

פתרון שאלות בממ"ן 13 סמסטר 2019א

שאלה 3

ההוכחה לא טובה.

הייצוג של המספר k בקלט תופס מקום שהוא $O(\log k)$.

גודל האוטומט B הוא לפחות k . לכן, הבנייה שלו לא מתבצעת בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט. k איננו פולינום ב- $\log k$.

שאלה 4

א. הרעיון: כדי לאמת שמילה $\langle M, w \rangle$ שייכת ל- A_{TM} , המאמת יקבל בנוסף ל- $\langle M, w \rangle$ מספר t . המאמת יריץ את M על w צעדים. אם M תקבל את w בתוך מספר זה של צעדים, המאמת יקבל. אחרת, המאמת ידחה.
אם $\langle M, w \rangle$ שייכת ל- A_{TM} , אז יש מספר t כך ש- M מקבלת את w לאחר t צעדים.
אם $\langle M, w \rangle$ לא שייכת ל- A_{TM} , אז אין מספר t כזה.

מאמת לשפה A_{TM} :

"על קלט $\langle M, w, t \rangle$, כאשר M מכונת טיורינג, w מילה ו- t מספר:

1. הרץ את M על w t צעדים.

2. אם M קיבלה את w בתוך t צעדים, קבל. אחרת, דחה."

ב. אם יש ל- A_{TM} מאמת, שזמן הריצה שלו פולינומיאלי, אז A_{TM} שייכת ל-NP, ולכן היא כריעה. אבל ידוע ש- A_{TM} איננה כריעה.

שאלה 5

השפה שייכת ל-NP.

אישור השייכות של זוג $\langle n, m \rangle$ לשפה C יכול את הפירוק של n לגורמים ראשוניים ואת ההוכחה שכל אחד מן הגורמים הללו הוא באמת מספר ראשוני.
מכיוון שכל גורם ראשוני אינו קטן מ-2, מספר הגורמים הראשוניים של n הוא $O(\log_2 n)$. הגודל של הייצוג של כל אחד מהם גם הוא $O(\log n)$. לכן גודל ההוכחה של הראשונות של כל אחד מהם פולינומיאלי ב- $\log n$.

לכן בסך הכל גודל אישור השייכות של $\langle n, m \rangle$ ל- C פולינומיאלי בגודל הקלט.

כדי לאמת את השייכות, צריך תחילה לאמת את הוכחת הראשונות של כל גורם ראשוני של n .

לאחר מכן מאמתים, שהפירוק הנתון הוא באמת הפירוק של n לגורמים ראשוניים.

לאחר מכן מאמתים, שמספר המחלקים של n הוא m : אם הפירוק של n לגורמים ראשוניים

הוא $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$, אז מספר המחלקים של n הוא $(k_1+1)(k_2+1) \cdots (k_s+1)$.

שאלה 7

שייכות ל-NP: מסמך אישור קצר: קביעה ביחס לכל כרטיס האם לשים אותו ישר או הפוך. כדי לוודא את נכונות האישור, בודקים (בזמן קצר) שכל אחד מן מקומות שמול החורים מכוסה.

רדוקציה פולינומיאלית של 3SAT:

כאשר נתון קלט לבעיית 3SAT – נוסחה בוליאנית ϕ ב-3CNF מעל המשתנים x_1, \dots, x_n ובעלת הפסוקיות C_1, \dots, C_m , נבנה את n הכרטיסים הבאים, כרטיס אחד לכל משתנה x_i :
בכל כרטיס יהיו m חורים בצד ימין של הכרטיס ו- m חורים בצד שמאל של הכרטיס. m המקומות בכל צד מתאימים ל- m הפסוקיות.
בצד ימין של הכרטיס המתאים למשתנה x_i כל החורים יהיו פתוחים, חוץ מאלה שמתאימים לפסוקיות שבהן מופיע הליטרל x_i שהם יהיו מכוסים. בצד שמאל של הכרטיס הזה כל החורים יהיו פתוחים, חוץ מאלה שמתאימים לפסוקיות שבהן מופיע הליטרל $\neg x_i$ שהם יהיו מכוסים.
בנוסף נבנה כרטיס מיוחד שכל החורים של צד ימין שלו פתוחים, וכל החורים של צד שמאל שלו מכוסים.

ברור שהבנייה יכולה להתבצע בזמן פולינומיאלי.

הרדוקציה תקפה:

אם הפסוק ספיק, אז יש פתרון לפאזל:
אם הפסוק ספיק, אז יש השמה למשתנים של הפסוק שמספקת את הפסוק. אם בהשמה הזו המשתנה x_i קיבל ערך 1, נשים את הכרטיס של x_i ישר. אם הוא קיבל ערך 0, נשים את הכרטיס שלו הפוך. מכיוון שההשמה הזו מספקת את הפסוק, יש בכל פסוקית לפחות ליטרל אחד שערכו 1. לכן, באופן שבו שמנו את הכרטיסים, כיסינו את כל החורים בצד ימין. את החורים בצד שמאל נוכל לכסות בעזרת הכרטיס המיוחד.
אם יש פתרון לפאזל, אז הפסוק ספיק:
בעזרת הכרטיס המיוחד כיסינו צד אחד של החורים. את הצד השני כיסינו בעזרת n הכרטיסים של המשתנים. נסתכל על הדרך שבה שמנו את הכרטיס של המשתנה x_i כקביעת ערך אמת למשתנה הזה. מזה שכל הפסוקיות "מכוסות" נובע שבכל פסוקית יש ליטרל שערכו 1. כלומר, יש השמה מספקת לפסוק.

שאלה 8

א. גרף לא מכוון שדרגת כל צומת שלו איננה גדולה מ-2 בנוי מצמתים בודדים, ממסילות פשוטות (ללא מעגלים) וממעגלים פשוטים.

אפשר לחשב בזמן פולינומיאלי את גודל הקבוצה הבלתי תלויה המקסימלית בגרף כזה:
כל צומת בודד שייך לקבוצה הבלתי תלויה הזו.

מכל מסילה פשוטה באורך n אפשר לקחת $\lceil n/2 \rceil$ צמתים לקבוצה.

מכל מעגל פשוט באורך m אפשר לקחת $\lfloor m/2 \rfloor$ צמתים לקבוצה.

לכן, על-ידי מעבר על הגרף ומציאת הצמתים הבודדים, המסילות הפשוטות והמעגלים הפשוטים, אפשר לחשב את גודל הקבוצה הבלתי תלויה המקסימלית. נקרא לגודל הזה l . כל זה יכול להתבצע בזמן פולינומיאלי בגודל הגרף. כעת משווים את k ל- l . אם $k > l$, דוחים. אחרת, מקבלים.

ב. הרדוקציה ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי :

מספר הצמתים במעגל שבונים לכל משתנה כפול ממספר המופעים של המשתנה בפסוק. מספר הצמתים במשולשים שבונים לכל הפסוקיות שווה למספר המופעים של כל המשתנים בפסוקיות.

לכן מספר הצמתים בגרף שבונים ליניארי בגודל פסוק הקלט לבעיה 3SAT.

הדרגה של כל צומת בגרף הזה איננה גדולה מ-3.

לכן גם מספר הקשתות בגרף ליניארי בגודל פסוק הקלט לבעיה 3SAT.

החישובים הנדרשים לבניית הגרף הזה ניתנים לביצוע בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט.

הרדוקציה תקפה :

נסמן על-ידי n את מספר המופעים הכולל של ליטרלים בפסוק. נראה שבגרף שנבנה יש קבוצה בלתי תלויה בגודל $n+m$ (הוא מספר הפסוקיות בפסוק), אם ורק אם הפסוק ספיק.

אם הפסוק ספיק, אז יש בגרף קבוצה בלתי תלויה בגודל $n+m$:

אם הפסוק ספיק, אז יש לו השמה מספקת.

לכל משתנה v , אם הערך שלו בהשמה המספקת הוא 1, ניקח לקבוצה הבלתי תלויה את כל הצמתים השליליים במעגל שמתאים למשתנה v (צמתים מהצורה $(F_{v,i})$. אם הערך של v בהשמה המספקת הוא 0, ניקח לקבוצה הבלתי תלויה את כל הצמתים החיוביים במעגל שמתאים למשתנה v (צמתים מהצורה $(T_{v,i})$).

מכל מעגל שמתאים למשתנה לקחנו מחצית מן הצמתים של המעגל. מספר הצמתים של כלל המעגלים הללו כפול ממספר המופעים הכולל של ליטרלים בפסוק. לכן עד עתה צירפנו לקבוצה הבלתי תלויה n צמתים.

לכל פסוקית C_i יש משולש בגרף. ממשולש אפשר לקחת לכל היותר צומת אחד לקבוצה הבלתי תלויה (כל צומת במשולש קשור בקשת לשני הצמתים האחרים. לכן אי אפשר לקחת יותר מצומת אחד לקבוצה הבלתי תלויה). בהשמה המספקת יש לפחות ליטרל אחד של C_i שערכו 1. נניח שהמשתנה המתאים לליטרל הזה הוא v . הקשת שמחברת את הליטרל הזה למעגל של המשתנה v מחברת את הליטרל לצומת **שלא שייך** לקבוצה הבלתי תלויה (כי לקחנו מכל מעגל את הצמתים שמתאימים לליטרלים שערכם 0). לכן אפשר לשייך את הצומת של הליטרל הזה לקבוצה הבלתי תלויה.

בסך הכל אפשר לצרף לקבוצה הבלתי תלויה עוד m צמתים, ולהגיע לקבוצה בלתי תלויה בגודל $n+m$.

אם יש בגרף קבוצה בלתי תלויה בגודל $n+m$ אז הפסוק ספיק :

אם יש קבוצה בלתי תלויה כזו, אז יש בה מחצית מן הצמתים של כל מעגל של משתנה, וצומת אחד מכל משולש של פסוקית.

לכל משתנה v , אם בקבוצה הבלתי תלויה נמצאים הצמתים החיוביים מן המעגל של v , נקבע ל- v ערך 0. אם בקבוצה הבלתי תלויה נמצאים הצמתים השליליים מן המעגל של v , נקבע ל- v ערך 1.

נראה שזו השמה מספקת:

לכל משולש של פסוקית יש ליטרל אחד בקבוצה הבלתי תלויה. ליטרל זה קשור בקשת לצומת במעגל של המשתנה v של הליטרל. הוא קשור בקשת לצומת שלא שייך לקבוצה הבלתי תלויה. לכן, לפי הדרך שבה קבענו את הערכים למשתנים, ערכו של הליטרל הזה הוא 1. כלומר, בכל פסוקית יש ליטרל שערכו 1. לכן זוהי השמה מספקת, והפסוק ספיק.