תשובה 1

א. נבדוק כיצד בנויה סדרה באורך n המקיימת את הנדרש.

נתבונן באיבר האחרון של הסדרה:

* אם הוא אי-זוגי (4 אפשרויות), אז קטע הסדרה הקודם לו הוא **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-1$ (a_{n-1} אפשרויות).
* אם הוא זוגי (4 אפשרויות) אז לפניו בא מספר אי-זוגי (4 אפשרויות), ולפניו **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-2$ (a_{n-2} אפשרויות).

קיבלנו: $a_n = 4a_{n-1} + 16a_{n-2}$.

תנאי התחלה:

$a_0 = 1$ (הסדרה הריקה מקיימת את התנאים בשאלה זו! נוח להיעזר ב- a_0 לסעיף ב),

$a_1 = 8$,

$a_2 = 8^2 - 4^2 = 48$ (כל הזוגות פחות זוגות של מספרים זוגיים),

לבדיקה, מיחס הנסיגה: $a_2 = 4a_1 + 16a_0 = 4 \cdot 8 + 16 = 48$.

ב. המשוואה האפיינית: $\lambda^2 - 4\lambda - 16 = 0$. פתרונותיה: $2 \pm 2\sqrt{5}$.

לפיכך $a_n = A \cdot (2+2\sqrt{5})^n + B \cdot (2-2\sqrt{5})^n$.

בהצבת תנאי ההתחלה נקבל לאחר קצת סידור: $A + B = 1$, $(A+B) + \sqrt{5}(A-B) = 4$.

נציב את המשוואה הראשונה בשנייה: $(A-B) = 3/\sqrt{5} = 3\sqrt{5}/5$.

נחבר ונחסר משוואה זו מהמשוואה $A + B = 1$ ונקבל:

$$A = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \quad , \quad B = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} .$$

כלומר

$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \cdot (2+2\sqrt{5})^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \cdot (2-2\sqrt{5})^n$$

אם רוצים, אפשר לרשום זאת גם כך:

$$a_n = \left((1+\frac{3}{\sqrt{5}}) \cdot (1+\sqrt{5})^n + (1-\frac{3}{\sqrt{5}}) \cdot (1-\sqrt{5})^n \right) \cdot 2^{n-1}$$

רצוי מאד להציב ולבדוק ערכים אחדים של n !

נציג עוד דרך לפתרון הבעיה. השיטה הבאה מועילה במקרה שאיננו מצליחים לגלות יחס נסיגה עבור הסדרה הנתונה, אך ניתן למצוא מערכת יחסי נסיגה משולבים:

נסמן ב- b_n את מספר הסדרות באורך n המקיימות את התנאי שבשאלה ומסתיימות במספר זוגי. נסמן ב- c_n את מספר הסדרות באורך n המקיימות את התנאי שבשאלה ומסתיימות במספר אי-זוגי. מתנאי הבעיה נקבל את מערכת יחסי הנסיגה המשולבים:

$(i)\quad a_n = b_n + c_n$

$(ii)\quad b_{n+1} = 4c_n$

$(iii)\quad c_{n+1} = 4c_n + 4b_n$

אם נרשום את משוואה (ii) בצורה $b_n = 4c_{n-1}$, נוכל להציב אותה במשוואה (iii). נקבל:

$$(*)\quad c_{n+1} = 4c_n + 4\cdot 4c_{n-1}$$

זהו יחס נסיגה ליניארי עבור c_n. המשוואה האפיינית שלו: $\lambda^2 - 4\lambda - 16 = 0$

פותרים את המשוואה האפיינית כמו קודם, ומכאן בעזרת תנאי ההתחלה מוצאים את הביטוי עבור c_n. **יש לשים לב שערכי ההתחלה כעת הם אלה של** c, **לא אלה של** a !

אחרי שמצאנו ביטוי מפורש עבור c_n, נציב אותו במשוואה (ii) ונקבל ביטוי מפורש עבור b_n.

נציב את שני הביטויים במשוואה (i) ונקבל את הפתרון עבור a_n.

תרגיל מומלץ: לבצע את התהליך הזה ולהשוות עם התוצאה שקיבלנו בדרך הקודמת.

ראו גם החוברת אוסף תרגילים פתורים, קבוצה 6 שאלה 1.

הערה: המשוואה שקיבלנו עבור c_n היא אותה המשוואה שקיבלנו בדרך הקודמת עבור a_n.

זה בפירוש לא חייב לקרות: למרות שקיים קשר בין המשוואות שנקבל בתיאורים רקורסיביים שונים של בעיה, **המשוואות בהחלט לא חייבות להיות זהות!**

מי שלמד אלגברה ליניארית מוזמן לחשוב על הנושא בהקשר של צירופים ליניאריים במרחב הסדרות. למי שלמד או ילמד משוואות דיפרנציאליות - הנושא דומה מאד לתיאור מרחב הפתרונות של מערכת משוואות דיפרנציאליות ליניאריות.

הנה דוגמא פשוטה (אין קשר לשאלה שלנו) שבה נקבל משוואות שונות לגמרי:

$a_n = 2^n + 3^n \qquad b_n = 5^n + 7^n \qquad c_n = 2^n - 5^n \qquad d_n = 3^n - 7^n$

אז $a_n = b_n + c_n + d_n$ אבל אין כל קשר בין המשוואה האפיינית של a_n לבין זו של b_n.

(הסיבה לשוני היא שהמשוואה עבור a_n **אינה שקולה למערכת המשוואות** עבור שלושת האחרים + התנאי $a_n = b_n + c_n + d_n$. לכן "מרחבי הפתרונות" שונים).

תשובה 2

בחישוב כל מקדם ניעזר בנוסחה (*ii*) לפיתוח מכפלה, שהופיעה בסוף הממ"ן ובמקדמים הקודמים שכבר חישבנו.

$$1 = c_0 = a_0 b_0 = 1 \cdot b_0$$

לכן $b_0 = 1$. כעת,

$$0 = c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1 \cdot b_1 + 3 \cdot 1$$

נחלץ ונקבל $b_1 = -3$. נחזור ונציב:

$$0 = c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 1 \cdot b_2 + 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 1$$

נחלץ ונקבל $b_2 = 7$. נחזור ונציב:

$$0 = c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_2 = 1 \cdot b_3 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1$$

נחלץ ונקבל $b_3 = -13$.

תשובה 3

א. לפי הדיון בעמ' 124 - 127 בספר, הפונקציה היוצרת היא

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)^2 (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^2$$

a_n הוא המקדם של x^n בפיתוח פונקציה זו.

ב. מסעיף א', בעזרת סכום טור הנדסי סופי וסכום טור הנדסי אינסופי נקבל:

$$f(x) = \left(\frac{1 - x^4}{1 - x}\right)^2 \left(\frac{1}{1 - x}\right)^2 = (1 - x^4)^2 \frac{1}{(1 - x)^4} = (1 - 2x^4 + x^8) \frac{1}{(1 - x)^4}$$

לפי נוסחה (*iii*) שהופיעה בממ"ן (עמ' 11), $\frac{1}{(1 - x)^4} = \sum_{i=0}^{\infty} D(4, i)\, x^i$.

מכאן ע"י קיבוץ איברים הנותנים מעלה n (נוסחה (*ii*) בממ"ן. השווה גם השאלה הקודמת), המקדם של x^n ב- $f(x)$ הוא

$$a_n = D(4, n) - 2D(4, n - 4) + D(4, n - 8) = \binom{n + 3}{3} - 2\binom{n - 1}{3} + \binom{n - 5}{3}$$

אם $n < 5$ הביטוי הימני ביותר באגף ימין הוא 0 (מקדמים בינומיים חריגים - ר' עמ' 30) .
בדומה, אם $n - 1 < 3$ הביטוי האמצעי באגף ימין מתאפס.
נקבל כך את המקרים $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 10$, שלא קשה לוודא את נכונותם מתנאי השאלה, אך הם אינם מהוים בדיקה טובה לביטוי בשלמותו. מצד שני, אם נניח $n \geq 5$ ונפתח את הביטוי, לאחר פיתוח וקיבוץ איברים מתקבל הביטוי הפשוט: $a_n = 16n - 32$ ($n \geq 5$)
תרגיל מומלץ - לבצע את החישוב הזה. האם מישהו רואה דרך קצרה להגיע ישר לתוצאה זו ?

תשובה 4

א. המקדם של x^{2m} בפיתוח $(1+x)^n$ הוא, לפי נוסחת הבינום, $c_{2m} = \binom{n}{2m}$.

את אגף שמאל של הזהות הנתונה בשאלה נראה כמכפלה של שני גורמים: $(1-x^2)^n \cdot \frac{1}{(1-x)^n}$

יהי b_i המקדם של x^i בפיתוח $\frac{1}{(1-x)^n}$. מנוסחה (*iii*) בממ״ן , $b_i = D(n,i)$.

נפתח גם: $(1-x^2)^n = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n}{i}(x^2)^i = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n}{i}x^{2i}$.

נסמן ב- a_i את המקדם של x^i בביטוי זה.

מכיוון שמופיעות רק חזקות זוגיות של x, כל המקדמים בעלי אינדקס אי-זוגי מתאפסים:

$a_{2i+1} = 0$ לכל i טבעי. אנו רואים גם ש- $a_{2i} = (-1)^i\binom{n}{i}$.

שימו לב שזהו a_{2i} ולא a_i , למרות שבמקדם הבינומי ובחזקה של (-1) מופיע i ולא $2i$.

כעת ניעזר בנוסחה (*ii*) שבסוף הממ״ן למציאת המקדמים בכפל פונקציות יוצרות:

$$c_{2m} = \sum_{i=0}^{2m} a_i b_{2m-i}$$

נזכור שעבור ה- a-ים יש לנו רק מקדמים a_{2i} ולא a_{2i+1} , ונוכל לרשום עבור המקרה שלנו:

$$c_{2m} = \sum_{i=0}^{m} a_{2i} b_{2m-2i}$$

שימו לב לשינוי גבול הסכימה כאן והבינו מדוע הוא נדרש.

נציב בשוויון זה את הביטויים שקיבלנו עבור המקדמים:

$$\binom{n}{2m} = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{n}{i}D(n,\, 2m-2i)$$

זו הזהות המבוקשת (אם רוצים, נחליף את משתנה הסכימה i ב- k כדי להתאים לנדרש בשאלה).

בדיקה: כאשר $n = 5\,, m = 2$, אגף שמאל הוא $\binom{5}{4} = 5$, ואגף ימין הוא

$$\binom{5}{0}D(5,4) - \binom{5}{1}D(5,2) + \binom{5}{2}D(5,0) = \binom{8}{4} - 5\cdot\binom{6}{2} + 10\cdot 1 = 70 - 75 + 10 = 5$$

שימו לב ש- $D(j,0) = \binom{j+0-1}{j-1} = \binom{j-1}{j-1} = 1$. את הבדיקה השניה אנא השלימו בעצמכם.

איתי הראבן