20425 - תאריך הבחינה: 5.7.2012 (סמסטר 2012ב - מועד 2א / 84)

שאלה 1

נסמן ב- N את מספר הליקויים שנמצאו בכביש. ידוע כי: $N \sim Po(20)$

כעת, כל ליקוי מתוקן על-ידי החברה בהסתברות ⅔ ובאופן בלתי-תלוי בליקויים אחרים. לכן, אם נסמן ב- X את מספר הליקויים שיתוקנו בכביש, אז: $X \sim Po(20\cdot\frac{2}{3} = 13\frac{1}{3})$

$N - X \sim Po(20\cdot\frac{1}{3} = 6\frac{2}{3})$

וכן, המשתנים המקריים X ו- $N-X$ בלתי-תלויים זה בזה. לפיכך:

א. $$P\{X = 15\} = e^{-40/3}\cdot\frac{(\frac{40}{3})^{15}}{15!} = 0.0927$$

ב. $$P\{N = 25 \mid X = 15\} = P\{X + (N - X) = 25 \mid X = 15\} = P\{N - X = 10 \mid X = 15\}$$

$$= P\{N - X = 10\} = e^{-20/3}\cdot\frac{(\frac{20}{3})^{10}}{10!} = 0.0608$$

ג. נחשב את מקדם המתאם, תוך ניצול אי-התלות בין שני המשתנים שלעיל:

$$\rho(N, N-X) = \frac{\text{Cov}(N, N-X)}{\sqrt{\text{Var}(N)\text{Var}(N-X)}} = \frac{\text{Cov}(X + N - X, N - X)}{\sqrt{\text{Var}(N)\text{Var}(N-X)}}$$

$$= \frac{\overbrace{\text{Cov}(X, N-X)}^{=0} + \text{Var}(N-X)}{\sqrt{\text{Var}(N)\text{Var}(N-X)}} = \sqrt{\frac{\text{Var}(N-X)}{\text{Var}(N)}} = \sqrt{\frac{6\frac{2}{3}}{20}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57735$$

דרך נוספת:

נחשב את מקדם המתאם באופן ישיר:

$$\rho(N, N-X) = \frac{\text{Cov}(N, N-X)}{\sqrt{\text{Var}(N)\text{Var}(N-X)}} = \frac{\text{Var}(N) - \text{Cov}(N, X)}{\sqrt{\text{Var}(N)[\text{Var}(N) + \text{Var}(X) - 2\text{Cov}(N, X)]}}$$

נתחיל בחישוב השונויות: $\text{Var}(N) = 20 \quad , \quad \text{Var}(X) = 13\frac{1}{3}$

וכעת, נחשב את השונות המשותפת.

נשים לב כי: $X \mid N = n \sim B(n, \frac{2}{3})$

ולכן: $$E[NX] = E[E[NX \mid N]] = E[NE[X \mid N]] = E[N\cdot\tfrac{2}{3}N]$$

$$= \tfrac{2}{3}[\text{Var}(N) + (E[N])^2] = \tfrac{2}{3}\cdot(20 + 20^2) = 280$$

ומכאן: $$\text{Cov}(N, X) = E[NX] - E[N]E[X] = 280 - 20\cdot 13\tfrac{1}{3} = 13\tfrac{1}{3}$$

כלומר: $$\rho(N, N-X) = \frac{20 - 13\frac{1}{3}}{\sqrt{20\cdot(20 + 13\frac{1}{3} - 2\cdot 13\frac{1}{3})}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

שאלה 2

א. ההוכחה מובאת בקובץ ההוכחות שבאתר הקורס.

ב. נסמן ב- X את מספר ההטלות שיש לבצע עד לקבלת H בפעם העשירית.
ההתפלגות של המשתנה המקרי X היא בינומית-שלילית עם הפרמטרים 10 ו- 0.6.

1. $$P\{X=20\}=\binom{19}{9}\cdot 0.6^{10}\cdot 0.4^{10}=0.0586$$

2. בהנחה שההטלות בלתי-תלויות, למידע שנתון לגבי תוצאות ההטלות הראשונה והרביעית אין השפעה על תוצאות שאר ההטלות. לכן, מספר ההטלות שיש לבצע הוא משתנה מקרי בינומי-שלילי עם הפרמטרים 8 ו- 0.6, וההסתברות המבוקשת היא :

$$\binom{17}{7}\cdot 0.6^{8}\cdot 0.4^{10}=0.03425$$

שאלה 3

א. נשים לב, שהתרחשות המאורע A מבטיחה את התרחשות המאורע B, אך לא להיפך. כלומר, כל התוצאות השייכות ל- A שייכות גם ל- B, אך יש תוצאות השייכות ל- B ואינן שייכות ל- A (למשל, "התקבלה הצלחה רק בניסוי האחרון"). לכן, מתקיים $A\subset B$, ומכאן ש- $P(A)<P(B)$.

ב. $$P\{X=1\mid A\}=\frac{P(S,F,\ldots,F)}{P(S)}=\frac{p(1-p)^9}{p}=(1-p)^9$$ (F = Failure ,S = Success)

ג. לפי נתוני הבעיה, למשתנה המקרי X יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 10 ו- p. לפיכך :

$$P\{X=1\mid B\}=P\{X=1\mid X\ge 1\}=\frac{P\{X=1\}}{P\{X\ge 1\}}=\frac{P\{X=1\}}{1-P\{X=0\}}=\frac{10p(1-p)^9}{1-(1-p)^{10}}$$

ד. בדומה לסעיף ג נקבל, כי לכל $i=1,2,\ldots,10$, מתקיים :

$$P\{X=i\mid B\}=P\{X=i\mid X\ge 1\}=\frac{P\{X=i\}}{P\{X\ge 1\}}=\frac{P\{X=i\}}{1-P\{X=0\}}$$

לכן :
$$E[X\mid B]=\sum_{i=1}^{10} iP\{X=i\mid B\}=\sum_{i=1}^{10}\frac{i\cdot P\{X=i\}}{1-P\{X=0\}}$$
$$=\frac{1}{1-P\{X=0\}}\cdot\sum_{i=1}^{10} iP\{X=i\}=\frac{E[X]}{1-P\{X=0\}}=\frac{10p}{1-(1-p)^{10}}$$

שאלה 4

א. נסמן ב- A_i את המאורע שאפשר לפרוץ מקטע i, לכל $i=1,2,3$.
בסימונים אלו, ההסתברות שאפשר יהיה לפרוץ את הגדר היא : $P(A_1\cup A_2\cup A_3)$
נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה לחישוב ההסתברות שלעיל, ונקבל :

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cap A_2)-P(A_2\cap A_3)-P(A_1\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_3)$$
$$=3\cdot 0.2^2-2\cdot 0.2^3-0.2^4+0.2^4=0.104$$

ב. נגדיר: $X_i = \begin{cases} 1 & , \text{ אפשר לפרוץ את הגדר דרך קטע } i \\ 0 & , \text{ אחרת} \end{cases}$, לכל $i = 1,2,\ldots,n-1$.

כאשר $X = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$ = הוא מספר הקטעים בגדר שאפשר לפרוץ דרכם.

1. המאורע $X_i = 1$, לכל $i = 1,\ldots,n-1$, מתרחש אם ורק אם שני הגלאים שבשני צדדיו מקולקלים.

לכן: $P\{X_i = 1\} = 0.2^2 = 0.04 \quad , \quad i = 1,2,...,n-1$

ומכאן, שמתקיים: $E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n-1} E[X_i] = (n-1)\cdot 0.04$

2. מהסעיף הקודם נקבל כי:

$$\text{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = 0.04 \cdot 0.96 = \tfrac{15}{256} = 0.0384 \quad , \quad i = 1,2,...,n-1$$

כמו כן, לכל $i \neq j$, כך ש- $i, j = 1,\ldots,n-1$, מתקיים:

$$E[X_i X_j] = P\{X_i = 1, X_j = 1\} = \begin{cases} 0.2^3 & , \ |i-j| = 1 \\ 0.2^4 & , \ |i-j| > 1 \end{cases}$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j] = \begin{cases} 0.2^3 - 0.04^2 = 0.0064 & , \ |i-j| = 1 \\ 0.2^4 - 0.04^2 = 0 & , \ |i-j| > 1 \end{cases}$$

ולכן: $\text{Var}(X) = (n-1)\cdot 0.0384 + 2\cdot(n-2)\cdot 0.0064 + 0 = 0.0512n - 0.064$

שאלה 5

א. 1. המשתנה המקרי X הוא סכום של 30 משתנים מקריים שלכולם תוחלת 25, לכן:

$E[X] = 25\cdot 30 = 750$

כעת, מאי-שוויון מרקוב נקבל: $P\{X > 1{,}100\} \le P\{X \ge 1{,}100\} \le \tfrac{750}{1{,}100} = 0.6\overline{81}$

הערה: המעבר הראשון הכרחי, כי לפי הנתונים הידועים בסעיף א, לא ברור שהמשתנה X רציף.

2. המשתנה המקרי X הוא סכום של 30 משתנים מקריים בלתי-תלויים שלכולם שונות $10^2 = 100$, לכן $\text{Var}(X) = 30\cdot 100 = 3{,}000$. לפיכך, מאי-שוויון צ'בישב הדו-צדדי נקבל:

$$\begin{aligned} P\{X > 1{,}100\} &\le P\{X < 400\} + P\{X > 1{,}100\} \\ &= P\{|X - 750| > 350\} \\ &\le P\{|X - 750| \ge 350\} \le \tfrac{3{,}000}{350^2} = 0.02449 \end{aligned}$$

ב. ראשית, נחשב את ההסתברות שמעטפה מקרית תשקול בין 23 גרם ל-31 גרם. נסמן את המשקל של מעטפה מקרית ב- Y ונתון שהתפלגות המשקל היא נורמלית עם תוחלת 25 ושונות 100. לכן:

$$P\{23 \le Y \le 31\} = \Phi\left(\tfrac{31-25}{10}\right) - \Phi\left(\tfrac{23-25}{10}\right) = \Phi(0.6) - \Phi(-0.2) = 0.7257 - 0.4207 = 0.305$$

- כעת, נתון שמשקלי מעטפות שונות בלתי תלויים זה בזה, לכן מספר המעטפות (מתוך ה-30) שמשקלן בין 23 גרם לבין 31 גרם, הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 30 ו-0.305, שנסמנו ב-W. לפיכך, נוכל להשתמש במשפט הגבול המרכזי לחישוב הקירוב המבוקש, ונקבל:

$$\underbrace{P\{W \geq 9\} = P\{W \geq 8.5\}}_{\text{תיקון רציפות}} \approx 1 - \Phi\left(\frac{8.5 - 30 \cdot 0.305}{\sqrt{30 \cdot 0.305 \cdot 0.695}}\right) = 1 - \Phi(-0.2578) = \Phi(0.2578) = 0.6017$$

הערה: חישוב מדויק של ההסתברות מניב:
$$P\{W \geq 9\} = 1 - \sum_{i=0}^{8} \binom{30}{i} \cdot 0.305^i \cdot 0.695^{30-i} = 0.5919$$