בודק
שטטר דודו

ממ"ן 15

1. נוכיח בשני כיוונים.

<u>כיוון ראשון – נראה כי $\xi(G) \le |V| - \nu(G)$:</u>

הזיווג המקסימלי בגרף הוא $\nu(G)$, בזיווג משתתפים $2\nu(G)$ צמתים (לפי הגדרת זיווג). כלומר נותרו עוד $|V| - 2\nu(G)$ צמתים בגרף. נתון שכל צומת אינה בודדה, מכאן שלכל צומת שאינה בזיווג המקסימלי, יש קשת בגרף, שצומת זה הוא אחד מקצוותיה. אם נבחר שרירותית קשת אחת לכל $|V| - 2\nu(G)$ הצמתים שאינם בזיווג, הגענו לקבוצה של קשתות אשר כל צומת בגרף היא אחד מקצותיה (כלומר כיסוי ע"י קשתות), שגודלה

$$= \underbrace{\big(|V| - 2\nu(G)\big)}_{\text{מספר צמתים שאינם בזיווג}} \cdot \underbrace{1}_{\text{מספר קשתות נדרש לצומת שאיננה בזיווג}} + \underbrace{|\nu(G)|}_{\text{מספר הקשתות שכבר בזיווג}}$$

$$|V| - \nu(G)$$

כלומר

$$\xi(G) \le |V| - \nu(G)$$

והוכחנו כיוון ראשון.

<u>כיוון שני – נראה כי $\xi(G) \ge |V| - \nu(G)$:</u>

יהי F כיסוי קשתות מינימלי בגרף G (כלומר $|F| = \xi(G)$), ויהי M זיווג מקסימלי בגרף (V, F) (כלומר הזיווג המקסימלי שבעזרתו, לפי הבניה בכיוון הראשון, ניצור את F).

$$\xi(G) = |F| = |V| - |M| \underbrace{\ge}_{|M| \le \nu(G)} |V| - \nu(G)$$

(הרי גודל הזיווג המקסימלי בתת גרף, קטן שווה לגודל הזיווג המקסימלי בגרף השלם).
והוכחנו כיוון שני.

ומכאן הוכחנו כי

$$\xi(G) = |V| - \nu(G)$$

$$\boldsymbol{\nu(G) + \xi(G) = |V|}$$

כנדרש.

מעצם הבניה שהצענו, אפשר לבנות אלגוריתם לבניית כיסוי קשתות.
נחשב את הזיווג המקסימלי בזמן $O(|E||V|)$. נעבור על כל הצמתים ונבדוק איזה צומת לא נכנס לזיווג המקסימלי בזמן $O(|V|)$. נחזיר את הקשתות בזיווג והקשתות של הצמתים הבודדים בזמן $O(|E||V|)$.
קיבלנו אלגוריתם שמוצא כיסוי קשתות מקסימלי, בהינתן זיווג מקסימלי, בזמן פולינומיאלי.

יפה

2. **האלגוריתם**

נשנה קצת את אלגוריתם פורד-פולקרסון כדי לעמוד בדרישה.
נדגיש את השורות בהן יש שינוי.

```
augment(f,P,M)
    Let b = min(bottleneck(P,f), M)
    For each edge (u,v)∈P
        If e=(u,v) is a forward edge then
            increase f(e) in G by b
        Else ((u,v) is a backward edge, and let e=(v,u))
            decrease f(e) in G by b
        Endif
    Endfor
    Return (f,b)

Max-Flow
    Initially f(e)=0 for all e in G
    While there is an s-t path in the residual graph G_f and M > 0
        Let P be a simple s-t path in G_f
        (f',b) ← augment(f,P,M)
        M ← M – b
        Update f to be f'
        Update the residual graph G_f to be G_f'
    Endwhile
    If M = 0
        Return f
    Else
        Print "Impossible"
```

נכונות האלגוריתם

נסביר במילים את השינוי.
אלגוריתם פורד-פולקרסון המקורי משתמש בפונקציה augment, המוסיפה למסלול את "צוואר הבקבוק" (הקיבול הקטן ביותר) באותו מסלול. השינוי שלנו בוחר את לשים המינימום מבין הזרימה המקסימלית האפשרית באותו מסלול, והערך שנשאר לשים כדי להגיע ל-M.
בצורה כזו האלגוריתם יתכנס לערך (הזרימה המקסימלית,$\min M$) צריך רק לבדוק אם אתה כבר כותב קוד נכונות של הביטוי שאינו שלילי (עבור 0>M) במקום למקסימום האפשרי, באלגוריתם המקורי. נעצור את הלולאה כאשר לא יישארו מסלולים בין s ל-t או כאשר $M = 0$. אם האלגוריתם ייעצר כאשר $M = 0$, אז סיימנו והצלחנו להגיע לזרימה שערכה M.
אם נעצור כאשר $M > 0$ אז נעצרנו כי אין מסלול בין s ל-t. ולפי האלגוריתם מצאנו את הזרימה המקסימלית, אבל לא ניצלנו את כל M. כלומר M הנבחר גדול מהזרימה המקסימלית ולכן לא אפשרי להזרים M ברשת הזרימה.
בכל איטרציה נחסיר מ-M את כמות הזרם שהזרמנו במסלול, כדי שנוכל לדעת כמה זרם נותר להזרים בשאר האיטרציות.
נכונות האלגוריתם פורד-פולקרסון כבר מוכחת. וכעת הראנו שהשינוי גורם לאלגוריתם להתכנס לזרם (הזרימה המקסימלית,$\min M$).

ולכן האלגוריתם נכון.

זמן הריצה

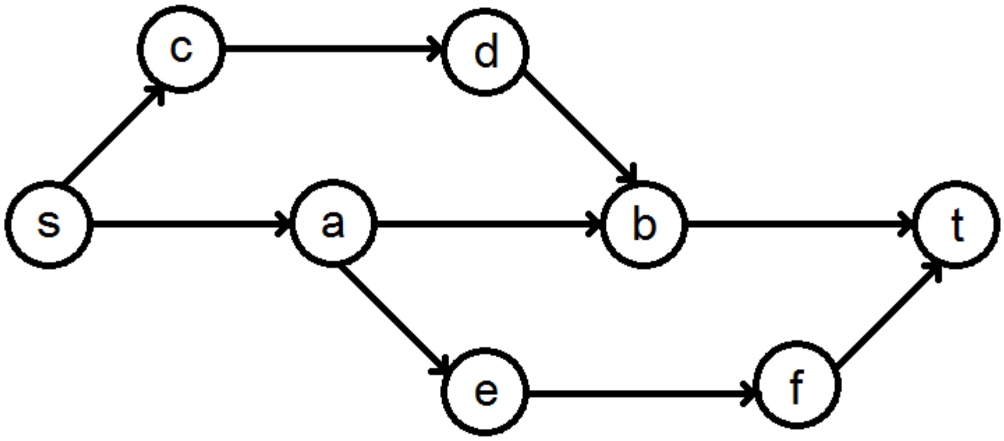
במקרה הגרוע ביותר M יהיה המקסימום או מעל המקסימום. במקרה זה האלגוריתם יתנהג כמו האלגוריתם פורד-פולקרסון המקורי. לכן זמן הריצה במקרה הכי גרוע הוא כמו האלגוריתם המקורי - $O(mC)$.

3.

פרופסור חכמי טועה!

אלגוריתם BFS מוצא את הקשת הקצרה ביותר בגרף, כלומר כל איטרציה האלגוריתם יחזיר את המסלול הקצר ביותר וימחק אותו. אך אם יש כמה מסלולים זרים זה לזה שאינם זרים למסלול הקצר ביותר?

נסתכל על הגרף הבא



ברור שהמסלול $s \to c \to d \to b \to t$ זר למסלול $s \to a \to e \to f \to t$ (אין שום קשת משותפת ביניהם). כלומר יש 2 מסלולים זרים בקשתות בין s ל-t.

אלגוריתם BFS שירוץ בפעם הראשונה על הגרף הנתון, יעבור במסלול (הקצר ביותר)

$$s \to a \to b \to t$$

וימחק אותו.

לאחר מכן יהיה נתק ולא נוכל לעבור בשום מסלול אחר כדי להגיע מ-s ל-t. האלגוריתם יעצור ויחזיר 1, בעוד שהתשובה הנכונה היא 2!

לכן האלגוריתם שגוי. יפה

■

4. **האלגוריתם**

תהי רשת זרימה עצית המבוססת על גרף הזרימה העצי T.
נסמן ב-T' את גרף הזרימה העצי המתקבלת מ-T על ידי היפוך כיווני הקשתות.
נגדיר $Z[x]$ עבור כל צומת x ברשת הזרימה T', המציין את הזרימה המקסימלי ב-x.

$Z[x] \leftarrow 0$ לכל צומת x.
$Z[t] \leftarrow \infty$ (t הוא השורש של T')
נפעיל אלגוריתם BFS על T' ונפעל בכל איטרציה, כך:
נסמן ב-x את הצומת הנוכחית, צומת האב p שממנו הגענו ל-x ואת הקשת $e(p,x)$.
$Z[x] \leftarrow Z[x] + \min\{c(e), Z[p]\}$.
נחזיר את $Z[s]$.

הוכחת נכונות

ראשית נסביר את האלגוריתם מילולית.
T בנוי על בסיס עץ. לכן דרגת הכניסה של כל צומת, למעט s ו-t היא 1.
לכן בעץ ההפוך T' דרגת היציאה של כל צומת היא 1. כלומר כל הדרכים "מתנקזות" לקשת אחת, ואין אפשרות לפצל את הזרימה. נריץ אלגוריתם סריקה BFS על העץ ההפוך T'.
בסריקה אנו מחשבים כמה זרימה תעבור בכל צומת. מכיוון שבעץ ההפוך יש קשת יוצאת אחת מכל צומת (למעט השורש והבור) אנו נבחן אם הצומת יכולה להעביר את כל הזרימה שעוברת בה ($Z[p]$), או שהזרימה תקטן בעקבות הקיבול של צינור היציאה($c(e)$). הזרימה שתעבור מהצומת לבן (היחיד) שלה תהיה כמובן $\min\{c(e), Z[p]\}$.
הזרימה שכל צומת תוכל להיות כסכום הזרימות העוברות אליה מכל אב שלה.
כאשר הצומת s (הבור של הגרף ההפוך) תכיל את הזרימה המקסימלית עד אליה, שהיא כמובן הזרימה המקסימלית בכל רשת הזרימה (הזרימה המקסימלית בעץ ההפוך שווה בגודלה אך הפוכה בכיוונה של הזרימה המקסימלית בעץ המקורי).

כעת נוכיח פורמלית.
טענה 1
יהי גרף זרימה עצי T, לכל צומת (למעט השורש והבור) יש דרגת כניסה 1 ודרגת יציאה גדולה מ-0, ובגרף T' (שבו כל הקשתות בכיוון ההופכי של T) לכל צומת (למעט השורש והבור) יש דרגת יציאה 1 ודרגת כניסה גדולה מ-0.
הוכחה
T היא גרף זרימה עצי, לכן לפי ההגדרה, אם נסיר מ-T את הבור, נקבל עץ.
לפי הגדרת עץ, ניתן (וחייב) להגיע לכל צומת בדרך אחת בלבד.
נסמן את שורש העץ ב-s. לשורש תמיד דרגת כניסה 0, אחרת לא היה השורש.
נניח בשלילה שקיימת צומת (שלא השורש) בעלת דרגת כניסה גדולה מ-1.
תהי x צומת כלשהי (שלא השורש) בעץ בעלת דרגת כניסה $i > 1$.
תהי הקבוצה $\{x_1, \dots, x_i\}$ האבות של x.
כלומר קיימים i מסלולים $P_i = \{s \to \cdots \to x_i \to x\}$ המקשרים את s (השורש) עם x.
אבל $i > 1$, ולכן קיבלנו סתירה עם הגדרת העץ. לכן הנחת השלילה לא נכונה.
כעת נניח בשלילה שקיימת צומת (שלא השורש) בעלת דרגת כניסה 0.
אם קיימת צומת (שלא השורש) בעלת דרגת כניסה 0, אז אין מסלול המקשר בין השורש אליה, בסתירה לכך שעץ הוא גרף קשיר.
כלומר ב-T לכל צומת (למעט השורש והבור) חייבת להיות דרגת כניסה 1 בדיוק.
לכל צומת בעץ יכולים להיות בנים (בכמות בלתי מוגבלת) או ללא בנים בכלל. אם לצומת יש לפחות בן אחד, אז סיימנו. אם לצומת אין בנים אז הוא עלה, ולפי הגדרה של גרף זרימה עצי, לכל העלים יש קשת לכיוון הבור, לכן להם דרגת יציאה 1. כלומר בכל מצב, לכל צומת

בגרף T, שאינה השורש והבור, יש דרגת יציאה גדולה מ-0.

ההיפוך T' של T, הופך את דרגות הכניסה והיציאה לכל צומת. לכן ב-T' לכל צומת (למעט השורש והבור) חייבת להיות דרגת יציאה 1 בדיוק. ודרגת הכניסה גדולה מ-0.

טענה 2

תהי רשת זרימה עצית המבוססת על גרף הזרימה העצי T.
נסמן ב-T' את גרף הזרימה העצי המתקבלת מ-T על ידי היפוך כיווני הקשתות.
לכל צומת x ערכו של $Z[x]$ נכון (בגרף T'), ומציין את הזרימה המקסימלית הזורמת בצומת.

הוכחה

נוכיח באינדוקציה על גובה העץ בגרף הזרימה העצי.
נראה נכונות עבור $n = 1$
כאשר גובה העץ הוא 1, קיים רק השורש, שהוא גם המקור וגם הבור. לכן הזרימה המקסימלית היא אינסופית.

נניח נכונות עבור $n < k$
לכל צומת x, עד גובה k מהשורש, ערכו של $Z[x]$ נכון, ומציין את הזרימה המקסימלית הזורמת בצומת.

נניח נכונות עבור $n = k + 1$
תהי x צומת כלשהי בעץ בגובה $k + 1$. לפי טענה 1, יש לה לפחות הורה אחד (דרגת הכניסה גדולה מ-0). יהיו i ההורים של x כאשר $i > 0$. תהי הקבוצה $\{x_1, \dots x_i\}$ קבוצת ההורים של x. מהנחת האינדוקציה $Z[x_j]$ נכון לכל $1 \leq j \leq i$.
גם בנוסף בהכרח קיימת קשת $e_j(x_j, x)$ לכל $1 \leq j \leq i$.
הזרימה המקסימלית היכולה להגיע מהורה j, היא המינימום בין $Z[x_j]$ לבין $c(e_j)$ (הרי או שצוואר הבקבוק הוא הזרימה שהגיעה עד ל-x_j, שהיא $Z[x_j]$. או שצוואר הבקבוק הוא בקיבולת הקשת המעבירה את הזרימה) כלומר הזרם העובר מהורה j הוא לכל היותר $\min\{c(e_j), Z[x_j]\}$. והזרימה המקסימלית שיכולה להגיע מכלל ההורים

$$Z[x] = \sum_{1 \leq j \leq i} \min\{c(e_j), Z[x_j]\}$$

ומאקסיומת האינדוקציה הטענה נכונה.

<u>טענה 3</u>
תהי רשת זרימה עצית המבוססת על גרף הזרימה העצי T.
נסמן ב-T' את גרף הזרימה העצי המתקבלת מ-T על ידי היפוך כיווני הקשתות.
הזרימה המקסימלית ב-T' שווה לזרימה המקסימלית ב-T.
<u>הוכחה</u>
נסמן ב-M את הזרימה המקסימלית בגרף T וב-N את הזרימה המקסימלית בגרף T'.
נוכיח בשני כיוונים.

- כיוון ראשון – נראה כי $M \le N$.
M היא הזרימה המקסימלית בגרף T, לכן בהכרח קיימת דרך להעביר את הזרם דרך הקשתות. אם נהפוך את כיוון הקשתות, אנו נשנה רק את כיוון הזרימה (הרי הקיבול ישאר אותו קיבול), כלומר הגרף T' יכול להעביר זרימה שערכה M. לכן בהכרח $M \le N$.
- כיוון שני - נראה כי $N \le M$.
אנלוגי לכיוון הראשון.
N היא הזרימה המקסימלית בגרף T', לכן בהכרח קיימת דרך להעביר את הזרם דרך הקשתות. אם נהפוך את כיוון הקשתות, אנו נשנה רק את כיוון הזרימה (הרי הקיבול ישאר אותו קיבול), כלומר הגרף T יכול להעביר זרימה שערכה N. לכן בהכרח $N \le M$.

משני הכיוונים מתקבל כי $M = N$. ולכן הטענה נכונה.

<u>טענה 4</u>
תהי רשת זרימה עצית המבוססת על גרף הזרימה העצי T, כאשר s הוא שורש העץ.
נסמן ב-T' את גרף הזרימה העצי המתקבלת מ-T על ידי היפוך כיווני הקשתות.
$Z[s]$ הוא הזרימה המקסימלית של הגרף T.
<u>הוכחה</u>
מטענה 2, לכל צומת x ערכו של $Z[x]$ נכון, ובפרט ל-s. כלומר $Z[s]$ היא הזרימה המקסימלית עד אליו (Z מחושב על ידי הגרף ההפוך T' לכן s היא צומת הבור בו).
מכיוון ו-s היא צומת הבור, אז ערכו של $Z[s]$ יהיה ערך הזרימה המגיע אל הבור (המקסימלי) בגרף T'. מטענה 3, הזרימה המקסימלית ב-T' שווה לזרימה המקסימלית ב-T.
לכן $Z[s]$ יחזיר את הזרימה המקסימלית בגרף המקורי T.

והוכחנו את נכונות האלגוריתם.

סיבוכיות זמן ריצה
בכל עץ יש $n-1$ קשתות. אם נוסיף לעץ צומת חדש ונחבר את כל העלים אליו, <u>יהיו לכל היותר</u> $2n-1$ קשתות (במקרה הגרוע, כאשר יש n עלים – לכן חסם עליון לא מינימלי).
לכן היפוך כל הקשתות ליצירת גרף הופכי T' הוא $O(2n-1) = O(n)$.
זמן אתחול המערך Z הוא $O(n)$.
ריצת BFS על הגרף לוקחת $O(n) = O\big(n + (2n-1)\big)$.
זמן קבלת הזרימה המקסימלית $O(1)$

ריצת האלגוריתם תיקח $O(n)$. יפה

5. נגדיר גרף $G(T \cup S, E)$ כאשר T היא קבוצת הפסוקיות ו-S היא קבוצת הליטרלים.
כאשר $|T| = m$ ו-$|S| = n$. נתון כי כל ליטרל מופיע בדיוק ב-3 פסוקיות, כלומר יש $3n$ קשתות היוצאות מהקבוצה S לכיוון הקבוצה T. בנוסף נתון שלכל פסוקית יש בדיוק 3 ליטרלים, אז $3n$ הקשתות יתחברו ל-n הצמתים בקבוצה (כי מספר הצמתים בקבוצה יהיה שליש ממספר הקשתות). מכאן $m = n$.

תהי $A \subseteq T$ תת קבוצה כלשהי של קבוצת הפסוקיות. $\Gamma(A)$ היא קבוצת השכנים של הצמתים של A, כלומר קבוצת הליטרלים המופיעים בפסוקיות.
בכל פסוקית יש בדיוק 3 ליטרלים (מהנתון), כלומר מהקבוצה A יוצאות $3|A|$ קשתות.
כל איבר ב-$\Gamma(A)$ חייב לקבל לפחות קשת אחת, ועד 3 קשתות (מהנתון).
הרי מהגדרת $\Gamma(A)$, $\Gamma(A)$ <u>חייבת</u> לקבל את $3|A|$ הקשתות (משום שאם קיימת קשת $e(a, x)$ כאשר $a \in A$, אז בהכרח $x \in \Gamma(A)$).
נסתכל על מקרי קיצון, אם כל איבר מקבל קשת אחת בדיוק, ויש $3|A|$ קשתות שאמורות להתקבל, יש לכל היותר $3|A|$ איברים ב-$\Gamma(A)$. אם כל איבר מקבל 3 קשתות בדיוק, ויש $3|A|$ קשתות שאמורות להתקבל, יש $|A|$ איברים ב-$\Gamma(A)$.
כלומר $|A| \leq |\Gamma(A)| \leq 3|A|$. זה מנוסח רע

כלומר הראינו שלכל תת קבוצה $A \subseteq T$ מתקיים $|A| \leq |\Gamma(A)|$. ממשפט הול, לגרף G יש זיווג מושלם. כלומר לכל פסוקית ניתן להתאים חח"ע ליטרל מייצג. כל פסוקית מורכבת מהצורה הבאה:

$$\varphi = x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee x_{i_3}$$

מהתכונה הזו, קיבלנו שאם נבצע השמה לאיבר המייצג x שיופיע בפסוקית כ-1 (כלומר אם מופיע x בפסוקית נציב $x = 1$, ואם מופיע $\neg x$ בפסוקית נציב $x = 0$). נקבל שהאיבר המייצג בעצם קובע אם הפסוקית (אחת בלבד) מסופקת.
ומהתכונה שניתן <u>תמיד</u> למצוא זיווג מושלם, קיבלנו שתמיד ניתן לספק את כל (מהגדרת הזיווג המושלם) הפסוקיות בביטוי.
ומכאן, הנוסחה המקיימת את הדרישות היא תמיד ספיקה.

מספר הפסוקיות והליטרלים, כמו שהוכחנו מקודם, שווה ל-n.
יצירת צומת עבור הפסוקיות לוקחת $O(n)$. יצירת צומת עבור הליטרלים לוקחת $O(n)$.
יצירת כל הקשתות (המחברות בין כל ליטרל לפסוקית שהוא מופיע בה) לוקחת $O(3n)$.
כלומר את כל הגרף ניתן לבנות ב-$O(n)$.
נריץ אלגוריתם פורד-פולקרסון למציאת זיווג מקסימלי (שבטוח קיים) בזמן $O(n \cdot 3n) = O(n^2)$.
נעבור על כל הפסוקיות, ובכל פסוקית על כל הליטרלים שבה (בזמן $O(3n) = O(n)$), כדי לחפש איך מוצג הליטרל המייצג של הפסוקית, x או $\neg x$, כדי לקבוע את ההשמה המתאימה לו.
נחזיר את ההשמות הדרושות לליטרלים כדי שהנוסחה תיהיה ספיקה.
האלגוריתם למציאת השמה מספקת ירוץ בזמן $O(n^2)$, כלומר בזמן פולינומיאלי, כנדרש.