פתרון שאלות בממ"ן 13 סמסטר 2015א

שאלה 1

א. להלן מכונה מתאימה:

"על קלט w כאשר w היא מחרוזת:

1. עבור על הקלט משמאל לימין, ובדוק שהקלט הוא מהצורה 0^*1^*. אם לא, דחה.
2. הזז את הקלט שלושה ריבועים ימינה, וכתוב משמאלו #0#. (זה יהיה מונה ה-0-ים).
3. עבור על ה-0-ים של מילת הקלט.
4. לכל 0 כזה, הוסף 1 למונה ה-0-ים. (המונה מיוצג בבינרי).
5. אם המונה צריך לגדול מעבר לתחום שבין ה-#-ים, הזז את ה-# הימני ריבוע אחד ימינה.
6. אם המונה לא צריך לגדול, הזז את המונה ואת שני ה-#-ים ריבוע אחד ימינה.
7. הזז את ה-1-ים שני ריבועים ימינה, וכתוב משמאלם #0.

   (תוכן הסרט כעת: $\#c\#0\#1^*$, כאשר c הוא ייצוג בינרי של מספר ה-0-ים שנספרו).
8. עבור על ה-1-ים של מילת הקלט.
9. לכל 1 כזה, הוסף 1 למונה ה-1-ים. (המונה מיוצג בבינרי).
10. אם המונה צריך לגדול מעבר לתחום שבין ה-#-ים, הזז את ה-# הימני ריבוע אחד ימינה.
11. אם המונה לא צריך לגדול, הזז את **שני המונים** ואת שלושת ה-#-ים ריבוע אחד ימינה.
12. השווה את שני המונים. אם הם שווים, קבל. אחרת, דחה."

זמן הריצה: צעד 1 וצעד 2: $O(n)$; צעדים 3-6: $O(n\log n)$; צעד 7: $O(n)$;
צעדים 8-11: $O(n\log n)$; צעד 12: $O((\log n)^2)$.

ב. להלן מכונה מתאימה:

"על קלט w כאשר w היא מחרוזת סמלים:

1. עבור על הקלט משמאל לימין, ובדוק שהקלט הוא מהצורה 0^*1^*. אם לא, דחה.
2. עבור על ה-0-ים של מילת הקלט.
3. לכל 0 כזה, הוסף 1 למונה ה-0-ים בסרט השני. (המונה מיוצג בבינרי).
4. עבור על ה-1-ים של מילת הקלט.
5. לכל 1 כזה, הוסף 1 למונה ה-1-ים בסרט השני. (המונה מיוצג בבינרי).
6. השווה את שני המונים בסרט השני. אם הם שווים, קבל. אחרת, דחה."

זמן הריצה: צעד 1: $O(n)$; צעדים 2-3: $O(n)$; צעדים 4-5: $O(n)$; צעד 6: $O((\log n)^2)$.

מעבר על ה-0-ים (ה-1-ים) והגדלת המונה המתאים דורשת רק $O(n)$ צעדים: האורך המקסימלי של המונה הוא $O(\log n)$. בחצי מן ההגדלות מחליפים רק ספרה אחת, ברבע מהן מחליפים שתי ספרות, בשמינית מהן מחליפים שלוש ספרות, וכך הלאה. הסכום של הטור הזה הוא $O(n)$.

שאלה 2

א. מכונת טיורינג יכולה לבדוק, בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט, האם באוטומט סופי דטרמיניסטי נתון A יש מסלול **עם מעגל** מן המצב ההתחלתי אל אחד המצבים המקבלים. אם כן, לדחות. אם לא, לקבל.

את הבדיקה אפשר לממש באופן הבא: תחילה מוצאים (למשל, בעזרת חיפוש עומק), את כל המצבים שנמצאים על מסלול מן המצב ההתחלתי אל אחד המצבים המקבלים. לאחר מכן, בודקים לכל אחד מן המצבים הללו, האם יש מסלול מן המצב לעצמו (מעגל).

ב. אפשר למצוא את הגודל של כיסוי מינימלי בצמתים של עץ נתון T, ואז לבדוק האם הגודל הזה $\leq k$. אם כן, לקבל. אם לא, לדחות.

בכל עץ שיש בו יותר מצומת אחד, יש לפחות צומת אחד v שדרגתו 1. v מחובר לצומת אחד בלבד u. כיסוי בצמתים חייב לכלול את אחד משני הצמתים הללו, משום שחייבים לכסות את הקשת שביניהם. בכל כיסוי שמכיל את v אפשר להחליף את v ב-u ועדיין יהיה לנו כיסוי (משום ש-v מכסה רק את הקשת שמחברת את v ו-u). לכן אפשר להניח שכל כיסוי מינימלי מכיל את u.

מן האמור מתקבל האלגוריתם הבא למציאת כיסוי מינימלי בגרף שהוא עץ: מוצאים צומת v שדרגתו 1. מוסיפים לכיסוי את השכן היחיד u של v, ומוחקים את v ו-u וכל הקשתות שנוגעות בהם. המחיקה יכולה לגרום לעץ להתפרק לכמה עצים (יער). ממשיכים באופן הזה עם כל אחד מן העצים, עד שמגיעים לעצים עם צומת יחיד או ללא צמתים כלל.

זמן הריצה של האלגוריתם פולינומיאלי: מספר השלבים אינו גדול ממספר הצמתים. בכל שלב צריך למצוא צומת שדרגתו 1, ולמחוק שני צמתים וקבוצה של קשתות. זה יכול להתבצע בזמן פולינומיאלי.

שאלה 3

א. לכל דקדוק חסר הקשר G השייך ל- $\overline{ALL_{\text{CFG}}}$, יש מילה c שלא שייכת לשפה שהדקדוק יוצר.

המאמת V מקבל כקלט זוג $<G, c>$, ובודק (בעזרת אלגוריתם להכרעת A_{CFG}) האם המילה c נוצרת על-ידי הדקדוק G. אם לא, הוא מקבל; אחרת, הוא דוחה.

$$\overline{ALL_{\text{CFG}}} = \{G \mid V \text{ accepts } <G, c> \text{ for some string } c\}$$

ב. אי אפשר לחסום את גודל המילה c שמוכיחה את השייכות של G ל- $\overline{ALL_{\text{CFG}}}$.

ג. במשפט 5.13 הוכח ש- ALL_{CFG} איננה כריעה. מכאן נובע שגם $\overline{ALL_{\text{CFG}}}$ איננה כריעה.

כל שפה ב-NP היא כריעה. לכן $\overline{ALL_{\text{CFG}}}$ לא שייכת ל-NP.

שאלה 7

שייכות ל-NP: מסמך אישור קצר: קביעה ביחס לכל כרטיס האם לשים אותו ישר או הפוך.
כדי לוודא את נכונות האישור, בודקים (בזמן קצר) שכל אחד מן מקומות שמול החורים מכוסה.

רדוקציה פולינומיאלית של *3SAT*:

כאשר נתון קלט לבעיית *3SAT* – נוסחה בוליאנית ϕ ב-3CNF מעל המשתנים $x_1, ..., x_n$ ובעלת הפסוקיות $C_1, ..., C_m$, נבנה את n הכרטיסים הבאים, כרטיס אחד לכל משתנה x_i:
בכל כרטיס יהיו m חורים בצד ימין של הכרטיס ו-m חורים בצד שמאל של הכרטיס. m המקומות בכל צד מתאימים ל-m הפסוקיות.
בצד ימין של הכרטיס המתאים למשתנה x_i כל החורים יהיו פתוחים, חוץ מאלה שמתאימים לפסוקיות שבהן מופיע הליטרל x_i שהם יהיו מכוסים. בצד שמאל של הכרטיס הזה כל החורים יהיו פתוחים, חוץ מאלה שמתאימים לפסוקיות שבהן מופיע הליטרל $\neg x_i$ שהם יהיו מכוסים.
בנוסף נבנה כרטיס מיוחד שכל החורים של צד ימין שלו פתוחים, וכל החורים של צד שמאל שלו מכוסים.

ברור שהבנייה **יכולה להתבצע בזמן פולינומיאלי**.

הרדוקציה תקפה:

אם הפסוק ספיק, אז יש פתרון לפאזל:
אם הפסוק ספיק, אז יש השמה למשתנים של הפסוק שמספקת את הפסוק. אם בהשמה הזו המשתנה x_i קיבל ערך 1, נשים את הכרטיס של x_i ישר. אם הוא קיבל ערך 0, נשים את הכרטיס שלו הפוך. מכיוון שההשמה הזו מספקת את הפסוק, יש בכל פסוקית לפחות ליטרל אחד שערכו 1. לכן, באופן שבו שמנו את הכרטיסים, כיסינו את כל החורים בצד ימין. את החורים בצד שמאל נוכל לכסות בעזרת הכרטיס המיוחד.
אם יש פתרון לפאזל, אז הפסוק ספיק:
בעזרת הכרטיס המיוחד כיסינו צד אחד של החורים. את הצד השני כיסינו בעזרת n הכרטיסים של המשתנים. נסתכל על הדרך שבה שמנו את הכרטיס של המשתנה x_i כקביעת ערך אמת למשתנה הזה. מזה שכל הפסוקיות "מכוסות" נובע שבכל פסוקית יש ליטרל שערכו 1. כלומר, יש השמה מספקת לפסוק.

שאלה 8

ב. **הרדוקציה ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי**:
מספר הצמתים במעגל שבונים לכל משתנה כפול ממספר המופעים של המשתנה בפסוק.
מספר הצמתים במשולשים שבונים לכל הפסוקיות שווה למספר המופעים של כל המשתנים בפסוקיות.
לכן מספר הצמתים בגרף שבונים ליניארי בגודל פסוק הקלט לבעיה *3SAT*.
הדרגה של כל צומת בגרף הזה איננה גדולה מ-3.
לכן גם מספר הקשתות בגרף ליניארי בגודל פסוק הקלט לבעיה *3SAT*.

החישובים הנדרשים לבניית הגרף הזה ניתנים לביצוע בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט.

הרדוקציה תקפה:

נסמן על-ידי n את מספר המופעים הכולל של ליטרלים בפסוק. נראה שבגרף שנבנה יש קבוצה בלתי תלויה בגודל $n+m$ (m הוא מספר הפסוקיות בפסוק), אם ורק אם הפסוק ספיק.

אם הפסוק ספיק, אז יש בגרף קבוצה בלתי תלויה בגודל $n+m$:

אם הפסוק ספיק, אז יש לו השמה מספקת.

לכל משתנה v, אם הערך שלו בהשמה המספקת הוא 1, ניקח לקבוצה הבלתי תלויה את כל הצמתים השליליים במעגל שמתאים למשתנה v (צמתים מהצורה $F_{v,\ i}$). אם הערך של v בהשמה המספקת הוא 0, ניקח לקבוצה הבלתי תלויה את כל הצמתים החיוביים במעגל שמתאים למשתנה v (צמתים מהצורה $T_{v,\,i}$).

מכל מעגל שמתאים למשתנה לקחנו מחצית מן הצמתים של המעגל. מספר הצמתים של כלל המעגלים הללו כפול ממספר המופעים הכולל של ליטרלים בפסוק. לכן עד עתה צירפנו לקבוצה הבלתי תלויה n צמתים.

לכל פסוקית C_i יש משולש בגרף. ממשולש אפשר לקחת לכל היותר צומת אחד לקבוצה הבלתי תלויה (כל צומת במשולש קשור בקשת לשני הצמתים האחרים. לכן אי אפשר לקחת יותר מצומת אחד לקבוצה הבלתי תלויה). בהשמה המספקת יש לפחות ליטרל אחד של C_i שערכו 1.

נניח שהמשתנה המתאים לליטרל הזה הוא v. הקשת שמחברת את הליטרל הזה למעגל של המשתנה v מחברת את הליטרל לצומת **שלא שייך** לקבוצה הבלתי תלויה (כי לקחנו מכל מעגל את הצמתים שמתאימים לליטרלים שערכם 0). לכן אפשר לשייך את הצומת של הליטרל הזה לקבוצה הבלתי תלויה.

בסך הכל אפשר לצרף לקבוצה הבלתי תלויה עוד m צמתים, ולהגיע לקבוצה בלתי תלויה בגודל $n+m$.

אם יש בגרף קבוצה בלתי תלויה בגודל $n+m$ אז הפסוק ספיק:

אם יש קבוצה בלתי תלויה כזו, אז יש בה מחצית מן הצמתים של כל מעגל של משתנה, וצומת אחד מכל משולש של פסוקית.

לכל משתנה v, אם בקבוצה הבלתי תלויה נמצאים הצמתים החיוביים מן המעגל של v, נקבע ל-v ערך 0. אם בקבוצה הבלתי תלויה נמצאים הצמתים השליליים מן המעגל של v, נקבע ל-v ערך 1.

נראה שזו השמה מספקת:

לכל משולש של פסוקית יש ליטרל אחד בקבוצה הבלתי תלויה. ליטרל זה קשור בקשת לצומת במעגל של המשתנה v של הליטרל. הוא קשור בקשת לצומת שלא שייך לקבוצה הבלתי תלויה.

לכן, לפי הדרך שבה קבענו את הערכים למשתנים, ערכו של הליטרל הזה הוא 1.

כלומר, בכל פסוקית יש ליטרל שערכו 1. לכן זוהי השמה מספקת, והפסוק ספיק.