

שאלה 1 (25 נקודות)

- 15 נק' א. לפניכם שורה של 10 ארגזים, שלאחד מהם הוכנס באקראי חפץ, שעליכם למצוא. עליכם לפתוח בסדר אקראי ארגז אחד אחר ארגז ולבדוק אם החפץ נמצא בו, עד למציאת החפץ. יהי X מספר הארגזים שייפתחו עד למציאת החפץ.
- אם פתיחת הארגזים נעשית באופן שיטתי, כך שכל ארגז שנפתח לא נפתח שוב, מהי פונקציית ההסתברות של X ?
 - אם פתיחת הארגזים איננה שיטתית, ובכל פעם פותחים באקראי ארגז אחד מ-10 הארגזים (גם אם כבר נפתח), מהי פונקציית ההסתברות של X ?
 - באיזה משני המקרים שלעיל השונות של X גדולה יותר? הסבר **בקצרה** מדוע.
- 10 נק' ב. לפניכם שורה של 10 ארגזים, שלתוכם הוכנסו שני חפצים. ידוע לכם, כי בהסתברות 0.3 שני החפצים הוכנסו לאותו הארגז (שנבחר באקראי מתוך 10 הארגזים); וכי בהסתברות 0.7 הם הוכנסו לשני ארגזים שונים (שנבחרו באקראי מתוך 10 הארגזים). עליכם לפתוח ארגז אחד אחר ארגז בסדר אקראי ובאופן שיטתי, כך שכל ארגז שנפתח לא נפתח שוב, עד למציאה של **חפץ אחד לפחות**. יהי X מספר הארגזים שייפתחו עד למציאה של **חפץ אחד לפחות**. מצא את פונקציית ההסתברות של X וחשב את תוחלתו.

שאלה 2 (25 נקודות)

- בחממה לגידול פטריות אורזים בסלסלות תערובת של שני סוגי פטריות – בהירות וכהות: המשקל (בק"ג) של הפטריות ה**בהירות** שנארוזות בכל סלסלה הוא משתנה מקרי נורמלי עם הפרמטרים 0.15 ו- 0.04^2 ;
- המשקל (בק"ג) של הפטריות ה**כהות** שנארוזות בכל סלסלה הוא משתנה מקרי נורמלי עם הפרמטרים 0.1 ו- 0.03^2 .
- אין תלות בין משקלי סוגים שונים של פטריות באותה הסלסלה או בין משקלי סלסלות שונות של פטריות.
- 6 נק' א. מהו המשקל בק"ג, שב- 17% מהסלסלות יש משקל גדול ממנו של פטריות **בהירות**? לחישוב המשקל המבוקש השתמש בשיטת האינטרפולציה הלינארית.
 - 6 נק' ב. מהי ההסתברות שמשקל הפטריות ה**כולל** בסלסלה מקרית יהיה יותר מ- 0.26 ק"ג?
 - 6 נק' ג. מהי ההסתברות שמשקל הפטריות ה**כולל** ב-100 סלסלות מקריות יהיה יותר מ- 26 ק"ג?
 - 7 נק' ד. עלות הייצור של סלסלת פטריות מקרית מחושבת לפי המרכיבים הבאים:

עלות סלסלה ריקה = 0.15 ש"ח;

עלות גידול 1 ק"ג של פטריות בהירות = 15 ש"ח;

עלות גידול 1 ק"ג של פטריות כהות = 20 ש"ח.

מצא את החסם העליון הטוב ביותר האפשרי, מבין חסמי מרקוב וצ'בישב, להסתברות שעלות הייצור של סלסלה מקרית אחת תעלה על 5 ש"ח.

שאלה 3 (25 נקודות)

נתון ארגז שבו 6 כדורים שחורים ו-4 כדורים לבנים.

שני שחקנים משתתפים במשחק הבא:

כל שחקן מוציא באקראי וללא החזרה כדור אחד מן הארגז. (לאחר ההוצאה נותרים בארגז 8 כדורים). אם לשני הכדורים שהוצאו צבעים שונים – המשחק מסתיים; אך, אם לשני הכדורים אותו הצבע – הם מוחזרים לארגז, והשחקנים מוציאים שוב כדורים לפי אותם תנאים (כלומר, כל שחקן מוציא כדור אחד, וההוצאה היא ללא החזרה).

יהיו X = מספר השלבים במשחק כולו;

Y = מספר השלבים במשחק, שהסתיימו בהוצאת שני כדורים שחורים.

(6 נק') א. מהי תוחלת מספר השלבים במשחק?

(7 נק') ב. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .

(6 נק') ג. חשב את $\text{Var}(Y|X=i)$, לכל $i = 1, 2, \dots$.

(6 נק') ד. חשב את $\text{Var}(Y)$.

שאלה 4 (25 נקודות)

נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת הבאה: $f_{X,Y}(x,y) = \frac{3}{8}(x^2 + y^2)$

המוגדרת לכל $x \in (-1, 0)$ ו- $y \in (-x, x+2)$ ולכל $x \in (0, 1)$ ו- $y \in (x, 2-x)$.

(9 נק') א. מצא את $f_Y(y)$.

(8 נק') ב. חשב את $P\{\max\{X,Y\} < 0.75\}$.

(8 נק') ג. ידוע כי המאורע $\{X \geq 0\}$ מתרחש.

כיצד תשתנה לדעתך פונקציית הצפיפות המשותפת, בהינתן שהמאורע $\{X \geq 0\}$ מתרחש? אין צורך להוכיח את טענתך, מספיק הסבר אינטואיטיבי קצר לפונקציה המוצעת.

שאלה 5 (25 נקודות)

בגן ילדים מחלקים באקראי ל-30 ילדים 60 מסטיקים צבעוניים: 20 אדומים, 20 צהובים ו-20 ירוקים. כל ילד מקבל בדיוק 2 מסטיקים.

יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הילדים בגן שלא מקבלים אף מסטיק אדום.

(8 נק') א. חשב את $P\{X = 10\}$.

(8 נק') ב. חשב את התוחלת של X .

(9 נק') ג. חשב את השונות של X .

בהצלחה!