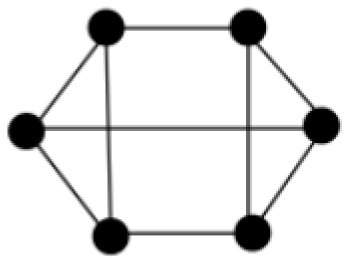
שאלה 1

האם קיים גרף בעל סדרת הדרגות הבאות ?

א. 3 ,3 ,3 ,3 ,3 ,3



ב. 3 ,3 ,3 ,3 ,3

לא, כי סכום הדרגות בכל גרף חייב להיות זוגי, וכאן הוא אי-זוגי.

ג. 1 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5

לא, כי הצומת עם דרגה 5 מחובר לכל הצמתים האחרים. אם נמחק אותו נקבל גרף שבו יש שלושה צמתים, שאחד מהם עם דרגה 3, וזה לא ייתכן.

ד. האם ייתכן גרף שבו דרגת כל קדקד היא 3 יהיו 100 צלעות ?

לא ייתכן, כי סכום הדרגות הוא פעמיים מספר הצלעות (כלומר 200), והמספר הזה לא מתחלק ב-3.

שאלה 2

נסמן ב – $\Delta(G)$ את הדרגה המקסימלית ב – G וב – $\delta(G)$ את הדרגה המינימלית.

הוכיחו כי $\Delta(G) \geq 2 \cdot \frac{|E|}{|V|} \geq \delta(G)$.

עפ"י משפט שראינו מתקיים כי $\frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{|V|} = 2 \cdot \frac{|E|}{|V|}$, סכום הדרגות חלקי מספר הקודקודים הוא הדרגה הממוצעת. הדרגה הממוצעת בהכרח קטנה או שווה מהדרגה המקסימלית וגדולה או שווה מהדרגה המינימלית.

שאלה 3

הוכחו כי בכל גרף לא מכוון עם יותר מקודקוד אחד קיימים שני קודקודים בעלי אותה דרגה.

לכאורה ייתכן שבגרף לא מכוון יהיו לכל הצמתים דרגות שונות : אם בגרף יש n צמתים, ייתכן שהדרגות שלהם הן 0..n-1, כלומר בדיוק n דרגות שונות.

אבל למעשה לא ייתכן שאלו הן הדרגות של הגרף : אם לאחד הצמתים יש דרגה n-1 הרי שהוא מחובר לכל הצמתים האחרים, אך זה עומד בסתירה לכך שיש צומת בדרגה 0.

שאלה 4

הוכיחו כי גרף לא מכוון הוא קשיר אס"ם בכל קבוצת קודקודים לא ריקה ושאינה מכילה את כל קודקוד הגרף S, ישנה קשת שקצה אחד שלה ב-S והשני איננו ב-S.

<u>כיוון א :</u>

נניח כי קיימת קבוצת קודקודים S לא ריקה ושאינה מכילה את כל קודקודי הגרף, ואין קשת שקצה אחד שלה ב-S וקצה אחר איננו ב-S.

נניח שהגרף קשיר. מכאן שלפי הגדרתו קיים מסלול בין צומת כלשהו ב-S לבין כל צומת אחר בגרף, למשל צומת אשר אינו נמצא ב-S. אך זה עומד בסתירה להנחה הראשונה.

כלומר **אם** קיימת קבוצת קודקודים S לא ריקה ושאינה מכילה את כל קודקודי הגרף, ואין קשת שקצה אחד שלה ב-S וקצה אחר איננו ב-S, **אזי** הגרף אינו קשיר.

<u>כיוון ב :</u>

נניח כי הגרף אינו קשיר, כלומר יש לו לפחות שני רכיבי קשירות.

נניח שבכל קבוצת קודקודים לא ריקה S שאינה מכילה את קודקודי הגרף יש קשת שקצה אחד שלה ב-S וקצה אחר איננו ב-S. נבחר את S להיות אחד מרכיבי הקשירות של הגרף. אך מכך שהגרף אינו קשיר מתקבל שאין קשת שקצה אחד שלה ב-S (רכיב קשירות אחד) וקצה אחר שלה אינו ב-S (רכיב קשירות אחר). שוב הגענו לסתירה.

כלומר **אם** הגרף אינו קשיר, **אזי** לא בכל קבוצת קודקודים לא ריקה S שאינה מכילה את קודקודי הגרף יש קשת שקצה אחד שלה ב-S וקצה אחר איננו ב-S.

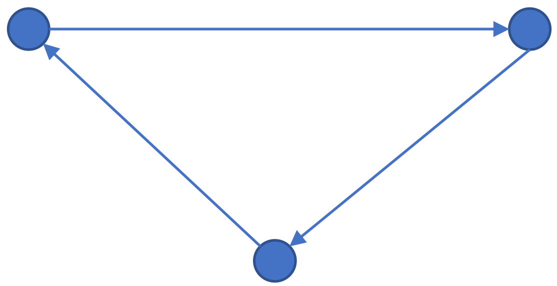
שאלה 5 – **הוכחה על דרך הבנייה (הוכחה קונסטרוקטיבית)**

קשירות בגרף לא מכוון לעומת קשירות חזקה בגרף מכוון.

(א) נתון $G=(V,E)$ גרף **לא מכוון**, קשיר, עם לפחות שני קדקודים. הוכיחו כי תמיד קיים קדקוד, שלאחר הסרתו מהגרף עדיין מתקבל גרף קשיר.

(ב) הציגו גרף **מכוון**, קשיר היטב, $H=(V,E)$ כך שלאחר הסרה של **כל** קדקוד $v\in V$ מהגרף, תמיד יתקבל גרף שאיננו קשיר היטב.

לכל גרף קשיר יש עץ פורש, שמתקבל למשל מהרצת BFS על הגרף. בכל עץ פורש יש עלה. הסרת העלה לא תפגע בקשירות הגרף המקורי.



שאלה 6

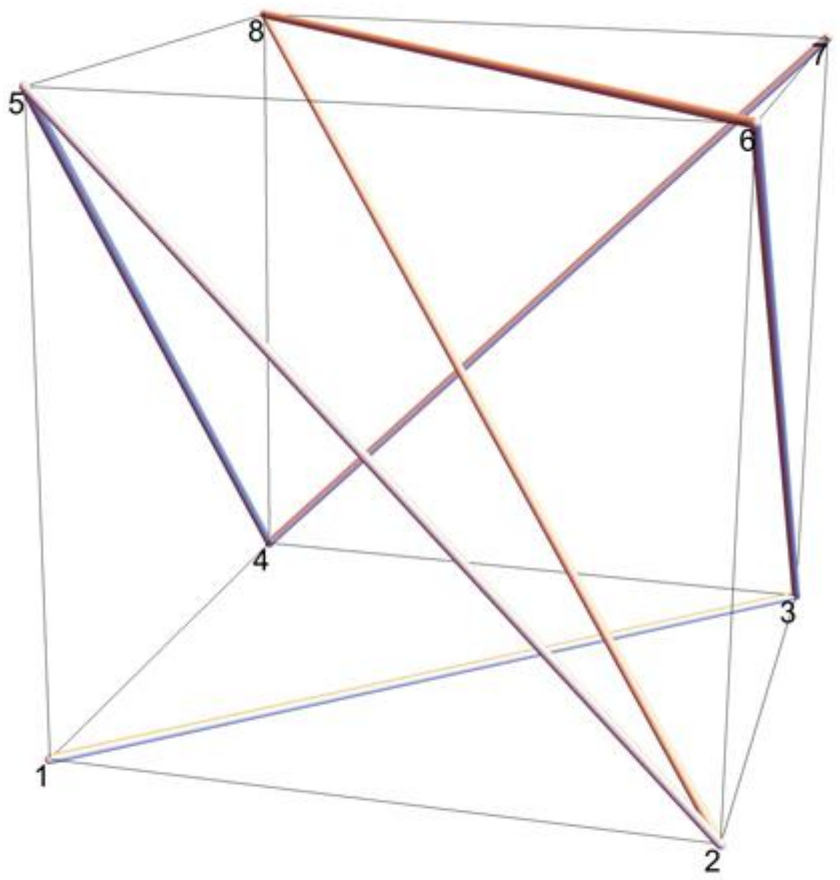
במדינה מסוימת יש n ערים וחברת תעופה אחת. נתון כי מעיר הבירה יוצאים 21 קוי תעופה ומעיר נתונה נוספת L יוצא רק קו תעופה אחד, מכל שאר הערים יוצאים 20 קוי תעופה. הוכיחו כי ניתן להגיע מעיר הבירה לעיר L (ייתכן כי במעבר בערים נוספות).
(הטענה הכללית: אם בגרף יש בדיוק שני קודקודים עם ערכיות אי-זוגית, אז יש מסלול ביניהם).

נבנה גרף לפי נתוני השאלה.
נתרגם את אוסף הערים לצמתים ואת קווי התעופה לקשתות.

נניח שעיר הבירה והעיר L נמצאות בשני רכיבי קשירות שונים.

נביט ברכיב הקשירות שבו נמצאת עיר הבירה (וטיעון דומה יעבוד עבור העיר L). הצומת שלה הינו היחיד ברכיב הקשירות שלו שיש לו דרגה אי זוגית.

לכן סכום הדרגות ברכיב הקשירות הזה הינו אי זוגי.
סתירה לכך שסכום הדרגות בכל רכיב קשירות חייב להיות זוגי.
לכן עיר הבירה והעיר L חייבות להיות באותו רכיב קשירות, כלומר ניתן להגיע מאחת לשנייה.



שאלה 7

יהי G גרף פשוט, נסמן ב – $\delta(G)$ את הדרגה המינימלית בגרף. נניח כי $\delta(G) > 1$.

א. הוכיחו כי יש ב – G מסלול פשוט באורך $\delta(G)$ לפחות.

פתרון :

א. יהי $u_0, u_1, \dots, u_k$ מסלול פשוט ארוך ביותר ב – G. כל שכניו של u_0 שייכים בהכרח למסלול, אחרת ניתן להאריך אותו, ואם כן $\delta(G) \le k$ כנדרש.

דרגה מינימלית – 4. מסלול ארוך ביותר – 1,3,6,8,2,5,4,7

אם נציע מסלול ארוך ביותר 1,2,8,6, יש ארוך ממנו – עם קשת בין 3 (שהוא אחד מתוך 4 שכנים של הצומת שבתחילת המסלול) ל-1.

ב. הוכיחו כי יש ב – G מעגל פשוט באורך $\delta(G) + 1$ לפחות.

פתרון :

ב. באותו המסלול שבסעיף א', יהיו $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ כאשר $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r < k$ שכניו של u_0. אזי $u_0, u_1, \dots, u_{i_r}, u_0$ הוא מעגל פשוט בגרף באורך $\delta(G) + 1 \le r + 1 \le i_r + 1$.

השכנים של 1 במסלול – 2,3,4,5, מספרם לפחות 4 (כפי הדרגה מינימלית.)
לכן יש מעגל 1,3,6,8,2,5,4,1

שאלה 8

א. יהי G גרף לא מכוון, לא קשיר, עם שני רכיבי קשירות. הוכיחו כי הגרף המשלים $\bar{G}$ קשיר והקוטר שלו הוא לכל היותר 2.

נוכיח כי הקוטר של הגרף המשלים הוא לכל היותר 2, ומזה כמובן ינבע שהוא קשיר.

נבחר שני קודקודים בגרף, u ו-v.
אפשרות אחת : הם שייכים לשני רכיבי קשירות שונים.
מכאן שבגרף המקורי לא היתה ביניהם צלע, לכן בגרף המשלים יש ביניהם צלע ישירה.

אפשרות שנייה : u ו-v שייכים לאותו רכיב קשירות. אזי יש צומת w שבגרף המקורי היה שייך לרכיב הקשירות השני, ולכן בגרף המשלים יש צלע ישירה הן בין u לבין w, והן בין v לבין w. כלומר המרחק בקשתות בין v ל-u הינו בדיוק 2.

ב. יהי G גרף לא מכוון עם n קודקודים שבו דרגת כל קודקוד היא לפחות $\frac{n-1}{2}$. הוכיחו כי G קשיר והקוטר שלו הוא לכל היותר 2.

נניח בשלילה כי קוטר הגרף הוא לפחות 3, כלומר קיימים שני קודקודים - נקרא להם u ו-v שהמרחק המינימלי ביניהם הוא 3.
נסמן את השכנים של שני הצמתים הללו ב-N(u) ו-N(v).

האם ייתכן צומת ששייך לשתי הקבוצות הללו ? אם היה כזה, הרי שהיה מסלול באורך 2 בין u ו-v, בסתירה לכך שהמרחק המינימלי ביניהם הוא 3. לכן שתי קבוצות השכנים הינן זרות זו לזו.

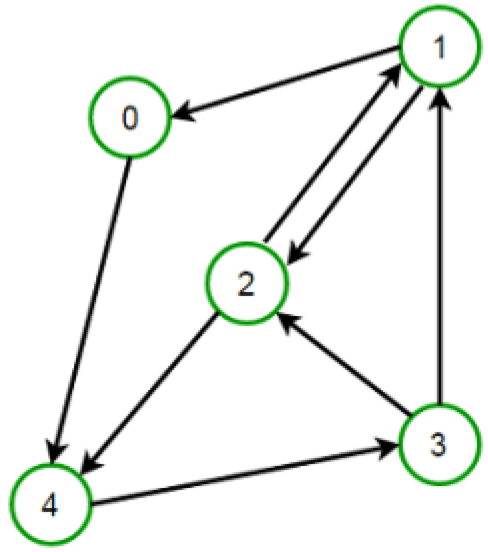
מהנתון בשאלה, גודלה של כל קבוצת שכנים הוא לפחות (n-1)/2

נסכום את הצמתים שונים יש בגרף : לפחות u ו-v ו-N(u) ו-N(v). כלומר לפחות 1+1+(n-1)/2+(n-1)/2.

אך הסכום הזה הוא n+1, מה שלא ייתכן. הגענו לסתירה.

שאלה 9

G הוא גרף מכוון ו- G′ הוא גרף תשתית לא מכוון של G, כלומר מכיל אותם צמתים כמו G ויש לו קשתות בין צמתים שהיו ביניהם קשתות ב-G.



הוכח כי הגרף G הוא קשיר חזק אמ"מ :

1. גרף התשתית G' הוא קשיר וכן
2. כל קשת ב- G שייכת למעגל מכוון.

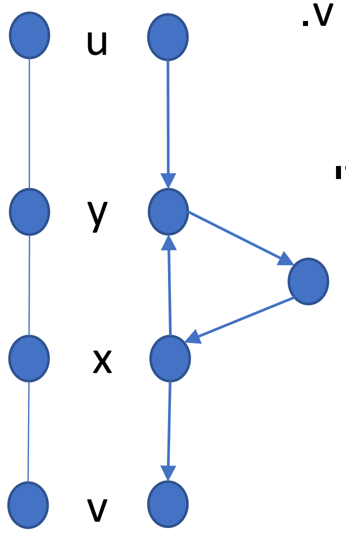
כיוון ראשון - נניח ש-G קשיר חזק, ונוכיח ש-G' קשיר (שזה מובן מאליו) ושכל קשת ב-G שייכת למעגל מכוון.

נלך על דרך השלילה, ונניח שיש קשת e ב-G, נקרא לה u->v שאינה שייכת למעגל מכוון.

כיון ש-G קשיר חזק, יש מסלול מכוון מ-v ל-u. המסלול הזה ביחד עם הקשת e מהווה מעגל מכוון.

סתירה להנחה שהקשת לא שייכת למעגל מכוון.

כיוון שני - נניח ש-G' קשיר ושכל קשת ב-G שייכת למעגל מכוון, ונוכיח ש-G קשיר חזק.



נניח על דרך השלילה ש-G אינו קשיר חזק, למשל יש בו צומת u שאי אפשר להגיע ממנו עם כיוון הקשתות לצומת מסויים v.

כיון שהגרף G' קשיר, יש מסלול בין u ל-v. נוכיח שהמסלול הזה ב-G' משרה מסלול מכוון ב-G בין שני הצמתים הללו.

המסלול הזה מכיל קשתות משני סוגים : האחד, קשתות שבמהלך ההליכה שלנו מ-u ל-v אנו מתקדמים עם הכיוון המקורי של הקשת ב-G. הקשתות הללו הן "לטובתנו".

הבעייה קיימת רק רק עם הסוג השני של קשתות - אלו שבמהלך ההליכה שלנו מ-u ל-v אנו מתקדמים נגד הכיוון המקורי של הקשת ב-G.

נניח שיש קשת כזו x->y, ואנו רוצים להגיע דווקא מ-y ל-x כדי להשלים מסלול מכוון בין u ל-v.

אבל הנחנו שכל קשת ב-G שייכת למעגל מכוון. לכן יש ב-G מסלול מ-y ל-x שאפשר לתפור אותו (ואת דומיו) + הקשתות מהסוג הראשון כדי לקבל מסלול עם כיוון הקשתות מ-u ל-v.

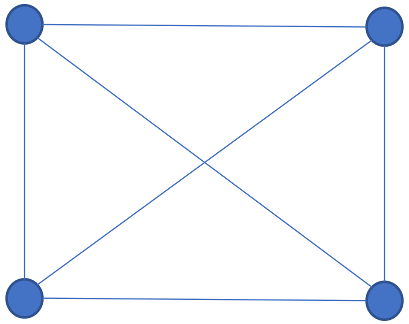
סתירה להנחה שאי אפשר להגיע מ-u ל-v.

שאלה 10

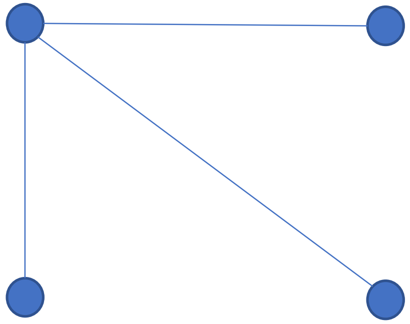
בסעיפים הבאים נניח כי G גרף קשיר ולא מכוון.

א. הוכיחו או הפריכו : עבור כל עץ פורש T של G קיים עץ DFS שגרף התשתית שלו הוא T. כלומר בהכרח אחת הדרכים האפשריות להריץ DFS על G מפיקה עץ שהוא (בהתעלם מכיוון הקשתות) בדיוק העץ הפורש T.

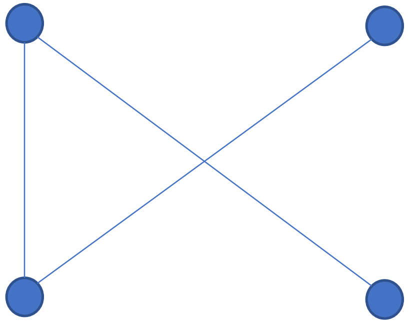
הטענה לא נכונה.



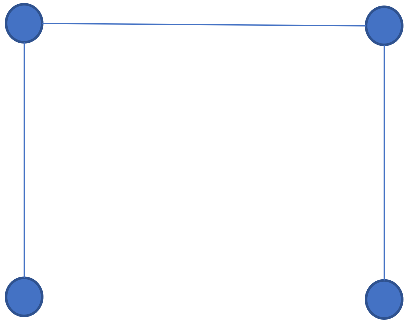
דוגמה לעץ פורש.



אך כל עץ DFS יהיה שרוך, למשל



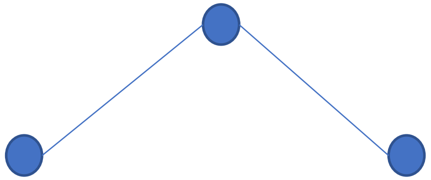
או



ב. הוכיחו או הפריכו : לכל עצי ה-DFS של G יש אותו מספר עלים.

הטענה לא נכונה.

אם מתחילים
בצומת המרכזי



אם מתחילים
בצומת צדדי