פתרונות לממ"ן 11 בקורס "אלגוריתמים", סמסטר ב' 2002
(נכתב בשיתוף עם יואב גיורא)

שאלה 1
כתוב אלגוריתם, יעיל ככל שתוכל, לבעיה הבאה. הקלט הוא גרף לא מכוון $G=(V, E)$ ובו כל קשת e צבועה בכחול או באדום ויש לה משקל אי-שלילי $w(e)$. יש למצוא עבור כל זוג צמתים u, v בגרף, מסלול קצר ביותר מבין כל המסלולים מ-u ל-v שאין בהם שתי קשתות אדומות רצופות (אבל יכולות להיות שתי קשתות כחולות רצופות). הוכח את נכונות האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

תשובה
נבנה מ-G גרף $G'=(V', E')$ ללא פונקציית צביעה באופן הבא: ראשית נהפוך את G לגרף מכוון ע"י כך שנחליף כל קשת (u, v) ב-G בשתי קשתות מכוונות אנטי-מקבילות (u, v) ו-(v, u) שצבען כצבע הקשת המקורית (u, v). מעתה, כל התייחסות לגרף $G=(V, E)$ כוונתה היא לגרף המכוון. נבנה גרף $G^1=(V^1, E^1)$ כך ש-$V^1=\{u^1 \mid u\in V\}$ ו-$E^1=\{(u^1, v^1) \mid$ $(u, v)\in E$ וגם (u, v) קשת כחולה $\}$. נבנה גרף נוסף $G^2=(V^2, E^2)$ כך ש-$V^2=\{u^2 \mid u\in V\}$ ו-E^2 ריקה. נגדיר: $V'=V^1\cup V^2$, ו-$E'=E^1\cup E^2$ ובנוסף, אם בגרף G יש קשת (u, v) אדומה נוסיף ל-E' את הקשת (u^1, v^2), ואם בגרף G יש קשת (u, v) כחולה נוסיף ל-E' את הקשת (u^2, v^1). משקל הקשתות ב-E' כמשקל הקשתות המקבילות להן בגרף המקורי.
העלות של כל אחת מהבניות שתוארו כאן היא $O(|V|+|E|)$.
כעת, עבור כל צומת u בגרף נריץ את האלגוריתם של דיקסטרא מהצומת u^1. עבור כל צומת v בגרף אורך המסלול הקצר ביותר מ-u ל-v מבין כל המסלולים העוברים לכל היותר בקשת אדומה אחת הוא $\min(d(v^1), d(v^2))$. את המסלול עצמו נשחזר מ-v^1 או מ-v^2, בהתאמה לתוצאת המינימום.
עלות דיקסטרא היא כמובן $O(|E|+|V|\log|V|)$ ועלות שחזור המסלול היא $O(|V|)$. עלות האלגוריתם כולו היא לכן $O(|V|\cdot(|E|+|V|\log|V|+|V|^2))= O(|V|\cdot(|E|+|V|^2))$ (אם אין צורך בשחזור המסלול אלא רק באורכו אז הסיבוכיות היא $O(|V|\cdot(|E|+|V|\log|V|))$).
נכונות : נראה כי לכל מסלול חוקי בין u ל-v בגרף המקורי מתאים מסלול באותו אורך בין u^1 ו-v^1 או v^2 בגרף החדש, ולהיפך. בכיוון הראשון: יהי $p=v_1,\dots v_k$ כאשר $v_1=u$ ו-$v_k=v$ מסלול חוקי בין u ל-v בגרף המקורי, כלומר, במסלול זה אין שתי קשתות אדומות רצופות. נבנה ממנו מסלול בגרף החדש: לכל i ($1\le i<k$) כך ש-(v_i, v_{i+1}) היא קשת אדומה נחליף את הקשת (v_i, v_{i+1}) ב-(v_i^1, v_{i+1}^2), ואם $i+1<k$ נחליף את הקשת (v_{i+1}, v_{i+2}) (מובטח שהיא כחולה) ב-(v_{i+1}^2, v_{i+2}^1). את כל הקשתות האחרות (v_j, v_{j+1}) נחליף ב-(v_j^1, v_{j+1}^1). ברור כי סדרת הקשתות שקיבלנו מתחילה ב-V^1 ונשארת בו כל עוד אין קשת אדומה. קשת אדומה מעבירה ל-V^2 אך הבאה אחריה מחזירה ל-V^1. לפיכך, קל לראות שהמסלול המתקבל הוא מסלול ב-G', שאורכו כאורך המסלול המקורי p והוא מסלול מ-u^1 ל-v^1 או v^2. בכיוון השני: יהי $p'=v_1^{\ell_1},\dots v_k^{\ell_k}$ ($\ell_i\in\{1,2\}$, $v_1=u$, $\ell_1=1$ ו-$v_k=v$) מסלול בין u^1 ל-v^{ℓ_k} ב-G'. ממבנה הגרף G' נובע שישנן שתי אפשרויות: או שבמסלול זה לכל i $\ell_i=1$ או שעבור כל $i<k$-1 כך ש-$\ell_i=1$ ו-$\ell_{i+1}=2$ מתקיים $\ell_{i+2}=1$. זאת משום שאין בגרף G' קשתות מ-V^2 אל V^2, ולכן בכל פעם שהמסלול עובר ל-V^2 הוא חוזר מיד אחר כך ל-V^1. מבניית הגרף G' נובע שבמסלול המתאים ב-G $p=v_1,\dots v_k$ אין שתי קשתות אדומות רצופות וברור שהוא מסלול מ-u ל-v בגרף המקורי ואורכו שווה לאורך p'. מההתאמה החח"ע בין המסלולים שהוכחנו כעת נובע כי אורכו של מסלול קצר ביותר בין u^1 ל-v^1 או v^2 בגרף החדש שווה לאורכו של מסלול חוקי קצר ביותר בין u ל-v בגרף המקורי.

שאלה 2
כתוב אלגוריתם, יעיל ככל שתוכל, לבעיה הבאה. הקלט הוא גרף לא מכוון $G=(V, E)$ ובו כל קשת e היא מסוג A, B או C, ויש לה משקל אי-שלילי $w(e)$. כמו כן, הקלט כולל צומת מקור s בגרף. יש למצוא, עבור כל צומת v בגרף, מסלול מהמקור s אל הצומת v שהוא קצר ביותר מבין כל המסלולים המכילים לכל היותר קשת אחת מסוג A ולכל היותר קשת אחת מסוג B. הוכח את נכונות האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

תשובה
נבנה מ-G גרף $G'=(V', E')$ ללא פונקציית צביעה באופן הבא: ראשית נהפוך את G לגרף מכוון ע"י כך שנחליף כל קשת (u, v) ב-G בשתי קשתות מכוונות אנטי-מקבילות (u, v) ו-(v, u) שצבען כצבע הקשת המקורית (u, v). מעתה, כל התייחסות לגרף $G=(V, E)$ כוונתה היא לגרף המכוון. נבנה גרף $G^1=(V^1, E^1)$ כך ש-$V^1=\{u^1 \mid u\in V\}$ ו-

$E^1=\{(u^1,v^1)\mid (u,v)\in E$ וגם (u,v) קשת מסוג $C\}$. נבנה גרפים נוספים $G^2=(V^2,E^2)$, $G^3=(V^3,E^3)$ ו- $G^4=(V^4,E^4)$ כך ש- $V^2=\{u^2\mid u\in V\}$, $V^3=\{u^3\mid u\in V\}$ ו- $V^4=\{u^4\mid u\in V\}$, וקבוצות הקשתות מוגדרות כך: $E^2=\{(u^2,v^2)\mid (u,v)\in E$ וגם (u,v) קשת מסוג $C\}$, $E^3=\{(u^3,v^3)\mid (u,v)\in E$ וגם (u,v) קשת מסוג $C\}$ ו- $E^4=\{(u^4,v^4)\mid (u,v)\in E$ וגם (u,v) קשת מסוג $C\}$. נגדיר: $V'=V^1\cup V^2\cup V^3\cup V^4$, ו- $E'=E^1\cup E^2\cup E^3\cup E^4$.
ובנוסף, אם בגרף G יש קשת (u, v) מסוג A נוסיף ל-E' את הקשת (u^1,v^2) ואת הקשת (u^3,v^4), ואם בגרף G יש קשת (u, v) מסוג B נוסיף ל-E' את הקשת (u^1,v^3) ואת הקשת (u^2,v^4). משקל הקשתות ב-E' כמשקל הקשתות המקבילות להן בגרף המקורי.

העלות של כל אחת מהבניות שתוארו כאן היא $O(|V|+|E|)$.

כעת, נריץ את האלגוריתם של דיקסטרא מהצומת s^1. עבור כל צומת $v\in V$ אורך המסלול הקצר ביותר מ-s^1 ל-v מבין כל המסלולים המכילים לכל היותר קשת אחת מסוג A ולכל היותר קשת אחת מסוג B הוא $\min(d(v^1),d(v^2),d(v^3),d(v^4))$. את המסלול עצמו נשחזר מ- v^1 או מ- v^2 או מ- v^3 או מ- v^3, בהתאמה לתוצאת המינימום.

עלות דיקסטרא היא כמובן $O(|E|+|V|\log|V|)$ ועלות שחזור המסלול היא $O(|V|)$. עלות האלגוריתם כולו היא לכן $O(|E|+|V|\log|V|+|V|$^2)= $O(|E|+|V|$^2) (אם אין צורך בשחזור המסלול אלא רק באורכו אז הסיבוכיות היא $O(|E|+|V|\log|V|)$).

נכונות : נראה כי לכל מסלול חוקי בין s ל-v בגרף המקורי מתאים מסלול באותו אורך בין s^1 ו- v^1 או v^2 או v^3 או v^4 בגרף החדש, ולהיפך. בכיוון הראשון: יהי $p=v_1,\dots v_k$ כאשר $v_1=s$ ו- $v_k=v$ מסלול חוקי בין s ל-v בגרף המקורי, כלומר, במסלול זה יש לכל היותר קשת אחת מסוג A ולכל היותר קשת אחת מסוג B. נבנה ממנו מסלול באותו אורך בגרף החדש: אם כל הקשתות במסלול הן מסוג C אז לכל i ($1\le i<k$) נחליף את הקשת (v_i,v_{i+1}) ב- (v_i^1,v_{i+1}^1). אחרת - תהי $e=(v_i,v_{i+1})$ ($i+1<k$) הקשת הראשונה במסלול שאינה מסוג C. את כל הקשתות (v_j,v_{j+1}) ($1\le j<i$) נחליף בקשת (v_i^1,v_{i+1}^1). בנוסף, אם הקשת e מסוג A נחליף אותה בקשת (v_i^1,v_{i+1}^2) ואם היא מסוג B נחליף אותה בקשת (v_i^1,v_{i+1}^3). עכשיו יש שתי אפשרויות: או שכל הקשתות האחרות במסלול הן מסוג C, או שיש עוד קשת אחת בלבד שאינה מסוג C והיא מסוג שונה מהקשת e. במקרה הראשון, נחליף את כל הקשתות האחרות במסלול (v_j,v_{j+1}) ($i<j<k$) בקשת (v_j^2,v_{j+1}^2) אם e מסוג A ובקשת (v_j^3,v_{j+1}^3) אם e מסוג B. במקרה השני: נניח שישנה עוד קשת $e'=(v_m,v_{m+1})$ שאינה מסוג C. נחליף כל קשת (v_j,v_{j+1}) ($i<j<m$) בקשת (v_j^2,v_{j+1}^2) אם e מסוג A ובקשת (v_j^3,v_{j+1}^3) אם e מסוג B. בנוסף, אם הקשת e מסוג A נחליף את e' בקשת (v_m^2,v_{m+1}^4) ואם היא מסוג B נחליף את e' בקשת (v_m^3,v_{m+1}^4). את כל הקשתות האחרות (v_j,v_{j+1}) ($m<j<k$) נחליף ב- (v_j^4,v_{j+1}^4).

ברור כי סדרת הקשתות שקיבלנו מתחילה ב-V^1 ונשארת בו כל עוד אין קשת מסוג A או מסוג B. קשת מסוג A מעבירה ל-V^2 וקשת מסוג B מעבירה ל-V^3. בשלב זה, קשתות מסוג C משאירות באותה קבוצה וקשת נוספת שאינה מסוג C (בהכרח היא שונה מהקודמת שאינה מסוג C) מעבירה ל-V^4. לפיכך, קל לראות שהמסלול המתקבל הוא מסלול ב-G', שאורכו כאורך המסלול המקורי p והוא מסלול מ-s^1 ל- v^1 או v^2 או v^3 או v^4.

בכיוון השני: יהי $p'=v_1^{\ell_1},\dots v_k^{\ell_k}$ ($v_k=v$ ו- $\ell_1=1$, $v_1=s$, $\ell_i\in\{1,2,3,4\}$) מסלול בין s^1 ל- v^{ℓ_k} ב-G'. ממבנה הגרף G' נובע שישנן חמש אפשרויות:

하나. במסלול זה לכל i $\ell_i=1$. מבניית הגרף G' נובע שבמסלול המתאים ב-G $p=v_1,\dots v_k$ כל הקשתות הן מסוג C.

둘. קיימת במסלול נקודה שבה הוא עובר מ-V^1 ל-V^2 ואז נשאר ב-V^2. מבניית הגרף G' נובע שבמסלול המתאים ב-G $p=v_1,\dots v_k$ כל הקשתות הן מסוג C חוץ מקשת אחת מסוג A.

셋. קיימת במסלול נקודה שבה הוא עובר מ-V^1 ל-V^3 ואז נשאר ב-V^3. מבניית הגרף G' נובע שבמסלול המתאים ב-G $p=v_1,\dots v_k$ כל הקשתות הן מסוג C חוץ מקשת אחת מסוג B.

넷. קיימת במסלול נקודה שבה הוא עובר מ-V^1 ל-V^2 ואז נשאר ב-V^2 עד לנקודה נוספת שבה הוא עובר ל-V^4 ונשאר שם. מבניית הגרף G' נובע שבמסלול המתאים ב-G $p=v_1,\dots v_k$ כל הקשתות הן מסוג C חוץ מקשת אחת מסוג A וקשת אחת מסוג B.

다섯. קיימת במסלול נקודה שבה הוא עובר מ-V^1 ל-V^3 ואז נשאר ב-V^3 עד לנקודה נוספת שבה הוא עובר ל-V^4 ונשאר שם. מבניית הגרף G' נובע שבמסלול המתאים ב-G $p=v_1,\dots v_k$ כל הקשתות הן מסוג C חוץ מקשת אחת מסוג A וקשת אחת מסוג B.

בכל מקרה נקבל שבמסלול המתאים ב-G $p=v_1,\dots v_k$ יש לכל היותר קשת אחת מסוג A וקשת אחת מסוג B וברור

שהוא מסלול מ-s ל-v בגרף המקורי ואורכו שווה לאורך p'. מההתאמה החח״ע בין המסלולים שהוכחנו כעת נובע כי אורכו של מסלול קצר ביותר בין s^1 ל- v^1 או v^2 או v^3 או v^4 בגרף החדש שווה לאורכו של מסלול חוקי קצר ביותר בין s ל-v בגרף המקורי.

<u>שאלה 3</u>

נתון גרף מכוון $G=(V, E)$ עם פונקציית משקל $w:E\rightarrow R$.

א. נתונה קבוצה $X \subseteq V$. כתוב אלגוריתם יעיל המוצא בין כל זוג צמתים בגרף את משקל המסלול הקצר ביותר שעובר **רק** דרך צמתי ביניים מ-X. אם לא קיים מסלול כזה הדפס ״לא קיים״.
הוכח את נכונות האלגוריתם. מהי סיבוכיותו? תאר את התנהגות האלגוריתם כאשר יש בגרף מעגלים שליליים.

ב. נתון מספר p . כתוב אלגוריתם יעיל המוצא בין כל זוג צמתים בגרף את משקל המסלול הקצר ביותר המשתמש ב-p קשתות לכל היותר (קשת המופיעה במסלול i פעמים נספרת i פעמים).
הוכח את נכונות האלגוריתם. מהי סיבוכיותו? תאר את התנהגות האלגוריתם כאשר יש בגרף מעגלים שליליים.

<u>תשובה</u>

א. האלגוריתם המבוקש יהיה וריאציה על האלגוריתם של בלמן-פורד. נשנה את השגרה של בלמן-פורד באופן הבא (השגרה החדשה תהיה NEW-BELLMAN-FORD(G, w, s, X)): בשורה 3 נכתוב

do for each edge $(u, v)\in E[G]$ such that $(v\in X)$ and $((u\in X)$or$(u=s))$

בין שורה 7 ל- 8 נוסיף:

```
7.1 for each vertex u∈X∪{s}
7.2      do for each edge (u, v)∈E[G] such that v∉X
7.3             do relax(u, v, w)
7.4             if v=s
7.5                then if d[u]+w(u, s)<0
7.6                        then return FALSE
```

עתה נקרא לשגרה החדשה מתוך השגרה הבאה:

```
1. Initialize a matrix D of size n×n to ∞ in all places.
2. for each vertex v∈V
3.      do NEW-BELLMAN-FORD (G, w, v, X)
4.      for each vertex u∈V
5.          do D(v, u)←d(u)
```

ננתח ראשית את סיבוכיות השגרה NEW-BELLMAN-FORD: סיבוכיות הלולאה שבשורות 2 עד 4 לא השתנתה במקרה הגרוע. סיבוכיות הלולאה בשורות 7.1 עד 7.6 היא $O(|V|\cdot|E|)$ ולכן סיבוכיות השגרה כולה זהה לסיבוכיות השגרה המקורית. לפיכך, בשגרה הקוראת לה סיבוכיות הלולאה בשורות 2 עד 3 היא $O(|V|^2\cdot|E|)$ וזוהי גם סיבוכיות השגרה כולה.

נסביר את האלגוריתם (זו אינה הוכחה. וודא כי הינך יודע להשלים זאת להוכחה פורמלית, המתבססת על הוכחת האלגוריתם המקורי): לכל צומת s השגרה NEW-BELLMAN-FORD פועלת באופן הבא: ראשית נמצאים כל המסלולים הקצרים מ-s אל כל צמתי הקבוצה X (באופן הרגיל). אח״כ אנו מבצעים הקלה לכל הצמתים שאינם ב-X על הקשתות המגיעות מצמתי X או מ-s ובכך מחשבים לכל צומת שאינו ב-X את המסלול הקצר ביותר אליו מ-s כאשר צמתי הביניים (אם ישנם) הם רק מ-X. את השגרה הזו אנו מפעילים עבור כל צומת בגרף ובכך מקבלים את המרחקים הדרושים בין כל הזוגות. ניתן להוסיף קטע קוד המדפיס את תוכנה של המטריצה D. אם הערך בכניסה מסויימת הוא ∞ המסלול המתאים לא קיים.

לגבי התנהגות האלגוריתם על מעגלים שליליים: אם יש מעגל שלילי המערב רק צמתים מ-X הוא יתגלה באופן הרגיל בשורות 5-7. אם יש מעגל המערב צמתים שאינם ב-X ייתכנו שני מקרים: אם מעגל זה מכיל יותר מצומת אחד שאינו מ-X לא נגלה אותו משום שהוא אינו מסלול שמכיל צמתי ביניים רק מ-X. אם הוא מכיל רק צומת אחד s שאינו מ-X נגלה אותו כאשר נקרא לשגרה NEW-BELLMAN-FORD עם s כמקור. הבדיקה בשורות 7.4 עד 7.6 תחזיר FALSE משום שמעגל כזה עובר מ-s אל u שב-X ומשם אל $v=s$ וערכו הוא $d(u)$ (השווה ל- 0 אם $u=s$) ועוד $w(u, s)$ ואנו פשוט בודקים אם ערך זה אינו שלילי.

ב. גם במקרה זה, האלגוריתם המבוקש יהיה וריאציה על האלגוריתם של בלמן-פורד. נשנה את השגרה של בלמן-פורד באופן הבא (השגרה החדשה תהיה NEW2-BELLMAN-FORD(G, w, s, p)): במקום שורה 2 נכתוב:

for $i\leftarrow 1$ to min(p, $V[G]$-1)

העובדה כי הלולאה מתבצעת במשך p סיבובים מבטיחה כי נבדוק את כל המסלולים מ-s שאורכם p אך אם זהו השינוי היחיד ייתכן שניקח בחשבון גם מסלולים שאורכם גדול מ-p. למשל בגרף שבו יש 4 צמתים 1, 2, 3, 4 ושלוש קשתות (1 ,2), (2 ,3) ו-(3 ,4) וסדר סריקת הקשתות הוא כפי שמופיע ברשימה שניתנה כאן, אם p הוא 2, כבר

במעבר הראשון d[1] יכיל את אורכו של המסלול מצומת 4 לצומת 1 למרות שהוא בן 3 קשתות. כלומר, ייתכן שבאותו מעבר נבדוק "במקביל" כמה קשתות של אותו מסלול, משום שההקלה של קשת אחת מספיקה להשפיע על ההקלה של קשת אחרת במסלול באותו מעבר. כדי למנוע זאת נדאג שכל הקלה תתייחס רק לערכי *d* של תחילת המעבר. נעשה זאת ע"י שינוי בשגרות האתחול וההקלה. במקום לשמור ערך *d* יחיד לכל צומת נשמור שני ערכים *d_old* ו-*d_new*. בשגרת האתחול נשנה את שורה 2 באופן הבא:

do $d\_old[v]\leftarrow\infty$

ואת שורה 4 נשנה כך:

$d\_old[s]\leftarrow 0$

שגרת ההקלה תיראה כך:

```
1 if d_old[v]>d_old[u]+w(u, v)
2    then d_new[v]←d_old[v]+w(u, v)
3         π[v]←u
4    else d_new[v]←d_old[v]
```

ובשגרה NEW2-BELLMAN-FORD נבצע עוד את השינויים הבאים: בין שורה 4 לשורה 5 (בתוך לולאת ה-for) נוסיף את השורות:

```
4.1 for each vertex v∈V
4.2    do d_old[v]←d_new[v]
```

בשורה 6 נחליף את *d* ב-*d_new*.

כמו בסעיף הקודם נקרא לשגרה החדשה מתוך שגרה אחרת שבודקת את המסלולים המתאימים לכל הזוגות. היא זהה לשגרה הקוראת בסעיף הקודם פרט לקריאה עצמה שתהיה הפעם NEW2-BELLMAN-FORD (*G*, *w*, *v*, *p*).

את נכונות האלגוריתם ניתן להוכיח באינדוקציה על *p*. וודא כי הינך יודע להשלים את ההוכחה.

סיבוכיות שגרות האתחול וההקלה לא השתנתה. ננתח את סיבוכיות השגרה NEW2-BELLMAN-FORD: סיבוכיות הלולאה בשורות 2 עד 4.2 היא עכשיו $p\cdot(|E|+|V|)$ וזו גם סיבוכיות השגרה. סיבוכיות השגרה הקוראת היא אם כך $p\cdot|V|(|E|+|V|)$.

האלגוריתם לא יאתר מעגלים שליליים שאורכם גדול מ-*p*. מעגלים שליליים שאורכם אינו עולה על *p* יתגלו באופן הרגיל.

הערה: בשני הסעיפים ניתן להציג פתרון יעיל יותר שאינו מבוסס על האלגוריתם של בלמן-פורד המוצא מרחק ממקור יחיד אלא על אלגוריתם תכנון דינמי המוצא באופן ישיר את המרחקים בין כל זוגות הצמתים בגרף. אלגוריתם כזה מוצג בפרק 26 אך הוא אינו כלול בחומר הקורס.

שאלה 4

כתוב אלגוריתם יעיל ככל שתוכל לבעיה הבאה. בהינתן כקלט גרף מכוון $G=(V,E)$ עם משקל (כלומר אורך) $w(e)$ לכל קשת *e*, צומת *x* בגרף ושתי קבוצות *S,T* של צמתים בגרף, יש למצוא מסלול קצר ביותר בין צומת כלשהו ב-*S* לצומת כלשהו ב-*T* העובר דרך הצומת *x*.

התייחס בתשובתך למקרים הבאים:

א. משקלות הקשתות אי-שליליים.

ב. אין הגבלה על משקלות הקשתות (כלומר עשויים להיות שליליים).

הוכח את נכונות האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

תשובה

נבנה מ-*G* גרף $G'=(V', E')$ באופן הבא: נבנה גרף $G^1=(V^1,E^1)$ כך ש-$V^1=\{u^1 | u\in V, u\neq x\}$ ו-$E^1=\{(u^1,v^1)\,|\,(u,v)\in E \text{ and } u^1,v^1\in V^1\}$. נבנה גרף נוסף $G^2=(V^2,E^2)$ כך ש-$V^2=\{u^2 | u\in V, u\neq x\}$ ו-$E^2=\{(u^2,v^2)\,|\,(u,v)\in E \text{ and } u^2,v^2\in V^2\}$. נגדיר: $V'=V^1\cup V^2\cup\{x,s^0,t^0\}$, כאשר s^0 ו-t^0 שני צמתים חדשים. נגדיר גם $E'=E^1\cup E^2$ ונוסיף ל-E' את שתי קבוצות הקשתות הבאות: $\{(u^1,x)\,|\,(u,x)\in E\}$ ו-$\{(x,u^2)\,|\,(x,u)\in E\}$ כל משקלי הקשתות שנמצאות עד כה ב-E' כמשקל הקשתות המקבילות להן בגרף המקורי. עוד נוסיף ל-E' את שתי קבוצות הקשתות הבאות שמשקל כל הקשתות בהן הוא 0: $\{(s^0,u^1)\,|\,u\in S\}$ ו-$\{(u^2,t^0)\,|\,u\in T\}$. לבסוף, אם $x\in S$ נוסיף את הקשת (s^0,x) שמשקלה 0, ואם $x\in T$ נוסיף את הקשת (x,t^0) שמשקלה גם הוא 0.

העלות של כל אחת מהבניות שתוארו כאן היא $O(|V|+|E|)$.

עתה נמצא בגרף החדש מסלול קצר ביותר בין s^0 ל-t^0. אם המשקלות אי-שליליים נעשה זאת ע"י האלגוריתם של דייקסטרא ואז הסיבוכיות היא $O(|E|+|V|\log|V|)$. אם אין הגבלה על משקלות הקשתות נעשה זאת בעזרת האלגוריתם של בלמן-פורד ואז הסיבוכיות היא $O(|V|\cdot|E|)$.

נכונות : נראה כי לכל מסלול פשוט בגרף המקורי המתחיל בצומת מ-*S* ומסתיים בצומת מ-*T* ועובר דרך *x* מתאים

מסלול באותו אורך בין s^0 ו-t^0 בגרף החדש, ולהיפך. בכיוון הראשון: יהי $p=v_1,\ldots v_k$ כאשר $v_1\in S$, $v_k\in T$ וקיים $1\le i\le k$ כך ש-$v_i=x$ מסלול בגרף המקורי. נבנה ממנו מסלול בגרף החדש: לכל 1≤j<i נחליף את הצומת v_j בצומת v_j^1. לכל i<j≤k נחליף את הצומת v_j בצומת v_j^2. בתחילת המסלול נשרשר את s^0 ובסופו את t^0.

מאחר ש-$v_1\in S$ אז קיימת בגרף החדש הקשת (s^0,v_1^1) (או הקשת (s^0,x) אם $v_1=x$). בדומה, מאחר ש-$v_k\in T$ אז קיימת בגרף החדש הקשת (v_k^2,t^0) (או הקשת (x,t^0) אם $v_k=x$). בנוסף, אם $1<i$ אז מקיום הקשת $(v_{i-1},v_i=x)$ במסלול המקורי נובע כי בגרף החדש קיימת הקשת $(v_{i-1}^1,v_i=x)$ ואם $i<k$ אז מקיום הקשת $(v_i=x,v_{i+1})$ במסלול המקורי נובע כי בגרף החדש קיימת הקשת $(v_i=x,v_{i+1}^2)$. כמו כן, לכל קשת (v_j,v_{j+1}) כך ש-$1\le j<i-1$ במסלול המקורי ברור כי קיימת בגרף החדש הקשת (v_j^1,v_{j+1}^1) (גם v_j וגם v_{j+1} שונים מ-x כי $j<i-1$ והמסלול פשוט ולכן x מופיע בו פעם אחת בלבד). באופן דומה, לכל קשת (v_j,v_{j+1}) כך ש-$i<j<k$ במסלול המקורי ברור כי קיימת בגרף החדש הקשת (v_j^2,v_{j+1}^2). לכן, המסלול המתקבל הוא אכן מסלול בגרף החדש. מאחר שהחלפנו כל קשת בקשת בעלת אותו משקל והוספנו קשתות שמשקלן 0 אורכו כאורך המסלול המקורי p. כמובן שהוא מסלול מ-s^0 ל-t^0.

בכיוון השני: יהי $p'=s^0w_1,\ldots w_kt^0$ מסלול מ-s^0 ל-t^0 ב-'G. ברור כי כל צומת w_i הוא צומת עם אינדקס עליון 1, או צומת עם אינדקס עליון 2, או הצומת x. ניצור מ-'p מסלול חדש p על ידי השמטת הצמתים s^0 ו-t^0 ועל ידי השמטת האינדקסים העליונים מכל הצמתים שאינם x. מאחר שבגרף החדש יש מ-s^0 קשתות רק לאיברי הקבוצה S (כולל x אם $x\in S$) ברור כי המסלול p מתחיל באיבר מ-S. מאחר שבגרף החדש יש ל-t^0 קשתות רק מאיברי הקבוצה T (כולל x אם $x\in T$) ברור כי המסלול p מסתיים באיבר מ-T. מאחר שבגרף החדש כל מסלול מ-s^0 ל-t^0 בהכרח עובר דרך x נובע כי p עובר דרך x. לבסוף, מאחר שכל הקשתות בגרף החדש שאינן מערבות את s^0 ו-t^0 הוגדרו על סמך קשתות מקבילות להן בגרף המקורי בעלות אותו משקל ומאחר שבגרף החדש משקל הקשתות שמערבות את s^0 ו-t^0 הוא 0, נובע כי 'p הוא אכן מסלול בגרף המקורי ומשקלו שווה למשקל p.

מההתאמה החח״ע בין המסלולים שהוכחנו כעת נובע כי אורכו של מסלול קצר ביותר בין s^0 ל-t^0 בגרף החדש שווה לאורכו של מסלול קצר ביותר בגרף המקורי המתחיל בצומת מ-S ומסתיים בצומת מ-T ועובר דרך x (מסלול קצר ביותר הוא בהכרח פשוט, בהנחה שאין מעגלים שליליים).

שאלה 5

בהינתן גרף מכוון $G=(V, E)$ עם פונקציית משקל על הקשתות $\ell: E\to R^+$ (המשקלות אינם שליליים), ובהינתן מסלול $P=\langle v_1,..v_k\rangle$ בגרף זה, נגדיר את צוואר הבקבוק של המסלול P להיות $\min(\ell(e_1),\ldots,\ell(e_{k-1}))$, כאשר e_i $(1\le i<k)$ היא הקשת המחברת את v_i ו-v_{i+1}.

כתוב אלגוריתם יעיל ככל האפשר אשר מקבל כקלט גרף $G=(V, E)$ בעל התכונות שתוארו לעיל, שני צמתים $s, t\in V$ ופלט האלגוריתם הוא צוואר הבקבוק **הגדול** ביותר מבין כל המסלולים שבין s ל-t בגרף G.
הסבר את האלגוריתם ונתח את סיבוכיותו.

תשובה

האלגוריתם יהיה דומה לאלגוריתם של דיקסטרא אך עם כמה שינויים:
את שגרת האתחול INITIALIZE_SINGLE_SOURCE נשנה באופן הבא: בשורה 2 נכתוב $d[v]\leftarrow(-\infty)$ ובשורה 4 נכתוב $d[s]\leftarrow\infty$. את שגרת ההקלה RELAX נשנה באופן הבא: את שורה 1 נחליף בשורה:

```
if d[v]<min(d[u], w(u, v))
   then d[v]←min(d[u], w(u, v))
```

באלגוריתם של דיקסטרא נשלוף מהתור בכל פעם את הערך המקסימלי ולא המינימלי (שורה 5). הערך שהאלגוריתם צריך להחזיר הוא $d[t]$.
סיבוכיות האלגוריתם החדש זהה לזו של דיקסטרא.
נסביר את האלגוריתם (לא נדרשה הוכחה בשאלה זו): ערך d של צומת v אמור לשמור את צוואר הבקבוק הגדול ביותר מבין כל המסלולים מ-s ל-v בגרף. כאשר אנו מגיעים לצומת v דרך שכן u יתכן שצוואר הבקבוק המקסימלי נמצא על מסלול שעובר מ-s ל-v דרך u. במקרה זה הוא יכול להיות הקשת מ-u ל-v או קשת על מסלול מ-s ל-u ויש לבדוק מי מבין שני הערכים (השני הוא $d[u]$) קטן יותר. את הערך הקטן מבין השניים יש להשוות לערכו הנוכחי של $d[v]$ ששומר את צוואר הבקבוק הגדול ביותר עד כה מ-s ל-v ולשנותו בהתאם לתוצאה.
כדי להוכיח את האלגוריתם בצורה פורמלית יש לעקוב אחר ההוכחה של האלגוריתם של דיקסטרא ולבצע בה את השינויים המתאימים.