20425 - תאריך הבחינה: 9.2.2015 (סמסטר 2015א - מועד 1א / 82)

שאלה 1

א. המשתנים המקריים X_1 ו- X_2 תלויים זה בזה. נראה שתנאי אי-התלות אינו מתקיים.

מצד אחד: $[X_1, X_2 \sim B(10,⅓)]$ $$P\{X_1=0\}P\{X_2=0\}=\left(\tfrac{2}{3}\right)^{10}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^{10}=\left(\tfrac{2}{3}\right)^{20}$$

ומצד שני: $[X_3 \sim B(10,⅓)]$ $$P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{X_3=10\}=\left(\tfrac{1}{3}\right)^{10}$$

ב. המשתנים המקריים X_1 ו- Y_1 בלתי-תלויים זה בזה. נראה שתנאי אי-התלות מתקיים לכל זוג ערכים אפשריים של X_1 ו- Y_1.

מצד אחד, ל- X_1 ול- Y_1 יש התפלגות בינומית עם $n = 10$ ו- $p = ⅓$, ולכן:

$$P\{X_1=i\}P\{Y_1=j\}=\binom{10}{i}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{i}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{10-i}\cdot\binom{10}{j}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{j}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{10-j} \qquad , \qquad i,j=0,1,...,10$$

ומצד שני, ההסתברות שבתא 1 יהיו i כדורים זוגיים ו- j כדורים אי-זוגיים היא:

$$P\{X_1=i,Y_1=j\}=\binom{10}{i}\binom{10}{j}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{i+j}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{20-i-j} \qquad , \qquad i,j=0,1,...,10$$

לפיכך, לכל $i, j = 0,1,\ldots,10$, מתקיים: $$P\{X_1=i\}P\{Y_1=j\}=P\{X_1=i,Y_1=j\}$$

ולכן המשתנים המקריים X_1 ו- Y_1 בלתי-תלויים זה בזה.

ג. לכל $i = 0,1,\ldots,8$ מתקיים:

$$P\{X_1=i\,|\,X_1+Y_1=8\}=\frac{P\{X_1=i,Y_1=8-i\}}{P\{X_1+Y_1=8\}}=\frac{\binom{10}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^{i}\left(\frac{2}{3}\right)^{10-i}\cdot\binom{10}{8-i}\left(\frac{1}{3}\right)^{8-i}\left(\frac{2}{3}\right)^{2+i}}{\binom{20}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{8}\left(\frac{2}{3}\right)^{12}}=\frac{\binom{10}{i}\binom{10}{8-i}}{\binom{20}{8}}$$

אפשר להגיע לתוצאה זו ללא חישוב מפורש, בעזרת הטענה:

אם X ו- Y הם משתנים מקריים בינומיים בלתי-תלויים עם הפרמטרים (n_X, p) ו- (n_Y, p), בהתאמה, אז ההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X + Y = n$ היא היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N = n_X + n_Y$, $m = n_X$ ו- $n = n$.

ד.
$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2+X_3)=\mathrm{Cov}(X_1,10-X_1)=\mathrm{Cov}(X_1,10)-\mathrm{Cov}(X_1,X_1)$$
$$=0-\mathrm{Var}(X_1)=-10\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}=\tfrac{-20}{9}$$

שאלה 2

נגדיר 3 מאורעות, לפי פרטי הבעיה, ונבטא בעזרתם את נתוני בבעיה.

הנתונים הם: A = הדירה במרכז העיר

B = הדירה קטנה

C = דמי השכירות של הדירה גבוהים

(1) $P(A) = 0.3$

(2) $P(B\cap C \mid A) = 0.6$

(3) $P(B\cap C \mid A^C) = 0.2$

(4) $P(A\cap B\cap C^C) = 0.05$

(5) $P(A \mid B\cap C^C) = 0.5$

(6) $P(A\cap C^C) = 0.08$

(7) $P(A^C\cap B^C \mid C^C) = 0.675$

(1-2) $\Rightarrow \quad P(A\cap B\cap C) = P(B\cap C \mid A)P(A) = 0.6\cdot 0.3 = 0.18$

(1-3) $\Rightarrow \quad P(B\cap C) = P(B\cap C \mid A)P(A) + P(B\cap C \mid A^C)P(A^C) = 0.6\cdot 0.3 + 0.2\cdot 0.7 = 0.32$

$\Rightarrow \quad P(A^C\cap B\cap C) = P(B\cap C) - P(A\cap B\cap C) = 0.32 - 0.18 = 0.14$

(4,6) $\Rightarrow \quad P(A\cap B^C\cap C^C) = P(A\cap C^C) - P(A\cap B\cap C^C) = 0.08 - 0.05 = 0.03$

(1,6) $\Rightarrow \quad P(A\cap C) = P(A) - P(A\cap C^C) = 0.3 - 0.08 = 0.22$

$\Rightarrow \quad P(A\cap B^C\cap C) = P(A\cap C) - P(A\cap B\cap C) = 0.22 - 0.18 = 0.04$

(5) $$\Rightarrow \quad P(A \mid B\cap C^C) = 0.5 = \frac{P(A\cap B\cap C^C)}{P(B\cap C^C)} = \frac{0.05}{P(B\cap C^C)} \quad \Rightarrow \quad P(B\cap C^C) = 0.1$$

$\Rightarrow \quad P(B) = P(B\cap C) + P(B\cap C^C) = 0.32 + 0.1 = 0.42$

$\Rightarrow \quad P(A^C\cap B\cap C^C) = P(B) - P(B\cap C) - P(A\cap B\cap C^C) = 0.42 - 0.32 - 0.05 = 0.05$

ומכאן כי: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.3 + 0.42 - 0.23 = 0.49$

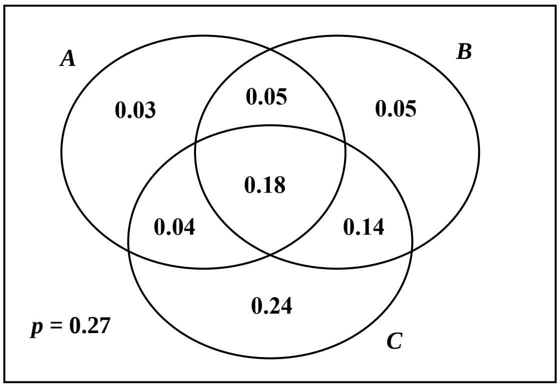
כעת, נסמן $p = P(A^C\cap B^C\cap C^C)$.

הואיל וסכום כל ההסתברויות של החיתוכים ה"משולשים" הוא 1, נקבל כי:

(7) $$\Rightarrow \quad P(A^C\cap B^C \mid C^C) = 0.675 = \frac{P(A^C\cap B^C\cap C^C)}{P(C^C)} = \frac{p}{0.13+p} \quad \Rightarrow \quad p = 0.27$$

ומכאן: $P(A^C\cap B^C\cap C) = 1 - P(A\cup B) - P(A^C\cap B^C\cap C^C) = 1 - 0.49 - 0.27 = 0.24$

כעת, נוכל לצייר דיאגרמת ון מתאימה לבעיה:



א1. $P(B) = 0.42$

א2. $P(A^C \cap B^C \cap C^C) = 0.27$

ב. $$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.23}{0.42}=0.5476$$

ג. $$P(C|(A\cap B)\cup(A^C\cap B^C))=\frac{P(C\cap((A\cap B)\cup(A^C\cap B^C)))}{P((A\cap B)\cup(A^C\cap B^C))}=\frac{0.18+0.24}{0.23+0.51}=\frac{0.42}{0.74}=0.5676$$

ד. ההסתברות שלא יתקיים אף פרמטר היא: $P(A^C \cap B \cap C) = 0.14$

ההסתברות שיתקיים בדיוק אחד מהפרמטרים היא:

$$P(A^C\cap B^C\cap C) + P(A^C\cap B\cap C^C) + P(A\cap B\cap C) = 0.24 + 0.05 + 0.18 = 0.47$$

ולכן ההסתברות שיתקיימו לפחות שניים מהפרמטרים היא: $1 - 0.14 - 0.47 = 0.39$

שאלה 3

א. הוכחת הטענה מובאת באתר הקורס.

ב. למשל, משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 25 ו- 0.2:

$$E[Y]=25\cdot 0.2=5 \quad ; \quad \mathrm{Var}(Y)=25\cdot 0.2\cdot 0.8=4$$

ג. לפי נתוני הבעיה מתקיים:
$$E[W]=\sum_w w\cdot p_w \underset{P\{W=8\}=0.5}{\underset{\downarrow}{=}} 8\cdot 0.5+\sum_{w\neq 8} w\cdot p_w \underset{P\{W>1\}=1}{\underset{\downarrow}{>}} 4+1\cdot 0.5=4.5$$

בסתירה לכך ש- $E[W] = 2$. לפיכך, לא ייתכן משתנה מקרי W כזה.

שאלה 4

א. $$P\{X=4\}=\frac{\binom{20}{4}\cdot\binom{6}{4}\cdot 4!\cdot(2^{16}-2\cdot 16)}{6^{20}}=3.125\cdot 10^{-5}$$

יש $\binom{20}{4}$ אפשרויות לבחור 4 מקומות שבהם תופענה תוצאות "יחידות"; יש $\binom{6}{4}$ אפשרויות לבחור 4 תוצאות שתופענה בדיוק פעם אחת; יש !4 אפשרויות להתאים בין המקומות לתוצאות ה"יחידות"; יש 2^{16} אפשרויות לבחור את 16 התוצאות במקומות שנותרו פנויים, מהן יש להפחית את המקרים שבהם יש תוצאה נוספת שמתקבלת בדיוק פעם אחת ($2\cdot 16$ מקרים).

ב. נגדיר: $X_i = \begin{cases} 1 & , \text{תוצאה } i \text{ התקבלה בדיוק פעם אחת} \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$ לכל $i = 1,\ldots,6$

ונקבל כי: $X = \sum_{i=1}^{6} X_i$ = מספר התוצאות שמתקבלות בדיוק פעם אחת.

לכל $i = 1,\ldots,6$ מתקיים: $$E[X_i] = P\{X_i=1\} = \frac{20\cdot 5^{19}}{6^{20}} = 0.10434$$

לפיכך: $$E[X] = \sum_{i=1}^{6} E[X_i] = 6\cdot 0.10434 = 0.6260$$

ג. לכל $i=1,\ldots,6$ מתקיים: $\text{Var}(X_i)=P\{X_i=1\}P\{X_i=0\}=0.10434\cdot 0.89566=0.09345$

ולכל $1\le i\ne j\le 6$ מתקיים: $P\{X_i=1,X_j=1\} = \dfrac{20\cdot 19\cdot 4^{18}}{6^{20}}=0.00714$

הסבר: יש 20 אפשרויות למקם את התוצאה i , 19 אפשרויות למקם את התוצאה j , ו- 4^{18} לבחור את יתר התוצאות.

לכן, לכל $1\le i\ne j\le 6$ מתקיים: $\text{Cov}(X_i,X_j) = 0.00714-0.10434^2 = -0.003747$

ומכאן: $\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^{6}\text{Var}(X_i) + \sum_{i\ne j}\text{Cov}(X_i,X_j) = 6\cdot 0.09345 - 6\cdot 5\cdot 0.003747 = 0.4483$

שאלה 5

נסמן ב- X משקל (בגרם) של כיכר-לחם מקרית; $X\sim N(500,\,30^2)$.

א1. $P\{X<490\}=P\{Z<\frac{490-500}{30}\}=P\{Z<-\frac{1}{3}\}=1-\Phi(\frac{1}{3})$

$$=1-(0.6296+0.33\cdot 0.0038)=1-0.6305=0.3695$$

נסמן ב-Y את מספר כיכרות-הלחם שמשקלן נמוך מ-490 גרם, ונקבל כי $Y\sim B(20,\,0.3695)$. לפיכך:

$$P\{Y=7\}=\binom{20}{7}\cdot 0.3695^7\cdot 0.6305^{13} = 0.1814$$

א2. $P\{X>510\}=P\{Z>\frac{510-500}{30}\}=P\{Z>\frac{1}{3}\}=1-\Phi(\frac{1}{3})=0.3695$

נסמן ב-W את מספר השקילה שבה שוקלים את כיכר-הלחם הרביעית שמשקלה עולה על 510 גרם, ונקבל כי $W\sim NB(4,\,0.3695)$. לכן: $P\{W=15\}=\binom{14}{3}\cdot 0.3695^4\cdot 0.6305^{11} = 0.0425$

א3. התפלגות המשקל **(בק״ג)** של כיכר לחם אחת היא $N(0.5,\,0.03^2)$.

כעת, הואיל ומשקלי 20 כיכרות-הלחם הם משתנים מקריים נורמליים בלתי-תלויים, גם ההתפלגות של סכום המשקלים הללו היא נורמלית, כאשר הפרמטרים של התפלגות הסכום הם סכום התוחלות וסכום השונויות של משקלי 20 הכיכרות. כלומר, המשקל הכולל של 20 כיכרות-לחם מקריות הוא משתנה מקרי נורמלי עם הפרמטרים 10 ק״ג ו- $20\cdot 0.03^2=0.018$ ק״ג^2.

לפיכך, אם נסמן ב- S את המשקל הכולל של 20 כיכרות-הלחם, נקבל:

$$P\{S>10.25\}=P\{Z>\tfrac{10.25-10}{\sqrt{0.018}}\}=P\{Z>1.8634\}=1-\Phi(1.8634)$$

$$=1-(0.9686+0.34\cdot 0.0007)=1-0.9688=0.0312$$

ב. נמצא את הערך של a שמקיים את המשוואה: $P\{X<a\}=0.70$

מטבלת העזר מקבלים כי: $\Phi\left(\frac{a-500}{30}\right)=0.70=\Phi(0.524)$

נקבל כי: $\frac{a-500}{30}=0.524$

ומכאן שמתקיים: $a=500+0.524\cdot 30=515.72_{\text{גרם}}$

כלומר, ההסתברות שלחמנייה מקרית תשקול פחות מ-515.72 גרם היא 0.70.