20425 - תאריך הבחינה: 11.2.2010 (סמסטר 2010א - מועד א/84)

שאלה 1

א. $$\text{Var}(M_n) = \text{Var}\left(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) = \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 n\sigma^2 = \tfrac{\sigma^2}{n}$$ [ה-X_i-ים בלתי-תלויים]

$$\text{Cov}(X_1, M_n) = \text{Cov}\left(X_1, \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \text{Cov}(X_1, X_i) = \tfrac{1}{n}\text{Var}(X_1) + 0 = \tfrac{\sigma^2}{n}$$

ומכאן:
$$\rho(X_1, M_n) = \frac{\text{Cov}(X_1, M_n)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(M_n)}} = \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\sqrt{\sigma^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ב. $$E[S_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E\left[\frac{S_n}{n}\right] = 0$$

$$\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \text{Var}\left(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) = \left(\tfrac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\underbrace{E[X_i^2]}_{\le M} - \underbrace{(E[X_i])^2}_{=0}\right) \le \frac{M}{n}$$ [ה-X_i-ים בלתי-תלויים]

לכן, נוכל לקבל מאי-שוויון צ׳בישב, שלכל $\varepsilon > 0$, מתקיים:

$$0 \le P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - 0\right| > \varepsilon\right\} \le P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - 0\right| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} \le \frac{M}{n\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

כלומר:
$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} = 0$$

שאלה 2

א. $$\frac{\binom{10}{3}}{\binom{22}{3}} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{22\cdot 21\cdot 20} = \frac{6}{77} = 0.0779$$

ג. ארבע האותיות ד׳, ה׳, צ׳ ו-ק׳ יכולות להופיע במילה ב- $4! = 24$ סידורים שונים, ורק ב- $4 = 2\cdot 2$ מהם האותיות ד׳ ו-ה׳ מופיעות לפני האותיות צ׳ ו-ק׳. לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $4/24 = 1/6$

ב. נסמן ב- A_1 את המאורע שהמילה ״נמל״ מופיעה ברצף האותיות;
ב- A_2 את המאורע שהמילה ״ספה״ מופיעה ברצף האותיות;
וב- A_3 את המאורע שהמילה ״רשת״ מופיעה ברצף האותיות.

נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה, כדי לחשב את ההסתברות שלפחות אחד משלושת המאורעות, המוגדרים לעיל, מתרחש. נשים לב, שלשלוש המילים הללו אין אותיות משותפות, דבר המקל על חישוב הסתברויות החיתוכים. נקבל:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1\cap A_2) - P(A_1\cap A_3) - P(A_2\cap A_3) + P(A_1\cap A_2\cap A_3)$$
$$= 3\cdot\frac{20!}{22!} - 3\cdot\frac{18!}{22!} + \frac{16!}{22!} = 0.00648$$

שאלה 3

א. מנתוני הבעיה נובע כי : $X \sim Geo(p) \qquad ; \qquad Y \sim NB(3,p)$

כעת, לכל $1 \le i \le j-2$ מתקיים :

$$P\{X=i,Y=j\} = \underbrace{(1-p)^{i-1}p}_{1,2,\ldots,i} \cdot \underbrace{(j-i-1)(1-p)^{j-i-2}p^2}_{i+1,i+2,\ldots,j} = (j-i-1)(1-p)^{j-3}p^3$$

ב. מהסעיף הקודם נובע שלכל $i=1,2,\ldots,j-2$, כאשר $j=3,4,\ldots$, מתקיים :

$$P\{X=i \mid Y=j\} = \frac{P\{X=i,Y=j\}}{P\{Y=j\}} = \frac{(j-i-1)\cancel{(1-p)^{j-3}p^3}}{\binom{j-1}{2}\cancel{(1-p)^{j-3}p^3}} = \frac{2(j-i-1)}{(j-1)(j-2)}$$

ג. נעזר בפונקציית ההסתברות המשותפת שמצאנו לחישוב ההסתברות המבוקשת. נקבל :

$$P\{Y-X=9\} = P\{Y=X+9\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X=i,Y=i+9\} = \sum_{i=1}^{\infty}(i+9-i-1)(1-p)^{i+9-3}p^3$$

$$= 8(1-p)^7 p^3 \sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1} = 8(1-p)^7 p^3 \cdot \frac{1}{p} = 8(1-p)^7 p^2$$

אפשר להגיע לתוצאה האחרונה באופן ישיר, מכיוון שמשמעות המאורע $\{Y=X+9\}$ היא שנדרשו עוד 9 יריות, אחרי הפגיעה הראשונה, כדי להשיג 2 פגיעות נוספות. הואיל וכל היריות בלתי-תלויות זו בזו, הרי שזוהי הסתברות בינומית-שלילית עם $r=2$ ו- p בנקודה 9, כפי שקיבלנו לעיל.

שאלה 4

א. הוכחת הטענה מובאת במדריך הלמידה.

ב1. נגדיר את המאורעות : A = אביר A פוגע באביר B

B = אביר B פוגע באביר A

ואת המאורעות : $F = A \cap B^C$ = אביר A פוגע באביר B, אך אינו נפגע בעצמו (על-ידי אביר B)

$G = B$ = אביר B פוגע באביר A

המאורעות F ו- G זרים זה לזה, ואם המאורע F מתרחש לפני המאורע G, אביר A מנצח בדו-קרב ונותר היחיד בחיים. לכן, לפי הטענה המובאת בסעיף א, ההסתברות שאביר A ינצח בדו-קרב היא :

$$\frac{0.5\cdot(1-0.3)}{0.5\cdot(1-0.3)+0.3} = \frac{0.35}{0.65} = 0.5385$$

ב2. נגדיר את המאורעות : $F^* = A$ = אביר A פוגע באביר B

$G^* = A^C \cap B$ = אביר B פוגע באביר A ואינו נפגע מאביר A בסיבוב הקודם

המאורעות F^* ו- G^* זרים זה לזה, ואם המאורע F^* מתרחש לפני המאורע G^*, אביר A מנצח בדו-קרב ונותר היחיד בחיים. לכן, לפי הטענה המובאת בסעיף א, ההסתברות שאביר A ינצח בדו-קרב היא :

$$\frac{0.5}{0.5+\cdot(1-0.5)0.3} = \frac{0.5}{0.65} = 0.7692$$

ואפשר לפתור את הסעיף הזה גם כך :

נחשב את ההסתברות שאביר A ינצח בדו-קרב ביריה ה-i-ית שהוא מבצע, ונסכום את כל ההסתברויות הללו על-פני $i = 1,2,\ldots$. נשתמש בסימוני המאורעות מהסעיף הקודם ונקבל :

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A)[P(A^C)]^{i-1}[P(B^C)]^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} 0.5\cdot(1-0.5)^{i-1}\cdot(1-0.3)^{i-1}$$
$$= 0.5\cdot\sum_{i=1}^{\infty}(0.5\cdot 0.7)^{i-1} = 0.5\cdot\sum_{i=0}^{\infty}0.35^i = \frac{0.5}{1-0.35} = 0.7692$$

שאלה 5

א. נסמן ב- X את המשקל (בק״ג) של אבטיח מקרי ; $X \sim N(4\ ,0.2^2)$.

עלינו למצוא פתרון למשוואה : $P\{X > a\} = 0.85$

או לחלופין פתרון למשוואה : $P\{X \le a\} = \Phi\left(\frac{a-4}{0.2}\right) = 0.15 = \Phi(-1.036)$

שממנה אנו מקבלים כי : $a = 4 - 1.036\cdot 0.2 = 3.7928$ ק״ג

ב. נסמן ב-W את המחיר של אבטיח מקרי מזן זה.

מתקיים $W = 2X$, לכן $W \sim N(2\cdot 4 = 8\ ,2^2\cdot 0.2^2 = 0.16)$, ומכאן שהפונקציה יוצרת המומנטים של W

היא : $\exp\{8t + 0.08t^2\}$, ממשי t

ג. נחשב תחילה את ההסתברות שאבטיח מקרי ישקול יותר מ-4.2 ק״ג.

$$P\{X > 4.2\} = 1 - \Phi\left(\tfrac{4.2-4}{0.2}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

עתה, נסמן ב-S את מספר האבטיחים מתוך ה-50 ששוקלים יותר מ-4.2 ק״ג.

מתקיים $S \sim B(50,\ 0.1587)$, ולכן ההסתברות המבוקשת היא :

$$P\{S = 7 \mid S \ge 2\} = \frac{P\{S = 7\}}{P\{S \ge 2\}} = \frac{\binom{50}{7}\cdot 0.1587^7\cdot 0.8413^{43}}{1 - 0.8413^{50} - \binom{50}{1}\cdot 0.1587\cdot 0.8413^{49}} = \frac{0.1501}{0.9982} = 0.1504$$

ד. מכיוון שאין תלות בין המשקלים של אבטיחים שונים, המשקל הכולל של 3 אבטיחים, שנסמנו ב-Y, הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת של $3\cdot 4 = 12$ ק״ג ושונות $3\cdot 0.2^2 = 0.12$ ק״ג^2.

לכן : $P\{Y \le 11.5\} = \Phi\left(\frac{11.5-12}{\sqrt{0.12}}\right) = \Phi(-1.4434) = 1 - 0.9256 = 0.0744$