



--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

מספר התלמיד הנבחן  
רשום את כל תשע הספרות

## שאלון בחינת גמר

20476 - מתמטיקה בדידה

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה 3 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה 5 שאלות.

עליכם לענות על 4 מתוך 5 השאלות.

משקל כל שאלה 25 נקודות.

אם תשיבו על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

שימו לב לכללים אלה:

- \* יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נאמר במפורש בגוף השאלה.
- \* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד, וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים".
- \* אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
- \* אם ברצונכם להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליכם לחזור ולהוכיח.
- \* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרתם אותם.

### חומר עזר:

כל חומר עזר מותר בשימוש.  
השימוש במחשב נישא ו/או כף יד אסור.  
אפשר להשתמש במחשבון מדעי.

בהצלחה !!!

### אינכם חייבים

להחזיר את השאלון לאוניברסיטה הפתוחה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

## שאלה 1

תהי  $A$  קבוצה לא-ריקה.  $I_A$  הוא יחס הזהות מעל  $A$ . יהי  $R$  יחס (רלציה) מעל  $A$ .  
נסמן ב-  $R'$  את המשלים של  $R$  ב-  $A \times A$  :  $R' = (A \times A) - R$   
בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצאו את הטענה הנכונה. **בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק.**  
למנוע עגמת נפש:  $R'$  אינו  $R^{-1}$ .

(5 נק') א. אם  $R$  סימטרי אז  $R'$  :

(1) סימטרי (2) אנטי-סימטרי

(3) לא חייב להיות סימטרי ולא חייב להיות אנטי-סימטרי.

(5 נק') ב. אם  $R$  אנטי-סימטרי אז  $R'$  :

(1) סימטרי (2) אנטי-סימטרי

(3) לא חייב להיות סימטרי ולא חייב להיות אנטי-סימטרי.

(5 נק') ג. אם  $R$  רפלקסיבי אז  $R'$  :

(1) רפלקסיבי (2) אינו רפלקסיבי

(3) יכול להיות רפלקסיבי ויכול לא להיות רפלקסיבי.

(5 נק') ד. אם  $R$  מקיים  $R \cap I_A = \emptyset$  אז  $R'$  מקיים :

(1)  $R' \subseteq (R')^2$  (2)  $(R')^2 \subseteq R'$  (3)  $(R')^2 = R'$ .

(5 נק') ה. אם  $R$  הוא סדר-חלקי מעל  $A$  ו-  $R' \subseteq R^{-1}$  אז :

(1)  $R$  הוא יחס שקילות מעל  $A$  (2)  $R$  הוא סדר-מלא מעל  $A$

(3) לא קיים  $R$  כזה.

## שאלה 2

לכל אחת מהקבוצות הבאות, קבעי אם עוצמתה: סופית /  $\aleph_0$  /  $C$  / גדולה מ-  $C$ .  
**נמקי בקיצור** ( $\mathbb{Z}$  היא קבוצת המספרים השלמים,  $\mathbb{R}$  היא קבוצת המספרים הממשיים.  
פעולת ההפרש הסימטרי  $\oplus$  הוגדרה בעמ' 27 בכרך "תורת הקבוצות").

(9 נק') א.  $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$

(8 נק') ב.  $P(P(\mathbb{Z}))$

(8 נק') ג. קבוצת הפונקציות של  $\mathbb{Z}$  ל-  $\mathbb{R}$ .

### שאלה 3

(16 נק') א. מצאו את מספר יחסי השקילות  $E$  מעל  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , המקיימים:

$$(1, 2) \notin E, (1, 3) \notin E, (1, 4) \notin E, (2, 3) \notin E, (2, 4) \notin E, (3, 4) \notin E.$$

למשל  $I_A$  הוא יחס שקילות כזה.

להסיר ספק: מדובר על יחסי שקילות המקיימים את כל 6 הדרישות בעת ובעונה אחת.

(9 נק') ב. מצאו את מספר יחסי השקילות  $E$  מעל  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , המקיימים:

$$(1, 2) \in E, (2, 3) \in E, (4, 5) \in E.$$

מדובר על יחסי שקילות המקיימים את כל 3 הדרישות בעת ובעונה אחת.

### שאלה 4

נתון  $k \neq 0$ . סדרה מסוימת מקיימת את יחס הנסיגה (יחס רקורסיה):

$$a_{n+2} = -4ka_{n+1} + 12k^2a_n \quad \text{ידוע כי } k = \frac{1}{8}a_1 \quad \text{וכן ידוע ש- } a_0 = 0.$$

(20 נק') א. פתור את יחס הנסיגה ורשום ביטוי מפורש עבור  $a_n$ .

את הביטוי עליך להביא לצורה:  $a_n = (\text{משקו}) \cdot k^n$ ,

כאשר הביטוי שבסוגרים תלוי ב-  $n$  אך אינו תלוי ב-  $k$ .

(5 נק') ב. חשב בשתי דרכים את  $a_2$ . התשובה הנדרשת היא ביטוי התלוי ב-  $k$ .

### שאלה 5

**הגדרה:** צומת מפריד בגרף הוא צומת שאם נמחק אותו (ואת הקשתות הסמוכות לו) מהגרף, נקבל גרף בעל מספר רכיבי קשירות גדול יותר מזה של הגרף המקורי.

(10 נק') א. תנו דוגמה (רצוי בשרטוט) לגרף **אילרי** שיש בו צומת מפריד. ציינו מיהו הצומת המפריד. הסבירו מדוע הגרף שהצגתם הוא אילרי.

(15 נק') ב. יהי  $G$  גרף שיש בו צומת מפריד. הוכיחו ש-  $G$  אינו המילטוני. להלן הצעה לתחילת ההוכחה: יהי  $x$  צומת מפריד ב-  $G$ . נסמן ב-  $G^*$  את הגרף המתקבל מ-  $G$  לאחר השמטת  $x$  והקשתות הסמוכות ל-  $x$ . מהנתון, ב-  $G^*$  יש לפחות שני רכיבי קשירות. נבחר צמתים  $y, z$  (המשיכו מכאן).

להסיר ספק: בסעיף ב נדרשת הוכחה כללית, לא הוכחה עבור הגרף המסוים שמצאתם בסעיף א...

**בהצלחה!**

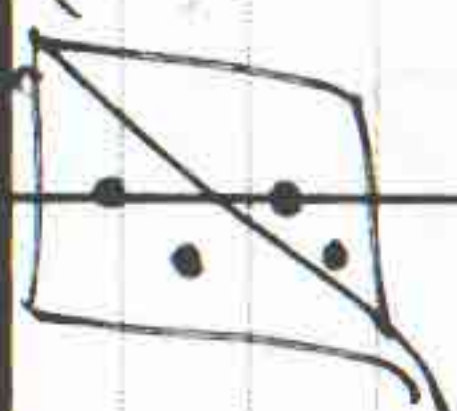


4:05

7 (שאלה)

$$aRb \Leftrightarrow bRa$$

$$(aRb \Rightarrow bRa) \wedge (bRa \Rightarrow aRb)$$



סימטרי  $R'$  1 2

✓

כל  $R'$  היא סימטריה כללית סימטרי

✓

$$aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$$



$R \{aRb\}$   $R' \{bRa\}$   
 $\{bRa\}$

$$I_A \subseteq R \Rightarrow I_A \subseteq R'$$

$R'$  כללית (פסקה 2) 3

✓

$$R \cap I_A = \emptyset \Rightarrow I_A \not\subseteq R \Rightarrow I_A \subseteq R' \Rightarrow R' \subseteq (R')^2$$

1 3

✓

A.S.  $R \cap R' \subseteq I_A$  מכל  $R$

$R, R \subseteq R'$   
 $I, R' \subseteq R$

3 2

X

$$I_A \not\subseteq R'$$



4:22

4:44



$$(A-B) \cup (B-A)$$



B-A

$$a \in R-Z, b \in Z \quad a \in Z, b \in R-Z$$

$$a \in (R-Z) \vee a \in Z, b \in Z \vee b \in R-Z$$

$$\Downarrow$$

$$a \in R, b \in R$$

$$(R \times Z) \oplus (Z \times R)$$

$$a \in R, b \in Z$$

$$a \in Z, b \in R$$

?

סעיף בחינות א' ו ב' שאלה 10

$$(R \times Z) \oplus (Z \times R)$$

$$R \times R$$

$$|R| = C$$

$$|R \times R| = C \cdot C = C$$

סעיף בחינות א' ו ב'

(ב)  $|R| = C$   $P(Z) = C$   $N \sim Z$   $P(N) = C$   $s.z.s$   $|Z| = X_0$   $P(P(Z)) > C$   $P(R) > |R|$

(ג)  $C^{X_0} \subseteq |R|^{|Z|} \subseteq R^Z$   $R \delta Z \sim$   $C^{X_0} = C$   $s.z.s$

מה  
אם  
הייתי  
עושה  
כך  
הייתי  
מקבל  
את  
התוצאה  
הנכונה

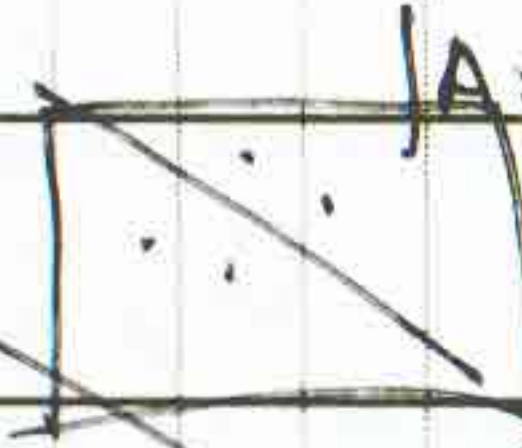
✓  
3  
7



$E \subseteq E^T R$   $(I_A \subseteq E \subseteq A \times A)$   $A$  שלם שניתן  $E$   $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  3 8/10

5

$$aEb \Leftrightarrow bEa \quad E = E^{-1}$$



$$|A \times A| = 36 \quad |A| = 6$$

$$|I_A| = 6 \quad |A \times A - I_A| = 30$$

$E^2 \subseteq E^T$

$$aEb \wedge bEc \Rightarrow aEc$$

\* (ק"ס 15 בלבד)  $a \neq b \wedge (aRb \Leftrightarrow bRa) \in$  כך

כל  $E$  חייב להכיל בין 0-15 נקודות בלבד.

$$E_i \in A \times A - \left\{ \begin{matrix} 34 & 24 & 23 & 14 & 12 \\ 43 & 42 & 32 & 41 & 31 \end{matrix} \right\} \Rightarrow E_i \in \left( I_A \cup \left\{ \begin{matrix} 15 & 16 & 25 & 26 & 35 & 36 & 44 & 55 & 66 \\ 57 & 67 & 52 & 62 & 53 & 63 & 64 & 65 \end{matrix} \right\} \right)$$

24



$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a_{n+2} = -4k a_{n+1} + 12k^2 a_n$$

$$a^{n+2} = -4k a^{n+1} + 12k^2 a^n \quad / a^n$$

$$a^2 = -4k a + 12k^2$$

$$a^2 + 4k a - 12k^2 = 0$$

$$\frac{-4k \pm \sqrt{16k^2 + 48k^2}}{2}$$

$$\frac{-4k \pm \sqrt{64k^2}}{2}$$

$$\frac{-4k \pm 8k}{2}$$

$$(-6k, 2k) \quad \checkmark$$

$$a_{n+2} = -4 \cdot \frac{a_1}{8} \cdot a_{n+1} + 12 \cdot \frac{a_1}{8} a_n$$

$$a^{n+2} = -\frac{1}{2} a \cdot a^{n+1}$$

$$a_2 = -4k \cdot a_1 + 12k^2 a_0$$

$$a_2 = -4k \cdot 8k$$

$$a_2 = -32k^2$$

✓

$$a_n = A \cdot (-6k)^n + B(2k)^n$$

$$a_n = (A(-6)^n + B2^n) \cdot k^n$$

$$n=0 \quad 0 = A+B$$

$$A = -B$$

✓

$$k = \frac{1}{8} a_1 \Rightarrow a_1 = 8k$$

$$n=1 \quad 8k = (-6A + 2B) \cdot k \quad / k$$

$$8 = -6A + 2B$$

$$8 = 6B + 2B$$

$$8 = 8B$$

$$B = 1$$

$$A = -1$$

✓

$$a_n = (-(-6)^n + 2^n) k^n$$

$$a_0 = (-(-6)^0 + 2^0) \cdot k^0 = (-1 + 1) \cdot 1 = 0$$

$$a_1 = (-(-6)^1 + 2^1) k^1 = 8k$$

$$a_2 = (-(-6)^2 + 2^2) \cdot k^2$$

(2)

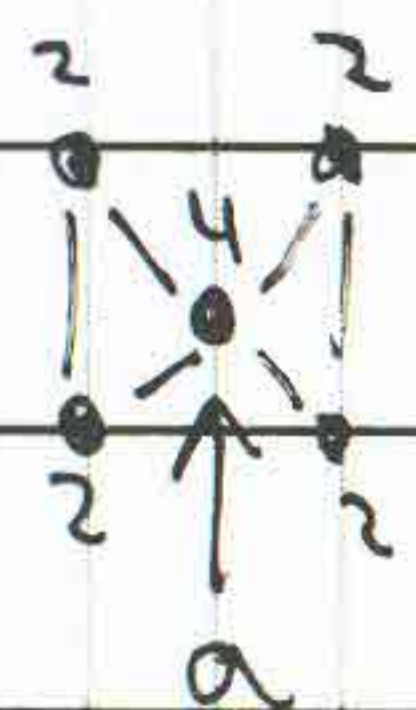
$$a_2 = (-36 + 4) \cdot k^2$$

✓

$$a_2 = -32k^2$$



שאלה 5



א

נבדוק את האם  $\phi$  הוא איזומורפיזם.  
 נבדוק אם  $\phi$  הוא איזומורפיזם.

נבדוק אם  $\phi$  הוא איזומורפיזם.

אם נסתכל על  $\phi$  כפונקציה  $\phi: A \rightarrow B$ ,  
 נראה כי  $\phi$  היא פונקציה חד-חד-ערכית.

אם  $\phi$  היא פונקציה חד-חד-ערכית, אז  $\phi$  היא איזומורפיזם.

נבדוק אם  $\phi$  היא פונקציה חד-חד-ערכית.

נבדוק אם  $\phi$  היא פונקציה חד-חד-ערכית.

אם  $\phi$  היא פונקציה חד-חד-ערכית, אז  $\phi$  היא איזומורפיזם.

נבדוק אם  $\phi$  היא פונקציה חד-חד-ערכית.

אם  $\phi$  היא פונקציה חד-חד-ערכית, אז  $\phi$  היא איזומורפיזם.

נבדוק אם  $\phi$  היא פונקציה חד-חד-ערכית.

אם  $\phi$  היא פונקציה חד-חד-ערכית, אז  $\phi$  היא איזומורפיזם.

נבדוק אם  $\phi$  היא פונקציה חד-חד-ערכית.

אם  $\phi$  היא פונקציה חד-חד-ערכית, אז  $\phi$  היא איזומורפיזם.

נבדוק אם  $\phi$  היא פונקציה חד-חד-ערכית.

אם  $\phi$  היא פונקציה חד-חד-ערכית, אז  $\phi$  היא איזומורפיזם.

III

10  
10

12  
15