

קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"
תאריך הבחינה: 14.7.2014 (סמסטר 2014 ב - מועד א 5 / 86)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפים: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

שאלה 1 (25 נקודות)

שתי מרכזיות טלפון: A ו-B, פועלות באופן בלתי-תלוי זו בזו. בשתי המרכזיות מתקבלות שיחות טלפון בזמנים המקיימים את שלוש ההנחות של תהליך פואסון עם קצב של 2 שיחות לדקה. מתחילים לעקוב אחר שיחות הנכנסות לשתי המרכזיות החל מזמן 0. יהיו: T = הזמן החולף (בדקות) מזמן 0 ועד שנכנסת השיחה הראשונה למרכזייה A; X = מספר השיחות שנכנסות למרכזייה B מזמן 0 ועד שנכנסת השיחה הראשונה למרכזייה A.

- 7 נק' א. חשב את $P\{T > 0.25\}$.
 8 נק' ב. חשב את $P\{X = 2 \mid T = 0.5\}$.
 10 נק' ג. מהן התוחלת והשונות של המשתנה המקרי X ?

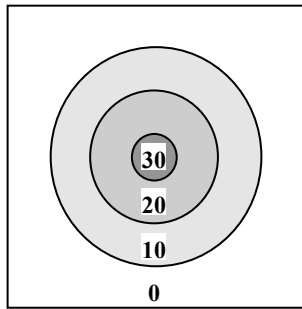
שאלה 2 (25 נקודות)

פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי X נתונה על-ידי: $f_X(x) = c|x - 2|$, $1 \leq x \leq 3$.
 6 נק' א. חשב את הערך של c .
 6 נק' ב. מהי $E[X]$?
 7 נק' ג. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X .
 רשום אותה באופן מדויק (לכל x ממשי).
 6 נק' ד. יהי $Y = (X - 1)^2$.
 חשב את $F_Y(3.24)$.

שאלה 3 (25 נקודות)

מטילים 10 פעמים מטבע, שההסתברות לקבל בו H היא p ($0 < p < 1$). יהי X מספר הזוגות של שתי הטלות עוקבות, שמתקבלת בהן אותה התוצאה. למשל: אם מקבלים $\overline{HTHHHTHTTH}$, אז $X = 3$.
 9 נק' א. נניח כי $p = 0.5$.
 לכל $i = 1, 2, \dots, 9$, נגדיר את המאורעות A_i על ידי:
 "בהטלות i ו- $i+1$ התקבלו אותן התוצאות".
 האם לכל $i \neq j$, $(i, j = 1, 2, \dots, 9)$, המאורעות A_i ו- A_j בלתי-תלויים זה בזה? הוכח את טענתך.
 16 נק' ב. נניח כי $p = 0.8$. (שימו לב: התפלגות המשתנה המקרי X איננה בינומית)
 1. חשב את התוחלת של X .
 2. חשב את השונות של X .

שאלה 4 (25 נקודות)



ילד קולע למטרה המסומנת על לוח ריבועי, כפי שמתואר באיור שמשמאל.
הוא מבצע 50 נסיונות קליעה בלתי-תלויים זה בזה.
בכל נסיון-קליעה, ההסתברות שלא יפגע כלל בלוח היא 0.2.
אם הוא פוגע בלוח (דהיינו, בתוך הריבוע ה"גדול") –
ההסתברות שיזכה ב- 30 נקודות היא 0.1, ב- 20 נקודות היא 0.2,
וב- 10 נקודות היא 0.3.

- (6 נק') א. מהי ההסתברות שהילד יזכה בדיוק ב-20 נקודות בנסיון-קליעה מקרי?
(6 נק') ב. מהי ההסתברות שבדיוק ב- 30 נסיונות-קליעה (מתוך ה- 50) הילד יזכה בנקודות?
(6 נק') ג. מהי ההסתברות שבדיוק ב-23 נסיונות-קליעה (מתוך ה- 50) לא יזכה כלל בנקודות,
ב-14 נסיונות-קליעה יזכה ב- 10 נקודות, ב- 9 נסיונות-קליעה יזכה ב- 20 נקודות,
וב-4 נסיונות-קליעה יזכה ב- 30 נקודות?
(7 נק') ד. נסמן ב- X_0 את מספר נסיונות-הקליעה (מתוך ה- 50) שבהם הילד לא זוכה באף נקודה;
ונסמן ב- X_{10} את מספר נסיונות-הקליעה (מתוך ה- 50) שבהם הילד זוכה ב- 10 נקודות.
חשב את מקדם המתאם בין X_0 ל- X_{10} .

שאלה 5 (25 נקודות)

(12 נק') א. יהיו F ו- G מאורעות זרים של ניסוי מקרי כלשהו.
הוכח, כי בחזרות בלתי-תלויות על ניסוי זה,

$$\frac{P(F)}{P(F) + P(G)} : \text{ההסתברות שהמאורע } F \text{ יתרחש לפני המאורע } G \text{ היא}$$

ב. מטילים קובייה תקינה שוב ושוב.

- (6 נק') 1. מהי ההסתברות שתתקבל תוצאה זוגית לפני שתתקבל תוצאה שהיא כפולה של 3?
(7 נק') 2. נתבונן על 40 ההטלות הראשונות:
אם בהטלות אלו התקבלו 13 תוצאות שהן כפולה של 3,
מהי ההסתברות שבהטלה השישית (מתוך ה- 40) התקבלה לראשונה תוצאה שהיא
כפולה של 3?

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] \quad \text{נוסחת האינטרפולציה:}$$

| z | 0.0 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |

| $\Phi(z)$ | 0.50 | 0.55 | 0.60 | 0.65 | 0.70 | 0.75 | 0.80 | 0.85 | 0.90 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| z | 0.0 | 0.126 | 0.253 | 0.385 | 0.524 | 0.674 | 0.842 | 1.036 | 1.282 |
| $\Phi(z)$ | 0.91 | 0.92 | 0.93 | 0.94 | 0.95 | 0.96 | 0.97 | 0.98 | 0.99 |
| z | 1.341 | 1.405 | 1.476 | 1.555 | 1.645 | 1.751 | 1.881 | 2.054 | 2.326 |

דף נוסחאות לבחינה - 20425

| התפלגות | פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות | התוחלת | השונות | הפונקציה היוצרת המומנטים |
|----------------|--|---------------|---|---|
| בינומית | $\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}, \quad i=0,1,\dots,n$ | np | $np(1-p)$ | $(pe^t + 1 - p)^n$ |
| גיאומטרית | $(1-p)^{i-1} \cdot p, \quad i=1,2,\dots$ | $1/p$ | $(1-p)/p^2$ | $\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\ln(1-p)$ |
| פואסונית | $e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i!, \quad i=0,1,\dots$ | λ | λ | $\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$ |
| בינומית שלילית | $\binom{i-1}{r-1} (1-p)^{i-r} \cdot p^r, \quad i=r, r+1, \dots$ | r/p | $(1-p)r/p^2$ | $\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r, \quad t < -\ln(1-p)$ |
| היפרגיאומטרית | $\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i} / \binom{N}{n}, \quad i=0,1,\dots,m$ | nm/N | $\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N} (1 - \frac{m}{N})$ | |
| אחידה בדידה | $\frac{1}{n}, \quad i=m+1, m+2, \dots, m+n$ | $m + (1+n)/2$ | $(n^2 - 1)/12$ | |
| אחידה | $1/(b-a), \quad a \leq x \leq b$ | $(a+b)/2$ | $(b-a)^2/12$ | $(e^{bt} - e^{at})/(tb - ta), \quad t \neq 0$ |
| נורמלית | $(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty$ | μ | σ^2 | $\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2/2\}$ |
| מעריכית | $\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$ | $1/\lambda$ | $1/\lambda^2$ | $\lambda/(\lambda - t), \quad t < \lambda$ |
| מולטינומית | $\binom{n}{n_1, \dots, n_r} \cdot p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}, \quad \sum n_i = n, \sum p_i = 1$ | | | |

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \quad \text{נוסחת הבינום}$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \quad \text{כלל ההכלה וההפרדה}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{הסתברות מותנית}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \quad \text{נוסחת הכפל}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i) \quad , \quad S \text{ זרים ואיחודם הוא } S \quad \text{נוסחת ההסתברות השלמה}$$

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)} \quad , \quad S \text{ זרים ואיחודם הוא } S \quad \text{נוסחת בייס}$$

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx \quad \text{תוחלת}$$

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx \quad \text{תוחלת של פונקציה של מ"מ}$$

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2 \quad \text{שונות}$$

$$E[aX + b] = aE[X] + b \quad \text{תוחלת ושונות של פונקציה לינארית}$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ .

$$P\{X > s+t | X > t\} = P\{X > s\} \quad , \quad s, t \geq 0 \quad \text{תכונת חוסר-הזכרון}$$

$$E[X|Y=y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y) = \int x f_{X|Y}(x|y) dx \quad \text{תוחלת מותנית}$$

$$\text{Var}(X | Y = y) = E[X^2 | Y = y] - (E[X | Y = y])^2 \quad \text{שונות מותנית}$$

$$E[X] = E[E[X | Y]] = \sum_y E[X | Y = y] p_Y(y) \quad \text{נוסחת התוחלת המותנית}$$

$$E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X | Y]] \quad (\text{טענה מתרגיל 26, עמוד 430})$$

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X | Y)] + \text{Var}(E[X | Y]) \quad \text{נוסחת השונות המותנית}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] \quad \text{תוחלת של סכום משתנים מקריים}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y] \quad \text{שונות משותפת}$$

$$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j) \quad \text{שונות של סכום משתנים מקריים}$$

$$\rho(X, Y) = \text{Cov}(X, Y) / \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)} \quad \text{מקדם המתאם הלינארי}$$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at) \quad \text{פונקציה יוצרת מומנטים}$$

$$M_{X_1 + \dots + X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t) \quad \text{כאשר } X_i \text{ מ"מ ב"ת מתקיים:}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X] \quad \text{תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי}$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\text{Var}(X) + (E[X])^2 \text{Var}(N) \quad (\text{כאשר } X_i \text{ מ"מ ב"ת ש"ה})$$

$$M_Y(t) = E\left[(M_X(t))^N\right]$$

$$P\{X \geq a\} \leq E[X]/a \quad , \quad a > 0 \quad , \quad \text{מ"מ אי-שלילי } X \quad \text{אי-שוויון מרקוב}$$

$$P\{|X - \mu| \geq a\} \leq \sigma^2/a^2 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty \quad \text{אי-שוויון צ'בישב}$$

$$P\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)/\sqrt{n\sigma^2} \leq a\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a) \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty \quad , \quad X_i \text{ מ"מ ב"ת וש"ה} \quad \text{משפט הגבול המרכזי}$$

• אם A ו- B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A) + P(B)]$.

• סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר p הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי).

• סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני.

• סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי.

• ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X + Y = n$, כאשר X ו- Y מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1 < x < 1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \neq -1 \quad ; \quad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b) \quad \text{נוסחת האינטגרציה בחלקים:}$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \frac{1}{a \ln b} b^{ax} \quad ; \quad \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

$$\log_n a = \log_m a / \log_m n \quad ; \quad \log_n (a^b) = b \cdot \log_n a \quad ; \quad \log_n (ab) = \log_n a + \log_n b$$