## 20425 - תאריך הבחינה: 17.2.2011 (סמסטר 2011א - מועד א5/ 86 )

**שאלה 1**

א. המאורע $\{X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n = 0\}$ מתרחש כאשר לפחות אחד מה-$X_i$-ים שווה לאפס. לכן, המאורע המשלים לו מתרחש כאשר כל ה-$X_i$-ים שונים מאפס. מכיוון שה-$X_i$-ים בלתי-תלויים זה בזה וכל אחד מהם שונה מאפס בהסתברות 0.8, מקבלים כי: $P\{X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n = 0\} = 1 - 0.8^n$

ב. מכפלת המשתנים המקריים הנתונים היא אי-שלילית ודרוש <u>חסם</u> להסתברות שהמכפלה גדולה מקבוע, לכן נוכל להשתמש באי-שוויון מרקוב למציאת החסם למאורע $\{X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n > 0.05\}$.

לצורך החישוב, נמצא את התוחלת של מכפלת המשתנים המקריים. מכיוון שהם בלתי-תלויים, נקבל:

$$E[X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n] = E[X_1] \cdot E[X_2] \cdot ... \cdot E[X_n] = 0.5^n$$

ומכאן:

$$P\{X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n > 0.05\} \le P\{X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n \ge 0.05\} \le \frac{0.5^n}{0.05}$$

נבדוק כעת, אם קיים $N$, כך שלכל $n > N$ מתקיים $\frac{0.5^n}{0.05} < 0.6^n$:

$$\frac{0.5^n}{0.05} < 0.6^n \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.05 \quad \Rightarrow \quad n \ln\frac{5}{6} < \ln 0.05 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\ln 0.05}{\ln\frac{5}{6}} = 16.43$$

קיבלנו אם כן, שלכל $n > N = 16$, כלומר, החל מ- $n$ ששווה ל-17, מתקיים אי-השוויון הנתון.

ג. המשתנים המקריים הנתונים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה, לכן נשתמש במשפט הגבול המרכזי לחישוב הקירוב. מתקיים:

$$E[X_i] = 0.5 \qquad , \qquad i = 1,2,...$$

$$E[X_i^2] = (0^2 + 0.25^2 + 0.5^2 + 0.75^2 + 1^2) \cdot 0.2 = 0.375 \qquad , \qquad i = 1,2,...$$

$$\text{Var}(X_i) = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = 0.375 - 0.5^2 = 0.125 \qquad , \qquad i = 1,2,...$$

נשים לב לכך, שהערכים האפשריים של המשתנים המקריים הנתונים אינם שלמים, ולכן <u>**לא**</u> נערוך תיקון רציפות. נחשב את הקירוב המבוקש:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 52\right\} \cong P\left\{Z > \frac{52 - 100 \cdot 0.5}{\sqrt{100 \cdot 0.125}}\right\} = P\{Z > 0.5657\} = 1 - \Phi(0.5657)$$

$$= 1 - 0.7142 = 0.2858$$

**שאלה 2**

א. כאשר הבחירה נעשית ללא החזרה, הערכים האפשריים של $X$ הם 2, 3, 4, 5 ו-6.

ההסתברויות לקבלת ערכים אלו הן:

$$P\{X = 2\} = \frac{20 \cdot 15}{20 \cdot 19} = \frac{15}{19} = \frac{3,060}{3,876} = 0.7895$$

$$P\{X = 3\} = \frac{20 \cdot 4 \cdot 15}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{10}{57} = \frac{680}{3,876} = 0.1754$$

$$P\{X = 4\} = \frac{20 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 15}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{10}{323} = \frac{120}{3,876} = 0.03095$$

$$P\{X=5\}=\frac{20\cdot4\cdot3\cdot2\cdot15}{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}=\frac{5}{1,292}=\frac{15}{3,876}=0.0039$$

$$P\{X=6\}=\frac{20\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}=\frac{1}{3,876}=0.00025$$

והשונות של $X$ היא:

$$E[X]=(2\cdot3,060+3\cdot680+4\cdot120+5\cdot15+6\cdot1)\cdot\tfrac{1}{3,876}=\tfrac{8,721}{3,876}=2.25$$

$$E[X^2]=(2^2\cdot3,060+3^2\cdot680+4^2\cdot120+5^2\cdot15+6^2\cdot1)\cdot\tfrac{1}{3,876}=\tfrac{20,691}{3,876}=5.3382$$

$$\text{Var}(X)=E[X]-(E[X])^2=5.3382-2.25^2=0.2757$$

ב. כאשר הבחירה נעשית עם החזרה, הערכים האפשריים של $X$ הם $2$, $3$, ... , והתפלגותו היא הזזה ב-1 של התפלגות גיאומטרית עם הסתברות $\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$ להצלחה. כלומר, אם $Y$ הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר $\frac{3}{4}$, אז מתקיים $X=Y+1$. לפיכך, פונקציית ההסתברות של $X$ היא:

$$P\{X=i\}=P\{Y+1=i\}=P\{Y=i-1\}=\left(\tfrac{1}{4}\right)^{i-2}\cdot\tfrac{3}{4}\qquad,\qquad i=2,3,...$$

ושונותו:

$$\text{Var}(X)=\text{Var}(Y+1)=\text{Var}(Y)=\frac{\frac{1}{4}}{(\frac{3}{4})^2}=\frac{4}{9}$$

**שאלה 3**

א. נסמן ב- $X_1$ את מספר התיקונים שיידרשו במשך שנה במכונה בת השנה. ההתפלגות של המשתנה המקרי $X_1$ היא פואסונית עם הפרמטר 3, ולכן:

$$P\{X_1\le1\}=e^{-3}\cdot(1+\tfrac{3^1}{1!})=4e^{-3}=0.199$$

ב. נסמן ב- $X_i$ את מספר התיקונים שיידרשו במשך שנה במכונה בת $i$ שנים, לכל $i=1,2,3$. ההתפלגות של המשתנה המקרי $X_i$ היא פואסונית עם הפרמטר $3i$, וה-$X_i$-ים בלתי-תלויים זה בזה. לפיכך, סכום ה-$X_i$-ים מתפלג פואסונית עם הפרמטר $3+6+9=18$, ומכאן:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{3}X_i=22\right\}=e^{-18}\cdot\frac{18^{22}}{22!}=0.05597$$

ג1. נסמן ב-$X$ את משך הזמן העובר עד לתיקון הראשון. מכיוון שקצב התיקונים בשנה אחת לכל שלוש המכונות הוא 18, התפלגות הזמן (בשנים) עד לתיקון הראשון שיידרש במכונות הוא משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 18.

ג2. מהאמור בסעיף הקודם, נקבל כי ההסתברות שיעבור לפחות חודש אחד עד לתיקון הראשון היא:

$$P\{X>\tfrac{1}{12}\}=e^{-18/12}=e^{-1.5}=0.223$$

ד. נסמן ב- $Y_i$ את מספר התיקונים שיידרשו במשך חצי-שנה במכונה בת $i$ שנים, לכל $i=1,2,3$. ההתפלגות של המשתנה המקרי $Y_i$ היא פואסונית עם הפרמטר $1.5i$, וה-$Y_i$-ים בלתי-תלויים זה בזה. לפיכך, נקבל שסכום ה-$Y_i$-ים, מתפלג פואסונית עם הפרמטר $1.5+3+4.5=9$, וכי ההתפלגות המותנית של המשתנה המקרי $Y_3$ בהינתן $\sum_{i=1}^{3}Y_i=10$ היא בינומית עם הפרמטרים 10 ו- $\frac{4.5}{9}=0.5$. ומכאן:

$$P\left\{Y_3=6\left|\sum_{i=1}^{3}Y_i=10\right.\right\}=\binom{10}{6}\cdot0.5^{10}=0.2051$$

**שאלה 4**

למשתנה המקרי $X_1$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 10 ו- 0.1 ;

ואילו המשתנה המקרי $S$ הוא סכום מקרי של תוצאות ההטלות של $X_1$ הקוביות שהיו בתא 1.

נסמן ב- $S_i$ את תוצאת ההטלה של הקובייה ה-$i$-ית שהיתה בתא 1, לכל $i = 1,2,\ldots,X_1$ .

בסימונים אלו, נתוני הבעיה הם : לכל $S_i$ התפלגות אחידה בדידה בין 1 ל-6 ; $X_1 \sim B(10,0.1)$

$$S = \sum_{i=1}^{X_1} S_i$$

א.

$$P\{S = 2\} = P\{X_1 = 1, S_1 = 2\} + P\{X_1 = 2, S_1 = 1, S_2 = 1\}$$
$$= P\{S_1 = 2 \mid X_1 = 1\}P\{X_1 = 1\} + P\{S_1 = 1, S_2 = 1 \mid X_1 = 2\}P\{X_1 = 2\}$$
$$= \tfrac{1}{6} \cdot \binom{10}{1} \cdot 0.1 \cdot 0.9^9 + \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \cdot \binom{10}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^8 = 0.06995$$

ב. לפי נוסחת התוחלת של סכום מקרי :

$$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{X_1} S_i\right] = E[X_1] \cdot E[S_1] = 10 \cdot 0.1 \cdot 3.5 = 3.5$$

לפי נוסחת השונות של סכום מקרי :

$$\operatorname{Var}(S) = \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{X_1} S_i\right) = E[X_1]\operatorname{Var}(S_1) + (E[S_1])^2 \operatorname{Var}(X_1) = 10 \cdot 0.1 \cdot \tfrac{35}{12} + 3.5^2 \cdot 10 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 13.942$$

ג.

$$\operatorname{Cov}(X_1, X_2 + \ldots + X_{10}) = \operatorname{Cov}(X_1, 10 - X_1) = 0 - \operatorname{Var}(X_1) = -10 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = -0.9$$

**דרך נוספת:** ל-$X_i$-ים יש התפלגות משותפת מולטינומית עם $n = 10$ ווקטור הסתברויות שכל רכיביו שווים ל-0.1. לכן, לכל $i = 2,3,\ldots,10$ מתקיים :

$$\operatorname{Cov}(X_1, X_i) = -10 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = -0.1$$

ומכאן :

$$\operatorname{Cov}(X_1, X_2 + \ldots + X_{10}) = \sum_{i=2}^{10} \operatorname{Cov}(X_1, X_i) = 9 \cdot (-0.1) = -0.9$$

**שאלה 5**

א. ההוכחה מובאת בספר הקורס.

ב. נשתמש בנוסחה החלופית לחישוב השונות המשותפת, בטענה מתרגיל ת26 (המובאת בדף הנוסחאות) ובנוסחת התוחלת המותנית, ונקבל :

$$\operatorname{Cov}(X, E[Y \mid X]) = E[X \cdot E[Y \mid X]] - E[X] \cdot E[E[Y \mid X]]$$ [ הנוסחה החלופית לחישוב השונות המשותפת ]

$$= E[E[XY \mid X]] - E[X] \cdot E[E[Y \mid X]]$$ [ לפי הטענה מתרגיל ת26, עמוד 430 ]

$$= E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = \operatorname{Cov}(X,Y)$$ [ נוסחת התוחלת המותנית ]