פתרונות לממ"ן 12 בקורס "אלגוריתמים", סמסטר ב'2006

שימו לב: לעיתים חסרים פרטים בפתרון ואתם מתבקשים לוודא שהינכם יודעים להשלים את הפרטים החסרים. בכל מקרה כזה, הדבר מצויין במפורש, ואין לראות בפתרון הנתון תשובה מלאה.

שאלה 1

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר לא מכוון המייצג מפה: הצמתים הם נקודות על המפה, הקשתות הן שבילים המחברים בין הנקודות, ולכל קשת e משקל אי-שלילי $w(e)\geq 0$ המציין את רמת הקושי של השביל המתאים.

א. יהי α מספר חיובי נתון המייצג את סף הקושי. כלומר, קשת e תיקרא **קשה** אם $w(e)\geq\alpha$. כתבו אלגוריתם שעלותו $O(|V|+|E|)$ המוצא עץ פורש של G שמספר הקשתות הקשות בו הוא קטן ככל האפשר. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

ב. נניח כעת שמוגדרות k רמות קושי שונות $\alpha_1<\ldots<\alpha_k$. למשל, עבור אנשים קשישים שבילים בעלי רמת קושי של לפחות α_1 נחשבים קשים, עבור ילדים קטנים מאוד שבילים בעלי רמת קושי של לפחות α_2 נחשבים קשים, ואילו עבור טיילים מנוסים רק שבילים בעלי רמת קושי של לפחות α_k נחשבים קשים. קשת e תיקרא **קשה-**α_i אם $w(e)\geq\alpha_i$ ($1\leq i\leq k$).

היינו רוצים למצוא עץ פורש של G שעבור כל $1\leq i\leq k$ מספר הקשתות ה-α_i-קשות בו הוא קטן ככל האפשר. הראו כיצד ניתן למצוא עץ כזה בזמן $O(|E|\lg|E|)$. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

תשובה

א. אפשר לפתור את הבעיה ע"י רדוקציה לבעיית עץ פורש מינימלי. נגדיר פונקציה $w': E\rightarrow R$:

$$w'(e)=\begin{cases}0 & w(e)<\alpha\\ 1 & \text{אחרת}\end{cases}$$

משקלו של עץ פורש ע"פ הפונקציה w' שווה למספר הקשתות בעץ שרמת הקושי שלהן היא לפחות α. לכן, עץ פורש מינימלי ע"פ w' הוא כזה שבו מספר הקשתות הקשות הוא מינימלי.

אם כך, בסך הכל צריך למצוא עץ פורש מינימלי ע"פ הפונקציה w'. בגלל שהיא פונקציה בעלת שני ערכים אפשר להפעיל את האלגוריתם של פרים ובמקרה זה עלותו תהיה ליניארית. במקום להחזיק תור עדיפויות של הצמתים ע"פ מרחקם מהעץ הנבנה מחזיקים רשימה אחת של הצמתים המחוברים לעץ בקשת שמשקלה 0 ורשימה אחת של הצמתים המחוברים לעץ בקשת שמשקלה 1. לוקחים קודם כל צומת מהרשימה הראשונה ורק אם היא ריקה לוקחים מהרשימה השנייה. לכן במקרה זה עלות ביצוע *extract-min* היא קבועה.

ב. נראה שהאלגוריתם של קרוסקל למציאת עץ פורש מינימלי נותן עץ כנדרש:

נקרא לקשת e i-קשה אם $w(e)\geq\alpha_i$. אחרת היא תיקרא i- קלה. לכל i נגדיר פונקציית משקל $w^i: E\rightarrow R$:

$$w^i(e)=\begin{cases}0 & w(e)<\alpha_i\\ 1 & w(e)\geq\alpha_i\end{cases}$$

מיון הקשתות ע"פ $w(e)$ נותן גם מיון חוקי ע"פ $w^i(e)$ לכל i: אם $w(e_1)<w(e_2)$ אז או שמשקל שתיהן קטן מ-α_i ואז $w^i(e_1)=w^i(e_2)=0$, או שמשקל שתיהן גדול מ-α_i ואז $w^i(e_1)=w^i(e_2)=1$, או ש- $w(e_1)<\alpha_i$ ו-$w(e_2)\geq\alpha_i$ ואז $w^i(e_1)=0<1=w^i(e_2)$. לכן, ריצה של קרוסקל ע"פ $w(e)$ היא גם ריצה תקפה ע"פ $w^i(e)$ לכל i, ולכן נותנת עץ פורש מינימלי לפי כל $w^i(e)$. הסיבוכיות היא כמובן סיבוכיות האלגוריתם של קרוסקל, והיא לכן הסיבוכיות הנדרשת.

שאלה 2

בהינתן עץ פורש T של גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ברצוננו לבנות טבלת קישור שהיא מטריצה A, שבה לכל צומת v ב-V מתאימה שורה אחת ומתאים טור אחד, והכניסה $A[v, u]$ מכילה את השכן של v במסלול מ-v ל-u ב-T. כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו הבונה את הטבלה. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

תשובה

מאחר שהאלגוריתם צריך למלא את המטריצה, ברור שסיבוכיותו היא לפחות $O(|V|^2)$. משום כך, קל למדי לבצע את הנדרש. נפתור זאת ע״י רדוקציה לבעיית מסלולים קצרים בגרף לא מכוון חסר משקלות. נסתכל על הטור המתאים לצומת u: הכניסה $A[v, u]$ מכילה את השכן של v במסלול מ-v ל-u ב-T, או את הצומת הקודם ל-v במסלול מ-u ל-v ב-T. אם כך, ניתן למצוא את המסלולים בעץ מ-u לכל צמתי הגרף, ועבור כל צומת v להציב בכניסה $A[v, u]$ את אביו של v במסלול. מאחר שבין כל שני צמתים יש בעץ מסלול יחיד, הרי אפשר למצוא אותו ע״י מציאת מסלול קצר ביותר. אם כך, בעזרת הפעלה יחידה של אלגוריתם למציאת מסלולים קצרים ביותר בגרף לא מכוון חסר משקלות (למשל, BFS) ניתן למלא טור אחד במטריצה, ובעזרת $|V|$ הפעלות ניתן למלא את כל המטריצה. עלות הפעלת BFS על עץ היא $O(|V|)$, ולכן הסיבוכיות הכוללת היא $O(|V|^2)$.

שאלה 3

יהי $T = (V, E)$ עץ ויהיו $T_1, T_2, \ldots T_k$ תת-עצים של T, כלומר: לכל $1 \le i \le k$ $T_i = (V_i, E_i)$ כך ש-T_i הוא עץ, $V_i \subseteq V$ ו-$E_i \subseteq E \cap (V_i \times V_i)$.

ידוע שלכל שני עצים T_i, T_j כך ש-$i \ne j$ ו-$1 \le i, j \le k$ קיים צומת משותף. הוכיחו כי קיים צומת $v \in V$ ששייך לכל T_i ($1 \le i \le k$).

תשובה

ההוכחה היא באינדוקציה על k.

בסיס (k=2): ברור מהנתון.

נניח את נכונות הטענה עבור k–1 ונוכיח עבור k(>2). יהיו $T_1, T_2, \ldots T_k$ עצים, כמתואר בשאלה. ידוע שיש צומת v שמשותף ל-$T_1, \ldots T_{k-1}$ (מהנחת האינדוקציה). ידוע שיש צומת u שמשותף ל-$T_2, \ldots T_k$ (שוב, מהנחת האינדוקציה). ידוע שיש צומת w שמשותף ל-T_1 ו-T_k (מהנתון).

יהיו p_{vw}, p_{uw} ו-p_{vu} המסלולים הפשוטים שמחברים ב-T את זוגות הצמתים המתאימים. נשים לב שלכל $1 \le i \le k$ T_i מכיל שניים מהצמתים u, v ו-w (ב-T_2 עד T_{k-1} אלו v ו-u, ב-T_1 אלו v ו-w, וב-T_k אלו u ו-w. מאחר שכל T_i הוא עץ, יש בו מסלול יחיד שמחבר את שני הצמתים האלו, ומאחר שכל T_i מוכל ב-T זהו אותו מסלול שמחבר אותם ב-T. לכן, כל T_i מכיל אחד מבין המסלולים p_{vw}, p_{uw} ו-p_{vu}.

נראה כעת כי $p_{vu} \cap p_{uw} \cap p_{vw} \ne \emptyset$. יהי x הצומת האחרון המשותף ל-p_{uv} ו-p_{uw} (לפחות u כזה) ויהיו p_{xv} ו-p_{xw} שאריות המסלול בהתאמה (ייתכן שאחת מהן מסלול בן צומת אחת, v או w, אבל לא שתיהן כי $v \ne w$). המסלול $p_{wx}p_{xv}$ (p_{wx} הוא המסלול p_{xw}, בסדר הפוך) הוא מסלול ב-T בין w ל-v ומאחר ש-T עץ המסלול הזה בהכרח שווה ל-p_{wv} (p_{wv} הוא המסלול p_{vw}, בסדר הפוך). לכן $x \in p_{wv}$, $x \in p_{vw}$, ובהכרח $x \in p_{vw} \cap p_{uw} \cap p_{vu}$. מאחר שכל T_i מכיל אחד מבין המסלולים p_{vw}, p_{uw} ו-p_{vu} הרי שכל T_i מכיל את x.

שאלה 4

נתון גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ עם משקלות חיוביים לקשתות.

נתונה קשת $e\in E$. כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המוצא מבין העצים המכילים את הקשת e עץ פורש מינימלי (כלומר, עץ פורש המכיל את e ושמשקלו מינימלי ביחס לכל העצים הפורשים המכילים את e).

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סבוכיותו.

תשובה

נפתור ע״י רדוקציה לבעיית מציאת עץ פורש מינימלי.

נעדכן את w, פונקציית המשקל הנתונה, ע״י כך שנאפס את משקלה של הקשת e (ניתן כמובן לזכור את משקלה המקורי כך שנוכל לשחזרו לאחר בניית העץ). נקרא לפונקציה החדשה w'. עתה נריץ אחד מהאלגוריתמים למציאת עץ פורש מינימלי בגרף (אם אנו מריצים את Prim השורש צריך להיות אחד מקודקודי הקשת e). משמעות איפוס משקל הקשת הוא שבאלגוריתם של קרוסקל היא תופיע ראשונה בסדרת הקשתות הממויינות ובאלגוריתם של פרים קודקודיה יהיו הראשונים לצאת מהתור.

הסיבוכיות זהה לסיבוכיות האלגוריתמים הידועים.

<u>נכונות:</u> נוכיח שעץ פורש מינימלי של הגרף G עם פונקצית המשקל החדשה w' הוא עץ פורש מינימלי מבין העצים המכילים את e בגרף G עם פונקציית המשקל המקורית w.

כיוון שמדובר באותו הגרף, תת גרף הוא עץ פורש בגרף החדש אםם הוא עץ פורש בגרף המקורי. יהי T עץ פורש מינימלי של G עם הפונקציה w'. נניח בשלילה שאינו מכיל את הקשת e. אזי $T+\{e\}$ מכיל מעגל אשר e משתתפת בו. כיוון ש-e הקשת הכי קלה (ביחס לפונקציה w') וכל שאר הקשתות, משקלן גדול מ-0, נוכל לזרוק קשת במעגל עם משקל גדול מ-0, וקיבלנו עץ פורש, קל יותר מ-T, בסתירה למינימליות של T. לכן T מכיל את e. בכל עץ T' המכיל את e, $w(T')=w'(T')+w(e)$. עתה, נניח בשלילה שקיים עץ T' המכיל את e, ו- $w(T')<w(T)$. אז $w'(T')=w(T')-w(e)<w(T)-w(e)=w'(T)$, בסתירה למינימליות של T ביחס ל w'. לכן קיבלנו את הנדרש.

שאלה 5

נתאר רשת של כבישים ותחנות ע״י גרף לא מכוון, בו כל תחנה מיוצגת על-ידי צומת וכל כביש על-ידי קשת. כל כביש r מאופיין על-ידי אורכו len(r) ועל-ידי המשקל המקסימלי שהוא מסוגל לשאת max-weight(r). len ו-max-weight הן פונקציות לטווח המספרים החיוביים.

כתבו אלגוריתם המקבל כקלט רשת קשירה כנ״ל ומוצא תת-רשת קשירה אשר כוללת את כל תחנות הרשת המקורית, שסכום אורכי הכבישים שבה מינימלי ואילו סף המשקל שיכולה לשאת גבוה ככל האפשר. כלומר, הערך MIN{max weight(r)} הוא מקסימלי ביחס לכל תת רשת קשירה אחרת שסכום אורכי הכבישים שבה מינימלי.
r כביש ברשת

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

תשובה

נפתור ע״י רדוקציה לבעיית מציאת עץ פורש מינימלי. נגדיר פונקציית משקל חדשה $w(e)=(\text{len}(e), -\text{max-weight}(e))$, והסדר יהיה סדר מילוני, כלומר: $w(e_1)<w(e_2)$ אם ורק אם $\text{len}(e_1)<\text{len}(e_2)$ או $\text{len}(e_1)=\text{len}(e_2)$ וגם $-\text{max-weight}(e_1)<-\text{max-weight}(e_2)$. עתה נמצא בגרף עם פונקציית המשקל החדשה עץ פורש מינימלי. העלות היא כמו העלות של אלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי.

נכונות: ראשית נראה כי עץ פורש מינימלי על פי פונקציית המשקל החדשה, הוא בהכרח עץ פורש מינימלי תחת הפונקצייה len. ראשית, ברור כי הוא עץ פורש, כי הגרף הוא בעל אותו מבנה. נניח שקיים עץ פורש T' שמשקלו תחת

הפונקצייה len קטן ממשקל העץ T שמוצא האלגוריתם שלנו, תחת הפונקציה len. בהכרח נקבל שמשקלו של T' תחת פונקציית המשקל החדשה קטן יותר ממשקלו של T, בסתירה לנכונות האלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי שהשתמשנו בו כקופסה שחורה. נניח אם כן בשלילה, שקיים עץ פורש T', מינימלי תחת הפונקציה len, שסף המשקל שלו גבוה יותר מסף המשקל של העץ T שמוצא האלגוריתם שלנו. מאחר שגם T' וגם T הם עצים פורשים מינימליים תחת הפונקציה len, הרי משקלם תחת הפונקצייה len זהה, ולכן בהכרח סף המשקל של T' קטן או שווה לסף המשקל של T, אחרת זו שוב סתירה למינימליות של T תחת פונקציית המשקל החדשה, כלומר לנכונות האלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי, בו השתמשנו כקופסה שחורה.

נוכיח ביתר פרוט את הטענה האחרונה: כאמור, נניח בשלילה, שקיים עץ פורש T', מינימלי תחת הפונקציה len, שסף המשקל שלו גבוה יותר מסף המשקל של העץ T שמוצא האלגוריתם שלנו. תהא e "החוליה החלשה" ב-T (כלומר, הקשת ב-T שסף המשקל שלה הוא הנמוך ביותר). מכיוון שסף המשקל של T' גדול יותר מסף המשקל של T, אז $e \notin T'$.

הקשת e מגדירה חתך בגרף. תהא e' קשת מינימלית ב-T' החוצה את החתך. ברור ש- $\text{len}(e') = \text{len}(e)$, מכיוון שגם T' הוא עפ"מ תחת הפונקציה len.

כעת, מכיוון ש-T הוא עפ"מ תחת הפונקציה $(\text{len}(e), -\text{max-weight}(e))$ ו- $\text{len}(e)=\text{len}(e')$, אז מתקיים:

$-\text{max-weight}(e) \leq -\text{max-weight}(e')$; כלומר, $\text{max-weight}(e) \geq \text{max-weight}(e')$.

מצד שני, e היא החוליה החלשה ב-T ולכן $\text{max-weight}(e) \leq \text{max-weight}(e')$.

קבלנו ש- $\text{max-weight}(e) = \text{max-weight}(e')$, ולכן סף המשקל של T' אינו גבוה יותר מסף המשקל של T. סתירה.