פרק 3: הסתברות מותנית ואי-תלות (פתרונות) (20425 / 16.8.10)

1. נתון: $0 < P(A)$ ו- $0 < P(B) < 1$.

א. הוכחה: אם $P(A) = P(B)$ אז $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ ולכן $P(A|B) = P(B|A)$.

ב. דוגמא נגדית: נניח ש- $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ וש-A ו-B מאורעות זרים.

אז, $P(A|B) = P(B|A)$ כי $P(A\cap B) = 0$, אבל $P(A) \neq P(B)$.

ג. דוגמא נגדית: נניח כי $P(A\cap B) = 0.2$; $P(A\cap B^C) = 0.1$; $P(A^C\cap B) = 0.3$; $P(A^C\cap B^C) = 0.4$.

אז, $P(A \mid B) + P(A \mid B^C) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} + \frac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{0.2}{0.5} + \frac{0.1}{0.5} = 0.6 \neq 1$.

ד. הוכחה: לפי הנתון $0 < P(B) < 1$, לכן $P(A \mid B) + P(A^C \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} + \frac{P(A^C\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.

2. א. מהנתון ש- $P(A) = 0.6$ ו- $P(B| A^C) = 0.25$ מקבלים כי $P(B\cap A^C) = 0.1$.

לכן, $P(A\cap B) = P(B) - P(B\cap A^C) = 0.15 - 0.1 = 0.05$.

ב. נשים לב שמתקיים השוויון $P(B| A^C) = P(B)$. כלומר, A ו- B מאורעות בלתי-תלויים. (מהשוויון הנתון נובע שתנאי האי-תלות מתקיים עבור A^C ו-B , ומכאן אפשר להראות שהתנאי מתקיים גם עבור A ו-B .)

לכן, $P(A\cap B) = P(A)P(B) = 0.6 \cdot 0.25 = 0.15$.

3. לפתרון הבעיה נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה, שלפיה מתקיים: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)$

נסמן: $\max_{i=1,\dots,n} P(A \mid B_i) = P$; $\min_{i=1,\dots,n} P(A \mid B_i) = p$

כעת, מתקיים: $$p = p \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)}_{=1} = \sum_{i=1}^{n} p \cdot P(B_i) \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)}_{=P(A)} \le \sum_{i=1}^{n} P \cdot P(B_i) = P \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)}_{=1} = P$$

4. הנתונים הם: A = התלמיד הוא בת $\qquad P(A) = 0.55$

B = התלמיד משתתף לפחות בחוג אחד $\qquad P(A\cap B^C) = 0.1 \qquad P(B) = 0.8$

$C \subseteq B$; C = התלמיד משתתף ביותר משני חוגים $\qquad P(A\cap C) = 0.05 \qquad P(C|B) = 0.25$

א. $P(C) = P(B \cap C) = P(C|B)P(B) = 0.25 \cdot 0.8 = 0.2$

ב. $P(A^C\cap C) = P(C) - P(A\cap C) = 0.2 - 0.05 = 0.15$

ג. $P(A\cup B) = P(B) + P(A\cap B^C) = 0.8 + 0.1 = 0.9$

ד. $P(A^C \mid C) = \frac{P(A^C\cap C)}{P(C)} = \frac{0.15}{0.2} = 0.75$

5. הנתונים הם: A = נבחר אזרח אקדמאי $\qquad P(A) = 0.15$

B = נבחר אזרח מעשן $\qquad P(B) = 0.25$

C = נבחרה אישה $\qquad P(C) = 0.5$

$P(B|C) = 0.2$

$P(A\cap B|C) = 0.02 \quad \Rightarrow \quad P(A\cap B\cap C) = P(A\cap B|C)\mathrm{P}(C) = 0.02\cdot 0.5 = 0.01$

$P(A|C^C) = 0.2 \quad ; \quad P(A\cap B) = 0.05$

א. $P(A\cap C^C) = P(A|C^C)\,P(C^C) = 0.2\cdot 0.5 = 0.1$

ב. $P(B\cap C) = P(B|C)\,P(C) = 0.2\cdot 0.5 = 0.1$

ג. $P(A\cap B\cap C^C) = P(A\cap B) - P(A\cap B\cap C) = 0.05 - 0.01 = 0.04$

ד. $P(A \mid B^C) = \frac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(B^C)} = \frac{0.15-0.05}{0.75} = \frac{2}{15} = 0.1333$

ה. $P(C^C \mid A\cap B) = \frac{P(C^C\cap A\cap B)}{P(A\cap B)} = \frac{0.04}{0.05} = 0.8$

ו.
$$P(C^C|\ A\cup B) = \frac{P(C^C\cap (A\cup B))}{P(A\cup B)} = \frac{P((C^C\cap A)\cup (C^C\cap B))}{P(A\cup B)}$$
$$= \frac{P(C^C\cap A) + P(C^C\cap B) - P(C^C\cap A\cap B)}{P(A) + P(B) - P(A\cap B)}$$
$$= \frac{0.1 + 0.15 - 0.04}{0.15 + 0.25 - 0.05} = \frac{0.21}{0.35} = 0.6$$

כי $P(B\cap C^C) = P(B) - P(B\cap C) = 0.25 - 0.1 = 0.15$

6. א. נסמן ב- A_i את המאורע שממסר i סגור, לכל $i = 1,2,3,4$, וב- B את המאורע שעובר זרם מ-A ל-B.
לפי הנתון $P(A_i) = 0.9$ לכל i.

$$P\{\text{עובר זרם ב-3 או ב-4}\} = P(A_3\cup A_4) = P(A_3) + P(A_4) - P(A_3\cap A_4)$$
$$= P(A_3) + P(A_4) - P(A_3)P(A_4) \qquad \text{[כל הממסרים בלתי-תלויים זה בזה]}$$
$$= 0.9 + 0.9 - 0.9^2 = 0.99$$

ומכאן:
$$P(B) = P(A_1\cap A_2\cap (A_3\cup A_4))\,\}$$
$$= P(A_1)P(A_2)P(A_3\cup A_4) \qquad \text{[כל הממסרים בלתי-תלויים זה בזה]}$$
$$= 0.9^2\cdot 0.99 = 0.8019$$

ב. נחשב את ההסתברות המותנית שממסר 1 פתוח, אם ידוע שלא עובר זרם מ-A ל-B.

$$P(A_1^C \mid B^C) = \frac{P(A_1^C\cap B^C)}{P(B^C)} \underset{A_1^C\subset B^C}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{P(A_1^C)}{1-0.8019} = \frac{0.1}{0.1981} = 0.5048$$

ג. נחשב את ההסתברות המותנית שממסר 3 פתוח, אם ידוע שלא עובר זרם מ-A ל-B.

$$P(A_3^C \mid B^C)=\frac{P(A_3^C\cap(A_1^C\cup A_2^C\cup A_4^C))}{1-0.8019}$$

$$=\frac{P(A_3^C)-P(A_3^C\cap(A_1^C\cup A_2^C\cup A_4^C)^C)}{1-0.8019}$$

$$=\frac{P(A_3^C)-P(A_3^C\cap A_1\cap A_2\cap A_4)}{1-0.8019}$$

$$=\frac{0.1-0.1\cdot 0.9^3}{0.1981}=\frac{0.0271}{0.1981}=0.1368$$

ד. נחשב את ההסתברות המותנית שעובר זרם מ-A ל-B, אם ידוע שממסר 4 פתוח.

$$P(B\mid A_4^C)=\frac{P(A_4^C\cap A_1\cap A_2\cap A_3)}{P(A_4^C)}$$

$$=\frac{P(A_4^C)P(A_1)P(A_2)P(A_3)}{P(A_4^C)}=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$ [כל הממסרים בלתי-תלויים זה בזה]

$$=0.9^3=0.729$$

7. נסמן ב- A_i את המאורע שממסר i סגור, לכל $i=1,2,3,4,5$.

לפי הנתונים: A_1 בלתי-תלוי ב- A_i לכל $i=2,3,4,5$ $\qquad P(A_1)=0.85$

A_2 ו- A_3 בלתי-תלויים ב- A_4 ו-A_5 $\qquad P(A_3)=0.95$

$$\begin{cases}P(A_2\mid A_3^C)=0.9 & \Rightarrow\quad P(A_2\cap A_3^C)=P(A_2\mid A_3^C)P(A_3^C)=0.9\cdot 0.05=0.045\\ P(A_2\mid A_3)=0.4 & \Rightarrow\quad P(A_2\cap A_3)=P(A_2\mid A_3)P(A_3)=0.4\cdot 0.95=0.38\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad P(A_2)=P(A_2\cap A_3)+P(A_2\cap A_3^C)=0.38+0.045=0.425$$

$$P(A_4^C\cap A_5^C)=0.1\quad\Rightarrow\quad P(A_4\cup A_5)=1-0.1=0.9$$

א. כדי לחשב את ההסתברות שעובר זרם מ-A ל-B, נתחיל בחישוב $P(A_2\cup A_3)$. נקבל:

$$P(A_2\cup A_3)=P(A_2)+P(A_3)-P(A_2\cap A_3)=0.425+0.95-0.38=0.995$$

ומכאן:

$$P\{\text{עובר זרם מ-A ל-B}\}=P(A_1\cap(A_2\cup A_3)\cap(A_4\cup A_5))$$

$$=P(A_1)P(A_2\cup A_3)P(A_4\cup A_5)$$ [לפי נתוני האי-תלות בין הממסרים]

$$=0.85\cdot 0.995\cdot 0.9=0.761175$$

ב. נחשב את ההסתברות המותנית שממסר 2 פתוח, אם ידוע שלא עובר זרם מ-A ל-B.

נסמן ב-B את המאורע שעובר זרם מ-A ל-B, ונקבל:

$$P(A_2^C\mid B^C)=\frac{P(A_2^C\cap B^C)}{P(B^C)}=\frac{P(A_2^C\cap(A_1^C\cup A_3^C\cup(A_4^C\cap A_5^C)))}{P(B^C)}$$

המונה של הביטוי האחרון שקיבלנו כולל חיתוך של שני מאורעות תלויים (בגלל התלות בין ממסרים 2 ו-3), ולכן מסורבל מעט לחישוב. במקרה כזה, כדאי לנסות למצוא דרך אחרת לחישוב המונה. אפשר להבחין שיותר פשוט יהיה לחשב את $P(A_2^C \cap B)$ וממנה לקבל את $P(A_2^C \cap B^C)$.

לפיכך:

$$P(A_2^C \cap B) = P(A_2^C \cap A_1 \cap A_3 \cap (A_4 \cup A_5))$$

$$= P(A_2^C \cap A_3)P(A_1)P(A_4 \cup A_5) \qquad \text{[לפי נתוני האי-תלות בין הממסרים]}$$

$$= [P(A_3) - P(A_2 \cap A_3)]P(A_1)P(A_4 \cup A_5)$$

$$= [0.95 - 0.38] \cdot 0.85 \cdot 0.9 = 0.43605$$

ומכאן:

$$P(A_2^C \mid B^C) = \frac{P(A_2^C \cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{P(A_2^C) - P(A_2^C \cap B)}{P(B^C)} = \frac{(1-0.425) - 0.43605}{1 - 0.761175} = 0.5818$$

ג. נחשב את ההסתברות המותנית שעובר זרם מ-A ל-B, אם ידוע שממסר 2 פתוח.

$$P(B \mid A_2^C) = \frac{P(B \cap A_2^C)}{P(A_2^C)} = \frac{0.43605}{0.575} = 0.75835$$

הערה: שימו לב, שבסעיף ג מקבלים למעשה כי:

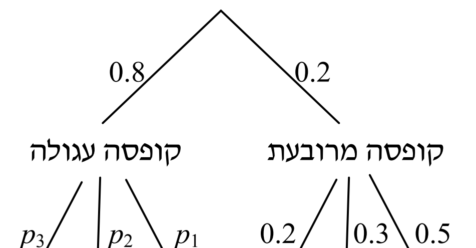
$$P(B \mid A_2^C) = \frac{P(B \cap A_2^C)}{P(A_2^C)} = P(A_3 \mid A_2^C)P(A_1)P(A_4 \cup A_5)$$

<u>אילו</u>, ממסרים 2 ו-3 היו בלתי-תלויים זה בזה, היינו מקבלים כי:

$$P(B \mid A_2^C) = \frac{P(B \cap A_2^C)}{P(A_2^C)} = P(A_3)P(A_1)P(A_4 \cup A_5)$$

בדומה לתוצאות שהתקבלו בשאלה הקודמת, שבה <u>כל</u> הממסרים היו בלתי-תלויים.

8. א. נבנה עץ הסתברות המתאים לנתוני הבעיה.



תחילה נמלא את הענף של העץ הנוגע לקופסאות מרובעות. אחר-כך, נמלא את הענף הנוגע לקופסאות העגולות.

ראשית, נתון שהמאורעות "הקופסה שנבחרה מרובעת" ו"הסוכריה שנבחרה כחולה" בלתי-תלויים.

לכן: $p_2 = P\{\text{כחול} \mid \text{עגולה}\} = P\{\text{כחול} \mid \text{מרובעת}\} = 0.3$

הסבר: אם נתון שהמאורעות A ו-B בלתי-תלויים זה בזה, אז גם המאורעות A ו- B^C בלתי-תלויים זה בזה, ומתקיים $P(A|B) = P(A)$ ו- $P(A|B^C) = P(A)$, ולכן $P(A|B) = P(A|B^C)$.

שנית, נתון ש- 36% מהסוכריות הן לבנות, ולכן מנוסחת ההסתברות השלמה נובע כי:

$$0.2 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot p_3 = 0.36 \quad \Rightarrow \quad p_3 = 0.4$$

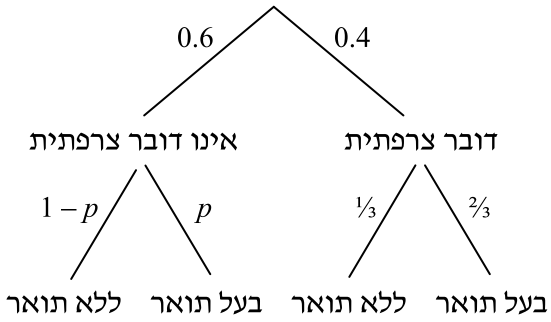
ומכאן, נקבל כי $p_1 = 0.3$.

ב. $P\{\text{לבן | עגולה}\} = \dfrac{0.8 \cdot 0.4}{0.8 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.2} = \dfrac{8}{9} = 0.8889$

ג. סוכריות צהובות יש רק בקופסאות עגולות, לכן ההסתברות המבוקשת שווה ל-1.

ד. המאורעות "הקופסה מרובעת" ו"הסוכריה צהובה" זרים זה לזה. (הם אינם מופיעים על אותו ענף בעץ.)

9. עץ ההסתברות המתאים לבעיה הזו הוא:



כמו כן, נתון שמחצית מבעלי התואר האקדמי הם דוברי צרפתית, כלומר, $P\{\text{דובר צרפתית | בעל תואר}\} = ½$. נפשט את ההסתברות האחרונה, כדי למצוא את הערך של p.

מקבלים: $P\{\text{דובר צרפתית | בעל תואר}\} = \dfrac{0.4 \cdot \frac{2}{3}}{0.4 \cdot \frac{2}{3} + 0.6p} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad p = \dfrac{4}{9}$

א. $P\{\text{בעל תואר}\} = 0.4 \cdot \frac{2}{3} + 0.6 \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{15} = 0.533333$

ב. $P\{\text{בעל תואר}\}P\{\text{דובר צרפתית}\} = \frac{8}{15} \cdot 0.4 = \frac{16}{75} = 0.213333$

$P\{\text{דובר צרפתית} \cap \text{בעל תואר}\} = \frac{2}{3} \cdot 0.4 = \frac{20}{75} = 0.266667$

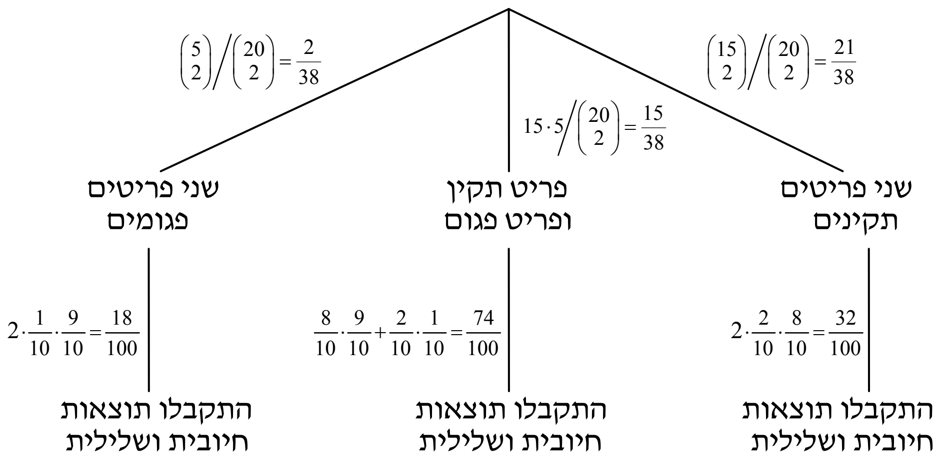
שתי התוצאות האחרונות שקיבלנו אינן שוות זו לזו, ולכן שני המאורעות הנתונים תלויים זה בזה.

ג. לפי כלל החיבור: $P\{\text{דובר צרפתית} \cup \text{בעל תואר}\} = \frac{8}{15} + \frac{2}{5} - \frac{4}{15} = \frac{2}{3}$

לכן, 66.67% מהמועמדים יזומנו לראיון נוסף.

10. א. ההסתברות שפריט אחד תקין והשני פגום היא: $\binom{15}{1}\binom{5}{1}\Big/\binom{20}{2} = \dfrac{15}{38}$

ב. נצייר עץ הסתברות מתאים לבעיה:



לפי עץ-ההסתברות נקבל שההסתברות, שבבדיקת שני הפריטים תתקבלנה תוצאות חיובית ושלילית, היא:

$$P\{\text{תוצאות חיובית ושלילית}\} = \frac{21\cdot 32 + 15\cdot 74 + 2\cdot 18}{3{,}800} = \frac{909}{1{,}900} = 0.47842$$

ג. $$P\{\text{שני פריטים תקינים} \mid \text{תוצאות חיובית ושלילית}\} = \frac{21\cdot 32}{3{,}800}\bigg/\frac{909}{1{,}900} = \frac{112}{303} = 0.36964$$

11. נגדיר שני מאורעות ונרשום בעזרתם את נתוני הבעיה:

A = הילד הבכור הוא בת $\qquad P(A^C) = 0.6 \quad ; \quad P(A\cap B) = 0.3$

B = הילד הצעיר הוא בת $\qquad P(A\cap B^C) + P(A^C\cap B) = 0.5$

א. מהנתונים נובע כי: $P(A\cap B^C) = P(A) - P(A\cap B) = 0.4 - 0.3 = 0.1 \quad\Rightarrow\quad P(A^C\cap B) = 0.4$

לכן: $$P(A^C|\, B) = \frac{P(A^C\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A^C\cap B)}{P(A\cap B) + P(A^C\cap B)} = \frac{0.4}{0.3+0.4} = \frac{4}{7}$$

ב. $$P\{\text{בת צעירה} \mid \text{בת אחת}\} = \frac{P(A^C\cap B)}{P(A\cap B^C) + P(A^C\cap B)} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8$$

ג. $$P(A^C\cap B^C \mid A^C\cup B^C) = \frac{P(A^C\cap B^C)}{P(A^C\cup B^C)} = \frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A\cap B)} = \frac{1-P(A)-P(A^C\cap B)}{1-P(A\cap B)} = 0.2857$$

ד. $$P(A^C \mid A^C\cup B^C) = \frac{P(A^C)}{P(A^C\cup B^C)} = \frac{0.6}{0.7} = 0.857143$$

12. א. כדי לקבוע את ההסתברות, שבה השלישי זוכה, נתבונן רק על אפשרויות הבחירה שלו ונקבל $\frac{\binom{3}{1}}{\binom{10}{1}} = 0.3$.

ב. באותו אופן מקבלים, שההסתברות שהשביעי יזכה בפרס, גם היא 0.3 .

ג. כעת, נתון שאחד הכרטיסים הזוכים נבחר על-ידי השני בתור, ולכן אם נתבונן רק על הבחירה של השלישי בתור, נקבל באותה דרך שבה נקטנו בסעיף א, שההסתברות המבוקשת היא $\frac{\binom{2}{1}}{\binom{9}{1}} = \frac{2}{9}$.

ד. מבחינת ההסתברות אין הבדל בין הסעיף הזה לסעיף ג, כלומר ההסתברות המבוקשת היא $\frac{2}{9}$.

13. א. אם A ו- B בלתי-תלויים, אז $P(A\cap B) = P(A)P(B) > 0$ ולכן הם אינם זרים.

אם A ו- B בלתי-תלויים, אז קל להראות שגם A ו- B^C בלתי-תלויים, A^C ו- B בלתי-תלויים, ו- A^C ו- B^C בלתי-תלויים. לכן, ההסתברות שיקרה בדיוק מאורע אחד היא:

$$P(A\cap B^C) + P(A^C\cap B) = P(A)\mathrm{P}(B^C) + P(A^C)\mathrm{P}(B) = P_A(1-P_B) + (1-P_A)P_B$$

ב. אם המאורעות בלתי-תלויים זה בזה, ההסתברות שיקרה בדיוק מאורע אחד היא:

$$P(A_1\cap A_2^C\cap\ldots\cap A_n^C) + \ldots + P(A_1^C\cap\ldots\cap A_{n-1}^C\cap A_n)$$
$$= P(A_1)P(A_2^C)\cdot\ldots\cdot P(A_n^C) + \quad\ldots\quad + P(A_1^C)\cdot\ldots\cdot P(A_{n-1}^C)P(A_n) \;=\; np(1-p)^{n-1}$$

ואם המאורעות זרים זה לזה, אז ההסתברות שיקרה בדיוק אחד מהם היא:

$$P(A_1 \cap A_2^C \cap \ldots \cap A_n^C) + \ldots + P(A_1^C \cap \ldots \cap A_{n-1}^C \cap A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) \;=\; np$$

14. נראה תחילה שקיימת תלות בין המאורעות כאשר $n = 2$:

$$P(A) = P\{\text{(ה,כ),(כ,ה)}\} = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}$$

$$P(B) = P\{\text{(ה,כ),(כ,ה),(ה,ה)}\} = 3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{4}$$

$$P(A \cap B) \underset{A\subset B}{\underset{\downarrow}{=}} P(A) = \tfrac{1}{2} \neq P(A)P(B) = \tfrac{3}{8} \qquad \Rightarrow$$ המאורעות A ו-B תלויים

כעת, נחשב את ההסתברויות הללו עבור $n \geq 3$ כללי:

$$P(A) \;=\; 1 - P\{\text{רק הצלחות}\} - P\{\text{רק כשלונות}\} = 1 - 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$P(B) \;=\; P\{\text{רק הצלחות}\} + P\{\text{בדיוק כשלון אחד}\} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + n \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = (n+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

$$P(A \cap B) \;=\; P\{\text{בדיוק כשלון אחד}\} = n \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

נבדוק באלו תנאים (על n) המאורעות A ו-B בלתי-תלויים זה בזה. כלומר, באלו תנאים מתקיים השוויון $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, המעיד על אי-תלות בין המאורעות. שוויון ההסתברויות מתקיים כאשר:

$$\left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\left[(n+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right] = (n+1)\left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

אולם, לכל $n \geq 3$, מתקיים $\left(\tfrac{1}{2}\right)^n > 0$, ולכן נבדוק עבור אלו ערכי n מתקיים השוויון:

$$(n+1)\left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = n \qquad \Rightarrow \qquad (n+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 2^n = 2 + 2n$$

כעת, לפי נוסחת הבינום מתקיים:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} \underset{n\geq 3}{\underset{\downarrow}{=}} \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \underbrace{\binom{n}{0} + \binom{n}{n}}_{=2} + \underbrace{\binom{n}{1} + \binom{n}{n-1}}_{=2n} + \sum_{i=2}^{n-2}\binom{n}{i} = 2 + 2n + K_n$$

כאשר $K_n \geq 0$, לכל $n \geq 3$.

עתה, נשים לב, שעבור $n = 3$, מקבלים כי $K_n = 0$. לכן, כאשר $n = 3$, מתקיים השוויון $2^n = 2 + 2n$, כלומר, מתקיים השוויון $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ומכאן שהמאורעות A ו-B בלתי-תלויים זה בזה.

לעומת זאת, כאשר $n > 3$ מקבלים כי $2^n > 2 + 2n$, ולכן השוויון אינו מתקיים והמאורעות תלויים.

15. א. ההסתברות שבהטלה השנייה תתקבל בדיוק אותה התוצאה שהתקבלה בהטלה הראשונה, אינה תלויה בתוצאה המסוימת שהתקבלה בהטלה הראשונה. בכל מקרה צריך לקבל שוב את שלושת התוצאות שהתקבלו בהטלה הראשונה. ולכן, ההסתברות המבוקשת שווה ל- $\left(\tfrac{1}{6}\right)^3 = \tfrac{1}{216}$.

ב. אם כל הקוביות זהות זו לזו במראן, ולא ניתן להבחין ביניהן, יש להפריד את החישוב לשלושה מקרים, בהתאם למספר התוצאות הזהות שמתקבלות בהטלה הראשונה.

1. אם בהטלה הראשונה התקבלו 3 תוצאות שונות (בהסתברות $\tfrac{6\cdot5\cdot4}{6^3} = \tfrac{120}{216}$), אז בהטלה השנייה יתקבלו אותן 3 תוצאות בהסתברות $\tfrac{3!}{6^3} = \tfrac{6}{216}$ (מכיוון ששלושת הקוביות זהות, ולכן אין חשיבות לקובייה המסוימת שבה מתקבלת כל תוצאה).

2. אם בהטלה הראשונה התקבלו 2 תוצאות זהות והשלישית שונה מהן (בהסתברות $\frac{90}{216}=\frac{3\cdot6\cdot5}{6^3}$), אז בהטלה השנייה יתקבלו אותן 3 תוצאות בהסתברות $\frac{3}{216}=\frac{3}{6^3}$ (מכיוון ששלושת הקוביות זהות, ולכן אין חשיבות לקובייה המסוימת שבה מתקבלת התוצאה השונה).

3. אם בהטלה הראשונה התקבלו 3 תוצאות זהות (בהסתברות $\frac{6}{216}=\frac{6}{6^3}$), אז בהטלה השנייה יתקבלו אותן 3 תוצאות בהסתברות $\frac{1}{216}=\frac{1}{6^3}$.

כעת, נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה, כדי לקבל את ההסתברות המבוקשת:

$$\frac{120}{216}\cdot\frac{6}{216}+\frac{90}{216}\cdot\frac{3}{216}+\frac{6}{216}\cdot\frac{1}{216}=\frac{720+270+6}{216^2}=0.02135$$

16. נסמן ב- A_n את המאורע שבבחירה ה-n-ית יוצא כדור כחול, לכל $n=1,2,\ldots,b+w$.

<u>שלב הבדיקה</u>

ברור כי:
$$P(A_1)=\frac{b}{b+w}$$

קל להראות גם כי:
$$P(A_2)=P(A_2\mid A_1)P(A_1)+P(A_2\mid A_1^C)P(A_1^C)$$
$$=\frac{b-1}{b-1+w}\cdot\frac{b}{b+w}+\frac{b}{b+w-1}\cdot\frac{w}{b+w}=\frac{b(b-1+w)}{(b+w-1)(b+w)}=\frac{b}{b+w}$$

כלומר, קיבלנו שבשתי הבחירות הראשונות ההסתברות לבחור כדור כחול שווה ליחס ההתחלתי בין הכדורים הכחולים לסך-כל הכדורים בכד.

<u>שלב האינדוקציה</u>

נניח שלכל יחס התחלתי בין הכדורים הכחולים בכד לבין סך-כל הכדורים בכד, ההסתברות להוציא כדור כחול בבחירה ה-$(n-1)$-ית שווה ליחס ההתחלתי הנתון.

כעת נחשב את ההסתברות להוציא כדור כחול בבחירה ה-n-ית, בהנחה שבתחילת הניסוי יש בכד b כדורים כחולים ו- w לבנים. נתנה על תוצאת הבחירה <u>בשלב הראשון</u>, ונקבל:

$$P(A_n)=P(A_n\mid A_1)P(A_1)+P(A_n\mid A_1^C)P(A_1^C)$$
$$=\frac{b-1}{b-1+w}\cdot\frac{b}{b+w}+\frac{b}{b+w-1}\cdot\frac{w}{b+w}=\frac{b}{b+w}$$
[לפי הנחת האינדוקציה]

17. נסמן ב- P_n את ההסתברות שהמטפס יימָצא אם ראש-המשלחת שולח n צוותים למדרון המערבי.

מתקיים:
$$P_n=0.7(1-0.4^n)+0.3(1-0.6^{10-n})$$

כעת, נחשב את ההפרש $P_{n+1}-P_n$ ונבדוק עבור אלו ערכים של n הוא חיובי:

$$P_{n+1}-P_n=0.7(0.4^n-0.4^{n+1})+0.3(0.6^{10-n}-0.6^{10-n-1})$$
$$=0.7\cdot0.4^n(1-0.4)+0.3\cdot0.6^{9-n}(0.6-1)$$
$$=0.42\cdot0.4^n-0.12\cdot0.6^{9-n}\overset{?}{>}0$$

האי-שוויון $P_{n+1} - P_n > 0$ מתקיים לכל n שמקיים $0.4^n \cdot 0.6^n = 0.24^n > \frac{0.12 \cdot 0.6^9}{0.42}$ או לחלופין לכל n שמקיים $n \ln 0.24 > \ln 0.002879$. לכן, $n < \frac{\ln 0.002879}{\ln 0.24} = 4.099$. כלומר, ההפרש שלעיל (שהוא פונקציה יורדת של n) חיובי כאשר $n = 0,1,2,3,4$ ושלילי כאשר $n = 5,6,7,8,9$. מכאן נוכל להסיק ש-P_n מקבלת את ערכה המקסימלי כאשר $n = 5$. לפיכך, על ראש המשלחת לשלוח 5 צוותי-חילוץ לכל מדרון.

18. נסמן ב-A את המאורע שנבחר מטבע תקין; ב-H_1 את המאורע שבהטלה הראשונה מתקבל H וב-H_2 את המאורע שבהטלה השנייה מתקבל H. לפי נתוני הבעיה מקבלים כי:

$$P(H_1) = P(H_1 \mid A)P(A) + P(H_1 \mid A^C)P(A^C) = 0.5 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.4 = 0.62$$

וכי:
$$P(H_2) = P(H_2 \mid A)P(A) + P(H_2 \mid A^C)P(A^C) = 0.5 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.4 = 0.62 = P(H_1)$$

קיבלנו כי $P(H_1) = P(H_2)$, מכיוון שבהינתן המטבע שנבחר, אין תלות בין הטלותיו.

כמו כן:

$$P(H_1 \cap H_2) = P(H_1 \cap H_2 \mid A)P(A) + P(H_1 \cap H_2 \mid A^C)P(A^C)$$
$$= P(H_1 | A)P(H_2 | A)P(A) + P(H_1 | A^C)P(H_2 | A^C)P(A^C) = 0.5^2 \cdot 0.6 + 0.8^2 \cdot 0.4 = 0.406$$

כאשר גם כאן, במעבר השני במשוואה, השתמשנו באי-תלות בין ההטלות <u>בהינתן המטבע שנבחר</u>.

לפיכך, קיבלנו כי $P(H_1 \cap H_2) \neq P(H_1)P(H_2)$, ומכאן שיש תלות בין ההטלות.

הערה: <u>שתי הטלות המטבע בלתי-תלויות</u> זו בזו <u>רק בהינתן המטבע שנבחר</u>. אולם, אם לא ידוע דבר לגבי המטבע שנבחר, ההטלות תלויות זו בזו.

שימו לב – אם ידוע שבהטלה הראשונה התקבל H, ההסתברות שגם בהטלה השנייה יתקבל H גדולה מ-0.62, שהיא $P(H_2)$, שקיבלנו קודם לכן:

$$P(H_2 | H_1) = \frac{P(H_1 \cap H_2)}{P(H_1)} = \frac{0.406}{0.62} = 0.655 \quad > \quad P(H_2) = 0.62$$

כמו כן, בהינתן המידע שבהטלה הראשונה התקבל H, ההסתברות שנבחר מטבע לא-תקין עולה על ההסתברות המקורית לבחירת מטבע לא-תקין, שהיא 0.4:

$$P(A^C | H_1) = \frac{P(A^C \cap H_1)}{P(H_1)} = \frac{0.4 \cdot 0.8}{0.62} = 0.516 \quad > \quad P(A^C) = 0.4$$

כלומר, אנו רואים שמידע זה מעלה את ההסתברות שנבחר מטבע לא-תקין ומכיוון שבמטבעות הלא-תקינים ההסתברות ל-H גדולה מ-0.5, גם ההסתברות לקבל H בהטלה השנייה עולה.

19. נסמן ב-A_1 את המאורע שאוהד מצליח בבחינה בחשבון וב-A_2 את המאורע שאוהד מצליח בבחינה באנגלית. כמו כן, נסמן ב-B את המאורע שאוהד מתכונן לשתי הבחינות.

לפי נתוני הבעיה:
$$P(A_1 \mid B) = P(A_2 \mid B) = 0.9 \quad ; \quad P(B) = 0.8$$
$$P(A_1 \mid B^C) = P(A_2 \mid B^C) = 0.5 \quad ; \quad P(B^C) = 0.2$$

והמאורעות A_1 ו-A_2 בלתי-תלויים בתנאי B ובתנאי B^C.

א. $$P(A_1) = P(A_1 \mid B)P(B) + P(A_1 \mid B^C)P(B^C) = 0.9 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.2 = 0.82$$

ב.
$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2 \mid B)P(B) + P(A_2 \cap A_2 \mid B^C)P(B^C)$$
$$= [P(A_1 \mid B)P(A_2 \mid B)]P(B) + [P(A_1 \mid B^C)P(A_2 \mid B^C)]P(B^C)$$
$$= 0.9^2 \cdot 0.8 + 0.5^2 \cdot 0.2 = 0.698$$

ג. $P(A_1) = P(A_2)$ ולכן:
$$P(A_1 \mid A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0.698}{0.82} = 0.85122$$

ד.
$$P(B \mid A_2) = \frac{P(B \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(A_2 \mid B)P(B)}{0.82} = \frac{0.9 \cdot 0.8}{0.82} = 0.87805$$

ה. 1) ההסתברות המותנית שאוהד הצליח בבחינה בחשבון, אם ידוע שהצליח בבחינה באנגלית (סעיף ג), גבוהה מההסתברות שיצליח בבחינה בחשבון (סעיף א), מכיוון שהידיעה שהצליח בבחינה באנגלית מרמזת על כך שהתכונן לשתי הבחינות.

2) גם ההסתברות המותנית שאוהד התכונן לבחינות, אם ידוע שהצליח בבחינה באנגלית, גבוהה מההסתברות הנתונה שיתכונן לבחינות, מאותה הסיבה. הידיעה שהצליח באנגלית, מעלה את הסיכוי שהתכונן לבחינות.

20. א. נשים לב שהמאורעות A ו-B זרים זה לזה. לפיכך, נוכל להשתמש בטענה המובאת בתרגיל מ72 (עמוד 128 בספר) או במדריך הלמידה (בסוף עמוד 45; הוכחתה בעמוד 46), שלפיה – אם A ו-B מאורעות זרים של ניסוי מקרי כלשהו, אז בחזרות בלתי-תלויות על הניסוי, המאורע A יתרחש לפני המאורע B בהסתברות:
$$\frac{P(A)}{P(A)+P(B)} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{9}{36}+\frac{11}{36}} = \frac{9}{20} = 0.45$$

ב. כעת, המאורעות A ו-C אינם זרים. לכן, לא נוכל להשתמש בטענה שהובאה בסעיף הקודם, כדי לחשב את ההסתברות המבוקשת. לחישוב ההסתברות הזו, נגדיר את המאורעות הבאים:

E = המאורע A התרחש לפני המאורע C;

E_i = המאורע A התרחש לראשונה בהטלה ה-i-ית והמאורע C לא התרחש בכלל ב-i ההטלות הראשונות.

מתקיים:
$$P(E) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \underset{\text{ה-}E_i\text{-ים זרים}}{\underset{\downarrow}{=}} \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) \underset{\text{החזרות בלתי-תלויות}}{\underset{\downarrow}{=}} \sum_{i=1}^{\infty} [P(A^C \cap C^C)]^{i-1} P(A \cap C^C)$$

כאשר:
$$P(A^C \cap C^C) = 1 - P(A \cup C) = 1 - P\{\text{שתי תוצאות זוגיות או זהות}\} = 1 - \tfrac{12}{36} = \tfrac{2}{3}$$
$$P(A \cap C^C) = P\{\text{שתי תוצאות זוגיות אבל לא זהות}\} = \tfrac{6}{36} = \tfrac{1}{6}$$

לכן:
$$P(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \tfrac{1}{6} = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{2}{3}} = 0.5$$

להלן, **דרך פתרון נוספת** לבעיה זו, המבוססת על הטענה המצוטטת בסעיף א.

נשים לב, שהמאורע E, המוגדר בתחילת הסעיף, מתרחש רק אם המאורע $A \cap C^C$ מתרחש לפני המאורע C. עתה, מכיוון שהמאורעות $A \cap C^C$ ו- C זרים זה לזה, נוכל להשתמש בתוצאת הטענה המצוטטת בסעיף א ולקבל כי:
$$P(E) = \frac{P(A \cap C^C)}{P(C) + P(A \cap C^C)} = \frac{P(A \cap C^C)}{P(A \cup C)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = 0.5$$

ג. חשוב לשים לב לכך, שהמאורע המתואר בסעיף זה, דהיינו, המאורע ש- C מתרחש לפני A , אינו המאורע המשלים של E, שהוגדר בסעיף הקודם, מכיוון שייתכן ששני המאורעות A ו-C (שאינם זרים), יתרחשו שניהם לראשונה באותה חזרה של הניסוי.

לפיכך, ההסתברות שהמאורע C יתרחש לפני המאורע A , תחושב בדרך דומה לחישוב ההסתברות בסעיף הקודם. נקבל:

$$\frac{P(A^C \cap C)}{P(A)+P(A^C \cap C)} = \frac{P(A^C \cap C)}{P(A \cup C)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{1}{3}} = 0.25$$

הערה: מהתוצאות של סעיפים ב ו-ג, אפשר לראות, שההסתברות ששני המאורעות A ו-C יתקבלו לראשונה באותה חזרה על הניסוי היא $0.25 = 1 - 0.5 - 0.25$.

21. נפתור את הבעיה הזאת בדרך ישירה. נתבונן בכל הרצפים האפשריים של אמת ושקר, ש-A אומר ל-B שאומר ל-C שאומר ל-D. נרשום את המצב לגבי כל אחד מהמשתתפים, דהיינו, את מה שאמרו A, B, C ו-D, ונרשום מה D היה אומר ש-A אמר בשרשרת המצבים הנתונה.

נסכם את כל האמור בטבלה הבאה:

A אמר	B אמר	C אמר	D אמר	D יאמר ש-A אמר
אמת	אמת	אמת	אמת	אמת **
אמת	אמת	אמת	שקר	שקר
אמת	אמת	שקר	אמת	שקר
אמת	אמת	שקר	שקר	אמת **
אמת	שקר	אמת	אמת	שקר
אמת	שקר	אמת	שקר	אמת **
אמת	שקר	שקר	אמת	אמת **
אמת	שקר	שקר	שקר	שקר
שקר	אמת	אמת	אמת	שקר
שקר	אמת	אמת	שקר	אמת *
שקר	אמת	שקר	אמת	אמת *
שקר	אמת	שקר	שקר	שקר
שקר	שקר	אמת	אמת	אמת *
שקר	שקר	אמת	שקר	שקר
שקר	שקר	שקר	אמת	שקר
שקר	שקר	שקר	שקר	אמת *

נסמן ב- E את המאורע ש-A אמר אמת וב- F את המאורע ש-D אמר ש-C אמר ש-B אמר ש-A אמר אמת. נשים לב ש-16 האפשרויות השונות אינן שוות הסתברות, מכיוון שכל אחת מהמשתתפים דובר אמת בהסתברות ⅓. נקבל:

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^4 + 6\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{\frac{13}{81}}{\frac{41}{81}} = \frac{13}{41}$$