פתרונות לממ"ן 11 - 2020א - 20425

1. א. נסמן ב- A, B ו- C את המאורעות שיוסף עונה נכון על שאלות A, B ו- C, בהתאמה.

מהנתונים מקבלים :

$P(A^C \cap B^C \cap C^C) = 0.02$

$P(A \cap B \cap C) = 0.4$

$P(A \cup B) = 0.93$

$P(A \cap B \mid A \cup B) = \frac{20}{31} \quad \Rightarrow \quad \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{0.93} = \frac{20}{31} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0.6$

$\Rightarrow \quad P(A \cap B \cap C^C) = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) = 0.6 - 0.4 = 0.2$

$P(A \mid C) = 0.8 \quad \Rightarrow \quad \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = 0.8 \quad \Rightarrow \quad P(A \cap C) = 0.8 \cdot P(C)$

$P(A \cap C^C) = 0.3$

$P(A) = 1.28 \cdot P(C) \quad \Rightarrow \quad P(A) = P(A \cap C) + P(A \cap C^C) = 0.8 \cdot P(C) + 0.3$

$\Rightarrow \quad P(A) = \underline{1.28 \cdot P(C) = 0.8 \cdot P(C) + 0.3} \quad \Rightarrow \quad P(C) = 0.625 \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0.8$

$\Rightarrow \quad P(A \cap C) = 0.5 \quad \Rightarrow \quad P(A \cap C \cap B^C) = 0.5 - 0.4 = 0.1$

$\Rightarrow \quad P(A \cap B^C \cap C^C) = P(A \cap C^C) - P(A \cap B \cap C^C) = 0.3 - 0.2 = 0.1$

$\Rightarrow \quad P(A^C \cap C) = P(C) - P(A \cap C) = 0.625 - 0.5 = 0.125$

$\Rightarrow \quad P(A^C \cap B) = P(A \cup B) - P(A) = 0.93 - 0.8 = 0.13$

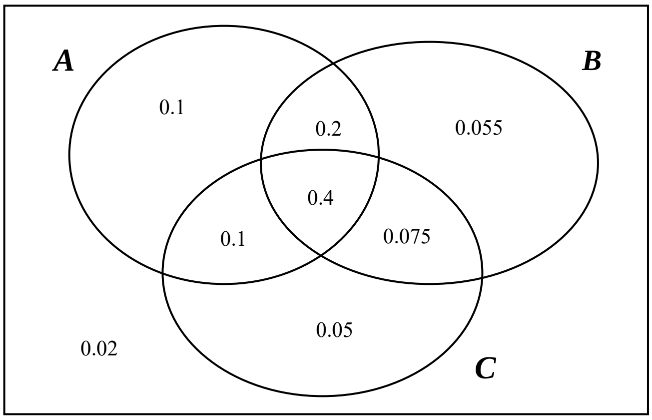
$\Rightarrow \quad P((A^C \cap B) \cup (A^C \cap C)) = 1 - P(A) - P(A^C \cap B^C \cap C^C) = 1 - 0.8 - 0.02 = 0.18$

$\Rightarrow \quad P((A^C \cap B) \cap (A^C \cap C)) = P(A^C \cap B \cap C) = 0.125 + 0.13 - 0.18 = 0.075$

$\Rightarrow \quad P(A^C \cap B \cap C^C) = P(A^C \cap B) - P(A^C \cap B \cap C) = 0.13 - 0.075 = 0.055$

$\Rightarrow \quad P(A^C \cap B^C \cap C) = P(A^C \cap C) - P(A^C \cap B \cap C) = 0.125 - 0.075 = 0.05$

נצייר דיאגרמת ון מתאימה לבעיה :



ב. נבדוק את קיום תנאי אי-התלות לכל זוג של מאורעות, מבין המאורעות A, B ו- C :

$$P(A\cap B)=0.6 \quad \neq \quad P(A)P(B)=0.8\cdot 0.73$$

$$P(A\cap C)=0.5 \quad = \quad P(A)P(C)=0.8\cdot 0.625$$

$$P(B\cap C)=0.475 \quad \neq \quad P(B)P(C)=0.73\cdot 0.625$$

קיבלנו שהמאורעות A ו- C בלתי-תלויים זה בזה.

ג. $$P(A^C\cap B^C\cap C^C)+P(A\cap B^C\cap C^C)+P(A^C\cap B\cap C^C)+P(A^C\cap B^C\cap C)$$

$$=0.02+0.1+0.055+0.05=0.225$$

ד. ההסתברות שיוסף יענה נכון לפחות על שתי שאלות היא :

$$P(A\cap B\cap C^C)+P(A\cap B^C\cap C)+P(A^C\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$=0.2+0.1+0.075+0.4=0.775$$

לכן, ההסתברות המותנית המבוקשת היא : $\dfrac{P(A\cap B\cap C)}{0.775}=\dfrac{0.4}{0.775}=0.51613$

ה. $$P(A\mid A^C\cup B^C\cup C^C)=\frac{P(A\cap(B^C\cup C^C))}{P(A^C\cup B^C\cup C^C)}=\frac{0.1+0.1+0.2}{1-0.4}=0.6667$$

2. נסמן ב- A_i את המאורע שמתג i סגור, לכל $i=1,2,3,4,5$. לפי הנתונים :

$$P(A_3)=0.95 \quad ; \quad P(A_4^C\mid A_3^C)=1 \quad \Rightarrow \quad P(A_4^C\cap A_3^C)=1\cdot 0.05=0.05$$

$$\Rightarrow \quad P(A_4\cap A_3^C)=P(A_4\mid A_3^C)P(A_3^C)=0\cdot 0.05=0$$

מתגים 4 ו-5 בלתי-תלויים בתנאי שמתג 3 סגור, ומתקיים : $P(A_4\mid A_3)=P(A_5\mid A_3)=0.9$

$$\Rightarrow \quad P(A_4\cap A_5\mid A_3)=P(A_4\mid A_3)P(A_5\mid A_3)=0.9^2=0.81$$

$$\Rightarrow \quad P(A_4\cap A_5\cap A_3)=P(A_4\cap A_5\mid A_3)P(A_3)=0.81\cdot 0.95=0.7695$$

וגם :

$$\Rightarrow \quad P(A_4)=P(A_4\cap A_3)+P(A_4\cap A_3^C)=P(A_4\mid A_3)P(A_3)+0=0.9\cdot 0.95=0.855$$

$$P(A_1)=0.8 \quad ; \quad P(A_2\mid A_1^C)=0.2 \quad \Rightarrow \quad P(A_2\cap A_1^C)=0.2\cdot 0.2=0.04$$

$$\Rightarrow \quad P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2\cap A_1^C)=0.8+0.04=0.84$$

וכן, אין תלות בין המתגים בענף העליון (1 ו-2) למתגים בענף התחתון (3, 4 ו-5).

א. $P\{$עובר זרם מ-A ל-B$\}$ $=P((A_1\cup A_2)\cup(A_3\cap A_4\cap A_5))$

$$=P(A_1\cup A_2)+P(A_3\cap A_4\cap A_5)-P((A_1\cup A_2)\cap(A_3\cap A_4\cap A_5))$$

$$=0.84+0.7695-0.84\cdot 0.7695=0.96312$$ [אין תלות בין הענף העליון לענף התחתון]

ב. אם מתג 4 פתוח, אז עובר זרם מ-A ל-B, רק אם לפחות אחד ממתגים 1 או 2 סגור. מכיוון שאין תלות בין הענף העליון לענף התחתון, ההסתברות המותנית המבוקשת היא : $P(A_1\cup A_2)=0.84$

ג. נחשב את ההסתברות המותנית שעובר זרם בענף התחתון, אם ידוע שמתג 4 סגור.

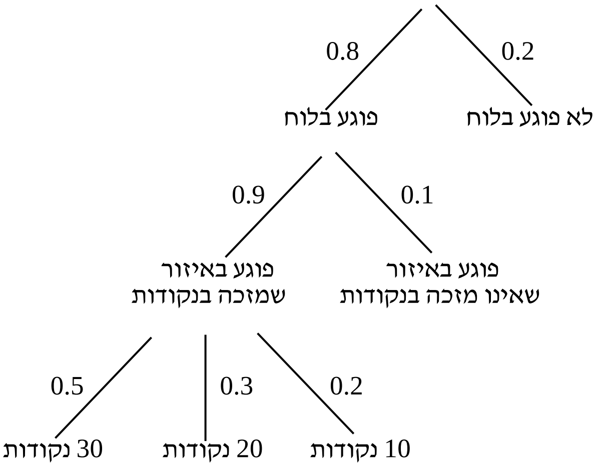
$$P\{\text{עובר זרם בענף התחתון} \mid A_4\} = \frac{P(A_3 \cap A_4 \cap A_5)}{P(A_4)} = \frac{0.7695}{0.855} = 0.9$$

אפשר להגיע לתוצאה האחרונה גם כך:

$$\frac{P(A_3 \cap A_4 \cap A_5)}{P(A_4)} = \frac{P(A_4 \cap A_5 \mid A_3)P(A_3)}{\underbrace{P(A_4 \mid A_3^C)}_{=0}P(A_3^C) + P(A_4 \mid A_3)P(A_3)} = \frac{P(A_4 \cap A_5 \mid A_3)\cancel{P(A_3)}}{P(A_4 \mid A_3)\cancel{P(A_3)}}$$

$$= \frac{\cancel{P(A_4 \mid A_3)}P(A_5 \mid A_3)}{\cancel{P(A_4 \mid A_3)}} = P(A_5 \mid A_3) = 0.9$$

כאשר במעבר השלישי מנצלים את אי-התלות המותנית במצבם של מתגים 4 ו- 5 בהינתן שמתג 3 סגור.



3. א. $P\{\text{10 נקודות}\} = 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.2 = 0.144$

ב. $P\{\text{לא זכה בנקי׳} \mid \text{פגע בלוח ב-0 נקי׳}\}$

$$= \frac{0.8 \cdot 0.1}{0.2 + 0.8 \cdot 0.1} = \frac{2}{7} = 0.2857$$

ג. המאורע המשלים של המאורע המתואר בשאלה הוא המאורע שבו הקולע למטרה זוכה בנקודות בכל חמשת נסיונותיו. לכן, ההסתברות המבוקשת היא:

$$1 - (0.8 \cdot 0.9)^5 = 0.80651$$

ד. הקולע למטרה זוכה ב-30 נקודות בסך-הכל בשתי קליעות, אם באחת מהן הוא זוכה ב-10 נקודות ובשנייה ב-20 נקודות או אם באחת מהן הוא זוכה ב-30 נקודות ובשנייה אינו זוכה בנקודות. לכן, ההסתברות המבוקשת היא:

$$2 \cdot (0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.2)(0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.3) + 2 \cdot (0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.5)(1 - 0.8 \cdot 0.9) = 0.263808$$

4. א. מספר החלוקות האפשריות הוא: $\frac{20!}{10!5!5!} = 46{,}558{,}512$

ב. נסמן ב- A את המאורע שחן קיבל כריך עם שוקולד וב- B את המאורע שחן לא קיבל כריך עם חומוס.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{20}}{\frac{15}{20}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

שימו לב, שאם חן מקבל כריך עם שוקולד, בוודאי שאינו מקבל כריך עם חומוס. לכן, הסתברות חיתוך המאורעות היא ההסתברות של המאורע A. כמו כן, הואיל ויש 10 כריכי-שוקולד מתוך 20 כריכים, ההסתברות שחן יקבל כריך-שוקולד היא $\frac{10}{20}$, וההסתברות שלא יקבל כריך-חומוס היא $\frac{15}{20}$.

ג. נחשב את ההסתברות דרך המאורע המשלים, ששי או חן מקבלים כריך שאינו אהוב עליהם. נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה, ונקבל: $1-\left(\frac{10}{20}+\frac{5}{20}-\frac{10}{20}\cdot\frac{5}{19}\right)=\frac{29}{76}=0.38158$

ד1. נחשב את ההסתברות המותנית, ביחס למרחב המדגם המצומצם, המכיל רק תוצאות שבהן הילדים בשולחן האדום מקבלים לפחות 3 כריכי שוקולד. נקבל:

$$\frac{\binom{10}{3}\binom{10}{2}}{\binom{10}{3}\binom{10}{2}+\binom{10}{4}\binom{10}{1}+\binom{10}{5}}=\frac{120\cdot 45}{120\cdot 45+210\cdot 10+252}=\frac{5,400}{7,752}=0.6966$$

ד2. נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה, כדי לחשב את ההסתברות המבוקשת.

נסמן ב- A_i את המאורע שבשולחן i לפחות ילד אחד קיבל כריך-שוקולד, לכל $i=1,2,3,4$, ונחשב את ההסתברות של המאורע $A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4$. תנאי הבעיה סימטריים, לכן:

$$\begin{aligned}
&P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)\\
&\quad=1-P(A_1^C\cup A_2^C\cup A_3^C\cup A_4^C)\\
&\quad=1-\left[\binom{4}{1}P(A_1^C)-\binom{4}{2}P(A_1^C\cap A_2^C)+\binom{4}{3}P(A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C)-P(A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C\cap A_4^C)\right]\\
&\quad=1-\left[4\cdot\frac{\binom{10}{5}}{\binom{20}{5}}-6\cdot\frac{\binom{10}{10}}{\binom{20}{10}}+0-0\right]=1-0.065=0.935
\end{aligned}$$

שימו לב, שלא ייתכן שביותר משני שולחנות לא יקבלו אף כריך-שוקולד. לכן, ההסתברות שמתאימה לשני החיתוכים האחרונים בחישוב היא 0.