שאלה 1

א. 1. $P\{X<0.7\}=P\{X>3.3\}$

לכן: $\Phi\left(\frac{0.7-\mu}{1.3}\right)=1-\Phi\left(\frac{3.3-\mu}{1.3}\right) \quad\Rightarrow\quad \Phi\left(\frac{0.7-\mu}{1.3}\right)=\Phi\left(\frac{\mu-3.3}{1.3}\right)$

ומכאן: $\frac{0.7-\mu}{1.3}=\frac{3.3-\mu}{1.3} \quad\Rightarrow\quad 0.7-\mu=\mu-3.3 \quad\Rightarrow\quad \mu=2$

2. $P\{X>a\}=0.63$

לכן: $1-\Phi\left(\frac{a-2}{1.3}\right)=0.63=\Phi\left(\frac{0.0007}{0.0038}\cdot 0.01+0.33\right)=\Phi(0.3318)$

ומכאן: $\Phi\left(\frac{2-a}{1.3}\right)=\Phi(0.3318) \quad\Rightarrow\quad a=2-0.3318\cdot 1.3=1.5687$

3.
$$P\{X<3.1\,|\,X>2\}=\frac{P\{2<X<3.1\}}{P\{X>2\}}=\frac{\Phi\left(\frac{3.1-2}{1.3}\right)-\Phi\left(\frac{2-2}{1.3}\right)}{1-\Phi\left(\frac{2-2}{1.3}\right)}=\frac{\Phi(0.8462)-\Phi(0)}{1-\Phi(0)}$$
$$=\frac{\overbrace{0.7995+0.62\cdot 0.0028}^{=0.8012}-0.5}{0.5}=0.6024$$

ב. נתון כי X משתנה מקרי אחיד (רציף) על הקטע (a,b), לפיכך: $f_X(x)=\frac{1}{b-a} \quad , \quad a<x<b$

1.
$$E[X]=\int_a^b x f_X(x)dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}$$

2. דרך I:
$$E[X^2]=\int_a^b x^2 f_X(x)dx=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$
$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{4b^3-4a^3-3(b-a)(a+b)^2}{12(b-a)}$$
$$=\frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{12(b-a)}=\frac{(b-a)^3}{12(b-a)}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

דרך II:
$$\mathrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=\int_a^b \left(x-E[X]\right)^2 f_X(x)dx=\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\frac{1}{b-a}dx$$
$$=\frac{1}{3(b-a)}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Bigg|_a^b=\frac{1}{3(b-a)}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3-\left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right]$$
$$=\frac{1}{3(b-a)}\cdot 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^3=\frac{(b-a)^2}{12}$$

שאלה 2

נסמן ב- Y את המספר על הפתק שנבחר. למשתנה המקרי Y יש התפלגות אחידה בדידה בין 1 ל- 10.

כמו כן, לכל $i=1,2,\ldots,10$, מתקיים: $X\,|\,Y=i \;\sim\; B(i,0.75)$

א. $P\{X=8\}=\sum_{i=8}^{10}P\{X=8\mid Y=i\}P\{Y=i\}=\sum_{i=8}^{10}\binom{i}{8}0.75^8 0.25^{i-8}\cdot 0.1$

$$0.1\cdot 0.75^8\left[\binom{8}{8}+\binom{9}{8}0.25+\binom{10}{8}0.25^2\right]=0.01001\cdot(1+2.25+2.8125)=0.0607$$

ב. לפי נוסחת התוחלת המותנית: $E[X]=E[E[X\mid Y]]=E[0.75Y]=0.75\cdot\frac{1+10}{2}=4.125$

דרך נוספת - באמצעות הגדרת סכום מקרי:

נגדיר את Y כמו בסעיף א, ואילו X_i יוגדר על-ידי "התקבל H בהטלה i", לכל $i=1,2,\ldots$.

$$E[X]=E\left[\sum_{i=1}^{Y}X_i\right]=E[Y]E[X_1]=\frac{1+10}{2}\cdot 0.75=4.125$$

ג. לפי נוסחת השונות המותנית:

$$\mathrm{Var}(X)=E[\mathrm{Var}(X\mid Y)]+\mathrm{Var}(E[X\mid Y])=E[0.75\cdot 0.25Y]+\mathrm{Var}(0.75Y)$$

$$=0.1875E[Y]+0.75^2\,\mathrm{Var}(Y)=0.1875\cdot\frac{1+10}{2}+0.75^2\cdot\frac{10^2-1}{12}=1.03125+4.640625=5.672$$

דרך נוספת - באמצעות הגדרת סכום מקרי:

נגדיר את Y כמו בסעיף א, ואילו X_i יוגדר על-ידי "התקבל H בהטלה i", לכל $i=1,2,\ldots$.

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{Y}X_i\right)=E[Y]\mathrm{Var}(X_1)+(E[X_1])^2\,\mathrm{Var}(Y)=\frac{1+10}{2}\cdot 0.75\cdot 0.25+0.75^2\cdot\frac{10^2-1}{12}=5.672$$

שאלה 3

א. $\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{5}{6})^{i-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot(\frac{4}{6})^{i-1}\cdot(\frac{3}{6})^{i-1}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6})^{i-1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-60/216}=\frac{3}{13}=0.2308$

דרך נוספת:

ביחס לכל סיבוב (יחיד) של המשחק נגדיר את המאורעות: A_1 = "A מנצח" ו- BC_1 = "B או C מנצחים".
שני המאורעות זרים זה לזה, ולכן נוכל לחשב את ההסתברות, שבסיבובים חוזרים ונשנים של המשחק, המאורע A_1 יתרחש לפני המאורע BC_1. מתקיים: $P(A_1)=\frac{1}{6}\quad,\quad P(BC_1)=\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{5}{9}$

ומכאן כי ההסתברות ש-A ינצח במשחק (כלומר, לפני B או C) היא: $\frac{P(A_1)}{P(A_1)+P(BC_1)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{5}{9}}=\frac{3}{13}$

ב. נחשוב על תחום הערכים האפשריים של המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר ההטלות ש- B מבצע. הערך האפשרי המינימלי של המשתנה הזה הוא 0. לפיכך, התפלגותו איננה גיאומטרית.

כמו כן, אם נסמן משתנה מקרי זה ב- X_B, נקבל כי:

$P\{X_B=0\}=\frac{1}{6}$ [A ניצח בסיבוב הראשון]

ולכל $i=1,2,\ldots$, מקבלים: $P\{X_B=i\}=(\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6})^{i-1}\Big[\underbrace{\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{6}}_{\text{C ניצח בסיבוב } i}+\underbrace{\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}}_{\text{B ניצח בסיבוב } i}+\underbrace{\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}}_{\text{A ניצח בסיבוב } i+1}\Big]=(\frac{60}{216})^{i-1}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{156}{216}$

קיבלנו פונקציית הסתברות שאיננה פונקציית הסתברות גיאומטרית. לפיכך, הטענה איננה נכונה.

ג. נמצא את פונקציית ההסתברות המותנית של מספר ההטלות ש- B ביצע בהינתן ש- A ניצח במשחק.
נשתמש בסימוני הסעיף הקודם ונסמן ב- A את המאורע ש- A ניצח במשחק.
חישבנו את ההסתברות של מאורע A וקיבלנו $P(A)=\frac{3}{13}=0.2308$.

כעת, לכל $i = 0,1,...$, מקבלים:

$$P\{X_B = i \mid A\} = \frac{P\{X_B = i, A\}}{P(A)} = \frac{(\frac{5}{6})^i \cdot \frac{1}{6} \cdot (\frac{4}{6})^i \cdot (\frac{3}{6})^i}{\frac{3}{13}} = (\tfrac{15}{54})^i \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{13}{3} = (\tfrac{15}{54})^i \cdot \tfrac{39}{54} = (\tfrac{5}{18})^i \cdot \tfrac{13}{18}$$

ומכאן:

$$E[X_B \mid A] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P\{X_B = i \mid A\} = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot (\tfrac{5}{18})^i \cdot \tfrac{13}{18} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (\tfrac{5}{18})^i \cdot \tfrac{13}{18} = \tfrac{5}{18} \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (\tfrac{5}{18})^{i-1} \cdot \tfrac{13}{18}}_{=E[Geo(13/18)]} = \tfrac{5}{18} \cdot \frac{1}{\frac{13}{18}} = \tfrac{5}{18} \cdot \tfrac{18}{13} = \tfrac{5}{13}$$

הערה: מפונקציית ההסתברות המותנית שקיבלנו עולה כי התפלגות המשתנה המקרי המותנה $X_B \mid A$ היא הזזה ב- (-1) של התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר $p = 13/18$.

לפיכך, התוחלת המבוקשת היא $\frac{1}{\frac{13}{18}} - 1 = \frac{18}{13} - 1 = \frac{5}{13}$, כפי שקיבלנו בחישוב הישיר.

שאלה 4

א. אם בידיו 30 קונכיות, התפלגות מספר הקונכיות שמצא מכל סוג היא מולטינומית עם הפרמטרים $n = 30$ ו- $p = (1/10, 1/3, 17/30)$.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{30!}{4!12!14!} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \left(\frac{17}{30}\right)^{14} = 0.0175$

ב. נסמן ב- X_1 את מספר "חרוטי הים" שנמצאו, ב- X_2 את מספר ה"מסרקים" שנמצאו וב- X_3 את מספר הקונכיות המיוחדות האחרות שנמצאו. מדוגמאות 2ב ו- 3א (פרק 6 במדריך הלמידה) נקבל:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{3} X_i = 27, X_1 = 4\right\} = P\{X_2 + X_3 = 23, X_1 = 4\} = P\{\underbrace{X_2 + X_3}_{\sim Po(30 \cdot 0.9 = 27)} = 23\} P\{X_1 = 4\}$$

$$= e^{-27} \cdot \frac{27^{23}}{23!} \cdot e^{-3} \cdot \frac{3^4}{4!} = 0.06066 \cdot 0.16803 = 0.0102$$

ג. מספר "חרוטי הים" שהוא מוצא בשעתיים הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $30 \cdot 2 \cdot 0.1 = 6$.

לפיכך, ההסתברות המבוקשת היא: $e^{-6} \cdot \frac{6^8}{8!} = 0.1033$

ד. קונכיות מסוג "מסרק" נמצאות בהתאם להנחות של תהליך פואסון עם קצב של $30 \cdot 1/3 = 10$ בשעה. לפיכך, התפלגות הזמן שיעבור עד למציאת הקונכייה הראשונה מסוג זה היא מעריכית עם הפרמטר 10. ומכאן שהתוחלת המבוקשת היא 1/10 שעה, כלומר, 6 דקות.

שאלה 5

א. יש 3 אפשרויות לצביעת כל פרט ובסך הכל 4 פרטים לצביעה, ולכן, מספר אפשרויות הצביעה הוא $3^4 = 81$.

ב. נחשב את מספר האפשרויות המבוקש דרך המאורע המשלים. מספר האפשרויות לצבוע בית בלי שום פרט אדום הוא $2^4 = 16$. לפיכך, מספר האפשרויות שבהן יש לפחות פרט אחד אדום הוא $81 - 16 = 65$.

ג. כל בית נצבע באחת מ- 81 אפשרויות צביעה.

לפיכך, ההסתברות לקבל שתי תוצאות צביעה שונות היא: $\frac{81 \cdot 80}{81 \cdot 81} = \frac{80}{81} = 0.9877$

ד. מספר התוצאות השונות הוא כמספר האפשרויות לפזר 10 כדורים זהים ב- 81 תאים ממוספרים.

לפיכך, מקבלים: $\binom{10 + 81 - 1}{10} = \binom{90}{10}$