מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 3

מספר השאלות: 4   **משקל המטלה: 3** נקודות

סמסטר: 2008א   **מועד אחרון להגשה:** יום ב' 5.11.07

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (30 נקודות)

$\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים, $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

$\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

א. תהי $f(x, y) = 3x + 2y$, $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$.

הוכח ש- f **אינה** חד-חד-ערכית , והוכח ש- f היא **על** .

ב. תהי $g(X) = X \oplus \mathbf{Z}$, $g : P(\mathbf{R}) \to P(\mathbf{R})$.

הוכח: לכל $X \in P(\mathbf{R})$, $g(g(X)) = X$

הדרכה: ר' תכונות של הפרש סימטרי בעמ' 27 בכרך "תורת הקבוצות".

הוכחה אלגברית קצרה הרבה יותר במקרה זה מאשר הוכחה ע"י "יהי x איבר...".

ג. האם g היא חד-חד-ערכית? האם g היא על ?

שאלה 2 (32 נקודות)

נגדיר יחס E מעל $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$: שני איברים של $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ עומדים ביחס E זה לזה אם ורק אם הפונקציה f מסעיף א של השאלה הקודמת שולחת אותם לאותו איבר של $\mathbf{Z}$.

E הוא יחס שקילות: זה נובע מהסעיף "העתק טבעי" בעמ' 84 בספר. ראו הסבר מפורט יותר באתר הקורס, מאגר המשאבים, עזרים ללמידה - "יחס שקילות המושרה על-ידי פונקציה".

השאלה מתייחסת ליחס השקילות הזה. (המשך השאלה בעמ' הבא)

(המשך שאלה 2)

א. האם מספר מחלקות השקילות אליהן E מחלקת את $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ הוא סופי או אינסופי ?

ב. הוכח שמחלקת השקילות שבה נמצא $(0,0)$ היא אינסופית, כלומר מכילה אינסוף איברים.

ג. יהי $(a,b)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ ויהי $(m,n)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.
הוכח: אם (m,n) נמצא באותה מחלקת שקילות עם $(0,0)$,
אז $(a+m,\, b+n)$ נמצא באותה מחלקת שקילות עם (a,b).

ד. הוכח **שכל** מחלקות השקילות אליהן E מחלקת את $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ הן אינסופיות.

שאלה 3 (28 נקודות)

בשאלה 3.25א בעמ' 94 בספר מוכח שיחס ההכלה $\subseteq$ הוא סדר-חלקי מעל כל קבוצה של קבוצות.

א. תהי A קבוצה לא ריקה, ותהי K קבוצת כל יחסי השקילות מעל A.
לפי האמור בתחילת השאלה, K סדורה בסדר-חלקי לגבי הכלה (אברי K הם קבוצות, כי יחס מעל קבוצה גם הוא קבוצה: קבוצה של זוגות סדורים). הראה שיש ב- K איבר קטן ביותר ואיבר גדול ביותר ("תורת הקבוצות" עמ' 93). מיהם?
הוכח שהאיברים שאתה מציין אכן שייכים ל- K.

ב. תהי M קבוצת כל היחסים **הסופיים** מעל $\mathbf{N}$, פרט ליחס הריק (יחס סופי: יחס שהוא קבוצה סופית, כלומר שיש בו מספר סופי של זוגות סדורים. בקבוצה M שהוגדרה כאן נמצאים כל היחסים הסופיים מעל $\mathbf{N}$, חוץ מהיחס הריק).
לפי האמור בתחילת השאלה, M סדורה בסדר-חלקי לגבי הכלה.
(*i*) האם יש ב- M איבר קטן ביותר? איבר גדול ביותר? אם כן, מיהם ?
(*ii*) אם לא מצאת איבר קטן ביותר, האם יש איברים מינימליים? אם כן, ציין מיהם והסבר מדוע הם אינם קטנים ביותר. אם אין איברים מינימליים, הסבר מדוע אין.
(*iii*) אם לא מצאת איבר גדול ביותר, האם יש איברים מקסימליים? אם כן, ציין מיהם והסבר מדוע הם אינם גדולים ביותר. אם אין איברים מקסימליים, הסבר מדוע אין.

שאלה 4 (10 נקודות)

הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי, 3^n+7^n-2 מתחלק ב- 8 .