# פתרונות לממ"ח 01 - 2020ב - 20425

1. הדסקיות זהות זו לזו, ולכן, אין חשיבות לסדר הפנימי שלהן, ומספר הפיזורים האפשריים שלהן הוא $\binom{49}{29}$.

2. לא ייתכן מצב שבו יש יותר משתי שורות ריקות. לכן, נבחר 2 שורות מתוך 7 שתהיינה ריקות ונפזר את 29 הדסקיות ב-35 המשבצות שבשורות האחרות. לפיכך, מספר הפיזורים האפשריים הוא $\binom{7}{2}\binom{35}{29}$.

3. השורה הראשונה תישאר ריקה מדסקיות, אם כל הדסקיות תהיינה מפוזרות בשורות 2-7, כלומר ב-42 המשבצות שאינן בשורה הראשונה. לפיכך, ההסתברות שהשורה הראשונה לא תהיה ריקה מדסקיות היא $1-\binom{42}{29}\Big/\binom{49}{29}$.

4. נסמן ב- $A_i$ את המאורע, ששורה $i$ על הלוח מלאה בדסקיות, לכל $i=1,2,\ldots,7$.

לחישוב ההסתברות המבוקשת נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה. נשים לב לתנאים הסימטריים של הבעיה ביחס לשורות-הלוח ולדסקיות, ולכך שתתכנה לכל היותר 4 שורות מלאות בדסקיות. נקבל:

$$P(A_1\cup\ldots\cup A_7)=7P(A_1)-\binom{7}{2}P(A_1\cap A_2)+\binom{7}{3}P(A_1\cap A_2\cap A_3)-\binom{7}{4}P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)+0$$

$$=7\frac{\binom{42}{22}}{\binom{49}{29}}-\binom{7}{2}\frac{\binom{35}{15}}{\binom{49}{29}}+\binom{7}{3}\frac{\binom{28}{8}}{\binom{49}{29}}-\binom{7}{4}\frac{\binom{21}{1}}{\binom{49}{29}}=0.1248$$

5. מספר אפשרויות החלוקה הוא: $4^7=16{,}384$, מכיוון שכל בלון יכול להינתן לאחד מ-4 ילדים.

6. ראשית, בוחרים את הילדים שיקבלו בלונים, ולכך יש $\binom{4}{2}=6$ אפשרויות.
בשלב שני, מחלקים את 7 הבלונים ל-2 הילדים שנבחרו, ולכך יש $2^7-2=126$ אפשרויות (כאשר, מפחיתים 2, כי $2^7$ האפשרויות כוללות גם את שני המקרים שבהם ילד אחד מקבל את כל הבלונים).

לכן, מספר אפשרויות החלוקה הוא $6\cdot 126=756$.

7. יש $\binom{4}{2}=6$ אפשרויות לבחור את שני הילדים שיקבלו שני בלונים כל אחד. כעת, משנבחרו שני הילדים, יש $\binom{7}{2}=21$ אפשרויות לבחור שני בלונים לאחד מהם ו- $\binom{5}{2}=10$ אפשרויות לבחור שני בלונים לשני. לבסוף, יש 2 אפשרויות לבחור את הילד שיקבל את 3 הבלונים הנותרים.
לפיכך, מספר אפשרויות החלוקה הוא $6\cdot 21\cdot 10\cdot 2=2{,}520$.

8. ראשית, בוחרים את הילד שיקבל בלון אחד ואת הבלון שיקבל, ולכך יש $4\cdot 7=28$ אפשרויות. בשלב שני, מחלקים את 6 הבלונים שנותרו ל-3 הילדים האחרים. יש לכך $\binom{6}{2,2,2}=90$ אפשרויות.

לכן, מספר אפשרויות החלוקה הוא $28\cdot 90=2{,}520$.

9. מספר החלוקות האפשריות הוא כמספר האפשרויות השונות לפזר 20 כדורים זהים ב-6 תאים, כלומר, $\binom{25}{20}=\binom{25}{5}=53{,}130$.

10. ראשית, בוחרים את 4 הילדים שיקבלו בלונים ($\binom{6}{4}=15$ אפשרויות) ונותנים לכל אחד מהם בלון אחד (הבלונים זהים ולכן יש לכך אפשרות אחת). אחר-כך, מחלקים את 16 הבלונים הזהים שנותרו ל-4 ילדים אלו ($\binom{19}{16}=969$ אפשרויות). לפיכך, מספר אפשרויות החלוקה במקרה זה הוא $15\cdot 969=14{,}535$.

11. הבלונים זהים, ולכן יש חשיבות רק לזהות הילדים שיקבלו כל כמות נתונה של בלונים.
נבחר 3 ילדים שיקבלו 6 בלונים כל אחד, ואחר-כך נבחר ילד נוסף מהילדים הנותרים שיקבל 2 בלונים.
ומכאן נקבל שמספר אפשרויות החלוקה השונות הוא $\binom{6}{3}\binom{3}{1}=60$.

12. ראשית, יש $\binom{20}{6}=38,760$ אפשרויות בחירה.

שנית, נחשב את מספר האפשרויות של המקרה המשלים, שבו נבחרים פחות מ-2 סטודנטים מבין אלו שמגיעים מירושלים או מבאר-שבע, כלומר, שכל 6 הסטודנטים מת״א או מחיפה או שיש רק סטודנט אחד מירושלים או מבאר-שבע. נפחית את המספר שנקבל מסך כל המקרים, ונקבל:

$$\binom{20}{6}-\binom{12}{6}-\binom{8}{1}\binom{12}{5}=38,760-924-6,336=31,500$$

ומכאן שההסתברות המבוקשת היא: $\dfrac{31,500}{\binom{20}{6}}$

13. נפריד את החישוב לשני מקרים:
   1. אחת מ-3 הערים היא ת״א;
   2. ת״א איננה בין 3 הערים.

במקרה הראשון, ת״א היא אחת מ-3 הערים, לכן נבחר 2 ערים נוספות (מתוך ה-3 שמגיעים מהן 4 סטודנטים), ואז נבחר 2 סטודנטים מכל עיר. במקרה השני, 3 הערים ידועות, לכן יש רק לבחור את הסטודנטים שמגיעים מהן.

נקבל: $$\frac{\binom{3}{2}\binom{8}{2}\binom{4}{2}^2+\binom{4}{2}^3}{\binom{20}{6}}=\frac{3,024+216}{38,760}=0.0836$$

14. ראשית, נבחר את מספר הקבוצה שיהיו בה 5 כדורים שחורים ו- 5 אדומים (3 אפשרויות). שנית, נפזר את שאר הכדורים בשתי הקבוצות האחרות, כך שהן לא תהיינה ריקות. יש 11 אפשרויות לחלק 10 כדורים כחולים זהים בין שתי קבוצות ו-11 אפשרויות לחלק 10 כדורים אדומים זהים בין שתי קבוצות. ב-2 מתוך $11\cdot 11$ האפשרויות הללו, נוצרת קבוצה ריקה מכדורים. לפיכך, יש $11\cdot 11-2=119$ אפשרויות לחלוקת 20 הכדורים שאינם בקבוצה הנתונה. ומכאן, שהמספר המבוקש הוא: $3\cdot 119=357$

15. מכיוון שכל הכדורים מאותו הצבע זהים זה לזה, נשים 3 כדורים אדומים בכל קבוצה (והיא כבר לא תהיה ריקה) ונחלק את יתר הכדורים (לפי כל צבע) ל-3 קבוצות (ללא מגבלת כמויות). נקבל:

$$\binom{(15-9)+3-1}{6}\binom{5+3-1}{5}\binom{10+3-1}{10}=\binom{8}{6}\binom{7}{5}\binom{12}{10}=38,808$$

16. נחשב תחילה את מספר אפשרויות החלוקה השונות של 5 הכובעים ו-5 הצעיפים ל-5 הילדים:

$$n(S)=(5!)^2=120^2=14,400$$

כעת, יש !5 אפשרויות לחלק את הכובעים, ואפשרות אחת לחלוקת הצעיפים בהתאמה לחלוקת הכובעים.

לכן, ההסתברות היא: $\frac{5!}{(5!)^2}=\frac{1}{120}=0.008\overline{3}$

אפשר גם להניח שהאֵם מחלקת תחילה את הכובעים ורק אחר-כך את הצעיפים. במקרה כזה, ביחס לכל חלוקה אפשרית של הכובעים, יש לאם !5 אפשרויות לחלק את הצעיפים, ורק באפשרות אחת מתוכן יש התאמה מלאה בין הצבעים של הכובעים והצעיפים. לכן, ההסתברות היא $\frac{1}{5!}=0.008\overline{3}$.

17. יש $\binom{5}{3}=10$ אפשרויות לבחור את 3 הילדים שיקבלו כובעים וצעיפים תואמים; יש $5\cdot4\cdot3$ אפשרויות לבחירת 3 הצבעים ש-3 ילדים אלו יקבלו; ויש 2 אפשרויות לחלק את 2 הכובעים ו-2 הצעיפים הנותרים ל-2 הילדים הנותרים, כך שהם לא יקבלו כובע וצעיף באותו הצבע.

לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{10\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{(5!)^2} = \frac{1}{12} = 0.083\overline{3}$

גם כאן אפשר להניח שהאם מחלקת תחילה את הכובעים, ואז ביחס לכל חלוקה של הכובעים יש $\binom{5}{3}=10$ אפשרויות לבחור את הילדים שיקבלו כובע וצעיף תואמים ואפשרות אחת לחלק את 2 הצעיפים הנותרים, כך שלא תתקיים אף התאמה נוספת. ולכן, ההסתברות היא $\frac{10}{5!}=0.08\overline{3}$ .

18. לחישוב ההסתברות שלפחות ילד אחד יקבל כובע וצעיף תואמים, נשתמש במקרה הפרטי של טענה 4.4, שמובא במדריך הלמידה (בעמוד 22).

נסמן את המאורע שילד $i$ מקבל כובע וצעיף תואמים ב- $A_i$, לכל $i=1,2,3,4,5$ .

$$P(A_1) = \frac{5\cdot(4!)^2}{(5!)^2} = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$$
[ כי יש 5 צבעים שילד 1 יכול לקבל ו-$(4!)^2$ אפשרויות חלוקה לילדים האחרים]

$$P(A_1\cap A_2) = \frac{5\cdot4\cdot(3!)^2}{(5!)^2} = \frac{3!}{5!} = \frac{1}{20}$$
[ כי יש 5 צבעים לילד 1, 4 צבעים לילד 2 ו-$(3!)^2$ חלוקות לילדים האחרים]

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3) = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot(2!)^2}{(5!)^2} = \frac{2!}{5!} = \frac{1}{60}$$

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4) = P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5) = \frac{5!}{(5!)^2} = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

ולכן:
$$P(A_1\cup\ldots\cup A_5) = \sum_{i=1}^{5}(-1)^{i+1}\binom{5}{i}P(A_1\cap\ldots\cap A_i)$$
$$= 5\cdot\frac{1}{5} - 10\cdot\frac{1}{20} + 10\cdot\frac{1}{60} - 5\cdot\frac{1}{120} + \frac{1}{120} = \frac{76}{120} = \frac{19}{30} = 0.633\overline{3}$$

19. יש 4 אפשרויות לבחירת הצבע שהילד הבכור יקבל (לא ייתכן שיקבל צהוב), 4 אפשרויות לבחירת הצעיף שהילד הצעיר יקבל ו- $(3!)^2$ אפשרויות לחלוקת יתר הכובעים והצעיפים.

לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{4\cdot4\cdot(3!)^2}{(5!)^2} = \frac{1}{25}$

20. נחשב את הסתברות המאורע המשלים, שהילד הבכור לא מקבל אף פריט אדום. עבור הילד הבכור יש $4^2$ אפשרויות לבחירת שני הפריטים שאינם אדומים ועבור שאר הילדים יש $(4!)^2$ אפשרויות חלוקה של הפריטים הנותרים. לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $1-\frac{4\cdot4\cdot(4!)^2}{(5!)^2} = 1-\frac{16}{25} = \frac{9}{25}$