ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20417

אלגוריתמים

חוברת הקורס - סתיו 2016א

כתב: ד"ר אסף נוסבוים

אוקטובר 2015 – סמסטר סתיו – תשע"ו

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנט

אני מקדם בברכה את הצטרפותך לקורס "**אלגוריתמים**".

בחוברת זו תמצא את לוח זמנים ופעילויות, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות. תאריכי המפגשים בקורס יישלחו בהמשך.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים. בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת: http://telem.openu.ac.il. מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library. ניתן לפנות אלי בשעות הקבלה הטלפונית (החל מפתיחת הסמסטר), בתאום מראש באמצעות המייל: assaf.nussbaum@gmail.com. (מספר הטלפון יפורסם באתר). לצורך בירורים אדמיניסטרטיביים נא לפנות לזמירה בטלפון: 09-7781220.

אני מאחל לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה ,

ד"ר אסף נוסבוים
מרכז הקורס

1. לוח זמנים ופעילויות (20417 / 2016א)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ן (למנחה)
1	23.10.2015-18.10.2015	פרקים 1,2		
2	30.10.2015-25.10.2015	פרק 3		
3	6.11.2015-1.11.2015	"		ממ"ן 11 6.11.2015
4	13.11.2015-8.11.2015	פרק 4		
5	20.11.2015-15.11.2015	"		
6	27.11.2015-22.11.2015	"		ממ"ן 12 27.11.2015
7	4.12.2015-29.11.2015	פרק 5		
8	11.12.2015-6.12.2015 (ב-ו חנוכה)	"		

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ״ן (למנחה)
9	18.12.2015-13.12.2015 (א-ב חנוכה)	״		ממ״ן 13 18.12.2015
10	25.12.2015-20.12.2015	פרק 6		
11	1.1.2016-27.12.2015	״		
12	8.1.2016-3.1.2016	״		ממ״ן 14 8.1.2016
13	15.1.2016-10.1.2016	פרק 7		
14	22.1.2016-17.1.2016	״		
15	29.1.2016-24.1.2016	״		ממ״ן 15 29.1.2016

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

2. הנחיות כלליות להצגת אלגוריתם כפתרון למטלה

א. חובה להציג תחילה את הרעיון המרכזי של האלגוריתם בצורה בהירה.

ב. חובה **<u>להוכיח נכונות</u>** בצורה מדויקת.

ג. חובה להציג ניתוח מדויק של **<u>זמן הריצה</u>**.

ד. חובה להציג את האלגוריתם היעיל ביותר שהצלחתם לפתח.

ה. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות **<u>הפעלה/תיקון</u>** של אלגוריתם מוכר, פתרון שכזה עדיף על פני ניסוח מחדש של אלגוריתם.

ו. אסור לפתור תרגילים של פרק מוקדם באמצעות אלגוריתם שנלמד בפרק מאוחר.

להלן פרוט הפרקים המתורגלים בכל מטלה :

ממ"ן	פרק בספר הלימוד
11	1,3 (שידוכים, קשירות בגרפים)
12	4 (חמדנות – בדגש על מסלולים/עצים מזעריים)
13	5 (הפרד ומשול - בדגש על התמרת פורייה)
14	6 (תכנון דינאמי)
15	7 (זרימה)

3. ניקוד המטלות

משקל כל מטלה 6 נקודות. ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל כולל של 18 נקודות לפחות.

לתשומת לבכם!

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן :

אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלה** בציון הנמוך ביותר, שציונה נמוך מציון הבחינה , לא תילקח בחשבון בעת שקלול הציון הסופי.

זאת בתנאי שמטלה זו **אינה חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

4. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

א. הגשת מטלות במשקל כולל של 18 נקודות לפחות.

ב. ציון של 60 לפחות בבחינת גמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20417, אלגוריתמי קרוב
חומר הלימוד למטלה: פרקים 1,3 בספר
מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 6%
סמסטר: 2016א **מועד הגשה:** 6.11.2015

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלת מנחה"

שאלה מס' 1 (40%)

בעיית השידוך היציב (שאלה 1.8 בספר הקורס). בשאלה זו נברר האם אחת הנשים יכולה, באמצעות דיווח שקרי על העדפותיה, לשפר את השידוך (=הזיווג), המתקבל עבורה באלגוריתם של **Gale-Shapley** (GS). הגדרה: קלט לבעיית השידוך היציב ייקרא "מעודד שקרים", אם ישנה אשה w עבורה מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

(א) w משודכת ע"י האלגוריתם GS לגבר m.

(ב) w מעדיפה גבר אחר m' על פניו של m.

(ג) אם w תשקר, באמצעות החלפת מקומותיהם של m ושל m' ברשימת ההעדפות שהיא מוסרת לאלגוריתם (ואף שקר אחר לא יופיע ברשימת ההעדפות שלה, או של הנשים והגברים האחרים), אזי באלגוריתם GS, w תשודך לשמחתה עם m' במקום עם m.

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: אין אף קלט מעודד-שקרים לבעיית השידוך היציב.

שאלה מס' 2 (20%)

קשירות בגרף לא מכוון לעומת קשירות חזקה בגרף מכוון.

(א) נתון $G=(V,E)$ גרף **לא מכוון**, קשיר, עם לפחות שני קדקודים. הוכיחו באינדוקציה על מספר הקדקודים שתמיד קיים קדקוד, שלאחר הסרתו מהגרף עדיין מתקבל גרף קשיר.

(ב) הציגו גרף **מכוון**, קשיר היטב, $H=(V,E)$ כך שלאחר הסרה של **כל** קדקוד $v\in V$ מהגרף, תמיד יתקבל גרף שאיננו קשיר היטב.

שאלה מס׳ 3 (20%)

<u>הכוונת צלעות</u>. הציגו אלגוריתם שמכריע, בהנתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, האם ניתן לכוון כל אחת מהצלעות, כך שבגרף המכוון שמתקבל, **<u>דרגת הכניסה</u>** של לכל קדקוד תהיה **<u>גדולה מאפס</u>**. (לכל צלע $\{u,v\}\in E$ ניתן לבחור כיוון יחיד: (u,v) או לחלופין (v,u)). כשהתשובה חיובית, על האלגוריתם להחזיר הכוונה של הצלעות, המקיימת את הנדרש.

שאלה מס׳ 4 (20%)

<u>מסלולים מזעריים דרך קדקודים מועדפים</u>. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, צמד קדקודים $s\neq t\in V$, ותת-קבוצה של קדקודים מועדפים $U\subseteq V$, המקיימת $\varnothing\neq U\neq V$ וכן $s,t\notin U$.

לכל מסלול P בגרף נסמן ב- $\ell(P)$ את אורך המסלול (=מספר הצלעות במסלול), וב- $\#P(U)$ את מספרם של קדקודי U במסלול. הציגו אלגוריתמים לפתרון הבעיות הבאות:

(א) מציאת מסלול באורך מזערי מ- s ל- t, שמבקר ב- U פעם <u>אחת ויחידה</u>. (כלומר, האלגוריתם נדרש להחזיר מסלול מ- s ל- t כך ש- $\#P(U)=1$, וכך שאם ישנם מסלולים נוספים P' מ- s ל- t המקיימים $\#P'(U)=1$, אז $\ell(P')\geq\ell(P)$).

(ב) מציאת מסלול באורך מזערי מ- s ל- t, שמבקר ב- U מספר <u>רב ככל האפשר</u> של פעמים. (כלומר, האלגוריתם נדרש להחזיר מסלול מזערי P מ- s ל- t, כך שאם ישנם מסלולים מזעריים נוספים P' מ- s ל- t, אז מתקיים $\#P'(U)\leq\#P(U)$).

(ג) מציאת מסלול באורך מזערי מ- s ל- t, שמבקר במספר <u>זוגי</u> של קדקודים מתוך U. (כלומר, האלגוריתם נדרש להחזיר מסלול P מ- s ל- t, כך ש- $\#P(U)$ זוגי, וכך שאם ישנם מסלולים נוספים P' מ- s ל- t עבורם $\#P'(U)$ זוגי, אזי $\ell(P')\geq\ell(P)$).

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: **20417, אלגוריתמי קירוב**

חומר הלימוד למטלה: **פרק 4 בספר**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 6%**

סמסטר: 2016א **מועד הגשה: 27.11.2015**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלת מנחה"

שאלה מס' 1 (25%)

<u>מסלולים כמעט מזעריים</u>. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים אי-שליליים $w(e)\geq 0$ לכל אחת מהצלעות $e\in E$. נסמן בצורה $P_{s,t}$ מסלול מקדקוד s לקדקוד אחר t בגרף. (כרגיל, משקלו של מסלול מוגדר כסכום משקלי הצלעות במסלול $w(P)=\sum_{e\in P} w(e)$, ומסלול $P_{s,t}$ נקרא מזערי אם מתקיים $w(P_{s,t})\leq w(P'_{s,t})$ עבור כל מסלול אחר $P'_{s,t}$). הגדרות חדשות: מסלול $P_{s,t}$ ייקרא **<u>כמעט מזערי</u>**, אם משקלו קטן ביותר מבין כל המסלולים הלא מזעריים מ- s ל- t. כלומר, אם $w_1<w_2<\ldots<w_k$ הינה רשימת המשקלים של כל המסלולים האפשריים מ- s ל- t, אז למסלול מזערי מתקיים $w(P_{s,t})=w_1$ ולמסלול כמעט מזערי מתקיים $w(P_{s,t})=w_2$. צלע $e=(u,v)\in E$ תיקרא **<u>שימושית</u>** אם היא צלע **<u>אחרונה</u>** באיזשהו מסלול מזערי $P_{s,v}$.

א. הוכיחו שאם <u>כל</u> הצלעות ב- $P_{s,t}$ שימושיות, אז $P_{s,t}$ מסלול מזערי.

ב. הוכיחו שאם יש צלע <u>לא</u> שימושית ב- $P_{s,t}$ (אחת או יותר), אז $P_{s,t}$ <u>איננו</u> מסלול מזערי.

ג. הוכיחו שאם $P_{s,t}$ מסלול כמעט מזערי אז מופיעה בו צלע לא שימושית <u>אחת ויחידה</u> $e=(u,v)$, ומתקיים שהרישא של $P_{s,t}$ מ- s ל- u מהווה מסלול מזערי, וגם הסיפא של $P_{s,t}$ מ-v ל- t מהווה מסלול מזערי.

ד. הציגו בעזרת הסעיפים הקודמים אלגוריתם למציאת מסלול כמעט מזערי מקדקוד מקור נתון s לקדקוד יעד נתון t.

שאלה מס' 2 (25%)

<u>תיקון עץ פורש שהושמטה ממנו צלע</u>. נתון עץ פורש זערי T של גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$ עם משקלים אי-שליליים $c(e)\geq 0$ לכל אחת מהצלעות $e\in E$. תהי $e^*\in T$ צלע בעץ, ויהי $G'=(V,E')$ הגרף, המתקבל מ-G לאחר השמטתה של e^* (כלומר, $E'=E\setminus\{e^*\}$). נתון כי G' קשיר. הציגו אלגוריתם שרץ "בזמן" $O(|E|)$ ומתקן את T, כך שיתקבל ממנו עץ פורש מזערי T' עבור G'. (במסגרת ניתוח זמן הריצה, הניחו כי כל פעולה אלמנטרית על המשקלים, כמו חיבור או השוואה, מתבצעת בזמן $\Theta(1)$).

שאלה מס' 3 (30%)

<u>קרוב מסלולים מזעריים באמצעות עץ פורש מזערי</u>. יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם מחירים (=משקלות) אי-שליליים $c_e\geq 0$ לכל אחת מהצלעות $e\in E$. יהי $s\in V$ קדקוד מקור. בתרגיל זה נברר האם ניתן להשתמש בעץ פורש מזערי T כדי לחשב (או לפחות לקרב) את אורכם של המסלולים המזעריים מ-s ליתר הקדקודים ב-G (שייקראו להלן "המסלולים המזעריים").

(א) בסעיף זה נוכיח שהמסלולים המזעריים בתוך עץ פורש מזערי (עפ"מ) עלולים להיות יקרים (=כבדים) יותר באופן ניכר מהמסלולים המזעריים בגרף כולו G: הציגו סדרת גרפים עבורם קיימים זוגות s,t, כך שהיחס בין מחיר המסלול המזערי מ-s ל-t בכל עפ"מ T לבין מחירם ב-G הוא גדול ככל האפשר.

(ב) כזכור, כל עץ ובפרט כל עפ"מ הוא גרף דליל במיוחד: יש בו $|V|-1$ צלעות בלבד. בסעיף זה נראה שניתן להוסיף צלעות ל-עפ"מ T, כך שיתקבל גרף T' המקיים:

(i) הגרף המעובה T' עדיין דליל יחסית, אך מצד שני

(ii) <u>אורכם של המסלולים המזעריים ב-T' דומה לאורכם ב-G</u>: קיים קבוע c, כך ש-$dist_{T'}(v)\leq c\cdot dist_G(v)$ לכל $v\in V$.

גרף המצטיין בתכונות (i),(ii) קרוי בספרות בשם **<u>spanner</u>**). פתרו את שאלה 4.31 בספר הקורס. הדרכה: מותן של גרף מוגדר כאורכו של המעגל המזערי בגרף. למשל, אם בגרף אין אף משולש (אף מעגל באורך 3), אבל יש בו מרובע (מעגל באורך 4), אז המותן של הגרף הינו 4. בסיום הפתרון לסעיף זה העזרו במשפט הבא: אם המותן של הגרף גדול ממש מ-k, אז מספר הצלעות בגרף חסום בצורה $|E|\leq O(|V|\cdot|V|^{\frac{2}{k-1}})$.

שאלה מס' 4 (20%)

<u>קידוד הופמן</u>. עץ מושרש T נקרא בינארי לחלוטין אם לכל קדקוד שלו שאינו עלה יש שני בנים. הוכיחו כי לכל עץ מושרש בינרי לחלוטין T בעל n עלים, קיימת סדרת שכיחויות $f_1,f_2,...,f_n$ כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא T.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: **20417, אלגוריתמי קרוב**

חומר הלימוד למטלה: **פרק 5 בספר**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 6%**

סמסטר: 2016א **מועד הגשה: 18.12.2015**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות: • שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס • שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה **הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלת מנחה"**

שאלה מס' 1 (30%)

<u>הרצת FFT</u>. נביט בפולינום $p(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 3$ שדרגתו קטנה מ-4. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) עבור:

(א) הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot, \omega_4)$) על מקדמי הפולינום.

(ב) הרצת INVERSE-FFT (הרצת $FFT(\cdot, (\omega_4)^{-1})$) על הערכים שהתקבלו בסעיף הקודם.

שאלה מס' 2 (30%)

<u>כפל מספרים שלמים בגישת FFT</u>: כפל מספרים שלמים הינה בעיה אלגוריתמית בעלת חשיבות מעשית עליונה. לשם פשטות להלן נניח ששני המספרים המוכפלים שווי אורך (לשניהם ייצוג בינארי של n ביטים), וששניהם חיוביים. בתרגיל זה יוצגו עיקר הרכיבים באחד האלגוריתמים היעילים ביותר המוכרים כיום לכפל שלמים: <u>זמן הריצה</u> שלו הוא <u>$\Theta(n \log^2 n)$</u> בלבד. כזכור, אלגוריתם הכפל של **Karatsuba** מבוסס על פיצול הספרות של כל קלט לשני בלוקים שווי גודל, ורץ בזמן $\Theta(n^{\log_2 3})$. הציגו אלגוריתם משופר, שמחלק כל קלט ל- (n/k) בלוקים בגודל k. היעזרו באלגוריתם ה-FFT לפתרון תתי-הבעיות המתקבלות. הניחו לשם פשטות (וללא הצדקה), כי ההכפלות שמתבצעות במהלך הקריאות הרקורסיביות אינן מגדילות את אורכם של המספרים, ולכן ניתן לממש הכפלות אלו בצורה תמימה תוך ביצוע $\Theta(k^2)$ פעולות על ביטים. בחרו לבסוף את גודלם של הבלוקים להיות $k = \log n$.

שאלה מס' 3 (30%)

<u>חישוב כל הנגזרות של פולינום בנקודה</u>. מקובל לסמן ב- $f^{(k)}(x)$ את הנגזרת מסדר k של הפונקציה $f(x)$. למשל, $f^{(1)}(x)=f'(x)$, $f^{(2)}(x)=f''(x)$, $f^{(3)}(x)=f'''(x)$ וכן $f^{(0)}(x)=f(x)$. נתונים מקדמי הפולינום $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ ונתונה נקודה מסוימת x_0. הציגו אלגוריתם לחישוב ערכי כל הנגזרות $f^{(0)}(x_0),...,f^{(n)}(x_0)$ באותה נקודה x_0, תוך ביצוע $\Theta(n\log n)$ פעולות אריתמטיות בסיסיות בלבד. (פעולה בסיסית = חיבור, חיסור, כפל, חילוק או השוואה של מספרים). למשל לפולינום מדרגה $n = 4$ יש לחשב את הערכים הבאים:

$$\begin{array}{llllll}
f^{(0)}(x_0) = & a_0 & +a_1x_0 & +a_2(x_0)^2 & +a_3(x_0)^3 & +a_4(x_0)^4 \\
f^{(1)}(x_0) = & & +a_1 & +2a_2x_0 & +3a_3(x_0)^2 & +4a_4(x_0)^3 \\
f^{(2)}(x_0) = & & & 2a_2 & +2\cdot 3a_3x_0 & +3\cdot 4a_4(x_0)^2 \\
f^{(3)}(x_0) = & & & & 2\cdot 3a_3 & +2\cdot 3\cdot 4a_4(x_0) \\
f^{(4)}(x_0) = & & & & & 2\cdot 3\cdot 4a_4
\end{array}$$

העזרו בתשובתכם בצמצום הסטנדרטי של עצרות:

$$\frac{m!}{\ell!}=\frac{1\cdot 2\cdot ...\cdot (m-1)\cdot m}{1\cdot 2\cdot ...\cdot (\ell-1)\cdot \ell}=(\ell+1)\cdot(\ell+2)\cdot ...\cdot (m-1)\cdot m.$$

שאלה מס' 4 (10%)

<u>כפל מטריצות ריבועיות (Strassen)</u>. כזכור, כפל של שתי מטריצות ריבועיות A,B מסדר $n\times n$ (מעל שדה שרירותי) מניב מטריצה $C = A\times B$ אף היא מסדר $n\times n$, המוגדרת ע"י הכלל

$$C_{i,j}=\sum_{1\le k\le n} A_{i,k}\times B_{k,j}.$$

לכן <u>**מימוש ישיר**</u> של כפל מטריצות כרוך ב- $\Theta(n^3)$ פעולות אריתמטיות בסיסיות מעל השדה הנדון (כפל/חיבור/חיסור), ובפרט ב- $\Theta(n^3)$ פעולות כפל. בתרגיל זה נוכיח כי ניתן להכפיל מטריצות ריבועיות באמצעות $\underline{\Theta(n^{\log_2 7})=O(n^{2.81})}$ פעולות אריתמטיות בסיסיות בלבד. פרטי ההוכחה מובאים להלן. נניח בה"כ כי n זוגי. נפרק כל מטריצה ל-4 תתי-מטריצות מסדר $\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} e & g \\ f & h\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} r & s \\ t & u\end{pmatrix}.$$

וודאו (לא להגשה) כי מהגדרת כפל מטריצות מתקיים:

$$r = a \times e + b \times f$$
$$s = a \times g + b \times h$$
$$t = c \times e + d \times f$$
$$u = c \times g + d \times h$$

כעת נגדיר:

$$P_1 = a \times (g - h)$$
$$P_2 = (a + b) \times h$$
$$P_3 = (c + d) \times e$$
$$P_4 = d \times (f - e)$$
$$P_5 = (a + d) \times (e + h)$$
$$P_6 = (b - d) \times (f + h)$$
$$P_7 = (a - c) \times (e + g)$$

(ב) וודאו (לא להגשה) כי חישוב המטריצות $P_1, \ldots, P_7$, כרוך ב-7 פעולות כפל בלבד (וכן מספר מצומצם של פעולות חיבור/חיסור) של מטריצות מסדר $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$.

(ג) וודאו (לא להגשה) כי מתקיים:

$$s = P_1 + P_2$$
$$t = P_3 + P_4$$
$$r = P_4 + P_5 + P_6 - P_2$$
$$u = P_1 + P_5 - P_3 - P_7$$

(ד) הוכיחו (כן להגשה) כי מספר הפעולות האלמנטריות של האלגוריתם הוא $\Theta(n^{\log_2 7})$ בלבד.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20417, אלגוריתמי קרוב

חומר הלימוד למטלה: פרק 6 בספר

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 6%**

סמסטר: 2016א **מועד הגשה: 8.1.2016**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלת מנחה"

שאלה מס' 1 (25%)

מסלולים מזעריים בשריג עם מחירים על הקודקודים. נתון שריג ריבועי מסדר $n \times n$ עם מחירים אי-שליליים על קדקודים: אברי השריג הם נקודות מהצורה (i,j) כאשר $1 \le i,j \le n$, ולכל איבר מותאם מחיר $c(i,j) \ge 0$. הקואורדינטה הראשונה i מייצגת מיקום אופקי (ימינה / שמאלה) בשריג. לכן השכבה השמאלית ביותר מורכבת מהנקודות בהן $i=1$, והשכבה הימנית ביותר מהנקודות בהן $i=n$. הקואורדינטה השנייה j מייצגת מיקום אנכי (מעלה / מטה). בשריג מותרת תנועה רק בצעדים מהצורה: $(i,j) \rightarrow (i+1,j-1)$, או $(i,j) \rightarrow (i+1,j)$ או $(i,j) \rightarrow (i+1,j+1)$, כלומר, "ימינה ולמטה" או "ימינה" או "ימינה ולמעלה". הציגו אלגוריתם למציאת מסלול במחיר מזערי מהשכבה השמאלית ביותר לימנית ביותר, כשמחיר מסלול מוגדר כסכום מחירי הנקודות במסלול. על האלגוריתם לבצע $\Theta(n^2)$ פעולות אלמנטריות בלבד, כשפעולות אריתמטיות על המחירים, כמו חיבור, חיסור והשוואה, נחשבות לפעולות אלמנטריות.

שאלה מס' 2 (25%)

פלינדרום מרבי. פלינדרום הינה מחרוזת שנקראת בצורה זהה מימין לשמאל או משמאל לימין. למשל המחרוזת "ABBA" באנגלית, והמחרוזת הבאה בעברית "דעו מאביכם כי לא בוש אבוש שוב אשוב אליכם כי בא מועד" (כשמתעלמים מסימן הרווח). פלינדרום מרבי בתוך מחרוזת נתונה, היא תת-מחרוזת **רצופה**, שמהווה פלינדרום, ושאורכה מרבי. למשל בתוך המחרוזת abcbea, הפלינדרום המרבי הוא bcb (ולא abcba שאיננה תת-מחרוזת רצופה). הציגו אלגוריתם **תכנון דינאמי** למציאת פלינדרום מרבי בתוך מחרוזת קלט באורך n מעל האלפבית האנגלי. לא יינתן ניקוד על אלגוריתמים טריוויאליים, שרצים בזמן $\Theta(n^3)$ (הזמן הנדרש לבדיקת כל תתי המחרוזות הרצופות).

שאלה מס' 3 (25%)

<u>אינטרפולציה באמצעות תכנון דינאמי</u>: פולינום ממשי מדרגה קטנה מ- n הינו ביטוי מהצורה $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$. המשפט היסודי של האלגברה קובע כי פולינום שכזה נקבע ביחידות לפי ערכו ב- n נקודות. למשל, כל קו ישר (כלומר כל פולינום מדרגה קטנה מ-2) נקבע ביחידות ע"י 2 נקודות דרכן הוא עובר. באופן כללי, בהינתן n נקודות $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ קיים פולינום אחד ויחיד $p(x)$ מדרגה קטנה מ- n המקיים $p(x_1)=y_1,\ldots,p(x_n)=y_n$. פולינום זה נקרא פולינום האינטרפולציה (של הנקודות הנתונות). בבעיית האינטרפולציה נתונות הנקודות $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ ויש לחשב את המקדמים $a_0,\ldots,a_{n-1}$ של פולינום האינטרפולציה.

(א) לכל $i\le j$ נסמן ב- $p_{i,j}$ את פולינום האינטרפולציה של הנקודות $(x_i,y_i),\ldots,(x_j,y_j)$.

מצאו 3 פולינומים פשוטים $q(x),r(x),s(x)$ מדרגה 0 או 1, עבורם מתקיים

$$p_{i,j+1}=\frac{q(x)p_{i,j}(x)-r(x)p_{i+1,j+1}(x)}{s(x)}$$

(ב) הציגו אלגוריתם תכנון דינאמי לבעיית האינטרפולציה, המבוסס על נוסחת הנסיגה מסעיף (א). לשם פשטות, החשיבו פעולות אריתמטיות על מספרים כפעולות אלמנטריות.

(ג) יהי $p(x)=x+2x^2+3x^3+4x^4$. הציבו ב- $p(x)$ את חמשת הערכים $-2,-1,0,1,2$, והריצו את אלגוריתם האינטרפולציה מהסעיף הקודם על חמש הנקודות שמתקבלות. וודאו שהאלגוריתם אכן מניב כפלט את מקדמיו של $p(x)$.

שאלה מס' 4 (25%)

<u>יישומים של תכנון דינאמי</u>. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים אי-שליליים $c(e)\ge 0$ לכל אחת מהצלעות $e\in E$, ונתון קדקוד מסוים $r\in V$. הביטו באלגוריתם הבא:

(i) מאתחלים מערך חד-מימדי A באמצעות הכלל: $A[v]=\begin{cases}0, & v=r\\ \infty, & v\ne r\end{cases}$.

(ii) לולאה חיצונית: חוזרים שוב ושוב על הפעולה הבאה.

(1ii) לולאה פנימית: סורקים את הצלעות בסדר לקסיקוגרפי. לכל $e=(u,v)\in E$ מבצעים:

אם $A[v]>A[u]+c(e)$ אז מעדכנים $A[v]\leftarrow A[u]+c(e)$.

(2ii) אם בהרצה הנוכחית של כל הלולאה הפנימית לא בוצע אף עדכון, אז האלגוריתם מסיים.

שאלות:

(א) **<u>מה מחשב האלגוריתם?</u>** הציגו הוכחה מפורטת לטענתכם בשיטת האינדוקציה.

(ב) יהי $B(n)$ המספר המרבי של איטרציות שמתבצעות בלולאה **<u>החיצונית</u>** על גרפים בעלי n קדקודים. חשבו את $B(n)$, והציגו סדרת גרפים G_n עליהם מתבצעות בדיוק $B(n)$ איטרציות.

(ג) הציגו סדרת גרפים אחרת G'_n, עבורם נכנסים ללולאה החיצונית פעמיים בלבד, וזאת למרות **<u>שמספר הצלעות שלהם זהה</u>** לגרפים מהסעיף הקודם, כלומר $|E(G'_n)|=|E(G_n)|$ לכל n.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20417, אלגוריתמי קרוב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 6%**

סמסטר: 2016א **מועד הגשה: 29.1.2016**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלת מנחה"

שאלה מס' 1 (25%)

צלעות שמוסרות, נוספות מחדש, ושוב מוסרות מהרשת השיורית. הציגו דוגמא פשוטה של רשת זרימה ושל צלע e, כך שבמהלך הרצת **Edmonds-Karp** על הרשת קיימות שתי איטרציות שונות, שבהן תוספת הזרימה דרך e זהה לקיבולת השיורית של e.

שאלה מס' 2 (25%)

זרימה מזערית כשקיבולות חוסמות מלרע את הזרימה הנדרשת. כרגיל נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם מקור ויעד $s \neq t \in V$ ועם קיבולת אי-שליליות $c(e)>0$ לכל צלע בגרף. (כאשר $e \notin E$ אז $c(e)$ אינה מוגדרת, ומובטח שלכל זוג קדקודים $u \neq v$, לכל היותר אחת מבין הצלעות (u,v), (v,u) נמצאת בגרף). כרגיל זרימה חוקית הינה פונקציה $f: E \to \mathbb{R}$, המקיימת את חוק שימור הזרימה $\sum_{(u,v)\in E} f(u,v) - \sum_{(v,w)\in E} f(v,w) = 0$ לכל קדקוד $v \in V$. אלא שהפעם, כל קיבולת חוסמת את הזרימה דווקא מלמטה: כלומר f נדרשת לקיים $f(e) \geq c(e)$ לכל צלע $e \in E$ (במקום $f(e) \leq c(e)$). כל השאלות מתייחסות לרשת המתוארת בפסקה האחרונה.

(א) הוכיחו שאם קיימת זרימה חוקית ברשת אז קיימת ברשת זרימה חוקית גדולה כרצוננו.

(ב) הציגו אלגוריתם למציאת זרימה חוקית (לאו דווקא מזערית) ברשת.

(ג) הציגו אלגוריתם למציאת זרימה חוקית מזערית ברשת.

שאלה מס' 3 (25%)

<u>תיקון זרימה מרבית נתונה</u>. נתונה רשת זרימה, כלומר גרף מכוון $G=(V,E)$ עם מקור ויעד $s \neq t \in V$, ועם <u>קיבולות שלמות</u> $c(e)>0$ לכל $e \in E$. נתונה זרימה מרבית f ברשת, ונתונה צלע מסוימת $e^* \in E$. הציגו אלגוריתמים <u>בסיבוכיות ליניארית</u> עבור כל אחת מהבעיות הבאות.

(א) מציאת זרימה מרבית ברשת, המתקבלת <u>מהגדלת</u> הקיבולת של e^* ב-1.

(ב) מציאת זרימה מרבית ברשת, המתקבלת <u>מהקטנת</u> הקיבולת של e^* ב-1.

שאלה מס' 4 (25%)

<u>בעיית הספיקות</u>. הגדרות: נוסחת 3CNF היא נוסחה מהצורה $\varphi=\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$, כשלכל פסוקית הצורה $\varphi_i=(z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee z_{i,3})$, וכל $z_{i,j}$ הינו אחד מהליטרלים $x_1,\ldots,x_n,\neg x_1,\ldots,\neg x_n$. למשל $\varphi=(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee \neg x_5)$ הינה נוסחת 3CNF. השמה הינה פונקציה שמתאימה לכל משתנה x_i ערך "אמת" T או "שקר" F. בהינתן השמה מסוימת, אזי הליטרל x_i מסופק אם ההשמה מקיימת $x_i \leftarrow T$, והליטרל $\neg x_i$ מסופק אם $x_i \leftarrow F$. פסוקית $\varphi_i=(z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee z_{i,3})$ מסופקת, כאשר <u>לפחות</u> אחד מהליטרלים שבה $z_{i,1},z_{i,2},z_{i,3}$ מסופק. הנוסחא כולה $\varphi=\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$ מסופקת, אם <u>כל</u> הפסוקיות $\varphi_1,..,\varphi_m$ מסופקות. הנוסחא $\varphi=\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$ נקראת <u>ספיקה</u>, אם לפחות אחת מבין 2^n ההשמות האפשריות מספקת אותה. <u>השאלה</u>: נתונה נוסחת 3CNF, שבה כל אחד מהמשתנים $x_1,\ldots,x_n$ מופיע <u>בדיוק בשלוש</u> פסוקיות שונות, וכל פסוקית כוללת <u>בדיוק שלושה</u> משתנים שונים. הוכיחו כי הנוסחה ספיקה. הציגו עבור נוסחאות כאלו אלגוריתם למציאת השמה מספקת. הדרכה: העזרו במשפט **Hall**.