קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"

תאריך הבחינה: 2.7.2009 (סמסטר ב 2009 - מועד 82/א1)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפים: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

שאלה 1 (25 נקודות)

(12 נק') א. יהיו E ו- F מאורעות במרחב מדגם S.

הוכח על סמך שלוש אקסיומות ההסתברות, שמתקיים:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

(13 נק') ב. הוכח בעזרת שיקולים קומבינטוריים את השוויון:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k} \quad \text{כאשר} \quad k \le n+m$$

השתמש בשוויון זה, כדי להוכיח שכאשר מטילים כל אחד משני מטבעות תקינים n פעמים,

ההסתברות שבשניהם יתקבל אותו מספר של H-ים היא $\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

שאלה 2 (25 נקודות)

יהי X משתנה מקרי אחיד (רציף) על הקטע $(-2, 3)$.

(6 נק') א. חשב את $P\{X^2 - 4 > 0 \mid X > 0\}$.

(7 נק') ב. חשב את $E[|X^2 - 4|]$.

ג. נגדיר את המשתנה המקרי Y על-ידי $Y = |X|$.

(6 נק') 1. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.

רשום אותה באופן מדויק, לכל y ממשי.

(6 נק') 2. מצא את פונקציית הצפיפות של Y.

שאלה 3 (25 נקודות)

(13 נק') א. בסוף קו ייצור של "קרמבו" יש 2 עובדי אריזה.

מספר הקרמבו שעובד A אורז במשך שעה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ^2.

מספר הקרמבו שעובד B אורז במשך שעה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $1.25\lambda^2$.

אין תלות בין ההספקים של שני העובדים.

אם שני העובדים ביחד אורזים יותר מ-280 קרמבו בשעה אחת בהסתברות 0.3085,

מהו **<u>בקירוב</u>** הערך של λ?

ב. בסוף קו ייצור אחר יש עובד אריזה יחיד.

עובד זה אורז כל קרמבו בזמן שהתפלגותו נורמלית עם תוחלת של 0.4 דקות ושונות של 0.035^2 דקות². אין תלות בין זמני האריזה של קרמבו שונים שעובד זה אורז.

(6 נק') 1. מהי ההסתברות שזמן האריזה של קרמבו מקרי יעלה על 0.41 דקות?

(6 נק') 2. מהי ההסתברות שזמן האריזה של 100 קרמבו מקריים יעלה על 41 דקות?

הערה: בחישובי ההסתברויות הנורמליות בסעיף ב יש לערוך אינטרפולציה לינארית.

שאלה 4 (25 נקודות)

ועדה עירונית מתכנסת בכל פעם שעליה להחליט כיצד לנהוג במבנה בלתי-חוקי שהוקם בשטח העיר.

בדיון הראשון שנערך בנוגע לכל מבנה כזה –

ההסתברות שהוועדה תורה על הריסתו היא 0.5 ;

ההסתברות שתקבע מועד לדיון שני בעניינו היא 0.4 ;

וההסתברות שתוציא לו היתר בנייה היא 0.1.

אם בדיון הראשון הוועדה מורה על הריסת מבנה, בעליו מגיש ערעור על ההחלטה בהסתברות 0.7.

ההסתברות שהערעור יתקבל והמבנה יקבל היתר היא 0.4 ;

ההסתברות שהערעור יידחה והמבנה ייהרס היא 0.6.

אם בדיון הראשון הוועדה קובעת מועד לדיון שני בעניינו של מבנה, ההסתברות שבסופו של דבר יינתן לו היתר היא 0.8, ואחרת – הוא ייהרס.

הערה: שימו לב, שבסופו של דבר, כל מבנה לא-חוקי מקבל היתר או נהרס.

(9 נק') א. מהי ההסתברות שמבנה בלתי-חוקי יקבל היתר?

ב. הוועדה דנה בעניינם של 20 מבנים בלתי-חוקיים.

בהנחה שאין תלות בין החלטותיה לגבי מבנים שונים –

(8 נק') 1. אם בסופו של דבר 14 מ-20 המבנים קיבלו היתר,

מהי ההסתברות ש-3 מהם קיבלו את ההיתר בדיון הראשון בעניינם?

(8 נק') 2. אם ידוע שרק 3 מ-20 מבנים אלו קיבלו היתר <u>בדיון הראשון</u> בעניינם,

מהי שונות מספר המבנים <u>הנוספים</u> (מתוך ה-20) שקיבלו היתר בסופו של דבר?

שאלה 5 (25 נקודות)

נתונה קבוצת המספרים $\{1,2,\ldots,10\}$.

בוחרים מהקבוצה, בזה אחר זה, באופן מקרי ו<u>עם החזרה</u>, 12 מספרים.

יהי X מספר המספרים בקבוצה $\{1,2,\ldots,10\}$ שנבחרו לפחות פעם אחת.

(לדוגמה, אם נבחרו המספרים: 1,4,8,7,9,8,7,4,3,1,2,10 אז $X=8$).

(8 נק') א. חשב את התוחלת של X.

(10 נק') ב. חשב את השונות של X.

(7 נק') ג. יהי Y מספר המספרים שלא נבחרו בכלל ב-12 הבחירות.

חשב את השונות של Y.

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\, dy$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(x)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
x	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(x)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
x	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \quad , \quad i = 0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$	$(pe^t + 1 - p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1} \cdot p \quad , \quad i = 1,2,\dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t / (1-(1-p)e^t)$ $t < -\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i! \quad , \quad i = 0,1,\dots$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1}(1-p)^{i-r} \cdot p^r \quad , \quad i = r, r+1,\dots$	r/p	$(1-p)r/p^2$	$\left(pe^t / (1-(1-p)e^t)\right)^r$ $t < -\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i} \Big/ \binom{N}{n} \quad , \quad i = 0,1,\dots,m$	nm/N	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N}(1-\frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n} \quad , \quad i = m+1, m+2, \dots, m+n$	$m + (1+n)/2$	$(n^2 - 1)/12$	
אחידה	$1/(b-a) \quad , \quad a \le x \le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt} - e^{at})/(tb - ta)\,,\, t \neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad , \; -\infty < x < \infty$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2 / 2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda - t) \quad , \quad t < \lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1,\dots,n_r} \cdot p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r} \quad , \; \sum n_i = n \, , \sum p_i = 1$			

נוסחת הבינום $\quad (x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$

כלל ההכלה וההפרדה $\quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$

הסתברות מותנית $\quad P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

נוסחת הכפל $\quad P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

נוסחת ההסתברות השלמה $\quad P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) \quad ,$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

נוסחת בייס $\quad P(B_j | A) = \dfrac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)} \quad ,$ $\{B_i\}$ זרים ואיחודם הוא S

תוחלת $\quad E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx$

תוחלת של פונקציה של מ"מ $\quad E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx$

שונות $\quad \mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית $\quad E[aX + b] = aE[X] + b$

$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ.

תכונת חוסר-הזכרון $\quad P\{X > s + t \,|\, X > t\} = P\{X > s\} \quad , \quad s,t \ge 0$

תוחלת מותנית $\quad E[X | Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y) = \int x f_{X|Y}(x|y) dx$

שונות מותנית $\mathrm{Var}(X \mid Y=y) \;=\; E[X^2 \mid Y=y]-(E[X \mid Y=y])^2$

נוסחת התוחלת המותנית $E[X] \;=\; E[E[X \mid Y]] \;=\; \sum_y E[X \mid Y=y]p_Y(y)$

נוסחת השונות המותנית $\mathrm{Var}(X) \;=\; E[\mathrm{Var}(X \mid Y)]+\mathrm{Var}(E[X \mid Y])$

תוחלת של סכום משתנים מקריים $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

שונות משותפת $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]=E[XY]-E[X]E[Y]$

$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Cov}(X_i,Y_j)$

שונות של סכום משתנים מקריים $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{i<j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$

מקדם המתאם הלינארי $\rho(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)\Big/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t)=E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t)=e^{bt}M_X(at)$

כאשר X_i מ״מ ב״ת מתקיים: $M_{X_1+\ldots+X_n}(t)=M_{X_1}(t)\cdot\ldots\cdot M_{X_n}(t)$

תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right]=E[N]E[X]$

(כאשר X_i מ״מ ב״ת ש״ה) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)=E[N]\mathrm{Var}(X)+(E[X])^2\,\mathrm{Var}(N)$

$M_Y(t)=E\left[\left(M_X(t)\right)^N\right]$

אי-שוויון מרקוב $P\{X\ge a\}\le E[X]/a \quad , \quad a>0$, X מ״מ אי-שלילי

אי-שוויון צ׳בישב $P\{|X-\mu|\ge a\}\le \sigma^2/a^2 \quad , \quad a>0$, $\mu,\sigma^2<\infty$

משפט הגבול המרכזי $P\left\{(\sum_{i=1}^{n} X_i-n\mu)\Big/\sqrt{n\sigma^2}\le a\right\}\underset{n\to\infty}{\to}\Phi(a) \quad , \quad \mu,\sigma^2<\infty$, X_i מ״מ ב״ת וש״ה

- אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב״ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A)+P(B)]$.
- סכום של מ״מ בינומיים (גיאומטריים) ב״ת עם אותו הפרמטר p הוא מ״מ בינומי (בינומי-שלילי).
- סכום של מ״מ פואסוניים ב״ת הוא מ״מ פואסוני.
- סכום של מ״מ נורמליים ב״ת הוא מ״מ נורמלי.
- ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X+Y=n$, כאשר X ו-Y מ״מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב״ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$\sum_{i=0}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}=e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} x^i=\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i=\frac{1}{1-x} \quad , \quad -1<x<1$

$\int(ax+b)^n\,dx=\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} \quad , \quad n\neq -1 \quad ; \quad \int\frac{1}{ax+b}\,dx=\frac{1}{a}\ln(ax+b)$

$\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax}dx=\frac{1}{a\ln b}b^{ax} \quad ;$

נוסחת האינטגרציה בחלקים :

$\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$