ש N101272892

מספר סידורי: 18

ת.ז.:

מספר התלמיד הנבחן
רשום את כל תשע הספרות

האוניברסיטה הפתוחה

ט' באלול תשע"ח

20 באוגוסט 2018

מס' שאלון - 462

סמסטר 2018ב

מס' מועד 92

20417 / 4

שאלון בחינת גמר

20417 - אלגוריתמים

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה 6 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה חמש שאלות.

מתוכן יש לענות על ארבע שאלות.

25 נקודות לכל שאלה.

לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).

על שאלות שמסומנות בכוכב - יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה) ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות.

לשאלון זה מצורפים דפי עזר.

חומר עזר:
כל חומר עזר אסור בשימוש.

בהצלחה !!!

החזירו
למשגיח את השאלון
וכל עזר אחר שקיבלתם בתוך מחברת התשובות

אלגוריתמים 2018ב – מועד 3

הנחיות: ענו על 4 מתוך 5 שאלות. לכל שאלה 25 נקודות. לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה. על שאלות שמסומנות בכוכב - יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה), ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין). חומר עזר: אסור. דף נוסחאות מצ״ב. בהצלחה!

***שאלה 1* – גרפים – הכוונת צלעות** (25 נק׳)

הציגו אלגוריתם שמכריע, בהנתן גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$, האם ניתן לכוון כל אחת מהצלעות, כך שבגרף המכוון שמתקבל, דרגת הכניסה של כל קדקוד תהיה גדולה מאפס. (לכל צלע $\{u,v\}\in E$ ניתן לבחור כיוון יחיד: (u,v) או לחלופין (v,u)). כשהתשובה חיובית, על האלגוריתם להחזיר הכוונה של הצלעות - המקיימת את הנדרש.

*אם אין מעגל (הגרף עץ) אזי אבער

נריץ DFS מקודקוד התחלה כלשהו על מנת למצוא מעגל.

נכוון כל צלע ~~במעגל~~ במעגל $e=(u,v)$ מ-u ל-v. נבחר קודקוד

~~במעגל~~ במעגל שעבר כוון לו צלע ונריץ ממנו BFS. נכוון כל צלע

בעץ BFS ~~דמה~~ מקודקוד ברמה i לקודקוד שמחובר אליו ברמה $i+1$.

נכונות: לפי כיוון המעגל, ברור שלכל קודקוד יש צלע נכנס. עבור שאר הקודקודים, BFS מהם, קבלת מה״ע אליקל אותו, אז כל השאר גם יקבלו צלע נכנס.

סיבוכיות זמן - DFS - $\Theta(n+m)$ BFS $\Theta(n+m)$: סה״כ $\Theta(n+m)$

* אם $|E|=|V|-1$ אין מעגל, וברור שלא ניתן להחזיר תשובה חיובית. אחרת, יש מעגל בוודאות.

שאלה 2 – מסלולים מזעריים עם משקלים בקדקודים (25 נק׳)

נתון גרף קשיר מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים חיוביים $c_v>0$ לכל אחד מהקדקודים $v\in V$. משקלו של מסלול מוגדר כסכום משקלי הקדקודים לאורך המסלול. נתונים קדקודי מקור ויעד $s\neq t\in V$ וצלע מסוימת e^*. הציגו אלגוריתמים לפתרון הבעיות הבאות:

(א) מציאת מסלול במשקל מזערי מ- s ל- t. (יש לדייק בהוכחת הנכונות). (15 נק׳)

(ב) הכרעה האם e^* נמצאת בכל מסלול במשקל מזערי מ- s ל- t. (4 נק׳)

(ג) הכרעה האם e^* נמצאת באיזשהו מסלול במשקל מזערי מ- s ל- t. (6 נק׳)

***שאלה 3* – תכנון דינאמי – פרוק למכפלות** (25 נק').

נתון פרוק $x = p_1 \times p_2 \times .... \times p_k$ של מספר טבעי x לגורמים ראשוניים $p_1 < p_2 < .... < p_k$, כשאף חזקה בפרוק איננה גדולה מ-1. (למשל, הפרוק "$30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$" הינו קלט חוקי, אבל הפרוק "$300 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2$" איננו קלט חוקי). נסמן ב-$f(x)$ את מספר הדרכים להציג את x כמכפלה של מספרים טבעיים (לאו דווקא ראשוניים). למשל $f(30) = 5$ משום שישנן בדיוק 5 הצגות שונות של 30 כמכפלה של מספרים טבעיים: $1 \times 30 = 2 \times 15 = 3 \times 10 = 5 \times 6 = 2 \times 3 \times 5$. שימו לב שאין חשיבות לסדר של המוכפלים. למשל $2 \times 3 \times 5$ ו-$3 \times 2 \times 5$ נחשבות לאותה הצגה, (אבל 3×10 ו-$3 \times 2 \times 5$ נחשבות להצגות שונות). הציגו אלגוריתם שבהינתן קלט חוקי $x = p_1 \times p_2 \times .... \times p_k$ מחשב את $f(x)$. הדרכה: מה הקשר בין $f(x)$ לבין $f(y)$ כאשר $y = q_1 \times q_2 \times .... \times q_k$ הינו קלט חוקי עם אותו מספר של גורמים ראשוניים k.

הרעיון המרכזי____

נוסחת הנסיגה____

אלגוריתם וזמן ריצה____

שאלה 4 – קבוצה מנתקת מזערית (25 נק').

נתון גרף מכוון $G = (V, E)$, בו מותאם **לכל קדקוד משקל** שלם חיובי $w(v) > 0$. (לצלעות לא מותאם שום משקל). נתונים קדקודי מקור ויעד s, t, שאינם מחוברים בצלע ישירה, כלומר $(s,t) \notin E$. הציגו אלגוריתם למציאת קבוצת קדקודים בעלת משקל מזערי, שמנתקת את המקור מהיעד. כלומר, מחפשים $U \subseteq V \setminus \{s,t\}$, שמקיימת:

(א) ניתוק מקור מיעד: לאחר הסרת U מהגרף, לא קיים בגרף אף מסלול מכוון מ-s ל-t.

(ב) מזעריות: אם גם $R \subseteq V \setminus \{s,t\}$ מנתקת את המקור מהיעד, אזי $\sum_{v \in R} w(v) \le \sum_{v \in U} w(v)$.

שאלה 5 – תכונות DFT, הרצת FFT (25 נק׳).

(א) נתון הפלט $(v_1,\ldots,v_n)$ של טרנספורם פורייה הדיסקרטי DFT_n מסדר n על מקדמי הפולינום $p(x)$, שדרגתו לכל היותר $n-1$. מהו הפלט של הטרנספורם DFT_{2n} מסדר $2n$ על מקדמי הפולינום $p(x^2)$. (12 נק׳)

(ב) נביט בפולינום $p(x)=-x^3+x^2+2x-2$. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) במסגרת הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום. בדקו את תשובתכם ע״י <u>הצבה ישירה</u> של הערכים המתאימים בפולינום. (13 נק׳)

אלגוריתמים 20417 – דף נוסחאות – גרפים

<u>סימונים</u>. ההגדרות הבאות מתאימות גם לגרפים לא מכוונים וגם לגרפים מכוונים. בגרף $G=(V,E)$ קבוצת הקדקודים (=צמתים) הינה V, וקבוצת הצלעות (=קשתות) הינה E. מסמנים $|V|=n, |E|=m$. כל הגרפים בקורס זה הם "פשוטים" במובן הבא: אין "לולאות עצמיות" (= אין צלע מקדקוד לעצמו) ואין "צלעות כפולות" (צלע יכולה להופיע או לא להופיע, אך לא יכולה להופיע מספר רב של פעמים).

<u>מסלולים</u>. מסלול (=מסילה) בגרף הוא סדרת קדקודים $(v_0,\ldots,v_k)$ כך שיש בגרף צלע מ- v_{i-1} ל- v_i לכל $1\le i\le k$. אפשר לחשוב על אותו מסלול כסדרת צלעות $(e_1,\ldots,e_k)$ שבה לכל $1\le i\le k$ הצלע e_i מחברת בגרף את v_{i-1} ל- v_i. מסלול פשוט הוא מסלול שאף קדקוד לא מופיע בו פעמיים (ומעלה). מעגל הוא מסלול שבו $v_0=v_k$. מעגל פשוט הוא מסלול שאף קדקוד לא מופיע בו פעמיים (ומעלה) למעט $v_0=v_k$. שני מסלולים נקראים זרים בקדקודים אם אין להם אף קדקוד משותף, ונקראים זרים בצלעות אם אין להם אף צלע משותפת. קדקוד t נקרא נגיש מקדקוד s אם קיים בגרף מסלול מ- s ל- t. גרף לא-מכוון נקרא קשיר (ובדומה גרף מכוון נקרא קשיר במובן החזק) אם כל זוג קדקודים נגישים האחד מהשני.

<u>משקלים</u>. בגרף ממושקל לכל צלע e מוגדר משקל $w(e)$ (=אורך $\ell(e)$, =מחיר $c(e)$). בגרף לא ממושקל אורך מסלול = מספר הצלעות במסלול. בגרף כן ממושקל אורך מסלול = סכום משקלי הצלעות במסלול. בגרף כן/לא ממושקל מסלול מזערי (=מינימלי) מ- s ל- t הינו מסלול מ- s ל- t שאורכו מזערי. עץ מרחקים מזעריים T עם שורש $s\in V$ הוא עץ פורש כך שלכל קדקוד $t\in V$, המרחק (=אורך מסלול מזערי) מ- s ל- t ב- T שווה למרחק מ- s ל- t ב- G. אבחנה מרכזית: בגרף כן/לא ממושקל: אם $s\longrightarrow u\longrightarrow v\longrightarrow t$ מסלול מזערי מ- s ל- t, אז תת-המסלול $u\longrightarrow v$ הינו מסלול מזערי מ- u ל- v (כאן $\longrightarrow$ מסמן תת-מסלול). עץ פורש מזערי (עפ"מ) בגרף ממושקל ולא-מכוון הוא עץ פורש, שסכום משקלי הצלעות שלו מזערי מבין כל העצים הפורשים.

<u>רשתות זרימה</u>. ברשת זרימה נתונים גרף מכוון $G=(V,E)$ עם קדקודי מקור $s\in V$ ויעד $s\ne t\in V$ וקיבולות אי-שליליות $c(e)\ge 0$ על הצלעות. זרימה חוקית הינה פונקציה $f:E\to\mathbb{R}$ שמכבדת את מגבלת הקיבולת: $f(e)\le c(e)$ לכל צלע e, ואת חוק שימור הזרימה: $f_{in}(v)=f_{out}(v)$ לכל קדקוד $v\ne s,t$. כאן $f_{in}(v)$ הינו סכום הזרימות בצלעות שנכנסות ל- v, ו- $f_{out}(v)$ הינו סכום הזרימות בצלעות שיוצאות מ- v. חתך $(S,T=V\setminus S)$ ברשת הינה חלוקה של קבוצת הקדקודים שבה $s\in S, t\in T$. קיבולת $c(S,T)$ של חתך הינה סכום הקיבולות של צלעות שיוצאות מ- S ונכנסות ל- T. זרימה $f(S,T)$ של חתך הינה ההפרש בין סכום הזרימות של צלעות שיוצאות מ- S ונכנסות ל- T לבין סכום הזרימות של צלעות שנכנסות ל- S ויוצאות מ- T. לכל חתך (S,T) גודלה של זרימה חוקית f הינו $val(f)=f_{out}(s)=f_{in}(t)=f(S,T)$. משפט מרכזי: גודל זרימה מרבית (max-flow) = גודל חתך מזערי (min-cut).

קלט	פלט	אלגוריתם + זמן ריצה	תכונות + הערות
גרף מכוון G קדקוד מקור $s \in V$	עץ פורש T של הקדקודים הנגישים מ- s	סריקה לרוחב BFS $\|E\|+\|V\|$	T הינו עץ מרחקים מזעריים מהמקור s
		סריקה לעומק DFS $\|E\|+\|V\|$	בגרף לא-מכוון: כל צלע של G שאינה ב- T בהכרח מחברת בין אב-קדמון לבין צאצא שלו ב- T. בגרף מכוון חסר מעגלים: מחשב מיון טופולוגי
גרף מכוון G ממושקל (עם/בלי מקור $s \in V$) $w(e) \geq 0$	עץ T של מרחקים (ומסלולים) מזעריים מהמקור s לקדקודים הנגישים מ- s	דייקסטרא Dijkstra $\|E\|+\|V\|\lg\|V\|$	
$w(e)$ כללי		בלמן-פורד Bellman-Ford $\|E\|\|V\|$	מדווחים על קיומם של מעגלים שמשקלם שלילי
	מרחקים (ומסלולים) מזעריים בין כל זוגות הקדקודים	פלויד-וורשאל Floyd-Warshall $\|V\|^3$	
גרף לא-מכוון G עם משקלים אי-שליליים $w(e) \geq 0$	עפ״מ של הגרף (עץ פורש מזערי)	פרים Prim $\|E\|+\|V\|\lg\|V\|$	אם e צלע שמשקלה מזערי מבין כל הצלעות שמחברות בין $S, V \setminus S$ אז יש עפ״מ שכולל את e.
		קרוסקאל Kruskal $\|E\|\lg\|V\|$	אם e צלע שמשקלה מרבי מבין כל הצלעות במעגל מסוים אז יש עפ״מ שלא כולל את e.
גרף מכוון G עם מקור $s \in V$ ויעד $s \neq t \in V$ וקיבולות אי-שליליות $c(e) \geq 0$	זרימה חוקית מרבית	אדמונדס-קארפ Edmonds-Karp $\|E\|^2\|V\|$	ווריאנט של פורד-פלקרסון Ford–Fulkerson
זוג ווקטורים $\vec{a}=(a_0,\ldots,a_{n-1})$ $\vec{b}=(b_0,\ldots,b_{n-1})$	הקונבולוציה הציקלית $\vec{a}\otimes\vec{b}=$ $(c_0,\ldots,c_{2n-2})$ שבה $c_k=\Sigma_{0\le i\le k}a_i b_{k-i}$	טרנספורם פורייה FFT המהיר $n\lg n$	מתאים לכפל פולינומים $(\sum_{0\le i\le n-1} a_i x^i)(\sum_{0\le j\le n-1} b_j x^j)$ $=(\sum_{0\le k\le 2n-2} c_k x^k)$ כאשר $c_k=\Sigma_{0\le i\le k}a_i b_{k-i}$