פתרון שאלה 1 בממ"ן 15

א' לפי המוסבר בפרק 8 בספר הלימוד, גובהו של כל עץ החלטה הממיין n איברים הוא לפחות $\lg_2(n!)$. נציב $n=5$ ונקבל $h \geq \lg_2(5!) = \lg_2(120) \cong 6.9$.

לפיכך, לכל אלגוריתם מיון מבוסס השוואות, אורכו של המסלול הארוך ביותר בעץ ההחלטה הוא 7. כלומר, במקרה הגרוע תידרשנה לפחות 7 השוואות כדי למיין מערך בעל 5 איברים.

ב' נניח כי איברי המערך הם a, b, c, d, e.

נשווה את שני זוגות האיברים a, b ו- c, d.

נניח בה"כ כי התוצאות שהתקבלו הן a > b, c > d. נשווה את שני האיברים הגדולים מבין הארבעה כלומר a, c ונניח בה"כ כי a > c.

לפיכך קיבלנו בסך הכל כי a > c > d וגם a > b, ושלב זה הצריך **3 השוואות**.

למעשה, קיבלנו מערך ממוין בן שלושה איברים, a, c, d וכעת נותר לנו למצוא את מקומם של האיברים e ו b במערך זה.

נעבור כעת לאיבר החמישי – e. נמצא את מיקומו של e במערך a, c, d :

ראשית, נשווה את e עם c (האיבר האמצעי) :

- אם e > c, נשווה את e עם a.
- אם e < c, נשווה את e עם d.

שלב זה עלה לנו ב-**2 השוואות** נוספות, ובסיומו קיבלנו מערך ממוין של 4 איברים :

a ,c, d, e (לא בהכרח בסדר הזה).

במקרה הגרוע ביותר, a הוא עדיין האיבר הגדול מבין הארבעה.

אבל, מכיוון שידוע כי a > b (שלב I), נצטרך לחפש את מקומו של b במערך ממוין בן 3 איברים בלבד – c, d, e.

בדומה למוסבר קודם לכן, שלב זה ייקח **2 השוואות** אף הוא.

אם נקבל כי e > a, אזי נצטרך לחפש את מיקומו של b במערך בן 2 איברים בלבד – c, d וייתכן שבמקרה זה נוכל להסתפק בהשוואה אחת בלבד (ובכל מקרה, לא יותר מ-2 השוואות). לפיכך, האלגוריתם יבצע 7 השוואות לכל היותר.

ג' נראה כי כל המיונים שנלמדו בקורס דורשים יותר מ-7 השוואות במקרה הגרוע ביותר :

מיון-הכנסה:

המקרה הגרוע ביותר עבור מיון-הכנסה הוא מערך הממוין בסדר הפוך.

במקרה זה יש במערך 10 היפוכים, כי כל זוג אינדקסים במערך מהווה היפוך (ראו את הגדרת המושג "היפוכים" בבעיה 2-4 בספר). זהו גם מספר ההשוואות שיבצע האלגוריתם.

מיון-מיזוג:

נתבונן בפעולת האלגוריתם על המערך :

1	2	4	3	5

ראשית, האלגוריתם יפצל את המערך לשני תת-מערכים (1,2,4) ו- (3,5).

התת-מערך (1,2,4) יתפצל לשני התת-מערכים (1,2) ו- (4).

התת-מערך (1,2) יתפצל לשני תת-מערכים בגודל 1 והמיזוג שלהם ידרוש פעולת השוואה אחת.

לאחר מכן ימזג האלגוריתם את (1,2) עם (4). סדר האיברים לא ישתנה, אך לצורך המיזוג יידרשו 2 השוואות.

התת-מערך (3,5) יפוצל לשני תת-מערכים בגודל 1 והמיזוג שלהם ידרוש פעולת השוואה אחת.

לבסוף, ימזג האלגוריתם את (1,2,4) עם (3,5).

לצורך כך יתבצעו 4 השוואות : 3 יושווה עם 1,2,4 ו-5 יושווה עם 4.

לפיכך, יתבצעו בסך הכל 8 השוואות (4 +1 + 2 +1 =).

מיון-מהיר:

המקרה הגרוע ביותר עבור מיון-מהיר הוא, למשל, מערך הממוין בסדר עולה :

1	2	3	4	5

במקרה זה, שגרת החלוקה תחלק בכל שלב את המערך לאזור שמאלי המכיל $n-1$ איברים ולאזור ימני המכיל 0 איברים.

בשלב הראשון יושוו כל האיברים לאיבר הציר ובסך הכל יתבצעו 4 השוואות.

בשלב הבא יתבצעו 3 השוואות, וכך הלאה.

בסה״כ יתבצעו 10 = 1 + 2 + 3 + 4 השוואות.

מיון-ערמה:

נשים לב שבכל קריאה לשגרה MAX-Heapify, מתבצעות 2 השוואות בין איברי המערך:

1. A[l] > A[i] – בדיקה האם הבן השמאלי גדול ממש מהאב
2. A[r] > A[largest] – בדיקה האם הבן הימני גדול יותר מהאב / הבן השמאלי

בבניית ערמה בת 5 איברים תידרשנה לפחות 2 קריאות ל- MAX-Heapify. כלומר, לפחות 4 השוואות. בביצוע המיון עצמו תידרשנה עוד 3 קריאות ולפחות 6 השוואות.

לכן, גם במקרה הטוב ביותר מיון-ערמה יבצע 10 השוואות.

לפיכך, כל האלגוריתמים שנלמדו בכיתה מבצעים במקרה הגרוע יותר מאשר 7 השוואות. עובדה זו אינה מפתיעה, משום שאלגוריתם הפותר בעיה ספציפית (במקרה שלנו, מיון מערך בעל 5 איברים) יהיה בדרך כלל יעיל יותר מאשר אלגוריתם כללי.