תשובה 1 (תקציר)

א. **לא**. השלימו נימוק: תנו שני יחסים שונים מעל A שיש להם אותו סגור טרנזיטיבי.

ב. **לא**. השלימו נימוק: תנו יחס מעל A שאינו טרנזיטיבי והסבירו מדוע זה מפריך את הטענה.

ג. **לא**. השלימו נימוק: תנו דוגמא נגדית.

ד. **כן**: לכל יחס R, היחס $t(R)$ הוא טרנזיטיבי (הסגור הטרנזיטיבי של יחס כלשהו הוא טרנזיטיבי). הסגור הטרנזיטיבי של יחס טרנזיטיבי הוא היחס עצמו, לכן $t(t(R)) = t(R)$.

תשובה 2

א. **לא**. למשל עבור $R_1 = \{(1,1)\}$ מתקיים $f(R_1) = R_1K = \{(1,1)\}$

ועבור $R_2 = \{(1,2)\}$ מתקיים $f(R_2) = R_2K = \{(1,1)\}$.

הצגנו שני איברים שונים ב- M שיש להם אותה תמונה תחת f,

משמע f אינה חד-חד-ערכית.

ב. יהי $R \subseteq K$. עלינו להוכיח $f(R) = R$, כלומר עלינו להוכיח $RK = R$.

הוכחת הכלה בכיוון אחד, $RK \subseteq R$:

יהי $(x,y) \in RK$, וכאמור $R \subseteq K$. עלינו להראות כי $(x,y) \in R$.

מהנתון ומהגדרת כפל יחסים, קיים u כך ש- $(u,y) \in K$, $(x,u) \in R$.

מהגדרת K ומכך ש- $(u,y) \in K$ נובע $y = 1$.

מצד שני, נתון $R \subseteq K$, לכן, שוב מהגדרת K ומכך ש- $(x,u) \in R$ נובע $u = 1$.

קיבלנו $y = u = 1$. לכן בפרט $(x,y) = (x,u)$.

אם כך, מכיון שכאמור $(x,u) \in R$ אז $(x,y) \in R$, כמבוקש.

הוכחת הכלה בכיוון השני, $R \subseteq RK$:

יהי $(x,y) \in R$, וכאמור $R \subseteq K$. עלינו להראות כי $(x,y) \in RK$.

נתון $R \subseteq K$, מהגדרת K ומכך ש- $(x,y) \in R$ נובע $y = 1$.

בנוסף, מהגדרת K , $(1,1) \in K$.

מהגדרת כפל יחסים, מתוך $(1,1) \in K$, $(x,1) \in R$ מתקבל $(x,1) \in RK$

כלומר $(x,y) \in RK$, כמבוקש.

ג. היחס K מכיל את כל הזוגות מהצורה $(x,1)$, כאשר $x \in A$.

מכאן ומהגדרת כפל יחסים נובע שעבור כל יחס R, המכפלה RK חלקית ל- K (מדוע?)

כלומר לכל R מתקיים $f(R) \subseteq K$.

מצד שני, בסעיף הקודם ראינו שכל קבוצה חלקית ל- K נמצאת בתמונה של f :

אם $R \subseteq K$ אז $f(R) = R$, כלומר כל $R \subseteq K$ הוא תמונה של מישהו (של עצמו).

לפיכך התמונה של f היא בדיוק קבוצת הקבוצות החלקיות של K.

מכיון ש- $|K| = 3$, הרי $|P(K)| = 8$.

יש אפוא בדיוק 8 יחסים בתמונה של f : שמונה הקבוצות החלקיות ל- K.

ד. לפי הסעיף "העתק טבעי" בספר - או לפי הקובץ שהוזכר בשאלה -

אם f היא פונקציה **כלשהי**, יש התאמה **חד-חד-ערכית ועל** בין קבוצת מחלקות השקילות ש- f משרה לבין תמונת f.

בסעיף ג' כאן ראינו שבתמונה של הפונקציה f שבשאלה זו יש בדיוק 8 איברים.

לכן מספר מחלקות השקילות הוא 8.

תשובה 3

א. **רפלקסיביות**: תהי $f \in F$. באופן טריביאלי, לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le f(n)$.

לכן $(f,f) \in K$.

אנטי-סימטריות: תהיינה $f,g \in F$, ונניח ש- $(f,g) \in K$ וגם $(g,f) \in K$.

כלומר לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le g(n)$ וגם לכל $n \in \mathbf{N}$, $g(n) \le f(n)$.

משמע לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le g(n)$ וגם $g(n) \le f(n)$.

לכן, מתכונת האנטי-סימטריות של היחס $\le$ בטבעיים, לכל $n \in \mathbf{N}$, $g(n) = f(n)$.

כלומר $f = g$.

טרנזיטיביות: תהיינה $f,g,h \in F$, ונניח ש- $(f,g) \in K$ וגם $(g,h) \in K$.

כלומר לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le g(n)$ וגם לכל $n \in \mathbf{N}$, $g(n) \le h(n)$.

משמע לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le g(n)$ וגם $g(n) \le h(n)$.

מתכונת הטרנזיטיביות של היחס $\le$ בטבעיים, לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \le h(n)$.

כלומר $(f,h) \in K$.

ב. תהי f פונקציית הזהות, כלומר הפונקציה המוגדרת כך: לכל $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n$.

תהי $g(n) = 7$ (הפונקציה הקבועה המחזירה ערך 7 עבור כל $n \in \mathbf{N}$).

מכיוון ש- $g(1) > f(1)$, נקבל $(g,f) \notin K$.

מצד שני $f(10) > g(10)$ ולכן $(f,g) \notin K$.

מצאנו שני איברים של F שהיחס K אינו משווה ביניהם, לכן K אינו סדר-מלא.

ג. תהי $f \in F$, נראה ש- f **אינה** איבר מקסימלי.

נתבונן בפונקציה $g(n) = f(n) + 1$. מובן ש- $g \in F$ ומובן ש- $g \neq f$.

בנוסף, לכל $n \in \mathbf{N}$ מתקיים $f(n) \le g(n)$. לכן $(f,g) \in K$.

לפיכך f אינה איבר מקסימלי, כי g הוא איבר גדול ממנה.

מכיון שאין איבר מקסימלי, ודאי אין איבר גדול ביותר (מדוע?).

ד. בהינתן $f,g \in F$, נגדיר $h \in F$ כך:

לכל $n \in \mathbf{N}$, $h(n) = f(n) + g(n) + 1$.

השלימו את ההוכחה: הוכיחו ש- h מקיימת את הנדרש.

תשובה 4

בדיקה עבור $n = 0$:
$$a_0 = \sum_{i=0}^{5}(0+i)^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$$

חילוק של 55 ב- 12 אכן נותן שארית 7.

מעבר: נניח ש- a_n נותן שארית 7 בחילוק ב- 12, נוכיח שגם a_{n+1} נותן שארית 7 בחילוק ב- 12.

לשם כך די להראות **שההפרש** $a_{n+1} - a_n$ מתחלק ב- 7 **ללא שארית** (מדוע?).

נחשב אפוא:

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{i=0}^{5}(n+1+i)^2 - \sum_{i=0}^{5}(n+i)^2 = (n+6)^2 - n^2 = 12n + 36 = 12(n+3)$$

לכל n טבעי, הביטוי $12(n+3)$ כמובן מתחלק ב- 12.

קיבלנו את הנדרש, כלומר גם a_{n+1} נותן שארית 7 בחילוק ב- 12.

הראינו בדיקה ומעבר מ- n ל- $n+1$. לפי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל n טבעי.

איתי הראבן