



ב' בכסלו תשע"ה

מס' שאלון - 496  
24  
בנובמבר 2014

מס' מועד 92

סמסטר 2014ג

20476 / 4

שאלון בחינת גמר  
20476 - מתמטיקה בדידה

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה 4 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים:

חלק א: שאלת חובה. יש לענות במחברת.

חלק ב: עליכם לענות על שלוש מתוך ארבע השאלות.  
אם תענו על יותר מ-3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.  
שימו לב:

- \* בחלק ב יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
- \* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד, וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
- \* אם ברצונכם להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליכם לחזור ולהוכיחן.
- \* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרתם אותם.

חומר עזר:

כל חומר עזר מותר בשימוש. אפשר להשתמש במחשבון מדעי.  
השימוש במחשב נישא או במכשיר כלשהו שבאמצעותו אפשר להתחבר לאינטרנט אסור.

בהצלחה !!!

אינכם חייבים

להחזיר את השאלון לאוניברסיטה הפתוחה



## חלק א': שאלת חובה (22 נקודות)

### שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(7 נק') א.  $N$  היא קבוצת המספרים הטבעיים. תהינה  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$ .

קבוצה  $X$  מוגדרת כך:  $X = \{x \in N \mid x \in A \leftrightarrow x \notin B\}$ .

הסימן  $\leftrightarrow$  שבתוך הנוסחה הוא הקשר הלוגי "אם ורק אם", שהוגדר בסעיף 5 בחוברת "מבוא מהיר ללוגיקה".

$X = \{1, 4\}$  [3]  $X = \{1\}$  [2]  $X = \emptyset$  [1]

$X = N - \{2, 3, 4\}$  [5]  $X = N - \{2, 3\}$  [4]

(8 נק') ב.  $N$  היא קבוצת המספרים הטבעיים.

תהי  $A$  קבוצת כל הקבוצות החלקיות ל-  $P(N)$  (שימו לב, זו אינה טעות).

למשל הקבוצה  $\{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{2, 4\}, N - \{1, 2, 3\}, N\}$  היא איבר של  $A$ .

עוצמת  $A$  היא:

$\aleph_0$  [1] עוצמה שנמצאת בין  $\aleph_0$  לבין  $C$  [2]

$2^C$  [4]  $C$  [3] 5.25

[5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

(7 נק') ג.  $G$  הוא גרף פשוט וקשיר.

הוסיפו ל-  $G$  כמה קשתות (לא הוסיפו צמתים) והתקבל גרף  $H$ , גם הוא פשוט.

להלן שלוש טענות (תזכורת: גרף המילטוני הוא גרף שיש בו מעגל המילטון):

a. אם  $G$  המילטוני אז  $H$  המילטוני. b. אם  $H$  המילטוני אז  $G$  המילטוני.

c. אם אחד משני הגרפים  $G, H$  המילטוני אז השני אינו המילטוני.

מתוך הטענות הנכונות הן בדיוק אלה:  $a, b, c$

$a$  [1]  $b$  [2]  $a, b$  [3]  $c$  [4]

[5] אף אחת מהטענות  $a, b, c$  אינה נכונה.

**חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות**  
משקל כל שאלה 26 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 78 נקודות

## שאלה 2

תהי  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  ותהי  $K$  קבוצת כל היחסים הטרנזיטיביים מעל  $A$  פרט ליחס הריק, שאינו איבר של  $K$ . בכרך "תורת הקבוצות" בעמ' 94, שאלה 3.25, מוכח שיחס ההכלה  $\subseteq$  הוא סדר-חלקי מעל כל קבוצה של קבוצות. מכיון שיחס הוא סוג מסוים של קבוצה (קבוצה של זוגות סדורים), מתקבל מהאמור שיחס ההכלה  $\subseteq$  הוא סדר-חלקי מעל  $K$ . השאלה מתייחסת לסדר-חלקי זה.

9 נק' א. הראו שיש ב-  $K$  אבר גדול ביותר - מיהו? הוכיחו שהוא הגדול ביותר.

9 נק' ב. מצאו אבר מינימלי ב-  $K$ . הוכיחו שהוא מינימלי.

8 נק' ג. הוכיחו שאין ב-  $K$  אבר קטן ביותר.

## שאלה 3

תהי  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . מיצאו כמה **תמורות** של  $A$  (פונקציות חד-חד-ערכיות של  $A$  על  $A$ ) מקיימות את התנאי: לכל  $1 \leq i \leq 5$ ,  $f(i) \neq i$ . דוגמאות:

(i) הפונקציה השולחת את כל אברי  $A$  ל-1 אינה עומדת בדרישות, כי היא אינה תמורה.

(ii) פונקציית הזהות היא תמורה, אבל היא אינה מקיימת את התנאי.

(iii) התמורה  $f$  המוגדרת כך:

$$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 5, f(5) = 6, f(6) = 1, f(7) = 7$$

מקיימת את התנאי.

אין הכרח להגיע לתשובה מספרית.

$$7! - 6! \cdot 5 + \binom{5}{2} 5! - \binom{5}{3} 4! + 3! \cdot 5 - 9$$

#### שאלה 4

תהי  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ . נתון:  $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = -2, a_3 = -10$ .

שאר המקדמים אינם ידועים.

תהי  $g$  פונקציה המקיימת:  $f(x) \cdot g(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2 + \dots$  (כל הנתונים הללו חלים על שני סעיפי השאלה).

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= -3 \\ b_2 &= 9 \\ b_3 &= -29 \end{aligned}$$

(20 נק') א. נסמן  $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ . חשבו את  $b_0, b_1, b_2, b_3$ .

הדרכה: התקדמו בהדרגה, בחישוב כל מקדם היעזרו במקדמים שמצאתם עד כה.

(6 נק') ב. נסמן  $4f(x) \cdot f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ . מצאו את  $c_3$ .

$$-40$$

#### שאלה 5

(13 נק') א. שמעון טוען שכל גרף אוילרי הוא מישורי. הוכיחו ששמעון טועה.

$$5.5 \quad 3.1$$

(13 נק') ב. יהי  $G$  גרף פשוט על  $n$  צמתים ( $n \geq 3$ ). נסמן ב- $k$  את מספר הקשתות של  $G$ .

מסקנה 5.4 בפרק 5 בחוברת "תורת הגרפים" אומרת שבהנחות אלה,

אם  $G$  הוא מישורי אז  $k \leq 3n - 6$ .

דינה טוענת שגם הכיוון ההפוך נכון, כלומר דינה אומרת שתחת אותן הנחות (השורה

הראשונה של סעיף ב), אם  $k \leq 3n - 6$  אז  $G$  מישורי.

הוכיחו שדינה טועה.

בשני הסעיפים, אם מציגים דוגמא נגדית יש להראות בפירוט שהיא אכן דוגמא נגדית.

בהצלחה!



5.7