20425 - תאריך הבחינה: 5.7.2010 (סמסטר 2010ב - מועד א/85)

שאלה 1

א1.

$$\frac{\binom{8}{4}\binom{17}{6}}{\binom{25}{10}} = 0.2650$$

א2. מספר בקבוקי המים שנותרו בחנות הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N = 25$ (סה"כ הבקבוקים), $m = 8$ (בקבוקי המים) ו- $n = 10$ (הבקבוקים שנותרו בחנות).

א3. אם ידוע שנותרו 4 בקבוקי מים, זאת אומרת שנקנו 4 בקבוקי מים ו-11 בקבוקי מיץ/קולה. לכן, חמשת הקונים הראשונים לא קנו בקבוקי מים, רק אם קנו 5 מתוך 11 בקבוקי המיץ/קולה. לפיכך:

$$\frac{\binom{11}{5}}{\binom{15}{5}} = 0.15385$$

ב. נסמן ב- Y_1 את מספר בקבוקי המיץ שנקנו, ב- Y_2 את מספר בקבוקי הקולה שנקנו וב- Y_3 את מספר בקבוקי המים שנקנו. לכל אחד מה- Y_i-ים יש התפלגות היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N = 25$, $n = 15$ ו- m שתלוי בסוג המשקה (10, 7 ו-8, בהתאמה). לפיכך:

$$E[R] = E[3Y_1 + 4Y_2 + 6Y_3 - 0.5(25-15)] = E[3Y_1 + 4Y_2 + 6Y_3 - 5]$$
$$= 3E[Y_1] + 4E[Y_2] + 6E[Y_3] - 5 = 3\cdot 15\cdot \tfrac{10}{25} + 4\cdot 15\cdot \tfrac{7}{25} + 6\cdot 15\cdot \tfrac{8}{25} - 5 = 58.6$$

שאלה 2

א. הוכחת הטענה מובאת בספר הקורס.

ב1.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c}{a^i} = c\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^i = \frac{c}{1-\frac{1}{a}} = \frac{ac}{a-1} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{a-1}{a}$$

ב2. לכל $t < \ln a$ מתקיים:

$$M_Y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ti}\cdot\frac{c}{a^i} = c\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{e^t}{a}\right)^i \underset{\substack{\downarrow \\ e^t < a}}{=} \frac{c}{1-\frac{e^t}{a}} = \frac{ac}{a-e^t} = \frac{a}{a-e^t}\cdot\frac{a-1}{a} = \frac{a-1}{a-e^t}$$

ב3.

$$E[Y] = \frac{d}{dt}M_Y(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left[\frac{a-1}{a-e^t}\right]\Bigg|_{t=0} = \frac{(a-1)e^t}{(a-e^t)^2}\Bigg|_{t=0} = \frac{1}{a-1}$$

שאלה 3

א. לכל $n = 2,3,...$ מתקיים:

$$P\{X+Y=n\} = \sum_{i=1}^{n-1} P\{X=i\,, Y=n-i\}$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} P\{X=i\}P\{Y=n-i\} \qquad [\text{ } X \text{ ו-} Y \text{ בלתי-תלויים }]$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} 0.8^{i-1}\cdot 0.2\cdot 0.5^{n-i} = 0.2\cdot 0.5^{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} 0.8^{i-1}\cdot 0.5^{-i+1}$$
$$= \frac{0.2}{0.5}\cdot 0.5^n\cdot\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{0.8}{0.5}\right)^i = 0.4\cdot 0.5^n\,\frac{1-1.6^{n-1}}{1-1.6} = \frac{2}{3}\cdot 0.5^n(1.6^{n-1}-1)$$

ב. $P\{X=Y\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=i\,,Y=i\}$

$=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=i\}P\{Y=i\}$ [X ו-Y בלתי-תלויים]

$=\sum_{i=1}^{\infty}0.2\cdot0.8^{i-1}\cdot0.5^{i}=0.2\cdot0.5\cdot\sum_{i=1}^{\infty}(0.8\cdot0.5)^{i-1}=0.1\cdot\frac{1}{1-0.4}=0.1667$

ג. כדי להשתמש באי-שוויון מרקוב עלינו למצוא את $E[Z^2]$.

$E[Z]=E[X+Y]=E[X]+E[Y]=\frac{1}{0.2}+\frac{1}{0.5}=7$

$\mathrm{Var}(Z)=\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)=\frac{0.8}{0.2^2}+\frac{0.5}{0.5^2}=22$ [X ו-Y בלתי-תלויים]

לכן: $E[Z^2]=\mathrm{Var}(Z)+(E[Z])^2=22+49=71$

כעת, לפי אי-שוויון מרקוב: $P\{Z^2>90\}\le P\{Z^2\ge 90\}\le\frac{E[Z^2]}{90}=\frac{71}{90}=0.7889$

אבל, אפשר לשפר את החסם, אם מביאים בחשבון את הערכים האפשריים של המשתנה המקרי Z^2 . מכיוון ש-Z מקבל ערכים שלמים הגדולים מ-1, נובע שהערכים האפשריים של Z^2 הם 4, 9, 16, ...

לפיכך, מתקיים: $P\{Z^2>90\}=P\{Z^2\ge 100\}\le\frac{E[Z^2]}{100}=\frac{71}{100}=0.71$

שאלה 4

א. נסמן ב-X את המשקל (בגרמים) של צנצנת מקרית; $X\sim N(500\,,\sigma^2)$.

לפי הנתון בשאלה מתקיים השוויון: $P\{X>515\}=0.0668$

ומכאן שמתקיים: $P\{X\le 515\}=\Phi\left(\frac{515-500}{\sigma}\right)=1-0.0668=0.9332=\Phi(1.5)$

ולכן: $515-500=1.5\sigma \quad\Rightarrow\quad \sigma=10 \quad\Rightarrow\quad \sigma^2=100$

ב. נפתור את המשוואה $P\{X>a\}=0.62$: $P\{X<a\}=\Phi\left(\frac{a-500}{10}\right)=0.38\cong\Phi(-0.3055)$

כלומר, המשקל (בגרמים) הוא: $a=500-0.3055\cdot 10=496.945$

עלינו למצוא z שמקיים את המשוואה:

$\Phi\left(\frac{a-500}{10}\right)=0.38=\Phi(-z) \quad\Rightarrow\quad \Phi(z)=0.62$

מתקיים:

$\Phi(0.30)=0.6179<0.62$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$0.01 \qquad 0.0038$

$\uparrow \qquad \uparrow$

$\Phi(0.31)=0.6217>0.62$

לפיכך, עלינו להשתמש במרחק של 0.62 מהערכים הקרובים לו ביותר בטבלה, כדי למצוא את המיקום היחסי של z המבוקש. נקבל:

$0.62-0.6179=\underline{0.0021}$

$\Leftarrow \quad \Phi(0.30+0.01\cdot\underline{\underline{0.0021}}/\underline{0.0038})=\Phi(0.3055)=0.62$

ג. $P\{X<490\} = \Phi\left(\frac{490-500}{10}\right) = \Phi(-1) = 1-0.8413 = 0.1587$

כעת, נסמן ב-Y את מספר הצנצנות שיישקלו עד למציאת הצנצנת הראשונה שמשקלה נמוך מ-490 גרם.
למשתנה המקרי Y יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר 0.1587. לכן, ההסתברות המבוקשת היא :

$$P\{Y>10\} = (1-0.1587)^{10} = 0.1776$$

ד. $P\{490<X<503\} = \Phi\left(\frac{503-500}{10}\right) - \Phi\left(\frac{490-500}{10}\right) = \Phi(0.3) - \Phi(-1) = 0.6179 - 1 + 0.8413 = 0.4592$

$$P\{X>503\} = 1-\Phi\left(\frac{503-500}{10}\right) = 1-\Phi(0.3) = 1-0.6179 = 0.3821$$

בעזרת פונקציית ההסתברות המולטינומית, נקבל את ההסתברות המבוקשת :

$$\frac{20!}{4!\cdot 10!\cdot 6!}\cdot 0.1587^4 \cdot 0.4592^{10} \cdot 0.3821^6 = 0.0319$$

שאלה 5

נסמן ב-A, B ו- C את המאורעות שיוסף עונה נכון על שאלות A, B ו- C, בהתאמה.
מהנתונים מקבלים :

$$P(A^C \cap B^C \cap C^C) = 0.02$$

$$P(A\cap B\cap C) = 0.4$$

$$P(A\cup B) = 0.93$$

$$P(A\cap B \mid A\cup B) = \tfrac{20}{31} \quad\Rightarrow\quad \frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)} = \frac{P(A\cap B)}{0.93} = \frac{20}{31} \quad\Rightarrow\quad P(A\cap B) = 0.6$$

$$\Rightarrow\quad P(A\cap B\cap C^C) = P(A\cap B) - P(A\cap B\cap C) = 0.6-0.4 = 0.2$$

$$P(A\mid C) = \tfrac{5}{6} \quad\Rightarrow\quad \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{5}{6} \quad\Rightarrow\quad P(A\cap C) = \tfrac{5}{6}P(C)$$

$$P(A\cap C^C) = 0.3$$

$$P(A) = \tfrac{4}{3}P(C) \quad\Rightarrow\quad P(A) = P(A\cap C) + P(A\cap C^C) = \tfrac{5}{6}P(C) + 0.3$$

$$\Rightarrow\quad P(A) = \underline{\tfrac{4}{3}P(C) = \tfrac{5}{6}P(C) + 0.3} \quad\Rightarrow\quad P(C) = 0.6 \quad\Rightarrow\quad P(A) = 0.8$$

$$\Rightarrow\quad P(A\cap C) = 0.5 \quad\Rightarrow\quad P(A\cap C\cap B^C) = 0.5-0.4 = 0.1$$

$$\Rightarrow\quad P(A\cap B^C\cap C^C) = P(A\cap C^C) - P(A\cap B\cap C^C) = 0.3-0.2 = 0.1$$

$$\Rightarrow\quad P(A^C\cap C) = P(C) - P(A\cap C) = 0.6-0.5 = 0.1$$

$$\Rightarrow\quad P(A^C\cap B) = P(A\cup B) - P(A) = 0.93-0.8 = 0.13$$

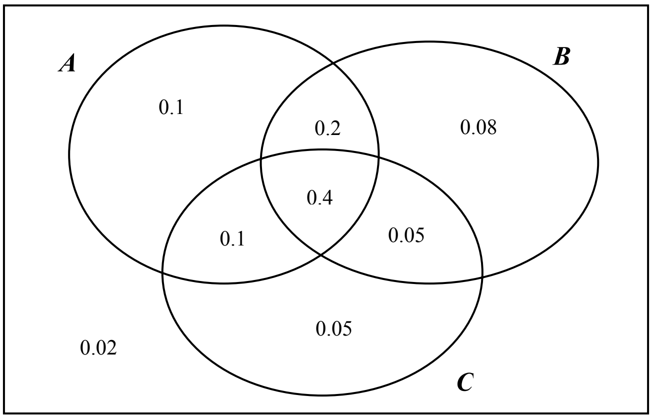
$$\Rightarrow\quad P((A^C\cap B)\cup(A^C\cap C)) = 1-P(A) - P(A^C\cap B^C\cap C^C) = 1-0.8-0.02 = 0.18$$

$$\Rightarrow\quad P((A^C\cap B)\cap(A^C\cap C)) = P(A^C\cap B\cap C) = 0.1+0.13-0.18 = 0.05$$

$$\Rightarrow\quad P(A^C\cap B\cap C^C) = 0.13-0.05 = 0.08$$

$$\Rightarrow\quad P(A^C\cap B^C\cap C) = 0.1-0.05 = 0.05$$

נצייר דיאגרמת ון מתאימה לבעיה:



א. מהדיאגרמה נובע כי:

$$P\{X=0\}=0.02$$

$$P\{X=1\}=0.1+0.08+0.05=0.23$$

$$P\{X=2\}=0.2+0.1+0.05=0.35$$

$$P\{X=3\}=0.4$$

לכן:

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0 & , \quad y<0\\ 0.02 & , \quad 0\le y<1\\ 0.25 & , \quad 1\le y<2\\ 0.6 & , \quad 2\le y<3\\ 1 & , \quad y\ge 3\end{cases}$$

ב. נסמן ב-Y את הציון של יוסף במבחן ונקבל:

$$E[Y]=0\cdot 0.02+33\cdot 0.23+66\cdot 0.35+100\cdot 0.4=70.69$$

ג.

$$P\{X=3\mid X\ge 2\}=\frac{P\{X=3\}}{P\{X\ge 2\}}=\frac{0.4}{0.75}=0.5333$$

ד.

$$P(A\mid A^C\cup B^C\cup C^C)=\frac{P(A\cap(B^C\cup C^C))}{P(A^C\cup B^C\cup C^C)}=\frac{0.1+0.1+0.2}{1-0.4}=0.6667$$