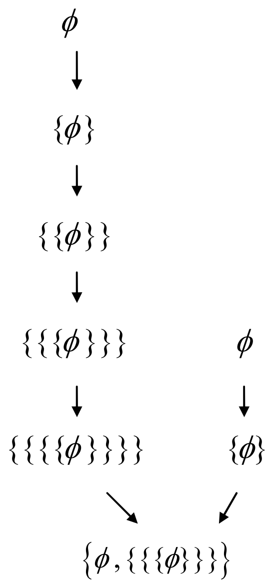
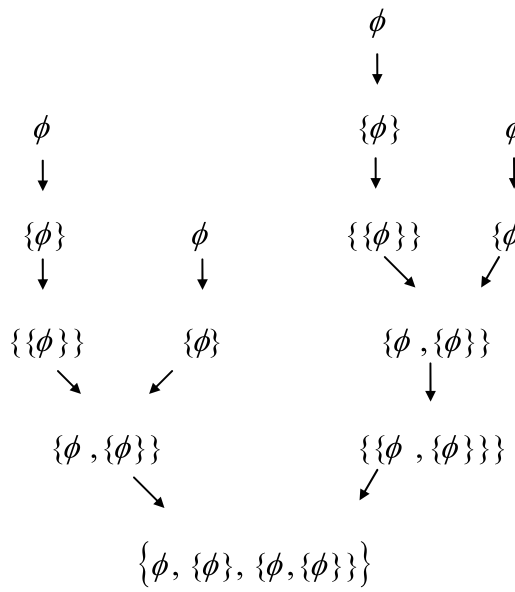
תשובה 1

א.



ב.



ג. תהי A קבוצה שנוצרה ע״י המכונה, בעזרת עץ בניה מסוים.

נפעיל את כלל (2) כאשר $B = \phi$, ונחזור ונקבל את הקבוצה A: $A \cup \varnothing = A$.

בכך הוספנו לעץ שני קטעים ושני קדקדים, לכן העץ החדש שונה מהמקורי.

ניתן לחזור על תהליך זה, ולקבל אינסוף עצים שונים היוצרים את A.

נחזור ונפגוש עצי בניה בהמשך הקורס, בהקשר שונה, בכרך ״לוגיקה מתימטית״.

ד. בעזרת כלל (1) נקבל מ- X את $\{X\}$. בשימוש חוזר ב- (1) נקבל את $\{\{X\}\}$.

נפעיל את כלל (2) על הקבוצות $\{X\}$ ו- $\{\{X\}\}$ ונקבל את $\{X, \{X\}\}$.

התרשים שבגוף השאלה מדגים זאת עבור $X = \varnothing$.

תשובה 2

א. נכון. לפי הגדרת חיסור קבוצות $A - B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$,

ושוב לפי אותה הגדרה: $(A - B) - B = \{x \mid (x \in A \text{ and } x \notin B) \text{ and } x \notin B\}$

וממשמעות המלה ״וגם״ ("and") זה שווה $\{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$

כלומר $A - B$.

הוכחה אחרת: מהגדרת חיסור קבוצות והגדרת חיתוך קבוצות מובן כי $(A-B)\cap B=\varnothing$ (*)

ניעזר כעת בטענה שבשורה השנייה בראש עמ' 21 בספר: $A\cap B=\varnothing \quad \Leftrightarrow \quad A-B=A$.

כדי למנוע בלבול נרשום אותה מחדש כך:

$X\cap Y=\varnothing$ אם ורק אם $X-Y=X$ (**)

נקח $X=A-B$, $Y=B$. נוסחה (*) למעלה אומרת ש- $X\cap Y=\varnothing$.

לכן, לפי טענה (**) , $X-Y=X$, כלומר $(A-B)-B=A-B$.

ב. **נכון**. הוכחה: ניעזר שוב בטענה שבשורה השנייה בעמ' 21 בספר:

$$A\cap B=\varnothing \quad \Leftrightarrow \quad A-B=A \text{ .}$$

נציב $B-A$ במקום B :

$$A\cap(B-A)=\varnothing \quad \Leftrightarrow \quad A-(B-A)=A \qquad (*)$$

מהגדרת חיתוך קבוצות יחד עם הגדרת הפרש קבוצות, מתקיים: $A\cap(B-A)=\varnothing$.

לכן מהשקילות (*) נקבל $A-(B-A)=A$.

אפשר להוכיח טענה זאת גם בדרכים אחרות.

ג. **לא נכון**. דוגמא נגדית: נקח $x\neq\varnothing$ כלשהו, ותהי $A=\{x\}$.

אז $P(A)=\{\varnothing,A\}$.

כעת $x\in A$, אבל $x\notin P(A)$ (כי $x\neq\varnothing$ ו- $x\neq\{x\}$).

הראינו איבר של A שאינו ב- $P(A)$, לכן A אינה חלקית ל- $P(A)$.

ד. **נכון.** התנאי $X\in P(A\cap B)$ שקול, לפי הגדרת קבוצת חזקה, לתנאי

$X\subseteq A\cap B$.

לפי שאלה 1.10 ב' , זה שקול ל-

$X\subseteq A$ **וגם** $X\subseteq B$.

שוב לפי הגדרת קבוצת חזקה, זה שקול ל-

$X\in P(A)$ **וגם** $X\in P(B)$.

ומהגדרת חיתוך, זה שקול ל-

$X\in P(A)\cap P(B)$.

קיבלנו: $X\in P(A\cap B)$ **אםם** (אם ורק אם) $X\in P(A)\cap P(B)$,

ולכן ,לפי הגדרה 1.1, שתי הקבוצות שוות.

תשובה 3

א. כדי לקצר קצת את הנוסחאות בתחילת הפיתוח, נסמן $B=B_1\cap B_2$.

נפתח את אגף שמאל הנתון בשאלה , תוך הצבת B ובעזרת ההדרכה לשאלה:

$$(A_1\cup A_2)-B=(A_1\cup A_2)\cap B'$$

ניעזר בפילוג החיתוך מעל האיחוד (סעיף 1.3.4 בספר):

$= (A_1 \cap B') \cup (A_2 \cap B')$

מהגדרת B, לפי דה-מורגן: $B' = B_1' \cup B_2'$. נציב זאת:

$= (A_1 \cap (B_1' \cup B_2')) \cup (A_2 \cap (B_1' \cup B_2'))$

ניעזר בפילוג האיחוד מעל החיתוך (סעיף 1.3.4 בספר):

$= ((A_1 \cap B_1') \cup (A_1 \cap B_2')) \cup ((A_2 \cap B_1') \cup (A_2 \cap B_2'))$

שוב בעזרת ההדרכה לשאלה:

$= ((A_1 - B_1) \cup (A_1 - B_2)) \cup ((A_2 - B_1) \cup (A_2 - B_2))$

מהקיבוציות של האיחוד (אסוציאטיביות, עמ' 10 בספר), ניתן לסלק כאן שני זוגות סוגרים:

$= (A_1 - B_1) \cup (A_1 - B_2) \cup (A_2 - B_1) \cup (A_2 - B_2)$

ב.

$A' \oplus B' = (A' - B') \cup (B' - A') = (A' \cap B) \cup (B' \cap A)$

נשנה את סדר האיברים בעזרת חילופיות החיתוך וחילופיות האיחוד:

$= (A \cap B') \cup (B \cap A') = (A - B) \cup (B - A) = A \oplus B$

תשובה 4

א. $A_0 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 2\} = \varnothing$, $A_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 4\} = \{4\}$

$A_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 6\}$, $A_3 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 8\}$

$B_0 = A_1 - A_0 = \{4\} - \varnothing = \{4\}$

$B_1 = A_2 - A_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 < x \le 6\}$

$B_2 = A_3 - A_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 6 < x \le 8\}$

ב. עבור $n \le m$, אם $4 \le x \le 2n+2$ אז $4 \le x \le 2m+2$.

לכן, אם $n \le m$ אז $A_n \subseteq A_m$.

לפי שאלה 1.11 בעמ' 16 בספר, מההכלה $A_n \subseteq A_m$ נובע $A_n \cap A_m = A_n$.

ג. החיתוך המבוקש בשאלה הוא קבוצת המספרים הממשיים השייכים **לכל** הקבוצות A_n החל מ- $n = 2$. בהוכחת הסעיף הקודם כאן, ראינו שבסדרת הקבוצות A_n , כל קבוצה מכילה כל אחת מהקבוצות שבאות לפניה.

טענה כללית: אם נתונה סדרה סופית או אינסופית של קבוצות, כך שכל קבוצה בסדרה מכילה את כל הקבוצות שבאות לפניה בסדרה, אז חיתוך כל הקבוצות בסדרה הוא הקבוצה הראשונה בסדרה. השלימו את ההוכחה של טענה זו !

לפיכך חיתוך כל הקבוצות A_n החל מ- A_2 והלאה, שווה A_2 .

כזכור $A_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 6\}$.

ד. נוכיח: $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x\}$

הכלה בכיוון אחד: יהי $x \in \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$. משמע x שייך **לפחות לאחת** הקבוצות A_n .

מהגדרת A_n נובע בפרט $4 \le x$.

הכלה בכיוון שני: יהי $4 \le x$. קיים k טבעי די גדול, שעבורו $x \le 2k + 2$.

עבור אותו k, $x \in A_k$.

לכן, מהגדרת איחוד כללי של קבוצות, $x \in \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$.

משני הכיוונים יחד, $\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x\}$.

ה. נחשב קודם כל, עבור $2 \le n$ כלשהו:

$$B_n = A_{n+1} - A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 2n + 4\} - \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 2n + 2\}$$

$$= \{x \in \mathbf{R} \mid 2n + 2 < x \le 2n + 4\}$$

כעת נוכיח ש- $\bigcup_{2 \le n \in \mathbf{N}} B_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 6 < x\}$.

הכלה בכיוון אחד: יהי $x \in \bigcup_{2 \le n \in \mathbf{N}} B_n$. משמע x שייך **לפחות לאחת** הקבוצות B_n .

מהנוסחה שרשמנו עבור B_n ומההנחה $2 \le n$ נובע בפרט $6 < x$.

הכלה בכיוון שני: יהי $6 < x$. יהי k המספר הטבעי הגדול ביותר שקטן ממש מ- $\frac{x-2}{2}$.

מתקיים $2k + 2 < x \le 2k + 4$, וכן $2 \le k$.

מהנוסחה שרשמנו עבור B_n, נובע $x \in B_k$.

מצאנו $2 \le k$ כך ש- $x \in B_k$. לכן, מהגדרת איחוד כללי של קבוצות, $x \in \bigcup_{2 \le n \in \mathbf{N}} B_n$.

משתי ההכלות יחד מתקבל השוויון המבוקש.

איתי הראבן