

קורס: 20416 "תורת ההסתברות"

תאריך הבחינה: 20.7.2017 (סמסטר 2017 ב - מועד א' 85 / 4)

חומר העזר המותר: מחשבון מדעי וספר הקורס בלבד.

מדריך הלמידה או כל חומר כתוב אחר – **אסורים לשימוש!**

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות הבאות.

כל השאלות זהות במשקלן.

בכל תשובתיכם **חשבו את התוצאה הסופית** (כמובן, במידת האפשר).

לבחינה מצורפת: טבלת ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

שאלה 1 (25 נקודות)

A ו-B שני שחקנים, שלכל אחד מהם מטבע תקין משלו, שאותו הוא מטיל שוב ושוב.

כאשר A מטיל את המטבע שלו, הוא מפסיק להטילו מייד עם קבלת ה-H הראשון;

כאשר B מטיל את המטבע שלו, הוא מפסיק להטילו מייד עם קבלת ה-H השלישי (בסה"כ ולא דווקא ברצף).

בוחרים באקראי אחד משני השחקנים שלעיל והוא מטיל את המטבע שלו, כמפורט מעלה.

יהי X מספר ההטלות שבוצעו על-ידי השחקן שנבחר.

9 נק' א. מהי פונקציית ההסתברות של X ?

8 נק' ב. אם ידוע ש- $X = 5$, מהי ההסתברות ששחקן B נבחר להטיל את המטבע שלו?

8 נק' ג. חשב את $E[X]$.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתונה קופסה ובה 20 פתקים שווים בגודלם ובצורתם: 13 אדומים ו-7 כחולים.

מוציאים באקראי מהקופסה פתק אחר פתק, ללא החזרה.

6 נק' א. מהי שונות מספר הפתקים הכחולים שיוצאו ב-10 הבחירות הראשונות?

6 נק' ב. מהי ההסתברות שהפתק הכחול החמישי יוצא בבחירה ה-15?

יהי X המשתנה המקרי המוגדר על-ידי מספר הפתקים הכחולים שהוצאו מייד לאחר שהוצא פתק אדום.

למשל, אם סדר הבחירה (מימין לשמאל) היה: כאכאאכאאכאכאאכאא, אז $X = 5$.

6 נק' ג. מהי התוחלת של X ?

7 נק' ד. מהי השונות של X ?

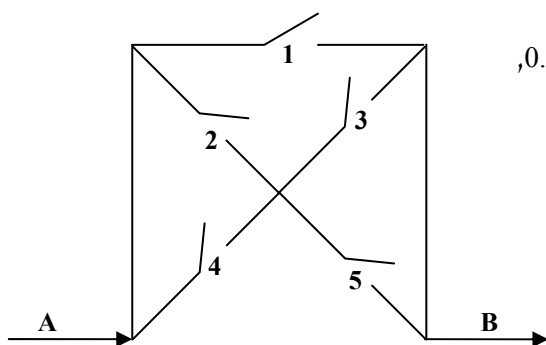
שאלה 3 (25 נקודות)

במעגל שלהלן, כל אחד מחמשת המתגים סגור בהסתברות 0.8,

ואז יכול לעבור בו זרם.

כאשר מתג פתוח, לא יכול לעבור בו זרם.

כמו כן, כל מתג פועל באופן בלתי-תלוי במתגים אחרים.



9 נק' א. מהי ההסתברות שיעבור זרם מ-A ל-B?

8 נק' ב. אם לא עובר זרם מ-A ל-B, מהי ההסתברות שמתג 2 פתוח?

8 נק' ג. אם מתג 1 פתוח וגם לפחות אחד מארבעת המתגים 2, 3, 4 ו-5 סגור,

מהי ההסתברות שיעבור זרם מ-A ל-B?

שאלה 4 (25 נקודות)

- א. התפלגות משקל (בגרם) של עגבנייה מקרית היא נורמלית עם תוחלת 100 וסטיית-תקן 30. אין תלות בין משקלים של עגבניות שונות. בוחרים 50 עגבניות מקריות –
1. (7 נק') מהי ההסתברות שבדיוק 8 מהן תשקולנה פחות מ- 70 גרם, 31 מהן תשקולנה בין 70 גרם ל-125 גרם והשאר תשקולנה יותר מ-125 גרם?
2. (6 נק') אם ידוע שבדיוק 8 עגבניות (מתוך ה-50) שקלו פחות מ-70 גרם, מהי שונות מספר העגבניות שתשקולנה יותר מ-125 גרם?
- הערה:** ערוך חישובים מדויקים עד כמה שאפשר.
- ב. (12 נק') מטילים קובייה תקינה n פעמים ($n = 2, 3, \dots$). יהי X = מספר הפעמים שהתוצאה 1 התקבלה ב- n ההטלות; ויהי Y = התוצאה הגדולה ביותר שהתקבלה ב- n ההטלות. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .

שאלה 5 (25 נקודות)

- יהיו X_1, X_2, \dots, X_n ($n = 2, 3, \dots$) משתנים מקריים בלתי-תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות אחידה (רציפה) על הקטע $(-1, 1)$;
- ויהי $M = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, כלומר, M = המקסימום של משתנים מקריים אלו, כלומר, $M = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.
- 8 נק') א. מהי פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי M ?
- 8 נק') ב. חשב את $P\{X_2 > X_1 + 1\}$.
- 9 נק') ג. חשב את $P\{M > X_1 + 1\}$.

בהצלחה!

ערכים של פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית, $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad ; \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Phi(z) \approx \Phi(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] \quad \text{נוסחת האינטרפולציה:}$$

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$\Phi(z)$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90
z	0.0	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282
$\Phi(z)$	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
z	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326