תשובה 1

א. תנאי התחלה:

$a_0 = 1$ (סדרה ריקה! נוח להיעזר ב- a_0 לסעיף ב)

$a_1 = 1$ (רק בלוק 1×2 עומד אפשרי)

$a_2 = 3$ בלוק של 2×2 , או שני בלוקים 1×2 עומדים, או שני בלוקים 1×2 שוכבים).

יחס נסיגה: נתבונן בריצוף באורך $n + 1$.

* אם הוא מסתיים בבלוק 1×2 עומד, אז לפני הבלוק הזה יכול לבוא כל ריצוף באורך n , כלומר a_n ריצופים אפשריים.

* אם הוא מסתיים בבלוק של 2×2, אז לפני הבלוק הזה יכול לבוא כל ריצוף באורך $n - 1$, כלומר a_{n-1} ריצופים אפשריים.

* אם הוא מסתיים בבלוק 1×2 שוכב, אז בהכרח מדובר בשני בלוקים 1×2 שוכבים זה מעל זה. לפניהם יכול לבוא כל ריצוף באורך $n - 1$, כלומר a_{n-1} ריצופים אפשריים.

בסה"כ קיבלנו: $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$

נבדוק שזה תואם את תנאי ההתחלה שרשמנו: $a_2 = a_1 + 2a_0 = 1 + 2 \cdot 1 = 3$.

ב. המשוואה האפיינית: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.

פתרונותיה הם: $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$ כלומר $2 , -1$.

לפיכך $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$.

בהצבת תנאי ההתחלה a_1 , a_0 נקבל:

$A + B = 1$, $2A - B = 1$.

מחיבור שתי משוואות אלה $3A = 2$, כלומר $A = 2/3$. מכאן $B = 1/3$.

לפיכך

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3}(-1)^n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + (-1)^n\right)$$

ג. מיחס הנסיגה: $a_3 = a_2 + 2a_1 = 5$, $a_4 = a_3 + 2a_2 = 11$.

מהנוסחה המפורשת: $a_4 = \frac{1}{3}\left(2^5 + (-1)^4\right) = 11$

תשובה 2

כמו בפתרון שאלה 4 בממ״ן 15, נניח שהמשתנים הזוגיים הם 3 הראשונים, ונכפול את התוצאה שנקבל ב- $20 = \binom{6}{3}$.

מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$ תחת האילוצים הנתונים בשאלה הוא המקדם של x^{29} בפיתוח הפונקציה $f(x) = (x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^3(x^3 + x^5 + x^7 + \ldots)^3$.

בסוגריים השמאליים נוציא גורם משותף x^2 , שלאחר העלאה בחזקת 3 נותן x^6 .

בסוגריים הימניים נוציא גורם משותף x^3 , שלאחר העלאה בחזקת 3 נותן x^9 .

קיבלנו

$$f(x) = x^6(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^3 \cdot x^9(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^3$$
$$= x^{15}(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^6$$

המקדם של x^{29} בפונקציה זו הוא המקדם של x^{14} בפונקציה $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^6$.

בהצבת $y = x^2$, זהו המקדם של y^7 בפונקציה $(1 + y + y^2 + y^3 + \ldots)^6$.

לפי נוסחה *(iii)* שבסוף הממ״ן, המקדם הזה הוא $D(6,7) = \binom{12}{5} = 792$.

כאמור בתחילת הפתרון, את זה עלינו לכפול ב- 20 . תשובה סופית: $792 \cdot 20 = 15{,}840$.

תשובה 3

א. לפי הדיון בעמ׳ 124 - 127 בספר, הפונקציה היוצרת היא

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^2$$

a_n הוא המקדם של x^n בפיתוח פונקציה זו.

ב. מסעיף א׳, בעזרת סכום טור הנדסי סופי וסכום טור הנדסי אינסופי נקבל:

$$f(x) = \left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)^2\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = (1-x^4)^2\frac{1}{(1-x)^4} = (1 - 2x^4 + x^8)\frac{1}{(1-x)^4}$$

לפי נוסחה *(iii)* שהופיעה בממ״ן (עמ׳ 11), $\dfrac{1}{(1-x)^4} = \sum_{i=0}^{\infty} D(4,i)\, x^i$.

מכאן ע״י קיבוץ איברים הנותנים מעלה n (נוסחה *(ii)* בממ״ן. השווה גם השאלה הקודמת), המקדם של x^n ב- $f(x)$ הוא

$$a_n = D(4,n) - 2D(4,n-4) + D(4,n-8) = \binom{n+3}{3} - 2\binom{n-1}{3} + \binom{n-5}{3}$$

אם $n<5$ הביטוי הימני ביותר באגף ימין הוא 0 (מקדמים בינומיים חריגים - ר' עמ' 30).
בדומה, אם $n-1<3$ הביטוי האמצעי באגף ימין מתאפס.
נקבל כך את המקרים $a_0=1$, $a_1=4$, $a_2=10$, שלא קשה לודא את נכונותם מתנאי השאלה, אך הם אינם מהוים בדיקה טובה לביטוי בשלמותו. מצד שני, אם נניח $n\ge 5$ ונפתח את הביטוי, לאחר פיתוח וקיבוץ איברים מתקבל הביטוי הפשוט: $a_n=16n-32$ ($n\ge 5$)
(תרגיל מומלץ - לחשב זאת). האם מישהו רואה דרך קצרה להגיע ישר לתוצאה זו ?

תשובה 4

א. המקדם של x^{2m} בפיתוח $(1+x)^n$ הוא, לפי נוסחת הבינום, $c_{2m}=\binom{n}{2m}$.

את אגף שמאל של הזהות הנתונה בשאלה נראה כמכפלה של שני גורמים: $(1-x^2)^n\cdot\frac{1}{(1-x)^n}$

יהי b_i המקדם של x^i בפיתוח $\frac{1}{(1-x)^n}$. מנוסחה (iii) בממ"ן, $b_i=D(n,i)$.

נפתח גם: $$(1-x^2)^n=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n}{i}(x^2)^i=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n}{i}x^{2i}.$$

נסמן ב- a_i את המקדם של x^i בביטוי זה.

מכיוון שמופיעות רק חזקות זוגיות של x, כל המקדמים בעלי אינדקס אי-זוגי מתאפסים:

$a_{2i+1}=0$ לכל i טבעי. אנו רואים גם ש- $a_{2i}=(-1)^i\binom{n}{i}$.

שימו לב שזהו a_{2i} ולא a_i, למרות שבמקדם הבינומי ובחזקה של (-1) מופיע i ולא $2i$.
כעת ניעזר בנוסחה (ii) שבסוף הממ"ן למציאת המקדמים בכפל פונקציות יוצרות:

$$c_{2m}=\sum_{i=0}^{2m}a_ib_{2m-i}$$

נזכור שעבור ה- a-ים יש לנו רק מקדמים a_{2i} ולא a_{2i+1}, ונוכל לרשום עבור המקרה שלנו:

$$c_{2m}=\sum_{i=0}^{m}a_{2i}b_{2m-2i}$$

שימו לב לשינוי גבול הסכימה כאן והבינו מדוע הוא נדרש.
נציב בשוויון זה את הביטויים שקיבלנו עבור המקדמים:

$$\binom{n}{2m}=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{n}{i}D(n,\,2m-2i)$$

זו הזהות המבוקשת (נקרא למשתנה הסכימה k במקום i כדי להתאים לנדרש בשאלה).

בדיקה: כאשר $m=2$, $n=5$, אגף שמאל הוא $5 = \binom{5}{4}$, ואגף ימין הוא

$$\binom{5}{0}D(5,4)-\binom{5}{1}D(5,2)+\binom{5}{2}D(5,0) = \binom{8}{4}-5\cdot\binom{6}{2}+10\cdot 1 = 70-75+10 = 5$$

שימו לב ש- $D(j,0)=\binom{j+0-1}{j-1} = \binom{j-1}{j-1} = 1$.

את הבדיקה השניה אנא השלימו בעצמכם.

איתי הראבן