2011ג – מועד 85

.1

א. כל רלציה מעל A היא בעצם קבוצה חלקית ל-$A\times A$. לכן, מספר הרלציות מעל A הוא בעצם כמספר תתי הקבוצות של $A\times A$, והוא $|P(A\times A)|$, ששווה, על פי הכרך "תורת הקבוצות" ל- $2^{|A\times A|}=2^9=512$.

ב. על פי הגדרת רלציית שקילות, מספיק שנראה שהיחס אינו טרנזיטיבי, ובכך נראה שהוא אינו יחס שקילות.

נתבונן ב- $\{(1,1)\},\{(2,2)\},\{(3,1)\}$. אכן, על פי הגדרת כפל רלציות,

$\{(1,1)\}\cdot\{(2,2)\}=\varnothing$, ו- $\{(2,2)\}\cdot\{(1,1)\}=\varnothing$, כלומר, על פי הגדרת S, $\{(1,1)\}S\{(2,2)\}$.

כמו כן מתקיים

$\{(2,2)\}\cdot\{(3,1)\}=\varnothing$ וגם $\{(3,1)\}\cdot\{(2,2)\}=\varnothing$ ולכן שוב על פי הגדרת S, $\{(2,2)\}S\{(3,1)\}$.

עם זאת, $\{(1,1)\}\cdot\{(3,1)\}=\varnothing$, אך $\{(3,1)\}\cdot\{(1,1)\}=\{(3,1)\}$ ולכן על פי הגדרת S, $(\{(1,1)\},\{(3,1)\})\notin S$ ולכן הוא אינו טרנזיטיבי. מ.ש.ל.

2. לא מתקיים התנאי בהגדרה נאותה, שאומר שההגדרה אינה תלויה בבחירת הנציגים, ולכל A,B,C,D, אם $|A|=|C|$ ו-$|B|=|D|$. ניקח כדוגמה את B,A ו-C כקבוצת המספרים הטבעיים, ואת D כקבוצת המספרים הזוגיים. ברור ש-$|B|=|D|=\aleph_0$ (ההוכחה לכך היא קלה על ידי בניית פונקציה חח"ע ועל – או על ידי הסתמכות על טענה מהספר...), וכן ש-$|A|=|C|=\aleph_0$, אך עם זאת, $|A\oplus C|=|(A-C)\cup(C-A)|=0$, ו-$|B\oplus D|=|(B-D)\cup(D-B)|=|E-\varnothing|$, כאשר E היא קבוצת המספרים הטבעיים האי-זוגיים. ברור ש-$|E-\emptyset|=\aleph_0$.

קיבלנו ארבע קבוצות A,B,C,D כך ש-$|A|=|C|$ וגם $|B|=|D|$ אך $|A\oplus C|=0$ ו-$|E-\emptyset|=\aleph_0$, ולכן ההגדרה איננה אפשרית.

3. ניעזר בפונקציה יוצרת.

הפונקציה היוצרת המתאימה לבעיה זו היא $(1+x+x^2+\ldots+x^{10})^4$, כאשר מחפשים את המקדם של x^{24}. על פי נוסחה (i) בממ"ן 15,

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{10})^4=\left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)^4=(1-x^{11})^4\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)^4=(1-x^{11})^4\cdot\frac{1}{(1-x)^4}.$$

נשתמש בפיתוח הבינום, ונקבל:

$$(1-x^{11})^4\cdot\frac{1}{(1-x)^4}=(1+\binom{4}{3}(-x^{11})+\binom{4}{2}(-x^{11})^2+\binom{4}{1}(-x^{11})^3+$$
$$(-x^{11})^4)\cdot\frac{1}{(1-x)^4}=(1-4x^{11}+6x^{22}-4x^{33}+x^{44})\cdot\frac{1}{(1-x)^4}$$

לכל גורם בסוגריים משמאל נחפש את האיבר המשלים שלו ל-24 בביטוי $\frac{1}{(1-x)^4}$, ונכפול בין המקדמים שלהם. נחשב את סכום התוצאות שקיבלנו.

עבור 1, נחפש את המקדם של x^{24}. על פי נוסחה (iii) בממ"ן 15, המקדם של x^{24} בפונקציה $\frac{1}{(1-x)^4}$ הוא $D(4,24)=\binom{27}{3}=2925$.

עבור x^{11}, נחפש את המקדם של x^{13} בפונקציה $\frac{1}{(1-x)^4}$. שוב על פי אותה נוסחה המקדם שווה ל- $D(4,13)=\binom{16}{3}=560$. נכפול אותו ב-(4-), ונקבל -2240.

עבור x^{22}, נחפש את המקדם של x^2 בפונקציה $\frac{1}{(1-x)^4}$, והוא $D(4,2)=\binom{5}{3}=10$.

נכפול אותו ב-6, ונקבל 60.

כל איבר אחר בסוגריים משמאל "לא מעניין אותנו", כי הוא נותן חזקה גבוהה מדי.

סך הכל קיבלנו $2925-2240+60=745$.

כלומר, סך האפשרויות לבחור את הפריטים כמתואר הוא 745.

.4

א. נחשב את $|A^3|=|A|^3=125$. כעת, לכל איבר ב- A^3 יש לנו שתי אפשרויות להתאים לו, ולכן קיבלנו 2^{125}.

ב. זהו בעצם מספר הצירופים עם חזרות של שלושה איברים מתוך חמישה סוגים של איברים, והוא $D(5,3)=\binom{7}{3}=35$.

ג. נסמן את קבוצת מחלקות השקילות שמצאנו בסעיף ב' ב- A. לקבוצת הפונקציות $F=\{g\mid g:A\to\{0,1\}\}$ נתאים באופן חח"ע קבוצת פונקציות אחרת כך:

לכל $g\in F$, נתאים את הפונקציה $f:A^3\to\{0,1\}$ המוגדרת כך: לכל $(a,b,c)\in A^3$ נתאים את $g(H(a,b,c))$ כאשר $H(a,b,c)$ מסמן את מחלקת השקילות ב-A אליה שייך (a,b,c).

ההתאמה שהראינו היא חח״ע, משום שפונקציות שונות ב-F יהיו שונות באיברים אליהן נשלחת מחלקה אחת לפחות, ובהתאם הפונקציות יהיו שונות, שכן האיברים מאותה מחלקה ישלחו לאיברים אחרים.
הפונקציה היא על, משום שכל פונקציה העונה על התנאי שבשאלה שולחת את כל האיברים ששייכים למחלקת שקילות לאיבר אחד, אליה מותאמת הפונקציה g ששולחת את מחלקת השקילות המתאימה לאותו איבר.
כעת, מספר האיברים ב-F הוא כמספר האיברים בקבוצת הפונקציות שעונות על התנאי בשאלה.

מספר הפונקציות של A לקבוצה $\{0,1\}$ הוא 2^{35} וזו גם התשובה לשאלה.

5. נניח בשלילה שלכל $v \in V$ מתקיים $d_1(v) + d_2(v) \geq 4$. נסמן $|V| = n$.

מתקיים $\sum_{v\in V} d_1(v) = 2\cdot|E_1| = 2n-2$ (כי מספר הקשתות בעץ שווה למספר הצמתים פחות אחת).

כמו כן $\sum_{v\in V} d_2(v) = 2\cdot|E_2| = 2n-2$.

לכן, על פי הנחת השלילה,

$\sum_{v\in V} d_1(v) + \sum_{v\in V} d_2(v) = 4n-4 \geq 4n$, ולכן $0 \geq 4$ והגענו לסתירה.

לכן ההנחה שגויה, ובכך הוכחנו את הטענה.