

אנא קראו בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

### שאלה 1 (25 נקודות)

להלן טענות לגבי יחסים (רלציות) מעל הקבוצה  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

לכל טענה ציינו אם היא נכונה או לא.

הוכיחו את הטענות הנכונות, הפריכו ע"י דוגמא נגדית את אלה שאינן נכונות.

(4 נק') א. אם  $R$  רפלקסיבית אז  $R^2$  רפלקסיבית.

(4 נק') ב. אם  $R^2$  רפלקסיבית אז  $R$  רפלקסיבית.

(4 נק') ג. אם  $R$  סימטרית אז  $R^2$  סימטרית.

(4 נק') ד. אם  $R^2$  סימטרית אז  $R$  סימטרית.

(4 נק') ה. אם  $R$  טרנזיטיבית אז  $R^2$  טרנזיטיבית.

(5 נק') ו. אם  $R^2$  טרנזיטיבית אז  $R$  טרנזיטיבית.

### שאלה 2 (25 נקודות)

טענה:

אם  $k, m$  עוצמות גדולות מ-1 (סופיות או אינסופיות), אז  $k + m \leq k \cdot m$ .

הנה התחלה של הוכחה לטענה:

משיקולים כללים שהוזכרו בפרק 5 בתורת הקבוצות, תהי  $A$  קבוצה שעוצמתה  $k$ ,

ותהי  $B$  קבוצה זרה ל- $A$  (!), שעוצמתה  $m$ .

נבנה פונקציה  $f: A \cup B \rightarrow A \times B$ .

מהנתון על  $k, m$  נובע בפרט ש- $A, B$  אינן ריקות. יהי אפוא  $a_1 \in A$  ויהי  $b_1 \in B$ .

המשיכו את ההוכחה מנקודה זו (ולא בדרך אחרת).

אין צורך להעתיק את החלק שרשום כאן.

במהלך ההוכחה שימו לב לבעיה קטנה בחד-חד-ערכיות שעשויה להיווצר, ותנו לבעיה מענה ע"י

שיפוף קטן בפונקציה שאתם בונים. שימו לב שנתון כי  $k, m \geq 2$ . היעזרו בכך כדי לשפץ את

הפונקציה ולתקן את הבעיה.

### שאלה 3 (25 נקודות)

תהי  $A$  קבוצת המחרוזות באורך 5, הבנויות בעזרת האותיות  $a, b, c, d, e, f$  (במחרוזות באורך 5 כמובן לא יכולות להופיע כל 6 האותיות). למשל  $aaeef \in A$ . נגדיר יחס שקילות מעל  $A$ :

שתי מחרוזות ייקראו שקולות אם הן שוות, או נבדלות רק בסדר האותיות.

למשל  $aaeeb$  שקולה ל-  $aeaeab$ , אך אינה שקולה ל-  $aaaeb$ .  
 סעיפים ב, ג, ד עוסקים ביחס השקילות הזה. אינכם נדרשים להוכיח שזהו יחס שקילות.

(4 נק') א. כמה איברים יש ב-  $A$ ?

(7 נק') ב. כמה מחלקות שקילות יש? תנו תשובה סופית מספרית.

(7 נק') ג. כמה איברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת  $aaabb$ ? הוכיחו.

(7 נק') ד. מצאו מחלקת שקילות שיש בה בדיוק 60 איברים. רשמו איבר אחד מתוך המחלקה, אין צורך לרשום את כל אברי המחלקה. הוכיחו שגודל המחלקה שהבאתם הוא 60.

### שאלה 4 (25 נקודות)

מחו מספר פתרונות המשוואה  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$  בטבעיים,

כאשר  $x_1 \neq 5$ ,  $x_2 \neq 5$ ,  $x_3 \neq 8$ ,  $x_4 \neq 8$ ?

0 הוא מספר טבעי. יש להגיע לתשובה מספרית. הדרכה: הכלה והפרדה.

### שאלה 5 (25 נקודות)

תהי  $L$  שפה חלקית לשפת תחשיב הפרדיקטים, ובה סימנים אלה: קשרים לוגיים, סוגרים, סימני משתנים  $x_1, x_2, \dots$ , סימן פרדיקט דו-מקומי  $R$ , סימן פרדיקט דו-מקומי  $A_1^2$  המתפרש כרגיל כשוויון וסימני הכמתים  $\forall, \exists$ . אין סימני פונקציות או פרדיקטים נוספים ואין סימני קבועים אישיים.

רשמו חמישה פסוקים בשפה, כך שביחד הם מביעים את הטענה הבאה:

$R$  הוא יחס סדר חלקי מעל העולם, הוא אינו סדר מלא ואינו רלציית היחידה.

להזכירכם ולמנוע טעות: פרדיקט אינו יכול להיות ארגומנט של פרדיקט (בשפת תחשיב הפרדיקטים שהוגדרה בקורס, סימני פרדיקטים מקבלים כארגומנטים שמות עצם, ושמות עצם מתארים איברים בעולם).

**בהצלחה!**