פרק 4: משתנים מקריים בדידים (פתרונות) (20425 / 25.2.09)

1. א1. הערך האפשרי הקטן ביותר של X הוא 3, והוא מתקבל כאשר בקוביות מתקבלות התוצאות (1,1,1).
הערך האפשרי הגדול ביותר של X הוא 18, והוא מתקבל כאשר בקוביות מתקבלות התוצאות (6,6,6).
ולכן הערכים האפשריים של X הם 3, 4, ..., 18.

תחום הערכים האפשריים של משתנה מקרי הוא קבוצת הערכים שהמשתנה המקרי מקבל בהסתברויות חיוביות.

א2. לניסוי המקרי יש $6^3 = 216$ תוצאות שוות-הסתברות. לכן, כדי לחשב את ההסתברות שהמשתנה המקרי X יקבל ערך מסוים מחלקים את מספר התוצאות של הניסוי המובילות לערך זה ב-216.

ומכאן:

$P\{X = 2\} = 0$ [אין תוצאות שסכומן 2]

$P\{X = 3\} = P\{(1,1,1)\} = \frac{1}{216}$

$P\{X = 5\} = P\{(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1),(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)\} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$

ב1. מספר האפשרויות לקבל 3 תוצאות שהן מספרים עוקבים הוא $4\cdot 3! = 24$, מכיוון שיש 4 שלישיות של מספרים עוקבים ו-!3 אפשרויות לסדר אותן בקוביות. לכן: $P\{Y = 1\} = \frac{24}{216} = \frac{1}{9}$

ומכאן: $P\{Y = 0\} = 1 - P\{Y = 1\} = \frac{8}{9}$

ב2. פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y היא:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y < 0 \\ \frac{8}{9} & , \quad 0 \le y < 1 \\ 1 & , \quad 1 \le y \end{cases}$$

2. א.

$P\{X = 0\} = P\{\mathrm{TT}\} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \frac{4}{16}$

$P\{X = 1\} = P\{\mathrm{HTT}\} + P\{\mathrm{THT}\} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} = \frac{4}{16}$

$P\{X = 2\} = P\{\mathrm{HTH}\} + P\{\mathrm{THH}\} + P\{\mathrm{HHTT}\} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$

$P\{X = 3\} = P\{\mathrm{HHHT}\} + P\{\mathrm{HHTH}\} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8} = \frac{2}{16}$

$P\{X = 4\} = P\{\mathrm{HHHH}\} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

תמיד כדאי לבדוק שסכום ההסתברויות שווה ל-1.

ב.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{4} & , \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{13}{16} & , \quad 2 \le x < 3 \\ \frac{15}{16} & , \quad 3 \le x < 4 \\ 1 & , \quad 4 \le x \end{cases}$$

ג. $E[X] = \frac{1}{16}(0 + 4 + 10 + 6 + 4) = 1.5$

ד. $E[(X-2)^2] = \sum_{x=0}^{4} (x-2)^2 p(x) = \frac{4\cdot 4 + 1\cdot 4 + 0\cdot 5 + 1\cdot 2 + 4\cdot 1}{16} = \frac{26}{16} = 1.625$

ה. $E[X^2]=\frac{1}{16}(0+4+20+18+16)=3.625$

$\text{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2=3.625-1.5^2=1.375$

ו. $E[X]=1.5$ לכן: $E[(X-1.5)^2]=\text{Var}(X)=1.375$

ז. $E[3X-4]=3E[X]-4=0.5$

$\text{Var}(3X-4)=3^2\,\text{Var}(X)=9\cdot 1.375=12.375$

3. נמצא תחילה את פונקציית ההסתברות של X.

יש $\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$ אפשרויות שונות, אך שוות-הסתברות, לבחור 2 מספרים שונים מתוך $n+1$ המספרים הנתונים. לפיכך:

$$P\{X=1\}=P\{0,1\}+P\{1,2\}+\ldots+P\{n-1,n\}=n\cdot\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n+1}$$

$$P\{X=2\}=P\{0,2\}+P\{1,3\}+\ldots+P\{n-2,n\}=(n-1)\cdot\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2(n-1)}{n(n+1)}$$

$$\vdots$$

$$P\{X=i\}=P\{0,i\}+\ldots+P\{n-i,n\}=(n-i+1)\cdot\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2(n-i+1)}{n(n+1)}\qquad,\qquad i=1,2,\ldots,n$$

ומכאן:

$$E[X]=\sum_{i=1}^{n}i\cdot\frac{2(n-i+1)}{n(n+1)}=\frac{2(n+1)}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}i-\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$=\frac{2(n+1)}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=n+1-\frac{(2n+1)}{3}=\frac{n+2}{3}$$

4. נחשב תחילה את מספר האפשרויות לבחור 3 מקומות לכדורים הלבנים בשורה של 30 כדורים (כולל הלבנים). שימו לב, שאין חשיבות לסדר הפנימי של הכדורים הלבנים במקומות שנבחרים עבורם, אלא רק למקומות עצמם. סידור הכדורים בַּשורה שקול לסדר ההוצאה של הכדורים מן הכד, ומכיוון שאין חשיבות לסדר הפנימי של הכדורים הלבנים, יש $\binom{30}{3}$ אפשרויות סידור והן שוות-הסתברות.

כעת, נחשב את ההסתברות שהמאורע $\{X=i\}$ מתרחש. מאורע זה מתקיים, אם בבחירה ה-i-ית מוצא כדור לבן וב- $(i-1)$ הבחירות שלפניו מוצאים שני כדורים לבנים. כלומר, מספר הסידורים האפשריים השונים, המקיימים את המאורע הוא $\binom{i-1}{2}$. לכן, $P\{X=i\}=\frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{30}{3}}$ לכל $i=3,4,...,30$.

הערה 1: אפשר להראות שסכום ההסתברויות שלעיל שווה ל-1, באמצעות זהות פרמה, שמופיעה בספר הקורס בתרגיל ת11 בעמוד 22. מציבים בזהות $n=30$ ו- $k=3$.

הערה 2: אפשר לחשב את ההסתברות האחרונה גם בדרך הבאה. נסתכל רק על i הבחירות הראשונות. באופן כללי, יש $\binom{30}{i}\cdot i!$ אפשרויות לבחור ולסדר את i הכדורים הראשונים.

כעת, כדי שהמאורע $\{X=i\}$ יתרחש, הכדור ה-i-י צריך להיות לבן, ובין $i-1$ הכדורים שלפניו צריכים להיות 2 כדורים לבנים ו- $(i-3)$ כדורים שאינם לבנים. לכן, מספר הבחירות של i כדורים שמקיימות את המאורע שלעיל הוא $\underbrace{\binom{27}{i-3}\cdot(i-3)!}_{\text{כדורים לא-לבנים}}\cdot\underbrace{3!\cdot\binom{i-1}{2}}_{\text{כדורים לבנים}}$.

ולכן: $$P\{X=i\}=\frac{\binom{i-1}{2}\cdot 3!\cdot\binom{27}{i-3}\cdot(i-3)!}{\binom{30}{i}\cdot i!}=\frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{30}{3}}$$

5. נפתור את התרגיל הזה בדרך דומה לזו שבה פתרנו את התרגיל הקודם. נמצא תחילה את מספר אפשרויות המיקום של 13 קלפי הלב בתוך חפיסת הקלפים המלאה. מספר זה הוא $n(S)=\binom{52}{13}$, ואפשרויות הסידור שוות-הסתברות.

המאורע $\{X=i\}$ מתקיים, אם אחד מקלפי הלב ממוקם במקום ה-i-י, ו-12 קלפי הלב האחרים ממוקמים ב-$(52-i)$ המקומות שאחריו. כלומר, מספר הסידורים האפשריים השונים של קלפי הלב, המקיימים את המאורע הוא $\binom{52-i}{12}$. ומכאן מקבלים כי, $P\{X=i\}=\frac{\binom{52-i}{12}}{\binom{52}{13}}$ לכל $i=1,2,...,40$.

גם במקרה זה אפשר להראות שסכום ההסתברויות שלעיל שווה ל-1, באמצעות זהות פרמה, כאשר מציבים בזהות $n=52$ ו- $k=13$.

6. נסמן ב- X את מספר העכברים שהחתול אוכל, עד שמזלו בוגד בו.

נמצא תחילה את פונקציית ההסתברות של X בדרך אינטואיטיבית. החתול אוכל את העכברים לפי סידור מקרי כלשהו. מכיוון שהעכבר המורעל יכול להיות ממוקם ב-4 מקומות שונים בסידור, ומכיוון שכל הסידורים שווי-הסתברות, מקבלים כי $P\{X=i\}=¼$ לכל $i=1,2,3,4$.

כמובן, שאפשר לפתור את התרגיל גם בחישוב ישיר, בדרך הבאה:

$$P\{X=1\}=\tfrac{1}{4}$$
$$P\{X=2\}=\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{3}=\tfrac{1}{4}$$
$$P\{X=3\}=\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{4}$$
$$P\{X=4\}=\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 1=\tfrac{1}{4}$$

אם החתול אוכל i עכברים, אז $i-1$ העכברים הראשונים אינם מורעלים והאחרון מורעל

המשתנה המקרי X סימטרי סביב 2.5, ולכן $E[X]=2.5$.

השונות של המשתנה המקרי X היא: $$\mathrm{Var}(X)=\tfrac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4}-2.5^2=1.25$$

הערה: ההתפלגות של המשתנה המקרי X היא התפלגות אחידה בדידה בין 1 ל-4. במקרה הכללי של התפלגות זו נעסוק בתרגיל 7א, שלהלן.

7. א. אם יש לאדם זיכרון טוב, הבעיה דומה לבעיית החתול והעכברים מהשאלה הקודמת. האדם יכול לבחור את המפתח הנכון בכל אחת מ- n הבחירות האפשריות, באותה הסתברות, ששווה ל- $\frac{1}{n}$. לפיכך, למשתנה המקרי X, המוגדר על-ידי מספר הפעמים שהאדם מנסה לפתוח את הדלת, יש התפלגות אחידה בדידה בין 1 ל- n. התפלגות זו סימטרית סביב $\frac{n+1}{2}$, ולכן: $$E[X]=\tfrac{n+1}{2}$$

נחשב כעת את השונות של התפלגות אחידה בדידה בין 1 ל- n:

$$\mathrm{Var}(X)=\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{n}\left(i-\tfrac{n+1}{2}\right)^2=\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(i^2-(n+1)i+\tfrac{(n+1)^2}{4}\right)$$
$$=\tfrac{1}{n}\left[\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\tfrac{n(n+1)^2}{2}+\tfrac{n(n+1)^2}{4}\right]=\tfrac{n+1}{12}\left[4n+2-3n-3\right]=\tfrac{n^2-1}{12}$$

הערה: באופן כללי, אומרים שלמשתנה מקרי Y יש התפלגות אחידה בדידה, אם ערכיו האפשריים הם כל הערכים השלמים מ- $m+1$ עד $m+n$ (כאשר m ו- n שלמים ו- $n \geq 1$) וכל אחד מהם מתקבל בהסתברות $\frac{1}{n}$. כפי שצוין קודם לכן, התפלגות זו סימטרית סביב $m+\frac{n+1}{2}$ ולכן:

$$E[Y] = m + \frac{n+1}{2}$$

כעת, מכיוון ש- $Y = X + m$, כאשר X הוא משתנה מקרי בדיד אחיד בין 1 ל- n, מתקיים:

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(X+m) = \text{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

ב. אם לאדם יש זיכרון קצר, אז בכל פעם שהוא מנסה לפתוח את הדלת, הוא בוחר את המפתח הנכון, מבין כל המפתחות שבצרור, בהסתברות $\frac{1}{n}$. לכן, מספר ניסיונותיו לפתוח את הדלת הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר $\frac{1}{n}$, התוחלת של משתנה מקרי כזה היא n ושונותו $n(n-1)$.

8. א. בכל הטלה של זוג קוביות תקינות מתקבל הסכום 5 בהסתברות:

$$P(1,4)+P(2,3)+P(3,2)+P(4,1) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

לכן, מספר ההטלות עד (וכולל) לפעם הראשונה שבה מתקבל הסכום 5 הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר $\frac{1}{9}$. ולפיכך, ההסתברות המבוקשת היא $\left(\frac{8}{9}\right)^9 \cdot \frac{1}{9} = 0.03849$.

ב. לפי סעיף א, בכל הטלה של זוג קוביות תקינות מתקבל הסכום 5 בהסתברות $\frac{1}{9}$.

אם הפעם הראשונה שבה מתקבל הסכום 5 היא לאחר ההטלה השמינית, אז בהכרח בשמונה ההטלות הראשונות לא מתקבל אף פעם סכום ששווה ל-5, ולהיפך. לכן, שני המאורעות שלעיל שקולים זה לזה, וההסתברות המבוקשת היא $\left(\frac{8}{9}\right)^8 = 0.3897$.

ג. לכל $i = 1,2,...$ מתקיים:

$$\begin{aligned} P\{X \leq i\} &= 1 - P\{X > i\} \\ &= 1 - P\{\text{ב-}i\text{ הניסויים הראשונים היו רק כשלונות}\} = 1-(1-p)^i \end{aligned}$$

הערה: אפשר לחשב את $P\{X > i\}$ גם כך –

$$P\{X > i\} = \sum_{j=i+1}^{\infty} P\{X=j\} = \sum_{j=i+1}^{\infty} (1-p)^{j-1}p = (1-p)^i \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}(1-p)^{j-1}p}_{=1} = (1-p)^i$$

9. א. 1. בכל הטלה של זוג קוביות תקינות הסכום 8 מתקבל בהסתברות $\frac{5}{36}$. לכן, המשתנה המקרי X, המוגדר על-ידי מספר ההטלות (של זוג הקוביות) שבהן מתקבל הסכום 8, הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 10 ו- $\frac{5}{36}$. ומקבלים:

$$P\{X=2\} = \binom{10}{2}\left(\frac{5}{36}\right)^2\left(\frac{31}{36}\right)^8 = 0.2624$$

2. $$\text{Var}(X) = 10 \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{31}{36} = 1.19599$$

ב. מספר הפעמים שהתוצאה 3 מתקבלת ב-7 הטלות של קובייה תקינה הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 7 ו- $\frac{1}{6}$. לכן, ההסתברות לקבל לפחות פעם אחת את התוצאה 3 ב-7 הטלות קובייה היא $1-\binom{7}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0.72092$. כעת, מכיוון שהניסויים המקריים ששני האנשים מבצעים בלתי-תלויים זה בזה, מקבלים שההסתברות שכל אחד מהם יקבל לפחות פעם אחת את התוצאה 3 היא $0.7209^2 \cong 0.52$.

10. נסמן ב-X את מספר הזכיות שמתקבלות ב-30 ההטלות. המשתנה המקרי X מתפלג בינומית עם הפרמטרים 30 ו- $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. המשתנה המקרי Y המוגדר בשאלה הוא צירוף לינארי של המשתנה המקרי X, ומתקיים:

$$Y = 10X - 3(30 - X) = 13X - 90$$

לכן:

$$E[Y] = E[13X - 90] = 13E[X] - 90 = 13\cdot 30\cdot \tfrac{1}{3} - 90 = 40$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(13X - 90) = 13^2\,\text{Var}(X) = 13^2\cdot 30\cdot \tfrac{1}{3}\cdot \tfrac{2}{3} = 1126.6667$$

לבסוף, נמצא את פונקציית ההסתברות של Y. לכל $i = 0,1,...,30$, מתקיים:

$$P\{Y = j\} = P\{Y = 13i - 90\} = P\{X = i\} \qquad , \qquad j = 13i - 90 \quad ; \quad i = 0,1,...,30$$

לכן, נוכל לרשום את פונקציית ההסתברות של Y כך:

$$P\{Y = j\} = P\{13X - 90 = j\} = P\left\{X = \tfrac{j+90}{13}\right\} = \binom{30}{\frac{j+90}{13}}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{\frac{j+90}{13}}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{30-\frac{j+90}{13}} \qquad , \qquad j = -90,-77,-64,...,300$$

או כך:

$$P\{Y = j\} = P\{Y = 13i - 90\} = P\{X = i\} = \binom{30}{i}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{i}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{30-i} \qquad , \qquad i = 0,1,2,...,30$$

11. א. מההנחה שהלקוחות נכנסים לחנות בהתאם להנחות המגדירות תהליך פואסון עם קצב של 20 לשעה, נובע שמספר הלקוחות הנכנסים לחנות בחצי שעה (כלשהי), שנסמנו ב-Y, הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 10. (פרמטר ההתפלגות הפואסונית של מספר המופעים במרווח-זמן מסוים, יחסי לאורך מרווח-הזמן שעליו מתבוננים.) ומכאן, ההסתברות המבוקשת היא:

$$P\{Y = 0\} = e^{-10}\cdot \tfrac{10^0}{0!} = e^{-10} = 4.54\cdot 10^{-5}$$

ב. נסמן ב-W את מספר הלקוחות הנכנסים לחנות במשך רבע שעה; $W \sim Po(5)$.

לכן:

$$P\{Y \ge 3\} = 1 - P\{Y \le 2\} = 1 - e^{-5}\cdot \tfrac{5^0}{0!} - e^{-5}\cdot \tfrac{5^1}{1!} - e^{-5}\cdot \tfrac{5^2}{2!} = 1 - 18.5\cdot e^{-5} = 0.87535$$

ג. לפי ההנחות של תהליך פואסון, אין תלות בין מרווחי-זמן זרים. נסמן ב-X_1 את מספר הלקוחות הנכנסים לחנות בין 8:00 ל- 9:00 וב-X_2 את מספר הלקוחות הנכנסים לחנות בין 9:00 ל- 10:00.
ל-X_1 ול-X_2 יש התפלגות פואסון עם הפרמטר 20, והמאורעות $\{X_1 = 15\}$ ו- $\{X_2 = 25\}$ בלתי-תלויים זה בזה. לכן:

$$P\{X_1 = 15 \ \cap\ X_2 = 25\} = P\{X_1 = 15\}P\{X_2 = 25\} = e^{-20}\cdot \tfrac{20^{15}}{15!}\cdot e^{-20}\cdot \tfrac{20^{25}}{25!} = 0.0023030$$

ד. אם בין 8:00 ל- 9:00 נכנסו לחנות 18 לקוחות, שכל אחד מהם קונה בה מוצר כלשהו בהסתברות 0.3, אז מספר הקונים מבין 18 הלקוחות האלו הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 18 ו- 0.3. ולכן, ההסתברות ש-6 מהלקוחות יקנו מוצר כלשהו בחנות היא $\binom{18}{6}0.3^6\cdot 0.7^{12} = 0.18732$.

12. א. ההסתברות לקבל לפחות שלושה 6-ים בחמש הטלות היא:

$$\binom{5}{3}\left(\tfrac{1}{6}\right)^3\left(\tfrac{5}{6}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\tfrac{1}{6}\right)^4\left(\tfrac{5}{6}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\tfrac{1}{6}\right)^5 = \tfrac{276}{7,776} = 0.035494$$

לכן, ההסתברות לא לנצח בעשרה משחקים היא:

$$\left(1 - \tfrac{276}{7,776}\right)^{10} = 0.696707$$

ב. מספר הנצחונות של אהוד ב-200 משחקים הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 200 ו- $\frac{276}{7,776}$, שנסמנו ב-X. במקרה זה נוכל לחשב קירוב פואסוני להסתברות המבוקשת, כאשר:

$$\lambda = 200 \cdot \tfrac{276}{7,776} = \tfrac{575}{81}$$

ונקבל:

$$P\{X = 10\} \cong e^{-575/81} \cdot \frac{\left(\frac{575}{81}\right)^{10}}{10!} = 0.07398$$

הערה: ההסתברות המדויקת היא:

$$P\{X = 10\} = \binom{200}{10}\left(\tfrac{276}{7,776}\right)^{10}\left(\tfrac{7,500}{7,776}\right)^{190} = 0.07425$$

13. נשים לב, כי $E[X] = 4 \cdot ½ = 2$, לכן:

$$E[(X-2)^2] = \text{Var}(X) = 4 \cdot ½ \cdot ½ = 1$$

נשתמש בתוצאות שקיבלנו, כדי לחשב את התוחלת השנייה. מכיוון ש- $X - 4$ גם הוא משתנה מקרי, נקבל מהנוסחה החלופית של השונות (בעמוד 159 בספר) ומתכונות התוחלת והשונות (בעמודים 157 ו-159 בספר), את השוויון הבא:

$$E[(X-4)^2] = \text{Var}(X-4) + (E[X-4])^2 = \text{Var}(X) + (E[X]-4)^2 = 1 + (2-4)^2 = 5$$

14. א. נסמן ב-A את המאורע שאף אחד ממשתתפי ההגרלה לא זוכה בפרס, ונחשב את הסתברותו בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה, כאשר אנו מתנים במאורעות הזרים והכוללים $E_i = \{X = i\}$, לכל $i = 1,2,\ldots,100$. כלומר, ההתניה היא על מספר המשתתפים בהגרלה, ומקבלים:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{100} P(A \mid E_i)P(E_i) = \sum_{i=1}^{100} \frac{\binom{99}{i}}{\binom{100}{i}} \cdot \frac{1}{100} = \sum_{i=1}^{100} \frac{100-i}{100} \cdot \frac{1}{100} = 1 - \frac{101}{200} = \frac{99}{200} = 0.495$$

ב. נסמן ב- R את הרווח הנקי של מארגני ההגרלה. נשים לב, שהפרס אינו נותר בידי מארגני ההגרלה, גם אם אינו ניתן לאחד ממשתתפיה. לכן, מתקיים:

$$R = 15X - 500$$

כאשר X הוא משתנה מקרי אחיד בדיד.

ומכאן:

$$E[R] = 15E[X] - 500 = 15 \cdot \tfrac{1+100}{2} - 500 = 257.5$$

$$\text{Var}(R) = 15^2\,\text{Var}(X) = 225 \cdot \tfrac{100^2-1^2}{12} = 187,481.25$$

ג. מכיוון שבהגרלה מוצעים תמיד למכירה כל 100 הכרטיסים, אין תלות בין מספר המשתתפים בהגרלה לבין הכרטיס שאותו בוחר יוסי. כלומר, $P(B) = P(B \mid X = i) = \frac{1}{100}$ לכל $i = 1,2,\ldots,100$.

הערה: [בסימוני סעיף א]

$$P(B) = \sum_{i=1}^{100} P(B \mid E_i)P(E_i) = \sum_{i=1}^{100} \tfrac{1}{100} \cdot \tfrac{1}{100} = \tfrac{1}{100}$$

15. א. נסמן ב-Y את מספר התיירים שמגיעים ביום מסוים. התפלגות המשתנה המקרי Y היא בינומית עם הפרמטרים 4 ו- ¾. פונקציית ההסתברות של X נגזרת מזו של Y, מכיוון שהרווח של בעל-החדרים נגזר ממספר התיירים המשתכנים בחדריו. כלומר:

$$P\{X = 0\} = P\{Y = 0\} = \left(\tfrac{1}{4}\right)^4 = \tfrac{1}{256}$$

$$P\{X = 30\} = P\{Y = 1\} = \binom{4}{1}\left(\tfrac{3}{4}\right)^1\left(\tfrac{1}{4}\right)^3 = \tfrac{12}{256}$$

$$P\{X = 60\} = P\{Y = 2\} + P\{Y = 4\} = \binom{4}{2}\left(\tfrac{3}{4}\right)^2\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{4}\right)^4 = \tfrac{135}{256}$$

$$P\{X = 90\} = P\{Y = 3\} = \binom{4}{3}\left(\tfrac{3}{4}\right)^3\left(\tfrac{1}{4}\right)^1 = \tfrac{108}{256}$$

ומכאן :
$$E[X]=0+30\cdot\tfrac{12}{256}+60\cdot\tfrac{135}{256}+90\cdot\tfrac{108}{256}=71.015625$$
$$E[X^2]=0+30^2\cdot\tfrac{12}{256}+60^2\cdot\tfrac{135}{256}+90^2\cdot\tfrac{108}{256}=5357.8125$$
$$\mathrm{Var}(X)=5357.8125-71.015625^2=314.5935$$

ב. אם בעל-החדרים מקבל רק 3 הזמנות ביום, המשתנה המקרי X הוא צירוף לינארי של המשתנה המקרי Y, ומתקיים $X=30Y$. לכן, $E[X]=30E[Y]=30\cdot3\cdot\tfrac{3}{4}=67.5$.

16. נניח ש- N הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר p, ונתבונן במאורע $\{N\ge i\}$. אם מאורע זה מתרחש, פירוש הדבר שהצלחה הראשונה אינה מתקבלת לפני הניסוי ה-i-י. כלומר, ב- $(i-1)$ הניסויים הראשונים מתקבלים רק כישלונות. לכן, $P\{N\ge i\}=(1-p)^{i-1}$.

כעת,
$$E[N]=\sum_{i=1}^{\infty}P\{N\ge i\}=\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1}=\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^{i}=\frac{1}{1-(1-p)}=\frac{1}{p}$$

17. א. נתון כי $X\sim Po(1)$.
$$E\Big[|X-2|\Big]=\sum_{i=0}^{\infty}|i-2|\cdot e^{-1}\cdot\tfrac{1^i}{i!}=\underbrace{2e^{-1}}_{i=0}+\underbrace{e^{-1}}_{i=1}+\sum_{i=2}^{\infty}(i-2)\cdot e^{-1}\cdot\tfrac{1^i}{i!}$$
$$=3e^{-1}+\left(\sum_{i=0}^{\infty}(i-2)\cdot e^{-1}\cdot\tfrac{1^i}{i!}-(0-2)e^{-1}-(1-2)e^{-1}\right)=6e^{-1}+E[X-2]$$
$$=6e^{-1}+1-2=6e^{-1}-1=1.20728$$

ב. נתון כי $X\sim B(n,p)$.
$$E\left[\frac{1}{X+1}\right]=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\cdot\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(i+1)!(n-i)!}\cdot p^i(1-p)^{n-i}$$
$$=\frac{1}{p(n+1)}\sum_{i=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(i+1)!(n-i)!}\cdot p^{i+1}(1-p)^{n-i}=\frac{1}{p(n+1)}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}\cdot p^{i+1}(1-p)^{n-i}$$
$$=\frac{1}{p(n+1)}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i}\cdot p^{i}(1-p)^{n+1-i}$$
$$=\frac{1}{p(n+1)}\left[[p+(1-p)]^{n+1}-\binom{n+1}{0}p^0(1-p)^{n+1}\right]$$ [לפי נוסחת הבינום (עמוד 8 בספר)]
$$=\frac{1}{p(n+1)}\left[1-\binom{n+1}{0}p^0(1-p)^{n+1}\right]=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$$

18. א. נסמן ב- Y את מספר הפתקים שמוצאים מן הקופסה לאחר שהוצא ממנה הפתק הראשון. בין שני המשתנים המקריים, X ו- Y, קיים הקשר $X=Y+1$, ולמשתנה המקרי Y יש התפלגות גיאומטרית עם הפרמטר $\tfrac{1}{n}$ (כי החל מן הבחירה השנייה, בכל פעם שמוציאים פתק, בוחרים שוב בפתק שהוצא ראשון בהסתברות $\tfrac{1}{n}$, ללא תלות במספר שעל הפתק שנבחר ראשון).

לכן :
$$E[X]=E[Y+1]=E[Y]+1=n+1$$
$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y+1)=\mathrm{Var}(Y)=\frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=n(n-1)$$

ב. הערכים האפשריים של המשתנה המקרי X , הם כל הערכים השלמים מ-2 עד $n+1$. כעת, נחשב את ההסתברויות שמתאימות לערכים אלו.

המשתנה המקרי X מקבל את הערך 2, אם הפתק שנבחר ראשון מוצא שוב בבחירה השנייה, לכן:

$$P\{X=2\}=\tfrac{1}{n}$$

המשתנה המקרי X מקבל את הערך 3, אם הפתק שנבחר ראשון שוֹנֶה מן הפתק שנבחר שני ואם הפתק שנבחר שלישי הוא אחד משני הפתקים שהוצאו בשתי הבחירות הראשונות. לכן:

$$P\{X=3\}=\tfrac{n-1}{n}\cdot\tfrac{2}{n}=\tfrac{2(n-1)}{n^2}$$

המשתנה המקרי X מקבל את הערך 4, אם שלושת הפתקים שנבחרים ראשונים שונים זה מזה ואם הפתק שנבחר רביעי הוא אחד משלושת הפתקים שהוצאו בשלושת הבחירות הראשונות. לכן:

$$P\{X=4\}=\tfrac{n-1}{n}\cdot\tfrac{n-2}{n}\cdot\tfrac{3}{n}=\tfrac{3(n-1)(n-2)}{n^3}$$

$$\vdots$$

ובאופן כללי: $$P\{X=i\}=\tfrac{n}{n}\cdot\tfrac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\tfrac{n-i+2}{n}\cdot\tfrac{i-1}{n}=\tfrac{n!}{(n-i+1)!}\cdot\tfrac{i-1}{n^i}\qquad,\qquad i=2,3,...,n+1$$

(כי על הפתק הראשון אין שום הגבלה; הפתקים השני עד ה-$(i-1)$-י שונים זה מזה וגם מן הפתק הראשון; והפתק האחרון זהה לאחד מ-$(i-1)$ הפתקים שהוצאו לפניו.)

שימו לב, שאפשר להגיע להסתברות האחרונה גם כך: $$P\{X=i\}=\binom{n}{i-1}\cdot(i-1)!\cdot(i-1)\Big/n^i$$

(כי יש n^i אפשרויות שונות להוציא i פתקים ללא החזרה; יש $\binom{n}{i-1}$ אפשרויות לבחור את $i-1$ הפתקים השונים שנבחרים ראשונים; יש $(i-1)!$ אפשרויות לקבוע את הסידור של הפתקים האלה; ויש $i-1$ אפשרויות לבחור את הפתק האחרון.)

19. א. נסמן ב-X את מספר הפעמים שמטילים את המטבע עד שמקבלים בסה״כ $k+1$ פעמים H. למשתנה המקרי X יש התפלגות בינומית שלילית עם הפרמטרים $k+1$ ו- ¼, ולכן:

$$P\{X=4k\}=\binom{4k-1}{k}\cdot 0.25^{k+1}\cdot 0.75^{3k-1}$$

ב1. מכיוון שמתקיים $Y=X-(k+1)$, מקבלים:

$$E[Y]=E[X]-(k+1)=4(k+1)-(k+1)=3(k+1)$$

$$\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{Var}(X)=\frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}\cdot(k+1)=12(k+1)$$

ב2. נמצא את פונקציית ההסתברות של Y:

$$P\{Y=j\}=P\{X-(k+1)=j\}=P\{X=j+k+1\}=\binom{j+k}{k}\cdot 0.25^{k+1}\cdot 0.75^{j}\qquad,\qquad 0,1,2,...$$

20. א. לפי הנתונים יש בכיתה 20 סטודנטים מעשנים ומהם 12 נשים. לכן, יש בכיתה 8 גברים מעשנים. כאשר בוחרים מדגם מקרי של 25 סטודנטים מהכיתה, מספר הגברים המעשנים שנבחרים למדגם הוא משתנה מקרי, שאותו נסמן ב-X, והתפלגותו היפרגיאומטרית עם הפרמטרים $N=60$, $m=8$ ו- $n=25$.

מכאן מקבלים כי: $P\{X=3\}=\frac{\binom{8}{3}\binom{52}{22}}{\binom{60}{25}}=0.29182$

ב. השונות של המשתנה המקרי X, שהוגדר בסעיף א היא:

$$\text{Var}(X)=\frac{N-n}{N-1}\cdot n\cdot\frac{m}{N}\cdot\frac{N-m}{N}=\frac{35}{59}\cdot 25\cdot\frac{8}{60}\cdot\frac{52}{60}=1.71375$$

21. א. במקרה הראשון, כאשר הדגימה היא עם החזרה, מספר הדגים הצהובים במדגם הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 4 ו- 0.3. לכן: $P\{X=1\}=\binom{4}{1}\cdot 0.3\cdot 0.7^3=0.4116$

לעומת זאת, במקרה השני, כאשר הדגימה היא ללא החזרה, מספר הדגים הצהובים במדגם הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N=100$, $m=30$ ו- $n=4$. לכן:

$$P\{X=1\}=\frac{\binom{30}{1}\binom{70}{3}}{\binom{100}{4}}=0.4188$$

ההסתברויות דומות בערכן, מכיוון ש- n קטן יחסית ל- N ול- m. במקרה כזה, ההסתברות לדגום פרט מיוחד או לא-מיוחד מהאוכלוסיה (דג צהוב או אפור, בהתאמה), כאשר דוגמים ללא החזרה, קרובה בכל דגימה ל- m/N או ל- $(N-m)/N$, בהתאמה. ראה את ההסבר בספר הקורס, עמודים 185-6, בין דוגמה 9ט לדוגמה 9י.

בדוגמה שלנו מתקיים:

$$\frac{\binom{30}{1}\binom{70}{3}}{\binom{100}{4}}=\frac{30\cdot\frac{70\cdot 69\cdot 68}{3!}}{\frac{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97}{4!}}=4\cdot\frac{30}{100}\cdot\underbrace{\left(\frac{70}{99}\cdot\frac{69}{98}\cdot\frac{68}{97}\right)}_{\cong 0.7^3}\cong\binom{4}{1}\cdot 0.3\cdot 0.7^3$$

ב. במקרה הראשון, כמו בסעיף הקודם, מספר הדגים הצהובים במדגם הוא משתנה מקרי בינומי, אך כעת עם הפרמטרים 20 ו- 0.3. לכן: $\text{Var}(X)=20\cdot 0.3\cdot 0.7=4.2$

במקרה השני, כאשר הדגימה היא ללא החזרה, מספר הדגים הצהובים במדגם הוא משתנה מקרי היפרגיאומטרי עם הפרמטרים $N=100$, $m=30$ ו- $n=20$. לכן:

$$\text{Var}(X)=\frac{100-20}{100-1}\cdot 20\cdot 0.3\cdot 0.7=\frac{80}{99}\cdot 4.2=3.394$$

נשים לב תחילה, שתחום הערכים האפשריים של שתי ההתפלגויות הוא מ-0 עד 20. כלומר, לשתי ההתפלגויות אותו תחום ערכים. יתר על כן, לשתי ההתפלגויות אותה התוחלת, השווה ל- $20\cdot 0.3=6$. אולם, השונויות אינן שוות. נזכור כי שונות גדולה יותר מתקבלת כאשר ערכי המשתנה מפוזרים יותר. במקרה זה, השונות של המשתנה המקרי הבינומי גדולה יותר מזו של המשתנה המקרי ההיפרגיאומטרי, מכיוון שההסתברויות הבינומיות של הערכים המרכזיים (כלומר, הערכים ש"קרובים" באופן יחסי לתוחלת ותורמים להקטנת השונות) קטנות יותר מההסתברויות ההיפרגיאומטריות המתאימות; ואילו, ההסתברויות הבינומיות של הערכים הקיצוניים (אלו ש"רחוקים" מהתוחלת) גדולות יותר מאלו ההיפרגיאומטריות.

בטבלה שלהלן כמה דוגמאות להבדלים בין ההסתברויות של שתי ההתפלגויות הנתונות :

	הסתברויות היפרגיאומטריות		**הסתברויות בינומיות**	
$P\{X=0\}$	$3.02 \cdot 10^{-4}$	$<$	$7.98 \cdot 10^{-4}$	
$P\{X=1\}$	$3.55 \cdot 10^{-3}$	$<$	$6.84 \cdot 10^{-3}$	
$P\{X=5\}$	0.1918	$>$	0.1788	
$P\{X=6\}$	0.2141	$>$	0.1916	$E[X]=6$
$P\{X=7\}$	0.1803	$>$	0.1643	
$P\{X=10\}$	0.02224	$<$	0.0308	
$P\{X=15\}$	$3.503 \cdot 10^{-6}$	$<$	$3.74 \cdot 10^{-5}$	
$P\{X=20\}$	$5.606 \cdot 10^{-14}$	$<$	$3.49 \cdot 10^{-11}$	