

קורס: 20416 "תורת ההסתברות"

תאריך הבחינה: 16.7.2018 (סמסטר 2018 ב - מועד א 6 / 87)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי וספר הקורס בלבד.

מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

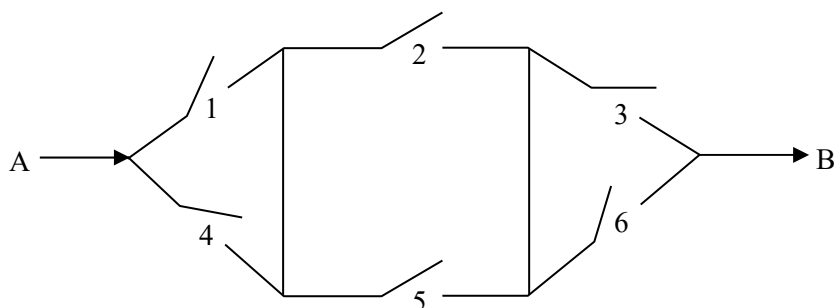
כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפת: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

שאלה 1 (25 נקודות)

במעגל שלהלן, כל אחד מששת המתגים סגור בהסתברות 0.8, ואז יכול לעבור בו זרם.
 כאשר מתג פתוח, לא יכול לעבור בו זרם.
 כמו כן, המצב של כל מתג בלתי-תלוי במצבים של מתגים אחרים במעגל.



- 9 נק' א. מהי ההסתברות שיעבור זרם מ-A ל-B?
 8 נק' ב. אם עובר זרם מ-A ל-B, מהי ההסתברות שבדיוק שניים מהמתגים פתוחים?
 8 נק' ג. אם לפחות אחד ממתגים 1 ו-2 פתוח, מהי ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B?
 הערה: לפחות אחד משניים = אחד מהם או שניהם.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתונים 50 זוגות שונים של נעליים, ביניהם זוג אחד אדום וזוג אחד צהוב.
 (בסך הכל 100 נעליים בודדות: 50 שמאליות ו-50 ימניות, שיש ביניהן התאמה ל-50 זוגות שונים).
 בוחרים 20 נעליים בודדות (מתוך ה-100) ושמים אותן בצד, כך שנוצרות שתי ערימות.
 זוג נעליים ייקרא "שלם", אם שתי הנעליים שמרכיבות אותו נמצאות באותה הערימה (של ה-20 או של ה-80).

- 9 נק' א. מהי ההסתברות שזוג הנעליים הצהוב וגם זוג הנעליים האדום יהיו שלמים?
 8 נק' ב. מה התוחלת של מספר זוגות הנעליים השלמים (לאחר ההפרדה לשתי הערימות)?
 8 נק' ג. מה השונות של מספר זוגות הנעליים השלמים?

שאלה 3 (25 נקודות)

יהיו X ו- Y משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות מעריכית עם הפרמטר λ ($\lambda > 0$).

15 נק' א. נגדיר את המשתנה המקרי $R = \frac{X}{X+Y}$.

מהי ההתפלגות של המשתנה המקרי R ?
 זהה את ההתפלגות שקיבלת.

10 נק' ב. נניח כי $\lambda = 2$.

חשב את $E[X | X < 0.5]$.

שאלה 4 (25 נקודות)

השחקנים A ו-B משחקים את המשחק שלהלן:

שחקן A מגריל מספר X , שהתפלגותו גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{1}{3}$;

שחקן B מגריל מספר Y , שהתפלגותו פואסונית עם הפרמטר 3;

אין תלות בין X ל- Y .

אם $X = Y$, חוזרים לתחילת המשחק וכל אחד מהשחקנים מגריל מספר נוסף באותו האופן;

אם $X \neq Y$, המשחק מסתיים והשחקן שקיבל מספר גדול יותר מנצח במשחק.

(8 נק') א. מהי $P\{X + Y = 4\}$?

(9 נק') ב. הוכח כי תוחלת מספר הסיבובים במשחק עד לקביעת השחקן המנצח במשחק היא $\frac{2e^3}{2e^3 - e^2 + 1}$.

(9 נק') ג. הוכח כי ההסתברות ששחקן A ינצח במשחק היא $\frac{2e^2}{2e^3 - e^2 + 1}$.

שאלה 5 (25 נקודות)

חברת מוניות עירונית גובה מלקוחותיה תשלום עבור נסיעה, לפי לוח התעריפים הבא:

נסיעה שאורכה עד 3 ק"מ עולה 10 ₪;

נסיעה שאורכה בין 3 ק"מ ל-10 ק"מ עולה 20 ₪;

נסיעה שאורכה בין 10 ק"מ ל-20 ק"מ עולה 30 ₪;

נסיעה שאורכה מעל ל-20 ק"מ עולה 50 ₪.

נסמן ב- X את אורך הנסיעה (בק"מ) של לקוח מקרי בחברה,

ונניח של- X יש התפלגות נורמלית עם תוחלת 13 וסטיית-תקן 6.

כמו כן, נניח שההסתברות שאורך הנסיעה אינו עולה על 3 ק"מ היא $P\{X \leq 3\}$ ולא $P\{0 \leq X \leq 3\}$.

א. ביום מסוים חברת המוניות ביצעה נסיעות עבור 60 לקוחות מקריים.

(15 נק') 1. מהן תוחלת ושונות ההכנסות של החברה מ-60 נסיעות אלו?

(5 נק') 2. בסוף היום התברר, שהאורך של 20 נסיעות (מתוך ה-60) היה קטן מ-10 ק"מ.

מהי ההסתברות ש-10 מתוך 20 הנסיעות האלו היו ב-30 הנסיעות הראשונות באותו יום?

(5 נק') ב. נסמן ב- X את אורך הנסיעה (בק"מ) של לקוח מקרי וב- Y את זמן הנסיעה שלו (בדקות);

ונניח כי ל- X ול- Y יש התפלגות משותפת דו-נורמלית עם הפרמטרים:

$$E[X] = 13, \text{Var}(X) = 6^2, E[Y] = 20, \text{Var}(Y) = 9^2, \text{Cov}(X, Y) = 38.$$

חשב את $P\{Y > 25 | X = 15\}$.

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] \quad \text{נוסחת האינטרפולציה:}$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326