פרק 4: משתנים מקריים בדידים (סיכום)

משתנה מקרי (מ"מ): פונקציה שערכיה ממשיים, המוגדרת על מרחב המדגם של ניסוי מקרי.
כלומר, פונקציה המתאימה לכל תוצאה אפשרית של ניסוי מקרי מספר ממשי כלשהו.

משתנה מקרי בדיד: משתנה מקרי שקבוצת ערכיו האפשריים סופית או אינסופית בת-מניה.

פונקציית ההסתברות של משתנה מקרי בדיד: אם X משתנה מקרי בדיד המקבל את הערכים $x_1, x_2, \ldots$,
אז הפונקציה $p(x_i)=P\{X=x_i\}$ נקראת פונקציית ההסתברות של X , ומתקיים $\sum_i P\{X=x_i\}=1$.

פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי בדיד: $F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{i:x_i\le x} P\{X=x_i\}$
לגרף של פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי בדיד, יש צורה של פונקציית מדרגות.
תכונותיה: רציפה מימין, לא יורדת, $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim_{x\to\infty} F(x)=1$.

תוחלת: התוחלת של X מסומנת ב- $E[X]$, ומוגדרת על-ידי $E[X]=\sum_i x_i P\{X=x_i\}$
התוחלת היא הממוצע המשוקלל של הערכים האפשריים של המשתנה המקרי, כאשר המשקלות (בחישוב הממוצע) הן ההסתברויות שבהן הערכים מתקבלים.

תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי:

אם $g(x)$ היא פונקציה ממשית המוגדרת לכל הערכים האפשריים של X , אז $E[g(X)]=\sum_i g(x_i)P\{X=x_i\}$

שונות: השונות של X מסומנת ב- $\mathrm{Var}(X)$, ומוגדרת על-ידי –

$$\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=\sum_i (x_i-E[X])^2 P\{X=x_i\}$$

אפשר להראות שמתקיים –

$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\sum_i x_i^2 P\{X=x_i\}-(E[X])^2$$

השונות היא מידה לפיזור הערכים האפשריים של משתנה מקרי ביחס לתוחלת שלו.
השונות שווה לאפס אך ורק כאשר ל- X יש ערך אפשרי יחיד.

סטיית-תקן: סטיית התקן של X היא השורש החיובי של שונותו. סימון: $\mathrm{SD}(X)$ או σ_X

התוחלת מקיימת את השוויון $E[aX+b] = aE[X]+b$
השונות מקיימת את השוויון $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$
סטיית התקן מקיימת את השוויון $\mathrm{SD}(aX+b) = |a|\,\mathrm{SD}(X)$

תוחלת של משתנה מקרי אי-שלילי: אם X הוא משתנה מקרי שערכיו שלמים אי-שליליים, אפשר למצוא את תוחלתו באמצעות השוויון $E[X]=\sum_{i=1}^{\infty} P\{X\ge i\}$.

משתנה מקרי מיוחד הוא משתנה מקרי שלניסוי, שעל-פיו הוא מוגדר, יש תבנית מסוימת וכך גם לאופן שבו הוא מוגדר על-סמך הניסוי. כתוצאה מכך, אפשר לבנות למשתנה המקרי המיוחד פונקציית הסתברות שצורתה קבועה.

משתנים מקריים מיוחדים

משתנה מקרי אחיד בדיד בין $m+1$ ל- $m+n$: n ו- m שלמים, $n \ge 1$ אין סימון מקובל

$i = m+1, m+2, \ldots, m+n$ $P\{X=i\} = \frac{1}{n}$

$\text{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$ $E[X] = m + \frac{1+n}{2}$

ניסוי מקרי שעל-פיו אפשר להגדיר משתנה מקרי אחיד בדיד <u>בין 1 ל- n</u>:

בוחרים עצמים בזה אחר זה וללא החזרה מתוך אוכלוסייה בת n עצמים, ש<u>אחד</u> מתוכם מיוחד, עד לבחירת העצם המיוחד.

המשתנה המקרי X מוגדר כמספר בחירות-העצמים שנעשות עד לבחירתו של העצם המיוחד.

ניסוי מקרי ברנולי: ניסוי בעל שתי תוצאות אפשריות, "הצלחה" בהסתברות p ו"כשלון" בהסתברות $1-p$.

משתנה מקרי גיאומטרי: $0<p<1$ $X \sim Geo(p)$

$i = 1, 2, 3, \ldots$ $P\{X=i\} = (1-p)^{i-1} \cdot p$

$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$ $E[X] = \frac{1}{p}$

ניסוי מקרי גיאומטרי: עורכים בזה אחר זה, ניסויי ברנולי בלתי-תלויים, שלכולם הסתברות p להצלחה, עד לקבלת ההצלחה הראשונה.

המשתנה המקרי X מוגדר כמספר הסידורי של הניסוי שבו התקבלה ההצלחה הראשונה.

הערה: אם X הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p, אז –

$P\{X>i\} = P\{$ההצלחה הראשונה התקבלה אחרי הניסוי ה-i-י$\}$

$= P\{$ב-i-י הניסויים הראשונים התקבלו כשלונות$\} = (1-p)^i$

משתנה מקרי בינומי: n טבעי ו- $0<p<1$ $X \sim B(n,p)$

$i = 0, 1, \ldots, n-1, n$ $P\{X=i\} = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$

$\text{Var}(X) = np(1-p)$ $E[X] = np$

ניסוי מקרי בינומי: ניסוי המורכב מ- n ניסויי ברנולי בלתי-תלויים, שלכולם אותה הסתברות p להצלחה.

המשתנה המקרי X מוגדר כמספר ההצלחות בניסוי מקרי בינומי.

משתנה מקרי פואסוני: $\lambda > 0$ $X \sim Po(\lambda)$

$i = 0, 1, 2, ...$ $P\{X=i\} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$

$\text{Var}(X) = \lambda$ $E[X] = \lambda$

אפשר להגדיר את המשתנה המקרי X כמספר המופעים של מאורע, המתרחשים ביחידת זמן אחת בהתאם להנחות של תהליך פואסון.

תהליך פואסון הוא תהליך מנייה שבו סופרים את המופעים של מאורע מסוים במרווח-זמן נתון.

λ הוא קצב התרחשות המופעים ביחידת זמן אחת.

על-סמך שלוש הנחות בהגדרת תהליך פואסון, מקבלים שמספר המופעים המתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

שלוש ההנחות עוסקות בסדר הגודל של ההסתברויות שיהיה בדיוק מופע אחד במרווח-זמן "קטן" שאורכו h ושיהיו לפחות שני מופעים במרווח-זמן "קטן" שאורכו h ובאי-התלות בין מרווחי-זמן זרים.

אפשר להראות, שבמרווח זמן שאורכו t קצב התרחשות המופעים הוא λt.

משתנים מקריים פואסוניים המוגדרים על מרווחי-זמן שאינם חופפים, הם בלתי-תלויים.

הקירוב הפואסוני לבינומי:

אם $X \sim B(n,p)$ כך ש- n 'גדול' ו-p 'קטן', אז לכל $i = 0,1,...,n$ מתקיים $P\{X=i\} \approx e^{-np} \frac{(np)^i}{i!}$

<u>הערה</u>: יש הטוענים, כי n 'גדול' ו-p 'קטן' משמעו: $np > 10$ ו- $p < 0.1$.

משתנה מקרי בינומי שלילי: r טבעי ו- $0 < p < 1$ $X \sim NB(r,p)$

$i = r, r+1, r+2, ...$ $P\{X=i\} = \binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r} \cdot p^r$

$\text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$ $E[X] = \frac{r}{p}$

ניסוי מקרי בינומי שלילי: עורכים בזה אחר זה, ניסויי ברנולי בלתי-תלויים, שלכולם הסתברות p להצלחה, עד לקבלת ההצלחה ה-r-ית.

ניסוי זה הוא למעשה רצף של r ניסויים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים.

המשתנה המקרי X מוגדר כמספר הסידורי של הניסוי שבו התקבלה ההצלחה ה-r-ית.

משתנה מקרי היפרגיאומטרי: N, m ו-n טבעיים ו- $N \geq n, m$ $X \sim H(N,m,n)$

$i = \max\{0, n-(N-m)\}, ..., \min\{m,n\}$ $P\{X=i\} = \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}$

$\text{Var}(X) = \frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$ $E[X] = \frac{nm}{N}$

ניסוי מקרי היפרגיאומטרי: בוחרים מדגם מקרי בגודל n מתוך N עצמים ש- m מהם מיוחדים.

המשתנה המקרי X מוגדר כמספר העצמים המיוחדים שהוצאו במדגם המקרי.