ענו על ארבע מחמש השאלות הבאות

שאלה 1 (25 נקודות)

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל כקלט גרף לא מכוון $G=(V,E)$, שני צמתים $u,v\in V$ ומוצא את מספר המסלולים הקצרים ביותר בין u ל-v ב-G.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$ עם פונקצית משקל $w:E\to\mathbb{R}^+$. יהי $T=(V,E')$ עץ פורש של G המקיים את התכונה הבאה: לכל קשת $e\in E$ כך ש- $e\notin T$ קיים מעגל ב-G המכיל את e ובו ל-e משקל מקסימלי.

א. הוכיחו כי אם משקלי הקשתות ב-G שונים זה מזה אז בהכרח T הוא עץ פורש מינימלי.

ב. הראו כי ללא התנאי המובא בסעיף א, יתכן כי T אינו עץ פורש מינימלי.

שאלה 3 (25 נקודות)

בגרף לא מכוון $G=(V,E)$ גשר היא קשת $e\in E$ שהסרתה מהגרף הופכת את G לגרף לא קשיר.

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

קשת e היא גשר אם ורק אם היא בעלת אחת משתי התכונות הבאות:

א. היא פוגעת בצומת שדרגתו 1.

ב. היא מחברת שני צמתי הפרדה שאינם נמצאים על מעגל אחד.

שאלה 4 (25 נקודות)

במועדון ריקודים רוקדים ריקודי זוגות.

תהי A קבוצת הגברים ו-B קבוצת הנשים.

לכל גבר $a_i \in A$ יש קבוצת נשים $B_i \subseteq B$ אשר מתאימות לו.

לכל אישה $b_j \in B$ יש קבוצת גברים $A_j \subseteq A$ אשר מתאימים לה.

בנוסף מוגדרת קבוצה $X \subseteq A \cup B$ של אנשים שמרנים שמוכנים לרקוד במהלך הערב עם אדם אחד לכל היותר.

כתבו אלגוריתם אשר מוצא סידור של זוגות לריקודים במועדון במהלך הערב, כך שכל גבר ירקוד רק עם נשים שמתאימות לו, כל אישה תרקוד רק עם גברים שמתאימים לה, השמרנים יהיו מרוצים, ומספר הריקודים יהיה מקסימלי.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

הערה: לשאלה זו התקבל תיקון, המבהיר שהכוונה במספר ריקודים מקסימלי היא למספר זוגות חוקיים מקסימלי.

שאלה 5 (25 נקודות)

כפל מטריצות בוליאני מוגדר באופן הבא:

בהנתן A, B מטריצות בוליאניות (כלומר, שערך כניסותיהן הו 0 או 1) בגודל $n\times n$, המכפלה הבוליאנית $C = A\odot B$ מוגדרת על-ידי: $c_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\wedge b_{kj}\right)$.

תהי A מטריצת השכנויות של גרף מכוון $G=\left(V,E\right)$.

נסמן ב- $A^{\odot k}$ את החזקה ה-k-ית של A כאשר משתמשים בכפל בוליאני של מטריצות.

ידוע כי מתקיים $\left(A^{\odot k}\right)_{ij}=1$ אם ורק אם קיים ב-G מסלול באורך k בין i ל-j.

נניח כי ניתן לחשב את המכפלה הבוליאנית של שתי מטריצת מגודל $n\times n$ בזמן $M\left(n\right)$.

הראה כי ניתן לחשב בזמן $O\left(M\left(n\right)\log n\right)$ מטריצה C כך שלכל $1\le i,j\le n$ מתקיים $\delta\left(i,j\right)\le C_{ij}\le 2\cdot\delta\left(i,j\right)$, כאשר $\delta\left(i,j\right)$ הוא המרחק בין הצמתים i ו-j בגרף G.

סוף!