

האוניברסיטה הפתוחה

20476

מתמטיקה בדידה
חוברת הקורס קיץ ג'תשס"ב 2012

כתב: איתי הראבן

יולי 2012 - סמסטר קיץ תשע"ב

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

א	אל הסטודנטים
ב	לוח זמנים ופעילויות
ג	מטלות הקורס
1	ממ"ח 01
5	ממ"ן 11
7	ממ"ח 02
11	ממ"ח 03
15	ממ"ן 12
17	ממ"ן 13
19	ממ"ח 04
23	ממ"ן 14
25	ממ"ן 15
27	ממ"ח 05
31	ממ"ן 16

אל הסטודנטים,

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מתמטיקה בדידה".
אנא קראו בעיון את כל הסעיפים לפני שתתחילו בלימודיכם. פרטים לגבי נהלים המקובלים באוניברסיטה הפתוחה מפורטים בידיעון האקדמי. תיאורי הקורסים מופיעים בקטלוג הקורסים.

הערה: על חלק מספרי הלימוד וחלק מחומרי העזר של הקורס מופיעים מספרי קורס 20276, 20283. חומרים אלה הועברו לקורס שלנו מקורס שפעל באו"פ בשנים קודמות.

קורס זה מתוקשב במסגרת הפעילות של מחלקת תלם (תקשוב ללימוד מרחוק).
קורס מתוקשב כולל, נוסף על יחידות הלימוד הכתובות, גם פעילות באתר הקורס באינטרנט.
פעילות זו כוללת: אינטראקציה בין הסטודנטים לצוות ההוראה באמצעות קבוצות דיון ודואר אלקטרוני, הפניות למאגרי מידע ולאתרים ברשת האינטרנט, חומרי לימוד והעשרה. הפעילות באתר הקורס אינה חובה אך האתר יכול לסייע מאוד בלימוד הקורס.

כתובת אתרי הקורסים: <http://telem.openu.ac.il>
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספרייה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

לתשומת לבכם:

סמסטר הקיץ נמשך 9 שבועות בלבד ולכן יידרש מכם מאמץ ניכר לעמוד בעומס ובלוח הזמנים של הקורס. חשוב להקפיד על לימוד החומר והגשת המטלות בקצב שקבענו, כדי להבטיח סיום מוצלח של הקורס. בגלל משך הסמסטר הקצר, אין אפשרות לפגר בהגשת מטלות.

פרטים נוספים בהמשך החוברת.

מרכז ההוראה בקורס הוא איתי הראבן.

ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 02-6733210 בימי ד', בין השעות 19:00 - 20:00.
- דרך אתר הקורס.
- בדואר אלקטרוני itaiha@openu.ac.il
- פקס: 09-7780631, לרשום "עבור איתי"

אנו מאחלים לכם לימוד פורה ומהנה.

בברכה,
צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (2012/ 20476)

תאריך אחרון למשלוח		מפגשי הנחיה*	יחידת הלימוד המומלצת	תאריכי שבוע הלימוד	שבוע הלימוד
ממ"ן (למנחה)	ממ"ח (לאו"פ)				
	ממ"ח 01 יום ו' 20.7.2012		החוברת "מבוא מהיר ללוגיקה"	20.7.2012-15.7.2012	1
ממ"ן 11 יום ו' 27.7.2012			תורת הקבוצות פרקים 1 - 2.1	27.7.2012-22.7.2012	2
	ממ"ח 02 יום ב' 30.7.2012		תורת הקבוצות פרקים 2.2 - 3	3.8.2012-29.7.2012 (א צום ט' באב)	3
ממ"ן 12 יום ו' 10.8.2012	ממ"ח 03 יום א' 5.8.2012		תורת הקבוצות פרקים 4 - 5	10.8.2012-5.8.2012	4
ממ"ן 13 יום ו' 17.8.2012			קומבינטוריקה פרקים 1 - 2	17.8.2012-12.8.2012	5
	ממ"ח 04 יום ו' 24.8.2012		קומבינטוריקה פרקים 3 - 5	24.8.2012-19.8.2012	6
ממ"ן 14 יום ו' 31.8.2012			קומבינטוריקה פרקים 6 - 7	31.8.2012-26.8.2012	7
ממ"ן 15 יום ו' 7.9.2012			תורת הגרפים פרקים 1 - 3	7.9.2012-2.9.2012	8
	ממ"ח 05 יום ו' 14.9.2012		תורת הגרפים פרקים 4 - 6	14.9.2012-9.9.2012	9
ממ"ן 16 יום ד' 19.9.2012					

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

מטלות הקורס

קראו היטב עמודים אלה לפני שתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס. הבנה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. מטלות המנחה (ממנ"ים) יבדקו על-ידי המנחה ויוחזרו לכם בצירוף הערות המתייחסות לתשובות. על מטלות המחשב (ממ"חים) תקבלו רק פירוט תשובות נכונות ולא נכונות.

מבנה המטלות

כל מטלה מורכבת מכמה שאלות. משקל כל השאלות זהה אלא אם כן צוין אחרת. את הפתרונות לממ"ן עליכם לרשום על דף בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. לחילופין ניתן להגיש את המטלות מודפסות במעבד תמלילים, בתנאי שכל הסימונים המתמטיים ברורים. אין להשתמש בסימונים שאינם מופיעים ביחידות.

ניקוד המטלות

בקורס 6 מטלות מנחה (ממ"נים) ו-5 מטלות מחשב (ממ"חים). משקלי המטלות: משקל כל ממ"ן הוא 3 נקודות, פרט לממ"ן 12 שמשקלו 4 נקודות. משקל כל ממ"ח הוא 2 נקודות, פרט לממ"ח 05 שמשקלו 3 נקודות. בהגשת כל המטלות ניתן אפוא לצבור 30 נקודות.

דרישות חובה בהגשת המטלות

חובה להגיש מטלות במשקל של 20 נקודות לפחות. בין המטלות שתגישו חייבות להיות לפחות ארבע מטלות מנחה (ממ"נים)

התנאים לקבלת נקודות זכות

- א. להגיש מטלות במשקל של 20 נק' לפחות. כאשר מתוכן לפחות ארבע מטלות מנחה (ממ"נים)
- ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.
- ג. לקבל בציון הסופי 60 נקודות לפחות.

הערות חשובות לתשומת לבך!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.

ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית

למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2012

חומר הלימוד למטלה: הפרק "מבוא מהיר ללוגיקה"

מספר השאלות: 14 משקל המטלה: 2 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ו' 20.7.2012

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאלות"א
בכתובת <http://www.openu.ac.il/sheilta/>
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות. סמנו:

- א - אם רק טענה 1 נכונה,
- ב - אם רק טענה 2 נכונה,
- ג - אם שתי הטענות נכונות,
- ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

1. בהנתן הקשר מתאים, הביטוי נותרו 5 דקות לסיום המשחק הוא פסוק.
2. בהנתן הקשר מתאים, הביטוי $8^2 + 2^8$ הוא פסוק.

שאלה 2

1. הפסוק משה קיבל 100 בבחינה
הוא שלילתו של הפסוק משה נכשל בבחינה
2. הפסוק כלב נשך אדם
הוא שלילתו של הפסוק אדם נשך כלב

שאלה 3

1. הפסוק $1 + 4 = 5$ וגם $2 + 2 = 2$ הוא אמת.
2. הפסוק $1 + 4 = 5$ או $2 + 2 = 2$ הוא אמת.

שאלה 4

1. הפסוק אם $2 = 100$ אז $2 + 5 = 7$ הוא אמת.

2. הפסוק אם $2 = 100$ אז $2 + 5 = 9$ הוא אמת.

שאלה 5

1. לוח האמת של הפסוק הפורמלי $(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ הוא:

p	q	r	$(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

2. הפסוק הפורמלי $p \leftrightarrow (\neg p)$ הוא סתירה.

שאלה 6

1. הפסוק הפורמלי $(\neg p) \rightarrow q$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $p \vee \neg q$.

2. הפסוק הפורמלי $p \rightarrow (\neg q)$ שקול טאוטולוגית לפסוק הפורמלי $\neg(p \wedge q)$.

שאלה 7

1. $\neg(r \wedge (p \vee q))$ שקול טאוטולוגית ל- $((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$.

2. $(p \vee q) \wedge (\neg q)$ שקול טאוטולוגית ל- $p \wedge (\neg q)$.

שאלה 8

1. שלילת הפסוק אם זה לא יקרה היום אז זה יקרה מחר או מחרתיים
שקולה לפסוק זה לא יקרה היום, לא יקרה מחר ולא יקרה מחרתיים.
2. שלילת הפסוק ארדוף, אשיג ואחלק שלל
שקולה לפסוק לא ארדוף, או לא אשיג, או לא אחלק שלל.

שאלה 9

1. מתוך הפסוק $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge r$ נובע טאוטולוגית הפסוק p .
2. מתוך הפסוק p נובע טאוטולוגית הפסוק $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge r$.

שאלה 10

1. אם מתוך טאוטולוגיה כלשהי נובע $\alpha \vee \beta$ אז β הוא טאוטולוגיה.
2. אם מתוך סתירה כלשהי נובע α אז α הוא סתירה.

שאלה 11

נתבונן בפסוק: כל מספר הגדול מ-2, הריבוע שלו גדול מ-4.

1. את הפסוק האמור ניתן להצרין כך: $\forall x(2 < x \wedge 4 < x^2)$.
2. את הפסוק האמור ניתן להצרין כך: $\forall x(2 < x \rightarrow 4 < x^2)$.

שאלה 12

נתבונן שוב בפסוק: כל מספר הגדול מ-2, הריבוע שלו גדול מ-4.

1. את הפסוק האמור ניתן להצרין כך: $(\forall x(2 < x)) \rightarrow 4 < x^2$.
2. את הפסוק האמור ניתן להצרין כך: $(\forall x(2 < x)) \rightarrow (\forall x(4 < x^2))$.

שאלה 13

1. את שלילת הפסוק
לכל x שנבחר, קיים y הגדול מ- x
ניתן לנסח כך:
לכל x שנבחר, אין y הגדול מ- x .
2. את שלילת הפסוק
יש מספר x , שאף מספר y אינו גדול ממנו
ניתן לנסח כך:
יש מספר y הגדול יותר מכל מספר x .

שאלה 14

1. את שלילת הפסוק
לכל גמל יש דבשת או זנב.
ניתן לנסח כך:
כל גמל, אין לו דבשת או אין לו זנב.
2. את שלילת הפסוק
לכל גמל יש דבשת וזנב.
ניתן לנסח כך:
יש גמל שאין לו דבשת או אין לו זנב.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2012

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 1

מספר השאלות: 4 משקל המטלה: 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ו' 27.7.2012

- מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
 - על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
 - על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1

שאלה זו נועדה לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות ולחדד כמה נקודות שכדאי להבין בשלב מוקדם:

- * ההבדל בין A לבין $\{A\}$ (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא A).
- * מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה \emptyset לבין $\{\emptyset\}$.
- * ההבדל בין " x איבר של y " לבין " x חלקי ל- y ".

בכל אחד מהזוגות x, y הבאים, קבע אם $x \in y$ וקבע אם $x \subseteq y$.

ייתכן ששני היחסים יתקיימו בעת ובעונה אחת, וייתכן גם שאף אחד משניהם לא יתקיים.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק.

- | | |
|---|--|
| א. $\emptyset ; \emptyset$ | ב. $\{\emptyset\} ; \{\{\emptyset\}\}$ |
| ג. $\{\emptyset\} ; \{\emptyset, \{1\}\}$ | ד. $\{1\} ; \{\emptyset, \{1\}\}$ |
| ה. $\{\{1\}\} ; \{\emptyset, \{1\}\}$ | ו. $\{\emptyset, \{1\}\} ; \{\emptyset, \{1\}\}$ |
| ז. $\{\emptyset\} ; P(\{1\})$ | ח. $P(\emptyset) ; P(P(\emptyset))$ |

שאלה 2

הוכח את הטענות הבאות בעזרת "אלגברה של קבוצות": צא מאחד האגפים, פתח אותו בעזרת זהויות ידועות, והגע לאגף השני. אין להשתמש בהוכחה במושג "איבר" !

במקומות בהם מופיע הפרש קבוצות מומלץ להיעזר בזהות $A - B = A \cap B'$ (עמ' 23 בספר הלימוד). הסימן \oplus מוגדר בשאלה 1.22 בספר הלימוד.

- א. $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- ב. $(A - B) \cup (B - C) = (A \cup (B - C)) - (B \cap C)$
- ג. $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

שאלה 3

הוכח את הטענות א'-ד'. הסימן \oplus מוגדר בשאלה 1.22 בספר הלימוד. רצוי להיעזר בתכונות של ההפרש הסימטרי המוכחות באותה שאלה, ולתת הוכחות אלגבריות, בדומה לשאלה 2 בממ"ן זה. זה יכול לחסוך הרבה עבודה.

U היא קבוצה אוניברסלית, המכילה את כל הקבוצות שבשאלה.

שים לב: בטענות "אם ורק אם" יש להוכיח שני כיוונים.

א. כלל הצמצום: אם $X \oplus A = Y \oplus A$ אז $X = Y$.

הדרכה: היעזר באסוציאטיביות של \oplus ובתכונות אחרות שלה.

ב. $A \oplus B = \emptyset$ אם ורק אם $A = B$.

ג. $A \oplus B = U$ אם ורק אם $A = B'$.

ד. $A \oplus B = A$ אם ורק אם $B = \emptyset$.

שאלה 4

סעיפים ב-ג בשאלה זו מתייחסים להגדרה 1.6 בעמ' 12 בספר הלימוד, ולהגדרה הדומה עבור חיתוך, בעמוד 16 בספר הלימוד.

תהי \mathbb{N}^* קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מ-0. לכל $n \in \mathbb{N}^*$ נגדיר קבוצה:

$$B_n = \{n \cdot k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$$

(קבוצת כל המספרים שצורתם $n \cdot k$, כאשר $k \in \mathbb{N}^*$).

א. הוכח כי $B_n \cap B_m = B_{c(n,m)}$ כאשר $c(n,m)$ הוא הכפולה המשותפת המינימלית של n, m .

(המספר הטבעי החיובי הקטן ביותר המתחלק ללא שארית ב- n וב- m).

הדרכה: ניתן להסתמך על הטענה כי כל כפולה משותפת של n, m מתחלקת בכפולה

המשותפת המינימלית שלהן. 5 נקודות בונוס למי שיצרף הוכחה קבילה לטענה זו.

ב. הסבר מדוע $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n = \emptyset$.

ג. לכל $n \geq 2$ נסמן $D_n = B_n - \bigcup_{1 < i < n} B_i$ (בפרט: $D_2 = B_2$, $D_3 = B_3 - B_2$).

עבור איזה ערכים של n קיים: $D_n \neq \emptyset$? כלומר מצא את $\{n \in \mathbb{N}^* \mid D_n \neq \emptyset\}$.

אל תשכח להראות שתשובתך כוללת את כל הערכים המקיימים זאת ("הכלה דו-כיוונית").

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2012

חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" סעיפים 2.1 – 2.4

מספר השאלות: 11 משקל המטלה: 2 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ב' 30.7.2012

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת <http://www.openu.ac.il/sheilta/>
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

"רלציה" בעברית: יחס.

שאלה 1

התנאי $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \emptyset$ שקול (!) לתנאי הבא:

א. $B \subseteq A$ או $A \subseteq B$

ב. $A \neq \emptyset$ וגם $B \neq \emptyset$

ג. $A = B$

ד. $A \cap B \neq \emptyset$

ה. $A \cup B \neq \emptyset$

שאלה 2

תהי $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ויהי R היחס הבא מ- A ל- A : $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,4), (4,3)\}$.

$Domain(R) \cap Range(R)$ הוא:

א. $\{1\}$ ב. $\{1, 2, 4\}$ ג. \emptyset ד. $\{1, 2\}$ ה. A

שאלה 3

R, A הם אלה שהוגדרו בשאלה 2. S הוא יחס מעל A . השוויון $RS = I_A$ מתקיים עבור:

א. $S = I_A$ ב. $S = R^{-1}$ ג. $S = R$

ד. אינו מתקיים עבור שום S ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

שאלה 4

R הוא יחס כלשהו מעל קבוצה כלשהי. השוויון $R^3 R^2 = R^5$

- א. נכון תמיד
 ב. נכון רק אם $R = I_A$
 ג. נכון רק אם $R = \emptyset$
 ד. נכון רק אם $R = A \times A$
 ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

שאלה 5

R הוא יחס כלשהו מעל קבוצה A . התנאי $RR^{-1} = I_A$ שקול (!) לתנאי

- א. $R^{-1}R = I_A$
 ב. $R = I_A$
 ג. $R \neq \emptyset$
 ד. $\text{Domain}(R) = A$
 ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

שאלה 6

תהי $A = \{1, 2, 3\}$ ויהי R היחס הבא מ- A ל- A : $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,1)\}$.

- טענה (i): $R \cup R^2$ הוא רפלקסיבי. טענה (ii): $R \cup R^2$ הוא סימטרי.
 א. רק טענה (i) נכונה.
 ב. רק טענה (ii) נכונה.
 ג. שתי הטענות (i), (ii) נכונות.
 ד. אף אחת מהטענות (i), (ii) אינה נכונה.

שאלה 7

R, A הם אלה שהוגדרו בשאלה 6.

- טענה (i): $R \cup R^2$ הוא אנטי-סימטרי. טענה (ii): $R \cup R^2$ הוא טרנזיטיבי.
 א. רק טענה (i) נכונה.
 ב. רק טענה (ii) נכונה.
 ג. שתי הטענות (i), (ii) נכונות.
 ד. אף אחת מהטענות (i), (ii) אינה נכונה.

שאלה 8

היחס $R = \{(1,1), (2,2)\}$ מעל $A = \{1, 2, 3\}$ הוא:

- א. רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.
 ב. סימטרי ורפלקסיבי אך לא טרנזיטיבי.
 ג. סימטרי וטרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי.
 ד. רפלקסיבי וטרנזיטיבי אך לא סימטרי.
 ה. טרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי ולא סימטרי.

שאלה 9

R, S הם יחסים מעל קבוצה A ומתקיים $S \subseteq R$.

- טענה (i): אם S סימטרי אז R סימטרי. טענה (ii): אם S אנטי-סימטרי אז R אנטי-סימטרי.
- א. רק טענה (i) נכונה. ב. רק טענה (ii) נכונה. ג. שתי הטענות (i), (ii) נכונות. ד. אף אחת מהטענות (i), (ii) אינה נכונה.

שאלה 10

R הוא יחס מעל קבוצה כלשהי, וידוע ש- R אינו טרנזיטיבי.

מכאן ניתן להסיק:

- א. ב- R יש לפחות שני זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש R כזה שבו בדיוק שני זוגות.
- ב. ב- R יש לפחות 3 זוגות סדורים. ייתכן שיש יותר, אבל יש R כזה שבו בדיוק 3 זוגות.
- ג. ב- R יש לפחות 4 זוגות סדורים.
- ד. מהנתון נובע ש- A אינסופית וב- R יש אינסוף זוגות סדורים.
- ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 11

R, S הם יחסים מעל קבוצה A .

הסימן \oplus (הפרש סימטרי) הוגדר בשאלה 1.22 בעמ' 27 בכרך "תורת הקבוצות".

טענה (i): אם R, S אנטי-סימטריים אז $R \oplus S$ אנטי-סימטרי.

טענה (ii): אם R, S טרנזיטיביים אז $R \oplus S$ טרנזיטיבי.

- א. רק טענה (i) נכונה. ב. רק טענה (ii) נכונה. ג. שתי הטענות (i), (ii) נכונות. ד. אף אחת מהטענות (i), (ii) אינה נכונה.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2012

חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" מסעיף 2.5 עד סוף פרק 3

מספר השאלות: 11 משקל המטלה: 2 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום א' 5.8.2012

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאלת"א
בכתובת <http://www.openu.ac.il/sheilta/>
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

"רלציה" בעברית: יחס.

שאלה 1

יהיו: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 5)\}$, $E = I_A \cup R \cup R^{-1}$.

החלוקה שיחס השקילות E משרה ב- A היא:

- א. $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$
- ב. $\{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$
- ג. $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}\}$
- ד. $\{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6\}\}$
- ה. $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$
- ו. E אינו יחס שקילות מעל A ולכן אינו משרה חלוקה של A .

שאלה 2

נגדיר יחס L מעל \mathbb{N} : $(n, m) \in L$ אם $n + m$ מתחלק ללא שארית ב-3.

מספר מחלקות השקילות ש- L משרה ב- \mathbb{N} הוא:

- א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. יש אינסוף מחלקות שקילות.
- ה. L אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.
- ה. M אינו יחס שקילות ולכן אינו משרה חלוקה.

שאלה 3

נגדיר יחס M מעל $\mathbb{N} - \{0\}$:

עבור n, m טבעיים חיוביים, $(n, m) \in M$ אם $n \cdot m$ מתחלק ללא שארית ב-10.

מספר מחלקות השקילות ש- M משרה ב- $\mathbb{N} - \{0\}$ הוא :

- א. 1 ב. 2 ג. 10 ד. יש אינסוף מחלקות שקילות.

שאלה 4

נגדיר פונקציה f מ- \mathbb{N} ל- \mathbb{N} : $f(k) = k^2 - k$. תזכורת: 0 הוא מספר טבעי בקורס שלנו.

f היא :

- א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על
ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.
ה. זו כלל אינה פונקציה מ- \mathbb{N} ל- \mathbb{N} .

שאלה 6

תהי $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2x + 5$.

g היא :

- א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על
ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.
ה. זו כלל אינה פונקציה מ- \mathbb{R} ל- \mathbb{R} .

שאלה 7

תהי $f: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{N})$, $f(X) = X \cap \mathbb{N}$.

f היא :

- א. חד-חד-ערכית ועל ב. חד-חד-ערכית אבל לא על
ג. על אבל לא חד-חד-ערכית. ד. לא חד-חד-ערכית ולא על.
ה. זו כלל אינה פונקציה מ- $P(\mathbb{N})$ ל- $P(\mathbb{R})$.

שאלה 8

תהינה $A, B \subseteq U$ שונות זו מזו, ומתקיים: $\{A, B\}$ היא חלוקה של U .
בעמ' 85 בכרך "תורת הקבוצות" מוגדרת φ_A , הפונקציה האופיינית של A ב- U .

טענה (i): מהנתון נובע שלכל $x \in U$, $\varphi_A(x) + \varphi_B(x) = 1$.

טענה (ii): מהנתון נובע שלכל $x \in U$, $\varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x) = 0$.

- א. רק טענה (i) נכונה. ב. רק טענה (ii) נכונה.
ג. שתי הטענות (i), (ii) נכונות. ד. אף אחת מהטענות (i), (ii) אינה נכונה.

שאלה 9

תהי $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ויהיו $X, Y \subseteq A$.

נאמר ש- $(X, Y) \in D$ אם ורק אם $X \subseteq Y$. היחס D הוא:

- א. סדר-חלקי מעל $P(A)$ ואינו סדר-מלא מעל $P(A)$.
ב. סדר-חלקי מעל $P(A)$, שהוא גם סדר-מלא מעל $P(A)$.
ג. סדר-חלקי מעל $P(A)$, שהוא גם יחס שקילות מעל $P(A)$.
ד. אינו יחס מעל $P(A)$.

שאלה 10

מעל קבוצה כלשהי A מוגדר סדר-חלקי R , שאינו סדר-מלא. מכאן נובע:

- א. $|A| = 1$.
ב. $|A| = 2$.
ג. $|A| \geq 2$.
ד. מספר הזוגות הסדורים ב- R הוא אינסופי.
ה. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

שאלה 11

R הוא סדר-חלקי על קבוצה כלשהי A .

a, b הם שני אברים שונים של A , ושניהם אברים מקסימליים לגבי R . מכאן נובע:

- א. $|A| = 2$.
ב. R הוא סדר מלא מעל A .
ג. R אינו סדר מלא מעל A .
ד. A היא אינסופית.
ה. סתירה. לא ייתכן מצב כזה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2012

חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" פרקים 2-3

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: יום ו' 10.8.2012

- מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
 - על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
 - על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1 (30 נקודות)

\mathbb{Z} היא קבוצת המספרים השלמים, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

\mathbb{R} היא קבוצת המספרים הממשיים.

א. תהי $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x, y) = 3x + 2y$.

הוכח ש- f אינה חד-חד-ערכית, והוכח ש- f היא על.

ב. תהי $g: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$, $g(X) = X \oplus \mathbb{Z}$.

הוכח: לכל $X \in P(\mathbb{R})$, $g(g(X)) = X$.

הדרכה: ר' תכונות של הפרש סימטרי בעמ' 27 בכרך "תורת הקבוצות".

הוכחה אלגברית קצרה הרבה יותר במקרה זה מאשר הוכחה ע"י "יהי x איבר...".

ג. האם g היא חד-חד-ערכית? האם g היא על?

שאלה 2 (32 נקודות)

נגדיר יחס E מעל $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: שני איברים של $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ עומדים ביחס E זה לזה אם ורק אם

הפונקציה f מסעיף א של השאלה הקודמת שולחת אותם לאותו איבר של \mathbb{Z} .

E הוא יחס שקילות: זה נובע מהסעיף "העתק טבעי" בעמ' 84 בספר. ראו הסבר מפורט יותר

באתר הקורס, מאגר המשאבים, עזרים ללמידה - "יחס שקילות המושרה על-ידי פונקציה".

השאלה מתייחסת ליחס השקילות הזה.

א. האם מספר מחלקות השקילות אליהן E מחלקת את $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ הוא סופי או אינסופי?

(המשך השאלה בעמ' הבא)

(המשך שאלה 2)

- ב. הוכח שמחלקת השקילות שבה נמצא $(0,0)$ היא אינסופית, כלומר מכילה אינסוף איברים.
- ג. יהי $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ויהי $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
 הוכח: אם (m,n) נמצא באותה מחלקת שקילות עם $(0,0)$, אז $(a+m, b+n)$ נמצא באותה מחלקת שקילות עם (a,b) .
- ד. הוכח שכל מחלקות השקילות אליהן E מחלקת את $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ הן אינסופיות.

שאלה 3 (28 נקודות)

בשאלה 3.25 בעמ' 94 בספר מוכח שיחס ההכלה \subseteq הוא סדר-חלקי מעל כל קבוצה של קבוצות.

- א. תהי A קבוצה לא ריקה, ותהי K קבוצת כל יחסי השקילות מעל A .
 לפי האמור בתחילת השאלה, K סדורה בסדר-חלקי לגבי הכלה (אברי K הם קבוצות, כי יחס מעל קבוצה גם הוא קבוצה: קבוצה של זוגות סדורים). הראה שיש ב- K איבר קטן ביותר ואיבר גדול ביותר ("תורת הקבוצות" עמ' 93). מיהם?
 הוכח שהאיברים שאתה מציין אכן שייכים ל- K .
- ב. תהי M קבוצת כל היחסים הסופיים מעל \mathbb{N} , פרט ליחס הריק (יחס סופי: יחס שהוא קבוצה סופית, כלומר שיש בו מספר סופי של זוגות סדורים). בקבוצה M שהוגדרה כאן נמצאים כל היחסים הסופיים מעל \mathbb{N} , חוץ מהיחס הריק).
 לפי האמור בתחילת השאלה, M סדורה בסדר-חלקי לגבי הכלה.
- (i) האם יש ב- M איבר קטן ביותר? איבר גדול ביותר? אם כן, מיהם?
- (ii) אם לא מצאת איבר קטן ביותר, האם יש איברים מינימליים? אם כן, ציין מיהם והסבר מדוע הם אינם קטנים ביותר. אם אין איברים מינימליים, הסבר מדוע אין.
- (iii) אם לא מצאת איבר גדול ביותר, האם יש איברים מקסימליים? אם כן, ציין מיהם והסבר מדוע הם אינם גדולים ביותר. אם אין איברים מקסימליים, הסבר מדוע אין.

שאלה 4 (10 נקודות)

הוכיחי באינדוקציה: לכל n טבעי חיובי, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2012

חומר הלימוד למטלה: "תורת הקבוצות" פרקים 4,5

מספר השאלות: 4 משקל המטלה: 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ו' 17.8.2012

- מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
 - על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחה
 - על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שימו לב: חלק ממטלה זו מתייחס לפרק 5 בתורת הקבוצות, שנמצא בידיכם בחוברת נפרדת.

שאלה 1

- א. הוכח שאם $|A - B| = |B - A|$ אז $|A| = |B|$.
- הדרכה: לא נתון שהקבוצות סופיות, לכן יש לעבוד לפי הגדרת שוויון עוצמות. ההנחה על A, B פירושה שקיימת פונקציה חח"ע ועל מסוימת, ועלינו להראות שמכך נובע שקיימת פונקציה חח"ע ועל אחרת...
- ב. הראה שאם A, B סופיות ו- $|A| = |B|$ אז $|A - B| = |B - A|$.
- ג. הראה ע"י דוגמא שטענת סעיף ב אינה נכונה בהכרח עבור A, B שאינן סופיות.

שאלה 2

- לכל אחת מהקבוצות הבאות, קבע האם עצמתה היא:
- סופית / \aleph_0 / C / אינסופית אחרת / לא ניתן לקבוע.
- נמק בקיצור.**
- א. קבוצת כל הנקודות (m, n) במישור, כאשר m, n מספרים שלמים.
- ב. איחוד של \aleph_0 קבוצות זרות שעוצמת כל אחת מהן היא C .
- ג. קבוצת כל הסדרות הסופיות של אותיות הלקוחות מאלף-בית שבו \aleph_0 אותיות.
- ד. קבוצת כל הפונקציות של R לקבוצה $\{0, 1\}$. **הדרכה:** זכור את הגדרת פונקציה אופיינית (עמ' 85 בספר) וראה "אוסף תרגילים פתורים" קבוצה 3 שאלה 2.

שאלה 3

א. הראה כי אם קיימת פונקציה f של A על B , אז $|B| \leq |A|$.
הדרכה: בחר **שירותית** מקור לכל איבר של B . הסתמך על הגדרת \leq שבתחילת פרק 5.

ב. הוכח כי אם E הוא יחס שקילות על קבוצה A , אז $|A| \geq |A/E|$,
כאשר A/E היא קבוצת המנה, שהוגדרה בעמוד 67 בספר הלימוד.
הדרכה: סעיף א + ההעתק הטבעי שמתואר בראש עמ' 85 בספר הלימוד ("אפשר לדון...") או הקובץ "יחס שקילות המושרה על-ידי פונקציה" באתר הקורס.

שאלה 4

א. יהיו k_1, k_2, m_1, m_2 עוצמות. הוכח שאם $k_1 \leq k_2$ ו- $m_1 \leq m_2$ אז $k_1 \cdot m_1 \leq k_2 \cdot m_2$.
ב. הוכח: $\aleph_0 \cdot C = C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם).
ג. הוכח: $C^C = 2^C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם ובמשפטים שבחוברת).

מטלת מחשב (ממ"ח) 04

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2012

חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 1,2

מספר השאלות: 11 משקל המטלה: 2 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ו' 24.8.2012

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאלת"א
בכתובת <http://www.openu.ac.il/sheilta/>
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

בשאלות 1-4 A, B הן קבוצות סופיות, $|A| = 6$, $|B| = 3$.

שאלה 1

מספר הפונקציות של B ל- A הוא:

א. 18 ב. 20 ג. 120 ד. 216 ה. 729

שאלה 2

מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של B ל- A הוא:

א. 6 ב. 20 ג. 120 ד. 216 ה. 729

שאלה 3

מספר היחסים הרפלקסיביים מעל A הוא:

א. 6 ב. 36 ג. 64 ד. 6^6 ה. 2^{30}

שאלה 4

מספר יחסי הסדר המלא מעל A הוא:

א. 6 ב. 36 ג. 64 ד. 120 ה. 720

שאלות 5-7 עוסקות בדרכים שונות לסדר את המחרוזת 1223334444 (להלן: "המחרוזת").

שאלה 5

מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת הוא:

- א. 10 ב. $1! + 2! + 3! + 4!$ ג. $10!$ ד. $\frac{10!}{2!3!4!}$
- ה. $10! - (1! + 2! + 3! + 4!)$

שאלה 6

מהו מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את המחרוזת כאשר הספרות 22 חייבות להיות צמודות זו לזו?

- א. 25 ב. 252 ג. 2520 ד. 12,520 ה. 125,200

שאלה 7

בנוסף לדרישה שבשאלה 6, נדרוש גם **שלא** יופיע הרצף 333.

מספר הסידורים האפשריים כעת קטן ממספר הסידורים שמצאתם בשאלה 6. **בכמה הוא קטן?**

- א. 10 ב. 210 ג. 2100 ד. 12,100 ה. 122,100

המשך הממ"ח בעמוד הבא

בכל אחת מהשאלות 8 – 10 נתונה קבוצה של כדורים בצבעים אדום, סגול ולבן. עליכם למצוא בכמה דרכים ניתן לבחור מהקבוצה הנתונה 10 כדורים, ללא חשיבות לסדר הבחירה. כדורים בעלי אותו צבע נחשבים זהים.

שאלה 8

יש מספר בלתי מוגבל של כדורים מכל צבע.

- א. 3^{10} ב. $\frac{10!}{3!}$ ג. 10^3 ד. $D(10,3)$ ה. $D(3,10)$

שאלה 9

נסמן את התשובה לשאלה הקודמת ב- x .

קעת לרשותנו רק 8 כדורים אדומים, 8 כדורים סגולים ו- 7 כדורים לבנים. התשובה קעת היא :

- א. $x-7$ ב. $x-10$ ג. $x-12$ ד. ללא שינוי, x ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

שאלה 10

לרשותנו שוב 8 כדורים אדומים, 8 כדורים סגולים ו- 7 כדורים לבנים. הפעם כל צבע חייב להיבחר לפחות פעם אחת.

- א. 15 ב. 25 ג. 35 ד. 45 ה. 55

שאלה 11

מהו מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$?

- א. 120 ב. 210 ג. 1,820 ד. 4,368 ה. 8,634

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2012

חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 3,4,5

מספר השאלות: 4 משקל המטלה: 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ו' 31.8.2012

- מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
 - על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
 - על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1

פשטו את הסכום $\sum_{n=0}^m \frac{1}{n+1} \binom{m}{n}$. קבלו ביטוי התלוי ב- m , שאינו מכיל סכומים.

במהלך הפתרון סביר שתזדקקו לפעולה מקובלת הקרויה **החלפת משתנה הסכימה**. דוגמא:

בביטוי $\sum_{i=5}^{10} a_{i-3}$ נעבור למשתנה $j = i - 3$ ונקבל שניתן לרשום את הסכום גם כך: $\sum_{j=2}^7 a_j$.

שימו לב להחלפת הערכים הן בתוך הסכום והן בגבולות הסכימה.

שאלה 2

חשבי את פונקציית אוילר $\Theta(180)$ בשתי דרכים:

א. בעזרת הנוסחה שבתחתית עמוד 93 בספר הלימוד.

ב. באופן ישיר בעזרת הכלה והפרדה.

שאלה 3

קראו באתר הקורס את החישוב של מספר הפונקציות של קבוצה סופית A על קבוצה סופית B , כאשר $|A| = n$, $|B| = k$.

החישוב הוא בעזרת הכלה והפרדה, והתוצאה היא $\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$.

א. הראו את השוויון הבא **בלי** לחשב בפירוש את הסכום שבאגף שמאל:

$$5^2 - 5 \cdot 4^2 + \binom{5}{2} \cdot 3^2 - \binom{5}{3} \cdot 2^2 + 5 \cdot 1 = 0$$

ב. נסחו הכללה של משוואה זו: מיהם כל הסכומים מסוג זה השווים אפס? תנו תשובה כללית ככל שניתן, שאף קבוע מספרי אינו מופיע בה.

שאלה 4

A היא קבוצה בת 9 איברים, החלקית לקבוצה $\{4, 5, 6, \dots, 60, 61\}$.

א. הראה כי קיימות (לפחות) שתי תת-קבוצות שונות של A , שסכום איבריהן שווה. (הדרכה: עקרון שובך היונים).

שים לב שהשאלה מתייחסת לתת-קבוצות של הקבוצה הלא-ידועה A , לא לתת-קבוצות כלשהן של $\{4, 5, 6, \dots, 60, 61\}$!

ב. הראה כי קיימות (לפחות) שתי קבוצות **זרות** כאלו. הדרכה: נובע בקלות מסעיף א' ללא שיקולים קומבינטוריים!

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2012

חומר הלימוד למטלה: "קומבינטוריקה" פרקים 6 – 7.3

מספר השאלות: 4 משקל המטלה: 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ו' 7.9.2012

- מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
 - על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
 - על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1

- יהי a_n מספר הסדרות באורך n , שאבריהן שייכים לקבוצה $\{1, 2, \dots, 8\}$, והמקיימות את התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים זוגיים זה בסמוך לזה. למשל אם $n = 5$ הסדרה $(1, 1, 2, 6, 3)$ אינה מותרת, מכיון ש-2 מופיע ליד 6. גם הסדרה $(1, 1, 2, 2, 3)$ אסורה, כי יש שתי הופעות צמודות של 2.
- א. מצא יחס נסיגה (יחס רקורסיה) עבור a_n . רשום את a_0, a_1, a_2 . בדוק שהערך שרשמת עבור a_0 מתאים ליחס הנסיגה שרשמת.
- ב. רשום את המשוואה האופיינית ("קומבינטוריקה" עמ' 117), פתור את יחס הנסיגה, וקבל ביטוי מפורש עבור a_n . ביטויים כגון $\sqrt{48}$ יש להעביר לצורה כגון $4\sqrt{3}$, ואין להציב במקומם קירובים עשרוניים כגון 6.93.

המשך המטלה עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בעמוד הבא רשימה של נוסחאות שימושיות.

שאלה 2

$$\text{תהי } f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \text{ ותהי } g(x) = \frac{f(x)}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

- א. הבע את b_n (לכל n טבעי) בעזרת ה- a_i -ים.
- ב. הבע את a_n (לכל n טבעי) בעזרת ה- b_i -ים.

שאלה 3 (ראו תרגיל דומה בסוף הקובץ "מבוא לפונקציות יוצרות" באתר הקורס)

פתחו לטורים את שני אגפי הזהות

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^n \cdot (1+x)^{2n} = (1+x)^n$$

וקבלו ע"י השוואת המקדמים בשני האגפים זהות מהצורה:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i D(n, i) \binom{2n}{k-i} = \binom{n}{k}$$

בדקו זהות זו עבור המקרה $k = 4, n = 6$.

שאלה 4

במחסן של חנות מחשבים נמצאים n מחשבים ישנים **זהים**. בעלי החנות מעמיסים את המחשבים הישנים על 3 רכבים **שונים** (הרכב של איציק, הרכב של בני והרכב של גילה), שבכל אחד מהם יש מקום ל-24 מחשבים לכל היותר.

(9 נק') א. רשום פונקציה יוצרת עבור מספר הדרכים לחלק את n המחשבים הזהים בין 3 הרכבים השונים (לא חייבים לנצל את כל הרכבים).

(16 נק') ב. אם מספר המחשבים הוא 70, חשב בעזרת סעיף א' או בדרך אחרת את מספר הדרכים לחלק את המחשבים בין הרכבים. תן תשובה סופית מספרית.

להלן סיכום כמה נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות:

$$(i) \quad \text{סכום טור הנדסי סופי:} \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{ואינסופי:} \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

(ii) כפל פונקציות יוצרות:

$$\text{אם } f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i, \quad \text{ו-} \quad f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

$$\text{אז } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \quad (\text{ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד}).$$

$$(iii) \quad \frac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+\dots)^n = \sum_{k=0}^{\infty} D(n, k) x^k$$

במילים אחרות: המקדם של x^k בפיתוח הביטוי $\frac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n, k)$.
(ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר).

מטלת מחשב (ממ"ח) 05

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2012

חומר הלימוד למטלה: "תורת הגרפים" פרקים 1-3

מספר השאלות: 11 משקל המטלה: 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ו' 14.9.2012

תשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילת"א
בכתובת <http://www.openu.ac.il/sheilta/>
הממ"ח נבדק בצורה ממוחשבת. אין לשלוח את פתרון הממ"ח למנחה!

שאלה 1

נתאר לעצמנו גרף על 6 צמתים, שדרגותיהם: 0,1,1,2,4,4.

- א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.
- ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.
- ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.
- ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.
- ה. לא קיים גרף כזה.

שאלה 2

נתאר לעצמנו גרף על 8 צמתים, שדרגותיהם: 1,1,2,2,3,4,4,6.

- א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.
- ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא גרף פשוט.
- ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.
- ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.
- ה. לא קיים גרף כזה.

שאלה 3

בהנתן $n > 0$ טבעי, יהי Q_n הגרף הפשוט הבא:

הצמתים של Q_n הם הסדרות באורך n שאבריהן 0,1 (מספר הצמתים הוא 2^n).

שני צמתים מחוברים בקשת אם ורק אם הם נבדלים זה מזה בקואורדינטה אחת בדיוק.

למשל, ב- Q_6 יש קשת בין הצומת $(0,0,1,0,1,1)$ לצומת $(0,1,1,0,1,1)$, כי שתי הסדרות הללו

נבדלות זו מזו רק בקואורדינטה השנייה. מספר הקשתות של Q_6 הוא:

- א. 63
- ב. 128
- ג. 192
- ד. 720

שאלה 4

- K_n הוא הגרף המלא על n צמתים ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4).
 נתבונן באיחוד זר של K_3 עם K_5 : גרף בעל 8 צמתים, שיש לו שני רכיבי קשירות:
 רכיב קשירות אחד הוא עותק של K_3 ורכיב הקשירות השני הוא עותק של K_5 .
 נוסיף לקשתות הקיימות בגרף עוד קשתות : נחבר בקשת כל צומת של K_3 עם כל צומת של K_5 .
 הגרף שנקבל הוא :
- K_8 , והוא דו-צדדי, הצדדים שלו הם הגרפים K_3, K_5 מהם התחלנו.
 - K_8 , והוא דו-צדדי, אבל הצדדים שלו אינם הגרפים K_3, K_5 מהם התחלנו.
 - K_8 , והוא אינו דו-צדדי.
 - גרף דו-צדדי שאינו K_8 .
 - גרף שאינו דו-צדדי ואינו K_8 .

שאלה 5

- השאלה עוסקת באיזומורפיזם של גרפים שאינם מתויגים ("תורת הגרפים" הגדרה 2.7).
 נזכור שלכל גרף G , המשלים שלו ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4) מסומן \bar{G} .
 C_n הוא גרף שהוא מעגל פשוט על n צמתים.

- טענה (i):** \bar{C}_4 איזומורפי לגרף הבנוי משתי קשתות זרות : $\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix}$
- טענה (ii):** \bar{C}_5 איזומורפי ל- C_5 .

- רק טענה (i) נכונה.
- רק טענה (ii) נכונה.
- שתי הטענות (i), (ii) נכונות.
- אף אחת מהטענות (i), (ii) אינה נכונה.

שאלה 6

G הוא יער על 14 צמתים, ובו בדיוק 14 קשתות.

- G הוא עץ.
- ל- G יש בדיוק שני רכיבי קשירות.
- ל- G יש בדיוק שלשה רכיבי קשירות.
- נחוץ מידע נוסף כדי לקבוע כמה רכיבי קשירות יש ל- G .
- לא ייתכן יער כזה.

שאלה 7

- דרגות הצמתים (לא סדרת Prüfer!) בגרף G הן: $1, 1, 1, 2, 2, 3$.
 גם לגרף H יש בדיוק אותה סדרת דרגות. הגרפים אינם מתוייגים.
 טענה (i): G, H הם בהכרח עצים.
 טענה (ii): G, H בהכרח איזומורפיים זה לזה.
 א. רק טענה (i) נכונה. ב. רק טענה (ii) נכונה.
 ג. שתי הטענות (i), (ii) נכונות. ד. אף אחת מהטענות (i), (ii) אינה נכונה.

שאלה 8

- בפרק 2 של החוברת "תורת הגרפים", בתשובה לשאלה 7, מופיע עץ מתוייג.
 נסיף לעץ הזה עלה שמספרו 9 ונחבר אותו לצומת שמספרה 6.
 סדרת Prüfer של העץ החדש היא:
 א. $(4, 4, 3, 4, 4, 2, 6)$
 ב. $(4, 4, 3, 4, 4, 2, 9)$
 ג. $(6, 4, 4, 3, 4, 4, 2)$
 ד. $(6, 4, 4, 4, 3, 2, 4)$
 ה. $(4, 4, 4, 4, 3, 2, 6)$
 ו. $(4, 4, 4, 2, 4, 3, 6)$

שאלה 9

- הגרף הדו-צדדי המלא $K_{p,q}$ הוגדר ב"תורת הגרפים" הגדרה 1.5.
 $K_{2,9}$ הוא:
 א. אוילרי והמילטוני.
 ב. אוילרי אבל אינו המילטוני.
 ג. המילטוני אבל אינו אוילרי.
 ד. אינו אוילרי ואינו המילטוני.

שאלה 10

- G הוא גרף אוילרי (כלומר יש בו מעגל אוילר), ויש ב- G גם מסלול אוילר שאינו מעגל.
- א. זה לא מעניין, בכל גרף אוילרי יש גם מסלול אוילר שאינו מעגל.
 - ב. טענה א' אינה נכונה, אבל יש גרף פשוט המקיים את הדרישות הללו.
 - ג. יש גרף כזה, אבל לא גרף פשוט.
 - ד. לא ייתכן גרף כזה.

שאלה 11

- G הוא גרף המילטוני (כלומר יש בו מעגל המילטון), ויש ב- G גם מסלול המילטון שאינו מעגל.
- א. זה לא מעניין, בכל גרף המילטוני יש גם מסלול המילטון שאינו מעגל.
 - ב. טענה א' אינה נכונה, אבל יש גרף פשוט המקיים את הדרישות הללו.
 - ג. יש גרף כזה, אבל לא גרף פשוט.
 - ד. לא ייתכן גרף כזה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

קורס 20476 מתמטיקה בדידה, סמסטר 2012

חומר הלימוד למטלה: "תורת הגרפים", כל החוברת

מספר השאלות: 5 משקל המטלה: 3 נקודות

מועד אחרון להגשה: יום ד' 19.9.2012

- מטלת מנחה** ניתן להגיש באחת הדרכים הבאות (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")
- במערכת המטלות המקוונת (קובץ מוקלד, לא סרוק), כניסה מאתר הקורס או משאילת"א
 - על דפי נייר, עם טופס נלווה, באופן ישיר למנחה במפגש ההנחיה
 - על דפי נייר, עם טופס נלווה, באמצעות דואר ישראל

שאלה 1 (10 נקודות)

בתשובה 2 בעמ' 11 בספר, בהוכחת טרנזיטיביות, מדוע אי אפשר פשוט לשרשר את שני

המסלולים, כלומר להסתכל במסלול שתחילתו $P_{u \rightarrow v}$ והמשכו $P_{v \rightarrow w}$?

שאלה 2 (20 נקודות)

הגרף G מוגדר כך:

הצמתים של G הם הקבוצות בנות בדיוק 3 אברים מתוך $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

למשל הקבוצה $\{1,4,8\}$ היא צומת של G .

בין שני צמתים שונים A, B יש קשת אם ורק אם $A \cap B = \emptyset$.

למשל יש קשת בין $\{1,4,8\}$ לבין $\{2,3,5\}$.

(7 נק') א. הוכח ש- G קשיר.

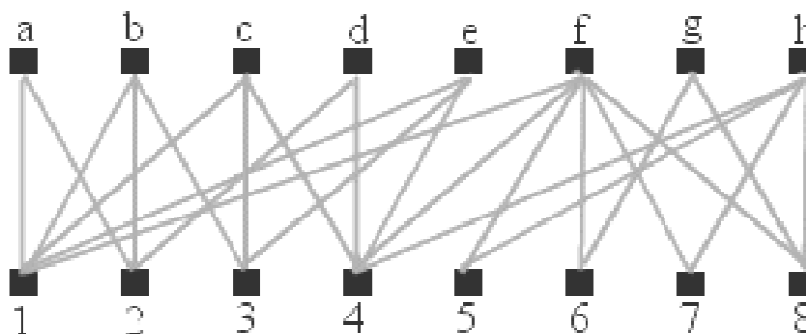
(6 נק') ב. מהי דרגת כל צומת ב- G ? הוכח.

(7 נק') ג. כמה קשתות יש ב- G ? הוכח.

(5 נק') ד. האם יש ב- G מעגל אוילר? הוכח.

שאלה 3 (22 נקודות)

הוכיחו כי בגרף הבא לא קיים זיווג מושלם.



שאלה 4 (23 נקודות)

G הוא גרף מישורי על 11 צמתים. הוכיחו שהגרף המשלים שלו, \overline{G} , אינו מישורי.

רשות (בנוסף 5 נקודות). אין ציון מעל 100 אבל הבונוס יכול לקזז נקודות שירדו): הוכיחו טענה זו כאשר במקום 11, מספר הצמתים בגרף הוא מספר כלשהו הגדול מ-10.

שאלה 5 (25 נקודות)

צבענו (צביעה נאותה) ב- k צבעים גרף G , המקיים $\chi(G) = k$.

(12 נק') א. הראו שלכל צבע מתוך k הצבעים, יש ב- G צומת, ששכניו משתמשים בכל $k - 1$ הצבעים הנותרים. הדרכה: הוכיחו בדרך השלילה.

נסחו היטב ובבירור את טענת השלילה.

(8 נק') ב. איזו טענה מספר הלימוד מוכיח סעיף א ?

(5 נק') ג. הראו כי ב- G יש לפחות k צמתים שדרגת כל אחד מהם היא לפחות $k - 1$.