ממ"ן 13 – פתרון שאלה 5

נוכיח את החסם באמצעות עץ החלטה.

טענה: כל עץ החלטה של אלגוריתם למיון k האיברים הקטנים מכיל לפחות $\binom{n}{k}\cdot k!$ עלים.

הוכחה: כדי למיין נכונה את k האיברים הקטנים ביותר, יש להתאים לפחות עלה אחד בעץ לכל תוצאה אפשרית של המיון; אחרת, אלגוריתם המיון לא ייתן מענה לכל תוצאה אפשרית (כלומר, האלגוריתם שגוי).

מספר התוצאות האפשריות של מיון k האיברים הכי קטנים הינו $\binom{n}{k}\cdot k!$. (מדוע?)

לפיכך, בכל עץ החלטה למיון k האיברים הכי קטנים יש לפחות $\binom{n}{k}\cdot k!$ עלים. ■

נסמן ב-h את גובהו של כל עץ החלטה למיון k האיברים הכי קטנים ונקבל:

$$h \ge \lg\left(\binom{n}{k}\cdot k!\right) = \lg\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)$$

לפי קירוב סטירלינג:

$$\frac{n!}{(n-k)!} \cong \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{(n-k)}{e}\right)^{(n-k)}} = \frac{n^n}{(n-k)^{(n-k)}\cdot e^k}$$

מכאן:

$$h \ge \lg\left(\frac{n^n}{(n-k)^{(n-k)}\cdot e^k}\right) > \lg\left(\frac{n^n}{n^{(n-k)}\cdot e^k}\right) = \lg\left(\frac{n}{e}\right)^k = k\lg n - k\lg e = \Omega(k\lg n)$$

לפיכך, החסם התחתון למיון k האיברים הקטנים במערך הוא $\Omega(k\lg n)$.

מ.ש.ל.