מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20417 – **אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1, 2 ו-3 בספר הלימוד.

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: ב-2012 **מועד אחרון להגשה:** **06.04.2012**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

יהי T **עץ** בו לכל צומת דרגה 3 לכל היותר. נניח כי ב- T ישנם n צמתים.

א. הוכיחו: על ידי מחיקה של קשת **יחידה** מ- T ניתן לקבל גרף T' כך ש**בכל** רכיב קשירות של T' יש $\frac{3}{4}n$ צמתים לכל היותר.

ב. הראו כי **קיים** עץ בו לכל צומת דרגה 3 לכל היותר, כך ש**לכל** קשת, הגרף המתקבל ממחיקת הקשת מכיל רכיב קשירות שגודלו לפחות $\frac{3}{4}n$.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתון גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$. תהי $S\subseteq V$ קבוצה לא ריקה. נגדיר את המרחק של קודקוד $u\subseteq V$ מ- S כאורכו של המסלול הקצר ביותר המחבר את u לקודקוד מ- S. אם $u\in S$ מרחקו מ- S מוגדר להיות 0.

נגדיר את $L_S(i)$ כקבוצת כל הקודקודים שמרחקם מ- S שווה ל- i. כתבו אלגוריתם יעיל המחשב בהנתן גרף כנ"ל וקבוצה S את השכבות $L_S(i)$ לכל i עבורו $L_S(i)$ אינה ריקה. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 3 (20 נקודות)

בהנתן גרף **לא מכוון** $G=(V,E)$, כתבו אלגוריתם יעיל הבודק האם ניתן לתת כיוונים לקשתות כך שבגרף ה**מכוון** המתקבל לכל קודקוד **דרגת הכניסה גדולה מאפס**. שימו לב-לכל קשת $\{u,v\}\in E$ ניתן לבחור כיוון **יחיד**: (u,v) או (v,u). במידה והתשובה חיובית, על האלגוריתם להחזיר כיוונים לקשתות המקיימים את הנדרש.

שאלה 4 (20 נקודות)

א. פתרו את תרגיל 3.2 בספר הלימוד (עמוד 117).

בסעיפים הבאים אנחנו מניחים כי $G=(V,E)$ גרף קשיר.

ב. הוכיחו או הפריכו: עבור **כל** עץ פורש T של G קיים עץ DFS, שגרף התשתית שלו הוא T (גרף התשתית של גרף מכוון הוא גרף **לא** מכוון, המתקבל על-ידי "הסרת" הכיוונים מהקשתות).

ג. הוכיחו או הפריכו: לכל עצי ה-DFS של G יש אותו מספר עלים.

שאלה 5 (20 נקודות)

בהנתן גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$, **הקוטר** של הגרף מוגדר כמרחק המקסימלי בין שני צמתים בגרף (כזכור המרחק בין שני צמתים הוא אורך המסלול הקצר ביותר המחבר ביניהם).

כתבו אלגוריתם יעיל המחשב את הקוטר של גרף קשיר **חסר מעגלים**. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20417 - אלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרק 4 בספר הלימוד

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2012ב **מועד אחרון להגשה: 26.4.2012**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

בגרף $G=(V, E)$ לא מכוון וקשיר עם משקלות חיוביים לקשתות נתון עץ פורש מינימלי T. תהי $e\in E$ קשת בגרף, ויהי $G'=(V, E')$ הגרף המתקבל מ-G על-ידי הורדת e (כלומר, $E'=E-\{e\}$). נניח ש-G' קשיר ואנו רוצים למצוא אלגוריתם שיתקן את T כך שיתקבל ממנו T' שהוא עץ פורש מינימלי של G'.

הציעו אלגוריתם לבעיה ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתון גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$. נניח כי קיימת קשת **יחידה** $e\in E$ שמשקלה **שלילי**. כל שאר הקשתות הן במשקל אי שלילי. כמו כן נניח כי אין בגרף מעגלים במשקל שלילי. בהנתן $s,t\in V$ כתבו אלגוריתם יעיל המחשב את המסלול הקצר ביותר בין s ל-t. הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתון גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$. בהינתן $s,t\in V$ הציעו אלגוריתם יעיל המוצא מסלול בין s ל-t כך **שסכום דרגות של הקודקודים במסלול** קטן ככל האפשר. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם ונתחו את סיבוכיותו.

שאלה 4 (20 נקודות)

פתרו את שאלה 4.31 בספר הלימוד.

שאלה 5 (20 נקודות)

אנו אומרים כי עץ T הוא בינרי לחלוטין אם לכל צומת שלו שאינו עלה יש שני בנים. הוכיחו:

לכל עץ בינרי לחלוטין T בעל n עלים קיימת סדרת שכיחויות $f_1, f_2, \ldots, f_n$ כך שעץ הופמן של סדרה זו הוא T.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: **20417 - אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר הלימוד.

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: ב-2012 **מועד אחרון להגשה:** **25.5.2012**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$ עם פונקציית משקל $w:E\rightarrow R^+$ וצומת $s\in V$, נסמן ב- $\delta(v)$ את משקלו של מסלול קצר ביותר מ-s ל-v, עבור כל $v\in V$. עבור צומת $t\in V$ מסלול מ-s ל-t (לאו דווקא פשוט) ייקרא **מסלול שני קצר ביותר** אם הוא קצר ביותר מבין כל המסלולים מ-s ל-t, שמשקלם גדול ממש מ- $\delta(t)$.

קשת $e=(u,v)$ ב-E תיקרא קשת **שימושית** אם קיים מסלול קצר ביותר מ-s ל-v שהקשת האחרונה בו היא e.

א. הוכיחו שאם מסלול מ-s ל-t מכיל רק קשתות שימושיות אז הוא מסלול קצר ביותר מ-s ל-t.

ב. הוכיחו שאם מסלול מ-s ל-t מכיל קשת לא שימושית אז הוא אינו מסלול קצר ביותר מ-s ל-t.

ג. יהי P מסלול שני קצר ביותר מ-s ל-t. הוכיחו שקיימת בו בדיוק קשת לא שימושית אחת $e=(u,v)$, ומתקיים הרישא של P מ-s ל-u היא מסלול קצר ביותר מ-s ל-u, והסיפא של P מ-v ל-t היא מסלול קצר ביותר מ-v ל-t.

ד. כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו שמקבל כקלט גרף G כמתואר בתחילת השאלה, ושני צמתים s ו-t ומוצא משקל מסלול שני קצר ביותר מ-s ל-t ב-G. נמקו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו.

רמז: האלגוריתם צריך להיעזר בטענות שהוכחו בסעיפים הקודמים. גם אם לא הוכחתם חלק מהטענות תוכלו להסתמך עליהן בכתיבת האלגוריתם.

שאלה 2 (20 נקודות)

א. בהנתן **עץ** הראו כי קיים קודקוד שמחיקתו מפרקת את הגרף לרכיבי קשירות שגודלם אינו עולה על cn כאשר $0<c<1$ קבוע שאינו תלוי ב- n.

ב. בהנתן **עץ** המיוצג על ידי רשימת שכנויות, כתבו אלגוריתם **הפרד ומשול** שזמן ריצתו $O(n^2)$ המחשב לכל שני צמתים את המסלול הקצר ביותר ביניהם. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם. שימו לב-פתרון המחשב את המרחקים בין כל שני צמתים בעזרת BFS לא יתקבל.

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי $p(x)$ פולינום מדרגה n. ידוע כי $DFT_n(p(x))=(v_1,...,v_n)$. חשבו את $DFT_{2n}(p(x^2))$.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי A מטריצה מסדר $n\times n$.

א. הוכיחו כי אם $n=2$ ניתן לחשב את A^2 בעזרת 5 פעולות כפל של מספרים ממשיים.

ב. פרופסור תחכמוני טוען כי ברשותו אלגוריתם הפרד ומשול המחשב את A^2 עבור מטריצה מסדר $n\times n$ (n טבעי) בזמן $O(n^{\lg 5})$. הפרופסור מציע להשתמש בגישת רקורסיבית כך שבעזרת סעיף א, מתקבלות 5 תת בעיות מגודל $n/2$. האם האלגוריתם שהפרופסור מציע אכן פותר את הבעיה בסיבוכיות הנדרשת? הסבירו את תשובתכם.

שאלה 5 (20 נקודות)

פתרו את שאלה 5.7 בפרק 5 בספר הלימוד.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20417 - אלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: פרק 6 בספר הלימוד

מספר השאלות: 5

משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: ב-2012

מועד אחרון להגשה: 8.6.2012

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (25 נקודות)

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ זיווג M הוא קבוצת קשתות שאינן חולקות קודקוד משותף (כלומר לא קיים קודקוד השייך לשתי קשתות שונות ב- M). בהינתן גרף לא מכוון **חסר מעגלים** כתבו אלגוריתם תכנון דינמי יעיל המחזיר זיווג בגודל **מקסימלי**. נתחו את סיבוכיות האלגוריתם שלכם והוכיחו את סיבוכיותו.

שאלה 2 (20 נקודות)

בהנתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ברצוננו לבדוק האם ניתן לחלק את קודקודי הגרף לשתי קבוצות זרות של קודקודים A ו- B, כך שמתקיים:

i) $|A|=|B|=|V|/2$

ii) **לא קיימת קשת בגרף שקצה אחד שלה מצוי ב- A והשני ב- B.**

הציעו אלגוריתם פולינומיאלי הפותר את הבעיה, כלומר מחזיר "כן" אם קיימת חלוקה כנ"ל ו"לא" אחרת.

שאלה 3 (25 נקודות)

הציעו אלגוריתם יעיל הפותר את בעיית תרמיל הגב בשלמים תחת ההנחה כי לכל פריט משקל w_1 או w_2 (כלומר יש **שני** משקלים אפשריים לפריטים). הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

שאלה 4 (25 נקודות)

הוכיחו: אם מריצים את אלגוריתם Floyd-Warshal ממדריך הלמידה על גרף מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים על הקשתות אזי אין בגרף מעגל עם משקל שלילי אס״ם **לכל** i, $M(i,i)\geq 0$.

שאלה 5 (25 נקודות)

פתרו את שאלה 6.22 בספר הלימוד.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20417 - אלגוריתמים

חומר הלימוד למטלה: מדריך הלמידה, פרקים ד', ה'

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה**: 6 נקודות

סמסטר: ב-2012 **מועד אחרון להגשה**: **22.6.2012**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ **כיסוי ע"י קשתות** היא קבוצת קשתות T כך שלכל $u\in V$ קיימת קשת ב- T ש- u הוא אחד מקצותיה.

הוכיחו כי לכל גרף לא מכוון $G=(V,E)$ חסר קודקודים מבודדים, $\nu(G)+\xi(G)=|V|$, כאשר $\nu(G)$ הוא הגודל המקסימלי של זיווג בגרף ו- $\xi(G)$ הוא הגודל המינימלי של כיסוי ע"י קשתות. הסבירו כיצד נובע מכך אלגוריתם פולינומיאלי לחישוב כיסוי ע"י קשתות שגודלו מינימלי בגרף דו צדדי.

שאלה 2 (20 נקודות)

בהינתן גרף לא מכוון קשיר $G=(V,E)$ חתך בגרף היא קבוצת קשתות שהסרתה מנתקת את קשירות הגרף. קיבולת החתך היא מספר הקשתות בו. חתך מינימום הוא חתך מקיבולת מינימלית.

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון קשיר. נגדיר פעולת כיווץ של קשת כך: בהינתן קשת $e=(u,v)$ הגרף המקבל לאחר הכיווץ מסומן ב- $G\setminus e$. שני הקודקודים u,v מאוחדים לקודקוד יחיד uv. אם ל- $w\neq u,v$ היתה קשת ל- u או ל- v ב- G אזי תהיה לו קשת ל- uv. פרט לכך קודקודי הגרף וקשתותיו נשארים ללא שינוי. שימו לב כי ייתכנו קשתות מקבילות בגרף המתקבל.

יהי G' גרף שנתקבל לאחר מספר פעולות כיווץ מ- G.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. חתך המינימום ב- G' לעולם אינו קטן (ממש) מחתך המינימום ב- G.

ב. חתך המינימום ב- G' לעולם אינו גדול (ממש) מחתך המינימום ב- G.

שאלה 3 (20 נקודות)

פרופסור חכמי טוען שקיים אלגוריתם פשוט למציאת מספר מקסימלי של מסלולים זרים בקשתות בין s ל- t בגרף מכוון $G=(V,E)$. האלגוריתם מחפש מסלול בין s ל- t ב- G בעזרת

BFS. אם יש מסלול הוא מוחק את כל קשתות המסלול מ- G וחוזר על התהליך על הגרף ללא קשתות אלו. האלגוריתם עוצר כאשר אין מסלול בין s ל- t ומחזיר את כל המסלולים שנמצאו באיטרציות הקודמות.

הוכיחו או הפריכו: האלגוריתם הנ"ל מוצא מספר **מקסימלי** של מסלולים זרים בקשתות בין s ל- t.

שאלה 4 (20 נקודות)

גרף זרימה עצי מתקבל מעץ מכוון (עץ מושרש, המכוון מכיוון השורש אל הצאצאים), שנוסף לו צומת חדש ונוספה קשת מכל עלה בעץ אל הצומת החדש.

רשת זרימה עצית היא רשת זרימה המבוססת על גרף זרימה עצית, בתוספת פונקציית קיבול, כאשר המקור של הרשת הוא הצומת היחיד בגרף שדרגת הכניסה שלו 0 (כלומר, שורש העץ) והבור של הרשת הוא הצומת היחיד בגרף שדרגת היציאה שלו 0 (כלומר, הצומת החדש).

כתבו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המקבל כקלט רשת זרימה עצית ומוצא בה זרימה מקסימלית. נמקו את נכונות האלגוריתם ונתחו את סיבוכיותו

שאלה 5 (20 נקודות)

נוסחת 3CNF היא נוסחה מהצורה $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_m$ כל פסוקית φ_i היא מהצורה $z_i \vee z_j \vee z_k$. כל z_l השייך לפסוקית כלשהי הוא אחד מהליטרלים $x_1,...,x_n,\neg x_1,...,\neg x_n$ (לדוגמה $\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee \neg x_5)$). x_i מופיע בפסוקית φ_i אם x_i שייך ל- φ_i או $\neg x_i$ שייך ל- φ_i. המשתנים $x_1,...,x_n$ מקבלים ערכים בוליאנים. **השמה** היא התאמה של ערך בוליאני לכל משתנה (אם $x_i = 1$ אז לפי הגדרה $\neg x_i = 0$). אנו אומרים כי $\varphi_i = z_i \vee z_j \vee z_k$ מסופקת ע"י השמה כלשהי אם **לפחות** אחד מהמשתנים ב- φ_i שווה ל-1. נוסחת 3CNF היא **ספיקה** אם **קיימת** השמה המקיימת את כל הפסוקיות בה.

נתונה נוסחת 3CNF בה כל אחד מהמשתנים $x_1,...,x_n$ מופיע **בדיוק** ב**שלוש** פסוקיות שונות וכל פסוקית מכילה **שלושה** משתנים **שונים**.

הוכיחו-נוסחה המקיימת הדרישות לעיל היא **תמיד ספיקה** וניתן למצוא בזמן פולינומיאלי השמה מספקת שלה.

הדרכה: העזרו במשפט Hall כדי להוכיח קיום זיווג מושלם בגרף דו צדדי מתאים.