ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20476

מתמטיקה בדידה

חוברת הקורס אביב ב2014

כתב: איתי הראבן

מרץ 2014 - סמסטר אביב תשע"ד

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מתמטיקה בדידה".
אנא קראו בעיון את כל הסעיפים לפני שתתחילו בלימודיכם. פרטים לגבי נהלים המקובלים באוניברסיטה הפתוחה מפורטים בידיעון האקדמי. תיאורי הקורסים מופיעים בקטלוג הקורסים.

__הערה:__ על חלק מספרי הלימוד וחלק מחומרי העזר של הקורס מופיעים מספרי קורס 20276, 20283. חומרים אלה הועברו לקורס שלנו מקורס שפעל באו"פ בשנים קודמות.

קורס זה מתוקשב במסגרת הפעילות של מחלקת תלם (תקשוב ללימוד מרחוק).
קורס מתוקשב כולל, נוסף על יחידות הלימוד הכתובות, גם פעילות באתר הקורס באינטרנט.
פעילות זו כוללת: אינטראקציה בין הסטודנטים לצוות ההוראה באמצעות קבוצות דיון ודואר אלקטרוני, הפניות למאגרי מידע ולאתרים ברשת האינטרנט, חומרי לימוד והעשרה. הפעילות באתר הקורס אינה חובה אך האתר יכול לסייע מאוד בלימוד הקורס.
כתובת אתרי הקורסים: **http://telem.openu.ac.il**.
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מרכז ההוראה בקורס הוא איתי הראבן.
ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון **02-6733210** בימי ד', בין השעות 19:00 - 20:00.
- דרך אתר הקורס.
- בדואר אלקטרוני itaiha@openu.ac.il
- פקס: **09-7780631** , לרשום "עבור איתי"

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה ,
צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20476 /2014ב)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
1	7.3.2014-2.3.2014	החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"			
2	14.3.2014-9.3.2014	תורת הקבוצות פרק 1			
3	21.3.2014-16.3.2014 (א-ב פורים)	תורת הקבוצות סעיפים 2.1 -2.4		ממ"ח 01 יום ג' 18.3.2014	
4	28.3.2014-23.3.2014	תורת הקבוצות סעיפים 2.5 -3.1			ממ"ן 11 יום א' 23.3.2014
5	4.4.2014-30.3.2014	תורת הקבוצות סעיפים 3.2 -3.5		ממ"ח 02 מוצ"ש בחצות 5.4.2014	
6	11.4.2014-6.4.2014	תורת הקבוצות סעיף 4.1		ממ"ח 03 יום ה' 10.4.2014	
7	18.4.2014-13.4.2014 (ב ערב פסח) (ג-ו פסח)	חזרה על החומר			ממ"ן 12 יום א' 13.4.2014
8	25.4.2014-20.4.2014 (א-ב פסח)	תורת הקבוצות פרק 5 (חוברת נפרדת)			
9	2.5.2014-27.4.2014 (ב יום הזכרון לשואה)	קומבינטוריקה סעיפים 1.1- 2.3			ממ"ן 13 יום ה' 1.5.2014

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח	
				ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
10	9.5.2014-4.5.2014 (ב יום הזכרון, ג יום העצמאות)	קומבינטוריקה סעיפים 2.4- 3.2			
11	16.5.2014-11.5.2014	קומבינטוריקה פרקים 4 - 5		ממ"ח 04 יום א' 11.5.2014	
12	23.5.2014-18.5.2014 (א ל"ג בעומר)	קומבינטוריקה פרקים 6- 7			ממ"ן 14 יום ג' 20.5.2014
13	30.5.2014-25.5.2014 (ד יום ירושלים)	תורת הגרפים פרקים 1-2			
14	6.6.2014-1.6.2014 (ג-ד שבועות)	תורת הגרפים פרקים 3-4			ממ"ן 15 יום ב' 2.6.2014
15	13.6.2014-8.6.2014	תורת הגרפים פרקים 5-6			
16	20.6.2014-15.6.2014			סיום הסמסטר 20.6.2014	
				ממ"ח 05 יום א' 22.6.2014	ממ"ן 16 יום ג' 24.6.2014

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

מטלות הקורס

קראו היטב עמודים אלה לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס. הבנה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. מטלות המנחה (ממ"ים) יבדקו על-ידי המנחה ויוחזרו לכם בצירוף הערות המתייחסות לתשובות. על מטלות המחשב (ממ"חים) תקבלו רק פירוט תשובות נכונות ולא נכונות.

מבנה המטלות

כל מטלה מורכבת מכמה שאלות. משקל כל השאלות זהה אלא אם כן צוין אחרת.
את הפתרונות לממ"ן עליכם לרשום על דף בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. לחילופין ניתן להגיש את המטלות מודפסות במעבד תמלילים, בתנאי שכל הסימונים המתמטיים ברורים. אין להשתמש בסימונים שאינם מופיעים ביחידות.

ניקוד המטלות

בקורס 6 מטלות מנחה (ממ"נים) ו- 5 מטלות מחשב (ממ"חים).
משקלי המטלות: משקל כל ממ"ן הוא 3 נקודות, פרט לממ"ן 12 שמשקלו 4 נקודות.
משקל כל ממ"ח הוא 2 נקודות, פרט לממ"ח 05 שמשקלו 3 נקודות.
בהגשת כל המטלות ניתן אפוא לצבור 30 נקודות.

דרישות חובה בהגשת המטלות

חובה להגיש מטלות במשקל של 20 נקודות לפחות.
בין המטלות שתגישו חייבות להיות לפחות ארבע מטלות מנחה (ממ"נים)

התנאים לקבלת נקודות זכות

א. להגיש מטלות במשקל של 20 נק' לפחות. כאשר מתוכן **לפחות ארבע מטלות מנחה (ממ"נים)**

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.

ג. לקבל בציון הסופי 60 נקודות לפחות.

הערות חשובות לתשומת לבך!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה — **חומר הלימוד למטלה**: החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"

מספר השאלות: 12 — **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2014ב — **מועד אחרון להגשה:** יום ג' 18.3.2014

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בשאלות המסומנות בסולמית (#) מופיעות שתי טענות. בשאלות אלה סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה — ב - אם רק טענה 2 נכונה

ג - אם שתי הטענות נכונות — ד - אם שתי הטענות אינן נכונות

שאלה 1 #

1. האמירה חתול או כלב היא פסוק.
2. האמירה החרמון גבוה יותר מהאוורסט היא פסוק.

שאלה 2 #

1. **שלילת** הפסוק הכד מלא מים עד שפתו
   היא הפסוק בכד אין מים כלל
2. **שלילת** הפסוק הכלב רדף אחר החתול
   היא הפסוק החתול רדף אחר הכלב

שאלה 3 #

1. הפסוק $1+1=2$ **וגם** $2+3=10$ הוא אמת.
2. הפסוק $1+1=2$ **או** $1+1>2$ הוא אמת.

שאלה 4 #

1. הפסוק **אם** $2=3$ **אז** $2+2=4$ הוא אמת.
2. הפסוק **אם** $2=3$ **אז** $2+2=6$ הוא אמת.

שאלה 5 #

1. לוח האמת של הפסוק הפורמלי $(p \to q) \vee (p \to r)$ הוא:

p	q	r	$(p \to q) \vee (p \to r)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**T**

2. הפסוק הפורמלי $(p \to q) \wedge p \wedge \neg q$ הוא סתירה.

שאלה 6 #

1. הפסוק הפורמלי $p \to q$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $\neg(p \wedge \neg q)$.
2. הפסוק הפורמלי $p \leftrightarrow q$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $(p \wedge q) \vee \big((\neg p) \wedge (\neg q)\big)$.

שאלה 7 #

1. $\neg\big(p \vee (q \wedge r)\big)$ שקול טאוטולוגית ל- $\big((\neg p) \wedge (\neg q)\big) \vee \neg r$.
2. $p \wedge \neg(p \wedge q)$ שקול טאוטולוגית ל- $p \wedge \neg q$.

שאלה 8 #

1. **שלילת** הפסוק **הפיל עף והחמור שחה בים**

   שקולה לפסוק **הפיל לא עף והחמור לא שחה בים**
2. **שלילת** הפסוק **העורב אכל את הגבינה או הגבינה אכלה את העורב**

   שקולה לפסוק **העורב לא אכל את הגבינה והגבינה לא אכלה את העורב**

שאלה 9 #

α,β הם פסוקים, וידוע שהפסוק $\alpha \vee \beta$ הוא סתירה. מכאן נובע:

א. α הוא סתירה ו- β הוא סתירה.

ב. בדיוק אחד משני הפסוקים α,β הוא סתירה.

ג. התשובות הקודמות אינן נכונות,
אבל לפחות אחד משני הפסוקים α,β הוא סתירה.

ד. התשובות הקודמות אינן נכונות,
אבל הפסוק α שקול לשלילתו של הפסוק β.

ה. אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 10 #

1. את **שלילת** הפסוק **קיים מספר גדול יותר ממיליון.**
ניתן לנסח כך: **קיים מספר שאינו גדול ממיליון.**

2. את **שלילת** הפסוק **לכל מספר x, יש מספר y שקטן ממנו.**
ניתן לנסח כך: **יש מספר x, שאף מספר y אינו קטן ממנו .**

בשאלות 11, 12 אין זוגות של טענות, פשוט בחרו את התשובה הנכונה.

שאלה 11

את הפסוק כל מספר הגדול מ- 100, השורש הריבועי שלו גדול מ- 10
ניתן לרשום כך:

א. $\forall x\left(x>100 \wedge \sqrt{x}>10\right)$

ב. $\left(\forall x\ (x>100)\right) \wedge \sqrt{x}>10$

ג. $\forall x\left(x>100 \rightarrow \sqrt{x}>10\right)$

ד. $\left(\forall x\ (x>100)\right) \rightarrow \forall x(\sqrt{x}>10)$

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 12 בעמ׳ הבא

שאלה 12

נתבונן בטענה

A : **לכל סנדלר קיים אדם, שכל הנעליים שלו עברו תיקון אצל הסנדלר הזה.**

טענה השקולה **<u>לשלילת</u>** A היא :

א. לכל אדם קיים סנדלר, שלא תיקן אף נעל של אדם זה.

ב. לכל סנדלר קיים אדם, שאף אחת מהנעלים שלו לא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

ג. לכל סנדלר קיים אדם, שלפחות נעל אחת שלו לא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

ד. קיים סנדלר כך שלכל אדם יש לפחות נעל אחת שלא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

ה. קיים סנדלר שמעולם לא תיקן שתי נעליים של אותו אדם.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרק 1

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 3** נקודות

סמסטר: 2014ב | **מועד אחרון להגשה:** יום א' 23.3.2014

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (24 נק')

שאלה זו נועדת לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות ולחדד כמה נקודות שכדאי להבין בשלב מוקדם:

* ההבדל בין A לבין $\{A\}$ (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא A).
  * מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה $\varnothing$ לבין $\{\varnothing\}$.
* ההבדל בין "x איבר של y" לבין "x חלקי ל- y".

תהיינה: $X = \varnothing$, $Y = \{\varnothing, \mathbf{foo}\}$, $Z = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ (**foo** הוא עצם כלשהו שאינו קבוצה).

לכל אחת מהטענות הבאות קבע אם היא נכונה.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $X \cup Y = Y$ ב. $\{X\} \in Y$ ג. $Y \cap Z = X$

ד. $\{X\} \cup Y = Y$ ה. $X \cup \{Y\} = Y$ ו. $|X \cup Y \cup Z| = 4$

ז. $Z \subseteq P(Y)$ ח. $Y \in P(Y)$

שאלה 2 (32 נק')

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. כדי להפריך טענה - הבא דוגמא נגדית.

לטענות הנכונות - תן הוכחה מסודרת המסתמכת בכל צעד על טענות והגדרות בספר .

א. $(A - B) - B = A - B$

ב. $A - (B - A) = A$

ג. $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

ד. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

שאלה 3 (19 נקי)

הוכח את הטענות הבאות בעזרת **"אלגברה של קבוצות"**: צא מאחד האגפים, פתח אותו בעזרת זהויות ידועות, והגע לאגף השני. אין להשתמש בהוכחה במושג "איבר". במקומות בהם מופיע הפרש קבוצות מומלץ להיעזר בזהות $A - B = A \cap B'$ (עמי 23 בספר הלימוד). **ציין באופן ברור בכל צעד את הזהויות עליהן אתה מסתמך**. הסימן $\oplus$ מוגדר בעמי 27 בספר.

(9 נקי) א. $(A_1 \cup A_2) - (B_1 \cap B_2) = (A_1 - B_1) \cup (A_1 - B_2) \cup (A_2 - B_1) \cup (A_2 - B_2)$

(10 נקי) ב. $A \oplus B = A' \oplus B'$.

שאלה 4 (25 נקי)

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbf{N} = \{0,1,2,...,\}$ (רי עמי 3 בספר הלימוד).

לכל $n \in \mathbf{N}$, תהי $A_n = \{x \in \mathbf{N} \mid 0 \le x \le n\}$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות.

א. $A_0 = \varnothing$

ב. $\forall_{n \in \mathbf{N}} \; A_n \subseteq A_{n+1}$

ג. $\exists_{n \in \mathbf{N}} \; A_n = \mathbf{N}$

ד. $\forall_{n \in \mathbf{N}} \; |A_{n+1} - A_n| = 1$

ה. $\forall_{n \in \mathbf{N}} \; \forall_{k \in \mathbf{N}} \; \exists_{m \in \mathbf{N}} \; |A_m - A_n| = k$

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרק 2

מספר השאלות: 11 **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2014ב **מועד אחרון להגשה:** מוצ"ש בחצות 5.4.2014

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

"רלציה" בעברית: **יחס**.

בשאלות המסומנות בסולמית (#) מופיעות שתי טענות. בשאלות אלה סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה ב - אם רק טענה 2 נכונה
ג - אם שתי הטענות נכונות ד - אם שתי הטענות אינן נכונות

בשאלות ללא סימון סולמית בחרו את התשובה הנכונה מתוך האפשרויות.

שאלה 1

נתון $A\times B=\{(1,5),(2,5),(3,5),(1,1),(2,2),(3,3)\}$. לפיכך

א. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{5\}$
ב. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3,5\}$
ג. $A=B=\{1,2,3,5\}$
ד. לא קיימות קבוצות A,B כאלה.
ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 2

תהי $A=\{1,2,3,4\}$ ויהי R היחס הבא מ- A ל- A: $R=\{(1,1),(1,2),(2,4),(3,1),(3,4)\}$.

$Domain(R)\cap Range(R)$ הוא:

א. $\{1\}$ ב. $\{1,2\}$ ג. $\varnothing$ ד. $\{3,4\}$ ה. A

שאלה 3

R,A הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

טענה (**i**): $RR^{-1}\supseteq I_A$. טענה (**ii**): $R^{-1}R\supseteq I_A$.

שאלה 4

R ,A הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

א. $R = R^2$.

ב. $R \neq R^2$ אבל $R^2 = R^3$.

ג. $R^2 \neq R^3$ אבל $R^3 = R^4$.

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 5 #

R ,A הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

טענה (***i***): $R \cup R^{-1}$ הוא רפלקסיבי.

טענה (***ii***): $R \cup R^{-1}$ הוא סימטרי.

שאלה 6 #

R ,A הם אלה שהוגדרו בשאלה 2.

טענה (***i***): R הוא אנטי-סימטרי.

טענה (***ii***): $R \cup R^{-1}$ הוא טרנזיטיבי.

שאלה 7

היחס $R = \{(1,1),(2,2),(1,3),(2,3)\}$ מעל $A = \{1,2,3\}$ הוא:

א. רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי.

ב. אנטי-סימטרי ורפלקסיבי אך לא טרנזיטיבי.

ג. אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי.

ד. רפלקסיבי וטרנזיטיבי אך לא אנטי-סימטרי.

ה. טרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי ולא אנטי-סימטרי.

שאלה 8 #

R,S הם יחסים לא ריקים מעל קבוצה A ומתקיים $R \subseteq S$.

טענה (***i***): אם S סימטרי אז R **לא יכול להיות** אנטי-סימטרי.

טענה (***ii***): אם S אנטי-סימטרי אז R **לא יכול להיות** סימטרי.

שאלה 9 #

R,S הם יחסים מעל קבוצת הטבעיים $\mathbf{N}$. R הוא רפלקסיבי, S הוא אנטי-סימטרי.

טענה (***i***): $R \cap S$ הוא בהכרח רפלקסיבי.

טענה (***ii***): $R \cap S$ הוא בהכרח אנטי-סימטרי.

שאלה 10

R הוא יחס **טרנזיטיבי וסימטרי** מעל קבוצת הטבעיים $\mathbf{N}$.

ידוע ש- $(1,2) \in R$. מכאן ניתן להסיק :

א. ב- R יש לפחות ארבעה זוגות סדורים.

ב. ב- R יש אינסוף זוגות סדורים.

ג. R רפלקסיבי.

ד. לא ייתכן R כזה.

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 11

R הוא יחס לא ריק מעל קבוצה כלשהי, וידוע ש- R **אינו** טרנזיטיבי.

מכאן ניתן להסיק :

א. ב- R יש לפחות שני זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש R כזה שבו בדיוק שני זוגות.

ב. ב- R יש לפחות 3 זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש R כזה שבו בדיוק 3 זוגות.

ג. ב- R יש לפחות 4 זוגות סדורים.

ד. מהנתון נובע ש- A אינסופית וב- R יש אינסוף זוגות סדורים.

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: "תורת הקבוצות" פרקים 2-3
מספר השאלות: 11 | **משקל המטלה:** 2 נקודות
סמסטר: 2014ב | **מועד אחרון להגשה:** יום ה' 10.4.2014

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

"רלציה" בעברית: יחס.

שאלה 1

יהיו: $A=\{1,2,3,4,5\}$, $R=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$, $E=I_A\cup R\cup R^{-1}$.

החלוקה שיחס השקילות E משרה ב- A היא:

א. $\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$ ב. $\{\{1,2,3\},\{4\},\{5\}\}$

ג. $\{\{1,2,3,4,5\}\}$ ד. $\{\{1,2,3\}\}$

ה. E אינו יחס שקילות מעל A ולכן אינו משרה חלוקה של A.

שאלה 2

נגדיר יחס M מעל $P(\mathbf{N})$:

עבור $X,Y\subseteq\mathbf{N}$, $(X,Y)\in M$ אםם $X\cap\{1,2,3\}=Y\cap\{1,2,3\}$

מספר מחלקות השקילות ש- M משרה ב- $P(\mathbf{N})$ הוא:

א. יש אינסוף מחלקות שקילות. ב. 2 ג. 3 ד. 8

ה. M אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

שאלה 3

נגדיר יחס L מעל $P(\mathbf{N})$:

עבור $X,Y\subseteq\mathbf{N}$, $(X,Y)\in L$ אםם $X\cup\{1,2,3\}=Y\cup\{1,2,3\}$

מספר מחלקות השקילות ש- L משרה ב- $P(\mathbf{N})$ הוא:

א. יש אינסוף מחלקות שקילות. ב. 2 ג. 3 ד. 8

ה. L אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

שאלה 4

נתבונן ביחסי שקילות מעל $\{1,2,3,4,5\}$, בהם 1 ו- 2 נמצאים באותה מחלקה,

3 ו- 4 נמצאים באותה מחלקה (המחלקה שבה נמצאים 3,4 יכולה להיות אותה מחלקה בה נמצאים 1,2 ויכולה להיות מחלקה שונה). מספר יחסי השקילות האלה הוא:

א. 3 ב. 5 ג. 8 ד. 9 ה. 10

שאלה 5

Z היא קבוצת המספרים השלמים, **R** היא קבוצת המספרים הממשיים.

לכל $x \in \mathbf{R}$, $\mathbf{floor}(x)$ מוגדר להיות המספר השלם הגדול ביותר שאינו גדול יותר מ- x .

דוגמאות: $\mathbf{floor}(4.7) = 4$, $\mathbf{floor}(-2.2) = -3$, $\mathbf{floor}(100) = 100$.

floor , כפונקציה מ- **R** ל- **Z** היא:

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- **R** ל- **Z** .

שאלה 6

נסמן $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$. תהי $g(x) = (x+1)^2 - 1$, $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$.

g היא:

א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על

ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.

ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $\mathbf{R}^+$ ל- $\mathbf{R}^+$.

שאלה 7

תהי $U = \{1,2,3,4,5\}$ ותהיינה $A, B \subseteq U$.

בעמ' 85 בכרך "תורת הקבוצות" מוגדרת φ_A , **הפונקציה האופיינית** של A ב- U .

נתון: $\varphi_A(4) \cdot \varphi_B(4) = 1$, $\varphi_A(5) + \varphi_B(5) = 1$. מכאן נובע:

א. $4 \in A \cup B$, $5 \in A \cap B$

ב. $4 \in A \cap B$, $5 \notin A \cup B$

ג. $4 \in A \oplus B$, $5 \in A \cap B$

ד. $4 \in A \cap B$, $5 \in A \oplus B$

ה. $4 \in A \cup B$, $5 \notin A \cup B$

שאלה 8

יהיו $X,Y \subseteq \mathbf{N}$. נאמר ש- $(X,Y) \in D$ **אסם (אם ורק אם)** $X \subseteq Y$. היחס D הוא:

א. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$ ואינו סדר-מלא מעל $P(\mathbf{N})$.

ב. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$, שהוא גם סדר-מלא מעל $P(\mathbf{N})$.

ג. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$, שהוא גם יחס שקילות מעל $P(\mathbf{N})$.

ד. אינו סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$.

שאלה 9

יהיו $X,Y \subseteq \mathbf{N}$. נאמר ש- $(X,Y) \in D$ **אסם (אם ורק אם)** $X \subseteq Y$ או $Y \subseteq X$.

היחס D הוא:

א. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$ ואינו סדר-מלא מעל $P(\mathbf{N})$.

ב. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$, שהוא גם סדר-מלא מעל $P(\mathbf{N})$.

ג. סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$, שהוא גם יחס שקילות מעל $P(\mathbf{N})$.

ד. אינו סדר-חלקי מעל $P(\mathbf{N})$.

שאלה 10

R הוא סדר-חלקי על קבוצה כלשהי A.

a,b הם שני אברים שונים של A, ושניהם אברים מינימליים לגבי R . מכאן נובע:

א. ייתכן מצב כזה, ואז בהכרח $|A| = 2$.

ב. ייתכן מצב כזה, ואז בהכרח R הוא סדר מלא מעל A .

ג. ייתכן מצב כזה, ואז בהכרח R אינו סדר מלא מעל A.

ד. ייתכן מצב כזה, ואז בהכרח A היא אינסופית.

ה. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

שאלה 11

R הוא סדר-חלקי על קבוצה כלשהי A. a,b הם שני אברים שונים של A.

a הוא אבר קטן ביותר לגבי R ו- b הוא אבר מינימלי לגבי R . מכאן נובע:

א. ייתכן מצב כזה, ואז בהכרח $|A| = 2$.

ב. ייתכן מצב כזה, ואז בהכרח R הוא סדר מלא מעל A .

ג. ייתכן מצב כזה, ואז בהכרח R אינו סדר מלא מעל A.

ד. ייתכן מצב כזה, ואז בהכרח A היא אינסופית.

ה. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרקים 2- 3

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 4** נקודות

סמסטר: 2014ב **מועד אחרון להגשה: יום א' 13.4.2014**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

"רלציה" בעברית: **יחס**

שאלה 1 (24 נקודות)

תהי $A=\{1,2,3\}$ ותהי M קבוצת כל היחסים מעל A.

תהי $t:M\to M$ הפונקציה המתאימה לכל $R\in M$ את הסגור הטרנזיטיבי שלו.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. t היא חד-חד-ערכית ב. t היא **על** M

ג. לכל $R\in M$, $t(R-I_A)=t(R)-I_A$ ד. לכל $R\in M$, $t(t(R))=t(R)$

הסבר לסעיף ג: יחס הוא קבוצה של זוגות סדורים. ההפרש הוא הפרש בין קבוצות.

שאלה 2 (28 נקודות)

תהי M קבוצת כל היחסים (הרלציות) מעל $A=\{1,2,3\}$.

יהי K היחס הבא מעל A: $K=\{(1,1),(2,1),(3,1)\}$

תהי $f:M\to M$ הפונקציה הבאה: $f(R)=RK$.

f מתאימה לכל יחס R מעל A את היחס RK (מכפלת שני היחסים).

(7 נק') א. האם f היא חד-חד-ערכית? הוכח את תשובתך.

(7 נק') ב. הוכח שאם $R\subseteq K$ אז $f(R)=R$.

(7 נק') ג. הוכח שלכל $R\in M$, $f(R)\subseteq K$.

(7 נק') ד. נגדיר יחס E מעל M: $(R,S)\in E$ אםם $f(R)=f(S)$.
לפי הדיון "העתק טבעי" בעמ' 84 בספר (או לפי הקובץ "**יחס שקילות המושרה על-ידי פונקציה**", שבאתר הקורס), E הוא יחס שקילות.
לכמה מחלקות שקילות מחלק E את M? הוכיחו.

שאלה 3 (26 נקודות)

תהי F קבוצת כל הפונקציות של $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$. נגדיר יחס K מעל F:

עבור $f,g \in F$: $(f,g) \in K$ אסם **<u>לכל</u>** $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le g(n)$.

(6 נקי) א. הוכח ש- K הוא סדר-חלקי מעל F.

(6 נקי) ב. הוכח ש- K **אינו** סדר-מלא מעל F .

(7 נקי) ג. הוכח שאין ב- F איברים מקסימליים לגבי היחס K.

(7 נקי) ד. הוכח שלכל שני אברים ב- F קיים אבר של F הגדול משניהם.

במלים אחרות, בהינתן $f,g \in F$, הוכח שקיים $h \in F$ המקיים בעת ובעונה אחת:

$(f,h) \in K$, $(g,h) \in K$, h שונה מ- f , h שונה מ- g .

הערה: h אינו איבר קבוע של F אלא תלוי ב- f,g .

שאלה 4 (22 נקודות)

לכל n טבעי יהי $a_n = \sum_{i=0}^{5} (n+i)^2$.

במלים אחרות, a_n הוא סכום **הריבועים** של 6 מספרים טבעיים עוקבים. המחובר הראשון הוא n^2 והמחובר השישי והאחרון הוא $(n+5)^2$.

הוכיחי באינדוקציה: לכל n טבעי , a_n נותן שארית 7 בחילוק ב- 12.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה
חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 4-5
מספר השאלות: 5
משקל המטלה: 3 נקודות
סמסטר: 2014ב
מועד אחרון להגשה: יום ה' 1.5.2014

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

חלק מהממ"ן מסתמך על החוברת "פרק 5" שנמצאת בידיכם.
חוברת זו משלימה את פרק 4 בתורת הקבוצות ומחליפה חלק ממנו.

שאלה 1 (27 נק')

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים, $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

נסמן $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$

בכל סעיף מצא את עוצמת הקבוצה הרשומה בו. הוכח את תשובותיך.

(9 נק') א. $K = \{x \in \mathbf{R}^+ \mid x^2 \in \mathbf{N}\}$

(9 נק') ב. $L = \{(x,y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \mid x \cdot y \in \mathbf{N}\}$

(9 נק') ג. $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \mid (x \cdot y \in \mathbf{N}) \wedge (x^2 \in \mathbf{N})\}$

שאלה 2 (20 נק')

(10 נק') א. תהי K קבוצת כל תת-הקבוצות **הסופיות** של $\mathbf{N}$: $K = \{A \in P(\mathbf{N}) \mid$ היא קבוצה סופית $A\}$. הוכח ש- K היא בת-מניה. אפשר להיעזר בחוברת "אוסף תרגילים פתורים" עמ' 8 שאלה 10ה, אבל שימו לב ששם מדובר על סדרות וכאן על קבוצות, לכן יש עוד מה להוכיח. דרך אפשרית היא להתאים לכל קבוצה - סדרה.

(10 נק') ב. בהינתן $A \in P(\mathbf{N})$, נאמר ש- A **קו-סופית** (*co-finite*) ב- $\mathbf{N}$,
אם A' (המשלימה של A ב- $\mathbf{N}$) היא קבוצה סופית.
מובן שאם A קו-סופית ב- $\mathbf{N}$ אז A אינסופית (מדוע?),
אבל לא כל קבוצה אינסופית של טבעיים היא קו-סופית ב- $\mathbf{N}$ (למשל?).

תהי L קבוצת כל התת-קבוצות הקו-סופיות ב- $\mathbf{N}$:

$L = \{A \in P(\mathbf{N}) \mid$ קו-סופית ב- $\mathbf{N}$ $A\}$. הוכח ש- L היא בת-מניה.

שאלה 3 (18 נקי)

א. תהי M קבוצת כל התת-קבוצות של $\mathbf{N}$ אשר הן ומשלימותיהן **אינסופיות**:

$M = \{A \in P(\mathbf{N}) \mid A \text{ ו- } A' \text{ שתיהן אינסופיות}\}$.

הוכח ש- M **אינה** בת-מניה. עליך להוכיח זאת בעזרת סעיף 4.1.1 בספר ובעזרת העובדה ש- $P(\mathbf{N})$ אינה בת-מנייה. אין להסתמך על טענות אחרות מפרק 5. כדאי להיעזר בשאלה 2 כאן.

ב. מצא בעזרת פרק 5 את עוצמת M. שימוש במשפט מתאים ייתן הוכחה קצרה מאד.

שאלה 4 (15 נקי)

חשבי את עוצמת קבוצת היחסים (רלציות) מעל קבוצת הממשיים $\mathbf{R}$.

הדרכה: כדאי להיזכר בהגדרה של יחס מעל קבוצה.

שאלה 5 (20 נקי)

(10 נקי) א. יהיו k_1, k_2, m_1, m_2 עוצמות.

הוכח שאם $k_1 \le k_2$ ו- $m_1 \le m_2$ אז $k_1 \cdot m_1 \le k_2 \cdot m_2$.

(5 נקי) ב. הוכח: $\aleph_0 \cdot C = C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם).

(5 נקי) ג. הוכח: $C^C = 2^C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם ובמשפטים שבחוברת).

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: "קומבינטוריקה" פרקים 1-2
מספר השאלות: 12 | **משקל המטלה:** 2 נקודות
סמסטר: 2014ב | **מועד אחרון להגשה:** יום א' 11.5.2014

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בשאלות $1-3$ A,B הן קבוצות, $|A|=7$, $|B|=2$, $B\subseteq A$.

שאלה 1

מספר הפונקציות של A ל- B הוא:

א. 2 ב. 14 ג. 49 ד. 2^7 ה. 2^{14}

שאלה 2

נתבונן בקבוצות X המקיימות $B\subseteq X\subseteq A$. מספר הקבוצות הללו הוא:

א. 5 ב. 10 ג. 32 ד. 47 ה. 2^7-4

שאלה 3

מספר היחסים האנטי-סימטריים מעל הקבוצה $A-B$ הוא:

א. 2^{10} ב. 2^{15} ג. 2^{25} ד. 5^{25} ה. 2^7-4

שאלה 4

מספר הדרכים לבחור 3 מספרים שלמים **שונים** בתחום $1\le n\le 50$, עם חשיבות לסדר הבחירה, הוא:

א. $50!/6$ ב. 3^{50} ג. $19{,}600$ ד. $117{,}600$ ה. $125{,}000$

שאלה 5

יהי x מספר האפשרויות לבחור מספרים שלמים n_1, n_2, n_3 כך ש- $1 \le n_1 < n_2 < n_3 \le 50$.

יהי y מספר הקבוצות K המקיימות: $K \subseteq \{1,2,\ldots,50\}$, $|K| = 3$.

א. $y = x/6$ ב. $y = x/3$ ג. $y = x$ ד. $y = 3x$ ה. $y = 6x$

שאלות 6- 8 עוסקות בספר שיש לו שני כרכים (כרך א וכרך ב), וכל כרך קיים ב- 3 שפות: עברית, ערבית ואנגלית. מכל כרך, בכל שפה, יש בספריה 2 עותקים זהים. בסה"כ 12 ספרים. השאלות עוסקות במספר הדרכים לסדר את 12 הספרים הללו על מדף.

עותקים של אותו כרך באותה שפה נחשבים זהים.

שאלה 6

מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את 12 הספרים על המדף, כאשר אין כל דרישה לסדר מסוים של הכרכים, הוא:

א. $6!\cdot 6!$ ב. $6!\cdot 2^3$ ג. $12!/6!$ ד. $12!/6$ ה. $12!/8$

שאלה 7

מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את 12 הספרים על המדף, כאשר עותקים זהים חייבים להיות זה ליד זה, הוא:

א. $6!$ ב. $6!\cdot 8$ ג. $12!$ ד. $6!\cdot 6!$ ה. $6!\cdot 2$

שאלה 8

עותקים זהים חייבים להיות זה ליד זה, ובנוסף כל הכרכים שבאותה שפה חייבים להיות ברצף. מספר הדרכים לסדר את 12 הספרים על המדף הוא כעת:

א. 24 ב. 48 ג. 96 ד. 192 ה. 9

בשאלות 9 – 11 נניח שנתון לנו מספר בלתי מוגבל של כדורים וקוביות, כל כדור צבוע באחד מ- 5 צבעים שונים, וכל קוביה צבועה באחד מ- 3 צבעים שונים. כדורים בעלי אותו צבע נחשבים זהים, קוביות בעלות אותו צבע נחשבות זהות.

שאלה 9

מהו מספר הדרכים לבחור 10 כדורים, ללא חשיבות לסדר הבחירה?

א. $D(10,5)$ ב. $D(5,10) = \binom{14}{4}$ ג. $D(5,10) = \binom{14}{5}$

ד. $100{,}000$ ה. $10!/5!$

שאלה 10

נסמן את התשובה לשאלה הקודמת ב- x.
בכמה דרכים ניתן לבחור 10 כדורים וארבע קוביות, ללא חשיבות לסדר הבחירה?

א. $x+20$ ב. $x\cdot 20$ ג. $x+15$ ד. $x\cdot 15$
ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 11

בכמה דרכים ניתן לבחור 10 כדורים בלבד (הפעם לא בוחרים קוביות), אם הבחירה חייבת להכיל לפחות שני כדורים אדומים, ולפחות כדור אחד מכל צבע אחר?

א. 7 ב. 70 ג. 77 ד. 700 ה. 770

שאלה 12

מהו מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=25$,
כאשר x_1,x_2,x_3 הם מספרים זוגיים ו- x_4,x_5,x_6 הם אי-זוגיים?
תזכורת: 0 הוא מספר טבעי זוגי.
הדרכה: טבעי זוגי הוא מהצורה $2k$, כאשר k טבעי כלשהו.
טבעי אי-זוגי הוא מהצורה $2k+1$, כאשר k טבעי כלשהו.

א. 3486 ב. 4368 ג. 6438 ד. 6384 ה. 6834

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

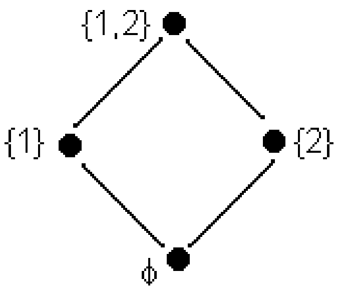
הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה**: קומבינטוריקה פרקים 3-4

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2014ב | **מועד אחרון להגשה:** יום ג' 20.5.2014

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (27 נקודות)



באיור מופיעה דיאגרמת הסה ("תורת הקבוצות" עמ' 88) של יחס ההכלה $\subseteq$ מעל $P(\{1,2\})$.

אנו רואים כי בדיאגרמה 4 קטעים.

תהי A קבוצה בת k איברים $(k>0)$. מצאי את מספר הקטעים בדיאגרמת הסה של יחס ההכלה מעל $P(A)$.

את הביטוי המתקבל סכמי לביטוי פשוט שאינו מכיל סכומים, בעזרת נוסחה המופיעה באחת השאלות בספר הלימוד.

שאלה 2 (27 נקודות)

נסמן $B=\{5,6,7,8,9\}$, $A=\{1,2,3,4\}$.

יהי K יחס מ- A ל- B (כלומר K הוא קבוצה חלקית של $A\times B$).

(7 נק') א. בכמה יחסים K כאלה $1\notin domain(K)$?

(20 נק') ב. בכמה יחסים K כאלה $\{1,2,3\}\subseteq domain(K)$?

כדאי להיעזר בהכלה והפרדה. אין הכרח להגיע לתשובה מספרית.

תזכורת למושגים מתורת הקבוצות:

$K=\{(2,5),(2,6),(3,5),(4,9)\}$ הוא יחס מ- A ל- B, ו- $domain(K)=\{2,3,4\}$.

שאלה 3 (27 נקודות)

במערכת מחשב מסוימת המשתמש נדרש לבחור סיסמא שתקיים את הדרישות הבאות:

אורך הסיסמא הוא 5 או 6 תוים. התוים המותרים הם a-z, A-Z, 0-9 .

הסיסמא חייבת להכיל לפחות אות קטנה אחת, לפחות אות גדולה אחת ולפחות ספרה אחת.

כמה סיסמאות חוקיות שונות אפשר ליצור? אין צורך להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 4 (19 נקודות)

(9 נק') א. בסמסטר מסוים ניגשו לבחינה בקורס "מתמטיקה בדידה" 350 סטודנטים.

ציוני הבחינה הם בין 0 ל- 100 .

כמה סטודנטים חייבים לקבל אותו ציון? במלים אחרות, מצא מספר k כך שבהכרח יש לפחות k סטודנטים שקיבלו כולם אותו ציון, אבל ניתן לחלק ציונים כך שאין $k+1$ סטודנטים שקיבלו כולם אותו ציון.

הוכח ש- k שמצאת עומד בשני התנאים הללו.

(10 נק') ב. **משקל** הבחינה בציון הסופי יכול להיות כל מספר שלם בתחום $70 \le n \le 80$ (תלוי בכמות המטלות שהסטודנט הגיש).

בסמסטר מסוים ניגשו כאמור 350 סטודנטים לבחינה. בסמסטר שאחריו ניגשו לבחינה 420 סטודנטים, בסמסטר הבא (קיץ...) 115, ובסמסטר שאחריו 310.

האם בין כל הנבחנים במועדים אלה בהכרח יש שני סטודנטים שסיימו את הקורס עם אותו ציון בחינה ואותו משקל לציון הבחינה? (ייתכן שהסטודנטים הללו לא נבחנו באותו מועד). הוכיחו את תשובתכם.

בלי התחכמויות, בבקשה... במקומות בהם נתוני השאלה לא לגמרי תואמים לנוהל או למציאות, הנתונים קובעים. למשל אנו מניחים שכל הנבחנים הגישו מטלות במשקל של 20 – 30 נקודות, כך שמשקל הבחינה שלהם הוא אכן בין 70 ל- 80. כמו כן אפשר להתעלם מהאפשרות שסטודנט נבחן בשני מועדים (או אם תרצו, להביא אפשרות זו בחשבון ואז בשאלה את הביטוי "יש שני סטודנטים" יש להבין כך שייתכן שמדובר באותו סטודנט במועדים שונים).

בקיצור, יש להבין את הנתונים כפשוטם.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20476 מתמטיקה דיסקרטית | **חומר הלימוד למטלה**: קומבינטוריקה פרקים 6-7

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2014ב | **מועד אחרון להגשה:** יום ב' 2.6.2014

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1

יהי a_n מספר הסדרות (או המחרוזות) באורך n, שאבריהן לקוחים מהקבוצה $\{a,b,c,1,2\}$
והמקיימות בעת ובעונה אחת את כל התנאים הבאים:
לא מופיע בסדרה הרצף $a1$, לא מופיע הרצף $b2$, ולא מופיע רצף של שתי ספרות.

דוגמאות לסדרות חוקיות באורך 4:
$aaaa$, $abb1$, $1aaa$ (הרצף $1a$ מותר).

דוגמאות לסדרות **לא חוקיות** באורך 4:
$aaa1$ (הופעה של $a1$), $11cc$ (רצף של ספרות), $c121$ (רצף של ספרות).

(10 נק') א. מצאו יחס נסיגה עבור a_n (נמקו!) ומצאו תנאי התחלה מספיקים.

(13 נק') ב. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור a_n.

(4 נק') ג. חשבו בשתי דרכים את a_4.

שאר הממ"ן עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בסוף הממ"ן רשימה של נוסחאות שימושיות.

שאלה 2

א. כתבו פונקציה יוצרת עבור מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3n + 1$,
כאשר כל המשתנים הם מספרים טבעיים המתחלקים ב- 3, פרט לאחד המשתנים שהוא מספר טבעי שאינו מתחלק ב- 3. לא נתון מיהו המשתנה יוצא הדופן.
תזכורת: 0 הוא מספר טבעי והוא מתחלק ב- 3.
הדרכה: כתבו פונקציה יוצרת בהנחה שידוע מיהו יוצא הדופן, וכפלו אותה בגורם מתאים.

ב. בעזרת חלק א, מצאו את מספר הפתרונות בתנאים האמורים כאשר $n = 12$.
יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 3

ארבע משפחות מחלקות ביניהן כדורי פלאפל שקנו אצל מלך הפלאפל.
לא זורקים אוכל. כל משפחה מסוגלת לחסל 20 כדורי פלאפל ולא יותר מזה.
כל משפחה חייבת לקבל לפחות 5 כדורים. הכדורים זהים. המשפחות נחשבות שונות זו מזו.

(9 נק׳) א. רשום פונקציה יוצרת עבור מספר הדרכים לחלק n כדורי פלאפל בין המשפחות לפי התנאים הנ״ל.

(9 נק׳) ב. בדוק והסבר את התשובות המתקבלות מסעיף א עבור המקרים: $n = 20$, $n = 21$, $n = 90$.

(16 נק׳) ג. אם מספר כדורי הפלאפל הוא 55, חשב בעזרת סעיף א׳ את מספר הדרכים לחלק אותם בין המשפחות, לפי אותם תנאים. תן תשובה סופית מספרית.

שאלה 4

דוגמא לתרגיל מסוג זה נמצאת בסוף הקובץ ״מבוא לפונקציות יוצרות״ שבאתר הקורס.

(7 נק׳) א. נרשום את הפיתוחים הבאים:

$$f(x) = (1-x)^{10} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \qquad g(x) = \frac{1}{(1-x)^9} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

מצא את a_i ואת b_i, עבור i טבעי כלשהו.

(13 נק׳) ב. מכיון ש- $f(x)\cdot g(x) = 1 - x$, מובן שעבור כל $1 < k$, המקדם של x^k בפונקציה $f(x)\cdot g(x)$ הוא 0.

חשב את המקדם של x^k ($1 < k$) בפונקציה $f(x)\cdot g(x)$ באופן ישיר ע״י כפל פונקציות יוצרות. קבל מכך זהות אלגברית לגבי מכפלות מסוימות של מקדמים בינומיים.

(5 נק׳) ג. בדוק את הזהות שרשמת עבור המקרה $k = 3$.

להלן כמה נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות:

(i) סכום טור הנדסי סופי: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ואינסופי: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

(ii) כפל פונקציות יוצרות:

אם $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ ו- $f(x)\cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

אז $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד).

(iii) $\frac{1}{(1-x)^n} = (1 + x + x^2 + \ldots)^n = \sum_{k=0}^{\infty} D(n,k)x^k$.

במלים אחרות: המקדם של x^k בפיתוח הביטוי $\frac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$.

ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ׳ 129 בספר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה

חומר הלימוד למטלה: "תורת הגרפים" פרקים 1- 3

מספר השאלות: 11

משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2014ב

מועד אחרון להגשה: יום א' 22.6.2014

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א

בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/

הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

שאלה 1

נתאר לעצמנו גרף על 7 צמתים, שדרגותיהם: 0,1,1,2,3,5,6.

א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.

ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.

ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.

ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.

ה. לא קיים גרף כזה.

שאלה 2

G הוא גרף (לא חייב להיות פשוט) על 55 צמתים, מתוכם:

10 צמתים בעלי דרגה 0, 10 צמתים בעלי דרגה 1, 15 צמתים בעלי דרגה 2,

11 צמתים בעלי דרגה 3, 9 צמתים בעלי דרגה 4.

מספר הקשתות ב- G הוא:

א. 54 ב. 119 ג. 238

ד. אין די נתונים כדי לקבוע את מספר הקשתות. ה. לא ייתכן גרף כזה.

שאלה 3

G הוא גרף דו-צדדי, הצדדים שלו הם A,B. מספר הקשתות ב- G הוא 27.

סכום דרגות הצמתים השייכים לצד A של הגרף הוא 24.

א. יש גרף דו-צדדי כזה, פשוט וקשיר.

ב. יש גרף דו-צדדי כזה, קשיר אבל לא פשוט.

ג. יש גרף דו-צדדי כזה, פשוט אבל לא קשיר.

ד. יש גרף דו-צדדי כזה, לא פשוט ולא קשיר.

ה. לא ייתכן גרף דו-צדדי כזה.

שאלה 4

גרף G מוגדר כך: הצמתים של G הם הקבוצות בנות בדיוק 3 אברים מתוך $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

למשל הקבוצה $\{1,4,8\}$ היא צומת של G.

בין שני צמתים שונים A,B יש קשת אם ורק אם $A \cap B = \varnothing$.

למשל יש קשת בין $\{1,4,8\}$ לבין $\{2,3,5\}$. דרגת כל צומת ב- G היא:

א. 5 ב. 10 ג. 35 ד. 36

ה. G אינו גרף רגולרי - לא לכל הצמתים אותה דרגה.

שאלה 5

בהתייחס לגרף מהשאלה הקודמת, מספר הקשתות בגרף הוא:

א. 35 ב. 53 ג. 70 ד. 170 ה. 270

שאלה 6

השאלה מתייחסת להגדרות 2.7 , 2.8 בחוברת "תורת הגרפים".

יהי G הגרף המתויג הבא על 4 צמתים: 1----2----3----4 (הגרף הוא מסלול פשוט באורך 3).

$\overline{G}$ הוא המשלים של G ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4).

האם הגרפים $G, \overline{G}$ איזומורפיים?

א. הם איזומורפיים כגרפים לא-מתוייגים, והם איזומורפיים כגרפים מתוייגים.

ב. הם איזומורפיים כגרפים לא-מתוייגים, אבל לא איזומורפיים כגרפים מתוייגים.

ג. הם איזומורפיים כגרפים מתוייגים, אבל לא איזומורפיים כגרפים לא-מתוייגים.

ד. הם לא איזומורפיים כגרפים לא-מתוייגים, ולא איזומורפיים כגרפים מתוייגים.

שאלה 7

G הוא **יער** על 14 צמתים, ובו בדיוק 4 רכיבי קשירות. מספר הקשתות ב- G הוא

א. 18 ב. 14 ג. 13 ד. 10

ה. לא ניתן לקבוע את מספר הקשתות מתוך הנתונים.

שאלה 8

G הוא עץ מתויג על 8 צמתים (התגים הם כמקובל המספרים $1,2,3,\ldots,8$).

סדרת Prüfer של G היא $(3,7,2,2,x,2)$ כאשר $x \in \{1,2,3,\ldots,8\}$.

לפיכך:

א. $x = 2$

ב. $x \neq 2$

ג. לא ייתכן: זה לא האורך המתאים עבור סדרת Prüfer של G.

ד. אורך הסדרה מתאים אבל אף ערך של x לא נותן סדרת Prüfer חוקית.

ה. x יכול להיות כל מספר שנרצה בקבוצה $\{1,2,3,\ldots,8\}$.

שאלה 9

G הוא גרף פשוט וקשיר על קבוצת הצמתים $\{1,2,\ldots,10\}$. נתון ש- G הוא **אוילרי**.

עוד נתון שבקבוצת הצמתים $\{1,2,3,4,5\}$ אין אף שניים המחוברים בקשת זה עם זה.

נצרף ל- G את קשתות הגרף המלא K_5 על הצמתים $\{1,2,3,4,5\}$. הגרף שנקבל הוא:

א. אוילרי.

ב. אינו אוילרי, אבל יש בו מסלול אוילר שאינו מעגל.

ג. אינו אוילרי, ואין בו מסלול אוילר שאינו מעגל.

ד. ייתכן שהוא אוילרי וייתכן שלא – תלוי בגרף המקורי G.

ה. יש סתירה בנתונים: לא ייתכן ש- G המקורי הוא פשוט, קשיר ואוילרי.

שאלה 10

G הוא גרף אוילרי (כלומר יש בו מעגל אוילר), ויש ב- G גם מסלול אוילר שאינו מעגל.

א. זה לא מעניין, בכל גרף אוילרי יש גם מסלול אוילר שאינו מעגל.

ב. טענה א׳ אינה נכונה, אבל יש גרף פשוט המקיים את הדרישות הללו.

ג. יש גרף כזה, אבל לא גרף פשוט.

ד. לא ייתכן גרף כזה.

שאלה 11

בגרף פשוט G, מסלול מסוים הוא בעת ובעונה אחת מעגל אוילר ומעגל המילטון.

מכאן נובע:

א. G הוא מעגל פשוט.

ב. G הוא מעגל, אבל הוא לא חייב להיות מעגל פשוט.

ג. G הוא גרף פשוט, אבל הוא לא חייב להיות מעגל.

ד. G הוא גרף בעל מספר זוגי של צמתים.

ה. לא ייתכן גרף כזה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20476 – מתמטיקה בדידה

חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים – כל היחידה

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2014ב **מועד אחרון להגשה:** יום ג' 24.6.2014

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד, לא סרוק**), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (15 נקודות)

בממ"ן 14 שאלה 1 הסתכלנו בדיאגרמת הסה של יחס ההכלה מעל קבוצה A בת k אברים.

כדי לפשט את הסימון נניח $A=\{1,2,\dots,k\}$.

נסתכל שוב באותה דיאגרמת הסה, והפעם נראה אותה כגרף. צמתי הגרף הם אברי $P(A)$.

א. הראו שהגרף הוא רגולרי (כלומר לכל הצמתים אותה דרגה). מהי הדרגה?

ב. בממ"ן 14 חישבנו את מספר הקשתות בגרף. חשבו אותו מחדש, הפעם על ידי שיקול פשוט של תורת הגרפים.

ג. הוכיחו שהגרף הוא דו-צדדי: הראו חלוקה של הצמתים לשני צדדים.

שאלה 2 (25 נקודות)

יהיו $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ שני עצים על אותה קבוצת צמתים V.

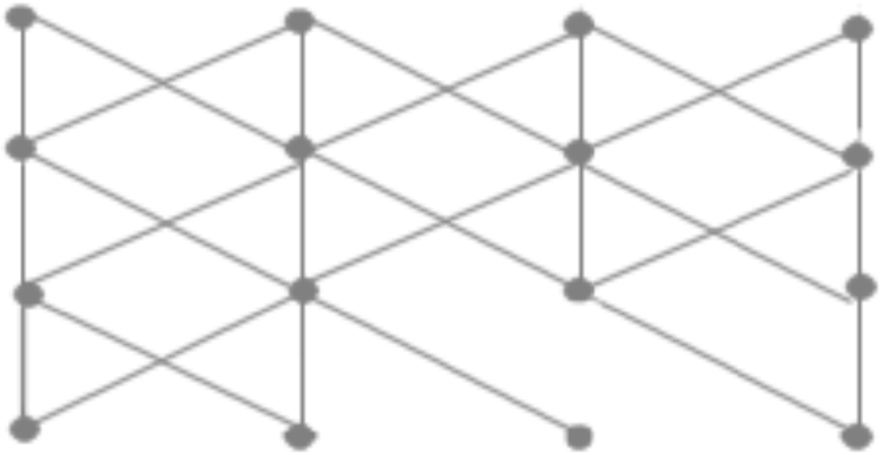
לכל $v\in V$ תהי $d_1(v)$ הדרגה של v ב- G_1 ותהי $d_2(v)$ הדרגה של v ב- G_2 .

הוכיחו כי קיים $v\in V$ עבורו $d_1(v)+d_2(v)\le 3$.

הדרכה: חשבו את סכום כל הדרגות בשני העצים.

שאלה 3 (16 נקודות)

באיור שלהלן גרף על 16 צמתים. הוא בנוי מארבע "קומות", בכל קומה 4 צמתים.
הוכיחו שבגרף זה אין זיווג מושלם.



שאלה 4 (16 נקודות)

השאלה עוסקת בגרף שהוגדר בשאלה 1 .

א. הראו שעבור $k=4$ הגרף אינו מישורי.

למנוע עגמת נפש, שימו לב ש- k אינו מספר הצמתים בגרף...

ב. הראו שלכל $n \geq 4$ הגרף אינו מישורי.

הדרכה: הסתמכו על סעיף א. אפשר להמשיך באופן אלגברי ואפשר משיקולים של תורת הגרפים.

שאלה 5 (28 נקודות)

G_1 הוא גרף על קבוצת הצמתים $\{1,2,\ldots,8\}$ ונתון שמספר הצביעה של G_1 הוא 5.

G_2 הוא גרף על קבוצת הצמתים $\{7,8,\ldots,20\}$ ונתון שמספר הצביעה של G_2 הוא 7.

עוד נתון שבאף אחד משני הגרפים אין קשת בין הצומת 7 לצומת 8.

G הוא גרף על קבוצת הצמתים $\{1,2,\ldots,20\}$, שקבוצת הקשתות שלו היא איחוד קבוצת הקשתות של G_1 עם קבוצת הקשתות של G_2 .

מספר הצביעה של G הוא: 5 / 7 / 12 / לא ניתן לקבוע בלי מידע נוסף.

מצא את התשובה הנכונה והוכח אותה.