שאלה 1

(10 נק׳) א. יהיו F ו- G מאורעות זרים של ניסוי מקרי כלשהו. הוכיחו כי בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה, ההסתברות שהמאורע F יתרחש לפני המאורע G היא:

$$\frac{P(F)}{P(F)+P(G)}.$$

(5 נק׳) ב. מטילים זוג קוביות שוב ושוב. בכול הטלה של זוג הקוביות סוכמים את התוצאות המתקבלות בזוג הקוביות. מה ההסתברות שתתקבל הטלה בה סכום התוצאות 7 לפני שתתקבל הטלה בה מכפלת התוצאות 12?

(10 נק׳) ג. X - הוא משתנה מקרי רציף. נתון ש- $X\sim U(0,1)$. נגדיר את $Y=-\ln(X)$.
הוכיחו כי $Y\sim \exp(1)$.

<u>פתרון:</u>

א. ניתן למצוא את ההוכחה באתר הקורס.

ב. נסמן ב- C את המאורע סכום התוצאות 7 וב- G מכפלת התוצאות 12:

$$C=\left\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\right\}$$

$$G=\left\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\right\}$$

כדי שהמאורע C יתרחש לפני המאורע G צריך שסכום התוצאות יהיה 7 ,אך מכפלת התוצאות לא תהיה 12 לפני שמכפלת התוצאות תהיה 12. לכן, נגדיר מאורע F באופן הבא: $F=C\cap G^C=\left\{(1,6),(2,5),(5,2),(6,1)\right\}$.

בהטלת זוג קוביות ישנן $6\cdot 6=36$ תוצאות שונות ולכן: $P(F)=\frac{4}{36}$, $P(G)=\frac{4}{36}$.

כעת, נעזר בטענה שהוכחה בסעיף א ונקבל: $\frac{P(F)}{P(F)+P(G)}=\frac{\frac{4}{36}}{\frac{4}{36}+\frac{4}{36}}=\boxed{\frac{1}{2}}$.

ג. $X\sim U(0,1)$ לכן פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה זה היא:

$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$**.** נתון ש- $Y=-\ln(X)$ לכן, התחום שבו פונקציית הצפיפות של Y אינה מתאפסת הוא מ- 0 ל- ∞. כעת, נפתח את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-\ln X\le y)=P(\ln X\ge -y)=P(X\ge e^{-y})=1-P(X<e^{-y})$$
$$=1-F_X(y)=1-e^{-y}$$

אם נגזור את פונקציית ההתפלגות המצטברת שהתקבלה נקבל את פונקציית הצפיפות,

ונקבל: $f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y} & y\ge 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$.

קיבלנו את פונקציית הצפיפות המתאימה להתפלגות המעריכית עם פרמטר 1. כלומר,

הוכחנו ש- $Y\sim \exp(1)$ כנדרש.

שאלה 2

תוכנת מחשב יוצרת קוד המכיל 5 תווים. כול תו בקוד נבחר על ידי התוכנה באקראי. כול תו בקוד יכול להיות אות לטינית (26 אותיות) או ספרה (הקוד יכול להתחיל בספרה-0). הקוד חייב להכיל לפחות אות לטינית אחת וגם לפחות ספרה אחת.

(5 נק׳) א. כמה קודים שונים אפשריים?

(10 נק׳) ב. מה ההסתברות שהתוכנה תיצור קוד בו כל התווים שונים זה מזה?

(10 נק׳) ג. מה ההסתברות שהתוכנה תיצור קוד בו אין לפחות אחת מהאותיות A, F ו- D ?

<u>פתרון:</u>

א. בסך הכול מספר התווים המותרים הם: $10+26=36$. כיוון שהקוד חייב להכיל לפחות אות אחת ולפחות ספרה אחת נפחית מכלל הקודים השונים את המצבים הלא אפשריים: הקוד מכיל רק ספרות או הקוד מכיל רק אותיות ונקבל,

$$36^5-10^5-26^5=\boxed{48,484,800}.$$

ב. נפצל את המאורע הנדרש ל-4 מקרים זרים, לפי מספר הספרות השונות והאותיות השונות בקוד, ונחשב את מספר הקודים השונים לכול מקרה.

מקרה ראשון הוא שבקוד ספרה אחת ו- 4 אותיות שונות:

$$\binom{10}{1}\binom{26}{4}\cdot 5!=17,940,000.$$

מקרה שני הוא שבקוד 2 ספרות שונות ו- 3 אותיות שונות:

$$\binom{10}{2}\binom{26}{3}\cdot 5!=14,040,000.$$

מקרה שלישי הוא שבקוד 3 ספרות שונות ו- 2 אותיות שונות:

$$\binom{10}{3}\binom{26}{2}\cdot 5!=4,680,000.$$

מקרה רביעי הוא שבקוד 4 ספרות שונות ו- אות אחת:

$$\binom{10}{4}\binom{26}{1}\cdot 5!=655,200.$$

לכן, ההסתברות הרצויה היא:

$$\frac{17,940,000+14,040,000+4,680,000+655,200}{48,484,800}=\boxed{0.7696}.$$

ג. נסמן את המאורע A – בקוד מופיעה האות A. F- בקוד מופיעה האות F. D- בקוד מופיעה האות D.

ההסתברות המבוקשת היא בעצם $P(A^c\cup F^c\cup D^c)$. נעזר בכלל ההכלה וההפרדה כדי לחשב הסתברות זו.

$$P(A^c \cup F^c \cup D^c) =$$
$$P(A^c) + P(F^c) + P(D^c) - P(A^c \cap F^c) - P(A^c \cap D^c) - P(F^c \cap D^c) + P(A^c \cap F^c \cap D^c)$$

$$P(A^c) = P(D^c) = P(F^c) = \frac{35^5 - 10^5 - 25^5}{36^5 - 10^5 - 26^5}$$

$$P(A^c \cap F^c) = P(A^c \cap D^c) = P(F^c \cap D^c) = \frac{34^5 - 10^5 - 24^5}{36^5 - 10^5 - 26^5}$$

$$P(A^c \cap F^c \cap D^c) = \frac{33^5 - 10^5 - 23^5}{36^5 - 10^5 - 26^5}$$

נציב ונקבל:

$$P(A^c \cup F^c \cup D^c) = 3 \cdot \frac{35^5 - 10^5 - 25^5}{36^5 - 10^5 - 26^5} - 3 \cdot \frac{34^5 - 10^5 - 24^5}{36^5 - 10^5 - 26^5} + \frac{33^5 - 10^5 - 23^5}{36^5 - 10^5 - 26^5} = \boxed{0.9993}$$

שאלה 3

בתהליך שירות מסויים ישנם שני שלבים. הזמן של כל שלב מתפלג מעריכית ללא תלות זה בזה. תוחלת הזמן של השלב הראשון היא רבע שעה ותוחלת הזמן של השלב השני היא חצי שעה.

(5 נק׳) א. מהי התוחלת ומהי השונות של זמן תהליך השירות?

(10 נק׳) ב. מהי ההסתברות שלפחות אחד מהשלבים ימשך יותר מחצי שעה?

(10 נק׳) ג. ביום מסויים ניתן שירות ל- 40 אנשים. נגדיר את המאורע A: משך הזמן הנדרש למתן השירות יהיה לפחות 37 שעות.

1. חשבו את תחום האפשרי להסתברות המאורע A, על סמך אי שיוון מרקוב.
2. חשבו קירוב להסתברות המאורע A, על סמך משפט הגבול המרכזי.

<u>פתרון:</u>

א. נגדיר: $X = X_1 + X_2$ כאשר, X_1 - זמן השירות בשלב הראשון בשעות, X_2 - זמן השירות בשלב השני בשעות.

נתון ש- $E[X_1]=\frac{1}{4}$ בהתפלגות מעריכית מתקיים $E[X_1]=\frac{1}{\lambda_1}$ לכן: $X_1 \sim \text{Exp}[\lambda_1 = 4]$

נתון ש- $E[X_2]=\frac{1}{2}$ בהתפלגות מעריכית מתקיים $E[X_2]=\frac{1}{\lambda_2}$ לכן: $X_2 \sim \text{Exp}[\lambda_2 = 2]$

$$E[X]=E[X_1]+E[X_2]=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

כיון שהמשתנים הם בלתי תלויים אזי:

$$V[X]=V[X_1]+V[X_2]=\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}=\boxed{\frac{5}{16}}.$$

ב.

$$P\left[(X_1>0.5)\cup(X_2>0.5)\right]=1-P\left[(X_1>0.5)^c\cap(X_2>0.5)^c\right]=1-P\left[(X_1\le 0.5)\cap(X_2\le 0.5)\right]$$

כיוון שאין תלות בין זמני השירות של שני השלבים מתקיים:

$$P\left[(X_1\le 0.5)\cap(X_2\le 0.5)\right]=P\left[(X_1\le 0.5)\right]P\left[(X_2\le 0.5)\right]=F_{X_1}(0.5)F_{X_2}(0.5)$$

נעזר בפונקציית ההתפלגות המצטברת של ההתפלגות המעריכית:

$F_{X_1}(0.5)F_{X_2}(0.5)=\left(1-e^{-4\cdot 0.5}\right)\left(1-e^{-2\cdot 0.5}\right)=0.5466$. לבסוף,

$$P\left[(X_1>0.5)\cup(X_2>0.5)\right]=1-0.5466=\boxed{0.4534}.$$

ג.

1. לפי אי שוויון מרקוב מתקיים ש- $P\left(T \geq 37\right) \leq \frac{E\left[T\right]}{37} = \frac{30}{37} = 0.81$. לכן,

$$\boxed{0 \leq P\left(T \geq 37\right) \leq 0.81}$$

2. נגדיר: $T = \sum_{i=1}^{40} X_i$ כאשר X_i הוא משך זמן השירות הניתן לאיש ה-i.

בסעיף א ראינו כי תוחלת השירות הניתנת לכל איש היא: $E\left[X_i\right] = \frac{3}{4} = \mu$ והשונות היא:

$$V\left[X_i\right] = \frac{5}{16} = \sigma^2$$

כעת, ע״פ משפט הגבול המרכזי:

$$T \sim \mathrm{N}\left(40\mu, 40\sigma^2\right) \Rightarrow T \sim \mathrm{N}\left(30, 12.5\right)$$

אנחנו מחפשים את ההסתברות לכך שמשך זמן השירות יהיה לפחות 37 שעות כלומר $P\left[T \geq 37\right]$:

$$P\left[T \geq 37\right] = P\left[Z \geq \frac{37-30}{\sqrt{12.5}}\right] = P\left[Z \geq 1.9799\right] = 1 - \Phi(1.9799)$$.

נבצע כעת אינטרפולציה לינארית:

$$\Phi(1.9799) = \Phi(1.97) + \frac{1.9799 - 1.97}{1.98 - 1.97}\left[\Phi(1.98) - \Phi(1.97)\right] = 0.976095$$. נקבל ש-

$$P\left[T \geq 37\right] = 1 - \Phi(1.9799) = 1 - 0.976095 = \boxed{0.023905}$$.

שאלה 4

באחד משולחנות הקבלה של משלחות האירוויזיון הונחו 7 דגלים :

3 דגלים שכל אחד מהם הוא בצבעים כחול, אדום ולבן.

2 דגלים שכל אחד מהם הוא בצבעים אדום ולבן.

1 דגל בצבעים כחול ולבן.

1 דגל בצבעים כחול וירוק.

אחד מהמתמודדים בוחר 2 דגלים מתוך ה-7 בצורה אקראית וללא החזרה.

נסמן ב :

X – מספר הדגלים שנבחרו שבהם מופיע הצבע אדום.

Y– מספר הצבעים הכולל בכל הדגלים שנבחרו יחדיו. שימו לב שאם צבע מופיע ביותר מדגל אחד הוא נספר בדיוק פעם אחת.

למשל, אם נבחרו :

- דגל אחד בצבעים כחול ולבן ודגל אחד בצבעים כחול וירוק אז $X=0, Y=3$.
- דגל אחד בצבעים כחול אדום ולבן ודגל אחד בצבעים כחול ולבן אז $X=1, Y=3$.

(12 נק׳) א. מצאו את טבלת ההסתברות המשותפת של (X,Y).

(8 נק׳) ב. חשבו את $\rho(X,Y)$.

(5 נק׳) ג. חשבו את $E\left(X^2 \mid Y=3\right)$.

<u>**פתרון:**</u>

א. ראשית נשים לב ש $X \sim HG(7,5,2)$ ולכן :

$$P(X=0)=\frac{\binom{5}{0}\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}}=\frac{1}{21}$$

$$P(X=1)=\frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}}{\binom{7}{2}}=\frac{10}{21}$$

$$P(X=0)=\frac{\binom{5}{2}\binom{2}{0}}{\binom{7}{2}}=\frac{10}{21}$$

נבנה את פונקציית ההסתברות המשותפת ונמלא הסתברות המשותפת בלתי אפשרית:

		X			P_Y
		0	1	2	
Y	2	0	0		
	3				
	4	0		0	
	P_X	$\frac{1}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	

מכאן מתקבל גם ההסתברות $P\left(X=0,Y=3\right)=\frac{1}{21}$

כדי למלא את שאר המשבצות נשים לב ש $|\Omega|=\binom{7}{2}=21$.

המאורע $\left(X=2,Y=2\right)$ פירושו שנבחרו 2 דגלים עם צבע אדום אבל רק 2 צבעים, זה ייתכן רק אם נבחרו2 הדגלים בצבע אדום-לבן.

כלומר: $P\left(X=2,Y=2\right)=\frac{1}{21}$

מכאן מתקבלת גם ההסתברות : $P\left(X=2,Y=3\right)=\frac{9}{21}$

במאורע $\left(X=1,Y=3\right)$ ישנן 2 אפשרויות:

- דגל אחד בצבעים כחול, אדום ולבן ודגל אחד בצבעים כחול ולבן.
- דגל אחד בצבעים אדום ולבן ודגל אחד בצבעים כחול ולבן.

$$P\left(X=2,Y=3\right)=\frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{21}+\frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{21}=\frac{5}{21}$$

את שאר ההסתברויות נשלים ונקבל:

		X			P_Y
		0	1	2	
Y	2	0	0	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$
	3	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{15}{21}$
	4	0	$\frac{5}{21}$	0	$\frac{5}{21}$
	P_X	$\frac{1}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	

ב.

לפי ההתפלגות ההיפר-גאומטרית נקבל ש :

$$E\left[X\right]=2\cdot\frac{5}{7}=\frac{10}{7}\quad Var\left(X\right)=2\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{7-2}{7-1}=\frac{50}{147}$$

מהטבלה :

$$E\left[Y\right]=2\cdot\frac{1}{21}+3\cdot\frac{15}{21}+4\cdot\frac{5}{21}=\frac{67}{21}$$

$$E\left[Y^2\right]=2^2\cdot\frac{1}{21}+3^2\cdot\frac{15}{21}+4^2\cdot\frac{5}{21}=\frac{219}{21}$$

$$Var\left(Y\right)=\frac{219}{21}-\left(\frac{67}{21}\right)^2=\frac{110}{441}$$

$$E\left(X\cdot Y\right)=1\cdot3\cdot\frac{5}{21}+1\cdot4\cdot\frac{5}{21}+2\cdot2\cdot\frac{1}{21}+2\cdot3\cdot\frac{9}{21}=\frac{93}{21}$$

$$COV\left(X,Y\right)=\frac{93}{21}-\frac{10}{7}\cdot\frac{67}{21}=-\frac{19}{147}$$

$$\rho\left(X,Y\right)=\frac{-19/147}{\sqrt{50/147}\sqrt{110/441}}=\boxed{-0.4437}$$

ג.

מהטבלה נקבל ש :

$$P\left(X=0\,|\,Y=3\right)=\frac{1}{15}$$

$$P\left(X=1\,|\,Y=3\right)=\frac{5}{15}$$

$$P\left(X=2\,|\,Y=3\right)=\frac{9}{15}$$

ומכאן :

$$E\left(X^2\,|\,Y=3\right)=0^2\cdot\frac{1}{15}+1^2\cdot\frac{5}{15}+2^2\cdot\frac{9}{15}=\boxed{\frac{41}{15}}$$

שאלה 5

X מתפלג גיאומטרית עם הפרמטר p.

(7 נק׳) א. בטאו באמצעות הפרמטר p את $E[X^2]$.

(7 נק׳) ב. הוכיחו ש- $P\{X > b \mid X > a\} = P\{X > b-a\}$, כאשר הפרמטרים a ו- b הם מספרים שלמים חיוביים המקיימים: $b > a$.

(11 נק׳) ג. נתון ש- $Y \mid X = j \sim B(j, p)$. בטאו באמצעות p את התוחלת והשונות של Y.

<u>**פתרון:**</u>

א. בכול התפלגות מתקיים ש- $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$. בהתפלגות גיאומטרית מתקיים: $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$, $E[X] = \frac{1}{p}$.

נציב ונקבל: $E[X^2] = Var(X) + (E[X])^2 = \frac{1-p}{p^2} + \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \boxed{\frac{2-p}{p^2}}$.

ב. $P\{X > b \mid X > a\} = \frac{P\{X > b \cap X > a\}}{P\{X > a\}} = \frac{P\{X > b\}}{P\{X > a\}}$.

בהתפלגות גיאומטרית מתקיים ש- $P\{X > i\} =$ ולכן,

$$\frac{P\{X > b\}}{P\{X > a\}} = \frac{(1-p)^b}{(1-p)^a} = (1-p)^{b-a} = P\{X > b-a\} \quad \square$$

ג. $Y \mid X = j \sim B(j, p)$.

כדי לחשב את התוחלת והשונות של X נשתמש בנוסחאות התוחלת המותנית והשונות המותנית.

$$E[Y] = E\big[E[Y \mid X]\big] = E[X \cdot p] = pE[X] = p\frac{1}{p} = \boxed{1}$$

$$Var(Y) = E\big[Var(Y \mid X)\big] + Var\big(E[Y \mid X]\big) = E[X \cdot p(1-p)] + Var(X \cdot p) =$$

$$p(1-p)E[X] + p^2 Var(X) = p(1-p)\frac{1}{p} + p^2\frac{1-p}{p^2} = (1-p) + (1-p) = \boxed{2(1-p)}$$