

קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"
תאריך הבחינה: 12.2.2009 (סמסטר א' 2009 - מועד 1א/82)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפים: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

שאלה 1 (25 נקודות)

מורה מעוניין ש-12 ילדים יבצעו משימה כלשהי.

לשם כך, הוא מחלק את 12 ילדי הקבוצה, שהם 7 בנים ו-5 בנות, לארבע שלישיות.

על כל שלישיה הוא מטיל לבצע את המשימה באחד מהימים ראשון עד רביעי, כך שבכל יום בדיוק אחת מן השלישיות מבצעת את המשימה, ובסך-הכל כל השלישיות מבצעות אותה.

(6 נק') א. כמה אפשרויות חלוקה ושיבוץ שונות יש למורה?

(6 נק') ב. בכמה מאפשרויות החלוקה והשיבוץ ייווצרו שתי שלישיות של בנים?

(6 נק') ג. בכמה מאפשרויות החלוקה והשיבוץ אין אף שלישיה של בנות?

(7 נק') ד. כל שלישיה מבצעת את המשימה בהצלחה בהסתברות 0.9.

בהנחה שאין תלות בין השלישיות, מהי ההסתברות שבדיוק שלישיה אחת תיכשל בביצוע המשימה?

שאלה 2 (25 נקודות)

יהי N משתנה מקרי אחיד בדיד בין 1 ל-10.

כלומר, הערכים האפשריים של המשתנה המקרי N הם 1, 2, ..., 10, וכל אחד מהם מתקבל בהסתברות 0.1.

נתונה קבוצה של N אנשים.

נותנים לכל אחד מ- N האנשים קופסת גפרורים.

מספר הגפרורים בכל קופסה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 20.

אין תלות בין קופסאות גפרורים שונות ואין תלות בין קופסאות הגפרורים למספר האנשים בקבוצה.

(9 נק') א. מהי ההסתברות שאף אחד מ- N האנשים בקבוצה לא יקבל קופסת גפרורים שיש בה בדיוק 20 גפרורים.

(8 נק') ב. חשב את התוחלת של מספר הגפרורים הכולל שמקבלים N אנשי הקבוצה.

(8 נק') ג. חשב את השונות של מספר הגפרורים הכולל שמקבלים N אנשי הקבוצה.

שאלה 3 (25 נקודות)

מפזרים באקראי n כדורים שונים ב- n תאים ממוספרים. נניח כי $n > 2$.

יהיו X = מספר הכדורים בתא 1 ;

Y = מספר הכדורים בתא 2 ;

W = מספר התאים הריקים.

(6 נק') א. האם המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-תלויים? נמק בפירוט את תשובתך.

(6 נק') ב. האם המשתנים המקריים X ו- W בלתי-תלויים? נמק בפירוט את תשובתך.

(7 נק') ג. רשום באופן מדויק את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .

(6 נק') ד. חשב את $P\{XY=0\}$.

שאלה 4 (25 נקודות)

הוטרנרית העירונית ערכה סקר בקרב תושבי העיר, וקיבלה את התוצאות הבאות:

- ל- 45% מהתושבים יש כלב/ים או חתול/ים;
- ל- 30% מהתושבים יש לפחות כלב אחד;
- ל- 25% מהתושבים יש לפחות חתול אחד;
- ל- 6% מהתושבים יש לפחות שני חתולים;
- אין תושבים שיש להם יותר מחתול אחד וגם כלב/ים;
- ל- 9% מהתושבים יש לפחות שני כלבים;
- ול- 2% מהתושבים יש בדיוק חתול אחד ולפחות שני כלבים.

כל בעל-חיים (כלב או חתול) רשום על-שמו של תושב אחד בלבד.

בסעיפים הבאים, כשכתוב בעל-חיים הכוונה היא לכלב או לחתול.

(18 נק') א. בוחרים באופן מקרי תושב של העיר –

1. מהי ההסתברות שלתושב הנבחר יש בעלי-חיים משני הסוגים?
2. מהי ההסתברות שלתושב הנבחר יש בדיוק כלב אחד ואין לו חתולים?
3. אם לתושב יש בדיוק בעל-חיים אחד, מהי ההסתברות שזהו חתול?

(7 נק') ב. נניח שבעיר יש 1,000 תושבים.

בוחרים מתוכם מדגם מקרי של 50 תושבים.

מהן התוחלת והשונות של מספר התושבים במדגם שאין להם בכלל בעלי-חיים?

שאלה 5 (25 נקודות)

(13 נק') א. הוכח שהתוחלת של התפלגות מעריכית עם הפרמטר λ ($\lambda > 0$) היא $\frac{1}{\lambda}$.

(6 נק') ב. בכל תת-סעיף, מצא דוגמא לפונקציית צפיפות של התפלגות רציפה, שהתוחלת המחושבת לפיה שווה ל –

(1) 0.5 (2) 0 (3) ∞

נמק את בחירתך בכל תת-סעיף.

(6 נק') ג. בכל תת-סעיף, מצא דוגמא לפונקציית צפיפות של התפלגות רציפה, שהשונות המחושבת לפיה שווה ל –

(1) -1 (2) 1 (3) $\frac{1}{12}$

נמק את בחירתך בכל תת-סעיף.

בסעיפים ב ו-ג, בכל אחד מהמקרים, רשום באופן מדויק את פונקציית הצפיפות המוצעת.

אם לא קיימת פונקציית צפיפות כנדרש – נמק מדוע.

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(x)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
x	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(x)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
x	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}, \quad i=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t + 1 - p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1} \cdot p, \quad i=1,2,\dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t / (1 - (1-p)e^t), \quad t < -\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i!, \quad i=0,1,\dots$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1} (1-p)^{i-r} \cdot p^r, \quad i=r, r+1, \dots$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$(pe^t / (1 - (1-p)e^t))^r, \quad t < -\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i} / \binom{N}{n}, \quad i=0,1,\dots,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N} (1 - \frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n}, \quad i=m+1, m+2, \dots, m+n$	$m + (1+n)/2$	$(n^2 - 1)/12$	
אחידה	$1/(b-a), \quad a \leq x \leq b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt} - e^{at}) / (tb - ta), \quad t \neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda - t), \quad t < \lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1, \dots, n_r} \cdot p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}, \quad \sum n_i = n, \sum p_i = 1$			

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \quad \text{נוסחת הבינום}$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \quad \text{כלל ההכלה וההפרדה}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{הסתברות מותנית}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \quad \text{נוסחת הכפל}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i) \quad , \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S \quad \text{נוסחת ההסתברות השלמה}$$

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)} \quad , \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S \quad \text{נוסחת בייס}$$

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx \quad \text{תוחלת}$$

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx \quad \text{תוחלת של פונקציה של מ"מ}$$

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2 \quad \text{שונות}$$

$$E[aX + b] = aE[X] + b \quad \text{תוחלת ושונות של פונקציה לינארית}$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ .

$$P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\} \quad , \quad s, t \geq 0 \quad \text{תכונת חוסר-הזכרון}$$

$$E[X | Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y) = \int x f_{X|Y}(x|y) dx \quad \text{תוחלת מותנית}$$

$$\text{Var}(X | Y = y) = E[X^2 | Y = y] - (E[X | Y = y])^2 \Sigma \quad \text{שונות מותנית}$$

$$E[X] = E[E[X | Y]] = \sum_y E[X | Y = y] p_Y(y) \quad \text{נוסחת התוחלת המותנית}$$

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X | Y)] + \text{Var}(E[X | Y]) \quad \text{נוסחת השונות המותנית}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] \quad \text{תוחלת של סכום משתנים מקריים}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y] \quad \text{שונות משותפת}$$

$$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j) \quad \text{שונות של סכום משתנים מקריים}$$

$$\rho(X, Y) = \text{Cov}(X, Y) / \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)} \quad \text{מקדם המתאם הלינארי}$$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at) \quad \text{פונקציה יוצרת מומנטים}$$

$$M_{X_1+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t) \quad \text{כאשר } X_i \text{ מ"מ ב"ת מתקיים:}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X] \quad \text{תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי}$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\text{Var}(X) + (E[X])^2 \text{Var}(N) \quad (\text{כאשר } X_i \text{ מ"מ ב"ת ש"ה})$$

$$M_Y(t) = E\left[(M_X(t))^N\right]$$

$$P\{X \geq a\} \leq E[X]/a \quad , \quad a > 0 \quad , \quad \text{מ"מ אי-שלילי} \quad \text{אי-שוויון מרקוב}$$

$$P\{|X - \mu| \geq a\} \leq \sigma^2/a^2 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty \quad \text{אי-שוויון צ'בישב}$$

$$P\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)/\sqrt{n\sigma^2} \leq a\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a) \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty \quad , \quad X_i \text{ מ"מ ב"ת וש"ה} \quad \text{משפט הגבול המרכזי}$$

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A) + P(B)]$.
- סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר p הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני.
- סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X + Y = n$, כאשר X ו- Y מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1 < x < 1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \neq -1 \quad ; \quad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \frac{1}{a \ln b} b^{ax} \quad ; \quad \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים: