תשובה 1

א. נבדוק כיצד בנויה סדרה באורך n המקיימת את הנדרש.

נתבונן באיבר האחרון של הסדרה:

* אם הוא אי-זוגי (4 אפשרויות), אז קטע הסדרה הקודם לו הוא **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-1$ (a_{n-1} אפשרויות).
* אם הוא זוגי (4 אפשרויות) אז לפניו בא מספר אי-זוגי (4 אפשרויות), ולפניו **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-2$ (a_{n-2} אפשרויות).

קיבלנו: $a_n = 4a_{n-1} + 16a_{n-2}$.

תנאי התחלה:

$a_0 = 1$ (הסדרה הריקה מקיימת את התנאים! נוח להיעזר ב- a_0 לסעיף ב),

$a_1 = 8$,

$a_2 = 8^2 - 4^2 = 48$ (כל הזוגות פחות זוגות של מספרים זוגיים),

לבדיקה, מיחס הנסיגה: $a_2 = 4a_1 + 16a_0 = 4\cdot 8 + 16 = 48$.

ב. המשוואה האפיינית: $\lambda^2 - 4\lambda - 16 = 0$. פתרונותיה: $2 \pm 2\sqrt{5}$.

לפיכך $a_n = A\cdot(2+2\sqrt{5})^n + B\cdot(2-2\sqrt{5})^n$.

בהצבת תנאי ההתחלה נקבל לאחר קצת סידור: $A+B=1$, $(A+B)+\sqrt{5}(A-B)=4$.

נציב את המשוואה הראשונה בשנייה: $(A-B) = 3/\sqrt{5} = 3\sqrt{5}/5$.

נחבר ונחסר משוואה זו מהמשוואה $A+B=1$ ונקבל:

$$A = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \quad , \quad B = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}.$$

כלומר

$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\cdot(2+2\sqrt{5})^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\cdot(2-2\sqrt{5})^n$$

אם רוצים, אפשר לרשום זאת גם כך:

$$a_n = \left((1+\frac{3}{\sqrt{5}})\cdot(1+\sqrt{5})^n + (1-\frac{3}{\sqrt{5}})\cdot(1-\sqrt{5})^n \right)\cdot 2^{n-1}$$

רצוי מאד להציב ולבדוק ערכים אחדים של n!

נציג עוד דרך לפתרון הבעיה. השיטה הבאה מועילה במקרה שאיננו מצליחים לגלות יחס נסיגה עבור הסדרה הנתונה, אך ניתן למצוא מערכת יחסי נסיגה משולבים:

נסמן ב- b_n את מספר הסדרות באורך n המקיימות את התנאי שבשאלה ומסתיימות במספר זוגי. נסמן ב- c_n את מספר הסדרות באורך n המקיימות את התנאי שבשאלה ומסתיימות במספר אי-זוגי. מתנאי הבעיה נקבל את מערכת יחסי הנסיגה המשולבים:

(*i*) $a_n = b_n + c_n$

(*ii*) $b_{n+1} = 4c_n$

(*iii*) $c_{n+1} = 4c_n + 4b_n$

אם נרשום את משוואה (*ii*) בצורה $b_n = 4c_{n-1}$, נוכל להציב אותה במשוואה (*iii*). נקבל:

$$(*) \quad c_{n+1} = 4c_n + 4 \cdot 4c_{n-1}$$

זהו יחס נסיגה ליניארי עבור c_n. המשוואה האפיינית שלו: $\lambda^2 - 4\lambda - 16 = 0$

פותרים את המשוואה האפיינית כמו קודם, ומכאן בעזרת תנאי ההתחלה מוצאים את הביטוי עבור c_n. **יש לשים לב שערכי ההתחלה כעת הם אלה של** c, **לא אלה של** a!

אחרי שמצאנו ביטוי מפורש עבור c_n, נציב אותו במשוואה (*ii*) ונקבל ביטוי מפורש עבור b_n.

נציב את שני הביטויים במשוואה (*i*) ונקבל את הפתרון עבור a_n.

תרגיל מומלץ: לבצע את התהליך הזה ולהשוות עם התוצאה שקיבלנו בדרך הקודמת.

ראו גם החוברת אוסף תרגילים פתורים, קבוצה 6 שאלה 1.

הערה: המשוואה שקיבלנו עבור c_n היא אותה המשוואה שקיבלנו בדרך הקודמת עבור a_n.

זה בפירוש לא חייב לקרות: למרות שקיים קשר בין המשוואות שנקבל בתיאורים רקורסיביים שונים של בעיה, **המשוואות בהחלט לא חייבות להיות זהות!**

מי שלמד אלגברה ליניארית מוזמן לחשוב על הנושא בהקשר של צירופים ליניאריים במרחב הסדרות. למי שלמד או ילמד משוואות דיפרנציאליות - הנושא דומה מאד לתיאור מרחב הפתרונות של מערכת משוואות דיפרנציאליות ליניאריות.

הנה דוגמא פשוטה (אין קשר לשאלה שלנו) שבה נקבל משוואות שונות לגמרי:

$a_n = 2^n + 3^n \qquad b_n = 5^n + 7^n \qquad c_n = 2^n - 5^n \qquad d_n = 3^n - 7^n$

אז $a_n = b_n + c_n + d_n$ אבל אין כל קשר בין המשוואה האפיינית של a_n לבין זו של b_n.

(הסיבה לשוני היא שהמשוואה עבור a_n **אינה שקולה למערכת המשוואות** עבור שלושת האחרים + התנאי $a_n = b_n + c_n + d_n$. לכן "מרחבי הפתרונות" שונים).

תשובה 2

א. מנוסחת הבינום, $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{n}{i}x^i$, כאשר הסכום יכול להיות עד n או על כל המספרים הטבעיים, מכיון שהמקדמים הבינומיים החריגים - מתאפסים (עמ' 30 בספר הלימוד). אם נכפול ביטוי זה ב- $(1+x+x^2)$, נקבל כי המקדם של x^k הוא סכום המקדמים של x^k, של x^{k-1} ושל x^{k-2} בביטוי שלמעלה, כלומר $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k-2}$.

תוצאה זו נכונה גם אם $k > n$ וגם אם $k < 0$. אז, למשל, $0 = \binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1}$.

גם לפי הנוסחה וגם לפי העניין רואים שהמקדם של x^k מתאפס כאשר $k > n+2$.

ב. לפי שאלה 7.9 (או לפי נוסחה (v) בקובץ "נוסחאות בסיסיות בפונקציות יוצרות" שבאתר הקורס), המקדם של x^k בפיתוח הביטוי $\frac{1}{(1-x)^3}$ הוא $D(3,k)$.

מכאן, המקדם של x^{16} בפיתוח הביטוי $(5x^2 - x^4)\cdot\frac{1}{(1-x)^3}$ הוא

$5D(3,14) - D(3,12) = 5\cdot 120 - 91 = 509$.

תשובה 3

נפתור בשלבים:

א. הזהות הנתונה: $\left(\frac{1}{1+x}\right)^n \cdot (1+x)^{2n} = (1+x)^n$

הזהות המבוקשת: $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i D(n,i)\binom{2n}{k-i} = \binom{n}{k}$

אם נפתח את שני אגפי הזהות הנתונה, נקבל שני טורים. עקב השוויון בין שני אגפי הזהות הנתונה, לכל k טבעי, המקדם של x^k בפיתוח אגף ימין צריך להיות שווה למקדם של x^k בפיתוח אגף שמאל. נקרא למקדם זה c_k.

ב. פיתוח אגף ימין בזהות הנתונה:

מנוסחת הבינום: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k$ (ר' תחילת פתרון השאלה הקודמת).

כלומר: $c_k = \binom{n}{k}$.

ג. אגף שמאל בזהות הנתונה הוא מכפלה של שני גורמים. הראשון הוא $\frac{1}{(1+x)^n}$.

כידוע ("קומבינטוריקה" שאלות 7.9, 7.10, או נוסחה (v) בקובץ "נוסחאות בסיסיות בפונקציות יוצרות" שבאתר הקורס):

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} D(n,i)x^i$$

בהצבת $(-x)$ במקום x נקבל

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i D(n,i)x^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

כאשר $a_i = (-1)^i D(n,i)$.

ד. הגורם השני אותו אנו רוצים לפתח הוא $(1+x)^{2n}$.

בהצבת $2n$ במקום n בנוסחת הבינום נקבל:

$$(1+x)^{2n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2n}{i} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

כאשר $b_i = \binom{2n}{i}$.

ה. אנו מעוניינים לפתח את $\left(\frac{1}{1+x}\right)^n \cdot (1+x)^{2n}$. פיתחנו כל אחד מהגורמים, וכעת ניעזר בנוסחה לפיתוח מכפלה ("קומבינטוריקה" ראש עמ' 122, ובצורה נוחה יותר – בדף הזהויות שנשלח). כללית, המקדם של x^k במכפלה הוא $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$. נציב ונקבל:

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i D(n,i) \binom{2n}{k-i}$$

בכך הוכח השוויון המבוקש.

בדיקה עבור המקרה הפרטי הנדרש: אנא השלימו עצמאית.

תשובה 4

א. בעזרת ההדרכה נקבל כי סעיף זה דומה לגמרי לשאלה 7.12 , בהבדל היחיד כי המשתנה הקטן ביותר צריך אצלנו להיות גדול או שווה 1, בעוד שבשאלה 7.12 הוא גדול או שווה 0.

מהסתכלות בבניה שבשאלה 7.12 אנו רואים כי משתנה זה (t_1 שם) , תורם לפונקציה היוצרת את הגורם $(1 + x^3 + x^6 + \ldots)$. כדי להביא בחשבון את התנאי $t_1 \geq 1$ (כלומר t_1 חייב להופיע בסכום, משמע החזקה המתאימה של x חיובית), יש להשמיט את המחובר 1 מהגורם המתאים בפונקציה היוצרת, כלומר התרומה אצלנו היא $(x^3 + x^6 + \ldots)$. שני הגורמים האחרים בתשובה לשאלה 7.12 **אינם משתנים**. נסמן פונקציה זו $g(x)$:

$$g(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots)(x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)$$

ב. עבור הצגה של r כסכום באופן המבוקש, נסמן ב- n_1 את מספר הפעמים בהם מופיע המחובר 1, ב- n_2 את מספר הפעמים בהם מופיע 2 , וב- n_3 את מספר ההופעות של 3 ($n_{1,2} \geq 0$, $n_3 \geq 1$).

ערכי $n_{1,2,3}$ קובעים באופן יחיד את ההצגה.

מספר ההצגות הוא אפוא כמספר הפתרונות בטבעיים של $n_1 + 2n_2 + 3n_3 = r$ כאשר $n_{1,2} \geq 0$, $n_3 \geq 1$.

הפונקציה היוצרת לבעיה זו דומה למתואר <u>במהלך</u> פתרון שאלה 7.12 בעמוד 130 בספר, והיא :

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots)(x^3 + x^6 + \ldots)$$

ג. קיבלנו פונקציות יוצרות שוות, משמע לכל r , מספר ההצגות המתואר בסעיף א שווה למספר ההצגות המתואר בסעיף ב.

איתי הראבן