פתרונות לממ"ן 12 - 2013א - 20425

1. א. הנתונים הם: A = הרכיב נפגם בשלב הראשון $P(C^C) = 0.8 \quad \Rightarrow \quad P(C) = 0.2$

B = הרכיב נפגם בשלב השני $P(A\cap B\cap C^C) = 0.06$

C = הרכיב נפגם בשלב השלישי $P(A\cap C) = 0.15$

$$P(A\cap B\cap C^C) + P(A\cap B^C\cap C) + P(A^C\cap B\cap C) = 0.15 \quad \Rightarrow \quad P(A\cap B^C\cap C) + P(A^C\cap B\cap C) = 0.09$$

$$P(A^C\cap B^C | C) = 0.05 \quad \Rightarrow \quad \frac{P(A^C\cap B^C\cap C)}{P(C)} = 0.05 \quad \Rightarrow \quad P(A^C\cap B^C\cap C) = 0.05\cdot 0.2 = 0.01$$

$$P(A^C\cap B^C | C^C) = 0.9 \quad \Rightarrow \quad \frac{P(A^C\cap B^C\cap C^C)}{P(C^C)} = 0.9 \quad \Rightarrow \quad P(A^C\cap B^C\cap C^C) = 0.9\cdot 0.8 = 0.72$$

$$P(A\cup C | B) = 1 \quad \Rightarrow \quad P((A\cup C)\cap B) = P(B) \quad \Rightarrow \quad B\subseteq A\cup C \quad \Rightarrow \quad P(A^C\cap B\cap C^C) = 0$$

מנתונים אלה נקבל:

$$P(A^C\cap B\cap C) = P(C) - P(A\cap C) - P(A^C\cap B^C\cap C) = 0.2 - 0.15 - 0.01 = 0.04$$

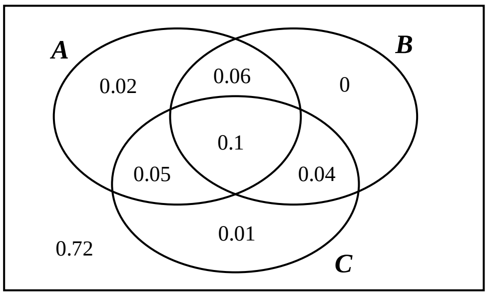
$$\Rightarrow \quad P(A\cap B^C\cap C) = 0.09 - 0.04 = 0.05$$

$$P(A\cap B\cap C) = P(A\cap C) - P(A\cap B^C\cap C) = 0.15 - 0.05 = 0.1$$

$$P(A\cap B^C\cap C^C) = 1 - P(A^C\cup B\cup C) = 1 - P(C) - P(A^C\cap B^C\cap C^C) - P(A\cap B\cap C^C)$$

$$= 1 - 0.72 - 0.2 - 0.06 = 0.02$$

והדיאגרמה המתאימה היא:



ב. $P(A\cap B\cap C) = 0.1$

ג. $P(A\cup B) = 1 - P(A^C\cap B^C) = 1 - P(A^C\cap B^C\cap C^C) - P(A^C\cap B^C\cap C) = 1 - 0.72 - 0.01 = 0.27$

ד. $$P(B | A^C) = \frac{P(B\cap A^C)}{P(A^C)} = \frac{0.04}{0.77} = 0.05195$$

ה. $$P(A | A^C\cup B^C\cup C^C) = \frac{P(A\cap(A^C\cup B^C\cup C^C))}{P(A^C\cup B^C\cup C^C)} = \frac{P(A\cap(B^C\cup C^C))}{1 - P(A\cap B\cap C)}$$

$$= \frac{0.02 + 0.05 + 0.06}{1 - 0.1} = \frac{0.13}{0.9} = 0.1\overline{4}$$

2. א. נסמן ב- A_i את המאורע שמתג i סגור, לכל $i = 1,2,3,4,5$, וב-B את המאורע שעובר זרם מ-A ל-B.

כמו כן, נתון שה-A_i-ים בלתי-תלויים וכי $P(A_i) = 0.7$, לכל i . לכן :

$$P(B \mid A_3^C) = P((A_1 \cap A_2) \cup (A_4 \cap A_5))$$ [כל המתגים בלתי-תלויים]

$$= P(A_1 \cap A_2) + P(A_4 \cap A_5) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5)$$

$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_4)P(A_5) - P(A_1)P(A_2)P(A_4)P(A_5)$$ [כל המתגים בלתי-תלויים]

$$= 2 \cdot 0.7^2 - 0.7^4 = 0.7399$$

ב. נשתמש בסימוני הסעיף הקודם.

נשים לב, שכאשר מתג 3 סגור, קל יותר לחשב את ההסתברות המותנית שלא עובר זרם. מקבלים :

$$P(B^C \mid A_3) = P((A_1^C \cap A_4^C) \cup (A_2^C \cap A_5^C))$$ [כל המתגים בלתי-תלויים]

$$= P(A_1^C \cap A_4^C) + P(A_2^C \cap A_5^C) - P(A_1^C \cap A_4^C \cap A_2^C \cap A_5^C)$$

$$= P(A_1^C)P(A_4^C) + P(A_2^C)P(A_5^C) - P(A_1^C)P(A_4^C)P(A_2^C)P(A_5^C)$$ [כל המתגים בלתי-תלויים]

$$= 2 \cdot 0.3^2 - 0.3^4 = 0.1719$$

ולכן : $P(B \mid A_3) = 1 - 0.1719 = 0.8281$

ג. נשתמש בתוצאות שני הסעיפים הקודמים, ולפי נוסחת ההסתברות השלמה, נקבל כי :

$$P(B) = P(B \mid A_3)P(A_3) + P(B \mid A_3^C)P(A_3^C) = 0.8281 \cdot 0.7 + 0.7399 \cdot 0.3 = 0.80164$$

ד. אם לא עובר זרם, ייתכן שבדיוק 3 מתגים סגורים, רק אם אלו הם מתגים 1, 3 ו-4 או מתגים 2, 3 ו-5.
כל שלישייה אחרת של מתגים סגורים, תגרום למעבר של הזרם. לכן, ההסתברות המבוקשת היא :

$$\frac{P(A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_2^C \cap A_5^C) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_1^C \cap A_4^C)}{P(B^C)} = \frac{2 \cdot 0.7^3 \cdot 0.3^2}{0.19836} = \frac{0.06174}{0.19836} = 0.31125$$

3. נגדיר שלושה מאורעות, שמתייחסים ליום-הבדיקה המקרי שנבחר :

A = מי-הנהר מזוהמים ביום הנבחר ;

B = בשיטת הבדיקה החדשה נמצא זיהום במי-הנהר ביום זה ;

C = הדיג מותר בנהר ביום הנבחר.

מהנתונים נקבל את ההסתברויות הבאות : $P(C \mid A^C) = 1 \quad ; \quad P(A) = 0.2$

$$P(B \mid A) = 0.75 \quad ; \quad P(B \mid A^C) = 0.1 \quad ; \quad P(C^C \mid B \cap A) = 0.9 \quad ; \quad P(C^C \mid B^C \cap A) = 0.2$$

א. לפי נוסחת ההסתברות השלמה מקבלים :

$$P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^C)P(A^C) = 0.75 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.8 = 0.23$$

ב. ההסתברות שביום הבדיקה שנבחר הדיג בנהר נאסר היא :

$$P(C^C) = P(C^C \mid A^C)P(A^C) + P(C^C \mid A \cap B)P(A \cap B) + P(C^C \mid A \cap B^C)P(A \cap B^C)$$

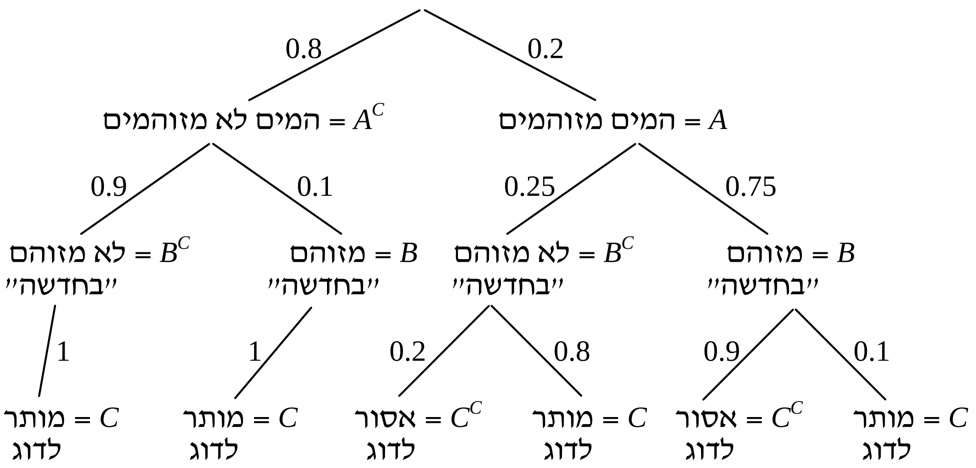
$$= 0 + 0.9 \cdot 0.15 + 0.2 \cdot 0.05 = 0.145$$

ג. נחשב תחילה את ההסתברות שמי-הנהר מזוהמים ובשיטת הבדיקה החדשה לא נמצא כל זיהום :

$$P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)=0.2-0.75\cdot 0.2=0.05$$

ומכאן :
$$P(C^C\mid B^C)=P(C^C\mid A\cap B^C)P(A\mid B^C)+P(C^C\mid A^C\cap B^C)P(A^C\mid B^C)$$
$$=0.2\cdot\tfrac{0.05}{0.77}+0=0.01299$$

<u>פתרון הבעיה באמצעות עץ</u> :



א. $P(B)=0.2\cdot 0.75+0.8\cdot 0.1=0.23$

ב. $P(C^C)=0.2\cdot 0.75\cdot 0.9+0.2\cdot 0.25\cdot 0.2=0.145$

ג. $P(C^C\mid B^C)=\dfrac{P(C^C\cap B^C)}{P(B^C)}=\dfrac{0.2\cdot 0.25\cdot 0.2}{1-0.23}=0.01299$

4. נסמן ב-A את המאורע שצבע המונית שהיתה מעורבת בתאונה היה ירוק וב-B את המאורע שהעד ראה מונית ירוקה שהיתה מעורבת בתאונה.

מנתוני השאלה נובע כי : $P(B|A^C) = 0.3$; $P(B|A) = 0.7$; $P(A) = 0.15$

לפיכך : $$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^C)P(A^C)} = \frac{0.7\cdot 0.15}{0.7\cdot 0.15+0.3\cdot 0.85} = \frac{0.105}{0.36} = 0.29167$$

5. נחשב את ההסתברות שהבעל והאישה יענו נכון על השאלה שמוצגת להם, בכל אחת משתי הדרכים, ונראה שמבחינה הסתברותית אין הבדל בין שתיהן.

דרך 1 : בוחרים אחד מבני הזוג באקראי, והוא עונה על השאלה.

נסמן ב-A את המאורע שהאישה נבחרת לענות על השאלה ונסמן ב-B את המאורע שבן-הזוג הנבחר עונה נכון על השאלה. מקבלים : $P(B)=P(B\mid A)P(A)+P(B\mid A^C)P(A^C)=p\cdot\tfrac{1}{2}+p\cdot\tfrac{1}{2}=p$

דרך 2: בני הזוג עונים לאחר התייעצות, כמתואר בשאלה.

נסמן ב-A_1 וב-A_2, בהתאמה, את המאורעות שהאישה והגבר עונים נכון על השאלה, ונסמן ב-B את המאורע שבני-הזוג עונים נכון על השאלה. מכיוון שאין תלות בין תשובת האישה לזו של בעלה, מקבלים:

$$P(B)=P(B|A_1\cap A_2)P(A_1\cap A_2)+P(B|A_1\cap A_2^C)P(A_1\cap A_2^C)$$
$$+P(B|A_1^C\cap A_2)P(A_1^C\cap A_2)+P(B|A_1^C\cap A_2^C)P(A_1^C\cap A_2^C)$$
$$=1\cdot p^2+\tfrac{1}{2}\cdot p(1-p)+\tfrac{1}{2}\cdot p(1-p)+0=p(p+1-p)=p$$

6. לניסוי המתואר בבעיה מתאים מרחב מדגם בעל 2^{20} תוצאות שוות-הסתברות, שכל אחת מהן מתקבלת בהסתברות $\frac{1}{2^{20}}$.

א. נסמן ב-A את המאורע שהתוצאה H התקבלה 5 פעמים במהלך 8 ההטלות הראשונות וב-B את המאורע שהתוצאה H התקבלה בסך-הכל 10 פעמים (ב-20 ההטלות). חיתוך המאורעות A ו-B כולל את כל התוצאות שבהן התקבלו חמישה H ב-8 ההטלות הראשונות וחמישה H נוספים ב-12 ההטלות האחרונות. ואילו, המאורע A כולל את כל התוצאות שיש בהן חמישה H ב-8 ההטלות הראשונות ותוצאות כלשהן (ללא הגבלה) ב-12 ההטלות האחרונות.

לפיכך:
$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{\binom{8}{5}\binom{12}{5}}{2^{20}}}{\frac{\binom{8}{5}\cdot 2^{12}}{2^{20}}}=\frac{\binom{12}{5}}{2^{12}}=0.19336$$