פתרונות לממ"ן 13 - 2019ב - 20425

1. א. בחירת המספרים היא אקראית, ולכן לכל השלישיות (הסדורות) השונות של מספרים מהקבוצה יש סיכויים שווים להיבחר. לפיכך, לכל $i, j, k = 1,2,\ldots,10$ כך ש- i , j ו- k שונים זה מזה, מתקיים:

$$P\{X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k\} = \frac{1}{10\cdot 9\cdot 8} = \frac{1}{720}$$

ב. בחירת המספרים היא אקראית, ולכן הבחירה השלישית יכולה להיות של כל אחד מ-10 המספרים בהסתברויות שוות. כלומר, מתקיים:

$$P\{X_3 = k\} = \frac{1}{10} \qquad , \qquad k = 1,2,\ldots,10$$

ג. כל $3!$ התוצאות האפשריות שכוללות את המספרים i , j ו- k הן שוות-הסתברות. לכן, כדי לקבל את ההסתברות המבוקשת, יש לחשב בכמה מהן מתקיים המאורע $\{X_1 < X_2, X_1 < X_3\}$. כלומר:

$$P\{X_1 < X_2, X_1 < X_3\} = P\{X_1 < X_2 < X_3\} + P\{X_1 < X_3 < X_2\} = \tfrac{2}{3!} = \tfrac{1}{3}$$

ד.

$$P\{X_3 = 8 \mid X_2 < X_3\} = \frac{P\{X_2 < X_3 = 8\}}{P\{X_2 < X_3\}} = \frac{P\{X_2 < X_3 \mid X_3 = 8\}P\{X_3 = 8\}}{P\{X_2 < X_3\}} = \frac{\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{45}$$

2. א. במבנה המתואר בשאלה יש בסך-הכל $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ כדורים, <u>שאחד מהם נבחר באקראי</u>. כלומר, כל אחד מהכדורים נבחר בהסתברות $1\Big/\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2}{n(n+1)}$. לפיכך:

$$P\{X = i, Y = j\} = \tfrac{2}{n(n+1)} \qquad , \qquad i = 1,2,\ldots,n \quad ; \quad j = 1,\ldots,i$$

ב. מכיוון שבשורה i יש בסך-הכל i כדורים, מתקיים:

$$P\{X = i\} = \tfrac{2i}{n(n+1)} \qquad , \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

מכיוון שהמקום j מופיע החל בשורה j וכלה בשורה n, הוא מופיע בסך-הכל ב- $n-(j-1)$ שורות.

לפיכך, מתקיים:

$$P\{Y = j\} = \tfrac{2(n-j+1)}{n(n+1)} \qquad , \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

ג. ברור ששני המשתנים המקריים תלויים זה בזה, היות שמתקיים $Y \le X$. נוכל גם להראות שתנאי אי-התלות לא מתקיים. למשל:

$$P\{X = 1, Y = 2\} = 0$$

אבל:

$$P\{X = 1\}P\{Y = 2\} = \tfrac{2}{n(n+1)}\cdot\tfrac{2(n-1)}{n(n+1)}$$

כלומר:

$$P\{X = 1, Y = 2\} \quad \neq \quad P\{X = 1\}P\{Y = 2\}$$

ד.

$$P\{Y \le 2 \mid X \ge 4\} = \frac{P\{X \ge 4, Y \le 2\}}{P\{X \ge 4\}} = \frac{2\cdot(n-3)}{\frac{n(n+1)}{2} - (1+2+3)} = \frac{4\cdot(n-3)}{n(n+1)-12} = \frac{4\cdot(n-3)}{(n+4)(n-3)} = \frac{4}{n+4}$$

שימו לב: החישוב נעשה על-ידי מניית התוצאות השייכות למאורעות שבמונה ובמכנה. דרך חישוב זו אפשרית, מכיוון שכל התוצאות במרחב המדגם שוות-הסתברות.

3. א. מספר פצפוצי-השוקולד בכל עוגייה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 6. כמו כן, אין תלות בין עוגיות שונות. לכן, המספר הכולל של פצפוצי-השוקולד בחבילה של 50 עוגיות גם הוא משתנה מקרי פואסוני, אך עם הפרמטר $50 \cdot 6 = 300$. לפיכך, השונות המבוקשת היא פרמטר ההתפלגות, כלומר, 300.

ב. לפי סעיף א, מספר פצפוצי-השוקולד בחבילה שלמה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 300. כעת, מכיוון שכל פצפוץ עשוי שוקולד לבן בהסתברות 0.2, נובע מדוגמה 2ב במדריך הלמידה, שמספר הפצפוצים הלבנים בחבילה שלמה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $300 \cdot 0.2 = 60$.
לכן, השונות המבוקשת היא 60.

ג. **<u>דרך I</u>**

מספר פצפוצי-השוקולד הכולל ב-3 עוגיות מקריות הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 18. לכן, ההסתברות שיש בשלוש עוגיות בסך-הכל 20 פצפוצי-שוקולד היא: $e^{-18}\frac{18^{20}}{20!} = 0.0798$

כעת, יש !3 אפשרויות לקבוע כמה פצפוצים יהיו בכל אחת מ-3 העוגיות, ולכן, בגלל האי-תלות בין העוגיות, ההסתברות שיש בעוגייה אחת (כלשהי) 9 פצפוצים, באחרת 6 ובשלישית 5 היא:

$$3! \cdot e^{-6}\frac{6^9}{9!} \cdot e^{-6}\frac{6^6}{6!} \cdot e^{-6}\frac{6^5}{5!} = 0.01066$$

ומכאן נקבל, שההסתברות המותנית שיש בעוגיות 9, 6 ו-5 פצפוצי שוקולד, בהינתן שיש בסך-הכל 20 פצפוצים בשלוש העוגיות יחד, היא:

$$\frac{3! \cdot e^{-6}\frac{6^9}{9!} \cdot e^{-6}\frac{6^6}{6!} \cdot e^{-6}\frac{6^5}{5!}}{e^{-18}\frac{18^{20}}{20!}} = 3! \cdot \binom{20}{9,6,5}\left(\frac{1}{3}\right)^{20} = 0.1335$$

<u>דרך II</u>

ההתפלגות המשותפת המותנית של מספר הפצפוצים בכל אחת משלוש העוגיות, בהינתן שיש בהן בסך-הכל 20 פצפוצים, היא התפלגות <u>מולטינומית</u> עם הפרמטרים $n = 20$ ו- $\left(\frac{6}{6+6+6}=\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. לכן, אפשר להגיע ישירות לחישוב האחרון בדרך I.

ד. נסמן ב- X_i את מספר פצפוצי-השוקולד שיש בעוגייה ה- i-ית בחבילה, לכל $i = 1,2,\ldots,50$.
לפי נתוני הבעיה, $X_i \sim Po(6)$ לכל i, וה- X_i-ים בלתי-תלויים זה בזה.
כמו כן, נסמן ב- Y את המספר המינימלי של פצפוצי-השוקולד בעוגייה אחת בחבילה זו.

$$P\{Y=2\} = P\{Y \ge 2\} - P\{Y \ge 3\} = P\{X_1 \ge 2,\ldots,X_{50} \ge 2\} - P\{X_1 \ge 3,\ldots,X_{50} \ge 3\}$$

$$= \prod_{i=1}^{50} P\{X_i \ge 2\} - \prod_{i=1}^{50} P\{X_i \ge 3\} \quad \text{[אין תלות בין עוגיות שונות]}$$

$$= \prod_{i=1}^{50}(1 - P\{X_i \le 1\}) - \prod_{i=1}^{50}(1 - P\{X_i \le 2\})$$

$$= \prod_{i=1}^{50}\left(1 - e^{-6}\frac{6^0}{0!} - e^{-6}\frac{6^1}{1!}\right) - \prod_{i=1}^{50}\left(1 - e^{-6}\frac{6^0}{0!} - e^{-6}\frac{6^1}{1!} - e^{-6}\frac{6^2}{2!}\right)$$

$$= (1-7e^{-6})^{50} - (1-25e^{-6})^{50} = 0.4168 - 0.0408 = 0.376$$

4. לפי נתוני הבעיה מתקיים: $X \sim B(10,0.5) \quad ; \quad N \mid X=i \sim B(20,\frac{i+1}{20})$

א. $P\{N=8 \mid X=6\}=\binom{20}{8}\cdot\left(\frac{6+1}{20}\right)^8\left(1-\frac{6+1}{20}\right)^{12}=\binom{20}{8}\cdot 0.35^8 0.65^{12}=0.16135$

ב. לכל $i=0,1,\ldots,10$ ו- $n=0,1,\ldots,20$ מתקיים:

$$P\{N=n, X=i\}=P\{N=n \mid X=i\}P\{X=i\}=\binom{20}{n}\cdot\left(\frac{i+1}{20}\right)^n\left(1-\frac{i+1}{20}\right)^{20-n}\cdot\binom{10}{i}\cdot 0.5^{10}$$

5. נסמן ב- X_1 את מספר הכדורים שהוצאו מסל A והועברו לסל B;
ב- X_2 את מספר הכדורים שהוצאו מסל B והועברו לסל C;
וב- X_3 את מספר הכדורים שהוצאו מסל C והועברו לסל D.

א. מנתוני הבעיה נובע שמתקיים:

$X_1 \sim B(50,p)$

$X_2 \mid X_1=i \sim B(i,p)$

$X_3 \mid X_2=j \sim B(j,p)$

ב. לפי נוסחת הכפל, לכל $i,j,k=0,1,...,50$, שמקיימים $0\le k\le j\le i\le 50$, מתקיים:

$$\begin{aligned}P\{X_1=i,X_2=j,X_3=k\}&=P\{X_1=i\}P\{X_2=j \mid X_1=i\}P\{X_3=k \mid X_1=i,X_2=j\}\\&=\binom{50}{i}p^i(1-p)^{50-i}\binom{i}{j}p^j(1-p)^{i-j}\binom{j}{k}p^k(1-p)^{j-k}\\&=\binom{50}{50-i,i-j,j-k,k}p^{i+j+k}(1-p)^{50-k}\end{aligned}$$

קיבלנו פונקציית הסתברות מולטינומית עם הפרמטרים $n=50$ ו- $\underset{\sim}{p}=\left(1-p,p(1-p),p^2(1-p),p^3\right)$.

שימו לב, שבסוף הניסוי כל אחד מ-50 הכדורים נמצא בדיוק באחד מ-4 הסלים: בסל A בהסתברות $1-p$, בסל B בהסתברות $p(1-p)$, בסל C בהסתברות $p^2(1-p)$ ובסל D בהסתברות p^3. ואלה הן בדיוק 4 ההסתברויות של ההתפלגות המולטינומית שקיבלנו.

יתרה מכך, כאשר המאורע $\{X_1=i,X_2=j,X_3=k\}$ מתרחש, פירוש הדבר שבסוף הניסוי נותרו $50-i$ כדורים בסל A, $i-j$ כדורים בסל B, $j-k$ כדורים בסל C ו- k כדורים בסל D.