

## פתרון שאלה 1 בממ"ן 15

א. לפי המוסבר בפרק 8 בספר הלימוד, גובהו של כל עץ החלטה הממין  $n$  איברים הוא לפחות  $\lg_2(n!) = \lg_2(120) \cong 6.9$ . נציב  $n = 5$  ונקבל  $h \geq \lg_2(5!) = \lg_2(120) \cong 6.9$ . לפיכך, לכל אלגוריתם מיון מבוסס השוואות, אורכו של המסלול הארוך ביותר בעץ ההחלטה הוא 7. כלומר, במקרה הגרוע תידרשנה לפחות 7 השוואות כדי למיין מערך בעל 5 איברים.

ב. נניח כי איברי המערך הם  $a, b, c, d, e$ .  
נשווה את שני זוגות האיברים  $a, b$  ו- $c, d$ .  
נניח בה"כ כי התוצאות שהתקבלו הן  $a > b, c > d$ . נשווה את שני האיברים הגדולים מבין הארבעה כלומר  $a, c$  ונניח בה"כ כי  $a > c$ .  
לפיכך קיבלנו בסך הכל כי  $a > c > d$  וגם  $a > b$ , ושלב זה הצריך 3 השוואות.  
למעשה, קיבלנו מערך ממין בן שלושה איברים,  $a, c, d$ , וכעת נותר לנו למצוא את מקומם של האיברים  $e$  ו- $b$  במערך זה.

נעבור כעת לאיבר החמישי  $e$ . נמצא את מיקומו של  $e$  במערך  $a, c, d$ :  
ראשית, נשווה את  $e$  עם  $c$  (האיבר האמצעי):

- אם  $e > c$ , נשווה את  $e$  עם  $a$ .
- אם  $e < c$ , נשווה את  $e$  עם  $d$ .

שלב זה עלה לנו ב-2 השוואות נוספות, ובסיומו קיבלנו מערך ממין של 4 איברים:  $a, c, d, e$  (לא בהכרח בסדר הזה).

במקרה הגרוע ביותר,  $a$  הוא עדיין האיבר הגדול מבין הארבעה.  
אבל, מכיוון שידוע כי  $a > b$  (שלב I), נצטרך לחפש את מקומו של  $b$  במערך ממין בן 3 איברים בלבד –  $c, d, e$ .

בדומה למוסבר קודם לכן, שלב זה ייקח 2 השוואות אף הוא.  
אם נקבל כי  $e > a$ , אזי נצטרך לחפש את מיקומו של  $b$  במערך בן 2 איברים בלבד –  $c, d$  וייתכן שבמקרה זה נוכל להסתפק בהשוואה אחת בלבד (ובכל מקרה, לא יותר מ-2 השוואות). לפיכך, האלגוריתם יבצע 7 השוואות לכל היותר.

ג. נראה כי כל המיונים שנלמדו בקורס דורשים יותר מ-7 השוואות במקרה הגרוע ביותר:

### מיון-הכנסה:

המקרה הגרוע ביותר עבור מיון-הכנסה הוא מערך הממין בסדר הפוך.  
במקרה זה יש במערך 10 היפוכים, כי כל זוג אינדקסים במערך מהווה היפוך (ראו את הגדרת המושג "היפוכים" בבעיה 2-4 בספר). זהו גם מספר ההשוואות שיבצע האלגוריתם.

### מיון-מיזוג:

1	2	4	3	5
---	---	---	---	---

נתבונן בפעולת האלגוריתם על המערך:

ראשית, האלגוריתם יפצל את המערך לשני תת-מערכים (1,2,4) ו-(3,5).

התת-מערך (1,2,4) יתפצל לשני תת-מערכים (1,2) ו-(4).

התת-מערך (1,2) יתפצל לשני תת-מערכים בגודל 1 והמיזוג שלהם ידרוש פעולת השוואה אחת.

לאחר מכן ימזג האלגוריתם את (1,2) עם (4). סדר האיברים לא ישתנה, אך לצורך המיזוג יידרשו 2 השוואות.

התת-מערך (3,5) יפוצל לשני תת-מערכים בגודל 1 והמיזוג שלהם ידרוש פעולת השוואה אחת.

לבסוף, ימזג האלגוריתם את (1,2,4) עם (3,5).

לצורך כך יתבצעו 4 השוואות: 3 ישווה עם 1,2,4 ו-5 ישווה עם 4.

לפיכך, יתבצעו בסך הכל 8 השוואות  $(4 + 1 + 2 + 1) = 8$ .

### מיון-מהיר:

המקרה הגרוע ביותר עבור מיון-מהיר הוא, למשל, מערך הממוין בסדר עולה:

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

במקרה זה, שגרת החלוקה תחלק בכל שלב את המערך לאזור שמאלי המכיל  $n-1$  איברים ולאזור ימני המכיל 0 איברים.

בשלב הראשון יושו כל האיברים לאיבר הציר ובסך הכל יתבצעו 4 השוואות.

בשלב הבא יתבצעו 3 השוואות, וכך הלאה.

בסה"כ יתבצעו  $10 = 1 + 2 + 3 + 4$  השוואות.

### מיון-ערמה:

נשים לב שבכל קריאה לשגרה MAX-Heapify, מתבצעות 2 השוואות בין איברי המערך:

1.  $A[l] > A[i]$  – בדיקה האם הבן השמאלי גדול ממש מהאב

2.  $A[r] > A[largest]$  – בדיקה האם הבן הימני גדול יותר מהאב / הבן השמאלי.

בבניית ערמה בת 5 איברים תידרשנה לפחות 2 קריאות ל-MAX-Heapify. כלומר, לפחות

4 השוואות. בביצוע המיון עצמו תידרשנה עוד 3 קריאות ולפחות 6 השוואות.

לכן, גם במקרה הטוב ביותר מיון-ערמה יבצע 10 השוואות.

לפיכך, כל האלגוריתמים שנלמדו בכיתה מבצעים במקרה הגרוע יותר מאשר 7 השוואות.

עובדה זו אינה מפתיעה, משום שאלגוריתם הפותר בעיה ספציפית (במקרה שלנו, מיון

מערך בעל 5 איברים) יהיה בדרך כלל יעיל יותר מאשר אלגוריתם כללי.