אלגוריתמים - תרגיל 11

5 בינואר 2004

תאריך אחרון להגשה: יום ה' 15.1.2004

1. הכפילו את הפולינומים $p(x) = 9 + 7x$ ו-$q(x) = 5 + 4x$ בעזרת FFT. הראו את שלבי הרקורסיה של האלגוריתם.

2. נתון פולינום המיוצג על ידי מקדמיו $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$. הציעו אלגוריתם הרץ בזמן $O(n \lg n)$ המחשב את כל נגזרות הפולינום בנקודה x_0. (מכיוון שכל הנגזרות החל מהנגזרת ה-n-ית הן 0, הכוונה בעצם לנגזרות $0, \ldots, n-1$ והנגזרת ה-0 היא הפולינום עצמו). רמז: השתמשו בקונבולוציה.

3. בכיתה ראיתם אלגוריתם ל-$Pattern\ Matching$ אשר מקבל שתי מחרוזות

$$T = t_0 t_1 \cdots t_n,\ P = p_0 p_1 \cdots p_m$$

כאשר $n < m$, $p_i, t_i \in \{0,1\}$, ומחזיר את כל האינדקסים i כך שלכל $j = 0, \ldots, m$ מתקיים $t_{i+j} = p_j$. תארו אלגוריתם לווריאציה הבאה של הבעיה: T היא מחרוזת בינארית, אבל P היא מחרוזת מעל א"ב עם שלושה איברים, כלומר $p_i \in \{0, 1, ?\}$. אנו מחפשים את כל האינדקסים i כך שלכל $j = 0, \ldots, m$ מתקיים

$$t_{i+j} = \begin{cases} p_j & p_j \in \{0,1\} \\ 0\ or\ 1 & p_j =' ?' \end{cases}$$

4. יהיו $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i x^i$ ו-$g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i x^i$ פולינומים ממעלה $n-1$. נתון האלגוריתם הבא:
א. חשב את $\hat{f} = FFT(f)$, $\hat{g} = FFT(g)$.
ב. חשב לכל $0 \le k \le n-1$ את $\hat{h}_k = \hat{f}_k \hat{g}_k$.
ג. חשב את $h = FFT^{-1}(\hat{h})$.
נציג את המכפלה $f(x)g(x)$ כ-$f(x)g(x) = q(x)(x^n - 1) + r(x)$ כאשר $r(x)$ הוא פולינום ממעלה לכל היותר $n-1$. הוכיחו כי

$$h(x) := \sum_{i=0}^{n-1} h_i x^i \equiv f(x)g(x)(mod(x^n - 1))$$

כלומר $h(x) \equiv r(x)$.
רמז: כדי להראות ששני פולינומים ממעלה $n-1$ שווים זה לזה מספיק להראות שהם שווים ב-n נקודות.