אלגוריתמים 20417 – מבחן מסכם

הנחיות: ענו על 4 מתוך 5 שאלות. לכל שאלה 25 נקודות. לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה.
על שאלות שמסומנות בכוכב – יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה), ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).
חומר עזר: אסור. דף נוסחאות מצ"ב. בהצלחה!

<u>**שאלה 1 – הרצת FFT**</u> (25 נק')

נביט בפולינום $p(x)=5x^3-2x^2+3x-4$. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) במסגרת הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום (22 נק'). בדקו את תשובתכם ע"י <u>הצבה ישירה</u> של הערכים המתאימים בפולינום (3 נק').

<u>***שאלה 2* – מסלולים מזעריים (דייקסטרא, ערימה-בינארית)**</u> (25 נק')

הקלט לאלגוריתם של Dijkstra הינו, כזכור, גרף G עם קדקוד מוצא s ועם משקלי צלעות אי-שליליים $w(e)$, והפלט הינו עץ T של מסלולים-מזעריים (<u>**עמ"מ**</u>) מהמוצא s לכל יתר הקדקודים הנגישים בגרף. ענו על שני הסעיפים הנפרדים הבאים (שימו לב: סעיף (ב) ממשיך <u>**בעמוד הבא**</u>).

(א – 9 נק'). <u>**הוכיחו**</u> בקצרה <u>**או הפריכו**</u> בקצרה את הטענה הבאה:

"אם T הינו עמ"מ ביחס למשקלים המקוריים $w(e)$, אזי T הינו עמ"מ גם ביחס למשקלים $w'(e):=k_1\cdot w(e)+k_2$ כאשר k_1,k_2 הינם שני קבועים שלמים וחיוביים".

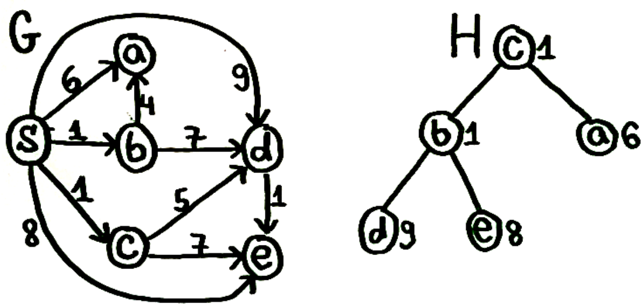
____

____

____

(ב) בסעיף זה נבצע <u>**הרצה**</u> של אלגוריתם Dijkstra על הגרף הממושקל G (שמצויר להלן משמאל), כשתור-הקדימויות ממומש <u>**באמצעות ערימה-בינארית**</u> H (שמאותחלת מראש למצב

שמצויר להלן מימין). בציור של הערימה רושמים בתוך כל קדקוד את השם שלו, ורושמים מימין לכל קדקוד את המשקל של המסלול הטוב ביותר, שחושב עבורו עד כה.



תשובתכם צריכה לכלול אך ורק ציור של עץ הפלט T (3 נק׳), וציורים של הערימה H בסיומה של כל "איטרציה" של האלגוריתם (13 נק׳). כזכור, בסיומה של איטרציה i העץ T כולל בדיוק i קדקודים (בנוסף לקדקוד המוצא s), ואלו הם הקדקודים עבורם חושב סופית מסלול מזערי.

הערימה לאחר איטרציה 1	הערימה לאחר איטרציה 2
הערימה לאחר איטרציה 3	הערימה לאחר איטרציה 4
הערימה לאחר איטרציה 5	עץ הפלט

<u>סוף שאלה 2</u>.

שאלה 3 – **תכנון דינאמי בתורת הגרפים** (25 נקי').

נתון גרף <u>מכוון</u> $G=(V,E)$ עם משקלים אי-שליליים $c(e)\geq 0$ על הצלעות $e\in E$, ונתון קדקוד מסוים $r\in V$. הביטו באלגוריתם הבא:

(i) מאתחלים מערך חד-ממדי A באמצעות הכלל: $A[v]=\begin{cases}0, & v=r\\ \infty, & v\neq r\end{cases}$.

(ii) לולאה חיצונית: חוזרים שוב ושוב על הפעולה הבאה.

(1ii) לולאה פנימית: סורקים את הצלעות בסדר לקסיקוגרפי. לכל $e=(u,v)\in E$ מבצעים:

אם $A[v]>A[u]+c(e)$ אז מעדכנים $A[v]\leftarrow A[u]+c(e)$.

(2ii) אם בהרצה הנוכחית של כל הלולאה הפנימית לא בוצע אף עדכון, אז האלגוריתם מסיים.

(א) רישמו <u>מה מחשב האלגוריתם</u> (אין צורך להוכיח נכונות).

(ב) יהי $B(n)$ המספר המרבי של איטרציות שמתבצעות בלולאה <u>החיצונית</u> על גרפים בעלי n קדקודים. חשבו את $B(n)$, והציגו סדרת גרפים G_n עליהם מתבצעות בדיוק $B(n)$ איטרציות.

(ג) הציגו סדרת גרפים אחרת G'_n, עבורם נכנסים ללולאה החיצונית פעמיים בלבד, וזאת למרות <u>שמספר הצלעות שלהם זהה</u> לגרפים מהסעיף הקודם, כלומר $|E(G'_n)|=|E(G_n)|$ לכל n.

***שאלה 4*– עצים פורשים מזעריים נוכח משקלים שליליים** (25 נק׳)

ברצוננו למצוא עץ פורש מזערי, כשהקלט הינו, כרגיל, גרף קשיר ולא-מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים $w(e)$ בצלעות. הוכיחו כי האלגוריתמים של Prim ושל Kruskal מפיקים כפלט עץ פורש מזערי גם כאשר חלק מהמשקלים שליליים. נדרשת הוכחה מלאה ומדויקת **שמבוססת אך ורק על רדוקציה** למקרים, עבורם כבר מובטחת נכונותם של שני האלגוריתמים. (לא יינתן שום ניקוד על אבחנה מהצורה: ״בהוכחת למת-החתך לא נעשה שימוש מפורש באי-שליליות המשקלים, ולכן הוכחת הנכונות של האלגוריתמים נותרת בתוקף מילה במילה״).

שאלה 5 – **זרימה (בעיית-ההפקה)** (25 נק׳)

במסגרת הפקה של סרט קולנוע עלינו ללהק שחקנים מבין השחקנים $A_1, A_2, ..., A_n$, ולבחור משקיעים מבין המשקיעים $I_1, I_2 ..., I_m$. ידוע לנו השכר המדויק W_i של שחקן i (לכל $1 \le i \le n$), וסכום ההשקעה המדויק P_k של משקיע k (לכל $1 \le k \le m$). עבור כל זוג של שחקן-משקיע ידוע לנו האם הם בקשר של "**נאמנות**": שחקן A_i ישתתף בסרט **רק אם** כל המשקיעים להם הוא נאמן ישתתפו במימון, ובדומה, משקיע I_k ישקיע בסרט **רק אם** כל השחקנים להם הוא נאמן ילוהקו למשחק. (מעבר לכך אין אילוצים נוספים, ובפרט, איננו מחויבים ללהק מספר מסוים של שחקנים, או לגייס מספר מסוים של משקיעים). בחירה חוקית של שחקנים ומשקיעים הינה בחירה שמקיימת את אילוצי הנאמנות. בבעיית ההפקה מחפשים בחירה חוקית כך שיתקבל רווח מרבי, כשהרווח הינו, סך כל המימון מן המשקיעים פחות סך כל המשכורות לשחקנים.

בשאלה זו נפתור את בעיית ההפקה בעזרת בנייה של רשת זרימה, כך שהזרימה המרבית ברשת תגדיר את הפתרון האופטימלי לבעיית ההפקה. מעבר לקדקודי המקור והיעד, יהיו ברשת קדקוד יחיד לכל שחקן, וקדקוד יחיד לכל משקיע. המפתח לפתרון נכון הינו התשובה לשאלה הבאה: אילו צלעות/קיבולות יש להגדיר בין קדקודי-משקיעים לבין קדקודי-שחקנים ברשת, כך שזרימה מרבית תגדיר (בפרט) פתרון חוקי לבעיית ההפקה. ענו על 3 הסעיפים הבאים. שימו לב: **סעיף (ג) מופיע בעמוד הבא**. (הנכם רשאים להניח שהרווח המרבי חיובי ממש. אין צורך לנתח יעילות).

(א) מהן הצלעות ברשת ומהן הקיבולות שלהן? ______________________________

____

____

(ב) מדוע זרימה **מרבית** ברשת מגדירה בחירה **חוקית** של שחקנים ומשקיעים?

____

____

____

____

____

(ג) הוכיחו שזרימה מרבית ברשת מגדירה בחירה **אופטימלית** של שחקנים ומשקיעים :

ב ה צ ל ח ה !

אלגוריתמים 20417 – דף נוסחאות – גרפים

<u>סימונים</u>. ההגדרות הבאות מתאימות גם לגרפים לא מכוונים וגם לגרפים מכוונים. בגרף $G=(V,E)$ קבוצת הקדקודים (=צמתים) הינה V, וקבוצת הצלעות (=קשתות) הינה E. מסמנים $|V|=n, |E|=m$. כל הגרפים בקורס זה הם "פשוטים" במובן הבא: אין "לולאות עצמיות" (= אין צלע מקדקוד לעצמו) ואין "צלעות כפולות" (צלע יכולה להופיע או לא להופיע, אך לא יכולה להופיע מספר רב של פעמים).

<u>מסלולים</u>. מסלול (=מסילה) בגרף הוא סדרת קדקודים $(v_0,...,v_k)$ כך שיש בגרף צלע מ- v_{i-1} ל- v_i לכל $1\le i\le k$. אפשר לחשוב על אותו מסלול כסדרת צלעות $(e_1,...,e_k)$ שבה לכל $1\le i\le k$ הצלע e_i מחברת בגרף את v_{i-1} ל- v_i. מסלול פשוט הוא מסלול שאף קדקוד לא מופיע בו פעמיים (ומעלה). מעגל הוא מסלול שבו $v_0=v_k$. מעגל פשוט הוא מסלול שאף קדקוד לא מופיע בו פעמיים (ומעלה) למעט $v_0=v_k$. שני מסלולים נקראים זרים בקדקודים אם אין להם אף קדקוד משותף, ונקראים זרים בצלעות אם אין להם אף צלע משותפת. קדקוד t נקרא נגיש מקדקוד s אם קיים בגרף מסלול מ- s ל- t. גרף לא-מכוון נקרא קשיר (ובדומה גרף מכוון נקרא קשיר במובן החזק) אם כל זוג קדקודים נגישים האחד מהשני.

<u>משקלים</u>. בגרף ממושקל לכל צלע e מוגדר משקל $w(e)$ (=אורך $\ell(e)$, =מחיר $c(e)$). בגרף לא ממושקל אורך מסלול = מספר הצלעות במסלול. בגרף כן ממושקל אורך מסלול = סכום משקלי הצלעות במסלול. בגרף כן/לא ממושקל מסלול מזערי (=מינימלי) מ- s ל- t הינו מסלול מ- s ל- t שאורכו מזערי. עץ מרחקים מזעריים T עם שורש $s\in V$ הוא עץ פורש כך שלכל קדקוד $t\in V$, המרחק (=אורך מסלול מזערי) מ- s ל- t ב- T שווה למרחק מ- s ל- t ב- G. אבחנה מרכזית: בגרף כן/לא ממושקל: אם $s\longrightarrow u\longrightarrow v\longrightarrow t$ מסלול מזערי מ- s ל- t, אז תת-המסלול $u\longrightarrow v$ הינו מסלול מזערי מ- u ל- v (כאן $\longrightarrow$ מסמן תת-מסלול). עץ פורש מזערי (עפ"מ) בגרף ממושקל ולא-מכוון הוא עץ פורש, שסכום משקלי הצלעות שלו מזערי מבין כל העצים הפורשים.

<u>רשתות זרימה</u>. ברשת זרימה נתונים גרף מכוון $G=(V,E)$ עם קדקודי מקור $s\in V$ ויעד $s\ne t\in V$ וקיבולות אי-שליליות $c(e)\ge 0$ על הצלעות. זרימה חוקית הינה פונקציה $f:E\to\mathbb{R}$ שמכבדת את מגבלת הקיבולת: $f(e)\le c(e)$ לכל צלע e, ואת חוק שימור הזרימה: $f_{in}(v)=f_{out}(v)$ לכל קדקוד $v\ne s,t$. כאן $f_{in}(v)$ הינו סכום הזרימות בצלעות שנכנסות ל- v, ו- $f_{out}(v)$ הינו סכום הזרימות בצלעות שיוצאות מ- v. חתך $(S,T=V\setminus S)$ ברשת הינה חלוקה של קבוצת הקדקודים שבה $s\in S, t\in T$. קיבולת $c(S,T)$ של חתך הינה סכום הקיבולות של צלעות שיוצאות מ- S ונכנסות ל- T. זרימה $f(S,T)$ של חתך הינה ההפרש בין סכום הזרימות של צלעות שיוצאות מ- S ונכנסות ל- T לבין סכום הזרימות של צלעות שנכנסות ל- S ויוצאות מ- T. לכל חתך (S,T) גודלה של זרימה חוקית f הינו $val(f)=f_{out}(s)=f_{in}(t)=f(S,T)$. משפט מרכזי: גודל זרימה מרבית (max-flow) = גודל חתך מזערי (min-cut).

קלט	פלט	אלגוריתם, זמן ריצה	תכונות, הערות
גרף מכוון G קדקוד מוצא $s \in V$	עץ פורש T של הקדקודים הנגישים מ- s	סריקה לרוחב BFS $\|E\|+\|V\|$	T הינו עץ מרחקים מזעריים מהמוצא s
		סריקה לעומק DFS $\|E\|+\|V\|$	בגרף לא-מכוון : כל צלע של G שאינה ב- T בהכרח מחברת בין אב-קדמון לבין צאצא שלו ב- T . בגרף מכוון חסר מעגלים : מחשב מיון טופולוגי
גרף מכוון וממושקל G עם/בלי קדקוד מוצא $s \in V$ $w(e) \geq 0$	עץ T של מרחקים (ומסלולים) מזעריים מהמוצא s לכל הקדקודים הנגישים מ- s	דייקסטרא Dijkstra $\|E\|+\|V\|\log\|V\|$	
$w(e)$ כללי		בלמן-פורד Bellman-Ford $\|E\|\|V\|$	מדווחים על קיומם של מעגלים שמשקלם שלילי
	מרחקים (ומסלולים) מזעריים בין כל זוגות הקדקודים	פלויד-וורשאל Floyd-Warshall $\|V\|^3$	
גרף לא-מכוון G עם משקלים אי-שליליים $w(e) \geq 0$	עפ״מ של הגרף (עץ פורש מזערי)	פרים Prim $\|E\|+\|V\|\log\|V\|$	אם e צלע שמשקלה מזערי מבין כל הצלעות שחוצות חתך מסוים, אז יש עפ״מ שכולל את e . (אם e צלע יחידה כנ״ל, אז כל עפ״מ כולל את e).
		קרוסקאל Kruskal $\|E\|\log\|V\|$	אם e צלע שמשקלה מרבי מבין כל הצלעות במעגל מסוים, אז יש עפ״מ שלא כולל את e . (אם e צלע יחידה כנ״ל, אז אין עפ״מ שכולל את e).
גרף מכוון G עם מקור $s \in V$ ויעד $s \neq t \in V$ וקיבולות אי-שליליות $c(e) \geq 0$	זרימה חוקית מרבית	אדמונדס-קארפ Edmonds-Karp $\|E\|^2\|V\|$	וריאנט של פורד-פלקרסון Ford–Fulkerson
זוג ווקטורים $\vec{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ $\vec{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1})$	הקונבולוציה הציקלית $\vec{a} \otimes \vec{b} =$ $(c_0, \ldots, c_{2n-2})$ שבה $c_k = \Sigma_{0 \leq i \leq k} a_i b_{k-i}$	טרנספורם פורייה FFT המהיר $n \log n$	מתאים לכפל פולינומים $(\sum_{0 \leq i \leq n-1} a_i x^i)(\sum_{0 \leq j \leq n-1} b_j x^j)$ $= (\sum_{0 \leq k \leq 2n-2} c_k x^k)$ כאשר $c_k = \Sigma_{0 \leq i \leq k} a_i b_{k-i}$