Solution by Daniel Krauthgamer

2007 ב' - (90)

שאלה 1

א. לא נכון:

$$R=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix} \neq S=\begin{pmatrix}3&1&3\\1&3&3\end{pmatrix}$$

נבדוק בין R ו-S.

$$t(R)=\begin{pmatrix}3&1&3\\1&3&3\end{pmatrix}=t(S)=\begin{pmatrix}3&1&3\\1&3&3\end{pmatrix}$$

ב. לא נכון:

$$R^2=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \qquad t(R^2)=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$t(R)=\begin{pmatrix}3&1&3\\1&3&3\end{pmatrix} \qquad t^2(R)=\begin{pmatrix}3&1\\3&3\end{pmatrix}$$

ג.

(1) $t(R^{-1})=R^{-1}\cup(R^{-1})^2\cup(R^{-1})^3\cup\ldots$

(2) $(t(R))^{-1}=R^{-1}\cup(R^2)^{-1}\cup(R^3)^{-1}\cup\ldots$

נשאר להראות ש: $(R^n)^{-1}=(R^{-1})^n$

$$(R^n)^{-1}=R^{-1}R^{n-1}=R^{-1}R^{-1}R^{n-2}\ldots=(R^{-1})^n$$

$$(2)=R^{-1}\cup(R^{-1})^2\cup(R^{-1})^3\cup\ldots=t(R^{-1})$$

מש"ל.

שאלה 2

א. תהי K כפי שמוגדרת בשאלה. נמצא פונקציה חח"ע מ-K ל-A כך

ש-A קבוצת הסדרות הסופיות. יהי $x\in K$

$f(x)=$ התת-סדרה המינימלית שמתגלית ב-x.

עפ"י הגדרה של x בשאלה, $f(x)\in A$. עוצמת A הוכחה בחוברת

תרגילים פתורים עמ' 8 שאלה 10 $\Leftarrow |A|=\aleph_0$

מקיום f: $\aleph_0=|A|\geq|K|$ (1)

Solution by Daniel Krauthgamer

נראה שקיימת התאמה חח"ע מ-$\mathbb{N}$ ל-K, זה $g:\mathbb{N}\to K$

$$g(y) = (y, y, y, \dots)$$ - סדרה אינסופית מחזורית

לכל $y\in\mathbb{N}$ $g(y)\in K$ כי $g(y)$ סדרה אינסופית מחזורית של סדרה בת איבר אחד והוא סופי. $\Leftarrow$ ② $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \leq |K|$

מ-① ו-② וק.ש.ב. $|K| = \aleph_0$

<u>שאלה 3</u>

א. $|A| = 6^5$

ב. מספר מחלקות השקילות הוא

כמו מספר הפתרונות למשוואה

$$\overset{a}{x_1} + \overset{b}{x_2} + \overset{c}{x_3} + \overset{d}{x_4} + \overset{e}{x_5} + \overset{f}{x_6} = 5$$

$$D(6,5) = \binom{10}{5} = 252$$

ג. כמו מספר האפשרויות לבחור 3 מתוך 5. לבחור את מיקומי ה-a מתוך חמשת המקומות במחרוזת.

(שים לב שזה שווה למספר האפשרויות לבחור את 2 מיקומי b.

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$$

סקור b וגורר a

ד. נחפש מחלקת שקילות בה 60 איברים.

ניקח מחלקה בה 3 אותיות מופיעות פעם אחת, ואות נוספת מופיעה פעמיים!

$$\binom{5}{1} \cdot 4! \cdot \frac{1}{2!} = 60$$

מקום לאות הכפולה

סידורי האותיות האחרות

חילוק בסידור הקיימים (האות הכפולה.)

דוגמא: [aabcd]

Solution by Daniel Krauthgamer

שאלה 4.

לימון - $f_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \dots + x^{50} = \frac{1}{1-x}$

אננס - $f_2(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{20} = \frac{1}{1-x}$

דולה - $f_3(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^8 = \frac{1-x^9}{1-x}$

אבטיח. - $f_4(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^8 = \frac{1-x^9}{1-x}$

$$F(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 \cdot \left(\frac{1-x^9}{1-x}\right)^2 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^4 \cdot \left(1-x^9\right)^2 = \overset{b}{\left(\frac{1}{1-x}\right)^4} \overset{a}{\left(1-2x^9+x^{18}\right)}$$

$$C_{20} = \sum_{i=0}^{20} a_i b_{k-i} = 1 \cdot D(4,20) + 2 \cdot D(4,11) + 1 \cdot D(4,2)$$

$$= 1771 + 2 \cdot 364 + 6 = 2505$$

שאלה 5.

א. $\psi(x_1) = \forall x_2 \left(R(x_1, x_2)\right)$

ב. $\forall x_3 \left[\left(R(x_3, x_2)\right) \to \left(A_1^2(x_2, x_3) \vee \psi(x_3)\right)\right]$

ג. $\forall x_3 \left[\left(R(x_3, x_2) \to \left(\sim R(x_3, x_1)\right)\right) \vee \left(R(x_3, x_1) \to \left(\sim R(x_3, x_2)\right)\right)\right]$