פתרונות לממ"ן 12 - 2019ב - 20425

1. א. נראה כי לכל $y > 0$ פונקציית הצפיפות חיובית, כלומר שמתקיים $f_Y(y) > 0$:

$$f_Y(y) = 1.25e^{-y} - 0.5e^{-2y} = e^{-y}(1.25 - 0.5e^{-y})$$

נתבונן בביטוי האחרון בשוויון שלעיל. הפונקציה $1.25 - 0.5e^{-y}$ היא פונקציה עולה של y בתחום $y > 0$, ומקבלת בתחום זה ערכים שגדולים מ- 0.75; כמו כן, מתקיים $e^{-y} > 0$. לכן, $f_Y(y) > 0$ לכל $y > 0$.

בנוסף :

$$\int_0^\infty f_Y(y)\,dy = 1.25\underbrace{\int_0^\infty e^{-y}\,dy}_{=1} - 0.25\underbrace{\int_0^\infty 2e^{-2y}\,dy}_{=1} = 1.25 - 0.25 = 1$$

[כי $\lambda e^{-\lambda y}$ פונקציות צפיפות של מ"מ מעריכי]

ב. $$E[Y] = \int_0^\infty y\,f_Y(y)\,dy = \int_0^\infty \left(1.25ye^{-y} - 0.25\cdot 2ye^{-2y}\right)dy = 1.25\int_0^\infty ye^{-y}dy - 0.25\int_0^\infty 2ye^{-2y}dy$$

$$= 1.25\cdot 1 - 0.25\cdot 0.5 = 1.125$$

[כי $1/\lambda$ תוחלת של מ"מ מעריכי]

ג. תחילה, נשים לב כי לכל X שהוא משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ מתקיים :

$$E[X^2] = \text{Var}(X) + (E[X])^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2}$$

לפיכך :

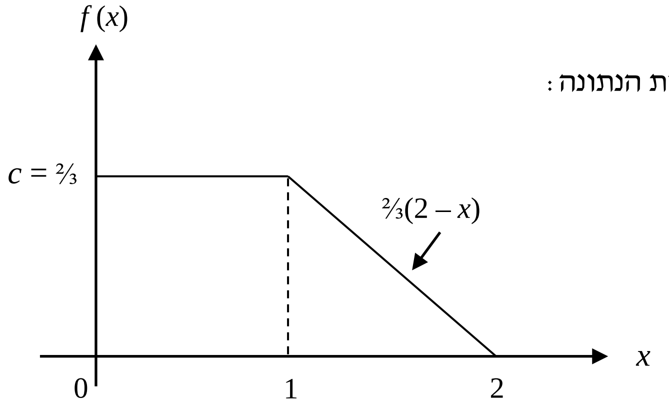
$$E[Y^2] = \int_0^\infty y^2 f_Y(y)\,dy = \int_0^\infty \left(1.25y^2e^{-y} - 0.25\cdot 2y^2e^{-2y}\right)dy$$

$$= 1.25\int_0^\infty y^2e^{-y}dy - 0.25\int_0^\infty 2y^2e^{-2y}dy = 1.25\cdot 2 - 0.25\cdot 0.5 = 2.375$$

ומכאן :

$$\text{Var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 2.375 - 1.125^2 = 1.109375$$

2. א. נצייר תחילה את פונקציית הצפיפות הנתונה :



השטח הכלוא מתחת לעקומת הצפיפות שווה מצד אחד ל-1 ומצד שני ל- $1.5c$. לכן, $c = ⅔$.

ב. $$E[X] = \int_0^1 \tfrac{2}{3}x\,dx + \int_1^2 \tfrac{2}{3}x(2-x)\,dx = \tfrac{2}{6}x^2\Big|_0^1 + \left[\tfrac{4}{6}x^2 - \tfrac{2}{9}x^3\right]_1^2 = \tfrac{2}{6} + \tfrac{16}{6} - \tfrac{16}{9} - \tfrac{4}{6} + \tfrac{2}{9} = \tfrac{7}{9}$$

ג. את פונקציית ההתפלגות המצטברת נקבל בעזרת חישובי שטחים מתחת לעקומת הצפיפות.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \tfrac{2}{3}x & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 - \tfrac{1}{3}(2-x)^2 & , \quad 1 \le x \le 2 \\ 1 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

ד. הערכים האפשריים של המשתנה המקרי Y הם בין 0 ל- 4. לכל $0 \le y \le 4$ מתקיים:

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\} = P\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\} = P\{0 \le X \le \sqrt{y}\} = F_X(\sqrt{y})$$

לכן:
$$F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) = \begin{cases} 0 & , \quad y < 0 \\ \frac{2}{3}\sqrt{y} & , \quad 0 \le y \le 1 \\ 1-\frac{1}{3}(2-\sqrt{y})^2 & , \quad 1 \le y \le 4 \\ 1 & , \quad y > 4 \end{cases}$$

3. א. נסמן ב- A_i את המאורע שרכיב i תקין לאחר שנתיים, לכל $i = 1,2,3,4,5$. נחשב את ההסתברות שכל אחד מהרכיבים תקין לאחר שנתיים מיום הפעלת המערכת:

$$P(A_1) = P(A_2) = P\{X_1 \ge 2\} = 1-\Phi(\tfrac{2-2.5}{1}) = 1-\Phi(-0.5) = \Phi(0.5) = 0.6915$$

$$P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = P\{X_3 \ge 2\} = 0.5$$

ולפי נתוני השאלה, חמשת המאורעות המוגדרים לעיל בלתי-תלויים זה בזה.

כעת, נחשב את ההסתברות שהמערכת **אינה פועלת** שנתיים מיום הפעלתה:

$$P((A_1^C \cup A_2^C) \cap (A_3^C \cup (A_4^C \cap A_5^C))) = P(A_1^C \cup A_2^C)P(A_3^C \cup (A_4^C \cap A_5^C))$$ [הרכיבים בלתי-תלויים]

$$= \left[P(A_1^C) + P(A_2^C) - P(A_1^C \cap A_2^C)\right]\left[P(A_3^C) + P(A_4^C \cap A_5^C) - P(A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C)\right]$$

$$= \left[2 \cdot 0.3085 - 0.3085^2\right]\left[0.5 + 0.5^2 - 0.5^3\right] = 0.5218 \cdot 0.625 = 0.326$$

ומכאן, שהמערכת **פועלת** לאחר שנתיים בהסתברות $1 - 0.326 = 0.674$.

ב. נסמן ב- B את המאורע שהמערכת עדיין פועלת לאחר שנתיים.

$$P(A_4 \mid B) = \frac{P(A_4 \cap (A_3 \cup (A_1 \cap A_2)))}{P(B)} = \frac{P(A_4)[P(A_3) + P(A_1 \cap A_2) - P(A_3 \cap A_1 \cap A_2)]}{P(B)}$$

$$= \frac{0.5 \cdot [0.5 + 0.6915^2 - 0.5 \cdot 0.6915^2]}{0.674} = \frac{0.3695}{0.674} = 0.5483$$

4. נסמן את האורך (בס"מ) של נר מקרי ב- X . לפי הנתון $X \sim N(15,2^2)$.

א. עלות הייצור של נר מקרי היא $0.1X + 0.1$. לפיכך, תוחלת העלות היא $0.1 \cdot 15 + 0.1 = 1.6$ ואילו שונות העלות היא $0.1^2 \cdot 4 = 0.04$.

ב. $$P\{X > 17.5\} = P\{Z > \tfrac{17.5-15}{2}\} = P\{Z > 1.25\} = 1-\underbrace{\Phi(1.25)}_{=0.8944} = 0.1056$$

הסבר:

z	0.00	$\cdots$	0.05	$\cdots$
$\vdots$				
1.2			$\Phi(1.25) = \mathbf{0.8944}$	
$\vdots$				

מספר הנרות בחבילה שאורכם גדול מ- 17.5 ס״מ הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 12 ו- 0.1056.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא : $\binom{12}{4}\cdot 0.1056^4\cdot 0.8944^8 = 0.0252$

ג. נפתור את המשוואה : $P\{X > a\} = 1-\Phi\left(\frac{a-15}{2}\right) = 0.89$

או לחלופין את המשוואה : $\Phi\left(\frac{a-15}{2}\right) = 0.11$

מטבלה 5.1 במדריך הלמידה נקבל כי : $1-\Phi\left(\frac{a-15}{2}\right) = \Phi\left(-\frac{a-15}{2}\right) = \Phi\left(\frac{15-a}{2}\right) = 0.89 = \Phi(1.2263)$

הסברים לחישוב – מטבלה 5.1, עמוד 112 במדריך :

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(1.22) = 0.8888 \\ \Phi(1.23) = 0.8907\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}0.8907 - 0.8888 = \underline{\underline{0.0019}} \\ 0.89 - 0.8888 = \underline{0.0012} \\ 1.23 - 1.22 = 0.01\end{array}\right.$$

$$\Phi(1.22 + 0.01 \cdot \underline{0.0012}/\underline{\underline{0.0019}}) = \Phi(1.2263) = 0.89 \quad \Leftarrow$$

לפיכך : $\frac{15-a}{2} = 1.2263$

ומכאן כי : $a = 15 - 1.2263 \cdot 2 = 12.5474$ ס״מ

ד. נסמן כעת ב- Y את האורך (בס״מ) של נר מקרי. מתקיים $Y \sim N(15,\sigma^2)$.

כעת, ההסתברות שנר מקרי יהיה קצר מ- 11 ס״מ היא : $P\{X < 11\} = P\{Z < \frac{11-15}{\sigma}\} = \Phi(-\frac{4}{\sigma})$

הואיל ואין תלות בין אורכי נרות שונים, וכל נר קצר מ- 11 ס״מ בהסתברות $\Phi(-\frac{4}{\sigma})$, ההסתברות שבחבילה לא יהיה אף נר שקצר מ- 11 ס״מ היא : $[1-\Phi(-\frac{4}{\sigma})]^{12} = [\Phi(\frac{4}{\sigma})]^{12}$

והסתברות המאורע המשלים שיהיה בחבילה לפחות נר אחד שקצר מ- 11 ס״מ היא : $1-[\Phi(\frac{4}{\sigma})]^{12}$

ומכאן שעלינו לפתור את המשוואה : $1-[\Phi(\frac{4}{\sigma})]^{12} < 0.1$

או לחלופין את המשוואה : $\Phi(\frac{4}{\sigma}) > \sqrt[12]{0.9} = 0.9913 = \Phi(2.38)$

ולכן מקבלים : $\frac{4}{\sigma} > \Phi(2.38) \quad \Rightarrow \quad \sigma < 1.681$

הסבר:

z	0.00	···	0.08	0.09
⋮				
2.3			$\Phi(2.38) =$ **0.9913**	
⋮				