מבחן אלגוריתמים 2019ב – תאריך 10/7

הנחיות: ענו על 4 מתוך 5 שאלות. לכל שאלה 25 נקודות. לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה.

על שאלות שמסומנות בכוכב – יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה), ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).

חומר עזר: אסור. דף נוסחאות מצ״ב. בהצלחה!

****שאלה 1** – זרימה (צלעות שמוסרות פעמיים מהרשת השיורית)** (25 נק׳).

הציגו דוגמא פשוטה של רשת זרימה עם צלע e, שמקיימת את שתי התכונות הבאות: (א) במהלך הרצת **Edmonds-Karp** על הרשת ישנן שתי איטרציות שונות, שבהן תוספת הזרימה דרך e זהה לקיבולת השיורית של e. (ב) הצלע e מחברת בגרף המקורי בין שני קדקודים, שמרחקם מהמקור s שונה. (לא יינתן ניקוד על דוגמא שמתאימה להרצה של **Ford-Fulkerson** אבל לא מתאימה להרצה של **Edmonds-Karp**).

ציור של רשת הזרימה

הסבר ____________________________________

שאלה 2 – בעיית התדלוק (25 נק׳).

נתונה רשת-תחבורה קשירה עם n עיירות שמחוברות ע״י m כבישים. ברצוננו לרכוש רכב עם **מיכל-דלק שגודלו f קטן ככל האפשר**, תחת הדרישה שנוכל להגיע מעיירת-הבית שלנו, לעיירה מרוחקת בה אנו לומדים. ידועה לנו כמות הדלק, שנדרשת כדי לגמוא את המרחק בכל כביש וכביש. כל כמות כזו הינה מספר שלם של ליטרים, שאינו עולה על מספרן של העיירות n. ידוע כי **בכל עיירה יש תחנת-דלק**, אבל **אין תחנות-דלק בכבישים** המחברים בין העיירות. העיירות קטנטנות ולכן נניח, שכמות הדלק שצורכים בנסיעה בתוך עיירה הינה אפסית. הציגו אלגוריתם לחישוב הערך f (לא יינתנו יותר מ-3 נק׳ לאלגוריתם שרץ בזמן $\Theta(n^c)$ עבור קבוע $c>2$).

שאלה 3 – בעיית הספיקות 3-SAT (כשלון החמדנות).** (25 נק')

הגדרות: נוסחת 3-CNF היא נוסחה מהצורה $\varphi=\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\ldots\wedge\varphi_m$, כשלכל פסוקית הצורה $\varphi_i=(z_{i,1}\vee z_{i,2}\vee z_{i,3})$, וכל $z_{i,j}$ הינו אחד מהליטרלים $x_1,\ldots,x_n,\neg x_1,\ldots,\neg x_n$. למשל $\varphi=(x_1\vee\neg x_2\vee x_3)\wedge(x_2\vee x_4\vee\neg x_5)$ הינה נוסחת 3CNF עם $n=5$ משתנים ועם $m=2$ פסוקיות. השמה הינה פונקציה שמתאימה לכל משתנה x_i ערך "אמת" T או "שקר" F. בהינתן השמה מסוימת, אזי הליטרל x_i מסופק אם ההשמה מקיימת $x_i\leftarrow T$, והליטרל $\neg x_i$ מסופק אם $x_i\leftarrow F$. פסוקית $\varphi_i=(z_{i,1}\vee z_{i,2}\vee z_{i,3})$ מסופקת, כאשר __לפחות__ אחד מהליטרלים שבה $z_{i,1},z_{i,2},z_{i,3}$ מסופק. הנוסחא כולה $\varphi=\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\ldots\wedge\varphi_m$ מסופקת, אם __כל__ הפסוקיות $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ מסופקות. הנוסחא $\varphi=\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\ldots\wedge\varphi_m$ נקראת __ספיקה__, אם לפחות אחת מבין 2^n ההשמות האפשריות מספקת אותה.

T T/F F/T

__האלגוריתם החמדן__: נביט באלגוריתם הבא למציאת השמה מספקת לנוסחת 3-CNF נתונה φ.

האלגוריתם סורק את כל המשתנים $x_1,\ldots,x_n$ בזה אחר זה, ולכל משתנה x_i בוחר השמה, שממקסמת את מספר הפסוקיות המסופקות **__החדשות__**. (למשל, כשהאלגוריתם מטפל במשתנה x_2, אז בוחנים רק את הפסוקיות שטרם סופקו ע"י ההשמה שנקבעה כבר למשתנה x_1. אם ב-5 מהפסוקיות הללו מופיע הליטרל x_2, וב-6 מהפסוקיות הללו מופיע $\neg x_2$, אז מציבים $x_2\leftarrow F$, משום שכך יסופקו 6 פסוקיות חדשות).

השאלה: הציגו נוסחת 3CNF עליה **__האלגוריתם החמדן נכשל__**: הנוסחא ספיקה אבל האלגוריתם מפיק כפלט השמה לא מספקת.

הגדרת הנוסחא: ~~$(x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(x_1\vee x_2\vee\neg x_3)\wedge(x_1\vee\neg x_2\vee x_3)\wedge$~~

~~$\wedge(x_1\vee\neg x_2\vee\neg x_3)\wedge(\neg x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge$~~

$\underbrace{(x_1\vee x_2\vee\neg x_3\vee x_4)\wedge\cdots\wedge(x_1\vee x_2\vee\neg x_3\vee x_4)}_{1000000\ \text{פעמים}}\wedge\underbrace{(\neg x_1\vee x_2\vee x_3\vee\neg x_4)}_{\text{פעמים}\ \times 10000}\wedge(\neg x_1\vee\neg x_2\vee x_3\vee\neg x_4)$

$\wedge\underbrace{(\neg x_1\vee\neg x_2\vee\neg x_3\vee\neg x_4)}_{\text{פעמים}\ \times 1000}\wedge\underbrace{(\neg x_1\vee\neg x_2\vee\neg x_3\vee\neg x_4)}_{\text{פעמים}\ 100}\wedge(\neg x_1\vee\neg x_2\vee\neg x_3\vee x_4)$

המשך

השמה מספקת: $x_1\leftarrow F,\ x_2\leftarrow F,\ x_3\leftarrow T,\ x_4\leftarrow T$

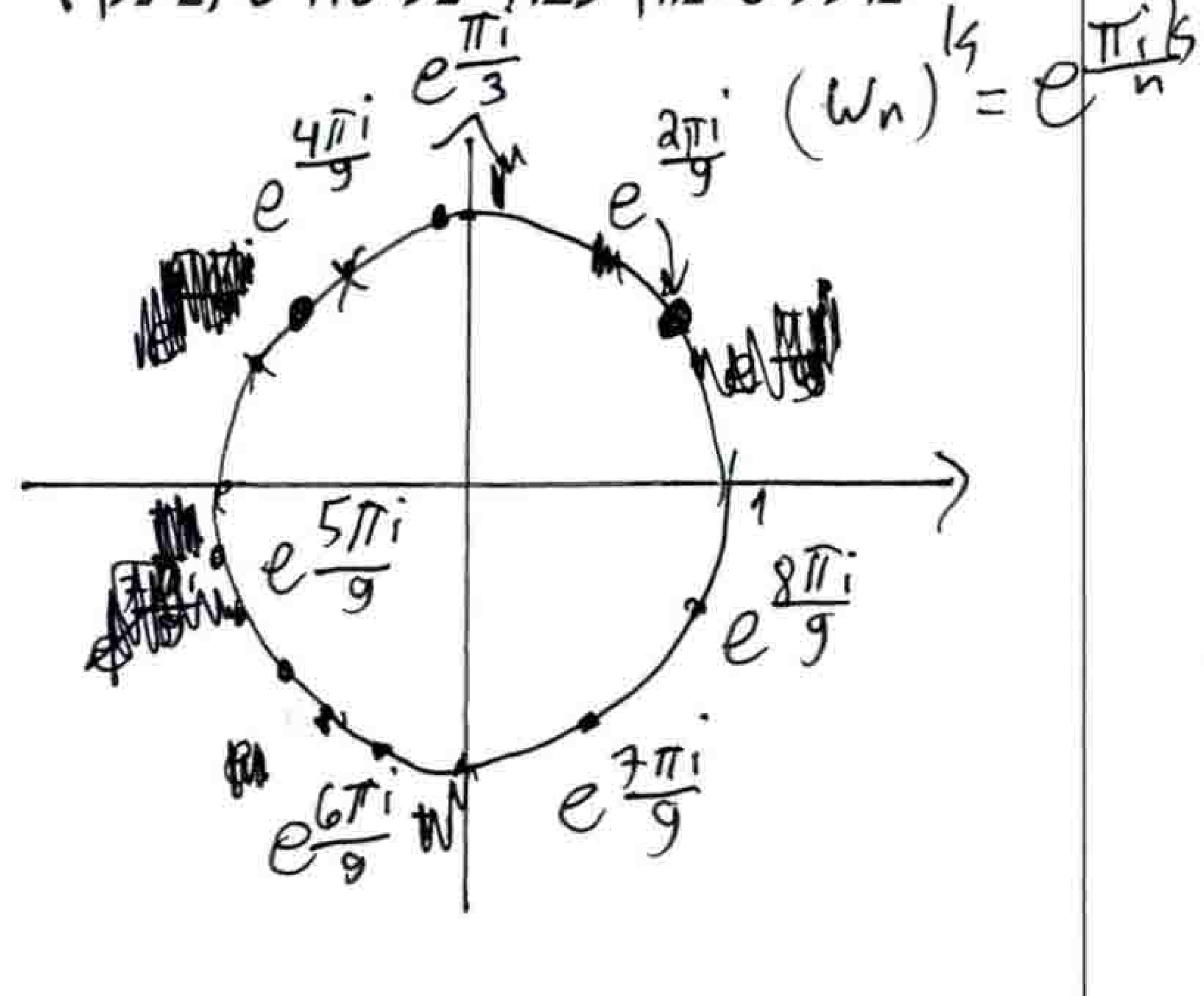
ההשמה שהאלגוריתם החמדן בוחר: $x_1\leftarrow T,\ x_2\leftarrow T,\ x_3\leftarrow T,\ x_4\leftarrow F$

נא לא לכתוב בשוליים

שאלה 4 – FFT טרינארי (25 נק׳).

נתונים מקדמיו השלמים $a_0,...,a_{n-1}$ של פולינום $p(x)$ מדרגה $n-1$. בניתוח הסטנדרטי של אלגוריתם ה-FFT, מחשבים את ערכי הפולינום על n שורשי היחידה המרוכבים, כאשר $n=2^k$.

נסחו מחדש את אלגוריתם ה-FFT בהתאם להדרכה הבאה, כאשר הפעם $n=3^k$.

ציור שורשי היחידה מסדר 9 כולל סימון עבור כל שורש (2 נק׳)	ציור של החזקה הרלוונטית של שורשי היחידה מסדר 9 (2 נק׳)
	

פסאודו-קוד מדויק ומתועד (18 נק׳)

```
FFT([a0,...,an-1], Wn) {
   Peven <- FFT([a0, a3, ...], W^3)
   Podd  <- FFT([a1, a4, ...], W^3)
   for k<-0 to k=n {
      a=Peven(W^3) + W(Podd(W^3))
   return a
```

ניתוח זמן ריצה (3 נק׳): $T(n)=2T(\frac{n}{2})+O(n)$

לפי נוסחת האב סיבוכיות זמן הריצה היא גם כן:

$O(n\log_3 n)$

$a=b=c$

$a=b<$

$a \quad b$

Q

שאלה 5 – **תכנון דינאמי (ספירת סידורים)** (25 נק').

יהי $f(n)$ מספר הדרכים לסדר n עצמים באמצעות שני היחסים > וכן =. למשל $f(2)=3$ משום שעבור 2 עצמים a,b ישנם בדיוק 3 סידורים אפשריים: $a<b$ או $a=b$ או $b<a$.
בדומה, $f(3)=13$ משום שעבור 3 עצמים a,b,c ישנם כבר 13 סידורים אפשריים:

$$\left\{\begin{array}{lll} a=b=c, & b=c<a, & c<a=b \\ a=b<c, & b<a=c, & c<a<b \\ a<b=c, & b<a<c, & c<b<a \\ a<b<c, & b<c<a, & \\ a=c<b, & & \\ a<c<b, & & \end{array}\right\}$$

$\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$

$1+2+1=4$

$1+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\cdot f(n-1)$

$1+\left(\binom{3}{1}+\binom{3}{2}\right)\cdot 3$

$OPT[i]=\binom{n}{i}$

$a=b \quad c$

$a=b \quad 3$

$a=c \quad 3$

$b=c \quad 3$

הציגו אלגוריתם שעל קלט n מחשב את $f(n)$ תוך ריצה בזמן $\Theta(n^2)$ וצריכת זיכרון $\Theta(n)$.
(החשיבו פעולה אריתמטית (חיבור, כפל והשוואה של מספרים) כפעולה שמתבצעת בזמן $\Theta(1)$, וצורכת $\Theta(1)$ תאי זיכרון בלבד).

הדרכה: העזרו בעובדה שכל סידור משרה חלוקה למחלקות שקילות, כשכל מחלקה מורכבת מעצמים שהיחס ביניהם הוא =. למשל עבור 4 עצמים, הסידור $d<a=b<c=e$ משרה חלוקה ל-3 מחלקות שקילות: d במחלקה נפרדת, a,b במחלקה נפרדת, ו-c,e במחלקה נפרדת.

נוסחת הנסיגה (18 נק') $OPT[1]=1$

$OPT[2]=3$

אם כולם שווים

$OPT[i]=1+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\cdot OPT[n-i+1]$

לבודק: לא הספקתי לבדוק שזה עובד אבל משהו בסגנון.

הסבר נוסחת נסיגה (5 נק') $OPT[i]$ הוא מספר הסידורים (את i ש... איברים במחלקות השקילות השונות.

לולאות וזמן ריצה (2 נק') נשלב את OPT שמחושב עד n. נחשב את הסכום של כל האפשרויות ע"י מערך ...

סיבוכיות ר

לא חושב נכון נוסחת נסיגה

בהצלחה!

$f(3)=1+\binom{3}{2}f(2)+n!$

$f(3)=1+\binom{2}{2}\cdot f(2)+\binom{2}{1}$

$\cdot(n-i+1)!$

$f(2)=3$

$f(3)=1+\binom{3}{2}f(1)+3$

$a \quad b \quad c$

$1+\sum_{i=2}^{n-1}\binom{n}{i}\cdot f(n-(i-1))+n!$

$f(n-i+1)$

לכל מחלקה שקילות

אלגוריתמים 20417 – דף נוסחאות – גרפים

סימונים. ההגדרות הבאות מתאימות גם לגרפים לא מכוונים וגם לגרפים מכוונים. בגרף $G=(V,E)$ קבוצת הקדקודים (=צמתים) הינה V, וקבוצת הצלעות (=קשתות) הינה E. מסמנים $|V|=n,|E|=m$. כל הגרפים בקורס זה הם "פשוטים" במובן הבא: אין "לולאות עצמיות" (= אין צלע מקדקוד לעצמו) ואין "צלעות כפולות" (צלע יכולה להופיע או לא להופיע, אך לא יכולה להופיע מספר רב של פעמים).

מסלולים. מסלול (=מסילה) בגרף הוא סדרת קדקודים $(v_0,...,v_k)$ כך שיש בגרף צלע מ- v_{i-1} ל- v_i לכל $1\le i\le k$. אפשר לחשוב על אותו מסלול כסדרת צלעות $(e_1,...,e_k)$ שבה לכל $1\le i\le k$ הצלע e_i מחברת בגרף את v_{i-1} ל- v_i. מסלול פשוט הוא מסלול שאף קדקוד לא מופיע בו פעמיים (ומעלה). מעגל הוא מסלול שבו $v_0=v_k$. מעגל פשוט הוא מסלול שאף קדקוד לא מופיע בו פעמיים (ומעלה) למעט $v_0=v_k$. שני מסלולים נקראים זרים בקדקודים אם אין להם אף קדקוד משותף, ונקראים זרים בצלעות אם אין להם אף צלע משותפת. קדקוד t נקרא נגיש מקדקוד s אם קיים בגרף מסלול מ- s ל- t. גרף לא-מכוון נקרא קשיר (ובדומה גרף מכוון נקרא קשיר במובן החזק) אם כל זוג קדקודים נגישים האחד מהשני.

משקלים. בגרף ממושקל לכל צלע e מוגדר משקל $w(e)$ (=אורך $\ell(e)$, =מחיר $c(e)$). בגרף לא ממושקל אורך מסלול = מספר הצלעות במסלול. בגרף כן ממושקל אורך מסלול = סכום משקלי הצלעות במסלול. בגרף כן/לא ממושקל מסלול מזערי (=מינימלי) מ- s ל- t הינו מסלול מ- s ל- t שאורכו מזערי. עץ מרחקים מזעריים T עם שורש $s\in V$ הוא עץ פורש כך שלכל קדקוד $t\in V$, המרחק (=אורך מסלול מזערי) מ- s ל- t ב- T שווה למרחק מ- s ל- t ב- G. אבחנה מרכזית: בגרף כן/לא ממושקל: אם $s\longrightarrow u\longrightarrow v\longrightarrow t$ מסלול מזערי מ- s ל- t, אז תת-המסלול $u\longrightarrow v$ הינו מסלול מזערי מ- u ל- v (כאן $\longrightarrow$ מסמן תת-מסלול). עץ פורש מזערי (עפ"מ) בגרף ממושקל ולא-מכוון הוא עץ פורש, שסכום משקלי הצלעות שלו מזערי מבין כל העצים הפורשים.

רשתות זרימה. ברשת זרימה נתונים גרף מכוון $G=(V,E)$ עם קדקודי מקור $s\in V$ ויעד $s\ne t\in V$ וקיבולות אי-שליליות $c(e)\ge 0$ על הצלעות. זרימה חוקית הינה פונקציה $f:E\to\mathbb{R}$ שמכבדת את מגבלת הקיבולת: $f(e)\le c(e)$ לכל צלע e, ואת חוק שימור הזרימה: $f_{in}(v)=f_{out}(v)$ לכל קדקוד $v\ne s,t$. כאן $f_{in}(v)$ הינו סכום הזרימות בצלעות שנכנסות ל- v, ו- $f_{out}(v)$ הינו סכום הזרימות בצלעות שיוצאות מ- v. חתך $(S,T=V\setminus S)$ ברשת הינה חלוקה של קבוצת הקדקודים שבה $s\in S,t\in T$. קיבולת $c(S,T)$ של חתך הינה סכום הקיבולות של צלעות שיוצאות מ- S ונכנסות ל- T. זרימה $f(S,T)$ של חתך הינה ההפרש בין סכום הזרימות של צלעות שיוצאות מ- S ונכנסות ל- T לבין סכום הזרימות של צלעות שנכנסות ל- S ויוצאות מ- T לכל חתך (S,T) גודלה של זרימה חוקית f הינו $val(f)=f_{out}(s)=f_{in}(t)=f(S,T)$.

משפט מרכזי: גודל זרימה מרבית (max-flow) = גודל חתך מזערי (min-cut).

קלט	פלט	אלגוריתם + זמן ריצה	תכונות + הערות
גרף מכוון G קדקוד מקור $s \in V$	עץ פורש T של הקדקודים הנגישים מ- s	סריקה לרוחב BFS $\|E\|+\|V\|$	T הינו עץ מרחקים מזעריים מהמקור s
		סריקה לעומק DFS $\|E\|+\|V\|$	בגרף לא-מכוון: כל צלע של G שאינה ב- T בהכרח מחברת בין אב-קדמון לבין צאצא שלו ב- T. בגרף מכוון חסר מעגלים: מחשב מיון טופולוגי
גרף מכוון G ממושקל (עם/בלי מקור $s \in V$) $w(e) \geq 0$	עץ T של מרחקים (ומסלולים) מזעריים מהמקור s לקדקודים הנגישים מ- s	דייקסטרא Dijkstra $\|E\|+\|V\|\lg\|V\|$	
$w(e)$ כללי		בלמן-פורד Bellman-Ford $\|E\|\|V\|$	מדווחים על קיומם של מעגלים שמשקלם שלילי
	מרחקים (ומסלולים) מזעריים בין כל זוגות הקדקודים	פלויד-וורשאל Floyd-Warshall $\|V\|^3$	
גרף לא-מכוון G עם משקלים אי-שליליים $w(e) \geq 0$	עפ״מ של הגרף (עץ פורש מזערי)	פרים Prim $\|E\|+\|V\|\lg\|V\|$	אם e צלע שמשקלה מזערי מבין כל הצלעות שמחברות בין $S, V \setminus S$ אז יש עפ״מ שכולל את e.
		קרוסקאל Kruskal $\|E\|\lg\|V\|$	אם e צלע שמשקלה מרבי מבין כל הצלעות במעגל מסוים אז יש עפ״מ שלא כולל את e.
גרף מכוון G עם מקור $s \in V$ ויעד $s \neq t \in V$ וקיבולות אי-שליליות $c(e) \geq 0$	זרימה חוקית מרבית	אדמונדס-קארפ Edmonds-Karp $\|E\|^2\|V\|$	וריאנט של פורד-פלקרסון Ford–Fulkerson
זוג וקטורים $\vec{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ $\vec{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1})$	הקונבולוציה הציקלית $\vec{a} \otimes \vec{b} = (c_0, \ldots, c_{2n-2})$ שבה $c_k = \Sigma_{0 \leq i \leq k} a_i b_{k-i}$	טרנספורם פורייה המהיר FFT $n \lg n$	מתאים לכפל פולינומים $(\sum_{0 \leq i \leq n-1} a_i x^i)(\sum_{0 \leq j \leq n-1} b_j x^j) = (\sum_{0 \leq k \leq 2n-2} c_k x^k)$ כאשר $c_k = \Sigma_{0 \leq i \leq k} a_i b_{k-i}$