

אולגוריתמים
הרצאה 11
19.1.09
ד"ר מ -

1.09

אולגוריתמים - הרצאה 11

כפל מטריצות

ר"מ של מטריצות A ו B נעשה ששת המטריצות קן מלפני חמח
הכנסות מטריצות A ו B נקרא $A \cdot B = C$, מטריצה C יהיו הזוג, חמח זכ, ונכסל סוגה A כמאפיה B ח סדמים, סד"כ סבבולית של (יח)ס.
אנסר ללשר את היסבולית רזו... באמצעות טכניקת "הפרד ומשול" B^T

זכיק, זכיצ, 8 רפזים כזי אופשז אל 2 המטריצות הבולות:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

אכן סד"כ 8 "רפזים" + מטל שלרזו של "חיקורם".

שטבולט טען שבמקום לעשות כפל מטריצות בדורה סטנדרטית, נעשה ד רפזים: (במקום 8 רפזים)
ש שמהוצע כזל וימזיוזל. ונקבל את מטריצת התוצאה (כזל):
 $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$
אפי שיטת שטבולט יש ד רפזים 18 - חיקבויים.
(יח) ש $n=2^k$ (פומר ח חזקה שמה של 2).

הרעיון הול: יש לי מטריצה של חמח, נחלק אותה ל-4 מטריצות של אחת מן הול: $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$
כשנרצה לעשות את כל המטריצות (נחשוב על פ איבר במטריצה A הקזמה שלן לז כסקול)
אלא נמטריצות.

אזעת המזקרה הזכ נקבל: $C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

הזיק, המבצית לעשות כפל כקזסיבי של מטריצות חזי אחרך פ חמ מטריצות לעזוז ו חת מטריצות
ונמלך ככר... זכ נפזל אפי "הזורה ההזדדתי" אל כל מטריצות יהיו 8 רפזים של חמ
מטריצות, ופיתיון נוסחאל ויקרוסיה ישלז זכ - פומר לז נרלוז שלם זכז מההסיתול
ל חזקרה כקזסיבית אחת מטריצות.

כרעיון של שטבולט אנסר להפזל לל רק על סקלרים יאלז זכ על חמ מטריצות.
(ישט נחזל כנסחולל שכלל פ סקול למטריצה. (זכ יתפוס זכ זכזי מטריצות).
במטריצות יש חסיבולט אסזו נככל $BA \neq AB$. כפיתמן אל שטבולט חמז עזשים BA
לז זכיק, זכז נוכסחולל מחלמות זכ אכל מטריצות שיוולל קומולטיבי.
איק מחזים אפיון הזכ? ופיתיון לז פ כק אינלטיבי - יש כססרי הלימוד.
ניתוח חסיבולית: יש ד קימולל כקזסיביות אהפסול מטריצות מחזקל: $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$,

כמו כן יש 18 פעולות חיבול של מטריצות כחזקל $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$. חיקול אנמן יודעים לעשות
כ- n^2 , ללז זכיק כזורה וקזסיבית כמו כז. וכן הולזולות של הוצפת פעולות כז
לטרות חוסשט כחולל חיקול מורידה מהסיבולית.

פ פעולות חיבול עולה $\Theta(n^2)$, ונעז שמהסיו הפעולות הול: $n^2 \cdot C$ כלשי C
קבז אכסולטי. וכתוב אל נוסחאל ויקרוסיה:

$$T(n) = 7 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + C \cdot n^2$$

סבבולית הכפול
2 מטריצות מחזקל חמח
7 וס ד קימולל
לחזסיביות

$$T(n) = 7 \cdot [7 \cdot T(\frac{n}{7}) + C(\frac{n}{7})^2] + C \cdot n^2 = 7^2 [7 \cdot T(\frac{n}{7^2}) + C(\frac{n}{7^2})^2] + 7C(\frac{n}{7})^2 + Cn^2 = \dots = 7^i \cdot T(\frac{n}{7^i}) + \sum_{j=0}^{i-1} 7^j \cdot C(\frac{n}{7^j})^2$$

אומדן היקף ריבועי הוא: $\log_2(n)$

אומדן הריבועי: $T(1) = 1$ (הנכנסת 2 סקלרים)
 נציב $i = \log_2 n$, ונקבל:
 $7^i \cdot \log(\frac{n}{7^i}) = 7^{\log_2 n} = n^{\log_2 7}$
 $(\log_2 n = \log_2 7)$

נקראת הקונסיסיה
 אם במקום 8 היינו מקבלים: $n^{\log_2 8} = n^3$ (הנכנסת הייתה n^3)
 העובדה שיש לנו 7 קריאות רקורסיביות מלאה שנית זנון לחסום את הסיבוכיות $n^{\log_2 7}$:
 המחיר השני בנוסחת היקף ריבועי: $C \cdot n^2 \cdot (\frac{7}{4})^{\log_2 n / 3} \leq C \cdot n^2 \cdot (\frac{7}{4})^{\log_2 n}$
 סוג הנדסה יורד

אם נמצא מקבוצים נקבל:
 $n^2 \cdot (\frac{7}{4})^{\log_2 n} = n^2 \cdot n^{\log_2(\frac{7}{4})} = n^{\log_2 7}$
 $= n^{\log_2 7} \cdot n^{\log_2 \frac{7}{4}} = n^{\log_2 7}$

כלומר גם המחיר השני חסום בסיבוכיות $n^{\log_2 7}$

$$\log_2 7 = 2.807359 \dots$$

ואכן שסיקנו את הסיבוכיות $O(n^3)$ ל- $O(n^{2.807359})$

הקריאה הסופית ביותר שליה נקרא "וינר-רנד" והיא: $O(n^{2.376})$

בעזרת שבו החלטנו את $(*)$ - $(+)$ - (\min) (המחיר השני של \log_2)

בדיוק היום שלט מטיביות $A \cdot B$ שמה למטיביות C

* אם משרה אחר לנו שמתכות הכנס A מטיביות A מטיביות B (הא מטיביות C שזוהי

חזקה, אז ושלמה היא היא אטשית אבדוק זאת בסיבוכיות $O(n^2)$

כבר של וקטורי מטיביות זוהי לנו $O(n^2)$ (כי \log_2 בקטור הממוצע הוא \log_2 , חזרים n

לפניהם אז יך ומקבלים n^2). בהנחה שזוהי היקף הוא n והמטיביות חזקה

נקה וקטורי טכנו r ונקרא את ויסזורה:

אם נכפל את שני המטרים בקטורי r ונקרא את

שנייה התוצאה (ומחיר יתיה: $O(n^2)$)

אם $A \cdot B = C$ אז לא משנה איזה וקטורי נבחר r , נקבל את השוויון $r \cdot A = C$

אין במקרה $A \cdot B \neq C$ חלש איזה וקטורי r נבחר, $r \cdot A \neq C$ כלומר שזוהי

נקבל $(r \cdot A) \cdot B = r \cdot C$ אמרת שבהוא: $A \cdot B \neq C$

כדי לדעת איך אבחנו את r נשתמש במחירייתם קדומי (ולא אולגוריתם דטרמיניסטי)

(נני שזמנו \log_2 כה)

אלהיו יתב רצואי נותן אלו ויתלובה נהסתר חות נקב אזה.

ביתו של ה' קטני ר' בצורה אקדמית.

מאורקאי ז יבול לרבל ח זיכר חסי' 151

המחיר 100 ש"ח.

$$r(n) = \begin{cases} 0 & \text{בהסתברות } \frac{1}{2} \\ "1" & \text{בהסתברות } \frac{1}{2} \end{cases}$$

[illegible]

הסיבוכיות: $O(n^2)$ מבידוד וזכור (של וקטורי r במטריצות A, B, C)

כדי שכל אחד הנתחילת הנדבנות זכר בסבבנות (ח) (אחישב הנתחילת הנתחילת)

ואם סה"כ: $O(n^2)$ בקלות

משפט: אם $A \times B = C$ אזי המרחב הווקטורי תמיד יעני - "כן". (כלומר תמיד יש פתרון)

אם $A \times B \neq C$ הנה אלויתם יחד "א" (במאמר אי שווינון) הנהסתהוואת גדולה

שווה $\int - \frac{1}{x}$

כד. איינעם און די בערגות היסטאריע (היסטאריע פון זעהן א שוין) אבער אויף אסער
פארמיר און געזאגט.

אמת (המשפטים) אומרת "שנינו" ש' סימני' א' של ה'אמת' $\frac{1}{2}$ ו' $A \cdot B \neq C$

אשר אם נישאל אותם האם "א" שווה "אז" קובע את $A \cdot B \neq C$

הסיכוי שחלום יז' $\frac{1}{2}$ אם נניח 100 פעמים ב"ה חסידי שטחיה ב"ב

הרשע'ים (הלל) : $(\frac{1}{2})^{100}$ (זה פוסט עיון) רגיל קבוע מספיק (קטן) כפי "מסמך" על האחריות.

ה'תש"ה:

אם $A \cdot B = C$ ברור של r מחזיק $r \cdot A \cdot B = r \cdot C$ ולכן זה לא נכון

נ"ח ע $A \cdot B \neq C$, במיקרה קצה, במסבינו: $A \cdot B - C$ (שהם) כוונות שונה לזהות

מחלקה 5 (A.B ≠ c) יש לסתור עם מוצה אחת שליקה היקלתי 5.

נניח שיש n וקטורים (v_1, v_2, \dots, v_n) ו- $v_1 \neq 0$.

$$(r_1, r_2, \dots, r_n) : r \in \mathcal{R} \text{ of } \mathcal{P}$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_i$$
 : פירוש נורמלי $A \cdot B - C \neq 0$ נראה על

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_i = 0$$
 : פירוש $A \cdot B - C \neq 0$: על הסוגיה

$$r_1 \cdot v_1 = - \sum_{i=2}^n r_i \cdot v_i$$

$$r_1 = \frac{-\sum_{i=2}^n r_i v_i}{v_1}$$

אבל $v_1 \neq 0$ ולכן

הבחינות של r_1, \dots, r_n וק חל. למרות בחירות חל, r_2, \dots, r_n יש בדיוק ערך אחד.
אז גם כך שמעיים השוויון והבא: $r_1 = \frac{-\sum_{i=2}^n r_i v_i}{v_1}$ סומר: $r \cdot v = 0$

כיוון ש r נכחד ממען 2 ערכים (אפסיות), הסיכוי של: $r_1 = \frac{-\sum_{i=2}^n r_i v_i}{v_1}$ חסר ע"י $\frac{1}{2}$.
הערה: הווא הנחה ע"י מתמטיקאי בשם: Freivalds.
האזורים החדשניים של אולגוריתם שנקראים "טביעות אצבע".
הרעיון הבא: כ"טביעות אצבע". את צינור צלילי, השולט פסוקי. בין שני פסוקים
שצוללים החדש, אם את אחר את שני הוסיט רחוק ונשלטוהם סוקסטימליה
אמרתה יותר קטן ואם נעשה זאת בצורה חכמה אז בהנחתה זכורה את השנייה.
היו שונים במערכת המעלה אז גם למחיר לקוחות "טביעות אצבע" (האקסטימליה)
הישיבים וחזו ישארו שונים. ואיבדו את שני טביעות אצבע שונות או לא יותר פשוט

לחימה בושטות

ומתאנו קול מתקן ויש לו 2 צמחים s, t , וזה צומח המעלה, t הוא קור.
שקטת בחור נחשבה ע"י באורו יש לה קיבול $(s) \leq 0$.
אע"פ חרדי אהלה באקלימ צמיחה (אקלימ שגורר שגורר) קטן למחיר חרדי חרדי.
מקייבול שרה. וכמות המים שניכנס לא צומח שווה אכמות המים שיוצאת מה צומח.
חוק השמור - מה שניכנס = מה שיוצא. הפך אצמחים שונים למחיר וזה קור.
וזה אקסם את כמות המים שמוצאת מהמחיר לקור.
מסתמי שבעה זו מלוח שימוש.

תאריך: 11.10.19
 חומר: 3N3

2x2 \rightarrow 13 \rightarrow C1 \rightarrow 13

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 p_1 &= (a_{1,2} - a_{2,2})(b_{2,1} + b_{2,2}) \\
 p_2 &= (a_{1,1} + a_{2,2})(b_{1,1} + b_{2,2}) \\
 p_3 &= (a_{1,1} - a_{2,1})(b_{1,1} + b_{1,2}) \\
 p_4 &= (a_{1,1} + a_{1,2})b_{2,2} \\
 p_5 &= a_{1,1}(b_{1,2} - b_{2,2}) \\
 p_6 &= a_{2,2}(b_{2,1} - b_{1,1}) \\
 p_7 &= (a_{2,1} + a_{2,2})b_{1,1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{1,1} &= a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} = p_1 + p_2 - p_4 + p_5 \\
 c_{1,2} &= a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} = p_4 + p_5 \\
 c_{2,1} &= a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} = p_6 + p_7 \\
 c_{2,2} &= a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} = p_2 - p_3 + p_5 - p_7
 \end{aligned}$$

