20425 - תאריך הבחינה: 8.7.2015 (סמסטר 2015ב - מועד א3 / 84)

שאלה 1

א. $\frac{\binom{10}{7}\cdot 7!}{10^7}=0.06048$

ב. בהינתן כל ספרה ראשונה, מספר הפעמים שהיא נבחרת שוב החל מן הפעם השנייה ועד הפעם ה-20 הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 19 ו- 0.1. לפיכך, השונות המבוקשת היא:

$19\cdot 0.1\cdot 0.9=1.71$

ג. בהינתן כל ספרה ראשונה, מספר הספרות שתיבחרנה לאחר הבחירה הראשונה ועד לחזרה השלישית על הספרה הראשונה הוא משתנה מקרי בינומי-שלילי עם הפרמטרים 3 ו- 0.1. לפיכך, התוחלת המבוקשת היא:

$1+\frac{3}{0.1}=31$

ד. נסמן ב- X_i את מספר ההגרלות עד לקבלת ה- i הראשון $(i=4,5)$. ל- X_i יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר 0.1.

מצד אחד מתקיים: $P\{X_4=1\}P\{X_5=1\}=0.1\cdot 0.1=0.01$

מצד שני: $P\{X_4=1,X_5=1\}=0$

לפיכך, תנאי אי-התלות אינו מתקיים, והמשתנים המקריים X_4 ו- X_5 תלויים זה בזה.

שאלה 2

א. המשתנה המקרי S מקבל ערך זוגי, אם יש מספר זוגי של ספרות אי-זוגיות במספר, דהיינו, 0, 2, 4, 6 או 8 ספרות אי-זוגיות (שהן הספרות 1 או 3). לפיכך:

$$P\{S \text{ זוגי}\}=\sum_{i=0}^{4}\binom{8}{2i}2^{2i}\Big/3^8=\frac{1+112+1{,}120+1{,}792+256}{3^8}=\frac{3{,}281}{6{,}561}=0.50008$$

ב. נסמן ב- X_i את הספרה ה- i-ית במספר, לכל $i=1,\ldots,8$. לפי נתוני השאלה, ה-X_i-ים בלתי-תלויים זה בזה, לפיכך:

$$E[M^2]=E\left[\prod_{i=1}^{8}X_i^2\right]\underset{\substack{\downarrow\\ \text{ה-}X_i\text{-ים בלתי-תלויים}}}{=}\prod_{i=1}^{8}E[X_i^2]=\left[\tfrac{1}{3}(1^2+2^2+3^2)\right]^8=224{,}933.\bar{5}$$

ג. נסמן ב- X_i את הספרה ה- i-ית במספר, לכל $i=1,\ldots,8$. לפי נתוני השאלה, ה-X_i-ים בלתי-תלויים זה בזה, לפיכך:

$$E[S]=E\left[\sum_{i=1}^{8}X_i\right]=\sum_{i=1}^{8}E[X_i]=8\cdot\left[\tfrac{1}{3}(1+2+3)\right]=16$$

$$\mathrm{Var}(S)=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{8}X_i\right)\underset{\substack{\downarrow\\ \text{ה-}X_i\text{-ים בלתי-תלויים}}}{=}\sum_{i=1}^{8}\mathrm{Var}(X_i)=\sum_{i=1}^{8}\left(E[X_i^2]-(E[X_i])^2\right)=8\cdot\left[\tfrac{1}{3}(1^2+2^2+3^2)-2^2\right]=5\tfrac{1}{3}$$

$$E[S^2]=\mathrm{Var}(S)+(E[S])^2=5\tfrac{1}{3}+16^2=261\tfrac{1}{3}$$

ואפשר לחשב גם כך:

$$E[S^2]=E\left[\left(\sum_{i=1}^{8}X_i\right)^2\right]=E\left[\sum_{i=1}^{8}X_i^2+\sum_{i\neq j}X_iX_j\right]\underset{\downarrow}{=}\sum_{i=1}^{8}E[X_i^2]+\sum_{i\neq j}E[X_iX_j]$$

ה- X_i-ים בלתי-תלויים

$$=\sum_{i=1}^{8}E[X_i^2]+\sum_{i\neq j}E[X_i]E[X_j]=8E[X_1^2]+8\cdot7(E[X_1])^2=8\cdot\tfrac{1}{3}(1^2+2^2+3^2)-56\cdot2^2=261\tfrac{1}{3}$$

שאלה 3

א. למשתנה המקרי X יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{1}{2}$.

כמו כן, בהינתן $X=i$, למשתנה המקרי המותנה Y יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים i ו- $\frac{1}{6}$.

לפיכך, לכל $i=1,2,\ldots$ ולכל $j=0,1,\ldots,i$ מתקיים:

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j\mid X=i\}P\{X=i\}=\binom{i}{j}\left(\tfrac{1}{6}\right)^j\left(\tfrac{5}{6}\right)^{i-j}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^i=\binom{i}{j}\left(\tfrac{1}{12}\right)^j\left(\tfrac{5}{12}\right)^{i-j}$$

ב. נחשב את הסתברות המאורע המשלים $\{Y=0\}$.

מתקיים:

$$P\{Y=0\}=\sum_{i=1}^{\infty}\binom{i}{0}\left(\tfrac{1}{12}\right)^0\left(\tfrac{5}{12}\right)^{i-0}=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\tfrac{5}{12}\right)^i=\frac{1}{1-\frac{5}{12}}-1=\tfrac{12}{7}-1=\tfrac{5}{7}$$

ומכאן כי:

$$P\{Y\geq1\}=1-P\{Y=0\}=1-\tfrac{5}{7}=\tfrac{2}{7}$$

ג. בהמשך לאמור בסעיף א מתקיים:

$$\mathrm{Var}(Y)=E[\mathrm{Var}(Y\mid X)]+\mathrm{Var}(E[Y\mid X])=E[X\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{6}]+\mathrm{Var}(X\cdot\tfrac{1}{6})$$

$$=\tfrac{5}{36}E[X]+\tfrac{1}{36}\mathrm{Var}(X)=\tfrac{5}{36}\cdot\tfrac{1}{0.5}+\tfrac{1}{36}\cdot\tfrac{0.5}{0.5^2}=\tfrac{10}{36}+\tfrac{2}{36}=\tfrac{1}{3}$$

שאלה 4

א. הוכחת הטענה מובאת באתר הקורס.

ב1. נסמן ב- AA, AK ו- KK את המאורעות שנבחר קלף אדום-אדום, אדום-כחול או כחול-כחול;

ונסמן ב- A ו- K את המאורעות שהצד העליון של הקלף שנבחר הוא אדום או כחול.

ההסתברות המבוקשת היא:

$$P(AK\mid A)=\frac{P(A\mid AK)P(AK)}{P(A\mid AK)P(AK)+P(A\mid AA)P(AA)+P(A\mid KK)P(KK)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$$

ג. נסמן ב- AA, AK ו- KK את המאורעות שנבחר קלף אדום-אדום, אדום-כחול או כחול-כחול;

ונסמן ב- B את המאורע ששני הקלפים הנבחרים "מראים" צבעים שונים.

ההסתברות המבוקשת היא:

$$P(B)=P(B\mid AA\cap AK)P(AA\cap AK)+P(B\mid AA\cap KK)P(AA\cap KK)+P(B\mid AK\cap KK)P(AK\cap KK)$$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}+1\cdot\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}=\tfrac{2}{3}$$

שאלה 5

נסמן ב- X קוטר (בס״מ) של לחמנייה מקרית ; $X \sim N(10, 0.25^2)$.

א. $P\{X < 9.8\} = P\{Z < \frac{9.8-10}{0.25}\} = P\{Z < -0.8\} = 1 - \Phi(0.8) = 1 - 0.7881 = 0.2119$

$$P\{9.8 < X < 10.3\} = P\{\tfrac{9.8-10}{0.25} < Z < \tfrac{10.3-10}{0.25}\} = P\{-0.8 < Z < 1.2\} = \Phi(1.2) - \Phi(-0.8)$$
$$= 0.8849 - 0.2119 = 0.6730$$

ולכן : $P\{X > 10.3\} = P\{Z > \frac{10.3-10}{0.25}\} = 1 - \Phi(1.2) = 1 - 0.8849 = 0.1151$

ההתפלגות המשותפת של מספר הלחמניות מכל סוג היא מולטינומית עם $n = 50$ ווקטור ההסתברויות $(0.2119, 0.673, 0.1151)$. לפיכך :

$$P(9,35,6) = \tfrac{50!}{9!35!6!} \cdot 0.2119^9 \cdot 0.673^{35} \cdot 0.1151^6 = 0.0216$$

ב. $$P\{10.2 < X < 10.3 \mid X > 9.8\} = \frac{P\{10.2 < X < 10.3\}}{P\{X > 9.8\}} = \frac{P\{\frac{10.2-10}{0.25} < Z < \frac{10.3-10}{0.25}\}}{P\{Z > \frac{9.8-10}{0.25}\}}$$
$$= \frac{\Phi(1.2) - \Phi(0.8)}{1 - \Phi(-0.8)} = \frac{0.8849 - 0.7881}{0.7881} = 0.1228$$

ג. נסמן ב- X_i את הקוטר (בס״מ) של לחמניה מקרית. אורך השורה (בס״מ) שתתקבל הוא $\sum_{i=1}^{10} X_i + 9$, כאשר ההתפלגות של כל אחד מה- X_i-ים היא נורמלית עם הפרמטרים 10 ו- 0.25^2, והם בלתי-תלויים זה בזה.

לפיכך : $$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i + 9\right) = 10 \cdot 0.25^2 = 0.625$$

ד. מספר הלחמניות עם השומשום שדנה תבחר הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N = 40$, $m = 30$ ו- $n = 6$. לפיכך, ההסתברות שתבחר בדיוק 4 לחמניות עם שומשום היא : $\dfrac{\binom{30}{4}\binom{10}{2}}{\binom{40}{6}} = 0.3213$