

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

מספר התלמיד הנבחן
רשום את כל תשע הספרות

הדבק כאן את
מדבקת הנבחן

האוניברסיטה
הפתוחה



מס' שאלון - 506

12

ו' בתמוז תשע"ו

ביולי 2016

מס' מועד 84

מסטר 2016ב

20476 / 4

שאלון בחינת גמר

20476 - מתמטיקה בדידה

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה 4 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים:

חלק א: שאלת חובה. את התשובה לכל סעיף כתבו במחברת בלבד.

חלק ב: עליכם לענות על שלוש מתוך ארבע השאלות.
אם תענו על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.
שימו לב:

- * בחלק ב יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
- * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד, וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
- * אם ברצונכם להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליכם לחזור ולהוכיחן.
- * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרם אותם.

חומר עזר:

כל חומר עזר מותר בשימוש. אפשר להשתמש במחשבון מדעי.
אסור בשימוש כל מכשיר אלקטרוני שבאמצעותו ניתן לאצור מידע
לרבות מכשיר טלפון נייד, מחשב נישא, שעון חכם וכד'.

בהצלחה !!!

אינכם חייבים

להחזיר את השאלון לאוניברסיטה הפתוחה



חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.
 בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

6 נק' א. A היא קבוצה, f היא פונקציה של A ל- A .

איזה מהפסוקים הבאים מביע את הטענה ש- f היא על?

[1] $\exists x \exists y (f(x) = y)$

[2] $\forall x \exists y (f(x) = y)$

[3] $\exists x \forall y (f(x) = y)$

[4] $\forall y \exists x (f(x) = y)$

[5] $\exists y \forall x (f(x) = y)$

בכל הסעיפים, הכמתים מתייחסים לאברים של A .

7 נק' ב. תהי A קבוצה.

באיזה מהמצבים הבאים מתקיים: $|A| = |P(P(A))|$?

[1] כאשר $A = \emptyset$.

[2] לא כאשר $A = \emptyset$, אבל השוויון מתקיים עבור קבוצה סופית A כלשהי.

[3] לא כאשר A קבוצה סופית, אבל השוויון מתקיים עבור כל A אינסופית.

[4] לא לכל A אינסופית, אבל השוויון מתקיים כאשר $|A| \geq C$.

[5] לעולם לא.

6 נק' ג. משפט 1.6 בתורת הגרפים אומר:

"גרף בעל לפחות שני צמתים הוא דו-צדדי אם ורק אם אין בו מעגל באורך אי-זוגי".

נזכור שביער, ובפרט בעץ, אין מעגלים כלל.

איזו מהאמירות הבאות נכונה?

[1] כל יער על יותר מצומת אחד הוא גרף דו-צדדי.

[2] הטענה הקודמת אינה נכונה, אבל כל עץ על יותר מצומת אחד הוא גרף דו-צדדי.

[3] עץ על מספר אי-זוגי של צמתים לעולם אינו גרף דו-צדדי.

[4] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

תהי M קבוצת כל היחסים (הרלציות) מעל קבוצת הטבעיים N .
תהי $s: M \rightarrow M$ הפונקציה המתאימה לכל $R \in M$ את הסגור הסימטרי שלו,
ותהי $r: M \rightarrow M$ הפונקציה המתאימה לכל $R \in M$ את הסגור הרפלקסיבי שלו.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

(6 נק') א. הפונקציה s היא חד-חד-ערכית.

(7 נק') ב. הפונקציה s היא על M .

(7 נק') ג. לכל $R \in M$, $s(R) = s(R^{-1})$.

(7 נק') ד. לכל $R \in M$, $s(r(R)) = r(s(R))$.

שאלה 3

10 קופסאות **שונות** מסודרות בשורה. חמש מהקופסאות כחולות וחמש לבנות.
הקופסאות **שונות** זו מזו (למשל לפי המקום שלהן בשורה), גם אם יש להן אותו צבע.
עלינו לפזר בקופסאות הללו 6 כדורים **זהים**.

(13 נק') א. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת, אם אסור שכל 6 הכדורים יהיו בקופסאות בעלות אותו צבע?

(14 נק') ב. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת, אם אסור שמספר הכדורים בקופסאות הכחולות יהיה שווה למספר הכדורים בקופסאות הלבנות?

בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה מספרית.
אין הכרח להיעזר בהכלה והפרדה או בפונקציה יוצרת, אפשר לפתור בדרכים אלמנטריות.
להסיר ספק: הדרישה של סעיף א' אינה בתוקף בסעיף ב'.

שאלה 4

- לרשותנו עציצים ומנורות צבעוניות. בכל עציץ נמצא אחד משני צמחים: רקפת או כלנית. מנורה יכולה להיות באחד מארבעה צבעים: לבן, אדום, כחול, ירוק.
- יהי a_n מספר הדרכים לסדר n עצמים כאלה בשורה, כאשר אסור לשים **מנורות** זו ליד זו. עציצים יכולים להיות זה ליד זה.
- עציצים המכילים אותו סוג צמח נחשבים זהים. מנורות באותו צבע נחשבות זהות. עצמים בעלי סוג שונה או צבע שונה נחשבים שונים.
- (13 נק') א. רשמו בעזרת חישוב ישיר את a_0, a_1, a_2 . מצאו יחס נסיגה עבור a_n (נמקו!).
- (14 נק') ב. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור a_n .

שאלה 5

- תהי $A = \{1, 2, 3, 4\}$. G הוא גרף פשוט המוגדר כך:
- קבוצת הצמתים של G היא $P(A)$.
- למשל הקבוצה $\{1, 3, 4\}$ היא צומת של G והקבוצה הריקה היא צומת אחר של G .
- בין צמתים X, Y של G יש קשת אם ורק אם
- $$X \subseteq Y \text{ ו- } |Y - X| = 1 \quad \text{או} \quad Y \subseteq X \text{ ו- } |X - Y| = 1.$$
- למשל יש קשת (אחת ויחידה) בין $\{1, 3, 4\}$ ל- $\{1, 3\}$,
- יש קשת (אחת ויחידה) בין $\{1, 3, 4\}$ ל- $\{1, 2, 3, 4\}$,
- אין קשת בין $\{1, 3, 4\}$ ל- $\{1, 2\}$ ואין קשת בין $\{1, 2\}$ ל- $\{1, 2, 3, 4\}$.
- (7 נק') א. הוכיחו שלכל הצמתים ב- G אותה דרגה.
- (7 נק') ב. חשבו את מספר הקשתות ב- G .
- (6 נק') ג. הוכיחו ש- G הוא גרף דו-צדדי. הציגו חלוקה של הצמתים לשני צדדים.
- (7 נק') ד. הוכיחו ש- G אינו מישורי (כדאי להיעזר בסעיפים הקודמים).
- הערה: קל לראות ש- G קשיר. ניתן להסתמך על כך ואינכם נדרשים להוכיח זאת.

בהצלחה!