מטלת מנחה (ממ״ן) 11

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית | **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרק 1

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 3** נקודות

סמסטר: 2010ב | **מועד אחרון להגשה:** יום ה׳ 18.3.2010

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת – גישה מדף הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

הערה כללית למטלות ובחינות במתמטיקה: יש להוכיח כל טענה גם אם זה לא נאמר בפירוש.
אפשר לוותר על הוכחה רק אם נאמר בפירוש בשאלה שלא נדרשת הוכחה.

שאלה 1 (15 נקודות)

שאלה זו נועדת לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות ולחדד כמה נקודות שכדאי להבינן בשלב מוקדם:

* ההבדל בין A לבין $\{A\}$ (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא A).

  * מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה $\varnothing$ לבין $\{\varnothing\}$.

* ההבדל בין "x איבר של y" לבין "x חלקי ל- y".

נתונות הקבוצות הבאות: $A = \{\mathbf{foo}\}$, $B = \{\varnothing, A\}$, $C = \{\varnothing, \mathbf{foo}\}$

(**foo** הוא עצם כלשהו שאינו קבוצה) . מצא אילו מהטענות הבאות נכונות.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק - די לתת את רשימת הסעיפים הנכונים.

א. $\varnothing \in A$ ב. $\varnothing \subseteq A$ ג. $A \in C$ ד. $\{\varnothing\} \in B$

ה. $P(A) = B$ ו. $A \subseteq B$ ז. $A \cap B = \varnothing$ ח. $A \subseteq C$

ט. $B = \{A\} \cup \{\varnothing\}$ י. $|A \cup B \cup C| = 3$

שאלה 2 (30 נקודות)

א! תהיינה A,B קבוצות כלשהן. הוכח: $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

נמק כל שלב בהוכחה על-סמך טענה מתאימה בספר.

לגבי **איחוד** לא מתקיימת טענה כללית הדומה לזו שבסעיף א׳:
ר׳ החוברת ״אוסף תרגילים פתורים״ עמ׳ 1 שאלה 2 .
בסעיפים הבאים נבדוק מתי בדיוק כן מתקיים שוויון כזה עבור איחוד .

ב. הוכח **שאם** $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$ **אז** $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

ג. הוכח את הכיוון ההפוך לטענה שבסעיף ב׳, כלומר הוכח

שאם $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ **אז** $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$.

הדרכה: נוח להוכיח סעיף זה בדרך השלילה. מהי בדיוק הנחת השלילה במקרה זה?

שאלה 3 (24 נקודות)

הוכח את הטענות הבאות בעזרת **"אלגברה של קבוצות"**: צא מאחד האגפים, פתח אותו בעזרת זהויות ידועות, והגע לאגף השני. אין להשתמש בהוכחה במושג "איבר". במקומות בהם מופיע הפרש קבוצות כדאי להיעזר בזהות $A - B = A \cap B'$ (עמ' 23 בספר הלימוד).

ציין את הזהויות עליהן אתה מסתמך בכל צעד.

א. $X \cap (Y - Z) = (X \cap Y) - (X \cap Z)$

ב. $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

ג. $A \oplus B = A' \oplus B'$ (הסימן $\oplus$ הוגדר בשאלה 1.22 בעמ' 27 בספר).

שאלה 4 (31 נקודות)

איחוד של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בהגדרה 1.6 בעמוד 12 בספר.

במלים פשוטות ההגדרה היא: $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ אםם x שייך **לפחות** לאחת הקבוצות A_i,

כאשר i מקבל ערכים ב- I.

חיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בעמוד 16 בספר.

במלים פשוטות ההגדרה היא: $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ אםם x שייך **לכל** הקבוצות A_i,

כאשר i מקבל ערכים ב- I.

השאלה שלפניך מתרגלת את השימוש בשני המושגים האלה.

N היא קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ (ר' עמ' 3 בספר הלימוד).

Z היא קבוצת המספרים השלמים: $\mathbf{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

לכל $n \in \mathbf{N}$, תהי $A_n = \{k \in \mathbf{Z} \mid -n \le k \le 2n\}$ ותהי $B_n = A_n'$ (המשלים ביחס ל- **Z**).

(3 נק') א. כמה איברים יש ב- A_n? (התשובה היא כמובן ביטוי התלוי ב- n).

(4 נק') ב. כמה איברים יש ב- $A_{20} \cup A_{50}$ וכמה איברים יש ב- $A_{20} \cap A_{50}$?

(8 נק') ג. חשב את $\bigcup_{1 \le n \in \mathbf{N}} A_n$ ואת $\bigcap_{1 \le n \in \mathbf{N}} A_n$.

(8 נק') ד. חשב את $\bigcup_{1 \le n \in \mathbf{N}} B_n$ ואת $\bigcap_{1 \le n \in \mathbf{N}} B_n$.

(8 נק') ה. נסח הכללה של חוקי דה-מורגן, עבור איחוד וחיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות, שכולן חלקיות לקבוצה אוניברסלית U: $(\bigcup_{i \in I} A_i)' = ?$, $(\bigcap_{i \in I} A_i)' = ?$.

הוכח באופן מילולי את החוקים האלה, מתוך ההגדרות המילוליות של איחוד וחיתוך כלליים שבראש השאלה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 2

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה: 3** נקודות

סמסטר: 2010ב **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 2.4.2010

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

"רלציה" בעברית: **יחס**. **סך הנקודות במטלה זו: 105. ציון מעל 100 ייחשב כ- 100.**

שאלה 1 (15 נקודות)

תהיינה B, A קבוצות לא-ריקות.

א. הוכח: אם $A \times B = A \times C$ ונתון $A \neq \emptyset$ אז $B = C$.

ב. הראה שאם נשמיט מסעיף א את התנאי $A \neq \emptyset$ נקבל טענה שאינה נכונה.

ג. תקן טעות קטנה בספר: באמצע עמ' 30 כתוב "ברור כי אם $A \neq B$ אז $A \times B \neq B \times A$".

הראה שטענה זו לא מדויקת. תקן אותה, והוכח במדויק את הטענה המתוקנת.

שאלה 2 (24 נקודות)

R הוא יחס מעל קבוצה A.

א! הראה ע"י דוגמא ש- RR^{-1} **אינו** שווה בהכרח ל- I_A.

ב. הוכח: RR^{-1} הוא יחס רפלקסיבי מעל A **אם ורק אם** $\mathrm{Domain}(R) = A$.

(תחום של יחס הוגדר בעמ' 35 בספר הלימוד).

ג. בהגדרת יחס סימטרי (הגדרה 2.11 בעמ' 49 בספר) יש בעצם שתי הגדרות: אחת "אלגברית" בעזרת היחס ההפוך, ואחת בעזרת איברי היחס. **הוכח באופן אלגברי**, בלי להשתמש כלל במושג "איבר", ש- RR^{-1} הוא תמיד יחס סימטרי מעל A.

ד! תן דוגמא לקבוצה A ויחס R מעל A, כך ש- $RR^{-1} = I_A$ אך $R^{-1}R \neq I_A$.

הדרכה: קח A אינסופית.

שאלה 3 (28 נקודות)

א. A היא קבוצה סופית בת k איברים. כמה יחסים שונים יש מעל A ?

ב. תן דוגמא לקבוצה **סופית** A וליחס R מעל A, המקיים: לכל $1 \le n$, $R^{n+1} \ne R^n$.
הוכח שהיחס שרשמת הוא אכן בעל תכונה זו .

ג. הוכח שלא קיימת קבוצה **סופית** A ויחס R מעל A, המקיים:
לכל $1 \le n$, ולכל i בתחום $1 \le i \le n$, $R^{n+1} \ne R^i$
(במלים: כל חזקה של R שונה מכל החזקות הקודמות לה).

ד. תן דוגמא לקבוצה **אינסופית** A ויחס R מעל A, המקיים:
כל חזקה של R שונה מכל החזקות הקודמות לה.

שאלה 4 (16 נקודות)

א. מהו הסגור הטרנזיטיבי של היחס R שהגדרת בסעיף ב של השאלה הקודמת ?
רשום אותו במפורש (רשום את כל הזוגות השייכים לו, אלא אם יש הרבה מאד כאלה).
הוכח.

ב. מהו הסגור הטרנזיטיבי של היחס R שהגדרת בסעיף ד של השאלה הקודמת ?
תאר את הסגור הטרנזיטיבי לא רק כאיחוד של יחסים אלא תן תיאור ברור שלו, בפני עצמו,
כלומר ציין בבירור מיהם האיברים שלו. הוכח.

שאלה 5 (22 נקודות)

א. יהי R יחס לא-ריק מעל קבוצה A. יהי S הסגור הסימטרי של R.
נניח ש- S הוא טרנזיטיבי.
הוכח שקיימת קבוצה **אחת ויחידה** B, המקיימת את התנאים הבאים:
$B \subseteq A$, $S \subseteq B \times B$, ו- S הוא **יחס שקילות** מעל B .
תאר את הקבוצה B בעזרת התחום והטווח של היחס המקורי R (עמ' 35 בספר).

ב. תהי $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.
יהי $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(1,2),(3,4),(4,5),(3,5)\}$.
נתייחס לסימונים בהם נעזרנו בסעיף א.
הראה ש- S הוא טרנזיטיבי. מצא את הקבוצה B .
רשום את **מחלקות השקילות** שיחס השקילות S מגדיר ב- B .

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 3

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2010ב **מועד אחרון להגשה:** יום א' 1.4.2010

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (27 נקודות)

$\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים, $\mathbf{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$.

$\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

א. תהי $f(x,y) = 3x+2y$, $f:\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$.

הוכח ש- f **אינה** חד-חד-ערכית , והוכח ש- f היא **על** .

ב. תהי $g(X) = X \oplus \mathbf{Z}$, $g:P(\mathbf{R})\to P(\mathbf{R})$.

הוכח: לכל $X \in P(\mathbf{R})$, $g(g(X)) = X$

הדרכה: ר' תכונות של הפרש סימטרי בעמ' 27 בכרך "תורת הקבוצות".

הוכחה אלגברית קצרה הרבה יותר במקרה זה מאשר הוכחה ע"י "יהי x איבר...".

ג. האם g היא חד-חד-ערכית? האם g היא על ?

שאלה 2 (28 נקודות)

נגדיר יחס E מעל $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ **:** שני איברים של $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ עומדים ביחס E זה לזה אם ורק אם הפונקציה f מסעיף א של השאלה הקודמת שולחת אותם לאותו איבר של $\mathbf{Z}$.

E הוא יחס שקילות: זה נובע מהסעיף "העתק טבעי" בעמ' 84 בספר. ראו הסבר מפורט יותר באתר הקורס, מאגר המשאבים, עזרים ללמידה - "יחס שקילות המושרה על-ידי פונקציה". השאלה מתייחסת ליחס השקילות הזה.

א. האם מספר מחלקות השקילות אליהן E מחלקת את $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ הוא סופי או אינסופי ? הוכח.

ב. הוכח שמחלקת השקילות שבה נמצא $(0,0)$ היא אינסופית, כלומר מכילה אינסוף איברים.

(המשך השאלה בעמ' הבא)

(המשך שאלה 2)

ג. יהי $(a,b) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ ויהי $(m,n) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

הוכח: אם (m,n) נמצא באותה מחלקת שקילות עם $(0,0)$,

אז $(a+m,\, b+n)$ נמצא באותה מחלקת שקילות עם (a,b).

ד. הוכח **שכל** מחלקות השקילות אליהן E מחלקת את $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ הן אינסופיות.

שאלה 3 (32 נקודות)

תהי F קבוצת כל הפונקציות של $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$. נגדיר יחס K מעל F:

עבור $f,g \in F$: $(f,g) \in K$ אםם **לכל** $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le g(n)$.

(6 נקי) א. הוכח ש- K הוא סדר-חלקי מעל F.

(4 נקי) ב. הוכח ש- K **אינו** סדר-מלא מעל F.

(6 נקי) ג. האם יש ב- F איברים מקסימליים לגבי היחס K?
האם יש איבר גדול ביותר? הוכח.

(6 נקי) ד. האם יש ב- F איברים מינימליים לגבי היחס K?
האם יש איבר קטן ביותר? הוכח.

(10 נקי) ה. הוכח שלכל $f \in F$ קיים $g \in F$ **שמכסה** את f (הגדרה 3.6 בעמ' 88 בספר).
הוכח שלכל $f \in F$ קיים יותר מ- g אחד כזה.

שאלה 4 (13 נקודות)

הוכח באינדוקציה: לכל n טבעי חיובי, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ge \sqrt{n}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 4

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2010ב **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 23.4.2010

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

חלק מהממ"ן מסתמך על החוברת "פרק 5" שנמצאת בידיכם.

חוברת זו משלימה את פרק 4 בתורת הקבוצות ומחליפה חלק ממנו.

שאלה 1 (24 נקודות)

א. הוכח שאם $|A-B|=|B-A|$ אז $|A|=|B|$.

הדרכה: לא נתון שהקבוצות סופיות, לכן יש לעבוד לפי הגדרת שוויון עוצמות:
מהנתון נובע שקיימת פונקציה חח"ע ועל מסוימת, ועלינו להראות שמכך נובע שקיימת פונקציה חח"ע ועל אחרת...

ב. הראה שאם A,B **סופיות** ו- $|A|=|B|$ אז $|A-B|=|B-A|$.

ג. הראה ע"י דוגמא שטענת סעיף ב אינה נכונה בהכרח עבור A,B שאינן סופיות.

שאלה 2 (24 נקודות)

א. תהי K קבוצת כל תת-הקבוצות **הסופיות** של $\mathbf{N}$: $K=\{A\in P(\mathbf{N}) \mid \text{היא קבוצה סופית } A\}$.

הוכח ש- K היא בת-מניה. אפשר להיעזר בחוברת "אוסף תרגילים פתורים" עמ' 8 שאלה 10ה, אבל שימו לב ששם מדובר על סדרות וכאן על קבוצות, לכן יש עוד מה להוכיח. דרך אפשרית היא להתאים לכל קבוצה - סדרה.

ב. בהינתן $A\in P(\mathbf{N})$, נאמר ש- A **קו-סופית** (*co-finite*) ב- $\mathbf{N}$,
אם A' (המשלימה של A ב- $\mathbf{N}$) היא קבוצה סופית.

הערה: מובן שאם A קו-סופית ב- $\mathbf{N}$ אז A אינסופית (מדוע?),
אבל לא כל קבוצה אינסופית של טבעיים היא קו-סופית ב- $\mathbf{N}$ (למשל?) .

תהי L קבוצת כל התת-קבוצות הקו-סופיות ב- $\mathbf{N}$: $L=\{A\in P(\mathbf{N}) \mid \text{קו-סופית ב- } \mathbf{N} \ A\}$.

הוכח ש- L היא בת-מניה.

שאלה 3 (24 נקודות)

א. תהי M קבוצת כל התת-קבוצות של $\mathbf{N}$ אשר הן ומשלימותיהן **אינסופיות**:

$M = \{A \in P(\mathbf{N}) \mid$ שתיהן אינסופיות A' -ו $A\}$.

הוכח ש- M **אינה** בת-מניה. עליך להוכיח זאת בעזרת סעיף 4.1.1 בספר ובעזרת העובדה ש- $P(\mathbf{N})$ אינה בת-מנייה. אין להסתמך על טענות אחרות מפרק 5.

כדאי להיעזר בשאלה 2 כאן.

ב. מצא בעזרת פרק 5 את עוצמת M . שימוש במשפט מתאים ייתן הוכחה קצרה מאד.

שאלה 4 (28 נקודות)

(12 נק') א. יהיו k_1, k_2, m_1, m_2 עוצמות.

הוכח שאם $k_1 \le k_2$ -ו $m_1 \le m_2$ אז $k_1 \cdot m_1 \le k_2 \cdot m_2$.

(8 נק') ב. הוכח: $\aleph_0 \cdot C = C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם).

(8 נק') ג. הוכח: $C^C = 2^C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם ובמשפטים שבחוברת).

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 1-2

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2010ב **מועד אחרון להגשה:** יום א' 2.5.2010

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (28 נקודות)

לקורס במדעי המחשב רשומים בקבוצה מסוימת 12 תלמידים. במהלך הקורס יש להגיש עבודה אחת בצוותים. בכל סעיף מצא בכמה דרכים יכולים התלמידים להתחלק לצוותים.
יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

א. יש בדיוק 3 תלמידים בכל צוות.

ב. יש בדיוק 3 תלמידים בכל צוות, ותלמידים א, ב, ג חייבים להיות באותו צוות.

ג. יש בדיוק 3 תלמידים בכל צוות, ותלמידים א, ב חייבים להיות באותו צוות.

ד. יש בדיוק 3 תלמידים בכל צוות, ואף זוג מבין שלושת התלמידים א, ב, ג אינו יכול להיות באותו צוות (אסור גם ששלושתם יהיו באותו צוות).

ה. בצוות יכולים להיות 2 או 3 תלמידים.

ו. יש בדיוק 3 תלמידים בכל צוות, וכל צוות מקבל **עבודה שונה** להגיש.

ז. יש בדיוק 3 תלמידים בכל צוות, אותה עבודה לכל הצוותים, אבל בכל צוות יש ראש צוות.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי A קבוצה סופית בת n איברים, B קבוצה סופית בת k איברים.

א. כמה תת-קבוצות בגודל k יש ל- A ?

ב. כמה פונקציות של A ל- B קיימות ?

ג. כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של A ל- B קיימות ?

ד. כמה פונקציות של A **<u>על</u>** A קיימות ?

במידת הצורך, הפרידו בין המצב בו k גדול מ- n למצב בו k קטן מ- n, והמצב בו הם שווים.

שאלה 3 (28 נקודות)

4 משפחות יצאו יחד למנגל.

הם הכינו 7 סטֵייקים **זהים**, 10 שיפודי פרגיות **זהים** ו- 4 דגי אמנון **זהים**.

המשפחות **אינן** נחשבות זהות.

בנוסף, סטייק אינו זהה לשיפוד. אם יש למישהו ספק : תרנגולות, פרות וכבשים אינם דגים.

א. בכמה דרכים ניתן לחלק את 7 הסטייקים בין המשפחות?
(ייתכן שמשפחה לא רוצה סטייק בכלל).

ב. בכמה דרכים ניתן לחלק את **כל האוכל** בין המשפחות?
(ייתכן שמשפחה לא רוצה אוכל בכלל).

ג. בכמה דרכים ניתן לחלק רק את 10 השיפודים בין המשפחות,
אם משפחת כהן חייבת לקבל לפחות 3 שיפודים, וכל משפחה אחרת חייבת לקבל שיפוד אחד לפחות?

ד. בכמה דרכים ניתן לחלק את **כל האוכל** בין המשפחות, אם כל משפחה חייבת לקבל לפחות שיפוד אחד ולפחות סטייק אחד ?

יש להגיע לתשובות מספריות.

שאלה 4 (24 נקודות)

(5 נק׳) א. מהו מספר הפתרונות בטבעיים של $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$?

(7 נק׳) ב. מהו מספר הפתרונות בטבעיים **גדולים מאפס** של $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$?

(12 נק׳) ג. מהו מספר הפתרונות בטבעיים של $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 22$,
כאשר שניים מהמשתנים (לא נתון איזה) חייבים להיות שווים 1 , ושאר המשתנים הם מספרים **זוגיים** ?

תזכורת : בקורס שלנו אפס הוא מספר טבעי.

מספר טבעי זוגי הוא מהצורה $2z$, כאשר z טבעי כלשהו.

מספר טבעי אי-זוגי הוא מהצורה $2z+1$, כאשר z טבעי כלשהו.

יש להגיע לתשובות מספריות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 3,4,5

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3** נקודות

סמסטר: 2010ב **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 14.5.2010

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

א. יהיו m,n טבעיים חיוביים. הוכיחו:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-1}{k}=\sum_{k=1}^{m}\binom{n+k-1}{k}$$

כדאי להיעזר בשאלה 3.17 בספר.

ב. פשטו את הסכום $\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n+1}\binom{m}{n}$. קבלו ביטוי התלוי ב- m, שאינו מכיל סכומים.

במהלך הפתרון סביר שתזדקקו לפעולה מקובלת הקרויה **החלפת משתנה הסכימה**. דוגמא:

בביטוי $\sum_{i=5}^{10}a_{i-3}$ נעבור למשתנה $j=i-3$ ונקבל שניתן לרשום את הסכום גם כך: $\sum_{j=2}^{7}a_j$.

שימו לב להחלפת הערכים הן בתוך הסכום והן בגבולות הסכימה.

שאלה 2

מצאו מהו מספר פתרונות המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ בטבעיים,

כאשר $x_1\neq 5$, $x_2\neq 5$, $x_3\neq 8$, $x_4\neq 8$.

0 הוא מספר טבעי. **יש להגיע לתשובה מספרית.**

שאלה 3

בהמשך לשאלה 3 בממ"ן 15:

בכמה דרכים ניתן לחלק את כל האוכל בין המשפחות, אם כל משפחה חייבת לקבל **משהו** (שיפוד או סטייק או דג אחד לפחות). הדרכה: הכלה והפרדה.

שאלה 4

מעין המשך לשאלה 1 בממ"ן 15:

בקבוצת מעבדה בקורס יש 50 תלמידים. המדריך ביקש שהכנת העבודה הראשונה תהיה בצוותים, ויהיו לא יותר מ- 6 צוותים. ברגע של בלבול, הוא לא הגביל את גודלו של צוות. למשל, אפשר שיהיה צוות אחד של 45 תלמידים ועוד 5 "צוותים" שבכל אחד מהם תלמיד בודד. לגבי העבודה השנייה בקורס, המדריך אמר שהפעם יכולים להיות עד 8 צוותים. גם הפעם הוא לא הגביל את גודלו של צוות, אבל דרש שהצוותים בשתי העבודות יהיו שונים לגמרי: **כל** שני תלמידים שהיו באותו צוות בעבודה הראשונה, חייבים להיות בצוותים שונים (כלומר **לא** להיות יחד בצוות) בעבודה השנייה.

הוכח שלא ניתן לקיים את דרישותיו של המדריך המבולבל. **הדרכה**: עקרון שובך היונים.

מטלת מנחה (ממ"ן) 17

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה - פרקים 6 - 7

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2010ב **מועד אחרון להגשה:** יום א' 23.5.2010

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

יהי a_n מספר הסדרות באורך n, שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0,1,2\}$,
ואין בהן הופעות צמודות של 1, אין הופעות צמודות של 2, ואין הופעה של 2 מיד לפני או אחרי 1.
בקיצור: אין הופעות של אף אחד מארבעת הרצפים האלה: 11, 22, 12, 21.
דוגמא לסדרה **מותרת** באורך 6: 100201.
דוגמאות לסדרות **אסורות** באורך 6: 100210 (יש הופעה של 21), 110200 (יש הופעה של 11).

(10 נק') א. רשמי בעזרת חישוב ישיר את a_0, a_1, a_2. רשמי יחס נסיגה עבור a_n.
בדקי שהערכים שרשמת עבור a_0, a_1, a_2 מתאימים ליחס הנסיגה.

(15 נק') ב. פתרי את יחס הנסיגה וקבלי נוסחה מפורשת עבור a_n.
בדקי את הנוסחה שקיבלת ע"י השוואה עם הערך של a_2 שקיבלת בסעיף א.

המשך המטלה עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בעמוד הבא רשימה של נוסחאות שימושיות.

שאלה 2

תהי $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, ותהי $g(x)=\frac{f(x)}{1-x}=\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$.

א. הבע את b_n (לכל n טבעי) בעזרת ה-a_i-ים.

ב. הבע את a_n (לכל n טבעי) בעזרת ה-b_i-ים.

שאלה 3

במחסן של חנות מחשבים נמצאים n מחשבים ישנים **זהים**. בעלי החנות מעמיסים את המחשבים הישנים על 3 רכבים **שונים** (הרכב של איציק, הרכב של בני והרכב של גילה), שבכל אחד מהם יש מקום ל- 24 מחשבים לכל היותר.

(9 נק׳) א. רשום פונקציה יוצרת עבור מספר הדרכים לחלק את n המחשבים הזהים בין 3 הרכבים השונים (לא חייבים לנצל את כל הרכבים).

(16 נק׳) ב. אם מספר המחשבים הוא 70, חשב בעזרת סעיף א׳ או בדרך אחרת את מספר הדרכים לחלק את המחשבים בין הרכבים. תן תשובה סופית מספרית.

שאלה 4

פתח לטורים את שני אגפי הזהות $(1+x)^n = (1+x)^{2n} \cdot \left(\frac{1}{1+x}\right)^n$

וקבל ע״י השוואת המקדמים בשני האגפים זהות מהצורה:

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i D(?\ ,\ ?)\binom{?}{?} = \binom{n}{k}$$

בדוק את הזהות שקיבלת עבור המקרה $n=4$, $k=3$.

להלן סיכום כמה נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות:

(i)! סכום טור הנדסי סופי: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ואינסופי: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

(ii)! כפל פונקציות יוצרות:

אם $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, ו- $f(x)\cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

אז $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד).

(iii)! $\sum_{k=0}^{\infty} D(n,k)x^k = (1+x+x^2+\ldots)^n = \frac{1}{(1-x)^n}$.

במלים אחרות: המקדם של x^k בפיתוח הביטוי $\frac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$.

(ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ׳ 129 בספר).

מטלת מנחה (ממ"ן) 18

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית **חומר הלימוד למטלה**: לוגיקה פרקים 1-2

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2010ב **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 4.6.2010

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (27 נקודות)

נגדיר פונקציה f מקבוצת הפסוקים בשפה הפורמלית של תחשיב הפסוקים אל $\mathbf{N}$.

ההגדרה - ברקורסיה על בניית פסוק:

(i) עבור פסוק יסודי P, $f[P]=0$. *(ii)* לכל פסוק α, $f[\sim(\alpha)]=f[\alpha]+1$.

(iii) לכל שני פסוקים α,β $f[(\alpha)\to(\beta)]=1+\max\{f[\alpha],f[\beta]\}$.

א. חשב את $f[\varphi]$ כאשר φ הוא הפסוק המתואר בעץ שבראש עמוד 45 בספר הלימוד.

ב. יהי φ פסוק כלשהו. הסבר במלים איזה גודל המתייחס לענפים (צלעות) של עץ הבנייה של φ מתארת $f[\varphi]$. במלים אחרות, אם נתון לך רק "שלד" עץ הבניה של φ, בלי לדעת מהו φ ובלי לדעת מהם הפסוקים היושבים בצמתים של העץ, האם תוכל לומר מהו $f[\varphi]$?

ג. יהי φ פסוק כלשהו. לכל הופעה של פסוק יסודי P_i ב- φ נייחס מספר טבעי, שייקרא **העומק** של אותה הופעה: הוא יוגדר פשוט להיות משקלו של הסוגר השמאלי שמיד משמאל לאותה הופעה של P_i (משקל של סוגר בפסוק מוגדר בעמ' 42 בספר הלימוד). אם φ עצמו הוא פסוק יסודי, נאמר שהעומק של הופעתו ב- φ הוא 0. הוכח **באינדוקציה על בניית פסוק**, כי $f[\varphi]$ שהוגדרה בתחילת השאלה שווה לעומק **הגדול ביותר** של פסוק יסודי המופיע ב- φ.

ניתן להיעזר בעובדה, ששתי פונקציות שיש להן אותו תיאור רקורסיבי, כולל תנאי התחלה זהים - מתלכדות. דוגמאות להוכחות באינדוקציה על בניית פסוק ר' בעמ' 38-39 בספר.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתבונן בלוח האמת שבעמ' 17 בספר. הפסוק המופיע שם אמיתי רק בשורה השלישית של הלוח.

א. מצא פסוק שאמיתי בשורה השנייה, הרביעית, השביעית והשמינית של הלוח, ורק בהן.

ב. כתוב את הפסוק שמצאת בצורה קוניונקטיבית נורמלית (ר' עמ' 61 – 62 בספר).

בשני הסעיפים מותר כתיב מקוצר לפסוקים.

שאלה 3 (25 נקודות)

יהיו A,B,C,D פסוקים **יסודיים**. יהיו :

$\varphi_1 = (A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$

$\varphi_2 = (A \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow D) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow D)$

$\varphi_3 = (A \rightarrow (C \wedge D)) \vee (B \rightarrow (C \wedge D))$

$\varphi_4 = ((\sim C) \vee (\sim D)) \rightarrow ((\sim A) \wedge (\sim B))$ $\quad$ $\varphi_5 = ((A \vee B) \rightarrow C) \wedge ((A \vee B) \rightarrow D)$

לכל אחת מהטענות א' – ה' שלהלן, קבע אם היא נכונה.

אם כן – הוכח, אם לא – תן אינטרפרטציה המראה זאת!

כדי להוכיח טענה אמיתית, אפשר להשתמש בלוחות אמת, ואפשר בדרכים אחרות :

אפשר להיעזר בשקילויות כגון אלו שבעמ' 29 בספר (הפסוקים המופיעים שם אינם בהכרח יסודיים). אפשר לקבל שקילויות נוספות מתוך טאוטולוגיות , כגון אלו שבשאלות 1.10 ואילך .

כדי לקבל שקילות מתוך טאוטולוגיה, היעזרו בשאלה 1.27 שבעמ' 29 בספר !

אפשר גם להיעזר בעובדה השימושית הבאה, שנובעת מלוח האמת של "חץ" : פסוק מהצורה $\alpha \rightarrow \beta$ מקבל ערך F באינטרפרטציה כלשהי **אםם** α מקבל בה T ו- β מקבל בה F .

א. $\varphi_1 \models \varphi_3$ $\quad$ ב. $\varphi_3 \models \varphi_1$ $\quad$ ג. $\varphi_1 \equiv \varphi_5$

ד. $\varphi_2 \equiv \varphi_3$ $\quad$ ה. $\varphi_1 \equiv \varphi_4$

שאלה 4 (28 נקודות)

קבוצת פסוקים היא **עקבית** אם **קיימת** אינטרפרטציה שבה כל פסוקי הקבוצה מקבלים ערך T.

למשל, אם A_1 , A_2 הם פסוקים יסודיים, אז הקבוצה $\Gamma = \{A_1 \rightarrow A_2 \ , \ \sim A_2\}$ היא עקבית, כי באינטרפרטציה $J(A_1) = J(A_2) = \mathrm{F}$, כל הפסוקים ב- Γ אמיתיים.

Γ יכולה בהחלט להיות אינסופית.

א. האם קבוצת כל הפסוקים היסודיים היא עקבית? הוכח.

ב. האם קבוצת כל הפסוקים היא עקבית? הוכח.

ג. הוכח שקבוצת כל הפסוקים שמופיעים בהם **רק קשרים לוגיים מתוך אלה** : $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
(קשר השלילה לא מופיע) היא עקבית.

ד. תהי Γ קבוצת פסוקים. נסמן ב- Γ^* את קבוצת כל השלילות של אברי Γ :

$\Gamma^* = \{\sim (\psi) \ | \ \psi \in \Gamma\}$.

הוכח או הפרך : לכל קבוצת פסוקים Γ , או ש- Γ עקבית או ש- Γ^* עקבית.

ניקוד : סעיף ג : 10 נקודות. כל אחד מהסעיפים האחרים : 6 נקודות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 19

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית **חומר הלימוד למטלה**: לוגיקה פרק 3.1-3.10

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3** נקודות

סמסטר: 2010ב **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 18.6.2010

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (24 נקודות)

קבע לכל אחד מהביטויים הבאים אם הוא שם-עצם, תבנית אטומית, תבנית שאינה אטומית, פסוק, או שאינו עונה על אף אחת מהגדרות אלו. כתיב מקוצר - מותר. שים לב שביטוי יכול להתאים ליותר מהגדרה אחת: פסוק יכול להיות תבנית אטומית או תבנית לא אטומית.
לגבי ביטויים **שאינם** עונים על אף אחת מההגדרות, הסבר בקצרה מה הבעיה בכל אחד מהם.
בשאר המקרים אין צורך לנמק.

א. $f_1^1(f_1^3(x_1,a_1,x_1))$ ב. $(f_1^1(x_1)) \to (f_1^1(a_1))$ ג. $\exists x_1 A_1^2(x_1,a_8)$

ד. $\forall x_1 \exists x_2 f_1^2(x_1,x_2)$ ה. $A_2^2(x_1,f_1^2(x_1,f_1^1(x_1)))$ ו. $\forall x_1 \exists x_2(A_1^2(a_1,x_2) \vee A_1^1(x_1))$

שאלה 2 (26 נקודות)

תהי L שפה חלקית לשפת תחשיב הפרדיקטים, ובה סימנים אלה: קשרים לוגיים, סוגרים, סימני משתנים $x_1,x_2,\ldots$, סימן פרדיקט דו-מקומי R, סימן פרדיקט דו-מקומי A_1^2 המתפרש כרגיל **כשוויון** וסימני הכמתים $\forall,\exists$. אין סימני פונקציות או פרדיקטים נוספים ואין סימני קבועים אישיים.

א. רשום 4 פסוקים, $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4$ בשפה זו, כך שהפסוק $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3 \wedge \psi_4$ מביע את הטענה ש- R הוא יחס **סדר-מלא** ("תורת הקבוצות" עמ' 87) מעל עולם האינטרפרטציה.

ב. נוסיף לשפה סימן קבוע a_1. לשפה החדשה נקרא $L \cup \{a_1\}$.
רשום פסוק בשפה זו, אשר בנוכחות $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3 \wedge \psi_4$ יביע את הטענה ש-a_1 הוא האיבר **הקטן ביותר** לגבי הסדר המלא R.

שאלה 3 (25 נקודות)

נתבונן בשפה של תחשיב הפרדיקטים, שבה סימני משתנים x,y,z, סימני קבועים a,b, סימני פונקציות f,m, סימן פרדיקט חד-מקומי C וסימן פרדיקט דו-מקומי S (הבחירה באותיות אלו היא בשל הפירוש שיוגדר מיד). בשפה נמצאים כרגיל גם הקשרים הלוגיים: $\sim,\leftrightarrow,\to,\vee,\wedge$, הכמתים $\forall,\exists$, סימני הסוגריים, והסימן " , " (פסיק).

פרט לסימנים הללו אין עוד סימנים בשפה. (המשך השאלה בעמ' הבא)

תהי J אינטרפרטציה של השפה הנ"ל, שתחומה הוא קבוצת בני האדם, ובה a מתפרש כאדם מסוים ויחיד בעולם ששמו אברהם, b מתפרש כאישה מסוימת ויחידה בעולם ששמה בלהה,

הסימן f מתפרש כפונקציה המתאימה לכל אדם את אביו,

הסימן m מתפרש כפונקציה המתאימה לכל אדם את אימו.

$C(x)$ מתפרש כתכונה "x אוהב אוכל סיני",

$S(x,y)$ מתפרש כ- "x הוא אח או אחות של y".

בכל סעיף, רשום תבנית בשפה הנ"ל, שהפירוש שלה ב- J מביע את מה שנאמר באותו סעיף.

(2 נק') **א.** אברהם ובלהה הם אחים. (3 נק') **ב.** אברהם ובלהה אוהבים אוכל סיני.

(4 נק') **ג.** אבא של בלהה לא אוהב אוכל סיני. (4 נק') **ד.** לא כל בני האדם אוהבים אוכל סיני.

(4 נק') **ה.** יש לאברהם אח או אחות שאוהב/ת אוכל סיני.

(4 נק') **ו.** יש לאברהם בן-דוד (*cousin*), מצד אימו של אברהם.

הבהרה: "בן-דוד" יכול להיות גם בת-דוד, בן-דודה, או בת-דודה.

(4 נק') **ז.** כל מי שאוהב אוכל סיני - לפחות אחד מהוריו אוהב אוכל סיני.

אין להוסיף סימנים לשפה - יש להביע את המבוקש בעזרת הסימנים הנתונים !

בפרט, **סימן השוויון אינו נמצא בשפה**. **בשאלה זו אין צורך לנמק.**

שאלה 4 (25 נקודות)

תהי L שפה חלקית לשפת תחשיב הפרדיקטים, ובה בין השאר סימני משתנים x,y , וסימן פרדיקט דו-מקומי R .

תהי J_1 אינטרפרטציה של L , שתחומה הוא קבוצת המספרים הטבעיים (כולל 0),

ו- $R(x,y)$ מתפרש ב- J_1 כ- $x \le y$.

נתבונן ב- 4 הפסוקים הבאים:

(*i*) $\forall x \exists y R(x,y)$ (*ii*) $\exists y \forall x R(x,y)$ (*iii*) $\forall y \exists x R(x,y)$ (*iv*) $\exists x \forall y R(x,y)$

(6 נק') א. לכל אחד מ- 4 הפסוקים הנ"ל, קבע אם הוא אמיתי ב- J_1 או שקרי ב- J_1 .

אין צורך לנמק.

(6 נק') ב. חזור על סעיף א עבור אינטרפרטציה J_2 , שיש לה אותו תחום כמו J_1 ,

אך $R(x,y)$ מתפרש ב- J_2 כ- $x < y$ (קטן ממש). **אין צורך לנמק**.

(6 נק') ג. חזור על סעיף א עבור אינטרפרטציה J_3 , שיש לה אותו תחום כמו J_1 ,

אך R מתפרש ב- J_3 כשוויון. **אין צורך לנמק**.

(7 נק') ד. הוכח שאף אחד מארבעת הפסוקים הנתונים **אינו שקול לוגית** לאף אחד אחר מהם (יש כאן 6 טענות להראות).

אפשר להיעזר בסעיפים הקודמים.