

אלגוריתמים – פתרונות לתרגיל 2

1. נניח שהגרף קשיר, אחרת נעבוד על כל רכיב קשירות בנפרד, והגרף יהיה כמעט דו-צדדי אם ורק אם יש רכיב קשירות אחד שהוא כמעט דו-צדדי והשאר דו-צדדיים.
 נריץ BFS מקודקוד כלשהו. אם אין קשת בין שני קודקודים באותה רמה אז הגרף דו-צדדי. אם יש, אז נבחר קשת (u,v) כלשהי עבורה u ו- v באותה רמה. הקשת (u,v) והמסלולים מ- u ומ- v לאב הקדמון המשותף הנמוך ביותר שלהם מהווים מעגל אי-זוגי. אם קיימת קשת e כך שאם נסיר אותה מהגרף נקבל גרף דו צדדי, אז e חייבת להיות על מעגל זה. לכן לכל קשת של המעגל נסיר אותה ונריץ BFS כדי לבדוק אם קיבלנו גרף דו-צדדי. אורך המעגל הוא לכל היותר $|V|$, ומכיוון שבגרף קשיר $|E| \geq |V|-1$ סיבוכיות כל BFS תהיה $O(|E|)$, ולכן נקבל סיבוכיות $O(|E||V|)$.
 הסיבוכיות אם הגרף אינו קשיר: נניח יש k רכיבי קשירות, ונסמן ב- V_i את קודקודי הרכיב ה- i וב- E_i את קשתותיו. הזמן לרכיב ה- i יהיה $O(|V_i||E_i|)$, והחלוקה לרכיבי קשירות $O(|E|+|V|)$, ובסה"כ $O(|E||V|)$.
2. א. נריץ BFS מ- s . קשת מעגלית היא קשת ש-2 קצותיה באותה רמה.
 ב. בגרף לא מכוון, קשת יכולה להיות רק בין קודקודים באותה רמה או ברמות עוקבות ב-BFS. לכן מספיק לשמור ביט אחד עבור הזוגיות של הרמה, וביט נוסף שיציין אם כבר טיפלנו בקודקוד או לא (במקום הצבע).
 3. נניח שהגרף קשיר, אחרת נפעיל את האלגוריתם על כל רכיב קשירות בנפרד. נמצא לכל $u \in V$ את המעגל הקצר ביותר דרך u , ע"י הרצת BFS מ- u ומציאת הקשת (v,u) עבורה $d[v]$ מינימלי. הסיבוכיות תהיה $O(|V||E|)$ בדומה לשאלה 1.
 4. נבדוק תחילה האם $|E| > |V|-1$. אם כן, הגרף בהכרח מכיל מעגל. אם לא – נריץ DFS. הגרף מכיל מעגל אם ורק אם יש ב-DFS קשת אחורית.
 זמן ריצה: כשנספור את הקשתות נעצור ברגע שנגיע לקשת ה- $|V|$, לכן הזמן יהיה $O(|V|)$. אם $|E| < |V|$ ה-DFS ייקח זמן $O(|E|+|V|) = O(|V|)$.
 בגרף מכוון יידרש זמן $O(|E|+|V|)$, מכיוון שמספר הקשתות שלו יכול להיות $\Omega(|V|^2)$ גם אם אין בו מעגלים, לכן נהיה חייבים להריץ DFS (או לעבור על כל הקשתות בדרך אחרת) בכל מקרה.
 5. נריץ DFS ונכוון את הקשתות כפי שתארנו בכיתה: קשת עץ מההורה לילד, וקשת אחורית מהצאצא לאב הקדמון. נפעיל את האלגוריתם למציאת רכיבי קשירות חזקה על הגרף שקיבלנו. נראה שקשת היא גשר \Leftrightarrow הקצוות שלה נמצאים ברכיבי קשירות חזקה שונים.
 \Leftarrow נניח (u,v) גשר. אז בגרף המקורי אין עוד מסלול בין u ל- v מלבד הקשת עצמה, ולכן אם כיוונו אותה מ- u ל- v אז אין בגרף המכוון מסלול מ- v ל- u .
 \Rightarrow תהי (u,v) קשת שאינה גשר, כלומר קשת שנמצאת על מעגל, ונניח שכיוונו אותה מ- u ל- v . אם זאת קשת אחורית אז ברור שיש גם מסלול מ- v ל- u . אחרת, v הבן של u בעץ ה-DFS, ומכיוון שהקשת נמצאת על מעגל יש קשת אחורית מ- v או צאצא של v ל- u או אב קדמון של u .
 6. נפעיל את האלגוריתם שתארנו בכיתה כדי לחשב לכל $v \in V$ את $low(v)$. ברור שאם קשת היא גשר אז היא קשת עץ, וקל להראות שאם v הוא בן של u בעץ ה-DFS, אז (u,v) גשר $\Leftrightarrow low(v) = d[v]$.