

שאלון בחינת גמר

20476 - מתמטיקה בדידה

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה 4 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים:

חלק א: שאלת חובה. את התשובה לכל סעיף כתבו במחברת בלבד.

חלק ב: עליכם לענות על שלוש מתוך ארבע השאלות.
אם תענו על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.
שימו לב:

- * בחלק ב יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
- * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד, וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים".
- * אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
- * אם ברצונכם להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליכם לחזור ולהוכיחן.
- * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרתם אותם.

חומר עזר:

כל חומר עזר מותר בשימוש. אפשר להשתמש במחשבון מדעי.
אסור בשימוש כל מכשיר אלקטרוני שבאמצעותו ניתן לאצור מידע
לרבות מכשיר טלפון נייד, מחשב נישא, שעון חכם וכד'.

בהצלחה !!!

אינכם חייבים

להחזיר את השאלון לאוניברסיטה הפתוחה



חלק א - שאלת חובה (19 נקודות)

ענו על שאלה 1.

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.
בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

6 נק' א. α, β הם פסוקים. נתון שהפסוק $\alpha \rightarrow \beta$ הוא סתירה. מכאן נובע:

[1] α הוא סתירה.

[2] $\beta \rightarrow \alpha$ הוא טאוטולוגיה ?

[3] β הוא טאוטולוגיה

[4] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

7 נק' ב. תהיינה A, B קבוצות חלקיות לקבוצת הממשיים R .

נתון ש- $A' \cup B' \subseteq Q$ (המשלימים הם יחסית ל- R). אז:

[1] $|A \cap B| < |Q|$ [2] $|A \cap B| = |Q|$

[3] $|A \cap B| = |A|$ [4] $|A \cap B| < |A \times B|$

6 נק' ג. G הוא גרף מישורי פשוט על 8 צמתים, שבו שני רכיבי קשירות G_1, G_2 .

ידוע ש- G_1, G_2 הם גרפים מלאים.

מספר הקשתות של G הוא:

[1] 8 [2] 13 [3] 12 [4] 17 [5] 21

המשך הבחינה בעמוד הבא

שאלה 5 ✓

יהיו p, q מספרים ראשוניים שונים.

על קבוצת הצמתים $V = \{1, p, q, pq, p^2q, pq^2\}$ נתון גרף פשוט $G = (V, E)$ המוגדר כך:

לכל שני צמתים $x, y \in V$ קיימת קשת $\{x, y\} \in E$ אם ורק אם x מחלק את y .

הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

(9 נק') א. G הוא גרף מישורי.

(9 נק') ב. קיים ב- G מסלול אוילר.

(9 נק') ג. G הוא גרף המילטוני.

בהצלחה!

חלק ב (81 נקודות)

ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות 5-2.
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות.

שאלה 2

תהי $M = \{A \mid A \subset \mathbb{N}, |A| = |\mathbb{N} - A|\}$ כלומר M קבוצות כל הקבוצות החלקיות לקבוצת המספרים הטבעיים, שעוצמתן שווה לעוצמת המשלים שלהן ב- \mathbb{N} .
למשל קבוצת כל מחספרים הטבעיים הזוגיים שייכת ל- M אבל קבוצת כל המספרים הטבעיים הגדולים מ-10 לא שייכת ל- M . בכרך "תורת הקבוצות" עמ' 94, שאלה 3.25א, מוכח שהיחס ההכלה הוא סדר-חלקי מעל כל קבוצה של קבוצות ובפרט סדר חלקי מעל M . נסמן אותו ב- R .
הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

- קיים ב- M איבר מקסימלי לגבי R . (9 נק')
- לכל שתי קבוצות $A, B \in M$ קיימת קבוצה $C \in M$ כך ש- ARC וגם BRC . (9 נק')
- כל קבוצה $A \in M$ מכסה אינסוף קבוצות של M . (9 נק')

שאלה 3

- כתבו פונקציה יוצרת עבור מספר פתרונות המשוואה
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = n$ כאשר x_1, x_2, x_3 יכולים לקבל רק את הערכים 3, 5, 7 וכאשר x_4, x_5, x_6 הם מספרים טבעיים המתחלקים ב-6.
פשטו את הביטוי בעזרת הנוסחה $(1 - x^6) = (1 - x^2)(1 + x^2 + x^4)$. (15 נק')
- מיצאו את מספר הפתרונות למשוואה מסעיף א' כאשר $n = 25$. (12 נק')

שאלה 4

- מיצאו את כל האיברים בפיתוח של $(x + y + z)^7$ בעלי מקדם ששווה למספר המילים באורך 7 הכתובות באותיות A, A, A, B, B, B, C . ראו כרך IV פרק 3.2.1. (9 נק')
- בכמה מילים באורך 7 הכתובות באותיות A, A, A, B, B, B, C לא מופיע אף אחד משלושת הרצפים ABC, BCA, CAB ? (18 נק')

המשך הבחינה בעמוד הבא