תשובה 1

ב, ג, ה, ז, ט, י.

שימו לב בפרט שסעיף ו אינו נכון: A אינה חלקית ל- B כי David אינו איבר של B.

תשובה 2

א. נתון $X \subseteq Y$. תהי $M \in P(X)$, עלינו להראות $M \in P(Y)$.

$M \in P(X)$ פירושו $M \subseteq X$. מכאן יחד עם הנתון $X \subseteq Y$, בעזרת שאלה 1.6 בעמ' 8 בספר, נקבל כי $M \subseteq Y$, כלומר $M \in P(Y)$ כמבוקש.

ב. התנאי $X \in P(A \cap B)$ **שקול**, לפי הגדרת קבוצת חזקה, לתנאי

$X \subseteq A \cap B$.

לפי שאלה 1.10 ב' , זה **שקול** ל-

$X \subseteq A$ **וגם** $X \subseteq B$.

שוב לפי הגדרת קבוצת חזקה, זה **שקול** ל-

$X \in P(A)$ **וגם** $X \in P(B)$.

ומהגדרת חיתוך, זה **שקול** ל-

$X \in P(A) \cap P(B)$.

קיבלנו: $X \in P(A \cap B)$ **אסם** (אם ורק אם) $X \in P(A) \cap P(B)$,

ולכן ,לפי הגדרה 1.1, שתי הקבוצות שוות.

ג. טענת-עזר: אם $X \subseteq Y$ אז $X \cup Y = Y$. טענה זו הוכחה בעמ' 14 בספר.

לשאלה עצמה:

נתון $A \subseteq B$ **או** $B \subseteq A$. ב.ה.כ (בלי הגבלת כלליות) נניח $A \subseteq B$.

(הסבר: ב.ה.כ. פירושו: אנו מוסיפים הנחה מסוימת, שאינה מגבילה אותנו באמת, כי אם היא אינה מתקיימת ההוכחה שאנו מביאים תפעל בשינוי קטן שצריך להיות ברור מאד לקורא. במקרה זה השינוי הוא: להחליף תפקידים בין A ל- B לכל אורך ההוכחה שלהלן).

מההנחה $A \subseteq B$, בעזרת טענת העזר , $A \cup B = B$. לכן $P(A \cup B) = P(B)$.

שוב מההנחה, בעזרת טענת העזר b, $P(A) \subseteq P(B)$,

ומכאן שוב בעזרת טענה a , $P(A) \cup P(B) = P(B)$.

בסה"כ קיבלנו כי $P(A \cup B)$ ו- $P(A) \cup P(B)$ שווים שניהם ל- $P(B)$ ולכן הם שווים זה לזה.

ד. נניח בשלילה כי A אינה חלקית ל- B **וגם** B אינה חלקית ל- A

(חוק דה-מורגן: זו שלילת האמירה " $A \subseteq B$ **או** $B \subseteq A$ ").

מכך ש- A אינה חלקית ל- B נובע שקיים $a \in A$ המקיים $a \notin B$

ומכך ש- B אינה חלקית ל- A נובע שקיים $b \in B$ המקיים $b \notin A$.

הקבוצה $\{a,b\}$ שייכת ל- $P(A\cup B)$, אך

$\{a,b\}\notin P(A)$ (כי $b\notin A$) ו- $\{a,b\}\notin P(B)$ (כי $a\notin B$),

ולכן $\{a,b\}\notin P(A)\cup P(B)$.

לכן $P(A)\cup P(B)\neq P(A\cup B)$.

תשובה 3

הוכחה אחת:

מהגדרת הפרש סימטרי,

x שייך ל- $A'\oplus B'$ **אסם** (אם ורק אם)

הוא שייך ל- A' ולא ל- B' **או** הוא שייך ל- B' ולא ל- A' .

כלומר **אסם**

x אינו שייך ל- A והוא שייך ל- B **או** x אינו שייך ל- B והוא שייך ל- A.

התנאי הראשון פירושו $x\in B-A$ והתנאי השני פירושו $x\in A-B$.

בסה"כ, לפי הגדרת הפרש סימטרי, קיבלנו שזה מתקיים אסם $x\in A\oplus B$.

הוכחה שניה, אלגברית:

$$A'\oplus B' = (A'-B')\cup(B'-A') = (A'\cap B)\cup(B'\cap A)$$

נשנה את סדר האיברים בעזרת חילופיות החיתוך וחילופיות האיחוד :

$$= (A\cap B')\cup(B\cap A') = (A-B)\cup(B-A) = A\oplus B$$

למעשה שתי ההוכחות מקבילות כמעט צעד-צעד.

תשובה 4

א. נוכיח כי $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n = \{k\in\mathbf{N} \mid 3\le k\}$.

הכלה בכיוון אחד:

כל אחת מהקבוצות A_n היא מהגדרתה, קבוצה של טבעיים גדולים / שווים 3.

כלומר לכל n טבעי, $A_n\subseteq\{k\in\mathbf{N}\mid 3\le k\}$.

מהגדרת איחוד של קבוצה של קבוצות נובע שאם כל הקבוצות באיחוד חלקיות לקבוצה מסוימת Y אז גם איחוד הקבוצות הללו חלקי ל- Y (זה לא נובע משאלה 1.9 בספר, כי שם מדובר על איחוד של שתי קבוצות בלבד. זו תכונה של האיחוד הכללי, שניתן **להוכיחה** בצורה דומה לשאלה 1.9, **מתוך ההגדרה של איחוד כללי**). לכן $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \subseteq \{k\in\mathbf{N}\mid 3\le k\}$.

הכלה בכיוון שני:

יהי $k \in \{k \in \mathbf{N} \mid 3 \le k\}$, במלים אחרות יהי k טבעי , $3 \le k$.

מתקיים $3 \le k < 2k$ ולכן מהגדרת הקבוצות A_n , $k \in A_k$.

לכן $k \in \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$.

הוכחנו הכלה בשני הכיוונים, לכן הקבוצות שוות.

ב. $A_0 = \varnothing$ (אין מספר n המקיים $3 \le n < 0$).

לכן, מהגדרת חיתוך קבוצה של קבוצות, גם $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n = \varnothing$.

ג. נוכיח כי $\bigcap_{\substack{n \in \mathbf{N} \\ n>4}} A_n = \{k \in \mathbf{N} \mid 3 \le k < 10\}$.

הכלה בכיוון אחד:

אם $x \in \bigcap_{\substack{n \in \mathbf{N} \\ n>4}} A_n$ אז בפרט $x \in A_5 = \{x \in \mathbf{N} \mid 3 \le x < 10\}$.

הכלה בכיוון שני:

יהי k טבעי, $3 \le k < 10$. אז לכל $5 \le n$ מתקיים $3 \le k < 2n$.

כלומר לכל $5 \le n$, $k \in A_n$.

לכן, מהגדרת חיתוך קבוצה של קבוצות, $k \in \bigcap_{\substack{n \in \mathbf{N} \\ n>4}} A_n$.

הוכחנו הכלה בשני הכיוונים, לכן הקבוצות שוות.

ד. נחשב את הקבוצות B_n :

$$B_n = A_{n+1} - (A_n \cup \{2n\}) = \{x \in \mathbf{N} \mid 3 \le x < 2n+2\} - (\{x \in \mathbf{N} \mid 3 \le x < 2n\} \cup \{2n\})$$

$$= \{x \in \mathbf{N} \mid 3 \le x\} \cap \{x \in \mathbf{N} \mid 2n < x < 2n+2\}$$

$$= \{x \in \mathbf{N} \mid 3 \le x\} \cap \{2n+1\}$$

$$= \begin{cases} \{2n+1\} & n > 0 \\ \varnothing & n = 0 \end{cases}$$

לכן $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_n$ היא קבוצת הטבעיים האי-זוגיים, **פרט ל- 1** .

איתי הראבן