שאלה 1

א. המשתנה המקרי X מקבל את הערך 3 בשלושה מקרים: $\{R = L = 1\}$, $\{R = 2, L = 0\}$, $\{R = 0, L = 2\}$.

כמו כן, המשתנים המקריים R ו- L בלתי-תלויים, ומקיימים:

$$P\{L = i\} = P\{R = i\} = 0.75^i \cdot 0.25 \qquad , \qquad i = 0,1,...$$

לכן:
$$P\{X = 3\} = (0.75 \cdot 0.25)^2 + 2 \cdot (0.75^2 \cdot 0.25) \cdot 0.25 = 0.1055$$

ב. המשתנים המקריים R ו- L הם הזזה ב- (-1) של התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר 0.25.

נסמן: $R = G_R - 1$ ו- $L = G_L - 1$, כאשר $G_R, G_L \sim Geo(0.25)$ והם בלתי-תלויים.

ונקבל:
$$E[X] = E[R + L + 1] = E[G_R + G_L - 1] = E[G_R] + E[G_L] - 1 = 2 \cdot \tfrac{1}{0.25} - 1 = 7$$

ג. מהאמור לעיל:

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(R + L + 1) = \text{Var}(G_R + G_L - 1) = \text{Var}(G_R) + \text{Var}(G_L) = 2 \cdot \tfrac{0.75}{0.25^2} = 24$$

ד. מהאמור לעיל:
$$Y = X + 1 = R + L + 2 = G_R + G_L$$

כלומר, המשתנה המקרי Y הוא סכום של שני משתנים מקריים גיאומטריים בלתי- תלויים, שלכל אחד מהם הפרמטר 0.25. לפיכך, ההתפלגות של Y היא בינומית-שלילית עם הפרמטרים 2 ו- 0.25.

שאלה 2

א. הוכחת הטענה מובאת בקובץ ההוכחות שבאתר הקורס.

ב. נתונים 10 האינדיקטורים:
$$X_i = \begin{cases} 1 & , \quad A_i \text{ מתרחש} \\ 0 & , \quad A_i \text{ אינו מתרחש} \end{cases} \qquad \text{לכל} \quad i = 1,2,\ldots,10$$

1.
$$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{10} X_i\right] = \sum_{i=1}^{10} E[X_i] = \sum_{i=1}^{10} P(A_i) = 10 \cdot 0.1 = 1$$

2.
$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(X_2)}} = \frac{E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2]}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(X_2)}}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap A_2) - P(A_1)P(A_2)}{\sqrt{P(A_1)P(A_1^C)P(A_2)P(A_2^C)}} = \frac{P(A_1 \cap A_2) - 0.1^2}{0.1 \cdot 0.9}$$

ההסתברות $P(A_1 \cap A_2)$ מקבלת ערכים בין 0 (אם המאורעות זרים) ל-0.1 (אם המאורעות שווים),

ולכן:
$$-\frac{1}{9} \le \rho(X_1, X_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2) - 0.1^2}{0.1 \cdot 0.9} \le 1$$

שאלה 3

נסמן ב- A_i את המאורע שמתג i סגור $(i=1,\dots,8)$, ב- B_j את המאורע שעובר זרם בענף j $(j=1,2,3,4)$

וב- C את המאורע שעובר זרם מנקודה A לנקודה B.

כל המאורעות A_i בלתי-תלויים זה בזה ושווי-הסתברות, ולכן גם המאורעות B_j בלתי-תלויים זה בזה ושווי-הסתברות.

א. $$P(C)=P(B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4)=1-P(B_1^C\cap B_2^C\cap B_3^C\cap B_4^C)$$

כאשר: $$P(B_1)=P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P(A_2)=0.8^2=0.64$$

$$P(B_1^C)=1-0.64=0.36$$

ומכאן: $$P(C)=1-P(B_1^C\cap B_2^C\cap B_3^C\cap B_4^C)=1-0.36^4=0.9832$$

ב. מכיוון שהמתגים בלתי-תלויים, אם בשלושת הענפים העליונים יש 5 מתגים פתוחים, אז בוודאות לא עובר זרם דרכם. לפיכך, ההסתברות שיעבור זרם מנקודה A לנקודה B היא ההסתברות שיעבור זרם בענף התחתון (והיא אינה תלויה בידוע לגבי הענפים העליונים). כלומר, ההסתברות היא: $0.8^2=0.64$.

ג. נסמן ב- E את המאורע שבמעגל יש 5 מתגים פתוחים וב- C את המאורע שעובר במעגל זרם. עלינו לחשב את $P(C\mid E)$. מכיוון שכל המתגים בלתי-תלויים זה בזה ולכולם אותה הסתברות להיות סגורים, מדובר למעשה בשאלה קומבינטורית (כפי שאפשר לראות בחישוב שלהלן) והתרחשות המאורע נקבעת לפי מיקום 5 המתגים הפתוחים.

כדי שהמאורע $C\cap E$ יתרחש, המתגים הפתוחים צריכים להיות מרוכזים ב-3 ענפים (כדי לאפשר מעבר זרם בענף הרביעי), כך שבשניים מהם יהיו 2 מתגים פתוחים ובשלישי רק מתג אחד פתוח. לפיכך, עלינו לבחור את שני הענפים שבהם יהיו 2 מתגים פתוחים, אחר-כך את הענף שיהיה בו מתג פתוח אחד בלבד, ולבסוף את מיקום המתג הפתוח בענף האחרון שנבחר. ומכאן:

$$P(C\mid E)=\frac{P(C\cap E)}{P(E)}=\frac{\binom{4}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \cancel{0.2^5\cdot 0.8^3}}{\binom{8}{5}\cdot\cancel{0.2^5\cdot 0.8^3}}=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}=0.4286$$

ד. נשתמש בסמוני הסעיפים הקודמים, ונחשב את $P(E\mid C^C)$. נקבל:

$$P(E\mid C^C)=\frac{P(C^C\cap E)}{P(C^C)}=\frac{P(E)-P(C\cap E)}{1-P(C)}$$

$$=\frac{\binom{8}{5}\cdot 0.2^5\cdot 0.8^3-\binom{4}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 0.2^5\cdot 0.8^3}{1-0.9832}=\frac{0.005243}{0.0168}=0.3121$$

שאלה 4

א. הניסוי המתואר בבעיה מקביל לניסוי שבו מסדרים תחילה את 20 הכדורים בשורה, ואז כביכול בוחרים אותם לפי הסדר שלהם בשורה. כעת, כאשר מסדרים בשורה 20 כדורים ששניים מהם אדומים, הכדורים האדומים יכולים להתמקם בכל זוג מקומות בשורה בהסתברויות שוות. לכן:

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{1}{\binom{20}{2}}=\frac{1}{190}\qquad,\qquad 1\le i<j\le 20$$; i ו- j שלמים

ב. $$P\{X=i\}=\sum_{j=i+1}^{20}P\{X=i,Y=j\}=\sum_{j=i+1}^{20}\frac{1}{190}=\frac{20-i}{190}\qquad,\qquad i=1,2,...,19$$

$$P\{Y=j\}=\sum_{i=1}^{j-1}P\{X=i,Y=j\}=\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{190}=\frac{j-1}{190}\qquad,\qquad j=2,3,...,20$$

ג. לכל $j=2,3,\ldots,20$ מתקיים:

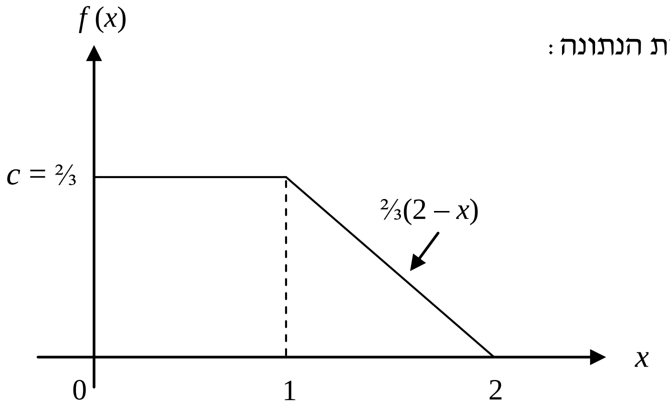
$$P\{X=i\mid Y=j\}=\frac{P\{X=i,Y=j\}}{P\{Y=j\}}=\frac{\frac{1}{190}}{\frac{j-1}{190}}=\frac{1}{j-1}\qquad,\qquad i=1,2,...,j-1$$

כלומר, למשתנה המקרי המותנה X בהינתן $Y=j$ יש התפלגות אחידה בדידה בין 1 ל- $j-1$.

לכן, תוחלתו היא $\frac{1+j-1}{2}=\frac{j}{2}$ ושונותו היא $\frac{(j-1)^2}{12}=\frac{j(j-2)}{12}$.

שאלה 5

א. נצייר תחילה את פונקציית הצפיפות הנתונה:



השטח הכלוא מתחת לעקומת הצפיפות שווה מצד אחד ל-1 ומצד שני ל- $1.5c$. לכן, $c=⅔$.

ב. $$E[X]=\int_0^1\tfrac{2}{3}xdx+\int_1^2\tfrac{2}{3}x(2-x)dx=\tfrac{2}{6}x^2\Big|_0^1+\Big[\tfrac{4}{6}x^2-\tfrac{2}{9}x^3\Big]_1^2=\tfrac{2}{6}+\tfrac{16}{6}-\tfrac{16}{9}-\tfrac{4}{6}+\tfrac{2}{9}=\tfrac{7}{9}$$

ג. את פונקציית ההתפלגות המצטברת נקבל בעזרת חישובי שטחים מתחת לעקומת הצפיפות.

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & ,\quad x<0\\ \tfrac{2}{3}x & ,\quad 0\le x\le 1\\ 1-\tfrac{1}{3}(2-x)^2 & ,\quad 1\le x\le 2\\ 1 & ,\quad x>2\end{cases}$$

ד. הערכים האפשריים של המשתנה המקרי Y הם בין 0 ל- 4. לכל $0\le y\le 4$ מתקיים:

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=P\{0\le X\le\sqrt{y}\}=F_X(\sqrt{y})$$

לכן:
$$F_Y(y)=F_X(\sqrt{y})=\begin{cases}0 & ,\quad y<0\\ \tfrac{2}{3}\sqrt{y} & ,\quad 0\le y\le 1\\ 1-\tfrac{1}{3}(2-\sqrt{y})^2 & ,\quad 1\le y\le 4\\ 1 & ,\quad y>4\end{cases}$$