איחוד וחיתוך לפי קבוצת אינדקסים

N היא קבוצת המספרים הטבעיים $N=\{0,1,2,...\}$
Z היא קבוצת המספרים השלמים $Z=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$

לכל $n\in N$, תהי $A_n=\{x\in Z \mid -2n-5\le x\le -2n+2\}$
לכל $n>0$, תהי $B_n=A_n-A_{n-1}$. נגדיר גם $B_0=A_0$

א. חשב את $\bigcap_{n\in N} A_n$
ב. כתוב ביטוי מפורש, פשוט ככל האפשר, עבור B_n.
ג. חשב את $\bigcup_{n\in N} A_n$
ד. חשב את $\bigcup_{n\in N} B_n$
ה. לכל $n\ge 2$ נסמן $D_n=B_n-\bigcup_{1<i<n} B_i$ (בפרט $D_2=B_2$, $D_3=B_3-B_2$).

עבור איזה ערכים של n קיים $D_n\ne\phi$? כלומר מצא את $\{n\in N^* \mid D_n\ne\phi\}$.
אל תשכח להראות שתשובתך כוללת את **כל** הערכים המקיימים זאת ("הכלה דו-כיוונית")

פתרון:
ראשית, כדאי לכתוב באופן מפורש כמה קבוצות ספציפיות, כדי "לקבל תחושה".
למשל, ניתן לראות ש - $A_0=\{-5,-4,-3,...,2\}$ ו - $A_1=\{-7,-6,...,0\}$.
כך אפשר לראות שגודל כל קבוצה הוא בדיוק 8, ושכל קבוצה מתקבלת מהקבוצה הקודמת ע"י הזזה של שתי יחידות שמאלה ע"ג ציר המספרים (זה יעזור לסעיף ב').

תזכורת: $\bigcup_{i\in I} A_i=\{x \mid exists\_j\in I\_such\_that\_x\in A_j\}$
$\bigcap_{i\in I} A_i=\{x \mid x\in A_j, to\_all\_j\in I\}$

א. קודם כל, הכוונה במילה "חשב" היא לכתוב למה שווה הקבוצה שבשאלה **ולהוכיח!**

טענה: $\bigcap_{n\in N} A_n=\phi$
הוכחת הטענה: נראה זאת בשתי דרכים שונות.

א.1. הרעיון כאן הוא לשים לב שניתן כבר למצוא שתי קבוצות (מתוך אינסוף הקבוצות שיש לנו) שהן כבר זרות, כלומר חיתוכן הוא הקבוצה הריקה.
לכן מכאן בקלות נראה שחיתוך כל הקבוצות באוסף הוא ריק.

ניעזר באבחנה השנייה.
נשים לב שאם $x\in A_4$ אזי $x\le -2\cdot 4+2=-6$
ואם $x\in A_0$ אזי $x\ge -2\cdot 0-5=-5$.
לכן מתקיים $A_0\cap A_4=\phi$ (ברור שאפשר לבחור גם שתי קבוצות אחרות).
לכן, מכך שהאיחוד קומוטטיבי נקבל $\bigcap_{n\in N} A_n=(A_0\cap A_4)\cap\bigcap_{n\in N-\{0,4\}} A_n=\phi\cap\bigcap_{n\in N-\{0,4\}} A_n=\phi$

א.2. הפעם נראה את הטענה באופן אחר.

נניח בשלילה ש - $\bigcap_{n\in N} A_n \neq \phi$. לכן קיים איבר $x \in \bigcap_{n\in N} A_n$.

המטרה עכשיו להראות שקיימת קבוצה באוסף שאותו איבר x לא שייך אליה וכך עפ"י הגדרת החיתוך לפי קבוצת אינדקסים נגיע לסתירה.

העניין הוא איך מוצאים קבוצה ספציפית כזאת, שהרי לא נתון לנו שום מספר באופן מפורש? הפתרון הוא ע"י כך שנמצא קבוצה שהאינדקס שלה תלוי באותו x (שהרי זהו מספר, רק שפשוט אנחנו לא יודעים אותו).

מתוך הגדרת הקבוצות נובע ש- $x \in Z$ כלומר הוא שלם, אבל אולי שלילי (בדרך כלל זה יהיה ככה), בעוד שקבוצת האינדקסים שלנו היא של הטבעיים.

נביט למשל בקבוצה שהאינדקס שלה הוא $j = 2|x| + 4$.שימו לב שזהו מספר טבעי ולכן בקבוצת האינדקסים !!

עפ"י ההנחה חייב להתקיים $x \in A_j$ (כי הוא שייך לכל הקבוצות). לכן זה אומר שמתקיים $-2\cdot(2|x|+4)-5 \le x \le -2\cdot(2|x|+4)+2$ כלומר $-4|x|-13 \le x \le -4|x|-6$

אם נביט באי השוויון הימני, נקבל $x \le -4|x|-6$ וע"י העברת אגפים $4|x| \le -x-6$

אבל $4|x| \ge 0$ ולכן $-x-6 \ge 0$ כלומר $x \le -6$.

זה אומר ש- x שלילי ולכן $|x| = -x$.

נחזור שוב לאי השוויון הנ"ל ונקבל $x \le -4|x|-6 = -4\cdot(-x)-6 = 4x-6$

נחלץ את x ונקבל $2 \le x$.

זו סתירה שכן לא ייתכן שגם $x \le -6$ וגם $2 \le x$.

בסתירה מראה שההנחה שגויה ולכן $\bigcap_{n\in N} A_n = \phi$.

ב. נשתמש בזהויות ידועות לגבי קבוצות, כולל בחוק הדיסטריבוטיבי:

$$B_n = A_n - A_{n-1} = A_n \cap A_{n-1}^{'}$$

$$A_n = \{x \in Z \mid -2n-5 \le x \le -2n+2\} ,$$

$$A_{n-1}^{'} = \{x \in Z \mid x < -2n-3\} \cup \{x \in Z \mid x > -2n+4\}$$

ונקבל $B_n = \{-2n-5, -2n-4\}$

ג. טענה: $\bigcup_{n\in N} A_n = -N \cup \{1,2\}$

$$-N = \{-n \mid n \in N\}$$

הוכחה: צריך להראות הכלה כפולה.

יהי $x \in \bigcup_{n\in N} A_n$ אזי קיים $j \in N$ כך ש- $x \in A_j$.

לכן מתקיים $x \in Z$ וגם $x \le -2j+2 \le -2\cdot 0+2 = 2$.

בפרט זה מראה את ההכלה $\bigcup_{n\in N} A_n \subseteq -N \cup \{1,2\}$

יהי עתה $x \in -N \cup \{1,2\}$.

צריך להראות קיום $j \in N$ (מספר קבוע כלשהו, אחד לפחות) שעבורו מתקיים $x \in A_j$.

נמצא j כזה ע"י חישוב מהסוף להתחלה: נניח ויש לנו אינדקס j כזה: לכן מתקיים

$$-2j-5 \le x \le -2j+2$$

יש כאן שני אי-שויונים ונחלץ מכל אחד מהם את j .

נקבל שצריך להתקיים $-\frac{x}{2}-2\frac{1}{2} \le j \le -\frac{x}{2}+1$

ההפרש בין שני החסמים הללו הוא בדיוק $3\frac{1}{2}$, כלומר באינטרוול הזה יש לפחות 3 מספרים שלמים. זה עדיין לא מספיק כי צריך שלפחות חד מאותם שלמים גם יהיה טבעי, כי קבוצת האינדקסים שלנו היא של הטבעיים בלבד.

אם $x \le -5$ אז $j \ge 0$ (אי שויון ימני) ולכן ניתן למצוא j טבעי כנ"ל.

אחרת, $-5 < x \le 2$ אבל אז $j \le -\frac{x}{2}+1 \le -\frac{2}{2}+1=0$, כלומר יתקיים $x \in A_0$ במקרה זה (כמו שאנחנו כבר יודעים).

זה מראה שלכל x באגף ימין קיים j טבעי כך ש- $x \in A_j$, כלומר $\bigcup_{n\in N} A_n \supseteq -N \cup \{1,2\}$

ההכלה הכפולה מראה את השויון $\bigcup_{n\in N} A_n = -N \cup \{1,2\}$ כנדרש.

ד. $\bigcup_{n\in N} B_n = -N \cup \{1,2\}$

ההוכחה כאן דומה לזו של הסעיף הקודם ומושארת כתרגיל.

ה. מושאר כתרגיל לקורא.