אלגוריתם fft:

fast fourier transform

מספרים מרוכבים (Complex)

$i=\sqrt{-1}$

$3+5i$ — ייצוג קרטזי (3 — ממשי, 5 — מדומה)

θ — זווית הרדיאנים ($\pi = 180^\circ$)

$re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$1 = e^{2\pi i}$ $\quad \sqrt[n]{1} = e^{\frac{2\pi}{n}i}$

$(e^{\frac{2\pi}{n}\cdot i\cdot 0})^n = 1$

$(e^{\frac{2\pi}{n}\cdot i\cdot 1})^n = 1$ $\quad \omega_n = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ שורש ה יחידה מסדר n:

$(e^{\frac{2\pi}{n}\cdot i\cdot 2})^n = 1$

$(e^{\frac{2\pi}{n}\cdot i\cdot 3})^n = 1$ $\quad \omega_n^k = e^{\frac{2\pi}{n}ik}$ $\quad 0\le k\le n-1$

$\vdots$

$(e^{\frac{2\pi}{n}\cdot i\cdot (n-1)})^n = 1$ $\quad \omega_n^{2k} = e^{\frac{2\pi i}{n}2k} = e^{i\frac{2\pi}{n/2}k} = \omega_{n/2}^k$

$\omega_n^k = e^{i\frac{2\pi}{n}k} = e^{i\frac{2\pi}{n}(\frac{n}{2}+k-\frac{n}{2})} = \underbrace{e^{i\pi}}_{-1}\cdot e^{\frac{i2\pi}{n}(k-\frac{n}{2})} = -e^{\frac{i2\pi}{n}(k-\frac{n}{2})} = -\omega_n^{(k-\frac{n}{2})}$

פולינומים:

$x^3+2x^2+1=[1,2,0,1]$

$x^2+2x-7=[1,2,-7]$

ייצוג בעזרת מקדמים:

ייצוג בעזרת ערכים בנקודות: x^2+2x-7

$x=0$	-7	
$x=1$	-4	$\rightarrow [-7,-4,1]$
$x=2$	1	

כפל וקטורי

באמצעות ייצוג שבבה מתאפשר לבצע פעולות בקלות (פעולות כפל וחיבור).

ייצוג מקדמים: $P_1(x)\times P_2(x)$ $\quad O(n^2)$

ייצוג בנקודות: $P_1(x)\times P_2(x)$ $\quad O(n)$

fft - ממיר ייצוג במקדמים לייצוג בנקודות ב- $O(n\log n)$

D.F.T — התמרת פוריה הבדידה

הבעיה פולינום בעזרת ערכו ב-n שורשי ה יחידה מסדר n

f.f.t מחשב את D.F.T של פולינום בזמן $O(n\log n)$ n חזקה של 2

$\omega_n = e^{\frac{i2\pi}{n}}$, ω_n^k $\quad 0\le k\le n-1$

הרעיון: $A(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1}$

זוגיים: $A^{(0)}(x)=a_0+a_2x+a_4x^2+\dots+a_{n-2}x^{\frac{n}{2}-1}$

אי-זוגיים: $A^{(1)}(x)=a_1+a_3x+a_5x^2+\dots+a_{n-1}x^{\frac{n}{2}-1}$

$A(x)=A^{(0)}(x^2)+xA^{(1)}(x^2)$

אם נצליח "לקמבן" את A מ- $A^{(0)}$ ו- $A^{(1)}$ בזמן $O(n)$ אז זמן הריצה יהיה $O(n\log n)$

נוסחת נסיגה: $T(n)=2T(\frac{n}{2})+n$

בדיקת "לקמבן":

$A^{(0)}(\omega_n^{2k})+\omega_n^kA^{(1)}(\omega_n^{2k})$ $\quad 0\le k\le n-1$

הרקורסיה הרקורסיבית לעצלנים:

$A^{(0)}(\omega_{n/2}^k)$ $\quad A^{(1)}(\omega_{n/2}^k)$ $\quad 0\le k\le \frac{n}{2}-1$

$A^{(0)}(\omega_{n/2}^{k-\frac{n}{2}})-\omega_n^{k-\frac{n}{2}}\cdot A^{(1)}(\omega_{n/2}^{k-\frac{n}{2}})$ $\quad \frac{n}{2}\le k\le n-1$

$A^{(0)}(\omega_{n/2}^k)+\omega_n^k\cdot A^{(1)}(\omega_{n/2}^k)$ $\quad 0\le k\le \frac{n}{2}-1$

איך מכפלים פולינומים?

$0x^3+4x^2+2x-3$ $\qquad 2x^3+x^2-3x+7$

$-3,2,4,0$ $\qquad 7,-3,1,2$

$\Downarrow$ fft $\qquad \Downarrow$ fft

x_0,x_1,x_2,x_3 $\qquad y_0,y_1,y_2,y_3$

$x_0y_0, x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3$

$\Downarrow$ invFFT

פולינום המכפלה

האלגוריתם של f.f.t:

```
FFT(a)
n ← lenght[a]
if n=1
    then return a
ω_n ← e^(2πi/n)
ω ← 1
a^[0] ← (a_0, a_2, ..., a_{n-2})
a^[1] ← (a_1, a_3, ..., a_{n-1})
y^[0] ← FFT(a^[0])
y^[1] ← FFT(a^[1])
for k ← 0 to n/2 - 1 do
    y_k ← y_k^[0] + ω y_k^[1]
    y_{k+n/2} ← y_k^[0] - ω y_k^[1]
    ω ← ω ω_n
return y
```