

מבנה הבחינה : בבחינה 6 שאלות.

עליך לענות על 5 מתוכן.

משקל כל השאלות זהה.

במקרה ששאלה מורכבת מכמה סעיפים, הנקודות מתחלקות באופן שווה בין הסעיפים.

רצוי לכתוב את הבחינה **בעט**, ולענות על השאלות בקיצור ולענין.

שאלה 1

נתון גרף בלתי מכוון $G = (V, E)$, שלכל קשת e בו יש משקל $0 < \ell(e)$.

להלן אלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי בגרף G :

$$E' \leftarrow E \quad (1)$$

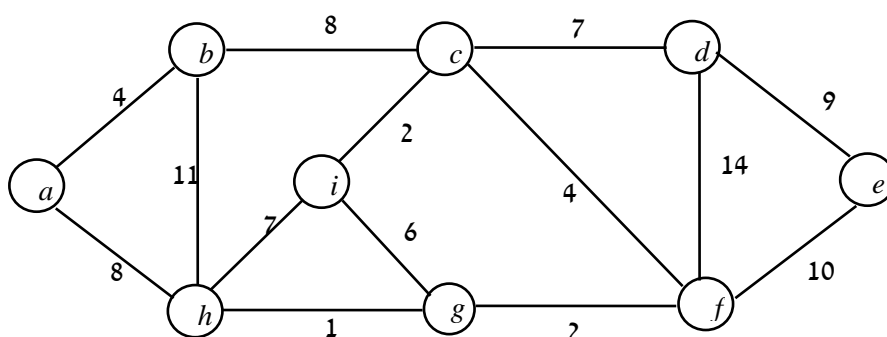
(2) מיין את הקשתות של G בסדר יורד עפ"י המשקל שלהן.

(3) עבור לפי הסדר על רשימת הקשתות של G , ועבור כל קשת (u, v) בצע:

(3.1) אם $G' = (V, E' \setminus \{(u, v)\})$ הוא גרף קשיר, אז $E' \leftarrow E' \setminus \{(u, v)\}$.

(4) החזר את E' .

א. הרץ את האלגוריתם על הגרף הבא:



צייר את העץ הפורש שמתקבל.

ב. מהי השיטה האלגוריתמית שבה משתמש האלגוריתם? הסבר את תשובתך.

שאלה 2

נתונה רשימה L המכילה n מספרים a_1, \dots, a_n . יש למצוא את שני המספרים הגדולים ביותר ברשימה.

א. כתוב אלגוריתם לפתרון הבעיה הפועל בשיטת הפרד ומשול.

מהי סיבוכיות הזמן של האלגוריתם?

ב. הפוך את האלגוריתם שכתבת בסעיף א' לאלגוריתם מקבילי.

מהי סיבוכיות הזמן המקבילית של האלגוריתם? מהו מספר המעבדים הדרוש?

שאלה 3

גירי ואיליין עומדים לצאת לטֶרֶק בהרי ההימלאיה.
 עליהם לקחת עמם 5 פריטים a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , שמשקליהם הם (בק"ג):
 $w_1 = 1, w_2 = 9, w_3 = 5, w_4 = 3, w_5 = 8$.
 גירי ואיליין צריכים לחלק ביניהם את הפריטים, כך שכל אחד ישא על גבו משקל שווה.
 כדי לפתור את הבעיה, גירי ואיליין פנו לעזרתו של קריימר.
 קריימר החליט לנסות לפתור את הבעיה בעזרת אלגוריתם תכנון דינמי.
 האלגוריתם שקריימר כתב, משתמש בטבלה דו-ממדית בגודל 5×14 .
 קריימר התחיל למלא את הערכים המתאימים בטבלה, ולאחר זמן קצר הטבלה נראתה כך:

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	T	T	F	F	F	F	F	F	F	F				
2	T	T	F	F	F	F	F	F	F	T				
3	T	T	F	F	F	T	T	F	F	T				
4	T	T	F	T	T	T	T	F	T	T				
5	T	T	F	T	T	T	T	F	T	T				

בשלב זה קריימר נאלץ להפסיק את מלאכת מילוי הטבלה, מפני שניזמן הגיע במפתיע לביקור,
 וביקש לדון עמו על רעיון עסקי חדש.
 א. הסבר מה משמעותו של הערך הנמצא בכניסה ה- (i, j) בטבלה, והסבר איך ערך זה מחושב.
 ב. השלם את הטבלה והראה כיצד ניתן לשחזר מתוך הטבלה את הפתרון לבעיה
 (בהנחה שיש לבעיה פתרון).

שאלה 4

בעיית המסלול באורך k היא הבעיה הבאה:
 הקלט לבעיה: גרף $G = (V, E)$ ומספר שלם k .
 השאלה: האם יש ב- G מסלול פשוט באורך k ? (מסלול פשוט בגרף הוא מסלול שאינו מכיל
 מעגל. אורך של מסלול הוא מספר הקשתות במסלול).
 הוכח שבעיית המסלול באורך k שייכת ל-NPC.

שאלה 5

עבור כל אחת מהבעיות הבאות כתוב אם היא כריעה או לא.

נמק את תשובותיך בקצרה:

א. הקלט לבעיה: תכנית וקלט **ספציפיים** Q_0 ו- x_0 (כלומר לבעיה יש קלט יחיד).

השאלה: האם Q_0 עוצרת על x_0 ?

ב. הקלט לבעיה: תכנית כלשהי Q .

השאלה: האם Q עוצרת על כל הקלטים שלה?

ג. הקלט לבעיה: שתי קבוצות X, Y של מילים, ומספר טבעי n .

השאלה: האם קיימת סדרת אינדקסים שאורכה לכל היותר n , כך ששרשור המילים

מהקבוצה X עפ"י סדרת האינדקסים הזו, ושרשור המילים מהקבוצה Y עפ"י אותה סדרת

אינדקסים יתנו בדיוק את אותה מילה?

ד. הקלט לבעיה: שתי קבוצות X, Y של מילים, כך שלכל i מתקיים $|x_i| \geq |y_i|$.

(כלומר, לכל אינדקס i , המילה ה- i בקבוצה X ארוכה לפחות כמו המילה ה- i בקבוצה Y).

השאלה: האם קיימת סדרת אינדקסים, כך ששרשור המילים מהקבוצה X עפ"י סדרת

האינדקסים הזו, ושרשור המילים מהקבוצה Y עפ"י אותה סדרת אינדקסים יתנו בדיוק

את אותה מילה?

שאלה 6

א. הסבר מדוע זמן הריצה של האלגוריתם הנאיבי לבדיקת ראשוניות הוא אקספוננציאלי בגודל הקלט.

ב. הסבר מדוע בעיית הראשוניות שייכת ל- co-RP.

ג. הוכח שבעיית הראשוניות שייכת ל- co-NP.

ד. נניח שהתגלה אלגוריתם דטרמיניסטי הפותר את בעיית הראשוניות בזמן פולינומיאלי.

האם ניתן להסיק מכך ש- $P = NP$? הסבר את תשובתך.

סוף!