20416 - תאריך הבחינה: 25.6.2008 (סמסטר 2008ב - מועד 83)

שאלה 1

א. **<u>דרך I</u>**

לצורך חישוב ההסתברות מניחים שהשאלונים שונים זה מזה. תחת הנחה זו, יש !15 אפשרויות לחלק אותם לנבחנים. כמו כן, יש !9 אפשרויות לסדר בְּשורה את השאלונים מסוג א, וכדי שלא יהיו ביניהם שני שאלונים סמוכים מסוג ב, אפשר למקם כל אחד מהם בין כל שני שאלונים מסוג א או משני צידי שורת השאלונים מסוג א, כך שבכל מקום כזה לא יהיה יותר משאלון אחד (מסוג ב). ומכאן, שההסתברות המבוקשת היא:

$$\frac{9!\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{15!}=\frac{6}{143}=0.04196$$

<u>דרך II</u>

<u>בהנחה שאין הבדל בין שאלונים מאותו הסוג</u>, יש $\binom{15}{6}$ אפשרויות לסדר את השאלונים בשורה.

נמנה כעת את מספר הסידורים שבהם אין שני נבחנים סמוכים בשורה שמקבלים שאלונים מסוג ב. תחילה, נסדר בשורה את השאלונים מסוג ב (אפשרות אחת) ונשים בין כל שניים מהם שאלון אחד מסוג א (אפשרות אחת). עתה נותרו בידינו 4 שאלונים זהים מסוג א, שיש לפזר אותם בין ומצידי 6 השאלונים מסוג ב. כלומר, הבעיה שקולה לפיזור 4 כדורים זהים ב-7 תאים. לכן, יש $\binom{7-1+4}{7-1}=\binom{10}{6}$ סידורים אפשריים שבהם המאורע מתקיים, וההסתברות המבוקשת היא: $\binom{10}{6}\Big/\binom{15}{6}=0.04196$

בלי הגבלת הכלליות, נניח שהמקומות בשורה ממוספרים משמאל לימין.

ב. **<u>דרך I</u>**

נגדיר: $Y_i=\begin{cases}1 & \text{,} \quad \text{הנבחן במקום } i \text{ קיבל שאלון שונה משאלון הנבחן שלימינו}\\ 0 & \text{,} \quad \text{אחרת}\end{cases}$ לכל $i=1,\ldots,14$

ונקבל כי: $X=\sum_{i=1}^{14}Y_i=$ מספר הנבחנים שמקבלים שאלון שונה משאלוני הנבחנים הסמוכים להם.

עתה, לכל $i=1,\ldots,14$ מתקיים: $E[Y_i]=P\{Y_i=1\}=\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14}+\frac{6}{15}\cdot\frac{9}{14}=\frac{18}{35}$

לכן: $E[X]=\sum_{i=1}^{14}E[Y_i]=14\cdot\frac{18}{35}=\frac{36}{5}=7.2$

<u>דרך II</u>

נגדיר: $X_i=\begin{cases}1 & \text{,} \quad \text{לימין נבחן } i \text{ יושב נבחן עם שאלון שונה}\\ 0 & \text{,} \quad \text{אחרת}\end{cases}$ לכל $i=1,\ldots,15$

ונקבל כי: $X=\sum_{i=1}^{15}X_i=$ מספר הנבחנים שמקבלים שאלון שונה משאלוני הנבחנים הסמוכים להם.

עתה, לכל $i=1,\ldots,15$ מתקיים: $E[X_i]=P\{X_i=1\}=\frac{1}{15}\cdot 0+\frac{14}{15}\cdot\left(2\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14}\right)=\frac{12}{25}$

לכן: $E[X]=\sum_{i=1}^{15}E[X_i]=15\cdot\frac{12}{25}=\frac{36}{5}=7.2$

ג. **דרך I**

בסימוני סעיף א, לכל $i=1,\ldots,14$ מתקיים: $\mathrm{Var}(Y_i)=P\{Y_i=1\}P\{Y_i=0\}=\frac{18}{35}\cdot\frac{17}{35}=\frac{306}{1{,}225}$

ולכל $1\le i\le j\le 14$ מתקיים:

$$P\{Y_i=1,Y_j=1\}=\begin{cases}\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{8}{13}+\frac{6}{15}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{5}{13}=\frac{9}{35} & , \quad |i-j|=1\\ 2\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14}\cdot2\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{5}{12}=\frac{24}{91} & , \quad |i-j|>1\end{cases}$$

$$\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)=\begin{cases}\frac{9}{35}-\left(\frac{18}{35}\right)^2=-\frac{9}{1{,}225} & , \quad |i-j|=1 \quad\Leftrightarrow\\ \frac{24}{91}-\left(\frac{18}{35}\right)^2=-\frac{12}{15{,}925} & , \quad |i-j|>1 \quad\Leftrightarrow\end{cases}$$

יש 13 זוגות של i ו- j סמוכים

$\binom{14}{2}-13=91-13=78$ זוגות

לכן:

$$\mathrm{Var}(X)=\sum_{i=1}^{14}\mathrm{Var}(Y_i)+2\sum_{i<j}\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)=14\cdot\frac{306}{1{,}225}-2\cdot13\cdot\frac{9}{1{,}225}-2\cdot78\cdot\frac{12}{15{,}925}=3\tfrac{33}{175}=3.1886$$

דרך II

בסימוני סעיף א, לכל $i=1,\ldots,15$ מתקיים: $\mathrm{Var}(X_i)=P\{X_i=1\}P\{X_i=0\}=\frac{12}{25}\cdot\frac{13}{25}=\frac{156}{625}$

כמו כן, לכל $1\le i,j\le 15$ מתקיים:

$$P\{X_i=1,X_j=1\}=\frac{14}{105}\cdot0+\frac{13}{105}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14}\cdot\left(\frac{8}{13}+\frac{5}{13}\right)+\frac{78}{105}\cdot2^2\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{5}{12}=\frac{279}{1{,}225}$$

הסבר: יש בסך-הכל $\binom{15}{2}=105$ אפשרויות לבחור שני מקומות בשורה לנבחנים i ו- j, כאשר $i\neq j$. ב-14 מתוך 105 האפשרויות האלו אחד מהנבחנים נמצא במקום הימני ביותר בשורה (ולכן לא ייתכן שלימינו יישב נבחן עם שאלון שונה); ב-13 מהאפשרויות הללו הנבחנים נמצאים במקומות סמוכים בשורה, אך אף אחד מהם לא במקום הימני ביותר (ולכן ייתכן שהמאורע יתרחש); ובשאר האפשרויות, 78 במספר, הנבחנים אינם סמוכים ואף אחד מהם לא נמצא במקום הימני ביותר בשורה (והמאורע ייתכן).

ומכאן:

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=\frac{279}{1{,}225}-\left(\frac{12}{25}\right)^2=-\frac{81}{30{,}625}$$

$$\mathrm{Var}(X)=\sum_{i=1}^{15}\mathrm{Var}(X_i)+\sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=15\cdot\frac{156}{625}-15\cdot14\cdot\frac{81}{30{,}625}=3\tfrac{33}{175}=3.1886$$

שאלה 2

א. איבר הסכימה של הטור הנתון שווה לפונקציית ההסתברות של משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר n בנקודה i. כלומר, אם $X\sim Po(n)$, אז: $P\{X=i\}=e^{-n}\frac{n^i}{i!} \quad , \quad i=0,1,\ldots$

ומכאן: $P\{X\le n\}=\sum_{i=0}^{n}e^{-n}\frac{n^i}{i!}$

כמו כן: $E[X]=\mathrm{Var}(X)=n$

נשתמש כעת במשפט הגבול המרכזי, כדי למצוא קירוב להסתברות זו. נוכל להשתמש במשפט זה, מכיוון שאפשר להציג משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר n כסכום של n משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים שלכולם הפרמטר 1. לאחר עריכת תיקון רציפות, נקבל את הקירוב הבא, שגבולו 0.5, כנדרש:

$$P\{X\le n\}=P\{X\le n+0.5\}\cong P\left\{Z\le\frac{n+0.5-n}{\sqrt{n}}\right\}=\Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)\underset{n\to\infty}{\rightarrow}\Phi(0)=0.5$$

ב1. לפי אי-שוויון מרקוב מתקיים:
$$P\{X \geq 14\} \leq \frac{E[X]}{14} = \frac{7}{14} = 0.5$$

ב2. אם המשתנה המקרי X מקיים את אי-השוויון $X \geq -2$ ותוחלתו 7, אז המשתנה המקרי $Y = X + 2$ הוא משתנה מקרי אי-שלילי, כלומר, $Y \geq 0$ ותוחלתו 9. לפיכך, לפי אי-שוויון מרקוב, מתקיים:
$$P\{X \geq 14\} = P\{X + 2 \geq 16\} = P\{Y \geq 16\} \leq \frac{E[Y]}{16} = \frac{9}{16} = 0.5625$$

ב3. לפי אי-שוויון צ'בישב החד-צדדי מתקיים:
$$P\{X \geq 14\} = P\{X - 7 \geq 7\} \leq \frac{4}{4 + 7^2} = 0.0755$$

חסם זה עדיף על החסם שמתקבל מאי-שוויון צ'בישב הדו-צדדי.

שאלה 3

א. פונקציית הצפיפות המשותפת הנתונה היא מכפלה של שתי פונקציות צפיפות של התפלגות מעריכית עם הפרמטר 1. לכן, אפשר לקבוע שזוהי התפלגותם של המשתנים המקריים X ו-Y וכי הם בלתי-תלויים זה בזה. מכיוון שכך, התפלגות המשתנה המקרי S היא התפלגות גמא עם הפרמטרים $t = 2$ ו- $\lambda = 1$, ופונקציית הצפיפות שלו היא:
$$f_S(s) = \tfrac{1}{\Gamma(2)} \cdot 1e^{-1s}(1s)^{2-1} = se^{-s} \quad , \quad s > 0$$

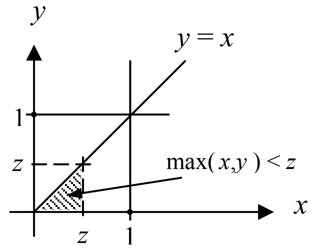
ב. לפי סעיף א מקבלים כי $W = aS$. לכן, כדי למצוא את פונקציית הצפיפות של W, נבטא תחילה את פונקציית ההתפלגות המצטברת של W באמצעות פונקציית ההתפלגות המצטברת של S, ואחר-כך נגזור את שני אגפי המשוואה לפי w. נפריד את החישוב לשני מקרים, לפי ערכו של a. נקבל –

אם $a > 0$, אז לכל $w > 0$ מתקיים:
$$F_W(w) = P\{W \leq w\} = P\{aS \leq w\} = F_S(\tfrac{w}{a})$$
ולכן:
$$f_W(w) = \tfrac{d}{dw}F_W(w) = \tfrac{d}{dw}F_S(\tfrac{w}{a}) = \tfrac{1}{a}f_S(\tfrac{w}{a}) = \tfrac{1}{a}\cdot\tfrac{w}{a}e^{-w/a} = \tfrac{w}{a^2}e^{-w/a} \quad , \quad w > 0$$

אם $a < 0$, אז לכל $w < 0$ מתקיים:
$$F_W(w) = P\{W \leq w\} = P\{aS \leq w\} = 1 - F_S(\tfrac{w}{a})$$
ולכן:
$$f_W(w) = \tfrac{d}{dw}F_W(w) = \tfrac{d}{dw}[1 - F_S(\tfrac{w}{a})] = -\tfrac{1}{a}f_S(\tfrac{w}{a}) = -\tfrac{1}{a}\cdot\tfrac{w}{a}e^{-w/a} = -\tfrac{w}{a^2}e^{-w/a} \quad , \quad w < 0$$

הערה: אפשר גם למצוא באופן מפורש את פונקציית ההתפלגות המצטברת של S וממנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת של W ואת פונקציית הצפיפות המתאימה, אולם החישוב ארוך יותר. אם נוקטים בדרך זו מקבלים:
$$F_S(s) = \int_0^s f_S(t)\,dt = \int_0^s te^{-t}\,dt \underset{\substack{u=t \;;\; v'=e^{-t} \\ u'=1 \;;\; v=-e^{-t}}}{\overset{}{=}} -te^{-t}\Big|_0^s + \int_0^s e^{-t}\,dt = -se^{-s} - e^{-s} + 1 = 1 - e^{-s}(1+s) \quad , \quad s > 0$$

ג. נמצא תחילה את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Z:



$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\max(X,Y) \leq z\}$$
$$= P\{X \leq z, Y \leq z\} = 2 \cdot \tfrac{z^2}{2} = z^2 \quad , \quad 0 \leq z \leq 1$$

הסבר: הצפיפות המשותפת קבועה בתחום ההגדרה של ההתפלגות המשותפת, ולכן, ההסתברות המשותפת, שעלינו לחשב, היא מכפלת ערך הצפיפות בשטח המשולש.

וממנה את פונקציית הצפיפות של Z: $f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = 2z \quad , \quad 0 \le z \le 1$

דרך נוספת:

נשים לב, שלפי תנאי הבעיה מתקיים אי-השוויון $Y \le X$ ולכן, $Z = \max(X,Y) = X$. משוויון זה נובע שפונקציית הצפיפות של Z היא למעשה פונקציית הצפיפות השולית של X.

שאלה 4

א. נסמן ב- X את מספר שברי-האגוזים בקובייה מקרית של שוקולד. לפי נתוני הבעיה: $X \sim Po\,(2)$.

לכן: $P\{X \le 1\} = e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!}\right) = 3e^{-2} = 0.406$

ב. מכיוון שקוביות השוקולד בלתי-תלויות זו בזו, אפשר לקבוע כי מספר שברי-האגוזים בקובייה הראשונה בשורה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 2 והוא בלתי-תלוי במספר שברי-האגוזים בשלוש הקוביות האחרות בשורה, שהוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $3 \cdot 2 = 6$.

לפיכך, אם נסמן ב- X_1 את מספר שברי-האגוזים בקובייה הראשונה בשורה וב- X_3 את מספר שברי-האגוזים בשלוש הקוביות האחרונות בשורה, נקבל ממסקנת דוגמה 4ב (עמודים 1-300 בספר הקורס) כי התפלגות מספר שברי-האגוזים בקובייה הראשונה בהינתן שיש בשורה בסך-הכל 10 שברים היא בינומית עם הפרמטרים 10 ו- $\frac{2}{2+6} = \frac{1}{4}$. לכן: $\text{Var}(X_1 \mid X_1 + X_3 = 10\} = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{30}{16} = 1.875$

ג. נתון שקוביות השוקולד בלתי-תלויות זו בזו, לכן, אין משמעות למספר שברי-האגוזים שהיו בשתי הקוביות הראשונות וכל שעלינו לחשב הוא את ההסתברות שבקובייה החמישית יהיו לפחות 3 שברי-אגוזים.

בסימוני סעיף א מקבלים:

$$P\{X \ge 3\} = 1 - P\{X < 3\} = 1 - e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!}\right) = 1 - 5e^{-2} = 0.3233$$

ד. אפשר לחשב קירוב נורמלי להסתברות המבוקשת, מכיוון שמדובר בסכום של משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות. הואיל ואין תלות בין קוביות השוקולד שבחפיסה, התפלגות מספר שברי-האגוזים בחפיסה, שאותו נסמן ב-Y, היא פואסונית עם הפרמטר $2 \cdot 20 = 40$. לפיכך:

$$P\{35 \le Y \le 48\} = P\{34.5 \le Y \le 48.5\} = \Phi\left(\frac{48.5-40}{\sqrt{40}}\right) - \Phi\left(\frac{34.5-40}{\sqrt{40}}\right) = \Phi(1.3440) - \Phi(-0.8696)$$

$$= \Phi(1.3440) - \Phi(-0.8696) = 0.91054 - (1 - 0.8077) = 0.71824$$

שאלה 5

נסמן ב-A את המאורע שכביש א נחסם עקב שטפון וב-B את המאורע שכביש ב נחסם עקב שטפון.

נתון כי: $P(B) = 0.163 \quad ; \quad P(A) = 0.1 \quad ; \quad P(B \mid A) = 1 \quad \Rightarrow \quad A \subseteq B$

א. מנוסחת ההסתברות השלמה נובע כי:

$$P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^C)P(A^C) = 1 \cdot 0.1 + P(B \mid A^C) \cdot 0.9 = 0.163$$

ומכאן: $P(B \mid A^C) = \frac{0.063}{0.9} = 0.07$

ב. עלינו לחשב את $P(A^C \cap B^C)$. מקבלים:

$$P(A^C \cap B^C) = P(B^C \mid A^C)P(A^C) = (1 - 0.07) \cdot 0.9 = 0.837$$

ג. אם אין תלות בין ימים שונים, מספר הימים שיחלפו מתחילת תקופת ימי-החורף ועד ליום הראשון שבו ייחסם כביש א הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר $P(A) = 0.1$. לכן, התוחלת המבוקשת היא $\frac{1}{0.1} = 10$.

ד. ההסתברות שהכביש ייחסם בגלל תרגיל צבאי היא 0.2. ההסתברות שלא יהיה תרגיל צבאי ובכל זאת ייחסמו שני הכבישים היא $0.8 \cdot P(A \cap B) \underset{A \subset B}{\underset{\downarrow}{=}} 0.8 \cdot P(A) = 0.8 \cdot 0.1 = 0.08$.

לכן, ההסתברות המבוקשת היא $0.2 + 0.08 = 0.28$.

דרך נוספת:

ההסתברות שייערך תרגיל צבאי היא 0.2;

ההסתברות ששני הכבישים ייחסמו בגלל שטפון היא $P(A \cap B) = P(A) = 0.1$;

ושני המאורעות בלתי-תלויים.

לכן, לפי כלל החיבור, ההסתברות ששני הכבישים ייחסמו לפחות מסיבה אחת היא:

$$0.2 + 0.1 - 0.2 \cdot 0.1 = 0.28$$