קווים לפתרון כמה שאלות בממ"ן 14 סמסטר ב2012

שאלה 1

אי אפשר להסיק ש-NP מוכלת ב-SPACE(n).

כל שפה A ב-NP ניתנת לרדוקציה בזמן פולינומיאלי ל-SAT, אבל ייתכן שלחישוב הרדוקציה הזו **דרוש יותר ממקום ליניארי** בגודל הקלט.

לכן האלגוריתם שתחילה יחשב את הרדוקציה, ואז יבדוק האם הנוסחה הבוליאנית שנתקבלה מן הרדוקציה שייכת ל-SAT או לא, איננו בהכרח בעל סיבוכיות מקום ליניארית. חישוב הרדוקציה עשוי לדרוש יותר ממקום ליניארי.

שאלה 3

א. אפשר להציע את האלגוריתם הבא כדי להכריע האם האוטומטים הדטרמיניסטיים A ו-B מזהים אותה השפה:

בונים אוטומט מכפלה C של שני האוטומטים A ו-B.

מגדירים את המצבים המקבלים של C כך ש-C יזהה את $(L(A) - L(B)) \cup (L(B) - L(A))$.

בודקים האם השפה ש-C מזהה ריקה.

אם כן, מקבלים; אחרת, דוחים.

המקום שבו משתמש האלגוריתם הזה חסום על-ידי ריבוע גודל הקלט (מספר המצבים של אוטומט המכפלה C הוא מכפלת מספרי המצבים של A ו-B). לכן EQ_{DFA} שייכת ל- SPACE(n^2).

ב. נראה שהשפה המשלימה ל- EQ_{NFA} שייכת ל- NSPACE(n). כלומר, נראה שקיימת מכונה **לא דטרמיניסטית** שמכריעה את $\overline{EQ_{\mathrm{NFA}}}$ בסיבוכיות מקום ליניארית. לפי משפט Savitch (משפט 8.5), EQ_{NFA} שייכת ל- SPACE(n^2).

יהיו A ו-B שני האוטומטים הלא דטרמיניסטיים שהם הקלט לבעיה. נסמן על-ידי m את מספר המצבים של A ועל-ידי k את מספר המצבים של B.

יש אוטומטים דטרמיניסטיים שקולים ל-A ול-B שמספר המצבים שלהם איננו גדול מ-2^m ומ-2^k, בהתאמה.

אם נבנה את אוטומט המכפלה של שני האוטומטים הדטרמיניסטיים הללו (בדרך המוצעת בתשובה לסעיף א), נקבל אוטומט דטרמיניסטי שמספר מצביו אינו גדול מ- $2^m \cdot 2^k = 2^{m+k}$.

השפות של שני האוטומטים המקוריים שונות זו מזו אם ורק אם השפה של אוטומט המכפלה הזה איננה ריקה.

אם השפה שלו איננה ריקה, אז יש בה מילה באורך שאינו גדול מ- 2^{m+k} (מילה שמביאה מן המצב ההתחלתי למצב מקבל ללא שום לולאות בדרך).

לפי דרך הבנייה של אוטומט המכפלה הזה, מילה זו שייכת לשפה שמזהה אחד האוטומטים המקוריים, והיא איננה שייכת לשפה שמזהה האוטומט השני.

מסקנה: אם שתי השפות של האוטומטים המקוריים שונות זו מזו, אז יש מילה שאורכה אינו גדול מ- 2^{m+k} ששייכת לשפה של אחד האוטומטים ואיננה שייכת לשפה של האוטומט השני.

המכונה הלא דטרמיניסטית תנסה למצוא מילה ששייכת לשפה של אחד האוטומטים ולא שייכת לשפה של האוטומט השני.

לשם כך היא תשמור את האות הבאה במילה הזו, את המצב שבו נמצא האוטומט שמקבל את המילה ואת קבוצת המצבים שבהם יכול להיות האוטומט שלא מקבל את המילה. בנוסף היא תשמור מונה שיספור את האותיות של המילה עד עתה.

בכל שלב רושמים באופן לא דטרמיניסטי את האות הבאה של המילה (במקום האות שכתובה), מעדכנים את המצב שבו נמצאים באוטומט המקבל (זה לא דטרמיניסטי) ואת קבוצת המצבים שבהם יכולים להיות באוטומט הלא מקבל, ומגדילים את המונה ב-1.

אם בשלב כלשהו מגיעים למצב מקבל באוטומט המקבל ולקבוצת מצבים שכולם לא מקבלים באוטומט הלא מקבל, עוצרים ומקבלים.

אם המונה הגיע ל- 2^{m+k}, עוצרים ודוחים.

המכונה שתיארנו פועלת במקום ליניארי והיא מכריעה את השפה $\overline{EQ_{\mathrm{NFA}}}$.

שאלה 5

הרדוקציה:

"על קלט $<G, k>$ כאשר $G=(V, E)$ הוא גרף לא מכוון ו-k הוא מספר טבעי:

1. בנה את הקלט הבא לבעיית *HITTING-SET*:
2. הקבוצה S תהיה קבוצת הצמתים V.
3. לכל קשת $e = (u, v)$ תהיה קבוצה S_e: $S_{\mathrm{e}} = \{u, v\}$.
4. החזר את $S = V$ ואת קבוצת הקבוצות S_e לכל $e \in E$."

הרדוקציה תקפה: יש ב-G כיסוי קדקודים בגודל k, אם ורק אם יש קבוצת צמתים U $(U \subseteq V)$ כך ש- $|U| = k$, ולכל קשת $e = (u, v)$ ב-E, או ש- $u \in U$ או ש- $v \in U$ (או שניהם), אם ורק אם לכל קבוצה $S_e = \{u, v\}$, או ש- $u \in U$ או ש- $v \in U$ (או שניהם), אם ורק אם לכל קבוצה $S_e = \{u, v\}$, החיתוך של S_e עם U איננו ריק $(T = U)$.

הרדוקציה ניתנת לחישוב במקום לוגריתמי: למעשה, מעתיקים לסרט הפלט את קבוצת הצמתים V (זו הקבוצה S), ויוצרים מכל קשת (u, v) בסרט הקלט קבוצה $\{u, v\}$ בסרט הפלט.

הפעולות האלה דורשות מעבר על קבוצת הצמתים V ומעבר על קבוצת הקשתות E.

את המעברים האלה אפשר לממש בעזרת מונה בגודל קבוצת הצמתים ומונה בגודל קבוצת הקשתות. זה דורש מקום לוגריתמי בגודל הקלט.