

תרגיל בית מספר 1

1. לפניך הבעיה של קביעת ערכו של פולינום בנקודה: בהנתן n מקדמים a_0, a_1, \dots, a_{n-1} ומספר ממשי x , יש לחשב את $\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$. הקלט הוא x והמערך A מכיל את המקדמים במקומות 1 עד n . תארי אלגוריתם (כתוב שגרה בפסאודו-קוד) הפותר את הבעיה בזמן $\Theta(n^2)$ על ידי הצבה פשוטה בנוסחה שלעיל. תארי אלגוריתם שזמן הריצה שלו $\Theta(n)$ המשתמש בשיטה הבאה (הנקראת "כלל הורנר") להצגת הפולינום:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = (\dots (a_{n-1}x + a_{n-2})x + \dots + a_1)x + a_0$$

2. כתבי פסאודו קוד עבור $\text{merge}(A, p, q, r)$ הרץ בזמן לינארי.

3. היפוכים

יהי $A[1 \dots n]$ מערך המכיל n איברים שונים. אם $i < j$ ו- $A[i] > A[j]$, אזי הזוג (i, j) נקרא היפוך (inversion) של A .

- א. רשם את חמשת ההיפוכים במערך $\langle 2, 3, 8, 6, 1 \rangle$.
- ב. איזה מערך של איברים מן הקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$ מכיל את המספר הגבוה ביותר של היפוכים? כמה היפוכים הוא מכיל?
- ג. מהו הקשר בין זמן הריצה של מיון-הכנסה לבין מספר ההיפוכים במערך הקלט? נמקי.
- ד. כתוב/י אלגוריתם המחשב את מספר ההיפוכים בתמורה כלשהי של n איברים בזמן $\Theta(n \lg n)$ במקרה הגרוע. (רמז: שנה/שני את מיון-מיזוג).

5. הוכחי את המשוואה $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$.

6. לפניך הפונקציות הבאות :

$$f_1(n) = n^2$$

$$f_2(n) = n^2 + 1000n$$

$$f_3(n) = \begin{cases} n & \text{if } n \text{ is odd} \\ n^3 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

$$f_4(n) = \begin{cases} n & \text{if } n \leq 100 \\ n^3 & \text{if } n > 100 \end{cases}$$

עבור כל זוג i, j השונים זה מזה קבע האם $f_i(n)$ הוא $O(f_j(n))$ והאם $f_i(n)$ הוא $\Omega(f_j(n))$.

7. סדרי את הפונקציות הבאות על פי שיעור הגידול שלהן. כלומר, מצא/י סידור g_1, g_2, \dots, g_{10} של הפונקציות המקיים :

$$g_1(n) = \Omega(g_2(n)), g_2(n) = \Omega(g_3(n)), \dots, g_9(n) = \Omega(g_{10}(n))$$

$$\left| \begin{array}{ccccc} (n+1)! & n^{1/\lg n} & n^3 & 2^{\lg n} & e^n \\ 4^{\lg n} & 2^{2^n} & \lg(n!) & \ln n & 2^n \end{array} \right|$$