פרק 1: קומבינטוריקה (פתרונות)

(20416 / 23.1.12)

1. א. משחק 1: $n(S)=\binom{52}{2}=1{,}326$ משחק 2: $n(S)=13\cdot12\cdot11=1{,}716$

במשחק הראשון אין חשיבות לסדר שבו נבחרים הקלפים ואילו במשחק השני יש לכך חשיבות. לכן, אופן המנייה של כלל התוצאות שונה בין שני המשחקים.

ב. נסמן ב-A את המאורע המוגדר על-ידי 'זכייה במשחק'.

משחק 1: $n(A)=4\cdot\binom{13}{2}=312$, כי שני הקלפים יכולים להיות מארבע צורות אפשריות.

משחק 2: $n(A)=\binom{13}{3}=286$, כי לכל שלישיה של מספרים יש רק סידור אחד שמוביל לזכייה.

מניית מספר התוצאות שמובילות לזכייה צריכה להעשות תחת אותן הנחות שלפיהן נמנה מספר התוצאות הכללי. כלומר, במשחק הראשון אין חשיבות לסדר בחירת הקלפים ובשני יש לכך חשיבות.

2. א. כל אחד מחמשת הכדורים יכול ליפול באחד משבעה תאים. לכן, $n(S)=7^5=16{,}807$.

ב. צריך להביא בחשבון רק את אפשרויות הפיזור של כדורים B, C ו-E. לכן, מספר הפיזורים הוא 7^3.

ג. צריך לקבוע מיהו התא שבו נמצאים כדורים A ו-D, אחר-כך לפזר את כדורים B, C ו-E. לכן, מספר הפיזורים הוא $7\cdot7^3$.

ד. צריך להביא בחשבון רק את אפשרויות הפיזור של כדורים B, C ו-E. לכן, מספר הפיזורים הוא 6^3.

ה. יש 6 זוגות של תאים סמוכים. בכל זוג תאים כזה יש 2 אפשרויות לשים את כדורים A ו-D. לבסוף יש לפזר את שאר הכדורים. לכן, מספר הפיזורים הוא $6\cdot2\cdot7^3$.

ו. נחשב תחילה את מספר הפיזורים שבהם בין התא שבתוכו נמצא כדור A לתא שבו נמצא כדור D יש בדיוק תא אחד. אחר-כך, נשתמש בתוצאה הזו ובתוצאות של סעיפים ג ו-ה לחישוב התוצאה המבוקשת. מספר הפיזורים שבהם תא אחד בדיוק מפריד בין שני הכדורים הוא $5\cdot2\cdot7^3$.

לכן מספר הפיזורים המבוקש הוא $7^5-7\cdot7^3-6\cdot2\cdot7^3-5\cdot2\cdot7^3=20\cdot7^3=6{,}860$.

דרך נוספת: נניח בצד 2 תאים מתוך ה-7 שקיימים, ונניח שיש בשלב ראשון רק 5 תאים ממוספרים. שני תאים אלה ישמשו מאוחר יותר, כדי להבטיח את המרווח הדרוש בין התאים שבהם יהיו כדורים A ו-D. אם כך, בשלב הראשון נשים את כדורים A ו- D בשני תאים שונים מתוך החמישה. יש לכך $5\cdot4$ אפשרויות שונות. לאחר מכן, נוסיף את שני התאים החסרים, כך שיהיו בין התאים שאליהם הוכנסו כדורים A ו-D. באופן כזה נדאג לכך שיהיו לפחות שני תאים בין הכדורים הללו. בשלב השני, נפזר את שאר הכדורים. יש לכך 7^3 אפשרויות. הגענו לאותה התוצאה כבדרך הראשונה.

ז. נמנה תחילה את מספר הפיזורים, שבהם הכדורים A, B ו- C נמצאים בתאים שונים. יש $7\cdot6\cdot5\cdot7^2$ פיזורים כאלה (כי אין הגבלה על המיקום של כדורים D ו-E). כעת, לכל בחירה של 3 תאים, שבהם נמצאים הכדורים A, B ו- C, יש !3 אפשרויות לסידור הכדורים האלה בשלושת התאים. רק באחד מכל !3 סידורים כאלה, מספר התא של כדור A קטן ממספר התא של כדור B, שקטן ממספר התא של כדור C. לכן, יש $\frac{7\cdot6\cdot5\cdot7^2}{3!}=\binom{7}{3}\cdot7^2=1{,}715$ פיזורים המקיימים את המאורע המתואר בסעיף זה.

שימו לב, ש-$\binom{7}{3}$ הוא בעצם מספר האפשרויות לבחור 3 תאים שונים מתוך ה-7. משנבחרו התאים השונים, יש רק דרך אחת לשים בהם את כדורים A, B ו- C.

ח. מספר הפיזורים הכללי הוא 7^5. מספר הפיזורים, שבהם תא 3 ריק הוא 6^5. לכן, מספר הפיזורים שבהם יש בתא 3 לפחות כדור אחד הוא $7^5 - 6^5 = 9{,}031$.

ט. נחשב את מספר הפיזורים שבהם יש בתא 3 **בדיוק** 4 כדורים ונוסיף למספר זה את הפיזור היחיד שבו יש בתא 3 בדיוק 5 כדורים. כדי לחשב את מספר הפיזורים שבהם יש בתא 3 בדיוק 4 כדורים, נבחר 4 כדורים שיהיו בתא זה ונמקם את הכדור הנותר באחד מ-6 התאים האחרים.

באופן כזה נקבל כי יש $\binom{5}{4}\cdot 6+1=31$ פיזורים שבהם יש בתא 3 **לפחות** 4 כדורים.

דרך נוספת: נשים 4 כדורים בתא 3. יש לכך $\binom{5}{4}$ אפשרויות שונות. את הכדור שנותר נשים באחד מ-7 התאים באופן אקראי. הבעיה היא, שבאופן כזה, <u>הסידור שבו כל הכדורים בתא 3 נספר חמש פעמים</u> במקום פעם אחת בלבד. לכן, עלינו להוריד את ארבע הפעמים המיותרות שבהן הסידור הזה נספר. לפיכך, נקבל שיש $\binom{5}{4}\cdot 7-4=31$ סידורים, כפי שקיבלנו קודם לכן.

3. א. פיזור 5 כדורים זהים ב-7 תאים ממוספרים, שקול לסידור בשורה של 5 עיגולים (הכדורים) ו-6 מקלות (המחיצות בין התאים). לכן, $n(S)=\binom{5+6}{5}=\binom{11}{5}=462$.

ב. כאשר הכדורים זהים, אפשר לפתור את הסעיף הזה בשתי דרכים.

<u>**דרך I**</u>: מספר הפיזורים הכללי הוא $\binom{11}{5}$. מספר הפיזורים, שבהם תא 3 ריק הוא $\binom{5+5}{5}=\binom{10}{5}=252$, מכיוון שמפזרים 5 כדורים זהים ב-6 תאים (כלומר, 5 מחיצות). לכן, מספר הפיזורים שבהם יש בתא 3 לפחות כדור אחד הוא $\binom{11}{5}-\binom{10}{5}=462-252=210$.

<u>**דרך II**</u>: נשים מראש כדור אחד בתא 3. (אין חשיבות לכדור שייבחר, מכיוון שכל הכדורים זהים). כעת, נפזר את 4 הכדורים שנותרו ב-7 התאים. מכאן, שיש $\binom{4+6}{4}=210$.

<u>**שיטת פתרון זו אינה מתאימה למקרה שבו הכדורים שונים זה מזה**</u>.

ג. במקרה הזה, נשים מראש בתא 3 ארבעה כדורים. כל שנותר לקבוע הוא היכן ימוקם הכדור החמישי. לכדור החמישי יש 7 אפשרויות פיזור, ומכאן שזוהי התשובה המבוקשת.

4. א. מספר המקרים השונים שבהם התוצאה של אסף קטנה מזו של בני, והתוצאה של בני קטנה מזו של גלעד, הוא כמספר האפשרויות לבחור 3 מספרים שונים מהקבוצה $\{1,2,3,4,5,6\}$. כל בחירה של 3 מספרים מקבוצה זו מתאימה לאחד מהמקרים הללו. למשל, הבחירה $\{1,4,6\}$ מתאימה למקרה שבו אסף מקבל 1, בני מקבל 4 וגלעד מקבל 6. ומכאן שיש $\binom{6}{3}=20$ מקרים כאלו.

ב. נסביר תחילה מדוע הפתרון המובא בשאלה אינו נכון. בפתרון זה כל אחד מהמקרים שיש בו יותר מילד אחד שמקבל את התוצאה 1 נספר יותר מפעם אחת. נדגים זאת, על-ידי כך שנראה שתי דרכים שונות להגיע לאותו המקרה (לפי השלבים שמוגדרים בפתרון):

1) בשלב I נבחר אסף להיות הילד שמקבל את התוצאה 1. בשלב II בני מקבל את התוצאה 1 וגלעד מקבל את התוצאה 5.

2) בשלב I נבחר בני להיות הילד שמקבל את התוצאה 1. בשלב II אסף מקבל את התוצאה 1 וגלעד מקבל את התוצאה 5.

כלומר, כל מקרה שיש בו בדיוק 2 ילדים שמקבלים את התוצאה 1 נספר פעמיים. באותה דרך אפשר לראות שהמקרה שבו כל הילדים מקבלים את התוצאה 1 נספר שלוש פעמים.

וכעת לפתרון הנכון. נמנה את מספר המקרים שבהם אף ילד לא מקבל את התוצאה 1 ונחסיר אותו ממספר המקרים הכללי. נקבל $6^3 - 5^3 = 91$.

אפשר גם "לתקן" את הפתרון השגוי שמופיע בשאלה. נפחית מ- $3\cdot 6^2 = 108$ האפשרויות 15, עבור $\binom{6}{2} = 15$ המקרים שנספרו פעמיים, ו-2, עבור המקרה היחיד שנספר שלוש פעמים.

ג. תחילה נסביר מדוע הפתרון המובא בשאלה שגוי. כפי שהראינו בסעיף הקודם, גם כאן אפשר להראות שיש מקרים שנספרים יותר מפעם אחת בדרך פתרון זו. כל המקרים שבהם כל הילדים מקבלים אותה התוצאה נספרים שלוש פעמים במקום פעם אחת. (כדי להיווכח בכך, הראו שלוש דרכים שונות להגיע לאותו המקרה.)

כדי להגיע לפתרון הנכון נספור בכמה מקרים יש בדיוק שני ילדים שמקבלים אותה התוצאה (והיא איננה התוצאה של הילד השלישי) ובכמה מקרים כל הילדים מקבלים אותה התוצאה. נקבל $\binom{3}{2}\cdot 6\cdot 5 + 6 = 96$.

גם בסעיף זה אפשר "לתקן" את הפתרון השגוי, על-ידי הפחתה של $6\cdot 2 = 12$ אפשרויות מתוך 108 האפשרויות שחושבו בשאלה, עבור ששת המקרים שנספרו 3 פעמים במקום פעם אחת.

5. א. הקבוצות שונות זו מזו בגודלן, ולכן לכל אחת מהן יש ייחוד המאפיין רק אותה. לפיכך, מספר החלוקות האפשריות הוא $\binom{20}{5}\binom{15}{7}\binom{8}{8} = \frac{20!}{5!\cdot 7!\cdot 8!} = 99{,}768{,}240$.

ב. בוחרים מהכיתה קבוצה בגודל 10 שבה 4 בנים. התלמידים שלא נבחרו יוצרים את הקבוצה השנייה. לכן, מספר החלוקות האפשריות הוא $\binom{10}{4}\binom{10}{6} = 210^2 = 44{,}100$. במקרה הזה לקבוצות יש ייחוד, שנובע ממספר הבנים/הבנות השונה בשתי הקבוצות.

ג. במקרה זה אין לקבוצות ייחוד, שתיהן באותו גודל ובלי הרכב בנים-בנות ייחודי. לכן, מספר החלוקות האפשריות הוא $\binom{20}{10}\Big/2! = 92{,}378$.

ד. גם במקרה זה אין לקבוצות ייחוד ולכן מספר החלוקות האפשריות הוא $\binom{10}{5}\binom{10}{5}\Big/2! = 31{,}752$.

ה. הקבוצות שוות בגודלן, אך כל אחת מהן תנקה את הכיתה ביום אחר בשבוע. לכן, לכל אחת מהן יש ייחוד המאפיין רק אותה.

לפיכך, מספר החלוקות האפשריות הוא $\binom{20}{5,5,5,5} = \frac{20!}{(5!)^4} \cong 1.1733\cdot 10^{10}$.

ו. יש 2 אפשרויות לשייך כל ילד לאחת מ-2 קבוצות. לכן, יש 2^{20} אפשרויות לחלק את 20 הילדים ל-2 קבוצות. אולם, יש לשים לב לשתי בעיות במנייה זו. הראשונה – שכל חלוקה נספרת פעמיים (מכיוון שאין לקבוצות ייעוד שונה) והשנייה – שבין החלוקות הללו יש שתי חלוקות שבהן כל הילדים משוייכים לאותה הקבוצה והקבוצה האחרת ריקה. לכן, מספר החלוקות לשתי קבוצות לא ריקות יהיה $\frac{2^{20}-2}{2} = 2^{19}-1$.

6. א. בכל מ-7 הימים אבי יכול לבחור אחת מ-9 מכוניות שונות, לכן מספר אפשרויות הבחירה השונות שיש לו הוא $9^7 = 4{,}782{,}969$.

ב. בארבעת הימים הראשונים יש 9 אפשרויות בחירה ובשלושת הימים האחרונים רק 4 אפשרויות בחירה. לכן, מספר אפשרויות הבחירה במקרה זה הוא $9^4 \cdot 4^3 = 419{,}904$.

ג. נבחר את שלושת הימים שבהם נבחרו מכוניות אדומות ($\binom{7}{3} = 35$ אפשרויות) ואת המכוניות האדומות שנבחרו בימים אלו (4^3 אפשרויות); אחר-כך, נבחר את שאר המכוניות הלא-אדומות שנבחרו בימים האחרים (5^4 אפשרויות). ומכאן, שמספר אפשרויות הבחירה הוא:

$$\binom{7}{3} \cdot 4^3 \cdot 5^4 = 1,400,00$$

ד. באופן דומה לפתרון הסעיף הקודם נקבל כי:

$$\binom{7}{3} \cdot 4^3 \cdot \binom{4}{2} \cdot 3^2 \cdot \binom{2}{2} \cdot 2^2 = \binom{7}{3,2,2} \cdot 4^3 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = \tfrac{7!}{3!2!2!} \cdot 4^3 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 483{,}840$$

ה. כדי למנות את מספר אפשרויות הבחירה, שבהן נבחרו לפחות שתי מכוניות כחולות, נוריד מהמספר הכולל של האפשרויות הבחירה את מספר האפשרויות שבהן נבחרה לכל היותר מכונית כחולה אחת. כלומר, נפחית מהמספר הכולל של אפשרויות הבחירה את מספר האפשרויות שבהן לא נבחרת אף מכונית כחולה (6^7 אפשרויות) ואת מספר האפשרויות שבהן נבחרת בדיוק מכונית כחולה אחת (7 אפשרויות לבחירה היום שבו תיבחר המכונית הכחולה, 3 אפשרויות לבחירת המכונית הכחולה ו- 6^6 אפשרויות לבחירת שאר המכוניות).

באופן כזה, נקבל כי מספר האפשרויות הוא: $9^7 - 6^7 - 7\cdot3\cdot6^6 = 3{,}523{,}257$

הערה: דרך הפתרון שבה בשלב ראשון בוחרים יומיים בשבוע, שבהם ייבחרו בוודאות מכוניות כחולות, ובשלב שני בוחרים באופן חופשי מכוניות לשאר הימים בשבוע, מובילה לפתרון שגוי שיש בו מנייה מרובה של כל המקרים שבהם נבחרות יותר משתי מכוניות כחולות במשך השבוע. שימו לב, שבדרך פתרון זו, המקרים שבהם נבחרות יותר מ-2 מכוניות כחולות (דהיינו בין 3 ל-7 מכוניות כחולות) – כל 2 מכוניות כחולות, מתוך אלו שנבחרו, יכולות להיות אלו שנבחרו בשלב הראשון של הפתרון. לכן, אם נוקטים בדרך פתרון זו, אפשר להגיע לכל תוצאה שבה נבחרות יותר מ-2 מכוניות כחולות ביותר מאשר דרך אחת.

ו. מקרה זה מורכב משלושה תתי-מקרים שונים, הנקבעים לפי צבע המכוניות הראשונה והאחרונה – אדום, כחול או שחור. לכן, נחבר את מספר אפשרויות הבחירה המתאימות לכל אחד מן הצבעים, ונקבל את התוצאה: $(4^2 + 3^2 + 2^2) \cdot 9^5 = 1{,}712{,}421$

7. פתרון 1: יש $\binom{11}{2} = 55$ נקודות חיתוך לישרים שאינם מקבילים ו- $4 \cdot 11 = 44$ נקודות חיתוך לישרים המקבילים. כלומר, יש בסך-הכל 99 נקודות חיתוך.

פתרון 2: ל- n ישרים, שאין ביניהם מקבילים, יש $\binom{n}{2}$ נקודות חיתוך. לכן, מספר נקודות החיתוך של 15 ישרים, ש-4 מהם מקבילים, הוא $\binom{15}{2} - \binom{4}{2} = 105 - 6 = 99$.

8. א. יש $12!$ סידורים שונים. ב- $3!\cdot(4!\cdot3!\cdot5!)$ מהסידורים האלה, דגלים מאותו צבע סמוכים זה לזה.

($3!$ הוא מספר סידורי הצבעים והמכפלה בתוך הסוגריים היא מכפלת הסידורים הפנימיים בכל צבע.)

ב. יש $\frac{12!}{4!\cdot3!\cdot5!}=27,720$ סידורים שונים.

ב-$3!$ מהסידורים האלה, דגלים מאותו צבע סמוכים זה לזה (כי קובעים רק את סדר הצבעים ואין סידורים פנימיים).

9. יש כמה מקרים אפשריים: א. אות אחת מופיעה 6 פעמים וכל אחת מהאחרות פעמיים.

ב. אות אחת מופיעה 5 פעמים, השנייה 3 פעמים והשלישית פעמיים.

ג. אות אחת מופיעה 4 פעמים, וכל אחת מהאחרות 3 פעמים.

ד. אות אחת מופיעה פעמיים, וכל אחת מהאחרות 4 פעמים.

נחשב את מספר המילים האפשריות בכל אחד מן המקרים שלעיל:

א. יש 3 אפשרויות לבחור את האות שמופיעה שש פעמים במילה. משנבחרה האות שמופיעה שש פעמים במילה, אפשר להרכיב מעשר האותיות $\frac{10!}{6!\cdot2!\cdot2!}=1,260$ מילים שונות.

ב. יש $3!$ אפשרויות לקבוע את מספר הפעמים שכל אות תופיע במילה. משנקבעו הכמויות, אפשר להרכיב מעשר האותיות $\frac{10!}{5!\cdot3!\cdot2!}=2,520$ מילים שונות.

ג. יש 3 אפשרויות לבחור את האות שמופיעה ארבע פעמים במילה. משנבחרה האות שמופיעה ארבע פעמים במילה, אפשר להרכיב מעשר האותיות $\frac{10!}{4!\cdot3!\cdot3!}=4,200$ מילים שונות.

ד. יש 3 אפשרויות לבחור את האות שמופיעה פעמיים במילה. משנבחרה האות שמופיעה פעמיים במילה, אפשר להרכיב מעשר האותיות $\frac{10!}{2!\cdot4!\cdot4!}=3,150$ מילים שונות.

כלומר, בסך-הכל אפשר להרכיב $3\cdot1,260+6\cdot2,520+3\cdot4,200+3\cdot3,150 = 40,950$ מילים שונות.

10. א. הספרה השמאלית חייבת להיות 1, וכל ספרה אחריה יכולה להיות 0 או 1. לכן, יש $2^9=512$ מספרים שונים.

ב. יש $\binom{14}{9}=2,002$ מספרים עם 10 אחדים, מכיוון שבמקום השמאלי יש 1 ולכן נותר לבחור עוד 9 מקומות ב"שורה" שבהם יהיו אחדים.

ג. מסדרים את חמשת ה-0-ים בשורה, לשמאלם ובין כל שניים מהם ממקמים 1. נותרים חמישה 1-ים, שאותם יש למקם במספר. בעיה זו שקולה לפיזור 5 כדורים זהים ב-6 תאים (4 תאים בין האפסים ושניים נוספים מהצדדים). לכן, יש $\binom{10}{5}=252$ מספרים בינאריים שעונים על הדרישה בסעיף זה.

דרך נוספת: מסדרים את עשרת ה-1-ים בשורה. בין כל שניים מהם ומימינם (אך לא משמאלם) אפשר למקם 0-ים. בכל מקום 0 אחד בלבד. כלומר, יש 10 מקומות אפשריים למיקום ה-0-ים, ש-5 מהם "יתמלאו". לכן, כל שצריך לעשות הוא לבחור את חמשת המקומות הללו. יש לכך $\binom{10}{5}=252$ אפשרויות שונות.

ד. מסדרים את ה-0-ים בשורה, לשמאלם ממקמים 1 ובין כל שניים מהם ממקמים שני 1-ים. נותר 1 יחיד, שאותו יש למקם במספר. בעיה זו שקולה לפיזור של כדור אחד ב-6 תאים (4 תאים בין האפסים ושניים נוספים מהצדדים). לכן, יש $\binom{6}{1}=6$ מספרים בינאריים מתאימים.

הערה: לפתרון סעיף זה, השתמשנו בדרך דומה לדרך הפתרון הראשונה שהוצגה בסעיף הקודם. הדרך הנוספת שהוצגה בסעיף הקודם, אינה נוחה במקרה זה, בגלל ההגבלה שלפיה צריכים להיות לפחות שני 1-ים בין כל שני 0-ים.

11. א. **<u>אנו מניחים שכל שני בני-אדם שונים זה מזה</u>**, לכן, מספר הסידורים של שורה כזאת הוא $21!$.

ב. נסדר את הנשים בשורה ($15!$ אפשרויות), ונמקם ביניהן את הגברים, כך שבין כל שני גברים ובשני קצוות השורה תהיה לכל היותר אישה אחת ($16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11$ אפשרויות – שהן 16 אפשרויות לגבר הראשון, 15 לשני, וכך הלאה). ומכאן נקבל את התוצאה $15!\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11$.

ג. נתחיל ממניית מספר הסידורים הכלליים של נשים-גברים בשורה (כלומר, ללא זיהוי של האדם המסוים בכל מקום בשורה, אלא רק של מינו). לשם כך, נתייחס אל הגברים כאל 6 מחיצות של 7 תאים ואל הנשים כאל 15 כדורים זהים. נמקם 2 כדורים זהים בכל אחד מ-5 התאים המרכזיים (מתוך 7 התאים), כדי לדאוג לכך שלא יהיו שני גברים במקומות סמוכים, ואז נפזר באופן חופשי את 5 הכדורים הזהים הנותרים ב-7 התאים ($\binom{5+6}{5}=462$ אפשרויות).

כעת, נקבע סידור פנימי לנשים ולגברים. לכל סידור כללי של נשים-גברים בשורה יש $15!\cdot6!$ סידורים פנימיים אפשריים. לכן, מספר הסידורים האפשריים הוא $462\cdot15!\cdot6!$.

12. א. מספר השרשרות השונות שאפשר ליצור הוא כמספר אפשרויות הסידור של 14 עצמים שונים במעגל שאין לו התחלה או סוף. לכן, אפשר ליצור $13!$ שרשרות שונות.

ב. כדי למנות את מספר השרשרות השונות שאין בהן 2 חרוזים צהובים סמוכים, נתחיל בסידור 4 החרוזים הצהובים במעגל ($3!$ אפשרויות). כעת, נמנה את מספר הסידורים האפשריים של החרוזים האחרים בין החרוזים הצהובים. בשלב ראשון נקבע כמה חרוזים שאינם צהובים יהיו בין כל שני חרוזים צהובים, ובשלב השני נקבע את הסדר הפנימי של כל החרוזים שאינם צהובים. מכיוון שהחרוזים הצהובים שונים זה מזה, קביעת כמויות החרוזים שאינם צהובים בין כל שני חרוזים צהובים שקולה לפיזור 10 כדורים זהים ב-4 תאים ממוספרים, כך שבכל תא חייב להיות לפחות כדור אחד. ולכן, יש $\binom{6+3}{6}=84$ אפשרויות לקביעת כמויות הכדורים בין כל שני חרוזים צהובים (שמסודרים כבר במעגל). לסיום, נותר לסדר את כל החרוזים שאינם צהובים לפי חלוקת הכמויות שנקבעה בשלב הראשון. כלומר, עלינו לסדר 10 עצמים שונים זה מזה ב-10 מקומות מסומנים ויש לכך $10!$ אפשרויות סידור.

לפיכך, אפשר ליצור $3!\cdot\binom{9}{6}\cdot10!$ שרשרות שונות, שאין בהן 2 חרוזים צהובים סמוכים.

ג. אילו בין חרוזי השרשרת היה נוסף סגר, הוא היה מעין סימון להתחלה של השרשרת. לכן, במקרה כזה מספר השרשרות השונות שאפשר היה ליצור הוא כמספר אפשרויות הסידור של החרוזים בשורה (סידור שיש בו התחלה וסוף). כלומר, כאשר יש לשרשרת סגר, אפשר ליצור $14!$ שרשרות שונות.

13. א. נבחר חפץ אחד (8 אפשרויות) וניתן אותו לאחד מששת האנשים (6 אפשרויות). אחר-כך, נבחר שני חפצים ($\binom{7}{2}=21$ אפשרויות) וניתן אותם לאדם אחר מזה שנבחר ראשון (5 אפשרויות).

ומכאן, נקבל שיש בסך-הכל $8\cdot6\cdot21\cdot5=5{,}040$ אפשרויות חלוקה.

ב. נבחר שני חפצים ($\binom{8}{2}=28$ אפשרויות) וניתן אותם לאחד מששת האנשים (6 אפשרויות). אחר-כך, נבחר שלושה חפצים ($\binom{6}{3}=20$ אפשרויות) וניתן אותם לאדם אחר מזה שנבחר ראשון (5 אפשרויות).

ומכאן, נקבל שיש בסך-הכל $28\cdot6\cdot20\cdot5=16{,}800$ אפשרויות חלוקה.

ג. דרך I: יש $\binom{6}{2}=15$ אפשרויות לבחירת שני אנשים (ללא סדר ביניהם) ו- $\binom{8}{2}=28$ אפשרויות לבחירת שני חפצים (ללא סדר ביניהם). את שני החפצים שנבחרו אפשר לחלק לשני האנשים שנבחרו ב-2 אופנים (כאן קובעים סדר, כאשר משייכים את החפצים לאנשים).
ומכאן, שיש $15\cdot28\cdot2=840$ אפשרויות חלוקה.

דרך II: יש 8 אפשרויות לבחירת החפץ הראשון ו-6 אפשרויות לבחירת האיש שיקבל אותו; יש 7 אפשרויות לבחירת החפץ השני ו- 5 אפשרויות לבחירת האיש שיקבל אותו. אולם, מספר אפשרויות החלוקה במקרה זה אינו $8\cdot6\cdot7\cdot5$, כי בדרך זו **כל אחת מהחלוקות המתאימות נספרת פעמיים**. למשל, אפשר לבחור בפעם הראשונה את חפץ A ואת איש א ובפעם השנייה את חפץ B ואת איש ב, כך שמתקבלת החלוקה Aא + Bב. אבל, חלוקה זו מתקבלת גם במקרה שבו בפעם הראשונה נבחרים חפץ B ואיש ב ובפעם השנייה חפץ A ואיש א. וכך לגבי כל שאר החלוקות מצורה זו. לכן, כדי לקבל את מספר החלוקות האפשריות במקרה הזה, נחלק את מכפלת הגורמים שציינו לעיל ב-2, ונקבל אותה תוצאה שקיבלנו בדרך I, דהיינו $840=\frac{8\cdot6\cdot7\cdot5}{2}$.

הערה: בדרך II נוצר הצורך בחלוקה ב-2 (למעשה ב-!2), מכיוון ששני האנשים מקבלים כמויות שוות של חפצים.

ד. דרך I: יש $\binom{6}{2}=15$ אפשרויות לבחירת שני האנשים (ללא סדר ביניהם); ויש $\binom{8}{2}=28$ אפשרויות לבחירת זוג החפצים הראשון ו- $\binom{6}{2}=15$ אפשרויות לבחירת זוג החפצים השני (כאן, יש סדר בבחירת זוגות החפצים – הזוג שנבחר ראשון והזוג שנבחר שני).

לכן, יש $15\cdot28\cdot15=6{,}300$ אפשרויות חלוקה.

דרך II: יש $\binom{8}{2}=28$ אפשרויות לבחירת שני החפצים הראשונים ו-6 אפשרויות לבחירת האיש שיקבל אותם, ויש $\binom{6}{2}=15$ אפשרויות לבחירת שני החפצים הבאים ו-5 אפשרויות לבחירת האיש שיקבל אותם.

אך, גם במקרה זה, כפי שראינו בסעיף ג בדרך II, **כל אחת מהחלוקות המתאימות נספרת פעמיים**, מכיוון ששני האנשים שנבחרים מקבלים כמויות שוות של חפצים. לפיכך, כדי לקבל את מספר החלוקות המתאים, נחלק את מכפלת הגורמים שצוינו לעיל ב-2. נקבל, בהתאמה לתוצאה שקיבלנו בדרך I, $6{,}300=\frac{28\cdot6\cdot15\cdot5}{2}$.

הערה: שימו לב להבדל בין סעיפים א ו-ב לסעיפים ג ו-ד. בסעיפים הראשונים, שני האנשים שנבחרים מקבלים כמויות שונות של חפצים, ולכן אין בהם בעיה של מנייה כפולה של חלוקות. לכל אדם שמקבל חפצים יש ייחוד, שנובע מכמות החפצים המסוימת שהוא מקבל. לעומת זאת, בסעיפים האחרונים שני האנשים מקבלים כמויות שוות של חפצים, ולכן אין להם ייחוד כזה, ובמקרה זה, גם לא ייחוד אחר.

ה. נבחר ארבעה אנשים ונחלק להם את 8 החפצים – שניים לכל אחד.

צריך לשים לב שרק בחירה אחת (של האנשים או של החפצים) **תהיה "עם חשיבות לסדר"**, אחרת יווצר מצב של מנייה מרובה של תוצאות.

דרך I: יש $\binom{6}{4}=15$ אפשרויות לבחירת האנשים (בלי חשיבות לסדר) ו- $\binom{8}{2,2,2,2}=\frac{8!}{2^4}=2,520$ אפשרויות לחלק את החפצים לזוגות (עם חשיבות לסדר – זוג ראשון שנבחר, זוג שני וכך הלאה).

דרך II: יש $6\cdot5\cdot4\cdot3\ =\ 360$ אפשרויות לבחירת האנשים (עם חשיבות לסדר) ו- $\frac{8!}{2^4\cdot4!}=105$ אפשרויות לחלק את החפצים לזוגות (בלי חשיבות לסדר).

דרך III: יש $\binom{6}{4}=15$ אפשרויות לבחירת האנשים (בלי חשיבות לסדר), $\frac{8!}{2^4\cdot4!}=105$ אפשרויות לחלק את החפצים לזוגות (בלי חשיבות לסדר) ו- $4!$ אפשרויות לחלק את זוגות החפצים ל-4 האנשים שנבחרו (כאן נקבע סדר החלוקה).

** בכל הדרכים שלעיל מתקבלת התוצאה $\frac{8!\cdot6!}{2^4\cdot2!\cdot4!}=37,800$.

ו. לפי כל האמור בסעיפים הקודמים מקבלים: $\underbrace{\binom{8}{3}\cdot6\cdot5\cdot4}_{\text{3 חפצים ל-3 אנשים}}\cdot\underbrace{\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{2}}_{\text{2 זוגות חפצים ל-2 אנשים}}=604,800$

ז. נבחר תחילה את האיש שיקבל שלושה חפצים (6 אפשרויות) ואת החפצים שיקבל ($\binom{8}{3}=56$ אפשרויות). אחר-כך נחלק לחמשת האנשים האחרים את החפצים שנותרו, חפץ אחד לכל איש ($5!$ אפשרויות). לכן, יש בסך-הכל $6\cdot56\cdot120\ =\ 40,320$ אפשרויות חלוקה.

14. א. יש $\binom{64}{8}$ אפשרויות לבחירת שמונה המשבצות.

ב. לכלי הראשון יש 64 משבצות פנויות, לשֵני 63 משבצות פנויות וכך הלאה.

לכן, יש $64\cdot63\cdot\ldots\cdot57=(64)_8$ אפשרויות בחירה לשמונת המקומות.

אותה תוצאה מתקבלת, אם בוחרים תחילה את המשבצות ואחר-כך מסדרים עליהם את הכלים. כלומר, $\binom{64}{8}\cdot8!=(64)_8$.

ג. יש $8!$ אפשרויות לסדר את כל הכלים בשורה 7, לכן זהו מספר הסידורים האפשריים.

זהו גם מספר הסידורים האפשריים בכל אחת מהשורות, ולכן מקבלים שיש $8\cdot8!\ =\ 322,560$ סידורים, שבהם כל הכלים באותה שורה.

ד. בארבע שורות יש 32 משבצות. לכן, מקבלים שיש $32\cdot31\cdot30\cdot29\cdot60\cdot59\cdot58\cdot57$ סידורים אפשריים.

ה. יש $4!\ =\ 24$ אפשרויות לסדר את הכלים השחורים בפינות ו- $60\cdot59\cdot58\cdot57$ אפשרויות לסדר את הכלים הלבנים. לכן, מספר הסידורים האפשריים הוא $60\cdot59\cdot58\cdot57\cdot24$.

15. נניח שנתונה קבוצת המספרים $\{1,2,\ldots,n\}$ ושבוחרים ממנה באקראי וללא החזרה k איברים.
מהו מספר האפשרויות של ניסוי זה?

מצד אחד מספר זה שווה ל-$\binom{n}{k}$, שהוא מספר האפשרויות לבחור ללא החזרה (ובלי חשיבות לסדר הבחירה) קבוצה בגודל k מתוך אוכלוסייה בגודל n; ומצד שני, אפשר למנות את מספר האפשרויות המבוקש בעזרת חלוקה לתתי-מקרים, שייקבעו לפי האיבר הגדול ביותר שנבחר בין k המספרים. נשים לב, שאם i $(i = k,\ldots,n)$ הוא המספר הגדול ביותר שנבחר, אז יחד עימו נבחרו עוד $k-1$ איברים שכולם קטנים מ-i.

לכן, מספר אפשרויות הבחירה שבהן i הוא הגדול ביותר מבין k האיברים שנבחרו הוא $\binom{i-1}{k-1}$.

לפיכך:

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{בחירה כלשהי} \\ \text{של } k \text{ מספרים} \\ \text{מתוך קבוצה} \\ \text{בגודל } n}} = \underbrace{\binom{k-1}{k-1}}_{\substack{k \\ \text{הכי גדול} \\ \text{בקבוצה} \\ \text{שנבחרה}}} + \underbrace{\binom{k}{k-1}}_{\substack{k+1 \\ \text{הכי גדול} \\ \text{בקבוצה} \\ \text{שנבחרה}}} + \underbrace{\binom{k+1}{k-1}}_{\substack{k+2 \\ \text{הכי גדול} \\ \text{בקבוצה} \\ \text{שנבחרה}}} + \ldots + \underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{\substack{n \text{ הכי גדול} \\ \text{בקבוצה} \\ \text{שנבחרה}}} = \sum_{i=k}^{n}\binom{i-1}{k-1}$$