

שאלה 1

א. S אינו טרנזיטיבי (הוא כן רפלקסיבי וסימטרי).

ב. לגבי T : רפלקסיבי וסימטרי קל להראות.

הוכחה שהוא טרנזיטיבי : נניח $1 \notin X \oplus Y$ וגם $1 \notin Y \oplus Z$.

ההנחה $1 \notin X \oplus Y$ פירושה : $1 \notin X \cup Y$ או $1 \in X \cap Y$ (מדוע?)

בדומה נפרק את ההנחה $1 \notin Y \oplus Z$.

הנתון $1 \notin X \oplus Y$ וגם $1 \notin Y \oplus Z$ מתפרק אפוא ל-4 אפשרויות.

נבדוק כל אחת מהן בנפרד, ונגלה שבכל אחת מהן $1 \notin X \oplus Z$ (השלימו).

לפיכך T טרנזיטיבי.

ג. בדיוק שתי מחלקות : במחלקה אחת נמצאות כל הקבוצות של מספרים טבעיים ש-1 הוא

אבר שלהן ובמחלקה השנייה כל הקבוצות של מספרים טבעיים ש-1 לא אבר שלהן.

שאלה 2

א. מתקבל מיידיית מתוך משפט 5.13 ב בחוברת "פרק 5 בתורת הקבוצות".

ב. \aleph_0 (לכל מספר טבעי יש שני שורשים ריבועיים ושורש שלישי יחיד).

שאלה 3

א. לכל משימה יש $\binom{5}{2} = 10$ דרכים לבחור צוות. לארבע המשימות : 10^4 דרכים.

ב. A_i : קבוצת הבחירות של צוותים בהן אדם i מתחמק מעבודה.

$$\binom{5}{2}^4 - 5 \cdot \binom{4}{2}^4 + \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2}^4 - \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2}^4 \quad \text{הכלה והפרדה :}$$

שאלה 4

- א. 5^5
- ב. $2^5 - 1 = 31$ (קבוצות חלקיות ללא הקבוצה הריקה)
- ג. $5!$
- ד. $2^5 - 2 = 30$ (כל הבחירות האפשריות עבור a, b באופן בלתי תלוי, פרט לסדרה $aaaaa$ ולסדרה $bbbbb$).
- ה. 4 אפשרויות לבחירת האות שתופיע פעמיים. לכל בחירה כזו $\frac{5!}{2!}$ סידורים.

שאלה 5

- G אינו קשיר, לכן \overline{G} קשיר (שאלה 4 בפרק 1 בתורת הגרפים).
- מהנתון, ב- G יש בדיוק $n - 2$ צמתים בעלי דרגה אי-זוגית.
- מספר הצמתים בעלי דרגה אי-זוגית בגרף הוא זוגי (שאלה 1 בפרק 1 בתורת הגרפים).
- לכן $n - 2$ הוא זוגי.
- לפיכך $n - 1$ הוא אי-זוגי.
- בכל גרף, לכל צומת v , $\deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) = n - 1$.
- מכאן ומכיוון ש- $n - 1$ הוא אי-זוגי, נקבל שהזוגיות של דרגת צומת ב- G הפוכה מהזוגיות של הדרגה שלו ב- \overline{G} (כלומר אם האחד זוגי השני אי-זוגי ולהיפך).
- לכן ב- \overline{G} יש בדיוק שני צמתים בעלי דרגה אי-זוגית.
- הראינו ש- \overline{G} מקיים את תנאי שאלה 1 בפרק 3 בתורת הגרפים, לכן יש בו מסלול אוילר לא סגור.