תשובה 1

כל קטע בדיאגרמת הסה של קבוצה סדורה-חלקית מייצג זוג איברים, שאחד מהם מכסה את השני. מהגדרת המושג "מכַסֶה", קבוצה $B \in P(A)$ מכסה קבוצה $C \in P(A)$ לגבי יחס ההכלה אם ורק אם מתקיים:

$C \subset B$ ואין אף קבוצה $D \in P(A)$ המקיימת $C \subset D \subset B$ (הכלות-ממש).

עבור B,C **סופיות**, קל לראות שתנאי זה מתקיים אם ורק אם קיים:

$C \subset B$ ומספר אברי C קטן ב- 1 ממספר אברי B.

יהי k מספר טבעי בתחום $0 \le k \le n$.

לקבוצה הנתונה A שהיא בת n איברים יש $\binom{n}{k}$ תת-קבוצות בנות k איברים,

כלומר ב- $P(A)$ יש $\binom{n}{k}$ איברים שעוצמתם k.

אם B קבוצה כלשהי בת k איברים, יש לה בדיוק k תת-קבוצות בנות $k-1$ איברים (ע"י השמטת איבר אחד של B בכל פעם. שימו לב שזה נכון גם אם B ריקה).
כלומר כל קבוצה בגודל k מכסה בדיוק k קבוצות אחרות.

לכן מספר הקטעים בדיאגרמת הסה של רלצית ההכלה מעל $P(A)$ הוא $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

לפי שאלה 3.9 בעמ' 71 בספר הלימוד, סכום זה שווה $n \cdot 2^{n-1}$.

תשובה 2

א. תהי U קבוצת כל היחסים מ- A ל- B. מהגדרתה, $U = P(A \times B)$.

כהכנה להמשך ולסעיף הבא נחשב: $|U| = |P(A \times B)| = 2^{20}$.

תהי K_1 קבוצת היחסים מ- A ל- B בהם 1 **אינו** נמצא בתחום ההגדרה.

ניתן לראות כל אבר של K_1 כיחס מ- $A - \{1\}$ ל- B,

ולהיפך: כל יחס מ- $A - \{1\}$ ל- B ניתן לראות כיחס מ- A ל- B, שבו 1 אינו נמצא בתחום ההגדרה. במלים אחרות, ניתן לזהות את K_1 עם קבוצת היחסים מ- $A - \{1\}$ ל- B,

כלומר עם $P\big((A - \{1\}) \times B\big)$. לפיכך $|K_1| = 2^{15}$.

ב. בהמשך לסימונים של הסעיף הקודם, עבור $i = 1,2,3$ תהי K_i קבוצת אברי U בהם המספר i אינו נמצא בתחום ההגדרה.

מובן כי לכל i , $|K_i| = |K_1| = 2^{15}$. יש 3 קבוצות K_i .

נחשב חיתוכים בזוגות (נמקו!): $|K_i \cap K_j| = 2^{10}$ $(i \neq j)$. יש 3 חיתוכים כאלה.

חיתוך משולש: $|K_1 \cap K_2 \cap K_3| = 2^5$.

כעת בעזרת הכלה והפרדה, מספר היחסים המקיימים את הנדרש הוא:

$$|U| - \sum_{i=1}^{3}|K_i| + \sum_{1\le i<j\le 3} K_i \cap K_j| - |K_1 \cap K_2 \cap K_3|$$
$$= 2^{20} - 3\cdot 2^{15} + 3\cdot 2^{10} - 1\cdot 2^5 = 953,312$$

תשובה 3

א. הגורמים הראשוניים של 3600 הם 2,3,5. חישוב לפי הנוסחה נותן 960 .

ב. ראו הדוגמא עבור 120 שנעשית בספר, מסתיימת בראש עמוד 93. החישוב מקביל לגמרי.

תשובה 4

נניח שדינה בחרה 8 מספרים.
תת-קבוצות של קבוצת המספרים שדינה בחרה, לא כולל קבוצה ריקה: 255 (מדוע?)

בלי לדעת מהי הבחירה של דינה, הסכום הקטן ביותר האפשרי הוא 10 (מדוע?)
והסכום הגדול ביותר האפשרי הוא $260 = 36 + \ldots + 31 + 30 + 29$ (מדוע?).
לכן מספר הסכומים השונים האפשרי הוא לכל היותר $251 = 1 + 10 - 260$.
למעשה יש פחות מזה: 251 הוא מספר הסכומים השונים שאפשר ליצור מתוך כל הבחירות האפשריות של דינה. בפועל דינה בוחרת שמונה מספרים מסוימים, ומתוך שמונה אלה ניתן ליצור מספר קטן יותר של סכומים. למשל לא יכול להתקבל מתוך אותה בחירה של דינה הסכום הקטן ביותר שציינו ובעת ובעונה אחת, מתוך אותם שמונה מספרים, גם הסכום הגדול ביותר שציינו (מדוע?). אבל החסם הגס 251 מספיק לצורך השאלה שלנו.

מכיון שיש יותר קבוצות שונות מאשר סכומים, קיימות שתי קבוצות שיש להן אותו סכום.
ניקח שתי קבוצות כאלה.

אם יש להן אברים משותפים, נזרוק אותם משתי הקבוצות.
אחרי שזרקנו את המשותפים קיבלנו שתי קבוצות זרות של מספרים שיש להן אותו סכום.

תשובה 5

א. נבדוק כיצד בנויה סדרה באורך n המקיימת את הנדרש.

נתבונן באיבר האחרון של הסדרה:

* אם הוא אי-זוגי (4 אפשרויות), אז קטע הסדרה הקודם לו הוא **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-1$ (a_{n-1} אפשרויות).
* אם הוא זוגי (3 אפשרויות) אז לפניו בא מספר אי-זוגי (4 אפשרויות), ולפניו **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-2$ (a_{n-2} אפשרויות).

קיבלנו: $a_n = 4a_{n-1} + 12a_{n-2}$.

תנאי התחלה:

$a_0 = 1$ (הסדרה הריקה מקיימת את התנאים! נוח להיעזר ב- a_0 לסעיף ב),

$a_1 = 7$,

$a_2 = 7^2 - 3^2 = 40$ (כל הזוגות פחות זוגות של מספרים זוגיים),

לבדיקה, מיחס הנסיגה: $a_2 = 4a_1 + 12a_0 = 4\cdot 7 + 12 = 40$.

ב. המשוואה האפיינית: $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$. פתרונותיה: $6, -2$.

לפיכך $a_n = A\cdot 6^n + B\cdot(-2)^n$.

בהצבת תנאי ההתחלה נקבל: $A + B = 1$, $6A - 2B = 7$.

מכאן

$A = 9/8$, $B = -1/8$.

ולכן

$$a_n = \frac{9}{8}\cdot 6^n - \frac{1}{8}\cdot(-2)^n = \frac{1}{8}\left(9\cdot 6^n - (-2)^n\right)$$

רצוי מאד להציב ולבדוק ערכים אחדים של n !

איתי הראבן