}{2}y^2-y+1]$$



מכאן, שלכל $-1 \le x \le 0.5$ מתקיים:

$$f_{X|Y}(x\,|\,0.5) = \frac{f_{X,Y}(x,0.5)}{f_Y(0.5)} = \frac{|\,x+0.5\,|}{\tfrac{1}{2}\cdot 0.5^2-0.5+1} = \frac{|\,x+0.5\,|}{0.625} = 1.6\,|\,x+0.5\,|$$