הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל הפקולטה למדעי המחשב

אלגוריתמים 1 (234247) – סמסטר אביב 2005

<u>תרגיל בית 3</u>

מתרגל אחראי על התרגיל: יאיר קורן, שעת קבלה: יום ב' 30 :14: 30-15, yair_k@cs.

תאריך חלוקה: יום ראשון 17/4/05.

תאריך הגשה: יום רביעי 4/5/05, שעה 00 :12 <u>בצהריים</u>.

הערות:

- יש להגיש את התרגיל בזוגות.
- שאלות על התרגיל נא להפנות למתרגל האחראי על התרגיל.
- נא לוודא שהפתרון המוגש קריא. פתרונות לא-קריאים לא ייבדקו!
- נא לצרף לפתרון את דף השער המופיע באתר הקורס.
- יש להוכיח כל טענה שלא נלמדה בהרצאה או בתרגול.
- כל אלגוריתם יש לתאר תחילה בקצרה (מה הרעיון מאחוריו) ואחר כך בפירוט (תיאור מילולי, או פסאודו-קוד).
- יש להוכיח נכונות ולנתח סיבוכיות של כל אלגוריתם.
- לא כל השאלות יבדקו.

<u>שאלה 1</u>

יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון וקשיר עם פונקצית משקל על הקשתות $w:E\rightarrow\mathbb{R}$. יהיו T ו-T' שני עצים פורשים מינימום שונים של G. הראו כי קיימת סדרה של עצים פורשים מינימום $T=T_1,T_2,...,T_k=T'$ כך שלכל $i=1,2,...,k-1$ מתקיים כי $|T_i\cap T_{i+1}|=|V|-2$ (כלומר מספר הקשתות המשותף ל-T_i ול-T_{i+1} הוא $|V|-2$).

<u>שאלה 2</u>

תהא $P=\{p_1,p_2,...,p_n\}$ קבוצה של נקודות במישור. הראו כי בעץ פורש מינימום של P אין צמתים שדרגתם גדולה מ-6.

הערה: עפ"מ של P הוא עפ"מ של הגרף שצמתיו הם נקודות P ובין כל שתי נקודות p_i,p_j יש קשת במשקל $dist(p_i,p_j)$ - המרחק (האוקלידי) בין p_i ל-p_j.

<u>שאלה 3</u>

נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$ עם פונקצית משקל על הקשתות $w:E\rightarrow\mathbb{R}$ ונתונה קשת $e=(a,b)$. הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(V+E)$ המכריע האם קיים עץ פורש מינימום של G המכיל את e. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

<u>שאלה 4</u>

תהא $X = x_1, x_2, ..., x_n$ סדרה של n מספרים ממשיים, כך ש- $n \geq (k-1)^2 + 1$ עבור k טבעי כלשהו.

הראו כי X מכילה תת-סדרה מונוטונית (לא עולה או לא יורדת) שאורכה לפחות k.

הדרכה: היעזרו באלגוריתם החמדן הבא הממיין את אברי X לתאים $C_1, C_2, ...$ באופן הבא: יהא x_i האיבר הבא (לפי הסדר) ב- X. עבור על התאים $C_1, C_2, ...$ לפי הסדר. נסמן ב- x_ℓ את האיבר שבראש התא הנוכחי C_j. אם $x_\ell \leq x_i$ הוסף את x_i לראש התא C_j. אחרת, המשך לתא C_{j+1}.

<u>שאלה 5</u>

בהינתן גרף לא-מכוון $G = (V, E)$,

- **שידוך** (matching) הוא קבוצה של קשתות $M \subseteq E$ כך שאין שתי קשתות ב- M בעלות צומת קצה משותף.
- שידוך $M \subseteq E$ נקרא **שידוך מקסימלי** (maximal matching) אם לכל קשת $e \in E \setminus M$ הקבוצה $M \cup \{e\}$ אינה שידוך.
- שידוך $M \subseteq E$ נקרא **שידוך מקסימום** (maximum matching) אם לכל שידוך אחר M' מתקיים $|M| \geq |M'|$.

א. הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(V+E)$ שבהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$ מוצא שידוך מקסימלי ב- G. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

ב. יהא M^* שידוך מקסימום בגרף לא מכוון $G = (V, E)$, ויהא M' שידוך מקסימלי ב- G. הוכיחו כי $|M^*| \leq 2|M'|$, והראו כי לכל מספר טבעי n (גדול כרצוננו) קיים גרף עבורו קיימים שידוך מקסימלי בגודל n ושידוך מקסימום בגודל $2n$.

ג. הציעו אלגוריתם בסיבוכיות ליניארית למציאת שידוך מקסימום **<u>בעץ</u>**. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

<u>שאלה 6</u>

נתונה מכונה M ועליה יש לשבץ n משימות $1, 2, ..., n$. לכל אחת מהמשימות $1, 2, ..., n$ נתון זמן ביצוע $p_1, p_2, ..., p_n$ וכן משקל חיובי ממש $w_1, w_2, ..., w_n$. בכל רגע נתון לא ניתן לשבץ יותר ממשימה אחת על M, וכאשר משבצים משימה מסוימת חייבים לסיים את ביצועה לפני שמשבצים משימה אחרת. כמו כן, ניתן לשבץ כל משימה החל מזמן אפס. נסמן ב- C_j^S את זמן סיום ביצוע משימה j על M לפי שיבוץ S. הציעו אלגוריתם המוצא שיבוץ S אשר מביא למינימום את $\sum_{j=1}^{n} w_j C_j^S$. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.