תשובה 1

כל קטע בדיאגרמת הסה של קבוצה סדורה-חלקית מייצג זוג איברים, שאחד מהם מכסה את השני. מהגדרת המושג "מכסה", קבוצה $B \in P(A)$ מכסה קבוצה $C \in P(A)$ לגבי רלצית ההכלה אם ורק אם קיים:

$C \subset B$ ואין אף קבוצה $D \in P(A)$ המקיימת $C \subset D \subset B$ (הכלות-ממש).

עבור B,C **סופיות**, קל לראות שתנאי זה מתקיים אם ורק אם קיים:

$C \subset B$ ומספר אברי C קטן ב- 1 ממספר אברי B.

כעת, לקבוצה A בת n איברים יש $\binom{n}{k}$ תת-קבוצות בנות k איברים.

אם B בת k איברים, יש לה k תת-קבוצות בנות $k-1$ איברים (ע"י השמטת איבר אחד של B בכל פעם. נשים לב שטענה זו נכונה גם אם B ריקה).

לפיכך מספר הקטעים בדיאגרמת הסה של רלצית ההכלה מעל $P(A)$ הוא $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

לפי שאלה 3.9 בעמ' 71 בספר הלימוד, סכום זה שווה $n \cdot 2^{n-1}$.

תשובה 2

הגורמים הראשוניים של 126 הם 2,3,7 . החישוב דומה בכל לדוגמא שבספר הלימוד.

התוצאה היא 36.

תשובה 3

הנה שוב החישוב של מספר הפונקציות של קבוצה סופית A **על** קבוצה סופית B. חישוב זה מופיע גם באתר הקורס. מקרה פרטי של שאלה זו מופיע בשאלה 4.14 בעמ' 89 בספר הלימוד.

מספר **כל** הפונקציות של A ל- B הוא k^n (שאלה 1.32 עמ' 17 בספר הלימוד).

ב.ה.כ. נניח כי $B = \{1,2,\dots,k\}$. עבור $i = 1,\dots,k$ תהי F_i קבוצת כל הפונקציות של A ל- B אשר המספר i **אינו** נמצא בתמונתן.

לכל i, לפי אותה נוסחה (מספר כל הפונקציות של קבוצה נתונה לאחרת), $|F_i| = (k-1)^n$.

יש k קבוצות F_i.

בדומה, עבור $i \neq j$, $|F_i \cap F_j| = (k-2)^n$. יש $\binom{k}{2}$ דרכים לבחור את זוג הקבוצות.

כללית, עלינו להתבונן בחיתוכים של j קבוצות F_i שונות. חיתוך כל j קבוצות שונות כאלו מכיל $(k-j)^n$ פונקציות. יש $\binom{k}{j}$ דרכים לבחור j קבוצות F_i שונות.

מכאן, לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מספר כל הפונקציות של A **על** B הוא

$$k^n - k(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \binom{k}{3}(k-3)^n + \ldots = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j}(k-j)^n$$

א. לפי התוצאה הנ"ל, זהו מספר הפונקציות של קבוצה נתונה בת 2 איברים **<u>על</u>** קבוצה נתונה בת 5 איברים. מובן כי אין פונקציות כאלו !

ב. בדומה, כללית, אם $n<k$ אז $\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j}(k-j)^n = 0$.

תשובה 4

א. תהי B חלקית ל- A. אם $B \neq \emptyset$, הרי הסכום הקטן ביותר האפשרי של איבריה הוא 4, המתקבל עבור $B=\{4\}$. הסכום הגדול ביותר האפשרי מתקבל עבור $B=\{53, 54, \ldots, 61\}$ ושווה 513. מספר הסכומים האפשריים לתת-קבוצות **לא-ריקות** של A הוא אפוא **לכל היותר** $513-4+1=510$. בצירוף הקבוצה הריקה: 511.

מצד שני, מספר הקבוצות החלקיות של A הוא $2^9 = 512$.

מכיוון שיש יותר קבוצות מסכומים אפשריים, הרי לפי עקרון שובך היונים, יש לפחות שתי קבוצות בעלות אותו סכום.

ב. בסעיף א קיבלנו שבהינתן A כמתואר, קיימות $B,C \subseteq A$, $B \neq C$, בעלות אותו סכום. נזרוק מ- B ומ- C את כל האיברים השייכים לחיתוך שלהן, ונקבל שתי קבוצות שונות וזרות בעלות אותו סכום.

איתי הראבן