ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20290

אלגוריתמיקה -
יסודות מדעי המחשב

חוברת הקורס – קיץ 2012ג

כתב: אייל משיח

יולי 2012 - סמסטר קיץ – תשע"ב

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנט,

אנו מברכים אותך עם הצטרפותך אל הלומדים בקורס "אלגוריתמיקה - יסודות מדעי המחשב".

הקורס בסמסטר קיץ נמשך 9 שבועות בלבד, ולכן חשוב להקפיד על לימוד החומר והגשת המטלות בקצב שקבענו כדי להבטיח סיום מוצלח של הקורס. **בגלל משך הסמסטר הקצר, אין אפשרות לדחות את הגשת המטלות**.

ברצוננו להפנות תשומת לבך לשתי נקודות חשובות:

- במהלך הקורס יש להגיש תרגילי בית. מספיק להגיש שלושה מתוך חמשת הממ"נים שבחוברת, אך מומלץ להגיש את כולם. יש להקפיד על הגשת הממ"נים במועד.
- הקורס "אלגוריתמיקה" הוא קורס מתוקשב. לקורס יש אתר-בית הכולל לוח הודעות, קבוצת דיון, מאגר משאבים והפניות לאתרים אחרים ברשת. לתשומת לבך, אתר הקורס הוא ערוץ תקשורת "רשמי". יש להתייחס להודעות ועדכונים שיופיעו בלוח ההודעות שבאתר כאילו שנשלחו בדואר. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: http://telem.openu.ac.il .

  מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

צוות הקורס ישמח לעמוד לרשותך בכל שאלה שתתעורר.

ניתן לפנות אלי ביום ג', בשעות 12:00-14:00, בטלפון 09-7781233, או ב- e-mail.

כתובתי היא: eyalma@openu.ac.il.

פגישות יש לתאם מראש.

ב ב ר כ ה,

אייל משיח

מרכז הקורס

1. לוח זמנים ופעילויות (20290 / 2012ג)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	פרקי הלימוד המומלצים	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ״ן למנחה
1	20.7.2012-15.7.2012	פרקים 1-4		
2	27.7.2012-22.7.2012	פרק 5		ממ״ן 11 27.7.2012
3	3.8.2012-29.7.2012 (א צום ט׳ באב)	פרק 6		
4	10.8.2012-5.8.2012	פרק 7		ממ״ן 12 10.8.2012
5	17.8.2012-12.8.2012	פרק 8		
6	24.8.2012-19.8.2012	פרק 9		ממ״ן 13 24.8.2012
7	31.8.2012-26.8.2012	פרק 10		ממ״ן 14 31.8.2012
8	7.9.2012-2.9.2012	פרק 11		
9	14.9.2012-9.9.2012	פרק 12		ממ״ן 15 14.9.2012

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

2. תיאור המטלות

הממ״נים בקורס הם ממ״נים **רגילים**: כל מטלה מורכבת ממספר תרגילים ״יבשים״ **שאינם** דורשים הרצת תכניות במחשב. תרגילים אלו נועדו לבדוק את הבנתך בחומר הלימוד.
את הפתרון למטלה כזו יש לכתוב **בעט** על דף נייר בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. (אפשר ורצוי, כמובן, להדפיס את הפתרון למטלה).
אם השאלה בממ״ן אינה ברורה לך, ניתן להתקשר אל אחד מהמנחים (בשעת הייעוץ הטלפוני שלו) לצורך קבלת הסבר או לנסות להיעזר בקבוצת הדיון של הקורס.
בטבלה שלהלן תמצא מהו חומר הלימוד הנדרש (לפי פרקי הספר) לפתרון כל אחת מהמטלות, ומשקל כל מטלה בחישוב הציון של הקורס.

שים לב!
בעת כתיבת פתרון למטלה אין להסתמך על פרקי לימוד **מתקדמים** יותר מהפרקים בהם עוסקת המטלה.

מטלה	חומר הלימוד הנדרש לפתרון	משקל המטלה
ממ״ן 11	פרקים 1-4	6 נקודות
ממ״ן 12	פרקים 5-6	6 נקודות
ממ״ן 13	פרק 7	6 נקודות
ממ״ן 14	פרקים 8-9	6 נקודות
ממ״ן 15	פרקים 10-12	6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש שלוש מטלות מתוך החמש.

לתשומת לבכם!
כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן:

אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלות** בציון הנמוך ביותר, שציוניהן נמוכים מציון הבחינה (**עד שתי מטלות**), לא יילקחו בחשבון בעת שקלול הציון הסופי.

זאת בתנאי שמטלות אלה **אינן חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו, מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליך לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל של **18 נקודות לפחות**.

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון של **60 לפחות**.

ג. לקבל ציון סופי של 60 **לפחות**.

לתשומת לבכם:

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס.

סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימאלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון **09-7782222** או ***יעדכנו בעצמם*** באתר שאילתא http://www.openu.ac.il/sheilta

קורסים ⇦ ציוני מטלות ובחינות ⇦ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.

יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של המטלות והבחינה יהיה נמוך מ- 60).

<u>**כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.**</u>

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1-4

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2012ג **מועד אחרון להגשה:** 27.7.2012

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (15 נקודות)

פלינדרום הוא משפט שקריאתו מימין ומשמאל זהה.
כתבו אלגוריתם, הקורא מהקלט מחרוזת תווים (ללא רווחים) ובודק אם היא פלינדרום.
מותר לאלגוריתם להשתמש בשתי מחסניות. אורכה של מחרוזת הקלט אינו ידוע מראש.

שאלה 2 (15 נקודות)

שני עצים בינריים נקראים **איזומורפיים** אם יש להם בדיוק אותו מבנה (כלומר, הם נבדלים זה מזה רק בשמות הצמתים).
כתבו אלגוריתם רקורסיבי, המקבל שני עצים בינריים ובודק אם הם איזומורפיים.

שאלה 3 (20 נקודות)

א. הריצו את האלגוריתם של דייקסטרה למציאת המסלול הקצר ביותר על הגרף שבעמוד 91 בספר הלימוד.

ב. נדון בבעיית המסלול **הארוך** ביותר בגרף. בבעיה זו יש למצוא את המסלול הארוך ביותר בין שני צמתים s ו-t בגרף $G = (V, E)$ עם משקלים חיוביים על הקשתות.
פרופ' כלומסקי הציע את האלגוריתם הבא לפתרון הבעיה:

(1) לכל קשת e בגרף בצע: $w(e) \leftarrow 1/w(e)$;
(2) הרץ על הגרף החדש את האלגוריתם של דייקסטרה למציאת המסלול הקצר ביותר בגרף.

חוו את דעתכם על האלגוריתם של פרופ' כלומסקי. האם הוא פותר את הבעיה?

שאלה 4 (25 נקודות: סעיף א' – 10 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

א. נדון בגרסה של בעיית תרמיל הגב בשלמים שבה כל הפריטים הם בעלי אותו משקל.
כתבו אלגוריתם חמדני פשוט הפותר את הגרסה הזו של הבעיה.

ב. נדון כעת בגרסה של הבעיה שבה לכל פריט יכול להיות אחד משני משקלים אפשריים – a או b.
כתבו אלגוריתם הפותר את הגרסה הזו של הבעיה.
האלגוריתם המבוקש צריך להיות מבוסס על האלגוריתם מסעיף א'.
(רמז: מה יהיה הרכב הפריטים אם התרמיל חייב להכיל בדיוק k פריטים במשקל a ?)

שאלה 5 (25 נקודות)

נסמן ב- f(n) את מספר העצים הבינריים (השונים זה מזה) בעלי n צמתים.

הנוסחה לחישוב f(n) היא:

$$f(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ \sum_{i=0}^{n-1} f(i)\cdot f(n-1-i) & n>0\end{cases}$$

א. הסבירו מדוע הנוסחה נכונה.

ב. חשבו באמצעות הנוסחה את f(3) וציירו את כל העצים הבינריים בעלי שלושה צמתים.

ג. כתבו אלגוריתם רקורסיבי לחישוב f(n) וציירו את עץ הרקורסיה המתקבל בעת חישוב f(3).

ד. כתבו אלגוריתם תכנון דינמי לחישוב f(n) וחשבו באמצעותו את f(6).

ה. באיזה משני האלגוריתמים כדאי יותר להשתמש ? נמקו את תשובתכם.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

כתבו והריצו תכנית מחשב, המוצאת את המספר הטבעי הראשון שניתן להצגה כסכום של שתי חזקות שלישיות של מספרים טבעיים **בשתי צורות שונות**.
מהו המספר שהתכנית מחזירה ?

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 5-6

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2012ג **מועד אחרון להגשה:** 10.8.2012

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות: • שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס • שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה **הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס**.

שאלה 1 (15 נקודות)

נתון כד המכיל מספר זוגי $n = 2k$ ($k \geq 1$) של כדורים לבנים ומספר כלשהו m ($m \geq 1$) של כדורים שחורים. נתבונן בתהליך הבא:

(1) כל עוד נשארו בכד לפחות שני כדורים, בצע את הפעולות הבאות:

(1.1) הוצא מהכד שני כדורים כלשהם;

(1.2) אם שני הכדורים שהוצאת הם בעלי אותו צבע, שים במקומם כדור חדש שחור;

(1.3) אחרת, החזר לכד את הכדור הלבן;

הוכיחו שהתהליך מסתיים ובסופו הכד מכיל בדיוק כדור שחור אחד.

שאלה 2 (15 נקודות)

האלגוריתם הבא מקבל מחרוזת תווים באורך n הנמצאת במערך B, ובודק אם המחרוזת היא פלינדרום:

(1) $i \leftarrow 1$, $P \leftarrow \text{True}$

(2) כל עוד $P = \text{True}$ וגם $i \leq n/2$ בצע:

(2.1) אם $B[i] \neq B[n - i + 1]$ אז $P \leftarrow \text{False}$

(2.2) אחרת $i \leftarrow i + 1$

(3) החזר את P.

הוכיחו את נכונותו המלאה של האלגוריתם.

שאלה 3 (20 נקודות)

מבקר המדינה החליט לבדוק אם יש אנשים שהתפקדו גם ל״ליכוד״ וגם ל״קדימה״.
ברשותו נמצאות רשימות המתפקדים לשתי המפלגות. רשימת המתפקדים ל״ליכוד״ היא באורך n ורשימת המתפקדים ל״קדימה״ היא באורך m, וידוע ש- $n >> m$.
תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר לפתרון הבעיה ונתחו את זמן ריצתו.

שאלה 4 (25 נקודות)

נתון מערך A בגודל n, המכיל מספרים שלמים השייכים לקבוצה $\{1, 2, \ldots, n\}$.
מעוניינים לבדוק אם המספרים במערך הם תמורה של $\{1, 2, \ldots, n\}$.
כתבו אלגוריתם הפותר את הבעיה בזמן $O(n)$ **ללא שימוש בזיכרון נוסף**.
תארו את אופן פעולתו של האלגוריתם והסבירו מדוע הוא נכון (אין צורך בהוכחה פורמלית).

שאלה 5 (25 נקודות: סעיף א׳ – 15 נק׳; סעיף ב׳ – 10 נק׳)

להלן מופיע תאור סכמטי של אלגוריתם למיון סדרה של מספרים ממשיים $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

(1) צור n נקודות $(x_1, x_1^2), (x_2, x_2^2), \ldots, (x_n, x_n^2)$;
(2) הפעל על הנקודות איזשהו אלגוריתם למציאת קמור ;
(3) אם האלגוריתם למציאת קמור החזיר את נקודות הקמור בכיוון השעון, אז הפוך את סדר הנקודות בקמור ;
(4) מצא את הנקודה בקמור בעלת שיעור ה-x הקטן ביותר ;
(5) החזר את הסדרה המורכבת משיעורי ה-x של הנקודות בקמור, החל מהנקודה בעלת שיעור ה-x הקטן ביותר.

א. הסבירו מדוע האלגוריתם ממיין את n המספרים בצורה נכונה.

ב. נסמן ב-$C(n)$ את הזמן הנדרש למציאת הקמור בשורה (2).
נתחו את זמן הריצה של האלגוריתם.
האם אפשר להסיק מהאלגוריתם חסם תחתון על $C(n)$? נמקו את תשובתכם.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

בספר הלימוד נטען, כי השגרה הרקורסיבית למציאת מינימום ומקסימום ברשימה באורך N מבצעת פחות מ- $1.7N$ השוואות (עבור N כלשהו, לאו דווקא חזקה שלמה של 2).
הוכיחו את הטענה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2012ג **מועד אחרון להגשה:** 24.8.2012

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (15 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 10 נק')

א. האם שני הגרפים הבאים הם איזומורפיים ? הוכיחו את תשובתכם.

ב. הוכיחו שבעיית **הגרפים האיזומורפיים** (graph isomorphism) שייכת ל-NP.

שאלה 2 (15 נקודות)

קבעו עבור כל אחד מהפסוקים הבאים אם הוא פסוק ספיק, טאוטולוגיה או סתירה.
הוכיחו את תשובותיכם.

$\varphi_1 = (E \& G) \rightarrow (E \vee G)$

$\varphi_2 = (E \rightarrow G) \rightarrow (G \rightarrow E)$

$\varphi_3 = (E \rightarrow G) \rightarrow (\sim G \vee E)$

שאלה 3 (20 נקודות)

בעיית הדוור הסיני היא הבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: גרף G עם משקלות חיוביים על הקשתות ומספר טבעי k

השאלה: האם קיים מסלול סגור בגרף, העובר בכל קשתות הגרף ומשקלו אינו עולה על k ?

תארו רדוקציה פולינומית מבעיית המעגל האוילרי לבעיית הדוור הסיני והוכיחו את נכונותה.

שאלה 4 (25 נקודות: סעיף א׳ – 10 נק׳; סעיף ב׳ – 15 נק׳)

האינדקס הכרומטי של גרף הוא מספר הצבעים המינימלי הדרוש לצביעה חוקית של קשתות הגרף (צביעה שבה כל שתי קשתות בעלות קדקוד משותף צבועות בצבע שונה).

א. מהו האינדקס הכרומטי של מעגל באורך זוגי ושל מעגל באורך אי זוגי? הוכיחו את תשובותיכם.

ב. להלן נתון אלגוריתם לצביעת C_n (קליקה בגודל n) עבור n זוגי:

(1) צייר את C_n כך שקדקודי הגרף יהיו הקדקודים של מצולע פשוט וקמור בעל $n - 1$ צלעות והנקודה שבמרכז המצולע;

(2) עבור i המקבל את הערכים 1 עד $n - 1$ בצע:

(2.1) צבע בצבע מס׳ i איזושהי קשת מהנקודה שבמרכז המצולע לקדקוד של המצולע ואת כל קשתות המצולע שניתנות לצביעה בצבע מס׳ i.

הדגימו את ריצת האלגוריתם על C_4 ועל C_6.

שאלה 5 (25 נקודות: סעיפים א׳, ב׳, ג׳ – 5 נק׳ לכל אחד; סעיף ד׳ – 10 נק׳)

להלן תיאור לא פורמלי של אלגוריתם לפתרון בעיית תרמיל הגב בשלמים:

(1) הפעל על הקלט אלגוריתם חמדני, הבוחר את הפריטים על-פי השווי ליחידת משקל;

(2) הצב את הערך המוחזר על-ידי האלגוריתם החמדני ב-x;

(3) סמן את הפריט בעל הערך הגבוה ביותר ב- v_{max};

(4) החזר את $\max(x, v_{max})$.

א. נסמן ב-k את האינדקס שבו האלגוריתם החמדני המופעל בשורה (1) נעצר (כלומר, הפריט ה-k לא נלקח על-ידי האלגוריתם). מהו ערך הפתרון שמחזיר האלגוריתם החמדני?

ב. נסמן ב- M_{Greedy} את ערך הפתרון שמחזיר האלגוריתם החמדני המופעל בשורה (1), ונסמן ב- $M_{f\text{-}Greedy}$ את ערך הפתרון שהיה מחזיר האלגוריתם החמדני לבעיית תרמיל הגב בשברים (אם הוא היה מופעל על אותו קלט). הוכיחו כי מתקיים $M_{f\text{-}Greedy} < M_{Greedy} + v_k$.

ג. נסמן ב- OPT את ערכו של הפתרון האופטימלי לבעיית תרמיל הגב בשלמים. הסבירו מדוע מתקיים $OPT \leq M_{f\text{-}Greedy}$.

ד. הסיקו מהסעיפים הקודמים שערכו של הפתרון שמחזיר האלגוריתם המתואר לעיל הוא לפחות OPT/2.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

הוכיחו שקיימת רדוקציה פולינומית בין כל שתי בעיות ב-P.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 8-9

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2012ג **מועד אחרון להגשה:** 31.8.2012

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות: • שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס • שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה **הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס**.

שאלה 1 (15 נקודות)

נתבונן בגרסה הבאה של בעיית התאמת המילים:

הקלט לבעיה: שתי סדרות מילים X ו-Y ומספר טבעי N

השאלה: האם קיימת סדרת אינדקסים שאורכה חסום על-ידי N, כך שאם נשרשר את המילים המתאימות מ-X ומ-Y תתקבל אותה מילה?

האם הבעיה כריעה? אם כן, לאיזו מחלקת סיבוכיות היא שייכת?

נמקו את תשובותיכם.

שאלה 2 (15 נקודות)

הגדירו את בעיית הטוטליות והוכיחו שהבעיה אינה כריעה.

שאלה 3 (20 נקודות)

מספר ראשוני p נקרא **ראשוני ז'רמֵן** אם $2p + 1$ הוא גם כן מספר ראשוני.

השאלה אם קיימים אינסוף מספרים שהם ראשוניֵ ז'רמן היא שאלה פתוחה בתורת המספרים. נניח שעומד לרשותכם אורקל לבעיית הטוטליות. הראו כיצד אפשר להשתמש באורקל כדי לקבוע אם קיימים אינסוף מספרים שהם ראשוניֵ ז'רמן.

שאלה 4 (25 נקודות: סעיף א׳ – 10 נק׳; סעיף ב׳ – 15 נק׳)

נתונה מכונת טיורינג M שבה הראש הקורא-כותב יכול להתקדם רק בקפיצות: קפיצה של 3 מקומות ימינה או קפיצה של 7 מקומות שמאלה.

א. הראו כיצד אפשר לבצע סימולציה של המכונה M באמצעות מכונת טיורינג רגילה.

ב. הראו כיצד אפשר לבצע סימולציה של מכונת טיורינג רגילה באמצעות המכונה M.

בכל אחד משני הסעיפים יש לפרט את המעברים של המכונה המבצעת את הסימולציה.

שאלה 5 (25 נקודות: סעיף א׳ – 10 נק׳; סעיף ב׳ – 5 נק׳; סעיף ג׳ – 10 נק׳)

מספר יפה הוא מספר טבעי, המורכב מרצף של אחדים ואחריו רצף של אפסים.

למשל, 10 הוא המספר היפה הקטן ביותר. המספרים 110 ו- 1110000 הם גם-כן מספרים יפים.

(שימו לב שאין מדובר כאן על מספרים בינריים אלא על מספרים עשרוניים.)

א. בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי המקבל רק מספרים יפים.

ב. הוכיחו את הטענה הבאה:

בהינתן מספר טבעי n וקבוצה S של $n + 1$ מספרים טבעיים, קיימים ב-S שני מספרים a, b

כך ש- $a \equiv b (\mathrm{mod}\ n)$; כלומר, ל-$a$ ול-b יש אותה שארית בחלוקה ב-n.

ג. השתמשו בסעיף ב׳ כדי להוכיח את הטענה הבאה:

בהינתן מספר טבעי כלשהו n, קיים מספר יפה שהוא כפולה של n.

רמז: התבוננו בקבוצה של $n + 1$ מספרים (שונים), שכולם מורכבים מרצף של אחדים.

שאלה 6 (שאלת בונוס)

נדון בגרסה של בעיית התאמת המילים שבה הא״ב הוא בן אות אחת.

נניח שקיימים בסדרה שני אינדקסים i ו-j כך שמתקיים:

$$d_i = |x_i| - |y_i| > 0$$

$$d_j = |y_j| - |x_j| > 0$$

מצאו את סדרת האינדקסים **הקצרה ביותר** שמהווה התאמת מילים חוקית. מהו אורך הסדרה?

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 10-12

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2012ג **מועד אחרון להגשה:** 14.9.2012

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (15 נקודות)

כתבו אלגוריתם מקבילי המבצע מיון-מהיר (Quicksort), ונתחו את זמן ריצתו במקרה הטוב.

שאלה 2 (15 נקודות)

משכורתו של כל עובד במשרד ממשלתי בקובה מורכבת ממשכורת בסיס b (זהה לכולם) ומ-M תוספות שונות (300 פזו לבעלי תואר אקדמי, 50 פזו לכל שנת ותק, 10 פזו לכל שעת עבודה נוספת וכו').

נסמן ב-N את מספר העובדים במשרד. עלינו לחשב את המשכורת המגיעה לכל אחד מהעובדים. נמצאים בידינו הנתונים האישיים של כל העובדים והפירוט של כל התוספות האפשריות למשכורת.

הסבירו כיצד אפשר לבצע את חישוב המשכורות בצורה יעילה באמצעות רשת סיסטולית.

שאלה 3 (20 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

א. הגדירו את מחלקת הסיבוכיות RP ותנו דוגמה לבעיה השייכת ל-RP.

ב. אלגוריתם **אטלנטיק-סיטי** הוא אלגוריתם הסתברותי, שרץ בזמן פולינומי ועלול לטעות טעות **דו-צדדית** בהסתברות שקטנה מ- 1/3. כלומר, אם התשובה לבעיה היא "כן", אז האלגוריתם יחזיר "כן" בהסתברות שגדולה מ- 2/3; אם התשובה לבעיה היא "לא", אז האלגוריתם יחזיר "לא" בהסתברות שגדולה מ- 2/3.

הוכיחו שלכל בעיה ב-RP קיים אלגוריתם אטלנטיק-סיטי.

שאלה 4 (25 נקודות: סעיף א' – 20 נק'; סעיף ב' – 5 נק')

בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, נאמר שצביעה של **קשתות** הגרף היא צביעה חוקית, אם כל שתי קשתות בעלות קדקוד משותף צבועות בצבעים שונים.

נגדיר את הבעיה הבאה (בעיית ה- edge 4-coloring):

הקלט לבעיה: גרף לא מכוון $G = (V, E)$

השאלה: האם קיימת צביעה חוקית של קשתות הגרף בארבעה צבעים ?

א. נניח שאיה רוצה לשכנע את בועז, שאפשר לצבוע את הקשתות של גרף נתון G בצורה חוקית באמצעות ארבעה צבעים. בועז צריך להשתכנע בהסתברות גבוהה שקיימת צביעה חוקית כזו, אך אסור שהוא ילמד דבר על תבנית הצביעה.
תארו פרוטוקול הוכחה מתאים.

ב. האם ניתן לצבוע בארבעה צבעים את הקשתות של C_5 (קליקה של חמישה צמתים) ?
הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 5 (25 נקודות: סעיף א' – 10 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

המשחק Nim הוא משחק עבור שני שחקנים המשוחק באופן הבא:

בהתחלה קבוצה של n אבני משחק מונחת על השולחן בין שני השחקנים. בכל שלב השחקן שתורו לשחק צריך לחלק את אחת מקבוצות האבנים שעל השולחן (לא משנה איזו) לשתי תת-קבוצות לא ריקות שונות בגודלן. למשל, קבוצה של 6 אבנים אפשר לחלק לשתי תת-קבוצות של 5 ו-1 או 4 ו-2 (אך לא 3 ו-3). השחקן הראשון שלא יכול לבצע מהלך חוקי מפסיד במשחק.

א. ציירו את עץ המשחק עבור $n = 7$.

ב. נתחו את המשחק בשיטת המינימקס. האם אחד השחקנים יכול להבטיח לעצמו ניצחון ?

שאלה 6 (שאלת בונוס)

חוו דעתכם על המשפט הבא:

"ניצחון של תוכנת מחשב על רב-אמן בשחמט אינו מעניין יותר מניצחון של בולדוזר בתחרות אולימפית בהרמת משקולות." (נועם חומסקי)