[redacted] ממ״ן 13, קמי טולזנו   <u>שאלה 1</u>

א. נסמן ב-A את הקבוצה של כל המספרים הממשיים בקטע $(0,1)$ אשר בפיתוח שלהם כעשרוני-אינסופי מופיעות לאחר הנקודה רק ספרות אי-זוגיות. $A\subseteq(0,1)$ לכן $|A|\le|(0,1)|$.
מצד שני הפונקציה $f:(0,1)\to A$ המוגדרת ע"י $f(0.a_0,a_1,a_2)=0.a_1,a_3,a_5\ldots$ היא חח"ע ולכן $|(0,1)|\le|A|$.
לכן ממשפט קנטור-ברנשטיין מקבלים ש- $\underline{|(0,1)|=|A|=\aleph}$.

ב. $A=\{x+y\sqrt{2}+z\sqrt{3} \mid x,y,z\in\mathbb{Q}\}$ $\mathbb{Q}$ בת-מנייה, לכן לפי <u>משפט 4.11</u> גם $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ בת מנייה, ומכאן גם $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ בת מנייה.

$f:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to A$

$f((x,y,z))=x+y\sqrt{2}+z\sqrt{3} \Rightarrow$ הפונקציה f המוגדרת כך היא על, כל איבר ב-A הוא תמונה של לפחות איבר אחד ב-$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ לכן לפי <u>משפט 4.9</u>.

$\Rightarrow \underline{|A|=\aleph_0}$

ג. $(0,1)\setminus\mathbb{Q}$ היא קבוצת כל המספרים הממשיים האי-רציונליים שבקטע $(0,1)$.
נראה תחילה ש $|(0,1)\setminus\mathbb{Q}|=\aleph$. נשים לב $|\mathbb{Q}\cap(0,1)|=\aleph_0$ שכן זו תת קבוצה חלקית ל-$\mathbb{Q}$ שהיא בת מנייה, נסמן $|(0,1)\setminus\mathbb{Q}|=F$, מתקיים $((0,1)\cap\mathbb{Q})\cup((0,1)\setminus\mathbb{Q})=(0,1)$
לכן לפי ההגדרה של חיבור עוצמות $|(0,1)\cap\mathbb{Q}|+|F|=|(0,1)|=\aleph$, ולכן $|P((0,1)\setminus\mathbb{Q})|=2^{|(0,1)\setminus\mathbb{Q}|}$
$=\underline{2^{\aleph}}.$

ד. לפי טענה ה' שלאחר <u>משפט 4.7</u>, כל קטע לא מנוון שקול ל-$\mathbb{R}$. לכן $\aleph=|\mathbb{R}|=|(0,10^{-10})|$.
כמו כן ידוע ש $|\mathbb{Q}|=\aleph_0$, אזי לפי הגדרת החיתוך $\mathbb{Q}\cap(0,10^{-10})$ היא קבוצת כל המספרים הרציונליים בקטע $(0,10^{-10})$ וקבוצה בת-מנייה, כי מתקיים $\mathbb{Q}\supseteq\mathbb{Q}\cap(0,10^{-10})$, ולפי <u>משפט 4.5</u> כל קבוצה החלקית לקבוצה בת-מנייה היא בת-מנייה. לכן $\aleph_0=|(0,10^{-10})\cap\mathbb{Q}|$, ומכאן
$\underline{|P(\mathbb{Q}\cap(0,10^{-10}))|=2^{|(0,10^{-10})\cap\mathbb{Q}|}=2^{\aleph_0}=\aleph}$.

שאלה 2

א) $\mathbb{Q}^n = \underbrace{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\dots\times\mathbb{Q}}_{n\ \text{פעמים}}$ לכן - ידוע ש $|\mathbb{Q}|=\aleph_0$ ולפי משפט 4.10 והוכחתו,

אם לכל n מתקיים A^n קבוצה בת-מנייה אז גם $\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{Q}^n \text{ בת-מנייה}}_{\text{ואיחודם של}}$, ולכן $\aleph_0 = |\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{Q}^n|$

ב) <u>טענה</u> - קבוצת הפולינומים עם מקדמים רציונליים היא בת-מנייה.

<u>נימוק</u> - כל פולינום כזה אפשר לראות כתור סדרה סופית של מספרים רציונליים.
ניקח מניה של הרציונליים, ונגדיר מניה של הסדרות הסופיות של הרציונליים, לפי הסדר הלקסיקוגרפי (המילוני). כלומר, אם נתונות שתי סדרות של רציונליים $(p_1,\dots,p_n)=p$ וגם $q=(q_1,\dots,q_m)$ אזי נשווה בין הסדרות באופן הבא: אם $p_1>q_1$ (לפי הסדר של המניה של הרציונליים שלקחנו), אזי הסדרה q קטנה מן הסדרה p, ואם $q_1>p_1$ אזי הסדרה p קטנה מן הסדרה q. ואם $p_1=q_1$, נמשיך הלאה ונשווה בין p_2 ל q_2, וכך עד שנסיים את האיברים באחת הסדרות. ואם לא סיימנו, זה אומר שאחת הסדרות היא המשכה של השנייה, ונגדיר שהסדרה הארוכה יותר היא הגדולה יותר.

<u>מסקנה</u> - קבוצת הפולינומים עם המקדמים הרציונליים היא בת מנייה.

ג) $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \quad /^3$

העלאה ב-3 ← $\alpha^3 = 2+\sqrt{5} \Rightarrow \alpha^3-2=\sqrt{5} \quad /^2$

חיסור משני האגפים + העלאה ב-2 ← $(\alpha^3-2)^2=5 \Rightarrow \alpha^6-4\alpha^3+4=5$

הצבת משתנה עזר ← $\alpha^6-4\alpha^3-1=0$, <u>נסמן</u>: $\alpha^3=t,\ \alpha^6=t^2$

משוואה ריבועית + הצבה הצבה חוזרת. ← $t^2-4t-1=0$

$t_1=2+\sqrt{5} \qquad t_2=2-\sqrt{5}$

$t=\alpha^3 \Rightarrow \alpha_1^3=2+\sqrt{5} \quad /^3$

$\alpha_2^3=2-\sqrt{5} \quad /^3$

$\alpha_1=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}},\ \alpha_2=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

<u>בדיקת תשובות</u>:

$\alpha_1: (\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})^6-4(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})^3-1=0$

$0=0$ //

$\alpha_2: (\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})^6-4(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})^3-1=0$

$0=0$ //

<u>לכן</u>:

$\alpha_1=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ //

$\alpha_2=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ //

ד)

① נגדיר את "הגובה" של פולינום כלשהו עם מקדמים שלמים ומעלה חיובית להיות הסכום של מעלת הפולינום עם הערכים המוחלטים של מקדמיו פחות אחד:

$$h(P(x)) = n + |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_0| - 1 \; ; \; P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

נגדיר את הגובה של מספר אלגברי כגובה של הפולינום המינימלי שלו.

יש רק מספר סופי של פולינומים מגובה נתון, כי המעלה וכל המקדמים חסומים בערכם המוחלט מהגובה, ויש רק מספר סופי של מספרים אלגבריים מגובה נתון.

② נסדר את כל המספרים האלגבריים בסדרה, כך שקודם יבואו המספרים שגובהם 0 מסודרים לפי גודל, אחריהם המספרים שגובהם 1 מסודרים לפי גודל, אחריהם המספרים שגובהם 2 מסודרים לפי הגודל, וכך הלאה עד אין-סוף, בדרך זאת, סידרנו את כל המספרים האלגבריים בסדרה והוכחנו שהם בני-מנייה.

(סט של סדרות = $A_n, a_0, \dots, a_n$:

$= |A_n, a_0, \dots a_n| \le |\mathbb{N}|$

בן-מנייה.)

שאלה 3

1. <u>נוכיח כי $|C|\le\aleph_0$</u>, C קבוצת כל העיגולים במישור שזרים זה לזה.

מכיוון שהעיגולים זרים, קיימת פונקציה המתאימה לכל עיגול ב-C נקודה ב-$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ הנמצאת בתוכו. היא חח"ע כי מכיוון שהיא חח"ע מכל מעגל לזוג סדור רציונליים היא קטנה/שווה לרציונליים ($|C|\le|\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}|$), וקבוצה זו לצ'את וידוע ש $|\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}|=\aleph_0$, ולכן C בת-מנייה, או סופית,

<u>ולכן $|C|\le\aleph_0$.</u>

2. <u>נוכיח כי $|B|=\aleph$</u>, B קבוצת כל העיגולים במישור כולל חופפים.

עיגול מוגדר ע"י מרכז מעגל ורדיוס, מרכז המעגל יכול להתקיים בכל מקום במישור, מאחר שכל <u>נקודה במישור</u> יכולה להיות מרכז מעגל, ולכן קיבלנו התאמה ל-$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
נוסף מכך אינסוף הנקודות במישור אפשר לייצר אין-סוף מעגלים ורדיוס מ-0 עד אין-סוף כרדיוסים במספרים ממשיים - כי גודל של רדיוס לא משנה לזה כיוון שהוא הולך על הציר, כמובן וגודלו ש-$\aleph=|\mathbb{R}\times\mathbb{R}|$,
קבוצה זו לצ'את, כדי להבהיר, כל מעגל נקבע ע"י מרכז ורדיוס. מרכז זה כמובן שני קורדינטות כלומר $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, והרדיוס מספר חיובי סכום שעוצמתו היא כמובן כעוצמת הממשיים, <u>ולכן $\aleph=|B|$.</u>

3. <u>נוכיח כי $\aleph'=|A|$</u>, A היא קבוצת כל הקבוצות של $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ולכן עוצמתה היא $|P(\mathbb{R}\times\mathbb{R})|$

B שוב, מתארת את כלל העיגולים. ניתן להתאים כל עיגול ל-$\mathbb{R}^3$ כאשר הקורדינטה הראשונה היא ערך x, השנייה ערך y, והשלישית היא רדיוס המעגל. לכן B שקולה ל-$\mathbb{R}^3$ וידוע כי עוצמה זו שקולה ל-$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. כיוון ש $|\mathbb{R}\times\mathbb{R}|<|P(\mathbb{R}\times\mathbb{R})|$ אז $B<A$, <u>ולכן $\aleph'=|A|$.</u>

<u>לסיכום</u>: $|A|=\aleph'$, $|B|=\aleph$, $|C|\le\aleph_0$

<u>לכן מתקיים</u> $|C|<|B|<|A|$, שהרי $\aleph_0<\aleph<\aleph'$. מ.ש.ל.

שאלה 4

סדרת פיבונאצ'י מוגדרת באופן הבא: $F_1=1, F_0=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ לכל $n\geq 2$ הראו:

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2}-1 \equiv F_1+F_2+\dots+F_{n-1}+F_n=F_{n+2}-1$$ (1)

הוכחה:

בדיקה עבור $n=2$: (1)

$$F_2=F_1+F_0=1+1=2 \checkmark$$

$$F_3=F_2+F_1=2+1=3 \checkmark$$

הנחת האינדוקציה עבור $n=k$: (2)

$$F_1+F_2+\dots+F_{k-1}+F_k=F_{k+2}-1$$

צ"ל עבור $n=k+1$: (3)

$$\underbrace{F_1+F_2+\dots+F_k}+F_{k+1}=F_{k+3}-1$$

לפי הנחת האינדוקציה.

צריך להוכיח את נכונות הטענה עבור $n=k+1$: (4)

$$F_{k+2}\cancel{-1}+F_{k+1}\stackrel{?}{=}F_{k+3}\cancel{-1} \Rightarrow F_{k+2}+F_{k+1}=F_{k+3} \quad //$$

לפי הגדרת סדרת פיבונאצ'י המופיעה בשאלה זו, $F_1=F_0=1$, ואחרי זה סכום כל איבר שווה לסכום שני האיברים שלפניו. | סיכום תרגיל: בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=2, n=3$, הנחנו שהטענה נכונה עבור $n=k$ (הנחת האינדוקציה), הצבנו $n=k+1$ בטענה, כדי לבדוק האם נכונותה תקפה גם לאיבר הבא. אחרי זה הפעלנו את שלב המעבר שבו אנו בודקים, בהסתמך על הנחת האינדוקציה עבור $n=k$ את נכונות הטענה עבור $n=k+1$, ובסוף הסקנו את נכונות הטענה על סמך אקסיומת האינדוקציה. מש"ל. (5)

7. הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי קיימים מספר טבעי k ומספרים $a_0,a_1,a_2,\dots,a_k\in\{0,1\}$

שצריך להוכיח שכל מספר טבעי ניתן להציג כסכום של מספרי פיבונאצ'י שונים עם

מקדמים שהם 0 ו-1.

<u>הוכחה:</u>

1. <u>עבור $n=1$:</u> $1=1\cdot F_0$ הטענה נכונה.

נניח שהטענה נכונה ל-n טבעי כלשהו, כלומר שקיים מספר טבעי k ומספרים - $n=\sum_{i=0}^{k}a_iF_i$

כעת צריך להוכיח ל-$n+1$ דומה.

1. <u>עבור $a_0=0$:</u> אז $n=\sum_{i=1}^{k}a_iF_i$ ואז $n+1=F_0+\sum_{i=1}^{k}a_iF_i$ וקיבלנו במקרה זה

שיש ל-$n+1$ סכום של מספרי פיבונאצ'י עם מקדמים שהם 0 ו-1.

2. <u>עבור $a_0=1$:</u> $n=\sum_{i=0}^{k}a_iF_i$, נסמן ב-j את האינדקס הקטן ביותר כך ש- $a_j=0$

לפי ההנחה אינדוקציה, ולכן $n=F_0+F_1+\dots+F_{j-1}+a_{j+1}F_{j+1}+\dots+a_kF_k$

לפי טענה מהתרגול: $F_0+F_1+\dots+F_{j-1}=F_{j+1}-1$ לכן:

$$n=(F_{j+1}-1)+a_{j+1}F_{j+1}+\dots+a_kF_k$$

$$n+1=F_{j+1}+a_{j+1}F_{j+1}+\dots+a_kF_k$$

F_{j+1} יכול להופיע פעמיים אבל מכיוון ש- $F_{j+1}=F_j+F_{j-1}$, ולכן

$n+1=F_{j-1}+F_j+a_{j+1}F_{j+1}+\dots+a_kF_k$ - קיבלנו הצגה תקינה עבור $n+1$, וזה מוכיח שהטענה

נכונה עבור כל n טבעי.

ג) בכל סדרה אין סופית $\langle a_0,a_1,a_2...\rangle$ המקיימת את התנאי $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ לכל n טבעי,
ניתן לבחור שני איברים אשר יהוו איברים ראשונים a_0,a_1 כך ששאר איברי הסדרה נקבעים
על ידם, ולכן הפונקציה $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to A$ המוגדרת ע"י $f(\langle a_0,a_1\rangle)=\langle a_0,a_1,a_2...\rangle$
הינה פונקציה חח"ע ועל, ולכן $\underline{|A|=|\mathbb{R}\times\mathbb{R}|=\aleph}$.

ד) נסמן ב-F את קבוצת כל הסדרות הרציונליות מ-A. כל איברי הסדרה הם רציונליים
אם האיברים הראשונים הם רציונליים (a_0,a_1) כי כל איברי הסדרה אשר יתקבלו, יתקבלו
כסכום שני איברים רציונליים. בדומה לשיקולים מסעיף ג' הפונקציה $g:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to F$ המוגדרת ע"י
$g(\langle a_0,a_1\rangle)=\langle a_0,a_1...\rangle$ כאשר $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ לכל n טבעי היא פונקציה חח"ע ועל,
ולכן $\underline{|F|=|\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}|=\aleph_0}$.