שאלה 1 (25 נקודות)

יהיו $Z_1, Z_2, \ldots$ משתנים מקריים בלתי-תלויים שלכל אחד מהם התפלגות נורמלית סטנדרטית,

ויהי N משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p $(0 < p < 1)$, כך ש- N בלתי-תלוי ב- Z_i, לכל $i = 1,2,\ldots$.

נגדיר את המשתנה המקרי X על-ידי $X = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_{2N}^2}{2}$.

(9 נק') א. מצא את פונקציית הצפיפות המותנית $f_{X|N}(x\,|\,n)$,
וזהה את ההתפלגות המותנית של X בהינתן $N = n$.

(8 נק') ב. מצא את פונקציית הצפיפות השולית $f_X(x)$, וזהה את ההתפלגות השולית של X .

(8 נק') ג. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית $p_{N|X}(n\,|\,x)$,
וזהה את ההתפלגות המותנית של $N - 1$ בהינתן $X = x$.

הערה: זכור כי $\Gamma(n) = (n-1)!$.

שאלה 2 (25 נקודות)

ועדה עירונית מתכנסת בכל פעם שעליה להחליט כיצד לנהוג במבנה בלתי-חוקי שהוקם בשטח העיר.

בדיון הראשון שנערך בנוגע לכל מבנה כזה –

ההסתברות שהוועדה תורה על הריסתו היא 0.5 ;

ההסתברות שתקבע מועד לדיון שני בעניינו היא 0.4 ;

וההסתברות שתוציא לו היתר בנייה היא 0.1.

אם בדיון הראשון הוועדה מורה על הריסת מבנה, בעליו מגיש ערעור על ההחלטה בהסתברות 0.7.

ההסתברות שהערעור יתקבל והמבנה יקבל היתר היא 0.4 ;

ההסתברות שהערעור יידחה והמבנה ייהרס היא 0.6.

אם בדיון הראשון הוועדה קובעת מועד לדיון שני בעניינו של מבנה, ההסתברות שבסופו של דבר יינתן לו היתר היא 0.8, ואחרת – הוא ייהרס.

הערה: שימו לב, שבסופו של דבר, כל מבנה לא-חוקי מקבל היתר או נהרס.

(7 נק') א. מהי ההסתברות שמבנה בלתי-חוקי יקבל היתר?

ב. הוועדה דנה בעניינים של 20 מבנים בלתי-חוקיים.
בהנחה שאין תלות בין החלטותיה לגבי מבנים שונים –

(6 נק') 1. מהי ההסתברות שהמבנה החמישה-עשר, שהוועדה תדון בעניינו, יהיה השני (מתוך ה-15) שיקבל היתר עוד בדיון הראשון בעניינו?

(6 נק') 2. אם בסופו של דבר 14 מ-20 המבנים קיבלו היתר,
מהי ההסתברות ש-3 מהם קיבלו את ההיתר בדיון הראשון בעניינם?

(6 נק') 3. אם ידוע שרק 3 מ-20 מבנים אלו קיבלו היתר <u>בדיון הראשון</u> בעניינם,
מהי שונות מספר המבנים <u>הנוספים</u> (מתוך ה-20) שקיבלו היתר בסופו של דבר?

שאלה 3 (25 נקודות)

בארגז יש 25 כדורים זהים בצורתם: 5 לבנים, 5 צהובים, 5 ירוקים, 5 אדומים ו-5 כחולים.

מוציאים מן הארגז באקראי 8 כדורים <u>ללא החזרה</u>.

יהי X מספר הצבעים השונים של 8 הכדורים שנבחרו.

(7 נק׳) א. חשב את ההסתברות שבין 8 הכדורים הנבחרים יהיו לפחות כדור לבן אחד ולפחות כדור צהוב אחד.

(9 נק׳) ב. חשב את התוחלת של X.

(9 נק׳) ג. חשב את השונות של X.

שאלה 4 (25 נקודות)

נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת של X ו-Y:

$$f(x,y)=3(x+y) \qquad , \qquad 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 1\ ,\ 0\le x+y\le 1$$

(6 נק׳) א. מצא את פונקציית הצפיפות השולית של X.

(6 נק׳) ב. חשב את $E[Y \mid X=0.5]$.

(7 נק׳) ג. חשב את $P\{1-2X<Y<0.5\}$.

(6 נק׳) ד. האם X ו-Y בלתי-תלויים?

שאלה 5 (25 נקודות)

(13 נק׳) א. בסוף קו ייצור של ״קרמבו״ יש 2 עובדי אריזה.

מספר הקרמבו שעובד A אורז במשך שעה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר λ^2.

מספר הקרמבו שעובד B אורז במשך שעה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $1.25\lambda^2$.

אין תלות בין ההספקים של שני העובדים.

אם שני העובדים ביחד אורזים יותר מ-280 קרמבו בשעה אחת בהסתברות 0.3085,

מהו **<u>בקירוב</u>** הערך של λ?

ב. בסוף קו ייצור אחר יש עובד אריזה יחיד.

זמן האריזה (בדקות) של כל קרמבו הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת μ ושונות 0.035^2.

אין תלות בין זמני האריזה של קרמבו שונים שעובד זה אורז.

(6 נק׳) 1. אם זמן האריזה של קרמבו אחד גדול מ-0.12359 דקות בהסתברות 0.25,

מהי התוחלת μ?

(6 נק׳) 2. בוחרים 20 קרמבו שכל אחד מהם נארז בזמן שעולה על 0.09 דקות.

מהי שונות מספר הקרמבו, מבין 20 קרמבו אלו, שזמן האריזה שלהם היה קצר מ-0.12 דקות?

הערה: בסעיף זה, <u>אין הכרח</u> לערוך אינטרפולציה לינארית.

בהצלחה!