ענו על **ארבע** מחמש השאלות הבאות.

שאלה 1 (25 נקודות)

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל כקלט גרף מכוון ללא מעגלים (גמ"ל) $G=(V, E)$ עם פונקציית משקל $w : E \rightarrow R$ וצומת $s \in V$, ומוצא לכל $v \in V$ את משקל המסלול הכבד ביותר מ-s ל-v ב-G.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 2 (25 נקודות)

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר ולא מכוון. ידוע שקיימים ב-G m רכיבים דו-קשירים, וכל רכיב דו-קשיר מכיל בדיוק n צמתים.

הוכיחו כי $n=\frac{|V|-1}{m}+1$.

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר ולא מכוון ויהי T עץ DFS של G שעומקו k (עומק השורש הוא 0).

הראו כי $|E| \le k|V|$ וכי קיים ב-G מסלול פשוט באורך $\left\lfloor\frac{|E|}{|V|}\right\rfloor$.

שאלה 4 (25 נקודות)

נניח שנתון לנו אלגוריתם שיודע לפתור את בעיית הזרימה המקסימלית ברשתות שבהן לכל צומת דרגת היציאה היא לכל היותר 2. הראו כיצד ניתן להשתמש באלגוריתם זה כדי לפתור את בעיית הזרימה המקסימלית ברשת כלשהי.

הוכיחו את נכונות הפתרון המוצע ונתחו את סיבוכיותו, כתלות בסיבוכיות האלגוריתם הנתון.

שאלה 5 (25 נקודות)

הגדרה: **מטריצת חצי-יחידה** מסדר n היא מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & B \end{pmatrix}$, כאשר A, B, I ו-0 הן מסדר $n/2$. **מטריצת חצי-יחידה רקורסיבית** מסדר n היא מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & B \end{pmatrix}$, כאשר A, B, I ו-0 הן מסדר $n/2$ ובנוסף: A ו-B אף הן מטריצות חצי-יחידה רקורסיביות (מסדר $n/2$) או ש-$n/2=1$.

א. הראו כי אם ניתן להעלות בריבוע מטריצת חצי יחידה מסדר n בזמן $S(n)$ אז ניתן להכפיל שתי מטריצות כלליות מסדר n בזמן $O(S(2n))$.

ב. כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המחשב מכפלת שתי מטריצות חצי-יחידה רקורסיביות מסדר n. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

בהצלחה!