פרים וקרוסקל

שאלה 1

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
כדי להפריך טענה יש לתת דוגמה נגדית. כדי להוכיח יש לתת הסבר משכנע.

א. בגרף קשיר וממושקל שאינו עץ, הקשת הכבדה ביותר אינה משתתפת לעולם בעפ"ים.

ב. בגרף לא מכוון וקשיר, אם בריצת DFS מ-s נוצרים ל-s לפחות 2 בנים אזי הורדת s (וקשתותיו) מהגרף תהפוך אותו ללא-קשיר. → הטענה נכונה

טענה א׳ - לא נכונה - אם הקשת הכבדה ביותר היא היחידה שמקשרת צמתים מסויימים בגרף אזי הקשת הזו בהכרח תשתתף בכל עפ"מ

שאלה 2

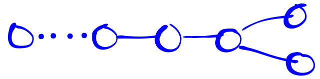
א. K_n הוא גרף לא מכוון בעל n צמתים המכיל את כל הקשתות האפשריות (גרף כזה נקרא

שאלה 2

א. K_n הוא גרף לא מכוון בעל n צמתים המכיל את כל הקשתות האפשריות (גרף כזה נקרא גרף שלם).
תן תנאי הכרחי ומספיק (כפונקציה של n) לקיום מעגל אוילר בגרף זה.

ב. לכל n, תן דוגמה לגרף מכוון אציקלי (DAG) בעל n צמתים, שיש לו **בדיוק** שני מיונים טופולוגיים שונים.

דוגמא:



ג. (10 נקודות)
בשאלה זו נתון גרף לא מכוון, קשיר וממושקל.
לכל אחת מהטענות הבאות כתוב נכון או לא נכון

אם לא כל המשקלים שונים אז לגרף יש לפחות שני עצים פורשים מינימליים שונים.

דוגמא:

ולגרף עפ"מ יחיד

אם יש לכל היותר |V|-1 קשתות אז הגרף הוא עץ.

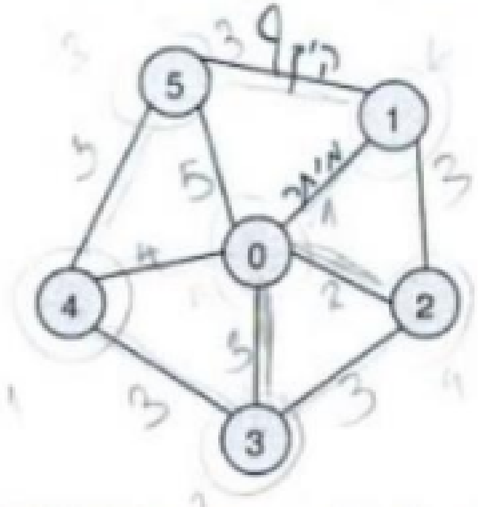
אם ל- |V|-1 הקשתות בעלות המשקלים הנמוכים ביותר יש משקלים שונים, אז לגרף יש עץ פורש מינימלי אחד ויחיד.

שאלה 3

גרף גלגל W_n מוגדר באופן הבא לכל $n\geq3$:

$V(W_n) = \{0,1,\ldots,n\}.$

$E(W_n) = \{(0,i)|\forall i>0\} \cup \{(i,i+1)|\forall 0<i<n\} \cup \{(1,n)\}$



לדוגמא, באיור מתואר גרף גלגל W_5.
לקשתות הסמוכות לצומת 0 קוראים מיתרים.
ליתר הקשתות קוראים קשתות היקף.

1. (2 נק') נתון גרף גלגל W_n. לכל המיתרים משקל 1, לכל קשתות ההיקף משקל 2. כמה עפ"מים שונים לגרף? נמקו את תשובתכם.
2. (3 נק') נתון גרף גלגל W_n. לכל המיתרים משקל 2, לכל קשתות ההיקף משקל 1. כמה עפ"מים שונים לגרף? נמקו את תשובתכם.

3. הסעיפים הבאים מתיחסים לגרף גלגל W_5 שבו למיתר $(0,i)$ משקל i (לכל $i=1,\ldots,5$), ולכל קשתות ההיקף משקל 3.

3א. (2 נק') משקל כל עפ"מ בגרף זה הוא:

3ב. (5 נק') מריצים את האלגוריתם של Prim על הגרף. האם קיימת ריצה שבה הקשת (0,1) היא האחרונה שמצטרפת לעץ הפורש? הקיפו את העיגול המתאים לתשובה הנכונה והשלימו:

שאלה 4

יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון מיוצג ע"י רשימות שכנות, עם משקל שלם $1 \le w(e) \le |E|$ לכל קשת $e \in E$ כך שאין אף זוג קשתות בעלות אותו משקל.
קשת נקראת <u>כבדה</u> אם היא בעלת משקל מקסימלי במעגל פשוט כלשהו ב- G.
תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שימצא את כל הקשתות הכבדות בגרף.

שאלה 5

נתון גרף $G=(V, E)$, וקבוצת קדקודים $U\subseteq V$. מצא בזמן $O(m \log m)$ יער פורש מינימלי, בו בכל עץ ישנו קודקוד אחד בלבד השייך לקבוצה U.

במהלך ביצוע קרוסקל נוסיף בדיקה נוספת אשר מסמנת בכל עץ האם יש קודקוד מ-U ברגע שיש קודקוד מ-U לא נחבר יותר את הקשתות האחרות במהלך בניית עפ"מ של קרוסקל

שאלה 6

נתון גרף לא מכוון וממושקל במשקלים חיוביים ושונים. לגרף נוספת קשת חדשה במשקל זהה למשקל אחת הקשתות בגרף. תן אלגוריתם יעיל הקובע האם לגרף החדש יש עפיים יחיד.

דרך טובה לפתרון - לכבות משקל על אחת הקשתות - הרצת קרוסקל ואז להפוך את הסדר ולהריץ את קרוסקל בשנית - אם נקבל בשני הפעמים אותו העץ. אז נשאר עפ"מ יחיד ואם קיבלנו שני עצים שונים אז יש 2 עפ"מים.

דרך אחרת - לבדוק האם שתי הקשתות נמצאות על אותו מעגל.
עדיף לענות לפי האלגוריתם המקורי.

שאלה 7

(10 נק') נתון גרף G(V,E) לא מכוון, קשיר, עם משקלים אי-שליליים על הקשתות. יהי T עץ פורש מינימום של G, ויהי 'T עץ פורש שאיננו במשקל מינימום (בפרט, 'T כבד מ-T).
הוכיחו שמשקל הקשת הכבדה ביותר ב-'T איננו קטן ממשקל הקשת הכבדה ביותר ב- T.

2. (10 pts.) Given is an undirected connected graph G=(V,E) with non-negative weights on the edges. Let T be a minimum spanning tree of G and let T' be a spanning tree of G that is not minimal (in particular, T' is heavier than T). Prove that the weight of the heaviest edge in T' is not smaller than the weight of the heaviest edge in T.

T T'

e e'

שאלה 8

נתון גרף לא מכוון פשוט וקשיר $G(V,E)$. לכל קשת נתון צבע אחד בלבד: צהוב או כחול. לכל עץ פורש T נגדיר

$$f(T)=|Blue(T)-Yellow(T)|$$

כאשר $Blue(T)$ הוא מספר הקשתות הכחולות ב-T ו-$Yellow(T)$ הוא מספר הקשתות הצהובות.

תן אלגוריתם יעיל המחשב את המקסימום של הפונקציה f.

לסדר את הקשתות - קודם כחולות ואז צהובות ואז להפעיל קרוסקל - נקבל את כל הכחולות שלא סוגרות מעגל

ואח"כ להפך קודם צהובות ואז כחולות.

שאלה 9

נתון גרף לא מכוון קשיר וממושקל במשקלים חיוביים. נתונות גם שתי קשתות $e_1=(x,y), e_2=(z,t)$ (כל הצמתים x,y,z,t הם צמתים שונים). משקלי שתי הקשתות עשויים להיות שווים או שונים. תאר אלגוריתם הבודק האם ייתכן עץ פורש מינימלי המכיל את שתי הקשתות.

שאלה 10

יהא $G=(V,E)$ גרף קשיר, לא מכוון, עם מחיר לכל קשת.
הוכח או הפרך: אם $G_1=(V,E_1)$ ו $G_2=(V,E_2)$ הם שני גרפים קשירים על אותה קבוצת צמתים V עם מחיר לכל קשת, ו $T_1=(V,F_1)$ עץ פורש מינימלי ל- G_1, $T_2=(V,F_2)$ עץ פורש מינימלי ל- G_2 אזי עץ פורש מינימלי בגרף $(V,F_1\cup F_2)$ הוא גם עץ פורש מינימלי של $G=(V,E_1\bigcup E_2)$.
(נניח כאן כי $E_1\cap E_2=\phi$).

שאלה 11

יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון מיוצג ע"י רשימות שכנות, עם משקל שלם $w(e)$ לכל קשת $e\in E$.
לכל מספר ממשי x, נסמן ב- $G^{(x)}=(V,E^{(x)})$ את תת הגרף המורכב מכל הקשתות שמשקלן לכל היותר x. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המחשב את ה- x המקסימלי עבורו $G^{(x)}$ חסר מעגלים.

שאלה 12

נתון גרף קשיר, לא מכוון וממושקל $G=(V,E)$. תארו אלגוריתם יעיל אשר בודק האם ל- G יש עפ"מ יחיד. מספיק למצוא אלגוריתם שסיבוכיות הזמן שלו הינה $O(|E|\log|V|)$.

שאלה 13

נתון גרף $G=(V, E)$ לא מכוון, קשיר וממושקל. מצא עץ פורש בעל משקל מינימלי שני הכי טוב ב-$O(m \log n)$.

שאלה 14

נתון גרף קשיר לא מכוון $G=(V, E)$ ממושקל, ועץ פורש מינימלי T בו. תן אלגוריתם המוצא עץ פורש מינימום T' ב-G, כך שמספר הקשתות המשותפות ל-T ול-T' יהיה מינימלי, בזמן $O(m \log m)$.

שאלה 15

נתון $G=(V, E)$ גרף לא מכוון, ממושקל, ועץ פורש מינימלי T בתוכו. מוסיפים ל-G קודקוד חדש $w \in V$, ושתי קשתות: (w, u), (w, v). כאשר $u, v \in V$. הצע אלגוריתם המוצא עץ פורש מינימלי בגרף החדש ב-$O(m)$.

שאלה 16

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון ממושקל וקשיר, ותהי $w: E \to R$ פונקצית משקל על הקשתות.

הגדרות:

- בהינתן T עץ פורש כלשהו של G, נגדיר את $\hat{w}(T)$ להיות המשקל המקסימלי של קשת ב-T.
- T הוא עץ **חסכן** של גרף G אם T הוא עץ פורש בעל $\hat{w}(T)$ מינימאלי מבין מכל העצים הפורשים את G.

א. הוכיחו כי עץ פורש מינימאלי של G הוא בהכרח עץ חסכן של G.

ב. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: אם T הוא עץ חסכן של G, אזי T הוא עץ פורש מינימאלי של G.

שאלה 17

יהיו $G=(V,E)$ גרף לא מכוון וקשיר ו- $w:E\to\mathbb{R}$ פונקציית משקל על צלעות הגרף.

<u>הוכח או הפרך את הטענה הבאה:</u>

אם בגרף G קיימת צלע יחידה e בעלת משקל שלילי (כל שאר הצלעות במשקלות אי שליליים), אזי **<u>כל</u>** עץ פורש מינימום של G מכיל את e.

שאלה 18

יהי $G=(V,E)$ גרף **לא מכוון** קשיר עם פונקצית משקל $w:E\rightarrow\Re$, v קודקוד בגרף ו- e צלע קלה ביותר מבין הצלעות הנוגעות ב- v. הוכיחו כי קיים עץ פורש מינימום של G המכיל את e.

שאלה 19

יהי $G = (V,E)$ גרף קשיר לא מכוון עם משקולות על קשתות ויהיו $T_1 = (V,E_1)$ ו- $T_2 = (V,E_2)$ עצים פורשים מינימום שונים של G.

הוכיחו כי בגרף האיחוד $(V, E_1 \cup E_2)$ קיים מעגל בו לפחות זוג קשתות אחד בעל משקל זהה.

שאלה 20

נתון $G=(V,E)$ גרף לא מכוון ו- $w:E\rightarrow R$, פונקצית משקל על קשתות הגרף. יהי T עץ פורש מינימאלי של G תחת פונקצית המשקל w . נגדיר את $w':E\rightarrow R$ להיות פונקצית משקל באופן הבא: $w'(e)=w(e)+c$, כאשר $c\in R$ קבוע כלשהו. האם T הוא עץ פורש מינימאלי של G תחת פונקצית המשקל w' ?

שאלה 21

נתון $G=(V,E)$ גרף לא מכוון ו- $w:E\rightarrow R$, פונקצית משקל על קשתות הגרף. מצא עץ פורש מקסימאלי של G .

שאלה 22

יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון עם פונקצית משקל אי שלילית $w:E\to R^{+}$, מוגדרת על קשתותיו.
תאר/י אלגוריתם יעל ככל האפשר למציאת קבוצת קשתות $E^{'}$ שסכום משקליהן מינימלי כך שבגרף שמתקבל מ- G ע"י זריקת קשתות $E^{'}$ אין מעגלים.

על בסיס הלמה

שאלה 23

למת הפונקציה המונוטונית

יהי G גרף לא מכוון, תהי w פונקצית משקל על הצלעות, ותהי f פונקציה עולה ממש
אם נגדיר פונקצית משקל חדשה w' באופן הבא:

$$w'(e) = f(w(e))$$

אזי עץ פורש של G הינו מינימלי ביחס ל-w' אם"ם הוא מינימלי ביחס ל-w.

הוכח את המשפט

משפט:

יהיו T_1 ו-T_2 עצים פורשים מינימליים של גרף G ויהיו:

- $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_{n-1}$ המשקלים של צלעות T_1,
- $y_1 \le y_2 \le \dots \le y_{n-1}$ המשקלים של צלעות T_2.

אז $x_i = y_i$ לכל i. כלומר, שתי הסדרות זהות.

דייקסטרה

שאלה 24

נתון גרף מכוון וממושקל במשקלים שליליים בלבד. נתון גם צומת התחלה s.
תן שני אלגוריתמים לחישוב הדרך הטובה **ביותר** מ- s לכל צומת בגרף עבור שני המקרים הבאים:

1. הדרך מוגדרת להיות אורך (משקל) המסלול <u>הארוך</u> ביותר. — להריץ דייקסטרה על ערכים מוחלטים
2. הדרך מוגדרת להיות אורך (משקל) המסלול <u>הקצר</u> ביותר. — בלמן-פורד

יש לשים לב כי **לכל צומת נתון** (כלומר ידוע מראש) שאורך המסלול הקצר ביותר אליו וגם אורך המסלול הארוך ביותר אליו **שניהם <u>מספרים ממשיים</u>** (כלומר לא ∞ – או ∞)

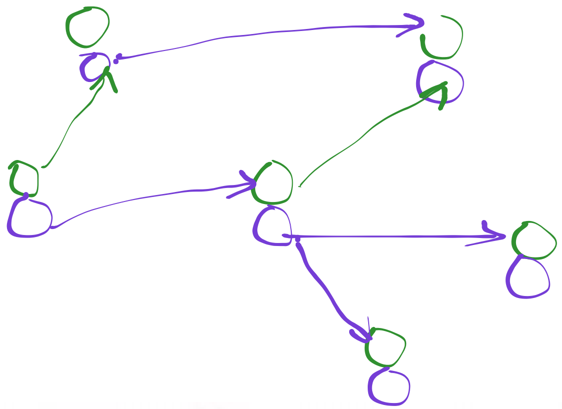
הוספת ערך קבוע לכל הקשתות — עלול לשבש את ריצת דייקסטרה
כי פירוש במשקלים החדשים הוא גם על פירוש בגודל עם המשקלים השליליים.

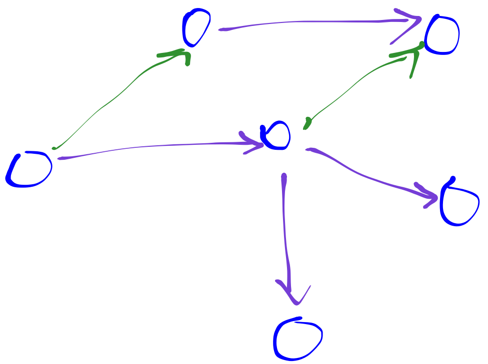
נתון גרף מכוון עם משקלים כלשהם על הקשתות, חסר מעגלים מכוונים שליליים.
הציעו אלגוריתם יעיל למציאת אורך המסלול הקצר ביותר בין שני צמתים כלשהם בגרף. כלומר, על האלגוריתם למצוא מהו הערך הנמוך ביותר, d, כך שקיים זוג צמתים u,v עבורו אורך המסלול מ-u ל-v הוא d.
לדוגמא, עבור הגרף שבשאלה 2.ג אורך המסלול הקצר ביותר בגרף הוא 4- (זהו המסלול מצומת 4 לצומת 2).
הסבירו בקצרה מדוע האלגוריתם נכון, ציינו ונמקו את סיבוכיות זמן הריצה.

הוספת צומת חדשה s לגרף - לחבר לכל הצמתים בגרף עם משקלים 0
בעזרת בלמן-פורד מציאת מצ"מ - s את המרחק הכי קצר בגרף החדש
המרחק הכי שלילי שיש נשמר את המסלול עד צ"מ אחת לפני s - וזהו בדיוק המסלול שמחפשים

* אם יש מעגל שלילי - אפשר להיכנס ללולאה אינסופית.

שאלה 26





נתון גרף $G=(V,E)$ מכוון, עם משקלים חיוביים על הקשתות. כל קשת צבועה בירוק או בסגול. נתון צומת $s \in V$. הציעו אלגוריתם יעיל למציאת המרחקים הקצרים ביותר מהצומת s לכל צומת אחר בגרף, תחת המגבלה **שאין במק"ב שתי קשתות עוקבות מאותו צבע**. במילים אחרות, לכל $v \in V$ יש למצוא את אורך המסלול הקצר ביותר מ-s ל-v המורכב מקשתות ירוקות וסגולות לסירוגין. שימו לב, הקשת הראשונה במסלול יכולה להיות ירוקה או סגולה. תארו את האלגוריתם, הסבירו במספר שורות את נכונותו, ציינו ונמקו את סיבוכיות הזמן.

כל צומת הופך ל-2 צמתים - הקשתות יוצאות עכשיו מהצמתים בצבע
של הקשת ונכנסות לצמתים בצבע השני.
נריץ דייקסטרה פעמיים - פעם אחת מצומת ירוק ופעם מסגול.

שאלה 27

יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון עם משקלות חיוביים על הקשתות, המיצג ע"י רשימות שכנות. הגרף מייצג מפת כבישים, כשמשקל כל קשת הוא אורך הקשת שהיא מייצגת.
בחלק מהצמתים נמצאות תחנות דלק.
תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המוצא לכל צומת בגרף תחנת דלק הכי קרובה ואת המרחק אליה.

שאלה 28

פרופ׳ שושני נוסע לחופשה באילת בתום תקופת הבחינות. למכונית שלו מיכל דלק זעיר, המאפשר נסיעה למרחק 30 קילומטרים בלבד. בידיו מפה מדויקת של כבישים ותחנות דלק. המפה היא בצורת גרף מכוון וממושקל, כאשר הקשתות הן כבישים, המשקלות הם מרחקים, ועל גבי חלק מהצמתים יש תחנות דלק. עליך לספק לפרופ׳ שושני (שאינו בקיא באלגוריתמים בתורת הגרפים) אלגוריתם יעיל למציאת מסלול נסיעה באורך מינימלי מחיפה לאילת (שני צמתים בגרף), באופן שהמסלול לא יעבור יותר מ-30 קילומטרים בין תחנת דלק אחת לבאה. (ניתן להניח שפרופ׳ שושני מתחיל את מסעו עם מיכל מלא, ומוכן להגיע ליעדו עם מיכל ריק

שאלה 29

נתונה רשת כבישים המתוארת על-ידי גרף $G=(V, E)$ מכוון, עם משקלים אי-שליליים על הקשתות. משקל הקשת (u, v) מציין את המרחק מעיר u לעיר v.
משאית עם מטען נוסעת בכבישים באילוצים הבאים: גובה משאית ללא מטען הוא 2 מטר, וגובה משאית עם מטען הוא 4 מטר.

הצמתים V מסוגים לשני סוגים: צמתים שאם משאית עם מטען עוברת בהם, היא מורידה בהם את כל המטען, וצמתים רגילים, שאינם משנים את המטען במשאית.

הקשתות E מסווגות אף הן לשני סוגים: קשתות שיש בהן גשר שגובהו 3 מטר, וקשתות שאין בהם גשר (משאית עם מטען לא יכולה לעבור בקשר בה יש גשר).

הצע אלגוריתם, שבהינתן צמתים $s, t \in V$ צמתים רגילים, מוצא את משקל המסלול הקצר ביותר (הקל ביותר) מ-s ל-t, כאשר המשאית יוצאת לדרכה מ-s.

נבנה G' בלי קשתות הגשר מהגרף המקורי G.
לכל צומת הורדת מטען ב-G' יש צומת במשקל 0 לצומת הורדת מטען ב-G.
המסלול הקצר ביותר מ-s ל-t/t' הוא מה שמחפשים.
אם על המשאית כלל אין מטען - דייקסטרה רגיל

שאלה 30

נתון גרף מכוון $G=(V, E)$, ממושקל, וקבוצת צמתים $U\subseteq V$, ושני צמתים s ו-t. תאר אלגוריתם המוצא את אורך המסלול הקל ביותר מ-s ל-t, העובר דרך צומת אחת לפחות ב-U.

שאלה 31

נתון גרף לא מכוון ממושקל $G=(V, E)$, שני צמתים $u, v\in V$, וקשת $e\in E$. תאר אלגוריתם המוצא מסלול קל ביותר מ-u ל-v, המשתמש ב-e.

שאלה 32

נתונים גרף $G=(V, E)$ לא מכוון עם משקלים חיוביים על הקשתות, ונתונה תת קבוצה של צמתים $U\subseteq V$, ושני צמתים $u, v\in V$ מצא מסלול P מ-u ל-v כך ש:

19. P משתמש לפחות בצומת אחת מ-U.

ב. המשקל של P הוא מינימלי הין כל המסלולים המקיימים את סעיף א׳.

שאלה 33

- נתון G מכוון, $w: E \rightarrow R$, $s, t \in V$, כל קשת צבועה אדום / כחול. למצוא מק״ב מ-s ל-t בעל מספר זוגי של קשתות אדומות.