תשובה 1

א. בהתאם להדרכה נתחיל במציאת x,y המקיימים $f(x,y)=1$.

לא קשה לגלות כאלה: $f(-1,-4) = -15+16 = 1$.

זה מוביל אותנו לתשובה לסעיף כולו: יהי $n \in \mathbf{Z}$. נחשב:

$f(-n,-4n) = -15n+16n = n$.

מצאנו מקור לכל $n \in \mathbf{Z}$, משמע הפונקציה היא על $\mathbf{Z}$.

ב. $g(g(X)) = (X \oplus K) \oplus K$

לפי שאלה 1.22ב (אסוציאטיביות ההפרש הסימטרי) בעמ' 27 בספר

$= X \oplus (K \oplus K)$

לפי טענה נוספת באותו סעיף שם (הפרש סימטרי של קבוצה עם עצמה)

$= X \oplus \varnothing$

ולפי טענה נוספת שם (הפרש סימטרי עם קבוצה ריקה)

$= X$

ג. נוכיח כללית שעבור קבוצה כלשהי A, אם פונקציה $g : A \to A$ מקיימת:

לכל $x \in A$, $g(g(x)) = x$

אז g חד-חד-ערכית ועל.

הוכחת חד-חד-ערכיות:

יהיו $x,y \in A$, המקיימים $g(x) = g(y)$. עלינו להראות ש- $x = y$.

מכיוון ש- g היא פונקציה, ניתן להפעיל g בשני האגפים של השוויון $g(x) = g(y)$.

נקבל $g(g(x)) = g(g(y))$. משמע $x = y$.

הוכחת על:

יהי $x \in A$. מכיוון ש- $g(g(x)) = x$, הרי קיים איבר ב- A (האיבר $g(x)$)

שתמונתו היא x.

תשובה 2

א. כן. נשים לב שאם $Y \subseteq X - B$ אז $Y - B = Y$ (מדוע?)

לכן לכל $Y \in P(X-B)$ מתקיים $f(Y) = Y$.

לכן לכל $Y \in P(X-B)$ יש מקור תחת f: המקור הוא Y עצמו (ייתכנו כמובן עוד מקורות, אבל מספיק שמצאנו אחד).

ב. בעזרת שאלה 3 בממ"ן 11, X,Y הם באותה מחלקת שקילות אם ורק אם $X-B=Y-B$.
במלים אחרות X,Y הם באותה מחלקת שקילות אם ורק אם $f(X)=f(Y)$, כאשר f היא זו שהוגדרה בתחילת השאלה הנוכחית.
לפי הקובץ "יחס שקילות המושרה על ידי פונקציה" בתוספת התוצאה שקיבלנו בסעיף א כאן, מספר מחלקות השקילות הוא כגודלה של $P(X-B)$.
גודל זה הוא 2^{n-k} (מדוע?)

תשובה 3

א. דוגמא נגדית לטענה של דינה: $A=\{1,2\}$, $R=A\times A$.
R טרנזיטיבי אבל אין מעל A יחס סדר-חלקי שמכיל אותו (מדוע?)

ב. דוגמא נגדית לטענה של שמעון: $A=\{1,2,3\}$, $R=\{(1,2),\ (2,3),(3,1)\}$.
R אנטי-סימטרי אבל אין מעל A יחס סדר-חלקי שמכיל אותו (מדוע?)

ג. דוגמא נגדית לטענה של סימה: $A=\{1,2,3\}$, $R=I_A\cup\{(1,3),\ (2,3)\}$.
R הוא סדר-חלקי שאינו מלא (מדוע?) ו- 3 הוא איבר גדול ביותר.

תשובה 4

בדיקה עבור $n=0$: $0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 0+1+4+9+16+25 = 55$
ואכן $55=12\cdot 4+7$.

מעבר: נניח שהטענה נכונה עבור n, כלומר נניח ש- a_n נותן שארית 7 בחילוק ב- 12,
ונוכיח שגם a_{n+1} נותן שארית 7 בחילוק ב- 12.
נחשב:

$$a_{n+1}=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2+(n+5)^2+(n+6)^2$$
$$= a_n+(n+6)^2-n^2 = a_n+12n+36$$

$12n+36=12(n+3)$ מתחלק ב- 12 ללא שארית, לכן $a_n+12n+36$ נותן בחילוק ב- 12 אותה שארית כמו a_n . לפי הנחת האינדוקציה שארית זו היא 7.
הראינו אפוא ש- a_{n+1} נותן שארית 7 בחילוק ב- 12.

מתוך הבדיקה והמעבר, לפי עקרון האינדוקציה בטבעיים, הטענה נכונה לכל n טבעי.

איתי הראבן