

קורס: 20416 "תורת ההסתברות"

תאריך הבחינה: 18.7.2016 (סמסטר 2016 ב - מועד א 5 / 86)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי וספר הקורס בלבד.

מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובתיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפת: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

שאלה 1 (25 נקודות)

נתונה חפיסה של 52 קלפים.

הקלפים מ-4 צורות: לב אדום, יהלום אדום, עלה שחור ותלתן שחור.

מכל צורה יש 13 קלפים שונים.

בוחרים מהחפיסה באקראי 5 קלפים בזה אחר זה וללא החזרה.

- (6 נק') א. מהי ההסתברות שייבחרו קלפים בדיוק מ-3 צורות?
 (6 נק') ב. מהי ההסתברות שהקלפים הראשון, השלישי והחמישי שייבחרו יהיו כולם מאותה הצורה?
 (6 נק') ג. אם ידוע שנבחרו קלפים משני הצבעים: אדום ושחור, מהי ההסתברות שיש ביניהם בדיוק 4 קלפי לב אדום?
 (7 נק') ד. מהי ההסתברות שכל קלף שנבחר גדול מקודמו?
 הערה: אין חשיבות לצורה של הקלף;
 וסדר הקלפים הוא 2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K,A, כאשר '2' הוא הקלף הקטן ביותר.

שאלה 2 (25 נקודות)

יהיו X ו- Y משתנים מקריים רציפים בעלי פונקציית הצפיפות המשותפת שלהלן:

$$f_{X,Y}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, \quad x > 0, y > 0 \quad (\lambda > 0)$$

- (8 נק') א. מצא את פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי W , המוגדר על-ידי $W = X + Y$.
 רמז: אין צורך לחשב את הפונקציה. היא נובעת ישירות מתכונות פונקציית הצפיפות הנתונה.
 (8 נק') ב. מצא את פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי Z , המוגדר על-ידי $Z = \frac{X+Y}{2}$.
 (9 נק') ג. מצא את פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי S , המוגדר על-ידי $S = |X - Y|$.

שאלה 3 (25 נקודות)

יהיו X_1, X_2, \dots, X_n משתנים מקריים נורמליים סטנדרטיים בלתי-תלויים.

(8 נק') א. מהו a שמקיים את המשוואה $P\{X_1 + 2X_2 < 3X_3 + a\} = 0.953$?

(8 נק') ב. חשב את $P\{X_2 + X_3 > 0.517 \mid X_1 + X_3 = 0.5\}$.

(9 נק') ג. חשב קירוב להסתברות של המאורע $\left\{ \sum_{i=1}^n X_i^2 > n + \sqrt{\frac{n}{2}} \right\}$.

הערה: בכל סעיפי השאלה יש לחשב תוצאות מדויקות עד כמה שאפשר.

שאלה 4 (25 נקודות)

נתונים חמישה מאורעות במרחב מדגם $S: A_1, A_2, A_3, B, C$.
המאורעות A_1, A_2, A_3 הם מאורעות זרים ואיחודם שווה למרחב המדגם.
כמו כן, נתון כי –

$$P(A_1) = P(A_2) = 2P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap B) = 2P(A_2 \cap B) = 6P(A_3 \cap B)$$

$$P(C | A_2 \cap B) = \frac{1}{2}$$

$$P(C | A_3) = 0.6$$

$$P(B \cup C | A_1) = 0.95$$

$$P(B) = 0.6$$

$$P(C | A_2 \cap B^C) = \frac{8}{11}$$

$$P(B | C \cap A_3) = \frac{1}{6}$$

$$P(B \cap C | A_1) = 0.15$$

חשב את ההסתברויות שלהלן:

א. $P(C)$ ב. $P(A_1 \cap B^C \cap C^C)$ ג. $P(A_2 | B \cup C)$ ד. $P(B \cap C | A_3)$

שאלה 5 (25 נקודות)

יהי X משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר 0.01.
נגדיר את המשתנה המקרי Y על-ידי $Y = \min\{30, X\}$;
ונגדיר את המשתנה המקרי W על-ידי $W = \max\{30, X\}$.
(6 נק') א. מהי פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה המקרי Y ?
(7 נק') ב. מהי התוחלת של המשתנה המקרי W ?
(6 נק') ג. מהי פונקציית ההסתברות המשותפת של Y ו- W ?
(6 נק') ד. חשב את ההסתברות של המאורע $\{W = Y + 15\}$.

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] \quad \text{נוסחת האינטרפולציה:}$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326