

קורס: 20416 "תורת ההסתברות"

תאריך הבחינה: 25.8.2014 (סמסטר 2014 ב - מועד ב3 / 92)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי וספר הקורס בלבד.

מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפת: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

שאלה 1 (25 נקודות)

יהי X משתנה מקרי אחיד (רציף) על הקטע $(0,1)$,

ויהי Y משתנה מקרי, המוגדר על-ידי $Y = -\ln X$.

(8 נק') א. הוכח כי ההתפלגות של המשתנה המקרי Y היא מעריכית עם הפרמטר 1.

יהיו X_1, X_2, \dots, X_n משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכולם התפלגות אחידה (רציפה) על הקטע $(0,1)$,

ונגדיר את המשתנה המקרי Y_n על-ידי $Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$.

(8 נק') ב. מהן התוחלת והשונות של המשתנה המקרי Y_n ?

(9 נק') ג. הוכח בעזרת משפט הגבול המרכזי כי $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{Y_n \leq e^{-n+t\sqrt{n}}\} = \Phi(t)$, לכל t ממשי.

שאלה 2 (25 נקודות)

חמישה ילדים משתתפים בהצגה.

כל אחד מהילדים הביא לחזרה הראשונה של ההצגה כובע ותיק שבהם ישתמשו בהצגה.

בסוף החזרה הראשונה נאספו כל הפריטים (כובעים ותיקים), שהובאו על-ידי הילדים,

ובחזרה השנייה הם חולקו לילדים באקראי: לכל ילד כובע אחד ותיק אחד.

(8 נק') א. מהי ההסתברות שבחזרה השנייה יוחאי יקבל לפחות פריט אחד שאינו שלו?

(8 נק') ב. אם בחזרה השנייה יוחאי קיבל לפחות פריט אחד שאינו שלו,

מהי ההסתברות שבחזרה זו אהוד קיבל לפחות פריט אחד של יוחאי?

(9 נק') ג. מהי ההסתברות שבחזרה השנייה אף אחד מהילדים לא יקבל את שני הפריטים שהביא?

(ייתכן שילד יקבל בדיוק אחד מהפריטים שהביא, אך לא את שניהם).

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי X משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 10 ו-0.5;

ויהי Y משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 30 ו-0.5.

המשתנים המקריים X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה.

מציירים מלבן שרוחבו X ס"מ ואורכו Y ס"מ.

(6 נק') א. חשב את ההסתברות שהיקף המלבן, דהיינו $2(X+Y)$, שווה ל-38 ס"מ.

(7 נק') ב. נתון שהיקף המלבן הוא 38 ס"מ.

מהי השונות של רוחבו?

(6 נק') ג. חשב את תוחלת שטח המלבן, דהיינו את $E[XY]$.

(6 נק') ד. חשב את שונות שטח המלבן.

שאלה 4 (25 נקודות)

N אנשים נכנסים לחנות במשך יום אחד.

האדם ה- i שניכנס לחנות, קונה בה מוצרים בסכום שהתפלגותו $100X_i$, לכל $i = 1, \dots, N$.

נניח כי N הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 50;

כי X_i הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1, לכל $i = 1, \dots, N$;

וכי אין תלות בין ה- X_i ים, ובינם לבין N .

(8 נק') א. חשב את תוחלת סכום הכסף הכולל, שבו נרכשים מוצרים בחנות במשך יום אחד.

(8 נק') ב. חשב את שונות סכום הכסף הכולל, שבו נרכשים מוצרים בחנות במשך יום אחד.

(9 נק') ג. חשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של סכום הכסף הכולל, שבו נרכשים מוצרים בחנות במשך יום אחד.

שאלה 5 (25 נקודות)

דפנה מגיעה לביתה בזמן אקראי X , שהתפלגותו אחידה (רציפה) בין 18:00 ל-19:00.

תמר, שותפתה לדירה, מגיעה בזמן אקראי Y , שהתפלגותו אחידה (רציפה) בין X ל-19:00.

(8 נק') א. מצא את $f_{X,Y}(x, y)$ ואת $f_Y(y)$.

(8 נק') ב. חשב את התוחלת ואת השונות של Y .

(9 נק') ג. חשב את $P\{Y - X \geq 1/4\}$.

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] \quad \text{נוסחת האינטרפולציה:}$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326