

ממ"ן 12 שאלה 4ב – עיקרי הפתרון (שאלה 4.31 מספר הקורס)

ראשית נוכיח שאין בגרף H שהאלגוריתם מפיק אף מעגל באורך 3 ואף מעגל באורך 4. נניח בשלילה שיש מעגל באורך 3 או 4, ונביט בצלע האחרונה מהמעגל $e = \{u, v\}$ שנוספה ל- H . נסמן את יתר הצלעות במעגל בצורה e_1, e_2 (אם מדובר במעגל באורך 3) או בצורה e_1, e_2, e_3 (אם מדובר במעגל באורך 4). מכיוון שהצלעות נסרקות בסדר עולה של אורכים, אז מתקיים $\ell_{e_i} \leq \ell_e$. לכן בשלב שבו שוקלים האם להוסיף את e ל- H מתקיים $d_{u,v} \leq \ell_{e_1} + \ell_{e_2} \leq 2\ell_e$ (אם מדובר במעגל באורך 3) או לחלופין $d_{u,v} \leq \ell_{e_1} + \ell_{e_2} + \ell_{e_3} \leq 3\ell_e$ (אם מדובר במעגל באורך 4). בכל מקרה לא מתקיים $3\ell_e < d_{u,v}$, ולכן לא מוסיפים את e ל- H . מכיוון שאין ב- H מעגלים באורך 3 או 4, המותן של H גדול ממש מ-4. לפי ההדרכה אם המותן של גרף גדול ממש מ- k , אז מספר הצלעות

בגרף חסום בצורה $O(n^{1+\frac{2}{k-1}})$. לכן ב- H יש רק n^2 . $O(n^{1+\frac{2}{4-1}}) = O\left(\frac{n^2}{\sqrt[3]{n}}\right) \ll n^2$ צלעות.