פרק 6: התפלגות משותפת של משתנים מקריים (פתרונות) (20416 / 21.7.11)

1. א. לפי תיאור הניסוי, מוציאים נעליים, בזו אחר זו, עד שמתקבל זוג. לכן, בהכרח הנעל האחרונה שנבחרת שונה מכל קודמותיה. ומכאן נובע, כי $P\{X=i\,,\,Y=j\}=0$ כל אימת ש- i וגם j **גדולים** מ-1.

נחשב את יתר ההסתברויות המשותפות:

$$P\{X=1,Y=1\}=\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{3}{9}+\tfrac{3}{10}\cdot\tfrac{7}{9}=\tfrac{7}{15}$$

$$P\{X=1,Y=2\}=\tfrac{3}{10}\cdot\tfrac{2}{9}\cdot\tfrac{7}{8}=\tfrac{7}{120}$$

$$P\{X=1,Y=3\}=\tfrac{3}{10}\cdot\tfrac{2}{9}\cdot\tfrac{1}{8}\cdot 1=\tfrac{1}{120}$$

$$P\{X=2,Y=1\}=\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{6}{9}\cdot\tfrac{3}{8}=\tfrac{7}{40}$$

$$P\{X=3,Y=1\}=\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{6}{9}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{3}{7}=\tfrac{1}{8}$$

$$P\{X=4,Y=1\}=\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{6}{9}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6}=\tfrac{1}{12}$$

$$P\{X=5,Y=1\}=\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{6}{9}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{3}{5}=\tfrac{1}{20}$$

$$P\{X=6,Y=1\}=\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{6}{9}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{4}=\tfrac{1}{40}$$

$$P\{X=7,Y=1\}=\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{6}{9}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot 1=\tfrac{1}{120}$$

X \ Y	**1**	**2**	**3**	p_X
1	$\frac{56}{120}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{64}{120}$
2	$\frac{21}{120}$	0	0	$\frac{21}{120}$
3	$\frac{15}{120}$	0	0	$\frac{15}{120}$
4	$\frac{10}{120}$	0	0	$\frac{10}{120}$
5	$\frac{6}{120}$	0	0	$\frac{6}{120}$
6	$\frac{3}{120}$	0	0	$\frac{3}{120}$
7	$\frac{1}{120}$	0	0	$\frac{1}{120}$
p_Y	$\frac{112}{120}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$	

סכום ההסתברויות המשותפות שווה כמובן ל-1.

ב.
$$F_{X,Y}(2,2)=P\{X\le 2,Y\le 2\}$$
$$=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}+P\{X=2,Y=2\}$$
$$=\tfrac{56}{120}+\tfrac{7}{120}+\tfrac{21}{120}+0=\tfrac{84}{120}=0.7$$

ג. המשתנים המקריים X ו-Y תלויים, כי הם אינם מקיימים את תנאי האי-תלות. למשל:

$$P\{X=2,Y=2\}=0 \quad\neq\quad P\{X=2\}P\{Y=2\}=\tfrac{21}{120}\cdot\tfrac{7}{120}>0$$

ד. הערכים וההסתברויות של המשתנה המקרי $X+Y$, שנסמנו ב-W, נגזרים מפונקציית ההסתברות המשותפת של X ו-Y. מקבלים:

$$P\{W=2\}=P\{X+Y=2\}=P\{X=1,Y=1\}=\tfrac{56}{120}$$

$$P\{W=3\}=P\{X+Y=3\}=P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}=\tfrac{28}{120}$$

$$P\{W=4\}=P\{X+Y=4\}=P\{X=1,Y=3\}+P\{X=3,Y=1\}=\tfrac{16}{120}$$

$$P\{W=5\}=P\{X+Y=5\}=P\{X=4,Y=1\}=\tfrac{10}{120}$$

$$P\{W=6\}=P\{X+Y=6\}=P\{X=5,Y=1\}=\tfrac{6}{120}$$

$$P\{W=7\}=P\{X+Y=7\}=P\{X=6,Y=1\}=\tfrac{3}{120}$$

$$P\{W=8\}=P\{X+Y=8\}=P\{X=7,Y=1\}=\tfrac{1}{120}$$

סכום ההסתברויות שווה כמובן ל-1.

ה. אם **נתון** שהמאורע $\{Y=2\}$ מתרחש, לא ייתכן ש-X מקבל ערך גדול מ-1. לפיכך, המשתנה המקרי **המותנה** X בהינתן $Y=2$ מקבל אך ורק את הערך 1 (בהסתברות 1, כמובן!).

ומכאן, שפונקציית ההסתברות המותנית היא: $P\{X=1|Y=2\}=1$

מתוצאה זו אפשר להסיק ש-X ו-Y תלויים, מכיוון שההתפלגות המותנית של X במאורע $\{Y=2\}$ אינה זהה להתפלגות השולית של X. (זהו תנאי מספיק לתלות בין שני משתנים מקריים.) כלומר, הנתון שהמאורע $\{Y=2\}$ מתרחש, משנה את ההתפלגות השולית של X.

ו. נחשב תחילה את ההסתברות של המאורע $\{X=1\}$. מקבלים: $P\{X=1\}=\frac{7}{15}+\frac{7}{120}+\frac{1}{120}=\frac{8}{15}$

כעת, נמצא את פונקציית ההסתברות המותנית של המשתנה המקרי Y בהינתן $X=1$. למשתנה מקרי מותנה זה יש שלושה ערכים אפשריים, 1, 2 ו-3, המתקבלים בהסתברויות:

$$P\{Y=1|X=1\}=\tfrac{P\{Y=1,X=1\}}{P\{X=1\}}=\tfrac{7}{15}\Big/\tfrac{8}{15}=\tfrac{7}{8}=\tfrac{56}{64}$$

$$P\{Y=2|X=1\}=\tfrac{P\{Y=2,X=1\}}{P\{X=1\}}=\tfrac{7}{120}\Big/\tfrac{8}{15}=\tfrac{7}{64}$$

$$P\{Y=3|X=1\}=\tfrac{P\{Y=3,X=1\}}{P\{X=1\}}=\tfrac{1}{120}\Big/\tfrac{8}{15}=\tfrac{1}{64}$$

סכום כל ההסתברויות המותנות
באותו מאורע מַתְנֶה שווה ל-1.

גם מתוצאה זו אפשר להסיק ש-X ו-Y תלויים, מכיוון שההתפלגות המותנית של Y אינה זהה להתפלגות השולית שלו. כלומר, הנתון שהמאורע $\{X=1\}$ מתרחש, משנה את ההתפלגות השולית של Y.

2. א. תחילה, נמצא את כל ההסתברויות המשותפות ששוות ל-0.

$P\{X=1,Y=0\}=0$: כי אם מתקבל 4 אחד, אז יש לפחות תוצאה זוגית אחת, ולכן לא ייתכן ש-$Y=0$.

$P\{X=2,Y=0\}=P\{X=2,Y=1\}=0$: כי אם מתקבלים שני 4-ים, אז בהכרח $Y=2$.

כעת, נפנה לחישוב ההסתברויות המשותפות החיוביות:

$P\{X=0,Y=0\}=\frac{3\cdot3}{6\cdot6}=\frac{9}{36}$ [מתקבלות שתי תוצאות אי-זוגיות]

$P\{X=0,Y=1\}=\frac{2\cdot(2\cdot3)}{6\cdot6}=\frac{12}{36}$ [מתקבלות תוצאה זוגית, שאינה 4, ותוצאה אי-זוגית]

$P\{X=0,Y=2\}=\frac{2\cdot2}{6\cdot6}=\frac{4}{36}$ [מתקבלות שתי תוצאות זוגיות, שאינן 4]

$P\{X=1,Y=1\}=\frac{2\cdot(1\cdot3)}{6\cdot6}=\frac{6}{36}$ [מתקבלות התוצאה 4 ותוצאה אי-זוגית]

$P\{X=1,Y=2\}=\frac{2\cdot(1\cdot2)}{6\cdot6}=\frac{4}{36}$ [מתקבלות התוצאה 4 ותוצאה זוגית נוספת, שאינה 4]

$P\{X=2,Y=2\}=\frac{1\cdot1}{6\cdot6}=\frac{1}{36}$ [מתקבלות שתי תוצאות 4]

נערוך את התוצאות שקיבלנו בטבלה:

X \ Y	**0**	**1**	**2**	p_X
0	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	0	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$
2	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
p_Y	$\frac{9}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{9}{36}$	

3. נסמן ב- X_1 את מספר הגברים המגיעים למסיבה ; $X_1 \sim B(10,0.8)$,
 וב- X_2 את מספר הנשים המגיעות למסיבה ; $X_2 \sim B(10,0.9)$.

המשתנים המקריים X_1 ו- X_2 בלתי-תלויים זה בזה, מכיוון שאין תלות בין האנשים המוזמנים למסיבה. לפיכך, מקבלים :

$$P\{X_1+X_2=18\}=\sum_{i=8}^{10}P\{X_1=i\,,\,X_2=18-i\}=\sum_{i=8}^{10}P\{X_1=i\}P\{X_2=18-i\}$$
$$=\sum_{i=8}^{10}\binom{10}{i}0.8^i\,0.2^{10-i}\cdot\binom{10}{18-i}0.9^{18-i}\,0.1^{i-8}\cong 0.1053+0.1040+0.0208=0.2301$$

4. ההתפלגות של המשתנה המקרי W היא בינומית עם הפרמטרים $n+m$ ו- p (ראה דוגמה 3ה בספר, עמוד 299). נראה שהמשתנים המקריים X ו-W תלויים בעזרת תנאי האי-תלות :

מצד אחד : $P\{X=n, W=0\}=P\{X=n,\ X+Y=0\}=0$

ומצד שני : $P\{X=n\}P\{W=0\}=p^n(1-p)^{n+m}>0$

5. א. בבעיה זו, נמצא את ההסתברויות המשותפות באמצעות התניה על הכלוב שנבחר. נתחיל מההסתברויות המשותפות שבהן $N=1$. נשים לב, שכאשר אנו מתנים במאורע $\{N=1\}$, פירוש הדבר שבוחרים בכלוב 1, המכיל רק תרנגול אחד ותרנגולת אחת. כלומר, אם כלוב זה נבחר מוציאים ממנו בהכרח את שניהם. ומכאן :

$P\{N=1, Z=0\}=P\{Z=0\,|\,N=1\}P\{N=1\}=0$ [לא ייתכן לבחור בכלוב 1 ולא להוציא ממנו אף תרנגול]

$P\{N=1, Z=1\}=P\{Z=1\,|\,N=1\}P\{N=1\}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ [בוחרים בכלוב 1 ומוציאים ממנו בהכרח תרנגול ותרנגולת]

$P\{N=1, Z=2\}=P\{Z=2\,|\,N=1\}P\{N=1\}=0$ [לא ייתכן לבחור בכלוב 1 ולהוציא ממנו 2 תרנגולים]

כעת, אם בוחרים בכלוב 2, מספר התרנגולים הזכרים שמוצאים ממנו, יכול להיות 0, 1 או 2.

לכן :
$$P\{N=2, Z=0\}=P\{Z=0\,|\,N=2\}P\{N=2\}=\frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

$$P\{N=2, Z=1\}=P\{Z=1\,|\,N=2\}P\{N=2\}=\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$P\{N=2, Z=2\}=P\{Z=2\,|\,N=2\}P\{N=2\}=\frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

ב. המשתנים המקריים N ו-Z תלויים, כי הם אינם מקיימים את תנאי האי-תלות. למשל :

$$P\{N=1, Z=0\}=0 \quad\neq\quad P\{N=1\}P\{Z=0\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{24}$$

6. לכל $j=0,1,...$ מתקיים :
$$P\{Y=j\}=P\{X_1+X_2=j\}=\sum_{i=0}^{j}P\{X_1=i\,,\,X_2=j-i\}$$
$$=\sum_{i=0}^{j}P\{X_1=i\}P\{X_2=j-i\}$$ [ה- X_i-ים בלתי-תלויים]
$$=\sum_{i=0}^{j}p(1-p)^i\,p(1-p)^{j-i}=\sum_{i=0}^{j}p^2(1-p)^j=(j+1)p^2(1-p)^j$$

הערה: בדרך דומה אפשר להראות שסכום של שני משתנים גיאומטריים בלתי-תלויים עם הפרמטר p הוא משתנה מקרי בינומי שלילי עם הפרמטרים 2 ו-p. את הכללת הטענה ל- r משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, אפשר להוכיח באינדוקציה.

דרך נוספת

דרך זו נסמכת על הטענה, שלסכום של שני משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, עם אותו הפרמטר p, יש התפלגות בינומית-שלילית עם הפרמטרים $r = 2$ ו- p.

נסמן ב- G_1 וב- G_2 שני משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפרמטר p.

מנתוני הבעיה, נובע כי לכל $i = 1,2$, מתקיים השוויון $X_i = G_i - 1$, וזאת מכיוון שמתקיים שוויון-ההסתברויות $P\{X_i = k\} = P\{G_i - 1 = k\} = P\{G_i = k + 1\}$, לכל $k = 0,1,\ldots$. לפיכך, מתקיים גם השוויון $Y = X_1 + X_2 = G_1 + G_2 - 2$. עתה, לפי הטענה המובאת לעיל, לסכום המשתנים המקריים $G_1 + G_2$ יש התפלגות בינומית-שלילית עם הפרמטרים 2 ו-p, ומכאן שלכל $j = 0,1,\ldots$, מתקיים:

$$P\{Y = j\} = P\{X_1 + X_2 = j\} = P\{G_1 + G_2 - 2 = j\}$$
$$= P\{G_1 + G_2 = j + 2\} = P\{NB(2,p) = j + 2\} = \binom{j+1}{2-1} p^2 (1-p)^j = (j+1) p^2 (1-p)^j$$

7. א. אפשר להראות, שההתפלגות השולית של X_i, לכל $i = 1,2,\ldots,n$, היא בינומית עם הפרמטרים n ו- p_i.

תוצאה זו אינה מפתיעה כלל ועיקר, מכיוון שהמשתנה המקרי X_i מוגדר על-ידי מספר הניסויים שמסתיימים בתוצאה i, והרי כל אחד מ-n הניסויים הבלתי-תלויים מסתיים בתוצאה i בהסתברות p_i ואינו מסתיים בה בהסתברות $1 - p_i$, וזוהי בדיוק ההגדרה של ניסוי מקרי בינומי.

למרות שלא התבקשתם בתרגיל להוכיח את הרשום לעיל, נראה בכל זאת הוכחה לטענה זו.

פונקציית ההסתברות המשותפת של המשתנים המקריים $X_1, X_2, \ldots, X_r$ היא:

$$P\{\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{n}\} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r} \qquad , \qquad \sum_{i=1}^{r} n_i = n \text{ כאשר}$$

נוכיח בלי הגבלת הכלליות, שההתפלגות השולית של המשתנה המקרי X_1 היא בינומית עם הפרמטרים n ו- p_1. לכל $j = 0,1,\ldots,n$, מתקיים:

$$P\{X_1 = j\} = \sum_{\substack{n_2,\ldots,n_r: \\ n_2+\ldots+n_r = n-j}} P\{X_1 = j, X_2 = n_2, \ \ldots \ X_r = n_r\}$$
$$= \sum_{\substack{n_2,\ldots,n_r: \\ n_2+\ldots+n_r = n-j}} \frac{n!}{j! n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!} \cdot p_1^j \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$$
$$= \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot p_1^j \sum_{\substack{n_2,\ldots,n_r: \\ n_2+\ldots+n_r = n-j}} \frac{(n-j)!}{n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$$
$$= \binom{n}{j} p_1^j (p_2 + \ldots + p_r)^{n-j} = \binom{n}{j} p_1^j (1 - p_1)^{n-j} \qquad \text{[נוסחת המולטינום]}$$

קיבלנו, אם כן, שההתפלגות השולית של X_1, היא בינומית עם הפרמטרים n ו- p_1.

ב. נשים לב, שהמשתנה המקרי $X_i + X_j$, לכל $i \neq j$, הוא למעשה מספר הניסויים שמסתיימים בתוצאות i או j. היות ש- n הניסויים בלתי-תלויים וההסתברות שניסוי יסתיים באחת משתי תוצאות אלו היא $p_i + p_j$, נובע שהתפלגות סכום זה היא בינומית עם הפרמטרים n ו- $p_i + p_j$.

גם במקרה זה אפשר להוכיח את הטענה שלעיל בעזרת פונקציית ההסתברות המשותפת המולטינומית, תוך שימוש בנוסחת המולטינום ובנוסחת הבינום.

ג. ברור שהמשתנים המקריים X_i ו- X_j תלויים. נוכיח זאת באמצעות תנאי האי-תלות :

מצד אחד : $P\{X_i = n, X_j = n\} = 0$

ומצד שני : $P\{X_i = n\}P\{X_j = n\} = p_i^n p_j^n > 0$

הוכחה נוספת לתלות בין שני משתנים מקריים אלו מובאת בספר בפרק 7, דוגמה 3ז בעמוד 370.

ד. נמצא את פונקציית ההסתברות המותנית של X_1 בהינתן $X_2 = j$, לכל $j = 1,2,...,n$.

לכל $i = 0,1,...,n-j$ מתקיים :

$$P\{X_1 = i \mid X_2 = j\} = \frac{P\{X_1 = i, X_2 = j\}}{P\{X_2 = j\}} = \frac{P\{X_1 = i, X_2 = j, X_3 + ... + X_r = n-i-j\}}{P\{X_2 = j, X_1 + X_3 + ... + X_r = n-j\}}$$

$$= \frac{\frac{n!}{i!\cdot j!\cdot (n-i-j)!}\cdot p_1^i \cdot p_2^j \cdot (1-p_1-p_2)^{n-i-j}}{\frac{n!}{j!\cdot (n-j)!}\cdot p_2^j \cdot (1-p_2)^{n-j}}$$

$$= \binom{n-j}{i}\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)^i \left(\frac{1-p_1-p_2}{1-p_2}\right)^{n-j-i}$$

ולכן, מצורת פונקציית ההסתברות המותנית, אנו מקבלים, שההתפלגות המותנית של X_1 בהינתן $X_2 = j$ היא התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n-j$ ו- $\frac{p_1}{1-p_2}$.

ה. נגדיר שלושה משתנים מקריים : X_1 = מספר השנים שבהן הגשם הראשון הוא ב-1.1 ;

X_2 = מספר השנים שבהן הגשם הראשון הוא בין ה-2.1 ל-5.1 ;

X_3 = מספר השנים שבהן הגשם הראשון הוא אחרי ה-5.1 .

בהנחה שהשנים בלתי-תלויות זו בזו, למשתנים המקריים X_1, X_2 ו- X_3 יש התפלגות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים $n = 20$ וְ –

$$p_1 = P\{Y = 0\} = 2^{-(0+1)} = \tfrac{1}{2}$$

$$p_2 = P\{1 \leq Y \leq 4\} = 2^{-(1+1)} + 2^{-(2+1)} + 2^{-(3+1)} + 2^{-(4+1)} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} = \tfrac{15}{32}$$

$$p_3 = P\{Y \geq 5\} = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{15}{32} = \tfrac{1}{32}$$

לפיכך : $P\{X_1 = 5, X_2 = 13, X_3 = 2\} = \frac{20!}{5!13!2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{15}{32}\right)^{13}\left(\frac{1}{32}\right)^2 = 0.002621$

8. נסמן ב- X_1 את מספר הפונים לאשנב 1 במשך דקה ; $X_1 \sim Po(2)$,
ב- X_2 את מספר הפונים לאשנב 2 במשך דקה ; $X_2 \sim Po(3)$,
וב- X_3 את מספר הפונים לאשנב 3 במשך דקה ; $X_3 \sim Po(4)$.

א. המשתנים המקריים X_1 , X_2 ו- X_3 בלתי-תלויים זה בזה, ומכאן שהתפלגות הסכום $X_1 + X_2 + X_3$ היא פואסונית עם הפרמטר $2 + 3 + 4 = 9$ (ראה בספר הקורס דוגמה 3ד בעמוד 298). ולכן :

$$P\{X_1 + X_2 + X_3 = 9\} = \tfrac{9^9}{9!} \cdot e^{-9} = 0.1318$$

ב.
$$P\left\{X_1 = 3, X_2 + X_3 = 6 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{3} X_i = 9\right\} = \frac{P\{X_1 = 3, X_2 + X_3 = 6\}}{P\left\{\sum_{i=1}^{3} X_i = 9\right\}}$$

$$= \frac{P\{X_1 = 3\}P\{X_2 + X_3 = 6\}}{P\left\{\sum_{i=1}^{3} X_i = 9\right\}} \qquad [\text{ה-}X_i\text{-ים בלתי-תלויים}]$$

$$= \frac{\left(e^{-2}\cdot \frac{2^3}{3!}\right)\left(e^{-7}\cdot \frac{7^6}{6!}\right)}{\left(e^{-9}\cdot \frac{9^9}{9!}\right)} = \binom{9}{3}\left(\frac{2}{9}\right)^3\left(\frac{7}{9}\right)^6 = 0.2041$$

נשים לב, שההתפלגות המותנית של כל אחד מה- X_i-ים (X_1 , X_2 או X_3) בסכומים, דהיינו ב- $\sum_{i=1}^{3} X_i = n$, היא התפלגות בינומית עם הפרמטרים n ו- $p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$. (ראה דוגמה 4ב בספר הקורס, עמוד 300.)

ג.
$$P\left\{\sum_{i=1}^{3} X_i = 9 \,\middle|\, X_1 = 3\right\} = \frac{P\{X_1 = 3, X_2 + X_3 = 6\}}{P\{X_1 = 3\}}$$

$$= \frac{\cancel{P\{X_1 = 3\}}P\{X_2 + X_3 = 6\}}{\cancel{P\{X_1 = 3\}}} \qquad [\text{ה-}X_i\text{-ים בלתי-תלויים}]$$

$$= P\{X_2 + X_3 = 6\} = \tfrac{7^6}{6!} \cdot e^{-7} = 0.149$$

ד.
$$P\left\{X_1 = 3, X_2 = 3, X_3 = 3 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{3} X_i = 9\right\} = \frac{P\{X_1 = 3, X_2 = 3, X_3 = 3\}}{P\left\{\sum_{i=1}^{3} X_i = 9\right\}}$$

$$= \frac{P\{X_1 = 3\}P\{X_2 = 3\}P\{X_3 = 3\}}{P\left\{\sum_{i=1}^{3} X_i = 9\right\}} \qquad [\text{ה-}X_i\text{-ים בלתי-תלויים}]$$

$$= \frac{\left(e^{-2}\cdot \frac{2^3}{3!}\right)\left(e^{-3}\cdot \frac{3^3}{3!}\right)\left(e^{-4}\cdot \frac{4^3}{3!}\right)}{\left(e^{-9}\cdot \frac{9^9}{9!}\right)} = \frac{9!}{(3!)^3}\left(\frac{2}{9}\right)^3\left(\frac{3}{9}\right)^3\left(\frac{4}{9}\right)^3 = 0.05995$$

מהתוצאה שקיבלנו, אפשר לראות, שההתפלגות המשותפת <u>המותנית</u> של X_1 , X_2 ו- X_3 בהינתן הסכום $\sum_{i=1}^{3} X_i = n$, היא התפלגות מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i}, \frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i}, \frac{\lambda_3}{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i}\right)$.
(תוצאה זו היא הכללה של דוגמה 4ב בספר הקורס, עמוד 300.)

ה. נניח ששלושת ההנחות של תהליך פואסון מתקיימות, ונקבל שמספר האנשים הפונים לאשנב 1 במרווח זמן שאורכו 5 דקות הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $5\cdot 2=10$. נסמן ב- Y את מספר האנשים שקונים בולים באשנב 1 במשך 5 דקות; ההתפלגות של המשתנה המקרי Y היא פואסונית עם הפרמטר $10\cdot 0.6=6$ (ראה דוגמה 2ב, עמוד 281 בספר הקורס). לכן, מקבלים:

$$P\{Y=5\}=\tfrac{6^5}{5!}\cdot e^{-6}=0.1606$$

9. א. ראשית, נגדיר את תחום הערכים האפשריים של המשתנה המקרי הנתון. מכיוון שידוע כי $X_{100}=n$, סכום מאה המשתנים המקריים הנתונים יכול לקבל ערכים שלמים החל מ-n והלאה.
לפיכך, לכל $j=n, n+1,\ldots$ מתקיים:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i=j\,\middle|\,X_{100}=n\right\}=\frac{P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i=j\,,\,X_{100}=n\right\}}{P\{X_{100}=n\}}=\frac{P\left\{\sum_{i=1}^{99}X_i=j-n\,,\,X_{100}=n\right\}}{P\{X_{100}=n\}}$$

$$=\frac{P\left\{\sum_{i=1}^{99}X_i=j-n\right\}\cancel{P\{X_{100}=n\}}}{\cancel{P\{X_{100}=n\}}}\qquad\text{[כל המשתנים בלתי-תלויים]}$$

$$=e^{-99}\cdot\frac{99^{j-n}}{(j-n)!}\qquad\text{[לסכום יש התפלגות פואסונית עם } \lambda=99\text{ ; ראה הערה]}$$

הערה: המשתנה המקרי $\sum_{i=1}^{99}X_i$ הוא סכום של 99 משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים, ולכן התפלגותו גם היא פואסונית עם הפרמטר, שהוא סכום הפרמטרים של המשתנים שמרכיבים את הסכום. דהיינו $\lambda=\sum_{i=1}^{99}\frac{i}{50}=\frac{99\cdot 100}{2\cdot 50}=99$. ראה דוגמה 3ד בספר הקורס בעמוד 298; אפשר להכליל באינדוקציה את הטענה המובאת בדוגמה.

ב. נשתמש בתוצאה של דוגמה 4ב (עמוד 300 בספר), כדי למצוא את ההתפלגות המבוקשת. עלינו למצוא את ההתפלגות של המשתנה המקרי X_{100} בתנאי $\sum_{i=1}^{100}X_i=n$ או לחלופין את ההתפלגות של המשתנה המקרי X_{100} בתנאי $X_{100}+\sum_{i=1}^{99}X_i=n$. נשים לב, שהמשתנים המקריים X_{100} ו- $\sum_{i=1}^{99}X_i$ בלתי-תלויים זה בזה וכי לשניהם יש התפלגות פואסונית עם הפרמטרים $\frac{100}{50}=2$ ו- 99, בהתאמה (ראה סעיף א).
לפיכך, התנאים הדרושים בדוגמה 4ב מתקיימים, ומכאן שההתפלגות של המשתנה המקרי X_{100} בתנאי $\sum_{i=1}^{100}X_i=n$ היא בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{2}{2+99}=\frac{2}{101}$.

הערה: אפשר להראות את התוצאה שקיבלנו גם בדרך ישירה, באופן הבא. לכל $j=0,1,\ldots,n$ מתקיים:

$$P\left\{X_{100}=j\,\middle|\,\sum_{i=1}^{100}X_i=n\right\}=\frac{P\left\{X_{100}=j\,,\,\sum_{i=1}^{99}X_i=n-j\right\}}{P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i=n\right\}}=\frac{\frac{2^j}{j!}e^{-2}\cdot\frac{99^{n-j}}{(n-j)!}e^{-99}}{\frac{101^n}{n!}e^{-101}}=\binom{n}{j}\left(\frac{2}{101}\right)^j\left(\frac{99}{101}\right)^{n-j}$$

10. המשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X+Y=n$ יכול לקבל ערכים בין 0 ל- $\min\{n, n_X\}$. ייתכן שחלק מהערכים האלו מתקבלים בהסתברות 0, בהתאם לערכים המספריים של n , n_X , ו- n_Y .

לפיכך, לכל $i=0,1,\ldots,\min\{n, n_X\}$ מתקיים :

$$P\{X=i \mid X+Y=n\}=\frac{P\{X=i, X+Y=n\}}{P\{X+Y=n\}}=\frac{P\{X=i, Y=n-i\}}{P\{X+Y=n\}}$$

$$=\frac{P\{X=i\}P\{Y=n-i\}}{P\{X+Y=n\}}$$ [שני המשתנים בלתי-תלויים]

$$=\frac{\binom{n_X}{i}\cancel{p^i(1-p)^{n_X-i}}\binom{n_Y}{n-i}\cancel{p^{n-i}(1-p)^{n_Y-n+i}}}{\binom{n_X+n_Y}{n}\cancel{p^n(1-p)^{n_X+n_Y-n}}}=\frac{\binom{n_X}{i}\binom{n_Y}{n-i}}{\binom{n_X+n_Y}{n}}$$

ומכאן שההתפלגות של X בהינתן $X+Y=n$ היא היפרגיאומטרית עם $N=n_X+n_Y$, $m=n_X$ ו- $n=n$.

המקסימום של ה-X_i-ים קטן מערך נתון j ,
רק אם <u>כל</u> ה-X_i-ים קטנים מערך זה.
(כי מספיק שאחד מה-X_i-ים יהיה גדול מ- j ,
כדי שהמקסימום יהיה גדול מ- j .)

11. א. לכל $j=1,2,\ldots$ מתקיים :

$$P\left\{\max_{i=1,\ldots,n} X_i \le j\right\} \overset{\uparrow}{=} P\{X_1\le j, \ \ldots\ , X_n \le j\}$$

$$= P\{X_1\le j\}\cdot \ \ldots\ \cdot P\{X_n\le j\}$$ [ה-X_i-ים בלתי-תלויים]

$$=[1-P\{X_1>j\}]\cdot \ \ldots\ \cdot[1-P\{X_n>j\}]$$

$$=\left[1-(1-p)^j\right]^n$$ [ה-X_i-ים שווי-התפלגות]

מכאן נוכל לקבל את פונקציית ההסתברות של $\max\limits_{i=1,\ldots,n} X_i$ באופן הבא –

לכל $j=1,2,\ldots$ מתקיים :

$$P\left\{\max_{i=1,\ldots,n} X_i = j\right\}=P\left\{\max_{i=1,\ldots,n} X_i \le j\right\}-P\left\{\max_{i=1,\ldots,n} X_i \le j-1\right\}$$

$$=\left[1-(1-p)^j\right]^n-\left[1-(1-p)^{j-1}\right]^n$$

דרך חישוב זו אפשרית, מכיוון שהערכים האפשריים של המקסימום הם המספרים השלמים החל מ-1.

ב. לכל $j=1,2,\ldots$ מתקיים :

$$P\left\{\min_{i=1,\ldots,n} X_i \ge j\right\}=P\{X_1\ge j, \ \ldots\ , X_n\ge j\}$$

$$=P\{X_1\ge j\}\cdot \ \ldots\ \cdot P\{X_n\ge j\}=\left[(1-p)^{j-1}\right]^n=(1-p)^{n(j-1)}$$

ומכאן מקבלים את פונקציית ההסתברות של $\min\limits_{i=1,\ldots,n} X_i$. לכל $j=1,2,\ldots$ מתקיים :

$$P\left\{\min_{i=1,\ldots,n} X_i = j\right\}=P\left\{\min_{i=1,\ldots,n} X_i \ge j\right\}-P\left\{\min_{i=1,\ldots,n} X_i \ge j+1\right\}=(1-p)^{n(j-1)}-(1-p)^{nj}$$

$$=[(1-p)^n]^{j-1}[1-(1-p)^n]$$

כלומר, ההתפלגות של המשתנה המקרי $\min\limits_{i=1,\ldots,n} X_i$ היא גיאומטרית עם הפרמטר $1-(1-p)^n$.

12. א. ההתפלגות של המשתנה המקרי X בהינתן $Y=j$ היא בינומית עם הפרמטרים j ו- p. לכן, הערכים האפשריים של משתנה מקרי זה הם $0,\ 1,\ \ldots,\ j$. כלומר, קבוצת הערכים של i ו- j, שבהם פונקציית ההסתברות המשותפת מקבלת ערכים חיוביים היא: $\{(i,j):\ i=0,1,\ldots,j\ ;\ j=0,1,\ldots\}$
או לחלופין: $\{(i,j):\ i=0,1,\ldots\ ;\ j=i,\ i+1,\ i+2,\ldots\}$

ב. לכל $j=0,1,\ldots$ ולכל $i=0,1,\ldots,j$, מתקיים:

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\mid Y=j\}P\{Y=j\}=\binom{j}{i}p^i(1-p)^{j-i}\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}$$
$$=\frac{1}{i!(j-i)!}\cdot(\lambda p)^i[\lambda(1-p)]^{j-i}e^{-\lambda}$$

ג. נמצא את פונקציית ההסתברות השולית של X מתוך פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.
לכל $i=0,1,\ldots$, מתקיים:

$$P\{X=i\}=\sum_{j=i}^{\infty}P\{X=i,Y=j\}=\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{i!(j-i)!}\cdot(\lambda p)^i[\lambda(1-p)]^{j-i}e^{-\lambda}$$

$$=\frac{1}{i!}\cdot(\lambda p)^i e^{-\lambda}\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{(j-i)!}\cdot[\lambda(1-p)]^{j-i}=\frac{1}{i!}\cdot(\lambda p)^i e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}=\frac{1}{i!}\cdot(\lambda p)^i e^{-\lambda p}$$

קיבלנו פונקציית הסתברות של התפלגות פואסונית עם הפרמטר λp, ולכן זוהי ההתפלגות של המשתנה המקרי X.

ד. נמצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- $Y-X$. מכיוון שבבעיה זו מתקיים אי-השוויון $X\le Y$, נובע מסעיף ב, שלכל $i=0,1,\ldots$ ולכל $k=0,1,\ldots$ מתקיים:

$$P\{X=i,Y-X=k\}=P\{X=i,Y=i+k\}=\underbrace{\frac{(\lambda p)^i}{i!}\cdot e^{-\lambda p}}_{=h(i)}\cdot\underbrace{\frac{[\lambda(1-p)]^k}{k!}\cdot e^{-\lambda(1-p)}}_{=g(k)}$$

קיבלנו אם כן, שמתקיים $P\{X=i,Y-X=k\}=h(i)g(k)$, לכל $i,k=0,1,\ldots$. לכן, לפי טענה 2.1, המובאת בספר בעמוד 285, נקבל כי X ו- $Y-X$ בלתי-תלויים זה בזה. יתרה מזאת, קל לראות, מפונקציית ההסתברות המשותפת של שני המשתנים המקריים הללו, שלמשתנה המקרי $Y-X$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda(1-p)$.

13. א. למשתנה המקרי X יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 10 ו- ⅓.
כעת, אם ידוע שהמאורע $\{X=i\}$ מתרחש, אז לשלב השני עוברים i כדורים, ולכן למשתנה המקרי Y בהינתן $X=i$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים i ו- ¼.

ב. לכל $i=0,1,\ldots,10$ ולכל $j=0,\ldots,i$ מתקיים:

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\mid X=i\}=\binom{10}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{10-i}\cdot\binom{i}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^j\left(\frac{3}{4}\right)^{i-j}$$

$$=\frac{10!}{(10-i)!\,j!\,(i-j)!}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{10-i}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)^j\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)^{i-j}=\binom{10}{10-i,\ j,\ i-j}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{10-i}\left(\frac{1}{12}\right)^j\left(\frac{1}{4}\right)^{i-j}$$

קיבלנו פונקציית הסתברות משותפת מולטינומית עם הפרמטרים $n=10$, $p_1=\frac{2}{3}$, $p_2=\frac{1}{12}$ ו- $p_3=\frac{1}{4}$,
(ראה במדריך דוגמה 1ג בעמוד 136).

קל להבין את התוצאה שהתקבלה, כאשר מגדירים את המשתנים המקריים הבאים :

X_1 = מספר הכדורים שלא נפלו לתוך תא 1 בשלב הראשון ;

X_2 = מספר הכדורים שנפלו לתוך תא 1 בשלב הראשון ולתוך תא 2 בשלב השני ;

X_3 = מספר הכדורים שנפלו לתוך תא 1 בשלב הראשון ולא נפלו לתוך תא 2 בשלב השני.

ג. מהתוצאה שקיבלנו בסעיף הקודם, נובע שלמשתנה המקרי Y יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 10 ו- $\frac{1}{12}$. נוכיח את הטענה האחרונה.

לכל $j = 0,1,...,10$ מתקיים :

$$P\{Y=j\} = \sum_{i=j}^{10} P\{X=i, Y=j\} = \sum_{i=j}^{10} \binom{10}{10-i,\, j,\, i-j} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{10-i} \left(\tfrac{1}{12}\right)^{j} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{i-j}$$

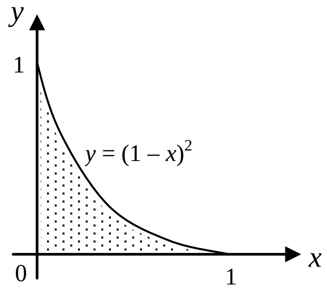
$$= \frac{10!}{j!(10-j)!} \cdot \left(\tfrac{1}{12}\right)^{j} \sum_{i=j}^{10} \frac{(10-j)!}{(10-i)!(i-j)!} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{10-i} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{i-j} = \binom{10}{j} \left(\tfrac{1}{12}\right)^{j} \sum_{i=0}^{10-j} \frac{(10-j)!}{(10-j-i)!\,i!} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{10-j-i} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{i}$$

$$= \binom{10}{j} \left(\tfrac{1}{12}\right)^{j} \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4}\right)^{10-j} = \binom{10}{j} \left(\tfrac{1}{12}\right)^{j} \left(\tfrac{11}{12}\right)^{10-j}$$ [לפי נוסחת הבינום]

הערה: באופן כללי, אם ההתפלגות המשותפת של r משתנים מקריים, $X_1, X_2, \ldots, X_r$, היא מולטינומית עם הפרמטרים n ו- $\underline{p}$, אפשר להראות, שלכל i, ההתפלגות השולית של המשתנה המקרי X_i היא בינומית עם הפרמטרים n ו- p_i.

14. מתכונת חוסר הזיכרון של ההתפלגות המעריכית, נובע שהתפלגות זמן-השירות שנותר לַאדם שנמצא כבר באשנב, כאשר יואב נכנס לבנק, גם היא מעריכית עם הפרמטר 0.5. מכאן, שזמן ההמתנה של יואב הוא סכום של 6 משתנים מקריים מעריכיים בלתי-תלויים, שלכולם הפרמטר 0.5. כלומר, התפלגות זמן ההמתנה של יואב היא גמא עם הפרמטרים $t = 6$ ו- $\lambda = 0.5$, ושונותה שווה ל- $\frac{t}{\lambda^2} = \frac{6}{0.5^2} = 24$.

15. נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת : $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot I_{(0,(1-x)^2)}(y) \cdot I_{(0,1)}(x)$



בציור שלהלן מתואר התחום שבו פונקציית הצפיפות המשותפת חיובית.

את התחום הזה אפשר לתאר בשני אופנים :

$\{(x,y):\ 0 < x < 1\ ,\ 0 < y < (1-x)^2\}$

או $\{(x,y):\ 0 < x < 1-\sqrt{y}\ ,\ 0 < y < 1\}$

א. נשתמש בדרך ההצגה השנייה של התחום שבו פונקציית הצפיפות המשותפת חיובית, כדי לחשב את פונקציית הצפיפות השולית של Y.

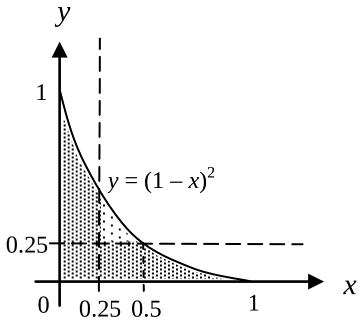
לכל $0 < y < 1$, מקבלים : $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^{1-\sqrt{y}} \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \frac{1}{1-x}\Big|_0^{1-\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}} - 1$

ב. לכל $0 < y < 1$, מתקיים:

$$f_{X|Y}(x\,|\,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{1-\sqrt{y}}{\sqrt{y}}} = \frac{\sqrt{y}}{(1-x)^2(1-\sqrt{y})} \qquad , \qquad 0 < x < 1-\sqrt{y}$$

ג. התחום, שבו המאורע $\{\min(X,Y) \le 0.25\}$ מתרחש, מסומן באיור שלהלן בנקודות צפופות. מהאיור אנו למדים, שכדאי לחשב את ההסתברות המבוקשת באמצעות המאורע המשלים.

מקבלים: $P\{\min(X,Y) \le 0.25\} = 1 - P\{\min(X,Y) > 0.25\} = 1 - P\{X > 0.25\,,\, Y > 0.25\}$



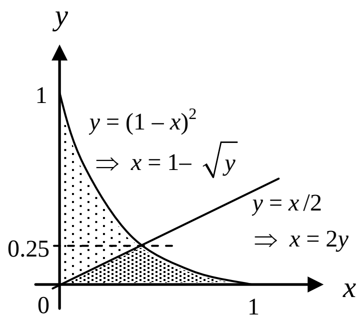
$$= 1 - \int_{0.25}^{\infty}\int_{0.25}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx \;=\; 1 - \int_{0.25}^{0.5}\int_{0.25}^{(1-x)^2} \frac{1}{(1-x)^2}\,dy\,dx$$

$$= 1 - \int_{0.25}^{0.5}\left[\frac{y}{(1-x)^2}\right]_{0.25}^{(1-x)^2} dx \;=\; 1 - \int_{0.25}^{0.5}\left[1 - \frac{0.25}{(1-x)^2}\right] dx$$

$$= 1 - \left[x - \frac{0.25}{1-x}\right]_{0.25}^{0.5} \;=\; 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} \;=\; \tfrac{11}{12}$$

ד. נסמן בנקודות צפופות (באיור שלהלן) את התחום שבו מתקיים המאורע $\{X \ge 2Y\}$.

כעת, נחשב את ההסתברות של מאורע זה. מקבלים:

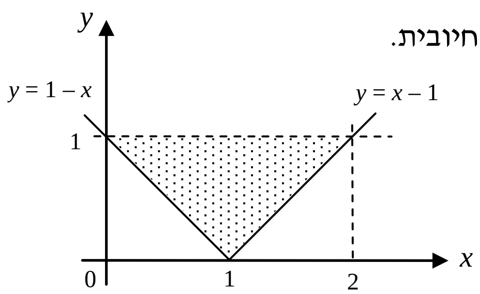


$$P\{X \ge 2Y\} \;=\; \int_0^{0.25}\int_{2y}^{1-\sqrt{y}} \frac{1}{(1-x)^2}\,dx\,dy \;=\; \int_0^{0.25}\left[\frac{1}{1-x}\right]_{2y}^{1-\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^{0.25}\left[\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{1-2y}\right] dy \;=\; \left[2\sqrt{y} + \frac{\ln(1-2y)}{2}\right]_0^{0.25}$$

$$= 1 - \frac{\ln 2}{2} \;=\; 0.6534$$

16. נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת: $f_{X,Y}(x,y) = x \cdot I_{(0,1)}(y) \cdot I_{(1-y,\,1+y)}(x)$



בציור שלהלן מתואר התחום שבו פונקציית הצפיפות המשותפת חיובית.

את התחום הזה אפשר לתאר בשני אופנים:

$\{(x,y):\ 0 < y < 1\,,\, 1-y < x < 1+y\}$

$\{(x,y):\ 0 < x < 1\,,\, 1-x < y < 1$ -וְ $1 < x < 2\,,\, x-1 < y < 1\}$

נשתמש בדרך ההצגה השנייה של התחום, שבו פונקציית הצפיפות המשותפת חיובית, כדי לחשב את פונקציית הצפיפות השולית של X. נשים לב, שתחום ההשתנות של Y אינו זהה לכל הערכים של X. כאשר $0 < x < 1$, הערכים האפשריים של y הם בין $1-x$ ל-1, וכאשר $1 < x < 2$, הערכים האפשריים של y הם בין $x-1$ ל-1. לכן, מפרידים את חישוב פונקציית הצפיפות השולית של X לשני חישובים, ומקבלים:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \;=\; \int_{1-x}^{1} x\,dy \;=\; xy\Big|_{1-x}^{1} \;=\; x^2 \qquad , \qquad 0<x<1$$

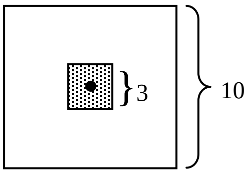
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \;=\; \int_{x-1}^{1} x\,dy \;=\; xy\Big|_{x-1}^{1} \;=\; 2x-x^2 \qquad , \qquad 1<x<2$$

ומכאן, נמצא את פונקציית הצפיפות המותנית של Y בהינתן $X=x$:

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x} \qquad , \qquad 0<x<1\ ,\ 1-x<y<1$$

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{x}{2x-x^2}=\frac{1}{2-x} \qquad , \qquad 1<x<2\ ,\ x-1<y<1$$

17. נתבונן על אחד מהריבועים שמצוירים על השולחן. נסמן בתוכו את התחום, שאם מרכז הדיסקית נופל בו, אז שוליה אינם חותכים את צלעות הריבוע.



עתה, מכיוון שהדיסקית מוטלת באקראי על השולחן, אפשר להניח שהתפלגות המיקום של מרכז הדיסקית על השולחן היא התפלגות אחידה על שטחו.

לפיכך, ההסתברות שהדיסקית לא תחתוך אף קו שמצויר על השולחן (או תבלוט ממנו) היא היחס שבין הריבוע הקטן (זה שמסומן באיור שלעיל בנקודות) לבין הריבוע הגדול. כלומר, ההסתברות היא $\frac{3^2}{10^2}=0.09$.

18. נמצא תחילה את פונקציית ההתפלגות המצטברת של W. לכל $0\le w\le 1$ מתקיים :

$$F_W(w)=P\{W\le w\}=P\{I^2R\le w\}=P\{I^2R\le w, R\le w\}+P\{I^2R\le w, R>w\}$$

נחשב את שני המחוברים האחרונים בשוויון שלעיל. לכל $0\le w\le 1$ מתקיים :

$$P\{I^2R\le w, R\le w\}=P\{I^2\le 1, R\le w\}=P\{I^2\le 1\}P\{R\le w\}$$ [המשתנים המקריים I ו-R בלתי-תלויים]

$$=1\cdot\int_0^w 2y\,dy=w^2$$

$$P\{I^2R\le w, R>w\}=P\{I^2\le \tfrac{w}{R}, R>w\}=\int_w^1\int_0^{\sqrt{w/y}} 12yx(1-x)\,dx\,dy=\int_w^1 12y\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{w/y}}dy$$

$$=\int_w^1 12y\left[\frac{w}{2y}-\frac{w\sqrt{w}}{3y\sqrt{y}}\right]dy=\Big[6wy-8w\sqrt{wy}\Big]_w^1=6w-8w\sqrt{w}-6w^2+8w^2$$

$$=6w-8w\sqrt{w}+2w^2$$

לכן, לכל $0\le w\le 1$ מתקיים : $F_W(w)=w^2+6w-8w\sqrt{w}+2w^2=6w-8w\sqrt{w}+3w^2$

$$f_W(w)=\frac{d}{dw}[6w-8w\sqrt{w}+3w^2]=6-12\sqrt{w}+6w=6(1-\sqrt{w})^2$$

הערה: בכל תרגיל, שבו מחשבים פונקציית צפיפות של משתנה מקרי X , כדאי מאוד לבדוק שאכן היא מקיימת את השוויון $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx=1$.

19. לפתרון הבעיה נשתמש במשוואה (5.1), המובאת בספר בעמוד 303.

הנתונים הם: $Y \sim Gamma(t,\lambda)$ ו- $X|Y=y \sim Po(y)$.

נמצא את פונקציית הצפיפות המותנית של Y בתנאי $X=n$. לכל $n=0,1,\ldots$ ולכל $y>0$ מתקיים:

$$f_{Y|X}(y\mid n)=\frac{P\{X=n\mid Y=y\}\cdot f_Y(y)}{P\{X=n\}}=\frac{e^{-y}\cdot\frac{y^n}{n!}\cdot\frac{1}{\Gamma(t)}\cdot\lambda e^{-\lambda y}(\lambda y)^{t-1}}{P\{X=n\}}$$

כדי למצוא את ההתפלגות של המשתנה המקרי Y בתנאי $X=n$, נבחן את הביטוי שתלוי ב- y בפונקציית הצפיפות המותנית האחרונה. ביטוי זה הוא $e^{-(\lambda+1)y}y^{n+t-1}$. כעת, נבדוק האם קיימת פונקציית צפיפות מוכרת (כלומר, של אחת ההתפלגויות המיוחדות) שיש בה ביטוי עם גורמים דומים של y .

ואכן, בפונקציית הצפיפות של התפלגות גמא עם הפרמטרים $n+t$ ו- $\lambda+1$ מופיעים גורמים דומים. לפיכך, נוכל להסיק שההתפלגות המותנית של Y בתנאי $X=n$ היא התפלגות גמא עם הפרמטרים המוזכרים לעיל.

הערה: אפשר לנקוט בדרך הפתרון המובאת לעיל, מכיוון שתוצאת האינטגרציה על **כל** פונקציית צפיפות שווה תמיד ל-1.

20. א. נשתמש במשוואה (7.1), המובאת בספר בעמוד 310, כדי למצוא את ההתפלגות המשותפת של Y_1 ו- Y_2.

נסמן:

$$x_1=h_1(y_1,y_2)=-\ln y_2 \qquad y_1=g_1(x_1,x_2)=x_1+x_2$$

$$x_2=h_2(y_1,y_2)=y_1+\ln y_2 \qquad y_2=g_2(x_1,x_2)=e^{-x_1}$$

מהקשר בין ה-X_i-ים ל-Y_i-ים נובע, שהמשתנה המקרי Y_1 מקבל ערכים חיוביים בלבד ואילו המשתנה המקרי Y_2 מקבל ערכים בין 0 ל-1. אולם, יש לשים לב, שפונקציית הצפיפות המשותפת **אינה** מקבלת ערכים חיוביים בכל התחום $\{(y_1,y_2):\ y_1>0\ ,\ 0<y_2<1\}$, אלא בתחום יותר מצומצם. נמצא, אם כן, את התחום שבו פונקציית הצפיפות המשותפת מקבלת ערכים חיוביים.

מכיוון ש- $x_1=-\ln y_2$ ו- $x_1>0$ מקבלים שבהכרח $0<y_2<1$, ומכיוון ש- $x_2=y_1+\ln y_2$ ו- $x_2>0$ אז בהכרח מתקיים $y_1>-\ln y_2$. כלומר, התחום שבו פונקציית הצפיפות המשותפת מקבלת ערכים חיוביים הוא:

$$\{(y_1,y_2):\ y_1>-\ln y_2\ ,\ 0<y_2<1\}$$

או לחלופין:

$$\{(y_1,y_2): y_1>0\ ,\ e^{-y_1}<y_2<1\}$$

כמו כן, מתקיים:

$$|J(x_1,x_2)|=\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -e^{-x_1} & 0\end{vmatrix}=e^{-x_1}$$

לכן, לכל $0<y_2<1$ ולכל $y_1>-\ln y_2$ מתקיים:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)|J(x_1,x_2)|^{-1}$$

$$=\lambda e^{-\lambda x_1}\lambda e^{-\lambda x_2}e^{x_1}=\lambda e^{\lambda\ln y_2}\lambda e^{-\lambda(y_1+\ln y_2)}e^{-\ln y_2}=\lambda^2 e^{-\lambda y_1}\frac{1}{y_2}$$

ב. המשתנה המקרי Y_1 הוא סכום של שני משתנים מקריים מעריכיים עם הפרמטר λ, ולכן יש לו התפלגות גמא עם הפרמטרים 2 ו-λ. (ראה בספר דוגמה 3ב בעמוד 294.)

אפשר גם למצוא את פונקציית הצפיפות השולית של Y_1 באמצעות אינטגרציה על פונקציית הצפיפות המשותפת של Y_1 ו- Y_2, באופן הבא. לכל $y_1 > 0$ מתקיים :

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{e^{-y_1}}^{1} \tfrac{\lambda^2}{y_2} e^{-\lambda y_1} dy_2 = \lambda^2 e^{-\lambda y_1} \ln y_2 \Big|_{e^{-y_1}}^{1} = 0 + \lambda^2 e^{-\lambda y_1} y_1 = \underbrace{\tfrac{1}{\Gamma(2)}}_{=1!} \lambda e^{-\lambda y_1} (\lambda y_1)^{2-1}$$

את ההתפלגות של המשתנה המקרי Y_2 נמצא מפונקציית הצפיפות המשותפת. (אפשר גם למצוא את ההתפלגות של Y_2 בדרך ישירה מתוך ההתפלגות של X_1.)

לכל $0 < y_2 < 1$ מתקיים :

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_{-\ln y_2}^{\infty} \tfrac{\lambda^2}{y_2} e^{-\lambda y_1} dy_1 = \tfrac{\lambda^2}{y_2} \cdot \tfrac{-1}{\lambda} e^{-\lambda y_1} \Big|_{-\ln y_2}^{\infty} = \tfrac{\lambda}{y_2} e^{-\lambda(-\ln y_2)} = \lambda y_2^{\lambda-1} \qquad (\lambda > 0)$$

כלומר, למשתנה המקרי Y_2 יש התפלגות ביתא עם הפרמטרים $a = \lambda$ ו- $b = 1$.

אפשר לבדוק את נכונות הטענה האחרונה באמצעות הצבה בפונקציית הצפיפות של התפלגות ביתא ובאמצעות משוואה (6.3) (עמודים 248-249 בספר הקורס).

ג. מהתוצאות שקיבלנו בסעיפים הקודמים, ברור ש- Y_1 ו- Y_2 תלויים זה בזה. קל לראות שפונקציית הצפיפות המשותפת של Y_1 ו- Y_2 איננה שווה למכפלת שתי פונקציות הצפיפות השולית שלהם.

21. פונקציית הצפיפות של המשתנים המקריים הנתונים היא : $f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{1}{2}x \quad , \quad 0 \le x \le 2$

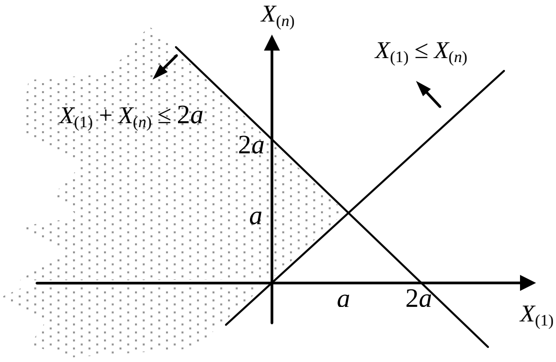
לכן, פונקציית הצפיפות של סטטיסטי הסדר השמיני של 10 המשתנים הנתונים היא :

$$f_{X_{(8)}}(x) = \tfrac{10!}{7!2!} \cdot [F(x)]^7 [1 - F(x)]^2 f(x) = 360 \cdot [\tfrac{1}{4}x^2]^7 [1 - \tfrac{1}{4}x^2]^2 \tfrac{1}{2}x$$
$$= 360 \cdot (\tfrac{1}{2})^{15} x^{15} [1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{16}x^4] \qquad , \qquad 0 \le x \le 2$$

והתוחלת של סטטיסטי בסדר השמיני היא :

$$E[X_{(8)}] = \int_0^2 x f_{X_{(8)}}(x) dx = \int_0^2 x \cdot 360 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{15} x^{15} \left(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{16}x^4\right) dx$$
$$= \int_0^2 360 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{15} \left(x^{16} - \tfrac{1}{2}x^{18} + \tfrac{1}{16}x^{20}\right) dx = 360 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{15} \left[\tfrac{1}{17}x^{17} - \tfrac{1}{2 \cdot 19}x^{19} + \tfrac{1}{16 \cdot 21}x^{21}\right]_0^2 = 1.698$$

22. נתבונן תחילה במשתנים המקריים $X_{(1)}$ ו- $X_{(n)}$. מכיוון שאלו הם סטטיסטֵי-סדר, תמיד מתקיים ביניהם האי-שוויון $X_{(1)} \le X_{(n)}$. כעת, כדי למצוא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של M, עלינו לחשב את ההסתברות של המאורע $\{M \le a\}$. מאורע זה מתקיים כאשר $\frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2} \le a$ או לחלופין כאשר מתקיים $X_{(1)} + X_{(n)} \le 2a$.



מכאן, אפשר לקבוע את תחום האינטגרציה הרצוי (ראה איור). מקבלים :

$$F_M(a) = P\{M \le a\} = \int_{-\infty}^{a} \int_{x_1}^{2a-x_1} f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x_1, x_n)\, dx_n dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{a} \int_{x_1}^{2a-x_1} \frac{n!}{(n-2)!} f(x_1)[F(x_n) - F(x_1)]^{n-2} f(x_n)\, dx_n\, dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{a} n(n-1) f(x_1) \left[\frac{[F(x_n) - F(x_1)]^{n-1}}{n-1} \right]_{x_1}^{2a-x_1} dx_1 \qquad [\text{כי } \tfrac{d}{dx}F(x) = f(x)]$$

$$= \int_{-\infty}^{a} n\, f(x_1)[F(2a - x_1) - F(x_1)]^{n-1} dx_1$$