

# מטלת מנחה (ממ"ן) 17

הקורס: 20276 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה - פרקים 6 - 7

משקל המטלה: 3 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: יום א' 23.12.07

סמסטר: 2008א

אנא שים לב:  
מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.  
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (25 נקודות)

יהי  $a_n$  מספר הסדרות באורך  $n$ , שאיבריהן שייכים לקבוצה  $\{0,1,2\}$ , ואין בהן הופעות צמודות של 1, אין הופעות צמודות של 2, ואין הופעה של 2 מיד לפני או אחרי 1. בקיצור: אין הופעות של אף אחד מארבעת הרצפים האלה: 11, 12, 22, 21. דוגמא לסדרה מותרת באורך 6: 100201. דוגמאות לסדרות אסורות באורך 6: 100210 (יש 21), 110200 (יש 11).

(10 נק') א. רשמי בעזרת חישוב ישיר את  $a_0, a_1, a_2$ . רשמי יחס נסיגה עבור  $a_n$ . בדקי שהערכים שרשמת עבור  $a_0, a_1, a_2$  מתאימים ליחס הנסיגה.

(15 נק') ב. פתרי את יחס הנסיגה וקבלי נוסחה מפורשת עבור  $a_n$ . בדקי את הנוסחה שקיבלת בעזרת תנאי ההתחלה.

המשך המטלה עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בעמוד הבא רשימה של נוסחאות שימושיות.

שאלה 2 (24 נקודות)

א. כתוב פונקציה יוצרת עבור מספר פתרונות המשוואה  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$  בשלמים, כאשר  $1 \leq x_1 \leq 5$ ,  $2 \leq x_2 \leq 6$ ,  $0 \leq x_3 \leq 4$ ,  $0 \leq x_4 \leq 4$ .

ב. בעזרת הפונקציה שרשמת מצא את מספר פתרונות המשוואה הנ"ל בתנאים הנ"ל, כאשר  $n = 11$ . יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

**שאלה 3 (24 נקודות)**

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \text{ ותהי } g(x) = \frac{f(x)}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

א. הבע את  $b_n$  (לכל  $n$  טבעי) בעזרת ה  $a_i$ -ים.

ב. הבע את  $a_n$  (לכל  $n$  טבעי) בעזרת ה  $b_i$ -ים.

**שאלה 4 (27 נקודות)**

דוגמא לתרגיל מסוג זה נמצאת בסוף הקובץ "מבוא לפונקציות יוצרות" שבאתר הקורס.

נתבונן בזהות  $(1-x)^n = (1-x^2)^n (1+x)^n$ . יהי  $m$  מספר אי-זוגי,  $m = 2b+1$ .

מצא את המקדם של  $x^m$  בכל אחד מהאגפים של הזהות הנ"ל.

רשום את הזהות הקומבינטורית המתקבלת. בדוק את תוצאתך עבור המקרה  $m=3, n=3$ .

**להלן סיכום כמה נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות:**

$$(i) \quad \text{סכום טור הנדסי סופי: } \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{ואינסופי: } \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

**(ii) כפל פונקציות יוצרות:**

$$\text{אם } f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i, \quad \text{ו- } f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

$$\text{אז } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \quad (\text{ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד}).$$

$$(iii) \quad \frac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+\dots)^n = \sum_{k=0}^{\infty} D(n,k) x^k$$

במלים אחרות: המקדם של  $x^k$  בפיתוח הביטוי  $\frac{1}{(1-x)^n}$  הוא  $D(n,k)$ .

(ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר).