

מטלת מנחה (ממ"ן) 18

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית חומר הלימוד למטלה: לוגיקה פרקים 1-2

מספר השאלות: 4 משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2008 מועד אחרון להגשה: יום ו' 6.6.08

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (24 נקודות)

יהי $f[\alpha]$ מספר ההופעות של פסוקים יסודיים בפסוק α (אם פסוק יסודי מופיע מספר פעמים ב- α , הוא נספר כמספר ההופעות שלו).

א. תן הגדרה רקורסיבית של f :

(i) עבור פסוק יסודי P , $f[P] = \dots$ (ii) לכל פסוק α , $f[\sim(\alpha)] = \dots$

(iii) לכל שני פסוקים α, β , $f[(\alpha) \rightarrow (\beta)] = \dots$

ב. חשב את $f[\varphi]$ כאשר φ הוא הפסוק המתואר בעץ שבראש עמוד 45 בספר הלימוד.

הראה את החישוב הן ע"י ספירת הפסוקים היסודיים, והן ע"י התהליך הרקורסיבי.

ג. איזה גודל המתייחס לעץ הבנייה של α מביעה הפונקציה $f[\alpha]$? במלים אחרות, תאר איך

לקבוע את $f[\alpha]$ מתוך השלד של עץ הבנייה של α , אם נתון לנו רק השלד, ללא מידע על

הפסוקים שבצמתים. נמק.

שאלה 2 (26 נקודות)

הפסוק φ הוא (בכתיב מקוצר): $P_0 \rightarrow (P_1 \rightarrow P_2)$.

השאלה עוסקת בצורות נורמליות של פסוק - ראו עמ' 62 בספר.

א. רשום פסוק בצורה דיסיונקטיבית נורמלית השקול ל- φ .

ב. רשום פסוק בצורה קוניונקטיבית נורמלית השקול ל- φ .

שאלה 3 (30 נקודות)

שאלה זו עוסקת בתחשיב הפסוקים, בשפה שבה נמצאים הקשרים הלוגיים $\sim, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$.

נניח כי בשפה יש רק 3 פסוקים יסודיים: A_1, A_2, A_3 . כתיב מקוצר - מותר.

הכנה לסעיף א: מהגדרה 2.25, פסוקים β, α נקראים שקולים טאוטולוגית אם הם

מקבלים אותו ערך אמת בכל אינטרפרטציה המספיקה לשניהם. במקום להסתכל על

האינטרפרטציות המספיקות, אפשר להסתכל על האינטרפרטציות המלאות, כלומר אינטרפרטציות שונות ערכי אמת לכל הפסוקים היסודיים בשפה. מובן שבחירת ערכי אמת לפסוקים יסודיים שאינם מופיעים ב- α, β אינה משפיעה על ערכי האמת שמקבלים α, β . לכן אפשר לומר ש- α, β שקולים טאוטולוגית אם הם מקבלים אותו ערך אמת בכל אינטרפרטציה מלאה. אפשר לחשוב על כך גם בצורה זו: גם לפסוק שמופיעים בו רק חלק מהפסוקים היסודיים, אפשר לרשום לוח אמת שמתייחס לכל הפסוקים היסודיים.

(12 נק') א. מהו הגודל המקסימלי האפשרי עבור קבוצת פסוקים $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ בשפה זו, כך שאין ב- S שני פסוקים השקולים טאוטולוגית זה לזה? הסבר.

הכנה לסעיף ב: לכל פסוק α , תהי M_α קבוצת האינטרפרטציות שבהן α אמיתי. קבוצה זו נקראת **קבוצת המודלים** של α . כהכנה לפתרון, כדאי לנסח מחדש את האמירה "הפסוק α גורר טאוטולוגית את הפסוק β " כתנאי על קבוצות המודלים שלהם. אחרי כן נסה לנסח את הדרישות (i), (ii), (iii) כדרישות על קבוצות המודלים של הפסוקים. דרך פתרון זו אינה חובה - אם נוח לך לפתור אחרת, אפשר.

(18 נק') ב. יהי φ הפסוק: $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge (\sim A_2) \wedge A_3) \vee ((\sim A_1) \wedge A_2 \wedge (\sim A_3))$.

רשום פסוק ψ שמקיים את 3 התנאים הבאים:

$$\psi \models \varphi \quad (i)$$

$$\varphi \text{ אינו שקול טאוטולוגית ל-} \psi \quad (ii)$$

$$(iii) \text{ לכל פסוק } \theta, \text{ אם } \psi \models \theta \text{ ו- } \theta \models \varphi$$

אז או ש- θ שקול טאוטולוגית ל- φ או ש- θ שקול טאוטולוגית ל- ψ .

הסבר בקצרה את תשובתך.

יש פסוקים שונים המקיימים את הנדרש מ- ψ , כל תשובה נכונה תתקבל.

שאלה 4 (20 נקודות)

השאלה עוסקת בתחשיב הפסוקים. הפסוקים היסודיים הם הסימנים P_i , לכל $i \in \mathbb{N}$. בכל הסעיפים, α, β, γ הם פסוקים, לא בהכרח שונים זה מזה, ולא בהכרח פסוקים יסודיים. אין קשר בין הסעיפים - α, β, γ יכולים להיות שונים מסעיף לסעיף. כתיב מקוצר - מותר.

$$א. \text{ הוכח או הפרך: אם } \alpha \vee \beta \models \gamma, \text{ אז } \alpha \models \gamma \text{ וגם } \beta \models \gamma.$$

ב. הוכח או הפרך בלי לרשום לוח אמת בעל 8 שורות:

אם α, β, γ פסוקים כלשהם, אז הפסוק $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\gamma \rightarrow \alpha))$ הוא טאוטולוגיה.