פתרון ממ"ן 14

שאלה 1

א. מיצאו את מספר הקבוצות החלקיות לקבוצה A בעלת n אברים המכילות **ממש** קבוצה נתונה של k איברים מתוך A .

ב. לבובספוג יש $n \geq 4$ חברים. בכל ערב הוא מזמין מספר כלשהו $k \geq 4$ של חברים לסעוד אתו ולאחר מכן הוא תמיד מזמין שלושה מהם לשחק בביתו. (אף אחד לא מסרב!)
ספרו בשתי דרכים את מספר האופציות השונות שיש לבובספוג לבלות עם חברים בערב אחד,
והוכיחו עבור $n \geq 4$ את הזהות $\sum_{k=4}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{3}=\binom{n}{3}(2^{n-3}-1)$ בדרך קומבינטורית.
(כלומר ללא פישוט מראש של האגפים).

ג. הוכיחו את השוויון מסעיף ב' בדרך אלגברית (על ידי חישוב ישיר).

תשובה

א. נניח ש- $B \subseteq A$ ו- $|B|=k$ ברור ש- $k \leq n$ ואם $k=n$ אז מספר הקבוצות החלקיות ל- A המכילות **ממש** את B הוא 0 . לכן נניח ש- $k<n$.
כדי לבנות קבוצה חלקית ל- A שמכילה ממש את B יש להוסיף ל- B קבוצה לא ריקה של איברים מתוך $A \setminus B$.
מכאן מקבלים שמספר הקבוצות החלקיות ל- A המכילות **ממש** את B שווה למספר הקבוצות הלא ריקות שחלקיות ל- $A \setminus B$ ולכן שווה ל- $2^{|A\setminus B|}-1=2^{n-k}-1$.
(נשים לב שהנוסח תקפה גם כאשר $k=n$).

ב. נספור את מספר האופציות השונות שיש לבובספוג לבלות עם חברים בערב אחד בדרך הבאה:
נבחר תחילה k החברים שמזמין לסעודה: יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות לכל $k \geq 4$.
לכל בחירה כזו של k החברים, יש $\binom{k}{3}$ אופציות להזמין 3 חברים למשחק.
לכן לפי עקרון הכפל נקבל שלכל $n \geq k \geq 4$ יש לבובספוג $\binom{n}{k}\binom{k}{3}$ אופציות לבלות עם חברים.
ועם נסכם תוצאות אלה לכל $n \geq k \geq 4$ נקבל $\sum_{k=4}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{3}$ אפשרויות.
נספור כעת את מספר האופציות אלה בדרך אחרת.
נבחר תחילה 3 חברים שיבואו לשחק (יש $\binom{n}{3}$ אופציות בחירה עבורם) ולכן בחירה כזו נשלים את קבוצת שלושת החברים לקבוצה של $k \geq 4$ חברים שמוזמנים תחילה לסעוד יחד (לפי סעיף א' יש $2^{n-3}-1$ אפשרויות השלמה).

לכן לפי עקרון הכפל נקבל שיש לבובספוג $\binom{n}{3}(2^{n-3}-1)$ אופציות לבלות עם חברים.

לסיכום מצאנו ש- $\binom{n}{3}(2^{n-3}-1) = \sum_{k=4}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{3}$.

ג. הוכחה אלגברית של השוויון:

$$\sum_{k=4}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{3} = \sum_{k=4}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k!}{(k-3)!\cdot 3!} = \sum_{k=4}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{(k-3)!\cdot 3!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\sum_{k=4}^{n}\frac{(n-3)!}{(n-k)!(k-3)!} = \binom{n}{3}\cdot\sum_{k=4}^{n}\binom{n-3}{k-3}$$

$$= \binom{n}{3}\left[\binom{n-3}{1}+\binom{n-3}{2}+\cdots+\binom{n-3}{n-3}\right] = \binom{n}{3}(2^{n-3}-1)$$

(במעבר האחרון השתמשנו בעובדה ש- $\binom{n-3}{k}=0$ עבור $k>n-3$,

ובשוויון $\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\cdots+\binom{m}{m}=2^m$

(שהיא תוצאה של ספירה בשתי דרכים של כל הקבוצות החלקיות לקבוצה בעלת m איברים)

שאלה 2

נתונה $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. בשאלה זו נתייחס לפונקציות המוגדרות על A

א. מיצאו את מספר הפונקציות $f: A\to\{2,3,4\}$ המקבלות כל אחד מן הערכים $i\in\{2,3,4\}$ בדיוק i פעמים.

ב. מיצאו את מספר הפונקציות $f: A\to\{2,3,4,5,6\}$ המקבלות כל אחד מהערכים $2,3,4$ בדיוק פעמיים.

ג. מיצאו את מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f: A\to A$ המקיימות את התנאי:
$\{f(1),f(2),f(3)\}\cap\{1,2,3\}=\varnothing$

תשובה

א. לכל פונקציה המוגדרת על $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ מתאימה מחרוזת יחידה באורך 9 $a_1a_2\cdots a_9$ כאשר $f(i)=a_i$ לכל $1\le i\le 9$ ולהפך.

(שכן בדרך זו נקבעות התמונות של כל איברי A. את מספר הפונקציות $f: A\to\{2,3,4\}$

בפרט כל פונקציה $f: A\to\{2,3,4\}$ אפשר לראות כמחרוזת (מילה) באורך 9 הכתובה באותיות $2,3,4$. מאחר שבסעיף זה דורשים ש- 2 יופיע פעמיים, 3 שלוש פעמים ו- 4 ארבע פעמים, (בסך הכל 9 הופעות) הרי שמספר הפונקציות האפשריות שווה למספר המחרוזות באורך 9 הכתובות באותיות 2,2,3,3,3,4,4,4,4 (תמורות עם חזרות).

לכן מספר הפונקציות (המחרוזות) הוא $\frac{9!}{2!3!4!}$

ב. בדומה לדיון מהסעיף הקודם, מספר הפונקציות $f: A \to \{2,3,4,5,6\}$ המקבלות כל אחד מהערכים $2,3,4$ בדיוק פעמיים שווה למספר המחרוזות באורך 9 שהן תמורות עם חזרות של $2,2,3,3,4,4,a,b,c$ כאשר $a,b,c \in \{2,3,4,5,6\}$ שונים מ- 2,3,4 כלומר $a,b,c \in \{5,6\}$.

נבחין בין המקרים הבאים:

1. $a = b = c$. יש **שני מצבים** כאלה (או שכולם שווים 5 או שכולם שווים 6) ובכל אחד מהם נקבל $\frac{9!}{8 \cdot 3!} = \frac{9!}{2!2!2!3!}$ מחרוזות (כמספר התמורות של $2,2,3,3,4,4,a,a,a$)

2. בדיוק שניים מבין a,b,c שווים זה לזה (ואז שניהם שווים ל- 5 או שניהם שווים ל- 6)

יש **שני מקרים** כאלה ובכל אחד מהם נקבל $\frac{9!}{16} = \frac{9!}{2!2!2!2!1!}$ מחרוזות (כמספר התמורות של $2,2,3,3,4,4,a,a,b$.

נסכם ונקבל שמספר כל המחרוזות (הפונקציות) הוא: $2 \cdot \frac{9!}{8 \cdot 3!} + 2 \cdot \frac{9!}{16} = \frac{9!}{8}\left(\frac{2}{3!} + 1\right) = \frac{9!}{3!}$

דרך אחרת: לספירת התמורות עם חזרות של $2,2,3,3,4,4,a,b,c$ כאשר $a,b,c \in \{5,6\}$

אפשר לבחור קודם 6 מקומות מבין ה- 9 שבהם נמקם את $2,2,3,3,4,4$. יש $\binom{9}{6}$ אפשרויות לבחירת המקומות ולכל בחירה יש $\frac{6!}{2!2!2!}$ אפשרויות לסדר בהם את $2,2,3,3,4,4$.

לאחר כל סידור כזה, נותרו 3 מקומות שבהם אפשר למקם חופשית כל אחד מהספרות 5 או 6 ולכך יש 2^3 אפשרויות.

לסיכום, מצאנו $\frac{9!}{3!} = \frac{6!}{8} \cdot 8 = \frac{9!}{6!3!} \cdot \frac{6!}{8} \cdot 8 = \binom{9}{6}\frac{6!}{2!2!2!} \cdot 8$ מחרוזות.

כאשר $a,b,c \in \{2,3,4,5,6\}$ שונים מ- 2,3,4 כלומר $a,b,c \in \{5,6\}$

ג. פונקציה $f: A \to A$ היא חד-חד-ערכית אם ורק אם המחרוזת $f(1)f(2)\cdots f(9)$ היא בעצם תמורה של הספרות $1,2,...,9$. לפי הדרישות בסעיף זה, עלינו לספור את אותן המחרוזות (תמורות) שבהן אף אחת מהספרות $1,2,3$ לא מופיעה באחד משלושת המקומות הראשונים. לכן נמקם את הספרות האלה בשלושה מבין ששת המקומות האחרונים. מספר האפשרויות לבחירת 3 מקומות מתוך 6 (עם חשיבות לסבר!) הוא $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

לאחר בחירת מקומות במחרוזת עבור $1,2,3$ מותר למקם באופן חופשי את 6 מספרות הנותרות ב-6 המקומות הנותרים במחרוזת. מספר הסידורים הוא $6!$ (כמספר התמורות של 6 עצמים שונים). לכן מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f: A \to A$ המקיימות $\{f(1), f(2), f(3)\} \cap \{1,2,3\} = \varnothing$ הוא $120 \cdot 6!$.

שאלה 3

נתונה המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=8$.

א. מיצאו מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה כאשר $x_1+x_2+x_3\neq 5$.

ב. מיצאו מספר הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה כך ש- $x_{2i-1}+x_{2i}\neq 2$ לכל $1\le i\le 4$.

תשובה

א. מספר כל הפתרונות **בטבעיים** של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=8$

הוא כמספר הפיזורים של 8 עצמים זהים ב- 8 תאים שונים: $D(8,8)=\binom{8-1+8}{8-1}=\binom{15}{7}$.

נמצא כעת את מספר הפתרונות של המשוואה הנ"ל בתוספת התנאי ש- $x_1+x_2+x_3=5$.

זה אומר שעבור כל מקרה שבו x_1,x_2,x_3 מקיימים $x_1+x_2+x_3=5$, עלינו לספור את כל האפשרויות עבור x_4,x_5,x_6,x_7,x_8 המקיימים $x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=3$.

במילים אחרות, מספר פתרונות שאנו מחפשים הוא מכפלת מספרי הפתרונות של המשוואות $x_1+x_2+x_3=5$ ו- $x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=3$ כלומר:

$$D(3,5)\cdot D(5,3)=\binom{3-1+5}{3-1}\cdot\binom{5-1+3}{5-1}=\binom{7}{2}\binom{7}{4}.$$

מכאן שמספר הפתרונות בטבעיים של $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=8$

המקיימים $x_1+x_2+x_3\neq 5$ הוא: $\binom{15}{7}-\binom{7}{2}\binom{7}{4}$.

ב. נסמן ב- A_i , $1\le i\le 4$ את קבוצת הפתרונות למשוואה הנתונה המקיימים $x_{2i-1}+x_{2i}=2$.

מספר הפתרונות שאנו מבקשים לחשב הוא $\binom{15}{7}-|\bigcup_{i=1}^{4}A_i|$. ניעזר בעקרון ההכלה וההפרדה.

A_1 היא קבוצת הפתרונות של $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=8$ המקיימים $x_1+x_2=2$. שיקול דומה לזה שבסעיף א' מראה שמספר הפתרונות האלה שווה למכפלת מספרי הפתרונות של $x_1+x_2=2$ ושל $x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=6$.

לכן $|A_1|=D(2,2)\cdot D(6,6)=\binom{2-1+2}{2-1}\cdot\binom{6-1+6}{6-1}=\binom{3}{1}\binom{11}{5}=3\binom{11}{5}$.

באופן דומה נקבל ש- $|A_i|=3\binom{11}{5}$ לכל $1\le i\le 4$.

$A_1\cap A_2$ היא קבוצת הפתרונות של $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=8$ המקיימים $x_1+x_2=2$ ו- $x_3+x_4=2$ לכן מספר הפתרונות האלה שווה למכפלת מספרי פתרונות של המשוואות $x_1+x_2=2$, $x_3+x_4=2$ ו- $x_5+x_6+x_7+x_8=4$.

מכאן ש- $|A_1\cap A_2|=D(2,2)\cdot D(2,2)\cdot D(4,4)=\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{7}{3}=9\binom{7}{3}$ ובאופן דומה נקבל

ש- $\binom{7}{3}9=|A_i \cap A_j|$ לכל $1 \le i < j \le 4$. (יש $\binom{4}{2}$ חיתוכים כאלה)

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ היא קבוצת הפתרונות של $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 8$

המקיימים $x_1 + x_2 = 2$, $x_3 + x_4 = 2$ ו- $x_4 + x_5 = 2$ לכן מספר הפתרונות האלה שווה

למכפלת מספרי פתרונות של המשוואות $x_1 + x_2 = 2$, $x_3 + x_4 = 2$, $x_4 + x_5 = 2$ ו-

$x_7 + x_8 = 2$. לכן $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = D(2,2)\cdot D(2,2)\cdot D(2,2)\cdot D(2,2) = \binom{3}{1}^4 = 81$

ובאופן דומה $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 81$ לכל $1 \le i < j < k \le 4$. (יש $\binom{4}{3}$ חיתוכים כאלה).

ולבסוף, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ היא שוב קבוצת כל הפתרונות של המשוואה הנתונה

המקיימים $x_1 + x_2 = 2$, $x_3 + x_4 = 2$, $x_4 + x_5 = 2$ ו- $x_7 + x_8 = 2$ ולכן

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \binom{3}{1}^4 = 81$ (ויש חיתוך אחד מסוג זה).

לסיכום, בעזרת עקרון ההכלה וההפרדה מקבלים שמספר הפתרונות המקיימים

$x_{2i-1} + x_{2i} \ne 2$ לכל $1 \le i \le 4$

$$\binom{15}{7} - |\bigcup_{i=1}^{4} A_i| = \binom{15}{7} - \binom{4}{1}\cdot 3\cdot\binom{11}{5} + \binom{4}{2}\cdot 9\cdot\binom{7}{3} - \binom{4}{3}\cdot 81 + \binom{4}{4}\cdot 81$$
$$= \binom{15}{7} - 12\cdot\binom{11}{5} + 54\cdot\binom{7}{3} - 3\cdot 81$$

שאלה 4

בשאלה זו נתייחס לכל המילים באורך 10 הכתובות באותיות $A, A, A, B, B, C, C, D, D, D$.

א. מיצאו את מספר המילים ש**אין** בהן **שלוש אותיות מאותו סוג** הצמודות זו לזו.

ב. מיצאו את מספר המילים שבהן יש **לפחות שתי אותיות** מסוג A הצמודות זו לזו.

תשובה

א. נסמן ב- U את קבוצת כל המילים האפשריות, ב- S את קבצת המילים שבהן יש שלוש אותיות A צמודות וב- T את קבוצת המילים שבהן שי שלוש אותיות D צמודות. קבוצת המילים שאין בהן שלוש אותיות מאותו סוג הצמודות זו לזו היא $U \setminus (S \cup T)$ ולכן מספר המילים האלה הוא $|U| - |S \cup T| = |U| - |S| - |T| + |S \cap T|$.

U היא קבוצת התמורות עם חזרות של $A, A, A, B, B, C, C, D, D, D$ לכן $|U| = \frac{10!}{(2!)^2(3!)^2}$.

S היא קבוצת התמורות עם חזרות של X, B, B, C, C, D, D, D כאשר $X = AAA$

לכן $|S|=\frac{8!}{(2!)^2 3!}$.

T היא קבוצת התמורות עם חזרות של A,A,A,B,B,C,C,Y כאשר $Y=DDD$

לכן $|T|=\frac{8!}{(2!)^2 3!}$.

$S\cap T$ היא קבוצת התמורות עם חזרות של X,B,B,C,C,Y כאשר $X=AAA$, $Y=DDD$

לכן $|S\cap T|=\frac{6!}{(2!)^2}$.

לסיכום מספר המילים שאין בהן שלוש אותיות מאותו סוג הצמודות זו לזו הוא:

$$\frac{10!}{(2!)^2(3!)^2}-2\cdot\frac{8!}{(2!)^2 3!}+\frac{6!}{(2!)^2}$$

ב. נחשב את מספר המילים שבהן יש לפחות שתי אותיות מסוג A הצמודות זו לזו בעזרת התמורות עם חזרות של האותיות X,A,B,B,C,C,D,D,D כאשר בכל תמורה כזו נרצה להחליף את X ב- AA.

אך לשם כך נשים לב שמילה שבה מופיעות האותיות X,A סמוכות זו לזו בשני מקומות מסוימים והמילה שבה מופיעות האותיות A,X באותם שני מקומות אך בסדר הפוך, יהיו מילים זהות לאחר שנחליף את X ב- AA. כלומר מספר הכפילויות שיתקבלו לאחר החלפת X ב- AA שווה למספר המילים שבהן מופיע הרצף AAA שהוא $\frac{8!}{(2!)^2 3!}$ (לפי סעיף א')

במקרים שבהם האותיות X,A לא סמוכות זו לזו, ההצבה $X=AA$ לא משפיעה על מספר המילים.

לכן מספר המילים שבהן יש לפחות שתי אותיות מסוג A שווה למספר התמורות עם חזרות של X,A,B,B,C,C,D,D,D פחות מספר המילים שבהן מופיע AAA כלומר שווה ל-:

$$\frac{9!}{(2!)^2 3!}-\frac{8!}{(2!)^2 3!}.$$

שאלה 5

רמי מציע לדינה את האתגר הבא:

דינה תבחר 8 מספרים טבעיים שונים כלשהם בתחום $10\le n\le 36$.

רמי ינסה ליצור, תוך שימוש **רק במספרים שדינה בחרה או בחלק מהם**, שני סכומים שווים.

למשל, אם דינה בחרה את המספרים $10,11,12,15,18,25,32,36$

רמי יכול לרשום את השוויון $11+25=36$.

לחלופין, הוא יכול לרשום $10+12+18=15+25$.

כל המספרים צריכים להילקח מהרשימה של דינה, ואין חזרות על אותו מספר.

אם רמי מצליח לרשום שוויון כזה – הוא מנצח. אם הוא לא מצליח – דינה מנצחת.

בהנחה שאחרי שדינה בוחרת יש לרמי די זמן - או מחשב - לבדוק את כל האפשרויות,
הוכיחו כי רמי תמיד ינצח!

תשובה

תת-קבוצות של קבוצת המספרים שדינה בחרה, לא כולל קבוצה ריקה: 255 (מדוע?)

הסכום הקטן ביותר האפשרי: 10 (מדוע?)

הסכום הגדול ביותר האפשרי: $29 + 30 + 31 + \ldots + 36 = 260$ (מדוע?)

לכן מספר הסכומים השונים האפשרי הוא לכל היותר $260 - 10 + 1 = 251$.

מכיון שיש יותר קבוצות שונות מאשר סכומים, קיימות שתי קבוצות שיש להן אותו סכום.

ניקח שתי קבוצות כאלה.

אם יש להן אברים משותפים, נזרוק אותם משתי הקבוצות. אחרי שזרקנו קיבלנו שתי קבוצות זרות של מספרים שיש להן אותו סכום.