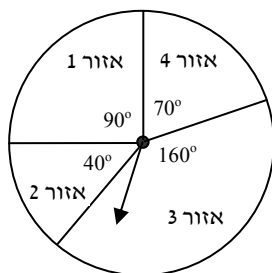


שאלה 1 (25 נקודות)



במישור אופקי נתון מעגל, שבמרכזו קבוע קצהו האחד של מחוג, היכול להסתובב סביב ציר אנכי. מקנים למחוג (באופן אקראי) מהירות התחלתית, והוא מתחיל להסתובב. לאחר זמן-מה המחוג נעצר, כשהוא מצביע על נקודה **אקראית** על-פני המעגל. נניח שהמעגל מחולק לארבעה אזורים (1 עד 4), לפי המתואר באיור.

מסובבים את המחוג 20 פעמים ובכל פעם רושמים את האיזור שבו המחוג נעצר.

לכל $i = 1, 2, 3, 4$, נסמן ב- X_i את המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הפעמים (מתוך ה-20) שבהן המחוג נעצר באזור i . כמן כן, נניח שאין תלות בין סיבובים שונים של המחוג.

6 נק' א. חשב את $\text{Var}(X_1 + X_2)$.

6 נק' ב. חשב את $\text{Var}(X_1 - X_2)$.

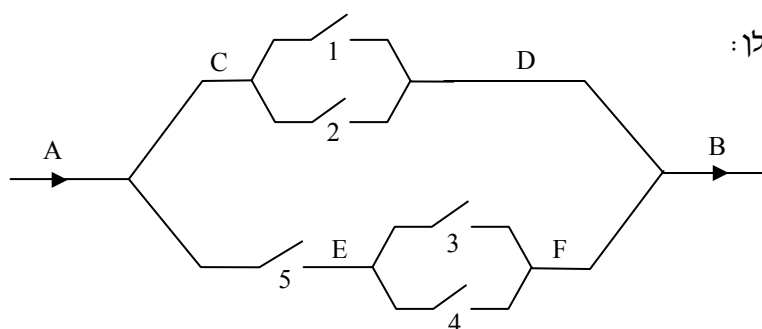
7 נק' ג. חשב את $P\{X_1 \geq 1, X_2 \geq 1\}$.

נניח עתה, שמסובבים את המחוג שוב ושוב –

6 נק' ד. מהי ההסתברות שהפעם השלישית שהמחוג ייעצר באזור 1 תהיה בסיבוב ה-15 של המחוג?

שאלה 2 (25 נקודות)

נתונה המערכת המתוארת להלן:



כל אחד ממתגים 1, 3 ו-5 סגור בהסתברות 0.9 (ואז עובר בו זרם).

מתגים 1 ו-2 בלתי-תלויים במתגים 3 ו-4.

מתג 5 בלתי-תלויים בכל המתגים האחרים.

אם מתג 1 סגור, אז מתג 2 סגור בהסתברות 0.9.

אם מתג 3 סגור, אז מתג 4 סגור בהסתברות 0.9.

אם מתג 1 פתוח, אז מתג 2 סגור בהסתברות 0.3.

אם מתג 3 פתוח, אז מתג 4 סגור בהסתברות 0.3.

8 נק' א. אם מתג 2 פתוח, מהי ההסתברות שעובר זרם במערכת מנקודה C לנקודה D?

9 נק' ב. מהי ההסתברות שעובר זרם במערכת מנקודה A לנקודה B?

8 נק' ג. אם מתג 1 פתוח, מהי ההסתברות שעובר זרם במערכת מנקודה A לנקודה B?

שאלה 3 (25 נקודות)

9 נק' א. יהיו X_1, X_2, \dots, X_n , משתנים מקריים רציפים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, שלכל אחד מהם פונקציית התפלגות מצטברת F ופונקציית צפיפות f , ויהיו $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ סטטיסטי הסדר שלהם.

יהי X משתנה מקרי בלתי-תלוי ב- X_i , לכל $i = 1, 2, \dots, n$, וגם לו פונקציית התפלגות מצטברת F ופונקציית צפיפות f .

מצא את $P\{X > X_{(n)}\}$.

ב. אורך-החיים (בשבועות) של סוללה חדשה שמוקנת בפנס הוא משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר 0.2.

בפנס 3 סוללות. הפנס פועל כל עוד יש בו לפחות 2 סוללות תקינות.

מכניסים לפנס 3 סוללות חדשות. יהי X הזמן שחולף מרגע הכנסת הסוללות לפנס ועד לרגע שהוא מפסיק לפעול.

בהנחה שהסוללות בלתי-תלויות זו בזו –

8 נק' 1. מצא את פונקציית הצפיפות של X .

8 נק' 2. חשב את התוחלת של X .

שאלה 4 (25 נקודות)

נתונים 40 בלונים: 20 אדומים ו-20 צהובים.

מחלקים באופן אקראי את הבלונים ל-20 ילדים, לכל ילד 2 בלונים.

יהי X מספר הילדים שמקבלים 2 בלונים מאותו הצבע (כלומר, 2 אדומים או 2 צהובים).

12 נק' א. חשב את התוחלת של X .

13 נק' ב. חשב את השונות של X .

שאלה 5 (25 נקודות)

יהי X משתנה מקרי שהתפלגותו אחידה על הקטע $(0,1)$;

ויהי Y משתנה מקרי שהתפלגותו נתונה על-ידי פונקציית הצפיפות: $f_Y(y) = 2y$, $0 < y < 1$.

נניח כי X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה.

5 נק' א. מהו מקדם המתאם בין X ל- Y ?

10 נק' ב. חשב את $P\{X + Y < 1\}$.

10 נק' ג. נגדיר את המשתנה המקרי W על-ידי $W = XY$.

מצא את פונקציית הצפיפות של W .

בהצלחה!