הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל   הפקולטה למדעי המחשב

אלגוריתמים 1 (234247) – סמסטר אביב 2005

תרגיל בית 1

מתרגל אחראי על התרגיל: אייל אקרמן, שעת קבלה: יום ב׳ 30:16-30:17, ackerman@cs.

תאריך חלוקה: יום רביעי 16/3/05.

תאריך הגשה: יום רביעי 30/3/05, שעה 12:00 <u>בצהריים</u>.

הערות:

- יש להגיש את התרגיל בזוגות.
- שאלות על התרגיל נא להפנות למתרגל האחראי על התרגיל.
- נא לוודא שהפתרון המוגש קריא. פתרונות לא-קריאים לא ייבדקו!
- נא לצרף לפתרון את דף השער המופיע באתר הקורס.
- יש להוכיח כל טענה שלא נלמדה בהרצאה או בתרגול.
- כל אלגוריתם יש לתאר תחילה בקצרה (מה הרעיון מאחוריו) ואחר כך בפירוט (תיאור מילולי, או פסאודו-קוד).
- יש להוכיח נכונות ולנתח סיבוכיות של כל אלגוריתם.
- לא כל השאלות יבדקו.

<u>שאלה 1</u>

השלימו את הוכחת הנכונות של BFS על ידי הוכחת הלמה הבאה המתייחסת למימוש של BFS על ידי תור, כפי שנלמד בהרצאה (ראו גם באתר הקורס).

למה: אם בהרצת BFS על גרף $G=(V,E)$ התור Q מכיל את הצמתים $v_1, v_2, ..., v_r$, כך ש- v_1 בראש התור ו- v_r בסופו, אזי $d[v_r] \le d[v_1]+1$ וגם $d[v_1] \le d[v_2] \le ... \le d[v_r]$.

הדרכה: הוכיחו באינדוקציה על מספר הפעולות שמתבצעות על Q. כלומר, הראו שבתחילת האלגוריתם הטענה מתקיימת, הניחו כי היא מתקיימת גם לאחר ביצוע $k \ge 0$ פעולות על Q, והראו כי הטענה מתקיימת גם לאחר ביצוע הפעולה ה- $k+1$ על Q (בין אם זו פעולת הכנסה ובין אם זו פעולת הוצאה מהתור).

<u>שאלה 2</u>

יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון ופשוט כך שכל אחת מהקשתות בו צבועה בשחור או בלבן. כמו כן נתון צומת $s \in V$. הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(V+E)$[1] המוצא <u>לכל</u> צומת $v \in V$ את אורך המסלול הקצר ביותר מ- s ל- v המשתמש בשתי קשתות שחורות לכל היותר.

רמז: פתרו בעזרת רדוקציה.

---

[1] הסימון $O(V+E)$ למעשה אינו מדוייק מאחר ו- V ו- E הינן קבוצות. אם רוצים לדייק יש לרשום $O(|V|+|E|)$, אך אנו נוותר לעיתים על $|\bullet|$ לצורך פשטות ומכיוון שהכוונה ברורה. סימון זה מקובל גם ב-CLRS.

שאלה 3

יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון, ויהיו $s,t\in V$ צמתים ב- G. הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(V+E)$ המחזיר את קבוצת הצמתים הנמצאים על מסלולים קצרים ביותר מ- s ל- t. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

רמז: ניתן להסתפק ב-2 הרצות BFS.

שאלה 4

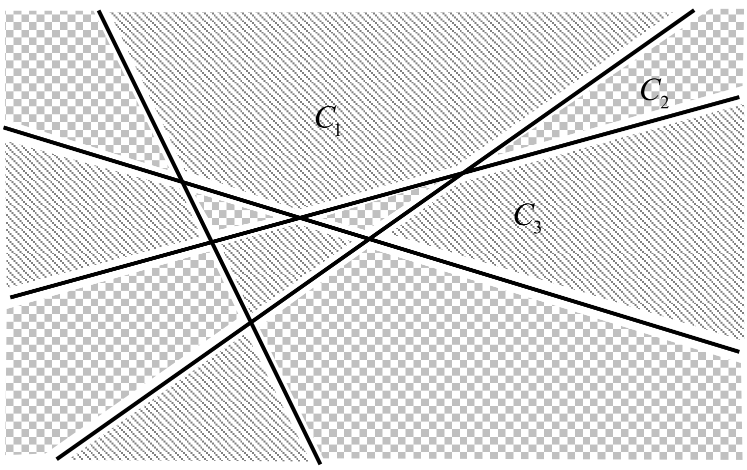
גרף דו-צדדי (bipartite graph) הוא גרף לא-מכוון $G=(V,E)$, שבו V ניתנת לחלוקה לשתי קבוצות זרות V_1 ו- V_2 באופן כזה שכל קשת בגרף מחברת בין צומת של V_1 לצומת של V_2. במקרה זה (V_1,V_2) היא דו-חלוקה של G.

א. **צביעה חוקית** של (צמתים של) גרף $G=(V,E)$ היא התאמה של צבע לכל צומת בגרף באופן שכל שני צמתים שכנים נצבעים בצבעים שונים. גרף נקרא ***k*-צביע** אם קיימת עבורו צביעה חוקית המשתמשת ב- k צבעים לכל היותר.
הראו כי גרף הוא דו-צדדי אם ורק אם הוא 2-צביע.

ב. הראו כי גרף הוא דו-צדדי אם ורק אם אינו מכיל מעגלים באורך אי-זוגי.

ג. הציעו אלגוריתם הרץ בזמן $O(V+E)$ המכריע האם גרף נתון הוא דו-צדדי, ואם אכן הוא כזה, הוא גם מחזיר את הדו-חלוקה. **רמז**: השתמשו בואריאציה על BFS.

ד. תהא $L=\{\ell_1,\ell_2,...,\ell_n\}$ קבוצה של ישרים במישור. הראו כי מספיקים 2 צבעים על מנת לצבוע את התאים הנוצרים ע"י הישרים כך שכל זוג תאים שכנים צבוע בצבע שונה (שני תאים שכנים אם קיים ישר המכיל קטע שמשותף לגבולותיהם. לדוגמה, באיור 1 C_1 ו- C_2 שכנים, בעוד ש- C_1 ו- C_3 אינם שכנים).
רמז: היעזרו בסעיף ב'.



איור 1: צביעה ב-2 צבעים של התאים המוגדרים ע"י ישרים במישור.

שאלה 5

- נסמן ב- K_n את **הגרף שלם** (קליק, Clique) על n צמתים (כלומר, גרף בן n צמתים ובו כל זוג צמתים מחובר בקשת). ראו, לדוגמה, ציור 2(א).
- **גרף גלגל** W_n (wheel), מתקבל ממעגל פשוט באורך $n-1$, שאליו מוסיפים צומת חדש המחובר לכל הצמתים שעל המעגל. לדוגמה, ראו איור 2(ב). מהגדרה זו, הגרף השלם על ארבעה צמתים K_4, הוא הגלגל הקטן ביותר.
- מסלול (מעגל) **המילטון** בגרף הוא מסלול (מעגל) שעובר בכל צומת בגרף פעם אחת בדיוק.
- **גרף כוכב** (star) הוא גרף דו-צדדי שבו צד אחד מכיל צומת בודד וצד שני מכיל $n-1$ צמתים המחוברים כולם לצומת הבודד. ראו, לדוגמה, ציור 2(ג).
- **שרוך** מכוון הוא עץ מכוון המכיל עלה יחיד.

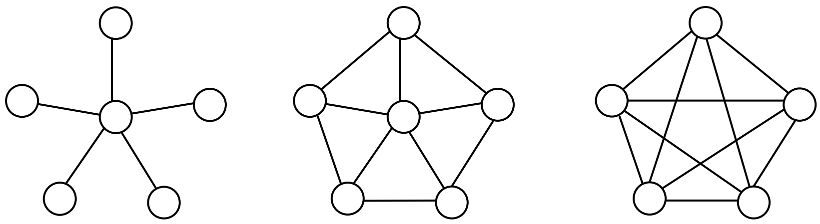
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. כל ריצת DFS על קליק מניבה שרוך (כלומר עץ ה-DFS המתקבל הינו שרוך מכוון).

ב. קיימת ריצת DFS על גרף גלגל המניבה שרוך.

ג. קיימת ריצת DFS על גרף גלגל המניבה כוכב.

ד. כל ריצת DFS על גרף המכיל מעגל המילטון מניבה שרוך.



(א) K_5 (ב) W_6 (ג) כוכב

איור 2: קליק, גלגל וכוכב