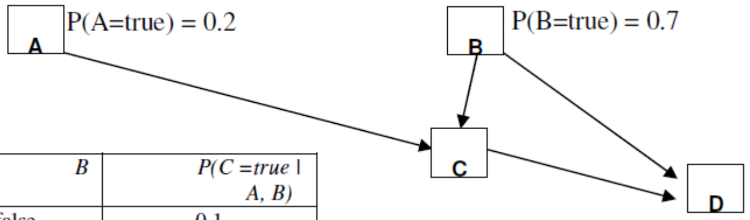
רשת בייסיאנית כמה תרגילים ללא פתרונות....

1. נתונה רשת בייסיאנית להלן. המשתנים A,B,C ו-D הם משתנים בוליאניים.

א. מהי ההסתברות שערך כל המשתנים הוא false?

ב. מהי ההסתברות ש: B=C=true, D=false?

ג. מהי ההסתברות P(C=true|D=true)?



A	*B*	*P(C =true* | *A, B)*
false	false	0.1
false	true	0.5
true	false	0.4
true	true	0.9

B	**C**	**P(D=true | B, C)**
false	false	0.8
false	true	0.6
true	false	0.3
true	true	0.1

פתרון

א.

$$P(A=f \wedge B=f \wedge C=f \wedge D=f)$$
$$= P(A=f)\cdot P(B=f)\cdot P(C=f \mid A=f \wedge B=f)\cdot P(D=f \mid B=f \wedge C=f)$$
$$= 0.8\cdot 0.3\cdot 0.9\cdot 0.2 = 0.0432$$

ב.

$$P(B=t \wedge C=t \wedge D=f)$$
$$= P(B=t)\cdot P(C=t \mid B=t)\cdot P(D=f \mid B=t \wedge C=t)$$
$$= P(B=t)\cdot[P(A=t)\cdot P(C=t \mid A=t \wedge B=t)+P(A=f)\cdot P(C=t \mid A=f \wedge B=t)]\cdot P(D=f \mid B=t \wedge C=t)$$
$$= 0.7\cdot(0.2\cdot 0.9+0.8\cdot 0.5)\cdot 0.9 = 0.3654$$

ג.

$$P(C \mid D)=\frac{P(D \mid C)\cdot P(C)}{P(D)}$$
$$=[P(D \mid C \wedge B)\cdot P(B)+P(D \mid C \wedge \overline{B})\cdot P(\overline{B})]\cdot$$
$$[P(C \mid A \wedge B)\cdot P(A \wedge B)+P(C \mid A \wedge \overline{B})\cdot P(A \wedge \overline{B})+P(C \mid \overline{A} \wedge B)\cdot P(\overline{A} \wedge B)+P(C \mid \overline{A} \wedge \overline{B})\cdot P(\overline{A} \wedge \overline{B})]/$$
$$[P(D \mid C \wedge B)\cdot P(C \wedge B)+P(D \mid C \wedge \overline{B})\cdot P(C \wedge \overline{B})+P(D \mid \overline{C} \wedge B)\cdot P(\overline{C} \wedge B)+P(D \mid \overline{C} \wedge \overline{B})\cdot P(\overline{C} \wedge \overline{B})]$$

נשתמש במבנה הרשת כדי לקבל-

2. מחלה מסויימת (מסומנת כ d) נפוצה באוכלוסייה ביחס של אחד למליון. קיימת בדיקה להמצאות המחלה (מסומנת כ test). הבדיקה מדוייקת ב-98% כלומר בשני אחוזים מהבדיקות אדם בריא יקבל תשובה חיובית (תשובה חיובית לבדיקה פירושה חולי) ובשני אחוזים מהבדיקות אדם חולה יקבל תשובה שלילית. אדם נבדק והבדיקה נתנה תוצאות חיוביות. השתמש בהיסק ב- Bayesian reasoning על מנת לחשב את הסיכוי שאדם זה אכן חולה.

פתרון

Bayes Rule: P(A|B)=P(B|A)*P(A)/P(B)
A= "d=true", B="test=positive"
P (d=true | test=positive)

= (P(test=positive | d=true)*p(d=true))/p(test=positive)

= (0.98*0.000001)/(0.000001*0.98+0.999999*0.02)
= 0.00000098/(0.00000098+0.01999998) =0.00000098/0.02000096~4.9*10^(-5)

3. גברת כהן היא סטודנטית למדעי המחשב שמאזינה למוזיקה בכל מקום. יש לה לעיתים תכופות שיעורי בית ורבים מהם דורשים תיכנות. יש לנו מספר דוגמאות על בחירת סוג המוזיקה שלה בפעמים שונות. נניח כי ראיתם את גברת כהן בבוקר (Morning). היו לה שיעורי בית (HomewoekDue=Yes) שלא דורשים תיכנות (Programming=No).

א. מה סוג המוזיקה ש- Naive Bayes ינבא שהיא שומעת? הראה את החישובים שלך והסבר.

TimeOfDay	*HomeworkDue?*	*Programming?*	*MusicType*
Morning	Yes	No	Classical
Morning	No	No	Pop
Morning	No	Yes	Classical
Morning	Yes	No	Classical
Afternoon	Yes	Yes	Pop
Afternoon	No	No	Pop
Evening	No	Yes	Pop
Evening	Yes	Yes	Classical

פתרון

נחשב קודם את ה-prior: P(Pop) = 4/8, P(Classical) = 4/8

נשתמש בהנחת Naïve Bayes:

$$P(X_1, X_2, X_3 \mid C) = P(X_1 \mid C) \bullet P(X_2 \mid C) \bullet P(X_3 \mid C)$$

P(Morning|Classical) = 3/4

P(HomeworkDue=Yes|Classical) = 3/4

P(Programming=No|Classical) = 2/4

P(Morning|Pop) = 1/4

P(HomeworkDue=Yes|Pop) = 1/4

P(Programming=No|Pop) = 1/2

נקבל עבור Classical:

P(Morning,Yes,No|Classical) = 3/4*3/4*2/4*4/8 = 9/64

ועבור Pop:

P(Morning,Yes,No|Pop) = 1/4*1/4*1/2*4/8 = 1/64

לכן Naïve Bayes ינבא Classical.

ב. מה סוג המוזיקה שינבא k-nearest neighbor עם k=3 ?

תשובה:

נחשב עבור כל שורה, מה המרחק שלה מ- <Morning,Yes,No>:

TimeOfDay	*HomeworkDue?*	*Programming?*	*MusicType*	*Distance*
Morning	Yes	No	Classical	0
Morning	No	No	Pop	1
Morning	No	Yes	Classical	2
Morning	Yes	No	Classical	0
Afternoon	Yes	Yes	Pop	2
Afternoon	No	No	Pop	2
Evening	No	Yes	Pop	3
Evening	Yes	Yes	Classical	2

3 הדוגמאות הקרובות ביותר נותנות לנו את הסיווג: Classical, Pop, Classical ולכן האלגוריתם ינבא Classical.

במפעל לייצור מנועים הוחלט ליישם מערכת בקרת איכות מבוססת Naïve Bayes. כל מנוע נבדק ביציאה מפס הייצור באמצעות 3 חיישנים: חיישן תנועה שבודק רעידות (M), גלאי קול שבודק את הרעש שנוצר (N), ומדחום שמודד את טמפרטורת המנוע (T). כל אחד נותן תוצאה בוליאנית- תקלה זוהתה (true) או לא (false). בסופו של דבר צריך לקבל החלטה האם המנוע תקין או לא. בטבלה הבאה מצוינים נתונים שנאספו מכמה מנועים שיצאו מפס הייצור:

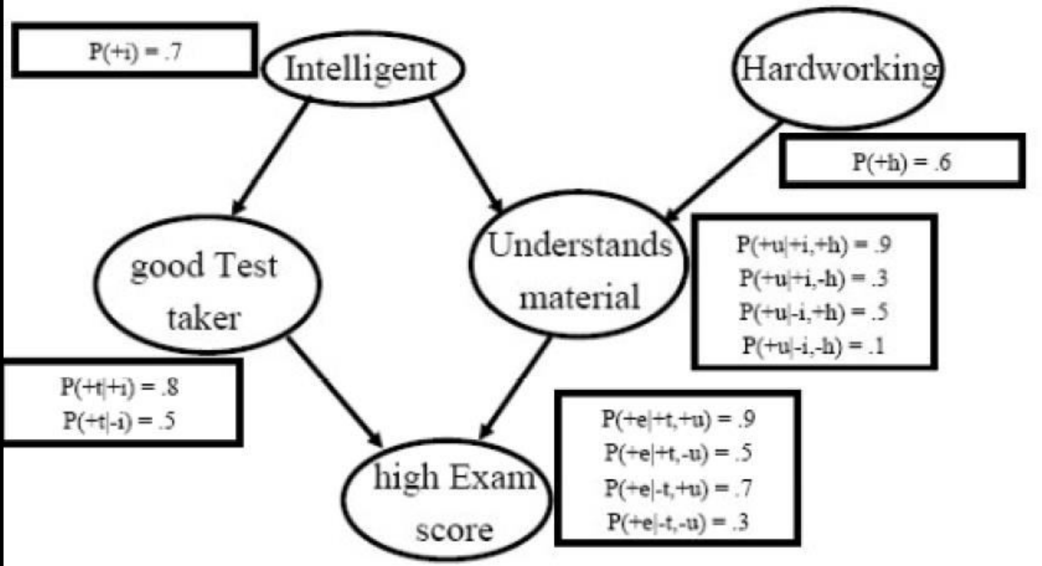
Result	M	N	T
Ok	false	false	true
Ok	false	true	false
Ok	false	true	false
Ok	true	false	false
Ok	false	false	false
Bad	true	false	false
Bad	true	true	false
Bad	false	true	true

הגיע מנוע חדש. חיישן התנועה דיווח שהכול תקין, גלאי הקול דיווח על תקלה והמדחום דיווח שהכול תקין.

האם יש תקלה במנוע או לא?

פתרון

בתור מרצה, אני מעוניינת לדעת האם סטודנט הבין את החומר כאשר ההערכה מתבצעת באמצעות מבחן. התרשים הבא מתאר את הרשת הבייסיאנית המתאימה. כל המשתנים בוליאניים, ונסמן +x/-x כדי לבטא ערך true/false עבור משתנה.



ניתן לראות שציון גבוה במבחן (e) מושפע מהבנת החומר (u) ומהיכולת להתרכז במבחן (t). שני יכולות אלו מושפעות מהאינטליגנציה של הסטודנט (i). הבנת החומר מושפעת גם מחריצות הסטודנט (h).

א) חשב את ההסתברות שסטודנט שהצליח במבחן הבין את החומר, ז"א את P(+u|+e).

פתרון

לפי חוק בייס

$$P(u|e) = P(e|u)*P(u)/P(e)$$

לפי ההסתברות השלמה

$$P(e|u) = P(e|u,t)P(t) + P(e|u,-t)P(-t)$$
$$P(t) = P(t|i)P(i) + P(t|-i)P(-i)$$
$$P(-t) = 1- P(t)$$
$$P(u) = P(u|h,i)P(h,i) + P(u|-h,i)P(-h,i) + P(u|h,-i)P(h,-i) + P(u|-h,-i)P(-h,-i)$$

לכן

$$P(e|u) = 0.9*(0.8*0.7+0.5*0.3)+0.7*(1-[0.8*0.7+0.5*0.3]) = 0.842$$
$$P(u) = 0.9*0.6*0.7 + 0.3*0.4*0.7 + 0.5*0.6*0.3 + 0.1*0.4*0.3 = 0.564$$

במקום לחשב את $P(e)$ נחשב את $P(-u|e)$ ונרמל

$$P(-u|e) = P(e|-u)*P(-u)/P(e)$$
$$P(e|-u) = P(e|-u,t)P(t) + P(e|-u,-t)P(-t)$$
$$P(-u) = P(-u|h,i)P(h,i) + P(-u|-h,i)P(-h,i) + P(-u|h,-i)P(h,-i) + P(-u|-h,-i)P(-h,-i)$$

לכן

$$P(e|-u) = 0.5*(0.8*0.7+0.5*0.3)+0.3*(1-[0.8*0.7+0.5*0.3]) = 0.442$$
$$P(-u) = 0.1*0.6*0.7 + 0.7*0.4*0.7 + 0.5*0.6*0.3 + 0.9*0.4*0.3 = 0.436$$

נקבל ש-

$$a*\langle 0.842*0.564, 0.442*0.436\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad \langle 0.711336129, 0.288663871\rangle$$

ז"א $P(u|e) = 0.711336129$

(אלו מהטענות הבאות נובע ממבנה הרשת? נמק בקצרה כל תשובה. אין להסתמך על הערכים המספריים אלא רק על מבנה הרשת.

a. t ו- u בלתי תלויים.
b. t ו- u בלתי תלויים בהינתן i, e ו- h.
c. t ו- u בלתי תלויים בהינתן i ו- h.
d. e ו- h בלתי תלויים בהינתן u.

ת:

a. לא נובע ממבנה הרשת. להיפך, מכיוון שלשניהם יש אב משותף הם תלויים אחד בשני.
b. לא נובע ממבנה הרשת. להיפך, מכיוון שלשניהם יש בן משותף, e, שנתון בשאלה.
c. נובע ממבנה הרשת. מכיוון ש- i ו- h הם אבות של t, t בלתי תלוי ב- u (שאינו צאצא שלו) בהינתן i ו- h.
d. לא נובע ממבנה הרשת. בהינתן u, i ו- h לא בלתי תלויים, ו- i הוא אב קדמון (ב- causal chain) של e.

למטוס בואינג 747 ישנם 2 מנועים. ההסתברות לנחיתה מוצלחת כשרק מנוע אחד פועל היא 80%, 0% אם שניהם אינם פועלים ו- 99.99% אם שניהם פועלים כרגיל. בתנאים רגילים, לכל מנוע יש סיכוי של 1 ל- 100 שיפסיק לפעול במהלך הטיסה. ההסתברות גדולה פי 10 אם המטוס נפגע מלהקת ציפורים. דבר נוסף שעלול להשפיע הוא גיל המטוס: במטוס ישן הסיכוי לתקלה כפול ממטוס חדש. כמובן שההשפעה של פגיעת ציפורים במנוע של מטוס ישן גם היא גדולה יותר- יש סיכוי של 20% שהמנוע יפסיק לפעול. בסקר בטיחות שנעשה בשדות תעופה בעולם, התגלה שמתוך סך הטיסות, רק 0.5% נפגעו מציפורים. בנוסף, חברות התעופה מקפידות שאחוז המטוסים הישנים, מתוך כלל המטוסים, יהיה 10% בלבד.

נשתמש במשתנים הבאים:

L - נחיתה מוצלחת.

E1 - מנוע 1 עובד.

E2 - מנוע 2 עובד.

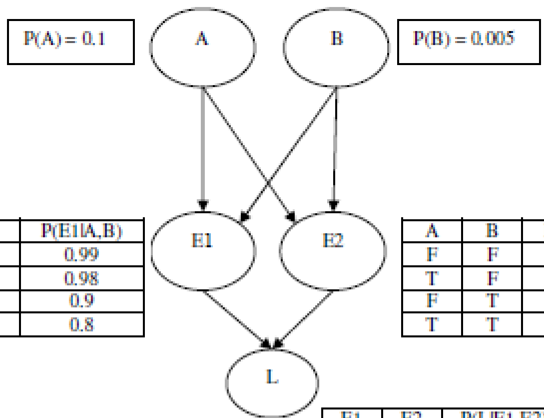
B - פגיעה בלהקת ציפורים.

A - המטוס ישן.

א. צייר את הרשת הבייסיאנית היעילה ביותר לייצוג בעיה זו, כולל ה- CPT.

ב. הוכח או הפרך: בכל סדר הכנסה שונה של קודקודים בבניית רשת בייסיאנית מקבלים מבנה אחר של הרשת.

פתרון



A	B	P(E1|A,B)
F	F	0.99
T	F	0.98
F	T	0.9
T	T	0.8

A	B	P(E2|A,B)
F	F	0.99
T	F	0.98
F	T	0.9
T	T	0.8

E1	E2	P(L|E1,E2)
F	F	0
T	F	0.8
F	T	0.8
T	T	0.9999

ב. לא נכון. לדוגמה ברשת הקודמת, אם היינו מכניסים בהתחלת הבנייה קודם את A ואח"כ את B, או קודם את B ואח"כ את A, היינו עדיין מקבלים את אותה הרשת.

רשת בייסיאנית כמה תרגילים עם פתרונות....

שאלה 1:

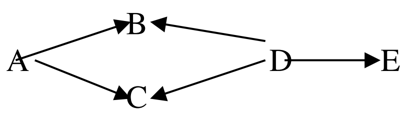
נתון קודקוד n1 ברשת בייסיאנית ולו 3 אבות ישירים f1,f2,f3 (ייתכנו בן אחד או יותר). טענה: אם ידוע הערך של שלושת האבות לדוגמא f1=f2=f3=T, ידוע הערך של n1.

תשובה:

לא נכון. ידועה התפלגות ההסתברויות של הבן, לא ערכו.

שאלה 3:

נתונה הרשת הבייסיאנית הבאה, כאשר כל המשתנים בוליאניים:



א) מה מהטענות הבאות (אם בכלל) נובע ממבנה הרשת?

i) $P(A,D|C) = P(A|C)*P(D|C)$

ii) $P(C,E|D)=P(C|D)*P(E|D)$

iii) $P(A|D)=P(A)$

תשובה

i) לא נובע ממבנה הרשת מכיוון שיכול להיות ש- $P(A|C) \neq P(A)$ (ובאותו אופן $P(D|C) \neq P(D)$). שאר הטענות נובעות ממבנה הרשת.

שאלה 4:

ב) יששכר וזבולון לומדים ביחד מדעי המחשב, כאשר הציונים האפשריים הם A,B או C. כמו כל סטודנט טוב גם הם מערערים לפעמים על הציון שקיבלו. נשתמש בסימונים הבאים:

GY – הציון של יששכר בקורס

GZ – הציון של זבולון בקורס

YC – יששכר מערער על ציונו בקורס

ZC – זבולון מערער על הציון בקורס

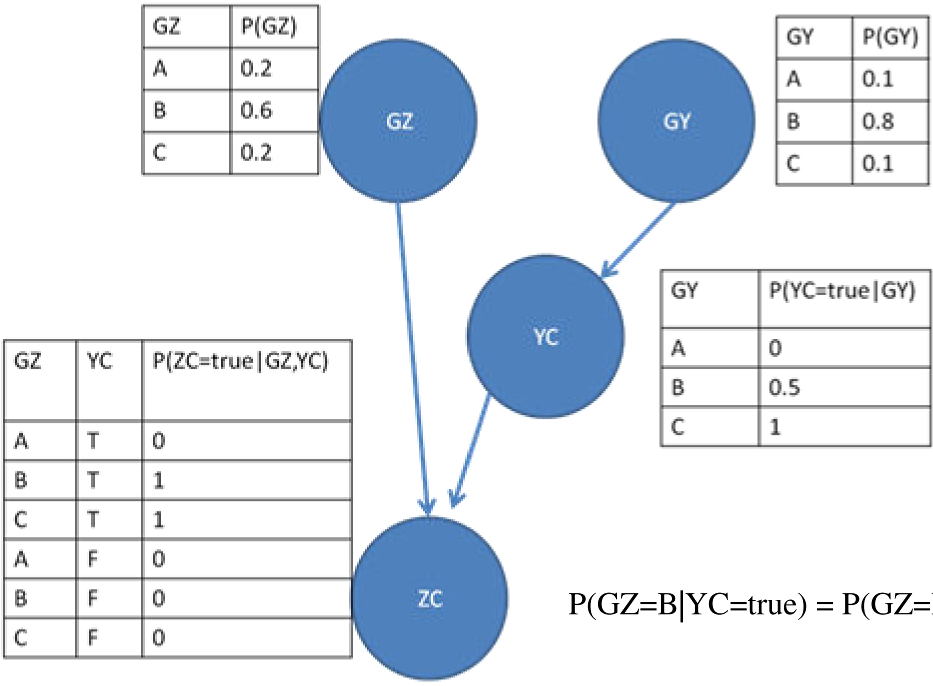
אם יששכר מקבל A הוא לא מערער. אם הוא מקבל B הוא מערער בחצי מהמקרים. הוא תמיד מערער אם הוא מקבל C. אם יששכר לא מערער, זבולון גם לא מערער. אם זבולון מקבל A הוא גם לא מערער. אם הוא מקבל B או C ויששכר מערער על ציונו, גם הוא יערער. נתון:

$P(GY=A)=0.1$, $P(GY=B)=0.8$, $P(GY=C)=0.1$ and $P(GZ=A)=0.2$, $P(GZ=B)=0.6$, $P(GZ=C)=0.2$.

צייר את הרשת הבייסיאנית המתאימה בצירוף טבלאות ההסתברות (אם חסרים ערכים ציין זאת, והשלם אותם בעצמך).

לפי הרשת שציירת, מה ההסתברות שהציון של זבולון הוא B בהינתן שיששכר ערער על ציונו?

תשובה



GZ	P(GZ)
A	0.2
B	0.6
C	0.2

GY	P(GY)
A	0.1
B	0.8
C	0.1

GY	P(YC=true|GY)
A	0
B	0.5
C	1

GZ	YC	P(ZC=true|GZ,YC)
A	T	0
B	T	1
C	T	1
A	F	0
B	F	0
C	F	0

P(GZ=B|YC=true) = P(GZ=B) = 0.6

שאלה 5:

מחלה מסויימת (מסומנת כ d) נפוצה באוכלוסייה ביחס של אחד למליון. קיימת בדיקה להמצאות המחלה (מסומנת כ test). הבדיקה מדוייקת ב-98% כלומר בשני אחוזים מהבדיקות אדם בריא יקבל תשובה חיובית (תשובה חיובית לבדיקה פירושה חולי) ובשני אחוזים מהבדיקות אדם חולה יקבל תשובה שלילית.
אדם נבדק והבדיקה נתנה תוצאות חיוביות. השתמש בהיסק ב- Bayesian reasoning על מנת לחשב את הסיכוי שאדם זה אכן חולה.

תשובה

<u>Bayes Rule:</u> P(A|B)=P(B|A)*P(A)/P(B)
A= “d=true”, B=”test=positive”
P (d=true | test=positive)

= (P(test=positive | d=true)*p(d=true))/p(test=positive)

= (0.98*0.000001)/(0.000001*0.98+0.999999*0.02)
= 0.00000098/(0.00000098+0.01999998)
=0.00000098/0.02000096
~4.9*10^(-5)

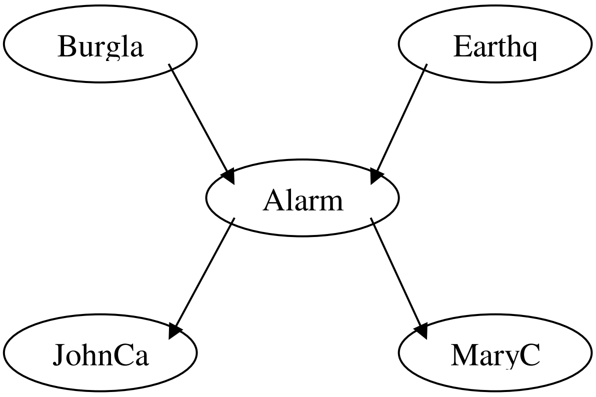
שאלה 6:

1. עבור הרשת הבייסיאנית שתוארה בשיעור (וראה לעיל) חשב את :

א. P(Burglary | JohnCalled)
ב. P(JohnCalled |Burglary)
ג. P(MaryCalled |Burglary)
ד. P(Burglary | Alarm, Earthquake)
ה. P(Alarm | JohnCalled , Burglary)
ו. P(Burglary | JohnCalled, ¬Earthquak)

P(B)
0.001

P(E)
0.002



B	E	P(A)
T	T	0.95
T	F	0.95
F	T	0.29
F	F	0.001

A	P(J)
T	0.90
F	0.05

A	P(M)
T	0.70
F	0.01

תשובה

1. יש דרכים רבות לחישוב ההסתברויות בסעיפים א'-ו'.

א. $P(B|J)=\sum_{a=T,F} P(B|A=a)\cdot P(A=a|J)=\sum_{a}\frac{P(A=a|B)\cdot P(B)}{\cancel{P(A=a)}}\cdot\frac{P(J|A=a)\cdot \cancel{P(A=a)}}{P(J)}$

$$=\frac{P(B)}{P(J)}\cdot\sum_{a} P(a|B)\cdot P(J|a)$$

כאשר $P(A=a|B)=\sum_{e_i=T,F} P(A=a|B,E=e_i)\cdot P(e_i)$

כלומר

$$P(A|B)=P(A|BE)\cdot P(E)+P(A|B,\neg E)\cdot P(\neg E)=0.95$$

ו

$$P(\neg A|B)=1-P(A|B)=0.05$$

ומכאן

$$P(B|J)=\frac{P(B)}{P(J)}\cdot\left(P(A|B)\cdot P(J|A)+P(\neg A|B)\cdot P(J|\neg A)\right)$$

$$=\alpha\cdot 0.001\left(0.95\cdot 0.9+0.05\cdot 0.05\right)=0.858\times 10^{-4}\cdot\alpha$$

כאשר $\alpha\equiv\frac{1}{P(J)}$ הוא קבוע נורמליזציה שיחושב להלן.

נחשב את $P(\neg B|J)$ בדיוק באותה צורה:

$$P(\neg B|J)=\frac{P(\neg B)}{P(J)}\cdot\left(P(A|\neg B)\cdot P(J|A)+P(\neg A|\neg B)\cdot P(J|\neg A)\right)$$

$$=\alpha\cdot 0.999\cdot\left(0.0016\cdot 0.9+0.9984\cdot 0.05\right)=0.0513\,\alpha$$

מהתנאי $P(B|J)+P(\neg B|J)=1$ ניתן לחלץ את

הערך של α: $0.0522\cdot\alpha=1 \Leftarrow \alpha=19.17$

ומכאן

$$\boxed{P(B|J)=0.0164}$$

ב. $P(J|B)=\sum_{a=T/F} P(J|A=a)\cdot P(A=a|B)=\sum_{a=T/F} P(J|A=a)\cdot\sum_{e=T/F} P(A=a|B,E=e)\cdot P(E=e)$

$$=0.9\cdot\left(0.95\cdot 0.002+0.95\cdot 0.998\right)+0.05\left(0.05\cdot 0.002+0.05\cdot 0.998\right)$$

$$\boxed{P(J|B)=0.858}$$

ג. מחושב כנ"ל

$$P(M|B) = 0.666$$

3.

$$P(B|AE) = \frac{P(BAE)}{P(AE)} = \frac{P(A|BE)\cdot P(B)\cdot \cancel{P(E)}}{P(AE)\cdot \cancel{P(E)}}$$

כאן השתמשתי בעובדה ש B ו E אינם תלויים זה בזה ולכן
בעזרת נוסחת תלות $P(BE) = P(B)\cdot P(E)$

$$= \frac{P(A|BE)\cdot P(B)}{\sum_{b=T/F} P(A|B=b, E)\cdot P(B=b)}$$

$$\boxed{P(B|AE) = 0.00327}$$

ה.

$$P(A|J,\neg E) = \frac{P(J|A,\neg E)\cdot P(A|\neg E)}{P(J|\neg E)} = \alpha\cdot P(J|A)\cdot P(A|\neg E)$$

כאשר בשלב האחרון השתמשתי בכך ש J הוא לא תלוי ב E בהינתן A
וכן סימנתי $P(J|\neg E) = \frac{1}{\alpha}$ שהוא גורם נורמליזציה שיחושב.

$P(A|\neg E) = 0.00195$ $\qquad$ $P(\neg A|\neg E) = 0.99805$

נקבל

$P(A|J,\neg E) = 0.00176\cdot\alpha$

ומחישוב דומה עבור $P(\neg A|J,\neg E)$ נקבל $P(\neg A|J,\neg E) = 0.0499\cdot\alpha$

היות וסכומן 1 נקבל $\alpha = 19.36$!

$$\boxed{P(A|J,\neg E) = 0.034}$$

ו.

$$P(B|J,\neg E) = \frac{P(J|B,\neg E)\cdot P(B|\neg E)}{P(J|\neg E)} = \alpha\cdot P(J|B,\neg E)\cdot P(B)$$

שים לב ש $P(B|\neg E) = P(B)$ היות ו B ו E הם בלתי תלויים זה בזה.
כמו כן שים לב ש α זהה לקבוע הנרמול בסעיף הקודם!
נקבל סה"כ

$$\boxed{P(B|J,\neg E) = 0.0166}$$

שאלה 7 (קצת מחוץ לסקופ שלנו)

בתחנת כוח גרעינית מותקנת מערכת אזעקה שנועדה להתריע כאשר ליבת הכור מתחממת מעבר לרצוי. בליבת הכור מותקן מדיד טמפרטורה המחובר למערכת האזעקה. נתבונן במשתנים הבוליאנים A (מערכת האזעקה מצפצפת) Fa (מערכת האזעקה מקולקלת), Fg (מדיד הטמפרטורה "מזייף") וכן במשתנים מרובי הערכים G (קריאת מדיד הטמפרטורה) ו T (הטמפרטורה האמיתית של הליבה).

א. שרטט רשת אמונה המתארת את המערכת בהנחה שמדיד הטמפרטורה נוטה "לזייף" כאשר טמפרטורת הכור גבוהה מדי.

ב. האם הרשת היא polytree?

ג. נניח כי המשתנים T ו G הם בינאריים, והתחום שלהם כולל רק שתי טמפרטורות אפשריות: גבוהה, נורמלית. נניח שהמדיד נותן קריאה שגויה ב $x\%$ מהזמן כאשר הוא תקין ו $y\%$ מהזמן כאשר הוא מקולקל. כתוב את טבלת ההתפלגות המותנית של המשתנה G.

ד. כאשר מערכת האזעקה תקינה היא משמיעה צפצוף אזעקה כשהמדיד מורה על טמפרטורה גבוהה. כאשר היא מקולקלת היא אינה מצפצפת בכל מקרה. כתוב את טבלת ההתפלגות המותנית של המשתנה A.

ה. נניח כי מערכת האזעקה והמדיד תקינים, ונשמע צפצוף האזעקה. מהי ההסתברות כי טמפרטורת הליבה גבוהה מדי? כתוב את תשובתך במונחי ערכים בטבלאות ההתפלגות המותנית של רשת האמונה (וכן המשתנים x ו y).

ו. בפרק זמן מסוים ההסתברות כי הטמפרטורה עולה מעל הסף היא p. המחיר של הפסקת הכור היא c_s. העלות שנובעת מאי-סגירת הכור כאשר הטמפרטורה היא גבוהה מדי היא c_m. בהנחה כי המדיד והאזעקה תקינים, חשב את הערך הגבוה ביותר של x שעבורו יש תועלת במדיד (כלומר אם x גבוה מערך זה – יש לסגור את הכור כל הזמן).

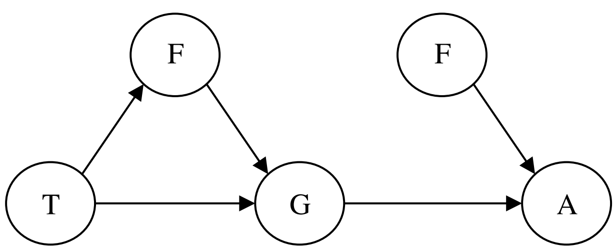
ז. נניח כי מוסיפים מדיד טמפרטורה נוסף H המחובר כך שמערכת האזעקה תתחיל לצפצף כאשר אחד מהמדידים נותן קריאה גבוהה. נוסיף גם משתנה בוליאני Fh המתאר את המאורע שהמדיד H נפגם. היכן ייכנסו H ו Fh ברשת המקורית.

2. א. עבור הרשת הבייסיאנית שמתארת את המשתנים (Cloudy, Sprinkler, Rain, WetGrass), אמוד את P(Sprinkler | Rain) באמצעות סימולציה סטוקסטית (rejection sampling). פרט את הערך שקיבלת עבור N=1000, 4000, 10000, 40000, 100000 דגימות.

ב. חזור על הנ"ל באמצעות likelihood weighting).

ג. מהו הערך של P(Sprinkler | Rain) המתקבל מחישוב אנליטי?

תשובה



א. הצמת של הטמפרטורה T היא הורה של מדיד הטמפרטורה G ושל הצומת המתאר את "המדיד מזייף" Fg. צמתות הכשל Fg ו Fa הן ההורים של מדיד הטמפרטורה ושל האזעקה, שהם בעצם הסנסורים של המערכת.

ב. ניתן לתאר את הרשת בצורות שונות, אך בכל מקרה הרשת לא תהיה polytree, כיוון שצומת הטמפרטורה משפיע על מדיד הטמפרטורה בשני אופנים.

ג. נסמן Faulty את המאורע שהמדיד מזייף ו Normal כאשר המדיד תקין. שימו לב כי x ו y מוגדרים ל "ערך שגוי"! שימו לב גם כי העמודה הימנית למעשה מיותרת.

T	Fg	P(G=Normal)	P(G=High)
Normal	Faulty	1-y	y
Normal	Normal	1-x	x
High	Faulty	y	1-y
High	Normal	x	1-x

ד.

G	Fa	P(A)	P(¬A)
Normal	Faulty	0	1
Normal	Normal	0	1
High	Faulty	0	1
High	Normal	1	0

ה. כאן נסמן למען הקיצור T=High ו G=High ב T ו Gבהתאמה. כמו כן נסמן Fg=Faulty ב Fg. ההסתברות שמעוניינים בה היא $P(T| A, \neg Fg , \neg Fa)$. כעת, האזעקה היא דטרמיניסטית, וכאשר היא תקינה היא מצפצפת בוודאות כאשר המדיד מצביע על טמפרטורה גבוהה. ניתן לכן להסיק ש G=High . יחד עם ההבחנה ש Fa ו A הם d-מופרדים מ T נקבל

$P(T| A, \neg Fg, \neg Fa)= P(T| G, \neg Fg)$.

קיימות דרכים אחדות לחשב זאת. הדרך השיטתית היא:

$$P(T| G, \neg Fg) = \frac{P(T,\ G, \neg Fg)}{P(\ G, \neg .Fg)} = \frac{P(T,\ G, \neg Fg)}{P(T,\ G, \neg Fg) + P(\neg T,\ G, \neg Fg)}$$

כעת ניתן להשתמש בכלל השרשרת של הסתברויות מותנות לקבל

$$P(T| G, \neg Fg) = \frac{P(T)P(\neg Fg\,|\,T)P(G\,|\,T,\neg Fg)}{P(T)P(\neg Fg\,|\,T)P(G\,|\,T,\neg Fg) + P(\neg T)P(\neg Fg\,|\,\neg T)P(G\,|\,\neg T,\neg Fg)}$$

נשתמש ב $P(T)=p$ ו $P(Fg\,|\,T)=g$ ו $P(Fg\,|\,\neg T)=h$ *לקבל*

$$P(T| G, \neg Fg) = \frac{p(1-g)(1-x)}{p(1-g)(1-x)+(1-p)(1-h)x}$$

ו. הרעיון הוא כאן לחשב את תוחלת העלות של סגירת הכור (S) או אי-סגירתו (¬S) כאשר האזעקה מצלצלת או אינה מצלצלת. (אם עלינו לסגור את הכור גם כאשר האזעקה אינה מצלצלת, מערכת ההתראה הנ"ל אינה רבת תועלת! זהו שיעור מועיל לגבי חשיבותם של מערכת חישה טובה ושל בטיחות כורים!) יש לחשב את הבאים:

$$P(T| \neg A, \neg Fa, \neg Fg) = P(T| \neg G,\ \neg Fg) = \frac{p(1-g)x}{p(1-g)x+(1-p)(1-h)(1-x)}$$

אם האזעקה אינה נשמעת, סגירת הכור היא האופציה המוצלחת אם

$$Cost(S) = c_s$$

$$c_s < c_m \frac{p(1-g)x}{p(1-g)x+(1-p)(1-h)(1-x)}$$

$$Cost(\neg S \mid A, \neg Fg, \neg Fa) = c_m \; P(T \mid A, \neg Fg, \neg Fa) = c_m \frac{p(1-g)(1-x)}{p(1-g)(1-x)+(1-p)(1-h)x}$$

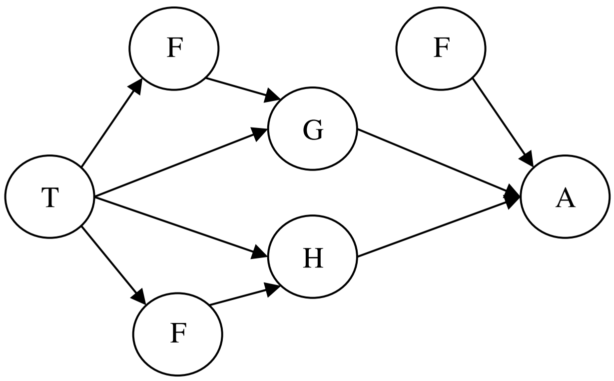
$$Cost(\neg S \mid \neg A, \neg Fg, \neg Fa) = c_m \; P(T \mid \neg A, \neg Fg, \neg Fa) = c_m \frac{p(1-g)x}{p(1-g)x+(1-p)(1-h)(1-x)}$$

כלומר

$$x > \left(1+\left(\frac{c_m}{c_s}-1\right)\frac{p(1-g)}{(1-p)(1-h)}\right)^{-1}$$

אם g, h, p כולם קטנים מאוד מ 1 ואם $c_s << c_m$ אזי התנאי לעיל הוא בערך $x > c_s/(c_m\, p)$.

ז. יש רק לשים לב כי למרות שבין שני המדידים יש קורלציה חזקה, הם בלתי תלויים זה בזה בהינתן T (conditionaly independent) ולכן אינם קשורים ישירות.



שאלה 8

במדינה מסויימת נפוצה מחלת האיידס באוכלוסייה ביחס של אחד לאלף. קיימת בדיקה להמצאות המחלה (מסומנת כ test). הבדיקה מדוייקת ב-97% כלומר בשלושה אחוזים מהבדיקות אדם בריא יקבל תשובה חיובית (תשובה חיובית לבדיקה פירושה חולי) ובשלושה אחוזים מהבדיקות אדם חולה יקבל תשובה שלילית. אדם נבדק והבדיקה נתנה תוצאות חיוביות. השתמש בהיסק ב- Bayesian reasoning על מנת לחשב את הסיכוי שאדם זה אכן חולה.

תשובה:

P(A=t|test=true)=(0.97*0.001)/(0.97*0.001+0.03*0.999)= 0.03135