סמסטר 2010א – פתרון שאלה 1 בממ"ן 12

א'

$$T(n)=8T(n/16)+\sqrt{n\cdot\lg n}+\sqrt[3]{n^2\cdot\lg^4 n}$$

$$a=16,\quad b=64,\quad \log_b a=3/4;\quad f(n)=\sqrt{n\cdot\lg n}+\sqrt[3]{n^2\cdot\lg^4 n}=\Theta(n^{2/3}\cdot\lg^{4/3} n)$$

לפי משפט האב, מקרה 1 : $T(n)=\Theta(n^{3/4})$

ב'

$$T(n)=27T(n/9)+n\sqrt{n}+n\cdot\lg^2 n+\lg^4 n$$

$$a=27,\quad b=9,\quad \log_b a=3/2;\quad f(n)=n\sqrt{n}+n\cdot\lg^2 n+\lg^4 n=\Theta(n^{3/2})$$

לפי משפט האב, מקרה 2 : $T(n)=\Theta(n^{3/2}\cdot\lg n)$

ג'

$$T(n)=64T(n/4)+n^5+n^4\cdot\lg^2 n$$

$$a=64,\quad b=4,\quad \log_b a=3;\quad f(n)=n^5+n^4\cdot\lg^2 n=\Theta(n^5)$$

לפי משפט האב, מקרה 3 (מתקיים גם תנאי הרגולריות) : $T(n)=\Theta(n^5)$

ד'

$$T(n)=T(n-1)+n^2\lg n+n^2$$

יוצרים את הסכום

$$\begin{aligned}T(n)&=T(n-1)+n^2\lg n+n^2\\&=T(n-2)+(n-1)^2\lg(n-1)+n\lg n+(n-1)^2+n^2\\&=.....\\&=T(0)+\sum_{i=1}^{n}i^2\lg i+\sum_{i=1}^{n}i^2\end{aligned}$$

נשים לב שמתקיים: $\sum_{i=1}^{n}i^2\lg i=O(n^2\sum_{i=1}^{n}\lg i)=O(n^2\lg(n!))=O(n^3\lg n)$

מצד שני: $\sum_{i=1}^{n}i^2\lg i=\Omega(\sum_{i=n/2+1}^{n}i^2\lg i)=\Omega(\frac{n}{2}\cdot(n/2)^2\cdot\lg(n/2))=\Omega(n^3\lg n)$

ולכן $T(n)=T(0)+\Theta(n^3\lg n)+n(n+1)(2n+1)/6=\Theta(n^3\lg n)$

ה'

$$T(n)=n^2\sqrt{n}\cdot T(\sqrt{n})+n^5\cdot(5\lg^3 n+\lg^5 n)$$

מחלקים את שני צידי המשוואה ב- n^5 ומקבלים:

$$\frac{T(n)}{n^5}=\frac{T(\sqrt{n})}{n^2\sqrt{n}}+5\lg^3 n+\lg^5 n$$

מבצעים את החלפת המשתנים $n=2^m$, $m=\lg n$; מסמנים $S(m)=\frac{T(2^m)}{2^{5m}}$ ומגיעים לנוסחת הנסיגה $S(m)=S(m/2)+5m^3+m^5$.

משיטת האב, מקרה 3, מתקבל הפתרון $S(m)=\Theta(m^5)$.

מזה נובע $\frac{T(n)}{n^5}=\Theta(\lg^5 n)$ ופתרון הנוסחה המקורית $T(n)=\Theta(n^5\cdot\lg^5 n)$.