פתרונות לממ"ח 01 - 2020א - 20425

1. יש בסך-הכל 3 קלפים שהמספר הרשום עליהם הוא 7. לכן, אמנון מקבל יותר קלפי-7 מאשר תמר בשני מקרים: 1) אם הוא מקבל <u>לפחות</u> קלף-7 אחד ותמר לא מקבלת אף קלף כזה;
2) אם אמנון מקבל שני קלפי-7 ותמר רק אחד.

לכן, מספר החלוקות האפשריות הוא:

$$\underbrace{\binom{27}{4}}_{\substack{\text{תמר}\\ \text{(בלי 7)}}}\underbrace{\left[\binom{26}{4}-\binom{23}{4}\right]}_{\substack{\text{אמנון}\\ \text{(לפחות 7 אחד)}}}+\underbrace{\binom{3}{1}\binom{27}{3}}_{\substack{\text{תמר}\\ \text{(7 אחד)}}}\underbrace{\binom{2}{2}\binom{24}{2}}_{\substack{\text{אמנון}\\ \text{(שני 7)}}}=\frac{27!}{4!23!}\cdot\left[\frac{26!}{4!22!}-\frac{23!}{4!19!}\right]+3\cdot\frac{27!}{3!24!}\cdot\frac{24!}{2!22!}$$

$$=106{,}967{,}250+2{,}421{,}900=109{,}389{,}150$$

2. השחקנים מקבלים מספר שווה של קלפי-5, אם שניהם לא מקבלים כלל קלפי-5 או אם כל אחד מהם מקבל בדיוק קלף אחד כזה. לכן, מספר אפשרויות החלוקה המתאימות הוא:

$$\left[\underbrace{\binom{27}{4}\binom{23}{4}}_{\text{בלי 5}}+\underbrace{\binom{3}{1}\binom{27}{3}\binom{2}{1}\binom{24}{3}}_{\text{5 אחד לכל אחד}}\right]=190{,}926{,}450$$

3. תמר יכולה לקבל לכל היותר 4 קלפים ירוקים, ולכן ההסתברות המבוקשת היא:

$$\left[\binom{10}{3}\binom{20}{1}+\binom{10}{4}\right]\Big/\binom{30}{4}=\frac{2{,}610}{27{,}405}$$

4. יש שני מקרים אפשריים: 1) שחקן אחד מקבל קלף-8 אחד והשחקן השני אף קלף כזה;
2) שחקן אחד מקבל קלף-8 אחד והשחקן השני שני קלפים כאלה.

מכאן, שמספר החלוקות האפשריות הוא: $2\binom{3}{1}\binom{27}{3}\left[\binom{2}{0}\binom{24}{4}+\binom{2}{2}\binom{24}{2}\right]=191{,}330{,}100$

5. ייתכנו שלושה מקרים:
1) שני השחקנים מקבלים 3 קלפים ירוקים וקלף רביעי מצבע אחר;
2) שחקן אחד מקבל 3 קלפים ירוקים וקלף רביעי מצבע אחר והשחקן השני מקבל 4 קלפים ירוקים;
3) שני השחקנים מקבלים 4 קלפים ירוקים.

לכן, ההסתברות היא: $\dfrac{\binom{10}{3}\binom{20}{1}\binom{7}{3}\binom{19}{1}+2\binom{10}{3}\binom{20}{1}\binom{7}{4}+\binom{10}{4}\binom{6}{4}}{\binom{30}{4}\binom{26}{4}}=\dfrac{1{,}767{,}150}{409{,}704{,}750}=0.004313$

6. מספר אפשרויות הפיזור במרחב המדגם הוא 10^{12}.

נמנה כעת את מספר הפיזורים שיש בהם בדיוק 9 תאים מלאים. נתחיל בבחירת 9 התאים שיהיו בהם כדורים, ואחר-כך, נמנה את מספר האפשרויות לפיזור 12 הכדורים ב-9 התאים שנבחרו, כך שלא יהיה ביניהם אף תא ריק. יש 10 אפשרויות לבחירת התא הריק ויש 3 דרכים לפיזור 12 הכדורים השונים ב-9 התאים המלאים, כך שלא יהיה אף תא ריק.

שלוש הדרכים הן:

1) בין 9 התאים המלאים יש תא אחד עם 4 כדורים ובשאר התאים כדור אחד.
נבחר קבוצה של 4 כדורים (שיהיו באותו התא) ואז נפזר את הכדורים בתאים. נקבל שמספר הפיזורים במקרה זה הוא: $\binom{12}{4}\cdot 9!$

2) בין 9 התאים המלאים יש תא אחד עם 3 כדורים, תא אחד עם 2 כדורים ובשאר התאים כדור אחד.
נבחר 3 כדורים (שיהיו באותו התא) ו-2 כדורים נוספים (שגם הם יהיו באותו התא) ואז נפזר את הכדורים בתאים. נקבל שמספר הפיזורים במקרה זה הוא: $\binom{12}{3}\binom{9}{2}\cdot 9!$

3) בין 9 התאים המלאים יש שלושה תאים עם 2 כדורים ובשאר התאים כדור אחד.
נבחר שלושה זוגות של כדורים (כך שכל זוג יהיה באותו התא) ואז נפזר את הכדורים בתאים. נקבל שמספר הפיזורים במקרה זה הוא: $\frac{\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}}{3!}\cdot 9!$
(שימו לב שאין חשיבות לסדר בחירת הזוגות, ולכן מחלקים ב-!3.)

לסיכום, מספר האפשרויות לפזר את 12 הכדורים השונים ב-9 תאים, כך שלא יהיה אף תא ריק, הוא:

$$10\cdot\left[\binom{12}{4}+\binom{12}{3}\binom{9}{2}+\frac{\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}}{3!}\right]\cdot 9! = 10!\cdot 22,275 = 80,831,520,000$$

ומכאן, שההסתברות המבוקשת היא: $80,831,520,000/10^{12} = 0.0808$

הערה: אילו הכדורים היו זהים, יכולנו למנות את מספר הפיזורים האפשריים ב-9 התאים המלאים כך: היינו בוחרים תא אחד שיהיה ריק, מניחים שיש כדור אחד בכל אחד מ-9 התאים האחרים (המלאים), ואז מפזרים באקראי את שאר 3 הכדורים הזהים ב-9 תאים אלו.
כאשר הכדורים אינם זהים, אי-אפשר לנקוט בשיטת המנייה הזאת.

7. מספר אפשרויות הפיזור, שבהן מספר הכדורים הכולל בתאים 1-5 שווה למספר הכדורים הכולל בתאים 6-10 הוא: $\binom{12}{6}\cdot 5^6\cdot 5^6 = \binom{12}{6}\cdot 5^{12}$

(כי מחלקים את הכדורים לשתי קבוצות, ואז מפזרים 6 כדורים בכל חמישייה של תאים.)

ולכן, מספר הפיזורים שבהם מספר הכדורים הכולל בכל אחת מחמישיות התאים אינו שווה הוא:

$$10^{12}-\binom{12}{6}\cdot 5^{12}$$

ובגלל הסימטריה בין שתי חמישיות התאים, מספר הפיזורים שבהם מספר הכדורים הכולל בתאים 1-5 גדול ממספר הכדורים הכולל בתאים 6-10 הוא: $\frac{1}{2}\cdot\left[10^{12}-\binom{12}{6}\cdot 5^{12}\right]\cong 3.8721\cdot 10^{11}$

וההסתברות המבוקשת 0.38721.

8. מספר אפשרויות הפיזור, שבהן תא 1 ריק הוא: 9^{12}

מספר הפיזורים שבהם תאים 1 ו-2 ריקים או שתא 1 ריק ובתא 2 יש כדור אחד הוא: $8^{12}+12\cdot 8^{11}$

ומכאן, שמספר הפיזורים שבהם תא 1 ריק ובתא 2 יש לפחות שני כדורים הוא: $9^{12}-(8^{12}+12\cdot 8^{11})$

וההסתברות היא 0.1106.

9. במקרה זה, נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה לחישוב ההסתברות.
נסמן ב-A_i את המאורע שבתא i יש בדיוק 4 כדורים, לכל $i = 1,2,...,10$, ונחשב את ההסתברות של איחוד המאורעות A_i, שיש לפחות תא אחד שיש בו בדיוק 4 כדורים. ההסתברות המבוקשת, שאין אף תא שיש בו בדיוק 4 כדורים, היא ההסתברות המשלימה להסתברות איחוד המאורעות הללו.

מתקיים:

$$P(A_1) = \frac{\binom{12}{4}\cdot 9^8}{10^{12}} = 0.021308$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{\binom{12}{4}\binom{8}{4}\cdot 8^4}{10^{12}} = 0.0001419$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}}{10^{12}} = 3.465\cdot 10^{-8}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = ... = P(A_1 \cap ... \cap A_{10}) = 0$$

ומכאן:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{10} A_i^C\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{10} A_i\right)$$

$$= 1 - \binom{10}{1}\cdot\frac{495\cdot 9^8}{10^{12}} + \binom{10}{2}\cdot\frac{495\cdot 70\cdot 8^4}{10^{12}} - \binom{10}{3}\cdot\frac{495\cdot 70\cdot 1}{10^{12}} = 0.7933$$

10. סכום שלושת המספרים הנבחרים זוגי, אם יש ביניהם מספר זוגי של מספרים אי-זוגיים. כלומר, נחשב את ההסתברות שכלל לא נבחרים מספרים אי-זוגיים או שנבחרים שני מספרים אי-זוגיים, ונקבל כי:

$$P\{\text{סכום זוגי}\} = \underbrace{\left(\tfrac{4}{8}\right)^3}_{\text{רק זוגיים}} + \underbrace{\binom{3}{2}\left(\tfrac{4}{8}\right)^2\left(\tfrac{4}{8}\right)^1}_{\text{שני אי-זוגיים}} = 4\left(\tfrac{4}{8}\right)^3 = 0.5$$

11. נסמן ב-A את המאורע שהמכפלה חיובית וב-B את המאורע שהמכפלה זוגית. נחשב את הסתברות החיתוך בין שני המאורעות על-ידי:

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^C)$$

כדי שהמאורע A יתרחש, המספר 0 לא צריך להיבחר, וכדי שהמאורע $A \cap B^C$ יתרחש, צריכים להיבחר רק מספרים מבין 1, 3, 5 ו- 7. לכן:

$$P(A \cap B) = \left(\tfrac{7}{8}\right)^3 - \left(\tfrac{4}{8}\right)^3 = \tfrac{279}{512} = 0.545$$

12. גם במקרה הזה נחשב את ההסתברות שכלל לא נבחרים מספרים אי-זוגיים או שנבחרים שני מספרים אי-זוגיים. נקבל:

$$P\{\text{סכום זוגי}\} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{4+24}{56} = 0.5$$

13. מכפלת המספרים הנבחרים שווה לאפס, אם יש ביניהם 0.

לכן ההסתברות המבוקשת היא:

$$\binom{7}{2}\Big/\binom{8}{3} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8} = 0.375$$

14. נסדר את 12 הסטודנטים שאינם מת״א בשורה (!12 אפשרויות), ונשלב ביניהם ומשני צידי השורה שנוצרה את 8 הסטודנטים מת״א, כך שבכל ״מרווח״ כזה יהיה לכל היותר סטודנט אחד מת״א. מכיוון שיש בסך-הכל 13 מקומות אפשריים לסטודנטים מת״א, נקבל:

$$12!\cdot\binom{13}{8}\cdot 8!$$

15. נסדר את 16 הסטודנטים שאינם מחיפה בשורה (16! אפשרויות); נבחר ביניהם ומצדדיהם שני מרווחים ($\binom{17}{2}$ אפשרויות); ונסדר את 4 הסטודנטים מחיפה ב- 4 המקומות שנבחרות עבורם (4! אפשרויות).

נקבל: $\binom{17}{2}4!\cdot16!$

16. במחצית השמאלית של השורה יש 10 מקומות, לכן, נבחר מתוכם 4 מקומות לסטודנטים מחיפה, נמקם אותם בהם ואחר-כך נסדר את שאר הסטודנטים בשורה. כלומר, מספר האפשרויות הוא: $\binom{10}{4}\cdot4!\cdot16!$

17. אם כל המטבעות מאותו הצבע זהים זה לזה, הניסוי שקול לחלוקת 20 כדורים ל-3 תאים המסומנים בצבעים: ירוק, צהוב ואדום, כך שבתא הצהוב אין יותר מ-15 כדורים. מספר אפשרויות החלוקה, **ללא ההגבלה על מספר הכדורים בתא הצהוב** הוא: $\binom{20+3-1}{20}=\binom{22}{20}=231$

אולם, יש רק 15 מטבעות צהובים. לכן, נמנה את מספר החלוקות, שבהן יש יותר מ-15 כדורים בתא הצהוב. לשם כך, נניח שיש 16 כדורים בתא הצהוב, ונפזר את 4 הכדורים הנותרים. באופן כזה, מקבלים שמספר החלוקות שיש להפחית מ-220 הוא: $\binom{4+3-1}{4}=\binom{6}{4}=15$

כלומר, מספר החלוקות במרחב המדגם במקרה זה הוא: $231-15 = 216$

18. **כדי לפתור את השאלה הזאת, וכן את שתי השאלות הבאות, נתייחס אל 65 מטבעות השוקולד כאל 65 עצמים שונים זה מזה. דבר זה הכרחי, אם מעוניינים בחישובי הסתברויות של מאורעות הנוגעים לבעיה המתוארת בשאלה, מכיוון ש- 216 התוצאות המתוארות בשאלה הקודמת אינן שוות הסתברות.**

כעת, נשים לב, שבכד יש 15 מטבעות צהובים, 20 מטבעות אדומים ו-30 מטבעות ירוקים. לכן, ההסתברות לבחור רק מטבעות צהובים שווה ל- 0. כמו כן, נשים לב, שההסתברות לבחור 20 מטבעות שכולם אדומים נמוכה מההסתברות לבחור 20 מטבעות שכולם ירוקים, הואיל ומספר המטבעות הירוקים גדול ממספר המטבעות האדומים. ההסתברות לבחור 20 מטבעות אדומים היא $1\Big/\binom{65}{20}$ בעוד שההסתברות לבחור 20 מטבעות שכולם ירוקים היא $\binom{30}{20}\Big/\binom{65}{20}$.

לפיכך, ההסתברות לבחור 20 מטבעות שלכולם אותו הצבע היא $\left[1+\binom{30}{20}\right]\Big/\binom{65}{20}$ (ולא $2/216$).

19. הואיל ומספר המטבעות מכל צבע אינו שווה, עלינו לחשב בנפרד הסתברויות של שלוש אפשרויות:

1) הוצאו רק מטבעות צהובים ואדומים (ומפחיתים את האפשרות שהוצאו רק מטבעות אדומים);
2) הוצאו רק מטבעות ירוקים ואדומים (ומפחיתים את האפשרות שהוצאו רק מטבעות בצבע אחד);
3) הוצאו רק מטבעות צהובים וירוקים (ומפחיתים את האפשרות שהוצאו רק מטבעות ירוקים).

מקבלים:
$$\frac{\left[\binom{35}{20}-\binom{20}{20}\right]+\left[\binom{50}{20}-\binom{20}{20}-\binom{30}{20}\right]+\left[\binom{45}{20}-\binom{30}{20}\right]}{\binom{65}{20}}=0.001775$$

20. בחישוב ההסתברות מספיק להתייחס לשלוש הבחירות הראשונות ולשלוש האחרונות. כל שש הבחירות הללו צריכות להיות של מטבעות ירוקים. לפיכך: $\dfrac{\binom{30}{6}}{\binom{65}{6}}=0.00719$