תשובה 1

כל קטע בדיאגרמת הסה של קבוצה סדורה-חלקית מייצג זוג איברים, שאחד מהם מכסה את השני. מהגדרת המושג "מכסה", ביחס ההכלה קבוצה $B \in P(A)$ מכסה קבוצה $C \in P(A)$ לגבי אם ורק אם מתקיים:

$C \subset B$ ואין אף קבוצה $D \in P(A)$ המקיימת $C \subset D \subset B$ (הכלות-ממש).

עבור B,C **סופיות**, קל לראות שתנאי זה מתקיים אם ורק אם קיים:

$C \subset B$ ומספר אברי C קטן ב- 1 ממספר אברי B.

יהי k מספר טבעי בתחום $0 \le k \le n$.

לקבוצה הנתונה A שהיא בת n איברים יש $\binom{n}{k}$ תת-קבוצות בנות k איברים,

כלומר ב- $P(A)$ יש $\binom{n}{k}$ איברים שעוצמתם k.

אם B בת k איברים, יש לה k תת-קבוצות בנות $k-1$ איברים (ע"י השמטת איבר אחד של B בכל פעם. נשים לב שזה נכון גם אם B ריקה). כלומר כל קבוצה בגודל k מכסה בדיוק k קבוצות אחרות.

לכן מספר הקטעים בדיאגרמת הסה של רלצית ההכלה מעל $P(A)$ הוא $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

לפי שאלה 3.9 בעמ' 71 בספר הלימוד, סכום זה שווה $n \cdot 2^{n-1}$.

תשובה 2

א. 6^6

ב. תהי U קבוצת כל הסדרות באורך 6 שאבריהן לקוחים מהקבוצה $\{1,2,3,4,5,6\}$.

מסעיף א: $|U| = 6^6$.

תהי A_i $(i=1,2,3)$ קבוצת הסדרות השייכות ל- U, בהן לא מופיע המספר i.

בדומה לסעיף א, $|A_i| = 5^6$. יש 3 קבוצות כאלה.

חיתוכים בזוגות: $|A_i \cap A_j| = 4^6$ $(i \ne j)$. יש 3 חיתוכים כאלה.

חיתוך משולש: $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3^6$.

כעת בעזרת הכלה והפרדה, מספר הסדרות המותרות הוא:

$$|U| - \sum_{i=1}^{3}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le 3}|A_i \cap A_j| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$
$$= 6^6 - 3\cdot 5^6 + 3\cdot 4^6 - 1\cdot 3^6 = 11{,}340$$

תשובה 3 (תקציר – השלימו את הפרטים!)

ללא הגבלה יש $6!$ סידורים.

נסמן ב- A_i $(i=1,2,3)$ את קבוצת הסידורים בהם זוג i שהיה יחד קודם הוא שוב יחד.

$|A_i|$: יש 3 אפשרויות לבחור לזוג i שורה. בתוך השורה יש להם 2 אפשרויות להתיישב.

כעת יש $4!$ סידורים לשאר החברים.

$|A_i \cap A_j|$: אם שני זוגות נשארים זוגות בהכרח הזוג השלישי נשאר זוג. כלומר חיתוך של שתי קבוצות שווה לחיתוך של שלושתן. נחשב אפוא את $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$, אבל שימו לב: **גם כאשר חיתוך של זוג קבוצות הוא בהכרח חיתוך משולש, אי אפשר לדלג על ביטויים בנוסחה: עלינו לכלול בנוסחה הן את החיתוכים בזוגות והן את החיתוך המשולש!**

חישוב $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$:

יש $3!$ אפשרויות לבחור שורות ל- 3 הזוגות. בתוך השורות יש להם 2^3 אפשרויות לשבת.

תשובה: $6!-3\cdot3\cdot2\cdot4!+3\cdot6\cdot8-1\cdot6\cdot8 = 384$

תשובה 4

מכיון שאף אחד לא לחץ יד לעצמו, אדם שהגיע לטקס יכול ללחוץ לכל היותר 699 ידים.

מספר לחיצות הידים הקטן ביותר האפשרי הוא 0.

לכאורה יש לנו 700 אפשרויות למספר לחיצות ידים: המספרים $0,1,2,\ldots,699$.

אבל אם יש אדם שלחץ 699 ידים, משמע הוא לחץ **לכל שאר האנשים**.

במקרה כזה אין אדם שלא לחץ אף יד:

האדם שלחץ 699 ידים לחץ יותר מ- 0, וכל אחד אחר לחץ לפחות את ידו של אדם זה.

לפיכך יש שתי אפשרויות:

(i) יש אדם שלחץ 699 ידים ואין אדם שלחץ 0 ,

משמע מספר לחיצות הידים השונות הוא בתחום $1,2,3,\ldots,699$,

(ii) אין אדם שלחץ 699 ידים ואז אולי יש אדם שלחץ 0,

משמע מספר לחיצות הידים הוא בתחום $0,1,2,\ldots,698$.

בכל אחד משני המקרים יש 699 אפשרויות למספר לחיצות ידים.

ניישם את עקרון שובך היונים על כל אחד משני המקרים: בכל אחד מהמקרים יש 700 אנשים ורק 699 אפשרויות. לפי עקרון שובך היונים, בכל אחד מהמקרים יש (לפחות) שני אנשים שלחצו אותו מספר ידים.

המספר 700 בשאלה הוא כמובן שרירותי. אותה תוצאה נכונה לכל התכנסות של אנשים:

תמיד יש לפחות שני אנשים שלחצו אותו מספר ידים.

איתי הראבן