

קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"
תאריך הבחינה: 19.2.2015 (סמסטר 2015 א - מועד א 4 / 85)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפים: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

שאלה 1 (25 נקודות)

במפעל מייצרים לוחות מלבניים.

התפלגות האורך (במטרים) של כל לוח מקרי, שמיוצר במפעל, היא נורמלית עם הפרמטרים μ ו- σ^2 .
התפלגות הרוחב (במטרים) של כל לוח מקרי, שמיוצר במפעל, גם היא נורמלית,
אך תוחלתה היא מחצית מתוחלת התפלגות האורך, ושונותה היא רבע משונות התפלגות האורך.
אין תלות בין מידות האורך והרוחב של כל לוח, ואין תלות בין המידות של לוחות שונים.
נתון כי –

ההסתברות שהאורך של לוח מקרי כלשהו גדול מ-2.15 מטרים היא 0.2266;

וההסתברות שהרוחב של לוח מקרי כלשהו קטן מ-0.95 מטרים היא 0.3085.

(7 נק') א. מצא את התוחלת ואת השונות של התפלגות האורך של לוח מקרי.

(6 נק') ב. חשב את התוחלת ואת השונות של שטח לוח (מלבני) מקרי.

(6 נק') ג. מחירו (בש"ח) של לוח נקבע ביחס לשטחו. המחיר של כל 1 מ"ר הוא 150 ₪.

חשב את התוחלת ואת השונות של מחיר לוח מקרי.

(6 נק') ד. מצא חסם עליון להסתברות שהשטח של לוח מקרי יסטה משטח של 2 מ"ר ב-0.8 מ"ר לפחות.

שאלה 2 (25 נקודות)

בקופסה n פתקים ממוספרים מ-1 עד n ($n > 1$ שלם וקבוע). מוציאים מהקופסה באקראי פתק אחד.
לכל הפתקים הסתברות שווה להיבחר.

נסמן את המספר שעל הפתק ב- N .

לאחר מכן, מטילים N פעמים מטבע, שההסתברות לקבל בו H היא p ($0 < p < 1$).

יהי X מספר ה- H שמתקבלים ב- N הטלות המטבע.

(8 נק') א. מהי ההסתברות לקבל רק H בהטלות המטבע.

הערה: פשוט עד כמה שאפשר את ביטוי ההסתברות המוצע.

(8 נק') ב. מהי שונות מספר ה- H שמתקבלים בניסוי המתואר לעיל?

(9 נק') ג. מהי פונקציית ההסתברות המשותפת של המשתנים המקריים X ו- N ?

(רשום את התחום שבו הפונקציה חיובית.)

שאלה 3 (25 נקודות)

12 נק') א. יהיו X ו- Y משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים λ_X ו- λ_Y , בהתאמה.

הוכח כי למשתנה המקרי $X + Y$ יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $\lambda_X + \lambda_Y$,

באמצעות חישוב פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי $X + Y$.

13 נק') ב. יהי X משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1.

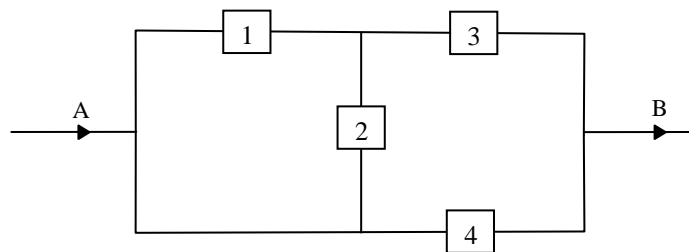
הוכח כי:
$$\text{Var}(X | X > 0) = \frac{1 - 2e^{-1}}{(1 - e^{-1})^2}$$

שאלה 4 (25 נקודות)

נתונה המערכת המתוארת באיור.

במערכת 4 רכיבים, שכל אחד מהם תקין בהסתברות 0.9, ואז יכול לעבור בו זרם.

אין תלות בין מצבי התקינות של הרכיבים במערכת.



6 נק') א. מהי ההסתברות שיעבור זרם במערכת?

6 נק') ב. אם רכיב 2 תקין, מהי ההסתברות שיעבור זרם במערכת?

6 נק') ג. אם **בדיוק** שניים מהרכיבים תקינים, מהי ההסתברות שיעבור זרם במערכת?

7 נק') ד. אם ידוע שיש לפחות רכיב אחד במערכת שאינו תקין,

מהי ההסתברות שיש בה לפחות שני רכיבים שאינם תקינים?

שאלה 5 (25 נקודות)

יהי X משתנה מקרי אחיד רציף על הקטע $(0,1)$; ויהי Y משתנה מקרי המוגדר על-ידי $Y = \frac{1}{\sqrt{X}}$.

7 נק') א. מצא את פונקציית הצפיפות של Y .

6 נק') ב. חשב את $P\{Y > 2 | Y < 4\}$.

6 נק') ג. מהי התוחלת של Y ?

6 נק') ד. מהי השונות של Y ?

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] \quad \text{נוסחת האינטרפולציה:}$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

דף נוסחאות לבחינה - 20425

הפונקציה יוצרת המומנטים	השונות	התוחלת	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	ההתפלגות
$(pe^t + 1 - p)^n$	$np(1 - p)$	np	$\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i}$, $i = 0, 1, \dots, n$	בינומית
$\frac{pe^t}{1 - (1 - p)e^t}$ $t < -\ln(1 - p)$	$(1 - p)/p^2$	$1/p$	$(1 - p)^{i-1} \cdot p$, $i = 1, 2, \dots$	גיאומטרית
$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$	λ	λ	$e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i!$, $i = 0, 1, \dots$	פואסונית
$\left(\frac{pe^t}{1 - (1 - p)e^t}\right)^r$ $t < -\ln(1 - p)$	$(1 - p)r/p^2$	r/p	$\binom{i-1}{r-1} (1 - p)^{i-r} \cdot p^r$, $i = r, r+1, \dots$	בינומית שלילית
	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N} (1 - \frac{m}{N})$	nm/N	$\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i} / \binom{N}{n}$, $i = 0, 1, \dots, m$	היפרגיאומטרית
	$(n^2 - 1)/12$	$m + (1 + n)/2$	$\frac{1}{n}$, $i = m+1, m+2, \dots, m+n$	אחידה בדידה
$(e^{bt} - e^{at}) / (tb - ta)$, $t \neq 0$	$(b - a)^2 / 12$	$(a + b)/2$	$1/(b - a)$, $a \leq x \leq b$	אחידה
$\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2 / 2\}$	σ^2	μ	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$, $-\infty < x < \infty$	נורמלית
$\lambda/(\lambda - t)$, $t < \lambda$	$1/\lambda^2$	$1/\lambda$	$\lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$	מעריכית
			$\binom{n}{n_1, \dots, n_r} \cdot p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}$, $\sum n_i = n$, $\sum p_i = 1$	מולטינומית

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \quad \text{נוסחת הבינום}$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \quad \text{כלל ההכלה וההפרדה}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{הסתברות מותנית}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \quad \text{נוסחת הכפל}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i) \quad , \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S \quad \text{נוסחת ההסתברות השלמה}$$

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)} \quad , \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S \quad \text{נוסחת בייס}$$

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx \quad \text{תוחלת}$$

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx \quad \text{תוחלת של פונקציה של מ"מ}$$

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2 \quad \text{שונות}$$

$$E[aX + b] = aE[X] + b \quad \text{תוחלת ושונות של פונקציה ליניארית}$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב λ ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ .

$$P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\} \quad , \quad s, t \geq 0 \quad \text{תכונת חוסר-הזכרון}$$

$$E[X | Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y) = \int x f_{X|Y}(x|y) dx \quad \text{תוחלת מותנית}$$

$\text{Var}(X Y = y) = E[X^2 Y = y] - (E[X Y = y])^2$	שונות מותנית
$E[X] = E[E[X Y]] = \sum_y E[X Y = y] p_Y(y)$	נוסחת התוחלת המותנית
$E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X Y]]$	(טענה מתרגיל 26, עמוד 430)
$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X Y)] + \text{Var}(E[X Y])$	נוסחת השונות המותנית
$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$	תוחלת של סכום משתנים מקריים
$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$	שונות משותפת
$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$	
$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$	שונות של סכום משתנים מקריים
$\rho(X, Y) = \text{Cov}(X, Y) / \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}$	מקדם המתאם הלינארי
$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad ; \quad M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$	פונקציה יוצרת מומנטים
$M_{X_1+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t) \quad :$ כאשר X_i מ"מ ב"ת מתקיים:	
$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X]$	תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי
$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\text{Var}(X) + (E[X])^2 \text{Var}(N)$	(כאשר X_i מ"מ ב"ת ש"ה)
$M_Y(t) = E\left[(M_X(t))^N\right]$	
$P\{X \geq a\} \leq E[X]/a \quad , \quad a > 0 \quad , \quad X$ מ"מ אי-שלילי	אי-שוויון מרקוב
$P\{ X - \mu \geq a\} \leq \sigma^2/a^2 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty$	אי-שוויון צ'בישב
$P\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)/\sqrt{n\sigma^2} \leq a\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a) \quad , \quad \mu, \sigma^2 < \infty \quad , \quad X_i$ מ"מ ב"ת וש"ה	משפט הגבול המרכזי

<ul style="list-style-type: none"> אם A ו-B מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע A יתרחש לפני המאורע B היא $P(A)/[P(A) + P(B)]$. סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר p הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי). סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני. סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי. ההתפלגות המותנית של X בהינתן $X + Y = n$, כאשר X ו-Y מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו p) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית). 	

$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \quad ; \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad , \quad -1 < x < 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = -\ln(1-x) \quad , \quad 0 < x < 1$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} \quad , \quad n \neq -1 \quad ; \quad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$ $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad ; \quad \int b^{ax} dx = \frac{1}{a \ln b} b^{ax} \quad ; \quad \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$ </div>	
$\log_n a = \log_m a / \log_m n \quad ; \quad \log_n(a^b) = b \cdot \log_n a \quad ; \quad \log_n(ab) = \log_n a + \log_n b$	