פתרונות לממ"ח 02 - 2020א - 20425

1. מספר הבנות בחמשת המקומות הראשונים בשורה הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N = 20$, $m = 7$ ו- $n = 5$.

לפיכך:
$$P\{X = i\} = \frac{\binom{7}{i}\binom{13}{5-i}}{\binom{20}{5}} \qquad , \qquad i = 0,1,...,5$$

2. כאשר מתרחש המאורע $\{Y = j\}$, יש בשורה בת במקום j ויתר הבנות נמצאות אחריה, כלומר, ב-6 מקומות מתוך מקומות $j + 1$ עד 20. לפיכך, אם נתייחס לבחירת המקומות של הבנות, נקבל כי:
$$P\{Y = j\} = \frac{\binom{20-j}{6}}{\binom{20}{7}} \qquad , \qquad i = 1,2,...,14$$

3. **דרך I**

נסדר את 13 הבנים בשורה (!13 אפשרויות). נבחר 4 מקומות מתוך המרווחים שבין הבנים ומצד שמאל של השורה ($\binom{13}{4} = 715$ אפשרויות). ב- 4 מקומות אלו תהיה לפחות בת אחת. נותר לקבוע עוד 3 מקומות לבנות. מקומות אלו יכולים להיות ב- 4 המרווחים שכבר נבחרו ובצד הימני של השורה. כלומר, יש לפזר 3 בנות ב- 5 תאים ($\binom{7}{3} = 35$ אפשרויות). לאחר שנקבעו 7 מקומות לבנות, נסדר אותן במקומות אלו (!7 אפשרויות).

נקבל:
$$P\{W = 4\} = \frac{13! \cdot 715 \cdot 35 \cdot 7!}{20!} = 0.323$$

דרך II

נבחר 4 בנות ($\binom{7}{4} = 35$ אפשרויות), "נצמיד" לכל אחת מהן בן שיהיה לימינה ($13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 17{,}160$ אפשרויות) ונסדר את 4 הצמדים (!4 אפשרויות). אחר-כך, נסדר את שלוש הבנות הנותרות במקומות שלשמאל הבנות שבזוגות או בצד ימין של השורה ($5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ אפשרויות). נשים לב, שבכל פעם שממקמים בת, נוצר עוד מקום אפשרי לבת הבאה – מימין לבת שמוקמה אחרונה. בסופו של דבר נסדר בין הצמדים את 9 הבנים הנותרים. סידור הבנים הנותרים שקול לפיזור 9 כדורים ב-5 תאים (מימין לכל בן שמוקם כבר בשורה ובצד השמאלי של השורה). לפיכך, יש $\binom{13}{9} = 715$ אפשרויות לקביעת כמויות הבנים בכל תא ו- !9 אפשרויות לסידורים.

נקבל כי:
$$P\{W = 4\} = \frac{35 \cdot 17{,}160 \cdot 4! \cdot 210 \cdot 715 \cdot 9!}{20!} = 0.323$$

4. נסדר את 13 הבנים בשורה (!13 אפשרויות). נבחר i מקומות מתוך המרווחים שבין הבנים ומצד שמאל של השורה ($\binom{13}{i}$ אפשרויות). ב- i מקומות אלו תהיה לפחות בת אחת. נותר לקבוע עוד $7 - i$ מקומות לבנות. מקומות אלו יכולים להיות ב- i המרווחים שכבר נבחרו ובצד הימני של השורה. כלומר, יש לפזר $7 - i$ בנות ב- $i + 1$ תאים ($\binom{7}{7-i} = 35$ אפשרויות). לאחר שנקבעו 7 מקומות לבנות, נסדר אותן במקומות אלו (!7 אפשרויות).

נקבל:
$$P\{W = i\} = \frac{13! \cdot \binom{13}{i} \cdot \binom{7}{7-i} \cdot 7!}{20!} = \frac{\binom{13}{i}\binom{7}{7-i}}{\binom{20}{7}} \qquad , \qquad i = 0,1,...,7$$

כלומר, למשתנה המקרי W יש התפלגות היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N=20$, $m=13$ ו- $n=7$.

5. נסמן ב-Y את המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר ההטלות ששחר מבצע. למשתנה המקרי Y יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{5}{36}$ (שהיא ההסתברות לקבל סכום 8 בהטלת שתי קוביות). לפיכך:

$$P\{Y>7\}=\left(\tfrac{31}{36}\right)^7=0.3511$$

6. המשתנה המקרי X , המוגדר על-ידי מספר ההטלות שבהן שחר מקבל סכום שונה מ-8, הוא פונקציה לינארית של המשתנה המקרי Y (המוגדר בסעיף הקודם) ומתקיים $X=Y-1$. לכן:

$$E[X]=E[Y-1]=E[Y]-1=\frac{1}{\frac{5}{36}}=6.2$$

7. בסימוני השאלה הקודמת:

$$E[(X-4)^2]=E[(Y-5)^2]=\mathrm{Var}(Y-5)+(E[Y-5])^2=\mathrm{Var}(Y)+(E[Y]-5)^2$$

$$=\frac{1-\frac{5}{36}}{\left(\frac{5}{36}\right)^2}+\left(\frac{1}{\frac{5}{36}}-5\right)^2=49.48$$

8. נתון כי שחר הטיל את הקוביות לפחות פעמיים, לכן ידוע כי $Y\ge 2$ ומכאן שההסתברות המבוקשת תתקבל מהתניה במאורע $\{Y\ge 2\}$. מקבלים:

$$P\{X=8\,|\,Y\ge 2\}=P\{Y=9\,|\,Y\ge 2\}=\frac{P\{Y=9\}}{P\{Y\ge 2\}}=\frac{P\{Y=9\}}{P\{Y>1\}}=\frac{\left(\frac{31}{36}\right)^8\cdot\frac{5}{36}}{\frac{31}{36}}=\left(\tfrac{31}{36}\right)^7\cdot\tfrac{5}{36}=0.049$$

9. מספר הכדורים הכחולים בחמשת המקומות השמאליים ביותר בשורה הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N=20$, $m=5$ ו- $n=5$. לפיכך, התוחלת המבוקשת היא: $5\cdot\frac{5}{20}=1.25$

10. בסימוני השאלה הקודמת נקבל את השונות: $\frac{20-5}{20-1}\cdot 5\cdot\frac{5}{20}\cdot\frac{15}{20}=0.7401$

11. נסמן ב- Y את המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הפעמים שהשיכור צועד ימינה ב-50 צעדים. ההתפלגות של Y היא בינומית עם הפרמטרים 50 ו- 0.4. המשתנה המקרי $50-Y$ הוא מספר הצעדים שהשיכור צועד שמאלה. לפיכך, לפי סימון זה, הנקודה על הציר שעליה נמצא השיכור לאחר 50 צעדים היא:

$$X=Y-(50-Y)=2Y-50$$

ומכאן, שהערכים האפשריים של X הם $\{-50,-48,\ldots,-2,0,2,\ldots,48,50\}$ וההסתברויות לקבלתם הן:

$$P\{X=2j-50\}=P\{Y=j\}=\binom{50}{j}p^j(1-p)^{50-j}\qquad,\qquad j=0,1,\ldots,50$$

ולכן: $P\{X=-10\}=P\{Y=20\}=\binom{50}{20}0.4^{20}\cdot 0.6^{30}=0.115$

12. בסימוני השאלה הקודמת: $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(2Y-50)=\mathrm{Var}(2Y)=4\mathrm{Var}(Y)=4\cdot 50\cdot 0.4\cdot 0.6=48$

13. מספר הצעדים שהשיכור עושה עד לצעד ה-27 לכיוון שמאל הוא משתנה מקרי בינומי-שלילי עם הפרמטרים 27 ו- 0.6. לפיכך, ההסתברות שיעד זה יושג בצעד ה-50 היא: $\binom{49}{26}0.6^{27}\cdot 0.4^{23}=0.042$

14. מספר הפעמים שהשיכור נופל במהלך 2,000 צעדים שהוא עושה הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 2,000 ו- 0.01. בנתונים אלו אפשר לחשב קירוב פואסוני להסתברות המבוקשת, כאשר $\lambda = 2{,}000 \cdot 0.01 = 20$. מקבלים את הקירוב: $e^{-20} \cdot \frac{20^{23}}{23!} = 0.06688$

15. $$P\{Y = r+1\} = P\{X = r+1\} + P\{X = r+2\} = \binom{r}{r-1} 0.5^{r+1} + \binom{r+1}{r-1} 0.5^{r+2}$$
$$= r \cdot 0.5^{r+1} + \tfrac{1}{2} r(r+1) \cdot 0.5^{r+2} = (4r + r^2 + r) \cdot 0.5^{r+3} = r(r+5) \cdot 0.5^{r+3}$$

16. $$E[Y] = \sum_{i=r}^{r+1} iP\{X = i\} + \sum_{i=r+2}^{\infty} (i-1)P\{X = i\} = \underbrace{\sum_{i=r}^{\infty} (i-1)P\{X = i\}}_{E[X]-1} + P\{X = r\} + P\{X = r+1\}$$
$$= \frac{r}{0.5} - 1 + 0.5^r + r \cdot 0.5^{r+1} = 2r - 1 + \frac{2+r}{2^{r+1}}$$

17. נסמן ב- X_{10} את מספר המטאורים שנופלים בשטח העגול שרדיוסו 10 ק״מ; $X_{10} \sim Po(2)$, ונקבל:

$$P\{X_{10} = 3\} = e^{-2} \cdot \tfrac{2^3}{3!} = \tfrac{4}{3} e^{-2} = 0.18045$$

18. לפי ההנחות של תהליך פואסון, מספר המטאורים הנופלים בשטח ה״קטן״ יחסי לגודלו. שטח העיגול הגדול הוא $10^2\pi = 100\pi$ קמ״ר ושטח העיגול הקטן הוא $6^2\pi = 36\pi$ קמ״ר. לפיכך, מספר המטאורים הנופלים בעיגול הקטן, שנסמנו ב- X_6, הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $0.36 \cdot 2 = 0.72$.

ומכאן: $P\{X_6 = 0\} = e^{-0.72} = 0.4868$

19. נחשב תחילה את הסתברות המאורע שייפלו בדיוק 4 מטאורים בתחומי השטח העגול הגדול:

$$P\{X_{10} = 4\} = e^{-2} \cdot \tfrac{2^4}{4!} = \tfrac{2}{3} e^{-2} = 0.09022$$

כעת, לפי ההנחות של תהליך הפואסון, אין תלות בין מספרי המטאורים שנופלים בשטחים שאין ביניהם חפיפה. לפיכך, ההסתברות שייפול בדיוק מטאור אחד בתחומי העיגול הקטן וגם שייפלו בדיוק 3 מטאורים בתחומי העיגול הגדול אך מחוץ לעיגול הקטן היא:

$$P\{X_6 = 1\}P\{X_{10-6} = 3\} = e^{-0.72} \cdot \tfrac{0.72^1}{1!} \cdot e^{-1.28} \cdot \tfrac{1.28^3}{3!} = 0.3505 \cdot 0.0972 = 0.034$$

וההסתברות המותנית המבוקשת היא: $P\{X_6 = 1 | X_{10} = 4\} = \dfrac{0.03406}{0.09022} = 0.3775$

20. תחילה נחשב את ההסתברות שייפלו לפחות 3 מטאורים בתחומי השטח העגול:

$$P\{X_{10} \ge 3\} = 1 - P\{X_{10} \le 2\} = 1 - e^{-2}\left(1 + \tfrac{2^1}{1!} + \tfrac{2^2}{2!}\right) = 1 - 5e^{-2} = 0.3233$$

כעת, מספר החזרות, שבהן נופלים לפחות 3 מטאורים בתחומי השטח העגול, הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 5 ו- 0.3233. נסמן משתנה מקרי זה ב- Y ונקבל:

$$P\{Y \ge 2\} = 1 - P\{Y \le 1\} = 1 - 0.6767^5 - 5 \cdot 0.3233 \cdot 0.6767^4 = 0.5191$$