מטלת מחשב (ממ״ח) 01

הקורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה: החוברת ״מבוא מהיר ללוגיקה״**

מספר השאלות: 13 **משקל המטלה: נקודה אחת**

סמסטר: 2019ב **מועד הגשה: 5.3.2019**

את התשובות לממ״ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת״א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ״ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ״ח למנחה!

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות. סמנו:

א - אם רק טענה 1 נכונה, ב - אם רק טענה 2 נכונה,

ג - אם שתי הטענות נכונות, ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

1. "משה הכה בסלע ויצאו ממנו מים" - זהו פסוק.
2. "ארבעים שנה" - זהו פסוק.

שאלה 2

1. **שלילת** הפסוק אברסט הוא ההר הגבוה ביותר בכדור הארץ.
   היא הפסוק אברסט הוא ההר הנמוך ביותר בכדור הארץ.
2. **שלילת** הפסוק $1+1>2$ היא הפסוק $1+1<2$.

שאלה 3

1. הפסוק $1+1=2$ **או** $2+3>5$ הוא אמת.
2. הפסוק $1+1=2$ **וגם** $3+3>2$ הוא אמת.

שאלה 4

1. הפסוק **אם** $2>3$ **אז** $2<3$ הוא אמת.
2. הפסוק **אם** $2>3$ **אז** $2=4$ הוא אמת.

שאלה 5

1. הפסוק **אם** $2<3$ **אז** $3<4$ הוא אמת.
2. הפסוק **אם** $2<3$ **אז** $4<3$ הוא אמת.

p	q	r	α
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	T

שאלה 6

1. באיור משמאל מופיע לוח האמת של הפסוק $\alpha = (p \to q) \wedge (p \to r)$.
2. הפסוק הפורמלי $(\neg p) \wedge \neg(p \to q)$ הוא סתירה.

שאלה 7

1. $\neg((p \wedge q) \vee r)$ שקול טאוטולוגית ל- $((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$.
2. $p \wedge \neg(p \wedge q)$ שקול טאוטולוגית ל- $q \wedge \neg(q \wedge p)$.

שאלה 8

1. שלילת הפסוק **היום חם ולח** שקולה לפסוק **היום לא חם או היום לא לח**.
2. שלילת הפסוק **אסע לתאילנד השנה או בשנה הבאה**

   שקולה לפסוק **לא אסע לתאילנד השנה ולא אסע לתאילנד בשנה הבאה**.

שאלה 9

1. מתוך הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p$ נובע טאוטולוגית הפסוק r .
2. מתוך הפסוק r נובע טאוטולוגית הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p$.

שאלה 10

1. אם מ- α נובע β אז $\alpha \wedge \neg\beta$ הוא סתירה.
2. אם מ- $\alpha \wedge \neg\beta$ נובעת סתירה אז מ- α נובע $\neg\beta$.

שאלה 11

נתבונן בפסוק: **לכל מספר הגדול מ- 1, הריבוע שלו גדול ממנו**.

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x\big((x > 1) \wedge (x^2 > x)\big)$
2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x\big((x > 1) \to (x^2 > x)\big)$

שאלה 12

נתבונן שוב בפסוק: **לכל מספר הגדול מ- 1, הריבוע שלו גדול ממנו**.

1. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\forall x((x \le 1) \vee (x^2 > x))$
2. את הפסוק האמור ניתן לרשום כך: $\big(\forall x\,(x > 1)\big) \to \forall x(x^2 > x)$

שאלה 13

1. את שלילת הפסוק **לכל** x **קיים** y **שהריבוע שלו הוא** x

   ניתן לנסח כך: **לכל** x **לא קיים** y **שהריבוע שלו הוא** x .
2. את שלילת הפסוק **לכל** x **קיים** y **שהריבוע שלו הוא** x

   ניתן לנסח כך: **קיים** x**, כך שלכל** y **, הריבוע של** y **שונה מ-** x .

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 1**

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2019ב | **מועד הגשה: 19.3.2019**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (24 נק')

לכל אחת מהטענות הבאות קבעו אם היא נכונה או לא.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק, די לרשום בכל סעיף נכון / לא נכון.

א. $1\in\{1,\{1\}\}$ ב. $1\in\{\{1\}\}$ ג. $\{2\}\subseteq\{1,\{1\},\{2\}\}$ ד. $\{\varnothing\}\subseteq\{1,\{\varnothing\}\}$

ה. $\{\varnothing\}\subseteq\{\varnothing,\{1\}\}$ ו. $\{1\}\in\{\mathbf{N}\}$ ז. $|\{1,\mathbf{N}\}|=|\{1,2\}|$ ח. $|\mathcal{P}(\{2,\varnothing\})|=2\cdot|\mathcal{P}(\{\varnothing\})|$

שאלה 2 (24 נק')

יהיו A,B,C קבוצות. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$.

ב. אם $\{A\}\subseteq\mathcal{P}(B)$ אז $\mathcal{P}(A)\subseteq\mathcal{P}(B)$.

ג. אם $\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$ אז $A\subseteq B$ או $B\subseteq A$.

שאלה 3 (24 נק')

יהיו A,B,C קבוצות חלקיות לקבוצה אוניברסלית U. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $(A\cap B)^c\subseteq A$ אז $A=U$

ב. אם $A^c\Delta B=A\Delta C$ אז $C=B^c$

ג. אם $x\in(A\cap B)\setminus C$ אז $x\notin A\Delta B\Delta C$.

שאלה 4 (28 נק')

בשאלה זו $\mathbf{N}$ היא הקבוצה האוניברסלית. לכל $n\in\mathbf{N}$ נסמן $A_n=\{0,1,2,3,\ldots,n\}$.

עבור כל אחת מן הקבוצות הבאות, קבעו אם היא שווה או לא לאחת הקבוצות $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}\setminus\{0\}$, $\varnothing$.

נמקו טענותיכם.

א. $\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n^{\,c}$ ב. $\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n^{\,c}$ ג. $\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_{2n}\setminus A_n)$ ד. $\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_{n+1}\cap A_n^{\,c})$

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 2,1**
מספר השאלות: 20 | **משקל המטלה: 2 נקודות**
סמסטר: 2019ב | **מועד הגשה: 26.3.2019**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל שאלה במטלה זו מופיעה טענה אחת. סמנו:

א - אם הטענה נכונה | **ב - אם הטענה לא נכונה**

במטלה זו A,B,C הן קבוצות, R,S הם יחסים.

שאלה 1

$\{2,3\} \cap \{\{2\},\{3\}\} = \{\{2\},3\} \cap \{2,\{3\}\}$

שאלה 2

אם $A \cup B = A \cup C$ אז $B = C$

שאלה 3

אם $A \subseteq B \cup C$ אז $A \subseteq B$ או $A \subseteq C$

שאלה 4

אם A,B קבוצות סופיות זרות אז $|\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)| = 2^{|A|} + 2^{|B|}$

שאלה 5

$A \subseteq \mathcal{P}(A)$

שאלה 6

אם $A \Delta B = A \setminus B$ אז $B \subseteq A$

שאלה 7

אם $x \in A \Delta B \Delta C$ אז $x \notin A \cap B$

שאלה 8

אם $x \notin A^c \cap B^c$ אז $x \in A \cap B$

שאלה 9

אם $A \subset B \times C$ אז $B \neq \varnothing$ וגם $C \neq \varnothing$

שאלה 10

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right)$$

שאלה 11

אם כל איבר של A הוא זוג סדור אז קיימות קבוצת B,C כך ש- $A=B\times C$

שאלה 12

אם R יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי אז $R^2=R$.

שאלה 13

אם יחס R מקיים $R^2=R$ אז R הוא יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

שאלה 14

אם $R\cup S$ יחס אנטי-סימטרי אז גם R,S הם יחסים אנטי-סימטריים

שאלה 15

מספר יחסי השקילות השונים שניתן להגדיר על הקבוצה $\{1,2,3\}$ קטן ממספר יחסי הסדר המלא שניתן להגדיר על קבוצה זו.

שאלה 16

כל יחס רפלקסיבי R המקים $R^2=R$ והוא יחס שקילות או סדר חלקי.

שאלה 17

אם ליחס שקילות R על $\{1,2,3,\ldots,n\}$ יש פחות מ- n מחלקות אז $|R|\geq n+2$

שאלה 18

אם $1<n<m$ מספרים טבעיים אז החלוקה של $\mathbf{Z}$ המוגדרת על-ידי יחס השקילות $\equiv_m$ היא עידון של החלוקה של $\mathbf{Z}$ המוגדרת על ידי יחס השקילות $\equiv_n$.

שאלה 19

אם A קבוצה סדורה (סדר מלא!) ואינסופית אז אין ב- A איבר אחרון

שאלה 20

אם $A=\{1,2,3,4\}$ ואם $\langle A,\prec\rangle$ הוא סדר חלקי שבו קיימים שני אברים מינימליים ושני איברים מקסימליים אז כל איבר של A הוא מינימלי או מקסימלי.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 2, 3**

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2019ב | **מועד הגשה: 2.4.2019**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1

על הקבוצה $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ נתונים שני יחסים R,S המוגדרים כך: לכל $A,B\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$

ARB אם ורק אם $A\cap\{1,2\}=B\cap\{1,2\}$ ו- ASB אם ורק אם $A\cap\{1,2\}\subset B\cap\{1,2\}$.

א. קבעו אם אחד מהיחסים הוא יחס שקילות ואם התשובה חיובית, מיצאו את מחלקות השקילות שלו.

ב. קבעו אם אחד היחסים הוא יחס סדר חלקי או מלא ואם התשובה חיובית, מיצאו את האיברים המינימליים והמקסימליים בקבוצה הסדורה שגיליתם.

שאלה 2

על הקבוצה $A=\mathbf{N}\setminus\{0\}$ מגדירים שני יחסים, R,S כך: לכל $x,y\in A$, xRy אם ורק אם

קיים מספר **טבעי** $i>0$ כך ש- $\frac{y}{x}=2^i$ ו- xSy אם ורק אם קיים מספר **שלם** j כך ש- $\frac{y}{x}=2^j$.

א. הוכיחו שאחד משני היחסים הוא יחס שקילות.

ב. מיצאו את מחלקות השקילות של יחס השקילות שגיליתם בסעיף א'.

ג. הוכיחו שאחד משני היחסים הוא סדר חלקי.

ד. מיצאו את האיברים המינימליים ואת האיברים המקסימליים (אם יש) לגבי היחס האחרון.

שאלה 3

לכל n טבעי נסמן $A_n = \{0,1,2,\ldots,n\}$ ובנוסף נסמן $A_{-1} = \varnothing$. תהי $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ פונקציה.

א. הוכיחו ש- f היא חד-חד-ערכית אם ורק אם $f[A_n] \neq f[A_m]$ לכל $m,n \in \mathbf{N} \cup \{-1\}$, $m \neq n$.

ב. הוכיחו ש- f היא על אם ורק אם $f^{-1}[A_n] \neq f^{-1}[A_m]$ לכל $m,n \in \mathbf{N} \cup \{-1\}$, $m \neq n$.

שאלה 4

נתונה פונקציה $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ המוגדרת כך: לכל $m,n \in \mathbf{Z}$, $f\langle m,n\rangle = \langle 2m+3n, 3m+2n\rangle$.

נסמן ב- $\pi_1 : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ את ההטלה על הרכיב הראשון ($\pi_1(m,n) = m$ לכל $m,n \in \mathbf{Z}$)

א. הוכיחו ש- f היא חד-חד-ערכית ולא על.

ב. הוכיחו ש- $\pi_1 \circ f$ היא על ולא חד-חד-ערכית.

ג. הוכיחו שהפונקציה $g : \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \to \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ המוגדרת על-ידי $g\langle x,y\rangle = \langle 2x+3y, 3x+2y\rangle$ לכל $x,y \in \mathbf{Q}$ היא הפיכה ומיצאו את הפונקציה ההפכית לה.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" פרקים 4,3**

מספר השאלות: 20 | **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2019ב | **מועד הגשה: 15.4.2019**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: א - אם הטענה נכונה ; ב - אם הטענה לא נכונה

במטלה זו האותיות f, g מסמנות פונקציות

שאלה 1
עבור כל מספר $n \in \mathbf{N}$ השלשות $\left\langle \mathbf{R}, \mathbf{R}, \{\langle x, 1+x+x^2+\cdots+x^n\rangle \mid x \in \mathbf{R}\}\right\rangle$
ו- $\left\langle \mathbf{R}, \mathbf{R}, \{\langle 1, n+1\rangle\} \cup \{\langle x, (1-x^{n+1})/(1-x)\rangle \mid x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}\}\right\rangle$ הן פונקציות שוות.

שאלה 2
אם $f : A \to B$ היא פונקציה ו- $C_1, C_2 \subseteq A$, $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ אז גם $f[C_1] \cap f[C_2] = \varnothing$.

שאלה 3
אם $f : A \to B$ פונקציה ו- $D_1, D_2 \subseteq B$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ אז גם $f^{-1}[D_1] \cap f^{-1}[D_2] = \varnothing$.

שאלה 4
$f : A \to B$ היא חד-חד-ערכית אם ורק אם לכל קבוצה סופית $C \subseteq A$ מתקיים $|f[C]| = |C|$

שאלה 5
$f : A \to B$ היא על אם ורק אם לכל קבוצה סופית $D \subseteq B$ מתקיים $|f^{-1}[D]| = |D|$

שאלה 6
אם A, B תת-קבוצות של קבוצה אוניברסלית U אז $\chi_A^{-1}(\{1\}) \cap \chi_B^{-1}(\{0\}) = A \setminus B$

שאלה 7
אם $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ היא חד-חד-ערכית אז f היא על.

שאלה 8
אם $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ היא על אז f היא חד-חד-ערכית.

שאלה 9
אם $f, g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ואם $f \circ g = I_{\mathbf{N}}$ אז f היא פונקציה הפיכה.

שאלה 10

אם $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, $f(n)=n+3$ לכל $n\in\mathbf{N}$ אז קיימת פונקציה **קבועה** $g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ כך ש- $f\circ g=g\circ f$

שאלה 11

קבוצת המספרים הטבעיים שמתחלקים ב- 7 שקולה לקבוצת המספרים הטבעיים שאינם מתחלקים ב- 7.

שאלה 12

אם קבוצה אינסופית A שקולה לכל קבוצה אינסופית שחלקית לה אז $|A|=\aleph_0$.

שאלה 13

אם A קבוצת הקבוצות החלקיות ל- $\mathbf{N}$ ששקולות ל- $\mathbf{N}$ ו- B קבוצת הקבוצות החלקיות ל- $\mathbf{N}$ שאינן שקולות ל- $\mathbf{N}$ אז A שקולה ל- B .

שאלה 14

אם $A\subseteq\mathbf{R}$ ואם $|A|>\aleph_0$ אז A מכילה קטע לא מנוון.

שאלה 15

$|\mathbf{R}\setminus[0,\infty)|<|\mathbf{R}\setminus[0,1)|$

שאלה 16

הקבוצות $\mathbf{N}^{\{1,2\}}$ ו- $\mathbf{N}^{\{1,2,3\}}$ הן שקולות זו לזו.

שאלה 17

הקבוצות $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ ו- $\{1,2,3\}^{\mathbf{N}}$ הן שקולות זו לזו.

שאלה 18

הקבוצות $\mathbf{N}^{\{1,2\}}$ ו- $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ הן שקולות זו לזו.

שאלה 19

אם $\mathcal{F}$ היא קבוצת כל התת-קבוצות הסופיות של $\mathbf{N}$ אז $\left|\bigcup_{A\in\mathcal{F}}A\right|<\left|\bigcup_{A\in\mathcal{F}}\mathcal{P}(A)\right|$

שאלה 20

אם κ_1 עוצמה סופית ו- κ_2 עוצמה אינסופית אז $\aleph_0+\kappa_1\neq\aleph_0+\kappa_2$.

מטלת מנחה (ממ״ן) 13

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 4**

מספר השאלות: 4 | **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2019ב | **מועד הגשה: 18.4.2019**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילתא״א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (28 נקי)

מיצאו את העוצמות של כל אחת מן הקבוצות הבאות. נמקו את התשובות.

א. קבוצת כל המספרים הממשיים בקטע $(0,1)$ אשר בפיתוח שלהם כשבר עשרוני אינסופי מופיעות רק ספרות אי-זוגיות.

ב. $\{x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3} \mid x,y,z \in \mathbf{Q}\}$

ג. $\mathcal{P}((0,1) \setminus \mathbf{Q})$

ד. $\mathcal{P}(\mathbf{Q} \cap (0,10^{-10}))$

שאלה 2 (28 נקי)

א. מיצאו את העוצמה של הקבוצה $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{Q}^n$. נמקו את התשובה.

ב. פולינום ממעלה n עם מקדמים רציונליים הוא ביטוי מהצורה $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ כאשר $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{Q}$. מיצאו את עוצמת קבוצת כל הפולינומים בעלי מקדמים רציונליים (מכל המעלות האפשריות) . נמקו את התשובה.

ג. כל מספר ממשי שהוא שורש של פולינום עם מקדמים רציונליים נקרא מספר **אלגברי**.
הוכיחו שהמספר $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ הוא אלגברי (הראו ש- α הוא שורש של פולינום ממעלה 6 עם מקדמים רציונליים).

ד. הוכיחו שקבוצת כל המספרים האלגבריים היא אינסופית ובת מנייה.

שאלה 3 (16 נקי)

נסמן :

A קבוצת כל הקבוצות של נקודות במישור (שאותו מזהים כרגיל כ- $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$).

B קבוצת כל העיגולים במישור.

C קבוצה של עיגולים במישור שזרים זה לזה.

הוכיחו ש- $|A|>|B|>|C|$.

שאלה 4 (28 נקי)

סדרת פיבונצ׳י מוגדרת באופן הבא : $F_0=1$, $F_1=1$, ולכל $n\geq 2$ טבעי : $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

א. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים : $\sum_{i=0}^{n}F_i=F_{n+2}-1$.

ב. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי קיימים מספר טבעי k ומספרים $a_0,a_1,...,a_k\in\{0,1\}$

כך ש- $n=\sum_{i=0}^{k}a_iF_i$.

נסמן ב- A את קבוצת כל הסדרות האינסופיות $\langle a_0,a_1,a_2,a_3...\rangle$ של מספרים טבעיים המקיימות את התנאי $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ לכל $n\geq 2$.

ג. מיצאו את העוצמה של A .

רמז : מיצאו פונקציה הפיכה המתאימה לכל איבר של $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ סדרה ב- A .

ד. מהי העוצמה של קבוצת כל הסדרות מ- A שבהן מופיעים רק מספרים רציונליים?

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה | **חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 1-2**

מספר השאלות: 20 | **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2019ב | **מועד הגשה: עד 7.5.2019**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: **א** - אם הטענה נכונה ; **ב** - אם הטענה לא נכונה

שאלה 1

אם $|A|=3^3$ ו- $|B|=3$ אז מספר הפונקציות מ- A ל- B שווה למספר הפונקציות מ- B ל- A.

שאלה 2

תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. מספר הפונקציות מ- A ל- A המעתיקות מספרים זוגיים למספרים זוגיים הוא 18^3

שאלה 3

תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. מספר הפונקציות מ- A ל- A המעתיקות כל מספר של A לאחד המחלקים של אותו מספר הוא $2^3 3^2$

שאלה 4

תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות מ- A ל- A המעתיקות מספרים זוגיים למספרים זוגיים שווה למספר הפונקציות מ- $\{1,2\}$ ל- A.

שאלה 5

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות מהקבוצה $\{1,2,3,4,5\}$ לעצמה המעתיקות את 1 למספר שונה מ- 1 הוא $5!-4!$

שאלה 6

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות מהקבוצה $\{1,2,3,4,5\}$ לעצמה המעתיקות את 1 למספר שונה מ- 1 ואת 2 למספר שונה מ- 2 הוא $5!-2\cdot 4!$

שאלה 7

מספר הפונקציות מ- $A=\{1,2,3,4\}$ **על** $B=\{1,2,3\}$ הוא $3^4-3\cdot 2^4$.

שאלה 8

מספר הקבוצות החלקיות ל- $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ שבהן יש לפחות 3 איברים שווה למספר הקבוצות החלקיות ל- A שבהן יש לכל היותר 3 אברים.

שאלה 9

מספר החלוקות השונות של הקבוצה $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ למחלקות בנות 3 איברים כל אחת שווה למספר כל הבחירות האפשריות של קבוצה בעלת 3 איברים מתוך A .

שאלה 10

מספר הסידורים השונים של המחרוזת AAABBC גדול ממספר הסידורים השונים של המחרוזת AABBCC

שאלה 11

מספר הסידורים השונים של המחרוזת AABBCC שבהן לא מופיע הרצף AA גדול ממספר הסידורים שלה שבהם מופיע הרצף AA .

שאלה 12

מספר הסידורים השונים של המחרוזת AABBCC שווה למספר החלוקות של הקבוצה $\{1,2,3,4,5,6\}$ ל- 3 מחלקות בנות 2 איברים כל אחת.

שאלה 13

מספר הסידורים השונים של המחרוזת AABBCC שווה למספר הדרכים שבהן יכולים 6 תלמידים להגיש 3 עבודות שונות בזוגות.

שאלה 14

מספר הדרכים לפיזור 3 כדורים זהים ב- 4 תאים שונים שווה למספר הדרכים השונות לפיזור 4 כדורים זהים ב- 3 תאים שונים.

שאלה 15

מספר הדרכים לפיזור 4 כדורים זהים ב- 4 תאים שונים שווה למספר הדרכים השונות לפיזור 3 כדורים זהים ב- 5 תאים שונים.

שאלה 16

מספר הדרכים לפיזור 4 כדורים שונים ב- 4 תאים שונים גדול פי 16 ממספר הדרכים לפיזור 4 כדורים זהים ב- 4 תאים שונים.

שאלה 17

מספר הדרכים לפיזור 4 כדורים שונים ב- 4 תאים זהים הוא קטן מ- 10.

שאלה 18

מספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=14$ שווה למספר הפתרונות השלמים החיוביים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=10$

שאלה 19

מספר הפתרונות בטבעיים זוגיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=14$ שווה למספר הפתרונות בטבעיים אי-זוגיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=14$

שאלה 20

מספר הפתרונות לאי-שוויון $x_1+x_2+x_3+x_4\ge 0$ שבהם $x_1,x_2,x_3,x_4\in\{-1,1\}$, הוא 10.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 4,3**

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2019ב **מועד הגשה: 13.5.2019**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):
- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (20 נקודות)

א. מיצאו את מספר הקבוצות החלקיות לקבוצה A בעלת n אברים המכילות **ממש** קבוצה נתונה של k איברים מתוך A.

ב. לבובספוג יש $n \geq 4$ חברים. בכל ערב הוא מזמין מספר כלשהו $k \geq 4$ של חברים לסעוד אתו ולאחר מכן הוא תמיד מזמין שלושה מהם לשחק בביתו. (אף אחד לא מסרב!)
ספרו בשתי דרכים את מספר האופציות השונות שיש לבובספוג לבלות עם חברים בערב אחד, והוכיחו עבור $n \geq 4$ את הזהות $\sum_{k=4}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{3}=\binom{n}{3}(2^{n-3}-1)$ בדרך קומבינטורית.
(כלומר ללא בפישוט מראש של האגפים).

ג. הוכיחו את השוויון מסעיף ב' בדרך אלגברית (על ידי חישוב ישיר).

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונה $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. בשאלה זו נתייחס לפונקציות המוגדרות על A

א. מיצאו את מספר הפונקציות $f: A \to \{2,3,4\}$ המקבלות כל אחד מן הערכים $i \in \{2,3,4\}$ בדיוק i פעמים.

ב. מיצאו את מספר הפונקציות $f: A \to \{2,3,4,5,6\}$ המקבלות כל אחד מהערכים $2,3,4$ בדיוק פעמיים.

ג. מיצאו את מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f: A \to A$ המקיימות את התנאי:
$\{f(1), f(2), f(3)\} \cap \{1,2,3\} = \varnothing$

שאלה 3 (20 נקודות)

נתונה המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 8$.

א. מיצאו מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה כאשר $x_1 + x_2 + x_3 \neq 5$.

ב. מיצאו מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה כך ש- $x_{2i-1} + x_{2i} \neq 2$ לכל $1 \leq i \leq 4$.

שאלה 4 (20 נקודות)

בשאלה זו נתייחס לכל המילים באורך 10 הכתובות באותיות $A, A, A, B, B, C, C, D, D, D$.

א. מיצאו את מספר המילים ש**אין** בהן **שלוש אותיות מאותו סוג** הצמודות זו לזו.

ב. מיצאו את מספר המילים שבהן יש **לפחות שתי אותיות** מסוג A הצמודות זו לזו.

שאלה 5 (20 נקודות)

רמי מציע לדינה את האתגר הבא:

דינה תבחר 8 מספרים טבעיים שונים כלשהם בתחום $10 \leq n \leq 36$.

רמי ינסה ליצור, תוך שימוש **רק במספרים שדינה בחרה או בחלק מהם,** שני סכומים שווים.

למשל, אם דינה בחרה את המספרים $10, 11, 12, 15, 18, 25, 32, 36$

רמי יכול לרשום את השוויון $11 + 25 = 36$.

לחלופין, הוא יכול לרשום $10 + 12 + 18 = 15 + 25 + 10$.

כל המספרים צריכים להילקח מהרשימה של דינה, ואין חזרות על אותו מספר.

אם רמי מצליח לרשום שוויון כזה – הוא מנצח. אם הוא לא מצליח – דינה מנצחת.

בהנחה שאחרי שדינה בוחרת יש לרמי די זמן - או מחשב - לבדוק את כל האפשרויות,

הוכיחו כי רמי תמיד ינצח!

הדרכה: עקרון שובך היונים.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

קורס: 20476 מתמטיקה דיסקרטית **חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 7,6**

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2019ב **מועד הגשה: 27.5.2019**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (25 נק')

שאלה זו מתייחסת לפיתוח המולטינומי $(a+b+c+d)^{10}$

(5 נק') א. מהו מספר האיברים בפיתוח? (לאחר כינוס איברים דומים)

(10 נק') ב. לכמה איברים יש מקדם שלא מתחלק ב- 5?

(10 נק') ג. מהו מספר האיברים שבהם החזקות של כל האותיות a,b,c,d שונות מ- 2 ?

(מותר לחזקות של אותיות אלה להיות מספרים זוגיים אחרים, ששונים מ- 2)

שאלה 2 (20 נק')

נסמן ב- a_n את מספר המחרוזות באורך n, שאיבריהן הם הספרות $1,2,3,4$ והאותיות a,b בעלות התכונה שמימין לספרה **חייבת** להופיע אות. למשל $a2b3aa$ ו- bba הן מחרוזות מותרות אבל 3 ו- $a23b4$ מחרוזות אסורות. את a_0 מגדירים כ- 1.

מיצאו בעזרת חישוב ישיר את a_1,a_2 .

א. מיצאו יחס נסיגה ל- a_n ובדקו שהערכים של a_0,a_1,a_2 מתאימים ליחס הנסיגה.

ב. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n .

שאלה 2 (25 נקי)

תהי $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. נתון ש- $f(x)(1+2x+2x^2+x^3)=\frac{1}{(1-x)^3}$

(5 נקי) א. חשבו את a_0, a_1, a_2 .

(10 נקי) ב. מצאו מספרים r,s,t כך ש- $a_n = D(3,n) - ra_{n-1} - sa_{n-2} - ta_{n-3}$ לכל $n \geq 3$. חשבו את a_7 בעזרת הנוסחה הזו.

(10 נקי) ג. רשמו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = n$. מצאו את מספר הפתרונות במקרה ש- $n = 7$

(רמז : שימו לב לקשר שבין $f(x)$ לבין הפונקציה מסעיף ג׳)

שאלה 4 (30 נקי)

א. מיצאו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ כאשר כל הנעלמים הם מספרים זוגיים שלא מתחלקים ב- 3.

(רמז לפישוט : אפשר להוציא את $x^2 + x^4$ כגורם משותף מהסכום האינסופי).

ב. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה מסעיף א׳ כאשר $k = 10$, $n = 32$.

ג. מצאו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1 + x_2 + \cdots + x_k + y_1 + \cdots + y_k = n$ כאשר k הנעלמים הראשונים הם מספרים זוגיים שלא מתחלקים ב- 3 ו- $0 \leq y_i \leq 5$ לכל $1 \leq i \leq k$. (רמז לפישוט : $1 + x + \cdots + x^5 = \frac{1-x^6}{1-x}$)

ד. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה מסעיף א׳ כאשר $k = 10$, $n = 24$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

קורס: 20476 מתמטיקה בדידה   **חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים**

מספר השאלות: 20   **משקל המטלה: 2 נקודות**

סמסטר: 2019ב   **מועד הגשה: 12.6.2019**

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א

בכתובת http://www.openu.ac.il/sheilta/

הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל אחת מהשאלות הבאות מופיעה טענה.

סמנו: א - אם הטענה נכונה ; ב - אם הטענה לא נכונה

שאלה 1

כל גרף פשוט על 6 צמתים שבו 11 קשתות הוא קשיר

שאלה 2

אם $G=(A\cup B,E)$ הוא גרף דו-צדדי (כמו בהגדרה 1.5) אז $\sum_{v\in A}\deg_G(v)=|E|$

שאלה 3

אם לגרף G יש שני מרכיבי קשירות בדיוק, אז הגרף המשלים $\overline{G}$ הוא דו-צדדי

שאלה 4

אם G הוא גרף דו-צדי אז הגרף המשלים $\overline{G}$ יש שני מרכיבי קשירות בדיוק,

בשאלות 5-9 G הוא גרף שבו קיים מסלול אוילר שאינו מעגל ו- G_1 הוא גרף קשיר המתקבל מ-
G לאחר מחיקת קשת אחת המחברת בין שני צמתים שונים של G.

שאלה 5

בגרף G_1 אין מסלול אוילר שאינו מעגל

שאלה 6

G_1 אינו אוילרי

שאלה 7

G_1 הוא גרף אוילרי

שאלה 8

אם G_1 המילטוני אז גם G המילטוני

שאלה 9

בגרף G קיים מסלול המילטון

בשאלות 10-14 נתייחס לעצים המתוייגים שבהם הצמתים מסומנים במספרים עוקבים $1,2,3,\ldots$ שהם בעלי סדרת פרופר מהצורה $(3,3,k,5,5)$, כאשר k מספר שלם חיובי.

שאלה 10

כל עץ כזה הוא בעל 5 צמתים בדיוק

שאלה 11

מספר העצים המקיים את התנאים הנתונים הוא 7

שאלה 12

לכל העצים הנ״ל יש אותו מספר עלים.

שאלה 13

כל שניים מן העצים הנתונים הם איזומורפיים (לפי הגדרה 2.8)

שאלה 14

כל שניים מן העצים הנתונים הם לא איזומורפיים (לפי הגדרה 2.8)

בשאלות $15-20$ G הוא גרף פשוט על 6 צמתים שבו הדרגה של כל צומת היא 4.

שאלה 15

G הוא גרף אוילרי

שאלה 16

G הוא גרף המילטוני

שאלה 17

קיים ב- G זיווג מושלם

שאלה 18

G הוא גרף מישורי

שאלה 19

G הוא לא גרף מישורי

שאלה 20

מספר הצביעה של G הוא 5

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

קורס: 20476 – מתמטיקה בדידה **חומר הלימוד למטלה: תורת הגרפים**

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה: 3 נקודות**

סמסטר: 2019ב **מועד הגשה: 17.6.2019**

מטלת מנחה ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"):

- במערכת המטלות המקוונת (**קובץ מוקלד. לגבי הגשת קובץ סרוק יש להתעדכן אצל המנחה\בודק של קבוצת הלימוד שלך**). כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
- על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל, לכתובתו של המנחה.

שאלה 1 (20נקודות)

נתון גרף אוילרי קשיר $G=(V,E)$.

א. הוכיחו שלכל קשת $e\in E$ הגרף $(V,E-\{e\})$ הוא קשיר.

ב. הוכיחו שאם קיימות קשתות $e_1,e_2,e_3\in E$ כך ש- $(V,E-\{e_1,e_2,e_3\})$ אוילרי אז G הוא לא גרף דו-צדדי.

ג. הוכיחו שאם $|V|=2n+1$, $n\geq 1$ אז קיימים ב- G לפחות שלושה צמתים בעלי אותה דרגה.

שאלה 2 (15 נקודות)

בשאלה זו נתייחס לעצים על 8 צמתים המתויגים במספרים $1,2,3,\ldots,8$

א. מיצאו את מספר העצים שבהם העלים הם חמשת הצמתים $4,5,6,7,8$ ורק הם.

ב. מיצאו את מספר העצים שבהם קיים צומת בעל דרגה 5.

שאלה 3 (15 נקודות)

יהי T עץ על n צמתים שבו יש k עלים.

א. הוכיחו שלכל צומת $v\in V$, $d_T(v)\leq k$

ב. הוכיחו שאם $k\leq\frac{n}{2}$ אז הגרף המשלים $\overline{T}$ הוא המילטוני

שאלה 4 (20 נקודות)

יהיו $A = P(\{1,2,3\}) \setminus \{\varnothing\}$ (קבוצת כל הקבוצות הלא ריקות החלקיות ל- $\{1,2,3\}$) ,

$B = \{1,2,3,4,5,6\}$ ו- $G = (A \cup B, E)$ הגרף הדו-צדדי המוגדר כך : לכל $S \in A$ ולכל $t \in B$

יש קשת בין S ל- t אם ורק אם t שווה לסכום או למכפלה או למספר האיברים של S .

הוכיחו על ידי דוגמה או הפריכו בעזרת משפט הול כל אחת מן הטענות הבאות

א. קיים ב- G זיווג המזווג את כל צומתי A

ב. קיים ב- G זיווג המזווג את כל צומתי B

ג. אם משמיטים ב- G את הצומת $\{3\}$ ואת כל הקשתות הסמוכות לו, מתקבל גרף שיש בו זיווג מושלם.

שאלה 5 (20 נקודות)

בגרף **פשוט וקשיר** G קיימים צמתים בעלי דרגות $3,4,5,6,7$ וכל שאר הצמתים הם בעלי דרגה קטנה מ- 3, כאשר n צמתים הם בעלי דרגה 2 ו- m צמתים בעלי דרגה 1.

(9 נק׳) א. הוכיחו שקיים מספר טבעי k כך ש- $m=2k+1$ ומיצאו את מספר הקשתות של G .

(9 נק׳) ב. הוכיחו ש- G הוא גרף מישורי

(9 נק׳) ג. הראו שמספר הפאות של G אינו תלוי כלל במספר הצמתים בעלי דרגה 2.

(9 נק׳) ד. הראו שהמספר המקסימלי של צמתים בעלי דרגה 1 הוא 17 ובמקרה זה G הוא עץ.