מלא את הפרטים בכל המקומות הדרושים

מספר תעודת זהות (9 ספרות): 207700188

מספר הקורס: 20476

מועד: 85

הדבק כאן את מדבקת הנבחן

N101298019

ת.ז: 207700188 מספר סידורי: 11

לשימוש הבודק

1. א. [5] אף טענת מהאתגרת איננה נכונה.

ב. [2] B הינו בת מנייה, כי הפונקציה $f: N \to B$ המוגדרת לכל n כך ש $f(n) = \frac{1}{2^n}$ חח"ע ועל.

Q הינו גם בת מנייה, כי הוא בספר.

כנ"ל, $|A| = C$. אם מסירים מקבוצה את בת מנייה קבוצה בת מנייה, עדיין נשארת עם משהו. לכן המשוואה היא $|A-Q| = |A-B|$ [1]

2. [4] $\{1,2,3,4,5,6\} \in \{2,3,4,5,6\}$ אין לכל עניין כל מובן

013665

ב. כן, R איננו יחס שקילות, כי המון זוגות
סדורים כמו: $(3,9)\in R$ כי $\frac{9}{3}=3^1$, אבל

$(9,3)\notin R$, כי $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, ולא קיים i כך ש-

$3^i=\frac{1}{3}$. נראים ש-S הוא יחס שקילות:
רפלקסיביות: לכל $x\in A$, $\frac{x}{x}=3^0$ ולכן
$(x,x)\in S$

סימטריות: נניח ש- $x,y\in A$ ו- $(x,y)\in S$.
אז יש j שלם כך ש $\frac{y}{x}=3^j$. לכן

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{\frac{y}{x}}=\frac{1}{3^j}=3^{-j}$$

-j שלם כי j שלם, ולכן $(y,x)\in S$.

טרנזיטיביות: נניח ש- $x,y,z\in A$, $(x,y),(y,z)\in S$.
אז יש j_1 שלם כך ש $\frac{y}{x}=3^{j_1}$ ויש j_2
שלם כך ש $\frac{z}{y}=3^{j_2}$. אז

$$\frac{z}{x}=\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{x}=3^{j_1}\cdot 3^{j_2}=3^{j_1+j_2}$$

j_1+j_2 שלמים ולכן j_1+j_2 שלם ולכן $(x,z)\in S$.
S סימטרי, רפלקסיבי וטרנזיטיבי ולכן זה יחס שקילות.

ג. לא, הם כולם מספר יש j שלם כך ש- $y=x\cdot 3^j$
הלא כדלקמן ובנוסף לסימולים שמעליהם השקילויות הן:
$\{2\},\{3,9\},\{6,2\},\{4\},\{5\},\{7\},\{8\}$

לשימוש הבודק

ג. ל אינו סדר חלקי, מכיוון ש- $(3,4)\in L$, $(4,3)\in L$ כלומר הוא אינו אנטי-סימטרי. נניח ש- R הוא סדר חלקי:

<u>רפלקסיביות:</u> לכל $a\in A$, $\frac{a}{a}=1=3^0$ ולכן $(a,a)\in R$

<u>אנטי סימטריות:</u> נניח ש- $(x,y)\in R$ ו- $(y,x)\in R$. אז יש i_1,i_2 טבעיים כך ש: $x,y\in A$

$$\frac{y}{x}=3^{i_1},\quad \frac{x}{y}=3^{i_2}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}=1=3^{i_1}3^{i_2}=3^{i_1+i_2}$$

לכן $i_1+i_2=0$ ובגלל שהם טבעיים, $i_1=i_2=0$

ולכן $1=\frac{x}{y}=\frac{y}{x}\Rightarrow \underline{x=y}$.

<u>טרנזיטיביות:</u> נניח ש- $x,y,z\in A$, $(x,y),(y,z)\in R$. אז יש i_1,i_2 טבעיים כך ש:

$$\frac{y}{x}=3^{i_1},\quad \frac{z}{y}=3^{i_2}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}=\frac{z}{x}=3^{i_1}3^{i_2}=3^{i_1+i_2}$$

i_1,i_2 טבעיים ולכן i_1+i_2 טבעי, ולפי הגדרת $(x,z)\in R$ ומתוך ש- R רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי לכן הוא יחס סדר חלקי.

ד. כל איבר ב- A הוא מינימלי, כגון 5 ו- 9, לכן:

לפי אותם נימוקים מינימליים כי $(3,6),(6,3)\in R$, $(3,6)$

~~לכל איבר הוא מינימלי, כי אם קיים לו איבר~~

~~לכל~~ $a\in A$ סדר מינימלי,

כי אם הוא לא $x\neq a$ כך ש $(x,a)\in R$ אז $\frac{a}{x}=3^k$

כלומר a נמצא על 3 בחזקת k, $x\neq a$ וזו סתירה

013665

[redacted]

המשך ב'- כל איבר ב-A הוא שלם, סה"כ
8 - 2, 1, 2, 3. הם [redacted] שייכים לתחום
כי $(3,6)\in R$, $(3,2)$, $(3,7)$. כל איבר $b\in A$ [redacted]
מקיים, כי אם הוא לא $a\in A$ כך ש $(a,b)\in R$
אזי הוא i זוגי כך ש $\frac{i}{2}=3$ ואז $b>3$
אין בזה כי אז ל- i זוגי נמצא $a\in A$.

לשימוש הבודק

ס"ט. הפונקציה היוצרת המתאימה למשוואה היא:

$$f(x)=(1+x+x^2+x^3)^k(1+x^2+x^4+\dots)^k$$

נשתמש בנוסחאות רשלה ונקבל ש

$$x+x^2+x^4+\dots=\frac{1}{1-x^2}$$

(שימו לב שהגדרה $t=x^2$ כלומר הטור $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\dots$)

ולכן:

$$f(x)=\left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)^k\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^k=$$

$$=\frac{\cancel{(1-x^2)^k}(1+x^2)^k}{(1-x)^k\cancel{(1-x^2)^k}}=\frac{(1+x^2)^k}{(1-x)^k}$$

נפתח את המונה בעזרת הבינום של ניוטון:

$$(1+x^2)^k=\binom{k}{0}+\binom{k}{1}x^2+\binom{k}{2}x^4+\dots+\binom{k}{k-1}x^{2(k-1)}+x^{2k}$$

ידוע לנו, שלכל m מתקיים

$$\frac{1}{(1-x)^k}=\sum_m D(k,m)x^m$$

אז נקבל:

$$f(x)=\left(1+kx^2+\binom{k}{2}x^4+\dots+\binom{k}{k-1}x^{2(k-1)}+x^{2k}\right)\cdot\left(\sum_m D(k,m)x^m\right)$$

מס' הפתרונות המשוואה הוא המקדם של x^n, ולכן:

$$D(k,m)+kD(k,m-2)+\binom{k}{2}D(k,m-4)+\dots+\binom{k}{k-1}D(k,m-2(k-1))+D(k,m-2k)$$

כאשר $m=4$, מס' הפתרונות הוא:

$$D(k,4)+kD(k,2)+\binom{k}{2}D(k,0)=$$

$$=D(k,4)+kD(k,2)+\binom{k}{2}$$

013665

4. אין צורך לרתור קודם 2 מסלולים ל-A שעוברים
שלהם היא 1. יש $\binom{n}{2}$ דרכים לעשות את זה.
לאחר מכן, עבור שאר ב-n הקודקודים של A,
צריך לרתור תמונה. על כל אחד מהם יש n-1 אפשרויות
(כל הקודקודים פרט ל-1). לכן סך הכל, קיימת
$(n-1)\binom{n}{2}$
פונקציה כנדרש.

5. נחשב את המשלים: כלומר, נמצא מס' הפונקציות
המקקלות את הקדקד 1 לפחות פעמיים או פעם אחת.
כלומר, נרצה לחשב את:
1. מס' הפונקציות המקקלות את 1 קדקוד פעמיים.
2. מס' הפונקציות המקקלות את 1 קדקוד פעם אחת.
3. מס' הפונקציות שבכן מקקלות את 1.
את 1 נחשוב בסעיף ב'. נחשב את 2:
יש $n=\binom{n}{1}$ דרכים לבחור את המקור שמתוכו
יוצא 1. לאחר מכן, נמיין קדקודים 2 - n-1 הנותרים
תמונה, ויש על כל אחד מהם n-1 דרכים לעשות
זאת. לכן סה"כ, יש $(n-1)\cdot n$ פונקציות כאלה.
נחשב את 3: על כל אחד מ-n הקודקודים ל-A
יש n-1 אפשרויות לתמונתם לכן יש $(n-1)^n$ פונקציות
כאלה. בנוסף, יש n פונקציות מ-A ל-A,
לכן המשלים הסופי הינו:

$$n^n - \left(\binom{n}{2}(n-2)^{n-2} + n(n-1)^{n-1} + (n-1)^n\right)$$

לשימוש הבודק

4.ב. משוק, יש (n) פרטים לבחור מתוך שני המסלולים שתמונתם היא 1. לאחר בחירה לתור ל-n אזרחים הנותרים תמונות, כך שאין עוד (פרט ל-1 כמובן) את אותן תמונה. ~~[illegible]~~

נשארנו, למעשה עמודות בגודל n ש הבחנה=הבחנה, עם קבוצה של n אזרחים, ~~[illegible]~~ כפונמה כשאנחנו עם פונקציה מקבוצה בגודל n-1 לקבוצה בגודל n-1. לכן, ל ~~[illegible]~~ ונלקח כאן לקבל ערך אחרי לפי הנחת ל- בגודל A ~~[illegible]~~ כי אם היה כאן תקבל שני אזרחים, ~~[illegible]~~ אין הסבר להנחת תקבל ערך שאחר כי אמרנו כי כל תמונה פונקציה מקבוצה בגודל n-1 לקבוצה בגודל n-2). אכן, יש $(n-1)\cdot(n-2)!$ אפשרויות להבחר שני אזרחים ל ~~[illegible]~~ מהנשארים שנשארו ל n-1 אנשים לפנות אותו אחר הערך של מי מתקבל, ו- $(n-2)!$ כי נשאר לנו עם פונקציות חח"ע מקבוצה בגודל n-1 על קבוצה בגודל n-2). לפיכך: יש כ-

$$\binom{n}{2}\cdot(n-1)\cdot(n-2)!$$

כולם פיתח נאלו.

013665

לשימוש הבודק

יחידת בסיס

לשימוש הבודק

לשימוש הבודק

יחידת בסיס

013665

יחידת בסיס

לשימוש הבודק

לשימוש הבודק

יחידת מקרא

בסם

013665

לשימוש הבודק

לשימוש הבודק

013665

יחם בסמ

יחם בסמ

לשימוש הבודק

$$n^n - \left(\binom{n}{2}(n-2)^{n-2} + \binom{n}{1}\cdot(n-1)^{n-1} + n^{n-1}\right)$$

$$\binom{1}{2}\binom{1}{3}\binom{1}{2}\binom{1}{3}$$

$$\binom{n}{2}(n-1)(n-2)!$$

$$\binom{1}{2}\binom{1}{3}\binom{1}{4}\binom{1}{2}\binom{1}{3}\binom{1}{4}$$

$$\binom{4}{2}\cdot 3\cdot 2!$$

$$\binom{n}{2}(n-1)^{n-2}$$

$$\binom{1}{2}\binom{1}{3}\binom{1}{4}\cdot\binom{1}{2}\binom{1}{3}\binom{1}{4}$$

לשימוש הבודק

$D(k,4)+4D(k,2)=16$

$x_1+x_2+x_3+x_4+y_1+y_2+y_3+y_4=k$

$(1+x+x^2+x^3)^4(1+x^2+x^4+\dots)^4=$

$=\left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)^4\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^4=\frac{(1+x^2)^4}{(1-x)^4}$

$(1+4x^2+6x^4+\dots)$

$\frac{1}{(1-x)^4}=\sum_k^{\infty} D(4,k)x^k$

$D(4,4)+4D(4,2)=6$

~~לכל i (4) דרגות לפחות מספרים שונים~~

~~i (1-n) דרגות לפחות~~

לכן, יש $\binom{n}{2}$ דרגות לפחות מספר זוגי, ולשאר

ה- מספר, יש $2^{-n}(1-n)$ דרגות 8 דרגות מספר

(לכל). סך הכל מס' הדרגות הוא $2^{-n}(1-n)\binom{n}{2}$

013665

2.

$\{(1,3,9),(2,6),$

$\frac{9}{x} = 3^i \Rightarrow x=4$

$\frac{1}{x} = 3^j$

$1+x^2+\dots+x^4 \Rightarrow (t=x^2) = 1+t+t^2+\dots$
$= \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1-x^2}$

$(1+x+x^2+x^3)^k (x^0+x^2+x^4+\dots)^k =$

$= \left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)^k \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^k = \frac{(1-x^2)^k(1+x^2)^k}{(1-x)^k(1-x^2)^k} =$

$= \frac{(1+x^2)^k}{(1-x)^k}$

$= (1+x^2)^k \cdot \frac{1}{(1-x)^k}$

$(1+x^2)^k = \binom{k}{0} + \binom{k}{2}x^2 + \binom{k}{2}(x^2)^2 + \dots + \binom{k}{k-1}(x^2)^{k-1} + \binom{k}{k}(x^2)^k$

$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_n D(k,n)\, x^n$

$\Rightarrow \left(\sum_n D(k,n)x^n\right)\left(1+kx^2+\binom{k}{2}x^4+\dots+\binom{k}{k-1}x^{2(k-1)}+x^{2k}\right)$

נסיים כאן כי מספיק מ-m-1 אי מתאפס

$D(k,m) + D(k,m-2)k + D(k,m-4)\binom{k}{2} + \dots$
$\dots + D(k,m-2(k-1))\binom{k}{k-1} + D(k,m-2k)$

גליון תשובות לשאלות רב-ברירתיות

הקף במעגל את התשובה שבחרת (לכל שאלה יש רק תשובה אחת נכונה).
אם תרצה לבטל תשובה שבחרת, סמן עליה X.
דוגמה לתשובה שבחרת: א ב ג (ד) ה ו ז ח ט
דוגמה לתשובה שבטלת: א ב ג ד ה (X) ז ח ט

שאלה	תשובה	שאלה	תשובה
1	א ב ג ד ה ו ז ח ט	21	א ב ג ד ה ו ז ח ט
2	א ב ג ד ה ו ז ח ט	22	א ב ג ד ה ו ז ח ט
3	א ב ג ד ה ו ז ח ט	23	א ב ג ד ה ו ז ח ט
4	א ב ג ד ה ו ז ח ט	24	א ב ג ד ה ו ז ח ט
5	א ב ג ד ה ו ז ח ט	25	א ב ג ד ה ו ז ח ט
6	א ב ג ד ה ו ז ח ט	26	א ב ג ד ה ו ז ח ט
7	א ב ג ד ה ו ז ח ט	27	א ב ג ד ה ו ז ח ט
8	א ב ג ד ה ו ז ח ט	28	א ב ג ד ה ו ז ח ט
9	א ב ג ד ה ו ז ח ט	29	א ב ג ד ה ו ז ח ט
10	א ב ג ד ה ו ז ח ט	30	א ב ג ד ה ו ז ח ט
11	א ב ג ד ה ו ז ח ט	31	א ב ג ד ה ו ז ח ט
12	א ב ג ד ה ו ז ח ט	32	א ב ג ד ה ו ז ח ט
13	א ב ג ד ה ו ז ח ט	33	א ב ג ד ה ו ז ח ט
14	א ב ג ד ה ו ז ח ט	34	א ב ג ד ה ו ז ח ט
15	א ב ג ד ה ו ז ח ט	35	א ב ג ד ה ו ז ח ט
16	א ב ג ד ה ו ז ח ט	36	א ב ג ד ה ו ז ח ט
17	א ב ג ד ה ו ז ח ט	37	א ב ג ד ה ו ז ח ט
18	א ב ג ד ה ו ז ח ט	38	א ב ג ד ה ו ז ח ט
19	א ב ג ד ה ו ז ח ט	39	א ב ג ד ה ו ז ח ט
20	א ב ג ד ה ו ז ח ט	40	א ב ג ד ה ו ז ח ט

לשימוש פנימי

מספר התשובות הנכונות: _____ ציון: _____

שם הבודק: _____ 013665