ממ"ן 12 – פתרון שאלה 1

א'

$T(n) = 4T(n/8) + \sqrt{n \cdot \lg^3 n} + \sqrt[5]{n^3 \cdot \lg^4 n}$

לפי שיטת האב: $a = 4$, $b = 8$, $f(n) = \sqrt{n \cdot \lg^3 n} + \sqrt[5]{n^3 \cdot \lg^4 n} = \Theta(n^{3/5} \cdot \lg^{4/5} n)$;

$\log_b a = \log_8 4 = 2/3 > 3/5$, לכן מתקיים מקרה 1:

$T(n) = \Theta(n^{2/3})$

ב'

$T(n) = 16T(n/8) + n\sqrt[3]{n} + n \cdot \lg^4 n + \lg^8 n$

לפי שיטת האב: $a = 16$, $b = 8$, $f(n) = n\sqrt[3]{n} + n \cdot \lg^4 n + \lg^8 n = \Theta(n^{4/3})$;

$\log_b a = \log_{16} 4 = 4/3$, לכן מתקיים מקרה 2:

$T(n) = \Theta(n^{4/3} \cdot \lg n)$

ג'

$T(n) = 81T(n/3) + n^6 \cdot \lg n + n^4 \cdot \lg^2 n$

לפי שיטת האב: $a = 81$, $b = 3$, $f(n) = n^6 \cdot \lg n + n^4 \cdot \lg^2 n = \Theta(n^6 \cdot \lg n)$;

$\log_b a = \log_3 81 = 4 < 6$, לכן מתקיים מקרה 3 (לפי תרגיל ג-11 במדריך הלמידה, מתקיים גם תנאי הרגולריות):

$T(n) = \Theta(n^6 \cdot \lg n)$

ד'

$T(n) = T(n-2) + n^2 + 2\lg n$

בשיטת האיטרציה:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-2) + n^2 + 2\lg n \\ &= T(n-4) + (n-2)^2 + 2\lg(n-2) + n^2 + 2\lg n \\ &= \ldots = \Theta(1) + [n^2 + (n-2)^2 + \ldots] + 2[\lg n + \lg(n-2) + \ldots] \end{aligned}$$

הקבוע $\Theta(1)$ מייצג את $T(0)$ (אם n זוגי) או את $T(1)$ (אם n אי-זוגי).

אם $n = 2k$, אזי

$$n^2 + (n-2)^2 + \ldots = 4[k^2 + (k-1)^2 + \ldots] = k(k-1) = \Theta(k^3) = \Theta(n^3)$$

$$\begin{aligned} \lg n + \lg(n-2) + \ldots &= \lg(2k) + \lg(2(k-1)) + \ldots = [1 + \lg k] + [1 + \lg(k-1)] + \ldots \\ &= k + \lg(k!) = k + \Theta(k \cdot \lg k) = \Theta(k \cdot \lg k) = \Theta(n \cdot \lg n) \end{aligned}$$

אם $n=2k+1$, אזי

$$n^2+(n-2)^2+\ldots>4[k^2+(k-1)^2+\ldots]=\Theta(k^3)=\Theta(n^3)$$

$$n^2+(n-2)^2+\ldots<4[(k+1)^2+k^2+(k-1)^2+\ldots]=k(k+1)=\Theta(k^3)=\Theta(n^3)$$

$$\lg n+\lg(n-2)+\ldots>\lg(2k)+\lg(2(k-1))+\ldots=\Theta(k\cdot\lg k)=\Theta(n\cdot\lg n)$$

$$\lg n+\lg(n-2)+\ldots<\lg(2(k+1))+\lg(2k)+\lg(2(k-1))+\ldots=\Theta(k\cdot\lg k)=\Theta(n\cdot\lg n)$$

לכן, בכל המקרים

$$T(n)=\Theta(n^3)$$

ה'

$$T(n)=n^3\cdot T(\sqrt{n})+(5n^2\lg^3 n+\lg^5 n)\cdot(n^4\lg n+5\lg^5 n)$$

מחלקים ב- n^6 ומקבלים

$$\frac{T(n)}{n^6}=\frac{T\left(\sqrt{n}\right)}{n^3}+\left(\frac{5}{n}\cdot\lg^3 n+\frac{1}{n^3}\cdot\lg^5 n\right)\cdot\left(n\lg n+\frac{5}{n^3}\cdot\lg^5 n\right)$$

מסמנים $U(n)=\dfrac{T(n)}{n^6}$; נשים לב כי

$$\left(\frac{5}{n}\cdot\lg^3 n+\frac{1}{n^3}\cdot\lg^5 n\right)\cdot\left(n\lg n+\frac{5}{n^3}\cdot\lg^5 n\right)=\Theta\left(\frac{\lg^3 n}{n}\right)\cdot\Theta\left(n\cdot\lg n\right)=\Theta(\lg^4 n)$$

מתקבלת נוסחת הנסיגה

$$U(n)=U\left(\sqrt{n}\right)+\Theta(\lg^4 n)$$

מבצעים את החלפת המשתנים $n=2^m$, $m=\lg n$, היוצרת את נוסחת הנסיגה

$$U(2^m)=U\left(2^{m/2}\right)+\Theta(m^4)$$

מסמנים $S(m)=U(2^m)$ ומקבלים

$$S(m)=S(m/2)+\Theta(m^4)$$

לפי שיטת האב, $a=1$, $b=2$, $f(m)=\Theta(m^4)$; $\log_b a=0$, לכן מתקיים מקרה 3(גם תנאי הרגולריות מתקיים):

$$S(m)=\Theta(m^4)$$

מזה נובע

$$U(n)=\Theta(\lg^4 n)$$

ולכן,

$$T(n)=\Theta(n^6\cdot\lg^4 n)$$