20416 - תאריך הבחינה: 5.9.2016 (סמסטר 2016ב - מועד 4ב / 93)

שאלה 1

א.
$$\int_0^\infty\int_{-y}^{y} c(y^2-x^2)e^{-y}dxdy = c\int_0^\infty e^{-y}\left[y^2x-\tfrac{x^3}{3}\right]_{-y}^{y}dy = c\int_0^\infty e^{-y}\left(y^3-\tfrac{y^3}{3}+y^3-\tfrac{y^3}{3}\right)dy$$
$$= c\int_0^\infty e^{-y}\tfrac{4}{3}y^3dy = \tfrac{4}{3}\cdot 3!\cdot c\underbrace{\int_0^\infty \tfrac{1}{\Gamma(4)}e^{-y}y^3dy}_{=1} = 8c \qquad \Rightarrow \qquad c=\tfrac{1}{8}$$

ב. נשים לב, שפונקציית ההסתברות המשותפת סימטרית סביב 0 ביחס לערכי x, לפיכך, $P\{X>0\}=0.5$.
למרות זאת, נראה שמתקיים השוויון $P\{X>0\}=P\{X<0\}$ וממנו נסיק כי $P\{X>0\}=0.5$.

מתקיים:
$$P\{X>0\}=\tfrac{1}{8}\int_0^\infty\int_0^y(y^2-x^2)e^{-y}dxdy \underset{\substack{\downarrow\\ t=-x\\ dt=-dx}}{=} -\tfrac{1}{8}\int_0^\infty\int_0^{-y}(y^2-t^2)e^{-y}dtdy$$
$$=\tfrac{1}{8}\int_0^\infty\int_{-y}^{0}(y^2-t^2)e^{-y}dtdy = P\{X<0\}$$

ג. נמצא תחילה את פונקציית הצפיפות השולית של Y:
$$f_Y(y)=\tfrac{1}{8}\int_{-y}^{y}(y^2-x^2)e^{-y}dx=\tfrac{1}{8}e^{-y}\left[y^2x-\tfrac{x^3}{3}\right]_{-y}^{y}=\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{4}{3}e^{-y}y^3=\tfrac{1}{\Gamma(4)}e^{-y}y^3 \qquad , \qquad y>0$$

קיבלנו כי למשתנה המקרי Y יש התפלגות גמא עם הפרמטרים $t=4$ ו- $\lambda=1$.
מכאן, שמתקיים $\mathrm{Var}(Y)=4/1^2=4$.

שאלה 2

א. כדי לחשב את ההסתברות שכל הילדים יקבלו זוגות "מעורבים" של כדורים נעזר בכלל ההכלה וההפרדה.
ראשית, יש $\binom{10}{2,2,2,2,2}=\frac{10!}{2^5}=113{,}400$ אפשרויות לחלק את הכדורים לילדים.

שנית, נסמן ב- A_i את המאורע שילד i מקבל זוג "מעורב" של כדורים, לכל $i=1,2,3,4,5$, ונחשב את מספר החלוקות השייכות למאורע $A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5$. תנאי הבעיה סימטריים, לכן:

$$n(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5)=113{,}400-n(A_1^C\cup A_2^C\cup A_3^C\cup A_4^C\cup A_5^C)$$
$$=113{,}400-\left[\binom{5}{1}n(A_1^C)-\binom{5}{2}n(A_1^C\cap A_2^C)+\ldots+\binom{5}{5}n(A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C\cap A_4^C\cap A_5^C)\right]$$
$$=113{,}400-\left[5\cdot5\cdot\tfrac{8!}{2^4}-10\cdot5\cdot4\cdot\tfrac{6!}{2^3}+10\cdot5\cdot4\cdot3\cdot\tfrac{4!}{2^2}-5\cdot5!+1\cdot5!\right]$$
$$=113{,}400-48{,}120=65{,}280$$

ומכאן נקבל את ההסתברות המבוקשת, שהיא $0.57566=\frac{544}{945}=\frac{65{,}280}{113{,}400}$.

ב. נסמן ב- X את מספר הילדים שמקבלים זוגות "מעורבים" של כדורים,

ונגדיר: $X_i = \begin{cases} 1 & , \text{ ילד } i \text{ קיבל זוג "מעורב" של כדורים} \\ 0 & , \text{ אחרת} \end{cases}$ לכל $i = 1,\ldots,5$

ונקבל כי: $\sum_{i=1}^{5} X_i = X =$ מספר הילדים שמקבלים זוגות "מעורבים" של כדורים.

לכל $i = 1,\ldots,5$ מתקיים: $E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \frac{10\cdot 8}{10\cdot 9} = \frac{8}{9}$

לפיכך: $E[X] = \sum_{i=1}^{5} E[X_i] = 5 \cdot \frac{8}{9} = 4\frac{4}{9}$

דרך נוספת: באמצעות חישוב פונקציית ההסתברות של X

תחילה, כפי שציינו בסעיף הקודם, מתקיים: $n(S) = \binom{10}{2,2,2,2,2} = \frac{10!}{2^5} = 113,400$

כעת, המאורע $\{X = 0\}$ מתרחש אם כל הילדים מקבלים זוגות שאינם "מעורבים". הואיל ויש $5!$ אפשרויות להתאים בין הילדים לצבעים, מתקיים: $P\{X = 0\} = \frac{5!}{113,400} = \frac{1}{945}$

המאורע $\{X = 1\}$ הוא מאורע ריק, מכיוון שלא ייתכן שרק ילד אחד יקבל זוג "מעורב", לפיכך:

$P\{X = 1\} = 0$

המאורע $\{X = 2\}$ מתרחש אם יש בדיוק שני ילדים המקבלים זוגות "מעורבים". במקרה כזה בהכרח שני הזוגות הללו מורכבים מאותם הצבעים. כעת, יש $\binom{5}{3}$ אפשרויות לבחור את הילדים שיקבלו זוגות "תואמים", $\binom{5}{3}$ אפשרויות לבחור את הצבעים שהילדים הללו יקבלו ו- $3!$ אפשרויות להתאים ביניהם. את 4 הכדורים שנותרו אפשר לחלק לשני הילדים הנותרים ב- $2\cdot 2 = 4$ אפשרויות. לפיכך, מקבלים:

$$P\{X = 2\} = \frac{\binom{5}{3}\binom{5}{3}\cdot 3!\cdot 4}{113,400} = \frac{4}{189}$$

לחישוב הסתברות המאורע $\{X = 3\}$ נעזר בכלל ההכלה וההפרדה, ובעזרתו נמנה את מספר המקרים שבהם מחלקים שלושה זוגות של כדורים (בשלושה צבעים) לשלושה ילדים, כך שכל הילדים מקבלים זוגות "מעורבים". בדומה לסעיף הקודם, נגדיר את המאורע B_i כמאורע שילד i מקבל זוג "מעורב" של כדורים, לכל $i = 1,2,3$, ונחשב את מספר החלוקות השייכות למאורע $B_1 \cap B_2 \cap B_3$.

תנאי הבעיה סימטריים, לכן:

$$n(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{6!}{2\cdot 2\cdot 2} - n(B_1^C \cup B_2^C \cup B_3^C) = 90 - \left[\binom{3}{1}\cdot 3 \cdot \frac{4!}{2\cdot 2} - \binom{3}{2}\cdot 3\cdot 2 + \binom{3}{3}\cdot 3!\right] = 90 - 42 = 48$$

ומכאן: $P\{X = 3\} = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{2}\cdot 2!\cdot 48}{113,400} = \frac{16}{189}$

את הסתברות המאורע $\{X = 5\}$ חישבנו בסעיף הקודם. קיבלנו: $P\{X = 5\} = \frac{544}{945}$

ומכאן מקבלים: $P\{X = 4\} = 1 - P\{X \neq 4\} = 1 - \frac{1+20+80+544}{945} = \frac{300}{945} = \frac{20}{63}$

ולסיום: $E[X] = 2\cdot\frac{20}{945} + 3\cdot\frac{80}{945} + 4\cdot\frac{300}{945} + 5\cdot\frac{544}{945} = \frac{4,200}{945} = 4\frac{4}{9}$

ג. בסימוני הסעיף הקודם נקבל כי: $\text{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{81}$

ולכל $i, j = 1, \ldots, 5 \quad (i \neq j)$ מתקיים:

$$P\{X_i = 1, X_j = 1\} = 1 - P\{X_i = 0 \cup X_j = 0\} = 1 - \left(\frac{5}{\binom{10}{2}} \cdot 2 - \frac{5 \cdot 4}{\binom{10}{2}\binom{8}{2}} \right) = 1 - \frac{10}{45} + \frac{20}{1{,}260} = \frac{50}{63} = 0.79365$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{50}{63} - \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{2}{567} = 0.003515$$

ומכאן:

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{5} \text{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j) = 5 \cdot \frac{8}{81} + 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{567} = \frac{320}{567} = 0.5644$$

דרך נוספת: באמצעות חישוב פונקציית ההסתברות של X

$$E[X^2] = 2^2 \cdot \frac{20}{945} + 3^2 \cdot \frac{80}{945} + 4^2 \cdot \frac{300}{945} + 5^2 \cdot \frac{544}{945} = \frac{19{,}200}{945} = 20\frac{300}{945} = 20\frac{20}{63} = 20.3175$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 20\frac{20}{63} - (4\tfrac{4}{9})^2 = 0.5644$$

שאלה 3

א. <u>אפשרות א</u>:

1. סה"כ כפיפות הבטן שייעשו בשבוע הוא המשתנה המקרי $7X$, כך של- X יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 5. לפיכך:

$$P\{7X = 42\} = P\{X = 6\} = e^{-5} \cdot \frac{5^6}{6!} = 0.1462$$

2. בהמשך לאמור בסעיף הקודם: $\text{Var}(7X) = 49\text{Var}(X) = 49 \cdot 5 = 245$

<u>אפשרות ב</u>:

1. סה"כ כפיפות הבטן שייעשו בשבוע הוא המשתנה המקרי $\sum_{i=1}^{7} X_i$, שהתפלגותו פואסונית עם הפרמטר $7 \cdot 5 = 35$, שכן לכל המשתנים בסכום יש התפלגות פואסונית והם בלתי-תלויים. לפיכך:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{7} X_i = 42\right\} = e^{-35} \cdot \frac{35^{42}}{42!} = 0.0318$$

2. בהמשך לאמור בסעיף הקודם: $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{7} X_i\right) = 35$

ב. <u>באפשרות ב</u>:

1. לפי הכללת הטענה המובאת בדוגמה 4ב בפרק 6, מקבלים שההתפלגות המשותפת המותנית של X_1, X_2 ו- $\sum_{i=3}^{7} X_i$ בסכום $\sum_{i=1}^{7} X_i = 42$ היא מולטינומית עם הפרמטרים $n = 42$ ו- $\underline{p} = (\frac{5}{35}, \frac{5}{35}, \frac{25}{35})$.

לפיכך:

$$P\left\{X_1 = 5, X_2 = 6 \middle| \sum_{i=1}^{7} X_i = 42\right\} = \frac{42!}{5!6!31!} \cdot \frac{5^5 \cdot 5^6 \cdot 25^{31}}{35^{42}} = 0.02952$$

2. הואיל ומדובר במשתנה מקרי פואסוני, נוכל להשתמש במשפט הגבול המרכזי, כדי לחשב קירוב להסתברות המבוקשת. נקבל:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{7} X_i \geq 42\right\} \cong P\left\{Z \geq \frac{41.5 - 35}{\sqrt{35}}\right\} = 1 - \Phi(1.0987) = 1 - 0.8640 = 0.1360$$

שאלה 4

א. למשתנה המקרי X יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 8 ו- 0.4. לפיכך:

$$P\{X=i\}=\binom{8}{i}0.4^i 0.6^{8-i} \qquad , \qquad i=0,1,...,8$$

נסמן ב- B_1 את המאורע שזרם יכול לעבור דרך הענף העליון וב- B_2 את המאורע שזרם יכול לעבור דרך הענף התחתון. כמו כן, לכל $i=1,\ldots,8$, נסמן ב- A_i את המאורע שמתג i סגור. מתקיים:

$$P(B_1)=P(A_2\cap A_3\cap(A_4\cup...\cup A_8))$$

$$=P(A_2)P(A_3)P(A_4\cup...\cup A_8) \qquad \text{[אין תלות בין מצבי המתגים]}$$

$$=P(A_2)P(A_3)[1-P(A_4^C\cap...\cap A_8^C)]$$

$$=P(A_2)P(A_3)[1-P(A_4^C)\cdot...\cdot P(A_8^C)] \qquad \text{[אין תלות בין מצבי המתגים]}$$

$$=0.4^2(1-0.6^5)=0.1476$$

$$P(B_2)=P(A_1)=0.4$$

נשים לב, שאין תלות בין מתגי שני הענפים, ולכן אין גם תלות בין מצבי הענפים. לפיכך:

$$P\{Y=0\}=P(B_1^C\cap B_2^C)=P(B_1^C)P(B_2^C)=0.8524\cdot 0.6=0.5114$$

$$P\{Y=2\}=P(B_1\cap B_2)=P(B_1)P(B_2)=0.1476\cdot 0.4=0.059$$

$$P\{Y=1\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=2\}=1-0.5114-0.059=0.4296$$

ב1. אם יש שני מתגים סגורים ולא עובר זרם באף אחד משני הענפים, בהכרח הם נמצאים בענף העליון, והם יכולים להיות כל שניים מבין שבעת המתגים בענף זה. כל שש המתגים האחרים פתוחים. לפיכך:

$$P\{X=2,Y=0\}=\binom{7}{2}0.4^2 0.6^6=0.1568$$

ב2. אם יש שלושה מתגים סגורים ועובר זרם בדיוק באחד מהענפים, ייתכנו שני מקרים:

I. מתגים 2, 3 ואחד ממתגים 4-8 סגורים;

II. מתג 1 סגור ועוד שני מתגים מבין מתגים 2-8.

לפיכך:

$$P\{Y=1\mid X=3\}=\frac{P\{Y=1,X=3\}}{P\{X=3\}}=\frac{\left[\binom{5}{1}+\binom{7}{2}\right]0.4^3 0.6^5}{\binom{8}{3}0.4^3 0.6^5}=\frac{5+21}{56}=0.4643$$

ג. נראה שתנאי אי-התלות אינו מתקיים. למשל:

$$P\{X=2,Y=0\}=\binom{7}{2}0.4^2 0.6^6=0.1568\neq P\{X=2\}P\{Y=0\}=\binom{8}{2}0.4^2 0.6^6\cdot 0.5114=0.1069$$

ומכאן ששני המשתנים המקריים תלויים זה בזה.

שאלה 5

א. לחישוב ההסתברות המבוקשת נתנה בערך של המשתנה המקרי X . נקבל:

$$
\begin{aligned}
P\{Y<0.5\} &= P\{Y<0.5, X\le 1\} + P\{Y<0.5, X>1\} \\
&= P\{X<0.5, X\le 1\} + P\{e^{1-X}<0.5, X>1\} \\
&= P\{X<0.5\} + P\{1-X<\ln 0.5, X>1\} \\
&= P\{X<0.5\} + P\{X>\underbrace{1-\ln 0.5}_{=1.69315}, X>1\} \\
&= P\{X<0.5\} + P\{X>1-\ln 0.5\} = F_X(0.5) + 1 - F_X(1-\ln 0.5) \\
&= 1-e^{-3\cdot 0.5} + e^{-3\cdot(1-\ln 0.5)} = 1-e^{-1.5} + \tfrac{1}{8}e^{-3} = 0.7831
\end{aligned}
$$

ב. נמצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y וממנה נסיק את פונקציית הצפיפות המתאימה.

לכל $0<y<1$ נקבל:

$$
\begin{aligned}
P\{Y<y\} &= P\{Y<y, X\le 1\} + P\{Y<y, X>1\} \\
&= P\{X<y\} + P\{X>1-\ln y\} \\
&= 1-e^{-3y} + e^{-3(1-\ln y)} = 1-e^{-3y} + y^3e^{-3}
\end{aligned}
$$

ומכאן:

$$f_Y(y) = \tfrac{d}{dy}F_Y(y) = 3e^{-3y} + 3y^2e^{-3} \qquad , \qquad 0<y<1$$

ג.

$$E[Y] = \int_0^1 (\underbrace{3ye^{-3y}}_{\substack{u=y \\ v'=3e^{-3y}}} + 3y^3e^{-3})dy = -ye^{-3y}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-3y}dy + \tfrac{3y^4}{4}e^{-3}\Big|_0^1 = -e^{-3} - \tfrac{e^{-3y}}{3}\Big|_0^1 + \tfrac{3}{4}e^{-3} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{7}{12}e^{-3}$$