ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20585

מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חוברת הקורס - סתיו 2012א

כתב: אלעזר בירנבוים

אוקטובר 2011 - סמסטר סתיו - תשע״ב

תוכן העניינים

אל הסטודנטים,

אני מקדם את פניכם בברכה עם הצטרפותכם אל הלומדים בקורס "מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים, אותם מפרסם/מת מרכז/ת ההוראה. בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:
http://telem.openu.ac.il
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

שעות הייעוץ בקורס מתקיימות בימי ראשון בשעות 18:00-20:00 בטלפון 04-6850321.
אבקש מאד לא להתקשר לטלפון הזה בשעות לא סבירות ובשבתות.
ניתן לפנות גם בדואר אלקטרוני: elazar@openu.ac.il

אני מאחל לכם הצלחה בלימודים.

בברכה,

אלעזר בירנבוים

מרכז ההוראה

1. **לוח זמנים ופעילויות** (20585 / א2012)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ן (למנחה)
1	28.10.2011-25.10.2011	פרק 1		
2	4.11.2011-30.10.2011	פרק 1		
3	11.11.2011-6.11.2011	פרק 2	מפגש ראשון	ממ"ן 11 11.11.2011
4	18.11.2011-13.11.2011	פרק 2 פרק 3		
5	25.11.2011-20.11.2011	פרק 3	מפגש שני	
6	2.12.2011-27.11.2011	פרק 3 פרק 4		ממ"ן 12 2.12.2011
7	9.12.2011-4.12.2011	פרק 4	מפגש שלישי	
8	16.12.2011-11.12.2011	פרק 4		

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

לוח זמנים ופעילויות – המשך

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשים עם מנחה*	תאריך אחרון למשלוח ממ״ן (למנחה)
9	23.12.2011-18.12.2011 (ד-ו חנוכה)	פרק 4	מפגש רביעי	
10	30.12.2011-25.12.2011 (א-ד חנוכה)	פרק 4 פרק 5		ממ״ן 13 30.12.2011
11	6.1.2012-1.1.2012	פרק 5	מפגש חמישי	
12	13.1.2012-8.1.2012	פרק 5 פרק 6		ממ״ן 14 13.1.2012
13	20.1.2012-15.1.2012	פרק 6	מפגש שישי	
14	27.1.2012-22.1.2012	פרק 7		
15	3.2.2012-29.1.2012	פרק 7	מפגש שביעי	ממ״ן 15 3.2.2012

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

2. תיאור המטלות

קראו היטב עמודים אלו לפני שתתחילו לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס - הבנה מעמיקה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. המטלות תיבדקנה על-ידי המנחה ותוחזרנה בצירוף הערות המתייחסות לתשובות.

המטלות מלוות את יחידות הלימוד בקורס. להלן פירוט המטלות, היחידות שאליהן מתייחסת כל מטלה ומשקלה היחסי. בחלק מהמטלות תופענה גם שאלות המתייחסות ליחידות שכבר נלמדו.

ממ"ן 11 - פרק 1 - 6 נקודות
ממ"ן 12 - פרקים 2, 3 - 6 נקודות
ממ"ן 13 - פרק 4 - 8 נקודות
ממ"ן 14 - פרק 5 - 4 נקודות
ממ"ן 15 - פרקים 6, 7 - 6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל של 24 נקודות לפחות.
שימו לב שחובה להגיש את ממ"ן 13.

ללא צבירת 24 נקודות בהגשת מטלות לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

למען הסר ספק, יודגש שחל איסור על הכנה משותפת והעתקה של מטלות או חלקי מטלות.
(הנושא מפורט בתקנון משמעת לסטודנטים - נספח 1 של ידיעון האו"פ).

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן:
אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלה** בציון הנמוך ביותר, שציונה נמוך מציון הבחינה, לא תילקח בחשבון בעת שקלול הציון הסופי.
זאת בתנאי שמטלה זו **אינה חלק מדרישות החובה בקורס** ושמשקל המטלות האחרות שהוגשו עובר את המינימום ההכרחי.
זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש בקורס.

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס.
סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון שמספרו 09-7782222, או יעדכנו בעצמם באתר שאילתא http://www.openu.ac.il/sheilta קורסים ⇦ ציוני מטלות ובחינות ⇦ הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.
יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהממוצע המשוקלל של ציוני המטלות והבחינה יהיה נמוך מ-60).
כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל כולל של 24 נקודות לפחות.

ב. ציון של לפחות 60 בבחינת הגמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2012א **מועד אחרון להגשה:** 11 נוב' 11

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (14%)

תהי w מחרוזת סמלים. מסמנים על-ידי w^R את המחרוזת המתקבלת מ-w על-ידי היפוך סדר הסמלים ב-w.

דוגמה: $11001^R = 10011$

מילה w נקראת **פלינדרום** אם $w = w^R$.

דוגמה: 1100011 היא פלינדרום; 110001 איננה פלינדרום.

נגדיר את השפה PAL:

$$PAL = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$$

(זוהי שפת הפלינדרומים מעל האלפבית $\{0,1\}$).

בנו מכונת טיורינג **המכריעה** את PAL.

אלפבית הקלט הוא $\Sigma = \{0,1\}$; אלפבית הסרט יהיה $\Gamma = \{0,1,\sqcup\}$.

למכונה יהיו **לא יותר משמונה מצבים** (כולל q_{accept} ו-q_{reject}).

תארו את המכונה בעזרת איור (כמו איור 3.8 בספר). הקפידו שלא תהיינה קשתות נחתכות באיור.

הסבירו היטב את פעולת המכונה ולמה היא אכן מכריעה את PAL.

שאלה 2 (18%)

א. כמה פעמים תקרא המכונה מאיור 3.10 בספר את הסמל # אם מילת הקלט היא מהצורה $w\#w$ (כלומר, מילה ששייכת לשפה) ו- $|w| = n$ ($|w|$ מסמן את האורך של w)?
הצדיקו את תשובתכם.

ב. הציעו דרך לבנות מכונה שבה מספר הפעמים הזה יהיה **קטן פי שניים**.
אינכם צריכים לבנות את המכונה, רק להסביר כיצד היא תפעל.

שאלה 3 (12%)

עיינו בהגדרה 3.3 בספר (עמוד 142).

נניח שנשנה את ההגדרה של פונקצית המעברים δ (בסעיף 4) באופן הבא:

$$\delta: Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\mathrm{L}_k, \mathrm{R}_k \mid k \text{ is natural}, k > 0\}$$

הפירוש של הפונקציה החדשה הוא כזה: כאשר המכונה נמצאת במצב q, והראש קורא את הסמל a, אם $\delta(q, a) = (r, b, \mathrm{R}_k)$, אז כותבים b במקום a, עוברים מהמצב q למצב r, והראש נע על הסרט k ריבועים ימינה. אם $\delta(q, a) = (r, b, \mathrm{L}_k)$, אז כותבים b במקום a, עוברים מהמצב q למצב r, והראש נע על הסרט k ריבועים שמאלה. אם במהלך התנועה שמאלה מגיעים לריבוע השמאלי ביותר של הסרט, נשארים בריבוע זה.

האם למכונה כזו **יש יותר כוח** מאשר למכונה רגילה?

אם עניתם שכן, עליכם להראות שמכונה כזו יכולה לזהות **כל שפה שהיא**.
אם עניתם שלא, עליכם להראות כיצד מכונה רגילה יכולה לחקות את פעולתה של המכונה החדשה.

שאלה 4 (16%)

מספר טבעי n נקרא **פריק** (composite) אם הוא לא ראשוני. (כלומר, אם הוא שווה ל-1, או שיש לו מחלקים שונים מ-1 וממנו עצמו).

א. תארו מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית** להכרעת השפה F הבאה:

$$F = \{a^n \mid n \geq 1;\ n \text{ is composite}\}$$

רמת הפירוט של תיאור פעולת המכונה צריכה להיות דומה למכונה C מדוגמה 3.11 בספר.
המכונה צריכה להשתמש באי-דטרמיניזם באופן שיקל על החישובים (לעומת מכונה דטרמיניסטית לאותה המשימה).
שימו לב שהמכונה שאתם מתארים **מכריעה** את השפה, ולא רק מזהה אותה.

ב. נניח שנחליף במכונה שהצעתם את התפקידים של המצבים q_{accept} ו-q_{reject}.
מהי השפה שמכריעה המכונה שתתקבל? הצדיקו היטב את תשובתכם.

שאלה 5 (14%)

בנו מונה (enumerator) לשפה $\{0, 1\}^*$, שידפיס את המילים של השפה **בסדר לקסיקוגרפי** (המילה הריקה, אחר כך המילה 0, אחר כך המילה 1, אחר כך המילה 00, אחר כך המילה 01, וכך הלאה).
האלפבית Σ של סרט הפלט יהיה $\{0, 1\}$; האלפבית Γ של סרט העבודה יהיה $\{0, 1, \sqcup\}$.

למונה יהיו **לא יותר מעשרה מצבים** (כולל q_{print} ו-q_{halt}).
תארו את המונה באיור (כמו איור 3.10 בספר - אפשר לוותר על הציור של q_{halt} וכל הקשתות שנכנסות אליו. אפשר לוותר על הציור של מעברים בלתי אפשריים).
להגדרה פורמלית של מונה, עיינו במדריך הלמידה.

הסבירו היטב את פעולת המונה, ולמה הוא אכן מדפיס את המילים של השפה $\{0, 1\}^*$ בסדר לקסיקוגרפי.

שאלה 6 (16%)

נתונים שני מונים (enumerators) E_1 ו-E_2.

נסמן על-ידי $L(E_1)$ את השפה ש-E_1 מפיק, ועל-ידי $L(E_2)$ את השפה ש-E_2 מפיק.

א. **הסבירו היטב** כיצד אפשר לבנות מונה $E_\cup$ שמפיק את השפה $L(E_1) \cup L(E_2)$.

הכוונה היא לבניית המונה $E_\cup$ מן המונים E_1 ו-E_2, בלי לעבור דרך מכונות טיורינג.

אתם רשאים להניח שלמונה $E_\cup$ יש כמה סרטי עבודה.

ב. **הסבירו היטב** כיצד אפשר לבנות מונה $E_\cap$ שמפיק את השפה $L(E_1) \cap L(E_2)$.

הכוונה היא לבניית המונה $E_\cap$ מן המונים E_1 ו-E_2, בלי לעבור דרך מכונות טיורינג.

אתם רשאים להניח שלמונה $E_\cap$ יש כמה סרטי עבודה.

שאלה 7 (10%)

א. בעיה 3.15 בספר סעיף **c**.

ב. בעיה 3.16 בספר סעיף **c**.

הגדרת הפעולה כוכב מופיעה בספר בהגדרה 1.23 (עמוד 44).

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4 ו-5 בספר

מספר השאלות: 8 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: 2012א **מועד אחרון להגשה:** 2 דצמ' 11

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (12%)

הוכיחו, בדרך שונה מן ההוכחה המופיעה בספר, שהשפה E_{DFA} המוגדרת בעמוד 170 בספר היא שפה כריעה. ההוכחה החדשה תתבסס על היותה של השפה A_{DFA} (מעמוד 168 בספר) שפה כריעה. (במקום האלגוריתם המוצע בהוכחת משפט 4.4 בספר, הציעו אלגוריתם שיריץ את האלגוריתם להכרעת A_{DFA} על מספר סופי של קלטים, ולפי תוצאות ההרצות הללו יקבע את השייכות ל-E_{DFA}).
תארו את המכונה המתאימה להוכחה שלכם, והוכיחו את נכונות האלגוריתם שלפיו בניתם את המכונה.

שאלה 2 (12%)

תהי U **מכונת טיורינג אוניברסלית** (כמו בהוכחת משפט 4.11).
מה יקרה כאשר נריץ את U על הקלט $<U, <U>>$? (האם המכונה תגיע למצב q_{accept}? האם היא תגיע ל-q_{reject}? האם היא לעולם לא תעצור?)
הצדיקו את תשובתכם.

שאלה 3 (8%)

יהי Σ אלפבית סופי.
האם כל שפה מעל Σ היא **בת-מנייה**, או שיש שפות מעל Σ שאינן בנות מנייה?
הוכיחו את תשובתכם.
(להגדרת קבוצה בת מנייה עיינו בהגדרה 4.14 בספר).

שאלה 4 (12%)

הוכיחו שהשפה G הבאה היא **מזוהה-טיורינג אך איננה כריעה**:

$$G = \{<M, x> \mid M \text{ is a TM that accepts } x\text{; when } M \text{ terminates its running on } x \text{ its tape contains a word longer than } x\}$$

(מילה $<M, x>$ שייכת ל-G אם M היא תיאור של מכונת טיורינג, x היא מילה, M מקבלת את x, וכאשר M מסיימת את ריצתה על x (במצב q_{accept}) כתובה על הסרט של M מילה יותר ארוכה מ-x).

הוכחת האי-כריעות של השפה תיעשה **בעזרת שיטת האלכסון**.

הדרכה: הניחו בשלילה ש-G כריעה. אז יש מכונה H שמכריעה אותה. בנו מכונה D שתפעל הפוך מכל מכונה M שהיא.

(אל תשכחו להוכיח ש-G מזוהה-טיורינג).

שאלה 5 (12%)

בעיה 5.12 בספר (עמוד 215).

הראו שאם השפה הנתונה בשאלה היא שפה כריעה, אז אפשר לבנות מכונה להכרעת השפה A_{TM}.

שאלה 6 (18%)

ביחס לכל אחת מן השפות הבאות, קבעו האם אפשר להוכיח שהיא לא כריעה **בעזרת משפט Rice** (ראו בעיה 5.28 בספר) או לא.

אם קבעתם שאפשר, כתבו את ההוכחה. אם קבעתם שאי אפשר, הסבירו היטב למה אי אפשר.

א. $A = \{<M> \mid M \text{ is a TM and } |L(M)| = 5\}$

(A היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג שמקבלות בדיוק 5 מילים).

ב. $B = \{<M> \mid M \text{ is a TM and there exists a string } w \text{ that } M \text{ accepts after exactly } |w| \text{ steps}\}$

(B היא שפת התיאורים של מכונות טיורינג שיש מילה w שמתקבלת על-ידי המכונה לאחר בדיוק $|w|$ צעדים).

ג. $REGULAR_{\text{TM}}$ (השפה מוגדרת בספר בעמוד 195).

שאלה 7 (12%)

במשפט 5.10 הוכח שהשפה E_{LBA} איננה כריעה.

א. האם E_{LBA} היא שפה **מזוהה-טיורינג**? הוכיחו את תשובתכם.

ב. האם השפה **המשלימה** (השפה $\overline{E_{\text{LBA}}}$) היא שפה **מזוהה-טיורינג**? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 8 (14%)

הוכיחו: $REGULAR_{\text{TM}}$ איננה מזוהה-טיורינג וגם השפה המשלימה שלה איננה מזוהה טיורינג.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 בספר

שימו לב, חובה להגיש מטלה זו!

מספר השאלות: 9 **משקל המטלה:** 8 נקודות

סמסטר: 2012א **מועד אחרון להגשה:** 30 דצמ' 11

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

נזכיר את השפה PAL מממ"ן 11:

$$PAL = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R\}$$

(זוהי שפת הפלינדרומים מעל האלפבית $\{0, 1\}$).

מצאו פונקציה $t(n)$ מינימלית, כך ש- $PAL \in \mathrm{TIME}(t(n))$

א. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד.

ב. במכונה דטרמיניסטית עם שני סרטים.

ג. במכונה דטרמיניסטית עם סרט אחד שיש לו שני ראשים קוראים-כותבים.

הסבירו את תשובותיכם.

שאלה 2 (10%)

הוכיחו שהשפות הבאות שייכות למחלקה P:

א. $EVEN_{\mathrm{DFA}} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is a DFA; } |w| \text{ is even for all } w \in L(M)\}$

($\langle M\rangle$ שייכת לשפה אם M הוא אוטומט סופי דטרמיניסטי, וכל המילים שהאוטומט מקבל הן בעלות אורך זוגי).

ב. $DEGREE\text{-}5\text{-}CLIQUE = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ is an undirected graph with a } k\text{-clique; the degree of every node of } G \leq 5\}$

($\langle G, k\rangle$ שייכת לשפה אם G הוא גרף לא מכוון שדרגת כל צומת שלו איננה גדולה מ-5, ויש ב- G קליקה בגודל k. (דרגה של צומת = מספר הקשתות שהצומת נוגע בהן)).

שאלה 3 (8%)

תהי A שפה מעל אלפבית נתון Σ. השפה $mim(A)$ מוגדרת כך:

$$min(A) = \{w \in A \mid \text{for every } v \in \Sigma^* \text{ such that } w = vu \text{ and } u \neq \varepsilon,\ v \notin A\}$$

($min(A)$ היא שפת המילים המינימליות של A, כלומר, מילים ששייכות ל-A אבל אף תחילית ממש שלהן לא שייכת ל-A).

נתון ש-A שייכת למחלקה P. האם בהכרח גם $min(A)$ שייכת למחלקה P? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 4 (16%)

א. הציעו מאמת (verifier) לשפה $\overline{EQ_{\text{CFG}}}$ (ראו תרגיל 5.1 בספר).

ב. הסבירו מדוע המאמת שהצעתם איננו בהכרח בעל זמן ריצה פולינומיאלי בגודל הקלט.

ג. הוכיחו: $\overline{EQ_{\text{CFG}}}$ **לא שייכת** ל-NP.

שאלה 5 (14%)

נעיין בשפה C הבאה:

$$C = \{<p, n> \mid p \text{ and } n \text{ are natural numbers and there is no prime number in the range } [p, p+n]\}$$

א. פרופסור מכובד הציע את ההוכחה הבאה לכך שהשפה C שייכת למחלקה NP:

לכל מילה $<p, n>$ ששייכת ל-C יש אישור שמוכיח את השייכות שלה לשפה: האישור מורכב ממחלק לא טריוויאלי לכל אחד מן המספרים בתחום $[p, p+n]$.

האם ההוכחה של הפרופסור טובה? הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. הוכיחו שהשפה המשלימה לשפה C שייכת למחלקה NP.

ג. אם יוכח ש- P = NP, האם אפשר יהיה להסיק ש-C שייכת ל-NP? הצדיקו היטב את תשובתכם.

ד. אם יוכח ש- P ≠ NP, האם אפשר יהיה להסיק ש-C לא שייכת ל-NP? הצדיקו היטב את תשובתכם.

שאלה 6 (8%)

יהי Σ אלפבית נתון.

מצאו את כל השפות L כך ש- $L \equiv_{\text{P}} \Sigma^*$ ואת כל השפות K כך ש- $K \equiv_{\text{P}} \varnothing$.

הסבירו היטב את תשובותיכם.

(היחס $\equiv_{\text{P}}$ מוגדר במדריך הלמידה בעמוד 85).

שאלה 7 (10%)

הראו רדוקציה פולינומיאלית של *3SAT* ל- *INDEPENDENT-SET*.

(*INDEPENDENT-SET* מוגדרת במדריך הלמידה בעמוד 94).

שאלה 8 (12%)

בעיה 7.24 בספר (עמוד 300).

שאלה 9 (12%)

מעגל המילטון בגרף לא מכוון $G = (V, E)$ הוא מעגל פשוט שמכיל כל צומת של הגרף פעם אחת ויחידה.

השפה *UHAMCIRCUIT* מוגדרת כך :

UHAMCIRCUIT = {<*G*> | *G* is an undirected graph that has a Hamiltonian circuit}

(זוהי שפת הגרפים הלא מכוונים שיש להם מעגל המילטון).

א. הראו רדוקציה פולינומיאלית של *UHAMPATH* ל- *UHAMCIRCUIT*.

ב. הוכיחו : *UHAMCIRCUIT* היא NP-שלמה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8 בספר

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2012א **מועד אחרון להגשה:** 13 ינו' 12

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10%)

הוכיחו שהשפה *SUBSET-SUM* שייכת ל-$\mathrm{SPACE}(n)$.
הציגו אלגוריתם להכרעת השפה, הסבירו היטב כיצד הוא ימומש, והוכיחו שהמקום הדרוש הוא $O(n)$.

שאלה 2 (10%)

הוכיחו: אם A היא שפה **רגולרית**, אז $A \in \mathrm{SPACE}(1)$.

שאלה 3 (15%)

בהגדרה של שפות PSPACE-שלמות (הגדרה 8.8) משתמשים ברדוקצית **זמן** פולינומיאלי (סעיף 2 בהגדרה).
הראו שאם נשתמש ברדוקצית **מקום** פולינומיאלי (כלומר, כל A ב-PSPACE ניתנת לרדוקציה **במקום** פולינומיאלי ל-B), אז SAT תהיה בעיה PSPACE-שלמה.

הדרכה: SAT היא רק דוגמה.

שאלה 4 (25%)

בעיה 8.22 בספר (עמוד 335).
לכל אחת מן השפות, הסבירו היטב את אופן פעולתה של מכונה שמשתמשת במקום לוגריתמי בגודל הקלט ומכריעה את השפה.

שאלה 5 (15%)

הוכיחו: $CLIQUE \leq_{\mathrm{L}} VERTEX\text{-}COVER$.

($CLIQUE$ הוגדרה לפני משפט 7.24; $VERTEX\text{-}COVER$ הוגדרה לפני משפט 7.44).
עליכם לתאר את הרדוקציה, להוכיח שהיא תקפה, ולהוכיח בפירוט שהיא יכולה להתבצע במקום לוגריתמי.

שאלה 6 (25%)

הבעיה E_{DFA} הוגדרה בספר לפני משפט 4.4.

הוכיחו: $\overline{E_{\mathrm{DFA}}}$ היא שפה NL-שלמה.

הדרכה: הראו שהיא שייכת ל-NL, והראו כי $PATH \leq_{\mathrm{L}} \overline{E_{\mathrm{DFA}}}$.

מטלת מנחה (ממ״ן) 15

הקורס: 20585 - מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: סעיפים 9.1, 10.1 ו-10.2 בספר

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 6 נקודות

סמסטר: א2012 **מועד אחרון להגשה:** 3 פבר׳ 12

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1 (12%)

הוכיחו שהפונקציה $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ ניתנת לבנייה **במגבלת מקום עצמית** (self constructible).

שאלה 2 (12%)

עיינו במכונה D שבהוכחת משפט 9.3 (עמוד 342).

א. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate M on w ..." במשפט "Simulate M on $<M>$ ..."
(כלומר, במקום לבצע סימולציה של M על $w = <M>10^k$, נבצע סימולציה של M על $<M>$).
האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

ב. נניח שנחליף בשלב 4 את המשפט "Simulate M on w ..." במשפט "Simulate M on 10^k ..."
(כלומר, במקום לבצע סימולציה של M על $w = <M>10^k$, נבצע סימולציה של M על 10^k).
האם ההוכחה טובה גם אחרי השינוי הזה? הסבירו היטב את תשובתכם.

שאלה 3 (12%)

הסבירו כיצד אפשר לבנות מכונה עם שני סרטים, שכאשר היא מקבלת כקלט על הסרט הראשון את המילה 1^n, היא מסיימת כאשר על הסרט השני כתוב הייצוג הבינרי של n.

הסרט הראשון הוא סרט לקריאה בלבד. הסרט השני הוא סרט לקריאה וכתיבה והוא סרט הפלט.
עליכם לבנות מכונה שזמן ריצתה יהיה $O(n)$.

עליכם להסביר היטב את אופן פעולת המכונה, ולהסביר מדוע זמן הריצה שלה הוא $O(n)$.

שאלה 4 (24%)

לימדו את הדיון על בעיית הסוכן הנוסע במדריך הלמידה (עמודים 150-156).

א. נסחו בעיית **הכרעה** של בעיית הסוכן הנוסע (כלומר, בעיה שהתשובה עליה היא "כן" או "לא").

ב. הוכיחו: בעיית ההכרעה של בעיית הסוכן הנוסע **המטרית** היא בעיה NP-שלמה.

הדרכה: הוכיחו שהיא שייכת ל-NP, והראו רדוקציה פולינומיאלית של בעיית קיומו של מעגל המילטון בגרף לא מכוון.

(מעגל המילטון בגרף לא מכוון G הוא מעגל פשוט שמכיל כל צומת של G פעם אחת ויחידה. אתם יכולים להשתמש בעובדה שבעיית קיומו של מעגל המילטון בגרף לא מכוון היא בעיה NP-שלמה).

ג. הוכיחו: לכל בעיית סוכן נוסע **לא מטרית**, אפשר לבנות בזמן פולינומיאלי בעיית סוכן נוסע **מטרית** עם אותם צמתים, כך ש-P הוא מסלול אופטימלי בבעיה המקורית (הלא מטרית), אם ורק אם P הוא מסלול אופטימלי בבעיה החדשה (המטרית).

הדרכה: הגדילו את משקלי הקשתות באופן שיתקיימו תנאי הבעיה המטרית.

ד. הסבירו מדוע אין סתירה בין קיומו של אלגוריתם קירוב בעל יחס קירוב 2 (ואפילו 1.5) ובעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית הסוכן הנוסע המטרית, ובין אי-קיומו של אלגוריתם כזה לבעיה הכללית (הלא מטרית), לאור מה שהראיתם בסעיף הקודם (שיש דרך מהירה לעבור מהבעיה הכללית לבעיה המטרית, באופן שמשמר את המסלולים האופטימליים).

שאלה 5 (18%)

הוכיחו: אם יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **ההכרעה** *MAX-CUT*, אז יש אלגוריתם בעל זמן ריצה פולינומיאלי לבעיית **האופטימיזציה** *MAX-CUT*.

האלגוריתם לבעיית ההכרעה מקבל כקלט גרף לא מכוון G ומספר טבעי k.

האלגוריתם מחזיר "כן" אם יש ב-G חתך שגודלו לפחות k, ו-"לא" אחרת.

האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה מקבל כקלט גרף לא מכוון G.

האלגוריתם מחזיר חתך בעל גודל מקסימלי ב-G, כלומר, חלוקה של קבוצת הצמתים של G לשתי תת-קבוצות זרות S ו-T, כך שמספר הקשתות המחברות צומת מ-S עם צומת מ-T הוא מקסימלי.

הדרכה: האלגוריתם לבעיית האופטימיזציה יהיה בנוי משני שלבים:

בשלב הראשון קוראים לאלגוריתם ההכרעה כמה פעמים כדי למצוא את גודלו של החתך המקסימלי.

בשלב השני, מבצעים בכל פעם שינויים (קלים) בגרף, וקוראים לאלגוריתם ההכרעה על הגרפים החדשים. לפי התשובות שהוא מחזיר, יודעים איזה צמתים שייכים לאותה תת-קבוצה (S או T), ואיזה צמתים לא שייכים לאותה תת-קבוצה (כלומר, אם האחד שייך ל-S אז השני שייך ל-T).

שאלה 6 (10%)

עיינו באלגוריתם *PRIME* בעמוד 379 בספר.

הוכיחו : אם t הוא מספר טבעי קטן מ-p שאיננו זר ל-p (המחלק המשותף המקסימלי של t ו-p גדול מ-1), אז t הוא עד לפריקות של p. (כלומר, אם הוא ייבחר כאחד מ-k המספרים בשלב 2 של האלגוריתם, האלגוריתם ידחה).

שאלה 7 (12%)

בעיה 10.20 בספר (עמוד 418).

כדי להוכיח את שוויון המחלקות, הראו הכלה כפולה.