20425 - תאריך הבחינה: 2.7.2009 (סמסטר 2009ב - מועד א82/1)

שאלה 1

א. הוכחת הטענה מובאת בספר הקורס בעמוד 36.

ב. האגף הימני של השוויון, דהיינו $\binom{n+m}{k}$, הוא מספר האפשרויות לבחור k פרטים שונים (ללא חשיבות לסדר הבחירה) מתוך קבוצה בת $n+m$ פרטים שונים.

אולם, את בחירת k הפרטים נוכל לבצע גם בדרך הבאה: נחלק את קבוצת הפרטים, שממנה בוחרים, לשתי קבוצות – האחת בגודל n והשנייה בגודל m – ואת בחירת k הפרטים נבצע בשני שלבים. בשלב הראשון נבחר i $(0 \le i \le k)$ פרטים מתוך הקבוצה בת n הפרטים ובשלב השני נבחר את שאר הפרטים, דהיינו $k-i$ פרטים, מתוך הקבוצה בת m הפרטים.

כעת, מכיוון שלכל ערך של i יש $\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$ אפשרויות בחירה שונות ומכיוון ש- $i=0,1,\ldots,n$, נקבל את האגף השמאלי של השוויון, דהיינו $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$.

נשתמש כעת בשוויון זה, כדי לחשב את ההסתברות שיתקבל אותו מספר של H-ים בשני מטבעות תקינים, שמוטלים n פעמים כל אחד. ההסתברות שבמטבע אחד נקבל i פעמים H היא $\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. לכן, בהנחה שהמטבעות בלתי-תלויים זה בזה, ההסתברות שנקבל i פעמים H בכל האחד מהם היא $\left[\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^2$.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

שאלה 2

א.

$$P\{X^2-4>0 \mid X>0\} = \frac{P\{X^2-4>0, X>0\}}{P\{X>0\}} = \frac{P\{X>2, X>0\}}{P\{X>0\}} = \frac{P\{X>2\}}{P\{X>0\}} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$$

ב.

$$E[|X^2-4|] = \int_{-2}^{2} 0.2(4-x^2)\,dx + \int_{2}^{3} 0.2(x^2-4)\,dx = 0.2\left[4x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} + 0.2\left[\tfrac{1}{3}x^3-4x\right]_{2}^{3}$$

$$= 1.6 - \tfrac{1.6}{3} + 1.6 - \tfrac{1.6}{3} + 1.8 - 2.4 - \tfrac{1.6}{3} + 1.6 = 2.6$$

ג1. לכל $0<y<2$ מתקיים:

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{|X| \le y\} = P\{-y \le X \le y\} = \tfrac{2y}{5} = 0.4y$$

ולכל $2 \le y < 3$ מתקיים:

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{|X| \le y\} = P\{-2 \le X \le y\} = \tfrac{y+2}{5} = 0.2y + 0.4$$

כלומר:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y \le 0 \\ 0.4y & , \quad 0 < y < 2 \\ 0.2y + 0.4 & , \quad 2 \le y < 3 \\ 1 & , \quad y \ge 3 \end{cases}$$

ג2. נגזור את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y ונקבל:

$$f_Y(y) = \tfrac{d}{dy}F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y \le 0\,,\, y \ge 3 \\ 0.4 & , \quad 0 < y < 2 \\ 0.2 & , \quad 2 \le y < 3 \end{cases}$$

שאלה 3

א. התפלגות הסכום של משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים היא פואסונית עם פרמטר שהוא סכום הפרמטרים של משתני הסכום. כלומר, התפלגות המספר הכולל של הקרמבו ששני העובדים אורזים בשעה אחת היא פואסונית עם הפרמטר $2.25\lambda^2$.

כעת, מכיוון שאפשר להציג כל משתנה מקרי פואסוני כסכום של משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, נוכל להשתמש במשפט הגבול המרכזי לחישוב הקירוב ל- λ. נסמן ב-X את המספר הכולל של הקרמבו ששני העובדים אורזים בשעה אחת, ונקבל:

$$P\{X > 280\} = P\{X \ge 280.5\} \cong P\left\{Z \ge \tfrac{280.5-2.25\lambda^2}{\sqrt{2.25\lambda^2}}\right\} = 1-\Phi\left(\tfrac{280.5-2.25\lambda^2}{1.5\lambda}\right) = 0.3085$$

כלומר: $\Phi\left(\tfrac{280.5-2.25\lambda^2}{1.5\lambda}\right) = 0.6915 = \Phi(0.5)$

ומכאן שמתקיימת המשוואה: $2.25\lambda^2 + 0.75\lambda - 280.5 = 0$

ולכן: $\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{4.5}\left(-0.75 \pm \overbrace{\sqrt{0.75^2 + 2524.5}}^{=50.25}\right) = \begin{cases} 11 \\ \cancel{-11.3 < 0} \end{cases}$

כלומר, $\lambda \cong 11$.

ב1. נסמן ב- Y את זמן האריזה (בדקות) של קרמבו אחד; מתקיים $Y \sim N(0.4,\, 0.035^2)$.

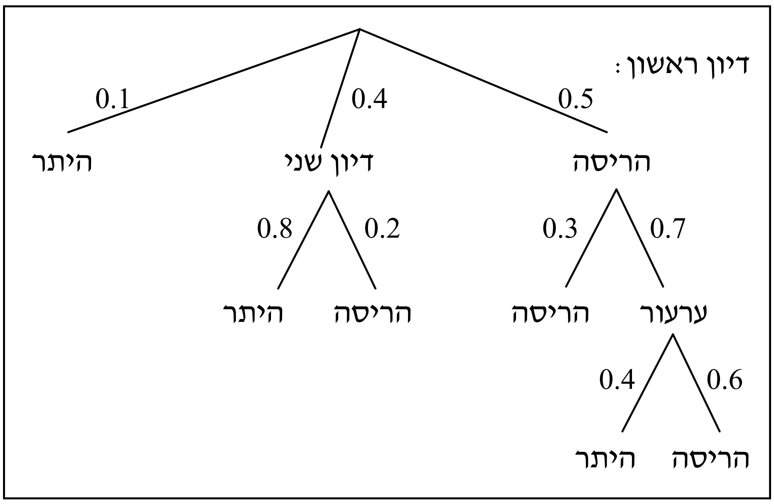
$$P\{Y > 0.41\} = P\left\{Z > \tfrac{0.41-0.4}{0.035}\right\} = 1-\Phi(0.2857) = 1-0.6125 = 0.3875$$

ב2. נסמן ב- W את זמן האריזה (בדקות) של 100 קרמבו. המשתנה המקרי W הוא סכום של 100 משתנים מקריים בלתי-תלויים שלכולם התפלגות נורמלית עם הפרמטרים 0.4 ו- 0.035^2. לכן, ל-W יש התפלגות נורמלית עם הפרמטרים $100\cdot 0.4 = 40$ ו- $100\cdot 0.035^2 = 0.1225$. וההסתברות המבוקשת היא:

$$P\{W > 41\} = P\left\{Z > \tfrac{41-40}{\sqrt{0.1225}}\right\} = 1-\Phi(2.8571) = 1-0.99787 = 0.00213$$

שאלה 4

א. נצייר עץ-הסתברות מתאים לבעיה:



לפי עץ-ההסתברות, ההסתברות שמבנה בלתי-חוקי יקבל היתר היא:

$$0.1+0.4\cdot 0.8+0.5\cdot 0.7\cdot 0.4=0.56$$

ב. נסמן ב- X_1 את מספר המבנים שקיבלו היתר בדיון הראשון בעניינם, ב- X_2 את מספר המבנים שקיבלו היתר <u>לאחר</u> הדיון הראשון בעניינם וב- X_3 את מספר המבנים ש<u>לא</u> קיבלו היתר. נשים לב, של-X_i-ים יש התפלגות משותפת מולטינומית, עם הפרמטרים $n=20$ ו- $\underset{\sim}{p}=(0.1,0.46,0.44)$. לכן:

$$P\{X_1=3\,|\,X_1+X_2=14\}=\frac{P\{X_1=3,X_1+X_2=14\}}{P\{X_1+X_2=14\}}=\frac{P\{X_1=3,X_2=11\}}{P\{X_1+X_2=14\}}$$

$$=\frac{\binom{20}{3,11,6}0.1^3\cdot 0.46^{11}\cdot \cancel{0.44^6}}{\binom{20}{14}0.56^{14}\cdot \cancel{0.44^6}}=\binom{14}{3}\left(\frac{0.1}{0.56}\right)^3\left(\frac{0.46}{0.56}\right)^{11}=0.2381$$

ג. מהאמור בסעיף הקודם, נובע כי למשתנה המקרי המותנה $X_2\,|\,X_1=3$ יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים $n=17$ ו- $p=\frac{0.46}{1-0.1}$. לכן:

$$\text{Var}(X_2\,|\,X_1=3)=17\cdot\tfrac{0.46}{0.9}\cdot\tfrac{0.44}{0.9}=4.2479$$

שאלה 5

א. נגדיר: $X_i=\begin{cases}1 & , \text{המספר } i \text{ נבחר לפחות פעם אחת}\\ 0 & , \text{אחרת}\end{cases}$ לכל $i=1,\ldots,10$,

ונקבל כי: $X=\sum_{i=1}^{10}X_i=$ מספר המספרים שנבחרו לפחות פעם אחת

לכל $i=1,\ldots,10$ מתקיים:

$$E[X_i]=P\{X_i=1\}=1-0.9^{12}=0.71757$$

לכן:

$$E[X]=\sum_{i=1}^{10}E[X_i]=10\cdot 0.71757=7.1757$$

ב. לכל $i=1,\ldots,10$ מתקיים:

$$\text{Var}(X_i)=P\{X_i=1\}P\{X_i=0\}=0.71757\cdot 0.28243=0.20266$$

ולכל $i,j=1,\ldots,10$ כך ש- $i\neq j$ מתקיים:

$$P\{X_i=1,X_j=1\}=1-P\{X_i=0\cup X_j=0\}$$

$$=1-\left(P\{X_i=0\}+P\{X_j=0\}-P\{X_i=0\cap X_j=0\}\right)$$

$$=1-\left(0.9^{12}\cdot 2-0.8^{12}\right)=0.50386$$

לכן:

$$\text{Cov}(X_i,X_j)=E[X_iX_j]-E[X_i]E[X_j]$$

$$=P\{X_i=1,X_j=1\}-(P\{X_i=1\})^2=0.50386-0.71757^2=-0.011046$$

ומכאן:

$$\text{Var}(X)=\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{10}X_i\right)=10\cdot\text{Var}(X_i)+10\cdot 9\cdot\text{Cov}(X_i,X_j)$$

$$=10\cdot 0.20266-10\cdot 9\cdot 0.011046\cong 1.0324$$

ג. לפי ההגדרה של X ושל Y מתקיים השוויון $Y=10-X$. לכן:

$$\text{Var}(Y)=\text{Var}(X)=1.0324$$