פתרון ממ"ן 15 20417 2011א

נכתב על-ידי אדיר גרוס.

שאלה 1

א. נניח בשלילה ש- $X\cup Y$ היא לא כיסוי בצמתים של G. אז קיימת קשת $e=(u,v)\in E$ כך שאף אחד מקצוותיה לא נמצאים ב- X או ב- Y. לכן

$$u,v\notin X\cup Y\Rightarrow u,v\notin[S\cap V_2]\cup[T\cap V_1]\overset{S\cap T=\varnothing,V_1\cap V_2=\varnothing}{\Rightarrow}u,v\in[T\cap V_2]\cup[S\cap V_1]$$

אם u,v שניהם ב- $T\cap V_2$ (המקרה השני דומה), אז קיבלנו שקיימת בגרף קשת בין שני צמתים ב- V_2, בסתירה להיותו דו צדדי.

לפיכך, ללא הגבלת הכלליות - $v\in T\cap V_2$ ו- $u\in S\cap V_1$. הקשת (u,v) היא קשת מ- S ל- T, כלומר חוצה את החתך. זוהי קשת מ- V_1 ל- V_2 ולכן קיימת ברשת הזרימה וקיבולה אינסוף.

לפיכך החתך המינימלי שקיבלנו חייב להיות בעל קיבול אינסוף. אבל החתך $(\{s\},\{t\}\cup V)$ הוא בעל קיבול סופי השווה ל- $|V_1|$, ומכאן שהחתך שבאמצעותו יצרנו את X ו- Y לא מינימלי – סתירה.

ב. (1) אם בחרנו את X,Y עבור חתך (S,T) עם קיבול k, אז $|X\cup Y|$ כיסוי בצמתים בגודל k. <u>הוכחה:</u> לפי הסעיף הקודם, אף אחת מן הקשתות שיוצאות מן החתך היא לא בעלת קיבול אינסוף, ולכן הקשתות היחידות שיוצאות מהחתך הן קשתות מהצורה $s\to y$ או $x\to t$, כאשר $x\in X$, $y\in Y$. קשתות אלו הן בעלות קיבול 1. מספר הקשתות האלו הוא בדיוק $|S\cap V_2|+|T\cap V_1|=|X+Y|$. הוכחנו בסעיף הקודם ש- $X+Y$ כיסוי בקשתות, ולכן זהו כיסוי בקשתות בגודל k.

(2) יהי C כיסוי בקשתות בגודל k. נוכיח שברשת G' קיים חתך בעל קיבול k. ניקח: $S=\{s\}\cup[C\cap V_2]\cup([V-C]\cap V_1)$, $T=V'-S$. נוכיח שקיבולו של החתך הוא k.

מכיוון ש- C כיסוי בצמתים, אין קשת ששני קצוותיה לא ב- C. מכיוון שאין קשתות מ- V_2

ל-V_1, הקשתות היחידות שיוצאות מן החתך הן אלו מהצורה $s \to C \cap V_1$ ו- $C \cap V_1 \to t$.

סך הכל יש $|C|$ כאלו. לכן קיבול החתך (S,T) הוא לכל היותר k.

נוכיח: $X \cup Y$ כיסוי בצמתים מינימלי. נניח שהכיסוי הנ״ל הוא בגודל k. נניח בשלילה שיש כיסוי אחר שגודלו $k' < k$.

אז לפי (2) יש חתך שגודלו לכל היותר k'. מ-(1) $X \cup Y$ כיסוי בצמתים בגודל k' - סתירה.

שאלה 2

<u>האלגוריתם</u>

נבנה רשת זרימה באופן הבא:

ראשית כל, נתעלם מהמשקלים שברשת G, ונתייחס אליה כאל גרף מכוון (לא נייחס משמעות מיוחדת ל- s ו- t). נבנה רשת זרימה $G'=(V',E')$ כלהלן:

$$V'=\{s',t'\}\cup V$$

$$E'=\{(s,u)\mid u\in U1\}\cup\{(v,t)\mid v\in U2\}\cup E$$

לכל הקשתות ב- E ניתן קיבול 1, ולקשתות מהמקור ואל הבור ניתן קיבול אינסוף.

נחשב זרימה מקסימלית (חתך מינימלי) ב- G'. נחזיר את גודל הזרימה שקיבלנו.

<u>הוכחת נכונות</u>

לפי משפט (7.43), יש k מסלולים זרי קשתות מהמקור לבור אם ורק אם ערך הזרימה המקסימלית יהיה לפחות k (ערכי הזרימה כאן הם גם 0 ו-1 ולכן ניתן להשתמש במשפט). לכן ערך הזרימה המקסימלית שווה למספר המקסימלי של מסלולים זרי קשתות. לפי משפט (7.45), המספר המקסימלי של מסלולים זרי קשתות מהמקור לבור שווה למספר המינימלי של קשתות שסילוקן מפריד את s' מ- t'.

נותר להוכיח שמספר הקשתות המינימלי שיש להוריד מ- G' כדי שלא יהיה מסלול מ- s' ל- t' שווה למספר הקשתות המינימלי שיש להוריד מ- G כך שלא יהיה מסלול המחבר צומת מ- $U1$ עם צומת מ- $U2$.

נניח שאפשר להוריד k קשתות כך שלא יהיה מסלול מ- s' ל- t'. לפי הוכחת 7.45 אלו הקשתות שחוצות את החתך המינימלי. החתך המינימלי הוא סופי (לא יכולה להיות זרימה אינסופית, כי המשקלים על קשתות G מפרידים בין הקשתות שקיבולן אינסוף). לכן הקשתות שיש להוריד הן תת קבוצה של E. אם נוריד k קשתות אלו מ- G לא יהיה מסלול $U1\to U2$, כי אם היה מסלול כזה, זה היה גורר מסלול כזה בגרף G', ואז המסלול $s'\to U1\to U2\to t'$ הוא מסלול $s'\to t'$.

בכיוון ההפוך: אם אפשר להוריד k קשתות מ- G' כך שאין מסלול $U1\to U2$, אז אם נוריד קשתות אלו מ- G', לא יהיה מסלול $s'\to t'$, כי אם היה מסלול כזה, אז לפי בניית G' בהכרח הוא מתחיל

ב- s עובר לצומת ב- $U1$, ומסיים בקשת מ- $U2$ ל- t - לכן קיים מסלול מ- $U1$ ל- $U2$ בגרף המקורי – סתירה.

<u>ניתוח סיבוכיות</u>

הסיבוכיות היא כשל הרצת האלגוריתם למציאת זרימה מקסימלית.

באמצעות FF: הזרימה המקסימלית היא m, כי אם נוריד את כל הקשתות בהכרח לא יהיה מסלול כנדרש: $O\left(mC\right)=O\left(m^2\right)$.

שאלה 3

<u>האלגוריתם</u>

נמצא באמצעות אלגוריתם פורד-פולקרסון זרימה מקסימלית ב- G.

נסמן ב- G_f את הגרף השיורי של G בסיום ריצת האלגוריתם של פורד פולקרסון.

נריץ BFS החל מהמקור s. את כל הצמתים שניתן להגיע אליהם מ- s נכניס לרשימה S.

נהפוך את קשתות הגרף, נריץ BFS מהבור t. את כל הצמתים שניתן להגיע אליהם מ- t בגרף ההפוך נכניס לרשימה T. אלו הצמתים שאפשר להגיע מהם ל- t בגרף המקורי.

כפלט, נאמר על כל אחד מהצמתים ב- S שהוא במעלה הזרם, על כל אחד מהצמתים ב- T שהוא במורד הזרם, ועל הצמתים שב- $V-\{S\cup T\}$ שהם במרכז.

<u>הוכחת נכונות</u>

1. הצמתים שניתן להגיע מ- s אליהם ב- G_f נמצאים במעלה הזרם.

<u>הוכחה:</u> בחתך הטבעי שקיבלנו כתוצאה מהרצת האלגוריתם צמתים אלו נמצאים עם s ולכן יש לפחות חתך מינימלי אחד שהם נמצאים בו. אם צומת לא נמצאת ב- S, אז בחתך שלנו היא נמצאת עם t ולכן היא לא במעלה הזרם.

נניח שקיים חתך מינימלי (A,B) שבו $v\in B$ אבל קיים מסלול $s-v$ ב- G_f. אם קיים מסלול $s-v$ ב- G_f, אז הוא חייב לחצות את החתך, משום ש- $s\in A$ ו- $v\in B$. כמו כן, לכל הקשתות במסלול זה קיבול שיורי חיובי. לכן יש קשת e בעלת קיבול שיורי חיובי שחוצה את החתך המינימלי. לפיכך, לא הזרמנו את כל הזרימה האפשרית בקשת, כלומר בזרימה המקסימלית הקשת הזו לא רוויה. אבל לפי משפט חתך מינימלי – זרימה מקסימלית ומשפט (7.6):

$$(*)\, v(f)=f^{out}(A)-f^{in}(A)=c(A,B)$$

אבל אחת מהקשתות לא רוויות ולכן $f^{out}(A)<c(A,B)$ והשוויון לעיל לא יכול להתקיים, סתירה.

2. הצמתים שניתן להגיע מהם ל- t ב- G_f נמצאים במורד הזרם.

הוכחה: בחתך הטבעי שקיבלנו כתוצאה מהרצת האלגוריתם צמתים אלו נמצאים עם t ולכן יש לפחות חתך מינימלי אחד שהם נמצאים בו יחד עם t. אם צומת לא נמצאת ב-T, אז בחתך שלנו היא נמצאת עם s ולכן היא לא במורד הזרם. הכיוון ההפוך - נניח שקיים חתך מינימלי (A,B) שבו $v \in A$ אבל קיים מסלול $v-t$ ב-G_f. אם קיים מסלול $v-t$ ב-G_f, אז הוא חייב לחצות את החתך, משום ש-$v \in A$ ו-$t \in B$. כמו כן, לכל הקשתות אחורה במסלול זה קיבול שיורי חיובי. לכן יש קשת אחורה e בעלת קיבול שיורי חיובי שחוצה את החתך המינימלי. לפיכך, בזרימה שלנו $f^{out}(A) > 0$. לכן השוויון (*) לעיל לא יכול להתקיים - סתירה.

3. הצמתים שלא ב-S ולא ב-T הם צמתי המרכז.

הוכחה: צמתים אלו לא נמצאים במעלה הזרם, ולכן קיים חתך מינימלי בו הם ב-B. צמתים אלו לא במורד הזרם ולכן קיים חתך מינימלי בו הם נמצאים ב-A. לכן הם במרכז. כל צומת שהוא במרכז לא יכול להמצא ב-T או ב-S מעצם הגדרתם, ולכן הוא בהכרח ב-$V-\{S \cup T\}$.

ניתוח סיבוכיות

אפשר להריץ את אלגוריתם פורד פולקרסון בזמן $O(mC)$ או $O(m^2n)$.

הרצת ה-BFS, הפיכת קשתות הגרף, והרצת ה-BFS על הגרף ההפוך (תוך כדי תחזוק הרשימות S ו-T) לוקחת $O(n+m)$.

בסך הכל הסיבוכיות היא זו של חישוב זרימה מקסימלית אחת.

שאלה 4

<u>האלגוריתם</u>

נריץ את האלגוריתם משאלה 3 על G.

- אם רשימת הצמתים שנמצאים במרכז ריקה, אז נחזיר שיש חתך מינימלי יחיד.
- אחרת, נחזיר שהחתך המינימלי אינו יחיד.

<u>הוכחת נכונות</u>

חתך מינימלי יחיד $\Leftarrow$ מרכז ריק:

אם ל- G חתך מינימלי יחיד אפשרי (A,B), אז צמתי A נמצאים בכל חתך מינימלי עם s, וצמתי B נמצאים בכל חתך מינימלי עם t. לכן $S=A$ ו- $T=B$ (במונחי השאלה הקודמת), ומכאן אין צמתים במרכז.

מספר חתכים מינימליים $\Leftarrow$ מרכז לא ריק:

נניח של- G לפחות 2 חתכים מינימלים שונים. יהיו $(A_1,B_1),(A_2,B_2)$ חתכים כאלו. החתכים שונים ולכן קיים $x\in A_1$ כך ש- $x\notin A_2$ לכן x לא במעלה הזרם. אבל זה אומר ש- $x\in B_2$ ו- $x\notin B_1$, לכן x לא במורד הזרם. לפיכך x במרכז, כלומר הוא לא ריק.

<u>ניתוח סיבוכיות</u>

הרצת האלגוריתם משאלה 3: $O(mC)$ או $O(m^2n)$. אם רוצים להיות פולינומיאלים בגודל הקלט אז נבחר באדמונדס קרפ וזמן הריצה יהיה $O(m^2n)$.

שאלה 5

<u>האלגוריתם</u>

נבנה מתוך הלוח הנתון גרף דו צדדי לא מכוון $G=\left(X\cup Y,E\right)$ באופן הבא:

$X=\left\{x_1,...,x_m\right\}$ - קבוצת השורות.

$Y=\left\{y_1,...,y_m\right\}$ - קבוצת העמודות.

קיימת קשת $e=\left\{x_i,y_j\right\}$ אם ורק אם קיים צריח בנקודה $\left(i,j\right)$.

נחשב זיווג מקסימלי בגרף G. הצריח $\left(i,j\right)$ יישאר בגרף אם ורק אם הצומת x_i מזווגת ל-y_j.

<u>הוכחת נכונות</u>

נוכיח שאם משאירים את כל הצריחים שהקשתות המייצגות את המיקום שלהם נמצאות בזיווג, מקבלים קבוצת צריחים מקסימלית בלוח (ואז יש להוריד קבוצת צריחים מינימלית).

1. נניח ש-M זיווג בגודל k. נוכיח ש-k הצריחים שמיוצגים על ידי קשתות הזיווג לא מאיימים אחד על השני. בכל שורה, המיוצגת על ידי x_i, יוצאת בזיווג לכל היותר קשת אחת, ולכן אין שני צריחים באותה שורה. באותו אופן, אין שני צריחים שנמצאים באותה עמודה. לפיכך k הצריחים שנשארו לא מאיימים אחד על השני.

2. נניח שיש בלוח k צריחים שלא מאיימים אחד על השני, ונוכיח שיש זיווג בגודל k. נזווג את המשבצות לפני המיקומים של הצריחים. מכיוון שאין שני צריחים באותה שורה, מכל צומת x_i יוצאת לכל היותר קשת אחת. מכיוון שאין שני צריחים באותה עמודה, לכל צומת y_j נכנסת לכל היותר קשת אחת. לפיכך קיבלנו זיווג של קשתות G שבו k קשתות.

אם כך, זיווג מקסימלי ב-M שגודלו k, נותן קבוצת צריחים בגודל k. קבוצה זו מקסימלית כי אחרת נוכל לבנות בעזרת קבוצה גודלה יותר, זיווג גדול יותר. באופן דומה, אם יש קבוצת צריחים מקסימלית בגודל k אז גם הזיווג הוא בגודל k.

לפיכך האלגוריתם משאיר קבוצה מקסימלית של צריחים שלא מאיימים אחד על השני. לכן קבוצת הצריחים שצריך להוציא מינימלית.

<u>ניתוח סיבוכיות</u>

אנו בונים גרף בעל $2m$ צמתים ולכל היותר m^2 קשתות.

בניית הגרף החדש מתבצעת ב-$O\left(m^2\right)$.

חישוב הזיווג המינימלי לוקח $O\left(m\cdot m^2\right)$.

בסך הכל הסיבוכיות היא $O\left(m^3\right)$.