אלגוריתמים 2019א – מועד שני

הנחיות: ענו על 4 מתוך 5 שאלות. לכל שאלה 25 נקודות. לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה.
על שאלות שמסומנות בכוכב - יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה), ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).
חומר עזר: אסור. דף נוסחאות מצ"ב. בהצלחה!

<u>שאלה 1 – הרצת FFT</u> (25 נק').

נביט בפולינום $p(x)=2x^3+3x^2+4x+5$. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) במסגרת הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום. בדקו את תשובתכם ע"י <u>הצבה ישירה</u> של הערכים המתאימים בפולינום.

<u>*שאלה 2* – מסלולים מזעריים –צלעות שליליות ביעד</u> (25 נק').

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם מקור $s\in V$, יעד $s\neq t\in V$, ועם משקל שלם $w(e)$ לכל צלע $e\in E$. נתון כי בגרף אין מעגלים שליליים, וכי עבור צלעות שאינן נכנסות ליעד המשקל תמיד חיובי, כלומר $w(e)>0$. הציגו אלגוריתם למציאת מסלול בעל משקל מזערי מהמקור ליעד. לא יתקבל שום ניקוד על אלגוריתם עם זמן ריצה $\Theta(|E|\cdot|V|)$.

הגדרת האלגוריתם <u>לכל $v\in V$ כך ש-$(v,t)\in E$, הסר את (v,t) מהגרף. הרץ דייקסטרה מ-s. מצא v כך ש-$w(v,t)+dist(s,v)$ מינימאלי. החזר מסלול מ-s ל-v ו-(v,t).</u>

הוכחת נכונות <u>מכיון שאין מעגלים שליליים ולכל $e\neq(v,t)$, ($w(e)>0$), דייקסטרה מוצא את המסלול המזערי לכל $v\in V$, $t\neq v$, $s\neq t$. ולכן יש $v\in V$ כך שהמסלול מ-s ל-t הוא $s\xrightarrow{*}v\to t$ כאשר $s=v$ גם אפשרות. לכן אורך המסלול הוא סכום המרחק מ-s ל-v ומשקל (v,t) (כי אין מעגלים שליליים) ולכן המינימום מבין כל המסלולים האלו הוא המסלול המזערי מ-s ל-t</u>

$v\xrightarrow{*}s$ מייצג מסלול באורך כלשהו ≥ 0

יעילות האלגוריתם <u>מעבר על קשתות $O(m)$, דייקסטרה ([illegible]) $O(m+n\log n)$, מציאת מינימום $O(n)$</u>

סך הכל $\boxed{O(m+n\cdot\log n)}$

25

שאלון 468 87.58.1 M4

שאלה 3 – תכנון כפל מטריצות (25 נק').

כזכור, המכפלה $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ של סדרת מטריצות מוגדרת רק כשישנה התאמה בין מספרי השורות והעמודות: אם מסמנים ב-r_i את מספר השורות במטריצה A_i, וב-c_i את מספר העמודות שלה, אז חייב להתקיים התנאי $r_{i+1} = c_i$ לכל $1 \le i < n$. במקרה שכזה כל מכפלה $A_i \times A_{i+i}$ הינה מטריצה בת r_i שורות ו-c_{i+1} עמודות, והחישוב שלה (בהתאם להגדרת כפל מטריצות) ניתן לביצוע ע"י $\Theta(r_i \times c_i \times c_{i+1})$ פעולות אלמנטריות בלבד (של כפל/חיבור מספרים). כזכור, כפל מטריצות הוא גם אסוציאטיבי, כלומר, בהכפלה של סדרת מטריצות, הננו רשאים למקם את הסוגריים כרצוננו. למשל $(A_1 \times A_2) \times A_3 = A_1 \times (A_2 \times A_3)$.

(א) הציגו דוגמה של <u>שלוש</u> מטריצות, שבה מיקום מסוים של הסוגריים בחישוב המכפלה $A_1 \times A_2 \times A_3$ דורש פי אלף פעולות אלמנטריות מאשר המיקום האחר.

(ב) הציגו אלגוריתם תכנון דינאמי, שמקבל כקלט רשימה $(r_1, c_1), \ldots, (r_n, c_n)$ של מספרי השורות והעמודות בכל מטריצה, ומפיק כפלט מיקום אופטימלי של הסוגריים עבור ההכפלה $A_1 \times \ldots \times A_n$. (שימו לב שאיננו מבצעים עדיין את הכפלת המטריצות, אלא רק מנסים <u>לקבוע את מיקום הסוגריים</u>, שימזער את מספר הפעולות האלמנטריות בזמן ההכפלה).

שאלה 4 – בעיית הספיקות (25 נק').

נתונה נוסחת 3CNF, שבה כל אחד מהמשתנים $x_1, \ldots, x_n$ מופיע <u>בדיוק בשלוש</u> פסוקיות שונות, וכל פסוקית כוללת <u>בדיוק שלושה</u> משתנים שונים. הוכיחו כי הנוסחה ספיקה. הציגו עבור נוסחאות כאלו אלגוריתם למציאת השמה מספקת. הדרכה: העזרו במשפט **Hall**.

(<u>תזכורת</u>: נוסחת 3CNF היא נוסחה מהצורה $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$, כשלכל פסוקית הצורה $\varphi_i = (z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee z_{i,3})$, וכל $z_{i,j}$ הינו אחד מהליטרלים $x_1, \ldots, x_n, \neg x_1, \ldots, \neg x_n$. כך למשל $\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee \neg x_5)$ הינה נוסחת 3CNF. השמה הינה פונקציה שמתאימה לכל משתנה x_i ערך "אמת" T או "שקר" F. בהינתן השמה מסוימת, אזי הליטרל x_i מסופק אמ"מ ההשמה מקיימת $x_i \leftarrow T$, והליטרל $\neg x_i$ מסופק אמ"מ $x_i \leftarrow F$. פסוקית $\varphi_i = (z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee z_{i,3})$ מסופקת אמ"מ לפחות אחד מהליטרלים שבה $z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}$ מסופק. הנוסחא כולה $\varphi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$ מסופקת אמ"מ כל הפסוקיות $\varphi_1, .., \varphi_m$ מסופקות. הנוסחא φ נקראת ספיקה, אמ"מ לפחות אחת מבין 2^n ההשמות האפשריות מספקת אותה).

***שאלה 5* – קבוצה מנתקת מעגלים מזערית** (25 נק').

נתון גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$, שאיננו עץ, ונתונים משקלים שלמים וחיוביים $w(e)>0$ לכל הצלעות. קבוצת צלעות $F \subseteq E$ נקראת "מנתקת-מעגלים", אם לאחר הסרתה לא נותרים מעגלים בגרף, כלומר הגרף $G'=(V,E\setminus F)$ חסר-מעגלים. משקלה של קבוצת צלעות הינו סכום משקלי הצלעות בקבוצה $w(F)=\sum_{e\in F} w(e)$. הציגו אלגוריתם למציאת קבוצת צלעות מנתקת-מעגלים בעלת משקל מזערי. עליכם להיעזר בהדרכה שמופיעה להלן.

טענה מרכזית: אם F הינה קבוצה מנתקת-מעגלים מזערית אז $G'=(V,E\setminus F)$ עץ פורש מירבי

הוכחת הטענה המרכזית: G' עץ: I: חסר מעגלים - אחרת F אינה מנתקת מעגלים. II: קשיר אחרת ניתן להוסיף קשת בין שני רכיבי קשירות בלי ליצור מעגל ו F אינה מזערית.

מירבי: לכל עץ T, $E\setminus T$ היא קבוצה מנתקת מעגלים (כי בעץ אין מעגלים)

נניח בשלילה שקיים F' מזערי כך ש T_F העץ שנוצר אינו מירבי:

עץ קיים T_m מירבי כך ש $E\setminus T_m = F_m$ קבוצה מנתקת.

$F' = W(E)-W(T_F) > W(E)-W(T_m) = W(F_m)$ בסתירה לכך ש F' מזערי. לכן $T_F = G'$ עץ פורש מירבי. ($W(E)$ מייצג סכום משקלות של $e\in E$ ו $W(T)$ סכום משקלות בעץ)

אלגוריתם למציאת קבוצת צלעות מנתקת-מעגלים במשקל מזערי: נבנה גרף G' עם כל הקשתות והקודקודים של G, נשנה את כל המשקלות של הקשתות לכל $e\in E$, $w'(e)=\frac{1}{w(e)}$. נמצא עפ"מ ב G' (נגיד עם פרים) נחזיר את כל הקשתות שנמצאות ב G' אבל לא בעץ פורש מזערי.

זמן ריצה - בניית G' $\Theta(n+m)$ מציאת עפ"מ $O(m+n\log n)$ ~~$E\log V$~~ החזרת הקשתות $\Theta(m)$

$\boxed{\text{סך הכל } \Theta(m+n\log n)}$

בהצלחה!

נכונות: על פי טענה המרכזית, וכך ש $A<B$ אם"ם $\frac{1}{A}>\frac{1}{B}$ כל הקשתות חיוביות לכן $\frac{1}{A}$ חיובי

$$\sum_{i\in X} i > \sum_{j\in Y} j$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum_{i\in X}\frac{1}{i} < \sum_{j\in Y}\frac{1}{j}$$