קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"

תאריך הבחינה: 9.7.2014 (סמסטר 2014ב - מועד א4 / 85)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.
כל השאלות זהות במשקלן.
בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפים: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

שאלה 1 (25 נקודות)

יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 5, ויהי Y משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 10.

המשתנים המקריים X ו-Y בלתי-תלויים זה בזה.

מציירים מלבן שרוחבו X ס"מ ואורכו Y ס"מ.

(6 נק') א. חשב את ההסתברות ש**היקף** המלבן, דהיינו $2(X+Y)$, שווה ל- 28 ס"מ.

(6 נק') ב. נתון ש**היקף** המלבן הוא 28 ס"מ.

מהי ההסתברות שרוחבו הוא 6 ס"מ?

(6 נק') ג. חשב את תוחלת **שטח** המלבן, דהיינו את $E[XY]$.

(7 נק') ד. חשב את שונות **שטח** המלבן.

שאלה 2 (25 נקודות)

יהיו X, Y ו-Z משתנים נורמליים סטנדרטיים בלתי-תלויים.

נגדיר את המשתנים המקריים V ו-U על ידי $V=-Y+2Z$ ו- $U=X+Y$.

(6 נק') א. זהה את ההתפלגות של המשתנה המקרי V.

רשום את שמה ואת ערכי הפרמטרים שלה.

(6 נק') ב. חשב את $P\{V \le 1.33\}$.

בצע אינטרפולציה לינארית בחישוביך.

(6 נק') ג. מהו a שמקיים את השוויון $P\{V > a\} = 0.8$?

(7 נק') ד. חשב את מקדם המתאם בין המשתנים המקריים V ו-U.

שאלה 3 (25 נקודות)

נתון סביבון תקין בעל 4 פאות, שעליהן רשומים המספרים 1, 2, 3 ו- 4.

מסובבים את הסביבון 5 פעמים.

(6 נק') א. מהי ההסתברות שכל ארבע התוצאות האפשריות תתקבלנה בחמשת הסיבובים?

(6 נק') ב. מהי ההסתברות שהתוצאה 3 תתקבל לפחות פעם אחת?

(6 נק') ג. ידוע שבשני הסיבובים הראשונים (מתוך ה-5 שנעשו) התקבלו תוצאות שונות.

מהי ההסתברות שב-5 הסיבובים הללו התקבלו כל ארבע התוצאות?

(7 נק') ד. ידוע שב-5 הסיבובים שנעשו לא התקבלה לפחות אחת מארבע התוצאות האפשריות.

מהי ההסתברות שב-5 הסיבובים התקבלו <u>בדיוק</u> שתיים מהתוצאות האפשריות?

שאלה 4 (25 נקודות)

מטילים שוב ושוב מטבע, שההסתברות לקבל בו H היא 0.6.

לכל $i = 1,2,\ldots$, נגדיר את המשתנים המקריים X_i על-ידי:

"מספר ההטלה שבה התקבל H בפעם ה-i-ית" (שימו לב: בסה"כ i פעמים, ולא בהכרח ברציפות)

(6 נק') א. חשב את $P\{X_5 = 8\}$.

(6 נק') ב. האם X_2 ו- X_5 בלתי-תלויים? הוכח את טענתך.

(7 נק') ג. חשב את $P\{X_2 = i , X_8 = j\}$, לכל i ו- j שלמים וחיוביים.
זכור לרשום את התחום שבו הסתברות שחישבת מקבלת ערכים חיוביים.

(6 נק') ד. חשב קירוב ל- $P\{X_{100} \geq 180\}$ בעזרת משפט הגבול המרכזי.
הסבר מדוע אפשר לחשב קירוב כזה.

שאלה 5 (25 נקודות)

(12 נק') א. יהי X משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים N , m ו- n .

הוכח כי: $E[X] = n \cdot \frac{m}{N}$

ב. נתון ארגז ובו 100 פתקים, הממוספרים מ-1 עד 100.
בוחרים באקראי וללא החזרה 15 פתקים מתוך 100 הפתקים שבארגז.

(6 נק') 1. מהי שונות מספר הפתקים שייבחרו, שעליהם מספר שהוא כפולה של 5?

(7 נק') 2. מהי ההסתברות שייבחרו 6 פתקים, שעליהם מספר שהוא כפולה של 5 **או** כפולה של 7?

הערה: בסעיף זה, אין הכרח לחשב את תוצאה מספרית סופית.

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z)=P\{Z\le z\}=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt \qquad ; \qquad \Phi(-z)=1-\Phi(z) \qquad ; \qquad Z\sim N(0,1)$$

נוסחת האינטרפולציה: $\Phi(z)\approx\Phi(z_1)+\frac{z-z_1}{z_2-z_1}[\Phi(z_2)-\Phi(z_1)]$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה - 20425

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,...,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1}\cdot p \quad , \quad i=1,2,...$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $t<-\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda}\cdot\lambda^i/i! \quad , \quad i=0,1,...$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r}\cdot p^r \quad , \quad i=r,r+1,...$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t/(1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t<-\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}\Big/\binom{N}{n} \quad , \quad i=0,1,...,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i=m+1,m+2,...,m+n$	$m+(1+n)/2$	$(n^2-1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a\le x\le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt}-e^{at})/(tb-ta)\,,\,t\ne 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma)\cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \quad -\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t) \quad , \quad t<\lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,...,n_r}\cdot p_1^{n_1}\cdot...\cdot p_r^{n_r} \quad , \quad \sum n_i=n\,,\,\sum p_i=1$			

נוסחת הבינום

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$$

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$$

כלל ההכלה וההפרדה

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

הסתברות מותנית

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

נוסחת הכפל

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n\mid A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})$$

נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i) \quad , \quad \{B_i\}\text{ זרים ואיחודם הוא }S$$

נוסחת בייס

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(A\mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)} \quad , \quad \{B_i\}\text{ זרים ואיחודם הוא }S$$

תוחלת

$$E[X]=\sum_x xp_X(x)=\int xf(x)dx$$

תוחלת של פונקציה של מ"מ

$$E[g(X)]=\sum_x g(x)p_X(x)=\int g(x)f(x)dx$$

שונות

$$\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-(E[X])^2$$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית

$$E[aX+b]=aE[X]+b$$

$$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון

$$P\{X>s+t\mid X>t\}=P\{X>s\} \quad , \quad s,t\ge 0$$

תוחלת מותנית

$$E[X\mid Y=y]=\sum_x xp_{X|Y}(x\mid y)=\int xf_{X|Y}(x\mid y)dx$$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X \mid Y=y) = E[X^2 \mid Y=y] - (E[X \mid Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] = E[E[X \mid Y]] = \sum_y E[X \mid Y=y]p_Y(y)$

(טענה מתרגיל ת26, עמוד 430) $E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X \mid Y]]$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) \Big/ \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$

כאשר X_i מ״מ ב״ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X]$

(כאשר X_i מ״מ ב״ת ש״ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X) + (E[X])^2 \mathrm{Var}(N)$

$$M_Y(t) = E\left[\left(M_X(t)\right)^N\right]$$

אי-שוויון מרקוב X מ״מ אי-שלילי , $a>0$, $P\{X \ge a\} \le E[X]/a$

אי-שוויון צ׳בישב $\mu, \sigma^2 < \infty$, $a>0$, $P\{|X-\mu| \ge a\} \le \sigma^2/a^2$

משפט הגבול המרכזי X_i מ״מ ב״ת וש״ה , $\mu, \sigma^2 < \infty$, $P\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) \Big/ \sqrt{n\sigma^2} \le a \right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(a)$

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב״ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ״מ בינומיים (גיאומטריים) ב״ת עם אותו הפרמטר p הוא מ״מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ״מ פואסוניים ב״ת הוא מ״מ פואסוני.
- סכום של מ״מ נורמליים ב״ת הוא מ״מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ״מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב״ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1<x<1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \tfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \ne -1 \quad ; \quad \int \tfrac{1}{ax+b} dx = \tfrac{1}{a}\ln(ax+b)$$

נוסחת האינטגרציה בחלקים:

$$\int e^{ax} dx = \tfrac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \tfrac{1}{a \ln b} b^{ax} \quad ; \quad \boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

$$\log_n a = \log_m a / \log_m n \quad ; \quad \log_n(a^b) = b \cdot \log_n a \quad ; \quad \log_n(ab) = \log_n a + \log_n b$$