אלגוריתמים 1 (234247) – סמסטר אביב 2005

פתרון בחינת סוף סמסטר – מועד ב' 18/9/2005

שאלה 1

אלגוריתם:

1. נבנה את גרף הרכיבים הקשירים היטב $\widetilde{G}=(\widetilde{V},\widetilde{E})$ (כזכור, $\widetilde{G}$ הינו DAG).
2. לכל צומת $c\in\widetilde{V}$ נקבע משקל כמספר הצמתים ברכיב הקשיר היטב c.
3. נחשב מסלול כבד ביותר (משקל מסלול הוא סכום משקלי הצמתים עליו) ב- $\widetilde{G}$ הממושקל.
4. נחזיר את קבוצת הצמתים המוכלים ברכיבים הקשירים היטב שמרכיבים את המסלול שנמצא.

חישוב מסלול כבד ביותר בגרף מכוון חסר מעגלים $G=(V,E)$ עם משקלים על הצמתים $w:V\rightarrow\mathbb{R}$:

נסמן ב- $d(v)$ את משקל המסלול הכבד ביותר המתחיל בצומת v.

1. לכל צומת $v\in V$ אתחל $d(v)\leftarrow w(v)$, $p(v)\leftarrow null$.
2. בצע מיון טופולוגי של צמתי G.
3. עבור על הצמתים בסדר הפוך ל סדר המיון (מהבורות למקורות) ולכל צומת u בצע:
4. לכל קשת $(v,u)\in E$:
5. אם $d(u)<d(v)+w(u)$ אז $d(u)\leftarrow d(v)+w(u)$ ו- $p(u)\leftarrow v$.
6. בסיום, עבור על כל הבורות ובחר את זה עם ה- d המקסימלי. את המסלול משחזרים לפי ערכי ה- p.

סיבוכיות:

בניית גרף העל: $O(V+E)$

חישוב מסלול כבד ביותר בגרף העל: $O(\widetilde{V}+\widetilde{E})=O(V+E)$

החזרת המסלול: $O(V)$

לכן סה"כ הסיבוכיות היא $O(V+E)$.

נכונות:

נוכיח תחילה את נכונות האלגוריתם למציאת מסלול כבד ביותר:

יהא $\delta(v)$ משקל המסלול הכבד ביותר המתחיל בצומת v. נסמן את צמתי הגרף בסדר הפוך לסדר המיון הטופולוגי: $v_1,v_2,\ldots,v_n$ (כלומר בסדר שבו יסרקו בשלב 3 באלגוריתם).

נוכיח באינדוקציה על i כי לאחר סריקת כל הקשתות הנכנסות לצומת ה- i $d(v_i)=\delta(v_i)$.

<u>בסיס</u>: $i=1$. v_1 הינו בור ולכן המסלול הכבד ביותר המתחיל בו מכיל רק אותו ואכן $d(v_1)=\delta(v_1)$.

<u>צעד</u>: נניח נכונות הטענה עד $i \geq 1$ כלשהו ונוכיח עבור $i+1$. יהא u הצומת ה- $i+1$ בסדר. מאחר ו- G חסר מעגלים קיים מסלול כבד ביותר המתחיל ב- u ומשקלו $\delta(u) = \max\left\{w(u), w(u) + \max_{(u,v)\in E}\{\delta(v)\}\right\}$. עפ״י הנחת האינדוקציה לכל צומת v כך ש: $(u,v) \in E$ מתקיים $d(v) = \delta(v)$ בזמן סריקת הקשתות היוצאות מ- u. ולכן לאחר ביצוע שורות 4-5 באלגוריתם $d(u) = \delta(u)$.

נמשיך בהוכחת הנכונות ע״י הוכחות שתי הטענות הבאות:

<u>טענה 1</u>: אם קיים מסלול במשקל W ב- $\widetilde{G}$ אז קיים מסלול דרך W צמתים ב- G.

<u>הוכחה</u>: יהא $p = c_1 \to c_2 \to \ldots \to c_k$ מסלול ב- $\widetilde{G}$ שמשקלו W, כלומר $|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_k| = W$. מהגדרת גרף העל נובע כי לכל $i = 1,\ldots,k-1$ קיימת קשת $(u_i, v_i) \in E$ כך ש- $u_i \in c_i$ ו- $v_i \in c_{i+1}$. בין כל זוג צמתים ברכיב קשיר היטב קיים מסלול, לכן בין כל זוג צמתים ברכיב קשיר היטב קיים מסלול המכיל את כל שאר הצמתים באותו רכיב קשיר היטב. לכן ניתן לבנות מסלול ב- G דרך כל הצמתים ברכיבים הקשירים היטב $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

<u>טענה 2</u>: תהא U קבוצה של צמתים ב- G דרכה קיים מסלול. אזי קיים ב- $\widetilde{G}$ מסלול שמשקלו לפחות $|U|$.

<u>הוכחה</u>: יהא p מסלול ב- G העובר דרך כל צמתי U. נסמן ב- k את מספר הרכיבים הקשירים היטב המכילים צמתים מ- U. אזי ניתן לחלק את p ל- k מקטעים כך שכל הצמתים באותו מקטע שייכים לאותו רכיב קשיר היטב (שימו לב כי צמתים השייכים לאותו רכיב קשיר היטב חייבים להופיע ברצף ב- p, אחרת מעיד הדבר על קיום מעגל בגרף העל). כלומר, כל מקטע מתאים לצומת בגרף העל שמשקלו גדול או שווה למספר הצמתים במקטע, ולכל קשת בין צמתים במקטעים שונים מתאימה קשת בין הצמתים המתאימים בגרף העל. לכן קיים בגרף העל מסלול שמשקלו לפחות $|U|$.

<u>שאלה 2</u>

שאלה זו דומה לבעיית ה-Arbitrage שנדונה באחד התרגולים.

מציאת המסלול הבטוח ביותר בין שני מחשבים נתונים ברשת נתונה ניתנת לחישוב ע״י הרצת אלגוריתם Dijkstra בין שני הצמתים בגרף (הממושקל) המתאים. מציאת המסלול הבטוח בין שני צמתים נתונים שקולה למציאת מסלול בין שני הצמתים שעבורו ההסתברות $\prod_i (1-p_i)$ גדולה ביותר (כאן p_i היא ההסתברות לקריסת קשת e_i). מציאת ערך גדול ביותר לביטוי זה שקולה למציאת מינימום לביטוי $\sum_i \log \frac{1}{1-p_i}$.

לפיכך בניית הגרף המתאים שבו לכל קשת e_i משקל (חיובי) $-\log(1-p_i)$ ומציאת המסלול הקל ביותר בין שני הצמתים הנתונים תיתן את המבוקש.

שאלה 3

לכל $k \le j$ נסמן ב-$S(k,j)$ את סכום האברים במקומות k עד j במערך, כלומר $S(k,j)=\sum_{i=k}^{j} a_i$.

יהי $M(j,p)$ מחיר p–חלוקה אופטימלית של $a_1,...,a_j$, אזי $M(n,d)$ הוא הערך המבוקש.

נחשב את $M(j,p)$ באופן רקורסיבי על-ידי הנוסחה הבאה:

$$M(j,p)=\min_{k=1,...,j-1}\left\{\max\left\{M(k,p-1),S(k+1,j)\right\}\right\}$$

אתחול: $M(1,j)=S(1,j)=\sum_{i=1}^{j} a_i$

האלגוריתם יחשב d-חלוקה אופטימלית של המערך באופן הבא.

(i) ניצור מטריצה שכניסותיה הן ערכי M(j,p) $M(j,p)$ לכל $1 \le p \le d, 1 \le j \le n$.

(ii) לצורך מציאת החלוקה האופטימלית, בעת חישוב הכניסות במטריצה נרשום עבור $M(j,p)$ את האינדקס שבו יתחיל המקטע ה-p-י בחלוקה (דהיינו, הערך שנמצא ברקורסיה).

(iii) בסיום האלגוריתם נבקר ב-d כניסות במטריצה, החל מהכניסה המכילה את $M(n,d)$, ונמצא את האינדקסים המגדירים את החלוקה.

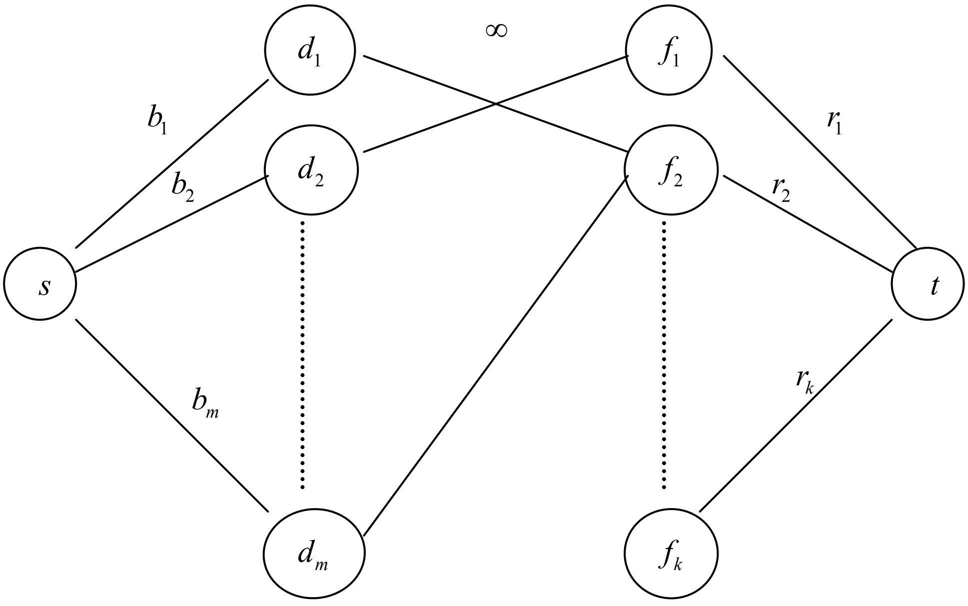
הוכחת נכונות: ניתן לראות כל חלוקה של המערך ל-p קבוצות כחלוקה ל-$(p-1)$ קבוצות שמסתיימת באינדקס k ועוד קבוצה נוספת המכילה את האיברים $a_{k+1},...,a_n$. העלות של p-חלוקה עבור כל חלוקה אפשרית היא המקסימום בין סכום האיברים בקבוצה האחרונה ובין הסכום המכסימלי באחת הקבוצות הקודמות. הנוסחה הרקורסיבית תבטיח כי נבדוק את כל החלוקות העשויות לתת מחיר מינימלי.

סיבוכיות הזמן של האלגוריתם: מאחר וגודל המטריצה הוא $O(nd)$ ועלות החישוב של כניסה בודדת היא $O(n)$, סה"כ זמן הריצה יהיה $O(n^2d)$.

שאלה 4

נפתור את הבעיה ע"י רדוקציה לבעיית מציאת זרימת מקסימום ברשת זרימה (ראו ציור).

קיים שידור חוקי אם ורק אם זרימת המקסימום שווה בערכה ל - $\sum_{i=1}^{k} r_i$. השידור עצמו ניתן ע"י ערך הזרימה בקשתות בין דיסקים לסרטים. ניתן למצוא זרימת מקסימום בעזרת האלגוריתם של דיניץ בסיבוכיות $O\left((m+k)^2 mk\right)$.



<u>שאלה 5</u>

א. האלגוריתם סורק את הצמתים לפי סדר הופעתם (מ-1 ל-n), ולכל צומת סורק את שכניו. אם צומת v_i אינו שכן של אף צומת במקטע הנוכחי הוא מצורף אליו, אחרת הוא מוגדר כצומת הראשון במקטע חדש.

ב. סיבוכיות: כל צומת נסרק פעם אחת, כל קשת נסרקת פעמיים. כל סריקה של צומת\קשת דורשת מספר קבוע של פעולות. סה"כ $O(V+E)$.

ג. נכונות: החלוקה המוחזרת היא בלתי תלויה משום שהמקטעים המוחזרים תמיד מהווים רצף של צמתים, וניתן להראות (למשל באינדוקציה על מספר הצמתים שנסרקו) ששני צמתים באותו מקטע אינם שכנים.

ד. אופטימליות: על סמך טענת האינדוקציה הבאה: עבור כל i, האלגוריתם מחזיר חלוקה בלתי תלויה אופטימלית של i הצמתים הראשונים, המקיימת את התכונה הבאה: הקטע האחרון (ימני ביותר) של החלוקה מכיל מספר מינימלי אפשרי של צמתים. (למעשה הוכחה זו מכילה גם את הוכחת הנכונות של סעיף ג'.)

הוכחה אלטרנטיבית: עפ"י האלגוריתם מכל צומת ראשון במקטע יוצאת קשת לצומת במקטע הקודם (למעט כמובן הצומת במקטע הראשון). מספר הקשתות קטן באחד ממספר המקטעים, הקטעים שהקשתות מגדירות אינם נחתכים, וכל חלוקה חוקית חייבת להפריד בין כל זוג צמתי קצה של קשתות אלה, ולכן מספר המקטעים בה גדול בלפחות אחד ממספר הקשתות.