

מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.

* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.

* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.

* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(6 נק') א. α, β הם פסוקים מורכבים. בלוח אמת משותף שלהם יש שורות שבהן שניהם

מקבלים ערך T ויש שורות שבהן שניהם מקבלים ערך F.

יש בלוח גם שורות שבהן α מקבל ערך T ו- β מקבל ערך F,

אבל אין בלוח אף שורה בה α מקבל F ו- β מקבל T.

מהאמור כאן נובע:

[1] $\alpha \rightarrow \beta$ הוא טאוטולוגיה [2] $\alpha \rightarrow \beta$ הוא סתירה

[3] $\beta \rightarrow \alpha$ הוא טאוטולוגיה [4] $\beta \rightarrow \alpha$ הוא סתירה

[5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה

(7 נק') ב. \mathbf{R} היא קבוצת המספרים הממשיים.

לכל n טבעי, נסמן $I_n = \{x \in \mathbf{R} \mid n < x < n+1\}$.

לכל n טבעי, תהי A_n קבוצה של מספרים ממשיים המקיימת:

$|A_n| = \aleph_0$, $A_n \subseteq I_n$. עוצמת הקבוצה $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ היא:

[1] \aleph_0

[2] C

[3] עוצמה אינסופית שאינה \aleph_0 ואינה C .

[4] לא קיימות קבוצות A_n כאלה.

[5] קיימות קבוצות כאלה, אבל לא ניתן לענות על השאלה מתוך הנתונים.

(6 נק') ג. בפרק 1 ב"תורת הגרפים" מופיע האיפיון הבא של גרף דו-צדדי:

"גרף בעל לפחות שני צמתים הוא דו-צדדי אם ורק אם אין בו מעגל באורך אי-זוגי".

נזכור שביער, ובפרט בעץ, אין מעגלים כלל.

איזו מהאמירות הבאות נכונה?

[1] כל יער על יותר מצומת אחד הוא גרף דו-צדדי.

[2] הטענה הקודמת אינה נכונה, אבל כל עץ על יותר מצומת אחד הוא גרף דו-צדדי.

[3] עץ על מספר אי-זוגי של צמתים לעולם אינו גרף דו-צדדי.

[4] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

\mathbb{N} היא קבוצת המספרים הטבעיים (תזכורת: בקורס זה אפס הוא מספר טבעי).

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ היא קבוצת המספרים השלמים:

בכל סעיף קבעו אם היחס (הרלציה) שהוגדר בו הוא יחס שקילות. הוכיחו את תשובותיכם.

6 נק' א. היחס J המוגדר מעל \mathbb{Z} :

$$(x, y) \in J \text{ אם } x - y = 5n \text{ } n \in \mathbb{N} \text{ כך ש-}$$

7 נק' ב. היחס K המוגדר מעל \mathbb{Z} :

$$(x, y) \in K \text{ אם } x - y = 5n \text{ } n \in \mathbb{Z} \text{ כך ש-}$$

7 נק' ג. היחס M המוגדר מעל \mathbb{Z} :

$$(x, y) \in M \text{ אם } x + y = 5n \text{ } n \in \mathbb{Z} \text{ כך ש-}$$

7 נק' ד. היחס L המוגדר מעל \mathbb{Z} :

$$(x, y) \in L \text{ אם } x - y = 5n \text{ } n \in \mathbb{Z} \text{ כך ש- או } x - y = 2n \text{ } n \in \mathbb{Z} \text{ כך ש-}$$

שאלה 3

תהיינה $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

6 נק' א. כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של X ל- Y קיימות?

21 נק' ב. כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של X ל- Y מקיימות את התנאי:

$$\text{לכל } i \in X, f(i) \neq i. \text{ הדרכה: הכלה והפרדה.}$$

בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה מספרית.

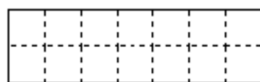
שאלה 4



בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×1 :



ומספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×2 :



עלינו לרצף מלבן שממדיו $n \times 2$:
(בציור $n = 7$).

בלוק של 2×1 אפשר להניח כרצוננו "שוכב" או "עומד". אסור לחרוג מגבולות המלבן.

יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

לדוגמא, $a_2 = 3$: שני בלוקים 2×1 שוכבים, או שני בלוקים 2×1 עומדים,

או בלוק אחד של 2×2 .

(10 נק') א. רשום יחס נסיגה עבור a_n (הסבר אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

(10 נק') ב. פתור את יחס הנסיגה.

(7 נק') ג. חשב את a_4 בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א',

ומתוך הנוסחה המפורשת שקיבלת בסעיף ב'.

שאלה 5

תהי $A = \{1, 2, 3\}$ ותהי $V = A \times A$.

גרף G מוגדר כך: קבוצת הצמתים של G היא הקבוצה V הנתונה למעלה.

למשל הזוג הסדור $(2, 1)$ הוא צומת של G .

בין צומת (a, b) לצומת (c, d) יש קשת אם ורק אם $(a + b) - (c + d) = \pm 1$.

למשל יש קשת בין $(2, 1)$ לבין $(2, 2)$,

אין קשת בין $(2, 2)$ ל- $(1, 3)$ ואין קשת בין $(2, 3)$ לבין $(1, 2)$.

(6 נק') א. הוכיחי ש- G קשיר.

(6 נק') ב. מה דרגת הצומת $(1, 1)$ ומה דרגת הצומת $(1, 2)$?

(8 נק') ג. כמה קשתות יש ב- G ? הוכיחי.

(7 נק') ד. האם יש ב- G מעגל אוילר? הוכיחי.

בהצלחה!