תשובה 1

א.	נכון	ב.	לא נכון	ג.	לא נכון	ד.	נכון
ה.	לא נכון	ו.	לא נכון	ז.	נכון	ח.	נכון

תשובה 2

א. נכון. לפי הגדרת חיסור קבוצות $A-B=\{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$,

ושוב לפי אותה הגדרה: $(A-B)-B=\{x \mid (x \in A \text{ and } x \notin B) \text{ and } x \notin B\}$

וממשמעות המלה "וגם" ("and") זה שווה $\{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$

כלומר $A-B$.

הוכחה אחרת: מהגדרת חיסור קבוצות והגדרת חיתוך קבוצות מובן כי:

(*) $(A-B)\cap B=\varnothing$

ניעזר כעת בטענה שבשורה השנייה בראש עמ' 21 בספר:

$A \cap B=\varnothing \iff A-B=A$.

כדי למנוע בלבול נרשום אותה מחדש כך:

$X \cap Y=\varnothing$ אם ורק אם $X-Y=X$ (**)

נציב $X=A-B$, $Y=B$.

מנוסחה (*) למעלה נקבל ש- $X \cap Y=\varnothing$.

לכן, לפי טענה (**) , $X-Y=X$, כלומר $(A-B)-B=A-B$.

ב. **נכון**. הוכחה: ניעזר שוב בטענה שבשורה השנייה בעמ' 21 בספר:

$A \cap B=\varnothing \iff A-B=A$.

נציב $B-A$ במקום B :

$$A \cap (B-A)=\varnothing \iff A-(B-A)=A \qquad (*)$$

מהגדרת חיתוך קבוצות יחד עם הגדרת הפרש קבוצות, מתקיים: $A \cap (B-A)=\varnothing$.

לכן מהשקילות (*) נקבל $A-(B-A)=A$.

אפשר להוכיח טענה זאת גם בדרכים אחרות, למשל בעזרת מושג המשלים, בדומה למה שנראה בפתרון שאלה 3.

ג. לא נכון: ראו החוברת "אוסף תרגילים פתורים", קבוצה 1 שאלה 2.

ד. **נכון.** התנאי $X \in P(A \cap B)$ שקול, לפי הגדרת קבוצת חזקה, לתנאי
$X \subseteq A \cap B$.

לפי שאלה 1.10 ב', זה שקול ל-
$X \subseteq A$ **וגם** $X \subseteq B$.

שוב לפי הגדרת קבוצת חזקה, זה שקול ל-
$X \in P(A)$ **וגם** $X \in P(B)$.

ומהגדרת חיתוך, זה שקול ל-
$X \in P(A) \cap P(B)$.

קיבלנו: $X \in P(A \cap B)$ **אםם** (אם ורק אם) $X \in P(A) \cap P(B)$.
לפי הגדרת שוויון קבוצות (הגדרה 1.1), שתי הקבוצות שוות.

תשובה 3

א. כדי לקצר קצת את הנוסחאות בתחילת הפיתוח, נסמן $B = B_1 \cap B_2$.

נפתח את אגף שמאל הנתון בשאלה, תוך הצבת B ובעזרת ההדרכה לשאלה:

$$(A_1 \cup A_2) - B = (A_1 \cup A_2) \cap B'$$

ניעזר בפילוג החיתוך מעל האיחוד (סעיף 1.3.4 בספר):

$$= (A_1 \cap B') \cup (A_2 \cap B')$$

מהגדרת B, לפי דה-מורגן: $B' = B_1' \cup B_2'$. נציב זאת:

$$= (A_1 \cap (B_1' \cup B_2')) \cup (A_2 \cap (B_1' \cup B_2'))$$

ניעזר בפילוג האיחוד מעל החיתוך (סעיף 1.3.4 בספר):

$$= ((A_1 \cap B_1') \cup (A_1 \cap B_2')) \cup ((A_2 \cap B_1') \cup (A_2 \cap B_2'))$$

שוב בעזרת ההדרכה לשאלה:

$$= ((A_1 - B_1) \cup (A_1 - B_2)) \cup ((A_2 - B_1) \cup (A_2 - B_2))$$

מהקיבוציות של האיחוד (אסוציאטיביות, עמ' 10 בספר), ניתן לסלק כאן שני זוגות סוגרים:

$$= (A_1 - B_1) \cup (A_1 - B_2) \cup (A_2 - B_1) \cup (A_2 - B_2)$$

ב.

$$A' \oplus B' = (A' - B') \cup (B' - A') = (A' \cap B) \cup (B' \cap A)$$

נשנה את סדר האיברים בעזרת חילופיות החיתוך וחילופיות האיחוד:

$$= (A \cap B') \cup (B \cap A') = (A - B) \cup (B - A) = A \oplus B$$

תשובה 4

א. $A_0 = \{x \mid -1 \le x \le -2\} = \varnothing$, $A_1 = \{x \mid 0 \le x \le 0\} = \{0\}$,

$A_2 = \{1,2\}$, $A_3 = \{2,3,4\}$, $A_4 = \{3,4,5,6\}$, $A_5 = \{4,5,6,7,8\}$.

ב. החיתוך ריק (שווה לקבוצה הריקה) כי אין אף איבר משותף לכל 4 הקבוצות הנתונות.

למעשה אין איבר משותף אפילו ל- A_2 ול- A_5 למשל, כך שוודאי אין איבר משותף לכל ארבע הקבוצות.

ג. נוכיח כי $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n = \mathbf{N}$:

הכלה בכיוון אחד: יהי $m \in \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$. כלומר, מהגדרת איחוד כללי, m שייך לפחות לאחת

הקבוצות A_n . מהגדרת A_n , $A_n \subseteq \mathbf{N}$. לכן $m \in \mathbf{N}$.

הכלה בכיוון שני: יהי $m \in \mathbb{N}$. כדי להראות ש- $m \in \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ עלינו להראות ש- m שייך לפחות

לאחת הקבוצות A_n . כלומר עלינו למצוא n טבעי כך ש- $n-1 \le m \le 2(n-1)$.

זה מתקיים עבור $n = m+1$, כי לכל m טבעי מתקיים $m \le m \le 2m$.

מצאנו n כך ש- $m \in A_n$, לכן $m \in \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$.

הראינו הכלה בשני הכיוונים, לכן $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n = \mathbf{N}$.

ד. $B_0 = A_1 - A_0 = A_1 - \varnothing = \{0\}$,

$B_1 = A_2 - A_1 = \{1,2\} - \{0\} = \{1,2\}$,

$B_2 = A_3 - A_2 = \{2,3,4\} - \{1,2\} = \{3,4\}$,

$B_3 = A_4 - A_3 = \{3,4,5,6\} - \{2,3,4\} = \{5,6\}$.

$B_4 = A_5 - A_4 = \{4,5,6,7,8\} - \{3,4,5,6\} = \{7,8\}$

ה. זהו איחוד 5 הקבוצות שמצאנו בסעיף הקודם, והוא שווה $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

כלומר $\{n \in \mathbf{N} \mid 0 \le n \le 8\}$.

איתי הראבן