פתרונות לממ"ן 12 - 2013ב - 20425

1. א. נסמן ב-A, B, C ו-D את המאורעות שתושב העיר מוכן למחזור עיתונים, בקבוקי משקה משפחתיים, מיכלי משקה אישיים וסוללות, בהתאמה. מהנתונים (שמסומנים בכוכבית *) מקבלים:

* $D \subseteq C \quad , \quad C \subseteq B \quad \Rightarrow \quad D \subseteq C \subseteq B$
* $P(A) = 0.59$
* $P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A \cap D) = 0.1$ [כי מתקיים $D \subseteq C \subseteq B$]
* $P(A \mid D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0.1}{P(D)} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad P(D) = 0.2$

לכן: $P(A^C \cap D) = P(D) - P(A \cap D) = 0.2 - 0.1 = 0.1$

* $P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A \cup B) = 0.8$

$$\Rightarrow \quad P(A^C \cap B^C) = P(A^C \cap B^C \cap C^C \cap D^C) = 1 - 0.8 = 0.2$$

לכן: $P(A^C \cap B) = P(A \cup B) - P(A) = 0.8 - 0.59 = 0.21$

* $P(A \cap B^C \cap C^C \cap D^C \mid A \cup B \cup C \cup D) = \dfrac{P(A \cap B^C \cap C^C \cap D^C)}{\underbrace{P(A \cup B \cup C \cup D)}_{=0.8}} = 0.25$

ומכאן: $P\{A \text{ רק}\} = P(A \cap B^C \cap C^C \cap D^C) = P(A \cap B^C) = 0.8 \cdot 0.25 = 0.2$

* באותו אופן: $P\{B \text{ רק}\} = P(A^C \cap B \cap C^C \cap D^C) = P(A^C \cap B \cap C^C) = 0.8 \cdot \tfrac{1}{8} = 0.1$

ולכן:

$$P(A^C \cap C \cap D^C) = P(A^C \cap B) - P(A^C \cap D) - P(A^C \cap B \cap C^C) = 0.21 - 0.1 - 0.1 = 0.01$$

* $P\{\text{מוכנים למחזר בדיוק 3 חומרים}\} =$

$$= P(A \cap B \cap C \cap D^C) + P(A \cap B \cap C^C \cap D) + P(A \cap B^C \cap C \cap D) + P(A^C \cap B \cap C \cap D)$$

$$= P(A \cap B \cap C \cap D^C) + 0 + 0 + P(A^C \cap D)$$ [כי מתקיים $D \subseteq C \subseteq B$]

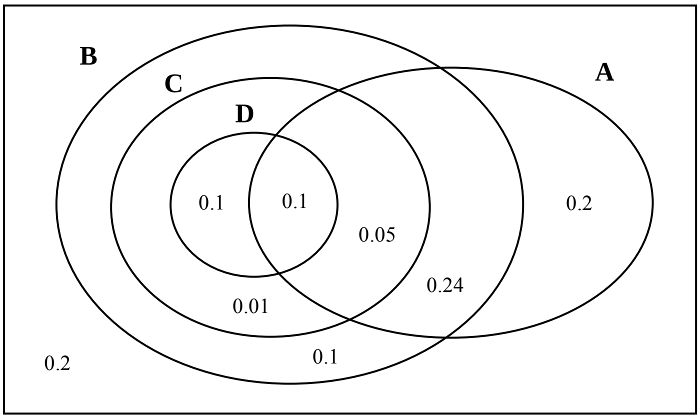
לכן: $P\{D^C \mid \text{מוכנים למחזר בדיוק 3 חומרים}\} = \dfrac{P(A \cap B \cap C \cap D^C)}{P(A \cap B \cap C \cap D^C) + \underbrace{P(A^C \cap D)}_{=0.1}} = \dfrac{1}{3}$

ומכאן כי: $P(A \cap B \cap C \cap D^C) = P(A \cap C \cap D^C) = 0.05$

וגם: $P(A \cap B \cap C^C) = P(A) - P(A \cap B^C) - P(A \cap C \cap D^C) - (A \cap D)$

$$= 0.59 - 0.2 - 0.05 - 0.1 = 0.24$$

נצייר דיאגרמת ון מתאימה לבעיה:



ב. **הסתברות המאורע נתונה...** $P(A\cup B\cup C\cup D)=1-P(A^C\cap B^C\cap C^C\cap D^C)=1-0.2=0.8$

ג. $P(C^C)=0.2+0.1+0.24+0.2=0.74$

ד. נתחיל בחישוב ההסתברות של המאורע המַתְנֶה, שקיים לפחות חומר אחד שהתושב אינו מוכן למחזר:

$$P(A^C\cup B^C\cup C^C\cup D^C)=P(A\cap B\cap C\cap D)^C=P(A\cap D)^C=1-0.1=0.9$$

מנתוני הבעיה עולה שבהינתן המאורע שלעיל, התושב מוכן למחזר בדיוק אחד מהחומרים. מהדיאגרמה עולה שמצב כזה ייתכן בשני מקרים בלבד: הוא מוכן למחזר רק עיתונים או שהוא מוכן למחזר רק בקבוקי משקה משפחתיים.

לפיכך, ההסתברות המותנית המבוקשת היא:

$$\frac{P(A\cap B^C\cap C^C\cap D^C)+P(A^C\cap B\cap C^C\cap D^C)}{P(A\cap D)^C}=\frac{0.2+0.1}{0.9}=\frac{1}{3}$$

ה. $$P(D\mid A\cap B)=\frac{P(A\cap B\cap D)}{P(A\cap B)}=\frac{P(A\cap D)}{P(A\cap B)}=\frac{0.1}{0.39}=0.2564$$

2. במרחב המדגם של הניסוי המתואר בבעיה יש 6^5 תוצאות שוות-הסתברות, שכל אחת מהן מתקבלת בהסתברות $\frac{1}{6^5}$.

א. נסמן ב- A את המאורע שמתקבלות בדיוק ארבע תוצאות זוגיות (ותוצאה אחת אי-זוגית):

$$P(A)=\frac{\binom{5}{4}\cdot3^4\cdot3}{6^5}=\binom{5}{4}\cdot0.5^5=0.15625$$

ב. נסמן ב- A את המאורע שהתקבלו בדיוק ארבע תוצאות זוגיות וב- B את המאורע שהתקבלו בדיוק שתי תוצאות 6. חיתוך המאורעות A ו- B כולל את כל המקרים שבהם התקבלו שני 6, שתי תוצאות זוגיות שאינן 6 ותוצאה אחת אי-זוגית. לפיכך:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot2^2\cdot\cancel{3}}{\binom{5}{4}\cdot3^4\cdot\cancel{3}}=\frac{\cancel{5!}}{2!\cancel{3!}}\cdot\frac{\cancel{3!}}{2!\cancel{1!}}\cdot\frac{4!\cancel{1!}}{\cancel{5!}}\cdot\frac{2^2}{3^4}=\boxed{\binom{4}{2}\cdot\frac{2^2}{3^4}}=\frac{8}{27}=0.2963$$

שימו לב, שאפשר להגיע ישירות לביטוי המצומצם ביותר בחישוב שלעיל (זה המוקף במסגרת), וזאת מכיוון שהמאורעות A ו- B מתייחסים אך ורק לארבע התוצאות הזוגיות שידוע שהתקבלו. לכן, אפשר לומר שמתוך 3^4 האפשרויות ל-4 תוצאות זוגיות, שתיים צריכות להיות שוות ל- 6 והשתיים האחרות לתוצאות זוגיות שאינן 6. לפיכך, בוחרים מי משתי התוצאות תהיה 6 ואחר-כך בוחרים מה תהיינה שתי התוצאות הזוגיות האחרות.

ג. המאורע <u>המשלים</u> למאורע הנתון בסעיף זה, הוא המאורע שבו לא מתקבל אף 4 או שמתקבל בדיוק 4 אחד. לכן, ההסתברות המבוקשת היא:

$$1-\frac{5^5+\binom{5}{1}\cdot 5^4}{6^5}=1-\frac{6,250}{7,776}=\frac{1,526}{7,776}=0.1962$$

ד. נסמן ב- C את המאורע שהתקבלו לפחות שני 4 וב- D את המאורע שהתקבלו לפחות ארבעה 4.

נשים לב, כי המאורע C מכיל את המאורע D, ולכן חיתוך המאורעות שווה למאורע D.

כעת:

$$P(D)=\frac{\binom{5}{4}\cdot 5+1}{6^5}=\frac{26}{7,776}=0.00344$$

ומכאן:

$$P(D|C)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}=\frac{P(D)}{P(C)}=\frac{26}{7,776-6,250}=\frac{26}{1,526}=0.017$$

3. נסמן ב- A_i את המאורע שמתג i סגור, לכל $i=1,2,3,4,5$.

נתוני הבעיה הם:

$$P(A_1)=P(A_3)=P(A_5)=0.9$$

$$P(A_2\,|\,A_1)=P(A_4\,|\,A_3)=0.9 \qquad\Rightarrow\qquad P(A_1\cap A_2)=P(A_2\,|\,A_1)P(A_1)=0.9\cdot 0.9=0.81$$

$$P(A_2\,|\,A_1^C)=P(A_4\,|\,A_3^C)=0.3 \qquad\Rightarrow\qquad P(A_1^C\cap A_2)=P(A_2\,|\,A_1^C)P(A_1^C)=0.3\cdot 0.1=0.03$$

א.

$$P\{\text{עובר זרם מ-C ל-D}\}=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_1^C\cap A_2)$$
$$=P(A_1)+P(A_2\,|\,A_1^C)P(A_1^C)=0.9+0.3\cdot 0.1=0.93$$

או:

$$P\{\text{עובר זרם מ-C ל-D}\}=P(A_1\cup A_2)=1-P(A_1^C\cap A_2^C)$$
$$=1-P(A_2^C\,|\,A_1^C)P(A_1^C)=1-0.7\cdot 0.1=0.93$$

ב. נמצא תחילה את ההסתברות שמתג 2 סגור:

$$P(A_2)=P(A_1\cap A_2)+P(A_1^C\cap A_2)=0.81+0.03=0.84 \qquad\Rightarrow\qquad P(A_2^C)=0.16$$

כעת, נמצא את הסתברות המאורע $A_1\cap A_2^C$:

$$P(A_1\cap A_2^C)=P(A_1)-P(A_1\cap A_2)=0.9-0.81=0.09$$

ומכאן נקבל כי:

$$P\{\text{עובר זרם מ-C ל-D}\,|\,A_2^C\}=P(A_1\cup A_2\,|\,A_2^C)=\frac{P(A_1\cap A_2^C)}{P(A_2^C)}=\frac{0.09}{0.16}=0.5625$$

ג. לפי נתוני הבעיה, ההסתברות שיעבור זרם מ-C ל-D שווה להסתברות שיעבור זרם מ-E ל-F.

נסמן ב- A_{CD} וב- A_{EF} את המאורעות שעובר זרם מ-C ל-D ומ-E ל-F, בהתאמה, ונקבל:

$$\begin{aligned} P\{\text{עובר זרם מ-B ל-A}\} &= P(A_{\text{CD}} \cup (A_5 \cap A_{\text{EF}})) \\ &= P(A_{\text{CD}}) + P(A_5 \cap A_{\text{EF}}) - P(A_{\text{CD}} \cap A_5 \cap A_{\text{EF}}) \\ &= P(A_{\text{CD}}) + P(A_5)P(A_{\text{EF}}) - P(A_{\text{CD}})P(A_5)P(A_{\text{EF}}) \\ &= 0.93 + 0.9 \cdot 0.93 - 0.9 \cdot 0.93^2 = 0.98859 \end{aligned}$$

4. לפי נתוני הבעיה:

$$P(A) = p$$

$$P(B_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad , \qquad k = 0,1,2,\ldots,n$$

$$P(A \cap B_k) = p \cdot \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \qquad , \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

נבדוק באלו תנאים מתקיים תנאי אי-התלות:

$$P(A)P(B_k) \stackrel{?}{=} P(A \cap B_k)$$

$$\Leftarrow \qquad p \cdot \binom{n}{k} \cancel{p^k (1-p)^{n-k}} \stackrel{?}{=} \binom{n-1}{k-1} \cancel{p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$\Leftarrow \qquad p = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k}{n}$$

כלומר, לכל $k = 1,2,\ldots,n$, המאורעות A ו- B_k בלתי-תלויים זה בזה אם ורק אם מתקיים $p = \frac{k}{n}$.

5. יהי A המאורע שהקלף ה-15 שהילד משיג הוא מסוג שטרם יש לו כמותו.

לחישוב ההסתברות של A, נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה, כאשר אנו מתנים בסוג הקלף ה-15 שהילד השיג. לכל $i = 1,2,\ldots,10$, יהי B_i המאורע שהקלף ה-15 הוא מסוג i .

בחישוב לפי נוסחת ההסתברות השלמה, נפריד בין המחובר הראשון המתייחס לקלף מסוג 1 שמתקבל בהסתברות $\frac{1}{3}$, למחוברים שאחריו, המתייחסים לסוגי קלפים המתקבלים בהסתברות $\frac{2}{27}$. מתקיים:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{10} P(A \mid B_i)P(B_i) = \left(1-\tfrac{1}{3}\right)^{14} \cdot \tfrac{1}{3} + \sum_{i=2}^{10} \left(1-\tfrac{2}{27}\right)^{14} \cdot \tfrac{2}{27} = \tfrac{1}{3}\left(1-\tfrac{1}{3}\right)^{14} + \tfrac{2}{3}\left(1-\tfrac{2}{27}\right)^{14} = 0.2281$$