תשובה 1

א. $A \le \{x \in \mathbb{N} \mid x = 5\}$, $B \le \{y \in \mathbb{N} \mid 3 = y\}$.

ב. מהגדרת D מתקיים: (ii) $D \in (3,1)$ (i) $D \in (1,3)$.

נניח בשלילה שקיימות A,B כך ש- $D = A \times B$.

מהגדרת מכפלה נקבל לפי (i) $A \in 3$, ולפי (ii) $B \in 3$.

שוב מהגדרת מכפלה, נובע מכך $(3,3) \in A \times B$.

אבל $D \notin (3,3)$! קיבלנו סתירה להנחה $D = A \times B$.

תשובה 2

א. **נכון**: R רפלקסיבי פירושו $I_A \subseteq R$. נתון $R \subseteq S$. לכן $I_A \subseteq S$.

ב. **לא נכון**, למשל $S = I_A$ רפלקסיבי , $R = \{(1,1), (2,2)\}$ אינו רפלקסיבי, ו- $S \subseteq R$.

ג. **לא נכון**, למשל $R = \emptyset$ הוא סימטרי, $S = \{(1,2)\}$ אינו סימטרי, ומתקיים $S \subseteq R$.

ד. **לא נכון**, למשל $R = \{(1,2)\}$ אינו סימטרי, $S = \{(1,2), (2,1)\}$ הוא סימטרי, ו- $S \subseteq R$.

ה. **לא נכון**, למשל $R = \{(1,2)\}$ הוא אנטי-סימטרי, $S = \{(1,2), (2,1)\}$ אינו אנטי-סימטרי, ומתקיים $S \subseteq R$ (אגב אפשר גם לקחת $R = \emptyset$ בדוגמא זו!).

ו. **נכון**: יהי S יחס אנטי-סימטרי ויהי $S \subseteq R$. נוכיח ש- R אנטי-סימטרי.

עלינו להראות שאם $R \in (x,y)$ וגם $R \in (y,x)$ אז $x = y$.

מכיוון ש- $S \subseteq R$, מההנחה $R \in (x,y)$, $R \in (y,x)$ נובע $S \in (x,y)$, $S \in (y,x)$.

נתון ש- S אנטי-סימטרי, לכן $x = y$.

תשובה 3

א. R רפלקסיבי: לכל $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, n מתחלק בעצמו ללא שארית, כלומר $(n,n) \in R$.

R אינו סימטרי: למשל $(2,1) \in R$ אך $(1,2) \notin R$.

מכיון ש- R אינו סימטרי, הוא אינו יחס שקילות.

R הוא אנטי-סימטרי: לכל $m,n \in \mathbb{N} - \{0\}$, אם m מתחלק ב- n וגם n מתחלק ב- m אז $n = m$ (תכונה ידועה. אפשר להוכיח אותה למשל מתוך כך שאם m מתחלק ב- n אז $n \le m$, והיחס $\le$ הוא אנטי-סימטרי).

שימו לב ש**מתוך כך ש- R אנטי-סימטרי לא נובע שהוא אינו סימטרי !**

ראו דוגמאות בעניין זה בשאלון רב-ברירה בנושא יחסים, באתר הקורס.

R טרנזיטיבי: אם m מתחלק ב- n , משמע $m = a \cdot n$ עבור a טבעי חיובי כלשהו.

אם n מתחלק ב- k משמע $n = k \cdot b$ עבור b טבעי חיובי כלשהו.
ביחד נקבל $m = k \cdot b \cdot a$, לכן m מתחלק ב- k.

ב. הסגור הסימטרי של R הוא $R \cup R^{-1}$.

בסעיף הקודם ראינו ש- R רפלקסיבי, כלומר $I_A \subseteq R$. כעת, $R \subseteq R \cup R^{-1}$

לכן גם $I_A \subseteq R \cup R^{-1}$, כלומר גם $R \cup R^{-1}$ רפלקסיבי (ובקיצור: לפי שאלה *2*א בממ"ן זה...).

$R \cup R^{-1}$ סימטרי לפי שאלה *2.23* בעמ' *50* בספר הלימוד.

$R \cup R^{-1}$ אינו אנטי-סימטרי, כי $(1,2)$ וגם $(2,1)$ שייכים אליו, ו- $2 \neq 1$.

$R \cup R^{-1}$ **אינו** טרנזיטיבי: למשל $(2,1) \in R \cup R^{-1}$, $(1,3) \in R \cup R^{-1}$ (כי $(3,1) \in R$),

אך $(2,3) \notin R \cup R^{-1}$.

ג. מהגדרת S ומתכונות ידועות של כפל במספרים ממשיים, $x \cdot y > 0$ אם"ם x,y בעלי אותו סימן (שניהם חיוביים או שניהם שליליים). נחלק אפוא את הממשיים השונים מאפס לשתי מחלקות: חיוביים ושליליים. כאמור, $(x,y) \in S$ **אם"ם** x,y **שייכים לאותה מחלקה** של החלוקה הנ"ל.

כעת, לפי משפט *2.19* בעמ' *61* בספר, S הוא יחס שקילות, המתאים לחלוקה זו !

לכן הוא רפלקסיבי , סימטרי וטרנזיטיבי. שימו לב שלא בדקנו את *3* התכונות המאפיינות יחס שקילות, אלא הוכחנו שזהו יחס שקילות ע"י כך שמצאנו את החלוקה המתאימה, והראינו שמתקיימים תנאי משפט *2.19* . זוהי דרך לגיטימית לגמרי.

לסיום, S **אינו** אנטי-סימטרי כי $(1,2) \in S$, $(2,1) \in S$ ו- $2 \neq 1$.

תשובה 4

א. מהגדרת D_0, $(X,Y) \in D_0$ אםם $|X \oplus Y| \le 0$.

גודל של קבוצה אינו יכול להיות שלילי, והקבוצה היחידה שגודלה *0* היא הקבוצה הריקה.

לכן $(X,Y) \in D_0$ אםם $X \oplus Y = \emptyset$.

לפי שאלה *3*ג בממ"ן *11*, $X \oplus Y = \emptyset$ אםם $X = Y$.

הוכחנו: $(X,Y) \in D_0$ **אםם** $X = Y$. משמע $D_0 = I_{P(\mathbb{N})}$.

ב. מיידי מהגדרת הקבוצות D_n: אם $|X \oplus Y| \le n$ אז $|X \oplus Y| \le n+1$.

ג. לפי משפט *2.16* , הסגור הטרנזיטיבי של D_1 הוא: $D = \bigcup_{1 \le n < \infty} (D_1)^n$.

מהנתון בשאלה, $(D_1)^n = D_n$. לכן $D = \bigcup_{1\le n<\infty} D_n$.

משמע, מהגדרת איחוד כללי של קבוצות,

$(X,Y)\in D$ אםם **קיים** n ($1\le n<\infty$) כך ש- $(X,Y)\in D_n$.

כלומר $(X,Y)\in D$ אםם קיים n ($1\le n<\infty$) כך ש- $|X \Delta Y|\le n$.

כלומר $(X,Y)\in D$ אםם $|X \Delta Y|$ קטן **מאיזשהו** מספר טבעי חיובי.

במלים אחרות, $(X,Y)\in D$ אםם $X \Delta Y$ היא קבוצה סופית.

ד. ניתן שתי הוכחות.

הוכחה אחת בהתבסס על כך ש- $D = \bigcup_{1\le n<\infty} (D_1)^n$:

* D רפלקסיבי: $I_{P(\mathbb{N})} = D_0 \subseteq D_1 \subseteq D$.
* D סימטרי: מכיון ש- $X \Delta Y = Y \Delta X$, בפרט: $|X \Delta Y|\le n$ אםם $|Y \Delta X|\le n$.

כלומר כל אחד מהיחסים D_n הוא סימטרי. תרגיל: הוכיחו שאיחוד של קבוצה כלשהי של יחסים סימטריים הוא יחס סימטרי.

* T טרנזיטיבי: מהגדרת סגור, הסגור הטרנזיטיבי של יחס כלשהו הוא טרנזיטיבי.

הוכחה שנייה, בהתבסס רק על התיאור של D שהוכחנו בסעיף ג, כלומר בעזרת הטענה $(X,Y)\in D$ אםם $X \Delta Y$ היא קבוצה סופית (ייתכן ריקה).

* D רפלקסיבי: לכל X, $X \Delta X = \emptyset$.
* D סימטרי: אם $X \Delta Y$ היא קבוצה סופית אז $Y \Delta X$ היא קבוצה סופית (כי הן שוות).
* D טרנזיטיבי: יש להוכיח שאם $X \Delta Y$ סופית ו- $Y \Delta Z$ סופית אז $X \Delta Z$ סופית.

לפי ממ"ן 11 שאלה 3ד , $X \Delta Z = (X \Delta Y) \Delta (Y \Delta Z)$.

כלומר $X \Delta Z$ היא הפרש סימטרי של שתי קבוצות סופיות. נזכור שההפרש הסימטרי של שתי קבוצות חלקי לאיחוד שלהן. איחוד של שתי קבוצות סופיות הוא סופי, וקבוצה חלקית לקבוצה סופית היא סופית. לפיכך $X \Delta Z$ סופית, כמבוקש.

ה. נראה קצת יותר ממה שנדרש: במקום שתי קבוצות נבנה **אינסוף** קבוצות של טבעיים, כך שכל אחת מהקבוצות היא במחלקה אחרת. לשם כך עלינו לבנות אינסוף קבוצות של טבעיים, שההפרש הסימטרי בין **כל שתים מהן** הוא אינסופי.

אפשר לתת דוגמאות שונות לאוסף כזה של קבוצות, הנה דוגמא אחת:

לכל $n>0$ טבעי, תהי B_n קבוצת הטבעיים המתחלקים ללא שארית ב- n .

B_1 היא אפוא קבוצת כל הטבעיים, B_2 היא קבוצת הטבעיים הזוגיים, וכו'.

נוכיח שלכל m,n השונים זה מזה, $B_n \Delta B_m$ היא אינסופית, ולכן $(B_n,B_m)\notin D$.

ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) נניח $n<m$.

לכל k טבעי, המספר $a_k = kmn + n = n(km + 1)$ מתחלק ללא שארית ב- n ,

ואינו מתחלק ב- m (הוא נותן שארית n בחילוק ב- m , כי הנחנו $n < m$).

זה נכון כאמור לכל k טבעי.

מצאנו אפוא אינסוף מספרים a_k השייכים ל- B_n ואינם שייכים ל- B_m .

לכן $B_n - B_m$ היא אינסופית.

לפיכך גם $(B_n - B_m) . (B_m - B_n) = B_n \quad B_m$ אינסופית.

לכן $(B_n, B_m) \ D$.

איתי הראבן