תרגול 9 – מסלולים קלים ביותר

תרגיל 1 - APSP

עד כה דנו באלגוריתמים לפתרון בעית מסלולים קלים ביותר ממקור יחיד. כלומר, מציאת מסלולים קלים ביותר מצומת $s \in V$ לכל צמתי הגרף. בעיה אחרת הקשורה לבעיה זו היא בעית ה-All-Pairs Shortest Paths (APSP). כפי שנרמז משמה של הבעיה, אנו מתבקשים לחשב את (משקל) מסלול קל ביותר בין כל זוג צמתים בגרף. נדגיש כי אנו לא מניחים דבר על המשקלות, פרט לכך שאין מעגל שלילי בגרף. כלומר, ייתכנו משקלות שליליות.

פתרון אחד אפשרי לבעיה הוא להריץ בלמן פורד מכל צומת. עלות אלגוריתם זה היא $O\left(V^2E\right)$ שכן אנו מריצים $|V|$ פעמים בלמן פורד. נדמה שאלגוריתם זה הוא בזבזני למדי שכן בכל הרצה אנו מתעלמים לחלוטין מכל המידע שהצטבר בהרצות קודמות (מה שיכול להזכיר לנו את המצב שהיינו בו כשפתרנו את בעיית מציאת כל השורשים של גרף מכוון נתון). ואכן כך הדבר – קיים אלגוריתם, שנפגוש בהרצאות בהמשך הקורס, הנקרא האלגוריתם של פלויד-וורשל (Floyd-Warshall) הפותר את בעיית ה-APSP בזמן $O\left(V^3\right)$.

בתרגיל זה אנו נלך בגישה שונה. כמה זמן יקח לנו לפתור את בעיית ה-APSP עבור גרף בו כל המשקלים אי-שליליים? ובכן, במקרה זה, הרצה נאיבית למדי של דייקסטרה מכל צומת תעלה לנו בסך הכל $O(VE+V^2logV)$, שכן הרצה בודדת עולה $O(E+VlogV)$ ולכן $|V|$ הרצות יעלו $O(VE+V^2logV)$. הרעיון אם כך הוא להמיר את משקלי הקשתות במשקלים אי-שלילים תוך שימור מסלולים קלים ביותר וזאת מספיק מהר בכדי ש-$O(VE+V^2logV)$ יהיה צוואר הבקבוק בזמן הריצה של האלגוריתם.

אלגוריתם זה, שנפתח מיד, נקרא האלגוריתם של ג'ונסון (Johnson, 1977) והוא עולה בביצועיו על זה של פלויד-וורשל כאשר הוא מופעל על גרפים שאינם צפופים מדי (ובפרט כאשר $E = o(V^2)$).

מכאן ואילך אנו נניח כי נתון לנו גרף $G=(V,E)$ עם פונקצית משקל $w:E\to R$ על הקשתות, כך שאין מעגל במשקל שלילי ב- G .

טענה 1

תהא $h:V\to R$ פונקצית משקל המתאימה לכל <u>צומת</u> מספר ממשי. נגדיר $w_h:E\to R$ באופן הבא: לכל קשת $uv\in E$ נגדיר $w_h(uv)=h(u)+w(uv)-h(v)$. אזי

1. מסלול p מ- u ל- v הוא קל ביותר לפי w אם"ם הוא קל ביותר לפי w_h .
2. אין מעגלים שליליים לפי w_h .

הוכחה

יהא $p=u=v_1\to v_2\to\cdots\to v_k=v$. אז

$$w_h(p)=\sum_{i=1}^{k-1}w_h(v_i,v_{i+1})=\sum_{i=1}^{k-1}\left[w(v_i,v_{i+1})+h(v_i)-h(v_{i+1})\right]=h(u)-h(v)+w(p)$$

על כן $w_h(p)-w(p)=h(u)-h(v)$. בצד ימין של שוויון זה אנו רואים ביטוי שאינו תלוי במסלול p אלא רק בצמתי הקצה u,v . אם כך, משקל כל המסלולים מ- u ל- v גדלים באותו ביטוי ($h(u)-h(v)$) כשמסתכלים עליהם לפי w_h במקום לפי w . בפרט, p הוא מסלול קל ביותר לפי w אם"ם הוא מסלול קל ביותר לפי w_h .

בכדי להוכיח את החלק השני של הטענה נבחין כי במקרה של מעגל מתקיים $v_1=v_k$ ולכן $w_h(C)=w(C)$. בפרט, מכיוון שאנו מניחים שאין מעגלים שליליים לפי w , אין מעגלים שליליים לפי w_h .

כל שנותר אם כך הוא למצוא פונקציה $h:V\to R$ כך שלכל $uv\in E$ מתקיים $w(uv)+h(u)-h(v)\geq 0$. אי השוויון הזה מוכר? ודאי – הוא דומה בצורתו לאי-שוויון המשולש, המתקיים עבור מסלולים קלים ביותר.

נגדיר גרף חדש $G'=(V',E')$ כך ש-$V'=V\cup\{s\}$ ו-$E'=E\cup\{sv:v\in V\}$. כמו כן נגדיר $w':E\to R$ כך ש-$w'(sv)=0$ לכל $v\in V$ ו-$w'(e)=w(e)$ לכל קשת אחרת. נסמן ב-$\delta_s(v)$ את משקל המסלול הקל ביותר מ-s ל-v ב-G'. נבחין כי $\delta_s(v)\leq 0$ לכל $v\in V$, ובפרט $\delta_s(v)<\infty$. כמו כן, מכיוון שאין מעגלים שליליים בגרף G אין מעגלים שליליים בגרף G' ולכן $\delta_s(v)>-\infty$. כלומר, $\delta_s(v)$ הוא מספר ממשי. בנוסף, מאי-שוויון המשולש, לכל קשת $uv\in E$ מתקיים $\delta_s(v)\leq\delta_s(u)+w'(uv)$. מכאן הכל ברור – ניקח $h=\delta_s$.

מכל האמור לעיל, יש לנו האלגוריתם הבא

אלגוריתם

<u>קלט</u>: גרף מכוון $G=(V,E)$ עם פונקציית משקל על הקשתות $w:E\to R$ ללא מעגלים שליליים.

<u>פלט</u>: משקל מסלול קל ביותר מכל צומת לכל צומת.

1. בנה את G' כפי שהוגדר לעיל.
2. חשב את δ_s כפי שהוגדר לעיל, בעזרת האלגוריתם של Bellman Ford.
3. חשב את פונקצית המשקל w_{δ_s}.
4. מכל צומת $u\in V$ הרץ דייקסטרה לחישוב משקל מסלולים קלים ביותר מ-u לכל הצמתים, ביחס לפונקצית המשקל w_{δ_s}. נסמן את הערך המתקבל ב-$d'(u,v)$.
5. עבור כל זוג צמתים $u,v\in V$ החזר כפלט $d'(u,v)+\delta_s(v)-\delta_s(u)$.

נכונות

נכונות האלגוריתם נובעת מהדיון לעיל.

סיבוכיות

שלב (1) עולה זמן לינארי. בשלב (2) אנו מריצים Bellman Ford על הגרף G' ולכן זמן הריצה של שלב זה הוא $O(V'E')=O((V+1)(V+E))=O(V^2+VE)$. שלב (3) רץ בזמן לינארי. שלב (4) עולה $O(VE+V^2logV)$ מהאמור לעיל, והתיקון הנעשה בשלב (5) ניתן לביצוע בזמן לינארי.

על כן הסיבוכיות הכוללת היא $O(VE+V^2logV)$

הערה

יש מקום להבהיר למה היינו צריכים להוסיף צומת s לגרף G במקום לבחור צומת קיים בגרף G ולחשב ממנו את פונקציית המרחקים. הסיבה היא שאנו רוצים שפונקצית המרחקים תקבל ערכים סופיים, שכן אחרת פונקצית המשקל שהיא משרה היא אמנם אי-שלילית, אבל היא מקבלת גם ערכים אינסופיים (איתם דייקסטרה לא יודע (ולא אמור לדעת) להתמודד). הדבר יקרה אם הצומת הנבחר הוא לא מקור.

תרגיל 2 – בעיית ה-Arbitrage

אחד היתרונות הנוספים של Bellman-Ford הוא שהוא יודע לזהות האם קיים בגרף מכוון עם משקלות על הקשתות מעגל שלילי. אנו ננצל תכונה זו של Bellman-Ford בכדי לפתור את הבעיה הבאה.

תרגיל 2

נתונים n סוגי מטבעות. שערי החליפין בין כל זוג מטבעות נתונים על ידי מטריצה A מסדר $n \times n$ כך ש-$A_{i,j}$ הוא שער החליפין בין המטבעות i, j (כלומר תמורת יחידה אחת של מטבע i ניתן לקנות $A_{i,j}$ יחידות של מטבע j).

אנו מעוניינים להכריע האם קיימת סדרה של החלפת מטבעות המתחילה ומסתיימת באותו המטבע, כך שבסיומה תהיה בידנו כמות גדולה יותר של המטבע ממנו יצאנו – דרך נאה להרוויח לחמכם.

פתרון

ננסה לעשות רדוקציה לבעית מציאת מעגל שלילי בגרף. נגדיר גרף $G=(V,E)$ על n צמתים. כל צומת ייצג מטבע. בין כל זוג צמתים i, j תהיה קשת עם משקל $w_{i,j}$.
אנו רוצים להגדיר את $w_{i,j}$ כך שמעגל שלילי בגרף פירושו סדרה כנדרש. נגדיר $w_{i,j} = -\log(A_{i,j})$. ואכן, אם $i_1, i_2, \ldots, i_k$ היא סדרת מטבעות

$$A_{i_1,i_2} A_{i_2,i_3} \cdots A_{i_{k-1},i_k} > 1$$

שקול ל-

$$\log\left(A_{i_1,i_2} A_{i_2,i_3} \cdots A_{i_{k-1},i_k}\right) > \log 1 = 0$$

השקול בתורו ל-

$$\sum_{j=1}^{k-1} \log\left(A_{i_j,i_{j+1}}\right) > 0$$

השקול ל-

$$\sum_{j=1}^{k-1} w\left(i_j, i_{j+1}\right) < 0$$

כלומר, למעגל שלילי בגרף.

מהדיון לעיל נקבל את האלגוריתם הבא:

אלגוריתם

קלט: מטריצת שערי חליפין A של n סוגי מטבעות.

פלט: קיומה של סדרת החלפת מטבעות המבטיחה לנו רווח.

1. בנה את הגרף G כמתואר לעיל, יחד עם פונקצית המשקל w.
2. הרץ את Bellman-Ford מצומת שרירותי $s \in V$ להכרעה בדבר קיומו של מעגל שלילי בגרף, והחזר כמוהו.

נכונות

נכונות האלגוריתם נובעת כמעט לחלוטין מהדיון לעיל. יש רק נקודה אחת להבהיר – מכיוון שכל צמתי הגרף הם שורשים, אם קיים מעגל שלילי אז הוא ישיג מכל צומת, ולכן בשלב (2) באלגוריתם הרשנו לעצמנו לבחור באופן שרירותי את הצומת ממנו נריץ Bellman-Ford.

סיבוכיות

בגרף $|V| = n$ ו- $|E| = O(n^2)$. שלב (1) ניתן לביצוע ב-$O(n^2)$. זמן הריצה של שלב (2) הוא $O(VE) = O(n^3)$.