פתרונות לממ"ח 02 - 2019א - 20425

1. למשתנה המקרי X_1 יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר 0.2.

לפיכך:
$$P\{X_1>8\}=(1-0.2)^8=0.1678$$

2. למשתנה המקרי X_3 יש התפלגות בינומית-שלילית עם הפרמטרים 3 ו- 0.2. לפיכך, המאורע $\{X_3>12\}$ מתרחש אם עד (וכולל) להטלה ה-12 התקבלו לכל היותר שני H. כלומר:
$$P\{X_3>12\}=0.8^{12}+\binom{12}{1}\cdot 0.2^1 0.8^{11}+\binom{12}{2}\cdot 0.2^2 0.8^{10}=0.5583$$

3. למשתנה המקרי X_7 יש התפלגות בינומית-שלילית עם הפרמטרים 7 ו- 0.2.

לפיכך:
$$\mathrm{Var}(X_7)=\frac{7\cdot 0.8}{0.2^2}=140$$

4. מספר ה-H שראובן מקבל במשחק הוא משתנה מקרי בינומי-שלילי עם הפרמטרים 2 ו- 0.6, שנסמנו ב-X.
ומכאן, שמספר ה-T שהוא מקבל במשחק מוגדר על-ידי $Y=X-2$. לפיכך, הרווח של ראובן במשחק הוא המשתנה המקרי המוגדר על-ידי 2^{X-2}, ומתקיים:
$$E[2^{X-2}]=\sum_{i=2}^{\infty}2^{i-2}\cdot P\{X=i\}=\sum_{i=2}^{\infty}2^{i-2}\cdot(i-1)\cdot 0.6^2\cdot 0.4^{i-2}=\tfrac{0.36}{0.2}\sum_{i=2}^{\infty}(i-1)\cdot 0.2\cdot 0.8^{i-2}$$
$$=\tfrac{0.36}{0.2}\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot 0.2\cdot 0.8^{i-1}}_{E[Geo(0.2)]}=\tfrac{0.36}{0.2}\cdot\tfrac{1}{0.2}=9$$

5. המשתנה המקרי X מקבל את הערך 1, אם בשולחן אחד מתוך ה-5 יושבים שני ילדים שהם אחים, ובארבעת השולחנות האחרים יושבים זוגות של ילדים שאינם אחים. נערוך חישוב קומבינטורי כדי לקבל את ההסתברות המבוקשת. נניח שמדובר ב-10 מקומות מסומנים, ולכן, מספר התוצאות במרחב המדגם הוא 10!.
כעת, נמנה את מספר התוצאות המקיימות את המאורע הנתון. נבחר שולחן וזוג אחים (5·5 אפשרויות) ונושיב בו את שניהם (2 אפשרויות). כעת, נושיב את 8 הילדים הנותרים בשאר המקומות, כך שלא תהיה אף התאמה (בין הילדים) ב-4 השולחנות ה"ריקים". נעזר בכלל ההכלה וההפרדה. לכל $i=1,2,3,4$, נסמן ב- A_i את המאורע שבשולחן ה-i-י יושבים שני ילדים שהם אחים, ונחשב את $n(A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C\cap A_4^C)$. מקבלים:
$$n(A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C\cap A_4^C)=8!-n(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)$$
$$=8!-\left[4\cdot 8\cdot 6!-\binom{4}{2}\cdot 8\cdot 6\cdot 4!+\binom{4}{3}\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2!-8\cdot 6\cdot 4\cdot 2\right]=23{,}040$$

ומכאן:
$$P\{X=1\}=\frac{25\cdot 2\cdot 23{,}040}{10!}=0.31746$$

6. כדי לחשב את התוחלת של X עלינו לחשב את פונקציית ההסתברות של X:
$$P\{X=0\}=\frac{10!-\left[5\cdot 10\cdot 8!-\binom{5}{2}\cdot 10\cdot 8\cdot 6!+\binom{5}{3}\cdot 10\cdot 8\cdot 6\cdot 4!-\binom{5}{4}\cdot 10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2!+10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2\right]}{10!}$$
$$=1-\left(5\cdot\tfrac{1}{9}-10\cdot\tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{7}+10\cdot\tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{5}-4\cdot\tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{3}\right)=0.57566$$
$$P\{X=2\}=\frac{\binom{5}{2}^2\cdot 2!\cdot 2^2\cdot\left(6!-\left[3\cdot 6\cdot 4!-\binom{3}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot 2!+6\cdot 4\cdot 2\right]\right)}{10!}=0.08466$$

$$P\{X=3\}=\frac{\binom{5}{3}^2\cdot 3!\cdot 2^3\cdot\left(4!-\left[2\cdot 4\cdot 2!-4\cdot 2\right]\right)}{10!}=0.02116$$

$$P\{X=4\}=0$$

$$P\{X=5\}=\frac{5!\cdot 2^5}{10!}=0.00106$$

ומכאן כי: $E[X]=0+1\cdot 0.31746+2\cdot 0.08466+3\cdot 0.02116+5\cdot 0.00106=0.\bar{5}$

הערה: בפרק 7 לומדים לחשב תוחלת של משתנה באמצעות הצגתו כסכום של אינדיקטורים. בדרך זו, אפשר להגיע לתוצאה האחרונה ביתר קלות.

7. אם המשתנה המקרי X מסמן את מספר **השולחנות** שיושבים בהם אחים, אז מספר הילדים שלא יושבים באותו השולחן עם אחיהם הוא $2\cdot(5-X)$.

מכאן כי: $\mathrm{Var}(10-2X)=\mathrm{Var}(-2X)=(-2)^2\mathrm{Var}(X)=4\mathrm{Var}(X)$

8. מספר הקוביות הלבנות שנבחרות הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N=30$, $m=25$ ו- $n=10$. לפיכך: $\mathrm{Var}(X)=\frac{30-10}{30-1}\cdot 10\cdot\frac{25}{30}\cdot\frac{5}{30}=0.958$

9. מספר הקוביות הלבנות שנבחרות הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים $n=10$ ו- $p=25/30$.

לפיכך: $\mathrm{Var}(X)=10\cdot\frac{25}{30}\cdot\frac{5}{30}=1.3\bar{8}$

10. כדי לחשב את התוחלת המבוקשת עלינו לחשב תחילה את פונקציית ההסתברות של X:

$$P\{X=1\}=\frac{\binom{25}{4}}{\binom{30}{4}}=\frac{12,650}{27,405}$$

$$P\{X=2\}=\frac{\left[2\cdot\binom{3}{3}\binom{1}{1}+\binom{25}{1}\binom{3}{3}+\binom{25}{2}\binom{3}{2}+\binom{25}{3}\binom{3}{1}+2\cdot\binom{25}{3}\binom{1}{1}\right]}{\binom{30}{4}}=\frac{12,427}{27,405}$$

$$P\{X=3\}=\frac{\left[\binom{3}{2}\binom{1}{1}\binom{1}{1}+2\cdot\binom{25}{1}\binom{3}{2}\binom{1}{1}+2\cdot\binom{25}{2}\binom{3}{1}\binom{1}{1}+\binom{25}{2}\binom{1}{1}\binom{1}{1}\right]}{\binom{30}{4}}=\frac{2,253}{27,405}$$

$$P\{X=4\}=\frac{\binom{25}{1}\binom{3}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{30}{4}}=\frac{75}{27,405}$$

ומכאן כי: $E[X]=\frac{1\cdot 12,650+2\cdot 12,427+3\cdot 2,253+4\cdot 75}{27,405}=\frac{44,563}{27,405}=1.6261$

11. מספר הקוביות שנבחרות עד לבחירת הקובייה הצהובה הראשונה הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר $p=1/30$. לפיכך: $\mathrm{Var}(X)=\frac{29}{30}\Big/\left(\frac{1}{30}\right)^2=870$

12. מספר הקוביות שנבחרות עד לבחירת הקובייה הצהובה הרביעית הוא משתנה מקרי בינומי-שלילי עם הפרמטרים $r=4$ ו- $p=1/30$. לפיכך: $\mathrm{Var}(X)=4\cdot\frac{29}{30}\Big/\left(\frac{1}{30}\right)^2=3,480$

13. למספר הקוביות האדומות שנבחרות יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n = 400$ ו- $p = 1/30$. לפיכך, אפשר לחשב להסתברות המבוקשת קירוב פואסוני, כאשר $\lambda = 400/30 = 13.33$.

מקבלים :
$$P\{X = 15\} \cong e^{-\frac{400}{30}} \cdot \frac{\left(\frac{400}{30}\right)^{15}}{15!} = 0.09268$$

14. יש 20 פתקים שעליהם כפולה של 5. לפיכך, מספר הפתקים הנבחרים שעליהם כפולה של 5 הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N = 100$, $m = 20$ ו- $n = 15$.

ומכאן שהשונות המבוקשת היא :
$$\tfrac{100-15}{100-1} \cdot 15 \cdot \tfrac{20}{100} \cdot \tfrac{80}{100} = 2.\overline{06}$$

15. יש 20 פתקים שעליהם כפולה של 5, יש 14 פתקים שעליהם כפולה של 7, ויש 2 פתקים שעליהם כפולה של 5 ו- 7. כלומר, יש $20 + 14 - 2 = 32$ פתקים שעליהם כפולה של 5 או של 7.
לפיכך, מספר הפתקים הנבחרים, שעליהם מספר שהוא כפולה של 5 או כפולה של 7, הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N = 100$, $m = 32$ ו- $n = 15$, וההסתברות המבוקשת היא :
$$\frac{\binom{32}{6}\binom{68}{9}}{\binom{100}{15}} = 0.1763$$

16. $$P\{Y = 2\} = P\{X = 1\} = e^{-2}\tfrac{2^1}{1!} = 2e^{-2}$$

17. $$P\{Y = 6\} = P\{X = 3\} + P\{X = 6\} = e^{-2}\left(\tfrac{2^3}{3!} + \tfrac{2^6}{6!}\right) = e^{-2}\left(\tfrac{4}{3} + \tfrac{64}{720}\right) = \tfrac{64}{45}e^{-2}$$

18. $$P\{A \mid B\} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P\{Y \le 5 \cap X \ge 2\}}{P\{X \ge 2\}} = \frac{P\{X = 2\} + P\{X = 4\} + P\{X = 5\}}{1 - P\{X \le 1\}}$$
$$= \frac{e^{-2}(\frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!})}{1 - e^{-2}(1 + \frac{2^1}{1!})} = \frac{0.39698}{0.59399} = 0.6683$$

19. נחשב את התוחלת של Y :
$$E[Y] = \sum_{i=0}^{\infty} i\,P\{Y = i\}$$
$$= \sum_{i=0}^{3} 2i \cdot \tfrac{2^i}{i!} \cdot e^{-2} + \sum_{i=4}^{\infty} i \cdot \tfrac{2^i}{i!} \cdot e^{-2} = \sum_{i=0}^{3} i \cdot \tfrac{2^i}{i!} \cdot e^{-2} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \tfrac{2^i}{i!} \cdot e^{-2}}_{=E[X]} = E[X] + 10e^{-2}$$

20. נחשב את התוחלת של Y^2 :
$$E[Y^2] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2\,P\{Y = i\} = \sum_{i=0}^{3} (2i)^2\,P\{X = i\} + \sum_{i=4}^{\infty} i^2\,P\{X = i\}$$
$$= \sum_{i=0}^{3} 4i^2 \cdot \tfrac{2^i}{i!} \cdot e^{-2} + \sum_{i=4}^{\infty} i^2 \cdot \tfrac{2^i}{i!} \cdot e^{-2} = 3\sum_{i=0}^{3} i^2 \cdot \tfrac{2^i}{i!} \cdot e^{-2} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot \tfrac{2^i}{i!} \cdot e^{-2}}_{=E[X^2]} = E[X^2] + 66e^{-2}$$