20425 - תאריך הבחינה: 10.2.2014 (סמסטר 2014א - מועד 3א / 83)

שאלה 1

נתון כי $X_1 , X_2 \sim Geo(p)$ בלתי-תלויים וכי $M = \min\{X_1 , X_2\}$.

א. [המשתנים המקריים בלתי-תלויים]
$$P\{X_1 = X_2\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X_1 = X_2 = i\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X_1 = i\}P\{X_2 = i\}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} p^2(1-p)^{2(i-1)} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$$

כעת, הואיל ושני המשתנים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, מתקיים: $P\{X_1 < X_2\} = P\{X_2 < X_1\}$

ומכאן כי: $P\{X_1 < X_2\} = \frac{1-P\{X_1 = X_2\}}{2} = \frac{1-p}{2-p}$

ב.
$$P\{X_1 = i, M = j\} = P\{X_1 = i, \min\{X_1, X_2\} = j\} = \begin{cases} 0 & , \quad 1 \le i < j \\ P\{X_1 = i\}P\{X_2 \ge i\} & , \quad 1 \le j = i \\ P\{X_1 = i\}P\{X_2 = j\} & , \quad 1 \le j < i \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & , \quad 1 \le i < j \\ p(1-p)^{i-1} \cdot (1-p)^{i-1} & , \quad 1 \le j = i \\ p(1-p)^{i-1} \cdot p(1-p)^{j-1} & , \quad 1 \le j < i \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \quad 1 \le i < j \\ p(1-p)^{2(i-1)} & , \quad 1 \le j = i \\ p^2(1-p)^{i+j-2} & , \quad 1 \le j < i \end{cases}$$

ג. אם i קטן או שווה ל- j, אז $P\{X_1 \le i\} \subseteq P\{M \le j\}$, ולכן $P\{X_1 \le i , M \le j\} = P\{X_1 \le i\}$.

ומכאן כי: $P\{X_1 \le i, M \le j\} = P\{X_1 \le i\} = 1 - P\{X_1 > i\} = 1-(1-p)^i$

שאלה 2

א.
$$P\{-2 \le X-\mu \le 4\} = P\left\{\tfrac{-2}{2} \le \tfrac{X-\mu}{\sigma} \le \tfrac{4}{2}\right\} = P\{-1 \le Z \le 2\}$$
$$= \Phi(2) - \Phi(-1) = 0.9772 - (1-0.8413) = 0.8185$$

ב. המשתנה המקרי Y הוא משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי, שתוחלתו 0 ושונותו 1.

לפיכך: $E[Y^2] = \mathrm{Var}(Y) + (E[Y])^2 = 1 + 0 = 1$

ומכאן: $E[(X-\mu)^2] = E[4Y^2] = 4E[Y^2] = 4 \cdot 1 = 4$

ג. עלינו לחשב את: $P\{Y \le a \,\big|\, |X-\mu| \le 2\} = P\{Y \le a \,\big|\, |Y| \le 1\}$

נזכור כי $Y = Z \sim N(0,1)$ ונקבל כי :

$$P\{Z \le a \,\big|\, |Z| \le 1\} = \begin{cases} 0 & , \quad a \le -1 \\ \dfrac{P\{-1 \le Z \le a\}}{P\{|Z| \le 1\}} = \dfrac{\Phi(a) - \Phi(-1)}{\Phi(1) - \Phi(-1)} = \dfrac{\Phi(a) - 0.1587}{0.6826} & , \quad -1 < a < 1 \\ \dfrac{P\{-1 \le Z \le 1\}}{P\{|Z| \le 1\}} = 1 & , \quad a \ge 1 \end{cases}$$

שאלה 3

נסמן ב- X_{10} את מספר המטאורים שנופלים בשטח העגול שרדיוסו 10 ק״מ ; $X_{10} \sim Po(2)$.

א. $P\{X_{10} = 3\} = e^{-2} \cdot \frac{2^3}{3!} = 0.18045$

ב. תחילה נחשב את ההסתברות שייפלו לפחות 3 מטאורים בתחומי השטח העגול :

$$P\{X_{10} \ge 3\} = 1 - P\{X_{10} \le 2\} = 1 - e^{-2}\left(1 + \tfrac{2^1}{1!} + \tfrac{2^2}{2!}\right) = 1 - 5e^{-2} = 0.3233$$

כעת, מספר החזרות, שבהן נופלים לפחות 3 מטאורים בתחומי השטח העגול, הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 5 ו- 0.3233. נסמן משתנה מקרי זה ב- Y ונקבל :

$$P\{Y \ge 2\} = 1 - P\{Y \le 1\} = 1 - 0.6767^5 - 5 \cdot 0.3233 \cdot 0.6767^4 = 0.5191$$

ג. לפי ההנחות של תהליך פואסון, מספר המטאורים הנופלים בשטח ה״קטן״ יחסי לגודלו. שטח העיגול הגדול הוא $10^2\pi = 100\pi$ קמ״ר ושטח העיגול הקטן הוא $6^2\pi = 36\pi$ קמ״ר. לפיכך, מספר המטאורים הנופלים בעיגול הקטן, שנסמנו ב- X_6 , הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $0.36 \cdot 2 = 0.72$.

ומכאן : $P\{X_6 = 0\} = e^{-0.72} = 0.4868$

ד. בנוסף לאמור בסעיף הקודם, מספר המטאורים הנופלים מחוץ לעיגול הקטן, אך בתחומי העיגול הגדול, שנסמנו ב- X_{10-6} , הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $0.64 \cdot 2 = 1.28$; שני המשתנים, X_6 ו- X_{10-6} , בלתי-תלויים זה בזה ; ומתקיים $X_{10} = X_6 + X_{10-6}$.

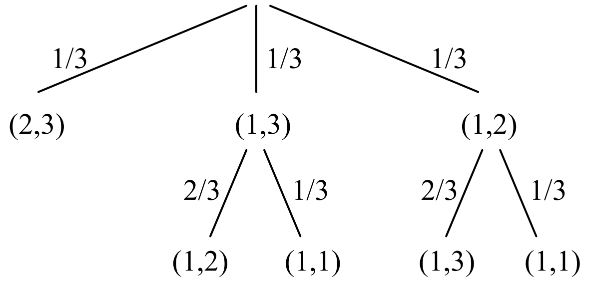
לפיכך, ההתפלגות המותנית של X_6 בהינתן $X_6 + X_{10-6} = 4$ היא בינומית עם הפרמטרים 4 ו- $\frac{0.72}{2} = 0.36$,

ומתקיים : $P\{X_6 = 1 | X_{10} = 4\} = 4 \cdot 0.36^1 \cdot 0.64^3 = 0.3775$

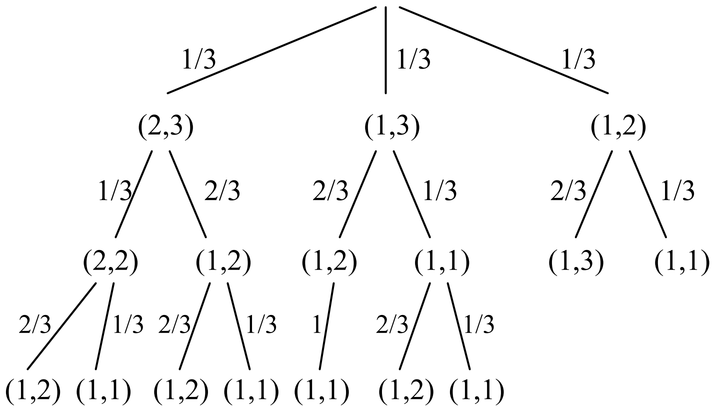
שאלה 4

א. הניסוי מסתיים לאחר שתי הוצאות-כדורים, אם בפעם הראשונה מוצא אחד משני הזוגות : (1,2) או (1,3) ; ובפעם השנייה מוצא הזוג שלא הוצא בפעם הראשונה, מתוך שני זוגות אלה.

ומכאן, שההסתברות המבוקשת היא : $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$



ב. אם לאחר ההוצאה הראשונה יש בכד לפחות כדור אחד הנושא את המספר 2, פירוש הדבר שבפעם הראשונה הוצאו זוגות-המספרים (1,3) או (2,3). אם הוצא הזוג (1,3), אז לפני ההוצאה השנייה הֶרְכֵּב הכדורים בכד הוא $\{1,1,2\}$ והמשחק יסתיים לאחר ההוצאה השנייה אם יוצא זוג מהצורה (1,2); ואם הוצא הזוג (2,3), אז לפני ההוצאה השנייה הרכב הכדורים בכד הוא $\{1,2,2\}$ והמשחק אינו יכול להסתיים לאחר ההוצאה השנייה. לפיכך, ההסתברות המותנית המבוקשת היא: $\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{2\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}$



ג. **<u>דרך פתרון I</u>**

נפריד את מהלך הניסוי לשני שלבים:

1) מספר הוצאות-הכדורים עד שלראשונה מוצא אחד מהזוגות (1,2) או (1,3). שימו לב, שכל עוד לא מוצא אחד משני הזוגות הללו, בהכרח מוצא הזוג (2,3) ואחר-כך הזוג (2,2).

בשלב הראשון, ההסתברות להוציא אחד משני הזוגות הללו (בכל בחירת כדורים) היא $\frac{2}{3}$. ולכן, אם נסמן ב- X_1 את מספר הוצאות-הכדורים בשלב הראשון, אז X_1 הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר $\frac{2}{3}$.

2) לאחר שהוצא אחד מהזוגות (1,2) או (1,3), הרכב הכדורים בכד הוא $\{1,1,3\}$ או $\{1,1,2\}$; והמשחק יסתיים כאשר שוב יוצא אחד מהזוגות (1,3) או (1,2), בהתאמה. בשני המקרים, זוג כזה מוצא בהסתברות $\frac{2}{3}$. לכן, אם X_2 מסמן את מספר הוצאות-הכדורים בשלב השני, אז התפלגותו גיאומטרית עם הפרמטר $\frac{2}{3}$, והוא אינו תלוי ב- X_1.

התוחלת של משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר $\frac{2}{3}$ היא 1.5, ומכאן נקבל שהתוחלת המבוקשת היא:

$$E[X_1+X_2]=E[X_1]+E[X_2]=1.5+1.5=3$$

<u>דרך פתרון II</u>

נפריד את תוצאות הניסוי לשני מקרים:

1) בהוצאה הראשונה הוצא אחד מהזוגות (1,2) או (1,3); כך שלאחריה הרכב הכדורים בכד הוא $\{1,1,3\}$ או $\{1,1,2\}$, בהתאמה; והמשחק מסתיים כאשר לראשונה מוצא הזוג (1,3) או (1,2), בהתאמה.

מספר ההוצאות במקרה זה, שהסתברותו $\frac{2}{3}$, הוא $X+1$, כאשר X הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר $\frac{2}{3}$ (וה-1 הוא עבור ההוצאה הראשונה).

2) בהוצאה הראשונה הוצא הזוג $(2,3)$; כך שלאחריה הרכב הכדורים בכד הוא $\{1,2,2\}$; והמשחק מסתיים לאחר שהזוג $(1,2)$ מוצא פעמיים.

מספר ההוצאות במקרה זה, שהסתברותו $\frac{1}{3}$, הוא $X_1 + X_2 + 1$, כאשר X_i הם משתנים מקריים גיאומטריים בלתי-תלויים עם הפרמטר $\frac{2}{3}$.

תוחלת של משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר $\frac{2}{3}$ היא 1.5, ומכאן נקבל שהתוחלת המבוקשת היא:

$$\tfrac{2}{3}\cdot(1+1.5)+\tfrac{1}{3}\cdot(1+1.5+1.5)=\tfrac{5}{3}+\tfrac{4}{3}=3$$

שאלה 5

א. ההוכחה מובאת באתר הקורס.

ב. מספר הכדורים הכחולים בחמשת המקומות השמאליים ביותר בשורה הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N=20$, $m=5$ ו- $n=5$. לפיכך, השונות המבוקשת היא:

$$\tfrac{20-5}{20-1}\cdot 5\cdot\tfrac{5}{20}\cdot\tfrac{15}{20}=0.7401$$

ג. $$\frac{15!\cdot\binom{16}{5}\cdot 5!}{20!}=\frac{\binom{16}{5}}{\binom{20}{5}}=0.2817$$

ד. $$P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap B^C)=\frac{\binom{15}{5}}{\binom{20}{5}}-\frac{\binom{10}{5}}{\binom{20}{5}}=0.1937-0.0163=0.1774$$