## תשובה 1

שרשור כזה אינו בהכרח מסלול: לפי הגדרת מסלול, אסור שקשת תופיע יותר מפעם אחת במסלול. אם יש קשת שנמצאת הן במסלול $P_{u\to v}$ והן במסלול $P_{v\to w}$, קשת זו מופיעה פעמיים בשרשור שלהם, כלומר השרשור לא יהיה מסלול.

## תשובה 2

א. יהיו $A,B$ צמתים שונים זה מזה ב- $G$, נראה שיש ביניהם מסלול.

אם יש קשת ביניהם – סיימנו.

אם אין קשת ביניהם, החיתוך שלהם ריק או בעל שני אברים.

אם $A\cap B=\varnothing$, אז מחוץ ל- $A\cup B$ יש בדיוק אבר אחד. נקרא לו $x$.

נצרף ל- $x$ אבר אחד של $A$ ואבר אחד של $B$.

קיבלנו קבוצה בת 3 אברים (מדוע הם שונים זה מזה?), שהיא **שכן משותף** של $A,B$ (מדוע?)

יש אפוא מסלול באורך 2 בין $A$ ל- $B$.

אם $|A\cap B|=2$, אז מחוץ ל- $A\cup B$ יש בדיוק 4 אברים. נבחר אחד מהם ונקרא לו $x$.

נצרף ל- $x$ את האבר של $A$ שאינו ב- $B$ ואת האבר של $B$ שאינו ב- $A$.

קיבלנו קבוצה בת 3 אברים שהיא שכן משותף של $A,B$ (מדוע?)

יש אפוא מסלול באורך 2 בין $A$ ל- $B$.

ב. $\binom{7}{3}=35$

ג. $3\cdot\binom{4}{2}=18$

ד. מספר הקשתות הוא חצי מסכום הדרגות: $(35\cdot 18)/2=315$

ה. לכל הצמתים ב- $G$ דרגה זוגית, לכן $G$ הוא אוילרי.

ו. הדרגה של כל צומת היא יותר מחצי מספר הצמתים. לפי משפט דירק - הגרף המילטוני.

## תשובה 3

הגרף הוא דו צדדי, כאשר צד אחד הוא קבוצת האותיות והצד השני הוא קבוצת המספרים.

קבוצת השכנים של הקבוצה $\{a,b,c,d,e\}$ היא $\{1,2,3,4\}$.

מצאנו קבוצת צמתים בצד אחד של הגרף הדו-צדדי, שמספר שכניה קטן ממש ממספר אבריה.

לפי משפט Hall (או מסקנה 4.8), אין בגרף זה זיווג מושלם.

## תשובה 4

לפי מסקנה 5.4 בעמ' 54 בספר, מספר הקשתות בגרף מישורי על 11 צמתים הוא לכל היותר $33-6=27$. בפרט, מספר הקשתות של $G$ הוא לכל היותר 27.

בגרף המלא $K_{11}$ יש $\binom{11}{2}=55$ קשתות.

לכן ב- $\bar{G}$ יש לפחות $55-27=28$ קשתות.

מכאן, לפי האמור בתחילת התשובה, $\bar{G}$ אינו מישורי.

## תשובה 5

א. אילו היו שני צמתים כאלה, הרי מהעובדה שיש להם אותו צבע בצביעה של $G$ נובע שהם אינם שכנים ב- $G$, ומהעובדה שיש להם אותו צבע בצביעה של $\bar{G}$ נובע שהם אינם שכנים ב- $\bar{G}$.
זה לא ייתכן: כל שני צמתים של $G$, או שהם שכנים ב- $G$ או שהם שכנים ב- $\bar{G}$.
לכן אין שני צמתים כאלה.

האמירה שאין שני צמתים כאלה פירושה בדיוק שהפונקציה של $V$ ל- $A\times B$ שהוגדרה בסעיף א' של השאלה היא חד-חד-ערכית.

ב. התשובה היא (3): $\chi(G)\cdot\chi(\bar{G})\geq n$. השלימו בעצמכם את הנימוק.

איתי הראבן