

סמסטר 2007א - פתרון שאלה 1 בממ"ן 16

נתון עץ בינרי T בעל n צמתים. כדי שנוכל לקבוע בזמן $O(1)$ אם בין שני צמתים x, y בעץ מתקיים היחס "אב קדמון", עלינו לבצע עיבוד מקדים של הנתונים: נסרוק את העץ בסריקה תחילית ובסריקה סופית ונוסיף לכל צומת בעץ שני שדות – pre-location ו-post-location. השדה pre-location יכיל את מיקומו של הצומת בסריקה תחילית של העץ והשדה post-location יכיל את מיקומו של הצומת בסריקה סופית של העץ. זמן הריצה של שתי השגרות לסריקת העץ הוא $O(n)$. שתי השגרות משתמשות במשתנה גלובלי i שערכו ההתחלתי 1:

PREORDER-TREE-WALK (x)

```
1 if  $x \neq \text{NIL}$ 
2   then pre-location[ $x$ ]  $\leftarrow i$ 
3        $i \leftarrow i + 1$ 
4       PREORDER-TREE-WALK (left[ $x$ ])
5       PREORDER-TREE-WALK (right[ $x$ ])
```

POSTORDER-TREE-WALK (x)

```
1 if  $x \neq \text{NIL}$ 
2   then POSTORDER-TREE-WALK (left[ $x$ ])
3       POSTORDER-TREE-WALK (right[ $x$ ])
4       post-location[ $x$ ]  $\leftarrow i$ 
5        $i \leftarrow i + 1$ 
```

נוכיח את הטענה הבאה:

בהינתן שני צמתים x, y בעץ T , x הוא אב קדמון של y אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. $\text{pre-location}[x] < \text{pre-location}[y]$
2. $\text{post-location}[x] > \text{post-location}[y]$

הוכחה:

כיוון אחד ("אם"): אם $\text{pre-location}[x] < \text{pre-location}[y]$ אז יש שתי אפשרויות: או ש- x הוא אב קדמון של y , או ש- x נמצא בתת-עץ השמאלי של האב הקדמון "הנמוך ביותר" של x ו- y . נמצא בתת-עץ הימני של אותו אב קדמון. בדומה לכך, אם $\text{post-location}[x] > \text{post-location}[y]$ אז יש שתי אפשרויות: או ש- x הוא אב קדמון של y , או ש- x נמצא בתת-עץ הימני של האב הקדמון "הנמוך ביותר" של x ו- y . נמצא בתת-עץ השמאלי של אותו אב קדמון. מכיוון ששני התנאים מתקיימים, המסקנה היא ש- x הוא אב קדמון של y .

כיוון שני ("רק אם"): אם x הוא אב קדמון של y , אז הוא מופיע לפניו בסריקה התחילית של העץ והוא מופיע אחריו בסריקה הסופית של העץ. לכן מתקיים $\text{pre-location}[x] < \text{pre-location}[y]$ ו- $\text{post-location}[x] > \text{post-location}[y]$.
מ.ש.ל.

אם כך, כדי לקבוע אם בין שני צמתים נתונים x, y בעץ מתקיים היחס "אב קדמון" נפעיל את האלגוריתם הבא:

ANCESTOR (x, y)

```
1 if pre-location[x] < pre-location[y] and post-location[x] > post-location[y]
2   then print "x is an ancestor of y"
3 else if pre-location[y] < pre-location[x] and post-location[y] > post-location[x]
4     then print "y is an ancestor of x"
5     else print "x and y are not relatives"
```

זמן הריצה של האלגוריתם הוא כמובן $O(1)$.