אלגוריתמים 1 (234247) – סמסטר אביב 2005

תרגיל בית 6

מתרגל אחראי על התרגיל: דודו אמזלג, שעת קבלה: יום ד' 16:00-17:00, amzallag@cs.

תאריך חלוקה: יום חמישי 9/6/05.

תאריך הגשה: יום חמישי 23/6/05, שעה 12:00 **בצהריים**.

הערות:

- יש להגיש את התרגיל בזוגות.
- שאלות על התרגיל נא להפנות למתרגל האחראי על התרגיל.
- נא לוודא שהפתרון המוגש קריא. פתרונות לא-קריאים לא ייבדקו!
- נא לצרף לפתרון את דף השער המופיע באתר הקורס.
- יש להוכיח כל טענה שלא נלמדה בהרצאה או בתרגול.
- כל אלגוריתם יש לתאר תחילה בקצרה (מה הרעיון מאחוריו) ואחר כך בפירוט (תיאור מילולי, או פסאודו-קוד).
- יש להוכיח נכונות ולנתח סיבוכיות של כל אלגוריתם.
- לא כל השאלות יבדקו.

שאלה 1

יהא $y=(y_0,y_1,\dots,y_{n-1})$ וקטור ערכיו של פולינום מדרגה קטנה מ-n ב-n שורשי היחידה מסדר n $w_n^0,w_n^1,w_n^2,\dots w_n^{n-1}$. אנו מעוניינים לחשב את וקטור מקדמי הפולינום $a=(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})$, כלומר a שיקיים:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_n & w_n^{\,2} & \dots & w_n^{\,n-1} \\ 1 & w_n^{\,2} & \left(w_n^{\,2}\right)^2 & \dots & \left(w_n^{\,2}\right)^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & w_n^{\,n-1} & \left(w_n^{\,n-1}\right)^2 & \dots & \left(w_n^{\,n-1}\right)^{n-1} \end{pmatrix}}_{V_n} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

פעולה זו נקראת טרנספורם פורייה ההפוך ומסומנת $a=\mathrm{DFT}^{-1}(y)$.

נגדיר מטריצה חדשה V_n^{-1} באופן הבא: $[V_n^{-1}]_{j,k}=\dfrac{w_n^{-jk}}{n}$ לכל $0\le j,k\le n-1$. הראו כי V_n^{-1} היא אכן המטריצה ההופכית של V_n, כלומר $V_n^{-1}\cdot V_n=I$.

<u>שאלה 2</u>

בהינתן שתי קבוצות A ו- B במרחב וקטורי, **סכום מינקובסקי** (Minkowski Sum) של A ו- B הוא הקבוצה $\{a+b \mid a\in A, b\in B\}$.

הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(n\log n)$ אשר בהינתן שתי קבוצות $A,B\subseteq\{1,2,...,n\}$ מחשב את סכום מינקובסקי של A ו- B. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

דוגמה: עבור $A=\{1,3,7\}$ ו- $B=\{2,4\}$ הפתרון המבוקש הוא $\{3,5,7,9,11\}$.

<u>שאלה 3</u>

א. נתונים שני פולינומים ליניאריים: $A(x)=a_0+a_1x$ ו- $B(x)=b_0+b_1x$. חישוב נאיבי של מקדמי פולינום המכפלה $C(x)=A(x)\cdot B(X)$ דורש ארבע פעולות כפל. הציעו דרך לחשב את $C(x)$ ע"י שלוש פעולות כפל בלבד.

ב. יהיו $A(x)=a_0+a_1x+...+a_{n-1}x^{n\text{-}1}$ ו- $B(x)=b_0+b_1x+...+b_{n-1}x^{n\text{-}1}$ שני פולינומים מדרגה קטנה מ- n. הציעו אלגוריתם divide-and-conquer בסיבוכיות $O(n^{\log_2 3})$ לחישוב פולינום המכפלה $C(x)=A(x)\cdot B(X)$. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

הערות: (1) אין להשתמש ב-FFT; (2) ניתן להניח כי קיים מספר טבעי k כך ש- $n=2^k$.

<u>שאלה 4</u>

תהא $N=(G,s,t,c)$ רשת זרימה כך ש- $G=(V,E)$ הינו גרף מכוון, $s,t\in V$ הם המקור והבור, בהתאמה, ו- $c:E\to\mathbb{R}^+$ היא פונקצית הקיבול.

קשת $e\in E$ תקרא **קשת קריטית מלמעלה** אם לכל $\varepsilon>0$ הגדלת $c(e)$ ב- ε תגרום להגדלת ערך זרימת המקסימום ב- N.

קשת $e\in E$ תקרא **קשת קריטית מלמטה** אם לכל $0<\varepsilon\le c(e)$ הקטנת $c(e)$ ב- ε תגרום להקטנת ערך זרימת המקסימום ב- N.

א. הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(V^2E)$ המוצא את כל הקשתות הקריטיות מלמעלה ב- N. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

רמז: הסתכלו על הקבוצות הבאות בגרף השיורי G_f: $S=\{v\mid \text{there is a path in } G_f \text{ from } s \text{ to } v\}$ ו- $T=\{v\mid \text{there is a path in } G_f \text{ from } v \text{ to } t\}$.

ב. הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(V^2E)$ המוצא את כל הקשתות הקריטיות מלמטה ב- N. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

רמז: עמדו על הקשר בין היותה של $(u\to v)\in E$ קשת קריטית מלמטה ובין קיום מסלול מ- u ל- v בגרף השיורי.

שאלה 5

- גרף לא מכוון $G=(V,E)$ הוא **דו-צדדי** (bipartite) אם קיימות שתי קבוצות צמתים $V_1,V_2\subseteq V$ כך ש: $V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\phi$ ולכל קשת $(u,v)\in E$ מתקיים $u\in V_1\wedge v\in V_2$ או $v\in V_1\wedge u\in V_2$.
- קבוצת צמתים $U\subseteq V$ בגרף לא מכוון $G=(V,E)$ הינה **בלתי-תלויה** (Independent Set) אם לא קיים זוג צמתים $u,v\in U$ כך ש- $(u,v)\in E$. U הינה **קבוצה בלתי-תלויה מקסימום** אם לכל קבוצה בלתי תלויה U' מתקיים $|U|\ge|U'|$.

יהא $G=(V_1\cup V_2,E)$ גרף לא-מכוון ודו-צדדי.

נתבונן ברשת הזרימה הבאה:

$$
\begin{aligned}
&(G',s,t,c)\\
&V'=V_1\cup V_2\cup\{s,t\}\\
&E'=\{(s\to u)\mid u\in V_1\}\cup\{(u\to v)\mid u\in V_1,v\in V_2,(u,v)\in E\}\cup\{(v\to t)\mid v\in V_2\}\\
&c(e=(x,y))=\begin{cases}1 & x=s,y\in V_1\\ 1 & y=t,x\in V_2\\ \infty & otherwise\end{cases}
\end{aligned}
$$

יהא $(S,\bar{S})$ חתך $s-t$ מינימום. נגדיר: $A=V_1\cap S, B=V_2\cap\bar{S}$.

א. הוכיחו כי $A\cup B$ היא קבוצה בלתי-תלויה ב- G.

ב. הוכיחו כי $A\cup B$ היא קבוצה בלתי-תלויה מקסימום ב- G.

שאלה 6

יהא $G=(V,E)$ גרף. **כיסוי במסלולים** של צמתי G הוא קבוצת מסלולים זרים בצמתים ב- G, כך שכל צומת ב- G מוכל באחד המסלולים בכיסוי. (מסלול עשוי להיות מורכב מצומת יחיד בלבד.)

הציעו אלגוריתם יעיל שבהינתן גרף מכוון וחסר מעגלים $G=(V=\{1,2,...,n\},E)$, מחשב את מספר המסלולים הקטן ביותר הדרוש לכיסוי במסלולים של G. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

הדרכה: הראו שאם f^* הוא ערך זרימת המקסימום ברשת הבאה, אז $V-f^*$ הוא הפתרון המבוקש.

רשת הזרימה: $N=(G'=(V',E'),s,t,c)$ כך ש:

- $V'=\{s,t\}\cup\{v_1,v_2,...,v_n\}\cup\{u_1,u_2,...,u_n\}$
- $E'=\{(s,v_i)\mid i=1,2,...,n\}\cup\{(u_i,t)\mid i=1,2,...,n\}\cup\{(v_i,u_j)\mid(i,j)\in E\}$
- לכל קשת קיבול 1.