תשובה 1

א. מנוסחת הבינום: $(1+c)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c^i$, $(1-c)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} c^i$.

בחיסור $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c^i - \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} c^i$ נופלות כל החזקות **הזוגיות** של c, כי יש להן אותו מקדם בשני הביטויים. נישאר עם החזקות האי-זוגיות ($i=2k+1$), עבורן המקדם הוא בעל סימן הפוך, ובחיסור הוא מסתכם ל- $2\cdot\binom{n}{i}$. קיבלנו:

$$(1+c)^n - (1-c)^n = \sum_{2k+1\le n} 2\binom{n}{2k+1} c^{2k+1} = 2c \sum_{2k+1\le n} \binom{n}{2k+1} c^{2k}$$

ב. נובע מהגדרת המקדמים הבינומיים במקרים חריגים ("קומבינטוריקה" עמ' 30):

$\binom{n}{i} = 0$ עבור $i > n$.

ג. בהצבת $c=1$ בסעיף א, נקבל $(1+1)^n - (1-1)^n = 2\sum\limits_{2k+1\le n} \binom{n}{2k+1} \cdot 1^{2k}$.

לאחר חילוק שני האגפים ב- 2 : $\sum\limits_{2k+1\le n} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$.

שימו לב שקיבלנו בדיוק חצי מהסכום המוכר (אמצע עמ' 70 בספר): $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

ד. בסעיף הקודם קיבלנו שסכום המקדמים הבינומיים $\binom{n}{i}$ כאשר i מקבל רק ערכים **אי-זוגיים** הוא **חצי מסכום כל המקדמים** $\binom{n}{i}$. לכן בהכרח סכום המקדמים הנותרים גם הוא חצי מסכום כל המקדמים. המקדמים הנותרים הם אלה בהם i מקבל ערכים זוגיים.

התשובה אפוא 2^{n-1} .

תשובה 2

א. תהי U קבוצת כל הדרכים לסדר את המחרוזת ללא הגבלות. תהיינה:

A: קבוצת הסידורים בהם מופיע הרצף 22 , B: קבוצת הסידורים בהם מופיע הרצף 333 ,

C: קבוצת הסידורים בהם מופיע הרצף 4444.

קבוצת הסידורים **המותרים** בשאלה היא $A'\cap B'\cap C' = U-(A\cup B\cup C)$.

לפי עקרון ההכלה וההפרדה גודל קבוצה זו הוא

$$|U| - (|A|+|B|+|C|) + (|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|) - (|A\cap B\cap C|).$$

נחשב את הגדלים המופיעים בביטוי זה:

בפתרון שאלה 2 בממ"ן 15 חישבנו: $|U| = 12,600$, $|A| = 2,520$.

בדומה לגמרי לחישוב שם, נחשב $|B| = \frac{8!}{4!2!1!} = 840$, $|C| = \frac{7!}{3!2!1!} = 420$.

נחשב חיתוכים:

$A\cap B$ היא קבוצת כל הסידורים בהם מופיע הרצף 22 ומופיע **גם** הרצף 333.

במהלך פתרון שאלה 2 בממ"ן 15 חישבנו: $|A\cap B| = \frac{7!}{1!1!1!4!} = 210$.

בדומה: $|A\cap C| = \frac{6!}{1!1!3!1!} = 120$, $|B\cap C| = \frac{5!}{1!2!1!1!} = 60$.

וכן: $|A\cap B\cap C| = \frac{4!}{1!1!1!1!} = 4! = 24$.

נציב בביטוי שלמעלה ונקבל:

$$12,600 - (2,520+840+420) + (210+120+60) - 24$$
$$= 12,600 - 3,380 + 390 - 24 = 9,186$$

תשובה 3

תהי U קבוצת כל פתרונות המשוואה בטבעיים, ללא מגבלות.

$|U| = D(6,20) = \binom{25}{5} = 53,130$.

תהי A_i $(i=1,2,3)$ קבוצת הפתרונות בהם $x_i = y_i = 0$.

אנו מחפשים את גודל הקבוצה $A_1'\cap A_2'\cap A_3'$.

נחשב: $|A_i| = D(4,20) = \binom{23}{3} = 1,771$

עבור $i \neq j$, $|A_i \cap A_j| = D(2,20) = \binom{21}{1} = 21$ (את זה אפשר כמובן לומר גם בלי D...).

ולבסוף $A_1\cap A_2\cap A_3 = \varnothing$.

לפי הכלה והפרדה,

$$|A_1'\cap A_2'\cap A_3'| = 53,130 - 3\cdot 1,771 + 3\cdot 21 - 0 = 47,880$$

תשובה 4

יהיו $a_1,\ldots,a_{100}$ כל אברי A (בסדר שרירותי כלשהו, לאו דווקא סדר עולה).

לכל $1 \le k \le 100$, יהי $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$.

לכל k, נתבונן בשארית של S_k בחילוק ב- 100 .

אם קיים k עבורו השארית היא 0, סיימנו (מדוע?).

אם אף שארית אינה 0, לפנינו סדרה באורך 100 של מספרים S_k, ורק 99 שאריות שונות אפשריות. לפי שובך היונים יש לפחות שני איברים בסדרה, נאמר S_m ו- S_n, שהם בעלי אותה שארית בחילוק ב- 100.

ב.ה.כ. נניח $n < m$. כעת, $S_m - S_n$ מתחלק ב- 100 .

הוא אמנם לא אחד ה- S -ים שלנו אבל הוא בהחלט סכום של אברי A: $S_m - S_n = \sum_{i=n+1}^{m} a_i$.

איתי הראבן