פתרונות לממ"ח 01 - 2014א - 20425

1. כאשר מסדרים 22 אותיות שונות בשורה, מספר התוצאות השונות במרחב המדגם הוא $22!$.

אם האות א' מופיעה במקום הראשון ברצף ההקלדה והאות ת' במקום האחרון ברצף, נותר לסדר ביניהן את שאר 20 האותיות. לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{20!}{22!}=\frac{1}{21\cdot 22}$

2. נתייחס למילה 'מאורע' כאל "אות" אחת ונסדר אותה בשורה יחד עם $22-5=17$ האותיות האחרות.

באופן כזה נקבל את ההסתברות: $\frac{(17+1)!}{22!}=\frac{18!}{22!}$

3. באופן כללי, האותיות א', ב' ו- ג' יכולות לתפוס כל 3 מקומות ברצף 22 האותיות. אולם, כדי שאותיות אלו תופענה עד למקום העשירי, הן צריכות לתפוס 3 מ- 10 המקומות הראשונים.

לפיכך, ההסתברות היא: $\frac{\binom{10}{3}}{\binom{22}{3}}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{22\cdot 21\cdot 20}=\frac{6}{77}=0.0779$

4. כדי לחשב את ההסתברות המבוקשת נבחן את הסידור הפנימי של 4 האותיות – ד', ה', צ' ו-ק' – ברצף ההקלדה. ארבע האותיות הללו יכולות להופיע בתוך הרצף ב- $4!=24$ סידורים פנימיים שונים, אך רק ב- $2\cdot 2=4$ מהסידורים האלו, האותיות ד' ו-ה' מופיעות לפני האותיות צ' ו-ק'. מכיוון שכל רצפי-ההקלדה האפשריים מתקבלים בהסתברויות שוות, ההסתברות המבוקשת היא: $4/24=1/6$

5. נסמן ב- A_1 את המאורע שהמילה "נמלי" מופיעה ברצף האותיות;
ב- A_2 את המאורע שהמילה "ספה" מופיעה ברצף האותיות;
וב- A_3 את המאורע שהמילה "רשת" מופיעה ברצף האותיות.

נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה, כדי לחשב את ההסתברות שלפחות אחד משלושת המאורעות, המוגדרים לעיל, מתרחש. נשים לב, שלשלוש המילים הללו אין אותיות משותפות, דבר המקל על חישוב הסתברויות החיתוכים. נקבל:

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-P(A_2\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_3)$$
$$=3\cdot\frac{20!}{22!}-3\cdot\frac{18!}{22!}+\frac{16!}{22!}=0.006476$$

6. כדי שהמאורע הנתון יתרחש, יש לבחור 2 מתוך 4 החרוזים הצהובים ו- 5 מתוך 16 החרוזים האחרים.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{\binom{4}{2}\binom{16}{5}}{\binom{20}{7}}=\frac{546}{1{,}615}$

7. לחישוב ההסתברות נתייחס למקומות שהחרוזים הצהובים "תופסים" בשורה אקראית של כל 20 החרוזים. נוכל להניח, שהחרוזים שנמצאים ב-7 המקומות הראשונים בשורה מתארים את תוצאת הניסוי המתואר בבעיה. כעת, באופן כללי, החרוזים הצהובים תופסים 4 מתוך 20 המקומות בשורה. אך כדי שהמאורע הנתון יתרחש, הם צריכים לתפוס את מקומות 1 ו- 7, ועוד שני מקומות בין מקום 8 למקום 20 (כלומר, 2 מקומות מתוך 13).

לפיכך, נקבל שההסתברות היא: $\frac{\binom{13}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{26}{1,615} = 0.0161$

8. ראשית, יש במרחב המדגם 30 בחירות, ולכל בחירה 20 יש אפשרויות שונות (כמספר החרוזים).

כעת, נמנה את מספר התוצאות במרחב המדגם, שבהן המאורע הנתון מתרחש. תחילה, נקבע באלו מהבחירות ייבחרו חרוזים צהובים ($\binom{30}{5}$ אפשרויות). אחר-כך, נמנה את מספר אפשרויות הבחירה של החרוזים (4 אפשרויות לכל בחירה של חרוז צהוב ו- 16 אפשרויות לכל בחירה של חרוז לא-צהוב).

ומכאן, נקבל: $\frac{\binom{30}{5} \cdot 4^5 \cdot 16^{25}}{20^{30}} = \binom{30}{5} \cdot 0.2^5 \cdot 0.8^{25}$

9. הפתרון דומה לפתרון השאלה הקודמת, אך כעת ידוע שבבחירות 1 ו- 30 נבחרים חרוזים צהובים, ויש לקבוע רק 3 בחירות נוספות מתוך 28 הבחירות הנותרות, שבהן ייבחרו חרוזים צהובים.

לפיכך, מקבלים: $\frac{4^2 \cdot \overbrace{\binom{28}{3} \cdot 4^3 \cdot 16^{25}}}{20^{30}} = \binom{28}{3} \cdot 0.2^5 \cdot 0.8^{25}$

10. ראשית, יש 2^{25} תוצאות אפשריות שונות במרחב המדגם.

שנית, מספר התוצאות שיש בהן בדיוק 15 משבצות שעליהן הספרה 1, הוא כמספר אפשרויות הבחירה של 15 משבצות בלוח (שעליהן תהיה הספרה 1). לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{\binom{25}{15}}{2^{25}} = \binom{25}{15} \cdot 0.5^{25}$

11. נתחיל מחישוב ההסתברות שאין בלוח אף שורה שסכום ספרותיה הוא 3:

בכל שורה, יש $\binom{5}{3}$ אפשרויות שסכום הדסקיות יהיה 3 (כמספר האפשרויות למקם במשבצותיה שלוש פעמים את הספרה 1). לכן, יש $2^5 - \binom{5}{3} = 22$ אפשרויות, שסכום הדסקיות בשורה מסוימת יהיה שונה מ-3. ומכאן, שיש 22^5 אפשרויות, שבכל אחת מ-5 השורות בלוח סכום הדסקיות יהיה שונה מ-3.

כעת, נחשב את ההסתברות שיש בלוח לפחות שורה אחת שסכום ספרותיה שווה ל-3.

זוהי ההסתברות המשלימה להסתברות שחושבה בתחילת הפתרון. דהיינו: $1 - \frac{22^5}{2^{25}} = 1 - \frac{11^5}{2^{20}}$

12. בכל השורות מתקבל בדיוק אותו סכום של ספרות, רק אם בכל שורה יש 2 דסקיות עם הספרה 1 (ו- 3 דסקיות עם הספרה 0). לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{\binom{5}{2}^5}{\binom{25}{10}} = \frac{10^5}{3,268,760} = 0.0306$

13. במקרה זה, נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה לחישוב ההסתברות.

נסמן ב- A_i את המאורע שבשורה i סכום הספרות הוא בדיוק 3, לכל $i = 1,2,...,5$, ונחשב את ההסתברות של איחוד המאורעות A_i.

מתקיים: $P(A_1) = \frac{\binom{5}{3}\binom{20}{7}}{\binom{25}{10}} = \frac{775,200}{3,268,760} = \frac{60}{253} = 0.23715$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{\binom{5}{3}^2\binom{15}{4}}{\binom{25}{10}} = \frac{136{,}500}{3{,}268{,}760} = \frac{6{,}825}{163{,}438} = 0.041759$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{\binom{5}{3}^3\binom{10}{1}}{\binom{25}{10}} = \frac{10{,}000}{3{,}268{,}760} = \frac{250}{81{,}719} = 0.003059$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = 0$$

ומכאן:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right) = \binom{5}{1}\cdot\frac{60}{253} - \binom{5}{2}\cdot\frac{6{,}825}{163{,}438} + \binom{5}{3}\cdot\frac{250}{81{,}719} = 0.7988$$

14. נבחר תחילה שורה שעל כל משבצותיה תהיה הספרה 1 (5 אפשרויות); אחר-כך, נמקם את חמשת ה-1-ים הנותרים ב-4 השורות הנותרות ($\binom{20}{5}$ אפשרויות). אולם, יש לשים לב, שבדרך זו אנו מונים פעמיים את כל האפשרויות שבהן נוצרות שתי שורות מלאות ב-1 (מכיוון שכל שורה מלאה ב-1, יכולה להיות זו שנבחרה ראשונה). לכן, עלינו להפחית פעם אחת את $\binom{5}{2} = 10$ האפשרויות שיש בהן 2 שורות מלאות ב-1.

מכאן מקבלים את ההסתברות:

$$\frac{5\cdot\binom{20}{5} - \binom{5}{2}}{\binom{25}{10}} = \frac{77{,}510}{3{,}268{,}760}$$

15. מספר אפשרויות הפיזור של הכדורים הוא 10^{12}.

16. נמנה את מספר הפיזורים שיש בהם בדיוק 9 תאים מלאים. נתחיל בבחירת 9 התאים שיהיו בהם כדורים, ואחר-כך, נמנה את מספר האפשרויות לפיזור 12 הכדורים ב- 9 התאים שנבחרו, כך שלא יהיה ביניהם אף תא ריק. יש 10 אפשרויות לבחירת התא הריק ויש 3 דרכים לפיזור 12 הכדורים השונים ב- 9 התאים המלאים, כך שלא יהיה אף תא ריק.

שלוש הדרכים הן:

1) בין 9 התאים המלאים יש תא אחד עם 4 כדורים ובשאר התאים כדור אחד בלבד.
נבחר קבוצה של 4 כדורים (שיהיו באותו תא) ואז נפזר את 9 "קבוצות הכדורים" בתאים. נקבל שמספר הפיזורים במקרה זה הוא: $\binom{12}{4}\cdot 9!$

2) בין 9 התאים המלאים יש תא אחד עם 3 כדורים, תא אחד עם 2 כדורים ובשאר התאים כדור אחד.
נבחר 3 כדורים (שיהיו באותו תא) ו- 2 כדורים נוספים (שגם הם יהיו באותו תא) ואז נפזר את "קבוצות הכדורים" בתאים. נקבל שמספר הפיזורים במקרה זה הוא: $\binom{12}{3}\binom{9}{2}\cdot 9!$

3) בין 9 התאים המלאים יש שלושה תאים עם 2 כדורים ובשאר התאים כדור אחד.
נבחר שלושה זוגות של כדורים (כך שכל זוג יהיה באותו תא) ואז נפזר את הכדורים בתאים. נקבל שמספר הפיזורים במקרה זה הוא: $\frac{\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}}{3!}\cdot 9!$
(שימו לב שאין חשיבות לסדר בחירת הזוגות, ולכן מחלקים ב- !3).

לסיכום, מספר האפשרויות לפזר את 12 הכדורים השונים ב- 9 תאים, כך שלא יהיה אף תא ריק, הוא :

$$10\cdot\left[\binom{12}{4}+\binom{12}{3}\binom{9}{2}+\frac{\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}}{3!}\right]\cdot 9! = 10!\cdot 22{,}275$$

הערה: אילו הכדורים היו זהים, יכולנו למנות את מספר הפיזורים האפשריים ב- 9 התאים המלאים כך : היינו בוחרים תא אחד שיהיה ריק, מניחים שיש כדור אחד בכל אחד מ- 9 התאים האחרים (המלאים), ואז מפזרים באקראי את שאר 3 הכדורים הזהים ב- 9 תאים אלו.

כאשר הכדורים שונים זה מזה, אי-אפשר לנקוט בשיטת המנייה הזאת.

17. מספר אפשרויות הפיזור, שבהן מספר הכדורים הכולל בתאים 1-5 שווה למספר הכדורים הכולל בתאים 6-10 הוא : $\binom{12}{6}\cdot 5^6\cdot 5^6=\binom{12}{6}\cdot 5^{12}$

(כי מחלקים את הכדורים לשתי קבוצות בגודל 6 : קבוצה ראשונה לתאים 1-5 וקבוצה שנייה לתאים 6-10, ואז מפזרים כל 6 כדורים בחמישה התאים שאליהם הם מיועדים).

לכן, מספר הפיזורים שבהם מספר הכדורים הכולל בכל אחת מחמישיות התאים הנתונות אינו שווה הוא :

$$10^{12}-\binom{12}{6}\cdot 5^{12}$$

כעת, בגלל הסימטריה בין שתי חמישיות התאים, מספר הפיזורים, שבהם מספר הכדורים הכולל בתאים 1-5 גדול ממספר הכדורים הכולל בתאים 6-10, הוא : $\frac{1}{2}\cdot\left[10^{12}-\binom{12}{6}\cdot 5^{12}\right]$

נחלק את התוצאה האחרונה ב- 10^{12}, ונקבל את ההסתברות המבוקשת : $\frac{1}{2}-\binom{12}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{13}$

18. מספר אפשרויות הפיזור, שבהן תא 1 ריק הוא : 9^{12}

מספר הפיזורים שבהם יש בתא 1 בדיוק כדור אחד הוא : $12\cdot 9^{11}$

מספר הפיזורים שבהם יש בתא 1 בדיוק שני כדורים הוא : $\binom{12}{2}\cdot 9^{10}$

ומכאן, שההסתברות שבתא 1 יהיו לפחות שלושה כדורים היא :

$$1-\frac{9^{12}+12\cdot 9^{11}+\binom{12}{2}\cdot 9^{10}}{10^{12}}=1-\frac{255\cdot 9^{10}}{10^{12}}$$

19. ראשית, נבחר את 4 התאים שיהיו בהם כדורים. אחר-כך, נבחר שלישיות של כדורים שתהיינה בכל אחד מהתאים שנבחרו. באופן כזה נקבל : $\binom{10}{4}\cdot\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}=\binom{10}{4}\cdot\frac{12!}{(3!)^4}$

20. כאשר הכדורים זהים, אין צורך לבחור את הכדורים המסוימים שיהיו בכל אחד מהתאים, אלא רק לקבוע את כמויות הכדורים שתהיינה בכל תא ותא. כעת, מכיוון שאנו מעוניינים שמספר הכדורים בכל תא יהיה זוגי, נפזר בתאים רק מחצית מהכדורים, ואחר-כך "נכפיל" את מספר הכדורים שהתקבל בכל אחד מהתאים (באמצעות המחצית השנייה של הכדורים), כדי לקבל כמויות זוגיות של כדורים בכל תא. כלומר, בשלב ראשון נפזר 6 כדורים זהים ב- 10 תאים ($\binom{6+9}{6}=\binom{15}{6}$ אפשרויות), ובשלב שני את 6 הכדורים הנותרים (אפשרות 1). מכאן נקבל שיש בסך-הכל $\binom{15}{6}$ אפשריות פיזור מתאימות.