ממ"ן 17

שאלה 1:

א. הוכח שלכל נקודה E המקיימת את הסדר (AEB) קיימת נקודה F המקיימת את הסדר (AFC) כך שהקטע EF מקביל לקטע BC:
תהא נקודה E המקיימת את הסדר (AEB).
לכן, לפי אקסיומת אוקלידס (אקסיומת המקבילים), קיים ישר ℓ: $E \in \ell$ וגם לכל נקודה $G \in BC$, $G \notin \ell$.
לפי אקסיומת פאש, קיימת נקודה $F \in \ell$ וגם ($F \in BC$ או $F \in AC$), אבל $F \notin BC$, ולכן $F \in AC$, כלומר, מתקיים הסדר (AFC).

ב. [..] הוכח שקיימת נקודה D: (BDC).
נגדיר את הישר ℓ: $AP \in \ell$.
לפי אקסיומת פאש, קיימת נקודה $Q \in \ell$: $Q \in EB$ או $Q \in BF$.
בגלל שP פנימית לΔABC, אזי היא לא נמצאת על אחת מצלעותיו ובפרט $P \notin AB$. לכן, קיימת לכל היותר נקודת חיתוך אחת בין ℓ לAB (שהרי הם לא מתלכדים), ובגלל שאנו יודעים ש$A \in AB$ וגם $A \in \ell$, בהכרח לא קיימת נקודה נוספת על ℓ.
לכן, $Q \in B$.
לפי אקסיומת פאש, קיימת נקודה $Q \in \ell$: $D \in AC$ או $D \in BC$.
$P \notin AC$, ולכן קיימת נקודת חיתוך יחידה בין ℓ לבין AC, ובגלל ש$A \in AC$ בהכרח $D \in BC$ - כלומר – מתקיים הסדר (BDC).

שאלה 2:

א. אם שארית החילוק של a בd היא r_1 ושארית החילוק של b בd היא r_2, אזי שארית החילוק של $a + b$ בd היא $r_1 + r_2$: הטענה שגויה. לדוגמה עבור $a = 5, b = 4, d = 6$: $3 \neq 9$, $5 + 4 = 9 \equiv 3(mod\ 6)$.

ב. קיימים מספרים טבעיים a, b: $a^2 = b^3$: הטענה נכונה. לדוגמה עבור $a = 8,\ b = 2$: $8^2 = 64 = 4^3$.

ג. אם p הוא מספר ראשוני, אם $a^2 = b^3$ וגם $p|b$ אזי $p^3|a$: הטענה נכונה:
נניח $a^2 = b^3$ וגם $p|b$ וגם p ראשוני:
לכן קיים $k_1 \in \mathbb{N}$: $b = k_1 \cdot p$.
לכן $b^3 = k_1 \cdot k_1 \cdot k_1 \cdot p \cdot p \cdot p$
כלומר $a^2 = k_1^3 \cdot p^3$, ובגלל שk_1^3 שלם, לפי משפט החלוקה בשארית $p^3|a^2$.
טענת עזר: אם $p|a$ וגם $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ אזי $p|a^2$
נניח בשלילה $p|a$ וגם $p \nmid a^2$: לכן קיים $k_2 \in \mathbb{N}$: $a = k \cdot p$
לכן מתקיים $a^2 = (k_2 \cdot p)^2 = (k_2 \cdot k_2 \cdot p) \cdot p$, כלומר $p|a^2$ (שהרי $k_2^2 p$ טבעי) וזוהי סתירה!
לכן, לפי טענת העזר וגם בגלל שp ראשוני (ולכן גדול מ1) מתקיים $p^3|a$

שאלה 3:

א. הוכיחו שלא קיים מספר טבעי n כך ששארית החילוק של n^2+n ב5 היא 3 או 4:

נוכיח באינדוקציה: בסיס: $(1^2+1)(mod\ 5) = 2\ (mod\ 5) = 2 \neq 3, 4$

$(2^2+2)(mod\ 5) = 6(mod\ 5) = 1$

$(3^2+3)(mod\ 5) = 12\ (mod\ 5) = 2$

$(4^2+4)(mod\ 5) = 20\ (mod\ 5) = 0$

$(5^2+5)(mod\ 5) = 30\ (mod\ 5) = 0$

צעד: נניח עבור $n \in \mathbb{N}$ ונוכיח עבור $n > 5$:

לפי הנחת האינדוקציה ולפי משפט החלוקה בשארית קיים $k \in \mathbb{N}$ $n^2+n = 5k+3$

כלומר $n^2 = 5k+3-n$, ובגלל ש$n < 4$ הביטוי $(3-n)$ שלילי, וזוהי סתירה (כיוון ששארית היא טבעית).

בנוסף, לפי הנחת האינדוקציה ולפי משפט החלוקה בשארית קיים $k_1 \in \mathbb{N}$:

$n^2+n = 5k_1+4$

כלומר $n^2 = 5k_1+4-n$, ובגלל ש$n < 5$ הביטוי $(4-n)$ שלילי, וזוהי סתירה (כיוון ששארית היא טבעית).

ב. נסמן בA^* את הקבוצה הנוצרת ע"י הכפל מ$A = \{6, 14\}$ ונסמן בB^* את הקבוצה הנוצרת ע"י הכפל מ$B = \{2, 9, 10\}$

הוכיחו כי $A^* \cap B^* = \{36^n | n \in \mathbb{N}\}$

יהיו $a, b, c, n, m \in \mathbb{N}_0$: $a+b+c \in \mathbb{N}$ וגם $m+n \in \mathbb{N}$.

בגלל שאנו רוצים למצוא את האיברים המשותפים לשתי הקבוצות A^*, B^*, נניח שקיים איבר בשתיהן, ולפי הגדרת הקבוצות: $2^a 9^b 10^c = 6^n 14^m$.

לכן נפרק את לגורמים ראשוניים: $2^a 3^b 3^b 2^c 5^c = 2^n 3^n 2^m 7^m$

כלומר $2^{a+c} 3^{2b} 5^c = 2^{n+m} 3^n 7^m$

אבל בגלל ש7 הוא גורם באגף הימני ולא בשמאלי, ומנגד 5 הוא גורם באגף השמאלי ולא בימני, נוכל לפשט את הביטוי: $2^a 3^{2b} = 2^n 3^n$

לפי המשפט היסודי, ישנו ייצוג יחיד של גורמים ראשוניים לכל מספר טבעי, ולכן: $2^a 3^{2b} = 2^n 3^{2b}$

כלומר, $n = 2b$, ולכן נוכל להמשיך: $2^a 3^{2b} = 2^{2b} 3^{2b}$

בשימוש נוסף במשפט היסודי, בדרך זהה, נקבע ש$a = 2b$ ולכן $2^{2b} 3^{2b} = 2^{2b} 3^{2b}$.

כעת הגענו לביטוי שווה, ולכן נמשיך ונוכיח מהו $2^{2b} 3^{2b}$:

נפרק את הביטוי: $2^b 2^b 3^b 3^b = 36^b$.

בנוסף על כך, $b \in \mathbb{N}$ לפי ההנחה, בגלל ש$a+b+c \in \mathbb{N}$ וגם $a = 2b$ וגם $c = 0$.

לכן, למעשה הביטוי לאיבר בקבוצה $A^* \cap B^* = \{36^b \mid b \in \mathbb{N}\}$, ולכן הטענה נכונה.

שאלה 4:

א. מצאו מספר טבעי a קטן ביותר שעבורו מתקיים $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot a = 3^a$ והוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \geq a$ טבעי מתקיים: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n > 3^n$: המספר הוא 7, שהרי $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 7 = 5040 > 3^7 = 2187$

אך $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6 = 720 < 3^7 = 729$.

הוכחה: בסיס: $n = 7$: $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 7 = 5040 > 3^7 = 2187$.

צעד: נוכיח עבור $n+1$:

$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) > 3^{n+1}$

$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) > 3^n \cdot 3$.

$(n+1) > 3$ וזהו פסוק אמת בגלל ש$n+1 \geq 8 > 3$.

ב. נתונים n ישרים במישור כך שאף שניים מהם מקבילים ואף שלושה מהם אינם עוברים דרך אותה נקודה.

נסמן ב$S(n)$ את מספר האזורים השונים הנוצרים במישור על ידי n הישרים האלה.

i) $S(3) = 7$, אם נוסיף עוד ישר הוא יגדל ב4. אם נוסיף עוד ישר, המספר יגדל ב5.

ii) נוכיח באינדוקציה חזקה: בסיס: $n = 1$: $1 = \frac{1^2+1+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

צעד: נוכיח עבור n: בגלל שבכל צעד אנו מוסיפים ישר נוסף, ואנו יודעים שאין נקודת מפגש של שלושה ישרים, ואין שני ישרים מקבילים, לכל שני ישרים יש נקודת חיתוך אחת ביניהם. לכן, בכל הוספת ישר שמספרו n, נוספות $n-1$ נקודות נוספות – ולכן n ישרים נוספים (שהרי הישר חוצה n אזורים).
לכן, נוכיח שהנוסחה נכונה כי בכל צעד נוספים n ישרים:

$$\frac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2}+n=\frac{n^2-2n+1+n-1+2+2n}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}$$

בגלל שהנוסחה מתקיימת בהצבת $n-1$ והוספת n, הנוסחה נכונה (שהרי הנחנו באינדוקציה חזקה ולכן הנוסחה מתקיימת עבור $n-1$).