פתרונות לממ"ן 15 - 2013ב - 20425

1. א. $P\{X=i,Y=j\}=\dfrac{\binom{5}{i}\binom{2}{j}\binom{3}{5-i-j}}{\binom{10}{5}}$, $i=0,1,...,5$; $j=0,1,2$; $2\le i+j\le 5$

ב. בהינתן שנבחרו למשלחת 3 ביולוגים, נותר רק לבחור עוד 2 חברי משלחת מבין 3 הכימאים ו-2 הפיזיקאים. לכן, ההתפלגות של Y בהינתן $X=3$ היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N=5$, $m=2$, $n=2$, ומתקיים:

$$P\{Y=1\mid X=3\}=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}=0.6$$

2. א. הערכים האפשריים של X ושל Y הם 0, 1 ו-2.

מספר אפשרויות הבחירה של 2 חולצות ו-2 זוגות מכנסיים הוא $\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{2}=100$. לכן, זהו המכנה של כל ההסתברויות המשותפות המופיעות ברשימה שלהלן.

הערכים של ההסתברויות המשותפות הם: $P\{X=0,Y=2\}=P\{X=2,Y=1\}=0$

[לא נבחרו חליפות ולא נבחר אף פריט אדום.
בוחרים שני זוגות מכנסיים
ואחר-כך שתי חולצות בצבעים אחרים (לא אדום).]

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{100}=0.06$$

[לא נבחרו חליפות ונבחר פריט אדום אחד.
בוחרים שני זוגות מכנסיים וחולצה בצבעים שונים ולא אדומים
או שבוחרים שתי חולצות וזוג מכנסיים בצבעים שונים ולא אדומים.]

$$P\{X=0,Y=1\}=\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}\cdot 2}{100}=0.24$$

[נבחרה חליפה אחת ולא נבחר אף פריט אדום.
בוחרים חליפה לא אדומה
ואח"כ חולצה ומכנסיים בצבעים שונים ולא אדומים.]

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{4\cdot\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{100}=0.24$$

[נבחרה חליפה אחת ונבחר פריט אדום אחד.
בוחרים פריט אדום ומשלימים אותו בפריט בצבע שונה,
אח"כ בוחרים חליפה בצבע שונה משני הפריטים שנבחרו.]

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{2\cdot\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{100}=0.24$$

[נבחרה חליפה אחת ונבחרו שני פריטים אדומים.
בהכרח נבחרה חליפה אדומה,
לכן, צריך לבחור שני פריטים נוספים בצבעים שונים ולא אדומים.]

$$P\{X=1,Y=2\}=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{100}=0.12$$

[נבחרו שתי חליפות ולא נבחר אף פריט אדום.
בוחרים שתי חליפות לא אדומות.]

$$P\{X=2,Y=0\}=\frac{\binom{4}{2}}{100}=0.06$$

[נבחרו שתי חליפות ונבחרו שני פריטים אדומים.
בהכרח נבחרה חליפה אדומה. לכן, בוחרים חליפה נוספת לא אדומה.]

$$P\{X=2,Y=2\}=\frac{\binom{4}{1}}{100}=0.04$$

נערוך את התוצאות שקיבלנו בטבלה:

X \ Y	**0**	**1**	**2**	p_X
0	0.06	0.24	0	0.3
1	0.24	0.24	0.12	0.6
2	0.06	0	0.04	0.1
p_Y	0.36	0.48	0.16	

ב. כדי לקבוע אם המשתנים המקריים X ו-Y בלתי-תלויים, נבדוק את תנאי האי-תלות. למשל:

$$P\{X=0,Y=2\}=0 \quad \neq \quad P\{X=0\}P\{Y=2\}=0.3\cdot 0.16 \;>\; 0$$

לכן, התנאי אינו מתקיים והמשתנים המקריים הללו תלויים.

ג. נראה שתי דרכים לפתרון הבעיה, שהן למעשה אותה הדרך רק בכתיבה שונה.

<u>דרך I</u>

תחילה, בוחרים באקראי 2 חולצות ו-2 זוגות מכנסיים <u>ונתון</u> כי $Y=2$, לכן בהכרח $X=1$ או $X=2$.
כדי להקל על חישוב ההסתברות המותנית המבוקשת, שנבחרת חליפה מתוך 4 הפריטים שנבחרו לראשונה כאשר ידוע כי $Y=2$, נוכל להתנות בערך של X (1 או 2) מלבד ההתנייה במאורע $\{Y=2\}$.
נסמן ב-A את המאורע שנבחרת חליפה ולפי נוסחת ההסתברות השלמה <u>למאורעות מותנים</u> נקבל כי:

$$P\{A\mid Y=2\}=P\{A\mid Y=2,X=1\}P\{X=1\mid Y=2\}+P\{A\mid Y=2,X=2\}P\{X=2\mid Y=2\}$$

$$=\tfrac{1\cdot 1}{2\cdot 2}\cdot\tfrac{0.12}{0.16}+\tfrac{2\cdot 1}{2\cdot 2}\cdot\tfrac{0.04}{0.16}=\tfrac{3}{16}+\tfrac{1}{8}=\tfrac{5}{16}$$

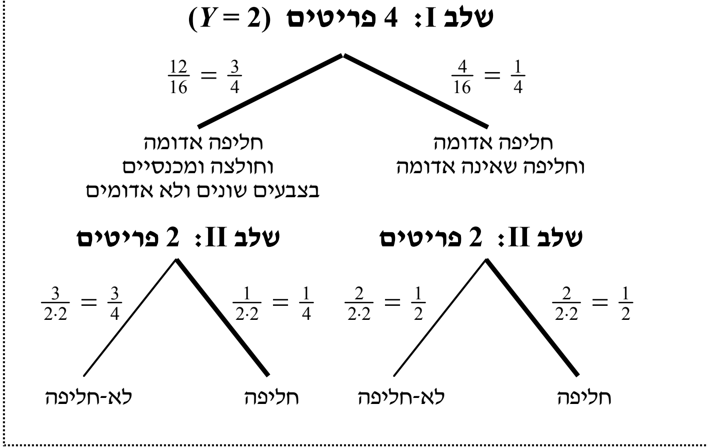
<u>דרך II</u>

בהינתן כי $Y=2$, ידוע שבין 4 הפריטים שנבחרו נמצאת החליפה האדומה ושני פריטים נוספים (חולצה אחת וזוג מכנסיים אחד) שאינם אדומים. כעת, בוחרים מתוך הפריטים האלה חולצה אחת וזוג מכנסיים אחד. בבחירה הזאת מתקבלת חליפה שלמה, אם נבחרים שני הפריטים האדומים – בהסתברות $\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{4}$, או אם נבחרים שני הפריטים הלא-אדומים (גם כן בהסתברות $\tfrac{1}{4}$) ומסתבר שהם מאותו הצבע (בהסתברות $4\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{4}$). כלומר, ההסתברות שתיבחר חליפה היא $\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}=\tfrac{5}{16}$.

<u>דרך III</u>

תחילה, נבחרים באקראי 2 חולצות ו-2 זוגות מכנסיים <u>ונתון</u> כי $Y=2$. לכן, בהכרח נבחרה החליפה האדומה ושני פריטים נוספים שאינם אדומים. כעת, יש 16 בחירות שונות שוות-הסתברות של 4 פריטים שבהן מתרחש המאורע $\{Y=2\}$. ב-4 מתוך 16 התוצאות הללו נבחרות 2 חליפות, שאחת מהן אדומה. בשאר התוצאות, שהן 12 תוצאות, נבחרת חליפה אדומה ושני פריטים נוספים (חולצה ומכנסיים) בצבעים שונים (וכמובן שאינם אדומים). לכן, בהינתן שהמאורע $\{Y=2\}$ מתרחש, ההסתברות המותנית שנבחרו 2 חליפות היא $\tfrac{4}{16}=\tfrac{1}{4}$.

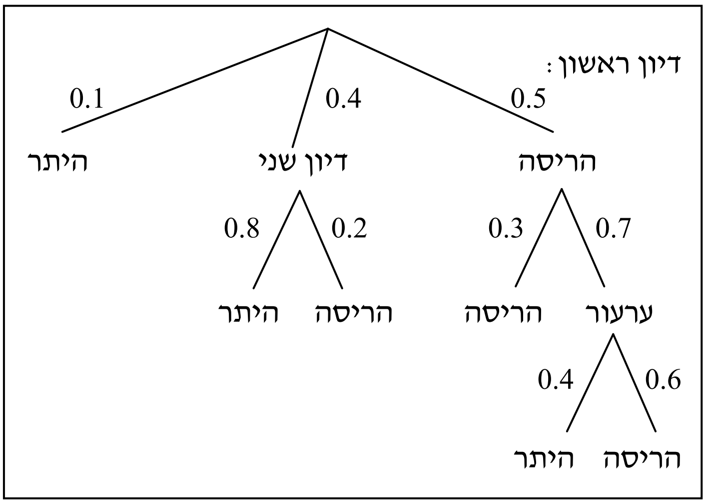
נתאר את ההתרחשויות האפשריות לבחירת 2 הפריטים (מתוך ה-4) בעץ ההסתברות שלהלן:



ומכאן, נוכל לקבל את ההסתברות המבוקשת:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{3}{16}=\frac{5}{16}$$

3. א. נצייר עץ-הסתברות מתאים לבעיה :



לפי עץ-ההסתברות, ההסתברות שמבנה בלתי-חוקי יקבל היתר היא :

$$0.1+0.4\cdot 0.8+0.5\cdot 0.7\cdot 0.4=0.56$$

ב1. ההסתברות לקבל היתר בדיון הראשון היא 0.1. לכן, ההסתברות המבוקשת היא הסתברות בינומית-שלילית עם הפרמטרים 2 ו-0.1 בנקודה 15. כלומר : $\binom{14}{1}0.1^2\cdot 0.9^{13}=0.0356$

ב2. נסמן ב- X_1 את מספר המבנים שקיבלו היתר בדיון הראשון בעניינם, ב- X_2 את מספר המבנים שקיבלו היתר לאחר הדיון הראשון בעניינם וב- X_3 את מספר המבנים שלא קיבלו היתר.

ל-X_i-ים יש התפלגות משותפת מולטינומית (מכיוון שכל X_i מתייחס לתוצאה אחרת של התהליך, וכל מקרה נמנה בדיוק באחד מה-X_i-ים) עם הפרמטרים

$$n=20$$
$$p_1=0.1$$
$$p_2=0.4\cdot 0.8+0.5\cdot 0.7\cdot 0.4=0.46$$
$$p_2=0.4\cdot 0.2+0.5\cdot 0.3+0.5\cdot 0.7\cdot 0.6=0.44$$

לכן :

$$P\{X_1=3\,|\,X_1+X_2=14\}=\frac{P\{X_1=3,X_1+X_2=14\}}{P\{X_1+X_2=14\}}=\frac{P\{X_1=3,X_2=11\}}{P\{X_1+X_2=14\}}$$

$$=\frac{\binom{20}{3,11,6}0.1^3\cdot 0.46^{11}\cdot \cancel{0.44^6}}{\binom{20}{14}0.56^{14}\cdot \cancel{0.44^6}}=\binom{14}{3}\left(\frac{0.1}{0.56}\right)^3\left(\frac{0.46}{0.56}\right)^{11}=0.2381$$

ב3. מהאמור בסעיף הקודם, נובע כי למשתנה המקרי המותנה $X_2\,|\,X_1=3$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n=17$ ו- $p=\frac{0.46}{1-0.1}=0.5\overline{1}$.

לפיכך : $P\{X_2=i\,|\,X_1=3\}=\binom{17}{i}\cdot\left(\frac{0.46}{0.9}\right)^i\cdot\left(\frac{0.44}{0.9}\right)^{17-i}\qquad,\qquad i=0,1,...,17$

4. נסמן ב- X_i את מספר ההודעות שמקבל פקיד i במהלך יום אחד, לכל $i = 1,2,3,4,5$.
לפי נתוני הבעיה, ה-X_i-ים בלתי-תלויים ולכל אחד מהם יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר 10.

א. ההסתברות שפקיד מסוים יקבל 10 הודעות במהלך היום היא: $e^{-10}\frac{10^{10}}{10!} = 0.1251$

לכן ההסתברות שבדיוק 2 פקידים (מתוך ה-5) יקבלו בדיוק 10 הודעות כל אחד היא:

$$\binom{5}{2}\cdot 0.1251^2\cdot 0.8749^3 = 0.1048$$

ב. הואיל וה-X_i-ים בלתי-תלויים, ההתפלגות של הסכום $\sum_{i=1}^{5} X_i$ היא פואסונית עם הפרמטר $5\cdot 10 = 50$.
(ראה דוגמה 3א במדריך הלמידה, עמוד 142).

לפיכך: $P\left\{\sum_{i=1}^{5} X_i = 45\right\} = e^{-50}\frac{50^{45}}{45!} = 0.0458$

ג1. מבלי להגביל את כלליות הפתרון, נניח כי X_1 הוא מספר ההודעות שהפקיד רמי מקבל במשך יום אחד.
הואיל וה-X_i-ים בלתי-תלויים, ההתפלגות המותנית של X_1 בהינתן שסכום ה-X_i-ים שווה ל-45 היא בינומית עם הפרמטרים $n = 45$ ו- $p = \frac{10}{50} = 0.2$. (ראה דוגמה 4ב במדריך הלמידה, עמוד 145).

לכן: $P\left\{X_1 = 9 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{5} X_i = 45\right\} = \binom{45}{9}\cdot 0.2^9\cdot 0.8^{36} = 0.14724$

ג2. כעת, ההתפלגות המשותפת המותנית של ה-X_i-ים בהינתן שסכומם שווה ל-45 היא מולטינומית עם הפרמטרים $n = 45$ ו- $\underset{\sim}{p} = (\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5})$. (זוהי הכללה של דוגמה 4ב ממדריך הלמידה, עמוד 145).

לפיכך: $P\left\{X_1 = 9,\ldots,X_5 = 9 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{5} X_i = 45\right\} = \frac{45!}{(9!)^5}\cdot 0.2^{45} = 0.000669$

ד. מספר ההודעות שמגיעות למשרד במשך יום אחד הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 50. עתה, היות שכל הודעה מגיעה עם בקשה-לאישור קריאה בהסתברות 0.1, מספר ההודעות שמגיעות למשרד עם בקשה כזאת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $50\cdot 0.1 = 5$. (ראה דוגמה 2ב במדריך הלמידה, עמוד 138).

לפיכך, ההסתברות שבמשך יום תגענה בסה"כ 6 הודעות עם בקשת-קריאה היא: $e^{-5}\frac{5^6}{6!} = 0.1462$

ה.

$$P\left\{\min_{i=1,\ldots,5} X_i = 2\right\} = P\left\{\min_{i=1,\ldots,5} X_i \ge 2\right\} - P\left\{\min_{i=1,\ldots,5} X_i \ge 3\right\}$$

$$= \prod_{i=1}^{5} P\{X_i \ge 2\} - \prod_{i=1}^{5} P\{X_i \ge 3\}$$ [ה-X_i-ים בלתי-תלויים]

$$= \left(P\{X_1 \ge 2\}\right)^5 - \left(P\{X_1 \ge 3\}\right)^5$$ [ה-X_i-ים שווי-התפלגות]

$$= \left(1 - e^{-10} - 10e^{-10}\right)^5 - \left(1 - e^{-10} - 10e^{-10} - 50e^{-10}\right)^5 = 0.9975 - 0.9862 = 0.0113$$