אוסף שאלות לתרגול עצמי - פתרונות

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 8

1. נסמן ב-X את אורך החיים של נורה ; $X \sim Exp\left(\frac{1}{500}\right)$.

מכיוון שמדובר ב- 100 נורות, נוכל להשתמש במשפט הגבול המרכזי לחישוב הקירוב. מתקיים :

$$E[\bar{X}_n] = E[X] = 500$$

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\text{Var}(X)}{n} = \frac{500^2}{100} = 2{,}500$$

לכן, נקבל כי :

$$P\{450 \le \bar{X}_n \le 520\} \cong P\left\{\frac{450-500}{\sqrt{2{,}500}} \le Z \le \frac{520-500}{\sqrt{2{,}500}}\right\}$$

$$= P\{-1 \le Z \le 0.4\} = \Phi(0.4) - \Phi(-1) = 0.6554 - 0.1587 = 0.4967$$

הערה: אין צורך לבצע תיקון רציפות, מכיוון שההתפלגות המעריכית היא התפלגות רציפה.

2. א. המשתנה המקרי N הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1,000. לכן, אפשר להציגו כסכום של 1,000 משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטר 1, ומכאן שאפשר להשתמש במשפט הגבול המרכזי, כדי לחשב קירוב להסתברויות הנוגעות לערכיו האפשריים.
הואיל והמשתנה המקרי הפואסוני הוא משתנה מקרי בדיד, נערוך תיקון רציפות כדי לחשב את הקירוב. מקבלים :

$$P\{N = 1{,}000\} = P\{999.5 \le N < 1{,}000.5\} \cong P\{\tfrac{999.5-1{,}000}{\sqrt{1{,}000}} \le Z < \tfrac{1{,}000.5-1{,}000}{\sqrt{1{,}000}}\}$$

$$= P\{-0.0158 \le Z < 0.0158\} = 2\cdot\Phi(0.0158) - 1 = 2\cdot 0.50632 - 1 = 0.01264$$

ב. לפי אי-שוויון צ'בישב, נקבל :

$$P\{|X - \underbrace{1{,}000}_{=E[X]}| \le 40\} = 1 - P\{|X-1{,}000| > 40\} \ge 1 - P\{|X - 1{,}000| \ge 40\}$$

$$\ge 1 - \frac{\overbrace{1{,}000}^{=\text{Var}(X)}}{40^2} = 0.375 \qquad [\text{אי-שוויון צ'בישב}]$$

3. לכל אחד מה-X_i-ים יש תוחלת $\frac{0+3+6}{3} = 3$ ושונות $\frac{0^2+3^2+6^2}{3} - 3^2 = 6$ והם בלתי-תלויים זה בזה. לכן, למשתנה המקרי Y יש תוחלת $5\cdot 3 = 15$ ושונות $5\cdot 6 = 30$. כעת, נוכל לחשב את החסמים העליונים.

א. לפי אי-שוויון מרקוב, נקבל :

$$P\{Y > 25\} \le P\{Y \ge 25\} \underset{\text{אי-שוויון מרקוב}}{\le} \frac{\overset{E[Y]}{15}}{25} = 0.6$$

אולם, אם נביא בחשבון את הערכים האפשריים של Y, שהם כל הכפולות של 3 בין 0 ל-30, נוכל לקבל חסם טוב יותר, מכיוון ש:

$$P\{Y > 25\} = P\{Y \geq 27\} \leq \frac{15}{27} = 0.\overline{5}$$

ב. לפי אי-שוויון צ׳בישב, נקבל:

$$P\{Y > 25\} \leq P\{Y \geq 25\} \leq \underbrace{P\{|Y - \overset{\overset{E[Y]}{\uparrow}}{15}| \geq 10\}}_{=P\{Y\geq 25\}+P\{Y\leq 5\}} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{אי-שוויון} \\ \text{צ׳בישב}}}{\leq} \frac{\overset{\overset{\mathrm{Var}(Y)}{\uparrow}}{30}}{100} = 0.3$$

הערות: 1) אם מנצלים את הערכים האפשריים הידועים של Y, מקבלים את החסם:

$$P\{Y > 25\} = P\{Y \geq 27\} \leq \underbrace{P\{|Y - \overset{\overset{E[Y]}{\uparrow}}{15}| \geq 12\}}_{=P\{Y\geq 27\}+P\{Y\leq 3\}} \leq \frac{\overset{\overset{\mathrm{Var}(Y)}{\uparrow}}{30}}{12^2} = 0.2083$$

2) אפשר גם לנצל את הסימטריה של התפלגות Y.

מכיוון שמתקיים: $P\{Y \geq 27\} = P\{Y \leq 3\}$

וגם: $P\{|Y - 15| \geq 12\} = P\{Y \geq 27\} + P\{Y \leq 3\}$

מקבלים כי: $P\{Y > 25\} \leq P\{Y \geq 27\} \leq \frac{1}{2} \cdot P\{|Y - \overset{\overset{E[Y]}{\uparrow}}{15}| \geq 12\} \leq \frac{\overset{\overset{\mathrm{Var}(Y)}{\uparrow}}{30}}{2 \cdot 12^2} = 0.1042$

כמובן, שדרך זו אפשרית, רק כאשר יש מידע נוסף לגבי התפלגות המשתנה המקרי, מעבר לתוחלתו ושונותו. ואל לנו לשכוח, שבמקרה הזה, יכולנו גם לחשב את ההסתברות המדויקת של המאורע הנתון.

4. א. המשתנה המקרי X הוא אי-שלילי ותוחלתו μ. לכן, מאי-שוויון מרקוב מקבלים, שלכל $t > 0$ מתקיים:

$$P\{X \leq \mu t\} \geq P\{X < \mu t\} \geq 1 - \frac{\mu}{\mu t} = 1 - \frac{1}{t}$$

ב. נתון כי $X_i \sim Geo(p)$, לכל $i = 1,2,\ldots,n$, וה-X_i-ים בלתי-תלויים. לכן:

$$E[\overline{X}_n] = E[X_1] = \tfrac{1}{p}$$

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \tfrac{\mathrm{Var}(X_1)}{n} = \tfrac{1-p}{np^2}$$

לפיכך, ומכיוון שה-X_i-ים הם משתנים מקריים שערכיהם האפשריים חיוביים בלבד, נקבל את השוויון:

$$P\left\{\left|\overline{X}_n - \tfrac{1}{p}\right| \leq \tfrac{1}{p}\right\} = P\left\{-\tfrac{1}{p} \leq \overline{X}_n - \tfrac{1}{p} \leq \tfrac{1}{p}\right\} = P\left\{0 \leq \overline{X}_n \leq \tfrac{2}{p}\right\} = P\left\{\overline{X}_n \leq \tfrac{2}{p}\right\}$$

כעת, נשתמש באי-שוויון צ׳בישב למציאת החסם המבוקש, ונקבל את אי-השוויון:

$$P\left\{\left|\overline{X}_n - \tfrac{1}{p}\right| \leq \tfrac{1}{p}\right\} \geq P\left\{\left|\overline{X}_n - \tfrac{1}{p}\right| < \tfrac{1}{p}\right\} = 1 - P\left\{\left|\overline{X}_n - \tfrac{1}{p}\right| \geq \tfrac{1}{p}\right\} \geq 1 - \frac{\frac{1-p}{np^2}}{\left(\frac{1}{p}\right)^2} = 1 - \tfrac{1-p}{n}$$

לכן: $P\left\{\overline{X}_n \leq \tfrac{2}{p}\right\} \geq 1 - \tfrac{1-p}{n}$

.5 איבר הסכימה של הטור הנתון שווה לפונקציית ההסתברות של משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר n בנקודה i. כלומר, אם $X \sim Po(n)$, אז:

$$P\{X=i\}=e^{-n}\frac{n^i}{i!} \qquad , \qquad i=0,1,...$$

ומכאן:

$$P\{X \le n\}=\sum_{i=0}^{n} e^{-n}\frac{n^i}{i!}$$

כמו כן:

$$E[X]=\text{Var}(X)=n$$

נשתמש כעת במשפט הגבול המרכזי, כדי למצוא קירוב להסתברות זו. נוכל להשתמש במשפט זה, מכיוון שאפשר להציג משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר n כסכום של n משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים שלכולם הפרמטר 1. לאחר עריכת תיקון רציפות, נקבל את הקירוב הבא, שגבולו 0.5, כנדרש:

$$P\{X \le n\}=P\{X \le n+0.5\}\cong P\left\{Z \le \tfrac{n+0.5-n}{\sqrt{n}}\right\}=\Phi\left(\tfrac{1}{2\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(0)=0.5$$

.6 תחילה נמצא את התוחלת והשונות של X_i, לכל $i=1,2,...,200$, באמצעות הפונקציה יוצרת המומנטים הנתונה. אחר-כך, נשתמש במשפט הגבול המרכזי לחישוב הקירוב להסתברות.

הפונקציה יוצרת המומנטים הנתונה היא פונקציה יוצרת מומנטים של התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים $r=2$ ו- $p=0.2$. נראה זאת:

$$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^2=\left(\frac{0.2e^t}{1-0.8e^t}\right)^2=\left(\frac{e^t}{5-4e^t}\right)^2 \qquad , \qquad t<-\ln 0.8=\ln\tfrac{1}{0.8}=\ln 1.25$$

לכן, התוחלת של כל אחד מה-X_i-ים שווה ל- $\frac{2}{0.2}=10$ והשונות ל- $\frac{2\cdot 0.8}{0.2^2}=40$.

מכאן:

$$P\left\{1{,}910 \le \sum_{i=1}^{200} X_i < 2{,}050\right\}=P\left\{1{,}909.5 \le \sum_{i=1}^{200} X_i < 2{,}049.5\right\} \qquad [\text{תיקון רציפות}]$$

$$\cong \Phi\left(\frac{2{,}049.5-200\cdot 10}{\sqrt{200\cdot 40}}\right)-\Phi\left(\frac{1{,}909.5-200\cdot 10}{\sqrt{200\cdot 40}}\right)$$

$$=\Phi(0.5534)-\Phi(-1.0118)=0.7100-(1-0.8442)=0.5542$$

.7 א. נסמן ב- Y_i את המספר על הכדור ה-i-י שנבחר, לכל $i=1,...,100$, ונקבל כי:

$$Y=\sum_{i=1}^{100} Y_i$$

כאשר ה-Y_i-ים בלתי-תלויים זה בזה ושווי התפלגות.

כמו כן, יש בארגז בסך-הכל $\sum_{j=1}^{15} j=\frac{15\cdot 16}{2}=120$ כדורים, ולכן לכל $i=1,...,100$ מתקיים:

$$P\{Y_i=j\}=\tfrac{j}{120} \qquad , \qquad j=1,...,15$$

כעת, נוכל להשתמש במשפט הגבול המרכזי, כדי למצוא את הקירוב המבוקש. לשם כך, נמצא תחילה את התוחלת והשונות של Y_i:

$$E[Y_i]=\sum_{j=1}^{15} j\cdot\tfrac{j}{120}=\tfrac{1}{120}\cdot\tfrac{15\cdot 16\cdot 31}{6}=10.33\overline{3}$$

$$E[Y_i^2]=\sum_{j=1}^{15} j^2\cdot\tfrac{j}{120}=\tfrac{1}{120}\cdot\tfrac{225\cdot 256}{4}=120$$

$$\text{Var}(Y_i)=E[Y_i^2]-(E[Y_i])^2=120-10.33\overline{3}^2=13.22\overline{2}$$

ומכאן:

$$P\{1{,}000 \le Y \le 1{,}100\} = P\{999.5 \le Y < 1{,}100.5\}$$ [תיקון רציפות]

$$= P\{999.5 \le \sum_{i=1}^{100} Y_i < 1{,}100.5\}$$

$$= P\left\{\frac{999.5-100\cdot 10.33\bar{3}}{\sqrt{100\cdot 13.22\bar{2}}} \le Z < \frac{1{,}100.5-100\cdot 10.33\bar{3}}{\sqrt{100\cdot 13.22\bar{2}}}\right\}$$

$$= \Phi(1.84715) - \Phi(-0.93045) = 0.9676 - (1-0.8239) = 0.7915$$

ב. נסמן ב- X_1 , X_2 , ... , X_{50} את סדרת 50 "שגיאות-העיגול" שמתקבלת. הערך המוחלט של סכום 50 משתנים מקריים אלו הוא ההפרש המוחלט בין סכום המספרים המעוגלים לבין הסכום המדויק. כמו כן, ה-X_i-ים בלתי-תלויים זה בזה, ולכל אחד מהם יש התפלגות אחידה בקטע $[-0.5,0.5]$, שתוחלתה 0 ושונותה $\frac{1}{12}$. לכן, אפשר להשתמש במשפט הגבול המרכזי, כדי לחשב קירוב להסתברות המבוקשת. מקבלים:

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{50} X_i\right| > 3\right\} \cong P\left\{|Z| > \frac{3-50\cdot 0}{\sqrt{50\cdot\frac{1}{12}}}\right\} = P\{|Z| > 1.4697\} = P\{Z > 1.4697\} + P\{Z < -1.4697\}$$

$$= 2[1-\Phi(1.4697)] = 2(1-0.92916) = 2\cdot 0.07084 = 0.14168$$

8. נסמן ב- X_i את אורך-החיים של הנורה ה-i-ית, לכל $i = 1,...,n$. מתקיים $X_i \sim Exp(0.01)$ לכל i .

ה-X_i-ים בלתי-תלויים, ולכן אפשר להשתמש במשפט הגבול המרכזי למציאת n.

צריך להתקיים:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \ge 5{,}000\right\} \cong P\left\{Z \ge \frac{5{,}000 - n\cdot 100}{\sqrt{n\cdot 100^2}}\right\} = 1-\Phi\left(\frac{50-n}{\sqrt{n}}\right) \ge 0.95$$

כאשר Z מסמן משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי.

כלומר, צריך להתקיים:

$$\Phi\left(\frac{50-n}{\sqrt{n}}\right) \le 0.05 = \Phi(-1.645)$$

הפונקציה $\Phi(\cdot)$ היא חח"ע, ולכל $n > 0$, הפונקציה $\frac{50-n}{\sqrt{n}}$ היא פונקציה יורדת של n. לכן, עלינו למצוא את ה-n המינימלי, שהחל ממנו מתקיים $\frac{50-n}{\sqrt{n}} \le -1.645$. לשם כך, נפתור את המשוואה $50-n = -1.645\sqrt{n}$, שהיא משוואה ריבועית שהמשתנה שלה הוא $\sqrt{n}$. מקבלים כי $\sqrt{n} \ge 7.9124$ ולכן $n \ge 64$.

9. נסמן ב- X_1 את מספר הקופסאות שמוכנסות לארגז הראשון, ב- X_2 את מספר הקופסאות שמוכנסות לארגז השני וב- X_3 את מספר הקופסאות שמוכנסות לארגז השלישי.

א. לכל אחד מהמשתנים המקריים <u>הבלתי-תלויים</u> X_1 , X_2 ו- X_3 יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 150. לכן, לסכומם יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 450. כעת, אפשר להציג משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 450 כסכום של 450 משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים שלכולם התפלגות פואסונית עם הפרמטר 1. מכיוון שכך, נוכל להשתמש במשפט הגבול המרכזי לחישוב הקירוב המבוקש. נערוך תיקון רציפות (מכיוון שההתפלגות הפואסונית היא התפלגות בדידה, שערכיה האפשריים שלמים בלבד) ונקבל:

$$P\{X_1+X_2+X_3 \ge 480\} = P\{X_1+X_2+X_3 \ge 479.5\} \cong P\left\{Z \ge \frac{479.5-450}{\sqrt{450}}\right\} = P\{Z \ge 1.3906\}$$

$$= 1-\Phi(1.3906) = 1-0.9178 = 0.0822$$

ב. לכל אחד מהמשתנים המקריים X_1 ו- X_2, שהוגדרו בתחילת השאלה, יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 150. לכן, אפשר להציג כל אחד מהם, למשל, כסכום של 150 משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים שלכולם התפלגות פואסונית עם הפרמטר 1. מכיוון שכך, נובע ממשפט הגבול המרכזי, שההתפלגות של כל אחד מה- X_i-ים היא בקירוב התפלגות נורמלית עם תוחלת 150 ושונות 150, ובגלל האי-תלות ביניהם נובע שגם התפלגות ההפרש היא בקירוב נורמלית עם תוחלת:

$$E[X_1 - X_2] = E[X_1] - E[X_2] = 0$$

ושונות:
$$\mathrm{Var}(X_1 - X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) = 300$$

לפיכך:
$$P\{|X_1 - X_2| > 10\} \cong P\left\{|Z| > \tfrac{10.5-0}{\sqrt{300}}\right\} = P\{Z > 0.6062\} + P\{Z < -0.6062\}$$
$$= 2[1 - \Phi(0.6062)] = 2(1 - 0.7278) = 0.5444$$

10. נתון כי $X \sim B(n, 0.5)$, ולכן:
$$E[X] = \tfrac{n}{2} \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(X) = \tfrac{n}{4}$$

כמו כן, התפלגות המשתנה המקרי X סימטרית סביב $\frac{n}{2}$, ולכן למשתנה המקרי Y, המוגדר על-ידי $Y = X - \frac{n}{2}$, יש התפלגות סימטרית סביב 0. מכיוון שכך, לכל קבוע a, מתקיים:

$$P\{Y \ge a\} = P\{Y \le -a\}$$

ולחלופין:
$$P\{X - \tfrac{n}{2} \ge \tfrac{n}{2} - 2\} = P\{X - \tfrac{n}{2} \le -(\tfrac{n}{2} - 2)\}$$

ומכאן:
$$P\{|X - \tfrac{n}{2}| \ge \tfrac{n}{2} - 2\} = P\{X - \tfrac{n}{2} \ge \tfrac{n}{2} - 2\} + P\{X - \tfrac{n}{2} \le -(\tfrac{n}{2} - 2)\} = 2P\{X - \tfrac{n}{2} \ge \tfrac{n}{2} - 2\}$$

כעת, נשתמש באי-שוויון צ'בישב למציאת החסם המבוקש, ונקבל כי:

$$P\{X \ge n-2\} = P\{X - \tfrac{n}{2} \ge \tfrac{n}{2} - 2\} = \tfrac{1}{2} \cdot P\{|X - \tfrac{n}{2}| \ge \tfrac{n}{2} - 2\} \le \frac{\frac{n}{4}}{2(\frac{n}{2} - 2)^2} = \frac{\frac{n}{4}}{\frac{2(n-4)^2}{4}} = \frac{n}{2(n-4)^2}$$

11. א. לפי אי-שוויון מרקוב מתקיים:
$$P\{X \ge 14\} \le \frac{E[X]}{14} = \frac{7}{14} = 0.5$$

ב. המשתנה המקרי X מקיים את אי-השוויון $X \ge -2$ ותוחלתו 7, אז המשתנה המקרי $Y = X + 2$ הוא משתנה מקרי אי-שלילי, כלומר, $Y \ge 0$ ותוחלתו 9. לפיכך, לפי אי-שוויון מרקוב, מתקיים:

$$P\{X \ge 14\} = P\{X + 2 \ge 16\} = P\{Y \ge 16\} \le \frac{E[Y]}{16} = \frac{9}{16} = 0.5625$$

ג. לפי אי-שוויון צ'בישב מתקיים:

$$P\{X \ge 14\} = P\{X - 7 \ge 7\} \le P\{X - 7 \ge 7\} + \underbrace{P\{X - 7 \le -7\}}_{=P\{X \le 0\} \ge 0}$$
$$= P\{|X - 7| \ge 7\} \le \frac{4}{7^2} = 0.08163$$

12. לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים:

$$P\left\{\bar{X} \le \tfrac{2\sigma}{\sqrt{n}} + \mu\right\} = P\left\{\bar{X} - \mu \le \tfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = P\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 2\right\} \cong P\{Z \le 2\} = \Phi(2) = 0.9772$$

.13 נסמן ב- X_i את המשקל (בטונות) של המכונית ה-i-ית שנמצאת על הגשר, לכל $i = 1,...,n$. לפי נתוני הבעיה, לכל משתנה מקרי X_i יש תוחלת 3 ושונות 0.3^2, וה-X_i-ים בלתי-תלויים. כמו כן, המשתנה המקרי W, שהתפלגותו נורמלית עם הפרמטרים 400 ו-40^2, מסמן את המשקל (בטונות) שהגשר יכול לשאת בלי שמבנהו יינזק, והוא בלתי-תלוי ב-X_i-ים.

לפי סימונים אלו, המבנה של הגשר יינזק, אם $\sum_{i=1}^{n} X_i > W$, או לחלופין אם $\sum_{i=1}^{n} X_i - W > 0$. לפיכך, עלינו למצוא את ה-n המינימלי, שהחל ממנו מתקיים האי-שוויון $P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i - W > 0\right\} > 0.1$. בעזרת משפט הגבול המרכזי, נוכל למצוא קירוב לערך זה.

נשים לב, כי למשתנה המקרי, המוגדר על-ידי $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 3n}{\sqrt{0.09n}}$, יש בקירוב התפלגות נורמלית סטנדרטית והוא בלתי-תלוי במשתנה המקרי W, שהתפלגותו נורמלית עם הפרמטרים 400 ו- 40^2. לפיכך, לביטוי $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - W - (3n-400)}{\sqrt{0.09n + 40^2}}$ יש בקירוב התפלגות נורמלית סטנדרטית. ומכאן נקבל כי מתקיים :

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i - W > 0\right\} = P\left\{Z > \frac{0-(n\cdot 3 - 400)}{\sqrt{n\cdot 0.3^2 + 40^2}}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{400-3n}{\sqrt{0.09n + 1{,}600}}\right)$$

כאשר Z מסמן משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי.

כדי למצוא את המספר המינימלי של המכוניות שנמצאות על הגשר, ברגע שבו ההסתברות שיינזק עולה על 0.1, נפתור את האי-שוויון $1-\Phi\left(\frac{400-3n}{\sqrt{0.09n+1{,}600}}\right) > 0.1$ או לחלופין את האי-שוויון $\Phi\left(\frac{400-3n}{\sqrt{0.09n+1{,}600}}\right) < 0.9$.

מטבלה 5.2 במדריך הלמידה (עמוד 115) מקבלים כי $\Phi(1.282) = 0.9$, ולכן עלינו לפתור את האי-שוויון $\frac{400-3n}{\sqrt{0.09n+1{,}600}} < 1.282$. מקבלים $9n^2 - 2{,}400.148n + 157{,}370.3616 < 0$ ולכן $116.184 \le n \le 150.499$.

כלומר, המספר המינימלי של מכוניות, שהחל ממנו הגשר יינזק, בהסתברות שעולה על 0.1, הוא 117.

.14 נסמן ב- Y_i את מספר הכדורים הלבנים שנבחרים בחזרה ה-i-ית, לכל $i = 1,2,\ldots,90$.
ה-Y_i-ים בלתי-תלויים, ולכל $i = 1,2,\ldots,90$ מתקיים :

$$E[Y_i] = 5\cdot\tfrac{10}{18} = 2.7778 \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(Y_i) = \tfrac{18-5}{18-1}\cdot 5\cdot\tfrac{10}{18}\cdot\tfrac{8}{18} = 0.9441$$

לכן, עבור Y, המקיים $Y = \sum_{i=1}^{90} Y_i$, מתקיים :

$$E[Y] = 90\cdot 2.7778 = 250 \qquad ; \qquad \mathrm{Var}(Y) = 90\cdot 0.9441 = 84.967$$

כעת, נשתמש באי-שוויון צ'בישב כדי למצוא חסם עליון להסתברות של המאורע הנתון. נקבל :

$$P\{|Y-250| \ge 13\} \le \frac{84.967}{13^2} = 0.503$$