<u>פתרון שאלות בממ"ן 12 סמסטר 2015א</u>

שאלה 3

נניח שיימצא אלגוריתם פלאי להכרעת השפה A_{TM}.

אם נרצה להכריע את השייכות של $<M, w>$ לשפה $HALT_{TM}$, נשנה את פונקצית המעברים של M כך: בכל פעם שיש כניסה למצב q_{reject} נחליף זאת בכניסה למצב q_{accept}. נקרא למכונה החדשה M'.

המכונה M' מגיעה למצב q_{accept} בכל מקרה שבו המכונה M עוצרת.

לכן $<M, w> \in HALT_{TM} \Leftrightarrow <M', w> \in A_{TM}$.

ניתן לאלגוריתם הפלאי שמכריע את השפה A_{TM} את הקלט $<M', w>$. לפי מה שהוא יענה, נדע האם $<M, w>$ שייכת ל-$HALT_{TM}$.

שאלה 4

א. להלן תיאור של מכונת טיורינג שמזהה את L:

"על קלט $<M>$ כאשר M היא מכונת טיורינג:

1. הרץ את M על $<M>$. במהלך הריצה סמן בעזרת סמנים מיוחדים את קטע הסרט שבו M פועלת.
2. אם M עומדת להיכנס ל-q_{accept}, בדוק האם הסרט של M ריק.
אם כן, קבל; אחרת, דחה."

ב. נניח בשלילה ש-L כריעה.

נבנה מכונה D:

"על קלט $<M>$ כאשר M היא מכונת טיורינג:

1. בדוק האם $<M>$ שייכת ל-L.
2. אם כן, דחה את $<M>$ על-ידי כניסה למצב q_{reject}.
3. אם לא, מחק את תוכן הסרט, וקבל את $<M>$ על-ידי כניסה למצב q_{accept}."

מכיוון שלפי ההנחה, הבדיקה בסעיף 1 אפשרית בעזרת מכונת טיורינג, המכונה D שבנינו היא מכונה מכריעה - היא תמיד עוצרת.

כעת נשאל כיצד פועלת D על הקלט $<D>$?

אם $<D>$ שייכת ל-L, אז לפי הגדרת השפה L, D עוצרת על $<D>$ במצב q_{accept}. אבל לפי ההגדרה של פעולת המכונה D, D עוצרת במצב q_{reject}.

אם $<D>$ לא שייכת ל-L, אז לפי הגדרת השפה L, או ש-D לא מקבלת את $<D>$, או שבסיום הריצה של D על $<D>$ הסרט לא ריק. אבל לפי ההגדרה של פעולת המכונה D, D מקבלת את $<D>$ ובסיום הריצה הסרט ריק.

בכל מקרה הגענו לסתירה.

שאלה 5

תהי w מילה. נגדיר את השפה P_w:

$$P_w = \{<M> \mid M \text{ accepts } w\}$$

P_w מקיימת את תנאי משפט Rice (בדקו!). לכן, לפי המשפט, P_w איננה כריעה.

מתקיים: $<M> \in P_w$ אם ורק אם $<M, w> \in A_{\mathrm{TM}}$.

אם נניח בשלילה ש-A_{TM} כריעה, נקבל שגם P_w כריעה: כדי לבדוק האם $<M>$ שייכת ל-P_w נבדוק האם $<M, w>$ שייכת ל-A_{TM}. זו סתירה.

מסקנה: A_{TM} איננה כריעה.

שאלה 6

ALL_{LBA} איננה כריעה.

הוכחה: נניח בשלילה ש-A_{LBA} כריעה, ונראה שאפשר להכריע את A_{TM}:

אפשר לבנות מכונת טיורינג T שעל קלט $<M, w>$ תבנה LBA D שמקבל כל מחרוזת **שלא מהווה היסטוריית חישוב מקבלת** של M על w:

D יבדוק תחילה האם אפשר לחלק את הקלט לתת-מחרוזות שביניהן יש #. אם לא, הוא יקבל.

לאחר מכן D יבדוק האם כל תת-מחרוזת מתארת קונפיגורציה. אם לא, הוא יקבל.

לאחר מכן D יבדוק האם התת-מחרוזת הראשונה היא הקונפיגורציה ההתחלתית של M על w. אם לא, הוא יקבל.

לאחר מכן D יבדוק האם כל קונפיגורציה נובעת מן הקודמת לה לפי כללי המעבר של M. אם לא, הוא יקבל.

לבסוף D יבדוק האם הקונפיגורציה האחרונה היא קונפיגורציה מקבלת. אם כן, הוא ידחה. אם לא, הוא יקבל.

כעת T תבדוק האם $<D>$ שייכת ל-ALL_{LBA}. אם כן, היא תדחה (את $<M, w>$). אם לא, היא תקבל.

($<D>$ שייכת ל-ALL_{LBA} אם ורק אם $<M, w>$ לא שייכת ל-A_{TM}).

שאלה 7

א. התכונה "$L(M)$ היא שפה חסרת הקשר" היא תכונה לא טריוויאלית של מכונות טיורינג - יש מכונות טיורינג שמזהות שפה חסרת הקשר, ויש מכונות טיורינג שמזהות שפה שאיננה חסרת הקשר. כמו כן, זו תכונה של מכונות טיורינג במובן שלכל שתי מכונות שמזהות אותה השפה, או ששתיהן מקיימות את התכונה, או ששתיהן לא מקיימות את התכונה.

לכן, לפי משפט Rice, השפה CF_{TM} איננה כריעה.

ב. "על קלט $<M, w>$ כאשר M היא מכונת טיורינג ו-w מחרוזת:

1. בנה את המכונה M' הבאה:

"על קלט x:

1. אם x מהצורה $0^n1^n2^n$, קבל.
2. אם x לא מהצורה $0^n1^n2^n$, הרץ את M על w. אם M קיבלה, קבל; אחרת, דחה."

2. החזר את $<M'>$."

אם M מקבלת את w, אז M' מקבלת כל מילה, ו-$L(M')$ היא שפה חסרת הקשר.

אם M לא מקבלת את w, אז $L(M') = \{0^n1^n2^n \mid n \geq 0\}$ שהיא שפה שאיננה חסרת הקשר.

כלומר, $<M'>$ שייכת ל-CF_{TM} אם ורק אם $<M, w>$ שייכת ל-A_{TM}.

ג. "על קלט $<M, w>$ כאשר M היא מכונת טיורינג ו-w מחרוזת:

1. בנה את המכונה M' הבאה:

"על קלט x:

1. אם x לא מהצורה $0^n1^n2^n$, דחה.
2. אם x מהצורה $0^n1^n2^n$, הרץ את M על w. אם M קיבלה, קבל; אחרת, דחה."

2. החזר את $<M'>$."

אם M לא מקבלת את w, אז M' לא מקבלת אף מילה, ו-$L(M')$ היא שפה חסרת הקשר.

אם M מקבלת את w, אז $L(M') = \{0^n1^n2^n \mid n \geq 0\}$ שהיא שפה שאיננה חסרת הקשר.

כלומר, $<M'>$ שייכת ל-CF_{TM} אם ורק אם $<M, w>$ שייכת למשלימה של A_{TM}.

ד. הרדוקציה של סעיף ב היא גם רדוקציה של המשלימה של A_{TM} למשלימה של CF_{TM}.

לכן המשלימה של CF_{TM} איננה מזוהה-טיורינג.

הרדוקציה של סעיף ג היא גם רדוקציה של המשלימה של A_{TM} ל-CF_{TM}.

לכן CF_{TM} איננה מזוהה-טיורינג.