לשימוש הבודק

מבחן בדידה 2018 ג'

שאלה 1

א. [5]

כן

הסבר: יתכן כי α (עוצמות) אינן סתירה, או שאחד שקול לשלילת השני. אבל לא בהכרח אחד מהם דווקא.

ב. [1]

כן

$A=\{x\in\mathbb{R} \mid 0<x<1\}$

$B=\{\frac{1}{2^n} \mid n\in\mathbb{N}\}$

$|A|=\cancel{\aleph}\,c$

$|B|=\aleph_0$

$|Q|=\aleph_0$

$|Q|+|A\setminus Q|=|A|$

$\aleph_0+|A\setminus Q|=c$

$|A\setminus Q|=c$

$|A\setminus B|=c$ בנ"ל

$|A\setminus Q|=|A\setminus B|$ לכן

ג. [4]

כן

שאלה 2

$$A=\{1,2,3,\dots,9\}$$

R,S יחסים מעל A.

$xRy \Leftrightarrow \exists_{i\in\mathbb{N}}\left(\frac{y}{x}=3^i\right)$

$xSy \Leftrightarrow \exists_{j\in\mathbb{Z}}\left(\frac{y}{x}=3^j\right)$

א. נוכיח כי S יחס שקילות:

רפלקסיביות:

$\forall_{x\in A}\left(\frac{x}{x}=1\right)$

$\Rightarrow \forall_{x\in A}\left(\frac{x}{x}=3^0\right)$ (קיים $j=0\in\mathbb{Z}$ שעונה על התנאי)

$\Rightarrow xSx$ ■ (מהגדרת S)

סימטריות:

xSy

$\Rightarrow \exists_{j\in\mathbb{Z}}\left(\frac{y}{x}=3^j\right)$

$\Rightarrow \exists_{-j\in\mathbb{Z}}\left(\frac{x}{y}=3^{-j}\right)$ מס' שליליים נמצאים בקבוצת המספרים השלמים

$\Rightarrow ySx$ ■

טרנזיטיביות:

$x S y \wedge y S z$

$\Rightarrow \exists_{j\in\mathbb{Z}} \left(\frac{y}{x} = 3^{j}\right) \wedge \exists_{m\in\mathbb{Z}} \left(\frac{z}{y} = 3^{m}\right)$

$\Rightarrow \exists_{j,m\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\cancel{y}}{x}\cdot\frac{z}{\cancel{y}} = 3^{j}\cdot 3^{m}\right)$ נכפיל את היחסים

$\Rightarrow \exists_{j+m\in\mathbb{Z}} \left(\frac{z}{x} = 3^{j+m}\right)$ הסכום $j+m$ מספר שלם כי הוא חיבור של מס' שלמים

$\Rightarrow x S z$

■

ב. נמצא את מחלקות S:

$[1] = \{1, 3, 9\}$

$[2] = \{2, 6\}$

$[4] = \{4\}$

$[5] = \{5\}$

$[7] = \{7\}$

$[8] = \{8\}$

ג. נוכיח כי R סדר חלקי:

בדומה להוכחת הרפלקסיביות של S;

$\forall_{x\in A}\left(\frac{x}{x} = 1\right) \Rightarrow \forall_{x\in A}\left(\frac{x}{x} = 3^{0}\right) \Rightarrow 0\in\mathbb{N} \wedge \forall_{x\in A}\left(\frac{x}{x} = 3^{0}\right)$

$\Rightarrow \forall_{x\in A}(x R x)$

■

אנטי-סימטריות:

$xRy \wedge yRx$

$\Rightarrow \exists_{i\in\mathbb{N}}\left(\frac{y}{x}=3^i\right) \wedge \exists_{m\in\mathbb{N}}\left(\frac{x}{y}=3^m\right)$ הגדרת R

$\Rightarrow \exists_{i,m\in\mathbb{N}}\left(\frac{\cancel{y}}{\cancel{x}}\cdot\frac{x}{y}=3^i\cdot 3^m\right)$ נכפיל את היחסים

$\Rightarrow \exists_{i,m\in\mathbb{N}}\left(3^{i+m}=1\right)$

$\Rightarrow i+m=0$

לא ייתכן $i=-m$, מכיוון שאחד מהם יהיה שלילי בסתירה לכך ש m, i טבעיים, לכן בהכרח $m=0, i=0$. (כי $0+0=0$).

לכן, $\frac{y}{x}=3^0 \Rightarrow \frac{y}{x}=1 \Rightarrow \underline{x=y}$. $\blacksquare$

טרנזיטיביות:

$xRy \wedge yRz$

$\Rightarrow \exists_{i\in\mathbb{N}}\left(\frac{y}{x}=3^i\right) \wedge \exists_{m\in\mathbb{N}}\left(\frac{z}{y}=3^m\right)$

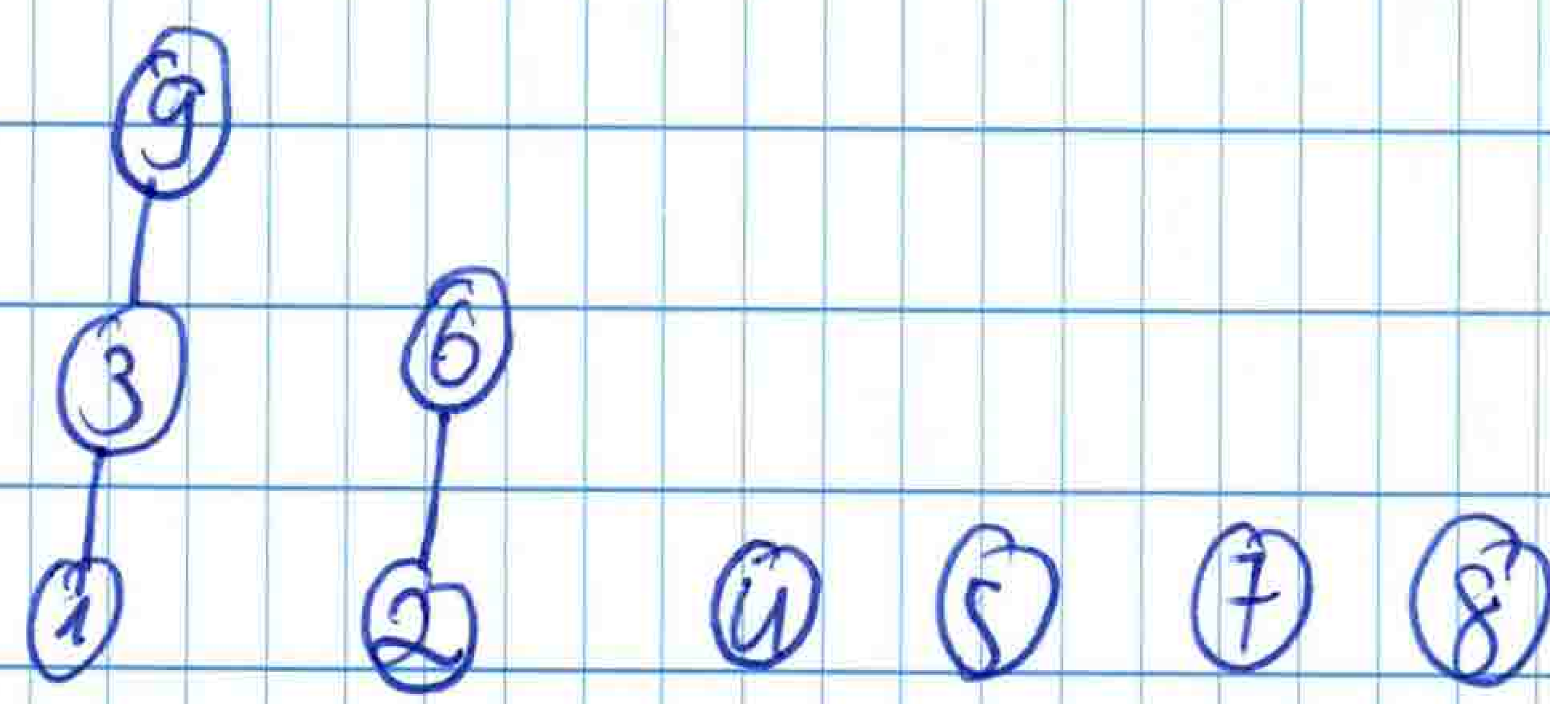
$\Rightarrow \exists_{i,m\in\mathbb{N}}\left(\frac{\cancel{y}}{x}\cdot\frac{z}{\cancel{y}}=3^{i+m}\right)$ נכפיל את היחסים

$\Rightarrow \exists_{i+m\in\mathbb{N}}\left(\frac{z}{x}=3^{i+m}\right)$

$\Rightarrow xRz$ $\blacksquare$ $\qquad$ $i,m\in\mathbb{N}$ לכן $i+m\in\mathbb{N}$.

3. האיברים המינימליים ביחס R, הם האיברים הקטנים ביותר במחלקות השקילות של S; והאיברים המקסימליים הם האיברים הגדולים ביותר מכל מחלקת שקילות של S.

נצייר את הסדר החלקי R ע"י דיאגרמה כדי להוכיח זאת.



האיברים המינימליים: 1, 2, 4, 5, 7, 8

כי אם אחד מהאיברים הללו (m), מקיים xRm אז $x=m$.

האיברים המקסימליים: 9, 6, 4, 5, 7, 8

כי אם אחד מהאיברים הללו (g) מקיים xRg אז $x=g$.

שאלה 5

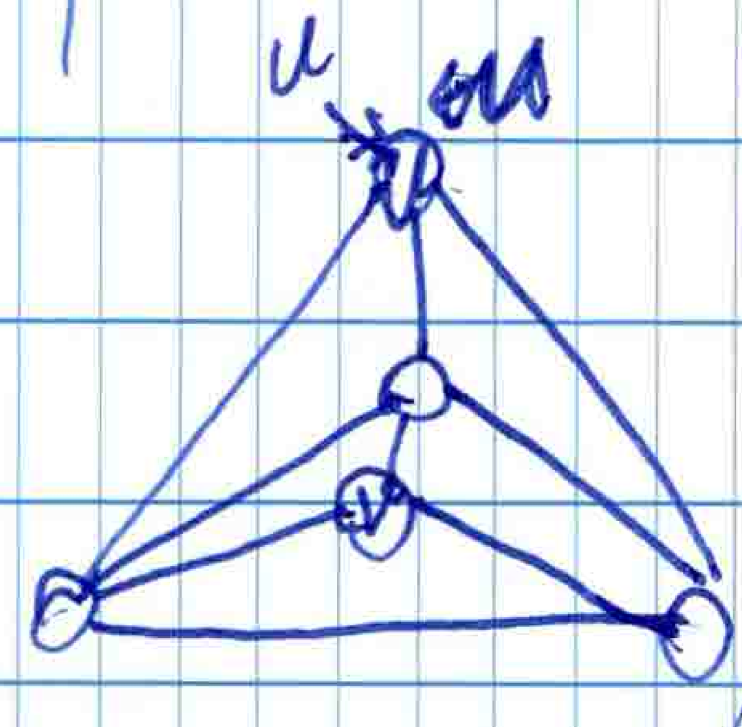
G גרף מישורי פשוט וקשיר.

קיים מסלול אוילר באורך 9 שאינו מעגל ⇐ $|E| = 9$ (כי מסלול אוילר עובר דרך כל הקשתות בגרף).

קיימים צמתים u, v שאינם סמוכים כך ש- $G \cup \{uv\}$ אינו מישורי.

הוכח או הפרך:

א. נכון. ע"פ עמ' 58 שאלה 1 (תורת הגרפים), הגרף המתקבל מ- K_5 ע"י השמטת קשת הוא מישורי.
כלומר, אם נבחר את uv להיות הקשת שהושמטה ואת $G \cup \{uv\}$ להיות K_5, אז G מישורי אך $G \cup \{uv\} = K_5$ אינו מישורי ע"פ משפט קורטובסקי. (ב-G יש מסלול אוילר מכיון ש K_5 אוילרי ולאחר השמטת קשת הפכו בדיוק שני צמתים לבעלי דרגה אי-זוגית (והשאר זוגיים) ולכן קיים מסלול אוילר).



ב. לא יתכן גרף כזה. ע"פ משפט קורטובסקי גרף הוא מישורי אם ורק אם הוא לא מכיל תת-גרף העדנה של K_5 או של $K_{3,3}$.
נניח כי קיים גרף כזה. הוא לא יכול להכיל העדנה של $K_{3,3}$, מכיון שהוא בעל 9 קשתות וכבר מישורי. לכן, $G \cup \{uv\}$ צריך להיות העדנה של K_5, אך זה לא יתכן, מאחר ש G מישורי ובעל 9 צמתים ולכן, כדי שיהיה לא מישורי, הוספת קשת צריכה להפוך את G ל- K_5 עצמו! מכיון ש

ב' טעות, קיים מקרה קצה.

לשימוש הבודק

שאלה 3

א. $n = (x_1 + x_2 + \dots + x_k) + (y_1 + y_2 + \dots + y_k)$

נתון ש $0 \le x_1, x_2, \dots, x_k \le 3$,

$y_1, y_2, \dots, y_k$ מס' זוגיים

נכתוב פונק' יוצרת עבור מס' הפתרונות של המשוואה בשלמים:

$$f(x) = (x^0 + x^1 + x^2 + x^3)^k \cdot (x^0 + x^2 + x^4 + \dots)^k$$

$$= \left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)^k \cdot \frac{1}{(1-x^2)^k}$$

נוסחה עבור טור סופי של טור הנדסי ועבור טור אינסופי

$$= \left(\frac{1-x^4}{(1-x)(1-x^2)}\right)^k$$

$$= \left(\frac{\cancel{(1-x^2)}(1+x^2)}{(1-x)\cancel{(1-x^2)}}\right)^k$$

$$= (1+x^2)^k \cdot \frac{1}{(1-x)^k}$$

ב. $\cancel{f(x) = \sum_{i=0}^{k} (x^2)^i \cdot 1^{k-i}}$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \underbrace{\binom{k}{i}}_{a_{2i}} x^{2i} \cdot \cancel{1^{k-i}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{D(k,i)}_{b_i} x^i$$

V

$n=4$:

נשתמש בכפל פונק' יוצרת עבור

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{2i}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}D(k,i)x^{i}=\sum_{i=0}^{\infty}c_i x^{i}$$

נבחן המשוואה עבור $n=4$ ונקבל המקדם של x^4.

$$c_4=\sum_{i=0}^{4}a_i b_{4-i}$$

(a_i: מתאפס עבור i אי-זוגי)

$$=a_0b_4+\cancel{a_1b_3}+a_2b_2+\cancel{a_3b_1}+a_4b_0$$

$$=\cancel{\binom{k}{0}}\cdot D(k,4)+\binom{k}{1}\cdot D(k,2)+\binom{k}{2}\cdot\cancel{D(k,0)}$$

$$=D(k,4)+k\cdot D(k,2)+\binom{k}{2}$$

זהו מס' הפתרונות למשוואה.

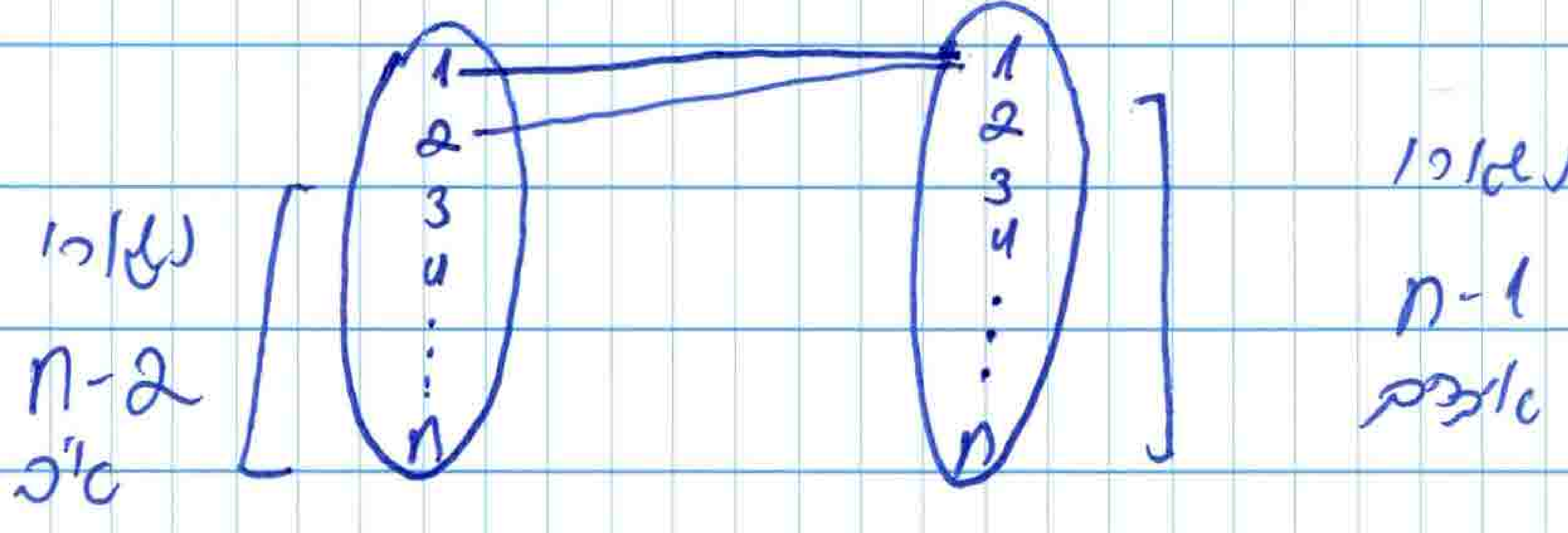
לשימוש הבודק

4/10

שאלה 4

$A=\{1,2,3,\dots,n\}$, $n\geq 4$.

א. מס' הפונקציות המקבלות 1 פעמיים בדיוק.



לכן, מס' הפונקציות הוא $\binom{n}{2}\cdot(n-1)^{n-2}$.

מס' האפשרויות לבחור 2 איברים ב-A (מדגם שגוי)

מס' הפונקציות הכוללות מהמספרים שנשארו מכל 3 של הפונקציה

ב. מס' הפונקציות המקבלות 1 לפחות שלוש פעמים.

מס' זה שקול למס' הפונק' הכולל פחות (מס' הפונק' המקבלות 1 פעם אחת בדיוק + מס' הפונק' המקבלות 1 בדיוק פעמיים + מס' הפעמים שהן לא מקבלות 1 אותו)

$$n^n-\left((n-1)^n+n\cdot(n-1)^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot(n-1)^{n-2}\right)$$

כולל — לא ערך — מקבל 1 פעם אחת בדיוק — מקבל 1 פעמיים בדיוק

ג. הערך 1 פעמיים בדיוק ואת כל הערכים האחרים פעם אחת לכל היותר.

בוחרים שני מספרים שישלחו ל-1. כעת, יש לשלוח $n-2$ ערכים אל $n-1$ ערכים בתמונה (ללא 1). הפונק' מלאה, ולכן ישאר בדיוק ערך אחד אשר לא יקבל אף מספר מהתחום.

זה בדיוק כמו לספור את האיברים שנשארו מכל הסידורים האפשריים אל קבוצת ערכים שנשאר.

$$\binom{n}{2}\cdot\binom{n-1}{1}\cdot(n-2)!$$

$$\binom{n}{2}\cdot(n-1)\cdot(n-2)!$$

שני מספרים שנלקחו ל-1 — מס' בחירות שלא יקבל ערך — הסידורים של שאר האיברים שנשארו

114204