

## אלגוריתמים 2019 – מועד שני

הנחיות: ענו על 4 מתוך 5 שאלות. לכל שאלה 25 נקודות. לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה.

על שאלות שמסומנות בכוכב - יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה), ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).

חומר עזר: אסור. דף נוסחאות מצ"ב. בהצלחה!

**שאלה 1 – הרצת FFT (25 נק').**

נביט בפולינום  $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ . הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) במסגרת הרצת FFT מסדר 4 (הרצת  $FFT(\cdot, \omega_4)$ ) על מקדמי הפולינום. בדקו את תשובתכם ע"י הצבה ישירה של הערכים המתאימים בפולינום.

**\*שאלה 2\* – מסלולים מזעריים – צלעות שליליות ביעד (25 נק').**

נתון גרף מכוון  $G = (V, E)$  עם מקור  $s \in V$ , יעד  $t \in V, s \neq t$ , ועם משקל שלם  $w(e)$  לכל צלע  $e \in E$ . נתון כי בגרף אין מעגלים שליליים, וכי עבור צלעות שאינן נכנסות ליעד המשקל תמיד חיובי, כלומר  $w(e) > 0$ . הציגו אלגוריתם למציאת מסלול בעל משקל מזערי מהמקור ליעד. לא יתקבל שום ניקוד על אלגוריתם עם זמן ריצה  $\Theta(|E| \cdot |V|)$ .

[illegible]
$$d(E) \sim |V| \log |V| \cdot o(1) = o(|E| \sim |V| \log |V|)$$

קוונטה שקבוצת  $E'$  וקוונטה  $E$  וקוונטה  $E$

הזכרה: הרבה אתה של גייסות  
מחירה זרמי מקד ב'.



### שאלה 3 – תכנון כפל מטריצות (25 נק').

כזכור, המכפלה  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  של סדרת מטריצות מוגדרת רק כשישנה התאמה בין מספרי השורות והעמודות: אם מסמנים ב- $r_i$  את מספר השורות במטריצה  $A_i$ , וב- $c_i$  את מספר העמודות שלה, אז חייב להתקיים התנאי  $r_{i+1} = c_i$  לכל  $1 \leq i < n$ . במקרה שכזה כל מכפלה  $A_i \times A_{i+1}$  הינה מטריצה בת  $r_i$  שורות ו- $c_{i+1}$  עמודות, והחישוב שלה (בהתאם להגדרת כפל מטריצות) ניתן לביצוע ע"י  $\Theta(r_i \times c_i \times c_{i+1})$  פעולות אלמנטריות בלבד (של כפל/חיבור מספרים). כזכור, כפל מטריצות הוא גם אסוציאטיבי, כלומר, בהכפלה של סדרת מטריצות, הננו רשאים למקם את הסוגריים כרצוננו. למשל  $(A_1 \times A_2) \times A_3 = A_1 \times (A_2 \times A_3)$ .

(א) הציגו דוגמה של שלוש מטריצות, שבה מיקום מסוים של הסוגריים בחישוב המכפלה  $A_1 \times A_2 \times A_3$  דורש פי אלף פעולות אלמנטריות מאשר המיקום האחר.

(ב) הציגו אלגוריתם תכנון דינאמי, שמקבל כקלט רשימה  $(r_1, c_1), \dots, (r_n, c_n)$  של מספרי השורות והעמודות בכל מטריצה, ומפיק כפלט מיקום אופטימלי של הסוגריים עבור ההכפלה  $A_1 \times \dots \times A_n$ . (שימו לב שאיננו מבצעים עדיין את הכפלת המטריצות, אלא רק מנסים לקבוע את מיקום הסוגריים, שימזער את מספר הפעולות האלמנטריות בזמן ההכפלה).

### שאלה 4 – בעיית הספיקות (25 נק').

נתונה נוסחת 3CNF, שבה כל אחד מהמשתנים  $x_1, \dots, x_n$  מופיע בדיוק בשלוש פסוקיות שונות, וכל פסוקית כוללת בדיוק שלושה משתנים שונים. הוכיחו כי הנוסחה ספיקה. הציגו עבור נוסחאות כאלו אלגוריתם למציאת השמה מספקת. הדרכה: העזרו במשפט Hall.

(תזכורת: נוסחת 3CNF היא נוסחה מהצורה  $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_m$ , כשלכל פסוקית הצורה

$\varphi_i = (z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee z_{i,3})$ , וכל  $z_{i,j}$  הינו אחד מהליטרלים  $x_1, \dots, x_n, -x_1, \dots, -x_n$ . כך למשל

$\varphi = (x_1 \vee -x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee -x_5)$  הינה נוסחת 3CNF. השמה הינה פונקציה שמתאימה

לכל משתנה  $x_i$  ערך "אמת"  $T$  או "שקר"  $F$ . בהינתן השמה מסוימת, אזי הליטרל  $x_i$  מסופק

אמ"מ ההשמה מקיימת  $x_i \leftarrow T$ , והליטרל  $-x_i$  מסופק אמ"מ  $x_i \leftarrow F$ . פסוקית

$\varphi_i = (z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee z_{i,3})$  מסופקת אמ"מ לפחות אחד מהליטרלים שבה  $z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}$  מסופק.

הנוסחא כולה  $\varphi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m$  מסופקת אמ"מ כל הפסוקיות  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  מסופקות. הנוסחא  $\varphi$

נקראת ספיקה, אמ"מ לפחות אחת מבין  $2^n$  ההשמות האפשריות מספקת אותה).



**\*שאלה 5\* – קבוצה מנתקת מעגלים מזערית (25 נק').**

נתון גרף קשיר ולא מכוון  $G = (V, E)$ , שאיננו עץ, ונתונים משקלים שלמים וחיוביים  $w(e) > 0$  לכל הצלעות. קבוצת צלעות  $F \subseteq E$  נקראת "מנתקת-מעגלים", אם לאחר הסרתה לא נותרים מעגלים בגרף, כלומר הגרף  $G' = (V, E \setminus F)$  חסר-מעגלים. משקלה של קבוצת צלעות הינו סכום משקלי הצלעות בקבוצה  $w(F) = \sum_{e \in F} w(e)$ . הציגו אלגוריתם למציאת קבוצת צלעות מנתקת-מעגלים בעלת משקל מזערי. עליכם להיעזר בהדרכה שמופיעה להלן.

טענה מרכזית: אם  $F$  הינה קבוצה מנתקת-מעגלים מזערית אז  $G' = (V, E \setminus F)$  אינה מרכזית.

הוכחת הטענה המרכזית: נמין  $\gamma$  האור קסיר. נמין כי  $\gamma$  בלז מנומקת דק אם היא

"אנשים" חזקו כומר אחר זה קצרות. אם קם שלם מניח חזקו

שום דבר, אזי היקבלה אצלה שתימאנה (לא הקומו - בלא - שום חוקי).

מסן, אף מנרים רביה, שיחיו, נוסטק, קומר, הקבלה הוא צי. (אם מוזלים)

[illegible]
$$G'' \rightarrow p \quad k \quad G' \rightarrow -R_{32} e \quad \bar{e} \quad G'' \rightarrow e$$

בספירה אין  $F-e$  מסירה של הקלות ~~הקלות~~ <sup>הקלות</sup> גומר  $N-F$  של 'ציו'  $\phi$ .

אלגוריתם למציאת קבוצת צלעות מנתקת-מעגלים במשקל מזערי שרי לרסל הצורה

א נרתי אן קיוסית, כן במתקום פאמור קור מינימאל דא אלו נקמ

קו מקסימום. כן נקרא אר. פ' מען נבדל

ווקבל א - ווקבלוה ווקבלוה

## בהצלחה!



1/10/18

$$p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$$

(5, 4, 3, 2)

מקדמים

נמוך

נמוך

fft

רצף

$$\text{fft}((5, 4, 3, 2), w^0=1)$$

$$\text{fft}((5, 3), w^2=-1)$$

$$\text{fft}(5, w^4=1) \text{ return } 5$$

$$\text{fft}(3, w^4=1) \text{ return } 3$$

$$\text{return}(5+3, 5-3) \text{ return } (8, 2)$$

$$\text{fft}((4, 2), w^2=-1)$$

$$\text{fft}(4, w^4=1) \text{ return } 4$$

$$\text{fft}(2, w^4=1) \text{ return } 2$$

$$\text{return}(4+2, 4-2) \text{ return } (6, 2)$$

$$f(w^0=1) = 8+6 = 14$$

$$f(w^1=i) = 2+2i$$

$$f(w^2=-1) = 8-6 = 2$$

$$f(w^3=-i) = 2-2i$$

$$\text{return}(14, 2+2i, 2, 2-2i)$$

רצף וקטור:

$$p(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 5 = 14$$

$$p(i) = 2i^3 - 3i^2 + 4i + 5 = -2i - 3 + 4i + 5 = 2+2i$$

$$p(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 4(-1) + 5 = 2$$

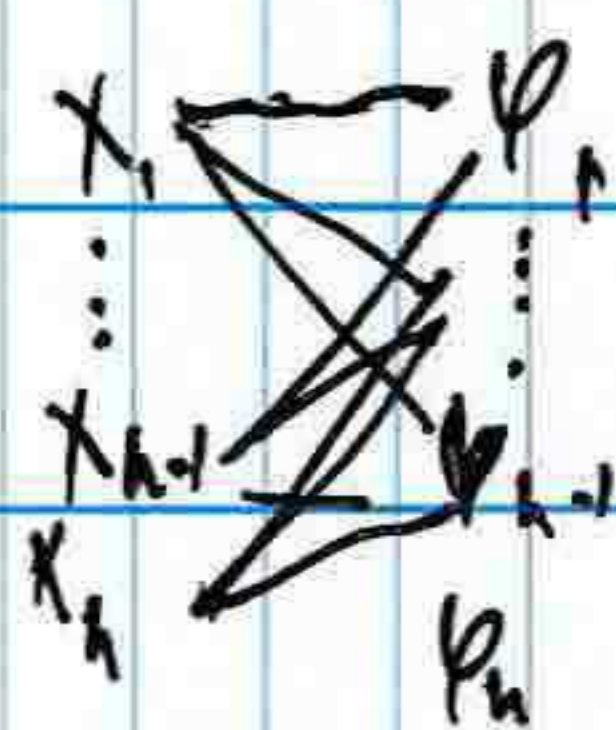
$$p(-i) = 2(-i)^3 - 3(-i)^2 + 4(-i) + 5 = 2-2i$$

$$p = (14, 2+2i, 2, 2-2i)$$

כאשר



נצקיה קרה פו-צקני תמאל ~~ל~~ טל תמתימ והטמקיות,  
באשר ט במקום וממנה הם צומח בזה, ושיטו  
של ממנה לפסקי הוא קשה.



$\therefore \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$

[illegible]

מתי"ן שמתן לא פ"ט ~~משה~~ ש"ן ל-נ טסוק"א,   
 מ-ק"י  $(x)/3 \leq |x|/5 \leq x$ , מ/מ בתיכר הקצו —   
 הוצגה תורה גזולה/שוה לאן/הקבוצה.

[illegible]

צ"ע עמסוקי - ורקבל זוכן ד, למחול מחול מחול  
קיי צוין ~~למחול~~ למחול ד.

מכיון ש- $\frac{F}{f}$  למעשה הנותנת /ה באמצעות - הזווית  
ה'צדק' בהתאם לערכו במסוקים ( $A/\lambda$ ).

קצרת 15, מתקנים נ. הנוסחא סטירה בנות 18  
למען 18, הולך 3 (ב) הנסיון מקבל ד וכן  
אם הנוסחא.