פתרונות לממ"ן 14 - 2019א - 20425

1. נתון כי $X \sim Po(5)$ וכי $Y \sim Po(10)$, וכן כי X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה.

א. $[X+Y \sim Po(15)]$
$$P\{2(X+Y)=28\}=P\{X+Y=14\}=e^{-15}\cdot\frac{15^{14}}{14!}=0.1024$$

ב. הואיל ומתקיים:
$$P\{X=6\,|\,2(X+Y)=28\}=P\{X=6\,|\,X+Y=14\}$$
מקבלים מדוגמה 4ב במדריך (עמ' 145) כי ההתפלגות המותנית היא בינומית עם הפרמטרים 14 ו- 5/15 .

מכאן כי:
$$\text{Var}(X\,|\,X+Y=14)=14\cdot\tfrac{5}{15}\cdot\tfrac{10}{15}=\tfrac{28}{9}=3.\bar{1}$$
$[X\,|\,X+Y=14 \sim B(14,5/15)]$

ג. [X ו- Y בלתי-תלויים]
$$E[XY]=E[X]E[Y]=5\cdot 10=50$$

ד. [X ו- Y בלתי-תלויים]
$$\text{Var}(XY)=E[X^2Y^2]-(E[XY])^2=E[X^2]E[Y^2]-50^2$$
כעת:
$$E[X^2]=\text{Var}(X)+(E[X])^2=5+5^2=30$$
$$E[Y^2]=\text{Var}(Y)+(E[Y])^2=10+10^2=110$$
ומכאן:
$$\text{Var}(XY)=30\cdot 110-50^2=800$$

2. יהיו X, Y ו- Z משתנים נורמליים סטנדרטיים בלתי-תלויים, ומגדירים $V=-Y+2Z$ ו- $U=X+Y$.

א. מתקיים:
$$-Y \sim N(0,1) \qquad ; \qquad 2Z \sim N(0,4)$$
כמו כן, המשתנים Y ו- Z בלתי-תלויים זה בזה, ולכן גם לסכומם התפלגות נורמלית, ומתקיים:
$$V=-Y+2Z \sim N(0,5)$$

ב. נמצא את a המקיים את השוויון:
$$P\{V\le a\}=0.2$$
כלומר:
$$P\{V\le a\}=P\left\{\tfrac{V-0}{\sqrt5}\le\tfrac{a-0}{\sqrt5}\right\}=P\left\{Z\le\tfrac{a}{\sqrt5}\right\}=\Phi\left(\tfrac{a}{\sqrt5}\right)=0.2=\Phi(-0.842)$$
ומכאן כי:
$$a=-0.842\cdot\sqrt5=-1.883$$

ג.
$$\text{Cov}(-Y+2Z,X+Y)=-\underbrace{\text{Cov}(Y,X)}_{=0}-\text{Cov}(Y,Y)+2\underbrace{\text{Cov}(Z,X)}_{=0}+2\underbrace{\text{Cov}(Z,Y)}_{=0}$$
$$=-\text{Var}(Y)=-1$$
$$\text{Var}(V)=\text{Var}(-Y+2Z)=5 \qquad ; \qquad \text{Var}(U)=\text{Var}(X+Y)=2$$
ומכאן:
$$\rho(V,U)=\frac{\text{Cov}(V,U)}{\sqrt{\text{Var}(V)\text{Var}(U)}}=\frac{-1}{\sqrt{5\cdot 2}}=\frac{-1}{\sqrt{10}}$$

3. א. נסמן ב- N את מספר הקונים המגיעים לסופרמרקט ביום ראשון; $N \sim Po(1{,}500)$.

לפי נתוני הבעיה, X_i מסמן את מספר הבקבוקים שקונה i ממחזר, לכל $i=1,2,\ldots,N$, כאשר X_i מוגדר על-ידי $X_i=Y_i-1$, עבור $Y_i \sim Geo(0.4)$. לכן, לכל $i=1,2,\ldots,N$ מתקיים:
$$E[X_i]=E[Y_i-1]=E[Y_i]-1=\tfrac{1}{0.4}-1=1.5$$
ומספר הבקבוקים שממוחזרים ביום ראשון, נתון באמצעות <u>הסכום המקרי</u> $\sum_{i=1}^{N}X_i$.

לפיכך, לפי דוגמה 4ד (עמודים 375-376 בספר הקורס) מקבלים:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1] = 1{,}500 \cdot 1.5 = 2{,}250$$

ב. לפי סימוני הסעיף הקודם ולפי תוצאת דוגמה 4יד (עמוד 386 בספר הקורס), נקבל כי :

$$\text{Var}(X_i) = \text{Var}(Y_i - 1) = \text{Var}(Y_i) = \tfrac{0.6}{0.4^2} = 3.75 \qquad , \qquad i = 1, 2, ..., N$$

ומכאן :

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\text{Var}(X_1) + (E[X_1])^2 \text{Var}(N) = 1{,}500 \cdot 3.75 + 1.5^2 \cdot 1{,}500 = 9{,}000$$

ג. נשתמש כעת בסימוני סעיף א ובתוצאת דוגמה 6י (עמוד 399 בספר הקורס), ונקבל כי לכל $t < -\ln 0.6$ מתקיים :

$$M_{\sum_{i=1}^{N} X_i}(t) = E\left[\left(M_{X_1}(t)\right)^N\right] = E\left[\left(M_{Y_1-1}(t)\right)^N\right] = E\left[\left(e^{-t} M_{Y_1}(t)\right)^N\right]$$

$$= E\left[\left(e^{-t}\frac{0.4e^t}{1-0.6e^t}\right)^N\right] = E\left[\left(\frac{0.4}{1-0.6e^t}\right)^N\right] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-1{,}500} \cdot \frac{1{,}500^n}{n!} \cdot \left(\frac{0.4}{1-0.6e^t}\right)^n$$

$$= e^{-1{,}500} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{600}{1-0.6e^t}\right)^n = e^{-1{,}500} \cdot e^{600/(1-0.6e^t)} \qquad , \qquad t < -\ln 0.6$$

.4

א. נגדיר :

$$X_i = \begin{cases} 1 & , \text{ בהטלות } i \text{ ו- } i+1 \text{ התקבלו HH או TT} \\ 0 & , \text{ אחרת} \end{cases} \qquad \text{לכל } i = 1, \ldots, 9$$

ונקבל כי : $X = \sum_{i=1}^{9} X_i$ = מספר זוגות ההטלות העוקבות שמתקבל בהן HH או TT.

לכל $i = 1, \ldots, 9$ מתקיים :

$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = P(\text{HH} \cup \text{TT}) = 0.8^2 + 0.2^2 = 0.68$$

ומכאן :

$$E[X] = \sum_{i=1}^{9} E[X_i] = 9 \cdot 0.68 = 6.12$$

ב. כעת, לכל $i = 1, \ldots, 9$ מתקיים :

$$\text{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}P\{X_i = 0\} = 0.68 \cdot 0.32 = 0.2176$$

ולכל $1 \le i, j \le 9$, כך ש- $i \ne j$, מתקיים :

$$P\{X_i = 1, X_j = 1\} = \begin{cases} P(\text{HHH} \cup \text{TTT}) = 0.8^3 + 0.2^3 = 0.52 & , \quad |i-j| = 1 \\ [P(\text{HH} \cup \text{TT})]^2 = (0.8^2 + 0.2^2)^2 = 0.68^2 = 0.4624 & , \quad |i-j| > 1 \end{cases}$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} 0.52 - 0.68^2 = 0.0576 & , \quad |i-j| = 1 \\ 0.68^2 - 0.68^2 = 0 & , \quad |i-j| > 1 \end{cases}$$

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{9} \text{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \text{Cov}(X_i, X_j) = 9 \cdot 0.2176 + 2 \cdot 8 \cdot 0.0576 = 2.88$$

5. א. למשתנה המקרי T יש התפלגות מעריכית עם הפרמטר 2.

לפיכך :
$$P\{T > 0.25\} = e^{-2 \cdot 0.25} = e^{-0.5} = 0.6065$$

ב. נתון שהשיחה הראשונה נכנסה למרכזייה A בזמן 0.5. הואיל ואין תלות בין המרכזיות, מספר השיחות שנכנסות למרכזייה B עד זמן 0.5 הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר $0.5 \cdot 2 = 1$, ומתקיים :

$$P\{X = 2 \mid T = 0.5\} = e^{-1} \cdot \tfrac{1^2}{2!} = 0.1839$$

ג. נתבונן במשתנה המקרי המותנה $X \mid T = t$, לכל $t > 0$. כפי שנאמר בסעיף הקודם, למשתנה מקרי זה יש התפלגות פואסונית עם הפרמטר $2t$. לפיכך :
$$E[X \mid T = t] = \text{Var}(X \mid T = t) = 2t$$

ובעזרת הנוסחאות המותנות של התוחלת והשונות נקבל :

$$E[X] = E[E[X \mid T]] = E[2T] = 2E[T] = 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 1$$

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X \mid T)] + \text{Var}(E[X \mid T]) = E[2T] + \text{Var}(2T)$$

$$= 2E[T] + 4\text{Var}(T) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} + 4 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2$$