# פתרון ממ"ן 12

**שאלה 1**

על הקבוצה $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ נתונים שני יחסים $R,S$ המוגדרים כך: לכל $A,B\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$

$ARB$ אם ורק אם $A\cup\{1,2\}=B\cup\{1,2\}$ ו- $ASB$ אם ורק אם $A\cup\{1,2\}\subset B\cup\{1,2\}$.

א. הראו שאחד מהיחסים הוא יחס שקילות ומיצאו את מחלקות השקילות שלו.

ב. הראו שאחד היחסים הוא יחס סדר. קבעו אם הוא סדר חלקי או מלא ומיצאו את האיברים המינימליים והמקסימליים לגבי יחס סדר זה.

**תשובה**

א. נראה ש- $R$ הוא יחס שקילות.

**רפלקסיביות**: לכל $A\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ מתקיים $A\cup\{1,2\}=A\cup\{1,2\}$, כלומר $ARA$ ולכן $R$ יחס רפלקסיבי.

**סימטריה**: לכל $A,B\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$, אם $ARB$ אז $A\cup\{1,2\}=B\cup\{1,2\}$ ואז כמובן $B\cup\{1,2\}=A\cup\{1,2\}$ כלומר $BRA$ ולכן $R$ יחס סימטרי.

**טרנזיטיביות**: לכל $A,B,C\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ אם $ARB$ ו- $BRC$ אז $A\cup\{1,2\}=B\cup\{1,2\}$ וגם $B\cup\{1,2\}=C\cup\{1,2\}$. מכאן ש- $A\cup\{1,2\}=C\cup\{1,2\}$ כלומר $ARC$ ולכן $R$ טרנזיטיבי.

לפיכך $R$ הוא יחס שקילות.

**מציאת מחלקות השקילות**

לפי ההגדרה, שתי קבוצות $A,B\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ נמצאות ביחס $R$ אם ורק אם האיחודים שלהן עם הקבוצה $\{1,2\}$ שווים זה לזה. מכאן שבכל מחלקת שקילות אנו אמורים למצוא קבוצות אשר האיחודים שלהן עם $\{1,2\}$ זהים. איחוד בין קבוצה כלשהי ב- $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ ל- $\{1,2\}$ יכול להיות רק אחת מארבע הקבוצות הבאות: $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,3,4\}$.

לכן יש לכל היותר 4 מחלקות שקילות. וכפי שנראה יש אכן 4 מחלקות:

**המחלקה שבה נמצאת** $\{1,2\}$ (שבה כל הקבוצות אשר האיחוד שלהן עם $\{1,2\}$ הוא $\{1,2\}$)

$$S_{\{1,2\}}=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

**המחלקה שבה נמצאת** $\{1,2,3\}$ (שבה כל הקבוצות אשר האיחוד שלהן עם $\{1,2\}$ הוא $\{1,2,3\}$)

$$S_{\{1,2,3\}}=\{\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

**המחלקה שבה נמצאת** $\{1,2,4\}$ (בה כל הקבוצות אשר האיחוד שלהן עם $\{1,2\}$ הוא $\{1,2,4\}$)

$$S_{\{1,2,4\}}=\{\{4\},\{1,4\},\{2,4\},\{1,2,4\}\}$$

**המחלקה שבה נמצאת** $\{1,2,3,4\}$ (בה כל הקבוצות אשר האיחוד שלהן עם $\{1,2\}$ הוא $\{1,2,3,4\}$)

$$S_{\{1,2,3,4\}}=\{\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}.$$

**הערה:** כפי שמובטח במשפט 2.16, קבוצת המחלקות $\{S_{\{1,2\}}, S_{\{1,2,3\}}, S_{\{1,2,4\}}, S_{\{1,2,3,4\}}\}$ היא חלוקה של $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ (שכן $S_{\varnothing}, S_{\{1\}}, S_{\{2\}}, S_{\{1,2\}}$ הן לא ריקות, זרות זו לזו והאיחוד שלהן הוא $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$).

ב. נראה ש- $S$ הוא יחס סדר.

**אנטי-רפלקסיבי**: לכל $A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ , $\langle A, A\rangle \notin S$ כי $A \cup \{1,2\} = A \cup \{1,2\}$ .

**טרנזיטיביות**: לכל $A,B,C \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ אם $ASB$ ו- $BSC$ אז $A \cup \{1,2\} \subset B \cup \{1,2\}$ וגם $B \cup \{1,2\} \subset C \cup \{1,2\}$ . מכאן שלכל $x \in A \cup \{1,2\}$ מתקיים $x \in B \cup \{1,2\}$, לכן $x \in C \cup \{1,2\}$ ומכאן ש- $A \cup \{1,2\} \subseteq C \cup \{1,2\}$ . בנוסף מפני ש- $A \cup \{1,2\} \subset B \cup \{1,2\}$ קיים $y \in B \cup \{1,2\}$ כך ש- $y \notin A \cup \{1,2\}$ . ברור ש- $y \in C \cup \{1,2\}$ . מכאן ש- $A \cup \{1,2\} \subset C \cup \{1,2\}$ (הכלה ממש) ולכן $S$ טרנזיטיבי. לפיכך $S$ הוא יחס סדר.

$S$ אינו סדר מלא.

למשל $\{3\},\{4\} \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ ו- $\{3\} \cup \{1,2\} \not\subset \{4\} \cup \{1,2\}$ וגם $\{4\} \cup \{1,2\} \not\subset \{3\} \cup \{1,2\}$ כלומר $\{3\} \not{S} \{4\}$ וגם $\{4\} \not{S} \{3\}$ .

**מציאת האיברים המינימליים.**

אם $A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ ו- $A \subseteq \{1,2\}$ אז $A \cup \{1,2\} = \{1,2\}$ לכן לא קיימת קבוצה $X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ כך ש- $X \cup \{1,2\} \subset A \cup \{1,2\}$ ( כי לא ייתכן ש- $X \cup \{1,2\} \subset \{1,2\}$ ) .

לכן הקבוצות $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$ הן איברים מינימליים. כל קבוצה אחרת $X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ מכילה איבר שלא שייך ל- $\{1,2\}$ לכן $\{1,2\} \subset X \cup \{1,2\}$ ולכן $\{1,2\} S\, X$ . מכאן שכל קבוצה $X$ כזו אינה איבר מינימלי. לכן $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$ הם כל האיברים המינימליים לגבי היחס $S$

**מציאת האיברים המקסימליים.**

אם $A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ ו- $\{3,4\} \subseteq A$ אז $A \cup \{1,2\} = \{1,2,3,4\}$ לכן לא קיימת קבוצה $X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ כך ש- $A \cup \{1,2\} \subset X \cup \{1,2\}$ (כי לא ייתכן ש- $\{1,2,3,4\} \subset X \cup \{1,2\}$ )

לכן הקבוצות $\{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}$ כן איברים מקסימליים. כל קבוצה אחרת $X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ אינה מכילה לפחות אחד מאיברי הקבוצה $\{3,4\}$ לכן $X \cup \{1,2\} \subset \{1,2,3,4\}$ ולכן $X\, S \{1,2,3,4\}$ . מכאן שכל קבוצה כזו אינה איבר מקסימלי לגבי היחס $S$ ולכן $\{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}$ הם כל האיברים המקסימליים לגבי היחס $S$ .

**שאלה 2**

א. על הקבוצה $A = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ מגדירים יחס $R$ כך: לכל $\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle \in A$ , מתקיים $\langle x_1, y_1\rangle R \langle x_2, y_2\rangle$ אם ורק אם $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = 1$ או $(x_1 + y_1 - 1)(x_2 + y_2 - 1) > 0$ .

הוכיחו ש- $R$ יחס שקילות ומיצאו את מספר מחלקות השקילות שלו. תארו אותן במישור.

ב. על הקבוצה $B=(0,\infty)\times(0,\infty)$ מגדירים יחס $S$ כך:

לכל $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\in B$, $\langle a,b\rangle S\langle c,d\rangle$ אם ורק אם $\frac{ab}{a^2+b^2}<\frac{cd}{c^2+d^2}$.

1. הוכיחו שלכל שני מספרים שונים $a,b>0$ מתקיים $\langle a,b\rangle S\langle a,a\rangle$ ואם $n$ מספר טבעי כך

ש- $\frac{1}{n}<\frac{ab}{a^2+b^2}$ אז $\langle 1,1/n\rangle S\langle a,b\rangle$.

2. הוכיחו ש- $S$ הוא יחס סדר חלקי.

3. מיצאו את כל האיברים המקסימליים והמינימליים ב- $B$ לגבי הסדר $S$.

**תשובה**

א. נראה ש- $R$ הוא יחס שקילות.

**רפלקסיביות**: נניח $\langle x,y\rangle\in A$. אם $x+y=1$ אז לפי הגדרת $R$ מתקיים $\langle x,y\rangle R\langle x,y\rangle$.

ואם $x+y\neq 1$ אז $x+y-1\neq 0$ לכן $(x+y-1)(x+y-1)>0$, לכן שוב, $\langle x,y\rangle R\langle x,y\rangle$.

מכאן ש- $\langle x,y\rangle R\langle x,y\rangle$ לכל $\langle x,y\rangle\in A$ ולכן $R$ יחס רפלקסיבי.

**סימטריה**: לכל $\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle\in A$, אם $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_2,y_2\rangle$ אז $x_1+y_1=x_2+y_2=1$ או

$(x_1+y_1-1)(x_2+y_2-1)>0$ לכן $x_2+y_2=x_1+y_1=1$ או $(x_2+y_2-1)(x_1+y_1-1)>0$

לכן $\langle x_2,y_2\rangle R\langle x_1,y_1\rangle$ ולכן $R$ יחס סימטרי.

**טרנזיטיביות**: יהיו $\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle,\langle x_3,y_3\rangle\in A$ ונניח ש- $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_2,y_2\rangle$ וגם

$\langle x_2,y_2\rangle R\langle x_3,y_3\rangle$. בהתאם להגדרת $R$ נפריד לשני מקרים:

מקרה 1: $x_1+y_1=1$. אז מתוך $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_2,y_2\rangle$ נובע ש- $x_2+y_2=1$ ומתוך

$\langle x_2,y_2\rangle R\langle x_3,y_3\rangle$ נובע שגם $x_3+y_3=1$ ומכאן ש- $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_3,y_3\rangle$.

מקרה 2: $x_1+y_1\neq 1$. אז מתוך $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_2,y_2\rangle$ נובע ש- $(x_1+y_1-1)(x_2+y_2-1)>0$

מכאן ש- $x_2+y_2\neq 1$ לכן מתוך $\langle x_2,y_2\rangle R\langle x_3,y_3\rangle$ נובע ש- $(x_2+y_2-1)(x_3+y_3-1)>0$.

מפני ששתי המכפלות הנ"ל הן חיוביות נקבל ש- $x_1+y_1-1,\ x_2+y_2-1,\ x_3+y_3-1$ הם מספרים

שונים מ- 0 ובעלי אותו סימן לכן $(x_1+y_1-1)(x_3+y_3-1)>0$ ולכן $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_3,y_3\rangle$.

מכאן ש- $R$ הוא גם טרנזיטיבי ולכן הוא יחס שקילות.

**מציאת מחלקות השקילות**

נבחר נקודה $\langle x,y\rangle\in A$ כך ש- $x+y=1$, למשל $\langle 1,0\rangle$ ונסמן ב- $S_{\langle 1,0\rangle}$ את מחלקת

השקילות שלה. לפי הגדרת $R$ ידוע שלכל $\langle x,y\rangle\in A$, $\langle x,y\rangle R\langle 1,0\rangle$ אם ורק אם $x+y=1$.

מכאן ש- $S_{\langle 1,0\rangle}=\{\langle x,y\rangle\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\mid x+y=1\}$ כלומר מחלקת השקילות של $\langle 1,0\rangle$ היא קבוצת

הנקודות במישור הנמצאות על הישר שמשוואתו $x+y=1$ (הישר העובר דרך $\langle 1,0\rangle$ ו- $\langle 0,1\rangle$).

נבחר כעת נקודה $\langle x,y\rangle\in A$ כך ש- $x+y>1$, למשל את $\langle 1,1\rangle$. לפי הגדרת $R$, מחלקת

השקילות שלה היא $S_{\langle 1,1\rangle}=\{\langle x,y\rangle\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\mid x+y>1\}$. זו קבוצת כל הנקודות הנמצאות

בחצי המישור ש"מעל" הישר $x+y=1$, באותו צד כמו $\langle 1,1\rangle$.

לבסוף, נבחר נקודה $A$ $\langle x,y\rangle \in$ כך ש- $x+y<1$, למשל את $\langle 0,0\rangle$. לפי הגדרת $R$, מחלקת השקילות שלה היא $S_{\langle 0,0\rangle}=\{\langle x,y\rangle \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid x+y<1\}$. זו קבוצת כל הנקודות הנמצאות בחצי המישור ש"מתחת" לישר $x+y=1$, באותו צד כמו $\langle 0,0\rangle$.

שלוש הקבוצות $S_{\langle 1,0\rangle}$, $S_{\langle 1,1\rangle}$ ו- $S_{\langle 0,0\rangle}$ הן כל מחלקות השקילות של היחס הנתון והן אכן מגדירות חלוקה של $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ (ישר ושני חצאי המישור שבצדדיו).

ב. נניח ש- $a,b>0$ $a\neq b$. עלינו להראות ש- $\langle a,b\rangle S\langle a,a\rangle$ כלומר $\frac{1}{2}=\frac{a^2}{a^2+a^2}<\frac{ab}{a^2+b^2}$.

אכן האי-שוויון $\frac{1}{2}<\frac{ab}{a^2+b^2}$ שקול ל- $2ab<a^2+b^2$ כלומר ל- $0<(a-b)^2$ שהוא כמובן נכון.

נניח כעת ש- $n$ מספר טבעי כך ש- $\frac{1}{n}<\frac{ab}{a^2+b^2}$ (קיים $n$ כזה מפני ש- $\frac{ab}{a^2+b^2}$ מספר חיבי ואם נבחר $n$ טבעי כך ש- $n>\frac{a^2+b^2}{ab}$ נקבל ש- $\frac{1}{n}<\frac{ab}{a^2+b^2}$)

לפי הגדרת $S$, $\langle 1,1/n\rangle S\langle a,b\rangle$ אם ורק אם $\frac{1\cdot\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}<\frac{ab}{a^2+b^2}$. מאחר ש-

$\frac{n}{n^2+1}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n^2+1}{n^2}}=\frac{1\cdot\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$ ומאחר ש- $\frac{1}{n}=\frac{n}{n^2}<\frac{n}{n^2+1}$ נקבל ש- $\frac{ab}{a^2+b^2}<\frac{1\cdot\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$ ולכן $\langle 1,1/n\rangle S\langle a,b\rangle$.

2. נראה ש- $S$ הוא יחס סדר.

**אנטי-רפלקסיבי**: לכל $\langle a,b\rangle \in B$, $\langle a,b\rangle \not S\langle a,b\rangle$ כי לא ייתכן ש- $\frac{ab}{a^2+b^2}<\frac{ab}{a^2+b^2}$.

**טרנזיטיביות**: לכל $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle \in B$ אם $\langle a,b\rangle S\langle c,d\rangle \in B$ ו- $\langle c,d\rangle S\langle e,f\rangle$ אז $\frac{cd}{c^2+d^2}<\frac{ab}{a^2+b^2}$ וגם $\frac{ef}{e^2+f^2}<\frac{cd}{c^2+d^2}$. מכאן נובע ש- $\frac{ef}{e^2+f^2}<\frac{ab}{a^2+b^2}$ ולכן $\langle a,b\rangle S\langle e,f\rangle$ מכאן ש- $S$ טרנזיטיבי. לפיכך $S$ הוא יחס סדר.

נעיר ש- $S$ אינו סדר מלא מפני שלמשל $\langle 2,3\rangle \not S\langle 3,2\rangle$ וגם $\langle 3,2\rangle \not S\langle 2,3\rangle$.

**מציאת האיברים המינימליים.**

כל איבר של $B$ הוא מהצורה $\langle a,a\rangle$ או $\langle a,b\rangle$ כאשר $a,b>0$, $a\neq b$. בסעיף א' ראינו שלכל $a,b$ כאלה $\langle a,b\rangle S\langle a,a\rangle$ וגם קיים $n$ טבעי כך $\langle 1,1/n\rangle S\langle a,b\rangle$. מכאן נובע ש- $\langle a,a\rangle$ ו- $\langle a,b\rangle$ אינם מינימליים ולכן לא קיימים כלל איברים מינימליים ב- $B$ לגבי היחס $S$.

**מציאת האיברים המקסימליים.**

מאחר ש- $\langle a,b\rangle S\langle a,a\rangle$ לכל $a,b>0$ , $a\neq b$ , איברים מהסוג $\langle a,b\rangle$ אינם מקסימליים.

אם נניח עבור איבר $\langle a,a\rangle\in B$ קיים $\langle c,d\rangle\in B$ כך ש- $\langle a,a\rangle S\langle c,d\rangle$ נקבל ש-

$\frac{cd}{c^2+d^2}<\frac{a^2}{a^2+a^2}$ כלומר $\frac{1}{2}<\frac{cd}{c^2+d^2}$ . אבל מכאן נקבל ש- $c^2+d^2-2cd<0$ כלומר

$(c-d)^2<0$ וזו כמובן סתירה. לכן לא קיים $\langle c,d\rangle\in B$ כך ש- $\langle a,a\rangle S\langle c,d\rangle$ ולכן כל

האיברים $\langle a,a\rangle\in B$ , $a>0$ הם איברים מקסימליים ב- ב- $B$ לגבי היחס $S$ .

**שאלה 3**

נתונה פונקציה $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ .

א. הוכיחו ש- $f$ היא חד-חד-ערכית אם ורק אם לכל שתי קבוצות **אינסופיות שונות** $A,B\subseteq\mathbf{N}$ מתקיים $f[A]\neq f[B]$ .

ב. הוכיחו ש- $f$ היא פונקציה על אם ורק אם לכל שתי קבוצות **אינסופיות שונות** $A,B\subseteq\mathbf{N}$ מתקיים $f^{-1}[A]\neq f^{-1}[B]$ .

**תשובה**

א. **כיוון ראשון**. נניח ש- $f$ היא חד-חד-ערכית.

יהיו $A,B\subseteq\mathbf{N}$ קבוצות אינסופיות, $A\neq B$ .

מאחר שהקבוצות שונות, יש לפחות לאחת מהן איבר שלא שייך לאחרת. נניח למשל שיש $a\in A$ כך ש- $a\notin B$ . אז לפי הגדרה 3.3, $f(a)\in f[A]$ .

אם נניח ש- $f(a)\in f[B]$ , לפי אותה הגדרה, נקבל שקיים איבר $b\in B$ כך ש- $f(a)=f(b)$ .

מאחר ש- $f$ היא חד-חד-ערכית נקבל מכאן ש- $a=b$ כלומר $a\in B$ וזו כמובן סתירה.

מכאן ש- $f(a)\notin f[B]$ ומפני ש- $f(a)\in f[A]$ נקבל ש- $f[A]\neq f[B]$ כפי שרצינו.

הערה: מצאנו בעצם שאם $f$ היא פונקציה חד-חד-ערכית אז $f[A]\neq f[B]$ לכל שתי קבוצות שונות $A,B\subseteq\mathbf{N}$ (לא רק אינסופיות).

**דרך אחרת**: נניח ש- $A,B\subseteq\mathbf{N}$ ו- $A\neq B$ . אם $f[A]=f[B]$ אז $f^{-1}(f[A])=f^{-1}(f[B])$ .

אבל מאחר ש- $f$ חד-חד-ערכית נקבל משאלה 16 ג בפרק 3 ש- $A=B$ - סתירה. לכן $f[A]\neq f[B]$ .

**כיוון שני**. נניח שלכל שתי קבוצות $A,B\subseteq\mathbf{N}$ אינסופיות ושונות מתקיים $f[A]\neq f[B]$

ונראה ש- $f$ חד-חד-ערכית.

נניח בדרך השלילה שקיימים $m,k\in\mathbf{N}$ , $k\neq m$ כך ש- $f(k)=f(m)$ .

הקבוצה $f[\mathbf{N}\backslash\{k\}]$ מכילה כמובן את כל התמונות של המספרים הטבעיים השונים מ- $k$ .

בפרט היא מכילה גם את התמונה של המספר $m$ (כי $k \neq m$) כלומר את $f(m)$. אבל לפי ההנחה $f(k) = f(m)$. מכאן שהקבוצה $f[\mathbf{N}\backslash\{k\}]$ מכילה את התמונות של כל המספרים הטבעיים. במילים אחרות $f[\mathbf{N}\backslash\{k\}] = \{f(n) | n \in \mathbf{N}\} = f[\mathbf{N}]$. זו סתירה, שכן הקבוצות $\mathbf{N}$ ו- $\mathbf{N} \setminus \{k\}$ הן שונות ולפי הנתון התמונות שלהן חייבות אף הן להיות שונות.

לפיכך לכל $m,k \in \mathbf{N}$ אם, $k \neq m$ אז גם $f(k) \neq f(m)$ ולכן $f$ חד-חד-ערכית.

**דרך אחרת**. יהיו $m,k \in \mathbf{N}$, $k \neq m$ ונניח ש- $f(k) = f(m)$ אז $f[\{m,k\}] = f[\{k\}]$.

מכאן ש- $f[\{m,k\}] \cup f[\mathbf{N}\backslash\{m,k\}] = f[\{k\}] \cup f[\mathbf{N}\backslash\{m,k\}]$. משאלה 6 ג שבפרק 3 נקבל ש-

$$f[\{m,k\} \cup \mathbf{N}\backslash\{m,k\}] = f[\{k\} \cup \mathbf{N}\backslash\{m,k\}]$$

כלומר $f[\mathbf{N}] = f[\mathbf{N}\backslash\{m\}]$ כאשר $\mathbf{N}$ ו- $\mathbf{N}\backslash\{m\}$ הן קבוצות אינסופיות שונות.

זו סתירה, לכן $f(k) \neq f(m)$ ולכן $f$ חד-חד-ערכית.

ב. **כיוון ראשון**. נניח ש- $f$ היא פונקציה על ונניח $A,B \subseteq \mathbf{N}$, $A \neq B$. אפשר להניח למשל שקיים איבר $y \in A$ כך ש- $y \notin B$.

מאחר ש- $f$ היא על קיים $x \in \mathbf{N}$ כך ש- $f(x) = y$ ומפני ש- $y \in A$ נקבל לפי הגדרה 3.3 בפרק 3 ש- $x \in f^{-1}[A]$. מצד שני לא ייתכן ש- $x \in f^{-1}[B]$ (כי אז לפי אותה הגדרה נקבל ש- $f(x) \in B$ כלומר $y \in B$ וזו סתירה). מכאן ש- $f^{-1}[A] \neq f^{-1}[B]$.

הערה: מצאנו בעצם שאם $f$ היא על אז $f^{-1}[A] \neq f^{-1}[B]$ לכל שתי קבוצות שונות $A,B \subseteq \mathbf{N}$ (לא רק אינסופיות).

**דרך אחרת**: נניח ש- $A,B \subseteq \mathbf{N}$ ו- $A \neq B$. אם $f^{-1}[A] = f^{-1}[B]$ אז $f(f^{-1}[A]) = f(f^{-1}[B])$.

אבל מאחר ש- היא על נקבל משאלה 16 ד בפרק 3 ש- $A = B$ - סתירה. לכן $f^{-1}[A] = f^{-1}[B]$.

**כיוון שני**. נניח שלכל שתי קבוצות **אינסופיות שונות** $A,B \subseteq \mathbf{N}$ מתקיים $f^{-1}[A] \neq f^{-1}[B]$. נראה ש- $f$ היא על.

יהי $y \in \mathbf{N}$. אז $\mathbf{N}$ ו- $\mathbf{N}\backslash\{y\}$ הן קבוצות אינסופיות שונות לכן $f^{-1}[\mathbf{N}] \neq f^{-1}[\mathbf{N}\backslash\{y\}]$.

מאחר ש- $f^{-1}[\mathbf{N}] = \mathbf{N}$ נקבל שקיים $x \in \mathbf{N}$ כך ש- $x \notin f^{-1}[\mathbf{N}\backslash\{y\}]$. לכן $f(x) \notin \mathbf{N}\backslash\{y\}$.

המספר הטבעי היחיד שלא שייך ל- $\mathbf{N}\backslash\{y\}$ הוא $y$. מכאן שבהכרח $y = f(x)$.

לכן לכל $y \in \mathbf{N}$ קיים $x \in \mathbf{N}$ כך ש- $y = f(x)$ ולכן $f$ היא על.

**דרך אחרת**. נניח בדרך השלילה ש- $f$ לא על. אז קיים $y \in \mathbf{N}$ שאין לו מקרו כלומר $f^{-1}[\{y\}] = \varnothing$.

מכאן ש- $f^{-1}[\{y\}] \cup f^{-1}[\mathbf{N}\backslash\{y\}] = \varnothing \cup f^{-1}[\mathbf{N}\backslash\{y\}]$ ומשאלה 6 ה בפרק 3 נקבל ש-

$f^{-1}[\{y\} \cup \mathbf{N}\backslash\{y\}] = f^{-1}[\mathbf{N}\backslash\{y\}]$ כלומר $f^{-1}[\mathbf{N}] = f^{-1}[\mathbf{N}\backslash\{y\}]$ כאשר $\mathbf{N}$ ו- $\mathbf{N}\backslash\{y\}$ הן קבוצות אינסופיות שונות – סתירה. לכן $f$ היא על.

**שאלה 4**

א. נסמן $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ .

נתונה $f: \mathbf{Q} \times \mathbf{Z}^* \to \mathbf{Q} \times \mathbf{Z}^*$ המוגדרת כך: לכל $q \in \mathbf{Q}$ ו- $n \in \mathbf{Z}^*$ , $f\langle q,n\rangle = \langle \frac{q}{n}, n\rangle$ .

1. הוכיחו ש- $f$ היא חד-חד-ערכית ועל.

2. מיצאו את $f^{-1}$ .

ב. נתונות מהפונקציות $g,h\colon \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ המוגדרות כך: $\langle x,y\rangle \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ ,

$h\langle x,y\rangle = \langle x+3y, x+5y\rangle$ , $g\langle x,y\rangle = \langle 2x+3y, 3x+5y\rangle$ .

הוכיחו **שרק אחת** משתי הפונקציות היא הפיכה ומיצאו את ההפכית שלה.

**תשובה**

א. **1. ההוכחה ש- $f$ היא חד-חד-ערכית:**

נניח ש- $\langle q_1,n_1\rangle, \langle q_2,n_2\rangle \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Z}^*$ כך ש- $f\langle q_1,n_1\rangle = f\langle q_2,n_2\rangle$ .

אז $\langle \frac{q_1}{n_1}, n_1\rangle = \langle \frac{q_2}{n_2}, n_2\rangle$ ומהגדרת השוויון בין זוגות סדורים נובע $n_1 = n_2$ ו- $\frac{q_1}{n_1} = \frac{q_2}{n_2}$ דבר שמחייב $q_1 = q_2$ . מכאן נובע ש- $\langle q_1,n_1\rangle = \langle q_2,n_2\rangle$ , מה שמבטיח ש- $f$ היא חד-חד-ערכית.

**ההוכחה ש- $f$ היא על:**

נניח ש- $\langle r,m\rangle \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Z}^*$ . עלינו למצוא $\langle q,n\rangle \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Z}^*$ כך ש- $f\langle q,n\rangle = \langle r,m\rangle$ כלומר $\langle \frac{q}{n}, n\rangle = \langle r,m\rangle$ . ברור מכאן שיש לבחור $n = m$ ו- $q = rn = rm$ . ואכן, לפי הגדרת $f$ מתקיים

$$f\langle q,n\rangle = f\langle rm,m\rangle = \langle \frac{rm}{m}, m\rangle = \langle r,m\rangle .$$

מכאן שלכל איבר $\langle r,m\rangle \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Z}^*$ יש מקור על-ידי $f$ ולכן זו פונקציה על.

2. הוכחנו ש- $f$ היא חד-חד-ערכית ועל לכן $f$ היא הפכיה והפונקציה $f^{-1}$ אמורה להתאים לכל איבר $\langle r,m\rangle \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Z}^*$ את המקור שלו על-ידי $f$ כלומר את $\langle rm,m\rangle \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Z}^*$ .

לכן $f^{-1}\langle r,m\rangle = \langle rm,m\rangle \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Z}^*$ לכל $\langle r,m\rangle \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Z}^*$ .

הערה: אפשר לבדוק גם על ידי חישוב ישיר ש- $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_{\mathbf{Q}\times\mathbf{Z}^*}$ .

ב. כדי שפונקציה תהיה הפיכה צריך שלכל איבר בטווח יהיה מקור אחד ויחיד על-ידי אותה פונקציה. נבדוק איזו פונקציה מבין השתיים מקיימת תכונה זו.

**הבדיקה לגבי $g$ :**

נניח ש- $\langle u,v\rangle \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ ונחפש $\langle x,y\rangle \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ כך ש- $g\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle$ כלומר

$\langle 2x+3y, 3x+5y\rangle = \langle u,v\rangle$ (לא לשכוח! הנעלמים שלנו כעת הם $x,y$ )

נקבל מכאן ש- $\begin{cases}2x+3y=u\\3x+5y=v\end{cases}$. נכפול למשל את המשוואה הראשונה ב- 5 ואת השניה ב- 3,

נחסיר ביניהן ונקבל ש- $x=5u-3v$. נציב זאת במשוואה הראשונה ונקבל ש-

$2(5u-3v)+3y=u$ ומכאן ש- $y=-3u+2v$.

נשים לב שמאחר ש- $u,v$ מספרים שלמים, גם $x,y$ שלמים.

לסיכום, מצאנו שלכל $\langle u,v\rangle\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ יש מקור יחיד ב- $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ על-ידי $g$ והוא

$\langle x,y\rangle=\langle 5u-3v,-3u+2v\rangle$. לכן $g$ הפיכה והפונקציה ההופכית לה היא

$g^{-1}\colon \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ המוגדרת על- ידי $g^{-1}\langle u,v\rangle=\langle 5u-3v,-3u+2v\rangle$ לכל $\langle u,v\rangle\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

**הערה**: אפשר לבדוק כעת גם ישירות שאכן $g\circ g^{-1}=g^{-1}\circ g=I_{\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$. נדגים זאת:

לכל $\langle x,y\rangle\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}(g^{-1}\circ g)\langle x,y\rangle&=g^{-1}(g\langle x,y\rangle)=g^{-1}\langle 2x+3y,3x+5y\rangle=\\&=\langle 5(2x+3y)-3(3x+5y),-3(2x+3y)+2(3x+5y)\rangle=\langle x,y\rangle\end{aligned}$$

מכאן ש- $g^{-1}\circ g=I_{\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$

לכל $\langle u,v\rangle\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}(g\circ g^{-1})\langle u,v\rangle&=g(g^{-1}\langle u,v\rangle)=g\langle 5u-3v,-3u+2v\rangle=\\&=\langle 2(5u-3v)+3(-3u+2v),3(5u-3v)+5(-3u+2v)\rangle=\langle u,v\rangle\end{aligned}$$

מכאן ש- $g\circ g^{-1}=I_{\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$

הבדיקה לגבי $h$.

נניח כעת ש- $\langle u,v\rangle\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ ונחפש $\langle x,y\rangle\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ כך ש- $h\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle$ כלומר

$\langle x+3y,x+5y\rangle=\langle u,v\rangle$. נקבל מכאן ש- $\begin{cases}x+3y=u\\x+5y=v\end{cases}$ ועל-ידי חיסור המשוואה הראשונה מן

השניה נקבל ש- $2y=v-u$. אך מכאן נובע שאם $v-u$ שלם אי- זוגי, לא ניתן למצוא

$\langle x,y\rangle\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ כך ש- $h\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle$.

למשל אם נחפש $\langle x,y\rangle\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ כך ש- $h\langle x,y\rangle=\langle 1,0\rangle$ נקבל ש- $\begin{cases}x+3y=1\\x+5y=0\end{cases}$. אין מספרים

שלמים שמקיימים משוואות אלה. לכן $h$ אינה על ולכן לא הפיכה.