<u>פתרון תרגיל בית 3</u>

<u>שאלה 1</u>

נוכיח בצורה קונסטרוקטיבית, כלומר נבנה את סדרת העצים המבוקשת:

בכל שלב נבנה את העפ״מ הבא בסדרה ע״י הוספת קשת מהקבוצה $T'\setminus T_i$ לעפ״מ הקודם בסדרה והורדת קשת מ- $T_i \setminus T'$ מאותו עפ״מ. נדגים, למשל, עבור המעבר מ- $T_1 = T$ ל- T_2. נוסיף קשת כלשהי $e' \in T'\setminus T_1$ ל- T_1.

פעולה זו סוגרת מעגל יחיד ב- T_1, נסמנו ב- C.

נסתכל על החתך המתקבל כאשר מסירים מ- T' את הקשת e'. קיימת לפחות קשת אחת $e \in C$, שונה מ- e', החוצה את החתך. כמובן ש- $e \in T_1 \setminus T$. נראה ש- $w(e) = w(e')$: אם $w(e) > w(e')$ הרי שמשקל העץ הפורש $T_1 \setminus \{e\} \cup \{e'\}$ קטן ממשקל T_1. מצד שני, אם $w(e) < w(e')$ הרי שמשקל העץ הפורש $T'\setminus \{e'\} \cup \{e\}$ קטן ממשקל T'. מכאן ש- $T_2 = T_1 \setminus \{e\} \cup \{e'\}$ הוא עפ״מ ״קרוב יותר״ מ- T_1 ל- T', ומתקיים $|T_1 \cap T_2| = V - 2$.

באופן דומה ניתן לבנות את שאר סדרת העצים עד ל- T'.

<u>שאלה 2</u>

נניח בשלילה שקיים עפ״מ T עם צומת v שדרגתו גדולה מ-6. מכאן שיש ל- v שני שכנים ב- T, u ו- w, שהזווית uvw קטנה מ-60 מעלות, ולכן אינה הזווית הגדולה ביותר במשולש uvw. במשולש uvw הצלעות uv ו- wv שייכות ל- T והצלע uw אינה שייכת ל- T. הצלע הארוכה ביותר במשולש היא זו שנמצאת מול הזווית הגדולה ביותר ולכן אם נחליף את אחת הצלעות (זו שמול הזווית הגדולה ביותר במשולש uvw) בצלע uw, נקבל עץ פורש במשקל נמוך מזה של T – סתירה. □

<u>שאלה 3</u>

האלגוריתם:

- נבדוק שהגרף קשיר ע״י הרצת BFS. אם לא, אז אין עץ פורש ובפרט אין כזה המכיל את e.
- נמחק מהגרף את כל הקשתות במשקל גבוה או שווה לזה של e. (נסמן ב- G' את הגרף החדש).
- נפעיל BFS החל מ- a.
- אם הגענו ל- b במהלך ה-BFS אז לא קיים עץ פורש המכיל את e, אחרת, יש כזה.

סיבוכיות: $O(V + E)$

נכונות: אם הגרף אינו קשיר ברור כי האלגוריתם מחזיר תשובה נכונה. לכן נניח בהמשך כי הגרף קשיר.

נניח שקיים עפ"מ T כך ש- $e \in T$. e הקשת הכי קלה בחתך המתקבל מהסרתה מ- T (אחרת, ניתן לקבל עץ פורש שמשקלו קטן ממשקל T). כל מסלול מ- a ל- b חייב לחצות את החתך, אבל ב- G' אין קשתות החוצות את החתך ולכן לא נגיע ל- b בריצת ה-BFS.

מצד שני, נניח שלא קיים עפ"מ T כך ש- $e \in T$. יהא T^* עפ"מ ויהא p המסלול (הפשוט) ב- T^* מ- a ל- b. משקל כל הקשתות ב- p קטן ממש ממשקל e, אחרת ניתן היה לקבל מ- T^* עפ"מ שמכיל את e. לכן p קיים ב- G'.

שאלה 4

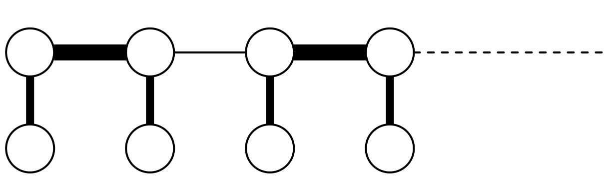
נעזר באלגוריתם שהוצע. נשים לב שהאיברים בכל תא מגדירים תת-סדרה מונוטונית לא יורדת (בסדר הפוך לסדר ההוספה לתא), וסדרת האיברים בראש התאים $C_1, C_2, \ldots$ היא תת-סדרה מונוטונית לא עולה. לכן, אם האלגוריתם לא מצא תת-סדרה מונוטונית אז גודל כל תא הוא לכל היותר $k-1$ ונפתחו לכל היותר $k-1$ תאים. כלומר מספר האיברים הכללי הוא לכל היותר $(k-1)^2$ – סתירה.

הערה: טענה זו ידועה כמשפט Erdös-Szekeres (למעשה, ואריאנט שלו). פאול אֶרְדֶש (1913-1996) היה אחד המתמטיקאים החשובים במאה ה-20 ולבטח הפורה שבהם (באמתחתו מעל ל-1500 מאמרים). למתעניינים מומלצת הביוגרפיה שלו - "האיש שאהב רק מספרים " מאת פול הופמן.

שאלה 5

א. האלגוריתם עובר סדרתית על הצמתים ומשדך לכל צומת לא משודך v שהוא פוגש את הצומת הראשון שלא משודך ברשימת השכנויות של v. סיבוכיות – $O(V+E)$. עוברים לכל היותר על כל השכנים של כל הצמתים בגרף. נכונות – ברור שנקבל שידוך (משדכים רק צמתים לא משודכים עדיין) ושלא ניתן להרחיבו (אם ניתן להוסיף קשת (u,v) הרי שבמעבר על הראשון מביניהם היינו משדכים אותו).

ב. ההוכחה נובעת מההבחנה הבאה: לכל קשת ב- M^*, אחד מצמתי הקצה שלה משודך ב- M' (אם שני צמתי הקצה לא משודכים ב- M' אז נוכל להוסיף את הקשת ל- M' בסתירה למקסימליות שלו). הדוגמה הבאה מראה כי לכל n קיים שידוך מקסימלי בגודל n (הקשתות העבות) ושידוך מקסימום בגודל $2n$ (הקשתות הדקות יותר):



ג. נריץ DFS על מנת לכוון את העץ. כעת האלגוריתם הוא איטרטיבי. בכל איטרציה נבחר צומת בעל דרגת יציאה 0 (עלה) ונשדך אותו עם אביו. לאחר מכן נמחק את העלה, את האב, ואת הקשתות שיוצאות מהם.

סיבוכיות: $O(V+E)$ (שומרים בתור את כל הצמתים עם דרגת יציאה 0 ודואגים להוסיף לתור זה את כל הצמתים שדרגת היציאה שלהם הפכה לאפס בדרך).

נכונות: תהא e_i הקשת שהתווספה לשידוך באיטרציה ה-i. נראה באינדוקציה על i שקיים שידוך אופטימלי שמכיל את הקשתות $e_1, e_2, \ldots, e_i$.

<u>בסיס</u>: $i=1$. יהא v העלה בקשת $e_1=(u,v)$ ויהא M^* שידוך מקסימום. אם $e_1 \in M^*$ סיימנו. אחרת, קיימת קשת $e' \in M^*$ שאחד מצמתי הקצה שלה הוא u (אחרת ניתן להוסיף את e_1 ל-M^*). ברור כי $M^* \setminus \{e'\} \cup \{e_1\}$ הוא שידוך מקסימום.

<u>צעד</u>: תהא $e_i=(u,v)$ הקשת ה-i שנבחרה ע״י האלגוריתם, כך ש-v הוא העלה. עפ״י הנחת האינדוקציה קיים שידוך מקסימום M^* שמכיל את הקשתות $e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}$. אם $e_i \in M^*$ סיימנו. אחרת, v אינו משודך ב-M^*, שכן לאחר הסרת הקשתות $e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}$ (המופיעות ב-M^*) השכן היחיד שלו הוא u. לכן ניתן להוסיף ל-M^* את הקשת e_i ולהסיר מ-M^* את הקשת שנוגעת ב-u (יש כזו, אחרת ניתן להרחיב את M^*), ולקבל שידוך מקסימום שמכיל את $e_1, e_2, \ldots, e_i$. □

מאחר וברור כי השידוך שמתקבל באלגוריתם הוא שידוך מקסימלי, נובע מהטענה שהוא שידוך מקסימום.

<u>שאלה 6</u>

נשבץ את המשימות בסדר לא עולה לפי $\frac{w_i}{p_i}$.

סיבוכיות: המיון לוקח $O(n \log n)$.

נכונות: מספיק להראות ששיבוץ שלא לפי הסדר הזה אינו אופטימלי. יהא S שיבוץ שלא לפי הכלל, כלומר קיימות שתי משימות סמוכות ב-S, i ו-j, כך ש-i משובצת לפני j אבל $\frac{w_i}{p_i} < \frac{w_j}{p_j}$. נסמן את זמן השיבוץ של i ב-t, אזי i מסתיימת ב-$t+p_i$ ו-j מסתיימת ב-$t+p_i+p_j$. נגדיר שיבוץ חדש S' שזהה ל-S פרט להחלפה בסדר בין i ו-j. נחשב את ההפרש בין המחיר של S' למחיר של S:

$$w_j(t+p_j)+w_i(t+p_j+p_i)-w_i(t+p_i)-w_j(t+p_i+p_j)=w_ip_j-w_jp_i$$

מאחר ו-$\frac{w_i}{p_i} < \frac{w_j}{p_j}$ ההפרש הינו שלילי, כלומר ניתן לשפר S. לכן כל שיבוץ שלא לפי הסדר אינו שיבוץ אופטימלי.