פתרון למבחן גמר 20.8.98 מועד 95

נפתר ע"י צחי אבנור ועדן דרור.

שאלה 1:

(א) נכון. $(R^{-1})^2 = R^{-1}R^{-1} = (RR)^{-1} = (R^2)^{-1}$.

(ב) לא נכון. דוגמה נגדית: $R = \{(1,2)\}$. $(R \cup R^{-1})^2 = \{(1,1)(2,2)\}$ $R \cup R^{-1} = \{(1,2),(2,1)\}$
ואילו $R^2 \cup (R^{-1})^2 = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.

(ג) לא למדנו סגור ומאחר והחומר הנ"ל לא לבחינה גם לא פתרנו אותו.

שאלה 2:

נמצא את מספר הפתרונות למשוואה הראשונה: $D(3,n)$. נציב את המשוואה הראשונה בשנייה. נקבל שמספר פתרונותיה הוא $D(2,2n)$. שלושת המשתנים הראשונים חייבים להיות פתרון של המשוואה הראשונה. נציב את המשוואה הראשונה פעם אחת ואת המשוואה השנייה פעם אחת במשוואה שלישית ונקבל:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 + 3x_7 + 3x_8 = 10n$ ←

$n + 3n = 3(x_6 + x_7 + x_8) = 10n$ ← $x_6 + x_7 + x_8 = 2n$ ולכן $D(3,2n)$. לפי עקרון הכפל מספר הפתרונות של המערכת הוא $D(3,n)D(2,2n)D(3,2n)$.

שאלה 3:

(א) נפתח את הביטויים הנ"ל: $(1+c)^n - (1-c)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}c^i - \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j c^j =$

$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}c^i + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^j(-1)^{i+1}c^i = \sum_{i=0}^{n}2\binom{n}{i}c^i \cdot (i)\bmod 2$ נסביר קצת עכשיו, יש שני אפשרויות: או שנקבל מקדם כפול או שנקבל 0 (כי – והם יבטלו אחד את השני). נסביר: מבחינת איברים שכן מופיעים בסכום: מחובר ראשון מתבטל, מחובר שני $2\binom{n}{1}c^1$ מופיע, אחריו 0 ואז $2\binom{n}{3}c^3$ וכן הלאה. מספר האיבר קטן לחצי, לכן המונה רץ על חצי מהסכום כאשר המונים הזוגיים מתבטלים. לכן נוכל לרשום: $\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}2\binom{n}{2k+1}c^{2k+1} = 2c\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\binom{n}{2k+1}c^{2k}$. נשים לב שהתבטלות של איבר תלויה רק בזוגיות הופעתו ולא קשורה ב N. לכן את המופע הזוגי בסוף נוכל לבטל.

(ב) נפתור את יחס הנסיגה כפי שלמדנו: משוואה אופיינית $x^2 - 2x + (1-c^2) = 0$ פתרונותיה הם (כמה לא צפוי): $1+c, 1-c$. קיבלנו עתה $a_n = A(1+c)^n + B(1-c)^n$. נציב תנאי התחלה $a_0 = 0$ ונקבל ש $A + B = 0 \Rightarrow B = -A$. כאשר $n = 1$ נקבל ש $a_1 = A(1+c) - A(1-c) = A\cdot 2c$. נחזור לנוסחה של

$:a_n$
$$a_n = A(1+c)^n - A(1-c)^n = A[(1+c)^n - (1-c)^n] = A2c\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\binom{n}{2k+1}c^{2k} =$$
$$a_1\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\binom{n}{2k+1}c^{2k} = a_n \quad .$$
נעזרנו בשוויון שהוכחנו בסעיף א' וכן בכך שמצאנו ש $a_1 = 2cA$.

שאלה 4:

(א) נתחיל ב a (זה מקום מצוין להתחיל). את האיבר הראשון נבחר מתוך n איברים. את השני מתוך n-1 האיברים שנותרו ואת השלישי מתוך ה n-2 שנותרו. כלומר: $n(n-1)(n-2)$. נמשיך ל b ונפתור: נבחר בדומה לקודם איבר שיופיע פעמיים בשלשה ואיבר שונה שיופיע פה אחת. על כל בחירה כזו יש 3 שלשות שונות (כל פעם האיבר השונה במיקום אחר) ולפי עקרון הכפל נקבל $3n(n-1)$.
עכשיו נעבור ל c : זה קל – n שלשות. לכל איבר יש שלשה אחת. ונקנח ב d : נחבר את שלושת התוצאות ונקבל
$$n+3n(n-1)+n(n-1)(n-2) = n(1+3(n-1)+(n-2)(n-1)) =$$
$$n(1+(n-1)(n+1)) = n(1-1+n^2) = n^3$$
וזה בדיוק מה שצריך לצאת כי ידוע שמספר האיברים במכפלה קרטזית של קבוצה עם עצמה שווה למספר איברי הקבוצה כפול מספר הפעמים בהם מופיעה הקבוצה במכפלה $|A\times A\times A| = |A|^3 = n^3$.

(ב) נחבר n שלשות שקולות (השלשות שכל איבריהן זהים) ונחבר את מספר השלשות עם שני איברים זהים חלקי 3 : $n(n-1)$ (לא משנה המיקום של האיבר השונה). נחבר כעת את מספר השלשות שכל איבריהן שונים זה מזה, בכל שלשה יש !3 סידורים לכן נחלק במספר זה ונקבל סה"כ:
$$n+n(n-1)+\frac{1}{6}n(n-1)(n-2) =$$
$$= \frac{6n+6n(n-1)+n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{6n^2+n(n^2-3n+2)}{6} = \frac{n(n^2+3n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

(ג) יש כאמור $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$, כל האיברים באותו מחלקה מקבלים אותה תמונה. לכן מספר הפונקציות הוא $|B|^{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}$, נציב $n=4, |B|=10$ ונקבל $10^{\frac{1}{6}4\cdot5\cdot6} = 10^{20}$.

שאלה 5:

שאלה זו נפתרה ע"י אורלי רז.

(א) אם $f_{m;n}(P_m) = f_{m;n}(P_n)$
$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ P_n & = & P_n \end{array}$$

לכן $f_{m;n}$ חח"ע.

(ב) נסמן α,β פסוקים כך ש: $f_0(\alpha) = f_0(\beta)$ (*)
פסוק הוא ביטוי סופי לכן α,β הם סופיים כי הם מורכבים מפסוקים יסודיים של P_i.

n- מס. טבעי מהאינדקס i של כל פסוק יסודי Pi המופיע ב-α או ב-β, לכן:

$f_{n;0}(\alpha) = \alpha$ ו $f_{n;0}(\beta) = \beta$

עפ"י ההנחה (*) נובע כי $\alpha=\beta$, ולכן f_0 – חח"ע.

שאלה 6:

מכיוון שתחשיב הפרדיקטים לא למבחן לא פתרנו אותו.

שאלה 7:

(א) כיוון ראשון: נניח ש G קומוטטיבית ונוכיח ש f הומומורפיזם. לכל $h,g\in G$ אמור להתקיים
$f(gh)=f(g)f(h)\Leftrightarrow (gh)^2=g^2h^2\Leftrightarrow ghgh=gghh$ ושוויון זה נכון כי G קומוטטיבית ולכן f הומומורפיזם. כיוון שני: נניח ש f הומומורפיזם וראינו שזה מחייב את קיום השוויון $gghh=ghgh$, מכיוון שזו חבורה אפשר לצמצם את שני הצ'ופצ'יקים וקיבלנו ש $gh=hg$ לכל $h,g\in G$ ולכן G קומוטטיבית.

(ב) נעזר בטענה הבאה: אם n זוגי קיים איבר שהוא הפכי של עצמו. נוכיח: אם n זוגי קיימים $\frac{n-2}{2}$ זוגות של איברים והפכיהם, כאשר ל e שהוא ההפכי של עצמו יש עוד איבר a בזוג. מאחר שלכל איבר יש הפכי נובע בהכרח שהאיבר a הוא ההפכי של עצמו. נוכיח את הטענה של ב' עצמה. אם n זוגי קיים איבר $a\neq e$ שהוא הפכי של עצמו ולכן $e=e^2=f(e)=f(a)=a^2=e$ ו f לא חח"ע. אם n אי-זוגי, נוכיח ש f חח"ע: $f(g)=f(h)\Leftrightarrow g^2=h^2\Leftrightarrow 2g=2h\Leftrightarrow g=h$
נשים לב שבמעבר האמצעי ניצלנו את העובדה שמדובר ב $(Z_n,+)$. נוכיח שלא קיים איבר שהוא הפכי של עצמו: ב $(Z_n,+)$ איבר הפכי של עצמו אם"ם $2k \bmod n=0\Leftrightarrow 2k=n$ וכאשר n אי-זוגי זה פשוט לא יכול כי $2k\neq n$. לכן אין איבר שהוא הפכי של עצמו ולכן f חח"ע.

שאלה 8:

לא פתרנו כי נגמר לנו הכוח. עמכם הסליחה. (אם מישהו מעוניין לפתור נוסיף את הפתרון בשמחה).