הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל הפקולטה למדעי המחשב

אלגוריתמים 1 (234247) – סמסטר אביב 2005

תרגיל בית 2

מתרגל אחראי על התרגיל: דודו אמזלג, שעת קבלה: יום ד' 16:00-17:00, amzallag@cs.

תאריך חלוקה: יום רביעי 30/3/05.

תאריך הגשה: יום רביעי 14/4/05, שעה 12:00 בצהריים.

הערות:

- יש להגיש את התרגיל בזוגות.
- שאלות על התרגיל נא להפנות למתרגל האחראי על התרגיל.
- נא לוודא שהפתרון המוגש קריא. פתרונות לא-קריאים לא ייבדקו!
- נא לצרף לפתרון את דף השער המופיע באתר הקורס.
- יש להוכיח כל טענה שלא נלמדה בהרצאה או בתרגול.
- כל אלגוריתם יש לתאר תחילה בקצרה (מה הרעיון מאחוריו) ואחר כך בפירוט (תיאור מילולי, או פסאודו-קוד).
- יש להוכיח נכונות ולנתח סיבוכיות של כל אלגוריתם.
- לא כל השאלות יבדקו.

שאלה 1

- **גשר** (bridge) בגרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ היא קשת $e\in E$ כך שהגרף $G'=(V,E\setminus\{e\})$ אינו קשיר.
- גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ נקרא **ניתן לחיזוק** (strongable) אם ניתן לכוון את קשתותיו כך שיתקבל גרף מכוון קשיר היטב (strongly connected).

א. הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(V+E)$ שבהינתן גרף לא מכוון וקשיר מחזיר את קבוצת הקשתות בגרף שהינן גשרים. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.
רמז: ניתן לפתור ע"י רדוקציה לבעיית מציאת צמתי הפרדה, או בעזרת ניסוח תנאי דומה לתנאי עבור היותם של צמתים פנימיים בעץ ה-DFS צמתי הפרדה.

ב. הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(V+E)$ שבהינתן גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ קובע האם G ניתן לחיזוק, ואם כן, מחזיר כיווני קשתות מתאימים. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.
רמז: היעזרו בסעיף הקודם.

שאלה 2

בתרגול 3 הוגדר מבנה העל של הרכיבים האי-פריקים וצמתי ההפרדה של גרף לא מכוון וקשיר.

א. הראו כי מבנה העל הינו עץ.

ב. הראו כי כל מסלול פשוט בין שני צמתים השייכים לאותו רכיב אי-פריק C, מוכל כולו ב- C.

שאלה 3

הציעו אלגוריתם יעיל שבהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$ קובע האם לכל זוג צמתים $u,v \in V$ קיים לכל היותר מסלול פשוט יחיד מ- u ל- v (במילים אחרות, על האלגוריתם להחזיר תשובה שלילית אם ורק אם קיים זוג צמתים $u,v \in V$ כך שיש לפחות שני מסלולים פשוטים מ- u ל- v). הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

שאלה 4

בהינתן גרף מכוון חסר מעגלים $G=(V,E)$, כך ש- $|V|=n$, ניתן להגדיר מיון טופולוגי של צמתי G כפונקציה חח״ע ועל $f:V \to \{1,2,...,n\}$, כך שלכל $(u \to v) \in E$ מתקיים $f(u) < f(v)$.

כידוע, גרף מכוון המכיל מעגלים אינו ניתן למיון טופולוגי. עם זאת, בהינתן גרף כזה $G=(V,E)$ נרצה לסדר את צמתיו, כלומר להגדיר פונקציה חח״ע ועל $f:V \to \{1,2,...,n\}$, כך שמספר ״הפרות הסדר״ יהיה קטן ככל האפשר. ״הפרת סדר״ היא קשת $(u \to v) \in E$ כך ש- $f(u) > f(v)$.

האם אלגוריתם המיון הטופולוגי שהוגדר בתרגול 2 מוצא סידור אופטימלי לכל גרף מכוון פשוט? אם כן, הוכיחו זאת, אם לא, הראו דוגמה נגדית.

שאלה 5

גרף מכוון $G=(V,E)$ נקרא **קשיר למחצה** (semiconnected) אם לכל זוג צמתים $u,v \in V$ קיים מסלול מכוון מ- u ל- v או מסלול מכוון מ- v ל- u (יתכן כי שני המסלולים קיימים). הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(V+E)$ המכריע בהינתן גרף מכוון האם הוא קשיר למחצה. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

רמז: מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך ש- G קשיר למחצה, המתייחס לגרף הרכיבים הקשירים היטב של G.