

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20290 - אלגוריתמיקה - יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1-4

מספר השאלות: 5

משקל המטלה: 7 נקודות

סמסטר: 2004א

מועד אחרון להגשה: 3.10.2003

אנא שים לב:

מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.

העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (10 נקודות)

כתוב אלגוריתם, המקבל כקלט מחרוזת תווים ובודק אם המחרוזת היא מהצורה $a^n b^n$.
(כלומר, השאלה היא אם המחרוזת מורכבת מרצף של 'a' ורצף באורך זהה של 'b'-ים).
מותר לאלגוריתם להשתמש בשתי מחסניות.

הפעולות שניתן לבצע על מחסנית הן:

- בדיקה אם המחסנית ריקה
- הכנסת איבר חדש לראש המחסנית
- הוצאת האיבר שבראש המחסנית

שאלה 2 (25 נקודות: סעיף א' - 5 נק'; סעיפים ב', ג' - 10 נק' לכל אחד)

נתונה קבוצה S של קורסים. לכל קורס c_i יש זמן התחלה s_i וזמן סיום f_i .
ברצוננו למצוא תת-קבוצה S' בגודל מרבי, כך שניתן יהיה לשבץ את כל הקורסים שב- S' לאותו אולם. (ברור כי שני קורסים המתקיימים באותן שעות, או ששעותיהם חופפות חלקית לא יכולים להתקיים באותו אולם.) להלן אלגוריתם לפתרון הבעיה:

$$(1) S' \leftarrow \emptyset$$

(2) כל עוד $S \neq \emptyset$ בצע את הפעולות הבאות:

(2.1) בחר קורס שזמן הסיום שלו הוא מינימלי (נסמן אותו ב- c_k) והעבר אותו מ- S ל- S' .

(2.2) הוצא מ- S את כל הקורסים החופפים (גם חלקית) ל- c_k .

(3) חזור את S' .

א. מהי השיטה האלגוריתמית שבה משתמש האלגוריתם? הסבר את תשובתך.

ב. נשנה את האלגוריתם באופן הבא: בשורה (2.1) לא נבחר את הקורס שזמן הסיום שלו הוא

מינימלי, אלא את הקורס הקצר ביותר ב- S (הקורס שעבורו $f_i - s_i$ הוא מינימלי).

תן דוגמא המראה, שהתת-קבוצה שהאלגוריתם יחזיר כעת לא תמיד תהיה בגודל מרבי.

ג. כמו סעיף ב', אבל בשורה (2.1) בוחרים את הקורס שהוא חופף למספר מינימלי של קורסים

אחרים ב- S .

שאלה 3 (10 נקודות)

בעמוד 175 במדריך הלמידה מתואר אלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי של גרף נתון G . תאר את השינויים שצריך לעשות באלגוריתם, כך שהוא ימצא עץ פורש מכסימלי של הגרף.

שאלה 4 (20 נקודות: סעיף א' - 10 נק'; סעיפים ב', ג' - 5 נק' לכל אחד)

גובה של עץ בינרי הוא אורך המסלול הארוך ביותר בעץ מהשורש לעלה.

עץ בינרי מאוזן מוגדר באופן הבא:

עץ ריק הוא עץ בינרי מאוזן, וכך גם עץ בעל צומת אחד;

עץ בגובה h ($h > 0$) הוא עץ בינרי מאוזן אם מתקיימים 3 תנאים:

(1) התת-עץ השמאלי של השורש הוא עץ בינרי מאוזן.

(2) התת-עץ הימני של השורש הוא עץ בינרי מאוזן.

(3) הפרש הגבהים בין שני התת-עצים של השורש הוא לכל היותר 1.

ברצוננו לחשב את מספר העצים הבינריים המאוזנים (השונים זה מזה) שגובהם h .

א. כתוב נוסחה רקורסיבית עבור מספר העצים הבינריים המאוזנים שגובהם h .

ב. כתוב אלגוריתם תכנון דינמי לפתרון הבעיה.

ג. השתמש באלגוריתם שכתבת ומצא את מספר העצים הבינריים המאוזנים שגובהם 4.

שאלה 5 (35 נקודות: סעיף א' - 15 נק'; סעיף ב' - 5 נק'; סעיף ג' - 10 נק'; סעיף ד' - 5 נק')

בהינתן מחרוזת תווים כלשהי, ניתן לבצע על המחרוזת את פעולות העריכה הבאות:

1. מחיקת תו מהמחרוזת

2. הוספת תו למחרוזת

3. החלפת תו בתו אחר

מרחק העריכה (edit distance) בין שתי מחרוזות תווים A ו- B הוא מספר הפעולות המינימלי

שיש לבצע כדי להגיע מ- A ל- B . למשל, ניתן להגיע מהמחרוזת "היאלועסת" למחרוזת

"זהלאעסק" ע"י ביצוע 5 פעולות עריכה. (בדוק!)

בהינתן שתי מחרוזות תווים $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ ו- $B = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$, ברצוננו לחשב את

מרחק העריכה בין A ל- B .

א. כתוב אלגוריתם תכנון דינמי לפתרון הבעיה.

הדרכה: יש לבנות טבלה בגודל $(n + 1) \times (m + 1)$.

ב. השתמש באלגוריתם שכתבת כדי לפתור את הבעיה עבור המחרוזות "algorithm"

ו- "logarithm". צייר את הטבלה המתקבלת.

ג. כיצד ניתן לשנות את האלגוריתם, כך שניתן יהיה גם לשחזר עפ"י הטבלה את סדרת הפעולות

הדרושה? איך יתבצע השחזור?

ד. בצע את השינוי הנדרש באלגוריתם וצייר את הטבלה המתקבלת עבור הדוגמה מסעיף ב'.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20290 - אלגוריתמיקה - יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 5-6

משקל המטלה: 7 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 31.10.2003

סמסטר: 2004א

אנא שים לב:

מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה חפיסת שוקולד המכילה n חתיכות ($n > 1$).

האלגוריתם הבא מחלק את החפיסה ל- n חתיכות בודדות:

(1) כל עוד קיימת תת-חפיסה המורכבת משתי חתיכות או יותר בצע את הפעולות הבאות:

(1.1) בחר תת-חפיסה כלשהי המורכבת משתי חתיכות או יותר.

(1.2) חלק את התת-חפיסה לשני חלקים (לאו דווקא שווים בגודלם).

(2) עצור.

הוכח שהאלגוריתם יעצור לאחר בדיוק $n - 1$ איטרציות של הלולאה.

שאלה 2 (35 נקודות: סעיף א' - 5 נק'; סעיף ב' - 20 נק'; סעיף ד' - 10 נק')

ה- \gcd (greatest common divisor) של שני מספרים שלמים הוא המחלק המשותף הגדול ביותר שלהם. למשל: $\gcd(x, 0) = x$, $\gcd(24, 18) = 6$.

להלן נתון אלגוריתם, המקבל שני מספרים שלמים a ו- b ($a > b$), ומחזיר שלשה (c, x, y) של

מספרים שלמים, כך ש- $c = \gcd(a, b)$ ו- $a \cdot x + b \cdot y = c$.

(האלגוריתם נקרא האלגוריתם המורחב של אֵיקלידס):

מצא-מחלק-משותף-מכסימלי-של a ו- b

(1) אם $b = 0$ אז החזר $(a, 1, 0)$ ועצור.

(2) אחרת בצע את הפעולות הבאות:

(2.1) קרא ל- **מצא-מחלק-משותף-מכסימלי-של b ו- $a \bmod b$** המחזיר את השלשה (d, x', y') .

(2.2) החזר את $(d, y', x' - \lfloor a/b \rfloor \cdot y')$ ועצור.

א. הדגם את פעולת האלגוריתם על המספרים 72 ו-45.

ב. הוכח את נכונותו המלאה של האלגוריתם. רמז: שים לב לכך ש- $a \bmod b = a - \lfloor a/b \rfloor \cdot b$.

ג. בהנחה ש- $a, b \leq n$, מהי סיבוכיות הזמן של האלגוריתם?

שאלה 3 (20 נקודות: סעיף א' - 15 נק'; סעיף ב' - 5 נק')

להלן נתון אלגוריתם למיון של מערך A בגודל n ($n \geq 2$):

(1) עבור $k \leftarrow 2$ עד n בצע:

$$y \leftarrow A[k] \quad (1.1)$$

$$i \leftarrow k - 1 \quad (1.2)$$

(1.3) כל עוד $i > 0$ וגם $A[i] > y$ בצע:

$$A[i + 1] \leftarrow A[i] \quad (1.3.1)$$

$$i \leftarrow i - 1 \quad (1.3.2)$$

$$A[i + 1] \leftarrow y \quad (1.4)$$

א. הסבר בקצרה את דרך הפעולה של האלגוריתם והוכח את נכונותו המלאה.

ב. חשב את מספר פעולות השוואה בין איברי המערך שמתבצעות במקרה הגרוע ובמקרה הטוב. מהו סדר גודל זמן הריצה של האלגוריתם?

שאלה 4 (20 נקודות: 10 נק' לכל סעיף)

נתונה סדרה של n מספרים a_1, a_2, \dots, a_n .

בהינתן מספר שלם m ($1 < m < n$), עלינו לחשב $n - m + 1$ סכומים של תתי-סדרות, שכל אחת מהן מכילה m איברים.

כל סכום הוא מהצורה: $S_k = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+m-1}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n - m$). כלומר:

$$S_0 = a_0 + a_1 + \dots + a_{m-1}$$

$$S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_m$$

$$S_2 = a_2 + a_3 + \dots + a_{m+1}$$

.

.

.

$$S_{n-m} = a_{n-m} + a_{n-m+1} + \dots + a_{n-1}$$

א. כתוב אלגוריתם נאיבי המחשב את $n - m + 1$ הסכומים. מהו זמן הריצה של האלגוריתם?

ב. כתוב אלגוריתם הפותר את הבעיה בזמן $O(n)$.

שאלה 5 (15 נקודות: סעיף א' - 5 נק'; סעיף ב' - 10 נק')

נתונים N מטבעות הנראים זהים זה לזה. ידוע שאחד המטבעות מזויף ומשקלו קטן יותר ממשקלו של מטבע אמיתי. כדי למצוא את המטבע המזויף, עומדים לרשותנו מאזני כפות. (בכל שקילה שמים בכל כף של המאזניים מספר שווה של מטבעות.)

א. תאר אלגוריתם המוצא את המטבע במזויף תוך $\lceil \log_3 N \rceil$ שקילות.

ב. הוכח שלא ניתן למצוא את המטבע המזויף במספר קטן יותר של שקילות. כלומר, עליך להוכיח

שכל אלגוריתם למציאת המטבע המזויף חייב לבצע (במקרה הגרוע) לפחות $\lceil \log_3 N \rceil$ שקילות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13 - ממ"ן חובה

הקורס: 20290 - אלגוריתמיקה - יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 7-9

משקל המטלה: 9 נקודות

מספר השאלות: 7

מועד אחרון להגשה: 5.12.2003

סמסטר: א2004

אנא שים לב:

מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (10 נקודות)

קליקה (clique) בגרף $G = (V, E)$ היא תת-קבוצה V' של V , כך שכל שני צמתים ב- V' מחוברים על-ידי קשת ב- E .

בעיית הקליקה היא הבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: גרף בלתי מכוון $G = (V, E)$ ומספר חיובי שלם k ($k \leq |V|$).

השאלה: האם יש ב- G קליקה בגודל k ?

הוכח שבעיית הקליקה שייכת ל-NP.

שאלה 2 (20 נקודות: סעיף א' - 4 נק'; סעיף ב' - 14 נק'; סעיף ג' - 2 נק')

פסוק בתחשיב הפסוקים כתוב בצורת 3-CNF אם הוא מורכב מתת-פסוקים המחוברים ע"י קשרי

AND, וכל אחד מתת הפסוקים מורכב משלושה פסוקים אטומיים המחוברים ע"י קשרי OR.

למשל, הפסוק הבא הוא פסוק הכתוב בצורת 3-CNF:

$$(A \vee B \vee C) \& (\neg B \vee \neg C \vee D) \& (A \vee B \vee \neg E)$$

א. יהא ϕ פסוק הכתוב בצורת 3-CNF. כמה השמות אפשריות של ערכי אמת יש לכל תת-פסוק?

כמה מהן מספקות את התת-פסוק?

ב. **בעיית ה-3-SAT** מקבלת כקלט פסוק הכתוב בצורת 3-CNF וצריכה לקבוע אם הפסוק הוא

ספיק. ברצוננו לבצע רדוקציה מבעיית ה-3-SAT לבעיית הקליקה:

יהא ϕ קלט לבעיית ה-3-SAT. נבנה גרף $G = (V, E)$ באופן הבא:

לכל תת-פסוק של ϕ , נמצא את כל ההשמות האפשריות אשר מספקות את התת-פסוק,

ונתאים לכל השמה כזו צומת בגרף. בין שני צמתים בגרף תהיה קשת אם ורק אם שתי ההשמות

המתאימות **מתיישבות זו עם זו**. (שתי ההשמות מתיישבות זו עם זו אם לא קיים פסוק אטומי

המקבל בשתי ההשמות ערך אמת שונה.)

מה יהיה הקלט המתאים לבעיית הקליקה? הוכח שהתשובה לבעיית הקליקה עבור קלט זה

תהיה "כן" אם ורק אם התשובה לבעיית ה-3-SAT עבור הפסוק ϕ היא "כן".

ג. ידוע שבעיית ה-3-SAT היא שלמה ב-NP. מה ניתן להסיק מכך על בעיית הקליקה?

שאלה 3 (10 נקודות)

הוכח שבעיית התאמת המילים מעל א"ב בן אות אחת היא כריעה.

שאלה 4 (30 נקודות)

עבור כל אחת מהגרסאות הבאות של בעיית העצירה - קבע אם הבעיה כריעה או לא:

א. הקלט לבעיה: תכנית ספציפית Q_0 וקלט ספציפי x_0 .

השאלה: האם Q_0 עוצרת על x_0 ?

ב. הקלט לבעיה: תכנית Q , קלט x לתכנית ומספר טבעי n .

השאלה: האם Q עוצרת על x לאחר n צעדים לכל היותר?

ג. הקלט לבעיה: תכנית Q וקלט x לתכנית Q .

השאלה: האם Q אינה עוצרת על x ?

ד. הקלט לבעיה: תכנית Q .

השאלה: האם Q עוצרת לפחות על קלט אחד?

הוכח את תשובותיך.

שאלה 5 (15 נקודות)

בנה מכונת טיורינג, אשר מקבלת כקלט מחרוזת מעל הא"ב $\Sigma = \{a, b\}$, ובודקת אם המחרוזת היא מהצורה $a^n b^n$. (בממ"ן 11 התבקשת לכתוב אלגוריתם הפותר בעיה דומה.)
צייר את תרשים המעברים והסבר את דרך פעולתה של המכונה.

שאלה 6 (15 נקודות: סעיף א' - 5 נק'; סעיף ב' - 10 נק')

בנה אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים המקבלים את השפות הבאות:

א. כל המילים מעל $\Sigma = \{0, 1\}$, שמייצגות מספרים בינריים המתחלקים ב-3.

ב. כל המילים מעל $\Sigma = \{x, y, z\}$, חוץ מהמילים המתחילות ב- $'z'$ או מכילות $'yy'$ או מסתיימות ב- $'xxx'$.

שאלה 7 (שאלת בonus)

הוכח את הטענה הבאה:

אם קיימת בעיה A ששייכת גם ל- NPC וגם ל- $co-NPC$, אז $NP = co-NP$.

(בניסוח מעט שונה: אם קיימת בעיה A שגם היא וגם הבעיה המשלימה שלה שייכות ל- NPC ,

אז $NP = co-NP$.)

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20290 - אלגוריתמיקה - יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 10-12

מספר השאלות: 6 משקל המטלה: 7 נקודות

סמסטר: 2004 מועד אחרון להגשה: 2.1.2004

אנא שים לב:

מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (25 נקודות: סעיף א' - 10 נק'; סעיף ב' - 15 נק')

- א. בפרק 10 בספר מתואר אלגוריתם מקבילי, המסכם N מספרים בזמן $O(\log N)$. כתוב את האלגוריתם בפסידוקוד. הנח שהקלט לאלגוריתם הוא מערך מספרים בגודל N .
- ב. נתון מערך A בגודל N . כל האיברים במערך שונים זה מזה. תאר אלגוריתם מקבילי למיון המערך, המשתמש ב- N^2 מעבדים ורץ בזמן $O(\log N)$. (רמז: האלגוריתם ישתמש במערך דו-מימדי בגודל $N \times N$ ובאלגוריתם מסעיף א').

שאלה 2 (15 נקודות: סעיף א' - 10 נק'; סעיף ב' - 5 נק')

- נדון בפתרון לבעיית הקטע הקריטי עבור שני מעבדים.
- הפתרון מבוסס על שימוש במשתנה משותף בשם `lock`, שערכו ההתחלתי 0. להלן הפרוטוקול עבור כל אחד מהמעבדים:
- בצע פעולות פרטיות עד שתוצאה להיכנס לקטע הקריטי;
 - בדוק את ערכו של `lock`;
 - אם `lock = 0` אז בצע:
 - `lock ← 1` (2.1);
 - בצע את הקטע הקריטי (2.2);
 - `lock ← 0` (2.3);
 - חזור לשורה (1) (2.4);
 - אחרת חזור לשורה (2) (4).
- א. הסבר מדוע הפתרון איננו נכון.
- ב. נתקן את הפרוטוקול באופן הבא: לפני שורה (2.1) נבדוק פעם נוספת את ערכו של `lock`. אם הערך הוא 0, אז נמשיך לשורה (2.1). אחרת - נחזור לשורה (2). האם כעת הפתרון נכון? הסבר את תשובתך.

שאלה 3 (15 נקודות: סעיף א' - 10 נק'; סעיף ב' - 5 נק')

סיטונאי של סיגרים קובניים קיבל משלוח של 100 ארגזי סיגרים. כל ארגז מכיל n סיגרים. לסיטונאי נודע, שבאחד הארגזים הוחלפו לפחות חצי מהסיגרים בסיגרים מזויפים. כדי לאתר את הארגז עם הסיגרים המזויפים, הסיטונאי הזמין מומחה מיוחד מקובה, שיכול לבדוק אם סיגר הוא אמיתי או מזויף בזמן קצר. עליך להציע למומחה הקובני אלגוריתם הסתברותי לאיתור הארגז המכיל את הסיגרים המזויפים, כך שמספר הסיגרים שהמומחה יצטרך לבדוק (במקרה הגרוע) יהיה קטן ככל האפשר. א. כתוב את האלגוריתם בפסדוקוד. ב. כמה סיגרים יצטרך המומחה הקובני לבדוק במקרה הגרוע ובמקרה הטוב? מהו הסיכוי שיתרחש המקרה הגרוע?

שאלה 4 (15 נקודות)

נתייחס לנהליך בחירת המפתח הציבורי והפרטי של משתמש במערכת RSA, המתואר בעמ' 151 במדריך הלמידה. הסבר כיצד ניתן לחשב את המספר Publ באמצעות האלגוריתם המורחב של איקלידס. (האלגוריתם מופיע בשאלה 2 בממ"ן 12).

שאלה 5 (20 נקודות)

בשאלה זו עליך ליישם את הפרוטוקול ההסתברותי המתואר בעמ' 154-155 במדריך הלמידה. פעל עפ"י השלבים הבאים:

א. הודע למנחה קבוצתך באמצעות e-mail שברצונך לפתור את השאלה. יש לשלוח את ה-e-mail עד לתאריך 26.12.2003.

המנחה ישלח אליך את שמותיהם של 2-4 מחבריך לקבוצת הלימוד, בצירוף מספר סידורי לכל אחד מכם.

ב. חשב יחד עם חבריך את הציון הממוצע שלכם בקורס "מבוא למדעי המחשב" (או "מבוא למדעי המחשב ושפת פסקל") באמצעות הפרוטוקול הנ"ל. התקשורת בינך לבין חבריך תתבצע באמצעות הדואר האלקטרוני ותכלול אך ורק את המידע הנדרש עפ"י הפרוטוקול. (כתובות הדואר האלקטרוני של כל הסטודנטים בקורס נמצאות באתר הקורס).

ג. שלח למנחה שלך ב-e-mail את הציון הממוצע שהתקבל.

ד. העלה על הכתב את כל החישובים שערכת.

ה. מדוע אין טעם להפעיל את הפרוטוקול כאשר $n = 2$?

שאלה 6 (10 נקודות)

מיגל נידורף (1914-1997) היה רב-אמן בשחמט. (הוא היה אלוף העולם במשחק שחמט "עיוור": משחק בעיניים מכוסות המתנהל באופן סימולטני מול כמה יריבים.) כאשר נשאל נידורף, כמה מסעים "קדימה" הוא בודק בכדי להחליט על המהלך הבא במשחק, הוא השיב: "אחד יותר מהיריב!" הסבר את תשובתו של נידורף תוך התייחסות למושגים הרלוונטיים מפרק 12.