מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2010ב **מועד אחרון להגשה:** 26 במרץ 10

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

בנו מכונת טיורינג **המכריעה** את השפה של תרגיל 3.8 סעיף a ($\{w \in \{0, 1\}^* \mid \#_0(w) = \#_1(w)\}$).

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, \sqcup, x\}$.

למכונה יהיו **לא יותר משבעה מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה בעזרת איור מלא (כמו איור 3.8 בספר).
הקפידו על כך שהאיור יהיה גדול, בהיר, וללא קשתות נחתכות.

הסבירו היטב את פעולת המכונה, ולמה היא אכן מכריעה את השפה הדרושה.

שאלה 2 (20% סעיף א - 15%; סעיף ב - 5%)

א. בנו מכונת טיורינג שכאשר היא מקבלת כקלט מילה w מעל האלפבית $\{0,1\}$, היא מסיימת במצב q_{accept} ועל הסרט רשומה המילה $w\#w$.

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, x, \#, \sqcup\}$.

למכונה יהיו **לא יותר משלושה עשר מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{reject} וכל הקשתות שנכנסות אליו).
הקפידו על כך שהאיור יהיה גדול, בהיר, וללא קשתות נחתכות.
הסבירו היטב את פעולת המכונה ולמה היא אכן מבצעת את הנדרש.
זכרו לטפל נכון גם במקרה ש-w היא המילה הריקה.

ב. מהי הפונקציה שמחשבת המכונה שבניתם בסעיף א?
הגדירו את הפונקציה בשלמות (תחום, טווח וכלל העתקה).

שאלה 3 (14%)

לפי ההגדרה של מכונת טיורינג שמופיעה בספר, כאשר מגיעים למצב המקבל q_{accept} או למצב הדוחה q_{reject}, המכונה עוצרת. כלומר, פונקצית המעברים איננה מוגדרת על מצבים אלה. (עיינו בפסקה האחרונה בעמוד 143 בספר).

נניח שנשנה את ההגדרה של פונקצית המעברים כך שכאשר מגיעים למצב המקבל או למצב הדוחה, לא בהכרח עוצרים. ייתכן שעל חלק מן הסמלים של אלפבית הסרט Γ יש המשך.

המכונה מקבלת מילה w רק אם במהלך החישוב של המכונה על w מגיעים למצב המקבל, ועל הסמל שנקרא כעת בסרט אין המשך מן המצב המקבל.

המכונה דוחה מילה w, אם במהלך החישוב של המכונה על w מגיעים למצב הדוחה, ועל הסמל שנקרא כעת בסרט אין המשך מן המצב הדוחה, או אם המכונה אף פעם לא עוצרת.

האם למכונה שפועלת לפי ההגדרה החדשה **יש אותו הכוח** כמו למכונה רגילה?

אם עניתם שכן, הראו כיצד כל אחת מן המכונות יכולה לחקות את פעולתה של המכונה האחרת.
אם עניתם שלא, תנו דוגמה לשפה שאחת המכונות יכולה לזהות, והשנייה איננה יכולה לזהות.

שאלה 4 (8%)

הסבירו היטב מדוע המודל של מכונות טיורינג לא דטרמיניסטיות איננו מתאים לחישוב פונקציות (הכוונה לפונקציות ממחרוזות למחרוזות).

שאלה 5 (20%)

בעמוד 152 בספר, בהוכחת משפט 3.16, מוסבר מדוע המכונה D איננה מממשת חיפוש עומק בעץ הקונפיגורציות, אלא חיפוש רוחב.

אם ידוע שאין בעץ הקונפיגורציות ענפים אינסופיים (המכונה הלא דטרמיניסטית N היא מכונה **מכריעה**. ראו ההגדרה בעמוד 154 בספר), אז אפשר לממש חיפוש עומק.

יש יתרון לחיפוש עומק על פני חיפוש רוחב, משום שחיפוש רוחב הוא בזבזני במובן שבכל פעם שסורקים חלק של ענף בעץ הקונפיגורציות, מתחילים את הסריקה משורש העץ. (ראו שלבים 2 ו-3 במכונה D בעמוד 153 בספר).

תארו מכונה **דטרמיניסטית** $D_{\text{depth-first}}$ שתבצע **חיפוש עומק** בעץ הקונפיגורציות של המכונה הלא דטרמיניסטית N.

הניחו ש-N היא מכונה **מכריעה**.

המכונה $D_{\text{depth-first}}$ צריכה להכריע את השפה שמכריעה המכונה N.

למכונה $D_{\text{depth-first}}$ יהיו **שני סרטים** (ולא שלושה כמו למכונה D).

$D_{\text{depth-first}}$ לא תתחיל את הסריקה משורש העץ בכל פעם (כמו שעושה המכונה D).

רמת התיאור של $D_{\text{depth-first}}$ צריכה להיות כמו התיאור של המכונה D בעמוד 153.

הוסיפו הסברים מפורטים כיצד יתבצע כל שלב של $D_{\text{depth-first}}$, כמו ההסברים שמופיעים בספר בהוכחת משפט 3.16 ביחס למכונה D.

שאלה 6 (16%)

נתונים שני מונים (enumerators) E_1 ו-E_2.

נסמן על-ידי $L(E_1)$ את השפה ש-E_1 מפיק, ועל-ידי $L(E_2)$ את השפה ש-E_2 מפיק.

א. **הסבירו היטב** כיצד אפשר לבנות מונה $E_\cup$ שמפיק את השפה $L(E_1) \cup L(E_2)$.

הכוונה היא לבניית המונה $E_\cup$ מן המונים E_1 ו-E_2, בלי לעבור דרך מכונות טיורינג.

אתם רשאים להניח שלמונה $E_\cup$ יש כמה סרטי עבודה.

ב. **הסבירו היטב** כיצד אפשר לבנות מונה $E_\cap$ שמפיק את השפה $L(E_1) \cap L(E_2)$.

הכוונה היא לבניית המונה $E_\cap$ מן המונים E_1 ו-E_2, בלי לעבור דרך מכונות טיורינג.

אתם רשאים להניח שלמונה $E_\cap$ יש כמה סרטי עבודה.

שאלה 7 (12%)

בעיה 3.19 בספר (עמוד 164).

הדרכה: אפשר להיעזר בטענה של בעיה 3.18 בספר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2010א **מועד אחרון להגשה:** 6 נוב' 09

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (15%)

אפשר להציע אלגוריתם נוסף לזיהוי השפה A של דוגמה 3.7 :

רושמים על ה-0-ים של הקלט תחילה את x, אחר כך את x^2, אחר כך את x^4, אחר כך את x^8, וכך הלאה.

ממשיכים בתהליך הזה עד שמגלים שמספר ה-0-ים שווה ל-x^k עבור k כלשהו שהוא חזקה שלמה של 2 (ואז מקבלים את הקלט), או עד שמגלים אי-שוויון (ואז דוחים את הקלט).

תארו בעזרת איור (כמו איור 3.8 בספר) מכונת טיורינג שמממשת את האלגוריתם הזה.
הקפידו על כך שהאיור יהיה גדול, בהיר, וללא קשתות נחתכות.
אתם רשאים להשמיט מעברים בלתי אפשריים (כדוגמת המעבר המתייחס לקריאת הסמל x במצב q_1 של המכונה M_2 באיור 3.8).

אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$.

למכונה יהיו **לא יותר משנים עשר מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

הסבירו היטב את פעולת המכונה, ולמה היא אכן מכריעה את השפה A.

שאלה 2 (12%)

שפה L תיקרא **מזוהה על-ידי עצירה** אם קיימת מכונת טיורינג M שלכל $w \in L$ עוצרת (ב-q_{accept} או ב-q_{reject}), ולכל $w \notin L$ לא עוצרת.

א. נתון שהשפה L מזוהה על-ידי עצירה. האם בהכרח L היא שפה מזוהה-טיורינג?
הוכיחו את תשובתכם.

ב. נתון ש-L מזוהה טיורינג. האם בהכרח L מזוהה על-ידי עצירה?
הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 3 (15%)

עיינו בהגדרה 3.3 בספר (עמוד 142).

נניח שנשנה את ההגדרה של פונקצית המעברים δ (בסעיף 4) באופן הבא:

$$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L_k, R_k \mid k \text{ is natural}, k > 0\}$$

הפירוש של הפונקציה החדשה הוא כזה: כאשר המכונה נמצאת במצב q, והראש קורא את הסמל a, אם $\delta(q, a) = (r, b, R_k)$, אז כותבים b במקום a, עוברים מהמצב q למצב r, והראש נע על הסרט k ריבועים ימינה. אם $\delta(q, a) = (r, b, L_k)$, אז כותבים b במקום a, עוברים מהמצב q למצב r, והראש נע על הסרט k ריבועים שמאלה. אם במהלך התנועה שמאלה מגיעים לריבוע השמאלי ביותר של הסרט, נשארים בריבוע זה.

האם למכונה כזו **יש יותר כוח** מאשר למכונה רגילה?

אם עניתם שכן, עליכם להראות שמכונה כזו יכולה לזהות **כל שפה שהיא**.
אם עניתם שלא, עליכם להראות כיצד מכונה רגילה יכולה לחקות את פעולתה של המכונה החדשה.

שאלה 4 (15%)

תארו מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית** לזיהוי השפה הבאה:

$$F = \{\#x_1\#x_2\# \ldots \#x_k \mid \text{each } x_i \in \{0, 1\}^* \text{ and } x_i = x_j \text{ for some } i \neq j\}$$

רמת הפירוט תהיה כמו בדוגמה 3.12 בספר.
המכונה צריכה להשתמש באי-דטרמיניזם באופן שיקל על החישובים (לעומת מכונה דטרמיניסטית לאותה המשימה).

שאלה 5 (18%)

תהי w מחרוזת סמלים. מסמנים על-ידי w^R את המחרוזת המתקבלת מ-w על-ידי היפוך סדר הסמלים ב-w.

דוגמה: $11001^R = 10011$

בנו מונה (enumerator) לשפה $D = \{w\#w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$.

האלפבית Σ של סרט הפלט יהיה $\{0, 1, \#\}$; האלפבית Γ של סרט העבודה יהיה $\{0, 1, \sqcup\}$.

למונה יהיו **לא יותר משנים עשר מצבים** (כולל q_{print} ו-q_{halt}).

תארו את המונה בעזרת איור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{halt} וכל הקשתות שנכנסות אליו. אפשר לוותר על הציור של מעברים בלתי אפשריים).
הקפידו על כך שהאיור יהיה גדול, בהיר, וללא קשתות נחתכות.
להגדרה פורמלית של מונה, עיינו במדריך הלמידה.
הסבירו היטב את פעולת המונה, ולמה הוא אכן מפיק את השפה D.

שאלה 6 (15%)

הוכיחו: שפה A היא מזוהה-טיורינג אם ורק אם יש מונה (enumerator) שמפיק את A וכל מילה ב-A מודפסת על-ידי המונה **פעם אחת ויחידה**. (כלומר, מילה ששייכת ל-A מודפסת פעם אחת; מילה שלא שייכת ל-A לא מודפסת אף פעם).

(ההבדל בין משפט 3.21 למה שאתם צריכים להוכיח בשאלה הוא הדרישה שכל מילה בשפה תודפס רק פעם אחת).

שאלה 7 (10%)

א. בעיה 3.15 בספר סעיף **c**.

ב. בעיה 3.16 בספר סעיף **c**.

הגדרת הפעולה כוכב מופיעה בספר בהגדרה 1.23 (עמוד 44).

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: ב2009 **מועד אחרון להגשה:** 3 באפריל 09

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (14%)

נגדיר את השפה D הבאה:

$$D = \{0^{n_1}10^{n_2}1\cdots10^{n_k} \mid 0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k\}$$

(דוגמאות למילים ששייכות לשפה: 000, 0010000100000, 01000100001000000).

בנו מכונת טיורינג **המכריעה** את D.

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, \sqcup, x\}$; למכונה יהיו **לא יותר מתשעה מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה בעזרת איור (כמו איור 3.8 בספר).

אתם רשאים להשמיט מעברים בלתי אפשריים (כדוגמת המעבר המתייחס לקריאת הסמל x במצב q_1 של המכונה M_2 באיור 3.8).

הקפידו שלא תהיינה קשתות נחתכות באיור.

הסבירו היטב את פעולת המכונה, ולמה היא אכן מכריעה את השפה D.

שאלה 2 (16%. סעיף א - 4%; סעיף ב - 12%)

עיינו במכונה M_1 של איור 3.10.

א. האם במצב q_6 אפשר להשמיט את המעברים המתאימים לסמלים 0 ו-1?
הצדיקו את תשובתכם.

ב. הציעו דרך לשנות את המכונה M_1 **כך שאפשר יהיה לוותר על אחד המצבים** (ולקבל מכונה עם תשעה מצבים בלבד, כולל q_{accept} ו-q_{reject}).
המכונה לאחר השינוי חייבת להכריע את השפה B ש-M_1 מכריעה.
אינכם צריכים לצייר את המכונה החדשה. די להסביר את השינויים הנדרשים.

שאלה 3 (15%)

נעיין במודל החישובי הבא: מכונת טיורינג **עם מספר אינסופי של מצבים**.

מכונה כזו זהה למכונה רגילה, פרט לכך שמספר המצבים יכול להיות אינסופי (ולכן גם התחום והטווח של פונקצית המעברים יכולים להיות אינסופיים).

האם למכונה כזו **יש יותר כוח** מאשר למכונה רגילה?

אם עניתם שכן, עליכם להראות שמכונה כזו יכולה לזהות **כל שפה שהיא**. בנוסף עליכם להסביר מדוע אין בקיומה של מכונה כזו סתירה לתזה של צ'רץ'-טיורינג.

אם עניתם שלא, עליכם להראות כיצד מכונה עם מספר **סופי** של מצבים יכולה לחקות את פעולתה של מכונה עם מספר **אינסופי** של מצבים.

שאלה 4 (14%)

מספר טבעי n נקרא **פריק** (composite) אם הוא לא ראשוני. (כלומר, אם הוא שווה ל-1, או שיש לו מחלקים שונים מ-1 וממנו עצמו).

א. תארו מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית** להכרעת השפה F הבאה:

$$F = \{a^n \mid n \geq 1;\ n \text{ is composite}\}$$

רמת הפירוט של תיאור פעולת המכונה צריכה להיות דומה למכונה C מדוגמה 3.11 בספר.

המכונה צריכה להשתמש באי-דטרמיניזם באופן שיקל על החישובים (לעומת מכונה דטרמיניסטית לאותה המשימה).

שימו לב שהמכונה שאתם מתארים **מכריעה** את השפה, ולא רק מזהה אותה.

ב. נניח שנחליף במכונה שהצעתם את התפקידים של המצבים q_{accept} ו-q_{reject}.

מהי השפה שמכריעה המכונה שתתקבל? הצדיקו היטב את תשובתכם.

שאלה 5 (14%)

בנו מונה (enumerator) לשפה $\{0, 1\}^*$, שידפיס את המילים של השפה **בסדר לקסיקוגרפי** (המילה הריקה, אחר כך המילה 0, אחר כך המילה 1, אחר כך המילה 00, אחר כך המילה 01, וכך הלאה).

האלפבית Σ של סרט הפלט יהיה $\{0, 1\}$; האלפבית Γ של סרט העבודה יהיה $\{0, 1, \sqcup\}$.

למונה יהיו **לא יותר מעשרה מצבים** (כולל q_{print} ו-q_{halt}).

תארו את המונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{halt} וכל הקשתות שנכנסות אליו. אפשר לוותר על הציור של מעברים בלתי אפשריים).

להגדרה פורמלית של מונה, עיינו במדריך הלמידה.

הסבירו היטב את פעולת המונה, ולמה הוא אכן מדפיס את המילים של השפה $\{0, 1\}^*$ בסדר לקסיקוגרפי.

שאלה 6 (12%)

קראו בבעיה 3.9 בספר את ההגדרה של 2-PDA (אוטומט עם שתי מחסניות).

א. תארו אוטומט עם שתי מחסניות להכרעת השפה $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$.

ב. תארו אוטומט עם שתי מחסניות להכרעת השפה $\{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}$.

שאלה 7 (15%)

א. הגדירו באופן פורמלי **מונה מרובה סרטים** (כלומר, מונה עם יותר מסרט עבודה אחד).
הוכיחו שמונה כזה שקול בכוח החישוב שלו למונה עם סרט עבודה יחיד.

ב. הגדירו באופן פורמלי **מונה לא דטרמיניסטי** ואת **השפה** שמונה כזה מפיק.
הוכיחו שמונה כזה שקול בכוח החישוב שלו למונה דטרמיניסטי.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2009א **מועד אחרון להגשה:** 14 בנוב' 08

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (15%)

תהי w מחרוזת סמלים. מסמנים על-ידי w^R את המחרוזת המתקבלת מ-w על-ידי היפוך סדר הסמלים ב-w.

דוגמה: $11001^R = 10011$

מילה w נקראת **פלינדרום** אם $w = w^R$.

דוגמה: 1100011 היא פלינדרום; 110001 איננה פלינדרום.

נגדיר את השפה PAL:

$$PAL = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R\}$$

(זוהי שפת הפלינדרומים מעל האלפבית $\{0, 1\}$).

בנו מכונת טיורינג **המכריעה** את PAL.

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$; למכונה יהיו **לא יותר משמונה מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה בעזרת איור (כמו איור 3.8 בספר). הקפידו שלא תהיינה קשתות נחתכות באיור. הסבירו היטב את פעולת המכונה ולמה היא אכן מכריעה את PAL.

שאלה 2 (18%)

א. כמה פעמים תקרא המכונה מאיור 3.10 בספר את הסמל # אם מילת הקלט היא מהצורה $w\#w$ (כלומר, מילה ששייכת לשפה) ו- $|w| = n$ ($|w|$ מסמן את האורך של w)?
הצדיקו את תשובתכם.

ב. הציעו דרך לבנות מכונה שבה מספר הפעמים הזה יהיה **קטן פי שניים**.
אינכם צריכים לבנות את המכונה, רק להסביר כיצד היא תפעל.

שאלה 3 (10%)

מיהן השפות המזוהות על-ידי מכונות טיורינג שיש להן **בדיוק שני מצבים**?
הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 4 (15%)

בנו מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית להכרעת השפה D הבאה:

$D = \{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}$

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, \sqcup, x\}$; למכונה יהיו **לא יותר מ-12 מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{reject} וכל הקשתות שנכנסות אליו).
הסבירו היטב את פעולת המכונה, את התפקיד של כל מצב, את נקודות האי-דטרמיניזם, ולמה המכונה אכן מכריעה את D.

שאלה 5 (15%)

בעיה 3.10 בספר (עמוד 162).
הראו שמכונה עם סרט אינסופי בשני הכיוונים **שקולה בכוחה** למכונה עם סרט אינסופי בכיוון אחד: פרטו כיצד מכונה מאחד הסוגים יכולה לחקות את פעולתה של מכונה מן הסוג השני.

שאלה 6 (15%)

בנו מונה (enumerator) לשפה A של דוגמה 3.7.

האלפבית Σ של סרט הפלט יהיה $\{0\}$; האלפבית Γ של סרט העבודה יהיה $\{0, x, \sqcup\}$.

למונה יהיו **לא יותר משמונה מצבים** (כולל q_{print} ו-q_{halt}).

תארו את המונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{halt} וכל הקשתות שנכנסות אליו. אפשר לוותר על הציור של מעברים בלתי אפשריים).
להגדרה פורמלית של מונה, עיינו במדריך הלמידה.
הסבירו היטב את פעולת המונה ולמה הוא אכן מונה את השפה A.

שאלה 7 (12%)

א. על המונה E נתון שהוא **מגיע** אי פעם למצב q_{halt}.
האם אפשר להסיק מכך שהשפה $L(E)$ שהוא מונה היא **שפה כריעה**? הוכיחו את תשובתכם.

ב. על המונה F נתון שהוא **לא מגיע** אף פעם למצב q_{halt}.
האם אפשר להסיק מכך שהשפה $L(F)$ שהוא מונה **איננה שפה כריעה**? הוכיחו את תשובתכם.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1-3

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2006ב **מועד אחרון להגשה:** 28 באפר' 06

אנא שימו לב: מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (12% - סעיף א 3%; סעיף ב 9%)

א. הגדירו **באופן אינדוקטיבי** את $|u|$ (האורך של המחרוזת u) ואת u^R (המחרוזת המתקבלת מן המחרוזת u על-ידי היפוך סדר הסמלים).

ב. הוכיחו **באינדוקציה** את הטענות הבאות:

1. לכל שתי מחרוזות v ו-w, $|vw| = |v| + |w|$.
2. לכל מחרוזת v ולכל מספר טבעי n, $|v^{[n]}| = n \cdot |v|$.
3. לכל מחרוזת u ולכל מספר טבעי n, $(u^{[n]})^R = (u^R)^{[n]}$.

שאלה 2 (20%)

כתבו תכניות בשפה S לחישוב הפונקציות הבאות. על התכניות להיות **קצרות וברורות**.
כתיבת התכניות צריכה להיות **מדויקת, ועל פי כל כללי התחביר של השפה**.
הוסיפו לכל תכנית הסבר קצר על אופן פעולתה.

א. $f(x) = 2x - 3$. אל תשתמשו במקרוס. שימו לב ש-f היא פונקציה חלקית. ערכו של המשתנה X יהיה 0 בסיום ריצת התכנית. כתבו תכנית עם **9 הוראות לכל היותר**.

ב. תרגיל 2.2.5 בספר (עמוד 25). כתבו תכנית עם **9 הוראות לכל היותר**.

ג. $g(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$. אל תשתמשו במקרוס. ערכם של המשתנים X_1 ו-X_2 יהיה 0 בסיום ריצת התכנית. כתבו תכנית עם **10 הוראות לכל היותר**.

ד. $h(x_1, x_2) = x_1 \bmod x_2$. מותר להשתמש במקרוס המופיעים בספר בפרק 2. שימו לב ש-h היא פונקציה חלקית.

שאלה 3 (12%)

בתכניות בשפה S מממשים **לולאות** בעזרת הוראות הסתעפות מותנית (IF $V\neq0$ GOTO L).
לולאה מקוננת היא לולאה בתוך לולאה.
נאמר על תכנית בשפה S **שאין בה לולאות מקוננות**, אם לכל הוראה מהצורה IF $V\neq0$ GOTO L המופיעה בתכנית, כל ההוראות שבין ההוראה הזו ובין ההוראה שמתחילה בתווית L הן הוראות מהצורה $V \leftarrow V+1$ או מהצורה $V \leftarrow V-1$. (כלומר, בין הוראת קפיצה ובין התווית שאליה קופצים אין הוראות קפיצה).

כתבו תכניות **ללא לולאות מקוננות**, לחישוב הפונקציות הבאות.
בתכניות שאתם כותבים **אל תשתמשו במקרוס**.
הוסיפו לכל תכנית הסבר על אופן פעולתה.

א. $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & if \;\; x_1 = 0 \;\; and \;\; x_2 = 0 \\ 1 & otherwise \end{cases}$. כתבו תכנית עם **לא יותר מ-10 הוראות**.

ב. $g(x) = \begin{cases} x & if \;\; x \neq 0 \\ \uparrow & otherwise \end{cases}$. כתבו תכנית עם **לא יותר מ-18 הוראות**.

שאלה 4 (8%)

תרגיל 2.5.8 בספר (עמודים 36-37).

שאלה 5 (8%)

תרגיל 3.3.2 בספר (עמוד 43).

שאלה 6 (20%)

הוכיחו שהפונקציות הבאות הן **פרימיטיביות רקורסיביות**.

א. $\gcd(x, y)$ (ראו תרגיל 3.7.6 בעמוד 58 בספר).

ב. $\mathrm{lcm}(x, y)$ (ראו תרגיל 3.7.7 בעמוד 58 בספר).

ג. $g(x, y, z)$ - מספר המחלקים המשותפים של x ו- y שאינם גדולים מ- z.

ד. $f(x) = \lceil \log_2(x+1) \rceil$.

שאלה 7 (20%)

א. הציעו דרך להתאים לכל **קבוצה סופית** של מספרים טבעיים מספר טבעי יחיד באופן חד-חד ערכי (כלומר, לכל מספר תותאם קבוצה ולכל קבוצה יותאם מספר).
(בסעיף 3.8 בספר יש דרך להתאים מספרים **לסדרות**. כאן אתם נדרשים להציע דרך להתאים מספרים **לקבוצות**).
הדרכה: לכל מספר טבעי יש ייצוג בינרי.

ב. הוכיחו: לכל n, הפונקציה שמקבלת n מספרים טבעיים, ומחזירה את המספר הטבעי שמתאים לקבוצת n המספרים היא **פונקציה פרימיטיבית רקורסיבית**.

ג. הוכיחו: הפרדיקט שמקבל מספרים טבעיים m ו-k, ומחזיר 1 אם m שייך לקבוצה שמתאימה ל-k ומחזיר 0 אחרת, הוא **פרדיקט פרימיטיבי רקורסיבי**.

ד. הוכיחו: הפונקציה שמקבלת מספר טבעי k, ומחזירה את מספר האיברים בקבוצה שמתאימה ל-k היא **פונקציה פרימיטיבית רקורסיבית**.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1-3

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2006א **מועד אחרון להגשה:** 25 בנוב' 05

אנא שימו לב: מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (10% - סעיף א 3%; סעיף ב 7%)

א. הוכיחו **באינדוקציה:** $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n} = 1-\frac{1}{n}$.

ב. הוכיחו **באינדוקציה:** אם x ו-y הן שתי מחרוזות המקיימות $xy = yx$, אז יש מחרוזת z ויש מספרים טבעיים i ו-j כך ש- $x = z^{[i]}$ ו- $y = z^{[j]}$.

שימו לב, ההוכחות חייבות להיות באינדוקציה!

שאלה 2 (20%)

כתבו תכניות בשפה S לחישוב הפונקציות הבאות. על התכניות להיות **קצרות וברורות**.
כתיבת התכניות צריכה להיות **מדויקת, ועל פי כל כללי התחביר של השפה**.
הוסיפו לכל תכנית הסבר קצר על אופן פעולתה.

א. $f(x) = 3x - 5$. אל תשתמשו במקרוס. שימו לב ש-f היא **פונקציה חלקית**. ערכו של המשתנה X יהיה 0 בסיום ריצת התכנית. כתבו תכנית **עם 9 הוראות לכל היותר**.

ב. $p(x) \Leftrightarrow x$ אי זוגי (כלומר, $p(x) = 0$ אם x זוגי; $p(x) = 1$ אם x אי זוגי).
אל תשתמשו במקרוס. ערכו של המשתנה X בסיום ריצת התכנית יהיה זהה לערכו בתחילת הריצה.
כתבו תכנית **עם 13 הוראות לכל היותר**.

ג. $g(x) = \left\lfloor \sqrt[3]{x} \right\rfloor$.

ד. $h(x_1, x_2) = \log_5 (x_1 + x_2)$.

בסעיפים ג ו-ד אתם רשאים להשתמש במקרוס מפרק 2 בספר ובמדריך הלמידה (כולל התרגילים).

שאלה 3 (14%)

א. תרגיל 2.4.6 בספר (עמוד 32).

ב. תרגיל 2.4.7 בספר (עמוד 32).

שאלה 4 (8%)

תרגיל 2.5.6 בספר (עמוד 36).

שאלה 5 (12%)

תרגיל 3.4.10 בספר (עמוד 48).

שאלה 6 (20%)

הוכיחו שהפונקציות הבאות הן **פרימיטיביות רקורסיביות**.

א. $\min(x, y, z)$ (המספר המינימלי מבין שלושת המספרים)

ב. $\varphi(x)$ (מספר המספרים הטבעיים הקטנים מ-x וזרים לו)

ג. $f(x) = \lfloor \log_2(x+1) \rfloor$

ד. $g(x) = \left\lceil \sqrt[5]{x} \right\rceil$

שאלה 7 (16%)

עיינו בספר בסעיף 3.8.

נניח שנגדיר את הפונקציה $\langle x, y \rangle$ כך: $\langle x, y \rangle = x + \sum_{k=1}^{x+y} k$.

א. הוכיחו שאם z הוא מספר טבעי כלשהו, אז יש x ו-y יחידים כך ש- $\langle x, y \rangle = z$.
(שימו לב שעליכם להוכיח **שני** דברים, **שקיימים** x ו-y כאלה ושהם **יחידים**).

ב. נסמן: $x = l(z)$; $y = r(z)$.
הוכיחו את משפט 3.8.1 (בעמוד 60 בספר) ביחס לפונקציות $\langle x, y \rangle$ $l(z)$ ו- $r(z)$ שהגדרנו.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 3-1

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2005ב **מועד אחרון להגשה:** 1 באפריל 05

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (10%)

לפניכם טענה: אם $u,v\in\{a,b\}^*$ ו- $u\neq v$, אז לכל שתי מלים $x,y\in\{a,b\}^*$ מתקיים $xuy\neq yvx$.

א. הראו בעזרת דוגמה נגדית שה**טענה איננה נכונה**.

ב. נתונה ה"הוכחה" הבאה לטענה:

נעיין בפרדיקט הבא: אם $x,y\in\{a.b\}^*$ ו- $|xy|=n$, אז לכל שתי מלים u ו-v מעל $\{a,b\}$, $u\neq v$, מתקיים $xuy\neq yvx$.

נוכיח את נכונותו של הפרדיקט לכל $n\in N$: עבור $n=0$ הוא נכון.

נניח את נכונותו לכל $m<k$, עבור k נתון כלשהו, ונוכיח את נכונותו ל-k:

נניח בשלילה שקיימות שתי מלים x,y כך ש- $|xy|=k$, ושתי מלים שונות u ו-v כך ש- $xuy=yvx$.

מן השוויון הזה נובע שהאות הראשונה של x זהה לאות הראשונה של y, והאות האחרונה של x זהה לאות האחרונה של y.

נסמן: $x=\alpha x_1\beta \quad , y=\alpha y_1\beta \quad (\alpha.\beta\in\{a,b\})$.

נקבל: $\alpha x_1\beta u\alpha y_1\beta=\alpha y_1\beta v\alpha x_1\beta$.

ומכאן: $x_1\beta u\alpha y_1=y_1\beta v\alpha x_1$.

מכיוון ש- $u\neq v$, גם $\beta u\alpha\neq\beta v\alpha$.

נסמן: $u_1=\beta u\alpha \quad , \quad v_1=\beta v\alpha$.

נקבל: $x_1u_1y_1=y_1v_1x_1$.

אבל $|x_1y_1|<k$, ולכן על-פי הנחת האינדוקציה, $x_1u_1y_1\neq y_1v_1x_1$. סתירה!

מהסתירה אפשר להסיק שהפרדיקט נכון גם ל-k, ועל כן הוא נכון לכל $n\in N$.

מה כאן לא בסדר?

שאלה 2 (18%)

כתבו תכניות בשפה S לחישוב הפונקציות הבאות. על התכניות להיות **קצרות וברורות**.
כתיבת התכניות צריכה להיות **מדויקת, ועל פי כל כללי התחביר של השפה.**
הוסיפו לכל תכנית הסבר קצר על אופן פעולתה.

א. $f(x) = 2x - 3$. אל תשתמשו במקרוס. שימו לב ש-f היא פונקציה חלקית.
כתבו תכנית עם **לא יותר מ-9 הוראות.**

ב. $g(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$. הניחו ש- $0^0 = 0$.
מותר להשתמש במקרוס מהצורה $\text{GOTO } L$ ו- $V'' \leftarrow V \cdot V'$ בלבד.

ג. $h(x) = 2^x$. אל תשתמשו במקרוס. כתבו תכנית עם **לא יותר מ-12 הוראות.**

ד. $p(x_1, x_2) \Leftrightarrow x_1 \mid x_2$. (הפרדיקט מחזיר 1 אם ורק אם x_1 מחלק את x_2).
מותר להשתמש במקרוס שמופיעים בספר בפרק 2.

שאלה 3 (15%)

א. הוכיחו שלכל k, הפונקציה הקבועה $f(x) = k$ שמחזירה k לכל x, היא **פונקציה ניתנת לחישוב** (פונקציה .c).

ב. הוכיחו שלכל k, יש תכנית שמחשבת את הפונקציה הקבועה $f(x) = k^2$, ומכילה $2k + 2$ הוראות (הכוונה היא להוראות הבסיסיות של השפה S).

ג. כתבו תכנית עם **לא יותר מ-20 הוראות** לחישוב הפונקציה הקבועה $f(x) = 144$. (גם כאן הכוונה היא להוראות הבסיסיות של השפה S).
הסבירו היטב את התכנית שכתבתם.

שאלה 4 (10%)

תרגיל 2.5.7 בספר (עמוד 36).

שאלה 5 (12%)

תרגיל 3.4.8 בספר (עמוד 48).

שאלה 6 (20%)

הוכיחו שהפונקציות הבאות הן **פרימיטיביות רקורסיביות**.

א. $f(x,y)=\binom{x}{y}$.

ב. $p(x)$ $\Leftrightarrow$ אף ראשוני בפירוק של x לגורמים ראשוניים איננו מופיע בחזקה גדולה מ-1.

ג. $g(x)=\lfloor \log_5(x+1) \rfloor$.

ד. $h(x)=\lceil \sqrt{x} \rceil$.

שאלה 7 (15%)

מספר רציונלי אי-שלילי הוא מספר מהצורה a/b כאשר a ו-b הם מספרים טבעיים ו- $b\neq 0$.

כזכור, ייתכן ש- $a\neq c$ ו- $b\neq d$, אבל $a/b=c/d$.

מספר רציונלי a/b נקרא **שבר מצומצם**, אם אין ל-a ול-b מחלק משותף גדול מ-1.

למשל, $0/2$ ו- $2/4$ אינם שברים מצומצמים, ואילו $0/1$ ו- $1/2$ הם שברים מצומצמים.

אפשר לייצג מספר רציונלי a/b על-ידי **המספר הטבעי** $<a,b>$.

הוכיחו שהפונקציה $f(x,y)$ שמתייחסת ל-x ו-y כמייצגים מספרים רציונליים, ומחזירה את המספר הטבעי שמייצג את השבר המצומצם של הערך המוחלט של ההפרש בין שני המספרים הרציונליים האלה, היא **פרימיטיבית רקורסיבית**.

אם x או y לא מייצגים מספר רציונלי, f מחזירה 0.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1-3

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2005א **מועד אחרון להגשה:** 22 באוק' 04

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (12%)

תהיינה A ו-B שתי קבוצות סופיות לא ריקות.

נסמן: $n = |A|$; $m = |B|$ (מספר איברי A הוא n; מספר איברי B הוא m).

א. כמה פונקציות שונות מ-A ל-B אפשר להגדיר?

ב. כמה מהן שלמות?

הוכיחו את תשובותיכם.

שאלה 2 (20%)

כתבו תכניות בשפה S לחישוב הפונקציות הבאות. על התכניות להיות **קצרות וברורות**.
כתיבת התכניות צריכה להיות **מדויקת, ועל פי כל כללי התחביר של השפה**.
הוסיפו לכל תכנית הסבר קצר על אופן פעולתה.

א. $f(x) = 3x - 4$. אל תשתמשו במקרוס. שימו לב ש-f היא פונקציה חלקית.
כתבו תכנית עם **לא יותר מ-9 הוראות**.

ב. $g(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2$. הפונקציה הזו מוגדרת בעמוד 46 בספר. אל תשתמשו במקרוס.
כתבו תכנית עם **לא יותר מ-11 הוראות**.

ג. $h(x) = \log_2 x$. אתם רשאים להשתמש במקרוס המופיעים בספר בפרק 2 ובפרדיקט השוויון (ראו תרגיל 2.2.5 בעמוד 25 בספר). שימו לב ש-h היא פונקציה חלקית.

ד. תרגיל 2.2.7 בספר (עמוד 25). אתם רשאים להשתמש במקרוס המופיעים בספר בפרק 2 ובפרדיקט $x_1 < x_2$ (עיינו בפתרון תרגיל 2.2.5 במדריך הלמידה).
הניחו ש- $\gcd(0, 0) = 0$.

שאלה 3 (12%)

תרגיל 2.4.8 בספר (עמוד 32).

שאלה 4 (10%)

תרגיל 3.3.2 בספר (עמוד 43).

שאלה 5 (10%)

תרגיל 3.4.7 בספר (עמוד 47).

שאלה 6 (20%)

הוכיחו שהפונקציות הבאות הן **פרימיטיביות רקורסיביות**.

א. $\gcd(x, y)$ (ראו תרגיל 3.7.6 בעמוד 58 בספר).

ב. $\mathrm{lcm}(x, y)$ (ראו תרגיל 3.7.7 בעמוד 58 בספר).

ג. $g(x, y, z)$ - מספר המחלקים המשותפים של x ו- y שאינם גדולים מ- z.

ד. $f(x)=\lceil \log_2(x+1) \rceil$.

שאלה 7 (16%)

נגדיר את הפרדיקט $\mathrm{Perm}(x, y)$: ערכו של פרדיקט זה הוא 1, אם ורק אם הסדרה באורך $\mathrm{Lt}(x)$ ש-y הוא מספר גדל (Gödel) שלה היא **תמורה של הסדרה ש-x הוא מספר גדל שלה**.
(כלומר, ערכו של הפרדיקט הוא 1, אם ורק אם y מייצג סדרה שהיא תמורה של הסדרה הקצרה ביותר ש-x מייצג (כלומר, ללא אפסים בסוף הסדרה). אם $\mathrm{Lt}(y) > \mathrm{Lt}(x)$ ערכו של הפרדיקט הוא 0).

הוכיחו : הפרדיקט $\mathrm{Perm}(x, y)$ הוא **פרימיטיבי רקורסיבי**.
זכרו שבסדרה איבר יכול להופיע יותר מפעם אחת.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1-3

מספר השאלות: 8 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2004ב **מועד אחרון להגשה:** 26 במרץ 04

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (12%)

יהי A האלפבית הבא: $A = \{a, b, c\}$.

נגדיר שתי פונקציות על A^*, שרשור והיפוך סדר הסימבולים.

שרשור: לכל $u, v \in A^*$, $C(u, v) = uv$.

היפוך סדר הסימבולים: לכל $w \in A^*$, $R(w) = w^R$.

א. תנו דוגמה לשפה L מעל האלפבית A, $L \neq A^*$, $L \neq A^* - \{0\}$, כך שגם L וגם $\bar{L}$ סגורות לשרשור. בתשובתכם הוכיחו שהן אכן סגורות לשרשור.

ב. תנו דוגמה לשפה M מעל האלפבית A, $M \neq A^*$, $M \neq A^* - \{0\}$, כך שגם M וגם $\bar{M}$ סגורות להיפוך סדר הסימבולים. בתשובתכם הוכיחו שהן אכן סגורות להיפוך סדר הסימבולים.

שאלה 2 (20%)

כתבו תכניות בשפה S לחישוב הפונקציות הבאות. על התכניות להיות **קצרות וברורות**.

כתיבת התכניות צריכה להיות **מדויקת, ועל פי כל כללי התחביר של השפה**.

הוסיפו לכל תכנית הסבר קצר על אופן פעולתה.

א. $f(x) = 2x - 3$. אל תשתמשו במקרוס. שימו לב ש-f היא פונקציה חלקית. ערכו של המשתנה X יהיה 0 בסיום ריצת התכנית. כתבו תכנית עם **9 הוראות לכל היותר**.

ב. תרגיל 2.2.5 בספר (עמוד 25). כתבו תכנית עם **9 הוראות לכל היותר**.

ג. $g(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$. אל תשתמשו במקרוס. ערכם של המשתנים X_1 ו-X_2 יהיה 0 בסיום ריצת התכנית. כתבו תכנית עם **10 הוראות לכל היותר**.

ד. $h(x_1, x_2) = x_1 \bmod x_2$. מותר להשתמש במקרוס המופיעים בספר בפרק 2. שימו לב ש-h היא פונקציה חלקית.

שאלה 3 (10%)

תרגיל 2.5.8 בספר (עמודים 36-37).

שאלה 4 (10%)

תהיינה C_1 ו-C_2 שתי מחלקות PRC.

הוכיחו שאם קיימות פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ כך ש- $f(x) \in C_1 - C_2$ ו- $g(x) \in C_2 - C_1$, אז $C_1 \cup C_2$ **איננה** מחלקת PRC.

(במילים אחרות, אם אף אחת מהמחלקות איננה מכילה את השניה, אז האיחוד שלהן **איננו** מחלקת PRC).

רמז: התבוננו בפונקציה $h(x) = f(x) + g(x)$.

שאלה 5 (8%)

תרגיל 3.6.5 בספר (עמוד 55).

שאלה 6 (20%)

הוכיחו שהפונקציות הבאות הן **פרימיטיביות רקורסיביות**.

א. $\min(x, y, z)$ (מחזירה את המספר המינימלי מבין שלושת המספרים)

ב. $\varphi(x)$ (מחזירה את מספר המספרים הטבעיים הקטנים מ-x וזרים לו)

ג. $f(x) = \log_2(x + 1)$

ד. $g(x) = \lfloor \sqrt[3]{x} \rfloor$

שאלה 7 (10%)

הוכיחו שהפונקציה $f(x)$, שמחזירה לכל מספר טבעי i את הספרה ה-i+1 לאחר הנקודה העשרונית בפיתוח של $\sqrt{3}$ כשבר עשרוני אינסופי, היא פונקציה **פרימיטיבית רקורסיבית**.

רמז: גרמו לספרה המבוקשת לנוע אל משמאל לנקודה העשרונית.

שאלה 8 (10%)

תרגיל 3.8.1 בספר (עמוד 62).

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1-3

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2004א **מועד אחרון להגשה:** 24 באוק' 03

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (10%)

הוכיחו **בעזרת אינדוקציה** שכל מספר טבעי $n \geq 8$ ניתן להצגה $n = 3k + 5m$ כאשר k ו-m הם מספרים טבעיים (כולל 0).

(למשל ל- $n = 11$ אפשר לבחור $k = 2$, $m = 1$).

שימו לב, ההוכחה חייבת להיות באינדוקציה.

שאלה 2 (20%)

כתבו תכניות בשפה S לחישוב הפונקציות הבאות. על התכניות להיות **קצרות וברורות**.

כתיבת התכניות צריכה להיות **מדויקת, ועל פי כל כללי התחביר של השפה.**

הוסיפו לכל תכנית הסבר קצר על אופן פעולתה.

א. $f(x) = 3x - 5$. אל תשתמשו במקרוס. שימו לב ש-f היא **פונקציה חלקית**. ערכו של המשתנה X יהיה 0 בסיום ריצת התכנית. כתבו תכנית **עם 9 הוראות לכל היותר**.

ב. $p(x) \Leftrightarrow x$ אי זוגי (כלומר, $p(x) = 0$ אם x זוגי; $p(x) = 1$ אם x אי זוגי).

אל תשתמשו במקרוס. ערכו של המשתנה X בסיום ריצת התכנית יהיה זהה לערכו בתחילת הריצה. כתבו תכנית **עם 13 הוראות לכל היותר**.

ג. $g(x) = \lfloor \sqrt[3]{x} \rfloor$.

ד. $h(x_1, x_2) = \log_5 (x_1 + x_2)$.

בסעיפים ג ו-ד אתם רשאים להשתמש במקרוס מפרק 2 בספר ובמדריך הלמידה (כולל התרגילים).

שאלה 3 (10%)

מיהן כל הפונקציות .p.c שיש תכנית **עם שורה אחת** שמחשבת אותן (חלקית)?

שאלה 4 (10%)

תרגיל 2.5.6 בספר (עמוד 36).

שאלה 5 (12%)

תרגיל 3.4.8 בספר (עמוד 48).

שאלה 6 (20%)

הוכיחו שהפונקציות הבאות הן **פרימיטיביות רקורסיביות**.

א. $f(x,y)=\binom{x}{y}$.

ב. $p(x)$ $\Leftrightarrow$ אף ראשוני בפירוק של x לגורמים ראשוניים איננו מופיע בחזקה גדולה מ-1.

ג. $g(x)=\lfloor \log_5(x+1)\rfloor$.

ד. $h(x)=\lceil \sqrt{x}\rceil$.

שאלה 7 (18%)

יהי k מספר טבעי גדול מ-1, ויהיו $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_{k-1}(x)$ k פונקציות **פרימיטיביות רקורסיביות**.

הוכיחו שגם הפונקציה $h(x_1, x_2)$ שלהלן היא פונקציה **פרימיטיבית רקורסיבית**.

$$h(x, 0) = f_0(x)$$
$$h(x, 1) = f_1(x)$$
$$\vdots$$
$$h(x, k-1) = f_{k-1}(x)$$
$$h(x, t+k) = h(x, t) + h(x, t+1) + \cdots + h(x, t+k-1)$$

אזהרה: הוכחה באינדוקציה לא תהיה טובה (עיינו בספר ובמדריך הלמידה בתחילת סעיף 3.6).

הדרכה: היעזרו במספרי Gödel.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר

מספר השאלות: 8 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: ב2010 **מועד אחרון להגשה:** 16 אפר' 10

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

נתון התיאור של המכונה M הבאה:

M = "On input <G>, where G is a CFG:

1. Go through all possible w's in lexicographic order.
2. For each w check whether $\langle G, w\rangle \in A_{\text{CFG}}$.
3. If for some w it is found that $\langle G, w\rangle \in A_{\text{CFG}}$, accept."

א. מהי השפה שהמכונה M **מכריעה**? הצדיקו את תשובתכם.

ב. מהי השפה שהמכונה M **מזהה**? הצדיקו את תשובתכם.

שאלה 2 (10%)

אלו מן הקבוצות הבאות הן **בנות מנייה**? הוכיחו את תשובותיכם.

א. קבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$.

ב. קבוצת המספרים הממשיים שאינם גדולים מ-1 ואינם קטנים מ-1/2.

שאלה 3 (12%)

נתונה השפה K הבאה: $K = \{\langle M\rangle \mid M \text{ accepts } \langle M\rangle\}$

א. הוכיחו ש-K היא שפה **מזוהה-טיורינג**.

ב. הוכיחו **בעזרת שיטת האלכסון** ש-K **איננה כריעה**.

שאלה 4 (10%)

הציגו רדוקציה של $HALT_{\mathrm{TM}}$ ל-A_{TM} (רדוקציה בכיוון הפוך מזה של הוכחת משפט 5.1).

שאלה 5 (10%)

הוכיחו: השפה המשלימה לשפה E_{TM} (השפה $\overline{E_{\mathrm{TM}}}$) היא שפה מזוהה-טיורינג.

שאלה 6 (14%)

עובדה: אפשר להוכיח את משפט Rice (ראו בעיה 5.28 בספר) מבלי להסתמך על כך ש- A_{TM} איננה כריעה. (ההוכחה איננה בעזרת רדוקציה של A_{TM}, אלא בעזרת משפט הרקורסיה שנלמד בפרק 8).

הוכיחו **בעזרת משפט Rice** ש-A_{TM} איננה כריעה.

(בפרק 2 הוכח ש-A_{TM} איננה כריעה בעזרת שיטת האלכסון. פה אתם מתבקשים להוכיח זאת בעזרת משפט Rice).

שאלה 7 (14%)

נגדיר את השפה $FIVE_{\mathrm{LBA}}$:

$$FIVE_{\mathrm{LBA}} = \{<M> \mid M \text{ is an LBA}, |L(M)| = 5\}$$

(זוהי שפת התיאורים של אוטומטים חסומים ליניארית שהשפה שהם מזהים מכילה בדיוק 5 מילים).

האם השפה $FIVE_{\mathrm{LBA}}$ היא שפה כריעה? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 8 (20%)

השפה ALL_{TM} מוגדרת בבעיה 5.30 (סעיף **c**) בספר (עמוד 217).

א. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- ALL_{TM} (הראו: $A_{\mathrm{TM}} \leq_{\mathrm{m}} ALL_{\mathrm{TM}}$).

ב. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $\overline{ALL_{\mathrm{TM}}}$ (הראו: $A_{\mathrm{TM}} \leq_{\mathrm{m}} \overline{ALL_{\mathrm{TM}}}$).

הדרכה: אם מכונת טיורינג M לא מקבלת קלט w, אז לכל מספר של צעדים שמריצים את M על w לא מגיעים למצב המקבל.

מכונת טיורינג R יכולה להתייחס לקלט שלה כאל מספר הצעדים שיש להריץ מכונה אחרת S. (למשל, אם הקלט של R הוא v, אז R תריץ את S $|v|$ צעדים).

ג. האם יש רדוקצית מיפוי של ALL_{TM} ל- A_{TM}? (האם $ALL_{\mathrm{TM}} \leq_{\mathrm{m}} A_{\mathrm{TM}}$?) הוכיחו את תשובתכם.

ד. האם יש רדוקצית מיפוי של $\overline{ALL_{\mathrm{TM}}}$ ל- A_{TM}? (האם $\overline{ALL_{\mathrm{TM}}} \leq_{\mathrm{m}} A_{\mathrm{TM}}$?) הוכיחו את תשובתכם.

מטלת מנחה (ממ״ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר

מספר השאלות: 8 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2010א **מועד אחרון להגשה:** 27 נוב׳ 09

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1 (10%)

הוכיחו, בדרך שונה מן ההוכחה המופיעה בספר, שהשפה E_{DFA} המוגדרת בעמוד 170 בספר היא שפה כריעה. ההוכחה החדשה תתבסס על היותה של השפה A_{DFA} (מעמוד 168 בספר) שפה כריעה. (במקום האלגוריתם המוצע בהוכחת משפט 4.4 בספר, הציעו אלגוריתם שיריץ את האלגוריתם להכרעת A_{DFA} על מספר סופי של קלטים, ולפי תוצאות ההרצות הללו יקבע את השייכות ל-E_{DFA}).

תארו את המכונה המתאימה להוכחה שלכם, והוכיחו את נכונות האלגוריתם שלפיו בניתם את המכונה.

שאלה 2 (10%)

נסמן על-ידי $\mathbb{N}_0$ את קבוצת המספרים הטבעיים עם 0: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

הוכיחו שהפונקציה g הבאה היא **התאמה** (correspondence) של $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ו-$\mathbb{N}_0$:

$$g(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$$

(להגדרת התאמה עיינו בספר בהגדרה 4.12).

שאלה 3 (15%)

נניח שנחליף בהוכחת משפט 4.11 את שלב 1 בתיאור של המכונה D באחת האפשרויות הבאות. קבעו ביחס לכל אחת מהן האם ההוכחה עדיין טובה או לא, **והסבירו היטב את תשובתכם**.

א. הרץ את H על $\langle M, \langle M^+\rangle\rangle$ כאשר M^+ היא המכונה הבאה אחרי M (בסדר הלקסיקוגרפי של המכונות).

ב. הרץ את H על $\langle M^+, \langle M\rangle\rangle$ כאשר M^+ היא המכונה הבאה אחרי M (בסדר הלקסיקוגרפי של המכונות).

שאלה 4 (12%)

הוכיחו שהשפה G הבאה היא **מזוהה-טיורינג אך איננה כריעה**:

G = {<M, x> | M is a TM that accepts x; when M terminates its running on x its tape contains a word longer than x}

(מילה <M, x> שייכת ל-G אם M היא תיאור של מכונת טיורינג, x היא מילה, M מקבלת את x, וכאשר M מסיימת את ריצתה על x (במצב q_{accept}) כתובה על הסרט של M מילה יותר ארוכה מ-x).

הוכחת האי-כריעות של השפה תיעשה **בעזרת שיטת האלכסון**.

הדרכה: הניחו בשלילה ש-G כריעה. אז יש מכונה H שמכריעה אותה. בנו מכונה D שתפעל הפוך מכל מכונה M שהיא.

(אל תשכחו להוכיח ש-G מזוהה-טיורינג).

שאלה 5 (12%)

בעיה 5.13 בספר (עמוד 215).

הראו שאם השפה הנתונה בשאלה היא שפה כריעה, אז אפשר לבנות מכונה להכרעת השפה A_{TM}.

שאלה 6 (15%)

ביחס לכל אחת מן השפות הבאות, קבעו האם אפשר להוכיח שהיא לא כריעה **בעזרת משפט Rice** (ראו בעיה 5.28 בספר) או לא.

אם קבעתם שאפשר, כתבו את ההוכחה. אם קבעתם שאי אפשר, הסבירו היטב למה אי אפשר.

א. A = {<M> | M is a TM and $|L(M)| = 5$}

(A היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג שמקבלות בדיוק 5 מילים).

ב. B = {<M> | M is a TM and there exists a string w that M accepts after exactly $|w|$ steps}

(B היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג שיש מילה w שמתקבלת על-ידי המכונה לאחר בדיוק $|w|$ צעדים).

ג. $REGULAR_{TM}$ (השפה מוגדרת בספר בעמוד 195).

שאלה 7 (12%)

במשפט 5.10 הוכח שהשפה E_{LBA} איננה כריעה.

א. האם E_{LBA} היא שפה **מזוהה-טיורינג**? הוכיחו את תשובתכם.

ב. האם השפה **המשלימה** (השפה $\overline{E_{LBA}}$) היא שפה **מזוהה-טיורינג**? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 8 (14%)

הוכיחו: $REGULAR_{TM}$ איננה מזוהה-טיורינג וגם השפה המשלימה שלה איננה מזוהה טיורינג.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר

מספר השאלות: 8 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: ב2009 **מועד אחרון להגשה:** 24 באפריל 09

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (12%)

הוכיחו שהשפה G שלהלן היא **שפה כריעה**:

$G = \{$<R> | R הוא ביטוי רגולרי; המילה 111 היא תת-מילה של **כל** מילה בשפה ש-R מתאר$\}$

(מילה מהצורה <R> שייכת לשפה G, אם R הוא ביטוי רגולרי, וכל מילה w בשפה ש-R מתאר היא מהצורה $w = x111y$, כאשר x ו-y הן מילים כלשהן).

שאלה 2 (12%)

תהי U **מכונת טיורינג אוניברסלית** (כמו בהוכחת משפט 4.11).

מה יקרה כאשר נריץ את U על הקלט $<U, <U>>$? (האם המכונה תגיע למצב q_{accept}? האם היא תגיע ל-q_{reject}? האם היא לעולם לא תעצור?)

הצדיקו את תשובתכם.

שאלה 3 (8%)

יהי Σ אלפבית סופי.

האם כל שפה מעל Σ היא **בת-מנייה**, או שיש שפות מעל Σ שאינן בנות מנייה?

הוכיחו את תשובתכם.

(להגדרת קבוצה בת מנייה עיינו בהגדרה 4.14 בספר).

שאלה 4 (12%)

הוכיחו **בעזרת שיטת האלכסון** שהשפה המשלימה של A_{TM} (השפה $\overline{A_{\text{TM}}}$) **איננה מזוהה-טיורינג**.

הדרכה: התבוננו במנייה המופיעה באיור 4.20 בספר, והוכיחו בעזרת שיטת האלכסון שאף מכונה במנייה איננה מזהה את השפה המשלימה של A_{TM}.

שימו לב, ההוכחה חייבת להיות **בעזרת שיטת האלכסון**.

שאלה 5 (12%)

בעיה 5.12 בספר (עמוד 215).

הראו שאם השפה הנתונה בשאלה היא שפה כריעה, אז אפשר לבנות מכונה להכרעת השפה A_{TM}.

שאלה 6 (12%)

תארו אוטומט חסום ליניארית (LBA) שמכריע את השפה A_{NFA} (המוגדרת בספר בעמוד 169).

שאלה 7 (14%)

עיינו בהוכחת משפט 5.30.

כדי להראות רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $\overline{EQ_{\text{TM}}}$, מתוארת מכונה F שבונה שתי מכונות M_1 ו-M_2.

כדי להראות רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל-EQ_{TM}, מתוארת מכונה G שבונה שתי מכונות M_1 ו-M_2.

בנו רדוקציות מיפוי אחרות של A_{TM} ל- $\overline{EQ_{\text{TM}}}$ ול-EQ_{TM}. ברדוקציות שתבנו, **המכונה M_1 תהיה המכונה M** (של הקלט לרדוקציה).

כלומר, כדי להראות רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $\overline{EQ_{\text{TM}}}$, תארו מכונה F' שבונה מכונות M_1 ו-M_2, והמכונה M_1 שהיא בונה היא המכונה M מן הקלט של F'. כדי להראות רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל-EQ_{TM}, תארו מכונה G' שבונה מכונות M_1 ו-M_2,והמכונה M_1 שהיא בונה היא M מן הקלט של G'.

שאלה 8 (18%)

בבעיה 5.30 בספר (עמוד 217) מוגדרת השפה $INFINITE_{\text{TM}}$.

א. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $INFINITE_{\text{TM}}$ (הראו: $A_{\text{TM}} \leq_m INFINITE_{\text{TM}}$).

ב. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $\overline{INFINITE_{\text{TM}}}$ (הראו: $A_{\text{TM}} \leq_m \overline{INFINITE_{\text{TM}}}$).

הדרכה: אם מכונת טיורינג M מקבלת את הקלט w, אז כשמריצים את M על w מגיעים למצב המקבל לאחר מספר סופי של צעדים.

מכונת טיורינג N יכולה להתייחס לקלט שלה כאל מספר הצעדים שיש להריץ מכונה אחרת S. (למשל, אם הקלט של N הוא v, אז N תריץ את S $|v|$ צעדים).

ג. הסיקו: $INFINITE_{\text{TM}}$ ו- $\overline{INFINITE_{\text{TM}}}$ **אינן מזוהות-טיורינג**.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר

מספר השאלות: 8 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2009א **מועד אחרון להגשה:** 5 בדצמ' 08

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

מסמנים על-ידי $|C|$ את הגודל (העוצמה) של הקבוצה C. מסמנים על-ידי $L(M)$ את השפה שמזהה אוטומט סופי דטרמיניסטי M.

הוכיחו שהשפה G_{DFA} שלהלן היא **שפה כריעה**:

$G_{\text{DFA}} = \{<A, B> \mid |L(A)| > |L(B)|$, A ו-B הם אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים$\}$

(מילה מהצורה $<A, B>$ שייכת לשפה G_{DFA} אם A ו-B הם תיאורים של אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים, והשפה שמזהה האוטומט A גדולה יותר מן השפה שמזהה האוטומט B.

אם שתי השפות אינסופיות, אז $|L(A)| = |L(B)|$; אם אחת סופית ואחת אינסופית, אז האינסופית גדולה מן הסופית; אם שתיהן סופיות, אז $|L(A)| > |L(B)|$ אם ורק אם מספר המילים ב-$L(A)$ גדול ממספר המילים ב-$L(B)$).

שאלה 2 (10%)

אלו מן הקבוצות הבאות הן **בנות מנייה**? הוכיחו את תשובותיכם.

א. קבוצת הפונקציות מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$.

ב. קבוצת הפונקציות מ- $\mathbb{N}$ ל-$\{1, 2, 3\}$.

ג. קבוצת הפונקציות מ- $\mathbb{N}$ ל-$\{2\}$.

שאלה 3 (12%)

הוכיחו: אם יימצא אלגוריתם פלאי להכרעת השפה A_{TM}, אפשר יהיה להיעזר בו כדי להכריע את השפה $HALT_{\text{TM}}$ המוגדרת בעמוד 192 בספר.

שאלה 4 (18%)

נוכיח **בעזרת שיטת האלכסון** שהשפה ALL_{TM} **איננה מזוהה-טיורינג**:

(השפה ALL_{TM} מוגדרת בבעיה 5.30 בספר סעיף **c**).

נניח בשלילה שהשפה ALL_{TM} היא מזוהה-טיורינג.

אז לפי משפט 3.21, יש ל-ALL_{TM} מונה (enumerator) E.

נזכור שאפשר לסדר את המחרוזות מעל אלפבית נתון Σ לפי סדר לקסיקוגרפי.

נבנה את המכונה M הבאה:

M = "על קלט w:

1. מצא את i כך ש-w היא המחרוזת ה-i לפי הסדר הלקסיקוגרפי.
2. הרץ את המונה E עד שהוא מדפיס את המחרוזת ה-i.
המחרוזת ה-i שהמונה הדפיס היא מחרוזת ששייכת ל-ALL_{TM}. נסמן אותה על-ידי A.
3. הרץ את A על w.
ברגע ש-A עומדת לעבור למצב q_{accept}, נוע על הסרט לריבוע השמאלי ביותר, שנה את התוכן של מה שכתוב בריבוע זה, ואז עבור למצב q_{accept}."

א. הוכיחו: המכונה M עוצרת על כל קלט.

ב. הסיקו: יש j כך שהמונה E ידפיס את $\langle M\rangle$ כמחרוזת ה-j שהוא מדפיס.

ג. בדקו מה יקרה כאשר נריץ את M על המחרוזת ה-j לפי הסדר הלקסיקוגרפי, והגיעו לסתירה.

שאלה 5 (12%)

בעיה 5.9 בספר (עמוד 215).

הראו שאם T היא שפה כריעה, אז אפשר לבנות מכונה להכרעת השפה A_{TM}.

שאלה 6 (12%)

הוכיחו: השפה המשלימה לשפה ALL_{CFG} (השפה $\overline{ALL_{\text{CFG}}}$) היא שפה **מזוהה-טיורינג**.

שאלה 7 (10%)

האם ALL_{LBA} היא שפה כריעה? הוכיחו את תשובתכם.

($ALL_{\text{LBA}} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is an LBA and } L(M) = \Sigma^*\}$)

שאלה 8 (16%)

נגדיר את השפה CF_{TM} :

$$CF_{TM} = \{<M> \mid M \text{ is a TM and } L(M) \text{ is a context-free language}\}$$

א. הוכיחו בעזרת משפט Rice (ראו בעיה 5.28 בספר) שהשפה CF_{TM} **איננה כריעה**.

ב. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- CF_{TM} (הראו : $A_{TM} \leq_m ALL_{TM}$).

ג. הציגו רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $\overline{CF_{TM}}$ (הראו : $A_{TM} \leq_m \overline{CF_{TM}}$).

ד. הסיקו : CF_{TM} ו- $\overline{CF_{TM}}$ **אינן מזוהות-טיורינג**.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 4 עד סעיף 4.6

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 10 **משקל המטלה:** 7 נקודות

סמסטר: 2006ב **מועד אחרון להגשה:** 19 במאי 06

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (5%)

א. נתונה התכנית P:

$$\begin{array}{ll} [A] & \text{IF } X\neq 0 \text{ GOTO } B \\ & X \leftarrow X+1 \\ & \text{IF } X\neq 0 \text{ GOTO } E \\ [B] & X \leftarrow X-1 \\ & Z \leftarrow Z+1 \\ & Y \leftarrow Y+1 \\ & Y \leftarrow Y+1 \\ & \text{IF } Z\neq 0 \text{ GOTO } A \end{array}$$

חשבו את $\#(P)$.

ב. רשמו את התכנית Q שמספרה $\#(Q)=999998$. מהי הפונקציה שתכנית זו מחשבת?

שאלה 2 (5%)

האם יש מספר טבעי n כך שהפרדיקט $\text{HALT}(x, n)$ הוא פרדיקט **פרימיטיבי רקורסיבי**? הוכיחו.

שאלה 3 (10%)

נניח שנמצא מנגנון פלאי שמכריע ביחס לשייכות לקבוצה K (המוגדרת בעמוד 82 בספר).
נצרף מנגנון זה לתכניות בשפה S. כלומר, כל תכנית בשפה S יכולה לפנות למנגנון הפלאי בשאלות האם מספר טבעי n כלשהו שייך לקבוצה K.

הוכיחו שגם במודל הזה יש בעיות שאינן ניתנות להכרעה.

שאלה 4 (14%)

פונקציה **חלקית** $f : N \to \{0, 1\}$ תיקרא **מאפיינת חלקית** את הקבוצה A, $A \subseteq N$, אם $A = \{n \in N \mid f(n) = 1\}$.

(ההבדל בין פונקציה כזו לפונקציה **מאפיינת** של קבוצה הוא בכך שפונקציה מאפיינת חלקית **איננה בהכרח שלמה** - ייתכנו קלטים שעליהם הפונקציה איננה מוגדרת. מזה נובע, למשל, שלקבוצה A יכולה להיות יותר מפונקציה מאפיינת חלקית אחת).

א. הוכיחו: A היא **קבוצה נל"ר** אם ורק אם יש ל-A פונקציה מאפיינת חלקית שהיא **רקורסיבית חלקית** (כלומר, שהיא p.c.).
זכרו שעליכם להוכיח שני כיוונים - יש כאן טענת "אם ורק אם".

ב. הראו שתיתכן **קבוצה נל"ר** A שיש לה פונקציה מאפיינת חלקית f **שאיננה רקורסיבית חלקית** (איננה p.c.).

שאלה 5 (8%)

תרגיל 4.4.11 בספר (עמוד 85).

שאלה 6 (15%)

תזכורות: תהי B קבוצה חלקית ל-N ותהי $f(x)$ פונקציה מ-N ל-N.
הקבוצה $f^{-1}(B)$ מוגדרת כך: $f^{-1}(B) = \{n \in N \mid f(n) \in B\}$.
הקבוצה $f(B)$ מוגדרת כך: $f(B) = \{f(n) \mid n \in B\}$.

א. תהי B **קבוצה פרימיטיבית רקורסיבית** ותהי $f(x)$ **פונקציה פרימיטיבית רקורסיבית**.
האם $f^{-1}(B)$ היא בהכרח **קבוצה פרימיטיבית רקורסיבית**? הוכיחו את תשובתכם.
האם $f(B)$ היא בהכרח **קבוצה פרימיטיבית רקורסיבית**? הוכיחו את תשובתכם.

ב. תהי B **קבוצה רקורסיבית** ותהי $f(x)$ **פונקציה רקורסיבית** (פונקציה c.).
האם $f^{-1}(B)$ היא בהכרח **קבוצה רקורסיבית**? הוכיחו את תשובתכם.
האם $f(B)$ היא בהכרח **קבוצה רקורסיבית**? הוכיחו את תשובתכם.

ג. תהי B **קבוצה נל"ר** ותהי $f(x)$ **פונקציה רקורסיבית חלקית** (פונקציה p.c.).
האם $f^{-1}(B)$ היא בהכרח **קבוצה נל"ר**? הוכיחו את תשובתכם.
האם $f(B)$ היא בהכרח **קבוצה נל"ר**? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 7 (6%)

הוכיחו שיש פונקציה **פרימיטיבית רקורסיבית** $g(x, y)$ כך ש- $W_{g(i, j)} = W_i \cup W_j$.

שאלה 8 (10%)

הוכיחו **בעזרת לכסון** שהפרדיקט $p(x) \Leftrightarrow \Phi(x, x) = 1$ **איננו ניתן לחישוב**.
(בפתרון תרגיל 4.6.8 במדריך הלמידה מוכיחים זאת בעזרת רדוקציה).

שאלה 9 (12%)

א. A ו-B הן קבוצות רקורסיביות שונות מ-N ומ-$\varnothing$.
הוכיחו: $A \equiv_m B$.

ב. $? \equiv_m N$; $? \equiv_m \varnothing$. הוכיחו.
(עליכם לקבוע אלו קבוצות יכולות להופיע במקום כל סימן שאלה, ולהוכיח את קביעתכם).

שאלה 10 (15%)

א. תרגיל 4.6.9 בספר (עמוד 94).

ב. הוכיחו שלכל i, A_i היא קבוצה m-שלמה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 4 עד סעיף 4.6

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 10 **משקל המטלה:** 7 נקודות

סמסטר: 2006א **מועד אחרון להגשה:** 16 בדצמ' 05

אנא שימו לב: מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (5%)

מהי התכנית P, בעלת המספר **הקטן ביותר**, שמחשבת את הפונקציה $\varnothing$?
הצדיקו את תשובתכם.
(הפונקציה $\varnothing$ מוגדרת בספר בעמוד 3).

שאלה 2 (12%)

עיינו בהוכחת משפט 4.2.1.
בהוכחה משתמשים בתכנית $[A]$ IF HALT(X, X) GOTO A.
זוהי תכנית עם קלט אחד (x) שעליו בודקים האם HALT(x, x).

א. האם אפשר להשתמש במקומה בתכנית $[A]$ IF HALT(X_1, X_2) GOTO A (תכנית עם שני קלטים x_1 ו-x_2)? נמקו את תשובתכם.

ב. האם אפשר להשתמש במקומה בתכנית $[A]$ IF HALT$(X, X+1)$ GOTO A? נמקו.

ג. האם אפשר להשתמש במקומה בתכנית $[A]$ IF HALT$(X \dot{-} 1, X)$ GOTO A? נמקו.

שאלה 3 (8%)

תרגיל 4.3.4 בספר (עמוד 78).

שאלה 4 (10%)

המספרים הטבעיים p ו- $p+2$ נקראים **ראשוניים תאומים** אם שניהם ראשוניים.
למשל, 5 ו-7 הם ראשוניים תאומים.
לא ידוע האם יש אינסוף ראשוניים תאומים.
נגדיר את הקבוצה B הבאה: $B = \{n \in N \mid$ יש לפחות n ראשוניים תאומים$\}$.
האם הקבוצה B היא קבוצה **פרימיטיבית רקורסיבית**?
האם היא **רקורסיבית**?
האם היא **נל"ר**?
הוכיחו את תשובותיכם.

שאלה 5 (20%)

א. תרגיל 4.4.3 בספר (עמוד 84).
ב. תנו דוגמה לפונקציה p.c. $f(x_1, ..., x_n)$ כך שהקבוצה $\mathrm{gr}(f)$ **איננה רקורסיבית**.
ג. הוכיחו: $f(x_1, ..., x_n)$ היא p.c. אם ורק אם $\mathrm{gr}(f)$ היא קבוצה **נל"ר**.

שאלה 6 (6%)

הוכיחו שיש פונקציה **פרימיטיבית רקורסיבית** $g(z)$ כך שלכל x, y ו- z,
$\Phi^{(2)}_{g(z)}(x, y) = \Phi^{(1)}_{z}(\langle x, y\rangle)$.

שאלה 7 (15%)

א. תרגיל 4.6.3 בספר (עמוד 94).
ב. הוכיחו שהקבוצה A היא קבוצה **m-שלמה**.

שאלה 8 (6%)

תהיינה A ו-B קבוצות **לא נל"ר**.
א. האם **ייתכן** ש- $A \equiv_m B$? הוכיחו.
ב. האם **בהכרח** $A \equiv_m B$? הוכיחו.

שאלה 9 (10%)

Bהיא קבוצה נל"ר; $TOT \subseteq B$;$EMPTY \subseteq \overline{B}$.
הוכיחו: B היא **קבוצה m-שלמה**.

שאלה 10 (8%)

הוכיחו: אם A היא קבוצה **רקורסיבית**, ו-B היא קבוצה שאיננה הקבוצה הריקה ואיננה קבוצת כל המספרים הטבעיים N, אז $A \leq_m B$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 4 עד סעיף 4.6

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 9   **משקל המטלה:** 7 נקודות

סמסטר: 2005ב   **מועד אחרון להגשה:** 22 באפריל 05

> אנא שימו לב:
> מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
> העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (5%)

א. נתונה התכנית P:

$$
\begin{array}{ll}
[A] & \text{IF } X \neq 0 \text{ GOTO } B \\
 & Z \leftarrow Z+1 \\
 & \text{IF } Z \neq 0 \text{ GOTO } E \\
[\text{B}] & X \leftarrow X-1 \\
 & Y \leftarrow Y+1 \\
 & Y \leftarrow Y+1 \\
 & \text{IF } Y \neq 0 \text{ GOTO } A
\end{array}
$$

חשבו את $\#(P)$.

ב. רשמו את התכנית Q שמספרה הוא $\#(Q) = 1825199$.
מהי הפונקציה שתכנית זו מחשבת?

שאלה 2 (10%)

נתונה הפונקציה $h : N \times N \to N$ הבאה:

$$h(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{if HALT}(x_1, x_2) \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

א. הראו שהפונקציה הזו היא **פונקציה רקורסיבית חלקית** (פונקציה p.c.).

ב. נניח שנרצה להוכיח שהפונקציה הזו **איננה ניתנת לחישוב באופן חלקי** (איננה p.c.).
לשם כך נסתכל בתכנית $[A]$ IF $h(X, X)$=1 GOTO A, ונמשיך בדומה להוכחה של משפט 4.2.1.
הסבירו היטב מה לא יהיה בסדר בהוכחה הזו.

[illegible]

[illegible]

שאלה 3 (15%) - רקורסיביות חלקית, להבין מה מותר להגדיר ומה לא.

תרגיל 4.3.2 בספר (עמודים 77-78).

שאלה 4 (5%)

קבוצה A של מספרים טבעיים נקראת co-finite אם יש רק **מספר סופי** של מספרים טבעיים **שאינם שייכים** ל- A.

הוכיחו: אם A היא co-finite, אז היא שייכת **לכל מחלקת PRC של פונקציות**.

שאלה 5 (12%) [illegible]

הוכיחו שלכל שתי קבוצות נל״ר A ו-B יש **שתי קבוצות נל״ר** A' ו-B' כך ש- $A'\subseteq A$, $B'\subseteq B$, $A'\cup B'=A\cup B$ ו- $A'\cap B'=\varnothing$.

[illegible] $x\in A\cap B$

שאלה 6 (8%) [illegible]

נסמן על-ידי E_k את **הטווח** של הפונקציה שמחשבת התכנית שמספרה k.

הוכיחו שיש פונקציה פרימיטיבית רקורסיבית $g(x)$ כך שלכל n, $E_{g(n)}=W_n$.

שאלה 7 (15%)

להלן שתי תכונות אפשריות של פונקציות $f:N\to N$:

1. לכל $n\in N$, $f(n)$ הוא מספר של תכנית שעוצרת על כל קלט (כלומר, $f(n)\in \mathrm{TOT}$).
2. לכל קבוצה רקורסיבית C, יש מספר טבעי n כך ש-$f(n)$ הוא מספר של תכנית המחשבת את הפרדיקט המאפיין של C.

(**תזכורת**: הפרדיקט המאפיין של C הוא הפרדיקט הבא: $c(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x\in C\\ 0 & \text{if } x\notin C\end{cases}$).

א. הוכיחו: **יש** פונקציה ניתנת לחישוב (פונקציה .c) המקיימת את התכונה הראשונה.

ב. הוכיחו: **יש** פונקציה ניתנת לחישוב (פונקציה .c) המקיימת את התכונה השנייה.

ג. הוכיחו: **אין** פונקציה ניתנת לחישוב (פונקציה .c) המקיימת את שתי התכונות. [illegible]

[illegible]

הדרכה: לכסון. [illegible] $\Phi(n,f(n))$ [illegible]

הניחו בשלילה שיש פונקציה f כזו, ובנו קבוצה רקורסיבית B שלא קיים m כך ש-$f(m)$ הוא מספר של תכנית המחשבת את הפרדיקט המאפיין של B.

שייכות מספר x ל-B תיקבע לפי מה שמחזירה התכנית שמספרה $f(x)$ על הקלט x.

שאלה 8 (20%)

קבוצה C של מספרים טבעיים תיקרא **co-RE** אם המשלימה של C ($N-C$) היא קבוצה נל״ר.

קבוצה C של מספרים טבעיים תיקרא **co-RE-שלמה** אם C היא co-RE, ולכל קבוצה D שהיא co-RE, $D \leq_m C$.

א. הוכיחו ש- $\overline{K}$ היא קבוצה co-RE-שלמה.

ב. הוכיחו שקבוצת מספרי התכניות **שאינן עוצרות** על 0 היא קבוצה co-RE-שלמה.

ג. הוכיחו שכל קבוצה רקורסיבית היא קבוצה co-RE.

ד. הוכיחו שאף קבוצה רקורסיבית איננה co-RE-שלמה.

שאלה 9 (10%)

הוכיחו שהקבוצה $\{n \in N \mid n^2 \notin W_n\}$ **איננה נל״ר**. להראות רדוקציה. לחשוב על ההופכי ולחשב רדוקציה.

ההופכי של $A=\{n\in N \mid \underline{n^2 \in W_n}\}$ ונמצא ש... נעשה רדוקציה $K \leq_m A$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 4 עד סעיף 4.6

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 9 **משקל המטלה:** 7 נקודות

סמסטר: 2005א **מועד אחרון להגשה:** 12 בנוב' 04

אנא שימו לב: מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (5%)

מהי התכנית P בשפה S, **בעלת המספר הקטן ביותר**, שמחשבת פונקציה $f(x)$ שיש מספרים שעליהם אין הפונקציה מוגדרת (כלומר, יש קלטים שעליהם התכנית לא עוצרת)?

הצדיקו את תשובתכם.

שאלה 2 (12%)

בשאלה הזו נוכיח שלא קיימת תכנית שבודקת שתכניות אחרות נקיות מבאגים. (באג יכול להיות, למשל, ניסיון לחלק ב-0).

פורמלית, נגדיר את הפרדיקט $\text{BUG}(p, x)$:

$$\text{BUG}(p,x) = \begin{cases} 1 & \text{if program } p \text{ running on input } x \text{ has a bug} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

הוכיחו שהפרדיקט $\text{BUG}(p, x)$ **איננו ניתן לחישוב**.

רמז: רעיון דומה להוכחת משפט 4.2.1.

שאלה 3 (8%)

עיינו בהגדרת הפרדיקט $\text{SKIP}(x, y)$ בהוכחת משפט 4.3.2 בעמוד 74 בספר.

א. הראו שאם נמחק את הדרישה $l(x) \le \text{Lt}(y + 1)$ לא תיפגע הוכחת המשפט.

ב. הסבירו מדוע בכל אופן הוסיפו את הדרישה הזו (עיינו בסעיף 3 של פרק 2 בספר).

שאלה 4 (10%)

תרגיל 4.4.6 בספר (עמוד 84).

הדרכה: התחילו מפונקציה רקורסיבית **כלשהי** ש-A היא הטווח שלה.

שאלה 5 (10%)

א. הוכיחו: לכל פונקציה **שלמה וחד-חד ערכית** $g : N \to N$, יש **אינסוף** מספרים טבעיים n כך ש- $g(n) \geq n$.

ב. **בהסתמך על סעיף א' ועל הטענה שהוכחתם בשאלה 5, הוכיחו שלכל קבוצה נל"ר אינסופית B יש תת-קבוצה רקורסיבית אינסופית.**

(טענה זו מופיעה בתרגיל 4.4.5 בספר, ומוכחת בפתרון תרגיל 4.4.4 במדריך הלמידה. כאן אתם נדרשים להוכיח את הטענה הזו באופן אחר).

שאלה 6 (8%)

הוכיחו שיש פונקציה **פרימיטיבית רקורסיבית** $g(x)$ כך שלכל x, $W_{g(x)} = \{0, x, 2x, 3x, \ldots\}$.

שאלה 7 (12%)

נגדיר: PRED היא קבוצת מספרי התכניות בשפה S המחשבות פרדיקט חד-מקומי.

$$\text{PRED} = \{y \in N \mid \Phi_y^{(1)} \text{ is a predicate}\}$$

הוכיחו **בעזרת לכסון** ש-PRED **איננה נל"ר**.

שאלה 8 (20%)

א. הוכיחו: כל קבוצה נל"ר B היא טווח של פונקציה **רקורסיבית** $f: N \to N$ המקיימת:

לכל $b \in B$, יש $n \in N$ **זוגי** כך ש- $f(n) = b$.

(כלומר, B שווה ל- $f(E)$ כאשר E היא קבוצת המספרים הטבעיים **הזוגיים**).

ב. נגדיר: $C = \{n \in N \mid$ התכנית שמספרה n עוצרת על כל קלט זוגי$\}$.

הוכיחו **בעזרת לכסון** ש- C איננה נל"ר.

ג. הוכיחו **בעזרת רדוקציה** (של TOT) ש- C איננה נל"ר.

ד. הוכיחו שגם הקבוצה המשלימה ל-C ($\overline{C}$) איננה נל"ר.

שאלה 9 (15%)

נסמן על-ידי C את קבוצת מספרי התכניות שעוצרות על 0 ולא עוצרות על 1.

$$C = \{n \in N \mid \Phi(0, n)\downarrow \ \& \ \Phi(1, n)\uparrow\}$$

א. הוכיחו שלכל קבוצה נל"ר B, $B \leq_m C$.

ב. האם C היא קבוצה m-שלמה? הוכיחו את תשובתכם.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 4 עד סעיף 4.6

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 8 **משקל המטלה:** 7 נקודות

סמסטר: 2004ב **מועד אחרון להגשה:** 16 באפריל 04

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 **(6%)**

א. נתונה התכנית P:

$$
\begin{array}{ll}
[A] & \text{IF } X\neq 0 \text{ GOTO } B \\
 & X \leftarrow X+1 \\
 & \text{IF } X\neq 0 \text{ GOTO } E \\
[B] & X \leftarrow X-1 \\
 & Z \leftarrow Z+1 \\
 & Y \leftarrow Y+1 \\
 & Y \leftarrow Y+1 \\
 & \text{IF } Z\neq 0 \text{ GOTO } A
\end{array}
$$

חשבו את $\#(P)$.

ב. רשמו את התכנית Q שמספרה $\#(Q)=999998$.

מהי הפונקציה שתכנית זו מחשבת?

שאלה 2 **(12%)**

אפשר להתייחס לתכניות מחשב שאנו כותבים בשפה עילית כלשהי כאל מחרוזות של תווים מעל אלפבית A נתון כלשהו (שמכיל את התווים המותרים בשימוש בתכניות). כמו כן ניתן לומר שכל תכנית כזו מחשבת פונקציה ממחרוזות למחרוזות מעל האלפבית A. (כלומר, כל תכנית מחשב מחשבת פונקציה $f: A^* \to A^*$).

נאמר שתכנית מחשב P **מפיצה וירוס** בריצתה על הקלט w, אם הריצה של P על w גורמת לשינוי מערכת ההפעלה של המחשב.

נאמר שתכנית מחשב P **בטוחה על קלט w**, אם היא לא מפיצה וירוס בריצתה על קלט זה.

נאמר שתכנית מחשב P היא **בטוחה**, אם היא בטוחה על כל קלט $w \in A^*$.

מגלה וירוסים הוא תכנית שמקבלת כקלט תכנית P וקלט w, ועונה 'כן' אם P בטוחה על הקלט w, ו'לא' אם P לא בטוחה על הקלט w.

הוכיחו: אם קיימים וירוסים (כלומר, אם יש תכנית P וקלט w כך ש-P מפיצה וירוס בריצתה על w), אז **לא קיים** מגלה וירוסים שגם פועל נכון והוא גם בטוח.

רמז: רעיון דומה להוכחת משפט 4.2.1.

שאלה 3 (12%)

תהיינה A ו-B שתי קבוצות **זרות** של מספרים טבעיים.

נאמר ש-A ו-B **ניתנות להפרדה רקורסיבית**, אם יש קבוצה **רקורסיבית** C כך ש- $A \subseteq C$ ו- $B \subseteq \overline{C}$.

הוכיחו: אם A ו-B הן שתי קבוצות **זרות** של מספרים טבעיים, ו- $\overline{A}$ ו- $\overline{B}$ שתיהן **קבוצות נל"ר**, אז A ו-B ניתנות להפרדה רקורסיבית.

הדרכה: הריצו במקביל שתי תכניות, כמו בהוכחת משפט 4.4.5.

שאלה 4 (20%)

תהי $f: N \to N$ פונקציה.

לכל מספר טבעי k, נגדיר את הקבוצה הבאה: $F_k = \{n \in N \mid f(n) \leq k\}$.

א. אם f הוא הפרדיקט המאפיין של הקבוצה A, למה שווה F_0, ולמה שווה F_1?
הוכיחו את תשובותיכם.

ב. הוכיחו שאם f היא **רקורסיבית חלקית** (פונקציה p.c.), אז לכל k, F_k היא **קבוצה נל"ר**.

ג. הוכיחו שאם f היא **רקורסיבית** (פונקציה c.), אז לכל k, F_k היא **קבוצה רקורסיבית**.

ד. הראו שההפך איננו נכון: תנו דוגמה לפונקציה f, כך שלכל k, F_k היא קבוצה רקורסיבית (ולכן גם נל"ר), אבל f איננה רקורסיבית חלקית (איננה p.c. וכמובן שאיננה רקורסיבית - איננה c.).

הדרכה: זכרו שכל קבוצה סופית היא רקורסיבית.

שאלה 5 (10%)

הוכיחו שיש פונקציה **פרימיטיבית רקורסיבית** $g(y, z)$ כך שלכל x, y ו-z,

$$\Phi_y(x) + \Phi_z(x) = \Phi_{g(y,z)}(x)$$

שאלה 6 (15%)

א. תהי $f(x, y)$ פונקציה **ניתנת לחישוב** (פונקציה .c).

לכל $m \in N$, נגדיר פונקציה g_m של משתנה אחד: $g_m(y) = f(m, y)$.

הוכיחו **בעזרת לכסון**, שיש פונקציה **ניתנת לחישוב** $h(x)$, כך ש- $h \neq g_m$ לכל m.

ב. תהי $f(x, y)$ פונקציה **ניתנת לחישוב באופן חלקי** (פונקציה .p.c).

לכל $m \in N$, נגדיר פונקציה g_m של משתנה אחד: $g_m(y) = f(m, y)$.

הוכיחו **בעזרת לכסון**, שיש פונקציה $h(x)$ שתחום ההגדרה שלה (כלומר, קבוצת הקלטים שעליהם $h(x)$ מוגדרת) שונה מתחום הגדרה של g_m לכל m.

ג. תנו דוגמה למקרה ש-h המוגדרת בעזרת לכסון בסעיף הקודם היא פונקציה **שאיננה ניתנת לחישוב באופן חלקי** (כלומר, h איננה פונקציה .p.c).

שאלה 7 (10%)

A ו-B הן קבוצות של מספרים טבעיים $(A, B \subseteq N)$; A היא קבוצה סופית, B היא אינסופית.

א. האם ייתכן ש- $A \leq_m B$? הוכיחו את תשובתכם.

ב. האם ייתכן ש- $B \leq_m A$? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 8 (15%)

קבוצה C של מספרים טבעיים $(C \subseteq N)$ נקראת **פרודוקטיבית**, אם קיימת פונקציה רקורסיבית (פונקציה .c) $g : N \rightarrow N$ המקיימת: לכל מספר טבעי m שעבורו $W_m \subseteq C$, $g(m) \in C - W_m$.

א. הוכיחו: $\bar{K}$ היא קבוצה פרודוקטיבית עם הפונקציה $g(n) = n$ (פונקצית הזהות).

ב. הוכיחו: אם C היא קבוצה פרודוקטיבית ו- $C \leq_m D$, אז D היא קבוצה פרודוקטיבית.

ג. הוכיחו: אם B היא קבוצה m-שלמה, אז $\bar{B}$ היא קבוצה פרודוקטיבית.
הדרכה: היעזרו בשני הסעיפים הקודמים.

מטלת מנחה (ממ״ן) 12

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 4 עד סעיף 4.6

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 9 **משקל המטלה:** 7 נקודות

סמסטר: 2004א **מועד אחרון להגשה:** 7 בנוב׳ 03

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ״ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (6%)

מהי התכנית P, בעלת המספר **הקטן ביותר**, שמחשבת את הפונקציה $\varnothing$?
הצדיקו את תשובתכם.

שאלה 2 (12%)

תרגיל 4.2.5 בספר (עמוד 70).

שאלה 3 (5%)

הוכיחו שלכל קבוצה $A \subseteq N$ ייתכן **בדיוק אחד** מן המצבים הבאים:

- A ו- $\bar{A}$ רקורסיביות.
- A ו- $\bar{A}$ אינן ניתנות למנייה רקורסיבית (אינן נל״ר).
- אחת מהקבוצות A, $\bar{A}$ איננה נל״ר, והשנייה נל״ר אך לא רקורסיבית.

שאלה 4 (15%)

פונקציה **חלקית** $f: N \to \{0, 1\}$ נקראת **מאפיינת חלקית** את הקבוצה A, $A \subseteq N$, אם
$A = \{n \in N \mid f(n) = 1\}$.

(ההבדל בין פונקציה כזו לפונקציה **מאפיינת** של קבוצה הוא בכך שפונקציה מאפיינת חלקית **איננה בהכרח שלמה** - ייתכנו קלטים שעליהם הפונקציה איננה מוגדרת. מזה נובע, למשל, שלקבוצה A יכולה להיות יותר מפונקציה מאפיינת חלקית אחת).

א. הוכיחו: A היא **קבוצה נל"ר** אם ורק אם יש ל-A פונקציה מאפיינת חלקית שהיא **רקורסיבית חלקית** (כלומר, שהיא p.c.).
זכרו שעליכם להוכיח שני כיוונים - יש כאן טענת "אם ורק אם".

ב. הראו שיתכן **קבוצה נל"ר** A שיש לה פונקציה מאפיינת חלקית f **שאיננה רקורסיבית חלקית** (איננה p.c.).

שאלה 5 (20%)

א. הוכיחו: כל **קבוצה סופית** של מספרים טבעיים שייכת **לכל** מחלקת PRC של פונקציות.

ב. תנו דוגמה לאינסוף (בן מנייה) של **קבוצות רקורסיביות** ... ,A_1, A_2, שהאיחוד שלהן הוא קבוצה **שאיננה נל"ר**.
הדרכה: התחילו מקבוצה שאיננה נל"ר. היעזרו בסעיף הקודם.

ג. להלן "הוכחה" לכך שאם ... $B_1, B_2,$ הן **אינסוף קבוצות נל"ר**, אז האיחוד שלהן הוא **בהכרח קבוצה נל"ר**:
תהיינה ... $B_1, B_2,$ אינסוף קבוצות נל"ר. לכל קבוצה כזו B_i יש תכנית P_i שעוצרת על x אם ורק אם x שייך ל-B_i. נסמן על-ידי p_i את המספר של התכנית P_i.
נכתוב תכנית P שתעצור על x אם ורק אם x שייך לאיחוד של כל הקבוצות B_i:
על קלט x התכנית P תריץ את P_1 על x צעד אחד. אחר כך היא תריץ את P_1 שני צעדים על x ואת P_2 שני צעדים על x. אחר כך היא תריץ את P_1, P_2 ו-P_3 שלושה צעדים על x, וכך הלאה. (בשלב ה-j מריצים את $P_1, P_2, ..., P_j$ על x, כל אחת j צעדים. ההרצה נעשית בעזרת הפונקציה האוניברסלית $\Phi^{(1)}$ ומספרי התכניות $p_1, p_2, ..., p_j$).
אם בשלב כלשהו יתגלה שאחת התכניות P_i עוצרת על x (לאחר מספר כלשהו של צעדים), P תעצור. אחרת, P לא תעצור לעולם.
P עוצרת על x אם ורק אם x שייך לאיחוד של הקבוצות B_i. לכן האיחוד הוא קבוצה נל"ר.

מה שגוי ב"הוכחה" הזו? הסבירו היטב!

שאלה 6 (10%)

הוכיחו שלכל מספר טבעי n, יש פונקציה **פרימיטיבית רקורסיבית** g_n כך ש-

$$\Phi^{(1)}([x_1, ..., x_n], z) = \Phi^{(n)}(x_1, ..., x_n, g_n(z))$$

שאלה 7 (10%)

הוכיחו **בעזרת לכסון** שהפרדיקט $p(x) \Leftrightarrow \Phi(x, x) = 1$ **איננו ניתן לחישוב**.
(בפתרון תרגיל 4.6.8 במדריך הלמידה מוכיחים זאת בעזרת רדוקציה).

שאלה 8 (10%)

A ו-B הן קבוצות **רקורסיביות** שונות מ-N ומ-$\varnothing$.

הוכיחו: $A \equiv_m B$.

שאלה 9 (12%)

א. הוכיחו ש- $K \leq_m \mathrm{TOT}$.

ב. הוכיחו שלכל קבוצה נל"ר B, $B \leq_m \mathrm{TOT}$.

ג. האם TOT היא m-שלמה? הסבירו את תשובתכם.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 9 **משקל המטלה:** 8 נקודות

סמסטר: ב2010 **מועד אחרון להגשה:** 14 מאי 10

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

תהי w מחרוזת סמלים. מסמנים על-ידי w^R את המחרוזת המתקבלת מ-w על-ידי היפוך סדר הסמלים ב-w.

דוגמה: $11001^R = 10011$

מילה w נקראת **פלינדרום** אם $w = w^R$.

דוגמה: 1100011 היא פלינדרום; 110001 איננה פלינדרום.

נגדיר את השפה PAL:

$$PAL = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$$

(זוהי שפת הפלינדרומים מעל האלפבית $\{0,1\}$).

מצאו פונקציה $t(n)$ מינימלית, כך ש- $PAL \in \mathrm{TIME}(t(n))$

א. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד.

ב. במכונה דטרמיניסטית עם שני סרטים.

ג. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד שיש לו שני ראשים קוראים-כותבים.

הסבירו את תשובותיכם.

שאלה 2 (8%)

הוכיחו שהשפות הבאות שייכות למחלקה P:

א. EQ_{DFA} (ראו משפט 4.5 בספר).

ב. $\textit{5-CLIQUE} = \{\langle G\rangle \mid G \text{ is an undirected graph with a 5-clique}\}$.

שאלה 3 (10%)

תהי A שפה מעל אלפבית נתון Σ. השפה $mim(A)$ מוגדרת כך:

$$min(A) = \{w \in A \mid \text{for every } v \in \Sigma^* \text{ such that } w = vu \text{ and } u \neq \varepsilon,\ v \notin A\}$$

($min(A)$ היא שפת המילים המינימליות של A, כלומר, מילים ששייכות ל-A אבל אף תחילית ממש שלהן לא שייכת ל-A).

נתון ש-A שייכת למחלקה P. האם בהכרח גם $min(A)$ שייכת למחלקה P? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 4 (10%)

נתון שלשפה B יש מאמת (verifier) בעל זמן ריצה אקספוננציאלי. (זמן הריצה שלו על קלט בגודל n הוא $O\left(2^{n^k}\right)$ עבור k טבעי כלשהו).

האם אפשר להסיק מכך ש-B היא שפה **כריעה**? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 5 (12%)

האם השפה C שלהלן שייכת למחלקה NP? הוכיחו את תשובתכם.

$C = \{<n, m> \mid$ מספר הראשוניים השונים בפירוק לגורמים ראשוניים של n איננו גדול מ-$m\}$

(למשל, $<3276, 4> \in C$ ($3276 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$), $<3276, 3> \notin C$).

שאלה 6 (8%)

יהי Σ אלפבית נתון.

מצאו את כל השפות L כך ש- $L \equiv_P \Sigma^*$ ואת כל השפות K כך ש- $K \equiv_P \varnothing$.

הסבירו היטב את תשובותיכם.

(היחס $\equiv_P$ מוגדר במדריך הלמידה בעמוד 85).

שאלה 7 (15%)

CNF-SAT היא שפת הנוסחאות הבוליאניות הספיקות ב-CNF.

מהוכחת מסקנה 7.42 בספר נובע שזו שפה NP-שלמה.

א. בהוכחת משפט 7.32 מראים רדוקציה פולינומיאלית של *3SAT* ל-*CLIQUE*.
האם אפשר להראות באופן דומה רדוקציה של *CNF-SAT* ל-*CLIQUE*? הוכיחו את תשובתכם.
(כלומר, האם ההצטמצמות לנוסחאות ב-3CNF נדרשת לצורך הרדוקציה?)

ב. בהוכחת משפט 7.46 מראים רדוקציה פולינומיאלית של *3SAT* ל-*HAMPATH*.
האם אפשר להראות באופן דומה רדוקציה של *CNF-SAT* ל-*HAMPATH*?
הוכיחו את תשובתכם.

ג. בהוכחת משפט 7.56 מראים רדוקציה פולינומיאלית של *3SAT* ל-*SUBSETSUM*.
האם אפשר להראות באופן דומה רדוקציה של *CNF-SAT* ל-*SUBSETSUM*?
הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 8 (15%)

בעיית קיומו של מסלול המילטון בגרף מכוון G (*EHAMPATH*) היא הבעיה הבאה:

הקלט: גרף מכוון $G = (V, E)$

השאלה: האם יש ב-G מסלול המילטון (מסלול שמכיל כל צומת בגרף פעם אחת ויחידה).

א. הראו רדוקציה פולינומיאלית של *HAMPATH* ל- *EHAMPATH*.

($HAMPATH = \{<G, s, t> \mid G \text{ is a directed graph with a Hamiltonian path from } s \text{ to } t\}$

$EHAMPATH = \{<G> \mid G \text{ is a directed graph that contains a Hamiltonian path}\}$

עליכם להראות פונקציה חשיבה בזמן פולינומיאלי שעל קלט מהצורה $<G, s, t>$ היא מחזירה תיאור של גרף מכוון $<H>$ ומתקיים: $<H> \in EHAMPATH \Leftrightarrow <G, s, t> \in HAMPATH$).

ב. הוכיחו: *EHAMPATH* היא בעיה NP-שלמה.

ג. הראו רדוקציה פולינומיאלית של *EHAMPATH* ל- *HAMPATH*.

שאלה 9 (12%)

נתונה הבעיה *HITTING-SET*:

הקלט: קבוצה סופית S; אוסף $\{S_1, S_2, ..., S_m\}$ של תת-קבוצות של S (כל S_i היא תת-קבוצה של S); מספר טבעי k.

השאלה: האם יש ל-S תת-קבוצה T בגודל k כך שלכל $1 \le i \le m$, $T \cap S_i \neq \emptyset$? (כלומר, האם יש ל-$S$ תת-קבוצה בגודל k שהחיתוך שלה עם כל אחת מן התת-קבוצות S_i איננו ריק?)

הוכיחו: הבעיה *HITTING-SET* היא בעיה NP-שלמה.

הדרכה: הוכיחו שהיא שייכת ל-NP, והראו רדוקציה פולינומיאלית של *VERTEX-COVER* ל- *HITTING-SET*.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 9 **משקל המטלה:** 8 נקודות

סמסטר: 2010א **מועד אחרון להגשה:** 25 דצמ' 09

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

אפשר להציע אלגוריתם נוסף להכרעת השפה $A = \{0^k1^k \mid k \geq 0\}$:

תחילה בודקים שבמילת הקלט אין 0-ים מימין ל-1-ים.

לאחר מכן סופרים את ה-0-ים ואת ה-1-ים, ובודקים שמספרם זהה.

א. הסבירו כיצד אפשר לממש את האלגוריתם הזה, במכונת טיורינג דטרמיניסטית בעלת סרט אחד, כך שזמן הריצה יהיה $O(n \log n)$.

הדרכה: אם המונים של ה-0-ים וה-1-ים יהיו רחוקים מן הראש הקורא-כותב של המכונה, אז ההגעה אליהם בכל פעם תדרוש מספר גדול של צעדי ריצה.

ב. הסבירו כיצד אפשר לממש את האלגוריתם הזה במכונת טיורינג דטרמיניסטית בעלת שני סרטים כך שזמן הריצה יהיה $O(n)$.

שאלה 2 (12%)

הוכיחו שהשפות הבאות שייכות למחלקה P:

א. $FINITE_{\mathrm{DFA}} = \{<M> \mid M \text{ is a DFA and } L(M) \text{ is a finite language}\}$

ב. $TREE\text{-}VERTEX\text{-}COVER = \{<T, k> \mid T \text{ is an undirected } \textbf{tree} \text{ that has a } k\text{-node vertex cover}\}$

(גרף לא מכוון T הוא **עץ** אם T קשיר (יש מסלול מכל צומת לכל צומת) ואין ב-T מעגלים.

כיסוי בצמתים (vertex cover) של גרף לא מכוון מוגדר בעמוד 288 בספר).

שאלה 3 (6%)

האם המחלקה P **מכילה ממש** את מחלקת השפות חסרות ההקשר, או שיש שוויון בין שתי המחלקות?
הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 4 (12%)

א. הציעו מאמת (verifier) לשפה $\overline{E_{\mathrm{TM}}}$ (ראו משפט 5.2 בספר).

ב. הסבירו מדוע המאמת שהצעתם איננו בהכרח בעל זמן ריצה פולינומיאלי בגודל הקלט.

ג. הוכיחו: $\overline{E_{\mathrm{TM}}}$ לא שייכת ל-NP.

שאלה 5 (12%)

נעיין בשפה C הבאה:

$C = \{<p, n> \mid p \text{ and } n \text{ are natural numbers and there is no prime number in the range } [p, p+n]\}$

א. פרופסור מכובד הציע את ההוכחה הבאה לכך שהשפה C שייכת למחלקה NP:
לכל מילה $<p, n>$ ששייכת ל-C יש אישור שמוכיח את השייכות שלה לשפה: האישור מורכב ממחלק לא טריוויאלי לכל אחד מן המספרים בתחום $[p, p+n]$.
האם ההוכחה של הפרופ' טובה? הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. הוכיחו שהשפה המשלימה לשפה C שייכת למחלקה NP.

ג. אם יוכח ש- $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, האם אפשר יהיה להסיק ש-C שייכת ל-NP? הצדיקו היטב את תשובתכם.

ד. אם יוכח ש- $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, האם אפשר יהיה להסיק ש-$C$ לא שייכת ל-NP? הצדיקו היטב את תשובתכם.

שאלה 6 (14%)

עיינו בהגדרת השפה *3COLOR* בבעיה 7.27 בספר (עמוד 301).

הראו רדוקציה פולינומיאלית של *3COLOR* ל-*3SAT* (הראו כי $3COLOR \leq_P 3SAT$).

עליכם להראות רדוקציה ישירה, ולא רדוקציה כמו בהוכחת משפט Cook-Levin.

הדרכה : התאימו שלושה משתנים בוליאניים לכל צומת v בגרף - v_1, v_2 ו-v_3.

ערכו של המשתנה v_i $(i = 1, 2, 3)$ יהיה 1 אם הצומת v צבוע בצבע i, ויהיה 0 אם הצומת v צבוע באחד משני הצבעים האחרים.

בנו פסוקיות (בגודל 2 או 3) שיאמרו :

- לכל צומת v בגרף, v צבוע בצבע אחד ויחיד
- לכל קשת (u, v) בגרף, u ו-v צבועים בצבעים שונים

תארו את הרדוקציה, הוכיחו שהיא תקפה, והראו שהיא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

שאלה 7 (10%)

איך אפשר לדעת, מתוך עיון בנוסחה ϕ שמייצרת הרדוקציה של הוכחת משפט Cook-Levin (משפט 7.37), האם המכונה N שמכריעה את השפה A היא מכונה דטרמיניסטית או לא?

הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 8 (12%)

א. בעיה 7.24 בספר (עמוד 300).

ב. הראו רדוקציה פולינומיאלית של $\neq SAT$ ל- *SET-SPLITTING* (ראו בעיה 7.28 בספר).

שאלה 9 (12%)

מעגל המילטון בגרף לא מכוון $G = (V, E)$ הוא מעגל פשוט שמכיל כל צומת של הגרף פעם אחת ויחידה.

השפה *UHAMCIRCUIT* מוגדרת כך :

$$UHAMCIRCUIT = \{<G> \mid G \text{ is an undirected graph that has a Hamiltonian circuit}\}$$

(זוהי שפת הגרפים הלא מכוונים שיש להם מעגל המילטון).

א. הראו רדוקציה פולינומיאלית של *UHAMPATH* ל- *UHAMCIRCUIT*.

ב. הוכיחו : *UHAMCIRCUIT* היא NP-שלמה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 9 **משקל המטלה:** 8 נקודות

סמסטר: ב2009 **מועד אחרון להגשה:** 22 במאי 09

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (12%)

שפה A נקראת **co-finite** אם השפה המשלימה שלה ($\overline{A}$) היא שפה **סופית**.

א. הוכיחו: אם A היא שפה co-finite, אז A שייכת ל-TIME(1) (במכונה עם סרט אחד).

ב. תנו דוגמה לשפה אינסופית B שגם המשלימה שלה ($\overline{B}$) היא שפה אינסופית, ו-B שייכת ל-TIME(1) (במכונה עם סרט אחד).

ג. תנו דוגמה לשפה **רגולרית** C שלא שייכת ל-TIME(1). **הוכיחו** ש-C לא שייכת ל-TIME(1).

שאלה 2 (12%)

הוכיחו שהשפות הבאות שייכות למחלקה P:

א. A_{NFA} (ראו משפט 4.2 בספר).

ב. $C = \{<G, w> \mid G \text{ is a CFG in Chomsky normal form and } w \text{ has more than one parse tree in } G\}$

$<G, w>$ שייכת ל-C אם G הוא דקדוק חסר הקשר בצורה הנורמלית של חומסקי, $w \in L(G)$, ויש יותר מאופן אחד לגזור את w בדקדוק G.

שאלה 3 (10%)

תהי A שפה מעל אלפבית נתון Σ. השפה $\textit{all-suffix}(A)$ מוגדרת כך:

$$\textit{all-suffix}(A) = \{w \in A \mid \text{for all } v \in \Sigma^* \text{ such that } w = uv\ (u \in \Sigma^*),\ v \in A\}$$

($\textit{all-suffix}(A)$ היא שפת המילים ששייכות ל-A, וגם כל סופית (סיפא) שלהן שייכת ל-A).

נתון ש-A שייכת למחלקה P. האם בהכרח גם $\textit{all-suffix}(A)$ שייכת ל-P? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 4 (10%)

הוכיחו שהשפה הבאה שייכת למחלקה NP:

$B = \{<n, m, k>$ | הראשוני ה-m בפירוק לגורמים ראשוניים של n גדול מ-$k\}$

שלשה $<n, m, k>$ של מספרים טבעיים שייכת ל-B אם הראשוני ה-m (לפי גודל) בפירוק של n לגורמים ראשוניים גדול מ-k. אם m גדול ממספר הראשוניים בפירוק לגורמים של n, אז $<n, m, k>$ לא שייכת ל-B.

למשל, $<3276, 3, 6> \in B$ ($3276 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$; הראשוני השלישי בפירוק לגורמים ראשוניים הוא 7 והוא גדול מ-6), $<3276, 4, 20> \notin B$, $<3276, 5, 0> \notin B$.

שאלה 5 (12%)

נאמר ששפה A **ניתנת לרדוקציה בזמן ליניארי** לשפה B אם יש פונקציה f **חשיבה בזמן ליניארי** כך שלכל w, $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$.

נאמר ששפה A **ניתנת לרדוקציה בזמן ריבועי** לשפה B אם יש פונקציה f **חשיבה בזמן ריבועי** כך שלכל w, $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$.

א. נתון ש-B שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n)$ ו-A ניתנת לרדוקציה בזמן **ליניארי** ל-B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n)$? הסבירו את תשובתכם.

ב. נתון ש-B שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n^2)$ ו-A ניתנת לרדוקציה בזמן **ליניארי** ל-B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n^2)$? הסבירו את תשובתכם.

ג. נתון ש-B שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n)$ ו-A ניתנת לרדוקציה בזמן **ריבועי** ל-B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n)$? הסבירו את תשובתכם.

ד. נתון ש-B שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n^2)$ ו-A ניתנת לרדוקציה בזמן **ריבועי** ל- B.
האם אפשר להסיק מנתונים אלה ש-A שייכת ל- $\mathrm{TIME}(n^2)$? הסבירו את תשובתכם.

שאלה 6 (8%)

למה שווה מספר ההשמות **המספקות** של הנוסחה הבוליאנית המתקבלת על-ידי הרדוקציה של משפט Cook-Levin? הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 7 (10%)

הראו רדוקציה פולינומיאלית של *3SAT* ל- *INDEPENDENT-SET*.

(*INDEPENDENT-SET* מוגדרת במדריך הלמידה בעמוד 94).

שאלה 8 (8%)

ברדוקציה של הוכחת משפט 7.56 בספר, קבוצת המספרים S כוללת מופעים כפולים של מספרים ($g_i = h_i$ לכל $1 \le i \le k$). כלומר, S היא רב-קבוצה (multiset).

שנו את הרדוקציה כך ש-S לא תכיל מופעים כפולים. כלומר, S תהיה קבוצה (ולא רב-קבוצה).

שאלה 9 (18%)

א. הוכיחו שהשפה $NONDISJOINT_{\mathrm{DFA}}$ שלהלן שייכת למחלקה P :

$$NONDISJOINT_{\mathrm{DFA}} = \{<A, B> \mid A \text{ and } B \text{ are DFAs and } L(A) \cap L(B) \neq \varnothing\}$$

(מילה $<A, B>$ שייכת לשפה אם A ו-B הם תיאורים של אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים שהשפות שהם מזהים אינן זרות זו לזו).

ב. הוכיחו שהשפה $NONEMPTY\text{-}INTER_{\mathrm{DFA}}$ שלהלן היא שפה **NP- שלמה** :

$$NONEMPTY\text{-}INTER_{\mathrm{DFA}} = \{<A_1, ..., A_k> \mid A_1, ..., A_k \text{ are DFAs and } L(A_1) \cap \cdots \cap L(A_k) \neq \varnothing\}$$

(מילה $<A_1, A_2, ..., A_k>$ שייכת לשפה אם A_1, A_2, ..., A_k הם תיאורים של אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים, ויש מילה ששייכת לכל אחת מן השפות של האוטומטים הללו).

הדרכה : הראו שהשפה שייכת ל-NP, והראו רדוקציה פולינומיאלית של $3SAT$.

אפשר לייצג השמה של ערכים בוליאניים ל-n משתנים בוליאניים x_1, x_2, ..., x_n בעזרת מחרוזת באורך n מעל $\{0, 1\}$: המקום ה-i במחרוזת יציין את ערכו של x_i.

לכל פסוקית בנו אוטומט שיזהה את שפת כל המחרוזות מעל $\{0, 1\}$ שמתאימות להשמות שמספקות את הפסוקית.

ג. הסבירו היטב מהו ההבדל בין השפה של סעיף א לשפה של סעיף ב שגורם לכך שהראשונה שייכת ל-P והשנייה היא NP-שלמה. (תשובה בסגנון "פה יש שני אוטומטים ופה יש k אוטומטים" לא תתקבל כתשובה נכונה. זה לא מסביר את ההבדל).

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 9 **משקל המטלה:** 8 נקודות

סמסטר: 2009א **מועד אחרון להגשה:** 2 בינו' 09

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (8%)

נזכיר את השפה PAL מממ"ן 11:

$$PAL = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R\}$$

(זוהי שפת הפלינדרומים מעל האלפבית $\{0, 1\}$).

מצאו פונקציה $t(n)$ מינימלית, כך ש- $PAL \in \mathrm{TIME}(t(n))$

א. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד.

ב. במכונה דטרמיניסטית עם שני סרטים.

ג. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד שיש לו שני ראשים קוראים-כותבים.

הסבירו את תשובותיכם.

שאלה 2 (14%)

הוכיחו שהשפות הבאות שייכות למחלקה P:

א. $EVEN_{\mathrm{DFA}} = \{<M> \mid M \text{ is a DFA; } |w| \text{ is even for all } w \in L(M)\}$

($<M>$ שייכת לשפה אם M הוא אוטומט סופי דטרמיניסטי, וכל המילים שהאוטומט מקבל הן בעלות אורך זוגי).

ב. $DEGREE\text{-}5\text{-}CLIQUE = \{<G, k> \mid G \text{ is an undirected graph with a } k\text{-clique; the degree of every node of } G \leq 5\}$

($<G, k>$ שייכת לשפה אם G הוא גרף לא מכוון שדרגת כל צומת שלו איננה גדולה מ-5, ויש ב-G קליקה בגודל k. (דרגה של צומת = מספר הקשתות שהצומת נוגע בהן)).

שאלה 3 (12%)

א. הציעו מאמת (verifier) לשפה $\overline{E_{LBA}}$ (ראו משפט 5.10 בספר).

ב. הסבירו מדוע המאמת שהצעתם איננו בהכרח בעל זמן ריצה פולינומיאלי בגודל הקלט.

ג. הוכיחו : $\overline{E_{LBA}}$ **לא שייכת** ל-NP.

שאלה 4 (8%)

האם לפי הידע שבידנו השפה הבאה שייכת ל-NP? הסבירו את תשובתכם.

$EXACT\text{-}TRIPLE\text{-}SAT = \{<\phi> \mid \phi \text{ is a Boolean formula that has exactly 3 satisfying assignments}\}$

שאלה 5 (6%)

האם משפט 7.31 בספר נכון אם מחליפים את "P" ב-"NP"?

כלומר, האם המשפט הבא נכון : אם $A \leq_P B$ ו- $B \in \text{NP}$, אז $A \in \text{NP}$?

הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 6 (8%)

יהי Σ אלפבית נתון.

מצאו את כל השפות L כך ש- $L \equiv_P \Sigma^*$ ואת כל השפות K כך ש- $K \equiv_P \varnothing$.

הסבירו היטב את תשובותיכם.

(היחס $\equiv_P$ מוגדר במדריך הלמידה בעמוד 85).

שאלה 7 (10%)

הראו רדוקציה פולינומיאלית של $VERTEX\text{-}COVER$ ל- $CLIQUE$.

($VERTEX\text{-}COVER \leq_P CLIQUE$)

שאלה 8 (14%)

בעיה 7.26 בספר (עמוד 301).

שאלה 9 (20%)

בעיית הקבוצה הבלתי תלויה (*INDEPENDENT-SET*) מוגדרת בעמוד 94 במדריך הלמידה.

א. הוכיחו: בגרפים שבהם דרגת כל צומת ≤ 2 הבעיה **שייכת ל-P**.

(דרגת צומת = מספר הקשתות שנוגעות בצומת.

עליכם לתאר אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי המקבל כקלט מספר טבעי k וגרף לא מכוון G שדרגת כל צומת שלו ≤ 2, ובודק האם יש ב-G קבוצה בלתי תלויה בגודל k).

ב. הוכיחו: בגרפים שבהם דרגת כל צומת היא 3 הבעיה היא **NP-שלמה**.

הדרכה: רדוקציה פולינומיאלית של *3SAT*:

יהיו הפסוקיות של הנוסחה $C_1, ..., C_m$ (בכל פסוקית שלושה ליטרלים).

לכל משתנה v בנוסחה, נסמן על-ידי k_v את מספר הפסוקיות שבהם הוא מופיע.

לכל משתנה v בונים מעגל בגודל $2k_v$ שבו מופיעים הקדקודים $T_{v,\,i}$ ו- $F_{v,\,i}$ לסירוגין, כאשר i עובר על מספרי הפסוקיות שבהן מופיע המשתנה v.

(למשל, אם המשתנה v מופיע בפסוקיות השנייה, החמישית והשמינית, אז בונים את המעגל $(T_{v,2} - F_{v,2} - T_{v,5} - F_{v,5} - T_{v,8} - F_{v,8} - T_{v,2})$.

לכל פסוקית $(l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ בנוסחה (l_i הוא ליטרל) בונים משולש.

מחברים בקשת כל ליטרל l של הפסוקית ה-i לקדקוד המתאים לפסוקית ה-i במעגל של המשתנה של l: אם הליטרל l הוא v, מחברים אותו ל-$T_{v,\,i}$; אם הליטרל l הוא $\neg v$, מחברים אותו ל- $F_{v,\,i}$.

הראו שהרדוקציה המוצעת יכולה להתבצע בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט.
הראו שהנוסחה ספיקה אם ורק אם יש בגרף שנבנה על-ידי הרדוקציה קבוצה בלתי תלויה בגודל n (שאותו עליכם לקבוע).

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 4

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 11 **משקל המטלה:** 8 נקודות

סמסטר: ב2007 **מועד אחרון להגשה:** 25 במאי 07

(בי)

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (8%)

נזכיר את השפה PAL מממ"ן 11:

$$PAL = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R\}$$

(זוהי שפת הפלינדרומים מעל האלפבית $\{0, 1\}$).

מצאו פונקציה $t(n)$ מינימלית, כך ש- $PAL \in \mathrm{TIME}(t(n))$

א. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד.

ב. במכונה דטרמיניסטית עם שני סרטים.

ג. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד שיש לו שני ראשים קוראים-כותבים.

הסבירו את תשובותיכם.

שאלה 2 (12%)

הוכיחו שהשפות הבאות שייכות למחלקה P:

א. A_{NFA} (ראו משפט 4.2 בספר).

ב. EQ_{DFA} (ראו משפט 4.5 בספר).

ג. $5\text{-}CLIQUE = \{\langle G\rangle \mid G \text{ is an undirected graph with a 5-clique}\}$.

שאלה 3 (5%)

האם המחלקה P **מכילה ממש** את מחלקת השפות חסרות ההקשר, או שיש שוויון בין שתי המחלקות?

הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 4 (12%)

א. הציעו מאמת (verifier) לשפה $\overline{ALL_{\text{CFG}}}$ (ראו משפט 5.13 בספר).

ב. הסבירו מדוע המאמת שהצעתם איננו בהכרח בעל זמן ריצה פולינומיאלי בגודל הקלט.

ג. הוכיחו: $\overline{ALL_{\text{CFG}}}$ לא שייכת ל-NP.

שאלה 5 (8%)

הוכיחו שהשפה הבאה שייכת למחלקה NP:

$B = \{<n, m, k> \mid$ הראשוני ה-m בפירוק לגורמים ראשוניים של n גדול מ-$k\}$

שלשה $<n, m, k>$ של מספרים טבעיים שייכת ל-B אם הראשוני ה-m (לפי גודל) בפירוק של n לגורמים ראשוניים גדול מ-k. אם m גדול ממספר הראשוניים בפירוק לגורמים של n, אז $<n, m, k>$ לא שייכת ל-B.

למשל, $<3276, 3, 6> \in B$ ($3276 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$; הראשוני השלישי בפירוק לגורמים ראשוניים הוא 7 והוא גדול מ-6), $<3276, 4, 20> \notin B$, $<3276, 5, 0> \notin B$.

שאלה 6 (6%)

האם משפט 7.31 בספר נכון אם מחליפים את "P" ב-"NP"?

כלומר, האם המשפט הבא נכון: אם $A \leq_P B$ ו- $B \in NP$, אז $A \in NP$?

הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 7 (8%)

יהי Σ אלפבית נתון.

מצאו את כל השפות L כך ש- $L \equiv_P \Sigma^*$ ואת כל השפות K כך ש- $K \equiv_P \varnothing$.

הסבירו היטב את תשובותיכם.

(היחס $\equiv_P$ מוגדר במדריך הלמידה בעמוד 85).

שאלה 8 (10%)

הראו רדוקציה פולינומיאלית של *3SAT* ל- *INDEPENDENT-SET*.

(*INDEPENDENT-SET* מוגדרת במדריך הלמידה בעמוד 94).

שאלה 9 (7%)

ברדוקציה של הוכחת משפט 7.56 בספר, קבוצת המספרים S כוללת מופעים כפולים של מספרים ($g_i = h_i$ לכל $1 \le i \le k$), כלומר, S היא רב-קבוצה (multiset).

שנו את הרדוקציה כך ש-S לא תכיל מופעים כפולים, כלומר, S תהיה קבוצה (ולא רב-קבוצה).

שאלה 10 (12%)

א. בעיה 7.24 בספר (עמוד 300).

ב. הראו רדוקציה פולינומיאלית של $\neq SAT$ ל- $SET\text{-}SPLITTING$ (ראו בעיה 7.28 בספר).

שאלה 11 (12%)

מעגל המילטוני בגרף לא מכוון $G = (V, E)$ הוא מעגל פשוט שמכיל כל קדקוד של הגרף פעם אחת ויחידה.

השפה $UHAMCIRCUIT$ מוגדרת כך :

$UHAMCIRCUIT$ = {<G> | G is an undirected graph that has a Hamiltonian circuit}

(זוהי שפת הגרפים הלא מכוונים שיש להם מעגל המילטון).

א. הראו רדוקציה פולינומיאלית של $UHAMPATH$ ל- $UHAMCIRCUIT$.

ב. הוכיחו : $UHAMCIRCUIT$ היא NP-שלמה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4-5

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2006ב **מועד אחרון להגשה:** 9 ביוני 06

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (18%)

תהי C הקבוצה הבאה:

$$C = \{<n, m> \mid n, m \in N; \ \Phi(x, n) = \Phi(x, m)\}$$

(C היא קבוצת המספרים הטבעיים k כך שהתכנית שמספרה $l(k)$ והתכנית שמספרה $r(k)$ מחשבות אותה הפונקציה של משתנה אחד).

א. הוכיחו ש-C **איננה נל"ר**.
הדרכה: הראו רדוקציה של אחת הקבוצות שהוכח עליה שהיא איננה נל"ר.

ב. הראו שיש ל-C **תת-קבוצה פרימיטיבית רקורסיבית אינסופית**.

שאלה 2 (18%)

אלו מהקבוצות הבאות פרימיטיבית רקורסיביות? אלו מהן רקורסיביות? אלו מהן נל"ר?
הוכיחו את תשובותיכם.

א. קבוצת המספרים הטבעיים שהם חזקה שלמה של מספר ראשוני

ב. $\{x \in N \mid \Phi(x, x) < x\}$

ג. $\{x \in N \mid 1 \notin W_x\}$

שאלה 3 (20%)

לכל אחת מן הקבוצות הבאות, קבעו **האם אפשר להוכיח שהיא לא רקורסיבית בעזרת משפט Rice** (משפט 4.7.1) או לא.
אם קבעתם שאפשר, כתבו את ההוכחה. אם קבעתם שאי אפשר, הסבירו למה אי אפשר.

א. $A = \{n \in N \mid |W_n| < 5\}$

ב. $B = \{n \in N \mid$ התכנית שמספרה n **עוצרת על כל קלט** בתוך 10 צעדים$\}$

ג. $C = \{n \in N \mid$ n הוא מספר **אי-זוגי** ששייך לקבוצה $K\}$
(כלומר, C היא החיתוך של K עם קבוצת המספרים האי-זוגיים)

ד. $D = \{<x, y> \mid$ התכנית שמספרה x **לא עוצרת** על הקלט y בתוך 1,000 צעדים$\}$
(או שהתכנית x כלל לא עוצרת על y, או שהיא עוצרת לאחר יותר מ-1,000 צעדים)

שאלה 4 (8%)

הוכיחו: לכל מספר טבעי n יש מספר טבעי e כך ש- $W_e = \{e, e+1, e+2, ..., e+n\}$.

שאלה 5 (20%)

הוכיחו שהפונקציות הבאות הן **פרימיטיביות רקורסיביות**:

א. $\mathrm{TRUNCR}_n(m, w)$ - המילה המתקבלת מקיצוץ m האותיות הימניות של w.
אם $m \le |w|$, יוחזר 0.

ב. $\mathrm{TRUNCL}_n(m, w)$ - כמו הסעיף הקודם, ביחס לאותיות השמאליות.

ג. $\mathrm{ENDRT}_n(m, w)$ - המילה הבנויה מ- m האותיות הימניות של w. אם $m \le |w|$, תוחזר w.

ד. $\mathrm{ENDLT}_n(m, w)$ - כמו הסעיף הקודם, ביחס לאותיות השמאליות.

שאלה 6 (8%)

כתבו תכנית ב-S_3 ל"מיזוג" של שתי מילים: התכנית תקבל כקלט שתי מילים v ו-w. אם האורך שלהן שווה, הפלט יהיה המילה שהאות הראשונה שלה שווה לאות הראשונה של v, האות השנייה שלה שווה לאות הראשונה של w, האות השלישית שלה שווה לאות השנייה של v, האות הרביעית שלה שווה לאות השנייה של w, וכך הלאה. אם האורך של v ו-w איננו זהה, הפלט יהיה 0.

שאלה 7 (8%)

א. מהי תכנית Post-Turing הקצרה ביותר שאיננה עוצרת על אף קלט? הצדיקו את תשובתכם.

ב. מהי הפונקציה של שני משתנים שמחשבת תכנית Post-Turing הריקה? הסבירו.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 5-4

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2006א **מועד אחרון להגשה:** 6 בינו' 06

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20%)

א. הראו ש- $\overline{K} \leq_m \text{TOT}$.

הדרכה: אם תכנית לא עוצרת על קלט נתון, אז **לכל** מספר של צעדי ריצה היא לא עוצרת עליו.

ב. הראו ש- $\overline{K} \leq_m \overline{\text{TOT}}$.

שאלה 2 (15%)

עיינו במשפט Rice (משפט 4.7.1).

א. הראו שמן המשפט נובע שלפחות אחת מן הקבוצות R_Γ, $\overline{R_\Gamma}$ **איננה נל"ר**.

ב. הציעו דרך לקבוע איזו משתי הקבוצות הללו **בוודאי איננה נל"ר**.

ג. האם ייתכן **ששתיהן אינן נל"ר**? הוכיחו.

שאלה 3 (20%)

ביחס לכל אחת מן הקבוצות הבאות, קבעו **האם אפשר להוכיח שהיא לא רקורסיבית בעזרת משפט Rice** (משפט 4.7.1) או לא.

אם קבעתם שאפשר, כתבו את ההוכחה. אם קבעתם שאי אפשר, הסבירו למה אי אפשר.

א. $A = \{n \in N \mid |W_n| = 5\}$

ב. $B = \{n \in N \mid$ כשהתכנית שמספרה n רצה על 0, היא עוצרת בשורה המאה$\}$

ג. $C = \{n \in N \mid$ יש קלט x שעליו התכנית שמספרה n עוצרת בתוך x צעדים$\}$

ד. $D = \{n \in N \mid$ יש מספר טבעי m **קטן מ-n** כך ש- $W_m = W_n\}$

שאלה 4 (10%)

הוכיחו שיש מספר טבעי e כך ש- $W_e = \{n \in N \mid e \mid n\}$. (זוהי קבוצת המספרים הטבעיים ש-e מחלק).

שאלה 5 (10%)

הוכיחו **בעזרת משפט הרקורסיה** שהקבוצה TOT **איננה רקורסיבית**.

שאלה 6 (10%)

א. הוכיחו שהפונקציה $Length(x, n)$, שמחזירה את האורך של הייצוג של המספר x בבסיס n, היא פונקציה **פרימיטיבית רקורסיבית**.
(פונקציה זו שונה מהפונקציה $|x|$ בכך ש-n הוא פרמטר של הפונקציה).

ב. הוכיחו שהפונקציה $UPCHANGE_{n,\,l}$ היא פונקציה **פרימיטיבית רקורסיבית**.
(היעזרו במה שהוכחתם בסעיף א).

שאלה 7 (15%)

א. תרגיל 5.2.6 בספר (עמוד 126).

ב. תרגיל 5.2.8 בספר (עמוד 126).

ג. כתבו תכנית Post-Turing המחשבת **באופן קפדני** את הפונקציה $g(u)$ של סעיף ב', מעל האלפבית $\{s_1, s_2\}$.

הסבירו היטב את התכניות שכתבתם.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4-5

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2005ב **מועד אחרון להגשה:** 13 במאי 05

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (30%)

א. הוכיחו שהקבוצה המשלימה ל-EMPTY ($\overline{\text{EMPTY}}$) היא **קבוצה נל"ר.**
(זהו תרגיל 4.7.4 בספר).

ב. הראו רדוקציה של EMPTY ל- $\overline{\text{TOT}}$.
(אין להסתפק בהוכחה שרדוקציה כזו קיימת. עליכם להראות את הרדוקציה).
הדרכה: מתכנית שעוצרת לפחות על קלט אחד אפשר לבנות תכנית שעוצרת על כל קלט.
מה אפשר להסיק מהרדוקציה הזו על $\overline{\text{TOT}}$?

ג. הוכיחו **שאין** רדוקציה של TOT ל-EMPTY, **ואין** רדוקציה של $\overline{\text{TOT}}$ ל-EMPTY.

שאלה 2 (10%)

מצאו את השגיאה בניסיון הבא למצוא דוגמה שסותרת את משפט *Rice* (משפט 4.7.1).

תהי A קבוצת מספרי התכניות ב-S שמתחילות בהוראה $X \leftarrow X - 1$.

A היא **קבוצה רקורסיבית**, כי אפשר מתוך מספר של תכנית לבדוק אם היא מתחילה בהוראה הזו או לא.

תהי Γ קבוצת הפונקציות הרקורסיביות חלקיות המחושבות על-ידי תכניות שמספרן ב-A.

יש פונקציות ששייכות ל-Γ, למשל, $f(x) = x \dot{-} 1$.

יש פונקציות שלא שייכות ל-Γ, למשל, $g(x) = 1 \dot{-} x$ (כי תכנית שמתחילה בהוראה $X \leftarrow X - 1$ אינה מבדילה בין $x = 0$ ל-$x = 1$).

לכן, לפי משפט *Rice*, R_Γ **איננה רקורסיבית.**

אבל $R_\Gamma = A$, ו-A **כן רקורסיבית.**

שאלה 3 (20%)

ביחס לכל אחת מן הקבוצות הבאות, קבעו **האם אפשר להוכיח** שהיא **לא רקורסיבית בעזרת משפט Rice** (משפט 4.7.1) או לא.

אם קבעתם שאפשר, כתבו את ההוכחה. אם קבעתם שאי אפשר, הסבירו למה אי אפשר.

א. $C_1 = \{n \in N \mid$ התכנית שמספרה n לא עוצרת על הקלט 0 בתוך 100 צעדי ריצה$\}$

ב. $C_2 = \{n \in N \mid$ התכנית שמספרה n עוצרת על הקלט 0 במספר לא ראשוני של צעדי ריצה$\}$

ג. $C_3 = \{n \in N \mid$ התכנית שמספרה n עוצרת על הקלט 0 ולא עוצרת על הקלט 1$\}$

ד. $C_4 = \{n \in N \mid$ הקבוצה W_n איננה רקורסיבית$\}$

שאלה 4 (12%)

יהי $c \in N$. נגדיר את הקבוצה הבאה: $\mathrm{IN\_RANGE}_c = \{x \mid \Phi_x^{(1)}$ שייך לטווח של הפונקציה $c\}$.

הוכיחו **בעזרת משפט הרקורסיה** שהקבוצה $\mathrm{IN\_RANGE}_c$ **איננה רקורסיבית**.

שאלה 5 (12%)

א. הוכיחו שהפונקציה $\mathrm{Symbol}_n(i, x)$, שמחזירה את הספרה ה-i במספר x המיוצג בבסיס n, היא **פרימיטיבית רקורסיבית**. (אם i=0 או ש-i גדול מהאורך של x, יוחזר 0).

ב. הוכיחו שהפונקציה w_n^R, שמחזירה את המילה בבסיס n המתקבלת מהמילה w על-ידי היפוך סדר האותיות, היא **פרימיטיבית רקורסיבית**.

שאלה 6 (6%)

כתבו בשפה S_3 תכנית לחישוב הפרדיקט $\mathrm{SUFFIX}_3(x, y)$, שערכו TRUE אם ורק אם המחרוזת שמייצגת את x בבסיס 3 היא סופית (סיפא) של המחרוזת שמייצגת את y בבסיס 3.

על התכנית להיות **קצרה וברורה**. בכתיבת התכנית **אין להשתמש במקרוס**.

הוסיפו לתכנית הסבר קצר על אופן פעולתה.

שאלה 7 (10%)

כתבו תכניות Post-Turing המחשבות באופן קפדני את הפונקציות הבאות מעל $\{1\}$.

על התכניות להיות **קצרות וברורות**. בכתיבת התכניות **אין להשתמש במקרוס**.

הוסיפו לכל תכנית הסבר קצר על אופן פעולתה.

א. $f(x, y) = x + y$.

ב. $g(x, y) = x - y$ (פונקציה חלקית).

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4-5

מספר השאלות: 6   **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2005א   **מועד אחרון להגשה:** 3 בדצמ' 04

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (30%)

נגדיר: PRED היא קבוצת מספרי התכניות בשפה S המחשבות פרדיקט חד-מקומי.

$$\text{PRED} = \{y \in N \mid \Phi_y^{(1)} \text{ is a predicate}\}$$

א. הוכיחו **בעזרת רדוקציות** ש-PRED והמשלימה של PRED ‏(N – PRED) **אינן נל"ר**.

הדרכה: הראו: $\text{TOT} \le_m \text{PRED}$; $\bar{K} \le_m \overline{\text{PRED}}$.

ב. תנו דוגמה לתת-קבוצה **פרימיטיבית רקורסיבית** של PRED.

שאלה 2 (20%)

ביחס לכל אחת מן הקבוצות הבאות, קבעו **האם אפשר להוכיח שהיא לא רקורסיבית בעזרת משפט Rice**.

אם קבעתם שאפשר, כתבו את ההוכחה. אם קבעתם שאי אפשר, הסבירו למה אי אפשר.

א. $A = \{n \in N \mid |W_n| > 5\}$

ב. $B = \{n \in N \mid$ התכנית שמספרה n עוצרת על כל קלט בתוך 5 צעדים$\}$

ג. $C = \{n \in N \mid$ n הוא מספר **זוגי** ששייך לקבוצה $K\}$

(כלומר, C היא החיתוך של K עם קבוצת המספרים הזוגיים)

ד. $D = \{<x, y> \mid$ התכנית שמספרה x עוצרת על הקלט y בתוך 10,000 צעדים$\}$

שאלה 3 (12%)

הוכיחו **בעזרת משפט הרקורסיה** שהקבוצה EMPTY **איננה רקורסיבית**.

שאלה 4 (12%)

א. תרגיל 4.8.3 בספר (עמוד 104).

ב. תרגיל 4.8.4 בספר (עמוד 104).

שאלה 5 (16%)

הוכיחו שהפונקציות הבאות הן **פרימיטיביות רקורסיביות**:

א. $\mathrm{TRUNCR}_n(m, w)$ - המלה המתקבלת מקיצוץ m האותיות הימניות של w.

אם $|w| \leq m$, יוחזר 0.

ב. $\mathrm{TRUNCL}_n(m, w)$ - כמו הסעיף הקודם, ביחס לאותיות השמאליות.

ג. $\mathrm{ENDRT}_n(m, w)$ - המלה הבנויה מ- m האותיות הימניות של w. אם $|w| \leq m$, תוחזר w.

ד. $\mathrm{ENDLT}_n(m, w)$ - כמו הסעיף הקודם, ביחס לאותיות השמאליות.

שאלה 6 (10%)

יהי $A = \{a, b\}$ אלפבית עם שתי אותיות, ותהי $f: A^* \to A$:

$$f(w) = \begin{cases} aa & \text{אם } bb \text{ היא תת מילה של } w \\ bbb & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. כתבו תכנית ב-S_2 לחישוב f.

ב. כתבו תכנית Post-Turing שמחשבת את f **באופן קפדני**.

על התכניות להיות **קצרות וברורות**.

בכתיבת התכניות **אין להשתמש במקרוס**.

הוסיפו לכל תכנית הסבר קצר על אופן פעולתה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 5-4

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2004ב **מועד אחרון להגשה:** 7 במאי 04

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (30%)

א. הוכיחו שהקבוצה המשלימה ל-EMPTY ($\overline{\text{EMPTY}}$) היא **קבוצה נל"ר**.
(זהו תרגיל 4.7.4 בספר).

ב. הראו רדוקציה של EMPTY ל- $\overline{\text{TOT}}$.
(אין להסתפק בהוכחה שרדוקציה כזו קיימת. עליכם להראות את הרדוקציה).
הדרכה: מתכנית שעוצרת לפחות על קלט אחד אפשר לבנות תכנית שעוצרת על כל קלט.
מה אפשר להסיק מהרדוקציה הזו על $\overline{\text{TOT}}$?

ג. הוכיחו **שאין** רדוקציה של TOT ל-EMPTY, **ואין** רדוקציה של $\overline{\text{TOT}}$ ל-EMPTY.

שאלה 2 (18%)

אלו מהקבוצות הבאות פרימיטיבית רקורסיביות? אלו מהן רקורסיביות? אלו מהן נל"ר?
הוכיחו את תשובותיכם.

א. קבוצת המספרים שהם מכפלה של בדיוק שלושה מספרים ראשוניים

ב. $\{x \in N \mid \Phi(x, x) = 0\}$

ג. $\{x \in N \mid 0 \notin W_x\}$

שאלה 3 (18%)

ביחס לכל אחת מן הקבוצות הבאות, קבעו **האם אפשר להוכיח שהיא לא רקורסיבית בעזרת משפט Rice**. אם קבעתם שאפשר, כתבו את ההוכחה. אם קבעתם שאי אפשר, הסבירו למה אי אפשר.

א. $A = \{n \in N \mid |W_n| = 5\}$

ב. $B = \{n \in N \mid$ כשהתכנית שמספרה n רצה על 0, היא עוצרת בשורה המאה$\}$

ג. $C = \{n \in N \mid$ יש קלט x שעליו התכנית שמספרה n עוצרת בתוך x צעדים$\}$

שאלה 4 (10%)

הוכיחו שיש מספר טבעי e כך ש- $W_e = \{e^k \mid k = 0, 1, 2, ...\}$.

שאלה 5 (10%)

א. הוכיחו שהפונקציה $Length(x, n)$, שמחזירה את האורך של הייצוג של המספר x בבסיס n, היא פונקציה **פרימיטיבית רקורסיבית**.

(פונקציה זו שונה מהפונקציה $|x|$ בכך ש-n הוא פרמטר של הפונקציה).

ב. הוכיחו שהפונקציה $UPCHANGE_{n,l}$ היא פונקציה **פרימיטיבית רקורסיבית**.

(היעזרו במה שהוכחתם בסעיף א).

שאלה 6 (6%)

כתבו תכנית ב-S_3 ל"מיזוג" של שתי מילים.

התכנית תקבל כקלט שתי מילים v ו-w. אם האורך שלהן שווה, הפלט יהיה המילה שהאות הראשונה שלה שווה לאות הראשונה של v, האות השנייה שלה שווה לאות הראשונה של w, האות השלישית שלה שווה לאות השנייה של v, האות הרביעית שלה שווה לאות השנייה של w, וכך הלאה. אם האורך של v ו-w איננו זהה, הפלט יהיה 0.

שאלה 7 (8%)

א. מהי תכנית Post-Turing הקצרה ביותר שאיננה עוצרת על אף קלט? הצדיקו את תשובתכם.

ב. מהי הפונקציה של שני משתנים שמחשבת תכנית Post-Turing הריקה? הסבירו.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 5-4

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2004א **מועד אחרון להגשה:** 28 בנוב' 03

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (20%)

תהיינה A ו-B שתי קבוצות **זרות** של מספרים טבעיים.

נאמר ש-A ו-B **ניתנות להפרדה רקורסיבית**, אם יש קבוצה **רקורסיבית** C כך ש- $A \subseteq C$ ו- $B \subseteq \bar{C}$.

הוכיחו שהקבוצות TOT ו-EMPTY **אינן ניתנות להפרדה רקורסיבית**.

הדרכה: הניחו בשלילה שהן ניתנות להפרדה רקורסיבית, וראו כיצד זה משפיע על K.

שאלה 2 (20%)

נגדיר: $\text{INF\_RANGE} = \{n \in N \mid$ הטווח של הפונקציה $\Phi_n(x)$ הוא אינסופי $\}$.

הוכיחו ש- INF_RANGE והמשלימה שלה $(N - \text{INF\_RANGE})$ **אינן נל"ר**.

אתם רשאים להשתמש לצורך ההוכחה בתוצאות של תרגילים **4.6.12** ו- **4.6.13** בעמוד **95** בספר.

שאלה 3 (18%)

עיינו במשפט Rice (משפט 4.7.1).

א. הראו שמן המשפט נובע שלפחות אחת מן הקבוצות R_Γ ו- $\overline{R_\Gamma}$ **איננה נל"ר**.

ב. הציעו דרך לקבוע איזו משתי הקבוצות הללו **בוודאי איננה נל"ר**.

ג. האם ייתכן **ששתיהן אינן נל"ר**? הוכיחו.

שאלה 4 (12%)

הוכיחו שיש מספר טבעי e כך ש- $W_e = K$ ו- $e \in K$.

שאלה 5 (15%)

א. הוכיחו שהפונקציה $\mathrm{Symbol}_n(i, x)$, שמחזירה את הספרה ה-i במספר x המיוצג בבסיס n, היא **פרימיטיבית רקורסיבית**.

(אם i=0 או ש-i גדול מהאורך של x_n יוחזר 0).

ב. הוכיחו שהפונקציה w_n^R, שמחזירה את המילה בבסיס n המתקבלת מהמילה w על-ידי היפוך סדר האותיות, היא **פרימיטיבית רקורסיבית**.

שאלה 6 (15%)

א. תרגיל 5.2.6 בספר (עמוד 126).

ב. תרגיל 5.2.8 בספר (עמוד 126).

ג. כתבו תכנית Post-Turing שמחשבת **באופן קפדני** את הפונקציה $g(u)$ של סעיף ב', מעל האלפבית $\{s_1, s_2\}$.

הסבירו היטב את התכניות שכתבתם.

מטלת מנחה (ממ״ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2010ב **מועד אחרון להגשה:** 28 מאי 10

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1 (10%)

הוכיחו שהשפה *SUBSET-SUM* שייכת ל-$\mathrm{SPACE}(n)$.
הציגו אלגוריתם להכרעת השפה, הסבירו היטב כיצד הוא ימומש, והוכיחו שהמקום הדרוש הוא $O(n)$.

שאלה 2 (10%)

הוכיחו: אם A היא שפה **רגולרית**, אז $A \in \mathrm{SPACE}(1)$.

שאלה 3 (15%)

בהגדרה של שפות PSPACE-שלמות (הגדרה 8.8) משתמשים ברדוקצית **זמן** פולינומיאלי (סעיף 2 בהגדרה).
הראו שאם נשתמש ברדוקצית **מקום** פולינומיאלי (כלומר, כל A ב-PSPACE ניתנת לרדוקציה **במקום** פולינומיאלי ל-B), אז SAT תהיה בעיה PSPACE-שלמה.

הדרכה: SAT היא רק דוגמה.

שאלה 4 (25%)

בעיה 8.22 בספר (עמוד 335).
לכל אחת מן השפות, הסבירו היטב את אופן פעולתה של מכונה שמשתמשת במקום לוגריתמי בגודל הקלט ומכריעה את השפה.

שאלה 5 (15%)

הוכיחו : $CLIQUE \leq_{\mathrm{L}} VERTEX\text{-}COVER$.

($CLIQUE$ הוגדרה לפני משפט 7.24 ; $VERTEX\text{-}COVER$ הוגדרה לפני משפט 7.44).

עליכם לתאר את הרדוקציה, להוכיח שהיא תקפה, ולהוכיח בפירוט שהיא יכולה להתבצע במקום לוגריתמי.

שאלה 6 (25%)

הבעיה E_{DFA} הוגדרה בספר לפני משפט 4.4.

הוכיחו : $\overline{E_{\mathrm{DFA}}}$ היא שפה NL-שלמה.

הדרכה : הראו שהיא שייכת ל-NL, והראו כי $PATH \leq_{\mathrm{L}} \overline{E_{\mathrm{DFA}}}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2010א **מועד אחרון להגשה:** 8 ינו' 10

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

תזכורת: $UHAMCIRCUIT = \{<G> \mid G \text{ is an undirected graph that has a Hamiltonian circuit}\}$

(זוהי שפת הגרפים הלא מכוונים שיש להם מעגל המילטון).

הוכיחו שהשפה $UHAMCIRCUIT$ שייכת ל-SPACE(n).

הציגו אלגוריתם להכרעת השפה, הסבירו היטב כיצד הוא ימומש, והוכיחו שהמקום הדרוש הוא $O(n)$.

שאלה 2 (10%)

הראו רדוקציה **בעלת זמן ריצה** $\boldsymbol{O(n^2)}$ של השפה SAT לשפה $TQBF$.

הדרכה: זו לא הרדוקציה של הוכחת משפט 8.9.

שאלה 3 (30%)

תזכורת: $A_{\text{LBA}} = \{<M, w> \mid M \text{ is an LBA, } w \text{ is a string, and } M \text{ accepts } w\}$

א. הוכיחו: השפה A_{LBA} שייכת ל-PSPACE.

ב. תהי A שפה ב-PSPACE. תארו רדוקציה בעלת זמן ריצה פולינומיאלי של A ל-A_{LBA}. (הראו כי $A \leq_P A_{\text{LBA}}$ על-ידי הצגת רדוקציה פולינומיאלית של A ל-A_{LBA}).

ג. הסיקו: A_{LBA} היא שפה PSPACE-שלמה.

שאלה 4 (10%)

האם המחלקה L סגורה לפעולת השרשור (concatenation)? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 5 (20%)

נגדיר את השפה B הבאה: $B = \{e \mid e \text{ is an expression of properly nested parentheses}\}$

B היא שפת הביטויים האריתמטיים של מספרים שלמים אי-שליליים שבהם הסוגריים תקינים.

האלפבית של B הוא $\Sigma = \{+, -, \times, /, (,), 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

דוגמאות למילים ששייכות ל-B: (1+2+5)–(2/3)+((2)+((2–95)/14)), (2×3+5–4)/3, (2–4), 143+5

דוגמאות למילים שלא שייכות ל-B: ((2+5)×(5/7), (2+×5), 145+16(, 234+156), 89+, ( )+45, –6

הוכיחו שהשפה B שייכת למחלקה L.

עליכם לתאר מכונה דטרמיניסטית, בעלת סיבוכיות מקום לוגריתמית, שמכריעה את B.

שאלה 6 (20%)

בעיה 8.29 בספר (עמוד 336).

הדרכה: הראו: $A_{\mathrm{NFA}} \in \mathrm{NL}$ ו- $PATH \le_{\mathrm{L}} A_{\mathrm{NFA}}$.

מטלת מנחה (ממ״ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2009ב **מועד אחרון להגשה:** 5 ביוני 09

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1 (10%)

בדוגמה 8.3 בספר מראים ש-SAT שייכת ל-SPACE(n).

האם אפשר להסיק מכך ומן העובדה ש-SAT היא בעיה NP-שלמה, ש- $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{SPACE}(n)$?

הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 2 (10%)

נתונה השפה $\#SAT$

$\#SAT = \{<\phi, k> \mid \phi$ is a Boolean formula with **at least** k different satisfying assignments$\}$

א. האם אפשר להוכיח ששפה זו שייכת ל- SPACE(n)?
אם עניתם שכן, כתבו את ההוכחה. אם עניתם שלא, הסבירו למה לא.

ב. האם התשובה לסעיף א תשתנה, אם נחליף בהגדרת השפה את המילים ״at least״ במילים ״at most״? הסבירו את תשובתכם.

ג. האם התשובה תשתנה, אם נחליף את המילים ״at least״ במילה ״exactly״?
הסבירו את תשובתכם.

שאלה 3 (20%)

א. הוכיחו: $EQ_{\mathrm{DFA}} \in \mathrm{SPACE}(n^2)$. (השפה EQ_{DFA} מוגדרת לפני משפט 4.5 בספר)

ב. הוכיחו: $EQ_{\mathrm{NFA}} \in \mathrm{SPACE}(n^2)$. ($EQ_{\mathrm{NFA}} = \{<A, B> \mid A$ and B are NFAs and $L(A) = L(B)\}$)

שאלה 4 (20%)

בעיה 8.18 בספר (עמוד 335).

כדי להוכיח שהשפה B שייכת למחלקה L, עליכם לתאר בפירוט מכונה דטרמיניסטית, בעלת סיבוכיות מקום לוגריתמית, שמכריעה את B.

שאלה 5 (20%)

הבעיה *HITTING-SET* מוגדרת כך:

הקלט: קבוצה סופית S; אוסף $\{S_1, S_2, ..., S_m\}$ של תת-קבוצות של S (כל S_i היא תת-קבוצה של S); מספר טבעי k.

השאלה: האם יש ל-S תת-קבוצה T בגודל k כך שלכל $1 \leq i \leq m$, $T \cap S_i \neq \emptyset$? (כלומר, האם יש ל-$S$ תת-קבוצה בגודל k שהחיתוך שלה עם כל אחת מן התת-קבוצות S_i איננו ריק?)

הוכיחו: $VERTEX\text{-}COVER \leq_L HITTING\text{-}SET$.

(*VERTEX-COVER* מוגדרת בעמוד 288 בספר).

עליכם לתאר את הרדוקציה, להוכיח שהיא תקפה, ולהוכיח בפירוט שהיא יכולה להתבצע במקום לוגריתמי.

שאלה 6 (20%)

בעיה 8.27 בספר (עמוד 336).

הדרכה: הראו: $STRONGLY\text{-}CONNECTED \in \mathrm{NL}$ ו- $PATH \leq_L STRONGLY\text{-}CONNECTED$.

מטלת מנחה (ממ״ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2009א **מועד אחרון להגשה:** 16 בינו׳ 09

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1 (10%)

הוכיחו שהשפה *SUBSET-SUM* שייכת ל-$\mathrm{SPACE}(n)$.
הציגו אלגוריתם להכרעת השפה, הסבירו היטב כיצד הוא ימומש, והוכיחו שהמקום הדרוש הוא $O(n)$.

שאלה 2 (10%)

הוכיחו: אם A היא שפה **רגולרית**, אז $A \in \mathrm{SPACE}(1)$.

שאלה 3 (15%)

בהגדרה של שפות PSPACE-שלמות (הגדרה 8.8) משתמשים ברדוקצית **זמן** פולינומיאלי (סעיף 2 בהגדרה).
הראו שאם נשתמש ברדוקצית **מקום** פולינומיאלי (כלומר, כל A ב-PSPACE ניתנת לרדוקציה **במקום** פולינומיאלי ל-B), אז SAT תהיה בעיה PSPACE-שלמה.

הדרכה: SAT היא רק דוגמה.

שאלה 4 (25%)

בעיה 8.22 בספר (עמוד 335).
לכל אחת מן השפות, הסבירו היטב את אופן פעולתה של מכונה שמשתמשת במקום לוגריתמי בגודל הקלט ומכריעה את השפה.

שאלה 5 (15%)

הוכיחו : $CLIQUE \leq_L VERTEX\text{-}COVER$.

($CLIQUE$ הוגדרה לפני משפט 7.24 ; $VERTEX\text{-}COVER$ הוגדרה לפני משפט 7.44).

עליכם לתאר את הרדוקציה, להוכיח שהיא תקפה, ולהוכיח בפירוט שהיא יכולה להתבצע במקום לוגריתמי.

שאלה 6 (25%)

הבעיה E_{DFA} הוגדרה בספר לפני משפט 4.4.

הוכיחו : $\overline{E_{DFA}}$ היא שפה NL-שלמה.

הדרכה : הראו שהיא שייכת ל-NL, והראו כי $PATH \leq_L \overline{E_{DFA}}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 5

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: ב2007 **מועד אחרון להגשה:** 8 ביוני 07

(בי)

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (10%)

בדוגמה 8.3 בספר מראים ש-SAT שייכת ל-$\text{SPACE}(n)$.

האם אפשר להסיק מכך ומן העובדה ש-SAT היא בעיה NP-שלמה, ש- $\text{NP} \subseteq \text{SPACE}(n)$?

הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 2 (20%)

א. הוכיחו: $EQ_{\text{DFA}} \in \text{SPACE}(n^2)$. (השפה EQ_{DFA} מוגדרת לפני משפט 4.5 בספר)

ב. הוכיחו: $EQ_{\text{NFA}} \in \text{SPACE}(n^2)$. ($EQ_{\text{NFA}} = \{<A, B> \mid A \text{ and } B \text{ are NFAs and } L(A) = L(B)\}$)

שאלה 3 (10%)

הוכיחו: אם A היא שפה **רגולרית**, אז $A \in \text{SPACE}(1)$.

שאלה 4 (20%)

בעיה 8.18 בספר (עמוד 335).

כדי להוכיח שהשפה B שייכת למחלקה L, עליכם לתאר בפירוט מכונה דטרמיניסטית, בעלת סיבוכיות מקום לוגריתמית, שמכריעה את B.

שאלה 5 (20%)

הוכיחו : $CLIQUE \leq_L VERTEX\text{-}COVER$.

($CLIQUE$ הוגדרה לפני משפט 7.24 ; $VERTEX\text{-}COVER$ הוגדרה לפני משפט 7.44).

עליכם לתאר את הרדוקציה, להוכיח שהיא תקפה, ולהוכיח בפירוט שהיא יכולה להתבצע במקום לוגריתמי.

שאלה 6 (20%)

בעיה 8.27 בספר (עמוד 336).

הדרכה : הראו : $STRONGLY\text{-}CONNECTED \in \mathrm{NL}$ ו- $PATH \leq_L STRONGLY\text{-}CONNECTED$.

ממ"ן 14 (מטלת מנחה)

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 6-7

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2006ב **מועד אחרון להגשה:** 30 ביוני 06

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (16%)

א. בנו מכונת טיורינג המחשבת **באופן קפדני** את הפונקציה $f(x)=\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ מעל האלפבית $\{1\}$.
כתבו את הרביעיות של המכונה, והסבירו היטב את אופן פעולתה.

ב. בנו מכונת טיורינג שמחשבת **באופן קפדני** את הפונקציה הבאה מעל האלפבית $\{a, b\}$:

$$f(w)=\begin{cases} v & if \;\; w=vv^R \\ \uparrow & otherwise \end{cases}$$

כתבו את הרביעיות של המכונה, והסבירו היטב את אופן פעולתה.

שאלה 2 (12%)

הציעו דרך להתאים מספר טבעי לכל מכונת טיורינג (לאו דווקא דטרמיניסטית), באופן חד-חד ערכי.
כלומר, לכל מכונת טיורינג יותאם מספר טבעי, ולכל מספר טבעי תהיה מכונת טיורינג שמתאימה לו.
הדגימו את השיטה שהצעתם:

– חשבו את המספר המתאים למכונת טיורינג שמופיעה בעמוד 146 בספר.
– מצאו את מכונת טיורינג M שמספרה הוא 49.

הדרכה: *שימו לב שמכונת טיורינג היא* **קבוצה** *של רביעיות (ולא סדרה).*
היעזרו בתשובתכם לשאלה 7 בממ"ן 11.

שאלה 3 (10%)

בנו מכונת טיורינג עם חמישיות, המחשבת את הפונקציה שמחשבת המכונה המתוארת בתרגיל 1 בעמוד 151 בספר.

עליכם לבנות מכונה שיש לה **רק שלושה מצבים**, והיא מכילה **רק שלוש חמישיות**.

המכונה אינה צריכה לחשב את הפונקציה באופן קפדני.

תארו את המכונה שבניתם –

א. על-ידי כתיבת החמישיות.

ב. על-ידי טבלה (מקבילה ל- Table 1.1 בעמוד 147 בספר).

ג. על-ידי דיאגרמת מעברים (מקבילה ל- Figure 1.1 בעמוד 147 בספר).

שאלה 4 (20%)

א. הוכיחו, **בעזרת רדוקציה של בעיית העצירה של מכונות טיורינג**, שאין אלגוריתם המכריע לכל מכונת טיורינג M, האם קבוצת הקלטים ש-M **לא עוצרת** עליהם היא **סופית ולא ריקה**.

ב. הוכיחו, **בעזרת רדוקציה של בעיית העצירה של מכונות טיורינג**, שאין אלגוריתם המכריע לכל שתי מכונות טיורינג M_1 ו-M_2, האם השפה ש-M_1 מקבלת **מכילה ממש** את השפה ש-M_2 מקבלת. (כלומר, האם קבוצת המילים ש-M_1 עוצרת עליהן מכילה ממש את קבוצת המילים ש-M_2 עוצרת עליהן).

שאלה 5 (10%)

הסבירו כיצד אפשר לבנות מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית** שמקבלת את שפת המילים שאורכן **איננו ראשוני** מעל האלפבית $\{1\}$ (השפה $\{1^{[n]} \mid n$ איננו ראשוני$\}$).

שאלה 6 (12%)

תרגיל 7.1.3 בספר (עמוד 171).

שאלה 7 (20%)

יהיו נתונים שני דקדוקים, G_1 ו- G_2.

נסמן: $L_1 = L(G_1)$; $L_2 = L(G_2)$.

א. הסבירו כיצד אפשר לבנות דקדוק G כך ש- $L(G) = L_1 \cup L_2$.

ב. הסבירו כיצד אפשר לבנות דקדוק G כך ש- $L(G) = L_1L_2 = \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\}$.
(L_1L_2 היא שפת המלים המתקבלות משרשור של מילה מ- L_2 אחרי מילה מ- L_1).

הדרכה: זהירות! הדקדוקים אינם בהכרח חסרי הקשר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 7-6

מספר השאלות: 8 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2006א **מועד אחרון להגשה:** 27 בינו' 06

אנא שימו לב: מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (12%)

א. בנו מכונת טיורינג מעל האלפבית $\{a, b\}$, שתחשב **באופן קפדני** את הפונקציה $f(w)$, שלכל מילת קלט w, מחזירה את המילה המתקבלת מ-w על-ידי מחיקת כל ה-b-ים.

דוגמאות: $f(a) = a$; $f(baab) = aa$; $f(bbb) = 0$

ב. בנו מכונת טיורינג מעל האלפבית $\{1\}$, שתחשב **באופן קפדני** את הפונקציה $g(x, y) = x + y$.

בשני הסעיפים כתבו את הרביעיות של המכונה, **והסבירו היטב** את אופן פעולתה.

שאלה 2 (10%)

א. תרגיל 6.3.4 בספר (עמוד 157).

ב. תרגיל 6.3.5 בספר (עמוד 157).

שאלה 3 (18%)

א. הוכיחו **בעזרת רדוקציה של בעיית העצירה של מכונות טיורינג** שלא קיים אלגוריתם המכריע לכל מכונת טיורינג M, האם M **לא עוצרת** על מספר אינסופי של מילות קלט.

ב. הוכיחו **בעזרת רדוקציה של בעיית העצירה של מכונות טיורינג** שלא קיים אלגוריתם המכריע לכל שתי מכונות טיורינג M_1 ו-M_2 האם M_1 ו-M_2 מקבלות אותה השפה. (כלומר, האם קבוצת המילים ש-M_1 עוצרת עליהן שווה לקבוצת המילים ש-M_2 עוצרת עליהן).

שאלה 4 (28%)

נגדיר מודל חדש של מכונות טיורינג: **מכונות טיורינג מאמינות**.
מכונת טיורינג מאמינה **איננה עוצרת על אף קלט**. למכונה זו יש שני סרטים, סרט אחד כמו במכונה רגילה, וסרט שני המיועד לכתיבה בלבד. על הסרט השני המכונה יכולה לכתוב ולנוע ימינה בלבד. כלומר, אפשר לכתוב פעם אחת בלבד על כל ריבוע של סרט זה. מיד לאחר הכתיבה הראש הכותב זז ימינה.
בסרט הכתיבה ניתן לכתוב בכל ריבוע 'Y' (עבור 'Yes') או 'N' (עבור 'No'). האות שכתובה בכל רגע של החישוב בריבוע הימני ביותר של סרט הכתיבה מציינת מה המכונה "מאמינה" ברגע זה ביחס למילת הקלט w, האם היא "מאמינה" ש-w תתקבל, או שהיא "מאמינה" ש-w לא תתקבל. מכונה כזו יכולה "לשנות את דעתה" ביחס לקבלה של מילת קלט w.
נאמר שמילה w **מתקבלת** על-ידי מכונה כזו, אם יש נקודה כלשהי שממנה והלאה M מדפיסה רק 'Y'-ים על סרט הכתיבה. נאמר שמילה w **נדחית** על-ידי M, אם יש נקודה כלשהי שממנה והלאה M מדפיסה רק 'N'-ים על סרט הכתיבה. אם לא קורה אף אחד מן המקרים האלה (כלומר, M "משנה את דעתה" אינסוף פעמים), נאמר שהתנהגותה של M על w **איננה מוגדרת**.
נאמר ש-M **מכריעה** ביחס לשייכות לשפה נתונה L, אם M מקבלת כל w ב-L, ודוחה כל w שאיננה ב-L (ואין מילים שעליהם התנהגותה של M איננה מוגדרת).

א. הוכיחו שלכל **שפה נל"ר** L, יש מכונת טיורינג מאמינה **שמכריעה** ביחס לשייכות ל-L.

ב. תנו דוגמה לשפה L **שאיננה נל"ר** שיש מכונת טיורינג מאמינה **שמכריעה** ביחס לשייכות ל-L.

ג. הסבירו היטב מדוע מה שהראיתם בסעיפים הקודמים לא סותר את התזה של צ'רץ'.

ד. הוכיחו שגם במודל הזה **יש שפות שאינן ניתנות להכרעה**.
הדרכה: ליכסון.

שאלה 5 (8%)

בנו מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית** שמקבלת את השפה $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.
בבניית המכונה עליכם להיעזר באי-דטרמיניזם באופן שיקל את החישוב של המכונה.
כתבו את הרביעיות של המכונה, והסבירו היטב את אופן פעולתה.

שאלה 6 (8%)

בנו תהליך semi-Thue Π מעל $\{\#, \$, 1\}$ כך ש- $\#1^{[n]}\# \overset{*}{\underset{\Pi}{\Rightarrow}} \#1^{[m]}\#$ אם ורק אם $m = 2^k n$, $k \geq 0$
.

שאלה 7 (8%)

נתון דקדוק G.

הסבירו כיצד אפשר לבנות דקדוק G' כך ש- $L(G') = (L(G))^{\mathrm{R}}$.

($(L(G))^{\mathrm{R}}$ היא שפת כל המלים המתקבלות ממלים ב- $L(G)$ על-ידי היפוך סדר הסמלים במילה).

שאלה 8 (8%)

תרגיל 7.5.4 בספר (עמוד 191).

בסעיף (b) אין צורך לכתוב הוכחה פורמלית. די להסביר במלים פשוטות ובהירות מדוע הטענה נכונה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 6-7

מספר השאלות: 8   **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2005ב   **מועד אחרון להגשה:** 10 ביוני 05

אנא שימו לב: מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (14%)

א. בנו מכונת טיורינג מעל האלפבית $\{1\}$, שכשהיא מתחילה את פעולתה עם הקונפיגורציה $\underset{q_1}{\underset{\uparrow}{B}}1^{[x]}$, היא תסיים עם הקונפיגורציה $\underset{q_E}{\underset{\uparrow}{B}}1^{[x]}B1^{[x]}$.

המכונה לא תשתמש בסימני עזר.

המכונה לא תכיל יותר מ-10 מצבים.

כתבו את הרביעיות של המכונה, והסבירו היטב את אופן פעולתה.

ב. בנו מכונת טיורינג מעל האלפבית $\{a, b\}$, המחשבת **באופן קפדני** את הפונקציה $f(x) = x^R$.

(x^R היא המילה המתקבלת מ-x על-ידי היפוך סדר האותיות).

כתבו את הרביעיות של המכונה, והסבירו את אופן פעולתה.

שאלה 2 (8%)

תרגיל 6.3.2 בספר (עמוד 156).

כתבו את הרביעיות של המכונה, **והסבירו היטב** את אופן פעולתה.

שאלה 3 (16%) - כמו שעשינו בכיתה

א. הוכיחו **בעזרת רדוקציה של בעיית העצירה של מכונות טיורינג** שלא קיים אלגוריתם המכריע לכל מכונת טיורינג M, האם M עוצרת כאשר היא מתחילה לפעול על סרט ריק.

ב. הוכיחו **בעזרת רדוקציה של בעיית העצירה של מכונות טיורינג** שלא קיים אלגוריתם המכריע לכל מכונת טיורינג M, האם M עוצרת על פחות מ-100 מילות קלט.

שאלה 4 (24%)

נסתכל במודל הבא של **מכונת טיורינג עם סרט מוגבל לקלט**, ללא יכולת כתיבה, ועם שני ראשים קוראים: למכונה מסוג זה יש שני ראשים קוראים, שיכולים לנוע על פני הסרט לכל כיוון באופן בלתי תלוי זה בזה. הסרט של המכונה מכיל את מילת הקלט, וכן שני סמלים מיוחדים משמאל ומימין למילת הקלט. שני סמלים אלה מסמנים את תחילתה של המילה ואת סופה. הראשים הקוראים יכולים לנוע רק בקטע זה של הסרט.

א. הסבירו כיצד מכונה כזו יכולה לקבל את השפה $\{a^nb^nc^n \mid n \geq 0\}$.

ב. האם בעיית העצירה של מכונה כזו ניתנת להכרעה? (כלומר, האם יש אלגוריתם שלכל מכונה כזו M ולכל מילה w מעל האלפבית של M מכריע האם M עוצרת בסופו של דבר כשהקלט שלה הוא w?)
הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 5 (10%)

א. בנו מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית שכשהיא מתחילה לפעול על הסרט הריק, כאשר היא עוצרת יכולה להיות כתובה על הסרט כל מילה מהשפה $\{a^nb^{2n} \mid n \geq 0\}$, ומלים כאלה בלבד.

עליכם לבנות מכונה עם **ארבעה מצבים בלבד**.

כתבו את הרביעיות של המכונה, והסבירו את אופן פעולתה.

ב. מהי השפה (מעל $\{a, b\}$) שהמכונה שבניתם **מקבלת**?

שאלה 6 (10%)

תרגיל 7.1.4 בספר (עמוד 171).

שאלה 7 (8%)

מצאו פתרון או הוכיחו שאין פתרון לכל אחת מבעיות ההתאמה של פוסט הבאות:

א.

b	bba	aa	a	a
a	a	ab	ab	bb

ב.

a	ab	aba	ab
abb	ba	ba	b

שאלה 8 (10%)

א. הוכיחו שאין אלגוריתם המכריע לכל דקדוק G, האם **לכל** $w \in L(G)$ גם $w^R \in L(G)$.

ב. הוכיחו שאין אלגוריתם המכריע לכל דקדוק G, האם **יש** $w \in L(G)$ כך שגם $w^R \in L(G)$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 7-6

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2005א **מועד אחרון להגשה:** 31 בדצמ' 04

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (15%)

א. בנו מכונת טיורינג המקבלת כקלט מספר בבסיס 1, ומחזירה את הייצוג של המספר בבסיס 2.

ב. בנו מכונת טיורינג המקבלת כקלט מספר בבסיס 2, ומחזירה את הייצוג של המספר בבסיס 1.

הייצוג של המספרים על-פי הבסיסים השונים הוא כמתואר בספר בסעיף 5.1.
האלפבית של שתי המכונות הוא $\{1, 2\}$.
כתבו את הרביעיות של המכונות, והוסיפו לכל מכונה הסבר על אופן פעולתה.

שאלה 2 (12%)

נגדיר מודל חדש של מכונת טיורינג עם חמישיות:
מודל זה זהה למודל המופיע בספר (בעמוד 149), פרט לכך ששני סוגי החמישיות המותרים הם:
$q_i\ s_j\ s_k\ R\ q_l$ ו- $q_i\ s_j\ s_k$ STAY q_l.
משמעות החמישייה הראשונה זהה למשמעותה של החמישייה הזו בספר. משמעות החמישייה השנייה היא: כאשר המכונה נמצאת במצב q_i והראש הקורא סורק את הסמל s_j, המכונה מדפיסה את הסמל s_k (במקום הסמל s_j), הראש הקורא נשאר במקומו, ונכנסים למצב q_l.
האם המודל הזה שווה כוח למודל הרגיל של מכונות טיורינג?
הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 3 (15%)

א. הוכיחו **בעזרת רדוקציה של בעיית העצירה של מכונות טיורינג** שלא קיים אלגוריתם המכריע לכל מכונת טיורינג M, האם M לא עוצרת על **אף** קלט בעל אורך **ראשוני**, או שיש לפחות קלט אחד כזה שעליו M עוצרת.

ב. הוכיחו **בעזרת רדוקציה של בעיית העצירה של מכונות טיורינג** שלא קיים אלגוריתם המכריע לכל מכונת טיורינג M, האם M עוצרת על **כל** קלט בעל אורך אי-זוגי ואיננה עוצרת **על אף** קלט בעל אורך זוגי. (כלומר, האם השפה ש-M מקבלת היא בדיוק שפת המילים שאורכן אי-זוגי).

שאלה 4 (20%)

נגדיר פעולה Pref על שפות: אם L היא שפה מעל אלפבית נתון A, אז $\text{Pref}(L)$ היא שפת כל התחיליות (רישות) של מילים ב-L.

דוגמה: אם $L = \{abb, aab\}$, אז $\text{Pref}(L) = \{0, a, ab, aa, abb, aab\}$.

נאמר שמחלקת שפות נתונה C סגורה לפעולה Pref, אם **לכל שפה** L ששייכת למחלקת השפות C, גם $\text{Pref}(L)$ שייכת למחלקה C.

א. הוכיחו שמחלקת השפות הנל"ר **סגורה** לפעולה Pref.
(רמז: היעזרו במכונת טיורינג לא דטרמיניסטית).

ב. הוכיחו שמחלקת השפות הרקורסיביות **איננה סגורה** לפעולה Pref.
(רמז: לכל מכונת טיורינג M, אפשר לבנות מכונת טיורינג M' שבהינתן לה קלט x, היא תריץ את M x צעדים על 0).

שאלה 5 (8%)

א. הסבירו כיצד אפשר לחקות את פעולתה של מכונת טיורינג **עם חמישיות** על-ידי תהליך semi-Thue.

ב. הדגימו את השיטה שהצעתם על מכונת טיורינג עם חמישיות הבאה:
(האלפבית של המכונה הוא $\{1\}$).

$$q_1BBRq_2$$
$$q_2B1Lq_2$$
$$q_21BRq_3$$
$$q_3BBRq_3$$
$$q_3BBLq_4$$
$$q_31BRq_3$$

והראו כיצד אפשר לקבוע, באמצעות התהליך שבניתם, שהמכונה מקבלת את המלה 111.

ג. מהי השפה שמכונה זו **מקבלת**? הוכיחו!

שאלה 6 (10%)

הוכיחו שיש תהליך semi-Thue **עם בעיית מילה בלתי פתירה** שבו בכל כלל שכתוב אורך המילה בצד שמאל של כלל השכתוב ואורך המילה בצד ימין של הכלל אינם גדולים מ-2.

שאלה 7 (20%)

הוכיחו שלא קיים אלגוריתם שמכריע לכל שני דקדוקים **חסרי הקשר** G_1 ו-G_2, האם יש מילה משותפת לשפות שהם יוצרים או לא. (כלומר, האם $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \varnothing$).

רמז: רדוקציה של בעיית ההתאמה של פוסט.

תזכורת: דקדוק הוא חסר הקשר, אם בכל כלל שכתוב של הדקדוק צד שמאל של הכלל הוא **לא-טרמינלי יחיד**.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 6-7

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2004ב **מועד אחרון להגשה:** 28 במאי 04

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (16%)

א. בנו מכונת טיורינג מעל האלפבית $\{1\}$, שתחשב **באופן קפדני** את הפונקציה $f(x) = \log_2 x$. כתבו את הרביעיות של המכונה, **והסבירו היטב** את אופן פעולתה.

ב. הסבירו אלו שינויים נדרשים במכונה שבניתם בסעיף א' כדי להפוך אותה למכונה שמחשבת את הפונקציה $g(x) = \lfloor \log_2 x \rfloor$. (אינכם צריכים לכתוב את המכונה החדשה, אלא רק לפרט את השינויים הנדרשים במכונה שבניתם בסעיף א').

שאלה 2 (16%)

נגדיר מודל חדש של מכונת טיורינג עם חמישיות:

מודל זה זהה למודל המופיע בספר (בעמוד 149), פרט לכך ששני סוגי החמישיות המותרים בשימוש הם: $q_i\, s_j\, s_k\, R\, q_l$ ו- $q_i\, s_j\, s_k\, RESET\, q_l$.

משמעות החמישייה הראשונה זהה למשמעותה של החמישייה הזו בספר.

משמעות החמישייה השנייה היא: כאשר המכונה נמצאת במצב q_i והראש הקורא סורק את הסמל s_j, המכונה מדפיסה את הסמל s_k (במקום הסמל s_j), **ולאחר מכן** הראש הקורא עובר לריבוע ההתחלתי, ונכנסים למצב q_l. (הריבוע ההתחלתי הוא הריבוע שאותו סורק הראש הקורא בתחילת הריצה - הריבוע שמשמאל למילת הקלט).

האם המודל הזה שווה כוח למודל הרגיל של מכונות טיורינג?

הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 3 (16%)

א. הוכיחו **בעזרת רדוקציה של בעיית העצירה של מכונות טיורינג** שלא קיים אלגוריתם המכריע לכל מכונת טיורינג M, האם M עוצרת על כל קלט או שיש קלט שעליו M לא עוצרת.

ב. הוכיחו **בעזרת רדוקציה של בעיית העצירה של מכונות טיורינג** שלא קיים אלגוריתם המכריע לכל מכונת טיורינג M, האם M לא עוצרת על אף קלט, או שיש קלט שעליו M עוצרת.

שאלה 4 (12%)

א. בנו מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית** שכשהיא מתחילה לפעול על סרט ריק, כאשר היא עוצרת יכולה להיות כתובה על הסרט כל מילה מהשפה $\{a^nb^n \mid n \geq 0\}$, ומילים כאלה בלבד.
(כלומר, כשהמכונה מתחילה עם סרט ריק, היא יכולה לעצור כאשר על הסרט כתובה המילה הריקה או המילה ab או המילה $aabb$ או המילה $aaabbb$ וכו').

עליכם לבנות מכונה עם **לא יותר משלושה מצבים**.

כתבו את הרביעיות של המכונה, והסבירו את אופן פעולתה.

ב. מהי השפה (מעל $\{a, b\}$) שהמכונה שבניתם **מקבלת**?

שאלה 5 (12%)

תרגיל 7.1.3 בספר (עמוד 171).

שאלה 6 (8%)

מצאו פתרון או הוכיחו שאין פתרון לכל אחת מבעיות ההתאמה של פוסט הבאות:

א.

ab	aba	aa	b
$abab$	b	a	a

ב.

ab	ba	b	ba
a	bab	aa	ab

שאלה 7 (20%)

יהיו נתונים שני דקדוקים, G_1 ו- G_2.

נסמן: $L_1 = L(G_1)$; $L_2 = L(G_2)$.

א. הסבירו כיצד אפשר לבנות דקדוק G כך ש- $L(G) = L_1 \cup L_2$.

ב. הסבירו כיצד אפשר לבנות דקדוק G כך ש- $L(G) = L_1L_2 = \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\}$.
(L_1L_2 היא שפת המלים המתקבלות משרשור של מילה מ- L_2 אחרי מילה מ- L_1).

הדרכה: זהירות! הדקדוקים אינם בהכרח חסרי הקשר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 7-6

מספר השאלות: 8 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2004א **מועד אחרון להגשה:** 26 בדצמ' 03

אנא שימו לב: מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (14%)

א. בנו מכונת טיורינג המחשבת **באופן קפדני** את הפונקציה $f(x) = 3x$ מעל האלפבית $\{1\}$.
כתבו את הרביעיות של המכונה, והסבירו היטב את אופן פעולתה.

ב. בנו מכונת טיורינג שמחשבת **באופן קפדני** את הפונקציה $g(w) = ww^R$ מעל האלפבית $\{a, b\}$.
כתבו את הרביעיות של המכונה, והסבירו היטב את אופן פעולתה.

שאלה 2 (14%)

א. בנו מכונת טיורינג עם חמישיות המקבלת את השפה $L_1 = \{a^nb^{2n}c^{4n} \mid n \geq 0\}$.

ב. בנו מכונת טיורינג רגילה (עם רביעיות) המקבלת את השפה $L_2 = \{a^nba^m \mid n \mid m\}$ (קרי: n מחלק את m).

כתבו את החמישיות (הרביעיות) של המכונות, והוסיפו לכל מכונה הסבר על אופן פעולתה.

שאלה 3 (16%)

א. הוכיחו שהפונקציה $\text{SWAP}_n(w, i, j)$, המחשבת לכל מספר w המיוצג בבסיס n, את המספר המתקבל ממנו על-ידי החלפת כל s_i ב- s_j, ולהפך, היא **פרימיטיבית רקורסיבית**.
(אם i או j אינם בין 1 ל-n, יוחזר 0).

ב. הוכיחו שאם קבוצה L של מחרוזות מעל אלפבית בן n סמלים היא **פרימיטיבית רקורסיבית**, אז **לכל סידור של סמלים** באלפבית, הקבוצה L היא **פרימיטיבית רקורסיבית**.

ג. בסימונים של משפט 6.3.3, הוכיחו ש-L מעל האלפבית A היא פרימיטיבית רקורסיבית אם ורק אם L היא פרימיטיבית רקורסיבית מעל האלפבית $\tilde{A}$.

אתם יכולים להשתמש בתוצאות של תרגיל 5.1.7 בספר (בעמוד 121).

שאלה 4 (18%)

א. הוכיחו **בעזרת רדוקציה של בעיית עצירה של מכונות טיורינג** שלא קיים אלגוריתם המכריע לכל מכונת טיורינג M, האם M עוצרת כאשר היא מתחילה לפעול על סרט ריק.

ב. הוכיחו **בעזרת רדוקציה של בעיית עצירה של מכונות טיורינג** שלא קיים אלגוריתם המכריע לכל מכונת טיורינג M, האם M עוצרת על כל קלט בעל אורך ראשוני, ורק על קלטים כאלה.

שאלה 5 (10%)

הסבירו כיצד אפשר לבנות מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית** שמקבלת את שפת המילים שאורכן **איננו ראשוני** מעל האלפבית $\{1\}$ (השפה $\{1^{[n]} \mid n$ איננו ראשוני$\}$).

שאלה 6 (10%)

בנו תהליך semi-Thue Π מעל $\{\#, \$, 1\}$ כך ש- $\#1^{[m]}\# \overset{*}{\underset{\Pi}{\Rightarrow}} \#1^{[n]}\#$ אם ורק אם $m' = 2^k m$, $k \geq 0$.

שאלה 7 (8%)

נתון דקדוק G.

הסבירו כיצד אפשר לבנות דקדוק G' כך ש- $L(G') = (L(G))^R$.

($(L(G))^R$ היא שפת כל המילים המתקבלות ממלים ב- $L(G)$ על-ידי היפוך סדר הסמלים (reverse)).

שאלה 8 (10%)

תרגיל 7.5.4 בספר (עמוד 191).

בסעיף (b) אין צורך לכתוב הוכחה פורמלית. די להסביר במלים פשוטות ובהירות מדוע הטענה נכונה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: סעיפים 9.1, 10.1 ו-10.2 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: ב2010 **מועד אחרון להגשה:** 18 יוני 10

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20%)

א. יהי k מספר טבעי. מה יקרה כאשר נריץ את המכונה D מהוכחת משפט 9.3 על הקלט $<D>10^k$?
(כלומר, מריצים את המכונה D על התיאור שלה שאחריו רשומה המחרוזת 10^k).
הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. מה יקרה כאשר נריץ את המכונה D מהוכחת משפט 9.10 על הקלט $<D>10^k$?
הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 2 (8%)

האם **ממה שנלמד בסעיף 9.1** בספר אפשר להסיק **שכל** שפה PSPACE-שלמה איננה שייכת ל-NL?
הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 3 (14%)

הוכיחו: $\mathrm{NP} \neq \mathrm{SPACE}(n)$.

שאלה 4 (10%)

עיינו באלגוריתם A בעמוד 372 בספר הלימוד.

כזכור, הוכח שאלגוריתם זה הוא בעל יחס קירוב ≤ 2.

הוכיחו שיחס הקירוב 2 הוא **הדוק** ביחס לאלגוריתם A (כלומר, יחס הקירוב ≤ 2):

הראו שלכל n טבעי גדול מ-0, יש גרף לא מכוון $G = (V, E)$ כך שמתקיים:

- $|V| = 2n$ (בגרף G יש $2n$ קדקודים);
- יש תת-קבוצה U של V ($U \subseteq V$) המהווה כיסוי קדקודים מינימלי ו- $|U| = n$ (יש בגרף כיסוי קדקודים מינימלי שגודלו n);
- האלגוריתם A ימצא כיסוי שגודלו $2n$.

שאלה 5 (20%)

לימדו את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה (עמודים 150-156).

א. הוכיחו שעלות המסלול של הסוכן הנוסע שמוצא אלגוריתם הקירוב המוצע בעמודים 155-156 **קטנה** מפעמיים עלות המסלול האופטימלי.

הדרכה: אם מורידים קשת אחת ממעגל המילטוני, מקבלים עץ פורש של הגרף.

ב. כזכור, הוכח שאלגוריתם זה הוא בעל יחס קירוב ≤ 2.

הוכיחו שיחס הקירוב 2 הוא **הדוק** ביחס לאלגוריתם (כלומר, אי אפשר להצביע על חסם קטן יותר).

הדרכה: לכל n אי-זוגי גדול מ-5, התבוננו בגרף מלא בעל n צמתים, $x_1, x_2, ..., x_n$, שהמחירים של הקשתות שלו הם כדלקמן: המחיר של כל קשת שנוגעת ב-x_1 הוא 1; המחיר של כל הקשתות מהצורה (x_i, x_{i+1}) הוא 1; המחיר של כל שאר הקשתות הוא 2.

הוכיחו שבגרף זה מתקיים אי-שוויון המשולש.

הוכיחו שהקירוב שהאלגוריתם משיג על גרף כזה הוא $2 - 2/n$.

הסיקו את התוצאה הנדרשת.

שאלה 6 (8%)

יהי p מספר ראשוני.

א. הוכיחו **בעזרת אינדוקציה**, שלכל a טבעי או 0, $a^p \equiv a \pmod p$.

ב. הסיקו את משפט פרמה הקטן (משפט 10.6) ממה שהוכחתם בסעיף א.

שאלה 7 (20%)

א. הוכיחו: אם $P = NP$, אז יש אלגוריתם **בעל זמן ריצה פולינומיאלי** לבעיה הבאה:

הקלט: נוסחה בוליאנית ϕ.

הפלט: השמה מספקת של ϕ אם ϕ ספיקה. אם ϕ לא ספיקה, יוחזר "לא".

(האלגוריתם מקבל כקלט נוסחה בוליאנית ϕ. אם אין ל-ϕ השמה מספקת, מוחזר "לא". אם יש ל-ϕ השמה מספקת, מוחזרת אחת ההשמות המספקות של ϕ. כלומר, מוחזרת הצבה של 0-ים ו-1-ם למשתנים של ϕ כך שהערך של ϕ בהצבה הזו הוא 1).

הדרכה: אם $P = NP$, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי ל-SAT.

אפשר לקרוא לאלגוריתם הזה כמה פעמים כדי למצוא הצבה למשתנים של ϕ שתספק את ϕ.

ב. בעיה 10.19 בספר (עמוד 418).

הדרכה: התאימו את מה שהראיתם בסעיף א.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: סעיפים 9.1, 10.1 ו-10.2 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: א2010 **מועד אחרון להגשה:** 29 ינו' 10

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (12%)

הוכיחו שהפונקציה $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ניתנת לבנייה במגבלת מקום עצמית (self constructible).

שאלה 2 (12%)

עיינו במכונה D שבהוכחת משפט 9.3 (עמוד 342).

א. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate M on w ..." במשפט "Simulate M on $<M>$ ..."
(כלומר, במקום לבצע סימולציה של M על $w = <M>10^k$, נבצע סימולציה של M על $<M>$).
האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate M on w ..." במשפט "Simulate M on 10^k ..."
(כלומר, במקום לבצע סימולציה של M על $w = <M>10^k$, נבצע סימולציה של M על 10^k).
האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 3 (12%)

הסבירו כיצד אפשר לבנות מכונה עם שני סרטים, שכאשר היא מקבלת כקלט על הסרט הראשון את המילה 1^n, היא מסיימת כאשר על הסרט השני כתוב הייצוג הבינרי של n.

הסרט הראשון הוא סרט לקריאה בלבד. הסרט השני הוא סרט לקריאה וכתיבה והוא סרט הפלט.
עליכם לבנות מכונה שזמן ריצתה יהיה $O(n)$.

עליכם להסביר היטב את אופן פעולת המכונה, ולהסביר מדוע זמן הריצה שלה הוא $O(n)$.

שאלה 4 (24%)

לימדו את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה (עמודים 150-156).

א. נסחו בעיית **הכרעה** של בעיית הסוכן הנוסע (כלומר, בעיה שהתשובה עליה היא "כן" או "לא").

ב. הוכיחו: בעיית ההכרעה של בעיית הסוכן הנוסע **המטרית** היא בעיה NP-שלמה.

הדרכה: הוכיחו שהיא שייכת ל-NP, והראו רדוקציה פולינומיאלית של בעיית *UHAMCIRCUIT* משאלה 9 של ממ"ן 13.

ג. הוכיחו: לכל בעיית סוכן נוסע לא מטרית, אפשר לבנות בזמן פולינומיאלי בעיית סוכן נוסע מטרית עם אותם צמתים, כך ש-P הוא מסלול אופטימלי בבעיה המקורית (הלא מטרית), אם ורק אם P הוא מסלול אופטימלי בבעיה החדשה (המטרית).

הדרכה: הגדילו את משקלי הקשתות באופן שיתקיימו תנאי הבעיה המטרית.

ד. הסבירו מדוע אין סתירה בין קיומו של אלגוריתם קירוב בעל יחס קירוב 2 (ואפילו 1.5) ובעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית הסוכן הנוסע המטרית, ובין אי-קיומו של אלגוריתם כזה לבעיה הכללית (הלא מטרית), לאור מה שהראיתם בסעיף הקודם (שיש דרך מהירה לעבור מהבעיה הכללית לבעיה המטרית, באופן שמשמר את המסלולים האופטימליים).

שאלה 5 (18%)

הוכיחו: אם יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **ההכרעה** *MAX-CUT*, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **האופטימיזציה** *MAX-CUT*.

האלגוריתם לבעיית ההכרעה מקבל כקלט גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

האלגוריתם מחזיר "כן" אם יש ב-G חתך שגודלו לפחות k, ו-"לא" אחרת.

האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה מקבל כקלט גרף לא מכוון G.

האלגוריתם מחזיר חתך בעל גודל מקסימלי ב-G, כלומר, חלוקה של קבוצת הצמתים של G לשתי תת-קבוצות זרות S ו-T, כך שמספר הקשתות המחברות צומת מ-S עם צומת מ-T הוא מקסימלי.

הדרכה: האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה יהיה בנוי משני שלבים. בשלב הראשון קוראים לאלגוריתם ההכרעה כמה פעמים כדי למצוא את גודלו של החתך המקסימלי. בשלב השני, מבצעים בכל פעם שינויים (קלים) בגרף, וקוראים לאלגוריתם ההכרעה על הגרפים החדשים. לפי התשובות שהוא מחזיר, יודעים איזה צמתים שייכים לאותה תת-קבוצה (S או T), ואיזה צמתים לא שייכים לאותה תת-קבוצה (כלומר, אם האחד שייך ל-S אז השני שייך ל-T).

שאלה 6 (10%)

עיינו באלגוריתם *PRIME* בעמוד 379 בספר.

הוכיחו: אם t הוא מספר טבעי קטן מ-p שאיננו זר ל-p (המחלק המשותף המקסימלי של t ו-p גדול מ-1), אז t הוא עד לפריקות של p. (כלומר, אם הוא ייבחר כאחד מ-k המספרים בשלב 2 של האלגוריתם, האלגוריתם ידחה).

שאלה 7 (12%)

בעיה 10.20 בספר (עמוד 418).

כדי להוכיח את שוויון המחלקות, הראו הכלה כפולה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: סעיפים 9.1, 10.1 ו-10.2 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: ב2009 **מועד אחרון להגשה:** 26 ביוני 09

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20%)

א. יהי k מספר טבעי. מה יקרה כאשר נריץ את המכונה D מהוכחת משפט 9.3 על הקלט $\langle D \rangle 10^k$?
(כלומר, מריצים את המכונה D על התיאור שלה שאחריו רשומה המחרוזת 10^k).
הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. מה יקרה כאשר נריץ את המכונה D מהוכחת משפט 9.10 על הקלט $\langle D \rangle 10^k$?
הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 2 (8%)

האם **ממה שנלמד בסעיף 9.1** בספר אפשר להסיק **שכל** שפה PSPACE-שלמה איננה שייכת ל-NL?
הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 3 (14%)

הוכיחו: $NP \neq SPACE(n)$.

שאלה 4 (10%)

עיינו באלגוריתם A בעמוד 372 בספר הלימוד.

כזכור, הוכח שאלגוריתם זה הוא בעל יחס קירוב ≤ 2.

הוכיחו שיחס הקירוב 2 הוא **הדוק** ביחס לאלגוריתם A (כלומר, יחס הקירוב ≤ 2):

הראו שלכל n טבעי גדול מ-0, יש גרף לא מכוון $G = (V, E)$ כך שמתקיים:

- $|V| = 2n$ (בגרף G יש $2n$ קדקודים);
- יש תת-קבוצה U של V ($U \subseteq V$) המהווה כיסוי קדקודים מינימלי ו- $|U| = n$ (יש בגרף כיסוי קדקודים מינימלי שגודלו n);
- האלגוריתם A ימצא כיסוי שגודלו $2n$.

שאלה 5 (20%)

לימדו את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה (עמודים 150-156).

א. הוכיחו שעלות המסלול של הסוכן הנוסע שמוצא אלגוריתם הקירוב המוצע בעמודים 155-156 **קטנה** מפעמיים עלות המסלול האופטימלי.
הדרכה: אם מורידים קשת אחת ממעגל המילטוני, מקבלים עץ פורש של הגרף.

ב. כזכור, הוכח שאלגוריתם זה הוא בעל יחס קירוב ≤ 2.
הוכיחו שיחס הקירוב 2 הוא **הדוק** ביחס לאלגוריתם (כלומר, אי אפשר להצביע על חסם קטן יותר).
הדרכה: לכל n אי-זוגי גדול מ-5, התבוננו בגרף מלא בעל n צמתים, $x_1, x_2, ..., x_n$, שהמחירים של הקשתות שלו הם כדלקמן: המחיר של כל קשת שנוגעת ב-x_1 הוא 1; המחיר של כל הקשתות מהצורה (x_i, x_{i+1}) הוא 1; המחיר של כל שאר הקשתות הוא 2.
הוכיחו שבגרף זה מתקיים אי-שוויון המשולש.
הוכיחו שהקירוב שהאלגוריתם משיג על גרף כזה הוא $2 - 2/n$.
הסיקו את התוצאה הנדרשת.

שאלה 6 (8%)

יהי p מספר ראשוני.

א. הוכיחו **בעזרת אינדוקציה**, שלכל a טבעי או 0, $a^p \equiv a \pmod p$.

ב. הסיקו את משפט פרמה הקטן (משפט 10.6) ממה שהוכחתם בסעיף א.

שאלה 7 (20%)

א. הוכיחו: אם $P = NP$, אז יש אלגוריתם **בעל זמן ריצה פולינומיאלי** לבעיה הבאה:

הקלט: נוסחה בוליאנית ϕ.

הפלט: השמה מספקת של ϕ אם ϕ ספיקה. אם ϕ לא ספיקה, יוחזר "לא".

(האלגוריתם מקבל כקלט נוסחה בוליאנית ϕ. אם אין ל-ϕ השמה מספקת, מוחזר "לא". אם יש ל-ϕ השמה מספקת, מוחזרת אחת ההשמות המספקות של ϕ. כלומר, מוחזרת הצבה של 0-ים ו-1-ים למשתנים של ϕ כך שהערך של ϕ בהצבה הזו הוא 1).

הדרכה: אם $P = NP$, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי ל-SAT.

אפשר לקרוא לאלגוריתם הזה כמה פעמים כדי למצוא הצבה למשתנים של ϕ שתספק את ϕ.

ב. בעיה 10.19 בספר (עמוד 418).

הדרכה: התאימו את מה שהראיתם בסעיף א.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 6 ו-7

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: ב2007 **מועד אחרון להגשה:** 29 ביוני 07

(בי)

אנא שימו לב: מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.   העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (12%)

הוכיחו שהפונקציה $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ניתנת לבנייה במגבלת מקום עצמית (self constructible).

שאלה 2 (12%)

עיינו במכונה D שבהוכחת משפט 9.3 (עמוד 342).

א. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate M on w ..." במשפט "Simulate M on $<M>$ ..."
(כלומר, במקום לבצע סימולציה של M על $w = <M>10^k$, נבצע סימולציה של M על $<M>$).
האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate M on w ..." במשפט "Simulate M on 10^k ..."
(כלומר, במקום לבצע סימולציה של M על $w = <M>10^k$, נבצע סימולציה של M על 10^k).
האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 3 (12%)

הסבירו כיצד אפשר לבנות מכונה עם שני סרטים, שכאשר היא מקבלת כקלט על הסרט הראשון את המילה 1^n, היא מסיימת כאשר על הסרט השני כתוב הייצוג הבינרי של n.
הסרט הראשון הוא סרט לקריאה בלבד. הסרט השני הוא סרט לקריאה וכתיבה והוא סרט הפלט.
עליכם לבנות מכונה שזמן ריצתה יהיה $O(n)$.
עליכם להסביר היטב את אופן פעולת המכונה, ולהסביר מדוע זמן הריצה שלה הוא $O(n)$.

שאלה 4 (24%)

למדו את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה (עמודים 150-156).

א. נסחו בעיית **הכרעה** של בעיית הסוכן הנוסע (כלומר, בעיה שהתשובה עליה היא "כן" או "לא").

ב. הוכיחו: בעיית ההכרעה של בעיית הסוכן הנוסע **המטרית** היא בעיה NP-שלמה.

הדרכה: הוכיחו שהיא שייכת ל-NP, והראו רדוקציה פולינומיאלית של בעיית *UHAMCIRCUIT* משאלה 11 של ממ"ן 13.

ג. הוכיחו: לכל בעיית סוכן נוסע לא מטרית, אפשר לבנות בזמן פולינומיאלי בעיית סוכן נוסע מטרית, כך ש-P הוא מסלול אופטימלי בבעיה המקורית (הלא מטרית), אם ורק אם P הוא מסלול אופטימלי בבעיה החדשה (המטרית).

הדרכה: הגדילו את משקלי הקשתות באופן שיתקיימו תנאי הבעיה המטרית.

ד. הסבירו מדוע אין סתירה בין קיומו של אלגוריתם קירוב בעל יחס קירוב 2 (ואפילו 1.5) לבעיית הסוכן הנוסע המטרית ובין אי-קיומו של אלגוריתם כזה לבעיה הכללית (הלא מטרית), לאור מה שהראיתם בסעיף הקודם (שיש דרך קלה לעבור מהבעיה הכללית לבעיה המטרית, באופן שמשמר את המסלולים האופטימליים).

שאלה 5 (20%)

הוכיחו: אם יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **ההכרעה** *MAX-CUT*, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **האופטימיזציה** *MAX-CUT*.

האלגוריתם לבעיית ההכרעה מקבל כקלט גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

האלגוריתם מחזיר "כן" אם יש ב-G חתך שגודלו לפחות k, ו-"לא" אחרת.

האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה מקבל כקלט גרף לא מכוון G.

האלגוריתם מחזיר חתך בעל גודל מקסימלי ב-G, כלומר, חלוקה של קבוצת הצמתים של G לשתי תת-קבוצות זרות S ו-T, כך שמספר הקשתות המחברות צומת מ-S עם צומת מ-T הוא מקסימלי.

הדרכה: האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה יהיה בנוי משני שלבים. בשלב הראשון קוראים לאלגוריתם ההכרעה כמה פעמים כדי למצוא את גודלו של החתך המקסימלי. בשלב השני, מבצעים בכל פעם שינויים (קלים) בגרף, וקוראים לאלגוריתם ההכרעה על הגרפים החדשים. לפי התשובות שהוא מחזיר, יודעים איזה צמתים שייכים לאותה תת-קבוצה (S או T), ואיזה צמתים לא שייכים לאותה תת-קבוצה (כלומר, אם האחד שייך ל-S אז השני שייך ל-T).

שאלה 6 (10%)

עיינו באלגוריתם *PRIME* בעמוד 379 בספר.

הוכיחו: אם t הוא מספר טבעי קטן מ-p שאיננו זר ל-p (המחלק המשותף המקסימלי של t ו-p גדול מ-1), אז t הוא עד לפריקות של p. (כלומר, אם הוא ייבחר כאחד מ-k המספרים בשלב 2 של האלגוריתם, האלגוריתם ידחה).

שאלה 7 (10%)

בעיה 10.20 בספר (עמוד 418).

כדי להוכיח את שוויון המחלקות, הראו הכלה כפולה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 15

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2006ב **מועד אחרון להגשה:** 14 ביולי 06

אנא שימו לב: מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (6%)

תרגיל 15.1.6 בספר (עמוד 443).

שאלה 2 (14%)

א. הוכיחו שהפונקציה $f(x) = \lfloor \log_2 x \rfloor$ היא פונקציה ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.
הניחו שהמספרים מיוצגים בבסיס הבינרי הרגיל (ולא כמתואר בספר בפרק 5 סעיף 1).
שימו לב שבייצוג כזה ייתכנו אפסים מובילים בתחילת המספר.

ב. הוכיחו שהפונקציה $g(x) = 2^x$ **איננה ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי**.
גם כאן הניחו שהמספרים מיוצגים בבסיס הבינרי ברגיל.

ג. האם התשובות לשני הסעיפים הקודמים ישתנו אם המספרים מיוצגים בבסיס אונרי (כלומר, x מיוצג על-ידי $1^{[x]}$)? נמקו את תשובתכם.

שאלה 3 (14%)

א. בעמוד 444 בספר הלימוד מופיעה ההגדרה של שייכות שפה L למחלקה **P**.
הציעו הגדרה מקבילה למקרה ש-L היא שפה של m-יות של מילים מעל האלפבית A. (כלומר למקרה ש-L איננה חלקית ל-A^* אלא ל- $(A^*)^m$).

ב. בהנחה ש- **P≠NP**, האם השפה L_1 שלהלן שייכת למחלקה **P**? הוכיחו את תשובתכם.
L_1 היא שפת הזוגות (φ, λ) שבהם φ הוא פסוק בתחשיב הפסוקים בצורה קוניונקטיבית נורמלית (צורת CNF), ו-λ היא השמה של F ו-T למשתנים של φ שמספקת את φ.

ג. בהנחה ש- **P≠NP**, האם השפה L_2 שלהלן שייכת למחלקה **P**? הוכיחו את תשובתכם.
L_2 היא שפת הזוגות (G, k) שבהם G הוא גרף לא מכוון, k הוא מספר טבעי, ויש ב-G כיסוי קדקודים **מדויק** בגודל k.
(כיסוי קדקודים הוא מדויק אם לכל צלע (u,v) בגרף, רק אחד מן הקדקודים u ו-v שייך לכיסוי. (כל צלע בגרף "מכוסה" על-ידי קדקוד אחד ויחיד)).

שאלה 4 (18%)

פונקציה $f : A^* \rightarrow A^*$ מעל אלפבית נתון A תיקרא **חד-כיוונית**, אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. f שלמה וניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.
2. **לא קיימת** מכונת טיורינג דטרמיניסטית שלכל מילה w בטווח של f מחשבת בזמן פולינומיאלי מילה v כך ש- $f(v) = w$.
3. לכל מילה w מעל האלפבית A, $|f(w)| = |w|$ (אורך המילה $f(w)$ שווה לזה של w).

א. הוכיחו שאם קיימת פונקציה חד-כיוונית, אז **P≠NP**.

ב. הוכיחו שאם **P≠NP**, אז קיימת פונקציה חד-כיוונית.
רמז: היעזרו בסעיף ב' של שאלה 3.

שאלה 5 (8%)

תהי L שפה מעל אלפבית נתון A.
הוכיחו שאם $L \in$ **P**, $L \neq \varnothing$, $L \neq A^*$, אז **לכל** שפה Q מעל האלפבית A כך ש- $Q \neq \varnothing$, $Q \neq A^*$, מתקיים $Q \leq_p L$.

שאלה 6 (30%)

נגדיר את המשחק הבא (משחק לשחקן יחיד):

נתון אלפבית סופי A, מספר טבעי k ואוסף של k-יות.

כל k-יה היא k-יה של קבוצות של אותיות מן האלפבית.

כלומר, k-יה היא **סדרה** באורך k - $(S_1, S_2, ..., S_k)$, כאשר כל S_i היא **קבוצה** של אותיות מן האלפבית A. (S_i יכולה להיות גם קבוצה ריקה של אותיות).

תפקיד המשחק הוא למצוא מילה w באורך k מעל האלפבית A, $w = w_1w_2 ... w_k$ (כל w_i היא אות באלפבית A), כך שלכל k-יה יש איזשהו i בין 1 ל-k כך שהקבוצה ה-i ב-k-יה מכילה את האות ה-i של w.

דוגמה: נניח שהאלפבית הוא $A = \{a, b, c\}$, $k = 4$, ונתונות שלוש רביעיות: $(\{a, b\}, \{a\}, \varnothing, \{a\})$, $(\{a, c\}, \{b\}, \varnothing, \varnothing)$ ו- $(\varnothing, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b\})$.

אפשר לראות שהמילה '*cbaa*' מספקת את כל האילוצים. (ברביעייה הראשונה נבחר $i = 4$, בשנייה נבחר $i = 1$ או $i = 2$, ובשלישית נבחר $i = 3$).

א. נסחו את המשחק הזה כבעיית הכרעה.

ב. הוכיחו שהבעיה הזו היא **NP**-שלמה. (הראו רדוקציה של SAT).

ג. הראו שאם יש אלגוריתם פולינומיאלי לבעיית ההכרעה, אז אפשר להשתמש בו כדי לבנות אלגוריתם פולינומיאלי **שמוצא מילה** שפותרת את המשחק.

שאלה 7 (10%)

מארגני כנס רב משתתפים מעונינים לחלק את באי הכנס לקבוצות. הם מעונינים למנוע חיכוכים בין החברים של כל קבוצה. לשם כך הם בררו עם כל אחד מהמשתתפים בכנס, עם מי **אין** הוא מעוניין להיות באותה הקבוצה. על סמך ברור זה הם ערכו רשימה המכילה לכל אחד מבאי הכנס את רשימת האנשים שעימם הוא יכול להיות באותה הקבוצה. (שני אנשים יכולים להיות באותה הקבוצה, אם אף אחד מהם לא הצהיר על כך שהוא לא מעוניין להיות עם השני).

הבעיה העומדת בפני המארגנים היא: כמה חדרים עליהם לשכור, כך שלכל קבוצה יהיה חדר משלה?

הוכיחו: אם יש אלגוריתם שפותר את הבעיה במספר צעדים פולינומיאלי בגודל הקלט, אז **P** = **NP**. (הקלט הוא הרשימה אותה ערכו מארגני הכנס).

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 15

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2006א **מועד אחרון להגשה:** 10 בפבר' 06

אנא שימו לב: מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (12%)

א. השוו את קצב הגידול של הפונקציות $\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$ ו- $\lfloor \log_3 n \rfloor$.

ב. השוו את קצב הגידול של הפונקציות $n^{\lfloor \log_5 n \rfloor}$ ו- n^{10}.

ג. הוכיחו שלכל $a, b > 1$, $\log_a n = O(\log_b n)$ וגם $\log_b n = O(\log_a n)$.
(במלים אחרות, ל- $\log_a n$ ול- $\log_b n$ יש אותו קצב גידול).

שאלה 2 (12%)

כזכור, **הפונקציה המאפיינת** של שפה $L \subseteq A^*$ היא הפונקציה $f: A^* \rightarrow \{0, 1\}$ שמחזירה 1 אם w שייכת ל-L, ומחזירה 0 אם w לא שייכת ל-L.

הוכיחו: שפה L שייכת למחלקה **P** אם ורק אם הפונקציה המאפיינת של L **ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי**.

(שימו לב שעליכם להוכיח שני כיוונים. יש כאן טענת "אם ורק אם").

שאלה 3 (10%)

פסוק C בתחשיב הפסוקים נקרא **טאוטולוגיה**, אם לכל השמה של ערכי אמת במשתנים שלו, ערך האמת של הפסוק הוא T.

הוכיחו ששפת הפסוקים בתחשיב הפסוקים שהם טאוטולוגיה שייכת למחלקה co-**NP**.

(המחלקה co-**NP** מוגדרת בתרגיל 15.2.10 בעמוד 450 בספר).

שאלה 4 (20%)

תהיינה L ו-Q שתי שפות.

נאמר ש-Q **ניתנת לרדוקצית Cook** ל-L אם יש אלגוריתם A_Q בעל זמן ריצה פולינומיאלי שמכריע שייכות ל-Q, והאלגוריתם A_Q מבצע מספר פולינומיאלי של קריאות לאלגוריתם A_L שמכריע שייכות ל-L. (בחישוב זמן הריצה של האלגוריתם A_Q, כל קריאה לאלגוריתם A_L נספרת כצעד אחד).

סימון: $Q \leq_c L$.

הגדרה קצת יותר פורמלית: $Q \leq_c L$, אם יש אלגוריתם A_Q שמכריע ביחס לכל מילה w האם היא שייכת ל-Q או לא, כך שביחס לכל מילה w,

- A_Q יכול לבצע לכל היותר מספר פולינומיאלי (בגודל של w) של קריאות לאלגוריתם A_L (שמכריע ביחס לכל מילה v האם היא שייכת ל-L או לא), כאשר כל קריאה כזו מתבצעת על מילה v שאורכה לכל היותר פולינומיאלי באורך של w.
- בנוסף לקריאות לאלגוריתם A_L, האלגוריתם A_Q יכול לבצע לכל היותר מספר פולינומיאלי (בגודל של w) של פעולות נוספות.

א. הוכיחו שאם L שייכת ל-**P**, ו- $Q \leq_c L$, אז גם Q שייכת ל-**P**.

ב. נאמר ששפה L היא **NP**-Cook-שלמה, אם
   – L שייכת ל-**NP**.
   – לכל שפה Q ב-**NP**, $Q \leq_c L$.

ג. הוכיחו שאם יש שפה **NP**-Cook-שלמה במחלקה **P**, אז **P** = **NP**.

ד. האם כל שפה **NP**-שלמה היא גם **NP**-Cook-שלמה? הוכיחו את תשובתכם.

ה. הוכיחו: אם **NP** ≠ co-**NP**, אז יש שפות L ו-Q כך ש-L שייכת ל-**NP**, $Q \leq_c L$, אבל Q **לא שייכת** ל-**NP**.
(המחלקה co-**NP** מוגדרת בתרגיל 15.2.10 בעמוד 450 בספר).

שאלה 5 (15%)

תרגיל 15.4.12 בספר (עמוד 463).

(שימו לב שביצוע המשימות הוא סדרתי. ברגע שמסתיים הביצוע של משימה אחת, מתחיל הביצוע של המשימה הבאה).

שאלה 6 (15%)

בעיית THREE-CYCLES היא הבעיה הבאה:
הקלט: גרף $G = (V, E)$.
השאלה: האם יש ב-G שלושה מעגלים זרים בקדקודים, C_1, C_2, C_3, שמכסים את G? (כלומר, האם ניתן לחלק את קדקודי G לשלוש קבוצות, כך שהקדקודים בכל קבוצה מהווים מעגל פשוט (מעגל שבו כל קדקוד מופיע פעם אחת ויחידה), וכל קדקוד שייך לקבוצה אחת ויחידה?)

הוכיחו שהבעיה הזו היא בעיה **NP**-שלמה.

הדרכה: כדי להוכיח שהיא **NP**-קשה, הראו רדוקציה פולינומיאלית של אחת הבעיות ה-**NP**-שלמות המופיעות בספר בסוף סעיף 15.4.

שאלה 7 (16%)

נעיין בשפה הבאה PREFIX-FACTOR: זוהי שפת הזוגות (k, l) של מחרוזות בינריות, כך שהמחרוזת l היא תחילית (רישא) של מחרוזת m שמייצגת מספר בינרי שמחלק את המספר הבינרי שמיוצג על-ידי k
.

דוגמה: הזוג $(1001, 1)$ שייך לשפה, כי 1 היא תחילית של המחרוזת 11 שמייצגת את 3 בבסיס בינרי, ו-3 מחלק את 9 שמיוצג על-ידי המחרוזת הבינרית 1001.
הזוג $(1001, 111)$ לעומת זאת, לא שייך לשפה.

א. הוכיחו שהשפה PREFIX-FACTOR שייכת למחלקה **NP**.

ב. הוכיחו: אם **P = NP**, אז אפשר לפרק כל מספר טבעי לגורמים ראשוניים בזמן פולינומיאלי.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 15

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2005ב **מועד אחרון להגשה:** 24 ביוני 05

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (8%)

תהיינה $f: N \to N$ ו-$g: N \to N$ שתי פונקציות **שלמות וניתנות לחישוב בזמן פולינומיאלי**.

האם ייתכן שגם $f(x) \neq O(g(x))$ וגם $g(x) \neq O(f(x))$? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 2 (10%)

האם מחלקת הפונקציות הניתנות לחישוב בזמן פולינומיאלי סגורה לחיבור?

האם היא סגורה לכפל?

הוכיחו את תשובותיכם

שאלה 3 (10%)

פסוק C בתחשיב הפסוקים נקרא **טאוטולוגיה**, אם לכל השמה של ערכי אמת במשתנים שלו, ערך האמת של הפסוק הוא T.

הוכיחו ששפת הפסוקים בתחשיב הפסוקים בצורת CNF שהם טאוטולוגיה שייכת למחלקה **P**.

שאלה 4 (10%)

האם ייתכן שהשפה הריקה $\varnothing$ היא שפה **NP**-שלמה? נמקו היטב את תשובתכם.

[illegible]

שאלה 5 (22%)

תהיינה L_1, L_2, L_3, ... אינסוף שפות שכולן שייכות למחלקה **P**.

א. תהי I קבוצה **סופית** של טבעיים.

האם השפה $\bigcup_{i\in I} L_i$ בהכרח שייכת ל-**P**? האם היא שייכת בהכרח ל-**NP**? הוכיחו.

ב. תהי J קבוצה **אינסופית** של טבעיים.

האם השפה $\bigcup_{j\in J} L_j$ בהכרח שייכת ל-**P**? האם היא שייכת בהכרח ל-**NP**? הוכיחו.

שאלה 6 (24%)

נתבונן במערכות של משוואות ליניאריות עם מקדמים שלמים (ה-a_{ij}-ים וה-b_i-ים שלמים):

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

[illegible]

א. נסתכל על הבעיה "האם יש למערכת כזו פתרון?" [illegible]

הגדירו את הבעיה הזו כבעיית שייכות לשפה, והוכיחו שהשפה הזו שייכת למחלקה **P**.

ב. נסתכל על הבעיה "האם יש למערכת כזו פתרון שבו כל x_i הוא או 0 או 1 (פתרון בולאני)?"

הגדירו את הבעיה הזו כבעיית שייכות לשפה, והוכיחו שהשפה הזו היא **NP**-שלמה.

הדרכה: כדי להוכיח שהיא **NP**-קשה, הראו רדוקציה פולינומיאלית של אחת הבעיות ה-**NP**-שלמות המופיעות בספר בסוף סעיף 15.4. [illegible]

[illegible]

שאלה 7 (16%)

נסתכל במשחק ה-PUZZLE הבא: נתונים n כרטיסים. כל כרטיס מחולק לשניים לאורכו לשני חצאים סימטריים בצורתם. בכל מחצית יש m מקומות ממוספרים מ-1 עד m מלמעלה למטה. כל אחד מן המקומות הללו יכול להיות מחורר או מלא.

המטרה של המשחק היא להניח את כל הכרטיסים זה על זה כך שכל המקומות יהיו מלאים. (כלומר, כך שלא ייווצר מצב שבו במקום i כלשהו יש חור בכל הכרטיסים). אפשר להניח כל כרטיס באחת משתי צורות, או כשפניו כלפי מעלה או כשפניו כלפי מטה. זה קובע איזה משני החצאים של הכרטיס יהיה בצד ימין ואיזה יהיה בצד שמאל (אך תמיד המספור מ-1 עד m נשמר כך ש-1 נמצא למעלה ו-m למטה).

הוכיחו שהבעיה האם ל-PUZZLE נתון יש פתרון או לא היא בעיה **NP**-שלמה.

הדרכה: כדי להוכיח שהיא **NP**-קשה, הראו רדוקציה של SAT: הראו איך לכל פסוק בצורת CNF אפשר לבנות בזמן פולינומיאלי משחק PUZZLE כך שהפסוק ספיק אם ורק אם למשחק יש פתרון.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 15

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2005א **מועד אחרון להגשה:** 14 בינו' 05

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (14%)

א. השווה את קצב הגידול של הפונקציות $\lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor$ ו- $\lfloor \log_5 n \rfloor$.

ב. השווה את קצב הגידול של הפונקציות 2^n ו- 3^n.

ג. השווה את קצב הגידול של הפונקציות $n^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$ ו- n^{100}.

ד. תנו דוגמה לשתי פונקציות, $f: N \to N$ ו- $g: N \to N$, כך ש- $f(n) \neq O(g(n))$ ו- $g(n) \neq O(f(n))$.

שאלה 2 (12%)

תרגיל 15.2.4 בספר (עמוד 449).

שאלה 3 (20%)

יהי A אלפבית.

פונקציה $f: A^* \to A^*$ תיקרא **הוגנת** אם יש פולינום $p(x)$ כך שלכל y בטווח של f יש לפחות z אחד בתחום כך ש- $f(z) = y$ ו- $|z| \le p(|y|)$.

כלומר, פונקציה היא הוגנת אם מובטח שכל מילה y בטווח הפונקציה היא תמונה של לפחות מילה אחת z שאורכה לכל היותר פולינומיאלי באורך של y.

הוכיחו: שפה L שייכת למחלקה **NP** אם ורק אם L היא טווח של פונקציה הוגנת הניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

הדרכה: כדי להראות ש-L היא טווח של פונקציה כנדרש, השתמשו במכונה הלא דטרמיניסטית שמקבלת את L (בזמן פולינומיאלי לא דטרמיניסטי).

שאלה 4 (8%)

האם השפה $\{G \mid G$ הוא גרף שיש לו כיסוי קדקודים בגודל 5$\}$ שייכת למחלקה **P**? הוכיחו.

שאלה 5 (12%)

א. עבור פסוקים בתחשיב הפסוקים נגדיר פונקציה μ:

$\mu(C)$ הוא מספר ההשמות של ערכי אמת במשתנים של הפסוק C שעבורן ערך האמת של C הוא T.

מהי המשמעות של $\mu(\delta_n)$? (הפסוק δ_n מופיע בהוכחה של משפט Cook).

ב. כתבו פסוקים עבור **מכונת טיורינג עם חמישיות**, במקום הפסוקים $A(j, k)$, $B(j, k)$ ו- $C(j, k)$ בעמוד 455 בספר (המתאימים למכונת טיורינג רגילה (עם רביעיות)).

שאלה 6 (14%)

בעיית **הקבוצות הנחתכות** היא הבעיה הבאה:

הקלט: n קבוצות סופיות, $S_1, S_2, ..., S_n$; מספר טבעי k.

השאלה: האם יש k קבוצות שונות (מתוך n הקבוצות הנתונות), **שהחיתוך של כל שתים מהן איננו ריק**?

הוכיחו כי בעיית הקבוצות הנחתכות היא **NP**-שלמה.

רמז: כדי להוכיח שהיא **NP**-קשה, הראו רדוקציה של בעיית COMPLETE-SUBGRAPH.

שאלה 7 (20%)

תרגיל 15.4.6 בספר (עמוד 462).

אתם יכולים להראות רדוקציה של **בעיית הקבוצה הבלתי תלויה** (במקום רדוקציה של בעיית כיסוי קדקודים).

(בעיית הקבוצה הבלתי תלויה מוגדרת בשאלה 5 של הבחינה לדוגמה המופיעה אחרי המטלות).

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 15

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: ב2004 **מועד אחרון להגשה:** 18 ביוני 04

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (8%)

תרגיל 15.1.6 בספר (עמוד 443).

שאלה 2 (12%)

א. הוכיחו שהשפה $\text{FACTORIALS} = \{n! \mid n \in N\} = \{1, 2, 6, 24, 120, \ldots\}$ **שייכת** למחלקה **P**.
הניחו שהקלט מיוצג בבסיס בינרי.

ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x) = x!$ **איננה** ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.
הניחו שהקלט והפלט מיוצגים בבסיס בינרי.

שאלה 3 (20%)

א. **תרגיל 15.2.12 בספר (עמוד 450).**

ב. הוכיחו: לכל פונקציה $f(x)$, $\mathbf{NTIME}(f) \subseteq \bigcup_{r>1}\mathbf{DTIME}(r^f)$.

שאלה 4 (14%)

נניח שנתונה מנייה של כל מכונות טיורינג הדטרמיניסטיות מעל האלפבית $\{a, b\}$: $M_1, M_2, \ldots$.
לכל i ו-j טבעיים נגדיר את השפה L_{ij} הבאה: L_{ij} היא שפת כל המילים w מהצורה $a^{[k]}b^{[m]}$ שהמכונה שמספרה i (במנייה של המכונות) מקבלת בפחות מ-$|w|^j$ צעדים.
כלומר, המילה $a^{[k]}b^{[m]}$ שייכת ל-L_{ij} אם ורק אם כשמכונה M_i רצה על הקלט $a^{[k]}b^{[m]}$, היא עוצרת בתוך $(k + m)^j$ צעדים.
נגדיר: $Q = \{a^{[k]}b^{[m]} \mid a^{[k]}b^{[m]} \notin L_{km}\}$.

הוכיחו: Q איננה שייכת למחלקה **P**.

שאלה 5 (12%)

תרגיל 15.4.10 בספר (עמוד 463).

שאלה 6 (14%)

בעיית MAJORIZING היא הבעיה הבאה:

הקלט: m קבוצות סופיות של מספרים טבעיים, $S_1, S_2, ..., S_m$; מספר טבעי k.

השאלה: האם יש קבוצה S כך ש- $|S| \leq k$, ולכל i, $1 \leq i \leq m$, החיתוך של S עם S_i מכיל לפחות מחצית מאיברי S_i (כלומר, $|S \cap S_i| \geq |S_i| / 2$)?

הוכיחו: MAJORIZING היא בעיה **NP**-שלמה.

הדרכה: כדי להוכיח שהיא **NP**-קשה, אפשר להראות רדוקציה של בעיית VERTEX-COVER.

שאלה 7 (20%)

קבוצת קדקודים $D \subseteq V$ היא **קבוצה שלטת** בגרף $G = (V, E)$, אם לכל קדקוד $v \in V$ מתקיים: או ש- $v \in D$ או שיש $w \in D$ כך ש- $(v, w) \in E$.

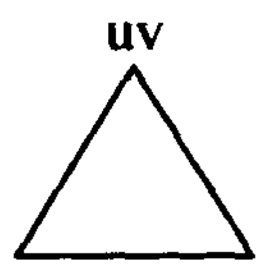
בעיית הקבוצה השלטת (DOMINATING-SET) היא הבעיה הבאה:

הקלט: גרף G; מספר טבעי k.

השאלה: האם קיימת ב-G קבוצה שלטת בגודל k?

הוכיחו: DOMINATING-SET היא **NP**-שלמה.

(רמז: רדוקציה של VERTEX-COVER:

לכל קשת $(u, v) \in E$, v———u, בנו "משולש" v 

u .)

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 15

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2004א **מועד אחרון להגשה:** 9 בינו' 04

אנא שימו לב:
מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (10%)

א. השוו את קצב הגידול של הפונקציות $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ ו- $\lfloor\log_3 n\rfloor$.

ב. השוו את קצב הגידול של הפונקציות $n^{\lfloor\log_5 n\rfloor}$ ו- n^{10}.

ג. הוכיחו שלכל $a, b > 1$, $\log_a n = O(\log_b n)$ וגם $\log_b n = O(\log_a n)$.
(במלים אחרות, ל- $\log_a n$ ול- $\log_b n$ יש אותו קצב גידול).

שאלה 2 (10%)

תהי L שפת כל המילים מעל האלפבית $\{a, b, c\}$ שבהן מספר ה-a-ים שווה הן למספר ה-b-ים והן למספר ה-c-ים.

א. תארו מכונת טיורינג **דטרמיניסטית עם סרט אחד** שמקבלת את L בזמן $O(n^2)$.
בתשובתכם הסבירו את פעולת המכונה, והוכיחו שזמן הריצה שלה עומד בדרישה.

ב. תארו מכונת טיורינג **דטרמיניסטית עם ארבעה סרטים** שמקבלת את L בזמן $O(n)$.
בתשובתכם הסבירו את פעולת המכונה, והוכיחו שזמן הריצה שלה עומד בדרישה.

שאלה 3 (15%)

א. בעמוד 444 בספר הלימוד מופיעה ההגדרה של שייכות שפה L למחלקה **P**.

הציעו הגדרה מקבילה למקרה ש-L היא שפה של m-יות של מילים מעל האלפבית A. (כלומר למקרה ש-L איננה חלקית ל-A^* אלא ל- $(A^*)^m$).

ב. בהנחה ש- **P≠NP**, האם השפה L_1 שלהלן שייכת למחלקה **P**? הוכיחו את תשובתכם.

L_1 היא שפת הזוגות (φ, λ) שבהם φ הוא פסוק בתחשיב הפסוקים בצורה קוניונקטיבית נורמלית (צורת CNF), ו-λ היא השמה של F ו-T למשתנים של φ שמספקת את φ.

ג. בהנחה ש- **P≠NP**, האם השפה L_2 שלהלן שייכת למחלקה **P**? הוכיחו את תשובתכם.

L_2 היא שפת הזוגות (G, k) שבהם G הוא גרף לא מכוון, k הוא מספר טבעי, ויש ב-G כיסוי קדקודים **מדויק** בגודל k.

(כיסוי קדקודים הוא מדויק אם לכל צלע (u,v) בגרף, רק אחד מן הקדקודים u ו-v שייך לכיסוי. (כל צלע בגרף "מכוסה" על-ידי קדקוד אחד ויחיד)).

שאלה 4 (20%)

פונקציה $f: A^* \rightarrow A^*$ מעל אלפבית נתון A תיקרא **חד-כיוונית**, אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. f שלמה וניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.
2. **לא קיימת** מכונת טיורינג דטרמיניסטית שלכל מילה w בטווח של f מחשבת בזמן פולינומיאלי מילה v כך ש- $f(v) = w$.
3. לכל מילה w מעל האלפבית A, $|f(w)| = |w|$ (אורך המילה $f(w)$ שווה לזה של w).

א. הוכיחו שאם קיימת פונקציה חד-כיוונית, אז **P≠NP**.

ב. הוכיחו שאם **P≠NP**, אז קיימת פונקציה חד-כיוונית.

רמז: היעזרו בסעיף ב' של שאלה 3.

שאלה 5 **(30%)**

נגדיר את המשחק הבא (משחק לשחקן יחיד):

נתון אלפבית סופי A, מספר טבעי k ואוסף של k-יות.

כל k-יה היא k-יה של קבוצות של אותיות מן האלפבית.

כלומר, k-יה היא **סדרה** באורך k - $(S_1, S_2, ..., S_k)$, כאשר כל S_i היא **קבוצה** של אותיות מן האלפבית A. (S_i יכולה להיות גם קבוצה ריקה של אותיות).

תפקיד המשחק הוא למצוא מילה w באורך k מעל האלפבית A, $w = w_1w_2 ... w_k$ (כל w_i היא אות באלפבית A), כך שלכל k-יה יש איזשהו i בין 1 ל-k כך שהקבוצה ה-i ב-k-יה מכילה את האות ה-i של w.

דוגמה: נניח שהאלפבית הוא $A = \{a, b, c\}$, $k = 4$, ונתונות שלוש רביעיות: $(\{a, b\}, \{a\}, \varnothing, \{a\})$, $(\{a, c\}, \{b\}, \varnothing, \varnothing)$ ו- $(\varnothing, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b\})$.

אפשר לראות שהמילה '$cbaa$' מספקת את כל האילוצים. (ברביעייה הראשונה נבחר $i = 4$, בשנייה נבחר $i = 1$ או $i = 2$, ובשלישית נבחר $i = 3$).

א. נסחו את המשחק הזה כבעיית הכרעה.

ב. הוכיחו שהבעיה הזו היא **NP**-שלמה. (הראו **רדוקציה** של SAT).

ג. הראו שאם יש אלגוריתם פולינומיאלי לבעיית ההכרעה, אז אפשר להשתמש בו כדי לבנות אלגוריתם פולינומיאלי **שמוצא מילה** שפותרת את המשחק.

שאלה 6 **(15%)**

בעמוד 460 בספר מוצגת בעיית המעגל ההמילטוני.

בהסתמך על כך שזוהי בעיה **NP**-שלמה, הוכיחו שגם הבעיה הבאה היא בעיה **NP**-שלמה.

הקלט לבעיה הוא גרף לא מכוון $G = (V,E)$ וצלע e ששייכת ל-E.

השאלה היא: האם יש ב-G מעגל המילטוני ש"עובר" דרך הקשת e (כלומר, האם יש ב-G מעגל המילטוני ש-e היא אחת מן הקשתות שלו)?

רמז: כדי להוכיח שהבעיה היא **NP**-קשה, הראו רדוקציה של בעיית המעגל ההמילטוני - הוסיפו לגרף (מעט) קדקודים וצלעות.