ממ"ן 13

1. נתונים ערכים $(v1, v2 \dots . vn)$ המקיימים $DFT_n(p(x)) = (v1, v2 \dots . vn)$ כי עבור פולינום p(x) מדרגה deg(p(x))<n.

עבור : $0 \le k \le n-1$ $\qquad DFT_n(p(x)) = \omega_n^k = e^{\frac{2\pi ik}{n}} = (v1, v2 \dots vn)$

כעת נחשב את $DFT_{2n}(p(x^2))$:

עבור $0 \le k \le 2n-1$ $\qquad DFT_{2n}(p(x^2)) = (\omega_{2n}^k)^2 = e^{\frac{2\pi ik2}{2n}} = e^{\frac{2\pi ik}{n}}$

ניתן לראות כי המשוואות זהות אך טווח הפתרונות של $DFT_{2n}(p(x^2))$ הינו $2n$.

לכן בעבור $0 \le k \le n-1$ $\quad e^{\frac{2\pi ik}{n}} = (v1, v2 \dots vn)$

ובעבור $n \le k \le 2n-1$, נגדיר : k=n+s $0 \le s \le n-1$:

$$e^{\frac{2\pi i(s+n)}{n}} = e^{2\pi i\left(\frac{s}{n}+1\right)} = e^{2\pi i}e^{\frac{2\pi is}{n}} = 1 \cdot e^{\frac{2\pi is}{n}}$$

לכן עבור $0 \le s \le n-1$:

$$e^{\frac{2\pi is}{n}} = (v1, v2 \dots vn)$$

ומכאן שהפתרונות עבור $0 \le k \le 2n-1$

הינם: $DFT_{2n}(p(x^2)) = e^{\frac{2\pi ik}{n}} = (v1, v2 \dots vn, v1, v2 \dots vn)$

2. הרצת FFT על הווקטור [4,3,2,1] , n=4 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{4}} = i$:

1. Calling FFT ((4,3,2,1,), $\omega = i$)
   i. Calling FFT ((4,2), $\omega^{2} = -1$)
      a. Calling FFT ((4), $\omega^{4} = 1$) , return (4)
      b. Calling FFT ((2), $\omega^{4} = 1$) , return (2)
      c. Calculate (4+1*2, 4-1*2), return (6,2)
   ii. Calling FFT ((3,1), $\omega^{2} = -1$)
      a. Calling FFT ((3), $\omega^{4} = 1$) , return (3)
      b. Calling FFT((1), $\omega^{4} = 1$) , return (1)
      c. Calculate (3+1*1, 3-1*1), return (4,2)
   iii. Calculate: f(1)= 6+1*4= 10 f(-1)= 6-1*4=2
   f(i)= 2+i*2=2+2i f(-i)= 2-2i
   iv. Return (10,2+2i,2,2-2i)

הרצת FFT((10,2+2i,2,2-2i),ω^{-1})

1. Calling FFT ((10,2+2i,2,2-2i),$\omega^{-1} = -i$)
   i. Calling FFT ((10,2), $\omega^{-2} = -1$)
      a. Calling FFT ((10), $\omega^{-4} = 1$) , return (10)
      b. Calling FFT ((2), $\omega^{-4} = 1$) , return (2)
      c. Calculate (10+1*2, 10-1*2), return (12,8)
   ii. Calling FFT ((2+2i,2-2i), $\omega^{-2} = -1$)
      a. Calling FFT ((2+2i), $\omega^{-4} = 1$) , return (2+2i)
      b. Calling FFT((2-2i), $\omega^{4} = 1$) , return (2-2i)
      c. Calculate (2+2i+1*(2-2i), 2+2i-1*(2-2i)), return (4,4i)
   iii. Calculate: f(1)= 12+1*4= 16 f(-1)= 12+ ω^{-2}*4=8
   f(i)= 8+ ω^{-1}*4i=12 f(-i)= 8+ω^{-3}*4i=4
   iv. Return (16,12,8,4)

3. הרעיון באלגוריתם המשופר להכפלת שני מספרים שלמים a,b בעלי ייצוג בינארי n ביטים הינו:

ייצג כל מספר ע"י חלוקה של n הביטים שלו ל- $\frac{n}{k}$ בלוקים בגודל k כך:

$$a = \sum_{i=0}^{\frac{n}{k}-1} a_i 2^{ik} \qquad b = \sum_{i=0}^{\frac{n}{k}-1} b_i 2^{ik}$$

ייצוג מקדמי הבסיס 2^{ik} כווקטורים:

$$\left(a_0, a_1 \ldots . a_{\frac{n}{k}-1}\right), \left(b_0, a_1 \ldots . b_{\frac{n}{k}-1}\right)$$

חישוב FFT על כל ווקטור- לאחר ריפוד באפסים ליצירת ווקטור בגודל $2\frac{n}{k} - 1$.

וביצוע הכפלות בווקטורים המתקבלים a', b' בין כל תת מקטע a_i', b_i' ,

$c'_i = a'_i b'_i \;, 0 \le i \le 2\frac{n}{k} - 1$ לקבלת ווקטור c':

$$c' = \left(c'_0, c'_1 \ldots c'_{2\frac{n}{k}-1}\right)$$

חישוב FFT^{-1} על ווקטור c', בווקטור c המתקבל נחשב :

$$c = \sum_{i=0}^{2\frac{n}{k}-1} c_i 2^{ik}$$

מהלך האלגוריתם:

א. חלוקת שני הקלטים ל- $\frac{n}{k}$ בלוקים בגודל k סיביות.
ב. הרצת FFT על שני הווקטורים המייצגים את מקדמי הבסיסים.
ג. חישוב ווקטור c', ע"י מכפלות $c'_i = a'_i b'_i$
ד. הרצתFFT^{-1}על ווקטור c'.
ה. חישוב c והחזרת ערכו.

סיבוכיות:

חלוקת הקלטים תערוך O($\frac{n}{k}$).

הרצת FFT על קלט בגודל 2n סיביות המייצג וקטור בגודל $2\frac{n}{k}$, כאשר בכל שלב מבוצעות $\Theta(k^2)$ פעולות על סיביות תערוך:

עפ"י שיטת האב מקרה ב' מורחב:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + k^2\frac{n}{k} = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + nlogn \Rightarrow O(nlog^2 n)$$

$$\uparrow \mathrm{k} = \log n$$

חישוב הווקטור c' ע"י המכפלות $c'_i = a'_i b'_i$, a'_i ו-b'_i בגודל k סיביות ולכן המכפלה תערוך $\Theta(k^2)$, סה"כ- $O(k^2 \times \frac{n}{k}) = O(kn)$.

עלות חישוב c הינה $O(k^2 \times \frac{n}{k}) = O(kn)$.

סה"כ עלות:

$$O\left(\frac{n}{k} + nlog^2n + 2kn\right) = O(nlog^2n)$$

$$\uparrow \mathrm{k} = \log n$$

4. האלגוריתם מבצע רקורסיה כך שבכל איטרציה כל מטריצה $n \times n$ מפורקת ל-4 מטריצות בגודל $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$. אשר מחושבות ע"י 7 מטריצות כך:

$$P_1 = a \times (g - h)$$
$$P_2 = (a + b) \times h$$
$$P_3 = (c + d) \times e$$
$$P_4 = d \times (f - e)$$
$$P_5 = (a + d) \times (e + h)$$
$$P_6 = (b - d) \times (f + h)$$
$$P_7 = (a - c) \times (e + g)$$

במהלך זה מבוצעות 7 פעולות כפל וכן 10 פעולות חיבור/חיסור.
עפ"י מטריצות אלו מחושבת מטריצת המכפלה:

$$s = P_1 + P_2$$
$$t = P_3 + P_4$$
$$r = P_4 + P_5 + P_6 - P_2$$
$$t = P_1 + P_5 - P_3 - P_7$$

במהלך זה מבוצעות 8 פעולות חיבור/חיסור.

בסה"כ בכל איטרציה גודל המטריצה הינו $\frac{n}{2}$ ומבוצעות 7 פעולות כפל ו-18 פעולות חיבור/חיסור, לכן זמן הריצה של האלגוריתם יהיה: $T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + 18n^2$

עפ"י שיטת האב: a =7 , b = 2 ועבור $\varepsilon = 0.5$

$$\Rightarrow O\left(\mathrm{n}^{\log_2 7 - \varepsilon}\right) = n^2$$

$$\Rightarrow O\left(\mathrm{n}^{\log_2 7}\right)$$