תשובה 1

א. מהנתון, תהי $f : A-B \to B-A$ חד-חד-ערכית ועל.

בעזרת פילוג החיתוך לגבי האיחוד, $A = (A \cap B') \cup (A \cap B)$,

כלומר $A = (A-B) \cup (A \cap B)$, וזהו **איחוד זר** (איחוד של שתי קבוצות זרות).

בדומה, $B = (B-A) \cup (A \cap B)$.

נגדיר $g : A \to B$ כך: $g(a) = \begin{cases} f(a) & a \in A-B \\ a & a \in A \cap B \end{cases}$

מהנתון לגבי f נקבל ש- g מעבירה את $A-B$ באופן **חד-חד-ערכי על** $B-A$,

ומכיוון ש- g פועלת כזהות על $A \cap B$, היא מעבירה את $A \cap B$ באופן חד-חד-ערכי על עצמו.

בהתחשב בכך ש- $B = (B-A) \cup (A \cap B)$, לא קשה להראות ש- g היא חד-חד-ערכית ועל B.

הוכחה של טענה כללית יותר, ממנה זה נובע, ראו בפרק 5, טענה 5.9 !

הראינו פונקציה **חד-חד-ערכית** מ- A **על** B , לכן הן שוות-עוצמה.

ב. כאמור, כללית $A = (A-B) \cup (A \cap B)$, וזהו איחוד זר,

וכן $B = (B-A) \cup (A \cap B)$ וזהו איחוד זר.

מכאן, אם A,B **סופיות**, ומתקיים $|A| = |B|$ אז:

$$|A-B| = |A| - |A \cap B| = |B| - |A \cap B| = |B-A|$$

ג. לדוגמא נקח $A = \mathbf{N}$, ו- B היא קבוצת הטבעיים הזוגיים (השלימו הבדיקה).

תשובה 2

א. נתבונן בפונקציה $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to A$ הבאה ($\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים):

לכל $x, y, z \in \mathbf{Z}$, $f(x,y,z) = (x + y\sqrt{2} \,,\, x - y\sqrt{2} \,,\, z\sqrt{3})$.

נשים לב שמהגדרת הקבוצה A בשאלה, f היא אכן פונקציה של $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ל- A, ויותר מכך:

f היא **על** A , כי A מוגדרת להיות קבוצת האיברים המתקבלים בצורה זו.

נראה ש- f היא **חד-חד-ערכית**: נניח $f(x_1,y_1,z_1) = f(x_2,y_2,z_2)$. משמע

(i) $x_1 + y_1\sqrt{2} = x_2 + y_2\sqrt{2}$ *(ii)* $x_1 - y_1\sqrt{2} = x_2 - y_2\sqrt{2}$ *(iii)* $z_1\sqrt{3} = z_2\sqrt{3}$.

חיבור שתי המשוואות הראשונות, אגף ימין לאגף ימין ואגף שמאל לאגף שמאל נותן $2x_1 = 2x_2$,

כלומר $x_1 = x_2$. באופן דומה, מחיסור משוואה (*ii*) ממשוואה (*i*) נקבל $y_1 = y_2$.

משוואה (*iii*) נותנת מיד $z_1 = z_2$. בסה"כ קיבלנו $(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$.

משמע f חד-חד-ערכית. הראינו פונקציה חח"ע ועל בין $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ל- A, לפיכך עוצמת A

היא כעוצמת $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. עוצמה זו היא כידוע $\aleph_0$.

ב. אילו גם B היתה בת-מניה, היינו מקבלים ש- $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = A \cup B$ היא איחוד של שתי קבוצות בנות מניה. לפי שאלה 4.3ד בעמ' 119 בספר, איחוד כזה הוא בר-מנייה.
אך $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ אינה בת-מנייה - עוצמתה היא כידוע C . לכן B אינה בת-מניה.

תשובה 3

ההגדרה שמוצעת בשאלה היא הגדרה בעזרת נציגים: אנו מגדירים פעולה בין עוצמות בעזרת בחירה שרירותית של קבוצות המייצגות את העוצמות הנתונות. כפי שמוסבר בפרק 5 בסמוך להגדרות החיבור, הכפל והחזקה, בהגדרה מסוג זה יש להראות שהתוצאה אינה תלויה בבחירת הנציגים. במקרה של הפעולה שהוגדרה בשאלה, התוצאה בבירור תלויה בנציגים, וקל לתת דוגמא לכך אפילו בקבוצות סופיות:

תהיינה $A_1 = \{1\}$, $B_1 = \{2\}$. מתקיים $A_1 \oplus B_1 = \{1,2\}$.

מההגדרה בשאלה נקבל $1 \oplus 1 = 2$.

מצד שני, נקח $A_2 = B_2 = \{1\}$. מתקיים $A_2 \oplus B_2 = \varnothing$.

מההגדרה בשאלה נקבל $1 \oplus 1 = 0$.

תוצאת הפעולה תלויה בנציגים, משמע הפעולה אינה מוגדרת היטב - ההגדרה אינה תקינה.

תשובה 4

א. ניעזר במשפט 5.13ב, כאשר במקום A שם נקח את $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$,

ובמקום B שם נקח את הקבוצה A שלנו. תנאי המשפט מתקיימים, ולכן

$|\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} - A| = |\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}|$. כאמור אגף ימין שווה C.

ב. נסמן את הקבוצה הנתונה ב- A. מצד אחד, $A \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

לפי שאלה 4.10 בעמ' 128 בספר, $|\mathbf{R} \times \mathbf{R}| = C$. לכן $|A| \leq C$.

מצד שני, נסמן $I = \{x \mid 0 < x < 1\}$. מתקיים $I \times I \subseteq A$.

מהגדרת C בספר (עמ' 127 לקראת סוף העמוד), $|I| = C$.

מהגדרת כפל עוצמות, $|I \times I| = C \cdot C$.

מטענה 5.15ד בפרק 5, $C \cdot C = C$.

כאמור $I \times I \subseteq A$. קיבלנו אפוא $C \leq |A|$.

משני האי-שוויונים, בעזרת משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין, נקבל $|A| = C$.

ג. $d^C = (2^C)^C = 2^{C \cdot C} = 2^C = d$.

נעזרנו במשפט 5.23, משפט 5.27ג, ומשפט 5.15ד.

איתי הראבן