

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל שעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת  
 בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר ולא חובה לנות הסבר קצר: כמה מילים, לא יותר משתי שורות. הסבר קטן לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה מצד שני, הסבר קטן בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

6 (נק') א.  $f$  היא פונקציה של קבוצה  $A$  לקבוצה  $B$ .

איזה מהפסוקים הבאים מביע את הטענה ש- $f$  היא חד-חד-ערכית?

[1]  $\forall x \forall y (f(x) \neq f(y))$

[2]  $\forall x \exists y ((x \neq y) \wedge f(x) \neq f(y))$

[3]  $\forall x \forall y ((x \neq y) \wedge f(x) \neq f(y))$

[4]  $\forall x \forall y ((x \neq y) \rightarrow (f(x) \neq f(y)))$

[5]  $\forall x \forall y ((f(x) \neq f(y)) \rightarrow (x \neq y))$

בכל הסעיפים, הכמת "לכל" מתייחס לאברים של  $A$ .

7 (נק') ב. תהי  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - y = \sqrt{2}) \wedge (x + y \in \mathbb{N})\}$

עוצמת  $A$  היא:

[1] 0 [2] מספר סופי כלשהו שאינו 0 [3]  $\aleph_0$

[4]  $\aleph_1$  [5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

6 (נק') ג.  $T$  הוא עץ על 20 צמתים. נסלק מ- $T$  אחד הצמתים הפנימיים (כלומר צומת

שאינו עלה) ואת כל הקשתות הסמוכות לצומת זה.

קיבלנו גרף על 19 צמתים, נקרא לו  $G$ . בחרו את האמירה הנכונה:

[1]  $G$  הוא עץ

[2]  $G$  הוא יער שאינו עץ

[3]  $G$  הוא גרף קשיר אבל הוא לא עץ

[4]  $G$  הוא לא גרף קשיר והוא גם לא יער

[5] אין די מידע כדי לדעת איזה מהסעיפים תקודמים מתקיים.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות  
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו 81 נקודות

### שאלה 2

תהי  $A = \{1, 2, 3\}$  ותהי  $M$  קבוצת כל היחסים (תרלציות) מעל  $A$ .  
נסמן:  $K = \{(1, 2), (2, 3)\}$ . היחס  $K$  קבוע לכל אורך השאלה.  
בשרת  $K$  גנדר פונקציה  $f: M \rightarrow M$ , בצורה הבאה:  
לכל  $R \in M$ ,  $f(R) = RK$  (הכפל הוא כפל יחסים).

9 נק' א. האם  $f$  חד-חד-ערכית? הוכיחו את תשובתכם.

9 נק' ב. האם  $f$  היא עלו? הוכיחו את תשובתכם.

9 נק' ג. הוכיחו שלכל  $R \in M$ ,  $f(f(f(R))) = \emptyset$ . נמקו במדויק כל צעד בהוכחת.

### שאלה 3

בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל  $2 \times 1$ :



ומספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל  $2 \times 2$ :

בלוק של  $2 \times 1$  יכול להיות בצבע לבן או בצבע שחור.

בלוק של  $2 \times 2$  יכול להיות אדום, כתול, ירוק או סגול.

להסיר ספק: בלוק צבוע כולו בצבע אחד, לא כל משבצת בנפרד.

עלינו לרצף מלבן שממדיו  $n \times 2$  (בציור משמאל  $n = 7$ )

בלי לתרום מגבולות המלבן.

בלוק של  $2 \times 1$  אפשר להניח כרצוננו "שוכב" או "עומד".

להסיר ספק: בריצוף, גבולות הבלוקים נראים לעין. ריצוף בשני בלוקים לבנים העומדים זה ליד

זה שונה מריצוף בשני בלוקים לבנים השוכבים זה על גבי זה. כנייל לבני בלוקים שחורים.

יהי  $a_n$  מספר הריצופים השונים תאפשריים.

20 נק' א. מצאו את  $a_0, a_1, a_2$ .

כתבו (ונמקו) יחס נסיגה עבור  $a_n$ . שימו לב לא לספור פעמיים מצבים זהים.

פתרו את יחס הנסיגה.

7 נק' ב. חשבו את  $a_4$  בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שכתבתם

ומתוך הנסחה המפורשת שמצאתם.

$$a_4 = 176$$

שאלה 4

9 נק' א

בכמה דרכים ניתן לחלק 6 כדורים שונים בין 10 תאים שונים, כך שלפחות תא אחד יכיל יותר מכדור אחד?

$$10^6 - \binom{10}{1}$$

9 נק' ב

בכמה דרכים ניתן לחלק 6 כדורים זהים בין 10 תאים שונים, כך שלפחות תא אחד יכיל יותר מכדור אחד?

$$\binom{10}{1}$$

9 נק' ג

בכמה דרכים ניתן לחלק 6 כדורים זהים בין 10 תאים שונים, כך שיהיה בדיוק תא אחד (שאינו ידוע מראש) שיכיל בדיוק 3 כדורים?

$$\binom{10}{1} \cdot \binom{6}{3}$$

שאלה 5

תהי  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

תהי  $\mathcal{F}$  קבוצת הקבוצות החלקיות ל- $A$ , שבכל אחת מהן בדיוק אבר אחד או שני אברים. למשל  $\{2\} \in \mathcal{F}$ ,  $\{2, 5\} \in \mathcal{F}$ .

$\mathcal{G}$  הוא גרף פשוט שקבוצת הצמתים שלו היא  $\mathcal{F}$ ,

בין צמתים שונים  $X, Y$  יש קשת אם ורק אם  $X \cap Y = \emptyset$ .

למשל יש קשת בין  $\{2, 5\}$  ל- $\{1, 3\}$ , יש קשת בין  $\{2, 5\}$  ל- $\{1\}$  ויש קשת בין  $\{2\}$  ל- $\{1\}$ .

הוכיחו ש- $\mathcal{G}$  הוא המילטוני, כלומר יש בו מעגל המילטון.