תקציר פתרון בחינה e3 סמסטר 2013ב

שאלה 1

א. [5] .

ב. [1].

ג. [2] . מספר הקשתות הוא חצי מסכום הדרגות.

שאלה 2

א. היחס הריק הוא אנטי-סימטרי.

ב. למשל $\{(x,y)\in A\times A \mid x\le y\}$. הוא מקסימלי כי לא ניתן להוסיף אף זוג בלי לקלקל את האנטי-סימטריות.

ג. די להראות שיש יותר ממקסימלי אחד. דוגמא יכולה להיות וריאציה קטנה על היחס של סעיף ב, או היחס $\{(x,y)\in A\times A \mid x\ge y\}$, או משהו אחר.

שאלה 3

$|U| = D(5,10)$.

$|A_i| = D(4,7)$

$|A_i \cap A_j| = D(3,4)$

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = D(2,1)$

שאלה 4

א. נבדוק כיצד בנויה סדרה באורך n המקיימת את הנדרש.

נתבונן באיבר האחרון של הסדרה:

* אם הוא אי-זוגי (4 אפשרויות), אז קטע הסדרה הקודם לו הוא **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-1$ (a_{n-1} אפשרויות).
* אם הוא זוגי (4 אפשרויות) אז לפניו בא מספר אי-זוגי (4 אפשרויות), ולפניו **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-2$ (a_{n-2} אפשרויות).

קיבלנו: $a_n = 4a_{n-1} + 16a_{n-2}$.

תנאי התחלה:

$a_0 = 1$ (הסדרה הריקה מקיימת את התנאים! נוח להיעזר ב- a_0 לסעיף ב),

$a_1 = 8$,

$a_2 = 8^2 - 4^2 = 48$ (כל הזוגות פחות זוגות של מספרים זוגיים),

לבדיקה, מיחס הנסיגה: $a_2 = 4a_1 + 16a_0 = 4\cdot 8 + 16 = 48$.

ב. המשוואה האפיינית: $\lambda^2 - 4\lambda - 16 = 0$. פתרונותיה: $2 \pm 2\sqrt{5}$.

לפיכך $a_n = A\cdot(2+2\sqrt{5})^n + B\cdot(2-2\sqrt{5})^n$.

בהצבת תנאי ההתחלה נקבל לאחר קצת סידור: $A+B=1$, $(A+B)+\sqrt{5}(A-B)=4$.

נציב את המשוואה הראשונה בשנייה: $(A-B) = 3/\sqrt{5} = 3\sqrt{5}/5$.

נחבר ונחסר משוואה זו מהמשוואה $A+B=1$ ונקבל:

$$A = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \quad , \quad B = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \; .$$

כלומר

$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\cdot(2+2\sqrt{5})^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\cdot(2-2\sqrt{5})^n$$

אם רוצים, אפשר לרשום זאת גם כך:

$$a_n = \left((1+\frac{3}{\sqrt{5}})\cdot(1+\sqrt{5})^n + (1-\frac{3}{\sqrt{5}})\cdot(1-\sqrt{5})^n\right)\cdot 2^{n-1}$$

שאלה 5

א. בין כל שני צמתים שאינם שכנים יש מסלול באורך 2 .

ב. הסכומים השונים האפשריים הם: 2,3,4,5,6 .

מספר הצמתים מכל סוג הוא, בהתאמה: 1,2,3,2,1 .

הדרגות הן, בהתאמה: 8,7,6,7,8 .

ג. $(1\cdot 8 + 2\cdot 7 + 3\cdot 6 + 2\cdot 7 + 1\cdot 8)/2 = 62/2 = 31$

ד. יש ארבעה צמתים בעלי דרגה אי-זוגית: $(2,3)$, $(3,2)$, $(1,2)$, $(2,1)$.