אקסיומות

מה היה לנו ?

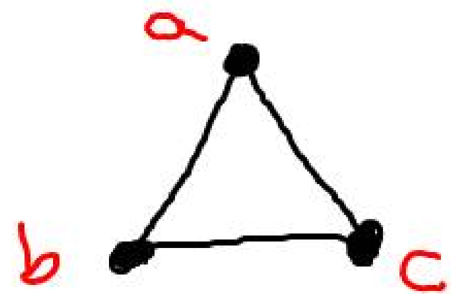
* שפה
* טענה בשפה.
* מערכת טענות/אקסיומות.
* מודל לשפה.
* המחשה למודל.
* מתי מודל מקיים/אינו מקיים אקסיומה/מערכת.

מערכת *

1. קיימים שני ישרים.
2. לכל שתי נקודות קיים ישר יחיד ששתיהן עליו.
3. קיימות שלוש נקודות שאינן על ישר אחד.
4. לכל ישר l ולכל נקודה P.
אם P אינה על l אז קיים ישר m כך ש:
(P על m וגם ל-m ול-l אין נקודות משותפות).

אילו מהמודלים הבאים (המוצגים על ידי המחשות) מקיימים את המשפט?

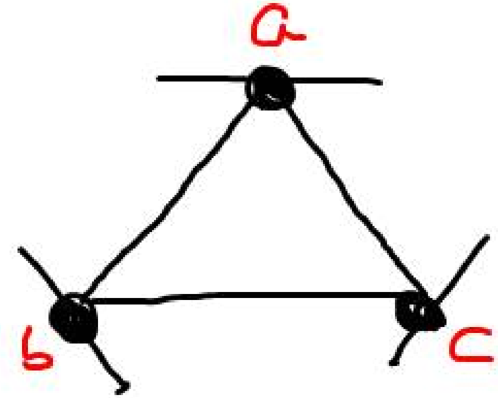
i



נתבונן ב $\{a,b\}$ ובנקודה c.
$c \notin \{a,b\}$ אבל לא ישר המכיל את c יש נקודה משותפת עם $\{a,b\}$.

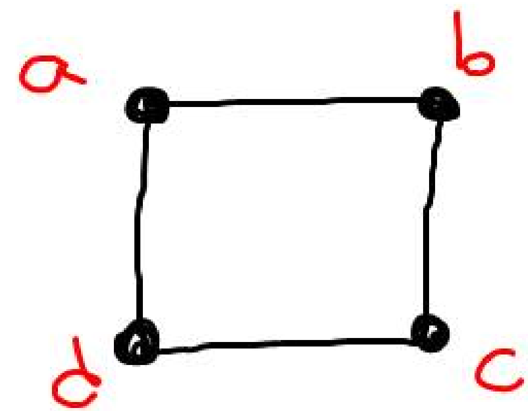
לכן אקסיומה (4) אינה מתקיימת.
מכאן שהמודל אינו מקיים את המשפט.

(ii)



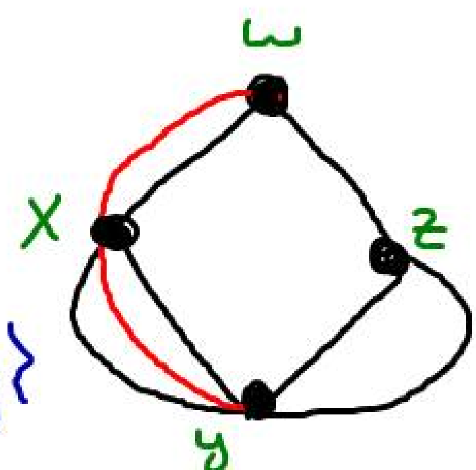
המודל מקיים את המערכת.

(iii)



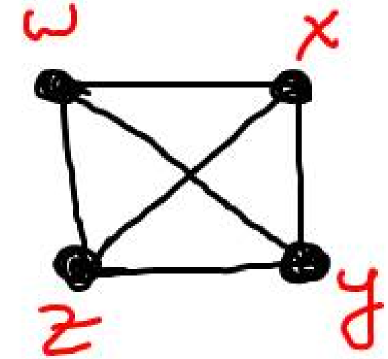
לנקודות a,c אין ישר
שעובר עליו לכן אקסיומה
(2) אינה מתקיימת.
המודל אינו מקיים את
המערכת.

(iv)



לנקודות x,y יש יותר מישר
אחד שעובר עליו. הישרים $\{x,y\}$
$\{w,x,y\}$ הם ישרים במודל. המודל אינו

מקיים של אלגוריתם (ב) ומספר טיין מקיים את
המערכת.



המלבן מקיים את המערכת.

נביעה

הגדרה

תהא A מערכת אקסיומות ותהא α אקסיומה.

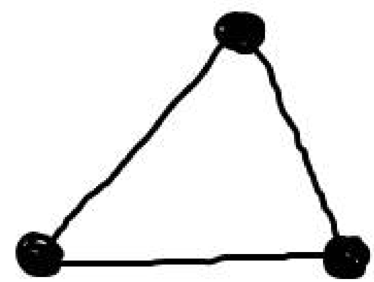
נאמר כי α נובעת מ A אם כל מודל המקיים את A מקיים את α.

תרגיל

במערכת ④ האם אקסיומה (4) נובעת
מ (1,2,3) ?

תשובה

נתבונן במודל:



המודל מקיים אקסיומות (1,2,3), והראינו
שאינו מקיים את אקסיומה (4),
לכן קיים מודל המקיים את (1,2,3) ואינו מקיים

או (4).

לכן (4) אינה נובעת מ (1,2,3).

תרגיל

במערכת (*) האם אקסיומה (1) נובעת מאקסיומות (2,3,4)?

תשובה

יהי M מודל המקיים את (2,3,4).

לפי אקסיומה (3) קיימות שלוש נקודות

$A,B,C \in M$ שאינן על ישר אחד.

לפי אקסיומה (2) קיים ישר (יחיד) ש A,B
עליו. נסמנו l ($l \in M$).

מהגדרה A,B,C נובע $C \notin l$.

לפי אקסיומה (4) קיים ישר m כך ש
$C \in m$ וגם $m \cap l = \emptyset$.

$C \in m$, $C \notin l$ לכן $m \neq l$.

מכיון ש $l, m \in M$ שני ישרים שונים.

לכן אקסיומה (1) מתקיימת ב M.

מכיון ש (1) נובעת מ (2,3,4). מש"ל.

תרגיל

הראו כי מהמערכת ⊛ נובע המשפט:

"לכל שתי נקודות קיים ישר ששתיהן אינן עליו"

תשובה

יהי M מודל המקיים את ⊛.

תהיינה $A,B\in M$ נקודות.

לפי אקסיומה (2) קיים ישר $l\in M$

כך ש $A,B\in l$.

לפי אקסיומה (3) קיימות שלוש נקודות

$X,Y,Z\in M$ שאינן על ישר אחד.

בפרט אחת מהן אינה על l.

ללא הגבלת הכלליות נניח $X \notin l$.

לפי (4) קיים ישר M כך ש $X \in M$ וגם $M \cap l = \emptyset$.

בפרט $A \notin M$ וגם $B \notin M$.

לכן קיים ישר ש A ו B אינן עליו.

לכן M מקיים את המשפט ומכאן שהמשפט נובע מהמערכת.

מערכת בעלת סתירה

הגדרה

מערכת תקרא בעלת סתירה אם נובעת ממנה שלילה של אחת האקסיומות.

הערה

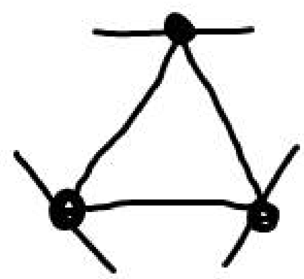
כיוון שבמודל לא יכולות להתקיים טענה ושלילתה נובע כי למערכת בעלת סתירה אין מודל.
ולהיפך מערכת שיש לה מודל אינה בעלת סתירה (חסרת סתירה).

תרגיל

הראו כי המערכת ⊛ חסרת סתירה.

תשובה

נתבונן במודל:



המודל מקיים את המערכת ולכן המערכת חסרת סתירה.

מש״ל.

תרגיל

נוסיף למערכת (*) את האקסיומה:

ז. לכל שני ישרים יש נקודה משותפת.

הראו כי המערכת החדשה בלתי סתירה.

תשובה

יהי M מודל המקיים את המערכת.

מאקסיומה (ג) יש שני ישרים $l,m\in M$.

$l\neq m$ לכן $l\not\subseteq m$ או $m\not\subseteq l$.

ללא הגבלת הכלליות נניח $l\not\subseteq m$.

לכן קיימת נקודה x כך ש $x \in l$ וגם $x \notin m$.

בפרט $x \notin m$.

לפי אקסיומה (4) קיים ישר a כך ש $x \in a$

וגם $a \cap m = \emptyset$.

לכן קיימים שני ישרים שאין להם נקודה משותפת

מכיון שהמערכת נובעת השלילה של אקסיומה (5)

ולכן המערכת בלתי סתירה.

מש״ל.

מערכות קטגוריות

שקילות בין מודלים

יהיו M_1, M_2 מודלים לשפת הגיאומטריה.

M_1, M_2 ייקראו שקולים אם קיימת $F: M_1 \to M_2$

חד חד ערכית ועל המשמרת פירוש מושגי יסוד:

1. $a \in M_1$ נקודה אם ורק אם $F(a) \in M_2$ נקודה
2. $l \in M_1$ ישר אם ורק אם $F(l) \in M_2$ ישר
3. $a \in l$ אם ורק אם $F(a) \in F(l)$.

פונקציה כזו תקרא פונקציית שקילות.

תרגיל

האם המודלים הבאים שקולים ?

$$M = \{a, b, c, d, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}\}$$

$$N = \{1, 2, 3, 4, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}\}$$

תשובה

נניח בשלילה שקיים פונקציית שקילות $f: M \to N$

נתבונן ב d.

$f(d)$ נקודה ב N ולכן, כיוון שב N כל

נקודה נמצאת על ישר, קיים ישר $\ell \in N$

כך ש $\mathcal{F}(b) \in l$.

לכן $b \in \mathcal{F}^{-1}(l)$. בסתירה לכך שאין ישר
ב M ש b נמצא עליו.
לכן אין פונקציית שקילות בין M ל N ולכן
M ו N אינם שקולים.

משפט (מותר להשתמש בו)

יהיו M, N מודלים לשפה כלשהי.

אם M ו-N שקולים

אז לכל טענה α בשפה. M מקיים את α

אם ורק אם

N מקיים את α

מסקנה

אם קיימת טענה α שאחד המודלים מקיים והאחר אינו מקיים אז המודלים אינם שקולים. (α נקראת טענה מבדילה).

תרגיל

האם המודלים הבאים שקולים?

$$M = \{a,b,c,d, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}\}$$

$$N = \{1,2,3,4, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}\}$$

תשובה

נתבונן בטענה "כל נקודה נמצאת על ישר".

N מקיים את הטענה. M אינו מקיים את הטענה.

לכן המודלים אינם שקולים.

הגדרה

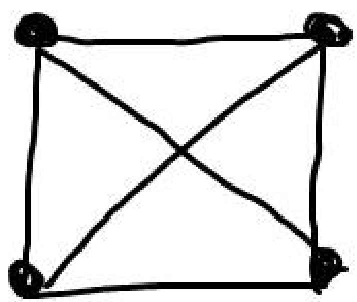
מערכת תקרא קטגורית אם היא חסרת
סתירה וגם כל שני מודלים המקיימים אותה
שקולים

תרגיל

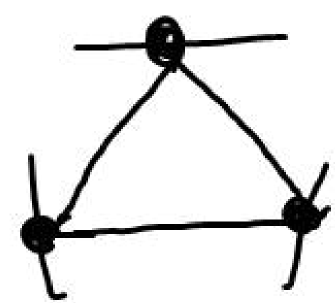
הוכיחו כי המערכת ⊛ אינה קטגורית.

תשובה

נתבונן במודלים הבאים המקיימים את המערכת:



N



M

נתבונן בטענה: "קיימות בדיוק שלוש נקודות".

M מקיים את הטענה. N אינו מקיים את הטענה

ולכן M ; N אינם שקולים ולכן

המערכת אינה קטגורית

משל:

תרגיל

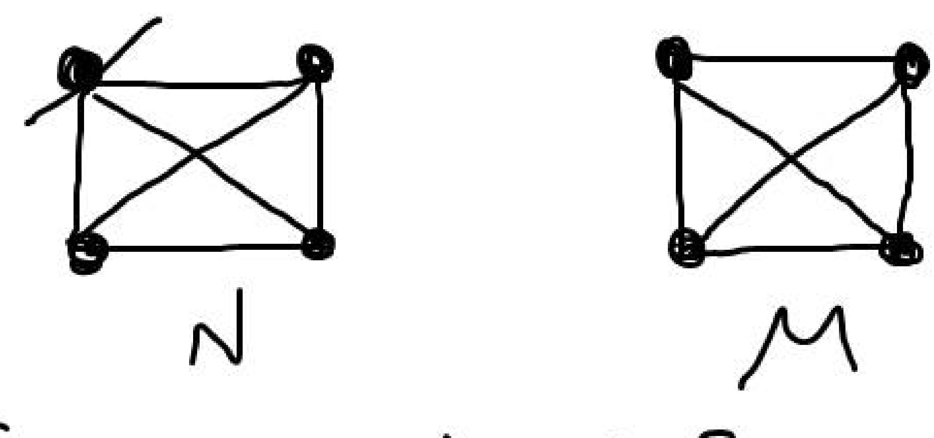
נוסיף למערכת את האקסיומה:

ל. קיימות 4 נקודות בדיוק.

האם המערכת החדשה קטגורית?

תשובה

נתבונן במודלים הבאים המקיימים את המערכת:



נתבונן בטענה: "קיים ישר שעליו נקודה אחת בדיוק"

M אינו מקיים את הטענה.

N מקיים את הטענה.

לכן M ו־N אינם שקולים ולכן המטרה אינה
קטגורית

מש"ל.

מערכת שלמה

מערכת אקסיומות תקרא שלמה אם
היא חסרת סתירה וגם
לכל אקסיומה α :

α נובעת מהמערכת

או

(לא α) נובעת מהמערכת.

<u>הערות</u>

1. בעצם לומר ש (לא α) נובעת מהמערכת

פירושו שכל מודל המקיים את המערכת מקיים

את (לא α).

כלומר לא קיים מודל המקיים את המערכת וגם α.

לכן במקום לומר "(לא α) נובעת מהמערכת"

ניתן לומר "הוספת α למערכת יוצרת מערכת

בעלת סתירה".

2. אם כך מערכת אינה שלמה אם
היא בעלת סתירה או
שקיימת טענה α כך ש:

α אינה נובעת מהמערכת

קיים מודל
המקיים את
המערכת
וגם
מקיים את
לא α.

וגם

(לא α) אינה נובעת מהמערכת.

קיים מודל המקיים את המערכת

וגם מקיים את (לא α).

ומקיים את α.

3. כל תורה קטגורית היא שלמה.

תרגיל

נגדיר את המערכת הבאה:

1. קיימות שלוש נקודות שלא על ישר אחד בדיוק.

2. לכל שתי נקודות קיים ישר יחיד ששתיהן עליו.

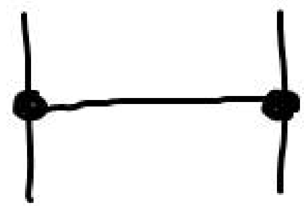
3. לכל ישר ℓ ולכל נקודה P שאינה על ℓ קיים ישר יחיד m כך ש $P \in M$ וגם $M \cap \ell = \phi$.

$m \parallel \ell$

א. הראו כי המערכת חסרת סגירה.

תשובה

נתבונן במודל:



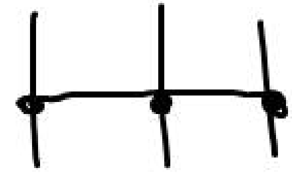
המודל מקיים את המערכת ולכן המערכת חסרת סגירה.

ב. הראו כי המערכת אינה שלמה.

תשובה

נתבונן בטענה "קיימות שתי נקודות בדיוק".

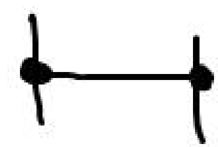
נתבונן במודל



המודל מקיים את המערכת ואינו מקיים את הטענה.

(1) לכן הטענה אינה נובעת מן המערכת.

נתבונן במודל



המודל מקיים את המערכת וגם את הטענה

(2) לכן שלילת הטענה אינה נובעת מן המערכת.

מ (1) ו (2) נובע כי המערכת אינה שלמה.

ג. הוכיחו כי המערכת אינה קטגורית

תשובה

נתבונן במודלים הבאים:

M_1 $\qquad\qquad$ M_2

המודלים מקיימים את המערכת.

נתבונן בטענה "קיימת בדיוק 3 נקודות"

M_1 אינו מקיים אותה ! M_2 מקיים אותה

לכן הם אינם שקולים ולכן המערכת אינה קטגורית.

3. הראו כי מהמערכת נובע המשפט:

"לכל ישר קיימת נקודה הנמצאת עליו".

תשובה

יהי M מודל המקיים את המערכת.

יהי $l \in M$ ישר.

לפי אקסיומה 1ג קיימת נקודה $p \in M$

וקיימים ישרים $m, q \in M$ שונים כך ש

$p \in m$ וגם $p \in q$ וגם p איננה על l או

ישר אחר.

$P\in l$ או $P\notin l$

<u>מקרה 1: נניח $P\in l$</u>

אז קיימת שורה הנמצאת על l.

<u>מקרה 2: $P\notin l$</u>

מאקסיומה (3) קיים ישר <u>יחיד</u> $\alpha\in M$

כך ש $P\in\alpha$ וגם $\alpha\cap l=\emptyset$.

מבית. דו_ ונניח ש $P\in q$ וגם $P\in m$

נניח ש $q\cap l\neq\emptyset$ או $m\cap l\neq\emptyset$.

ומכאן בפרט $\ell \neq \emptyset$ ולכן קיימת נקודה
של ℓ.

לכן על T יש קיימת נקודה.

מש"ל.

ה) הראו כי מהמשפט נובע המשפט:

"קיים ישר שכל הנקודות עליו"

תשובה

יהי M מודל המקיים את המערכת.

לפי אקסיומה (1) קיימת נקודה $P\in M$, כך ש

קיימים ישרים שונים $m,q\in M$ כך ש:

$P\in m$ וגם $P\in q$ וגם P אינה על אף ישר אחר.

$m\neq q$ לכן $m\not\subseteq q$ וגם $q\not\subseteq m$.

ללא הגבלת הכלליות נניח $m\not\subseteq q$ לכן קיימת

נקודה $A\in M$ כך ש $A\in m$ וגם $A\notin q$.

נתבונן ב M.

יהא $x \in M$ נקודה.

מאקסיומה (g) קיים ישר יחיד ש x ו p

שניהם עליו.

מההנחה על p נובע ש הישר יכול להיות

m או q.

לכן $x \in m$ או $x \in q$. (i)

נניח בשלילה ש $x \in q$.

מאקסיומה (g) קיים ישר $\ell \in M$ עם ש

$X\in l$ וגם $A\in l$.

$A\in l$ וגם $A\notin q$ לכן $q\neq l$. (ii)

$X\in q$ וגם $P\in q$ לכן לפי (2) q

הוא הישר היחיד ש P, X עליו.

$P\in m$ וגם $m\neq q$ לכן $X\notin m$. ולכן $m\neq l$. (iii)

מ (ii) ו (iii) נובע $P\notin l$.

לפי אקסיומה (3) קיים ישר $\alpha\in M$ כך ש $P\in\alpha$

וגם $\alpha\cap l=\emptyset$.

$\alpha \cap \ell \neq \phi$ לכן $X \notin \alpha$ וגם $A \notin \alpha$

לכן $\alpha \neq q$ וגם $\alpha \neq m$ ולכן α, m, q

$\exists$ ישרים שונים העוברים דרך P בסתירה להגדרת P.

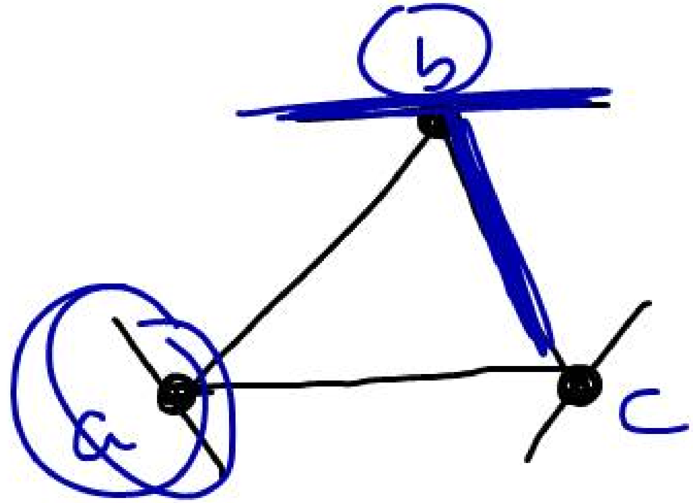
מכאן $X \notin q$ (iv)

מ-(i) ו-(iv) נובע ש $X \in m$.

ולכן m מכיל את ג הנקודות,

מש"ל.

$$M = \{a,b,c,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$$



אין נקודה הנמצאת על שני ישרים שונים בדיוק

לכן אקסיומה (1) אינה מתקיימת.

עבור הישר $\{a\}$ והנקודה b שאינה עליו, קיימים

שני מקבילים ל $\{a\}$ דרך b. $\{b,c\}$, $\{b\}$

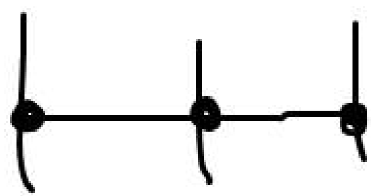
נושא 4: אקסיומה נוספת למערכת:

(4) קיימות שלוש נקודות בדיוק.

① הוכח כי המערכת החדשה חסרת סתירה.

<u>תשובה</u>

נתבונן במודל



המודל מקיים את המערכת החדשה ולכן

היא חסרת סתירה.

② הראה כי המערכת החדשה קטגורית.

תשובה

יהי M מודל המקיים את המערכת.

א 4) קיימות במודל 3 נקודות בדיוק. נסמן A, B, C.

א 1) קיימת נקודה הנמצאת על שני ישרים בדיוק.

בה"כ A על שני ישרים בדיוק.

לכן קיימים ישרים $l, m \in M$ כך ש $A \in l$

וגם $A \in m$ וגם A אינה על אף ישר אחר.

לפי סעיף ג אחד הישרים מכיל את כל הנקודות.

ל. ה. כ. $l=\{A,B,C\}$.

$A\in m$ ומהיחידות באקסיומה (2) $B,C\notin m$

לכן $m=\{A\}$.

$B\notin m$. מאקסיומה (3) קיים ישר $q\in M$ ע ש

$B\in q$ וגם $q\cap m=\emptyset$. לכן $A\notin q$ בדומה לנקודה $C\notin q$.

לכן $q=\{B\}$.

באופן דומה $\{C\}$ ישר במודל.

אין ישר נוסף המכיל 2 שונות מהיחידות באקסיומה (2).

מסעיף ג' של ב יש יש שורה.

לכן $M = \{A, B, C, \{A, B, C\}, \{A\}, \{B\}, \{C\}\}$

שקול למודל מסעיף 1.

לכן המערכת קטגורית.

מש"ל.

אי תלות

מערכת תקריו בלתי תלויה אם אין בה
אקסיומה הנובעת מיתר האקסיומות.

הערה

בעצם זה אומר שכל אקסיומה איננה נובעת מהיתר.
כלומר לכל אקסיומה יש מודל המקיים את יתר האקסיומות
ולא אותה.

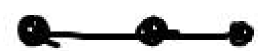
תרגיל

הראו ש המערכת (1,2,3,4) מהתרגיל הקודם
היא בלתי תלויה.

תשובה

אקסיומה (1)

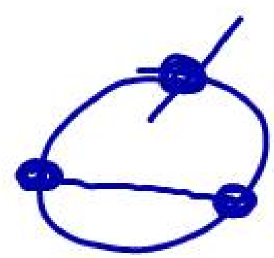
נתבונן במודל:



המודל מקיים את (2,3,4) ולא את (1)
לכן (1) אינה נובעת מ (2,3,4).

אקסיומה (2)

נתבונן במודל:

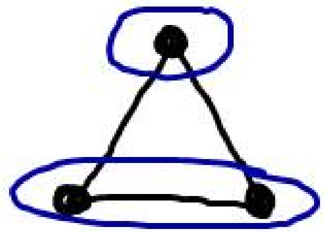


המודל מקיים את (1,3,4) ולא את (2). לכן (2) אינה

נובעת מ (1,3,4).

אקסיומה 3:

נתבונן במודל:

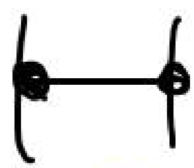


המודל מקיים את (1,2,4) ואינו מקיים את (3).

לכן (3) אינה נובעת מ (1,2,4).

אקסיומה 4:

נתבונן במודל



המודל מקיים את (1,2,3) ולא את (4)

לכן (4) אינה נובעת מ (1,2,3).

לכן המערכת בלתי תלויה.

מש"ל.

תרגיל

הראו כי מארבע אקסיומות החילה הראשונות ומאקסיומת המקבילים נובע קיומן של 4 נקודות.

תשובה

יהי M מודל המקיים את האקסיומות דלעיל.

לפי $(I-1)$ קיימות שתי נקודות השונות זו מזו. נסמנן $A,B\in M$.

מאקסיומה $(I-2)$ קיים ישר $l\in M$ כך ש $A,B\in l$.

מאקסיומה (I-4) קיים נקודה $C \in M$

כך ש $C \notin l$. בפרט $C \neq A$, $C \neq B$.

מאקסיומה (V-1) קיים ישר $m \in M$ כך ש

$C \in m$ וגם $m \parallel l$.

מאקסיומה (I-2) קיים ישר $\alpha \in M$ כך ש

$B, C \in \alpha$.

$C \in \alpha$ וגם $C \notin l$ לכן $\alpha \neq l$.

$A, B \in l$ ומהיחידות באקסיומה (I-2), l הוא הישר היחיד

ש A,B עליו.

$\alpha\neq\ell$, $B\in\alpha$ לכן $A\notin\alpha$.

מאקסיומה $(V-1)$ קיים ישר $m\in M$ כך ש

$A\in m$ וגם $m\parallel\alpha$.

$m\parallel\alpha$! $B\in\alpha$ לכן $B\notin m$.

$B\in\ell$ ולכן $\ell\neq m$.

$\ell\parallel M$, $A\notin M$, $A\in\ell$ לכן מהיחידות באקסיומה

המקבילים, ℓ הוא הישר היחיד העובר דרך
A ומקביל ל m.

$A\in r$ ולכן r אינו מקביל ל m.

לכן קיימת נקודה $D\in M$ כך ש $D\in r$ וגם $D\in m$.

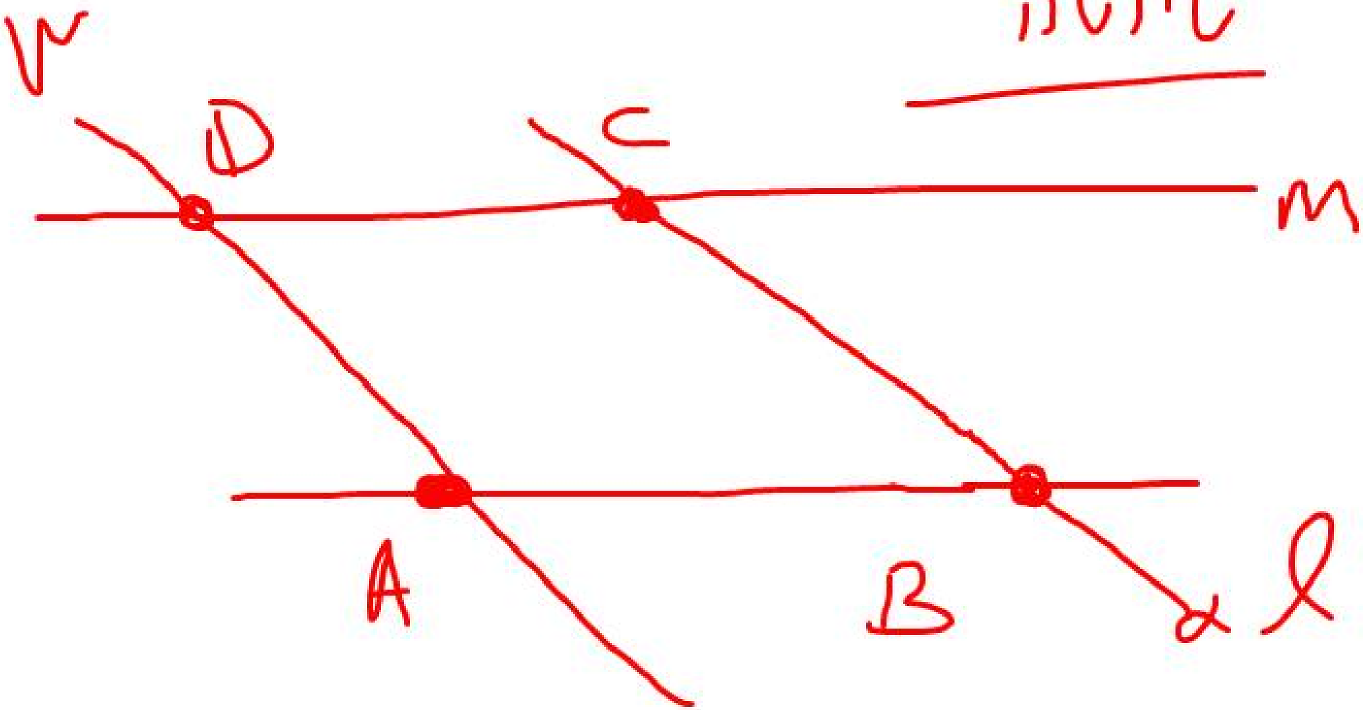
$D\in m$, $A\notin m$ ולכן $D\neq A$

בדומה $D\neq B$.

$C\in\alpha$, $D\in r$, $\alpha\cap r=\emptyset$ לכן $D\neq C$.

מכאן A,B,C,D 4 נקודות שונות. מ.ש.ל.

טיוטה

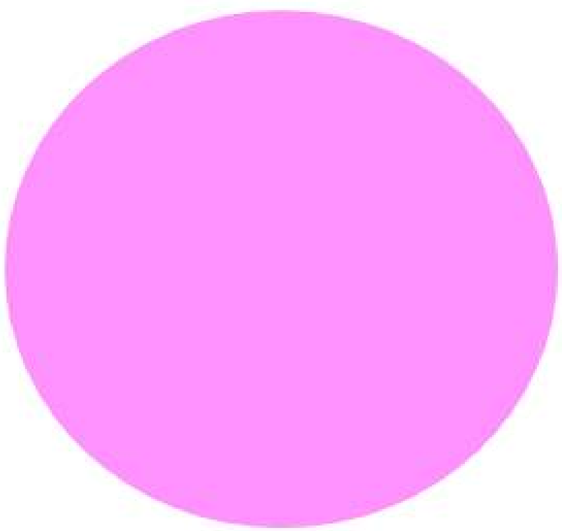


המישור הסטנדרטי ומודלים הנגזרים ממנו

תרגיל

נתבונן במודל המתקבל מהמישור כרגיל

באופן הבא:



הנקודות הן כל הנקודות בעיגול

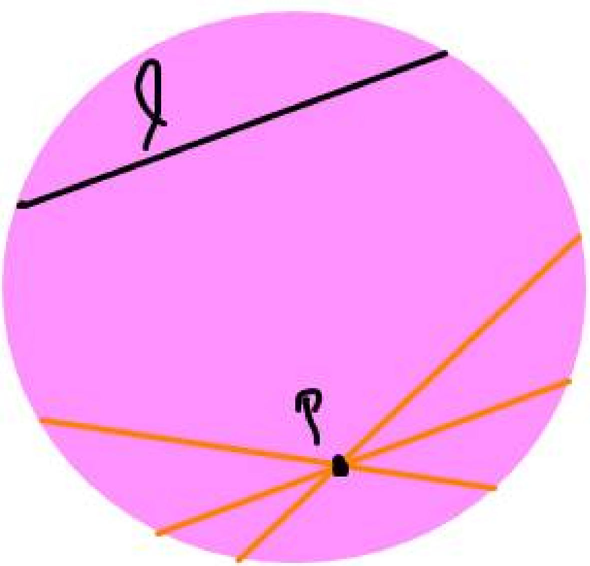
פנים (כולל המעגל)

ישרים הם מיתרים בעיגול.

סדר וחפיפה מפורשים כרגיל.

① הראו כי אקסיומת המקבילים אינה מתקיימת במודל.

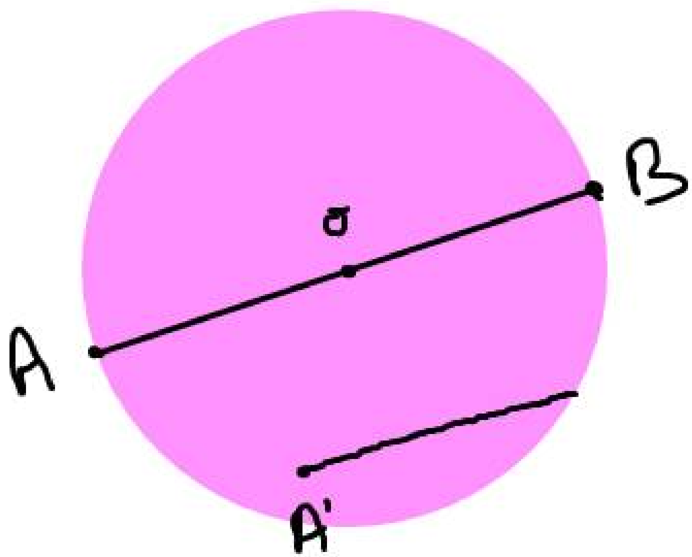
תשובה



יחידות המקביל אינה מתקיימת.

נובע שאקסיומת המקבילים אינה נובעת מארבע אקסיומות ההלה הראשונות.

② הראו כי אקסיומת החפיפה הראשונה אינה
מתקיימת במודל.



תשובה

אין נקודה B' כך
ש $AB \cong A'B'$.

לשבוע הבא

ממ"ן 16 לעוד שבועיים.

לקרוא היטב יחידה 12.

$\boxed{\text{אינדוקציה היא חלק מהחומר.}}$

יחידה 9 - ט

	כן	לא
האם טענה נובעת ממערכת?	✓	✓
האם מערכת בעלת סתירה	✓	✓
האם מערכת קטגורית?	✓	✓
האם מערכת שלמה?		✓
האם מערכת בלתי תלויה?	✓	✓

בשיעור קודם
הראינו שאקסיומה
(2) במערכת
נובעת מהיתר