מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: **20283 - מתמטיקה דיסקרטית**

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 1

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** **3** נקודות

סמסטר: 2008א **מועד אחרון להגשה:** יום ה' 18.10.07

אנא שים לב: מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

סך הנקודות במטלה זו הוא 101. זה מאפשר לטעות בנקודה אחת ועדיין לקבל 100.
לא יינתן ציון מעל 100 .

שאלה 1 (28 נק')

בידיכם אוסף של קבוצות, ומכונה שבעזרתה אפשר "לייצר" קבוצות נוספות,
על-פי הכללים הבאים:

(1) מתוך קבוצה A השייכת לאוסף, המכונה יכולה לייצר את הקבוצה $\{A\}$
(הקבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא A) ולצרף אותה לאוסף.

(2) מתוך קבוצות A,B השייכות לאוסף, המכונה יכולה לייצר את הקבוצה $A \cup B$
ולצרף אותה לאוסף.

(3) בתחילת התהליך, האוסף מכיל רק את הקבוצה הריקה, ϕ .

הנה תרשים (תרשים מסוג זה מכונה **עץ בנייה**), המראה כיצד
המכונה יכולה לייצר את הקבוצה בת שני האיברים $\{\phi,\{\phi\}\}$:

$$\begin{tikzcd}
\phi \arrow[d] & & \\
\{\phi\} \arrow[d] & & \phi \arrow[d] \\
\{\{\phi\}\} \arrow[dr] & & \{\phi\} \arrow[dl] \\
& \{\phi,\{\phi\}\} &
\end{tikzcd}$$

קבוצה שאליה מגיע חץ יחיד נוצרת מהקבוצה שמעליה בעזרת כלל
(1). קבוצה אליה מגיעים שני חיצים נוצרת משתי הקבוצות שמעליה
בעזרת כלל (2). קבוצה שלא מגיעים אליה חיצים ("עלה" של העץ)
היא בהכרח ϕ .

א. שרטט עץ בנייה עבור הקבוצה $\{\phi,\{\{\{\phi\}\}\}\}$.

ב. שרטט עץ בנייה עבור הקבוצה $\{\phi,\ \{\phi\},\ \{\phi,\{\phi\}\}\}$.

ג. הראה שלכל קבוצה שניתן לצרף לאוסף יש **יותר** מעץ-בנייה אחד שנותן אותה.

ד. הוכח שאם קבוצה X כלשהי נמצאת באוסף,
אז אפשר לצרף לאוסף גם את הקבוצה $\{X,\{X\}\}$.

שאלה 2 (28 נק׳)

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. כדי להפריך - הבא דוגמא נגדית.

לטענות הנכונות - תן הוכחה מסודרת המסתמכת בכל צעד על טענות והגדרות בספר .

א. $(A-B)-B = A-B$ ב. $A-(B-A) = A$

ג. $A \subseteq P(A)$ ד. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

שאלה 3 (20 נק׳)

הוכח את הטענות הבאות בעזרת **״אלגברה של קבוצות״**: צא מאחד האגפים, פתח אותו בעזרת זהויות ידועות, והגע לאגף השני. אין להשתמש בהוכחה במושג ״איבר״. במקומות בהם מופיע הפרש קבוצות מומלץ להיעזר בזהות $A-B = A \cap B'$ (עמ׳ 23 בספר הלימוד). **ציין באופן ברור בכל צעד את הזהויות עליהן אתה מסתמך**. הסימן $\oplus$ מוגדר בעמ׳ 27 בספר.

א. $(A_1 \cup A_2) - (B_1 \cap B_2) \;=\; (A_1 - B_1) \cup (A_1 - B_2) \cup (A_2 - B_1) \cup (A_2 - B_2)$

ב. $A \oplus B = A' \oplus B'$.

שאלה 4 (25 נק׳)

איחוד של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בהגדרה 1.6 בעמוד 12 בספר.

במלים פשוטות ההגדרה היא: $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ אםם x שייך **לפחות** לאחת הקבוצות A_i ,

כאשר i מקבל ערכים ב- I.

חיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בעמוד 16 בספר.

במלים פשוטות ההגדרה היא: $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ אםם x שייך **לכל** הקבוצות A_i ,

כאשר i מקבל ערכים ב- I.

השאלה שלפניך מתרגלת את השימוש בשני מושגים האלה.

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים (כולל 0) , $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

לכל $n \in \mathbf{N}$, תהי $A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \le x \le 2n+2\}$, ותהי $B_n = A_{n+1} - A_n$.

א. חשב את A_0 , A_1 , A_2 , A_3 ואת B_0 , B_1 , B_2 .

ב. הוכח: אם $n \le m$ אז $A_n \cap A_m = A_n$.

ג. חשב את $\bigcap_{2 \le n \in \mathbf{N}} A_n$ ד. חשב את $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$

ה. חשב את $\bigcup_{2 \le n \in \mathbf{N}} B_n$.