

• שאלה 1 (25 נקודות)

בשאלה זו יש לפתור שתי בעיות אלגוריתמיות. לשתי הבעיות קלט זהה והוא כולל גרף מכוון $G = (V, E)$, עם פונקציית משקל $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, ועם פונקציית מרחקים $d_s : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ (כלומר, לכל $v \in V$, $d_s(v)$ הוא משקל המסלול הקצר ביותר מ- s ל- v ב- G). עוד נתון כי לגרף G תכונה מיוחדת: לכל צומת v קיים מסלול קצר ביותר מ- s ל- v שהוא גם מסלול קצר ביותר מ- s ל- v מבחינת מספר הקשתות במסלול.

א. כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל קלט כמתואר לעיל, ומחשב לכל $v \in V$ את משקל המסלול הקצר ביותר מ- s ל- v ב- G' , כאשר ל- G' אותן קבוצת צמתים וקשתות כמו ל- G , אבל פונקציית המשקל w' המוגדרת עבורו, מקיימת: $w'(v) = w(v) + 1$ לכל $v \in V$.
נתחו את סיבוכיות האלגוריתם והוכיחו את נכונותו.

ב. כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל קלט כמתואר לעיל, ומחשב לכל $v \in V$ את משקל המסלול הקצר ביותר מ- s ל- v ב- G'' , כאשר ל- G'' אותן קבוצת צמתים וקשתות כמו ל- G , אבל פונקציית המשקל w'' המוגדרת עבורו, מקיימת: $w''(v) = w(v) - 1$ לכל $v \in V$.
נתחו את סיבוכיות האלגוריתם והוכיחו את נכונותו.

• שאלה 2 (25 נקודות)

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל כקלט גרף לא מכוון $G = (V, E)$ עם פונקציית משקל $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ ועץ פורש מינימלי $T = (V, E')$ של G ומוצא עץ פורש מינימלי $T_1 = (V, E'')$ של G כך שמספר הקשתות הנמצאות ב- T וגם ב- T_1 הוא מינימלי.
הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

• שאלה 3 (25 נקודות)

הוכיחו או הפריכו כל אחת משתי הטענות הבאות:

א. לכל גרף קשיר לא מכוון $G = (V, E)$ אשר הורץ עליו DFS למציאת רכיבים דו-קשירים מתקיים: אם x ו- y הם צמתים השייכים לאותו רכיב דו-קשיר אז $L(x) = L(y)$.

ב. לכל גרף קשיר לא מכוון $G = (V, E)$ אשר הורץ עליו DFS למציאת רכיבים דו-קשירים מתקיים: אם $L(x) = L(y)$ אז x ו- y באותו רכיב דו-קשיר.

• שאלה 4 (25 נקודות)

הוכיחו או הפריכו כל אחת משתי הטענות הבאות:

א. אם ברשת זרימה $G = (V, E)$ קיבולי כל הקשתות שונים זה מזה אז יש ברשת בדיוק חתך מינימלי אחד.

ב. אם ברשת זרימה $G = (V, E)$ קיבולי כל הקשתות שונים זה מזה וערך הזרימה המקסימלית ברשת הוא F אז יש בדיוק פונקציית זרימה חוקית אחת ברשת שערכה F .

• שאלה 5 (35 נקודות)

מטריצה מעגלית היא מטריצה מגודל $n \times n$ כך שכל שורה A מתקבלת על ידי הזזה מעגלית של השורה שמעליה במקום אחד ימינה. כלומר, אם השורה הראשונה היא: $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, אז השורה השנייה היא $(a_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-2})$, השורה השלישית היא $(a_{n-2}, a_{n-1}, a_0, \dots, a_{n-3})$, וכך הלאה עד השורה האחרונה שהיא $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_0)$.

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו אשר מקבל כקלט מטריצה מעגלית A מגודל $n \times n$ ווקטור עמודה v באורך n ומחשב את המכפלה Av . הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.