שאלה 1

א. הוכחת הטענה מובאת באתר הקורס.

ב. נראה ששני אגפי השוויון מתארים את מספר התוצאות האפשריות של אותו ניסוי מקרי.

אגף שמאל, דהיינו $\binom{2n}{2}$, מתאר את מספר התוצאות אפשריות של הניסוי שבו בוחרים 2 עצמים שונים מתוך אוכלוסייה של $2n$ עצמים שונים.

באגף ימין מונים את מספר התוצאות השונות של אותו ניסוי מקרי, אולם מניחים שהאוכלוסייה מחולקת באופן כלשהו לשתי קבוצות בגודל n כל אחת ושהבחירה נעשית בהתאם לחלוקה הזאת.

כדי להסביר את החישוב באגף ימין, נניח אם כן ש- $2n$ העצמים הנתונים מחולקים לשתי קבוצות כאלה. במקרה כזה, אפשר לבחור את 2 העצמים בשתי דרכים:

1. לבחור את 2 העצמים מאותה הקבוצה: $\binom{n}{2}$ אפשרויות בחירה מכל אחת משתי הקבוצות;
2. לבחור את 2 העצמים מקבוצות שונות: $\binom{n}{1}^2 = n^2$ אפשרויות בחירה.

ומכאן, שסה"כ אפשרויות הבחירה של שני העצמים הוא $2\binom{n}{2} + n^2$

שאלה 2

נסמן ב- X_M משקל ביצה מקרית (בגרם) שגודלה M ; $X_M \sim N(58, 2.5^2)$;

ונסמן ב- X_L משקל ביצה מקרית (בגרם) שגודלה L ; $X_L \sim N(68, 2.5^2)$.

א. עלינו למצוא את a שמקיים את המשוואה: $P\{X_L > a\} = 0.78$

או לחלופין: $P\{X_L > a\} = 1 - \Phi\left(\frac{a-68}{2.5}\right) = 0.78 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{a-68}{2.5}\right) = 0.22 = \Phi(-0.7721)$

כלומר: $\frac{a-68}{2.5} = -0.7721 \quad \Rightarrow \quad a = 68 - 0.7721 \cdot 2.5 = 66.07$

לפיכך, 78% מהביצים בגודל L שוקלות יותר מ- 66.07 גרם.

ב. נחשב תחילה את ההסתברות שמשקל ביצה מקרית שנבחרת מהסלסלה נע בין 60 גרם ל- 65 גרם. נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה, ונקבל:

$$\begin{aligned}
&0.4 \cdot P\{60 < X_M < 65\} + 0.6 \cdot P\{60 < X_L < 65\} \\
&= 0.4\left[\Phi\left(\tfrac{65-58}{2.5}\right) - \Phi\left(\tfrac{60-58}{2.5}\right)\right] + 0.6\left[\Phi\left(\tfrac{65-68}{2.5}\right) - \Phi\left(\tfrac{60-68}{2.5}\right)\right] \\
&= 0.4\left[\Phi(2.8) - \Phi(0.8)\right] + 0.6\left[\Phi(-1.2) - \Phi(-3.2)\right] \\
&= \underbrace{0.4\left[0.9974 - 0.7881\right]}_{=0.08372} + \underbrace{0.6\left[(1-0.8849) - (1-0.9993)\right]}_{=0.06864} = 0.15236
\end{aligned}$$

ומכאן, שההסתברות שנבחרה ביצה בגולד M, אם ידוע שמשקלה נע בין 60 גרם ל- 65 גרם, היא:

$$\frac{0.4 \cdot P\{60 < X_M < 65\}}{0.4 \cdot P\{60 < X_M < 65\} + 0.6 \cdot P\{60 < X_L < 65\}} = \frac{0.08372}{0.15236} = 0.5495$$

ג. התפלגות משקל הביצים בשקית אף היא נורמלית. תוחלתה (בגרם) היא $15\cdot 68 + 5\cdot 58 = 1{,}310$ ושונותה (בגרם^2) היא $15\cdot 2.5^2 + 5\cdot 2.5^2 = 125$. לפיכך, אם נסמן ב- S את משקל הביצים בשקית, נקבל:

$$P\{S > 1.3\} = 1 - \Phi\left(\tfrac{1{,}300-1{,}310}{\sqrt{125}}\right) = 1 - \Phi(-0.8944) = \Phi(0.8944) = 0.8144$$

ד. מספר הביצים בגודל L מתוך 90 הביצים שנבחרו הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 90 ו- 0.6, שנסמנו ב- Y. נוכל לחשב קירוב נורמלי להסתברות המבוקשת בעזרת משפט הגבול המרכזי. נקבל:

$$P\{Y \le 57\} = P\{Y \le 57.5\} \cong \Phi\left(\tfrac{57.5-90\cdot 0.6}{\sqrt{90\cdot 06\cdot 0.4}}\right) = \Phi(0.7531) = 0.7743$$

שאלה 3

א. הערכים האפשריים של המשתנה המקרי Y הם: 1, 2, ..., 30, ומתקיים:

1. $$P\{Y = i\} = P\{X = i\} = 0.01\cdot 0.99^{i-1} \qquad , \qquad i = 1,2,\ldots,29$$
$$P\{Y = 30\} = P\{X \ge 30\} = P\{X > 29\} = 0.99^{29} = 0.74717$$

2. $$P\{X = Y\} = P\{X \le 30\} = 1 - P\{X > 30\} = 1 - 0.99^{30} = 0.2603$$

ב. הערכים האפשריים של המשתנה המקרי W הם: 30, 31, ..., 100, ומתקיים:

1. $$P\{W = 30\} = P\{U \le 30\} = \tfrac{30}{100} = 0.3$$
$$P\{W = j\} = P\{U = j\} = \tfrac{1}{100} = 0.01 \qquad , \qquad j = 31,32,\ldots,100$$

2. $$E[W] = 30\cdot 0.3 + \sum_{i=31}^{100} i\cdot 0.01 = 9 + 0.01\cdot\left(\tfrac{100\cdot 101}{2} - \tfrac{30\cdot 31}{2}\right) = 9 + 45.85 = 54.85$$

שאלה 4

א. מספר התוצאות האפשריות השונות של הניסוי הוא !10. מספר האפשרויות להכניס את הכדורים הזוגיים לקופסאות הזוגיות ואת הכדורים האי-זוגיים לקופסאות האי-זוגיות הוא $(5!)^2$.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $$\frac{(5!)^2}{10!} = \frac{1}{252} = 0.00397$$

ב. נחשב את ההסתברות המשלימה, שלפחות אחד מהכדורים 1 ו- 2 יוכנס לקופסה המתאימה לו.
נסמן ב- A את המאורע שכדור 1 יוכנס לקופסה 1 וב- B את המאורע שכדור 2 יוכנס לקופסה 2.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{10\cdot 9} = \tfrac{17}{90}$$

ומכאן: $$P(A^C \cap B^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \tfrac{17}{90} = \tfrac{73}{90} = 0.8\bar{1}$$

ג. נסמן ב- X את מספר הכדורים שמוכנסים לקופסאות המתאימות להם, ונגדיר את האינדיקטורים:

$$X_i = \begin{cases} 1 & , \quad \text{כדור } i \text{ הוכנס לקופסה } i \\ 0 & , \quad \text{אחרת} \end{cases} \qquad \text{לכל } i = 1,\ldots,7$$

נקבל כי: $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$ = מספר הכדורים שהוכנסו לקופסאות המתאימות להם.

עתה, לכל $i = 1,\ldots,10$ מתקיים:
$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \tfrac{1}{10}$$

ומכאן כי:
$$E[X] = \sum_{i=1}^{10} E[X_i] = 10 \cdot \tfrac{1}{10} = 1$$

כמו כן:
$$\mathrm{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = \tfrac{1}{10} \cdot \tfrac{9}{10} = \tfrac{9}{100}$$

ולכל $1 \le i\,, j \le 10$ $(i \ne j)$ מתקיים:
$$P\{X_i = 1, X_j = 1\} = \tfrac{1}{10} \cdot \tfrac{1}{9} = \tfrac{1}{90}$$

לפיכך, לכל $1 \le i\,, j \le 10$ $(i \ne j)$ מתקיים:
$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \tfrac{1}{90} - \left(\tfrac{1}{10}\right)^2 = \tfrac{1}{900}$$

ולכן:
$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{10} \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i \ne j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 10 \cdot \tfrac{9}{100} + 10 \cdot 9 \cdot \tfrac{1}{900} = 1$$

שאלה 5

א. לפי נוסחת ההסתברות השלמה:
$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 = \tfrac{7}{18} = 0.3\bar{8}$$

בניסוי המתואר בסעיף ב בחירת המטבעות נעשית ללא החזרה. לפיכך, לא מדובר בניסוי מולטינומי, אלא במעין הכללה של ניסוי היפרגיאומטרי. הניסוי מתאר בחירה אקראית, אך ללא החזרה, מתוך אוכלוסייה בגודל 60 המורכבת מ-3 סוגים של עצמים.

ב1.
$$P\{X = i, Y = j\} = \frac{\binom{30}{i}\binom{20}{j}\binom{10}{10-i-j}}{\binom{60}{10}} \quad , \quad i, j = 0,1,\ldots,10 \quad ; \quad 0 \le i + j \le 10$$

ב2.
$$P\{X = i \mid Y = 4\} = \frac{\binom{30}{i}\binom{10}{6-i}}{\binom{40}{6}} \quad , \quad i = 0,1,\ldots,6$$

ב3. ההתפלגות השולית של כל אחד מהמשתנים המקריים X ו- Y היא היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $(N = 60, m = 30, n = 10)$ ו- $(N = 60, m = 20, n = 10)$, בהתאמה. זוהי גם ההתפלגות של סכומם $X + Y$, כאשר הפרמטרים במקרה זה הם $(N = 60, m = 50, n = 10)$.

לפיכך, מהמשוואה:
$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

מקבלים:
$$\tfrac{60-10}{60-1} \cdot 10 \cdot \tfrac{50}{60} \cdot \tfrac{10}{60} = \tfrac{60-10}{60-1} \cdot 10 \cdot \tfrac{30}{60} \cdot \tfrac{30}{60} + \tfrac{60-10}{60-1} \cdot 10 \cdot \tfrac{20}{60} \cdot \tfrac{40}{60} + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

ומכאן כי:
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2{,}500 - 4{,}500 - 4{,}000}{2{,}124} = -1.41243$$