

## שאלה 1 (25 נקודות)

(8 נק') א. יהיו  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משתנים מקריים בלתי-תלויים, כך שלכל  $i = 1, 2, \dots, n$  מתקיים

$$E[X_i] = \mu \text{ ו- } \text{Var}(X_i) = \sigma^2.$$

$$\text{נגדיר } M_n = \sum_{i=1}^n X_i / n.$$

חשב את מקדם המתאם הלינארי בין  $X_1$  ל- $M_n$ .

(8 נק') ב. יהיו  $X_1, X_2, \dots$  משתנים מקריים בלתי-תלויים, כך שלכל  $i = 1, 2, \dots$  מתקיים  $E[X_i] = 0$

$$\text{ו- } E[X_i^2] \leq M, \text{ עבור קבוע חיובי } M.$$

$$\text{נגדיר } S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

$$\text{הוכח כי } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} = 0, \text{ לכל } \varepsilon > 0.$$

(9 נק') ג. יהי  $X$  משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ).

$$\text{חשב את } E\left[\frac{X}{1+X}\right].$$

## שאלה 2 (25 נקודות)

אם מציעה לפתה להירשם לשלושה חוגים: חוג משחקי כדור, חוג שחייה וחוג מוסיקה.

הבת יכולה לבחור משלושת החוגים האלה כרצונה (בין 0 ל-3 חוגים).

האם מעוניינת לתכנן את ההוצאה החודשית שלה ומעריכה כך את הבחירה שתעשה בתה:

ההסתברות שהבת תבחר לפחות חוג אחד היא 0.95;

ההסתברות שהבת תבחר בחוג שחייה היא 0.7;

ההסתברות שהבת לא תבחר בחוג משחקי כדור היא 0.7;

אם הבת תבחר בחוג שחייה, ההסתברות שלא תבחר בכל שלושת החוגים היא 0.9;

ההסתברות שהבת תבחר בחוג משחקי כדור ובחוג שחייה, אך לא בחוג מוסיקה היא 0.13;

ההסתברות שהבת תבחר לפחות בשני חוגים, שאחד מהם הוא חוג מוסיקה, היא 0.52.

(6 נק') א. מהי ההסתברות שהבת תבחר רק בחוג מוסיקה?

(6 נק') ב. אם ידוע שיש לפחות חוג אחד שלא נבחר על-ידי הבת, מהי ההסתברות שהיא תבחר בדיוק בחוג אחד?

(6 נק') ג. אם הבת לא תבחר בחוג מוסיקה, מהי ההסתברות שלא תבחר אף לא חוג אחד?

(7 נק') ד. העלות החודשית של החוגים היא: 250 ש"ח לחוג אחד, 450 ש"ח לשני חוגים ו-600 ש"ח לשלושה חוגים.

יהי  $X$  העלות החודשית של החוגים שהבת תבחר לפי הערכות אמה.

חשב את השונות של  $X$ .

### שאלה 3 (25 נקודות)

נתונים 10 כדורים אדומים ממוספרים מ-1 עד 10 ו-10 כדורים שחורים ממוספרים מ-1 עד 10. מחלקים באקראי את 20 הכדורים ל-10 זוגות כלשהם.

יהי  $X$  מספר זוגות הכדורים שבהם שני הכדורים נושאים אותו המספר.

(8 נק') א. הסבר מדוע  $X$  אינו משתנה מקרי בינומי.

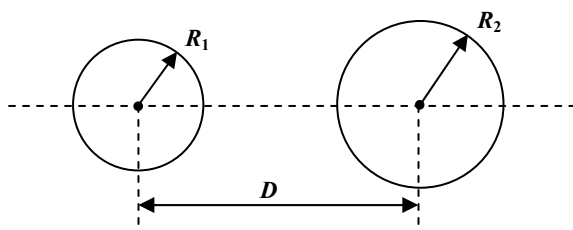
לווה את ההסבר בחישוב הסתברותי מתאים.

(8 נק') ב. חשב את התוחלת של  $X$ .

(9 נק') ג. חשב את  $P\{X=5\}$ .

### שאלה 4 (25 נקודות)

שני מעגלים בעלי רדיוסים  $R_1$  ו- $R_2$  נמצאים במרחק  $D$  זה מזה, כפי שמפורט באיור שלהלן:



נניח כי  $R_1$  ו- $R_2$  הם שני משתנים מקריים רציפים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות אחידה על הקטע  $(0, R)$ , וכי  $D$  ו- $R$  הם שני קבועים חיוביים.

(10 נק') א. חשב את  $P\{R_1 < 3R_2\}$ .

(15 נק') ב. מהי ההסתברות שתהיה חפיפה כלשהי בין שני העיגולים שייווצרו?

### שאלה 5 (25 נקודות)

יהי  $Y$  משתנה מקרי רציף שהתפלגותו אחידה על הקטע  $(0,1)$ ;

ויהי  $X$  בהינתן  $Y=y$  משתנה מקרי בדיד שהתפלגותו פואסונית עם הפרמטר  $y$ .

(9 נק') א. חשב את התוחלת ואת השונות של  $X$ .

(8 נק') ב. חשב את  $P\{X=1\}$ .

(8 נק') ג. נניח כי  $X_1, X_2, \dots, X_{100}$  הוא מדגם מקרי מההתפלגות של  $X$ .

חשב קירוב, מדויק עד כמה שאפשר, להסתברות ש- $\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 48$ .

**בהצלחה!**