

קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"
תאריך הבחינה: 30/01/2019 (סמסטר 2019 א - מועד א' 83)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זרות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפים: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

שאלה 1 (25 נקודות)

יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p ($0 < p < 1$).

(12 נק') א. הוכיחו: $t < -\ln(1-p)$, $M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$.

(5 נק') ב. הוכיחו: $E[X] = \frac{1}{p}$.

(8 נק') ג. הוכיחו: $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתון משתנה מקרי X המתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ ax - b & 2 \leq x < 4 \\ 0 & 4 \leq x \end{cases}$$

נתון ש $a > 0$ ו $b > 0$.

(5 נק') א. מה צריכים לקיים הפרמטרים a ו- b כדי שפונקציית הצפיפות תהיה חוקית?

(5 נק') ב. חשבו את $P(X \geq 2.5)$, שימו לב שהתשובה יכולה להכיל את הפרמטרים a ו- b .

(15 נק') ג. ידוע ש $E[X] = 3.2$.

1. מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .

2. חשבו את $E[\sqrt{X}]$.

3. דגמו באופן מקרי 100 פעמים את המשתנה המקרי X .

מה בקרוב תהיה ההתפלגות של $\sum_{i=1}^{100} X_i$?

במידה וההתפלגות מיוחדת, רשמו את הפרמטרים שלה.

שאלה 3 (25 נקודות)

במסלול 'ינג'יה' ישנם 4 מכשולים. מתמודד שמנסה לעבור את המסלול מנסה לעבור את המכשולים בזה אחר זה, עד למכשול הראשון שבו הוא נכשל. אם מתמודד נכשל בשלב כלשהו, הוא איננו יכול לגשת לשלב הבא. כלומר, הוא מנסה לעבור את המכשול הראשון, אם הוא מצליח אותו הוא מנסה לעבור את המכשול השני, אם הוא מצליח לעבור אותו הוא מנסה את המכשול השלישי וכך הלאה. לאחר המכשול הרביעי בכל מקרה נגמר המסלול.

שני מתמודדים: יפתח ואלכס מנסים לעבור את המסלול.

כל אחד מהמתמודדים מצליח כל אחד מהמכשולים בסיכוי 0.6 באופן בלתי-תלוי במתמודד האחר. נסמן ב:

X – מספר המתמודדים מתוך השניים שהגיעו למכשול השלישי.

Y – מספר המכשול המתקדם ביותר אליו יפתח ניגש.

למשל, אם:

- יפתח סיים את המסלול, אלכס הגיע למכשול השני ונכשל בו אז $X = 1, Y = 4$.
- יפתח הגיע למכשול השני ונכשל בו, אלכס נכשל במכשול הראשון, אז $X = 0, Y = 2$.

(12 נק') א. מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של (X, Y) .

(5 נק') ב. אם יפתח נכשל במכשול השלישי, מה תהיה התוחלת של X ?

(8 נק') ג. חשבו את $COV(2X + 3, 3X + 2Y + 5)$.

שאלה 4 (25 נקודות)

מספר תאונות הדרכים בכביש 90 מתפלג פואסונית עם קצב של 2 תאונות בשבוע. מספר תאונות הדרכים בכביש 4 מתפלג פואסונית עם קצב של תאונה אחת בשבוע. אין תלות בין מספר תאונות הדרכים בכביש 90 למספר תאונות הדרכים בכביש 4 בשבוע.

(8 נק') א. נסמן ב- X את מספר תאונות הדרכים בכביש 4 בשבוע כלשהו. מצאו את $E[|X - 3|]$.

(8 נק') ב. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר השבועות בשנה (הניחו שבשנה 52 שבועות) בהם אין תאונות דרכים בכביש 90?

(9 נק') ג. כל תאונת דרכים בכביש 90 היא תאונת דרכים קשה בהסתברות של 0.2. מה ההסתברות שבחודש פברואר (בחודש זה 4 שבועות בדיוק) יהיו בכביש 90 בדיוק 5 תאונות דרכים שאחת מהן תאונת דרכים קשה?

שאלה 5 (25 נקודות)

28 מתמודדים הגיעו לגמר של 'נינג'יה ישראל' וחולקו באקראי ל-7 מקבצים שכל אחד מהם כולל בדיוק 4 מתמודדים.

מבין 28 המתמודדים ישנם 6 טפסנים .

מקבץ טוב הוא מקבץ שמכיל לפחות 2 טפסנים.

נגדיר את X - מספר המקבצים הטובים מתוך 7 המקבצים של הגמר.

(5 נק') א. יהי X_i אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם המקבץ ה- i הוא טוב, $1 \leq i \leq 7$.

חשבו את $E[X_i]$.

(3 נק') ב. חשבו את $E[X]$.

(17 נק') ג. חשבו את $Var(X)$.

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] \quad \text{נוסחת האינטרפולציה:}$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה - 20425

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}, \quad i=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t + 1 - p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1} \cdot p, \quad i=1,2,\dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t / (1 - (1-p)e^t), \quad t < -\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i!, \quad i=0,1,\dots$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1} (1-p)^{i-r} \cdot p^r, \quad i=r, r+1, \dots$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$(pe^t / (1 - (1-p)e^t))^r, \quad t < -\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i} / \binom{N}{n}, \quad i=0,1,\dots,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N} (1 - \frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n}, \quad i=m+1, m+2, \dots, m+n$	$m + (1+n)/2$	$(n^2 - 1)/12$	
אחידה	$1/(b-a), \quad a \leq x \leq b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt} - e^{at})/(tb - ta), \quad t \neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda - t), \quad t < \lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1, \dots, n_r} \cdot p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}, \quad \sum n_i = n, \sum p_i = 1$			

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

נוסחת הבינום

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

כלל ההכלה וההפרדה

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

הסתברות מותנית

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

נוסחת הכפל

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i), \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S$$

נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}, \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S$$

נוסחת בייס

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx$$

תוחלת

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx$$

תוחלת של פונקציה של מ"מ

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

שונות

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

תוחלת ושונות של פונקציה ליניארית

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ .

$$P\{X > s+t | X > t\} = P\{X > s\}, \quad s, t \geq 0$$

תכונת חוסר-הזכרון

$$E[X|Y=y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y) = \int x f_{X|Y}(x|y) dx$$

תוחלת מותנית

$\text{Var}(X Y = y) = E[X^2 Y = y] - (E[X Y = y])^2$	שוונות מותנית
$E[X] = E[E[X Y]] = \sum_y E[X Y = y] p_Y(y)$	נוסחת התוחלת המותנית
$E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X Y]]$	(טענה מתרגיל 26, עמוד 430)
$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X Y)] + \text{Var}(E[X Y])$	נוסחת השונות המותנית
$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$	תוחלת של סכום משתנים מקריים
$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$	שוונות משותפת
$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$	
$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$	שוונות של סכום משתנים מקריים
$\rho(X, Y) = \text{Cov}(X, Y) / \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}$	מקדם המתאם הלינארי
$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$	פונקציה יוצרת מומנטים
$M_{X_1+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t) \quad :$ כאשר X_i מ"מ ב"ת מתקיים	
$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X_1]$	תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי
$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\text{Var}(X_1) + (E[X_1])^2 \text{Var}(N)$	(כאשר X_i מ"מ ב"ת ש"ה)
$M_{X_1+\dots+X_N}(t) = E\left[\left(M_{X_1}(t)\right)^N\right]$	
$P\{X \geq a\} \leq E[X]/a \quad , \quad a > 0 \quad , \quad X$ מ"מ אי-שלילי	אי-שוויון מרקוב
$P\{ X - \mu \geq a\} \leq \sigma^2/a^2 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty$	אי-שוויון צ'בישב
$P\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)/\sqrt{n\sigma^2} \leq a\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a) \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty \quad , \quad X_i$ מ"מ ב"ת וש"ה	משפט הגבול המרכזי

<ul style="list-style-type: none"> אם A ו-B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A) + P(B)]$. סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר p הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי). סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני. סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי. ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X + Y = n$, כאשר X ו-Y מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית). 	

$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	
$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1 < x < 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = -\ln(1-x) \quad , \quad 0 < x < 1$	
$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \neq -1 \quad ; \quad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$	נוסחת האינטגרציה בחלקים :
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \frac{1}{a \ln b} b^{ax} \quad ; \quad \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$	
$\log_n a = \log_m a / \log_m n \quad ; \quad \log_n (a^b) = b \cdot \log_n a \quad ; \quad \log_n (ab) = \log_n a + \log_n b$	