

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית

חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 4

משקל המטלה: 3 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: יום ו' 12.5.06

סמסטר: 2006

אנא שים לב:

מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל

חלק מהממ"ן מסתמך על החוברת "פרק 5" שקיבלתם בחבילה של חמרי הקורס.
חוברת זו משלימה את פרק 4 ומחליפה חלק ממנו.

שאלה 1 (24 נקודות)

א. הוכח שאם $|A| = |B|$ אז $|A - B| = |B - A|$.

הדרכה: לא נתון שהקבוצות סופיות, לכן יש לעבוד לפי הגדרת שוויון עוצמות:
מהנתון נובע שקיימת פונקציה חח"ע ועל מסוימת, ועלינו להראות שמכך נובע שקיימת פונקציה
חח"ע ועל אחרת...

ב. הראה שאם A, B סופיות ו- $|A| = |B|$ אז $|A - B| = |B - A|$.

ג. הראה ע"י דוגמא שטענת סעיף ב אינה נכונה בהכרח עבור A, B שאינן סופיות.

שאלה 2 (20 נקודות)

R היא קבוצת המספרים הממשיים. Q היא קבוצת המספרים הממשיים הרציונליים.

ב"תורת הקבוצות" עמ' 126 שאלה 4.8 ראינו ש- Q היא בת-מניה.

א. תהי K קבוצת המספרים הממשיים שאינם רציונליים.

הוכח ש- K אינה בת-מניה, בלי להסתמך על פרק 5 בתורת הקבוצות.

ב. מצא מהי עוצמת הקבוצה הבאה:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ההפרש } (x - \sqrt{2}) \text{ הוא רציונלי}\}$

לקבוצה זו שייכים למשל המספרים $\sqrt{2}$, $0.35 + \sqrt{2}$.

הוכח את תשובתך.

שאלה 3 (22 נקודות)

- א. הוכיחו כי קבוצת היחסים הדו-מקומיים (רלציות בינאריות) מעל \mathbb{N} , עוצמתה C .
הדרכה: מהו יחס דו-מקומי מעל \mathbb{N} ? מהי אפוא קבוצת כל היחסים הללו?
ב. הוכיחו שעוצמת קבוצת היחסים הטרנזיטיביים מעל \mathbb{N} אף היא C .

שאלה 4 (24 נקודות)

- א. יהיו k_1, k_2, m_1, m_2 עוצמות. הוכח שאם $k_1 \leq k_2$ ו- $m_1 \leq m_2$ אז $k_1' m_1 \leq k_2' m_2$.
ב. הוכח: $C^C = 0$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם).
ג. הוכח: $C^C = 2^C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם ובמשפטים שבחוברת).

שאלה 5 (10 נקודות)

- היעזרו בפרק 5 ומצאו את עוצמת הקבוצה K שהוגדרה בשאלה 2 סעיף א בממ"ן זה.
הוכיחו את תשובתכם.