פתרון שאלה 1 בממ"ן 15

א' נניח שנתון המערך $A[1..3]$, כאשר האיברים שונים זה מזה. בכל מקרה, השגרה $\text{PARTITION}(A,1,3)$ מבצעת שתי פעולות השוואה (בין איברים). בשני המקרים שבהם איבר הציר $A[3]$ הוא האיבר האמצעי, לא מתבצעות השוואות נוספות. בארבעת המקרים האחרים, כאשר איבר הציר $A[3]$ הוא האיבר הקטן ביותר או האיבר הגדול ביותר, מתבצעת השוואה אחת נוספת: אם $A[3]$ הוא האיבר הקטן ביותר, איבר הציר עובר למקום הראשון ומתבצעת הקריאה הרקורסיבית $\text{QUICKSORT}(A,2,3)$, ואם $A[3]$ הוא האיבר הגדול ביותר, איבר הציר נשאר במקומו ומתבצעת הקריאה הרקורסיבית $\text{QUICKSORT}(A,1,2)$.

לכן, האלגוריתם $\text{QUICKSORT}(A,1,3)$ מבצע במקרה הגרוע 3 השוואות, במקרה הטוב 2 השוואות ובממוצע $8/3$ השוואות.

ג' נניח שנתון המערך $A[1..4]$, כאשר האיברים שונים זה מזה.

הקריאה $\text{MAX-HEAPIFY}(A,1)$ מבצעת שתי השוואות; במקרה הגרוע היא מכילה גם קריאה לשגרה $\text{MAX-HEAPIFY}(A,2)$ המבצעת השוואה אחת נוספת. לכן, השגרה $\text{BUILD-MAX-HEAP}(A)$ מבצעת 4 השוואות במקרה הגרוע ו-3 השוואות במקרה הטוב.

האלגוריתם $\text{HEAPSORT}(A)$ קורא לשגרה $\text{MAX-HEAPIFY}(A,1)$ פעם עם שלושה איברים (2 השוואות) ופעם עם שני איברים (השוואה אחת); סך הכל 3 השוואות.

לכן, האלגוריתם מבצע 7 השוואות במקרה הגרוע ו-6 השוואות במקרה הטוב.

ד' ניתן למיין 4 איברים באופן טריוויאלי, באמצעות 6 השוואות לכל היותר: קודם משווים בין $A[1]$ לבין $A[2]$; אחר-כך משווים את $A[3]$ לשני הראשונים, ולבסוף משווים את $A[4]$ לשלושת האיברים הראשונים (כמו במיון-הכנסה). לכן, HEAPSORT אינו אופטימלי עבור קלטים בגודל 4.

אין פה סתירה למשפט החסם התחתון עבור אלגוריתמי מיון מבוססי-השוואות, מכיוון שהחסם $\Omega(n\lg n)$ הוא אסימפטוטי (מתייחס ל-n השואף לאינסוף), ואילו במקרה שלנו מדובר על ערך קבוע של n.

נשים לב שבמקרה זה החסם התחתון **המדויק** על מספר ההשוואות הוא $\lceil \lg n! \rceil = \lceil \lg 4! \rceil = 5$.