קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"

תאריך הבחינה: 5.7.2012 (סמסטר ב 2012 - מועד א2 / 84)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפים: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית
ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

שאלה 1 (25 נקודות)

כביש מסוים נבדק ונמצא שיש בו ליקויים הדורשים תיקון.

מספר הליקויים שנמצאו בכביש הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 20.

בחברה, המטפלת באחזקת הכביש, החליטו לערוך תיקונים בליקויים שנמצאו בכביש.

הוחלט שכל ליקוי (ללא תלות באחרים) יתוקן בהסתברות ⅔.

(6 נק') א. חשב את ההסתברות שהחברה תתקן בדיוק 15 ליקויים בכביש.

(7 נק') ב. אם ידוע שהחברה תיקנה בדיוק 15 ליקויים בכביש,
מהי ההסתברות שנמצאו בכביש בדיוק 25 ליקויים?

(12 נק') ג. חשב את מקדם המתאם בין מספר הליקויים **שנמצאו בכביש**
לבין מספר הליקויים **שלא יתוקנו בו**.

שאלה 2 (25 נקודות)

(13 נק') א. יהיו X ו- Y משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים,
שלכל אחד מהם הפרמטר p $(0 < p < 1)$.

הוכח שלמשתנה המקרי $X+Y$ יש התפלגות בינומית-שלילית עם הפרמטרים $(2, p)$.

(12 נק') ב. נתון מטבע שההסתברות לקבל בו H היא 0.6.
מטילים את המטבע שוב ושוב, עד שמקבלים H בפעם העשירית.

1. מהי ההסתברות שהמטבע יוטל בדיוק 20 פעמים?
2. ידוע שבהטלה הראשונה ובהטלה הרביעית התקבל H.
מהי ההסתברות שהמטבע הוטל בדיוק 20 פעמים?

שאלה 3 (25 נקודות)

מבצעים 10 ניסויים בלתי-תלויים עם הסתברות p $(0 < p < 1)$ להצלחה בכל אחד מהניסויים.

יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר ההצלחות שמתקבלות ב-10 הניסויים.

כמו כן, נסמן ב- A את המאורע שהתקבלה הצלחה בניסוי הראשון ;

וב- B את המאורע שהתקבלה לפחות הצלחה אחת ב-10 הניסויים.

(6 נק') א. האם $P(A) > P(B)$, $P(A) = P(B)$ או $P(A) < P(B)$?
נמק את בחירתך.

(6 נק') ב. חשב את $P\{X=1 \mid A\}$.

(6 נק') ג. חשב את $P\{X=1 \mid B\}$.

(7 נק') ד. חשב את $E[X \mid B]$.

שאלה 4 (25 נקודות)

בגדר בעלת 3 קטעים מותקנים 4 גלאי-פריצה בלתי-תלויים, כמתואר באיור שלהלן :

כל אחד מארבעת הגלאים תקין (ופועל) בהסתברות 0.8.
את הגדר אפשר לפרוץ רק בקטעים, הנמצאים בין שני גלאי-פריצה סמוכים ומקולקלים.

(8 נק') א. פורץ מגיע לגדר, ומנסה לפרוץ אותה.
מהי ההסתברות שיצליח?

כעת, נניח שנתונה גדר דומה במבנה שלה, אך בעלת ***n*** גלאים בלתי-תלויים (ו- $n-1$ קטעים).

ב. יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הקטעים בגדר שאפשר לפרוץ דרכם.

(8 נק') 1. חשב את $E[X]$.

(9 נק') 2. חשב את $\mathrm{Var}(X)$.

שאלה 5 (25 נקודות)

למשקל (בגרמים) של מעטפה מקרית, הנשלחת ממוסד מסוים, יש תוחלת 25 **וסטיית-תקן** 10.
אין תלות בין המשקלים של מעטפות שונות.

ברשותך 30 מעטפות מקריות, שנשלחו ממוסד זה.

(12 נק') א. נסמן ב-X את המשקל הכולל (בגרמים) של 30 המעטפות שברשותך.

1. חשב חסם עליון להסתברות ש-X גדול מ- 1,100 גרם, באמצעות אי-שוויון מרקוב.
2. חשב חסם עליון להסתברות ש- X גדול מ- 1,100 גרם, באמצעות אי-שוויון צ'בישב הדו-צדדי.

(13 נק') ב. נניח שהתפלגות המשקל של כל מעטפה (בגרמים) היא **נורמלית** עם התוחלת וסטיית-התקן הנתונות בתחילת השאלה.

חשב **קירוב** להסתברות שלפחות 9 מהמעטפות שברשותך תשקולנה בין 23 גרם לבין 31 גרם כל אחת.

הערה: ערוך חישובים <u>מדויקים</u> עד כמה שאפשר!

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z)=P\{Z\le z\}=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt \quad ; \quad \Phi(-z)=1-\Phi(z) \quad ; \quad Z\sim N(0,1)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \quad , \quad i = 0,1,...,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t + 1 - p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1} \cdot p \quad , \quad i = 1,2,...$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t / (1-(1-p)e^t)$ $t < -\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i! \quad , \quad i = 0,1,...$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r} \cdot p^r \quad , \quad i = r, r+1,...$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t / (1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t < -\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i} \Big/ \binom{N}{n} \quad , \quad i = 0,1,...,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N}(1 - \frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i = m+1, m+2, ..., m+n$	$m + (1+n)/2$	$(n^2 - 1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a \le x \le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt} - e^{at})/(tb - ta)\ , t \neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \ -\infty < x < \infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2 / 2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda - t) \quad , \quad t < \lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,...,n_r} \cdot p_1^{n_1} \cdot ... \cdot p_r^{n_r} \quad , \ \sum n_i = n\ , \sum p_i = 1$			

נוסחת הבינום $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$

כלל ההכלה וההפרדה $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$

הסתברות מותנית $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

נוסחת הכפל $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot ... \cdot P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$

נוסחת ההסתברות השלמה $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i) \quad ,$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס $P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j) P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)} \quad ,$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת $E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx$

תוחלת של פונקציה של מ"מ $E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx$

שונות $\mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית $E[aX + b] = aE[X] + b$

$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון $P\{X > s + t \mid X > t\} = P\{X > s\} \quad , \quad s,t \ge 0$

תוחלת מותנית $E[X \mid Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x \mid y) = \int x f_{X|Y}(x \mid y) dx$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X \mid Y=y) = E[X^2 \mid Y=y]-(E[X \mid Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] = E[E[X \mid Y]] = \sum_y E[X \mid Y=y]p_Y(y)$

(טענה מתרגיל ת26, עמוד 430) $E[X\cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X \mid Y]]$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY]-E[X]E[Y]$

$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)\big/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(at)$

כאשר X_i מ״מ ב״ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t)\cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X]$

(כאשר X_i מ״מ ב״ת ש״ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X) + (E[X])^2\mathrm{Var}(N)$

$M_Y(t) = E\left[\left(M_X(t)\right)^N\right]$

אי-שוויון מרקוב $P\{X \ge a\} \le E[X]/a \quad , \quad a>0$, X מ״מ אי-שלילי

אי-שוויון צ׳בישב $P\{|X-\mu| \ge a\} \le \sigma^2/a^2 \quad , \quad a>0 \; , \; \mu,\sigma^2<\infty$

משפט הגבול המרכזי $P\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right)\Big/\sqrt{n\sigma^2} \le a \right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(a) \quad , \quad \mu,\sigma^2<\infty$, X_i מ״מ ב״ת וש״ה

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב״ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ״מ בינומיים (גיאומטריים) ב״ת עם אותו הפרמטר p הוא מ״מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ״מ פואסוניים ב״ת הוא מ״מ פואסוני.
- סכום של מ״מ נורמליים ב״ת הוא מ״מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ״מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב״ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1<x<1$

$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \ne -1 \quad ; \quad \int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b)$

$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax}dx = \frac{1}{a\ln b}b^{ax} \quad ;$

נוסחת האינטגרציה בחלקים :

$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$

$\log_n a = \log_m a / \log_m n \quad ; \quad \log_n(a^b) = b\cdot\log_n a \quad ; \quad \log_n(ab) = \log_n a + \log_n b$