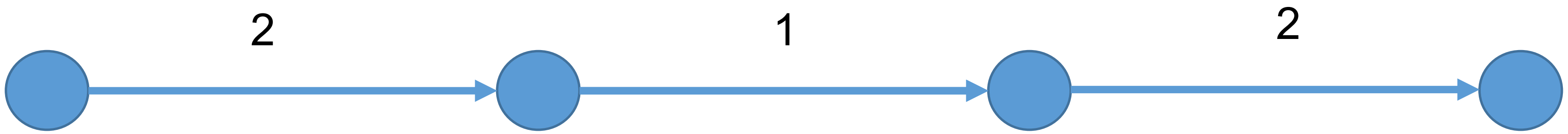
פרק 7
רשתות
זרימה

תרגילים מהספר

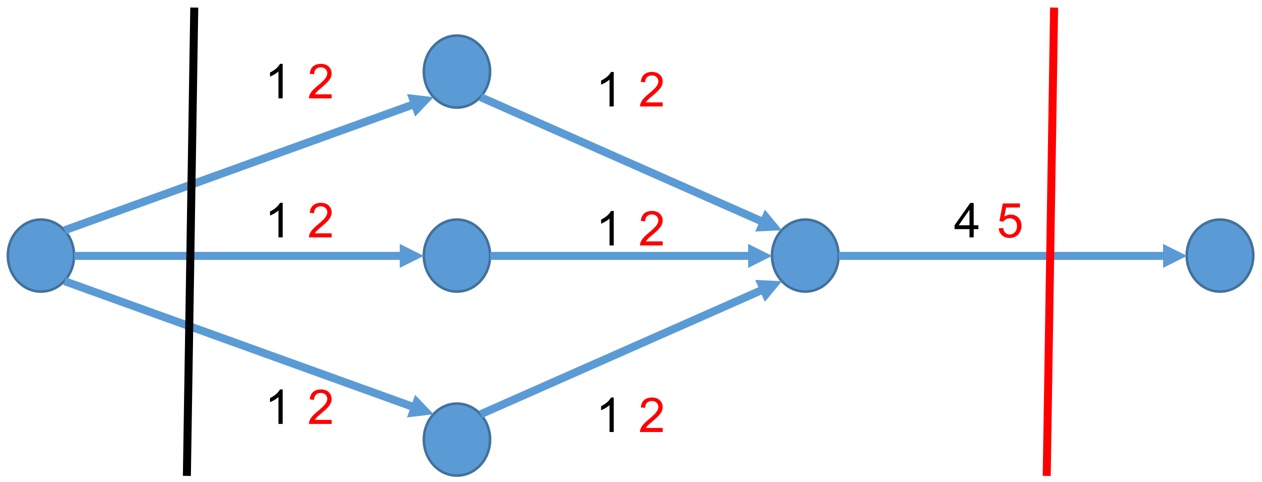
4. Decide whether you think the following statement is true or false. If it is true, give a short explanation. If it is false, give a counterexample.

> *Let G be an arbitrary flow network, with a source s, a sink t, and a positive integer capacity c_e on every edge e. If f is a maximum s-t flow in G, then f saturates every edge out of s with flow (i.e., for all edges e out of s, we have $f(e) = c_e$).*



5. Decide whether you think the following statement is true or false. If it is true, give a short explanation. If it is false, give a counterexample.

> *Let G be an arbitrary flow network, with a source s, a sink t, and a positive integer capacity c_e on every edge e; and let (A, B) be a mimimum s-t cut with respect to these capacities $\{c_e : e \in E\}$. Now suppose we add 1 to every capacity; then (A, B) is still a minimum s-t cut with respect to these new capacities $\{1 + c_e : e \in E\}$.*



8. Statistically, the arrival of spring typically results in increased accidents and increased need for emergency medical treatment, which often requires blood transfusions. Consider the problem faced by a hospital that is trying to evaluate whether its blood supply is sufficient.

The basic rule for blood donation is the following. A person's own blood supply has certain *antigens* present (we can think of antigens as a kind of molecular signature); and a person cannot receive blood with a particular antigen if their own blood does not have this antigen present. Concretely, this principle underpins the division of blood into four *types*: A, B, AB, and O. Blood of type A has the A antigen, blood of type B has the B antigen, blood of type AB has both, and blood of type O has neither. Thus, patients with type A can receive only blood types A or O in a transfusion, patients with type B can receive only B or O, patients with type O can receive only O, and patients with type AB can receive any of the four types.[4]

(a) Let s_O, s_A, s_B, and s_{AB} denote the supply in whole units of the different blood types on hand. Assume that the hospital knows the projected demand for each blood type d_O, d_A, d_B, and d_{AB} for the coming week. Give a polynomial-time algorithm to evaluate if the blood on hand would suffice for the projected need.

(b) Consider the following example. Over the next week, they expect to need at most 100 units of blood. The typical distribution of blood types in U.S. patients is roughly 45 percent type O, 42 percent type A, 10 percent type B, and 3 percent type AB. The hospital wants to know if the blood supply it has on hand would be enough if 100 patients arrive with the expected type distribution. There is a total of 105 units of blood on hand. The table below gives these demands, and the supply on hand.

blood type	supply	demand
O	50	45
A	36	42
B	11	8
AB	8	3

Is the 105 units of blood on hand enough to satisfy the 100 units of demand? Find an allocation that satisfies the maximum possible number of patients. Use an argument based on a minimum-capacity cut to show why not all patients can receive blood. Also, provide an explanation for this fact that would be understandable to the clinic administrators, who have not taken a course on algorithms. (So, for example, this explanation should not involve the words *flow*, *cut*, or *graph* in the sense we use them in this book.)

8. Statistically, the arrival of spring typically results in increased accidents and increased need for emergency medical treatment, which often requires blood transfusions. Consider the problem faced by a hospital that is trying to evaluate whether its blood supply is sufficient.

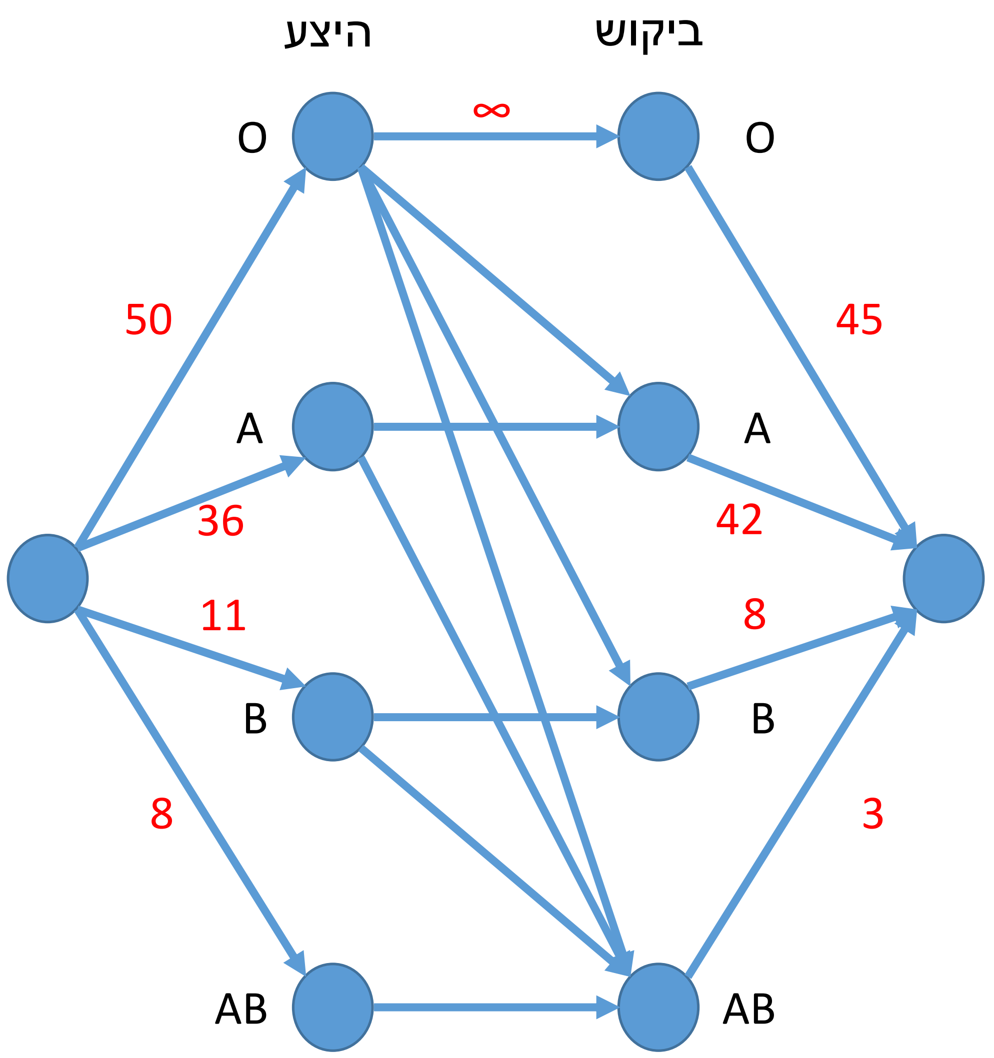
The basic rule for blood donation is the following. A person's own blood supply has certain *antigens* present (we can think of antigens as a kind of molecular signature); and a person cannot receive blood with a particular antigen if their own blood does not have this antigen present. Concretely, this principle underpins the division of blood into four *types*: A, B, AB, and O. Blood of type A has the A antigen, blood of type B has the B antigen, blood of type AB has both, and blood of type O has neither. Thus, patients with type A can receive only blood types A or O in a transfusion, patients with type B can receive only B or O, patients with type O can receive only O, and patients with type AB can receive any of the four types.[4]

(a) Let s_O, s_A, s_B, and s_{AB} denote the supply in whole units of the different blood types on hand. Assume that the hospital knows the projected demand for each blood type d_O, d_A, d_B, and d_{AB} for the coming week. Give a polynomial-time algorithm to evaluate if the blood on hand would suffice for the projected need.

(b) Consider the following example. Over the next week, they expect to need at most 100 units of blood. The typical distribution of blood types in U.S. patients is roughly 45 percent type O, 42 percent type A, 10 percent type B, and 3 percent type AB. The hospital wants to know if the blood supply it has on hand would be enough if 100 patients arrive with the expected type distribution. There is a total of 105 units of blood on hand. The table below gives these demands, and the supply on hand.

blood type	supply	demand
O	50	45
A	36	42
B	11	8
AB	8	3

Is the 105 units of blood on hand enough to satisfy the 100 units of demand? Find an allocation that satisfies the maximum possible number of patients. Use an argument based on a minimum-capacity cut to show why not all patients can receive blood. Also, provide an explanation for this fact that would be understandable to the clinic administrators, who have not taken a course on algorithms. (So, for example, this explanation should not involve the words *flow*, *cut*, or *graph* in the sense we use them in this book.)



12. Consider the following problem. You are given a flow network with unit-capacity edges: It consists of a directed graph $G = (V, E)$, a source $s \in V$, and a sink $t \in V$; and $c_e = 1$ for every $e \in E$. You are also given a parameter k.

The goal is to delete k edges so as to reduce the maximum s-t flow in G by as much as possible. In other words, you should find a set of edges $F \subseteq E$ so that $|F| = k$ and the maximum s-t flow in $G' = (V, E - F)$ is as small as possible subject to this.

Give a polynomial-time algorithm to solve this problem.

נמצא חתך S-T מינימלי בעזרת הרצת FF או EK וביצוע BFS מ-S על הגרף השיורי האחרון שהתקבל במהלך הרצת האלגוריתם.

הקשתות בקבוצת החתך כולן רוויות, כלומר יש עליהן זרימה 1.

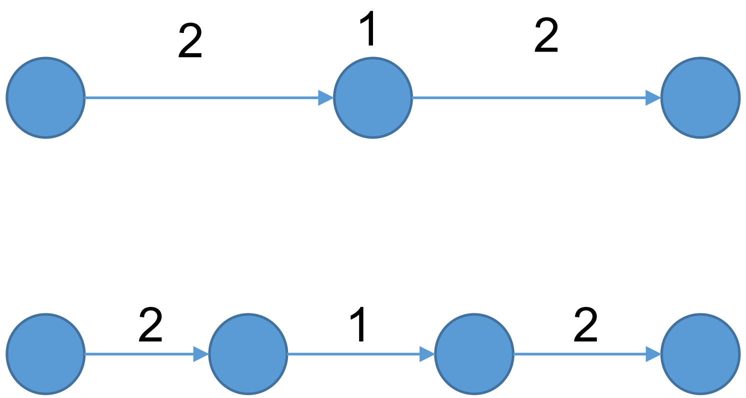
אם נמחק אותן מהרשת המקורית, נקבל חתך S-T מינימלי קטן יותר בדיוק ב-k מזה המקורי, ולכן זאת תהיה הזרימה המרבית ברשת החדשה.

כמובן שאם מספר הקשתות בקבוצת החתך קטן או שווה ל-k נגיע כך לזרימה 0.

13. In a standard s-t Maximum-Flow Problem, we assume edges have capacities, and there is no limit on how much flow is allowed to pass through a node. In this problem, we consider the variant of the Maximum-Flow and Minimum-Cut problems with node capacities.

Let $G = (V, E)$ be a directed graph, with source $s \in V$, sink $t \in V$, and nonnegative node capacities $\{c_v \geq 0\}$ for each $v \in V$. Given a flow f in this graph, the flow though a node v is defined as $f^{\text{in}}(v)$. We say that a flow is feasible if it satisfies the usual flow-conservation constraints and the node-capacity constraints: $f^{\text{in}}(v) \leq c_v$ for all nodes.

Give a polynomial-time algorithm to find an s-t maximum flow in such a node-capacitated network. Define an s-t cut for node-capacitated networks, and show that the analogue of the Max-Flow Min-Cut Theorem holds true.



נהפוך כל צומת עם קיבול לזוג
צמתים שביניהם קשת עם
הקיבול של הצומת.

22. Let M be an $n \times n$ matrix with each entry equal to either 0 or 1. Let m_{ij} denote the entry in row i and column j. A *diagonal entry* is one of the form m_{ii} for some i.

Swapping rows i and j of the matrix M denotes the following action: we swap the values m_{ik} and m_{jk} for $k = 1, 2, \ldots, n$. Swapping two columns is defined analogously.

We say that M is *rearrangeable* if it is possible to swap some of the pairs of rows and some of the pairs of columns (in any sequence) so that, after all the swapping, all the diagonal entries of M are equal to 1.

(a) Give an example of a matrix M that is not rearrangeable, but for which at least one entry in each row and each column is equal to 1.

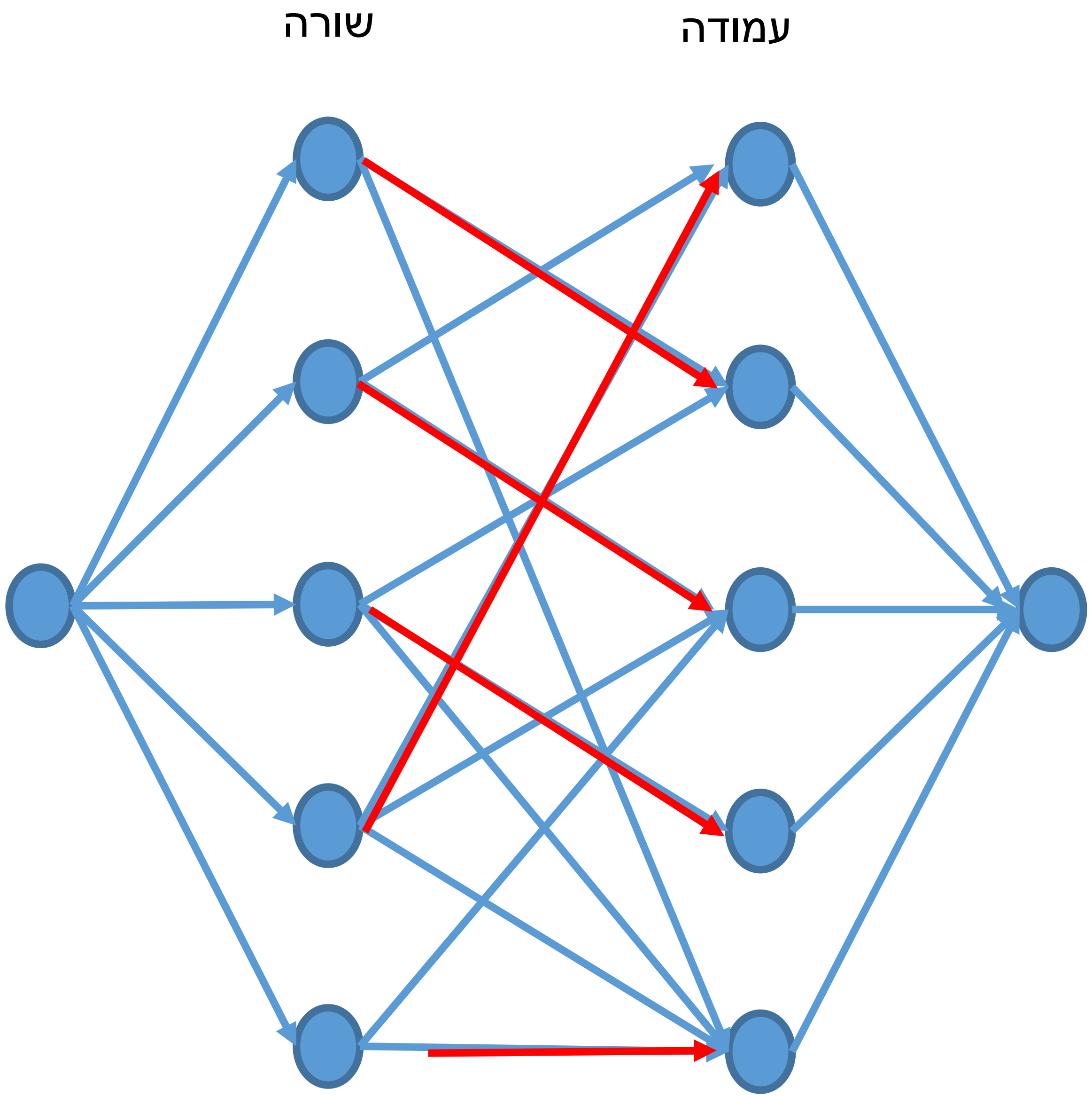
(b) Give a polynomial-time algorithm that determines whether a matrix M with 0-1 entries is rearrangeable.

א.

1	1	1
1	0	0
1	0	0

שורת ה-1-ים יכולה לתרום 1 יחיד לאלכסון,
כך גם טור ה-1-ים, אך אין מי שימלא את המקום
השלישי באלכסון.

	1			1
1		1		
	1		1	1
1		1		1
		1		1



לקט
תרגילים

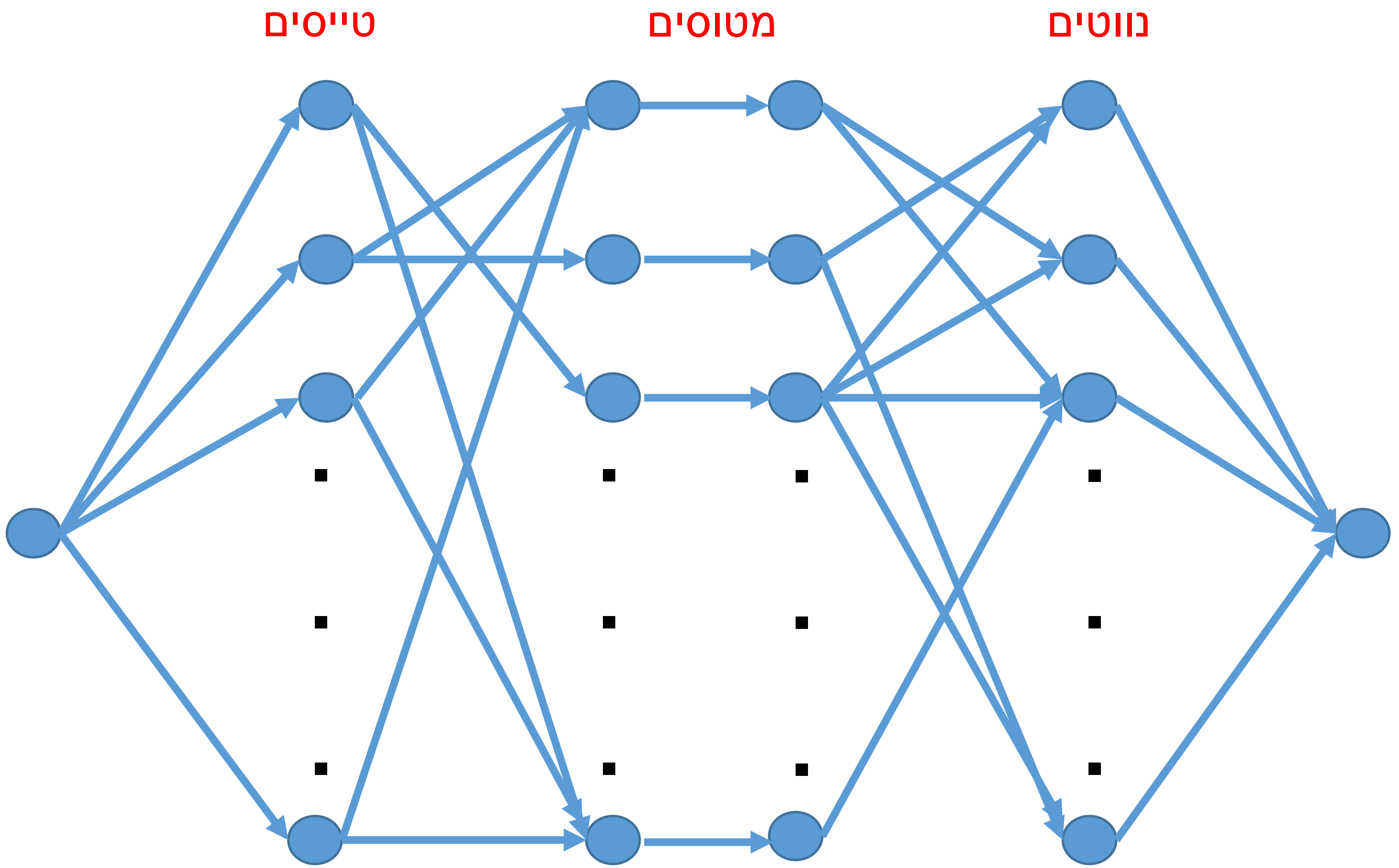
מעשי

שאלה 1

נתונה רשימה של p טייסים, n נווטים ו-m מטוסים. כמו כן נתונה טבלה המפרטת לאיזה מטוסים יכולים לעלות הטייסים והנווטים.
המטרה – להרכיב מספר מקסימלי של צוותים (טייס ונווט) כדי להעלות לאוויר מספר מקסימלי של מטוסים בו-זמנית.
תאר אלגוריתם המשיג מטרה זו.

תשובה 1

נתונה רשימה של p טייסים, n נווטים ו-m מטוסים. כמו כן נתונה טבלה המפרטת לאיזה מטוסים יכולים לעלות הטייסים והנווטים.
המטרה – להרכיב מספר מקסימלי של צוותים (טייס ונווט) כדי להעלות לאוויר מספר מקסימלי של מטוסים בו-זמנית.
תאר אלגוריתם המשיג מטרה זו.



קיבולת 1 על כל הקשתות.

שאלה 2

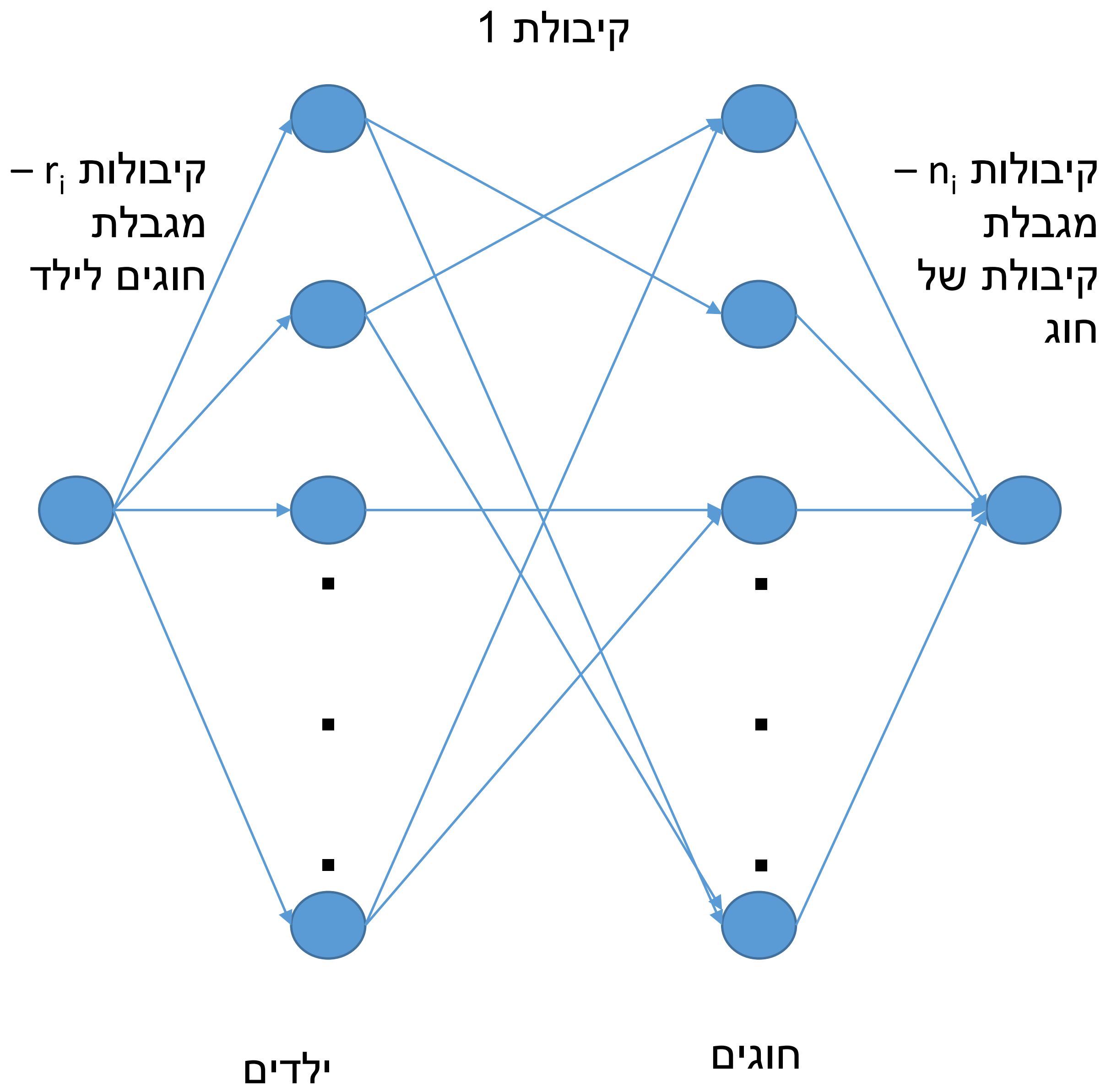
בשכבת כיתות א' בבי"ס מסוים יש k ילדים. ביה"ס מציע m חוגים לכיתות א'. כל ילד c_i $(1 \le i \le k)$ הכין רשימה L_i המכילה את כל החוגים בהם הוא מעוניין להשתתף. בנוסף, הוריו של כל ילד c_i $(1 \le i \le k)$ הגבילו את מספר החוגים שמותר לו להשתתף בהם ל- r_i.

בכל חוג a_i $(1 \le i \le m)$ יכולים להשתתף לכל היותר n_i תלמידים.

א. כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכל ו הבודק האם קיים שיבוץ של הילדים לחוגים כך שכל החוגים הם מלאים (כלומר, לא נשאר מקום פנוי באף חוג). הוכ יחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

ב. כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכל ו הבודק האם קיים שיבוץ של הילדים לחוגים כך שכל ילד משתתף בכל החוגים שהוא מעוניין בהם. הוכ יחו את נכונות האלגוריתם ונתח ו את סיבוכיותו.

תשובה 2



בשכבת כיתות א' בבי"ס מסוים יש k ילדים. ביה"ס מציע m חוגים לכיתות א'. כל ילד c_i $(1 \le i \le k)$ הכין רשימה L_i המכילה את כל החוגים בהם הוא מעוניין להשתתף. בנוסף, הוריו של כל ילד c_i $(1 \le i \le k)$ הגבילו את מספר החוגים שמותר לו להשתתף בהם ל- r_i.

בכל חוג a_i $(1 \le i \le m)$ יכולים להשתתף לכל היותר n_i תלמידים.

א. כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכל ו הבודק האם קיים שיבוץ של הילדים לחוגים כך שכל החוגים הם מלאים (כלומר, לא נשאר מקום פנוי באף חוג). הוכ יחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

ב. כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכל ו הבודק האם קיים שיבוץ של הילדים לחוגים כך שכל ילד משתתף בכל החוגים שהוא מעוניין בהם. הוכ יחו את נכונות האלגוריתם ונתח ו את סיבוכיותו.

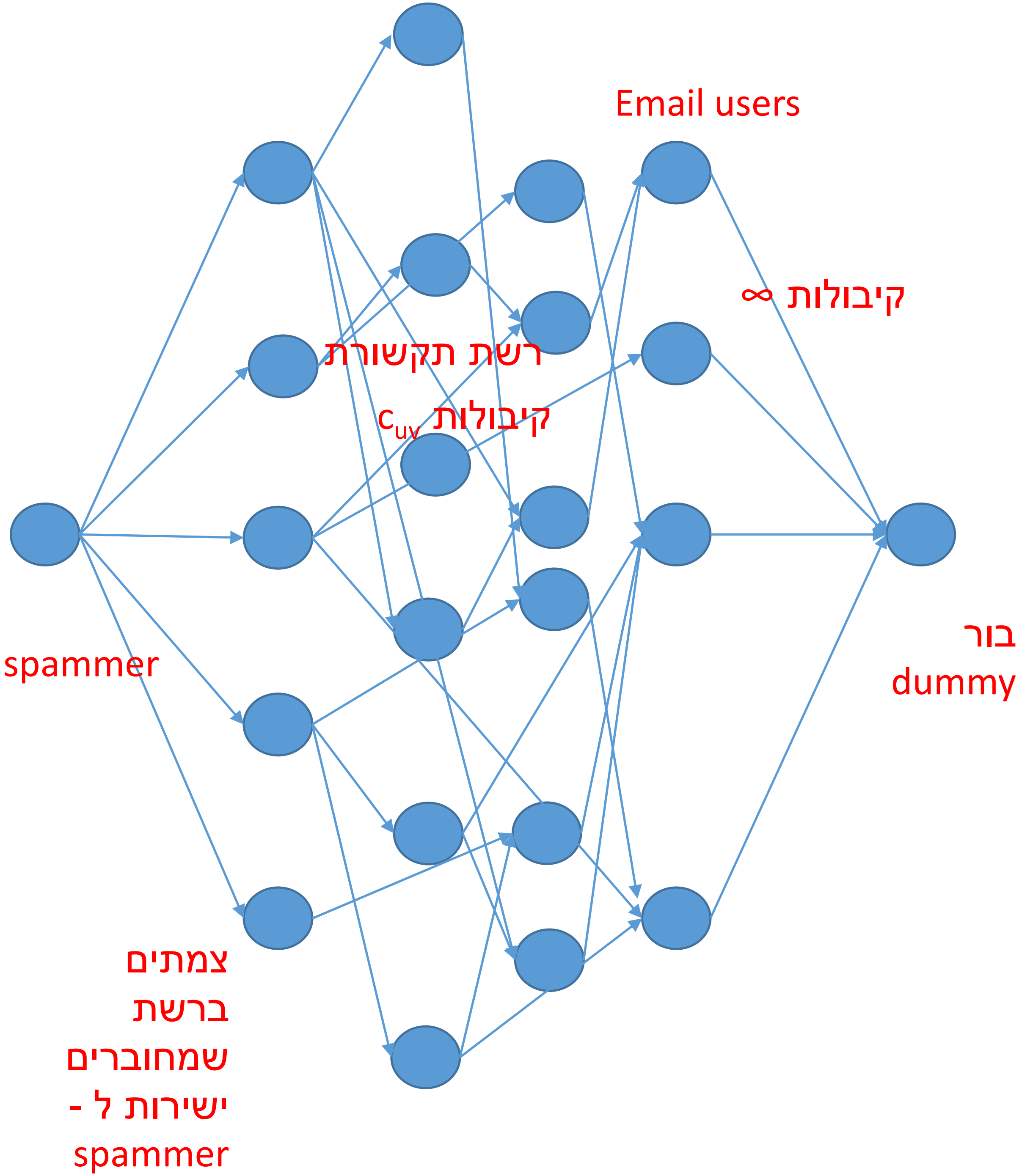
שאלה 3

A spammer is located at one node q in a undirected communication network G and peaceful email users are located at nodes denoted by the set S. Let c_{uv} denote the effort required to install a spam filter for the network edge (u, v). The problem is to determine the minimal effort required to isolate the spammer from the email users using the spam filters. Find an efficient polynomial time algorithm to solve this problem.

תשובה 3

A spammer is located at one node q in a undirected communication network G and peaceful email users are located at nodes denoted by the set S. Let c_{uv} denote the effort required to install a spam filter for the network edge (u,v). The problem is to determine the minimal effort required to isolate the spammer from the email users using the spam filters. Find an efficient polynomial time algorithm to solve this problem.

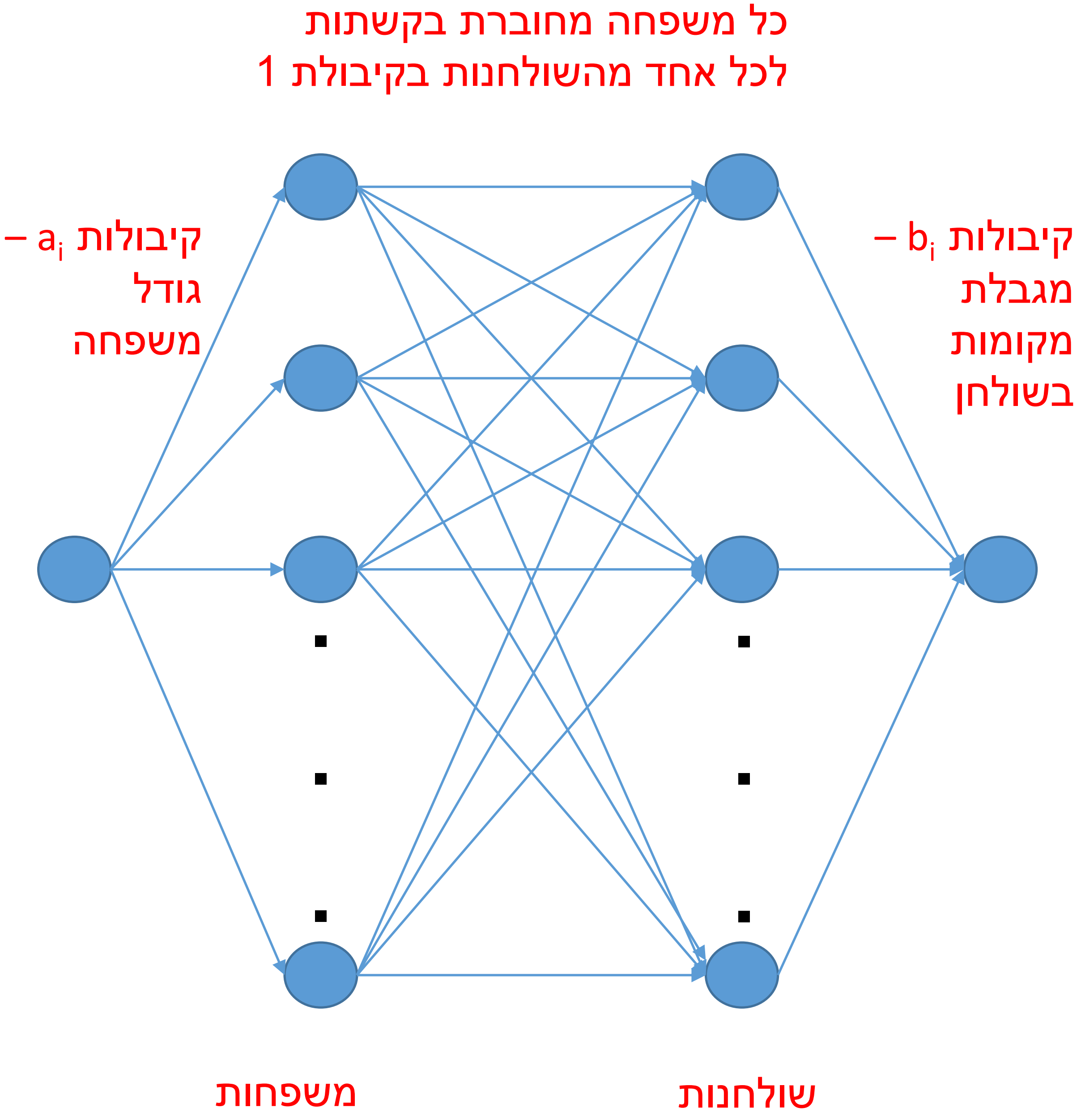
נפעיל EK לזרימה מרבית.
נמצא חתך מינימלי.
הקשתות בקבוצת החתך הן המקומות בהם נתקין את הפילטרים כך שההשקעה בניתוקו של הספאמר מלוקחות האימייל תהיה מינימלית.



שאלה 4

Dining Problem. Several families go out to dinner together. To increase their social interaction, they would like to sit at tables so that no two members of the same family are at the same table. Show how to formulate finding a seating arrangement that meets this objective as a maximum flow problem. Assume that the dinner contingent has p families and that the ith family has $a(i)$ members. Also assume that q tables are available and that the jth table has a seating capacity of $b(j)$.

תשובה 4



Dining Problem. Several families go out to dinner together. To increase their social interaction, they would like to sit at tables so that no two members of the same family are at the same table. Show how to formulate finding a seating arrangement that meets this objective as a maximum flow problem. Assume that the dinner contingent has p families and that the ith family has $a(i)$ members. Also assume that q tables are available and that the jth table has a seating capacity of $b(j)$.

נפעיל EK כדי לקבל זרימה מרבית.
אם גודל הזרימה הוא כסכום גודלי המשפחות – ניתן להושיב את כולם לפי הדרישה המופיעה בשאלה.
מיקום האנשים בשולחנות הוא לפי הקשתות עליהן יש זרימה.

שאלה 5

נתון **גרף מכוון** $G=(V,E)$. נתונות שתי קבוצות זרות ולא ריקות של צמתים, $B\subset V$, $M\subset V$. בכל צומת $v\in M$ נמצא קוף, ובכל צומת $v\in B$ מונחת בננה.

א. (14 נק') הציעו אלגוריתם **המבוסס על זרימה** המוצא מהו המספר המינימלי של קשתות שיש להוריד מהגרף כך שלאף אחד מהקופים לא תהיה גישה לאף אחת מהבננות. הסבירו בקצרה מדוע האלגוריתם נכון. ציינו ונמקו את סיבוכיות זמן הריצה.
הבהרה: הקופים יכולים להתקדם בגרף רק על-פי כיווני הקשתות.

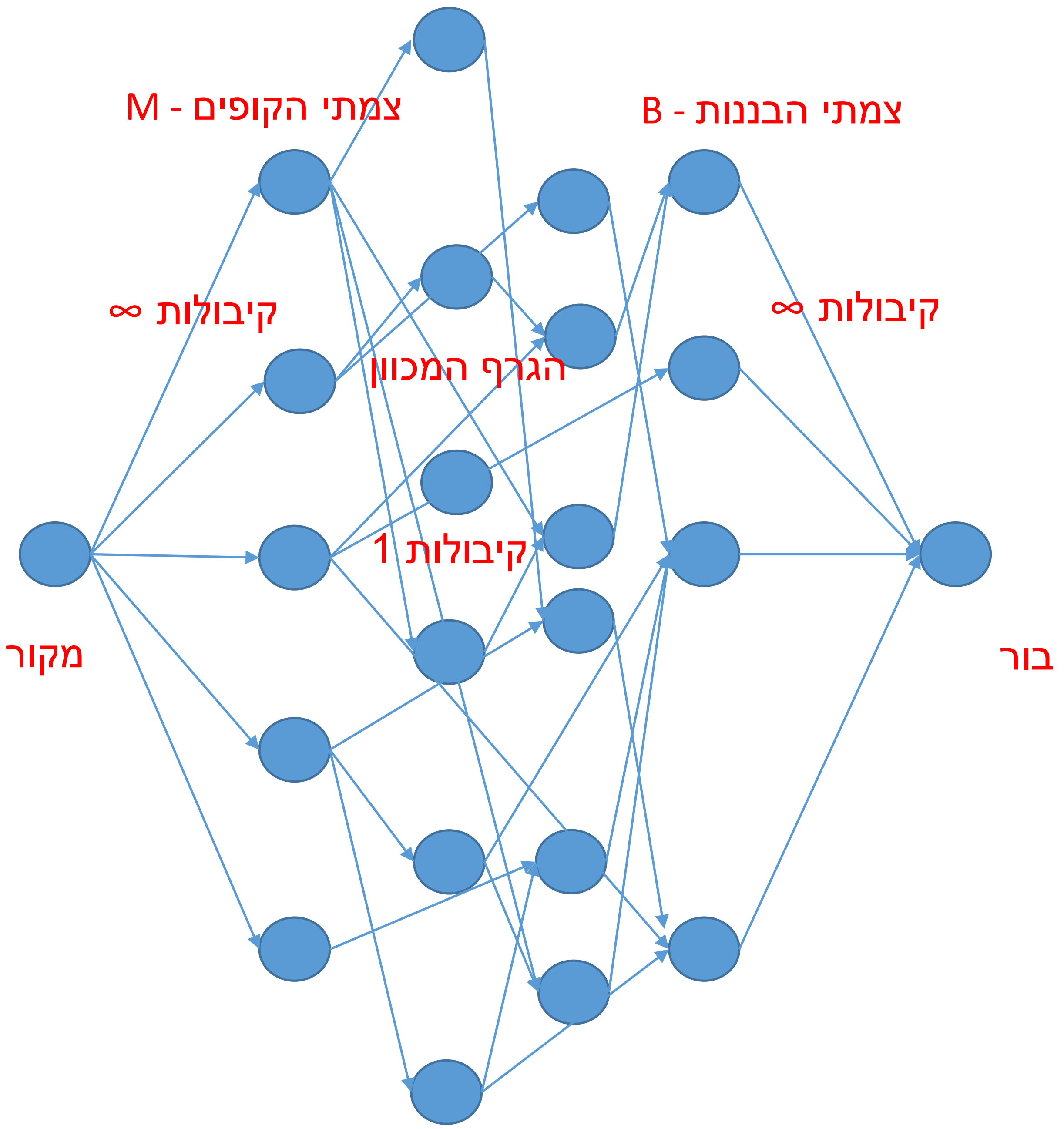
ב. (6 נק') קוף חדש הגיע לגרף. יש למצוא את כל הצמתים בגרף שאם נמקם בהם את הקוף החדש, ערך הפתרון של סעיף א' לא יגדל (או להודיע שאין צמתים כאלו). אסור להוסיף את הקוף לצומת שכבר יש בו קוף אחר. הציעו אלגוריתם יעיל למציאת קבוצת צמתים זו. הסבירו בקצרה מדוע האלגוריתם נכון, ציינו ונמקו את סיבוכיות זמן הריצה.
הערה: אין להניח שכבר יש בידכם פתרון לסעיף א', במידת הצורך ניתן לחזור על חלקים מהאלגוריתם שהצעתם בסעיף א'.

שאלה 5

נתון **גרף מכוון** $G=(V,E)$. נתונות שתי קבוצות זרות ולא ריקות של צמתים, $B\subset V$, $M\subset V$. בכל צומת $v\in M$ נמצא קוף, ובכל צומת $v\in B$ מונחת בננה.

א. (14 נק') הציעו אלגוריתם **המבוסס על זרימה** המוצא מהו המספר המינימלי של קשתות שיש להוריד מהגרף כך שלאף אחד מהקופים לא תהיה גישה לאף אחת מהבננות. הסבירו בקצרה מדוע האלגוריתם נכון. ציינו ונמקו את סיבוכיות זמן הריצה.
הבהרה: הקופים יכולים להתקדם בגרף רק על-פי כיווני הקשתות.

ב. (6 נק') קוף חדש הגיע לגרף. יש למצוא את כל הצמתים בגרף שאם נמקם בהם את הקוף החדש, ערך הפתרון של סעיף א' לא יגדל (או להודיע שאין צמתים כאלו). אסור להוסיף את הקוף לצומת שכבר יש בו קוף אחר. הציעו אלגוריתם יעיל למציאת קבוצת צמתים זו. הסבירו בקצרה מדוע האלגוריתם נכון, ציינו ונמקו את סיבוכיות זמן הריצה.
הערה: אין להניח שכבר יש בידכם פתרון לסעיף א', במידת הצורך ניתן לחזור על חלקים מהאלגוריתם שהצעתם בסעיף א'.



א. נפעיל EK כדי לקבל זרימה מרבית ומצא חתך מינימלי. הקשתות בקבוצת החתך הן הקבוצה המינימלית שיש להסיר כדי שאף קוף לא יוכל להגיע לאף בננה.

ב. את הקוף החדש נשים בצומת שלא משתייך ל-M, לא משתייך ל-B ואי אפשר להגיע ממנו לבור.

כדי למצוא את הצמתים מהם אי אפשר להגיע לבור נפעיל BFS מהבור של הגרף השיורי האחרון (זה שבו EK נעצר) אחרי שהפכנו בו את כיווני הקשתות.

גרפים

שאלה 6

סעיף א'

הוכיחו או הפריכו: קיימת רשת זרימה $G=(V,E)$ אשר מכילה 7 קשתות עם קיבול 1 ועוד 30 קשתות עם קיבול 10, והזרימה המקסימלית בה הינה בגודל 39 (פרט ל 37 הקשתות הנתונות, אין קשתות נוספות ברשת).

סעיף ב'

הוכיחו או הפריכו: קיימת רשת זרימה $G=(V,E)$ אשר כל הקיבולים בה הם 1 או $\sqrt{2}$, קיים ברשת מסלול בין המקור לבור שכל הקשתות שבו בעלות קיבול $\sqrt{2}$, והזרימה המקסימלית הינה בגודל 39.

סעיף ג'

הוכיחו או הפריכו: קיימת רשת זרימה $G=(V,E)$ אשר כל הקיבולים בה הם 1 או $\sqrt{2}$, קיים ברשת חתך (לאו דווקא מינימלי) מהמקור אל הבור שכל הקשתות שלו בעלות קיבול $\sqrt{2}$ והזרימה המקסימלית היא 39.

תשובה 6

<u>סעיף א'</u>

הוכיחו או הפריכו: קיימת רשת זרימה $G=(V,E)$ אשר מכילה 7 קשתות עם קיבול 1 ועוד 30 קשתות עם קיבול 10, והזרימה המקסימלית בה הינה בגודל 39 (פרט ל 37 הקשתות הנתונות, אין קשתות נוספות ברשת).

<u>פתרון</u>:

לא קיימת.

זרימה מכסימלית שווה לגודל חתך מינימלי. בחתך זה יכולות להיות רק קשתות שקיבולן 1 או 10. אין סכום של כפולה של 7 וכפולה של 10 ששווה ל 39.

<u>סעיף ב'</u>

הוכיחו או הפריכו: קיימת רשת זרימה $G=(V,E)$ אשר כל הקיבולים בה הם 1 או $\sqrt{2}$, קיים ברשת מסלול בין המקור לבור שכל הקשתות שבו בעלות קיבול $\sqrt{2}$, והזרימה המקסימלית הינה בגודל 39.

<u>פתרון</u>:

לא קיימת.

לגבי כל חתך ובפרט חתך מינימלי, יש שני צמתים עוקבים במסלול שנמצאים בצדדים שונים של החתך (במסלול הנתון, המקור הוא בצד אחד והבור הוא בצד שני. לכן חייבת להיות קשת אחת שעוברת מהצד הראשון לצד השני). לכן בין שני צידי החתך יש לפחות קשת אחת שקיבולה $\sqrt{2}$. לכן גודל החתך אינו שלם.

<u>סעיף ג'</u>

הוכיחו או הפריכו: קיימת רשת זרימה $G=(V,E)$ אשר כל הקיבולים בה הם 1 או $\sqrt{2}$, קיים ברשת חתך (לאו דווקא מינימלי) מהמקור אל הבור שכל הקשתות שלו בעלות קיבול $\sqrt{2}$ והזרימה המקסימלית היא 39.

<u>פתרון</u>:

כן קיימת.

נתאר דוגמא של גרף שבו $2\cdot 39=78$ קשתות. נניח שמצומת s יש 39 קשתות בעלות קיבול $\sqrt{2}$ ל 39 צמתים שונים. מכל אחת מ 39 צמתים אלה יש קשת בעלת קיבול 1 ל t. הזרימה המכסימלית היא בדיוק 39.

שאלה 7

- יהיו $L = \{l_1, \dots l_{|L|}\}$ ו $R = \{r_1, \dots r_{|R|}\}$ שתי קבוצות מספרים טבעיים המקיימות

$$\sum_{r \in R} r = \sum_{l \in L} l = m$$

- בנה אלגוריתם הבודק האם קיים גרף דו צדדי אשר קודקודיו הם $\{R \cup L\}$ ודרגת כל צומת בו היא כגודל המספר אותו הצומת מייצג

תשובה 7

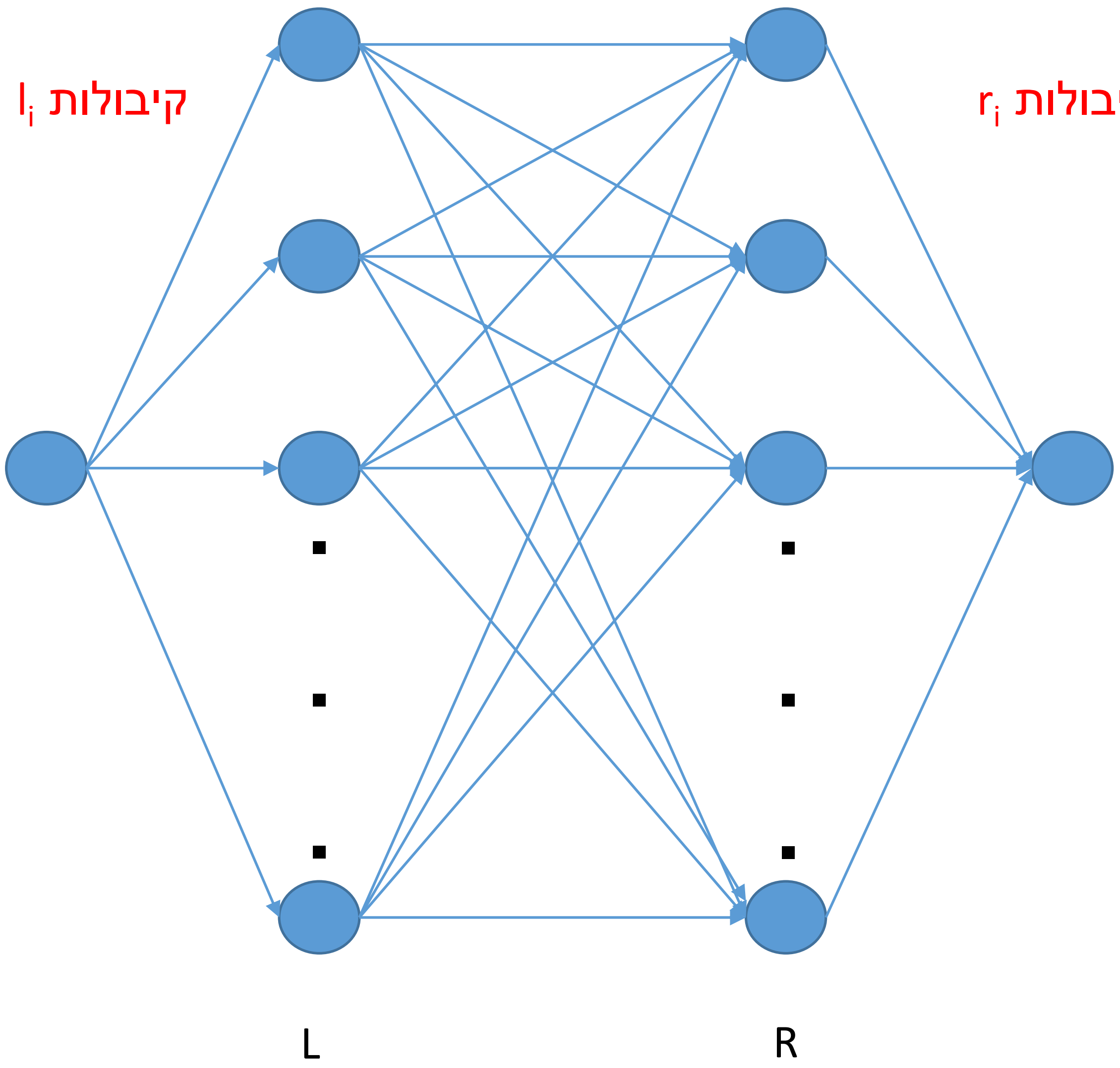
- יהיו $L = \{l_1, \dots l_{|L|}\}$ ו $R = \{r_1, \dots r_{|R|}\}$ שתי קבוצות מספרים טבעיים המקיימות

$$\sum_{r \in R} r = \sum_{l \in L} l = m$$

- בנה אלגוריתם הבודק האם קיים גרף דו צדדי אשר קודקודיו הם $\{R \cup L\}$ ודרגת כל צומת בו היא כגודל המספר אותו הצומת מייצג

נריץ EK למציאת זרימה מרבית.
אם גודל הזרימה המרבית הוא m – יש גרף דו צדי כמבוקש, והוא מורכב מהקשתות בהן יש זרימה.

כל צומת מ-L מחובר לכל צומת ב-R.
קיבולת כל קשת – 1.



שאלה 8

We define a *most vital arc* of a network as an arc whose deletion causes the largest decrease in the maximum s-t-flow value. Let f be an arbitrary maximum s-t-flow. Either prove the following claims or show through counterexamples that they are false:

(a) A most vital arc is an arc e with the maximum value of $c(e)$.

(b) A most vital arc is an arc e with the maximum value of $f(e)$.

(c) A most vital arc is an arc e with the maximum value of $f(e)$ among arcs belonging to some minimum cut.

(d) An arc that does not belong to some minimum cut cannot be a most vital arc.

(e) A network might contain several most vital arcs.

תשובה 8

We define a *most vital arc* of a network as an arc whose deletion causes the largest decrease in the maximum s-t-flow value. Let f be an arbitrary maximum s-t-flow. Either prove the following claims or show through counterexamples that they are false:

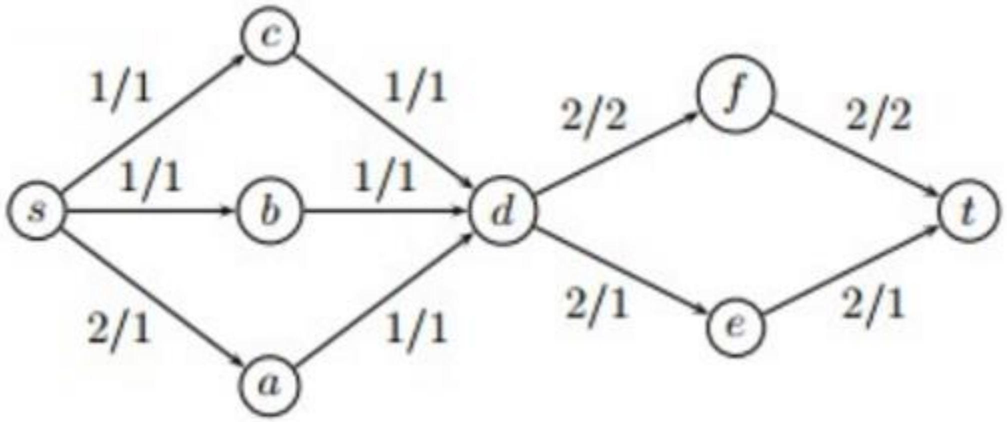
(a) A most vital arc is an arc e with the maximum value of $c(e)$.

(b) A most vital arc is an arc e with the maximum value of $f(e)$.

(c) A most vital arc is an arc e with the maximum value of $f(e)$ among arcs belonging to some minimum cut.

(d) An arc that does not belong to some minimum cut cannot be a most vital arc.

(e) A network might contain several most vital arcs.



כל הקשתות בגרף הן קשתות חיוניות ביותר.
דוגמה מפריכה לסעיפים a b d, דוגמה לנכונות e.

טענה c נכונה.

הזרימה המרבית היא ערך הזרימה דרך כל חתך מינימלי שהוא. כאשר מסירים קשת מחתך מינימלי, ערך הזרימה בחתך זה פוחתת במידת הזרימה בקשת זאת. לכן קשת חיונית ביותר e חייבת להיות זו עם הזרימה המרבית בקבוצת החתך. אילו היתה קשת אחרת e′ בקבוצת החתך עם זרימה גדולה יותר – הסרתה של e′ היתה גורמת להפחתה גדולה יותר בזרימה מאשר הסרתה של e, ואז e לא היתה קשת חיונית ביותר.

שאלה 9

Question 2: A matching M is called *maximal* if M is not strictly contained in another matching, namely, if there is no $M' \neq M$ such that $M \subseteq M'$.

1. Design an algorithm that finds a maximal matching in an arbitrary undirected graph.

2. Let M be a maximal matching and M^* be a maximum matching (in an arbitrary graph). Show that $|M| \leq |M^*| \leq 2 \cdot |M|$.

תשובה 9

Question 2: A matching M is called *maximal* if M is not strictly contained in another matching, namely, if there is no $M' \neq M$ such that $M \subseteq M'$.

1. Design an algorithm that finds a maximal matching in an arbitrary undirected graph.

נוסיף קשת אחר קשת בין צמתים שלא מחוברים עדיין בקשתות קודמות, עד שלא יהיו יותר צמתים כאלו. קיבלנו זיווג מקסימלי.

2. Let M be a maximal matching and M^* be a maximum matching (in an arbitrary graph). Show that $|M| \leq |M^*| \leq 2 \cdot |M|$.

לפי ההגדרה זיווג מקסימום גדול מזיווג מקסימלי, כלומר $|M^*| \geq |M|$.

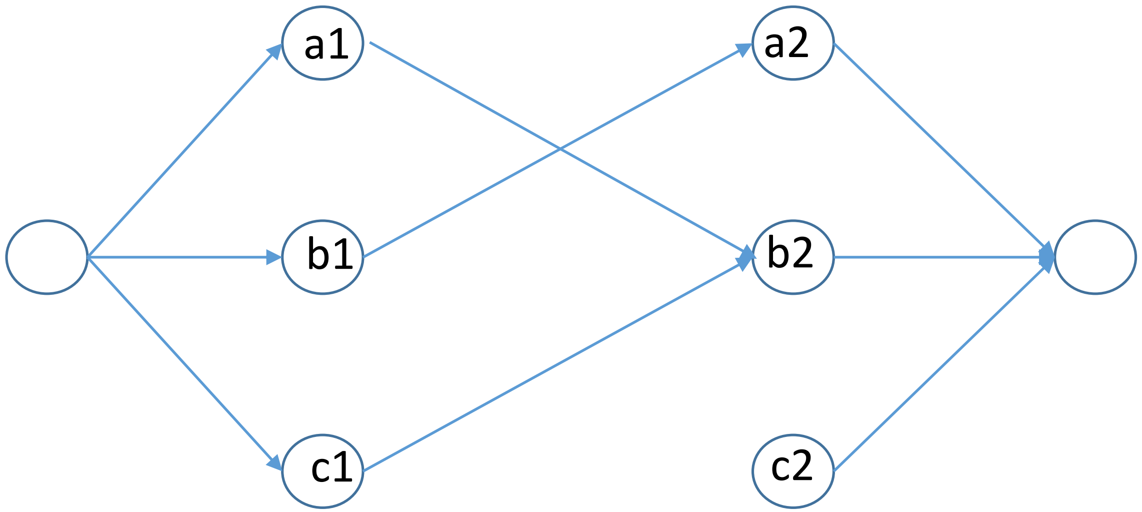
נעבור על הקשתות בזיווג המקסימום. לפחות אחד מקצותיה של כל קשת שייך בהכרח לזיווג המקסימלי, שכן אם שניהם לא שייכים לזיווג המקסימלי – אפשר להוסיף את הקשת לזיווג המקסימלי וכך להגדיל אותו.
מכאן שמחצית מספר הצמתים בזיווג המקסימום קטן או שווה למספר הצמתים בזיווג המקסימלי, כלומר $|M^*| \leq 2|M|$, כמבוקש.

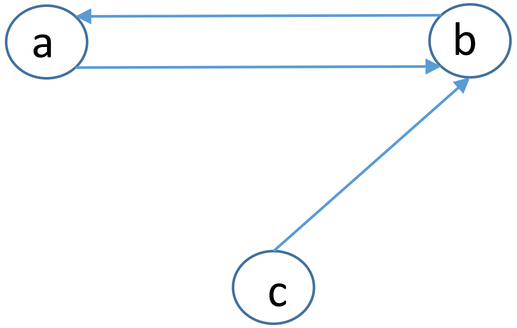
שאלה 10

בהינתן גרף מכוון, כיצד ניתן למצוא תת גרף שבו לכל הקדקודים דרגת הכניסה 1 ודרגת היציאה 1, או להוכיח שאין כזה ?

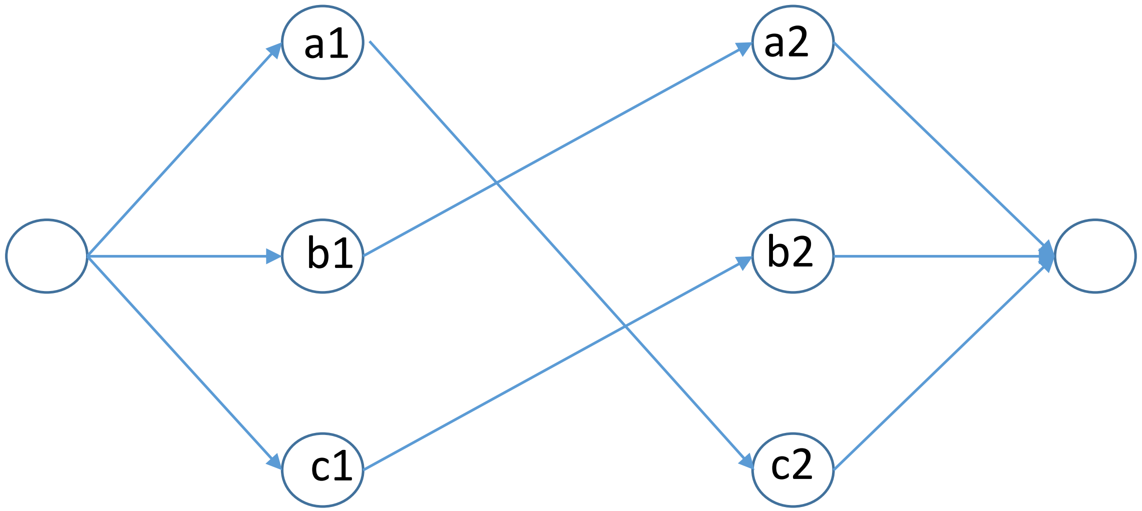
תשובה 10

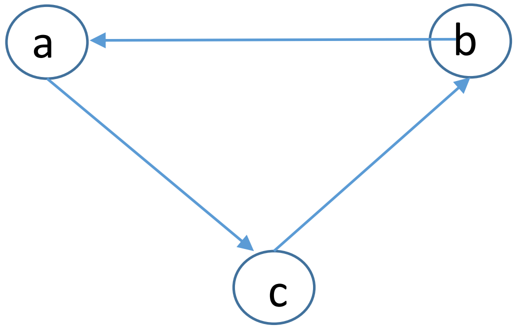
בהינתן גרף מכוון, כיצד ניתן למצוא תת גרף שבו לכל הקדקודים
דרגת הכניסה 1 ודרגת היציאה 1, או להוכיח שאין כזה ?





נשכפל את צמתי הגרף – V1 ו-V2 – ונבנה מהם גרף דו-צידי : לכל קשת מקורית (u,v) ניצור קשת (u1,v2). נמצא זיווג מקסימום לגרף החדש. זיווג שלם (כלומר זיווג בגודל מספר הצמתים) מתקבל אמ"ם יש תת-גרף כמבוקש.





הקשתות שייצרו את תת הגרף הן הקשתות עליהן יש זרימה ברשת הזרימה בעזרתה פתרנו את בעיית הזיווג.

שאלה 11

א. אם כל הקשתות ברשת זרימה הן בעלות קיבולת זוגית פרט לקשת אחת e שהיא בעלת קיבול אי-זוגי, והזרימה המרבית הינה אי-זוגית, אזי בזרימה המרבית הקשת e רוויה.

ב. אם כל הקשתות ברשת זרימה הן בעלות קיבולת זוגית, אזי גם הזרימה המרבית הינה זוגית.

ג. אם כל הקיבולות של הקשתות ברשת זרימה הן בעלות ערך אי-זוגי, אזי גם הזרימה המרבית הינה זוגית.

תשובה 11

א. אם כל הקשתות ברשת זרימה הן בעלות קיבולת זוגית פרט לקשת אחת e שהיא בעלת קיבול אי-זוגי,
והזרימה המרבית הינה אי-זוגית, אזי בזרימה המרבית הקשת e רוויה.

הטענה נכונה.

נניח שבזרימה f הקשת e אינה רוויה.

מכאן שהיא אינה חלק מקבוצת החתך של שום חתך s-t מינימלי.

מכאן שכל הקשתות בקבוצת החתך של כל חתך s-t מינימלי הן בעלות קיבול זוגי.

מכאן שקיבולת כל חתך s-t מינימלי הינה זוגית, ולכן גם הזרימה המרבית זוגית.
סתירה.

ב. אם כל הקשתות ברשת זרימה הן בעלות קיבולת זוגית, אזי גם הזרימה המרבית הינה זוגית.
הטענה נכונה.

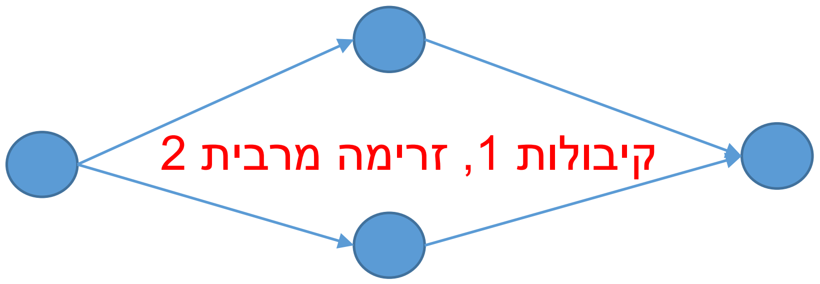
כל הקשתות בקבוצת החתך של כל חתך s-t מינימלי הן בעלות קיבול זוגי.

מכאן שסכום קיבולן הינו זוגי.

מכאן שקיבולת החתך המינימלי הינה זוגית, ולכן גם הזרימה המרבית.

ג. אם כל הקיבולות של הקשתות ברשת זרימה הן בעלות ערך אי-זוגי, אזי גם הזרימה המרבית הינה זוגית.

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית :



שאלה 12

Given is a network flow <u>with no parallel edges</u>. It is known that the max-flow value in the network is F. Good fairy A suggests you to increase by 2 the capacity of a single edge (of your choice). Good fairy B suggests you to increase by 1 the capacity of two edges (of your choice).

For each of the following two questions, draw the network, the best utilization of fairy A's suggestion and the best utilization of fairy B's suggestion.

1. Suggest a network flow <u>with at most 4 vertices</u> for which the suggestion of fairy A is better than the suggestion of fairy B (that is, it enables a larger increase of the max-flow value).

2. Suggest a network flow <u>with at most 4 vertices</u> for which both suggestions are equivalent and both enable an increase of the max-flow value to F+1.

3. A bad witch is trying to cancel the ferries suggestions. She fails canceling them, but now she is selecting for you the edge (in suggestion A) or the edges (in suggestion B) whose capacity will increase.

Suggest a network flow <u>with at most 4 vertices</u> for which without the witch's interfering the max-flow is increased by two (in both suggestions) but with the witch's interfering it is not increased at all (in both suggestions). You need to draw the network, the best utilization of suggestion A, the best utilization of suggestion B, the witch's choice for suggestion A, and the witches choice for suggestion B (5 networks in total).

Given is a network flow with no parallel edges. It is known that the max-flow value in the network is F. Good fairy A suggests you to increase by 2 the capacity of a single edge (of your choice). Good fairy B suggests you to increase by 1 the capacity of two edges (of your choice).

For each of the following two questions, draw the network, the best utilization of fairy A's suggestion and the best utilization of fairy B's suggestion.

1. Suggest a network flow with at most 4 vertices for which the suggestion of fairy A is better than the suggestion of fairy B (that is, it enables a larger increase of the max-flow value).

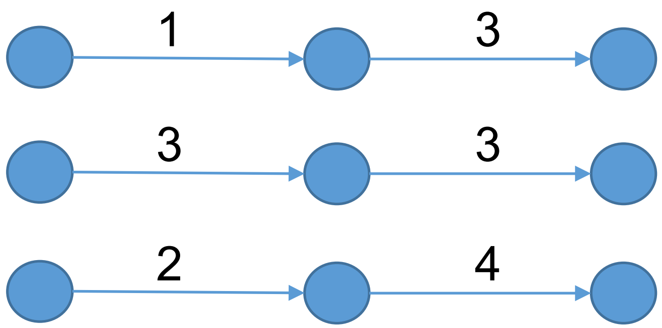
2. Suggest a network flow with at most 4 vertices for which both suggestions are equivalent and both enable an increase of the max-flow value to F+1.

3. A bad witch is trying to cancel the ferries suggestions. She fails canceling them, but now she is selecting for you the edge (in suggestion A) or the edges (in suggestion B) whose capacity will increase.

Suggest a network flow with at most 4 vertices for which without the witch's interfering the max-flow is increased by two (in both suggestions) but with the witch's interfering it is not increased at all (in both suggestions). You need to draw the network, the best utilization of suggestion A, the best utilization of suggestion B, the witch's choice for suggestion A, and the witches choice for suggestion B (5 networks in total).

תשובה 12

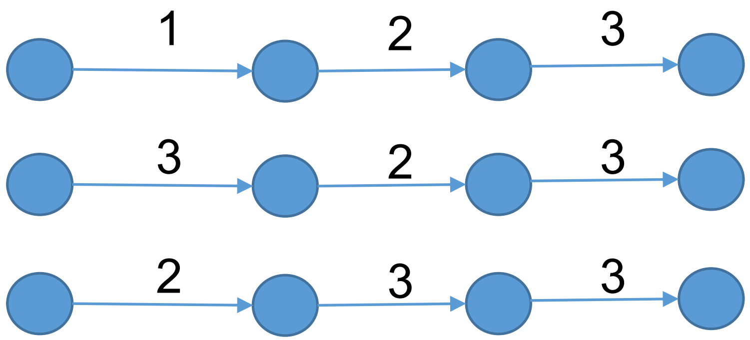
1.



פייה A – זרימה 3

פייה B – זרימה 2

2.



פייה A – זרימה 3

פייה B – זרימה 3

Given is a network flow with no parallel edges. It is known that the max-flow value in the network is F. Good fairy A suggests you to increase by 2 the capacity of a single edge (of your choice). Good fairy B suggests you to increase by 1 the capacity of two edges (of your choice).

For each of the following two questions, draw the network, the best utilization of fairy A's suggestion and the best utilization of fairy B's suggestion.

1. Suggest a network flow with at most 4 vertices for which the suggestion of fairy A is better than the suggestion of fairy B (that is, it enables a larger increase of the max-flow value).

2. Suggest a network flow with at most 4 vertices for which both suggestions are equivalent and both enable an increase of the max-flow value to F+1.

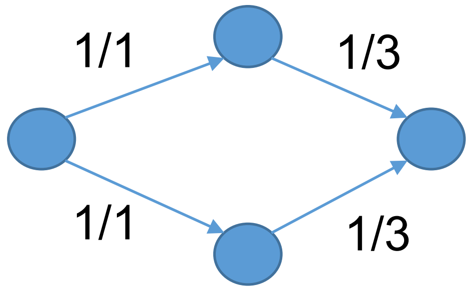
3. A bad witch is trying to cancel the ferries suggestions. She fails canceling them, but now she is selecting for you the edge (in suggestion A) or the edges (in suggestion B) whose capacity will increase.

Suggest a network flow with at most 4 vertices for which without the witch's interfering the max-flow is increased by two (in both suggestions) but with the witch's interfering it is not increased at all (in both suggestions). You need to draw the network, the best utilization of suggestion A, the best utilization of suggestion B, the witch's choice for suggestion A, and the witches choice for suggestion B (5 networks in total).

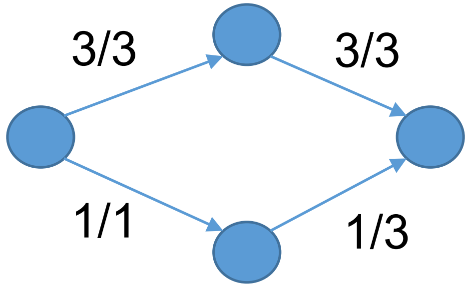
תשובה 12

.3

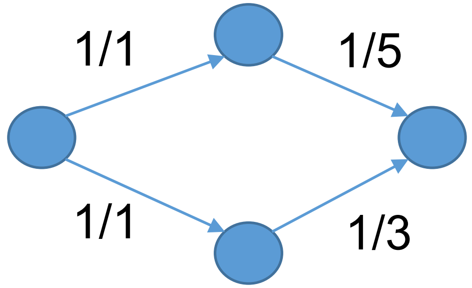
רשת מקורית – זרימה 2



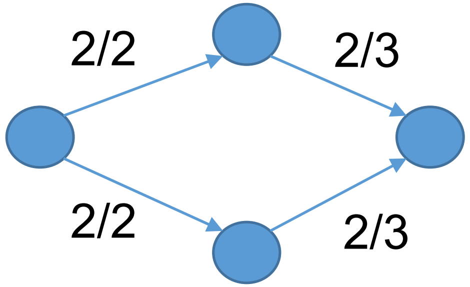
פייה A – זרימה 4



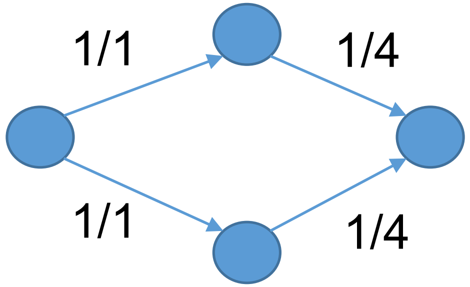
פייה A + הפייה הרעה – זרימה 1



פייה B – זרימה 4



פייה B + הפייה הרעה – זרימה 1



תרגילים ממבחנים

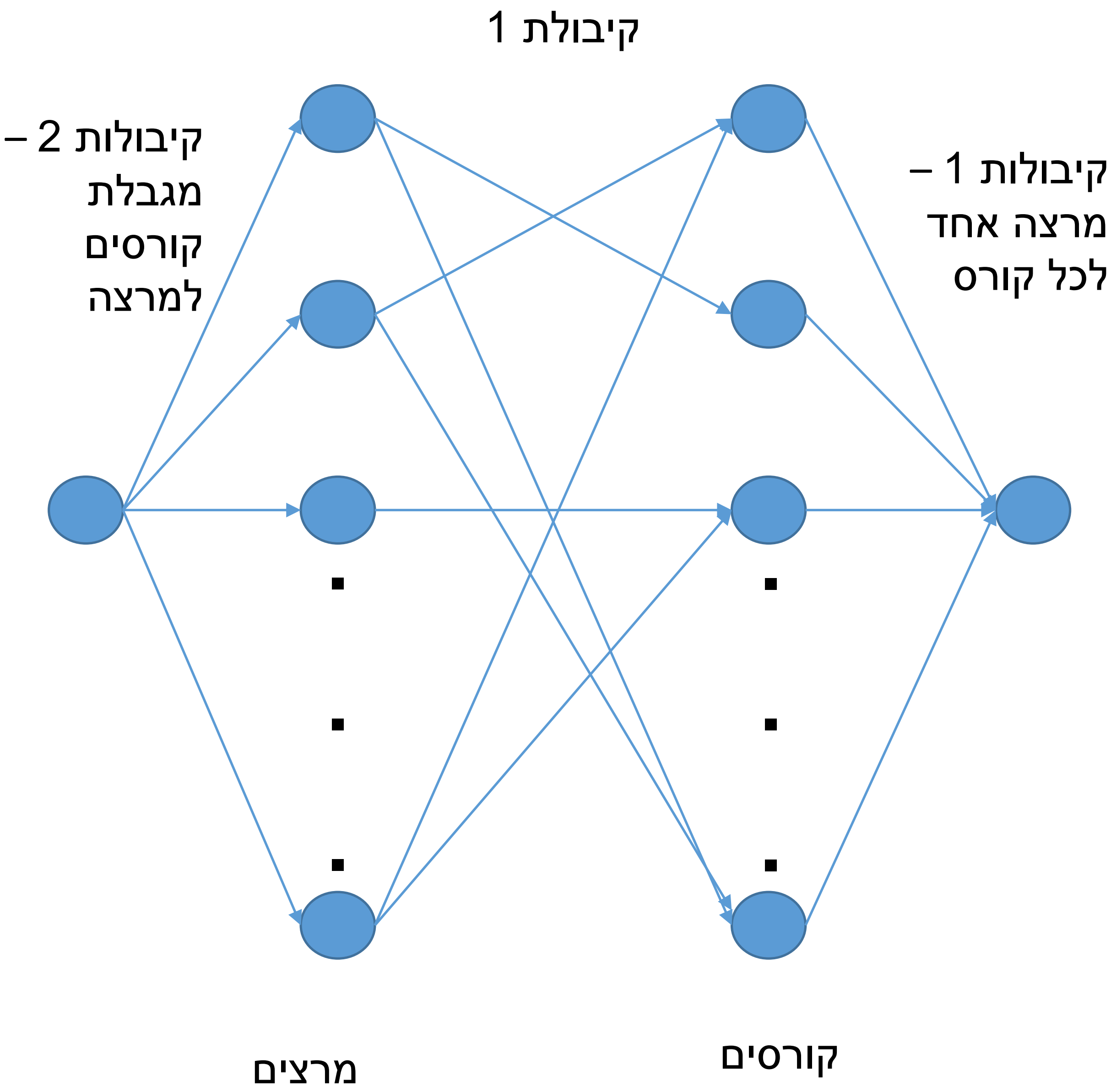
שאלה 13

בחוג לספרות n מרצים ונלמדים בו $2n$ קורסים. כל מרצה מגיש רשימה של כל הקורסים אותם הוא מעוניין ללמד. ברצוננו לשבץ את המרצים לקורסים, כך שכל מרצה ילמד רק קורסים בהם הוא מעוניין, וכל מרצה ילמד <u>שני קורסים בדיוק</u>. הציגו אלגוריתם, שמוצא שיבוץ חוקי של המרצים לקורסים כשהדבר אפשרי, ואחרת - מדווח שלא קיים אף שיבוץ חוקי.

תשובה 13

בחוג לספרות n מרצים ונלמדים בו $2n$ קורסים. כל מרצה מגיש רשימה של כל הקורסים אותם הוא מעוניין ללמד. ברצוננו לשבץ את המרצים לקורסים, כך שכל מרצה ילמד רק קורסים בהם הוא מעוניין, וכל מרצה ילמד שני קורסים בדיוק. הציגו אלגוריתם, שמוצא שיבוץ חוקי של המרצים לקורסים כשהדבר אפשרי, ואחרת - מדווח שלא קיים אף שיבוץ חוקי.

נריץ EK כדי לקבל זרימה מרבית.
אם גודל הזרימה הוא כמספר הקורסים – ניתן לשבץ כמבוקש. השיבוץ בפועל יתבצע לפי הקשתות עליהן יש זרימה.



שאלה 14

הרחבת שידוכים חלקיים

כזכור, בבעיית השידוך נתון גרף דו-צדדי לא מכוון $G=(V,E)$ שבו קבוצת הקדקודים מחולקת ל- n גברים ול- n נשים. צלעות מחברות רק בין גברים לנשים, כשצלע מחברת רק בין גבר ואשה, שמעוניינים להינשא זה לזו. שידוך הינו תת-קבוצה של צלעות $E' \subseteq E$, שאינן נחתכות. כלומר, לכל שתי צלעות שונות בשידוך $e_1 \neq e_2 \in E'$, אם מסמנים $e_1=\{m_1,w_1\}$, $e_2=\{m_2,w_2\}$, אז מתקיים $\{m_1,w_1\}\cap\{m_2,w_2\}=\{\}$. במלים אחרות אף גבר אינו משודך לשתי נשים שונות, ואף אשה אינה משודכת לשני גברים שונים. שידוך מרבי E'', הינו שידוך שכולל מספר מרבי של צלעות, כלומר מספר מרבי של זוגות משודכים. נניח כעת, שנתון <u>שידוך חלקי</u> E', של חלק מ- n הגברים עם חלק מ- n הנשים. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: בהכרח קיים שידוך מרבי E'', שבמסגרתו משודכים כל הגברים וכל הנשים שמשודכים ב- E'.

תשובה 14

הרחבת שידוכים חלקיים

כזכור, בבעיית השידוך נתון גרף דו-צדדי לא מכוון $G=(V,E)$ שבו קבוצת הקדקודים מחולקת ל- n גברים ול- n נשים. צלעות מחברות רק בין גברים לנשים, כשצלע מחברת רק בין גבר ואשה, שמעוניינים להינשא זה לזו. שידוך הינו תת-קבוצה של צלעות $E' \subseteq E$, שאינן נחתכות. כלומר, לכל שתי צלעות שונות בשידוך $e_1 \neq e_2 \in E'$, אם מסמנים $e_1=\{m_1,w_1\}$, $e_2=\{m_2,w_2\}$, אז מתקיים $\{m_1,w_1\} \cap \{m_2,w_2\}=\{\}$. במלים אחרות אף גבר אינו משודך לשתי נשים שונות, ואף אשה אינה משודכת לשני גברים שונים. שידוך מרבי E'', הינו שידוך שכולל מספר מרבי של צלעות, כלומר מספר מרבי של זוגות משודכים. נניח כעת, שנתון <u>שידוך חלקי</u> E', של חלק מ- n הגברים עם חלק מ- n הנשים. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: בהכרח קיים שידוך מרבי E'', שבמסגרתו משודכים כל הגברים וכל הנשים שמשודכים ב- E'.

נביט בשידוך החלקי הנתון ובשידוך מרבי כלשהו.

נניח שיש גבר M (בה"כ) שבשידוך החלקי היה משודך אך בשידוך המרבי הוא אינו משודך.

לא ייתכן שגם האישה W לה הוא היה משודך בשידוך החלקי אינה משודכת בשידוך המרבי, כיון שאז ניתן היה לשדך ביניהם עכשיו ולקבל שידוך גדול יותר מהשידוך המרבי.

כלומר האישה W משודכת בשידוך המרבי לגבר אחר M’. ניתן אם כך לנתק בשידוך המרבי את הזיווג בין W ל-M’, לזווג בין M לבין W (כמו בשידוך החלקי), ולקבל שידוך מרבי חדש באותו גודל כמו הקודם.

עלולה להיווצר בעייה עם M’, במקרה שהוא היה משודך בשידוך החלקי ועתה הוא אינו משודך. אם אכן זה המצב ניתן להמשיך את התהליך כמקודם, וכך פעם אחר פעם.

כיון שמספר הנשים והגברים הינו סופי, התהליך הינו סופי, ובסופו נקבל שידוך מרבי (מן הסתם אחר מזה המקורי) שבו כל מי שהיה משודך בשידוך החלקי משודך גם בשידוך המרבי.

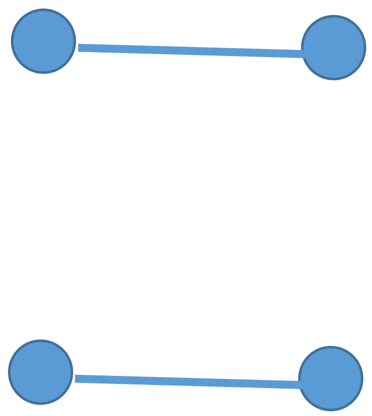
שאלה 15

שאלה 2ג – הרחבת שידוכים חלקיים. הגדרות: בבעיית השידוך נתון כזכור גרף דו-צדדי לא מכוון $G=(V,E)$ כשקבוצת הקדקודים מחולקת ל- n גברים ול- n נשים. צלעות מחברות רק בין גברים לנשים, כשצלע מחברת רק בין גבר ואשה שמעוניינים להינשא זה לזו. שידוך הינו תת-קבוצה של צלעות $E'\subseteq E$, שאינן נחתכות: לכל שתי צלעות שונות בשידוך $e_1\neq e_2\in E'$, אם מסמנים $e_1=\{m_1,w_1\}$, $e_2=\{m_2,w_2\}$, אז מתקיים $\{m_1,w_1\}\cap\{m_2,w_2\}=\varnothing$. במלים אחרות אף גבר אינו משודך לשתי נשים שונות, ואף אשה אינה משודכת לשני גברים שונים. שידוך מרבי E'', הינו שידוך שכולל מספר מרבי של צלעות, כלומר מספר מרבי של זוגות משודכים. <u>השאלה</u>: נניח שנתון שידוך חלקי E', של חלק מ- n הגברים עם חלק מ- n הנשים. <u>הוכיחו או הפריכו</u> את הטענה הבאה: בהכרח קיים שידוך מרבי E'', המרחיב את השידוך הנתון, כלומר מקיים $E'\subseteq E''$.

תשובה 15

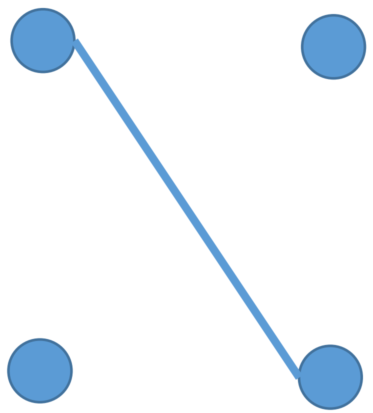
שאלה 2ג – הרחבת שידוכים חלקיים. הגדרות: בבעיית השידוך נתון כזכור גרף דו-צדדי לא מכוון $G=(V,E)$ כשקבוצת הקדקודים מחולקת ל-n גברים ול-n נשים. צלעות מחברות רק בין גברים לנשים, כשצלע מחברת רק בין גבר ואשה שמעוניינים להינשא זה לזו. שידוך הינו תת-קבוצה של צלעות $E'\subseteq E$, שאינן נחתכות: לכל שתי צלעות שונות בשידוך $e_1\neq e_2\in E'$, אם מסמנים $e_1=\{m_1,w_1\}$, $e_2=\{m_2,w_2\}$, אז מתקיים $\{m_1,w_1\}\cap\{m_2,w_2\}=\emptyset$. במלים אחרות אף גבר אינו משודך לשתי נשים שונות, ואף אשה אינה משודכת לשני גברים שונים. שידוך מרבי E'', הינו שידוך שכולל מספר מרבי של צלעות, כלומר מספר מרבי של זוגות משודכים. השאלה: נניח שנתון שידוך חלקי E', של חלק מ-n הגברים עם חלק מ-n הנשים. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: בהכרח קיים שידוך מרבי E'', המרחיב את השידוך הנתון, כלומר מקיים $E'\subseteq E''$.

הטענה לא נכונה.



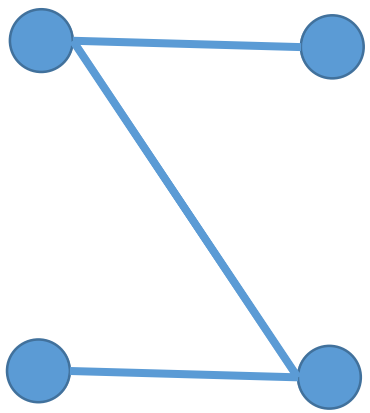
נשים גברים

זיווג מרבי



נשים גברים

זיווג חלקי



נשים גברים

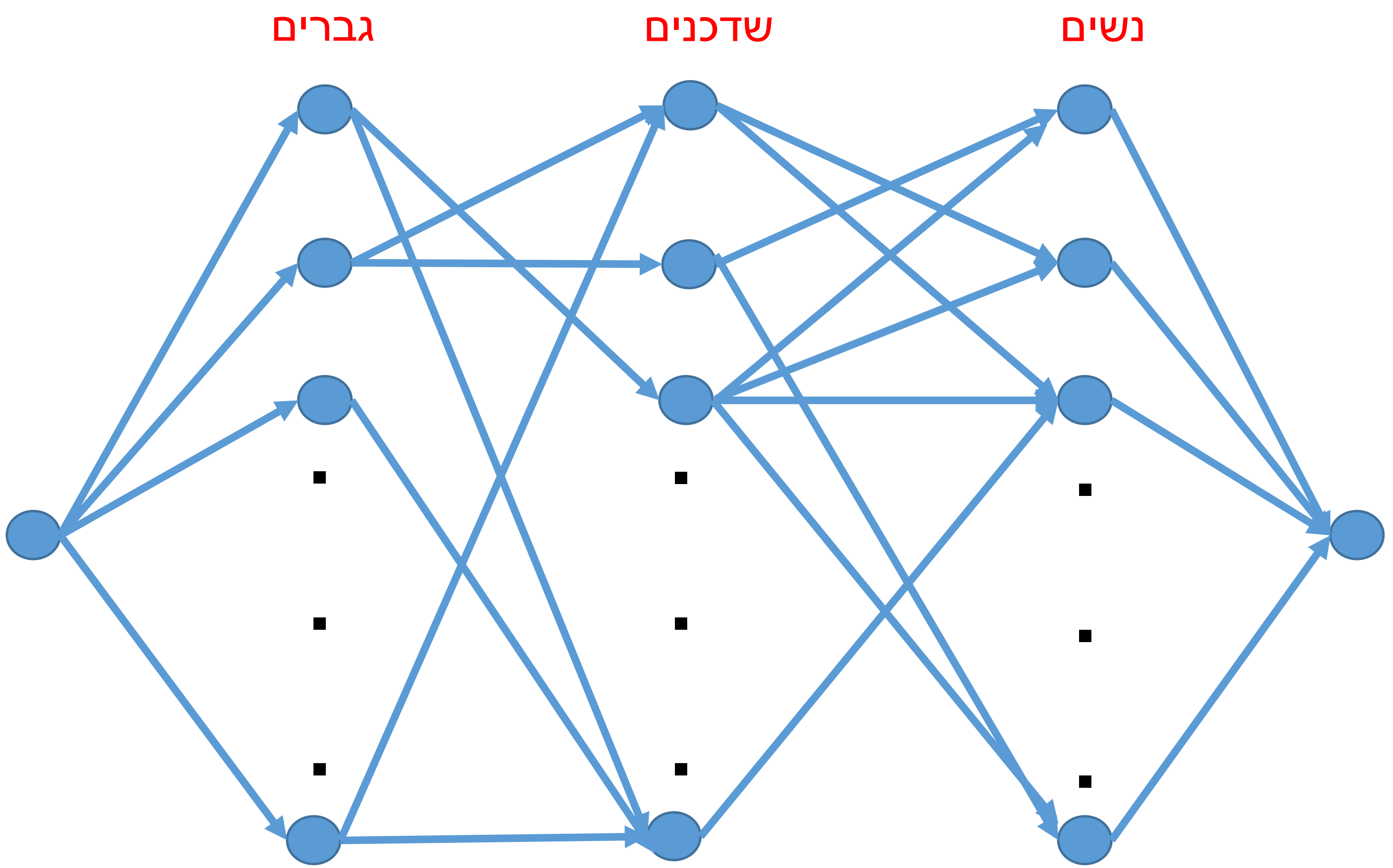
הכרויות

שאלה 16

שאלה 1 –שידוכים עם מגבלות על השדכנים (25 נק'). הציגו אלגוריתם למציאת שידוך מרבי בתנאים הבאים. נתונה רשימה של n גברים, n נשים ושל m שדכנים. עבור כל שדכן $1 \le i \le m$, נתונה רשימת הגברים והנשים המוכרים לו, ונתונה מגבלת עומס $1 \le t_i \le n$: כל שדכן יכול לשדך כל גבר ואשה המוכרים לו, כל עוד מספר הזוגות הכולל שהוא משדך אינו עולה על t_i.

תשובה 16

שאלה 1 – שידוכים עם מגבלות על השדכנים (25 נק'). הציגו אלגוריתם למציאת שידוך מרבי בתנאים הבאים. נתונה רשימה של n גברים, n נשים ושל m שדכנים. עבור כל שדכן $1 \le i \le m$, נתונה רשימת הגברים והנשים המוכרים לו, ונתונה מגבלת עומס $1 \le t_i \le n$: כל שדכן יכול לשדך כל גבר ואשה המוכרים לו, כל עוד מספר הזוגות הכולל שהוא משדך אינו עולה על t_i.

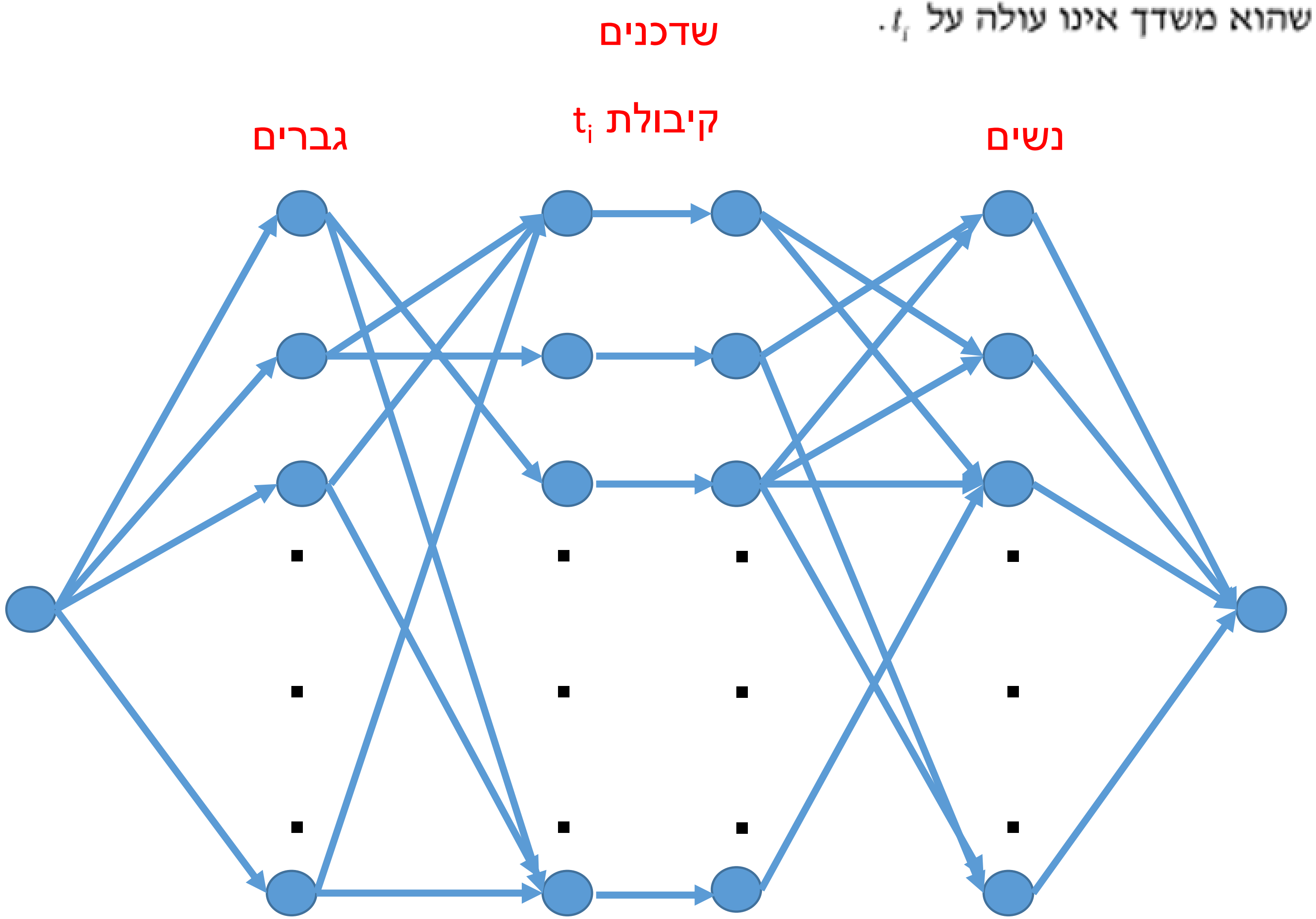


קיבולת 1 על כל הקשתות.

בעייה : היכן מגבלת העומס על השדכנים ?

תשובה 16

שאלה 1 – שידוכים עם מגבלות על השדכנים (25 נק'). הציגו אלגוריתם למציאת שידוך מרבי בתנאים הבאים. נתונה רשימה של n גברים, n נשים ושל m שדכנים. עבור כל שדכן $1 \le i \le m$, נתונה רשימת הגברים והנשים המוכרים לו, ונתונה מגבלת עומס $1 \le t_i \le n$: כל שדכן יכול לשדך כל גבר ואשה המוכרים לו, כל עוד מספר הזוגות הכולל שהוא משדך אינו עולה על t_i.



קיבולת 1 על כל הקשתות האחרות.

שאלה 17

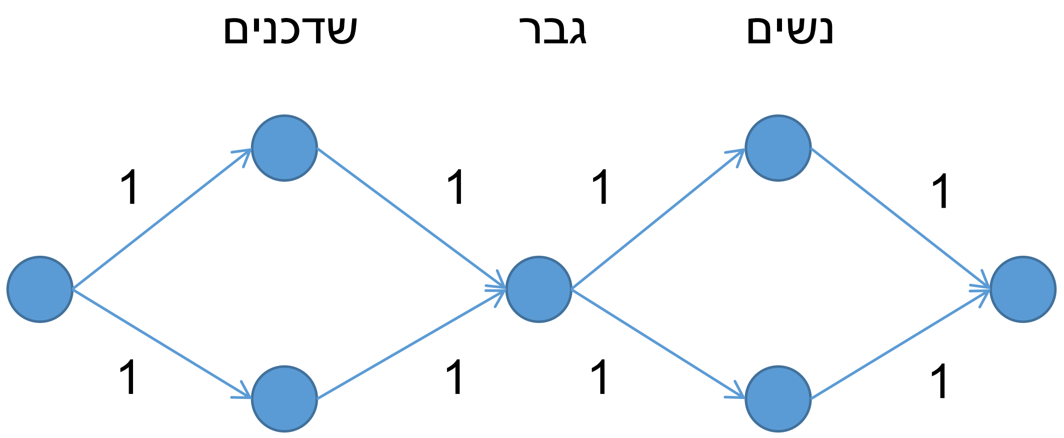
<u>שאלה 4 – רשתות זרימה – שידוך עם מגבלת עומס על השדכנים (25 נק').</u>

ברצוננו למצוא שידוך מרבי בהינתן רשימה של n גברים, n נשים ו- m שדכנים. עבור כל שדכן $1 \le i \le m$, נתונה רשימת הגברים והנשים המוכרים לו, ונתונה מגבלת עומס $1 \le t_i \le n$: שדכן מספר i יכול לשדך בין כל גבר ואשה המוכרים לו, כל עוד מספר הזוגות הכולל שהוא משדך אינו עולה על t_i. נביט באלגוריתם הבא: בונים רשת זרימה עם הצלעות הבאות בלבד: (א) המקור s מחובר לכל שדכן i בצלע עם קיבולת t_i, (ב) כל שדכן מחובר בצלע עם קיבולת 1 לכל הגברים שהוא מכיר, (ג) כל גבר מחובר בצלע עם קיבולת 1 לכל אישה שמכירה שדכן שמוכר לאותו הגבר, (ד) כל אישה מחוברת בצלע עם קיבולת 1 ליעד t. <u>הוכיחו</u> כי האלגוריתם המוצע שגוי: גודלה של זרימה מרבית ברשת שונה מגודלו של שידוך חוקי מרבי. נדרשת תשובה של 4-5 שורות.

תשובה 17

שאלה 4* – רשתות זרימה – שידוך עם מגבלת עומס על השדכנים (25 נק').

ברצוננו למצוא שידוך מרבי בהינתן רשימה של n גברים, n נשים ו- m שדכנים. עבור כל שדכן $1 \le i \le m$, נתונה רשימת הגברים והנשים המוכרים לו, ונתונה מגבלת עומס $1 \le t_i \le n$: שדכן מספר i יכול לשדך בין כל גבר ואשה המוכרים לו, כל עוד מספר הזוגות הכולל שהוא משדך אינו עולה על t_i. נביט באלגוריתם הבא: בונים רשת זרימה עם הצלעות הבאות בלבד: (א) המקור s מחובר לכל שדכן i בצלע עם קיבולת t_i, (ב) כל שדכן מחובר בצלע עם קיבולת 1 לכל הגברים שהוא מכיר, (ג) כל גבר מחובר בצלע עם קיבולת 1 לכל אישה שמכירה שדכן שמוכר לאותו הגבר, (ד) כל אישה מחוברת בצלע עם קיבולת 1 ליעד t. <u>הוכיחו</u> כי האלגוריתם המוצע שגוי: גודלה של זרימה מרבית ברשת שונה מגודלו של שידוך חוקי מרבי. נדרשת תשובה של 4-5 שורות.



מתקבלת זרימה 2 בשעה שיש
רק שידוך אפשרי אחד.

שאלה 18

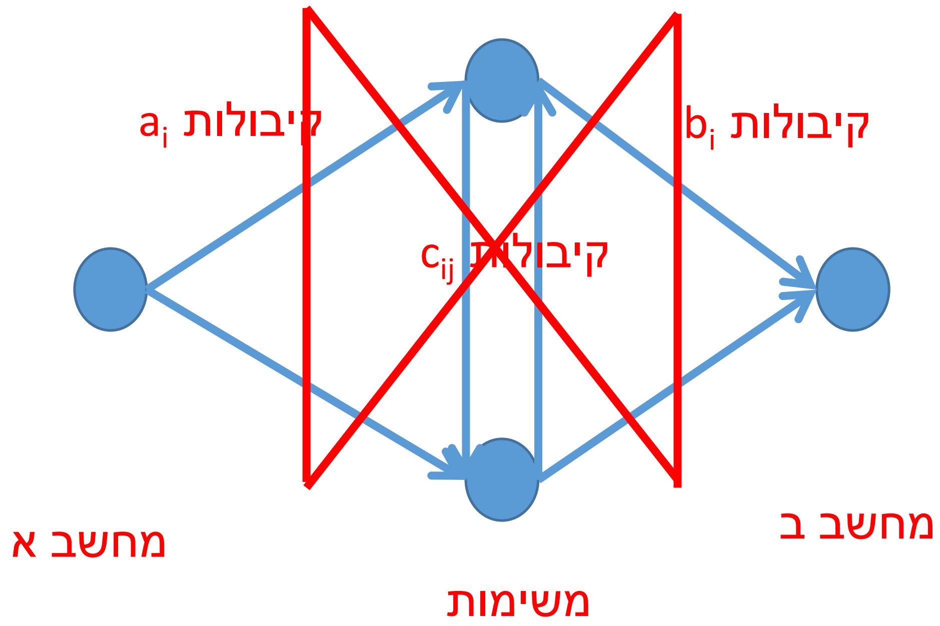
ברצוננו לבצע n משימות חישוביות על שני מחשבים שונים המחוברים ברשת תקשורת. עבור כל משימה $1 \le i \le n$ נתון זמן ביצוע a_i במקרה של חישוב על מחשב א', וזמן ביצוע b_i במקרה של חישוב על מחשב ב'. חלק מהמשימות תלויות זו בזו ולכן נתונים גם זמני תקשורת $c_{i,j}$ שנחוצים במקרה שהמשימות i, j מבוצעות על מחשבים שונים. זמן הריצה הכולל מוגדר כסכום של זמני הריצה על המחשבים א',ב' ושל זמני התקשורת. אם למשל, ישנן רק 3 משימות, ומחשבים משימות 1,3 על מחשב א', ומשימה 2 עם מחשב ב', אז זמן הריצה הכולל יהיה $(a_1 + a_3) + b_2 + (c_{1,2} + c_{2,3})$. הציגו אלגוריתם למציאת הקצאה של המשימות לשני המחשבים תוך מזעור של זמן הריצה הכולל לביצוען של המשימות. הדרכה: העזרו ברשת זרימה מתאימה.

תשובה 18

ברצוננו לבצע n משימות חישוביות על שני מחשבים שונים המחוברים ברשת תקשורת. עבור כל משימה $1 \le i \le n$ נתון זמן ביצוע a_i במקרה של חישוב על מחשב א', וזמן ביצוע b_i במקרה של חישוב על מחשב ב'. חלק מהמשימות תלויות זו בזו ולכן נתונים גם זמני תקשורת $c_{i,j}$ שנחוצים במקרה שהמשימות i, j מבוצעות על מחשבים שונים. זמן הריצה הכולל מוגדר כסכום של זמני הריצה על המחשבים א',ב' ושל זמני התקשורת. אם למשל, ישנן רק 3 משימות, ומחשבים משימות 1,3 על מחשב א', ומשימה 2 עם מחשב ב', אז זמן הריצה הכולל יהיה $(a_1 + a_3) + b_2 + (c_{1,2} + c_{2,3})$. הציגו אלגוריתם למציאת הקצאה של המשימות לשני המחשבים תוך מזעור של זמן הריצה הכולל לביצוען של המשימות. הדרכה: העזרו ברשת זרימה מתאימה.

חתכי S-T אפשריים :

שתי המשימות של מחשב א	$a_1 + a_2$
שתי המשימות על מחשב ב	$b_1 + b_2$
משימה 2 על מחשב א משימה 1 על מחשב ב	$a_2 + c_{12} + b_1$
משימה 1 על מחשב א משימה 2 על מחשב ב	$a_1 + c_{21} + b_2$



נריץ אלגוריתם EK, נמצא בעזרתו חתך מינימלי שהוא זמן הריצה המינימלי בין כל אפשרויות חלוקת המשימות למחשבים. ובהכללה - למספר כלשהו של משימות.
ההקצאה של המשימות למחשבים – לפי הדוגמה הנ"ל ולפי מיקומו של כל צומת משימה באחד מצידי חתך ה-S-T המינימלי.

שאלה 19

<u>מציאת צלע מרחיבה</u>. נתונה רשת זרימה, ונתונה זרימה מרבית ברשת. צלע נקראת מרחיבה אם הגדלת הקיבולת שלה במספר חיובי שרירותי, תגדיל גם את ערכה של הזרימה המרבית. הציגו אלגוריתם, שמוצא צלע מרחיבה (או מדווח שאין צלע כזו), ורץ בזמן $O(n^2)$ בלבד.

תשובה 19

מציאת צלע מרחיבה. נתונה רשת זרימה, ונתונה זרימה מרבית ברשת. צלע נקראת מרחיבה אם הגדלת הקיבולת שלה במספר חיובי שרירותי, תגדיל גם את ערכה של הזרימה המרבית. הציגו אלגוריתם, שמוצא צלע מרחיבה (או מדווח שאין צלע כזו), ורץ בזמן $O(n^2)$ בלבד.

תובנה מרכזית : קשת (u,v) תהיה מרחיבה אמ"ם בגרף השיורי האחרון (זה שבו עוצר האלגוריתם למציאת זרימה מרבית) יש מסלול מ-s ל-u ומ-v ל-t.

כדי למצוא קשת כזאת מריצים בגרף השיורי BFS מ-s, ולאחר היפוך כיווני הקשתות – BFS מ-t. ועכשיו צריך לחפש קשת ברשת המקורית שבה קצה אחד מופיע בתוצאות ה-BFS הראשון והקצה השני מופיע בתוצאות ה- BFS השני.

שאלה 20

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, בו מותאם **<u>לכל קדקוד משקל</u>** שלם חיובי $w(v)>0$. (לצלעות לא מותאם שום משקל). נתונים קדקודי מקור ויעד s,t, שאינם מחוברים בצלע ישירה, כלומר $(s,t)\notin E$. הציגו אלגוריתם למציאת קבוצת קדקודים בעלת משקל מזערי, שמנתקת את המקור מהיעד. כלומר, מחפשים $U\subseteq V\setminus\{s,t\}$, שמקיימת:

(א) ניתוק מקור מיעד: לאחר הסרת U מהגרף, לא קיים בגרף אף מסלול מכוון מ-s ל-t.

(ב) מזעריות: אם גם $R\subseteq V\setminus\{s,t\}$ מנתקת את המקור מהיעד, אזי $\sum_{v\in R} w(v) \le \sum_{v\in U} w(v)$.

תשובה 20

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, בו מותאם **לכל קדקוד משקל** שלם חיובי $w(v)>0$. (לצלעות לא מותאם שום משקל). נתונים קדקודי מקור ויעד s,t, שאינם מחוברים בצלע ישירה, כלומר $(s,t)\notin E$. הציגו אלגוריתם למציאת קבוצת קדקודים בעלת משקל מזערי, שמנתקת את המקור מהיעד. כלומר, מחפשים $U\subseteq V\setminus\{s,t\}$, שמקיימת:

(א) ניתוק מקור מיעד: לאחר הסרת U מהגרף, לא קיים בגרף אף מסלול מכוון מ-s ל-t.

(ב) מזעריות: אם גם $R\subseteq V\setminus\{s,t\}$ מנתקת את המקור מהיעד, אזי $\sum_{v\in R} w(v) \le \sum_{v\in U} w(v)$.

נבנה רשת זרימה שבה כל צומת הופך לשניים שאחד מהם מחובר למקור, השני לבור, וקיבולת הקשת ביניהם היא משקל הצומת. שאר קשתות הגרף (וביניהן הקשתות אל המקור ואל הבור) תחברנה בין הצמתים המתאימים ותקבלנה קיבולת אינסופית.

מריצים אלגוריתם למציאת זרימה מרבית וחתך מינימלי. בגלל שהקשתות שבגרף המקורי (ובכללן הקשתות אל המקור ואל הבור) הן בעלות קיבולת אינסופית, מובטח שהחתך יעבור אך ורק בקשתות שבין זוגות הצמתים.

כך יתקבל חתך מינימלי שמחיקת הקשתות שלו – המקבילה להסרת צמתים – תיתן את הפתרון המינימלי לניתוק בין המקור לבין הבור.

שאלה 21

נתונה רשת זרימה $G=(s,t,V,E)$ ומספר שלם M. כתבו אלגוריתם המחזיר **זרימה חוקית** ברשת שערכה בדיוק M. אם לא קיימת זרימה כזו, האלגוריתם יחזיר "אין זרימה בערך הנתון".

הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

תשובה 21

נתונה רשת זרימה $G=(s,t,V,E)$ ומספר שלם M. כתבו אלגוריתם המחזיר **זרימה חוקית** ברשת שערכה בדיוק M. אם לא קיימת זרימה כזו, האלגוריתם יחזיר "אין זרימה בערך הנתון". הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

```
augment(f,P,M)
    Let b = min(bottleneck(P,f), M)
    For each edge (u,v)∈P
        If e=(u,v) is a forward edge then
            increase f(e) in G by b
        Else ((u,v) is a backward edge, and let e=(v,u))
            decrease f(e) in G by b
        Endif
    Endfor
    Return (f,b)

Max-Flow
    Initially f(e)=0 for all e in G
    While there is an s-t path in the residual graph G_f and M > 0
        Let P be a simple s-t path in G_f
        (f',b) ← augment(f,P,M)
        M ← M – b
        Update f to be f'
        Update the residual graph G_f to be G_f'
    Endwhile
    If M = 0
        Return f
    Else
        Print "Impossible"
```