אלגוריתמים – פתרונות לתרגיל 6

1. נחליף כל קשת בזוג קשתות אנטי-מקבילות, ונגדיר את הקיבולים שלהן להיות המשקלים. כעת נבחר באופן שרירותי קודקוד $s \in V$, ולכל $t \in V \setminus \{s\}$ נמצא חתך מינימלי שמפריד בין s ל- t ע"י זרימה. הפיתרון יהיה החתך המינימלי מבין כל החתכים האלה.
   סיבוכיות: מוצאים זרימה מקסימלית $|V|-1$ פעמים, לכן $O(|V|^3|E|)$.
   נכונות: יהי (A,B) חתך כללי מינימלי, ונסמן את משקלו ב- W. לכל $t \in V \setminus \{s\}$ נסמן את משקל החתך שמצאנו ב- W_t. ברור שלכל $t \in V \setminus \{s\}$ מתקיים $W \le W_t$, לכן מספיק להראות שקיים $t \in V \setminus \{s\}$ עבור $W = W_t$. נסתכל על החתך (A,B) ונניח בלי הגבלת הכלליות ש- $s \in A$. B לא ריקה, לכן קיים $t \in V \setminus \{s\}$ כך ש- $t \in B$. כלומר החתך (A,B) מפריד בין s ל- t. אבל משקל החתך המינימלי שמפריד בין s ל- t הוא W_t, לכן $W \ge W_t$, ולכן $W = W_t$.

2. נחפש את P^R ב- T^R. KMP ימצא לכל k את אורך הרישא המקסימלית של P^R שהיא סיפא של $T^R{}_k$. לכן נוכל למצוא את המקסימום על פני כל ה- k–ים, וזה אורך הרישא המקסימלית של P^R שמופיעה ב- T^R, וזה בעצם אורך הסיפא המקסימלית של P שמופיעה ב- T.

3. נבדוק האם T' מופיעה ב- TT ע"י KMP.

4. ניתן להניח, בלי הגבלת הכלליות, שאין ב- P רצף של *-יות, וש- P לא מתחילה או מסתיימת ב- * (אין משמעות ל- * בהתחלה ובסוף, ורצף של *-יות ניתן להחליף ב- * אחת). כלומר, P מהצורה $P_1*P_2*\dots*P_k$, כאשר $P_1,P_2,\dots,P_k$ לא מכילים *-יות.
   כעת נחפש את המופע הראשון של P_1 ב- T. אם לא מצאנו – נענה לא. אחרת – אם מופע זה מסתיים במקום ה- i, נחפש כעת את המופע הראשון של P_2 החל מהמקום ה- $i+1$ ב- T, וכך הלאה, עד P_k.
   סיבוכיות: $O(|T|+|P|)$.

5. בדומה לתרגיל שראינו בכיתה, מספיק לבדוק אם בחלוקה $T=XYX$ עבורה $|X|$ מקסימלי מתקיים ש- Y פלינדרום. את החלוקה נמצא ע"י KMP כפי שראינו בכיתה, ואז נשווה את התו הראשון של Y לאחרון, וכו'.

6. נגדיר פונקציה f באופן הבא: לכל $0 \le j \le m$, $f(j)=1$ אם יש $r \ge 3$ שמתחלק ב- 3, עבורו P_r סיפא של P_j, ואחרת $f(j)=0$. נריץ KMP (כאשר בשלב ה- preprocessing נחשב בנוסף ל- π גם את f), ונחזיר את כל המקומות k עבורם $f(\sigma[k])=1$.
   חישוב f: $f(0)=0$, ולכל $1 \le j \le m$, אם j מתחלק ב- 3 אז $f(j)=1$, ואחרת $f(j)=f(\pi[j])$.
   סיבוכיות: $O(n+m)$.