תשובה 1

א. תהי $X \in P(A)$ ויהי $|X| = i$.

ל- X יש בדיוק i תת-קבוצות בגודל $i-1$ (נזרוק בכל פעם אבר אחד מ- X).

אלה אברי $P(A)$ שאותם X מכסה.

אברי $P(A)$ המכסים את X הם קבוצות בגודל $i+1$ המכילות את A.

יש בדיוק $k-i$ קבוצות כאלה (נוסיף ל- X בכל פעם אבר אחד שמחוץ ל- X).

בסה"כ מספר השכנים של X הוא $i+(k-i)=k$, מספר שאינו תלוי ב- X.

משמע הגרף הוא רגולרי מדרגה k.

ב. בגרף יש 2^k צמתים, ודרגת כל צומת היא k.

סכום כל הדרגות בגרף הוא אפוא $k \cdot 2^k$.

מכאן שמספר הקשתות הוא $\frac{1}{2}k \cdot 2^k = k \cdot 2^{k-1}$.

ג. צד אחד הוא הקבוצות בעלות מספר זוגי של אברים והצד השני הוא הקבוצות בעלות מספר אי-זוגי של אברים (השלימו את הנימוק).

תשובה 2

נחשב:

$$\sum_{v \in V}\left(d_1(v)+d_2(v)\right) = \sum_{v \in V} d_1(v) + \sum_{v \in V} d_2(v)$$

לפי טענה 1.3 בעמ' 10 בחוברת נקבל

$$=2E_1 + 2E_2$$

כאשר E_1, E_2 הם מספרי הקשתות בכל אחד מהעצים.

מכיון שמדובר בעצים, ושניהם על אותה קבוצת צמתים V, נקבל מעמוד 19 משפט 2.5 סעיף 4:

$$=2(|V|-1)+2(|V|-1) = 4|V|-4$$

קיבלנו: $\sum_{v \in V}\left(d_1(v)+d_2(v)\right) = 4|V|-4$

אילו **לכל** $v \in V$ היה $d_1(v)+d_2(v) \geq 4$, היה בהכרח $\sum_{v \in V}\left(d_1(v)+d_2(v)\right) \geq 4|V|$,

בסתירה למה שקיבלנו. לכן לא ייתכן **שלכל** $v \in V$ יהיה $d_1(v)+d_2(v) \geq 4$.

במלים אחרות, **קיים** $v \in V$ עבורו $d_1(v)+d_2(v) \leq 3$.

תשובה 3

הגרף הוא דו צדדי, כאשר צד אחד הוא קבוצת האותיות והצד השני הוא קבוצת המספרים.

קבוצת השכנים של הקבוצה $\{a,b,c,d,e\}$ היא $\{1,2,3,4\}$.

מצאנו קבוצת צמתים בצד אחד של הגרף הדו-צדדי, שמספר שכניה קטן ממש ממספר אבריה.

לפי (הכיוון הקל של) משפט Hall (או מסקנה 4.8), אין בגרף זה זיווג מושלם.

תשובה 4 (תקציר)

א. הצדדים של H הם $\{1,2,3,4\}$, $\{5,6,7,8,9\}$ (מדוע?)

ב. 15 (הוכיחו. אפשר לחשב בשתי דרכים).

ג. לפי שאלה 3א בעמ' 61 בספר (השלימו את הפרטים)

תשובה 5

לא ניתן לקבוע בלי מידע נוסף. נציג דוגמא בה מספר הצביעה של G הוא 7 ודוגמא אחרת בה מספר הצביעה של G גדול מ- 7.

לפני שנתחיל, שימו לב שב- G_1 יש 8 צמתים וב- G_2 יש 14 צמתים. עוד שימו לב שמהנתון, מספר הצביעה של האיחוד G הוא לפחות 7, כי הוא מכיל תת-גרף שדורש 7 צבעים.

דוגמא 1

נניח ש- G_1 הוא הגרף המלא על 5 צמתים, K_5, ועוד 3 צמתים מבודדים (או שכל אחד מהשלושה מחובר בקשת לאחד הצמתים של K_5, לא משנה לצורך ההוכחה), כאשר הצמתים 7, 8 נמצאים שניהם ב- K_5. מובן שמספר הצביעה של G_1 הוא 5.

נניח ש- G_2 הוא גרף בעל שני רכיבי קשירות, שכל אחד מהם הוא עותק של K_7, והצמתים 7, 8 נמצאים **ברכיבי קשירות שונים**.

מובן שמספר הצביעה של G_2 הוא 7.

בנתונים אלה לא קשה לצבוע את האיחוד G ב- 7 צבעים – תארו כיצד זה ניתן.

דוגמא 2

לגרף G_2 שהגדרנו בדוגמא הקודמת נוסיף שש קשתות: קשת בין הצומת 7 לבין **כל אחד מהצמתים שברכיב הקשירות השני**, פרט ל- 8, שאותו לא נחבר בקשת ל- 7.

את הגרף שקיבלנו מ- G_2 עם התוספת הזו ניתן לצבוע ב- 7 צבעים, אבל רק אם 7, 8 יהיו צבועים באותו צבע (נמקו מדוע).

ניקח את G_1 להיות אותו G_1 מדוגמא 1. בגרף זה 7, 8 חייבים להיות בצבעים שונים.

את האיחוד של G_1 עם הגרף G_2 המורחב שתיארנו כאן לא ניתן לצבוע ב- 7 צבעים – נמקו בעצמכם מדוע!

איתי הראבן