מבוא לטורים פורמליים ופונקציות יוצרות

כתב: איתי הראבן

מבוא זה הוא במידה מסוימת חומר-עזר, שנועד לסייע בהבנת המושגים, ובמידה מסוימת חומר העשרה, שנועד להוסיף. מכיון שלוח הזמנים בקורס עמוס למדי, ויש די והותר נושאים להכיר, **אין כאן כל כוונה לחייב אתכם בדחיסת חומר לימוד נוסף**. אתם מוזמנים לעיין בדפים אלה לפי טעמכם: או בצורה מאד חפוזה או בקריאה יסודית. מי שכבר עבר על נושא פונקציות יוצרות וחי איתו בשלום, מוזמן לגשת ישר לסעיף 4 ולסעיף 5 ולעבור על החישובים שם כפשוטם, תוך התעלמות מההפניות לטענות קודמות המופיעות שם. מצד שני, אם החישובים בסעיפים הללו אינם ברורים, או אם הם ברורים אבל מציקה לכם השאלה איך עובדים עם טורים אינסופיים תוך התעלמות מהשאלה אם הם מתכנסים, אתם מוזמנים לעיין בדפים אלה מתחילתם.

כאמור, הכוונה אינה להוסיף חומר: לצורך הבחינה כל שנדרש הוא לדעת לעבוד עם פונקציות יוצרות באופן מעשי, בדומה למה שנעשה בספר. נימוקים הקשורים להתכנסות, או טענות על טורים פורמליים כגון משפט 4 שבקובץ זה - **לא יידרשו בבחינה**.

תוכן העניינים

1. ייצוג סדרת מספרים ע"י טור פורמלי 2
2. אריתמטיקה של טורים פורמליים 4
3. הקשר בין זהויות בטורי חזקות לזהויות בטורים פורמליים 8
4. שתי נוסחאות בסיסיות 12
5. קבלת זהות קומבינטורית מתוך זהות אלגברית 14

1. ייצוג סדרת מספרים ע"י טור פורמלי

בתחומים שונים במתמטיקה אנו נתקלים לעתים בשאלות, שהתשובה עליהן נתונה ע"י סדרה אינסופית של מספרים.

דוגמא מתחום הקומבינטוריקה: מהו מספר הדרכים לבחור k כדורים, ללא חשיבות לסדר הבחירה, אם כל כדור הוא באחד מ- 3 צבעים נתונים, וכדורים בעלי אותו צבע נחשבים זהים?

התשובה, כפי שאנו יודעים, היא $D(3,k)=\binom{k+2}{2}=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$.

אם נציב בזה אחר זה $k=0,1,2,\dots$, נקבל את הסדרה $1,3,6,10,15,\dots$.

דוגמא קומבינטורית נוספת: כמה תת-קבוצות בגודל k יש לקבוצה בת 6 איברים?

תשובה: $\binom{6}{k}$.

סדרת הערכים המתקבלת עבור $k=0,1,2,\dots$ היא: $1,\ 6,\ 15,\ 20,\ 15,\ 6,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\dots$.

נשים לב, שלשאלה "כמה תת-קבוצות בגודל k יש לקבוצה בת 6 איברים" יש מובן עבור **כל** ערך טבעי של k, ולכל k הגדול מ- 6 התשובה היא כמובן 0.

זאת ועוד, הביטוי $\binom{6}{k}$ מהווה תשובה נכונה לשאלה זו, **לכל** k טבעי, בזכות העובדה, שערכם של המקדמים הבינומיים החריגים מוגדר להיות 0 ("קומבינטוריקה" עמ' 30).

נוסחה מפורשת כגון $D(3,k)$ או $\binom{6}{k}$ מביעה את התשובה, התלויה ב- k, בצורה קצרה וברורה.
הגעה לנוסחה כזו היא לרוב מטרת החישוב שלנו בשאלות קומבינטוריות. עם זאת, מסיבות שונות, יש לנו לעתים עניין בתיאור אחר של סדרת מספרים. נדגים תיאור זה עבור שתי הסדרות שרשמנו:

את הסדרה $(1,3,6,10,15,\dots)$ נייצג ע"י הביטוי

$$1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+\dots \qquad (*)$$

את הסדרה $(1,\ 6,\ 15,\ 20,\ 15,\ 6,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\dots)$ נייצג ע"י הביטוי

$$1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+1x^6+0x^7+0x^8+0x^9+\dots \qquad (**)$$

כללית, את הסדרה האינסופית $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ נייצג ע"י הביטוי

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots ,$$

שאף הוא בעל אורך אינסופי. האיבר a_k של הסדרה מופיע כמקדם של x^k בביטוי החדש.

נוכל לרשום ביטוי זה בקיצור כך: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

ביטוי כזה נקרא **טור פורמלי**, ואנו ניתן לביטויים כאלה שמות כגון $f(x)$. למרות שהסימון הוא דמוי-פונקציה, הטור הפורמלי אינו פונקציה, אלא פשוט דרך אחרת לרשום את אברי הסדרה. הכינוי **טור פורמלי** נועד להדגיש את העובדה, שאין לנו עניין בשאלות כגון האם הטור מתכנס עבור ערכים מסוימים של x, מהו ערכו עבור $x = 7$, וכדומה. הטור הפורמלי הוא פשוט דרך לרשום סדרה אינסופית של מספרים ממשיים. סימני החיבור הם תחליף לפסיקים המשמשים כחוצצים בתיאור אברי סדרה, והחזקות של המשתנה הפורמלי x משמשות פשוט כמצייני מקום בסדרה.

שני טורים פורמליים נחשבים שווים אם המקדמים שלהם שווים זה לזה בהתאמה, כלומר אם הם מייצגים אותה סדרה. הגדרה זו של שוויון בין טורים פורמליים מחדדת פן נוסף של ההבדל בין טור פורמלי לפונקציה: כזכור, שתי פונקציות, f, g, נקראות שוות אם יש לשתיהן אותו תחום הגדרה ואותו טווח, ולכל x בתחום ההגדרה, $f(x) = g(x)$. לעומת זאת, טור פורמלי אינו קובע בהכרח ערך כלשהו לאיזשהו x.

כל סדרה של מספרים ממשיים ניתנת לכתיבה כטור פורמלי. למשל, לסדרה

$a_k = 2^{k^2} = (1, 2, 16, 512, \ldots)$ מתאים הטור הפורמלי $1 + 2x + 16x^2 + 512x^3 + \ldots$.

כפונקציה, טור זה מתכנס רק עבור $x = 0$ (לכל $x \neq 0$ הטור הזה אינו מסתכם למספר ממשי כלשהו), אך עובדה זו אינה רלבנטית כלל לטור הפורמלי: הטור הפורמלי הוא כאמור פשוט צורת כתיבה אחרת לסדרה.

לשם מה לרשום את הסדרה כטור, אם איננו מתכוונים להציב ערכים במקום המשתנה x? הסיבה העיקרית היא פעולות שונות שנגדיר בין סדרות. פעולות אלו דומות לפעולות מוכרות בין פונקציות, ולפחות פעולת הכפל נראית טבעית בכתיב של טורים יותר מאשר בכתיב של סדרות.

לפני שנגדיר את הפעולות, הנה כמה הסכמי כתיב מקוצר, שאף הם טבעיים כאשר אנו רושמים את הסדרה כטור.

כצעד ראשון לחיסכון, נסכים להשמיט בכתיבת הטור הפורמלי גורמים שהמקדם שלהם הוא 0. למשל, את הפונקציה (**) שבעמוד הקודם נרשום בקיצור:

$$1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + 1x^6$$

אנו מסכימים אפוא, שכל חזקה של x שאינה מופיעה בטור הפורמלי, מייצגת איבר השווה ל- 0 בַּמָקום המתאים בסדרה.

דוגמאות נוספות:

- הסדרה $(0, 0, 5, 0, 0, 0\ldots)$ מיוצגת ע״י ה״טור״ $5x^2$.
- הביטוי $1+x$ מייצג את הסדרה $(1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$
  כאן רשמנו בקיצור $1+x$ במקום $1+1x$: זהו עוד קיצור מובן שנרצה לאמץ.
- הסדרה $(1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$ מיוצגת ע״י הטור הפורמלי $1+1x+1x^2+1x^3+1x^4+\ldots$.
  בקיצור: $1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$, ועוד יותר בקיצור: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$.
- סימן מינוס לפני מקדם בטור יתפרש באופן מובן. למשל:
  הביטוי $1+9x-5x^3$ פירושו $1+9x+0x^2+(-5)x^3+0x^4+\ldots$.

2. אריתמטיקה של טורים פורמליים

נגדיר פעולות חשבוניות בין טורים פורמליים, הדומות לפעולות המקובלות בין פונקציות של מספרים ממשיים.

הגדרה (חיבור וחיסור של טורים פורמליים):

אם $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$ ו- $g(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots$

אז נאמר שסכום שני הטורים הוא:

$$f(x)+g(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+(a_3+b_3)x^3+\ldots$$

והפרש הטורים הוא:

$$f(x)-g(x) = (a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+(a_3-b_3)x^3+\ldots$$

ובקיצור:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \pm \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i \pm b_i) x^i$$

דוגמא:

$$(1+2x+5x^3) + (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\ldots) = 2+3x+x^2+6x^3+x^4+x^5+\ldots$$

ההגדרה אינה מפתיעה: כך בדיוק היינו מחברים את הביטויים אילו הם היו טורים מתכנסים, בתוך תחום בו שניהם מתכנסים (מי שאינו מכיר את המושג טור מתכנס, יסכים לפחות, שבדומה לכך היינו מחברים אילו היה בכל אחת מהפונקציות רק מספר סופי של מחוברים). אך כאמור, הביטויים שלפנינו אינם פונקציות, אלא טורים פורמליים, והנוסחאות לחיבור וחיסור אינן משפטים אלא **הגדרות** של חיבור וחיסור של טורים פורמליים.

השימוש בסימן + לחיבור טורים מתיישב עם הופעת סימן החיבור בתוך טור פורמלי:

למשל, את הביטוי $1+2x+5x^4+3x^7$ ניתן לקרוא כטור פורמלי, או, למשל, כסכום של שני טורים פורמליים: הטור הפורמלי $1+2x$ והטור הפורמלי $5x^4+3x^7$ (ויש כמובן דרכים נוספות לפרק את הטור לסכום טורים). הגדרת חיבור טורים פורמליים מבטיחה שכל הדרכים לקרוא את הביטוי נותנות אותה תוצאה, והיא הטור הפורמלי $1+2x+5x^4+3x^7$.

כפל טורים פורמליים מוגדר אף הוא בדומה לכפל פונקציות "אמיתיות".

נתחיל בדוגמא שבה שני הטורים סופיים:

$$
\begin{aligned}
&(1+2x+5x^2)\cdot(1+4x+2x^2)\\
&\quad=1+(1\cdot4+2\cdot1)x+(1\cdot2+2\cdot4+5\cdot1)x^2+(2\cdot2+5\cdot4)x^3+5\cdot2x^4\\
&\quad\quad=1+6x+15x^2+24x^3+10x^4
\end{aligned}
$$

לפני שתמשיכו לקרוא, אנא עברו ביסודיות על החישוב הזה, הוא מדגים פעולה שנחזור ונעשה בהמשך. וודאו שברור לכם איך התקבל כל אחד מהמקדמים בתוצאה!

במחשבה ראשונה נדמה אולי שניסיון לכפול בצורה דומה שני טורים **אינסופיים** ייתן לנו מקדמים שכל אחד מהם הוא טור אינסופי של מספרים – אך הדבר אינו כך:

כפל שני טורים פורמליים אינסופיים נותן אמנם טור פורמלי אינסופי, אך כל מקדם בטור זה מוגדר היטב ללא שאלות של התכנסות: התרומות למקדם של x^k באות רק מחזקות הקטנות או שוות k בשני הטורים המוכפלים, ויש רק מספר סופי של איברים כאלה.

דוגמא:

$$
\begin{aligned}
&(1+x+x^2+x^3+\ldots)\cdot(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots)\\
&\quad=1\cdot1+(1\cdot2+1\cdot1)x+(1\cdot3+1\cdot2+1\cdot1)x^2+(1\cdot4+1\cdot3+1\cdot2+1\cdot1)x^3+\ldots\\
&\quad\quad=1+3x+6x^2+10x^3+\ldots
\end{aligned}
$$

מדוגמאות אלו אנו למדים כיצד ראוי להגדיר כפל של טורים פורמליים.

הגדרה (כפל טורים פורמליים):

אם $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$ ו- $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots$

אז $f(x)\cdot g(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots$,

כאשר לכל k טבעי,

$$c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+a_2b_{k-2}+\ldots+a_{k-1}b_1+a_kb_0=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}$$

ובקיצור:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) x^k$$

גם כאן נשים לב, שכך בדיוק היינו כופלים טורים מתכנסים בתוך תחום בו שניהם מתכנסים (מי שאינו מכיר את המושג טור מתכנס יסכים לפחות, שכך בדיוק אנו כופלים טורים סופיים).

דוגמא נוספת:

$$(1-x)\cdot\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

$$= (1-x)\cdot(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)$$

$$= a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + (a_3 - a_2)x^3 + \ldots$$

$$= a_0 + \sum_{i=0}^{\infty}(a_{i+1} - a_i)x^{i+1}$$

מקרה פרטי:

$$(1-x)\cdot(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$$

$$= 1 + (1-1)x + (1-1)x^2 + (1-1)x^3 + \ldots = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \ldots = 1$$

משפט 1 (תכונות החיבור והכפל):

יהיו f,g,h טורים פורמליים. נסמן (מקרה פרטי של הקיצורים שהגדרנו בסעיף הקודם):

$$1 = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots \quad , \quad 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots$$

וכן נסמן ב- $(-f)$ את הטור המתקבל ע"י החלפת סימני כל המקדמים ב- f.

אז:

א. החיבור קיבוצי וחילופי, 0 נייטרלי בחיבור, ולכל f, $(-f)$ הוא הנגדי של f ביחס לחיבור:

$$0 + f = f + 0 = f \quad , \quad f + g = g + f \quad , \quad (f+g)+h = f+(g+h)$$

$$f + (-f) = (-f) + f = 0$$

ב. הכפל קיבוצי וחילופי, ו- 1 נייטרלי בכפל:

$$1\cdot f = f\cdot 1 = f \quad , \quad (f\cdot g)\cdot h = f\cdot(g\cdot h) \quad , \quad f\cdot g = g\cdot f$$

ג. חוק פילוג - הכפל דיסטריבוטיבי מעל החיבור והחיסור:

$$f\cdot(g \pm h) = f\cdot g \pm f\cdot h$$

הוכחה:

התכונות מתקבלות ישר מתוך ההגדרות. למשל נוכיח את חילופיות הכפל:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) x^k$$

נחליף משתנה סכימה $j = k - i$, וניעזר בחילופיות הכפל בממשיים:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j\right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} b_j a_{k-j}\right) x^k$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)$$

הוכחת התכונות האחרות – דומה.

הערה: מבנה אלגברי בו מוגדרות שתי פעולות המקיימות את התכונות שבמשפט 1 נקרא **חוג חילופי עם יחידה**. להלן עוד שתי תכונות חשובות של חוג הטורים הפורמליים.

משפט 2 (בחוג הטורים הפורמליים אין מחלקי אפס):

אם f,g הם טורים פורמליים המקיימים $f\cdot g = 0$ אז $f = 0$ או $g = 0$ (או שניהם).

<u>הוכחה</u>:

נסמן $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$, $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$.

נניח בשלילה ששני הטורים f,g שונים מאפס. יהי a_k המקדם **הראשון** השונה מאפס ב- f,

ויהי a_m המקדם **הראשון** השונה מאפס ב- g. נתבונן במקדם של x^{k+m} במכפלה $f\cdot g$

(השלימי את ההוכחה בעצמך: חשבי מקדם זה והראי שהוא שונה מאפס, בסתירה לנתון).

משפט 3 (צמצום בכפל טורים פורמליים):

אם f,g,h הם טורים פורמליים המקיימים $f\cdot h = g\cdot h$ ו- $h \neq 0$ אז $f = g$.

הוכחה: נעביר אגפים: $f\cdot h - g\cdot h = 0$.

בעזרת חוק הפילוג (משפט 1ג) נקבל: $(f-g)\cdot h = 0$.

בעזרת משפט 2 והנתון $h \neq 0$ אנו מקבלים: $f - g = 0$. מכאן: $f = g$.

הגדרה (חילוק טורים פורמליים):

אם f,g,h הם טורים פורמליים המקיימים $f\cdot g = h$ אז נאמר ש- $f = h/g$ וכן $g = h/f$.

למשל, לאור השוויון $(1-x)\cdot(1+x+x^2+x^3+\dots) = 1$ אותו הוכחנו לפני משפט 1,

נוכל לומר: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

נשים לב שפעולת החילוק אינה מוגדרת לכל שני טורים:

למשל, מהגדרת כפל טורים פורמליים קל לראות, **שלא קיים** טור פורמלי $f(x)$ עבורו $x \cdot f(x) = 1$ (מדוע? נמק!). מכיוון שלא קיים טור פורמלי, שמכפלתו ב- x שווה 1, הרי שהביטוי $1/x$ אינו מייצג טור פורמלי. קבוצת הטורים הפורמליים דומה במובן זה לקבוצת המספרים הטבעיים: ניתן לחבר, לחסר ולכפול, אך החילוק מוגדר רק בחלק מהמקרים (אגב, גם קבוצת המספרים הטבעיים, עם פעולות החיבור והכפל, היא חוג חילופי עם יחידה וללא מחלקי אפס). מצד שני, ממשפט 3 נובע, **שאם** ניתן לחלק שני טורים פורמליים אז תוצאת החילוק מוגדרת היטב: **אין יותר מטור אחד** השווה לביטוי $h(x) / g(x)$.

תרגיל:

יהי $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$.

הוכח: הטור הפורמלי $1/f$ קיים אם ורק אם $a_0 \neq 0$.

הגדרה (חזקה טבעית של טור פורמלי):

אם $f(x)$ הוא טור פורמלי, $(f(x))^n$ הוא סימון מקוצר עבור $f(x) \cdot f(x) \cdot \ldots \cdot f(x)$ (n גורמים).

למשל:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^3$$
$$= (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$$

3. הקשר בין זהויות בטורי חזקות לזהויות בטורים פורמליים

בעבודה עם טורים פורמליים נזדקק לזהויות שונות, כגון הזהות $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, שהוכחנו ע"י חישוב ישיר בסעיף הקודם. ניתן לתאר לפחות 3 דרכים לקבל זהויות בטורים פורמליים:

א. חישוב ישיר, כפי שעשינו בדוגמאות שבסעיף הקודם.

ב. להיעזר בתורת החוגים, שהיא נושא מוכר ומפותח באלגברה, ולקבל טענות על טורים פורמליים כמקרה פרטי של טענות כלליות בחוגים, או במבנים אלגבריים.

ג. לנסות להיעזר בידע שיש לנו לגבי פונקציות.

נדגים את שלש השיטות בעזרת הטענה הפשוטה הבאה, שניתן להוכיח אותה בכל אחת מהדרכים:

טענה: אם $f(x)$ הוא טור פורמלי, וקיים הטור הפורמלי $1/f(x)$ אז קיימים שני הטורים הבאים, והם שווים זה לזה: $(1/f(x))^n = 1/(f(x))^n$.

א. הוכחה ע"י חישוב ישיר:

מהגדרת חילוק טורים פורמליים, השוויון המבוקש נכון אםם $(f(x))^n \cdot (1/f(x))^n = 1$.

מהגדרת חזקה טבעית של טורים פורמליים, פירושו של שוויון זה הוא:

$f(x)\cdot f(x)\cdot\ldots\cdot f(x) \cdot (1/f(x))\cdot(1/f(x))\cdot\ldots\cdot(1/f(x)) = 1$ (n גורמים מכל סוג)

מחילופיות הכפל (משפט 1ב), ניתן לרשום את אגף שמאל כך:

$f(x)\cdot(1/f(x)) \cdot f(x)\cdot(1/f(x))\cdot \ldots \cdot f(x)\cdot(1/f(x))$.

מהגדרת חילוק, כל אחד מהגורמים $f(x)\cdot(1/f(x))$ שווה 1, ולכן המכפלה שווה 1, כמבוקש.

ב. הוכחה בעזרת תורת החוגים:

טענה ידועה בתורת החוגים אומרת כי אם a הוא איבר הפיך בחוג אז גם a^n הפיך, ומתקיים: $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$. הזהות שלנו היא מקרה פרטי של זהות זו (את הטענה האלגברית שנוסחה כאן נפגוש בכרך "מבנים אלגבריים", לגבי מבנה אלגברי הקרוי מונואיד). **מכיוון שלא למדנו בשלב זה על חוגים או על מונואידים, הוכחות מעין אלו אינן אפשרות מוצלחת עבורנו כרגע.**

ג. הוכחה בעזרת תכונות של פונקציות:

אם נפרש את שני אגפי השוויון $(1/f(x))^n = 1/(f(x)^n)$ כפונקציות "אמיתיות" של מספרים ממשיים ולא כטורים פורמליים, אז השוויון מוכר וידוע, למשל מתכונות ידועות של מספרים ממשיים. היינו שמחים לקבל מכאן מיד שהשוויון מתקיים גם לגבי טורים פורמליים (כאמור, בהנחה שקיים הטור הפורמלי $1/f(x)$). בתנאים מסוימים מעבר כזה אכן אפשרי, ושאר הסעיף יוקדש להסבר מעברים כאלה, כחלק מהשאלה הכללית הבאה:

האם ניתן להסיק זהויות בטורים פורמליים מתוך הזהויות המתאימות בפונקציות?

לפני שנענה על כך, ראוי לחזור ולהבין את ההבדל בין זהות בטורים פורמליים לזהות פונקציונלית. בסעיף הקודם ראינו הוכחה של הזהות $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ לגבי טורים פורמליים. זהות זו מוכרת לנו בהקשר אחר כנוסחה לסכום טור הנדסי אינסופי, וככזו, היא נכונה רק בתחום $|x| < 1$. אך ההוכחה שהבאנו לזהות הנ"ל לגבי טורים פורמליים לא הניחה דבר לגבי ערכי x! איך זה ייתכן? ייתכן בהחלט, מכיוון שמשוואה בטורים פורמליים אינה מתיימרת לומר דבר לגבי ערכיהם של הביטויים המופיעים בה כאשר נציב בהם ערך מספרי כלשהו במקום x. נזכור שמהגדרת שוויון בין טורים פורמליים בסעיף 1, משוואה בין טורים פורמליים אומרת רק שסדרות המקדמים שנקבל בפיתוח שני האגפים - מתלכדות. אין בשוויון זה כל התחייבות שניתן להציב ערך כלשהו במקום x ולקבל ביטוי בעל משמעות.

את המשוואה $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ ניתן אפוא לפרש בשני אופנים שונים: האחד כטענה החלה על מספרים בתחום $|x| < 1$ (סכום טור הנדסי אינסופי) והשני – כטענה על טורים פורמליים. לכל אחת משתי הטענות הוכחה שונה.

אנו חוזרים אפוא לשאלה הכללית, מה הקשר בין זהויות בפונקציות "אמיתיות" לבין זהויות בטורים פורמליים?

אם נתבונן בטורים פורמליים **סופיים**, קל לראות, שזהויות מוכרות כגון

$$(1+x)(1-x)=1-x^2$$

$$(1+x)^2=1+2x+x^2$$

נכונות גם לגבי טורים פורמליים: קל להשתכנע, שאין צורך להוכיח זהויות כאלו מחדש לגבי טורים פורמליים, כי הוכחתן לגבי טורים היא פשוט שיחזור של הוכחתן לגבי פונקציות. כללית, כל זהות אלגברית בה מופיעים פולינומים (פולינום הוא פונקציה המתאימה לטור פורמלי **סופי**, כגון $1+5x^2+(-3)x^7$), שביניהם פעולות חיבור, חיסור וכפל, נכונה גם כזהות של טורים פורמליים. לא נוכיח טענה כללית זאת כאן. למען המתעניינים, נציין רק שזה נובע משתי עובדות:

א. פעולות החיבור והכפל בין טורים פורמליים הוגדרו בצורה מקבילה להגדרת פעולות אלו בפונקציות.

ב. שני פולינומים השווים כפונקציות – שווים כטורים פורמליים, כלומר מקדמיהם שווים בהתאמה. ניסוח אחר: הפולינום היחיד השווה זהותית לאפס הוא הפולינום שכל מקדמיו הם אפס.

גם אם נצרף את פעולת החילוק, זהויות אלגבריות בין פולינומים נשארות תקפות לגבי טורים פורמליים סופיים, בתנאי שהחילוק מוגדר. למשל, הזהות המוכרת

$$1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$ (סכום טור הנדסי סופי).

מהגדרת חילוק טורים פורמליים, פירושה של נוסחה זו הוא:

$$(1-x)\cdot(1+x+x^2+\ldots+x^n)=1-x^{n+1}$$

זהות זו נכונה כזהות של פולינומים, לכן היא נכונה גם כזהות בטורים פורמליים, ולכן נכונה גם הזהות המקורית, עם פעולת החילוק.

מהו המצב לגבי זהויות בטורים פורמליים **אינסופיים**?

נאמר את התשובה בלי להוכיח אותה:

טענה 4 (קבלת זהות פורמלית מתוך זהות פונקציונלית בקטע):

נתבונן במשוואה שבכל אחד מאגפיה טורים פורמליים, שביניהם פעולות חיבור, חיסור, כפל וחילוק, כאשר כל פעולות החילוק מוגדרות היטב עבור הטורים הפורמליים המופיעים בהן (ר' הגדרת חילוק טורים וההערות שבעקבותיה). כעת נפרש משוואה זו כטענה לגבי מספרים ממשיים, ונבדוק אם קיים בציר המספרים קטע (קטן ככל שיהיה), **שבכל נקודותיו** כל הטורים המופיעים במשוואה מתכנסים, והמשוואה הנתונה מתקיימת בכל נקודות קטע זה. אם כן - אז המשוואה המקורית נכונה כזהות בין טורים פורמליים.

למשל, מכך שקיים קטע (הקטע $|x|<1$) בו מתקיים השוויון $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$,

ובקטע זה כל מרכיבי המשוואה (הפונקציות 1, $1-x$, והטור $1+x+x^2+x^3+\ldots$) הם בעלי ערך סופי, נובע (ללא צורך בהוכחה מחודשת), ששוויון זה הוא זהות של טורים פורמליים.

דוגמא נוספת: נציב בשוויון האחרון x^2 במקום x ונקבל את הזהות

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\ldots \ .$$

מכיוון שזהות זו נכונה בקטע מסוים על ציר המספרים (למעשה, זהו עדיין הקטע $|x|<1$), הרי שהיא נכונה גם כזהות של טורים פורמליים.

הערה: יכולנו לקבל זהות זו מתוך הזהות $1/(1-x)=1+x+x^2+x^3+\ldots$ בלי לחרוג מהמסגרת של טורים פורמליים. לשם כך עלינו להוכיח שזהות של טורים פורמליים נשמרת אם מציבים x^2 במקום x בשני האגפים. מכיוון שהטור הפורמלי אינו פונקציה, אין זה ברור מראש שפעולה כזו מותרת. הפירוש כפונקציה מועיל בכך שהוא נותן לנו אפשרות לבצע הצבה כזו.

תרגיל: הסבר כללית, בלא שימוש בפונקציות, מדוע הצבת x^m במקום x (m טבעי חיובי) בשני האגפים של זהות על טורים פורמליים היא פעולה מותרת, כלומר נותנת אף היא זהות.

כאמור, לא נוכיח כאן את טענה 4 . נציין רק כי כמו הטענה המקבילה ביחס לטורים סופיים, היא נכונה בשל שילוב שתי סיבות:

א. פעולות החיבור והכפל בין טורים פורמליים הוגדרו בצורה המקבילה להגדרת פעולות אלו בפונקציות.

ב. שני טורי חזקות המתכנסים בקטע כלשהו **ומתלכדים** זה עם זה באותו קטע – שווים כטורים פורמליים, כלומר מקדמיהם שווים בהתאמה. ניסוח אחר: אם טור חזקות מתאפס בכל הנקודות של קטע כלשהו, אז כל מקדמיו של הטור הם אפס.

טענה 4 מאפשרת לנו לחשוב לעתים על טורים פורמליים כפיתוחים של פונקציות לטור חזקות. בהקשר זה מקובל הכינוי **פונקציה יוצרת**. למשל, דרך אחרת לנסח את הזהות $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$ היא לומר **שהפונקציה** $\frac{1}{1-x}$ **יוצרת** את הסדרה $(1,1,1,\ldots)$.

כללית, אם בקטע כלשהו $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$, אומרים שהפונקציה f **יוצרת** את הסדרה $(a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots)$.

4. שתי נוסחאות בסיסיות

נראה כעת שתי נוסחאות בסיסיות, מתוכן גם יתבהר הקשר ההדוק בין טורים פורמליים לקומבינטוריקה.

א. פונקציה יוצרת לסדרה $a_k = \binom{n}{k}$

נתבונן בטור הפורמלי $f(x) = (1+x)^n$ (n קבוע טבעי חיובי).

זהו טור סופי, ולכן כאמור נוכל להיעזר בתכונות **הפונקציה** $(1+x)^n$.

בפרק 3 ראינו את נוסחת הבינום : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

נחזור וניזכר כיצד מתקבל פיתוח זה (בהקשר של פונקציות או של טורים פורמליים – אין הבדל):

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x)\dots(1+x) \quad (n \text{ גורמים})$$

לאחר פתיחת **כל** הסוגרים באגף ימין נקבל סכום של מכפלות. בכל מכפלה מופיעים n גורמים, גורם אחד "מתוֹך" כל זוג סוגרים. כל מכפלה נקבעת ע"י כך שנבחר מתוך כל זוג סוגרים את הגורם 1 או את הגורם x , ונכפול זה בזה את כל הגורמים שבחרנו.

דוגמא:

$$\begin{aligned}(1+x)^3 &= (1+x)(1+x)(1+x) \\ &= 1\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot x + 1\cdot x\cdot1 + 1\cdot x\cdot x + x\cdot1\cdot1 + x\cdot1\cdot x + x\cdot x\cdot1 + x\cdot x\cdot x\end{aligned}$$

כללית, מספר המכפלות בהן מופיע x בחזקה השווה בדיוק k הוא כמספר הדרכים בהן נוכל לבחור k מתוך n הגורמים $(1+x)$: מ- k הגורמים שבחרנו ניקח את הגורם x ומשאר הגורמים ניקח את 1.

כידוע, מספר הדרכים לבחור k עצמים מתוך n , ללא חזרות וללא חשיבות לסדר הוא $\binom{n}{k}$.

לכן בפיתוח יופיעו $\binom{n}{k}$ מחוברים בהם מופיע x בחזקה k .

מכאן נוסחת הבינום : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

נשים עוד לב, שאין הכרח לעצור את הסכימה ב- n : בזכות התאפסות המקדמים הבינומיים החריגים, נוכל לרשום גם : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$.

בניסוח של פונקציות יוצרות, נוסחת הבינום אומרת:

יהי n טבעי קבוע. הפונקציה $(1+x)^n$ היא הפונקציה היוצרת עבור הסדרה $a_k = \binom{n}{k}$.

ב. פונקציה יוצרת לסדרה $a_k = D(n,k)$

נתבונן בטור הפורמלי $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^n$

(n קבוע טבעי חיובי. הטור שבתוך הסוגריים אינסופי).

מהו המקדם של x^k בפיתוח פונקציה זו ?

שוב עלינו לבחור מחובר אחד מתוך כל זוג סוגרים, לכפול את כל הגורמים שבחרנו, ולבסוף לחבר את כל המכפלות.

דוגמא:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^3$$

$$= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$+1 \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot x \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot 1$$

$$+1 \cdot x \cdot x + x \cdot 1 \cdot x + x \cdot x \cdot 1 \ + \ 1 \cdot 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^2 \cdot 1 + x^2 \cdot 1 \cdot 1$$

$$+1 \cdot 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^3 \cdot 1 + x^3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot x^2 \cdot x + 1 \cdot x \cdot x^2 + x^2 \cdot 1 \cdot x + x^2 \cdot x \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot x^2 + x \cdot x^2 \cdot 1 + x \cdot x \cdot x$$

$$+ \dots$$

במכפלה כלשהי יתקבל x בחזקת k אם סכום החזקות של x שנבחרו מכל הגורמים הוא בדיוק k.

מכיוון שמכל גורם $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$ יש לנו אפשרות לבחור חזקה טבעית של x כרצוננו,

וכל חזקה טבעית מופיעה פעם אחת ויחידה בטור $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$, הרי שמספר הדרכים לקבל במכפלה את x בחזקת k הוא כמספר הדרכים להציג את k כסכום של n מספרים טבעיים, עם חשיבות לסדר.

כלומר - כמספר פתרונות המשוואה $t_1 + t_2 + \dots + t_n = k$ בטבעיים.

כידוע, מספר זה הוא $D(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$.

לפיכך $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^n = \sum_{k=0}^{\infty} D(n,k) x^k$.

ראינו בסעיף 2 כי $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = 1 / (1 - x)$

לכן: $\left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} D(n,k) x^k$.

ובניסוח של פונקציות יוצרות:

יהי n טבעי קבוע. הפונקציה $\left(\frac{1}{1-x}\right)^n$ **היא הפונקציה היוצרת עבור הסדרה** $a_k = D(n,k)$.

5. קבלת זהות קומבינטורית מתוך זהות אלגברית

לסיום נראה דוגמא לשימוש בכלים שהצגנו. נוכיח זהות לא טריביאלית המערבת מכפלות של מקדמים בינומיים ומקדמים מהצורה $D(n,k)$.

נתבונן בזהות האלגברית של פונקציות:

$$(1-x)^n \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = 1$$

תנאי טענה 4 מתקיימים, לכן זהות זו תקפה גם לטורים פורמליים. נשווה את המקדמים בשני האגפים: באגף ימין המקדמים של x^k הם 0 לכל k הגדול מאפס.

לכן **גם בפיתוח אגף שמאל מקדמים אלה אמורים להתאפס**.

נפתח:

$$(1-x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \text{ , כאשר } a_i = (-1)^i \binom{n}{i} .$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \text{ , כאשר } b_i = D(n,i) .$$

מהגדרת כפל טורים פורמליים, המקדם של x^k במכפלת הפונקציות הוא $\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$, כלומר:

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n}{i} D(n,k-i)$$

קיבלנו אפוא: לכל $k > 0$,
$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n}{i} D(n,k-i) = 0 .$$

בדרך דומה נוכל לקבל שפע זהויות קומבינטוריות מתוך זהויות אלגבריות פשוטות. בספר הלימוד מוצגים שימושים רבים אחרים לפונקציות יוצרות / טורים פורמליים.

קריאה נוספת:

טורים פורמליים של תפוחים ואגסים –

http://www.math.dartmouth.edu/~m68f99/m68f99QuestionsNov5.pdf

- החל מהדיון שאחרי שאלה 35 בעמ' 4 שם.

טורים פורמליים, שימוש למציאת מספר ההשוואות ב- Quicksort ועוד שימושים:

http://www.math.caltech.edu/courses/6an7.pdf

מבוא לטורים פורמליים: פרק ז' של

סיכומי הרצאות במתימטיקה דיסקרטית , ליניאל (ערכו סטינגר ולונדון), הוצאת אקדמון.

מבוא לטורים פורמליים: נספח 2 של

A Course in Combinatorics, Lint and Wilson, Cambridge Press

חוגים:

האוניברסיטה הפתוחה, **קורס מתמטיקה דיסקרטית הישן 20276**, "מבנים אלגבריים" פרק 4

הגדרות וטענות בסיסיות על חוגים:

http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/Algebra/Chapter2.pdf