

האוניברסיטה הפתוחה

20290

אלגוריתמיקה -

יסודות מדעי המחשב

חוברת הקורס – סתיו 2012א

כתב: אייל משיח

אוקטובר 2011 - סמסטר סתיו – תשע"ב

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

5	אל הסטודנט
6	1. לוח זמנים ופעילויות
8	2. תיאור המטלות
9	3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס
11	ממ"ן 11
13	ממ"ן 12
15	ממ"ן 13
17	ממ"ן 14
19	ממ"ן 15

אל הסטודנט,

אנו מברכים אותך עם הצטרפותך אל הלומדים בקורס "אלגוריתמיקה - יסודות מדעי המחשב".

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים, אותם מפרסם/מת מרכז/ת ההוראה. בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:

<http://telem.openu.ac.il>

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספרייה באינטרנט www.openu.ac.il/Library. במהלך הקורס יש להגיש תרגילי בית. מספיק להגיש שלושה מתוך חמשת הממ"נים שבחוברת, אך מומלץ להגיש את כולם. יש להקפיד על הגשת הממ"נים במועד.

צוות הקורס ישמח לעמוד לרשותך בכל שאלה שתתעורר.

ניתן לפנות אלי ביום ג', בשעות 11:00-13:00, בטלפון 09-7781233, או ב-e-mail.

כתובתי היא: evalma@openu.ac.il

פגישות יש לתאם מראש.

בברכה,

אייל משיח
מרכז הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20290 / 2012א)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	פרקי הלימוד המומלצים	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן
1	28.10.2011-25.10.2011	פרקים 1-3		
2	4.11.2011-30.10.2011	פרק 4	מפגש 1	
3	11.11.2011-6.11.2011	פרק 5		ממ"ן 11 11.11.2011
4	18.11.2011-13.11.2011	פרק 5	מפגש 2	
5	25.11.2011-20.11.2011	פרק 6		
6	2.12.2011-27.11.2011	פרק 7	מפגש 3	ממ"ן 12 2.12.2011
7	9.12.2011-4.12.2011	פרק 7		
8	16.12.2011-11.12.2011	פרק 8	מפגש 4	

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

לוח זמנים ופעילויות – המשך

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	פרקי הלימוד המומלצים	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן
9	23.12.2011-18.12.2011 (ד-ו חנוכה)	פרק 8		ממ"ן 13 23.12.2011
10	30.12.2011-25.12.2011 (א-ד חנוכה)	פרק 9	מפגש 5	
11	6.1.2012-1.1.2012	פרק 9	מפגש 6	
12	13.1.2012-8.1.2012	פרק 10		ממ"ן 14 13.1.2012
13	20.1.2012-15.1.2012	פרק 10	מפגש 7	
14	27.1.2012-22.1.2012	פרק 11		
15	6.2.2012-29.1.2012	פרק 11 פרק 12	מפגש 8	ממ"ן 15 6.2.2012

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

2. תיאור המטלות

הממ"נים בקורס הם ממ"נים **רגילים**: כל מטלה מורכבת ממספר תרגילים "יבשים" **שאינם** דורשים הרצת תכניות במחשב. תרגילים אלו נועדו לבדוק את הבנתך בחומר הלימוד. את הפתרון למטלה כזו יש לכתוב **בעט** על דף נייר בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. (אפשר ורצוי, כמובן, להדפיס את הפתרון למטלה). אם השאלה בממ"ן אינה ברורה לך, ניתן להתקשר אל אחד מהמנחים (בשעת הייעוץ הטלפוני שלו) לצורך קבלת הסבר או לנסות להיעזר בקבוצת הדיון של הקורס. בטבלה שלהלן תמצא מהו חומר הלימוד הנדרש (לפי פרקי הספר) לפתרון כל אחת מהמטלות, ומשקל כל מטלה בחישוב הציון של הקורס.

שים לב!

בעת כתיבת פתרון למטלה אין להסתמך על פרקי לימוד **מתקדמים** יותר מהפרקים בהם עוסקת המטלה.

מטלה	חומר הלימוד הנדרש לפתרון	משקל המטלה
ממ"ן 11	פרקים 1-4	6 נקודות
ממ"ן 12	פרקים 5-6	6 נקודות
ממ"ן 13	פרק 7	6 נקודות
ממ"ן 14	פרקים 8-9	6 נקודות
ממ"ן 15	פרקים 10-12	6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש שלוש מטלות מתוך החמש.

לתשומת לבכם!

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן:

אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלות** בציון הנמוך ביותר, שציוניהן נמוכים מציון הבחינה (**עד שתי מטלות**), לא יילקחו בחשבון בעת שקלול הציון הסופי.

זאת בתנאי שמטלות אלה **אינן חלק מדרישות החובה בקורס** ושמשקל המטלות האחרות שהוגשו עובר את המינימום ההכרחי.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליך לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל של 18 נקודות לפחות.

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון של 60 לפחות.

ג. לקבל ציון סופי של 60 לפחות.

לתשומת לבכם:

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס. סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימאלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון 09-7782222 או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא <http://www.openu.ac.il/sheilta>

קורסים ⇨ ציוני מטלות ובחינות ⇨ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.

יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של המטלות והבחינה יהיה נמוך מ- 60).

כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1-4

מספר השאלות: 6

משקל המטלה: 6 נקודות

מועד אחרון להגשה: 11.11.2011

סמסטר: 2012א

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (10 נקודות)

גובה של עץ בינרי הוא אורך המסלול הארוך ביותר משורש העץ אל איזשהו עלה. כתבו אלגוריתם רקורסיבי, המקבל עץ בינרי T ומחזיר את גובה העץ.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונים שני מספרים עשרוניים $a_1 a_2 \dots a_n$ ו- $b_1 b_2 \dots b_m$.

כתבו אלגוריתם המחשב את מכפלת שני המספרים והסבירו בקצרה את אופן פעולתו. הפעולות הבסיסיות שבהן מותר לאלגוריתם להשתמש הן:

- הכפלת שתי ספרות עשרוניות זו בזו
- חישוב הפונקציות $x \times 10$, $x \bmod 10$ ו- $x \div 10$
- חיבור שני מספרים עשרוניים

שאלה 3 (20 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

נתונים שני תורים Q_1 ו- Q_2 . כל אחד מהתורים מכיל n איברים ממוינים (האיבר הקטן ביותר נמצא בראש התור והאיבר הגדול ביותר נמצא בסוף התור).

א. כתבו אלגוריתם המבצע מיזוג של שני התורים. לאחר ביצוע השגרה התור Q_1 יכיל $2n$ איברים ממוינים והתור Q_2 יהיה ריק.

ב. פרטו את מבני הבקרה שבהם נעשה שימוש באלגוריתם.

שאלה 4 (20 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

כיסוי ע"י צמתים (vertex cover) של גרף לא מכוון $G = (V, E)$ הוא תת-קבוצה $V' \subseteq V$ של צמתים, כך שעבור כל קשת בגרף – לפחות אחת מבין שתי נקודות הקצה שלה שייכת ל- V' . כלומר, כל קשת בגרף "מכוסה" ע"י לפחות צומת אחד ב- V' . בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, מעוניינים למצוא כיסוי ע"י צמתים שגודלו מינימלי. להלן אלגוריתם לפתרון הבעיה:

$$(1) \quad V' \leftarrow \emptyset;$$

(2) כל עוד $E \neq \emptyset$ בצע:

(2.1) בחר צומת u ב- V שדרגתו מקסימלית;

(2.2) הוסף את u ל- V' ומחק מהגרף את u ואת כל הקשתות הנוגעות ב- u ;

(3) החזר את V' .

א. מהי השיטה האלגוריתמית שבה האלגוריתם משתמש? נמקו את תשובתכם.
ב. האם האלגוריתם מוצא תמיד את הפתרון האופטימלי לבעיה? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.

שאלה 5 (30 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

מספר האפשרויות לבחור k איברים מתוך n (בלי חזרות) מסומן ע"י $\binom{n}{k}$.

א. כתבו נוסחה רקורסיבית לחישוב $\binom{n}{k}$ והסבירו מדוע היא נכונה.

ב. כתבו אלגוריתם תכנון דינמי לחישוב $\binom{n}{k}$.

הדרכה: השתמשו בטבלה בגודל $(n+1) \times (k+1)$.

ג. חשבו באמצעות האלגוריתם מסעיף ב' את $\binom{6}{4}$.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

נתונה הפונקציה הבאה:

$$M(n) = \begin{cases} n-10 & \text{if } n > 100 \\ M(M(n+11)) & \text{if } n \leq 100 \end{cases}$$

מה תחזיר הפונקציה עבור $n = 87$?

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 5-6

מספר השאלות: 6

משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: א2012

מועד אחרון להגשה: 2.12.2011

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתון מצולע פשוט וקמור.

המצולע מיוצג על-ידי סדרת הקואורדינטות של קדקודיו $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ המסודרים בכיוון השעון.

פרופ' כלומסקי הציע למצוא את המרחק המינימלי בין שני קדקודים של המצולע באמצעות חישוב המרחק בין כל שני קדקודים סמוכים והחזרת הערך המינימלי מבין הערכים המתקבלים. חוו דעתכם על הצעתו של הפרופסור.

שאלה 2 (20 נקודות: סעיף א' – 15 נק'; סעיף ב' – 5 נק')

נתון מערך A בגודל n המכיל מספרים ממשיים ונתון מספר חיובי נוסף d .

מעוניינים לדעת אם קיימים במערך A שני מספרים שההפרש ביניהם קטן מ- d .

א. כתבו אלגוריתם יעיל ככל האפשר לפתרון הבעיה.

ב. הסבירו מדוע האלגוריתם נכון ונתחו את זמן הריצה שלו.

שאלה 3 (30 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

נתון תור Q_1 המכיל n מספרים.

א. תארו אלגוריתם למיון המספרים שבתור; כלומר, בסיום ריצת האלגוריתם התור Q_1 יכיל

את המספרים בסדר ממוין (כפי שהוגדר בשאלה 3 בממ"ן 11).

הדגימו את אופן פעולת האלגוריתם שלכם על המספרים 7 4 1 2 5 6 3 (7 הוא ראש התור).

מותר לאלגוריתם להשתמש בתור עזר אחד נוסף.

ב. הסבירו מדוע האלגוריתם נכון. מהי האיננוואריאנטה המתקיימת לאחר כל שלב באלגוריתם?

ג. נתחו את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם.

הערה: הניחו ש- n הוא חזקה של 2 (כלומר, קיים k טבעי כך ש- $n = 2^k$).

שאלה 4 (20 נקודות: סעיפים א' ו-ב' – 5 נק' לכל אחד; סעיף ג' – 10 נק')

- נתונות שתי רשימות: רשימה L_1 באורך n המכילה את שמות כל הסטודנטים באו"פ, ורשימה L_2 באורך m , המכילה את שמות כל הסטודנטים שכבר שילמו את שכר הלימוד לסמסטר 2012. עלינו למצוא את שמות כל הסטודנטים שעדיין לא שילמו את שכר הלימוד עבור 2012.
- א. תארו אלגוריתם לפתרון הבעיה שזמן ריצתו $O(n \cdot m)$.
- ב. תארו אלגוריתם לפתרון הבעיה שזמן ריצתו $O(n \log n + m \log m)$.
- ג. תארו אלגוריתם לפתרון הבעיה שזמן ריצתו $O((n + m) \cdot \log m)$.

שאלה 5 (20 נקודות: 5 נק' לכל סעיף)

- נדון בבעיה של מציאת המינימום והמקסימום ברשימת מספרים באורך N . בספר מתוארים שני אלגוריתמים לפתרון הבעיה – אלגוריתם רקורסיבי ואלגוריתם איטרטיבי. נתונה רשימה של ששה איברים a, b, c, d, e, f . נניח ללא הגבלת הכלליות ש- $a > b > c > d > e > f$.
- א. הדגימו את ריצת האלגוריתם הרקורסיבי על הקלט. כמה השוואות יבצע האלגוריתם?
- ב. הדגימו את ריצת האלגוריתם האיטרטיבי על הקלט. כמה השוואות יבצע האלגוריתם?
- ג. הראו כי קיימת סדרה של חמש השוואות, כך שלאחר ביצוע ההשוואות נדע מיהם המינימום והמקסימום ברשימה.
- ד. ידוע שהחסם התחתון על מספר ההשוואות הנדרשות הוא $3N/2 - 2$. האם יש סתירה בין סעיף ג' לבין קיומו של החסם התחתון? הסבירו את תשובתכם.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

- נתונים בניין B קומות ושני כדורי זכוכית זהים. מעוניינים למצוא את הקומה המינימלית שזריקת כדור ממנה תגרום לשבירתו. הפעולות המותרות לצורך פתרון הבעיה הן זריקת כדורים מקומות הבניין (ובדיקה אם הם נשברו). תארו אלגוריתם לפתרון הבעיה שמבצע $\lceil \sqrt{2n} \rceil$ פעולות במקרה הגרוע.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 23.12.2011

סמסטר: 2012א

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (10 נקודות)

קראו את ההסבר במדריך הלמידה המתייחס לטבלה שבאיור 7.7 בספר, ושרטטו טבלה דומה עבור הפונקציות $\log N$ ו- $(\log N)^2$.

שאלה 2 (20 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

א. מצאו את כל ההשמות המספקות את הפסוק $(A \vee B) \rightarrow C$.

ב. נדון בבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: פסוק ϕ בתחשיב הפסוקים

השאלה: מהו מספר ההשמות המספקות את ϕ ?

1. הוכיחו שהבעיה שייכת למחלקה PSPACE.

2. הוכיחו שהבעיה שייכת למחלקה EXP.

3. הוכיחו שהבעיה אינה קלה יותר מבעיית הספיקות.

שאלה 3 (20 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

קבוצה בלתי תלויה (independent set) בגרף לא מכוון $G = (V, E)$ היא תת-קבוצה V' של V , כך שבין כל שני צמתים ב- V' אין קשת.

בעיית הקבוצה הבלתי תלויה היא הבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: גרף לא מכוון G ומספר טבעי k

השאלה: האם קיימת ב- G קבוצה בלתי תלויה בגודל k ?

א. הוכיחו שהבעיה שייכת ל-NP.

ב. תארו רדוקציה פולינומית מבעיית הקליקה לבעיית הקבוצה הבלתי תלויה והוכיחו את נכונותה.

שאלה 4 (20 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

בעיית הכיסוי ע"י צמתים היא הבעיה הבאה :

הקלט לבעיה : גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ומספר טבעי k

השאלה : האם קיים ב- G כיסוי ע"י צמתים בגודל k ?

א. הוכיחו שבעיית הכיסוי ע"י צמתים שייכת ל-NP.

ב. תארו רדוקציה פולינומית מבעיית הקבוצה הבלתי תלויה לבעיית הכיסוי ע"י צמתים והוכיחו את נכונותה.

הערה : ההגדרה של כיסוי ע"י צמתים מופיעה בשאלה 4 בממ"ן 11.

שאלה 5 (30 נקודות: 15 נק' לכל סעיף)

גרף נקרא **3-צביע** אם קיימת עבורו צביעה חוקית בשלושה צבעים.

יהא G גרף 3-צביע בעל n צמתים. להלן נתון אלגוריתם לצביעת הגרף G :

(1) אם דרגת כל הצמתים ב- G קטנה מ- \sqrt{n} , אז צבע את G ב- \sqrt{n} צבעים (לכל היותר) באמצעות האלגוריתם המתואר בתשובה לשאלה 14 במדריך הלמידה.

(2) אחרת בצע את הפעולות הבאות :

(2.1) בחר ב- G איזושהו צומת v שדרגתו לפחות \sqrt{n} ;

(2.2) צבע את v בצבע חדש ואת כל שכניו בשני צבעים חדשים ;

(2.3) הסר את v ואת כל שכניו מהגרף ;

(2.4) חזור לשורה (1) ;

א. הוכיחו שהאלגוריתם צובע את גרף הקלט בצביעה חוקית.

ב. מצאו חסם עליון על מספר הצבעים שבהם האלגוריתם משתמש.

מהו יחס הקירוב שמשגיג האלגוריתם ?

שאלה 6 (שאלת בונוס)

משמעות הקשר $A \text{ NOR } B$ היא : גם A וגם B אינם נכונים ($\text{neither } A \text{ nor } B \text{ is true}$).

הראו כיצד אפשר לבטא באמצעות הקשר NOR את הקשרים AND, NOT ו-OR.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 8-9

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 13.1.2012

סמסטר: 2012א

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה בעיית הכרעה D , שקלטיה הם מספרים שלמים חיוביים. בידנו אלגוריתם A לפתרון הבעיה. ידוע שהאלגוריתם נכון חלקית לכל קלט חוקי. כמו-כן, בידנו הוכחה שהאלגוריתם עוצר על כל הקלטים הגדולים או שווים ל-1000, אך לא הצלחנו להרחיב את ההוכחה גם לקלטים הקטנים מ-1000. הוכיחו שהבעיה D כריעה.

שאלה 2 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

א. נתבונן בגרסה הבאה של בעיית התאמת המילים:

הקלט לבעיה: שתי קבוצות מילים X ו- Y ומספר טבעי k

השאלה: האם קיימת התאמת מילים שאורכה לכל היותר k ?

תארו אלגוריתם לפתרון הבעיה ונתחו את זמן ריצתו.

ב. נדון בגרסה של בעיית התאמת המילים שבה אין כל הגבלה על הדרך שבה נעשות הבחירות מן ה- X ים ומן ה- Y ים. כלומר, המילים שנבחרות מהקבוצה Y לא חייבות להיות בעלות אותם אינדקסים כמו המילים שנבחרות מהקבוצה X , וגם מספר המילים שנבחרות מקבוצה אחת יכול להיות שונה ממספר המילים שנבחרות מהקבוצה השנייה.

האם בעיה זו היא כריעה? אם כן – לאיזו מחלקת סיבוכיות היא שייכת?

שאלה 3 (20 נקודות)

נדון בגרסה הבאה של בעיית נחש הדומינו:

הקלט לבעיה: קבוצה סופית T של סוגי מרצפות (שונים זה מזה), שתי נקודות שונות V ו- W במחצית העליונה של המישור האינסופי ומספר טבעי k

השאלה: האם ניתן להגיע מ- V ל- W באמצעות נחש דומינו המשתמש בדיוק ב- k סוגי מרצפות?

הוכיחו שגם גרסה זו של בעיית נחש הדומינו היא בלתי כריעה.

שאלה 4 (20 נקודות)

נתונה מכונת טיורינג "מוגבלת", שבה מותר לכתוב לכל היותר 5 פעמים על כל משבצת בסרט. הוכיחו שההגבלה אינה מחלישה את המודל; כלומר, לכל מכונת טיורינג רגילה קיימת מכונה מוגבלת המחשבת בדיוק את אותה פונקציה. תארו במדויק את המכונה המוגבלת ואת הדרך שבה היא תבצע סימולציה של המכונה הרגילה. רמז: השתמשו בא"ב שגודלו פי 5 מהא"ב המקורי.

שאלה 5 (30 נקודות: סעיף א' – 10 נק'; סעיף ב' – 20 נק')

- סדרת מספרים נקראת **סדרה ביטונית** אם מתקיים לפחות אחד משני התנאים הבאים:
1. הסדרה עולה בצורה מונוטונית עד לנקודה כלשהי ואח"כ יורדת מונוטונית.
 2. ניתן לבצע הזזה מעגלית של איברי הסדרה כך שיתקיים תנאי 1.
- למשל, הסדרות $\langle 3, 5, 8, 9, 7, 2 \rangle$, $\langle 7, 6, 3, 2, 4, 5 \rangle$ ו- $\langle 7, 8, 6, 4, 1, 3, 5 \rangle$ הן ביטוניות.
- א. אפיינו את המבנה של סדרה ביטונית המורכבת מאפסים ואחדים.
- ב. בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי המקבל את כל המחרוזות מעל $\Sigma = \{0, 1\}$ שהן סדרות ביטוניות.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

הוכיחו שהמחלקה EXPTIME היא חסינה; כלומר, מחלקת הבעיות הניתנות לפתרון בזמן אקספוננציאלי היא אותה מחלקה בכל המודלים החישוביים האוניברסליים.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 10-12

מספר השאלות: 6

משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: א2012

מועד אחרון להגשה: 6.2.2012

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונות k רשימות ממוינות, המכילות n איברים כל אחת. תארו אלגוריתם מקבילי למיזוג כל הרשימות לרשימה ממוינת אחת. השתמשו בשגרה למיזוג שתי רשימות המופיעה בפרק 4 במדריך הלמידה כשגרת-עזר. נתחו את זמן הריצה של האלגוריתם ואת סיבוכיות המכפלה שלו. הערה: הניחו ש- k הוא חזקה שלמה של 2.

שאלה 2 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

פסוק בתחשיב הפסוקים כתוב בצורת 3-CNF אם הוא מורכב מתת-פסוקים המחוברים ע"י קשרי AND וכל אחד מהתת-פסוקים מורכב מ-3 ליטרלים המחוברים ע"י קשרי OR. למשל, הפסוק הבא כתוב בצורת 3-CNF: $(A \vee \neg B \vee D) \& (C \vee \neg D \vee E) \& (B \vee D \vee E)$. נתון פסוק ϕ בתחשיב הפסוקים הכתוב בצורת 3-CNF והשמה U של ערכי אמת למשתנים מעוניינים לדעת אם ההשמה מספקת את הפסוק. א. נסמן ב- m את מספר הפסוקיות ב- ϕ . תארו אלגוריתם מקבילי המשתמש ב- m מעבדים ופותר את הבעיה בזמן $O(\log_2 m)$. הניחו שבמודל החישוב המקבילי אין אפשרות לכתיבה משותפת. ב. נניח כעת שבמודל החישוב המקבילי יש אפשרות לכתיבה משותפת. תארו אלגוריתם מקבילי המשתמש ב- m מעבדים ופותר את הבעיה בזמן קבוע.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתבונן בבעיית הקטע הקריטי עבור שלושה מעבדים. בגרסה זו של הבעיה יכולים להימצא בקטע הקריטי בכל רגע נתון מעבד אחד או שניים, אך לא כל שלושת המעבדים. הסבירו מהם השינויים שצריך לעשות בפרוטוקול המופיע בספר (עמ' 278-279), כדי להתאים אותו לגרסה זו של הבעיה.

שאלה 4 (30 נקודות: 15 נק' לכל סעיף)

נתון כד המכיל n כדורים, כשהפרמטר n אינו ידוע מראש.
הכדורים ממוספרים במספרים 1 עד n (לכל כדור מספר שונה).
בהינתן מספר k , יש לקבוע אם מספר הכדורים שבכד גדול מ- k .
שני סטודנטים למדעי המחשב התבקשו להציע אלגוריתם אקראי לפתרון הבעיה.

הסטודנט הראשון הציע את האלגוריתם הבא :

- (1) בצע m פעמים : $\{m \text{ הוא פרמטר שייקבע על-ידי המשתמש}\}$
(1.1) הוצא באקראי כדור מהכד ;
(1.2) הצב את מספרו של הכדור במשתנה x והחזר את הכדור לכד ;
(1.3) אם $x > k$, אז החזר "כן" ועצור.
(2) החזר "לא".

הסטודנט השני הציע את האלגוריתם הבא :

- (1) $sum \leftarrow 0$
(2) בצע m פעמים : $\{m \text{ הוא פרמטר שייקבע על-ידי המשתמש}\}$
(2.1) הוצא באקראי כדור מהכד ;
(2.2) הצב את מספרו של הכדור במשתנה x והחזר את הכדור לכד ;
(2.3) $sum \leftarrow sum + x$
(3) אם $\frac{sum}{m} > k/2$, אז החזר "כן".
(4) אחרת, החזר "לא".

- א. הסבירו בקצרה את עקרון הפעולה של האלגוריתם הראשון ואת סוג הטעות שהוא עלול לעשות.
מהו הסיכוי לטעות ? איך נקרא אלגוריתם כזה ?
ב. הסבירו בקצרה את עקרון הפעולה של האלגוריתם השני ואת סוג הטעות שהוא עלול לעשות.

שאלה 5 (20 נקודות)

איה היא משתמשת במערכת RSA.
נניח ששני המספרים הראשוניים שאיה בחרה הם $P = 5$ ו- $Q = 7$.
הוכיחו שלכל הזוגות האפשריים של $Priv$ ו- $Publ$ בתחום שבין 0 ל- $R - 1$ מתקיים $Priv = Publ$.

שאלה 6 (שאלת ביונס)

חוו דעתכם על המשפט הבא :
"ניצחון של תוכנת מחשב על רב-אמן בשחמט אינו מעניין יותר מניצחון של בולדוזר בתחרות אולימפית בהרמת משקולות." (נועם חומסקי)