

**מבנה הבחינה :**

בבחינה שני חלקים.

**חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.**

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

**משך המבחן: 3 שעות.**

**חומר עזר:** כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

---

**שימו לב:**

\* בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.

\* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.

\* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי וידיאו, עליך לחזור ולהוכיחן.

\* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.

---

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

## חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

### שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. את התשובה כתבו בגוף המחברת, לא בטופס.  
**בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה.** אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

6 נק' א. תהינה  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ .

קבוצה  $X$  מוגדרת כך:  $X = \{x \in U \mid x \in A \rightarrow x \in B\}$ .

הסימן  $\rightarrow$  בתוך הנוסחה הוא הקשר הלוגי "אם... אז...". הקבוצה  $X$  היא:

[1]  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  [2]  $\{3, 4, 5\}$  [3]  $\{3\}$

[4]  $\{3, 6, 7\}$  [5]  $\{3, 4, 5, 6, 7\}$

7 נק' ב.  $\mathbf{R}$  היא קבוצת המספרים הממשיים. נסמן  $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ .

עוצמת קבוצת היחסים (הרלציות) מעל  $A$  היא:

[1]  $\aleph_0$  [2]  $C$  [3]  $2^C$

[4] עוצמה גדולה מ-  $2^C$  [5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

6 נק' ג.  $G$  הוא יער על 100 צמתים. מספר הקשתות של  $G$  הוא 90.

מספר רכיבי הקשירות של  $G$  הוא:

[1] 99 [2] 90 [3] 89

[4] 10 [5] מהנתונים לא ניתן לקבוע את מספר רכיבי הקשירות.

**חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות**  
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

**שאלה 2**

(12 נק') א. דינה אומרת: אם  $A$  היא קבוצה לא-ריקה אז לכל יחס טרנזיטיבי  $R$  מעל  $A$ , קיים מעל  $A$  יחס סדר חלקי  $K$  כך ש-  $R \subseteq K$ . הוכיחו שדינה טועה.

(15 נק') ב. שמעון אומר: אם  $A$  היא קבוצה לא-ריקה אז לכל יחס אנטי-סימטרי  $R$  מעל  $A$ , קיים מעל  $A$  יחס סדר חלקי  $K$  כך ש-  $R \subseteq K$ . הוכיחו ששמעון טועה.

**שאלה 3**

9									end	
8										
7										
6						X				
5										
4										
3			X			X				
2										
1										
0	start									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

לפנינו לוח של  $10 \times 10$  משבצות. שחקן מתחיל במשבצת השמאלית-תחתונה ומתקדם עד למשבצת הימנית-עליונה, כאשר בכל צעד הוא נע משבצת אחת ימינה או משבצת אחת למעלה. מסלול אפשרי לדוגמא: 3 צעדים למעלה, 4 צעדים ימינה, 6 צעדים למעלה, 5 צעדים ימינה.

(5 נק') א. הוכיחו שמספר המסלולים האפשריים הוא  $\binom{18}{9}$ .

(22 נק') ב. כמה מסלולים אפשריים אם אסור לעבור דרך אף אחת משלוש המשבצות המסומנות ב-X? המסלול שבדוגמא בפתח השאלה אינו חוקי כעת כי הוא עובר דרך המשבצת (3,3) המסומנת ב-X. יש להגיע לתשובה מספרית.  
כדי לחסוך חישובים חוזרים כדאי לשמור בצד ערכים של ביטויים שחוזרים על עצמם.

#### שאלה 4

תהינה  $A, B$  קבוצות סופיות לא ריקות,  $|A| = k$ ,  $|B| = n$ .

כידוע, מספר הפונקציות של  $A$  ל- $B$  הוא  $n^k$ .

**הגדרה:** אם  $X \subseteq A$  ו- $f$  היא פונקציה של  $X$  ל- $B$ , אומרים ש- $f$  היא פונקציה חלקית של  $A$  ל- $B$ . במלים אחרות, פונקציה חלקית של  $A$  ל- $B$  היא פונקציה ל- $B$ , שתחום ההגדרה שלה הוא קבוצה חלקית כלשהי של  $A$ . להסיר ספק:

\* יתכן ש- $X = A$ : פונקציה רגילה של  $A$  ל- $B$  היא מקרה פרטי של פונקציה חלקית של  $A$  ל- $B$ .  
 \* יתכן ש- $X = \emptyset$ : מ- $\emptyset$  יש פונקציה אחת ויחידה לכל קבוצה: "הפונקציה הריקה".

(10 נק') א. רשמו סכום המביע את מספר הפונקציות החלקיות של  $A$  ל- $B$ .

הסכום הוא על כל הגדלים האפשריים לקבוצות חלקיות של  $A$ .

(10 נק') ב. הראו בעזרת שיקול קומבינטורי, **ללא סכומים וללא שימוש בסעיף א**, שמספר

הפונקציות החלקיות של  $A$  ל- $B$  הוא  $(n+1)^k$ .

הדרכה: אם אבר של  $A$  לא נמצא בתחום ההגדרה של  $f$  אז נגיד ש...

(7 נק') ג. הראו בחישוב ישיר, שהתשובה שקיבלתם בסעיף א שווה לתשובה שקיבלתם

בסעיף ב.

#### שאלה 5

גרף פשוט  $G$  מוגדר כך: צומת של  $G$  הוא סדרה באורך 4 שאבריה לקוחים מהקבוצה  $\{0,1\}$ .

למשל הסדרה 1011 היא צומת של  $G$ . מספר הצמתים ב- $G$  הוא אפוא 16.

בין שני צמתים יש קשת אם ורק אם הם נבדלים זה מזה **בדיוק** בשני מקומות.

למשל, יש קשת בין 1011 ו-1110 כי ההבדל ביניהן הוא בדיוק בשני מקומות: המקום

השני בסדרה והמקום הרביעי בסדרה.

אין קשת בין 1011 ל-1010, כי סדרות אלה נבדלות רק במקום אחד (האחרון).

(3 נק') א. מהי דרגת כל צומת ב- $G$ ? הוכיחו.

(8 נק') ב. הוכיחו ש- $G$  אינו קשיר.

(8 נק') ג. הוכיחו ש- $G$  אינו דו-צדדי.

(8 נק') ד. הוכיחו ש- $G$  אינו מישורי.

**בהצלחה!**