20425 - תאריך הבחינה: 9.7.2014 (סמסטר 2014ב - מועד 4א / 85)

שאלה 1

נתון כי $X \sim Po(5)$ וכי $Y \sim Po(10)$, וכן כי X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה.

א. [$X+Y \sim Po(15)$]
$$P\{2(X+Y)=28\}=P\{X+Y=14\}=e^{-15}\cdot\frac{15^{14}}{14!}=0.1024$$

ב. [לפי דוגמה 4ב במדריך, עמוד 145]
$$P\{X=6 \mid 2(X+Y)=28\}=P\{X=6 \mid X+Y=14\}$$
[$X \mid X+Y=14 \sim B(14,5/15)$]
$$=\binom{14}{6}\left(\tfrac{5}{15}\right)^6\left(\tfrac{10}{15}\right)^8=0.1607$$

ג. [X ו- Y בלתי-תלויים]
$$E[XY]=E[X]E[Y]=5\cdot 10=50$$

ד. [X ו- Y בלתי-תלויים]
$$\text{Var}(XY)=E[X^2Y^2]-(E[XY])^2=E[X^2]E[Y^2]-50^2$$

כעת:
$$E[X^2]=\text{Var}(X)+(E[X])^2=5+5^2=30$$
$$E[Y^2]=\text{Var}(Y)+(E[Y])^2=10+10^2=110$$

ומכאן:
$$\text{Var}(XY)=30\cdot 110-50^2=800$$

שאלה 2

יהיו X, Y ו- Z משתנים נורמליים סטנדרטיים בלתי-תלויים, ומגדירים $V=-Y+2Z$ ו- $U=X+Y$.

א. מתקיים:
$$-Y \sim N(0,1) \qquad ; \qquad 2Z \sim N(0,4)$$
כמו כן, המשתנים Y ו- Z בלתי-תלויים זה בזה, ולכן גם לסכומם התפלגות נורמלית, ומתקיים:
$$V=-Y+2Z \sim N(0,5)$$

ב. [$V \sim N(0,5)$]
$$P\{V \le 1.33\}=P\left\{\tfrac{V-0}{\sqrt{5}} \le \tfrac{1.33-0}{\sqrt{5}}\right\}=P\{Z \le 0.5948\}=\Phi(0.5948)=0.724$$

ג. נמצא את a המקיים את השוויון:
$$P\{V \le a\}=0.2$$
כלומר:
$$P\{V \le a\}=P\left\{\tfrac{V-0}{\sqrt{5}} \le \tfrac{a-0}{\sqrt{5}}\right\}=P\left\{Z \le \tfrac{a}{\sqrt{5}}\right\}=\Phi\left(\tfrac{a}{\sqrt{5}}\right)=0.2=\Phi(-0.842)$$
ומכאן כי:
$$a=-0.842\cdot\sqrt{5}=-1.883$$

ד.
$$\text{Cov}(-Y+2Z,X+Y)=-\underbrace{\text{Cov}(Y,X)}_{=0}-\text{Cov}(Y,Y)+2\underbrace{\text{Cov}(Z,X)}_{=0}+2\underbrace{\text{Cov}(Z,Y)}_{=0}=-\text{Var}(Y)=-1$$
$$\text{Var}(V)=\text{Var}(-Y+2Z)=5 \qquad ; \qquad \text{Var}(U)=\text{Var}(X+Y)=2$$
ומכאן:
$$\rho(V,U)=\frac{\text{Cov}(V,U)}{\sqrt{\text{Var}(V)\text{Var}(U)}}=\frac{-1}{\sqrt{5\cdot 2}}=\frac{-1}{\sqrt{10}}$$

שאלה 3

מסובבים חמש פעמים סביבון תקין בעל 4 פאות. לפיכך: $n(S) = 4^5$

א. כדי שכל התוצאות תתקבלנה, צריך שתוצאה אחת (מתוך ה-4) תתקבל פעמיים, וכל יתר התוצאות תתקבלנה פעם אחת כל אחת. לפיכך, נבחר את התוצאה שתתקבל פעמיים, ואת הסיבובים שבהם היא תתקבל, ולבסוף נסדר את שאר התוצאות. ומכאן נקבל: $\frac{4\cdot\binom{5}{2}\cdot 3!}{4^5} = \frac{240}{1{,}024} = \frac{15}{64} = 0.234375$

ב. נעזר במאורע המשלים, שהתוצאה 3 לא מתקבלת בכלל, ונקבל: $1-\frac{3^5}{4^5} = 1-0.75^5 = 0.7627$

ג. במונה עלינו למנות את מספר האפשרויות שב-5 הסיבובים כל התוצאות מתקבלות, כך שבשני הסיבובים הראשונים התוצאות שונות זו מזו. ייתכנו שני מקרים:

- התוצאה שמתקבלת פעמיים היא אחת משתי התוצאות שהתקבלו בשני הסיבובים הראשונים
- התוצאה שמתקבלת פעמיים איננה אחת משתי התוצאות שהתקבלו בשני הסיבובים הראשונים

במכנה עלינו למנות את מספר האפשרויות שבהן שתי התוצאות הראשונות (מתוך ה-5) שונות זו מזו.

$$\frac{4\cdot 3\cdot\binom{3}{1}\cdot 2\cdot 2!+4\cdot 3\cdot\binom{3}{2}\cdot 2!}{4\cdot 3\cdot 4^3} = \frac{\binom{3}{1}\cdot 2\cdot 2!+\binom{3}{2}\cdot 2!}{4^3} = \frac{12+6}{64} = \frac{9}{32} = 0.28125$$

ד. במונה נמנה את מספר האפשרויות שבהן מתקבלות בדיוק שתיים מהתוצאות, ובמכנה נעזר במשלים (שכל ארבע התוצאות מתקבלות) כדי למנות את מספר האפשרויות שבהן לא מתקבלת לפחות אחת מארבע התוצאות.

$$\frac{\binom{4}{2}\cdot(2^5-2)}{4^5-4\cdot\binom{5}{2}\cdot 3!} = \frac{180}{784} = \frac{45}{196} = 0.2296$$

שאלה 4

א. למשתנה המקרי X_5 יש התפלגות בינומית-שלילית עם הפרמטרים 5 ו- 0.6.

לפיכך: $P\{X_5=8\} = \binom{7}{4}\cdot 0.4^3 0.6^5 = 0.1742$

ב. המשתנים המקריים תלויים, הואיל ולא מתקיים תנאי אי-התלות. למשל:

$$P\{X_2=6, X_5=8\} = 0 \quad \neq \quad P\{X_2=6\}P\{X_5=8\} = \binom{5}{1}\cdot 0.4^4 0.6^2\cdot\binom{7}{4}\cdot 0.4^3 0.6^5 > 0$$

ג. לכל $i = 2,3,\ldots$ ו- $j = 8,9,\ldots$, המקיימים $j-i\geq 6$, כלומר, לכל $i = 2,3,\ldots$ ו- $j = i+6, i+7,\ldots$,

מתקיים: $P\{X_2=i, X_8=j\} = \binom{i-1}{1}\cdot 0.4^{i-2}0.6^2\cdot\binom{j-1-i}{5}\cdot 0.4^{j-i-6}0.6^6 = (i-1)\cdot\binom{j-1-i}{5}\cdot 0.4^{j-8}0.6^8$

בכל מקרה אחר, ההסתברות המשותפת שווה ל-0.

הסבר: המאורע $\{X_2=i, X_8=j\}$ מתקיים אם ב- $(i-1)$ ההטלות הראשונות התקבל בדיוק H אחד, בהטלה ה-i-ית התקבל ה-H השני, מהטלה $(i+1)$ עד להטלה $(j-1)$ התקבלו בדיוק חמישה H-ים, ובהטלה j התקבל ה-H השמיני.

ד. למשתנה המקרי X_{100} יש התפלגות בינומית-שלילית עם הפרמטרים 100 ו- 0.6. לפיכך, אפשר להציגו כסכום של 100 משתנים גיאומטריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם הפרמטר 0.6, ולהשתמש במשפט הגבול המרכזי, כדי לחשב את ההסתברות המבוקשת. מקבלים :

$$P\{X_{100}\ge 180\}=P\{X_{100}\ge 179.5\}=P\left\{\frac{X_{100}-166.\bar{6}}{\sqrt{111.\bar{1}}}\ge\frac{179.5-166.\bar{6}}{\sqrt{111.\bar{1}}}\right\}=1-\Phi(1.2175)=1-0.8883=0.1117$$

שאלה 5

א. ההוכחה מובאת באתר הקורס.

ב. יש 20 פתקים שעליהם כפולה של 5. לפיכך, מספר הפתקים הנבחרים שעליהם כפולה של 5 הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N=100$, $m=20$ ו- $n=15$.

ומכאן שהשונות המבוקשת היא :
$$\tfrac{100-15}{100-1}\cdot 15\cdot\tfrac{20}{100}\cdot\tfrac{80}{100}=2.\overline{06}$$

ג. יש 20 פתקים שעליהם כפולה של 5, יש 14 פתקים שעליהם כפולה של 7, ויש 2 פתקים שעליהם כפולה של 5 ו- 7. כלומר, יש $20+14-2=32$ פתקים שעליהם כפולה של 5 או של 7.

לפיכך, מספר הפתקים הנבחרים, שעליהם מספר שהוא כפולה של 5 או כפולה של 7, הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N=100$, $m=32$ ו- $n=15$, וההסתברות המבוקשת היא :

$$\frac{\binom{32}{6}\binom{68}{9}}{\binom{100}{15}}=0.1763$$