סמסטר 2010א

ממ"ן 11 – פתרון שאלה 1

א' המשתנה y קטן בכל איטרציה לפחות ב-1. לכן לאחר מספר סופי של איטרציות ערכו יגיע ל-0, יתקיים תנאי היציאה מהלולאה והשגרה תסתיים.

ב' הנכונות של השגרה ODD(y) היא ברורה. נוכיח את הנכונות של MULTIPLY(a, b).

שמורת הלולאה: $z + x \cdot y = a \cdot b$

<u>אתחול</u>: לאחר ההשמות בשלוש השורות הראשונות מתקיים $x = a$, $y = b$, $z = 0$, ולכן הטענה מתקיימת לפני האיטרציה הראשונה.

<u>תחזוקה</u>: נניח ששמורת הלולאה $z + x \cdot y = a \cdot b$ מתקיימת לפני הכניסה לאיטרציה ה-i.

נתייחס לשני המקרים האפשריים:

1. y אי-זוגי

נסמן ב-y' ו-z' את הערכים החדשים של y ו-z. מתקיים: $y' = y - 1$, $z' = z + x$.

מכאן: $z' + x \cdot y' = (z + x) + x \cdot (y - 1) = z + x + x \cdot y - x = z + x \cdot y$

כלומר, שמורת הלולאה תתקיים גם לפני האיטרציה ה-$i+1$.

2. y זוגי

נסמן ב-y' ו-x' את הערכים החדשים של y ו-x. מתקיים: $y' = y / 2$, $x' = 2x$.

מכאן: $z' + x' \cdot y' = z + 2x \cdot y / 2 = z + x \cdot y$

כלומר, שמורת הלולאה תתקיים גם לפני האיטרציה ה-$i+1$.

<u>סיום</u>: לאחר היציאה מהלולאה $y = 0$ ולכן $z = a \cdot b$, כנדרש.

ג' אנו מניחים שכל פעולה אריתמטית מתבצעת ביחידת זמן אחת. בכל איטרציה של הלולאה מתבצע מספר קבוע של פעולות, ולכן כל איטרציה מתבצעת בזמן קבוע.

נחשב את מספר האיטרציות. נשים לב שבמקרה הגרוע ערכו של y קטן פי 2 בכל שתי איטרציות (זה קורה כאשר $y = 2^k - 1$). לפיכך, במקרה הגרוע יתבצעו $2\lg y$ איטרציות של הלולאה.

בהתחלה $y = b$, ולכן זמן הריצה של השגרה הוא $O(\lg b)$.

מכיוון שמתקיים $binlen(b) = \lfloor \lg b \rfloor + 1$, זמן הריצה של השגרה הוא $O(binlen(b))$.

באופן יותר מדויק: עבור כל ספרה 0 בייצוג הבינרי של b מתבצעת איטרציה אחת של הלולאה, ועבור כל ספרה 1 בייצוג הבינרי של b מתבצעות שתי איטרציות (חוץ מה-1 האחרון שעבורו מתבצעת איטרציה אחת). לכן, מספר האיטרציות שווה לפעמיים מספר ה-'1'-ים בייצוג הבינרי של b ועוד מספר ה-'0'-ים בייצוג הבינרי של b פחות 1.