תשובה 1

א. מהנתון, תהי $f: A-B \to B-A$ חד-חד-ערכית ועל.

בעזרת פילוג החיתוך לגבי האיחוד, $A=(A\cap B')\cup(A\cap B)$,

כלומר $A=(A-B)\cup(A\cap B)$, וזהו **איחוד זר** (איחוד של שתי קבוצות זרות).

בדומה, $B=(B-A)\cup(A\cap B)$.

נגדיר $g: A\to B$ כך:

$$g(a)=\begin{cases} f(a) & a\in A-B \\ a & a\in A\cap B \end{cases}$$

מהנתון לגבי f נקבל ש- g מעבירה את $A-B$ באופן **חד-חד-ערכי על** $B-A$,

ומכיוון ש- g פועלת כזהות על $A\cap B$, היא מעבירה את $A\cap B$ באופן חד-חד-ערכי על עצמו.

בהתחשב בכך ש- $B=(B-A)\cup(A\cap B)$, לא קשה להראות ש- g היא חד-חד-ערכית ועל B.

הוכחה של טענה כללית יותר, ממנה זה נובע, ראו בפרק 5, טענה 5.9 !

הראינו פונקציה **חד-חד-ערכית** מ- A **על** B , לכן הן שוות-עוצמה.

ב. כאמור, כללית $A=(A-B)\cup(A\cap B)$, וזהו איחוד זר,

וכן $B=(B-A)\cup(A\cap B)$ וזהו איחוד זר.

מכאן, אם A,B **סופיות**, ומתקיים $|A|=|B|$ אז:

$$|A-B|=|A|-|A\cap B|=|B|-|A\cap B|=|B-A|$$

ג. לדוגמא נקח $A=\mathbf{N}$, ו- B היא קבוצת הטבעיים הזוגיים (השלימו הבדיקה).

תשובה 2

א. נתבונן בפונקציה $g(x)=3x$, $g: J\to \mathbf{Z}$.

מהגדרת J, מובן ש- g היא אכן פונקציה של J ל- $\mathbf{Z}$.

עוד מהגדרת J , מובן שהפונקציה g היא **על** $\mathbf{Z}$.

g היא חד-חד-ערכית: אם $3x=3y$ אז $x=y$.

מצאנו פונקציה חד-חד-ערכית ועל של J ל- $\mathbf{Z}$, לכן $|J| = |\mathbf{Z}| = \aleph_0$

ב. נתבונן בפונקציה $f(x) = (x\ ,\ 2x-10)$, $f : \mathbf{R} \to K$.

f היא אכן פונקציה של $\mathbf{R}$ ל- K , כי $2x - (\ 2x-10) = 10$.

f היא **על** K :

יהי $(x,y) \in K$. מהגדרת K, $2x - y = 10$. מכאן $y = 2x - 10$.

לכן, מהגדרת f : $f(x) = (x\ ,\ 2x-10) = (x,y)$.

f היא **חד-חד-ערכית**:

אם $(x_1\ ,\ 2x_1 - 10) = (x_2\ ,\ 2x_2 - 10)$ אז בפרט $x_1 = x_2$.

מצאנו פונקציה חד-חד-ערכית ועל של $\mathbf{R}$ ל- K, לכן $|\ K\ | = |\ \mathbf{R}\ | = C$.

ג. תהי J הקבוצה מסעיף א. נגדיר פונקציה $h : J \to M$ כך: $h(x) = (x\ ,\ 2x-10)$

זו הפונקציה f מהסעיף הקודם, אבל אנו **מצמצמים את תחום ההגדרה** שלה לקבוצה J !

נוכיח שזו אכן פונקציה של J ל- M (!)

אברי M מוגדרים ע"י קיום שני תנאים, נבדוק את שניהם.

(i) בדיקת התנאי $x + y \in \mathbf{Z}$:

$$x + 2x - 10 = 3x - 10$$

מהגדרת J, זהו אכן מספר שלם .

(ii) בדיקת התנאי $2x - y = 10$:

$$2x - (2x - 10) = 10$$

לפיכך h היא אכן פונקציה של J ל- M.

h היא **על** M: יהי $(x\ ,\ y) \in M$. מהגדרת M, $2x - y = 10$. מכאן $y = 2x - 10$.

נציב בתנאי $x + y \in \mathbf{Z}$ ונקבל $x + 2x - 10 \in \mathbf{Z}$. זה שקול לכך ש- $3x \in \mathbf{Z}$.

לכן $x \in J$. כעת קל לראות ש- $h(x) = (x\ ,\ 2x-10) = (x,y)$.

h היא חד-חד-ערכית: אם $(x_1\ ,\ 2x_1 - 10) = (x_2\ ,\ 2x_2 - 10)$ אז בפרט $x_1 = x_2$.

מצאנו פונקציה חד-חד-ערכית ועל של J ל- M, לכן $|\ M\ | = |\ J\ | = \aleph_0$.

תשובה 3

א. לפי הגדרת יחס (רלציה) מעל קבוצה (סעיף 2.3.3), קבוצת היחסים מעל $\mathbf{N}$ **היא בדיוק** $P(\mathbf{N}\times\mathbf{N})$ (לא רק שיש להן אותה עוצמה, אלא $P(\mathbf{N}\times\mathbf{N})$ **היא** קבוצת היחסים מעל $\mathbf{N}$!).

כידוע, $|\mathbf{N}\times\mathbf{N}| = \aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0$.

מכאן לפי משפט 5.23 ומשפט 5.26: $|P(\mathbf{N}\times\mathbf{N})| = 2^{\aleph_0} = C$.

ב. תהי T קבוצת היחסים הטרנזיטיביים מעל $\mathbf{N}$.

T חלקית לקבוצת כל היחסים מעל $\mathbf{N}$, לכן (סעיף א כאן + שאלה 5.1): $|T| \le C$.

מצד שני, נגדיר פונקציה $P(\mathbf{N})\to T$ כך:

לכל $A\in P(\mathbf{N})$ נתאים את היחס I_A , אותו נראה כיחס מעל $\mathbf{N}$. מובן שהוא טרנזיטיבי.

התאמה זו היא חד-חד-ערכית (ניתן למצוא את A מתוך I_A) ולכן $C = |P(\mathbf{N})| \le |T|$.

משני האי-שוויונים, לפי קנטור-שרדר-ברנשטיין, נקבל $|T| = C$.

תשובה 4

א. תהיינה A_1, A_2 , B_1, B_2 קבוצות שעוצמותיהן בהתאמה k_1, k_2 , m_1, m_2 .

נתון $k_1 \le k_2$, $m_1 \le m_2$.

כדי לקצר מעט את ההוכחה ניעזר בטריק השימושי הבא: אנו חופשים לבחור כראות עינינו את הקבוצות המייצגות את העוצמות השונות, כל עוד הקבוצות שנבחר הן בעלות העוצמות הנדרשות.

מתוך הנתון, לפי שאלה 5.1א בחוברת "פרק 5", קיימת קבוצה חלקית של A_2 שעוצמתה שווה לעוצמת A_1 , וקיימת קבוצה חלקית של B_2 שעוצמתה שווה לעוצמת B_1 .

לכן **ב.ה.כ. נניח** $A_1 \subseteq A_2$, $B_1 \subseteq B_2$ (!)

כעת מהגדרת כפל עוצמות $k_1\cdot m_1 = |A_1\times B_1|$, $k_2\cdot m_2 = |A_2\times B_2|$.

אבל מכיוון ש- $A_1 \subseteq A_2$, $B_1 \subseteq B_2$, מהגדרת מכפלה קרטזית נקבל $A_1\times B_1 \subseteq A_2\times B_2$.

לכן , בהסתמך על שאלה 5.1ב, $k_1\cdot m_1 \le k_2\cdot m_2$.

ב. מצד אחד, $\aleph_0 \le C$ ולכן בעזרת סעיף א, $\aleph_0\cdot C \le C\cdot C = C$.

מצד שני $1 \le \aleph_0$ ולכן בדומה $C = 1\cdot C \le \aleph_0\cdot C$.

משני הכיוונים יחד, בעזרת קנטור-שרדר-ברנשטיין, נובע המבוקש.

ג. לפי משפט 5.26, $2^{\aleph_0} = C$. נציב זאת ונקבל

$C^C = (2^{\aleph_0})^C = 2^{\aleph_0\cdot C} = 2^C$.

במעברים נעזרנו במשפט 5.27ג ובסעיף ב של שאלה זו.

תשובה 5

ניעזר במשפט 5.13ב. קבוצת הממשיים $\mathbf{R}$ היא אינסופית ואינה בת-מניה.

הקבוצה A חלקית לה ובת-מניה. לפי המשפט הנ"ל, $C = |\mathbf{R}| = |\mathbf{R} - A|$.

איתי הראבן