

ה א ו נ י ב ר ס י ט ה ה פ ת ו ח ה

20290

אלגוריתמיקה -

יסודות מדעי המחשב

חוברת הקורס – סתיו 2014א

כתב: אייל משיח

אוקטובר 2013 - סמסטר סתיו – תשע"ד

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

א	אל הסטודנט
ב	1. לוח זמנים ופעילויות
ד	2. תיאור המטלות
ה	3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס
1	ממ"ן 11
3	ממ"ן 12
5	ממ"ן 13
7	ממ"ן 14
9	ממ"ן 15

אל הסטודנט,

אנו מברכים אותך עם הצטרפותך אל הלומדים בקורס "אלגוריתמיקה - יסודות מדעי המחשב".

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים, אותם מפרסם/מת מרכז/ת ההוראה.

בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.

פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:

<http://telem.openu.ac.il>

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר

הספרייה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

במהלך הקורס יש להגיש תרגילי בית. מספיק להגיש שלושה מתוך חמשת הממ"נים שבחוברת,

אך מומלץ להגיש את כולם. יש להקפיד על הגשת הממ"נים במועד.

צוות הקורס ישמח לעמוד לרשותך בכל שאלה שתתעורר.

ניתן לפנות אלי ביום ג', בשעות 11:00-13:00, בטלפון 09-7781233, או ב-e-mail.

כתובתי היא: eyalma@openu.ac.il

פגישות יש לתאם מראש.

ב ב ר כ ה,

אייל משיח

מרכז הקורס

1. לוח זמנים ופעילויות (20290 / א2014)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	פרקי הלימוד המומלצים	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן למנחה
1	18.10.2013-13.10.2013	פרקים 1-3	מפגש 1	
2	25.10.2013-20.10.2013	פרק 5		ממ"ן 11 25.10.2013
3	1.11.2013-27.10.2013	פרק 5	מפגש 2	
4	8.11.2013-3.11.2013	פרק 6		
5	15.11.2013-10.11.2013	פרק 7	מפגש 3	
6	22.11.2013-17.11.2013	פרק 7		ממ"ן 12 22.11.2013
7	29.11.2013-24.11.2013 (ה-ו חנוכה)	פרק 8	מפגש 4	
8	6.12.2013-1.12.2013 (א-ה חנוכה)	פרק 8		ממ"ן 13 6.12.2013

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

לוח זמנים ופעילויות – המשך

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	פרקי הלימוד המומלצים	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן למנחה
9	13.12.2013-8.12.2013	פרק 9	מפגש 5	
10	20.12.2013-15.12.2013	פרק 9		
11	27.12.2013-22.12.2013	פרק 10	מפגש 6	
12	3.1.2014-29.12.2013	פרק 10		ממ"ן 14 3.1.2014
13	10.1.2014-5.1.2014	פרק 11	מפגש 7	
14	17.1.2014-12.1.2014	פרק 11		
15	24.1.2014-19.1.2014	פרק 12	מפגש 8	ממ"ן 15 24.1.2014

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

2. תיאור המטלות

הממ"נים בקורס הם ממ"נים **רגילים**: כל מטלה מורכבת ממספר תרגילים "יבשים" **שאינם** דורשים הרצת תכניות במחשב. תרגילים אלו נועדו לבדוק את הבנתך בחומר הלימוד. את הפתרון למטלה כזו יש לכתוב **בעט** על דף נייר בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. (אפשר ורצוי, כמובן, להדפיס את הפתרון למטלה). אם השאלה בממ"ן אינה ברורה לך, ניתן להתקשר אל אחד מהמנחים (בשעת הייעוץ הטלפוני שלו) לצורך קבלת הסבר או לנסות להיעזר בקבוצת הדיון של הקורס. בטבלה שלהלן תמצא מהו חומר הלימוד הנדרש (לפי פרקי הספר) לפתרון כל אחת מהמטלות, ומשקל כל מטלה בחישוב הציון של הקורס.

שים לב!

בעת כתיבת פתרון למטלה אין להסתמך על פרקי לימוד **מתקדמים** יותר מהפרקים בהם עוסקת המטלה.

מטלה	חומר הלימוד הנדרש לפתרון	משקל המטלה
ממ"ן 11	פרקים 1-4	6 נקודות
ממ"ן 12	פרקים 5-6	6 נקודות
ממ"ן 13	פרק 7	6 נקודות
ממ"ן 14	פרקים 8-9	6 נקודות
ממ"ן 15	פרקים 10-12	6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש שלוש מטלות מתוך החמש.

לתשומת לבכם!

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן: אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלות** בציון הנמוך ביותר, שציוניהן נמוכים מציון הבחינה (**עד שתי מטלות**), לא יילקחו בחשבון בעת שקלול הציון הסופי.

זאת בתנאי שמטלות אלה **אינן חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו, מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליך לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל של 18 נקודות לפחות.

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון של 60 לפחות.

ג. לקבל ציון סופי של 60 לפחות.

לתשומת לבכם:

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס. סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימאלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון 09-7782222 או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא <http://www.openu.ac.il/sheilta>

קורסים ⇨ ציוני מטלות ובחינות ⇨ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.

יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של המטלות והבחינה יהיה נמוך מ- 60).

כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1-4

מספר השאלות: 6 משקל המטלה: 6 נקודות

מועד אחרון להגשה: 25.10.2013

סמסטר: 2014א

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (15 נקודות)

- א. כתבו שגרה המדפיסה את איבריה של מחסנית בסדר הפוך (החל מהאיבר שבתחתית המחסנית ועד לאיבר שבראש המחסנית). מותר לשגרה להשתמש במחסנית-עזר.
- ב. כתבו שגרה המבצעת את הדפסת האיברים מבלי להשתמש במבנה נתונים נוסף.

שאלה 2 (15 נקודות)

אפשר לייצג ביטוי אריתמטי המורכב ממספרים טבעיים, האופרטור האונירי " $-$ " וארבעת האופרטורים הבינריים " $+$ ", " $-$ ", " \times " ו " $/$ " באמצעות עץ בינרי באופן הבא:

מספר טבעי I מיוצג ע"י עלה המכיל את I .

הביטוי E – מיוצג ע"י עץ, שהשורש שלו מכיל את האופרטור האונירי " $-$ " ובנו היחיד הוא השורש של תת-עץ המכיל את הביטוי E .

הביטוי $E \cdot F$ (שבו הסימן " \cdot " מציין איזשהו אופרטור בינרי) מיוצג ע"י עץ, שהשורש שלו מכיל את האופרטור " \cdot ", בנו השמאלי הוא השורש של תת-עץ המכיל את הביטוי E ובנו הימני הוא השורש של תת-עץ המכיל את הביטוי F .

כתבו אלגוריתם המקבל מצביע לעץ בינרי T ובודק אם העץ מייצג ביטוי אריתמטי חוקי כמתואר לעיל.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתונה קבוצה S של קורסים. לכל קורס c_i יש זמן התחלה s_i וזמן סיום f_i . מעוניינים למצוא תת-קבוצה S' בגודל מקסימלי, כך שניתן יהיה לשבץ את כל הקורסים שב- S' לאותו אולם (שני קורסים המתקיימים באותן שעות, או ששעותיהם חופפות חלקית לא יכולים להתקיים באותו אולם). להלן אלגוריתם לפתרון הבעיה:

$$(1) S' \leftarrow \emptyset$$

(2) כל עוד $S \neq \emptyset$ בצע את הפעולות הבאות:

(2.1) בחר קורס שזמן הסיום שלו הוא מינימלי (נסמן אותו ב- c_k) והעבר אותו מ- S ל- S' .

(2.2) הוצא מ- S את כל הקורסים החופפים (גם חלקית) ל- c_k .

(3) חזור את S' .

- א. באיזו שיטה משתמש האלגוריתם? האם לדעתכם הוא מוצא את הפתרון האופטימלי לבעיה?
- ב. נשנה את האלגוריתם באופן הבא: בשורה (2.1) לא ייבחר קורס שזמן הסיום שלו מינימלי, אלא הקורס הקצר ביותר ב- S (הקורס שעבורו $f_i - s_i$ הוא מינימלי). תנו דוגמה המוכיחה שהאלגוריתם החדש לא תמיד מוצא את הפתרון האופטימלי לבעיה.

שאלה 4 (20 נקודות)

- א. הריצו את האלגוריתם של דייקסטרה למציאת המסלול הקצר ביותר על הגרף שבעמוד 91 בספר הלימוד.
- ב. הסבירו מדוע האלגוריתם של דייקסטרה לא יעבוד כאשר יש בגרף הקלט קשתות בעלות משקל שלילי. תנו דוגמה לגרף המכיל קשת שלילית אחת, שעבורו האלגוריתם יחזיר תשובה שגויה.

שאלה 5 (30 נקודות)

- נתונה פרה שזה עתה נולדה. נניח שפרה ממליטה בדיוק עגלה אחת בכל שנה, החל מגיל שנתיים.
- א. כתבו נוסחה רקורסיבית עבור מספר הפרות אחרי n שנים והסבירו מדוע היא נכונה.
- ב. כתבו אלגוריתם תכנון דינמי לחישוב מספר הפרות אחרי n שנים.
- ג. השתמשו באלגוריתם מסעיף ג' כדי לחשב את מספר הפרות אחרי 10 שנים.
- הערה: הניחו שאף אחת מהפרות לא תמות במהלך השנים.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

- נשנה את האלגוריתם בשאלה 3, כך שבשורה (2.1) ייבחר קורס שהוא חופף למספר מינימלי של קורסים אחרים ב- S . האם האלגוריתם החדש תמיד מוצא את הפתרון האופטימלי לבעיה? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 5-6

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 22.11.2013

סמסטר: 2014א

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (15 נקודות)

נתון כד המכיל מספר זוגי $n = 2k$ ($k \geq 1$) של כדורים לבנים ומספר כלשהו m ($m \geq 1$) של כדורים שחורים. נתבונן בתהליך הבא:

(1) כל עוד נשארו בכד לפחות שני כדורים, בצע את הפעולות הבאות:

(1.1) הוצא מהכד שני כדורים כלשהם;

(1.2) אם שני הכדורים שהוצאת הם בעלי אותו צבע, שים במקומם כדור חדש שחור;

(1.3) אחרת, החזר לכד את הכדור הלבן;

הוכיחו שהתהליך מסתיים ובסופו הכד מכיל בדיוק כדור שחור אחד.

שאלה 2 (15 נקודות)

להלן מופיע אלגוריתם המקבל כקלט מערך מספרים A באורך n :

(1) $k \leftarrow n$

(2) כל עוד $k > 1$ בצע:

(2.1) $k \leftarrow k/2$;

(2.2) עבור i המקבל את הערכים 1 עד k , בצע:

(2.2.1) אם $A[i] < A[i + k]$ אז החלף ביניהם;

(3) החזר את $A[1]$.

א. הסבירו מה מבצע האלגוריתם.

ב. מהי האיננוואריאנטה המתקיימת לפני כל איטרציה של הלולאה הראשית?

הערה: הניחו ש- n הוא חזקה שלמה של 2.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתון מערך A המכיל n מספרים. כתבו אלגוריתם יעיל, הבדוק אם קיים במערך איבר המופיע יותר מעשר פעמים. נתחו את זמן הריצה של האלגוריתם שכתבתם והוכיחו את נכונותו.

שאלה 4 (20 נקודות)

מבקר המדינה מעוניין לבדוק אם יש אנשים שהתפקדו גם למפלגת "יש עתיד" וגם למפלגת "הבית היהודי". ברשותו נמצאות שתי רשימות: רשימה L_1 באורך n המכילה את מספרי הזהות של חברי "יש עתיד", ורשימה L_2 באורך m המכילה את מספרי הזהות של חברי "הבית היהודי". נניח ש- $m < n$. כתבו אלגוריתם יעיל ככל האפשר לפתרון הבעיה ונתחו את זמן ריצתו.

שאלה 5 (30 נקודות)

נדון בבעיה של מציאת המינימום והמקסימום ברשימת מספרים L באורך N . בספר מתואר אלגוריתם לפתרון הבעיה המבצע $2 - 3N/2$ השוואות. בשאלה זו נראה כי **כל אלגוריתם** מבוסס-השוואות לפתרון הבעיה יבצע לפחות $2 - 3N/2$ השוואות במקרה הגרוע (כלומר, מספר זה מהווה **חסם תחתון** לבעיה). נתבונן באיזשהו אלגוריתם לפתרון הבעיה. עבור השוואה בין שני איברים כלשהם, נאמר שהאיבר הגדול יותר **ניצח** בהשוואה והאיבר הקטן יותר **הפסיד**. נגדיר את הקבוצות הבאות:

A – קבוצת האיברים שעוד לא השתתפו באף השוואה

B – קבוצת האיברים שרק ניצחו

C – קבוצת האיברים שרק הפסידו

D – קבוצת האיברים שגם ניצחו וגם הפסידו

$$\text{כמו כן נגדיר: } x = |B| + |C| + 3|D|.$$

- א. כתבו את ערכיהם של $|A|$, $|B|$, $|C|$, $|D|$ ו- x לפני ביצוע האלגוריתם ולאחר תום האלגוריתם.
- ב. הראו כי בעקבות השוואה שנערכת בין שני איברים כלשהם ב- L , ערכו של x גדל **במקרה הגרוע** לכל היותר ב-2. התייחסו לכל סוגי ההשוואות האפשריים: השוואה בין איבר ב- A לאיבר ב- A , השוואה בין איבר ב- A לאיבר ב- B , השוואה בין איבר ב- B לאיבר ב- C וכו'.
- ג. הסיקו כי כל אלגוריתם הפותר את הבעיה יבצע במקרה הגרוע לפחות $2 - 3N/2$ השוואות.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

בספר הלימוד נטען, כי השגרה הרקורסיבית למציאת מינימום ומקסימום ברשימה באורך N מבצעת פחות מ- $1.7N$ השוואות (עבור N כלשהו, לאו דווקא חזקה שלמה של 2). מצאו את מספר ההשוואות המדויק שמבצעת השגרה במקרה הגרוע.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

מספר השאלות: 6

משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: 2014א

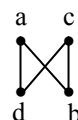
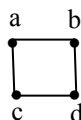
מועד אחרון להגשה: 6.12.2013

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (15 נקודות)

א. האם שני הגרפים הבאים הם איזומורפיים? הוכיחו את תשובתכם.



ב. הוכיחו שבעיית הגרפים האיזומורפיים (graph isomorphism) שייכת ל-NP.

שאלה 2 (15 נקודות)

בעיית הדזור הסיני היא הבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: גרף G עם משקלות חיוביים על הקשתות ומספר טבעי k

השאלה: האם קיים מסלול סגור בגרף, העובר בכל הקשתות בגרף ומשקלו אינו עולה על k ?

א. הוכיחו שהבעיה שייכת למחלקה NP.

ב. נסחו את הבעיה כבעיית אופטימיזציה.

ג. הסבירו מה הקשר בין בעיית הדזור הסיני לבין בעיית המעגל האוילרי.

שאלה 3 (20 נקודות)

- א. הוכיחו שהפסוק הבא הוא טאוטולוגיה: $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\sim A \vee B)$.
- ב. הוכיחו שהבעיה הבאה שלמה ב-NP:
- הקלט לבעיה: פסוק בתחשיב הפסוקים
- השאלה: האם הפסוק איננו טאוטולוגיה?

שאלה 4 (20 נקודות)

- נתבונן בבעיה הבאה:
- הקלט לבעיה: קבוצה S של n מספרים שלמים
- השאלה: האם קיימת תת-קבוצה לא ריקה של S שסכום האיברים בה שווה לאפס?
- הוכיחו שהבעיה היא NP-שלמה.
- רמז: השתמשו ברדוקציה מבעיית החלוקה.

שאלה 5 (30 נקודות)

- גרף נקרא **3-צביע** אם קיימת עבורו צביעה חוקית בשלושה צבעים.
- יהא G גרף 3-צביע בעל n צמתים. להלן נתון אלגוריתם לצביעת הגרף G :
- (1) אם דרגת כל הצמתים ב- G קטנה מ- \sqrt{n} , אז צבע את G ב- \sqrt{n} צבעים (לכל היותר) באמצעות האלגוריתם המתואר בתשובה לשאלה 14 במדריך הלמידה.
 - (2) אחרת בצע את הפעולות הבאות:
 - (2.1) בחר ב- G איזשהו צומת v שדרגתו לפחות \sqrt{n} ;
 - (2.2) צבע את v בצבע חדש ואת כל שכניו בשני צבעים חדשים;
 - (2.3) הסר את v ואת כל שכניו מהגרף;
 - (2.4) חזור לשורה (1);
- א. הוכיחו שהאלגוריתם צובע את גרף הקלט בצביעה חוקית.
- ב. מצאו חסם עליון על מספר הצבעים שבהם האלגוריתם משתמש.
- מהו יחס הקירוב שמשיג האלגוריתם?

שאלה 6 (שאלת בונוס)

- משמעות הקשר $A \text{ NOR } B$ היא: גם A וגם B אינם נכונים ($\text{neither } A \text{ nor } B \text{ is true}$).
- הראו כיצד אפשר לבטא באמצעות הקשר NOR את הקשרים AND, NOT ו-OR.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 8-9

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 3.1.2014

סמסטר: 2014א

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (15 נקודות)

עבור כל אחד משני הקלטים הבאים לבעית התאמת המילים – מצאו התאמת מילים חוקית (אם היא קיימת), או הוכיחו שאין התאמה כזו:

א.

	1	2	3
X	baaa	ba	aba
Y	aaa	baab	ab

ב.

	1	2	3
X	ba	abb	bab
Y	bab	bb	abb

שאלה 2 (15 נקודות)

נגדיר את הבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: תוכנית Q

השאלה: האם התוכנית Q מחשבת את הפונקציה $f(y) = y^2$?

הוכיחו שהבעיה היא בלתי כריעה.

שאלה 3 (20 נקודות)

על-פי השערת גולדבך ניתן להציג כל מספר זוגי (גדול מ-2) כסכום של שני מספרים ראשוניים.

למשל: $4 = 2 + 2$, $24 = 19 + 5$, $38 = 31 + 7$, $100 = 59 + 41$

השאלה אם השערה זו נכונה היא אחת הבעיות הפתוחות הידועות ביותר בתורת המספרים.

נניח שעומד לרשותכם אורקל לבעיית העצירה.

הסבירו כיצד אפשר להשתמש באורקל כדי לקבוע אם השערת גולדבך נכונה.

שאלה 4 (20 נקודות)

בנו מכונת טיורינג, אשר מקבלת מחרוזת של אפסים ואחדים, ומוחקת מהמחרוזת את כל

האפסים. מחרוזת הפלט תהיה מורכבת רק מהאחדים, ללא רווחים.

למשל, עבור הקלט 1101001 הפלט של המכונה יהיה 1111.

הניחו שהראש הקורא-כותב של המכונה ממוקם בתחילת התהליך מול הסימן '#' שמשמאל

לקלט. בסוף התהליך, הראש הקורא-כותב צריך לעמוד מול הסימן '#' שמשמאל לפלט.

ציירו את תרשים המעברים המתאים והסבירו את דרך פעולתה של המכונה.

שאלה 5 (30 נקודות)

א. נתונה מכונת טיורינג בעלת Q מצבים וא"ב $\{0,1\}$. ידוע שבמהלך פעולתה המכונה משתמשת

לכל היותר ב- s משבצות מתוך משבצות הסרט האינסופי. מהו מספר הקונפיגורציות השונות

שבהן יכולה המכונה להיות? (בקונפיגורציה הכוונה לאפיון מלא של מצב המכונה ברגע מסוים;

כלומר, המצב שבו המכונה נמצאת, מיקום הראש הקורא-כותב ותוכן הסרט.)

ב. נניח שמ"ט M יכולה להיות ב- N קונפיגורציות שונות. איך נוכל לדעת אם במהלך ריצתה על

איזשהו קלט המכונה נכנסה ללופ אינסופי?

ג. הגדירו בצורה פורמלית (באמצעות מכונות טיורינג) את המחלקות PSPACE ו-EXPTIME.

ד. הוכיחו כי $PSPACE \subseteq EXPTIME$. רמז: הסתמכו על הסעיפים הקודמים.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

נדון בגרסה של בעיית התאמת המילים שבה הא"ב הוא בן אות אחת.

נניח שקיימים בסדרה שני אינדקסים i ו- j כך שמתקיים:

$$d_i = |x_i| - |y_i| > 0$$

$$d_j = |y_j| - |x_j| > 0$$

מצאו את סדרת האינדקסים **הקצרה ביותר** שמהווה התאמת מילים חוקית. מהו אורך הסדרה?

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 10-12

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 24.1.2014

סמסטר: א2014

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (15 נקודות)

מטריצה מסדר $n \times n$ נקראת **ריבוע קסם** אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. המטריצה מכילה את כל המספרים בקבוצה $\{1, 2, \dots, n^2\}$.
2. סכום המספרים בכל שורה, בכל עמודה, באלכסון הראשי ובאלכסון המשני הוא זהה. למשל, המטריצה הבאה היא ריבוע קסם:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

תהא M מטריצה מסדר $n \times n$ המכילה את כל המספרים בקבוצה $\{1, 2, \dots, n^2\}$.

תארו אלגוריתם מקבילי, הבודק באמצעות $O(n)$ מעבדים אם המטריצה M היא ריבוע קסם. נתחו את זמן הריצה של האלגוריתם. האם הושג שיפור לעומת זמן הריצה של אלגוריתם סדרתי?

שאלה 2 (15 נקודות)

משכורתו של כל עובד במשרד ממשלתי בקובה מורכבת ממשכורת בסיס b (זהה לכולם) ומ- M תוספות שונות (300 פזו לבעלי תואר אקדמי, 50 פזו לכל שנת ותק, 10 פזו לכל שעת עבודה וכו'). נסמן ב- N את מספר העובדים במשרד. נמצאים בידינו הנתונים האישיים של העובדים והפירוט של כל התוספות האפשריות למשכורת. עלינו לחשב את המשכורת המגיעה לכל אחד מהעובדים. הסבירו כיצד אפשר לבצע את חישוב המשכורות בצורה יעילה באמצעות רשת סיסטולית.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתון מערך A המכיל n מספרים. ידוע שהמקסימום מופיע במערך לפחות $n/2$ פעמים. כתבו אלגוריתם אקראי מסוג מונטה-קרלו למציאת המקסימום במערך. נדרש שהסיכוי לטעות יהיה קטן מ- $1/1000$. הוכיחו שהאלגוריתם שכתבתם עונה על דרישות השאלה.

שאלה 4 (20 נקודות)

המפתח הסודי של בועז במערכת ההצפנה RSA הוא $(P_B, Q_B, \text{Priv}_B) = (5, 11, 37)$.
א. מצאו את המפתח הציבורי של בועז.
ב. נניח שהמפתח הסודי של בועז הגיע לידי גליה. הסבירו כיצד גליה תוכל לקרוא את ההודעות הנשלחות אל בועז ולזייף את חתימתו.

שאלה 5 (30 נקודות)

בעיית הגרפים הלא-איזומורפיים (graph non-isomorphism) היא הבעיה הבאה:
הקלט לבעיה: שני גרפים לא מכוונים $G_1 = (V_1, E_1)$ ו- $G_2 = (V_2, E_2)$
השאלה: האם G_1 ו- G_2 אינם איזומורפיים?
איה רוצה לשכנע את בועז ששני גרפים נתונים G_1 ו- G_2 אינם איזומורפיים.
נניח שכל אחד משני הגרפים מכיל n קדקודים $1, 2, \dots, n$ ונתבונן בפרוטוקול ההוכחה הבא:
(1) בועז מגריל תמורה π של המספרים $\{1, 2, \dots, n\}$;
(2) בועז בוחר באקראי מספר i מתוך $\{1, 2\}$;
(3) בועז שולח לאיה את $\pi(G_i)$ (כלומר, הוא שולח את הגרף G_i כשהקדקודים שלו "מעורבבים").
(4) איה אומרת לבועז אם $\pi(G_i)$ איזומורפי ל- G_1 או ל- G_2 ;
(5) אם איה צדקה (כלומר, היא אמרה לבועז ש- $\pi(G_i)$ איזומורפי לגרף שהוא בחר), אז בועז מחליט שהגרפים אינם איזומורפיים; אחרת, הוא מחליט שהגרפים איזומורפיים.
א. בהנחה שהגרפים G_1 ו- G_2 אינם איזומורפיים – הסבירו מדוע מובטח לנו שאיה תצליח לשכנע בכך את בועז. כמה איטרציות של הפרוטוקול יידרשו כדי שבוועז ישתכנע שהגרפים אינם איזומורפיים בהסתברות גבוהה מ- 99%? הוכיחו את תשובתכם.
ב. בהנחה שהגרפים איזומורפיים – הסבירו מדוע איה לא תוכל "לרמות" את בועז ולשכנע אותו שהגרפים אינם איזומורפיים.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

חוו דעתכם על ההגדרה הבאה למושג Artificial Intelligence (AI):
"AI is the attempt to make computers do what people think computers cannot do."