שאלה 1 בממ"ן 12

מצאו חסמים אסימפטוטיים הדוקים עבור נוסחאות הנסיגה הבאות (הניחו כי $T(n)$ קבוע אם n קטן):

א'

$$T(n) = 9T(n/27) + \sqrt{n \cdot \lg n}$$

ב'

$$T(n) = 64T(n/16) + n\sqrt{n} + n \cdot \lg n + \lg n$$

ג'

$$T(n) = 27T(n/3) + n^4 + n^3 \cdot \lg n$$

ד'

$$T(n) = T(n-1) + n\lg n + n$$

ה'

$$T(n) = n^2\sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + n^5 \cdot \lg^3 n + \lg^5 n$$

פתרון:

א' לפי שיטת האב, מקרה 1:

$$a = 9,\ b = 27,\ \log_b a = 2/3,\ f(n) = \sqrt{n \cdot \lg n} = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right),\ 0 < \varepsilon < 1/6$$

$$T(n) = \Theta\left(n^{2/3}\right)$$

ב' לפי שיטת האב, מקרה 2:

$$a = 64,\ b = 16,\ \log_b a = 3/2,\ f(n) = n\sqrt{n} + n \cdot \lg n + \lg n = \Theta\left(n^{3/2}\right)$$

$$T(n) = \Theta\left(n^{3/2} \cdot \lg n\right)$$

ג' לפי שיטת האב, מקרה 3:

$$a = 27,\ b = 3,\ \log_b a = 3,\ f(n) = n^4 + n^3 \cdot \lg n = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right),\ 0<\varepsilon<1$$

מתקיים תנאי הרגולריות (ראו את שאלה ג-11 במדריך הלמידה); לכן

$$T(n) = \Theta\left(n^4\right)$$

ד' לפי שיטת האיטרציה

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \cdot \lg n + n \\
T(n-1) &= T(n-2) + (n-1) \cdot \lg(n-1) + (n-1) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
T(2) &= T(1) + 2 \cdot \lg 2 + 2 \\
T(1) &= T(0) + 1 \cdot \lg 1 + 1
\end{aligned}
$$

מתקבל

$$T(n) = T(0) + \sum_{i=1}^{n} i \cdot \lg i + \sum_{i=1}^{n} i$$

ידוע כי $\sum_{i=1}^{n} i = \Theta\left(n^2\right)$ וכי $\sum_{i=1}^{n} i \cdot \lg i = \Theta\left(n^2 \cdot \lg n\right)$ (ראו את הבעיה א-1,ג' בספר הלימוד).

לכן, נובע כי $T(n) = \Theta\left(n^2 \cdot \lg n\right)$

ה' מחלקים ב- n^5 את שני ענפי המשוואה:

$$\frac{T(n)}{n^5} = \frac{T\left(\sqrt{n}\right)}{n^2 \cdot \sqrt{n}} + \lg^3 n + \left(\frac{\lg n}{n}\right)^5$$

מבצעים את החלפת המשתנים $n = 2^m$, $m = \lg n$ ומסמנים $S(m) = \frac{T\left(2^m\right)}{2^{5m}}$; מתקבלת נוסחת

הנסיגה $S(m) = S\left(\frac{m}{2}\right) + m^3 + \left(\frac{m}{2^m}\right)^5$.

לפי שיטת האב, מקרה 3 :

$$a = 1,\ b = 2,\ \log_b a = 0,\ f(m) = m^3 + \left(\frac{m}{2^m}\right)^5 = \Omega\left(m^{\log_b a + \varepsilon}\right),\ 0 < \varepsilon < 3$$

מתקיים תנאי הרגולריות (עבור $c = 1/2$) ; לכן

$$S(m) = \Theta\left(m^3\right)$$

מזה נובע $\frac{T(n)}{n^5} = \Theta\left(\lg^3 n\right)$, כלומר, $T(n) = \Theta\left(n^5 \cdot \lg^3 n\right)$