

שאלון בחינת גמר

20407 - מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה 4 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה חמש שאלות.

עליכם לענות על ארבע מתוך חמש השאלות.
כל בחינה תבדקנה ארבע התשובות הראשונות בלבד.
לכל השאלות משקל שווה.

הנחיות:
רצוי שכל תשובה תתחיל בעמוד חדש.
אין לכתוב בצבע אדום.

חומר עזר:
ספר קורס ומדריך למידה של הקורס. 2 דפי A4 כתובים משני הצדדים
עם נוסחאות/הפניות. מותרות הערות. אסור להכניס חומר נוסף.
מחשבון פשוט. אסור בשימוש כל מכשיר אלקטרוני שבאמצעותו ניתן
לאצור מידע לרבות מכשיר טלפון נייד, מחשב נישא, שעון חכם וכד'.

בהצלחה !!!

אינכם חייבים
להחזיר את השאלון לאוניברסיטה הפתוחה



אפשר להשתמש בכל עובדה או תוצאה המופיעה בספר הלימוד או במדריך הלמידה, ללא הוכחה או הסבר. חובה להוכיח או להסביר כל טענה אחרת.

יש להתחיל כל תשובה בעמוד חדש (או לפחות להשאיר 5 שורות בין תשובות לשאלות שונות).
אין צורך לכתוב פסידוקוד, אלא אם הדבר נדרש במפורש.

שאלה 1

(10 נק') א. פתרו את נוסחת הנסיגה:

$$\begin{cases} T(1) = c > 0 \\ T(n) = 9T(n/3) + f(n) \end{cases}$$

$$f(n) = \begin{cases} n^2 \cdot \lg^3 n + n^3 \cdot \lg n, & n > 100 \\ n^2, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{כאשר:}$$

(15 נק') ב. בהינתן מערך ממורן A בן n איברים, ובהינתן שני מספרים a ו- b , $a < b$, כתבו שגרה המחזירה את האינדקס i , $1 \leq i \leq n-1$, המקיים $A[i] \leq a < b \leq A[i+1]$ (או NIL אם אינדקס כזה לא קיים). זמן הריצה הנדרש של השגרה הוא $O(\lg n)$.
בהנחה שאינדקס כזה קיים - האם הוא יחיד?

שאלה 2

ברצוננו לבנות ערמת מינימום H בת n איברים כך שבכל איבר x בערמה יהיה שדה $\max[x]$ המאחסן את הערך המכסימלי בתת-ערמה המושרשת ב- x .

(12 נק') א. הראו כיצד ניתן לשנות את השגרה $\text{INSERT-MIN-HEAP}(H, x)$ כך שהשדות $\max[x]$ יעודכנו בהתאם, ללא שינוי לזמן הריצה האסימפטוטי של הכנסה לערימה.

(13 נק') ב. הראו כיצד ניתן לשנות את השגרה $\text{MIN-DELETE-MIN}(H, x)$ (מחיקת המינימום) כך שהשדות $\max[x]$ יעודכנו בהתאם, ללא שינוי לזמן הריצה האסימפטוטי של מחיקת מינימום מערימה.

הערה: יש לתת דוגמה לכל אחת מהפעולות (מעבר לכתיבת האלג', הסבר נכונות, ניתוח סיבוכיות, וכו').

שאלה 3

- א. (12 נק') נתון מערך $A[1..n]$ של מספרים ממשיים כלשהם. כתבו אלגוריתם שזמן ריצתו לינארי, הבודק האם קיימים ב- A שני איברים a ו- b , $a < b$, כך ש- a מופיע במערך יותר מ- $\lceil n/3 \rceil$ פעמים וגם b מופיע במערך יותר מ- $\lceil n/3 \rceil$ פעמים. ✓
- ב. (13 נק') נתון מערך A באורך n של מספרים ממשיים חיוביים, שונים זה מזה. כתבו אלגוריתם שתוחלת זמן ריצתו לינארית, הבודק האם קיימים ב- A שני איברים a ו- b , $a < b$, כך שמתקיים התנאי: $b = a^2$. ✓

שאלה 4

- א. (9 נק') יהי T עץ בינרי המכיל "שרוך" בן שלושה צמתים (כלומר קיים ב- T צומת שיש לו רק בן אחד ולצומת זה יש רק בן אחד). הוכיחו או הפריכו: ניתן לצבוע את הצמתים של T כך שיתקבל עץ אדום-שחור חוקי.
- הערה: צמתי ה-NIL של העץ האדום-שחור אינם חלק מהצמתים המקוריים של T .
- ב. (8 נק') נתון עץ בינרי B בעל n צמתים. מצד אחד, העץ מקיים את תכונת ערמת המקסימום: מפתחות הבנים קטנים ממפתח האב או שווים לו; מצד שני, העץ מקיים את תכונת עץ החיפוש הבינרי: לכל צומת z בעץ, המפתחות בתת-עץ השמאלי קטנים מהמפתח של z או שווים לו, והמפתחות בתת-עץ הימני גדולים מהמפתח של z או שווים לו.
- תארו את מבנה (צורת) העץ, בהנחה שכל המפתחות שונים זה מזה.
- ג. (8 נק') נתון עץ בינרי B בעל n צמתים. בכל צומת יש זוג שדות (key, priority). מצד אחד, העץ מקיים את תכונת ערמת המקסימום ביחס לשדה ה-priority: ערך ה-priority אצל הבנים קטן מערך זה אצל האב או שווה לו; מצד שני, העץ מקיים את תכונת עץ החיפוש הבינרי ביחס לשדה ה-key: לכל צומת z בעץ, המפתחות (שדות ה-key) בתת-עץ השמאלי קטנים מהמפתח של z או שווים לו, והמפתחות בתת-עץ הימני גדולים מהמפתח של z או שווים לו.
- באילו תנאים יהיה מבנה העץ זהה לזה שבסעיף הקודם? (ניתן להניח שכל המפתחות וכל ערכי ה-priority שונים זה מזה).

שאלה 5

הציעו מבנה נתונים S שבאמצעותו ניתן לממש כל אחת מהפעולות הבאות בסיבוכיות המבוקשת n מציין את מספר המפתחות השונים זה מזה; המספר הכולל של מפתחות יכול להיות גדול יותר):

$INSERT(S, k)$: הכנסת איבר בעל המפתח k למבנה S ; זמן הריצה: $O(\lg n)$;

$DELETE(S, k)$: מחיקת אחד האיברים בעלי המפתח k ; זמן הריצה: $O(\lg n)$;

$MEDIAN-MODE(S)$: החזרת ערך המפתח בעל השכיחות החציונית (כלומר, שכיחות המפתח

הינו חציון כל n השכיחות); זמן הריצה: $O(1)$.

הערה: מבנה הנתונים יכול להיות מורכב ממספר מבנים יסודיים.

ב ה צ ל ח ה !