

# מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1 ו-2

קומבינטוריקה; חישובי הסתברויות קומבינטוריים

מספר השאלות: 4 משקל המטלה: 5 נקודות

סמסטר: 2013 ב מועד אחרון להגשה: 24.3.2013

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
  - שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

## שאלה 1 (28 נקודות)

בכיתה בת 20 תלמידים - 10 בנות ו- 10 בנים.

7 נק' א. מסדרים באקראי את התלמידים בשורה.

מהי ההסתברות שהבנות תעמודנה ב- 10 המקומות השמאליים בשורה?

7 נק' ב. בוחרים באקראי (לפי סדר) ועם החזרה 15 תלמידים מהכיתה.

מהי ההסתברות שבדיוק ב- 5 מהבחירות ייבחר למדגם אחד מהבנים?

7 נק' ג. בוחרים באקראי (לפי סדר) ועם החזרה 15 תלמידים מהכיתה.

מהי ההסתברות ש- 5 הנבחרים הראשונים הם בנים?

7 נק' ד. 20 התלמידים נעמדים במעגל בסדר אקראי.

מהי ההסתברות שייווצר מעגל שבו בדיוק 5 זוגות (נפרדים) של בנות?

הערה: בין כל 2 זוגות חייב להיות לפחות בן אחד שיפריד ביניהם.

## שאלה 2 (18 נקודות)

ק ט ס ט י ט ה י ס

נתונים 9 קלפים עם האותיות:

6 נק' א. מסדרים את הקלפים בשורה באופן אקראי.

מהי ההסתברות שתתקבל המילה "סטטיסטיקה"?

ב. בוחרים באקראי 9 קלפים בזה אחר זה (עם סדר) ועם החזרה.

6 נק' 1. מהי ההסתברות שתתקבל המילה "סטטיסטיקה"?

6 נק' 2. מהי ההסתברות שהאות ט תתקבל 4 פעמים, האות ס – 3 פעמים, והאות י – פעמיים?

### שאלה 3 (26 נקודות)

נתונים 6 ספלים בגדלים שונים ו-6 תחתיות שונות המתאימות לספלים אלו.

כל תחתית מתאימה בדיוק לאחד מ-6 הספלים.

מניחים באקראי את הספלים על התחתיות (ספל אחד על כל תחתית).

- א. (6 נק') מהי ההסתברות שבדיוק ארבעה ספלים יונחו על התחתיות המתאימות להם?  
ב. (6 נק') מהי ההסתברות ששני הספלים הקטנים ביותר יונחו על התחתיות המתאימות להם?  
ג. (6 נק') מהי ההסתברות ששלושת הספלים הקטנים ביותר יונחו על שלוש התחתיות המתאימות לספלים הגדולים ביותר?  
ד. (8 נק') מהי ההסתברות שבדיוק ספל אחד יונח על התחתית המתאימה לו?

### שאלה 4 (28 נקודות)

נתונים 20 בלונים שונים ממוספרים מ-1 עד 20.

- א. מחלקים באופן אקראי את הבלונים לזוגות. אין חשיבות לסדר הזוגות.  
1. (7 נק') מהי ההסתברות שבכל זוג בלונים יהיה בלון שנושא מספר זוגי?  
2. (7 נק') מהי ההסתברות **שבדיוק ב-2 זוגות בלונים** לא יהיה אף בלון הנושא מספר זוגי?  
ב. (7 נק') מסדרים את הבלונים בשורה באופן מקרי.  
מהי ההסתברות שבלון מספר 4 ימוקם בשורה במקום שמאלי יותר מאשר בלון מספר 5 ובלון מספר 6?  
ג. (7 נק') מתוך 20 הבלונים בוחרים באקראי 2 בלונים לכל אחד מ-4 ילדים (בסך-הכל 8 בלונים).  
מהי ההסתברות שכל ילד (מהארבעה) יקבל לפחות בלון אחד הנושא מספר זוגי?

# מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 2 ו-3

דיאגרמת ון וטענות הסתברות בסיסיות; הסתברות מותנית

מספר השאלות: 5 משקל המטלה: 5 נקודות

סמסטר: 2013 ב מועד אחרון להגשה: 14.4.2013

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
  - שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

מנהל מחלקה לאיכות הסביבה בעירייה החליט לבדוק את נכונות תושבי העיר למחזר חומרים שונים:

1. עיתונים;
2. בקבוקי משקה משפחתיים;
3. מיכלי משקה אישיים (בקבוקים קטנים ופחיות);
4. סוללות.

הוא ערך סקר בין תושבי העיר ומצא כי –

כל מי שמוכן למחזר סוללות מוכן גם למחזר מיכלי משקה אישיים;

כל מי שמוכן למחזר מיכלי משקה אישיים מוכן גם למחזר בקבוקי משקה משפחתיים;

59% מהתושבים מוכנים למחזר עיתונים;

10% מהתושבים מוכנים למחזר את כל החומרים ברשימה;

מבין התושבים שמוכנים למחזר סוללות, 50% מוכנים למחזר גם עיתונים;

80% מהתושבים מוכנים למחזר לפחות חומר אחד מהרשימה שלעיל, כאשר רבע מהם מוכנים למחזר רק

עיתונים, שמינית מהם מוכנים למחזר רק בקבוקי משקה משפחתיים והשאר מוכנים למחזר לפחות שני חומרים מהרשימה;

$\frac{1}{3}$  מהתושבים שמוכנים למחזר בדיוק 3 חומרים מהרשימה, לא ממחזרים סוללות.

8) (נק') א. הגדר ארבעה מאורעות מתאימים לבעיה וצייר עבורם דיאגרמת ון מתאימה לבעיה.

רשום הסתברויות בכל שטחי הדיאגרמה.

הסבר בקצרה את דרך חישוב ההסתברויות הרשומות בדיאגרמה ונדא שסכומן הוא 1.

את החישובים נמק באמצעות טענות הסתברות והמאורעות שהגדרת.

בוחרים באקראי אחד מתושבי העיר –

3) (נק') ב. מהי ההסתברות שהתושב הנבחר מוכן למחזר לפחות אחד מהחומרים?

3) (נק') ג. מהי ההסתברות שהתושב הנבחר אינו מוכן למחזר מיכלי משקה אישיים?

3) (נק') ד. אם התושב הנבחר אינו ממחזר לפחות חומר אחד מהרשימה שלעיל,

מהי ההסתברות שהוא מוכן למחזר בדיוק חומר אחד מבין הארבעה שברשימה?

3) (נק') ה. ידוע שהתושב הנבחר ממחזר עיתונים ובקבוקים משפחתיים.

מהי ההסתברות שהוא מוכן למחזר גם סוללות?

## שאלה 2 (32 נקודות)

מטילים 5 קוביות תקינות.

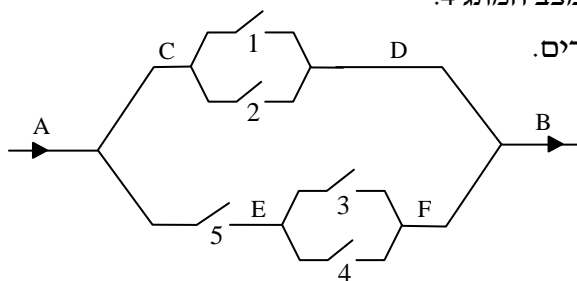
- 8 נק' א. מהי ההסתברות שתתקבלנה בדיוק ארבע תוצאות זוגיות?  
 8 נק' ב. אם התקבלו בדיוק ארבע תוצאות זוגיות,  
 מהי ההסתברות שיש ביניהן בדיוק שתי תוצאות 6?  
 8 נק' ג. מהי ההסתברות שהתוצאה 4 תתקבל לפחות בשתי קוביות?  
 8 נק' ד. אם התוצאה 4 התקבלה לפחות פעמיים,  
 מהי ההסתברות שהיא התקבלה לפחות ארבע פעמים?

## שאלה 3 (24 נקודות)

נתונה המערכת המתוארת באיור. כל אחד ממתגים 1, 3 ו-5 סגור בהסתברות 0.9 (ואז עובר בו זרם).

מצב המתג 1 (2) בלתי-תלוי במצב המתג 3 ובלתי-תלוי במצב המתג 4.

מצב מתג 5 בלתי-תלוי במצב של כל אחד מהמתגים האחרים.



- אם מתג 1 סגור, אז מתג 2 סגור בהסתברות 0.9.  
 אם מתג 3 סגור, אז מתג 4 סגור בהסתברות 0.9.  
 אם מתג 1 פתוח, אז מתג 2 סגור בהסתברות 0.3.  
 אם מתג 3 פתוח, אז מתג 4 סגור בהסתברות 0.3.

- 8 נק' א. מהי ההסתברות שעובר זרם במערכת מנקודה C לנקודה D?  
 8 נק' ב. אם מתג 2 פתוח, מהי ההסתברות שעובר זרם במערכת מנקודה C לנקודה D?  
 8 נק' ג. מהי ההסתברות שעובר זרם במערכת מנקודה A לנקודה B?

## שאלה 4 (14 נקודות)

מטילים  $n$  פעמים מטבע  $(n = 1, 2, \dots)$ , שההסתברות לקבל בו את התוצאה  $H$  היא  $p$  ( $0 < p < 1$ ). נגדיר את המאורעות הבאים:

$A$  = בהטלה הראשונה (מתוך  $n$  ההטלות) מתקבלת התוצאה  $H$ ;

$B_k$  = התוצאה  $H$  מתקבלת  $k$  פעמים ב- $n$  ההטלות, לכל  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

באלו תנאים המאורעות  $A$  ו- $B_k$  בלתי-תלויים זה בזה?  
 הוכח את טענתך.

## שאלה 5 (10 נקודות)

ילד אוסף בהתמדה קלפי-משחק.

נניח שיש 10 סוגים שונים של קלפי-משחק וכי כל קלף שהילד משיג הוא מסוג 1 בהסתברות  $\frac{1}{3}$ , ואחרת, מסוג  $i$  בהסתברות  $\frac{2}{27}$ , לכל  $i = 2, \dots, 10$ . כמו כן, נניח שאין תלות בין סוגי הקלפים שהילד משיג.  
 מהי ההסתברות שהקלף ה-15 שהילד ישיג יהיה מסוג שטרם יש לו כמותו?

# מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 4

משקל המטלה: 5 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 28.4.2013

סמסטר: 2013 ב

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
  - שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

## שאלה 1 (16 נקודות)

מטילים קובייה תקינה 60 פעמים.

יהי  $X$  משתנה מקרי המוגדר על-ידי מספר התוצאות הזוגיות שהתקבלו ב-60 ההטלות.

(8 נק') א. מהי ההסתברות המדויקת ש-  $X > 30$  ?

(8 נק') ב. יהי  $Y$  המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר התוצאות האי-זוגיות שהתקבלו באותן 60 ההטלות.

חשב את  $P\{X^2 + Y^2 = 1,872\}$ .

## שאלה 2 (14 נקודות)

יהי  $X$  משתנה מקרי שערכיו האפשריים הם  $0, 1, \dots, n$ .

בוחרים באקראי מדגם (לא סדור) בגודל  $X$  וללא החזרה מבין המספרים  $1, 2, \dots, n$ .

הראה כי ההסתברות שהמספר 1 יהיה שייך למדגם הנבחר שווה ל-  $\frac{E[X]}{n}$ .

## שאלה 3 (14 נקודות)

לחמישה שחקנים, המסומנים בספרות 1 עד 5, מחלקים באקראי חמישה מספרים שונים (אין חשיבות למספרים המסוימים שהם מקבלים, אלא רק לכך שהם שונים זה מזה). בכל שלב של המשחק, שניים מהשחקנים משווים את המספרים שבידיהם, ובעל המספר הגדול יותר הוא המנצח. תחילה משווים השחקנים 1 ו-2 את מספריהם; המנצח משווה את מספרו לזה של שחקן 3, וכן הלאה.

יהי  $X$  מספר הפעמים ששחקן 1 מנצח.

רשום את פונקציית ההסתברות של  $X$  וחשב את השונות של  $X$ .

#### שאלה 4 (16 נקודות)

(8 נק') א. יהי  $X \sim Po(\lambda)$ , כאשר  $\lambda > 0$ .

חשב את  $E[X!]$ , לכל ערך אפשרי של  $\lambda$ .

(8 נק') ב. יהי  $X \sim NB(r, p)$ , כאשר  $r \geq 2$  ו-  $p > 0$ .

חשב את  $E\left[\frac{1}{X-1}\right]$ .

#### שאלה 5 (16 נקודות)

שני שחקנים, A ו-B, משחקים משחק של הטלת מטבעות. ברשות כל אחד מהם מטבע, שההסתברות לקבל בו H היא  $p$  ( $0 < p < 1$ ). השחקנים מטילים שוב ושוב ובו-זמנית את שני המטבעות שברשותם (כל אחד את המטבע שלו), עד לפעם הראשונה שבה הם מקבלים תוצאות שונות.

(8 נק') א. מהן תוחלת ושונות מספר השלבים במשחק?

(8 נק') ב. נניח שהמשחק הסתיים לאחר 5 שלבים בדיוק.

מהי ההסתברות שבמהלך המשחק היו בדיוק 2 שלבים שבהם התוצאה היתה (H,H), כלומר, ששני השחקנים קיבלו בו-זמנית את התוצאה H?

#### שאלה 6 (24 נקודות)

א. מספר ההרשמות המאושרות לקורס מסוים, שבוע לפני מועד פתיחתו, עומד על 30.

כמו כן, יש 30 הרשמות מותנות, אשר כל אחת מהן תאושר, עד למועד פתיחת הקורס, בהסתברות 0.35.

יהי  $X$  מספר ההרשמות הכולל שיאושרו עד לפתיחת הקורס.

(8 נק') 1. רשום את פונקציית ההסתברות של  $X$ .

כלומר, רשום ביטוי ל-  $P\{X = i\}$  וציין מהם ערכי  $i$  האפשריים.

(8 נק') 2. מהן התוחלת והשונות של  $X$ ?

(8 נק') ב. לקורס אחר נרשמו 1,200 אנשים.

ההרשמה של כל אחד מהם תאושר בהסתברות 0.02.

חשב קירוב להסתברות שמספר ההרשמות שיאושרו יהיה בדיוק 25.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 5

משקל המטלה: 5 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 12.5.2013

2013 ב

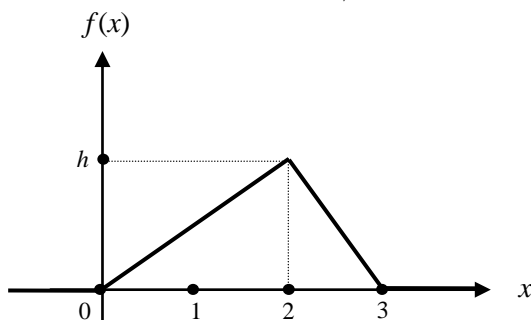
סמסטר:

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
  - שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (30 נקודות)

באיור שלהלן נתונה פונקציית הצפיפות  $f(x)$  של המשתנה המקרי  $X$ :



6 נק') א. חשב את הערך של  $h$ .

6 נק') ב. כתוב את ערכי פונקציית הצפיפות לכל  $x$  ממשי.

6 נק') ג. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של  $X$ .

6 נק') ד. חשב את  $P\{X > 1 \mid X < 2\}$ .

6 נק') ה. חשב את התוחלת של  $X$ .

שאלה 2 (18 נקודות)

יהי  $Z$  משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי, ויהי  $Y = Z^2$ .

6 נק') א. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של  $Y$ , כפונקציה של  $\Phi$  (שהיא פונקציית

ההתפלגות המצטברת של  $Z$ ).

6 נק') ב. מצא את פונקציית הצפיפות של  $Y$ .

כתוב את הפונקציה באופן מדויק.

6 נק') ג. נגדיר את המשתנה המקרי  $W$  על-ידי  $W = aY$ , עבור  $a > 0$ .

מצא את פונקציית הצפיפות של  $W$ .

### שאלה 3 (25 נקודות)

משקל גביע גבינה לבנה מתוצרת מסוימת מתפלג נורמלית עם תוחלת  $\mu$  וסטיית-תקן של 6 גרם. נניח כי ידוע, שההסתברות שגביע גבינה ישקול יותר מ- 267.08 גרם היא 0.119. כמו כן, נניח כי אין תלות בין משקלים של גביעי גבינה שונים.

- (5 נק') א. חשב את  $\mu$ .
- (5 נק') ב. החברה, המייצרת את גביעי הגבינה, מתחייבת שלכל היותר 2.5% מהגביעים ישקלו מתחת ל- 250 גרם. האם היא עומדת בהתחייבותה?
- (5 נק') ג. מהו המשקל ש- 25% מהגביעים שוקלים פחות ממנו?
- (5 נק') ד. אם נתון שגביע מסוים שוקל מתחת ל- 265 גרם, מהי ההסתברות שמשקלו גבוה מ- 255 גרם?
- (5 נק') ה. נתונים 30 גביעי גבינה מקריים.
- אם שוקלים את הגביעים בזה אחר זה, מהי ההסתברות שהגביע האחרון שיישקל, דהיינו הגביע ה- 30, יהיה הגביע העשירי שמשקלו נמוך מ- 257 גרם?
- הערה:** בצע אינטרפולציה לינארית בחישוביך, היכן שהיא נדרשת.

### שאלה 4 (11 נקודות)

יהי  $X$  משתנה מקרי אחיד (רציף) על הקטע  $(-2, 3)$ .

- (5 נק') א. חשב את  $P\{X^2 - 4 > 0 \mid X > 0\}$ .
- (6 נק') ב. חשב את  $E[|X^2 - 4|]$ .

### שאלה 5 (16 נקודות)

לאורך החיים (בשעות) של נורה מסוג מסוים יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר  $\frac{1}{500}$ . אין תלות בין נורות שונות מאותו הסוג.

- (10 נק') א. נורה מסוימת דולקת כבר 250 שעות –
1. מהי ההסתברות שתדלוק עוד 250 שעות לפחות?
  2. מהן תוחלת ושונות אורך החיים של נורה זו בהינתן המידע הנתון?
- שים לב, שידוע לך שהנורה דולקת כבר 250 שעות.
- (6 נק') ב. במנורה מסוימת מורכבות 3 נורות מסוג זה ונניח שלא מחליפים נורה שנשרפת. מהי ההסתברות שהמנורה תאיר (באור מלא או חלקי) לפחות 700 שעות?



# מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 6

משקל המטלה: 5 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: 26.5.2013

סמסטר: 2013 ב

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
  - שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

## שאלה 1 (14 נקודות)

בוחרים באקראי משלחת של 5 מדענים מתוך קבוצה של 10 מדענים המורכבת מ-3 כימאים, 5 ביולוגים ו-2 פיזיקאים.

יהיו  $X$  = מספר הביולוגים במשלחת;

$Y$  = מספר הפיזיקאים במשלחת.

(8 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .

רשום אותה באופן מדויק. כלומר, רשום את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.

(6 נק') ב. חשב את  $P\{Y = 1 \mid X = 3\}$ .

## שאלה 2 (26 נקודות)

בארון 5 חליפות בגדים: אדומה, ירוקה, צהובה, כחולה ושחורה.

כל חליפה כוללת חולצה ומכנסיים (באותו הצבע).

בוחרים באקראי מהארון 2 חולצות ו-2 זוגות מכנסיים (לאו דווקא השייכים לאותן החליפות).

נגדיר את המשתנים המקריים:  $X$  = מספר החליפות השלמות שנבחרו

$Y$  = מספר הפריטים האדומים שנבחרו

(14 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .

(4 נק') ב. האם המשתנים המקריים  $X$  ו- $Y$  בלתי-תלויים? נמק את תשובתך.

(8 נק') ג. מתוך 4 הפריטים שנבחרו באקראי מהארון, בוחרים באקראי חולצה אחת וזוג מכנסיים אחד.

אם ידוע ש- $Y = 2$  עבור 4 הפריטים שנבחרו, מהי ההסתברות ששני הפריטים שנבחרו

מתוכם מהווים חליפה, כלומר הם מאותו הצבע?

### שאלה 3 (24 נקודות)

ועדה עירונית מתכנסת בכל פעם שעליה להחליט כיצד לנהוג במבנה בלתי-חוקי שהוקם בשטח העיר. בדיון הראשון שנערך בנוגע לכל מבנה כזה – ההסתברות שהוועדה תורה על הריסתו היא 0.5; ההסתברות שתקבע מועד לדיון שני בעניינו היא 0.4; וההסתברות שתוציא לו היתר בנייה היא 0.1. אם בדיון הראשון הוועדה מורה על הריסת מבנה, בעליו מגיש ערעור על ההחלטה בהסתברות 0.7. ההסתברות שהערעור יתקבל והמבנה יקבל היתר היא 0.4; ההסתברות שהערעור יידחה והמבנה ייהרס היא 0.6. אם בדיון הראשון הוועדה קובעת מועד לדיון שני בעניינו של מבנה, ההסתברות שבסופו של דבר יינתן לו היתר היא 0.8, ואחרת – הוא ייהרס.

**הערה:** שימו לב, שבסופו של דבר, כל מבנה לא-חוקי מקבל היתר או נהרס.

- 5 נק' א. מהי ההסתברות שמבנה בלתי-חוקי יקבל היתר?  
ב. הוועדה דנה בעניינם של 20 מבנים בלתי-חוקיים. בהנחה שאין תלות בין החלטותיה לגבי מבנים שונים –
- 5 נק' 1. מהי ההסתברות שהמבנה החמישה-עשר, שהוועדה תדון בעניינו, יהיה השני (מתוך ה-15) שיקבל היתר עוד בדיון הראשון בעניינו?  
7 נק' 2. אם בסופו של דבר 14 מ-20 המבנים קיבלו היתר, מהי ההסתברות ש-3 מהם קיבלו את ההיתר בדיון הראשון בעניינם?  
7 נק' 3. אם ידוע שרק 3 מ-20 מבנים אלו קיבלו היתר בדיון הראשון בעניינם, מהי פונקציית ההסתברות של מספר המבנים הנוספים (מתוך ה-20) שקיבלו היתר בסופו של דבר (כלומר, לאחר הדיון הראשון)?

### שאלה 4 (36 נקודות)

- במשרד כלשהו עובדים 5 פקידים. מספר הודעות הדוא"ל שמקבל כל פקיד במהלך יום אחד הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 10. נניח שאין תלות בין מספרי ההודעות שמקבלים פקידים שונים, ושכל הודעה מגיעה בדיוק לאחד מהם. בוחרים יום מקרי בשבוע –
- 6 נק' א. מהי ההסתברות שבדיוק שניים מהפקידים (מתוך ה-5) יקבלו בדיוק 10 הודעות כל אחד?  
6 נק' ב. מהי ההסתברות שיתקבלו במשרד בסה"כ 45 הודעות (אצל כל 5 הפקידים יחד)?  
ג. אם התקבלו במשרד בסה"כ 45 הודעות –
- 6 נק' 1. מהי ההסתברות שרמי (אחד מן הפקידים) קיבל בדיוק 9 מתוכם?  
6 נק' 2. מהי ההסתברות שכל אחד מהפקידים קיבל בדיוק 9 הודעות?  
6 נק' ד. ההסתברות שכל הודעה שמתקבלת במשרד תגיע עם בקשה לאישור-קריאה היא 0.1.  
מהי ההסתברות שבמשך היום תגענה בסה"כ 6 הודעות עם אישורי-קריאה?  
6 נק' ה. מהי ההסתברות שהמספר המינימלי של הודעות שיתקבלו אצל פקיד (במשך היום) יהיה 2?

# מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20425 – הסתברות לתלמידי מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

משקל המטלה: 5 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 9.6.2013

סמסטר: 2013 ב

שימו לב: קיימות שתי חלופות להגשת מטלות –

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
  - שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10 נקודות)

ק ט ס ט י ט ה י ס

נתונים 9 קלפים עם האותיות:

בוחרים באקראי מדגם של 9 קלפים בזה אחר זה ועם החזרה (מתוך 9 הקלפים הנתונים).

יהי  $X$  מספר קלפי ה-ט שנבחרו למדגם;

ויהי  $Y$  מספר קלפי ה-ס שנבחרו למדגם.

מהן  $E[Y | X = x]$  ו-  $\text{Var}(Y | X = x)$  לכל  $x = 0, 1, \dots, 9$ ?

שאלה 2 (20 נקודות)

מספר הקונים המגיעים ביום ראשון לסניף מסוים של סופרמרקט הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1,000.

הקונה ה- $i$ , שמגיע ביום ראשון לסניף זה ממחזור  $X_i$  בקבוקים, לכל  $i = 1, 2, \dots$ , כאשר המשתנים המקריים  $X_i$ , מוגדרים על-ידי  $X_i = Y_i - 1$ , עבור  $Y_i$ -ים שהתפלגותם גיאומטרית עם הפרמטר 0.2.

כמו כן, נניח שאין תלות בין מספר הבקבוקים שקונים שונים ממחזרים, וגם כי אין תלות בין מספר הקונים שמגיעים לסניף ביום ראשון למספר הבקבוקים שכל אחד מהם ממחזר.

(6 נק') א. חשב את תוחלת מספר הבקבוקים הממוחזרים ביום ראשון.

(6 נק') ב. חשב את שונות מספר הבקבוקים הממוחזרים ביום ראשון.

(8 נק') ג. מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים של מספר הבקבוקים הממוחזרים ביום ראשון;

חשב באמצעות הפונקציה שמצאת את תוחלת של מספר הבקבוקים הממוחזרים ביום

ראשון, והשווה את התוצאה שקיבלת לתוצאת סעיף א.

רמז: העזר בדוגמה 6 בספר הקורס.

### שאלה 3 (20 נקודות)

נתונה קבוצת המספרים  $\{1, 2, \dots, 10\}$ .  
 בוחרים מהקבוצה, בזה אחר זה, באופן מקרי ועם החזרה, 12 מספרים.  
 יהי  $X$  מספר המספרים בקבוצה  $\{1, 2, \dots, 10\}$  שנבחרו לפחות פעם אחת.  
 (לדוגמה, אם נבחרו המספרים: 1, 4, 8, 7, 9, 8, 7, 4, 3, 1, 2, 10 אז  $X = 8$ ).

- 6 נק' א. חשב את התוחלת של  $X$ .
- 8 נק' ב. חשב את השונות של  $X$ .
- 6 נק' ג. יהי  $Y$  מספר המספרים שלא נבחרו בכלל ב-12 הבחירות.  
 חשב את השונות של  $Y$ .

### שאלה 4 (24 נקודות)

נניח כי  $X \sim Geo(\frac{2}{3})$  וכי  $Y | X = i \sim NB(i, \frac{2}{3})$ .  
 8 נק' א. חשב את  $E[Y]$  ואת  $Var(Y)$  באמצעות נוסחאות התוחלת המותנית והשונות המותנית.  
 8 נק' ב. חשב את מקדם המתאם בין  $X$  ל- $Y$ .  
 העזר בתרגיל 26 בעמוד 430 בספר הקורס.  
 8 נק' ג. חשב את  $E[X | Y = j]$ .  
**רמז:** מצא תחילה את פונקציית ההסתברות המותנית של  $X$  בהינתן  $Y = j$ ;  
 אחר-כך, בחישוב התוחלת המותנית, שים לב שהסכום שמתקבל מייצג תוחלת של  
 משתנה מקרי בינומי שערכיו מוזזים ב-1.

### שאלה 5 (11 נקודות)

משחק מורכב מ- $n$  שלבים בלתי-תלויים.  
 שלב  $i$  של המשחק מסתיים בהצלחה בהסתברות  $\frac{n-i}{n}$ , לכל  $i = 1, 2, \dots, n$ , ואחרת – בכשלון.  
 5 נק' א. מהי תוחלת מספר ההצלחות במשחק?  
 6 נק' ב. הראה כי שונות מספר ההצלחות במשחק היא  $\frac{n^2-1}{6n}$ .

### שאלה 6 (15 נקודות)

נתונה הפונקציה יוצרת המומנטים:  

$$M_X(t) = \left( \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^n e^{ti} \right)^r, \quad \text{ממשי } t$$
  
 5 נק' א. הגדר משתנה מקרי  $X$  שזוהי הפונקציה יוצרת המומנטים שלו.  
 5 נק' ב. חשב (בכל דרך שתבחר) את התוחלת ואת השונות של  $X$ .  
 5 נק' ג. חשב את  $P\{X = 1\}$ .