פתרון שאלות בממ"ן 13 סמסטר 2014ב

שאלה 2

א. אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי להכרעת השפה $EVEN_{\text{DFA}}$:

"על קלט $\langle M \rangle$ כאשר M הוא אוטומט סופי דטרמיניסטי:

1. בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי M' שמזהה את שפת המילים שאורכן אי-זוגי מעל האלפבית של M. (M' הוא אוטומט עם שני מצבים).
2. בנה את אוטומט המכפלה M'' המזהה את $L(M) \cap L(M')$.
3. בדוק האם $L(M'')$ ריקה.
4. אם כן, קבל; אם לא, דחה."

זמן הבנייה של אוטומט המכפלה M'' פולינומיאלי בגודל הקלט. כך גם הבדיקה האם $L(M'')$ ריקה.

ב. אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי להכרעת השפה $DEGREE\text{-}5\text{-}CLIQUE$:

"על קלט $\langle G, k \rangle$ כאשר G הוא גרף לא מכוון ו-k הוא מספר טבעי:

1. עבור על קדקודי G, ובדוק שהדרגה של כל אחד מהם איננה גדולה מ-5.
2. אם נמצא קדקוד שדרגתו גדולה מ-5, דחה.
3. אחרת, אם $k > 6$, דחה.
4. אחרת, עבור על כל תת-קבוצה של k קדקודים של G, ובדוק האם יש קשת בין כל שני קדקודים בתת-קבוצה.
5. אם נמצאה תת-קבוצה שיש קשת בין כל שני קדקודים שלה, קבל. אחרת, דחה."

הזמן לחישוב הדרגה של כל צומת בגרף פולינומיאלי בגודל הגרף.
אם דרגת כל צומת בגרף איננה גדולה מ-5, אז הקליקה המקסימלית בגרף היא בגודל 6 או פחות. לכן מספר התת-קבוצות בגודל k ($k \leq 6$) פולינומיאלי במספר הצמתים של הגרף G. (הוא חסום על-ידי n^k כאשר $k \leq 6$). לכן הבדיקה אם קיימת קליקה בגודל k יכולה להתבצע בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט.

שאלה 3

אם לשפה B יש מאמת שזמן ריצתו מוגבל **באיזושהי צורה ניתנת לחישוב**, אז B כריעה.
מאמת שזמן ריצתו מוגבל לא יכול לקרוא מילים שאורכן גדול מהגבלת הזמן שלו.
לכן כאשר רוצים לבדוק שייכות של קלט w ל-B, אפשר להריץ את המאמת על w עם כל אחת מן המחרוזות שאורכן איננו גדול מן ההגבלה של זמן הריצה. אם אחת מן המחרוזות הללו מאמתת את השייכות של w ל-B, נדע ש-w שייכת ל-B. אם אף אחת מהן לא מאמתת את השייכות של w ל-B, נדע ש-w לא שייכת ל-B.

שאלה 4

השפה שייכת ל-NP.

אישור השייכות של זוג $<n, m>$ לשפה C יכלול את הפירוק של n לגורמים ראשוניים ואת ההוכחה שכל אחד מן הגורמים הללו הוא באמת מספר ראשוני.

מכיוון שכל גורם ראשוני אינו קטן מ-2, מספרם של הגורמים הראשוניים של n הוא $O(\log_2 n)$.
הגודל של הייצוג של כל אחד מהם גם הוא $O(\log n)$. לכן גודל ההוכחה של הראשוניות של כל אחד מהם פולינומיאלי ב- $\log n$.

לכן בסך הכל גודל אישור השייכות של $<n, m>$ ל-C פולינומיאלי בגודל הקלט.

כדי לאמת את השייכות, צריך תחילה לאמת את הוכחת הראשוניות של כל גורם ראשוני של n.

לאחר מכן מאמתים שהפירוק הנתון הוא באמת הפירוק של n לגורמים ראשוניים.

לאחר מכן מאמתים שמספר המחלקים של n הוא m: אם הפירוק של n לגורמים ראשוניים הוא $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$, אז מספר המחלקים של n הוא $(k_1+1)(k_2+2) \cdots (k_s+1)$.

שאלה 7

"על קלט $<G, k>$ כאשר $G = (V, E)$ הוא גרף לא מכוון ו-k הוא מספר טבעי:

1. בנה את הגרף המשלים $\overline{G}$ (הגרף שקבוצת צמתיו היא V, והקשתות שלו הן בדיוק הקשתות החסרות ב-G).
2. החזר את $<\overline{G}, |V|-k>$

הרדוקציה ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי: בניית $\overline{G}$: מעתיקים את צומתי V. לאחר מכן עוברים על כל זוג צמתים שונים ב-V, ובודקים האם יש ביניהם קשת ב-G. אם כן, לא מצרפים את זוג הצמתים לקבוצת הקשתות של $\overline{G}$. אם לא, כן מצרפים את הזוג לקבוצת הקשתות של $\overline{G}$.

העתקת צומתי V דורשת זמן ליניארי בגודל הקלט.

בניית הקשתות של $\overline{G}$ דורשת זמן ריבועי בגודל הקלט.

חישוב $|V|-k$ דורש אף הוא זמן שהוא פולינומיאלי בגודל הקלט.

הרדוקציה תקפה: יש ב-G כיסוי קדקודים בגודל k אם ורק אם יש ב-G קבוצה בלתי תלויה בגודל $|V|-k$. (ראו פתרון תרגיל 4.10 במדריך הלמידה).

יש ב-G קבוצה בלתי תלויה בגודל $|V|-k$ אם ורק אם יש ב- $\overline{G}$ קליקה בגודל $|V|-k$. (ראו פתרון תרגיל 4.10 במדריך הלמידה).

לכן יש ב-G כיסוי קדקודים בגודל k אם ורק אם יש ב- $\overline{G}$ קליקה בגודל $|V|-k$.

שאלה 8

א. **הרדוקציה**: על קלט $<G, s, t>$ לבעיית *HAMPATH*, נבנה את $<H>$ קלט לבעיית *EHAMPATH*:
H יכיל את כל הצמתים והקשתות של G. בנוסף יהיו ב-H שני צמתים נוספים, v ו-u, ושתי קשתות נוספות, (v, s) ו-(t, u).

הרדוקציה תקפה: אם ב-G יש מסלול המילטון מ-s ל-t, אז ב-H יש מסלול המילטון שבנוי מן הקשת (v, s), מן הקשתות של המסלול מ-s ל-t ומן הקשת (t, u).
אם ב-H יש מסלול המילטון, הוא חייב לכלול את הקשתות (v, s) ו-(t, u), כי זו הדרך היחידה לכלול את v ואת u במסלול. לכן יש ב-G מסלול המילטון מ-s ל-t.

הרדוקציה ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי: הוספנו שני צמתים ושתי קשתות.

ב. נותר להראות שהשפה *EHAMPATH* **שייכת ל-NP**.
מסמך אישור קצר: רשימת הצמתים של מסלול המילטון לפי הסדר של המסלול.
מאמת יוכל לוודא בזמן פולנומיאלי שכל צומת של הגרף מופיע ברשימה פעם אחת ויחידה, ושיש קשת בגרף בין כל שני צמתים עוקבים ברשימה.

ג. **הרדוקציה**: על קלט $<G>$ לבעיית *EHAMPATH*, נבנה את $<H, s, t>$ קלט לבעיית *HAMPATH*:
H יכיל את כל הצמתים והקשתות של G. בנוסף יהיו ב-H שני צמתים נוספים, s ו-t, והקשתות הבאות: נחבר את s בקשת לכל צומת של G, ונחבר כל צומת של G בקשת ל-t.

הרדוקציה תקפה: נניח שיש ב-G מסלול המילטון. נקרא לצומת ההתחלה שלו u ולצומת הסיום שלו v. אז ב-H יש מסלול המילטון מ-s ל-t: מ-s ל-u, מ-u ל-v, ומ-v ל-t.
אם ב-H יש מסלול המילטון מ-s ל-t, הוא חייב לכלול קשתות (s, u) ו-(v, t), כי זו הדרך היחידה לכלול את s ואת t במסלול. לכן יש ב-G מסלול המילטון (מ-u ל-v).

הרדוקציה ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי: הוספנו שני צמתים ומספר ליניארי (בגודל הקלט) של קשתות.