

ה א ו נ י ב ר ס י ט ה ה פ ת ו ח ה

20290

אלגוריתמיקה -

יסודות מדעי המחשב

חוברת הקורס – סתיו 2013א

כתב: אייל משיח

אוקטובר 2012 - סמסטר סתיו – תשע"ג

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

א	אל הסטודנט
ב	1. לוח זמנים ופעילויות
ד	2. תיאור המטלות
ה	3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס
1	ממ"ן 11
3	ממ"ן 12
5	ממ"ן 13
7	ממ"ן 14
9	ממ"ן 15

אל הסטודנט,

אנו מברכים אותך עם הצטרפותך אל הלומדים בקורס "אלגוריתמיקה - יסודות מדעי המחשב".

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים, אותם מפרסם/מת מרכז/ת ההוראה.

בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.

פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:

<http://telem.openu.ac.il>

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר

הספרייה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

במהלך הקורס יש להגיש תרגילי בית. מספיק להגיש שלושה מתוך חמשת הממ"נים שבחוברת,

אך מומלץ להגיש את כולם. יש להקפיד על הגשת הממ"נים במועד.

צוות הקורס ישמח לעמוד לרשותך בכל שאלה שתתעורר.

ניתן לפנות אלי ביום ג', בשעות 00:11-13:00, בטלפון 09-7781233, או ב-e-mail.

כתובתי היא: eyalma@openu.ac.il

פגישות יש לתאם מראש.

ב ב ר כ ה,

אייל משיח

מרכז הקורס

1. לוח זמנים ופעילויות (20290 / 2013א)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
1	19.10.2012-14.10.2012	פרקים 1-3		
2	26.10.2012-21.10.2012	פרק 4	מפגש 1	
3	2.11.2012-28.10.2012	פרק 5		ממ"ן 11 2.11.2012
4	9.11.2012-4.11.2012	פרק 5	מפגש 2	
5	16.11.2012-11.11.2012	פרק 6		
6	23.11.2012-18.11.2012	פרק 7	מפגש 3	ממ"ן 12 23.11.2012
7	30.11.2012-25.11.2012	פרק 7		
8	7.12.2012-2.12.2012	פרק 8	מפגש 4	

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים

לוח זמנים ופעילויות – המשך

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
9	14.12.2012-9.12.2012 (א-ו חנוכה)	פרק 8		ממ"ן 13 14.12.2012
10	21.12.2012-16.12.2012	פרק 9	מפגש 5	
11	28.12.2012-23.12.2012	פרק 9	מפגש 6	
12	4.1.2013-30.12.2012	פרק 10		ממ"ן 14 4.1.2013
13	11.1.2013-6.1.2013	פרק 10	מפגש 7	
14	18.1.2013-13.1.2013	פרק 11		
15	25.1.2013-20.1.2013	פרק 12	מפגש 8	ממ"ן 15 25.1.2013
מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד				

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

2. תיאור המטלות

הממ"נים בקורס הם ממ"נים **רגילים**: כל מטלה מורכבת ממספר תרגילים "יבשים" **שאינם** דורשים הרצת תכניות במחשב. תרגילים אלו נועדו לבדוק את הבנתך בחומר הלימוד. את הפתרון למטלה כזו יש לכתוב **בעט** על דף נייר בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. (אפשר ורצוי, כמובן, להדפיס את הפתרון למטלה). אם השאלה בממ"ן אינה ברורה לך, ניתן להתקשר אל אחד מהמנחים (בשעת הייעוץ הטלפוני שלו) לצורך קבלת הסבר או לנסות להיעזר בקבוצת הדיון של הקורס. בטבלה שלהלן תמצא מהו חומר הלימוד הנדרש (לפי פרקי הספר) לפתרון כל אחת מהמטלות, ומשקל כל מטלה בחישוב הציון של הקורס.

שים לב!

בעת כתיבת פתרון למטלה אין להסתמך על פרקי לימוד **מתקדמים** יותר מהפרקים בהם עוסקת המטלה.

מטלה	חומר הלימוד הנדרש לפתרון	משקל המטלה
ממ"ן 11	פרקים 1-4	6 נקודות
ממ"ן 12	פרקים 5-6	6 נקודות
ממ"ן 13	פרק 7	6 נקודות
ממ"ן 14	פרקים 8-9	6 נקודות
ממ"ן 15	פרקים 10-12	6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש שלוש מטלות מתוך החמש.

לתשומת לבכם!

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן:

אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלות** בציון הנמוך ביותר, שציוניהן נמוכים מציון הבחינה (**עד שתי מטלות**), לא יילקחו בחשבון בעת שקלול הציון הסופי.

זאת בתנאי שמטלות אלה **אינן חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו, מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליך לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל של 18 נקודות לפחות.

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון של 60 לפחות.

ג. לקבל ציון סופי של 60 לפחות.

לתשומת לבכם:

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס. סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימאלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון 09-7782222 או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא <http://www.openu.ac.il/sheilta>

קורסים ⇨ ציוני מטלות ובחינות ⇨ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.

יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של המטלות והבחינה יהיה נמוך מ- 60).

כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1-4

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 2.11.2012

סמסטר: 2013

אנא שימו לב:

מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

- א. כתבו שגרה המקבלת מספר טבעי x בייצוג עשרוני ומחשבת את סכום הספרות של x .
- ב. ידוע שמספר שלם מתחלק ב-3 ללא שארית אם ורק אם סכום הספרות של המספר מתחלק ב-3 ללא שארית.
- כתבו אלגוריתם המסתמך על עובדה זו ובודק אם מספר טבעי x מתחלק ב-3 ללא שארית.

שאלה 2 (20 נקודות)

- אפשר לייצג ביטוי אריתמטי המורכב ממספרים טבעיים, האופרטור האונירי "-" וארבעת האופרטורים הבינריים "+", "-", "x" ו "/" באמצעות עץ בינרי באופן הבא:
- מספר טבעי I מיוצג ע"י עלה המכיל את I .
- הביטוי E – מיוצג ע"י עץ, שהשורש שלו מכיל את האופרטור האונירי "-" ובנו היחיד הוא השורש של תת-עץ המכיל את הביטוי E .
- הביטוי $E \cdot F$ (שבו הסימן "." מציין איזשהו אופרטור בינרי) מיוצג ע"י עץ, שהשורש שלו מכיל את האופרטור "-", בנו השמאלי הוא השורש של תת-עץ המכיל את הביטוי E ובנו הימני הוא השורש של תת-עץ המכיל את הביטוי F .
- כתבו אלגוריתם המדפיס את הביטוי האריתמטי המיוצג ע"י עץ בינרי נתון T . שימו לב שבכל פעם שמופיע אופרטור בינרי יש להוסיף סוגריים מסביב לאופרטור ולאופרנדים שלו.

שאלה 3 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

תת-קבוצה של צמתים בעץ נקראת **כיסוי ע"י צמתים** אם לכל קשת (a, b) בעץ – התת-קבוצה מכילה את a או את b (או את שניהם).

- בהינתן עץ T (לאו דווקא בינרי), מעוניינים למצוא כיסוי ע"י צמתים שגודלו מינימלי.
- א. תארו אלגוריתם חמדני המוצא את הפתרון האופטימלי לבעיה.
- ב. הסבירו מדוע האלגוריתם שתיארתם מוצא תמיד את הפתרון האופטימלי.

שאלה 4 (15 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 10 נק')

בעיית הסכום הזר בשורות ובעמודות היא הבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: מטריצה A בגודל $n \times n$ של מספרים.

הפלט המבוקש: הסכום המקסימלי של n איברים מתוך המטריצה, כך שלכל היותר איבר אחד מכל שורה ומכל עמודה במטריצה משתתף כאיבר בסכום.

פרופ' כלומסקי הציע את האלגוריתם הבא לפתרון הבעיה:

$$(1) \max\text{-sum} \leftarrow 0;$$

(2) מיינ את איברי המטריצה A בסדר יורד. שמור לכל איבר את מיקומו במטריצה המקורית;

(3) בצע n פעמים:

(3.1) הוסף את האיבר הראשון ברשימה הממוינת ל- $\max\text{-sum}$;

(3.2) מחק מהרשימה הממוינת את האיבר הראשון ואת כל האיברים הנמצאים באותה

שורה או באותה עמודה עם איבר זה;

(4) חזר את $\max\text{-sum}$.

- א. מהי השיטה האלגוריתמית שבה האלגוריתם משתמש? נמקו את תשובתכם.
- ב. האם האלגוריתם מוצא תמיד את הפתרון האופטימלי? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.

שאלה 5 (25 נקודות: סעיף א' – 10 נק'; סעיף ב' – 5 נק'; סעיף ג' – 10 נק')

שתי קבוצות הכדורסל אוקלהומה סיטי (להלן – קבוצה A) ומיאמי היט (להלן – קבוצה B) מתחרות ביניהן על אליפות ה-NBA בסדרת "הטוב משבעה"; כלומר, הקבוצה הראשונה שתנצח בארבעה משחקים תזכה באליפות. נניח ששתי הקבוצות שוות בכוחן, ולכן לכל אחת מהן יש סיכוי של 50% לנצח בכל משחק בודד. נסמן ב- $p(i, j)$ את הסיכוי שקבוצה A תזכה באליפות כאשר A זקוקה לעוד i ניצחונות ו- B זקוקה לעוד j ניצחונות.

למשל, אם התוצאה בהתמודדות היא 2:1 לטובת A , אז A זקוקה לעוד שני ניצחונות ו- B זקוקה

לעוד שלושה ניצחונות, ולכן הסיכוי ש- A תזכה בסופו של דבר באליפות הוא $p(2, 3)$.

א. כתבו נוסחה רקורסיבית לחישוב $p(i, j)$ והסבירו מדוע היא נכונה.

ב. כתבו אלגוריתם רקורסיבי לחישוב $p(i, j)$.

ג. כתבו אלגוריתם תכנון דינמי המחשב את $p(i, j)$ לכל ערך אפשרי של i ו- j .

ציירו את הטבלה המתקבלת.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 5-6

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 23.11.2012

סמסטר: 2013א

אנא שימו לב:

מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

נתונה רשימה בת n מספרים ממשיים, המכילה את כמויות המשקעים השנתיות שירדו באזור מסוים. מעוניינים לדעת מהו מספר הפעמים שבהן "נשבר" שיא המשקעים באותו אזור. למשל, אם הרשימה היא (משמאל לימין) 49, 68.5, 66, 47.3, 52, אז השיא נשבר שלוש פעמים. א. כתבו אלגוריתם לפתרון הבעיה. מהו זמן הריצה של האלגוריתם? ב. הוכיחו את נכונותו של האלגוריתם שכתבתם.

שאלה 2 (20 נקודות: 5 נק' לכל סעיף)

להלן נתון אלגוריתם למיון מערך A באורך n :

$j \leftarrow n$ (1)

$\text{swap} \leftarrow \text{True}$ (2)

(3) כל עוד $j > 1$ וגם $\text{swap} = \text{True}$ בצע:

$\text{swap} \leftarrow \text{False}$ (3.1)

(3.2) עבור i המקבל את הערכים 1 עד $j - 1$ בצע:

(3.2.1) אם $A[i] > A[i + 1]$ אז בצע:

(3.2.1.1) החלף בין $A[i]$ ו- $A[i + 1]$;

$\text{swap} \leftarrow \text{True}$ (3.2.1.2)

(3.3) $j \leftarrow j - 1$

- א. הסבירו בקצרה את אופן הפעולה של האלגוריתם.
ב. נתחו את זמן הריצה של האלגוריתם במקרה הגרוע ובמקרה הטוב.
ג. מהי האיננוואריאנטה המתקיימת לפני כל ביצוע של הלולאה בשורה (3)?
ד. מהי האיננוואריאנטה המתקיימת לפני כל ביצוע של הלולאה הפנימית בשורה (3.2)?

שאלה 3 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

- א. נתחו את זמן הריצה של השגרה שהתבקשתם לכתוב בשאלה 1א בממ"ן 11. האם זמן הריצה הוא פולינומי בגודל הקלט ?
- ב. נתחו את זמן הריצה של האלגוריתם המופיע בשאלה 4 בממ"ן 11. האם זמן הריצה הוא פולינומי בגודל הקלט ?

שאלה 4 (15 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 10 נק')

- פרופ' אלפרדו טוען שאפשר למיין מספרים באופן מכני בזמן $O(N)$. להלן תיאור לא פורמאלי של השיטה שמציע הפרופסור:
- (1) קח חבילת ספגטי ;
- (2) הוצא מתוך החבילה N ספגטי וחתוך אותם בהתאם לגודלם של המספרים שצריך למיין ; (למשל, אם המספרים הם 4, 19, 8, 21, 3, 16, 5, 12 אז חותכים את הספגטי לאורכים אלו בסנטימטרים).
- (3) אחוז ביד אחת את N הספגטי והצמד אותם לשלחן כך שהם יהיו מאונכים לשלחן ;
- (4) בצע N פעמים :
- (4.1) הורד את ידך השניה מלמעלה לכיוון הספגטי ;
- (4.2) הוצא את הספגטו הראשון שבו ידך נתקלה ; רשום את אורכו ושים אותו בצד.
- בסוף התהליך מתקבל מיון בסדר יורד של N המספרים.
- א. חוו דעתכם על השיטה המוצעת. האם היא לדעתכם מעשית ?
- ב. מדוע לא מתקיים במקרה זה החסם התחתון על מיון של $O(N \log N)$?

שאלה 5 (25 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיפים ב', ג' – 10 נק' לכל אחד)

- נתון מערך A בגודל n של מספרים שלמים. המערך איננו ממוין, אך ידוע שערכו המוחלט של ההפרש בין כל שני איברים סמוכים במערך הוא 0 או 1.
- נסמן : $A[1] = a$, $A[n] = b$. נניח ש- $a < b$. יהא x מספר שלם $(a \leq x \leq b)$.
- א. הסבירו מדוע x חייב להופיע במערך לפחות פעם אחת.
- ב. ברצוננו למצוא אינדקס i כך ש- $A[i] = x$. כתבו אלגוריתם יעיל ככל האפשר לפתרון הבעיה ונתחו את זמן הריצה שלו.
- ג. הוכיחו את נכונותו של האלגוריתם שכתבתם.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

מספר השאלות: 5

משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: 2013א

מועד אחרון להגשה: 14.12.2012

אנא שימו לב:

מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

א. התבוננו באיור המופיע בעמ' 105 במדריך הלמידה, המתאר את מערכת הגשרים בעיר קניגסברג. ציירו את הגרף המתאים, והוכיחו שקיים בגרף מסלול המילטוני, אך לא קיים בו מסלול אוילרי.
ב. הראו שניתן להסיר מהגרף בדיוק שתי קשתות, ולקבל גרף שבו קיים מסלול אוילרי אך לא קיים מסלול המילטוני.

שאלה 2 (20 נקודות)

להלן נתונות שתי גרסאות של בעיית הספיקות בתחשיב הפסוקים.
עבור כל אחת מהגרסאות – כתבו אם לדעתכם הבעיה שייכת ל-NP. נמקו את קביעותיכם.
א. הקלט לבעיה: פסוק ϕ בתחשיב הפסוקים
השאלה: האם קיימת עבור ϕ השמה מספקת, שבה **בדיוק** לחצי מהמשתנים יש ערך True?
ב. הקלט לבעיה: פסוק ϕ בתחשיב הפסוקים
השאלה: האם מספר ההשמות המספקות את ϕ הוא זוגי?

שאלה 3 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

א. **קבוצה בלתי תלויה** (independent set) בגרף לא מכוון G היא תת-קבוצה V' של V , כך שבין כל

שני צמתים ב- V' אין קשת.

בעיית הקבוצה הבלתי תלויה היא הבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k

השאלה: האם קיימת ב- G קבוצה בלתי תלויה בגודל k ?

תארו רדוקציה פולינומית מבעיית הקליקה לבעיית הקבוצה הבלתי תלויה.

ב. **כיסוי ע"י צמתים** (vertex cover) בגרף לא מכוון G היא תת-קבוצה V' של V , כך שלפחות קצה

אחד של כל קשת בגרף שייך ל- V' .

בעיית הכיסוי ע"י צמתים היא הבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k

השאלה: האם קיים ב- G כיסוי ע"י צמתים בגודל k ?

תארו רדוקציה פולינומית מבעיית הקבוצה הבלתי תלויה לבעיית הכיסוי ע"י צמתים.

שאלה 4 (15 נקודות)

ידוע שבעיית הספיקות של פסוק הכתוב ב-3-CNF היא NP-שלמה.

נגדיר את הבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: פסוק ϕ בתחשיב הפסוקים הכתוב ב-3-CNF ומספר טבעי k

השאלה: האם קיימת השמה שמספקת **לפחות** k פסוקיות ב- ϕ ?

הוכיחו שהבעיה היא גם-כן NP-שלמה.

שאלה 5 (25 נקודות)

ראש מכללה למדעי המחשב צריך לקבוע את שיבוץ המרצים בסמסטר הקרוב.

נתונות לו רשימה בגודל N של הקורסים המוצעים בסמסטר הקרוב, רשימה בגודל M של המרצים

השייכים לסגל המכללה, וכן טבלה המפרטת אלו קורסים יכול ללמד כל אחד מהמרצים.

כדי לחסוך בהוצאות, ראש המכללה מעוניין להעסיק k מרצים לכל היותר. לפיכך, ברצונו לדעת אם

קיימת תת-קבוצה בגודל k של מרצים, כך שלכל אחד מהקורסים המוצעים יהיה בתת-קבוצה של

המרצים לפחות מרצה אחד שיכול ללמד את הקורס.

הוכיחו שהבעיה היא NP-שלמה.

רמז: השתמשו ברדוקציה מבעיית הכיסוי ע"י צמתים.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 8-9

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 4.1.2013

סמסטר: 2013א

אנא שימו לב:

מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

עבור כל אחד מהקלטים הבאים לבעיית התאמת המילים – מצאו התאמת מילים חוקית (אם היא קיימת), או הוכיחו שאין התאמה כזו:

	1	2	3
X	baaa	ba	aba
Y	aaa	baab	ab

א.

	1	2	3
X	ba	abb	bab
Y	bab	bb	abb

ב.

שאלה 2 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

א. נדון בגרסה של בעיית התאמת המילים, שבה הא"ב הוא בגודל 2.

(בגרסה הרגילה של הבעיה הא"ב הוא בגודל סופי כלשהו.)

הוכיחו שגרסה זו של הבעיה היא גם-כן בלתי כריעה.

ב. מדוע אי אפשר להשתמש בהוכחה דומה כדי להראות, שגם הגרסה של בעיית התאמת המילים

שבה הא"ב הוא בגודל 1 היא בלתי כריעה?

שאלה 3 (20 נקודות)

נתונה הגרסה הבאה של בעיית נחש הדומינו במחצית העליונה של המישור האינסופי

הקלט לבעיה: קבוצת מרצפות T ושלוש נקודות **שונות** זו מזו V, W ו-W'

השאלה: האם אפשר להגיע באמצעות "נחש דומינו" גם מ-V ל-W וגם מ-V ל-W'?

הוכיחו שהבעיה איננה כריעה.

שאלה 4 (15 נקודות)

בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי, שמקבל את כל המחרוזות מעל $\Sigma = \{0,1\}$ המייצגות מספרים בינריים המתחלקים ב-7 ללא שארית.

שאלה 5 (25 נקודות)

בנו מכונת טיורינג המבצעת חיבור של שני מספרים בינריים X ו- Y .
הקלט למכונה נמצא על הסרט באופן הבא (משמאל לימין): $X\$Y^*$
כלומר, בין שני המספרים מפריד התו המיוחד $\$$ ומימין למספר השני נמצא התו המיוחד $*$.
למשל, אם $X = 3$ ו- $Y = 5$, אז הקלט למכונה הוא $###011\$101*###$.
מצב הסרט לאחר ביצוע פעולת החיבור צריך להיות $###1000###$.
הניחו ששני המספרים X ו- Y הם באותו אורך (אחרת אפשר "לרפד" את המספר הקצר יותר ע"י הוספת אפסים משמאלו).
תארו את דרך פעולתה של המכונה, ציירו את תרשימים המעברים ופרטו את תפקידו של כל אחד מהמצבים.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

הוכיחו שאוטומט סופי עם **שתי** מחסניות הוא מודל שקול למכונת טיורינג.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 10-12

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 25.1.2013

סמסטר: 2013א

אנא שימו לב:

מלאו בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

- א. כתבו אלגוריתם מקבילי הבודק בזמן **קבוע** אם מספר נתון N הוא ראשוני.
בכמה מעבדים האלגוריתם משתמש? האם זהו מספר סביר?
הערה: הניחו שפעולת חילוק בין שני מספרים מתבצעת בזמן קבוע.
ב. נניח כעת שאין בין המעבדים שיתוף בכתובה; כלומר, לא קיים משתנה ששני מעבדים או יותר יכולים לשנות את ערכו. בצעו את השינוי הנדרש באלגוריתם מסעיף א'.
זמן הריצה של האלגוריתם המתקבל צריך להיות פולינומי בגודל הקלט.

שאלה 2 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

- נדון בפתרון לבעיית הקטע הקריטי עבור שני מעבדים (פתרון שונה מזה שבספר).
הפתרון מבוסס על שימוש בשני משתנים מבוזרים X_1 ו- X_2 .
להלן הפרוטוקול עבור P_1 (הפרוטוקול עבור P_2 הוא סימטרי – יש להחליף בין X_1 ו- X_2):
(1) בצע פעולות פרטיות עד שתוצאה להיכנס לקטע הקריטי;
(2) חכה עד אשר X_2 הופך ל-לא;
(3) $X_1 \leftarrow$ כן;
(4) בצע את הקטע הקריטי;
(5) $X_1 \leftarrow$ לא;
(6) חזור לשורה (1);
א. האם הפתרון נכון? הוכיחו את תשובתכם.
ב. האם הפתרון יהיה נכון אם נחליף בין שורות (2) ו- (3) בפרוטוקול? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 3 (20 נקודות: 5 נק' לכל סעיף)

נתונים n מעבדים P_1, P_2, \dots, P_n , המתחרים ביניהם על הגישה לבסיס נתונים משותף. נניח שהזמן מחולק למחזורים, ובכל מחזור זמן רק מעבד אחד יכול לגשת לבסיס הנתונים (אם שני מעבדים או יותר ינסו לגשת לבסיס הנתונים בו-זמנית, הגישה לבסיס הנתונים "תינעל" לאותו מחזור זמן). יהא $0 < p < 1$ מספר ממשי שייקבע בהמשך. כל אחד מהמעבדים פועל על-פי הפרוטוקול הבא:

(1) הגרל מספר אקראי x בתחום $(0..1)$;

(2) אם $x < p$, אז נסה לגשת לבסיס הנתונים;

(3) אחרת, המתן עד למחזור הזמן הבא וחזור לשורה (1);

א. מהו הסיכוי שהמעבד ה- i ינסה לגשת לבסיס הנתונים במחזור הזמן הראשון?

ב. מהו הסיכוי שרק המעבד ה- i ינסה לגשת לבסיס הנתונים במחזור הזמן הראשון?

ג. מהו הסיכוי שהמעבד ה- i לא יצליח לגשת לבסיס הנתונים בכל t המחזורים הראשונים?

ד. איזה ערך של p צריך לבחור כך שהביטוי בסעיף ב' יקבל ערך מקסימלי? נמקו את תשובתכם.

שאלה 4 (15 נקודות)

פרופ' כלומסקי טוען, שהוא מצא דרך לייעל את תהליך בחירת המפתח הציבורי במערכת RSA. לטענתו, אין צורך לבחור שני מספרים ראשוניים גדולים ולהכפיל אותם; מספיק לבחור מספר ראשוני גדול אחד ולהעלות אותו בריבוע. חוו דעתכם על הצעתו של הפרופסור.

שאלה 5 (25 נקודות: סעיף א' – 10 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, נאמר שצביעה של קשתות הגרף היא צביעה חוקית, אם כל שתי קשתות בעלות קדקוד משותף צבועות בצבעים שונים. נגדיר את הבעיה הבאה (בעיית ה-edge 4-coloring): הקלט לבעיה: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ השאלה: האם קיימת צביעה חוקית של קשתות הגרף בארבעה צבעים? א. האם אפשר לצבוע בארבעה צבעים את הקשתות של C_5 (קליקה של חמישה צמתים)? הוכיחו את תשובתכם. ב. נניח שאיזה רוצה לשכנע את בועז, שאפשר לצבוע את הקשתות של גרף נתון G בצורה חוקית באמצעות ארבעה צבעים. בועז צריך להשתכנע בהסתברות גבוהה שקיימת צביעה חוקית כזו, אך אסור שהוא ילמד דבר על תבנית הצביעה. תארו פרוטוקול הוכחה מתאים.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

חוו דעתכם על ההגדרה הבאה למושג "בינה מלאכותית" (Artificial Intelligence): "AI is the attempt to make computers do what people think computers cannot do."