

מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.

* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.

* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי וידיאו, עליך לחזור ולהוכיחן.

* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(6 נק') א. α, β הם פסוקים פורמליים. בכל אחד מהם מופיעים משתנים פסוקיים p, q

וקשרים לוגיים שונים. בלוח אמת משותף של α, β מתקיימים שני התנאים הבאים:

(i) בכל שורה שבה α מקבל ערך T, β מקבל ערך F.

(ii) בכל שורה שבה β מקבל ערך F, α מקבל ערך T.

מכאן נובע:

[1] הפסוק $\alpha \rightarrow \beta$ הוא טאוטולוגיה.

[2] הפסוק $\alpha \rightarrow \beta$ הוא סתירה.

[3] הפסוק $\alpha \vee \beta$ הוא סתירה.

[4] הפסוק $\alpha \leftrightarrow \beta$ הוא סתירה.

[5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

נדי לחסוך לבטים וספקות: רק תשובה אחת נכונה. אם נראה לכם שיש יותר מתשובה

אחת נכונה – בדקו היכן טעיתם.

(7 נק') ב. להלן קבוצה של פונקציות: $\{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\} \mid \forall n \in \mathbb{N}, f(2n) = 0\}$

עוצמת קבוצה זו היא:

[1] 1 [2] \aleph_0 [3] C [4] 2^C

[5] עוצמה הנמצאת בין \aleph_0 ל-C.

(6 נק') ג. K_7 הוא הגרף המלא ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4) על שבעה צמתים.

אורכו של המסלול הארוך ביותר האפשרי ב- K_7 הוא:

[1] 7 [2] 14 [3] 21 [4] 28 [5] 35

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

(12 נק') א. תהיינה B, X, Y קבוצות. הוכיחו:

$$X \cup B = Y \cup B \quad \text{אם ורק אם} \quad X - B = Y - B$$

הצעה לארגון ההוכחה:

תהי U קבוצה אוניברסלית המכילה את B, X, Y .

(i) נניח $X \cup B = Y \cup B$. נבצע בשני האגפים פעולה...

(ii) נניח $X - B = Y - B$. נבצע בשני האגפים פעולה....

(8 נק') ב. תהי U קבוצה ותהי $B \subseteq U$. בעזרת הקבוצה הקבועה B נגדיר פונקציה

$$f: P(U) \rightarrow P(U - B) \quad \text{כך:} \quad f(X) = X - B \quad \text{הראו ש-} f \text{ היא על.}$$

(קל לראות ש- f היא אכן פונקציה $P(U) \rightarrow P(U - B)$, אינכם נדרשים להראות זאת).

(7 נק') ג. בסעיף זה $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

נגדיר חלוקה π של $P(U)$:

בחלוקה π , קבוצות $X, Y \in P(U)$ הן באותה מחלקה אם ורק אם $X \cup B = Y \cup B$.

קל לראות שזו אכן חלוקה, אינכם נדרשים להוכיח זאת.

שימו לב: זו לא חלוקה של U אלא חלוקה של $P(U)$.

כמה מחלקות שקילות יש בחלוקה π ? נמקו את תשובתכם.

הסעיפים הקודמים של השאלה יכולים לסייע.

שאלה 3

בכמה דרכים ניתן לסדר את 10 הספרות 0123456789, כאשר אסור שיופיע אף אחד מארבעת

הרצפים הבאים: 0123, 2345, 4567, 6789.

דוגמא לסידור תקין: 1234987605 (מותר 1234 ומותר 9876).

דוגמא לסידור לא תקין: 9167234580 (מופיע 2345).

תוספת של 2 נקודות למי שמגיע לתשובה סופית מספרית.

(ציון הבחינה הוא לכל היותר 100, התוספת יכולה לקוזז הורדת ניקוד בשאלה אחרת).

שאלה 4

(17 נק') א. מתוך 1000 המספרים שבתחום $1 \leq n \leq 1000$ מישוהו בחר 501 מספרים שונים. הוכיחו שבקבוצת 501 המספרים שנבחרו, בהכרח יש שני אברים שונים a, b כך ש- a מתחלק ב- b ללא שארית.

הדרכה: כל מספר טבעי חיובי n ניתן להציג באופן יחיד כך: $n = 2^k \cdot b$, כאשר k טבעי (יכול להיות 0), ו- b הוא אי-זוגי: פשוט מוציאים כגורם מתוך n את החזקה הגדולה ביותר של 2 אשר בה n מתחלק ללא שארית. אחרי שנחלק את n בחזקה הזו של 2, נקבל מספר אי-זוגי, אחרת היה אפשר להמשיך ולחלק ב-2.

k הוא אפוא מספר הפעמים בו ניתן לחלק את n ב-2 כך שיתקבל מספר שלם.

b הוא התוצאה של החילוק הזה.

דוגמאות: $15 = 2^0 \cdot 15$, $72 = 2^3 \cdot 9$, $1024 = 2^{10} \cdot 1$.

בשאלה שלנו נתאים לכל n את המספר b שמתקבל ממנו, ונחשוב קצת מה זה אומר.

(10 נק') ב. אדם פזיז ניסה ליישם את ההוכחה של סעיף א' על בחירה של 501 מספרים שונים מתוך 1000 המספרים שבתחום $701 \leq n \leq 1700$. הוא טען שגם במקרה זה בקבוצת 501 המספרים שנבחרו, בהכרח חייבים להיות שני אברים שונים a, b כך ש- a מתחלק ב- b ללא שארית. הוא הוכיח זאת באותה דרך של סעיף א'. מצאו את הטעות בהוכחה במקרה זה (אין הכרח למצוא דוגמא נגדית לטענה, אתם מתבקשים רק להסביר מדוע אותה הוכחה לא עובדת במקרה זה).

שאלה 5

על קבוצת צמתים V , $|V| = 7$, מוגדרים שני גרפים פשוטים G_1, G_2 .

G_1 הוא עץ. G_2 אינו בהכרח עץ, אבל הוא גרף מישורי.

לכל $x \in V$ תהי $d_1(x)$ הדרגה של x ב- G_1 ותהי $d_2(x)$ הדרגה של x ב- G_2 .

הראו שיש $x \in V$ המקיים $d_1(x) + d_2(x) \leq 6$.

בהצלחה!