גיא כרמי 301726154   04/01   תשובה למתמטיקה

שאלה 1:

א. מאקסיומה 4-I קיימת נק' D שאינה על הישר המכיל את הקטע AB.

הישר l חותך את AB בנק' C, לכן עפ"י אקסיומת ~~פאש~~ פאש, ומכיוון ש- A,B,D אינן קוויות, l מכיל גם נק' חיתוך עם הישר המכיל את A,D או הישר המכיל את D,B, כלומר הישר l מכיל נק' נוספת ל- C, שבהכרח הן נק' שונות.

צריך לוודא שתנאי אקסיומת פאש מתקיימות. אולי D על L ?

ב. תהי נק' A. נניח בשלילה כי קיים ישר l המכיל את A בלבד.

עפ"י 4-I קיימת B שאינה על l, ועפ"י 2-I קיים ישר l_2 המכיל את A ו- B ושונה מ l.

עפ"י 4-II קיימת נק' C על l_2 המקיימת (ABC).

קיבלנו מצב המתאים לתנאי של סעיף א' וכן ישר l החותך את הקטע AC בנק' B, לכן כפי שהוכח בסעיף א' קיימת נק' נוספת על l, בסתירה להנחה כי l מכיל את A בלבד, ומכאן נובע כי אין ישר עליו בדיוק נק' אחת.

יפה

שאלה 2:

א. מ-I-1 יש 2 נק' נסמן A,B.

מ- I-2 ישנו ישר l_1 המכיל את A ו-B.

מ- I-4 קיימת C, שאינה על l_1.

מ V-1 קיים l_2 המכיל את C ומקביל ל-l_1.

מ- I-2 קיים גם l_3 המכיל את A,C ו- l_4 המכיל את B,C.

מ-V-1 קיים l_5 המכיל את B ומקביל ל l_3.

זהו אינו אחד הישרים הקיימים כי לכולם אלו נק' חיתוך עם l_3.

כמו כן קיים l_6 המכיל את A ומקביל ל l_4,

זהו אינו אחד מהישרים הקיימים כי לכולם יש נק' חיתוך עם l_4.

יפה

הראינו 6 ישרים שונים.

ב. לא, נעבור על האקסיומות ונראה כי לא ניתן להבין מהן קיום של נק' נוספת ולכן קיום של ישר נוסף:

אין פה הוכחה. כדי להוכיח די להראות מודל שמקיים את כל האקסיומות ויש בו רק 6 ישרים (המודל שיש בו רק 3 נקודות לא יקיים את אקסיומת המקבילים שרוצה מקביל **יחיד**)

I-1 - "מיצינו" אותה, כבר יש 2 נק'.

I-2 - "מיצינו" אותה, קיים $A,B\in l_1$, $A,C\in l_3$ ו- $B,C\in l_4$.

אבל יש עוד נקודה, חייבת להיות נקודה D, לכן מה שכתבת לא עוזר

I-3 - אינה תורמת, כל הישרים l_{1-6} מכילים נק' מתוך A,B,C.

I-4 - לישר l_1 יש את הנק' C, ל- l_3 את B ול- l_4 את A, האקסיומה לא תורמת נק' נוספות.

V-1 - במלים פשוטות, לכל ישר יש לפחות ישר 1 מקביל לו על כל נק' שאינה על הישר, ל- l_1 והנק' C מצאנו את l_2, וגם ל- l_2 ול- A ו- B יש את l_1, באופן דומה גם l_3,l_5 וכך גם l_4,l_6.

נקודה B אינה על L6 אבל נמצאת גם על L5 וגם על L4 אצלך שניהם מקבילים וזה סותר את אקסיומת המקבילים שרוצה מקביל אחד ויחיד. לכן יש עוד נקודה ולכן אין פה הוכחה

שאלה 3:

א. אם $6|n^2$ אז $n\ge 6$, כי 6 לא יחלק
את $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$. נסמן $n=6k+r$, $k\in\mathbb{N}$ ו-$r\in\{0,1,2,3,4,5\}$,
עפ' משפט החלוקה עם שארית קיימים מספרים k, r כאלו.
מכך ש- $6|n^2$ קיים $p\in\mathbb{N}$ המקיים $n^2=6p$.
ומתקיים $(6k+r)^2=6p$. נפתח את השוויון
ונקבל $36k+12kr+r^2=6p$, או $6k+2kr+\frac{r^2}{6}=p$
אבל $k,r,p\in\mathbb{N}$, לכן גם $\frac{r^2}{6}\in\mathbb{N}$, אבל זה מתקיים
רק עבור $r=0$ (מתוך האפשרויות של r שמקיים $0\le r<6$).
לכן מתקיים $n=6k$ ובפרט $6|n$.

ב. לא נכון, $12|36$ אבל $12\nmid 6$.

ג. מהמשפט היסודי של האריתמטיקה, ישנה הצגה יחידה של מספרים
טבעיים כמכפלת הגורמים הראשוניים שלהם. מתקיים $288=2^5\cdot 3^2$.
בעזרת $\{24,\frac{1}{3},\frac{1}{8}\}$ ניתן לקבל את 3 לכן לא תהיה בעיה
להגיע ל-3^2, אבל בזוגים ניתן לייצר רק את 24 ואת 8,
לא ניתן להגיע למס' זוגי קטן יותר באמצעות גורמים אלו. ?
אבל $8=2^3$ ו- $24=2^3\cdot 3$, כלומר ניתן להשתמש רק בכפולות
של 2^3 ולא נוכל להגיע ל-2^5, ? לכן לא נוכל להגיע ל-288.

אין פה כל הוכחה
-4

הדרישה היא להוכחה, לא נימקת אף אחת מהטענות שלך

ד. נסמן $A=28^x\cdot 21^{y-1}$ ו- $B=16^z\cdot 49^t$. ברור כי המשוואה מתקיימת
אם ורק אם $A=B$. נציג את A,B כמכפלה של מס' ראשוניים:

$$A=(4\cdot 7)^x\cdot(3\cdot 7)^{y-1}=4^x\cdot 7^{x+y-1}\cdot 3^{y-1}=2^{2x}\cdot 3^{y-1}\cdot 7^{x+y-1}$$

$$B=16^z\cdot 49^t=2^{4z}\cdot 7^{2t}$$

מיחידות הפירוק למס' ראשוניים, לא ייתכן כי $A=B$ מכיוון
שבפירוק של A יש כפולות של 3 ואילו בפירוק של B לא,
לכן לא קיימים x,y,z,t המקיימים את השוויון הנדרש.

שים לב איך אתה "מוכיח" טענה שאינה נכונה

-4 קיימים מספרים כאלה. למשל: $x=2$ $y=z=t=1$

שאלה 4:

א. בסיס האינדוקציה: $a_2 = 1+\frac{1}{2} = 2-\frac{1}{2}$.

צריך לבדוק עבור האיבר הראשון, 1 לא 2

צעד האינדוקציה: נניח כי מתקיים עד n: $a_n = 2-\frac{1}{n}$

ונראה עבור $k=n+1$:

מקיום ההנחה עבור a_n נראה כי מתקיים:

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n-1)n} = 2-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{(n-1)n} = 2-\frac{1}{n}$$

כי מתקיים עבור a_{n-1}. מהנחת האינדוקציה.

ונובע כי מתקיים (*) $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)n}$

$$a_k = a_n + \frac{1}{nk} = 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{nk} = 2-\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{(k-1)k}\right) = 2-\frac{1}{k}$$

מ-(*)

ב. בסיס האינדוקציה: עבור $n=1$ מתקיים $13|13$.

הנחת האינדוקציה: $13 | 10^{2n-1}+3^{2n-1}$ $n<k$.

צעד האינדוקציה: נראה עבור $k=n+1$:

$$10^{2k-1}+3^{2k-1} = 10^{2(n+1)-1}+3^{2(n+1)-1} = 10^2\cdot 10^{2n-1}+3^2\cdot 3^{2n-1} =$$

(מהנחת האינדוקציה קיים a טבעי כך ש $10^{2n-1}+3^{2n-1}=13a$)

$$= 10^2(13a-3^{2n-1})+3^2(13a-10^{2n-1}) = 10^2\cdot 13a - 10^2\cdot 3^{2n-1}+3^2\cdot 13a-3^2\cdot 10^{2n-1}$$

$$= (10^2+3^2)13a - 10^2 3^2(10^{2n-3}+3^{2n-3}) = 13\cdot 109a - 900\cdot 13b$$

(שוב מהנחת האינדוקציה קיים $b\in\mathbb{N}$ כך ש $10^{2n-3}+3^{2n-3}=13b$)

למה? זה לא נכון. הנחת האינדוקציה כתובה למעלה והיא לא זו

כמו כן ברור כי $b<a$ כי $(10^{2n-3}+3^{2n-3}) < 10^{2n-1}+3^{2n-1}$ כי ההפרש בחזקות הוא 2 והבסיס זהה כמובן שגדול מ-1.

לכן $13\cdot 109a > 13\cdot 900b$ כי $109\cdot 9 > 900$ כלומר

המס' $13(109a-900b)$ חיובי ומתחלק ב-13 כנדרש.