תשובה 1

א. נכון ב. לא נכון ג. לא נכון
ד. נכון ה. לא נכון ו. לא נכון
ז. נכון ח. נכון

תשובה 2

א. **נכון**. **הוכחה**:

לפי שאלה 1.18ב בעמ' 24 בספר הלימוד: $A \cup (B - A) = A \cup B$.

כעת, מכיוון ש- $A \subseteq B$, לפי טענה בתחתית עמ' 14 בספר, $A \cup B = B$.

ב. **לא נכון.** דוגמא נגדית: נקח $x \neq \varnothing$ כלשהו, ותהי $A = \{x\}$.

אז $P(A) = \{\varnothing, A\}$.

כעת $x \in A$, אבל $x \notin P(A)$ (כי $x \neq \varnothing$ ו- $x \neq \{x\}$).

הראינו איבר של A שאינו ב- $P(A)$, לכן A אינה חלקית ל- $P(A)$.

ג. **נכון.** התנאי $X \in P(A \cap B)$ שקול, לפי הגדרת קבוצת חזקה, לתנאי
$X \subseteq A \cap B$.

לפי שאלה 1.10 ב', זה שקול ל-
$X \subseteq A$ **וגם** $X \subseteq B$.

שוב לפי הגדרת קבוצת חזקה, זה שקול ל-
$X \in P(A)$ **וגם** $X \in P(B)$.

ומהגדרת חיתוך, זה שקול ל-
$X \in P(A) \cap P(B)$.

קיבלנו: $X \in P(A \cap B)$ **אםם** (אם ורק אם) $X \in P(A) \cap P(B)$,
ולכן ,לפי הגדרה 1.1, שתי הקבוצות שוות.

תשובה 3

א. בעזרת ההדרכה לשאלה

$$(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap C'$$

לפי סעיף 1.3.4 (פילוג החיתוך מעל האיחוד)

$$= (A \cap C') \cup (B \cap C')$$

ושוב לפי ההדרכה לשאלה

$$= (A - C) \cup (B - C)$$

ב. לפי חוק הפילוג (דיסטריבוטיביות) של האיחוד מעל החיתוך:

$(A\cap B)\cup(A\cap B')=A\cap(B\cup B')$

כאן השתמשנו בחוק הפילוג כדי לכנס איברים, לא כדי לפלג.

לפי טענה בסוף עמ' 22 בספר, $B\cup B'=U$. נציב זאת ונקבל $A\cap U$.

מובן ש- $A\cap U=A$ (הנחנו ש- U מכילה את כל הקבוצות שבדיון. לפי שאלה **1.11ב** שבעמ' **16** בספר, אם $A\subseteq U$ אז $A\cap U=A$).

קיבלנו כמבוקש $(A\cap B)\cup(A\cap B')=A$.

ג. ניעזר בתכונות של הפרש סימטרי שהוכחו בשאלה 1.22 בספר.

מאסוציאטיביות:

$(A\oplus B)\oplus(B\oplus C)=A\oplus(B\oplus(B\oplus C))$

ושוב אסוציאטיביות:

$=A\oplus((B\oplus B)\oplus C))$

ובעזרת שתי תכונות נוספות שהוכחו בסעיף ב באותה שאלה,

$=A\oplus(\varnothing\oplus C))=A\oplus C$

תשובה 4

א. $A_0=\{x\mid -1\le x\le -2\}=\varnothing$, $A_1=\{0\}$,

$A_2=\{1,2\}$, $A_3=\{2,3,4\}$, $A_4=\{3,4,5,6\}$, $A_5=\{4,5,6,7,8\}$.

ב. החיתוך ריק (שווה לקבוצה הריקה) כי אין אף איבר משותף לכל 4 הקבוצות הנתונות.

למעשה אין איבר משותף אפילו ל- A_2 ול- A_5 למשל, כך שוודאי אין איבר משותף לכל ארבע הקבוצות.

ג. נוכיח כי $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n=\mathbf{N}$:

הכלה בכיוון אחד: יהי $m\in\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$. כלומר, מהגדרת איחוד כללי, m שייך לפחות לאחת הקבוצות A_n. מהגדרת A_n, $A_n\subseteq\mathbf{N}$. לכן $m\in\mathbf{N}$.

הכלה בכיוון שני: יהי $m\in\mathbb{N}$. כדי להראות ש- $m\in\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ עלינו להראות ש- m שייך לפחות לאחת הקבוצות A_n. כלומר עלינו למצוא n טבעי כך ש- $n-1\le m\le 2(n-1)$.

זה מתקיים עבור $n=m+1$, כי לכל m טבעי מתקיים $m\le m\le 2m$.

מצאנו n כך ש- $m\in A_n$, לכן $m\in\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$.

הראינו הכלה בשני הכיוונים, לכן $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n = \mathbf{N}$.

ד. $B_0 = A_1 - A_0 = A_1 - \varnothing = \{0\}$,

$B_1 = A_2 - A_1 = \{1,2\} - \{0\} = \{1,2\}$,

$B_2 = A_3 - A_2 = \{2,3,4\} - \{1,2\} = \{3,4\}$,

$B_3 = A_4 - A_3 = \{3,4,5,6\} - \{2,3,4\} = \{5,6\}$.

$B_4 = A_5 - A_4 = \{4,5,6,7,8\} - \{3,4,5,6\} = \{7,8\}$

ה. זהו איחוד 5 הקבוצות שמצאנו בסעיף הקודם, והוא שווה $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$
כלומר $\{n \in \mathbf{N} \mid 0 \le n \le 8\}$.

איתי הראבן