אלגוריתמיקה - סמסטר 2006ב - פתרון שאלות נבחרות מתוך ממ"ן 12

פתרון שאלה 2

א. האלגוריתם עוצר, כי כל אחת מהלולאות מתבצעת מספר קבוע של פעמים.

נוכיח את נכונותו החלקית של האלגוריתם באמצעות אינווריאנטות.

טענות הביניים (האינווריאנטות):

טענה 1 (לפני שורה (1)): הקלט הוא וקטור באורך n.

טענה 2 (לפני ביצוע האיטרציה ה-i בשורה (1)): האיברים V[1]..V[i-1] נמצאים **במקום הסופי** בוקטור הממוין.

טענה 3 לפני ביצוע האיטרציה ה-j בשורה (1.1)): האיבר V[i] הוא **המינימלי** מבין האיברים V[i]..V[j-1].

טענה 4 (אחרי היציאה מהלולאה הראשית): הוקטור V[1]..V[n] הוא ממוין.

נוכיח שהאינווריאנטות נשמרות:

1 ⇐ **2** : לפני האיטרציה הראשונה של הלולאה הראשית i = 1 ולכן טענה 2 מתקיימת באופן ריק.

2 ⇐ **3** : לפני האיטרציה הראשונה של הלולאה הפנימית j = i+1 ולכן טענה 3 מתקיימת, כי V[i] הוא המינימלי מבין האיברים V[i]..V[i].

3 ⇐ **3** : עפ"י ההנחה, לפני ביצוע האיטרציה ה-j של הלולאה הפנימית האיבר V[i] הוא המינימלי מבין האיברים V[i]..V[j-1]. בתוך האיטרציה הערך של V[j] מושווה ל-V[i] ואם הוא קטן ממנו הם מוחלפים. לפיכך, לאחר ביצוע האיטרציה האיבר V[i] הוא המינימלי מבין האיברים V[i]..V[j].

3 ⇐ **2**: הלולאה הפנימית מסתיימת כאשר j = n+1 ובשלב זה, עפ"י ההנחה, האיבר V[i] הוא המינימלי מבין האיברים V[i]..V[j-1]=V[n]. האיברים V[1]..V[i-1] כבר נמצאים במקומם הסופי בוקטור הממוין (עפ"י טענה 2 שהתקיימה בזמן הכניסה לאיטרציה ה-i של הלולאה הראשית), ומכך נובע שכעת גם האיבר V[i] נמצא במקומו הסופי בוקטור הממוין, ובסה"כ האיברים V[1]..V[i] נמצאים במקומם הסופי בוקטור הממוין.

2 ⇐ **4**: הלולאה הראשית מסתיימת כאשר i = n ובשלב זה, עפ"י ההנחה, האיברים V[1]..V[n-1] נמצאים במקומם הסופי בוקטור הממוין. מכך נובע מייד שגם האיבר V[n]חייב להיות במקומו הסופי בוקטור הממוין ולכן הוקטור V[1]..V[n] הוא ממוין.

ב. באיטרציה ה-i של הלולאה החיצונית מתבצעות $n-i$ השוואות.

לפיכך, מספר ההשוואות הכולל הוא: $(n-1)+(n-2)+...+1=\frac{n(n-1)}{2}$.

זהו גם מספר ההחלפות במקרה הגרוע (כאשר הוקטור ממוין בסדר יורד).

פתרון שאלה 3

א. אלגוריתם לחישוב הפונקציה $f(x)$:

(1) low ← 1, high ← x

(2) כל עוד low < high – 1 בצע :

(2.1) mid ← (low + high)/2

(2.2) אם $mid^2 = x$ אז החזר את mid ועצור.

(2.3) אחרת אם $mid^2 < x$ אז low ←mid

(2.4) אחרת high ←mid

(3) החזר 0 ועצור.

ב. האלגוריתם הוא בעצם וריאציה של חיפוש בינרי, ולכן סיבוכיות הזמן שלו היא $O(\log_2 x)$.

זוהי סיבוכיות זמן פולינומיאלית (ואפילו לינארית), כי גודל הקלט לבעיה הוא גם כן $O(\log_2 x)$.

ג. **הוכחת נכונות חלקית:**

טענות הביניים :

טענה 1 (לפני שורה (1)) : x הוא מספר טבעי (גדול מ-1).

טענה 2 (לפני ביצוע שורה (2)) : השורש הריבועי של x גדול (ממש) מ-low וקטן (ממש) מ-high.

טענה 3 (אחרי בדיקת התנאי בשורה (2.2)) : השורש הריבועי של x שווה ל-mid.

טענה 4 (אחרי היציאה מהלולאה של שורה (2)) : השורש הריבועי של x איננו מספר שלם.

נוכיח שהאינווריאנטות נשמרות:

1 ⇐ 2 : לאחר שורה (1) low = 1 ו- high = x. השורש הריבועי של x בוודאי גדול מ-1 וקטן מ-x.

2 ⇐ 2 : עלינו להראות שאם טענה 2 נכונה, אז היא תישאר נכונה גם לאחר איטרציה נוספת, עבור הערכים החדשים של low ו-high.

אם כך, נניח שהשורש הריבועי של x גדול מ-low וקטן מ-high.יש שתי אפשרויות :

- אם מתקיים התנאי בשורה (2.3) אז השורש הריבועי של x בוודאי גדול מ-mid. לכן, לאחר ההצבה low ←mid הטענה נשארת נכונה.
- אם הגענו לשורה (2.4) אז $mid^2 > x$ והשורש הריבועי של x בוודאי קטן מ-mid. לכן, לאחר ההצבה high ←mid הטענה נשארת נכונה.

2 ⇐ 3 : אם מתקיים התנאי בשורה (2.2) אז השורש הריבועי של x שווה (עפ"י ההגדרה) ל-mid

2 ⇐ 4 : אם יצאנו מהלולאה בשורה (2) ההפרש בין low ו-high חייב להיות 1 (מדוע הוא לא יכול להיות קטן מ-1?) ולכן השורש הריבועי של x הוא מספר ממשי שנמצא בין low ל-high.

הוכחת עצירה: המתכנס הוא ההפרש בין low ו-high. בכל איטרציה של הלולאה הפרש זה קטן פי שניים, וכאשר הוא יהיה שווה ל-1 הלולאה תסתיים (אלא אם יצאנו ממנה קודם בשורה (2.2)).