

קורס: 20416 "תורת ההסתברות"

תאריך הבחינה: 7.9.2017 (סמסטר 2017 ב - מועד ב' / 93)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי וספר הקורס בלבד.

מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובתיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפת: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

שאלה 1 (25 נקודות)

קולעים למטרה פעם אחר פעם.

בכל קליעה פוגעים במטרה בהסתברות 0.1, ואחרת, לא פוגעים בה.

אין תלות בין התוצאות של קליעות שונות.

(7 נק') א. כמה פעמים יש לקלוע למטרה,

אם רוצים להבטיח שההסתברות, שתהיה לפחות פגיעה אחת, תעלה על 0.9?

(6 נק') ב. אם קולעים למטרה 10 פעמים ופוגעים בה לפחות פעם אחת,

מהי ההסתברות שהיו לפחות שתי פגיעות ב-10 הקליעות הללו?

(6 נק') ג. אם קולעים למטרה שוב ושוב,

מהי ההסתברות שהפגיעה הראשונה תקרה לאחר נסיון הקליעה ה-15?

(6 נק') ד. אם קולעים למטרה שוב ושוב, וידוע שב-10 הקליעות הראשונות היתה בדיוק פגיעה אחת,

מהי שונות מספר הקליעות שיבוצעו עד לפגיעה השישית (ובכלל זה הפגיעה הראשונה הנתונה)?

שאלה 2 (25 נקודות)

יהיו X_1, X_2, \dots משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות ברנולי עם הפרמטר p ($0 < p < 1$).

יהי S_n ($n = 1, 2, \dots$) המשתנה המקרי המוגדר על-ידי $S_n = \begin{cases} 0 & , \bar{X}_n < 1 \\ 1 & , \bar{X}_n = 1 \end{cases}$, עבור $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

(6 נק') א. חשב את $P\{S_n = 0\}$.

(6 נק') ב. חשב את $\text{Var}(S_n)$.

(6 נק') ג. חשב את $\text{Cov}(X_n, S_n)$.

(7 נק') ד. הוכח או הפוך את הטענה: למשתנה המקרי $1 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ יש התפלגות גיאומטרית.

שאלה 3 (25 נקודות)

לכל $i = 1, 2, \dots$ יהי X_i משתנה מקרי אחיד (רציף) על הקטע $(-3^i, 3^i)$.

נניח כי כל ה- X_i ים בלתי-תלויים זה בזה.

כמו כן, לכל $n = 1, 2, \dots$, נגדיר את המשתנה המקרי S_n על-ידי $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

(8 נק') א. חשב את השונות של S_n .

(8 נק') ב. הוכח כי $P\{|S_n| \geq 3^{n+1}\} < \frac{1}{24}$.

(9 נק') ג. חשב את $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{3^i} \leq \sqrt{n}\right\}$.

שאלה 4 (25 נקודות)

נתונה חפיסת קלפים רגילה הכוללת 52 קלפים מ-4 צורות: לב, יהלום, עלה ותלתן. מכל צורה יש 13 קלפים שונים הנושאים את הסימנים: A (אס), 2, 3, ..., 10, J (נסיד), Q (מלכה), K (מלך). טורפים היטב את חפיסת הקלפים.

א. מניחים את החפיסה הפוכה, ומגלים את הקלפים בזה אחר זה.

מהי ההסתברות שלפני שיתגלה האס הראשון –

1. יהפכו בדיוק 10 קלפים? (6 נק')

2. יהפכו לפחות 10 קלפים? (6 נק')

ב. מחלקים באקראי את 52 הקלפים שבחפיסה לארבע קבוצות שוות בגודלן. (בכל קבוצה 13 קלפים.)

מהי ההסתברות שבכל קבוצה יהיה לפחות קלף אחד מצורת לב?

ג. בוחרים באקראי 13 קלפים מהחפיסה. (6 נק')

אם בין 13 הקלפים שנבחרו יש לפחות קלף אחד מצורת לב,

מהי ההסתברות שיש ביניהם בדיוק 3 קלפים מצורת עלה?

הערה: אין קשר בין סעיפים א, ב ו-ג של השאלה.

שאלה 5 (25 נקודות)

נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת הבאה: $f_{X,Y}(x,y) = (c+6) \cdot e^{-cx}$, $0 < y < x$, עבור $c > 0$.

א. חשב את c . (6 נק')

ב. חשב את $\text{Var}(X)$. (7 נק')

ג. חשב $E[Y | X=x]$. (6 נק')

ד. חשב את $E\left[\frac{Y}{X}\right]$. (6 נק')

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] \quad \text{נוסחת האינטרפולציה:}$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326