תשובה 1

כיוון אחד: נניח $A \subseteq B$ **או** $B \subseteq A$.

מקרה (*i*): $A \subseteq B$.

במקרה זה, לפי טענה באמצע עמ׳ 14 בספר, $A \cup B = B$.

לכן $(A \cup B) \times (A \cup B) = B \times B$.

מצד שני, כאשר $A \subseteq B$, מהגדרת כפל קבוצות מתקבל באופן מיידי $A \times A \subseteq B \times B$.

לכן, שוב לפי אותה טענה באמצע עמ׳ 14 בספר, $(A \times A) \cup (B \times B) = B \times B$.

קיבלנו ששני האגפים שווים ל- $B \times B$ ולכן הם שווים זה לזה.

מקרה (*ii*) : $B \subseteq A$. ההוכחה זהה להוכחת מקרה (*i*) בהחלפה בין A,B בכל מקום.

כיוון שני: נניח שהתנאי $A \subseteq B$ **או** $B \subseteq A$ **אינו** מתקיים,

כלומר A **אינה** חלקית ל- B **וגם** (!) B **אינה** חלקית ל- A.

משמע קיים $a \in A$, $a \notin B$ וקיים $b \in B$, $b \notin A$.

מהגדרת כפל קבוצות ומהגדרת איחוד קבוצות,

$(a,b) \in (A \cup B) \times (A \cup B)$, אך $(a,b) \notin (A \times A) \cup (B \times B)$.

לכן $(A \cup B) \times (A \cup B) \neq (A \times A) \cup (B \times B)$.

תשובה 2

א. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ב. זוג אחד: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. שני זוגות: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. שלושה זוגות: $I_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

חמישה זוגות: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. תשעה זוגות: $A \times A$.

ג. יש דרכים שונות להוכיח את מה שנדרש בסעיף זה. הדרך שבחרנו היא למיין את **כל יחסי שח״ל** האפשריים מעל $A = \{1,2,3\}$, ולבדוק בכל אחד מהמקרים כמה זוגות יש ביחס.

אין דרך מאד קצרה לעשות זאת, המיון הוא בעזרת הפרדה למקרים.

ראשית נפריד בין מקרים בהם $R \subseteq I_A$, ובין כל שאר המקרים.

מקרה א: $R \subseteq I_A$.

למשל כמה מהיחסים שראינו בסעיף הקודם :

זוג אחד : $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ שני זוגות : $\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$. שלושה זוגות : $I_A = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$.

גם $\varnothing$ הוא יחס כזה : היחס הריק הוא סימטרי וטרנזיטיבי!

ראו בעניין זה שאלון רב-ברירה על יחסים באתר הקורס.

קל לראות **שכל יחס** R **החלקי ל-** I_A **הוא יחס שח"ל מעל** A.

(אגב, כמה יחסים כאלה יש ?)

כך אנו מקבלים יחסי שח"ל מעל A, שמספר הזוגות בהם הוא 0, 1, 2, 3.

מקרה ב: R **אינו** חלקי ל- I_A .

שימו לב מה פירוש האמירה R אינו חלקי ל- I_A

- זה אינו אומר ש- R מכיל את I_A ...
- זה גם אינו אומר ש- R היא קבוצה זרה ל- I_A ...

R אינו חלקי ל- I_A פירושו : לא נכון שכל איבר של R הוא איבר של I_A .

במלים אחרות, **קיים לפחות איבר אחד** של R שאינו ב- I_A .

יהי אפוא (a,b) איבר כזה : $(a,b) \in R$, $(a,b) \notin I_A$.

במלים אחרות : $(a,b) \in R$, $a \neq b$.

מכיון ש- R סימטרי, גם $(b,a) \in R$.

מכיון ש- R טרנזיטיבי, מתוך $(b,a) \in R$ וגם $(a,b) \in R$ נקבל $(a,a) \in R$,

ובדומה מכיון ש- $(a,b) \in R$ וגם $(b,a) \in R$ נקבל $(b,b) \in R$.

יהי c האיבר השלישי של $A = \{1,2,3\}$ השונה מ- a ומ- b .

נפריד את מקרה ב' לשלוש אפשרויות.

אפשרות ב1 : ארבעת הזוגות שרשמנו זה עתה הם כל אברי R:

$R = \{(a,b)\ ,(b,a)\ ,(a,a)\ ,(b,b)\}$

זהו יחס שח"ל בעל 4 איברים.

אפשרות ב2: $R = \{(a,b)\ ,(b,a)\ ,(a,a)\ ,(b,b)\ ,(c,c)\}$

זהו יחס שח"ל (למעשה יחס שקילות) בעל 5 איברים.

אפשרות ב3:

פרט לזוגות (b,b), (a,a), (b,a), (a,b) יש ב- R עוד איבר (או איברים), שאינם ב- I_A .

משמע **לפחות** אחד מהזוגות הבאים שייך ל- R : (c,b), (b,c), (c,a), (a,c) .

בעזרת סימטריות וטרנזיטיביות R קל לראות שאם **אחד** מארבעת הזוגות האלה שייך ל- R, אז **ארבעתם** שייכים ל- R, וגם $(c,c) \in R$.

במלים אחרות, אפשרות זו פירושה $R = A \times A$, ולכן $| R | = 9$.

מיצינו את כל המקרים האפשריים. קיבלנו שיחס שח"ל מעל $A = \{1,2,3\}$ יכול להיות בעל 0, 1, 2, 3, 4, 5, או 9 איברים, ואין אפשרויות אחרות.

תשובה 3

א. R **רפלקסיבי**: לכל $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, n מתחלק בעצמו ללא שארית, כלומר $(n,n) \in R$.

R **אינו סימטרי**: למשל $(2,1) \in R$ אך $(1,2) \notin R$.

מכיון ש- R אינו סימטרי, הוא **אינו** יחס שקילות.

R הוא **אנטי-סימטרי**: לכל $m,n \in \mathbf{N} - \{0\}$, אם m מתחלק ב- n וגם n מתחלק ב- m

אז $n = m$ (תכונה ידועה. אפשר להוכיח אותה למשל מתוך כך שאם m מתחלק ב- n אז $n \le m$, והיחס $\le$ הוא אנטי-סימטרי).

שימו לב ש**מתוך כך ש- R אנטי-סימטרי לא נובע שהוא אינו סימטרי !**

ראו דוגמאות בעניין זה בשאלון רב-ברירה בנושא יחסים, באתר הקורס.

R **טרנזיטיבי**: אם m מתחלק ב- n , משמע $m = n \cdot a$ עבור a טבעי חיובי כלשהו.

אם n מתחלק ב- k משמע $n = k \cdot b$ עבור b טבעי חיובי כלשהו.

ביחד נקבל $m = k \cdot b \cdot a$, לכן m מתחלק ב- k .

ב. הסגור הסימטרי של R הוא $R \cup R^{-1}$.

בסעיף הקודם ראינו ש- R רפלקסיבי, כלומר $I_A \subseteq R$. כעת, $R \subseteq R \cup R^{-1}$

לכן גם $I_A \subseteq R \cup R^{-1}$, כלומר גם $R \cup R^{-1}$ **רפלקסיבי** (ובקיצור: לפי שאלה 2א בממ"ן זה...).

$R \cup R^{-1}$ **סימטרי** לפי שאלה 2.23 בעמ' 50 בספר הלימוד.

$R \cup R^{-1}$ **אינו** אנטי-סימטרי, כי $(1,2)$ וגם $(2,1)$ שייכים אליו, ו- $2 \neq 1$.

$R \cup R^{-1}$ **אינו** טרנזיטיבי: למשל $(2,1) \in R \cup R^{-1}$, $(1,3) \in R \cup R^{-1}$ (כי $(3,1) \in R$),

אך $(2,3) \notin R \cup R^{-1}$.

ג. מהגדרת S ומתכונות ידועות של כפל במספרים ממשיים, $(x,y)\in S$ אם"ם x,y בעלי אותו סימן (שניהם חיוביים או שניהם שליליים). נחלק אפוא את הממשיים השונים מאפס לשתי מחלקות: החיוביים והשליליים. כאמור, $(x,y)\in S$ **אם"ם** x,y **שייכים לאותה מחלקה** של החלוקה הנ"ל.

כעת, לפי משפט 2.19 בעמ' 61 בספר, S הוא יחס שקילות, המתאים לחלוקה זו !

לכן הוא **רפלקסיבי , סימטרי וטרנזיטיבי**.

שימו לב שלא בדקנו את 3 התכונות המאפיינות יחס שקילות (אפשר בהחלט להוכיח את הטענה על ידי בדיקה כזו) , אלא הוכחנו שזהו יחס שקילות ע"י כך שמצאנו את החלוקה המתאימה, והראינו שמתקיימים תנאי משפט 2.19 . **זוהי דרך לגיטימית לגמרי.**

לבסוף, S **אינו** אנטי-סימטרי כי $(1,2)\in S$, $(2,1)\in S$ ו- $2 \neq 1$.

תשובה 4

א. **לא נכון**. דוגמא: היחס $R=\{(1,2)\}$ מעל $A=\{1,2\}$.

R טרנזיטיבי (מדוע?) , לכן $R=t(R)$, ויש ב- R רק זוג סדור אחד.

ב. **לא נכון**. דוגמא: יהי $R=\{(1,2),(2,3)\}$ מעל קבוצת הטבעיים $\mathbf{N}$.

R אינו ריק ואינו טרנזיטיבי.

הסגור הטרנזיטיבי שלו הוא $t(R)=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$ **(מדוע?)** ,

והוא מכיל רק 3 זוגות סדורים.

תשובה 5

הטענה אינה נכונה. דוגמא נגדית: תהי $A=\{1,2,3\}$ ויהי $R=\begin{pmatrix}1&2&3&1&2\\1&2&3&2&1\end{pmatrix}$.

R הוא יחס שקילות - זהו יחס השקילות המתקבל מהחלוקה הבאה של A: $\{\{1,2\},\{3\}\}$.

ממנו נקבל $R^*=\begin{pmatrix}1&2&3&1&3&2&3\\1&2&3&3&1&3&2\end{pmatrix}$.

יחס זה אינו יחס שקילות כי הוא אינו טרנזיטיבי (הראו זאת!).

איתי הראבן