

ה א ו נ י ב ר ס י ט ה ה פ ת ו ח ה

20585

**מבוא לתורת החישוביות
והסיבוכיות**

חוברת הקורס - סתיו 2019א

כתב: אלעזר בירנבוים

אוקטובר 2018 - סמסטר סתיו - תשע"ט

פנימי – לא להפצה.

כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה. ©

תוכן העניינים

א	אל הסטודנטים
ג	1. לוח זמנים ופעילויות
ה	2. תיאור המטלות
ו	3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס
1	ממ"ץ 11
5	ממ"ץ 12
7	ממ"ץ 13
11	ממ"ץ 14
13	ממ"ץ 15

אל הסטודנטים,

אני מקדם את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים.
בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.
פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ס בכתובת:

<http://telem.openu.ac.il>

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספרייה באינטרנט www.openu.ac.il/Library

שעות הייעוץ בקורס מתקיימות בימי ראשון בשעות 18:00-20:00 בטלפון 04-6850321.

אבקש מאוד לא להתקשר לטלפון הזה בשעות לא סבירות ובשבתות.

ניתן לפנות גם בדואר אלקטרוני: elazar@openu.ac.il

אני מאחל לכם הצלחה בלימודים.

לתשומת לב הסטודנטים הלומדים בחו"ל:

למרות הריחוק הפיסי הגדול, נשתדל לשמור אתכם על קשרים הדוקים ולעמוד לרשותכם ככל האפשר. הפרטים החיוניים על הקורס נכללים בחוברת הקורס וכן באתר הקורס. מומלץ מאוד להשתמש באתר הקורס ובכל אמצעי העזר שבו, וכמובן, לפנות אלינו במידת הצורך.

בברכה,

אלעזר גינזבורג

מרכז ההוראה

1. לוח זמנים ופעילויות (20585 / 2019א)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
1	19.10.2018-14.10.2018	פרק 1		
2	26.10.2018-21.10.2018	פרק 1 פרק 2	מפגש ראשון	ממ"ן 11 26.10.2018
3	2.11.2018-28.10.2018	פרק 2		
4	9.11.2018-4.11.2018	פרק 3	מפגש שני	
5	16.11.2018-11.11.2018	פרק 3		ממ"ן 12 16.11.2018
6	23.11.2018-18.11.2018	פרק 4	מפגש שלישי	
7	30.11.2018-25.11.2018	פרק 4		
8	7.12.2018-2.12.2018 (ב-ו חנוכה)	פרק 4	מפגש רביעי	

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

לוח זמנים ופעילויות – המשך

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
9	14.12.2018-9.12.2018 (א-ב חנוכה)	פרק 4		ממ"ן 13 14.12.2018
10	21.12.2018-16.12.2018	פרק 5	מפגש חמישי	
11	28.12.2018-23.12.2018	פרק 5 פרק 6		ממ"ן 14 28.12.2018
12	4.1.2019-30.12.2018	פרק 6	מפגש שישי	
13	11.1.2019-6.1.2019	פרק 7		
14	18.1.2019-13.1.2019	פרק 7	מפגש שביעי	ממ"ן 15 18.1.2019

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

2. תיאור המטלות

קראו היטב עמודים אלו לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס - הבנה מעמיקה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. המטלות תיבדקנה על-ידי המנחה ותוחזרנה בצירוף הערות המתייחסות לתשובות.

המטלות מלוות את יחידות הלימוד בקורס. להלן פירוט המטלות, היחידות שאליהן מתייחסת כל מטלה ומשקלה היחסי. בחלק מהמטלות תופענה גם שאלות המתייחסות ליחידות שכבר נלמדו.

ממ"ן 11 - פרק 1 - 6 נקודות

ממ"ן 12 - פרקים 2, 3 - 6 נקודות

ממ"ן 13 - פרק 4 - 8 נקודות

ממ"ן 14 - פרק 5 - 4 נקודות

ממ"ן 15 - פרקים 6, 7 - 6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל של 24 נקודות לפחות.

שימו לב שחובה להגיש את ממ"ן 13.

ללא צבירת 24 נקודות בהגשת מטלות לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

למען הסר ספק, יודגש שחל איסור על הכנה משותפת והעתקה של מטלות או חלקי מטלות. (הנושא מפורט בתקנון משמעת לסטודנטים - נספח 1 של ידיעון האו"פ).

לתשומת לבכם!

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן: אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלה** בציון הנמוך ביותר, שציונה נמוך מציון הבחינה, לא תילקח בחשבון בעת שקלול הציון הסופי. זאת בתנאי שמטלה זו **אינה חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס. סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון שמספרו 09-7782222, או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא <http://www.openu.ac.il/sheilta> קורסים ➔ ציוני מטלות ובחינות ➔ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.

יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות

שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של ציוני המטלות והבחינה יהיה נמוך מ-60).

כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל כולל של 24 נקודות לפחות.

ב. ציון של לפחות 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 7

מועד אחרון להגשה: 26 אוק' 18

סמסטר: 2019א

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (15%)

נגדיר את השפה D הבאה:

$$D = \{0^{n_1}10^{n_2}1\cdots10^{n_k} \mid 0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k\}$$

(דוגמאות למילים ששייכות לשפה: 000, 0010000100000, 01000100001000000)

בנו מכונת טיורינג המכריעה את D .

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, \sqcup, x\}$; למכונה יהיו לא יותר

מתשעה מצבים (כולל q_{accept} ו- q_{reject}).

תארו את המכונה בעזרת איור (כמו איור 3.8 בספר).

אתם רשאים להשמיט מעברים בלתי אפשריים (כדוגמת המעבר המתייחס לקריאת הסמל x במצב

q_1 של המכונה M_2 באיור 3.8).

הקפידו שלא תהיינה קשתות נחתכות באיור.

הסבירו היטב את פעולת המכונה, ולמה היא אכן מכריעה את השפה D .

שאלה 2 (16% סעיף א - 4%; סעיף ב - 12%)

עיינו במכונה M_1 של איור 3.10.

א. האם במצב q_6 אפשר להשמיט את המעברים המתאימים לסמלים 0 ו-1? הצדיקו את תשובתכם.

ב. הציעו דרך לשנות את המכונה M_1 כך שאפשר יהיה לוותר על אחד המצבים (ולקבל מכונה עם

תשעה מצבים בלבד, כולל q_{accept} ו- q_{reject}).

המכונה לאחר השינוי חייבת להכריע את השפה B ש- M_1 מכריעה.

אינכם צריכים לצייר את המכונה החדשה. די להסביר את השינויים הנדרשים.

שאלה 3 (12%)

לפי ההגדרה של מכונת טיורינג שמופיעה בספר, כאשר מגיעים למצב המקבל q_{accept} או למצב הדוחה q_{reject} , המכונה עוצרת. כלומר, פונקצית המעברים איננה מוגדרת על מצבים אלה. (עיינו בפסקה האחרונה בעמוד 169 בספר).

נניח שנשנה את ההגדרה של פונקצית המעברים כך שכאשר מגיעים למצב המקבל או למצב הדוחה, לא בהכרח עוצרים. ייתכן שעל חלק מן הסמלים של אלפבית הסרט Γ יש המשך.

המכונה **מקבלת** מילה w רק אם במהלך החישוב של המכונה על w מגיעים למצב המקבל, ועל הסמל שנקרא כעת בסרט אין המשך מן המצב המקבל.

המכונה **לא מקבלת** מילה w , אם במהלך החישוב של המכונה על w מגיעים למצב הדוחה, ועל הסמל שנקרא כעת בסרט אין המשך מן המצב הדוחה, או אם המכונה אף פעם לא עוצרת.

האם למכונה שפועלת לפי ההגדרה החדשה **יש אותו הכוח** כמו למכונה רגילה?

אם עניתם שכן, הראו כיצד כל אחת מן המכונות יכולה לחקות את פעולתה של המכונה האחרת.

אם עניתם שלא, תנו דוגמה לשפה שאחת המכונות יכולה לזהות, והשנייה איננה יכולה לזהות.

שאלה 4 (16%)

תהי w מחרוזת סמלים. מסמנים על-ידי w^R את המחרוזת המתקבלת מ- w על-ידי היפוך סדר הסמלים ב- w .

$$\text{דוגמה: } 11001^R = 10011$$

תארו **בפירוט** מכונת טיורינג **דטרמיניסטית**, בעלת שני סרטים, שמכריעה שייכות לשפה F הבאה:

$$F = \{ww^Rw \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

אלפבית הקלט של המכונה הוא $\Sigma = \{0,1\}$. את אלפבית הסרט אתם יכולים לבחור כרצונכם.

עליכם לתאר מכונה (בעלת שני סרטים), שמספר הצעדים שהיא מבצעת **לינארי בגודל הקלט**. (על

מילת קלט באורך n , מספר הצעדים צריך להיות $O(n)$).

תיאור המכונה צריך להיות מפורט, כך שיהיה ברור כיצד לבנות את המכונה.

הסבירו היטב, למה מספר צעדי החישוב הוא $O(n)$, כאשר n הוא גודל הקלט.

שאלה 5 (16%)

בנו מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית**, שכאשר היא מתחילה לפעול על הסרט הריק (סרט שכולו

סימני רווח), בסיומו של כל מסלול חישוב שמסתיים במצב q_{accept} , כתובה על הסרט מילה w

ששייכת לשפה A של דוגמה 3.7, ולכל מילה w ששייכת לשפה A , יש למכונה מסלול חישוב

שמסתיים במצב q_{accept} ובסיומו w כתובה על הסרט של המכונה.

כלומר, כאשר המכונה מתחילה את פעולתה על סרט ריק, היא יכולה לסיים ב- q_{accept} , ועל הסרט

תהיה כתובה המילה 0, היא יכולה לסיים ב- q_{accept} , ועל הסרט תהיה כתובה המילה 00, היא יכולה

לסיים ב- q_{accept} , ועל הסרט תהיה כתובה המילה 0000, וכך הלאה; ולכל מילה w שבנויה ממספר 0-ים שהוא חזקה של 2, יש למכונה מסלול שמסתיים ב- q_{accept} ועל הסרט כתובה המילה w .
אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, \sqcup, x\}$; למכונה יהיו **לא יותר משמונה מצבים** (כולל q_{accept} ו- q_{reject}).
תארו את המכונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{reject} וכל הקשתות שנכנסות אליו).
הסבירו היטב את פעולת המכונה, את התפקיד של כל מצב, את נקודות האי-דטרמיניזם, ולמה המכונה אכן מבצעת את הנדרש.

שאלה 6 (15%)

בנו מונה (enumerator) לשפה $A_3 = \{0^{3^n} \mid n \geq 0\}$.
(A_3 היא שפת המחרוזות של 0-ים שאורכן הוא חזקה שלמה של 3).
האלפבית Σ של סרט הפלט יהיה $\{0\}$; האלפבית Γ של סרט העבודה יהיה $\{0, x, \sqcup\}$.
למונה יהיו **לא יותר מעשרה מצבים** (כולל q_{print} ו- q_{halt}).
תארו את המונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{halt} וכל הקשתות שנכנסות אליו. אפשר לוותר על הציור של מעברים בלתי אפשריים).
להגדרה פורמלית של מונה, עיינו במדריך הלמידה.
הסבירו היטב את פעולת המונה, ולמה הוא אכן מפיק את השפה A_3 .

שאלה 7 (10%)

א. על המונה E נתון שהוא מפיק את מילות השפה שלו $L(E)$ בסדר הסטנדרטי.
האם אפשר להסיק מכך **שיש** מונה F שמפיק את המשלימה של $L(E)$ בסדר הסטנדרטי?
הוכיחו את תשובתכם.

ב. על המונה G נתון שהוא מפיק את מילות השפה שלו $L(G)$ לא לפי הסדר הסטנדרטי.
האם אפשר להסיק מכך **שאין** מונה H שמפיק את המשלימה של $L(G)$ בסדר הסטנדרטי?
הוכיחו את תשובתכם.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 16 נוב' 18

סמסטר: 2019א

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (15%)

הוכיחו שהשפה $SUB111_{\text{REX}}$ שלהלן היא שפה כריעה:

$$SUB111_{\text{REX}} = \{ \langle R \rangle \mid R \text{ is a regular expression and there is } w \in L(R) \text{ such that } 111 \text{ is a sub-word of } w \}$$

(מילה מהצורה $\langle R \rangle$ שייכת לשפה $SUB111_{\text{REX}}$, אם R הוא ביטוי רגולרי, ויש מילה w בשפה R -ש מתאר, שהיא מהצורה $w = x111y$, כאשר x ו- y הן מילים כלשהן).

שאלה 2 (18%)

נניח שנחליף בהוכחת משפט 4.11 את שלב 1 בתיאור של המכונה D באחת האפשרויות הבאות. קבעו ביחס לכל אחת מהן, האם ההוכחה עדיין טובה או לא, והסבירו היטב את תשובתכם.

א. הרץ את H על $\langle M, \langle M^+ \rangle \rangle$, כאשר M^+ היא המכונה הבאה אחרי M (בסדר הסטנדרטי של תיאורי המכונות).

ב. הרץ את H על $\langle M^+, \langle M \rangle \rangle$, כאשר M^+ היא המכונה הבאה אחרי M (בסדר הסטנדרטי של תיאורי המכונות).

שאלה 3 (15%)

הוכיחו שהשפה $EMPTY\text{-}TAPE_{\text{TM}}$ הבאה היא מזוהה-טיורינג אך איננה כריעה:

$$EMPTY\text{-}TAPE_{\text{TM}} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ is a TM that accepts } w, \text{ and when } M \text{ halts on } w \text{ (in } q_{\text{accept}}), \text{ its tape is empty} \}$$

(מילה $\langle M, w \rangle$ שייכת לשפה, אם M היא מכונת טיורינג בעלת סרט אחד, w היא מילה, M מקבלת את w , וכאשר M מסיימת את הריצה על w (במצב המקבל), הסרט של M ריק (כולו רווחים)).

הוכחת האי-כריעות של השפה תיעשה בעזרת שיטת האלכסון.

הדרכה: הניחו בשלילה ש- $EMPTY-TAPE_{TM}$ כריעה. אז יש מכונה H שמכריעה אותה. בנו מכונה D שתפעל הפוך מכל מכונה M שהיא.
(אל תשכחו להוכיח ש- $EMPTY-TAPE_{TM}$ מזוהה-טיורינג).

שאלה 4 (20%)

ביחס לכל אחת מן השפות הבאות, קבעו האם אפשר להוכיח שהיא לא כריעה בעזרת משפט Rice (ראו בעיה 5.16 בספר) או לא.

אם קבעתם שאפשר, כתבו את ההוכחה. אם קבעתם שאי אפשר, הסבירו היטב למה אי אפשר.

א. $A = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is a TM and } |L(M)|=5 \}$

(A היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג שמקבלות בדיוק 5 מילים).

ב. $B = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is a TM and there exists a string } w \text{ that } M \text{ accepts after exactly } |w| \text{ steps} \}$

(B היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג' שיש מילה w שמתקבלת על-ידי המכונה לאחר

בדיוק $|w|$ צעדים).

ג. $REGULAR_{TM}$ (השפה מוגדרת בספר בעמוד 218).

שאלה 5 (12%)

האם ALL_{LBA} היא שפה כריעה? הוכיחו את תשובתכם.

($ALL_{LBA} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is an LBA and } L(M)=\Sigma^* \}$)

שאלה 6 (20%)

השפה ALL_{TM} מוגדרת בבעיה 5.18 (סעיף c) בספר (עמוד 240).

א. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- ALL_{TM} (הראו: $A_{TM} \leq_m ALL_{TM}$).

ב. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $\overline{ALL_{TM}}$ (הראו: $A_{TM} \leq_m \overline{ALL_{TM}}$).

הדרכה: אם מכונת טיורינג M לא מקבלת קלט w , אז לכל מספר של צעדים שמריצים את M

על w , לא מגיעים למצב המקבל.

מכונת טיורינג R יכולה להתייחס לקלט שלה כאל מספר הצעדים שיש להריץ מכונה אחרת S .

(למשל, אם הקלט של R הוא v , אז R תריץ את S $|v|$ צעדים).

ג. האם יש רדוקצית מיפוי של ALL_{TM} ל- A_{TM} ? (האם $ALL_{TM} \leq_m A_{TM}$?) הוכיחו את תשובתכם.

ד. האם יש רדוקצית מיפוי של $\overline{ALL_{TM}}$ ל- A_{TM} ? (האם $\overline{ALL_{TM}} \leq_m A_{TM}$?) הוכיחו את תשובתכם.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

משקל המטלה: 8 נקודות

מספר השאלות: 8

מועד אחרון להגשה: 14 דצמ' 18

סמסטר: 2019א

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (18%)

שפה A נקראת **co-finite** אם השפה המשלימה שלה (\bar{A}) היא שפה סופית.

א. הוכיחו: אם A היא שפה co-finite, אז A שייכת ל- $TIME(1)$ (במכונה עם סרט אחד).

ב. תנו דוגמה לשפה אינסופית B , שגם המשלימה שלה (\bar{B}) היא שפה אינסופית, ו- B שייכת ל- $TIME(1)$ (במכונה עם סרט אחד).

ג. תנו דוגמה לשפה רגולרית C , שלא שייכת ל- $TIME(1)$. הוכיחו ש- C לא שייכת ל- $TIME(1)$.

שאלה 2 (10%)

גרף לא מכוון $G=(V, E)$ נקרא **דו-צדדי** (bipartite), אם אפשר לחלק את הצמתים שלו לשתי קבוצות V_1 ו- V_2 כך שכל קשת של G מחברת צומת של V_1 עם צומת של V_2 .
 $(V_1 \cap V_2 = \emptyset ; V_1 \cup V_2 = V)$

הוכיחו שהשפה $BIPARTITE$ שייכת למחלקה P .

$$BIPARTITE = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ is a bipartite undirected graph} \}$$

שאלה 3 (10%)

נענין בשפה הבאה :

$$k\text{-}LENG_{DFA} = \{ \langle A, k \rangle \mid A \text{ is a DFA and } L(A) \text{ contains a } k\text{-length word} \}$$

מילה $\langle A, k \rangle$ שייכת לשפה, אם A הוא אוטומט סופי דטרמיניסטי, k הוא מספר שלם לא שלילי, והאוטומט A מקבל לפחות מילה אחת שאורכה k .

פרופסור מלומד הציע את ההוכחה הבאה לכך שהשפה $k\text{-}LENG_{DFA}$ שייכת ל-P :
נבנה מכונה מכריעה לשפה :

"על קלט $\langle A, k \rangle$ כאשר A אוטומט סופי דטרמיניסטי ו- k שלם אי-שלילי :

1. בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי B , שמזהה את שפת כל המילים שאורכן k (מעל Σ של A). B הוא אוטומט בעל $k+2$ מצבים.

2. בנה את אוטומט המכפלה לחיתוך של $L(A)$ ו- $L(B)$.

3. בדוק האם השפה של אוטומט המכפלה ריקה (בעזרת מכונה לשפה E_{DFA}). אם היא ריקה, דחה. אם היא לא ריקה, קבל."

זמן הריצה של כל אחד מן השלבים פולינומיאלי בגודל הקלט. לכן זמן הריצה של המכונה פולינומיאלי בגודל הקלט.

האם ההוכחה של הפרופסור המלומד טובה? הצדיקו היטב את תשובתכם.

שאלה 4 (15%). סעיף א - 10 נקודות; סעיף ב - 5 נקודות)

א. הציגו מאמת (verifier) לשפה A_{TM} .

הדרכה : זכרו שמאמת תמיד עוצר (ומקבל, אם האימות c שכנע אותו שמילת הקלט שייכת לשפה, ודוחה, אם c לא שכנע אותו שמילת הקלט שייכת לשפה).

ב. הוכיחו : אין ל- A_{TM} מאמת, שזמן הריצה שלו פולינומיאלי בגודל הקלט.

שאלה 5 (10%)

האם, לפי הידע שבידנו, השפה B הבאה שייכת למחלקה NP? הסבירו את תשובתכם.

$$B = \{ \langle n, m \rangle \mid m \text{ מספר המחלקים של } n \text{ הוא } m \}$$

דוגמאות למילים בשפה : $\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 6, 4 \rangle, \langle 8, 4 \rangle, \langle 20, 6 \rangle$

הניחו ש- n ו- m מיוצגים בבינארי.

שאלה 6 (7%)

ברדוקציה של הוכחת משפט 7.56 בספר, קבוצת המספרים S כוללת מופעים כפולים של מספרים $(g_i = h_i)$ לכל $1 \leq i \leq k$. כלומר, S היא רב-קבוצה (multiset).
שנו את הרדוקציה, כך ש- S לא תכיל מופעים כפולים. כלומר, S תהיה קבוצה (ולא רב-קבוצה).

שאלה 7 (12%)

בעיה 7.39 בספר (עמודים 326-327).

שאלה 8 (18%)

בעיית הקבוצה הבלתי תלויה (*INDEPENDENT-SET*) מוגדרת בעמוד 78 במדריך הלמידה.

א. הוכיחו: בגרפים שבהם דרגת כל צומת ≥ 2 הבעיה **שייכת ל-P**.

(דרגת צומת = מספר הקשתות שנוגעות בצומת).

עליכם לתאר אלגוריתם, בעל זמן ריצה פולינומיאלי, המקבל כקלט מספר טבעי k וגרף לא מכון G , שדרגת כל צומת שלו ≥ 2 , ובודק האם יש ב- G קבוצה בלתי תלויה בגודל k .

ב. הוכיחו: בגרפים שבהם דרגת כל צומת ≥ 3 הבעיה היא **NP-שלמה**.

הדרכה: רדוקציה פולינומיאלית של $3SAT$:

יהיו הפסוקיות של הנוסחה C_1, \dots, C_m (בכל פסוקית שלושה ליטרלים).

לכל משתנה v בנוסחה, נסמן על-ידי k_v את מספר הפסוקיות שבהן הוא מופיע.

לכל משתנה v בונים מעגל בגודל $2k_v$ שבו מופיעים הקדקודים $T_{v,i}$ ו- $F_{v,i}$ לסירוגין, כאשר i עובר על מספרי הפסוקיות שבהן מופיע המשתנה v .

(למשל, אם המשתנה v מופיע בפסוקיות השנייה, החמישית והשמינית, אז בונים את

המעגל $(T_{v,2} - F_{v,2} - T_{v,5} - F_{v,5} - T_{v,8} - F_{v,8} - T_{v,2})$.

לכל פסוקית $(l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ בנוסחה l_i (הוא ליטרל) בונים משולש.

מחברים בקשת כל ליטרל l של הפסוקית ה- i לקדקוד המתאים לפסוקית ה- i במעגל

של המשתנה של l : אם הליטרל l הוא v , מחברים אותו ל- $T_{v,i}$; אם הליטרל l הוא $\neg v$,

מחברים אותו ל- $F_{v,i}$.

הראו שהרדוקציה המוצעת יכולה להתבצע בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט.

הראו שדרגת כל צומת בגרף שנבנה על-ידי הרדוקציה ≥ 3 .

הראו שהנוסחה ספיקה, אם, ורק אם, יש בגרף שנבנה על-ידי הרדוקציה קבוצה בלתי תלויה בגודל n (שאותו עליכם לקבוע).

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 28 דצמ' 18

סמסטר: 2019א

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (16%)

הוכיחו: כל שפה חסרת הקשר (CFL) שייכת ל- $SPACE(n)$.
לכל שפה חסרת הקשר A , הציגו אלגוריתם להכרעת השפה, הסבירו היטב כיצד הוא ימומש, והוכיחו שהמקום הדרוש הוא $O(n)$.
אפשר להניח שהשפה נתונה באמצעות דקדוק בצורה הנורמלית של חומסקי.

שאלה 2 (10%)

הראו רדוקציה בעלת זמן ריצה $O(n^2)$ של השפה SAT לשפה TQBF.
הדרכה: זו לא הרדוקציה של הוכחת משפט 8.9.

שאלה 3 (24%)

תזכורת: $A_{LBA} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ is an LBA, } w \text{ is a string, and } M \text{ accepts } w \}$
א. הוכיחו: השפה A_{LBA} שייכת ל-PSPACE.
ב. תהי A שפה ב-PSPACE. תארו רדוקציה, בעלת זמן ריצה פולינומיאלי, של A ל- A_{LBA} . (הראו כי $A \leq_p A_{LBA}$ באמצעות הצגת רדוקציה בזמן פולינומיאלי של A ל- A_{LBA}).
ג. הסיקו: A_{LBA} היא שפה PSPACE-שלמה.

שאלה 4 (10%)

האם המחלקה L סגורה לפעולת השרשור (concatenation)? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 5 (20%)

נגדיר את השפה B הבאה: $B = \{e \mid e \text{ is an expression of properly nested parentheses}\}$
 B היא שפת הביטויים האריתמטיים של מספרים שלמים אי-שליליים שבהם הסוגריים תקינים.
 האלפבית של B הוא $\Sigma = \{+, -, \times, /, (,), 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 דוגמאות למילים ששייכות ל- B : $((2-95)/14)$, $((2)+((2-95)/14))$, $(1+2+5)-(2/3)+((2)+((2-95)/14))$, $(2 \times 3 + 5 - 4)/3$, $(2-4)$, $143+5$
 דוגמאות למילים שלא שייכות ל- B : $((2+5) \times (5/7))$, $(2+\times 5)$, $(145+16($, $234+156)$, $89+$, 45 , $()$, -6
 הוכיחו שהשפה B שייכת למחלקה L .
 עליכם לתאר מכונה דטרמיניסטית, בעלת סיבוכיות מקום לוגריתמית, שמכריעה את B .

שאלה 6 (20%)

בעיה 8.18 בספר (עמוד 359).
 הדרכה: הראו: $ANFA \in NL$ ו- $PATH \leq_L ANFA$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: סעיפים 9.1, 10.1 ו-10.2 בספר

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 7

מועד אחרון להגשה: 18 ינו' 19

סמסטר: 2019א

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (12%)

הוכיחו שהפונקציה $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ניתנת לבנייה במגבלת מקום עצמית (space constructible).

שאלה 2 (12%)

עיינו במכונה D שבהוכחת משפט 9.3 (עמוד 366).

א. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate M on $w \dots$ " במשפט "Simulate M on $\langle M \rangle \dots$ " (כלומר, במקום לבצע סימולציה של M על $w = \langle M \rangle 10^k$, נבצע סימולציה של M על $\langle M \rangle$). האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate M on $w \dots$ " במשפט "Simulate M on $10^k \dots$ " (כלומר, במקום לבצע סימולציה של M על $w = \langle M \rangle 10^k$, נבצע סימולציה של M על 10^k). האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 3 (12%)

הסבירו כיצד אפשר לבנות מכונה עם שני סרטים, שכאשר היא מקבלת כקלט על הסרט הראשון את המילה 1^n , היא מסיימת כאשר על הסרט השני כתוב הייצוג הבינארי של n .
הסרט הראשון הוא סרט לקריאה בלבד. הסרט השני הוא סרט לקריאה וכתובה, והוא סרט הפלט. עליכם לבנות מכונה, שזמן ריצתה יהיה $O(n)$.
עליכם להסביר היטב את אופן פעולת המכונה, ולהסביר מדוע זמן הריצה שלה הוא $O(n)$.

שאלה 4 (24%)

- למדו את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה (עמודים 126-128).
- א. נסחו בעיית הכרעה של בעיית הסוכן הנוסע (כלומר, בעיה שהתשובה עליה היא "כן" או "לא").
- ב. הוכיחו: בעיית ההכרעה של בעיית הסוכן הנוסע **המטרית** היא בעיה NP-שלמה.
- הדרכה:** הוכיחו שהיא שייכת ל-NP, והראו רדוקציה פולינומיאלית של בעיית קיומו של מעגל המילטון בגרף לא מכוון.
- (מעגל המילטון בגרף לא מכוון G הוא מעגל פשוט שמכיל כל צומת של G פעם אחת ויחידה. אתם יכולים להשתמש בעובדה שבעיית קיומו של מעגל המילטון בגרף לא מכוון היא בעיה NP-שלמה).
- ג. הוכיחו: לכל בעיית סוכן נוסע **לא מטרית**, אפשר לבנות בזמן פולינומיאלי בעיית סוכן נוסע **מטרית** עם אותם צמתים, כך ש- P הוא מסלול אופטימלי בבעיה המקורית (הלא מטרית), אם, ורק אם, P הוא מסלול אופטימלי בבעיה החדשה (המטרית).
- הדרכה:** הגדילו את משקלי הקשתות באופן שיתקיימו תנאי הבעיה המטרית.
- ד. הסבירו מדוע אין סתירה בין קיומו של אלגוריתם קירוב בעל יחס קירוב 2 (ואפילו 1.5) ובעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית הסוכן הנוסע המטרית, ובין אי-קיומו של אלגוריתם כזה לבעיה הכללית (הלא מטרית), לאור מה שהראיתם בסעיף הקודם (שיש דרך מהירה לעבור מהבעיה הכללית לבעיה המטרית, באופן שמשמר את המסלולים האופטימליים).

שאלה 5 (16%)

- הוכיחו: אם יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית ההכרעה $MAX-CUT$, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית האופטימיזציה $MAX-CUT$.
- האלגוריתם לבעיית ההכרעה מקבל כקלט גרף לא מכוון G ומספר טבעי k .
- האלגוריתם מחזיר "כן" אם יש ב- G חתך שגודלו לפחות k , ו-"לא" אחרת.
- האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה מקבל כקלט גרף לא מכוון G .
- האלגוריתם מחזיר חתך בעל גודל מקסימלי ב- G , כלומר, חלוקה של קבוצת הצמתים של G לשתי תת-קבוצות זרות S ו- T , כך שמספר הקשתות המחברות צומת מ- S עם צומת מ- T הוא מקסימלי.
- הדרכה:** האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה יהיה בנוי משני שלבים:
- בשלב הראשון קוראים לאלגוריתם ההכרעה כמה פעמים, כדי למצוא את גודלו של החתך המקסימלי.
- בשלב השני, מבצעים בכל פעם שינויים (קלים) בגרף, וקוראים לאלגוריתם ההכרעה על הגרפים החדשים. לפי התשובות שהוא מחזיר, יודעים איזה צמתים שייכים לאותה תת-קבוצה (S או T), ואיזה צמתים לא שייכים לאותה תת-קבוצה (כלומר, אם האחד שייך ל- S אז השני שייך ל- T).

שאלה 6 (10%)

עיינו באלגוריתם *PRIME* בעמוד 401 בספר.

הוכיחו: אם t הוא מספר טבעי קטן מ- p שאיננו זר ל- p (המחלק המשותף המקסימלי של t ו- p גדול מ-1), אז t הוא עד לפריקות של p . (כלומר, אם הוא ייבחר כאחד מ- k המספרים בשלב 2 של האלגוריתם, האלגוריתם ידחה).

שאלה 7 (14%)

בעיה 10.10 בספר (עמוד 439).

כדי להוכיח את שוויון המחלקות, הראו הכלה דו-כיוונית.