פתרונות לממ"ן 12 - 2020ב - 20416

1. א. נמצא את ערכי הפרמטרים μ ו- σ.

$$P\{X>110\}=P\{Z>\tfrac{110-\mu}{\sigma}\}=1-\Phi(\tfrac{110-\mu}{\sigma})=0.5 \quad\Rightarrow\quad \Phi(\tfrac{110-\mu}{\sigma})=0.5=\Phi(0) \quad\Rightarrow\quad \mu=110$$

$$P\{95<X<125\}=P\{\tfrac{95-110}{\sigma}<Z<\tfrac{125-110}{\sigma}\}=\Phi(\tfrac{15}{\sigma})-\Phi(-\tfrac{15}{\sigma})=2\Phi(\tfrac{15}{\sigma})-1=0.6826$$

$$\Rightarrow\quad 2\Phi(\tfrac{15}{\sigma})=1.6826 \quad\Rightarrow\quad \Phi(\tfrac{15}{\sigma})=0.8413=\Phi(1) \quad\Rightarrow\quad \sigma=15$$

כלומר, האורך (בס"מ) של לולב מקרי הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת 110 ושונות 15^2.

ב. $P\{X>120\}=P\{Z>\tfrac{120-110}{15}\}=1-\Phi(\tfrac{2}{3})=1-\Phi(0.6667)=1-0.7475=0.2525$

נסמן ב- Y את מספר המדידות שייעשו עד למציאת 4 הלולבים הנדרשים. למשתנה המקרי Y יש התפלגות בינומית-שלילית עם הפרמטרים 4 ו-0.2525. לכן, ההסתברות המבוקשת היא:

$$P\{Y=10\}=\binom{9}{3}\cdot 0.2525^4\cdot 0.7475^6=0.0596$$

ג. $$P\{X>120\mid X<125\}=\frac{P\{120<X<125\}}{P\{X<125\}}=\frac{P\{\frac{120-110}{15}<Z<\frac{125-110}{15}\}}{P\{Z<\frac{125-110}{15}\}}$$

$$=\frac{\Phi(1)-\Phi(0.6667)}{\Phi(1)}=\frac{0.8413-0.7475}{0.8413}=0.1115$$

מטבלה 5.1 (עמ' 112 במדריך):

$\Phi(0.66)=0.7454$

$\Rightarrow\ 0.7486-0.7454=\underline{\underline{0.0032}}$

$\Phi(0.67)=0.7486$

$\Phi(0.66\underline{67})=0.7454+0.\underline{67}\cdot\underline{\underline{0.0032}}=0.7475$

ד. נמצא את הערך של a שמקיים את המשוואה: $P\{X<a\}=0.43$

לשם כך, נפתור את המשוואה: $\Phi\left(\frac{a-110}{15}\right)=0.43=\Phi(-0.1764)$

ונקבל כי: $\frac{a-110}{15}=-0.1764$

ומכאן שמתקיים:

$a=110-0.1764\cdot 15=107.354$

כלומר, ההסתברות שלולב יהיה קצר מ- 107.354 ס"מ היא 0.43.

עלינו למצוא z שמקיים את המשוואה:

$\Phi\left(\frac{a-110}{15}\right)=0.43=\Phi(-z)$

או לחלופין z שמקיים את המשוואה:

$1-\Phi\left(\frac{a-110}{15}\right)=1-0.43=\underline{\underline{0.57}}=1-\Phi(-z)=\underline{\underline{\Phi(z)}}$

מטבלה 5.1 (עמ' 112 במדריך) מקבלים כי:

$\Phi(0.17)=0.5675 \quad\Rightarrow\quad 0.57-0.5675=0.0025$

$\Phi(0.18)=0.5714 \quad\Rightarrow\quad 0.5714-0.57=0.0014$

לכן: $\Phi\left(0.17+0.01\cdot\frac{0.0025}{0.0039}\right)=\Phi(0.1764)\cong 0.57$

2. א. $\int_1^2 f_X(x)\,dx = \int_1^2 \frac{4}{x^5}\,dx = \frac{4}{-4x^4}\Big|_1^2 = 1-\frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0.9375$

ב1. לכל $y \ge 1$ מתקיים:

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^3 \le y\} = P\{X \le y^{1/3}\} = \int_1^{y^{1/3}} f_X(t)\,dt = \int_1^{y^{1/3}} \frac{4}{t^5}dt = \frac{4}{-4t^4}\Big|_1^{y^{1/3}} = 1-y^{-4/3}$$

ולכל $y < 1$ מתקיים: $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 0$

ב2. מסעיף ב1 נקבל כי לכל $y \ge 1$ מתקיים: $f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}[1-y^{-4/3}] = \frac{4}{3}y^{-7/3}$

ב3. מסעיף ב2 נקבל כי:

$$E[Y] = \int_1^{\infty} y\,f_Y(y)\,dy = \int_1^{\infty} y\cdot\tfrac{4}{3}y^{-7/3}\,dy = \int_1^{\infty}\tfrac{4}{3}y^{-4/3}\,dy = \tfrac{4}{3}\cdot -3\cdot y^{-1/3}\Big|_1^{\infty} = 0+4 = 4$$

3 . משתנה מקרי שמתפלג התפלגות ביתא הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה**:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & else \end{cases}.$$

משתנה זה תלוי בשני פרמטרים שמאפיינים אותו, a ו- b, כאשר $a > 0, \quad b > 0$.

$B(a,b)$ היא פונקציה שמכונה "פונקציית ביתא" ומוגדרת באופן הבא: $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$.

ראשית, נחלץ את $B(3,1)$:

$B(3,1) = \int_0^1 x^{3-1}(1-x)^{1-1}dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ ועכשיו נמצא את פונקציית הצפיפות בתחום $0 \le x \le 1$:

$$f(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} = \frac{x^{3-1}(1-x)^{1-1}}{1/3} = 3x^2.$$

וכעת ניגש לבניית פונקציית ההתפלגות המצטברת בתחום $0 \le x \le 1$:

$F_X(t) = \int_0^t 3x^2dx = 3\cdot\frac{t^3}{3} = t^3$. ולסיכום, פונקציית ההתפלגות המצטברת היא:

$$\boxed{F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^3 & 0 \le t \le 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}}.$$

4. נסמן ב- A_i את המאורע שרכיב i תקין לאחר שנתיים, לכל $i = 1,2,3$. המאורעות בלתי-תלויים זה בזה.

א. נחשב את ההסתברות שהמערכת פועלת לאחר שנתיים, בהנחה שלאורך-החיים של הרכיבים יש התפלגות אחידה בין 1 ל-3:

$$P((A_1 \cap A_2) \cup A_3) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3) \qquad \text{[הרכיבים בלתי-תלויים]}$$

$$= P\{X_1 \ge 2\}P\{X_2 \ge 2\} + P\{X_3 \ge 2\} - P\{X_1 \ge 2\}P\{X_2 \ge 2\}P\{X_3 \ge 2\}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{5}{8}$$

ב. $$P(A_3 \,|\, (A_1 \cap A_2) \cup A_3) = \frac{P(A_3)}{P((A_1 \cap A_2) \cup A_3)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

ג. נחשב את ההסתברות שהמערכת פועלת לאחר שנתיים, בהנחה שלאורך-החיים של הרכיבים יש התפלגות מעריכית עם תוחלת 2, כלומר, התפלגות מעריכית עם הפרמטר 0.5:

$$P((A_1 \cap A_2) \cup A_3) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3) \qquad \text{[הרכיבים בלתי-תלויים]}$$

$$= P\{X_1 \ge 2\}P\{X_2 \ge 2\} + P\{X_3 \ge 2\} - P\{X_1 \ge 2\}P\{X_2 \ge 2\}P\{X_3 \ge 2\}$$

$$= (e^{-0.5\cdot 2})^2 + e^{-0.5\cdot 2} - (e^{-0.5\cdot 2})^3 = 0.45343$$

ד. $$P(A_3 \,|\, (A_1 \cap A_2) \cup A_3) = \frac{e^{-0.5\cdot 2}}{0.45343} = \frac{0.36788}{0.45343} = 0.81133$$

5. א.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = c\int_5^{\infty}(x-5)^3 e^{-x}\,dx \underset{y=x-5}{\underset{\downarrow}{=}} c\int_0^{\infty} y^3 e^{-(y+5)}\,dy = ce^{-5}\int_0^{\infty} y^3 e^{-y}\,dy$$

כעת, פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי גמא עם הפרמטרים $t=4$ ו- $\lambda=1$ היא :

$$f_{Gamma(4,1)}(y) = \frac{\lambda e^{-\lambda y}(\lambda y)^{t-1}}{\Gamma(t)} \underset{\substack{t=4\\ \lambda=1}}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{e^{-y}y^3}{3!} \qquad , \qquad y>0$$

ולכן :

$$ce^{-5}\int_0^{\infty} y^3 e^{-y}\,dx = ce^{-5}\cdot 3!\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{y^3 e^{-y}}{3!}\,dy}_{=1} = 6ce^{-5} \qquad \Rightarrow \qquad c=\tfrac{1}{6}e^5$$

ב. מהתוצאה הקודמת, אפשר להבין כי $X=Y+5$, כאשר Y הוא משתנה מקרי גמא עם הפרמטרים $t=4$ ו- $\lambda=1$. כדי להראות זאת, נניח ש- Y משתנה מקרי גמא כנ״ל, ונראה שההתפלגות של המשתנה המקרי X , המוגדר כ- $Y+5$, היא ההתפלגות הנתונה.

לכל $x>5$, מתקיים :

$$F_X(x) = P\{X\le x\} = P\{Y+5\le x\} = P\{Y\le x-5\} = F_Y(x-5)$$

$$f_X(x) = \tfrac{d}{dx}F_X(x) = \tfrac{d}{dx}F_Y(x-5) = f_Y(x-5) = \tfrac{1}{6}e^{-(x-5)}(x-5)^3 \qquad \Leftarrow$$

כנדרש.

לפיכך :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y+5) = \mathrm{Var}(Y) = 4$$

[עבור $Y \sim Gamma\ (4,1)$]

חישוב ישיר של השונות:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \tfrac{1}{6}e^5\int_5^{\infty} x(x-5)^3 e^{-x}\,dx \underset{y=x-5}{\underset{\downarrow}{=}} \tfrac{1}{6}e^5\int_0^{\infty}(y+5)y^3 e^{-(y+5)}\,dy$$

$$= \int_0^{\infty}\tfrac{1}{6}(y+5)y^3 e^{-y}\,dy = \int_0^{\infty}(y+5)f_{Gamma(4,1)}(y)\,dy$$

$$= E[Y+5] = E[Y]+5 = 4+5 = 9$$

[עבור $Y \sim Gamma\ (4,1)$]

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \tfrac{1}{6}e^5\int_5^{\infty} x^2(x-5)^3 e^{-x}\,dx \underset{y=x-5}{\underset{\downarrow}{=}} \tfrac{1}{6}e^5\int_0^{\infty}(y+5)^2 y^3 e^{-(y+5)}\,dy$$

$$= \int_0^{\infty}\tfrac{1}{6}(y+5)^2 y^3 e^{-y}\,dy = \int_0^{\infty}(y+5)^2 f_{Gamma(4,1)}(y)\,dy$$

$$= E[(Y+5)^2] = E[Y^2]+10E[Y]+25 = \mathrm{Var}(Y)+(E[Y])^2+10E[Y]+25$$

$$= 4+4^2+10\cdot 4+25 = 85$$

[עבור $Y \sim Gamma\ (4,1)$]

ומכאן :

$$\mathrm{Var}(X) = E[Y^2]-(E[Y])^2 = 85-9^2 = 4$$