אלגוריתמים - שיעור 3 - 21/11/18

פרק 4 - אלגוריתמים חמדניים

מרחיקים הקדמה בלתי (מקב)
אלגוריתם של דייקסטרה - המלצה אם שהוא עובד לכל קשתות אי-שליליות
אלגוריתם אחר - בלמן-פורד שאינו רץ את המלצה הזאת (יצמר בתכנון דינאמי)

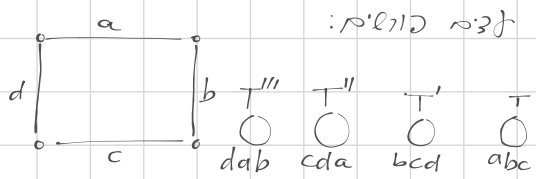
עץ פורש מינימלי (לפמ) - תת גרף שהוא עץ (קשיר וללא מעגלים) עם סכום קשתות מינימלי
אלגוריתם פרים - בונה את הלפמ בהדרגה - מסתמך על תכונת החתך (חלוקת גמוש לשני קבוצות צרות - הקשת הכולה בלתי תמיד תהיה בלפמ)
אלגוריתם קרוסקל - ממיין את הקשתות מוסיף לפי סדר המשקלים - בודק שאינו יוצר מעגל. (מסתמך על תכונת המעגל - הקשת הכבדה במעגל לא תהיה בלפמ)
הבדלים בין האלגוריתמים:
באלגוריתם פרים בכל שלב יהיה עץ קשיר לעומת קרוסקל שבונה בצורת יער (אוסף של עצים) ורק בסוף יהיה עץ לפמ

שאלה 4.27 (עמ' 218)

עובדת האינדוקציה:
$k=1$ בין T ל-T' יש הפרש של קשת אחת ולכן הם שכנים ולכן בגרף H יש מעגל הקשת
ניח שהטענה מתקיימת לגבי $k=l-1$ ונוכיח לגבי $k=l$
בין T ל-T'' יש הבדל של l קשתות (בגרף G) נוכיח שיש מסלול באורך k לפי הימצ ב-H.
ניקח קשת $e \in T$ ונסיר אותה ל-T'' - כלומר יש מעגל. ניקח קשת שנמצאת ב-T'' ואינה נמצאת ב-T ונוסיף אותה מ-T'' - כלומר $T''\cup\{e\}-\{e'\}$ מחבר בקשת יחיד ל-T' ומהנחת האינדוקציה
יש מסלול באורך $l-1$ בין T ל-T' ולכן יש מסלול באורך l בין T ל-T'' ולכן בגרף H תמיד קשיר.

בדוגמא הבאה כל הבמנים יהיו מקושרים כי כולם שכנים אחד של השני

עצים פורשים:



דוגמא:

שאלות ממבחנים:

עץ פורש מזערי (מינימלי) עם דרגה מזערית לקדקוד נבחר. נתון גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$ עם משקלות על הצלעות ועם קדקוד $u \in V$. הציגו אלגוריתם למציאת עץ פורש מזערי ב-G כך שדרגתו של u בעץ תהיה מזערית: הפלט T של האלגוריתם הוא עץ פורש מזערי, ולכל עץ פורש מזערי אחר T' מתקיים: הדרגה של u ב-T קטנה או שווה לדרגה של u ב-T'.

בבניית הלפמ ניתן לבחור לקשתות שלא נוגעות ב-u
נמיין את הקשתות וכשיש 2 קשתות לא אותו משקל נוסיף 3 לקשת שנוגעת ב-u
ונפעיל קרוסקל - הוכחה לי בדק השלמה

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$ עם מקור $s \in V$ ויעד $s \neq t \in V$, ועם משקל שלם $w(e)$ לכל צלע. ישנה צלע אחת ויחידה $e=\{u,v\}$ שמשקלה שלילי. הציגו אלגוריתם למציאת מסלול פשוט P בעל משקל מזערי מהמקור ליעד (במסלול פשוט אף קדקוד לא מופיע פעמיים). לא יתקבל ניקוד על אלגוריתם עם זמן ריצה $\Theta(|E|\cdot|V|)$

ב אופשרות - המסלול הקצר ביותר עובר דרך (u,v) או לא עובר דרכה
הפעלת דייקסטרה - $\begin{cases} su+tv+c(e) \\ sv+tu+c(e) \\ st \end{cases}$ הקטן ביותר
להסביר למה אין סיכוי שיש מעגל במסלול st דרך (u,v)

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים אי-שליליים $c_e \geq 0$ לכל אחד **מהקדקודים** $v \in V$. משקלו של מסלול מוגדר כסכום משקלי הקדקודים לאורך המסלול. נתונים קדקודי מקור ויעד $s,t \in V$ וצלע מסוימת e^*. הציגו אלגוריתמים לפתרון הבעיות הבאות:
(א) מציאת מסלול במשקל מזערי מ-s ל-t.
(ב) הכרעה האם e^* נמצאת בכל מסלול במשקל מזערי מ-s ל-t.
(ג) הכרעה האם e^* נמצאת באיזשהו מסלול במשקל מזערי מ-s ל-t.

נשנה את הגרף V_{out}/V_{in} ונשים משקלים על הקשתות
ואז בסעיף א' נפעיל דייקסטרה רגיל
ב' - דייקסטרה מ- s ל-u ודייקסטרה מ-v ל-t ואת המשקל של $e^*=(u,v)$ אם המשקל
של $e^*+tv+su$ שווה למשקל של st הדייקסטרה אם e^* נמצאת בכל מסלול.

שאלה 3 - מזעור העומס המרבי במסלול (25 נק') נתון גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים אי-שליליים $c_e \geq 0$ לכל אחת מהצלעות $e \in E$. העומס המרבי $B(P)$ של מסלול P מוגדר כמשקלה של הצלע הכבדה ביותר במסלול, כלומר $B(P)=\max_{e \in P}(c_e)$. אומרים שמסלול P^* מ-s ל-t ממזער את העומס המרבי מ-s ל-t, אם $B(P^*)=\min_{P \in P_{s,t}}(B(P))$, כש-$P_{s,t}$ הינה קבוצת כל המסלולים מ-s ל-t. הציגו אלגוריתם, שבהנתן זוג קדקודים s,t בגרף, רץ בזמן $O(|E|\ln|V|)$, ומחשב מסלול שממזער את העומס המרבי מ-s ל-t. (בניתוח זמן הריצה הניחו כי כל פעולה אלמנטרית על המשקלים, כמו חיבור או השוואה, מתבצעת בזמן $\Theta(1)$).