# פתרונות לממ"ן 13 - 2012א - 20425

1. א. נסמן ב-$A_i$ את המאורע שממסר $i$ סגור, לכל $i = 1,2,3,4,5,6$. לפי הנתון $P(A_i) = 0.8$ לכל $i$.

$$P\{\text{עובר זרם ב-1 או ב-2}\} = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) \qquad \text{[ כל הממסרים בלתי-תלויים זה בזה ]}$$

$$= 0.8 + 0.8 - 0.8^2 = 0.96$$

ובאופן דומה, מתקיים:

$$P\{\text{עובר זרם ב-3 או ב-4}\} = P(A_3 \cup A_4) = 0.96$$

ומכאן:

$$P\{\text{עובר זרם מ-A ל-B}\} = P(((A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cup A_4)) \cup (A_5 \cap A_6))$$

$$= P(A_1 \cup A_2)P(A_3 \cup A_4) + P(A_5 \cap A_6) - P(A_1 \cup A_2)P(A_3 \cup A_4)P(A_5 \cap A_6)$$

$$= 0.96^2 + 0.8^2 - 0.96^2 \cdot 0.8^2 = 0.971776 \qquad \text{[ כל הממסרים בלתי-תלויים זה בזה ]}$$

ב. נחשב את ההסתברות המותנית שממסרים 3 ו-4 פתוחים, אם ידוע שלא עובר זרם מ-A ל-B.

$$P\{A_3^C \cap A_4^C \mid \text{לא עובר זרם מ-A ל-B}\} = \frac{P(A_3^C \cap A_4^C \cap (A_5^C \cup A_6^C))}{1 - 0.971776} = \frac{P(A_3^C)P(A_4^C)P(A_5^C \cup A_6^C)}{1 - 0.971776}$$

$$= \frac{0.2^2 \cdot (0.2 + 0.2 - 0.2^2)}{1 - 0.971776} = 0.5102041$$

ג. נחשב את ההסתברות המותנית שעובר זרם מ-A ל-B, אם ידוע שממסר 4 פתוח.

$$P\{\text{עובר זרם מ-A ל-B} \mid A_4^C\} = \frac{P((A_4^C \cap A_3 \cap (A_1 \cup A_2)) \cup (A_4^C \cap A_5 \cap A_6))}{P(A_4^C)}$$

$$= \frac{P(A_4^C \cap ((A_3 \cap (A_1 \cup A_2)) \cup (A_5 \cap A_6)))}{P(A_4^C)}$$

$$= \frac{P(A_4^C)P((A_3 \cap (A_1 \cup A_2)) \cup (A_5 \cap A_6))}{P(A_4^C)} \qquad \text{[ כל הממסרים בלתי-תלויים זה בזה ]}$$

$$= P((A_3 \cap (A_1 \cup A_2)) \cup (A_5 \cap A_6))$$

$$= 0.8 \cdot 0.96 + 0.8^2 - 0.8 \cdot 0.96 \cdot 0.8^2 = 0.91648$$

ד. ההסתברות שבשני מעגלים מסוימים לא יעבור זרם ובשאר המעגלים יעבור זרם היא (לפי סעיף א):

$$(1 - 0.971776)^2 \cdot 0.971776^6 = 0.00067086$$

כעת, יש $\binom{8}{2} = 28$ אפשרויות לבחירת שני מעגלים (שלא יעבור בהם זרם), ולכן ההסתברות המבוקשת היא:

$$28 \cdot (1 - 0.971776)^2 \cdot 0.971776^6 = 0.01878$$

2. נסמן ב- $A$ את המאורע שיעל מאחרת לפגישה ;

ב- $B$ את המאורע שתמר מאחרת לפגישה ;

וב- $C$ את המאורע שדפנה מאחרת לפגישה.

לפי נתוני הבעיה מתקיים : $P(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(A^C) = P(S) = 1$

$$P(A^C \cap B^C \cap C^C) = P(B^C \cap C^C) = 0.4 \quad \Rightarrow \quad P(B \cup C) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$P(C \mid A \cup B \cup C) = P(C \mid B \cup C) = \frac{P(C)}{P(B \cup C)} = 0.6 \quad \Rightarrow \quad P(C) = 0.6 \cdot 0.6 = 0.36$$

$$P(A^C \cap B^C \cap C \mid C) = P(B^C \cap C \mid C) = \frac{P(B^C \cap C)}{P(C)} = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad P(B^C \cap C) = \frac{5}{6} \cdot 0.36 = 0.3$$

א. $P(A^C \cap B \cap C^C) = P(B \cap C^C) = P(B \cup C) - P(C) = 0.6 - 0.36 = 0.24$

ב. נתון שבדיוק שתיים מהבנות מגיעות בזמן וידוע כי יעל לעולם אינה מאחרת, ולכן ההסתברות המבוקשת

היא : $\dfrac{P(B^C \cap C)}{P(B^C \cap C) + P(B \cap C^C)} = \dfrac{0.3}{0.3 + 0.24} = \dfrac{5}{9}$

3. נגדיר את המאורעות :

$A$ = מפעל A מזהם את האוויר ביום כלשהו (60 יח׳) $\quad P(A) = 0.2$

$B$ = מפעל B מזהם את האוויר ביום כלשהו (80 יח׳) $\quad P(B) = 0.05$

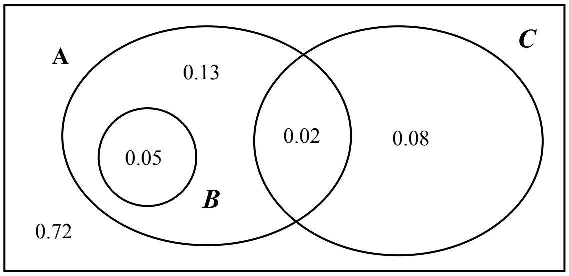
$C$ = מפעל C מזהם את האוויר ביום כלשהו (140 יח׳) $\quad P(C) = 0.1$

כמו כן, לפי הנתונים בשאלה מתקיים :

$P(A|B) = 1 \quad \Rightarrow \quad B \subset A$

$P(C|B) = 0 \quad \Rightarrow \quad B \cap C = \varnothing$

$P(A \cap C) = P(A)P(C) = 0.2 \cdot 0.1 = 0.02$




א. $P\{\text{מידת הזיהום} < 70\} = P(A \cap B^C \cap C^C) + P(A^C \cap B^C \cap C^C) = 0.13 + 0.72 = 0.85$

ב. $P\{\text{רק } C \text{ מזהם} \mid \text{מידת הזיהום היא 140 יחידות}\}$

$$= \frac{P(C \cap A^C \cap B^C)}{P(C \cap A^C \cap B^C) + P(C^C \cap A \cap B)} = \frac{0.08}{0.08 + 0.05} = 0.6154$$

ג. $P\{\text{בדיוק שני מפעלים מזהמים} \mid \text{האוויר מזוהם}\}$

$$= \frac{P(A \cap B \cap C^C) + P(A \cap B^C \cap C)}{1 - P(A^C \cap B^C \cap C^C)} = \frac{0.05 + 0.02}{1 - 0.72} = 0.25$$

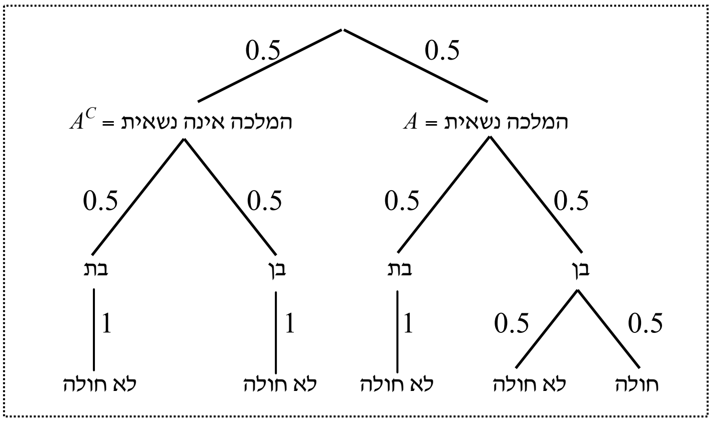
4. נסמן ב- $A$ את המאורע שהמלכה נשאית ;

נסמן ב- $BB_i$ את המאורע שהילד ה-$i$-י של המלכה הוא בן שאינו חולה, לכל $i = 1,2,3$ ;

נסמן ב- $BH_i$ את המאורע שהילד ה-$i$-י של המלכה הוא בן חולה, לכל $i = 1,2,3$ ;

ונסמן ב- $GB_i$ את המאורע שהילד ה-$i$-י של המלכה הוא בת לא חולה, לכל $i = 1,2,3$ .

נצייר עץ הסתברות מתאים :




נתוני הבעיה הם :

$P(A) = 0.5$ (מלכה)

$P(BB_i \mid A^C) = 0.5$ $\quad P(BH_i \mid A) = 0.5^2 = 0.25$ $\quad P(BB_i \mid A) = 0.5^2 = 0.25$ (נסיכים)

$P(GB_i) = 0.5$ (נסיכות)

א. $$P(BH_i) = P(BH_i \cap A) + \underbrace{P(BH_i \cap A^C)}_{=0} = P(BH_i \mid A)P(A) = 0.5^2 \cdot 0.5 = 0.125$$

ב. ידוע שלמלכה יש 3 ילדים. כדי שאחד מהם יהיה חולה היא צריכה להיות בהכרח נשאית (בהסתברות $P(A) = 0.5$ ), אחד מילדיה חייב להיות נסיך חולה והיתר נסיכים שאינם חולים או נסיכות.

לפי נתוני הבעיה, <u>בהינתן שהמלכה נשאית</u> אין תלות בין מצבם הבריאותי של 3 ילדיה. לכן, כל אחד מהם הוא נסיך חולה בהסתברות $P(BH_i \mid A) = 0.5^2 = 0.25$ , ואחרת הוא נסיך שאינו חולה או נסיכה בהסתברות $1 - 0.5^2 = 0.75$ . לפיכך, אם למלכה יש 3 ילדים, ההסתברות שבדיוק אחד מהם חולה היא :

$$0.5 \cdot 3 \cdot 0.5^2 \cdot (1 - 0.5^2)^2 = 0.2109$$

אפשר לפתור סעיף זה גם כך :

$$0.5 \cdot (\underbrace{3 \cdot 0.5^2 \cdot (0.5^2)^2}_{\text{3 בנים, אחד חולה}} + \underbrace{3! \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^2 \cdot 0.5}_{\text{2 בנים, אחד חולה + בת אחת בריאה}} + \underbrace{3 \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^2}_{\text{בן אחד חולה + 2 בנות בריאות}}) = 0.2109$$

המלכה נשאית

ג. $$P(A \mid BB_1 \cap BB_2) = \frac{P(A \cap BB_1 \cap BB_2)}{P(BB_1 \cap BB_2)} = \frac{P(BB_1 \cap BB_2 \mid A)P(A)}{P(BB_1 \cap BB_2)}$$

$$= \frac{P(BB_1 \cap BB_2 \mid A)P(A)}{P(BB_1 \cap BB_2 \mid A)P(A) + P(BB_1 \cap BB_2 \mid A^C)P(A^C)}$$

$$= \frac{(0.5^2)^2 \cdot 0.5}{(0.5^2)^2 \cdot 0.5 + 0.5^2 \cdot 0.5} = \frac{0.03125}{0.15625} = 0.2$$

ד.

$$P(BH_3 \mid BB_1 \cap BB_2) = \frac{P(BB_1 \cap BB_2 \cap BH_3)}{P(BB_1 \cap BB_2)} =$$

$$= \frac{P(BB_1 \cap BB_2 \cap BH_3 \mid A)P(A) + P(BB_1 \cap BB_2 \cap BH_3 \mid A^C)P(A^C)}{P(BB_1 \cap BB_2)}$$

$$= \frac{(0.5^2)^3 \cdot 0.5 + 0}{0.15625} = 0.05$$

ואפשר לפתור את הסעיף הזה גם כך, תוך שימוש בתוצאת הסעיף הקודם:

$$P(BH_3 \mid BB_1 \cap BB_2) = \frac{P(BB_1 \cap BB_2 \cap BH_3 \mid A)P(A)}{P(BB_1 \cap BB_2)}$$

$$= \frac{P(BB_1 \cap BB_2 \mid A)P(BH_3 \mid A)P(A)}{P(BB_1 \cap BB_2)}$$

[ בהינתן מצב המלכה, במקרה זה "נשאית", אין תלות בין לידות שונות ]

$$= \frac{P(BB_1 \cap BB_2 \mid A)P(A)}{P(BB_1 \cap BB_2)} \cdot P(BH_3 \mid A)$$

$$= P(A \mid BB_1 \cap BB_2) \cdot P(BH_3 \mid A) = 0.2 \cdot 0.5^2 = 0.05$$

5.

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{5} = 0.4 \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0.4P(A)$$

$$P(B \mid A^C) = \frac{P(A^C \cap B)}{P(A^C)} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad P(A^C \cap B) = 0.5P(A^C) = 0.5 \cdot [1 - P(A)]$$

לכן:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B) = 0.4P(A) + 0.5 \cdot [1 - P(A)] = 0.5 - 0.1P(A)$$

כעת:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.4P(A)}{0.5 - 0.1P(A)} = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad 3.6P(A) = 2 - 0.4P(A)$$

ומכאן:

$$P(A) = 0.5 \quad \Rightarrow \quad P(B) = 0.45$$