

צמח ש' יואל הכהן ה'תשנ"ה

$\therefore 125\% \text{ ABC}$

אם K ו- M הם תת-חבורות של G ו- $K \subseteq M$, אז K היא תת-חבורה של M .

הערה: על הכשרה ב-3 קבוצות חזרות א' ו' מ' קיימת קבוצה א' ו' מ' סמלית א' ו' מ' קבוצה, על הכשרה ב-5 קיימת חברה א' ו' מ' א' ו' מ'.

مثال ۱: $A = \{x \mid f(x)\}$ (که در آن A تنها گزاره‌ای است که در آن x متغیر است)

[illegible]

12 254 216

$a_1 + b_1 \leq a_2 + b_2$: SI $b_1 \leq b_2$, $a_1 \leq a_2$ \Rightarrow $a_1 + b_1 \leq a_2 + b_2$

האסר: זה שם של 1 בחלק הראשון הם גורם למכור וזכור למכור $A_2 A_1$

$B_1 \subseteq B_2$ | $A_1 \subseteq A_2$: e y mawr hira ddwydded B_2 , B_1

7. $\neg W \Rightarrow a_1 + b_1 \leq a_2 + b_2 \Leftrightarrow A_2 \cup B_2 \supseteq A_1 \cup B_1$ 1.6. 2. 1.6. 2. 1.6. 2.

$\therefore 5.11^* = 10.11$, 5.11 $\text{over } 12.11$

$K \cap M = K$: K دایره جی. زیرا $M \subseteq X_0$ و X_0 دایره است.

$$k \leq k + \alpha n \leq k + \delta_0 \stackrel{+}{=} k \quad : \text{done}$$

$X1, K$ \rightarrow $K \subseteq K \cup X$
 $X1, K$ \rightarrow $K \subseteq K \cup X$

1. $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

5.13* \Rightarrow $B \subseteq A$ $|B| \leq \aleph$ $|A-B| = |A|$ $|B| = m$ $|A-B| = d$ $|A| = k$

הוכחה: $|B| = m$ $|A-B| = d$ $|A| = k$

למשפט קובץ מוכח כי $d+m=k$

5.11* $d+m=d$ $m \leq \aleph$ $|A| = k$ $d+m=d=k$

אם כן:

דוגמה:

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

בכל סעיפי השאלה $A = \mathbb{N} - \{0\}$ (הטבעיים ללא 0), ו- D הוא יחס מעל A המוגדר כך:
 $(a, b) \in D$ אם b מתחלק ב- a ללא שארית.

לפי "תורת הקבוצות" עמ' 90 שאלה 3.14, D הוא יחס **סדר-חלקי** מעל A .

4 (נק') א. האם D הוא סדר-מלא מעל A (הגדרה 3.5)? הוכח את תשובתך.

5 (נק') ב. הוכח שהיחס $G = D \cup D^{-1}$ אינו טרנזיטיבי.

8 (נק') ג. הוכח: $D \cdot D^{-1} = A \times A$.

8 (נק') ד. הוכח: $D^{-1} \cdot D = A \times A$.

הערה: בסעיפים ג, ד, פעולת הכפל באגף שמאל היא כפל יחסים (כפל רלציות).

שאלה 2

10 (נק') א. C היא עוצמת קבוצת המספרים הממשיים.

תן **דוגמא** לקבוצות A, B , כך שקבוצת הפונקציות של A ל- B היא בעלת עוצמה גדולה ממש מ- C . הוכח שהדוגמא שלך מקיימת את הנדרש.

15 (נק') ב. תהי k עוצמה כלשהי. הוכח: $k^2 = k \cdot k$.

הדרכה: היעזר בהגדרה של כפל עוצמות ובהגדרה של חזקה של עוצמות.

אין קשר בין שני הסעיפים.

שאלה 3

דנה, תלמידה בכיתה א', קראה בספר את המשפט המעניין: **דנה קמה דנה נמה**. אחרי שקראה בהצלחה את המשפט, עלו בדעתה של דנה כמה שאלות מעניינות לא פחות:

3 (נק') א. בכמה דרכים אפשר לסדר את כל 12 האותיות שבמשפט הזה במחרוזת אחת ללא רווחים, כגון **דנהקמהדנהנמה**.

4 (נק') ב. בכמה מהדרכים הללו מופיע בתוך המחרוזת הרצף **דמקה**?

18 (נק') ג. מה מספר הדרכים לסדר את 12 האותיות כך **שלא** תופיע בתוך המחרוזת **אף אחת** מארבע המחרוזות הבאות: **דמקה**, **קהה**, **ממוד**, **נננה**.

הדרכה: הכלה והפרדה.

שימו לב לצירופי מחרוזות שלא יכולים לקרות יחד, וכאלה שכן אפשריים.

בכל הסעיפים בשאלה זו יש להגיע לתשובה סופית מספרית. כמובן יש לפרט את הדרך.

שאלה 4

יהי a_n מספר הסדרות באורך n , שאבריהן שייכים לקבוצה $\{1, 2, \dots, 7\}$, והמקיימות את התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים זוגיים זה בסמוך לזה.
למשל עבור $n = 5$, הסדרה $(1, 1, 2, 6, 3)$ אינה מותרת, כי 2 מופיע ליד 6.
גם הסדרה $(1, 1, 2, 2, 3)$ אסורה, כי יש שתי הופעות צמודות של 2.
(10 נק') א. רשום את a_0, a_1, a_2 . מצא יחס נסיגה (יחס רקורסיה) עבור a_n .
בדוק ש- a_0, a_1, a_2 שרשמת מתיישבים עם יחס הנסיגה שמצאת.
(15 נק') ב. פתור את יחס הנסיגה וקבל ביטוי מפורש עבור a_n .
בדוק את הביטוי שקיבלת, עבור $n = 2$.

שאלה 5

נתונה שפה של תחשיב הפרדיקטים, שבה סימן פונקציה דו-מקומית f , וסימן פרדיקט דו-מקומי E . יש בשפה שני סימני קבועים: a, b .
אין בשפה עוד סימני פונקציות, פרדיקטים או קבועים.
כרגיל, נמצאים בשפה הקשרים הלוגיים $\forall, \exists, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$, סוגריים, שני הכמתים \forall, \exists וסימני משתנים כגון x, y, z .
נתונות שלוש אינטרפרטציות J_1, J_2, J_3 של השפה הזו, אל העולם $P(N)$.
בכל האינטרפרטציות האלה, E מתפרש כיחס השוויון: $E(x, y)$ פירושו $x = y$.
בשלושתן, הקבוע a מתפרש כקבוצה הריקה והקבוע b מתפרש כקבוצה N .
ההבדל היחיד בין האינטרפרטציות הוא בפירוש של f :
ב- J_1 הסימן f מתפרש כחיתוך קבוצות. ב- J_2 הסימן f מתפרש כאיחוד קבוצות.
ב- J_3 הסימן f מתפרש כחיסור (הפרש) קבוצות.
(7 נק') א. כתבו פסוק בשפה זו, ללא שימוש בכמתים \forall, \exists , שהוא אמיתי ב- J_1 ושקרי ב- J_2 .
(9 נק') ב. כתבו פסוק בשפה זו, שיכול להכיל כמתים, אבל לא מופיע בו הסימן b , שהוא אמיתי ב- J_1 ושקרי ב- J_2 .
(9 נק') ג. כתבו פסוק בשפה זו, שיכול להכיל כמתים, אבל לא מופיע בו הסימן b , שהוא אמיתי ב- J_1 , אמיתי ב- J_2 ושקרי ב- J_3 .

בשאלה 5 אין צורך לנמק, אבל יש לרשום ליד כל תבנית את הפירוש המילולי שלה.
כתיב מקוצר - מותר. הקפידו לשים סוגרים במקרה שייתכן ספק בקריאה.

בהצלחה!

Case 1:18-cv-01087-LTS Document 1-1 Filed 08/21/18 Page 1 of 1

in 2008 85 per cent (1. ship)

$|A| 2^c$
 $|B| \Rightarrow$ $B \int_A$ $B = \{0, 1\}$ $A = \mathbb{R}$ (2.1.1)

$2^C = P(C) \geq C$ and $P(A) = 2^A$ A and B are disjoint

Handwritten signature: *Handwritten signature*

$$A - B = A - (A \cap B)$$

52008. 16 pin 3 the 3 the

2008 85 25/11/2008 (45/11/08)

$$A(R(x, x_1)) \quad \text{in } (5) \text{ line}$$
$$\forall x_i (E(a$$

c. $E(a, f(b, a))$ בקדום. הרצה של N חלמן בקדום, הרצה.

$$\forall x_1 \in [a, b] \exists \delta > 0 \text{ such that } \forall x_2 \in [a, b] \text{ with } |x_2 - x_1| < \delta \implies |f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon$$
$$\forall x, (E(a, f(x, x)))$$

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

- תהי $A = \{1, 2, 3\}$. תהי M קבוצת כל היחסים (הרלציות) מעל A .
 תהי $\iota: M \rightarrow M$ הפונקציה המתאימה לכל $R \in M$ את הסגור הטרנזיטיבי שלו.
 (8 נק') א. הוכח או הפרך: לכל $R, S \in M$, אם $\iota(R) \subseteq \iota(S)$ אז $R \subseteq S$.
 (8 נק') ב. הוכח או הפרך: לכל $R \in M$, $\iota(R^2) = (\iota(R))^2$.
 (9 נק') ג. הוכח (!): $\iota(R^{-1}) = (\iota(R))^{-1}$.

שאלה 2

- נתבונן בסדרות אינסופיות של מספרים טבעיים:
 סדרות מהצורה (a_0, a_1, a_2, \dots) , כאשר לכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$.
 סדרה נקראת **מחזורית** אם היא בנויה מסדרה סופית שחוזרת על עצמה.
 דוגמאות: הסדרה $(7, 7, 7, 7, \dots)$ היא מחזורית.
 הסדרה $(1, 7, 5, 5, 1, 7, 5, 5, 1, 7, 5, 5, \dots)$ היא מחזורית.
 הסדרה $(1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots)$ אינה מחזורית.
 תהי K קבוצת הסדרות האינסופיות ה**מחזוריות** של מספרים טבעיים.
 מהי עוצמת K ? הוכיחו.
 אם אתם בונים התאמה חד-חד-ערכית כלשהי, הקפידו לוודא ולהוכיח שהיא אכן חד-חד-ערכית.

שאלה 3

- תהי A קבוצת המחרוזות באורך 5, הבנויות בעזרת האותיות a, b, c, d, e, f (במחרוזות באורך 5 כמובן לא יכולות להופיע כל 6 האותיות). למשל $aaeef \in A$.
 נגדיר יחס שקילות מעל A :
 שתי מחרוזות ייקראו שקולות אם הן שוות, או נבדלות רק בסדר האותיות.
 למשל $aaeeb$ שקולה ל- $aeae b$, אך אינה שקולה ל- $aaaeb$.
 סעיפים ב, ג, ד עוסקים ביחס השקילות הזה. אינכם נדרשים להוכיח שזהו יחס שקילות.
 (4 נק') א. כמה איברים יש ב- A ?
 (7 נק') ב. כמה מחלקות שקילות יש? תני תשובה סופית מספרית.
 (7 נק') ג. כמה איברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת $aaabb$? הוכיחי.
 (7 נק') ד. מצאי מחלקת שקילות שיש בה בדיוק 60 איברים. רשמי איבר אחד מתוך המחלקה, אין צורך לרשום את כל אברי המחלקה. הוכיחי שגודל המחלקה שהבאת הוא 60.

שאלה 4

לקראת האביב, שוב יש במכולת השכונתית מבצע: 20 ארטיקים בהנחה. כרגיל יש במכולת ארטיקים ב-4 טעמים. הפעם יש במכולת 50 ארטיקים בטעם לימון, 20 ארטיקים בטעם אננס, 8 ארטיקים בטעם קולה ו-8 ארטיקים בטעם אבטיח. בכמה דרכים יכול יוסי לבחור 20 ארטיקים? אין חשיבות לסדר הבחירה, וארטיקים בעלי אותו טעם נחשבים זהים. יש להגיע לתשובה סופית מספרית. הדרכה:

- (i) אפשר לפתור בעזרת פונקציה יוצרת ואפשר בדרכים אחרות.
(ii) למרות שיש במכולת כמות סופית של ארטיקים מכל טעם, בחירה של חלק מחטעמים הנתונים שקולה לבחירה מתוך כמות לא מוגבלת, בשל נתוני השאלה.

שאלה 5

תהי L שפה חלקית לשפת תחשיב הפרדיקטים, ובה סימנים אלה: קשרים לוגיים, סוגרים, סימני משתנים x_1, x_2, \dots , סימן פרדיקט דו-מקומי R , סימן פרדיקט דו-מקומי A_1^2 . המתפרש כרגיל בשוויון וסימני חכמתים \forall, \exists . אין סימני פונקציות או פרדיקטים נוספים ואין סימני קבועים אישיים. תהי J אינטרפרטציה של L לעולם $P(N)$. הסימן R מתפרש ב- J כיחס ההכלה: $R(x_1, x_2)$ פירושו $x_1 \subseteq x_2$. בכל אחד מהסעיפים הבאים, רשום תבנית בשפה L , שהפירוש שלה ב- J הוא מה שנאמר בסעיף. כתיב מקוצר מותר.

(5 נק') א. x_1 היא הקבוצה הריקה.

אפשר לסמן תבנית זו בקיצור $\psi(x_1)$ ולהיעזר בה בסעיפים הבאים.

(10 נק') ב. ב- x_2 יש בדיוק איבר אחד.

(10 נק') ג. x_1, x_2 זרות זו לזו (אין להן איברים משותפים).

בהצלחה!

۱. لا اله الا الله! دایم یاد کن:

$$t(\mathcal{S}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad t(\mathcal{Q}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Q & S

$$\text{Def. } t(Q) \subseteq t(S) \quad \text{p/n/21}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

د. لیا سم! مالهه ددلم:

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad t(Q) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

~~$$f(x) = x = x^3 + x^3 + \dots$$~~

$$t(R^{-1}) = R^{-1} \cup (R^{-1})^2 \cup (R^{-1})^3 \dots = R^{-1} \cup (R^{-1}R^{-1}) \cup (R^{-1}R^{-1}R^{-1}) \dots =$$

$$R^{-1} \cup (R^2)^{-1} \cup (R^3)^{-1} \dots = \dots (R^3)^{-1} \cup (R^2)^{-1} \cup R^{-1} = (t(R))^{-1}$$

[illegible]

∴ (2) She

לעזר קובץ A בקומה 6 החדר-המספר 11 (A מלאה ב-6 דיונים בעניני המלחמה)

הכלל של פונקציה, $f: A \rightarrow K$ נגדל פונקציה, $f: A \rightarrow K$

$$f(x) = (x, x, x, x, \dots)$$

Yan

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1, x_1, x_1, \dots) = (x_2, x_2, x_2, \dots) \Rightarrow$$

: $\gamma \dot{h}$

$$x_1 = x_2$$

f : מצבם של סדרה מתחלפת (x, x, \dots) וייתכן גם ת-יה x כלשהו במרחב

$$f(x) = (x, x, x, \dots)$$

$$K \int A_n \int_1^{\infty} \frac{1}{t} \ln t \, F(1/t) dt$$

$|k| = |A|$ perok ✓

[illegible]

~~$(N^p)_{\alpha} \in A_p \subseteq N^p$ wobei N^p ist~~

$$= (N)^{\frac{2}{3}} \cdot r/r'$$

$|A| = |K|$ if $\lambda = 0$. $|A| = \lambda$.

$$|K| = \chi_0 \omega(d)$$

~~45 Jan 2019 (3.12.19)~~

[illegible]

המשפט (א) הינו זה: כל פונקציה ליניארית ממרחב וקטורי ממדים n אל ממרחב וקטורי ממדים m היא ליניארית. כלומר, כל פונקציה ליניארית ממרחב וקטורי ממדים n אל ממרחב וקטורי ממדים m היא ליניארית.

4. (החלף קטל לחייה בזה. עליהם שאלו א' לומר להם החיות והמים והשמים אף
היום בזהם הנאמרים זה חפצם א' ואמרם הלא אנחנו ואלה הם
נצחם בנאמרה ונקים:

$$\frac{5!}{2!3!} = 10$$

המסקנה היא שיש להוכיח את $\neg L$

$$\forall x_2 (R^2(x_2, x_1) \rightarrow A^2(x_2, x_1)) \quad \sim R^2(x_2, x_1) \quad 1. \text{ (5) she}$$

הוכחה: נניח $x_2 \leq x_1$ ו- $x_2 \neq x_1$ (כלומר $x_2 < x_1$).
 קיימת הנקודה x_3 כך של- x_2 יש יורד x_3 (כלומר $x_3 < x_2$) ו- $x_3 \neq x_2$.
 נניח $x_3 < x_2$ ו- $x_3 \neq x_2$. נניח $x_3 < x_2$ ו- $x_3 \neq x_2$.

$$\forall x_3 (R^2(x_3, x_2) \rightarrow A^2(x_3, x_2)) \quad 2.$$

$$\forall x_3 (R^2(x_3, x_2) \rightarrow (A^2(x_3, x_2) \vee A^2(x_3, \psi(x_2)))) \Rightarrow$$

אם $x_3 < x_2$ ו- $x_3 \neq x_2$, אז $x_3 < x_2$ ו- $x_3 \neq x_2$.
 נניח $x_3 < x_2$ ו- $x_3 \neq x_2$. נניח $x_3 < x_2$ ו- $x_3 \neq x_2$.

נניח $x_3 < x_2$ ו- $x_3 \neq x_2$. נניח $x_3 < x_2$ ו- $x_3 \neq x_2$.

נניח $x_3 < x_2$ ו- $x_3 \neq x_2$. נניח $x_3 < x_2$ ו- $x_3 \neq x_2$.

$$\forall x_4 (R^2(x_4, x_2) \wedge R^2(x_4, x_3) \rightarrow A^2(x_4, \psi(x_2))) \quad 3. \text{ (5) she}$$

נניח $x_3 < x_2$ ו- $x_3 \neq x_2$. נניח $x_3 < x_2$ ו- $x_3 \neq x_2$.

אנא קראו בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

להלן טענות לגבי יחסים (רלציות) מעל הקבוצה $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
לכל טענה ציינו אם היא נכונה או לא.
הוכיחו את הטענות הנכונות, הפריכו ע"י דוגמא נגדית את אלה שאינן נכונות.

- א. אם R רפלקסיבית אז R^2 רפלקסיבית. (4 נק')
 - ב. אם R^2 רפלקסיבית אז R רפלקסיבית. (4 נק')
 - ג. אם R סימטרית אז R^2 סימטרית. (4 נק')
 - ד. אם R^2 סימטרית אז R סימטרית. (4 נק')
 - ה. אם R טרנזיטיבית אז R^2 טרנזיטיבית. (4 נק')
 - ו. אם R^2 טרנזיטיבית אז R טרנזיטיבית. (5 נק')

שאלה 2

מצאי מה לא תקין בהגדרה הבאה.

בדומה להגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות, נגדיר פעולה של הפרש סימטרי בין עוצמות:
תהיינה k, m עוצמות, לא בהכרח שונות זו מזו.

תהיינה A, B קבוצות המקיימות $|A| = k$, $|B| = m$,

נגדיר: $k \oplus m = |A \oplus B|$.

הגדרה כזו אינה אפשרית. עליך להסביר מה הבעיה בהגדרה, ולהראות ע"י דוגמא שההגדרה אינה תקינה. הדרכה: ראי שהגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות.

שאלה 3

מהו מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ בטבעיים, כאשר אף אחד מהמשתנים

אינו שווה ל-5 ?

כדאי לפתור בעזרת הפרדה והכלה. 0 הוא מספר טבעי.

יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

$$\begin{array}{cccc}
 & & 2 & 4 \\
 1 & & & \\
 -4 & +6 & -8 & +1 = 5 \\
 -4 & -6 & 4 & \\
 & 2 & &
 \end{array}$$

שאלה 4

בידינו מספר לא מוגבל של מרצפות מכל אחד מהסוגים הבאים: מרצפות אדומות באורך 2, מרצפות ירוקות באורך 2, מרצפות סגולות באורך 2, מרצפות שחורות באורך 1 ומרצפות לבנות באורך 1. יהי a_n מספר הדרכים לרצף שביל ישר באורך n בעזרת מרצפות מהסוגים הללו. לא חייבים להשתמש בכל הסוגים.

(11 נק') א. רשום את a_0, a_1, a_2 . רשום יחס נסיגה עבור a_n .

ודא שיחס הנסיגה מתיישב עם ערכי ההתחלה שרשמת.

(14 נק') ב. פתור את יחס הנסיגה שקיבלת בסעיף הקודם ורשום ביטוי מפורש עבור a_n .

שאלה 5

השאלה עוסקת בתחשיב הפסוקים. כתיב מקוצר – מותר.

לכל אחת מהטענות הבאות, קבע אם היא נכונה או לא.

אם היא נכונה – הוכח אותה. אם היא אינה נכונה – תן דוגמא נגדית.

(8 נק') א. יהיו α, β, γ פסוקים. אם $\alpha \vee \beta \models \gamma$ אז $\alpha \models \gamma$.

(8 נק') ב. לא קיימים פסוקים α, β כך ש- $\alpha \models \beta$ ו- $\beta \models \neg \alpha$.

(9 נק') ג. בהנתן פסוקים α, β, γ כלשהם, הפסוק $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\gamma \rightarrow \alpha))$ הוא טאוטולוגיה.

בהצלחה!

ז'ל'י העלול למהד 2 1000

(1) R הוא R^2 אך R^2 לא הוא R . העלול הפעול בפעם שנייה
האפשרות השנייה

(2) האזנה תמידית דומה לזוהי, דומה: דומה דומה דומה דומה

(3) העלול סגור 1290 אדום $D(K, n)$ כלל בחלוקה האדום

(4) לעומת

(5) $J(\alpha) = T \Leftrightarrow J(\beta \vee \gamma) = T \Leftrightarrow J(\gamma) = T$ (ז'ל'י)

ז'ל'י דומה: $\alpha \sim \beta$ אדום, $\alpha \sim \beta$ דומה

שאלה 1

בכל סעיפי השאלה $A = N - \{0\}$ (הטבעיים ללא 0), ו- D הוא יחס מעל A המוגדר כך:

$$(a, b) \in D \quad \text{אם } b \text{ מתחלק ב- } a \text{ ללא שארית.}$$

לפי "תורת הקבוצות" עמ' 90 שאלה 3.14, D הוא יחס סדר-חלקי מעל A .

(4 נק') א. האם D הוא סדר-מלא מעל A (הגדרה 3.5)?

אם כן, הוכח. אם לא הבא דוגמא נגדית.

(5 נק') ב. הוכח שהיחס $G = D \cup D^{-1}$ אינו טרנויטיבי.

(8 נק') ג. הוכח: $D \cdot D^{-1} = A \times A$.

(8 נק') ד. הוכח: $D^{-1} \cdot D = A \times A$.

הערה: בסעיפים ג, ד, פעולת הכפל באגף שמאל היא כפל יחסים (כפל רלציות).

שאלה 2

הסימן \oplus (הפרש סימטרי) הוגדר ב"תורת הקבוצות" עמ' 27 שאלה 1.22.

(15 נק') א. הוכח: אם $|B| = \aleph_0$, $|A| > \aleph_0$ או $|A| = \aleph_0$ אז $|A \oplus B| = |A|$.

(10 נק') ב. מצא את התשובה הנכונה והוכח אותה:

אם $|A| = |B| = \aleph_0$ אז עוצמת $A \oplus B$:

(1) חייבת להיות \aleph_0 .

(2) חייבת להיות אפס.

(3) חייבת להיות עוצמה סופית שונה מאפס.

(4) יכולה להיות \aleph_0 , יכולה להיות אפס, ויכולה להיות עוצמה

סופית שונה מאפס.

שאלה 3

יהי a_n מספר הסדרות באורך n , שאבריהן שייכים לקבוצה $\{1, 2, \dots, 7\}$, והמקיימות את

התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים זוגיים זה בסמוך לזה.

למשל עבור $n = 5$, הסדרה $(1, 1, 2, 6, 3)$ אינה מותרת, כי 2 מופיע ליד 6.

גם הסדרה $(1, 1, 2, 2, 3)$ אסורה, כי יש שתי הופעות צמודות של 2.

(10 נק') א. רשום את a_0, a_1, a_2 . מצא יחס נסיגה (יחס רקורסיה) עבור a_n .

בדוק ש- a_0, a_1, a_2 שרשמת מתיישבים עם יחס הנסיגה שמצאת.

(15 נק') ב. פתור את יחס הנסיגה וקבל ביטוי מפורש עבור a_n .

בדוק את הביטוי שקיבלת, עבור $n = 2$.

שאלה 2 חזק 16

שאלה 4

תחיינה $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

- 5 (נק') א. כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של X ל- Y קיימות ?
 20 (נק') ב. מצא כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של X ל- Y מקיימות:
 לכל $i \in X$, $f(i) \neq i$.

שאלה 5

- נתונה שפה של תחשיב הפרדיקטים, שבה סימן פונקציה דו-מקומית f ,
 וסימן פרדיקט דו-מקומי E . יש בשפה סימן אחד עבור קבוע: a .
 אין בשפה עוד סימני פונקציות, פרדיקטים או קבועים.
 כרגיל, נמצאים בשפה הקשרים הלוגיים $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$, סוגריים, שני הכמתים \forall, \exists ,
 וסימני משתנים כגון x, y, z .
 נתונות שלוש אינטרפרטציות J_1, J_2, J_3 של השפה הזו, אל העולם N (הטבעיים).
 בכל האינטרפרטציות האלה, E מתפרש כיחס השוויון: $E(x, y)$ פירושו $x = y$.
 בכולן הקבוע a מתפרש כמספר הטבעי 0 .
 ההבדל היחיד בין האינטרפרטציות הוא בפירוש של f :
 ב- J_1 הסימן f מתפרש כפעולה \max , המחזירה את הגדול בין שני הארגומנטים (אם הם
 שווים, אז אחד מהם).
 ב- J_2 הסימן f מתפרש כפעולה \min , המחזירה את הקטן בין שני הארגומנטים (אם הם
 שווים, אז אחד מהם).
 ב- J_3 הסימן f מתפרש כפעולת הכפל.
 7 (נק') א. כתבו פסוק בשפה זו, תוך שימוש בסימן a ,
 כך שהפסוק אמיתי ב- J_1 , שקרי ב- J_2 ושקרי ב- J_3 .
 9 (נק') ב. כתבו פסוק בשפה זו, שלא מופיע בו הסימן a ,
 והוא אמיתי ב- J_1 , אמיתי ב- J_2 ושקרי ב- J_3 .
 9 (נק') ג. כתבו פסוק בשפה זו, שלא מופיע בו הסימן a ,
 והוא אמיתי ב- J_1 , שקרי ב- J_2 ואמיתי ב- J_3 .
 בשאלה 5 אין צורך לנמק, אבל יש לרשום ליד כל תבנית את הפירוש המילולי שלה.
כתיב מקוצר - מותר. הקפידו לשים סוגרים במקרה שייתכן ספק בקריאה.

בהצלחה!

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$|B - A| \leq \aleph_0, \quad |A - B| = |A - (A \cap B)|, \quad \text{for } A \cap B \subseteq B \Rightarrow |A \cap B| \leq \aleph_0$$

$$\downarrow$$

$$B - A \subseteq B \text{ } \checkmark$$

$$|B| = \aleph_0$$

$$A \cap B \subseteq A \Rightarrow |A - A \cap B| = |A| \Rightarrow |A - B| = |A|$$

$$\downarrow$$

$$5.13 \text{ or}$$

$$|A \cap B| \leq \aleph_0 \text{ } \checkmark$$

. (2.12)

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

$A \oplus$

$A \subseteq B$. 2. התקף

$$A - B = \emptyset, \quad B - A = \emptyset \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = \emptyset \Rightarrow |A \oplus B| = 0$$

$$A \cap B = \emptyset \text{ } \checkmark$$

$$A - B = A \Rightarrow |A - B| = \aleph_0, \quad B - A = B \Rightarrow |B - A| = \aleph_0 \Rightarrow$$

$$|(A - B) \cup (B - A)| = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \Rightarrow |A \oplus B| = \aleph_0$$

$$B = N - \{1\}, \quad A = N - \{0\} \text{ } \checkmark$$

$$A - B = \{1\}, \quad B - A = \{0\} \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = \{0, 1\} \Rightarrow |A \oplus B| = 2$$

אם $A \oplus B$ הוא סדרה של \aleph_0 איברים, אז $A \oplus B$ הוא סדרה של \aleph_0 איברים.

$$1 - 4\gamma + 4\gamma^2 = (1 - 2\gamma)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

উপরে :

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

נתון $A = \{1, 2, 3\}$. תהי M קבוצת כל היחסים (הרלציות) הלא-ריקים מעל A ,

כלומר קבוצת כל היחסים מעל A פרט ליחס הריק.

נגדיר יחס K מעל M (שים לב: מעל M , לא מעל A):

עבור $R, S \in M$: $(R, S) \in K$ אם $RS = SR$ (כפל יחסים).

(8 נק') א. הוכח ש- K הוא יחס רפלקסיבי וסימטרי מעל M .

(10 נק') ב. הוכח ש- K אינו טרנזיטיבי.

(7 נק') ג. הוכח או הפרך: לכל $R \in M$, $(R, R^{-1}) \in K$.

שאלה 2

R היא קבוצת המספרים הממשיים. Q היא קבוצת המספרים הממשיים הרציונליים.

ב"תורת הקבוצות" עמ' 126 שאלה 4.8 ראינו ש- Q היא בת-מניה.

(8 נק') א. תהי T קבוצת המספרים הממשיים שאינם רציונליים.

הוכח ש- T אינה בת-מניה, בלי להסתמך על פרק 5 בתורת הקבוצות.

(9 נק') ב. מהי עוצמת T ? הוכח בעזרת פרק 5.

(8 נק') ג. מצא מהי עוצמת הקבוצה הבאה:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - \sqrt{2}) \text{ הוא רציונלי}\}$

לקבוצה זו שייכים למשל המספרים $\sqrt{2}$, $0.35 + \sqrt{2}$.

הוכח את תשובתך.

שאלה 3

מצאו את מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 32$,

כאשר 3 מהמשתנים הם מספרים טבעיים זוגיים,

שני המשתנים האחרים הם מספרים טבעיים אי-זוגיים,

ואף אחד מהמשתנים אינו שווה 0 ואינו שווה 1.

לא נתון איזה מהמשתנים הם זוגיים ואיזה אי-זוגיים.

יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

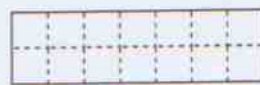
אפשר להיעזר בפונקציה יוצרת ואפשר בלעדיה.

שאלה 4

בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×1 :



ומספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×2 :



עלינו לרצף מלבן שממדיו $n \times 2$:

(בציור $n = 7$).

אסור לחרוג מגבולות המלבן. בלוק של 2×1 אפשר להניח כרצוננו "שוכב" או "עומד".
יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

9 נק' א. רשום יחס נסיגה עבור a_n (הסבר אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

10 נק' ב. פתור את יחס הנסיגה.

6 נק' ג. חשב את a_4 בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א',

ומתוך הנוסחה המפורשת שקיבלת בסעיף ב'.

שאלה 5

השאלה עוסקת בשפה של תחשיב הפרדיקטים, שבה S, R הם סימני פרדיקטים חד-מקומיים.

9 נק' א. הוכח שהפסוק $\exists x(R(x) \wedge S(x))$ והפסוק $(\exists x R(x)) \wedge (\exists x S(x))$

אינם שקולים לוגית זה לזה. כדי להוכיח עליך להציג אינטרפרטציה שבה לשני הפסוקים ערכי אמת שונים זה מזה.

8 נק' ב. הראה כי אחד משני הפסוקים הנ"ל (איזה?) גורר לוגית את האחר.

אין צורך בהוכחה פורמלית מלאה, די בהסבר מילולי.

8 נק' ג. האם הפסוק $\exists x(R(x) \vee S(x))$ שקול לוגית לפסוק $(\exists x R(x)) \vee (\exists x S(x))$?

אם לא, הוכח בעזרת אינטרפרטציה מתאימה. אם כן, תן הסבר מילולי.

בהצלחה!

سید احمد علی

(5) 3 الی 5 لکھ لیں:

5h

۲۔ اشیاء کا وزن، پیمائش اور موازنہ:

[Signature]

2. 5. 19

12

45/2

$$|R| = c$$

$$|T| = C$$

17/11/20

$$x \in \mathbb{Q} \quad \lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R}$$

$|A| = |Q| = \mathbb{R}_0$

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

- לכל אחת מהטענות א-ה, ציינו אם היא נכונה או לא.
הוכיחו את הטענות הנכונות. **תנו דוגמא נגדית** לכל אחת מהטענות שאינן נכונות.
- (5 נק') א. לכל קבוצה A , $A \subseteq P(A)$.
- (5 נק') ב. יהי R יחס (רלציה) מעל A .
- אם $R \subseteq I_A$ אז R הוא סימטרי ואנטי-סימטרי בעת ובעונה אחת.
- (5 נק') ג. יחס שהוא סימטרי וטרנזיטיבי, הוא בהכרח רפלקסיבי.
- (5 נק') ד. תהי A קבוצה. לכל יחס R מעל A , $R \cdot R^{-1} = I_A$.
- (5 נק') ה. תהי A קבוצה. נגדיר פונקציה s מקבוצת כל היחסים מעל A לקבוצת היחסים הסימטריים מעל A : s מתאימה לכל יחס מעל A את הסגור הסימטרי שלו. הטענה: s היא פונקציה על קבוצת היחסים הסימטריים מעל A .

שאלה 2

- נגדיר יחס (רלציה) מעל $P(N)$:
 עבור $X, Y \in P(N)$, נאמר ש- X שקול ל- Y אם $|X| = |Y|$ (כלומר אם עוצמת X שווה לעוצמת Y).
 מובן שזהו יחס שקילות (אינכם נדרשים להוכיח זאת). הוא מחלק את $P(N)$ למחלקות שקילות. השאלה עוסקת ביחס השקילות הזה ובמחלקות השקילות האלה.
- (10 נק') א. הראו שעוצמתה של **קבוצת מחלקות השקילות** הנ"ל היא \aleph_0 . במלים אחרות, הראו שיחס השקילות הנ"ל מחלק את $P(N)$ בדיוק ל- \aleph_0 מחלקות שקילות.
- (15 נק') ב. מכיון ש- $N \in P(N)$, ניתן לדבר על מחלקת השקילות שאליה שייך האיבר N . הראו שעוצמתה של מחלקת השקילות שבה נמצא N היא C .

שאלה 3

- (3 נק') א. מהו מספר הדרכים לסדר את המחרוזות 1223334444 ?
- (4 נק') ב. מהו מספר הדרכים לסדר את המחרוזת הנ"ל כך שיופיע הרצף 333 ?
- (18 נק') ג. חשב את מספר הדרכים לסדר את המחרוזת הנ"ל כך שלא תופיע המחרוזת 22, לא תופיע המחרוזת 333, ולא 4444 (אפשר שיופיעו 33, 444).
 הדרכה: עקרון ההכלה וההפרדה.
- בכל הסעיפים בשאלה זו יש להגיע לתשובה סופית מספרית. נמק את תשובותיך.**

שאלה 4

בכל סעיפי השאלה $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(8 נק') א. מצאי כמה פונקציות f של A ל- B הן בעלות התכונה הבאה:

לכל $x \in A$, $x + f(x)$ הוא מספר אי-זוגי.

(8 נק') ב. מצאי כמה פונקציות f של A ל- B הן בעלות התכונה הבאה:

לכל $x \in A$, $x \cdot f(x)$ הוא מספר זוגי.

(3 נק') ג. הוכיחי שפונקציה של A ל- B המקיימת את התנאי של סעיף א, מקיימת גם את התנאי של סעיף ב.

(6 נק') ד. כמה פונקציות f של A ל- B אינן מקיימות אף אחד משני התנאים א, ב?

יש לנמק את התשובות. בסעיפים א', ב', ד' יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 5

חמש הטענות הבאות עוסקות בדפים ברשת (web pages):

1. קיים דף נוח לשימוש שאינו מעוצב יפה וקיים דף בעל עיצוב יפה שאינו נוח לשימוש.
2. כל דף נוח לשימוש מכיל הפניה לדף שהוא מעוצב יפה או נוח לשימוש.
3. יש דף, שכל ההפניות בו הן רק לדפים שאינם מעוצבים יפה.
4. כל דף שמכיל הפניה לעצמו אינו נוח לשימוש.
5. יש דף, שאף אחד מהדפים שהוא מפנה אליהם אינו מפנה חזרה אליו.

נסמן $U(x)$: x הוא דף נוח לשימוש; $D(x)$: x הוא דף בעל עיצוב יפה.

יהי K סימן יחס נוסף. תן פירוש מתאים ל- K בעולם שהוא קבוצת כל הדפים ברשת, ורשום תבניות $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5$ המייצגות בהתאמה את הטענות 1, 2, 3, 4, 5 בעולם זה.

שים לב:

- * ציין איך מתפרש K , ואם הוא יחס חד-מקומי, דו-מקומי או אחר.
- * סימני היחסים היחידים בהם מותר להשתמש הם U, D, K . אין סימני פונקציות ואין קבועים.
- * אין גם סימן עבור יחס השוויון. יתר מרכיבי השפה: הקשרים הלוגיים $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$.
- * סוגריים, הכמתים \forall, \exists וסימני משתנים כגון x, y, z עומדים לרשותך.
- * אין צורך בסימן עבור התכונה "x הוא דף ברשת", כי עולם האינטרפרטציה מכיל רק דפים ברשת.
- * כתיב מקוצר - מותר. במקום שייתכן ספק בקריאה, ובפרט ליד כמתים, הקפד לשים סוגרים.

מה? חנה!

[illegible]

א. אמת! זהו ~~ה~~ יחס $A = \frac{1}{2}$ בין היקף היקף סוף.

3. اكتب $A = \{1, 2, 3\}$ في

Ans. A for $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$Q \cdot Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ה. לומר סימני ה-A הינו גם לפי ה-A, כיצד זה? נראה סימנים בעזרת הפי. מ. ה. ונראה שזהו, כל כך קל עם סימני המילה אחת יחס. למען, האם כפיטרי צדא.

$$x \in P_{(n)} \Rightarrow |x| \leq r_0$$

$$\text{Nicht } \underline{x \in P(N) \Rightarrow x \in N \Rightarrow |x| \leq \aleph_0}$$

1. התאמה - התאמה בין המצב וההתנהגות. התאמה - התאמה בין המצב וההתנהגות. התאמה - התאמה בין המצב וההתנהגות.

(ג) כיצד זיהו N הינם \mathcal{O}_0 , מכאן כי ייחול \mathcal{O}_0 וזכור כי N איננו אגדל \mathcal{O}_0 .

$K = \{x | x \in P(A), x' \in P(B)\}$, $S = \{x | x \in P(A), x' \in P(B)\}$, $|P(A)| = 2^{|A|}$, $|P(B)| = 2^{|B|}$
 $|K| = 2^{|A|} \cdot 2^{|B|} = 2^{|A|+|B|}$
 $|S| = 2^{|A|} \cdot 2^{|B|} = 2^{|A|+|B|}$
 $|P(A \cup B)| = 2^{|A \cup B|} = 2^{|A|+|B|}$

~~Handwritten scribbles and crossed-out text.~~

$f: S \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}$ הפונקציה
 $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{N} \\ n & \text{if } x = \frac{1}{n} \end{cases}$ הפונקציה
 $f(1) = 1$ הפונקציה

הערך הוא 8 2008

המספר 12,600 הוא מספרם של תוצאות אפשריות. המספר 333 הוא מספרם של תוצאות שבהן המספר 3 מופיע שלוש פעמים.

$$\frac{8!}{(1!)^3 4!} = 840$$

המספר 22 הוא מספרם של תוצאות שבהן המספר 2 מופיע פעמיים. המספר 4444 הוא מספרם של תוצאות שבהן המספר 4 מופיע ארבע פעמים.

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |U| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 12,600 - 2520 - 840 - 420 + 210 + 120 + 60 - 24 = 9186$$

$$|U| = 12,600$$

$$|A_1| = \frac{8!}{(1!)^3 4!} = 2520$$

$$|A_2| = 840$$

$$|A_3| = \frac{7!}{(1!)^3 2! 3!} = 420$$

$$|A_1 \cap A_2| = \frac{7!}{(1!)^3 4!} = 210$$

$$|A_1 \cap A_3| = \frac{6!}{(1!)^3 3!} = 120$$

$$|A_2 \cap A_3| = \frac{5!}{(1!)^3 2!} = 60$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 4! = 24$$

המספר 24 הוא מספרם של תוצאות שבהן המספר 1 מופיע פעם אחת, המספר 2 מופיע פעם אחת, והמספר 3 מופיע פעם אחת.

نفسه، لم (باللهم):

$$= (1$$

$$= (2$$

$$\therefore (3)$$

$$: (4$$

5):