א 2009

שאלה 2 (בעיה 1-2, ספר הלימוד)

(א) על כל תת-רשימה באורך k, מיון-הכנסה רץ בזמן $\Theta(k^2)$. עבור כל n/k התת-רשימות, זמן הריצה יהיה

$$(n/k)\cdot\Theta(k^2)=\Theta(n\cdot k)$$

(ב) נתבונן בעץ הרקורסיה של האלגוריתם; בכל גובה i, $i=0,1,\dots,\lg(n/k)$, קיימות $k/2^i$ תת-רשימות באורך $k\cdot 2^i$ כל אחת.

בכל גובה i, $i=1,\dots,\lg(n/k)$, ממזגים (בזוגות) את $n/(k\cdot 2^{i-1})$ התת-רשימות שבגובה $i-1$ ומקבלים את $n/(k\cdot 2^i)$ התת-רשימות שבגובה i; זמן הריצה יהיה

$$n/(k\cdot 2^i)\cdot\Theta(k\cdot 2^i)=\Theta(n) \qquad i$$

לכל $\lg(n/k)$ רמות המיזוג מתקבל זמן הריצה הכולל

$$\lg(n/k)\cdot\Theta(n)=\Theta(n\cdot\lg(n/k))$$

(ג) כדי שזמן הריצה של הגרסה החדשה של מיון-מיזוג יהיה שווה לזמן הריצה של מיון-מיזוג הרגיל, חייב להתקיים התנאי $nk+n\lg(n/k)=\Theta(n\cdot\lg n)$.
זה קורה אם ורק אם מתקיים אחד משני התנאים הבאים (לפחות):

$n\cdot\lg(n/k)=\Theta(n\cdot\lg n)$ או $n\cdot k=\Theta(n\cdot\lg n)$.

התנאי הראשון מתקיים אם k קבוע; השני מתקיים אם $k=\Theta(\lg n)$. לכן, הערך האסימפטוטי הגדול של k הוא $k=\Theta(\lg n)$.

(ד) זמן הריצה של האלגוריתם נתון ע"י הביטוי:

$$T(n,k)=A\cdot n\cdot k+B\cdot n\cdot\lg(n/k)$$
$$=A\cdot n\cdot k+B\cdot n\cdot\lg n-B\cdot n\cdot\lg k$$

כאשר A ו-B הם קבועים חיוביים המאפיינים את שני השלבים של האלגוריתם.
מהנגזרת הראשונה מתקבל:

$$\frac{\partial T(n,k)}{\partial k}=A\cdot n-B\cdot(n/k)/\ln 2$$

$$\frac{\partial T(n,k)}{\partial k}=0 \Rightarrow k=B/(A\ln 2)$$

מהנגזרת השניה נקבל:

$$\frac{\partial^2 T(n,k)}{\partial k^2}=B\cdot n/(k^2\ln 2)>0$$

לכן $k=B/(A\ln 2)$ מגדיר מינימום (יחסית ל-k) של הפונקציה $T(n,k)$.
מסקנה: אם באפשרותנו לחשב את הקבועים A ו-B, עלינו לבחור את הערך $k=B/(A\cdot\ln 2)$.

ממ"ן 11