

**מבנה הבחינה :** בבחינה **חמש** שאלות.  
עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות.  
כל שאלה מזכה ב- 25 נקודות.

**הנחיות :** כל תשובה תתחיל בעמוד **חדש**.  
**אין** לכתוב בצבע אדום.  
**אין** לכתוב בעיפרון.

אין צורך לכתוב פסידוקוד, אלא אם נדרש במפורש.  
חובה להוכיח (או להסביר) כל טענה.

## שאלה 1

נתון עץ חיפוש בינרי  $T$ ; נסמן ב- $n$  את מספר האיברים ב- $T$ .

(10 נקודות)

א' כתבו אלגוריתם למציאת שני צמתים  $x$  ו- $y$  ב- $T$ , המקיימים את התנאי  $key[x] + key[y] = 2 \cdot key[root(T)]$ . זמן הריצה הנדרש של האלגוריתם הינו  $\Theta(n)$ .

(15 נקודות)

ב' נניח עכשיו שהעץ  $T$  מאוזן.

לכל שני צמתים  $x$  ו- $y$  ב- $T$ , נסמן ב- $p(x, y)$  את האב הקדמון המשותף הנמוך ביותר של  $x$  ו- $y$  (כלומר, ב- $T$  נמצא בתת-עץ השמאלי של  $p(x, y)$  ו- $y$  נמצא בתת-עץ הימני של  $p(x, y)$ , או להיפך).

כתבו אלגוריתם למציאת שני צמתים  $x$  ו- $y$  ב- $T$ , המקיימים את התנאי  $key[x] + key[y] = 2 \cdot key[p(x, y)]$ . זמן הריצה הנדרש של האלגוריתם הינו  $\Theta(n \cdot \lg n)$ .

רמז: שימו לב שמספר הרמות ב- $T$  הוא  $\Theta(\lg n)$ .

## שאלה 2

פתרו את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$\begin{cases} T(1) = \Theta(1) \\ T(n) = 4 \cdot T(\sqrt[8]{n}) + \sqrt[3]{\lg n} \cdot \left( \sqrt[3]{\lg n} + (\lg \lg n)^3 \right) \end{cases}$$

### שאלה 3

הציעו מבנה נתונים  $S$  התומך בפעולות הבאות בזמנים הנדרשים  $n$  מציין את מספר האיברים במבנה):

$BUILD(S)$  : בניית המבנה  $S$  מתוך סדרה של  $n$  מפתחות; זמן הריצה:  $O(n)$  ;

$MIN(S)$  : החזרת הערך המינימלי של  $S$  ; זמן הריצה:  $O(1)$  ;

$DEL-MEDIAN(S)$  : מחיקת חציון המפתחות של  $S$  ; זמן הריצה:  $O(\lg n)$  ;

$OS-MED7(S)$  : החזרת ערך המיקום ה- $(n/2 + 7)$  של  $S$  ; זמן הריצה:  $O(1)$  .

**הערה :** מבנה הנתונים  $S$  יכול להיות מורכב מכמה מבני נתונים יסודיים.

### שאלה 4

(15 נקודות)

(1) נתון מערך  $A[1..n]$  המקיים את התנאי הבא: אם  $1 \leq i < j \leq n$ , אזי  $A[i] > A[j]$ . מהם זמני הריצה (ההדוקים) של האלגוריתמים מיון-הכנסה, מיון-מיזוג, ומיון-מהיר בהפעלתם על המערך  $A$  ? הוכיחו את טענותיכם.

(10 נקודות)

(2) נתון תור קדימויות מינימום (למשל, ערמת מינימום) שבאמצעותו ניתן לבצע את שתי הפעולות INSERT (הכנסת איבר חדש) ו-EXTRACT-MIN (מחיקת המינימום). הוכיחו שקיימת סדרה של  $2n$  פעולות (INSERT ו-EXTRACT-MIN) כך שלפחות אחת מפעולות אלה רצה בזמן  $\Omega(\lg n)$ .

**הערה :** אין קשר בין שני הסעיפים.

## שאלה 5

הציעו מבנה נתונים  $S$  התומך בפעולות הבאות בזמנים הנדרשים (  $n$  מציין את מספר האיברים במבנה):

SEARCH( $S, k$ ): חיפוש במבנה  $S$  אחר המפתח  $k$ ; זמן הריצה:  $O(\lg n)$ ;

INSERT( $S, k$ ): הכנסת המפתח  $k$  למבנה  $S$ ; זמן הריצה:  $O(\lg n)$ ;

MAX( $S$ ): החזרת המפתח המכסימלי של המבנה  $S$ ; זמן הריצה:  $O(1)$ ;

DELETE-MAX( $S$ ): מחיקת האיבר בעל המפתח המכסימלי מהמבנה  $S$ ; זמן הריצה:  $O(\lg n)$ ;

DELETE-OLD( $S, t$ ): מחיקת האיבר ה- $t$  הוותיק ביותר מהמבנה  $S$ ; זמן הריצה:  $O(\lg n)$ .

כתבו בפסידוקוד את השגרה DELETE-OLD( $S, t$ ).

**הערה:** מבנה הנתונים  $S$  יכול להיות מורכב מכמה מבני נתונים יסודיים.

**בהצלחה !**