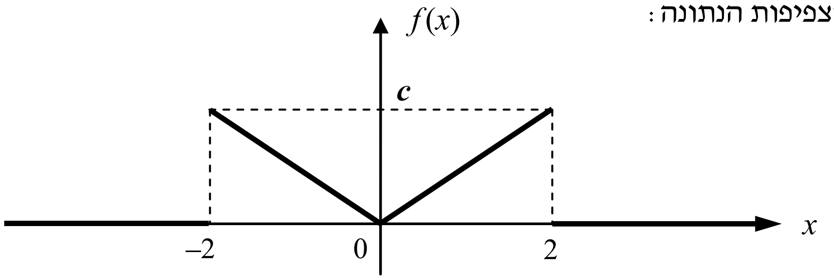
פתרונות לממ"ן 13 - 2014א - 20425

1. א. נצייר תחילה את פונקציית הצפיפות הנתונה:



קל לראות, שהשטח הכלוא בין ציר ה-x לפונקציית הצפיפות הוא $2c$, ולכן מתקיים $c = 0.5$.

ב. מכיוון שפונקציית הצפיפות הנתונה סימטרית, מוגדרת על קטע סופי וחסומה מלעיל, נובע שהתוחלת של המשתנה המקרי X היא 0.

נחשב את התוחלת גם באופן ישיר:

$$E[X] = \int_{-2}^{0} -0.25x^2dx + \int_{0}^{2} 0.25x^2dx = 0.25\left(-\tfrac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{0} + \tfrac{1}{3}x^3\Big|_{0}^{2}\right) = \tfrac{1}{3}\cdot(0-8+8-0) = 0$$

ג. לכל $-2 < x < 0$ מתקיים:

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cdot|x|\cdot\left|\tfrac{x}{4}\right| = \tfrac{1}{2} - \tfrac{x^2}{8}$$

ולכל $0 < x < 2$ מתקיים:

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot x\cdot\tfrac{x}{4} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{x^2}{8}$$

כלומר:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le -2 \\ \frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} & , \quad -2 < x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} & , \quad 0 \le x < 2 \\ 1 & , \quad x \ge 2 \end{cases}$$

ד.

$$P\left\{X < 1 \,\middle|\, |X| > \tfrac{1}{2}\right\} = \frac{P\{X < 1 \cap |X| > \frac{1}{2}\}}{1 - P\{|X| \le \frac{1}{2}\}} = \frac{P\{X < -\frac{1}{2} \cup \frac{1}{2} < X < 1\}}{1 - P\{|X| \le \frac{1}{2}\}}$$

$$= \frac{P\{X < -\frac{1}{2}\} + P\{\frac{1}{2} < X < 1\}}{1 - P\{-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}\}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{0.5^2}{8} + \left(\cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1^2}{8} - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{0.5^2}{8}\right)}{1 - \left(\cancel{\frac{1}{2}} + \frac{0.5^2}{8} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{0.5^2}{8}\right)} = \frac{0.5625}{0.9375} = 0.6$$

2. א. השטח הכלוא מתחת לעקומת הצפיפות שווה ל-1, לכן: $\frac{1}{2}\cdot 0.4^2 + 0.4\cdot(c-0.4) = 0.4c - 0.08 = 1$

ומכאן מקבלים: $c = \frac{1.08}{0.4} = 2.7$

ב. ההסתברות המבוקשת שווה לשטח הכלוא מתחת לעקומת הצפיפות ובין הנקודות 0.2 ו-1.

כלומר, נחשב את שטח הטרפז המתאים: $P\{0.2 < X < 1\} = \frac{0.2(0.2+0.4)}{2} + 0.6\cdot 0.4 = 0.3$

ג. נרשום תחילה את פונקציית הצפיפות של X:
$$f_X(x)=\begin{cases} x & , \quad 0<x<0.4 \\ 0.4 & , \quad 0.4\le x<2.7 \\ 0 & , \quad else \end{cases}$$

כעת, נחשב בעזרת פונקציית הצפיפות שרשמנו את התוחלת של X:

$$E[X]=\int_0^{0.4} x^2dx+\int_{0.4}^{2.7} 0.4x\,dx=\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{0.4}+\frac{0.4x^2}{2}\bigg|_{0.4}^{2.7}=\frac{0.4^3}{3}+\frac{0.4(2.7^2-0.4^2)}{2}=1.447\overline{3}$$

ד.
$$P\{X\le x\,|\,X>0.4\}=\begin{cases} 0 & , \quad x\le 0.4 \\ \dfrac{P\{0.4<X\le x\}}{P\{X>0.4\}}=\dfrac{0.4\cdot(x-0.4)}{0.4\cdot(2.7-0.4)}=\dfrac{x-0.4}{2.3} & , \quad 0.4<x<2.7 \\ 1 & , \quad x\ge 2.7 \end{cases}$$

הערה: ההסתברויות $P\{0.4<X\le x\}$ ו- $P\{X>0.4\}$ חושבו כשטחי מלבנים מתחת לפונקציית הצפיפות הנתונה.

3. א. ההסתברות ששלושתם הגיעו עד רבע לחמש היא: $0.75^3=0.421875$

ההסתברות ששניים הגיעו עד ארבע וחצי והשלישי בין ארבע וחצי <u>לרבע לחמש</u> היא:

$$3\cdot 0.5^2\cdot 0.25=0.1875$$

לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $\dfrac{0.1875}{0.421875}=\dfrac{4}{9}=0.44\overline{4}$

ב. מטעמי סימטריה בין הנפגשים (הנובעת מכך שהתפלגות זמן ההגעה של שלושתם זהה ובגלל חוסר התלות ביניהם), ההסתברות שליאת תגיע אחרונה היא $\frac{1}{3}$.

4. א. הגורמים התלויים ב- x בפונקציית הצפיפות הנתונה, שווים לגורמים התלויים ב- x בפונקציית צפיפות של התפלגות מעריכית עם הפרמטר $\lambda=0.2$. לכן, בהכרח $2c=\lambda=0.2$, כלומר, $c=0.1$.

ב. מהאמור בסעיף הקודם, נובע כי: $E[X]=\frac{1}{0.2}=5$

$$E[X^2]=\mathrm{Var}(X)+(E[X])^2=\tfrac{1}{0.2^2}+5^2=50$$

לכן, נקבל כי:

$$E[Y]=E[X^2-4]=E[X^2]-4=50-4=46$$

ג. שורשי הפונקציה הריבועית המגדירה את המשתנה המקרי Y, כלומר, שורשי הפונקציה $y=x^2-4$ הם -2 ו- 2. כעת, מכיוון ש-X הוא משתנה מקרי אי-שלילי, המאורע $\{Y>0\}$ מתרחש אם ורק אם המאורע $\{X>2\}$ מתרחש. לפיכך, ההסתברות המותנית המבוקשת היא:

$$P\{Y>0\,|\,X>1\}=P\{X>2\,|\,X>1\}\underset{\substack{\downarrow\\ \text{תכונת חוסר-הזכרון של מ"מ מעריכי}}}{=}P\{X>1\}=e^{-0.2\cdot 1}=0.8187$$

5. נסמן ב-X את המשקל של צפרדע מקרית ; $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

א. נתון כי : $P\{X < 72.308\} = 0.1 \quad ; \quad P\{X > 77.69\} = 0.65$

לכן : $\Phi\left(\frac{72.308-\mu}{\sigma}\right) = 0.1 \quad ; \quad 1 - \Phi\left(\frac{77.69-\mu}{\sigma}\right) = 0.65$

או לחלופין : $\Phi\left(-\frac{72.308-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.1 = 0.9 \quad ; \quad \Phi\left(-\frac{77.69-\mu}{\sigma}\right) = 0.65$

נמצא כעת, את הערכים בהתפלגות הנורמלית סטנדרטית, המקיימים $\Phi(z_1) = 0.65$ ו- $\Phi(z_2) = 0.9$.
לשם כך, נעזר בטבלה 5.2, המובאת במדריך הלמידה בעמוד 115, ונקבל כי :

$\Phi(1.282) = 0.9 \quad ; \quad \Phi(0.385) = 0.65$

לפיכך, כדי למצוא את הפרמטרים של ההתפלגות הנורמלית הנתונה, עלינו לפתור את מערכת המשוואות : $-\frac{72.308-\mu}{\sigma} = 1.282 \quad ; \quad -\frac{77.69-\mu}{\sigma} = 0.385$

פתרון מערכת המשוואות מניב את הפרמטרים $\mu = 80$ ו- $\sigma = 6$.

ב. נפתור את המשוואה $P\{X < a\} = 0.71$: $P\{X < a\} = \Phi\left(\frac{a-80}{6}\right) = 0.71 \cong \Phi(0.5534)$

כלומר, המשקל (בגרמים) הוא : $a = 80 + 0.5534 \cdot 6 = 83.3204$

עלינו למצוא z שמקיים את המשוואה : $\Phi\left(\frac{a-80}{6}\right) = 0.71 = \Phi(z)$

מטבלה 5.1, עמוד 112 במדריך, אנו רואים שקיים z שעבורו $\Phi(z) < 0.71$ וקיים z שעבורו $\Phi(z) > 0.71$, אבל לא קיים z כנדרש :

$$\begin{array}{ccc} \Phi(0.55) = & 0.7088 & < 0.71 \\ \downarrow & \downarrow & \\ \underline{0.01} & \underline{0.0035} & \\ \uparrow & \uparrow & \\ \Phi(0.56) = & 0.7123 & > 0.71 \end{array}$$

לפיכך, עלינו להשתמש במרחק של 0.71 מהערכים הקרובים לו ביותר בטבלה (דהיינו, 0.7088 ו- 0.7123), כדי למצוא את המיקום היחסי של z המבוקש. נקבל :

$0.71 - 0.7088 = \underline{0.0012}$

$\Phi(0.55 + \underline{0.01} \cdot \underline{0.0012} / \underline{0.0035}) = \Phi(0.5534) = 0.71 \quad \Leftarrow$

ג.
$$P\{X < 81 \mid X > 76\} = \frac{P\{76 < X < 81\}}{P\{X > 76\}} = \frac{\Phi(\frac{81-80}{6}) - \Phi(\frac{76-80}{6})}{1 - \Phi(\frac{76-80}{6})} = \frac{\Phi(0.1667) - \Phi(-0.6667)}{\Phi(0.6667)}$$

$$= \frac{0.5662 - (1 - 0.7475)}{0.7475} = \frac{0.3137}{0.7475} = 0.4197$$

הסבר לחישוב $\Phi(0.1667)$ ו- $\Phi(0.6667)$ בעמוד הבא.

הסבר לחישוב $\Phi(0.1667)$:

z	0.00	$\cdots$	0.06	0.07	$\cdots$
0.0					
0.1			$\Phi(0.16) = 0.5636$	$\Phi(0.17) = 0.5675$	
$\vdots$					

$\Phi(0.1667) \cong 0.5662$

והחישוב המדויק:

$$\begin{array}{l} \Phi(0.16) = 0.5636 \\ \qquad \Rightarrow\ 0.5675 - 0.5636 = \underline{\underline{0.039}} \quad \Rightarrow \quad \Phi(0.16\underline{67}) = 0.5636 + 0.\underline{67} \cdot \underline{\underline{0.039}} = 0.5662 \\ \Phi(0.17) = 0.5675 \end{array}$$

הסבר לחישוב $\Phi(0.6667)$:

z	0.00	$\cdots$	0.06	0.07	$\cdots$
0.0					
$\vdots$					
0.6			$\Phi(0.66) = 0.7454$	$\Phi(0.67) = 0.7486$	

$\Phi(0.6667) \cong 0.7475$

והחישוב המדויק:

$$\begin{array}{l} \Phi(0.66) = 0.7454 \\ \qquad \Rightarrow\ 0.7486 - 0.7454 = \underline{\underline{0.032}} \quad \Rightarrow \quad \Phi(0.66\underline{67}) = 0.7454 + 0.\underline{67} \cdot \underline{\underline{0.032}} = 0.7475 \\ \Phi(0.67) = 0.7486 \end{array}$$

ד. נסמן ב-Y את כמות המזון (בגרמים) שצפרדע מקרית מהזן הזה צורכת ביום. מכיוון ש-Y הוא טרנספורמציה לינארית של X , המוגדרת על-ידי $Y = 0.1X$, יש למשתנה המקרי Y **התפלגות נורמלית** עם תוחלת $\mu = 0.1 \cdot 80 = 8$ ושונות $\sigma^2 = 0.1^2 \cdot 6^2 = 0.36$.