מתמטיקה דיסקרטית 20283 פתרון ממ"ן 11 אביב 2006ב

תשובה 1

א. נכון	ב. לא נכון	ג. לא נכון	ד. נכון
ה. לא נכון	ו. לא נכון	ז. נכון	ח. נכון

תשובה 2

א. **נכון**. למען ההדגמה ניתן שתי הוכחות.

הוכחה 1: עלינו להוכיח $A - (B - A) = A$.

הכלה בכיוון אחד:

יהי $x \in A - (B - A)$. מהגדרת חיסור קבוצות, $x \in A$.

הכלה בכיוון שני:

יהי $x \in A$. אז מהגדרת חיסור קבוצות, $x \notin B - A$.

משתי עובדות אלה, שוב מהגדרת חיסור קבוצות, $x \in A - (B - A)$.

הראינו הכלה דו-כיוונית, משמע הקבוצות שוות.

הוכחה 2: מהגדרת חיסור קבוצות, אברי $B - A$ הם אברי B שאינם שיכים ל- A.

בפרט, $A \cap (B - A) = \emptyset$ (*)

כעת נתבונן בטענה שבשורה השניה בראש עמ' 21 בספר.

נרשום אותה עם משתנה X במקום B שמופיע שם: $A \cap X = \emptyset$ אם"ם $A - X = A$.

בפרט, כיוון אחד של טענה זו הוא: אם $A \cap X = \emptyset$ אז $A - X = A$.

נציב $X = B - A$, ובעזרת (*) נקבל $A - (B - A) = A$.

ב. **לא נכון**. דוגמא נגדית: נקח $x \neq \emptyset$ כלשהו, ותהי $A = \{x\}$.

אז $P(A) = \{\emptyset, A\}$.

כעת $x \in A$, אבל $x \notin P(A)$ (כי $x \neq \emptyset$ ו- $x \neq \{x\}$).

הראינו איבר של A שאינו ב- $P(A)$, לכן A אינה חלקית ל- $P(A)$.

ג. **נכון**. התנאי $X \in P(A \cap B)$ שקול, לפי הגדרת קבוצה חזקה, לתנאי $X \subseteq A \cap B$.
לפי שאלה 1.10 ב', זה שקול ל-

$X \subseteq A$ וגם $X \subseteq B$.

שוב לפי הגדרת קבוצה חזקה, זה שקול ל-

$X \in P(A)$ וגם $X \in P(B)$.

ומהגדרת חיתוך, זה שקול ל-

$X \in P(A) \cap P(B)$.

קיבלנו: $X \in P(A \cap B)$ **אםם** (אם ורק אם) $X \in P(A) \cap P(B)$,
ולכן ,לפי הגדרה 1.1 , שתי הקבוצות שוות.

תשובה 3

א. בעזרת ההדרכה לשאלה

$(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap C'$

לפי סעיף 1.3.4 (פילוג החיתוך מעל האיחוד)

$= (A \cap C') \cup (B \cap C')$

ושוב לפי ההדרכה לשאלה

$= (A - C) \cup (B - C)$

ב. לפי חוק הפילוג (דיסטריבוטיביות) של האיחוד מעל החיתוך:

$(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B')$

כאן השתמשנו בחוק הפילוג כדי לכנס איברים, לא כדי לפלג.

לפי טענה בסוף עמ' 22 בספר, $B \cup B' = U$. נציב זאת ונקבל $A \cap U$.

מובן ש- $A \cap U = A$ (הנחנו ש- U מכילה את כל הקבוצות שבדיון. לפי שאלה 1.11ב שבעמ' 16 בספר, אם $A \subseteq U$ אז $A \cap U = A$).

קיבלנו כמבוקש $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$.

ג. **כיוון אחד**: נניח $X = Y$ ונוכיח $X \Delta Y = \emptyset$:

לפי שאלה 1.22 בעמ' 27 בספר, $X \Delta X = \emptyset$.

כיוון שני: נניח $X \Delta Y = \emptyset$ ונוכיח $X = Y$:

בשוויון $X \Delta Y = \emptyset$ נבצע הפרש סימטרי עם Y בשני האגפים:

$(X \Delta Y) \Delta Y = \emptyset \Delta Y$ (*)

נפתח את אגף שמאל של (*): $(X \Delta Y) \Delta Y = X \Delta (Y \Delta Y) = X \Delta \emptyset = X$

ואת אגף ימין של (*): $\emptyset \Delta Y = Y$.

בשני הפיתוחים נעזרנו בתכונות של הפרש סימטרי משאלה 1.22 בספר.

קיבלנו שאגף אחד של (*) שווה X והאגף השני שווה Y, לכן $X = Y$.

ד. ניעזר בתכונות של הפרש סימטרי שהוכחו בשאלה 1.22 בספר.

מאסוציאטיביות:

$(A \Delta B) \Delta (B \Delta C) = A \Delta (B \Delta (B \Delta C))$

ושוב אסוציאטיביות:

$$= A \; ((B \quad B) \quad C))$$

ובעזרת שתי תכונות נוספות שהוכחו בסעיף ב באותה שאלה,

$$= A \; (\qquad C)) = A \quad C$$

תשובה 4

א. $A_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \le x \le 0\} = \emptyset$ $\qquad A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \le x \le 2\} = \emptyset$

$A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \le x \le 4\}$ $\qquad A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \le x \le 6\}$

$$B_0 = A_1 - A_0 = \emptyset - \emptyset = \emptyset$$

$$B_1 = A_2 - A_1 = A_2 - \emptyset = A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \le x \le 4\}$$

$$B_2 = A_3 - A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \le x \le 6\} - \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \le x \le 4\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \le 6\}$$

ב. *כאשר* $n \le m$*, אז מתוך* $3 \le x \le 2n$ *נובע* $3 \le x \le 2m$.

לכן, אם $n \le m$ *אז* $A_n \subseteq A_m$.

לפי שאלה 1.11 בעמ' 16 בספר, מההכלה $A_n \subseteq A_m$ *נובע* $A_n \cap A_m = A_n$.

ג. *החיתוך המבוקש בשאלה הוא קבוצת המספרים הממשיים השייכים* ***לכל*** *הקבוצות* A_n *החל מ-* $n = 2$*. לפי הסעיף הקודם כאן, בסדרת הקבוצות* A_n*, כל קבוצה מוכלת בקבוצה הבאה אחריה. לכן* A_2 *מוכלת בכל אלה שבאות אחריה.*

לכן החיתוך של כולן, החל מ- A_2 *והלאה, שווה* A_2 *, כלומר* $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \le x \le 4\}$.

ד. *נוכיח:* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \le x\}$

הכלה בכיוון אחד: *יהי* $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$*. משמע* x *שייך* ***לפחות לאחת*** *הקבוצות* A_n.

מהגדרת A_n נובע בפרט $3 \le x$.

הכלה בכיוון שני: יהי $3 \le x$. קיים k טבעי די גדול, שעבורו $x \le 2k$.

עבור אותו k, $x \in A_k$.

לכן, מהגדרת איחוד כללי של קבוצות, $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

משני הכיוונים יחד, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \le x\}$.

ה. נחשב קודם כל, עבור $2 \le n$ כלשהו:

$$B_n = A_{n+1} \setminus A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \le x \le 2n+2\} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \le x \le 2n\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2n < x \le 2n+2\}$$

כעת נוכיח ש- $\bigcup_{2 \le n \in \mathbb{N}} B_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x\}$.

הכלה בכיוון אחד: יהי $x \in \bigcup_{2 \le n \in \mathbb{N}} B_n$. משמע x שייך ***לפחות לאחת*** הקבוצות B_n.

מהנוסחה שרשמנו עבור B_n ומההנחה $2 \le n$ נובע בפרט $4 < x$.

הכלה בכיוון שני: יהי $4 < x$. יהי k המספר הטבעי הגדול ביותר שקטן ממש מ- $x/2$.

מתקיים $2k < x \le 2k+2$, וכן $2 \le k$. מהנוסחה שרשמנו עבור B_n, נובע $x \in B_k$.

מצאנו $2 \le k$ כך ש- $x \in B_k$. לכן, מהגדרת איחוד כללי של קבוצות, $x \in \bigcup_{2 \le n \in \mathbb{N}} B_n$.

משתי ההכלות יחד מתקבל השוויון המבוקש.

איתי הראבן