

מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.

* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.

* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.

* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס.
בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(6 נק') א. α, β הם פסוקים, וידוע שהפסוק $\alpha \vee \beta$ הוא טאוטולוגיה. לפיכך:

[1] α הוא טאוטולוגיה ו- β הוא טאוטולוגיה.

[2] לפחות אחד מהפסוקים α, β הוא טאוטולוגיה.

[3] הפסוק $(\neg \alpha) \vee (\neg \beta)$ הוא סתירה.

[4] הפסוק $\alpha \leftrightarrow \beta$ הוא סתירה.

[5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

(7 נק') ב. תהיינה A, B, C קבוצות בנות מניה, החלקיות לקבוצת הממשיים \mathbb{R} .

נסמן: $D = A' \cap B' \cap C'$ (המשלימים הם יחסית ל- \mathbb{R}). עוצמת D היא:

[1] 0 [2] \aleph_0 [3] C

[4] עוצמה מסוימת, שאינה אף אחת משלוש הנ"ל.

[5] התשובה תלויה בבחירת הקבוצות A, B, C .

(6 נק') ג. G הוא גרף דו-צדדי. סכום דרגות הצמתים השייכים לצד אחד של G הוא 36

וסכום דרגות הצמתים השייכים לצד השני של G הוא 32.

[1] יש גרף דו-צדדי כזה, פשוט וקשיר.

[2] יש גרף דו-צדדי כזה, קשיר אבל לא פשוט.

[3] יש גרף דו-צדדי כזה, פשוט אבל לא קשיר.

[4] יש גרף דו-צדדי כזה, לא פשוט ולא קשיר.

[5] לא ייתכן גרף דו-צדדי כזה.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

- תהי $P_0(\mathbb{N})$ קבוצת הקבוצות החלקיות הסופיות ולא-ריקות של \mathbb{N} .
לכל $X \in P_0(\mathbb{N})$, נסמן ב- $\min(X)$ את המספר הקטן ביותר ב- X ,
וב- $\max(X)$ את המספר הגדול ביותר ב- X .
נגדיר יחס E מעל $P_0(\mathbb{N})$:
עבור $A, B \in P_0(\mathbb{N})$, $(A, B) \in E$ אם ורק אם $\min(A) + \max(B) = \min(B) + \max(A)$.
(10 נק') א. הוכיחו ש- E הוא יחס שקילות מעל $P_0(\mathbb{N})$.
(10 נק') ב. מצאו פונקציה $f: P_0(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ המשרה את יחס השקילות E הנ"ל,
כלומר מקיימת: לכל $A, B \in P_0(\mathbb{N})$, $(A, B) \in E$ אם ורק אם $f(A) = f(B)$.
(7 נק') ג. הוכיחו או הפריכו:
אם $A, B, C \in P_0(\mathbb{N})$ ו- $(A, B) \in E$ או $(A \cup C, B \cup C) \in E$.
הערה: אפשר לפתור את סעיף ב לפני סעיף א.

שאלה 3

- ששה חברים טסו לטיול בגאורגיה.
המקומות שלהם במטוס היו: שורות 1, 2, 3, בכל שורה כסאות A, B (כסאות סמוכים זה לזה).
בטיסה חזרה הם קיבלו בדיוק אותם מקומות, אבל אף אחד לא היה מוכן לשבת ליד (כלומר
באותה שורה עם) מי שישב לידו בדרך הלוך.
בכמה דרכים הם יכולים להתיישב בטיסה חזרה לארץ?
הבהרות:
* את סידור הישיבה בטיסה מישראל לגאורגיה אפשר לקחת כנתון שאין בו בחירה.
* יש חשיבות למושבים: מצב בו דינה יושבת בכסא A1 שונה ממצב בו היא יושבת בכל כסא אחר.
* אין דרישה שכל אחד יישב בכסא שונה מהכסא בו הוא ישב בטיסה לגאורגיה.

שאלה 4

- יהי a_n מספר הסדרות באורך n , שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0,1,2\}$, ואין בהן הופעות של הרצף 22 ואין בהן הופעות של הרצף 12. דוגמאות לסדרות **מוותרות** באורך 5: 00211 (הרצף 21 מותר), 11111 (אין בעיה). דוגמאות לסדרות **אסורות** באורך 5: 00221 (יש הופעה של 22), 00121 (יש הופעה של 12).
- (12 נק') א. רשמי בעזרת חישוב ישיר את a_0, a_1, a_2 . רשמי יחס נסיגה עבור a_n (יש לנמק). הצעה: נוח לנתח את מבנה הסדרה מהקצה הימני שלה ולא מהקצה השמאלי. בדקי שהערכים שרשמת עבור a_0, a_1, a_2 מתאימים ליחס הנסיגה.
- (15 נק') ב. פתרי את יחס הנסיגה וקבלי נוסחה מפורשת עבור a_n . בדקי את הנוסחה שקיבלת ע"י השוואה עם הערך של a_2 שקיבלת בסעיף א.

שאלה 5

- יהיו $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$ שני עצים על אותה קבוצת צמתים V . לכל $v \in V$ תהי $d_1(v)$ הדרגה של v ב- G_1 ותהי $d_2(v)$ הדרגה של v ב- G_2 . הוכיחו כי קיים $v \in V$ עבורו $d_1(v) + d_2(v) \leq 3$. הדרכה: חשבו את סכום כל הדרגות בשני העצים.

בהצלחה!