פתרון שאלות בממ"ן 12 סמסטר 2017א

שאלה 2

א. **ההוכחה לא טובה**. D מקבלת את $<M>$ אם M לא מקבלת את $<M>^R$. D דוחה את $<M>$ אם M כן מקבלת את $<M>^R$. זה לא אומר ש-D שונה מ-M. ייתכן ששתיהן מקבלות את $<M>$ ולא מקבלות את $<M>^R$, או להפך (שתיהן דוחות את $<M>$ ומקבלות את $<M>^R$).

ב. **ההוכחה טובה**. D מקבלת את $<M>$ אם M לא מקבלת את $<M>$. D נכנסת ללולאה אינסופית על $<M>$ אם M כן מקבלת את $<M>$. זה אומר ש-D שונה מ-M לכל M. אם D קיימת, היא איזושהי מכונה M. אבל הראינו שהיא שונה מכולן.

שאלה 3

כדי להוכיח שהשפה G מזוהה-טיורינג, נתאר מכונת טיורינג שמזהה אותה:

"על קלט $<M, w>$ כאשר M היא מכונת טיורינג ו-w היא מחרוזת סמלים:

1. הרץ את M על w. אם M דחתה, דחה.
2. בדוק את אורך המילה שכתובה על הסרט של M. אם הוא גדול מ-$|w|$, קבל. אחרת, דחה."

כדי להוכיח ש-G איננה כריעה, נשתמש בשיטת האלכסון:

נניח בשלילה ש-G כריעה. אז יש מכונה H שמכריעה שייכות ל-G.

נבנה את המכונה D הבאה:

"על קלט $<M>$ כאשר M היא מכונת טיורינג:

1. הרץ את המכונה H על $<M, <M>>$.
2. אם H הכריעה ש-$<M, <M>>$ שייכת ל-G, דחה.
3. אם H הכריעה ש-$<M, <M>>$ לא שייכת ל-G, כתוב על הסרט מילה ארוכה מ-$<M>$ וקבל."

המכונה D מתנהגת באופן הבא: אם $<M, <M>>$ שייכת ל-G, D דוחה את $<M>$.
אם $<M, <M>>$ לא שייכת ל-G, D מקבלת את $<M>$, ובסיום ריצתה של D על $<M>$ רשומה על הסרט מילה ארוכה מ-$<M>$.
מה יקרה כאשר נריץ את D על הקלט $<D>$?
אם $<D, <D>>$ שייכת ל-G, כלומר, המכונה D מקבלת את $<D>$ ובסיום ריצתה רשומה על הסרט מילה ארוכה מ-$<D>$, אז D תדחה את $<D>$. כלומר, $<D, <D>>$ לא שייכת ל-G.
אם $<D, <D>>$ לא שייכת ל-G, אז D תקבל את $<D>$, ובסיום ריצתה תהיה רשומה על הסרט מילה ארוכה מ-$<D>$. כלומר $<D, <D>>$ כן שייכת ל-G.
בכל מקרה הגענו לסתירה.

שאלה 4

נניח בשלילה ש-T היא שפה כריעה. אז יש מכונה R שמכריעה את T.

נראה שאפשר לבנות מכונה מכריעה לשפה A_{TM}, בסתירה למשפט 4.11:

"על קלט $<M, w>$ כאשר M היא מכונת טיורינג ו-w מילה:

1. בנה את המכונה M_1 הבאה (מכונה מעל האלפבית $\{0, 1\}$):

   "על קלט x כאשר x היא מילה מעל האלפבית $\{0, 1\}$:

   1. אם $x = 01$, קבל.
   2. אם $x \neq 01$, הרץ את M על w, וקבל (את x) אם M קיבלה את w."

2. הרץ את המכונה R על $<M_1>$. אם היא קיבלה, קבל (את $<M, w>$). אם היא דחתה, דחה."

אם M מקבלת את w, אז M_1 מקבלת כל קלט שלה x, ולכן $<M_1>$ שייכת ל-T.

אם M לא מקבלת את w, אז השפה ש-M_1 מקבלת היא $\{01\}$, ו-$<M_1>$ לא שייכת ל-T.

שאלה 5

תהי w מילה. נגדיר את השפה P_w:

$$P_w = \{<M> \mid M \text{ accepts } w\}$$

P_w מקיימת את תנאי משפט Rice (בדקו!). לכן, לפי המשפט, P_w איננה כריעה.

מתקיים: $<M> \in P_w$ אם ורק אם $<M, w> \in A_{TM}$.

אם נניח בשלילה ש-A_{TM} כריעה, נקבל שגם P_w כריעה: כדי לבדוק האם $<M>$ שייכת ל-P_w נבדוק האם $<M, w>$ שייכת ל-A_{TM}. זו סתירה.

מסקנה: A_{TM} איננה כריעה.

שאלה 7

א. התכונה "$L(M)$ היא שפה חסרת הקשר" היא תכונה לא טריוויאלית של מכונות טיורינג - יש מכונות טיורינג שמזהות שפה חסרת הקשר, ויש מכונות טיורינג שמזהות שפה שאיננה חסרת הקשר. כמו כן, זו תכונה של מכונות טיורינג במובן שלכל שתי מכונות שמזהות אותה השפה, או ששתיהן מקיימות את התכונה, או ששתיהן לא מקיימות את התכונה.

לכן, לפי משפט Rice, השפה CF_{TM} איננה כריעה.

ב. "על קלט $<M, w>$ כאשר M היא מכונת טיורינג ו-w מחרוזת:

1. בנה את המכונה M' הבאה:

   "על קלט x:

   1. אם x מהצורה $0^n1^n2^n$, קבל.
   2. אם x לא מהצורה $0^n1^n2^n$, הרץ את M על w. אם M קיבלה, קבל; אחרת, דחה."

2. החזר את $<M'>$."

אם M מקבלת את w, אז M' מקבלת כל מילה, ו-$L(M')$ היא שפה חסרת הקשר.

אם M לא מקבלת את w, אז $L(M') = \{0^n1^n2^n \mid n \geq 0\}$ שהיא שפה שאיננה חסרת הקשר.

כלומר, $<M'>$ שייכת ל-CF_{TM} אם ורק אם $<M, w>$ שייכת ל-A_{TM}.

ג. "על קלט $<M, w>$ כאשר M היא מכונת טיורינג ו-w מחרוזת:

1. בנה את המכונה M' הבאה:

"על קלט x:

1. אם x לא מהצורה $0^n1^n2^n$, דחה.
2. אם x מהצורה $0^n1^n2^n$, הרץ את M על w. אם M קיבלה, קבל; אחרת, דחה."

2. החזר את $<M'>$."

אם M לא מקבלת את w, אז M' לא מקבלת אף מילה, ו-$L(M')$ היא שפה חסרת הקשר.

אם M מקבלת את w, אז $L(M') = \{0^n1^n2^n \mid n \geq 0\}$ שהיא שפה שאיננה חסרת הקשר.

כלומר, $<M'>$ שייכת ל-CF_{TM} אם ורק אם $<M, w>$ שייכת למשלימה של A_{TM}.

ד. הרדוקציה של סעיף ב היא גם רדוקציה של המשלימה של A_{TM} למשלימה של CF_{TM}.

לכן המשלימה של CF_{TM} איננה מזוהה-טיורינג.

הרדוקציה של סעיף ג היא גם רדוקציה של המשלימה של A_{TM} ל-CF_{TM}.

לכן CF_{TM} איננה מזוהה-טיורינג.