תשובה 1

א. מהנתון, תהי $f: A-B \to B-A$ חד-חד-ערכית ועל.

כידוע (בעזרת פילוג החיתוך לגבי האיחוד) $A=(A\cap B')\cup(A\cap B)$,

כלומר $A=(A-B)\cup(A\cap B)$, וזהו איחוד זר. בדומה, $B=(B-A)\cup(A\cap B)$.

נגדיר $g: A\to B$ כך:

$$g(a)=\begin{cases} f(a) & a\in A-B \\ a & a\in A\cap B \end{cases}$$

מהנתון על f נקבל ש- g מעבירה את $A-B$ באופן חד-חד-ערכי על $B-A$,

ומכיוון ש- g פועלת כזהות על $A\cap B$, היא מעבירה את $A\cap B$ באופן חד-חד-ערכי על עצמו.

בהתחשב בכך ש- $B=(B-A)\cup(A\cap B)$, לא קשה להראות ש- g היא חד-חד-ערכית ועל B.

הוכחה של טענה כללית יותר, ממנה זה נובע, ראו בפרק 5, טענה 5.9 .

הראינו פונקציה **חד-חד-ערכית** מ- A **על** B , לכן הן שוות-עוצמה.

ב. כאמור, כללית $A=(A-B)\cup(A\cap B)$, וזהו איחוד זר,

וכן $B=(B-A)\cup(A\cap B)$ וזהו איחוד זר.

מכאן, אם A,B **סופיות**, ומתקיים $|A|=|B|$ אז:

$$|A-B|=|A|-|A\cap B|=|B|-|A\cap B|=|B-A|$$

חיסרנו כאן עוצמות: **זו פעולה שמוגדרת רק עבור עוצמות סופיות(!)**

ג. לדוגמא נקח $A=\mathbf{N}$, ו- B היא קבוצת הטבעיים הזוגיים (השלימו הבדיקה).

תשובה 2

מהגדרת B ,

$$B=A'=\left(\bigcap_{1\le i\le 100} A_i\right)'$$

ולפי כללי דה-מורגן בתורת הקבוצות

$$=\bigcup_{1\le i\le 100}(A_i')$$

לפי הנתון, זהו איחוד של 100 קבוצות בנות מניה.

לפי טענה שפורסמה בפורום, איחוד כזה הוא בר-מניה.

תשובה 3

נתבונן במשלים של D: $D' = (A'\cap B'\cap C')' = A \cup B \cup C$

אגף ימין הוא איחוד של 3 קבוצות בנות מניה.

לפי טענה 2 שהוכחנו במהלך פתרון שאלה 2, איחוד כזה הוא קבוצה בת-מניה.

כעת נשים לב שמהגדרת משלים, $D = \mathbf{R} - D'$.

כידוע $|\mathbf{R}| = c \neq \aleph_0$, וכאמור $|D'| = \aleph_0$.

מכאן, לפי משפט 5.13ב בעמ' 12 בחוברת "פרק 5", $|D| = c$.

תשובה 4

א. יחס מעל קבוצה A הוא קבוצה חלקית של $A\times A$.

קבוצת כל היחסים מעל A היא אפוא $P(A\times A)$.

לכן הקבוצה בה מדובר בסעיף זה היא $P(\mathbf{N}\times\mathbf{N})$.

לפי שאלה 4.7א בעמ' 123 בספר, $|\mathbf{N}\times\mathbf{N}| = \aleph_0$.

מכאן, בעזרת משפט 5.23 (עמ' 21 בחוברת "פרק 5"), $|P(\mathbf{N}\times\mathbf{N})| = 2^{\aleph_0}$.

לפי משפט 5.26 שם, $2^{\aleph_0} = C$.

ב. נסמן ב- K את קבוצת היחסים הסימטריים מעל $\mathbf{N}$.

K חלקית לקבוצת כל היחסים מעל $\mathbf{N}$, שלפי סעיף א' עוצמתה C.

לכן ***(i)*** $|K| \le C$

מצד שני, לכל $A \subseteq \mathbf{N}$ נתבונן בקבוצה I_A. נראה את I_A כיחס מעל $\mathbf{N}$.

קל לראות שזהו יחס סימטרי. ההתאמה $A \to I_A$ היא אפוא פונקציה של $P(\mathbf{N})$ ל- K.

פונקציה זו היא חד-חד-ערכית (מדוע?).

לכן, מהגדרת "קטן/שווה" בין עוצמות, $|P(\mathbf{N})| \le |K|$.

לפי משפט 5.25 קיבלנו: ***(ii)*** $C \le |K|$.

מתוך (i) + (ii) יחד, לפי משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין, $|K| = C$.

תשובה 5

א. תהיינה A_2 , B_2 קבוצות שעוצמותיהן בהתאמה k_2 , m_2.

כדי לקצר מעט את ההוכחה ניעזר בטריק השימושי הבא: **אנו חופשים לבחור כראות עינינו את הקבוצות המייצגות את העוצמות, כל עוד הקבוצות שנבחר הן בעלות העוצמות הנדרשות.**

ניעזר בשאלה 5.1א, לפיה מהנתון $k_1 \le k_2$ נובע ש**קיימת** קבוצה חלקית של A_2 שעוצמתה k_1.

נבחר קבוצה כזו ונקרא לה A_1.

בדומה, בעקבות הנתון $m_1 \le m_2$, נבחר B_1 שעוצמתה m_1 והיא חלקית ל- B_2.

כעת מהגדרת כפל עוצמות $k_1 \cdot m_1 = | A_1 \times B_1 |$, $k_2 \cdot m_2 = | A_2 \times B_2 |$.

מהגדרת מכפלה קרטזית וההנחה על ההכלה נקבל $A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$.

לכן , בהסתמך על שאלה 5.1ב, $k_1 \cdot m_1 \le k_2 \cdot m_2$.

ב. מצד אחד, $C \le \aleph_0$ ולכן בעזרת סעיף א, $\aleph_0 \cdot C \le C \cdot C = C$.

מצד שני $1 \le \aleph_0$ ולכן שוב בעזרת סעיף א, $C = 1 \cdot C \le \aleph_0 \cdot C$.

משני הכיוונים יחד, בעזרת קנטור-שרדר-ברנשטיין, נובע המבוקש.

איתי הראבן