תשובה 1

א. **תנאי התחלה:** $a_0 = 1$ (סדרה ריקה! נוח להיעזר ב- a_0 לסעיף ב),

$a_1 = 3$, $a_2 = 3^2 - 2 = 7$.

יחס נסיגה: נתבונן בסדרה מותרת באורך $n+1$.

* אם היא מתחילה ב- 2, ההמשך יכול להיות כל סדרה מותרת באורך n.

מצב זה תורם אפוא a_n אפשרויות.

* אם היא מתחילה ב- 1, ההמשך יכול להיות כל סדרה מותרת באורך n.

גם מצב זה תורם אפוא a_n אפשרויות.

* אם היא מתחילה ב- 0, אחריו חייב לבוא 2 ואחריו יכולה לבוא סדרה מותרת באורך $n-1$.

משמע a_{n-1} אפשרויות.

בסה״כ קיבלנו : $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$.

נבדוק שזה תואם את תנאי ההתחלה שרשמנו : $2a_1 + a_0 = 6 + 1 = 7 = a_2$.

ב. המשוואה האפיינית : $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$. פתרונותיה : $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$.

לפיכך $a_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$.

בהצבת תנאי ההתחלה a_1 , a_0 נקבל :

$1 = a_0 = A + B$, $3 = a_1 = A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2}) = A + B + \sqrt{2}(A-B)$.

משתי המשוואות יחד נקבל $A - B = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$,

ומכאן יחד עם המשוואה הראשונה : $A = (1+\sqrt{2})/2$, $B = (1-\sqrt{2})/2$.

לפיכך

$$a_n = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right)$$

תשובה 2

פתרון ללא פונקציות יוצרות

אף אחד מהמשתנים אינו שווה 0 ואינו שווה 1, במלים אחרות כל המשתנים גדולים/שווים 2.

לכן נציב $x_i = y_i + 2$ ($1 \le i \le 5$),

ונקבל $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + 10 = 24$,

כלומר $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 14$, כאשר y_i הם טבעיים כלשהם, שהתנאי היחיד לגביהם הוא התנאי על הזוגיות, בו נטפל כעת.

בדיוק 3 מהמשתנים המקוריים היו זוגיים, לכן בדיוק 3 מהמשתנים החדשים הם זוגיים (חיסור 2 ממספר אינו משנה את הזוגיות שלו).

יש $\binom{5}{3} = 10$ דרכים לבחור את 3 המשתנים הזוגיים מתוך 5 המשתנים.

לאחר שבחרנו אותם, נניח ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) שאֵלה הם 3 המשתנים הראשונים.

נסמן אפוא: $y_i = 2z_i$ ($1 \le i \le 3$), $y_i = 2z_i + 1$ ($i = 4,5$).

נקבל $2z_1 + 2z_2 + 2z_3 + 2z_4 + 2z_5 + 2 = 14$,

כלומר $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 6$, כאשר z_i הם טבעיים **ללא כל הגבלה**.

מספר הפתרונות של משוואה כזו חושב בסעיף 2.4 בספר, והוא $D(5,6) = \binom{10}{4} = 210$.

את זה עלינו לכפול במספר הדרכים לבחור מי יהיו המשתנים הזוגיים, שהוא כאמור 10.

תשובה סופית: $2{,}100$.

דרך אחרת: התחלה של פתרון בעזרת פונקציות יוצרות

כמו בפתרון הקודם, נניח שהמשתנים הזוגיים הם 3 הראשונים, ואת התוצאה שנקבל נכפול ב- $\binom{5}{3} = 10$.

בהנחה זו, מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24$ תחת האילוצים הנתונים בשאלה הוא המקדם של x^{24} בפיתוח הפונקציה

$$f(x) = (x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^3 (x^3 + x^5 + x^7 + \ldots)^2$$

בסוגריים השמאליים נוציא גורם משותף x^2, שלאחר העלאה בחזקת 3 נותן x^6 .

בסוגריים הימניים נוציא גורם משותף x^3, שלאחר העלאה בחזקת 2 נותן גם הוא x^6 .

קיבלנו

$$= x^6 (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^3 \cdot x^6 (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^2$$

$$= x^{12} (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^5$$

מכיון שהוצאנו החוצה x^{12}, המקדם של x^{24} בפיתוח הביטוי כולו שווה למקדם של $x^{24-12} = x^{12}$ בפיתוח של הגורם הימני $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)^5$.

הטור ההנדסי כאן הוא טור אינסופי. מכאן השלימו את הפתרון בעצמכם.

אפשר להיעזר בשיטות הפיתוח המוצגות בפתרון שתי השאלות הבאות בממ"ן זה.

תשובה 3

א. לפי הדיון בעמ' 124 - 127 בספר, הפונקציה היוצרת היא

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^2$$

a_n הוא המקדם של x^n בפיתוח פונקציה זו.

ב. מסעיף א', בעזרת סכום טור הנדסי סופי וסכום טור הנדסי אינסופי נקבל:

$$f(x) = \left(\frac{1 - x^4}{1 - x}\right)^2\left(\frac{1}{1 - x}\right)^2 = (1 - x^4)^2\,\frac{1}{(1 - x)^4} = (1 - 2x^4 + x^8)\,\frac{1}{(1 - x)^4}$$

לפי נוסחה (iii) שהופיעה בממ"ן (עמ' 11), $\frac{1}{(1 - x)^4} = \sum_{i=0}^{\infty} D(4, i)\, x^i$.

מכאן ע"י קיבוץ איברים הנותנים מעלה n (נוסחה (ii) בממ"ן. השווה גם השאלה הקודמת),

המקדם של x^n ב- $f(x)$ הוא

$$a_n = D(4, n) - 2D(4, n - 4) + D(4, n - 8) = \binom{n + 3}{3} - 2\binom{n - 1}{3} + \binom{n - 5}{3}$$

אם $n < 5$ הביטוי הימני ביותר באגף ימין הוא 0 (מקדמים בינומיים חריגים - ר' עמ' 30).

בדומה, אם $n - 1 < 3$ הביטוי האמצעי באגף ימין מתאפס.

נקבל כך את המקרים $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 10$, שלא קשה לודא את נכונותם מתנאי השאלה, אך הם אינם מהוים בדיקה טובה לביטוי בשלמותו. מצד שני, אם נניח $n \geq 5$ ונפתח את הביטוי, לאחר פיתוח וקיבוץ איברים מתקבל הביטוי הפשוט: $a_n = 16n - 32$ ($n \geq 5$)

(תרגיל מומלץ - לחשב זאת). האם מישהו רואה דרך קצרה להגיע ישר לתוצאה זו ?

תשובה 4

א. המקדם של x^{2m} בפיתוח $(1+x)^n$ הוא, לפי נוסחת הבינום, $c_{2m} = \binom{n}{2m}$.

את אגף שמאל של הזהות הנתונה בשאלה נראה כמכפלה של שני גורמים: $(1-x^2)^n \cdot \frac{1}{(1-x)^n}$

יהי b_i המקדם של x^i בפיתוח $\frac{1}{(1 - x)^n}$. מנוסחה (iii) בממ"ן, $b_i = D(n,i)$.

נפתח גם: $\quad (1-x^2)^n = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n}{i}(x^2)^i = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n}{i}x^{2i}$.

נסמן ב- a_i את המקדם של x^i בביטוי זה.

מכיוון שמופיעות רק חזקות זוגיות של x, כל המקדמים בעלי אינדקס אי-זוגי מתאפסים:

$a_{2i+1} = 0$ לכל i טבעי. אנו רואים גם ש- $a_{2i} = (-1)^i\binom{n}{i}$.

שימו לב שזהו a_{2i} ולא a_i, למרות שבמקדם הבינומי ובחזקה של (-1) מופיע i ולא $2i$.

כעת ניעזר בנוסחה (ii) שבסוף הממ"ן למציאת המקדמים בכפל פונקציות יוצרות:

$$c_{2m} = \sum_{i=0}^{2m} a_i b_{2m-i}$$

נזכור שעבור ה- a-ים יש לנו רק מקדמים a_{2i} ולא a_{2i+1}, ונוכל לרשום עבור המקרה שלנו:

$$c_{2m} = \sum_{i=0}^{m} a_{2i} b_{2m-2i}$$

שימו לב לשינוי גבול הסכימה כאן והבינו מדוע הוא נדרש.

נציב בשוויון זה את הביטויים שקיבלנו עבור המקדמים:

$$\binom{n}{2m} = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{n}{i}D(n,\, 2m-2i)$$

זו הזהות המבוקשת (נקרא למשתנה הסכימה k במקום i כדי להתאים לנדרש בשאלה).

בדיקה: כאשר $n = 5\,, m = 2$, אגף שמאל הוא $\binom{5}{4} = 5$, ואגף ימין הוא

$$\binom{5}{0}D(5,4) - \binom{5}{1}D(5,2) + \binom{5}{2}D(5,0) = \binom{8}{4} - 5\cdot\binom{6}{2} + 10\cdot 1 = 70 - 75 + 10 = 5$$

שימו לב ש- $D(j,0) = \binom{j+0-1}{j-1} = \binom{j-1}{j-1} = 1$.

את הבדיקה השניה השלימו בעצמכם.

איתי הראבן