20425 - תאריך הבחינה: 7.7.2011 (סמסטר 2011ב - מועד 3א / 84)

שאלה 1

א. הוכחת הטענה מובאת בספר הקורס.

ב1. מספר הכדורים הנבחרים הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר $0.02 = \frac{20}{1,000}$. נסמן משתנה מקרי זה ב- X ונקבל: $P\{X < 48\} = 1 - P\{X \geq 48\} = 1 - P\{X > 47\} = 1 - (1-0.02)^{47} = 0.6131$

ב.2 סך כל בחירות הכדורים ב-7 החזרות הוא משתנה מקרי בינומי-שלילי עם הפרמטרים 7 ו-0.02. לכן, אם נסמן משתנה מקרי זה ב- Y נקבל: $P\{Y = 360\} = \binom{359}{6} \cdot 0.02^7 (1-0.02)^{353} = 0.00292$

שאלה 2

א. המאורע $\{X \leq 1\}$ מתרחש אם יונתן ודן עומדים במקומות סמוכים או אם עומד ביניהם בדיוק אדם אחד.

$$P\{X \leq 1\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{(n-1)\cdot 2\cdot (n-2)!}{n!} + \frac{(n-2)\cdot 2\cdot (n-2)!}{n!} = \frac{2(n-1+n-2)}{n(n-1)} = \frac{2(2n-3)}{n(n-1)}$$

ב. נגדיר: $X_i = \begin{cases} 1 & , \text{אדם } i \text{ עומד בין יונתן לדן} \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$ לכל $i = 1,\ldots,n-2$

ונקבל כי: $X = \sum_{i=1}^{n-2} X_i =$ מספר האנשים שעומדים בין יונתן לדן

נחשב את התוחלת של X_i, לכל $i = 1,\ldots,n-2$. לצורך כך, מספיק להתבונן על הסידורים הפנימיים של יונתן, דן והאדם ה-i-י. לכל 3 אנשים יש !3 סידורים פנימיים שווי-הסתברות, ובשניים מהם האדם ה-i-י הוא המרכזי מבין השלושה. לפיכך: $E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$

ומכאן: $E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n-2} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n-2} E[X_i] = (n-2)\cdot\frac{1}{3} = \frac{n-2}{3}$

ג. אם בין יונתן לדן עומדים X אנשים ואם המרחק בין כל שני אנשים הוא 2 מטר, אז המרחק בין יונתן לדן הוא $2(X+1)$ מטר. לפיכך, התוחלת של המרחק ביניהם היא:

$$E[2(X+1)] = 2E[X] + 2 = \frac{2(n-2)}{3} + 2 = \frac{2(n+1)}{3}$$

ד. אמנון ותמר הם שניים מבין $n-2$ האנשים שיכולים לעמוד בין יונתן לדן. לכן, ההסתברות המבוקשת היא:

$$E[X_i X_j] = P\{X_i = 1, X_j = 1\} = \frac{2!\cdot 2!}{4!} = \frac{1}{6}$$

שאלה 3

א. בחירת המספרים היא אקראית, ולכן לכל השלישיות (הסדורות) השונות של מספרים מהקבוצה יש סיכויים שווים להיבחר. לפיכך, לכל $i, j, k = 0,1,\ldots,10$ כך ש- i, j ו- k שונים זה מזה, מתקיים:

$$P\{X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k\} = \frac{1}{10\cdot 9\cdot 8} = \frac{1}{720}$$

ב. בחירת המספרים היא אקראית, ולכן הבחירה השלישית יכולה להיות של כל אחד מ-10 המספרים בהסתברויות שוות. כלומר, מתקיים: $P\{X_3 = k\} = \frac{1}{10} \quad , \quad k = 1,2,\ldots,10$

ג. כל !3 התוצאות האפשריות שכוללות את המספרים i , j ו- k הן שוות-הסתברות. לכן, כדי לקבל את ההסתברות המבוקשת, יש לחשב בכמה מהן מתקיים המאורע $\{X_1 < X_2, X_1 < X_3\}$. כלומר:

$$P\{X_1 < X_2, X_1 < X_3\} = P\{X_1 < X_2 < X_3\} + P\{X_1 < X_3 < X_2\} = \tfrac{2}{3!} = \tfrac{1}{3}$$

ד. $$P\{X_3 = 8 \mid X_2 < X_3\} = \frac{P\{X_2 < X_3 = 8\}}{P\{X_2 < X_3\}} = \frac{P\{X_2 < X_3 \mid X_3 = 8\}P\{X_3 = 8\}}{P\{X_2 < X_3\}} = \frac{\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{45}$$

שאלה 4

א. נסמן ב- X את המשקל של תפוח אקראי מזן "חרמון" שגודל במטע A. מתקיים: $X \sim N(150, 20^2)$.
כדי למצוא את המשקל המינימלי של התפוחים שנשלחים לשיווק בארץ, נמצא את המשקל ש-15% מהתפוחים שוקלים פחות ממנו.

$$P\{X < a\} = \Phi(\tfrac{a-150}{20}) = 0.15 = \Phi(-1.036) \quad \Rightarrow \quad a = 150 - 1.036 \cdot 20 = 129.28$$

כלומר, המשקל המינימלי של התפוחים המשווקים בארץ הוא 129.28 גרם.

ב1. $$P\{120 < X < 130\} = P\{\tfrac{120-150}{20} < Z < \tfrac{130-150}{20}\} = \Phi(-1) - \Phi(-1.5) = 0.1587 - 0.0668 = 0.0919$$

כעת, נסמן ב- Y את מספר התפוחים שמשקלם בין 120 גרם לבין 130 גרם. למשתנה המקרי Y יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 2 ו-0.0919. לכן: $P\{Y = 10\} = \binom{20}{3} \cdot 0.0919^3 \cdot 0.9081^{17} = 0.1718$

ב2. ההסתברות ש- 20 התפוחים יחולקו ל-3 הקבוצות היא מולטינומית עם הפרמטרים 20 ו- $(0.15, 0.6, 0.25)$.
לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{20!}{4!11!5!} \cdot 0.15^4 \cdot 0.6^{11} \cdot 0.25^5 = 0.03796$

ג1. נסמן ב- W את המשקל של תפוח אקראי מזן "חרמון" ממטע B. מתקיים: $W \sim N(160, 25^2)$.
את המשקל הכולל של 3 התפוחים המקריים ממטע A ושל 5 התפוחים המקריים ממטע B, נסמן ב- S.
את המשתנה המקרי S אפשר לבטא כך: $S = \sum_{i=1}^{3} X_i + \sum_{j=1}^{5} W_j$

כאשר X_i הוא משקל של תפוח מקרי ממטע A ו- W_j הוא משקל של תפוח מקרי ממטע B.

התוחלת של S היא: $E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{3} X_i + \sum_{j=1}^{5} W_j\right] = \sum_{i=1}^{3} E[X_i] + \sum_{j=1}^{5} E[W_j] = 3\cdot 150 + 5\cdot 160 = 1{,}250$

לחישוב שונות המשקל הכולל יש להניח שאין תלות בין משקלי התפוחים מהמטעים השונים (מעבר להנחה שאין תלות בין משקלי תפוחים מאותו המטע). תחת הנחה זו מתקיים:

$$\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{3} X_i + \sum_{j=1}^{5} W_j\right) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{j=1}^{5} \mathrm{Var}(W_j) = 3\cdot 20^2 + 5\cdot 25^2 = 4{,}325$$

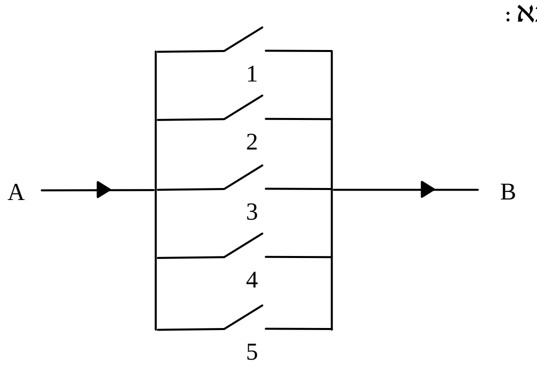
לפיכך, סטיית התקן של המשקל הכולל היא $\sqrt{4{,}325} = 65.765$.

ג2. לפי אי-שוויון צ'בישב:

$$P\{1{,}150 \le S \le 1{,}350\} = P\{|S - 1{,}250| \le 100\} = 1 - P\{|S - 1{,}250| > 100\}$$
$$\ge 1 - P\{|S - 1{,}250| \ge 100\} \ge 1 - \frac{4{,}325}{10{,}000} = 0.5675$$

שאלה 5

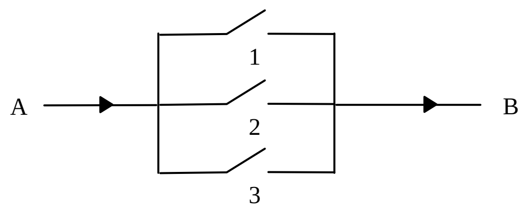
א. ההסתברות שלא יעבור במעגל זרם היא 0.2^5. כלומר, לא עובר זרם במעגל רק אם כל המתגים פתוחים. לפיכך, המתגים מחוברים בהכרח במקביל, באופן הבא :



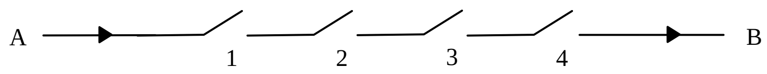
ב. לפי כלל ההכלה וההפרדה לשלושה מאורעות, שההסתברות של כל אחד מהם היא 0.8, מתקיים :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3 \cdot 0.8 - 3 \cdot 0.8^2 + 0.8^3$$

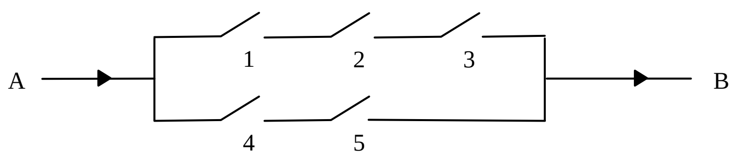
לפיכך, במעגל עובר זרם אם לפחות אחד מן המתגים סגור, כלומר אם צורת המעגל היא :



ג. ההסתברות שיעבור במעגל זרם היא 0.8^4. כלומר, עובר זרם במעגל רק אם כל המתגים סגורים. לפיכך, המתגים מחוברים בהכרח בטור, באופן הבא :



ד. ההסתברות הנתונה היא תוצאה של הצבה בכלל ההכלה וההפרדה לשני מאורעות <u>בלתי-תלויים</u>. המאורע הראשון – הסתברותו 0.8^2; והמאורע השני – הסתברותו 0.8^3. לכן, המעגל יהיה בנוי משני ענפים מקבילים, כך שבענף הראשון יש 2 מתגים בטור, ובשני יש 3 מתגים בטור. כלומר :



ה. ההסתברות הנתונה היא מכפלה של שתי הסתברויות, שמצביעה על כך שהמעגל בנוי משני חלקים בלתי-תלויים הבנויים בטור. בחלק הראשון, שני מתגים בטור, וההסתברות שיעבור בהם זרם היא 0.8^2; בחלק השני, בדומה לסעיף ב, 3 מתגים במקביל. כלומר :