

מכפלה קרטזית של קבוצות

נתונה A, B קבוצות.

המכפלה הקרטזית של A ו- B היא

קבוצה של הזוגות הסדורים שבהם האיברים הראשוניים

מ- A והשני מ- B : $(A \times B)$ (חסוניה)

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \text{ ו- } y \in B \}$$

דוגמה: אם $A = \{1, 2\}$

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}$$

$$B = \{1, 3\}$$

הגדרה פונקציה של מושג ההרמטה

היא A, B קבוצות.

ההרמטה בין A ל- B היא קבוצה R

כך $R \subseteq A \times B$.

אנחנו הוגדרנו בין A ל- B היא קבוצה

של זוגות מ- $A \times B$.

פונקציות

אנחנו A, B קבוצות.

פונקציה F מ A ל B היא:

$$F = (A, B, F)$$

A הוא תחום הפונקציה

B הוא טווח הפונקציה

$F \subseteq A \times B$ עם הגבולה של איברי A מופיע

בדיוק פעם אחת — כלומר ראשון בסדר F

גרעניק

האם העלשה יבאה למגירה פאלציה?

$(\{1, 2\}, \{1, 2\}, \{(\underline{1}, \underline{1}), (\underline{2}, \underline{1})\})$

גרשאה

דא איז ברייט מאפא בעדיג פאר איה
באיה האטן ביז סדיר וואס העלשה למגירה
פאלציה.

ל"ה

גרסה

היא הסתירה הבאה למצייה פונקציה:

$$(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \{(2n, n) \mid n \in \mathbb{N}\})$$

רשומה

רובוט ב 1.

אם $1 \in \mathbb{N}$.

נניח בשלילה שקיים $y \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$(1, y) \in \{(2n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$y = k$ וזו $k \in \mathbb{N}$ כך ש $1 = 2k$ וזה $y = k$

$$1 = 2k \quad \text{נפס}$$

$$k = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

הסגירה של $k \in \mathbb{N}$.

לכן לא קיים $y \in \mathbb{N}$

$$(1, y) \in \{ (2n, n) \mid n \in \mathbb{N} \}$$

לכן השערה א' נכונה.

לסוף.

עננים בזיג הסרידה

במקום כדור $\mathcal{F} = (A, B, F)$

נדיר סג:

אלה האובדנה של הרכוס הוא A והטוח B

(נדיר סג: $\mathcal{F}: A \rightarrow B$)

במקום $(x, y) \in F$ (נדיר סג: $\mathcal{F}(x) = y$)

x ז"ה מקור של y .

y ז"ה הימין של x .

$$g: C \rightarrow D$$

$$, f: A \rightarrow B$$

$$f = g \quad \text{if } g \text{ is the same as } f$$

$$A = C$$

:ok

$$B = D$$

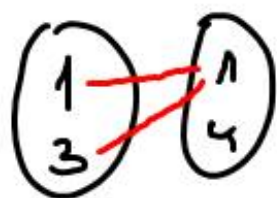
ok

ok

$$f(x) = g(x) \quad x \in A \text{ and } B$$

הרעיון

הוא הפונקציה הזאת?



① $f: \{1, 3\} \rightarrow \{1, 4\}$ מתארת פונקציה.

$g: \{1, 3\} \rightarrow \{1\}$ מתארת פונקציה.

$x \in \{1, 3\}$ כך $g(x) = 1$

משאבה

היא פונקציה הזאת $\{1, 4\}$

היא פונקציה הזאת $\{1\}$.

היא פונקציה הזאת f שמתארת את הפונקציה הזאת.

$$f(x) = x+1 \quad \text{... } \underline{\text{זוגי}} \quad f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad (2)$$

... $x \in \mathbb{N}$...

$$g(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \quad \underline{\text{זוגי}} \quad g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

... $x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$...

הכללה

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{...}$$

... זוגי ...

הכללה

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

. $x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. ה'

$$g(x) = x+1 = \frac{x^2-1}{x-1}$$

: של

: 1 אבין

$$g(1) = 3 \neq 2 = f(1) \quad \text{של} \quad 1 \in \mathbb{N}$$

$$. g \neq f \quad \text{כן}$$

. $\hat{h} \mathbb{N}$

המשפט של זרמלו

, $C \subseteq A$, $f: A \rightarrow B$

: f סגור C על התמונה של f על C

$$f(C) = \{f(x) \mid x \in C\}$$

הערה

① $f(c)$ הוא סמן.

\neq דא "פואנט" על C .

C איז איבער בערע.

$f(c)$ איז קאנצפט העל-עטאנא.

אלא איבער בעטאנא.

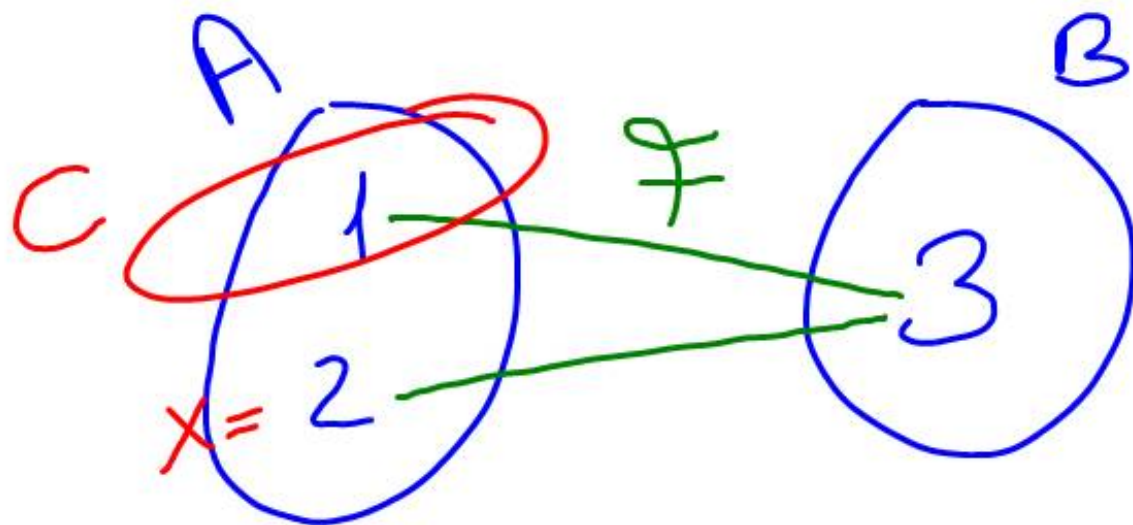
חשוב!!!
② $y \in f(c)$ נ"מ?

$f(x) = y$ $x \in C$ נ"מ $y \in f(c)$ כאטש y

$$f(x) \in f(C) \quad \text{אם} \quad x \in C \quad \text{אז} \quad (3)$$

$$\frac{\text{הוכחה}}{x \in A} \quad (4)$$

$$\exists x \in C \quad \text{אז} \quad f(x) \in f(C)$$



$$\frac{\text{הוכחה}}{\therefore \text{אם} \quad x=2}$$

$$x \in A$$

$$x \in A \quad \text{אז}$$

$$f(x) = 3 \in f(C)$$

הוכחה נכונה.

$$x \notin C \quad \text{אז}$$

⑤ הגמורה של התיומ כולא נקיה לר

הגמורה של הפועל ייה.

תרגיל

הבה נתבונן בתחבורה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ המוגדרת על ידי:

$$f(n) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{אם } n \text{ הוא מרובע} \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{המקבוצה}$$

$$B = \{n^4 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

אם $f(A)$ היא תמונת A תחת f (1)

$$\frac{\text{משלבה}}{\text{היא כן}} \quad \cdot \quad \mathcal{F}(A) = \mathcal{N}$$

$$\cdot \quad \underline{\mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{N}} \quad \text{נכונה}$$

$$\cdot \quad \underline{x \in \mathcal{F}(A)} \quad \text{היא}$$

$$\cdot \quad \mathcal{F}(y) = x \quad \text{ע"פ} \quad y \in A \quad \text{כל } z$$

$$\cdot \quad \mathcal{F}(y) \in \mathcal{N} \quad \text{כי} \quad \underline{\text{איבר בלוח}} \quad \mathcal{F}(y) \text{ נמצא}$$

$$\cdot \quad \underline{x \in \mathcal{N}} \quad \text{נכון}$$

$$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{F}(A) \quad \text{יוב"ח}$$

$x \in A$ $\text{סדר } 2$ $\text{סדר } 2$
 $\mathcal{F}(x) = n$ על

$n \in \mathcal{N}$ ה'
 $x = n^2$ סדר

n סדר

$x = n^2$ סדר $n \in \mathcal{N}$

$x \in A$ סדר

יוב"ח
 $x \in A$

$\mathcal{F}(x) = \sqrt{x} = n$ סדר סדר $x = n^2$

$\mathcal{N} = \mathcal{F}(A)$

$n \in \mathcal{F}(A)$ סדר

סדר

$$\cdot \mathbb{F}(\mathcal{N} \mid A) \quad \text{— } \vdash \text{ } \exists \mathcal{N} \quad (2)$$

$$\cdot \mathbb{F}(\mathcal{N} \mid A) = \{1\} \quad \text{רשומה}$$

$$\cdot \mathbb{F}(\mathcal{N} \mid A) \subseteq \{1\} \quad \text{ואינה רשומה}$$

$$\cdot x \in \mathbb{F}(\mathcal{N} \mid A) \quad \text{ה'}$$

$$\cdot f(y) = x \quad \text{ע"פ } y \in \mathcal{N} \mid A \quad \text{אלו}$$

$$\cdot y \notin A \quad \text{אלו } y \in \mathcal{N} \mid A \quad \text{כך}$$

$$\cdot y \neq n^2 \quad \text{אלו } n \in \mathcal{N} \quad \text{כך } y \notin A \quad \text{אם}$$

$\mathbb{F}(y) = 1$ כל y קיימת x כזה ש- $\mathbb{F}(x) = 1$

$X \in \{1\}$ $X = 1$ נניח y קיים

$\mathbb{F}(N|A) \subseteq \{1\}$ N

$\{1\} \subseteq \mathbb{F}(N|A)$ נניח

x x

$X \in \{1\}$ נניח

$X = 1$ כל

$2 \approx \mu$

$$2 \in \mathbb{N}$$

$$2 = n^2 \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{ה'}$$

$$2 \neq n^2 \quad n = \sqrt{2} \notin \mathbb{N} \quad \text{כל}$$

$$n \in \mathbb{N} \quad e$$

$$2 \notin A \quad \text{כפ}$$

$$\text{כפ} \quad \varphi(2) = 1$$

$$\text{כפ} \quad 2 \in \mathbb{N} \mid A$$

$$\{1\} \subseteq \varphi(\mathbb{N} \mid A)$$

$$\text{כפ} \quad 1 \in \varphi(\mathbb{N} \mid A)$$

$$f(N \setminus A) = \{1\} \quad || \subset N$$

$\cdot f''_N$

$$\cdot f(B) \quad \text{---} \quad \exists N \quad (3)$$

$$\cdot f(B) = A \quad \text{e} \quad \frac{\text{הכללה}}{\text{הקלה}}$$

$$\therefore \underline{f(B) \subseteq A} \quad \text{נכונה}$$

$$\cdot x \in f(B) \quad \text{הי'}$$

$$\cdot f(y) = x \quad \text{e} \quad y \in B \quad \text{כל ז"ס}$$

$$y = n^4 \quad \text{ע"פ } n \in \mathbb{N} \quad \text{א"כ } y \in B$$

$$n^2 \in \mathbb{N} \quad \text{א"כ } n \in \mathbb{N}$$

$$y = (n^2)^2 \quad \text{א"כ } y \in B \quad \text{א"כ } n \in \mathbb{N}$$

$$x = f(y) = \sqrt{y} = n^2$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$x = n^2$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$f(B) \subseteq A$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$x \in A \quad \text{א"כ}$$

$$\frac{A \subseteq \mathcal{F}(B) \quad \text{ואכן}}{\quad}$$

$$. X \in A \quad \text{'ה'}$$

$$. X = n^2 \quad \text{על } n \in \mathbb{N} \quad \text{כך } n^2 \in \mathbb{N}$$

$$. \omega = n^4 \quad \text{כך}$$

$$: n \in \mathbb{N}$$

$$\omega = n^4 \quad \text{על } n \in \mathbb{N}$$

$$. \omega \in B \quad \text{כך}$$

$$: n^2 \in \mathbb{N}$$

$$. \omega \in A \quad \text{כך } \omega = (n^2)^2 \quad \text{על } n^2 \in \mathbb{N}$$

$\mathcal{F}(\omega) = \sqrt{\omega} = n^2$ יסודי נסיעה חלופית $\omega \in \mathbb{N}$

$X \in \mathcal{F}(B)$ יסוד $\mathcal{F}(\omega) = X$ $\neg \omega \in B$

סדר $\mathcal{F}(B) = A$ יסוד $A \subseteq \mathcal{F}(B)$ \mathbb{N}

משקל של קבוצה

$$D \subseteq B$$

$$f: A \rightarrow B$$

לדבר על המשקל של D אומר:

$$f^{-1}(D) = \{x \mid x \in A \text{ ו- } f(x) \in D\}$$

תשובה

① $F^{-1}(D)$ הוא תת-סבון.

המקור של גבולות חלקי- F הוא

משפט 3.1. אם פונקציה F היא גבולות חלקי- F .

אז F היא פונקציה רציפה.

$F^{-1}(D)$ הוא תת-סבון חלקי- F הוא פונקציה רציפה.

② יהי $x \in A$.

$x \in F^{-1}(D)$ אם ורק אם $F(x) \in D$.

③ אטרסען-השייכוּ — נקובֿט פֿהצביר

פֿסן היז האנד:

נמקאָ $\{x \mid x \in A \text{ און } f(x) \in D\}$

נבראָד: $\{x \in A \mid f(x) \in D\}$.

גרענד

הערה: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ איז א פונקציע וואס

$$f(n) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{אויב } n \text{ איז א קוואדראט} \\ 1 & \text{אויב נישט} \end{cases}$$

$$A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{קוואדראטן}$$

$$B = \{n^4 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$f^{-1}(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \quad \text{①}$$

משאלה

$$f^{-1}(N) = N$$

נתנה ט

$$\therefore f^{-1}(N) \subseteq N$$

נתנה כ

$$\therefore x \in f^{-1}(N) \quad \text{יהי}$$

$$f(x) \in N \quad \text{כל } x \in N \quad \text{אם}$$

$$x \in N \quad \text{מכאן}$$

$$f^{-1}(N) \subseteq N \quad \text{אם}$$

$$\therefore N \subseteq f^{-1}(N) \quad \text{נתנה כ}$$

$$x \in N \quad \text{יהי}$$

כל $x \in N$ אז $f(x) \in A$

כל $x \in N$ אז $f(x) \in A$

כל $x \in f^{-1}(A)$

$N \subseteq f^{-1}(A)$ כל

כל $N = f^{-1}(A)$

הכללה
 $f(B) = A$

$f^{-1}(A) = B$

② הוכחה כל הדרוש:

הוכחה
מבואר ב 3.

$$f(3) = 1 \in A \quad \text{אולי} \quad 3 \in \mathbb{N}$$

$$\text{(")} \quad 3 \in f^{-1}(A) \quad \text{אולי}$$

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{אולי}$$

$$3 = n^4 \quad \text{אולי} \quad \text{אולי}$$

$$n = \sqrt[4]{3} \notin \mathbb{N} \quad \text{אולי}$$

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{אולי} \quad \text{אולי}$$

$$\text{(")} \quad 3 \notin B \quad \text{אולי}$$

$$\text{אולי} \quad f^{-1}(A) \neq B$$

$$(2) \quad (1) \quad \mathbb{N}$$

תרגיל דפ"ר

$$f^{-1}(A)$$

$N \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$

הערה:

השורה לא נכונה:

$$f^{-1}(A) = \cancel{f}^{-1}(\cancel{f}(B)) = B$$

הפ"ר של f לא קיים

אסור לכתוב שיש פ"ר כי אין פ"ר!!

הרכבה פונקציונלית

$$g: B \rightarrow C, f: A \rightarrow B$$

(לדוגמה) אם פונקציה g שבה

באופן הבא:

A (התחום של f)

C (הטווח של g)

אם $x \in A$ הרי ש $g(f(x))$

אם ההרכבה נסמלת $g \circ f$.

הרכבה

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$x \in \mathbb{R} \quad \square$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \square$$

SLC

$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$x \in \mathbb{R} \quad \square$$

הרכבה

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$$

סדרת הבה

סדרת הה - 13 $\frac{1}{N}N$

12.5 - 03 $\frac{1}{N}N$

סדרת הה - 5,6 - 13.1