מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 1

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2008ג **מועד אחרון להגשה:** יום ה' 10.7.08

אנא שים לב: מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1

שאלה זו נועדת לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות ולחדד כמה נקודות שכדאי להבין בשלב מוקדם:

* ההבדל בין A לבין $\{A\}$ (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא A).
  * מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה $\varnothing$ לבין $\{\varnothing\}$.
* ההבדל בין "x איבר של y" לבין "x חלקי ל- y".

בכל אחד מהזוגות $x\,;\,y$ הבאים, קבע אם $x\in y$ וקבע אם $x\subseteq y$.

ייתכן ששני היחסים יתקיימו בעת ובעונה אחת, וייתכן גם שאף אחד משניהם לא יתקיים.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק.

א. $\varnothing \;;\; \varnothing$

ב. $\{\{\varnothing\}\} \;;\; \{\varnothing\}$

ג. $\{\varnothing,\{1\}\} \;;\; \{\varnothing\}$

ד. $\{\varnothing,\{1\}\} \;;\; \{1\}$

ה. $\{\varnothing,\{1\}\} \;;\; \{\{1\}\}$

ו. $\{\varnothing,\{1\}\} \;;\; \{\varnothing,\{1\}\}$

ז. $P(\{1\}) \;;\; \{\varnothing\}$

ח. $P(P(\varnothing)) \;;\; P(\varnothing)$

שאלה 2

הוכח את הטענות הבאות בעזרת **"אלגברה של קבוצות"**: צא מאחד האגפים, פתח אותו בעזרת זהויות ידועות, והגע לאגף השני. אין להשתמש בהוכחה במושג "איבר"!

במקומות בהם מופיע הפרש קבוצות מומלץ להיעזר בזהות $A-B=A\cap B'$ (עמ' 23 בספר הלימוד). הסימן $\oplus$ מוגדר בשאלה 1.22 בספר הלימוד.

א. $A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$

ב. $(A-B)\cup(B-C)=(A\cup(B-C))-(B\cap C)$

ג. $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$

שאלה 3

הוכח את הטענות א׳-ד׳. הסימן $\oplus$ מוגדר בשאלה 1.22 בספר הלימוד. רצוי להיעזר בתכונות של ההפרש הסימטרי המוכחות באותה שאלה, ולתת הוכחות אלגבריות, בדומה לשאלה 2 בממ״ן זה. זה יכול לחסוך הרבה עבודה.

U היא קבוצה אוניברסלית , המכילה את כל הקבוצות שבשאלה.

שים לב: **בטענות ״אם ורק אם״ יש להוכיח שני כיוונים**.

א. כלל הצמצום: אם $X \oplus A = Y \oplus A$ אז $X = Y$.

הדרכה: היעזר באסוציאטיביות של $\oplus$ ובתכונות אחרות שלה.

ב. $A \oplus B = \varnothing$ אם ורק אם $A = B$.

ג. $A \oplus B = U$ אם ורק אם $A = B'$.

ד. $A \oplus B = A$ אם ורק אם $B = \varnothing$.

שאלה 4

סעיפים ב-ג בשאלה זו מתייחסים להגדרה 1.6 בעמ׳ 12 בספר הלימוד,
ולהגדרה הדומה עבור חיתוך, בעמוד 16 בספר הלימוד.

תהי $\mathbf{N}^*$ קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מ- 0. לכל $n \in \mathbf{N}^*$ נגדיר קבוצה:

$$B_n = \{n \cdot k \mid k \in \mathbf{N}^*\}$$

(קבוצת כל המספרים שצורתם $n \cdot k$, כאשר $k \in \mathbf{N}^*$).

א. הוכח כי $B_n \cap B_m = B_{c(n,m)}$ כאשר $c(n,m)$ הוא הכפולה המשותפת המינימלית של n, m
(המספר הטבעי החיובי הקטן ביותר המתחלק ללא שארית ב- n וב- m).

הדרכה: ניתן להסתמך על הטענה כי כל כפולה משותפת של n, m מתחלקת בכפולה המשותפת המינימלית שלהן. 5 נקודות בונוס למי שיצרף הוכחה קבילה לטענה זו.

ב. הסבר מדוע $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} B_n = \varnothing$.

ג. לכל $n \ge 2$ נסמן $D_n = B_n - \bigcup_{1<i<n} B_i$ (בפרט: $D_2 = B_2$, $D_3 = B_3 - B_2$).
עבור איזה ערכים של n קיים: $D_n \ne \varnothing$? כלומר מצא את $\{n \in \mathbf{N}^* \mid D_n \ne \varnothing\}$.
אל תשכח להראות שתשובתך כוללת את **כל** הערכים המקיימים זאת (״הכלה דו-כיוונית״).

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 2

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2008ג **מועד אחרון להגשה:** יום ד' 16.7.08

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

"רלציה" בעברית: יחס.

שאלה 2

א. אם $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \emptyset$, מה תוכל לומר על A,B? הוכח.

ב. אם $(A \times P(A)) \cap (P(A) \times A) \neq \emptyset$, מה תוכל לומר על A? היעזר בסעיף א'.

בניסוח הסופי של תשובתך **אסור** שיופיע $P(A)$! תן דוגמא לקבוצה A המקיימת זאת.

שאלה 3

R,S הם יחסים מעל קבוצה A. I הוא יחס היחידה (הזהות) מעל A.

הוכח או הפרך:

א. $R^2R^3 = R^5$

ב. $R^2R^{-1} = R$

ג. $(R^2)^{-1} = (R^{-1})^2$

ד. $(R-I)^2 = R^2 - I$

ה. $(R \oplus S)^{-1} = R^{-1} \oplus S^{-1}$

שאלה 3

לכל אחת מהטענות א-ג קבע איזו מהאפשרויות הבאות נכונה:

(a) לכל קבוצה לא-ריקה A ויחסים R,S מעל A - הטענה נכונה.

(b) לכל קבוצה לא-ריקה A ויחסים R,S מעל A - הטענה אינה נכונה.

(c) יש קבוצה לא-ריקה ויחסים מעליה, עבורם הטענה נכונה, ויש קבוצה לא-ריקה ויחסים מעליה שעבורם הטענה אינה נכונה.

בכל מקרה, הוכח את קביעתך! סעיף ה׳ של שאלה 2 בעמוד הקודם יכול לסייע בחלק מהמקרים.

הסימן $\oplus$ (הפרש סימטרי) הוגדר בשאלה 1.22 בעמ׳ 27 בכרך "תורת הקבוצות".

א. אם R,S הם יחסים סימטריים אז $R \oplus S$ סימטרי.

ב. אם R,S אנטי-סימטריים אז $R \oplus S$ אנטי-סימטרי.

ג. אם R,S טרנזיטיביים אז $R \oplus S$ טרנזיטיבי.

שאלה 4

א. תן דוגמא ליחס R שהוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל $A = \{1,2,3\}$,

אך $R \cup R^{-1}$ **אינו** יחס שקילות מעל A. הראה שהדוגמא שנתת מקיימת את הנדרש.

ב. הוכח: אם R הוא יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל A **כלשהי**

אז $R \cap R^{-1}$ הוא יחס שקילות מעל A. **נמק בפירוט** כל צעד בהוכחה.

ג. תן דוגמא ליחס R מעל $A = \{1,2,3\}$ כך ש- $R \cup R^2$ **אינו** טרנזיטיבי .

ד. A היא קבוצה בת 11 איברים, E הוא יחס שקילות מעל A, המחלק את A ל- 5 מחלקות: מחלקה אחת בת איבר אחד, שתי מחלקות שבכל אחת מהן 2 איברים ו- 2 מחלקות שבכל אחת מהן 3 איברים. מהו $|E|$, כלומר כמה זוגות סדורים יש ב- E ?

מטלת מנחה (ממ״ן) 13

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 3

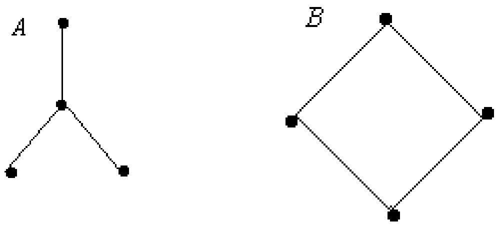
מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2008ג **מועד אחרון להגשה:** יום ב׳ 21.7.08

אנא שים לב: מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ״ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.   העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 4

באיור מתוארות דיאגרמות הסה של שתי קבוצות סדורות-חלקית, B, A.



ציירו את דיאגרמת הסה של הקבוצה $A \times B$ הסדורה בסדר מילוני שמאלי:

זהו הסדר הבא: $(a_1, b_1) \le (a_2, b_2)$ אמ״ם:

$(a_1 \le_A a_2$ ו- $a_1 \ne a_2)$ **או** $(a_1 = a_2$ ו- $b_1 \le_B b_2)$

הדרכה: הדיאגרמה מתקבלת ע״י הצבת העתק של אחת הדיאגרמות (איזו?) בְּמקום כל קדקוד של הדיאגרמה השניה. הסבירו וציירו.

שאלה 5

יהי R יחס מעל קבוצה A , ותהי $B \subseteq A$.

נסמן ב- $R|_B$ את **צמצום** היחס R לקבוצה B, כלומר $R|_B = (B \times B) \cap R$.

הוכח או הפרך :

א. אם R הוא סדר-חלקי מעל A אז $R|_B$ הוא סדר חלקי מעל B.

ב. אם R הוא סדר-חלקי מעל A שאינו סדר-מלא
אז $R|_B$ הוא סדר-חלקי מעל B שאינו סדר-מלא.

ג. אם R הוא פונקציה של A ל- A אז $R|_B$ הוא פונקציה של B ל- B.

שאלה 6

א. הוכח שהפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, אינה חד-חד-ערכית.

ב. הראה שתמונת f (קבוצת כל אברי $\mathbf{R}$ המתקבלים כתמונה על-ידי הפעלת f)
מכילה רק מספרים הגדולים או שווים 1. האם f היא **על** $\mathbf{R}$?

ג. תהי g פונקציה הנתונה ע״י אותו ביטוי כמו f , אך תחום הגדרתה הוא קבוצת הממשיים **הגדולים-ממש** מ- 0 . בנוסף, בזכות סעיף ב נקח את **הטווח** של g להיות קבוצת הממשיים הגדולים-ממש מ- 1 . הוכח ש- g המוגדרת כך היא חד-חד-ערכית ועל.

שאלה 4

הוכח באינדוקציה : לכל n טבעי חיובי, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 4, 5

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2008ג **מועד אחרון להגשה:** יום ב' 28.7.08

אנא שים לב: מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שימו לב: חלק ממטלה זו מתייחס לפרק 5 בתורת הקבוצות, שנמצא בידיכם בחוברת נפרדת.

שאלה 1

א. הוכח שאם $|A-B|=|B-A|$ אז $|A|=|B|$.

הדרכה: לא נתון שהקבוצות סופיות, לכן יש לעבוד לפי הגדרת שוויון עוצמות.

ההנחה על A,B פירושה שקיימת פונקציה חח"ע ועל מסוימת, ועלינו להראות שמכך נובע שקיימת פונקציה חח"ע ועל אחרת...

ב. הראה שאם A,B **סופיות** ו- $|A|=|B|$ אז $|A-B|=|B-A|$.

ג. הראה ע"י דוגמא שטענת סעיף ב אינה נכונה בהכרח עבור A,B שאינן סופיות.

שאלה 2

לכל אחת מהקבוצות הבאות, קבע האם עצמתה היא:

סופית / $\aleph_0$ / C / אינסופית אחרת / לא ניתן לקבוע.

נמק בקיצור.

א. קבוצת כל הנקודות (m, n) במישור, כאשר m, n מספרים שלמים.

ב. איחוד של $\aleph_0$ קבוצות זרות שעוצמת כל אחת מהן היא C.

ג. קבוצת כל הסדרות **הסופיות** של אותיות הלקוחות מאלף-בית שבו $\aleph_0$ אותיות.

ד. קבוצת כל הפונקציות של $\mathbf{R}$ לקבוצה $\{0,1\}$. **הדרכה**: זכור את הגדרת פונקציה אופיינית (עמ' 85 בספר) וראה "אוסף תרגילים פתורים" קבוצה 3 שאלה 2.

שאלה 3

א. הראה כי אם קיימת פונקציה f של A **__על__** B, אז $|B| \le |A|$.

הדרכה: בחר **שרירותית** מקור לכל איבר של B. הסתמך על הגדרת $\le$ שבתחילת פרק 5.

ב. הוכח כי אם E הוא יחס שקילות על קבוצה A, אז $|A/E| \le |A|$,

כאשר A/E היא קבוצת המנה, שהוגדרה בעמוד 67 בספר הלימוד.

הדרכה: סעיף א + ההעתק הטבעי שמתואר בראש עמ' 85 בספר הלימוד ("אפשר לדון..") או הקובץ "יחס שקילות המושרה על-ידי פונקציה" באתר הקורס.

שאלה 4

א. יהיו k_1, k_2, m_1, m_2 עוצמות. הוכח שאם $k_1 \le k_2$ ו- $m_1 \le m_2$ אז $k_1 \cdot m_1 \le k_2 \cdot m_2$.

ב. הוכח: $\aleph_0 \cdot C = C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם).

ג. הוכח: $C^C = 2^C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם ובמשפטים שבחוברת).

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 1-2

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2008ג **מועד אחרון להגשה:** יום א' 3.8.08

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1

א. כמה תת-קבוצות X של $\{1,2,...,10\}$ מקיימות את התנאי: ב- X יש לפחות איבר אי-זוגי אחד ?

ב. כמה סדרות שונות ניתן ליצור מן האותיות שבמילה MISSISSIPPI , כך שבסדרה לא יופיע רצף של 4 S-ים?

שאלה 2

תהיינה A,B קבוצות סופיות, $|A|=n$, $|B|=k$.

א! כמה יחסים (רלציות) דו-מקומיים קיימים מעל A ?

ב! כמה יחסי סדר-מלא קיימים מעל A?

ג! כמה פונקציות של A ל- B קיימות?

ד! כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של A ל- B קיימות?

ה! נניח $|A|=n=3k$, כאשר k טבעי. כמה יחסי שקילות E מעל A מקיימים: כל מחלקות השקילות ש- E מגדיר ב- A הן בעלות 3 איברים בדיוק?

שאלה 3

בכפר הפקאן מצביעים כל 60 בעלי זכות הבחירה בבחירות חשאיות לראשות הכפר.
יש שלושה מועמדים. חשב (תשובה סופית מספרית!):

א. מה מספר התוצאות האפשריות (התפלגות קולות לפי מועמדים)?

ב. מה מספר התוצאות האפשריות בבחירות שבהן אחד המועמדים זוכה ברוב מוחלט (יותר ממחצית הקולות)?

שאלה 4

בכמה דרכים ניתן להציג את המספר 19 כסכום של מחוברים כאשר כל מחובר הוא או 2 או 3 ויש חשיבות לסדר ההופעה של המחוברים? הדרכה: רשום את כל הפתרונות בטבעיים למשוואה $2n+3m=19$. כל פתרון למשוואה זו מייצג מספר פתרונות לבעיה שלנו.

שאלה 5

בתשובה לשאלה 3.17 בספר מתוארות 5 הצורות האפשריות לדיאגרמת הסה של סדר-חלקי מעל הקבוצה $\{1,2,3\}$. העזר בכך וקבע כמה רלציות סדר-חלקי שונות קיימות מעל $\{1,2,3\}$.

מטלת מנחה (ממ״ן) 16

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

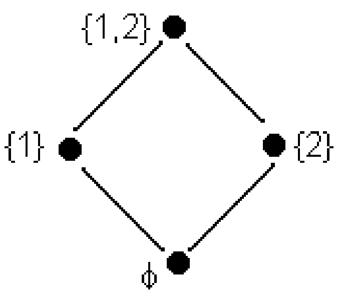
חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה - פרקים 3,4,5

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2008ג **מועד אחרון להגשה:** יום ב׳ 11.8.08

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ״ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1



באיור מופיעה דיאגרמת הסה (״תורת הקבוצות״ עמ׳ 88) של רלצית ההכלה $\subseteq$ מעל $P(\{1,2\})$.

אנו רואים כי בדיאגרמה 4 קטעים.

תהי A קבוצה בת n איברים $(n > 0)$. מצא את מספר הקטעים בדיאגרמת הסה של רלצית ההכלה מעל $P(A)$.

את הביטוי המתקבל סכם לביטוי פשוט (שאינו מכיל סכומים) בעזרת נוסחה המופיעה באחת השאלות בספר הלימוד.

שאלה 2

חשב את פונקצית אוילר $\Theta(126)$ בשתי דרכים:

א. בעזרת הנוסחה שבתחתית עמוד 93 בספר הלימוד.

ב. באופן ישיר בעזרת הכלה והפרדה.

שאלה 3

קרא באתר הקורס את החישוב של מספר הפונקציות של קבוצה סופית A **על** קבוצה סופית B, כאשר $|A|=n$, $|B|=k$.

החישוב הוא בעזרת הכלה והפרדה, והתוצאה היא $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n$.

א. הראה את השוויון הבא **בלי** לחשב בפירוש את הסכום שבאגף שמאל:

$$5^2-5\cdot 4^2+\binom{5}{2}\cdot 3^2-\binom{5}{3}\cdot 2^2+5\cdot 1=0$$

ב. נסח הכללה של משוואה זו: מיהם כל הסכומים מסוג זה השווים אפס? תן תשובה כללית ככל שניתן, שאף קבוע מספרי אינו מופיע בה.

שאלה 4

A היא קבוצה בת 9 איברים, החלקית לקבוצה $\{4,5,6,\ldots,60,61\}$.

א. הראה כי קיימות (לפחות) שתי תת-קבוצות שונות של A, שסכום איבריהן שווה.

(הדרכה: עקרון שובך היונים).

שים לב שהשאלה מתייחסת לתת-קבוצות של הקבוצה הלא-ידועה A,

לא לתת-קבוצות כלשהן של $\{4,5,6,\ldots,60,61\}$!

ב. הראה כי קיימות (לפחות) שתי קבוצות **זרות** כאלו.

הדרכה: נובע בקלות מסעיף א' ללא שיקולים קומבינטוריים!

מטלת מנחה (ממ"ן) 17

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה - פרקים 6-7.3

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2008ג **מועד אחרון להגשה:** יום ב' 18.8.08

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 7

יהי a_n מספר הסדרות באורך n, שאבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,\ldots,8\}$, והמקיימות את התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים **זוגיים** זה בסמוך לזה. למשל אם $n = 5$ הסדרה $(1,1,2,6,3)$ אינה מותרת, מכיון ש- 2 מופיע ליד 6.
גם הסדרה $(1,1,2,2,3)$ אסורה, כי יש שתי הופעות צמודות של 2.

א. מצא יחס נסיגה (יחס רקורסיה) עבור a_n. רשום את a_0, a_1, a_2.
בדוק שהערך שרשמת עבור a_0 מתאים ליחס הנסיגה שרשמת.

ב. רשום את המשוואה האופיינית ("קומבינטוריקה" עמ' 117), פתור את יחס הנסיגה, וקבל ביטוי מפורש עבור a_n. ביטויים כגון $\sqrt{48}$ יש להעביר לצורה כגון $4\sqrt{3}$, ו<u>אין</u> להציב במקומם קירובים עשרוניים כגון *6.93*.

שאלה 8

א. מצא את המקדם של x^k בפיתוח הביטוי: $(1+x+x^2)(1+x)^n$.

ב. מצא את המקדם של x^{16} בפיתוח הביטוי: $\frac{5x^2 - x^4}{(1-x)^3}$.

שאלה 3

פתח לטורים את שני אגפי הזהות

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{n} \cdot (1+x)^{2n} = (1+x)^{n}$$

וקבל ע"י השוואת המקדמים בשני האגפים את הזהות:

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{i} D(n,i) \binom{2n}{k-i} = \binom{n}{k}$$

בדוק זהות זו עבור המקרה $n = 4$, $k = 3$.

שאלה 4

א. כיתבו פונקציה יוצרת עבור מספר האפשרויות להציג מספר טבעי $r \geq 1$ כסכום של שלושה מחוברים שלמים חיוביים **ללא חשיבות לסדר המחוברים**.

לדוגמא: $8 = 2+3+3 = 1+2+5 = 1+1+6$

הן שלוש הצגות אפשריות של $r = 8$. אלה כמובן לא כל הדרכים להציג את 8 כמבוקש.

הדרכה: מכיון שאין חשיבות לסדר, התשובה **אינה** (!) $(x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^3$.

כדי להגיע לפונקציה יוצרת כדאי לומר כך: אם אין חשיבות לסדר, נדרוש $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

כדאי גם לעיין בשאלה 7.12 בעמוד 130 בספר.

ב. כיתבו פונקציה יוצרת עבור מספר האפשרויות להציג מספר טבעי $r \geq 1$ כסכום של מספר כלשהו של מחוברים שלמים וחיוביים, **ללא חשיבות לסדר**, כשהגדול שבהם **שווה** לשלוש.

לדוגמה: $8=1+1+3+3=2+3+3=1+2+2+3$

הן שלוש הצגות אפשריות של $r = 8$. אלה כמובן לא כל הדרכים להציג את 8 כמבוקש.

כדאי לעיין בפתרון שאלה 7.12 בספר.

ג. מה ניתן להסיק מהשוואת התשובות לסעיפים א' ו-ב'?

מטלת מנחה (ממ"ן) 18

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: לוגיקה פרקים 1 - 2

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2008ג **מועד אחרון להגשה:** יום ג' 26.8.08

אנא שים לב: מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.   העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 9

השאלה מתייחסת לשפת תחשיב הפסוקים ה"רשמית", בה קיימים רק שני קשרים: $\sim$, $\rightarrow$.

אפשר להסתמך על האמור בכרך "לוגיקה" עמ' 48, 49 ובפרט בשאלות 2.13, 2.14 ותשובותיהן.

לכל פסוק α, יהיו:

$h[\alpha]$: מספר ההופעות של קשר השלילה ב- α.

$f[\alpha]$: מספר ההופעות של הקשר $\rightarrow$ ב- α.

$s[\alpha]$: מספר ההופעות של סוגרים שמאליים ב- α.

(4 נק') א. השלימי את ההגדרה הרקורסיבית הבאה של h (אין צורך לנמק):

עבור פסוק יסודי P: $h[P] = \ldots$

לכל פסוק α: $h[\sim(\alpha)] = \ldots$

לכל שני פסוקים α, β: $h[(\alpha) \rightarrow (\beta)] = \ldots$

(4 נק') ב. כנ"ל עבור f.

(4 נק') ג. כנ"ל עבור s.

(13 נק') ד. הוכיחי **באינדוקציה על בניית פסוק** את הנוסחה: $s[\alpha] = h[\alpha] + 2f[\alpha]$.

שאלה 10

יהי K הקשֶר הבינרי הבא: $K(A,B) \equiv A \downarrow (\sim B)$ (הקשר $\downarrow$ מוגדר בעמוד 34).

א. רשום את לוח האמת של הקשר K.

ב. קבוצה שלמה של קשרים מוגדרת בכרך "לוגיקה" עמ' 35 בשוליים.

האם $\{K\}$ היא קבוצה שלמה של קשרים? הוכח את תשובתך.

רמז: הסתכל באינטרפרטציה שבה כל הפסוקים היסודיים שקריים.

שאלה 11

לפניך שש השערות הנוגעות לסיום סדרת ספרי הארי פוטר:

a: הקמיע (Locket) הוא הורקראקס או שהארי הוא הורקראקס.

b: אם וולדמורט מנסה לחסל הורקראקס של עצמו אז וולדמורט עצמו נפגע.

c: הקמיע הציל את הארי כשהיה תינוק, ו- וולדמורט נפגע.

d: וולדמורט מנסה לחסל הורקראקס של עצמו אם ורק אם (הקמיע הוא הורקראקס או שהארי הוא הורקראקס).

e: אם הארי הוא הורקראקס אז וולדמורט מנסה לחסל הורקראקס של עצמו.

f: אם הקמיע הוא הורקראקס אז וולדמורט נפגע.

(10 נקי) א. הגדר פסוקים יסודיים מתאימים ורשום את a,b,c,d,e,f בכתיב פורמלי.
כתיב מקוצר מותר, ואפשר להשתמש בכל הקשרים הלוגיים $\sim, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$.
משמעות המילה "או" בטקסט היא, כמקובל במתמטיקה, $\vee$.

(15 נקי) ב. לגבי כל אחת מהטענות 1 - 3 שלהלן, קבע אם היא **נכונה או לא**.
הוכח את תשובותיך.

1) $\{b,d\} \models f$ ( )

2) $\sim f$ היא הטענה הבאה (או שקולה טאוטולוגית אליה): ( )

אם הקמיע אינו הורקראקס אז וולדמורט אינו נפגע.

3) $e \models d$ ( )

שאלה 4

מצא פסוק בצורה קוניונקטיבית נורמלית, ופסוק בצורה דיסיונקטיבית נורמלית (עמ' 62 בספר הלימוד), השקולים לפסוק $((\sim P_0) \vee P_1) \rightarrow (P_2 \rightarrow (\sim P_0))$. כתיב מקוצר מותר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 19

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: לוגיקה סעיפים 3.1 - 3.10

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2008ג **מועד אחרון להגשה:** יום ה' 4.9.08

אנא שים לב:
מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1

קבע לכל אחד מהביטויים הבאים אם הוא שם-עצם, תבנית אטומית, תבנית שאינה אטומית, פסוק, או שאינו עונה על אף אחת מהגדרות אלו (ביטוי לא תקין). כתיב מקוצר - מותר. שים לב שביטוי יכול להתאים ליותר מהגדרה אחת! עבור הביטוי או הביטויים **שאינם** תקינים, הסבר בקצרה מדוע הם אינם תקינים. עבור הביטויים התקינים אין צורך לנמק.

א. $f_1^1(f_1^3(a_1,a_1,x_1))$ ב. $(f_1^1(x_1)) \to (f_1^1(a_1))$ ג. $\forall x_1 A_1^2(x_1,a_8)$

ד. $\forall x_1 \exists x_2 f_1^2(x_1,x_2)$ ה. $A_2^2(x_1, f_1^2(x_1, f_1^1(a_1)))$

ו. $\forall x_1 \exists x_2 (A_1^2(a_1,x_2) \vee A_1^1(x_1))$

שאלה 2

נתבונן בארבע הטענות הבאות:

1. יש אתרים בעלי תוכן שימושי ועיצוב נאה.
2. יש אתרים שאינם מכילים קישור לאף אתר בעל תוכן שימושי.
3. כל אתר בעל תוכן שימושי הוא בעל עיצוב נאה או מכיל קישור לאתר בעל עיצוב נאה.
4. יש אתר, שלא כל האתרים בעולם מכילים קישור אליו.

נסמן $S(x)$: x הוא אתר בעל תוכן שימושי. $G(x)$: x הוא אתר בעל עיצוב נאה.

יהי K סימן יחס נוסף. תן פירוש מתאים ל- K בעולם שהוא קבוצת כל האתרים, ורשום תבניות $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ המייצגות בהתאמה את הטענות 1,2,3,4 בעולם זה.

שים לב לתנאים ודרישות אלה:

* ציין איך מתפרש K, ואם הוא יחס חד-מקומי, דו-מקומי או אחר. (המשך בעמוד הבא)

(המשך שאלה 2)

* סימני היחסים היחידים בהם מותר להשתמש הם S,G,K . אין סימני פונקציות ואין סימני קבועים. כל יתר מרכיבי השפה עומדים לרשותך במידת הצורך
* אין צורך בסימן עבור התכונה "x הוא אתר", מכיון שעולם האינטרפרטציה מכיל רק אתרים.
* בכל מקום של ספק, הקפד לציין תחום תחולת כמתים ע"י סוגרים.
* את הביטוי המילולי "יש אתרים..." המופיע שם יש להבין כ- "יש אתר אחד לפחות...".

שאלה 3

תהי L שפה חלקית לשפת תחשיב הפרדיקטים, ובה סימנים אלה: קשרים לוגיים, סוגרים, סימני משתנים $x_1, x_2, \ldots$, סימן פרדיקט דו-מקומי R , סימן פרדיקט דו-מקומי A_1^2 המתפרש כרגיל כשוויון וסימני הכמתים $\forall, \exists$. אין סימני פונקציות או פרדיקטים נוספים ואין סימני קבועים אישיים.

בכל סעיף, רשום פסוק בשפה L , האומר את הנדרש באותו סעיף, כאשר בפסוק שאתה רושם כל הכמתים, אם מופיעים, מופיעים **לפני** כל הופעה של סימן השלילה, אם הוא מופיע (במלים אחרות - הכנס את השלילה פנימה בעזרת זהויות ידועות).

א. R **אינו** יחס רפלקסיבי.

ב. R **אינו** יחס סימטרי.

ג. R **אינו** יחס טרנזיטיבי.

שאלה 4

תהיינה ψ,φ תבניות. נתבונן בשתי תבניות:

התבנית $\exists x(\psi \wedge \varphi)$ והתבנית $(\exists x\psi) \wedge (\exists x\varphi)$.

א. הראה בעזרת אינטרפרטציה מתאימה כי שתי תבניות אלה **אינן** שקולות לוגית זו לזו.

ב. הראה כי אחת מהן (איזו?) גוררת לוגית את השניה.

יש לנמק את התשובות. הוכחה פורמלית לגמרי של סעיף ב תסתמך על סעיף 4 של הגדרה 3.14. סעיף זה אינו קל להבנה והשימוש בו בהוכחה מסורבל למדי. נסתפק גם בנימוק פחות פורמלי, אך הנימוק חייב להיעזר במושגים **אינטרפרטציה והשמה**.