תשובה 1

א. נבדוק כיצד בנויה סדרה באורך n המקיימת את הנדרש.

נתבונן באיבר האחרון של הסדרה:

* אם הוא אי-זוגי (4 אפשרויות), אז קטע הסדרה הקודם לו הוא **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-1$ (a_{n-1} אפשרויות).
* אם הוא זוגי (3 אפשרויות) אז לפניו בא מספר אי-זוגי (4 אפשרויות), ולפניו **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-2$ (a_{n-2} אפשרויות).

קיבלנו: $a_n = 4a_{n-1} + 12a_{n-2}$.

תנאי התחלה:

$a_0 = 1$ (הסדרה הריקה מקיימת את התנאים! נוח להיעזר ב- a_0 לסעיף ב),

$a_1 = 7$,

$a_2 = 7^2 - 3^2 = 40$ (כל הזוגות פחות זוגות של מספרים זוגיים),

לבדיקה, מיחס הנסיגה: $a_2 = 4a_1 + 12a_0 = 4\cdot 7 + 12 = 40$.

ב. המשוואה האפיינית: $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$. פתרונותיה: $6, -2$.

לפיכך $a_n = A\cdot 6^n + B\cdot(-2)^n$.

בהצבת תנאי ההתחלה נקבל: $A + B = 1$, $6A - 2B = 7$.

מכאן

$A = 9/8$, $B = -1/8$.

ולכן

$$a_n = \frac{9}{8}\cdot 6^n - \frac{1}{8}\cdot(-2)^n = \frac{1}{8}\left(9\cdot 6^n - (-2)^n\right)$$

רצוי מאד להציב ולבדוק ערכים אחדים של n!

תשובה 2

א. $g(x) = \dfrac{f(x)}{1-x} = f(x)\cdot(1 + x + x^2 + \ldots) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i)\cdot(\sum_{i=0}^{\infty} 1\cdot x^i)$.

לפי נוסחה (ii) שבסוף הממ"ן (כפל פונקציות יוצרות), המקדם של x^n בפיתוח $g(x)$ הוא:

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 1 = a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

ב. $f(x) = g(x)\cdot(1-x)$. לפיכך $a_n = b_n - b_{n-1}$ ($n \ge 1$), ו- $a_0 = b_0$.

יכולנו לקבל תוצאה זו גם מתוך התשובה לסעיף א:

$$b_{n-1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} \quad , \quad b_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

ולכן $b_n - b_{n-1} = a_n$ ($n \ge 1$).

תשובה 3

נפתור בשלבים:

א. הזהות הנתונה: $\left(\frac{1}{1+x}\right)^n \cdot (1+x)^{2n} = (1+x)^n$

הזהות המבוקשת: $\sum_{i=0}^{k} (-1)^i D(n,i) \binom{2n}{k-i} = \binom{n}{k}$

אם נפתח את שני אגפי הזהות הנתונה, נקבל שני טורים. עקב השוויון בין שני אגפי הזהות הנתונה, לכל k טבעי, המקדם של x^k בפיתוח אגף ימין צריך להיות שווה למקדם של x^k בפיתוח אגף שמאל. נקרא למקדם זה c_k.

ב. פיתוח אגף ימין בזהות הנתונה:

מנוסחת הבינום: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$ (ר' תחילת פתרון השאלה הקודמת).

כלומר: $c_k = \binom{n}{k}$.

ג. אגף שמאל בזהות הנתונה הוא מכפלה של שני גורמים. הראשון הוא $\frac{1}{(1+x)^n}$.

נוסחה (iii) שבסוף הממ"ן אומרת: $\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} D(n,i) x^i$

בהצבת $(-x)$ במקום x נקבל

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i D(n,i) x^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

כאשר $a_i = (-1)^i D(n,i)$.

ד. הגורם השני אותו אנו רוצים לפתח הוא $(1+x)^{2n}$.

בהצבת $2n$ במקום n בנוסחת הבינום נקבל:

$$(1+x)^{2n} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{2n}{i}x^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

כאשר $b_i = \binom{2n}{i}$.

ה. אנו מעוניינים לפתח את $\left(\frac{1}{1+x}\right)^n \cdot (1+x)^{2n}$. פיתחנו כל אחד מהגורמים, וכעת ניעזר בנוסחה לפיתוח מכפלה ("קומבינטוריקה" ראש עמ' 122, ובצורה נוחה יותר – בדף הזהויות שנשלח). כללית, המקדם של x^k במכפלה הוא $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$. נציב ונקבל:

$$c_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i D(n,i)\binom{2n}{k-i}$$

בכך הוכח השוויון המבוקש.

בדיקה עבור המקרה הפרטי הנדרש: השלימו עצמאית.

תשובה 4

א. מספר הדרכים לחלק את המחשבים הוא כמספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = n$, בכפוף לתנאי $x_i \le 24$, $(i = 1,2,3)$.

הפונקציה היוצרת: $f(x) = (1+x+x^2+\ldots+x^{24})^3 = \left(\frac{1-x^{25}}{1-x}\right)^3$

ב. זהו המקדם של x^{70} בפונקציה הנ"ל. נמשיך לפתח את הפונקציה:

$$\left(\frac{1-x^{25}}{1-x}\right)^3 = (1-x^{25})^3 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} = (1-3\cdot x^{25}+3\cdot x^{50}-x^{75})\cdot\sum_{i=0}^{\infty} D(3,i)$$

במעבר האחרון, נעזרנו בנוסחת הבינום עבור הגורם השמאלי, ובנוסחה *(iii)* מהממ"ן עבור הגורם הימני.

כאמור, אנו רוצים את המקדם של x^{70}, לכן נוכל להתעלם ממחוברים בעלי חזקה גדולה יותר. המקדם המבוקש הוא:

$$1\cdot D(3,70) - 3\cdot D(3,45) + 3\cdot D(3,20) = \binom{72}{2} - 3\cdot\binom{47}{2} + 3\cdot\binom{22}{2} = 2{,}556 - 3{,}243 + 693 = 6$$

תוצאה קצת מפתיעה!

נבדוק מדוע המספר כה קטן: כנראה זה אומר שמספר המחשבים בכל רכב אינו יכול להיות קטן בהרבה מ- 24. ואמנם, אם ברכב כלשהו יש 21 מחשבים או פחות, אז בשני כלי הרכב האחרים

יחד יש $70-21=49$ מחשבים או יותר, ולכן (שובך יונים) באחד מאותם שני כלי רכב יש יותר מ- 24 מחשבים, בסתירה לדרישה. לכן כדי להעמיס את 70 המחשבים, בכל רכב צריכים לשים **לפחות** 22 מחשבים.

לפיכך, מספר המחשבים בכל רכב יכול לקבל אחד משלושה ערכים בלבד: 22, 23 או 24 .

כעת קל לבדוק ישירות שיש רק שתי דרכים להציג את 70 כסכום של 3 מספרים מתוך הנ"ל, תוך התעלמות מסדר המחוברים: $24+23+23$ או $24+24+22$.

עם התחשבות בסדר המחוברים נקבל 6 אפשרויות .

אפשר גם לומר כך:

נתבונן במשוואה $x_1+x_2+x_3=70$, בכפוף לתנאים שמצאנו: $22 \le x_i \le 24$, $(i=1,2,3)$.

לכל i , נציב $x_i=y_i+22$. נקבל שאנו מחפשים את מספר הפתרונות של

$y_1+y_2+y_3=4$, בכפוף לתנאים $0 \le y_i \le 2$, $(i=1,2,3)$.

שוב בבדיקה ישירה, הפתרונות ללא חשיבות לסדר הם: $2+2+0$ או $2+1+1$.

כל אחד משני הפתרונות הללו נותן 3 פתרונות אם נייחס חשיבות לסדר. מכאן התוצאה 6.

אגב, יש עוד דרכים לפתור את השאלה הזו !

איתי הראבן