

האוניברסיטה הפתוחה

20476

**מתמטיקה בדידה**  
חוברת הקורס אביב 2012

כתב: איתי הראבן

מרץ 2012 - סמסטר אביב תשע"ב

**פנימי – לא להפצה.**

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

## תוכן העניינים

א	אל הסטודנטים
ג	לוח זמנים ופעילויות
ה	מטלות הקורס
1	ממ"ח 01
5	ממ"ן 11
7	ממ"ח 02
11	ממ"ח 03
15	ממ"ן 12
17	ממ"ן 13
19	ממ"ח 04
23	ממ"ן 14
25	ממ"ן 15
27	ממ"ח 05
31	ממ"ן 16



## אל הסטודנטים,

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מתמטיקה בדידה".  
אנא קראו בעיון את כל הסעיפים לפני שתתחילו בלימודיכם. פרטים לגבי נהלים המקובלים באוניברסיטה הפתוחה מפורטים בידיעון האקדמי. תיאורי הקורסים מופיעים בקטלוג הקורסים.

**הערה:** על חלק מספרי הלימוד וחלק מחומרי העזר של הקורס מופיעים מספרי קורס 20276, 20283. חומרים אלה הועברו לקורס שלנו מקורס שפעל באו"פ בשנים קודמות.

קורס זה מתקשב במסגרת הפעילות של מחלקת תלם (תקשוב ללימוד מרחוק).  
קורס מתקשב כולל, נוסף על יחידות הלימוד הכתובות, גם פעילות באתר הקורס באינטרנט.  
פעילות זו כוללת: אינטראקציה בין הסטודנטים לצוות ההוראה באמצעות קבוצות דיון ודואר אלקטרוני, הפניות למאגרי מידע ולאתרים ברשת האינטרנט, חומרי לימוד והעשרה. הפעילות באתר הקורס אינה חובה אך האתר יכול לסייע מאוד בלימוד הקורס.

כתובת אתרי הקורסים: <http://telem.openu.ac.il>  
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספרייה באינטרנט [www.openu.ac.il/Library](http://www.openu.ac.il/Library).

מרכז ההוראה בקורס הוא איתי הראבן.

ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 02-6733210 בימי ד', בין השעות 19:00 - 20:00.
- דרך אתר הקורס.
- בדואר אלקטרוני [itaiha@openu.ac.il](mailto:itaiha@openu.ac.il)
- פקס: 09-7780631, לרשום "עבור איתי"

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

בברכה,  
צוות הקורס



**לוח זמנים ופעילויות (20476/ב2012)**

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח	
				ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
1	16.3.2012-11.3.2012	החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"			
2	23.3.2012-18.3.2012	תורת הקבוצות פרק 1		ממ"ח 01 יום ו' 23.3.2012	
3	30.3.2012-25.3.2012	תורת הקבוצות סעיפים 2.1 - 2.4			ממ"ן 11 יום ג' 27.3.2012
4	6.4.2012-1.4.2012 (ו' ערב פסח)	תורת הקבוצות סעיפים 2.5 - 3.1		ממ"ח 02 יום ה' 5.4.2012	
5	13.4.2012-8.4.2012 (א-ו פסח)	בפסח אין מפגשים. כדאי לחזור על החומר או להתקדם עצמאית.			
6	20.4.2012-15.4.2012 (ה יום הזכרון לשואה)	תורת הקבוצות סעיפים 3.2 - 3.5			
7	27.4.2012-22.4.2012 (ד יום הזכרון) (ה יום העצמאות)	תורת הקבוצות סעיף 4.1		ממ"ח 03 יום א' 22.4.2012	ממ"ן 12 יום ו' 27.4.2012
8	4.5.2012-29.4.2012	תורת הקבוצות החוברת פרק 5			
9	11.5.2012-6.5.2012 (ה ל"ג בעומר)	קומבינטוריקה סעיפים 1.1 - 2.3			ממ"ן 13 יום א' 6.5.2012

\* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

לוח זמנים ופעילויות – המשך

תאריך אחרון למשלוח		מפגשי ההנחיה*	יחידת הלימוד המומלצת	תאריכי שבוע הלימוד	שבוע הלימוד
ממ"ן (למנחה)	ממ"ח (לאו"פ)				
	ממ"ח 04 יום ה' 18.5.2012		קומבינטוריקה סעיפים 2.4 - 3.2	18.5.2012-13.5.2012	10
			קומבינטוריקה פרקים 4 - 5	25.5.2012-20.5.2012 (א יום ירושלים)	11
ממ"ן 14 יום א' 25.5.2012			קומבינטוריקה פרקים 6 - 7	1.6.2012-27.5.2012 (א שבועות)	12
ממ"ן 15 יום א' 3.6.2012			תורת הגרפים פרקים 1-2	8.6.2012-3.6.2012	13
			תורת הגרפים פרקים 3-4	15.6.2012-10.6.2012	14
	ממ"ח 05 יום ה' 21.6.2012		תורת הגרפים פרקים 5-6	22.6.2012-17.6.2012	15
ממ"ן 16 יום ו' 29.6.2012					

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

\* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".



## מטלות הקורס

**קראו היטב עמודים אלה לפני שתתחילו לענות על השאלות**

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס. הבנה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. מטלות המנחה (ממנ"ים) יבדקו על-ידי המנחה ויוחזרו לכם בצירוף הערות המתייחסות לתשובות. על מטלות המחשב (ממ"חים) תקבלו רק פירוט תשובות נכונות ולא נכונות.

### מבנה המטלות

כל מטלה מורכבת מכמה שאלות. משקל כל השאלות זהה אלא אם כן צוין אחרת. את הפתרונות לממ"ן עליכם לרשום על דף בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. לחילופין ניתן להגיש את המטלות מודפסות במעבד תמלילים, בתנאי שכל הסימונים המתמטיים ברורים. אין להשתמש בסימונים שאינם מופיעים ביחידות.

### ניקוד המטלות

בקורס 6 מטלות מנחה (ממ"נים) ו- 5 מטלות מחשב (ממ"חים). משקלי המטלות: משקל כל ממ"ן הוא 3 נקודות, פרט לממ"ן 12 שמשקלו 4 נקודות. משקל כל ממ"ח הוא 2 נקודות, פרט לממ"ח 04 שמשקלו 3 נקודות. בהגשת כל המטלות ניתן אפוא לצבור 30 נקודות.

### דרישות חובה בהגשת המטלות

חובה להגיש מטלות במשקל של 20 נקודות לפחות. בין המטלות שתגישו חייבות להיות לפחות ארבע מטלות מנחה (ממ"נים)

### התנאים לקבלת נקודות זכות

- א. להגיש מטלות במשקל של 20 נק' לפחות. כאשר מתוכן לפחות ארבע מטלות מנחה (ממ"נים)
- ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.
- ג. לקבל בציון הסופי 60 נקודות לפחות.

# **הערות חשובות לתשומת לבך!**

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.

ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

**עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.**

**אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית**

**למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.**

# מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה חומר הלימוד למטלה: החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"

מספר השאלות: 14 משקל המטלה: 2 נקודות

סמסטר: 2012 מועד אחרון להגשה: יום ו' 23.3.2012

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאלת"א  
בכתובת <http://www.openu.ac.il/sheilta/>  
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות. סמנו:

- א - אם רק טענה 1 נכונה,
- ב - אם רק טענה 2 נכונה,
- ג - אם שתי הטענות נכונות,
- ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

## שאלה 1

1. האמירה המספרים 6, 7 הם מספרים זוגיים היא פסוק.
2. הביטוי המתמטי  $1 + 2 + 3 + 4$  הוא פסוק.

## שאלה 2

1. שלילת הפסוק אברסט הוא ההר הגבוה ביותר בכדור הארץ.  
היא הפסוק אברסט הוא ההר הנמוך ביותר בכדור הארץ.
2. שלילת הפסוק משה הוא סטודנט ותיק יותר מדני  
היא הפסוק דני הוא סטודנט ותיק יותר ממשה

## שאלה 3

1. הפסוק  $1 + 1 = 2$  וגם  $2 + 3 > 5$  הוא אמת.
2. הפסוק  $1 + 1 = 2$  או  $3 + 3 > 2$  הוא אמת.

#### שאלה 4

1. הפסוק **אם**  $2 = 3$  **אז**  $2 = 1 + 1$  הוא אמת.
2. הפסוק **אם**  $2 = 3$  **אז**  $2 = 10$  הוא אמת.

#### שאלה 5

1. לוח האמת של הפסוק הפורמלי  $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$  הוא:

$p$	$q$	$r$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	T

2. הפסוק הפורמלי  $(\neg p) \wedge \neg(p \rightarrow q)$  הוא סתירה.

#### שאלה 6

1. הפסוק הפורמלי  $(\neg p) \rightarrow q$  שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי  $(\neg q) \rightarrow p$ .
2. הפסוק הפורמלי  $\neg(p \rightarrow q)$  שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי  $p \wedge \neg q$ .

#### שאלה 7

1.  $\neg((p \vee q) \wedge r)$  שקול טאוטולוגית ל-  $((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$ .
2.  $p \wedge \neg(p \wedge q)$  שקול טאוטולוגית ל-  $p \wedge \neg q$ .

#### שאלה 8

1. שלילת הפסוק האוכל היה חם וטעים שקולה לפסוק האוכל לא היה חם והאוכל לא היה טעים.
2. שלילת הפסוק רצחתי וגם ירשתי שקולה לפסוק לא רצחתי או לא ירשתי.

## שאלה 9

1. מתוך הפסוק  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge p$  נובע טאוטולוגית הפסוק  $r$ .
2. מתוך הפסוק  $r$  נובע טאוטולוגית הפסוק  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge p$ .

## שאלה 10

1. אם מ- $\alpha$  נובע  $\beta$  אז  $\alpha \wedge \neg\beta$  הוא סתירה.
2. אם מ- $\alpha$  נובע  $\beta$  אז  $\alpha \vee \beta$  הוא טאוטולוגיה.

## שאלה 11

נתבונן בפסוק: כל מספר הגדול מ-1, הריבוע שלו גדול ממנו.

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך:  $\forall x(x > 1 \wedge x^2 > x)$
2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך:  $\forall x(x > 1 \rightarrow x^2 > x)$

## שאלה 12

נתבונן שוב בפסוק: כל מספר הגדול מ-1, הריבוע שלו גדול ממנו.

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך:  $(\forall x(x > 1)) \wedge x^2 > x$
2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך:  $(\forall x(x > 1)) \rightarrow \forall x(x^2 > x)$

## שאלה 13

1. את שלילת הפסוק לכל  $x$  שנבחר, קיים  $y$  הקטן מ- $x$  ניתן לנסח כך: לכל  $x$  שנבחר, אין  $y$  הקטן מ- $x$ .
2. את שלילת הפסוק יש מספר  $x$ , שאף מספר  $y$  אינו גדול ממנו לכל מספר  $x$ , יש מספר  $y$  שגדול ממנו ניתן לנסח כך:

## שאלה 14

1. את שלילת הפסוק קיים בעל כנף שאינו קרנף. ניתן לנסח כך: כל בעל כנף הוא קרנף.
2. את שלילת הפסוק כל קרנף הוא בעל כנף. ניתן לנסח כך: כל קרנף אינו בעל כנף.



# מטלת מנחה (ממ"ן) 11

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 1

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה

משקל המטלה: 3 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: יום ג' 27.3.2012

סמסטר: 2012ב

**קיימות שתי חלופות להגשת מטלות מנחה:**

- שליחת המטלה באמצעות מערכת המטלות המקוונת, במערכת שאילת"א.
  - שליחת המטלה באמצעות דואר ישראל או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"**

**שאלה 1 (24 נק')**

שאלה זו נועדה לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות ולחדד כמה נקודות שכדאי להבין בשלב מוקדם:

- \* ההבדל בין  $A$  לבין  $\{A\}$  (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא  $A$ ).
- \* מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה  $\emptyset$  לבין  $\{\emptyset\}$ .
- \* ההבדל בין " $x$  איבר של  $y$ " לבין " $x$  חלקי ל-  $y$ ".

בכל אחד מהזוגות  $x, y$  הבאים, קבע אם  $x \in y$  וקבע אם  $x \subseteq y$ .

ייתכן ששני היחסים יתקיימו בעת ובעונה אחת, וייתכן גם שאף אחד משניהם לא יתקיים.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק.

- |  |  |
|--|--|
| א. $\{3\}$ ; $\{1,2,3\}$                 | ב. $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ ; $\{3\}$     |
| ג. $\{\{3\}\}$ ; $\{1,2,3\}$             | ד. $\{\{3\}\}$ ; $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ |
| ה. $\{1,2\}$ ; $\{\{1,2\},\{1\},\{2\}\}$ | ו. $\emptyset$ ; $\emptyset$             |
| ז. $\{\emptyset, \{1,2\}\}$ ; $\{1,2\}$  | ח. $\{\emptyset\}$ ; $P(\{1\})$          |

**שאלה 2 (24 נק')**

**הוכח או הפרך** כל אחת מהטענות הבאות. כדי להפריך טענה - הבא דוגמא נגדית.  
לטענות הנכונות - תן הוכחה מסודרת המסתמכת בכל צעד על טענות והגדרות בספר.

א.  $(A \cup B) - A = B$

ב.  $A - (A - B) = B$

ג.  $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

### שאלה 3 (20 נק')

הוכח את הטענות הבאות בעזרת "אלגברה של קבוצות": צא מאחד האגפים, פתח אותו בעזרת זהויות ידועות, והגע לאגף השני. אין להשתמש בהוכחה במושג "איבר". במקומות בהם מופיע הפרש קבוצות כדאי להיעזר בזהות  $A - B = A \cap B'$  (עמ' 23 בספר הלימוד). ציין את הזהויות עליהן אתה מסתמך בכל צעד.

$$X \cap (Y - Z) = (X \cap Y) - (X \cap Z) \quad \text{א.}$$

$$A \oplus B = A' \oplus B' \quad \text{ב. (הסימן } \oplus \text{ הוגדר בשאלה 1.22 בעמ' 27 בספר).}$$

### שאלה 4 (32 נק')

איחוד של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בהגדרה 1.6 בעמוד 12 בספר. במלים פשוטות ההגדרה היא:

אם  $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$  שייך **לפחות** לאחת הקבוצות  $A_i$ , כאשר  $i$  מקבל ערכים ב- $I$ .

**במלים אחרות:**  $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$  אם  $\exists i (i \in I \wedge x \in A_i)$

חיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בעמוד 16 בספר. במלים פשוטות ההגדרה היא:  $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$  אם  $x$  שייך **לכל** הקבוצות  $A_i$ , כאשר  $i$  מקבל ערכים ב- $I$ .

**במלים אחרות:**  $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$  אם  $\forall i (i \in I \rightarrow x \in A_i)$

השאלה שלפניכם מתרגלת את השימוש בשני מושגים האלה.

$\mathbb{N}$  היא קבוצת המספרים הטבעיים (כולל 0),  $\mathbb{R}$  היא קבוצת המספרים הממשיים.

כל  $n \in \mathbb{N}$ , תהי  $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x \leq 2n + 2\}$ , ותהי  $B_n = A_{n+1} - A_n$ .

4 נק' א. חשבו את  $A_0, A_1, A_2, A_3$  ואת  $B_0, B_1, B_2$ .

4 נק' ב. רשמו ביטוי מפורש עבור  $B_n$  (ביטוי מפורש: ביטוי בעל צורה דומה להגדרה של  $A_n$ ).

10 נק' ג. חשבו את  $\bigcup_{2 \leq n \in \mathbb{N}} B_n$ . הוכח את תשובתך בעזרת הכלה דו-כיוונית.

8 נק' ד. בעזרת ההגדרות של איחוד וחיתוך כלליים בתחילת השאלה ובעזרת **כללי דה-מורגן**

**לכמתים**  $\forall, \exists$ , אותם למדנו בלוגיקה, נסחו והוכיחו הכללה של כללי דה-מורגן לקבוצות, עבור

**איחוד וחיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות**, שכולן חלקיות לקבוצה אוניברסלית  $U$ :

$$\bigcap_{i \in I} (A_i') = ? \quad , \quad \bigcup_{i \in I} (A_i') = ?$$

6 נק' ה. נסמן  $D_n = \mathbb{R} - B_n$ . חשבו בעזרת הסעיפים הקודמים את  $\bigcap_{2 \leq n \in \mathbb{N}} D_n$ .



# מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה      חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 2  
מספר השאלות: 11      משקל המטלה: 2 נקודות  
סמסטר: 2012      מועד אחרון להגשה: יום ה' 5.4.2012

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א  
בכתובת <http://www.openu.ac.il/sheilta/>  
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

"רלציה" בעברית: יחס.

## שאלה 1

- יהי  $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (3,1), (2,2)\}$ . נתבונן בשוויון  $R = X \times Y$ .
- א. אם  $X = \{1\}$ ,  $Y = \{1,2,3\}$  אז  $R = X \times Y$ .
- ב. אם  $X = \{1,2\}$ ,  $Y = \{1,2,3\}$  אז  $R = X \times Y$ .
- ג. השוויון  $R = X \times Y$  מתקיים עבור  $X, Y$  מסוימים, שאינם אלה שהוצגו בתשובות א, ב.
- ד. לא קיימות קבוצות  $X, Y$  כך ש-  $R = X \times Y$ .

## שאלה 2

תהי  $A = \{1,2,3,4\}$  ויהי  $R$  היחס הבא מ- $A$  ל- $A$ :  $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,4), (4,2)\}$ .

$Domain(R) \cap Range(R)$  הוא:

- א.  $\{1\}$       ב.  $\{1,2,4\}$       ג.  $\emptyset$       ד.  $\{1,2\}$       ה.  $A$

## שאלה 3

$R, A$  הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.  $S$  הוא יחס מעל  $A$  המקיים  $SR = RS$ . מכאן נובע(!):

- א.  $S = \emptyset$       ב.  $S = I_A$       ג.  $S = R$

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

## שאלה 4

$R, A$  הם אלה שהוגדרו בשאלה 2. טענה (i):  $RR^{-1} = I_A$ . טענה (ii):  $R^{-1}R = I_A$ .

- א. רק טענה (i) נכונה.      ב. רק טענה (ii) נכונה.
- ג. שתי הטענות (i), (ii) נכונות.      ד. אף אחת מהטענות (i), (ii) אינה נכונה.

## שאלה 5

$R, A$  הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

- א.  $R = R^2$ .  
 ב.  $R \neq R^2$  אבל  $R^2 = R^3$ .  
 ג.  $R^2 \neq R^3$  אבל  $R^3 = R^4$ .  
 ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

## שאלה 6

$R, A$  הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

- טענה (i):  $R \cup R^2$  הוא רפלקסיבי. טענה (ii):  $R \cup R^2$  הוא סימטרי.  
 א. רק טענה (i) נכונה.  
 ב. רק טענה (ii) נכונה.  
 ג. שתי הטענות (i), (ii) נכונות.  
 ד. אף אחת מהטענות (i), (ii) אינה נכונה.

## שאלה 7

$R, A$  הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

- טענה (i):  $R \cup R^2$  הוא אנטי-סימטרי. טענה (ii):  $R \cup R^2$  הוא טרנזיטיבי.  
 א. רק טענה (i) נכונה.  
 ב. רק טענה (ii) נכונה.  
 ג. שתי הטענות (i), (ii) נכונות.  
 ד. אף אחת מהטענות (i), (ii) אינה נכונה.

## שאלה 8

היחס  $R = \{(1,1)\}$  מעל  $A = \{1,2,3\}$  הוא:

- א. רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.  
 ב. סימטרי ורפלקסיבי אך לא טרנזיטיבי.  
 ג. סימטרי וטרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי.  
 ד. רפלקסיבי וטרנזיטיבי אך לא סימטרי.  
 ה. טרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי ולא סימטרי.

## שאלה 9

$R, S$  הם יחסים מעל קבוצה  $A$  ומתקיים  $S \subseteq R$ .

- טענה (i): אם  $S$  סימטרי אז  $R$  סימטרי. טענה (ii): אם  $S$  אנטי-סימטרי אז  $R$  אנטי-סימטרי.  
 א. רק טענה (i) נכונה.  
 ב. רק טענה (ii) נכונה.  
 ג. שתי הטענות (i), (ii) נכונות.  
 ד. אף אחת מהטענות (i), (ii) אינה נכונה.

## שאלה 10

$R$  הוא יחס טרנזיטיבי מעל קבוצת הטבעיים  $N$ . ידוע שב- $R$  יש לפחות שני זוגות סדורים. מכאן ניתן להסיק:

- א. ב- $R$  יש לפחות 3 זוגות סדורים.
- ב. ב- $R$  יש אינסוף זוגות סדורים.
- ג.  $R^2 = R$ .
- ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

## שאלה 11

$R$  הוא יחס מעל קבוצה כלשהי, וידוע ש- $R$  אינו טרנזיטיבי. מכאן ניתן להסיק:

- א. ב- $R$  יש לפחות שני זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש  $R$  כזה שבו בדיוק שני זוגות.
- ב. ב- $R$  יש לפחות 3 זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש  $R$  כזה שבו בדיוק 3 זוגות.
- ג. ב- $R$  יש לפחות 4 זוגות סדורים.
- ד. מהנתון נובע ש- $A$  אינסופית וב- $R$  יש אינסוף זוגות סדורים.
- ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.



# מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" פרקים 2-3  
מספר השאלות: 11 משקל המטלה: 2 נקודות  
סמסטר: 2012 מועד אחרון להגשה: יום א' 22.4.2012

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאלת"א  
בכתובת <http://www.openu.ac.il/sheilta/>  
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

"רלציה" בעברית: יחס.

## שאלה 1

יהיו:  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (5, 6)\}$ ,  $E = I_A \cup R \cup R^{-1}$ .

החלוקה שיחס השקילות  $E$  משרה ב-  $A$  היא:

א.  $\{\{1, 2, 3\}, \{5, 6\}\}$

ב.  $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\}\}$

ג.  $\{\{1, 2, 3, 5, 6\}\}$

ד.  $\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

ה.  $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{5, 6\}\}$

ו.  $E$  אינו יחס שקילות מעל  $A$  ולכן אינו משרה חלוקה של  $A$ .

## שאלה 2

נגדיר יחס  $M$  מעל  $N - \{0\}$ :

עבור  $n, m$  טבעיים חיוביים,  $(n, m) \in M$  אם  $n \cdot m$  הוא מספר זוגי.

מספר מחלקות השקילות ש-  $M$  משרה ב-  $N - \{0\}$  הוא:

א. 1      ב. 2      ג. 3      ד. יש אינסוף מחלקות שקילות.

ה.  $M$  אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

## שאלה 3

נגדיר יחס  $L$  מעל  $N$ :  $(n, m) \in L$  אם  $n + m$  הוא מספר זוגי.

מספר מחלקות השקילות ש-  $L$  משרה ב-  $N$  הוא:

א. 1      ב. 2      ג. 3      ד. יש אינסוף מחלקות שקילות.

ה.  $L$  אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

#### שאלה 4

מספר יחסי השקילות השונים מעל הקבוצה  $\{1,2,3,4\}$ , בהם 3 ו-4 נמצאים באותה מחלקת שקילות (לא דוקא לבדם) הוא:

- א. 4      ב. 5      ג. 6      ד. 7      ה. 8

#### שאלה 5

$\mathbb{Z}$  היא קבוצת המספרים השלמים. נגדיר פונקציה  $f$  מ- $\mathbb{Z}$  ל- $\mathbb{Z}$ :  $f(k) = k(k+1)(k+2)$ .  $f$  היא:

- א. חד-חד-ערכית ועל      ב. חד-חד-ערכית אבל לא על  
ג. על אבל לא חד-חד-ערכית.      ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.  
ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbb{Z}$  ל- $\mathbb{Z}$ .

#### שאלה 6

נסמן  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ . תהי  $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $g(x) = \frac{3x}{1+x}$ .

$g$  היא:

- א. חד-חד-ערכית ועל      ב. חד-חד-ערכית אבל לא על  
ג. על אבל לא חד-חד-ערכית.      ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.  
ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbb{R}^+$  ל- $\mathbb{R}^+$ .

#### שאלה 7

תהי  $f: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$ ,  $f(X) = X \cup \mathbb{N}$ .

$f$  היא:

- א. חד-חד-ערכית ועל      ב. חד-חד-ערכית אבל לא על  
ג. על אבל לא חד-חד-ערכית.      ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.  
ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $P(\mathbb{R})$  ל- $P(\mathbb{R})$ .

#### שאלה 8

תהי  $U = \{1,2,3,4,5\}$  ותהיינה  $A, B \subseteq U$ .

בעמ' 85 בכרך "תורת הקבוצות" מוגדרת  $\varphi_A$ , הפונקציה האופיינית של  $A$  ב- $U$ .

נניח שלכל  $x \in U$  מתקיים  $\varphi_A(x) + \varphi_B(x) = 1$ . מכאן נובע:

- א.  $A \cup B = U$ , אבל ייתכן ש- $A \cap B \neq \emptyset$ .  
ב.  $A \cap B = \emptyset$ , אבל ייתכן ש- $A \cup B \neq U$ .  
ג.  $A' = B$ , כלומר  $A \cup B = U$  וגם  $A \cap B = \emptyset$ .  
ד.  $A \oplus B = \emptyset$ .

## שאלה 9

יהיו  $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ . נאמר ש-  $(X, Y) \in D$  אם ורק אם  $X \subseteq Y$ . היחס  $D$  הוא:

- סדר-חלקי מעל  $P(\mathbb{N})$  ואינו סדר-מלא מעל  $P(\mathbb{N})$ .
- סדר-חלקי מעל  $P(\mathbb{N})$ , שהוא גם סדר-מלא מעל  $P(\mathbb{N})$ .
- סדר-חלקי מעל  $P(\mathbb{N})$ , שהוא גם יחס שקילות מעל  $P(\mathbb{N})$ .
- אינו יחס מעל  $P(\mathbb{N})$ .

## שאלה 10

מעל קבוצה כלשהי  $A$  מוגדר סדר-חלקי, שאינו סדר-מלא. מכאן נובע:

- $|A| = 1$ .
- $|A| = 2$ .
- $|A| \geq 2$ .
- $A$  היא אינסופית.
- סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

## שאלה 11

$R$  הוא סדר-חלקי על קבוצה כלשהי  $A$ .

$a, b$  הם שני אברים שונים של  $A$ , ושניהם אברים מינימליים לגבי  $R$ . מכאן נובע:

- $|A| = 2$ .
- $R$  הוא סדר מלא מעל  $A$ .
- $R$  אינו סדר מלא מעל  $A$ .
- $A$  היא אינסופית.
- סתירה. לא ייתכן מצב כזה.





# מטלת מנחה (ממ"ן) 12

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 2-3

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: יום ו' 27.4.2012

סמסטר: ב2012

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות מנחה:

- שליחת המטלה באמצעות מערכת המטלות המקוונת, במערכת שאילת"א.
  - שליחת המטלה באמצעות דואר ישראל או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

$R$  הוא יחס מעל קבוצה  $A$ , ונתון:  $R \cap I_A = \emptyset$  (יחס כזה נקרא אנטי-רפלקסיבי).  
עוד נתון, ש-  $a, b$  הם איברים מסוימים של  $A$ , לא בהכרח שונים זה מזה,  
המקיימים:  $(a, b) \in R^2$  וגם  $(b, a) \in R^2$ .  
הוכח שקיימים  $c, d \in A$  (לא בהכרח שונים זה מזה), שאף אחד מהם אינו שווה ל-  $a$  ואינו  
שווה ל-  $b$ , והם מקיימים:  $(c, d) \in R^2$  וגם  $(d, c) \in R^2$ .

שאלה 2 (32 נק')

תהי  $A = \{1, 2, 3\}$ . תהי  $M$  קבוצת כל היחסים מעל  $A$ .  
תהי  $t: M \rightarrow M$  הפונקציה המתאימה לכל  $R \in M$  את הסגור הטרנזיטיבי שלו.  
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

8 נק') א.  $t$  היא חד-חד-ערכית.

8 נק') ב.  $t$  היא על  $M$ .

8 נק') ג. לכל  $R \in M$ ,  $t(R^2) = (t(R))^2$ .

8 נק') ד. לכל  $R \in M$ ,  $t(t(R)) = t(R)$ .

### שאלה 3 (25 נקודות)

בשאלה 3.25 בעמ' 94 בספר מוכח שיחס ההכלה  $\subseteq$  הוא סדר-חלקי מעל כל קבוצה של קבוצות.

(10 נק') א. תהי  $A$  קבוצה לא ריקה, ותהי  $K$  קבוצת כל יחסי השקילות מעל  $A$ . לפי האמור בתחילת השאלה,  $K$  סדורה בסדר-חלקי לגבי הכלה (אברי  $K$  הם קבוצות, כי יחס מעל קבוצה גם הוא קבוצה: קבוצה של זוגות סדורים). הראה שיש ב- $K$  אבר קטן ביותר ואבר גדול ביותר ("תורת הקבוצות" עמ' 93). **מיהם?** הוכח שהאברים שאתה מציין אכן שייכים ל- $K$ , ושהם מקיימים את הנדרש מהם.

(10 נק') ב. בהמשך לסעיף הקודם ובאותם סימונים, תהי  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . נסלק מ- $K$  את האבר הגדול ביותר ואת האבר הקטן ביותר שמצאנו בסעיף הקודם. לקבוצה שמתקבלת נקרא  $L$ . גם  $L$  סדורה בסדר-חלקי לגבי הכלה. תן דוגמא לשני אברים מקסימליים ב- $L$ , שונים זה מזה. הוכח שהם מקסימליים. תן דוגמא לשני אברים מינימליים ב- $L$ , שונים זה מזה. הוכח שהם מינימליים.

(5 נק') ג. הוכח שב- $L$  אין אבר גדול ביותר ואין אבר קטן ביותר.

### שאלה 4 (23 נקודות)

הפונקציה  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  מוגדרת ברקורסיה כך:

$$f(n+2) = 8f(n+1) - 15f(n) \quad \text{ולכל } 1 \leq n, \quad f(1) = -11, \quad f(0) = -5$$

(15 נק') א. הוכח באינדוקציה (ולא בדרך אחרת):  $f(n) = 2 \cdot 5^n - 7 \cdot 3^n$ .

(8 נק') ב. האם  $f$  היא על  $\mathbb{Z}$ ? הוכח את תשובתך.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 13

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 4-5

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה

משקל המטלה: 3 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: יום א' 6.5.2012

סמסטר: 2012ב

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות מנחה:

- שליחת המטלה באמצעות מערכת המטלות המקוונת, במערכת שאילת"א.
  - שליחת המטלה באמצעות דואר ישראל או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

חלק מהממ"ן מסתמך על החוברת "פרק 5" שנמצאת בידיכם.  
חוברת זו משלימה את פרק 4 בתורת הקבוצות ומחליפה חלק ממנו.

## שאלה 1

$\mathbf{R}$  היא קבוצת המספרים הממשיים,  $\mathbf{Z}$  היא קבוצת המספרים השלמים.  
בכל סעיף מצא את עוצמת הקבוצה הרשומה בו. הוכח את תשובתיך.

8 נק' א.  $K = \{x \in \mathbf{R} \mid 4x \in \mathbf{Z}\}$

8 נק' ב.  $L = \{ (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 4x - y = 5 \}$

9 נק' ג.  $M = \{ (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 4x - y = 5 \text{ וגם } x + y \in \mathbf{Z} \}$

## שאלה 2

### טענה

אם  $k, m$  עוצמות גדולות מ-1 (סופיות או אינסופיות), אז  $k + m \leq k \cdot m$ .

### הנה התחלה של הוכחה לטענה

תהי  $A$  קבוצה שעוצמתה  $k$ , ותהי  $B$  קבוצה זרה ל- $A$  (!), שעוצמתה  $m$   
(יש קבוצות כאלה, משיקולים כללים שהוזכרו בפרק 5 בתורת הקבוצות).

מהנתון על  $k, m$  נובע בפרט ש- $A, B$  אינן ריקות. יהי אפוא  $a_1 \in A$  ויהי  $b_1 \in B$ .

נבנה פונקציה  $f: A \cup B \rightarrow A \times B$ .

המשיכו את ההוכחה מנקודה זו (ולא בדרך אחרת).

אין צורך להעתיק את החלק שרשום כאן.

במהלך ההוכחה שימו לב לבעיה בחד-חד-ערכיות שעשויה להיווצר, ותנו לבעיה מענה ע"י שיפוף

קטן בפונקציה שאתם בונים. שימו לב שנתון כי  $k, m \geq 2$ .

### שאלה 3

12 נק' א. הוכיחי שקבוצת היחסים (רלציות) מעל הקבוצה  $N$ , עוצמתה  $C$ .  
הדרכה: כדאי להיזכר בהגדרה של רלציה מעל קבוצה.

13 נק' ב. הוכיחי שקבוצת היחסים הטרנזיטיביים מעל  $N$ , עוצמתה  $C$ .

### שאלה 4

12 נק' א. תהיינה  $k_1, k_2, m$  עוצמות. נתון  $k_1 \leq k_2$ . הוכח:  $k_1^m \leq k_2^m$ .

13 נק' ב. הוכח:  $\aleph_0^{\aleph_0} = C$ . כדאי להיעזר בסעיף א.

## מטלת מחשב (ממ"ח) 04

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה      חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 1-2  
מספר השאלות: 11      משקל המטלה: 3 נקודות  
סמסטר: 2012      מועד אחרון להגשה: יום ה' 18.5.2012

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאלת"א  
בכתובת <http://www.openu.ac.il/sheilta/>  
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בשאלות 1–4 הן קבוצות סופיות,  $|A| = 5$ ,  $|B| = 3$ .

### שאלה 1

מספר הפונקציות של  $B$  ל- $A$  הוא:

א. 8      ב. 10      ג. 15      ד. 125      ה. 243

### שאלה 2

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של  $B$  ל- $A$  הוא:

א. 3      ב. 8      ג. 60      ד. 120      ה. 240

### שאלה 3

מספר היחסים הרפלקסיביים מעל  $A$  הוא:

א. 25      ב. 120      ג. 125      ד. 3,125      ה. 1,048,576

### שאלה 4

מספר יחסי הסדר המלא מעל  $A$  הוא:

א. 25      ב. 120      ג. 125      ד. 3,125      ה. 1,048,576

שאלות 5-7 עוסקות בדרכים שונות לסדר את המחרוזת abbecddd (להלן: "המחרוזת").

#### שאלה 5

מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת הוא:

- א. 8      ב. 11      ג. 1,680      ד. 40,309      ה. 40,320

#### שאלה 6

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת כאשר צמד האותיות cc חייב להופיע ברצף?

- א. 7      ב. 420      ג. 5,030      ד. 5,040      ה. 12,520

#### שאלה 7

**בנוסף** לדרישה שבשאלה 6, נדרוש גם **שלא** יופיע הרצף ddd.

מספר הסידורים האפשריים כעת קטן ממספר הסידורים שמצאתם בשאלה 6. **בכמה הוא קטן?**

- א. 5      ב. 60      ג. 120      ד. 410      ה. 5,030

שאלות 8 – 10 עוסקות בחמש משפחות שיצאו יחד למנגל והכינו 9 סטייקים **זהים** ו- 12 שיפודים **זהים**. המשפחות **אינן** נחשבות זהות. כמו כן, סטייק **אינו** זהה לשיפוד.

### שאלה 8

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לחלק את 12 השיפודים בין המשפחות? יש לחלק את כל השיפודים. ייתכן שמשפחה לא רוצה שיפודים כלל.

א.  $D(5,12) = \binom{16}{11}$     ב.  $D(5,12) = \binom{16}{4}$     ג. 792    ד.  $5^{12}$     ה.  $D(12,5)$

### שאלה 9

נסמן את התשובה לשאלה הקודמת ב-  $x$ . בכמה דרכים ניתן לחלק את כל האוכל בין המשפחות? יש לחלק את כל השיפודים ואת כל הסטייקים. ייתכן שמשפחה לא רוצה אוכל כלל.

א.  $x+1,287$     ב.  $x+715$     ג.  $x \cdot 1,287$     ד.  $x \cdot 715$     ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

### שאלה 10

בכמה דרכים ניתן לחלק רק את 12 השיפודים בין המשפחות, אם משפחת כהן חייבת לקבל לפחות 3 שיפודים, וכל משפחה אחרת חייבת לקבל שיפוד אחד לפחות?

א. 1    ב. 126    ג. 261    ד. 612    ה. 621

### שאלה 11

מהו מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 6x_5 = 12$ ? תזכורת: בקורס זה, 0 הוא מספר טבעי. הדרכה: במחבר האחרון בצד שמאל אפשר לטפל ע"י הפרדה למקרים.

א. 45    ב. 54    ג. 450    ד. 540    ה. 4,500





# מטלת מנחה (ממ"ן) 14

חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 3-4

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה

משקל המטלה: 3 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: יום א' 25.5.2012

סמסטר: 2012

**קיימות שתי חלופות להגשת מטלות מנחה:**

- שליחת המטלה באמצעות מערכת המטלות המקוונת, במערכת שאילת"א.
  - שליחת המטלה באמצעות דואר ישראל או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"**

**שאלה 1 (20 נקודות)**

פשטו את הסכום  $\sum_{n=0}^m \frac{1}{n+1} \binom{m}{n}$ . הגיעו לביטוי התלוי ב-  $m$ , שאינו מכיל סכומים.

במהלך הפתרון סביר שתזדקקו לפעולה מקובלת הקרויה **החלפת משתנה הסכימה**. דוגמא:

בביטוי  $\sum_{i=20}^{50} a_{i-3}$  נעבור למשתנה  $j = i - 3$  ונקבל שניתן לרשום את הסכום גם כך:  $\sum_{j=17}^{43} a_j$ .

שימו לב להחלפת הערכים הן בתוך הסכום והן בגבולות הסכימה.

**שאלה 2 (30 נקודות)**

כדאי לקרוא את הקובץ על עקרון ההכלה וההפרדה, באתר הקורס במדור "עזרים ללמידה" - הן כחזרה על העיקרון הזה והן כהכנה לשאלה המסוימת כאן.

תהי  $A = \{1,2,3,4\}$  ותהי  $B = \{1,2,3\}$ .

(5 נק') א. מהו מספר הפונקציות של  $B$  לקבוצה  $A \times A$ ?

(25 נק') ב. מהו מספר הפונקציות  $f$  של  $B$  לקבוצה  $A \times A$ , המקיימות:

לכל  $a \in A$  קיים  $x \in B$  כך ש-  $a$  מופיע (כאיבר הימני או כאיבר השמאלי)

בזוג הסדור  $f(x)$ ?

דוגמא לפונקציה המקיימת זאת:  $f(1) = (1,2)$ ,  $f(2) = (3,4)$ ,  $f(3) = (1,1)$

דוגמא לפונקציה שאינה מקיימת זאת:  $g(1) = (1,2)$ ,  $g(2) = (2,1)$ ,  $g(3) = (1,1)$

**בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה סופית מספרית.**

### שאלה 3 (30 נקודות)

המשפחות שהכינו שיפודים וסטייקים בממ"ח 04 החליטו לחלק את האוכל בדרך אחרת: כל האוכל יחולק בין המשפחות, כאשר כל משפחה חייבת לקבל **משהו** - שיפוד או סטייק אחד לפחות. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת? הדרכה: הכלה והפרדה. תזכורת: השיפודים זהים, הסטייקים זהים, אך שיפוד אינו זהה לסטייק.

### שאלה 4 (20 נקודות)

לטקס בוגרים של האוניברסיטה הגיעו 600 אנשים (בוגרים ואורחים שונים). במהלך הערב חלק מהאנשים לחצו ידיים זה לזה. הוכח שיש לפחות שני אנשים שלחצו בדיוק אותו מספר ידיים. הבהרות: אדם לא לוחץ יד לעצמו ☺ שני אנשים אינם לוחצים יד זה לזה יותר מפעם אחת.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20476 מתמטיקה דיסקרטית חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 6-7

מספר השאלות: 4 משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2012 מועד אחרון להגשה: יום א' 3.6.2012

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות מנחה:

- שליחת המטלה באמצעות מערכת המטלות המקוונת, במערכת שאילת"א.
  - שליחת המטלה באמצעות דואר ישראל או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

## שאלה 1

- יהי  $a_n$  מספר הסדרות באורך  $n$ , שאיבריהן שייכים לקבוצה  $\{0,1,2\}$ , אשר אין בהן הופעה של 00 ואין בהן הופעה של 01 (מותרת הופעה של 10).
- דוגמאות לסדרות מותרות באורך 5: 11110, 12211.
- דוגמאות לסדרות אסורות באורך 5: 11100, 12011.
- (10 נק') א. רשמי בעזרת חישוב ישיר את  $a_0, a_1, a_2$ . רשמי יחס נסיגה עבור  $a_n$ . בדקי שהערכים שרשמת עבור  $a_0, a_1, a_2$  מתאימים ליחס הנסיגה.
- (15 נק') ב. פתרי את יחס הנסיגה וקבלי נוסחה מפורשת עבור  $a_n$ . ביטויים כגון  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$  יש להשאיר כפי שהם. ביטויים כגון  $\sqrt{12}$  יש להעביר לצורה  $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ .

שאר הממ"ן עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בסוף הממ"ן רשימה של נוסחאות שימושיות.

## שאלה 2

- מצאו את מספר פתרונות המשוואה  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$ , כאשר 3 מהמשתנים הם מספרים טבעיים זוגיים, 3 המשתנים האחרים הם מספרים טבעיים אי-זוגיים, ואף אחד מהמשתנים אינו שווה 0 ואינו שווה 1.
- לא נתון איזה מהמשתנים הם זוגיים ואיזה אי-זוגיים.
- אפשר לפתור בעזרת פונקציה יוצרת ואפשר בדרך אחרת. יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

### שאלה 3

ארבעה רועים שונים אחראים לעדר של  $n$  כבשים זהות. ביציאה למרעה הרועים מחלקים ביניהם את העדר, כך שכל רועה ייקח איתו לכל היותר 20 כבשים. הרועים נחשבים שונים זה מזה, הכבשים נחשבות זהות.

(8 נק') א. רשום פונקציה יוצרת עבור מספר הדרכים לחלק את  $n$  הכבשים הזהות בין ארבעת הרועים השונים. אפשר שרועה לא ייקח אף כבש.

(17 נק') ב. אם מספר הכבשים הוא 50, חשב בעזרת סעיף א' (ולא בדרך אחרת) את מספר הדרכים לחלק אותן בין הרועים. תן תשובה סופית מספרית.

### שאלה 4

דוגמא לתרגיל מסוג זה נמצאת בסוף הקובץ "מבוא לפונקציות יוצרות" שבאתר הקורס.

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^n \cdot (1+x)^{2n} = (1+x)^n \quad \text{פתח לטורים את שני אגפי הזהות}$$

וקבל ע"י השוואת המקדמים בשני האגפים זהות מהצורה:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i D(\cdot, \cdot) \binom{\cdot}{\cdot} = \binom{n}{k}$$

בדוק את הזהות שקיבלת עבור המקרה  $k=3, n=4$ .

להלן כמה נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות:

$$(i) \quad \text{סכום טור הנדסי סופי:} \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{ואינסופי:} \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

(ii) כפל פונקציות יוצרות:

$$\text{אם } f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i, \quad \text{ו-} \quad f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

$$\text{אז } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \quad (\text{ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד}).$$

$$(iii) \quad \frac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+\dots)^n = \sum_{k=0}^{\infty} D(n, k) x^k$$

במלים אחרות: המקדם של  $x^k$  בפיתוח הביטוי  $\frac{1}{(1-x)^n}$  הוא  $D(n, k)$ .

ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר.

# מטלת מחשב (ממ"ח) 05

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה  
מספר השאלות: 10  
סמסטר: 2012  
חומר הלימוד למטלה: "תורת הגרפים" פרקים 1-3  
משקל המטלה: 2 נקודות  
מועד אחרון להגשה: יום ה' 21.6.2012

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאלת"א

בכתובת <http://www.openu.ac.il/sheilta/>

הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

## שאלה 1

- נתאר לעצמנו גרף על 7 צמתים, שדרגותיהם: 2,2,3,4,5,5,6.
- יש גרף פשוט וקשיר כזה.
  - יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.
  - יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.
  - יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.
  - לא קיים גרף כזה.

## שאלה 2

- נתאר לעצמנו גרף על 5 צמתים, שדרגותיהם: 1,2,3,4,4.
- יש גרף פשוט וקשיר כזה.
  - יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.
  - יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.
  - יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.
  - לא קיים גרף כזה.

## שאלה 3

בהנתן  $n > 0$  טבעי, יהי  $Q_n$  הגרף הפשוט הבא:

הצמתים של  $Q_n$  הם הסדרות באורך  $n$  שאבריהן 0,1 (מספר הצמתים הוא אפוא  $2^n$ ).  
שני צמתים מחוברים בקשת אם ורק אם הם נבדלים זה מזה בקואורדינטה אחת בדיוק.  
למשל, ב-  $Q_5$  יש קשת בין הצומת  $(0,0,1,0,1)$  לצומת  $(0,1,1,0,1)$ , כי שתי הסדרות הללו  
נבדלות זו מזו רק בקואורדינטה השנייה. מספר הקשתות של  $Q_5$  הוא:

- א. 31      ב. 40      ג. 64      ד. 80

#### שאלה 4

$K_n$  הוא הגרף המלא על  $n$  צמתים ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4).  
נתבונן באיחוד זר של  $K_4$  עם  $K_5$  : גרף בעל 9 צמתים, שיש לו שני רכיבי קשירות:  
רכיב קשירות אחד הוא עותק של  $K_4$  ורכיב הקשירות השני הוא עותק של  $K_5$  .  
נוסיף לקשתות הקיימות בגרף עוד קשתות : נחבר בקשת כל צומת של  $K_4$  עם כל צומת של  $K_5$  .  
הגרף שנקבל הוא :

- א.  $K_9$ , והוא דו-צדדי.
- ב.  $K_9$ , והוא אינו דו-צדדי.
- ג. גרף דו-צדדי שאינו  $K_9$  .
- ד. גרף שאינו דו-צדדי ואינו  $K_9$  .

#### שאלה 5

השאלה עוסקת באיזומורפיזם של גרפים שאינם מתויגים ("תורת הגרפים" הגדרה 2.7).  
נזכור שלכל גרף  $G$ , המשלים שלו ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4) מסומן  $\overline{G}$  .  
 $C_n$  הוא גרף שהוא מעגל על  $n$  צמתים.

- א.  $\overline{C_5}$  איזומורפי ל-  $C_5$  ו-  $\overline{C_6}$  איזומורפי ל-  $C_6$  .
- ב.  $\overline{C_5}$  איזומורפי ל-  $C_5$  אבל  $\overline{C_6}$  אינו איזומורפי ל-  $C_6$  .
- ג.  $\overline{C_5}$  אינו איזומורפי ל-  $C_5$  אבל  $\overline{C_6}$  איזומורפי ל-  $C_6$  .
- ד.  $\overline{C_5}$  אינו איזומורפי ל-  $C_5$  ו-  $\overline{C_6}$  אינו איזומורפי ל-  $C_6$  .

#### שאלה 6

$G$  הוא יער על 14 צמתים, ובו בדיוק 11 קשתות.

- א.  $G$  הוא עץ.
- ב. ל-  $G$  יש בדיוק שני רכיבי קשירות.
- ג. ל-  $G$  יש בדיוק שלשה רכיבי קשירות.
- ד. נחוץ מידע נוסף כדי לקבוע כמה רכיבי קשירות יש ל-  $G$ .
- ה. לא ייתכן יער כזה.

## שאלה 7

בחוברת "תורת הגרפים" בעמ' 29, בתשובה לשאלה 7, מופיע עץ מתויג. נוסף לעץ הזה עלה שמספרו 9 ונחבר אותו לצומת שמספרה 1.

סדרת Prüfer של העץ החדש היא:

- א.  $(4, 4, 3, 4, 4, 2, 1)$
- ב.  $(1, 4, 4, 3, 4, 4, 2)$
- ג.  $(4, 4, 4, 4, 3, 2, 1)$
- ד.  $(4, 4, 3, 4, 2, 4, 1)$
- ה.  $(4, 3, 4, 4, 2, 4, 1)$
- ו.  $(4, 3, 4, 4, 4, 2, 1)$

## שאלה 8

הגרף הדו-צדדי המלא  $K_{p,q}$  הוגדר ב"תורת הגרפים" הגדרה 1.5.

נתבונן ב-  $K_{2,5}$ .

- א. הוא אוילרי, ויש בו גם מסלול אוילר שאינו מעגל.
- א. הוא אוילרי, וכל מסלול אוילר בו הוא מעגל.
- ג. הוא אינו אוילרי, אבל יש בו מסלול אוילר שאינו מעגל.
- ד. אין בו מסלול אוילר כלל.

## שאלה 9

נתבונן ב-  $K_{4,5}$ .

- א. הוא המילטוני, ויש בו גם מסלול המילטון שאינו מעגל.
- א. הוא המילטוני, וכל מסלול המילטון בו הוא מעגל.
- ג. הוא אינו המילטוני, אבל יש בו מסלול המילטון שאינו מעגל.
- ד. אין בו מסלול המילטון כלל.

## שאלה 10

**הגדרה:** צומת מפריד בגרף הוא צומת שאם נמחק אותו (ואת הקשתות הסמוכות לו) מהגרף,

נקבל גרף בעל מספר רכיבי קשירות גדול יותר מזה של הגרף המקורי.

- א. גרף שיש בו צומת מפריד אינו אוילרי ואינו המילטוני.
- ב. גרף שיש בו צומת מפריד אינו אוילרי אבל יכול להיות המילטוני.
- ג. גרף שיש בו צומת מפריד אינו המילטוני אבל יכול להיות אוילרי.
- ד. יש גרף אוילרי שיש בו צומת מפריד ויש גרף המילטוני שיש בו צומת מפריד.





# מטלת מנחה (ממ"ן) 18

הקורס: 20476 – מתמטיקה בדידה

חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים – כל היחידה

משקל המטלה: 3 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: יום ו' 29.6.2012

סמסטר: 2012ב

**קיימות שתי חלופות להגשת מטלות מנחה:**

- שליחת המטלה באמצעות מערכת המטלות המקוונת, במערכת שאילת"א.
  - שליחת המטלה באמצעות דואר ישראל או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"**

**שאלה 1 (13 נקודות)**

בתשובה 2 בעמ' 11 בספר, בהוכחת טרנזיטיביות, מדוע אי אפשר פשוט לשרשר את שני המסלולים, כלומר להסתכל במסלול שתחילתו  $P_{u \rightarrow v}$  והמשכו  $P_{v \rightarrow w}$  ?

**שאלה 2 (29 נקודות)**

הגרף  $G$  מוגדר כך:

הצמתים של  $G$  הם הקבוצות בנות בדיוק 3 אברים מתוך  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

למשל הקבוצה  $\{1, 4, 7\}$  היא צומת של  $G$ .

בין שני צמתים שונים  $A, B$  יש קשת אם ורק אם  $|A \cap B| = 1$ .

למשל יש קשת בין  $\{1, 4, 7\}$  לבין  $\{2, 3, 4\}$ .

(6 נק') א. הוכח ש-  $G$  קשיר. הדרכה: הפרד למקרים לפי גודל החיתוך בין שני צמתים.

(4 נק') ב. כמה צמתים יש ב-  $G$  ? הוכח.

(4 נק') ג. מהי דרגת כל צומת ב-  $G$  ? הוכח.

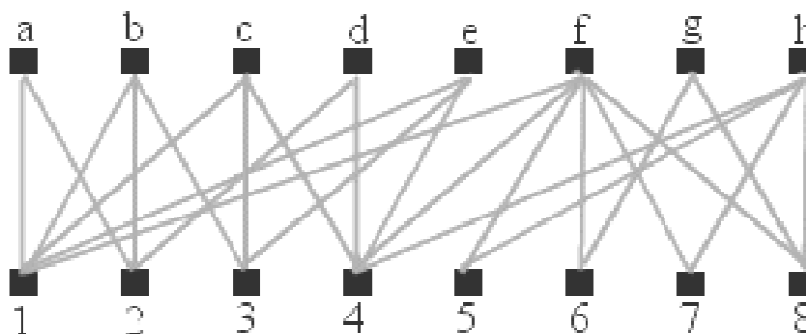
(5 נק') ד. כמה קשתות יש ב-  $G$  ? הוכח.

(5 נק') ה. האם  $G$  הוא אוילרי? הוכח.

(5 נק') ו. הוכח ש-  $G$  הוא המילטוני.

### שאלה 3 (15 נקודות)

הוכיחו כי בגרף הבא לא קיים זיווג מושלם.



### שאלה 4 (18 נקודות)

$G$  הוא גרף מישורי על 11 צמתים.

$\bar{G}$  הוא הגרף המשלים של  $G$  (הגדרה 1.4, עמ' 12 בחוברת "תורת הגרפים").

הוכיחו ש-  $\bar{G}$  אינו מישורי.

**רשות** (בנוסף 5 נקודות). אין ציון מעל 100 אבל הבונוס יכול לקזז נקודות שירדו):

הוכיחו טענה זו כאשר במקום 11, מספר הצמתים בגרף הוא מספר כלשהו הגדול מ-10.

### שאלה 5 (25 נקודות)

יהי  $G$  גרף פשוט, שקבוצת הצמתים שלו היא  $V$ .

נניח שצבענו את  $G$  צביעה נאותה, בצבעים הלקוחים מקבוצת צבעים  $A$ .

$\bar{G}$  הוא הגרף המשלים של  $G$ .

בלי קשר לצביעה של  $G$ , צבענו את  $\bar{G}$  צביעה נאותה, בצבעים הלקוחים מקבוצת צבעים  $B$ .

(15 נק') א. לכל  $v \in V$  נתאים **זוג סדור** של צבעים: הראשון בזוג הוא הצבע של  $v$  בצביעה של

$G$  והשני בזוג הוא הצבע של  $v$  בצביעה של  $\bar{G}$ .

הוכיחו שבהתאמה זו, אין שני צמתים שונים שמותאם להם אותו זוג סדור של צבעים.

נסחו אמירה זו גם כטענה על **חד-חד-ערכיות** של פונקציה (פונקציה מהיכן להיכן?)

(10 נק') ב. יהי  $n = |V|$ . מסעיף א נובעת אחת הטענות הבאות. מצאו איזו, והוכיחו אותה.

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \geq n \quad (1)$$

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n \quad (2)$$

$$\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \geq n \quad (3)$$

$$\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \leq n \quad (4)$$

צביעה נאותה ומספר הצביעה,  $\chi(G)$ , הוגדרו שניהם בעמ' 59 בחוברת "תורת הגרפים".