

מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה.

בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- * יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
 - * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
 - * אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
 - * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
-

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר של כמה מלים, לא יותר משתי שורות. ההסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם ניקוד חלקי אם בחרתם תשובה לא נכונה.

(7 נק') א. הנה טענה לגבי יחס (רלציה) מעל קבוצה מסוימת: $\neg \forall x \exists y R(x, y)$ (*)

הנה עוד 3 טענות:

$\alpha : \forall x (\neg \exists y R(x, y))$ $\beta : \exists x \forall y \neg R(x, y)$ $\gamma : \forall x \forall y \neg R(x, y)$

בין הטענות α, β, γ , לאיזה יש אותה משמעות כמו טענה (*) שבראש השאלה?

[1] α בלבד [2] β בלבד [3] γ בלבד

[4] α, β [5] α, γ [6] β, γ

(6 נק') ב. תהי A קבוצת הפונקציות של N לקבוצה $\{0, 1\}$, המקיימות:

לכל $n > 100$, $f(n) = 0$, (אין דרישה מיוחדת מ- $f(n)$ כאשר $n \leq 100$).
עוצמתה של A היא:

[1] מספר סופי [2] \aleph_0 [3] C

[4] גדולה מ- C [5] לא ניתן לקבוע מהנתונים את עוצמת A

(6 נק') ג. נסמן ב- G את הגרף הדו-צדדי המלא $K_{3,5}$ ("תורת הגרפים" הגדרה 1.5).

G הוא אפוא גרף על 8 צמתים.

מספר הקשתות בגרף המשלים (!) של G (הגדרה 1.4), הוא:

[1] 8 [2] 13 [3] 15

[4] 20 [5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2 (9 נקודות לכל סעיף)

- א. תנו דוגמא ליחס R שהוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל $A = \{1, 2, 3\}$, אך $R \cup R^{-1}$ אינו יחס שקילות מעל A . הראו שהדוגמא שנתתם מקיימת את הנדרש.
- ב. תנו דוגמא ליחס R מעל $A = \{1, 2, 3\}$ כך ש- $R \cup R^2$ אינו טרנזיטיבי. הראו שהדוגמא שנתתם מקיימת את הנדרש.
- ג. A היא קבוצה בת 24 איברים, E הוא יחס שקילות מעל A . מחלק את A ל-7 מחלקות שקילות: 3 מחלקות שבכל אחת מהן ארבעה איברים ו-4 מחלקות שבכל אחת מהן שלושה איברים. מהו $|E|$, כלומר כמה זוגות סדורים יש ב- E ? הוכיחו.

שאלה 3

ברשותנו כדורים אדומים, כדורים כחולים, כדורים ירוקים וכדורים לבנים, מכל צבע בדיוק 10 כדורים. בכמה דרכים ניתן לבחור מתוכם 25 כדורים, ללא חשיבות לסדר הבחירה? כדורים בעלי אותו צבע נחשבים זהים. יש להגיע לתשובה סופית מספרית, ולא ע"י חישוב סכום של עשרות מחוברים. אפשר לפתור בעזרת פונקציה יוצרת או בעזרת הכלה והפרדה.

שאלה 4

- א. (5 נק') מהו מספר המחרוזות באורך 12 הבנויות מ-7 הופעות של 0 ו-5 הופעות של 1? למשל 110001000011 היא מחרוזת כזו.
- ב. (11 נק') בכמה מהמחרוזות שבסעיף א אין הופעות צמודות של 1, כלומר אין הופעה של המחרוזת "11"? הדרכה לפתרון מהיר: חשבו על ספרות 0 כעל מחיצות.
- ג. (11 נק') מצאו כמה קבוצות X מקיימות: $|X| = 5$, $X \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 12\}$, וב- X לא נמצאים אף שני מספרים שההפרש ביניהם הוא 1. (לכל i טבעי, אם $i \in X$ אז $i+1 \notin X$). הדרכה: היעזרו במושג "פונקציה אופיינית" ("תורת הקבוצות" עמ' 85).

שאלה 5 בעמוד הבא

שאלה 5

תהי $A = \{1, 2, 3\}$ ותהי $V = A \times A$.
הגרף G מוגדר כך: קבוצת הצמתים של G היא הקבוצה V הנתונה למעלה.
למשל הזוג הסדור $(2, 1)$ הוא צומת של G .
בין צומת (a, b) לצומת (c, d) יש קשת אם ורק אם $(a + b) - (c + d) = \pm 1$.
למשל יש קשת בין $(2, 1)$ לבין $(2, 2)$,
אין קשת בין $(2, 2)$ ל- $(1, 3)$ ואין קשת בין $(2, 3)$ לבין $(1, 2)$.

- 6 (נק') א. הוכיחו ש- G קשיר.
- 6 (נק') ב. מה דרגת הצומת $(1, 1)$ ומה דרגת הצומת $(1, 2)$?
- 8 (נק') ג. כמה קשתות יש ב- G ? הוכיחו.
- 7 (נק') ד. האם יש ב- G מעגל אוילר?

בהצלחה!