שא' 1

א) $2n^3-100n = O(n^2)$

נמצא (בסתירה) $c, n_0>0$ כך שלכל $n>n_0$ מתקיים:

$$0 \le 2n^3-100n \le c\cdot n^2 \quad /:n^2$$

$$0 \le \frac{2n^3}{n^2} - \frac{100n}{n^2} \le c$$

$$0 \le 2n - \cancel{\frac{100}{n}} \le c$$

$\infty \leftarrow$ שואף לאינסוף

אבל בכל מקרה לא נמצא קבוע שקטן מ-∞, ומכיוון שאין שם קבוע שלא תלות
לכן הפונק' לא חסומה ע"י n^2. מ.ש.ל.

ב) $7n\lg^2 n = O(n^2)$

נמצא קבועים חיוביים c, n_0 כך שלכל $n>n_0$ יתקיים:

$$0 \le 7n\lg^2 n \le c\cdot n^2 \quad /:n^2$$

$$0 \le \frac{7n\lg^2 n}{n^2} \le c$$

$$\Downarrow$$

$$0 \le \underbrace{\frac{7\lg^2 n}{n}}_{0} \le c$$

כל הביטוי שואף לאפס מכיוון ש המונה
גדל לאט יותר מהמכנה.

בנוסף גם לפי טענה 3.2 כל חזקה של פול' גדלה ($\lg^2 n = O(n^2)$)
בצורה אסימפטוטית מכל חזקה של n.

למשל ולכן עבור כל C ו-$n_0=1$ $\Leftarrow$ $n>1$ הפונק' תהיה חסומה מלמעלה
את $7n\lg^2 n$.

ו. $$n^{\lg\lg n} = \Omega((\lg n)!)$$

נחפש קבועים $c,n_0>0$ כך שלכל $n>n_0$ יתקיים:

$$0 \le c\cdot(\lg n)! \le n^{\lg\lg n}$$

נפתח עצרת
כאשר $\lg n$ מספר שלם

ע"פ נוסחה
2.9 מא'בג

$$\cancel{n^{\lg\lg n} = \lg n^{\lg n}} = \lg n\cdot\lg n$$

$$c\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots\cancel{\lg n}) \le \lg n\cdot\lg n \quad /:\lg n$$

$$0\le c\cdot1\cdot2\cdot3\cdots\lg n-1 \le \lg n \quad /:c \,,$$

$$0 \le \underbrace{\frac{1\cdot2\cdot3\cdots\lg(n-1)}{\lg n}} \le c$$

כל הביטוי ישאף ל-∞ מכיוון
שהמונה גדל מהר יותר מן המכנה

ולכן לא נמצא c קבוע, המקיים את התנאי

מש"ל ולא ניתן להוכיח כי $n^{\lg\lg n}$ חסומה מלמטה ע"י $(\lg n)!$

$$2^n = O(3^n)$$ ③

צריך למצוא הקבועים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים:

$$0 \le 2^n \le c \cdot 3^n \quad / : 3^n$$

$$0 \le \frac{2^n}{3^n} \le c$$

$$0 \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \le c$$

שואף לאפס, כי שבר בחזקה תמיד יקטן
ככל שהחזקה גבוהה יותר

לכן· כי התנאי יתקיים תמיד, לכן עבור כל c ולכל n_0
2^n חסום מלמעלה ע"י 3^n

נבחר $c=1$ $n_0=10$ $\xleftarrow{\text{זה מתקיים}}$ לכל $n>0$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \le 1$

מ.ש.ל

① נתון $f(n) \ne O(g(n))$ לפי הגדרת החסם העליון:

לא קיימים קבועים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים
$$f(n) \le c\,g(n)$$
1) כלומר קיים n עבורו $f(n) \ge c \cdot g(n)$,

2) לפי הגדרת החסם התחתון, אם קיים n_0 כך שלכל $c>0$ עבורו מתקיים לכל n! $f(n) \ge c \cdot g(n)$
הפונק' $g(n)$ נחסמת ע"י $f(n)$

מ-① ! ② ומהגדרת חסם עליון מתקיים $g(n) = O(f(n))$

<u>שא' 2</u>

א.

$$\begin{cases} T(n) = 2T(n/2)+1 \\ T(1)=1 \end{cases}$$

$(i=1)$ $\quad T(n) = 2T(\frac{n}{2})+1 =$

$(i=2)$ $\quad 2(2T(\frac{n}{2^2})+1)+1 =$

$(i=3)$ $\quad 2(2(2T(\frac{n}{2^3})+1)+1)+1$

$\vdots$

$(i=k)$ $\quad 2^k T(\frac{n}{2^k}) + k$

$\vdots$

תנאי עצירה:

$T(1)=1$

$\Downarrow$

$\frac{n}{2^k}=1$

$n=2^k \quad / \log$

$k=\log n$

<u>אין רקורסיה זמרונה:</u>

$$\underbrace{2^{\log_2 n}}_{n} T(1)+\log n = n+\log n = O(n)$$

לפי
משפט א' 32
n מסדר גודל
גדול מ $\log n$

ב)

$$\begin{cases} T(n) = 3T(n-1) - 15 \\ T(1) = 8 \end{cases}$$

$(i=1)$ $T(n) = 3T(n-1) - 15 =$

$(i=2)$ $3(3T(n-2) - 15) - 15 =$

$(i=3)$ $3(3(3T(n-3) - 15) - 15) - 15) =$

$\vdots$

$(i=k)$ $3^k T(n-k) \quad - \underbrace{(3^{k-1} + 3^{k-2} + \dots 3^0)}_{8}\, 15$

<u>סדרה הנדסית:</u>

סכום הסדרה:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = -15 \cdot \underset{3^0}{1} \cdot \frac{3^k - 1}{3 - 1}$$

$$= -15 \cdot \frac{3^k - 1}{2}$$

*תנאי העצירה שלנו:

$$T(1) = 8$$

$$n - k = 8$$

$$\boxed{n - 8 = k}$$

*איטרציה אחרונה שווה:

$$3^{n-8} T(n-n+8) - 15 \cdot \frac{3^{n-8} - 1}{2} = 8 \cdot 3^{n-8} - 15 \frac{3^{n-8} - 1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{3^{n-8}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 8 \cdot \frac{3^n}{3^8} - 15\left(\frac{2 \cdot 3^n}{3^8} - \frac{1}{2}\right) \; / \cdot 3^8$$

$$= 8 \cdot 3^n - 30 \cdot 3^n \underbrace{+ 7.5 \cdot 3^8}_{\text{מספר קבוע}}$$

פונק' אקספוננציאלית מספר, כזה.

$$= O(3^n)$$

ג)

$$\begin{cases} T(n) = 6T(n/6) + 2n + 3 \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

נשתמש בשיטת האב, מקרה 2:

נבדוק את f(n):

$$n^{\log_b a} = n^{\log_6 6} = n = \Theta(n)$$

$$f(n) = 2n+3 = \Theta(n) = n^{\log_6 6} = n$$

$\Downarrow$ f(n) ו n באותו סדר גודל.

מ.ש.ל $T(n) = \Theta(n \log n)$

שאל' 3

```
i ← 1
while i ≤ n
   do for j ← 1 to i
        do ---
   i ← i*2
```

* בהתייחס רק ללולאת ה while , ה n יתקדם בקפיצות פי שתיים ⇐

איטרציות:

n	I
1	0
2	1
4	1
	2
8	1
	2
	3

ניתן לראות כי במקרה i ירוץ logn פעמים (כל פעם בקפיצות של פי 2 מהערך הנוכחי בעצם)

* לגבי לולאת ה for הפנימית:
j ירוץ בהתאם לערכי של i כלומר מהאיטרציה האחרונה - בגלל שתנאי העצירה הוא עבור $n \leq i$ (כשוויון) ובעצם יקרה שבלולאה הפנימית תרוץ n פעמים סה"כ.

n	I	J
1	0	0
2	1	1
4	1	1
	2	1
		2
	4	
8	1	1
	2	1
		2
	4	1
		2
		3
	8	4

$\Theta(n) = n\log n$

שאלה 4

א. 13, 19, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 11, 2, 6, 21 התמלא

1) Partition:

x = 13 · נקודת

1) 13 ≥ 6 ⇒ j = 10

2) 19 ≥ 13 ⇒ i = 1

6, 19, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 11, 2, 13, 21

6, 2, 9, 5, ~~12~~8, 7, 4, 11, 19, 13, 21

[3] Partition גמרנו, סה"כ החלפה ואת ההפעלת סדרת החלוקה

נחזור 9=9.

B ה partitions ממוספרים לפי היררכיה:

2.1) Partition:

start: 6, 2, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 11

End: 4, 2, 5, 9, 12, 8, 7, 6, 11

2.2) End: 13, 19, 21

2.1.1) start: 4, 2, 5 ⇒ 2.1.1.1) End: 2

(*) End: 2, 4, 5 — 2.1.1.2) End: 4, 5

2.1.2) start: 9, 12, 8, 7, 6, 11 ⇒ 2.1.2.1) End: 6, 7, 8

End: 6, 7, 8, 12, 9, 11 — 2.1.2.2) S: 12, 9, 11

E: 11, 9, 12

2.1.2.2.1) 9, 11

2.1.2.2.2) 12

2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12,

13, 19, 21

End 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 19, 21

J = K
i = 1

ב) הקלט הגרוע ביותר: הוא כזה שהחלוקה תתבצע
כל פעם לאיבר אחד ו-$n-1$ איברים,

לדוגמא כאשר המערך ממוין. במקרה זה נקבל
עץ בלתי מאוזן ← $T(n)=T(n-1)+\Theta(n)=\Theta(n^2)$

הקלט הטוב ביותר: הקלט הזה הוא כאשר יתרת
החלוקה תחלק כל פעם לשני חלקים שווים - $n/2$ ו-$n/2$
כך נקבל עץ מאוזן: $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$

$$\Downarrow$$

$$\Theta(n\lg n)$$

התשובה לא תשתנה כאשר איבר הציר יהיה האיבר האמצעי
וזאת מכיון שהנתונים במערך בכל מקרה מספקים
חלוקה קרובה לשוויונית.
גרסאות שבהם איבר הציר אינו הראשון נועדו להימנע
ממקרים שבהם, החלוקה היא גרועה ולדוגמא תגיע $n-1$, 1.

שא' 5

א.

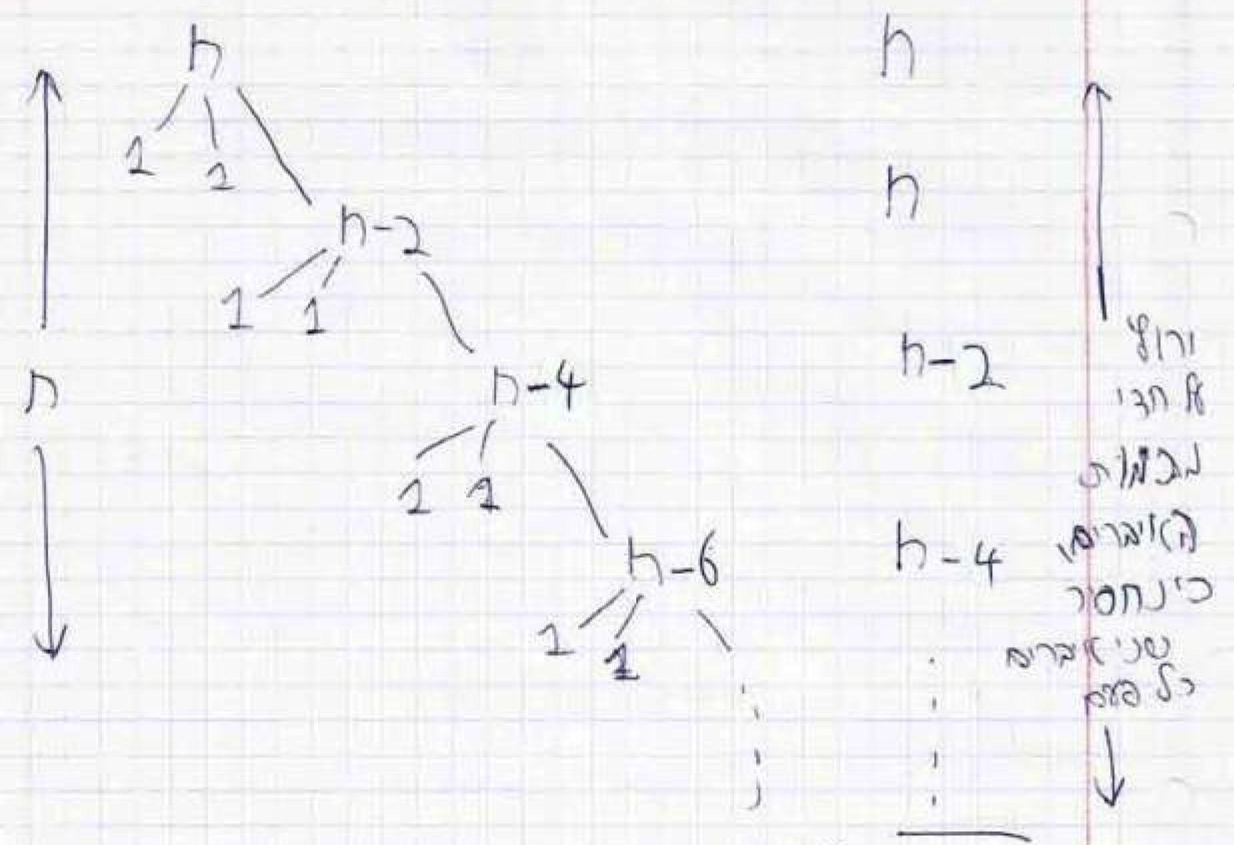
```
PART3(A, p, r)
if A[p] > A[p+1]
then
   Exchange A[p] <-> A[p+1]
   q1 <- PARTITION(A, p+1, r)
   ;                 כל מה שבין q1 ל-p+1 קטן מאיבר y,
   ;                 ומה שבין q1+1 ל-r גדול שווה לy.
   ;
   q2 <- PARTITION(A, p, q1)
   ;                 כל מה שבין p ל-q2 קטן מx
   ;                 " " q2+1 ל-q1 גדול מx וקטן שווה לy
   ;
   return(q1, q2)

QUICKPART3(A, p, r)
 if p < r
   q1, q2 <- PART3(A, p, r)
   QUICKPART3(A, p, q2)         ; Low
   QUICKPART3(A, q2+1, q1)      ; medium
   QUICKPART3(A, q1+1, r)       ; High
```

(הערה)

(הערה)

ב. החלוקה הגרועה

החלוקה הגרועה כאשר המערך יחולק כל פעם לאיבר הגדול ב-n איברים ולשני איברים הגדולים ממנו כל אחד. החלוקה כך נקבל עץ בלתי מאוזן בדומה למקרה הגרוע הרגיל ב Quicksort;



$$\Theta\left(n \cdot \tfrac{1}{2}n\right) = n^2$$

לגבי המקרה הטוב- בו כל פעם החלוקה תהיה לשלושה חלקים שווים בגודלם ←

זמן הריצה יהיה בדומה ל Quicksort הרגיל: $\Theta(n \log n)$

מכיוון שעומק העץ יהיה $\log_3 n$ ובסיס הלוג הוא קבוע שניתן להמרה בקבוע (לפי הספר)

הגדרה המוצעת היא כרגע ההגדרה הטובה, כי
אם זאת תהיה התוצאה לא שונה של ח כל פעם,
עדין נשאר לעומק של הכל כלשהו.