

## קווים לפתרון כמה שאלות בממ"ן 12 סמסטר ב2011

### שאלה 3

- א. כדי להוכיח שהמכונה  $M$  עוצרת על כל קלט, נראה שכל שלב של המכונה  $M$  מסתיים. אין במכונה  $M$  אפשרות של חישוב אינסופי.
- בשלב 1 עוברים על המילים לפי הסדר הלכסיקוגרפי עד שמגיעים למילה  $w$ .  
 $w$  היא מילה מעל האלפבית, ועוברים על המילים לפי סדר. לכן חייב להיות שנגיע ל- $w$  ונמצא את המיקום שלה בסדר הלכסיקוגרפי. (נמצא את  $i$ ).
- בשלב 2 מריצים את  $E$  עד שהוא מדפיס את המחרוזת ה- $i$ .  
מכיוון שהשפה  $HALT-ALL_{TM}$  אינסופית (יש אינסוף מכונות שעוצרות על כל קלט שלהן), ו- $E$  מפיק את השפה הזו, אז חייב להיות שתודפס המחרוזת ה- $i$ .
- מחרוזת זו היא מילה ששייכת לשפה  $HALT-ALL_{TM}$ . היא תיאור של מכונה  $A$  שעוצרת על כל קלט שלה. לכן בשלב 3, כאשר מריצים את  $A$  על  $w$ , בהכרח  $A$  תעצור (במצב המקבל או במצב הדוחה), ואז גם המכונה  $M$  תעצור.
- ב. מכיוון ש- $M$  היא מכונה שעוצרת על כל קלט שלה, אז  $\langle M \rangle$  שייכת לשפה  $HALT-ALL_{TM}$ . המונה  $E$  מפיק את השפה הזו. לכן  $E$  ידפיס את  $\langle M \rangle$ . לכן יש מספר  $j$  כך שהמחרוזת ה- $j$  של  $E$  מדפיס את  $\langle M \rangle$ .
- ג. כאשר נריץ את  $M$  על המילה  $w$  שהיא המילה ה- $j$  לפי הסדר הלכסיקוגרפי, נמצא בשלב 1 של  $M$  את המספר  $j$ . בשלב 2 נריץ את  $E$  עד להדפסת המחרוזת ה- $j$  של  $E$  מדפיס. מחרוזת זו היא התיאור של המכונה  $M$ . בשלב 3 נריץ את  $M$  על  $w$ . אם  $M$  מקבלת את  $w$ , נדחה. אם  $M$  דוחה את  $w$ , נקבל.
- קיבלנו ש- $M$  מקבלת את  $w$  אם ורק אם  $M$  דוחה את  $w$ . זו סתירה.

### שאלה 4

- נניח בשלילה ש- $T$  היא שפה כריעה. אז יש מכונה  $R$  שמכריעה את  $T$ .  
נראה שאפשר לבנות מכונה מכריעה לשפה  $A_{TM}$ , בסתירה למשפט 4.11:  
"על קלט  $\langle M, w \rangle$  כאשר  $M$  היא מכונת טיורינג ו- $w$  מילה:
1. בנה את המכונה  $M_1$  הבאה (מכונה מעל האלפבית  $\{0, 1\}$ ):  
"על קלט  $x$  כאשר  $x$  היא מילה מעל האלפבית  $\{0, 1\}$ :
    1. אם  $x = 01$ , קבל.
    2. אם  $x \neq 01$ , הרץ את  $M$  על  $w$ , וקבל (את  $x$ ) אם  $M$  קיבלה את  $w$ ."
  2. הרץ את המכונה  $R$  על  $\langle M_1 \rangle$ . אם היא קיבלה, קבל (את  $\langle M, w \rangle$ ). אם היא דחתה, דחה."
- אם  $M$  מקבלת את  $w$ , אז  $M_1$  מקבלת כל קלט שלה  $x$ , ולכן  $\langle M_1 \rangle$  שייכת ל- $T$ .  
אם  $M$  לא מקבלת את  $w$ , אז השפה של  $M_1$  מקבלת היא  $\{01\}$ , ו- $\langle M_1 \rangle$  לא שייכת ל- $T$ .

## שאלה 6

רדוקציה של  $A_{TM}$  למשלימה של  $EQ_{TM}$  :

$F' = \text{"על קלט } \langle M, w \rangle \text{ כאשר } M \text{ היא מכונת טיורינג ו-} w \text{ מילה :}$

1. בנה את המכונה  $M_2$  הבאה :

"על קלט  $x$  כאשר  $x$  היא מילה :

1. אם  $x = w$ , דחה.

2. אם  $x \neq w$ , הרץ את  $M$  על  $x$ , וקבל אם  $M$  קיבלה את  $x$ ."

2. החזר את  $\langle M, M_2 \rangle$ ."

$M_2$  מתנהגת על כל  $x$  שונה מ- $w$  בדיוק כמו  $M$ . את  $w$  דוחה.

לכן  $L(M_2) \neq L(M)$  אם ורק אם  $M$  מקבלת את  $w$ .

רדוקציה של  $A_{TM}$  ל- $EQ_{TM}$  :

$G' = \text{"על קלט } \langle M, w \rangle \text{ כאשר } M \text{ היא מכונת טיורינג ו-} w \text{ מילה :}$

1. בנה את המכונה  $M_2$  הבאה :

"על קלט  $x$  כאשר  $x$  היא מילה :

1. אם  $x = w$ , קבל.

2. אם  $x \neq w$ , הרץ את  $M$  על  $x$ , וקבל אם  $M$  קיבלה את  $x$ ."

2. החזר את  $\langle M, M_2 \rangle$ ."

$M_2$  מתנהגת על כל  $x$  שונה מ- $w$  בדיוק כמו  $M$ . את  $w$  מקבלת.

לכן  $L(M_2) = L(M)$  אם ורק אם  $M$  מקבלת את  $w$ .

## שאלה 7

א. רדוקצית מיפוי של  $A_{TM}$  ל- $INFINITE_{TM}$  :

"על קלט  $\langle M, w \rangle$  כאשר  $M$  היא מכונת טיורינג ו- $w$  היא מחרוזת :

1. בנה את המכונה  $M_1$  הבאה :

$M_1 = \text{"על קלט } x :$

1. הרץ את  $M$  על  $w$  וקבל (את  $x$ ) אם  $M$  קיבלה את  $w$ ."

2. החזר את  $\langle M_1 \rangle$ ."

**הסבר :** אם  $\langle M, w \rangle$  שייכת ל- $A_{TM}$ , אז  $M_1$  מקבלת כל קלט שלה, ולכן  $\langle M_1 \rangle$  שייכת ל-

$INFINITE_{TM}$ .

אם  $\langle M, w \rangle$  לא שייכת ל- $A_{TM}$ , אז  $M_1$  לא מקבלת אף קלט שלה, ולכן  $\langle M_1 \rangle$  לא שייכת ל-

$INFINITE_{TM}$ .

ב. רדוקצית מיפוי של  $A_{TM}$  למשלימה של  $INFINITE_{TM}$  :

"על קלט  $\langle M, w \rangle$  כאשר  $M$  היא מכונת טיורינג ו- $w$  היא מחרוזת :

1. בנה את המכונה  $M_2$  הבאה :

$M_2 =$  "על קלט  $x$  :

1. הרץ את  $M$  על  $w$  | $x$ | צעדים.

2. אם  $M$  קיבלה את  $w$  בתוך  $|x|$  צעדים, דחה (את  $x$ ) ; אחרת, קבל (את  $x$ )."

2. החזר את  $\langle M_2 \rangle$ ."

**הסבר :** אם  $\langle M, w \rangle$  שייכת ל- $A_{TM}$ , אז יש מספר צעדים  $y$  כך שלאחר ש- $M$  רצה  $y$  צעדים, היא

מקבלת את  $w$ . לכן על קלט  $x$  כך ש- $|x| \geq y$ ,  $M_2$  תדחה, ולכן  $\langle M_2 \rangle$  לא שייכת ל- $INFINITE_{TM}$ .

אם  $\langle M, w \rangle$  לא שייכת ל- $A_{TM}$ , אז לכל מספר צעדים  $y$ , לאחר ש- $M$  רצה  $y$  צעדים, היא לא

מקבלת את  $w$ . לכן  $M_2$  תקבל כל קלט  $x$ , ולכן  $\langle M_2 \rangle$  שייכת ל- $INFINITE_{TM}$ .

ג.  $INFINITE_{TM}$  איננה מזוהה-טיורינג, כי הרדוקציה של סעיף ב היא גם רדוקציה של המשלימה

של  $A_{TM}$  ל- $INFINITE_{TM}$ , והמשלימה של  $A_{TM}$  איננה מזוהה-טיורינג.

המשלימה של  $INFINITE_{TM}$  איננה מזוהה-טיורינג, כי הרדוקציה של סעיף א היא גם רדוקציה

של המשלימה של  $A_{TM}$  למשלימה של  $INFINITE_{TM}$ , והמשלימה של  $A_{TM}$  איננה מזוהה-טיורינג.