תשובה 1

א. $x \subseteq y$	ב. $x \in y$	ג. $x \subseteq y$	ד. $x \in y$
ה. $x \subseteq y$	ו. $x \subseteq y$	ז. $x \subseteq y$	ח. שניהם.

תשובה 2

א. נכון. לפי הגדרת חיסור קבוצות $A - B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$,

ושוב לפי אותה הגדרה: $(A - B) - B = \{x \mid (x \in A \text{ and } x \notin B) \text{ and } x \notin B\}$

וממשמעות המלה "וגם" ("and") זה שווה $\{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$

כלומר $A - B$.

הוכחה אחרת: מהגדרת חיסור קבוצות והגדרת חיתוך קבוצות מובן כי:

$$(A - B) \cap B = \varnothing \quad (*)$$

ניעזר כעת בטענה שבשורה השנייה בראש עמ' 21 בספר:

$$A \cap B = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad A - B = A \,.$$

כדי למנוע בלבול נרשום אותה מחדש כך:

$X \cap Y = \varnothing$ אם ורק אם $X - Y = X$ (**)

נציב $X = A - B$, $Y = B$.

מנוסחה (*) למעלה נקבל ש- $X \cap Y = \varnothing$.

לכן, לפי טענה (**) , $X - Y = X$, כלומר $(A - B) - B = A - B$.

ב. **נכון**. הוכחה: ניעזר שוב בטענה שבשורה השנייה בעמ' 21 בספר:

$$A \cap B = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad A - B = A \,.$$

נציב $B - A$ במקום B :

$$A \cap (B - A) = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad A - (B - A) = A \qquad (*)$$

מהגדרת חיתוך קבוצות יחד עם הגדרת הפרש קבוצות, מתקיים: $A \cap (B - A) = \varnothing$.

לכן מהשקילות (*) נקבל $A - (B - A) = A$.

אפשר להוכיח טענה זאת גם בדרכים אחרות, למשל בעזרת מושג המשלים, בדומה למה שנראה בפתרון שאלה 3.

ג. לא נכון: ראו החוברת "אוסף תרגילים פתורים", קבוצה 1 שאלה 2.

תשובה 3

א. נניח $X \oplus A = Y \oplus A$. נבצע בשני האגפים הפרש סימטרי עם A :

$$(X \oplus A) \oplus A = (Y \oplus A) \oplus A$$

לפי שאלה 1.22ב (אסוציאטיביות) נקבל

$$X \oplus (A \oplus A) = Y \oplus (A \oplus A)$$

מהמשך סעיף ב׳ באותה שאלה, $A \oplus A = \varnothing$, ולכן קיבלנו :

$$X \oplus \varnothing = Y \oplus \varnothing$$

ולפי טענה אחרת באותו סעיף (הפרש סימטרי עם הקבוצה הריקה) קיבלנו

$X = Y$.

הערה : הפרש סימטרי הוא פעולה חילופית (שוב 1.22ב) ,

לכן קיבלנו שנוכל לצמצם גם משמאל, כלומר : אם $A \oplus X = A \oplus Y$ אז $X = Y$.

ב. כיוון אחד (אם $A = B$) מיידי משאלה 1.22ב : $A \oplus A = \varnothing$.

כיוון שני : אם $A \oplus B = \varnothing$ משמע $A \oplus B = A \oplus A$ (כי כאמור $A \oplus A = \varnothing$).

מכאן לפי כלל הצמצום משמאל שהוכחנו למעלה בסעיף א׳ : $B = A$.

ג. אם $A = B'$, ניעזר בשאלה 2א בממ״ן זה ונקבל המבוקש (השלימו הפרטים) !

כיוון שני : נובע מהכיוון הראשון בעזרת כלל הצמצום, בדומה לסעיף ב׳ :

נניח $A \oplus B = U$. כאמור בכיוון הראשון של סעיף זה, $A \oplus A' = U$.

לכן $A \oplus B = A \oplus A'$. לפי כלל הצמצום מסעיף א׳ : $B = A'$.

ד. כיוון אחד : אם $B = \varnothing$ אז $A \oplus B = A$ לפי שאלה 1.22ב (הפרש סימטרי עם הקבוצה הריקה). כיוון שני : נובע מהכיוון הראשון בעזרת כלל הצמצום, בדומה לסעיפים ב, ג.

תשובה 4

א. $B_n = \{n \cdot k \mid k \in \mathbf{N}^*\}$, משמע B_n היא קבוצת כל הכפולות של n.

$B_n \cap B_m$ היא אפוא קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מ- 0, והמתחלקים הן ב- n והן ב- m :

$B_n \cap B_m = \{nk \mid k \in \mathbf{N}^*\} \cap \{ms \mid s \in \mathbf{N}^*\}$.

מכאן, לפי הטענה שבהדרכה, נובע שכל אבר של $B_n \cap B_m$ מתחלק ב $c(n,m)$. משמע :

$B_n \cap B_m \subseteq B_{c(n,m)}$.

מצד שני, יהי $x \in B_{c(n,m)}$, משמע x מתחלק ב- $c(n,m)$.

$c(n,m)$ מתחלק הן ב- n והן ב- m. לכן x מתחלק הן ב- n והן ב- m . לפיכך

$B_{c(n,m)} \subseteq B_n \cap B_m$.

משתי ההכלות : $B_n \cap B_m = B_{c(n,m)}$.

על תכונות הכפולה המשותפת המינימלית ראו

http://mathworld.wolfram.com/LeastCommonMultiple.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Least_common_multiple

ב. נראה כי לכל $m \in \mathbf{N}^*$, m **אינו** שייך לחיתוך הנ״ל. יהי $m \in \mathbf{N}^*$.

מהגדרת B_m , כל אברי B_m גדולים או שווים m . מובן אפוא כי $m \notin B_{m+1}$.

לפיכך m אינו שייך לחיתוך כל ה- B_n -ים.

ג. קבוצה זו היא קבוצת המספרים הראשוניים. נוכיח זאת:

כיוון אחד: יהי $n \in \mathbf{N}^*$ מספר **שאינו** ראשוני, נוכיח כי $D_n = \varnothing$.

יהי $x \in D_n$, נראה שלא ייתכן x כזה:

ההנחה ש- n ראשוני פירושה שקיימים $m,k \in \mathbf{N}^*$, $1 < m,k < n$, כך ש- $n = km$.

מכיון ש- n מתחלק ב-m, כל מספר המתחלק ב- n מתחלק ב- m. בפרט $x \in B_m$.

מכיון ש- $1 < m < n$ אז מהגדרת D_n נקבל כי $x \notin D_n$, בסתירה להנחה.

הראינו ש- D_n ריקה עבור כל n שאינו ראשוני.

מצד שני, אם n ראשוני, נראה כי $n \in D_n$ ולכן בפרט $D_n \neq \varnothing$:

לכל $n \in \mathbf{N}^*$ מתקיים $n \in B_n$.

אם n ראשוני, אז לכל m טבעי המקיים $1 < m < n$, n אינו מתחלק ב- m, ולכן $n \notin B_m$. מהגדרת D_n נקבל אפוא כי $n \in D_n$, ולכן D_n אינה ריקה.

משני הכיוונים יחד, הראינו שקבוצת ערכי n עבורם $D_n \neq \varnothing$ היא קבוצת המספרים הראשוניים.