

תשובה 1

כל קטע בדיאגרמת הסה של קבוצה סדורה-חלקית מייצג זוג איברים, שאחד מהם מכסה את השני. מהגדרת המושג "מכסה", קבוצה $B \in P(A)$ מכסה קבוצה $C \in P(A)$ לגבי יחס ההכלה אם ורק אם מתקיים:

$C \subset B$ ואין אף קבוצה $D \in P(A)$ המקיימת $C \subset D \subset B$ (הכלות-ממש).

עבור B, C סופיות, קל לראות שתנאי זה מתקיים אם ורק אם קיים:

$C \subset B$ ומספר אברי C קטן ב-1 ממספר אברי B .

יהי k מספר טבעי בתחום $0 \leq k \leq n$.

לקבוצה הנתונה A שהיא בת n איברים יש $\binom{n}{k}$ תת-קבוצות בנות k איברים,

כלומר ב- $P(A)$ יש $\binom{n}{k}$ איברים שעוצמתם k .

אם B בת k איברים, יש לה k תת-קבוצות בנות $k-1$ איברים (ע"י השמטת איבר אחד של B בכל פעם). נשים לב שזה נכון גם אם B ריקה. כלומר כל קבוצה בגודל k מכסה בדיוק k קבוצות אחרות.

לכן מספר הקטעים בדיאגרמת הסה של רלצית ההכלה מעל $P(A)$ הוא $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

לפי שאלה 3.9 בעמ' 71 בספר הלימוד, סכום זה שווה $2^{n-1} \cdot n$.

תשובה 2

א. הגורמים הראשוניים של 360 הם 2, 3, 5. חישוב לפי הנוסחה נותן 96.

ב. ראו הדוגמא עבור 120 שנעשית בספר, מסתיימת בראש עמוד 93. החישוב מקביל לגמרי.

תשובה 3

הנה שוב חישוב מספר הפונקציות של קבוצה סופית A על קבוצה סופית B . חישוב זה מופיע גם באתר הקורס. מקרה פרטי של שאלה זו מופיע בשאלה 4.14 בעמ' 89 בספר הלימוד.

מספר כל הפונקציות של A ל- B הוא k^n (שאלה 1.32 עמ' 17 בספר הלימוד).

ב.ה.כ. נניח כי $B = \{1, 2, \dots, k\}$. עבור $i = 1, \dots, k$ תהי F_i קבוצת כל הפונקציות של A ל- B אשר המספר i אינו נמצא בתמונתן.

לכל i , לפי אותה נוסחה (מספר כל הפונקציות של קבוצה נתונה לאחרת), $|F_i| = (k-1)^n$. יש k קבוצות F_i .

בדומה, עבור $i \neq j$, $|F_i \cap F_j| = (k-2)^n$. יש $\binom{k}{2}$ דרכים לבחור את זוג הקבוצות.

כללית, עלינו להתבונן בחיתוכים של j קבוצות F_i שונות. חיתוך כל j קבוצות שונות כאלו

מכיל $(k-j)^n$ פונקציות. יש $\binom{k}{j}$ דרכים לבחור j קבוצות F_i שונות.

מכאן, לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מספר כל הפונקציות של A על B הוא

$$k^n - k(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \binom{k}{3}(k-3)^n + \dots = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

מכאן לשאלה שלנו.

א. לפי התוצאה הנ"ל, אגף שמאל בסעיף א' בשאלה הוא מספר הפונקציות של קבוצה נתונה בת 2 איברים על קבוצה נתונה בת 5 איברים. מובן כי אין פונקציות כאלו, לכן הביטוי שווה 0.

ב. בדומה, כללית, אם $n < k$ אז $\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n = 0$.

תשובה 4

א. תהי B חלקית ל- A . אם $B \neq \emptyset$, הרי הסכום הקטן ביותר האפשרי של איבריה הוא 4, המתקבל עבור $B = \{4\}$. הסכום הגדול ביותר האפשרי מתקבל עבור $B = \{53, 54, \dots, 61\}$ ושווה 513. מספר הסכומים האפשריים לתת-קבוצות לא-ריקות של A הוא אפוא לכל היותר $510 = 513 - 4 + 1$. בצירוף הקבוצה הריקה: 511.

מצד שני, מספר הקבוצות החלקיות של A הוא $2^9 = 512$. מכיוון שיש יותר קבוצות מסכומים אפשריים, הרי לפי עקרון שובך היונים, יש לפחות שתי קבוצות בעלות אותו סכום.

ב. בסעיף א קיבלנו שבהינתן A כמתואר, קיימות $B, C \subseteq A$, $B \neq C$, בעלות אותו סכום. נזרוק מ- B ומ- C את כל האיברים השייכים לחיתוך שלהן, ונקבל שתי קבוצות שונות וזרות בעלות אותו סכום.

איתי הראבן