ממ"ן 13 – פתרון שאלה 5

א' נסמן ב- $b_0, b_1, \ldots, b_n$ את הסדרה הממוינת של המספרים $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

נגדיר $d_i = b_i - b_{i-1}$ $(1 \le i \le n)$ ונתבונן בסדרת ההפרשים $< d_1, d_2, \ldots, d_n >$.

הביטוי $\frac{M-m}{n}$ הוא הממוצע של איברי סדרת ההפרשים (כלומר, זהו ההפרש הממוצע בין האיברים בסדרה הממוינת). בכל קבוצת איברים חייב להיות איבר שקטן מהממוצע או שווה לו, ולכן קיים i כך ש- $d_i \le \frac{M-m}{n}$. מכאן נובעת הטענה.

ב' הרעיון הכללי הוא לחלק את סדרת המספרים סביב החציון, ולהמשיך לחפש את שני האיברים (באופן רקורסיבי) באחד משני החצאים. התת-סדרה שבה נמשיך את החיפוש היא זו שבה ההפרש הממוצע בין האיברים הממוינים הוא קטן יותר. ההפרש הממוצע בתת-סדרה זו קטן יותר מההפרש הממוצע בסדרה המקורית, ולכן, על-פי סעיף א', קיימים בה שני איברים שההפרש ביניהם קטן יותר מ- $\frac{M-m}{n}$.

ממשיכים באותו אופן עד שמגיעים לתת-סדרה בגודל 2. שני האיברים בתת-סדרה זו הם האיברים המבוקשים.

הערות:

1. החציון שמוצאים בכל שלב יכול להיות אחד משני האיברים המבוקשים, ולכן צריך להכליל אותו בכל אחד משני החצאים כדי שהוא יישאר צמוד לשני השכנים שלו.
2. כמו בסעיף א', ההפרש הממוצע בין האיברים הממוינים בכל תת-סדרה שווה להפרש בין המקסימום למינימום חלקי מספר האיברים פחות אחד.

נשים לב שאין צורך לחשב בכל שלב את המינימום והמקסימום של שני החצאים:
המינימום של החצי השמאלי והמקסימום של החצי הימני ידועים מהשלב הקודם;
המקסימום של החצי השמאלי והמינימום של החצי הימני ידועים גם כן – זהו החציון.

זמן הריצה: $T(n) = T(\frac{n}{2}) + \Theta(n) = \Theta(n)$