פתרון שאלות בממ"ן 14 סמסטר 2020ב

שאלה 1

אי אפשר להסיק ש-NP מוכלת ב-SPACE(n).

כל שפה A ב-NP ניתנת לרדוקציה בזמן פולינומיאלי ל-SAT, אבל ייתכן שלחישוב הרדוקציה הזו **דרוש יותר ממקום לינארי** בגודל הקלט.

לכן, האלגוריתם שתחילה יחשב את הרדוקציה, ואז יבדוק האם הנוסחה הבוליאנית שנתקבלה מן הרדוקציה שייכת ל-SAT או לא, איננו בהכרח בעל סיבוכיות מקום לינארית. חישוב הרדוקציה עשוי לדרוש יותר ממקום לינארי.

שאלה 3

א. בהוכחת משפט 5.9 מוצע אלגוריתם להכרעת A_{LBA}.

על קלט $<M, w>$ כאשר M הוא אוטומט חסום-ליניארית ו-w היא מילה, האלגוריתם מסמלץ את ריצת M על w qng^n צעדים, כאשר n הוא האורך של w.

לצורך הסימולציה יש לשמור את המיקום בסרט של הראש הקורא ($O(\log n)$), את המצב שבו נמצאים ($O(\log q)$) ומונה צעדים שיכול להגיע עד qng^n.

$O(\log(qng^n)) = O(n)$.

המקום הדרוש לאלגוריתם המוצע לינארי בגודל הקלט.

ב. תהי A שפה ב-PSPACE.

תהי M מכונת טיורינג שמכריעה שייכות לשפה A במגבלת מקום x^k עבור k טבעי כלשהו.

תהי w מילה מעל האלפבית של A.

נבנה בזמן פולינומיאלי קלט לשפה A_{LBA}: נבנה אוטומט חסום-ליניארית M' ומילת קלט w' ל-M':

האוטומט M' יהיה זהה למכונה M, פרט לשינויים הבאים:

נוסיף לאלפבית הסרט סמל # שלא שייך לאלפבית הסרט של M.

ההתייחסות לסמל # בפונקצית המעברים תהיה בדיוק כמו ההתייחסות לסמל הרווח: בכל קריאה של # נפעל בדיוק כמו בקריאה של רווח.

המילה w' תהיה המילה w ואחריה $|w|^k-|w|$ סמלי #.

שימו לב, הבנייה של M' איננה תלויה ב-w. אפשר לבנות את M' פעם אחת ולתמיד. זמן הבנייה של M' איננו תלוי ב-w והוא קבוע.

w שייכת ל-A, אם, ורק אם, $<M', w'>$ שייכת ל-A_{LBA}.

ג. מכיוון שהראינו ש-A_{LBA} שייכת ל-PSPACE, וכל שפה ב-PSPACE ניתנת לרדוקציה בזמן פולינומיאלי ל-A_{LBA}, נסיק ש-A_{LBA} היא שפה PSPACE-שלמה.

שאלה 4

בשלב ראשון בודקים את תקינות הסוגריים מכל סוג לחוד. כלומר, עוברים על הקלט פעמיים. בפעם הראשונה בודקים את התקינות של הסוגריים העגולים בפני עצמם (בעזרת האלגוריתם של פתרון בעיה 8.33), ובפעם השנייה בודקים את התקינות של הסוגריים המרובעים בפני עצמם (בעזרת אותו אלגוריתם). אם נמצאה אי-תקינות באחת הבדיקות, דוחים.

אם שתי הבדיקות היו תקינות, נותר לבדוק שאין מקרה שמול פותח עגול יש סוגר מרובע או להפך (כמו במילה ([ )( )]).

לשם כך מאתחלים ל-1 מונה ראשון, ששומר את המיקום במילת הקלט, שעד אליו כבר בדקנו.

בכל פעם מעתיקים את המונה הראשון למונה שני, ומתקדמים על מילת הקלט מתחילתה, תוך כדי חיסור 1 מן המונה השני על כל סמל שקוראים, עד שהמונה השני מתאפס. אז אנו נמצאים על הסמל שעליו מצביע המונה הראשון.

אם הסמל הזה הוא סוגר (עגול או מרובע), מקדמים את המונה הראשון ב-1, וחוזרים על הלולאה.

אם הסמל הזה הוא פותח (עגול או מרובע), מאתחלים את המונה השני ל-1, ומתקדמים מן הפותח שאליו הגענו, תוך כדי תוספת 1 על כל פותח (משני הסוגים) וחיסור 1 על כל סוגר (משני הסוגים), עד שהמונה השני מתאפס.

בנקודת האיפוס בודקים את סוג הסוגר שאליו הגענו. אם הוא לא מאותו הסוג של הפותח, דוחים. אחרת, מקדמים ב-1 את המונה הראשון, וחוזרים על הלולאה.

ברגע שהגענו לסוף המילה, מקבלים.

שאלה 6

$\overline{E_{\text{DFA}}}$ היא שפת התיאורים של אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים, שמקבלים **לפחות מילה אחת**.

שייכות ל-NL:

"על קלט <M> כאשר M הוא אוטומט סופי דטרמיניסטי:

1. ספור את המצבים של M לתוך מונה (בייצוג בינארי).
2. שמור על סרט העבודה את מספרו של המצב הנוכחי. בתחילה זהו המצב ההתחלתי.
3. בצע עד שהמצב הנוכחי יהיה מצב מקבל באוטומט, או עד שהמונה יתאפס:

   3.1 בחר באופן לא דטרמיניסטי סמל מן האלפבית של האוטומט M.

   3.2 מצא בפונקצית המעברים של M את המעבר המתאים למצב הנוכחי ולסמל שנבחר.

   3.3 מחק את המצב הנוכחי, וכתוב במקומו את המצב שאליו עוברים.

   3.4 חסר 1 מן המונה.
4. אם המצב הנוכחי הוא מצב מקבל, קבל. אחרת, דחה."

המכונה מכריעה באופן לא דטרמיניסטי את השפה, ומשתמשת במקום לוגריתמי בסרט העבודה.

רדוקציה של *PATH*:

"על קלט <G, s, t> כאשר G הוא גרף מכוון, s ו-t הם צמתים ב-G:

1. ספור את הצמתים של G לתוך מונה (בייצוג בינארי). נסמן מספר זה על-ידי n.
2. הגדר אוטומט סופי דטרמיניסטי <M>:

2.1 קבוצת המצבים של האוטומט תהיה קבוצת הצמתים של G + מצב אחד נוסף q.

2.2 המצב ההתחלתי יהיה s.

2.3 האלפבית של האוטומט יהיה בעל n סמלים.

2.4 המצב t יהיה המצב המקבל היחיד. כל שאר המצבים הם מצבים לא מקבלים.

2.5 פונקצית המעברים: אם מצומת v בגרף G יוצאות k קשתות ל-k צמתים, אז מהמצב המתאים ל-v באוטומט יצאו k קשתות למצבים המתאימים. כל קשת כזו תתויג באחד מ-k הסמלים הראשונים באלפבית של האוטומט. קשת נוספת, מתויגת בשאר $n-k$ הסמלים, תצא אל המצב q. q יהיה מצב מלכודת לא מקבל.

3. החזר את האוטומט $<M>$."

נותר להוכיח שהרדוקציה מתבצעת במקום לוגריתמי, וש-$<M>$ שייכת ל- $\overline{E_{\mathrm{DFA}}}$, אם, ורק אם, $<G, s, t>$ שייכת ל-$PATH$.