[redacted] ממן 12 - קאי סולדנו

שאלה 1

(א) מספר האיברים בפיתוח שווה לפיזור 10 עצמים זהים ל-4 תאים ללא הגבלות,
ובלי חשיבות לסדר, לכן:

$$D(4,10)=\binom{4-1+10}{4-1}=\binom{13}{3}=\boxed{286}$$

מס' איברים בפיתוח

(ב) לפי שאלה 3.25 שבעמוד פד, המקדם של כל איבר מולטינומי הוא:

$$(a+b+c+d)^{10}=\sum_{0\le i,j,k,l\le n=10}\frac{10!}{i!\cdot j!\cdot k!\cdot l!}\cdot a^i\cdot b^j\cdot c^k\cdot d^l$$

כמובן ש $i+j+k+l=10$, כדי שהמקדם לא יתחלק ב-5, עלינו לחלק את 10! ב-5
שבביטוי 10!:

① לבחור $\binom{4}{1}$ איברים (a,b,c,d) שהחזקה תהיה 10 - $\frac{10!}{10!}$

② לבחור $\binom{4}{2}$ איברים שחזקת כל אחד מהם תהיה 5 - $\frac{10!}{5!5!}$

לכן מספר האיברים שהמקדם שלהם לא מתחלק ב-5 הוא $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}=4+6=\boxed{10}$

(ג) נשתמש בעיקרון ההכלה וההפרדה.

$|A_i|=\binom{4}{1}\cdot D(3,8)=4\cdot\frac{10!}{8!2!}=4\cdot 45=\boxed{180}$ - קבוצה של משתנה אחד

$|A_i\cap A_j|=\binom{4}{2}\cdot D(2,6)=6\cdot\frac{7!}{6!1!}=6\cdot 7=\boxed{42}$ - של 2 משתנים

$|A_i\cap A_j\cap A_k|=\binom{4}{3}\cdot D(1,4)=4\cdot 1=\boxed{4}$ - ושל 3 משתנים

לכן: $|U|-|A_i|+|A_i\cap A_j|-|A_i\cap A_j\cap A_k|=286-180+42-4=\boxed{144}$

מספר האיברים שלהם חזקות האותיות שונות מ-2 הוא 144.

שאלה 2

א

a_1

קבוצת המספרים בעלי ספרה אחת הוי קבוצת כל המספרים מ-1 עד 6. לכן $\boxed{a_1=6}$.

a_2

(א) הספרה הראשונה היא אחד, במקרה זה יש 5 אפשרויות לספרה השניה (הכל חוץ מ-1) סה"כ 5 אפשרויות

(ב) הספרה הראשונה היא 2, במקרה זה יש 5 אפשרויות לספרה השניה (הכל חוץ מ-2) סה"כ 5 אפשרויות

(ג) הספרה הראשונה היא כל אחת מן המספרים 3,4,5,6, ובמקרה זה אין כל הגבלה לכן כל המספרים מהווים אופציה, לכן $4\cdot 6=24 \Leftarrow a_2=5+5+24=34$

$\boxed{a_2=34}$

a_3

(א) הספרה הראשונה היא 1, צריך להשלים עוד 2 ספרות שמתאים להגדרות של a_2, מכיוון שהספרה הראשונה היא 1 ולכן הספרה השניה לא יכולה להיות 1, ולכן הסעיפים (ב),(ג) מ-a_2 מתאימים למקרה זה

$5+24=29$

(ב) הספרה הראשונה היא 2, דומה ל(א) האופציות (א),(ג) מ-a_2 מתאימות, לכן

$5+24=29$

(ג) הספרה הראשונה יכולה להיות כל אחת מהספרות 3,4,5,6 צריך להשלים עוד 2 ספרות, אין מגבלה על הספרה השניה ולכן מספר האפשרויות עבור 2 הספרות הנותרות הוא בדיוק מספר האפשרויות של a_2 אז׳ $4\cdot 34=136$

ולכן, $a_3=29+24+136=\boxed{194}$

b_1

עם המספר 1

לכן $\boxed{b_1=1}$

b_2

כל קבוצה מלבד 2 ספרות פרט ל 1.

לכן $\boxed{b_2=5}$

c_1

דומה לניתוח של b_1

$\boxed{c_1=1}$

c_2

גם כן דומה ל b_2.

$\boxed{c_2=5}$

(א)

a_n יכול להופיע ב-3 אופנים:

הספרה השמאלית היא 1 - זה b_n

הספרה השמאלית היא 2 - זה c_n

הספרה השמאלית היא 3-6, זה $4a_{n-1}$ לכן:

(1) $\boxed{a_n = 4a_{n-1} + b_n + c_n}$

b_n צריך סדרה שהספרה השמאלית שלה היא 1.

ה n-1 ספרות האחרות מייצגות סדרה שיכולה להיות בשני אופנים:

(א) אם הספרה השמאלית היא 2, אז הסדרה היא c_{n-1}.

(ב) אם הספרה השמאלית היא כל אחת מן הספרות 3-6 אז הסדרה צריכה

ל-a_{n-2} עם 4 אפשרויות לבחירת הספרה ה-n-1, לכן:

(2) $\boxed{b_n = c_{n-1} + 4a_{n-2}}$

(3) $\boxed{c_n = b_{n-1} + 4a_{n-2}}$ משיקולים דומים יתקבל:

(ב)

(4) $a_{n-1} = b_{n-1} + c_{n-1} + 4a_{n-2}$

נציב את (2) ו-(3) ב-(1):

$$a_n = c_{n-1} + 4a_{n-2} + b_{n-1} + 4a_{n-2} + 4a_{n-1} =$$

$$= \underbrace{b_{n-1} + c_{n-1} + 4a_{n-2}}_{(4)} + 4a_{n-2} + 4a_{n-1} =$$

$$= a_{n-1} + 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = \boxed{a_n = 5a_{n-1} + 4a_{n-2}}$$

(ג)

נציב בנוסחה האופיינית $a_n = x^n$

$$x^n = 5x^{n-1} + 4x^{n-2} \quad /:x^{n-2}$$

$$x^2 = 5x + 4 \to x^2 - 5x - 4 = 0 \quad x_1 = \frac{5+\sqrt{41}}{2}, \quad x_2 = \frac{5-\sqrt{41}}{2}$$

$a_n = A\cdot(x_1)^n + B(x_2)^n \leftarrow$ נוסחה שנמצאה בקורס

(1) $n=0: \ a_0 = A + B = 1 \to A = 1 - B$ //

$n=1: \ a_1 = A\left(\frac{5+\sqrt{41}}{2}\right) + B\left(\frac{5-\sqrt{41}}{2}\right) = 6$

נציב את (1) ונחלץ את B.

נבדוק עבור $n=1,2,3$?

$$(1-B)\left(\frac{5+\sqrt{41}}{2}\right) + B\left(\frac{5-\sqrt{41}}{2}\right) = 6 \to \frac{5+\sqrt{41}}{2} - B\sqrt{41} = 6 \to \frac{\frac{5+\sqrt{41}}{2}}{\sqrt{41}} = 6$$

$$= \boxed{B = \frac{41 - 7\sqrt{41}}{82}} \Rightarrow \boxed{A = \frac{41 + 7\sqrt{41}}{82}} \Rightarrow \boxed{a_n = \left(\frac{41+7\sqrt{41}}{82}\right)\cdot\left(\frac{5+\sqrt{41}}{2}\right)^n + \left(\frac{41-7\sqrt{41}}{82}\right)\cdot\left(\frac{5-\sqrt{41}}{2}\right)^n}$$

ג.

$$f(x)\cdot(x^0+2x+2x^2+x^3)=\frac{1}{(1-x)^3}$$

$$(a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+\dots)\cdot(x^0+2x+2x^2+x^3)=\frac{1}{(1-x)^3}$$

קומבינציות ליצורים x^0,x^1,x^2

$a_0:\ a_0x^0\cdot 1x^0=D(3,0)x^0 \to a_0=\binom{2}{2}=1.$

$a_1:\ a_0x^0\cdot 2x^1+a_1x^1\cdot x^0=D(3,1)x^1 \to 2+a_1=\binom{3}{2}\to a_1=1.$

$a_2:\ a_0x^0\cdot 2x^2+a_1x^1\cdot 2x^1+a_2x^2\cdot x^0=D(3,2)x^2 \to 2+2+a_2=\binom{4}{2}$

$a_2=2.$

לכן: $a_0=1,\ a_1=1,\ a_2=2$ //

ד.

$a_n=D(3,n)-ra_{n-1}-sa_{n-2}-ta_{n-3}\quad, n\geq 3$

המשוואה $(1+2x+2x^2+x^3)$ היא.. מסדר 3, ולמעשה אותה פתרון לבעיה $n-3$ כרוב:

$(a_{n-3}x^{n-3}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n)(1+2x+2x^2+x^3)$

$= a_{n-3}x^{n-3}\cdot x^3=a_{n-3}\cdot x^n$

$- a_{n-2}x^{n-2}\cdot 2x^2=2a_{n-2}\cdot x^n$

$- a_{n-1}\cdot x^{n-1}\cdot 2x^1=2a_{n-1}\cdot x^n$

$- a_n\cdot x^n\cdot x^0=a_n\cdot x^n$

$\underline{a_3}$

$a_{n-3}\cdot x^n+2a_{n-2}x^n+2a_{n-1}x^n+a_n\cdot x^n=D(3,n)$

$a_0\cdot x^3+2a_1x^3+2a_2x^3+a_3x^3=\binom{5}{2}$

$1+2+4+a_3=10\to a_3=3$ //

$\underline{a_4}$

$a_{n-3}\cdot x^n+2a_{n-2}x^n+2a_{n-1}x^n+a_n\cdot x^n=D(3,n)$

$a_1x^4+2a_2x^4+2a_3x^4+a_4x^4=D(3,4)$

$1+4+6+a_4=\binom{6}{2}\to a_4=15-11=4$ //

$\underline{a_5}$

$a_{n-3}x^n+2a_{n-2}x^n+2a_{n-1}x^n+a_nx^n=D(3,n)$

$a_2x^5+2a_3x^5+2a_4x^n+a_5x^n=D(3,5)$

$2+6+8+a_5=21\to a_5=5$ //

$\underline{a_6}$

$a_3x^6+2a_4x^6+2a_5x^6+a_6x^6=D(3,6)$

$3+8+10+a_6=\binom{8}{2}\to a_6=28-21=7$ //

הצבה לנוסחה:

(I) $a_3=D(3,3)-ra_2-sa_1-ta_0$

(II) $a_4=D(3,4)-ra_3-sa_2-ta_1$

(I) $3=10-2r-s-t$

(II) $\underline{4=15-3r-2s-t}\ \oplus$

$7=25-5r-3s-2t$

* $5r+3s+2t=18$

(III) $a_5=D(3,5)-ra_4-sa_3-ta_2$

$5=21-4r-3s-2t$

** $4r+3s+2t=16\ \ominus$

* $\underline{5r+3s+2t=18}$

$-r=-2\to r=2$ //

$s=2$ // באותו אופן

$t=1$ //

$\underline{a_7}$

$$a_4x^7+2a_5x^7+2a_6x^7+a_7x^7=D(3,7)$$

$$4+10+14+a_7=\binom{9}{2} \to a_7=36-28=8 \to a_7=8 \;//$$

ב) $$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}x^i\cdot\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k}\cdot\sum_{f=0}^{\infty}x^{3f}=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}=\frac{1}{(1-x^3)(1-2x+2x^2-x^3)}\;/\cdot(1-2x^1+2x^2-x^3)$$

לפי משפט 7.9 בספר.

$$f(x)\cdot(1-2x^1+2x^2-x^3)=\frac{1}{(1-x)^3}\;//$$

קיבלנו בסעיף הקודם ש- $a_7=8$

לכן: $a_7=8$ //, כנדרש.

(א) $f(x)=[(x^2+x^4)+(x^8+x^{10})+(x^{14}+x^{16})+\dots]^k$

$f(x)=(x^2+x^4)^k[1+x^6+x^{12}+\dots]^k$

$f(x)=x^{2k}(1+x^2)^k[1+x^6+x^{12}+\dots]^k$

$f(x)=x^{2k}\cdot(1+x^2)^k\cdot\left[\sum_{k=0}^{\infty}x^{6n}\right]^k$ //

(ב) נתון: $k=10$, $n=32$. נמצא את המקדם של x^{32}.

$f(x)=2^{2k}\cdot\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}\cdot x^{2i}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}d(10,n)x^{6n}. \rightarrow 2k+2i+6n=32 \ /:2 \rightarrow$

$\rightarrow k+i+3n=16 \xrightarrow[k=10]{} 10+i+3n=16 \rightarrow \boxed{i+3n=6}$ $\left\{\begin{array}{l} i=0,\ n=2 \\ i=6,\ n=0 \\ i=3,\ n=1 \end{array}\right\}$ מספר האפשרויות לפתרון המשוואה.

לכן: $\binom{10}{0}\cdot d(10,2)+\binom{10}{6}\cdot d(10,0)+\binom{10}{3}\cdot d(10,1)=55+210+120\cdot 10$

$=1465$ //

(ג) סעיף ג' $f(x)=2^{2k}\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot x^{2i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}d(k,n)\cdot x^{6n}\cdot\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^k=$

$=2^{2k}\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot x^{2i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}d(k,n)\cdot x^{6n}\cdot(1-x^6)^k\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)^k=$

$=2^{2k}\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot x^{2i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}d(k,n)\cdot x^{6n}\cdot\sum_{t=0}^{\infty}\binom{k}{m}\cdot(-x^6)^t\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(k,m)\cdot x^m$ //

(ד) נתון: $k=10$, $n=24$. נמצא את קמקדם של x^{24}.

$2k+2i+6n+t+m=24 \xrightarrow[n=t=0]{} 2k+2i+m=24 \xrightarrow[k=10]{} \boxed{2i+m=4}$

$\left\{\begin{array}{l} i=1,\ m=2 \\ i=0,\ m=4 \\ i=2,\ m=0 \end{array}\right\}$ מספר האפשרויות לפתרון המשוואה $\Rightarrow \binom{10}{1}\cdot d(10,2)+\binom{10}{0}\cdot d(10,4)+\binom{10}{2}\cdot d(10,0)=$

$=10\cdot 55+715+45=1310$ //