נחשב:

$$\sum_{v\in V}\left(d_1(v)+d_2(v)\right)=\sum_{v\in V}d_1(v)+\sum_{v\in V}d_2(v)$$

לפי טענה 1.3 בעמ' 10 בחוברת נקבל

$$=2E_1+2E_2$$

כאשר E_1,E_2 הם מספרי הקשתות בכל אחד מהעצים.

מכיון שמדובר בעצים, ושניהם על אותה קבוצת צמתים V, נקבל מעמוד 19 משפט 2.5 סעיף 4:

$$=2(|V|-1)+2(|V|-1)=4|V|-4$$

קיבלנו: $\sum_{v\in V}\left(d_1(v)+d_2(v)\right)=4|V|-4$

אילו **לכל** $v\in V$ היה $d_1(v)+d_2(v)\geq 4$, היה בהכרח $\sum_{v\in V}\left(d_1(v)+d_2(v)\right)\geq 4|V|$,

בסתירה למה שקיבלנו. לכן לא ייתכן **שלכל** $v\in V$ יהיה $d_1(v)+d_2(v)\geq 4$.

במלים אחרות, **קיים** $v\in V$ עבורו $d_1(v)+d_2(v)\leq 3$.

תשובה 2 (תקציר)

א. בין כל שני צמתים שאינם שכנים יש מסלול באורך 2 (מדוע?)

ב. כהכנה לסעיף הבא נחשב כבר את דרגות כל הצמתים בגרף:
הסכומים $a+b$ השונים האפשריים הם: 2,3,4,5,6.
מספר הצמתים עבור כל סכום הוא, בהתאמה: 1,2,3,2,1.
הדרגות הן, בהתאמה: 8,7,6,7,8.
מכאן בפרט דרגות שני הצמתים שבשאלה...

ג. $(1\cdot 8+2\cdot 7+3\cdot 6+2\cdot 7+1\cdot 8)/2=62/2=31$

ד. יש ארבעה צמתים בעלי דרגה אי-זוגית: $(2,3)$, $(3,2)$, $(1,2)$, $(2,1)$.

תשובה 3

א. תהי $\{v_1,\ldots,v_6\}$ קבוצת הצמתים בצד אחד של $K_{6,6}$ ותהי $\{w_1,\ldots,w_6\}$ קבוצת הצמתים בצד השני. ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) נניח שהקשת שהוסרה היא v_6w_6.

זיווג מושלם בגרף שהתקבל לאחר הסרת הקשת v_6w_6 הוא, במלים אחרות, זיווג מושלם בגרף המקורי $K_{6,6}$, כאשר נתון שהקשת v_6w_6 לא נכללת בזיווג.

כדי למצוא כמה זיווגים מושלמים כאלה קיימים, נמצא בכמה זיווגים מושלמים של $K_{6,6}$ **נכללת** הקשת v_6w_6:

אם v_6w_6 חייבת להיות בזיווג, נותר למצוא זיווג מושלם בגרף הדו-צדדי המלא $K_{5,5}$ על הצמתים $\{w_1,\ldots,w_5\}$, $\{v_1,\ldots,v_5\}$ - ולהיפך, כל זיווג מושלם של $K_{5,5}$, בתוספת הקשת v_6w_6, הוא זיווג מושלם הכולל את הקשת v_6w_6, ב- $K_{6,6}$.

מובן כי ב- $K_{5,5}$ יש $5!$ זיווגים מושלמים.

לפיכך מספר הזיווגים המושלמים בגרף ללא הקשת v_6w_6 הוא $6!-5!=600$.

ב. נפריד לשני מקרים.

מקרה (*i*): לקשת השניה שהשמטנו אין צומת משותף עם v_6w_6.

במקרה כזה נניח ב.ה.כ. שהקשת השניה שהושמטה היא v_5w_5.

תהי A קבוצת הזיווגים המושלמים של $K_{6,6}$ בהם מופיעה הקשת v_6w_6,

ותהי B קבוצת הזיווגים המושלמים של $K_{6,6}$ בהם מופיעה הקשת v_5w_5.

אנו מחפשים את $|U-(A\cup B)|$, כאשר U היא קבוצת הזיווגים המושלמים של K_6.

לפי סעיף א, $|A|=5!$. בדומה מובן כי $|B|=5!$.

עוד בדומה נקבל: $|A\cap B|=4!$.

לכן $|U-(A\cup B)|=6!-2\cdot 5!+4! = 504$.

מקרה (*ii*): לקשת השניה שהשמטנו יש צומת משותף עם v_6w_6.

במקרה כזה נניח ב.ה.כ. שהקשת השניה שהושמטה היא v_6w_5.

תהי A קבוצת הזיווגים המושלמים של $K_{6,6}$ בהם מופיעה הקשת v_6w_6,

ותהי B קבוצת הזיווגים המושלמים של $K_{6,6}$ בהם מופיעה הקשת v_6w_5.

הפעם $A\cap B=\varnothing$.

לכן התשובה הפעם: $480 = 6!-2\cdot 5! = |U-(A\cup B)|$

תשובה 4 (תקציר)

הגרף המשלים מכיל עותק של $K_{3,3}$ (נמקו זאת!).

לפי שאלה 3ב בעמ' 61 בחוברת, $K_{3,3}$ אינו מישורי.

מובן שגרף המכיל גרף שאינו מישורי - אינו יכול להיות מישורי.

תשובה 5

א. לצמתים v,w מותאמת אותה סדרה של אותיות A,B . נעבור על הסדרה אות-אות.

האות הראשונה בסדרה של v שווה לאות הראשונה בסדרה של w ,

משמע v,w נמצאים באותו צד של הגרף G_1 , ולכן אין ביניהם קשת ב- G_1 .

האות השניה בסדרה של v שווה לאות השניה בסדרה של w ,

משמע v,w נמצאים באותו צד של הגרף G_2 , ולכן אין ביניהם קשת ב- G_2 .

וכן הלאה... קיבלנו שבאף אחד מהגרפים $G_1,\ldots,G_5$ אין קשת בין v ל- w.

מהגדרת G, זה אומר שאין קשת כזו ב- G.

ב. נצבע כל צומת של G ב"צבע" שהוא סדרת האותיות שמותאמת לו.

קבוצת הצבעים היא אפוא קבוצת הסדרות באורך 5 של אותיות A,B .

סעיף א אומר בדיוק שהצביעה שהגדרנו כאן היא צביעה נאותה!

מספר הסדרות הוא 32.

צבענו את G צביעה נאותה ב- 32 צבעים, ולכן מספר הצביעה של G אינו יותר מ- 32.

ג. נוכיח ש- K_{32} , הגרף המלא על 32 צמתים, הוא כזה.

ראשית מובן שמספר הצביעה של K_{32} הוא בדיוק 32.

נראה ש- K_{32} הוא איחוד של 5 גרפים דו-צדדיים :

נחלק בצורה שרירותית את 32 הסדרות של אותיות A,B ל- 32 צמתי הגרף, סדרות שונות לצמתים שונים.

תלמידי מדעי המחשב יעדיפו את הגישה הבאה : ☺

נמספר את 32 הצמתים שרירותית במספרים $0,\ldots,31$,

נרשום כל מספר בבסיס 2, נהפוך אותו למחרוזת ונרפד באפסים בתחילת המספר כדי להשלים לסדרה באורך 5 .

השלימו מנקודה זו (באחד משני הנוסחים) את בניית הגרפים $G_1,\ldots,G_5$.

בהצלחה בבחינה!

איתי הראבן