בחינה 7

שאלה 1

יהיו A ו- B קבוצות.

א. (15 נק׳) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות :

1. אם $A \cup B = A \setminus B$ אז $B = \emptyset$.
2. אם $A \cup B$ שקולה ל- $A \setminus B$, אז $B = \emptyset$.
3. אם $A \cup B$ היא קבוצה סופית ו- $A \cup B$ שקולה ל- $A \setminus B$ אז $B = \emptyset$.

ב. (10 נק׳)יהיו A,B,C קבוצות. הוכיחו שאם $P(A) = P(B) \cap P(C)$, אז $A = B \cap C$.

תשובה

א. 1. הטענה נכונה. אם נניח ש- $B \neq \emptyset$ אז קיים $x \in B$. אבל אז $x \in A \cup B$ ו- $x \notin A \setminus B$, בסתירה לנתון ש- $A \cup B = A \setminus B$. לכן $B = \emptyset$.

2. הטענה אינה נכונה. נראה זאת על-ידי דוגמה נגדית. נבחר למשל $A = \mathbf{N}$ (קבוצת המספרים הטבעיים) ו- $B = \{2n-1 \mid n \in \mathbf{N}\}$ (קבוצת המספרים הטבעיים האי-זוגיים). אז $A \cup B = \mathbf{N}$ ו- $A \setminus B = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$, לכן $A \cup B$ שקולה ל- $A \setminus B$ (נתאים, למשל לכל $n \in A \cup B$ את $2n \in A \setminus B$ -זו התאמה חד-חד-ערכית).

2. הטענה נכונה. לפי הגדרות האיחוד וההפרש של קבוצות, $A \setminus B \subseteq A \cup B$. אם נניח ש- $A \setminus B$ חלקית **ממש** ל- $A \cup B$ נקבל ש- $A \cup B$ אינסופית (כי יש לה קבוצה חלקית ממש ששקולה לה) בסתירה לנתון. מכאן שבהכרח $A \cup B = A \setminus B$ ואז, מסעיף א׳ נובע ש- $B = \emptyset$.

ב. נראה כי $A \subseteq B \cap C$ ו- $B \cap C \subseteq A$. נניח $x \in A$. אז $\{x\} \subseteq A$, לכן $\{x\} \in P(A)$ (לפי הגדרת $P(A)$) ולכן, לפי הנתון, $\{x\} \in P(B) \cap P(C)$. מכאן ש- $\{x\} \in P(B)$ וגם $\{x\} \in P(C)$, לכן $\{x\} \subseteq B$ ו- $\{x\} \subseteq C$, כלומר $x \in B$ ו- $x \in C$. לפיכך $x \in B \cap C$, ובזאת הוכחנו ש- $A \subseteq B \cap C$.

להפך, נניח ש- $x \in B \cap C$. אז $x \in B$ וגם $x \in C$, לכן $\{x\} \subseteq B$ ו- $\{x\} \subseteq C$, לכן $\{x\} \in P(B)$ ו- $\{x\} \in P(C)$, לכן $\{x\} \in P(B) \cap P(C)$, ולכן, לפי הנתון $\{x\} \in P(A)$. אז $\{x\} \subseteq A$, כלומר $x \in A$. בזאת הוכחנו ש- $B \cap C \subseteq A$ ואת השוויון הדרוש.

שאלה 2

א. (10 נק׳) תהי A קבוצה שעליה מוגדרת פעולה בינרית $*$ המקיימת את תכונת הסגירות ואת חוקי הצמצום. ידוע שיש איבר $e \in A$ כך שלכל $x \in A$ מתקיים $x * e = x$.

הוכח כי e אינו בהכרח איבר ניטרלי ב- A ביחס לפעולה $*$.

ב. (15 נק׳) תהי A קבוצה **לא ריקה**. על הקבוצה $P(A)$ מגדירים פעולה בינרית $*$ כך :

לכל $X, Y \in P(A)$, $X * Y = X \cup Y$.

בדוק אם הפעולה $*$ מקיימת את תכונות הסגירות, הקיבוציות, אם קיים ב- $P(A)$ איבר נטרלי ביחס ל- $*$ ואם לכל איבר ב- $P(A)$ יש נגדי ביחס לפעולה זו. נמק תשובותיך.

תשובה

א. עלינו להביא דוגמה לקבוצה A, לפעולה בינרית $*$, ולאיבר $e \in A$ שמקיימים את תנאי השאלה כך ש- e לא איבר נטרלי.

ניקח למשל את $A = \{e, a, b\}$ ונגדיר עליה פעולה בינרית $*$ בעזרת הטבלה הבאה:

*	e	a	b
e	e	b	a
a	a	e	b
b	b	a	e

מהטבלה נובע שהפעולה קיבוצית (כי לכל $x, y \in A$ מתקיים $x * y \in A$), הפעולה מקיימת את חוקי הצמצום (שכן, הדבר השקול להופעת איברי A פעם אחת לכל היותר בכל שורה ובכל עמודה). כמו-כן, לכל $x \in A$ מתקיים $x * e = x$. בכל זאת e אינו איבר נטרלי כי למשל, $e * a = b$.

ב.

סגירות.

לכל $X, Y \in P(A)$ מתקיים $X \subseteq A$, $Y \subseteq A$. מכאן שגם $X \cup Y \subseteq A$ (שכל כל אביר השייך ל- X או ל- Y שיים ל- A. מכאן ש- $X \cup Y \in P(A)$ כלומר $X * Y \in P(A)$. לפיכך הפעולה $*$ מקיימת תכונת הסגירות.

קיבוציות.

נניח כי $X, Y, Z \in P(A)$. אז $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ (נימוק: $t \in (X \cup Y) \cup Z$ אם ורק אם $t \in X \cup Y$ או $t \in Z$, כלומר $t \in X$ או $t \in Y$ או $t \in Z$. זה שקול לכך ש- $t \in X$ או $t \in Y \cup Z$ כלומר שקול ל- $t \in X \cup (Y \cup Z)$. מכאן ש- $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$). מכאן שהפעולה $*$ מקיימת תכונת הקיבוציות.

קיום איבר נטרלי.

מאחר שלכל $X \in P(A)$ מתקיים $X * \varnothing = X \cup \varnothing = X$ וכן $\varnothing * X = \varnothing \cup X = X$. לפיכך הקבוצה $\varnothing$ (שהיא כמובן איבר של $P(A)$ כי $\varnothing \subseteq A$) היא איבר נטרלי ב- $P(A)$ ביחס לפעולה $*$.

קיום איבר נגדי.

לא לכל קבוצה $X \in P(A)$ יש איבר נגדי ביחס לפעולה $*$, שכן אם נניח למשל כי קיים נגדי ל- $A \in P(A)$ ביחס לפעולה $*$ נקבל כי קיים $Y \in P(A)$ כך ש- $A * Y = \varnothing$, כלומר $A \cup Y = \varnothing$. אבל אז נקבל כי $A \subseteq \varnothing$ כלומר $A = \varnothing$ וזו סתירה, כי נתון ש- A קבוצה **לא ריקה**.

שאלה 3

א. (12 נקי) תהי A קבוצה כלשהי ותהיינה h, g, f פונקציות מ- A ל- A.

הוכח שאם f היא על ואם $g \circ f = h \circ f$ אז $g = h$.

ב. (13 נקי) עבור $A = \mathbf{N}$ (קבוצת המספרים הטבעיים) הדגם פונקציות h, g, f מ- A ל- A כך

ש- $g \circ f = h \circ f$ אבל $g \neq h$.

תשובה

א. לפונקציות h, g יש אותו תחום ואותו טווח (הקבוצה A). לכן כדי להוכיח ש- $g = h$ נותר

להראות שלכל איבר $x \in A$ מתקיים $g(x) = h(x)$.

נבחר $x \in A$. מאחר ש- f היא על, נובע שקיים איבר $t \in A$ כך ש- $f(t) = x$. ואז מתקיים:

$$g(x) = g(f(t)) = (g \circ f)(t) \overbrace{=}^{g\circ f = h\circ f} (h \circ f)(t) = h(f(t)) = h(x).$$

הוכחנו שלכל $x \in A$ מתקיים $g(x) = h(x)$, ולכן $g = h$.

ב. נראה שקיימות פונקציות $h, g, f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ כך ש- $g \circ f = h \circ f$ ובנוסף לכך,

f חד-חד-ערכית, ובכל זאת $g \neq h$. נגדיר למשל,

$f(n) = n + 1$ לכל $n \in \mathbf{N}$, $g(n) = n$ לכל $n \in \mathbf{N}$, ו- $h(n) = \begin{cases} 2 & n = 1 \text{ רמע} \\ n & n > 1 \text{ רמע} \end{cases}$.

אז f היא חד-חד-ערכית ולכל $n \in \mathbf{N}$ מתקיים:

$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = n+1$, וכן

$$(h \circ f)(n) = h(f(n)) = h(n + 1) \overbrace{=}^{\text{כי } n+1>1} n + 1.$$ לכן $g \circ f = h \circ f$.

ובכל זאת $g \neq h$, שכן, $g(1) = 1$, $h(1) = 2$.

שאלה 4

תהי T קבוצת הנקודות שעל מעגל שמרכזו O, (T לא כוללת את פנים המעגל). תהי f

איזומטריה של המישור כך ש- T קבוצה קבועה ביחס ל- f. יהיו A ,B קצות קוטר במעגל T.

א. (8 נקי) הוכח שהנקודות $f(A), f(B)$ הן קצות קוטר ב- T.

ב. (8 נקי) הוכח ש- O נקודת שבת של f.

ג. (9 נקי) הוכח שאם $f(A) = A$ ואם f אינה הזהות אז f שיקוף.

תשובה

א. מאחר ש- $A, B \in T$ ו- T קבוצה קבועה של f הרי שגם $f(A), f(B) \in T$. נסמן ב- R את

אורך הרדיוס של המעגל T. מהנתון ידוע כי A, B הן קצות קוטר ב- T לכן $\overline{AB} = 2R$,

ומאחר ש- f איזומטריה, נקבל כי $\overline{f(A)f(B)} = \overline{AB} = 2R$.

מכאן ש- $f(A), f(B)$ הן שתי נקודות על המעגל T כך שהמרחק ביניהן שווה לאורך הקוטר

של המעגל ומכאן ש- $f(A), f(B)$ הן קצות קוטר ב- T.

ב. נסתכל על הנקודה $f(O)$. מאחר ש- $\overline{OA}=\overline{OB}=R$ ו- f היא איזומטריה נקבל כי גם $\overline{f(O)f(A)}=\overline{f(O)f(B)}=R$. מכאן שמרחק הנקודה $f(O)$ משני קצות הקוטר $f(A)f(B)$ שווה לרדיוס המעגל ולכן הנקודה $f(O)$ היא מרכז המעגל. במילים אחרות $f(O)=O$ ולכן O היא נקודת שבת של f .

ג. נניח ש- $f(A)=A$. מאחר שגם $f(O)=O$, נקבל כי ל- f יש שתי נקודות שבת. מבין חמשת סוגי האיזומטריות, רק לזהות ולשיקוף יש יותר מנקודת שבת אחת. על-פי ההנחה f אינה הזהות, לכן f היא בהכרח שיקוף.

שאלה 4

נתונה מערכת האקסיומות הבאה, העוסקת במושגים "נקודה", "ישר" (קבוצה של נקודות) וביחס "נמצאת על" בפירושו הרגיל:

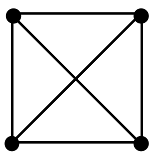
1. יש בדיוק ארבע נקודות.
2. כל שתי נקודות נמצאות על ישר יחיד.
3. כל ישר מכיל לפחות שתי נקודות שונות.
4. לכל ישר ℓ ונקודה P שלא נמצאת על ℓ יש ישר יחיד אשר P נמצאת עליו ואין לו נקודה משותפת עם ℓ .

א. (8 נק') הוכח שמערכת האקסיומות חסרת סתירה.

ב. (9 נק') הוכח מתוך מערכת זו את המשפט: "אין ישר ועליו בדיוק 3 נקודות שונות".

ג. (8 נק') הוכח שמערכת האקסיומות הנתונה אינה מערכת שלמה.

תשובה



א. המודל המוגדר על-ידי ההמחשה שבאיור המצורף, מקיים את כל אקסיומות המערכת הנתונה, מכאן שהמערכת היא חסרת סתירה.

ב. נניח בדרך השלילה שקיים מודל למערכת ובו, ישר שעליו בדיוק שלוש נקודות, $\{a,b,c\}$. מאקסיומה 1 ידוע שקיימת נקודה נוספת, d , ומאקסיומה 4 נובע שקיים ישר m שמכיל את d ואין לו נקודה משותפת עם $\{a,b,c\}$. מאחר שבמודל אין נקודות מלבד a,b,c,d , נובע ש- d היא הנקודה היחידה של m , כלומר $m=\{d\}$, דבר שסותר את אקסיומה 3. מכאן שבכל מודל של המערכת מתקיים המשפט: "אין ישר ועליו בדיוק 3 נקודות שונות".

ג. כדי להוכיח שהמערכת אינה שלמה, עלינו להצביע על אקסיומה שאינה נובעת מהמערכת ואינה סותרת אותה. נבחר למשל את האקסיומה: "קיים בדיוק ישר אחד". אקסיומה זו אינה נובעת מהמערכת שכן, במודל שהגדרנו בסעיף א', היא אינה מתקיימת, למרות שאקסיומות 1,2,3,4 מתקיימות בה. מצד שני, האקסיומה החדשה אינה סותרת את המערכת שלנו כי למשל המודל שנקודותיו הן a,b,c,d והישר היחיד בו הוא $\{a,b,c,d\}$, זה מודל שמקיים את אקסיומות 1,2,3,4 וגם את האקסיומה שהוספנו.

שאלה 6

א. (12נק') הוכח או הפרך : קיימים מספרים טבעיים m ו- n כך ש : $36m + 14 = 51n - 20$.

ב. (13 נק') הוכח או הפרך : אם A^* הקבוצה הנוצרת מ- $A = \{36, \frac{1}{9}, \frac{1}{4}\}$ על ידי כפל אז $27 \in A^*$

.

תשובה

א. נניח כי קיימים מספרים טבעיים m ו- n כך ש : $36m + 14 = 51n - 20$. נעביר את המספר 20 לאגף שמאל ונקבל כי $36m + 34 = 51n$.

נמצא כעת את שארית החילוק ב- 3 של שני אגפי השוויון האחרון :

$36m + 34 = (12m + 11) \cdot 3 + 1$ לכן שארית החילוק של $36m + 34$ ב- 3 היא 1.

$51n = (17n) \cdot 3 + 0$ לכן שארית החילוק של $51n$ ב- 3 היא 0.

בתוצאות שקיבלנו יש סתירה כי לא ייתכן שלאותו מספר יהיו שתי שאריות שונות בחילוק ב-3 (משפט החלוקה עם שארית מבטיח כי לכל מספר טבעי יש שארית אחת בלבד בחילוק ב- 3). סתירה זו מוכיחה כי לא קיימים מספרים m, n המקיימים את השוויון הנתון ומכאן שהטענה בסעיף זה אינה נכונה.

ב. הקבוצה הנוצרת מ- $A = \{36, \frac{1}{9}, \frac{1}{4}\}$ על-ידי כפל היא $A^* = \{36^m \left(\frac{1}{9}\right)^n \left(\frac{1}{4}\right)^k | m, n, k \in \mathbf{N}_0\}$, כאשר המספרים m, n, k אינם כולם 0 . לפיכך אם $27 \in A^*$ אז קיימים $m, n, k \in \mathbf{N}_0$, לא כולם 0 כך ש- $27 = 36^m \left(\frac{1}{9}\right)^n \left(\frac{1}{4}\right)^k$. נרשום את שני האגפים כמכפלות של מספרים ראשוניים ונקבל $3^3 = (2^2 3^2)^m \left(\frac{1}{3^2}\right)^n \left(\frac{1}{2^2}\right)^k$, כלומר : $3^3 = 2^{2m} 3^{2m} \cdot \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{1}{2^{2k}}$.

מכאן ש- $3^3 = 2^{2m-2n} 3^{2m-2k}$. שני האגפים בשוויון האחרון הם בעצם המספר הטבעי 27 ולפי המשפט היסודי של האריתמטיקה לכל מספר טבעי יש הצגה אחת ויחידה כמכפלה של ראשוניים. מכאן נובע כי לכל מספר ראשוני חייב להיות אותו מספר הופעות בשני האגפים.

המספר 2 מופיע $2m - 2n$ פעמים באגף ימין אך אינו מופיע באגף שמאל, לכן : $2m - 2n = 0$.

המספר 3 מופיע $2m - 2k$ פעמים באגף ימין ומופיע 3 פעמים באגף שמאל לכן $2m - 2k = 3$ ולכן $2(m - k) = 3$. באגף השמאלי של השוויון האחרון מופיע מספר טבעי (כי גם אגף ימין הוא מספר טבעי) ואחד הגורמים הראשוניים שלו הוא 2. לעומת זאת גורם זה לא מופיע בפירוק של אגף ימין למכפלה של ראשוניים (כי באגף זה מופיע רק 3). זו סתירה למשפט היסודי. לפיכך ההנחה $27 \in A^*$ מובילה לסתירה, לכן $27 \notin A^*$ ולכן הטענה בסעיף זה אינה נכונה.