2015א

פתרון שאלה 5 בממ"ן 11 :

קודם כל נשים לב לעובדות הבאות :

$$5n^2+7n=\Theta\left(n^2\right)$$

$$n^n+\ln n=\Theta\left(n^n\right)$$

$$5^{\lg n}=n^{\lg 5} \qquad (\lg 5<5/2)$$

$$\lg\left(n!\right)=\Theta\left(n\cdot\lg n\right)$$

(ספר הלימוד, עמוד 47 ; ראו גם תרגיל 3.2-3)

$$8n+12=\Theta\left(n\right)$$

$$10^n+n^{20}=\Theta\left(10^n\right)$$

$$\lg\left(n^n\right)=n\lg n=o\left(n!\right)=o\left(\lg\left(2^{n!}\right)\right)$$

לפי נוסחת סטירלינג

$$\left(\lg n\right)!=\sqrt{2\pi e}\cdot\left(\frac{\lg n}{e}\right)^{\lg n+1/2}\cdot\left(1+\Theta\left(\frac{1}{\lg n}\right)\right)=\Theta\left(\sqrt{\lg n}\cdot n^{\lg\lg n-\lg e}\right)$$

הוכחנו (תרגיל 3.2-4 בספר הלימוד) ש-$\left(\lg n\right)!$ אינה חסומה פולינומית ; מצד שני,

$$\lg\left(\left(\lg n\right)!\right)=\Theta\left(\lg n\cdot\lg\lg n\right)=o\left(\left(\lg n\right)^2\right)=o\left(n\right)$$

ומזה נובע

$$\left(\lg n\right)!=o\left(e^n\right)$$

מתקבל הסידור הבא :

$$\left(\lg n\right)^2\prec\sqrt{n}\prec 8n+12\prec\left\{n\ln n,\lg\left(n!\right)\right\}\prec 5n^2+7n\prec 5^{\lg n}\prec n^{5/2}\prec$$

$$\left(\lg n\right)!\prec e^n\prec 4^n\prec 10^n+n^{20}\prec n!\prec\left\{n^n,n^n+\ln n\right\}\prec 2^{n!}$$