בחינה 6

שאלה 1

א. (18 נק׳) יהיו A, B קבוצות. נתון ש- $B = A \setminus \{1\}$. הוכח או הפרך את הטענות:

1. אם $A \neq B$ ואם A שקולה ל- B, אז A היא אינסופית.
2. אם $A \setminus \{2\}$ שקולה ל- B אז A היא אינסופית.

ב. (7 נק׳) הוכח או הפרך: אם A, B קבוצות אז $P(A \setminus B) \neq P(A) \setminus P(B)$.

תשובה

א. 1. הטענה נכונה. הקבוצה B היא חלקית ל- A (כל איבר של B הוא איבר של $A \setminus \{1\}$ ולכן איבר של A). מצד שני, על-פי הנתון, B לא שווה ל- A, לפיכך B חלקית ממש ל- A.

לכן מצאנו קבוצה B שחלקית ממש ל- A ושקולה לה ולכן A קבוצה אינסופית.

2. טענה זו לא נכונה. ניקח לדוגמה $A = \{1, 2\}$ ו- $B = A \setminus \{1\} = \{2\}$. אז $A \setminus \{2\} = \{1\}$, לכן $A \setminus \{2\}$ שקולה ל- B (ההתאמה $2 \leftrightarrow 1$ היא חח״ע בין שתי הקבוצות), אבל A קבוצה סופית בניגוד לטענה הנתונה.

ב. כידוע לכל קבוצה X מתקיים $\varnothing \subseteq X$ ולכן $\varnothing \in P(X)$. מכאן נובע ש- $\varnothing \in P(A \setminus B)$ אבל $\varnothing \notin P(A) \setminus P(B)$ (כי $\varnothing \in P(B)$). לפיכך $P(A \setminus B) \neq P(A) \setminus P(B)$.

שאלה 2

א. (10 נק׳) תהי A קבוצה שעליה מוגדרת פעולה בינרית $*$ המקיימת את תכונת הסגירות ואת חוקי הצמצום. ידוע שיש איבר $e \in A$ כך שלכל $x \in A$ מתקיים $x * e = x$.

הוכח כי אם $*$ פעולה קיבוצית, אז e ניטרלי ב- A ביחס לפעולה $*$.

ב. (15 נק׳) תהי A קבוצת כל המספרים השלמים הזוגיים: $A = \{2n \mid n \in \mathbf{Z}\}$. על קבוצה זו מגדירים פעולה בינרית $*$ באופן הבא: לכל A, $a * b = a + b - ab$.

בדוק אלו מן התכונות שבהגדרת מושג החבורה מתקיימות ב- A ביחס לפעולה $*$.

תשובה

א. עלינו להוכיח כי אם $*$ פעולה המקיימת את תנאי השאלה וגם את חוק הקיבוציות, אז e איבר נטרלי. לשם כך נשאר להראות שלכל $x \in A$ מתקיים גם $e * x = x$.

לכל $x \in A$ מתקיים: $x * (e * x) = (x * e) * x$ (עפ״י תכונת הקיבוציות)

מכאן ש- $x * (e * x) = x * x$ (כי $x * e = x$)

ולכן $e * x = x$ (על-ידי צמצום x מימין)

לפיכך, e נטרלי.

ב. סגירות:

יש להוכיח שלכל $a,b \in A$, מתקיים $a+b-ab \in A$. אכן, אם $a,b \in A$ אז לפי הגדרת הקבוצה A קיימים $m,n \in \mathbf{Z}$ כך ש- $a=2m$, $b=2n$ ואז:

$a*b=a+b-ab=2m+2n-4mn=2(m+n-2mn)$. מאחר ש- $(m+n-2mn) \in \mathbf{Z}$ נקבל כי $a*b=2(m+n-2mn) \in A$ ולכן הפעולה הנתונה מקיימת את תכונת הסגירות.

קיבוציות:

יש להוכיח שלכל $a,b,c \in A$ מתקיים $(a*b)*c = a*(b*c)$:

$$(a*b)*c = (a+b-ab)*c = (a+b-ab)+c-(a+b-ab)c = \\ = a+b+c-ab-ac-bc+abc$$

ומצד שני,

$$a*(b*c) = a*(b+c-bc) = a+(b+c-bc)-a(b+c-bc) = \\ = a+b+c-ab-ac-bc+abc$$

מכאן שהפעולה קיבוצית.

קיום איבר נטרלי.

עלינו למצוא איבר $e \in A$ כך שלכל $x \in A$ יתקיים $x*e = e*x = x$. נניח שיש איבר כזה.

בפרט, צריך להתקיים $2*e = 2$ לכן, $2+e-2e = 2$, ומכאן ש- $e = 0$.

לכן, קיבלנו ש**אם** קיים איבר נטרלי, אז הוא 0. כעת נראה שאכן 0 נטרלי. אכן, $0 \in A$ (כי הוא שלם זוגי) ולכל $x \in A$ מתקיים: $x*0 = x+0-x \cdot 0 = x$ וכן,

$0*x = 0+x-0 \cdot x = x$. מכאן ש- 0 נטרלי.

קיום איבר נגדי:

צריך לבדוק האם לכל $a \in A$ קיים $b \in A$ כך ש- $a*b = 0$.

יהי $a \in A$. אנו מחפשים b כך ש- $a*b = 0$, כלומר $a+b-ab = 0$.

מכאן ש- $b(1-a) = -a$ ולכן $b = -a/(1-a)$. קיבלנו ש**אם** קיים נגדי ל- a אז הוא שווה ל- $-a/(1-a)$. אבל אז אם למשל ל- $a=4$ יש נגדי אז הוא בהכרח $-4/(1-4) = 4/3$.

מאחר שמספר זה אינו שייך ל- A, נקבל כי ל- 4 אין נגדי ולכן **לא** לכל איבר של A יש נגדי.

שאלה 3

נתונות פונקציה $f: A \to B$ וקבוצות $C,D \subseteq A$ כך ש- $C \neq D$

א. (8 נק׳) הוכח כי אם $f(C) \neq f(D)$, לא נובע ש- f היא בהכרח חד-חד-ערכית.

ב. (9 נק׳) הוכח שאם f היא חד-חד-ערכית אז $f(C) \neq f(D)$.

ג. (8 נק׳) הדגם קבוצות $C,D \subseteq A$, $C \neq D$, ופונקציה $f: A \to B$ כך ש- $f(C) = f(C) \cup f(D)$.

תשובה

א. עלינו להביא דוגמה מתאימה, שבה $f(C) \neq f(D)$ ו- f אינה חד-חד-ערכית.

נבחר למשל קבוצות $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a, b$, $C=\{1$, $D=\{2\}$ ופונקציה $f: A \to B$

המוגדרת כך: $f(1)=a, f(2)=f(3)=b$.

ברור כי $C \neq D$ ו- $f(C)=\{a\}, f(D)=\{\}b$ לכן $f(C) \neq f(D)$ אבל f אינה חד-חד-ערכית, שכן $f(2)=f(3)$.

ב. נניח כעת כי $f:A \to B$ היא חד-חד-ערכית וכי $C,D \subseteq A$ כך ש- $C \neq D$. נוכיח כי $f(C) \neq f(D)$. לשם כך נשים לב שאם $C \neq D$ אז לפחות באחת מן הקבוצות האלה קיים איבר שאינו שייך לקבוצה האחרת. לכן נניח למשל כי קיים $x \in C$ כך ש- $x \notin D$. לפי ההגדרה של תמונת הקבוצה C ביחס לפונקציה f נובע כי $f(x) \in f(C)$. נראה כעת כי $f(x) \notin f(D)$. אכן, אם נניח כי $f(x) \in f(D)$ אז לפי ההגדרה של $f(D)$ נקבל כי $f(x)$ הוא תמונה של איבר מתוך הקבוצה D . במילים אחרות, קיים איבר $t \in D$ כך ש- $f(x)=f(t)$. אבל אז, מאחר ש- f היא חד-חד-ערכית נקבל כי $x=t$ כלומר $x \in D$ וזו סתירה. כך מצאנו כי האיבר $f(x)$ מקיים $f(x) \in f(C)$ אך $f(x) \notin f(D)$ ומכאן ש- $f(C) \neq f(D)$ כפי שרצינו להוכיח.

ג. נבחר למשל קבוצות $A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $C=\{1\}, D=\varnothing$ ופונקציה $f: A \to B$ המוגדרת כך: $f(1)=2$. אז $f(D)=f(\varnothing)=\varnothing$ לכן $f(C) \cup f(D)=f(C) \cup \varnothing=f(C)$, כנדרש.

שאלה 4

נתונות f,g איזומטריות של המישור ו- A,B נקודות שונות במישור. ידוע כי הנקודות A,B הן נקודות שבת של האיזומטריה $f \circ g$.

א. (12 נק׳) הוכח כי אם f ו- g הופכות את מגמת המשולשים אז הן איזומטריות הפוכות זו לזו.

ב. (13 נק׳) הוכח שאם f ו- g הופכות מגמת משולשים ואם ל- f יש נקודת שבת אז $f=g$.

תשובה

א. אם f ו- g הופכות את מגמת המשולשים אז ההרכבה $f \circ g$ שומרת מגמת משולשים. הסבר: את f ואת g אפשר להציג כהרכבות של מספר אי-זוגי של שיקופים, כי הן הופכות מגמה, לכן את $f \circ g$ נקבל כך כהרכבה של מספר זוגי של שיקופים ולכן $f \circ g$ שומרת מגמה. בנוסף לפי ההנחה, ל- $f \circ g$ יש שתי נקודות שבת שונות, לכן $f \circ g$ יכולה להיות רק הזהות או שיקוף. אבל שיקוף הופך מגמת משולשים, לפיכך בהכרח $f \circ g=I$. מאחר שכל איזומטריה היא פונקציה הפיכה הרי שקיימת למשל הפונקציה f^{-1} שהופכית ל- f . נרכיב את f^{-1} מימין, בשני האגפים של השוויון האחרון ונקבל: $f^{-1}(f \circ g)=f^{-1} \circ I$. הרכבת פונקציות היא קיבוצית, לכן נוכל לרשום זאת גם כך: $(f^{-1} \circ f) \circ g=f^{-1} \circ I$ כלומר $I \circ g=f^{-1} \circ I$. מכאן נובע כי $g=f^{-1}$ ולכן f ו- g הן איזומטריות הפוכות זו לזו.

ב. אם f הופכת מגמת משולשים אז f יכולה להיות רק שיקוף או שיקוף מוזז. אבל אם בנוסף ל- f יש נקודת שבת, אז f היא בהכרח שיקוף.

מצד שני, מאחר ש- f ו- g הופכות את מגמת המשולשים נקבל כמו בסעיף ב' כי $g = f^{-1}$.

אבל f היא שיקוף וכידוע כל שיקוף הופכי לעצמו. לכן $f = f^{-1}$ ולכן $g = f$.

שאלה 5

בשאלה זו נתייחס למערכת הכוללת את ארבע האקסיומות של החבורה כפי שהוגדרו בעמוד 45, יחידה 4. מושג היסוד שלה הוא פעולה בינרית.

א. (8 נק') הוכח כי מערכת האקסיומות היא חסרת סתירה.

ב. (8 נק') הוכח כי אקסיומה 2 אינה נובעת מן האקסיומות האחרות.

ג. (9 נק') הוכח כי אקסיומה 4 אינה נובעת מן האקסיומות האחרות.

תשובה

א. כדי להוכיח שהמערכת חסרת סתירה נצביע על מודל שמקיים את כל האקסיומות שלה. למשל, קבוצת כל המספרים השלמים $\boldsymbol{Z}$ יחד עם פעולת החיבור הרגיל (וכן, כל חבורה אחרת) היא מודל למערכת. לכן המערכת חסרת סתירה.

ב. כדי להוכיח כי אקסיומה 2 אינה נובעת מן האקסיומות האחרות, נצביע על מודל המקיים את אקסיומות 1,3,4 אך אינו מקיים אקסיומה 2. לשם כך, מספיק אם נגדיר פעולה בינרית בעזרת טבלה שבה יתקיימו אקסיומות 1,3,4 מבלי שתהיה זו טבלת חבורה. נגדיר למשל פעולה בינרית $*$ על קבוצה $A = \{e, a, b\}$ בעזרת הטבלה הבאה: ברור שהפעולה מקיימת את תכונת הסגירות, ש- e איבר נטרלי ושלכל איבר ב- A יש נגדי (שכן, כל איבר נגדי לעצמו). לכן המודל שבחרנו מקיים אקסיומות 1,3,4. אילו היה מודל זה מקיים גם אקסיומה 2 אז היה מדובר על חבורה. אך כידוע בטבלה של חבורה לא תיתכן הופעה כפולה של איבר באותו טור. מכאן שאקסיומה 2 אינה מתקיימת. (ניתן להוכיח זאת ישירות: למשל, $(a*b)*a = b*a = a$ ואילו $a*(b*a) = a*a = e$, לכן תכונת הקיבוציות לא מתקיימת).

b	a	e	$*$
b	a	e	e
b	e	a	a
e	a	b	b

ג. כדי להוכיח כי אקסיומה 4 אינה נובעת מן האקסיומות האחרות, עלינו להדגים קבוצה ופעולה בינרית שמקיימת שלוש האקסיומות הראשונות מהגדרת מושג החבורה, אך לא מקיימת את תכונת קיום הנגדי. דוגמה כזו היא קבוצת המספרים הטבעיים $\boldsymbol{N}$ עם פעולת הכפל הרגיל. ברור שתכונות הסגירות והקיבוציות מתקיימות, ו- 1 הוא איבר נטרלי. אך לא לכל שאיבר יש נגדי. למשל, ל- 2 אין נגדי, כי לא קיים $n \in \boldsymbol{N}$ כך ש- $2n = 1$.

שאלה 6

א. (13 נק') נתונה הסדרה המוגדרת על-ידי: $a_2 = 3, a_1 = 2$ ולכל n טבעי $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $a_{n+1}^2 - a_{n+2} \cdot a_n = (-1)^n$

ב. הוכח כי לכל a טבעי, המספר $a(a^2 + 11)$ מתחלק ב- 6, ללא שימוש באינדוקציה.

תשובה

א. עלינו להוכיח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $a_{n+1}^2 - a_{n+2} \cdot a_n = (-1)^n$.

אם $n=1$ אז $a_{n+1}^2 - a_{n+2} \cdot a_n = a_2^2 - a_3 \cdot a_1 = 3^2 - 5 \cdot 2 = -1 = (-1)^1$ לכן הטענה מתקיימת.

נניח כעת כי הטענה נכונה עבור n מסוים כלומר $a_{n+1}^2 - a_{n+2} \cdot a_n = (-1)^n$ ונוכיח כי היא נכונה $n+1$ כלומר: $a_{n+2}^2 - a_{n+3} \cdot a_{n+1} = (-1)^{n+1}$. לפי הנתון, מתקיים: $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1}$.

לכן:
$$\begin{aligned} a_{n+2}^2 - a_{n+3} \cdot a_{n+1} &= a_{n+2}^2 - (a_{n+2} + a_{n+1}) \cdot a_{n+1} \\ &= a_{n+2}^2 - a_{n+2} \cdot a_{n+1} - a_{n+1}^2 = a_{n+2}(a_{n+2} - a_{n+1}) - a_{n+1}^2 \end{aligned}$$

אבל מן השוויון (הנתון) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ נובע כי $a_{n+2} - a_{n+1} = a_n$ ואם נציב זאת בביטוי הקודם נקבל כי
$$\begin{aligned} a_{n+2}^2 - a_{n+3} \cdot a_{n+1} &= a_{n+2}(a_{n+2} - a_{n+1}) - a_{n+1}^2 \\ &= a_{n+2} \cdot a_n - a_{n+1}^2 = -(a_{n+1}^2 - a_{n+2} \cdot a_n) \end{aligned}$$

מהנחת האינדוקציה ידוע כי $a_{n+1}^2 - a_{n+2} a_n = (-1)^n$ לכן:

$a_{n+2}^2 - a_{n+3} \cdot a_{n+1} = -(a_{n+1}^2 - a_{n+2} \cdot a_n) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$ ומכאן שהטענה נכונה גם ל- $n+1$.

לכן, לפי עקרון האינדוקציה, השוויון $a_{n+1}^2 - a_{n+2} \cdot a_n = (-1)^n$ מתקיים לכל n טבעי.

ב. ניתן לפשט את ההוכחה אם שמים לב כי $a(a^2+11) = a(a^2-1+12) = a(a^2-1) + 12a$ וכי מספיק בעצם להוכיח כי $a(a^2-1)$ כלומר, $a(a-1)(a+1)$ מתחלק ב- 6.

לשם כך נסתכל על השאריות האפשריות של n בחילוק ב- 6. לפי משפט החלוקה עם שארית, קיימים $k, r \in \mathbf{N}_0$ כך ש- $a = 6k + r$ כאשר $r = 0,1,2,3,4,5$.

אם $r=0$ אז $a=6k$ ואז: $a(a-1)(a+1) = 6k(a-1)(a+1)$

לכן במקרה זה, $a(a^2-1)$ מתחלק ב- 6.

אם $r=1$ אז $a=6k+1$ ואז: $a(a-1)(a+1) = a(6k+1-1)(a+1) = 6ak(a+1)$.

לכן במקרה זה $a(a^2-1)$ מתחלק ב- 6.

אם $r=2$ אז $a=6k+2$ ואז:
$$\begin{aligned} &a(a-1)(a+1) = (6k+2)(a-1)(6k+3) = \\ &2(3k+1)(a-1)3(2k+1) = 6(3k+1)(a-1)(2k+1) \end{aligned}$$

לכן במקרה זה $a(a^2-1)$ מתחלק ב- 6.

אם $r=3$ אז $a=6k+3$ ואז:
$$\begin{aligned} &a(a-1)(a+1) = (6k+3)(6k+2)(a+1) = \\ &3(2k+1)2(3k+1)(a+1) = 6(2k+1)(3k+1)(a+1) \end{aligned}$$

לכן במקרה זה $a(a^2-1)$ מתחלק ב- 6.

אם $r=4$ אז $a=6k+4$ ואז:
$$\begin{aligned} &a(a-1)(a+1) = (6k+4)(6k+3)(a+1) = \\ &2(3k+2)3(2k+1)(a+1) = 6(3k+2)(2k+1)(a+1) \end{aligned}$$

לכן במקרה זה $a(a^2-1)$ מתחלק ב- 6.

אם $r=5$ אז $a=6k+5$ ואז: $a(a-1)(a+1)=a(a-1)(6k+6)=6a(a-1)(a+1)$ לכן גם במקרה זה $a(a^2-1)$ מתחלק ב- 6.

לסיכום, לכל $a\in\mathbf{N}$ המספר $a(a^2-1)$ מתחלק ב- 6, כלומר קיים $b\in\mathbf{N}$ כך ש- $a(a^2-1)=6b$.

מכאן נקבל ש- $a(a^2+11)=a(a^2-1)+12a=6b+12a=6(b+2a)$.

לכן גם $a(a^2+11)$ מתחלק ב- 6.