תשובה 1

א. יהיו A,B צמתים שונים, נראה שיש מסלול ביניהם.

אם יש קשת ביניהם – סיימנו. אם אין קשת ביניהם, החיתוך שלהם ריק או בעל שני אברים.

נבדוק כל אחד מהמקרים:

(*i*) אם $A\cap B=\varnothing$, אז ב- $(A\cup B)'=\{1,2,\ldots,7\}-(A\cup B)$ יש בדיוק אבר אחד, נקרא לו x.

נצרף ל- x אבר אחד של A ואבר אחד של B. קיבלנו שלישיה שהיא שכן משותף של A,B.

(*ii*) אם $|A\cap B|=2$, אז ב- $(A\cup B)'$ יש בדיוק 4 אברים. נבחר אחד מהם, נקרא לו x .

נצרף ל- x את האבר של A שאינו ב- B ואת האבר של B שאינו ב- A .

קיבלנו שלישיה שהיא שכן משותף של A,B.

בכל מקרה מצאנו מסלול בין A ל- B .

ב. נמצא ב- G מעגל בעל אורך אי-זוגי, לפי משפט 1.6 זה די כדי להראות ש- G אינו דו-צדדי.
מעגל בעל אורך 3 לדוגמה: $\{1,2,3\}\to\{3,4,5\}\to\{3,6,7\}\to\{1,2,3\}$.

ג. הגרף הוא רגולרי, דרגת כל צומת ב- G היא $3\cdot\binom{4}{2}=18$ (השלימו כאן נימוק).
מכיון שהגרף קשיר וכל הדרגות זוגיות - הגרף אוילרי.

ד. הדרגה של כל צומת היא יותר ממחצית מספר הצמתים בגרף.
לפי משפט דירק הגרף המילטוני.

תשובה 2

א. יהיו $m,n\geq 1$, $m\neq n$. נתבונן בגרף הדו-צדדי המלא $K_{2m,\,2n}$.

זהו גרף קשיר שבו כל הדרגות זוגיות, לכן הוא אוילרי.

יחד עם זאת זהו גרף דו צדדי, שבו שני הצדדים **אינם** בעלי אותו מספר צמתים, לכן (חלק טריביאלי של מסקנה 4.8 בחוברת הלימוד, או פשוט מהגדרת זיווג מושלם) - אין בו זיווג מושלם.

ב. למעשה די לנו במסלול המילטוני שאינו מעגל (אם יש לנו מעגל המילטוני נתעלם מהקשת האחרונה הסוגרת את המעגל, וקיבלנו מסלול המילטוני שאינו מעגל).
לאורך מסלול המילטוני שאינו מעגל, נמספר לפי הסדר את הצמתים מ- 1 עד $2n$.
לכל צומת שמספרו אי-זוגי נשדך את הצומת הבא אחריו במסלול. סיימנו!

תשובה 3

א. נשרטט מעגל ונסדר עליו את המספרים $1,...,12$ כמו השעות בשעון.
כל שתי שעות סמוכות נחבר בקשת של המעגל, כולל קשת בין 12 ל- 1.
כל שעה אי-זוגית נחבר לשעה האי-זוגית הבאה בשעון, בקשת שהיא מחוץ לעיגול של השעון.
כל שעה זוגית נחבר לשעה הזוגית הבאה בשעון, בקשת שהיא בתוך העיגול של השעון.
אפשר כמובן להיפך, ואפשר בדרכים אחרות.

ב. הדרגה של כל צומת ב- G היא 4.
לכן במשלים דרגת כל צומת היא $11 - 4 = 7$.
מסקנה 5.5 בחוברת אומרת שבגרף מישורי פשוט יש צומת שדרגתו קטנה/שווה 5.
לכן המשלים אינו מישורי.
לחלופין אפשר להוכיח את הטענה לפי מספר הקשתות, בעזרת מסקנה 5.4 .

ג. הגרף מכיל משולשים (הדגימו זאת), לכן צריך לפחות 3 צבעים.
מצד שני קל לצבוע אותו ב- 3 צבעים. לכן מספר הצביעה של הגרף הוא 3.

תשובה 4

א. נניח בשלילה **שקיים** צבע מתוך k הצבעים הנתונים, כך **שלכל** צומת v ב- G, שכניו של v **אינם** משתמשים בכל $k - 1$ הצבעים הנותרים. נקרא לצבע זה x , וקבוצת שאר הצבעים היא B.
נעבור בסדר כלשהו על **כל הצמתים בגרף שהצבע שלהם הוא x** ונצבע אותם מחדש:
מכיון ששכניו של צומת שצבעו x אינם משתמשים בכל צבעי B, נצבע מחדש צומת זה באחד מצבעי B שאינו בשימוש אצל שכניו. כך נעשה לכל אחד מהצמתים שצבעם x.
שני צמתים שהיו צבועים ב- x אינם שכנים בגרף, כך ששינוי הצבע של צומת שצבעו היה x אינו יוצר בעיה בצומת אחר שצבעו היה x.
בכך צבענו את G צביעה נאותה בצבעים שכולם מתוך B .
זו כמובן סתירה לכך ש- $\chi(G) = k$. לכן לא קיים צבע כזה.

ב. זה מוכיח מחדש את שאלה 1 מפרק 6 (חישבו מדוע).

ג. יהי x צבע כלשהו מבין k הצבעים.

לפי סעיף א, יש ב- G צומת ששכניו משתמשים **בכל** $k-1$ הצבעים הנותרים (אם יש כמה צמתים כאלה, נבחר אחד). נקרא לצומת זה v_x. נעשה זאת לכל צבע x מבין k הצבעים.

מהגדרת v_x, דרגתו של v_x היא לפחות $k-1$.

מכיוון ששכניו של v_x צבועים בכל $k-1$ הצבעים הנותרים, הצבע של v_x עצמו הוא כמובן x.

לפיכך עבור צבעים שונים x,y, הצמתים v_x, v_y שונים זה מזה.

קיבלנו אפוא k צמתים שונים, שדרגת כל אחד מהם לפחות $k-1$.

איתי הראבן