נושאים במתמטיקה לתלמידי מח"ר - 10444

סמסטר 2009ב

<u>פתרון ממ"ן 14</u>

<u>תשובה 1</u>

א. נניח, בשלילה, ש- φ_1 אינו טאוטולוגיה, לכן הפסוק

$((P \vee Q) \vee R) \to (\neg P \to ((Q \vee R) \wedge \neg P))$ הוא שקר. (1)

מכאן ש- $(P \vee Q) \vee R$ אמת ו- $\neg P \to ((Q \vee R) \wedge \neg P)$ שקר. (2)

$\neg P \to ((Q \vee R) \wedge \neg P)$ שקר, ולכן $\neg P$ אמת ו- $(Q \vee R) \wedge \neg P$ שקר. (3)

וקיבלנו ש- P **שקר** ו- $Q \vee R$ שקר (כי $\neg P$ אמת). (4)

לכן Q **שקר** ו- R **שקר**. (5)

מ-(4) ו-(5) נובע ש- $(P \vee Q) \vee R$ שקר **בסתירה ל-(2).**

לכן הגענו לסתירה ו- φ_1 הוא, אכן, טאוטולוגיה.

ב. הפסוק $\neg(\neg P \to Q)$ הוא אמת.

לכן הפסוק $\neg P \to Q$ הוא שקר.

לכן (לפי לוח האמת של הקשר $\to$) $\neg P$ הוא אמת ו- Q שקר.

ולפיכך $(\neg P)\mathrm{xor}Q$ הוא אמת בעוד $P \vee Q$ הוא שקר.

לכן φ_2 הוא שקר.

<u>תשובה 2</u>

א. אפשר לבנות את השורה המתאימה בלוח האמת. אך ניתן לראות את הדרוש גם בדרך אחרת:

מערכי האמת של המשתנים הפסוקיים הנתונים קל לראות כי $Q \wedge (\neg R)$ אמת.

ומכיוון ש- P שקר הרי ש- $P \to ((R \vee Q) \wedge S)$ אמת,

ולכן $(Q \wedge (\neg R)) \wedge (P \to (R \vee Q) \wedge S)$ אמת,

והרי גם S אמת, לכן הפסוק הנתון אמת.

ב. 1) הפסוקים הנתונים שקולים טאוטולוגית. כדי להוכיח זאת נראה שיש להם אותה טבלת אמת (מכיוון שמדובר בשני משתנים פסוקיים בלבד הטבלה קטנה ולכן ההוכחה בשיטה זו קצרה):

P	Q	$\neg(P\leftrightarrow Q)$	$(\neg P)\leftrightarrow Q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

2) הפסוקים הנתונים אינם שקולים טאוטולוגית: כדי להראות זאת אין צורך לבדוק את כל טבלת האמת. מספיק להראות שורה אחת שעבורה שני הפסוקים מקבלים ערך אמת שונה. נראה זאת:

P	Q	$\neg(P\leftrightarrow Q)$	$(\neg P)\leftrightarrow(\neg Q)$
T	T	F	T

ג. עלינו להוכיח כי:

$$\neg P \to ((Q\vee R)\wedge\neg P)\ \equiv_{\mathrm{T}}\ ((Q\vee R)\to P)\to P$$

לשם הוכחה נוכל להיעזר בשקילויות הטאוטולוגיות המופיעות במשפט 5.13 בספר הלימוד.

לפי כלל ההיפוך מתקיים: $A\to B\equiv_{\mathrm{T}}\neg B\to\neg A$, ולכן

$$\neg P \to ((Q\vee R)\wedge\neg P)\ \equiv_{\mathrm{T}}\ \neg((Q\vee R)\wedge\neg P)\to\neg(\neg P)$$

ובעזרת שלילה כפולה וכללי דה-מורגן נקבל:

$$\equiv_{\mathrm{T}}\ \big(\neg(Q\vee R)\vee\neg(\neg P)\big)\to P$$

$$\equiv_{\mathrm{T}}\ \big(\neg(Q\vee R)\vee P\big)\to P$$

ובעזרת שקילות טאוטולוגית נוספת (ויתור על $\to$) נקבל,

$$\equiv_{\mathrm{T}}\ \big(\ (Q\vee R)\to P\big)\to P$$

וקיבלנו:

$$\neg P \to ((Q\vee R)\wedge\neg P)\ \equiv_{\mathrm{T}}\ ((Q\vee R)\to P)\to P$$

כפי שרצינו להוכיח.

<u>תשובה 3</u>

מתקיים $A\vee C$, לכן לפחות אחד מבין A ו- C מתקיים (אמת).

1) אם A אמת, אז מכך שמתקיים $A\to\neg B$ וגם $A\to D$ נקבל ש- $\neg B$ ו- D שניהם אמת ולכן מתקיים גם $D\to\neg B$.

2) אם C אמת, אז מכך שמתקיים $C\to\neg D$ וגם $C\to B$ נקבל ש- $\neg D$ ו- B שניהם אמת ולכן D ו- $\neg B$ שניהם שקר, ושוב מתקיים $D\to\neg B$.

והוכחנו שמההנחות הנתונות נובעת המסקנה $D \rightarrow \neg B$, כנדרש.
זוהי טענה פשוטה מאד, לכן הוכחתי אותה ישירות אם הטענה היתה מורכבת יותר הייתי מוכיחה אותה בדרך השלילה. נסה להוכיח בשלילה בעצמך.

<u>תשובה 4</u>

א. נצרין את הפסוקים :

(1) $\left(A \vee R\right) \rightarrow \left(B \vee \neg M\right)$

(2) $B \leftrightarrow \left(A \wedge M\right)$

(3) $R \rightarrow \left(\left(\neg B\right) \vee \left(\neg A\right)\right)$

(4) $M \vee \left(B \wedge R\right)$

ב. נבדוק אם קבוצת הפסוקים בסעיף הקודם היא עקבית טאוטולוגית. כדי להראות זאת, נראה **שקיימת** אפשרות שכל **ההנחות יהיו אמיתיות בעת ובעונה אחת**, כלומר נראה שבלוח האמת יש לפחות שורה אחת שבה כל הפסוקים הנתונים (ההנחות) אמיתיים.

בלוח האמת יש 16 שורות ואנו מחפשים שורה שבה מופיעים T-ים בלבד.
כדי שהנחה (2) תהיה אמיתית אנו רוצים של- B ול- $A \wedge M$ יש אותו ערך אמת.
לכן השורות שיש טעם לבדוק הן אלה שבהן B אמת ו- A וגם M אמת, או B שקר ולפחות אחד מבין A ו- M גם הוא שקר. אך אם B שקר הרי גם $B \wedge R$ שקר ולפי הנחה (4), כדי שהנחה זו תהיה אמת גם M צריך להיות אמת (ודא זאת).
לכן נבדוק את המצבים הבאים :
(i) B, A, M שלושתם אמת.
(ii) B שקר, M אמת ו- A שקר (שהרי אם B שקר, לפחות אחד מבין A, M צריך להיות שקר).

ונתבונן בשורות המתאימות בלוח האמת :

	A	R	B	M	$\left(A \vee R\right) \rightarrow \left(B \vee \neg M\right)$	$B \leftrightarrow \left(A \wedge M\right)$	$R \rightarrow \left(\neg B \vee \neg A\right)$	$M \vee \left(B \wedge R\right)$
מתאים ל-(i)	T	T	T	T	T	T	F	T
	T	F	T	T	T	T	T	T
מתאים ל-(ii)	F	T	F	T	F	T	T	T
	F	F	F	T	T	T	T	T

וקיבלנו שתי שורות שבהן כל ארבעת הפסוקים הנתונים הם אמת (למעשה מספיקה גם שורה אחת, לכן יכולנו להפסיק "לעבוד" אחרי חישוב השורה השנייה בלוח האמת), וקבוצת הפסוקים היא עקבית טאוטולוגית.

הערה: ניתן להצרין את הפסוק הראשון כך: $\left(A \vee R\right) \to \left(B\,\mathrm{xor}\left(\neg M\right)\right)$ ואז, בעזרת ניתוח דומה, נקבל שהשורה השניה והרביעית מתאימות (במקרה זה שורה שלישית בטבלה לא מתאימה).

<u>תשובה 5</u>

א. $N \to L\ ,\ H \to G\ ,\ (G \wedge L) \to M\ \ ,\ \neg M \big| = (\neg N) \vee (\neg H)$

ב. כדי להוכיח את תקפות המסקנה אפשר להשתמש בלוח אמת מקוצר שיהיה:

N	L	H	G	M	$N \to L$	$H \to G$	$(G \wedge L) \to M$	$\neg M$	$(\neg N) \vee (\neg H)$
T	T	T	T	F	T	T	F	-	-
T	T	T	F	F	T	F	-	-	-
T	F	T	T	F	F	-	-	-	
T	F	T	F	F	F	-	-		

ולכן במקרים אלה ההנחות הן שקר והמסקנה נובעת מן ההנחות.

נביא הוכחה אחרת, פשוטה יותר:

$\neg M$ אמת לכן M שקר, ומכיוון שמתקיים (אמת) $(G \wedge L) \to M$ הרי ש- $G \wedge L$ שקר, לכן לפחות אחד מבין G ו- L שקר.

- אם G שקר הרי ש- H שקר (כי מתקיים $H \to G$) ולכן $\neg H$ אמת ומתקיים $(\neg N) \vee (\neg H)$.
- אם L שקר הרי ש- N שקר (כי מתקיים $N \to L$), לכן $\neg N$ אמת ומתקיים $(\neg N) \vee (\neg H)$.

בכל מקרה – המסקנה תקפה.

<u>תשובה 6</u>

א. צ.ל. שמתקיים $A \vee B \to D,\, D \to C \vee P,\, P \to Q,\, \neg C \wedge \neg Q \Rightarrow_{\mathrm{T}} \neg A$

<u>הוכחה</u>:

(1)	$A \vee B \to D$	הנחה
(2)	$D \to C \vee P$	הנחה
(3)	$P \to Q$	הנחה

(4)	$\neg C \wedge \neg Q$	הנחה
(5)	$\neg Q$	מ-(4), לפי כלל היסק $\wedge E$
(6)	$\neg P$	מ-(3) ו-(5), לפי כלל היסק MT
(7)	$\neg C$	מ-(4), לפי כלל היסק $\wedge E$
(8)	$\neg C \wedge \neg P$	מ-(6) ו-(7), לפי כלל היסק $\wedge I$
(9)	$\neg(C \vee P)$	מ-(8), לפי כללי דה-מורגן
(10)	$\neg D$	מ-(2) ו-(9), לפי כלל היסק MT
(11)	$\neg(A \vee B)$	מ-(1) ו-(10), לפי כלל היסק MT
(12)	$\neg A \wedge \neg B$	מ-(11), לפי כללי דה-מורגן
(13)	$\neg A$	מ-(12), לפי כלל היסק $\wedge E$

ובכך הוכח הדרוש.

ב. 1) נוכיח שהפסוק $\varphi := \big((A \to B) \wedge (C \to B)\big) \to \big((A \vee C) \to B\big)$ הוא טאוטולוגיה.

הוכחה:

- <u>אם B אמת</u> הרי ש- $(A \vee C) \to B$ אמת ולכן מתקיים גם ש- φ הוא אמת.
- <u>אם B שקר</u>: נפריד למקרים,

- אם לפחות אחד מבין A, C אמת הרי שלפחות אחד מבין $A \to B$, $C \to B$ שקר ולכן $(A \to B) \wedge (C \to B)$ שקר ושוב, φ הוא אמת.

- אחרת, A וגם C שקר נקבל ש- $A \vee C$ שקר, לכן גם $(A \vee C) \to B$ אמת, ולכן שוב – φ אמת.

קיבלנו שהפסוק φ **תמיד** אמת, ולכן הוא טאוטולוגיה.

2) <u>הוכחה</u>

(1)	$D \to (A \vee C)$	הנחה
(2)	D	הנחה
(3)	$A \vee C$	מ-(1) ו-(2), לפי כלל היסק MP
(4)	$A \to B$	הנחה
(5)	$C \to B$	הנחה
(6)	$(A \to B) \wedge (C \to B)$	מ-(4) ו-(5), לפי כלל היסק $\wedge I$
(7)	$(A \vee C) \to B$	מ-(6), לפי טאוטולוגיית העזר שנוכיח בהמשך
(8)	B	מ-(3) ו-(7), לפי MP