תשובה 1

א. $f(0,3) = f(2,0) = 6$, לכן f אינה חד-חד-ערכית.

נוכיח ש- f היא על.

יהי $n \in \mathbf{Z}$. מתקיים $f(n,-n) = 3n - 2n = n$.

מצאנו מקור תחת f לכל מספר שלם n, לכן f היא **<u>על</u>** $\mathbf{Z}$.

הוכחה אחרת (מקור אחר ל- n):

אם n הוא שלם זוגי, $n = 2k$ כאשר k שלם. במקרה כזה $f(0,k) = n$.

אם n הוא שלם אי-זוגי, $n = 2k+1$ כאשר k שלם.

במקרה כזה $f(1, k-1) = 3 + 2k - 2 = n$.

ב.

$g(g(X)) = (X \oplus \mathbf{Z}) \oplus \mathbf{Z}$

לפי שאלה 1.22ב (אסוציאטיביות ההפרש הסימטרי) בעמ' 27 בספר

$= X \oplus (\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z})$

לפי טענה נוספת באותו סעיף שם (הפרש סימטרי של קבוצה עם עצמה)

$= X \oplus \varnothing$

ולפי טענה נוספת שם (הפרש סימטרי עם קבוצה ריקה)

$= X$

ג. נוכיח כללית שעבור קבוצה כלשהי A, אם פונקציה $g : A \to A$ מקיימת:

לכל $x \in A$, $g(g(x)) = x$

אז g חד-חד-ערכית ועל.

הוכחת חד-חד-ערכיות:

יהיו $x, y \in A$, המקיימים $g(x) = g(y)$. עלינו להראות ש- $x = y$.

מכיוון ש- g היא פונקציה, ניתן להפעיל g בשני האגפים של השוויון $g(x) = g(y)$.

נקבל $g(g(x)) = g(g(y))$. משמע $x = y$.

הוכחת על:

יהי $x \in A$. מכיוון ש- $g(g(x)) = x$, הרי קיים איבר ב- A (האיבר $g(x)$)

שתמונתו היא x.

תשובה 2

א. איברים של $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ שיש להם תמונות שונות תחת f נמצאים במחלקות שקילות שונות.
בשאלה 1א למעלה ראינו ש- f היא **על** $\mathbf{Z}$, משמע לכל $n\in\mathbf{Z}$ קיים מקור תחת f ב- $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.
$\mathbf{Z}$ היא אינסופית, משמע קבוצת התמונות המתקבלות היא אינסופית.
לכן מספר מחלקות השקילות הוא אינסופי.

ב. באותה מחלקה עם $(0,0)$ נמצאים הזוגות $(m,n)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ המקיימים $3m+2n=0$.
יהי $m=2k$ שלם זוגי כלשהו. אז $n=-3k$ גם הוא שלם, ומתקיים $3m+2n=0$.
לכל ערך שלם של k נקבל כך פתרון מהצורה $(m,n)=(2k,-3k)$. פתרונות אלה שונים כולם זה מזה. לכן מספר הפתרונות אינסופי, כלומר מחלקת השקילות היא בת אינסוף איברים (אגב, לא קשה לראות ש**כל** הפתרונות, כלומר כל אברי מחלקת השקילות, הם מהצורה הנ"ל).

ג. עלינו להראות: $3(a+m)+2(b+n)=3a+2b$.
זה נובע מכך שלפי הנתון לגבי (m,n) , $3m+2n=0$.

ד. יהי (a,b) איבר של אחת ממחלקות השקילות, כלומר איבר כלשהו של $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. לפי סעיפים ב, ג , באותה מחלקה עם (a,b) נמצאים כל הזוגות מהצורה $(a+2k\ ,\ b-3k)$, לכל k שלם. זו קבוצה אינסופית של זוגות סדורים. לכן מחלקת השקילות היא אינסופית.

תשובה 3

א. יחס מעל A הוא קבוצה של זוגות סדורים של אברי A. לכן כל יחס מעל A, ובפרט כל יחס שקילות מעל A , **חלקי** לקבוצה $A\times A$. קל לבדוק ש- $A\times A$ עצמה היא יחס שקילות (זהו יחס השקילות שבו כל אברי A נמצאים באותה מחלקה).
לכן $A\times A$ היא האיבר הגדול ביותר ב- K לגבי הכלה.
מצד שני, יחס שקילות הוא בפרט רפלקסיבי, כלומר **מכיל** את I_A .
היחס I_A אף הוא יחס שקילות מעל A (זהו יחס השקילות שבו כל איבר של A נמצא במחלקה בפני עצמו). מכיון שכל יחס שקילות מעל A מכיל אותו, I_A הוא האיבר הקטן ביותר ב- K לגבי הכלה.

ב. נפתור את (i) , (ii) , (iii) .
נתבונן ביחס מעל $\mathbf{N}$ שמכיל זוג סדור אחד בלבד, כגון $\{(2,17)\}$.
זה ודאי יחס סופי מעל $\mathbf{N}$. הוא מכיל איבר אחד בלבד, לכן אין אף קבוצה חלקית לו ששייכת ל- M (היחס הריק אינו ב- M). לכן $\{(2,17)\}$ הוא **איבר מינימלי** ב- M.

מצד שני, יש כמובן עוד יחסים רבים מעל $\mathbf{N}$ שמכילים זוג סדור אחד בלבד, ולפי אותו שיקול כל אחד מהם הוא איבר מינימלי ב- M.
לפי שאלה 3.21 בעמ' 93 בספר, אם יש בקבוצה סדורה-חלקית יותר מאיבר מינימלי אחד, אז אין בקבוצה איבר קטן ביותר.
הראינו אפוא שיש ב- M איברים מינימליים רבים, ואין איבר קטן ביותר.

נראה כעת שב- M אין אף איבר מקסימלי. נניח בשלילה ש- X הוא מקסימלי ב- M.
X הוא יחס סופי מעל $\mathbf{N}$, כלומר קבוצה **סופית** שחלקית ל- $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.
$\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ היא קבוצה **אינסופית**, לכן קיימים איברים ב- $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ שאינם ב- X. ניקח איבר אחד כזה ונצרף אותו ל- X. איחוד של קבוצה בת איבר אחד עם קבוצה סופית נותן קבוצה סופית. לכן הקבוצה שקיבלנו שייכת ל- M. היא מכילה-ממש את X, בסתירה להיות X איבר מקסימלי ב- M. לפיכך לא קיים X כזה.
הראינו שאין ב- M איבר מקסימלי . לכן ודאי שאין ב- M איבר גדול ביותר.

תשובה 4

א. 120 (השלימו את החישוב).

ב. כדי לקצר את הכתיבה נשתמש בסימון Σ , שבקרוב נזדקק לו בקומבינטוריקה.
הסבר לסימון זה ראו באתר הקורס. אין הכרח להשתמש בסימון זה בהוכחה.

עלינו להוכיח: $\sum_{k=1}^{n} k \cdot f(k) = f(n+1) - 1$.

בדיקה עבור $n=1$:
ראשית נחשב את $f(1)$ ואת $f(2)$, בעזרת ההגדרה של f :

$$f(1) = 1 \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1 \quad , \quad f(2) = 2 \cdot f(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

וכעת לבדיקה עצמה: בטענה המבוקשת $\sum_{k=1}^{n} k \cdot f(k) = f(n+1) - 1$ נקח $n=1$.
קיבלנו את השוויון $1 \cdot f(1) = f(2) - 1$.
בעזרת הערכים של $f(1)$, $f(2)$ שמצאנו, אנו רואים שהשוויון מתקיים.

מעבר:

נניח שהטענה נכונה עבור n, כלומר **נניח** $\sum_{k=1}^{n} k \cdot f(k) = f(n+1) - 1$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר **נוכיח**: $\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot f(k) = f(n+2) - 1$.

נפתֶח את אגף שמאל של השוויון שאנו רוצים להוכיח. נפרק את הסכום לשני חלקים:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot f(k) = (n+1) \cdot f(n+1) + \sum_{k=1}^{n} k \cdot f(k)$$

מהנחת האינדוקציה, $\sum_{k=1}^{n} k \cdot f(k) = f(n+1) - 1$. נציב זאת באגף ימין ונקבל

$$= (n+1) \cdot f(n+1) + f(n+1) \quad -1$$

נקבץ איברים

$$= (n+2) \cdot f(n+1) \quad -1$$

ומהגדרת f

$$= f(n+2) \quad -1$$

הוכחנו שהטענה נכונה עבור $n+1$.

משני השלבים (הבדיקה והמעבר) יחד נובע שהטענה נכונה לכל n טבעי חיובי.

איתי הראבן