ממן 11 מבני נתונים

שאלה 1

נחשב את מספר ההשוואות (בין מפתחות) ואת מספר ההעתקות (של מפתחות) שהאלגוריתם מיון הכנסה מבצע עבור הקלטים הבאים:

.1 $\frac{n}{2}\ ,\frac{n}{2}+1,\ \dots\ ,\ n,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,\ \frac{n}{2}-1$

.2 $\frac{n}{2}\ ,\frac{n}{2}+1,\ \frac{n}{2}-1,\ \frac{n}{2}+2,\ \frac{n}{2}-2,\ \dots\ ,\ 2,\ n-1\ ,\ 1,\ n$

הגדרה: בהינתן מערך A בן n איברים ברי-השוואה היפוך הוא זוג (i,j) $1 \le i < j \le n$ כך ש $A[i] > A[j]$
נסמן בI_A את מספר היפוכים ב-A.
נשים לב כי מספר ההיפוכים במערך מכתיב את מספר ההשוואות והעתקות אשר מיון-הכנסה מבצע, זאת מכיוון שבשורה מס' 6 מתבצע swap בין 2 איברים סמוכים במידה והם מהווים היפוך, לכן לאחר פעולה זו מספר ההיפוכים קטן בדיוק באחד, כלומר בכדי למיין מערך עלינו לבצע בדיוק I_A החלפות כאשר לכל החלפה קדמה השוואה, אך חשוב לציין כי מספר ההשוואות אינו שווה למספר ההחלפות.
בנוסף נבחין כי עבור מערך ממוין מתבצעות $n-1$ השוואות בעקבות תנאי העצירה של הלולאה הפנימית ומספר העתקות במקרה זה הוא $2(n-1)$, זאת בעקבות שורות 2 ו-8 בלולאה החיצונית ולכן נחשב:

1. במערך A_1 לכל $i,j \in N$: $\frac{n}{2}-1 \le j \le n$, $1 \le i \le \frac{n}{2}$ מתקיים $A_1[i] > A_1[j]$ ולכן מספר ההיפוכים הוא בדיוק $I_{A_1} = \left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)$, כלומר בכדי למיין את A_1 עלינו לבצע I_{A_1} החלפות.
מכיוון שבמערך ממוין מספר ההשוואות הוא $n-1$, מספר ההשוואות הוא לכל היותר $I_{A_1}+(n-1)$
מספר זה איננו מדויק מכיוון שעבור מספר 1 מתבצעת החלפה ללא השוואה נוספת, זאת בעקבות תנאי העצירה של הלולאה הפנימית $(i=0)$ ולכן מספר ההשוואות הוא בדיוק:
$$I_{A_1}+(n-1)-1 = \left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)+(n-1)-1 = \frac{n^2}{4}+n-3 = \Theta(n^2)$$
מכיוון שבמיון מערך מתבצעות $2(n-1)$ העתקות (כמות העתקות כאשר המערך ממוין) ובנוסף יש לבצע I_{A_1}החלפות נקבל כי מספר העתקות הוא בדיוק $I_{A_1}+(n-1)$,
$$I_{A_1}+(n-1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)+2(n-1) = \frac{n^2}{4}+2n-3 = \Theta(n^2)$$

2. במערך A_2 לכל $2 \le k \le \frac{n}{2}$ מתקיים $A[2k-1] < A[i]$ כאשר $1 \le i < 2k-1$, כלומר מספר ההשוואות עבור $A[2k-1]$ הוא בדיוק $2k-2$ (תנאי העצירה יהיה עבור $i=0$) ומספר העתקות הוא $2k-1+1$ (העתקה נוספת בתחילת הלולאה) כלומר מספר העתקות הוא $2k$.
בנוסף לכל $1 \le k \le \frac{n}{2}$ מתקיים $A[2k] > A[i]$ ולכן עבור $A[2k]$ מתבצעת השוואה אחת ו-2 העתקות כלומר נקבל כי סה"כ מספר ההשוואות הוא:
$$\sum_{k=2}^{n/2}(2k-2)+\sum_{k=1}^{n/2}1 = 2\sum_{k=1}^{n/2-1}k+\frac{n}{2} = 2\left(\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}\right)}{2}\right)+\frac{n}{2} = \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)+\frac{n}{2} = \frac{n^2}{4} = \Theta(n^2)$$
ומספר העתקות הוא:
$$\sum_{k=2}^{n/2}2k+\sum_{k=1}^{n/2}2 = 2\sum_{k=2}^{n/2}k+2\sum_{k=1}^{n/2}1 = 2\left(\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}+2\right)}{2}\right)+n = \frac{n^2}{4}+\frac{3n}{2}-2 = \Theta(n^2)$$

ב. נתון מערך $T[1...n]$ ממוין של שלמים שונים זה מזה, נכתוב אלגוריתם המחפש אינדקס i כך ש-: $T[i]=i$, השגרה תחזיר את i אם הוא קיים, או -1 אחרת.

המערך הנתון הוא מערך ממוין ולכן נשתמש באותו רעיון של חיפוש בינארי בשיטה הרקורסיבית:
הרעיון: נשתמש ברעיון של חיפוש בינארי בכך שנבדוק בכל איטרציה האם האיבר שנמצא באמצע המערך שווה לאינדקס שלו, במידה והוא לא שווה נבדוק האם הוא קטן או גדול ממנו ובהתאם נמשיך עם חצי מערך.

```
INDEX-BINARY-SEARCH(T, p, r)
1  if p > r
2  return −1
3  q ← ⌊(p + r)/2⌋
4  if q < T[q]
5  then return BINARY-SEARCH(T, p, q − 1)
6  else if q > T[q]
7  then return BINARY-SEARCH(T, q + 1, r)
8   else returnq
```

קריאת ההפעלה:

```
RECURSIVE-INDEX-BINARY-SEARCH(T)
1  return BINARY-INDEX-SEARCH(T, 1, length[T])
```

הוכחת נכונות:
נראה כי תנאי העצירה עוצר את האלגוריתם ולכן הוא סופי,
תנאי העצירה של הרקורסיה הוא p>r, נבחין כי בכל איטרציה אחד מהתנאים בשורות 4,6,8 בהכרח מתקיים ולכן נחלק למקרים:
במידה והתנאי שבשורה 4 מתקיים אז בקריאה הרקורסיבית הבאה r קטן ב-1.
במידה והתנאי שבשורה 6 מתקיים אז בקריאה הרקורסיבית הבאה p גדל ב-1.
במידה והתנאי שבשורה 8 מתקיים לא תתבצע קריאה רקורסיבית.
כלומר תנאי העצירה אכן עוצר את הרקורסיה ובזאת הוכחנו כי השיטה פועלת בזמן סופי.

כעת נוכיח באינדוקציה שהאלגוריתם מחזיר פלט נכון עבור כל מערך ממוין בגודל n,
בסיס: עבוד המערך הריק $(n = 0)$ נקבל כי $p = 1 > 0 = r$ ולכן יוחזר הערך -1 ואכן הפלט נכון.
צעד האינדוקציה: נניח כי האלגוריתם נכון לכל מערך ממוין בגודל k כאשר $k < n$ ונוכיח כי האלגוריתם נכון עבור מערך בגודל n,
יהי מערך A בגודל n כפי שהוסבר אחד מהתנאים בשורות 4,6,8 בהכרח מתקיים ולכן נפריד למקרים:

- אחד מהתנאים שבשורות 4 או 6 מתקיים ולכן מתבצעת קריאה רקורסיבית על התת מערך בגודל $k < n$ ולכן מהנחת האינדוקציה מתקבל פלט נכון.
- התנאי שבשורה 6 מתקיים, כלומר מצאנו את האיבר המקיים את הנדרש ואכן מוחזר מיקומו ולכן מוחזר פלט נכון.

כלומר שלב האינדוקציה הושלם ולכן עבור מערך ממוין בגודל n האלגוריתם מחזיר פלט נכון כנדרש ובזאת הושלמה הוכחת הנכונות של האלגוריתם.
<u>סיבוכיות זמן ריצה:</u> במקרה הגרוע עבור מערך ממוין בגודל n (לא קיים אינדקס i כך ש-$T[i] = i$:)

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & : n = 0 \\ T(n/2) + \Theta(1) : & n > 0 \end{cases}$$

שיטת האב: $a = 1, b = 2$ ולכן $\lg_b a = \lg_2 1 = 0$, בנוסף מתקיים $f(n) = \Theta(1) = \Theta(n^0)$ וע"פ מקרה 2 של משפט האב נקבל כי $\mathrm{T}(n) = \Theta(\lg n)$ בנוסף היה ניתן להבחין בזאת לפי זמן הסיבוכיות של חיפוש בינארי.

<u>שאלה 2</u>

```
POWER (x, n)
if n = 0
    then return 1
if n = 1
    then return x
if n mod 2 = 0
```

א) נראה כי השורות $(3) - (4)$מיותרות
נוכיח תחילה כי תנאי העצירה $n = 0$ עוצר את האלגוריתם:
יהי $n > 0$, בכל איטרציה בדיוק אחד מהתנאים שבשורות 5 ו-7 מתקיים ולכן בקריאה הרקורסיבית הבאה n קטן בחצי, n מספר סופי ולכן לאחר $\log n + 1$ קריאות רקורסיביות מתקיים $n = 0$ ולכן בהכרח האלגוריתם עוצר.
נוכיח כעת כי במידה והאלגוריתם עוצר מוחזר פלט נכון:
בסיס: $n = 0$, לכל x מתקיים $x^0 = 1$ ואכן מוחזר הערך 1 ,כלומר הפלט נכון.
צעד: נניח כי האלגוריתם נכון לכל חזקה $k < n$, כלומר השגרה מחשבת את החזקה ה-k של x ונוכיח כי השגרה מחשבת את החזקה ה-n של x.
יהי מספר n ,נחלק למקרים:

- אם n זוגי התנאי שבשורה 6 מתקיים ולכן מתבצעת קריאה רקורסיבית עם חזקה $n/2$ ו-x^2 , $\frac{n}{2} < n$ ולכן על פי הנחת האינדוקציה מוחזר פלט נכון מהקריאה הרקורסיבית שבשורה 6 ומתקיים כי הערך המוחזר מהשגרה הוא $x^n = (x^2)^{n/2}$ כנדרש.
- אם n אי זוגי, קיים $a \epsilon N$ כך ש $n = 2a + 1$,n אי זוגי ולכן התנאי שבשורה 7 מתקיים, כלומר מתבצעת קריאה רקורסיבית עם חזקה $a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ו-x^2 (נשים לב כי $a < n$),
על פי הנחת האינדוקציה מוחזר פלט נכון מהקריאה הרקורסיבית שבשורה 7 ומתקיים כי הערך המוחזר מהשגרה הוא $(x^2)^a x = x^{2a+1} = x^n$ כנדרש.

בשני המקרים קיבלנו פלט נכון ובזאת הוכחנו את נכונות האלגוריתם.

ב) אכן ניתן להחליף את השורה ב (7) בשורה : else return POWER $(x, n-1) * x$
תחילה נשים לב כי תנאי העצירה עדיין עוצר את הרקורסיה, בכל איטרציה n קטן בחצי או ב-1.
נוכיח שוב את נכונות האלגוריתם באינדוקציה עם זאת שנתבסס על ההוכחה בסעיף א'
בסיס: $n = 0$, לכל x מתקיים $x^0 = 1$ ואכן מוחזר הערך 1 ,כלומר הפלט נכון.
$n = 1$, לכל x מתקיים $x^1 = x$ ואכן מוחזר הערך הוא x, כלומר הפלט נכון.
צעד: נניח כי האלגוריתם נכון לכל חזקה $k < n$, כלומר השגרה מחשבת את החזקה ה-k של x ונוכיח כי השגרה מחשבת את החזקה ה-n של x.
יהיה מספר n אם הוא זוגי הנימוק זהה לזה שבסעיף א' ולכן נתייחס למקרה בו n אי-זוגי,

- אם n אי זוגי, התנאי שבשורה 7 מתקיים ולכן מתבצעת קריאה רקורסיבית עם חזקה $n - 1$ ו-x , נשים לב כי $n - 1 < n$ ולכן על פי הנחת האינדוקציה הערך המוחזר מהקריאה הרקורסיבית הוא x^{n-1} לפי שורה 7 המעודכנת הערך המוחזר מהשגרה הוא $x^{n-1}x = x^n$ כנדרש.

בשני המקרים קיבלנו פלט נכון ובזאת הוכחנו את נכונות האלגוריתם.

ג) מספר פעולות הכפל מספק מידה מתאימה עבור זמן הריצה של השגרה זאת מכיוון שבכל איטרציה מספר פעולות הכפל הוא לכל היותר 2, במידה ו- n זוגי מתבצעת פעולת כפל אחת ואילו n אי-זוגי מתבצעות 2 פעולות כפל,

בנוסף נבחין כי בכל איטרציה n קטן בחצי ולכן לאחר $\log n$ איטרציות מתקיים $n \leq 1$ ולכן אחד מתנאי העצירה מתקיים ולכן מספר פעולות הכפל הוא לכל היותר $2\log n = \Theta(\log n)$.

ד) מספר פעולות הכפל תלוי בתוצאות החלוקה

$$\left\lfloor \frac{62}{2} \right\rfloor = 31 \rightarrow \left\lfloor \frac{31}{2} \right\rfloor = 15 \rightarrow \left\lfloor \frac{15}{2} \right\rfloor = 7 \rightarrow \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor = 3 \rightarrow \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1$$

62 זוגי וכל שאר ה-4 חלוקות הם מספרים אי-זוגיים ולכן מספר פעולות הכפל הוא בדיוק $1 + 2 \cdot 4 = 9$

ה) נראה שזמן הריצה של השגרה הוא $\Theta(\log n)$, נכתוב את נוסחת הנסיגה:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(1)$$

נפתור זאת ע"פ שיטת האב: $a = 1, b = 2$ ונקבל $\lg_b a = \lg_2 1 = 0$, ולכן מתקיים:

$$f(n) = \Theta(1) = \Theta\left(n^{\lg_2 1}\right)$$

ולכן לפי שיטת האב מקרה 2 נקבל כי:

$$T(n) = \Theta(\lg n)$$

ו) במידה ונחליף את שורה (6) בשורה: then return POWER (POWER $(x, 2), n/2)$
יכול להתקיים מצב של קריאה רקורסיבית אינסופית זאת במקרה ו- n יהיה מספר זוגי, זאת מכיוון שקריאה זה אינה משנה את ערכו של n ולכן גם לאחר הקריאה הוא יהיה מספר זוגי ללא שינוי.

ז) במידה ונחליף את שורה (6) בשורה: then return POWER (POWER $(x, n/2), 2)$
גם במקרה זה נוכל לבל מצב של קריאה רקורסיבית אינסופית זאת מכיוון שבמידה ו-n זוגי שורה 6 תתבצע ובכך תתבצע קריאה רקורסיבית פנימית אשר היא כן סופית אך הקריאה החיצונית שולחת תמיד את הערך 2 ל-n ולכן שורה 6 תתבצע אינסוף פעמים.

ח) נראה שניתן להחליף את שורה (6) בשורה: then return POWER $(x, n/2) *$ POWER $(x, n/2)$
נבחין תחילה כי לאחר ההחלפה n קטן בחצי בכל איטרציה ולכן תנאי העצירה אכן עוצר את הרקורסיה שינוי שורה (6) לא שינה את הפלט במידה ותנאי העצירה מתקיים מוחזר פלט תקין ולכן נוכיח באינדוקציה:
בסיס: עבור $n = 0$ מוחזר פלט 1 ואכן זהו פלט תקין
עבור $n = 1$ מוחזר פלט x ואכן זהו פלט תקין.
צעד: נניח כי האלגוריתם נכון לכל חזקה $k < n$, כלומר השגרה מחשבת את החזקה ה-k של x ונוכיח כי השגרה מחשבת את החזקה ה-n של x.
יהיה מספר n אם הוא אי-זוגי הנימוק זהה לזה שבסעיף א' ולכן נתייחס למקרה בו n זוגי:

- אם n זוגי תתבצע (6) המעודכנת ולכן מתבצעות שתי קריאות רקורסיביות זהו עבור חזקה $\frac{n}{2}$ ולכן ע"פ הנחת האינדוקציה מכל אחת מהן מוחזר פלט נכו כלומר מוחזר מכל אחת מהקראיות הנ"ל הערך $x^{\left(\frac{n}{2}\right)}$ ולחכן הערך הסופי המוחזר מהשגרה הוא $x^{\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\left(\frac{n}{2}\right)}$ שזה בדיוק x^n ובזאת צעד האינדוקציה הושלם.

כלומר ניתן להחליף את השורה כנדרש.

נחשב את זמן הריצה לאחר השינוי ע"פ נוסחת הנסיגה המתאימה:

$$T(n)=\begin{cases}2T\left(\frac{n}{2}\right)+\Theta(1) & n\ in\ even\\ T\left(\frac{n}{2}\right)+\Theta(1) & n\ is\ odd\end{cases}$$

ולכן נתייחס למקרה הגרוע שבו n הוא חזקה של 2 ולכן מתקיים כי $\mathrm{T}(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+\Theta(1)$

נפתור לפי שיטת האב: $a=2, b=2 \leftarrow \lg_2 2=1$ נבחר נציגה מהקבוצה $\Theta(1)$ ונקבל כי $f(n)=1=O(n^{1-\frac{1}{2}})$
ולכן ע"פ מקרה 1 נקבל $\mathrm{T}(n)=\Theta(n)$.

ט) נבחין כי כל מספר בייצוג הבינארי שלו נבדל בין מספר זוגי למספר אי-זוגי ע"פ הספרה הימנית ביותר (במספרים שלמים), בנוסף בכל חלוקה של המספר ב-2 אנו משמיטים את הספרה הימנית ומזיזים את כל הספרות הזזה ימינה ולכן הבדיקה האם המנה עדיין זוגית עדיין תקפה על פי הספרה הימנית,
אם הספרה הימנית היא 1 נקבל כי המספר הוא אי-זוגי אחרת המספר אכן זוגי, כלומר מספר האחדות אשר נסמנו כ-v מצביע על מספר הפעמים אשר מתבצע 2 פעולות כפל (מלבד הספרה האחרונה בעקבות תנאי העצירה $n=1$) ומספר האפסים אשר נסמנו כ-u מצביע על מספר הפעמים אשר מתבצעת פעולה כפל יחידה.
כלומר מספר פעולות הכפל הוא בדיוק $2(v-1)+u$.

י) ניתן לחשב את x^{62} בעזרת 8 פעולות כפל בצורה הבאה:

$x_2 \leftarrow power(x,2)$	פעולת כפל אחת
$x_4 \leftarrow power(x_2,2)$	פעולת כפל אחת
$x_{16} \leftarrow power(x_4,4)$	2 פעולות כפל
$x_{20} \leftarrow x_{16} * x_4$	פעולת כפל אחת
$x_{60} \leftarrow power(x_{20},3)$	2 פעולות כפל
$x_{62} \leftarrow x_{60} * x_2$	פעולת כפל אחת

סה"כ 8 פעולות כפל כנדרש.

יא)

הרעיון: נכתוב שגרה איטרטיבית המחשבת את החזקה ה-n של x על אותו רעיון של השגרה הרקורסיבית,

נכתוב לולאה מכפילה את x בעצמו בכל איטרציה ונשמור משתנה זמני אשר יוכפל ב– x במידה ו – n אי זוגי.

```
POWER (x, n)
res ← 1
while n > 0
      if n%2 ≠ 0
          res ← res * x
      x ← x * x
      n ← n/2
return res
```

<u>נכונות:</u>
מכיוון שבכל איטרציה של הלולאה מתבצע שינוי עבור ערכי x, n, res נסמן את ערכם בתחילת כל איטרציה i בסימון x_i, n_i, res_i,
שמורת לולאה: בתחילת כל איטרציה i מתקיים כי $x_i^{n_i} * res_i = x^n$
<u>הוכחה:</u>
בסיס: בתחילת האיטרציה הראשונה $(i = 1)$ מתקיים כי $x_1 = x, n_1 = n, res_1 = 1$ ואכן מתקיים כי $x_1^{n_1} * res_1 = x^n$
צעד: נניח כי הטענה נכונה עבור האיטרציה ה-i ונראה כי היא נכונה עבור האיטרציה הבאה $(i + 1)$,
נשים לב כי בכל איטרציה iמתבצעת בדיקה האם n אי-זוגי ולכן עבור איטרציה i נחלק למקרים

- במידה ו-n_i זוגי בתחילת האיטרציה ה$i + 1$ מתקיים כי $x_{i+1} = x_i^2, n_{i+1} = \frac{n_i}{2}, res_{i+1} = res_i$
  ולכן מתקיים $x_{i+1}^{n_{i+1}} * res_{i+1} = (x_i^2)^{\frac{n_i}{2}} + res_i = x_i^{n_i} * res_i =_1 x^n$.
- במידה ו-n_i אי-זוגי בתחילת האיטרציה ה$i + 1$ מתקיים כי $x_{i+1} = x_i^2, n_{i+1} = \frac{n_i - 1}{2}, res_{i+1} = res_i * x^i$
- ולכן מתקיים $x_{i+1}^{n_{i+1}} * res_{i+1} = (x_i^2)^{\frac{n_i-1}{2}} + res_i * x^i = x_i^{n_i-1} * x * res_i = x_i^{n_i} * res_i =_1 x^n$

1) ע"פ ההנחה.

כלומר בכל מקרה מתקיים כי $x_{i+1}^{n_{i+1}} * res_{i+1} = x^n$ ובזאת צעד האינדוקציה הושלם.

סיום: בכל איטרציה n קטן בחצי ולכן קיים j המקיים כי $n_j = 0$, כלומר j-1 היא האיטרציה האחרונה של הלולאה, לכן לאחר סיום ריצת הלולאה מתקיים $x_j^{n_j} * res_j = x_j^0 * res_j = res_j = x^n$.
כלומר בסוף ריצת הלולאה מתקיים $res = x^n$ ואכן זהו הערך המוחזר מהשגרה.

<u>שאלה 3</u>

$\lg n$	42	n^2	$\lg \lg n$	$\lg(n^2)$
$\sqrt{n}$	$n/\lg n$	$(n-1)^3$	$n \cdot (1+\lg n)$	$(\lg n)^3$
$n^2 \cdot \lg n$	2^{n+1}	$\frac{1}{2} n \cdot (n+1)$	$(n+1) \cdot \lg n$	$n!$

<u>פתרון</u>

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{42}{lglgn} = 0 \to 42 = o(lglgn) \to 42 = O(lglgn)$
2. על פי המדריך בעמוד 34 נובע כי $\lg\lg n = o(\lg n) \to O(\lg n)$
3. $\lg(n^2) = 2\lg n = \Theta(\lg n)$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{(\lg n)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\lg n)^2} = 0 \to lgn = O((\lg n)^3)$
5. על פי טענה בספר מתקיים כי $(\lg n)^3 = o(\sqrt{n})$ (עמ' 47) ובפרט מתקיים $(\lg n)^3 = O(\sqrt{n})$
6. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n/\lg n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{\sqrt{n}} = 0 \to \sqrt{n} = o(\frac{n}{\lg n}) \to \sqrt{n} = O(\frac{n}{\lg n})$
7. $\lim_{n\to\infty} \frac{n/\lg n}{n\lg n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^2 n} = 0 \to \frac{n}{\lg n} = o(n\lg n) \to \frac{n}{\lg n} = O(n\lg n)$
8. $n(1+\lg n) = n + n\lg n \to \lim_{n\to\infty} \frac{n+n\lg n}{n\lg n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\lg n}+1) = 1 \to n(1+\lg n) = \Theta(n\lg n)$
9. $(n+1)\lg n = n\lg n + \lg n \to \lim_{n\to\infty} \frac{n\lg n+\lg n}{n\lg n} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n}) = 1 \to (n+1)\lg n = \Theta(n\lg n)$
10. $\lim_{n\to\infty} \frac{n\lg n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n} = 0 \to n\lg n = o(n^2) \to n\lg n = O(n^2)$
11. $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \to \frac{n}{2}(n+1) = \Theta(n^2)$
12. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2\lg n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lg n} = 0 \to n^2 = O(n^2\lg n)$
13. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^3}{n^3} = 1 \to (n-1)^3 = \Theta(n^3)$
14. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\lg n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n} = 0 \to n^2\lg n = O(n^3)$
15. $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 = \Theta(2^n)$
16. ע"פ המדריך בעמ' 34 נובע כי $n^3 = o(2^n)$ ולכן בהכרח מתקיים $n^3 = O(2^n)$
17. ע"פ המדריך בעמ' 34 שאלה ב-5 נובע כי $n! = \boldsymbol{\omega}(2^n)$ ולכן לפי ספר הלימוד בעמ' 42 נובע כי $2^n = o(n!)$

<u>ע"פ הסברים אלה ומטרנזיטיביות של היחסים נקבל:</u>

$42 = O(lglgn) \quad lglgn = O(lgn) \quad lgn = O(\lg(n^2)) \quad \lg(n^2) = O((lgn)^3) \quad (lgn)^3 = O(\sqrt{n})$

$\sqrt{n} = O(n/lgn) \quad n/lgn = O\big((n+1)lgn\big) \quad (n+1)lgn = O\big(n(1+lgn)\big) \quad n(1+lgn) = O(\frac{n}{2}(n+1))$

$\frac{n}{2}(n+1) = O(n^2) \quad n^2 = O(n^2lgn) \quad n^2lgn = O((n-1)^3) \quad (n-1)^3 = O(2^{n+1}) \quad 2^{n+1} = O(n!)$

שאלה 4

א. ניתן דוגמא לפונקציה חיובית $f(n)$ כך שמתקיים $f(n) \neq O(n)$ וגם $f(n) \neq \Omega(n)$

$$f(n) = \begin{cases} n^2 & n \ is \ even \\ 1 & n \ is \ odd \end{cases}$$

נוכיח כי הפונקציה אכן מקיימת את הנדרש ע"פ ההגדרה:

$f(n) \neq O(n)$: יהי $c > 0$ ויהיה $n_0 \in N$, נגדיר $n = \max\{2n_0, 2\lceil c \rceil\}$ ולכן מתקיים:

$$f(n) = n^2 > cn \leftrightarrow n > c$$

ולכן $f(n) \neq O(n)$.

$f(n) \neq \Omega(n)$: יהי $c > 0$ ויהיה $n_0 \in N$, נגדיר $n = \max\{2n_0 + 1, 2 * \left\lceil \frac{1}{c} \right\rceil + 1\}$

$$f(n) = 1 < cn \leftrightarrow n > \frac{1}{c}$$

ולכן $f(n) \neq \Omega(n)$.
כלומר $f(n) \neq O(n)$ וגם $f(n) \neq \Omega(n)$.

ב. נוכיח על פי ההגדרה : $f(n) = o(g(n))$ אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 0$

נניח תחילה כי $f(n) = o(g(n))$ ונוכיח כי $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.
כלומר נראה כי לכל $\epsilon > 0$ קיים $n_0 \in N$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $\left|\frac{f(n)}{g(n)} - 0\right| < \epsilon$ ולכן:
יהיה $\epsilon > 0$ על פי הנתון $f(n) = o(g(n))$ נובע (עבור $c = \epsilon$) כי קיים קבוע n_0 שלכל $n > n_0$ מתקיים

$$0 \leq f(n) < \epsilon \cdot g(n) \rightarrow -\epsilon < 0 \leq \frac{f(n)}{g(n)} < \epsilon \rightarrow \left|\frac{f(n)}{g(n)} - 0\right| < \epsilon$$

כעת נניח כי $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ ונוכיח כי $f(n) = o(g(n))$.
כלומר נראה כי לכל $c > 0$ קיים קבוע $n_0 > 0$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $0 \leq f(n) < c \cdot g(n)$ ולכן:
יהי $c > 0$, על פי הנתון $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ נובע מהגדרת הגבול (עבור $\epsilon = c$) קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים

$$\left|\frac{f(n)}{g(n)} - 0\right| < c \rightarrow -c < \frac{f(n)}{g(n)} < c$$

ניתן להניח כי הפונקציות חיוביות זאת מכיוון שאנו עוסקים בקורס בפונקציות חיוביות בלבד ולכן:

$$0 \leq \frac{f(n)}{g(n)} < c \rightarrow 0 \leq f(n) < c \cdot g(n)$$

ולכן $f(n) = o(g(n))$ כנדרש.

ובזאת הוכחנו כי $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \leftrightarrow f(n) = o(g(n))$ כנדרש. ■

שאלה 5:

א. נחשב זאת ע"פ שיטת האב מקרה 2:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$
$$a = 2\,, b = 4\,, f(n) = \sqrt{n}$$
$$\log_b a = \log_4 2 = \frac{1}{2}$$
$$f(n) = \sqrt{n} = \Theta\left(n^{\frac{1}{2}}\right) \to T(n) = \Theta(\sqrt{n}\lg n)$$

ב.

$$T(n) = 5T\left(\frac{n}{5}\right) + \lg^2 n$$

משפט האב: $a = 5, b = 5$; $\log_b a = \log_5 5 = 1$, בנוסף מתקיים $f(n) = \lg^2 n = O(n^{1-\epsilon})$
לכל $0 < \epsilon < 1$ ולכן לפי משפט האב מקרה 1, הפתרון הוא:

$$T(n) = \Theta(n)$$

ג.

$$T(n) = 6T\left(\frac{n}{6}\right) + n + \frac{n}{lg\, n}$$

משפט האב: $a = 6, b = 6$; $\log_b a = \log_6 6 = 1$, בנוסף $f(n) = n + \frac{n}{\lg n} = \Theta(n) = \Theta(n^{\log_6 6})$
ולכן לפי משפט האב מקרה 2 הפתרון הוא:

$$T(n) = \Theta(nlgn)$$

ד.

$$T(n) = T(n-1) + n\lg n$$

נפתור סעיף זה בשיטת האיטרציה:

$$T(n) = T(n-1) + n\lg n = \mathrm{T(n-2) + (n-1)}\lg(n-1) + n\lg n = \cdots = T(1) + \sum_{i=2}^{n} i\lg i$$

כלומר לכל $n \geq 2$ מתקיים $T(n) = T(1) + \sum_{i=1}^{n} i\lg i$.
כעת נוכיח כי $T(n) = \Theta(n^2\lg n)$.

1. נוכיח זאת ע"פ ההגדרה ונוכיח תחילה כי $T(n) = O(n^2\lg n)$:

נגדיר $n_0 = 2, c = \max\{2T(1), 2\}$, לכל $n \geq n_0$ מתקיים: $\frac{c}{2} \geq 1$ and $\frac{c}{2} \geq T(1)$ and $\lg n \geq 1 \to n^2\lg n > 1$
ולכן:

$$T(n) = T(1) + \sum_{i=2}^{n} i\lg i \leq T(1) + \sum_{i=2}^{n} n\lg n = T(1) + n\lg n\sum_{i=2}^{n} 1 = T(1) + n^2\lg n$$
$$\leq \frac{c}{2} + n^2\lg n \leq \frac{c}{2}n^2\lg n + \frac{c}{2}n^2\lg n = c * n^2\lg n$$

כלומר $T(n) = O(n^2\lg n)$.

2. כעת נוכיח כי $T(n) = \Omega(n^2\lg n)$:

נגדיר $n_0 = 4, c = \frac{1}{8}$, לכל $n \geq n_0$ מתקיים $\lg n \geq 2 \to \frac{\lg n}{2} \geq 1$ ולכן:

$$T(n) = T(1) + \sum_{i=2}^{n} i\lg i \geq \sum_{i=2}^{n} i\lg i \geq \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} i\lg i \geq \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} \frac{n}{2}\lg\frac{n}{2} = \frac{n}{2}\lg\frac{n}{2}\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} 1 = \left(\frac{n}{2}\right)^2\lg\frac{n}{2}$$
$$= \left(\frac{n}{2}\right)^2(\lg n - \lg 2) = \frac{n^2}{4}(\lg n - 1) \geq \frac{n^2}{4}\left(\lg n - \frac{\lg n}{2}\right) = \frac{1}{8}n^2\lg n = c * n^2\lg n$$

כלומר $T(n) = \Omega(n^2\lg n)$.
ע"פ 1,2 נקבל כי $T(n) = \Theta(n^2\lg n)$ כנדרש.

ה.

$$T(n) = \sqrt{2}T(\sqrt{n}) + \sqrt{\lg n}$$

נבצע החלפת משתנים $n = 2^m$ $(m = \lg n)$ ולכן נקבל:

$$T(2^m) = \sqrt{2}T\left(2^{\frac{m}{2}}\right) + \sqrt{m}$$

נסמן $S(m) = T(2^m)$ ולכן:

$$S(m) = \sqrt{2}S\left(\frac{m}{2}\right) + \sqrt{m}$$

משפט האב: $a = \sqrt{2}, b = 2$; $\log_b a = \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, בנוסף $f(m) = \sqrt{m} = \Theta\left(m^{\frac{1}{2}}\right) = \Theta(m^{\log_2 \sqrt{2}})$

ולכן ע"פ המקרה ה-2 של משפט האב נקבל כי:

$$S(m) = \Theta(\sqrt{m}\lg m)$$

$$T(n) = \Theta(\sqrt{\lg n}\lg\lg n)$$

ו.

$$T(n) = n\sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n^3\lg^3 n\lg\lg n$$

$$T(n) = n^{\frac{3}{2}}T\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + n^3\lg^3 n\lg\lg n \quad /*\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\frac{T(n)}{n^3} = \frac{T\left(n^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(n^{\frac{1}{2}}\right)^3} + \lg^3 n\lg n$$

נסמן $u(n) = \frac{T(n)}{n^3}$ ולכן:

$$u(n) = u(\sqrt{n}) + \lg^2 n\lg\lg n$$

נסמן כעת $n = 2^m$, $S(m) = u(2^m)$ ונקבל:

$$S(m) = S\left(\frac{m}{2}\right) + m^2\lg m$$

ע"פ מדריך הלימוד עמוד 45 (פונקציות שכיחות בשיטת האב) מקרה 3:

$a = 1, b = 2, p = 2, q = 1$ נקבל כי $a = 1 < 4 = b^p$, כלומר $p = 2 > 0 = \log_2 1$ ולכן מתקבל

$$S(m) = \Theta(m^2\lg m)$$

$$u(n) = \Theta(\lg^2 n\lg\lg n)$$

$$T(n) = \Theta(n^3\lg^2 n\lg\lg n)$$