האוניברסיטה הפתוחה

כ"ד בתמוז תש"ף

16 ביולי 2020

מס' שאלון - 521

סמסטר 2020ב

20585 / 4

מס' מועד 76

שאלון בחינת גמר

20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

משך בחינה: 4 שעות

בשאלון זה **3** עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה שש שאלות.

עליכם לענות על חמש שאלות בלבד.

משקל כל שאלה 20 נקודות.

בהצלחה !!!

שאלה 1

תזכורות: יהי Σ אלפבית סופי. פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ היא **פונקציה ניתנת לחישוב**, אם יש מכונת טיורינג שעל כל קלט $w \in \Sigma^*$ עוצרת, וכשהיא עוצרת, רשומה על הסרט המילה $f(w)$ בלבד.

הטווח של פונקציה f כזו הוא הקבוצה $\{f(w) \mid w \in \Sigma^*\}$

הוכיחו: הטווח של **כל פונקציה ניתנת לחישוב** הוא שפה **מזוהה-טיורינג**.

הדרכה: השתמשו במונה (enumerator).

שאלה 2

תזכורת: יהי Σ אלפבית. **הסדר הסטנדרטי** של המילים ב-Σ^* הוא הסדר שלפיו מילים קצרות קודמות למילים ארוכות יותר, והסדר בין מילים בעלות אותו האורך נקבע לפי הסדר המילוני.

תזכורת: פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ **מממשת רדוקציית מיפוי** של שפה A לשפה B, אם f היא פונקציה **ניתנת לחישוב**, ולכל w ב-Σ^*, $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$.

תהיינה A ו-B שפות מעל אלפבית נתון Σ. נתון שיש רדוקציית מיפוי של A ל-B ($A \leq_m B$), שהיא **על** Σ^*. כלומר, יש פונקציה **ניתנת לחישוב** $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, שהיא **על** Σ^*, ומתקיים $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$.

נגדיר $g : \Sigma^* \to \Sigma^*$ באופן הבא: $g(v) = \min\{w \mid f(w) = v\}$

הפונקציה g מחזירה לכל מילה v את המילה המינימלית (לפי הסדר הסטנדרטי) w כך ש- $f(w) = v$.

האם **בהכרח** g מממשת רדוקציית מיפוי של B ל-A? **הוכיחו** את תשובתכם.

שאלה 3

הוכיחו: השפה C הבאה **איננה מזוהה-טיורינג**:

$$C = \{\langle M, n\rangle \mid M \text{ is a TM. The longest word that } M \text{ halts on has length at most } n\}$$

מילה $\langle M, n\rangle$ שייכת ל-C, אם M היא מכונת טיורינג, n הוא מספר טבעי או 0, ואורך המילה **הארוכה ביותר** ש-M **עוצרת עליה** $\leq n$.

אם קבוצת המילים ש-M עוצרת עליהן ריקה או אינסופית, אזי לכל n, $\langle M, n\rangle$ **לא שייכת** ל-C.

המשך הבחינה בעמוד הבא

שאלה 4

תזכורת: בעיית הקבוצה הבלתי תלויה היא הבעיה הבאה (ראו עמוד 78 במדריך הלמידה. עמוד 94 במהדורה הקודמת):

הקלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$; מספר טבעי k.

השאלה: האם יש ב-G קבוצה בלתי תלויה של k צמתים?

(קבוצת W של צמתים היא בלתי תלויה, אם אין ב-W שני צמתים, שיש ביניהם קשת ב-E.)

בעיית הקבוצה הבלתי תלויה היא NP-שלמה.

נגדיר את **בעיית הקבוצה הבלתי תלויה שכוללת מחצית מן הצמתים של קבוצת צמתים נתונה**:

הקלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$; מספר טבעי k; תת-קבוצה לא ריקה U של צמתים שיש בה מספר זוגי של צמתים. ($U \subseteq V$, $U \neq \varnothing$, $|U|$ זוגי).

השאלה: האם יש ב-G קבוצה בלתי תלויה של k צמתים, שמכילה **בדיוק מחצית** מן הצמתים של U?

הוכיחו: בעיית הקבוצה הבלתי תלויה שכוללת מחצית מן הצמתים של קבוצת צמתים נתונה היא **NP-שלמה**.

הדרכה: הראו שהבעיה שייכת ל-NP, והראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של בעיית הקבוצה הבלתי תלויה.

שאלה 5

תהי A שפה **NP-שלמה**, ותהי B שפה **חלקית ממש** ל-A ($B \subset A$; B חלקית ל-A אך איננה שווה לה) **השייכת למחלקה P** ($B \in$ P).

הוכיחו: השפה $A–B$ היא שפה **NP-שלמה**.

דוגמה: $A=SAT$, $B=2SAT$ (ראו בעיה 7.24 בספר. במהדורה הקודמת, בעיה 7.42).

$A–B = \{<\phi> \mid \phi \text{ is a satisfiable Boolean formula that is not a 2cnf-formula}\}$.

כמובן, עליכם להוכיח את הטענה באופן כללי, ולא רק ביחס לדוגמה.

שאלה 6

גרף מכוון $G=(V, E)$ ייקרא **אדום-ירוק**, אם כל צומת של G צבוע באדום או בירוק.

גרף מכוון אדום-ירוק G ייקרא **קשיר אדום-ירוק** (red-green connected), אם יש ב-G מסלול מכוון **מכל** צומת אדום **לכל** צומת ירוק.

נגדיר את השפה $RG\text{-}CONN$:

$$RG\text{-}CONN = \{<G> \mid G \text{ is a red-green connected graph}\}$$

זוהי שפת הגרפים המכוונים שהם קשירים אדום-ירוק.

הוכיחו: $RG\text{-}CONN$ היא שפה **NL-שלמה**.

- סוף -