

## בחינה 5

### מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

**חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.**

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

**משך המבחן: 3 שעות.**

**חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.**

---

### שימו לב:

\* בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש

בפירוש בגוף השאלה.

\* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של

הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת

"אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות

שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.

\* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי

אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.

\* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים

של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.

---

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

## חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

### שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס.

**בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה.** אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

6 נק' ) א. להלן ציטוט משיר ישן של אילן ואילנית:

$P$ : לכל אדם, כוכב יש בשמיים, כוכב המתגלה עם רדת יום.

איזה מהטענות הבאות שקולה ל**שלילת**  $P$ ?

- [1] לכל אדם כוכב יש בשמיים, כוכב שאינו מתגלה עם רדת יום.
- [2] לכל אדם, אם יש לו כוכב בשמיים אז הכוכב הזה לא מתגלה עם רדת יום.
- [3] לאף אדם אין בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום.
- [4] יש בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום אבל אינו שייך לאף אדם.
- [5] יש אדם שאין לו בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום.

7 נק' ) ב. נסמן  $A = \{(x, n) \mid x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}\} \cup \{(n, x) \mid n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}\}$ .

ונסמן  $B = (\mathbf{R} \times \mathbf{R}) - A$ .

עוצמת  $B$  היא:

- [1] 0
- [2]  $\aleph_0$
- [3]  $C$
- [4]  $2^C$

[5] עוצמה כלשהי שנמצאת בין  $\aleph_0$  ל- $C$ .

6 נק' ) ג.  $G$  הוא עץ מתויג על 8 צמתים (התגים הם כמקובל המספרים  $1, 2, 3, \dots, 8$ ).

סדרת Prüfer של  $G$  היא  $(3, 7, 2, 2, x, 2)$  כאשר  $x \in \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ .

לפיכך:

- [1]  $x = 2$
- [2]  $x \neq 2$
- [3] לא ייתכן: זה לא האורך המתאים עבור סדרת Prüfer של  $G$ .
- [4] אורך הסדרה מתאים אבל אף ערך של  $x$  לא נותן סדרת Prüfer חוקית.
- [5]  $x$  יכול להיות כל מספר שנרצה בקבוצה  $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$ .

**חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות**  
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

## שאלה 2

(7 נק') א. יהיו  $R, R_1, S, S_1$  יחסים (רלציות) מעל קבוצה  $A$ .

הוכיחו כי אם  $R_1 \subseteq R$  ו-  $S_1 \subseteq S$  אז  $R_1 S_1 \subseteq RS$ .

(14 נק') ב. הוכיחו כי אם  $R, S$  הם יחסים טרנזיטיביים מעל  $A$ , המקיימים  $RS = SR$ ,

אז גם  $RS$  טרנזיטיבי. נמקו בפירוט כל צעד. סעיף א יכול לסייע.

נוח להוכיח סעיף זה בעזרת תכונות אלגבריות של יחסים, ללא התבוננות באברי היחס.

(6 נק') ג. תהי  $A = \{1, 2\}$ . תנו דוגמה ליחסים  $R, S$  מעל  $A$ , כך שארבעת היחסים

$RS, RS, S, R$  הם טרנזיטיביים אבל  $RS \neq SR$ .

## שאלה 3

נסמן  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ .

(5 נק') א. מהו מספר הפונקציות של  $B$  לקבוצה  $A \times A$ ?

(22 נק') ב. מהו מספר הפונקציות  $f$  של  $B$  לקבוצה  $A \times A$ , המקיימות:

לכל  $a \in A$  קיים  $x \in B$  כך ש-  $a$  מופיע (כאיבר הימני או כאיבר השמאלי)

בזוג הסדור  $f(x)$ ?

דוגמאות:

הפונקציה  $f$  המוגדרת כך:  $f(1) = (1, 2)$ ,  $f(2) = (3, 4)$ ,  $f(3) = (1, 1)$

מקיימת את הדרישה.

הפונקציה  $g$  המוגדרת כך:  $g(1) = (1, 2)$ ,  $g(2) = (2, 1)$ ,  $g(3) = (1, 1)$

אינה מקיימת את הדרישה,

כי 3, 4 אינם נמצאים באף אחד מהזוגות  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 2)$ .

**בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה סופית מספרית.**

#### שאלה 4

יהי  $a_n$  מספר הסדרות באורך  $n$ , שאבריהן שייכים לקבוצה  $\{1, 2, \dots, 7\}$ , והמקיימות את התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים זוגיים זה בסמוך לזה.

למשל, עבור  $n = 5$ , הסדרה  $(1, 1, 2, 6, 3)$  אינה מקיימת את התנאי, כי 2 מופיע ליד 6.

גם הסדרה  $(1, 1, 2, 2, 3)$  אסורה, כי יש שתי הופעות צמודות של 2.

10 נק' א. רשום את  $a_0, a_1, a_2$ . מצא יחס נסיגה (יחס רקורסיה) עבור  $a_n$ .

בדוק ש-  $a_0, a_1, a_2$  שרשמת מתיישבים עם יחס הנסיגה שמצאת.

17 נק' ב. פתור את יחס הנסיגה וקבל ביטוי מפורש עבור  $a_n$ .

בדוק את הביטוי שקיבלת, עבור  $n = 2$ .

#### שאלה 5

יהי  $G$  גרף פשוט, שיכול להיות קשיר או לא קשיר.

$a, b$  הם צמתים שונים ב- $G$ , שהמסלול הקצר ביותר ביניהם הוא באורך 3 או יותר

(תזכורת: אורך מסלול הוא מספר הקשתות במסלול). ייתכן שאין כלל מסלול בין  $a, b$ .

$\bar{G}$  הוא הגרף המשלים של  $G$  ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4).

6 נק' א. הוכיחי שב- $\bar{G}$ , הצמתים  $a, b$  נמצאים באותו רכיב קשירות.

21 נק' ב. הוכיחי ש- $\bar{G}$  הוא קשיר.

בהצלחה!