תורת הקבוצות

שוויון הקבוצות: $A = B <=> (x \in A <=> x \in B)$

$A = B <=> A \subseteq B \text{ וגם } B \subseteq A$

A היא תת-קבוצה של B: $x \in A => x \in B$

עבור כל קבוצה A מתקיים: $\emptyset \subseteq A$

הטרנזיטיביות של ההכלה: $A \subseteq B \text{ וגם } B \subseteq C => A \subseteq C$

קבוצת החזקה: קבוצת כל התת-קבוצות של קבוצה A והיא מסומנת P(A). מספר איברי הקבוצה:

$|A| = n => |P(A)| = 2^n$

איחוד קבוצות: $A \cup B \equiv \{x \mid x \subseteq A \text{ או } x \subseteq B\}$

חיתוך קבוצות: $A \cap B \equiv \{x \mid x \subseteq A \text{ וגם } x \subseteq B\}$

הפרש קבוצות: $A - B \equiv \{x \mid x \subseteq A \text{ וגם } x \not\subseteq B\}$

הפרש סימטרי: $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

תכונות האיחוד:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$A \cup A = A$$
$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$$
$$A \subseteq C, B \subseteq C \le> A \cup B \subseteq C$$
$$A \cup B = B <=> A \subseteq B$$
$$\bigcup_{i \subseteq N} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

קבוצות זרות $|A \cup B| = |A| + |B|$

תכונות החיתוך:

קבוצות זרות $A \cap B = \emptyset$

$$A \cap B = B \cap A$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$A \cap A = A$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$$
$$C \subseteq A, C \subseteq B \le> C \subseteq A \cap B$$
$$A \cap B = A \le> A \subseteq B \le> A \cup B = B$$
$$\bigcap_{i \subseteq N} A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

תכונות האיחוד + החיתוך:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

תכונות ההפרש:

$$A - \emptyset = A$$
$$A - A = \emptyset$$
$$\emptyset - A = \emptyset$$
$$A - B = \emptyset \leq> A \subseteq B$$
$$A - B = A <=> A \cap B = \emptyset$$
$$(A \cup B) - B = A - B$$

הקבוצה האוניברסלית – קבוצה U שעבור כל קבוצה A המופיעה בדיון, מתקיים A⊆U
המשלים של A – ההפרש U-A המסומן 'A

תכונות של המשלים:

$$x \nsubseteq A \leq> x \subseteq A'$$
$$x \nsubseteq A' \leq> x \subseteq A$$
$$A \cap A' = \emptyset, \quad A \cup A' = U$$
$$U' = \emptyset, \quad \emptyset' = U$$
$$(A')' = A$$

כלל דה-מורגן $(A \cup B)' = A' \cap B'$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$A - B = A \cap B'$$

תכונות של ההפרש הסימטרי:

$$A \oplus B = B \oplus A$$
$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$
$$A \oplus \emptyset = A$$
$$A \oplus A = \emptyset$$
$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$$
$$A \oplus B \oplus (A \cap B) = A \cup B$$

שני סוגים של הוכחות:

1. **הוכחה בעזרת אלגברה של קבוצות:**

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cap (\mathbf{C} - \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) - (\mathbf{B} \cup \mathbf{D})$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cap (\mathbf{C} - \mathbf{D}) = (A \cap B') \cap (C \cap D') = A \cap (B' \cap C) \cap D' = A \cap (C \cap B') \cap D'$$
$$= (A \cap C) \cap (B' \cap D') = (A \cap C) \cap (B \cup D)' = (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) - (\mathbf{B} \cup \mathbf{D})$$

2. **הוכחה בעזרת הכלה דו-כיוונית:**

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$
$x \in A \oplus B <=> x \in (A \cup B) - (A \cap B)$

$x \in A \oplus B <=> x \in (A - B) \cup (B - A)$
$x \in (A - B) \cup (B - A) <=> \big(x \in (A - B)\big) \vee \big(x \in (B - A)\big)$
$\big(x \in (A - B)\big) \vee \big(x \in (B - A)\big) <=> (x \in A \in x \notin B) \vee (x \in B \in x \notin A) <=>$
$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \wedge (x \notin B \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \notin A)$

$(x \in A \vee x \notin A) -$ טאוטולוגיה
$(x \notin B \vee x \in B) -$ טאוטולוגיה

$<=> (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \notin A) <=> (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in B \wedge x \in A) <=>$
$x \in A \cup B \ \wedge \ x \notin A \cap B <=> x \in (A \cup B) - (A \cap B)$