מטלת מנחה (ממ״ן) 11

הקורס: 20417 – **אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: מדריך הלמידה, פרקים א׳, ב׳

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2006ב **מועד אחרון להגשה:** **28.4.2006**

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ״ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20 נקודות)

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון עם פונקציית משקל $w : E \to R$ ויהי $t \in V$. נתונה פונקציה $d : V \to R$, כלומר, לכל צומת נתון ערך ממשי.

כתבו אלגוריתם שעלותו $O(|V| + |E|)$, הבודק אם d היא פונקציית מרחקים קצרים ל-t, כלומר, אם לכל $v \in V$ מתקיים כי $d(v)$ הוא משקל מסלול קצר ביותר מ-v ל-t.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 2 (20 נקודות)

הגדרה: גרף **דו-צבעי** הוא גרף מכוון $G = (V, E)$ עם פונקציית צביעה $\chi : E \to \{R, B\}$, הצובעת כל קשת באדום (R) או בשחור (B). גרף דו-צבעי הוא **סגור** אם לכל צומת $v \in V$ יש לפחות קשת יוצאת אחת אדומה ולפחות קשת יוצאת אחת שחורה.

כתבו אלגוריתם שעלותו $O(|V| + |E|)$ המקבל כקלט גרף דו-צבעי $G = (V, E)$ עם פונקציית צביעה χ וקובע אם יש ל-G תת-גרף מושרה לא ריק שהוא סגור, כלומר, אם קיימת תת-קבוצה לא ריקה $V' \subseteq V$ כך שהגרף $G' = (V', E \cap (V' \times V'))$ עם הפונקציה χ המצומצמת על $E \cap (V' \times V')$ הוא סגור.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון עם פונקציית משקל $w : E \to R$ ויהיו $t, t' \in V$. בנוסף, נתונה פונקציית מרחקים אל t: $d_t : V \to R$ (כלומר, לכל $v \in V$, $d_t(v)$ הוא משקל המסלול הקצר ביותר מ-v ל-t ב-G).

כתבו אלגוריתם שעלותו $O(|V| \lg |V| + |E|)$ המחשב לכל $v \in V$ את מרחקו של t' מ-v (בהתבסס כמובן על ערכי d_t הנתונים).

נתחו את סיבוכיות האלגוריתם והוכיחו את נכונותו.

רמז: הגדירו פונקציית משקל חדשה w': לכל $e = (u, v) \in E$: $w'(e) = w(e) - d_t(u) + d_t(v)$. האם יש קשר בין משקלי מסלולים ע"פ w וע"פ w'?

שאלה 4 (20 נקודות)

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו, המקבל כקלט גרף לא-מכוון $G = (V, E)$ עם משקלות אי-שליליים על הקשתות, ובו כל קשת צבועה באחד משני צבעים: אדום ושחור. כמו כן, הקלט כולל צומת s בגרף. על האלגוריתם למצוא לכל צומת $v \in V$ את אורך המסלול הקצר ביותר מבין כל המסלולים מ-s ל-v המתחילים בקשת אדומה ומסתיימים בקשת שחורה.

נתחו את סיבוכיות האלגוריתם והוכיחו את נכונותו.

שאלה 5 (20 נקודות)

מצאו חסם עליון וחסם תחתון הדוקים ביותר (כפונקציה של מספר הצמתים בגרף), עבור מספר הצמתים שדרגתם 1 בגרף קשיר לא מכוון כלשהו $G = (V, E)$ אשר מקיים $|V| > 2$.

הוכיחו את נכונותם של החסמים. כלומר, הראו כי לא ייתכן גרף קשיר לא מכוון שבו מספר הצמתים שדרגתם 1 גדול מהחסם העליון, וכי קיים גרף קשיר ולא מכוון שבו מספר הצמתים שדרגתם 1 הוא כערך החסם העליון. ובדומה, הראו כי לא ייתכן גרף קשיר לא מכוון שבו מספר הצמתים שדרגתם 1 קטן מהחסם התחתון, וכי קיים גרף קשיר ולא מכוון שבו מספר הצמתים שדרגתם 1 הוא כערך החסם התחתון.

מטלת מנחה (ממ״ן) 12

הקורס: **20417 - אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: מדריך הלמידה, פרק ג׳+פרק 17 מכרך א׳ של ספר הלימוד

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: ב2006 **מועד אחרון להגשה: 12.5.2006**

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ״ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20 נקודות)

יהי $G = (V,E)$ גרף קשיר לא מכוון המייצג מפה: הצמתים הם נקודות על המפה, הקשתות הן שבילים המחברים בין הנקודות, ולכל קשת e משקל אי-שלילי $w(e)\geq 0$ המציין את רמת הקושי של השביל המתאים.

א. יהי α מספר חיובי נתון המייצג את סף הקושי. כלומר, קשת e תיקרא **קשה** אם $w(e)\geq \alpha$.
כתבו אלגוריתם שעלותו $O(|V|+|E|)$ המוצא עץ פורש של G שמספר הקשתות הקשות בו הוא קטן ככל האפשר. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

ב. נניח כעת שמוגדרות k רמות קושי שונות $\alpha_1<\ldots<\alpha_k$. למשל, עבור אנשים קשישים שבילים בעלי רמת קושי של לפחות α_1 נחשבים קשים, עבור ילדים קטנים מאוד שבילים בעלי רמת קושי של לפחות α_2 נחשבים קשים, ואילו עבור טיילים מנוסים רק שבילים בעלי רמת קושי של לפחות α_k נחשבים קשים. קשת e תיקרא α_i-**קשה** אם $w(e)\geq\alpha_i$ $(1\leq i\leq k)$.
היינו רוצים למצוא עץ פורש של G שעבור כל $1\leq i\leq k$ מספר הקשתות ה-α_i-קשות בו הוא קטן ככל האפשר. הראו כיצד ניתן למצוא עץ כזה בזמן $O(|E|\lg|E|)$. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 2 (20 נקודות)

בהינתן עץ פורש T של גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ברצוננו לבנות טבלת קישור שהיא מטריצה A, שבה לכל צומת v ב-V מתאימה שורה אחת ומתאים טור אחד, והכניסה $A[v, u]$ מכילה את השכן של v במסלול מ-v ל-u ב-T. כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו הבונה את הטבלה. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי $T = (V, E)$ עץ ויהיו $T_1, T_{2, \ldots} T_k$ תת-עצים של T, כלומר: לכל $1 \le i \le k$ $T_i = (V_i, E_i)$ כך ש-T_i הוא עץ, $V_i \subseteq V$ ו-$E_i \subseteq E \cap (V_i \times V_i)$.

ידוע שלכל שני עצים T_i, T_j כך ש-$i \ne j$ ו-$1 \le i, j \le k$ קיים צומת משותף. הוכיחו כי קיים צומת $v \in V$ ששייך לכל T_i $(1 \le i \le k)$.

שאלה 4 (20 נקודות)

נתון גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$ עם משקלות חיוביים לקשתות.

נתונה קשת $e \in E$. כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המוצא מבין העצים המכילים את הקשת e עץ פורש מינימלי. (כלומר, עץ פורש המכיל את e ושמשקלו מינימלי ביחס לכל העצים הפורשים המכילים את e).

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סבוכיותו.

שאלה 5 (20 נקודות)

נתאר רשת של כבישים ותחנות ע״י גרף לא מכוון, בו כל תחנה מיוצגת על-ידי צומת וכל כביש על-ידי קשת. כל כביש r מאופיין על-ידי אורכו $\text{len}(r)$ ועל-ידי המשקל המקסימלי שהוא מסוגל לשאת $\text{max-weight}(r)$. len ו-max-weight הן פונקציות לטווח המספרים החיוביים.

כתבו אלגוריתם המקבל כקלט רשת קשירה כנ״ל ומוצא תת-רשת קשירה אשר כוללת את כל תחנות הרשת המקורית, שסכום אורכי הכבישים שבה מינימלי ואילו סף המשקל שיכולה לשאת גבוה ככל האפשר. כלומר, הערך $\underset{r \text{ כביש ברשת}}{\text{MIN}}\{\text{max-weight}(r)\}$ הוא מקסימלי ביחס לכל תת רשת קשירה אחרת שסכום אורכי הכבישים שבה מינימלי.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20417 - אלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: מדריך הלמידה, פרקים ד', ה'

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: ב2006 **מועד אחרון להגשה: 9.6.2006**

אנא שים לב: מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20 נקודות)

הגדרה: **גרף מעורב** הוא גרף שבו כמה מהקשתות מכוונות והאחרות אינן מכוונות.
הוכיחו שאם בגרף מעורב התת-גרף המתקבל מכל צמתי הגרף ומהקשתות המכוונות בלבד אינו מכיל מעגל מכוון, אז תמיד ניתן לכוון את הקשתות הלא מכוונות כך שבגרף המכוון המתקבל אין מעגל מכוון. הראו כיצד ניתן למצוא כיוון מתאים לקשתות בזמן $O(|V| + |E|)$.
רמז: מצאו קודם את האלגוריתם המבצע את הכיוון ומהוכחת נכונותו הסיקו כי קיים כיוון כנדרש.

שאלה 2 (20 נקודות)

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון עם פונקצית משקל לצמתים $w : V \to R$, כך שמשקלי הצמתים שונים זה מזה. קבוצת קשתות הגרף מוגדרת כך: קשת (u, v) שייכת ל-E אם ורק אם $w(u) < w(v)$.

א. הראו ש-G הוא טרנזיטיבי, כלומר, אם קיימות בו הקשתות (u, v) ו-(v, y) אז בהכרח קיימת בו גם הקשת (u, y).

ב. הראו ש-G חסר מעגלים.

ג. ברצוננו למיין n מספרים ממשיים נתונים. הניחו שקיים גרף G בעל n צמתים שהמספרים הנתונים הם המשקלות של צמתיו וקבוצת הקשתות שלו מקיימת את התנאי שניתן בתחילת השאלה. כתבו אלגוריתם המקבל כקלט את G וסיבוכיותו ליניארית במספר קשתות הגרף G, וממיין את n המספרים הנתונים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

ד. מדוע אין קיומו של האלגוריתם שהראיתם בסעיף ג' סותר את החסם התחתון הידוע למיון n מספרים?

שאלה 3 (20 נקודות)

כתבו אלגוריתם שסיבוכיותו $O(|V|+|E|)$ המקבל כקלט גרף מכוון חסר מעגלים ומחזיר את אורכו של מסלול פשוט ארוך ביותר בגרף.
הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 4 (20 נקודות)

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר ולא מכוון. G נקרא **שרוכי** אם בכל הרצת DFS עליו, העץ המתקבל הוא מסלול פשוט המתחיל בצומת שבו החל החיפוש. G נקרא **שפיר** אם בכל חיפוש DFS על G, שבו מחושבים גם ערכי L (lowpoint) לכל צומת v מתקיים $L(v)=1$.

א. הוכיחו: אם $|V|>2$ אז G שרוכי אם ורק אם G שפיר.

ב. הוכיחו: כל גרף שרוכי הוא לא פריק.

שאלה 5 (20 נקודות)

הוכח או הפרך:
אם בגרף מכוון יש קשתות הנכנסות לצומת u וגם קשתות היוצאות ממנו, אזי לא ייתכן שבהרצת DFS על הגרף הצומת u יימצא בעץ המכיל אותו בלבד.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: **20417 - אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: מדריך הלמידה, פרק ו'

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2006ב **מועד אחרון להגשה:** **23.6.2006**

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20 נקודות)

עבור גרף דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$ **זיווג 2-מושלם** $M \subseteq E$ הוא קבוצת קשתות כך שלכל צומת ב-X יש בדיוק שתי קשתות ב-M שפוגעות בו ולכל צומת ב-Y יש בדיוק קשת אחת ב-M שפוגעת בו.

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל כקלט גרף דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$ וקובע אם יש ב-G זיווג 2-מושלם. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 2 (20 נקודות)

בהינתן גרף דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$, נגדיר עבור $A \subseteq X$ את קבוצת השכנים של A:

$$N(A) = \{y \mid (x, y) \in E,\ x \in A\}$$

משפט הול (Hall's theorem) הוא המשפט הבא:

בגרף G דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$, כך ש- $|X| = |Y|$, יש זיווג מושלם, כלומר זיווג בגודל $|X|$, אם ורק אם לכל $A \subseteq X$ מתקיים: $|N(A)| \geq |A|$.

עתה, נניח שנתונות בידינו שתי חפיסות קלפים, חפיסה A וחפיסה B, כל אחת מכילה 52 קלפים: לכל דרגה מ-13 הדרגות (אס, 2, 3, ..., 10, נסיך, מלכה, מלך) יש ארבעה קלפים (תלתן, לב, עלה, יהלום). סדר הקלפים בכל חפיסה הוא אקראי. מתבצע התהליך הבא: נלקחים הקלף הראשון (העליון) מהחפיסה A והקלף הראשון (העליון) מהחפיסה B והם מודבקים גב אל גב כך שנוצר קלף עם שתי פנים. אח"כ נלקח הקלף השני מכל ערימה והם מודבקים באותה דרך, וכך ממשיך התהליך עד שמתקבלת חפיסה אחת בת 52 קלפים דו-צדדיים.

א. הוכיחו כי בחפיסה החדשה קיימים 13 קלפים אשר מכילים יחד כל אחת מ-13 הדרגות של A (אס, 2, 3, ..., 10, נסיך, מלכה, מלך) וכל אחת מ-13 הדרגות של B.

ב. הראו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו אשר מוצא את 13 הקלפים שאת קיומם הוכחתם בסעיף א'. נתחו את סיבוכיות האלגוריתם כפונקציה של מספר הדרגות (כלומר, החליפו את הקבוע 13 בפרמטר משתנה n).

שאלה 3 (20 נקודות)

השאלה עוסקת בחיווט בין מתגי חשמל לנורות בקומת מגורים. תוכנית הקומה נתונה ע"י m קירות, כלומר, ע"י m קטעים אנכיים או אופקיים, כאשר נקודות הקצה של הקטע ה-i הן (x_i, y_i) ו-(x'_i, y'_i). ניתן להניח כי m הקטעים הנתונים אכן יוצרים תוכנית קומה חוקית, כלומר שניתן לשרשר את הקטעים זה לזה, כך שאין שני קטעים אופקיים רצופים או שני קטעים אנכיים רצופים, נקודת הסיום של קטע היא תמיד נקודת ההתחלה של הקטע הבא אחריו, והקטעים יוצרים מצולע סגור במישור.

תוכנית הקומה כוללת גם n נקודות המיועדות למתגים ו-n נקודות המיועדות לנורות. המטרה היא לקשר כל נורה אל אחד מבין המתגים וכל מתג אל אחת מבין הנורות.

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו, המקבל כקלט תוכנית קומה (הכוללת כאמור m קטעים המייצגים את הקירות, n נקודות מתגים ו-n נקודות נורות) וקובע אם קיים קישור של n הנורות ל-n המתגים כך שכל נורה מקושרת למתג אחד בדיוק ומכל מתג יש קו ראיה פנוי אל הנורה עליה הוא אמור לשלוט (כך שהאדם המפעיל את המתג יוכל לראות ממקום עומדו אם אכן פעולת ההדלקה או הכיבוי הצליחה).

הניחו כי יש בידכם שיגרה הפועלת בזמן קבוע, מקבלת כקלט שני קטעים במישור וקובעת האם הם נחתכים או לא.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 4 (20 נקודות)

בחורש מסויים סומנו שבילים להליכה עממית. ישנן כמה נקודות התחלה אפשריות ונקודת סיום אחת וביניהן פרושה רשת השבילים. ההולכים בוחרים את דרכם בחורש בהתאם לקושי ההליכה בשבילים, הנוף הנשקף מהם או שיקולים אישיים אחרים.

בצמתי השבילים ניתן למקם לוחות מודעות אך ייתכן שעלות התקנת לוח בכל צומת היא שונה משום שהיא תלויה במבנה הטופוגרפי שלו ובתכונות הקרקע במקום. לוחות המודעות נועדו לתליית מודעות עדכניות החשובות למארגני האתר.

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל את רשת השבילים, כולל עלויות ההתקנה בצמתים השונים, ובודק מהי העלות המינימלית שיש להשקיע בהתקנת לוחות מודעות כך שיובטח כי כל הולך יעבור על פני לוח מודעות אחד לפחות עוד **לפני** הגיעו לנקודת הסיום.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 5 (20 נקודות)

א. תהי f זרימה מקסימלית ברשת זרימה $G = (V, E)$ עם מקור s ובור t ופונקציית קיבול c.

תהי G_f הרשת השיורית של G המושרית על-ידי f.

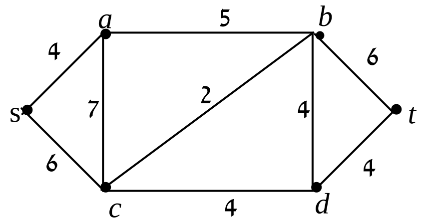
תהי T הקבוצה $T = \{v \in V$: קיים מסלול מ-v אל t ב-$G_f\}$ ותהי $S = V - T$.

הראו כי (S, T) הוא חתך וכי חתך זה מקיים $|f| = c(S, T)$.

נרצה למצוא אלגוריתם המקבל כקלט רשת זרימה ומוצא קשת שהגדלת הקיבול שלה תגדיל את הזרימה ברשת.

ב. האם תמיד יש קשת כזו? הוכיחו.

ג. הציעו אלגוריתם המוצא קשת כזו אם קיימת. הוכיחו את נכונותו ונתחו את סיבוכיותו. (רמז: היעזרו בין השאר בסעיף א'). הדגימו את פעולת האלגוריתם על הרשת:



מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: **20417 - אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: מדריך הלמידה, פרקים ז', ח'

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: ב2006 **מועד אחרון להגשה: 14.7.2006**

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20 נקודות)

תזכורת: מטריצה משולשית תחתונה היא מטריצה שכל איבריה מעל האלכסון הראשי שווים ל-0.

נניח שעלות העלאה בחזקה שלישית של שתי מטריצות משולשיות תחתונות בגודל $n\times n$ היא $s(n)$.

הראו כי בהינתן שתי מטריצות כלשהן A ו-B בגודל $n\times n$ ניתן לחשב את מכפלתן $A\cdot B$ בזמן $O(s(3n))$ (כלומר, העלאה בחזקה שלישית של מטריצות משולשיות תחתונות היא קשה לפחות כמו מכפלת מטריצות כלליות).

שאלה 2 (20 נקודות)

גירסה של האלגוריתם של שטראסן, מעט שונה מזו שבספר הלימוד, מבוססת על הזהויות הבאות:

כדי לחשב $A\cdot B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ מחשבים קודם:

$s_1 = c + d$	$m_1 = s_2 \cdot s_6$	$t_1 = m_1 + m_2$
$s_2 = s_1 - a$	$m_2 = a \cdot e$	$t_2 = t_1 + m_4$
$s_3 = a - c$	$m_3 = b \cdot f$	
$s_4 = b - s_2$	$m_4 = s_3 \cdot s_7$	$r = m_2 + m_3$
$s_5 = g - e$	$m_5 = s_1 \cdot s_5$	$s = t_1 + m_5 + m_6$
$s_6 = h - s_5$	$m_6 = s_4 \cdot h$	$t = t_2 - m_7$
$s_7 = h - g$	$m_7 = d \cdot s_8$	$u = t_2 + m_5$
$s_8 = s_6 - f$		

הוכיחו את נכונות האלגוריתם והשוו את יעילותו ליעילות האלגוריתם של שטראסן, בגירסתו המוכרת לכם מספר הלימוד.

שאלה 3 (20 נקודות)

נניח כי נתון אלגוריתם A המחשב מכפלת שתי מטריצות שגודלן 4×4 המורכבות מאיברים מעל חוג כלשהו R (ראו תזכורת בסוף השאלה) ומשתמש ב-x מכפלות של איברים מ-R.

א. תארו אלגוריתם יעיל המשתמש ב-A כקופסה שחורה, ומכפיל שתי מטריצות בגודל $n\times n$ של מספרים שלמים (הניחו ש-n חזקה של 4).
הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו (כפונקציה של n ו-x).
הניחו שפעולות אריתמטיות על שלמים מתבצעות בסיבוכיות $O(1)$.

ב. מה צריך להיות הערך של x כדי שאלגוריתם זה יהיה טוב יותר מהאלגוריתם של שטראסן?

תזכורת ורמז: חוג הוא אוסף של איברים שמוגדרות עליהם פעולת חיבור ופעולת כפל, המקיימות תכונות מסוימות (ביניהן אסוציאטיביות, דיסטריבוטיביות ועוד).
דוגמאות לחוגים: המספרים הממשיים עם פעולות הכפל והחיבור הרגילות, המספרים השלמים עם פעולות הכפל והחיבור הרגילות, המטריצות בגודל $n\times n$ מעל המספרים השלמים עם פעולות חיבור מטריצות וכפל מטריצות.

שאלה 4 (20 נקודות)

חשבו את הביטויים הבאים:

א. $DFT_m\left(x^n\right)$ כאשר $m\le n$ וכן m מחלק את n.

ב. $DFT_{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right)$.

שאלה 5 (20 נקודות)

בהינתן טקסט $T = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ באורך n, ותבנית $P = p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}$ באורך m, מא״ב $\{a, b\}$,
תארו אלגוריתם יעיל המוצא לכל אינדקס $0 \le j \le n - m$ את מספר האי-התאמות בין התבנית P לבין המחרוזת $t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{m+j-1}$.

למשל, אם התבנית P היא *aabba* והטקסט T הוא *ababab*, אז האלגוריתם צריך לתת את הפלט הבא:

אינדקס 0: 2

אינדקס 1: 3

אם T הוא *bbbbbbb* ו-P היא *aabba*, האלגוריתם צריך לתת את הפלט הבא:

אינדקס 0: 3

אינדקס 1: 3

אינדקס 2: 3

רמז: התאימו את a ל- 1 ואת b ל- -1.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

בונוס: בהינתן טקסט T באורך n ותבנית P באורך m, בא״ב בן k אותיות, תארו אלגוריתם יעיל, המוצא את כל האינדקסים $0 \le j \le n - m$ כך ש:

$$p_0 \dots p_{m-1} = t_j \dots t_{m+j-1}$$