תשובה 1

א. שם-עצם.

ב. קשקוש (משני צידי הקשר הלוגי יש שמות עצם במקום תבניות).

ג. תבנית לא אטומית (יש כמת) שהיא פסוק (אין משתנים חפשיים).

ד. קשקוש (כמתים אמורים לפעול על תבניות, לא על שמות עצם).

ה. תבנית אטומית (למרות שהיא נראית מסובכת....) שאינה פסוק (יש משתנה חפשי).

ו. תבנית לא אטומית, שהיא פסוק (אין משתנים חפשיים).

תשובה 2

פירוש מתאים ל- K, המאפשר להשלים את כתיבת התבניות הוא: $K(x, y)$ מתפרש כ -

"האתר x מכיל קישור לאתר y". K הוא אפוא סימן יחס (פרדיקט) דו-מקומי.

התבניות:

1. $\exists x(S(x) \wedge G(x))$
2. $\exists x \forall y(S(y) \rightarrow \sim K(x, y))$
3. $\forall x(S(x) \rightarrow (G(x) \vee \exists y(G(y) \wedge K(x, y))))$
4. $\exists x \sim (\forall y K(y, x))$

את רוב התבניות הללו ניתן לרשום ביותר מדרך אחת, כלומר קיימות תבניות לא יותר מסובכות, השקולות לוגית לתבניות הללו. למשל:

2א. $\exists x \forall y((\sim S(y)) \vee (\sim K(x, y)))$ 2ב. $\sim \forall x \exists y(S(y) \wedge K(x, y))$

4א. $\exists x \exists y \sim K(y, x)$ 4ב. $\sim \forall x \forall y K(y, x)$

את המעבר בין הצורות המקוריות שרשמנו לצורות האחרות ניתן לבצע בעזרת שקילויות מתחשיב הפסוקים כגון $\alpha \rightarrow \beta \equiv (\sim \alpha) \vee \beta$ ("לוגיקה" שאלה 1.32א בעמ' 33) ושקילויות מתחשיב הפרדיקטים כגון $\sim \exists x(\psi) \equiv \forall x(\sim \psi)$, $\sim \forall x(\psi) \equiv \exists x(\sim \psi)$ ("לוגיקה" שאלה 3.26ג,ד בעמ' 122)

תשובה 3

א. $\sim \forall x R(x,x)$, ולאחר הכנסת השלילה פנימה : $\exists x(\sim R(x,x))$.

ב. $\sim \forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$, ובצורה שקולה : $\exists x \exists y \sim (R(x,y) \to R(y,x))$,
ואם רוצים אפשר להמשיך : $\exists x \exists y (R(x,y) \wedge \sim R(y,x))$.

ג. $\sim \forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z))$,
ובצורה שקולה : $\exists x \exists y \exists z \sim ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z))$
ואם נרצה אפשר גם : $\exists x \exists y \exists z (R(x,y) \wedge R(y,z) \wedge \sim R(x,z))$.

אני מקווה שע"י כתיבת התנאים הללו בצורות שונות, תרגיל זה מסייע גם לחזור ולהבין מתי יחס אינו רפלקסיבי / סימטרי / טרנזיטיבי, וכך גם מובן יותר מהו יחס רפלקסיבי / סימטרי / טרנזיטיבי .

תשובה 4

א. תהי ψ התבנית $R(x)$, כאשר R הוא סימן פרדיקט חד-מקומי כלשהו.

תהי φ התבנית $\sim \psi$, כלומר $\sim R(x)$.

תהי J אינטרפרטציה שעולמה הוא הקבוצה $\{1,2\}$, ובה R מתפרש כתכונה "להיות שווה 1".

הפסוק $\exists x \psi$ אמיתי ב- J (קיים בעולם $\{1,2\}$ איבר השווה 1) .

גם הפסוק $\exists x \varphi$ אמיתי ב- J (קיים בעולם $\{1,2\}$ איבר שאינו שווה 1)

לכן, לפי הלוח של $\wedge$, הפסוק $(\exists x \psi) \wedge (\exists x \varphi)$ אמיתי ב- J .

מצד שני, הפסוק $\exists x(\psi \wedge \sim \psi)$ כמובן שקרי ב- J הנ"ל, ולמעשה הוא **שקרי לוגית** : באף עולם ואף אינטרפרטציה, לא קיים איבר בעולם שעבורו ψ ו- $\sim \psi$ אמיתיים שניהם, כי ערכי האמת שלהם מנוגדים תמיד.

מצאנו אינטרפרטציה שבה $\wedge$, הפסוק $(\exists x \psi) \wedge (\exists x \varphi)$ אמיתי בעוד ש- $\exists x(\psi \wedge \sim \psi)$ שקרי, משמע התבנית הראשונה אינה גוררת לוגית את השניה, ובפרט הן אינן שקולות לוגית.

ב. כאמור התבנית $\exists x(\psi \wedge \sim \psi)$ שקרית לוגית.

תבנית שקרית לוגית גוררת לוגית **כל** תבנית : תבנית שקרית לוגית **אינה אמיתית באף אינטרפרטציה** (והשמה) , לכן ניתן לומר שבכל אינטרפרטציה והשמה שבהן היא אמיתית, גם תבנית כלשהי אחרת אמיתית (או שקרית, או נועלת מגפיים, או עשויה מדיקט, לא משנה) - התנאי מתקיים באופן ריק.