הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל הפקולטה למדעי המחשב

אלגוריתמים 1 (234247) – סמסטר אביב 2005

פתרון בחינת סוף סמסטר – מועד א' 3/7/2005

שאלה 1

נפתור את הבעיה בעזרת תכנון דינמי. נסמן ב- $f(i)$ את ערך תת-הסדרה החוקית האופטימלית עבור $(a_1, a_2, ..., a_i)$. אזי מתקבלת נוסחת הנסיגה הבאה:

$$f(i) = \begin{cases} a_1, & i = 1 \\ \max\{f(i-1), a_i + f(i-2)\}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר עבור $i > 1$ פשוט מפרידים למקרים בהם a_i חלק מתת-הסדרה ובהם לא.

חישוב $f(i)$ לכל $1 \le i \le n$ יכול להתבצע ב- $O(n)$ בעזרת מערך בגודל n.

על מנת להדפיס את תת-הסדרה עצמה (מהסוף להתחלה) ניתן לבצע את הפרוצדורה הבאה:

$i \leftarrow n$
while $i > 2$
    if $f(i) = f(i-2) + a_i$ then
        print a_i
        $i \leftarrow i-2$
    else
        $i \leftarrow i-1$
if a_3 was printed then
    print a_1
else
    print a_2

שאלה 2

א. **אלגוריתם:** נריץ מיון טופולוגי על הגרף. נעבור על צמתי הגרף בסדר הפוך לסדר המיון. לכל צומת v, נבצע:

$$\ell(v) \leftarrow \min\left\{L(v), \min_{(v,u)\in E}\left\{\ell(u)\right\}\right\}$$

סיבוכיות: $O(V+E)$.

נכונות: באינדוקציה על סדר המיון הטופולוגי.

נציין שניתן לפתור את השאלה גם עם DFS כאשר מבצעים עדכונים דומים בכל פעם שנסוגים מקשת (בין אם זו קשת שנבחרת לעץ ה-DFS ובין אם לא).

ב. **אלגוריתם:** מריצים אלגוריתם למציאת רכיבים קשירים היטב בגרף ובניית גרף העל (גרף הרכיבים הקשירים היטב). גרף העל הינו DAG ולכן ניתן להריץ עליו את האלגוריתם מסעיף א', כאשר לכל צומת u בגרף העל (המייצג רכיב קשיר היטב) נקבע את $\ell(u)$ להיות ה-L המינימלי של צומת ברכיב הקשיר היטב u. בסיום, נקבע לכל צומת $v \in V$ את $\ell(v)$ עפ"י הרכיב אליו הוא משתייך: $\ell(v) \leftarrow \ell\left(SCC(v)\right)$.

סיבוכיות: $O(V+E)$.

נכונות: נובעת ברובה מסעיף א'.

נציין שבמקרה זה DFS (בצורתו הרגילה) לא יעבוד (לפחות לא בזמן ליניארי) כי הקשתות האחוריות דורשות מעבר על כל הצמתים שעל המעגלים שהן סוגרות.

שאלה 3

א. כן, קל למצוא דוגמא (כמעט כולם ענו נכון על שאלה זו)...

ב. ההוכחה דומה לזו שניתנה בהרצאה: מאחר ו- $\delta'(s)=\delta(s)=0$ ו- $\delta'(v)<\delta(v)$, קיימת קשת (u,w) במסלול הקל ביותר מ- s ל- v ב- G', כך ש- w הוא הצומת הראשון במסלול עבורו- $\delta'(w)<\delta(w)$. קשת זו מקיימת הטענה.

הערה: סטודנטים שמצאו הוכחות מסורבלות במידה ניכרת מהוכחה זו לא זכו במלוא הנקודות.

ג. נניח שקיים צומת כזה. אזי קיימת קשת $e'=(u,w)$ על מסלול קל ביותר מ- s המקיימת את הסעיף הקודם, כלומר: $\delta'(w)<\delta(w), \delta(u)\ge\delta(u)$.

מקרה ראשון: $e=e'$. אזי בגלל תכונות מסלולים קלים ביותר, $\delta(u)=\delta(w)+W(e)$ (W היא פונקצית המשקל על הקשתות), ו- $\delta'(w)=\delta'(u)+W(e)$. מכאן מתקבל $\delta'(w)=\delta'(u)+W(e)\ge\delta'(u)\ge\delta(u)\ge\delta(w)$, סתירה.

מקרה שני: $e\ne e'$. אז $e'=(u,w)$ נמצאת גם בגרף המקורי G. לכן: $\delta(w)\le\delta(v)+W(e)\le\delta'(v)+W(e)\le\delta'(w)$, סתירה.

הערה: ראו הערה לסעיף ב' לעיל.

שאלה 4

נסמן $s=v_1$ ו- $t=v_n$, ונגדיר את רשת הזרימה $N=(G,s,t,c)$ שבה $G=(V,E)$ הוא גרף החדרים בזמנים $0\le\tau\le T$: $V=\{v_{i,\tau}\mid 1\le i\le n, 0\le\tau\le T\}$ ו- $E=E_1\cup E_2$, כך ש:

$$E_1=\left\{(v_{i,\tau},v_{r,\tau+\delta_j})\mid 0\le\tau\le T-\delta_j,\text{crossing corridor } j \text{ from room } i \text{ to room } r \text{ take } \delta_j\right\}$$

ו- $$E_2=\left\{(v_{i,\tau},v_{i,\tau+1})\mid 0\le\tau\le T-1\right\}$$

הקיבול של כל קשת מהצורה $e_1=(v_{i,\tau},v_{r,\tau+\delta_j})$ שווה למספר האנשים שיכולים לחצות יחד את מסדרון j , c_j, והקיבול של כל קשת מהצורה $e_2=(v_{i,\tau},v_{i,\tau+1})$ הוא k.

נמצא ברשת N זרימת מקסימום f מ- $v_{1,0}$ ל- $v_{n,T}$. אם $|f|\geq k$,ניתן לחלץ את k האנשים עד זמן T, אחרת – לא ניתן.

הוכחת נכונות:

טענה: ניתן להציל L אנשים אמ"ם קיימת זרימה חוקית בשלמים ברשת N שערכה L.

הוכחה:

(i) נניח שקיימת זרימה חוקית בשלמים שערכה L, אז נבנה את הפתרון באופן הבא: לכל קשת $e=(v_{i,\tau},v_{r,\tau+\delta_j})$ עם זרימה $f(e)$ נעביר $f(e)$ אנשים במסדרון מחדר i לחדר r החל מזמן τ. היות ו- $f(e)\leq c_j$, נעמוד באילוצי הקיבול של המסדרונות, ומהגדרת הרשת, סה"כ האנשים שיגיעו עד זמן T ליציאה שווה לסה"כ הזרימה ברשת, L.

(ii) נניח שקיים פתרון המאפשר ל- L אנשים להיחלץ, אז אם בזמן τ יש בחדר i d אנשים, שמתוכם d_1 יוצאים בזמן זה לחדר r, נזרים d_1 יחידות זרימה על הקשת $(v_{i,\tau},v_{r,\tau+\delta_j})$, ו- $(d-d_1)$ יחידות זרימה על הקשת $(v_{i,\tau},v_{i,\tau+1})$. היות ו- $d\leq k$, מתקיימים אילוצי הקיבול על הקשתות. בנוסף, יובטח שימור הזרימה בצמתים.

סיבוכיות האלגוריתם: מס' צמתים ב- G הוא $O(nT)$ ומס' הקשתות הוא $O\big((n+m)T\big)$. לכן סיבוכיות בניית הרשת היא $O\big((n+m)T\big)$. מציאת זרימת מקסימום:

על-ידי האלגוריתם של דיניץ: $O(V^2E)=O(n^2mT^3)$.

על-ידי Ford-Fulkerson: $O(Ef^*)=O\big(k(m+n)T\big)$, וניקח את הטוב מביניהם.

שאלה 5

ב. אם קיים צומת, למעט זה שנצבע ראשון, שברגע צביעתו על ידי האלגוריתם אין לו כלל שכנים צבועים, הוא חייב להיות ברכיב קשירות אחר מזה של הצומת שנצבע ראשון. דבר זה סותר, כמובן, את עובדת היות הגרף קשיר.

ג. נראה כי האלגוריתם צובע בשני צבעים גרפים דו-צדדים. יהא $G=(V,E)$ גרף דו-צדדי קשיר. נסמן ב- v_1 את הצומת הראשון שנצבע (בצבע 1) ותהא V_1,V_2 דו-חלוקה של G כך ש- $v_1\in V_1$. נסמן ב- v_i את הצומת ה- i שנצבע, ונוכיח את הטענה הבאה.

טענה: אם $v_i\in V_j$ אז v_i יצבע בצבע j , עבור $j=1,2$.

הוכחה: באינדוקציה על i. עבור $i=1$ הטענה מתקיימת. נסתכל על הצומת ה- $i>1$ שנצבע. אם $v_i\in V_1$ אז כל השכנים הצבועים שלו ב- V_2 צבועים בצבע 2 לפי הנחת האינדוקציה, וישנו לפחות שכן אחד כזה לפי

סעיף ב׳, לכן v_i יצבע בצבע 1. באופן דומה, אם $v_i \in V_2$ אז כל השכנים הצבועים שלו ב- V_1 צבועים בצבע 1 לפי הנחת האינדוקציה, וישנו לפחות שכן אחד כזה לפי סעיף ב׳, לכן v_i יצבע בצבע 2.

ד. אם G איננו קשיר,הטיעון שהובא בסעיף הקודם יכול לשמש עבור כל אחד מרכיבי הקשירות.

ה. אם מביאים בחשבון בניית ערימה כתור עדיפות לפי דרגת הרוויה (ב- $O(V)$), הוצאת הצומת v בעל דרגת הרוויה הגדולה ביותר (ב- $O(\log V)$) ועדכון דרגת הרוויה של כל הצמתים שנותרו בערימה (בזמן $O\left(d(v)\log V\right)$) מקבלים כי מימוש זה ניתן לביצוע בזמן כולל של $O(E\log V)$.