פתרונות לממ"ן 14 - 2012ב - 20425

1. א. נסמן ב- X את הקוטר (בס"מ) של חישוק מקרי ; $X \sim N(\mu, 1.1^2)$.

לפי הנתון בשאלה מתקיים השוויון : $P\{X > 31.111\} = 0.1562$

ומכאן שמתקיים : $P\{X \le 31.111\} = \Phi\left(\frac{31.111-\mu}{1.1}\right) = 1 - 0.1562 = 0.8438 = \Phi(1.01)$

הסבר:

z	0.00	0.01	0.02	$\cdots$
$\vdots$		$\downarrow$		
1.0 $\rightarrow$		$\Phi(1.01) = \mathbf{0.8438}$		
$\vdots$				

לכן : $31.111 - \mu = 1.1 \cdot 1.01 = 1.111 \quad \Rightarrow \quad \mu = 30$

ב. $P\{X > 29.2\} = 1 - \Phi\left(\frac{29.2-30}{1.1}\right) = 1 - \Phi(-0.7273) = \Phi(0.72\underline{73})$

$= \Phi(0.72) + 0.73 \cdot [\Phi(0.73) - \Phi(0.72)] = 0.7642 + 0.\underline{73} \cdot [\underline{\underline{0.7673 - 0.7642}}] = 0.7665$

מטבלה 5.1 (עמ' 112 במדריך) :
$\Phi(0.72) = 0.7642$
$\Rightarrow\ 0.7673 - 0.7642 = \underline{\underline{0.0031}}$
$\Phi(0.73) = 0.7673$
$\Phi(0.72\underline{73}) = 0.7642 + 0.\underline{73} \cdot \underline{\underline{0.0031}} = 0.7665$

ג. $P\{30.8 \le X \le 31.2\} = \Phi\left(\frac{31.2-30}{1.1}\right) - \Phi\left(\frac{30.8-30}{1.1}\right)$

$= \Phi(1.091) - \Phi(0.7273) = 0.8623 - 0.7665 = 0.0958$

מטבלה 5.1 (עמ' 112 במדריך) :
$\Phi(0.72) = 0.7642$
$\Rightarrow\ 0.7673 - 0.7642 = \underline{\underline{0.0031}}$
$\Phi(0.73) = 0.7673$
$\Phi(0.72\underline{73}) = 0.7642 + 0.\underline{73} \cdot \underline{\underline{0.0031}} = 0.7667$

$\Phi(1.09) = 0.8621$
$\Rightarrow\ 0.8643 - 0.8621 = \underline{\underline{0.0022}}$
$\Phi(1.10) = 0.8643$
$\Phi(1.09\underline{1}) = 0.8621 + 0.\underline{1} \cdot \underline{\underline{0.0022}} = 0.8623$

לכן, ההסתברות שיצטרכו למדוד בדיוק 10 חישוקים עד שיימצא את החישוק המתאים, שקוטרו בין 30.8 ס"מ ל-31.2 ס"מ, היא : $(1 - 0.0958)^9 \cdot 0.0958 = 0.0387$

ד. נתון שהקוטר של כל 6 החישוקים גדול מ-30.5 ס"מ, לכן ההסתברות שהקוטר של כל אחד מהם יהיה בין 30.8 ס"מ ל-31.2 ס"מ היא ההסתברות המותנית :

$$P\{30.8 < X < 31.2 \mid X > 30.5\} = \frac{P\{30.8 < X < 31.2\}}{P\{X > 30.5\}} = \frac{\Phi(1.091) - \Phi(0.7273)}{1 - \Phi(0.4545)} = \frac{0.0958}{0.3248} = 0.295$$

כאשר : $P\{X > 30.5\} = 1 - \Phi\left(\frac{30.5-30}{1.1}\right) = 1 - \Phi(0.4545) = 1 - 0.6752 = 0.3248$

עתה, בהינתן שהקוטר של כל 6 החישוקים גדול מ-30.5 ס״מ, מספר החישוקים (מבין ה-6) שקוטרם בתחום הנתון הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 6 ו-0.295. נסמן את המשתנה הזה ב-Y ונקבל:

$$P\{Y \ge 2\} = 1 - P\{Y \le 1\} = 1 - (1-0.295)^6 - 6 \cdot 0.295 \cdot (1-0.295)^5 = 0.569$$

2. א. השטח הכלוא מתחת לעקומת הצפיפות שווה לסכום שלושת שטחי המלבנים שיוצרים אותה, וכמובן ששווה גם ל-1. לכן:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^3 f_X(x)\,dx = c + 2c + 3c = 6c = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c = \tfrac{1}{6}$$

ב. לחישוב ההסתברות המבוקשת נסכום את שטחי שני המלבנים החלקיים, הכלואים בין $x = 1.25$ לבין $x = 2.5$. נקבל:

$$P\{1.25 \le X \le 2.5\} = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{2}{6} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{6} = 0.5$$

ג. לכל $0 \le x < 1$ מתקיים:

$$F_X(x) = x \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{x}{6}$$

לכל $1 \le x < 2$ מתקיים:

$$F_X(x) = \tfrac{1}{6} + (x-1) \cdot \tfrac{2}{6} = \tfrac{2x-1}{6}$$

לכל $2 \le x \le 3$ מתקיים:

$$F_X(x) = \tfrac{3}{6} + (x-2) \cdot \tfrac{3}{6} = \tfrac{3x-3}{6} = \tfrac{x-1}{2}$$

לכן:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{x}{6} & , \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{2x-1}{6} & , \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{x-1}{2} & , \quad 2 \le x \le 3 \\ 1 & , \quad 3 < x \end{cases}$$

3. א.

$$\int_1^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{4k^4}{x^5}\,dx = \left.\frac{4k^4}{-4x^4}\right|_1^{\infty} = k^4 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad k = \pm 1$$

ב.

$$E[X] = \int_1^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{4x}{x^5}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{4}{x^4}\,dx = \left.\frac{4}{-3x^3}\right|_1^{\infty} = \frac{4}{3}$$

ג. לכל $x \ge 1$ מתקיים:

$$F_X(x) = \int_1^x f_X(t)\,dt = \int_1^x \frac{4}{t^5}\,dt = \left.\frac{4}{-4t^4}\right|_1^x = 1 - \frac{1}{x^4}$$

לכן:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^4} & , \quad x \ge 1 \end{cases}$$

ד.

$$E[X^3] = \int_1^{\infty} x^3 f_X(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{4x^3}{x^5}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{4}{x^2}\,dx = \left.\frac{4}{-x}\right|_1^{\infty} = 4$$

לכן:

$$E[2X^3 - 4] = 2E[X^3] - 4 = 2 \cdot 4 - 4 = 4$$

4. א. נסמן ב- A_i את המאורע שרכיב i תקין לאחר שנתיים, לכל $i = 1,2,3,4,5$. נחשב את ההסתברות שכל אחד מהרכיבים תקין לאחר שנתיים מיום הפעלת המערכת:

$$P(A_1) = P(A_2) = P\{X_1 \geq 2\} = 1 - \Phi(\tfrac{2-2.5}{1}) = 1 - \Phi(-0.5) = \Phi(0.5) = 0.6915$$

$$P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = P\{X_3 \geq 2\} = 0.5$$

ולפי נתוני השאלה, חמשת המאורעות המוגדרים לעיל בלתי-תלויים זה בזה.

כעת, נחשב את ההסתברות שהמערכת **אינה פועלת** שנתיים מיום הפעלתה:

$$P((A_1^C \cup A_2^C) \cap (A_3^C \cup (A_4^C \cap A_5^C))) = P(A_1^C \cup A_2^C) P(A_3^C \cup (A_4^C \cap A_5^C)) \qquad \text{[הרכיבים בלתי-תלויים]}$$

$$= \left[P(A_1^C) + P(A_2^C) - P(A_1^C \cap A_2^C)\right]\left[P(A_3^C) + P(A_4^C \cap A_5^C) - P(A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C)\right]$$

$$= \left[2 \cdot 0.3085 - 0.3085^2\right]\left[0.5 + 0.5^2 - 0.5^3\right] = 0.5218 \cdot 0.625 = 0.326$$

ומכאן, שהמערכת **פועלת** לאחר שנתיים בהסתברות $1 - 0.326 = 0.674$.

ב. נסמן ב- B את המאורע שהמערכת עדיין פועלת לאחר שנתיים.

$$P(A_4 \mid B) = \frac{P(A_4 \cap (A_3 \cup (A_1 \cap A_2)))}{P(B)} = \frac{P(A_4)[P(A_3) + P(A_1 \cap A_2) - P(A_3 \cap A_1 \cap A_2)]}{P(B)}$$

$$= \frac{0.5 \cdot [0.5 + 0.6915^2 - 0.5 \cdot 0.6915^2]}{0.674} = \frac{0.3695}{0.674} = 0.5483$$

5. א. נראה כי לכל $y > 0$ פונקציית הצפיפות חיובית, כלומר שמתקיים $f_Y(y) > 0$:

$$f_Y(y) = 1.25e^{-y} - 0.5e^{-2y} = e^{-y}(1.25 - 0.5e^{-y})$$

נתבונן בביטוי האחרון בשוויון שלעיל. הפונקציה $1.25 - 0.5e^{-y}$ היא פונקציה עולה של y בתחום $y > 0$, ומקבלת בתחום זה ערכים שגדולים מ- 0.75; כמו כן, מתקיים $e^{-y} > 0$. לכן, $f_Y(y) > 0$ לכל $y > 0$.

בנוסף:

$$\int_0^\infty f_Y(y)\,dy = 1.25\underbrace{\int_0^\infty e^{-y}\,dy}_{=1} - 0.25\underbrace{\int_0^\infty 2e^{-2y}\,dy}_{=1} = 1.25 - 0.25 = 1 \qquad \text{[כי } \lambda e^{-\lambda y} \text{ פונקציות צפיפות של מ״מ מעריכי]}$$

ב.

$$E[Y] = \int_0^\infty y\, f_Y(y)\,dy = \int_0^\infty \left(1.25ye^{-y} - 0.25 \cdot 2ye^{-2y}\right)dy = 1.25\int_0^\infty ye^{-y}dy - 0.25\int_0^\infty 2ye^{-2y}dy$$

$$= 1.25 \cdot 1 - 0.25 \cdot 0.5 = 1.125 \qquad \text{[כי } 1/\lambda \text{ תוחלת של מ״מ מעריכי]}$$

ג. תחילה, נשים לב כי לכל X שהוא משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ מתקיים:

$$E[X^2] = \mathrm{Var}(X) + (E[X])^2 = \tfrac{1}{\lambda^2} + \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^2 = \tfrac{2}{\lambda^2}$$

לפיכך:

$$E[Y^2] = \int_0^\infty y^2 f_Y(y)\,dy = \int_0^\infty \left(1.25y^2e^{-y} - 0.25 \cdot 2y^2e^{-2y}\right)dy$$

$$= 1.25\int_0^\infty y^2e^{-y}dy - 0.25\tfrac{1}{4}\int_0^\infty 2y^2e^{-2y}dy = 1.25 \cdot 2 - 0.25 \cdot 0.5 = 2.375$$

ומכאן:

$$\mathrm{Var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 2.375 - 1.125^2 = 1.109375$$