מתמטיקה בדידה 20476 פתרון ממ״ן 12

תשובה 1

דוגמא אפשרית: $A=\{1,2,3\}$, $R=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ (השלימו את הפרטים).

תשובה 2 (תקציר)

א. **לא**. השלימו נימוק: תנו שני יחסים שונים מעל A שיש להם אותו סגור טרנזיטיבי.

ב. **לא**. השלימו נימוק: תנו יחס מעל A שאינו טרנזיטיבי והסבירו מדוע זה מפריך את הטענה.

ג. **כן**: הסגור הטרנזיטיבי של יחס כלשהו הוא טרנזיטיבי, לכן לכל יחס R, היחס $t(R)$ הוא טרנזיטיבי. הסגור הטרנזיטיבי של יחס טרנזיטיבי הוא היחס עצמו, לכן $t(t(R))=t(R)$.

ד. **לא**. השלימו נימוק: תנו דוגמא נגדית.

תשובה 3

א. היחס הריק מעל A הוא סימטרי ואינו רפלקסיבי, לכן הוא אבר של K.
היחס הריק מוכל בכל יחס, לכן בפרט הוא מוכל בכל יחס השייך ל- K.
לכן $\varnothing$ הוא האבר הקטן ביותר ב- K.

ב. יהי $R_1=A\times A-\{(1,1)\}$.
R_1 הוא יחס סימטרי. הוא אינו רפלקסיבי כי הזוג $(1,1)$ לא נמצא בו.
היחס היחיד מעל A שמכיל-ממש את R_1 הוא $A\times A$, אבל $A\times A$ רפלקסיבי ולכן אינו אבר של K. הראינו ש- R_1 הוא אבר ב- K ואין אף אבר אחר של K שגדול ממנו, משמע R_1 הוא אבר מקסימלי ב- K.

ג. בדומה לסעיף הקודם מובן שגם $R_2=(A\times A)-\{(2,2)\}$ הוא אבר מקסימלי ב- K, והוא שונה מ- R_1. כעת, לפי שאלה 3.21, אם בקבוצה סדורה-חלקית יש יותר מאבר מקסימלי אחד, אין בקבוצה אבר גדול ביותר.

תשובה 4

א. מובן שלא. למשל $f(2)=f(4)=\{2\}$.

ב. לא. אמנם כל תת-קבוצה סופית של K מתקבלת על-ידי f
(הוכחה לטענה זו: אם $X\neq\varnothing$ היא קבוצה סופית של ראשוניים, תהי m_X מכפלת כל אברי X. אז $f(m_X)=X$. נותר המקרה $X=\varnothing$, ולפי ההגדרה $f(1)=\varnothing$).
אבל קבוצת הראשוניים K מכילה גם תת-קבוצות **אינסופיות**, למשל K עצמה. אף קבוצה אינסופית של ראשוניים אינה בתמונה של f, כי לכל מספר טבעי יש רק מספר סופי של גורמים ראשוניים!

ג. החזקות של 5, כלומר כל המספרים מהצורה 5^n כאשר $1 \le n \in \mathbf{N}$ (הראו זאת).

ד. כל המספרים מהצורה $2^m 5^n$ כאשר $1 \le m, n \in \mathbf{N}$ (הראו זאת).

תשובה 5

בדיקה עבור $n=0$: $0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 0+1+4+9+16+25 = 55$

ואכן $55 = 12 \cdot 4 + 7$.

מעבר: נניח שהטענה נכונה עבור n, כלומר נניח ש- a_n נותן שארית 7 בחילוק ב- 12,

ונוכיח שגם a_{n+1} נותן שארית 7 בחילוק ב- 12.

נחשב:

$$a_{n+1} = (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2 + (n+5)^2 + (n+6)^2$$

$$= a_n + (n+6)^2 - n^2 = a_n + 12n + 36$$

$12n+36 = 12(n+3)$ מתחלק ב- 12 ללא שארית, לכן $a_n + 12n + 36$ נותן בחילוק ב- 12 אותה שארית כמו a_n . לפי הנחת האינדוקציה שארית זו היא 7.

הראינו אפוא ש- a_{n+1} נותן שארית 7 בחילוק ב- 12.

מתוך הבדיקה והמעבר, לפי עקרון האינדוקציה בטבעיים, הטענה נכונה לכל n טבעי.