# פתרונות לממ"ן 13 - 2020א - 20425

1. א. למספר המכוניות שמגיעות לצומת בין השעות 16:00 ל-19:00 יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 1,500. כעת, מכיוון שהצבע של כל מכונית שמגיעה לצומת הוא ירוק בהסתברות 0.02, מקבלים כי למספר המכוניות הירוקות המגיעות לצומת במרווח-הזמן הנתון יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $1{,}500\cdot 0.02 = 30$. נסמן ב-$X$ את המשתנה המקרי הזה, ונקבל: $P\{X = 40\} = e^{-30}\frac{30^{40}}{40!} = 0.0139$

ב. נסמן ב-$X_1$ את מספר המכוניות שמגיעות לצומת בין 16:00 ל-17:00 וב-$X_2$ את מספר המכוניות שמגיעות לצומת בין 17:00 ל-19:00. ההתפלגות של $X_1$ היא פואסונית עם הפרמטר 500; ההתפלגות של $X_2$ היא פואסונית עם הפרמטר $2\cdot 500 = 1{,}000$; ושני המשתנים המקריים הללו בלתי-תלויים, מכיוון שהם מוגדרים על מרווחי-זמן לא-חופפים.

כעת, לפי דוגמה 4ב במדריך הלמידה (עמוד 145), ההתפלגות המותנית של $X_1$ בהינתן ש- $X_1 + X_2 = 1{,}400$ היא התפלגות בינומית עם הפרמטרים 1,400 ו- $\frac{500}{500+1{,}000} = \frac{1}{3}$. לפיכך, השונות המבוקשת היא:

$$\mathrm{Var}(X_1 \mid X_1 + X_2 = 1{,}400) = 1{,}400\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3} = 311.11$$

ג. נפריד את המאורע שהמכונית הירוקה השנייה מגיעה לצומת בין 16:15 ל-17:00 לשני מקרים: ייתכן שאף מכונית ירוקה לא מגיעה לצומת בין 16:00 ל-16:15 ואילו בין 16:15 ל-17:00 מגיעות לפחות 2 מכוניות ירוקות וייתכן שבין 16:00 ל-16:15 מגיעה לצומת מכונית ירוקה אחת ואילו בין 16:15 ל- 17:00 מגיעה לפחות מכונית ירוקה אחת. סכום ההסתברויות של שני מקרים אלו מניב את ההסתברות המבוקשת.

נסמן ב-$Y_1$ את מספר המכוניות הירוקות שמגיעות לצומת בין 16:00 ל-16:15 וב-$Y_2$ את מספר המכוניות הירוקות שמגיעות לצומת בין 16:15 ל-17:00. למשתנה המקרי $Y_1$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $0.25\cdot 500\cdot 0.02 = 2.5$, למשתנה המקרי $Y_2$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $0.75\cdot 500\cdot 0.02 = 7.5$ ושני המשתנים המקריים הללו בלתי-תלויים זה בזה (מכיוון שהם מוגדרים על מרווחי-זמן שאינם חופפים). לפיכך, מקבלים:

$$\begin{aligned}
P\{Y_1 = 0, Y_2 \ge 2\} + P\{Y_1 = 1, Y_2 \ge 1\} &= P\{Y_1 = 0\}P\{Y_2 \ge 2\} + P\{Y_1 = 1\}P\{Y_2 \ge 1\} \\
&= e^{-2.5}(1 - e^{-7.5} - 7.5e^{-7.5}) + 2.5e^{-2.5}(1 - e^{-7.5}) \\
&= \underbrace{e^{-2.5}(1 - 8.5e^{-7.5})}_{=0.0817} + \underbrace{2.5e^{-2.5}(1 - e^{-7.5})}_{=0.2051} = 0.2868
\end{aligned}$$

2. א. לכל $n = 2,3,\ldots$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
P\{X + Y = n\} &= \sum_{i=1}^{n-1} P\{X = i, Y = n-i\} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} P\{X = i\}P\{Y = n-i\} \qquad [\text{$X$ ו-$Y$ בלתי-תלויים}] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} 0.8^{i-1}\cdot 0.2\cdot 0.5^{n-i} = 0.2\cdot 0.5^{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} 0.8^{i-1}\cdot 0.5^{-i+1} \\
&= \frac{0.2}{0.5}\cdot 0.5^n\cdot\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{0.8}{0.5}\right)^i = 0.4\cdot 0.5^n\,\frac{1-1.6^{n-1}}{1-1.6} = \frac{2}{3}\cdot 0.5^n(1.6^{n-1} - 1)
\end{aligned}$$

ב.

$$P\{X=Y\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=i\,,Y=i\}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=i\}P\{Y=i\} \qquad [\ X \text{ ו-} Y \text{ בלתי-תלויים}\ ]$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}0.2\cdot 0.8^{i-1}\cdot 0.5^{i}=0.2\cdot 0.5\cdot\sum_{i=1}^{\infty}(0.8\cdot 0.5)^{i-1}=0.1\cdot\frac{1}{1-0.4}=0.1667$$

.3

א. ראשית, נמצא את ההתפלגויות השוליות.

הסיכוי של מתמודד להגיע למכשול השלישי הוא $0.6^2=0.36$ . כיוון שהמתמודדים בלתי-תלויים אחד בשני $X\sim B\left(2,0.36\right)$ .

מכאן נקבל :

$$P\left(X=0\right)=0.4096 \quad P\left(X=1\right)=0.4608 \quad P\left(X=2\right)=0.1296$$

ההתפלגות השולית של $Y$ :

$$P\left(Y=1\right)=0.4 \quad P\left(Y=2\right)=0.6\cdot 0.4=0.24$$

$$P\left(Y=3\right)=0.6^2\cdot 0.4=0.144 \quad P\left(Y=4\right)=0.6^3=0.216$$

נמלא את ההסתברויות השוליות ואת ההסתברויות המשותפות שהינן 0 .

| | | $X$ | | | $P_Y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | |
| $Y$ | 1 | | | 0 | 0.4 |
| | 2 | | | 0 | 0.24 |
| | 3 | 0 | | | 0.144 |
| | 4 | 0 | | | 0.216 |
| $P_X$ | | 0.4096 | 0.4608 | 0.1296 | |

נחשב הסתברויות המשותפות הבאות :

המאורע $X=2,Y=4$ - יפתח הגיע למכשול הרביעי, כלומר הצליח את שלושת הראשונים בהסתברות $0.6^3$ . אלכס הגיע למכשול השלישי, כלומר הצליח את שני הראשונים בהסתברות $0.6^2$ ולכן :

$$P\left(X=4,Y=2\right)=0.6^3\cdot 0.6^2=0.07776$$

המאורע $X=0,Y=1$ - יפתח הגיע ונכשל במכשול הראשון בהסתברות $0.4$ . אלכס לא הגיע למכשול השלישי, כלומר נכשל באחד משני הראשונים בהסתברות $0.4+0.6\cdot 0.4$ . לכן :

$$P\left(X=0,Y=1\right)=0.4\left(0.4+0.6\cdot 0.4\right)=0.256$$

את שאר ההסתברויות ניתן לחשב בעזרת השלמה להסתברויות השוליות.

| | | $X$ | | | $P_Y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | |
| $Y$ | 1 | 0.256 | 0.144 | 0 | 0.4 |
| | 2 | 0.1536 | 0.0864 | 0 | 0.24 |
| | 3 | 0 | 0.09216 | 0.05184 | 0.144 |
| | 4 | 0 | 0.13824 | 0.07776 | 0.216 |
| $P_X$ | | 0.4096 | 0.4608 | 0.1296 | |

ב. אם יפתח נכשל במכשול השלישי אז נתון ש $Y=3$ ומבקשים את $E[X\mid Y=3]$.

$$P\{X=1\mid Y=3\}=\frac{P\{X=1\cap Y=3\}}{P\{Y=3\}}=\frac{0.09216}{0.144}=0.64$$
$$\Rightarrow P\{X=2\mid Y=3\}=1-0.64=0.36\Rightarrow$$
$$E[X\mid Y=3]=1\cdot 0.64+2\cdot 0.36=\boxed{1.36}$$

4. א. ההסתברות המבוקשת היא הסתברות מולטינומית, ופרמטרי ההתפלגות הם $n=40$ ו- $\underset{\sim}{p}=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{4}{6}\right)$.

ומכאן, שההסתברות המבוקשת היא:
$$\frac{40!}{4!5!31!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{4}{6}\right)^{31}=0.0119$$

ב1. הערכים האפשריים של $Y$ הם הערכים השלמים בין 1 ל- 6.

לצורך חישוב ההסתברויות, נניח שאין תלות בין הטלות שונות של הקובייה.

לכל $i=0,\ldots,6$, מתקיים: [ בכל ההטלות התוצאה חייבת להיות גדולה מ- $i$ ] $P\{Y>i\}=\left(\frac{6-i}{6}\right)^4$

לכן: $P\{Y\le i\}=1-P\{Y>i\}=1-\left(\frac{6-i}{6}\right)^4 \quad , \quad i=0,1,\ldots,6$

כלומר:
$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=\begin{cases}0 & , \quad y<1\\ \frac{671}{1,296} & , \quad 1\le y<2\\ \frac{1,040}{1,296} & , \quad 2\le y<3\\ \frac{1,215}{1,296} & , \quad 3\le y<4\\ \frac{1,280}{1,296} & , \quad 4\le y<5\\ \frac{1,295}{1,296} & , \quad 5\le y<6\\ 1 & , \quad y\ge 6\end{cases}$$

2. מהסעיף הקודם נקבל כי :

$$P\{Y=1\}=P\{Y\le 1\}=\tfrac{671}{1,296}$$

$$P\{Y=2\}=P\{Y\le 2\}-P\{Y\le 1\}=\tfrac{1,040}{1,296}-\tfrac{671}{1,296}=\tfrac{369}{1,296}$$

$$P\{Y=3\}=P\{Y\le 3\}-P\{Y\le 2\}=\tfrac{1,215}{1,296}-\tfrac{1,040}{1,296}=\tfrac{175}{1,296}$$

$$P\{Y=4\}=P\{Y\le 4\}-P\{Y\le 3\}=\tfrac{1,280}{1,296}-\tfrac{1,215}{1,296}=\tfrac{65}{1,296}$$

$$P\{Y=5\}=P\{Y\le 5\}-P\{Y\le 4\}=\tfrac{1,295}{1,296}-\tfrac{1,280}{1,296}=\tfrac{15}{1,296}$$

$$P\{Y=6\}=P\{Y\le 6\}-P\{Y\le 5\}=1-\tfrac{1,295}{1,296}=\tfrac{1}{1,296}$$

ובכל מקרה אחר, פונקציית ההסתברות שווה לאפס.

5. לכל $i=1,\ldots,10$ , הערכים האפשריים של $X_i$ הם $0, 1, ..., 10$ וכל אחד מהם מתקבל בהסתברות $\tfrac{1}{11}$ .

א. 1.
$$P\left\{\min_{i=1,...,10} X_i \le 2\right\}=1-P\left\{\min_{i=1,...,10} X_i > 2\right\}=1-P\{X_1>2, X_2>2, \ldots, X_{10}>2\}$$

כיוון שהמשתנים הם בלתי תלויים זה בזה מתקיים ש :

$$1-P\{X_1>2, X_2>2, \ldots, X_{10}>2\}=1-P\{X_1>2\}\cdot P\{X_2>2\}\cdot\ldots\cdot P\{X_{10}>2\}$$

כיוון שהמשתנים כולם מתפלגים אחיד בין 0 ל-10 , מתקיים ש :

$P\{X_i>2\}=\dfrac{8}{11}\ \forall i=1,2,...,10$ ולכן :

$$1-P\{X_1>2\}\cdot P\{X_2>2\}\cdot\ldots\cdot P\{X_{10}>2\}=1-\left(\frac{8}{11}\right)^{10}=\boxed{0.9586}$$

ב. נשתמש בפונקציית ההסתברות המולטינומית, כדי לקבל את ההסתברות המבוקשת :

$$\tfrac{10!}{5!3!2!}\cdot\left(\tfrac{5}{11}\right)^5\cdot\left(\tfrac{4}{11}\right)^3\cdot\left(\tfrac{2}{11}\right)^2=\boxed{0.0777}$$