20416 - תאריך הבחינה: 6.9.2007 (סמסטר ב 2007 - מועד 98)

שאלה 1

א. ההתפלגות המשותפת של המשתנים המקריים (X_1, X_2, X_3, X_4) היא מולטינומית עם $n = 20$ וההסתברויות $\frac{90}{360}$, $\frac{40}{360}$, $\frac{160}{360}$ ו- $\frac{70}{360}$. לכן, לסכום $X_1 + X_2$ יש התפלגות בינומית עם $n = 20$ ו- $p = \frac{90+40}{360} = \frac{130}{360}$, ומכאן:

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = 20 \cdot \tfrac{130}{360} \cdot \tfrac{230}{360} = 4.6142$$

ב. מכיוון שההתפלגות המשותפת של ה-X_i-ים היא מולטינומית, לכל אחד מה-X_i-ים יש התפלגות שולית בינומית עם ההסתברות המתאימה, ואפשר להשתמש בתוצאה של דוגמה 3ז בספר (עמודים 370-371) לחישוב $\text{Cov}(X_1, X_2)$. מקבלים:

$$\text{Var}(X_1 - X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) - 2\text{Cov}(X_1, X_2)$$

$$= 20 \cdot \tfrac{90}{360} \cdot \tfrac{270}{360} + 20 \cdot \tfrac{40}{360} \cdot \tfrac{320}{360} - 2(-20 \cdot \tfrac{90}{360} \cdot \tfrac{40}{360}) = 6.83642$$

ג.
$$P\{X_1 \geq 1, X_2 \geq 1\} = 1 - P\{X_1 = 0 \ \cup \ X_2 = 0\} = 1 - [P\{X_1 = 0\} + P\{X_2 = 0\} - P\{X_1 = 0, X_2 = 0\}]$$

$$= 1 - \left[\left(\tfrac{270}{360}\right)^{20} + \left(\tfrac{320}{360}\right)^{20} - \left(\tfrac{230}{360}\right)^{20}\right] = 1 - 0.09787 = 0.90213$$

ד. מספר הסיבובים שהמחוג עושה עד שהוא נעצר בפעם השלישית באזור 1 הוא משתנה מקרי בינומי שלילי עם הפרמטרים 3 ו- 0.25. לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $\binom{14}{2} \cdot 0.25^3 \cdot 0.75^{12} = 0.04504$

שאלה 2

נסמן ב- A_i את המאורע שמתג i סגור, לכל $i = 1,2,3,4,5$.

נתוני הבעיה הם:

$$P(A_1) = P(A_3) = P(A_5) = 0.9$$

$$P(A_2 | A_1) = P(A_4 | A_3) = 0.9 \quad \Rightarrow \quad P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 | A_1)P(A_1) = 0.9 \cdot 0.9 = 0.81$$

$$P(A_2 | A_1^C) = P(A_4 | A_3^C) = 0.3 \quad \Rightarrow \quad P(A_1^C \cap A_2) = P(A_2 | A_1^C)P(A_1^C) = 0.3 \cdot 0.1 = 0.03$$

א. נמצא תחילה את ההסתברות שמתג 2 סגור:

$$P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1^C \cap A_2) = 0.81 + 0.03 = 0.84 \quad \Rightarrow \quad P(A_2^C) = 0.16$$

כעת, נמצא את הסתברות המאורע $A_1 \cap A_2^C$:

$$P(A_1 \cap A_2^C) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) = 0.9 - 0.81 = 0.09$$

ומכאן נקבל כי:

$$P\{\text{עובר זרם מ-C ל-D} \mid A_2^C\} = P(A_1 \cup A_2 \mid A_2^C) = \frac{P(A_1 \cap A_2^C)}{P(A_2^C)} = \frac{0.09}{0.16} = 0.5625$$

ב. לפי נתוני הבעיה, ההסתברות שיעבור זרם מ-C ל-D שווה להסתברות שיעבור זרם מ-E ל-F. נסמן ב- A_{CD} וב- A_{EF} את המאורעות שעובר זרם מ-C ל-D ומ-E ל-F, בהתאמה. נקבל:

$$P\{\text{עובר זרם מ-C ל-D}\} = P(A_{\text{CD}}) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_1^C \cap A_2)$$

$$= P(A_1) + P(A_2 | A_1^C)P(A_1^C) = 0.9 + 0.3 \cdot 0.1 = 0.93$$

או (בדרך נוספת):
$$P\{\text{עובר זרם מ-C ל-D}\} = P(A_{\mathrm{CD}}) = P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(A_1^C \cap A_2^C)$$
$$= 1 - P(A_2^C \mid A_1^C)P(A_1^C) = 1 - 0.7 \cdot 0.1 = 0.93$$

ומכאן:
$$P\{\text{עובר זרם מ-B ל-A}\} = P(A_{\mathrm{CD}} \cup (A_5 \cap A_{\mathrm{EF}}))$$
$$= P(A_{\mathrm{CD}}) + P(A_5 \cap A_{\mathrm{EF}}) - P(A_{\mathrm{CD}} \cap A_5 \cap A_{\mathrm{EF}})$$
$$= P(A_{\mathrm{CD}}) + P(A_5)P(A_{\mathrm{EF}}) - P(A_{\mathrm{CD}})P(A_5)P(A_{\mathrm{EF}})$$
$$= 0.93 + 0.9 \cdot 0.93 - 0.9 \cdot 0.93^2 = 0.98859 \qquad [\, P(A_{\mathrm{CD}}) = P(A_{\mathrm{EF}}) \,]$$

ג. נחשב את הסתברות המאורע המשלים, שלא עובר זרם במערכת מנקודה A לנקודה B, כאשר ידוע כי מתג 1 פתוח. נקבל:

$$P(A_{\mathrm{AB}}^C \mid A_1^C) = \frac{P(A_1^C \cap A_2^C \cap (A_5^C \cup A_{\mathrm{EF}}^C))}{P(A_1^C)} \qquad [\text{הענף העליון במעגל בלתי-תלוי בענף התחתון}]$$
$$= \frac{P(A_1^C \cap A_2^C)[P(A_5^C) + P(A_{\mathrm{EF}}^C) - P(A_5^C)P(A_{\mathrm{EF}}^C)]}{P(A_1^C)} \qquad [\,A_{\mathrm{EF}} \text{ ו- } A_5 \text{ בלתי-תלויים}\,]$$
$$= \frac{0.07(0.1 + 0.07 - 0.1 \cdot 0.07)}{0.1} = \frac{0.01141}{0.1} = 0.1141$$

לכן:
$$P(A_{\mathrm{AB}} \mid A_1^C) = 1 - P(A_{\mathrm{AB}}^C \mid A_1^C) = 1 - 0.1141 = 0.8859$$

שאלה 3

א. המאורע $\{X > X_{(n)}\}$ מתרחש אם המשתנה המקרי X מקבל ערך גדול יותר מאשר כל המשתנים המקריים X_1, X_2, ... , X_n. מכיוון שכל $n+1$ המשתנים, הנתונים בבעיה זו, הם שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, ההסתברות שאחד מהם (דהיינו, המשתנה המקרי X) יהיה גדול מכולם היא $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$.

ב.1 הפנס יפסיק לפעול ברגע שהסוללה השנייה תתרוקן. לכן, עלינו למצוא את פונקציית הצפיפות של סטטיסטי הסדר השני. כלומר, אם אורך החיים של כל סוללה הוא משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 0.2, נקבל כי לכל $x > 0$, מתקיים:
$$f_{X_{(2)}}(x) = \tfrac{3!}{1!\cdot 1!} \cdot (1 - e^{-0.2x}) \cdot e^{-0.2x} \cdot 0.2e^{-0.2x} = 1.2e^{-0.4x}(1 - e^{-0.2x})$$

ב2. נחשב את התוחלת של סטטיסטי הסדר השני:

$$E[X_{(2)}] = \int_0^\infty x f_{X_{(2)}}(x)\,dx = 1.2\int_0^\infty (xe^{-0.4x} - xe^{-0.6x})\,dx$$
$$= \tfrac{1.2}{0.4}\underbrace{\int_0^\infty x \cdot 0.4e^{-0.4x}dx}_{=E[Exp(0.4)]} - 2\underbrace{\int_0^\infty x \cdot 0.6e^{-0.6x}dx}_{=E[Exp(0.6)]} = \tfrac{1.2}{0.4} \cdot \tfrac{1}{0.4} - \tfrac{2}{0.6} = 4.1\overline{6}$$

שאלה 4

א. נגדיר:
$$X_i = \begin{cases} 1 & , \quad \text{ילד } i \text{ מקבל 2 בלונים מאותו הצבע} \\ 0 & , \quad \text{אחרת} \end{cases} \qquad \text{לכל } i = 1,\ldots,20$$

ונקבל כי: $X = \sum_{i=1}^{20} X_i =$ מספר הילדים שמקבלים 2 בלונים מאותו הצבע

נחשב את התוחלת של X_i, לכל $i = 1,\ldots,20$. מקבלים:

$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \frac{2\cdot\binom{20}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{19}{39} = 0.48718$$

ומכאן:
$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{20} X_i\right] = \sum_{i=1}^{20} E[X_i] = 20\cdot\frac{19}{39} = \frac{380}{39} = 9\tfrac{29}{39} = 9.7436$$

ב. נחשב כעת את השונות של X_i, לכל $i = 1,\ldots,20$. מקבלים:

$$\mathrm{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = \frac{19}{39}\cdot\frac{20}{39} = \frac{380}{1{,}521} = 0.2498$$

והשונות המשותפת של X_i ו- X_j, לכל $i \neq j$, היא:

$$E[X_iX_j] = P\{X_i = 1, X_j = 1\} = \frac{2\cdot\binom{20}{2}}{\binom{40}{2}}\cdot\frac{\binom{20}{2}+\binom{18}{2}}{\binom{38}{2}} = \frac{19}{39}\cdot\frac{343}{703} = \frac{343}{1{,}443} = 0.2377$$

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j) = E[X_iX_j] - E[X_i]E[X_j] = \frac{343}{1{,}443} - \left(\frac{19}{39}\right)^2 = \frac{20}{56{,}277} = 0.0003554$$

ולכן:
$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{20} X_i\right) = \sum_{i=1}^{20}\mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

$$= 20\cdot\mathrm{Var}(X_1) + 20\cdot 19\cdot\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = 20\cdot\frac{380}{1{,}521} + 380\cdot\frac{20}{56{,}277} = 5\tfrac{7{,}415}{56{,}277} = 5.13176$$

שאלה 5

א. המשתנים המקריים X ו-Y בלתי-תלויים זה בזה. לכן, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, ומכאן שמקדם המתאם ביניהם גם הוא שווה ל-0.

ב. המשתנים המקריים X ו-Y בלתי-תלויים זה בזה, לכן פונקציית הצפיפות המשותפת של X ו-Y נתונה על-ידי:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = 2y \qquad , \qquad 0<x<1 \;;\; 0<y<1$$

מכאן, נקבל כי:
$$P\{X+Y<1\} = \int_0^1\int_0^{1-y} 2y\,dx\,dy = \int_0^1 2y(1-y)\,dy = \left[y^2 - \frac{2y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

ג. תחום הערכים האפשריים של המשתנה המקרי W הוא הקטע $(0,1)$.

כדי למצוא את פונקציית הצפיפות של W, נמצא תחילה את פונקציית ההתפלגות המצטברת שלו בעזרת התניה על הערך של X. לכל $0 < w < 1$, מתקיים:

$$F_W(w) = P\{W<w\} = P\{XY<w\} \overset{\overset{X>0}{\uparrow}}{=} P\{Y<\tfrac{w}{X}\} = P\{Y<\tfrac{w}{X}, 0<X\le w\} + P\{Y<\tfrac{w}{X}, w<X<1\}$$

$$= P\{Y<\tfrac{w}{X} \mid 0<X\le w\}P\{0<X\le w\} + P\{Y<\tfrac{w}{X}, w<X<1\}$$

$$= 1\cdot w + \int_w^1\int_0^{w/x} 2y\,dy\,dx = w + \int_w^1 \frac{w^2}{x^2}\,dx = w - \frac{w^2}{x}\bigg|_w^1 = 2w - w^2$$

ומכאן, שלכל $0 < w < 1$, מתקיים:
$$f_W(w) = \tfrac{d}{dw}F_W(w) = \tfrac{d}{dw}[2w - w^2] = 2(1-w)$$