26/07/2019

ממ"ן 12

אשנב למתמטיקה 04101

ג'יא כרמי 301726154

## שאלה 1:

א.
$P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{\{1\}\},\{1,\{1\}\}\}$

$P(B)=\{\emptyset,\{1\},\{\emptyset\},\{1,\emptyset\}\}$

$P(A)\setminus P(B)=\{\{\{1\}\},\{1,\{1\}\}\}$

$P(B)\setminus B=\{\{1\},\{\emptyset\},\{1,\emptyset\}\}$

$P(A)\setminus\{A\}=\{\emptyset,\{1\},\{\{1\}\}\}$

ב. (i) הפרכה: תהי $C=\{\emptyset\}$, אז $P(C)=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

ומתקיים $P(C)\cap C=\{\emptyset\}\neq\emptyset$

(ii) הפרכה: תהי $C=\{1\}$ אז $P(C)=\{\emptyset,\{1\}\}$

אז מתקיים $P(C)\cap C=\emptyset$

יפה מאד

## שאלה 2:

א. ארצה הכלה דו כיוונית ובכך שוויון.

כיוון ראשון: יהי $x$ המקיים $x\in(A\cup B)\setminus C$, אז $x\in A$ או $x\in B$, וגם $x\notin C$. אם $x\in A$ אז $x\in A\setminus C$, ואם $x\in B$ אז $x\in B\setminus C$, ומכאן שבכל מקרה $x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$

לכן מתקיים $(A\cup B)\setminus C\subseteq(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

כיוון שני: יהי $x$ המקיים $x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$, אז $x\in A$ בטעות פעמיים?

וגם $x\notin C$, או $x\in B$ וגם $x\notin C$, כלומר

בכל אופן $x\notin C$ ומתקיים $x\in A$ או $x\in B$, לכן $x\in(A\cup B)$

וכיוון ש- $x\notin C$ אז גם $x\in(A\cup B)\setminus C$, לכן מתקיים

$(A\setminus C)\cup(B\setminus C)\subseteq(A\cup B)\setminus C$.

כלומר, הראיתי הכלה דו כיוונית לכן מתקיים השוויון.

יפה

## שאלה 2 - המשך

ב. נניח בשלילה כי $A\cap C\neq\emptyset$, יהי $x\in A\cap C$,
אזי $x\in A$ וגם $x\in C$, לכן $x\notin B\setminus C$ (כי שייך ל-C)
וגם $x\in A\setminus(B\setminus C)$ (כי שייך ל- A ולא ל- $(B\setminus C)$ כאמור).
אבל לכל קבוצה $Q$, מתקיים $x\notin Q\setminus C$ (שוב, כי שייך ל-C)
ובפרט עבור $Q=A\setminus B$, כלומר $x\notin(A\setminus B)\setminus C$.
קיבלנו כי לא ייתכן כי $A\setminus(B\setminus C)\subseteq(A\setminus B)\setminus C$
וזאת בסתירה להנחה, לכן הנחת השלילה לא מתקיימת
ו- $A\cap C=\emptyset$ כנדרש.

יפה מאד

ג. לא נכון. עבור $A=\{1\}$ ו- $B=\{\emptyset,A\}$

הטענה נכונה
-7

מתקיים כי $P(A)=B$, לכן ברור כי $P(A)\subseteq B$,
אך לא מתקיים $P(A)\in B$. האיבר $\{\emptyset,A\}$ אינו שייך לקבוצה B.

זה לא קשור למה שצריך להוכיח

אז מה?
הוא בן קבוצה
חלקית ל- B
כנדרש

ד. לא נכון, עבור $A=\{1,2\}$ ו- $B=\{\emptyset,A\}$
מתקיים כי $P(B)=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{A\},B\}$
כמו כן מתקיים $P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},A\}$
ברור כי $\{\emptyset,A\}\in P(B)$, אבל $\{2\}\notin B$, לכן $P(A)\notin B$

יפה

## שאלה 3:

ג. **סגירות:** מתקיימת: יהי $x,y\in A$,

נסמן $z=\frac{x-2}{2}$. $x\geq 2$ וזוגי, לכן $z\geq 0$ מה ההוכחה? (ושלם). למה?

$y\in A$, כלומר זוגי וטבעי, לכן $(y-2)z$ זוגי, למה זוגי? שלם ואינו שלילי.

מכאן ש- $x*y=(y-2)z+2$ גם כן זוגי, ?? שלם וגדול ממש מאפס, לכן טבעי.

נשמע הגיוני אבל זה לא מספיק כאשר מבקשים לנמק כל טענה

ומכאן ש- $x*y\in A$

-1 לא נימקת את הטענות שלך

(כדאי לקרוא בפתרון , כשיפורסם באתר הקורס, איך להוכיח)

**קיבוציות:** מתקיימת:

להגדיר את האיברים

$$(x*y)*z=\left(\frac{(x-2)(y-2)}{2}+2\right)*z=$$

$$\frac{\left(\frac{(x-2)(y-2)}{2}\right)(z-2)}{2}+2=\frac{(x-2)\frac{(y-2)(z-2)}{2}}{2}+2=$$

$$\frac{(x-2)\left(\frac{(y-2)(z-2)}{2}+2-2\right)}{2}+2=\frac{(x-2)(y*z-2)}{2}+2=$$

$$x*(y*z)$$

יפה מאד

**איבר ניטרלי:** קיים:

קל לראות כי 4 איבר ניטרלי, לכן אוכיח זאת:

ברור כי $4\in A$. לכל $x\in A$ מתקיים:

$$x*4=\frac{(x-2)(4-2)}{2}+2=(x-2)\cdot\frac{2}{2}+2=x-2+2=x$$

-2 צריך להוכיח שזה מתקיים גם לכיוון השני (שגם Xפעולה 4=X)

**איבר נגדי:** נניח כי קיים $z\in A$ נגדי:

נחפש $x*z=4$:

$$\frac{(x-2)(z-2)}{2}+2=4$$

$$(x-2)(z-2)=4$$

$$z=\frac{4}{x-2}+2$$

מצאנו $z$ שייתכן כאיבר נגדי ! אך ברור כי

אבל לעניין סעיף ב' אין כאן הוכחה

$z\notin A$. למשל עבור $x=6$, מתקבל כי האיבר הנגדי $z=3$,

אבל ברור כי $3\notin A$, לכן אין איבר נגדי בקבוצה $A$.

## שאלה 3: המשך:

ב. סגירות: מתקיימת. ברור כי קבוצת הרציונליים סגורה לפעולות כפל, חילוק,?? חיבור וחיסור, לכן סגורה עבור הפעולה *. נותר לבדוק רק כי לא ניתן להגיע לאיבר 2 ללא שימוש בו עצמו:

לא סגורה לחילוק

נניח בשלילה כי קיימים $x,y \in A$ עבורם $x*y=2$,

אז $\frac{(x-2)(y-2)}{2}+2=2$, כלומר $(x-2)(y-2)=0$

אבל ברור כי הנ"ל מתקיים רק עבור $x=2$ או $y=2$.

מכאן ש-$A$ סגורה עבור הפעולה *. יפה

קיבוציות: מתקיימת. ניתן להבחין כי ההוכחה מסעיף א' אינה מתבססת על כך ש-$x,z,y \in A$ (עבור הגדרת $A$ של סעיף א'), לכן ההוכחה תקפה גם עבור $A$ בהגדרתה בסעיף ב'.

איבר ניטרלי: קיים, גם במקרה זה האיבר הניטרלי הוא 4 וההוכחה מסעיף א' מתקיימת.

איבר נגדי: קיים. עבור $z=\frac{4}{x-2}+2$ שמצאנו בסעיף א', נראה כי עבור $A$ החדשה, $z \in A$. תחילה, ברור כי $\frac{4}{x-2}+2 \in Q$ לכל $x\neq 2$. כמו כן, ברור כי $\frac{4}{x-2}\neq 0$ לכל $x\neq 2$, לכן $z\neq 2$ ושייך לקבוצה $A$.

כלומר, לכל $x\in A$ קיים איבר $z=\frac{4}{x-2}+2$ המקיים $z\in A$, ועבורו $x*z=4$

-3

לא הוכחת את זה! בסעיף א' הסתמכת על זה ללא הוכחה

בסעיף א' מצאת שאם יש בכלל איבר נגדי אז הוא Z

הרי אין שם הוכחה, הנחת שיש איבר נגדי כאילו זה נתון

לכן נשאר גם להוכיח שאכן Z מקיים א ההגדרה ו- X*Z=4