תשובה 1

מובן שלא ניתן להגיע למצב כזה בקבוצות סופיות. נקח אפוא קבוצות אינסופיות.
בקצת ניסוי וטעיה לא קשה למצוא קבוצות שמקיימות את הנדרש.
למשל, תהי $A = \mathbf{N}$ ותהי $B = \{0,-1,-2,-3,\ldots\} = \{-n \mid n \in \mathbf{N}\}$.
אז $A \cup B = \mathbf{Z}$ (קבוצת המספרים השלמים),
$A - B = \mathbf{N} - \{0\}$, $A \oplus B = \mathbf{Z} - \{0\}$.
חמש הקבוצות האלה שונות זו מזו . למשל:
(-1) שייך ל- $A \oplus B$ ואינו שייך ל- $A - B$, לכן $A \oplus B \neq A - B$.
בדומה לגבי השאר.
הפונקציה $f(n) = -n$ היא פונקציה חח"ע של A על B. לכן $|A| = |B|$.
הפונקציה $g(n) = n+1$ היא פונקציה חח"ע של A על $A - B$. לכן $|A| = |A - B|$.
מהגדרת העוצמה $\aleph_0$, עוצמת A היא $\aleph_0$.
לפי שאלה 4.4 בעמ' 119 בספר, גם $|\mathbf{Z}| = \aleph_0$. כלומר $|A \cup B| = \aleph_0$.
נותר להראות שגם $|A \oplus B| = \aleph_0$. זה מתקבל למשל משאלה 4.3 סעיף ד (אפשר גם בדרכים אחרות).

תשובה 2

א. קבוצת **הסדרות** באורך n שאבריהן מספרים טבעיים היא $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N} \ldots \times \mathbf{N}$ (n גורמים), וכידוע היא בת מניה. לכל $n > 0$ תהי K_n קבוצת **הקבוצות** בגודל n, שאבריהן מספרים טבעיים.
נגדיר פונקציה $f : K_n \to \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N} \ldots \times \mathbf{N}$ כך:
בהנתן קבוצה של n טבעיים נסדר את אברי הקבוצה בסדר עולה ונקבל סדרה באורך n .
מובן ש- f חד-חד-ערכית (היא לא על – מדוע?) . לכן $|K_n| \le |\mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N} \ldots \times \mathbf{N}| = \aleph_0$.
מצד שני, מובן ש- K_n היא אינסופית, ולכן עוצמתה לפחות $\aleph_0$.
לפיכך $|K_n| = \aleph_0$.

ב. נסמן קבוצה זו ב- K. נשים לב ש- $K = \bigcup_{0<n\in\mathbf{N}} K_n$.

בסעיף הקודם ראינו שלכל $n > 0$, $|K_n| = \aleph_0$.

לפי המשפט על איחוד אוסף בר-מניה של קבוצות בנות-מניה, $|K| = \aleph_0$.

למעשה, בין הקבוצות הסופיות נהוג לספור גם את הקבוצה הריקה, שאינה ב- $\bigcup_{0<n\in\mathbf{N}} K_n$.

נצרף אותה ל- K, בכך הוספנו ל- K אבר אחד נוסף, וכידוע תוספת כזו לקבוצה בת-מניה נותנת קבוצה בת-מניה.

ג. נסמן את הקבוצה בה מדובר כאן ב- M. כל תת-קבוצה של **N** היא סופית או אינסופית, לכן שייכת ל- K או ל- M. לכן $P(\mathbf{N}) = K \cup M$.

אילו M היתה בת-מניה, היינו מקבלים ש- $P(\mathbf{N})$ היא איחוד של שתי קבוצות בנות-מניה, ולכן בת-מניה, זאת בסתירה למשפט קנטור, לפיו עוצמת $P(\mathbf{N})$ גדולה ממש מעוצמת **N**.

ד. כאמור, $P(\mathbf{N}) = K \cup M$. האיחוד הזה הוא איחוד זר, לכן $M = P(\mathbf{N}) - K$.

כעת, לפי משפט 5.13ב, $|M| = |P(\mathbf{N})|$.

לפי משפט 5.25, $|P(\mathbf{N})| = C$, וזוהי אפוא עוצמתה של M.

ה. אפשרות אחת: $\aleph_0 = \left| \{X \in P(\mathbf{N}) \mid \exists n > 0,\ n \in \mathbf{N},\ |X| = n\} \right|$

אפשרות אחרת: $\aleph_0 = \left| \bigcup_{0<n\in\mathbf{N}} \{X \in P(\mathbf{N}) \mid |X| = n\} \right|$

אפשרות נוספת: $\aleph_0 = \left| \{X \in P(\mathbf{N}) \mid |X| \in \mathbf{N}\} \right|$

ועוד אפשרות: $\aleph_0 = \left| \{X \in P(\mathbf{N}) \mid |X| < \aleph_0\} \right|$

ו. אפשרות אחת: $C = \left| \{X \in P(\mathbf{N}) \mid |X| = \aleph_0\} \right|$

ויש עוד...

תשובה 3

ההגדרה שמוצעת בשאלה היא הגדרה בעזרת נציגים: אנו מגדירים פעולה בין עוצמות בעזרת בחירה שרירותית של קבוצות המייצגות את העוצמות הנתונות. כפי שמוסבר בפרק 5 בסמוך להגדרות החיבור, הכפל והחזקה, בהגדרה מסוג זה יש להראות שהתוצאה אינה תלויה בבחירת הנציגים. במקרה של הפעולה שהוגדרה בשאלה, התוצאה בבירור תלויה בנציגים, וקל לתת דוגמא לכך אפילו בקבוצות סופיות:

תהיינה $A_1 = \{1\}$, $B_1 = \{2\}$. מתקיים $A_1 \oplus B_1 = \{1,2\}$.

מההגדרה בשאלה נקבל $1 \oplus 1 = 2$.

מצד שני, נקח $A_2 = B_2 = \{1\}$. מתקיים $A_2 \oplus B_2 = \varnothing$.

מההגדרה בשאלה נקבל $1 \oplus 1 = 0$.

תוצאת הפעולה תלויה בנציגים, משמע הפעולה אינה מוגדרת היטב - ההגדרה אינה תקינה.

תשובה 4

א. תהיינה A_2 , B_2 קבוצות שעוצמותיהן בהתאמה k_2, m_2 . כדי לקצר מעט את ההוכחה ניעזר בשאלה 5.1א, לפיה **קיימת** קבוצה חלקית של A_2 , שעוצמתה k_1, **וקיימת** קבוצה חלקית של B_2 שעוצמתה m_1. נבחר קבוצות כאלה, נקרא לראשונה A_1 ולשניה B_1 .

מהגדרת כפל עוצמות $k_1 \cdot m_1 = |A_1 \times B_1|$, $k_2 \cdot m_2 = |A_2 \times B_2|$.

אבל מהנחתנו ומהגדרת מכפלה קרטזית נקבל $A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$.

לכן , בהסתמך על שאלה 5.1ב, $k_1 \cdot m_1 \le k_2 \cdot m_2$.

ב. מצד אחד, $\aleph_0 \le C$ ולכן בעזרת סעיף א, $\aleph_0 \cdot C \le C \cdot C = C$.

מצד שני $1 \le \aleph_0$ ולכן בדומה $C = 1 \cdot C \le \aleph_0 \cdot C$.

משני הכיוונים יחד, בעזרת קנטור-שרדר-ברנשטיין, נובע המבוקש.

ג. לפי משפט 5.26, $2^{\aleph_0} = C$. נציב זאת ונקבל $C^C = (2^{\aleph_0})^C = 2^{\aleph_0 \cdot C} = 2^C$.

במעברים נעזרנו במשפט 5.27ג ובסעיף ב של שאלה זו.

איתי הראבן