ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20417

# אלגוריתמים

## חוברת הקורס –אביב 2014ב

כתב: ד״ר דניאל רייכמן

מרץ 2014 – סמסטר אביב – תשע״ד

**פנימי – לא להפצה.**

# תוכן העניינים

# אל הסטודנט,

אני מקדם את פניך בברכה עם הצטרפותך אל הלומדים בקורס "אלגוריתמים".

בחוברת זו תמצא את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ואת המטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים, אותם מפרסם/מת מרכז/ת ההוראה. בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:

http://telem.openu.ac.il

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

שעות הייעוץ הן בכל יום ג' בשעות 15:00-17:00 בטלפון 09-7781222. (פגישה נא לתאם מראש).

ניתן לפנות גם בדוא"ל: danielre@openu.ac.il

אני מאחל לך לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה,

ד"ר דניאל רייכמן
מרכז הקורס

## 1. לוח זמנים ופעילויות (20417 / 2014ב)

| שבוע לימוד | תאריכי שבוע הלימוד | יחידת הלימוד המומלצת | מפגשי ההנחיה* | תאריך אחרון למשלוח ממ"ן (למנחה) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 7.3.2014-2.3.2014 | פרק 1 | | |
| 2 | 14.3.2014-9.3.2014 | פרק 2 | | |
| 3 | 21.3.2014-16.3.2014<br>(א-ב פורים) | פרק 3 | | |
| 4 | 28.3.2014-23.3.2014 | פרק 3 | | ממ"ן 11<br>28.3.2014 |
| 5 | 4.4.2014-30.3.2014 | פרק 4 | | |
| 6 | 11.4.2014-6.4.2014 | פרק 4 | | |
| 7 | 18.4.2014-13.4.2014<br>(ב ערב פסח)<br>(ג-ו פסח) | פרק 4 | | ממ"ן 12<br>18.4.2014 |
| 8 | 25.4.2014-20.4.2014<br>(א-ב פסח) | פרק 5 | | |
| 9 | 2.5.2014-27.4.2014<br>(ב יום הזכרון לשואה) | פרק 6 | | |

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

לוח זמנים ופעילויות - המשך

| שבוע הלימוד | תאריכי שבוע הלימוד | יחידת הלימוד המומלצת | מפגשי ההנחיה* | תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה) |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 9.5.2014-4.5.2014<br>(ב יום הזכרון, ג יום העצמאות) | פרק 6 | | |
| 11 | 16.5.2014-11.5.2014 | פרק 6 | | |
| 12 | 23.5.2014-18.5.2014<br>(א ל"ג בעומר) | פרק 6 | | ממ"ן 13<br>23.5.2014 |
| 13 | 30.5.2014-25.5.2014<br>(ד יום ירושלים) | פרק 7 | | |
| 14 | 6.6.2014-1.6.2014<br>(ג-ד שבועות) | פרק 7 | | ממ"ן 14<br>6.6.2014 |
| 15 | 13.6.2014-8.6.2014 | חזרה | | |
| 16 | 20.6.2014-15.6.2014 | חזרה | | ממ"ן 15<br>20.6.2014 |

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

.

## 2. הנחיות בקשר לכתיבת אלגוריתמים

יש לזכור חמישה דברים שחיוניים להצגת האלגוריתם:

1. הסבר אותו קודם, ואת הרעיונות שבו - בעברית (אלא אם כן האלגוריתם מאוד פשוט).
2. כתוב את האלגוריתם במילים, או במידת הצורך בפסאודו-קוד, בדומה לספר. רצוי לכתוב בקוד הוראות בעברית, אך המימוש צריך להיות חד-משמעי וברור. (לדוגמה: ניתן לכתוב "בחר את האיבר הראשון ברשימה, ואם הוא גדול מ- 7 אז...").
3. אסור בשום אופן לכתוב "תכניות מחשב" במקום אלגוריתמים. עליך להתרגל לכתיבה בצורת פסאודו-קוד.
4. אם נתבקשת להוכיח את נכונות האלגוריתם עליך לעשות זאת בצורה פורמלית ומדויקת (למשל תוך שימוש באינדוקציה או בכלים מדויקים אחרים). **גם אם לא נתבקשת להוכיח, יש להסביר באופן כללי מדוע האלגוריתם עובד כשורה**.
5. בכל מקרה (גם אם לא צוין במפורש) יש לנתח את זמן הריצה של האלגוריתם. כמו כן, תמיד נסה להגיע לאלגוריתם יעיל ככל שניתן. אלגוריתם שהוא נכון, אך אינו יעיל, יזכה אותך רק בחלק מהנקודות.

## 3. תיאור המטלות

**קרא היטב עמודים אלו לפני שתתחיל לענות על השאלות**

בקורס זה 5 מטלות שעליך לפתור ולהגיש לבדיקה. להלן תמצא הסבר על אופן הפתרון הנדרש וכיצד לשלוח את המטלה למנחה.

### 3.1 מבנה המטלות

המטלות בקורס הן מסוג **ממ"ן רגיל:** תרגילים "יבשים" **שאינם** דורשים הרצת תכניות במחשב (אלא אם צוין אחרת בגוף המטלה). תרגילים אלו נועדו לבדוק את הבנתך בחומר הלימוד.
את הפתרונות למטלה כזו עליך לרשום על דף נייר בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה.

אם השאלה בממ"ן אינה ברורה לך, אל תהסס להתקשר אל אחד מהמנחים (בשעות הייעוץ הטלפוני שלו) לצורך קבלת הסבר.

## 3.2 חומר הלימוד הדרוש לפתרון המטלות

בטבלה שלהלן תמצא מהו חומר הלימוד הנדרש (לפי פרקי הספר) לפתרון כל אחת מהמטלות.

<u>**שים לב:**</u>

**אין להשתמש לפתרון המטלות בידע הנרכש בפרקי לימוד מתקדמים יותר מהפרקים בהם עוסקת הטבלה**

| מטלה | חומר הלימוד הנדרש לפתרונה |
|---|---|
| ממ"ן 11 | פרקים 1,2,3 |
| ממ"ן 12 | פרק 4 |
| ממ"ן 13 | פרקים 5,4 |
| ממ"ן 14 | פרק 6 |
| ממ"ן 15 | פרק 7 |

## 3.3 ניקוד המטלות

משקל כל מטלה 6 נקודות. ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל מינימלי של 18 נקודות לפחות.

ללא צבירת 18 נקודות
לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

**לתשומת לבכם!**

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן:

אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלות** בציון הנמוך ביותר, שציוניהן נמוכים מציון הבחינה (**עד שתי מטלות**), לא יילקחו בחשבון בעת שקלול הציון הסופי.

זאת בתנאי שמטלות אלה **אינן חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו, מגיע למינימום הנדרש.

**זכרו!** ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

## 4. התנאים לקבלת נקודות זכות

א. צבירת 18 נקודות זכות **לפחות** במטלות.

ב. ציון של לפחות 60 נקודות בבחינת הגמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 11

**הקורס:** 20417 – **אלגוריתמים**

**חומר הלימוד למטלה**: פרקים 1, 2 ו-3 בספר הלימוד.

**מספר השאלות:** 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

**סמסטר:** 2014 **ב** **מועד אחרון להגשה:** **28.03.2014**

**קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:**

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

**הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"**

**שאלה 1 (20 נקודות)**

פתרו את שאלות 1.1 ו-1.2 בספר הלימוד.

**שאלה 2 (20 נקודות)**

נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$. כתבו אלגוריתם הקובע האם ניתן לתת כיוון (יחיד) **לכל קשת** בגרף כך ש**לכל** קודקוד דרגת כניסה **גדולה מאפס**. על האלגוריתם שלכם להחזיר את הכיוונים לכל הקשתות במידה ויש דרך לתת כיוונים כך שהתנאי האמור לגבי דרגות הכניסה של הקודקודים מתקיים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

**שאלה 3 (20 נקודות)**

הקוטר של גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$ הוא מרחק המקסימלי בין זוג קודקודים בגרף (המרחק בין שני קודקודים הוא אורך המסלול הקצר ביותר המחבר ביניהם). בהינתן גרף כנ"ל $G=(V,E)$, כתבו אלגוריתם המחזיר מספר $A(G)$ כך ש-$A(G)$ קטן או שווה לקוטר וגדול או שווה ממחצית הקוטר. זמן הריצה של האלגוריתם שלכם צריך להיות $O(|V|+|E|)$. הוכיחו את הנכונות וזמן הריצה של האלגוריתם שלכם.

**שאלה 4 (20 נקודות)**

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון קשיר. נזכר באלגוריתם DFS המקבל צומת $s$ ומריץ ממנה חיפוש לעומק:

```
DFS(s):
  For every v set Explored[v] to equal false
  Initialize S to be a stack with one element s
  While S is not empty
     Take a node u from S
     If Explored[u]=false then
        Set Explored[u]=true
        For each edge (u,v) incident to u
            Add v to the stack S
        Endfor
     Endif
  Endwhile
```

א. הוכיחו או הפריכו: **בכל שלב** באלגוריתם קיים מסלול פשוט (מסלול שכל קודקוד מופיע בו פעם אחת) המחבר את כל הקודקודים במחסנית ***S***.

ב. הוכיחו או הפריכו: **בכל שלב** באלגוריתם **אין קשת** המחברת בין קבוצת הצמתים שבשדה Explored שלהם מופיע true לצמתים שלא הוכנסו ל- $S$ עד אותו שלב.

**שאלה 5 (20 נקודות)**

הוכיחו: בכל גרף **מכוון** $G=(V,E)$ ניתן להסיר קבוצת קשתות $E'$ כך ש- $|E'|\le|E|/2$ ובנוסף $G'=(V,E\setminus E')$ חסר מעגלים מכוונים.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 12

**הקורס: 20417 - אלגוריתמים**

**חומר הלימוד למטלה**: פרק 4 בספר הלימוד

**מספר השאלות:** 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

**סמסטר:** 2014 **ב** **מועד אחרון להגשה:** 18.04.2014

| |
|---|
| **קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:**<br>• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס<br>• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה<br>**הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"** |

**שאלה 1 (20 נקודות)**

צביעה חוקית ב- $k$ צבעים של גרף לא מכוון $G=(V,E)$ היא פונקציה $c:V\rightarrow\{0,1,...,k-1\}$ המקיימת $c(u)\neq c(v)$ לכל קשת $(u,v)\in E$. במילים אחרות-מתאימים $k$ צבעים לקודקודים וקודקודים שכנים צבועים בצבעים שונים.

א. מהו המספר המינימלי של צבעים המאפשר לצבוע יער (גרף חסר מעגלים) צביעה חוקית?

ב. מהו המספר המינימלי של צבעים המאפשר לצבוע מעגל בן $n$ קודקודים צביעה חוקית?

ג. תהי $d$ הדרגה המקסימלית של קודקוד כלשהו ב- $G$. הציעו אלגוריתם חמדן הצובע את $G$ ב$d+1$ צבעים בזמן פולינומיאלי. נתחו את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שלכם.

ד. לכל $n$ הראו כי קיים גרף **דו צדדי** על $n$ קודקודים עבורו האלגוריתם החמדן משתמש ב- $\Omega(n)$ צבעים לצביעת הגרף.

**שאלה 2 (20 נקודות)**

נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$, עם משקלים אי שליליים על הקשתות. יהי $T=(V,F)$ עץ פורש של $G$ המקיים את התכונה הבאה: לכל קשת $e\in E$ כך ש- $e\notin T$ קיים מעגל ב- $G$ המכיל את $e$ ובו ל- $e$ משקל מקסימלי.

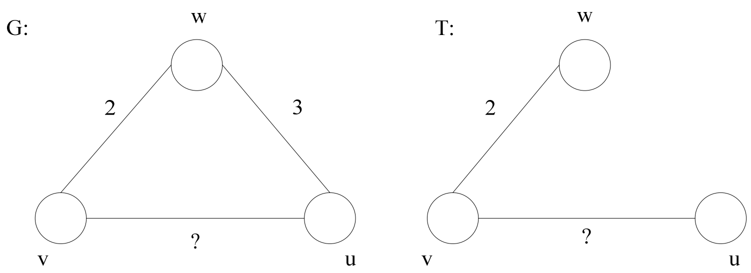
א. הוכיחו כי אם משקלי הקשתות ב- $G$ שונים זה מזה אז בהכרח $T$ הוא עץ פורש מינימלי.

ב. הראו כי ללא התנאי המובא בסעיף א' יתכן כי $T$ אינו עץ פורש מינימלי.

**שאלה 3 (20 נקודות)**

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל כקלט גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$ עם פונקצית משקל $w:E\rightarrow R_{+}$ ועץ פורש $T=(V,E')$ של $G$, כך שמשקלה של אחת הקשתות $e\in E'$ מוסתר, ומחשב את טווח הערכים האפשרי של $w(e)$ כך ש-$T$ נשאר עץ פורש מינימלי.

למשל, עבור הקלט הבא:




טווח המשקלים האפשרי של הקשת $e=(u, v)$ הוא $[0, 3]$. אם משקלה של $e$ יעלה על 3, העץ $T$ כבר לא יהיה מינימלי.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

**שאלה 4 (20 נקודות)**

פתרו את שאלה 4.9 מספר הלימוד.

**שאלה 5 (20 נקודות)**

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ושלם חיובי $k$, כתבו אלגוריתם יעיל הבודק האם קיים תת גרף של $G$, $H=(U,F)$ כך שלכל צומת ב- $U$ יש לפחות $k$ שכנים ב- $U$. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 13

**הקורס: 20417 - אלגוריתמים**

**חומר הלימוד למטלה**: פרקים 4 ו-5 בספר הלימוד.

**מספר השאלות:** 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

**סמסטר:** 2014 **ב** **מועד אחרון להגשה:** 23.05.2014

**קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:**

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

**הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"**

**שאלה 1 (20 נקודות)**

בהנתן גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$ ושני צמתים $u,v\in V$, כתבו אלגוריתם פולינומיאלי המחשב את מספר המסלולים הקצרים ביותר בין $u$-ל-$v$ ב-$G$. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם ונתחו את סיבוכיותו.

**שאלה 2 (20 נקודות)**

נתונים $n$ מספרים ממשיים שונים זה מזה $r_1,...,r_n$. כתבו אלגוריתם יעיל המחזיר את מקדמי הפולינום $P(x)$ שדרגתו $n$ לכל היותר המקיים $P(r_1)=P(r_2)=...=P(r_n)=0$. זמן הריצה של האלגוריתם שלכם צריך להיות $O(n\log^2 n)$. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם.

**שאלה 3 (20 נקודות)**

א. חשבו את **סכום** כל שורשי היחידה מסדר $n$.

ב. חשב את **מכפלת** כל שורשי היחידה מסדר $n$. הפרידו בין $n$ זוגי לאי זוגי.

**שאלה 4 (20 נקודות)**

**איבר רוב** במערך של מספרים שלמים $A[1,...,n]$ הוא מספר שמופיע **לפחות** $n/2$ פעמים ב- $A$ (אנו מניחים כי מספר האיברים במערך הוא זוגי). כתבו אלגוריתם הפרד ומשול המוצא איבר רוב במערך שזמן ריצתו $O(n)$ אם הוא קיים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

**שאלה 5 (20 נקודות)**

פתרו את שאלה 5.5 בספר הלימוד.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 14

**הקורס: 20417 - אלגוריתמים**

**חומר הלימוד למטלה**: מדריך הלמידה, פרקים ד', ה'

**מספר השאלות:** 5

**משקל המטלה:** 6 נקודות

**סמסטר:** 2014 ב

**מועד אחרון להגשה:** 06.06.2014

| |
|---|
| **קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:**<br>• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס<br>• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה<br>**הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"** |

**שאלה 1 (25 נקודות)**

בהנתן סדרה של מספרים ממשיים $x_1,...,x_n$ כתבו אלגוריתם המוצא תת-סדרה עולה ארוכה ביותר של הסדרה, $x_{i_1},...,x_{i_k}$. כלומר $i_1<...<i_k$, $x_{i_1}<...<x_{i_k}$ וכל תת סדרה באורך גדול מ- $k$ של הסדרה איננה מונוטונית עולה. זמן הריצה של האלגוריתם שלכם צריך להיות $O(n\log n)$. הוכיחו נכונות וסיבוכיות. הדרכה: התחילו בלמצוא לכל $l$ תת סדרה עולה ארוכה ביותר באורך $l$ (אם היא קיימת) שהאיבר האחרון שלה **מינימלי** בגודלו מבין כל תת הסדרות העולות באורך $l$.

**שאלה 2 (20 נקודות)**

בהנתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ברצוננו לבדוק האם ניתן לחלק את קודקודי הגרף לשתי קבוצות זרות של קודקודים $A$ ו- $B$, כך שמתקיים:

i) $|A|=|B|=|V|/2$

ii) **לא קיימת קשת בגרף שקצה אחד שלה מצוי ב- $A$ והשני ב- $B$.**

הציעו אלגוריתם פולינומיאלי הפותר את הבעיה, כלומר מחזיר "כן" אם קיימת חלוקה כנ"ל ו"לא" אחרת.

**שאלה 3 (25 נקודות)**

בהנתן עץ בינארי ה**מאזן** של קודקוד $v$ הוא הערך המוחלט של ההפרש בין שני תתי העצים המושרשים בשני בניו של - $v$ (עבור עלים המאזן הוא אפס). בהנתן עץ בינארי על $n$ צמתים כתבו אלגוריתם המוצא את המאזן של **כל הצמתים בעץ**. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

**שאלה 4 (25 נקודות)**

נתבונן בגרסה הבאה של בעיית תרמיל הגב. נתונים $n$ פריטים, כאשר לפריט ה- $i$ משקל $w_i$ וערך $v_i$ (כל המשקלים והערכים הם מספרים שלמים חיוביים). כמו כן נתון חסם $W$ שלם חיובי. מטרתנו לבחור קבוצת פריטים שסכום הערכים שלה הוא מקסימלי, כאשר כל פריט יכול **להבחר מספר בלתי מוגבל של פעמים**, תחת ההגבלה שסכום משקלי הפריטים הנבחרים הוא לכל היותר $W$. שימו לב: בבעיית תרמיל הגב הנזכרת בספר מותר לבחור כל פריט **פעם אחת** לכל היותר.

כתבו אלגוריתם תכנון דינמי הפותר את הבעיה בזמן $O(nW)$. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

**שאלה 5 (25 נקודות)**

פתרו את שאלה 6.13 בספר הלימוד.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 15

**הקורס: 20417 - אלגוריתמים**

**חומר הלימוד למטלה**: מדריך הלמידה, פרקים ד', ה'

**מספר השאלות:** 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

**סמסטר:** 2014 ב **מועד אחרון להגשה:** 20.06.2014

**קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:**

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

**הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"**

**שאלה 1 (20 נקודות)**

**הגדרה:** בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, **כיסוי בצמתים** (vertex cover) של $G$ הוא קבוצת צמתים $U \subseteq V$ כך שלכל קשת $(u, v) \in E$ מתקיים $u \in U$ או $v \in U$ (או שניהם).

בהינתן גרף לא מכוון דו-צדדי $G = (V, E)$ (כלומר, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, ואם $(u, v) \in E$ אז $u \in V_1$ ו-$v \in V_2$ או $u \in V_2$ ו-$v \in V_1$) נבנה ממנו רשת זרימה (מכוונת) $G' = (V', E')$ באופן הבא:

$V' = V_1 \cup V_2 \cup \{s, t\}$

$E' = \{(s, u) \mid u \in V_1\} \cup \{(v, t) \mid v \in V_2\} \cup \{(u, v) \mid (u, v) \in E, u \in V_1, v \in V_2\}$

קיבול הקשתות היוצאות מ-$s$ והקשתות הנכנסות ל-$t$ הוא 1, וקיבול שאר הקשתות הוא אינסופי.

יהי $(S, T)$ חתך מינימלי ברשת שהוגדרה לעיל. יהיו $X = S \cap V_2$ ו-$Y = T \cap V_1$.

א. הראו שהקבוצה $X \cup Y$ היא כיסוי בצמתים של $G$.

ב. הראו שהקבוצה $X \cup Y$ היא כיסוי בצמתים **מינימלי** של $G$ (כלומר, בכל כיסוי בצמתים אחר של $G$ יש לפחות אותו מספר צמתים כמו ב-$X \cup Y$).

**שאלה 2 (20 נקודות)**

תהי $G = (V, E)$ רשת זרימה עם מקור $s$ ובור $t$.

יהיו $U1, U2 \subseteq V$ שתי קבוצות צמתים זרות.

כתבו אלגוריתם המחשב את מספר הקשתות המינימלי שיש להוריד מהגרף כך שלא יהיה שום מסלול המחבר צומת מ-$U1$ עם צומת מ-$U2$.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

**שאלה 3 (20 נקודות)**

פתרו את שאלה 23 בפרק 7 בספר הלימוד.

**שאלה 4 (20 נקודות)**

**הגדרה:** בהינתן רשת זרימה $G=(V,E)$ עם מקור $s$, בור $t$, ופונקציית קיבול $c$:

- צומת $v\in V$ הוא **במעלה הזרם** אם עבור כל חתך מינימלי $(S, T)$ מתקיים $v\in S$.
- צומת $v\in V$ הוא **במורד הזרם** אם עבור כל חתך מינימלי $(S, T)$ מתקיים $v\in T$.
- צומת $v\in V$ הוא **מרכזי** אם הוא אינו במעלה הזרם ואינו במורד הזרם.

כתבו אלגוריתם המקבל כקלט רשת זרימה $G=(V,E)$ עם מקור $s$, בור $t$, ופונקציית קיבול $c$ עם ערכי קיבול שלמים, ומסווג את כל צמתי הרשת לפי ההגדרה שלעיל. כלומר, האלגוריתם קובע אילו צמתים הם במעלה הזרם, אילו הם במורד הזרם ואילו הם מרכזיים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.

**שאלה 5 (20 נקודות)**

נתונה רשת זרימה עם זרימת מקסימום ברשת. כתבו אלגוריתם יעיל ככל האפשר הבודק האם קיימת קשת שהגדלת קיבולה במספר חיובי כלשהו תגדיל את ערכה של זרימת מקסימום ברשת המתקבלת. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.