<u>פתרון בחינה</u>

1. א. נסמן ב- X את מספר הפגיעות מתוך n הקליעות שיבוצעו. $X \sim B(n,0.1)$ יש למצוא את n כך שיתקיים: $P(X \geq 1) > 0.9$.

ההסתברות ש $P(X \geq 1)$ שקולה ל $1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0.1)^n$ ולכן יש לפתור את אי השוויון הבא התלוי בפרמטר n: $1 - (0.9)^n > 0.9$.

פתרון אי השוויון:

$$1 - (0.9)^n > 0.9$$
$$0.1 > (0.9)^n$$
$$\ln(0.1) > \ln(0.9^n)$$
$$\ln(0.1) > n \cdot \ln(0.9)$$
$$n > \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.9)} = 21.8$$

אי לכך יש לקלוע למטרה <u>לפחות 22</u> פעמים כדי להבטיח שההסתברות , שתהיה לפחות פגיעה אחת , תעלה על 0.9.

ב. כיוון שקולעים למטרה 10 פעמים ניתן לומר ש $X \sim B(10,0.1)$ השאלה הנשאלת היא: $P(X \geq 2 \mid X \geq 1)$. נחשב את הסתברות המותנית הזו:

$$P(X \geq 2 \mid X \geq 1) = \frac{P(X \geq 2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{1 - P(X = 0) - P(X = 1)}{1 - P(X = 0)} =$$
$$\frac{1 - 0.9^{10} - 10 \cdot 0.1 \cdot 0.9^9}{1 - 0.9^{10}} = 0.4052$$

ג. נסמן ב- Y את מספר הקליעות עד וכולל הפגיעה הראשונה. $Y \sim G(0.1)$. השאלה הנשאלת היא: $P(Y > 15)$. לכן, $P(Y > 15) = 0.9^{15} = 0.2059$

ד. נסמן ב- W את מספר הקליעות שיבוצעו עד לפגיעה השישית וכולל. השאלה הנשאלת היא: $Var(W \mid X = 1)$. כיוון שאין תלות בין התוצאות של הקליעות השונות $W \mid X = 1 \sim NB(5,0.1)$, לכן

נעזר בנוסחת השונות של ההתפלגות הבינומית השלילית: $Var(W \mid X = 1) = \frac{5 \cdot 0.9}{0.1^2} = 450$.

2. נתון ש $X_i \sim B(1,p)$ באופן בלתי תלוי זה בזה לכל i. $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ וכמו כן מוגדר האינדיקטור להיות: $S_n = \begin{cases} 0, \bar{X}_n < 1 \\ 1, \bar{X}_n = 1 \end{cases}$.

א. $P(S_n = 0) = 1 - P(S_n = 1) = 1 - P(\bar{X}_n = 1) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} X_i = 1) = 1 - p^n$.

ב. על סמך הסעיף הקודם התקבל ש $P(S_n = 0) = 1 - p^n$ לכן $P(S_n = 1) = p^n$. מדובר באינדיקטור, על כן: $Var(S_n) = P(S_n = 0) \cdot P(S_n = 1) = (1 - p^n) \cdot p^n$.

ג. נרצה לחשב את $Cov(X_n, S_n)$. שני המשתנים הללו הם אינדיקטורים. תוחלת של אינדיקטור היא הסיכוי שהוא יקבל את הערך 1:

$E[X_n] = p, E[S_n] = p^n$. כעת נחשב את תוחלת המכפלה של שני המשתנים:

$$E[X_n \cdot S_n] = P(X_n = 1 \cap S_n = 1) = P(S_n = 1) = p^n$$

לכן: $Cov(X_n, S_n) = E[X_n \cdot S_n] - E[X_n] \cdot E[S_n] = p^n - p \cdot p^n = p^n \cdot (1-p)$.

ד. נבנה את פונקציית ההסתברות של המשתנה המדובר:

$$P\{(1 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n) = i\} = P\{(\sum_{n=1}^{\infty} S_n) = i - 1\} = P\{(X_1 = 1, ..X_{i-1} = 1, X_i = 0\} = (p)^{i-1} \cdot (1-p)$$

$i = 1, 2, ...$. קיבלנו את פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הגיאומטרית עם פרמטר $1-p$ ולכן הטענה נכונה.

3. נתון ש $X_i \sim U(-3^i, 3^i)$ לכל $i=1,2,...$ באופן בלתי תלוי זה בזה. כמו כן , לכל $n=1,2,...$ מוגדר $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

א. יש לחשב את השונות של S_n. ראשית נעזר בנוסחת השונות של התפלגות אחידה, במטרה למצוא את השונות של X_i: $Var(X_i) = \frac{(3^i-(-3^i))^2}{12} = \frac{4\cdot 3^{2i}}{12} = \frac{9^i}{3}$. כעת נעבור לחישוב השונות של S_n:

$Var(S_n) = Var(\sum_{i=1}^{n} X_i)$, כיוון ש X_i בלתי תלויים זה בזה מתקיים ש:

$$Var(S_n) = Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{9^i}{3} = \frac{\sum_{i=1}^{n} 9^i}{3}.$$

קיבלנו כאן טור של סדרה הנדסית שנוסחת הסכום שלה: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

לכן , $\frac{\sum_{i=1}^{n} 9^i}{3} = \frac{\sum_{1=0}^{n} 9^i - 1}{3} = \frac{1}{3}\cdot(\frac{1-9^{n+1}}{1-9} - 1) = \frac{9-9^{n+1}}{3\cdot(-8)} = \frac{3\cdot(9^n-1)}{8}$.

ב. כדי לחשב את החסם המבוקש נעזר באי שוויון צ'בישב: $P\{|X-E(X)| \geq a\} \leq \frac{Var(X)}{a^2}$

כיוון ש X_i מתפלג אחיד מתקיים ש $E[X_i] = \frac{3^i+(-3^i)}{2} = 0$, מכאן נמצא את התוחלת של S_n:

$E[S_n] = E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = 0$ נרצה למצוא חסם עליון להסתברות:

$P\{|S_n - E[S_n]| \geq 3^{n+1}\} = P\{|S_n - 0| \geq 3^{n+1}\} = P\{|S_n| \geq 3^{n+1}\}$ נעזר באי שוויון צ'בישב ונקבל:

$$P\{|S_n| \geq 3^{n+1}\} \leq \frac{Var(S_n)}{(3^{n+1})^2} = \frac{3\cdot(9^n-1)}{8\cdot(3^{n+1})^2} = \frac{3\cdot(9^n-1)}{8\cdot 9\cdot 9^n} = \frac{1}{24}(1-\frac{1}{9^n}) < \frac{1}{24}.$$

ג. כדי לחשב את ההסתברות הרצויה נתבונן בהתפלגות המשתנה המקרי $\frac{X_i}{3^i}$. נחשב את התוחלת של משתנה זה: $E[\frac{X_i}{3^i}] = \frac{1}{3^i}E[X_i] = \frac{1}{3^i}\cdot 0 = 0$ וכעת נחשב את השונות של משתנה זה:

$Var(\frac{X_i}{3^i}) = (\frac{1}{3^i})^2 Var(X_i) = \frac{1}{9^i} \cdot \frac{9^i}{3} = \frac{1}{3}$. קיבלנו משתנים שווי התפלגות עם אותה התוחלת ואותה השונות . כעת נעזר במשפט הגבול המרכזי כדי למצוא את ההסתברות המבוקשת .

נחשב את התוחלת של $\sum_{1=1}^{n} \frac{X_n}{3^i}$: $E[\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{3^i}] = \sum_{i=1}^{n} E[\frac{X_i}{3^i}] = 0$

ונחשב את השונות של $\sum_{1=1}^{n} \frac{X_n}{3^i}$: $Var[\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{3^i}] = \sum_{i=1}^{n} Var[\frac{X_i}{3^i}] = \frac{n}{3}$

נתקנן את הערך $\sqrt{n}$ ונקבל : $Z = \frac{\sqrt{n} - 0}{\sqrt{\frac{n}{3}}} = \sqrt{3}$.

$P\{\sum_{1=1}^{n} \frac{X_n}{3^i} \le \sqrt{n}\} \underset{n\to\infty}{=} \phi(\sqrt{3}) = \phi(1.73) = 0.9582$.

4. א. 1. כדי שיהפכו בדיוק 10 קלפים לפני שיתגלה האס הראשון אנו צריכים שבמקום ה 11 יהיה אס, וכמו כן ששלושת האסים הנותרים יהיו במקומות 12 עד 52 . נתייחס לניסוי כבחירת המקומות של האסים מבין 52 המקומות של הקלפים, ונקבל :

$$\frac{\binom{41}{3}}{\binom{52}{4}} = 0.0394$$

2. כדי שיהפכו לפחות 10 קלפים לפני שיתגלה האס הראשון אנו צריכים שמיקום האסים יהיה במקומות 11 עד 52. לכן נחשב את הסיכוי ש 4 האסים ימוקמו במקום 11 עד מקום 52 :

$$\frac{\binom{42}{4}}{\binom{52}{4}} = 0.4134$$

ב. נסמן A_i - בקבוצה ה- i יהיה לפחות קלף אחד מצורת לב. $i = 1,2,3,4$ אנו מחפשים את $P(\bigcap_{i=1}^{4} A_i)$.

נשתמש בנוסחת דה מורגן : $P(\bigcap_{i=1}^{4} A_i) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{4} A_i^c)$. כעת נמשיך עם כלל ההכלה וההפרדה :

$$1 - \left\{ 4 \cdot \frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}} - 6 \cdot \frac{\binom{39}{26}}{\binom{52}{26}} + 4 \cdot \frac{\binom{39}{39}}{\binom{52}{39}} - 0 \right\} = 0.9489.$$

ג. הניסוי בסעיף זה הוא לבחור באקראי 13 קלפים מהחבילה. נגדיר את המאורעות הבאים :

- B- נבחר לפחות קלף אחד מצורת לב.
- A- נבחרו בדיוק 3 קלפים מצורת עלה.

נחשב את ההסתברות המותנית המבוקשת במרחב מדגם סימטרי :

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

כאשר את גודלו של מאורע B נחשב עלי ידי החסרה מכלל האפשרויות לבחור 13 קלפים מהחבילה את כלל האפשרויות שלא יהיה לב , כך שנקבל את כל האפשרויות בהן יהיה לפחות לב אחד :

$$\binom{52}{13} - \binom{39}{13}.$$

גודל חיתוך המאורעות הוא מספר האפשרויות לבחור 13 קלפים כך שיש לפחות לב אחד וגם בדיוק 3 עלים . נחסיר מכל הבחירות של 3 עלים ו 10 לא עלים את הבחירות של 3 עלים ו- 10 לא עלים ולא לב : $\binom{13}{3}\binom{39}{10}-\binom{13}{3}\binom{26}{10}$.

ונקבל :

$$=\frac{\binom{13}{3}\binom{39}{10}-\binom{13}{3}\binom{26}{10}}{\binom{52}{13}-\binom{39}{13}}=0.2876$$

5. א. כדי שפונקציית צפיפות תהיה חוקית האינטגרל הכולל שלה בכל תוחמה חייב להיות 1. לכן ,

$$\int_0^\infty\int_0^x (c+6)\cdot e^{-cx}dydx = (c+6)\cdot\int_0^\infty\int_0^x e^{-cx}dydx = (c+6)\cdot\int_0^\infty e^{-cx}\cdot y\,|_0^x dx = (c+6)\int_0^\infty [x\cdot e^{-cx}]dx =$$
$$\frac{(c+6)}{c}\int_0^\infty [x\cdot c\cdot e^{-cx}]dx$$

כדי לחשב את הביטוי $\int_0^\infty [x\cdot c\cdot e^{-cx}]dx$ ניתן להיעזר באינטגרציה בחלקים , אך ניתן לשים לב שמדובר

בתוחלת של התפלגות מעריכית עם פרמטר C ולכן הביטוי שווה בערכו ל- $\frac{1}{c}$.

נציב ונקבל שהאינטגרל הוא $\frac{(c+6)}{c^2}$ נשווה ל- 1 : $\frac{(c+6)}{c^2}=1$. נפתור את המשוואה ונקבל שני

פתרונות אפשריים 3 או 2- . כיוון שנאמר ש $c>0$ הפתרון הוא $c=3$.

ב. כדי לחשב את השונות של X , נמצא את פונקציית הצפיפות השולית שלו מתוך פונקציית הצפיפות

המשותפת : $\int_0^x 9\cdot e^{-3x}dy = 9y\cdot e^{-3x}\,|_0^x = 9x\cdot e^{-3x}$ כאשר $x>0$.

מדובר בפונקציית צפיפות של התפלגות גמא כך ש $X\sim gamma(2,3)$ ולכן נוכל להיעזר בנוסחת

השונות של התפלגות גמא : $Var(X)=\frac{2}{3^2}=\frac{2}{9}$.

ג. נמצא את פונקציית הצפיפות המותנית :

$$f(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\frac{9\cdot e^{-3x}}{9x\cdot e^{-3x}}=\frac{1}{x}$$

על כן : $Y\,|\,X=x\sim U(0,x)$ נשתמש בנוסחת התוחלת של ההתפלגות האחידה ונקבל :

$E[Y\,|\,X=x]=\frac{0+x}{2}=\frac{x}{2}$.

ד. נעזר בנוסחת התוחלת המותנית ובמה שקיבלנו בסעיפים הקודמים :

$$E[\frac{Y}{X}]=E[E[\frac{Y}{X}\,|\,X]]=E[\frac{1}{X}E[Y\,|\,X]]=E[\frac{1}{X}\cdot\frac{X}{2}]=E[\frac{1}{2}]=\frac{1}{2}$$