

קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"  
תאריך הבחינה: 11.2.2010 (סמסטר א 2010 - מועד א/84)

**חומר העזר המותר:** מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

**לבחינה מצורפים:** טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

### שאלה 1 (25 נקודות)

(12 נק') א. יהיו  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משתנים מקריים בלתי-תלויים, כך שלכל  $i = 1, 2, \dots, n$  מתקיים

$$E[X_i] = \mu \text{ ו- } \text{Var}(X_i) = \sigma^2.$$

$$\text{נגדיר } M_n = \sum_{i=1}^n X_i / n.$$

חשב את מקדם המתאם הלינארי בין  $X_1$  ל-  $M_n$ .

(13 נק') ב. יהיו  $X_1, X_2, \dots$  משתנים מקריים בלתי-תלויים, כך שלכל  $i = 1, 2, \dots$  מתקיים  $E[X_i] = 0$

$$\text{ו- } E[X_i^2] \leq M, \text{ עבור קבוע חיובי } M.$$

$$\text{נגדיר } S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

$$\text{הוכח כי } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} = 0, \text{ לכל } \varepsilon > 0.$$

### שאלה 2 (25 נקודות)

ילד קטן מקליד את 22 האותיות העבריות מ-א' עד ת' (ללא אותיות סופיות) בסדר אקראי, כך שכל אחת מ-22 האותיות מופיעה בדיוק פעם אחת ברצף ההקלדה.

(8 נק') א. מהי ההסתברות שברצף ההקלדה האותיות א', ב' ו-ג' תופענה עד (וכולל) למקום העשירי?

(שלוש האותיות לא חייבות להופיע במקומות סמוכים או בסדר מסוים).

(8 נק') ב. מהי ההסתברות שברצף ההקלדה האותיות ד' ו-ה' תופענה לפני האותיות צ' ו-ק'?

(9 נק') ג. מהי ההסתברות שברצף ההקלדה תופיע לפחות אחת משלוש המילים "נמל", "ספה" ו"רשת"?

### שאלה 3 (25 נקודות)

יורים במטרה שוב ושוב, עד שפוגעים בה 3 פעמים בסך-הכל.

אין תלות בין יריות שונות.

ההסתברות לפגוע במטרה בכל ירייה היא  $p$  ( $0 < p < 1$ ).

יהיו  $X =$  מספר היריות עד (וכולל) לפגיעה הראשונה;

$Y =$  מספר היריות עד (וכולל) לפגיעה השלישית.

(9 נק') א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו-  $Y$ .

רשום אותה באופן מדויק ופרט את תחום הערכים האפשריים המתאים לה.

(8 נק') ב. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של  $X$  בהינתן  $Y = j$ , עבור  $j = 3, 4, \dots$ .

רשום אותה באופן מדויק ופרט את תחום הערכים האפשריים המתאים לה.

(8 נק') ג. חשב את  $P\{Y - X = 9\}$ .

#### שאלה 4 (25 נקודות)

(13 נק') א. יהיו  $F$  ו- $G$  מאורעות זרים במרחב המדגם של ניסוי מקרי כלשהו. הוכח כי בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה, ההסתברות שהמאורע  $F$  יתרחש לפני המאורע  $G$  היא  $\frac{P(F)}{P(F) + P(G)}$ .

(12 נק') ב. שני אבירים משתתפים בדו-קרב. שני האבירים יורים זה על זה עד שלפחות אחד מהם מוטל מת. האביר האחרון שנותר בחיים מנצח בדו-קרב. בכל ירייה, אביר  $A$  פוגע ביריבו בהסתברות 0.5 ואילו אביר  $B$  פוגע ביריבו בהסתברות 0.3. אין תלות בין תוצאות הירי של אותו אביר או בין תוצאות הירי של שני האבירים.

1. נניח שהאבירים יורים זה על זה בו-זמנית, כלומר, בכל פעם שניהם יורים באותו הזמן. מהי ההסתברות שאביר  $A$  ינצח בדו-קרב? (כלומר, מהי ההסתברות שאביר  $A$  הוא היחיד שִׁנָּתַר בחיים?)

2. נניח שהאבירים יורים זה על זה לסירוגין, כלומר, בכל פעם יורה רק אביר אחד, ואביר  $A$  הוא זה שיורה ראשון, אחריו יורה אביר  $B$ , וחוזר חלילה. מהי ההסתברות שאביר  $A$  ינצח בדו-קרב?

#### שאלה 5 (25 נקודות)

משקלו של אבטיח מזן מסוים הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת של 4 ק"ג וסטיית-תקן של 0.2 ק"ג. אין תלות בין משקלים של אבטיחים שונים.

(6 נק') א. מהו המשקל, שההסתברות שאבטיח מקרי מזן זה ישקול יותר ממנו היא 0.85?

(6 נק') ב. המחיר לק"ג אחד של אבטיח מהזן המדובר הוא 2 ש"ח. מהי הפונקציה יוצרת המומנטים של המשתנה המקרי, המוגדר על-ידי המחיר של אבטיח מקרי?

(7 נק') ג. בוחרים באקראי 50 אבטיחים מהזן שלעיל. ידוע שלפחות שניים מ-50 האבטיחים הללו שוקלים יותר מ-4.2 ק"ג. מהי ההסתברות שבדיוק 7 מהם שוקלים יותר מ-4.2 ק"ג?

(6 נק') ד. מהי ההסתברות שמשקלם הכולל של 3 אבטיחים לא יעלה על 11.5 ק"ג?

**בהצלחה!**

**ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית,  $\Phi(x)$**

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$x$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(x)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
$x$	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(x)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
$x$	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

## דף נוסחאות לבחינה

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}, \quad i=0,1,\dots,n$	$np$	$np(1-p)$	$(pe^t + 1 - p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1} \cdot p, \quad i=1,2,\dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t / (1 - (1-p)e^t)$ $t < -\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i!, \quad i=0,1,\dots$	$\lambda$	$\lambda$	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1} (1-p)^{i-r} \cdot p^r, \quad i=r, r+1, \dots$	$r/p$	$(1-p)r/p^2$	$(pe^t / (1 - (1-p)e^t))^r$ $t < -\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i} / \binom{N}{n}, \quad i=0,1,\dots,m$	$nm/N$	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N} (1 - \frac{m}{N})$	
אחידה בזידה	$\frac{1}{n}, \quad i=m+1, m+2, \dots, m+n$	$m + (1+n)/2$	$(n^2 - 1)/12$	
אחידה	$1/(b-a), \quad a \leq x \leq b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt} - e^{at}) / (tb - ta), t \neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty$	$\mu$	$\sigma^2$	$\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda - t), \quad t < \lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1, \dots, n_r} \cdot p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}, \quad \sum n_i = n, \sum p_i = 1$			

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \quad \text{נוסחת הבינום}$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \quad \text{כלל ההכלה וההפרדה}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{הסתברות מותנית}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \quad \text{נוסחת הכפל}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i) \quad , \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S \quad \text{נוסחת ההסתברות השלמה}$$

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)} \quad , \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S \quad \text{נוסחת בייס}$$

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx \quad \text{תוחלת}$$

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx \quad \text{תוחלת של פונקציה של מ"מ}$$

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2 \quad \text{שונות}$$

$$E[aX + b] = aE[X] + b \quad \text{תוחלת ושונות של פונקציה ליניארית}$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב  $\lambda$  ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר  $\lambda$ .

$$P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\} \quad , \quad s, t \geq 0 \quad \text{תכונת חוסר-הזכרון}$$

$$E[X|Y=y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y) = \int x f_{X|Y}(x|y) dx \quad \text{תוחלת מותנית}$$

$\text{Var}(X   Y = y) = E[X^2   Y = y] - (E[X   Y = y])^2$	שונות מותנית
$E[X] = E[E[X   Y]] = \sum_y E[X   Y = y] p_Y(y)$	נוסחת התוחלת המותנית
$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X   Y)] + \text{Var}(E[X   Y])$	נוסחת השונות המותנית
$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$	תוחלת של סכום משתנים מקריים
$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$	שונות משותפת
$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$	
$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$	שונות של סכום משתנים מקריים
$\rho(X, Y) = \text{Cov}(X, Y) / \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}$	מקדם המתאם הלינארי
$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$	פונקציה יוצרת מומנטים
$M_{X_1+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t) \quad : \text{כאשר } X_i \text{ מ"מ ב"ת מתקיים}$	
$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X]$	תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי
$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\text{Var}(X) + (E[X])^2 \text{Var}(N)$	(כאשר $X_i$ מ"מ ב"ת ש"ה)
$M_Y(t) = E\left[(M_X(t))^N\right]$	
$P\{X \geq a\} \leq E[X]/a \quad , \quad a > 0 \quad , \quad X \text{ מ"מ אי-שלילי}$	אי-שוויון מרקוב
$P\{ X - \mu  \geq a\} \leq \sigma^2/a^2 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty$	אי-שוויון צ'בישב
$P\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)/\sqrt{n\sigma^2} \leq a\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a) \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty \quad , \quad X_i \text{ מ"מ ב"ת וש"ה}$	משפט הגבול המרכזי

- 
- אם  $A$  ו- $B$  מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע  $A$  יתרחש לפני המאורע  $B$  היא  $P(A)/[P(A) + P(B)]$ .
  - סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר  $p$  הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי).
  - סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני.
  - סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי.
  - ההתפלגות המותנית של  $X$  בהינתן  $X + Y = n$ , כאשר  $X$  ו- $Y$  מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו  $p$ ) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

---

$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	
$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1 < x < 1$	
$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \neq -1 \quad ; \quad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$	נוסחת האינטגרציה בחלקים :
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \frac{1}{a \ln b} b^{ax} \quad ; \quad \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$	