ש N101067741

ת.ז: 036745438 מספר סידורי: 15

ה
מ

0 3 6 7 4 5 4 3 8

מספר התלמיד הנבחן
רשום את כל תשע הספרות

האוניברסיטה הפתוחה

7

מס' שאלון - 457

ט"ז באלול תשע"ז

בספטמבר 2017

סמסטר 2017ב

20417 / 4

מס' מועד 93

שאלון בחינת גמר

20417 - אלגוריתמים

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה 6 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה חמש שאלות.

מתוכן יש לענות על ארבע שאלות.

25 נקודות לכל שאלה.

לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג הוכחת נכונות וניתוח של זמן הריצה. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).

על שאלות שמסומנות בכוכב - יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה) ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות.

חומר עזר:
כל חומר עזר אסור בשימוש.

בהצלחה !!!

החזירו
למשגיח את השאלון
וכל עזר אחר שקיבלתם בתוך מחברת התשובות

שאלון 457 93.20.5

אלגוריתמים 2017ב – מועד 93

הנחיות: ענו על **4 מתוך 5 שאלות**. לכל שאלה 25 נקודות. לכל בעיה יש להציג את האלגוריתם היעיל ביותר. עבור כל אלגוריתם, יש להציג **הוכחת נכונות** וניתוח של **זמן הריצה**.
על שאלות שמסומנות בכוכב - יש לענות בטופס השאלון במקום המוקצה (ולא במחברת הבחינה), ולקצר בהוכחת הנכונות והיעילות. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות **הפעלה/תיקון של אלגוריתם מוכר**, יש להציג פתרון שכזה (במקום להציג אלגוריתם חדש לחלוטין).
חומר עזר: אסור. דף נוסחאות מצ״ב.

שאלה 1 – גרפים, רדוקציה מחיפוש להכרעה. נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$. **בצביעת קדקודים** חוקית מתאימים לכל קדקוד צבע, תחת האילוץ שאסור להעניק לשני קדקודים שכנים את אותו הצבע. למשל, כל גרף דו-צדדי ניתן לצבוע ב-2 צבעים בלבד, ולעומת זאת, כל צביעה חוקית של גרף שמכיל קליקה של 4 קדקודים מחייבת שימוש ב-4 צבעים לפחות. בהמשך נתמקד בצביעה באמצעות 3 צבעים R=red, G=green, B=blue, ונאמר שהגרף הינו 3-צביע אם ישנה פונקציית צביעה $c:V\rightarrow\{\mathrm{R,G,B}\}$, המקיימת $c(u)\neq c(w)$ לכל צלע $\{u,w\}\in E$. אלגוריתם **הכרעה** לבעיה נדרש לקבוע האם הגרף 3-צביע (האלגוריתם עונה ״כן״ או ״לא״). אלגוריתם **חיפוש** לבעיה נדרש למצוא צביעת קדקודים חוקית ב-3 צבעים (כשהגרף 3-צביע, ואחרת - לדווח שהגרף אינו 3-צביע). בשאלה זו אלגוריתם נקרא ״יעיל״ אם הוא רץ בזמן פולינומי בגודל הקלט.

הוכיחו שאם קיים אלגוריתם הכרעה יעיל לבעיית הצביעה ב-3 צבעים אז קיים גם אלגוריתם חיפוש יעיל לבעיה. הדרכה: הוסיפו לגרף משולש (שלושה קדקודים חדשים שכל שניים מהם מחוברים בצלע), והבחינו שבכל צביעה חוקית קדקודי המשולש חייבים להצבע ב-3 צבעים שונים.

שאלה 2 – הרחבת שידוכים חלקיים. הגדרות: בבעיית השידוך נתון כזכור גרף דו-צדדי לא מכוון $G=(V,E)$ כשקבוצת הקדקודים מחולקת ל- n גברים ול- n נשים. צלעות מחברות רק בין גברים לנשים, כשצלע מחברת רק בין גבר ואשה שמעוניינים להינשא זה לזו. שידוך הינו תת-קבוצה של צלעות $E'\subseteq E$, שאינן נחתכות: לכל שתי צלעות שונות בשידוך $e_1\neq e_2\in E'$, אם מסמנים $e_1=\{m_1,w_1\}$, $e_2=\{m_2,w_2\}$, אז מתקיים $\{m_1,w_1\}\cap\{m_2,w_2\}=\varnothing$. במלים אחרות אף גבר אינו משודך לשתי נשים שונות, ואף אשה אינה משודכת לשני גברים שונים. שידוך מרבי E'', הינו שידוך שכולל מספר מרבי של צלעות, כלומר מספר מרבי של זוגות משודכים. **השאלה**: נניח שנתון שידוך חלקי E', של חלק מ- n הגברים עם חלק מ- n הנשים. **הוכיחו או הפריכו** את הטענה הבאה: בהכרח קיים שידוך מרבי E'', המרחיב את השידוך הנתון, כלומר מקיים $E'\subseteq E''$.

נא לא לכתוב בשוליים

שאלה 3 – מסלולים קצרים ביותר במשקל מזערי. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם משקל (=מחיר) שלם $w(e)>0$ לכל אחת מהצלעות $e\in E$, ועם קדקודי מקור $s\in V$ ויעד $s\neq t\in V$.

עבור מסלול P בגרף נסמן כרגיל ב- $w(P)$ את סכום משקלי הצלעות במסלול וב- $\ell(P)$ את מספר הצלעות במסלול. הציגו אלגוריתם למציאת מסלול P' במשקל מזערי מהמקור ליעד תחת הדרישה הבאה: על מספר הצלעות של P' להיות מזערי מבין כל המסלולים בעלי משקל מזערי. במלים אחרות אם P'' מסלול אחר במשקל מזערי (כלומר $w(P'')=w(P')$), אזי חייב להתקיים $\ell(P'')\ge\ell(P')$.

עדיפות שנייה
עדיפות ראשונה

$n=|E|$

ניסוח אלגוריתם: נוסיף לכל צלע קבוע באורך $\varepsilon=\frac{1}{n}$, ונכפיל את משקל הצלעות ב-n את מות לבניית מסגרים חיובים ונריץ דייקסטרה את מות ליבנו מסלול מזערי ביותר מ-s ל-t.

מיותר

ניתוח נכונות: נראה שהשינויים שעשינו אינם משפיעים על נכונות הריצה של דייקסטרה ולמעשה הנכונות נובעת מנכונות דייקסטרה המוכחת בספר.

טענה: המסלול שמתקבל לאחר הרצת דייקסטרה על הגרף המעודכן קצר מזערי.

הוכחה: הכפלת משקלי הצלעות ב-n לא משנה את הסדר בגדלי המסלולים:

נניח מסלולים x, y כך ש $w(x)<w(y)$, אזי $n\cdot w(x)<n\cdot w(y)$. והמשך כמובן

~~אחרי את משקלי המסלולים ובהפעלת דייקסטרה~~ קצר לפנים משקלי הצלעות

הוספת ε לצלעות לא משנה את הסדר בגדלי המסלולים: אורך מסלול מזערי

מינימלי היינו n-ח צלעות, כלומר, הוספנו למשקל המסלול $\frac{n-1}{n}$ מאחר והמחירים שלמים

ההפרש בין מסלול צעד לאחר היה לפחות 1 ולכן לא יכון $\frac{n-1}{n}$ לגרום לשינוי הסדר בגודל המסלולים ובהכרח המסלול המזערי שמצאנו היינו מזערי.

ניתוח יעילות: הוספת ε לכל צלע יוצרת פער של ε·a בין 2 מסלולים מזעריים עם הפרש a צלעות ביניהם ולכן המסלול המשקל יקטן יותר מכל כמה שהמס' צלעות הכי יותר, כלומר, קצר ביותר.

יעילות: השינויים אינם מוסיפים את יעילות האלגוריתם של דייקסטרה ולכן $O(|E|+|V|\lg|V|)$

** נובע מהיות המשקלים חיוביים ומהאחדה שהוספנו

אורך n-ח יגרום עודף משקל ולכן לא מזערי.

שאלה 4 – הרצת FFT. נביט בפולינום $p(x)=x^3+3x^2+2x+1$. הציגו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) במסגרת הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום.

שאלון 457

93.20.5

***שאלה 5 – <u>תכנון דינאמי</u>**. נתון גרף <u>מכוון</u> $G=(V,E)$ עם משקלים אי-שליליים $c(e)\geq 0$ על הצלעות $e\in E$, ונתון קדקוד מסוים $r\in V$. הביטו באלגוריתם הבא:

(i) מאתחלים מערך חד-ממדי A באמצעות הכלל: $A[v]=\begin{cases}0, & v=r\\ \infty, & v\neq r\end{cases}$.

(ii) לולאה חיצונית: חוזרים שוב ושוב על הפעולה הבאה.

(1ii) לולאה פנימית: סורקים את הצלעות בסדר לקסיקוגרפי. לכל $e=(u,v)\in E$ מבצעים:

אם $A[v]>A[u]+c(e)$ אז מעדכנים $A[v]\leftarrow A[u]+c(e)$.

(2ii) אם בהרצה הנוכחית של כל הלולאה הפנימית לא בוצע אף עדכון, אז האלגוריתם מסיים.

(א) רישמו <u>מה מחשב האלגוריתם</u> (אין צורך להוכיח נכונות).

האלגוריתם מחשב את המרחק המינימלי מ-r לשאר הקודקודים אליהם קיים מסלול (לפחות אחד) ולפי התוצאה ניתן גם להסיק לאלו קודקודים אין מסלול כלל (חוץ מההתחלתי ∞ יישאר).

(ב) יהי $B(n)$ המספר המרבי של איטרציות שמתבצעות בלולאה <u>החיצונית</u> על גרפים בעלי n קדקודים. חשבו את $B(n)$, והציגו סדרת גרפים G_n עליהם מתבצעות בדיוק $B(n)$ איטרציות.

(המסלול לקודקוד אותו מבקר אינו מצער)

(צלע לאחרונה)

$B(n)=n$ מכיוון שכל איטרציה מוסיפה צלע למסלול לכל היותר, ואורך מסלול מקסימלי הוא באורך $n-1$ צלעות אחרת היה קיים במסלול מעגל וניתן היה לספרו ע"י הסרת צלע (בשמירה להיות מצער) מאחר והמשקלים לא שליליים. כמו כן האיטרציה האחרונה אינה מעדכנת דבר ולכן נוסיף 1 לסך האיטרציות ויקבלו $n-1+1=n$

(ג) הציגו סדרת גרפים אחרת G'_n, עבורם נכנסים ללולאה החיצונית פעמיים בלבד, וזאת למרות <u>שמספר הצלעות שלהם זהה</u> לגרפים מהסעיף הקודם, כלומר $|E(G'_n)|=|E(G_n)|$ לכל n

$r \xrightarrow{c=1} 2 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{1} n$

אם נקבע את הגרף כמסלול כך שנקבל את המבוקש, הצלעות יהיו מ i ל $i+1$ $1\leq i\leq n$ מעבר 1 על הצלעות יבצע עדכון (של כל הקודקודים) שיהווה את הערך הסופי + איטרציה ריקה, סה"כ 2

$r \xrightarrow{c=1} n \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{1} 2 \to 1$

ערכים שם המהווים מסלול כך שכל צלע יוצאת מקודקוד i לקודקוד $i-1$ $2\leq i\leq n$ ומשקל הצלעות זהה. לדוגמא ↑ יביאו לתוצאה הרצויה מכיוון שבכל איטרציה רק צלע אחת תקבל עדכון (זו בסדר הלקסיקוגרפי עם הערך המינימלי שלום עדכון) ונצטרך $n-1$ איטרציות כאלה.

בהצלחה!

אלגוריתמים 20417 – דף נוסחאות – גרפים

<u>סימונים</u>. ההגדרות הבאות מתאימות גם לגרפים לא מכוונים וגם לגרפים מכוונים. בגרף $G=(V,E)$ קבוצת הקדקודים (=צמתים) הינה V, וקבוצת הצלעות (=קשתות) הינה E. מסמנים $|V|=n, |E|=m$. כל הגרפים בקורס זה הם "פשוטים" במובן הבא: אין "לולאות עצמיות" (= אין צלע מקדקוד לעצמו) ואין "צלעות כפולות" (צלע יכולה להופיע או לא להופיע, אך לא יכולה להופיע מספר רב של פעמים).

<u>מסלולים</u>. מסלול (=מסילה) בגרף הוא סדרת קדקודים $(v_0,\dots,v_k)$ כך שיש בגרף צלע מ- v_{i-1} ל- v_i לכל $1\le i\le k$. אפשר לחשוב על אותו מסלול כסדרת צלעות $(e_1,\dots,e_k)$ שבה לכל $1\le i\le k$ הצלע e_i מחברת בגרף את v_{i-1} ל- v_i. מסלול פשוט הוא מסלול שאף קדקוד לא מופיע בו פעמיים (ומעלה). מעגל הוא מסלול שבו $v_0=v_k$. מעגל פשוט הוא מסלול שאף קדקוד לא מופיע בו פעמיים (ומעלה) למעט $v_0=v_k$. שני מסלולים נקראים זרים בקדקודים אם אין להם אף קדקוד משותף, ונקראים זרים בצלעות אם אין להם אף צלע משותפת. קדקוד t נקרא נגיש מקדקוד s אם קיים בגרף מסלול מ- s ל- t. גרף לא-מכוון נקרא קשיר (ובדומה גרף מכוון נקרא קשיר במובן החזק) אם כל זוג קדקודים נגישים האחד מהשני.

<u>משקלים</u>. בגרף ממושקל לכל צלע e מוגדר משקל $w(e)$ (=אורך $\ell(e)$, =מחיר $c(e)$). בגרף לא ממושקל אורך מסלול = מספר הצלעות במסלול. בגרף כן ממושקל אורך מסלול = סכום משקלי הצלעות במסלול. בגרף כן/לא ממושקל מסלול מזערי (=מינימלי) מ- s ל- t הינו מסלול מ- s ל- t שאורכו מזערי. עץ מרחקים מזעריים T עם שורש $s\in V$ הוא עץ פורש כך שלכל קדקוד $t\in V$, המרחק (=אורך מסלול מזערי) מ- s ל- t ב- T שווה למרחק מ- s ל- t ב- G. אבחנה מרכזית: בגרף כן/לא ממושקל: אם $s\longrightarrow u\longrightarrow v\longrightarrow t$ מסלול מזערי מ- s ל- t, אז תת-המסלול $u\longrightarrow v$ הינו מסלול מזערי מ- u ל- v (כאן $\longrightarrow$ מסמן תת-מסלול). עץ פורש מזערי (עפ"מ) בגרף ממושקל ולא-מכוון הוא עץ פורש, שסכום משקלי הצלעות שלו מזערי מבין כל העצים הפורשים.

<u>רשתות זרימה</u>. ברשת זרימה נתונים גרף מכוון $G=(V,E)$ עם קדקודי מקור $s\in V$ ויעד $s\ne t\in V$ וקיבולות אי-שליליות $c(e)\ge 0$ על הצלעות. זרימה חוקית הינה פונקציה $f:E\to\mathbb{R}$ שמכבדת את מגבלת הקיבולת: $f(e)\le c(e)$ לכל צלע e, ואת חוק שימור הזרימה: $f_{in}(v)=f_{out}(v)$ לכל קדקוד $v\ne s,t$. כאן $f_{in}(v)$ הינו סכום הזרימות בצלעות שנכנסות ל- v, ו- $f_{out}(v)$ הינו סכום הזרימות בצלעות שיוצאות מ- v. חתך $(S,T=V\setminus S)$ ברשת הינה חלוקה של קבוצת הקדקודים שבה $s\in S, t\in T$. קיבולת $c(S,T)$ של חתך הינה סכום הקיבולות של צלעות שיוצאות מ- S ונכנסות ל- T. זרימה $f(S,T)$ של חתך הינה ההפרש בין סכום הזרימות של צלעות שיוצאות מ- S ונכנסות ל- T לבין סכום הזרימות של צלעות שנכנסות ל- S ויוצאות מ- T. לכל חתך (S,T) גודלה של זרימה חוקית f הינו $val(f)=f_{out}(s)=f_{in}(t)=f(S,T)$.

משפט מרכזי: גודל זרימה מרבית (max-flow) = גודל חתך מזערי (min-cut).

קלט		פלט	אלגוריתם + זמן ריצה	תכונות + הערות
גרף מכוון G קדקוד מקור $s \in V$		עץ פורש T של הקדקודים הנגישים מ- s	סריקה לרוחב BFS $\|E\|+\|V\|$	T הינו עץ מרחקים מזעריים מהמקור s
			סריקה לעומק DFS $\|E\|+\|V\|$	בגרף לא-מכוון: כל צלע של G שאינה ב- T בהכרח מחברת בין אב-קדמון לבין צאצא שלו ב- T. בגרף מכוון חסר מעגלים: מחשב מיון טופולוגי
גרף מכוון G ממושקל (עם/בלי מקור $s \in V$)	$w(e) \geq 0$	עץ T של מרחקים (ומסלולים) מזעריים מהמקור s לקדקודים הנגישים מ- s	דייקסטרא Dijkstra $\|E\|+\|V\|\lg\|V\|$	
	$w(e)$ כללי		בלמן-פורד Bellman-Ford $\|E\|\|V\|$	מדווחים על קיומם של מעגלים שמשקלם שלילי
		מרחקים (ומסלולים) מזעריים בין כל זוגות הקדקודים	פלויד-וורשאל Floyd-Warshall $\|V\|^3$	
גרף לא-מכוון G עם משקלים אי-שליליים $w(e) \geq 0$		עפ"מ של הגרף (עץ פורש מזערי)	פרים Prim $\|E\|+\|V\|\lg\|V\|$	אם e צלע שמשקלה מזערי מבין כל הצלעות שמחברות בין $S, V \setminus S$ אז יש עפ"מ שכולל את e.
			קרוסקאל Kruskal $\|E\|\lg\|V\|$	אם e צלע שמשקלה מרבי מבין כל הצלעות במעגל מסוים אז יש עפ"מ שלא כולל את e.
גרף מכוון G עם מקור $s \in V$ ויעד $s \neq t \in V$ וקיבולות אי-שליליות $c(e) \geq 0$		זרימה חוקית מרבית	אדמונדס-קארפ Edmonds-Karp $\|E\|^2\|V\|$	ווריאנט של פורד-פלקרסון Ford–Fulkerson
זוג וקטורים $\vec{a}=(a_0,\dots,a_{n-1})$ $\vec{b}=(b_0,\dots,b_{n-1})$		הקונבולוציה הציקלית $\vec{a} \otimes \vec{b} =$ $(c_0,\dots,c_{2n-2})$ שבה $c_k = \Sigma_{0\leq i\leq k} a_i b_{k-i}$	טרנספורם פורייה המהיר FFT $n\lg n$	מתאים לכפל פולינומים $(\sum_{0\leq i\leq n-1} a_i x^i)(\sum_{0\leq j\leq n-1} b_j x^j)$ $=(\sum_{0\leq k\leq 2n-2} c_k x^k)$ כאשר $c_k = \Sigma_{0\leq i\leq k} a_i b_{k-i}$

נא לא לכתוב בשוליים