

1. מטילים קובייה תקינה פעם אחת. יהי X תוצאת ההטלה ונגדיר $Y = 0$ אם התוצאה זוגית ו- $Y = 1$ אם היא אי-זוגית.
 - א. חשב את התוחלת של המשתנה המקרי $W = 3XY$.
 - ב. חשב את התוחלת ואת השונות של המשתנה המקרי $S = X + Y$.
2. א. יהיו X_1, \dots, X_r משתנים מקריים שהתפלגותם המשותפת היא התפלגות מולטינומית עם הפרמטרים n ו- (p_1, \dots, p_r) בהתאמה.

מצא נוסחה ל- $\text{Cov}(X_i, X_j)$, לכל $i \neq j$, מתוך הנוסחה הידועה ל- $\text{Var}(X_i + X_j)$.
- ב. יהיו X_1, X_2 ו- X_3 משתנים מקריים שהתפלגותם המשותפת היא התפלגות מולטינומית עם הפרמטרים 100 ו- $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}$ בהתאמה.

חשב את מקדם המתאם של Y_1 ו- Y_2 , כאשר $Y_1 = X_1 - 2X_2$ ו- $Y_2 = X_2 + X_3$.
3. א. מבצעים n חזרות בלתי-תלויות על ניסוי, שההסתברות להצליח בו היא p .

יהיו $X_n =$ מספר ההצלחות שמתקבלות ב- n החזרות;

$X_m =$ מספר ההצלחות שמתקבלות ב- m החזרות הראשונות (מתוך ה- n), כאשר $m < n$.

חשב את $\rho(X_m, X_n)$.
- ב. מופעים של מאורע מסוים מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של תהליך פואסון עם קצב λ (ליחידת זמן אחת). יהיו: $X_{3t} =$ מספר המופעים שמתרחשים במרווח-הזמן $[0, 3t]$;

$X_t =$ מספר המופעים שמתרחשים במרווח-הזמן $[0, t]$.

חשב את $\rho(X_t, X_{3t})$.
- ג. התבונן בפתרון שני הסעיפים הקודמים ונסח לפיהם טענה כללית לחישוב $\rho(X, X + Y)$, כאשר X ו- Y , הם משתנים מקריים בלתי-תלויים.
4. מהמר משחק n משחקים בלתי-תלויים בזה אחר זה, וההסתברות לזכייה בכל אחד מהם שווה ל- p ($0 < p < 1$). לכל $i = 1, \dots, n$, אם המהמר זוכה במשחק ה- i הוא מרוויח i שקלים, ואם הוא מפסיד בו הוא נאלץ להיפרד מ- $i/2$ שקלים.

יהי X הרווח הכולל של המהמר בסוף סדרת המשחקים המתוארים לעיל.

חשב את התוחלת ואת השונות של X .
5. יהיו A_1, A_2 ו- A_3 מאורעות במרחב מדגם S , שההסתברויות להתרחשותם הן $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ ו- $\frac{1}{6}$ בהתאמה, ונגדיר את המשתנה המקרי N על-ידי מספר המאורעות, מבין A_1, A_2 ו- A_3 , שמתרחשים.
 - א. האם אפשר למצוא את פונקציית ההסתברות של N ?
 - ב. חשב את התוחלת של N .
 - ג. חשב את השונות של N בכל אחד מהמקרים הבאים:
 - (1) המאורעות A_1, A_2 ו- A_3 בלתי-תלויים זה בזה;
 - (2) המאורעות A_1, A_2 ו- A_3 זרים זה לזה;
 - (3) המאורעות A_1, A_2 ו- A_3 מוכלים זה בזה, כלומר $A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1$.

6. יהי X משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים N, m ו- n .
הצג את X כסכום של אינדיקטורים, והראה בעזרת הצגה זו כי $\text{Var}(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \frac{m}{N} \cdot \frac{N-m}{N}$.
7. $2n$ אנשים, שהם n זוגות, מגיעים לבית מלון. לכל זוג מובטח מראש חדר משותף מסוים בבית המלון.
פקידת הקבלה מעט מבולבלת ומחלקת להם באקראי $2n$ מפתחות. לכל אחד מ- n החדרים מתאימים שני מפתחות זהים (מתוך $2n$ המפתחות) הפותחים רק את דלתו.
יהיו X – מספר האורחים שקיבלו מפתח שמתאים לדלת חדרם;
 Y – מספר הזוגות שיוכלו להיכנס לחדר המשותף,
כלומר, מספר הזוגות שבהם לפחות אחד משני בני הזוג קיבל את המפתח המתאים לחדרו.
חשב את התוחלת והשונות של X ואת התוחלת של Y .
8. כל אחד מ-8 רווקים נחשקים ו-7 רווקות יפהפיות קונה כרטיס להצגה בתיאטרון (במיקום אקראי באולם).
כל המקומות המסומנים בכרטיסים אלו הם באותה השורה באולם, ובכל שורה יושבים בדיוק 15 אנשים.
א. מהן התוחלת והשונות של מספר הזוגות המעורבים שנוצרים בשורה?
זוג מעורב הם גבר ואישה היושבים בשני מקומות סמוכים.
(לדוגמה, אם הסידור בשורה הוא גאאאגאגאגאגאגא, אז יש בשורה 8 זוגות מעורבים).
ב. מהן התוחלת והשונות של מספר הנשים בשורה שלימינן יושב גבר?
9. מטילים קובייה תקינה $Y+3$ פעמים.
יהי X מספר ה-5-ים שמתקבלים בהטלות הקובייה האלו.
חשב את $E[X]$ ואת $\text{Var}(X)$ בכל אחד מן המקרים הבאים.
א. המשתנה המקרי Y מקבל את הערכים 2 ו-5 בהסתברויות 0.4 ו-0.6, בהתאמה.
ב. המשתנה המקרי Y מתפלג פואסונית עם הפרמטר 3.
10. מטילים מטבע תקין n פעמים.
יהי X מספר ה-H-ים שמתקבלים ב- n ההטלות של המטבע התקין.
לאחר מכן, מטילים X פעמים מטבע מוטה שהסתברות לקבל בו H היא $\frac{1}{n}$.
יהי Y מספר ה-H-ים שמתקבלים ב- X ההטלות של המטבע המוטה.
חשב את התוחלת ואת השונות של המשתנה המקרי Y .
11. לשחר אוסף של גולות.
א. שחר מעוניין להעשיר את האוסף שברשותו, ולכן החליט לקנות בכל יום שקית אחת של גולות.
אין תלות בין השקיות ששחר קונה בימים שונים.
מהי תוחלת מספר השקיות שיקנה, אם –
1. בכל שקית יש **גולה אחת**, באחד מ-3 הצבעים: אדום, ירוק או כחול, בהסתברויות שוות;
ושחר יקנה שקיות עד שיקבל **לפחות גולה אחת מכל צבע**;
2. בכל שקית יש **שתי גולות**, ולכל אחת מהגולות אחד מ-3 צבעים אפשריים: אדום, ירוק או כחול, בהסתברויות $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}$ ו- $\frac{5}{8}$, בהתאמה; ושחר יקנה שקיות עד שיקבל **לפחות שתי גולות ירוקות**;
ב. נניח שלשחר יש קופסה ובה 30 גולות: 15 אדומות, 10 ירוקות ו-5 כחולות.
שחר מוציא מהקופסה את הגולות בסדר מקרי ובזו אחר זו, עד שבידיו כל הגולות הכחולות.
מהן תוחלת ושונות מספר הגולות שיוציא?

12. קופסה מכילה 100 כדורים, X אדומים והשאר כחולים.
ההתפלגות של המשתנה המקרי X אינה ידועה, אך ידוע כי $X = 0, 1, \dots, 100$ וכי $E[X] = 25$.
מוציאים מהקופסה שני כדורים באקראי, בזה אחר זה ועם החזרה.
א. מהי ההסתברות שצבע הכדור הראשון שמוצא הוא אדום?
ב. האם שני המאורעות "צבע הכדור ה- i אדום", עבור $i = 1, 2$, בלתי-תלויים?
נניח כעת, כי $\text{Var}(X) = 25$ וכי מוציאים מהקופסה באקראי שני כדורים, בזה אחר זה וללא החזרה.
ג. מהי ההסתברות שמוציאים שני כדורים אדומים?
13. ידוע כי התוחלת וסטיית התקן של מספר הפניות למוקד-תשלומים בשבוע הן 9,000 ו-100, בהתאמה.
מספר התשלומים, המתבצעים בכל פנייה למוקד, הוא משתנה מקרי שתוחלתו 1.5 ושונותו 1, והוא אינו תלוי בפניות אחרות המתקבלות במוקד. אם מספר התשלומים בכל פנייה בלתי-תלוי במספר הפניות שמתקבלות במשך שבוע, מהן התוחלת והשונות של מספר התשלומים שמתבצעים במוקד בשבוע כלשהו?
14. א. מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים של המשתנה המקרי X , המוגדר באמצעות פונקציית ההסתברות

$$P\{X = i\} = \binom{n}{i} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ב. חשב את התוחלת של המשתנה המקרי שלעיל, בעזרת הפונקציה יוצרת המומנטים שלו.
בדוק את התוצאה שקיבלת, בעזרת חישוב ישיר של התוחלת.
ג. יהי Y משתנה מקרי המוגדר באמצעות פונקציית ההסתברות:

$$P\{Y = j\} = \binom{n}{j-4} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}, \quad j = 5, 6, \dots, n+4 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים של Y .
15. התפלגות המשקל (בגרמים) של חבילת עדשים מקרית היא נורמלית עם תוחלת 200 וסטיית-תקן 10.
אם ארגז קרטון מכיל 10 חבילות עדשים, ואם המשקל (בגרמים) של ארגז ריק מתפלג נורמלית עם תוחלת 100 וסטיית-תקן 5, מהי התפלגות המשקל (בגרמים) של ארגז מלא? אלו הנחות אתה מניח?
16. בקופסה יש 10 נורות שהתפלגות אורך-החיים (בחודשים) של כל אחת מהן היא מעריכית עם תוחלת 6.
כמו כן, אין תלות בין נורות שונות.
מהן התוחלת והשונות של ממוצע אורך-החיים של 10 הנורות שבקופסה?