תשובה 1

כל קטע בדיאגרמת הסה של קבוצה סדורה-חלקית מייצג זוג איברים, שאחד מהם מכסה את השני. מהגדרת המושג "מכסה", ביחס ההכלה קבוצה $B \in P(A)$ מכסה קבוצה $C \in P(A)$ אם ורק אם מתקיים:

$C \subset B$ ואין אף קבוצה $D \in P(A)$ המקיימת $C \subset D \subset B$ (הכלות-ממש).

עבור B,C **סופיות**, קל לראות שתנאי זה מתקיים אם ורק אם קיים:

$C \subset B$ ומספר אברי C קטן ב- 1 ממספר אברי B.

יהי m מספר טבעי בתחום $0 \le m \le k$.

לקבוצה הנתונה A , שהיא בת k איברים, יש $\binom{k}{m}$ תת-קבוצות בנות m איברים,

כלומר ב- $P(A)$ יש $\binom{k}{m}$ איברים שעוצמת כל אחד מהם m.

כעת, אם B קבוצה בת m איברים, יש לה m תת-קבוצות בנות $m-1$ איברים (ע"י השמטת איבר אחד של B בכל פעם. נשים לב שזה נכון גם אם B ריקה).

כלומר כל קבוצה בגודל m מכסה בדיוק m קבוצות אחרות.

לכן מספר הקטעים בדיאגרמת הסה של יחס ההכלה מעל $P(A)$ הוא $\sum_{k=0}^{k} m\binom{k}{m}$.

לפי שאלה 3.9 בעמ' 71 בספר הלימוד, סכום זה שווה $k \cdot 2^{k-1}$.

תשובה 2

א. תהי U קבוצת כל היחסים מ- A ל- B . מהגדרתה, $U = P(A \times B)$.

כהכנה להמשך ולסעיף הבא נחשב: $|U| = |P(A \times B)| = 2^{20}$

תהי K_1 קבוצת היחסים מ- A ל- B בהם 1 **אינו** נמצא בתחום ההגדרה.

ניתן לראות כל אבר של K_1 כיחס מ- $A-\{1\}$ ל- B ,

ולהיפך: כל יחס מ- $A-\{1\}$ ל- B ניתן לראות כיחס מ- A ל- B , שבו 1 אינו נמצא בתחום ההגדרה. במלים אחרות, ניתן לזהות את K_1 עם קבוצת היחסים מ- $A-\{1\}$ ל- B,

כלומר עם $P\big((A-\{1\}) \times B\big)$. לפיכך $|K_1| = 2^{15}$.

ב. בהמשך לסימונים של הסעיף הקודם, עבור $i = 1,2,3$ תהי K_i קבוצת אברי U בהם המספר i אינו נמצא בתחום ההגדרה.

מובן כי לכל i , $|K_i| = |K_1| = 2^{15}$. יש 3 קבוצות K_i .

נחשב חיתוכים בזוגות (נמקו!): $|K_i \cap K_j| = 2^{10}$ $(i \ne j)$. יש 3 חיתוכים כאלה.

חיתוך משולש: $|K_1 \cap K_2 \cap K_3| = 2^5$.

כעת בעזרת הכלה והפרדה, מספר היחסים המקיימים את הנדרש הוא:

$$|U| - \sum_{i=1}^{3}|K_i| + \sum_{1\le i<j\le 3} K_i \cap K_j| - |K_1 \cap K_2 \cap K_3|$$
$$= 2^{20} - 3\cdot 2^{15} + 3\cdot 2^{10} - 1\cdot 2^5 = 953{,}312$$

תשובה 3 (תקציר – השלימו את הפרטים!)

נפריד למקרים לפי אורך הסיסמא. **בכל אחד מהמקרים בנפרד** ניעזר בהכלה והפרדה.
אחרי הגדרה של קבוצה אוניברסלית מתאימה בכל מקרה וקבוצות A_i מתאימות, מתקבל **(השלימו את הפרטים!)**:

אם יש 5 ספרות: $62^5 - (2\cdot 36^5 + 52^5) + (10^5 + 2\cdot 26^5)$.

אם יש 6 ספרות: $62^6 - (2\cdot 36^6 + 52^6) + (10^6 + 2\cdot 26^6)$.

התשובה היא סכום שני הביטויים שקיבלנו.

תשובה 4

א. לפי עקרון שובך היונים, בחלוקה של 101 ציונים (הציונים 0 – 100) ל- 350 סטודנטים, יש לפחות ציון אחד שכמות הסטודנטים שקיבלו אותו **גדולה או שווה** $350 / 101 = 3.465..$.
מכיון שכמות הסטודנטים שקיבלו ציון היא מספר שלם, יש לפחות **ארבעה** סטודנטים שקיבלו אותו ציון.

כדי להשלים את התשובה, נראה כיצד לחלק ציונים כך שאין 5 סטודנטים עם אותו ציון:
לא קשה, השלימו בעצמכם!

ב. יש לנו כעת $350 + 420 + 115 + 310 = 1{,}195$ מחברות בחינה.
לכל מחברת בחינה נתאים שני מספרים: ציון הבחינה ומשקל המטלות של אותו נבחן.
קיבלנו פונקציה מקבוצת מחברות הבחינה לקבוצה $A \times B$, כאשר A היא קבוצת הציונים האפשריים ו- B היא קבוצת משקלי המטלות האפשריים.
$|A \times B| = 101 \cdot 11 = 1{,}111$.
מכיון שמספר המחברות, $1{,}195$, גדול ממש מ- $|A \times B| = 1{,}111$, הרי לפי עקרון שובך היונים קיימות לפחות שתי מחברות שמתאים להן אותו זוג סדור.

איתי הראבן