

בחינה 3 (במתכונת ישנה !)

מבנה הבחינה :

- * יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- * משקל כל שאלה 25% .
- * אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- * יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נאמר במפורש בשאלה.
 - * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
 - * אפשר גם להסתמך על טענות מהמדור "עזרים ללמידה" באתר הקורס.
 - * אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
 - * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
-

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קראו בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

תהי M קבוצת היחסים (הרלציות) מעל $A = \{1,2,3\}$.

(7 נק') א. מהי $|M|$?

(18 נק') ב. נגדיר יחס S מעל M (שימו לב, מעל M ולא מעל A):

עבור $R_1, R_2 \in M$: $(R_1, R_2) \in S$ אם $R_1 R_2 = R_2 R_1$.

הוכיחו ש- S אינו יחס שקילות מעל M .

שאלה 2

בעמ' 27 בכרך "תורת הקבוצות" הגדרנו פעולה של הפרש סימטרי בין שתי קבוצות. להלן נסיון לא מוצלח להגדיר הפרש סימטרי בין **עוצמות**.
מצאו מה לא תקין בהגדרה הבאה.

בהנתן עוצמות k, m (לא בהכרח שונות זו מזו),

תהיינה A, B קבוצות המקיימות $|A| = k$, $|B| = m$.

נגדיר : $k \oplus m = |A \oplus B|$.

הגדרה כזו אינה אפשרית. עליכם להסביר מה הבעיה בהגדרה, ולהראות ע"י דוגמא שההגדרה אינה תקינה. הדרכה: ראו ההגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות.

שאלה 3

ברשותנו כדורים אדומים, כדורים כחולים, כדורים ירוקים וכדורים לבנים, מכל צבע בדיוק 10 כדורים. בכמה דרכים ניתן לבחור מתוכם 24 כדורים, ללא חשיבות לסדר הבחירה?
כדורים בעלי אותו צבע נחשבים זהים.
יש להגיע לתשובה סופית מספרית, ולא ע"י חישוב סכום של עשרות גורמים.
אפשר להיעזר בפונקציה יוצרת, אפשר בעזרת הכלה והפרדה, כל דרך נכונה תתקבל.

שאלה 4

תהי $A = \{1,2,3,4,5\}$.

נסמן $A^3 = A \times A \times A$, קבוצת הסדרות באורך 3 שאבריהן לקוחים מ- A .

א. כמה פונקציות של A^3 לקבוצה $\{0,1\}$ קיימות?

ב. נגדיר יחס שקילות מעל A^3 : שתי שלשות סדורות ייקראו שקולות אם הן שוות, או נבדלות רק בסידור האיברים בשלשה. דוגמאות:

$(1,2,3)$ שקולה ל- $(2,1,3)$.

$(1,2,2)$ שקולה ל- $(2,1,2)$, אך אינה שקולה ל- $(1,1,2)$.

כמה מחלקות שקילות יש? נמקו.

ג. לכמה פונקציות של A^3 לקבוצה $\{0,1\}$ יש התכונה הבאה:

לכל $a, b, c \in A$ לאו דווקא שונים זה מזה מתקיים:

$$f(a, b, c) = f(a, c, b) = f(b, a, c) = f(b, c, a) = f(c, a, b) = f(c, b, a)$$

הדרכה לסעיף ג': היעזרו בסעיף ב'. יש לנמק.

אפשר גם להיעזר במושג "פונקציה אופיינית", שהוגדר בעמ' 85 בכרך "תורת הקבוצות".

שאלה 5

יהיו $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$ שני עצים על אותה קבוצת צמתים V .

לכל $v \in V$ תהי $d_1(v)$ הדרגה של v ב- G_1 ותהי $d_2(v)$ הדרגה של v ב- G_2 .

הוכיחו כי קיים $v \in V$ עבורו $d_1(v) + d_2(v) \leq 3$.

הדרכה: חשבו את סכום כל הדרגות בשני העצים.

בהצלחה!