

ה א ו נ י ב ר ס י ט ה    ה פ ת ו ח ה

20585

**מבוא לתורת החישוביות  
והסיבוכיות**

חוברת הקורס - סתיו 2017א

כתב: אלעזר בירנבוים

אוקטובר 2016 - סמסטר סתיו - תשע"ז



**פנימי – לא להפצה.**

כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה. ©

## תוכן העניינים

א	אל הסטודנטים
ב	1. לוח זמנים ופעילויות
ד	2. תיאור המטלות
ה	3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס
1	ממ"ץ 11
5	ממ"ץ 12
7	ממ"ץ 13
11	ממ"ץ 14
13	ממ"ץ 15

## אל הסטודנטים,

אני מקדם את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים.  
בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.  
פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ס בכתובת:

<http://telem.openu.ac.il>

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספרייה באינטרנט [www.openu.ac.il/Library](http://www.openu.ac.il/Library)

שעות הייעוץ בקורס מתקיימות בימי ראשון בשעות 18:00-20:00 בטלפון 04-6850321.

**אבקש מאוד לא להתקשר לטלפון הזה בשעות לא סבירות ובשבתות.**

ניתן לפנות גם בדואר אלקטרוני: [elazar@openu.ac.il](mailto:elazar@openu.ac.il)

אני מאחל לכם הצלחה בלימודים.

**לתשומת לב הסטודנטים הלומדים בחו"ל:**

למרות הריחוק הפיסי הגדול, נשתדל לשמור אתכם על קשרים הדוקים ולעמוד לרשותכם ככל האפשר. הפרטים החיוניים על הקורס נכללים בחוברת הקורס וכן באתר הקורס. מומלץ מאוד להשתמש באתר הקורס ובכל אמצעי העזר שבו וכמובן לפנות אלינו במידת הצורך.

בברכה,

*אלעזר גינזבורג*

מרכז ההוראה

**1. לוח זמנים ופעילויות (20585 / 2017א)**

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
1	4.11.2016-30.10.2016	פרק 1		
2	11.11.2016-6.11.2016	פרק 1	מפגש ראשון	
3	18.11.2016-13.11.2016	פרק 2		ממ"ן 11 18.11.2016
4	25.11.2016-20.11.2016	פרק 2 פרק 3	מפגש שני	
5	2.12.2016-27.11.2016	פרק 3		
6	9.12.2016-4.12.2016	פרק 3 פרק 4	מפגש שלישי	ממ"ן 12 9.12.2016
7	16.12.2016-11.12.2016	פרק 4		
8	23.12.2016-18.12.2016	פרק 4	מפגש רביעי	

\* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

לוח זמנים ופעילויות – המשך

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
9	30.12.2016-25.12.2016 (א-ו חנוכה)	פרק 4		
10	6.1.2017-1.1.2017 (א חנוכה)	פרק 4 פרק 5	מפגש חמישי	ממ"ן 13 6.1.2017
11	13.1.2017-8.1.2017	פרק 5		
12	20.1.2017-15.1.2017	פרק 5 פרק 6	מפגש שישי	ממ"ן 14 20.1.2017
13	27.1.2017-22.1.2017	פרק 6		
14	3.2.2017-29.1.2017	פרק 7		
15	10.2.2017-5.2.2017	פרק 7	מפגש שביעי	ממ"ן 15 10.2.2017

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

\* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

## 2. תיאור המטלות

קראו היטב עמודים אלו לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס - הבנה מעמיקה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. המטלות תיבדקנה על-ידי המנחה ותוחזרנה בצירוף הערות המתייחסות לתשובות.

המטלות מלוות את יחידות הלימוד בקורס. להלן פירוט המטלות, היחידות שאליהן מתייחסת כל מטלה ומשקלה היחסי. בחלק מהמטלות תופענה גם שאלות המתייחסות ליחידות שכבר נלמדו.

ממ"ן 11 - פרק 1 - 6 נקודות

ממ"ן 12 - פרקים 2, 3 - 6 נקודות

ממ"ן 13 - פרק 4 - 8 נקודות

ממ"ן 14 - פרק 5 - 4 נקודות

ממ"ן 15 - פרקים 6, 7 - 6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל של 24 נקודות לפחות.

**שימו לב שחובה להגיש את ממ"ן 13.**

ללא צבירת 24 נקודות בהגשת מטלות לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

**למען הסר ספק, יודגש שחל איסור על הכנה משותפת והעתקה של מטלות או חלקי מטלות.**  
(הנושא מפורט בתקנון משמעת לסטודנטים - נספח 1 של ידיעון האו"פ).

### לתשומת לבכם!

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן: אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלה** בציון הנמוך ביותר, שציונה נמוך מציון הבחינה, לא תילקח בחשבון בעת שקלול הציון הסופי. זאת בתנאי שמטלה זו **אינה חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו מגיע למינימום הנדרש.

**זכרו!** ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס. סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון שמספרו 09-7782222, או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא <http://www.openu.ac.il/sheilta> קורסים ⇨ ציוני מטלות ובחינות ⇨ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.

יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות



שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של ציוני המטלות והבחינה יהיה נמוך מ-60).

**כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.**

### **3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס**

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל כולל של 24 נקודות לפחות.

ב. ציון של לפחות 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.



# מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

מספר השאלות: 7 משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: 2017 מועד אחרון להגשה: 18 נוב' 16

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

### שאלה 1 (15%)

אפשר להציע אלגוריתם נוסף להכרעת השפה  $A$  של דוגמה 3.7 :  
בכל שלב מוחקים את המחצית הימנית של ה-0-ים שעדיין רשומים על הסרט.  
ממשיכים בתהליך הזה עד שמגיעים למספר 0-ים אי-זוגי גדול מ-1 ואז דוחים, או עד שמגיעים ל-0 יחיד ואז מקבלים.  
הציגו **תיאור מלא** של מכונת טיורינג שמממשת את האלגוריתם הזה (כמו איור 3.8 בספר).  
אלפבית הסרט יהיה  $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$ .  
למכונה יהיו **לא יותר מעשרה מצבים** (כולל  $q_{\text{accept}}$  ו- $q_{\text{reject}}$ ).  
**הסבירו היטב** את פעולת המכונה ולמה היא אכן מכריעה את השפה  $A$ .

### שאלה 2 (15%)

בנו מכונת טיורינג, שכאשר היא מקבלת כקלט מילה  $w$  מעל האלפבית  $\{0, 1\}$ , היא מסיימת במצב  $q_{\text{accept}}$ , ועל הסרט רשומה המילה  $w$  ואחריה 0-ים כמספר ה-0-ים ב- $w$ .  
למשל, אם  $w=0110010$ , אז בסיום הריצה תהיה כתובה על הסרט המילה 01100100000.  
אלפבית הקלט הוא  $\Sigma = \{0, 1\}$ ; אלפבית הסרט יהיה  $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$ .  
למכונה יהיו **לא יותר מעשרה מצבים** (כולל  $q_{\text{accept}}$  ו- $q_{\text{reject}}$ ).  
תארו את המכונה באיור (אפשר לוותר על הציור של  $q_{\text{reject}}$  וכל הקשתות שנכנסות אליו וכן על מעברים בלתי אפשריים).  
**הסבירו היטב** את פעולת המכונה, ולמה היא אכן מבצעת את הנדרש.  
זכרו לטפל נכון גם במקרה ש- $w$  היא המילה הריקה.  
שימו לב לכך שאלפבית הסרט הוא  $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$ .

### שאלה 3 (10%)

א. מהי השפה שהמכונה שבניתם בתשובה לשאלה 2 מזהה?

ב. מהי הפונקציה שהמכונה שבניתם מחשבת?

### שאלה 4 (18% סעיף א - 6%, סעיף ב - 12%)

נגדיר מודל חישובי חדש: מכונת טיורינג עם סרט אחד ועם כמה ראשים קוראים-כותבים.

למכונה כזו יש סרט יחיד, אבל ייתכן שיש לה יותר מראש קורא-כותב אחד.

אם יש למכונה  $k$  ראשים, הם ממוספרים מ-1 עד  $k$ . הראשים השונים נעים על הסרט באופן בלתי תלוי זה בזה. ייתכן שכמה ראשים יעמדו בו-זמנית על אותו מקום בסרט.

פונקצית המעברים  $\delta$  של מכונה עם  $k$  ראשים מוגדרת כך:  $\delta: Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$ . כאשר המכונה נמצאת במצב  $q_i$ , והראשים עומדים על הסמלים  $a_1, a_2, \dots, a_k$  בסרט, פונקצית המעברים מגדירה לאיזה מצב  $q_j$  עוברים, אלו אותיות מודפסות, ומהי התנועה של כל ראש. אם לפי פונקצית המעברים, כמה ראשים מדפיסים סמלים שונים באותו מקום בסרט, יודפס הסמל של הראש שמספרו קטן ביותר.

א. הסבירו כיצד מכונה עם שני ראשים יכולה להכריע את השפה של תרגיל 3.8 סעיף b (עמוד 188 בספר) במעבר אחד על הקלט (כלומר, כל ראש יעבור פעם אחת על הקלט).

ב. הסבירו בפירוט כיצד מכונת טיורינג רגילה (עם ראש יחיד) יכולה לחקות את פעולתה של מכונה עם  $k$  ראשים.

### שאלה 5 (15%)

בנו מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית, שכאשר היא מתחילה לפעול על הסרט הריק (סרט שכולו סימני רווח), בסיומו של כל מסלול חישוב שמסתיים במצב  $q_{\text{accept}}$ , כתובה על הסרט מילה  $w$  ששייכת לשפה  $A$  של דוגמה 3.7, ולכל מילה  $w$  ששייכת לשפה  $A$ , יש למכונה מסלול חישוב שמסתיים במצב  $q_{\text{accept}}$  ובסיומו  $w$  כתובה על הסרט של המכונה.

כלומר, כאשר המכונה מתחילה את פעולתה על סרט ריק, היא יכולה לסיים ב- $q_{\text{accept}}$ , ועל הסרט תהיה כתובה המילה 0, היא יכולה לסיים ב- $q_{\text{accept}}$ , ועל הסרט תהיה כתובה המילה 00, היא יכולה לסיים ב- $q_{\text{accept}}$ , ועל הסרט תהיה כתובה המילה 0000, וכך הלאה; ולכל מילה  $w$  שבנויה ממספר 0-ים שהוא חזקה של 2, יש למכונה מסלול שמסתיים ב- $q_{\text{accept}}$  ועל הסרט כתובה המילה  $w$ .

אלפבית הסרט יהיה  $\Gamma = \{0, \sqcup, x\}$ ; למכונה יהיו לא יותר משמונה מצבים (כולל  $q_{\text{accept}}$  ו- $q_{\text{reject}}$ ). תארו את המכונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציוור של  $q_{\text{reject}}$  וכל הקשתות שנכנסות אליו).

הסבירו היטב את פעולת המכונה, את התפקיד של כל מצב, את נקודות האי-דטרמיניזם, ולמה המכונה אכן מבצעת את הנדרש.

**שאלה 6 (15%)**

בעיה 3.18 בספר (עמוד 189).

הראו שמכונה עם סרט אינסופי בשני הכיוונים **שקולה בכוחה** למכונה עם סרט אינסופי בכיוון אחד : פרטו כיצד מכונה מאחד הסוגים יכולה לחקות את פעולתה של מכונה מן הסוג השני.

**שאלה 7 (12%)**

א. על המונה  $E$  (enumerator) נתון שהוא **מגיע** אי פעם למצב  $q_{\text{halt}}$ .

האם אפשר להסיק מכך שהשפה  $L(E)$  שהוא מפיק היא **שפה כריעה**? הוכיחו את תשובתכם.

ב. על המונה  $F$  נתון שהוא **לא מגיע** אף פעם למצב  $q_{\text{halt}}$ .

האם אפשר להסיק מכך שהשפה  $L(F)$  שהוא מפיק **איננה שפה כריעה**? הוכיחו את תשובתכם.



# מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 7

מועד אחרון להגשה: 9 דצמ' 16

סמסטר: א2017

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

## שאלה 1 (10%)

נתון התיאור של המכונה  $M$  הבאה:

$M =$  "On input  $\langle G \rangle$ , where  $G$  is a CFG:

1. Go through all possible  $w$ 's in the standard string order.
2. For each  $w$  check whether  $\langle G, w \rangle \in A_{CFG}$ .
3. If for some  $w$  it is found that  $\langle G, w \rangle \in A_{CFG}$ , accept."

א. מהי השפה שהמכונה  $M$  מכריעה? הצדיקו את תשובתכם.

ב. מהי השפה שהמכונה  $M$  מזהה? הצדיקו את תשובתכם.

## שאלה 2 (15% סעיף א - 10%, סעיף ב - 5%)

א. למילה  $w$  מסמנים על-ידי  $w^R$  את המחרוזת המתקבלת מ- $w$  על-ידי היפוך סדר הסמלים ב- $w$ .

$$11001^R = 10011$$

נניח שנחליף בהוכחת משפט 4.11 את שלב 1 בתיאור של המכונה  $D$  בשורה הבאה:

1. Run  $H$  on input  $\langle M, \langle M \rangle^R \rangle$ .

האם ההוכחה עדיין טובה? הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. (סעיף זה עומד בפני עצמו). נניח שנחליף את שלב 2 של המכונה  $D$  בשורה הבאה:

2. If  $H$  accepts, loop. If  $H$  rejects, accept.

האם ההוכחה עדיין טובה? הסבירו היטב את תשובתכם.

### שאלה 3 (14%)

הוכיחו שהשפה  $G$  הבאה היא מזוהה-טיורינג אך איננה כריעה :

$$G = \{ \langle M, x \rangle \mid M \text{ is a TM that accepts } x; \text{ when } M \text{ terminates its running on } x \text{ its tape contains a word longer than } x \}$$

(מילה  $\langle M, x \rangle$  שייכת ל- $G$  אם  $M$  היא תיאור של מכונת טיורינג,  $x$  היא מילה,  $M$  מקבלת את  $x$ , וכאשר  $M$  מסיימת את ריצתה על  $x$  (במצב  $q_{\text{accept}}$ ) כתובה על הסרט של  $M$  מילה יותר ארוכה מ- $x$ ). הוכחת האי-כריעות של השפה תיעשה בעזרת שיטת האלכסון.

**הדרכה :** הניחו בשלילה ש- $G$  כריעה. אז יש מכונה  $H$  שמכריעה אותה. בנו מכונה  $D$  שתפעל הפוך מכל מכונה  $M$  שהיא. (אל תשכחו להוכיח ש- $G$  מזוהה-טיורינג).

### שאלה 4 (12%)

בעיה 5.25 בספר (עמוד 241). הראו שאם  $T$  כריעה, אז אפשר לבנות מכונה להכרעת השפה  $A_{TM}$ .

### שאלה 5 (14%)

עובדה : אפשר להוכיח את משפט Rice (ראו בעיה 5.16 בספר) מבלי להסתמך על כך ש- $A_{TM}$  איננה כריעה. (ההוכחה איננה באמצעות רדוקציה של  $A_{TM}$ , אלא באמצעות משפט הרקורסיה שמופיע בפרק 6 בספר).

הוכיחו בעזרת משפט Rice ש- $A_{TM}$  איננה כריעה. (בפרק 4 בספר הוכח ש- $A_{TM}$  איננה כריעה בעזרת שיטת האלכסון. פה אתם מתבקשים להוכיח שהיא לא כריעה בעזרת משפט Rice).

### שאלה 6 (12%)

האם  $ALL_{LBA}$  היא שפה כריעה? הוכיחו את תשובתכם.

$$(ALL_{LBA} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is an LBA and } L(M) = \Sigma^* \})$$

### שאלה 7 (23%). סעיף א - 7%, סעיף ב - 7%, סעיף ג - 7%, סעיף ד - 2%

נגדיר את השפה  $CF_{TM}$  :

$$CF_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is a TM and } L(M) \text{ is a context-free language} \}$$

א. הוכיחו בעזרת משפט Rice (ראו בעיה 5.16 בספר) שהשפה  $CF_{TM}$  איננה כריעה.

ב. הציגו רדוקציה מיפוי של  $A_{TM}$  ל- $CF_{TM}$  (הראו :  $A_{TM} \leq_m CF_{TM}$ ).

ג. הציגו רדוקציה מיפוי של  $A_{TM}$  ל- $\overline{CF_{TM}}$  (הראו :  $A_{TM} \leq_m \overline{CF_{TM}}$ ).

ד. הסיקו :  $CF_{TM}$  ו- $\overline{CF_{TM}}$  אינן מזוהות-טיורינג.



# מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

משקל המטלה: 8 נקודות

מספר השאלות: 8

מועד אחרון להגשה: 6 ינו' 17

סמסטר: 2017א

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

### שאלה 1 (16%)

אפשר להציע אלגוריתם נוסף להכרעת השפה  $A = \{0^k 1^k \mid k \geq 0\}$ :

תחילה בודקים שבמילת הקלט אין 0-ים מימין ל-1-ים.

לאחר מכן, לכל ספרת 0 במילת הקלט מגדילים ב-1 מונה בינארי, ולכל ספרת 1 מגדילים ב-1 מונה בינארי שני.

לבסוף, בודקים האם שני המונים שווים זה לזה.

א. הסבירו כיצד אפשר לממש את האלגוריתם הזה במכונת טיורינג דטרמיניסטית בעלת סרט אחד, כך שזמן הריצה יהיה  $O(n \log n)$ .

הדרכה: אם המונים של ה-0-ים וה-1-ים יהיו רחוקים מן הראש הקורא-כותב של המכונה, אז ההגעה אליהם בכל פעם תדרוש מספר גדול של צעדי ריצה.

ב. הסבירו כיצד אפשר לממש את האלגוריתם הזה במכונת טיורינג דטרמיניסטית בעלת שני סרטים, כך שזמן הריצה יהיה  $O(n)$ .

### שאלה 2 (18% סעיפים א-ג - 4%, סעיף ד - 6%)

מילה  $v$  היא תחילית (prefix) של מילה  $w$ , אם יש מילה  $u$  כך ש- $w=vu$ .

לכל אחת מהשפות הבאות, קבעו האם היא שייכת למחלקה P, והוכיחו את קביעתכם.

א.  $PREFIX_{DFA} = \{ \langle A, v \rangle \mid A \text{ is a DFA and } v \text{ is a prefix of some } w \in L(A) \}$

ב.  $PREF_{DFA} = \{ \langle A, v \rangle \mid A \text{ is a DFA and there is } w \in L(A) \text{ that is a prefix of } v \}$

ג.  $PREF_{CFG} = \{ \langle G, v \rangle \mid G \text{ is a CFG and there is } w \in L(G) \text{ that is a prefix of } v \}$

ד.  $PREF_{TM} = \{ \langle M, v \rangle \mid M \text{ is a TM and there is } w \in L(M) \text{ that is a prefix of } v \}$

### שאלה 3 (10%)

נתון שלשפה  $B$  יש מאמת (verifier) בעל זמן ריצה אקספוננציאלי. (זמן הריצה שלו על קלט בגודל  $n$  הוא  $O(2^{n^k})$  עבור  $k$  טבעי כלשהו).

האם אפשר להסיק מכך ש- $B$  היא שפה **כריעה**? הוכיחו את תשובתכם.

### שאלה 4 (10%)

האם לפי הידע שבידנו השפה  $B$  הבאה שייכת **למחלקה NP**? הסבירו את תשובתכם.

$$B = \{ \langle n, m \rangle \mid m \text{ הוא } n \text{ מספר המחלקים של } n \}$$

דוגמאות למילים בשפה:  $\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 6, 4 \rangle, \langle 8, 4 \rangle, \langle 20, 6 \rangle$

הניחו ש- $n$  ו- $m$  מיוצגים בבינארי.

### שאלה 5 (8%)

למה שווה **מספר ההשמות המספקות** של הנוסחה הבוליאנית המתקבלת על-ידי הרדוקציה של הוכחת משפט 7.37? **הסבירו היטב** את תשובתכם.

### שאלה 6 (8%)

ברדוקציה של הוכחת משפט 7.56 בספר, קבוצת המספרים  $S$  כוללת מופעים כפולים של מספרים ( $g_i = h_i$  לכל  $1 \leq i \leq k$ ). כלומר,  $S$  היא רב-קבוצה (multiset).

שנו את הרדוקציה כך ש- $S$  לא תכיל מופעים כפולים. כלומר,  $S$  תהיה קבוצה (ולא רב-קבוצה).

### שאלה 7 (12%)

בעיה 7.39 בספר (עמודים 326-327).

### שאלה 8 (18%)

בעיית הקבוצה הבלתי תלויה (**INDEPENDENT-SET**) מוגדרת בעמוד 78 במדריך הלמידה.

א. הוכיחו: בגרפים שבהם דרגת כל צומת  $\geq 2$  הבעיה **שייכת ל-P**.

(דרגת צומת = מספר הקשתות שנוגעות בצומת).

עליכם לתאר אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי המקבל כקלט מספר טבעי  $k$  וגרף לא מכוון

$G$  שדרגת כל צומת שלו  $\geq 2$ , ובודק האם יש ב- $G$  קבוצה בלתי תלויה בגודל  $k$ .

ב. הוכיחו: בגרפים שבהם דרגת כל צומת  $\geq 3$  הבעיה היא **NP-שלמה**.

**הדרכה:** רדוקציה פולינומיאלית של **3SAT**:

יהיו הפסוקיות של הנוסחה  $C_1, \dots, C_m$  (בכל פסוקית שלושה ליטרלים).

לכל משתנה  $v$  בנוסחה, נסמן על-ידי  $k_v$  את מספר הפסוקיות שבהן הוא מופיע.  
 לכל משתנה  $v$  בונים מעגל בגודל  $2k_v$  שבו מופיעים הקדקודים  $T_{v,i}$  ו-  $F_{v,i}$  לסירוגין,  
 כאשר  $i$  עובר על מספרי הפסוקיות שבהן מופיע המשתנה  $v$ .

(למשל, אם המשתנה  $v$  מופיע בפסוקיות השנייה, החמישית והשמינית, אז בונים את

$$(T_{v,2} - F_{v,2} - T_{v,5} - F_{v,5} - T_{v,8} - F_{v,8} - T_{v,2}).$$

לכל פסוקית  $(l_1 \vee l_2 \vee l_3)$  בנוסחה  $(l_i)$  הוא ליטרל) בונים משולש.

מחברים בקשת כל ליטרל  $l$  של הפסוקית ה- $i$  לקדקוד המתאים לפסוקית ה- $i$  במעגל

של המשתנה של  $l$ : אם הליטרל  $l$  הוא  $v$ , מחברים אותו ל- $T_{v,i}$ ; אם הליטרל  $l$  הוא  $\neg v$ ,

מחברים אותו ל- $F_{v,i}$ .

הראו שהרדוקציה המוצעת יכולה להתבצע בזמן פולנומיאלי בגודל הקלט.

הראו שדרגת כל צומת בגרף שנבנה על-ידי הרדוקציה  $\geq 3$ .

הראו שהנוסחה ספיקה אם ורק אם יש בגרף שנבנה על-ידי הרדוקציה קבוצה בלתי תלויה

בגודל  $n$  (שאותו עליכם לקבוע).



# מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 20 ינו' 17

סמסטר: 2017א

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

### שאלה 1 (10%)

בדוגמה 8.3 בספר מראים ש- $SAT$  שייכת ל- $SPACE(n)$ .  
האם אפשר להסיק מכך ומן העובדה ש- $SAT$  היא בעיה  $NP$ -שלמה, ש- $NP \subseteq SPACE(n)$ ?  
הסבירו היטב את תשובתכם.

### שאלה 2 (10%)

נתונה השפה  $\#SAT$

$$\#SAT = \{ \langle \phi, k \rangle \mid \phi \text{ is a Boolean formula with at least } k \text{ different satisfying assignments} \}$$

- א. האם אפשר להוכיח ששפה זו שייכת ל- $SPACE(n)$ ?  
אם עניתם שכן, כתבו את ההוכחה. אם עניתם שלא, הסבירו למה לא.
- ב. האם התשובה לסעיף א תשתנה, אם נחליף בהגדרת השפה את המילים "at least" במילים "at most"?  
הסבירו את תשובתכם.
- ג. האם התשובה תשתנה, אם נחליף את המילים "at least" במילה "exactly"?  
הסבירו את תשובתכם.

### שאלה 3 (20%)

- א. הוכיחו:  $EQ_{DFA} \in SPACE(n^2)$ . (השפה  $EQ_{DFA}$  מוגדרת לפני משפט 4.5 בספר)
- ב. הוכיחו:  $EQ_{NFA} \in SPACE(n^2)$ . ( $EQ_{NFA} = \{ \langle A, B \rangle \mid A \text{ and } B \text{ are NFAs and } L(A) = L(B) \}$ )

#### שאלה 4 (20%)

בעיה 8.34 בספר (עמוד 360).

כדי להוכיח שהשפה  $B$  שייכת למחלקה  $L$ , עליכם לתאר בפירוט מכונה דטרמיניסטית, בעלת סיבוכיות מקום לוגריתמית, שמכריעה את  $B$ .

#### שאלה 5 (20%)

הבעיה  $HITTING-SET$  מוגדרת כך:

הקלט: קבוצה סופית  $S$ ; אוסף  $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  של תת-קבוצות של  $S$  (כל  $S_i$  היא תת-קבוצה של  $S$ ); מספר טבעי  $k$ .  
השאלה: האם יש ל- $S$  תת-קבוצה  $T$  בגודל  $k$  כך שלכל  $1 \leq i \leq m$ ,  $T \cap S_i \neq \emptyset$ ? (כלומר, האם יש ל- $S$  תת-קבוצה בגודל  $k$  שהחיתוך שלה עם כל אחת מן התת-קבוצות  $S_i$  איננו ריק?)

הוכיחו:  $VERTEX-COVER \leq_L HITTING-SET$ .

( $VERTEX-COVER$  מוגדרת בעמוד 312 בספר).

עליכם לתאר את הרדוקציה, להוכיח שהיא תקפה, ולהוכיח בפירוט שהיא יכולה להתבצע במקום לוגריתמי.

#### שאלה 6 (20%)

בעיה 8.16 בספר (עמוד 359).

הדרכה: הראו:  $STRONGLY-CONNECTED \in NL$  ו- $PATH \leq_L STRONGLY-CONNECTED$ .

# מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: סעיפים 9.1, 10.1 ו-10.2 בספר

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 7

מועד אחרון להגשה: 10 פבר' 17

סמסטר: 2017א

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

### שאלה 1 (12%)

הוכיחו שהפונקציה  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$  ניתנת לבנייה במגבלת מקום עצמית (space constructible).

### שאלה 2 (12%)

עיינו במכונה  $D$  שבהוכחת משפט 9.3 (עמוד 366).

א. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate  $M$  on  $w \dots$ " במשפט "Simulate  $M$  on  $\langle M \rangle \dots$ " (כלומר, במקום לבצע סימולציה של  $M$  על  $w = \langle M \rangle 10^k$ , נבצע סימולציה של  $M$  על  $\langle M \rangle$ ). האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate  $M$  on  $w \dots$ " במשפט "Simulate  $M$  on  $10^k \dots$ " (כלומר, במקום לבצע סימולציה של  $M$  על  $w = \langle M \rangle 10^k$ , נבצע סימולציה של  $M$  על  $10^k$ ). האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

### שאלה 3 (12%)

הסבירו כיצד אפשר לבנות מכונה עם שני סרטים, שכאשר היא מקבלת כקלט על הסרט הראשון את המילה  $1^n$ , היא מסיימת כאשר על הסרט השני כתוב הייצוג הבינארי של  $n$ .  
הסרט הראשון הוא סרט לקריאה בלבד. הסרט השני הוא סרט לקריאה וכתובה והוא סרט הפלט. עליכם לבנות מכונה שזמן ריצתה יהיה  $O(n)$ .  
עליכם להסביר היטב את אופן פעולת המכונה, ולהסביר מדוע זמן הריצה שלה הוא  $O(n)$ .

#### שאלה 4 (24%)

- לימדו את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה (עמודים 126-128).
- א. נסחו בעיית **הכרעה** של בעיית הסוכן הנוסע (כלומר, בעיה שהתשובה עליה היא "כן" או "לא").
- ב. הוכיחו: בעיית ההכרעה של בעיית הסוכן הנוסע **המטרית** היא בעיה NP-שלמה.
- הדרכה:** הוכיחו שהיא שייכת ל-NP, והראו רדוקציה פולינומיאלית של בעיית קיומו של מעגל המילטון בגרף לא מכוון.
- (מעגל המילטון בגרף לא מכוון  $G$  הוא מעגל פשוט שמכיל כל צומת של  $G$  פעם אחת ויחידה. אתם יכולים להשתמש בעובדה שבעיית קיומו של מעגל המילטון בגרף לא מכוון היא בעיה NP-שלמה).
- ג. הוכיחו: לכל בעיית סוכן נוסע **לא מטרית**, אפשר לבנות בזמן פולינומיאלי בעיית סוכן נוסע **מטרית** עם אותם צמתים, כך ש- $P$  הוא מסלול אופטימלי בבעיה המקורית (הלא מטרית), אם ורק אם  $P$  הוא מסלול אופטימלי בבעיה החדשה (המטרית).
- הדרכה:** הגדילו את משקלי הקשתות באופן שיתקיימו תנאי הבעיה המטרית.
- ד. הסבירו מדוע אין סתירה בין קיומו של אלגוריתם קירוב בעל יחס קירוב 2 (ואפילו 1.5) ובעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית הסוכן הנוסע המטרית, ובין אי-קיומו של אלגוריתם כזה לבעיה הכללית (הלא מטרית), לאור מה שהראיתם בסעיף הקודם (שיש דרך מהירה לעבור מהבעיה הכללית לבעיה המטרית, באופן שמשמר את המסלולים האופטימליים).

#### שאלה 5 (16%)

- הוכיחו: אם יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **ההכרעה**  $MAX-CUT$ , אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **האופטימיזציה**  $MAX-CUT$ .
- האלגוריתם לבעיית ההכרעה מקבל כקלט גרף לא מכוון  $G$  ומספר טבעי  $k$ .
- האלגוריתם מחזיר "כן" אם יש ב- $G$  חתך שגודלו לפחות  $k$ , ו-"לא" אחרת.
- האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה מקבל כקלט גרף לא מכוון  $G$ .
- האלגוריתם מחזיר חתך בעל גודל מקסימלי ב- $G$ , כלומר, חלוקה של קבוצת הצמתים של  $G$  לשתי תת-קבוצות זרות  $S$  ו- $T$ , כך שמספר הקשתות המחברות צומת מ- $S$  עם צומת מ- $T$  הוא מקסימלי.
- הדרכה:** האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה יהיה בנוי משני שלבים:
- בשלב הראשון קוראים לאלגוריתם ההכרעה כמה פעמים כדי למצוא את גודלו של החתך המקסימלי.
- בשלב השני, מבצעים בכל פעם שינויים (קלים) בגרף, וקוראים לאלגוריתם ההכרעה על הגרפים החדשים. לפי התשובות שהוא מחזיר, יודעים איזה צמתים שייכים לאותה תת-קבוצה ( $S$  או  $T$ ), ואיזה צמתים לא שייכים לאותה תת-קבוצה (כלומר, אם האחד שייך ל- $S$  אז השני שייך ל- $T$ ).



### שאלה 6 (10%)

עיינו באלגוריתם *PRIME* בעמוד 401 בספר.

הוכיחו: אם  $t$  הוא מספר טבעי קטן מ- $p$  שאיננו זר ל- $p$  (המחלק המשותף המקסימלי של  $t$  ו- $p$  גדול מ-1), אז  $t$  הוא עד לפריקות של  $p$ . (כלומר, אם הוא ייבחר כאחד מ- $k$  המספרים בשלב 2 של האלגוריתם, האלגוריתם ידחה).

### שאלה 7 (14%)

בעיה 10.10 בספר (עמוד 439).

כדי להוכיח את שוויון המחלקות, הראו הכלה דו-כיוונית.