פתרונות לממ"ן 14 בקורס "אלגוריתמים", סמסטר ב' 2006

שימו לב: לעיתים חסרים פרטים בפתרון ואתם מתבקשים לוודא שהינכם יודעים להשלים את הפרטים החסרים. בכל מקרה כזה, הדבר מצויין במפורש, ואין לראות בפתרון הנתון תשובה מלאה.

שאלה 1

עבור גרף דו-צדדי $G = (X\cup Y, E)$ **זיווג 2-מושלם** $M \subseteq E$ הוא קבוצת קשתות כך שלכל צומת ב-X יש בדיוק שתי קשתות ב-M שפוגעות בו ולכל צומת ב-Y יש בדיוק קשת אחת ב-M שפוגעת בו.

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל כקלט גרף דו-צדדי $G = (X\cup Y, E)$ וקובע אם יש ב-G זיווג 2-מושלם. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

תשובה

נפתור ע"י רדוקציה לבעיית זיווג מושלם, שאותה בתורה נפתור ע"י רדוקציה לבעיית זיווג מקסימלי.

יהי M זיווג 2-מושלם. יהי n מספר הקשתות ב-M. מספר הפגיעות של קשתות מ-M בצמתים מ-X הוא $n = 2|X|$. מספר הפגיעות של קשתות מ-M בצמתים מ-Y הוא $n = |Y|$. לכן $2|X| = |Y|$. יהי X' עותק נוסף של X. עבור כל קשת (u, v) ב-G נוסיף קשת (u', v) וכך נקבל גרף דו-צדדי מורחב: $G'=((X\cup X')\cup Y, E')$.

נראה כעת כי לגרף המקורי יש זיווג 2-מושלם אם ורק אם בגרף החדש יש זיווג מושלם. נניח שיש בגרף המקורי זיווג 2-מושלם M. לכל צומת u ב-X יש שתי קשתות שפוגעות בו (u, v_1) ו-(u, v_2). בגרף החדש נבחר את הקשת (u, v_1) ואת הקשת (u', v_2). קיבלנו בגרף החדש קבוצת קשתות M', כך שלכל צומת u ב-X יש בדיוק קשת אחת ב-M' שפוגעת בו, לכל צומת u' ב-X' יש בדיוק קשת אחת ב-M' שפוגעת בו, ולכל צומת v ב-Y יש בדיוק קשת אחת ב-M' שפוגעת בו (או קשת מהצורה (u, v) או קשת מהצורה (u', v)). לכן M' היא זיווג מושלם בגרף החדש.

בכיוון השני, יהי M' זיווג מושלם בגרף החדש. לכן, לכל צומת u ב-X יש ב-M' בדיוק קשת אחת שפוגעת בו, לכל צומת u' ב-X' יש בדיוק קשת אחת ב-M' שפוגעת בו, ולכל צומת v ב-Y יש בדיוק קשת אחת ב-M' שפוגעת בו. בגרף המקורי נבחר את כל הקשתות מ-M' שפוגעות בצמתי X, ובמקום כל קשת (u', v) שפוגעת בצומת מ-X' נבחר את הקשת (u, v). קיבלנו קבוצת קשתות M, כך שלכל צומת ב-X יש בדיוק שתי קשתות ב-M שפוגעות בו, ולכל צומת ב-Y יש בדיוק קשת אחת ב-M שפוגעת בו. לכן M היא זיווג 2-מושלם ב-G.

אם כך, אם נמצא זיווג מושלם בגרף החדש, יש בגרף המקורי זיווג 2-מושלם, ואם אין בגרף החדש זיווג מושלם, אז גם אין בגרף המקורי זיווג 2-מושלם.

כדי לקבוע אם יש בגרף החדש זיווג מושלם נמצא בו זיווג מקסימלי. אם גודל הזיווג המקסימלי שווה ל-$|Y|$, אז יש זיווג מושלם. אחרת אין.

זיווג מקסימלי ניתן למצוא בסיבוכיות $O((|V'|+|E'|)\cdot|M'|)$, כאשר M' הוא הזיווג המקסימלי (ע"י רדוקציה לבעיית מציאת זרימה מקסימלית). $|V'| = 2|X|+|Y|$, $|E'| = 2|E|$, $|M'| = O(|V|)$. ברור כי $|E| \geq |V|/2$, כי אחרת בוודאי אין זיווג מושלם, ולכן בסה"כ נקבל כי הסיבוכיות היא $O(|E|\cdot|V|)$.

שאלה 2

בהינתן גרף דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$, נגדיר עבור $A \subseteq X$ את קבוצת השכנים של A:

$$N(A) = \{y \mid (x, y)\in E,\ x\in A\}$$

משפט הול (Hall's theorem) הוא המשפט הבא:

בגרף G דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$, כך ש- $|X| = |Y|$, יש זיווג מושלם, כלומר זיווג בגודל $|X|$, אם ורק אם לכל $A \subseteq X$ מתקיים: $|N(A)| \geq |A|$.

עתה, נניח שנתונות בידינו שתי חפיסות קלפים, חפיסה A וחפיסה B, כל אחת מכילה 52 קלפים: לכל דרגה מ-13 הדרגות (אס, 2, 3, ..., 10, נסיך, מלכה, מלך) יש ארבעה קלפים (תלתן, לב, עלה, יהלום). סדר הקלפים בכל חפיסה הוא אקראי. מתבצע התהליך הבא: נלקחים הקלף הראשון (העליון) מהחפיסה A והקלף הראשון (העליון) מהחפיסה B והם מודבקים גב אל גב כך שנוצר קלף עם שתי פנים. אח"כ נלקח הקלף השני מכל ערימה והם מודבקים באותה דרך, וכך ממשיך התהליך עד שמתקבלת חפיסה אחת בת 52 קלפים דו-צדדיים.

א. הוכיחו כי בחפיסה החדשה קיימים 13 קלפים אשר מכילים יחד כל אחת מ-13 הדרגות של A (אס, 2, 3, ..., 10, נסיך, מלכה, מלך) וכל אחת מ-13 הדרגות של B.

ב. הראו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו אשר מוצא את 13 הקלפים שאת קיומם הוכחתם בסעיף א'. נתחו את סיבוכיות האלגוריתם כפונקציה של מספר הדרגות (כלומר, החליפו את הקבוע 13 בפרמטר משתנה n).

<u>תשובה</u>

נראה קודם כל אלגוריתם המוצא 13 קלפים כנדרש. מהוכחת נכונותו תנבע כמובן עובדת קיומם של 13 קלפים כאלו.
נפתור זאת ע"י רדוקציה לבעיית זיווג מקסימלי. ניצור גרף דו-צדדי $G=(X\cup Y, E)$. צמתי X יהיו 13 הדרגות של A וצמתי Y יהיו 13 הדרגות של B. עבור כל הדבקה של קלף מ-A לקלף מ-B תהיה ב-E קשת מהצומת ב-X המתאים לדרגת הקלף המודבק מ-A אל הצומת ב-Y המתאים לדרגת הקלף המודבק מ-B.

תהי $X' \subseteq X$ ונניח בשלילה כי $N(|X'|) < |X'|$. כל קלף הודבק, ולכן כל דרגה בחפיסה הודבקה 4 פעמים. לכן, סה"כ השכנים של X' מייצגים $4 \cdot |X'|$ הדבקות. מאחר שהנחנו ש- $N(|X'|) < |X'|$ הרי ש- $4 \cdot |X'|$ הדבקות מתחלקות על פחות מ- $|X'|$ צמתים. לכן יש צומת ב- $N(|X'|)$ שהודבק יותר מ-4 פעמים, בסתירה למתואר בשאלה. לכן מכאן $N(|X'|) \geq |X'|$, וע"פ משפט הול יש בגרף זיווג מושלם.

הזיווג המושלם הוא קבוצה של קשתות, כל אחת מחברת צומת מ-X עם צומת מ-Y כך שכל צומת מ-X נוגע בדיוק בקשת אחת מהזיווג וכל צומת מ-Y נוגע בדיוק בקשת אחת מהזיווג. לכן יש בזיווג בדיוק 13 קשתות, כמספר צמתי X וכמספר צמתי Y. כל קשת מהזיווג מחברת צומת מ-X עם צומת מ-Y ומייצגת הדבקה של קלף מ-A עם קלף מ-B כך ש-13 הקלפים הדו-צדדיים המתקבלים כוללים ביחד את כל דרגות A (צמתי X) וכל דרגות B (צמתי Y).

אם כך, קיימים בחפיסה 13 קלפים כנדרש. עלות מציאתם היא כעלות מציאת זיווג מקסימלי בגרף, כלומר $O((|V| + |E|) \cdot |M|)$. M הוא הזיווג המקסימלי שגודלו חסום ע"י 13 (או n במקרה הכללי). מספר הצמתים בגרף הדו-צדדי המתקבל הוא $2 \cdot n$ ומספר הקשתות חסום ע"י $4 \cdot n$. סה"כ הסיבוכיות המתקבלת היא $O(n^2)$.

<u>שאלה 3</u>

השאלה עוסקת בחיווט בין מתגי חשמל לנורות בקומת מגורים. תוכנית הקומה נתונה ע"י m קירות, כלומר, ע"י m קטעים אנכיים או אופקיים, כאשר נקודות הקצה של הקטע ה-i הן (x_i, y_i) ו-(x'_i, y'_i). ניתן להניח כי m הקטעים הנתונים אכן יוצרים תוכנית קומה חוקית, כלומר שניתן לשרשר את הקטעים זה לזה, כך שאין שני קטעים אופקיים רצופים או שני קטעים אנכיים רצופים, נקודת הסיום של קטע היא תמיד נקודת ההתחלה של הקטע הבא אחריו, והקטעים יוצרים מצולע סגור במישור.

תוכנית הקומה כוללת גם n נקודות המיועדות למתגים ו-n נקודות המיועדות לנורות. המטרה היא לקשר כל נורה אל אחד מבין המתגים וכל מתג אל אחת מבין הנורות.

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו, המקבל כקלט תוכנית קומה (הכוללת כאמור m קטעים המייצגים את הקירות, n נקודות מתגים ו-n נקודות נורות) וקובע אם קיים קישור של n הנורות ל-n המתגים כך שכל נורה מקושרת למתג אחד בדיוק ומכל מתג יש קו ראיה פנוי אל הנורה עליה הוא אמור לשלוט (כך שהאדם המפעיל את המתג יוכל לראות ממקום עומדו אם אכן פעולת ההדלקה או הכיבוי הצליחה).

הניחו כי יש בידכם שיגרה הפועלת בזמן קבוע, מקבלת כקלט שני קטעים במישור וקובעת האם הם נחתכים או לא.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

תשובה

נפתור על ידי רדוקציה לבעיית זיווג מקסימלי. נבנה גרף דו-צדדי. מצדו האחד צומת לכל נורה, ומצדו השני צומת לכל מתג. נעביר קשת בין נורה למתג אם ורק אם יש קו ראיה פנוי ביניהם. הבדיקה אם יש קו ראיה פנוי נעשית באופן הבא: הנורה והמתג הן שתי נקודות המגדירות סגמנט. צריך לבדוק עבור כל אחד מהקירות אם הוא חותך את הסגמנט הזה. לכן העלות של הבדיקה היא $O(m)$, עבור זוג של נורה ומתג. מאחר שיש n^2 זוגות כאלה, עלות בניית הגרף היא $O(mn^2)$. עכשיו נמצא בגרף זיווג מקסימלי. אם הזיווג בגודל n נחזיר תשובה חיובית (קיים קישור של כל הנורות לכל המתגים כנדרש). אם הזיווג קטן יותר, התשובה שלילית. עלות מציאת זיווג מקסימלי היא $O((|V|+|E|)\cdot|M|)$, כאשר M הוא הזיווג המקסימלי, שגודלו חסום בבירור ע״י n. מספר הצמתים בגרף הוא $O(n)$ ומספר הקשתות הוא $O(n^2)$ ולכן בסה״כ הסיבוכיות היא $O(n^3)$.

שאלה 4

בחורש מסויים סומנו שבילים להליכה עממית. ישנן כמה נקודות התחלה אפשריות ונקודת סיום אחת וביניהן פרושה רשת השבילים. ההולכים בוחרים את דרכם בחורש בהתאם לקושי ההליכה בשבילים, הנוף הנשקף מהם או שיקולים אישיים אחרים.

בצמתי השבילים ניתן למקם לוחות מודעות אך ייתכן שעלות התקנת לוח בכל צומת היא שונה משום שהיא תלויה במבנה הטופוגרפי שלו ובתכונות הקרקע במקום. לוחות המודעות נועדו לתליית מודעות עדכניות החשובות למארגני האתר.

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל את רשת השבילים, כולל עלויות ההתקנה בצמתים השונים, ובודק מהי העלות המינימלית שיש להשקיע בהתקנת לוחות מודעות כך שיובטח כי כל הולך יעבור על פני לוח מודעות אחד לפחות עוד **לפני** הגיעו לנקודת הסיום.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

תשובה

רשת השבילים מתאימה לרשת זרימה, אך ברשת זו יש קיבולים (עלויות התקנה) לצמתים ולא לקשתות. לכן נבצע רדוקציה לבעיית זרימה מקסימלית סטנדרטית. תהי V קבוצת צמתי השבילים ביער, כולל נקודות ההתחלה, אך ללא צומת הסיום, ויהי t צומת הסיום. נבנה לבעייה את הרשת הבאה: כל צומת $v\in V$ נחליף בשני צמתים v_{in} ו-v_{out}. נוסיף צומת מקור חדש s וצומת הבור יהיה t. כל קשת (u, v) בגרף המקורי נחליף בגרף החדש בקשת (v_{out},v_{in}) וקיבולה יהיה ∞. כל קשת (u, t) בגרף המקורי נחליף בגרף החדש בקשת (u_{out}, t), אף היא בקיבול ∞. לכל צומת $v\in V$ נוסיף לרשת את הקשתות (v_{in},v_{out}), שקיבולן כעלות התקנת לוח בצומת v, ועבור כל צומת v שהוא צומת התחלה בגרף המקורי נוסיף לרשת את הקשתות (s, v_{in}) שקיבולן ∞. מספר הצמתים ברשת החדשה הוא $O(|V|)$, מספר הקשתות הוא $O(|E|+|V|)$, כאשר $O(|E|)$ מספר השבילים בגרף המקורי. לכן, עלות בניית הרשת היא $O(|E|+|V|)$. נמצא ברשת זרימה מקסימלית.

ערך הזרימה המקסימלית שווה לקיבול החתך המינימלי. ברור שקיים חתך שקיבולו סופי (החתך שבצידו האחד s וכל צמתי in של צמתי ההתחלה, ובצידו השני שאר הצמתים) ולכן גם קיבול החתך המינימלי סופי והוא שווה בדיוק לסך

והוא שווה בדיוק לסך עלות הצבת השלטים בצמתים שהקשתות המתאימות להם חוצות את החתך.

סיבוכיות: זו לא בהכרח זרימה בשלמים, ולא ידוע חסם על הזרימה המקסימלית, ולכן ננתח ע״פ האלגוריתם של אדמונדס-קארפ למציאת זרימה מקסימלית שעלותו $O(|V|(|E|+|V|)^2)$.

שאלה 5

א. תהי f זרימה מקסימלית ברשת זרימה $G=(V,E)$ עם מקור s ובור t ופונקציית קיבול c. תהי G_f הרשת השיורית של G המושרית על-ידי f .

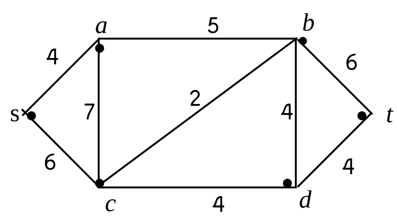
תהי T הקבוצה $T=\{v\in V:$ קיים מסלול מ- v אל t ב- $G_f\}$ ותהי $S=V-T$.

הראו כי (S, T) הוא חתך וכי חתך זה מקיים $|f|=c(S,T)$.

נרצה למצוא אלגוריתם המקבל כקלט רשת זרימה ומוצא קשת שהגדלת הקיבול שלה תגדיל את הזרימה ברשת.

ב. האם תמיד יש קשת כזו? הוכיחו.

ג. הציעו אלגוריתם המוצא קשת כזו אם קיימת. הוכיחו את נכונותו ונתחו את סיבוכיותו. (רמז: היעזרו בין השאר בסעיף א׳). הדגימו את פעולת האלגוריתם על הרשת:



תשובה

א. $t\in T$ באופן טריוויאלי (תמיד יש מסלול מצומת לעצמו). $s\notin T$ כי f זרימה מקסימלית ולכן אין בגרף השיורי G_f מסלולי שיפור ובפרט אין בו מסלול מ-s ל-t. לכן זהו חתך. יהיו $u\in S$ ו-$v\in T$. נראה כי $f(u, v)=c(u, v)$. אחרת, הקשת (u, v) קיימת ברשת השיורית G_f , ואז מאחר ש-$v\in T$ יש מסלול מ-v ל-t ומקיום הקשת (u, v) יש גם מסלול מ-u ל-t ואז $u\in T$ בסתירה לכך ש-$u\in S$. לכן $f(u, v)=c(u, v)$. ומכאן $|f|=f(S, T)=c(S, T)$. שימו לב כי מכך נובע שזהו חתך מינימלי.

ב. לא. למשל, נסתכל ברשת המכילה את s ו-t ועוד שני צמתים a ו-b. מ-s יש שתי קשתות ל-a ול-b שקיבולן 5 ואל t מובילות שתי קשתות מ-a ומ-b שקיבולן 5. ברשת זו אין קשת אחת שהגדלת הקיבול שלה תגדיל את הזרימה ברשת.

ג. נפעיל את האלגוריתם של פורד ופלקרסון למציאת זרימה מקסימלית ברשת. עתה נחשב חתך (S_1,T_1) כך ש-S_1 מכילה בדיוק את כל הצמתים שיש ברשת השיורית מסלול מ-s אליהם. נחשב חתך (S_2,T_2) כך ש-T_2 מכילה בדיוק את כל הצמתים שיש ברשת השיורית מסלול מהם ל-t. הקשתות שהגדלת קיבולן תגדיל את הזרימה בקשת הן בדיוק הקשתות מ-S_1 אל T_2 .

נכונות: אם (u, v) היא קשת מ-S_1 אל T_2 , אז יש ברשת השיורית מסלול מ-s אל u ויש ברשת השיורית מסלול מ-v אל t ולכן אם יגדל הקיבול בקשת (u, v) אפשר ליצור ברשת השיורית מסלול מ-s אל t. בכיוון השני, נניח ש-(u, v) היא קשת שהגדלת קיבולה מגדילה את הזרימה ברשת. אם הקשת מחברת בין צמתים ב-S_1 אז הגדלת קיבולה לא משנה את קיבול החתך (S_1,T_1). באופן דומה, אם הקשת מחברת בין צמתים ב-T_2 אז הגדלת קיבולה לא משנה את קיבול החתך (S_2,T_2). אם הקשת יוצאת מ-S_1 אל צומת שאינו ב-T_2 אז קיבול החתך (S_2,T_2) לא משתנה,

ובאופן דומה אם היא נכנסת אל T_2 מצומת שאינו ב- S_1 קיבול החתך (S_1,T_1) לא משתנה. אם כך, בכל אחד מהמקרים האלו קיבולו של חתך מינימלי אחד לפחות לא משתנה והוא עדיין נשאר מינימלי ולכן ערך הזרימה המקסימלית לא משתנה. לכן בהכרח הקשת יוצאת מ- S_1 ונכנסת ל- T_2.

סיבוכיות: הפעלת האלגוריתם של פורד ופלקרסון עולה $O(|V||E|^2)$ (ע"י אדמונדס-קארפ). חישוב החתכים ניתן לביצוע ע"י BFS מ-s על הגרף השיורי G_f וע"י BFS מ-t על $(G_f)^t$. לכן עלות חישוב החתכים היא $O(|E|+|V|)$ ועלות האלגוריתם כולו $O(|V||E|^2)$.