

מבנה הבחינה :

- * יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- * משקל כל שאלה 25% .
- * אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- * **יש לנמק כל תשובה**, גם אם זה לא נאמר במפורש בשאלה.
 - * **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
 - * **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
 - * **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**
-

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

יהי R היחס (רלציה) הבא מעל $N \times N$:

$(a, b) R (c, d)$ אם $a \leq c$ וגם $b \leq d$.

9 (נק') א. הוכיחו ש- R הוא סדר חלקי מעל $N \times N$.

5 (נק') ב. הוכיחו ש- R אינו סדר מלא מעל $N \times N$.

11 (נק') ג. תנו דוגמא לקבוצה A , $A \subseteq N \times N$, שהיא בעלת התכונה הבאה :

היחס R שהוגדר למעלה מסדר את A בסדר מלא, ולכל קבוצה B החלקית ל- $N \times N$

ומכילה-ממש את A , R אינו מסדר את B בסדר מלא.

הוכיחו שהקבוצה A שמצאתם אכן מקיימת את הדרישות.

תזכורות: בקורס שלנו 0 הוא מספר טבעי. מכילה-ממש פירושו מכילה ולא שווה.

שאלה 2

12 (נק') א. האם ניתן לקחת את אינסוף הנקודות הנמצאות בקטע (מתמטי דמיוני) שאורכו 1

ס"מ ולפזר אותן כך **שימלאו** ריבוע של 1 סמ"ר ?

13 (נק') ב. האם קיימת דרך לקודד את כל **הקבוצות** של מספרים ממשיים ע"י מספרים ממשיים? כלומר האם יש דרך להתאים לכל קבוצה (סופית או אינסופית) של מספרים ממשיים – מספר ממשי, באופן שלקבוצות שונות יותאמו מספרים ממשיים שונים?

בשני הסעיפים, אם קיימת דרך לעשות את הנדרש – אינך חייבת לתאר מהי הדרך אלא רק להוכיח **שקיימת** דרך. אם לא קיימת דרך – הוכיחי שלא קיימת.

שאלה 3

4 (נק') א. מהו מספר הדרכים לסדר את המחרוזת 1112223334444 ?

שימו לב שיש ארבע הופעות של 4.

21 (נק') ב. מצאו את מספר הדרכים לסדר את המחרוזת הנ"ל, כך שעבור כל ספרה $(1,2,3,4)$ לא כל ההופעות שלה יהיו ברצף. במלים אחרות, אסור שיופיע הרצף 111, אסור שיופיע הרצף 222, אסור 333, מותר 444 אבל אסור 4444.

יש להגיע לתשובה סופית מספרית. נמקו את תשובותיכם.

שאלה 4

K_n הוא מספר החלוקות של הקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$ המקיימות:

בכל מחלקה יש לא יותר משני איברים.

למשל $\{1, 5\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2, 6\}$ היא חלוקה של $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ העונה על הדרישה.

(5 נק') א. מצא את K_1, K_2, K_3 .

(15 נק') ב. מצא יחס נסיגה (רקורסיה) עבור K_n . נמק בצורה ברורה.

(5 נק') ג. מצא את K_6 .

אין צורך לפתור כללית את יחס הנסיגה, לא למדנו בקורס כיצד לפתור יחס נסיגה מסוג זה.

שאלה 5

G הוא עץ בעל 60 צמתים, מתוכם בדיוק 10 צמתים בעלי דרגה 3.

אין ב- G צמתים בעלי דרגה גדולה מ-3.

כמה עלים יש ל- G ? פתרו בשתי דרכים שונות, כמפורט להלן:

(12 נק') א. מצאו את מספר העלים על-ידי התבוננות בצורתה של סדרת פרוֹפֶּר של G .

(13 נק') ב. מצאו את מספר העלים ללא שימוש בסדרת פרוֹפֶּר.

פתרון על-ידי מתן דוגמא של עץ מסוים (או סדרת פרוֹפֶּר מסוימת) לא יתקבל:

נדרשת הוכחה כללית, לכל G המקיים את התנאים.

בהצלחה!