איחוד של קבוצות בנות-מניה שאינן בהכרח זרות זו לזו

לפי "תורת הקבוצות" עמ' 119 שאלה 4.3ד, אם מתקיים התנאי (*) הבא:

(*) $|A| = |B| = \aleph_0$ **או** $|A| = \aleph_0$ ו- B סופית **או** $|B| = \aleph_0$ ו- A סופית **(*)**

ובנוסף לכך מתקיים $A \cap B = \varnothing$, אז $|A \cup B| = \aleph_0$.

נקרא לטענה זו "**הטענה על קבוצות זרות**". טענה זו הוכחה כאמור בשאלה 4.3ד.

<u>טענה 1</u>

מתוך ההנחה (*) נובעת המסקנה $|A \cup B| = \aleph_0$ גם ללא ההנחה שהקבוצות זרות.

<u>הוכחת טענה 1</u>

נניח שמתקיים התנאי (*) ואיננו מניחים דבר על $A \cap B$. נוכיח ש- $|A \cup B| = \aleph_0$.

כידוע $A \cup B = A \cup (B - A)$, ובאגף ימין האיחוד הוא של שתי קבוצות זרות. כעת,

(*i*) מהנתון, A היא סופית או בת-מניה.

(*ii*) $B - A \subseteq B$, ומהנתון B היא סופית או בת-מניה. קבוצה המוכלת בקבוצה סופית או בת-מניה היא סופית או בת-מניה ("תורת הקבוצות", בראש עמ' 119), לפיכך גם $B - A$ היא סופית או בת-מניה.

(*iii*) לא ייתכן שהקבוצה A והקבוצה $B - A$ שתיהן סופיות, כי אז האיחוד שלהן היה סופי, אבל האיחוד שלהן מכיל את A ואת B, שלפי הנתון לפחות אחת מהן אינסופית.

(*i*)+(*ii*)+(*ii*) יחד אומרים שהקבוצות הזרות A , $B - A$ מקיימות את התנאי (*), כאשר בתפקיד B נמצאת כעת $B - A$.

לפי "הטענה על קבוצות זרות", $|A \cup (B - A)| = \aleph_0$.

כאמור $A \cup B = A \cup (B - A)$, כלומר הוכחנו ש- $|A \cup B| = \aleph_0$.

עד כאן הוכחת טענה 1.

<u>טענה 2</u>

יהי $1 \le n \in \mathbf{N}$. איחוד n קבוצות בנות-מניה הוא קבוצה בת-מניה.

<u>הוכחת טענה 2</u>

באינדוקציה על n.

בדיקה עבור $n = 1$: מה שיש להוכיח הוא בדיוק מה שנתון.

מעבר: נניח שעבור כל n קבוצות בנות-מניה, האיחוד שלהן הוא בר-מניה.

נוכיח שזה מתקיים גם עבור כל $n+1$ קבוצות בנות-מניה:

תהיינה $A_1, \ldots, A_{n+1}$ קבוצות, שכל אחת מהן בת-מניה.

מהנחת האינדוקציה, האיחוד של n הראשונות, $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ הוא בר-מניה.

מהנתון, A_{n+1} היא בת-מניה.

מכאן לפי טענה 1, $(A_1 \cup ... \cup A_n) \cup A_{n+1}$ היא בת-מניה.

הוכחנו את הטענה עבור $n+1$, לפי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $1 \le n \in \mathbf{N}$.

<u>טענה 3</u>

איחוד $\aleph_0$ קבוצות בנות-מניה הוא קבוצה בת-מניה (גם אם הקבוצות אינן זרות זו לזו).

לא נוכיח זאת כאן ולא נסתמך על כך בהמשך.
חשוב יותר שתשימו לב שההוכחה שהבאנו לטענה 2 אינה מוכיחה את טענה 3 :
הוכחה באינדוקציה מוכיחה שטענה נכונה עבור כל n טבעי, אבל בטענה 3 כמות הקבוצות שאנו מאחדים היא $\aleph_0$. $\aleph_0$ אינו מספר טבעי...