

מבנה הבחינה :

- * יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- * משקל כל שאלה 25% .
- * אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- * יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה, אלא אם נאמר בשאלה שאין צורך לנמק.
 - * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
 - * אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
 - * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
-

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

5 נק' א. תהיינה X, Y, Z קבוצות, החלקיות לקבוצה אוניברסלית כלשהי U .

$$\text{הוכח: } X \cap Z' = (X \cap Y \cap Z') \cup (X \cap Y' \cap Z')$$

סעיפים ב, ג, ד של השאלה עוסקים ביחס (רלציה) R מעל $P(N)$, המוגדר כך:

עבור $X, Y \in P(N)$,

$(X, Y) \in R$ אם ורק אם $X - Y$ היא קבוצה **סופית** (אפשר ריקה).

5 נק' ב. הוכח או הפרך: אם $(N, X) \in R$ אז X היא קבוצה אינסופית.

5 נק' ג. הוכח או הפרך: אם X היא קבוצה אינסופית אז $(N, X) \in R$.

10 נק' ד. הוכח ש- R הוא יחס טרנזיטיבי.

כדאי להיעזר בסעיף א. הוכחות בנפנופי ידיים לא יתקבלו.

שאלה 2

13 נק' א. תהי K קבוצת הסדרות האינסופיות של מספרים ממשיים:

כל איבר של K הוא סדרה אינסופית מהצורה $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$,

כאשר לכל n טבעי, a_n הוא מספר ממשי כלשהו.

הוכיחו שעוצמת K היא C .

הדרכה: כל איבר של K הוא בעצם פונקציה מהקבוצה... אל הקבוצה...

השלימו והיעזרו בטענה מפרק 5.

12 נק' ב. סדרה של מספרים נקראת עולה-ממש אם לכל n טבעי, $a_n < a_{n+1}$.

לדוגמא, הסדרה $(2, 4, 6, 8, \dots)$ היא סדרה עולה-ממש,

והסדרה $(2, 2, 4, 4, 6, 6, 8, 8, \dots)$ אינה עולה-ממש.

נתבונן כעת רק בסדרות אינסופיות של מספרים ממשיים, שהן עולות-ממש.

נסמן את קבוצת כל הסדרות האלה ב- M . מהי עוצמת M ? הוכיחו.

שאלה 3

נתבונן בסדרות סופיות של סימנים, הלקוחים מתוך 6 סימנים אלה:
הספרות 0,1, וארבעה סימני פעולה: $+$, $-$, $*$, $/$
ובכפוף לתנאים הבאים:

(i) הסדרה נפתחת ומסתיימת בספרה.

(ii) אין הופעות צמודות של סימני פעולה.

הנה שתי סדרות העונות על התנאים:

$$011000, \quad 001+001-10/1000$$

הנה ארבע סדרות שאינן עונות על התנאים:

$$-100, \quad 100+-10, \quad 10100*, \quad \text{הסדרה הריקה}$$

יהי a_n מספר הסדרות העונות על התנאים, שבהן בדיוק n סימנים.

(12 נק') א. כתבי יחס נסיגה עבור a_n .

מצאי ללא שימוש ביחס הנסיגה את a_0, a_1, a_2, a_3 .

בדקי בעזרת הערכים הללו את יחס הנסיגה שרשמת (שתי בדיקות).

(13 נק') ב. פתרי את יחס הנסיגה וקבלי נוסחה מפורשת עבור a_n . בדקי את התוצאה

בעזרת השוואה עם מספר ערכים מבין a_0, a_1, a_2, a_3 שחישבת.

שאלה 4

מצאו כמה מספרים שלמים n , בתחום $1 \leq n \leq 2100$, מקיימים:
 n מתחלק ב-4, ואינו מתחלק באף אחד משלושת המספרים 5, 6, 7.
הדרכה: בחרו את הקבוצה U בצורה שלא תקשה עליכם את החישוב.

שאלה 5 בעמוד הבא

שאלה 5

נתבונן בשפה של תחשיב הפרדיקטים, שבה סימני משתנים x, y, z , סימני קבועים a, b , סימני פונקציות f, m , סימן פרדיקט חד-מקומי C וסימן פרדיקט דו-מקומי S (הבחירה באותיות אלו היא בשל הפירוש שיוגדר מיד).
 בשפה נמצאים כרגיל גם הקשרים הלוגיים: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \sim$, סימני הסוגריים, והסימן $" "$, $" "$ (פסיק). **פרט לסימנים הללו אין עוד סימנים בשפה.**

תהי J אינטרפרטציה של השפה, שתחומה הוא קבוצת בני האדם, ובה a מתפרש כאדם מסוים ויחיד בעולם ששמו אברהם, b מתפרש כאישה מסוימת ויחידה בעולם ששמה בלהה, הסימן f מתפרש כפונקציה המתאימה לכל אדם את אביו, הסימן m מתפרש כפונקציה המתאימה לכל אדם את אימו.
 $C(x)$ מתפרש כתכונה " x אוהב אוכל סיני",
 $S(x, y)$ מתפרש כ- " x הוא אח או אחות של y ".

בכל סעיף, רשום תבנית בשפה הנ"ל, שהפירוש שלה ב- J מביע את מה שנאמר באותו סעיף.
אין צורך לנמק.

- (2 נק') א. אברהם ובלהה הם אחים.
- (3 נק') ב. אברהם ובלהה אוהבים אוכל סיני.
- (4 נק') ג. אבא של בלהה לא אוהב אוכל סיני.
- (4 נק') ד. לא כל בני האדם אוהבים אוכל סיני.
- (4 נק') ה. לאברהם יש אח או אחות שאוהב/ת אוכל סיני.
- (4 נק') ו. לאברהם יש בן-דוד (*cousin*), מצד אימו של אברהם.
- הבהרה: "בן-דוד" יכול להיות גם בת-דוד, בן-דודה, או בת-דודה.
- (4 נק') ז. כל מי שאוהב אוכל סיני - לפחות אחד מהוריו אוהב אוכל סיני.

אין להוסיף סימנים לשפה - יש להביע את המבוקש בעזרת הסימנים הנתונים!
 בפרט, **סימן השוויון אינו נמצא בשפה!**
 ניקוד: סעיף א' 2 נק', סעיף ב' 3 נק', כל אחד מהסעיפים האחרים 4 נק'.

בהצלחה!