מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: **20283 - מתמטיקה דיסקרטית**

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 1

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** **3** נקודות

סמסטר: 2009ב **מועד אחרון להגשה:** יום ה' 26.3.09

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (24 נקי)

שאלה זו נועדת לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות ולחדד כמה נקודות שכדאי להבין בשלב מוקדם:

* ההבדל בין A לבין $\{A\}$ (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא A).
  * מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה $\varnothing$ לבין $\{\varnothing\}$.
* ההבדל בין "x איבר של y" לבין "x חלקי ל- y".

תהיינה: $X = \varnothing$, $Y = \{\varnothing, \mathbf{foo}\}$, $Z = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ (**foo** הוא עצם כלשהו שאינו קבוצה).

לכל אחת מהטענות הבאות קבע אם היא נכונה.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $X \cup Y = Y$ ב. $\{X\} \in Y$ ג. $Y \cap Z = X$

ד. $\{X\} \cup Y = Y$ ה. $X \cup \{Y\} = Y$ ו. $|X \cup Y \cup Z| = 4$

ז. $Z \subseteq P(Y)$ ח. $Y \in P(Y)$

שאלה 2 (28 נקי)

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. כדי להפריך טענה - הבא דוגמא נגדית.

לטענות הנכונות - תן הוכחה מסודרת המסתמכת בכל צעד על טענות והגדרות בספר .

א. $(A-B)-B = A-B$

ב. $A-(B-A) = A$

ג. $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

ד. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

שאלה 3 (23 נק׳)

הוכח את הטענות הבאות בעזרת **״אלגברה של קבוצות״**: צא מאחד האגפים, פתח אותו בעזרת זהויות ידועות, והגע לאגף השני. אין להשתמש בהוכחה במושג ״איבר״. במקומות בהם מופיע הפרש קבוצות מומלץ להיעזר בזהות $A-B=A\cap B'$ (עמ׳ 23 בספר הלימוד). **ציין באופן ברור בכל צעד את הזהויות עליהן אתה מסתמך**. הסימן $\oplus$ מוגדר בעמ׳ 27 בספר.

א. $(A_1 \cup A_2)-(B_1 \cap B_2) \;=\; (A_1 - B_1)\cup(A_1 - B_2)\cup(A_2 - B_1)\cup(A_2 - B_2)$

ב. $A \oplus B \;= A' \oplus B'$.

שאלה 4 (25 נק׳)

איחוד של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בהגדרה 1.6 בעמוד 12 בספר.

במלים פשוטות ההגדרה היא: $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ אםם x שייך **לפחות** לאחת הקבוצות A_i ,

כאשר i מקבל ערכים ב- I.

חיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בעמוד 16 בספר.

במלים פשוטות ההגדרה היא: $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ אםם x שייך **לכל** הקבוצות A_i ,

כאשר i מקבל ערכים ב- I.

השאלה שלפניך מתרגלת את השימוש בשני המושגים האלה.

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbf{N}=\{0,1,2,...\}$ (ר׳ עמ׳ 3 בספר הלימוד).

לכל $n\in\mathbf{N}$, תהי $A_n=\{x\in\mathbf{N} \mid n-1\le x\le 2(n-1)\}$ ותהי $B_n=A_{n+1}-A_n$.

א. מצא את הקבוצות $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$.

ב. חשב את $\bigcap_{n\in L} A_n$ כאשר $L=\{2,3,4,5\}$.

ג. חשב את $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$. הוכח את תשובתך.

ד. מצא את הקבוצות B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 .

ה. חשב את $\bigcup_{n\in K} B_n$ כאשר $K=\{0,1,2,3,4\}$.

מטלת מנחה (ממ״ן) 12

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 2

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה: 3** נקודות

סמסטר: 2009ב **מועד אחרון להגשה:** יום ב׳ 6.4.09

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ״ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

״רלציה״ בעברית: **יחס**.

שאלה 1 (20 נקודות)

הוכח שהשוויון $(A \cup B) \times (A \cup B) = (A \times A) \cup (B \times B)$

מתקיים **אסם** (אם ורק אם) $B \subseteq A$ או $A \subseteq B$.

שים לב שעליך להוכיח שני כיוונים.

שאלה 2 (25 נקודות)

הגדרה:

יחס **סימטרי וטרנזיטיבי** מעל קבוצה A נקרא יחס **שקילות-חלקית** (בקיצור: **שח״ל**) מעל A.

(יחס שח״ל יכול להיות רפלקסיבי, ויכול לא להיות רפלקסיבי).

(2 נק׳) א. תנו דוגמא ליחס שח״ל מעל $A = \{1,2,3\}$, שיש בו בדיוק 4 זוגות סדורים.
אין צורך להוכיח שהיחס שרשמתם הוא שח״ל, די לרשום את היחס.

(8 נק׳) ב. תנו עוד חמש דוגמאות ליחסי שח״ל מעל $A = \{1,2,3\}$, באופן הבא:
חזרו על סעיף א כאשר במקום 4 זוגות סדורים, מספר הזוגות הסדורים השייכים ליחס יהיה בכל פעם אחד המספרים הבאים, לפי הסדר: 1,2,3,5,9 .

(15 נק׳) ג. יהי R יחס שח״ל מעל $A = \{1,2,3\}$. הוכיחו שמספר הזוגות הסדורים ב- R חייב להיות אחד משבעה המספרים הבאים: 0,1,2,3,4,5,9 .

שאלה 3 (30 נקודות)

לכל אחד מהיחסים הבאים ולכל אחת מהתכונות הבאות, בדוק אם היחס מקיים את התכונה.
הוכח כל טענה. התכונות: רפלקסיביות, סימטריות, אנטי-סימטריות, טרנזיטיביות.
בנוסף, אם היחס הוא **יחס שקילות** - ציין זאת, וציין מהן **מחלקות השקילות**.

שים לב שיחס יכול להיות סימטרי ואנטי-סימטרי בעת ובעונה אחת, כך שאם הראית שיחס הוא סימטרי, זה לא מוכיח שהוא אינו אנטי-סימטרי.

היחסים:

א. היחס R מעל $\mathbf{N}-\{0\}$, המוגדר כך: $(n,m)\in R$ אם n מתחלק ללא שארית ב- m.

ב. הסגור הסימטרי של היחס R מהסעיף הקודם.

ג. היחס S מעל קבוצת הממשיים השונים מאפס, המוגדר כך: $(x,y)\in S$ אם $x\cdot y>0$.

שאלה 4 (16 נקודות)

לכל יחס R מעל קבוצה A, נסמן ב- $t(R)$ את הסגור הטרנזיטיבי של R

הוכיחי או הפריכי כל אחת מהטענות הבאות.

א. אם $R=t(R)\neq\varnothing$ אז R מכיל לפחות 3 זוגות סדורים.

ב. אם R הוא יחס לא-ריק מעל קבוצה **אינסופית** A, ו- R **אינו** טרנזיטיבי,
אז $t(R)$ הוא אינסופי, כלומר $t(R)$ מכיל אינסוף זוגות סדורים.

שאלה 5 (9 נקודות)

יהי E יחס שקילות מעל קבוצה A .

יהי $E'=A\times A-E$ המשלים של E ב- $A\times A$.

E' כמובן אינו יחס שקילות, כי אינו רפלקסיבי.

נסמן $E^*=E'\cup I_A$. **הוכח או הפרך**:

לכל קבוצה לא ריקה A ולכל יחס שקילות E מעל A, E^* הוא יחס שקילות מעל A.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 3

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3** נקודות

סמסטר: 2009ב **מועד אחרון להגשה:** יום ב' 13.4.09

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20 נק')

$\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים. נסמן $A = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 1\}$.

הוכח שהפונקציה $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ היא פונקציה **חד-חד-ערכית** של A **<u>על</u>** $\mathbf{R}$.

שאלה 2 (30 נק')

תהי M קבוצת כל היחסים (הרלציות) מעל $A = \{1,2,3\}$.

יהי K היחס הבא מעל A : $K = \{(1,1),(2,1),(3,1)\}$

תהי $f: M \to M$ הפונקציה הבאה: $f(R) = RK$.

f מתאימה לכל יחס R מעל A את היחס RK (מכפלת שני היחסים).

(5 נק') א. האם f היא חד-חד-ערכית? הוכח את תשובתך.

(8 נק') ב. הוכח שאם $R \subseteq K$ אז $f(R) = R$.

(10 נק') ג. כמה איברים של M נמצאים בתמונה של f ? הוכח את תשובתך.
(תמונת f היא קבוצת היחסים שניתן לקבלם על-ידי הפעלה של f).

(7 נק') ד. נגדיר יחס E מעל M :
$(R,S) \in E$ אםם $f(R) = f(S)$.
לפי הדיון "העתק טבעי" בעמ' 84 בספר (או לפי הקובץ "**יחס שקילות המושרה על-ידי פונקציה**", שבאתר הקורס) , E הוא יחס שקילות.
לכמה מחלקות שקילות מחלק E את M ? הוכיחו.

שאלה 3 (26 נקודות)

לפי שאלה 3.25א בעמ' 94 בספר, יחס ההכלה $\subseteq$ הוא סדר-חלקי מעל כל קבוצה שאבריה הם קבוצות. השאלה עוסקת בשתי דוגמאות ליחס ההכלה מעל קבוצה של קבוצות.

א. תהי A קבוצה ותהי K קבוצת כל יחסי השקילות מעל A.

לפי האמור בראש השאלה, K סדורה בסדר-חלקי לגבי הכלה. הראה שיש ב- K איבר קטן ביותר ואיבר גדול ביותר ("תורת הקבוצות" עמ' 93). מיהם? הוכח שהאיברים שאתה מציין אכן שייכים ל- K.

ב. תהי $A = \{1, 2, 3\}$ ותהי J קבוצת כל היחסים האנטי-סימטריים מעל A.

לפי האמור בראש השאלה, J סדורה בסדר-חלקי לגבי הכלה. האם יש ב- J איבר קטן ביותר? איבר גדול ביותר? אם כן, מיהם ? אם לא מצאת איבר קטן ביותר, תן דוגמא לאיבר מינימלי והסבר מדוע הוא אינו קטן ביותר. אם לא מצאת איבר גדול ביותר, תן דוגמא לאיבר מקסימלי והסבר מדוע הוא אינו גדול ביותר.

שאלה 4 (24 נקודות)

א. הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי גדול מאפס, $3^{2^n} - 1$ מתחלק ב- 8 .

ב. יהי n טבעי חיובי.

הסימון $n!$ מייצג את מכפלת כל המספרים הטבעיים מ- 1 ועד n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי הגדול/שווה 4 מתקיים $n! > 2^n$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 4

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה: 3** נקודות

סמסטר: 2009ב **מועד אחרון להגשה:** יום א' 26.4.09

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

חלק מהממ"ן מסתמך על החוברת "פרק 5" שקיבלתם בחבילה של חמרי הקורס.
חוברת זו משלימה את פרק 4 ומחליפה חלק ממנו.

שאלה 1 (24 נקודות)

א. הוכח שאם $|A-B|=|B-A|$ אז $|A|=|B|$.

הדרכה: לא נתון שהקבוצות סופיות, לכן יש לעבוד לפי הגדרת שוויון עוצמות:
מהנתון נובע שקיימת פונקציה חח"ע ועל מסוימת, ועלינו להראות שמכך נובע שקיימת פונקציה חח"ע ועל אחרת...

ב. הראה שאם A,B **סופיות** ו- $|A|=|B|$ אז $|A-B|=|B-A|$.

ג. הראה ע"י דוגמא שטענת סעיף ב אינה נכונה בהכרח עבור A,B שאינן סופיות.

שאלה 2 (27 נקודות)

$\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים, $\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים.
בכל סעיף מצאי את עוצמת הקבוצה הרשומה בו. הוכיחי את תשובותיך.

א. $J=\{x\in \boldsymbol{R} \mid 3x\in \boldsymbol{Z}\}$

ב. $K=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \mid 2x-y=10\}$

ג. $M=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \mid x+y\in \boldsymbol{Z}$ וגם $2x-y=10\}$

שאלה 3 (25 נקודות)

(12 נק') א. הוכיחו כי קבוצת היחסים הדו-מקומיים (רלציות בינאריות) מעל **N**, עוצמתה C .

הדרכה: מהו יחס דו-מקומי מעל **N** ? מהי אפוא קבוצת כל היחסים הללו ?

(13 נק') ב. הוכיחו שעוצמת קבוצת היחסים **הטרנזיטיביים** מעל **N** אף היא C .

שאלה 4 (24 נקודות)

א. יהיו k_1, k_2, m_1, m_2 עוצמות. הוכח שאם $k_1 \le k_2$ ו- $m_1 \le m_2$ אז $k_1 \cdot m_1 \le k_2 \cdot m_2$.

ב. הוכח: $\aleph_0 \cdot C = C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם).

ג. הוכח: $C^C = 2^C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם ובמשפטים שבחוברת).

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 1-2

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** **3** נקודות

סמסטר: 2009ב **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 8.5.09

אנא שים לב: מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

בכל השאלות בממ"ן זה יש להגיע לתשובה סופית מספרית. הוכיחו את תשובותיכם.

שאלה 1 (24 נקודות)

בכמה דרכים ניתן לסדר את המחרוזת 1223334444 , בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. ללא הגבלה.

ב. כאשר הספרות 22 חייבות להופיע צמודות.

הדרכה: אם חייב להופיע הרצף 22 נוכל לחשוב עליו כעל תו בודד.

ג. כאשר הספרות 22 חייבות להופיע צמודות ואסור שיופיע הרצף 333.

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי B קבוצת המחרוזות באורך 5 , הבנויות בעזרת האותיות a,b,c,d,e (לא כל האותיות חייבות להופיע). למשל $aaeeb \in B$.

נגדיר יחס שקילות מעל B: שתי מחרוזות ייקראו שקולות אם **קבוצת** האותיות המופיעות במחרוזת האחת **שווה** לקבוצת האותיות המופיעות במחרוזת השניה.

למשל $aeeee$ שקולה ל- $aaeee$ ושקולה ל- $eaaae$,

מכיון שלכל אחת מהמחרוזות האלה, קבוצת האותיות המופיעות בה היא $\{a,e\}$.

סעיפים ב,ג,ד,ה עוסקים ביחס השקילות הזה. אינכם נדרשים להוכיח שזהו יחס שקילות.

(4 נק') א. כמה איברים יש ב- B ?

(6 נק') ב. כמה מחלקות שקילות יש ?

(5 נק') ג. כמה איברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת $abcde$?

(5 נק') ד. כמה איברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת $aaaab$?

(5 נק') ה. כמה איברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת $aabcd$?

שאלה 3 (24 נקודות)

ארבע משפחות יצאו יחד למנגל, והכינו 9 סטֵייקים **זהים** ו- 12 שיפודים **זהים**.
המשפחות **אינן** נחשבות זהות. כמו כן, סטייק כמובן **אינו** זהה לשיפוד.

א. בכמה דרכים ניתן לחלק את 12 השיפודים בין המשפחות?
(יש לחלק את כל השיפודים. ייתכן שמשפחה לא רוצה שיפודים בכלל).

ב. בכמה דרכים ניתן לחלק את כל האוכל בין המשפחות?
(יש לחלק את כל האוכל. ייתכן שמשפחה לא רוצה אוכל בכלל).

ג. בכמה דרכים ניתן לחלק רק את 12 השיפודים בין המשפחות,
אם משפחת כהן חייבת לקבל לפחות 3 שיפודים, וכל משפחה אחרת חייבת לקבל שיפוד אחד לפחות?

ד. בכמה דרכים ניתן לחלק את כל האוכל בין המשפחות, אם כל משפחה חייבת לקבל לפחות שיפוד אחד ולפחות סטייק אחד?

שאלה 4 (27 נקודות)

א. מהו מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 24$ במספרים טבעיים ?

ב. מהו מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 24$ במספרים טבעיים **זוגיים**?

ג. מהו מספר פתרונות המשוואה הנ"ל בטבעיים, כאשר בדיוק אחד מהמשתנים הוא

זוגי ושאר המשתנים **אי-זוגיים**? לא ידוע מיהו המשתנה הזוגי.

תזכורת: בקורס שלנו אפס הוא מספר טבעי.

מספר טבעי זוגי הוא מהצורה $2z$, כאשר z טבעי כלשהו.

מספר טבעי אי-זוגי הוא מהצורה $2z+1$, כאשר z טבעי כלשהו.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: **20283 - מתמטיקה דיסקרטית**

חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 3,4,5

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** **3** נקודות

סמסטר: 2009ב **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 22.5.09

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1

א. בעזרת נוסחת הבינום, הראה כי עבור $n>0$ טבעי ו- c מספר ממשי כלשהו:

$$(1+c)^n-(1-c)^n \;=\; 2c\sum_{2k+1\le n}\binom{n}{2k+1}c^{2k} \;.$$

הסכום הוא על כל ערכי k הטבעיים המקיימים $2k+1\le n$.

ב. הראה כי בסעיף א במקום $\sum_{2k+1\le n}$ אפשר לכתוב $\sum_{k=0}^{\infty}$. הדרכה: עמ' 30 בספר.

ג. חשב בעזרת סעיף א את הסכום $\sum_{2k+1\le n}\binom{n}{2k+1}$.

ד. חשב בעזרת סעיף ג וזהות ידועה את הסכום $\sum_{2k\le n}\binom{n}{2k}$.

שאלה 2

תהיינה $X=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

(5 נק') א. כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של X ל- Y קיימות?

(20 נק') ב. מצאי כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של X ל- Y מקיימות:
לכל $i\in X$, $f(i)\neq i$. הדרכה: הכלה והפרדה.

שאלה 3

בהמשך לשאלה 3 בממ"ן 15 :

בכמה דרכים ניתן לחלק את כל האוכל בין המשפחות, אם כל משפחה חייבת לקבל **משהו** (שיפוד או סטייק אחד לפחות). הדרכה : הכלה והפרדה.

שאלה 4

A היא קבוצה בת 9 איברים, החלקית לקבוצה $\{4,5,6,\ldots,60,61\}$.

(18 נק׳) א. הוכח כי קיימות לפחות שתי תת-קבוצות שונות של A, שסכום איבריהן שווה.

הדרכה : עקרון שובך היונים.

שים לב שהשאלה מתייחסת לתת-קבוצות של הקבוצה הלא-ידועה A,

לא לתת-קבוצות כלשהן של $\{4,5,6,\ldots,60,61\}$!

(7 נק׳) ב. הראה כי קיימות (לפחות) שתי קבוצות **זרות** כאלו.

הדרכה : נובע בקלות מסעיף א׳ ללא שיקולים קומבינטוריים!

מטלת מנחה (ממ"ן) 17

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה - פרקים 6 - 7

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** **3** נקודות

סמסטר: 2009ב **מועד אחרון להגשה:** יום א' 31.5.09

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1

יהי a_n מספר הסדרות באורך n, שאבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,\dots,8\}$, והמקיימות את התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים **זוגיים** זה בסמוך לזה. למשל אם $n = 5$ הסדרה $(1,1,2,6,3)$ אינה מותרת, מכיון ש- 2 מופיע ליד 6.

גם הסדרה $(1,1,2,2,3)$ אסורה, כי יש שתי הופעות צמודות של 2.

א. מצא יחס נסיגה (יחס רקורסיה) עבור a_n. רשום את $a_0,\ a_1,\ a_2$.
בדוק שהערך שרשמת עבור a_0 מתאים ליחס הנסיגה שרשמת.

ב. רשום את המשוואה האופיינית ("קומבינטוריקה" עמ' 117), פתור את יחס הנסיגה, וקבל ביטוי מפורש עבור a_n.

הערה 1: ביטויים כגון $\sqrt{48}$ יש להעביר לצורה כגון $4\sqrt{3}$, **אין** להציב במקומם קירובים עשרוניים כגון 6.93.

הערה 2: מערכת משוואות מהצורה $\left.\begin{matrix} x + y = a \\ x - y = b \end{matrix}\right\}$ נוח לפתור על-ידי חיבור וחיסור המשוואות זו מזו.

שאר הממ"ן עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בעמוד הבא רשימה של נוסחאות שימושיות.

שאלה 2

תהי $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. נתון: $a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = -2$. שאר המקדמים אינם ידועים. תהי g פונקציה המקיימת: $f(x) \cdot g(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2 + \dots$.

נסמן $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$. חשב את $b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3$.

שאלה 3

יהושע נוטל תרופות שונות: כדור נגד כאב-ראש: לכל היותר 3 ביום (אפשר 0). כדור מרץ: לכל היותר 3 ביום (אפשר 0). ויטמין C וויטמין B ללא הגבלה (אפשר 0), כל זה בכפוף לתנאי הבא, שלגביו הוא מחויב כחבר באגודת ההיפוכונדרים: מספר הכדורים הכולל, מכל 4 הסוגים יחד, שהוא לוקח כל יום יהיה בדיוק n. ערכו של n מוגדר מדי פעם בפרסומי האגודה.

נסמן ב- a_n את מספר ההרכבים השונים של n כדורים שיכול יהושע לקחת ביום אחד, כאשר אין חשיבות לסדר נטילת התרופות, ותרופות מאותו סוג הן זהות.

א. מצא את הפונקציה היוצרת עבור הסדרה $\{ a_n \}$. הסבר!

ב. מצא ביטוי מפורש עבור a_n (שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר הלימוד יכולה לסייע).

שאלה 4

דוגמא לתרגיל מסוג זה נמצאת בסוף הקובץ "מבוא לפונקציות יוצרות" שבאתר הקורס.

חשב את המקדם של x^{2m} בכל אחד מאגפי הזהות האלגברית: $(1+x)^n = \dfrac{(1-x^2)^n}{(1-x)^n}$.

קבל מכאן זהות על סכומים של מקדמים בינומיים, מהצורה: $\sum_{k=0}^{?} ?? = \binom{n}{2m}$.

בדוק את תשובתך עבור המקרה $n = 5, m = 2$ ועבור המקרה $n = 5, m = 3$.

הדרכה: את אגף שמאל בזהות האלגברית הנתונה רשום כמכפלה.

היעזר בנוסחאות שבתחתית העמוד.

להלן סיכום כמה נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות:

(i)! סכום טור הנדסי סופי: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ואינסופי: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \dfrac{1}{1-x}$

(ii)! כפל פונקציות יוצרות:

אם $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, ו- $f(x)\cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

אז $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד).

(iii)! $\sum_{k=0}^{\infty} D(n,k)x^k = (1+x+x^2+\ldots)^n = \dfrac{1}{(1-x)^n}$.

במלים אחרות: המקדם של x^k בפיתוח הביטוי $\dfrac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$.

ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 18

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: לוגיקה פרקים 1-2

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3** נקודות

סמסטר: 2009ב **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 12.6.09

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (24 נקודות)

יהי $f[\alpha]$ מספר **ההופעות** של פסוקים יסודיים בפסוק α (אם פסוק יסודי מופיע מספר פעמים ב- α, הוא נספר כמספר ההופעות שלו).

א. תן הגדרה רקורסיבית של f:

(i) עבור פסוק יסודי P, $f[P] = \ldots$. *(ii)* לכל פסוק α, $f[\sim(\alpha)] = \ldots$.

(iii) לכל שני פסוקים α, β $f[(\alpha) \to (\beta)] = \ldots$.

ב. חשב את $f[\varphi]$ כאשר φ הוא הפסוק המתואר בעץ שבראש עמוד 45 בספר הלימוד.
הראה את החישוב הן ע"י ספירת הפסוקים היסודיים, **והן ע"י התהליך הרקורסיבי**.

ג. נניח שמראים לכם רק את "שלד" עץ הבנייה של פסוק מסוים, בלי לגלות לכם מהם הפסוקים היושבים בכל צומת, ובלי שידוע לכם מה הפסוק עצמו. כיצד אפשר למצוא את f של הפסוק רק מהסתכלות בשלד העץ? ענו ונמקו.

שאלה 2 (24 נקודות)

נתון הפסוק (בכתיב מקוצר):

$$\varphi: \qquad P_0 \to (P_1 \to P_2)$$

א. רשום פסוק בצורה דיסיונקטיבית נורמלית השקול ל- φ .

ב. רשום פסוק בצורה קוניונקטיבית נורמלית השקול ל- φ .

(הגדרת הצורות הנורמליות - בעמ' 62 בספר הלימוד).

שאלה 3 (25 נקודות)

לפניך חמש אמירות :

a : אם כעת שעת צהרים בחודש אוגוסט אז איציק לא לובש מעיל.

b : אם כעת שעת צהרים בחודש אוגוסט או בחודש יולי, אז חם בחוץ.

c : לא ייתכן שחם בחוץ ויחד עם זה איציק לובש מעיל.

d : איציק לא לובש מעיל **רק אם** כעת שעת צהרים בחודש אוגוסט.

e : חם בחוץ **אם ורק אם** איציק לא לובש מעיל.

(10 נקי) א. הגדר פסוקים יסודיים מתאימים ורשום את a,b,c,d,e בכתיב פורמלי.
כתיב מקוצר מותר, ואפשר להשתמש בכל הקשרים הלוגיים $\vee, \wedge, \leftrightarrow, \rightarrow, \sim$.
הערה : משמעות הביטוי "רק אם" היא מעין "חץ הפוך".
נדבר על כך בפורום בבוא הזמן.

(15 נקי) ב. לגבי כל אחת מהטענות 1 - 3 שלהלן, קבע אם היא **נכונה או לא**.
הוכח את תשובותיך.

(1) c שקול טאוטולוגית ל- e

(2) $\{b,c\} \models a$

(3) $\{a,c,d\} \models b$

שאלה 4 (27 נקודות)

יהיו α,β,γ פסוקים. **הוכח או הפרך** :

א. אם $\alpha \models \beta \vee \gamma$ אז $\alpha \models \beta$ או $\alpha \models \gamma$.

ב. אם $\alpha \vee \beta \models \gamma$ אז $\alpha \models \gamma$ **וגם** $\beta \models \gamma$.

ג. אם $\alpha \models \sim\beta$ אז $\{\alpha, \beta\} \models \gamma$ וגם $\{\alpha, \beta\} \models \sim\gamma$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 19

הקורס: **20283 - מתמטיקה דיסקרטית**

חומר הלימוד למטלה: לוגיקה פרק 3.1-3.10

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** **3** נקודות

סמסטר: 2009ב **מועד אחרון להגשה:** יום ו' 26.6.09

אנא שים לב: מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (24 נקודות)

לכל אחד מהביטויים הבאים, קבע אם הוא שם-עצם, תבנית אטומית, תבנית שאינה אטומית, פסוק, או שאינו עונה על אף אחת מהגדרות אלו. כתיב מקוצר - מותר. שים לב שביטוי יכול להתאים ליותר מהגדרה אחת: פסוק יכול להיות תבנית אטומית או תבנית לא אטומית.

א. $f_1^3(x_1, f_1^2(x_2), a_1)$

ב. $A_1^3(x_1, \sim(x_2), a_1)$

ג. $\sim A_1^3(x_1, x_2, a_1)$

ד. $A_1^3(x_1, f_1^1(x_2), a_1)$

ה. $f_1^3(A_1^3(x_1, x_2, a_1), x_2, a_1)$

ו. $\exists x_1 A_1^3(a_1, a_2, x_1)$

ז. $\forall x_1 f_1^1(x_1)$

ח. $\forall x_1 \big(A_1^3(x_1, a_1, a_1) \vee \forall x_2 A_1^3(x_1, x_2, a_1)\big)$

שאלה 2 (26 נקודות)

תהי L שפה חלקית לשפת תחשיב הפרדיקטים, ובה סימנים אלה: קשרים לוגיים, סוגרים, סימני משתנים $x_1, x_2, \ldots$, סימן פרדיקט דו-מקומי R, סימן פרדיקט דו-מקומי A_1^2 המתפרש כרגיל **כשוויון** וסימני הכמתים $\forall, \exists$. אין סימני פונקציות או פרדיקטים נוספים ואין סימני קבועים אישיים.

א. רשום 4 פסוקים, $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ בשפה זו, כך שהפסוק $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3 \wedge \psi_4$ מביע את הטענה ש- R הוא יחס **סדר-מלא** ("תורת הקבוצות" עמ' 87) מעל עולם האינטרפרטציה.

ב. נוסיף לשפה סימן קבוע a_1. לשפה החדשה נקרא $L \cup \{a_1\}$.

רשום פסוק בשפה זו, אשר בנוכחות $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3 \wedge \psi_4$ יביע את הטענה ש-a_1 הוא האיבר **הקטן ביותר** לגבי הסדר המלא R.

שאלה 3 (26 נקודות)

תהי J אינטרפרטציה של שפת תחשיב הפרדיקטים, שבה: העולם הוא $P(\mathbf{N})$ (קבוצת כל הקבוצות של מספרים טבעיים). הסימן A_1^2 מתפרש כרגיל כשוויון. הסימן f_1^2 **מתפרש כחיתוך קבוצות**. x,y,z הם סימני משתנים בשפה.

(8 נק׳) א. מצא השמה σ למשתנה x כך שהתבנית $\forall y\left(A_1^2(x,\ f_1^2(x,y))\right)$ אמיתית תחת σ באינטרפרטציה J שתוארה למעלה. הוכח שההשמה שמצאת ל- x היא **היחידה** המקיימת זאת.

(8 נק׳) ב. הוכח שבאינטרפרטציה J **הנ״ל**, התבנית $\forall y\exists z\left(A_1^2(f_1^2(y,z),\ x)\right)$ גם היא אמיתית בהשמה σ שמצאת בסעיף א׳ למשתנה x, **ורק בהשמה זו**! (שים לב – שני כיוונים).

(6 נק׳) ג. ניקח אינטרפרטציה אחרת, J_1, הנבדלת מ- J רק בכך ש- f_1^2 תתפרש כפונקציה המחזירה תמיד את הארגומנט הראשון: $f_1^2(x,y)=x$.

הראה שהתבנית מסעיף א׳ אמיתית ב- J_1 והתבנית מסעיף ב׳ שקרית ב- J_1

(״לוגיקה״ עמ׳ 117 הגדרה 3.17).

(4 נק׳) ד. האם התבניות מסעיפים א, ב אמיתיות לוגית? שקריות לוגית? (עמ׳ 119). האם הן שקולות לוגית זו לזו? (עמ׳ 122).

שאלה 4 (24 נקודות)

הוכיחו או הפריכו:

א. $\psi \models \forall x\psi$ ב. $\forall x\psi \models \psi$ ג. $\psi \models \exists x\psi$ ד. $\exists x\psi \models \psi$