תשובה 1

א. (*i*) עבור פסוק יסודי P, $f[P]=1$. (*ii*) לכל פסוק α, $f[\sim(\alpha)]=f[\alpha]$.

(*iii*) לכל שני פסוקים α,β, $f[(\alpha)\rightarrow(\beta)]=f[\alpha]+f[\beta]$.

ב. ספירה של ההופעות של פסוקים יסודיים, או חישוב מההגדרה הרקורסיבית, נותנים 5.

ג. f מביעה את **מספר העלים של העץ** - כל הופעה של פסוק יסודי בפסוק שלנו מיוצגת על ידי עלה בעץ הבניה, והופעות שונות של פסוקים יסודיים (כולל הופעות שונות של אותו פסוק יסודי) מיוצגות על ידי עלים שונים. אפשר גם לראות זאת כך: אם ניתן הגדרה רקורסיבית של מספר העלים בעץ בנייה של פסוק, נקבל בדיוק את מה שרשמנו בסעיף א. שתי פונקציות שיש להן אותה הגדרה רקורסיבית - מתלכדות.

תשובה 2

א + ב. נבנה את לוח האמת של הפסוק $P_0 \rightarrow (P_1 \rightarrow P_2)$.

כדי לא לעבוד קשה מדי, נשתמש בטריק הבא, הנוח עבור פסוקים המכילים $\rightarrow$:

נבדוק מתי $P_0 \rightarrow (P_1 \rightarrow P_2)$ מקבל F: מלוח האמת של $\rightarrow$, זה קורה אסם

$J(P_0) = \mathrm{T}$ ו- $J(P_1 \rightarrow P_2) = \mathrm{F}$. שוב מהלוח של $\rightarrow$, התנאי השני מתקיים אסם

$J(P_1) = \mathrm{T}$ ו- $J(P_2) = \mathrm{F}$. קיבלנו אפוא שיש אינטרפרטציה אחת ויחידה (עבור 3 הפסוקים היסודיים הנ״ל) בה הפסוק $P_0 \rightarrow (P_1 \rightarrow P_2)$ מקבל F:

האינטרפרטציה $J(P_0) = J(P_1) = \mathrm{T}$, $J(P_2) = \mathrm{F}$.

בכל אינטרפרטציה אחרת (כלומר בכל אחת מ- 7 השורות האחרות בלוח האמת) הוא מקבל אפוא T.

כעת קל לרשום את הצורות הנורמליות, לפי המתכונים המופיעים בספר.

לפי האלגוריתם 2.30 שבעמ׳ 61, צורה דיסיונקטיבית נורמלית (DNF) לפסוק זה היא:

$$(P_0 \wedge P_1 \wedge P_2) \vee \big(P_0 \wedge (\sim P_1) \wedge P_2\big) \vee \big(P_0 \wedge (\sim P_1) \wedge (\sim P_2)\big) \vee \big((\sim P_0) \wedge P_1 \wedge P_2\big)$$
$$\vee \big((\sim P_0) \wedge P_1 \wedge (\sim P_2)\big) \vee \big((\sim P_0) \wedge (\sim P_1) \wedge P_2\big) \vee \big((\sim P_0) \wedge (\sim P_1) \wedge (\sim P_2)\big)$$

וצורה קוניונקטיבית נורמלית (CNF) היא: $(\sim P_0) \vee (\sim P_1) \vee P_2$.

יכולנו לקבל את צורת CNF גם **ללא** לוח האמת, ע״י שימוש פעמיים בזהות $\alpha \rightarrow \beta \equiv (\sim \alpha) \vee \beta$ (שאלה 1.32א בעמ׳ 33 בספר).

תשובה 3

א. כפסוקים יסודיים נקח את הסימנים h,v,s,m , אותם נפרש כך:

h: הארי יישאר בחיים v: וולדמורט יישאר בחיים

s: סנייפ יעזור להארי m: מאלפוי יעזור להארי

בסימונים אלה נקבל:

a: $\sim (h \wedge v)$ b: $(s \vee m) \to h$ c: $s \to (\sim v)$

d: $(\sim v) \to s$ e: $h \leftrightarrow (\sim v)$

ההסבר לפסוק d הוא בקובץ שפורסם באתר. אפשר לרשום את d גם כ- $(\sim s) \to v$, זה שקול טאוטולוגית לפסוק שרשמנו. בדומה ניתן לרשום את רוב הפסוקים שקיבלנו בווריאציות שונות.

מי שרשם את d כחץ כפול, $s \leftrightarrow (\sim v)$, יקבל כמעט את כל הניקוד: למרות שזה אינו הפירוש הנכון פורמלית, ניתן להבין את הפסוק בשפה מילולית גם בצורה זו.

ב. (1) לא, כי באינטרפרטציה שבה $J(h) = J(v) = \mathrm{F}$, הפסוקים a, e מקבלים ערכי אמת שונים: $J(a) = \mathrm{T}$, $J(e) = \mathrm{F}$.

(2) נכון. אפשר להוכיח זאת ע"י הסתכלות בכל השורות בלוח אמת משותף, שבהן a,b מקבלים שניהם ערך T .

ניתן הוכחה קצת אחרת:

נניח בשלילה שקיימת אינטרפרטציה J כך ש- $J(a) = J(b) = \mathrm{T}$ בעוד ש- $J(c) = \mathrm{F}$.

c הוא $s \to (\sim v)$. מלוח האמת של "חץ" ומההנחה $J(c) = \mathrm{F}$,

נקבל $J(s) = \mathrm{T}$, $J(\sim v) = \mathrm{F}$.

לכן $J(v) = \mathrm{T}$. מכך, ומההנחה ש- a אמיתי ב- J , נקבל $J(h) = \mathrm{F}$.

מכאן, ומכך ש- b אמיתי ב- J , ומהלוח של "חץ" נקבל ש- $J(s \vee m) = \mathrm{F}$.

מכאן לפי הלוח של "או", בפרט $J(s) = \mathrm{F}$, בסתירה למה שקיבלנו קודם.

לכן לא קיימת אינטרפרטציה כזו, כלומר c אמיתי בכל אינטרפרטציה שבה a,b אמיתיים שניהם.

(3) לא. באינטרפרטציה שבה $J(h) = J(v) = \mathrm{F}$, $J(s) = \mathrm{T}$ (והערך של m יכול להיות מה שנרצה) , שלושת הפסוקים a,c,d הם אמיתיים בעוד ש- b שקרי.

גם מי שפירש את d כפסוק $s \leftrightarrow (\sim v)$ אמור לקבל אותה תשובה.

תשובה 4

א. לא. למשל $P_0 \models P_1 \vee \sim P_1$ (אגף ימין הוא טאוטולוגיה, ולכן נובע טאוטולוגית מכל פסוק).
אבל P_0 אינו גורר טאוטולוגית את P_1 ואינו גורר טאוטולוגית את $\sim P_1$.

ב. נכון. עלינו להראות שמהנתונים נובע שבכל אינטרפרטציה שבה $\alpha \wedge \beta$ אמיתי,
גם γ אמיתי. כלומר להראות שאם $J(\alpha) = \mathrm{T}$ וגם $J(\beta) = \mathrm{T}$ אז $J(\gamma) = \mathrm{T}$.
תהי J אינטרפרטציה שבה $J(\alpha) = J(\beta) = \mathrm{T}$.
נתון ש- $\alpha \models \gamma$ או $\beta \models \gamma$.
אם $\alpha \models \gamma$, מהעובדה ש- $J(\alpha) = \mathrm{T}$ נובע $J(\gamma) = \mathrm{T}$;
ואם $\beta \models \gamma$, מהעובדה ש- $J(\beta) = \mathrm{T}$ נובע שוב $J(\gamma) = \mathrm{T}$.
בכל מקרה קיבלנו $J(\gamma) = \mathrm{T}$ כמבוקש. לכן הטענה נכונה (למעשה נכון גם $\alpha \vee \beta \models \gamma$).

ג. נכון. משמעות הנתון היא שבכל אינטרפרטציה שבה α אמיתי, $\sim\beta$ אמיתי.
כלומר בכל אינטרפרטציה שבה α אמיתי, β שקרי.
משמע **לא קיימת אינטרפרטציה** שבה α,β אמיתיים שניהם.
לכן נוכל לומר שבכל אינטרפרטציה בה שניהם אמיתיים, מתקיים כל מה שנעלה על דעתנו,
למשל: γ, ולמשל: $\sim\gamma$.

איתי הראבן