פתרונות לממ"ן 13 - 2013ב - 20425

1. א. למשתנה המקרי X הנתון בבעיה יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים 60 ו- 0.5 .

לפיכך, לכל $i = 0,1,\ldots,60$ מתקיים : $P\{X = i\} = \binom{60}{i} \cdot 0.5^{60} = \binom{60}{60-i} \cdot 0.5^{60} = P\{X = 60 - i\}$

ומכאן שמתקיים : $P\{X < 30\} = P\{X > 30\}$

כמו כן, מתקיים : $P\{X < 30\} + P\{X = 30\} + P\{X > 30\} = 1$

לכן, נוכל לחשב את ההסתברות המבוקשת כך :

$$P\{X > 30\} = \frac{1 - P\{X = 30\}}{2} = \frac{1 - \binom{60}{30}0.5^{60}}{2} = 0.4487$$

ב. נשים לב שמתקיים הקשר $Y = 60 - X$. כלומר, אנו מעוניינים בהסתברות המאורע :

$$X^2 + Y^2 = X^2 + (60 - X)^2 = 2X^2 - 120X + 3,600 = 1,872$$

המתרחש כאשר :
$$X_{1,2} = \frac{120 \pm \sqrt{120^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1,728}}{4} = \begin{cases} 36 \\ 24 \end{cases}$$

כלומר : $P\{X^2 + Y^2 = 1,872\} = P\{X = 24\} + P\{X = 36\} = 2 \cdot \binom{60}{24} \cdot 0.5^{60} = 0.06254$

2. נסמן ב- A_i את המאורע ש- $X = i$, כלומר, את המאורע שנבחר מדגם בגודל i ;
ונסמן ב- B את המאורע שהמספר 1 שייך למדגם הנבחר.

נחשב את ההסתברות של המאורע B בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה. נקבל :

$$P(B) = \sum_{i=0}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i) = \sum_{i=0}^{n} P\{B \mid X = i\}P\{X = i\} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{n-1}{i-1}}{\binom{n}{i}} P\{X = i\}$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} P\{X = i\} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} i\, P\{X = i\} = \frac{E[X]}{n}$$

3. נסמן ב- n_i את המספר שמקבל שחקן i, לכל $i = 1,2,...,5$. שימו לב, שאין שום חשיבות לערכים המסוימים של חמשת המספרים. מספיקה הידיעה שהם שונים זה מזה.

$X = 0$ כאשר לשחקן 1 מספר קטן יותר מאשר לשחקן 2. במקרה זה, אין שום חשיבות למספרים שבידי שחקנים 3, 4 ו- 5. מהסימטריה בין שחקנים 1 ו-2 מקבלים : $P\{X = 0\} = P\{n_1 < n_2\} = 1/2$

$X = 1$ כאשר לשחקן 1 מספר גדול יותר מאשר לשחקן 2 וקטן יותר מאשר לשחקן 3. מכיוון שאפשר לסדר 3 מספרים שונים ב- !3 סידורים, ורק באחד מהם $X = 1$, מקבלים כי :

$$P\{X = 1\} = P\{n_2 < n_1 < n_3\} = 1/3! = 1/6$$

באותו אופן – מכיוון שאפשר לסדר 4 מספרים שונים ב- !4 סידורים, כאשר רק בשניים מהם $X=2$,
מקבלים כי: $P\{X=2\} = P\{n_2, n_3 < n_1 < n_4\} = 2!/4! = 1/12$

ומכיוון שב- !3 מתוך !5 הסידורים האפשריים של 5 מספרים שונים מתקיים $X=3$, מקבלים:
$P\{X=3\} = P\{n_2, n_3, n_4 < n_1 < n_5\} = 3!/5! = 1/20$

ולבסוף, מהסימטריה בין חמשת השחקנים מקבלים: $P\{X=4\} = P\{n_1 \text{ הכי גדול}\} = 1/5$

כעת, נחשב את סטיית-התקן של X.

התוחלת של X: $E[X]=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{12}+3\cdot\frac{1}{20}+4\cdot\frac{1}{5}=\frac{77}{60}=1.2833$

השונות של X: $E[X^2]=0^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{12}+3^2\cdot\frac{1}{20}+4^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{83}{20}=4.15$

$$\text{Var}(X) = E[X^2]-(E[X])^2 = \frac{83}{20}-\left(\frac{77}{60}\right)^2 = 2.50306$$

4. א. $$E[X!] = \sum_{i=0}^{\infty} i!\, e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}\lambda^i = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}}{1-\lambda} & , \quad 0<\lambda<1 \\ \infty & , \quad \lambda \ge 1 \end{cases}$$

ב. $$E\left[\frac{1}{X-1}\right] = \sum_{i=r}^{\infty}\frac{1}{i-1}\cdot\binom{i-1}{r-1}\cdot p^r\cdot(1-p)^{i-r} = \sum_{i=r}^{\infty}\frac{1}{i-1}\cdot\frac{(i-1)!}{(r-1)!(i-r)!}\cdot p^r\cdot(1-p)^{i-r}$$

$$= p\cdot\frac{1}{r-1}\cdot\sum_{i=r}^{\infty}\frac{(i-2)!}{(r-2)!(i-r)!}\cdot p^{r-1}\cdot(1-p)^{i-r} = p\cdot\frac{1}{r-1}\cdot\sum_{i=r-1}^{\infty}\frac{(i-1)!}{(r-2)!(i-r+1)!}\cdot p^{r-1}\cdot(1-p)^{i-r+1}$$

$$= p\cdot\frac{1}{r-1}\cdot\underbrace{\sum_{i=r-1}^{\infty}\binom{i-1}{r-2}\cdot p^{r-1}\cdot(1-p)^{i-(r-1)}}_{\text{שווה ל- 1, כי זהו סכום כל ההסתברויות של התפלגות } NB\,(r-1,p)} = \frac{p}{r-1}\cdot 1 = \frac{p}{r-1}$$

5. א. לאחר כל הטלה של שני המטבעות, השחקנים ממשיכים להטיל את מטבעותיהם רק אם שניהם מקבלים H או ששניהם מקבלים T. כלומר, לאחר כל שלב, המשחק ממשיך בהסתברות $p^2+(1-p)^2$ ומסתיים בהסתברות $2p(1-p)$. לפיכך, מספר השלבים במשחק הוא משתנה מקרי, שנסמנו ב- X, והתפלגותו גיאומטרית עם הפרמטר $2p(1-p)$. ומכאן נקבל כי:

$$E[X]=\frac{1}{2p(1-p)} \qquad ; \qquad \text{Var}(X)=\frac{p^2+(1-p)^2}{(2p(1-p))^2}$$

ב. נחשב תחילה את ההסתברות שהמשחק מסתיים לאחר 5 שלבים בדיוק. מקבלים:

$$P\{X=5\}=(p^2+(1-p)^2)^4\cdot 2p(1-p)$$

כעת: $$P\{(\text{H,H}) \text{ במהלך המשחק היו שני } \mid X=5\} = \frac{P\{\text{HH}\times 2, \text{TT}\times 2, \text{בשלב האחרון תוצאות שונות}\}}{P\{X=5\}}$$

$$=\frac{\binom{4}{2}p^{2\cdot 2}(1-p)^{2\cdot 2}\cdot 2p(1-p)}{(p^2+(1-p)^2)^4\cdot 2p(1-p)} = \binom{4}{2}\left(\frac{p^2}{p^2+(1-p)^2}\right)^2\left(\frac{(1-p)^2}{p^2+(1-p)^2}\right)^2 = \frac{6p^4(1-p)^4}{[p^2+(1-p)^2]^2}$$

הערה: שימו לב, שקיבלנו בסופו של דבר הסתברות בינומית עם הפרמטרים 4 ו- $\frac{p^2}{p^2+(1-p)^2}$ בנקודה 2.
תוצאה זו מתקבלת, מכיוון שההטלות בלתי-תלויות זו בזו, ומכיוון שבהינתן המידע ש- $X = 5$, ברור שהתוצאה (H,H) לא תתקבל בשלב החמישי, ושהתוצאות היחידות שיכולות להתקבל ב-4 השלבים הראשונים הן (H,H) או (T,T).

6. א. 1. נסמן ב-Y את מספר ההרשמות המותנות שיאושרו עד לפתיחת הקורס ; $Y \sim B(30,0.35)$.
כעת, מתקיים הקשר הלינארי $X = 30 + Y$. לכן, לכל $i = 30,31,\ldots,60$, מתקיים :

$$P\{X = i\} = P\{Y + 30 = i\} = P\{Y = i - 30\} = \binom{30}{i-30} \cdot 0.35^{i-30} \cdot 0.65^{60-i}$$

2.
$$E[X] = 30 + E[Y] = 30 + 30 \cdot 0.35 = 40.5$$
$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 30 \cdot 0.35 \cdot 0.65 = 6.825$$

ב. במקרה זה, אפשר לחשב קירוב פואסוני להסתברות המבוקשת, כאשר $\lambda = 1{,}200 \cdot 0.02 = 24$.
מקבלים :
$$e^{-24} \cdot \frac{24^{25}}{25!} = 0.0779$$