תשובה *1*

א. לפי שאלה *3.19* בעמ' *91* בכרך "תורת הקבוצות": כמספר הדרכים לסדר *8* עצמים שונים בשורה. לפי "קומבינטוריקה", בראש עמ' *23*, מספר זה הוא $8! = 40{,}320$.

ב. כמספר הדרכים לבחור *3* מתוך *8* עצמים שונים, ללא חזרות וללא חשיבות לסדר:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

ג. ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) נניח ש- $B = \{1,2,3\}$.

בחירת פונקציה מ- B הזו ל- A שקולה לבחירת **סדרה** של *3* איברים מתוך A (מדוע?).

פונקציה מ- B ל- A היא חד-חד-ערכית אסם כל איברי הסדרה המתאימה שונים זה מזה.

לכן מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של B ל- A הוא כמספר הדרכים לבחור *3* מתוך *8* עצמים שונים, **ללא חזרות ועם חשיבות לסדר**: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

ד. $8^3 = 512$: ר' "קומבינטוריקה" שאלה *1.32* בעמ' *17*.

ה. $\frac{8!}{(3!)^2 \cdot 2! \cdot 2!} = 280$. הסבר למכנה: חילקנו בסידורים הפנימיים בכל אחת מהמחלקות, וכן בהחלפה בין שתי המחלקות בגודל *3*. ראו שאלה *2.28* בעמ' *37* בספר (הנוסחה השניה בשאלה - ר' ההסבר עבורה בעמ' *157*) ושאלה *2.29* באותם עמודים.

ו. מספר כל הפונקציות של A ל- $\{1,2\}$ הוא $2^8 = 256$ (השווה סעיף ד).

רק שתי פונקציות מתוכן אינן על: הפונקציה השולחת את כל אברי A ל- *1* , והפונקציה השולחת את כל אברי A ל- *2*. לכן מספר הפונקציות מ- A **על** $\{1,2\}$ הוא $256 - 2 = 254$.

תשובה *2*

א. $\binom{m+k}{m}$: השוו שאלה *2.25* בעמ' *33* בספר.

ב.   נחשוב על ההופעות של *0* כעל מחיצות.

k המחיצות מגדירות $k+1$ "תאים" (הרווחים שבין המחיצות, המקום שלפני המחיצה הראשונה והמקום שאחרי המחיצה האחרונה). עלינו לשים *m* הופעות של *1* בתאים, כאשר אסור לשים יותר מהופעה בודדת בכל תא. כלומר כל מה שעלינו לעשות הוא לבחור *m* מתוך $k+1$ התאים, ובהם נשים *1*.

התאים זהים ואין חשיבות לסדר הבחירה, לכן התשובה: $\binom{k+1}{m}$.

ג.   את הפונקציה האפיינית של X בתוך $\{1,2,3\ldots,14\}$, ניתן לראות כסדרה באורך *14*, שבנויה מ- *0*-ים ו- *1*-ים. הנתון $|X|=5$ פירושו שבסדרה יש **בדיוק** *5* הופעות של *1*.

לכן יש בסדרה בדיוק *9* הופעות של *0*.

הדרישה שלא יהיו שני מספרים עוקבים ב- X פירושה שבסדרה הנ"ל אין הופעות צמודות של *1*.

לכן, לפי הסעיף הקודם, מס' הקבוצות הללו הוא $252 = \frac{10!}{5!5!} = \binom{9+1}{5}$.

תשובה 3

א.   מדובר בבחירה של *10* עצמים מתוך *3* סוגים, כאשר עצמים מאותו סוג נחשבים זהים (עמ' *49* בספר). מספר האפשרויות לכך הוא $66 = \binom{12}{2} = D(3,10)$.

ב.   עלינו להוריד מתוצאת הסעיף הקודם את הבחירות שאינן אפשריות כעת עקב הגבלת מספר הכדורים:

כל הכדורים אדומים (אפשרות אחת), *9* כדורים אדומים (*2* אפשרויות לכדור הנותר),

כל הכדורים סגולים (אפשרות אחת), *9* כדורים סגולים (*2* אפשרויות לכדור הנותר),

כל הכדורים לבנים (אפשרות אחת), *9* כדורים לבנים (*2* אפשרויות לכדור הנותר),

8 כדורים לבנים (*3* אפשרויות לשני הכדורים הנותרים: אדום-אדום, סגול-סגול, אדום-סגול).

סך האפשרויות הפסולות: *12*.

מכאן, מספר הדרכים המותרות: $54 = 12 - 66$.

ג.   אם כל צבע צריך להיבחר לפחות פעם אחת, נקח כדור אחד מכל צבע.

נותר לנו לבחור *7* כדורים מתוך *7* אדומים, *7* סגולים, *6* לבנים.

החישוב דומה לסעיפים א, ב, כאשר הפעם יש רק אפשרות אחת פסולה:

בחירת *7* כדורים לבנים. מספר הדרכים: $35 = 1 - D(3,7)$.

תשובה *4*

אף אחד מהמשתנים אינו שווה *0* ואינו שווה *1*, במלים אחרות כל המשתנים גדולים/ שווים *2*.

נציב $x_i = y_i + 2$ $(1 \le i \le 6)$

ונקבל $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + 12 = 29$,

כלומר $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 17$, כאשר y_i הם טבעיים כלשהם, שהתנאי היחיד לגביהם הוא התנאי על הזוגיות, בו נטפל כעת.

בדיוק *3* מהמשתנים המקוריים היו זוגיים, ולכן בדיוק *3* מהמשתנים החדשים הם זוגיים (חיסור *2* ממספר אינו משנה את הזוגיות שלו).

יש $\binom{6}{3} = 20$ דרכים לבחור את *3* המשתנים הזוגיים מתוך *6* המשתנים.

לאחר שבחרנו אותם, נניח ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) שאֵלה הם *3* המשתנים הראשונים.

נסמן אפוא: $y_i = 2z_i$ $(1 \le i \le 3)$, $y_i = 2z_i + 1$ $(4 \le i \le 6)$.

נקבל $2z_1 + 2z_2 + 2z_3 + 2z_4 + 2z_5 + 2z_6 + 3 = 17$,

כלומר $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = 7$, כאשר z_i הם טבעיים **ללא כל הגבלה**.

מספר הפתרונות של משוואה כזו חושב בסעיף *2.4* , והוא $D(6,7) = \binom{12}{5} = 792$.

את זה עלינו לכפול במספר הדרכים לבחור מי יהיו המשתנים הזוגיים, שהוא כאמור *20*.

תשובה סופית: $792 \cdot 20 = 15,840$.

איתי הראבן