מבחן א $2004 - 90$,

יש לענות על ארבע מחמש השאלות הבאות.

- **שאלה 1** (25 נקודות)

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל כקלט גרף לא מכוון $G = (V, E)$, שני צמתים $u, v \in V$ ומוצא את מספר המסלולים הקצרים ביותר בין u ל- v ב- G. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

- **שאלה 2** (25 נקודות)

נתון גרף לא מכוון $G = (V, E)$, עם פונקצית משקל $w : E \to R^+$. יהי $T = (V, E')$ עץ פורש של G המקיים את התכונה הבאה: לכל קשת $e \in E$ כך ש- $e \notin T$ קיים מעגל ב- G המכיל את e ובו ל- e משקל מקסימלי.

א. הוכיחו כי אם משקלי הקשתות ב- G שונים זה מזה אז בהכרח T הוא עץ פורש מינימלי.

ב. הראו כי ללא התנאי המובא בסעיף א' יתכן כי T אינו עץ פורש מינימלי.

- **שאלה 3** (25 נקודות)

בגרף לא מכוון $G = (V, E)$ גשר היא קשת $e \in E$ שהסרתה מהגרף הופכת את G לגרף לא קשיר.

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:
קשת e היא גשר אם ורק אם היא בעלת אחת משתי התכונות הבאות: א. היא פוגעת בצומת שדרגתו 1.
ב. היא מחברת שני צמתי הפרדה שאינם נמצאים על מעגל אחד.

- **שאלה 4** (25 נקודות)

במועדון רוקדים ריקודי זוגות.
תהי A קבוצת הגברים ו- B קבוצת הנשים.
לכל גבר $a_i \in A$ יש קבוצת נשים $B_i \subseteq B$ אשר מתאימות לו.
לכל אישה $b_j \in B$ יש קבוצת גברים $A_j \subseteq A$ אשר מתאימים לה. בנוסף מוגדרת קבוצה $X \subseteq A \cup B$ של אנשים שמרנים שמוכנים לרקוד במהלך הערב עם אדם אחד לכל היותר.

כתבו אלגוריתם אשר מוצא סידור של זוגות לריקודים במועדון במהלך הערב, כך שכל גבר ירקוד רק עם נש-ים שמתאימות לו, כל אישה תרקוד רק עם גברים שמתאימים לה, השמרנים יהיו מרוצים, ומספר הריקודים במועדון יהיה מקסימלי.
הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

- **שאלה 5** (25 נקודות)

כפל מטריצות בוליאני מוגדר באופן הבא:
בהינתן A, B מטריצות בוליאניות (כלומר, שערך כניסותיהן הוא 0 או 1) בגודל $n \times n$, המכפלה הבוליאנית $C = A \odot B$ מוגדרת על ידי: $c_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge b_{kj})$

תהי A מטריצת השכנויות של גרף מכוון $G = (V, E)$.
נסמן ב- $A^{\odot k}$ את החזקה ה-k-ית של A כאשר משתמשים בכפל בוליאני של מטריצות.
ידוע כי מתקיים $(A^{\odot k})_{ij} = 1$ אם ורק אם קיים ב- G מסלול באורך k בין i ל- j.
נניח כי ניתן לחשב את המכפלה הבוליאנית של שתי המטריצות מגודל $n \times n$ בזמן $M(n)$.
הראה כי ניתן לחשב בזמן $O(M(n) \log n)$ מטריצה C כך שלכל $1 \le i, j \le n$ מתקיים $\delta(i,j) \le C_{ij} \le 2 \cdot \delta(i,j)$ כאשר $\delta(i,j)$ הוא המרחק בין הצמתים i ו- j בגרף G.