

קורס: 20416 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"
תאריך הבחינה: 5.7.2012 (סמסטר ב' 2012 - מועד א' 2 / 84)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי וספר הקורס בלבד.

מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפת: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

שאלה 1 (25 נקודות)

התפלגות הגובה (בס"מ) של צמח מזן מסוים היא נורמלית עם תוחלת 30 ; וידוע, שהגובה של צמח מקרי מהזן הזה הוא בין 19.15 ס"מ ל-40.85 ס"מ בהסתברות 0.97.

(7 נק') א. מהי סטיית-התקן של ההתפלגות?

(6 נק') ב. בוחרים 10 צמחים באופן מקרי.

מהי ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם עולה על 33.89 ס"מ?

(6 נק') ג. בוחרים 101 צמחים באופן מקרי.

נסמן את הגבהים של הצמחים שנבחרו ב- X_1, X_2, \dots, X_{101} .

חשב קירוב ל- $P\{S^2 > 26 | \bar{X} < 30.1\}$, כאשר $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ו- $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

(6 נק') ד. כמות המים (בסמ"ק), שצמח כזה צורך בשבוע, היא פי 3 מגובהו (בס"מ).

נסמן ב- Y את צריכת המים השבועית של צמח מקרי מהזן הזה.

מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים של Y .

שאלה 2 (25 נקודות)

בגדר בעלת 3 קטעים מותקנים 4 גלאי-פריצה בלתי-תלויים, כמתואר באיור שלהלן:



כל אחד מארבעת הגלאים תקין (ופועל) בהסתברות 0.8.

את הגדר אפשר לפרוץ רק בקטעים, הנמצאים בין שני גלאי-פריצה סמוכים ומקולקלים.

(6 נק') א. פורץ מגיע לגדר, ומנסה לפרוץ אותה.

מהי ההסתברות שיצליח?

כעת, נניח שנתונה גדר דומה במבנה שלה, אך בעלת n גלאים בלתי-תלויים (ו- $n-1$ קטעים).

(6 נק') ב. אם ידוע שבדיוק 2 גלאים (מתוך ה- n) מקולקלים, מהי ההסתברות שאפשר לפרוץ את הגדר?

ג. יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הקטעים בגדר שאפשר לפרוץ דרכם.

(6 נק') 1. חשב את $E[X]$.

(7 נק') 2. חשב את $\text{Var}(X)$.

שאלה 3 (25 נקודות)

- כביש מסוים נבדק ונמצא שיש בו ליקויים הדורשים תיקון.
 מספר הליקויים שנמצאו בכביש הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 20.
 בחברה, המטפלת באחזקת הכביש, החליטו לערוך תיקונים בליקויים שנמצאו בכביש.
 הוחלט שכל ליקוי (ללא תלות באחרים) יתוקן בהסתברות $\frac{2}{3}$.
- (6 נק') א. חשב את ההסתברות שהחברה תתקן בדיוק 15 ליקויים בכביש.
 (7 נק') ב. אם ידוע שהחברה תיקנה בדיוק 15 ליקויים בכביש, מהי ההסתברות שנמצאו בכביש בדיוק 25 ליקויים?
 (12 נק') ג. חשב את מקדם המתאם בין מספר הליקויים שנמצאו בכביש לבין מספר הליקויים שלא יתוקנו בו.

שאלה 4 (25 נקודות)

- (13 נק') א. יהי X משתנה מקרי רציף, שהתפלגותו אחידה על הקטע $[0,1]$;
 ויהי Y בהינתן $X=x$ משתנה מקרי רציף, שהתפלגותו אחידה על הקטע $[x,1]$.
 מצא את פונקציית הצפיפות השולית של Y .
- (12 נק') ב. הנקודה A נבחרת באקראי מתוך הקטע $[0,5]$;
 הנקודה B נבחרת באקראי מתוך הקטע $[1,6]$, באופן בלתי-תלוי בבחירת הנקודה A .
 חשב את $P\left(\int_{\sqrt{B}}^A x dx > \frac{3}{2}\right)$.

שאלה 5 (25 נקודות)

- מבצעים 10 ניסויים בלתי-תלויים עם הסתברות p ($0 < p < 1$) להצלחה בכל אחד מהניסויים.
 יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר ההצלחות שמתקבלות ב-10 הניסויים.
 כמו כן, נסמן ב- A את המאורע שהתקבלה הצלחה בניסוי הראשון;
 וב- B את המאורע שהתקבלה לפחות הצלחה אחת ב-10 הניסויים.
- (6 נק') א. חשב את $P\{X=1 | A\}$.
 (6 נק') ב. חשב את $P\{X=1 | B\}$.
 (7 נק') ג. חשב את $E[X | A]$.
 (6 נק') ד. חשב את $E[X | B]$.

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326