

**קורס: 20425 "הסתברות לתלמידי מדעי המחשב"**  
**תאריך הבחינה: 23/01/2019 (סמסטר 2019 א - מועד א1 / 82)**

**חומר העזר המותר:** מחשבון מדעי בלבד.

ספר הקורס, מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זרות במשקלן.

בכל תשובותיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

**לבחינה מצורפים:** טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

ודף נוסחאות הכולל 2 עמודים.

### שאלה 1 (25 נקודות)

5 נק') א. הוכיחו שאם  $A$  ו- $B$  הם מאורעות בלתי תלויים זה בזה, אזי  $\bar{A}$  ו- $\bar{B}$  יהיו מאורעות בלתי תלויים זה בזה.

12 נק') ב. יהיו  $X$  ו- $Y$  משתנים מקריים פואסוניים בלתי-תלויים עם הפרמטרים  $\lambda_X$  ו- $\lambda_Y$ , בהתאמה. הוכיחו שלמשתנה המקרי המותנה  $X$  בהינתן  $X + Y = n$  יש התפלגות בינומית עם הפרמטרים

$$n \text{ ו- } \frac{\lambda_X}{\lambda_X + \lambda_Y}.$$

8 נק') ג. הראו שאם משתנה מקרי מתפלג מעריכית עם פרמטר  $\lambda$ , אז הפונקציה יוצרת המומנטים שלו

$$\text{היא } M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \text{ כאשר } t < \lambda.$$

### שאלה 2 (25 נקודות)

לאונרד משחק בכל יום במשחק מחשב. יהי  $X$  - משך הזמן (בדקות) שהוא מקדיש מדי יום למשחק.  $X$  מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < b \\ a & b \leq x < b+2 \\ 2a & b+2 \leq x < b+3 \\ a & b+3 \leq x < b+5 \\ c & b+5 \leq x \end{cases}$$

כמו כן ידוע ש:  $E[X] = 12.5$ .

8 נק') א. חשבו את ערכי הפרמטרים  $a, b, c$ .

7 נק') ב. חשבו את  $Var(X)$ .

10 נק') ג. לאונרד החליט שהוא סופר את מספר הימים שעוברים החל מהיום ועד היום בו הוא ישחק יותר מ-13 דקות (היום בו הוא משחק יותר מ-13 דקות לא נספר). משכי הזמן שלאונרד מקדיש למשחק בימים שונים בלתי-תלויים זה בזה. נגדיר את  $W$  להיות מספר הימים שיספרו על ידי לאונרד.

מצאו את התוחלת והשונות של  $W$ .

### שאלה 3 (25 נקודות)

16נק' א. יהיו  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכולם התפלגות אחידה בדידה בין 0 ל-10. (כלומר, כל אחד מן המשתנים מקבל את הערכים 0, 1, ..., 10 בהסתברויות שוות).

$$(1) \text{ חשב את } P\left\{\min_{i=1,\dots,10} X_i \leq 2\right\}.$$

(2) מה ההסתברות שמבין 10 ה- $X_i$  ים יהיו בדיוק 5 שיקבלו ערך שאינו עולה על 4 ובדיוק 3 שיקבלו ערך בין 5 ל-8 (כולל 5 וכולל 8)?

9 נק' ב. יהיו  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם תוחלת סופית  $\mu$  ושונות

$$\sigma^2. \text{ הניחו ש-} n \text{ גדול. חשבו קירוב ל- } P\left\{\bar{X} \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} + \mu\right\}.$$

### שאלה 4 (25 נקודות)

מיכל מסדרת על השולחן בסדר אקראי שורה של 12 כוסות משקה: 2 כוסות שמפנייה, 4 כוסות של יין לבן ו-6 כוסות של יין אדום.

12 נק' א. נסמן ב-  $U$  את מספר הכוסות של יין אדום במקומות 1,2,3. וב-  $W$  את מספר הכוסות של יין אדום במקומות 4,7,11.

$$(1) \text{ חשבו את } E[U - W].$$

$$(2) \text{ חשבו את } \text{Var}(U + W).$$

$$(3) \text{ חשבו את } \text{Cov}(U, W).$$

5 נק' ב. מצאו את התפלגות מספר הכוסות (לא כולל השמפנייה) שנמצאות בין 2 כוסות השמפנייה.

8 נק' ג. מיכל בוחרת כוס אקראית ושותה אותה. אם הכוס היא כוס שמפנייה היא מספרת 4 בדיחות לחבריה כך שלכל בדיחה יש סיכוי של 0.5 להצחיק את החברים ללא תלות בבדיחה אחרת. אם היא שותה כוס יין היא מספרת 8 בדיחות לחבריה כך שלכל בדיחה יש סיכוי של 0.3 להצחיק את החברים ללא תלות בבדיחה אחרת. מה ההסתברות שבדיוק 4 בדיחות של מיכל יצחיקו את חבריה?

**שאלה 5 ( 25 נקודות)**

לערך יש 10 גיבורי-על שונים אשר חביבים עליו, ולכן יש לו 20 בובות של גיבורי-העל – 2 בובות של כל גיבור-על. ערך מסדר את הבובות על 8 מדפים: ב-4 מדפים יש מקום ל-3 בובות וב-4 מדפים יש מקום ל-2 בובות. מדף נחשב מדף-על אם יש עליו 2 בובות של אותו גיבור על.

נסמן ב-  $X$  את מספר המדפים שהם מדפי-על.

(5 נק') א. מה ההסתברות שמדף גדול (מדף שיש מקום בו ל-3 בובות) יהיה מדף-על?

(8 נק') ב. חשבו את  $E[X]$ .

(12 נק') ג. חשבו את  $Var(X)$ .

**בהצלחה!**

**ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית,  $\Phi(z)$**

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] \quad \text{נוסחת האינטרפולציה:}$$

$z$	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
$z$	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
$z$	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

**דף נוסחאות לבחינה - 20425**

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות / פונקציית הצפיפות	התוחלת	השונות	הפונקציה יוצרת המומנטים
בינומית	$\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}, \quad i=0,1,\dots,n$	$np$	$np(1-p)$	$(pe^t + 1 - p)^n$
גיאומטרית	$(1-p)^{i-1} \cdot p, \quad i=1,2,\dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$pe^t / (1 - (1-p)e^t)$ $t < -\ln(1-p)$
פואסונית	$e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i!, \quad i=0,1,\dots$	$\lambda$	$\lambda$	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
בינומית שלילית	$\binom{i-1}{r-1} (1-p)^{i-r} \cdot p^r, \quad i=r, r+1, \dots$	$r/p$	$(1-p)r/p^2$	$(pe^t / (1 - (1-p)e^t))^r$ $t < -\ln(1-p)$
היפרגיאומטרית	$\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i} / \binom{N}{n}, \quad i=0,1,\dots,m$	$nm/N$	$\frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N} (1 - \frac{m}{N})$	
אחידה בדידה	$\frac{1}{n}, \quad i=m+1, m+2, \dots, m+n$	$m + (1+n)/2$	$(n^2 - 1)/12$	
אחידה	$1/(b-a), \quad a \leq x \leq b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$(e^{bt} - e^{at}) / (tb - ta), t \neq 0$
נורמלית	$(1/\sqrt{2\pi}\sigma) \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty$	$\mu$	$\sigma^2$	$\exp\{\mu t + \sigma^2 t^2/2\}$
מעריכית	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda - t), \quad t < \lambda$
מולטינומית	$\binom{n}{n_1, \dots, n_r} \cdot p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}, \quad \sum n_i = n, \sum p_i = 1$			

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

נוסחת הבינום :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

כלל ההכלה וההפרדה

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

הסתברות מותנית

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

נוסחת הכפל

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i), \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S$$

נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}, \quad \{B_i\} \text{ זרים ואיחודם הוא } S$$

נוסחת בייס

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int x f(x) dx$$

תוחלת

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) = \int g(x) f(x) dx$$

תוחלת של פונקציה של מ"מ

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

שונות

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X) \quad E[aX + b] = aE[X] + b$$

תוחלת ושונות של פונקציה לינארית

אם מופעים של מאורע נתון מתרחשים בהתאם לשלוש ההנחות של **תהליך פואסון** עם קצב  $\lambda$  ליחידת זמן אחת, אז מספר המופעים שמתרחשים ביחידת זמן אחת הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר  $\lambda$ .

$$P\{X > s+t | X > t\} = P\{X > s\}, \quad s, t \geq 0$$

תכונת חוסר-הזכרון

$$E[X|Y=y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y) = \int x f_{X|Y}(x|y) dx$$

תוחלת מותנית

$\text{Var}(X   Y = y) = E[X^2   Y = y] - (E[X   Y = y])^2$	שונות מותנית
$E[X] = E[E[X   Y]] = \sum_y E[X   Y = y] p_Y(y)$	נוסחת התוחלת המותנית
$E[X \cdot g(Y)] = E[g(Y)E[X   Y]]$	(טענה מתרגיל 26, עמוד 430)
$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X   Y)] + \text{Var}(E[X   Y])$	נוסחת השונות המותנית
$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$	תוחלת של סכום משתנים מקריים
$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$	שונות משותפת
$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$	
$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$	שונות של סכום משתנים מקריים
$\rho(X, Y) = \text{Cov}(X, Y) / \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}$	מקדם המתאם הלינארי
$M_X(t) = E[e^{tX}]$ ; $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$	פונקציה יוצרת מומנטים
$M_{X_1+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t)$ : כאשר $X_i$ מ"מ ב"ת מתקיים	
$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X_1]$	תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים של סכום מקרי
$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\text{Var}(X_1) + (E[X_1])^2 \text{Var}(N)$	(כאשר $X_i$ מ"מ ב"ת ש"ה)
$M_{X_1+\dots+X_N}(t) = E\left[\left(M_{X_1}(t)\right)^N\right]$	
$P\{X \geq a\} \leq E[X]/a$ , $a > 0$ , $X$ מ"מ אי-שלילי	אי-שוויון מרקוב
$P\{ X - \mu  \geq a\} \leq \sigma^2/a^2$ , $a > 0$ , $\mu, \sigma^2 < \infty$	אי-שוויון צ'בישב
$P\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)/\sqrt{n\sigma^2} \leq a\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a)$ , $\mu, \sigma^2 < \infty$ , $X_i$ מ"מ ב"ת וש"ה	משפט הגבול המרכזי
-----	
<ul style="list-style-type: none"> <li>אם <math>A</math> ו-<math>B</math> מאורעות זרים של ניסוי מקרי, אז ההסתברות שבחזרות ב"ת על הניסוי המאורע <math>A</math> יתרחש לפני המאורע <math>B</math> היא <math>P(A)/[P(A) + P(B)]</math>.</li> <li>סכום של מ"מ בינומיים (גיאומטריים) ב"ת עם אותו הפרמטר <math>p</math> הוא מ"מ בינומי (בינומי-שלילי).</li> <li>סכום של מ"מ פואסוניים ב"ת הוא מ"מ פואסוני.</li> <li>סכום של מ"מ נורמליים ב"ת הוא מ"מ נורמלי.</li> <li>ההתפלגות המותנית של <math>X</math> בהינתן <math>X + Y = n</math>, כאשר <math>X</math> ו-<math>Y</math> מ"מ פואסוניים (בינומיים עם אותו <math>p</math>) ב"ת היא בינומית (היפרגיאומטרית).</li> </ul>	
-----	
$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ ; $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ; $\sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	
$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$ ; $\sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ; $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ , $-1 < x < 1$ ; $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = -\ln(1-x)$ , $0 < x < 1$	
$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$ , $n \neq -1$ ; $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$	נוסחת האינטגרציה בחלקים :
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$ ; $\int b^{ax} dx = \frac{1}{a \ln b} b^{ax}$ ; $\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$	
$\log_n a = \log_m a / \log_m n$ ; $\log_n (a^b) = b \cdot \log_n a$ ; $\log_n (ab) = \log_n a + \log_n b$	