4.12.13

## שאלה 7

לוגיקה.

לוגיקה מסדר ראשון - מנסים בדקדוק להגיע לפורמט הבאים
CNF - נניחים את הכללים פה $\wedge$ ו- (not, or)

ורוב ה- ורוב $\vee$ ורוב

כל כלל יש לפרק לגרירה בל.

האם לכל כלל (בעולם מציאותי):
אם הכלב נמצא היכן שהבעלים נמצא אז היום שבת?
כיצד הוספים משפט כזה ל- CNF?

$$\forall x, y, z \; \{[master(x,y) \wedge Loc(x,z) \rightarrow Loc(y,z)] \rightarrow Day(sat)\}$$

אדם מקום כלב

לכל x,y,z, כאשר x הוא האדון של y ואם
x נמצא ב- z אז גם y נמצא ב- z.
הכלב נמצא היכן שהבעלים נמצא
להוסיף האם: $[\; \rightarrow Day(sat)]$

יש להפוך את השלילה למשפט, אם נרצה להוסיף
אותו לפרבי הידע ולהפוך ל- CNF.

הגירה ל- CNF:
יש להרחיב את הגירה.

$a \rightarrow b$

$\neg a \vee b$

$$\neg\forall x,y,z \; \{[\neg(m(x,y) \wedge (L(x,y)) \vee L(y,z)] \rightarrow day(sat)\}$$

נבטל את הגרירה השנייה:

$$\neg\forall x,y,z \; \{\neg(\neg(m(x,y) \wedge L(x,y)) \vee L(y,z)] \vee Day(sat)\}$$

נבטל את הגרשיים

$\neg\forall x,y,z\{\neg[\neg m(x,y) \vee \neg L(x,z) \vee L(y,z)] \vee Day(sat)\}$

נכניס את ה- $\neg$ הראשון, אם יש, בתוך הגרשיים.

$\forall x,y,z\{[m(x,y) \wedge L(x,z) \wedge \neg L(y,z)] \vee Day(sat)\}$

נקבל ב- $\forall\neg$:

$\exists x,y,z\{[\neg m(x,y) \vee \neg L(x,z) \vee L(y,z)] \wedge \neg Day(sat)\}$

אין נבלבלים מה $\wedge$ (and)- מופרדים לשון מנוסחים.

בעוד יש כאן $\forall$ - אפשר לגזור אותו.

כאן $\exists$:

תפקיד סקולמיזציה (פ'ג Skolem מ הנגזרת כאן)

המשפט נתן לדון אדם ולכן אמת לפחות.

נגזרת קבועים: $Sk_x$, $Sky$, $Sk_z$

נחליף את $x,y,z$ ~~[illegible]~~ במשתנים אלו ונוריד

את כאן $\exists$ (קיים)

דוגמא:

$\exists x\ big(x)$

$big(Sk_x)$

$\neg m(Sk_x, Sky) \vee \neg L(Sk_x, Sk_z) \vee L(Sky, Sk_z)$

$\neg day(sat)$

מנסים אלו נגזרות ב- FOL

אם בכאן קיים נגזרת המתן כאן לכל - אלו

לגזרת קבועים אלא פונקציות.

$\forall w(\exists x,y,z)$

$\{\ldots Skx(w) \ldots\}$

$\exists x((\exists y\ p(y)) \wedge q(x))$

$p(Sky(x)) \wedge q(Skx)$

כך בדיוק בדיוק שיש x.
הדרך הכללית לא לדלג על שלבים.

$\exists x\,(p(sk_y(x)) \wedge q(x))$

$p(sk_y(sk_x)) \wedge q(sk_x))$

עד כאן לא נגע לבעיה

$p(sk_y) \wedge q(sk_x)$

יש לקחת את הסיפור הידוע + המשפטים הרלוונטיים
ולנסות להגיע לסתירה.

בבסיס הידע:

day(sat)

¬ day(sat)

משני המשפטים הללו מגיעים לסתירה. - משפט ריק.

סתירה זה לא כי הגיון.

$b \to a$ לא אומר שבגלל a אז b.

המשמעות אז שa לא נכון אז גם b נכון.

אם מגיעים הכל כמו כמו נתן לתשובות הנכונות
ונכונות שאי אפשר ← נתן לפחות.

כיצד ידעת אילו משפטים יש לרתום בכל בסיס
הידע?

יש הרבה קריטריונים שונים.

רעיונות הפוכים

אלפרטה & לוגיס

משפטי הגרן

משפט כמו שיש לו לכל הפחות אטום
אחד חיובי. (כלומר שלילי אין שום אטום אחרון חיובי).

דוגמאות: $a \vee \neg c \vee \neg b \vee \neg$ $a$

$\neg c \vee \neg b \vee \neg$ $\neg a$

$\neg b \vee c$

F משפט הלק: אם לא כל clause נבל להגיע בצורה:

$\neg b \vee \neg c \vee a \quad \rightarrow \quad b \wedge c \rightarrow a$

$\neg b \vee c \quad \rightarrow \quad b \rightarrow c$

$\neg b \vee \neg c \vee F \quad \rightarrow \quad b \wedge c \rightarrow F$

$\neg a \quad \rightarrow \quad a \rightarrow F$

$a \quad \rightarrow \quad T \rightarrow a$ אז משלושה כל a

כאשר יש משפט הלק ניתן להסיק את הנתונים בכיוון לינארי.

יש הסקה קדימה והסקה אחורה.

הסקה קדימה - מתחילים מה שידוע, הולכים אל ידועים אם כל הגוף הנמצא על ידועים אם אל הגוף הימני. תוכיח את כל הולכים עד שמגיעים לשאר מרוצה להסיק.

הסקה אחורה - רוצים להסיק. נסתכל מימין יש אל ההסקה בגוף הימני ובודקים אם ניתן להגיע לחוקים עדיין הישמאלי.
אם רוצים להסיק את a: נחפש אם ניתן להגיע ל b ו c. אם לא, ל d.

מודל - תרור אמת תרים בהכרח הידוע הפסוקים הם T.
הטיה הפשוטה לחיפוש מודל:
לנסות את כל הסדרים האפשריים תרור המשתנים.

אלגוריתם DPLL
אם יש משתנה שמופיע בכל הפסוקים, בהם הוא מופיע, בלי not (או באותה צורה, תמיד עם not)

ניתן לקבוע סדר טבלאי. אם $\neg a$ , $a = F$
אם $e$ , $\tau = \epsilon$

ניתן להשתמש בחיבור מקומי:
חיבור מקומי - חיבור הוא יש סדר לכל הביטויים.
הסדר הזה לפי הסדר הפנימי. ב-
טבריה מגלה למלכה המקומים בכל פעם לשפוך לה
המלכה.
חיבור מקומי - מרחיקים מסתרון מסלול, אין לזו כאן.

בלוגיקה מסדר ראשון יש משמעות, לא מספרה כלל
לקבל מספר סדרים, ולכן שם קשה יותר.
משפטי כדור בלוגיקה מסדר ראשון ← בסיס להתבלבל
אלי ל prolog.

## Unit Res.

כאשר להשתמש בהצלחה כאשר אחד מהמשפטים
מכיל יחיד אחד.
זה מבטיח שנקבל יחיד קטן יותר.

$$\frac{\begin{array}{c} x \vee y \vee \neg z \\ z \end{array}}{x \vee y} \qquad \frac{\begin{array}{c} x \vee y \vee \neg z \\ z \vee a \vee b \end{array}}{x \vee y \vee a \vee b}$$

## Set of Support

~~מתמטיקה~~ בכל הצלחה שלושים, ~~אחד~~ להחליף
אחד מהמשפטים ב- s.o.s (set of support)
את המשפט שנלקח מוסיפים ל s.o.s
s.o.s מאותחל לשליל הנשאלת.

## מאחד - Unifier

rel(x, father_of(Dvir))
¬rel(z, y)

מוצאים מה צריך לרדוד במשתנים כדי שמשפטים
יהיו כהים ואז ניתן להחליף אותם.

בכל מקרה אומרים:
מקרה ל נמצאת יחס, אותו מספר פרמטרים.
נניח $x=y$.

rel ( y, Father_of(David))
rel ( y, z )

אבל יש משהו נוסף פונקציה.
נגדיר $z = Father_of(David)$
מה אומרים בינתיים שבפונקציה אין חלק המשתנה
אותו רוצים לאתר.
אחר $z = Father_of(z)$

## פרק 10 - תכנון Planning

אלגוריתם - שפה באינטרפרטציה ניתן להגדיר מה
הגדר כן נמצאים ואלו פעולות ניתן לבצע במצב זה.
בעבר שפה בו נקראת Strips
בעל - בסיס של שיקי הרובוט.
הרובוט נמצא שם נקודה באותו הרחבה
בלתי - נמצאת יחס ברחבה אבל הפרוצדורה

Action ( . . . )
הגדרת פעולה:
כדי להגדיר פעולה יש צורך בשלושה דברים:
א) שם הפעולה: Action: Go(x, y)
ב) מה הנתנאים בכדי שנניח יהיה לבצע את הפעולה.
הנתנאים x, y באותו חדר, שהרובוט נמצא ב X.
Pre-Condition
PRECOND:
EFFECT:
ג) מה התוצאה של הפעולה:

יש להגדיר את הגבולות בכך שהתכונה יהיה פשוט.
הנתנאי הינם קבוצה של פרדיקטים שם And בינהם.

Action
(ACTION: GO(x, y)
PRECOND: At(Shaky, x) ∧ In(x, r) ∧ In(y, r)

המילה בעברית: הפעלה מתאר בפעלים פרדיקטים (יחסים) על קבועים.
בשלב זה אין משתנים, אין אלפנטרים (פרט ל-and), אין שלילה
של פרדיקטים לאן פונקציות.
In(Shaky, Room3) - כתיבה חוקית
¬In(Shaky, Room2) - לא חוקי

EFFECT - תיאור שינויים בעולם הפרדיקטים
פרדיקטים שמתוספים / אין מוצגים מפורשים.
פרדיקטים שמתבטלים - כלומר כאן שהם,
פרדיקטים שמתווספים - רשומים עם not.
EFFECT: At(Shaky, y) ∧ ¬At(Shaky, x)
x, y באלו תבר אלמן לא צריך לרשום כאן - Effect.

Action
(Action: Push(b, x, y)
PRECOND: At(Shaky, x) ∧ At(b, x) ∧ In(x, r) ∧
In(y, r) ∧ movable(b)
EFFECT: At(Shaky, y) ∧ At(b, y) ∧ ¬At(Shaky, x) ∧
¬At(b, x)

הגדרת הבעיה ההתחלתית:

Init:
In(Shaky, Room3)
In(box1, Room1)
In(box2, Room2) ...
In(switch_, Room_) ...
TurnedOn(switch4) ...
TurnedOff(switch2) ...
At(box1, x1) ....

movable( .. — לכל קלפה

climable( ... — לכל קלפה

המודרות הן לכל אובייקט נמקיים בעולם.

המטרה: הרובוט להעביר את קלפה 2 לחדר ג.

GOAL: In(box2, room3)

אין מתבנים ה- LMKP.
אפשר מהתכנית לפעל.
יותר נכון לפרק אחורה. המטרה מתמלאת.
קל להבין מה הפעולות שיש לבצע, בהליך אחורה.

11.12.13

## שיעור 8

המשך תכנון

PDDL - מפורמט בעיות תכנון.

אלגוריתם תכנון - אלגוריתם שנה מיצג הבעיה ולא בסיס. אלגוריתם חיפוש.

בקרוב בעיה מ.מ (בספר מ.מ) - PDDL.

בעיה:
רוצים לנסוע מירושלים לים המלח.
יש רכב.
המפתחות נמצאים בכיס אדם במלון.
3 פעולות: drive - לנסוע
insert - הכנסת המפתח לסוויץ'
remove - הוצאתו מהסוויץ' ← הכנסתו לכיס.
InPocket() - בכיס InIgnition() - המפתח בסוויץ'
מצב ההתחלה: האוטו בירושלים המפתח בכיס.

Init: At(car, J) ∧ InPocket(key)
Goal: At(car, DS) ∧ InPocket(key)
Action( Drive(J),
precond: At(car, DS) ∧ InIgnition(key)
Effect: At(car, J) ∧ ¬At(car, DS) )
בגלל סדרה Action(Drive(DS)... )

אפשרות נוספת:
Drive(x, y)
Precond: At(car, x) ∧ InIgnition(key)
Effect: At(car, y) ∧ ¬At(car, x)
זה טוב כאשר יש לנו הרבה מקומות. חוסך
הגדרה של נסיעה לכל אחד מהמקומות

**11.4** The monkey-and-bananas problem is faced by a monkey in a laboratory with some bananas hanging out of reach from the ceiling. A box is available that will enable the monkey to reach the bananas if he climbs on it. Initially, the monkey is at $A$, the bananas at $B$, and the box at $C$. The monkey and box have height $Low$, but if the monkey climbs onto the box he will have height $High$, the same as the bananas. The actions available to the monkey include $Go$ from one place to another, $Push$ an object from one place to another, $ClimbUp$ onto or $ClimbDown$ from an object, and $Grasp$ or $Ungrasp$ an object. Grasping results in holding the object if the monkey and object are in the same place at the same height.

a. Write down the initial state description.

b. Write down STRIPS-style definitions of the six actions.

c. Suppose the monkey wants to fool the scientists, who are off to tea, by grabbing the bananas, but leaving the box in its original place. Write this as a general goal (i.e., not assuming that the box is necessarily at C) in the language of situation calculus. Can this goal be solved by a STRIPS-style system?

d. Your axiom for pushing is probably incorrect, because if the object is too heavy, its position will remain the same when the $Push$ operator is applied. Is this an example of the ramification problem or the qualification problem? Fix your problem description to account for heavy objects.

a. The initial state is:

$$At(Monkey, A) \wedge At(Bananas, B) \wedge At(Box, C) \wedge$$
$$Height(Monkey, Low) \wedge Height(Box, Low) \wedge Height(Bananas, High) \wedge$$
$$Pushable(Box) \wedge Climbable(Box)$$

b. The actions are:

$$Action(\text{ACTION}{:}Go(x, y), \text{PRECOND}{:}At(Monkey, x),$$
$$\text{EFFECT}{:}At(Monkey, y) \wedge \neg(At(Monkey, x)))$$
$$Action(\text{ACTION}{:}Push(b, x, y), \text{PRECOND}{:}At(Monkey, x) \wedge Pushable(b),$$
$$\text{EFFECT}{:}At(b, y) \wedge At(Monkey, y) \wedge \neg At(b, x) \wedge \neg At(Monkey, x))$$
$$Action(\text{ACTION}{:}ClimbUp(b),$$
$$\text{PRECOND}{:}At(Monkey, x) \wedge At(b, x) \wedge Climbable(b),$$
$$\text{EFFECT}{:}On(Monkey, b) \wedge \neg Height(Monkey, High))$$
$$Action(\text{ACTION}{:}Grasp(b),$$
$$\text{PRECOND}{:}Height(Monkey, h) \wedge Height(b, h)$$
$$\wedge At(Monkey, x) \wedge At(b, x),$$
$$\text{EFFECT}{:}Have(Monkey, b))$$
$$Action(\text{ACTION}{:}ClimbDown(b),$$
$$\text{PRECOND}{:}On(Monkey, b) \wedge Height(Monkey, High),$$
$$\text{EFFECT}{:}\neg On(Monkey, b) \wedge \neg Height(Monkey, High)$$
$$\wedge Height(Monkey, Low)$$
$$Action(\text{ACTION}{:}UnGrasp(b), \text{PRECOND}{:}Have(Monkey, b),$$
$$\text{EFFECT}{:}\neg Have(Monkey, b))$$

c. In situation calculus, the goal is a state $s$ such that:

$$Have(Monkey, Bananas, s) \wedge (\exists x \;\; At(Box, x, s_0) \wedge At(Box, x, s))$$

In STRIPS, we can only talk about the goal state; there is no way of representing the fact that there must be some relation (such as equality of location of an object) between two states within the plan. So there is no way to represent this goal.

d. Actually, we did include the $Pushable$ precondition. This is an example of the qualification problem.

Action(Remove(key)
Precond: InIgnition(key)
Effect: InPocket(key) ∧ ¬InIgnition(key))
Action(Insert...  כאלמן אשר לבדאת הפעלה.

תיפוש קדימה.
מתבלים מבנה ההתחלה

At(car, J) IP(key)
בודקים לאלו פעולה ניתן לבצע מבנה ההתחלה:
מגבה זה אפשר רק Insert
↓ Ins(key)
At(car, J) II(key)
אפשר לנסוע אחורה או Drive(DS)
↓ Drive(DS)
At(car, DS) II(key)
↓ Rem(key)
At(car, DS) IP(key)

אי - אם הפונקציה ההיוריסטית קבועה מובטח
לנו שנגיע אל הפתרון הקצרה ביותר שמובטחת.
אין היוריסטיקה ניתן להבטיח ?
לנסות להגיע לעמדה בלי להתייחס ל- Precond.
זה יתן לנו יותר פעולות מאפשר הבדיק מצבים.
אל הבדיק הזו מגלו בשני עצמו.
בד אל - בגלל הפעולות אחורה.
בגלל הפעולות - בהנחה קדימה, האפשרויות הם גדול מאוד.
כי DDPL קל לבצע פעולות אחורה.

תיפוס אחורה

At(car, DS) ∧ IP(key)

יש למצוא פעולה שה- effect יתן את התוצאה.
רק הפעולה הרלוונטית ותלויה בפ"ל.
אפקט: מוסיף את הפרדיקטים הרצויים.
תנאי מקדים: כלום פרדיקטים שנמצאים בגלל
הנחה (אלא אם כן האפקט מסיר אותם).

↑ Remove(key)

At(car, DS) ∧ II(key)

אחרי = לפני ∪ תנאי מקדים פחות פרדיקטים לפוספה באפקט

לפוספה באפקט פרדיקטים \ {תנאי מקדים} ∪ לפני = אחרי

האם התוצאה לאחרי אפשר Drive(DS) ?
בהיקרר כנה, ~~הנה~~ הגלל הקודם הלא:

↑ Drive(DS)

At(car, 5) ∧ IP(key) ∧ II(key)

הפרדיקטים אלה דרושים קיומים. יש אפשר אחרי
נוסף.

↑ Rem(key)

פעולה צו מבטלת את II(key). (בגלל האפקט & Precond)
ולכן היו כלפי אחרים. אלו מפעלת צה לגו הזה.
נמשיך בפעולה הקודמת.

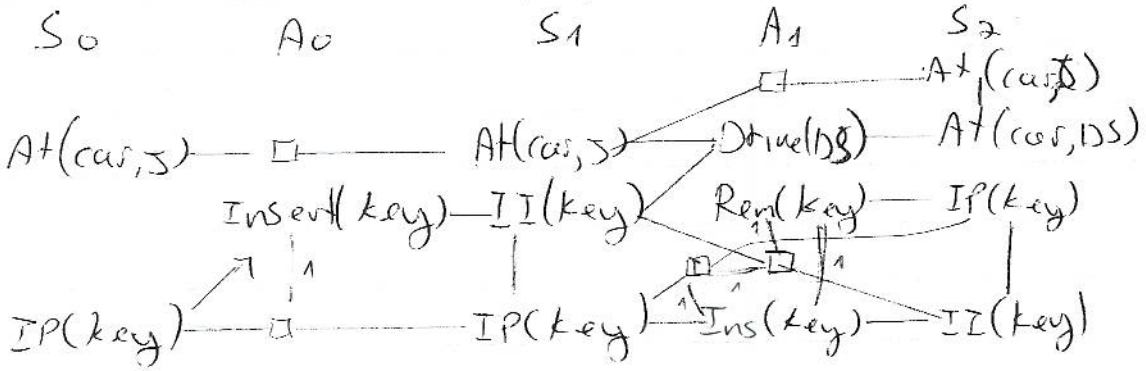
↑ Drive(DS)

At(car, 5)
II(key)

קשה מאוד לאלגוריתם לבנות אלגוריתם יעיל.
ההיתרון - גרף חשוב!
מאוד נוח לקבל (מ' אלגוריתם) אלגוריתם לא רע.
בנוסף, נוח לבנות את הסריקה על גבי הגרף
וזה עדיף לחיפוש קדימה.

## Planning Graph

הגרף בנוי משכבות: מצבים ופעולות
S0 - נשכבת המצב ההתחלתי.




S3 יכול לא אותם פרדיקטים כמו S2.

A0 - פעולות שניתן לעשות עם אותם Precond מ S0.
יש פעולה אחת שמחיקה היא קיימים כמו IP. אין פעולה
עבור At(car,J) ואין עבור At(car,J) ∧ IP(key).
S1 - מה יודעים הפעולות
מוסיפים פעולות ריקות. פעולות שעושות על המצב

עולים כאשר הולכים Si שהפרדיקטים שיש בו
נכנס ל Si+1.

לכל פעולה
מספר הרמות כמספר הפרדיקטים. כלומר הגרף
פולינומיאלי לגודל הבעיה.
לא מוסיפים פרדיקטים, רק מוסיפים.

סתירות בין פרדיקטים

**mutex** - mutual exclusion, מנעה הדדית.
שני פרדיקטים שלא יכולים להתקיים ביחד.
למשל: קורה (x) כאשר יש פרדיקט ו- not
באשר כל פעולה שולחת 1 מבטלת את עצמה, ולהפך.
נאמר שהם mutex.
נמצאת קשת בין פרדיקטים שהם mutex
כי: IP / II

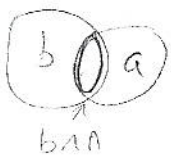
מתי פעולות יהיו mutex?
1. כאשר האפקט של אחת מבטל אפקט של השניה.
2. כאשר אפקט של אחת סותר תנאי מקדים של אחרת.
3. כשתנאי מקדים של פעולה סותר תנאי מקדים של אחרת.
כאשר מרשים שלילה של פרדיקטים.

## השתרות בייס אינוורס

מהי ההסתברות שהפעולה אלרה אנו מתאמצים תקרה.
ההסתברות מותנית.
ההסתברות ל- k בתנאי ש- ה.
n אירועים.
לכל אירוע - מה הסיכוי שהוא יקרה.
מה הסיכוי שיקרה אם $x_1$ קרה, $x_2$ קרה.. $x_{n-1}$
לכל אירוע יש $2^{n-1}$ אפשרויות
סה"כ $n \cdot 2^{n-1}$ הסתברויות אלמן יש לדעת.
כל טבלה מעולה מידי.

ההסתברות מותנית $P(a|b)$ מהי ההסתברות ש- a
יקרה אם b קרה.
הכוונה ש- a ו- b יקרו תלוי
ההסתברות ש- b קרה.

לוסתר בייס $P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}$



$$P(b|a) = \frac{P(a \wedge b)}{P(a)}$$

$$P(a \wedge b) = P(a|b) \cdot P(b)$$
$$P(a \wedge b) = P(b|a) \cdot P(a)$$
$$P(a|b) = \frac{P(b|a) \cdot P(a)}{P(b)}$$

שאלה 4 מהבית

נשים בי אותיות יש 6 אותיות $A = \ldots F$.
כדי לבנות את כל ההתפלגויות: $6 \cdot 2^5 = 192$.

נרצה מבחן, ללא מחשבים
מה הסיכוי ש B יקרה אם A קרה.
מהי הסיכוי ש C יגרום אם D – זאת בלומנס לחת כך.
לכל אחד מהצמתים בגלל שזה מספר קטן של התפלגויות. מהי הסיכוי שהוא יקרה אם הוא שלום קרה.
לדוגמה ללא הורים. מה הסיכוי שהוא יקרה
לדוגמה יש הורים – זאת שמרים את הסיכוי לדוגמה אלו
רק תלוי הורים.
מנתונים אלו ניתן לחשב כל הסתברות שרצים.
לכל אחד רושמים מה ההסתברות הזאת שהוא שהורים.

$$P(A \wedge B \wedge C \wedge \neg D \wedge \neg E \wedge \neg F) =$$
$$P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|B \wedge \neg D) \cdot P(\neg D|\neg E) \cdot P(\neg E) \cdot P(\neg F|\neg E)$$

$$P(B,D) = \underbrace{\left[\overset{P(A)}{P(B|A)} + \overset{P(\neg A)}{P(B|\neg A)}\right]}_{P(B)} \underbrace{\left[\overset{P(E)}{P(D|E)} + \overset{P(\neg E)}{P(D|\neg E)}\right]}_{P(D)}$$

תרגיל $P(B)$: B נלכד מ- A.
B יקרה אם A יקרה ואם B או A לא יקרה ואם B.

$$P(A) \cdot P(B|A) + P(\neg A) \cdot P(B|\neg A)$$

הסיכוי ש A יקרה | הסיכוי ש A יקרה ואחרי B יקרה | הסיכוי ש A לא יקרה | הסיכוי ש B יקרה לאחר ש A לא יקרה

$A \quad + \quad \neg A$
$\downarrow \quad \quad \downarrow$
$B \quad \quad B$

שעור 9 18.12.13

## הסתברות מותנית

רוצים לבטא הסקות הסתברותיות, בצורה יעילה.
חשוב על התרחקות מינימום מידע.
מבוסס על הסתברות מותנית

$$P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}$$

נוסחת בייס

$$P(b|a) = \frac{P(a|b)\cdot P(b)}{P(a)}$$

## הדגימה של מונטי הול

יש 3 דלתות. מאחורי אחד הדלתות יש פרס.
המתחרה בחר דלת.
המנחה מציע דלת אחרת, שאין מאחורה כלום
המתחרה יכול להחליף דלת אחרת או להשאיר את
הדלת שבו בחר בהתחלה.
יש להחליט אם כדאי להחליף דלת או לא.
נסמן
S1 - יש פרס בדלת שהמתחרה בחר
S2 - יש פרס בדלת השנייה.

$$P(S1) = \frac{1}{3}$$

הסתברות שיהיה הפרס S1 בהינתן

## דוגמא נוספת

תוצאות בדיקה, שהם שלילי לעפ.
בלעדי, אם הבדיקה חולה - הסיכוי שאתה חולה לעפ.
אם הבדיקה שלילית - לעפ שאתה חולה.
תוצאת הבדיקה - חולי.
המחלה נדירה. הסיכוי לקבל מה הוא $\frac{1}{10^5}$ (אחד לעשרת אלפים)
מה הסיכוי שבאמת חולה?

נתונים: לגבי הבדיקה
$p(test \mid dis) = 0.99$
$p(\neg test \mid \neg dis) = 0.99$

הסיכוי לחולה
$p(disease) = \frac{1}{10^5}$

יש לחשב:

$p(dis \mid test) = ?$

$$p(dis \mid test) = \frac{p(test \mid dis) \cdot p(dis)}{p(test)}$$

לא יודע מהו $p(test)$

מה הסיכוי שבאמת לא חולה?

$$p(\neg dis \mid test) = \frac{p(test \mid \neg dis) \cdot p(\neg dis)}{p(test)}$$

ויודע כי $p(dis \mid test) + p(\neg dis \mid test) = 1$

$$p(test) = p(test \mid \neg dis)\, p(\neg dis) + p(test \mid dis)\, p(dis)$$

לכן:

$$p(dis \mid test) = \frac{p(test \mid dis)\, p(dis)}{p(test \mid \neg dis)\, p(\neg dis) + p(test \mid dis)\, p(dis)}$$

נציב ערכים

$$p(dis \mid test) = \frac{0.99 \times 10^{-5}}{0.01\,(1-10^{-5}) + 0.99 \cdot 10^{-5}}$$

$$\approx 10^{-3}$$

בעולם כמו קטן לחולה חולה.
נניח שלקחים עשרת אלפים. לפי הסיכוי
רק אחד חולה אלפים עשרת אלפים יקבלו

# הדגמה שהיום חלומים.

יש כאן אירוע. בליבת הבאר יש גרמופטרים שמודדת את הטמפרטורה. אם הטמפרטורה גבוהה מעל נקודה מסוימת מופעלת אזעקה.

A - אזעקה מופעלת

FA - אזעקה מקולקלת (T), F - אזעקה תקינה.

G - מדרום. הטמפרטורה שהמדרום מודדת גרמלית/גבוהה

FG - T = מד חום מקולקל

T - הטמפרטורה בבאר גרמלית/גבוהה

איך לייצג רשת בייסיאנית?

נכין רשימה. גורמים לפני תוצאות/סיבות

נתחיל מ- T. אין לה סיבה.

נוסף את FA, אם האזעקה המקולקלת גם לא קשור לשום דבר.

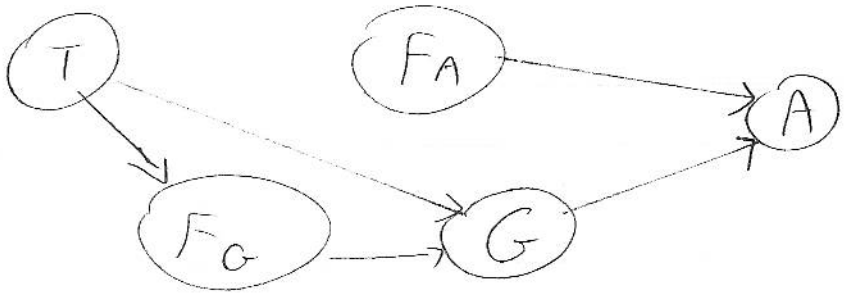
כאשר מוסיפים קשת, אם יש קשר ביניה לבין אחרת - מוסיפים קשת.

כבר שהטמפרטורה גבוהה, הסבירות שהמד חום ומקולקל גבוהה.

נוסף את FG. תחת מ- T ל FG.

נוסף את G. מה משפיע על G? T, FG

נוסף את A. מושפע מ- FA, G




מוסיפים את הגורמים אחרונים אחרונים לפני תוצאות לכן מובטח שלא יהיו מעגלים.

כאשר הסדר כאן יהיה חשוב מאוד קשה.

יש לנו 4 מצבים,
לכל בוחן מה הסתברות לקבל טיק מסוים
בתלות בהדרים.

| T | FG | P(G) |
|---|---|---|
| N | t | y |
| N | F | x |
| H | t | 1-y |
| H | F | 1-x |

(טיפ נורמלי, מדהים יקר)
(טיפ נורמלי, מדהים יקר)

$P(\neg G) = 1 - P(G)$

שבלה הטבלה של בוחן נקבע לפי מספר ההדרים
של הבוחן ומספר הטיפים שכל הדרה יכול לקבל.

אצטקה תקינה תמיד מדברת בשקרים.
אצטקה מקלקלת תמיד שותקת.

| G | FA | P(A) |
|---|---|---|
| N | T | 0 |
| N | F | 0 |
| H | T | 0 |
| H | F | 1 |

אצטקה מקלקלת

האצטקה והטרמומטר תקינים.
נשמע אצטקה.
מה ההסתברות שהטמפרטורה גבוהה?

$P(T=H \mid \neg FA, \neg FG, A) =$

אם יש אצטקה, ברור שהאצטקה תקינה (הטמפרטורה גבוהה
ולכן יש לחשב:
$P(T=H \mid \neg F_G, G=H) =$

כלומר, מה הסיכוי שהטמפרטורה
גבוהה אם הטרמומטר התקין מראה טמפרטורה גבוהה

$$= \frac{P(T=H, \neg FG, G=H)}{P(\neg FG, G=H)}$$

<u>נזכרות:</u> $P(a,b,c) = P(a \mid b,c) \cdot P(b \mid c) \cdot P(c)$

אפשר לדרדר למספר בלשהו של משתנים.
אבל המשתנים נתון לסדר הסדר הרצוי.
בגלל לשנות לפי הכלל של השתנה הבייסיאנית,
מהסבה לאחרת.

$$= \frac{P(G=H \mid \neg FG, T=H) \times P(\neg FG \mid T=H) \times P(T=H)}{P(\underline{T=N}, \neg FG, G=H) + P(\underline{T=H}, \neg FG, G=H)}$$

אם לא היה חל מ- T ל- G הה בדיק לחשב אותו.
אם לפתרון מונים של בזמן, בהנחה ההורים
שלו לבדיקה אורים אני היא שווה לפתרון בהנחה
ההורים בלבד.
בלומר אם T לא היה אב של G (רק של FG)
היה נתון להתעלם מזה.

הזכרה. כדאי נתון לחשב גאוס. אם הה
יש אב - T - לא בטוח.
יש לחשב בטוח לגבי $T=N$ אבל לגבי $T=H$

$$P(a,b) = P(a,b,\neg c) + P(a,b,c)$$

$$= \frac{P(G=H \mid \neg FG, T=H) \times P(\neg FG \mid T=H) \times P(T=H)}{P(G=H \mid \neg FG, T=N) \cdot P(\neg FG \mid T=N) \cdot P(T=N) + P(G=H \mid \neg FG, T=H) \cdot P(\neg FG \mid T=H) \cdot P(T=H)}$$

כדאי נתון לבדוק מרחב לפי הכלל.

הקרון - לחשב הסתברות בלי שהוא מסלול לפי
הרשת הבייסיאנית.

שאלה

2 אוטרונים שמודדים כוכבים.

M1 - כמה כוכבים ספר אוטרון 1

M2 - כמה כוכבים ספר אוטרון 2

N - מס' כוכבים

הבתבר ש גלגל $\pm 1$ (משפיע על M1, M2)

F1 הטלסקופ של אוטרון 1 לא מעוקם

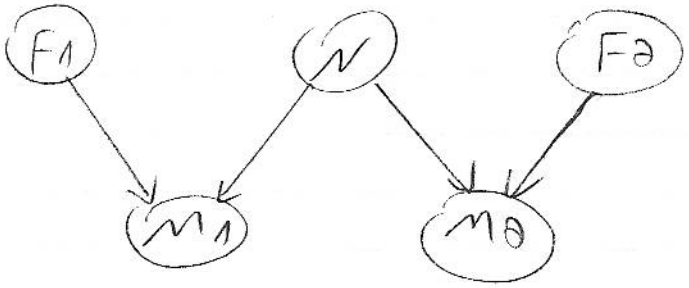
F2 " " " 2 "

$f = \rho(F_1)$ , $f = \rho(F_2)$

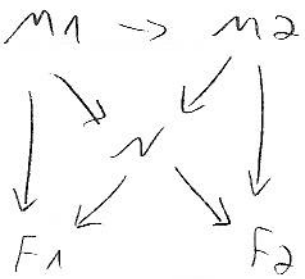
סופרים לפרמטר 3- מאחר שיש באמת (כאשר לא מעוקם)

רשת בייסיאנית

N - מספר הכוכבים לא מושפע מכלום




מה לגבי רשת הבייסיאנית הבאה?




יש כאן דברים מוזרים.
תלויות לא נחוצות.

חיצים כאן נתונים
יש לדעת בחישובים רבים.

$$\begin{tikzcd} F1 \arrow[d] & F2 \arrow[d] \\ M1 \arrow[dr] & M2 \arrow[dl] \\ & N \end{tikzcd}$$

יש לחשב: $P(M_1 | N)$

מן הנתונים: $N \in \{1, 2, 3\}$

$M_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

נבין מהלך לפי הדרכים האפשריות לקבל $N$ ו- $M_1$:

| | $N=1$ | $N=2$ | $N=3$ |
|---|---|---|---|
| $M_1=0$ | $f+e(1-f)$ | | |
| $M_1=1$ | $(1-2e)(1-f)$ | | |
| $M_1=2$ | | $(2e-1)(1-f)$ | |
| $M_1=3$ | $0$ | | $(1-2e)(1-f)$ |
| $M_1=4$ | $0$ | $0$ | |

כל הערכים מבטאים
לדוגמא: $P(M_1=1 | N=2)$

$$P(M_1 | N) = P(M_1 | N, F1) \cdot P(F1 | N) + P(M_1 | N, \neg F1) \cdot P(\neg F1 | N)$$

$P(M_1 | N, F1)$ - קל לחשב. לפי הגלגל של $M_2$

$P(M_1 | N, \neg F1)$ - ... -1

בגלל $N, F1$ - לכל אחד יש גלגלה מיוחדת.

הם בלתי תלויים ולכן:

שנה יקרה: $P(F1, N) = P(F1) \cdot P(N)$

$P(F1 | N) = P(F1)$

$P(N | F1) = P(N)$

כך שאחרי קרה לא משפיע על השני

לכן ניתן לרשום:

$$P(M_1 | N) = P(M_1 | N, F1) \cdot P(F1) + P(M_1 | N, \neg F1) \cdot P(\neg F1)$$

אם $F1 = True$ : הטלסקופ לא מפוקס בהסתברות $f$.

$$\underbrace{P(M_1=0 \mid N=1, F1)}_{1}\cdot f + \underbrace{P(M_1=0 \mid N=1, \neg F1)}_{e}\cdot(1-f)$$

$M_1 = 0$ , $N = 0$

יש כאן 1 , טלסקופ לא
מאוד לכן אמ והיה בוודאות

סיכוי ש טעות ב $+1$
סיכוי ש טעות ב $-1$

$$= f + e(1-f)$$

מה קורה אחרי:

$$\underbrace{P(M_1=1 \mid N=1, F1)}_{0}\cdot f + \underbrace{P(M_1=1 \mid N=1, \neg F1)}_{1-2e}(1-f)$$

$M_1 = 1$ $N = 1$

באשר

$M_1 = 1$ $N = 1$
2 2
כ 3

התלק הראשון, באשר הטלסקופ לא מפוקס, תמיד = 0
כי אין הבל כאפר תמיד 0 בוודאות. (טלסקופ לא מפוקס
תמיד מוריד 3 בוודאות)
התלק השני, הסיכוי לטעות הוא $2e$
הסיכוי שלא טעה $1-2e$.
הסכום צריך להיות ~~באשר הראשון~~ $M_1 = N$

באשר

$$\underbrace{P(M_1=3 \mid N=1, F1)}_{0}\cdot f + \underbrace{P(M_1=3 \mid N=1, \neg F1)}_{0}(1-f)$$

$M_1 = 3$ $N = 1$

$M_2=3$ , $M_1=1$ . איזה מספר $N$ יכול לקבל?

✗ $N=1$ לא יתכן כי אז לא יתכן $M_2=3$

✓ $N=2$ יתכן. כל אחד מלא הסדרה.

✗ $N=0$ לא יתכן.

✗ $N=3$ לא יתכן. אם $M_1$ לא יפיק היה מלא 0 ולא 1.

✓ $N=4$ יתכן. $M_1$ - לא יפיק. $M_2$ מלא הסדרה.

✗ $N=5$ לא יתכן. $M_2=3$ לא יתכן.

✓ $N=6,7$

$N=2$ , $N=4$ , $N\geq 6$

לא יכול מה הסתברות על $N$ ההתפלגות על $N$ ~~לא~~ לכן לא יכול אין $N$ וכל להיות.

שיעור 10 25.12.13

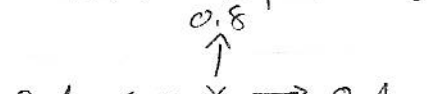
פרק 17 - MDP - Markov decision process

תכנון + הסתברות.

S - מצבים. מצב מטרה.
actions($S_i$) פעולות, מעברים
$R(S_i)$ Reward. עלות המצב. שווי המצב.
כאשר הפעולות צהוב נרשם אם הדרך הקצרה ביותר.
שווי המצב. כבל שיותר גבוה - טוב.
עלות נלוות למצב - לא רוצים להגיע למצבים אלו.

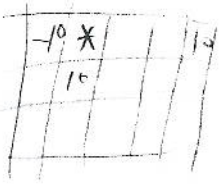
רוצים להבין מה ההסתברות שמעשר מושים הכלב
מטיים, אין נגיע למקום אותו רצינו.

לדוגמא:




כאשר מושים פעולה יש סיכוי מסוים שנגיע למקום שרצינו.
סיכוי אחר להגיע למצב אחר.
$P(s'|s,a)$ : ההסתברות להגיע למצב $s'$ בהינתן
שנמצאים במצב $s$ ומושים פעולה $a$.
הסיכוי שסוכן שנמצא במצב $s$ ומבצע פעולה $a$,
יגיע למצב $s'$.

רוצים לדעת לכל מצב מאפשרי, מה הכי הכי הבא.
מגדירים Policy. מסומן - $\pi(s_i)$. (פאי)
בהינתן $s_i$ אינו פעולה (action) כבאי לבצע.




ייתכן שיתגלה הדרך תהיה ארוכה יותר
אבל נגיע ללא עלות למצב המטרה בדרך יותר.

יש להגדיר את המטרה.
נתון כאשר נשלח לאורך מעגל המטרה. 10 או 10-
המטרה: למקסם את סכום התגמולים $R(S_i)$ במצבים
בהם אנחנו עוברים.

אם כל מסלולים כל צעד, בעלות 1 - כדאי לנו
במעגלים אוטומטיים
אם העלות שלילית:
עלות נמוכה (שלילית) כדאי לעופש את הדרך הקצרה
ביותר לעבר מטרה 10.
עלות נשלילית גבוהה. "יתכן וכדאי לרצות ל 10-
הקרוב.

רוצים למצוא דרך, בכדי להתקדם, למקסם את
סכום ה- R.

במקרים אמיתיים, מצבים ישנים עולים פחות מחדשים.
מגדירים $0 < \gamma \leq 1$ (במקרה קיצון מ 1 ל בגלל שזה 1).
תועלת הוסלול - U. R1 - צעד ראשון, R2 - הצעד הבא...
$U = \gamma^3 R_1 + \gamma^2 R_2 + \gamma R_3 + R_4$
המצב האחרון - $R_4$, ~~מכפל~~ לוקחים כמו שפה.
המצב הלפני אחרון $R_3$ - מכפלה ב- $\gamma$.
מכוון ש $\gamma$ קטן מ- 1 - מקטינים את הרעיון פעה של
מצבים ישנים.
כאשר $\gamma = 1$ ! לא שונים.

מעבר מעגלים למצבים: אם ה U בקודם מכפלים ב- $\gamma$
ומוסיפים את ה- R החדש.
המטרה: למקסם את התועלת של U.
$\gamma$ - גורם שבחרה. קרוב לאחד.

יש לחשב תועלות U לכל מצב

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 1 | | |
| 9 | 6 | 2 | | |
| 7 | 2 | 1 | | |
| | | | | * |

בדוגמא:
במשבצת - רשום התגמול
נמצאים ב- *.
6- התגמול להגיע מה- *
למצב הבא 6.
כדי למקסם את התגמול:
מה- 6 כדאי להגיע ל 9.

Bellman אמר שניתן לעשות חישוב אופטימלי
במקום לפתור את הפונקציה.
נוסחה בלתי:

$$U_{i+1} = R_s + \gamma \max_{a \in Action} \left( \sum_{s'} P(s' \mid s,a) \cdot U_{s'}(i) \right)$$

בעצם ה- U של הסיבוב הקודם מחושבים את ה- U
של המצב הבא
לכל מצב יש לבדוק את ההפרש בין $U_i$ ל- $U_{i+1}$.
כאשר ההפרשים קטנים מאוד - ניתן להפסיק.
כך חבנון דינמי.

דוגמא:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | -1 |

שני מצבים מטרה. רובוט שנמצא במצב
1.
הוא מקבל כל מצב שלוקח בסיר קטן. $R = -0.01$.
ה- R הוא טבלה 6 מצבים שאינם מצבי מטרה.
ניקח אם $\gamma = 1$.
לכל תא נחשב Utility כולל ה- Reward.

$U = 1$

| | |
|---|---|
| -0.01 | -0.01 |
| -0.01 | -0.01 |

$$U_{1c} = -0.01 + 1 \cdot \max(0.9(-0.01) + 0.1(-0.01$$

0.8
0.1 ← ? → 0.1
0.1

סדר
הפעולה
↑ ← ↓ →

מדוע? 0.9 סיכוי לרישום בכיוון
( 0.8 סיכוי לילך + 0.1 סיכוי לשמאלה

ID3

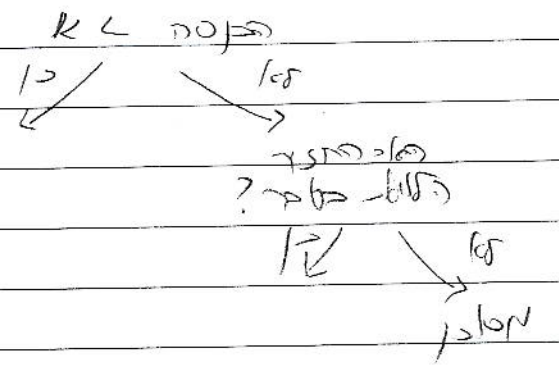
למידה חישובית

לפני פורמאלי, לפי זה לסון מיפוי אלמנטי
הלאלה:

בדיקה סימן כאשר אדם נוטל הלוואה.

על ההלטה

נשאל שאלות ולפי התשובות נגיע לסוף.




אלגוריתם ID3 בונה עץ ההלטה.

בעל: קבלה טבלה נתונים של אנשים.
רוצים לדעת אם אדם נתון אז יחזיר.
עדיפה בדיקות. נגיע לתשובה ~~[illegible]~~
עדיפים רציפים. לכולם עקומנים.
נחלק את הטווח: (0, 1.60) (1.60, 1.70] (1.70, 1.80] (1.80, 1.90] (1.90, 2.00] (2.00, ∞)
עדיף יש 6 עדיפים בדיקות, עדיף הטוב.
2 עדיפים למין F, M
מה האלגוריתם ישלח בקרוב: על פיתרון או על הטוב.

אנטרופיה:

אם יש קבוצה עדיפים קטיפה, יוצא נגד הפיתרון
שלא עדיף מופע. נגיע לתשובה אם הטוב ביותר.
יש סיכוי 0, 1.

$P(0) = 0$
$P(1) = 1$
} אין מיפוי

נחלק לפי המידע לפי Gender.

| (6) M | (9) F |
|---|---|
| S = 1 | S = 3 |
| M = 2 | M = 6 |
| T = 3 | T = 0 |

$$\text{Female}: -\left(\frac{3}{9}\lg\frac{3}{9} + \frac{6}{9}\lg\frac{6}{9}\right) = 0.2764$$

$$\text{Male}: -\left(\frac{1}{6}\lg\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\lg\frac{2}{6} + \frac{3}{6}\lg\frac{3}{6}\right) = 0.4392$$

סך כולל המידע:

$$\frac{6}{15}\cdot 0.4392 + \frac{9}{15}\cdot 0.2764 = 0.3415$$

ההפרש בין המידע ללא מאבד לבין המידע לפי המאבד כלומר ה- Gain, רווחי.
אותו כישלון יש לקשר גם לא בטבלה.
אבל יש לבדוק את המטלה בה הרווח גדול ביותר.

ID3

בודק כמה אנטרופיה יש במידע.
לראות כיצד לחלק לפיכן הרווח הגדול ביותר.

בכלל, באופן יש הרבה תוצאות מה אמן אפשרויות,
נניח יותר מלפחות מאשר מה כדור אפשרויות.

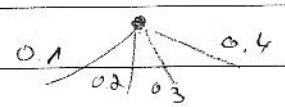
כדור מלפחות ○ ○ באפשרויות

יותר מלפחות 6 אפשרויות

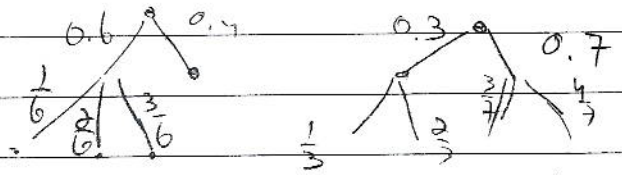
3)

יש ~~לפי~~ 4 אפשרויות:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |




$H(0.1, 0.2, 0.3, 0.4)$




אפשר לחלק את זה
בצורה, לשבור את ההחלטה
בצורה מסוימת

$H(0.6, 0.4) + 0.6H(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}) = H(0.3, 0.7) + 0.3\,H(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) + 0.7 \times H(\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$

שזאת אומרת שמידת ההפתעה בריבוי לחלוקה
נהיה בכל אחת מהאפשרויות.

אם רוצים מדד הפתעה שמודד בכל 3 הפרמטרים,
הלא תיב לחלוקה:

$$-k \sum_{i=1}^{n} P_i \lg P_i$$

k - קבוע חיובי

לרוב $k=1$, $\log$ לפי בסיס 2.

הרעיון שזה שווה לאנטרופיה בכל

ε יכול להיות קטן כרצונו ולכן:

$$\frac{A(t)}{A(s)} = \frac{\log t}{\log s}$$

$$\Rightarrow A(t) = k \log t$$

לפי הגדרה של שנון

$$H\left(\frac{1}{t}, \dots \frac{1}{t}\right) = k \log t$$

$$= -k \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{t} \log \frac{1}{t}$$

$$= -k \log \frac{1}{t} = k \log t$$

מה קורה כאשר הם n שונים?

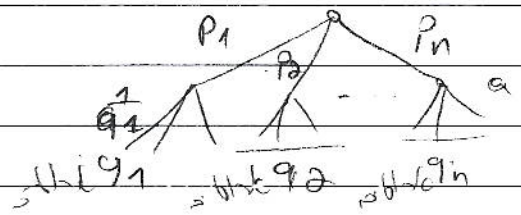
אי כל ההסתברות בכלל נתן להכניס כשהם לא מאותה רשימה.

$p_1$ $p_2$ $p_n$

$p_1 \cdot \frac{q_1}{x}$ $p_2 \cdot \frac{q_2}{x}$

x, נוסף רשלום חולים

נמצא n בחירות / אירועים




בכל בחירה מבלבלים בחירה נוספת.

מתלבטים ל- $q_i$ אירועים

חוצים שהכוונה לתת לכל האירועים

ברירה הסתברות יהיה נמוך.

$$p_n \cdot q = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} q_i}$$

כלומר

$$q = \frac{1}{p_n \sum q_i}$$

הסתברות לבחור באירוע כלשהו

$$p_i \frac{1}{\sum q_i}$$

$$p_n = \frac{n_i}{\sum n_i}$$

כאשר בוחרים את האבר הבאמצעי:

$\frac{1}{2} H(\frac{2}{n}, \frac{2}{n} \ldots) + \frac{1}{2} \cdot H(\frac{2}{n}, \frac{2}{n} \ldots) = \log \frac{n}{2} = \log n - 1$

מיון מבוסס השוואות דורש $n \log n$ השוואות.

$H(\frac{1}{n!}, \frac{1}{n!} \ldots) = \log(n!)$

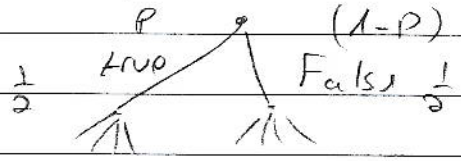
כמה מידע אפשר לדרוש בהשוואה? 1.

צריך לבצע $\lg(n!)$ השוואות.

להשוואה יש שתי תוצאות. T או F.

כאשר יש שתי אפשרויות, אחת בהסתברות של P

לשנייה בהסתברות $(1-P)$



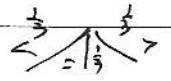

ההסתברות לכל תשובה היא $\frac{1}{2}$

$H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \log 2 = 1$

כל השוואה מגדילה את כמות המידע ב- 1.

יתרונה המיוחד היא ביט.

בלומר, כל השוואה מגדילה ביט אחד של מידע.




אם היו 3 תוצאות אפשריות:

$\frac{1}{3} \lg 3 + \frac{1}{3} \lg 3 + \frac{1}{3} \lg 3 = \lg 3$

יש דרך ל $\log(n!)$ השוואות. יש 5 איברים למיון.

כמה השוואות צריך? $\log(5!)$

$\log(5!) = \lg 120 = 7$

יש 12 מטבעות, אחד מזויף (משקל שונה).

יש מאזניים ורוצים למצוא את המטבע המזויף.

כמה שקילות צריך?

בכל שקילה יש 3 תוצאות אפשריות. $<, >, =$

דוגמא 100%.

תכונה אחת $(0, 1.6]$ $\quad 0 = \frac{2}{2} \cdot \lg \frac{2}{2}$

תכונה: $(1.9, 2.0)$

בעלות המידע = 1. $\quad \frac{1}{2}\lg 2 + \frac{1}{2}\lg 2 = 1$

מה הסיבה לקיום לוגרתם כאן? $\quad H(\ ) = \frac{2}{15}$

לכן. כדאי לדלג לפי הגבהה

ב- ID3.

כאשר נשבר המלקה יותר מדאלה - נקבל בעלות מידע.

המלקה לדוגמה קטנים קטנים מ נניח 0 יהי

בעלות המידע. סכנה של התאמת יתר overfitting

הדרך הטובה ביותר לחלק:

$(0, 1.7]$ $(1.7, 1.95]$ $(1.95, \infty)$

בהמלקה כאן נשאר 0 מידע.

חסרונות של ID3:

overfitting

בעיה בהתמודדות עם תכונות רציפות

לעיתים כדאי לפקרים את אופן הפלג לטובת בעלות

גדולות.

הילד שלנו יורד עד לעלה כתף - ל- 99.
מעדכן בצומת של 99, מעדכן ש- $\beta$ ל- 99.
עובר לבן הימני - 8.
מעדכן שלו הצומת ל- 8.
בודק $8 \geq -\infty$ לא. לכן אין לעדכן ל- $\alpha$.
מעדכן שלו הצומת מעל ל- 8.
מעדכן שלו $\alpha$ ל- 8.
מגיע לבן הימני $\alpha=8, \beta=\infty$.
הבן השמאלי = 90. מעדכן שלו הצומת.
בודק $8 \leq 90$ לא.
מעדכן $\beta=90$
בן שמאלי ימני - 17 ← מעדכן שלו הצומת ל- 17.
מעדכן $\beta=17$
מעדכן שלו השלב - 17. ואז $\alpha=17$ (רמה 3)
מעדכן שלו השלב 17 (רמה 2). $\beta=17$
יורד לבן הימני: $\alpha=-\infty, \beta=17$ (רמה 3)
עובר לבן השמאלי $\alpha=\infty, \beta=17$ (רמה 4)
הילד - 18: מעדכן שלו הצומת ל- 18.
$\beta$ נשאר 17
בן ימני = 18.
רמה 4 מתנגדת לרמה 3 עדיף 18
צומת max $17 \geq 18$ ולכן יש גיזום
לרמה 4 הימני של רמה 3.
כי 18 עובר לרמה 2. מתעלמים מהם.
מעבירים לשורש 17. $\alpha=17$
ורבים בתור הימני. עד לבן השמאלי - 99.
מעדכנים $\beta=99$ ומקבל צומת 99.
בן ימני - 8. עכשיו הולך לצומת.
8 עולה לרמה 3.
עוברים לבן הימני 5 עולה לרמה 4
$17 > 5$ ולכן גיזומים (אין בודקים את 16).