פתרונות לממ"ן 14 - 2013ב - 20425

1. א. השטח הכלוא מתחת לעקומת פונקציית הצפיפות שווה ל-1. לכן:

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{2h}{2} + \frac{h}{2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{2}{3}$$

ב.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x & , \quad 0 \le x \le 2 \\ -\frac{2}{3}x + 2 & , \quad 2 < x \le 3 \\ 0 & , \quad x < 0 \ \cup \ x > 3 \end{cases}$$

ג. נשתמש בחישובי שטחים של משולשים כדי למצוא את $F_X(x)$:

עבור $0 \le x \le 2$, נקבל:

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot \tfrac{1}{3}x = \tfrac{1}{6}x^2$$

ועבור $2 \le x \le 3$, נקבל:

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = 1 - \tfrac{1}{2} \cdot (3-x) \cdot (2 - \tfrac{2}{3}x) = 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot (3-x)^2 = 1 - \tfrac{1}{3} \cdot (3-x)^2$$

לפיכך:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{6}x^2 & , \quad 0 \le x \le 2 \\ 1 - \frac{1}{3}(3-x)^2 = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 2 & , \quad 2 < x \le 3 \\ 1 & , \quad x > 3 \end{cases}$$

ד.

$$P\{X > 1 \mid X < 2\} = \frac{P\{1 < X < 2\}}{P\{X < 2\}} = \frac{F(2) - F(1)}{F(2)} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

ה.

$$E[X] = \int_0^3 x f(x)\,dx = \int_0^2 \tfrac{1}{3}x^2 dx + \int_2^3 (2 - \tfrac{2}{3}x)x dx = \tfrac{1}{9}x^3\Big|_0^2 + \Big[x^2 - \tfrac{2}{9}x^3\Big]_2^3$$

$$= \tfrac{8}{9} + 9 - 6 - 4 + \tfrac{16}{9} = \tfrac{15}{9} = 1\tfrac{2}{3} = 1.\overline{6}$$

2. א. לכל $y > 0$ מתקיים:

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{Z^2 \le y\} = P\{-\sqrt{y} \le Z \le \sqrt{y}\} = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1$$

ב. לפי הסעיף הקודם, לכל $y > 0$ מתקיים:

$$f_Y(y) = \tfrac{d}{dy}F_Y(y) = \tfrac{d}{dy}[2\Phi(\sqrt{y}) - 1] = 2f_Z(\sqrt{y}) \cdot \tfrac{d}{dy}[\sqrt{y}] = \tfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{y}} = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}$$

ג. לפי הסעיף הקודם, לכל $w > 0$ מתקיים:

$$F_W(w) = P\{aY \le w\} \underset{\substack{\downarrow \\ a>0}}{=} P\{Y \le \tfrac{w}{a}\} = F_Y(\tfrac{w}{a})$$

ומכאן, שלכל $w > 0$ מתקיים:

$$f_W(w) = \tfrac{d}{dw}F_W(w) = \tfrac{d}{dw}F_Y(\tfrac{w}{a}) = \tfrac{1}{a}f_Y(\tfrac{w}{a}) = \tfrac{1}{a} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\frac{w}{a}}}e^{-\frac{w}{2a}} = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi a w}}e^{-\frac{w}{2a}}$$

3. נסמן ב- X את המשקל של גביע גבינה מקרי. לפי נתוני הבעיה: $X \sim N(\mu, 6^2)$.

א. מנתוני הבעיה נובע כי: $P\{X > 267.08\} = 0.119$

לכן: $P\{X > 267.08\} = 1 - \Phi\left(\frac{267.08-\mu}{6}\right) = 0.119$

או לחלופין: $\Phi\left(\frac{267.08-\mu}{6}\right) = 1 - 0.119 = 0.881$

כעת, מטבלה 5.1 במדריך (עמוד 112), עולה כי: $\Phi(1.18) = 0.881$

הסבר:

z	0.00	0.01	⋯	0.08	0.09
⋮					
1.1				$\Phi(1.18) = \mathbf{0.9772}$	
⋮					

לכן: $\frac{267.08-\mu}{6} = 1.18 \quad \Rightarrow \quad \mu = 267.08 - 6 \cdot 1.18 = 260$

כלומר, התוחלת של משקל גביע-גבינה היא 260 גרם.

ב. $P\{X < 250\} = P\left\{Z < \frac{250-260}{6}\right\} = \Phi(-1.6667) = 1 - \Phi(1.6667)$

$= 1 - 0.9522 = 0.0478 = 4.78\% > 2.5\%$

הסבר:

z	0.00	⋯	0.06	0.07	⋯
0.0					
⋮					
1.6			$\Phi(1.66) = 0.9515$	$\Phi(1.67) = 0.9525$	

$\Phi(1.6667) \cong 0.9522$

והחישוב המדויק:

$\Phi(1.66) = 0.9515$

$\Rightarrow 0.9525 - 0.9515 = \underline{\underline{0.001}}$

$\Phi(1.67) = 0.9525$

$\Rightarrow \Phi(1.66\underline{67}) = 0.9515 + 0.\underline{67} \cdot \underline{\underline{0.001}} = 0.9522$

מהתוצאה האחרונה נובע שהחברה **אינה** עומדת בהתחייבותה.

ג. נמצא את הערך של a שמקיים את המשוואה: $P\{X < a\} = \Phi\left(\frac{a-260}{6}\right) = 0.25$

או לחלופין את המשוואה: $1 - \Phi\left(\frac{a-260}{6}\right) = \Phi\left(-\frac{a-260}{6}\right) = 0.75$

לשם כך, נעזר בטבלה 5.2 במדריך, ונקבל כי: $\Phi(0.674) = 0.75$

לפיכך: $-\frac{a-260}{6} = 0.674$

ומכאן שמתקיים: $a = 260 - 0.674 \cdot 6 = 255.956$ גרם

כלומר, ההסתברות שגביע-גבינה מקרי ישקול פחות מ- 255.956 גרם היא 0.25.

ד. $$P\{X > 255 \mid X < 265\} = \frac{P\{255 < X < 265\}}{P\{X < 265\}} = \frac{\Phi(0.8333) - \Phi(-0.8333)}{\Phi(0.8333)}$$

$$= \frac{2\Phi(0.8333) - 1}{\Phi(0.8333)} = 2 - \frac{1}{0.7976} = 0.7463$$

ה. נחשב תחילה את ההסתברות שגביע גבינה מקרי ישקול פחות מ-257 גרם :

$$P\{X < 257\} = P\left\{Z < \tfrac{257-260}{6}\right\} = \Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

כעת, כדי שהגביע האחרון שיישקל יהיה העשירי שמשקלו נמוך מ-257 גרם, צריך שבין 29 הגביעים שנשקלים ראשונים יהיו עוד 9 גביעים שמשקלם נמוך מ-257 גרם (ומשקל הגביע האחרון חייב להיות גם הוא נמוך מ-257 גרם). לכן, ההסתברות המבוקשת היא : $\binom{29}{9} \cdot 0.3085^{10} \cdot 0.6915^{20} = 0.04887$

4. למשתנה המקרי X יש התפלגות אחידה בדידה בין -2 ל- 3.

לכן, לכל $-2 < x < 3$, מתקיים : $F_X(x) = P\{X \le x\} = \frac{x-(-2)}{3-(-2)} = \frac{x+2}{5}$

א. $$P\{X^2 - 4 > 0 \mid X > 0\} = \frac{P\{X^2 - 4 > 0, X > 0\}}{P\{X > 0\}} = \frac{P\{X > 2, X > 0\}}{P\{X > 0\}} = \frac{P\{X > 2\}}{P\{X > 0\}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$$

ב. $$E[|X^2 - 4|] = \int_{-2}^{2} 0.2(4 - x^2)\,dx + \int_{2}^{3} 0.2(x^2 - 4)\,dx = 0.2\Big[4x - \tfrac{1}{3}x^3\Big]_{-2}^{2} + 0.2\Big[\tfrac{1}{3}x^3 - 4x\Big]_{2}^{3}$$

$$= 1.6 - \tfrac{1.6}{3} + 1.6 - \tfrac{1.6}{3} + 1.8 - 2.4 - \tfrac{1.6}{3} + 1.6 = 2.6$$

5. נסמן ב-X את אורך החיים של נורה ; $X \sim Exp\left(\frac{1}{500}\right)$.

א1. המשתנה המקרי המעריכי מקיים את תכונת חוסר-הזיכרון. לכן, מתקיים :

$$P\{X \ge 500 \mid X \ge 250\} = P\{X \ge 250\} = e^{-\frac{250}{500}} = e^{-0.5} = 0.6065$$

א2. נשים לב שידוע לנו שהנורה דולקת כבר 250 שעות. כעת, מכיוון שהמשתנה המקרי המעריכי מקיים את תכונת חוסר-הזיכרון, התפלגות אורך החיים של הנורה מעבר לזמן זה, כלומר, בהינתן שהיא דולקת כבר 250 שעות, נשארת מעריכית עם הפרמטר $\frac{1}{500}$. כלומר, אורך החיים של הנורה המסוימת הזו הוא 250 השעות שנתון שהיא כבר דולקת ועוד הזמן שתדלוק מעבר לכך. נסמן את הזמן הנוסף שהיא תדלוק ב-X

ונקבל שתוחלת אורך החיים של נורה זו היא : $E[250 + X] = 250 + 500 = 750$

ושונות אורך החיים שלה היא : $\text{Var}(250 + X) = \text{Var}(X) = 500^2$

ב. כדי שהמנורה תאיר לפחות 700 שעות (באור מלא או חלקי), צריכה להיות לפחות נורה אחת שתדלוק לפחות 700 שעות. המאורע המשלים למאורע זה הוא שכל הנורות ידלקו פחות מ-700 שעות. מכיוון שהנורות בלתי-תלויות זו בזו קל לחשב את הסתברות המאורע המשלים. מקבלים, שהסתברות זו היא :

$$(P\{X < 700\})^3 = (1 - e^{-\frac{700}{500}})^3 = 0.7534^3 = 0.4276$$

ומכאן שההסתברות המבוקשת היא : $1 - 0.4276 = 0.5724$