

מטלת מנחה (ממ"ן) 17

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 6-7

מספר השאלות: 4 משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2008 מועד אחרון להגשה: יום ו' 23.5.08

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

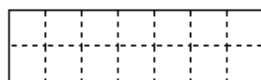
בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×1 :



ומספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×2 :



עלינו לרצף מלבן שממדיו $n \times 2$ (בציור $n = 7$).



אסור לחרוג מגבולות המלבן. בלוק של 2×1 אפשר להניח כרצוננו "שוכב" או "עומד". יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

9 נק' א. רשום יחס נסיגה עבור a_n (הסבר אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

10 נק' ב. פתור את יחס הנסיגה.

6 נק' ג. חשב את a_4 בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א', ומתוך הנוסחה המפורשת שקיבלת בסעיף ב'.

שאר הממ"ן עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בעמוד הבא רשימה של נוסחאות שימושיות.

שאלה 2

חזרו ופתרו את שאלה 4 בממ"ן 15, בעזרת פונקציה יוצרת:

כתבו פונקציה יוצרת עבור מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = n$ תחת

האילווצים הנתונים בשאלה, ומצאו את המקדם של x^{29} בפונקציה שרשמתם.

את הטיפול בעובדה שלא נתון איזה מהמשתנים הם הזוגיים אפשר לעשות כמו בפתרון שאלה 4 בממ"ן 15, ורק את שאר הפתרון לבצע בעזרת פונקציה יוצרת. יש להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 3

יהושע נוטל תרופות שונות: כדור נגד כאב-ראש: לכל היותר 3 ביום (אפשר 0). כדור מרץ: לכל היותר 3 ביום (אפשר 0). ויטמין C וויטמין B ללא הגבלה (אפשר 0), כל זה בכפוף לתנאי הבא, שלגביו הוא מחויב כחבר באגודת ההיפוכונדרים: מספר הכדורים הכולל, מכל 4 הסוגים יחד, שהוא לוקח כל יום יהיה בדיוק n . ערכו של n מוגדר מדי פעם בפרסומי האגודה. נסמן ב- a_n את מספר ההרכבים השונים של n כדורים שיכול יהושע לקחת ביום אחד, כאשר אין חשיבות לסדר נטילת התרופות, ותרופות מאותו סוג הן זהות.

א. מצא את הפונקציה היוצרת עבור הסדרה $\{a_n\}$. הסבר!

ב. מצא ביטוי מפורש עבור a_n (שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר הלימוד יכולה לסייע).

שאלה 4

דוגמא לתרגיל מסוג זה נמצאת בסוף הקובץ "מבוא לפונקציות יוצרות" שבאתר הקורס. חשב את המקדם של x^{2m} בכל אחד מאגפי הזהות האלגברית: $\frac{(1-x^2)^n}{(1-x)^n} = (1+x)^n$.

קבל מכאן זהות על סכומים של מקדמים בינומיים, מהצורה: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{2m} = ?$.

בדוק את תשובתך עבור המקרה $n=5, m=2$ ועבור המקרה $n=5, m=3$.

הדרכה: את אגף שמאל בזהות האלגברית הנתונה רשום כמכפלה. היעזר בנוסחאות שבתחתית העמוד.

להלן סיכום כמה נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות:

$$(i) \quad \text{סכום טור הנדסי סופי:} \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{ואינסופי:} \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

(ii) כפל פונקציות יוצרות:

$$\text{אם } f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i, \quad \text{ו-} \quad f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

$$\text{אז } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \quad (\text{ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד}).$$

$$(iii) \quad \frac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+\dots)^n = \sum_{k=0}^{\infty} D(n,k) x^k$$

במילים אחרות: המקדם של x^k בפיתוח הביטוי $\frac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$.

ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר.