תשובה 1

א. ביטוי לא תקין: מספר הארגומנטים של f_1^2 אינו מתאים.

ב. ביטוי לא תקין: הארגומנטים של סימן פרדיקט צריכים להיות שמות-עצם.
כאן אחד הארגומנטים, $\sim(x_2)$, אינו שם-עצם אלא בעצמו ביטוי לא תקין,
כי שם-עצם אינו מכיל קשרים לוגיים.

ג. תבנית לא אטומית שאינה פסוק (יש משתנה חפשי).

ד. תבנית אטומית שאינה פסוק (יש משתנה חפשי).

ה. ביטוי לא תקין: הארגומנטים של סימן פונקציה צריכים להיות שמות-עצם.
כאן אחד הארגומנטים הוא תבנית.

ו. תבנית אטומית שהיא פסוק.

ז. ביטוי לא תקין: אחרי סימן כמת והמשתנה שלו צריך לבוא סימן פותח של תבנית: כמת נוסף או סימן פרדיקט או סימן השלילה. כאן מופיע אחרי הכמת סימן פונקציה. במלים אחרות: **הביטוי שעליו "פועל" הכמת צריך להיות תבנית ולא פונקציה** (בכתיב מלא יבוא אחרי הכמת והמשתנה סוגר שמאלי. אבל הסימן כאן גם אינו סוגר שמאלי...).

ח. תבנית לא אטומית שהיא פסוק.

תשובה 2

ψ_1: היחס R אינו רפלקסיבי: $\sim \forall x R(x,x)$. זה שקול לוגית ל: $\exists x(\sim R(x,x))$.

ψ_2: היחס R אינו סימטרי: $\sim \forall x \forall y\big(R(x,y) \to R(y,x)\big)$.

שקול לוגית ל: $\exists x \exists y\big(R(x,y) \wedge \sim R(y,x)\big)$.

ψ_3: היחס R אינו טרנזיטיבי: $\sim \forall x \forall y \forall z\big((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z)\big)$.

שקול לוגית ל: $\exists x \exists y \exists z\big(R(x,y) \wedge R(y,z) \wedge \sim R(x,z)\big)$

תשובה 3

א. פירוש התבנית באינטרפרטציה הנתונה הוא:
לכל קבוצה y של טבעיים, החיתוך של y עם הקבוצה x שווה לקבוצה x.
שימו לב ש- x מופיע **חפשי** בתבנית, לכן התבנית אומרת משהו על x, היא מתארת תכונה של x, בעוד ש- y מופיע רק באופן קשור (מכומת), לכן y הוא משתנה עזר בלבד: התבנית אינה אומרת דבר על ערכו של y ! **ראו הדיון בעמ' 113 בספר** - חשוב להבין אותו. כדי להדגיש נקודה זו,

נציין שאם נרשום z במקום y בכל מקום בתבנית הנ"ל, נקבל תבנית **שקולה לוגית** לתבנית המקורית.

משתנה מכומת בלוגיקה דומה למשתנה סכימה באריתמטיקה, או למשתנה פנימי של לולאה בתכנות - הוא משתנה עזר בלבד.

לפיכך מה שמעניין אותנו הוא השמת ערך ל- x בלבד. הערך שניתן ל- y אינו רלבנטי (פורמלית, ראו הגדרה 3.14 מקרה 4, ושימו לב שמחליפים שם את ההשמה של המשתנה הקשור בכל השמה אפשרית, לכן ערכו בהשמה הנתונה אינו רלבנטי).

בהשמה $\sigma(x)=\varnothing$ נקבל את הטענה כי החיתוך של כל קבוצה עם $\varnothing$ שווה $\varnothing$.

זו טענה נכונה בעולם $P(\mathbb{N})$, לכן התבנית אמיתית באינטרפרטציה הנ"ל תחת σ הנ"ל.

מצד שני, אם $\sigma(x)\neq\varnothing$ אז למשל $\sigma(x)\cap\varnothing=\varnothing\neq\sigma(x)$,

כלומר התבנית אינה אמיתית בהשמה בה $\sigma(x)\neq\varnothing$.

לכן ההשמה $\sigma(x)=\varnothing$ היא היחידה שבה התבנית אמיתית.

יש כמובן חופש לתת למשתנים y,z כל ערך שנרצה.

ב. פירוש התבנית באינטרפרטציה הנתונה הוא:

לכל קבוצה y של טבעיים, קיימת קבוצה z של טבעיים, כך שהחיתוך של y עם z שווה לקבוצה x.

שוב x הוא המשתנה החפשי היחיד, והתבנית "מתארת תכונה שלו".

כדי להדגיש זאת, ניתן לומר בתחילת הפירוש הנ"ל: " x היא קבוצה המקיימת ש- ....".

קל לראות, בדומה לסעיף הקודם, ש- $\varnothing$ היא הקבוצה היחידה המקיימת זאת.

כלומר ההשמה $\sigma(x)=\varnothing$ היא ההשמה היחידה עבור המשתנה x בה תבנית זו אמיתית.

ג. לאחר שניעזר במשמעות הפונקציה f_1^2 , פירוש התבנית מסעיף א ב- J_1 הוא:

לכל קבוצה y, x שווה x ...

זה כמובן נכון בכל השמה שניתן ל- x , לכן התבנית הראשונה אמיתית ב- J_1 .

התבנית השנייה מתפרשת ב- J_1 כטענה קצת מוזרה:

(x היא קבוצה המקיימת ש-) לכל y קיים z כך ש- y שווה x .

זה אינו נכון באף השמה $\sigma(x)$!

אין אף קבוצה x השווה **לכל** קבוצה y שניקח (גם אם נבחר בדרך קבוצה z כלשהי...).

לכן התבנית השנייה שקרית ב- J_1 .

ד. בסעיפים א, ב ראינו שבאינטרפרטציה J, התבניות הללו אמיתיות בהשמה $\sigma(x)=\varnothing$ ושקריות בהשמות אחרות. לכן הן אינן אמיתיות לוגית ואינן שקריות לוגית.

בסעיף ג ראינו שב- J_1 התבנית הראשונה אמיתית והשניה שקרית (בכל ההשמות), לכן הן אינן שקולות לוגית.

תשובה 4

א. לא. למשל נקח $\psi = A_1^1(x)$, ו- J אינטרפרטציה לעולם $\{1,2\}$,
כאשר A_1^1 מתפרש כתכונה "להיות שווה 1".
בהשמה $\sigma(x) = 1$ נקבל כי $J_\sigma(\psi) = \mathrm{T}$ בעוד ש- $J_\sigma(\forall x\psi) = \mathrm{F}$.

ב. נכון. זהו בדיוק מה שנטען בשאלה 3.18א בעמ' 112 בספר.

ג. נכון - זהו סעיף ב של שאלה 3.18 הנ"ל.

ד. לא נכון. דוגמא נגדית: אותה דוגמא מסעיף א, בהבדל יחיד שנקח $\sigma(x) = 2$.

איתי הראבן