

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 4-5

מספר השאלות: 5 משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2008 מועד אחרון להגשה: יום ו' 18.4.08

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

חלק מהממ"ן מסתמך על החוברת "פרק 5" שקיבלתם בחבילה של חמרי הקורס. חוברת זו משלימה את פרק 4 ומחליפה חלק ממנו.

שאלה 1 (24 נקודות)

תני דוגמא לקבוצות A, B כך שחמש הקבוצות $A, B, A - B, A \oplus B, A \cup B$ שונות כולן זו מזו,

אבל לכל חמש הקבוצות האלה אותה עוצמה. הוכיחי שהקבוצות שונות והוכיחי שיש להן אותה עוצמה.

שאלה 2 (20 נקודות)

R היא קבוצת המספרים הממשיים. Q היא קבוצת המספרים הממשיים הרציונליים.

ב"תורת הקבוצות" עמ' 126 שאלה 4.8 ראינו ש- Q היא בת-מניה.

א. תהי K קבוצת המספרים הממשיים שאינם רציונליים.

הוכח ש- K אינה בת-מניה, בלי להסתמך על פרק 5 בתורת הקבוצות.

ב. מצא מהי עוצמת הקבוצה הבאה:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - \sqrt{2}) \text{ הוא רציונלי}\}$$

לקבוצה זו שייכים למשל המספרים $\sqrt{2}$, $0.35 + \sqrt{2}$.

הוכח את תשובתך.

שאלה 3 (22 נקודות)

- א. הוכיחו כי קבוצת היחסים הדו-מקומיים (רלציות בינאריות) מעל N , עוצמתה C .
הדרכה: מהו יחס דו-מקומי מעל N ? מהי אפוא קבוצת כל היחסים הללו?
ב. הוכיחו שעוצמת קבוצת היחסים הטרנזיטיביים מעל N אף היא C .

שאלה 4 (24 נקודות)

- א. יהיו k_1, k_2, m_1, m_2 עוצמות. הוכח שאם $k_1 \leq k_2$ ו- $m_1 \leq m_2$ אז $k_1 \cdot m_1 \leq k_2 \cdot m_2$.
ב. הוכח: $\aleph_0 \cdot C = C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם).
ג. הוכח: $C^C = 2^C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם ובמשפטים שבחוברת).

שאלה 5 (10 נקודות)

- היעזרו בפרק 5 ומצאו את עוצמת הקבוצה K שהוגדרה בשאלה 2 סעיף א בממ"ן זה.
הוכיחו את תשובתכם.