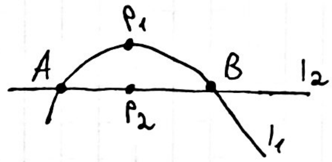
ממ"ן 16

אשנב למתמטיקה 0401

גיא כרמי 301726154

שאלה 1:

א. נראה כי קיים מודל למערכת לכן הי"ג חסרת סתירה:



קיימות 2 נקודות A,B כנדרש.

קיימים 2 ישרים l_1,l_2 כנדרש.

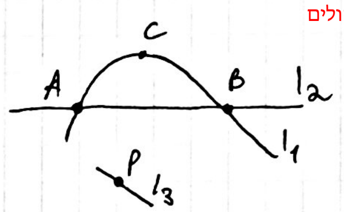
A,B על l_1, A,B על l_2.

ישנה נק' P_1 שאינה על l_2.

ישנה נק' P_2 שאינה על l_1.

ב. נראה כי ישנו מודל אחר של המערכת, לכן הי"ג אינה קטגורית:

חשוב לנמק למה המודלים לא שקולים



קיימות A,B וקיימים l_1,l_2 שונים כי ($C\notin l_2, C\in l_1$)

$l_1 \ni A,B$ וגם $l_2 \ni A,B$.

ישנה נק' P שאינה על l_1.

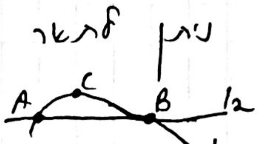
ישנה נק' P שאינה על l_2.

ישנה נק' A שאינה על l_3.

מכאן שלכל ישר ישנה נק' שאינה עליו.

ג. נראה כי המערכת בלתי תלויה מכיון שכל אקסיומה לא נובעת מהאחרת.

ניתן לתאר מודל המקיים את אקסיומה 1 ולא את 2:



ברור כי אקסיומה 1 מתקיימת: $l_1\neq l_2, A\neq B$ (כי $C\in l_1$ ו- $C\notin l_2$) וכן מתקיים $A,B\in l_1$ וגם $A,B\in l_2$.

אך ברור כי אקסמה 2 אינה מתקיימת, לישר l_1 לא קיימת נק' שאינה עליו.

כמו כן, המודל  מקיים את אקסיומה 2 (לישר l_1 יש את C שאינה עליו ולישר l_2 יש את A שאינה עליו) אבל $A,B\notin l_2$ לכן לא מתקיימת אקסיומה 1. מכאן שכל אקסיומה אינה נובעת מהאחרת והמערכת בלתי תלויה.

יפה

סעיף ד'?

שאלה 2:

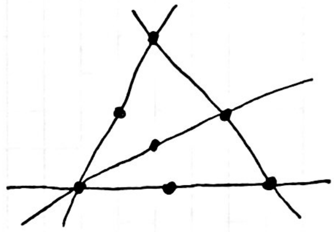
א. נבנה מודל ובכך נראה כי המערכת חסרת סתירה:

יש לפחות 2 ישרים.

יש בדיוק 7 נק'.

על כל ישר בדיוק 3 נק'.

לכל זוג ישרים יש בדיוק נק' אחת משותפת.



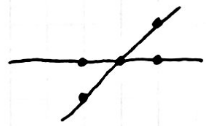
יפה

ב. המערכת בלתי תלויה, נראה כי לכל אקסיומה - ניתן לבנות מודל המקיים את 3 האחרות ולא אותה - לכן הי"א בת"ל.

(A)

יש בדיוק 7 נק' (2 מתקיימת), על כל ישר יש בדיוק 3 נק' (3 מתקיימת), ישנו רק ישר אחד לכן 4 מתקיימת באופן ריק ו-1 לא מתקיימת. לא נובעת מהאחרות!

(B)

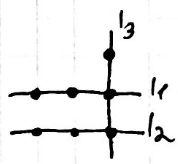


יש ~~נק'~~ לפחות 2 ישרים, על כל יש בדיוק 3 נק', לכל זוג ישרים בדיוק נק' 1 משותפת, אבל יש רק 6 נק' לכן אקסיומה 2 לא מתקיימת לא נובעת מהאחרות.

(C) באופן דומה למודל B, רק עם נק' אחת פחות על הישר ו-2 נקודות "באוויר" - כל התנאים יתקיימו מלבד ~~שעל~~ ישר מסוים לא יהיו בדיוק 3 נקודות לכן אקסיומה 3 לא נובעת מהאחרות.

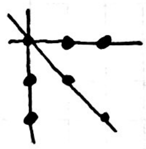
לא יהיו 7 נקודות

(D)



יש בדיוק 7 נק' ולפחות 2 ישרים, על כל ישר בדיוק 3 נקודות, אבל ל-l_1 ול-l_2 אין נק' משותפת לכן אקסיומה 4 לא מתקיימת ולא נובעת מהאחרות.

ג. המערכת אינה קטגורית כיוון שניתן מודל בעל 3 ישרים בלבד: וזהו מודל שונה מהמודל שהוצג בסעיף א':



יש לפחות 2 ישרים.

יש בדיוק 7 נק'.

על כל ישר בדיוק 3 נק'.

לכל זוג ישרים בדיוק נק' משותפת אחת.

ד. (שאלה 2 - המשך)

הוספת אקסיומה 5 אינה מובילה לסתירה, בעמוד 143 יש המחשה למודל המקיים את כל האקסיומות: ישנם יותר מ-2 ישרים, ישנן בדיוק 7 נק', על כל ישר יש בדיוק 3 נקודות, לכל שני ישרים יש בדיוק נק' אחת משותפת וכל שתי נקודות נמצאות על ישר אחד ויחיד.

יפה

הוספת אקסיומה 6 לעומת זאת בהכרח מובילה לסתירה. ישנן בדיוק 7 נקודות נתבונן בארבעה מהן: A,B,C,D . ע"מ לקיים את אקסיומה 6 נדרש שקיים ישר l_1 עליו הנקודות A,B,C . אבל אז קיים גם l_2 עליו הנקודות A,B,D . וקיבלנו

אולי זה אותו ישר שעליו 4 הנקודות? חייבים לשתף גם את אקסיומה 3 -1

סתירה לכך שלכל זוג ישרים יש נק' משותפת יחידה (אקסיומה 4) כי ל-l_1 ול-l_2 יש 2 נק' משותפות - A ו- B.

שאלה 3:

א. קיים מודל לכן הקבוצה חסרת סתירה.
כל דוגמא של חבורה ופעולה מראה זו, לדוג':
המספרים 0,1,2 והפעולה $*_{mod\ 3}$ (לכל זוג סדור
מותאמת השארית המתקבלת ע"י חלוק סכומם ב-3).

ב. נראה מודל המקיים את שלושת האקסיומות האחרות
אך לא את 2 (אינו קיבוצי):
פעולת החיסור עבור קבוצת השלמים:
~~[illegible]~~ ברור כי הקב' סגורה ביחס לפעולה,
האיבר 0 ניטרלי לפעולת החיסור לא אך הפעולה
איבר נגדי? אפס פחות 5 לא שווה חמש
אינה קיבוצית: עבור המספרים $-5,-3,4$ -3 :

$$-5-[(-3)-4] = -5-(-7) = 2 \neq [-5-(-3)]-4 = -2-4 = -6$$

ג. נראה מודל המקיים את אקסיומות 1 עד 3 ולא
את 4: קבוצת הטבעיים ופעולת הכפל: ברור כי
סגורה, הפעולה קיבוצית וקיים איבר ניטרלי (1) אך
לא קיים איבר נגדי לכל איבר בקבוצה.

ד. נראה כי המודל מקיים את חמשת האקסיומות:
אקסיומה 3 ברורה כיוון שכל פונק' בהרכבה על פונק' הזהות
היא הפונק' המקורית, לכן f היא האיבר הנייטרלי.
סגירות: עבור f ברור, עבור $g\circ h$ ברור, נותר לראות ??
עבור $g\circ k$ ועבור $k\circ h$. אבל $g\circ g=f$ ו- $h\circ h=f$
K0K ? K0G?
לכן $g\circ k = g\circ g\circ h = h$ ו- $k\circ h = g\circ h\circ h = g$ וראינו סגירות. (אקסיומה 1)
-1 למה זה מספיק לסגירות?
נותר להראות קיבוציות ואיבר נגדי: נראה כי כל איבר
נגדי לעצמו: ראינו עבור h ו- g, נותר להראות עבור k:

$$k\circ k(1) = g(h(g(h(1)))) = g(h(g(1))) = g\circ h(2) = g(2) = 1$$

3 המשך (שאלה 3)

$$k\circ k(2)=g\circ h\circ g\circ h(2)=g\circ h\circ g(2)=g\circ h(1)=g(1)=2$$
$$k\circ k(3)=g\circ h\circ g\circ h(3)=g\circ h\circ g(4)=g\circ h(4)=g(3)=3$$
$$k\circ k(4)=g\circ h\circ g\circ h(4)=g\circ h\circ g(3)=g\circ h(3)=g(4)=4$$

וראינו כי גם $k\circ k=f$, כלומר קיים איבר נגדי לכל איבר (אקסיומה 4)

נותר רק להראות קיבוציות:

f היא פונק' הזהות לכן סדר הפעולות כאשר f אחת מ-3 הפונק' אינו משנה. נראה עבור h,g,k כי לכל $a,b,c\in\{g,h,k\}$ מתקיים $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$:

יהי $x\in\{1,2,3,4\}$ אז:

$$((a\circ b)\circ c)(x)=(a(b)\circ c)(x)=a(b(c(x)))$$

וגם

$$(a\circ(b\circ c))(x)=(a\circ b(c))(x)=a(b(c(x)))$$

כלומר הרכבה ~~פונק'~~ פונק' היא קיבוצית. (אקסיומה 2)

ברור כי ישנם 4 איברים (אקסיומה 5) לכן הם G המודל של המערכת

ה. ~~יהיו $*_1, *_2$ פעולות בינאריות על הקבוצה $\{a,b,c,d\}$, נראה כי קיימות שתי פעולות שני מודלים~~

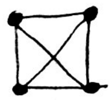
הקבוצה $\{0,1,2,3\}$ והפעולה $\overset{+}{\text{mod}}\ 4$ הן חבורה בעלת ארבעה איברים: סגורות ברורה, איבר ניטרלי הוא 0, איבר נגדי הוא האיבר המשלים ל-4 (מלבד עבור 0 שהוא עצמו) וקיבוציות נובעת מקיבוציות פעולת החיבור, ומכך ששארית 4 נשמרת על חיבור (סכום השאריות 4 שווה לשארית 4 הסכום)

זה הסבר, אין פה כל הוכחה. הפעולה היא לא חיבור

למה המודלים לא שקולים? -2

שאלה 4:

א. נראה המחשה למודל כך שאין סתירה:

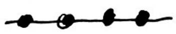


(1) ברור כי ישנן 4 נקודות

(2) כל זוג נקודות על ישר אחד ויחיד.

(3) לכל ישר יש ישר "מקביל" יחיד (כלומר מקיים את האקסיומה)

ב. נראה המחשה למודל אחר:



(1) ברור

(2) ~~[illegible]~~ ברור

(3) מתקיים על "ריק".

ברור כי בזהו מודל אחר, יש בו ישר אחד.

ג. אקסיומה 4: במערכת יש ישר יחיד, אינו נובע על פי המודל מסעיף א' ואינו סותר עפ"י המודל מסעיף ב'.

ד. נניח בשלילה כי קיים ישר l עליו 3 נקודות בדיוק,

~~[illegible]~~

נסמנן a,b,c, אז $l_1=\{a,b,c\}$ וקיימת עוד d והישרים $l_2=\{c,d\}, l_3=\{b,d\}, l_4=\{a,d\}$ מאקסיומה 2. לנמק

אבל על מנת לקיים את אקסיומה 3 לישר l_3 בו, נדרש ישר המכיל את b ו-a ואינו מכיל את c,d.

לא ברור
מדובר בנקודה אחת
לא שתיים

ישר זה לא יכול להכיל גם את a וגם את b כי אז יסתור את אקסיומה 2, לכן ח"ב ישר $l_5=\{a\}$ ($l_6=\{b\}$) ועל מנת לקיים את אקס' 3 עבור l_1 נדרש $l_6=\{d\}$. אבל כעת מבוטן בישר l_6 ובנק' a, קיימים 2 ישרים המכילים (l_5 ו-l_1) את a שללא נק' משותפת עם l_6, ולכן מתקבלת סתירה והמערכת מקיימת את המשפט כנדרש.

יפה מאד