פתרונות לממ"ן 13 בקורס "אלגוריתמים", סמסטר ב' 2006

שימו לב: לעיתים חסרים פרטים בפתרון ואתם מתבקשים לוודא שהינכם יודעים להשלים את הפרטים החסרים. בכל מקרה כזה, הדבר מצויין במפורש, ואין לראות בפתרון הנתון תשובה מלאה.

שאלה 1

הגדרה: **גרף מעורב** הוא גרף שבו כמה מהקשתות מכוונות והאחרות אינן מכוונות.

הוכיחו שאם בגרף מעורב התת-גרף המתקבל מכל צמתי הגרף ומהקשתות המכוונות בלבד אינו מכיל מעגל מכוון, אז תמיד ניתן לכוון את הקשתות הלא מכוונות כך שבגרף המכוון המתקבל אין מעגל מכוון. הראו כיצד ניתן למצוא כיוון מתאים לקשתות בזמן $O(|V| + |E|)$.

רמז: מצאו קודם את האלגוריתם המבצע את הכיוון ומהוכחת נכונותו הסיקו כי קיים כיוון כנדרש.

תשובה

נפתור ע"י רדוקציה למיון טופולוגי. בשלב ראשון נתייחס לתת-גרף המכוון G', הכולל רק את הקשתות המכוונות. מאחר שזהו גרף מכוון חסר מעגלים אפשר להפעיל עליו מיון טופולוגי בזמן ליניארי, ולקבל סידור של הצמתים כך שכל קשתות הגרף מכוונות תמיד מצומת בעל מספר סידורי נמוך לצומת בעל מספר סידורי גבוה. כעת נוסיף את הקשתות הלא מכוונות, ונכוון אותן כך שכל קשת תהיה תמיד מצומת שמספרו הסידורי במיון הטופולוגי נמוך יותר אל צומת שמספרו הסידורי במיון הטופולוגי גבוה יותר.

התקבל גרף מכוון שבו כל הקשתות מכוונות תמיד מצומת בעל מספר סידורי נמוך לצומת בעל מספר סידורי גבוה. נניח שיש בגרף מעגל מכוון $v_1, \ldots, v_n, v_1$ ויהי $d(v_i)$ מספרו הסידורי של v_i במיון הטופולוגי.

אז נקבל $d(v_1) < \ldots < d(v_n) < d(v_1)$, כלומר $d(v_1) < d(v_1)$. לכן, בהכרח אין מעגל בגרף.

שאלה 2

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון עם פונקציית משקל לצמתים $w : V \rightarrow R$, כך שמשקלי הצמתים שונים זה מזה. קבוצת קשתות הגרף מוגדרת כך: קשת (u, v) שייכת ל-E אם ורק אם $w(u) < w(v)$.

1. הראו ש-G הוא טרנזיטיבי, כלומר, אם קיימות בו הקשתות (u, v) ו-(v, y) אז בהכרח קיימת בו גם הקשת (u, y).
2. הראו ש-G חסר מעגלים.
3. ברצוננו למיין n מספרים ממשיים נתונים. הניחו שקיים גרף G בעל n צמתים שהמספרים הנתונים הם המשקלות של צמתיו וקבוצת הקשתות שלו מקיימת את התנאי שניתן בתחילת השאלה. כתבו אלגוריתם המקבל כקלט את G וסיבוכיותו ליניארית במספר קשתות הגרף G, וממיין את n המספרים הנתונים. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.
4. מדוע אין קיומו של האלגוריתם שהראיתם בסעיף ג' סותר את החסם התחתון הידוע למיון n מספרים?

תשובה

א. אם קיימת הקשת (u, v) אז $w(u) < w(v)$. אם קיימת הקשת (v, y) אז $w(v) < w(y)$. לכן נקבל $w(u) < w(y)$, ומכאן קיימת הקשת (u, y).

ב. בדומה לשאלה הקודמת, נניח שיש בגרף מעגל מכוון $v_1, \ldots, v_n, v_1$ עם n צמתים.
מהנתון נובע $w(v_1) < \ldots < w(v_n) < w(v_1)$, כלומר $w(v_1) < w(v_1)$. לכן, בהכרח אין מעגל בגרף.

ג. נפתור ע"י רדוקציה למיון טופולוגי. נבצע מיון טופולוגי על הגרף (בעזרת DFS, בעלות $O(|V| + |E|)$). נחזיר את הצמתים על פי סדר המיון הטופולוגי. נראה שבהכרח הצמתים מוחזרים כשהם ממוינים ע"פ ערכי המשקל. נניח

בשלילה שקיימים שני צמתים u ו-v כך ש-$w(u)<w(v)$ אבל האלגוריתם מחזיר את v לפני u. אבל, מאחר ש-$w(u)<w(v)$ אז בהכרח קיימת הקשת (u, v), בסתירה לכך ש-v מופיע לפני u במיון הטופולוגי.

ד. מיון טופולוגי הוא אכן ליניארי במספר קשתות הגרף. אבל, אם יש n צמתים בגרף, אז מספר הקשתות הוא $O(n^2)$ (מהצומת עם המשקל הקטן ביותר יוצאות $n-1$ קשתות, מהבא אחריו $n-2$ וכך הלאה. מתקבל טור חשבוני שסכומו הוא $O(n^2)$). ולכן, אם האלגוריתם הזה מקבל כקלט n מספרים עלותו היא $O(n^2)$.

שאלה 3

כתבו אלגוריתם שסיבוכיותו $O(|V|+|E|)$ המקבל כקלט גרף מכוון חסר מעגלים ומחזיר את אורכו של מסלול פשוט ארוך ביותר בגרף.
הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

תשובה

נפתור ע״י רדוקציה למיון טופולוגי. נבצע מיון טופולוגי על הגרף (בעזרת DFS, בעלות $O(|V|+|E|)$). עתה נעבור על הצמתים בסדר הפוך לסדר המיון (כלומר, נתחיל מהבורות, מהצמתים שדרגת היציאה שלהם 0) ונבצע:
לכל צומת v (ע״פ הסדר שתואר לעיל):

1. $len(v)=0$
2. עבור כל קשת $e=(v, u)$
   2.1. $len(v)=\max(len(v), len(u)+1)$

בסיום האלגוריתם $len(v)$ הוא אורך המסלול הפשוט הארוך ביותר שמתחיל מ-v ולכן יש עוד למצוא את הערך המקסימלי מבין $len(v)$ עבור כל צומת v שהוא מקור בגרף (כלומר, עם דרגת כניסה שווה ל-0).

הסיבוכיות היא $O(|V|+|E|)$.

את הנכונות נוכיח באינדוקציה על מיקומו של v בסדר שתואר לעיל.

בסיס: v הוא בהכרח בור, שאין לו קשתות יוצאות. לכן ערך len שלו יאותחל ל-0 בצעד 1 ולא ישתנה. ואכן ברור שאורכו של מסלול פשוט ארוך ביותר שיוצא מ-v הוא 0, כי זה מסלול שמכיל רק את v עצמו.

נניח כעת שכל הצמתים שמופיעים בסדר האלגוריתם לפני v קיבלו ערך len נכון ונוכיח כי גם ערך len של v הוא נכון. עבור כל קשת $e=(v, u)$, ברור ש-u מופיע לפני v במיון הטופולוגי, ולכן האלגוריתם עבר עליו לפני שהגיע ל-v, ולכן בשלב זה הערך $len(u)$ נכון לכל צומת u כך שקיימת הקשת (v, u). ברור כי אורכו של מסלול פשוט ארוך ביותר היוצא מ-v גדול ב-1 מאורכו של מסלול פשוט ארוך ביותר שיוצא מאחד משכניו של v ולכן גם הערך $len(v)$ הוא נכון.

שאלה 4

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר ולא מכוון. G נקרא **שרוכי** אם בכל הרצת DFS עליו, העץ המתקבל הוא מסלול פשוט המתחיל בצומת שבו החל החיפוש. G נקרא **שפיר** אם בכל חיפוש DFS על G, שבו מחושבים גם ערכי L (lowpoint) לכל צומת v מתקיים $L(v)=1$.

א. הוכיחו: אם $|V|>2$ אז G שרוכי אם ורק אם G שפיר.

ב. הוכיחו: כל גרף שרוכי הוא לא פריק.

תשובה

א. כיוון ראשון: נניח ש-G שרוכי, כלומר, בכל חיפוש DFS מתקבל מסלול פשוט. עבור ריצת DFS נתונה יהי p המסלול המתקבל. יהי v_n הצומת האחרון במסלול ו-v_1 הצומת הראשון במסלול. נניח שאין קשת מ-v_n ל-v_1. נסתכל על ריצת DFS הבאה: נתחיל ב-v_2 ומשם נמשיך כמו במסלול p עד ל-v_n. אז נהיה חייבים לסגת כי אין קשת ל-v_1 וביקרנו כבר בכל שאר הצמתים. זו סתירה להיות G גרף שרוכי. לכן, בכל ריצת DFS יש קשת מהצומת האחרון במסלול לצומת הראשון ולכן ערך L של כל הצמתים במסלול (ובגרף) הוא 1, ו-G שפיר.

כיוון שני: נניח ש-G שפיר ונניח בשלילה שיש ביצוע DFS על G שלא נותן מסלול פשוט. כלומר, יש צומת שממנה יש פיצול בעץ ויש בעץ לפחות שני עלים v ו-u. נניח ב.ה.כ שהביצוע הגיע קודם ל-u ואז נסוג. נתחיל ביצוע DFS נוסף מ-v. מאחר ש-G שפיר בביצוע זה $L(u)=1$, כלומר, יש קשת מ-u ל-v, ולכן לא היינו צריכים לסגת בביצוע הראשון, בסתירה להנחה, לכן G שרוכי.

ב. אם G גרף שרוכי אז מסעיף א׳ בכל ריצת DFS $L(v)=1$ לכל צומת v. נסתכל על ריצת DFS נתונה ויהי u צומת שאינו השורש בריצה זו. בהכרח $d(u)>1$ ו-$L(u)=1$ ולכן $L(u)<d(u)$ ולכן u אינו צומת הפרדה. ידוע כי השורש הוא צומת הפרדה רק אם יש לו לפחות שני בנים אבל גם זה לא מתקיים כי בגלל ש-G שרוכי הריצה נותנת מסלול פשוט. לכן אין בגרף צמתי הפרדה והוא לא פריק.

שאלה 5

הוכח או הפרך:

אם בגרף מכוון יש קשתות הנכנסות לצומת u וגם קשתות היוצאות ממנו, אזי לא ייתכן שבהרצת DFS על הגרף הצומת u יימצא בעץ המכיל אותו בלבד.

תשובה

הטענה אינה נכונה. הסיבה טמונה בסידור הקודקודים לרשימות שכנויות בסידור הגרף. אם קודקוד u נמצא על מעגל, לעולם הוא לא יהיה מבודד בעץ ה-DFS (ממשפט המסילה הלבנה). אחרת, אם בייצוג הגרף כל הקודקודים הנגישים מ-u (וש-u אינו נגיש מהם, אחרת u על מעגל) יופיעו לפני u, האלגוריתם יבקר בהם לפני שהוא מבקר ב-u, ואם u מופיע לפני הקודקודים שהוא נגיש מהם, האלגוריתם יבקר בו לפני שהוא מבקר בקודקודים שהוא נגיש מהם וכך u יהיה מבודד. למשל נסתכל על גרף שבו שלושה צמתים 1, 2, ו- 3 ושתי קשתות (1, 2) ו-(2, 3), ונניח שבייצוג הגרף מופיע קודם כל הצומת 3, אח״כ הצומת 2 ואח״כ הצומת 1. במקרה זה, הצומת 2 יהיה מבודד ביער ה-DFS.