קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"

תאריך הבחינה: 13.7.2009 (סמסטר ב 2009 - מועד 85/א4)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.
כל השאלות זהות במשקלן.
בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפים: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

שאלה 1 (25 נקודות)

(12 נק') א. יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים n ו- p.
הוכח כי $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

(13 נק') ב. מטילים קובייה תקינה 60 פעמים –
יהי X מספר התוצאות הזוגיות שהתקבלו ב-60 הטלות אלו;
ויהי Y מספר התוצאות האי-זוגיות שהתקבלו באותן 60 הטלות.

1. חשב את $P\{X > Y\}$.
2. חשב את $E[X^2 + Y^2]$.

שאלה 2 (25 נקודות)

בוחרים באקראי משלחת של 5 מדענים מתוך קבוצה של 10 מדענים המורכבת מ-3 כימאים, 5 ביולוגים ו-2 פיזיקאים.

יהיו X = מספר הביולוגים במשלחת;
Y = מספר הפיזיקאים במשלחת.

(5 נק') א. חשב את $P\{X=2\}$.

(5 נק') ב. חשב את השונות של X.

(9 נק') ג. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.
רשום אותה באופן מדויק. כלומר, רשום את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.

(6 נק') ד. בהינתן שנבחרו למשלחת 3 ביולוגים, מהי השונות המותנית של Y?

שאלה 3 (25 נקודות)

נתונים 6 ספלים בגדלים שונים ו-6 תחתיות שונות המתאימות לספלים אלו.
כל תחתית מתאימה בדיוק לאחד מ-6 הספלים.
מניחים באקראי את הספלים על התחתיות (ספל אחד על כל תחתית).

(6 נק') א. מהי ההסתברות שבדיוק ארבעה ספלים יונחו על התחתיות המתאימות להם?

(6 נק') ב. מהי ההסתברות ששני הספלים הקטנים ביותר יונחו על התחתיות המתאימות להם?

(6 נק') ג. מהי ההסתברות ששלושת הספלים הקטנים ביותר יונחו על שלוש התחתיות המתאימות לספלים הגדולים ביותר?

(7 נק') ד. מהי ההסתברות שבדיוק ספל אחד יונח על התחתית המתאימה לו?

שאלה 4 (25 נקודות)

התפלגות הגובה (בס״מ) של צמח מזן מסוים היא נורמלית עם תוחלת 30 ושונות σ^2.

ידוע, שהגובה של צמח מקרי מהזן הזה הוא בין 19.15 ס״מ ל-40.85 ס״מ בהסתברות 0.97.

(7 נק׳) א. מהי סטיית-התקן של ההתפלגות?

(6 נק׳) ב. בוחרים צמח באופן מקרי. מהי ההסתברות שגובהו עולה על 33.89 ס״מ?

ג. כמות המים (בסמ״ק), שצמח כזה צורך בשבוע, היא פי 3 מגובהו (בס״מ).

נסמן ב- Y את צריכת המים השבועית של צמח מקרי מהזן הזה.

(6 נק׳) 1. מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים של Y.

(6 נק׳) 2. מהן התוחלת והשונות של כמות המים הכוללת שצורכים 10 צמחים מקריים מהזן הזה?

שאלה 5 (25 נקודות)

(12 נק׳) א. מטילים n פעמים מטבע $(n = 1,2,\ldots)$, שההסתברות לקבל בו את התוצאה H היא p.

נגדיר את המאורעות הבאים:

A = בהטלה הראשונה (מתוך n ההטלות) מתקבלת התוצאה H;

B_k = התוצאה H מתקבלת k פעמים ב- n ההטלות, לכל $k = 0,1,2,\ldots,n$.

באלו תנאים המאורעות A ו- B_k בלתי-תלויים זה בזה?

הוכח את טענתך.

(13 נק׳) ב. ילד אוסף בהתמדה קלפי-משחק.

נניח שיש 10 סוגים שונים של קלפי-משחק וכי כל קלף שהילד משיג הוא מסוג 1 בהסתברות $\frac{1}{3}$, ואחרת, מסוג i בהסתברות $\frac{2}{27}$, לכל $i = 2,\ldots,10$. כמו כן, נניח שאין תלות בין סוגי הקלפים שהילד משיג.

מהי ההסתברות שהקלף ה-15 שהילד ישיג יהיה מסוג שטרם יש לו כמותו?

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\, dy$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(x)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
x	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(x)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
x	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1}\cdot p \quad , \quad i=1,2,\dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i! \quad , \quad i=0,1,\dots$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,\dots$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,\dots,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,\dots,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a\le x\le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\,,\,t\ne 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad -\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,\dots,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r} \quad , \quad \sum n_i=n\,,\,\sum p_i=1$			

נוסחת הבינום

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$$

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$$

כלל ההכלה וההפרדה

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

הסתברות מותנית

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

נוסחת הכפל

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n\mid A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})$$

נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i) \quad , \quad \{B_i\}$$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(A\mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)} \quad , \quad \{B_i\}$$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת

$$E[X]=\sum_x x\,p_X(x)=\int x\,f(x)dx$$

תוחלת של פונקציה של מ"מ

$$E[g(X)]=\sum_x g(x)p_X(x)=\int g(x)f(x)dx$$

שונות

$$\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית

$$E[aX+b]=aE[X]+b$$

$$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון

$$P\{X>s+t\mid X>t\}=P\{X>s\} \quad , \quad s,t\ge 0$$

תוחלת מותנית

$$E[X\mid Y=y]=\sum_x x\,p_{X|Y}(x\mid y)=\int x\,f_{X|Y}(x\mid y)dx$$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X \mid Y=y) = E[X^2 \mid Y=y] - (E[X \mid Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] = E[E[X \mid Y]] = \sum_y E[X \mid Y=y]p_Y(y)$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) \Big/ \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$

כאשר X_i מ״מ ב״ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X]$

(כאשר X_i מ״מ ב״ת ש״ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X) + (E[X])^2 \mathrm{Var}(N)$

$$M_Y(t) = E\left[\left(M_X(t)\right)^N\right]$$

אי-שוויון מרקוב X מ״מ אי-שלילי , $a>0$, $P\{X \ge a\} \le E[X]/a$

אי-שוויון צ׳בישב $\mu, \sigma^2 < \infty$, $a>0$, $P\{|X-\mu| \ge a\} \le \sigma^2 / a^2$

משפט הגבול המרכזי X_i מ״מ ב״ת וש״ה , $\mu, \sigma^2 < \infty$, $P\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) \Big/ \sqrt{n\sigma^2} \le a \right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(a)$

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב״ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ״מ בינומיים (גיאומטריים) ב״ת עם אותו הפרמטר p הוא מ״מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ״מ פואסוניים ב״ת הוא מ״מ פואסוני.
- סכום של מ״מ נורמליים ב״ת הוא מ״מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ״מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב״ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1<x<1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \tfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \ne -1 \quad ; \quad \int \tfrac{1}{ax+b} dx = \tfrac{1}{a}\ln(ax+b)$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים :

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

$$\int e^{ax} dx = \tfrac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \tfrac{1}{a\ln b} b^{ax} \quad ;$$