20416 - תאריך הבחינה: 2.7.2009 (סמסטר 2009ב - מועד 82)

שאלה 1

א1. מכיוון שהחפץ מוכנס באקראי לאחד מהארגזים ומכיוון שסדר פתיחתם אקראי, ההסתברות שהחפץ יימצא בכל אחד מן הארגזים, הנפתחים בזה אחר זה, היא 0.1. לכן, התפלגות מספר הארגזים שייפתחו היא אחידה בדידה בין 1 ל-10, ומתקיים:
$$P\{X_1=i\}=0.1 \quad , \quad i=1,2,...,10$$

א2. כעת, בכל שלב פותחים אחד מ-10 הארגזים ללא תלות בארגזים שנפתחו בשלבים הקודמים. לכן, התפלגות מספר הארגזים שייפתחו היא גיאומטרית עם הפרמטר 0.1, ומתקיים:
$$P\{X_2=i\}=0.9^{i-1}\cdot 0.1 \quad , \quad i=1,2,...$$

א3.
$$\text{Var}(X_1)=\tfrac{10^2-1}{12}=8.25 \quad < \quad \text{Var}(X_2)=\tfrac{0.9}{0.1^2}=90$$

השונות במקרה השני גדולה בהרבה מהשונות במקרה הראשון, מכיוון שתחום הערכים של ההתפלגות הגיאומטרית אינסופי ורחב בהרבה מתחום הערכים של ההתפלגות האחידה בדידה. כמו כן, אפשר להסיק מההבדלים בתוחלת: $E[X_1]=5.5$ לעומת $E[X_2]=10$, שמסת ההסתברויות בהתפלגות הגיאומטרית "נמשכת" יותר לימין בהשוואה למסת ההסתברויות בהתפלגות האחידה בדידה (ש"מסתיימת" בערך 10).

שימו לב, שבשיטת החיפוש המתוארת במקרה הראשון יש שימוש במידע שמצטבר במהלך פתיחת הארגזים, ואילו בשיטה המתוארת במקרה השני אין שימוש במידע קודם. לפיכך, סביר לצפות לתוצאות טובות יותר בשיטה הראשונה, ואכן זה בא לידי ביטוי הן בתוחלת והן בשונות.

ב. נסמן ב-A את המאורע ששני החפצים הוכנסו לארגז אחד. נתון כי: $P(A)=0.3$

כעת, לכל $i=1,2,\ldots,9$ מתקיים:
$$P\{X=i\}=P\{X=i\,|\,A\}P(A)+P\{X=i\,|\,A^C\}P(A^C)=0.1\cdot 0.3+\frac{\binom{10-i}{1}}{\binom{10}{2}}\cdot 0.7=0.03+\tfrac{10-i}{45}\cdot 0.7$$

ובנוסף:
$$P\{X=10\}=0.1\cdot 0.3+0\cdot 0.7=0.03$$

כלומר, נוכל לסכם את פונקציית ההסתברות כך:
$$P\{X=i\}=0.03+\tfrac{10-i}{45}\cdot 0.7 \quad , \quad i=1,2,...,10$$

הסבר: $P\{X=i\,|\,A\}=0.1$ מכיוון ששני החפצים נמצאים בכל אחד מ-10 הארגזים באותה ההסתברות.
$P\{X=i\,|\,A^C\}=\frac{\binom{10-i}{1}}{\binom{10}{2}}$ מכיוון שמוצאים לראשונה חפץ בארגז ה-i-י, רק אם שני החפצים מוקמו כך שב-$i-1$ הארגזים הראשונים שנפתחו לא היה אף חפץ, בארגז ה-i-י שנפתח היה חפץ אחד והחפץ הנוסף מוקם באחד מ-$10-i$ הארגזים האחרונים (שטרם נפתחו). כלומר, אם יש $\binom{10}{2}$ דרכים למיקום שני החפצים בשני ארגזים שונים, אז $\binom{10-i}{1}$ מתוכן מובילות להתרחשות המאורע $\{X=i\}$.

נחשב את התוחלת של X:
$$E[X]=\sum_{i=1}^{10}\left(0.03+\tfrac{10-i}{45}\cdot 0.7\right)\cdot i=\left(0.03+\tfrac{10}{45}\cdot 0.7\right)\cdot\tfrac{10\cdot 11}{2}-\tfrac{0.7}{45}\cdot\tfrac{10\cdot 11\cdot 21}{6}=4.21\overline{6}$$

שימו לב: מכיוון שרוב הנבחנים לא שמו לב לבקשה לחשב את התוחלת, החלטתי לתת את הניקוד רק על חישוב פונקציית ההסתברות.

שאלה 2

נסמן ב-X את המשקל (בק"ג) של הפטריות <u>הבהירות</u> שנארזות בסלסלה מקרית ; $X \sim N(0.15, 0.04^2)$

וב-Y את המשקל (בק"ג) של הפטריות <u>הכהות</u> שנארזות בסלסלה מקרית ; $Y \sim N(0.1, 0.03^2)$

א. נמצא את המשקל a, שמקיים את השוויון : $P\{Y < a\} = \Phi\left(\frac{a-0.15}{0.04}\right) = 0.83$

מטבלת הקירובים הנורמלית עולה ש- $\Phi(0.95) = 0.8289$ וכי $\Phi(0.96) = 0.8315$. לכן :

$$\Phi\left(\frac{a-0.15}{0.04}\right) = 0.83 = \Phi(0.9542) \quad \Rightarrow \quad z = 0.95 + \frac{0.83-0.8289}{0.8315-0.8289}\cdot(0.96-0.95) = 0.9542$$

$$\Rightarrow \quad a = 0.15 + 0.9542 \cdot 0.04 = 0.1882$$

ב. לפי נתוני הבעיה, אין תלות בין משקלי הסוגים השונים של הפטריות הנארזים באותה הסלסלה, לכן התפלגות המשקל הכולל של הפטריות בסלסלה אחת היא נורמלית עם הפרמטרים $\mu = 0.15 + 0.1 = 0.25$ ו- $\sigma^2 = 0.04^2 + 0.03^2 = 0.05^2$. לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא :

$$P\{X + Y > 0.26\} = 1 - \Phi\left(\frac{0.26-0.25}{0.05}\right) = 1 - \Phi(0.2) = 1 - 0.5793 = 0.4207$$

ג. לפי נתוני הבעיה, אין תלות בין סלסלות שונות, לכן התפלגות המשקל הכולל של הפטריות ב-100 סלסלות היא נורמלית עם הפרמטרים $\mu = 100\cdot 0.25 = 25$ ו- $\sigma^2 = 100\cdot 0.05^2 = 0.5^2$. לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא : $1 - \Phi\left(\frac{26-25}{0.5}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

ד. בסימוני סעיף א, עלות הייצור של סלסלה מקרית, שנסמנה ב-W, היא : $W = 0.15 + 15X + 20Y$

המשתנים המקריים X ו-Y בלתי-תלויים זה בזה, לכן מתקיים :

$$E[W] = 0.15 + 15E[X] + 20E[Y] = 0.15 + 15\cdot 0.15 + 20\cdot 0.1 = 4.4$$

$$\text{Var}(W) = 15^2\,\text{Var}(X) + 20^2\,\text{Var}(Y) = 225\cdot 0.04^2 + 400\cdot 0.03^2 = 0.72$$

כעת, נשתמש באי-שוויון צ'בישב החד-צדדי למציאת החסם המבוקש. נקבל :

$$P\{W > 5\} \le P\{W \ge 5\} = P\{W - 4.4 \ge 0.6\} \underset{E[W-4.4]=0}{\le} \frac{0.72}{0.72 + 0.6^2} = \frac{2}{3}$$

שאלה 3

א. ההסתברות לסיום המשחק בכל אחד מן השלבים היא ההסתברות שיוצאו 2 כדורים בצבעים שונים, כלומר, $2\cdot\frac{6\cdot 4}{10\cdot 9} = \frac{8}{15}$. כמו כן, אפשר להניח שאין תלות בין השלבים. לכן, למשתנה המקרי X יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{8}{15}$, ומתקיים : $E[X] = 1\big/\frac{8}{15} = \frac{15}{8} = 1.875$

ב. ראשית, בהמשך לאמור בסעיף הקודם נשים לב ש- $P\{X = i, Y = j\} > 0$ רק עבור i ו-j שלמים, המקיימים $0 \le j < i$. כעת, בהנחה ש- $0 \le j < i$, נבחן את התנאים להתרחשות המאורע $\{X = i, Y = j\}$. מאורע זה מתרחש אם ב- $i - 1$ השלבים הראשונים במשחק היו j שלבים שבהם השחקנים הוציאו שני כדורים שחורים, ו- $i - 1 - j$ שלבים שבהם השחקנים הוציאו שני כדורים לבנים. בשלב האחרון השחקנים הוציאו בהכרח כדור שחור וכדור לבן.

לפיכך:

$$P\{X=i,Y=j\}=\binom{i-1}{j}\underbrace{\left(\frac{6\cdot 5}{10\cdot 9}\right)}_{\text{2 כדורים שחורים}}^{j}\underbrace{\left(\frac{5\cdot 3}{10\cdot 9}\right)}_{\text{2 כדורים לבנים}}^{i-1-j}\underbrace{\left(\frac{8}{15}\right)}_{\text{כדור שחור וכדור לבן}}$$

$$=\binom{i-1}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{j}\left(\frac{2}{15}\right)^{i-1-j}\left(\frac{8}{15}\right)\qquad,\qquad i=1,2,...\quad;\quad j=0,1,...,i-1$$

ג. לכל $i=1,2,\ldots$ מתקיים:

$$P\{Y=j\mid X=i\}=\frac{P\{X=i,Y=j\}}{P\{X=i\}}=\frac{\binom{i-1}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{j}\left(\frac{2}{15}\right)^{i-1-j}\cancel{\left(\frac{8}{15}\right)}}{\left(\frac{7}{15}\right)^{i-1}\cancel{\left(\frac{8}{15}\right)}}$$

$$=\binom{i-1}{j}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{7}\right)^{j}\left(\frac{2}{15}\cdot\frac{15}{7}\right)^{i-1-j}=\binom{i-1}{j}\left(\frac{5}{7}\right)^{j}\left(\frac{2}{7}\right)^{i-1-j}\qquad,\qquad j=0,1,...,i-1$$

לכן, ההתפלגות המותנית של Y בהינתן $X=i$ היא התפלגות בינומית עם הפרמטרים $i-1$ ו- $\frac{5}{7}$, ומתקיים:

$$\text{Var}(Y\mid X=i)=(i-1)\cdot\tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{2}{7}\qquad,\qquad i=1,2,...$$

שימו לב, שאפשר להסיק את התוצאה האחרונה גם ללא חישוב פונקציית ההסתברות המותנית. מתנאי המשחק ומהמידע הנתון ש- $X=i$, אפשר להסיק ש- $i-1$ השלבים הראשונים של המשחק בלתי-תלויים ושהתקבלו בהם רק התוצאות שחור-שחור או לבן-לבן. כעת, מכיוון שההסתברויות ההתחלתיות של התוצאות הללו הן $\frac{15}{45}$ ו- $\frac{6}{45}$, בהתאמה, נובע שההסתברויות המותנות של תוצאות אלו, בהינתן ש- $X=i$, הן $\frac{15}{15+6}$ ו- $\frac{6}{15+6}$, בהתאמה, כלומר, $\frac{5}{7}$ ו- $\frac{2}{7}$, וכי ההתפלגות המותנית של מספר התוצאות שחור-שחור בהינתן שהיו למשחק i שלבים היא בינומית.

ד. נשתמש בנוסחת השונות המותנית:

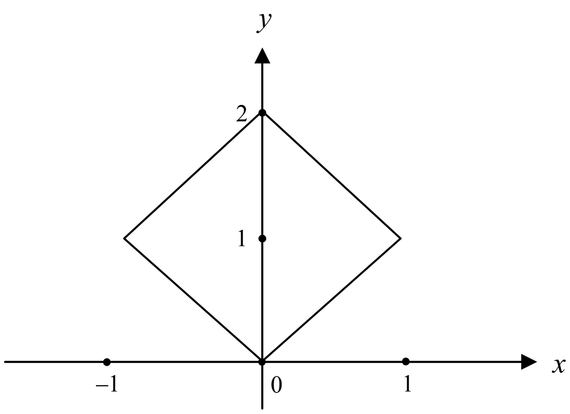
$$\text{Var}(Y)=E[\text{Var}(Y\mid X)]+\text{Var}(E[Y\mid X])=E[(X-1)\cdot\tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{2}{7}]+\text{Var}((X-1)\cdot\tfrac{5}{7})$$

$$=\tfrac{10}{49}(E[X]-1)+\tfrac{25}{49}\text{Var}(X)=\tfrac{10}{49}(\tfrac{15}{8}-1)+\tfrac{25}{49}\cdot\tfrac{105}{64}=1.015625$$

כאשר: $\text{Var}(X-1)=\text{Var}(X)=\frac{7}{15}\Big/\left(\frac{8}{15}\right)^{2}=\frac{7}{15}\cdot\left(\frac{15}{8}\right)^{2}=\frac{7\cdot 15}{64}=\frac{105}{64}$

שאלה 4

א. נצייר תחילה את התחום שבו פונקציית הצפיפות המשותפת הנתונה מקבלת ערכים חיוביים:



תחום ההגדרה של הפונקציה, כפי שהוא מוצג בבעיה הוא:

לכל $x\in(-1,0)$ וְ- $y\in(-x\,,x+2)$ ולכל $x\in(0,1)$ וְ- $y\in(\,x\,,2-x)$

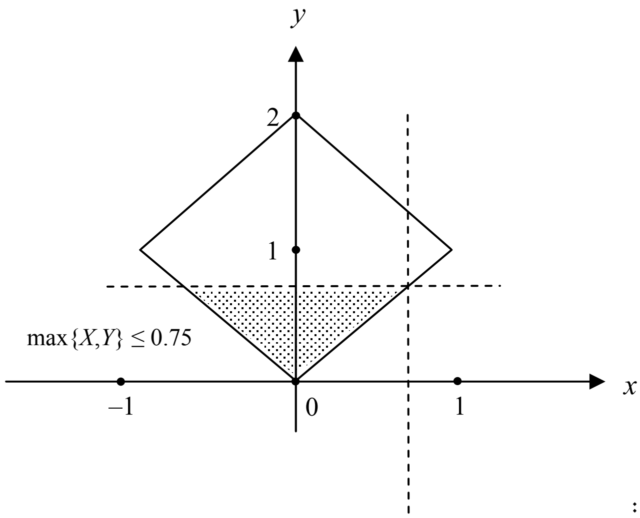
אולם אפשר להציגו גם כך :

לכל $y \in (0, 1)$ וְ- $x \in (-y , y)$ ולכל $y \in (1, 2)$ וְ - $x \in (y-2 , 2-y)$

הצגה השנייה תאפשר לנו לחשב את פונקציית הצפיפות השולית של Y.

נקבל :
$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{-y}^{y} \frac{3}{8}(x^2+ y^2)\,dx = \frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{-y}^{y} = y^3 & , \quad y \in (0,1) \\ \int_{y-2}^{2-y} \frac{3}{8}(x^2+ y^2)\,dx = \frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{y-2}^{2-y} = 1 + (1-y)^3 & , \quad y \in (1,2) \end{cases}$$

ב. באיור שלהלן מסומן בנקודות התחום שבו מתרחש המאורע $\{\max\{X,Y\} < 0.75\}$.



נחשב את הסתברותו :

$$P\{\max\{X,Y\} < 0.75\} = \int_0^{3/4}\int_{-y}^{y} \tfrac{3}{8}(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{3/4} \tfrac{3}{8}\left[\tfrac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{-y}^{y} dy = \int_0^{3/4} y^3 dy = \left[\tfrac{y^4}{4}\right]_0^{3/4} = 0.0791$$

ג. בהינתן שהמאורע $\{X \ge 0\}$ מתרחש, רק "החלק הימני" של הצפיפות המשותפת, כלומר, התחום מימין לציר ה-x שבו הצפיפות מקבלת ערכים חיוביים, נותר רלוונטי.

אם נתבונן בפונקציית הצפיפות הנתונה, נוכל לראות שערכיה סימטריים ביחס לציר ה-x, כלומר שמתקיים $f_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(-x,y)$, לכל $0 < x < 1$. לכן, מתקיים $P\{X \ge 0\} = P\{X \le 0\} = 0.5$, ובהינתן המידע ש- $X \ge 0$ ערכי פונקציית הצפיפות מימין לציר ה-x גדלים פי 2 וערכיה משמאל לציר ה-x מתאפסים.

לפיכך : $f_{X,Y|X\ge 0}(x,y \mid x \ge 0) = \frac{6}{8}(x^2+y^2) \quad , \quad 0 < x < 1 \;\; ; \;\; x < y < 2-x$

שאלה 5

א. לחישוב ההסתברות נניח שכל המסטיקים שונים זה מזה.

נשים לב שהמאורע $\{X = 10\}$ מתרחש אם ורק אם 20 ילדים מקבלים לפחות מסטיק אדום אחד. אבל, מכיוון שיש בסך-הכל 20 מסטיקים אדומים, כל אחד מהם חייב לקבל בדיוק מסטיק אדום אחד ומסטיק נוסף שאינו אדום.

לפיכך :
$$P\{X=10\}=\underbrace{\frac{\binom{30}{20}\cdot 20!\cdot\binom{40}{20}\cdot 20!\cdot\frac{20!}{2^{10}}}{\frac{60!}{2^{30}}}}_{\text{חישוב ישיר לפי חלוקה של המסטיקים לילדים. בוחרים 20 ילדים ונותנים להם מסטיק אדום אחד}}=\underbrace{\frac{\binom{30}{20}\cdot 20!\cdot 2^{20}\cdot 40!}{60!}}_{\text{חישוב לפי בעיה מקבילה שבה מסדרים את המסטיקים בשורה ודואגים שב-20 זוגות יהיה מסטיק אדום אחד}}=\underbrace{\frac{\binom{30}{20}\cdot 2^{20}}{\binom{60}{20}}}_{\text{חישוב לפי בעיה מקבילה שבה בוחרים 20 מקומות בשורה למסטיקים האדומים ודואגים שיהיה מקום אחד בכל אחד מ-20 זוגות נבחרים}}\cong 0.007516$$

ב. נגדיר :
$$X_i=\begin{cases}1 & , \text{ ילד } i \text{ לא קיבל מסטיק אדום}\\ 0 & , \text{ אחרת}\end{cases}\qquad \text{לכל } i=1,\ldots,30$$

ונקבל כי : $X=\sum_{i=1}^{30}X_i=$ מספר הילדים שלא קיבלו אף מסטיק אדום

עתה, לכל $i=1,\ldots,30$ מתקיים :
$$E[X_i]=P\{X_i=1\}=\frac{\binom{40}{2}}{\binom{60}{2}}=\frac{40\cdot 39}{60\cdot 59}=\frac{26}{59}=0.4407$$

לכן :
$$E[X]=\sum_{i=1}^{30}E[X_i]=30\cdot\frac{26}{59}=13.2203$$

ג. בסימוני הסעיף הקודם, נקבל כי :
$$\text{Var}(X_i)=P\{X_i=1\}P\{X_i=0\}=\frac{26}{59}\cdot\frac{33}{59}=\frac{858}{3{,}481}=0.2465$$

ולכל $1\le i\ne j\le 30$ מתקיים :
$$P\{X_i=1,X_j=1\}=\frac{\binom{40}{2}}{\binom{60}{2}}\cdot\frac{\binom{38}{2}}{\binom{58}{2}}=\frac{26}{59}\cdot\frac{703}{1{,}653}=\frac{18{,}278}{97{,}527}=0.1874$$
$$\text{Cov}(X_i,X_j)=\frac{18{,}278}{97{,}527}-\left(\frac{26}{59}\right)^2=\frac{-39{,}026}{5{,}754{,}093}=-0.006782$$

לכן :
$$\text{Var}(X)=\sum_{i=1}^{30}\text{Var}(X_i)+\sum_{i\ne j}\text{Cov}(X_i,X_j)=30\cdot\frac{858}{3{,}481}-30\cdot 29\cdot\frac{39{,}026}{5{,}754{,}093}=1.4938$$