תשובה 1

א. $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \varnothing$ אםם קיימים x,y כך ש- $(x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A)$.

משמע: $(x, y) \in (A \times B)$ וגם $(x, y) \in (B \times A)$.

כלומר: $x \in A, y \in B$ וגם $x \in B, y \in A$.

כלומר: $x, y \in A \cap B$. משמע: $A \cap B \neq \varnothing$.

ב. לפי סעיף א, מהנתון נובע $A \cap P(A) \neq \varnothing$.

משמע: קיים איבר של A שהוא גם קבוצה חלקית של A.

במלים אחרות: קיים $a \in A$, כך ש- a עצמו הוא קבוצה, וכל איברי a הם גם איברים של A.

דוגמא לקבוצה A המקיימת זאת: $A = \{\varnothing\}$.

תשובה 2

(השלימו את הפרטים בסעיפים ב - ה)

א. נכון, מיידי מההגדרה של חזקה של רלציה (עמ' 46 בספר).

(הגדרה זו כשלעצמה מסתמכת על תכונת האסוציאטיביות של כפל רלציות).

ב. לא. דוגמא נגדית: $A = \{1,2\}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ג. כן. מקרה פרטי של שאלה 2.8 בעמ' 40 בספר.

ד. לא. דוגמא נגדית: $A = \{1,2\}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

ה. כן. ההוכחה מקבילה לגמרי לפתרון שאלה 2.6ג סעיפים 2, 3 בעמ' 36 בספר.

תשובה 3

א. נכון. יחס סימטרי הוא יחס השווה ליחס ההפוך לו (עמ' 49 בספר הלימוד).

נתון ש- R,S סימטריים, משמע $R = R^{-1}$, $S = S^{-1}$.

נציב זאת בשוויון $(R \oplus S)^{-1} = R^{-1} \oplus S^{-1}$ שהוכחנו בשאלה הקודמת,

ונקבל: $(R \oplus S)^{-1} = R \oplus S$.

שוב, מהגדרת רלציה סימטרית, שוויון זה אומר בדיוק ש- $R \oplus S$ סימטרית.

ב. לעתים כן ולעתים לא. דוגמא נגדית: $A=\{1,2\}$, $R=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ (השלימו).

מצד שני, דוגמא שעבורה מתקיימים התנאים: $R=S=\varnothing$ מעל A כלשהיא.

(או קצת כללית יותר, $R=S$, רלציה אנטי-סימטרית כלשהיא מעל A כלשהיא).

יש כמובן גם דוגמאות אחרות.

ג. לעתים כן ולעתים לא. אותן דוגמאות טובות גם כאן (כאשר בהערה "קצת כללית יותר" נקח רלציה טרנזיטיבית במקום אנטי-סימטרית). ויש דוגמאות אחרות.

שימו לב שהרלציה הריקה מעל A כלשהיא היא סימטרית, אנטי-סימטרית וטרנזיטיבית.

ראו דיון בעניין זה בשאלוני "בחן את עצמך" באתר הקורס!

תרגיל: כמה רלציות מעל A סופית בת n איברים הן בעת ובעונה אחת סימטריות ואנטי-סימטריות? התשובה **אינה** 1.

תשובה 4

א. דוגמא: $R = I_A \cup \{(1,2)\,,(1,3)\} = \{(1,1)\,,(2,2)\,,(3,3)\,,(1,2)\,,(1,3)\}$

מתקיים: $R\cup R^{-1} = I_A \cup \{(1,2)\,,(1,3)\,,(2,1)\,,(3,1)\}$.

$R\cup R^{-1}$ אינו טרנזיטיבי כי נמצאים בו $(3,1)$ ו- $(1,2)$ אבל לא נמצא בו $(3,2)$.

ב. **רפלקסיביות**: לפי שאלה 2.18 א בספר, עמ' 48 , אם R רפלקסיבית גם R^{-1} רפלקסיבית.

מכאן ומהגדרת רפלקסיביות, $I_K \subseteq R$ וגם $I_K \subseteq R^{-1}$. לפיכך $I_K \subseteq R\cap R^{-1}$,

משמע (שוב מהגדרת רפלקסיביות): $R\cap R^{-1}$ רפלקסיבית.

סימטריות: לפי שאלה 2.6 סעיף 2 בעמ' 36 בספר, $(R\cap S)^{-1} = R^{-1}\cap S^{-1}$.

בפרט, לכל רלציה R : $(R\cap R^{-1})^{-1} = R^{-1}\cap (R^{-1})^{-1} = R^{-1}\cap R = R\cap R^{-1}$.

משמע, לפי הגדרת רלציה סימטרית, $R\cap R^{-1}$ היא סימטרית.

טרנזיטיביות: לפי שאלה 2.29 א בעמ' 53 בספר, אם R טרנזיטיבית אז כך גם R^{-1} .

מכאן, לפי שאלה 2.30 ג באותו העמוד, נקבל כי גם $R\cap R^{-1}$ היא טרנזיטיבית.

ג. דוגמא: $R=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$. מתקיים: $R^2=\{(1,3),(2,1),(3,2)\}$.

לכן $R\cup R^2=\{(1,2),(2,3),(3,1),(1,3),(2,1),(3,2)\}$.

יחס זה אינו טרנזיטיבי כי, למשל, נמצאים בו $(1,2)$ ו- $(2,1)$ אבל לא נמצא בו $(1,1)$.

ד. מהגדרת E, שני איברים של A השייכים לאותה מחלקה עומדים ביחס E זה לזה,
ושני איברים של A שאינם באותה מחלקה אינם עומדים ביחס E זה לזה.

לכן, אם נרשום $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$, כאשר באגף ימין אלו 5 המחלקות,
אז מתקיים: $E = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup (A_3 \times A_3) \cup (A_4 \times A_4) \cup (A_5 \times A_5)$.
זהו איחוד זר (איחוד של קבוצות זרות), לכן

$$|E| = |A_1 \times A_1| + |A_2 \times A_2| + |A_3 \times A_3| + |A_4 \times A_4| + |A_5 \times A_5|$$

$$= 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 27$$

ראו בעניין זה גם החוברת "אוסף תרגילים פתורים" עמ' 4 שאלה 4ב.

איתי הראבן