נושאים במתמטיקה לתלמידי מח"ר - 10444

סמסטר 2009ב

פתרון ממ"ן 12

****

שאלה 1

א. $A=\{1,2\}$ ו- $B=\{1,3,5\}$, לכן:

$$A\times B=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,5\rangle\}$$

ו- $P(A\times B)$ הוא אוסף כל הקבוצות החלקיות לקבוצה זו. כך ניתן לבנות גם את הקבוצות $B\times A$, $P(B\times A)$ וכמובן שגם את $P(B)$. **עשו זאת!**

מכאן נקבל שמתקיים:

1) לא נכון 2) נכון 3) לא נכון 4) לא נכון 5) נכון

ב. עלינו להוכיח כי לכל ארבע קבוצות C,D,U,V מתקיים:

$$(C\times U)\cap(D\times V)=(C\cap D)\times(U\cap V) .$$

הוכחה:

נוכיח שמתקיימת הכלה דו-כיוונית:

* $(\subseteq)$ אם $\langle x,y\rangle\in(C\times U)\cap(D\times V)$,

אז $\langle x,y\rangle\in C\times U$ וגם $\langle x,y\rangle\in D\times V$.

לכן מתקיים $x\in C$ ו- $x\in D$, וגם $y\in U$ ו- $y\in V$.

ומכאן ש- $x\in C\cap D$ ו- $y\in U\cap V$

וקיבלנו ש- $\langle x,y\rangle\in(C\cap D)\times(U\cap V)$, כנדרש.

* $(\supseteq)$ אם $\langle x,y\rangle\in(C\cap D)\times(U\cap V)$,

אז מתקיים $x\in C\cap D$ ו- $y\in U\cap V$.

ולכן $x\in C$ ו- $x\in D$, וגם $y\in U$ ו- $y\in V$.

או $\langle x,y\rangle\in C\times U$ וגם $\langle x,y\rangle\in D\times V$.

וקיבלנו כי $\langle x,y\rangle\in(C\times U)\cap(D\times V)$, כנדרש.

הוכחנו הכלה דו-כיוונית, לכן מתקיים השוויון שרצינו להוכיח.

ניתן להוכיח טענה זו גם בעזרת אלגברה של קבוצות, נסו זאת!

ג. ניעזר בסעיף הקודם, לפיו מתקיים

$$(B\times A)\cap(\mathbf{Z}\times B)=(B\cap\mathbf{Z})\times(A\cap B)$$

לכן כדי למצוא את הקבוצה באגף שמאל, נעדיף למצוא את הקבוצה באגף ימין.

לפי הגדרת הקבוצה B מתקיים: $B\subset\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$, לכן $B\subset\mathbf{Z}$ ומכאן ש- $B\cap\mathbf{Z}=B$

לפי הגדרת הקבוצות A,B , הרי שהמספר הטבעי הזוגי היחיד שנמצא בקבוצה B הוא 0,

לכן $A\cap B=\{0\}$.

קיבלנו, אם כן,

$$(B\times A)\cap(\mathbf{Z}\times B)=(B\cap\mathbf{Z})\times(A\cap B)=B\times\{0\}$$

$$=\{\langle n,0\rangle : n \text{ אי-זוגי}\}\cup\{\langle 0,0\rangle\}$$

$$=\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 3,0\rangle,\langle 5,0\rangle,\ \dots,\langle 2n+1,0\rangle,\ \dots\ \}$$

שאלה 2

א. 1)

$$S=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

כדי לחשב את S אנו עוברים על האיברים של A לפי סדר באופן הבא: אם $x=-2$

ונחפש את כל ערכי y הנמצאים ב-A ומקיימים $|x-1|=|y-2|$, או $|-2-1|=|y-2|$,

כלומר $|y-2|=3$, נקבל שפתרונות משוואה זו הם $y=5$ ו- $y=-1$. $y=5\notin A$,

לכן הערך היחיד של y שרלבנטי הוא $y=-1$ וקיבלנו את הזוג $\langle -2,-1\rangle$ שנמצא ב-S.

עתה נעבור ל- $x=-1$ ונחפש את ערכי y הרלבנטיים עבורו, ונקבל ש- $y=4$ ו- $y=0$

מתאימים, וכך קיבלנו את שני הזוגות הבאים ב-S. וכך הלאה.

$$DomS=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}=A$$

ו-

$$\operatorname{Im}S=\{-1,0,1,2,3,4\}$$

2) **רפלקסיביות:**

S אינו רפלקסיבי. נוכיח זאת: $1\in A$ אך $\langle 1,1\rangle\notin S$.

למעשה קל לראות שהיחס הוא **אי-רפלקסיבי** כי לכל $a\in A$ מתקיים $\langle a,a\rangle\notin S$

שהרי אם נניח בשלילה ש- $\langle a,a\rangle\in S$ אז $|a-1|=|a-2|$,

כלומר $a-1=a-2$ או $a-1=-(a-2)$, כלומר $2a=3$ או $a={}^{3}\!/_{2}$ והרי

${}^{3}\!/_{2}\notin A$.

סימטריה:

היחס אינו סימטרי כי, למשל, $\langle 0,1\rangle \in S$ (כי $|0-1| = |1-2|$), אך $\langle 1,0\rangle \notin S$ (כי $|1-1| \neq |0-2|$).

אנטי-סימטריה:

היחס אינו אנטי-סימטרי:

הרי $\langle -1,4\rangle \in S$ וגם $\langle 4,-1\rangle \in S$ (וודא זאת) אך $4 \neq -1$.

טרנזיטיביות:

היחס אינו טרנזיטיבי $\langle -1,4\rangle \in S$ וגם $\langle 4,-1\rangle \in S$ אך $\langle 4,4\rangle \notin S$.

3) בעזרת הגדרת S מסעיף א׳ נקבל:

$$S^2 = S \cdot S = \left\langle \begin{matrix} -2 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 & 0 & 4 & 1 & 3 & -1 & 0 & 4 \end{matrix} \right\rangle$$

$$S^{-1} = \left\langle \begin{matrix} -1 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 0 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{matrix} \right\rangle$$
$$= \left\langle \begin{matrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -1 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \end{matrix} \right\rangle$$

לכן:

$$S^{-1}S^2 = \left\langle \begin{matrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 & 0 & 4 & 3 & 1 & -1 \end{matrix} \right\rangle$$

ב. מהאיור רואים כי: $R = \left\langle \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{matrix} \right\rangle$

לכן $R^2 = \left\langle \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{matrix} \right\rangle$

1) קל לראות ש- R^2 הוא יחס סימטרי.

2) $I_A \subset R^2$, ולכן R^2 רפלקסיבי.

3) R^2 טרנזיטיבי. נבדוק את כל המקרים האפשריים:

$\langle 1,1\rangle \in R^2$ ו- $\langle 1,2\rangle \in R^2 \Leftarrow \langle 1,2\rangle \in R^2$. מתקיים.

$\langle 1,2\rangle \in R^2$ ו- $\langle 2,2\rangle \in R^2 \Leftarrow \langle 1,2\rangle \in R^2$. מתקיים.

$\langle 1,2\rangle \in R^2$ ו- $\langle 2,1\rangle \in R^2 \Leftarrow \langle 1,1\rangle \in R^2$. מתקיים.

$\langle 2,1\rangle \in R^2$ ו- $\langle 1,1\rangle \in R^2 \Leftarrow \langle 2,1\rangle \in R^2$. מתקיים.

$\langle 2,1\rangle \in R^2$ ו- $\langle 1,2\rangle \in R^2 \Leftarrow \langle 2,2\rangle \in R^2$. מתקיים.

$\langle 2,2\rangle \in R^2$ ו- $\langle 2,1\rangle \in R^2 \quad \Leftarrow \quad \langle 2,1\rangle \in R^2$. מתקיים.

אלה כל המקרים בהם מתקיים $\langle a,b\rangle \in R^2$ וגם $\langle b,c\rangle \in R^2$ ועבור כל המקרים הללו מתקיים $\langle a,c\rangle \in R^2$ ולכן R^2 טרנזיטיבי.

שאלה 3

ב. S הוא היחס המוגדר על $\mathbf{Z}$ על-ידי:

$$xSy \quad \Leftrightarrow \quad x \le y+1$$

נבדוק רפלקסיביות, סימטריה אנטי-סמטריה וטרנזיטיביות.

רפלקסיביות: נוכיח שהיחס S רפלקסיבי: לכל $x \in \mathbf{Z}$ מתקיים $x \le x+1$

לכן, לפי הגדרת S, מתקיים xSx וקבלנו רפלקסיביות.

סימטריה: היחס S אינו סימטרי. מתקיים $3S5$ (כי $3 \le 5+1$),

אך <u>לא</u> מתקיים $5S3$ (כי $5 \not\le 3+1$).

אנטי-סימטריה: היחס S אינו אנטי-סימטרי. מתקיים $2S3$ (כי $2 \le 3+1$),

וגם $3S2$ (כי $3 \le 2+1$), אך $2 \ne 3$.

טרנזיטיביות: נוכיח שהיחס S אינו טרנזיטיבי. מתקיים $3S2$ (כי $3 \le 2+1$),

וגם $2S1$ (כי $2 \le 1+1$), אך לא מתקיים $3T1$ (כי $3 \not\le 1+1$).

ב. T הוא היחס המוגדר על $\mathbf{N}$ על-ידי:

$xTy \Leftrightarrow$ (קיים מספר שלם k, כך ש- $x = ky$)

רפלקסיביות:

היחס רפלקסיבי.

נוכיח שלכל $a \in \mathbf{N}$ מתקיים $\langle a,a\rangle \in T$:

אם $a \in \mathbf{N}$, אז, עבור $k=1$ מתקיים $a = 1\cdot a$, כלומר קיים מספר שלם k כנדרש.

ולכן $\langle a,a\rangle \in T$.

סימטריה:

היחס אינו סימטרי.

$\langle 2,1\rangle \in T$ (כי עבור $k=2$, $2 = 2\cdot 1$) אך $\langle 1,2\rangle \notin T$ (כי לא קיים מספר **שלם** k

שעבורו מתקיים $1 = k\cdot 2$. שוויון זה מתקיים עבור $k=\dfrac{1}{2}$, אך זה אינו מספר שלם).

טרנזיטיביות:

היחס T טרנזיטיבי.

הוכחה: יהיו $a,b,c \in \mathbf{N}$ כך ש- $\langle a,b\rangle \in T$ וגם $\langle b,c\rangle \in T$

צ.ל. ש- $\langle a,c\rangle \in T$.

$\langle a,b\rangle \in T$ וגם $\langle b,c\rangle \in T$ $\Leftarrow$ קיימים k ו- n שלמים כך ש- $a=kb$ ו- $b=nc$

$\Leftarrow$ $a=kb=k(nc)=(kn)c$.

ומצאנו שקיים מספר שלם kn שעבורו מתקיים $a=(kn)c$ ולכן $\langle a,c\rangle \in T$ כנדרש.

שאלה 4

כיוון שיחסים הם קבוצות של זוגות סדורים, ניתן לדבר על איחוד וחיתוך של יחסים.

א. <u>**הטענה נכונה.**</u> נוכיח אותה:

אם $S \subseteq T$ אזי, לפי הטענה הרשומה בשאלה 2.12 סעיף א׳ (בספר הלימוד) מתקיים $S^{-1} \subseteq T^{-1}$. מכאן נקבל שמתקיים $S \subseteq T \cup T^{-1}$ וגם $S^{-1} \subseteq T \cup T^{-1}$,

לכן , לפי שאלה 1.14 סעיף ב׳ מתקיים $S \cup S^{-1} \subseteq T \cup T^{-1}$ (1)

ומכיוון ש-T סימטרי, $T = T^{-1}$ ולכן $T \cup T^{-1} = T$,

ומ- (1) נקבל שמתקיים $S \cup S^{-1} \subseteq T$, כפי שרצינו להוכיח.

ב. <u>**הטענה נכונה.**</u> נוכיח אותה בשלילה:

כלומר, נניח כי $T \cup S$ אנטי-סימטרי, אך לא מתקיים ש- T וגם S אנטי-סימטריים.

לכן מתקיים ש- T או S אינו יחס אנטי-סימטרי.

נניח ש- T אינו יחס אנטי-סימטרי. לכן, לפי ההגדרה של יחס אנטי-סימטרי, קיימים $\langle a,b\rangle \in T$ וגם $\langle b,a\rangle \in T$ כך ש- $a \neq b$.

אך $T \subseteq T \cup S$. לכן, $\langle a,b\rangle \in T \cup S$ וגם $\langle b,a\rangle \in T \cup S$ כאשר $a \neq b$.

וזה אומר ש- $T \cup S$ **אינו** אנטי-סימטרי - **בסתירה** לנתון. והראנו שהטענה נכונה.

ג. <u>**הטענה אינה נכונה**</u>.

דוגמא נגדית: נגדיר

$$A=\{1,2,3,4\}$$
$$S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,4\rangle\}$$
$$T=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$$

קל לוודא ש- S ו- T טרנזיטיביים (עשה זאת) אך $T \cup S$ אינו יחס טרנזיטיבי. הרי, למשל, $\langle 3,4\rangle,\langle 4,2\rangle \in T \cup S$, אך $\langle 3,2\rangle \notin T \cup S$.

ד. <u>**הטענה אינה נכונה**</u>.

דוגמא נגדית: נגדיר $A=\{1,2,3\}$; $S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$; $T=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

קל לראות שהיחסים S ו-T סימטריים, אך היחס $ST=\{\langle 1,3\rangle\}$ אינו סימטרי.

שאלה 5

נתון יחס S מעל A שהוא יחס רפלקסיבי המקיים:

לכל $a, b, c \in A$: $\langle a, b\rangle \in S$ וגם $\langle a, c\rangle \in S \Leftarrow \langle b, c\rangle \in S$ (*)

צריך להוכיח ש- S הוא יחס שקילות:

1) **רפלקסיביות** – נתון.

2) **סימטריה** – צ.ל. שלכל $a, b \in A$, $\langle b, a\rangle \in S \Leftrightarrow \langle a, b\rangle \in S$

יהיו $a, b \in A$ כך ש- $\langle a, b\rangle \in S$. הרי S רפלקסיבי, לכן גם $\langle a, a\rangle \in S$.

לפיכך, קיבלנו ש- $\langle a, b\rangle \in S$ וגם $\langle a, a\rangle \in S$ ולכן, לפי התכונה (*) מתקיים $\langle b, a\rangle \in S$, כנדרש.

ובאופן דומה, אם נחליף את a עם b נקבל ש- $\langle b, a\rangle \in S \Leftarrow \langle a, b\rangle \in S$.

3) **טרנזיטיביות** – נוכיח כי אם $\langle a, b\rangle \in S$ וגם $\langle b, c\rangle \in S$ אז $\langle a, c\rangle \in S$.

אם $\langle a, b\rangle \in S$ וגם $\langle b, c\rangle \in S$ אזי, משיקולי סימטריה (שהוכחנו ב-(2)), מתקיים $\langle b, a\rangle \in S$ וגם $\langle b, c\rangle \in S$, ולכן לפי תכונה (*) מתקיים $\langle a, c\rangle \in S$ – כנדרש.

הוכחנו ש- S הוא יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי – ולכן הוא יחס שקילות.