תשובה 1

א. לכל i ($0 \le i \le k$) יש לקבוצה A בדיוק $\binom{k}{i}$ קבוצות חלקיות בגודל i.

לכל קבוצה X כזו יש בדיוק n^i פונקציות של X ל- B.

לכן מספר הפונקציות החלקיות של A ל- B הוא $\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}n^i$.

ב. יהי foo עצם כלשהו שאינו שייך ל- B. נסמן $B^+ = B \cup \{\text{foo}\}$.

בהינתן f שהיא פונקציה חלקית של A ל- B, נרחיב הן את תחום ההגדרה של f והן את הטווח שלה בצורה הבאה: את כל אברי A שאינם בתחום ההגדרה של f נשלח ל- foo.

כך קיבלנו מתוך **פונקציה חלקית** של A ל- B, **פונקציה רגילה** של A ל- B^+.

יש לנו אפוא התאמה (כלומר פונקציה) מקבוצת הפונקציות החלקיות של A ל- B, לקבוצת הפונקציות (המלאות, כלומר פונקציות במובן הרגיל) של A ל- B^+.

לא קשה לראות שהתאמה זו היא חד-חד-ערכית (הראו זאת).

בעוד קצת מחשבה מתברר שההתאמה היא על (הראו גם זאת).

לפיכך לשתי הקבוצות אותה עוצמה.

עוצמת קבוצת הפונקציות של A ל- B^+ היא כמובן $(n+1)^k$.

ג. זהו פיתוח של $(n+1)^k$ בעזרת נוסחת הבינום.

תשובה 2

תהי U קבוצת הדרכים לסדר את 10 הספרות ללא מגבלה. $|U| = 10!$.

נסמן:

A_0: קבוצת הסידורים בהם מופיע הרצף 0123

A_2: קבוצת הסידורים בהם מופיע הרצף 2345

A_4: קבוצת הסידורים בהם מופיע הרצף 4567

A_6: קבוצת הסידורים בהם מופיע הרצף 6789

לכל i ($i = 0,2,4,6$), $|A_i| = 7!$.

החיתוכים $A_i \cap A_j$ הם משני סוגים:

יש שלושה חיתוכים שגודלם הוא $5!$ ויש שלושה חיתוכים נוספים שגודלם $4!$ (הראו זאת).

החיתוכים המשולשים $A_i \cap A_j \cap A_k$ גם הם משני סוגים:

שני חיתוכים גודלם הוא $3!$ ושני חיתוכים נוספים גודלם $2!$ (הראו זאת).

החיתוך $A_0 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_6$ מכיל רק סידור אחד: 0123456789.

מכל אלה יחד, מעקרון ההכלה וההפרדה, מספר הסידורים המבוקש הוא

$$10! - 4\cdot 7! + (3\cdot 5! + 3\cdot 4!) - (2\cdot 3! + 2\cdot 2!) + 1 = 3{,}609{,}057$$

תשובה 3

השאלה דומה לאי-סדר מלא, אבל לא ניתן להיעזר בצורה פשוטה בנוסחה של אי-סדר מלא, כי לא ידוע אם 6 נשאר במקומו ואם 7 נשאר במקומו. אפשר להפריד לארבעה מקרים ולקבל תשובה.

במקום זה נפתור בהכלה והפרדה:

תהי U קבוצת התמורות ללא מגבלה. $|U| = 7!$.

נסמן ב- A_i את קבוצת התמורות בהן i נשאר במקומו, $1 \le i \le 5$.

$|A_i| = 6!$ (מדוע?)

$|A_i \cap A_j| = 5!$ $(i<j)$. יש $\binom{5}{2} = 10$ חיתוכים כאלה.

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 4!$ $(i<j<k)$. יש $\binom{5}{3} = 10$ חיתוכים כאלה.

$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_m| = 3!$ $(i<j<k<m)$. יש $\binom{5}{4} = 5$ חיתוכים כאלה.

ולבסוף $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 2!$.

התשובה אפוא: $7! - 5\cdot 6! + 10\cdot 5! - 10\cdot 4! + 5\cdot 3! - 2!$

תשובה 4

א. נבחרו 501 מספרים. לפי ההדרכה, נתאים לכל אחד מהם את ה- b שלו.

b הוא מספר אי-זוגי בתחום $1 \le b \le 1000$, לכן יש עבורו 500 ערכים אפשריים.

לכן, לפי עקרון שובך היונים, בין 501 המספרים שנבחרו יש לפחות שניים שמותאם להם אותו b.

זה עדיין לא מוכיח את הטענה שהתבקשה. נמשיך: נתבונן בשני מספרים שונים כאלה, שיש להם אותו b. נאמר שאחד מהם הוא $n_1 = 2^k \cdot b$ והאחר הוא $n_2 = 2^m \cdot b$.

מכיון ש- $n_1 \ne n_2$ נובע $k \ne m$. בלי הגבלת כלליות נניח $k < m$.

כעת, $n_2 / n_1 = 2^{m-k}$ ומכיון ש- $k < m$ זהו מספר שלם.

ב. הערכים האפשריים עבור b כעת הם כל האי-זוגיים שבין 1 ל- 1700. יש 850 מספרים כאלה.

זה יותר מ- 501 ולכן לא ניתן ליישם את שובך היונים בצורה שעשינו קודם.

איתי הראבן