2018 ב' - מועד קיץ

1) א) התשובה היא $\boxed{2}$, כי אם $\alpha\to\beta$ אמת ונתון
שמתקיים, נקבל ש- $\beta\to\alpha$ סתירה.

	α	β	$\alpha\to\beta$	$\beta\to\alpha$
1	T	F	F	T
2	T	T	F	X
3	F	T	F	X
4	F	F	F	T

2)
שורה 2 לא אפשרית, שכן לפי טבלת האמת של ←
$\alpha\to\beta$ צריך להיות T.
כנ"ל לגבי שורה 3
לכן רק שורות 1 ו- 4 אפשריות, ונסיק
ונקבל ש- $\alpha\to\beta$ הוא אמת, לכן $\alpha\to\beta$ טאוטולוגיה.

ב) התשובה היא $\boxed{3}$, נתון קבוצות נלוות ל- GP המוגדר

הסבר:

ראשית:

$A=\mathbb{R}-\mathbb{N} \Rightarrow A=\mathbb{R}\cap\mathbb{N}' \Rightarrow A=\mathbb{N}'$

מתקיים $A\subseteq Q$, ובנוסף,
$(0,1)\subseteq A\subseteq\mathbb{R}$

ולכן $c\le|A|\le c$ כי $|A|=c$,

ומכאן ש- $A=\mathbb{N}'$ ולכן $A'=\mathbb{N}''=\mathbb{N}$ כי $\boxed{A'=\mathbb{N}}$

שנית:

$B=\mathbb{R} \Rightarrow |B|=c$ ולכן $B'=Q \Rightarrow |B'|=O$

סוף:

$A\cap B=\mathbb{N}'\cap\mathbb{R}=\mathbb{N}'=A \Rightarrow \boxed{|A\cap B|=|A|=c}$

ובנוסף ש- $|Q|=\aleph_0$, אז $|A\cap B|>|Q|$, לכן 1 לא
נכון, וגם 2 לא נכון.

המשך:

$|A \times B| = C \cdot C = C = |A \cap B|$

לכן גם ב 4 זה נכון.

ולכן נשארה רק האפשרות של $\boxed{3}$

ג) התשובה היא $\boxed{3}$, שכן החלוקה ל-2 רכיבי קשירות חייבת להיות 4 ו 3 צמתים כל

רכיב קשירות, כי אחרת היה יותר מ-7,

אז מכאן שברכיבי קשירות מהווים גרף

מלא, אז הרכיב קשירות עם הארבע צמתים,

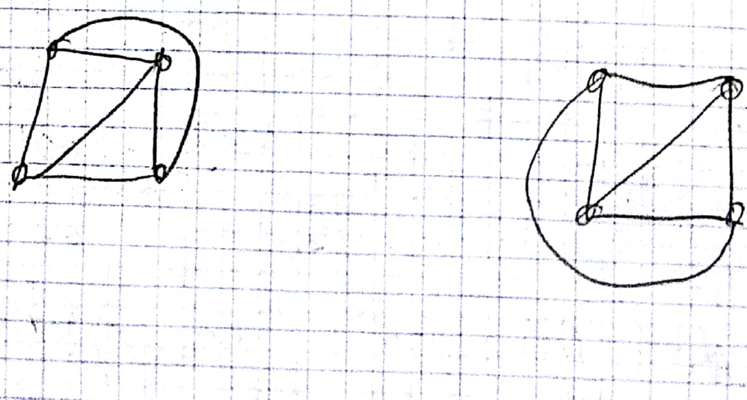
בגרף מלא 5 צמתים, ורק מגרף זה K_5,

והמיוחד אינו מישורי, בסתירה לנתון, לכן

בשני הרכבי קשירות יש 4 צמתים כל

אחד. וכל שתי מחולקים, ניתן פשוט

לבדוק אותם ולספור את הרכיבים, ויוצא $\boxed{12}$.



(א) (2)

טענה 1

לכל קבוצה $X\in M$, מ"ח $|X|=|X'|$.

הוכחה:

תהי $X\in M$.

נניח ש- X קבוצה סופית, אזי $|X|=k$ כאשר $k\in\mathbb{N}$.
טבעי

אז המשלים של X ביחס ל-M, הוא:

$$X' = M - X$$

לכן:

$$|X'| = |M - X|$$

אבל $M-X$ היא קבוצה אינסופית, לכן העוצמה שלה תהיה רק גדולה מ-א, לכן $|X|=k<|X'|$,
בסתירה לכך ש- $|X|=|X'|$ ($X\in M$).

לכן ההנחה ש-$X\in M$ קבוצה סופית, שגויה, ולכן X אינסופית.

לכן, גם X בת מנייה כי היא קבוצה אינסופית שמוכלת ב-M.

לכן מ"ח $|X|=|X'|$, כנדרש.

טענה 2:

לכל קבוצה $X\in M$ אם נתון $a\in X$, אזי גם $X-\{a\}\in M$.

הוכחה:

תהי $X\in M$. נתון $a\in X$. היא קבוצה X אינסופית (הוכחנו בטענה 1), לכן גם $X-\{a\}$ אינסופית.

ומכאן ש- $X-\{a\}$ מוכלת ב-M ולכן היא בת מנייה.

לכן מ"ח $|X-\{a\}|=$. מתכונות על $(X-\{a\})'$, מתקיים:

$$(X-\{a\})' = (X\cap\{a\}')' = X'\cup(\{a\}')' = X'\cup\{a\}$$

מכיון ש- $X \in M$, אז $|X|=|X'|=\aleph_0$ שכן
מסעיף ①. שכן:

$$|X' \cup \{a\}| = \aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

כלומר: $\aleph_0 = |(X-\{a\})'|$

בנוסף:

$$|(X-\{a\})'| = |(X-\{a\})| = \aleph_0$$

לכן $X-\{a\} \in M$, מ.ש.ל.

נעבור לסעיף ב':

הטענה: שקיימת ב-M קבוצה מקסימלית לגבי $\subseteq$
~~היא~~ לא נכונה, נוכיח:
נניח בשלילה שקיים $X \in M$ כך ש-X מקסימלי
ב-M לגבי $\subseteq$.
אז לכל $A \in M$, כך ש $A \supseteq X$, אז $X=A$.
נבחר את A להיות הקבוצה $X-\{a\}$, כאשר
$a \in X$ איבר כלשהו של X.
מסעיף ②, נקבל שגם $X-\{a\} \in M$.

מתקיים כמובן $X-\{a\} \supseteq X$, כלומר $X R X-\{a\}$
אבל ברור ש- $X-\{a\} \neq X$, כי $a \in X$
אבל $a \notin X-\{a\}$, סתירה למקסימליות של
X, לפיכך אין איבר מקסימלי ב-M, מ.ש.ל.

2) ב) הטענה [illegible] נכונה.

נסמן $A=\mathbb{N}_{odd}$ $B=\mathbb{N}_{even}$

אז $A\cap B=\emptyset$.

נניח בשלילה שקיימת $C\in M$ כך ש-

ARC וגם BRC, ולכן $A\supseteq C$ וגם $B\supseteq C$,

~~[illegible]~~

לכן ש- $A\cap B=\emptyset$, אזי בהכרח $C=\emptyset$.

אבל $\emptyset\notin M$, כי מתקיים $|\emptyset|=0$ וגם

$\aleph_0=|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}-\emptyset|$, כלומר $|\mathbb{N}-\emptyset|\neq|\emptyset|$, לכן $C\notin M$,

בסתירה להנחה. כלומר - המשפט שקיים $C\in M$

כך ש- ARC וגם BRC שגוי, לכן

לא קיים C כזו, ולפיכך מצאנו שתי קבוצות

ב-M שלא מקיימות את הנ"ל ~~[illegible]~~ של

~~[illegible]~~, הטענה, ~~[illegible]~~ ולכן הטענה לא נכונה.

א) נסמן ~~[illegible]~~ ש-B נמצאת ב-M.

תמיד אפשר גם A נמצאת ב-M.

~~ק) לכל X, כי לכל $X\in M$, מתקיים $X\neq A$, ולכן~~

3

ב

$$f(x) = (x^3+x^5+x^7)^3(1+x^6+x^{12}+x^{18}+\dots)^3 =$$

$$= (x^3)^3(1+x^2+x^4)^3 \cdot \frac{1}{(1-x^6)^3} =$$

$$= x^9(1+x^2+x^4)^3 \cdot \frac{1}{(1-x^2)^3} \cdot \frac{1}{(1+x^2+x^4)^3} =$$

$$= x^9 \cdot \frac{1}{(1-x^2)^3} = x^9 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} D(3,k)x^{2k}$$

ג

לפכך המקדם של x^{25} הוא

$$1 \cdot D(3,8) = \boxed{45}$$

כי זה [illegible]

4 10

~~נעזר~~ מספר המילים באורך 7 המורכבות

מהאותיות AAABBBC הוא $\frac{7!}{3!3!} = \boxed{140}$

לפיכך אנו צריכים למצוא את כל האיברים

בפיתוח של $(x+y+z)^7$ בעלי מקדם 140.

$$(x+y+z)^7 = \sum_{\substack{0\le i,j,k\le 7 \\ i+j+k=7}} \frac{7!}{i!j!k!} x^i y^j z^k$$

לשם כך נרצה למצוא את 6 המקרים האפשריים המשולשים

$i+j+k=7$, כאשר $0\le i,j,k \le 7$,

מס׳ האפשרויות זה הוא כפיתרון 7 כדורים זהים

ל-3 תאים שונים, כלומר מס׳ זה הוא

$D(3,7)=\binom{9}{2}=\boxed{36}$, כלומר בפיתוח יש 36 איברים.

נרצה ש $\frac{7!}{i!j!k!} = 140$ ולכן אתה

$i!j!k! = 36$. מכך שצריך לקיים $i+j+k=7$, האפשרויות

היחידות הן: (ללא חשיבות לסדר, כרגע) $1+1+5$, $1+2+4$, $1+3+3$,

$1+1+0$, $4+3+0$, $3+2+2$, $2+5+0$.

והאפשרות היחידה שמקיימת גם $i!j!k!=36$ וגם $i+j+k=7$.

היא כאשר $i+j+k=1+3+3$, כלומר כאשר מחליקים

3 עבור אחד מ-i,j,k ועוד 3 עבור הנ״ל שנשאר,

1 עבור האחרון שנשאר.

1	2	3
$i=1$ $j=3$ $k=3$	$i=3$ $j=3$ $k=1$	$i=3$ $j=1$ $k=3$

לכן 6 האפשרויות הן:

בס״ה $\boxed{3 \text{ אפשרויות}}$

(נקבל ~~גם~~ אז עבור $k=3$ $j=3$ $i=1$ נקבל

$$140\,\cancel{x}\,y^3z^3$$

עבור $k=1$ $j=3$ $i=3$ נקבל

$$140x^3y^3z$$

עבור $k=3$ $j=1$ $i=3$ נקבל

$$140x^3yz^3$$

אלו הם 3 האיברים בעלי המקדם המבוקש
בפיתוח של $(x+y+z)^7$

(ב)

(ג)

סימון:

A_1 = קבוצת ~~הפתרונות~~ המחרוזות שמופיע בהן ABC

A_2 = " " " BCA

A_3 = " " " CAB

אנו נחפש את מס' המחרוזות שבהן מופיע בהן שלושת את הרצפים, מס' זה שווה, לפי עקרון ההכלה וההפרדה, ל:

$$P=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

נחשב את כל אחד מהמחוברים.

$|A_1|$: בקבוצה A_1 מופיע הרצף ABC, לכן נתייחס אליו כאל תו אחד, כלומר:

$\underbrace{ABC}AABB$

מס' הכל 5 איברים, לכן מס' המחרוזות הוא:

$$\frac{5!}{2!\,2!}=\boxed{30}$$

5! - סידור האיברים

2! - סידור 2 ה-A האחרים

2! - סידור 2 ה-B האחרים

$|A_2|$: באותה דרך, $\underbrace{BCA}AABB$, 5 איברים, לכן

$$\frac{5!}{2!\,2!}=\boxed{30}$$

$|A_3|$: באותה דרך, $\underbrace{CAB}AABB$, 5 איברים, לכן:

$$\frac{5!}{2!\,2!}=\boxed{30}$$

$|A_1 \cap A_4|$: רק קבוצה $A_1 \cap A_4$ מכילים את התמורות שבהן יש ABC ו- BCA.
זה קורה רק אם מופיע ABCA.
כלומר $\underbrace{ABCA}\ A\ B\ B$ נספר עם איברים
לכן מספר התמורות הוא

$\frac{4!}{2!} = \boxed{12}$ ניתן ב-B הנותרים

$|A_1 \cap A_3|$: קבוצה זו מכילה את B התמורות עם ABC ו- CAB, כלומר ABCAB
לכן נתייחס ל- ABCAB כיחידה אחת, כלומר:
$\underbrace{ABCAB}\ A\ B$ נספר כ-3 איברים לכן:

$|A_1 \cap A_3|: 3! = \boxed{6}$

$|A_2 \cap A_3|$: מכילה את BCA ו- CAB, כלומר את BCAB, לכן נתייחס ל- BCAB כיחידה
ונקבל $\underbrace{BCAB}\ A\ A\ B$, לכן:

$|A_2 \cap A_4| = \frac{4!}{\underset{A \text{ פעמיים}}{2!}} = \boxed{12}$

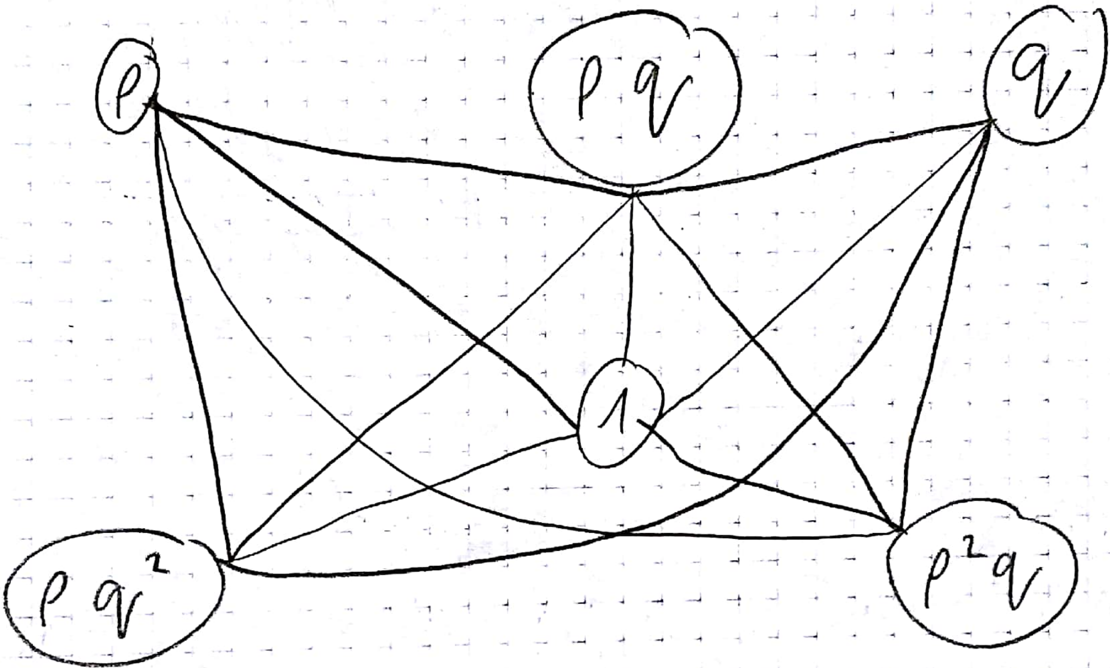
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$: מכילה את ABC, BCA, ו- CAB, כלומר את:
$\underbrace{ABCAB}$ וגם $\underbrace{ABCAB}\ A\ B$, לכן:
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3! = \boxed{6}$

נציב הכל ונקבל:

$P = 30+30+30-12-6-12+6 = \boxed{66}$

5) ה) <u>הטענה אינה נכונה.</u>

G איננו מישורי, כי הוא מכיל עותק של $K_{3,3}$, נוכיח ע"י עזרה שראינו בכיתה!



נחלק את הקודקודים ל-2 קבוצות:

$A=\{p, pq, q\}$ $B=\{pq^2, p^2q, 1\}$

כל קודקוד מ-A מחובר לכל קודקוד מ-B, לכן G, לפיכך G מכיל תת גרף $K_{3,3}$, ולכן עפ"י משפט קורטובסקי איננו מישורי.

ב) לצירן נראה, שהגרף נתון!

צומת p = a

צומת pq = b

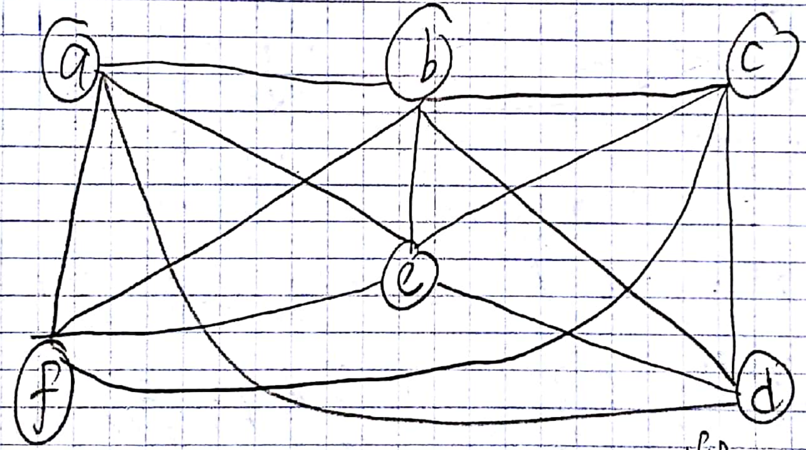
צומת q = c

צומת p^2q = d

צומת 1 = e

צומת pq^2 = f

והגרף מתקבל לפי הנתונים:



נתבונן על המסלול:

(eb, bc, cd, de, ef, fa, ab, bd, da, ae, ec, cf, fb)

מסלול זה עובר על כל קשת פעם אחת, ולכן זהו
מסלול אוילר ולסיכום, בגרף G אכן יש מסלול
אוילרי.

ג) כן, G מכיל מעגל המילטון ולמשל:

(ed, dc, cb, ba, af, fe)

כל צומת מופיע פעם אחת במסלול זה, ולכן
G המילטוני.