

## שאלה 1 (25 נקודות)

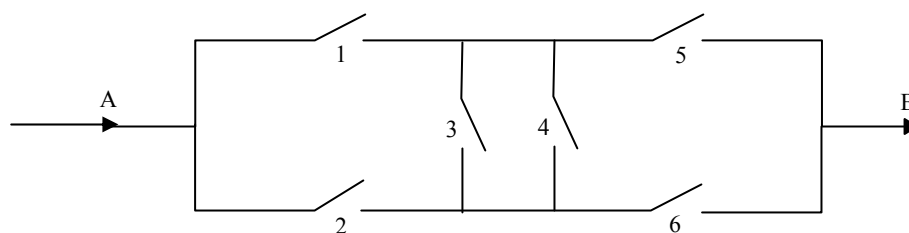
- יהי  $N$  משתנה מקרי אחיד בדיד בין 1 ל-10. כלומר, הערכים האפשריים של המשתנה המקרי  $N$  הם 1, 2, ..., 10, וכל אחד מהם מתקבל בהסתברות 0.1. נתונה קבוצה של  $N$  אנשים. נותנים לכל אחד מ- $N$  האנשים קופסת גפרורים. מספר הגפרורים בכל קופסה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 20. אין תלות בין קופסאות גפרורים שונות ואין תלות בין קופסאות הגפרורים למספר האנשים בקבוצה.
- (9 נק') א. מהי ההסתברות שאף לא אחד מאנשי הקבוצה יקבל קופסת גפרורים שיש בה בדיוק 20 גפרורים?
- (8 נק') ב. חשב את השונות של המספר הכולל של הגפרורים שמקבלים כל אנשי הקבוצה.
- (8 נק') ג. חשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של המספר הכולל של הגפרורים שמקבלים כל אנשי הקבוצה.

## שאלה 2 (25 נקודות)

- (13 נק') א. יהי  $N$  משתנה מקרי בדיד שפונקציית ההסתברות שלו נתונה על-ידי:
- $$P\{N=n\} = \frac{5}{6^n}, \quad n=1,2,\dots$$
- ויהי  $Y$  משתנה מקרי רציף, שפונקציית ההתפלגות המצטברת שלו, בהינתן  $N=n$ , נתונה על-ידי:
- $$F(y|n) = y^n, \quad 0 < y < 1; \quad n=1,2,\dots$$
- מצא את  $f_Y(y)$ .
- הערה:** לכל  $-1 < x < 1$ , מתקיים:
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left[ \left(\frac{x}{a}\right)^n \right] = \frac{d}{dx} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n \right]$$
- (12 נק') ב. יהי  $X$  משתנה מקרי רציף שפונקציית הצפיפות שלו נתונה על-ידי:
- $$f_X(x) = e^{x-\theta}, \quad -\infty < x < \theta < \infty$$
- ויהי  $Y$  גם הוא משתנה מקרי רציף.
- מצא פונקציית צפיפות משותפת  $f_{X,Y}$ , כך שפונקציית הצפיפות השולית של  $X$  המתאימה לה, היא הפונקציה הנתונה, וכך ש- $X$  ו- $Y$  **תלויים**. רשום את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.
- הסבר מדוע  $X$  ו- $Y$  תלויים, והראה שפונקציית הצפיפות השולית של  $X$ , שמתקבלת מפונקציית הצפיפות המשותפת שמצאת, היא אכן הפונקציה הנתונה.

### שאלה 3 (25 נקודות)

במעגל שלהלן, כל אחד מששת המתגים סגור בהסתברות 0.7 (ואז יכול לעבור בו זרם).  
כמו כן, כל מתג פועל באופן בלתי-תלוי באחרים.



- 8 נק' א. אם לפחות אחד ממתגים 3 ו-4 סגור, מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?  
9 נק' ב. מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?  
8 נק' ג. אם עובר זרם מ-A ל-B, מהי ההסתברות ששני המתגים 1 ו-6 סגורים?

### שאלה 4 (25 נקודות)

בין שני עמודים לצד הדרך מתוחים 2 כבלי חשמל, האחד מעל השני.  
התפלגות מספר הציפורים שעומדות על כל אחד מן הכבלים היא בינומית עם הפרמטרים 30 ו-0.1.  
אין תלות בין מספרי הציפורים על כל אחד מן הכבלים.

7 נק' א. אם ידוע שעל הכבל התחתון עומדת לפחות ציפור אחת, מהי תוחלת מספר הציפורים שעומדות עליו?

6 נק' ב. מהי ההסתברות שעל שני הכבלים יחדיו יושבות בסך-הכל 7 ציפורים?

ג. יהיו:  $X$  = מספר הציפורים על הכבל התחתון;  
 $Y$  = מספר הציפורים על שני הכבלים יחדיו.

6 נק' 1. חשב את  $\rho(X,Y)$ .

6 נק' 2. אם על שני הכבלים יחדיו יושבות בסך-הכל 7 ציפורים,

מהי ההסתברות ש-3 מהן יושבות על הכבל התחתון?

שאלה 5 (25 נקודות)

נתונה פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה המקרי  $X$ , עבור  $\theta > 0$ :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \theta^x - 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

(6 נק') א. מצא את הערך של  $\theta$  בעזרת פונקציית ההתפלגות המצטברת הנתונה בלבד, כלומר, מבלי למצוא את פונקציית הצפיפות של  $X$ . נמק את תשובתך.

(6 נק') ב. מצא את פונקציית הצפיפות של  $X$ .

(6 נק') ג. חשב את התוחלת של  $X$ .

(7 נק') ד. חשב את פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי  $Y = 2^X - 1$ , וזהה את התפלגותו.

**הערות:**  $a^{\log_a b} = b$  ;  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\ln b}{\ln a}$  ;  $\int a^x dx = a^x / \ln a$  ;  $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$

**בהצלחה!**