2011ב – מועד 86

1.

א. על פי הגדרת סדר חלקי, עלינו להוכיח ש-R הוא רפלקסיבי, טרנזיטיבי, ואנטיסימטרי.

- רפלקסיביות: יהיו $(a,b)\in N\times N$.

על פי הרפלקסיביות של היחס $\le$, מתקיים $b\le b, a\le a$, ולכן על פי הגדרת היחס R, $(a,b)R(a,b)$. מ.ש.ל.

- טרנזיטיביות: יהיו $(a,b)R(c,d)$ ו- $(c,d)R(e,f)$. נוכיח $(a,b)R(e,f)$.

מהנתון $(a,b)R(c,d)$ נובע $b\le d, a\le c$.

מהנתון $(c,d)R(e,f)$ נובע $d\le f, c\le e$.

על פי הטרנזיטיביות של היחס $\le$, נובע $a\le e, b\le f$, ולכן על פי הגדרת היחס R, $(a,b)R(e,f)$. מ.ש.ל.

- אניטיסמטריות:

יהיו $(a,b),(c,d)\in N\times N$, ונניח $(a,b)R(c,d)\wedge(c,d)R(a,b)$. נוכיח $(a,b)=(c,d)$.

מהנתון $(a,b)R(c,d)$, על פי הגדרת R, נובע $b\le d, a\le c$.

מהנתון $(c,d)R(a,b)$, נובע על פי הגדרת R, ש- $d\le b, c\le a$.

לכן, על פי האנטיסמטריות של היחס $\le$, נובע $a=c, b=d$, ולכן על פי הגדרת שוויון בין זוגות סדורים, נובע $(a,b)=(c,d)$. מ.ש.ל.

ב. עלינו להראות שקיימים $(a,b),(c,d)\in N\times N$ כך שמתקיים $((a,b),(c,d))\notin R\wedge((c,d),(a,b))\notin R$.

נתבונן ב-(1,3),(4,2).

אכן, $3\le 2$ אך $4>1$, ולכן $((2,4),(3,1))\notin R$.

כמו כן, $1\le 4$ אך $3>2$ ולכן $((3,1),(2,4))\notin R$. מ.ש.ל.

ג. נתבונן ב- $N\times\{0\}$. ברור ש-R הוא סדר חלקי, וההוכחה לכך זהה לזו שבסעיף א', שכן באף סעיף לא הסתמכנו על איברים שאינם בקבוצה הזו.

כעת נוכיח ש-R הוא סדר מלא.

יהיו $(a,b),(c,d)\in N\times\{0\}$. נראה ש- $(a,b)R(c,d)\vee(c,d)R(a,b)$.

מהנתון $(a,b),(c,d)\in N\times\{0\}$ על פי הגדרת מכפלה קרטזית, נובע $b=d=1$. על פי הרפלקסיביות של היחס $\le$, נובע בוודאי ש- $d\le b\wedge b\le d$.

כעת, מכיוון שהיחס $\le$ הוא סדר מלא מעל המספרים הממשיים (על פי "תורת הקבוצות"), נובע ש- $a \le c \vee c \le a$.

אם $a \le c$, הראינו כבר ש- $b \le d$, ולכן על פי הגדרת R, $(a,b)R(c,d)$.

אם $c \le a$, הראינו ש- $d \le b$, ולכן על פי הגדרת R, $(c,d)R(a,b)$.

כעת נוכיח שלכל קבוצה B המקיימת $B \subseteq N \times N$ וכן $N \times \{0\} \subset B$, B אינו סדר מלא. מכיוון ש- $N \times \{0\} \subset B$, קיים זוג סדור (a,b) המקיים $(a,b) \in B, (a,b) \notin N \times \{0\}$. נתבונן ב-(a+1,0). מתקיים $b > 0$, אך לא מתקיים $a+1 \le a$, ולכן B אינו משווה בין (a,b) ל-(a+1,0), ולכן הוא לא מסדר את B בסדר מלא. מ.ש.ל.

2.

3.

א. על פי עמוד 44 בכרך "קומבינטוריקה", זהו בעצם $P(13;3,3,3,4) = \frac{13!}{3!3!3!4!} = 1{,}201{,}200$.

כלומר, יש 1,201,200 אפשרויות לסידור המחרוזת הזו.

ב. ניעזר בעיקרון ההכלה וההפרדה.

תהי U קבוצת הדרכים לסדר את המחרוזת הנתונה ללא הגבלות. על פי התשובה לסעיף א', $|U| = 1{,}201{,}200$.

תהי A_i קבוצת הדרכים לסדר את המחרוזת הנתונה כך שיתקיים: כל ההופעות של התו i הן ברצף. לחישוב A_i נתייחס אל רצף התווים כאל תו אחד.

עבור $i \in \{1,2,3\}$, יש שלושה מופעים של i במחרוזת, ולכן

$$|A_i| = P(11;3,3,4,1) = \frac{11!}{3!3!4!} = 46{,}200 .$$

$$|A_4| = P(10;3,3,3,1) = \frac{10!}{3!3!3!} = 16{,}800 .$$

נחשב חיתוכים בזוגות. עבור $i.j \in \{1,2,3\}, i \neq j$ (יש 3 כאלו),

$$|A_i \cap A_j| = P(9;3,4,1,1) = \frac{9!}{3!4!} = 2520 .$$

עבור $i \in \{1,2,3\}$, $|A_i \cap A_4| = P(8;3,3,1,1) = \frac{8!}{3!3!} = 1120$.

נחשב חיתוכים בשלשות:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = P(7;4,1,1,1) = \frac{7!}{4!} = 210 .$$

כל חיתוך אחר הוא חיתוך של שני תווים שמופיעים שלוש פעמים, ושל המספר 4:

$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = P(6;3,1,1,1) = \frac{6!}{3!} = 120$.

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4! = 24$.

נחשב את S_i :

$S_1 = 3 \cdot 46{,}200 + 16{,}800 = 155{,}400$.

$S_2 = 3 \cdot 2520 + 3 \cdot 1120 = 10{,}920$.

$S_3 = 210 + 3 \cdot 120 = 570$.

$S_4 = 24$.

הקבוצה $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ היא קבוצת הסידורים של המחרוזות כאשר כל המופעים של לפחות תו אחד מופיעים ברצף. לכן, אנו מחפשים את $|(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)'| = |A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4'|$.

על פי עיקרון ההכלה וההפרדה,

$$|A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4'| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 =$$
$$= 1{,}201{,}200 - 155{,}400 + 10{,}920 - 570 + 24 = 1{,}056{,}174$$

וזוהי התשובה לסעיף זה.

4.

א. ל-{1} יש רק חלוקה אחת, ולכן $K_1 = 1$.

ל-{1,2} יש שתי חלוקות: כל איבר נמצא בנפרד, או ששניהם באותה מחלקה. לכן, $K_2 = 2$.

ב-{1,2,3} יש יותר אפשרויות: אם 3 נמצא במחלקה לבד, אז על שאר האיברים לא חלות הגבלות נוספות, ולכן יש K_2 אפשרויות.

3 יכול להימצא גם עם 1 או 2, ואז על שאר האיברים אין עוד הגבלות, ולכן יש עוד $2 \cdot K_1$ אפשרויות.

סך הכל קיבלנו $2 + 2 \cdot 1 = 4$ אפשרויות.

ב. עבור n יש לנו כמה אפשרויות:

אם n נמצא לבד במחלקת השקילות שלו, על שאר n-1 האיברים אין הגבלות, ולכן יש לנו K_{n-1} אפשרויות.

להימצאו של n במחלקת שקילות עם איבר נוסף יש n-1 אפשרויות לבחירת האיבר הנוסף. על שאר האיברים אין מגבלות נוספות, ולכן יש לנו עבור כל אפשרות עוד K_{n-2} אפשרויות.

סה"כ קיבלנו $K_n = K_{n-1} + (n-1) \cdot K_{n-2}$.

ג. על פי יחס הרקורסיה שקיבלנו בסעיף ב',

$K_4 = 4+3\cdot 2 = 10$.

$K_5 = 10+4\cdot 4 = 26$.

$K_6 = 26+5\cdot 10 = 76$.

5.

א. בסדרת פרופר של עץ בעל n צמתים יש n-2 איברים, כלומר 58.

כל צומת מופיע בסדרה כדרגתו פחות אחת.

כלומר, כל הצמתים בעלי דרגה 3 יופיעו פעמיים כל אחד, ולכן הם יופיעו 20 פעמים סה"כ בסדרה.

עלים אינם מופיעים בסדרה (או במילים אחרות, מופיעים אפס פעמים...), ומכיוון שאין צמתים עם דרגה גבוהה מ-3 בגרף, כל 38 האיברים הנותרים מייצגים את הצמתים בעלי דרגה 2. כל צומת בעל דרגה 2 מופיע פעם אחת בסדרה, ולכן אנו יודעים שיש בדיוק 38 צמתים כאלו.

כלומר, יש 60 צמתים, מתוכם 10 בעלי דרגה 3, 38 בעלי דרגה 2, והשאר עלים.

כלומר, יש 60-10-38=12 עלים.

ב. אנו יודעים שבעץ בעל n צמתים יש n-1 קשתות. כלומר, בעץ שלנו יש 59 קשתות. על פי טענה 1.3, סכום הדרגות בגרף הוא כפליים מספר הקשתות, כלומר, בגרף שלנו:

$\sum_{v\in V} \deg_G(v) = 59\cdot 2 = 118$.

סכום הדרגות של צמתים מדרגה 3 הוא 30 (כי יש 10 צמתים כאלו).

נסמן את מספר העלים ב-x.

לכן, $118 = 30 + x + (60 - x - 10)\cdot 2$ כלומר

$118 = 30 + x + 120 - 2x - 20$, ונקבל $x = 12$.

כלומר מספר העלים בעץ הוא 12.