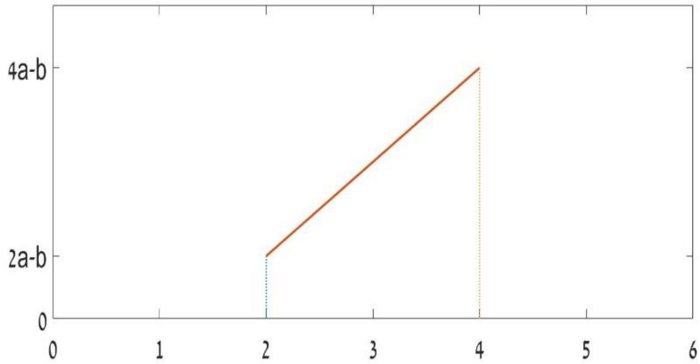
פתרונות לממ"ן 12 - 2020א - 20425

.1

א. נשרטט את פונקציית הצפיפות:



כיוון שסך השטח מתחת לפונקציית הצפיפות שווה ל-1, נקבל ששטח הטרפז שווה ל-1 ולכן:

$$\frac{\left((2a-b)+(4a-b)\right)\cdot 2}{2}=1$$

כלומר קיבלנו: $\boxed{6a-2b=1}$.

בנוסף, פונקציית צפיפות היא אי- שלילית. לכן $2a-b\ge 0$.

ב. ההסתברות הדרושה שווה לשטח הטרפז מימין ל 2.5, ולכן:

$$P(X\ge 2.5)=\frac{(2.5a-b+4a-b)\cdot 1.5}{2}=0.75(6.5a-2b)=\boxed{4.875a-1.5b}$$

ג.

1. נחשב את התוחלת של המשתנה ונשתמש בנתון:

$$E[X]=\int_2^4(ax-b)xdx=\int_2^4\left(ax^2-bx\right)dx=\left[\frac{ax^3}{3}-\frac{bx^2}{2}\right]_2^4=$$

$$\frac{64}{3}a-8b-\frac{8a}{3}+2b=\frac{56a}{3}-6b=3.2$$

לפי סעיף א: $6a-2b=1$.

פתרון שתי המשוואות נותן: $b=\boxed{0.4}\quad a=\boxed{0.3}$

2. $$E\left[\sqrt{X}\right]=\int_2^4\sqrt{x}\cdot f(x)dx=\int_2^4\sqrt{x}\cdot(0.3x-0.4)dx=\left[\frac{0.3x^{2.5}}{2.5}-\frac{0.4x^{1.5}}{1.5}\right]_2^4=\boxed{1.782}$$

2. $$E[e^{-2X}]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-4x-x^2}{2}}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+2)^2-4}{2}}dx=e^2\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+2)^2}{2}}dx}_{=1}=e^2$$

הסבר: האינטגרל האחרון שקיבלנו הוא אינטגרל על הצפיפות של משתנה מקרי נורמלי עם הפרמטרים $\mu=-2$ ו- $\sigma^2=1$ על כל תחום ההגדרה של המשתנה. לפיכך, הוא שווה ל- 1.

3. נסמן ב- X את הגובה (במטרים) של עץ בן שנה, $X\sim N(1,\,0.13^2)$.

א. נמצא את הערך של a שמקיים את המשוואה: $P\{X>a\}=0.23$

לשם כך, נפתור את המשוואה: $1-\Phi\left(\frac{a-1}{0.13}\right)=0.23 \quad\Rightarrow\quad \Phi\left(\frac{a-1}{0.13}\right)=0.77=\Phi(0.7387)$

עלינו למצוא z שמקיים את המשוואה:
$\Phi\left(\frac{a-1}{0.13}\right)=0.77=\Phi(z)$
מטבלה 5.1 (עמ' 112 במדריך) מקבלים כי:
$\Phi(0.73)=0.7673 \quad\Rightarrow\quad 0.77-0.7673=0.0027$
$\Phi(0.74)=0.7704 \quad\Rightarrow\quad 0.7704-0.77=0.0004$
לכן: $\Phi\left(0.73+0.01\cdot\frac{0.0027}{0.0031}\right)=\Phi(0.7387)\cong 0.77$

ונקבל כי: $\frac{a-1}{0.13}=0.7387$

ומכאן שמתקיים: $a=1+0.7387\cdot 0.13=1.096$

כלומר, ההסתברות שהגובה של עץ בן שנה יהיה גבוה מ-1.096 מטרים היא 0.23.

ב. $$P\{X<1.25\mid X>1.1\}=\frac{P\{1.1<X<1.25\}}{P\{X>1.1\}}=\frac{\Phi\left(\frac{1.25-1}{0.13}\right)-\Phi\left(\frac{1.1-1}{0.13}\right)}{1-\Phi\left(\frac{1.1-1}{0.13}\right)}$$
$$=\frac{\Phi(1.9231)-\Phi(0.7692)}{1-\Phi(0.7692)}=\frac{0.9728-0.7792}{1-0.7792}=0.8768$$

מטבלה 5.1 (עמ' 112 במדריך):
$\Phi(0.76)=0.7764$
$\Rightarrow\ 0.7794-0.7764=\underline{\underline{0.003}}$
$\Phi(0.77)=0.7794$
$\Phi(0.76\underline{92})=0.7764+0.\underline{92}\cdot\underline{\underline{0.003}}=0.7792$

מטבלה 5.1 (עמ' 112 במדריך):
$\Phi(1.92)=0.9726$
$\Rightarrow\ 0.9732-0.9726=\underline{\underline{0.0006}}$
$\Phi(1.93)=0.9732$
$\Phi(1.92\underline{31})=0.9726+0.\underline{31}\cdot\underline{\underline{0.0006}}=0.9728$

ג. $P\{X > 1.2\} = 1 - \Phi\left(\frac{1.2-1}{0.13}\right) = 1 - \Phi(1.5385) = 1 - 0.9380 = 0.0620$

$$P\{0.9 < X < 1.2\} = \Phi\left(\tfrac{1.2-1}{0.13}\right) - \Phi\left(\tfrac{0.9-1}{0.13}\right) = \Phi(1.5385) - \Phi(-0.7692)$$

$$= 0.9380 - (1 - 0.7792) = 0.7172$$

$$P\{X < 0.9\} = \Phi\left(\tfrac{0.9-1}{0.13}\right) = \Phi(-0.7692) = 1 - 0.7792 = 0.2208$$

לכן, אם Y מסמן את מספר השתילים שנורית תקנה, אז :

$$E[Y] = 6 \cdot 0.0620 + 3 \cdot 0.7172 + 0 = 2.5236$$

4. נסמן ב- X את נפח קרטון חלב במ״ל. נתון ש : $X \sim N(1000, 8^2)$.

א. נסמן ב- M את נפח החלב במ״ל שבהסתברות של 5% נפח החלב בקרטון כלשהו יהי נמוך ממנו. M

מקיים $P\{X < M\} = 0.05$.

$$P\{X < M\} = \Phi\left\{\frac{M-1000}{8}\right\} = 0.05$$

$$\Rightarrow \frac{M-1000}{8} = -1.645 \Rightarrow \boxed{M = 986.84}$$

ב.

$$P\{X < 996 \cup X > 1016\} = P\{X < 996\} + P\{X > 1016\} =$$

$$P\left\{Z < \frac{996-1000}{8}\right\} + P\left\{Z > \frac{1016-1000}{8}\right\}$$

$$= \Phi(-0.5) + 1 - \Phi(2) = 1 - \Phi(0.5) + 1 - \Phi(2) = 2 - (0.6915 + 0.9772) = \boxed{0.3313}$$

5. א. נתון ש-X משתנה מקרי מעריכי, שערכיו האפשריים חיוביים בלבד, ולכן הערכים האפשריים של Y הם כל המספרים הממשיים שקטנים מ-8.

לפיכך, לכל $y < 8$ מתקיים :

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{8 - 5X \le y\} = P\left\{X \ge \frac{y-8}{-5}\right\} = 1 - F_X\left(\frac{y-8}{-5}\right) = e^{-5 \cdot \frac{y-8}{-5}} = e^{y-8}$$

ולכל $y \ge 8$ מתקיים : $F_Y(y) = 1$

ב. גזירת פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y, תניב את פונקציית הצפיפות המבוקשת.

כלומר, מתקיים : $f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}[e^{y-8}] = e^{y-8} \qquad , \qquad y < 8$

וכמובן, שלכל $y \ge 8$, מתקיים $f_Y(y) = 0$.

ג. $E[Y] = E[8-5X] = 8-5E[X] = 8-5\cdot\frac{1}{5} = 7$

$\text{Var}(Y) = \text{Var}(8-5X) = (-5)^2\,\text{Var}(X) = 25\cdot\frac{1}{5^2} = 1$

ד. $P\{Y > 0 \mid X > 1\} = P\{8-5X > 0 \mid X > 1\} = P\{X < \frac{8}{5} = 1.6 \mid X > 1\}$

$= P\{X < 0.6\} = 1-e^{-5\cdot 0.6} = 1-e^{-3}$ [תכונת חוסר הזכרון של X]

ה. $E[(Y-8)^2] = E[(-5X)^2] = 25E[X^2] = 25\left[\text{Var}(X) + (E[X])^2\right] = 25\cdot\frac{2}{5^2} = 2$