

אלגוריתמים – פתרונות לתרגיל 3

1. נפעיל את האלגוריתם למציאת רכיבי קשירות חזקה, ונמצא מיון טופולוגי של G^{SCC} . נניח רכיבי הקשירות החזקה לפי סדר המיון הטופולוגי הם C_1, \dots, C_k . הקודקודים היחידים שיכולים להיות בקבוצה שמחפשים הם קודקודי C_1 . לכן נריץ BFS מ- C_1 ב- G^{SCC} . אם כל C_i נגיש מ- C_1 אז קבוצת הקודקודים שמחפשים היא C_1 , ואחרת \emptyset .
2. נפעיל את האלגוריתם למציאת רכיבי קשירות חזקה, ונמצא מיון טופולוגי של G^{SCC} . נניח רכיבי הקשירות החזקה לפי סדר המיון הטופולוגי הם C_1, \dots, C_k . קל לראות ש- G חצי קשיר בחזקה \Leftrightarrow לכל $1 \leq i \leq k-1$ יש קשת (C_i, C_{i+1}) .
3. נגדיר פונקצית משקל w' על הקשתות, כך ש: $w'(u,v) = w(u) + w(v)$, $\forall (u,v) \in E$, ואז לכל עץ פורש $T=(V,F)$ מתקיים $w'(T) = \sum_{(u,v) \in F} w'(u,v) = \sum_{(u,v) \in F} [w(u) + w(v)] = \sum_{v \in V} d_T(v) \cdot w(v)$.
4. הראנו בכיתה שאם $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{|V|-1}$ משקלי הקשתות של עץ פורש מינימלי ו- $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{|V|-1}$ משקלי הקשתות של עץ פורש כלשהו אז לכל i $a_i \leq b_i$. לכן כל עץ פורש מינימלי הוא מינימלי גם לפי הגדרה זו, ולכן נמצא פשוט עץ פורש מינימלי לפי ההגדרה הרגילה.
5. אם u קודקוד מנתק אז אין עץ כזה. אחרת, נסיר את u מהגרף, נמצא עץ פורש מינימלי של שאר הגרף, ונחבר אליו את u ע"י הקשת הקלה ביותר שלו.
6. נגדיר גרף $G'=(V,E')$, כאשר $E'=\{e \in E \mid w(e) < w(u,v)\}$, ונבדוק אם יש מסלול בין u ל- v ב- G' (ע"י BFS או DFS). נראה שקיים עץ פורש מינימלי שמכיל את הקשת $(u,v) \Leftrightarrow$ אין מסלול בין u ל- v ב- G' .
 \Leftarrow נניח שיש מסלול בין u ל- v ב- G' , ונסתכל על ריצה של Kruskal. כל הקשתות של G' קלות יותר מ- (u,v) , לכן האלגוריתם יעבור עליהן קודם. יש מסלול בין u ל- v ב- G' , לכן יש גם מסלול בין u ל- v בעץ הפורש שהאלגוריתם מוצא, עוד לפני שהוא מטפל בקשת (u,v) , ולכן היא סוגרת מעגל והאלגוריתם לא יוסיף אותה לעץ.
 \Rightarrow נסתכל על ריצה של Kruskal שבה הקשת (u,v) מופיעה במיון ראשונה מבין כל הקשתות בעלות משקל $w(u,v)$. אין מסלול בין u ל- v ב- G' , וכל הקשתות שהאלגוריתם מטפל בהן לפני (u,v) הן קשתות של G' , לכן הקשת (u,v) לא תסגור מעגל, והאלגוריתם יוסיף אותה לעץ.