

קווים לפתרון כמה שאלות בממ"ן 13 סמסטר 2012

שאלה 4

אם לשפה B יש מאמת שזמן ריצתו מוגבל באיזושהי צורה ניתנת לחישוב, אז B כריעה. מאמת שזמן ריצתו מוגבל לא יכול לקרוא מילים שאורכן גדול מהגבלת הזמן שלו. לכן כאשר רוצים לבדוק שייכות של קלט w ל- B , אפשר להריץ את המאמת על w עם כל אחת מן המחרוזות שאורכן איננו גדול מן ההגבלה של זמן הריצה. אם אחת מן המחרוזות הללו מאמתת את השייכות של w ל- B , נדע ש- w שייכת ל- B . אם אף אחת מהן לא מאמתת את השייכות של w ל- B , נדע ש- w לא שייכת ל- B .

שאלה 5

אישור השייכות של זוג $\langle n, m \rangle$ לשפה C יכול את הפירוק של n לגורמים ראשוניים ואת ההוכחה שכל אחד מן הגורמים הללו הוא באמת מספר ראשוני. מכיוון שכל גורם ראשוני אינו קטן מ-2, מספרם של הגורמים הראשוניים של n הוא $O(\log_2 n)$. הגודל של הייצוג של כל אחד מהם גם הוא $O(\log n)$. לכן גודל ההוכחה של הראשוניות של כל אחד מהם פולינומיאלי ב- $\log n$. לכן בסך הכל גודל אישור השייכות של $\langle n, m \rangle$ ל- C פולינומיאלי בגודל הקלט. כדי לאמת את השייכות, צריך תחילה לאמת את הוכחת הראשוניות של כל גורם ראשוני של n . לאחר מכן מאמתים שמספר הראשוניים השונים בפירוק לגורמים של n איננו גדול מ- m .

שאלה 6

- א. אפשר להראות רדוקציה של $CNF-SAT$ ל- $CLIQUE$ בדומה לרדוקציה של משפט 7.32:
- לכל מופע של ליטרל בכל פסוקית יהיה צומת בגרף G .
- מחברים בקשת כל ליטרל לכל הליטרלים שאינם שייכים לפסוקית שלו והם שונים מן הליטרל המשלים שלו.
- k של בעיית $CLIQUE$ יהיה מספר הפסוקיות של הנוסחה ב- $CNF-SAT$.
- ב. אפשר להראות רדוקציה של $CNF-SAT$ ל- $HAMPATH$ בדומה לרדוקציה של משפט 7.46:
- אין בשום שלב של הבנייה שמופיעה בהוכחת המשפט הסתמכות על כך שיש בכל פסוקית שלושה ליטרלים.
- ג. אי אפשר להראות רדוקציה של $CNF-SAT$ ל- $SUBSETSUM$ בדומה לרדוקציה של משפט 7.56.
- ברדוקציה של הוכחת המשפט מסתמכים על כך שבכל פסוקית יש עד שלושה ליטרלים, ולכן הסכום של כל עמודה בחלק השמאלי של איור 7.57 איננו גדול מ-5. זה לא יהיה נכון אם תהיינה פסוקיות ארוכות. אם תהיה פסוקית באורך גדול מ-9, וכל הליטרלים שלה יקבלו ערך TRUE, אז הסכום יהיה גדול מ-9, ויהיה נשא (carry).

שאלה 7

שייכות ל-NP: מסמך אישור קצר: קביעה ביחס לכל כרטיס האם לשים אותו ישר או הפוך. כדי לוודא את נכונות האישור, בודקים (בזמן קצר) שכל אחד מן מקומות שמול החורים מכוסה.

רדוקציה פולינומיאלית של 3SAT:

כאשר נתון קלט לבעיית 3SAT – נוסחה בוליאנית ϕ ב-3CNF מעל המשתנים x_1, \dots, x_n ובעלת הפסוקיות C_1, \dots, C_m , נבנה את n הכרטיסים הבאים, כרטיס אחד לכל משתנה x_i :
בכל כרטיס יהיו m חורים בצד ימין של הכרטיס ו- m חורים בצד שמאל של הכרטיס. m המקומות בכל צד מתאימים ל- m הפסוקיות.
בצד ימין של הכרטיס המתאים למשתנה x_i כל החורים יהיו פתוחים, חוץ מאלה שמתאימים לפסוקיות שבהן מופיע הליטרל x_i שהם יהיו מכוסים. בצד שמאל של הכרטיס הזה כל החורים יהיו פתוחים, חוץ מאלה שמתאימים לפסוקיות שבהן מופיע הליטרל $\neg x_i$ שהם יהיו מכוסים.
בנוסף נבנה כרטיס מיוחד שכל החורים של צד ימין שלו פתוחים, וכל החורים של צד שמאל שלו מכוסים.

ברור שהבנייה יכולה להתבצע בזמן פולינומיאלי.

הרדוקציה תקפה:

אם הפסוק ספיק, אז יש פתרון לפאזל:
אם הפסוק ספיק, אז יש השמה למשתנים של הפסוק שמספקת את הפסוק. אם בהשמה הזו המשתנה x_i קיבל ערך 1, נשים את הכרטיס של x_i ישר. אם הוא קיבל ערך 0, נשים את הכרטיס שלו הפוך. מכיוון שההשמה הזו מספקת את הפסוק, יש בכל פסוקית לפחות ליטרל אחד שערכו 1. לכן, באופן שבו שמנו את הכרטיסים, כיסינו את כל החורים בצד ימין. את החורים בצד שמאל נוכל לכסות בעזרת הכרטיס המיוחד.
אם יש פתרון לפאזל, אז הפסוק ספיק:
בעזרת הכרטיס המיוחד כיסינו צד אחד של החורים. את הצד השני כיסינו בעזרת n הכרטיסים של המשתנים. נסתכל על הדרך שבה שמנו את הכרטיס של המשתנה x_i כקביעת ערך אמת למשתנה הזה. מזה שכל הפסוקיות "מכוסות" נובע שבכל פסוקית יש ליטרל שערכו 1. כלומר, יש השמה מספקת לפסוק.

שאלה 8

א. **הרדוקציה**: על קלט $\langle G, s, t \rangle$ לבעיית $HAMPATH$, נבנה את $\langle H \rangle$ קלט לבעיית $EHAMPATH$:
 H יכול את כל הצמתים והקשתות של G . בנוסף יהיו ב- H שני צמתים נוספים, v ו- u , ושתי קשתות נוספות, (v, s) ו- (t, u) .

הרדוקציה תקפה: אם ב- G יש מסלול המילטון מ- s ל- t , אז ב- H יש מסלול המילטון שבנוי מן הקשת (v, s) , מן הקשתות של המסלול מ- s ל- t ומן הקשת (t, u) .
 אם ב- H יש מסלול המילטון, הוא חייב לכלול את הקשתות (v, s) ו- (t, u) , כי זו הדרך היחידה לכלול את v ואת u במסלול. לכן יש ב- G מסלול המילטון מ- s ל- t .
הרדוקציה ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי: הוספנו שני צמתים ושתי קשתות.

ב. נותר להראות שהשפה $EHAMPATH$ שייכת ל- NP .
 מסמך אישור קצר: רשימת הצמתים של מסלול המילטון לפי הסדר של המסלול.
 מאמת יוכל לוודא בזמן פולינומיאלי שכל צומת של הגרף מופיע ברשימה פעם אחת ויחידה, ושיש קשת בגרף בין כל שני צמתים עוקבים ברשימה.

ג. **הרדוקציה**: על קלט $\langle G \rangle$ לבעיית $EHAMPATH$, נבנה את $\langle H, s, t \rangle$ קלט לבעיית $HAMPATH$:
 H יכול את כל הצמתים והקשתות של G . בנוסף יהיו ב- H שני צמתים נוספים, s ו- t , והקשתות הבאות: נחבר את s בקשת לכל צומת של G , ונחבר כל צומת של G בקשת ל- t .

הרדוקציה תקפה: נניח שיש ב- G מסלול המילטון. נקרא לצומת ההתחלה שלו u ולצומת הסיום שלו v . אז ב- H יש מסלול המילטון מ- s ל- t : מ- s ל- u , מ- u ל- v , ומ- v ל- t .
 אם ב- H יש מסלול המילטון מ- s ל- t , הוא חייב לכלול קשתות (s, u) ו- (v, t) , כי זו הדרך היחידה לכלול את s ואת t במסלול. לכן יש ב- G מסלול המילטון (מ- u ל- v).

הרדוקציה ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי: הוספנו שני צמתים ומספר ליניארי (בגודל הקלט) של קשתות.