תשובה 1

א. נכון	ב. לא נכון	ג. לא נכון
ד. נכון	ה. לא נכון	ו. נכון
ז. לא נכון	ח. נכון	

תשובה 2

א. נתון $X \subseteq Y$. תהי $M \in P(X)$, עלינו להראות $M \in P(Y)$.

$M \in P(X)$ פירושו $M \subseteq X$. מכאן יחד עם הנתון $X \subseteq Y$, בעזרת שאלה 1.6 בעמ' 8 בספר, נקבל כי $M \subseteq Y$, כלומר $M \in P(Y)$ כמבוקש.

ב. התנאי $X \in P(A \cap B)$ **שקול**, לפי הגדרת קבוצת חזקה, לתנאי

$X \subseteq A \cap B$.

לפי שאלה 1.10 ב' , זה **שקול** ל-

$X \subseteq A$ **וגם** $X \subseteq B$.

שוב לפי הגדרת קבוצת חזקה, זה **שקול** ל-

$X \in P(A)$ **וגם** $X \in P(B)$.

ומהגדרת חיתוך, זה **שקול** ל-

$X \in P(A) \cap P(B)$.

קיבלנו: $X \in P(A \cap B)$ **אםם** (אם ורק אם) $X \in P(A) \cap P(B)$,

ולכן ,לפי הגדרה 1.1, שתי הקבוצות שוות.

ג. במהלך ההוכחה נזדקק לשימוש חוזר בטענה הבאה:

טענת-עזר: אם $X \subseteq Y$ אז $X \cup Y = Y$. טענה זו הוכחה בעמ' 14 בספר.

לשאלה עצמה:

נתון $A \subseteq B$ **או** $B \subseteq A$. ב.ה.כ (בלי הגבלת כלליות) נניח $A \subseteq B$.

(**הסבר**: ב.ה.כ. פירושו: אנו מוסיפים הנחה מסוימת, שאינה מגבילה אותנו באמת, כי אם היא אינה מתקיימת ההוכחה שאנו מביאים תפעל בשינוי קטן שצריך להיות ברור מאד לקורא.

במקרה זה השינוי הוא: להחליף תפקידים בין A ל- B לכל אורך ההוכחה שלהלן).

מההנחה $A \subseteq B$, בעזרת טענת-העזר: $A \cup B = B$. לכן $P(A \cup B) = P(B)$.

שוב מההנחה $A \subseteq B$, בעזרת סעיף א כאן, $P(A) \subseteq P(B)$,

ומכאן שוב בעזרת טענת-העזר, $P(A) \cup P(B) = P(B)$.

קיבלנו כי $P(A \cup B)$ ו- $P(A) \cup P(B)$ שווים שניהם ל- $P(B)$. לפיכך הם שווים זה לזה.

ד. נניח בשלילה כי $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ אבל A אינה חלקית ל- B **וגם** B אינה חלקית ל- A (חוק דה-מורגן: זו שלילת האמירה "$A \subseteq B$ **או** $B \subseteq A$").

מכך ש- A אינה חלקית ל- B נובע שקיים $a \in A$ המקיים $a \notin B$

ומכך ש- B אינה חלקית ל- A נובע שקיים $b \in B$ המקיים $b \notin A$.

כעת, **מצד אחד**, הקבוצה $\{a,b\}$ חלקית ל- $A \cup B$, כלומר שייכת ל- $P(A \cup B)$.

אך **מצד שני**:

$\{a,b\}$ אינה חלקית ל- A (כי $b \notin A$) ולכן $\{a,b\} \notin P(A)$,

ו- $\{a,b\}$ אינה חלקית ל- B (כי $a \notin B$) ולכן $\{a,b\} \notin P(B)$.

לכן $\{a,b\} \notin P(A) \cup P(B)$.

משני הצדדים יחד: מצאנו אבר של $P(A \cup B)$ שאינו אבר של $P(A) \cup P(B)$,

לכן $P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$.

תשובה 3

הוכחה אחת:

מהגדרת הפרש סימטרי,

x שייך ל- $A' \oplus B'$ **אסם** (אם ורק אם)

הוא שייך ל- A' ולא ל- B' **או** הוא שייך ל- B' ולא ל- A'.

כלומר **אסם**

x אינו שייך ל- A והוא שייך ל- B **או** x אינו שייך ל- B והוא שייך ל- A.

התנאי הראשון פירושו $x \in B - A$ והתנאי השני פירושו $x \in A - B$.

בסה"כ, לפי הגדרת הפרש סימטרי, קיבלנו שזה מתקיים אסם $x \in A \oplus B$.

הוכחה שניה, אלגברית:

$$A' \oplus B' = (A' - B') \cup (B' - A') = (A' \cap B) \cup (B' \cap A)$$

נשנה את סדר האיברים בעזרת חילופיות החיתוך וחילופיות האיחוד:

$$= (A \cap B') \cup (B \cap A') = (A - B) \cup (B - A) = A \oplus B$$

כפי שהעירו בפורום, שתי ההוכחות מקבילות כמעט צעד-צעד.

תשובה 4

א. $A_0 = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 \le x \le 1\} = \varnothing$, $A_1 = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 \le x \le 4\} = \{2,3,4\}$

$A_2 = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 \le x \le 7\} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $A_3 = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 \le x \le 10\}$

$$B_0 = A_1 - A_0 = \{2,3,4\} - \varnothing = \{2,3,4\}$$

$$B_2 = A_3 - A_2 = \{8,9,10\} \quad , \quad B_1 = A_2 - A_1 = \{5,6,7\}$$

ב. עבור $0 < n$ כלשהו

$$B_n = A_{n+1} - A_n = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 \le x \le 3n+4\} - \{x \in \mathbf{N} \mid 2 \le x \le 3n+1\}$$

$$= \{x \in \mathbf{N} \mid 3n+2 \le x \le 3n+4\} = \{3n+2,\ 3n+3,\ 3n+4\}$$

ג. נוכיח: $\bigcup_{1 \le n \in \mathbf{N}} B_n = \{x \in \mathbf{N} \mid 5 \le x\}$.

הכלה בכיוון אחד: נניח ש- x הוא אבר של אגף שמאל, נוכיח שהוא אבר של אגף ימין.

יהי אפוא $x \in \bigcup_{1 \le n \in \mathbf{N}} B_n$.

משמע x שייך **לפחות לאחת** הקבוצות B_n כאשר $1 \le n$.

כלומר **קיים** $1 \le n$ כך ש- $x \in B_n = \{3n+2,\ 3n+3,\ 3n+4\}$.

מכיון ש- $1 \le n \in \mathbf{N}$, מובן ש- $5 \le x \in \mathbf{N}$.

הכלה בכיוון שני: נניח ש- x הוא אבר של אגף $\{x \in \mathbf{N} \mid 5 \le x\}$, ונוכיח שהוא אבר של $\bigcup_{1 \le n \in \mathbf{N}} B_n$. יהי אפוא $5 \le x \in \mathbf{N}$.

כדי להוכיח ש- $x \in \bigcup_{1 \le n \in \mathbf{N}} B_n$ עלינו להראות **שקיים** n, $1 \le n \in \mathbf{N}$, כך ש- $x \in B_n$

- זו ההגדרה של איחוד אוסף קבוצות!

נזכור שלפי סעיף ב, לכל n, $B_n = \{3n+2,\ 3n+3,\ 3n+4\}$.

כלומר עלינו להראות את הטענה הבאה:

<u>טענת-עזר</u>: לכל $5 \le x \in \mathbf{N}$ קיים n, $1 \le n \in \mathbf{N}$, כך ש- x שווה לאחד משלושת המספרים $3n+2,\ 3n+3,\ 3n+4$.

כדי לתרגל את התמרון האלגברי הכרוך בכך נציג שתי הוכחות לטענת העזר.

<u>הוכחה 1 לטענת העזר</u>

יהי $5 \le x \in \mathbf{N}$. נפריד למקרים לפי השארית של x בחילוק ב- 3.

שארית זו יכולה להיות 0, 1 או 2.

* אם השארית 0 כלומר x מתחלק ב- 3, משמע $x = 3k$ כאשר k טבעי. נסמן $n = k - 1$.

קיבלנו $x = 3k = 3(n+1) = 3n+3$. זה מתאים לאחד המקרים המבוקשים, אבל עלינו לוודא ש- $1 \le n \in \mathbf{N}$. ובכן, $5 \le x$ ומתחלק ב- 3, משמע $6 \le x$.

לכן $2 \le k = x/3$. לכן $1 \le n \in \mathbf{N}$.

* אם x נותן שארית 1 בחילוק ב- 3 משמע $x = 3k + 1$ כאשר k טבעי .
גם הפעם נסמן $n = k - 1$.
קיבלנו $x = 3k + 1 = 3(n + 1) + 1 = 3n + 4$. גם זה מתאים, כל עוד נוודא ש- $1 \le n \in \mathbf{N}$:
ובכן $5 \le x$ ונותן שארית 1 בחילוק ב- 3, לכן למעשה $7 \le x$.
לכן גם הפעם $2 \le k$ (מדוע?). לכן $1 \le n \in \mathbf{N}$.
* אם x נותן שארית 2 בחילוק ב- 3 משמע $x = 3k + 2$ כאשר k טבעי .
הפעם ניקח $n = k$. קיבלנו $x = 3k + 2 = 3n + 2$.
השלימו את הבדיקה ש- $1 \le n \in \mathbf{N}$.

<u>הוכחה 2 לטענת העזר</u>

יהי $5 \le x \in \mathbf{N}$. יהי n המספר **הטבעי הקטן ביותר המקיים** $\frac{x-4}{3} \le n$.

כלומר n הוא מספר טבעי המקיים: $n - 1 < \frac{x-4}{3} \le n$.

לאחר העברת אגפים נקבל: $3n + 1 < x \le 3n + 4$.

מהנוסחה שרשמנו עבור B_n, נובע $x \in B_n$. מכך ש- $5 \le x$ נובע ש- $1 \le n$.

(איך הגענו לדרישה המוזרה שבתחילת ההוכחה הזו? על-ידי התבוננות בשלושת המספרים $3n + 2,\ 3n + 3,\ 3n + 4$, עם מחשבה על מה שאנו רוצים, וקצת ניסוי וטעיה).

סיימנו את הוכחת טענת העזר, ובכך סיימנו להוכיח $x \in \bigcup_{1 \le n \in \mathbf{N}} B_n$, כלומר ההכלה בכיוון השני המבוקש.

משתי ההכלות יחד מתקבל השוויון המבוקש.

ד. $\bigcup_{i \in I}(A_i') = (\bigcap_{i \in I} A_i)'$, $\bigcap_{i \in I}(A_i') = (\bigcup_{i \in I} A_i)'$.

נמקו בעזרת כללי דה-מורגן לכמתים, מהחוברת בלוגיקה.

ה. ניקח את $\mathbf{N}$ כקבוצה אוניברסלית. אז $D_n = B_n'$.

מכאן ומהסעיפים הקודמים:

$$\bigcap_{1 \le n \in \mathbf{N}} D_n = \bigcap_{1 \le n \in \mathbf{N}} (B_n)' = (\bigcup_{1 \le n \in \mathbf{N}} B_n)' = \{x \in \mathbf{N} \mid 5 \le x\}' = \{0,1,2,3,4\}$$

המעבר השני הוא בעזרת כלל דה-מורגן שהוכחנו בסעיף הקודם.

איתי הראבן