מתמטיקה בדידה 20476 פתרון ממ"ן 11 קיץ 2014ג

תשובה 1

א. $x \subseteq y$	ב. $x \in y$	ג. $x \subseteq y$	ד. $x \in y$
ה. $x \subseteq y$	ו. $x \subseteq y$	ז. $x \subseteq y$	ח. שניהם.

תשובה 2

א. מהגדרת $\oplus$,

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

לפי ההדרכה לשאלה, נבחר U המכילה את A,B ונרשום

$$= (A \cap B') \cup (B \cap A')$$

בעזרת דיסטריבוטיביות החיתוך מעל האיחוד (עמ' 17 בספר הלימוד)

$$= (A \cup B) \cap (A \cup A') \cap (B' \cup B) \cap (B' \cup A')$$

לפי טענה בתחתית עמ' 22 בספר, $A \cup A' = B \cup B' = U$.

לפי שאלה 1.11 בעמ' 16 בספר, ניתן לזרוק את U מהחיתוך.

נקבל בהמשך לשוויון המקורי,

$$= (A \cup B) \cap (B' \cup A')$$

בעזרת כלל דה-מורגן (סעיף 1.4.3 בספר)

$$= (A \cup B) \cap (B \cap A)'$$

ולבסוף, שוב לפי ההדרכה לשאלה

$$= (A \cup B) - (B \cap A)$$

ב. נתחיל בעזרת ההדרכה לשאלה:

$$(A - B) \cup (B - C) = (A \cap B') \cup (B \cap C')$$

מכאן בעזרת שימוש חוזר בפילוג (דיסטריבוטיביות, סעיף 1.3.4 בספר) של האיחוד מעל החיתוך:

$$= (A \cup B) \cap (A \cup C') \cap (B' \cup B) \cap (B' \cup C')$$

נזרוק את $B' \cup B$ (נימוק ר' בצעד דומה בהוכחת סעיף א' למעלה):

$$= (A \cup B) \cap (A \cup C') \cap (B' \cup C')$$

שימוש בכלל דה-מורגן בגורם הימני, וכינוס שני האיברים השמאליים בעזרת חוק הפילוג:

$$= (A \cup (B \cap C')) \cap (B \cap C)'$$

ובעזרת ההדרכה לשאלה

$$= (A \cup (B - C)) - (B \cap C)$$

ג. נתחיל בעזרת ההדרכה לשאלה:

$$(A-B)\cap(C-D)=(A\cap B')\cap(C\cap D')$$

בעזרת קיבוץ (אסוציאטיביות) וחילוף (קומוטטיביות, עמ׳ 15 בספר) החיתוך:

$$=(A\cap C)\cap(B'\cap D')$$

ולפי כלל דה-מורגן:

$$=(A\cap C)\cap(B\cup D)'$$

ושוב לפי ההדרכה לשאלה:

$$=(A\cap C)-(B\cup D)$$

תשובה 3

א. נניח $X\oplus A=Y\oplus A$. נבצע בשני האגפים הפרש סימטרי עם A:

$$(X\oplus A)\oplus A=(Y\oplus A)\oplus A$$

לפי שאלה 1.22ב (אסוציאטיביות) נקבל

$$X\oplus(A\oplus A)=Y\oplus(A\oplus A)$$

מהמשך סעיף ב׳ באותה שאלה, $A\oplus A=\varnothing$, ולכן קיבלנו:

$$X\oplus\varnothing=Y\oplus\varnothing$$

ולפי טענה אחרת באותו סעיף (הפרש סימטרי עם הקבוצה הריקה) קיבלנו

$$.X=Y$$

הערה: הפרש סימטרי הוא פעולה חילופית (שוב 1.22ב),
לכן קיבלנו שנוכל לצמצם גם משמאל, כלומר: אם $A\oplus X=A\oplus Y$ אז $X=Y$.

ב. כיוון אחד (אם $A=B$) מיידי משאלה 1.22ב: $A\oplus A=\varnothing$.
כיוון שני: אם $A\oplus B=\varnothing$ משמע $A\oplus B=A\oplus A$ (כי כאמור $A\oplus A=\varnothing$).
מכאן לפי כלל הצמצום משמאל שהוכחנו למעלה בסעיף א׳: $B=A$.

ג. אם $A=B'$, ניעזר בשאלה 2א בממ״ן זה ונקבל המבוקש (השלימו הפרטים)!
כיוון שני: נובע מהכיוון הראשון בעזרת כלל הצמצום, בדומה לסעיף ב׳:
נניח $A\oplus B=U$. כאמור בכיוון הראשון של סעיף זה, $A\oplus A'=U$.
לכן $A\oplus B=A\oplus A'$. לפי כלל הצמצום מסעיף א׳: $B=A'$.

ד. כיוון אחד: אם $B=\varnothing$ אז $A\oplus B=A$ לפי שאלה 1.22ב (הפרש סימטרי עם הקבוצה הריקה). כיוון שני: נובע מהכיוון הראשון בעזרת כלל הצמצום, בדומה לסעיפים ב, ג.

תשובה 4

א. $B_n=\{n\cdot k\mid k\in \mathbf{N}^*\}$, משמע B_n היא קבוצת כל הכפולות של n.

$B_n\cap B_m$ היא אפוא קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מ- 0, והמתחלקים הן ב- n והן ב- m:

$B_n\cap B_m=\{nk\mid k\in \mathbf{N}^*\}\cap\{ms\mid s\in \mathbf{N}^*\}$.

מכאן, לפי הטענה שבהדרכה, נובע שכל אבר של $B_n\cap B_m$ מתחלק ב $c(n,m)$. משמע:

$B_n\cap B_m\subseteq B_{c(n,m)}$.

מצד שני, יהי $x\in B_{c(n,m)}$, משמע x מתחלק ב- $c(n,m)$.

$c(n,m)$ מתחלק הן ב- n והן ב- m. לכן x מתחלק הן ב- n והן ב- m. לפיכך

$B_{c(n,m)}\subseteq B_n\cap B_m$.

משתי ההכלות: $B_n\cap B_m=B_{c(n,m)}$.

על תכונות הכפולה המשותפת המינימלית ראו

http://mathworld.wolfram.com/LeastCommonMultiple.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Least_common_multiple

ב. נראה כי **לכל** $m\in \mathbf{N}^*$, m **אינו** שייך לחיתוך הנ"ל. יהי $m\in \mathbf{N}^*$.

כללית, מהגדרת B_n, כל אברי B_n גדולים או שווים n. בפרט מובן כי $m\notin B_{m+1}$.

לפיכך m אינו שייך לחיתוך כל ה- B_n-ים.

ג. קבוצה זו היא קבוצת המספרים הראשוניים. נוכיח זאת:

כיוון אחד: יהי $n\in \mathbf{N}^*$ מספר **שאינו** ראשוני, נוכיח כי $D_n=\varnothing$.

יהי $x\in D_n$, נראה שלא ייתכן x כזה:

ההנחה ש- n ראשוני פירושה שקיימים $m,k\in \mathbf{N}^*$, $1<m,k<n$, כך ש- $n=km$.

מכיון ש- n מתחלק ב-m , כל מספר המתחלק ב- n מתחלק ב- m. בפרט $x\in B_m$.

מכיון ש- $1<m<n$ אז מהגדרת D_n נקבל כי $x\notin D_n$, בסתירה להנחה.

הראינו ש- D_n ריקה עבור כל n שאינו ראשוני.

מצד שני, אם n ראשוני, נראה כי $n\in D_n$ ולכן בפרט $D_n\neq\varnothing$:

לכל $n\in \mathbf{N}^*$ מתקיים $n\in B_n$.

אם n ראשוני, אז לכל m טבעי המקיים $1<m<n$, n אינו מתחלק ב- m, ולכן $n\notin B_m$.

מהגדרת D_n נקבל אפוא כי $n\in D_n$, ולכן D_n אינה ריקה.

משני הכיוונים יחד, הראינו שקבוצת ערכי n עבורם $D_n\neq\varnothing$ היא קבוצת המספרים הראשוניים.

איתי הראבן