

• שאלה 1 (25 נקודות)

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון עם פונקציית משקל $w : E \rightarrow R$, ללא מעגלים שלילים. יהי s צומת ב- V . נניח כי עבור כל צומת $v \in V$ יש בידינו מסלול P_v שהוא מסלול קצר ביותר מ- s ל- v כך שמספר הקשתות ב- P_v הוא מינימלי ביחס לכל המסלולים הקצרים ביותר מ- s ל- v .

לכל קשת $e \in E$ נגדיר את הערך הבא: $\{ \text{קיים } v \in V \text{ כך ש-} e \text{ מופיעה ב-} P_v \text{ במקום ה-} k \}$
 $n_e = \min\{k \mid k \text{ הוא מספר הקשתות ב-} P_v \text{ המקום ה-} k \text{ בו מופיעה } e\}$
 אם e לא מופיע באף מסלול P_v אז $n_e = \infty$.

א. הוכח את הטענה הבאה: תהי $e \in E$. אם קיים $v \in V$ כך ש- e מופיעה במקום ה- k ב- P_v אז בהכרח $n_e = k$.

ב. הוכיחו את הטענה הבאה: לכל צומת $v \in V$, ולכל שתי קשתות e_1 ו- e_2 כך ש- $n_{e_1} < n_{e_2}$ סופיים אשר נכנסות ל- v בהכרח מתקיים: $n_{e_1} = n_{e_2}$.

ג. הראו כי קיים סידור של קשתות הגרף כך שאם האלגוריתם של בלמן-פורד עובר על קשתות הגרף ע"פ סידור זה, אז כבר אחרי האיטרציה אחת בלבד של הלולאה בשורה 2 מתקיים כי לכל צומת $v \in V$ הערך $d(v)$ הוא מרחקו של v מ- s .

• שאלה 2 (25 נקודות)

הוכיחו את הטענה הבאה:

לכל גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ עם פונקציית משקל $w : E \rightarrow R^+$, לכל עץ פורש מינימלי T של G ולכל קשת $e = (u, v) \in T$ המסלול הכולל את הקשת e בלבד הוא מסלול קצר ביותר מ- u ל- v ב- G .

• שאלה 3 (25 נקודות)

הוכיחו את הטענה הבאה:

אם $G = (V, E)$ הוא גרף קשיר ולא מכוון כך ש- $|V| = |E|$, אז לכל צומת $v \in V$ יש בדיוק שני עצי DFS המושרשים ב- v .

• שאלה 4 (25 נקודות)

הגדרה: בהינתן שרת זרימה $G = (V, E)$ עם מקור s , בור t , ופונקציית קיבול c :

- צומת $v \in V$ הוא במעלה הזרם אם עבור כל חתך מינימלי (S, T) מתקיים $v \in S$.
- צומת $v \in V$ הוא במורד הזרם אם עבור כל חתך מינימלי (S, T) מתקיים $v \in T$.
- צומת $v \in V$ הוא מרכזי אם הוא אינו במעלה הזרם ואינו במורד הזרם.

כתבו אלגוריתם המקבל כקלט רשת זרימה $G = (V, E)$ עם מקור s , בור t , ופונקציית קיבול c עם ערכי קיבול שלמים, ומסווג את כל צמתי הרשת לפי ההגדרה שלעיל. כלומר, האלגוריתם קובע אילו צמתיים הם במעלה הזרם, אילו הם במורד הזרם ואילו הם מרכזיים. סיבוכיות האלגוריתם צריכה להיות $O(|V||E|^2)$. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.

• שאלה 5 (25 נקודות)

כתבו אלגוריתם המקבל כקלט גרף לא מכוון $G = (V, E)$, שתי קשתות $e_1, e_2 \in E$ ושלם k ומוצא את מספר המסלולים באורך k ב- G המתחילים ב- e_1 ומסתיימים ב- e_2 . הניחו כי ארבעת הצמתיים המגדירים את הקשתות e_1 ו- e_2 שונים זה מזה.