תשובה 1

א. $a_0 = 1$: בשאלה זו הסדרה הריקה מקיימת את הנדרש !

$a_1 = 3$: ברור.

$a_2 = 3^2 - 4 = 5$ (כל הסדרות באורך 2 פרט ל- 4 סדרות אסורות).

יחס הנסיגה: נתבונן בסדרה חוקית באורך n.

(i) אם היא מסתיימת ב- 0, אז לפניו יכולה לבוא כל סדרה חוקית באורך $n-1$.

כלומר אפשרות זו תורמת a_{n-1}.

(ii) אם היא מסתיימת ב- 1 **או** ב- 2 (שתי אפשרויות) אז לפני כן חייב לבוא 0 , **ולפניו** יכולה לבוא כל סדרה חוקית באורך $n-2$. כלומר אפשרויות אלו תורמות $2a_{n-2}$.

קיבלנו $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$.

בדיקה עבור הערכים שמצאנו: $5 = 3 + 2 \cdot 1$.

ב. קיבלנו יחס נסיגה ליניארי. המשוואה האפיינית היא $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.

פתרונותיה: $\lambda = 2, -1$.

לכן פתרון יחס הנסיגה הוא מהצורה: $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$ (*)

את A,B נמצא מתנאי ההתחלה:

$$a_0 : \quad 1 = A \cdot 2^0 + B \cdot (-1)^0 = A + B$$

$$a_1 : \quad 3 = A \cdot 2^1 + B(-1)^1 = 2A - B$$

נחבר את שתי המשוואות אגף-אגף: $4 = 3A$, כלומר $A = 4/3$.

בהצבה נקבל $B = -1/3$.

נציב בנוסחה (*): $$a_n = \frac{4}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (-1)^n = \frac{1}{3}(2^{n+2} - (-1)^n)$$

נבדוק את התוצאה. $a_2 = \frac{1}{3}(2^4 - 1) = \frac{15}{3} = 5$, תואם לסעיף א.

לבדיקה נוספת נחשב בשתי דרכים את a_3:

לפי יחס הנסיגה $a_3 = a_2 + 2a_1 = 5 + 2 \cdot 3 = 11$.

לפי הנוסחה המפורשת שקיבלנו $a_3 = \frac{1}{3}(2^5 + 1) = \frac{33}{3} = 11$.

תשובה 2

א.

$$f(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^2$$

אחרי הוצאת x מהסוגריים השמאליים ו- x^2 מהסוגריים שאחריהם, נקבל

$$f(x) = x^3(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^4 = x^3\left(\frac{1 - x^5}{1 - x}\right)^4$$

נעזרנו בסכום טור הנדסי סופי.

ב. המקדם של x^{15} בפיתוח של $f(x)$ הוא המקדם של x^{12} בפיתוח של $\left(\frac{1 - x^5}{1 - x}\right)^4$.

נרשום את החילוק ככפל:

$$\left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^4 = (1-x^5)^4 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^4$$

באגף ימין, את הגורם $(1-x^5)^4$ נפתח בעזרת הבינום,

ואת $\left(\frac{1}{1-x}\right)^4$ נפתח בעזרת הזהות (iii) שבסוף הממ"ן:

$$= (1-4x^5+6x^{10}-\ldots)\cdot\sum_{i=0}^{\infty} D(4,i)x^i$$

המקדם של x^{12} בביטוי זה מתקבל מצירוף חזקות המשלימות ל- 12 (לכן בסוגרים משמאל לא המשכנו לפרט את האיברים אחרי x^{10}. החזקה הבאה היא x^{15}, היא והחזקות הבאות אחריה אינן תורמות ל- x^{12}).

המתכון הכללי לכפל פונקציות יוצרות נמצא בנוסחה (ii) שבסוף הממ"ן. נקבל:

$$1\cdot D(4,12)-4D(4,7)+6D(4,2)=\binom{15}{3}-4\binom{10}{3}+6\binom{5}{3} = 455-4\cdot 120+6\cdot 10 = 35$$

תשובה 3

א. $g(x) = \frac{f(x)}{1-x} = f(x)\cdot(1+x+x^2+\ldots) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i)\cdot(\sum_{i=0}^{\infty} 1\cdot x^i)$.

לפי נוסחה (ii) שבסוף הממ"ן, המקדם של x^n בפיתוח $g(x)$ הוא:

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 1 = a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

ב. $f(x) = g(x)\cdot(1-x) = (\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i)\cdot(1-x)$.

עבור $n \geq 1$, המקדם של x^i בביטוי זה הוא $a_n = b_n - b_{n-1}$. בעוד ש- $a_0 = b_0$.

יכולנו לקבל תוצאה זו ישירות גם מסעיף א :

$b_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, לכן $b_{n-1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$

ולכן $b_n - b_{n-1} = a_n$ ($n \geq 1$).

תשובה 4

באגף שמאל של הזהות האלגברית הנתונה מופיעה מכפלה של שתי פונקציות. נחשב את המקדם של x^i בכל אחת מהפונקציות, וניעזר בנוסחה *(ii)* שנתונה בסוף הממ"ן כדי לקשר בין מקדמים אלה למקדם של x^n באגף ימין.

מנוסחת הבינום, $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$. בעזרת התאפסות המקדמים הבינומיים במקרים חריגים ("קומבינטוריקה" עמ' 30) ניתן להמשיך את הסכום כך :

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i \qquad (*)$$

בהצבת $(-x)$ במקום x בנוסחה זו נקבל :

$$(1-x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n}{i} x^i \qquad (**)$$

בהצבת x^2 במקום x בנוסחה (**) נקבל :

$$(1-x^2)^n = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n}{i} x^{2i} = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i}\, x^{2i} \qquad (***)$$

כאשר אנו מסמנים : $c_{2i} = (-1)^i \binom{n}{i}$. קיבלנו פיתוח שבו מופיעות רק חזקות זוגיות של x,

כלומר $c_{2i+1} = 0$ לכל i . בפרט, עבור m אי-זוגי הנתון בשאלה, $c_m = 0$.

כעת מנוסחאות (*), (**) , בעזרת נוסחה *(ii)* לפיתוח מכפלה, המופיעה בממ"ן, נקבל שהמקדם של x^m הוא :

$$c_m = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{n}{i}\cdot\binom{n}{m-i} = -\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n}{i}\cdot\binom{n}{m-i}$$

נעזרנו בכך שעבור m אי-זוגי, $(-1)^{m-i} = -(-1)^i$.

מצד שני, ראינו למעלה ש- $c_m = 0$. מכאן הזהות:

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n}{i} \cdot \binom{n}{m-i} = 0$$ לכל m **אי-זוגי**.

הזהות שקיבלנו לא מאד מעניינת - קל לראות באופן ישיר שהביטוי הזה מתאפס, מהשיקול הכללי שלהלן.

תרגיל למעוניינים: תהי f פונקציה כלשהי, ויהי m טבעי **אי-זוגי**.

הוכח: $\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \cdot f(i) \cdot f(m-i) = 0$.

איתי הראבן