א. תהי $X \in P(A)$ ויהי $|X| = i$.

ל-X יש בדיוק i תת-קבוצות בגודל $i-1$ (נזרוק בכל פעם אבר אחד מ-X).

אלה אברי $P(A)$ שאותם X מכסה.

אברי $P(A)$ המכסים את X הם קבוצות בגודל $i+1$ המכילות את A.

יש בדיוק $k-i$ קבוצות כאלה (נוסיף ל-X בכל פעם אבר אחד שמחוץ ל-X).

בסה"כ מספר השכנים של X הוא $i+(k-i)=k$, מספר שאינו תלוי ב-X.

משמע הגרף הוא רגולרי מדרגה k.

ב. בגרף יש 2^k צמתים, ודרגת כל צומת היא k.

סכום כל הדרגות בגרף הוא אפוא $k \cdot 2^k$.

מכאן שמספר הקשתות הוא $\frac{1}{2}k \cdot 2^k = k \cdot 2^{k-1}$.

ג. צד אחד הוא הקבוצות בעלות מספר זוגי של אברים והצד השני הוא הקבוצות בעלות מספר אי-זוגי של אברים (השלימו את הנימוק).

תשובה 2

נחשב:

$$\sum_{v \in V}\left(d_1(v)+d_2(v)\right) = \sum_{v \in V} d_1(v) + \sum_{v \in V} d_2(v)$$

לפי טענה 1.3 בעמ' 10 בחוברת נקבל

$$=2E_1+2E_2$$

כאשר E_1, E_2 הם מספרי הקשתות בכל אחד מהעצים.

מכיון שמדובר בעצים, ושניהם על אותה קבוצת צמתים V, נקבל מעמוד 19 משפט 2.5 סעיף 4:

$$=2(|V|-1)+2(|V|-1) = 4|V|-4$$

קיבלנו: $\sum_{v \in V}\left(d_1(v)+d_2(v)\right) = 4|V|-4$

אילו **לכל** $v \in V$ היה $d_1(v)+d_2(v) \geq 4$, היה בהכרח $\sum_{v \in V}\left(d_1(v)+d_2(v)\right) \geq 4|V|$,

בסתירה למה שקיבלנו. לכן לא ייתכן **שלכל** $v \in V$ יהיה $d_1(v)+d_2(v) \geq 4$.

במלים אחרות, **קיים** $v \in V$ עבורו $d_1(v)+d_2(v) \leq 3$.

תשובה 3

הגרף הוא דו-צדדי, כאשר בצד אחד הצמתים שבקומות הזוגיות ובצד שני הצמתים בקומות האי-זוגיות. לפי משפט Hall (הכיוון הקל של המשפט), אם באחד הצדדים של גרף דו-צדדי יש קבוצה של צמתים שמספר השכנים שלה קטן ממספר הצמתים בה, אז אין בגרף זיווג מושלם. לקבוצה של 3 הצמתים השמאליים בקומה התחתונה יש רק שני שכנים. לפיכך אין בגרף זיווג מושלם.

תשובה 4

א. עבור $k=4$, מספר הצמתים הוא $2^4=16$. בשאלה 1ג כאן הראינו שהגרף הוא דו-צדדי. לפי שאלה 3א בפרק 5 בתורת הגרפים, אילו הגרף היה מישורי, מספר הקשתות בו היה לכל היותר $2\cdot 16-4=28$. אבל לפי שאלה 1ב כאן (בממ״ן), מספר הקשתות הוא $4\cdot 2^3=32$.

לפיכך הגרף אינו מישורי

שימו לב שאי-השוויון במסקנה 5.4 בספר (בגרף מישורי פשוט על n צמתים יש לכל היותר $3n-6$ קשתות) אינו עוזר כאן. נדרש התנאי החזק יותר על גרף דו-צדדי.

ב. נפתור בעזרת שיקול פשוט של תורת הגרפים: בהינתן קבוצה A בת יותר מ- 4 אברים, תהי X קבוצה בת 4 אברים החלקית ל- A. קבוצות חלקיות ל- X הן חלקיות גם ל- A, ויחסי ההכלה בין 16 הקבוצות החלקיות ל- X הם אותם יחסים בין אם נחשוב עליהן כקבוצות חלקיות ל- X או כקבוצות חלקיות ל- A. לפיכך הגרף בו אנו עוסקים עבור הקבוצה A מכיל כתת-גרף את הגרף עבור הקבוצה X, שהוא הגרף בו עסקנו בסעיף א של השאלה.

הראינו שם שהגרף עבור X אינו מישורי.

מובן שכל תת-גרף של גרף מישורי – הוא מישורי.

לכן (שימוש טוב לדברים שלמדנו בלוגיקה!) גרף שיש לו תת-גרף שאינו מישורי – אינו מישורי.

לפיכך הגרף עבור A אינו מישורי.

תשובה 5

נראה שניתן לצבוע את G ב- 7 צבעים: ראשית נצבע את G_2 ב- 7 צבעים. מתוך 7 הצבעים האלה נבחר 5 צבעים באופן הבא: שני הצבעים (השונים!) בהם צבועים הצמתים 7, 8, ועוד 3 צבעים אחרים כלשהם מתוך 7 הצבעים.

נצבע את G_1 ב- 5 הצבעים האלה, ונדאג שהצמתים 7, 8 יקבלו כל אחד את הצבע שהוא קיבל בצביעה של G_2 (זה כמובן אפשרי כי ניתן להחליף כרצוננו את שמות הצבעים בצביעה של גרף).

מכיון שאין קשתות אחרות בין G_1 ל- G_2, קיבלנו צביעה חוקית של G. נעזרנו ב- 7 צבעים.

מצד שני, G מכיל כתת-גרף את G_2, לכן מספר הצביעה של G הוא לפחות 7.

משני הדברים יחד - מספר הצביעה של G הוא בדיוק 7.

איתי הראבן