א2005

שאלה 5

(א)

$$T(n) = T(\sqrt[4]{n}) + 1$$

מבצעים את החלפת המשתנים $n=2^m$; $m=\lg n$

מתקבלת נוסחת הנסיגה

$$T(2^m) = T(2^{m/4}) + 1$$

מגדירים $S(m) = T(2^m)$

ומתקבלת הנוסחא

$$S(m) = S(\tfrac{m}{4}) + 1$$

לפי שיטת האב (מקרה 2)

$a=1,\ b=4,$

$\log_b a = 0\ ;\quad f(m) = 1 = m^0$

$$S(m) = \Theta(\lg m)$$

וזה מוביל לתוצאה

$$T(n) = \Theta(\lg \lg n)$$

(ב)

$$T(n) = 4T(n-2) + 1$$

נשתמש בשיטת האיטרציה:

$$\begin{aligned} T(n) &= 4T(n-2)+1 = 4\cdot(4T(n-4)+1)+1 \\ &= 4^2 T(n-4) + 4 + 1 = 4^2\cdot(4T(n-6)+1)+4+1 \\ &= 4^3 T(n-6) + 4^2 + 4 + 1 \\ &= \dots \end{aligned}$$

בעזרת אינדוקציה מגיעים לנוסחא

$$\begin{aligned} T(n) &= 4^k\cdot T(n-2k) + 4^{k-1} + \dots + 4 + 1 \\ &= 4^k\cdot T(n-2k) + \frac{4^k-1}{3} \qquad (1\le k\le \lfloor \tfrac{n}{2}\rfloor ,k \text{ לכל}) \\ &= 2^{2k}\cdot T(n-2k) + \frac{2^{2k}-1}{3} \end{aligned}$$

אם n זוגי, ניקח $2k=n$:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2^n\cdot T(0) + \frac{2^n-1}{3} \\ &= 2^n\cdot [T(0)+\tfrac{1}{3}] - \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

אם n אי-זוגי, ניקח $2k=n-1$:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2^{n-1}\cdot T(1) + \frac{2^{n-1}-1}{3} \\ &= 2^n\cdot \tfrac{1}{2}\, [T(1)+\tfrac{1}{3}] - \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

בהנחה $T(0)\ge 0$, $T(1)\ge 0$, מתקבל (בשני המקרים): $T(n)=\Theta(2^n)$

א 2005

(ג)

$$T(n) = 3T(n/4) + 2$$

לפי שיטת האב (מקרה 1)

$a = 3, \; b = 4,$

$\log_b a = \log_4 3 \; ; \qquad f(n) = 2n^0$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_4 3})$$

(ד)

$$T(n) = 108 \cdot T(n/36) + (\sqrt{n})^3 \lg^2 n$$

לפי שיטת האב (מקרה 3)

$a = 108, \; b = 36,$

$\log_b a = \lg 108 / \lg 36 < 3/2 \; ; \qquad f(n) = n^{3/2} \lg^2 n$

נבדוק את תנאי הרגולריות:

$$\begin{aligned} a \cdot f(n/b) &= 108 \cdot (n/36)^{3/2} \lg^2 (n/36) \\ &= (108\, n^{3/2} / 216) \cdot (\lg n - \lg 36)^2 \\ &< \tfrac{1}{2}\, n^{3/2} \cdot \lg^2 n = c \cdot f(n) \end{aligned}$$

$(c < 1/2)$

הפתרון המתקבל הוא

$$T(n) = \Theta((\sqrt{n})^3 \lg^2 n)$$

(ה)

$$T(n) = 64\,T(n/4) + n^3 \lg n$$

לפי שיטת האב (מקרה 2 המורחב)

$a = 64, \; b = 4,$

$\log_b a = 3 \; ; \qquad f(n) = n^3 \lg n$

$$T(n) = \Theta(n^3 \lg^2 n)$$

מתקבל

(ו)

$$T(n) = 16\,T(n/2) + n^3 \lg^2 n$$

לפי שיטת האב (מקרה 1)

$a = 16, \; b = 2,$

$\log_b a = 4 \; ; \qquad f(n) = n^3 \lg^2 n$

מתקבל

$$T(n) = \Theta(n^4)$$