נושאים במתמטיקה לתלמידי מח"ר-10444

סמסטר 2009ב

פתרון ממ"ן 11

****

שאלה 1

א. 1) $(A\setminus(B\cup C))\cup((B\cap C)\setminus A)$

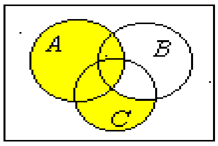
2) $\left(A\cap B\right)\cup C$

3) $(A\Delta B)\setminus C$

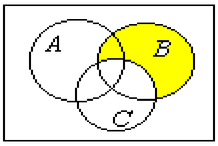
4) $(A\Delta B)^c$

ב.

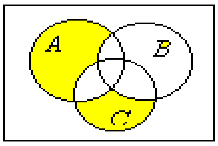
1)



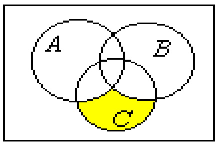
2)



3)



4)



שאלה 2

א. A_1 היא קבוצת כל ה - x-ים השלמים שמקיימים $x+5=x$ או $5=0$. כמובן שלא קיימים x-ים כאלה, ולכן $A_1=\varnothing$.

A_2 היא קבוצת כל ה- x-ים הטבעיים שמקיימים $4-x>1$ **וגם** $2x+5\geq 7$

או מקיימים $x<3$ **וגם** $x\geq 1$

וכל המספרים הטבעיים שגדולים או שווים 1 **וגם** קטנים מ-3 הם 1 ו-2. לכן $A_2=\{1,2\}$.

בדרך דומה ניתן לקבל ש- $A_3=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ (נזכור כי $\pi=3.14...$).

מכאן נקבל: 1) $A_1\cap A_2=\varnothing\cap A_2=\varnothing$

2) קל לראות ש- $A_2\subset A_3$, לכן לפי שאלה 1.17 בספר הלימוד,

$$A_2\cap A_3=A_2=\{1,2\}$$

3) $A_2\cup A_3=\{1,2\}\cup\{-4,-3,...,2,3\}=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

ניתן לקבל תוצאה זו גם על סמך טענה הרשומה בשאלה 1.14 סעיף א.

ב. 1) הטענה נכונה.

2) המספר 4 אינו נמצא ב- A, לכן הטענה אינה נכונה.

3) הטענה אינה נכונה.

4) $A \ni 3$, לכן $\{3\} \subset A$ ולכן $\{3\} \in P(A)$ והטענה נכונה.

5) הטענה אינה נכונה. $\{3\} \subseteq P(A)$ אם ורק אם (או במילים אחרות, שקול ל-) $3 \in P(A)$,
אך ב- $P(A)$ יש רק קבוצות.

6) $\{3\} \in A$ ולכן $\{\{3\}\} \subseteq A$, והטענה נכונה.

7) הטענה אינה נכונה.

8) $4 \in A$ אם ורק אם $\{4\} \subseteq A$, וזה אם ורק אם $\{4\} \in P(A)$. אך $4 \notin A$, לכן הטענה אינה נכונה.

9) לפי הנתון $\{2,\{3,4\}\} \subseteq A$, לכן $\{2,\{3,4\}\} \in P(A)$. אך הטענה בשאלה אינה נכונה כי $\{2,\{3,4\}\} \subseteq P(A)$ אם ורק אם $2,\{3,4\} \in P(A)$, והרי $2,\{4,5\}$ אינה קבוצה חלקית ל-A.

ג. $a \in \{a\}$

$\emptyset \in \{a,\emptyset\}$ וגם $\emptyset \subseteq \{a,\emptyset\}$

$\{a\} \subseteq \{a,\emptyset\}$

$\{a\} \subseteq \{a\}$ ומזה נובע ש- $\{a\} \in P(\{a\})$, ולכן $\{\{a\}\} \subseteq P(\{a\})$.

$\emptyset \subseteq \{a\}$ ולכן $\emptyset \in P(\{a\})$. מכאן ש- $\{\emptyset\} \subseteq P(\{a\})$.

שאלה 3

א. $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\emptyset\}, \{1,\emptyset\}\}$

$P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{\emptyset\}\}, \{1,\{\emptyset\}\}\}$

ב. $P(A) \setminus P(B) = \{\{\emptyset\}, \{1,\emptyset\}\}$

$P(B) \setminus P(A) = \{\{\{\emptyset\}\}, \{1,\{\emptyset\}\}\}$

ג. $P(A) \setminus A = \{\{1\}, \{\emptyset\}, \{1,\emptyset\}\}$

$P(A) \setminus \{A\} = \{\emptyset, \{1\}, \{\emptyset\}, A\} \setminus \{A\} = \{\emptyset, \{1\}, \{\emptyset\}\}$

שאלה 4

א. 1) הטענה אינה נכונה. כדי להוכיח זאת נביא דוגמא נגדית:

$A = \{1,2\}$; $B = \{1,3\}$; $C = \{2,3\}$.

אז: $A \setminus B = C \setminus B = \{2\}$, אך $A \neq C$.

2) דוגמא נגדית: $A=\{1,2\}$; $B=\{1,3\}$; $C=\{2\}$.

אז: $A \setminus B=\{2\}=C$, אך $C \cup B=\{1,2,3\} \neq A$.

ב. 1) נתון: $A \subseteq B$.

צריך להוכיח: $P(A) \subseteq P(B)$.

כלומר צריך להוכיח (בעזרת הנתון) שאם $C \in P(A)$, אז $C \in P(B)$.

נוכיח זאת: אם $C \in P(A)$, אז $C \subseteq A$. נתון ש- $A \subseteq B$, לכן $C \subseteq A \Rightarrow C \subseteq B$.

מכאן נקבל שאם $C \in P(A)$, אז $C \subseteq A$ ולכן גם $C \subseteq B$, ומכאן ש- $C \in P(B)$.

והוכח הדרוש.

<u>**הערה חשובה**</u>: **כדי להוכיח טענות מסוג כזה, שים לב לכך שאנו "יוצאים" מההכלה שעלינו להוכיח ונעזרים בנתון, ולא "מפתחים" את ההכלה הנתונה- כפי שעושים סטודנטים רבים בקורס!**

2) הטענה הרשומה בסעיף נכונה. נוכיח זאת:

נתון כי $P(A) \subseteq P(B)$ (1).

כמו-כן $A \in P(A)$ ולכן, לפי הנתון (1), $A \in P(B)$ שפירושו $A \subseteq B$, כפי שרצינו להוכיח.

3) צ.ל. כי $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$.

כלומר, צ.ל. שאם $C \in P(A) \cup P(B)$ אזי $C \in P(A \cup B)$.

אם $C \in P(A) \cup P(B)$ אזי $C \in P(A)$ או $C \in P(B)$.

אם $C \in P(A)$ אזי $C \subseteq A$ והרי $A \subseteq A \cup B$ לכן $C \subseteq A \cup B$ ולפיכך $C \in P(A \cup B)$ כנדרש.

באופן דומה מוכיחים עבור $C \in P(B)$.

קיבלנו, אם כן, ש- $C \in P(A \cup B)$ ולכן מתקיימת ההכלה, כנדרש.

4) **ההכלה ההפוכה אינה נכונה**. נוכיח זאת בעזרת דוגמה נגדית:

נבחר: $A=\{1\}$, $B=\{2\}$

אזי $A \cup B=\{1,2\}$ ולכן $\{1,2\} \in P(A \cup B)$ (1)

מצד שני, $\{1,2\} \not\subseteq A$ ולכן $\{1,2\} \notin P(A)$ וכן $\{1,2\} \not\subseteq B$ ולכן $\{1,2\} \notin P(B)$

ולכן $\{1,2\} \notin P(A) \cup P(B)$ (2)

מ-(1) ו- (2) נובע ש- $P(A \cup B) \not\subseteq P(A) \cup P(B)$

(כי $\{1,2\}$ הוא איבר של הקבוצה באגף שמאל ואינו איבר של הקבוצה באגף ימין).

שאלה 5

א. לפי ההגדרה $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ לכן מהנתון נובע ש- $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=\varnothing$.

לפי שאלה 1.20 סעיף ג (כאשר שתי הקבוצות בטענה המופיעה בשאלה הן $A\cup B$ ו- $A\cap B$),

מתקיים: $A\cup B\subseteq A\cap B$ (1)

והרי, $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$, ולכן $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$ (2)

מ- (1) ו- (2) נקבל שמתקיים $A\cup B=A\cap B$.

ב. בהוכחת טענה זו נעזר באלגברה של קבוצות.

$$A\setminus(B\cap C)=A\cap(B\cap C)^c\underset{\uparrow}{=}A\cap(B^c\cup C^c)\underset{\uparrow}{=}(A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$$

חוקי דה-מורגן חוקי הפילוג

ג. נניח, **בשלילה**, שלא מתקיים $A\cap C=\varnothing$. לכן קיים $x\in A\cap C$.

x נמצא בחיתוך, ולכן $x\in A$ וגם $x\in C$.

נפריד לשני מקרים, באחד $x\in B$ ובשני $x\notin B$.

* **אם** $x\in B$:

הרי שאז $x\in A$, $x\in C$ וגם $x\in B$. לכן , אם נתבונן בנתון

$A\setminus(B\setminus C)\subseteq(A\setminus B)\setminus C$ נקבל ש- $x\notin B\setminus C$ ו- $x\in A$ ומכאן ש- $x\in A\setminus(B\setminus C)$.

לכן, לפי ההכלה הנתונה מתקיים גם ש- $x\in(A\setminus B)\setminus C$.

מצד שני, $x\in A$ ו- $x\in B$, לכן $x\notin A\setminus B$, ומכאן ש- $x\notin(A\setminus B)\setminus C$ (וזה לא תלוי בכך

ש- x נמצא או לא נמצא ב- C. הרי לכל שתי קבוצות מתקיים, לפי שאלה 1.20א'

$D\setminus E\subseteq D$ ולכן אם $x\notin D$, אז $x\notin D\setminus E$.) וקיבלנו סתירה.

* **אם** $x\notin B$:

הרי שאז $x\in A$, $x\in C$ ו- $x\notin B$. לכן (מאותם שיקולים כמו קודם) $x\notin B\setminus C$

ו- $x\in A$, לכן $x\in A\setminus(B\setminus C)$. ולכן, לפי ההכלה הנתונה מתקיים גם ש- $x\in(A\setminus B)\setminus C$.

מצד שני, $x\in A\setminus B$ וגם $x\in C$, לכן $x\notin(A\setminus B)\setminus C$, וגם במקרה זה קיבלנו סתירה.

מכיוון שקיבלנו סתירה, לכן הנחת השלילה אינה נכונה ומתקיים $A\cap C=\varnothing$.