

מבנה הבחינה :

- * יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- * משקל כל שאלה 25% .
- * אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- * יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
 - * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
 - * אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
 - * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
-

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

נתון $A = \{1, 2, 3\}$. תהי M קבוצת כל היחסים (הרלציות) הלא-ריקים מעל A ,

כלומר קבוצת כל היחסים מעל A פרט ליחס הריק.

נגדיר יחס K מעל M (שים לב: מעל M , לא מעל A):

עבור $R, S \in M$: $(R, S) \in K$ אם $RS = SR$ (כפל יחסים).

(8 נק') א. הוכח ש- K הוא יחס רפלקסיבי וסימטרי מעל M .

(10 נק') ב. הוכח ש- K אינו טרנזיטיבי.

(7 נק') ג. הוכח או הפרך: לכל $R \in M$, $(R, R^{-1}) \in K$.

שאלה 2

R היא קבוצת המספרים הממשיים. Q היא קבוצת המספרים הממשיים הרציונליים.

ב"תורת הקבוצות" עמ' 126 שאלה 4.8 ראינו ש- Q היא בת-מניה.

(8 נק') א. תהי T קבוצת המספרים הממשיים שאינם רציונליים.

הוכח ש- T אינה בת-מניה, בלי להסתמך על פרק 5 בתורת הקבוצות.

(9 נק') ב. מהי עוצמת T ? הוכח בעזרת פרק 5.

(8 נק') ג. מצא מהי עוצמת הקבוצה הבאה:

$A = \{x \in \mathbf{R} \mid (x - \sqrt{2}) \text{ הוא רציונלי}\}$

לקבוצה זו שייכים למשל המספרים $\sqrt{2}$, $0.35 + \sqrt{2}$.

הוכח את תשובתך.

שאלה 3

מצאו את מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 32$,

כאשר 3 מהמשתנים הם מספרים טבעיים זוגיים,

שני המשתנים האחרים הם מספרים טבעיים אי-זוגיים,

ואף אחד מהמשתנים אינו שווה 0 ואינו שווה 1.

לא נתון איזה מהמשתנים הם זוגיים ואיזה אי-זוגיים.

יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

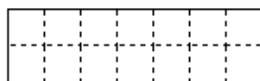
אפשר להיעזר בפונקציה יוצרת ואפשר בלעדיה.

שאלה 4

בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×1 :



ומספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×2 :



עלינו לרצף מלבן שממדיו $n \times 2$:

(בציור $n = 7$).

אסור לחרוג מגבולות המלבן. בלוק של 2×1 אפשר להניח כרצוננו "שוכב" או "עומד".
יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

9 נק' א. רשום יחס נסיגה עבור a_n (הסבר אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

10 נק' ב. פתור את יחס הנסיגה.

6 נק' ג. חשב את a_4 בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א',

ומתוך הנוסחה המפורשת שקיבלת בסעיף ב'.

שאלה 5

השאלה עוסקת בשפה של תחשיב הפרדיקטים, שבה S, R הם סימני פרדיקטים חד-מקומיים.

9 נק' א. הוכח שהפסוק $\exists x(R(x) \wedge S(x))$ והפסוק $(\exists x R(x)) \wedge (\exists x S(x))$

אינם שקולים לוגית זה לזה. כדי להוכיח עליך להציג אינטרפרטציה שבה לשני הפסוקים ערכי אמת שונים זה מזה.

8 נק' ב. הראה כי אחד משני הפסוקים הנ"ל (**איזה?**) גורר לוגית את האחר.

אין צורך בהוכחה פורמלית מלאה, די בהסבר מילולי.

8 נק' ג. האם הפסוק $\exists x(R(x) \vee S(x))$ שקול לוגית לפסוק $(\exists x R(x)) \vee (\exists x S(x))$?

אם לא, הוכח בעזרת אינטרפרטציה מתאימה. אם כן, תן הסבר מילולי.

בהצלחה!