**האוניברסיטה הפתוחה**

**כ"ד בתמוז תש"ף**

16 ביולי 2020

# מס' שאלון - 460

**סמסטר 2020ב**

**20407 / 4**

מס' מועד 86

**שאלון בחינת גמר**

## 20407 - מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

**משך בחינה: 4 שעות**

בשאלון זה **4** עמודים

**מבנה הבחינה:**

עליכם לענות על ארבע מתוך חמש השאלות.
בכל בחינה תבדקנה ארבע התשובות הראשונות בלבד.
לכל השאלות משקל שווה.

הנחיות:
רצוי שכל תשובה תתחיל בעמוד חדש.
אין לכתוב בצבע אדום.

**בהצלחה !!!**

קראו תחילה את כל השאלות. לפני שתתחילו לפתור וודאו שאתם מבינים את השאלה לעומק.

בשאלות בהן נדרש לכתוב אלגוריתם, אין צורך לכתוב פסאודו-קוד אך יש לכתוב את האלגוריתם בצורה ברורה וחד משמעית. יש להסביר תחילה את רעיון האלגוריתם וכן להוכיח/להסביר את נכונותו. בנוסף יש לנתח את סיבוכיותו.

**שאלה 1**

א. (9 נק׳) פתרו את נוסחת הנסיגה: $T(n)=T(n-1)+\log n$

ב. (8 נק׳) קבעו את היחס האסימפטוטי בין $n!$ לבין $(2n)!$

ג. (8 נק׳) הוכיחו על פי ההגדרה: $f(n)+o(f(n))=\Theta(f(n))$

**שאלה 2**

א. (8 נק׳) הסבירו כיצד ניתן לשנות כל אלגוריתם מיון כך שיהיה יציב, ללא שינוי של סיבוכיות זמן ריצתו.
(התייחסו בהסבר גם לתכונת היציבות וגם לנושא הסיבוכיות).

ב. (8 נק׳) נתון מערך של n מספרים **שלמים ושונים זה מזה** בתחום $[-n,...,n^2]$. כתבו אלגוריתם למיון המערך בזמן לינארי.

ג. (9 נק׳) יהי A המערך **הממוין** מהסעיף הקודם. כתבו בפסאודו-קוד אלגוריתם למציאת אינדקס $i$ המקיים $A[i]=i$. אם אין אינדקס כזה יוחזר 1-.
זמן הריצה: $\Theta(\lg n)$.

**המשך הבחינה בעמוד הבא**

**שאלה 3**

נתבונן בשגרה הבאה המקבלת כקלט מערך $A$ של מספרים:

$$
\begin{aligned}
&n = length(A) \\
&while\ (n > 1) \\
&\quad pivot \leftarrow SELECT(A,1,n,\lfloor n/2 \rfloor) \\
&\quad partitionWithPivot(A,1,n,pivot) \\
&\quad n \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor
\end{aligned}
$$

הסבר: בכל שלב של הלולאה השגרה בוחרת את ערך המיקום ה-$\lfloor n/2 \rfloor$ בתחום הנתון (1 עד $n$), ומשתמשת בו כאיבר ציר כדי לבצע חלוקה בתחום זה. בלולאה הבאה התחום מצטמצם בחצי.

א. (5 נק') מהו זמן הריצה של שגרה זו?

ב. (8 נק') הפעילו את השגרה על המערך $[-17,5,34,2,9,10,-21,15]$ (יש להניח שבעת מציאת ערך המיקום לא נעשים שינויים במערך המקורי).

ג. (12 נק') נוסיף לתכונת ערימת המינימום את התכונה הבאה: כל איבר ברמה $h$ קטן **מכל האיברים** ברמה $h+1$.

הוכיחו או הפריכו: ניתן לבנות ערימת מינימום המקיימת את התכונה שלעיל בזמן לינארי.

רמז: הסעיפים הקודמים עשויים לעזור.

הערה: אם זה עוזר לכם, ניתן להניח שגודל המערך הוא חזקה של שתיים (אך אין חובה להניח זאת).

לנוחיותכם שגרת החלוקה מובאת להלן:

$$
\begin{aligned}
&PARTITION(A,\ p,\ r) \\
&x \leftarrow A[r] \\
&i \leftarrow p - 1 \\
&\textbf{for } j \leftarrow p \textbf{ to } r-1 \\
&\quad \textbf{do if } A[j] \le x \\
&\qquad\quad \textbf{then } i \leftarrow i + 1 \\
&\qquad\qquad\quad exchange\ A[i] \leftrightarrow A[j] \\
&exchange\ A[i+1] \leftrightarrow A[r] \\
&\textbf{return } i + 1
\end{aligned}
$$

**המשך הבחינה בעמוד הבא**

**שאלה 4**

לכל אחת מן הטענות שבסעיפים הבאים, כתבו נכון/לא נכון והסבירו <u>בקצרה</u> (אך ללא ויתור על פרטים מהותיים). כל הסעיפים שווי משקל.

א. יהי T עץ חיפוש בינארי. **<u>טענה</u>**: בהינתן ערך מפתח הקיים בעץ, ניתן להגיע לצומת בעל ערך המפתח הנתון בזמן $O(\lg n)$.

ב. יהי T עץ בינארי בעל $n$ צמתים (ללא ערכים בשדה המפתח). יהי A מערך של מספרים שונים זה מזה. **<u>טענה</u>**: ניתן לכתוב את איברי A בצמתי T כך ש-T יהיה עץ **חיפוש** בינארי (נדגיש: הכוונה היא ללא שינוי של מבנה העץ).

ג. נתון מערך **ממוין** של מספרים. **<u>טענה</u>**: ניתן לבנות ממנו עץ אדום שחור בסיבוכיות זמן לינארית.

ד. נתונה טבלת גיבוב בגודל m עם פתרון התנגשויות בשיטת השרשור. פונקצית הגיבוב מקיימת את הנחת הגיבוב האחיד והפשוט. לטבלה הוכנסו m/2 איברים כלשהם (נניח בצורה אקראית). **<u>טענה</u>**: הסיכוי להתנגשות בעת הכנסת האיבר הבא הוא 1/2.

ה. נתון מערך של $n$ מספרים. **<u>טענה</u>**: ניתן לבנות תור קדימויות (מינימום) מ-n איברי המערך בזמן לינארי, התומך בפעולת Extract-Min() בזמן קבוע.

**שאלה 5**

הציעו מבנה נתונים $S$ התומך בפעולות הבאות בזמנים הנדרשים ($n$ מציין את מספר האיברים במבנה):

BUILD($S$): בניית המבנה $S$ מתוך סדרה של $n$ מפתחות; זמן הריצה: $O(n)$;

MIN($S$): החזרת הערך המינימלי של $S$; זמן הריצה: $O(1)$;

DEL-MEDIAN($S$): מחיקת חציון המפתחות של $S$; זמן הריצה: $O(\lg n)$;

OS-MED7($S$): החזרת ערך המיקום ה-$(n/2+7)$ של $S$; זמן הריצה: $O(1)$.

**הערה**: מבנה הנתונים $S$ יכול להיות מורכב מכמה מבני נתונים יסודיים.

**ב ה צ ל ח ה !**