ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20585

מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חוברת הקורס - סתיו 2014א

כתב: אלעזר בירנבוים

אוקטובר 2013 - סמסטר סתיו - תשע"ד

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

אני מקדם את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים.
בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.
פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:
http://telem.openu.ac.il
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

שעות הייעוץ בקורס מתקיימות בימי ראשון בשעות 18:00-20:00 בטלפון 04-6850321.
אבקש מאד לא להתקשר לטלפון הזה בשעות לא סבירות ובשבתות.
ניתן לפנות גם בדואר אלקטרוני: elazar@openu.ac.il

אני מאחל לכם הצלחה בלימודים.

בברכה,

אלעזר הירנבוים

מרכז ההוראה

1. **לוח זמנים ופעילויות** (20585 / א2014)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
1	18.10.2013-13.10.2013	פרק 1		
2	25.10.2013-20.10.2013	פרק 1		
3	1.11.2013-27.10.2013	פרק 2	מפגש ראשון	ממ"ן 11 1.11.2013
4	8.11.2013-3.11.2013	פרק 2 פרק 3		
5	15.11.2013-10.11.2013	פרק 3	מפגש שני	
6	22.11.2013-17.11.2013	פרק 3 פרק 4		ממ"ן 12 22.11.2013
7	29.11.2013-24.11.2013 (ה-ו חנוכה)	פרק 4	מפגש שלישי	
8	6.12.2013-1.12.2013 (א-ה חנוכה)	פרק 4		

* *התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

לוח זמנים ופעילויות – המשך

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
9	13.12.2013-8.12.2013	פרק 4	מפגש רביעי	
10	20.12.2013-15.12.2013	פרק 4 פרק 5		ממ"ן 13 20.12.2013
11	27.12.2013-22.12.2013	פרק 5	מפגש חמישי	
12	3.1.2014-29.12.2013	פרק 5 פרק 6		ממ"ן 14 3.1.2014
13	10.1.2014-5.1.2014	פרק 6	מפגש שישי	
14	17.1.2014-12.1.2014	פרק 7		
15	24.1.2014-19.1.2014	פרק 7	מפגש שביעי	ממ"ן 15 24.1.2014

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

2. תיאור המטלות

קראו היטב עמודים אלו לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס - הבנה מעמיקה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. המטלות תיבדקנה על-ידי המנחה ותוחזרנה בצירוף הערות המתייחסות לתשובות.

המטלות מלוות את יחידות הלימוד בקורס. להלן פירוט המטלות, היחידות שאליהן מתייחסת כל מטלה ומשקלה היחסי. בחלק מהמטלות תופענה גם שאלות המתייחסות ליחידות שכבר נלמדו.

ממ"ן 11 - פרק 1 - 6 נקודות
ממ"ן 12 - פרקים 2, 3 - 6 נקודות
ממ"ן 13 - פרק 4 - 8 נקודות
ממ"ן 14 - פרק 5 - 4 נקודות
ממ"ן 15 - פרקים 6, 7 - 6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל של 24 נקודות לפחות.
שימו לב שחובה להגיש את ממ"ן 13.

ללא צבירת 24 נקודות בהגשת מטלות לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

למען הסר ספק, יודגש שחל איסור על הכנה משותפת והעתקה של מטלות או חלקי מטלות.
(הנושא מפורט בתקנון משמעת לסטודנטים - נספח 1 של ידיעון האו"פ).

לתשומת לבכם!
כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן:

אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלה** בציון הנמוך ביותר, שציונה נמוך מציון הבחינה , לא תילקח בחשבון בעת שקלול הציון הסופי.

זאת בתנאי שמטלה זו **אינה חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס.
סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון שמספרו 09-7782222, או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא http://www.openu.ac.il/sheilta קורסים ⇦ ציוני מטלות ובחינות ⇦ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.

יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של ציוני המטלות והבחינה יהיה נמוך מ-60).

כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל כולל של 24 נקודות לפחות.

ב. ציון של לפחות 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

מטלת מנחה (ממ״ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2014א **מועד אחרון להגשה:** 1 נוב׳ 13

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1 (15%)

אפשר להציע אלגוריתם נוסף להכרעת השפה A של דוגמה 3.7:

בכל שלב מוחקים את המחצית הימנית של ה-0-ים שעדיין רשומים על הסרט.

ממשיכים בתהליך הזה עד שמגיעים למספר 0-ים אי-זוגי גדול מ-1 ואז דוחים, או עד שמגיעים ל-0 יחיד ואז מקבלים.

הציגו **תיאור מלא** של מכונת טיורינג שמממשת את האלגוריתם הזה (כמו איור 3.8 בספר).

אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$.

למכונה יהיו **לא יותר מעשרה מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

הסבירו היטב את פעולת המכונה ולמה היא אכן מכריעה את השפה A.

שאלה 2 (14%)

א. הציגו תיאור מלא של מכונת טיורינג **שמכריעה** את השפה הריקה $\emptyset$.

ב. הציגו תיאור מלא של מכונת טיורינג **שמזהה** את השפה הריקה $\emptyset$ אך **איננה מכריעה** אותה.

בתשובות לשני הסעיפים עליכם להציג מכונות עם **מספר קטן ככל האפשר** של מצבים, **ולהסביר היטב** מדוע המכונות אכן מבצעות את הנדרש.

שאלה 3 (12%)

עיינו בהגדרה 3.3 בספר (עמוד 168).

נניח שנשנה את ההגדרה של פונקצית המעברים δ (בסעיף 4) באופן הבא:

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\mathrm{L}_k, \mathrm{R}_k \mid k \text{ is natural}, k > 0\}$$

הפירוש של הפונקציה החדשה הוא כזה: כאשר המכונה נמצאת במצב q, והראש קורא את הסמל a, אם $\delta(q, a) = (r, b, \mathrm{R}_k)$, אז כותבים b במקום a, עוברים מהמצב q למצב r, והראש נע על הסרט k ריבועים ימינה. אם $\delta(q, a) = (r, b, \mathrm{L}_k)$, אז כותבים b במקום a, עוברים מהמצב q למצב r, והראש נע על הסרט k ריבועים שמאלה. אם במהלך התנועה שמאלה מגיעים לריבוע השמאלי ביותר של הסרט, נשארים בריבוע זה.

האם למכונה כזו **יש יותר כוח** מאשר למכונה רגילה?

אם עניתם שכן, עליכם להראות שמכונה כזו יכולה לזהות **כל שפה שהיא**.

אם עניתם שלא, עליכם להראות כיצד מכונה רגילה יכולה לחקות את פעולתה של המכונה החדשה.

שאלה 4 (15%)

בנו מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית** להכרעת השפה D הבאה:

$$D = \{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0, 1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0, 1, \sqcup, x\}$; למכונה יהיו **לא יותר מ-12 מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{reject} וכל הקשתות שנכנסות אליו).

הסבירו היטב את פעולת המכונה, את התפקיד של כל מצב, את נקודות האי-דטרמיניזם, ולמה המכונה אכן מכריעה את D.

שאלה 5 (16%)

בנו מונה (enumerator) לשפה $\{0, 1\}^*$, שידפיס את המילים של השפה **בסדר הסטנדרטי** (המילה הריקה, אחר כך המילה 0, אחר כך המילה 1, אחר כך המילה 00, אחר כך המילה 01, וכך הלאה).

האלפבית Σ של סרט הפלט יהיה $\{0, 1\}$; האלפבית Γ של סרט העבודה יהיה $\{0, 1, \sqcup\}$.

למונה יהיו **לא יותר מעשרה מצבים** (כולל q_{print} ו-q_{halt}).

תארו את המונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{halt} וכל הקשתות שנכנסות אליו. אפשר לוותר על הציור של מעברים בלתי אפשריים).

להגדרה פורמלית של מונה, עיינו במדריך הלמידה.

הסבירו היטב את פעולת המונה, ולמה הוא אכן מדפיס את המילים של השפה $\{0, 1\}^*$ בסדר הסטנדרטי.

שאלה 6 (16%)

נתונים שני מונים (enumerators) E_1 ו-E_2.

נסמן על-ידי $L(E_1)$ את השפה ש-E_1 מפיק, ועל-ידי $L(E_2)$ את השפה ש-E_2 מפיק.

א. **הסבירו היטב** כיצד אפשר לבנות מונה $E_\cup$ שמפיק את השפה $L(E_1) \cup L(E_2)$.

הכוונה היא לבניית המונה $E_\cup$ מן המונים E_1 ו-E_2, בלי לעבור דרך מכונות טיורינג.

אתם רשאים להניח שלמונה $E_\cup$ יש כמה סרטי עבודה.

ב. **הסבירו היטב** כיצד אפשר לבנות מונה $E_\cap$ שמפיק את השפה $L(E_1) \cap L(E_2)$.

הכוונה היא לבניית המונה $E_\cap$ מן המונים E_1 ו-E_2, בלי לעבור דרך מכונות טיורינג.

אתם רשאים להניח שלמונה $E_\cap$ יש כמה סרטי עבודה.

שאלה 7 (12%)

א. בעיה 3.15 בספר סעיף **c**.

ב. בעיה 3.16 בספר סעיף **c**.

הגדרת הפעולה כוכב מופיעה בספר בהגדרה 1.23 (עמוד 44).

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2014א **מועד אחרון להגשה:** 22 נוב' 13

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (14%)

הוכיחו, בדרך שונה מן ההוכחה המופיעה בספר, שהשפה E_{DFA} המוגדרת בעמוד 196 בספר היא שפה כריעה. ההוכחה החדשה תתבסס על היותה של השפה A_{DFA} (מעמוד 194 בספר) שפה כריעה. (במקום האלגוריתם המוצע בהוכחת משפט 4.4 בספר, הציעו אלגוריתם שיריץ את האלגוריתם להכרעת A_{DFA} על מספר סופי של קלטים, ולפי תוצאות ההרצות הללו יקבע את השייכות ל-E_{DFA}).

תארו את המכונה המתאימה להוכחה שלכם, והוכיחו את נכונות האלגוריתם שלפיו בניתם את המכונה.

שאלה 2 (12%)

תהי U **מכונת טיורינג אוניברסלית** (כמו בהוכחת משפט 4.11).

מה יקרה כאשר נריץ את U על הקלט $<U, <U>>$? (האם המכונה תגיע למצב q_{accept}? האם היא תגיע ל-q_{reject}? האם היא לעולם לא תעצור?)

הצדיקו את תשובתכם.

שאלה 3 (15%)

הוכיחו שהשפה G הבאה היא **מזוהה-טיורינג אך איננה כריעה**:

$$G = \{<M, x> \mid M \text{ is a TM that accepts } x\text{; when } M \text{ terminates its running on } x \text{ its tape contains a word longer than } x\}$$

(מילה $<M, x>$ שייכת ל-G אם M היא תיאור של מכונת טיורינג, x היא מילה, M מקבלת את x, וכאשר M מסיימת את ריצתה על x (במצב q_{accept}) כתובה על הסרט של M מילה יותר ארוכה מ-x).

הוכחת האי-כריעות של השפה תיעשה **בעזרת שיטת האלכסון**. (הדרכה מופיעה בעמוד הבא).

הדרכה : הניחו בשלילה ש-G כריעה. אז יש מכונה H שמכריעה אותה. בנו מכונה D שתפעל הפוך מכל מכונה M שהיא.

(אל תשכחו להוכיח ש-G מזוהה-טיורינג).

שאלה 4 (14%)

הציגו רדוקציה של $HALT_{\mathrm{TM}}$ ל-E_{TM}.

(השפות הללו מוגדרות בעמודים 216 ו-217 בספר).

שאלה 5 (12%)

במשפט 5.10 הוכח שהשפה E_{LBA} איננה כריעה.

א. האם E_{LBA} היא שפה **מזוהה-טיורינג**? הוכיחו את תשובתכם.

ב. האם השפה **המשלימה** (השפה $\overline{E_{\mathrm{LBA}}}$) היא שפה **מזוהה-טיורינג**? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 6 (18%)

עיינו בהוכחת משפט 5.30.

כדי להראות רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $\overline{EQ_{\mathrm{TM}}}$, מתוארת מכונה F שבונה שתי מכונות M_1 ו-M_2.

כדי להראות רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל-EQ_{TM}, מתוארת מכונה G שבונה שתי מכונות M_1 ו-M_2.

בנו רדוקציות מיפוי **אחרות** של A_{TM} ל- $\overline{EQ_{\mathrm{TM}}}$ ול-EQ_{TM}. ברדוקציות שתבנו, **המכונה M_1 תהיה המכונה M** (של הקלט לרדוקציה).

כלומר, כדי להראות רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל- $\overline{EQ_{\mathrm{TM}}}$, תארו מכונה F' שבונה מכונות M_1 ו-M_2, והמכונה M_1 שהיא בונה היא **המכונה M מן הקלט של F'**.

כדי להראות רדוקצית מיפוי של A_{TM} ל-EQ_{TM}, תארו מכונה G' שבונה מכונות M_1 ו-M_2,והמכונה M_1 שהיא בונה היא **המכונה M מן הקלט של G'**.

שאלה 7 (15%)

הוכיחו : $REGULAR_{\mathrm{TM}}$ איננה מזוהה-טיורינג וגם השפה המשלימה שלה איננה מזוהה טיורינג.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 8 **משקל המטלה:** 8 נקודות

סמסטר: 2014א **מועד אחרון להגשה:** 20 דצמ' 13

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (12%. סעיף א - 4%, סעיף ב - 8%)

לכל אחת מן השפות הבאות, מצאו פונקציות $t(n)$ ו-$s(n)$ **מצומצמות ביותר**, כך שהשפה שייכת ל-$\mathrm{TIME}(t(n))$ במכונת טיורינג בעלת סרט אחד, והשפה שייכת ל-$\mathrm{TIME}(s(n))$ במכונת טיורינג בעלת שני סרטים.

עליכם **להצדיק** את תשובותיכם - למה אלה הפונקציות המצומצמות ביותר האפשריות.

א. שפת המילים מעל $\{a, b\}$ שהסמל הראשון במילה הוא a.

ב. שפת המילים מעל $\{a, b\}$ שבהן מספר ה-a-ים שווה למספר ה-b-ים.

שאלה 2 (14%. כל סעיף 7%)

הוכיחו שהשפות הבאות שייכות למחלקה P:

א. A_{NFA} (ראו משפט 4.2 בספר).

ב. $C = \{<G, w> \mid G \text{ is a CFG in Chomsky normal form and } w \text{ has more than one parse tree in } G\}$

$<G, w>$ שייכת ל-C אם G הוא דקדוק חסר הקשר בצורה הנורמלית של חומסקי, $w \in L(G)$,

ויש יותר מאופן אחד לגזור את w בדקדוק G.

שאלה 3 (6%)

תהי A שפה מעל אלפבית נתון Σ. השפה $mim(A)$ מוגדרת כך:

$$min(A) = \{w \in A \mid \text{for every } v \in \Sigma^* \text{ such that } w = vu \text{ and } u \neq \varepsilon,\ v \notin A\}$$

($min(A)$ היא שפת המילים המינימליות של A, כלומר, מילים ששייכות ל-A אבל אף תחילית ממש שלהן לא שייכת ל-A).

נתון ש-A שייכת למחלקה P. האם **בהכרח** גם $min(A)$ שייכת למחלקה P? **הוכיחו** את תשובתכם.

שאלה 4 (16%)

א. הציעו מאמת (verifier) לשפה $\overline{EQ_{\mathrm{CFG}}}$ (ראו תרגיל 5.1 בספר).

ב. הסבירו מדוע המאמת שהצעתם איננו בהכרח בעל זמן ריצה פולינומיאלי בגודל הקלט.

ג. הוכיחו: $\overline{EQ_{\mathrm{CFG}}}$ **לא שייכת** ל-NP.

שאלה 5 (14%)

נעיין בשפה C הבאה:

$$C = \{\langle p, n\rangle \mid p \text{ and } n \text{ are natural numbers and there is no prime number in the range } [p, p+n]\}$$

א. פרופסור מכובד הציע את ההוכחה הבאה לכך שהשפה C שייכת למחלקה NP:
לכל מילה $\langle p, n\rangle$ ששייכת ל-C יש אישור שמוכיח את השייכות שלה לשפה: האישור מורכב ממחלק לא טריוויאלי לכל אחד מן המספרים בתחום $[p, p+n]$.
האם ההוכחה של הפרופסור טובה? הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. הוכיחו שהשפה **המשלימה** לשפה C שייכת למחלקה NP.

ג. אם יוכח ש- P = NP, האם אפשר יהיה להסיק ש-C שייכת ל-NP?
הצדיקו היטב את תשובתכם.

ד. אם יוכח ש- P ≠ NP, האם אפשר יהיה להסיק ש-C לא שייכת ל-NP?
הצדיקו היטב את תשובתכם.

שאלה 6 (10%)

הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של *3SAT* ל- *INDEPENDENT-SET*.
(*INDEPENDENT-SET* מוגדרת במדריך הלמידה בעמוד 94).

שאלה 7 (14%)

א. בעיה 7.53 בספר (עמוד 328).

ב. הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של $\neq SAT$ ל- *SET-SPLITTING* (ראו בעיה 7.29 בספר).

שאלה 8 (14%)

מעגל המילטון בגרף לא מכוון $G = (V, E)$ הוא מעגל פשוט שמכיל כל צומת של הגרף פעם אחת ויחידה.

השפה *UHAMCIRCUIT* מוגדרת כך:

$$UHAMCIRCUIT = \{\langle G\rangle \mid G \text{ is an undirected graph that has a Hamiltonian circuit}\}$$

(זוהי שפת הגרפים הלא מכוונים שיש להם מעגל המילטון).

א. הראו רדוקציה בזמן פולינומיאלי של *UHAMPATH* ל- *UHAMCIRCUIT*.

ב. הוכיחו: *UHAMCIRCUIT* היא NP-שלמה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2014א **מועד אחרון להגשה:** 3 ינו' 14

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

בדוגמה 8.3 בספר מראים ש-SAT שייכת ל-SPACE(n).

האם אפשר להסיק מכך ומן העובדה ש-SAT היא בעיה NP-שלמה, ש- $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{SPACE}(n)$?

הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 2 (10%)

נתונה השפה $\#SAT$

$\#SAT$ = {<ϕ, k> | ϕ is a Boolean formula with **at least** k different satisfying assignments}

א. האם אפשר להוכיח ששפה זו שייכת ל- SPACE(n)?
אם עניתם שכן, כתבו את ההוכחה. אם עניתם שלא, הסבירו למה לא.

ב. האם התשובה לסעיף א תשתנה, אם נחליף בהגדרת השפה את המילים "at least" במילים "at most"? הסבירו את תשובתכם.

ג. האם התשובה תשתנה, אם נחליף את המילים "at least" במילה "exactly"?
הסבירו את תשובתכם.

שאלה 3 (20%)

א. הוכיחו: $EQ_{\mathrm{DFA}} \in \mathrm{SPACE}(n^2)$. (השפה EQ_{DFA} מוגדרת לפני משפט 4.5 בספר)

ב. הוכיחו: $EQ_{\mathrm{NFA}} \in \mathrm{SPACE}(n^2)$. ($EQ_{\mathrm{NFA}} = \{<A, B> \mid A \text{ and } B \text{ are NFAs and } L(A) = L(B)\}$)

שאלה 4 (20%)

בעיה 8.34 בספר (עמוד 360).

כדי להוכיח שהשפה B שייכת למחלקה L, עליכם לתאר בפירוט מכונה דטרמיניסטית, בעלת סיבוכיות מקום לוגריתמית, שמכריעה את B.

שאלה 5 (20%)

הבעיה *HITTING-SET* מוגדרת כך:

הקלט: קבוצה סופית S; אוסף $\{S_1, S_2, ..., S_m\}$ של תת-קבוצות של S (כל S_i היא תת-קבוצה של S); מספר טבעי k.

השאלה: האם יש ל-S תת-קבוצה T בגודל k כך שלכל $1 \le i \le m$, $T \cap S_i \neq \varnothing$? (כלומר, האם יש ל-$S$ תת-קבוצה בגודל k שהחיתוך שלה עם כל אחת מן התת-קבוצות S_i איננו ריק?)

הוכיחו: $VERTEX\text{-}COVER \le_L HITTING\text{-}SET$.

(*VERTEX-COVER* מוגדרת בעמוד 312 בספר).

עליכם לתאר את הרדוקציה, להוכיח שהיא תקפה, ולהוכיח בפירוט שהיא יכולה להתבצע **במקום לוגריתמי**.

שאלה 6 (20%)

בעיה 8.16 בספר (עמוד 359).

הדרכה: הראו: $STRONGLY\text{-}CONNECTED \in \mathrm{NL}$ ו- $PATH \le_L STRONGLY\text{-}CONNECTED$.

מטלת מנחה (ממ״ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: סעיפים 9.1, 10.1 ו-10.2 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2014א **מועד אחרון להגשה:** 24 ינו׳ 14

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (12%)

הוכיחו שהפונקציה $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ניתנת לבנייה **במגבלת מקום עצמית** (space constructible).

שאלה 2 (12%)

עיינו במכונה D שבהוכחת משפט 9.3 (עמוד 366).

א. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate M on w ..." במשפט "Simulate M on $<M>$ ..."
(כלומר, במקום לבצע סימולציה של M על $w = <M>10^k$, נבצע סימולציה של M על $<M>$).
האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate M on w ..." במשפט "Simulate M on 10^k ..."
(כלומר, במקום לבצע סימולציה של M על $w = <M>10^k$, נבצע סימולציה של M על 10^k).
האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 3 (12%)

הסבירו כיצד אפשר לבנות מכונה עם שני סרטים, שכאשר היא מקבלת כקלט על הסרט הראשון את המילה 1^n, היא מסיימת כאשר על הסרט השני כתוב הייצוג הבינרי של n.

הסרט הראשון הוא סרט לקריאה בלבד. הסרט השני הוא סרט לקריאה וכתיבה והוא סרט הפלט.
עליכם לבנות מכונה שזמן ריצתה יהיה $O(n)$.

עליכם להסביר היטב את אופן פעולת המכונה, ולהסביר מדוע זמן הריצה שלה הוא $O(n)$.

שאלה 4 (24%)

לימדו את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה (עמודים 150-156).

א. נסחו בעיית **הכרעה** של בעיית הסוכן הנוסע (כלומר, בעיה שהתשובה עליה היא "כן" או "לא").

ב. הוכיחו: בעיית ההכרעה של בעיית הסוכן הנוסע **המטרית** היא בעיה NP-שלמה.

הדרכה: הוכיחו שהיא שייכת ל-NP, והראו רדוקציה פולינומיאלית של בעיית קיומו של מעגל המילטון בגרף לא מכוון.

(מעגל המילטון בגרף לא מכוון G הוא מעגל פשוט שמכיל כל צומת של G פעם אחת ויחידה. אתם יכולים להשתמש בעובדה שבעיית קיומו של מעגל המילטון בגרף לא מכוון היא בעיה NP-שלמה).

ג. הוכיחו: לכל בעיית סוכן נוסע **לא מטרית**, אפשר לבנות בזמן פולינומיאלי בעיית סוכן נוסע **מטרית** עם אותם צמתים, כך ש-P הוא מסלול אופטימלי בבעיה המקורית (הלא מטרית), אם ורק אם P הוא מסלול אופטימלי בבעיה החדשה (המטרית).

הדרכה: הגדילו את משקלי הקשתות באופן שיתקיימו תנאי הבעיה המטרית.

ד. הסבירו מדוע אין סתירה בין קיומו של אלגוריתם קירוב בעל יחס קירוב 2 (ואפילו 1.5) ובעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית הסוכן הנוסע המטרית, ובין אי-קיומו של אלגוריתם כזה לבעיה הכללית (הלא מטרית), לאור מה שהראיתם בסעיף הקודם (שיש דרך מהירה לעבור מהבעיה הכללית לבעיה המטרית, באופן שמשמר את המסלולים האופטימליים).

שאלה 5 (18%)

הוכיחו: אם יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **ההכרעה** *MAX-CUT*, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **האופטימיזציה** *MAX-CUT*.

האלגוריתם לבעיית ההכרעה מקבל כקלט גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

האלגוריתם מחזיר "כן" אם יש ב-G חתך שגודלו לפחות k, ו-"לא" אחרת.

האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה מקבל כקלט גרף לא מכוון G.

האלגוריתם מחזיר חתך בעל גודל מקסימלי ב-G, כלומר, חלוקה של קבוצת הצמתים של G לשתי תת-קבוצות זרות S ו-T, כך שמספר הקשתות המחברות צומת מ-S עם צומת מ-T הוא מקסימלי.

הדרכה: האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה יהיה בנוי משני שלבים:

בשלב הראשון קוראים לאלגוריתם ההכרעה כמה פעמים כדי למצוא את גודלו של החתך המקסימלי.

בשלב השני, מבצעים בכל פעם שינויים (קלים) בגרף, וקוראים לאלגוריתם ההכרעה על הגרפים החדשים. לפי התשובות שהוא מחזיר, יודעים איזה צמתים שייכים לאותה תת-קבוצה (S או T), ואיזה צמתים לא שייכים לאותה תת-קבוצה (כלומר, אם האחד שייך ל-S אז השני שייך ל-T).

שאלה 6 (10%)

עיינו באלגוריתם *PRIME* בעמוד 401 בספר.

הוכיחו: אם t הוא מספר טבעי קטן מ-p שאיננו זר ל-p (המחלק המשותף המקסימלי של t ו-p גדול מ-1), אז t הוא עד לפריקות של p. (כלומר, אם הוא ייבחר כאחד מ-k המספרים בשלב 2 של האלגוריתם, האלגוריתם ידחה).

שאלה 7 (12%)

בעיה 10.10 בספר (עמוד 439).

כדי להוכיח את שוויון המחלקות, הראו הכלה דו-כיוונית.