

מבנה הבחינה :

בבחינה חמש שאלות.
עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות.
לכל השאלות משקל שווה.

הנחיות :

כל תשובה צריכה להתחיל בעמוד **חדש**.
אין לכתוב בצבע אדום.
אין לכתוב בעיפרון.

אפשר להשתמש בכל עובדה או תוצאה הנמצאת בספר הלימוד או במדריך הלמידה, ללא הוכחה או הסבר. חובה להוכיח או להסביר כל טענה אחרת. אין צורך לכתוב פסידוקוד, אלא אם נדרש במפורש.

שאלה 1

נתונים n קטעים $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, על הישר הממשי (a_i, b_i) מספרים ממשיים, $a_i \leq b_i$ לכל $i = 1, 2, \dots, n$.

כתבו אלגוריתם למציאת אינדקס k , $1 \leq k \leq n$, המקיים את התנאי: הקטע $[a_k, b_k]$ חותך מספר מינימלי של קטעים אחרים (מ- n הקטעים הנתונים). זמן הריצה הנדרש הינו $O(n \cdot \lg n)$.

שאלה 2

א' (10 נקודות) איזה ערך של q מחזירה השגרה $\text{PARTITION}(A, p, r)$ כאשר מתקיימים התנאים

$$\begin{aligned} A[p] &= A[p+1] = \dots = A[p+m-1] = b \\ A[p+m] &= A[p+m+1] = \dots = A[r] = a \\ 0 < m &\leq r-p, \quad a < b \end{aligned}$$

ב' (15 נקודות) מהו זמן הריצה האסימפטוטי של האלגוריתם מיון-מהיר עבור המערך $A[1..n]$ המקיים את התנאים

$$\begin{aligned} A[1] &= A[2] = \dots = A[m] = b \\ A[1+m] &= A[2+m] = \dots = A[n] = a \\ 0 < m &< n, \quad a < b \end{aligned}$$

שאלה 3

נתונה ערמה בינרית H מסוג מינימום, בת n איברים, הממומשת כעץ בינרי (לא כמערך). כל צומת z בערמה מכיל (פרט לשדה המפתח $key[z]$) עוד שדה $count[z]$ המאחסן את מספר האיברים בתת-ערמה המושרשת בצומת z .

א' (10 נקודות) כתבו שגרה למציאת העלה האחרון בערמה (האיבר הימני ביותר ברמה התחתונה). זמן הריצה הנדרש: $\Theta(\lg n)$.

ב' (15 נקודות) כתבו גרסאות מתאימות עבור שגרת מחיקת המינימום ועבור שגרת ההכנסה (הכוללות את עדכון שדה $count$).

שאלה 4

הציעו מבנה נתונים S שבאמצעותו ניתן לממש כל אחת מהפעולות הבאות בסיבוכיות המבוקשת:

- INSERT(k, R, S): הכנסת רשומה חדשה R בעלת המפתח k למבנה S ; זמן הריצה: $O(\lg n)$;
 - INCREASE(p, d, S): הגדלת מפתח הרשומה שאליה מצביע p בערך $d > 0$; זמן הריצה: $O(\lg n)$;
 - NUM-MAJORITY(S): החזרת מספר הרשומות בעלות המפתח השכיח ביותר במבנה S ; זמן הריצה: $O(1)$;
 - DEL-OLDEST(S): מחיקת הרשומה שנכנסה ראשונה למבנה S ; זמן הריצה: $O(\lg n)$.
- הערה:** n מציין את מספר המפתחות השונים ב- S (מספר הרשומות יכול להיות הרבה יותר גדול מ- n).

שאלה 5

ברצוננו לתכנן מבנה נתונים לאחסון ותחזוקת קבוצה P של זוגות סדורים של מפתחות. נסמן ב- n_1 את מספר הערכים השונים של המפתח הראשון וב- n_2 את מספר הערכים השונים של המפתח השני. נניח שלא קיימים שני זוגות שבהם שני המפתחות זהים. לכל ערך a של המפתח הראשון, נסמן ב- P_a את קבוצת המפתחות b הנמצאים בזוגות $(a, b) \in P$.

הציעו מבנה נתונים S לאחסון קבוצת הזוגות P , שבאמצעותו אפשר יהיה לממש כל אחת מהפעולות הבאות בזמנים הנדרשים:

SEARCH(S, a, b): חיפוש במבנה S אחר זוג המפתחות (a, b) ; זמן הריצה: $O(\lg n_1 + \lg n_2)$;

INSERT(S, a, b): הכנסת זוג המפתחות (a, b) למבנה S ; זמן הריצה: $O(\lg n_1 + \lg n_2)$;

DELETE(S, p): מחיקת זוג המפתחות שאליה מצביע p מהמבנה S ; זמן הריצה: $O(\lg n_1 + \lg n_2)$;

MEDMED(S): החזרת החציון של כל חציוני הקבוצות P_a ; זמן הריצה: $O(\lg n_1)$.

הסבירו איך מתבצעת כל פעולה והוכיחו את זמן ריצתה.

הערות: מבנה הנתונים S יכול להיות מורכב מכמה מבני נתונים יסודיים. אין חובה לכתוב את השגרות בפסידוקוד.

בהצלחה !