לוגיקה

פסוק: ביטוי שיכול לקבל אחד מבין שני ערכים: אמת/שקר - T/F

דוגמאות לפסוקים:
א. $3 = 2+1$ פסוק אמת
ב. $4 = 7+1$ פסוק שקר
ג. לא ירד גשם
ד. היום יום שישי
ה. הילד רעב או צמא
ו. הילד גבוה ורזה
ז. אם תלמיד תצליח במבחן

דוגמאות לא פסוקים:
א. $1+2$
ב. מה השעה?
ג. שלום!
ד. $x-5 = 11$

שים פסוקים שיש צורך בקונטקסט לדוגמא פסוק ה

קשרים לוגיים

כל פסוק מורכב מפסוקים בסיסיים המחוברים ע"י קשרים לוגיים

דוגמא: $\underbrace{\text{הילד רעב}}_{p}$ **או** $\underbrace{\text{צמא}}_{q}$
p = הילד רעב, q = הילד צמא
$p \vee q$ — או

$\underbrace{\text{הילד גבוה}}_{p}$ **ו** $\underbrace{\text{רזה}}_{q}$
p = הילד גבוה, q = הילד רזה
$p \wedge q$ — ו

לא $\underbrace{\text{ירד גשם}}_{p}$
$\overline{p}$ — לא

אם $\underbrace{\text{תלמד}}_{p}$ $\underbrace{\text{תצליח במבחן}}_{q}$
p = אתה תלמד, q = תצליח במבחן
$p \to q$ — אם... אז

מספר טבעי הוא זוגי **אם ורק אם** הריבוע שלו זוגי
p = מספר טבעי זוגי, q = n^2 בריבוע זוגי
$p \leftrightarrow q$ — אם ורק אם

ערך האמת של כל פסוק תלוי בערך האמת של כל הפסוקים הבסיסיים שמרכיבים אותו

p	$\neg p$
T	F
F	T

טבלת אמת "לא": ($\neg$)

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

טבלת אמת "או": ($\vee$)
inclusive

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

טבלת אמת "ו": ($\wedge$)

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

טבלת אמת "אם ורק אם": ($\leftrightarrow$)

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

טבלת אמת "אם...אז..": ($\to$)

תרגיל: לכתוב טבלת אמת ל: $p \leftrightarrow \neg(q \to \neg r)$

p	q	r	$\neg r$	$(q \to \neg r)$	$\neg(q \to \neg r)$	$p \leftrightarrow \neg(q \to \neg r)$
T	T	T	F	F	T	T
T	T	F	T	T	F	F
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	T	F	T	F	T
F	F	F	T	T	F	T

$(\neg p \vee (q \wedge r)) \rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

סעיף: לכתוב כל, אלא ל:

p	q	r	$\neg p$	$q \wedge r$	$\neg p \vee (p \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$(\neg p \vee (q \wedge r)) \rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
T	T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	F	T	F	T	F	F
F	F	F	T	F	T	F	F	F	F

תרגיל: לכתוב טבלת אמת ל: $(\neg p\vee(q\wedge r))\to((p\vee q)\wedge(p\vee r))$

p	q	r	$\neg p$	$q\wedge r$	$\neg p\vee(p\wedge r)$	$p\vee q$	$p\vee r$	$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$	$(\neg p\vee(q\vee r))\to((p\vee q)\wedge(p\vee r))$
T	T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	F	T	F	T	F	F
F	F	F	T	F	T	F	F	F	F

טאוטולוגיה וסתירה

טאוטולוגיה היא פסוק מורכב שבו עמודה האחרונה בטבלת האמת מופיע רק T.
סתירה היא פסוק מורכב שבו עמודה האחרונה בטבלת האמת מופיע רק F.

דוגמא לטאוטולוגיה: $p\vee\neg p$

תרגיל: הוכיחו כי: $\neg(p\wedge q)\vee q$ טאוטולוגיה ו $(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$ סתירה.

p	q	$p\wedge q$	$\cancel{(p\wedge q)\vee q}$ $\neg(p\wedge q)$	$\neg(p\wedge q)\vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\vee q$	$\neg p\wedge\neg q$	$(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	F

T F T
F F F
T T T
T T T

שקילויות

שני פסוקים הם שקולים אם יש להם אותה טבלת אמת.

לדוגמא: $p\to q \underset{\text{שקול}}{\equiv} \neg p\vee q$

p	q	$p\to q$	$\neg p$	$\neg p\vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

הוכחה: $p\to q\equiv\neg p\vee q$

תרגיל: להוכיח ש: $(r\to p)\wedge(r\to q)\equiv r\to(p\wedge q)$

p	q	r	$r\to p$	$r\to q$	$(r\to p)\wedge(r\to q)$	$p\wedge q$	$r\to(p\wedge q)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T	F	T
F	T	T	F	F	F	F	F
F	T	F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	T	T	T	F	T

הוכחה: $(r\to p)\wedge(r\to q)\equiv r\to(p\wedge q)$

חוקים לוגיים

1. $p\vee\neg p\equiv T$

$p\wedge\neg p\equiv F$

2. $p\vee T\equiv T$

$p\wedge F\equiv F$

$p\vee F\equiv p$

$p\wedge T\equiv p$

3. שלילה כפולה

$\neg(\neg p)\equiv p$

4. חוק החילוף:

$p\vee q\equiv q\vee p$

$p\wedge q\equiv q\wedge p$

5. חוק הקיבוץ:

$(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$

$(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$

6. חוק הפילוג:

$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

7. חוק דה מורגן:

$\neg(p\wedge q)\equiv\neg p\vee\neg q$

$\neg(p\vee q)\equiv\neg p\wedge\neg q$

9. חוק השימוש:

$p\to q\equiv\neg p\vee q$

contrapositive:

$p\to q\equiv\neg q\to\neg p$

10. חץ כפול:

$p\leftrightarrow q\equiv(p\to q)\wedge(q\to p)$

דוגמאות:

$(r \to p) \land (r \to q) \equiv (r \to (p \land q))$ (צריך להוכיח)

$(r \to p) \land (r \to q) \equiv (\neg r \lor p) \land (\neg r \lor q)$ חוק 8

$\equiv \neg r \lor (p \land q)$ חוק 6

$\equiv r \to p \land q$ חוק 8

צריך להוכיח: $(p \to r) \land (q \to r) \equiv (p \lor q) \to r$

$(p \to r) \land (q \to r) \equiv (\neg p \lor r) \land (\neg q \lor r)$ חוק 8

$\equiv (\neg p \land \neg q) \lor r$ חוק 6

$\equiv \neg (p \lor q) \lor r$ חוק 7

$\equiv (p \lor q) \to r$ חוק 8