

תשובה 1

א. הפיתוח הוא: $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 3^i \cdot (-2)^{n-i} = 1$.

את הבדיקה עבור $n = 4$ השלימו בעצמכם.

ב. הפיתוח הוא: $D(10, k) = \sum_{i=0}^k D(7, i) D(3, k-i)$.

את הבדיקה עבור $k = 3$ השלימו בעצמכם.

תשובה 2

ג. תהי U קבוצת כל הדרכים לסדר את התאים במחרוזת ללא הגבלה.

משאלה 7 בממ"ח 04, $|U| = 7,560$. נסמן:

K_0 : קבוצת הדרכים לסדר את המחרוזת כך שמופיע הרצף AAA,

K_1 : קבוצת הדרכים לסדר את המחרוזת כך שמופיע הרצף BB,

K_2 : קבוצת הדרכים לסדר את המחרוזת כך שמופיע הרצף CC,

K_3 : קבוצת הדרכים לסדר את המחרוזת כך שמופיע הרצף DD.

אלה הסידורים שאינם מותרים. אנו רוצים למצוא את $|U - \bigcup_{i=0}^3 A_i|$.

נכין את המצרכים הדרושים לחישוב בעזרת הכלה והפרדה.

(i) לפי שאלה 8 בממ"ח 04, $|K_1| = 1,680$.

מובן ש- $|K_1| = |K_2| = |K_3|$.

את $|K_0|$ נחשב בדומה לחישובים שעשינו בממ"ח 04: $|K_0| = \frac{7!}{(2!)^3} = 630$.

(ii) נחשב חיתוכים בזוגות:

$$i \in \{1, 2, 3\}, |K_0 \cap K_i| = \frac{6!}{2!2!} = 180$$

$$i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\}, |K_i \cap K_j| = \frac{7!}{3!2!} = 420$$

יש 3 חיתוכים כאלה.

(iii) חיתוכים בשלישיות:

$$i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\}, |K_0 \cap K_i \cap K_j| = \frac{5!}{2!} = 60$$

$$|K_1 \cap K_2 \cap K_3| = \frac{6!}{3!} = 120$$

$$(iv) \text{ חיתוך ארבע הקבוצות יחד: } |K_0 \cap K_1 \cap K_2 \cap K_3| = 4! = 24$$

כעת בעזרת הכלה והפרדה, מספר הסידורים המותרים הוא:

$$|U| - \sum_{i=0}^3 |K_i| + \sum_{0 \leq i < j \leq 3} |K_i \cap K_j| - \sum_{0 \leq i < j < m \leq 3} |K_i \cap K_j \cap K_m| + |K_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap K_4|$$

$$= 7,560 - (3 \cdot 1,680 + 630) + (3 \cdot 180 + 3 \cdot 420) - (3 \cdot 60 + 120) + 24 = 3,414$$

תשובה 3

תהי U קבוצת כל הדרכים לחלק את כל האוכל למשפחות, ללא כל הגבלה.

בעזרת התשובות לממ"ח 04 שאלות 10, 11, נקבל אחרי ביצוע החישוב: $|U| = 47,190$.

תהי A_i ($i = 1, \dots, 4$) קבוצת החלוקות ב- U , בהן משפחה i אינה מקבלת דבר.

$$(i) |A_i| = D(3, 10) \cdot D(3, 8) = \binom{12}{2} \binom{10}{2} = 66 \cdot 45 = 2,970$$

יש 4 קבוצות A_i .

$$(ii) (i \neq j) |A_i \cap A_j| = D(2, 10) \cdot D(2, 8) = \binom{11}{1} \binom{9}{1} = 11 \cdot 9 = 99$$

יש 6 חיתוכים כאלה.

(iii) חיתוך של 3 קבוצות A_i שונות הוא מצב יחיד, בו משפחה אחת מקבלת את כל האוכל.

יש 4 חיתוכים של שלישיות.

(iv) חיתוך ארבע הקבוצות A_i הוא ריק, כי יש לחלק את האוכל.

לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מספר החלוקות המקיימות את הדרישה הוא:

$$47,190 - 4 \cdot 2,970 + 6 \cdot 99 - 4 \cdot 1 + 0 = 35,900$$

תשובה 4 (תקציר)

תת-קבוצות של קבוצת המספרים שדינה בחרה, לא כולל קבוצה ריקה : 255 (מדוע?)

הסכום הקטן ביותר האפשרי : 10 (מדוע?)

הסכום הגדול ביותר האפשרי : $260 = 29 + 30 + 31 + \dots + 36$ (מדוע?)

לכן מספר הסכומים השונים האפשרי הוא לכל היותר $251 = 260 - 10 + 1$.

מכיון שיש יותר קבוצות שונות מאשר סכומים, קיימות שתי קבוצות שיש להן אותו סכום.

ניקח שתי קבוצות כאלה.

אם יש להן אברים משותפים, נזרוק אותם משתי הקבוצות. אחרי שזרקנו קיבלנו שתי קבוצות

זרות של מספרים שיש להן אותו סכום.

איתי הראבן