פתרונות לממ"ן 14 - 2019ב - 20425

1. נסמן ב- Y_1 את מספר ה- H שמתקבלים ב- 30 ההטלות האחרונות. מתקיים: $Y + Y_1 = X$
כמו כן, המשתנים המקריים Y ו- Y_1 בלתי-תלויים זה בזה, ולשניהם התפלגות בינומית, ומתקיים:

$$X \sim B(50,0.5) \quad ; \quad Y \sim B(20,0.5) \quad ; \quad Y_1 \sim B(30,0.5)$$

א. **דרך I:**
$$\text{Cov}(X,Y) = \text{Cov}(Y+Y_1,Y) = \text{Var}(Y) + \underbrace{\text{Cov}(Y_1,Y)}_{=0} = \text{Var}(Y) = 20\cdot 0.5^2 = 5$$

קיבלנו שהשונות המשותפת שונה מ- 0, כלומר, שני המשתנים מתואמים.

דרך II:
$$E[XY] = E[E[XY \mid Y]] = E[YE[X \mid Y]] = E[Y(Y+30\cdot 0.5)] = E[Y^2] + 15E[Y]$$
$$= \text{Var}(Y) + (E[Y])^2 + 15E[Y] = 5 + 10^2 + 150 = 255$$

לפיכך:
$$\text{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 255 - 25\cdot 10 = 5$$

והמשתנים מתואמים.

ב. לכל $i = 0,\ldots,50$ מתקיים:

$$P\{Y=j \mid X=i\} = \frac{P\{X=i, Y=j\}}{P\{X=i\}} = \frac{P\{Y_1 = i-j\}P\{Y=j\}}{P\{X=i\}}$$
$$= \frac{\binom{30}{i-j}0.5^{30}\binom{20}{j}0.5^{20}}{\binom{50}{i}0.5^{50}} = \frac{\binom{30}{i-j}\binom{20}{j}}{\binom{50}{i}} \quad , \quad j = \max\{0, i-30\},\ldots,\min\{20,i\}$$

לפיכך, ההתפלגות המותנית היא היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N = 50$, $m = 20$ ו- $n = i$.

ג1. לכל $j = 0,\ldots,20$ מתקיים:

$$P\{X=i \mid Y=j\} = \frac{P\{X=i, Y=j\}}{P\{Y=j\}} = \frac{P\{Y_1 = i-j\}\cancel{P\{Y=j\}}}{\cancel{P\{Y=j\}}}$$
$$= P\{Y_1 = i-j\} = \binom{30}{i-j}0.5^{30} \quad , \quad i = j, j+1,\ldots, j+30$$

ג2. **דרך I:**
$$E[X \mid Y=j] = E[Y+Y_1 \mid Y=j] = E[j+Y_1 \mid Y=j]$$
$$= j + E[Y_1 \mid Y=j] = j + E[Y_1] = j + 30\cdot 0.5 = j+15 \quad [\text{בלתי-תלויים } Y_j \text{ -ו } Y]$$

דרך II:

לכל $j = 0,\ldots,20$ מתקיים:
$$E[X \mid Y=j] = \sum_{i=j}^{j+30} i\,P\{X=i \mid Y=j\} = \sum_{i=j}^{j+30} i\binom{30}{i-j}0.5^{30}$$
$$= \sum_{i=0}^{30}(i+j)\binom{30}{i}0.5^{30} = E[Y_1 + j] = 30\cdot 0.5 + j = 15 + j$$

2. א. הסכום של משתנים מקריים נורמליים בלתי-תלויים הוא משתנה מקרי נורמלי עם הפרמטרים שמתקבלים מסכימת התוחלות ומסכימת **השונויות** של המשתנים המקריים שבסכום. לכן, בהנחה שמשקל השקית זניח, נקבל שהמשקל הכולל (בק"ג) של שקית מלאה ב-5 תפוחים ירוקים וב-5 תפוחים אדומים, שנסמנו ב-W, הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת $5\cdot 0.1 + 5\cdot 0.15 = 1.25$ ושונות $5\cdot 0.01^2 + 5\cdot 0.02^2 = 0.0025$. לכן:

$$P\{X < 1.3\} = \Phi\left(\tfrac{1.3-1.25}{\sqrt{0.0025}}\right) = \Phi\left(\tfrac{0.05}{0.05}\right) = \Phi(1) = 0.8413$$

ב. מהאמור בסעיף הקודם, נקבל כי הפונקציה יוצרת המומנטים של X היא :

$$M_X(t) = e^{1.25t + 0.0025t^2/2} \quad , \quad t \text{ ממשי}$$

ג. מהאמור בסעיף הקודם, נקבל כי מחיר שקית מלאה הוא $6X$, לפיכך :

$$M_{6X}(t) = M_X(6t) = e^{7.5t + 0.09t^2/2} \quad , \quad t \text{ ממשי}$$

3. לפי נתוני הבעיה, למשתנה המקרי X יש התפלגות אחידה בדידה בין 1 ל- 10.

לכן :
$$E[X] = \tfrac{1+10}{2} = 5.5 \quad ; \quad \text{Var}(X) = \tfrac{10^2-1}{12} = 8.25$$

כעת, לכל $i = 1,2,\ldots$, נסמן ב- Y_i את מספר ההטלות שהאדם ה-i-י מבצע. נקבל כי ה- Y_i-ים הם משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלכולם הפרמטר 0.5, וכן כי :
$$Y = \sum_{i=1}^{X} Y_i$$

א.
$$E[Y] = E\left[\sum_{i=1}^{X} Y_i\right] = E[X]E[Y_1] = 5.5 \cdot 2 = 11$$

ב.
$$\text{Var}(Y) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{X} Y_i\right) = E[X]\text{Var}(Y_1) + (E[Y_1])^2\,\text{Var}(X) = 5.5 \cdot 2 + 2^2 \cdot 8.25 = 44$$

4. א. לכל $i = 1,\ldots,44$, נגדיר :

$$X_i = \begin{cases} 1 & , \quad \text{קלף } i\text{, שאינו מלך/מלכה, מתגלה לפני קלף המלך/מלכה השמיני} \\ 0 & , \quad \text{אחרת} \end{cases}$$

ונקבל כי : $X = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{מלך} \\ \text{או מלכה}}}{8} + \underbrace{\sum_{i=1}^{44} X_i}_{\substack{\text{לא מלך} \\ \text{ולא מלכה}}}$ = מספר הקלפים שהופכים עד שמתגלה קלף המלך/מלכה ה-8.

נחשב את התוחלת של X_i , לכל $i = 1,\ldots,44$. מקבלים :

$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \tfrac{8}{9}$$
[בחישוב ההסתברות מתייחסים רק ל-8 קלפי המלכים ולקלף i שאינו מלך/מלכה]

ומכאן :
$$E[X] = E\left[8 + \sum_{i=1}^{44} X_i\right] = 8 + \sum_{i=1}^{44} E[X_i] = 8 + 44 \cdot \tfrac{8}{9} = 47\tfrac{1}{9} = 47.\overline{1}$$

ב. נחשב את השונות של X_i , לכל $i = 1,\ldots,44$. מסעיף א מקבלים כי :

$$\text{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{1}{9} = \tfrac{8}{81}$$

כעת, נחשב את השונות המשותפת של X_i ו- X_j . לכל $i \neq j$ מתקיים :

$$E[X_iX_j] = P\{X_i = 1, X_j = 1\}$$
$$= P\{X_i = 1\}P\{X_j = 1 \mid X_i = 1\} = \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{9}{10} = \tfrac{4}{5}$$
[בחישוב ההסת' מתייחסים רק ל-8 קלפי המלכים ולקלפים i ו- j שאינם מלך/מלכה]

לכן :
$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E[X_iX_j] - E[X_i]E[X_j] = \tfrac{4}{5} - \left(\tfrac{8}{9}\right)^2 = \tfrac{4}{405}$$

ומכאן :
$$\text{Var}(X) = \text{Var}\left(8 + \sum_{i=1}^{44} X_i\right) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{44} X_i\right) = \sum_{i=1}^{44}\text{Var}(X_i) + \sum_{i\neq j}\text{Cov}(X_i, X_j)$$

$$= 44 \cdot \tfrac{8}{81} + 44 \cdot 43 \cdot \tfrac{4}{405} = 23\tfrac{1,053}{32,805} = 23\tfrac{13}{405} = 23.0321$$

5. נסמן ב-X^* את מספר הציפורים שיושבות על הכבל העליון. מתקיים : $Y = X + X^*$

כאשר, המשתנים המקריים X ו-X^* בלתי-תלויים ויש לכל אחד מהם התפלגות בינומית עם הפרמטרים 30 ו-0.5, ולמשתנה המקרי Y יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 60 ו-0.5. לפיכך, מתקיים :

$$\rho(X,Y) = \rho(X, X+X^*) = \frac{\text{Cov}(X, X+X^*)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\text{Var}(X) + \overbrace{\text{Cov}(X,X^*)}^{=0}}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

$$= \frac{30\cdot 0.5^2}{\sqrt{30\cdot 0.5^2 \cdot 60 \cdot 0.5^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

6. א. בין X_1 ל- X_2 קיים הקשר הלינארי השלילי $X_2 = 21 - X_1$. לכן, מקדם המתאם ביניהם שווה ל- -1 .

אפשר להגיע לתוצאה זו גם ב**חישוב ישיר** :

למשתנה המקרי X_1 יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 21 ו- 2/6, למשתנה המקרי X_2 יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 21 ו- 4/6 וקיים ביניהם הקשר הלינארי $X_2 = 21 - X_1$. לכן :

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \text{Cov}(X_1, 21 - X_1) = \text{Cov}(X_1, 21) - \text{Cov}(X_1, X_1) = 0 - \text{Var}(X_1) = -\text{Var}(X_1)$$

$$\text{Var}(X_2) = \text{Var}(21 - X_1) = (-1)^2\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_1)$$

ומכאן מקבלים כי :
$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(X_2)}} = \frac{-\text{Var}(X_1)}{\text{Var}(X_1)} = -1$$

ב.
$$E[Y_1] = E\left[(-1)^{X_1}\right] = \sum_{i=0}^{21}(-1)^i\binom{21}{i}\left(\tfrac{2}{6}\right)^i\left(\tfrac{4}{6}\right)^{21-i} = \left(-\tfrac{2}{6}+\tfrac{4}{6}\right)^{21} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{21}$$

$$E[Y_2] = E\left[(-1)^{X_2}\right] = \sum_{i=0}^{21}(-1)^i\binom{21}{i}\left(\tfrac{4}{6}\right)^i\left(\tfrac{2}{6}\right)^{21-i} = \left(-\tfrac{4}{6}+\tfrac{2}{6}\right)^{21} = -\left(\tfrac{1}{3}\right)^{21}$$

נשים לב, שמתקיים השוויון $X_1 + X_2 = 21$, לכן :

$$E[Y_1Y_2] = E\left[(-1)^{X_1+X_2}\right] = E\left[(-1)^{21}\right] = E[-1] = -1$$

ומכאן :
$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = E[Y_1Y_2] - E[Y_1]E[Y_2] = -1 + \left(\tfrac{1}{3^{21}}\right)^2$$