פתרונות לממ"ח 01 - 2019א - 20425

1. מסובבים חמש פעמים סביבון תקין בעל 4 פאות. לפיכך: $n(S) = 4^5$

כדי שכל התוצאות תתקבלנה, צריך שתוצאה אחת (מתוך ה-4) תתקבל פעמיים, וכל יתר התוצאות תתקבלנה פעם אחת כל אחת. לפיכך, נבחר את התוצאה שתתקבל פעמיים, ואת הסיבובים שבהם היא תתקבל, ולבסוף נסדר את שאר התוצאות. ומכאן נקבל: $\frac{4\cdot\binom{5}{2}\cdot 3!}{4^5}=\frac{240}{1,024}=\frac{15}{64}=0.234375$

2. נעזר במאורע המשלים, שהתוצאה 3 לא מתקבלת בכלל או שהתוצאה 3 מתקבלת בדיוק פעם אחת, ונקבל:

$$1-\frac{3^5}{4^5}-\frac{5\cdot 3^4}{4^5}=1-\frac{243+405}{1,024}=\frac{47}{128}=0.3672$$

3. עלינו למנות את מספר האפשרויות שב-5 הסיבובים כל התוצאות מתקבלות, כך שבשני הסיבובים הראשונים התוצאות שונות זו מזו. ייתכנו שני מקרים:

- התוצאה שמתקבלת פעמיים היא אחת משתי התוצאות שהתקבלו בשני הסיבובים הראשונים
- התוצאה שמתקבלת פעמיים איננה אחת משתי התוצאות שהתקבלו בשני הסיבובים הראשונים

לפיכך: $\frac{4\cdot 3\cdot\binom{3}{1}\cdot 2\cdot 2!+4\cdot 3\cdot\binom{3}{2}\cdot 2!}{4^5}=\frac{3\cdot\binom{3}{1}\cdot 2+3\cdot\binom{3}{2}}{2\cdot 4^3}=\frac{18+9}{128}=\frac{27}{128}=0.2109$

4. נמנה את מספר האפשרויות שבהן מתקבלות בדיוק שתיים מהתוצאות. יש $\binom{4}{2}$ אפשרויות לבחור את שתי התוצאות ואח"כ צריך להבטיח שבכל הסיבובים התוצאות הללו תתקבלנה, אך לא רק אחת מהן. לפיכך:

$$\frac{\binom{4}{2}\cdot(2^5-2)}{4^5}=\frac{6\cdot 30}{1,024}=\frac{45}{256}=0.1758$$

5. יואב חייב לבחור אחד מ-10 מקומות ואילו רועי חייב להתיישב לצידו. לפיכך: $\frac{10\cdot 1}{10\cdot 9}=\frac{1}{9}$

6. נבחר 3 שולחנות ו-3 זוגות אחים, נתאים בין זוגות האחים לשולחנות ונמקם את האחים בשולחנות שהותאמו להם. אחר-כך נושיב את 4 הילדים שנותרו, כך שכל שני אחים יישבו בשולחנות שונים. נקבל:

$$\frac{\binom{5}{3}\binom{5}{3}\cdot 3!\cdot 2^3\cdot 4\cdot 2\cdot 2}{10!}=\frac{4}{189}=0.0212$$

7. נחשב את הסתברות המאורע המשלים, ששניהם יושבים על כסאות ירוקים: $1-\frac{5\cdot 4}{10\cdot 9}=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

8. נבחר ילד אחד מכל זוג אחים (2^5 אפשרויות) ואת 5 הילדים הנבחרים נושיב על הכסאות האדומים (!5 אפשרויות). לבסוף נושיב את 5 הילדים הנותרים על הכסאות הירוקים (!5 אפשרויות). נקבל:

$$\frac{2^5\cdot(5!)^2}{10!}=\frac{8}{63}$$

9. על הכסא הירוק יכול לשבת כל אחד מ-10 הילדים ועל הכסא האדום חייב לשבת אחיו.

לפיכך: $\frac{10\cdot 1}{10\cdot 9}=\frac{1}{9}$

10. נמנה את מספר התוצאות השונות שיכולות להתקבל, באמצעות הפרדה למקרים המוגדרים לפי מספר הקוביות הלבנות בתוצאה: בין 0 קוביות לבנות ל-4 קוביות לבנות.

נבחרו 0 קוביות לבנות – יש 2 אפשרויות לבחירת הקוביות הצבעוניות: 3 כח׳+1 אד׳ / 2 כח׳+2 אד׳

נבחרו 1 קוביות לבנות – יש 3 אפשרויות לבחירת הקוביות הצבעוניות: 3 כח׳ / 2 כח׳+1 אד׳ / 1 כח׳+2 אד׳

נבחרו 2 קוביות לבנות – יש 3 אפשרויות לבחירת הקוביות הצבעוניות: 2 כח׳ / 1 כח׳+1 אד׳ / 2 אד׳

נבחרו 3 קוביות לבנות – יש 2 אפשרויות לבחירת הקוביות הצבעוניות: 1 כח׳ / 1 אד׳

נבחרו 4 קוביות לבנות – אין קוביות צבעוניות

ומכאן, שבסך-הכל יש 11 תוצאות שונות למראה.

11. יש שלוש אפשרויות להרכב הצבעים של הקוביות בתוצאה: 2 לב׳ + 2 כח׳ / 2 לב׳ + 2 אד׳ / 2 כח׳ + 2 אד׳

לפיכך:
$$\frac{\binom{25}{2}\binom{3}{2}+\binom{25}{2}\binom{2}{2}+\binom{3}{2}\binom{2}{2}}{\binom{30}{4}}=\frac{1,203}{27,405}=\frac{401}{9,135}=0.0439$$

12. נסדר את הקוביות הלבנות בשורה (!25 אפשרויות), נבחר ביניהן ו/או משני צידי השורה 5 מקומות לקוביות הצבעוניות ($\binom{26}{5}$ אפשרויות), ולבסוף נמקם בהם את הקוביות הצבעוניות (!5 אפשרויות).

נקבל:
$$\frac{25!\cdot\binom{26}{5}\cdot 5!}{30!}=0.4616$$

13. נסדר את הקוביות הלבנות במעגל (!24 אפשרויות), נבחר ביניהן 5 מקומות לקוביות הצבעוניות ($\binom{25}{5}$ אפשרויות), ולבסוף נמקם בהם את הקוביות הצבעוניות (!5 אפשרויות).

נקבל:
$$\frac{24!\cdot\binom{25}{5}\cdot 5!}{29!}=0.4474$$

14. נניח שהאות **ד** ממוקמת במקום הרביעי, ונמקם את האות **ו** באחד מ-5 מקומות אפשריים.

נקבל:
$$\frac{1\cdot 5}{22\cdot 21}=\frac{5}{462}=0.0108$$

15. נסמן ב- A את המאורע שהמילה ״מערה״ מופיעה ברצף האותיות וב- B את המאורע שהמילה ״פתח״ מופיעה ברצף האותיות. נעזר בכלל ההכלה וההפרדה, כדי לקבל את ההסתברות המבוקשת. מקבלים:

$$P(A)=\frac{(22-4+1)!}{22!}=\frac{19!}{22!}=\frac{17!\cdot 342}{22!}$$

$$P(B)=\frac{(22-3+1)!}{22!}=\frac{20!}{22!}=\frac{17!\cdot 6,840}{22!}$$

$$P(A\cap B)=\frac{(22-7+2)!}{22!}=\frac{17!}{22!}$$

ומכאן כי:
$$P(A\cup B)=\frac{17!\cdot(342+6,840-1)}{22!}=\frac{17!\cdot 7,181}{22!}=0.00227$$

16. האותיות **א**, **ב** ו- **ג** יכולות לתפוס כל 3 מקומות ברצף 22 האותיות. אולם, כדי שאותיות אלו תופענה עד למקום העשירי, הן צריכות לתפוס 3 מ- 10 המקומות הראשונים.

לפיכך, ההסתברות היא:
$$\frac{\binom{10}{3}}{\binom{22}{3}}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{22\cdot 21\cdot 20}=\frac{6}{77}=0.0779$$

17. נתבונן רק על 4 המקומות שבהם נמצאות האותיות **ד**, **ה**, **ח** ו- **ט**. לאותיות הללו יש !4 סידורים פנימיים, ביחס לכל סידור של כלל האותיות. לפיכך, נבחן בכמה מתוך !4 הסידורים הללו מתקיים המאורע המתואר בשאלה. אם כך, במקום הראשון (מבין 4 המקומות שתופסות האותיות הנ״ל) חייבת להיות אחת מהאותיות **ד** ו- **ח**. משנבחרה האות שתהיה במקום הראשון, בת-הזוג שלה (**ה** או **ח**, בהתאמה) יכולה להיות בכל אחד מ-3 המקומות הפנויים. נותרים 2 מקומות פנויים ו-2 האותיות הנותרות יכולות להתמקם בהם בסידור יחיד.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{2\cdot 3}{4!}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}=0.25$

18. נעזר במאורע המשלים שאין בלוח אף שורה שכולה אפסים. יש 2^5 אפשרויות לבחור את הספרות בשורה ובתוכן אפשרות יחידה שבכל השורה יש רק אפסים. לפיכך, יש 2^5-1 אפשרויות שבשורה תהיה לפחות משבצת אחת שעליה הספרה 1. החישוב האחרון נכון לכל 5 השורות בלוח, ומכאן שיש $(2^5-1)^5$ אפשרויות למלא את הלוח, כך שבכל אחת משורותיו תהיה לפחות משבצת אחת שעליה הספרה 1. ומכאן כי ההסתברות המבוקשת היא: $1-\frac{(2^5-1)^5}{2^{25}}=1-\left(\frac{2^5-1}{2^5}\right)^5=1-\left(1-\frac{1}{2^5}\right)^5=1-(1-0.5^5)^5$

19. ראשית, יש 2^{25} תוצאות אפשריות שונות במרחב המדגם.

שנית, מספר התוצאות שיש בהן בדיוק 15 משבצות שעליהן הספרה 1, הוא כמספר אפשרויות הבחירה של 15 משבצות בלוח (שעליהן תהיה הספרה 1). לכן, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{\binom{25}{15}}{2^{25}}=\binom{25}{15}\cdot 0.5^{25}$

20. נתחיל מחישוב ההסתברות שאין בלוח אף שורה שסכום ספרותיה הוא 3:

בכל שורה, יש $\binom{5}{3}$ אפשרויות שסכום הדסקיות יהיה 3 (כמספר האפשרויות למקם במשבצותיה שלוש פעמים את הספרה 1). לכן, יש $2^5-\binom{5}{3}=22$ אפשרויות, שסכום הדסקיות בשורה מסוימת יהיה שונה מ-3. ומכאן, שיש 22^5 אפשרויות, שבכל אחת מ-5 השורות בלוח סכום הדסקיות יהיה שונה מ-3.

כעת, נחשב את ההסתברות שיש בלוח לפחות שורה אחת שסכום ספרותיה שווה ל-3.

זוהי ההסתברות המשלימה להסתברות שחושבה בתחילת הפתרון. דהיינו: $1-\frac{22^5}{2^{25}}=1-\frac{11^5}{2^{20}}$