מבחנים

שאלה 1 – תכנון כפל מטריצות

__תכנון כפל מטריצות__. כזכור, המכפלה $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ של סדרת מטריצות מוגדרת רק כשישנה התאמה בין מספרי השורות והעמודות: אם מסמנים ב- r_i את מספר השורות במטריצה A_i, וב- c_i את מספר העמודות שלה, אז חייב להתקיים התנאי $r_{i+1} = c_i$ לכל $1 \le i < n$. במקרה שכזה כל מכפלה $A_i \times A_{i+1}$ הינה מטריצה בת r_i שורות ו- c_{i+1} עמודות, והחישוב שלה (בהתאם להגדרת כפל מטריצות) ניתן לביצוע ע"י $\Theta(r_i \times c_i \times c_{i+1})$ פעולות אלמנטריות בלבד. (כפל וחיבור מספרים נחשב לפעולה אלמנטרית). כזכור, כפל מטריצות הוא גם אסוציאטיבי, כלומר, בהכפלה של סדרת מטריצות, הננו רשאים למקם את הסוגריים כרצוננו. למשל $(A_1 \times A_2) \times A_3 = A_1 \times (A_2 \times A_3)$.

(א) הציגו דוגמה של שלוש מטריצות, שבה מיקום מסוים של הסוגריים דורש פי אלף פעולות אלמנטריות מאשר המיקום האחר.

(ב) הציגו אלגוריתם, שמקבל כקלט רשימה $(r_1, c_1), \ldots, (r_n, c_n)$ של מספרי השורות והעמודות בכל מטריצה, ומפיק כפלט מיקום אופטימלי של הסוגריים עבור ההכפלה $A_1 \times \ldots \times A_n$. (שימו לב שאיננו מבצעים עדיין את הכפלת המטריצות, אלא רק מנסים **__לקבוע את מיקום הסוגריים__**, שימזער את מספר הפעולות האריתמטיות בזמן ההכפלה).

שאלה 2 – תת-סדרה מרבית רצופה

***שאלה 3ב* – תת-סדרה מרבית רצופה**. תת-סדרה רצופה של הסדרה $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$, הינה סדרה מהצורה $(x_i, x_{i+1}, ..., x_{k-1}, x_k)$ עבור איזשהם $1 \le i \le k \le n$. הציגו אלגוריתם, שבהנתן סדרת מספרים שלמים $(x_1, ..., x_n)$, מוצא בתוכה תת-סדרה רצופה שסכומה $x_i + ... + x_k$ מרבי. למשל, בסדרת הקלט $(-1, 4, -3, 5, -1, -1, 1, -1)$ תת-הסדרה הרצופה $(4, -3, 5)$ מניבה את תת-הסכום המרבי $4 - 3 + 5 = 6$.
על האלגוריתם המוצע לרוץ בזמן $\Theta(n)$, כשבניתוח זמן הריצה מניחים, שכל פעולה אלמנטרית על מספרים (כמו חיבור, חיסור או השוואה) מתבצעת בזמן $\Theta(1)$.

שאלה 3 – תת-סדרה עולה מרבית

נתונה סדרה של n מספרים ממשיים, $a_1,\ldots,a_n$. תת סדרה של מספרים אלו היא תת קבוצה של מספרים אלו המסודרת בהתאם לסדר הסדרה המקורית, $a_{i_1},\ldots,a_{i_k}$ ($1 \le i_1 < i_2 < \ldots. < i_k \le n$). תת סדרה היא **עולה** אם $a_{i_1} < a_{i_2} \ldots < a_{i_k}$. הציעו אלגוריתם תכנון דינמי המוצא תת סדרה עולה באורך מקסימלי. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

ניסוח אלגוריתם + ניתוח נכונות: ______________________

ניתוח יעילות: ______________________

שאלה 4 – פלינדרום מרבי

פלינדרום מרבי. פלינדרום הינה מחרוזת שנקראת בצורה זהה מימין לשמאל או משמאל לימין. למשל המחרוזת "ABBA" באנגלית, והמחרוזת הבאה בעברית "דעו מאביכם כי לא בוש אבוש שוב אשוב אליכם כי בא מועד" (כשמתעלמים מסימן הרווח). פלינדרום מרבי בתוך מחרוזת נתונה, היא תת-מחרוזת **רצופה**, שמהווה פלינדרום, ושאורכה מרבי. למשל בתוך המחרוזת abcbea, הפלינדרום המרבי הוא bcb (ולא abcba שאיננה תת-מחרוזת רצופה). הציגו אלגוריתם למציאת פלינדרום מרבי בתוך מחרוזת קלט באורך n מעל האלפבית האנגלי. בשאלה זו לא יינתן ניקוד לאלגוריתמים טריוויאליים, שרצים בזמן $\Theta(n^3)$ (הזמן הנדרש לבדיקת כל תתי המחרוזות הרצופות).

שאלה 5 – משחק מטבעות

משחק המטבעות מתקיים בין שני שחקנים. שחקן א׳ משחק בצעדים האי-זוגיים ושחקן ב׳ בצעדים הזוגיים. בתחילת המשחק נתונה סדרה של מטבעות בעלי ערכים $(v_1,\ldots,v_n)$. בכל צעד במשחק, השחקן הנוכחי בוחר ומשלשל לכיסו או את המטבע שבקצה הימני של הסדרה הנוכחית או, לחלופין, את המטבע שבקצה השמאלי של הסדרה הנוכחית. אם, למשל, בתחילת המשחק נתונה הסדרה $(10,20,5,4)$, אז שחקן א׳ עשוי לבחור תחילה במטבע שבקצה הימני שערכו 4. כעת שחקן ב׳ עשוי לבחור מתוך הסדרה שנותרה $(10,20,5)$ את המטבע בקצה השמאלי שערכו 10. אחר כך שחקן א׳ עשוי לבחור מתוך $(20,5)$ את המטבע שערכו 20, ולבסוף בצעד האחרון שחקן ב׳ "בוחר" את המטבע שנותר שערכו 5. בדוגמא זו הרווח לשחקן א׳ הוא $24=20+4$, והרווח לשחקן ב׳ הוא $15=5+10$. הציגו אלגוריתם תכנון דינמי, שבהנתן סדרת קלט $(v_1,\ldots,v_n)$ מחשב מהו הרווח המרבי, שהשחקן הפותח (שחקן א׳) יכול להבטיח שישלשל לכיסו.

רווח מרבי זה חייב להיות מובטח, ללא תלות בצעדיו של שחקן ב׳.

שאלה 6 – מסלול בין מלונות

***שאלה 3* – <u>תכנון דינאמי – בחירת מלונות לאורך מסלול</u>** (25 נק'). ברצוננו לערוך מסע לאורכו של מסלול ישר מנקודת התחלה s לנקודת סיום f. נתונה רשימה $p_1 < \ldots < p_n$ של מיקומי מלונות, כך שמלון i ממוקם בדיוק p_i קילומטרים מתחילת המסלול. במהלך המסע לנים בכל לילה במלון אחר. החופשה מוגבלת בזמן, ולכן <u>חייבים</u> להשלים את המסע תוך לכל היותר t ימים ($t < n$ נתון). ידוע שכמות המאמץ שנדרש ביום הליכה הינה <u>הריבוע</u> d^2 של המרחק d, שהולכים באותו יום. ברצוננו לבחור את נקודות הלינה, כך שנמזער את סכום המאמצים בכלל ימי המסע. הציגו אלגוריתם יעיל ככל האפשר לבעיה, שרץ בזמן פולינומי ביחס ל- t וביחס ל- n). נדרשת תשובה של 4-5 שורות, שכוללת נוסחה רקורסיבית לפתרון בשיטה של תכנון דינאמי.

שאלה 7 – ספירת סידורים אפשריים

יהי $f(n)$ מספר הדרכים לסדר n עצמים באמצעות שני היחסים $<$ וכן $=$. למשל $f(2)=3$

משום שעבור 2 עצמים a,b ישנם בדיוק 3 סידורים אפשריים: $a<b$ או $a=b$ או $b<a$.

בדומה, $f(3)=13$ משום שעבור 3 עצמים a,b,c ישנם כבר 13 סידורים אפשריים:

$$\left\{\begin{matrix} a=b=c, & b=c<a, & c<a=b \\ a=b<c, & b<a=c, & c<a<b \\ a<b=c, & b<a<c, & c<b<a \\ a<b<c, & b<c<a, & \\ a=c<b, & & \\ a<c<b, & & \end{matrix}\right\}$$

הציגו אלגוריתם שעל קלט n מחשב את $f(n)$ תוך ריצה בזמן $\Theta(n^2)$ וצריכת זיכרון $\Theta(n)$.

(החשיבו פעולה אריתמטית (חיבור, כפל והשוואה של מספרים) כפעולה שמתבצעת בזמן $\Theta(1)$,

וצורכת $\Theta(1)$ תאי זיכרון בלבד).

הדרכה: העזרו בעובדה שכל סידור משרה חלוקה למחלקות שקילות, כשכל מחלקה מורכבת

מעצמים שהיחס ביניהם הוא $=$. למשל עבור 4 עצמים, הסידור $d<a=b<c=e$ משרה חלוקה

ל-3 מחלקות שקילות: d במחלקה נפרדת, a,b במחלקה נפרדת, ו-c,e במחלקה נפרדת.

שאלה 8 – פרוק למכפלות

***שאלה 3* – תכנון דינאמי – פרוק למכפלות** (25 נק').

נתון פרוק $x = p_1 \times p_2 \times .... \times p_k$ של מספר טבעי x לגורמים ראשוניים $p_1 < p_2 < .... < p_k$, כשאף חזקה בפרוק איננה גדולה מ-1. (למשל, הפרוק "$30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$" הינו קלט חוקי, אבל הפרוק "$300 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2$" איננו קלט חוקי). נסמן ב- $f(x)$ את מספר הדרכים להציג את x כמכפלה של מספרים טבעיים (לאו דווקא ראשוניים). למשל $f(30) = 5$ משום שישנן בדיוק 5 הצגות שונות של 30 כמכפלה של מספרים טבעיים: $2 \times 3 \times 5 = 5 \times 6 = 3 \times 10 = 2 \times 15 = 1 \times 30$. שימו לב שאין חשיבות לסדר של המוכפלים. למשל $2 \times 3 \times 5$ ו- $3 \times 2 \times 5$ נחשבות לאותה הצגה, (אבל 3×10 ו- $3 \times 2 \times 5$ נחשבות להצגות שונות). הציגו אלגוריתם שבהינתן קלט חוקי $x = p_1 \times p_2 \times .... \times p_k$ מחשב את $f(x)$. הדרכה: מה הקשר בין $f(x)$ לבין $f(y)$ כאשר $y = q_1 \times q_2 \times .... \times q_k$ הינו קלט חוקי עם אותו מספר של גורמים ראשוניים k. נדרשת תשובה של 4-5 שורות בלבד, שכוללת נוסחה רקורסיבית לפתרון בשיטה של תכנון דינאמי.

הרעיון המרכזי____

____

נוסחת הנסיגה____

____

____

אלגוריתם וזמן ריצה____

____

שאלה 9 - מיקום סוגריים בביטויים בוליאניים

מיקום סוגריים בביטויים בוליאניים

ביטוי בוליאני ללא סוגריים, הינה סדרה של הקבועים הלוגיים T,F (המייצגים, כרגיל, את הערכים $True, False$), כך שבין כל שני קבועים, מופיע אחד מהאופרטורים הלוגיים $\wedge,\vee,\otimes$ (המייצגים כרגיל את האופרטורים and, or, xor). אותו ביטוי בוליאני, עשוי לקבל ערך אמת שונה בהתאם למיקום הסוגריים. למשל, בביטוי $F\wedge T\otimes T$ ניתן למקם סוגריים בדיוק בשתי דרכים שונות: $(F\wedge T)\otimes T \equiv T$ בעוד ש- $F\wedge(T\otimes T)\equiv F$. הציגו אלגוריתם תכנון דינמי, שבהינתן ביטוי בוליאני ללא סוגריים, מחשב את <u>מספר הדרכים למיקום סוגריים</u> עבורן מתקבל הערך T. הניחו, לשם פשטות, שהקלט נתון במערך של הקבועים $A[1...n]$, ובמערך של האופרטורים $B[1...n-1]$. למשל הקלט $F\wedge T\otimes T$ נתון במערכים, שבהם $A[1]=F,\ A[2]=T,\ A[3]=T$ וכן $B[1]=\wedge,\ B[2]=\otimes$.

לקט

שאלה 1 - LCS

3.1 בעיית תת־המחרוזת המשותפת הארוכה ביותר LCS

קלט: 2 מחרוזות $X = x_1, \ldots, x_n$ ו־$Y = y_1, \ldots, y_m$.

מחפשים את תת־המחרוזת המשותפת (אפשר עם דילוגים, אבל לשמור על הסדר) באורך מירבי.

לדוגמא: $X = abccba, Y = bacbc$, אז abc תת־מחרוזת משותפת.

שאלה 2 - כנס

בעקבות התגיגות על ניצחונה של הפועל באר שבע השבוע, נדחה הכנס הבינלאומי שתוכנן. הפעם דאגה המחלקה למדעי המחשב לבקש את שני האודיטוריומים בבניין 26 (5 ו-6). להזכירכם סיגלית וזהבה רוצות לשבץ באותו היום מספר גדול ככל האפשר של הרצאות, מבין n הרצאות אפשריות, **בשני האודיטוריומים**. משך הרצאה ה-i הוא l_i ($l_i \in \mathbb{N}$) שעות. אין הגבלה על זמני ההתחלה והסיום של הרצאות. יורם מסר למזכירות כי באותו יום ניתן להשתמש במשך T ($T \in \mathbb{N}$) שעות בכל אחד משני האודיטוריומים. בעקבות ההצלחה בפעם הקודמת, התבקשתם לעזור לסיגלית וזהבה לשבץ **ללא התנגשויות** מספר מקסימלי של הרצאות בזמן T בשני האודיטוריומים. כאשר מתחילים הרצאה מסוימת, חייבים לסיימה (באופן רצוף).

תכננו אלגוריתם מבוסס תכנון דינמי לפתרון הבעיה עם שני אולמות

שאלה 3 – לוכד החלומות

- על חישוק (ההיקף של עיגול) ממקמים n חרוזים מחמישה צבעים שונים, ובנוסף חרוז יחיד הצבוע בשחור (המיקומים נקבעים לפי כוכבים ומזלות). החרוזים ממוספרים בתחום $1..n$, כך שהחרוז השחור מצוי בין חרוז 1 לבין חרוז n.
- מחברים בין זוגות של חרוזים מצבעים זהים על ידי חוטים, כך ששני חוטים שונים (שהם שני מיתרים בעיגול) לא יחצו זה את זה, ולכל חרוז מחובר לכל היותר חוט אחד.
- כדי שלוכד החלומות יהיה בעל יעילות מרבית יש למתוח מספר מקסימלי של חוטים (מיתרים).

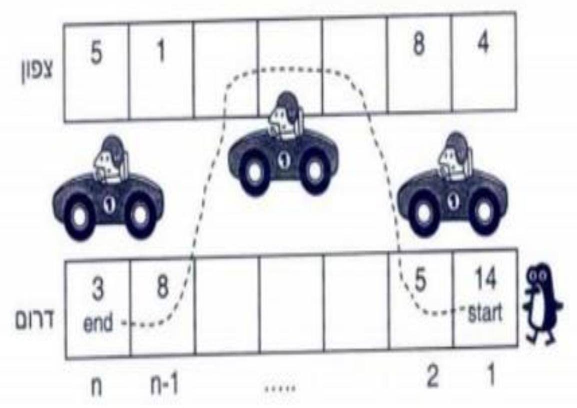
<u>בעיית לוכדי החלומות</u>: בהינתן חישוק אשר ממוקמים עליו n חרוזים כמתואר, כיצד ניתן לחבר את החרוזים ע"י חוטים כך שלוכד החלומות יהיה בעל יעילות מרבית?

שאלה 4 – מסיבה עליזה

התבקשת לייעץ למנהל חברה אשר מתכנן מסיבה לעובדיו. לחברה יש מבנה היררכי שבו המנהל הוא שורש העץ. מחלקת כוח אדם נתנה לכל עובד ציון ב-"עליזות" – מספר ממשי.
כדי שהמסיבה תהיה כיפית, המנהל מבקש שלא יוזמנו אליה גם עובד וגם הבוס הישיר שלו.
כתוב אלגוריתם אשר יניב רשימת אורחים כזו שסכום ציוני ה-"עליזות" של כל המוזמנים יהיה המירבי. נתח את זמן הריצה של האלגוריתם.

שאלה 5 – מסע הפינגווין

נתון כביש שמשני צדדיו מדרכות משובצות. על כל משבצת מונחת כמות מסוימת של גרגירי תירס. פינגווין רעב מגיע למשבצת הראשונה בצד הדרומי של הכביש. בכל פעם שהפינגווין דורך במשבצת מסוימת הוא אוכל את כל גרגירי התירס שעליה.



הפינגווין מעוניין לאכול כמה שיותר גרגירי תירס בדרכו מהמשבצת הראשונה למשבצת ה-n-ית. בכל צעד הוא יכול להתקדם משבצת אחת קדימה (מערבה) באותו צד, או לחצות את הכביש (מצפון לדרום או להיפך) תוך התקדמות משבצת אחת קדימה (מערבה).

במהלך הטיול מותר לפינגווין לחצות את הכביש **$d<n$** פעמים לכל היותר. עליו לסיים את הטיול במשבצת המערבית (ה- n-ית) הדרומית. הקו המרוסק בציור מתאר מסלול אפשרי עם שתי חציות.
נסמן ב-a_i את מספר גרגירי התירס במשבצת ה-i-ית בצד בדרומי וב-b_i את מספר גרגירי התירס במשבצת ה-i-ית בצד בצפוני. (לכל i בין 1 ל-n). למשל בציור $a_2=5, b_1=4$. ערכי a_i ו-b_i ידועים מראש לכל i.

בשאלה זו עליכם לתאר אלגוריתם המבוסס על **תכנות דינאמי** העוזר לפינגווין לתכנן את מסלולו כך שבסך הכל יאכל במהלך הטיול את הכמות המירבית האפשרית של גרגירי תירס. נסתפק בחישוב הכמות ואין צורך לכלול בפלט כיצד להשיגו.

נסמן ב-$S(i,k)$ את כמות הגרגרים המירבית שניתן לצבור עד (וכולל) המשבצת ה-i–ית אם בוצעו בדיוק k חציות עד משבצת זו. שימו לב שלערכי $S(i,k)$ יש משמעות רק עבור $k<i$.

שאלה 6 – צילומי לווין

לוויין Google Earth נשלח לגיחת צילום. הלוויין מסוגל לצלם 2 סוגי תמונות – תמונה ברזולוציה גבוהה (HD) ותמונה ברזולוציה רגילה (SD). בידיכם רשימה של n אתרים אפשריים לצילום, נסמנם $\{1,2,\dots,n\}$. לכל אתר נקבע רווח מצילום ברזולוציה גבוהה $\{h_1,h_2,\dots,h_n\}$ ורווח מצילום ברזולוציה רגילה $\{s_1,s_2,\dots,s_n\}$ בהתאמה. עליכם לתכנן גיחת צילום רווחית ככל הניתן בזמן קצוב.

שימו לב: לכל $1 \le i,j \le n$ מעבר הלוויין מאתר i לאתר j **אינו** דורש זמן.

עבור כל אתר i, יש ללוויין **בדיוק אחת** משלוש האפשרויות הבאות:

1. לא לצלם את האתר ה-i.
2. לצלם את האתר ה-i ברזולוציה רגילה. משך הפעולה: **3 דק'**.
3. לצלם את האתר ה-i ברזולוציה גבוהה. משך הפעולה: **5 דק'**.

הלוויין עומד לרשותכם למשך T דקות (מספר טבעי כלשהו, ניתן להניח כי $T \le 5n$).

תכנית צילום חוקית מוגדרת כשתי תת-קבוצות **זרות** $H,S \subseteq \{1,\dots,n\}$. $H \cap S = \emptyset$ ומתקיים - $5|H| + 3|S| \le T$.

שווי תכנית צילום (H,S) מוגדר כ- $\sum_{i\in H} h_i + \sum_{i\in S} s_i$.

הצע אלגוריתם תכנון דינמי שימצא את השווי המקסימלי של תוכנית צילום חוקית.

שאלה 7 – סכום סידרה

<u>מופע:</u> זוג סדרות של מספרים שלמים חיוביים: $P=\{p_1,\dots,p_m\}$ ו $H=\{h_1,\dots,h_n\}$ כך ש $n\le m$.

ניתן להניח ש H ממוינת בסדר עולה.

<u>פתרון חוקי:</u> סדרה $\{i_1,i_2,\dots,i_n\}\subseteq[1,m]$ של אינדקסים של איברים ב P.

<u>יש למצוא:</u> פתרון חוקי $M=\{i_1,i_2,\dots,i_n\}$ כך ש $d(M)=\sum_{k=1}^{n}|p_{i_k}-h_k|$ מינימאלי.

סעיף א: הראו כי האלגוריתם החמדן הבא נכשל:

1. מיין את P בסדר עולה.
2. החזר $\{i_1,i_2,\dots,i_n\}$ האינדקסים של איברי P שמתאימים ל n האיברים הראשונים לפי המיון.

סעיף ד: הגדירו תת-בעיה אופיינית. כלומר הגדירו $OPT(i,j)$ כאשר i מייצג את P ו j את H. ציינו איזה ערך אנו מעוניינים לחשב.

סעיף ה: נסחו נוסחת נסיגה ותנאי בסיס עבור ערך של פתרון אופטימאלי עבור הבעיה לעיל.

<u>הדרכה:</u> עבור $OPT(i,j)$ שהגדרתם שקלו שני מקרים: $i\ge j$, ו $i<j$.

שאלה 8 - מסלול קצר ביותר בגרף

נתון גרף מכוון עם משקלים כלשהם על הקשתות (חלקם חיוביים, חלקם שליליים) אך ללא מעגלים מכוונים שליליים. עומד לרשותכם אלגוריתם בלמן-פורד אשר יודע לחשב מסלולים קצרים ביותר בין צומת לבין שאר הצמתים בגרף גם כאשר המשקלות שליליים (חלקם או כולם.).

הציעו אלגוריתם יעיל למציאת אורך המסלול הקצר ביותר (כלומר בעל הערך הנמוך ביותר, ואם שלילי - השלילי ביותר) בין שני צמתים בגרף. כלומר על האלגוריתם למצוא את זוג הצמתים u ו-v בגרף אשר אורך המסלול ביניהם הינו קצר יותר מאשר כל מסלול בין שני צמתים אחרים כלשהם בגרף.