פתרונות לממ"ן 11 - 2019א - 20425

1. א. נסמן ב-A , B , C ו- D את המאורעות שתושב העיר מוכן למחזר עיתונים, בקבוקי משקה משפחתיים, מיכלי משקה אישיים וסוללות, בהתאמה. מהנתונים (שמסומנים בכוכבית *) מקבלים :

* $D \subseteq C \quad , \quad C \subseteq B \quad \Rightarrow \quad D \subseteq C \subseteq B$
* $P(A) = 0.59$
* $P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A \cap D) = 0.1$ [כי מתקיים $D \subseteq C \subseteq B$]
* $P(A \mid D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0.1}{P(D)} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad P(D) = 0.2$

לכן : $P(A^C \cap D) = P(D) - P(A \cap D) = 0.2 - 0.1 = 0.1$

* $P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A \cup B) = 0.8$

$$\Rightarrow \quad P(A^C \cap B^C) = P(A^C \cap B^C \cap C^C \cap D^C) = 1 - 0.8 = 0.2$$

לכן : $P(A^C \cap B) = P(A \cup B) - P(A) = 0.8 - 0.59 = 0.21$

* $P(A \cap B^C \cap C^C \cap D^C \mid A \cup B \cup C \cup D) = \dfrac{P(A \cap B^C \cap C^C \cap D^C)}{\underbrace{P(A \cup B \cup C \cup D)}_{=0.8}} = 0.25$

ומכאן : $P\{A \text{ רק}\} = P(A \cap B^C \cap C^C \cap D^C) = P(A \cap B^C) = 0.8 \cdot 0.25 = 0.2$

באותו אופן : * $P\{B \text{ רק}\} = P(A^C \cap B \cap C^C \cap D^C) = P(A^C \cap B \cap C^C) = 0.8 \cdot \frac{1}{8} = 0.1$

ולכן :

$$P(A^C \cap C \cap D^C) = P(A^C \cap B) - P(A^C \cap D) - P(A^C \cap B \cap C^C) = 0.21 - 0.1 - 0.1 = 0.01$$

* $P\{\text{מוכנים למחזר בדיוק 3 חומרים}\} =$

$$= P(A \cap B \cap C \cap D^C) + P(A \cap B \cap C^C \cap D) + P(A \cap B^C \cap C \cap D) + P(A^C \cap B \cap C \cap D)$$

$$= P(A \cap B \cap C \cap D^C) + 0 + 0 + P(A^C \cap D)$$ [כי מתקיים $D \subseteq C \subseteq B$]

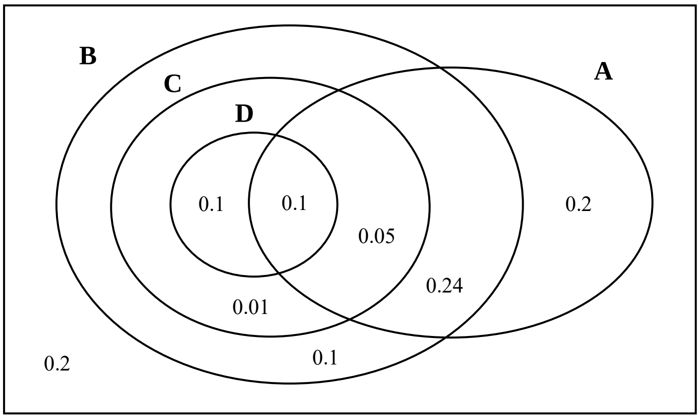
לכן : $P\{D^C \mid \text{מוכנים למחזר בדיוק 3 חומרים}\} = \dfrac{P(A \cap B \cap C \cap D^C)}{P(A \cap B \cap C \cap D^C) + \underbrace{P(A^C \cap D)}_{=0.1}} = \dfrac{1}{3}$

ומכאן כי : $P(A \cap B \cap C \cap D^C) = P(A \cap C \cap D^C) = 0.05$

וגם : $P(A \cap B \cap C^C) = P(A) - P(A \cap B^C) - P(A \cap C \cap D^C) - (A \cap D)$

$$= 0.59 - 0.2 - 0.05 - 0.1 = 0.24$$

נצייר דיאגרמת ון מתאימה לבעיה:



ב. $P(C^C) = 0.2 + 0.1 + 0.24 + 0.2 = 0.74$

ג. נתחיל בחישוב ההסתברות של המאורע המַתְנה, שקיים לפחות חומר אחד שהתושב אינו מוכן למחזר:

$$P(A^C \cup B^C \cup C^C \cup D^C) = P(A \cap B \cap C \cap D)^C = P(A \cap D)^C = 1 - 0.1 = 0.9$$

מנתוני הבעיה עולה שבהינתן המאורע שלעיל, התושב מוכן למחזר בדיוק אחד מהחומרים. מהדיאגרמה עולה שמצב כזה ייתכן בשני מקרים בלבד: הוא מוכן למחזר רק עיתונים או שהוא מוכן למחזר רק בקבוקי משקה משפחתיים.

לפיכך, ההסתברות המותנית המבוקשת היא:

$$\frac{P(A \cap B^C \cap C^C \cap D^C) + P(A^C \cap B \cap C^C \cap D^C)}{P(A \cap D)^C} = \frac{0.2 + 0.1}{0.9} = \frac{1}{3}$$

ד. $P(D \mid A \cap B) = \dfrac{P(A \cap B \cap D)}{P(A \cap B)} = \dfrac{P(A \cap D)}{P(A \cap B)} = \dfrac{0.1}{0.39} = 0.2564$

2. לכל $i = 1,2,\ldots,9$, מגדירים את המאורעות A_i על ידי "בהטלות i ו- $i+1$ התקבלה הצלחה".

לכן, לכל $i = 1,2,\ldots,9$, מתקיים: $P(A_i) = P(\text{HH} \cup \text{TT}) = 2 \cdot 0.5^2 = 0.5$

כעת, נבדוק אם קיימת תלות בין המאורעות A_i ו- A_j, כאשר $i \neq j$. מתקיים:

$$P(A_i \cap A_j) = \begin{cases} P(\text{HHH} \cup \text{TTT}) = 2 \cdot 0.5^3 = 0.25 & , \quad |i-j| = 1 \quad ; \quad i,j = 1,\ldots,9 \\ [P(\text{HH} \cup \text{TT})]^2 = (2 \cdot 0.5^2)^2 = 0.5^2 = 0.25 & , \quad |i-j| > 1 \quad ; \quad i,j = 1,\ldots,9 \end{cases}$$

לפיכך, לכל $i \neq j$, המקיימים $i, j = 1,2,\ldots,9$, מתקיים: $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$

והמאורעות A_i ו- A_j בלתי-תלויים זה בזה.

3. נחשב את ההסתברות שהחברים יענו נכון על השאלה שמוצגת להם, בכל אחת משתי הדרכים, ונראה שמבחינה הסתברותית אין הבדל בין שתיהן.

דרך 1: בוחרים אחד משני החברים באקראי, והוא עונה על השאלה.

נסמן ב-A את המאורע שהחבר הראשון נבחר לענות על השאלה ונסמן ב-B את המאורע שהמשתתף שנבחר לענות על השאלה, עונה עליה נכון. מקבלים:

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C) = p \cdot \tfrac{1}{2} + p \cdot \tfrac{1}{2} = p$$

דרך 2: החברים עונים לאחר התייעצות, כמתואר בשאלה.

נסמן ב-A_1 וב- A_2, בהתאמה, את המאורעות שהמשתתף הראשון והמשתתף השני עונים נכון על השאלה, ונסמן ב-B את המאורע שהם אומרים למנחה השעשועון את התשובה הנכונה לשאלה. מכיוון שאין תלות בין תשובות החברים, מקבלים:

$$P(B) = P(B|A_1 \cap A_2)P(A_1 \cap A_2) + P(B|A_1 \cap A_2^C)P(A_1 \cap A_2^C)$$
$$+P(B|A_1^C \cap A_2)P(A_1^C \cap A_2) + P(B|A_1^C \cap A_2^C)P(A_1^C \cap A_2^C)$$
$$= 1 \cdot p^2 + \tfrac{1}{2} \cdot p(1-p) + \tfrac{1}{2} \cdot p(1-p) + 0 = p(p+1-p) = p$$

4. א. המאורעות "התקבלה תוצאה זוגית" ו"התקבלה תוצאה שהיא כפולה של 3" אינם זרים זה לזה. לפיכך, כדי לחשב את ההסתברות המבוקשת נגדיר את המאורעות הזרים:

F = התקבלה תוצאה זוגית שאיננה כפולה של 3 = {2,4}

G = התקבלה תוצאה שהיא כפולה של 3 = {3,6}

כעת, לפי הטענה המובאת בתרגיל מ72 (עמוד 128 בספר הקורס או עמוד 45 במדריך הלמידה), נקבל שההסתברות שהמאורע F יתרחש לפני המאורע G, שהיא ההסתברות המבוקשת, היא $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 0.5$.

ב1. נסמן ב- A את המאורע שבהטלה השישית התקבלה לראשונה תוצאה שהיא כפולה של 3;
ונסמן ב- B את המאורע שהתקבלו 13 תוצאות שהן כפולה של 3 (בתוך 40 הטלות).

חיתוך המאורעות הללו כולל את כל המקרים שבהם ב-5 ההטלות הראשונות התקבלה תוצאה שאינה כפולה של 3, בהטלה השישית התקבלה כפולה של 3, ואחר-כך, ב-34 ההטלות האחרונות התקבלו עוד 12 כפולות של 3. ומכאן, מקבלים:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\dfrac{4^5 \cdot 2 \cdot \binom{34}{12} \cdot 2^{12} \cdot 4^{22}}{6^{40}}}{\dfrac{\binom{40}{13} \cdot 2^{13} \cdot 4^{27}}{6^{40}}} = \frac{\binom{34}{12}}{\binom{40}{13}} = 0.0456$$

ב2. נסמן ב- A את המאורע שהתקבלה תוצאה זוגית בדיוק 22 פעמים במהלך 40 ההטלות;
וב- B את המאורע שהתקבלה תוצאה זוגית בדיוק 15 פעמים ב- 30 ההטלות הראשונות.

חיתוך המאורעות A ו- B כולל את כל התוצאות שבהן התקבלו 15 תוצאות זוגיות ב-30 ההטלות הראשונות ו-7 תוצאות זוגיות נוספות ב-10 ההטלות האחרונות. ואילו, המאורע A כולל את כל התוצאות שיש בהן 15 תוצאות זוגיות ב-30 ההטלות הראשונות (ותוצאות כלשהן, ללא הגבלה, ב-10 ההטלות האחרונות).

לפיכך:
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\dfrac{\binom{30}{15}\binom{10}{7} \cdot 3^{40}}{6^{40}}}{\dfrac{\binom{30}{15} \cdot 3^{30} \cdot 6^{10}}{6^{40}}} = \frac{\binom{10}{7}}{2^{10}} = 0.1172$$

5. נסמן ב- A_i את המאורע שמתג i סגור, לכל $i = 1,2,3,4,5$.

נתוני הבעיה הם :
$$P(A_1) = P(A_3) = P(A_5) = 0.9$$
$$P(A_2 | A_1) = P(A_4 | A_3) = 0.9 \qquad \Rightarrow \qquad P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 | A_1)P(A_1) = 0.9 \cdot 0.9 = 0.81$$
$$P(A_2 | A_1^C) = P(A_4 | A_3^C) = 0.3 \qquad \Rightarrow \qquad P(A_1^C \cap A_2) = P(A_2 | A_1^C)P(A_1^C) = 0.3 \cdot 0.1 = 0.03$$

א.
$$P\{\text{עובר זרם מ-C ל-D}\} = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_1^C \cap A_2)$$
$$= P(A_1) + P(A_2 | A_1^C)P(A_1^C) = 0.9 + 0.3 \cdot 0.1 = 0.93$$

או :
$$P\{\text{עובר זרם מ-C ל-D}\} = P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(A_1^C \cap A_2^C)$$
$$= 1 - P(A_2^C | A_1^C)P(A_1^C) = 1 - 0.7 \cdot 0.1 = 0.93$$

ב. נמצא תחילה את ההסתברות שמתג 2 סגור :
$$P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1^C \cap A_2) = 0.81 + 0.03 = 0.84 \qquad \Rightarrow \qquad P(A_2^C) = 0.16$$

כעת, נמצא את הסתברות המאורע $A_1 \cap A_2^C$:
$$P(A_1 \cap A_2^C) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) = 0.9 - 0.81 = 0.09$$

ומכאן נקבל כי :
$$P\{\text{עובר זרם מ-C ל-D} \mid A_2^C\} = P(A_1 \cup A_2 | A_2^C) = \frac{P(A_1 \cap A_2^C)}{P(A_2^C)} = \frac{0.09}{0.16} = 0.5625$$

ג. לפי נתוני הבעיה, ההסתברות שיעבור זרם מ-C ל-D שווה להסתברות שיעבור זרם מ-E ל-F.

נסמן ב- A_{CD} וב- A_{EF} את המאורעות שעובר זרם מ-C ל-D ומ-E ל-F, בהתאמה, ונקבל :
$$P\{\text{עובר זרם מ-B ל-A}\} = P(A_{\text{CD}} \cup (A_5 \cap A_{\text{EF}}))$$
$$= P(A_{\text{CD}}) + P(A_5 \cap A_{\text{EF}}) - P(A_{\text{CD}} \cap A_5 \cap A_{\text{EF}})$$
$$= P(A_{\text{CD}}) + P(A_5)P(A_{\text{EF}}) - P(A_{\text{CD}})P(A_5)P(A_{\text{EF}})$$
$$= 0.93 + 0.9 \cdot 0.93 - 0.9 \cdot 0.93^2 = 0.98859$$