מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* **בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק') א. α,β הם פסוקים מורכבים. בלוח אמת משותף שלהם יש שורות שבהן שניהם מקבלים ערך **T** ויש שורות שבהן שניהם מקבלים ערך **F** .

יש בלוח גם שורות שבהן α מקבל ערך **F** ו- β מקבל ערך **T**,

אבל אין בלוח אף שורה בה α מקבל **T** ו- β מקבל **F** .

מהאמור כאן נובע:

[1] $\alpha \to \beta$ הוא טאוטולוגיה **[2]** $\beta \to \alpha$ הוא טאוטולוגיה

[3] $\alpha \to \beta$ הוא סתירה **[4]** $\beta \to \alpha$ הוא סתירה

[5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

(7 נק') **ב.** __**תזכורת:**__ יחס (רלציה בינארית) מקבוצה A לקבוצה B הוגדר בעמ' 31 בכרך "תורת הקבוצות", בתחילת הגדרה 2.3. **N** היא קבוצת המספרים הטבעיים.

עוצמת קבוצת היחסים (הרלציות הבינאריות) מ- **N** ל- $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ היא:

[1] $\aleph_0$ **[2]** C **[3]** 2^C

[4] עוצמה גדולה מ- 2^C **[5]** 0 (אין יחסים כאלה).

(6 נק') **ג.** בפרק 1 ב"תורת הגרפים" מופיע האפיון הבא של גרף דו-צדדי:

"גרף בעל לפחות שני צמתים הוא דו-צדדי **אם ורק אם** אין בו מעגל באורך אי-זוגי".

נזכור שביער, ובפרט בעץ, אין מעגלים כלל. איזו מהאמירות הבאות נכונה?

[1] כל יער על יותר מצומת אחד הוא גרף דו-צדדי.

[2] הטענה הקודמת אינה נכונה, אבל כל עץ על יותר מצומת אחד הוא גרף דו-צדדי.

[3] עץ על מספר אי-זוגי של צמתים לעולם **אינו** גרף דו-צדדי.

[4] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו : 81 נקודות

שאלה 2

תהי $A=\{1,2,3\}$ ותהי K קבוצת כל היחסים מעל A **שהם סימטריים אך אינם רפלקסיביים**.
בכרך "תורת הקבוצות" בעמ' 94, שאלה 3.25א, מוכח שיחס ההכלה $\subseteq$ הוא סדר-חלקי מעל כל קבוצה של קבוצות. מכיון שיחס הוא סוג מסוים של קבוצה (קבוצה של זוגות סדורים), מתקבל מהאמור שיחס ההכלה $\subseteq$ הוא סדר-חלקי מעל K. השאלה מתייחסת לסדר-חלקי זה.

(9 נק') א. הראו שיש ב- K איבר קטן ביותר - מיהו? הוכיחו שהוא הקטן ביותר.

(9 נק') ב. מצאו איבר מקסימלי ב- K. הוכיחו שהוא מקסימלי.

(9 נק') ג. הוכיחו שאין ב- K איבר גדול ביותר.

שאלה 3

תהי $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$. מיצאו כמה פונקציות $f:A\to A$ מקיימות את התנאי :
ארבעת המספרים 1,2,3,4 נמצאים בתמונה של f (כלומר כל אחד מהמספרים 1,2,3,4 מתקבל על-ידי הפעלת f על איבר כלשהו של A). ייתכן בהחלט שאיברים נוספים ב- A מתקבלים גם הם.

דוגמאות :

(i) הפונקציה השולחת את כל איברי A ל- 1 **אינה** מקיימת את התנאי.

(ii) פונקציית הזהות, השולחת כל איבר לעצמו, מקיימת את התנאי.

(iii) הפונקציה f המוגדרת כך :

$$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1\ ,\ f(5)=2\ ,\ f(6)=3\ ,\ f(7)=4$$

מקיימת את התנאי.

כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה. אין הכרח להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 4

יהי a_n מספר הסדרות באורך n, שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0,1,2\}$,

אשר אין בהן הופעה של **11** ואין בהן הופעה של **12** (מותרת הופעה של 21).

דוגמאות לסדרות **מותרות** באורך 4: 1021 , 2222 .

דוגמאות לסדרות **אסורות** באורך 4: 2011 , 0120 .

(10 נק׳) א. רשמי בעזרת חישוב ישיר את a_0, a_1, a_2. רשמי יחס נסיגה עבור a_n.

בדקי שהערכים שרשמת עבור a_0, a_1, a_2 מתאימים ליחס הנסיגה.

(17 נק׳) ב. פתרי את יחס הנסיגה וקבלי נוסחה מפורשת עבור a_n.

ביטויים כגון $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ יש להשאיר כפי שהם.

ביטויים כגון $\sqrt{12}$ יש להעביר לצורה $2\sqrt{3}$: $\sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = 2\sqrt{3}$.

שאלה 5

(15 נק׳) א. G הוא גרף פשוט **ולא קשיר** על n צמתים ($n \geq 2$).

יש ב- G בדיוק שני צמתים בעלי דרגה זוגית.

הוכיחו שבגרף **המשלים** של G יש מסלול אוילר שאינו מעגל.

נמקו **בצורה מדויקת** כל צעד בהוכחה.

הגרף המשלים הוגדר בחוברת ״תורת הגרפים״, הגדרה 1.4 בעמ׳ 12 .

(12 נק׳) ב. להלן נסיון להציג משפט הפוך לטענה של סעיף א:

״אם G הוא גרף פשוט ולא קשיר על n צמתים ($n \geq 2$),

ובגרף המשלים של G יש מסלול אוילר שאינו מעגל,

אז יש ב- G בדיוק שני צמתים בעלי דרגה זוגית״.

הראו על-ידי דוגמא נגדית שטענה זו **אינה נכונה**.

בהצלחה!