ממן 11

שאלה 1: תהי $\mathbb{N}$ קבוצת המספרים הטבעיים. נסמן: $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\dots\right\}=\{\frac{1}{2^n}|n\in\mathbb{N}\}$ הוכח או הפרך:

א. A קבוצה אינסופית: הטענה נכונה

תהי קבוצה B כך ש$B=\left\{\frac{1}{2^{n+1}}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}$.

יהי $x\in A$. לכן יהי $n\in\mathbb{N}$ כך ש $x=\frac{1}{2^n}$

לכן $\left(\sqrt[-n]{\frac{1}{2^x}}\right)^{-(n+1)}=\frac{1}{2^{n+1}}\in B$

יהי $y\in B$.

לכן, על פי הכלל שהגדרנו, האיבר $\left(\sqrt[-(n+1)]{y}\right)^{-n}\in A$

כדי לאמת את ההתאמה, נציב: $y=\left(\sqrt[-(n+1)]{y}\right)^{-(n+1)}=\left(\sqrt[-n]{\left(\sqrt[-(n+1)]{y}\right)^{-n}}\right)^{-(n+1)}$

ולכן כלל ההתאמה נכון.

יהיו $m,n\in A$ ויהי $z\in\mathbb{N}$.נניח שm,n מותאמים לאותו איבר בB.

לכן, $\left(\sqrt[-z]{n}\right)^{-(z+1)}=\left(\sqrt[-z]{m}\right)^{-(z+1)}$

$\sqrt[-z]{m}=\sqrt[-z]{n}$

$m=n$

ולכן ההתאמה היא חד-חד-ערכית.

לכן, $B\sim A$

נוסף על כך, $A\subseteq B$ כי לכל $x\in A$ מותאם האיבר שלאחריו, שנמצא בB. קיים $y=\frac{1}{2}\in A$ בלבד כך ש$y\notin B$, ולכן $B\nsubseteq A$.

לכן, $B\sim A\ \&\&\ B\subset A$.

לכן A אינסופית.

ב. נגדיר התאמה בין A ל$\mathbb{N}$: לכל $x\in\mathbb{N}$ נתאים $\frac{1}{2^x}\in A$

לפי הגדרת A, לכל $x\in\mathbb{N}$ מותאם $\frac{1}{2^x}\in A$, לכן ההתאמה נכונה בהכרח.

נוכיח שלא קיימים שני איברים באחת הקבוצות, שלהם מותאם איבר נוסף:

יהי $x,y\in\mathbb{N}$. נניח ש x,y שייכים לאותו איבר בA:

לכן, לפי הכלל שהגדרנו: $\frac{1}{2^y}=\frac{1}{2^x}$

$2^y=2^x$

$x\ In\ 2=y\ In\ 2$

$x=y$

לכן, A ו$\mathbb{N}$ שקולות

ג. כל התאמה בין A ל$\mathbb{N}$ היא חד-חד-ערכית: הטענה שגויה.

נביא דוגמה נגדית:

נגדיר התאמה בין A ל$\mathbb{N}$: לכל $x\in\mathbb{N}$ נתאים $\frac{1}{2^x}\in A$ אם ורק אם $x\neq 1$.

לכן, לכל איבר בA מותאם איבר בℕ, אך לא לכל איבר בℕ מותאם איבר בA במקרה זה - ל$1 \in \mathbb{N}$ לא מותאם אף איבר ששייך לA.

ד. קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין N ל A המתאימה את 1 ל $\frac{1}{4}$: הטענה נכונה.

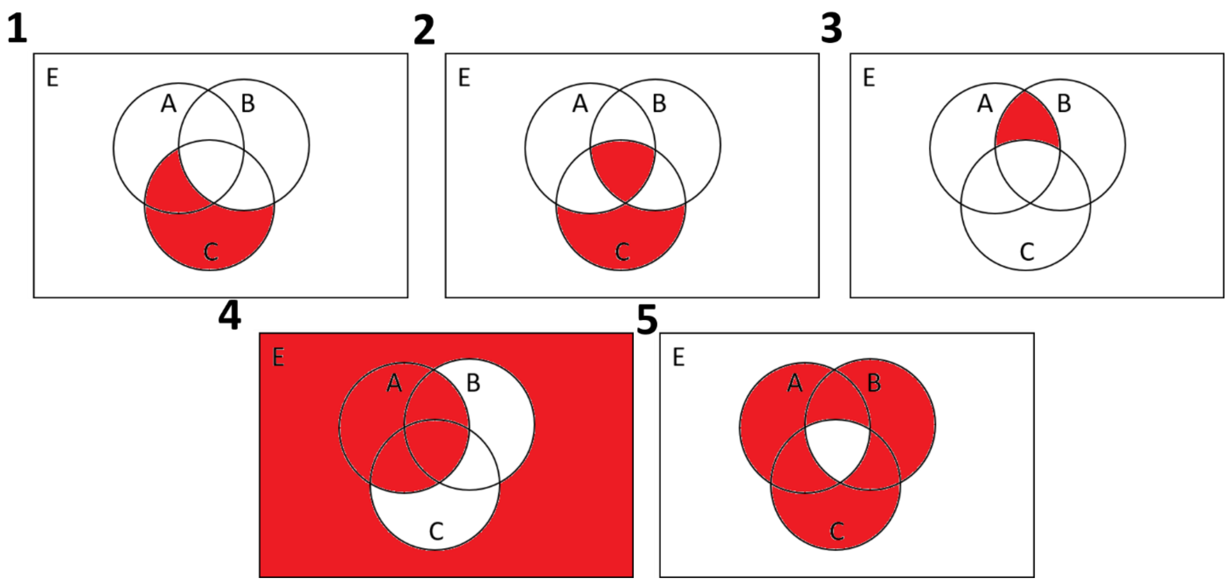
תהי קבוצה $B = \{2x | x \in \mathbb{N}\}$

נגדיר התאמה בין A לℕ: לכל $x \in \mathbb{N}$ וגם $x \in B$ נתאים $\frac{1}{2^{x-1}} \in A$, ולכל $x \in \mathbb{N}$ וגם $x \notin B$ נתאים $\frac{1}{2^{x+1}} \in A$.

לכן, עבור $1 \in \mathbb{N}$ יותאם $\frac{1}{4} \in A$.

לפי ההתאמה לכל $x \in A$ מותאם $x \in B$ אחד, וכן לכל $x \in B$ מותאם $x \in A$ אחד.

<u>שאלה 2:</u>



<u>שאלה 3:</u> תהי A קבוצה חלקית לקבוצת המספרים הטבעיים ℕ. נתון כי $1 \in A$ וכי לכל $x \in A$ גם $2x \in A$.

א. הוכח שהקבוצה $B = \{2x | x \in A\}$ היא חלקית לA ושקולה לה.

a. נוכיח ש$B \subseteq A$:

נניח בשלילה $B \nsubseteq A$

יהי $x \in B$

לכן $x \in B \,\&\&\, x \notin A$

לכן $2x \in A \,\&\&\, (x \notin A \,\&\&\, 2x \notin A)$ וזוהי סתירה!

b. נוכיח ש$A \sim B$: נגדיר התאמה חד-חד-ערכית בין A לB:

לכל $x \in A$ נתאים $2x \in B$.

נגדיר את ההתאמה בצורה מוגדרת היטב: יהי $x \in A$ כך ש$2x \in B$

נוכיח נכונות ההתאמה: יהי $y \in B$. האיבר $\frac{y}{2} \in A$ מותאם לפי הכלל.

לכן $2\left(\frac{y}{2}\right) = y$
לכן ההתאמה נכונה.
יהיו $x, y \in A$
נניח שx, y מותאמים לאותו איבר בB
לכן, לפי הכלל $2x = 2y$
$x = y$ ולכן הם זהים, וההתאמה היא חד-חד-ערכית.

ב. הוכח: A קבוצה אינסופית.
נשתמש בקבוצה שהוגדרה לעיל $B = \{2x | x \in A\}$
לפי ההוכחה לעיל, נתון $B \subseteq A \,\&\&\, B \sim A$.
לפי הגדרת A, $1 \in A$
בגלל ש$\frac{1}{2} \notin A$ נסיק $1 \notin B$.
לכן קיים$(x \in A \,\&\&\, x \notin B)$ וגם $B \subseteq A$
לכן $B \subseteq A \,\&\&\, A \nsubseteq B$
לכן $B \subset A$ וגם $B \sim A$
לכן A אינסופית.

ג. נגדיר מחדש $A \subseteq \mathbb{N}$ כך ש$3 \in A$ וגם לכל $x \in A$ גם $2x \in A$. השינוי בנתון $3 \in A$ לא רלוונטי לסעיף א' וכן מקיים את התנאי בסעיף ב' (הלוא – אם איננו מתחלק ב2 כשלם, מנתו אינה שייכת לקבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$.

<u>שאלה 4:</u> תהיינה A, B קבוצות. נתון ש$A \cap B \sim A$. הוכח או הפרך:

א. אם $A \cup B \neq B$ אזי A אינסופית: הטענה נכונה:
הוכחה: נניח A אינסופית.
<u>טענת עזר:</u> אם $A \cup B \neq B$ אזי $A \neq B$:
נניח $A \cup B \neq B$
לכן $A \cup B \nsubseteq B$ או $B \nsubseteq A \cup B$
לכן יהי $x \in A \cup B$
לכן, בפרט מתקיים $x \in B \,\&\&\, x \notin B$ או $x \in A$
לכן $x \notin B$ וגם $x \in A$
לכן $A \nsubseteq B$
לכן $B \nsubseteq A$ או $A \nsubseteq B$ (כלל היסק)
לכן $A \neq B$

לפי ההנחה קיימת קבוצה חלקית לA
לכן נגדיר $A \cap B \subset A$
יהי $x \in A$
לפי טענת עזר $A \neq B$
נניח בשלילה $A \cap B \not\subset A$
לכן $A \cup B \subset A$ וגם $x \in A$
לכן$(A \cup B \subseteq A$ וגם $A \nsubseteq A \cup B)$ וגם $x \in A$
לכן $((x \notin A$ או $x \notin B) \,\&\&\, x \notin A)$ וגם $(x \in A \,\&\&(x \notin A$ או $x \notin B))$ וגם $x \in A$
לכן $(x \notin A)\&\&(x \in A$ וגם $x \notin B)$ וגם $x \in A$
בפרט חייבים להתקיים $x \notin A$ וגם $x \in A$ וזוהי סתירה!
לכן הטענה נכונה.

לכן מתקיים $A \cap B \subset A$ וגם $A \cap B \sim A$
ולכן A קבוצה אינסופית – הטענה נכונה.

ב. אם $A \cup B \neq B$ אזי A קבוצה אינסופית.

ג. אם A סופית אזי $A \subseteq B$. הטענה נכונה:
הוכחה: נניח בשלילה $A \nsubseteq B$.
יהי $x \in A$.
לכן מתקיים $x \in A \,\&\&\, x \notin B$.
לפי הנתונים $A \cap B \sim A$
לכן צריך להתקיים $A\backslash$