תשובה 1

א. $6^3 = 216$: ר' "קומבינטוריקה" שאלה 1.32 בעמ' 17.

ב. ב.ה.כ . (בלי הגבלת כלליות) נניח כי $B = \{1,2,3\}$.

בחירת פונקציה **חד-חד-ערכית** של B הנ"ל ל- A כמוה כבחירת שלישיה **סדורה** (!) של איברים מתוך A, כלומר חליפה של 3 מתוך 6 . לפי הגדרת "חליפה" ("קומבינטוריקה" עמ' 18) מספר החליפות הנ"ל הוא: $P(6,3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

ג. יחס הוא רפלקסיבי מעל A אםם הוא מכיל את "האלכסון" I_A. לכן כדי להגדיר יחס רפלקסיבי עלינו לבחור איזה זוגות עוד יהיו שייכים אליו **פרט** לאברי I_A. משמע: לבחור תת-קבוצה כלשהי מתוך $6^2 - 6 = 30$ האיברים של $(A \times A) - I_A$.

לפיכך מספר היחסים הרפלקסיביים מעל A הוא 2^{30} .

ד. ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) נניח ש- $A = \{1,2,3,4,5,6\}$.

תהי D קבוצת כל הזוגות $(i, j) \in A \times A$ המקיימים $i \le j$. אז: $|D| = \dfrac{6 \cdot 7}{2} = 21$.

רעיון הפתרון: בשביל לתאר יחס סימטרי, די לומר מיהם אברי היחס השייכים ל- D. את אברי D ניתן לבחור באופן חפשי, ושאר האיברים נקבעים מתוך כך שהיחס סימטרי. נפרט להלן.

ראשית **טענת עזר**: תהי $X \subseteq D$. אם $(i, j) \in D$ ו- $(i, j) \notin X$ אז $(i, j) \notin X^{-1}$.
הוכחת טענת העזר מיידית מההגדרות.

כעת, תהי S_A קבוצת היחסים הסימטריים מעל A.

נגדיר פונקציה $f\ : P(D) \to S_A$, כך: לכל $X \in P(D)$, $f(X) = X \cup X^{-1}$.

לפי "תורת הקבוצות" שאלה 2.23 בעמ' 50 , $X \cup X^{-1}$ הוא אכן יחס סימטרי,
כלומר איבר של S_A .

נוכיח ש- f **חד-חד-ערכית**: יהיו $X_1, X_2 \in P(D)$, ונניח $X_1 \neq X_2$.

ב.ה.כ. נניח לכן כי קיים $(i, j) \in X_1$ כך ש- $(i, j) \notin X_2$. לפי טענת העזר, $(i, j) \notin X_2^{-1}$, ולכן $(i, j) \notin X_2 \cup X_2^{-1} = f(X_2)$. אך $(i, j) \in X_1 \cup X_1^{-1} = f(X_1)$. לכן $f(X_1) \neq f(X_2)$.
משמע f היא חח"ע.

נוכיח ש- f היא **על** : S_A בהנתן $S \in S_A$, יהי $X = S \cap D$.

לא קשה לראות (השלימו !) ש- $S = f(X)$. לכן f היא על.

יש אפוא התאמה חח"ע ועל בין $P(D)$ לבין S_A. לכן $|S_A| = |P(D)| = 2^{21}$.

ה. ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) נניח ש- $A = \{1,2,3,4,5,6\}$.

תהי L קבוצת כל הזוגות $(i,j) \in A \times A$ המקיימים $i < j$. אז: $|L| = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

בשביל לתאר יחס אנטי-סימטרי R, יש לתת את המידע הבא:

(*i*) לכל $i \in A$, האם (i,i) שייך ל- R או לא. יש 2^6 דרכים לבחור מידע זה.

(*ii*) לכל $(i,j) \in L$, האם $(i,j) \in R$, או $(j,i) \in R$, או אף אחד משניהם אינו ב- R

(מהגדרת יחס אנטי-סימטרי, לכל $(i,j) \in L$ בדיוק אחת מ- 3 האפשרויות האלה נכונה).

יש $3^{|L|} = 3^{15}$ דרכים לבחור מידע זה.

חלקי המידע (*i*), (*ii*) אינם תלויים זה בזה ויש לתת את שניהם יחד כדי לבחור יחס אנטי-סימטרי. כל בחירה של שני חלקי המידע מגדירה יחס אנטי-סימטרי אחד ויחיד, וכל יחס אנטי-סימטרי מתקבל ע"י בחירה של שני חלקי המידע האלה.

לכן מספר היחסים האנטי-סימטריים מעל A הוא $2^6 \cdot 3^{15}$.

ו. לפי שאלה 3.19 בעמ' 91 בכרך "תורת הקבוצות": כמספר הדרכים לסדר 6 עצמים שונים בשורה. לפי "קומבינטוריקה", ראש עמ' 23 , מספר זה הוא $6! = 720$.

תשובה 2

א. $\frac{12!}{2!2!3!} = 19{,}958{,}400$ - השוו למשל "קומבינטוריקה" שאלה 2.41 בעמ' 43.

ב. אם הרצף **הינומה** חייב להופיע, נראה אותו כתו בודד. פרט לו, יש עוד 6 תוים, מהם שני זוגות של תוים זהים (א, ו). לכן מספר הסידורים: $\frac{7!}{2!2!} = 1{,}260$ (כאשר **הינומה** נחשב כתו בודד אין משמעות להחלפה בין ההופעות של האות ה' בתוכו, ואין משמעות להחלפה של האות י' שבתוכו עם האות י' שמחוץ לו. כנ"ל גם עבור האות ו').

ג. מספר הסידורים בהם <u>מופיע</u> הרצף **טופו** (נראה אותו כתו בודד. בנוסף לו יש 8 תוים, מהם 2 זוגות של תוים זהים): $\frac{9!}{2!2!} = 90{,}720$.

לכן מספר הסידורים בהם <u>לא מופיע</u> **טופו**: $19{,}958{,}400 - 90{,}720 = 19{,}867{,}680$

תשובה 3

א. $\frac{12!}{(3!)^4\cdot 4!}=15{,}400$: דומה לגמרי ל"קומבינטוריקה" שאלה 2.28 ושאלה 2.62ב .

כדי לקבל מיד את הנוסחה הישירה כמו כאן (ולא מכפלה של מקדמים בינומיים שמצטמצמים),
ראו בתשובה לשאלה 2.28 : "אפשר לחלק לקבוצות כך...". **כדאי להתרגל לחשב בדרך זו** !

ב. אם m הוא מספר הצוותים בני 2 אנשים, ו- n הוא מספר הצוותים בני 3 אנשים,
אז $2m+3n=12$. ע"י בדיקה ישירה מקבלים שהפתרונות השלמים למשוואה זו הם :
$(m,n)\ =\ (0{,}4)\ ,\ (3{,}2)\ ,\ (6{,}0)$.

לכל אחד מ- 3 הפתרונות האלה נתבונן בקבוצת הדרכים לחלק לצוותים בהתאם לאותו פתרון.
מובן שחלוקות לפי שני פתרונות שונים – שונות זו מזו, לכן עלינו לחבר את התרומות של 3 הפתרונות.

הפתרון $(0{,}4)$ הוא מה שתואר בסעיף א, ותורם לכן $15{,}400$ חלוקות.

בדומה, הפתרון $(6{,}0)$ תורם $\frac{12!}{(2!)^6\cdot 6!}=10{,}395$ חלוקות.

הפתרון $(3{,}2)$ תורם $\frac{12!}{(2!)^3\cdot 3!\cdot(3!)^2\cdot 2!}=138{,}600$ חלוקות (שוב בדומה לשאלה 2.28).

בסה"כ : $15{,}400+10{,}395+138{,}600\ =\ 164{,}395$.

תשובה 4

א. $D(4{,}12)=\binom{15}{3}=455$.

ב. $D(4{,}12)\cdot D(4{,}9)=\binom{15}{3}\binom{12}{3}=455\cdot 220=100{,}100$

ג. ניתֵן לכל משפחה את מה שהיא חייבת לקבל.

נותרו 6 שיפודים לחלק בין 4 המשפחות, ללא מגבלות : $D(4{,}6)=\binom{9}{3}=84$.

ד. ניתֵן לכל משפחה שיפוד וסטייק. נותרו 5 סטייקים ו- 8 שיפודים, לחלק ללא מגבלות.

לפי עקרון הכפל, מספר החלוקות הוא : $D(4{,}5)\cdot D(4{,}8)=\binom{8}{3}\binom{11}{3}=56\cdot 165=9{,}240$.

תשובה 5

א. לפי ספר הלימוד סעיף 2.4 מספר הפתרונות הוא: $D(5,12) = \binom{16}{4} = 1,820$.

ב. לכל $1 \le i \le 5$ נציב במשוואה $x_i = y_i + 1$.

התנאי $1 \le x_i$ פירושו $0 \le y_i$. קיבלנו את המשוואה $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + 5 = 17$

כלומר $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 12$, ואנו מחפשים כעת את מספר הפתרונות שלה בטבעיים ללא הגבלה. זו אותה שאלה שפתרנו בסעיף הקודם, התשובה היא אפוא 1,820.

ג. ראשית נבחר את שני המשתנים השווים 1. יש $\binom{5}{2} = 10$ דרכים לעשות זאת.

כעת ב.ה.כ. נניח שאלה שנבחרו הם x_4, x_5 , ונישאר עם המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 20$.

משתנים האלה נדרשים להיות זוגיים, לכן נציב $x_i = 2y_i$ ($i = 1,2,3$) ,

ונקבל את המשוואה $y_1 + y_2 + y_3 = 10$, כאשר y_1, y_2, y_3 טבעיים ללא הגבלה.

מספר פתרונות משוואה זו הוא $D(3,10) = \binom{12}{2} = 66$.

נכפול בפקטור 10 שקיבלנו בתחילת הפתרון. התוצאה הסופית: 660.

איתי הראבן