פתרון שאלה 4 בממ"ן 11 – 2012ב

קודם כל, נשים לב לעובדות הבאות:

$f_1 = (\lg\lg n)^{\lg n}$; $\lg(f_1) = \lg n \cdot \lg\lg\lg n$; לכן, $f_1 = n^{\lg\lg\lg n}$

$f_3 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$;

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i-1)} = 1 + \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\right) = 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i-1} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} =$$

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} = 2 - \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n}$$

לכן, $f_3 = \Theta(1)$

$f_5 = \lg\left(n^n + n!\right) = n \cdot \lg n + \lg(n!)$; לכן, $f_5 = \Theta(n \lg n) = \Theta(f_6)$

$f_7 = n^{\frac{\lg\lg\lg n}{\lg n}}$; $\lg(f_7) = \lg\lg\lg n$; לכן, $f_7 = \lg\lg n$

$$f_{10} = \Theta\left(n^2\right)$$

הגענו לסידור החלקי

$$f_9 = O(f_3);\ f_3 = O(f_7);\ f_7 = O(f_5);\ f_5 = \Theta(f_6);\ f_6 = O(f_{10});\ f_{10} = O(f_1)$$

בהמשך, רואים כי:

$$\lg(f_1) = \lg n \cdot \lg\lg\lg n$$

$$\lg(f_2) = \frac{1}{\lg n} \cdot \Theta(n \cdot \lg n) = \Theta(n)$$

$$\lg(f_4) = \sqrt{n}$$

$$\lg(f_8) = n\sqrt{3} = \Theta(n)$$

לפי הנוסחא (3.17) בספר הלימוד (הקירוב של סטירלינג),

$\lg(f_2) = \frac{1}{\lg n} \cdot \lg(n!) = \frac{1}{\lg n} \cdot \left(n \lg n - n \lg e + \Theta(\lg n)\right) = n - \frac{n}{\lg n} + \Theta(1)$; עבור n גדול דיו,

$\lg(f_2) < \lg(f_8)$, ולכן, $f_2 = o(f_8)$

הגענו להשלמת הסידור

$$f_1 = O(f_4);\ f_4 = O(f_2);\ f_2 = O(f_8)$$