שאלה 3 (29 נקודות)

סדרו את הפונקציות הבאות על-פי שיעור הגידול שלהן, כלומר, מצאו סידור $f_1, \dots, f_{15}$ של הפונקציות המקיים

$. f_1 = O(f_2), \dots, f_{14} = O(f_{15})$

חלקו את הרשימה למחלקות כך ש- f_i ו- f_j שייכות לאותה מחלקה אם ורק אם

$. f_i(n) = \Theta(f_j(n))$

$\lg n$	$2/n$	$\sqrt[3]{n^7}$	$\lg\lg n$	$\lg\left(n^2\right)$
$\sqrt{\lg n}$	$n/\lg n$	n^3+n	$(1+\lg n)\cdot\sqrt[3]{n^2}$	$(\lg n)^{1/3}$
$\left(n^2+1\right)\cdot\lg n$	2^{n^2}	$n^2\cdot\sqrt[3]{n}\cdot\lg n$	$n!$	3^{n+1}

פתרון:

נרשום קודם את העובדות הבאות:

$$\frac{2}{n} = \Theta\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sqrt[3]{n^7} = \Theta\left(n^{7/3}\right)$$

$$\lg\left(n^2\right) = 2\cdot\lg n = \Theta(\lg n)$$

$$\sqrt{\lg n} = \Theta\left(\lg^{1/2} n\right)$$

$$n^3+n = \Theta\left(n^3\right)$$

$$(1+\lg n)\cdot\sqrt[3]{n^2} = \sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n^2}\cdot\lg n = \Theta\left(n^{2/3}\cdot\lg n\right)$$

$$(\lg n)^{1/3} = \Theta\left(\lg^{1/3} n\right)$$

$$\left(n^2+1\right)\cdot\lg n = n^2\cdot\lg n + \lg n = \Theta\left(n^2\cdot\lg n\right)$$

$$n^2\cdot\sqrt[3]{n}\cdot\lg n = \Theta\left(n^{7/3}\cdot\lg n\right)$$

$$3^{n+1} = 3\cdot 3^n = \Theta\left(3^n\right)$$

בעזרת הנוסחאות שבסעיף 3.2 בספר הלימוד מגיעים למסקנות הבאות:

$\frac{2}{n} = O(\lg\lg n)$	$\lg\lg n = O\left((\lg n)^{1/3}\right)$	$(\lg n)^{1/3} = O\left(\sqrt{\lg n}\right)$
$\sqrt{\lg n} = O(\lg n)$	$\lg n = O\left(\lg\left(n^2\right)\right)$	$\lg\left(n^2\right) = O\left((1+\lg n)\cdot\sqrt[3]{n^2}\right)$
$(1+\lg n)\cdot\sqrt[3]{n^2} = O\left(\frac{n}{\lg n}\right)$	$\frac{n}{\lg n} = O\left(\left(n^2+1\right)\cdot\lg n\right)$	$\left(n^2+1\right)\cdot\lg n = O\left(\sqrt[3]{n^7}\right)$
$\sqrt[3]{n^7} = O\left(n^2\cdot\sqrt[3]{n}\cdot\lg n\right)$	$n^2\cdot\sqrt[3]{n}\cdot\lg n = O\left(n^3+n\right)$	$n^3+n = O\left(3^{n+1}\right)$
$3^{n+1} = O(n!)$	$n! = O\left(2^{n^2}\right)$	2^{n^2}