אלגוריתמים: פתרון ממ"ן 11

הפתרון מבוסס בחלקו על פתרונות מצטיינים שלכם.

שאלה 1

א. תמיד קיים זיווג מושלם שביחס אליו אין כל אי יציבות חזקה. כדי להוכיח זאת, נציג אלגוריתם אשר מחשב זיווג כזה.

עבור רשימות ההעדפות של כל הגברים ושל כל הנשים, נקבע סדר שרירותי פנימי של הגברים או הנשים הנמצאים בתיקו. ניתן את רשימות ההעדפות החדשות כקלט לאלגוריתים G-S ונחזיר את הזיווג שהוא נותן.

נכונות: הזיווג הוא בוודאי זיווג מושלם, לפי הוכחת אלגוריתם G-S. נרצה להוכיח שאין בו אי יציבות חזקה. לשם כך נניח שיש בזיווג זוגות (m,w), (m',w') כך ש- m' ו- w מעדיפים זה את זה, ו- m ו- w' מעדיפים זה את זה (ברשימת ההעדפות המקורית). אז מכיוון שלא שינינו את הסדר בין העדפות שלא נמצאות בתיקו, m' ו- w מעדיפים זה את זה, ו- m ו- w' מעדיפים זה את זה גם ברשימות המתוקנות, אבל זוהי סתירה לכך שאלגוריתם G-S נותן זיווג יציב.

ניתוח סיבוכיות:

את קביעת הסדר במקרה של תיקו אפשר לבצע ב- $2n^2 = O(n^2)$ - במקרה הגרוע נצרך לעבור על כל n הגברים, ולסדר את n העדיפויות שלהם, וכנ"ל עבור הנשים.

את G-S אפשר לממש ב- $O(n^2)$. זמן הריצה הכולל, לפיכך, יהיה $O(n^2)$.

ב. לא קיים תמיד זיווג מושלם שביחס אליו אין כל אי יציבות חלשה. דוגמא נגדית:

$M=\{m_1,m_2\}$, $W=\{w_1,w_2\}$. נניח ש- m_1 ו- m_2 מעדיפים את w_1 על פני w_2 ; w_1 ו- w_2 אדישות

ביחס לבחירת הגברים, כלומר אינן מעדיפות אחד מהם על פני השני.

קיימים שני זיווגים מושלמים אפשריים בין הקבוצות M ו- W:

$$\begin{matrix} m_1-w_1 \\ m_2-w_2 \end{matrix}$$

: m_2 מזווג ל- w_2, אבל m_2 מעדיף את w_1, ו- w_1 אדישה ביחס ל- m_1 או m_2. לכן יש אי-

יציבות חלשה בין m_2 ל- w_2.

$$\begin{matrix} m_1-w_2 \\ m_2-w_1 \end{matrix}$$

: m_1 מזווג ל- w_2, אבל m_1 מעדיף את w_1, ו- w_1 אדישה ביחס ל- m_1 או m_2. לכן יש אי-

יציבות חלשה בין m_1 ל- w_2.

לכן ביחס לכל זיווג מושלם קיימת אי-יציבות חלשה.

<u>שאלה 2</u>

א. נסמן את מספר הקודקודים בגרף ב- n. אם בגרף לא קיים קודקוד בעל דרגה 0, אז לכל קודקוד v קיימות לכל היותר קשתות לכל $n-1$ הקודקודים האחרים, ולכל קודקוד יש לפחות קשת אחת. לפיכך יש לכל קשת $n-1$ ערכים אפשריים עבור הדרגה. לפי עקרון שובך היונים יש שני קודקודים בעלי אותה הדרגה.

אם קיים קודקוד בגרף בעל דרגה 0, לכל קודקוד v קיימות לכל היותר קשתות ל- $n-2$ קודקודים בגרף, משום שאין קשת המחברת את הקודקוד מדרגה 0.

לפיכך $0 \le \deg(v) \le n-2$, ולכן מספר הדרגות האפשריות עבור כל קודקוד הוא $n-1$. לפי עקרון שובך היונים יש בגרף שני קודקודים בעלי אותה הדרגה.

ב. נניח ש- $G=(V,E)$. יהי $s \in V$. נסמן: $A=N(s)$ (קבוצת כל הקודקודים המחוברים ל- s). נתון ש- $|V| \ge 6$, ולכן אחת מהקבוצות $A \setminus \{s\}, V-(A \cup \{s\})$ מכילה לפחות 3 איברים.

(אחרת, כל אחת מהקבוצות מכילה פחות מ-3 איברים, ו- $|A \setminus \{s\}|+|V-(A \cup \{s\})|<5$

בסתירה לכך ש $|A \setminus \{s\}|+|V-(A \cup \{s\})|=5$

אם $|A \setminus \{s\}| \ge 3$, אז יש 3 קודקודים המחוברים ל- s. אם בין שניים מהם קיימת קשת, אז הם יוצרים יחד עם s משולש. אחרת, בין אף אחד מהם לא קיימת קשת, והם מהווים קבוצה של 3 קודקודים שאין ביניהם קשת.

אם $|V-(A \setminus \{s\})| \ge 3$, אז יש 3 קודקודים שלא מחוברים ל- s. אם בין כולם קיימת קשת, אז יש בגרף משולש. אחרת, יש שני קודקודים שלא קיימת ביניהם קשת. כמו כן, אין להם קשת עם s, ולכן יחד הם מהווים קבוצה של 3 קודקודים שאין ביניהם קשת.

<u>שאלה 3</u>

<u>תיאור האלגוריתם:</u>

תחילה, נמצא את הרכיבים הקשירים היטב של הגרף. מספיק לבדוק אם יש מעגל אי זוגי באחד מהרכיבים, שכן לא קיימים מעגלים כאלו בין הרכיבים (ראו הוכחה בהמשך).

עבור כל רכיב, נבנה גרף $G'=(V',E')$ המכיל שני צמתים עבור כל צומת בגרף המקורי – צומת אדומה וצומת שחורה. נסמן ב- V_R את קבוצת הצמתים האדומים וב- V_B את קבוצת הצמתים השחרים. עבור כל קשת (u,v) בגרף המקורי, נבנה את הקשתות $(u_R,v_B),(u_B,v_R)$ בגרף החדש.

נבחר צומת שרירותית v_R, ונבדוק בעזרת DFS האם יש מסלול מ- v_R ל- v_B (נריץ DFS עד שמתגלה הצומת המבוקשת, או עד שסיימנו והיא לא נתגלתה). אם כן – נחזיר אמת, אחרת נחזיר שקר.

<u>הוכחת נכונות:</u>

<u>טענה 1:</u> אין מעגל בין שני צמתים השייכים לשני רכיבים קשירים היטב.

<u>הוכחה:</u> גרף הרכיבים הקשירים היטב הוא גמ״ל, לכן לא קיים מעגל העובר דרך מספר רכיבים קשירים. בפרט, אם $c_1,...,c_n,c_1$ מעגל, אז כל שני צמתים c_i,c_j נגישים הדדית ($c_i \to c_{i+1} \to ... \to c_j$ ו- $c_j \to ... \to c_1 \to ... \to c_i$) ולכן הם נמצאים באותו רכיב קשירות חזקה.

<u>טענה 2:</u> אם ב- G' קיים מסלול מצומת אדום למקביל השחור שלו, אז ב- G מעגל אי-זוגי.

<u>הוכחה:</u> כל קשת מהמסלול ב- G' מייצגת את הקשת המתאימה ב- G ללא הצביעה. לכן מסלול מצומת הצבועה באדום לאותה הצומת הצבועה בשחור הוא מסלול בגרף המקורי מהצומת לעצמה, כלומר מעגל. המעגל הוא אי-זוגי כי אנו מתחילים בצומת אדומה, מתקדמים לסירוגין מאדום לשחור, ומסיימים בצומת אדומה, ולכן מספר הקשתות שעברנו בהן אי-זוגי. (עוברים במספר זוגי של קשתות אדום-שחור ובעוד קשת שחור-אדום אחת).

<u>טענה 3:</u> ברכיב קשיר היטב קיים מעגל אי זוגי אם ורק אם כל צומת נמצאת בתוך מעגל אי-זוגי.

<u>הוכחה:</u> ($\Leftarrow$) אם בגרף צומת נמצאת במעגל אי-זוגי אז יש בגרף מעגל כזה.

($\Leftarrow$) נניח שבגרף מעגל אי-זוגי שבתוכו צומת c, ותהי d צומת שלא נמצאת על המעגל. קיימים מסלולים הדדיים בין d ל-c, כי הרכיב קשיר היטב. נסמן את המרחק בין c ל-d ב-l ובין d ל-c ב-k. נלך במסלולים הבאים:

מ-d ל-c ובחזרה ל-d. אורך המסלול: $l+k$.

מ-d ל-c, נלך על גבי המעגל עד שנחזור ל-c ובחזרה ל-d. אורך המסלול: $l+k+m$, כאשר m אורך המעגל – אי זוגי. אחד מאורכי המסלולים $l+k$, $m+l+k$ הוא זוגי (הוספת גודל אי-זוגי משנה את הזוגיות). לכן d נמצאת על מעגל באורך אי-זוגי.

<u>ניתוח סיבוכיות:</u>

את רכיבי הקשירות של הגרף מוצאים ב-$O\left(|V|+|E|\right)$. נניח שיש n רכיבי קשירות חזקה: $G_1,...,G_n$. בכל אחד מרכיבי הקשירות בנינו את גרף העזר, בזמן $O\left(2|V_i|+2|E_i|\right)$. כמו כן הרצנו DFS בזמן $O\left(2|V_i|+2|E_i|\right)$ כדי למצוא מסלול מתאים. בסך הכל עבור כל רכיב זמן הריצה הוא $O\left(|V_i|+|E_i|\right)$, ומשום ש-$\sum_{i=1}^{n}|V_i|=|V|$ ו-$\sum_{i=1}^{n}|E_i|=|E|$ נקבל זמן ריצה כולל של:

$$\sum_{i=1}^{n}O(|V_i|+|E_i|)=O\left(|V|+|E|\right).$$

שאלה 4

תחילה, נמצא את הרכיבים הקשירים היטב של הגרף. נבנה גרף $H=(W,F)$, שבו צמתי H הם רכיבי קשירות חזקה של G. קשתות H מוגדרות כך:

$$F=\{(a,b)\in W\times W : a\neq b, \exists u\in a, v\in b : (u,v)\in E\}$$

בתרגיל 3.27 שבמדריך הלמידה מוכח שזהו גרף מכוון ללא מעגלים.

ניווכח בכך שאם אנו מוצאים צומת שממנה יש מסלול לכל צומת בעץ, אז גם כל הרכיב הקשיר היטב של צומת זאת מקיים תכונה זאת. כמו כן, יש רק רכיב קשיר אחד שיש בו מסלול לכל שאר הרכיבים הקשירים היטב, כי אחרת היו בגרף מעגלים (ראה הוכחת נכונות).

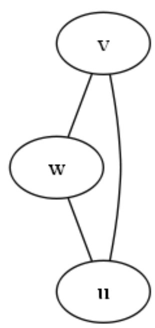
נחפש ב- H צומת v שדרגת הכניסה אליה היא אפס – זה בעצם השלב הראשון של מיון טופולוגי. אלו הצמתים היחידים המועמדים להיות בעלי התכונה הנדרשת בשאלה, שכן אם לצומת קשת נכנסת מ- u, אז בהכרח אין ממנה מסלול אל u, אחרת יש מעגל. כעת יש לבדוק האם יש מסלול המתחיל ב- v העובר דרך כל צמתי הגרף (מסלול כזה קרוי מסלול המילטוני). זוהי בדיוק שאלה 6.3 בספר הלימוד.

<u>שאלה 5:</u>

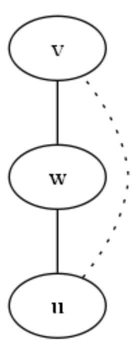
א. הטענה נכונה. <u>הוכחה:</u> נניח ש-D הוא קוטר הגרף G. לפי טענה (3.3) בספר הלימוד, לכל $j \geq 1$, השכבה L_j שמתקבלת מסריקה לרוחב מהצומת s, כוללת את כל הצמתים הנמצאים במרחק j מ-s. מסלול מ-s ל-t מתקיים אם ורק אם t מופיע באחת השכבות. לפיכך, הרמה ה-j של עץ הסריקה לרוחב מכילה את הצמתים שמרחקם מ-s הוא j. העומק d של העץ הוא הרמה המקסימלית שבעץ. הצמתים ברמה האחרונה של העץ נמצאים במרחק d מ-s ולכן לפי הגדרת הקוטר, $d \leq D$.

ב. הטענה אינה נכונה.

<u>דוגמא נגדית:</u>



אם נתחיל סריקה לעומק בסדר $v \to w \to u$, אז עץ הסריקה לעומק ייראה כך:



המרחק בין כל שני צמתים בגרף הוא אחד, ולכן קוטר הגרף שווה לאחד. אבל העומק של עץ הסריקה הוא 2, ולכן הטענה לא נכונה.

ג. הטענה נכונה. <u>הוכחה:</u> נניח שהקוטר של G הוא k. אז קיימים $s,t \in G$ כך שהמסלול $s-t$ המינימלי אורכו k. סריקת DFS שמתחילה ב- s, ובכל פעם בוחרת את הצומת הבא במסלול $s-t$, היא סריקה שמכילה מסלול (שרוך) באורך k (אלו רק הבחירות הראשוניות של הצמתים – כמובן שאחר כך נותנים לסריקה להמשיך).

נותר להוכיח שבסריקה זאת אין קשתות אחורה, כלומר אין קשתות מצמתי המסלול לצמתים אחרים במסלול שהן לא הקשתות המקוריות של המסלול: נניח שהמסלול הוא $s = s_1, s_2, s_3, ..., s_k, s_{k+1} = t$. נניח בשלילה שקיימת קשת $\{s_i, s_j\}$ ($i > j+1$), אז המסלול:

$$s = s_1, s_2, ..., s_j, s_i, s_{i+1}, ..., s_k, s_{k+1} = t$$

הוא באורך: $k' = k-(i-j-1)$ (כי יש בין i ו- j $i-j-1$ צמתים שדילגנו עליהם, או $i-j-2$ קשתות, אבל הוספנו קשת ולכן דילגנו רק על $i-j-1$ קשתות). $i > j+1 \Rightarrow i-j-1 > 0 \Rightarrow k' < k$, כלומר יש מסלול בין s ו- t באורך הקטן מקוטר הגרף, וזוהי סתירה.