אלגוריתמים – פתרונות לתרגיל 5

.1

א. הזרימה המקסימלית תגדל לכל היותר ב- 1, לכן מספיק להריץ שלב אחד של Ford-Fulkerson.

ב. אם הקשת e לא היתה רוויה – הזרימה המקסימלית לא משתנה. אחרת, נסתכל רק על הקשתות שהזרימה בהן חיובית, נמצא מסלול מ- s ל- t שמכיל את e ונפחית 1 מהזרימה במסלול. כעת יש לנו זרימה חוקית שערכה $|f|-1$. ערך הזרימה המקסימלית $\geq |f|$ (כי הקטנו את הקיבול, לכן לא ייתכן שהזרימה המקסימלית גדלה), לכן כדי לקבל זרימה מקסימלית נצטרך להריץ שלב אחד לכל היותר של Ford-Fulkerson.

2. נשנה את האלגוריתם כך שלכל קשת (u,v) של הגרף, תהיה ברשת השיורית קשת (u,v) עם קיבול $c'(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$, וקשת (v,u) עם קיבול $c'(v,u) = f(u,v) - b(u,v)$. ע"י כך נדאג שהזרימה בקשת לא תהיה אף פעם יותר קטנה מ- $b(u,v)$.

3. נפצל כל קודקוד u פרט ל- s ו- t לשני קודקודים u_{in} ו- u_{out}, הקשתות הנכנסות ייכנסו ל- u_{in}, היוצאות יצאו מ- u_{out}, ונוסיף קשת (u_{in},u_{out}) כאשר $c(u_{in},u_{out}) = c'(u)$.

4. נניח המספר המקסימלי של מסלולים זרים בקודקודים מ- s ל- t הוא k. אז ברור שצריך להסיר לפחות k קודקודים. נראה שזה מספיק. תחילה, אם הגרף לא מכוון, נחליף כל קשת בזוג קשתות אנטי-מקבילות. נבנה רשת זרימה בדומה לדרך שעשינו זאת בכיתה, כלומר נפצל כל קודקוד $u\neq s,t$ ל- u_{in} ו- u_{out}, אבל ניתן קיבול 1 רק לקשתות (u_{in},u_{out}), ולשאר ∞. קל לוודא שזה לא משפיע על הזרימה המקסימלית, לכן ערכה יהיה k. לכן קיבול החתך המינימלי הוא k, כלומר הוא מכיל k קשתות מהצורה (u_{in},u_{out}). אם נסיר את הקודקודים המתאימים מהגרף ננתק את t מ- s.

5. נבנה גרף דו-צדדי $G=(U,W,E)$, כאשר $U=\{A_1,\ldots,A_k\}$, $W=\{B_1,\ldots,B_k\}$, ו- $(A_i,B_j)\in E \Leftrightarrow A_i\cap B_j\neq\emptyset$. קיימת קבוצה של k איברים שמכילה איבר מכל A_i ומכל B_i אם ורק אם יש בגרף זיווג שלם, מכיוון שניתן להתאים כל קשת (A_i,B_j) של הזיווג לאיבר ב- $A_i\cap B_j$.

6. נבנה גרף דו-צדדי $G=(U,W,E)$, כאשר U מכילה קודקוד לכל בן, W קודקוד לכל בת, ויש קשת בין כל בן ובת שמכירים.

א. נראה שתנאי Hall מתקיים. נניח בשלילה שקיימת $A\subseteq U$, כך ש- $|N(A)|<|A|$. דרגת כל הקודקודים בגרף היא k, לכן יש $k|A|$ קשתות מ- A ל- $N(A)$. מצד שני מספר הקשתות של $N(A)$ הוא $k|N(A)|<k|A|$, וקיבלנו סתירה.

ב. נוכיח באינדוקציה על k. עבור $k=1$ הטענה נכונה לפי סעיף א'. נניח שהיא נכונה עבור $k-1$ ונוכיח עבור k. לפי סעיף א' יש בגרף זיווג שלם. זה נותן ריקוד אחד. כעת נמחק זיווג זה מהגרף, ונשאר עם גרף שבו כל הדרגות הן $k-1$, ועליו נפעיל את הנחת האינדוקציה.