**מטלת מנחה (ממ"ן) 13**

**הקורס:** 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

**חומר הלימוד למטלה**: פרק 7

|  |  |
| --- | --- |
| **מספר השאלות:** 6 | **משקל המטלה:** 6 נקודות |
| **סמסטר:** 2006ב | **מועד אחרון להגשה:** 26.5.2006 |

|  |
| --- |
| אנא שימו לב:  מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.  העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל. |

**שאלה 1 (10 נקודות)**

**קליקה** (clique) בגרף בלתי מכוון G = (V, E) היא תת-קבוצה V' של V, כך שכל שני צמתים ב-V' מחוברים על-ידי קשת ב-E. **בעיית הקליקה** מקבלת כקלט גרף בלתי מכוון G ומספר חיובי שלם k וצריכה לענות על השאלה אם יש ב-G קליקה בגודל k.

הוכיחו שבעיית הקליקה שייכת ל-NP.

**שאלה 2 (20 נקודות: סעיפים א', ב' - 5 נק' לכל אחד; סעיף ג' - 10 נק')**

### פסוק בתחשיב הפסוקים כתוב בצורת CNF אם הוא מורכב מתת-פסוקים המחוברים ע"י קשרי AND וכל אחד מהתת-פסוקים מורכב ממשתנים (או משלילתם) המחוברים ע"י קשרי OR.

### למשל, הפסוק הבא כתוב בצורת CNF: (A ∨ B) & (C ∨ D ∨ E) & (B ∨ D ∨ E).

### פסוק בתחשיב הפסוקים כתוב בצורת DNF אם הוא מורכב מתת-פסוקים המחוברים ע"י קשרי OR וכל אחד מהתת-פסוקים מורכב ממשתנים (או משלילתם) המחוברים ע"י קשרי AND.

### למשל, הפסוק הבא כתוב בצורת DNF:(A & E) (A & B & A) ∨ (B & C & D) ∨.

א. הסבירו איך אפשר לבדוק בקלות אם פסוק הכתוב ב-DNF הוא ספיק.

ב. ניתן להמיר כל פסוק הכתוב בצורת CNF לפסוק הכתוב בצורת DNF באמצעות כללי

הדיסטריבוטיביות. למשל, נמיר את הפסוק (A ∨ B) & (C ∨ D) ל-DNF:

(A ∨ B) & (C ∨ D) = [A & (C ∨ D)] ∨ [B & (C ∨ D)] = (A & C) ∨ (A & D) ∨ (B & C) ∨ (B & D)

המירו את הפסוק (A ∨ B) & (C ∨ D) & (E ∨ F) ל-DNF.

ג. פרופ' כלומסקי טוען, שהוא הצליח להוכיח ש- P=NP. ההוכחה היא כדלקמן:

1. ידוע שבעיית הספיקות של פסוק הכתוב בצורה 3-CNF היא NP-שלמה;

2. בהינתן פסוק הכתוב בצורה 3-CNF, נמיר אותו ל-DNF;

3. נבדוק בזמן פולינומיאלי אם הפסוק שקבלנו לאחר ההמרה הוא ספיק;

4. קבלנו פתרון בזמן פולינומיאלי לבעיה NP-שלמה, ולכן P=NP.

מהי הטעות בהוכחה ?

**שאלה 3 (20 נקודות)**

**כיסוי** **ע"י צמתים** (vertex cover) של גרף בלתי מכוון G = (V,E) הוא תת-קבוצה V' של צמתים, כך שלכל קשת (u,v) ב-E, u∈V' או v∈V' (או שניהם). גודל הכיסוי הוא מספר הצמתים ב-V'.

בעיית ה- Vertex Cover היא הבעיה הבאה:

**הקלט לבעיה**: גרף בלתי מכוון G = (V, E) ומספר טבעי k

**השאלה**: האם קיים ב-G כיסוי ע"י צמתים בגודל k ?

ידוע שבעיית הכיסוי ע"י צמתים היא NP-שלמה. הוכיחו שגם בעיית הקליקה היא NP-שלמה.

רמז: התבוננו בגרף G' שהוא המשלים בקשתות של G.

כלומר, G' = (V, E'), כאשר E' = {(u, v): u, v ∈ V, (u, v) ∉E}

**שאלה 4 (20 נקודות)**

בעיית ה- 3-Partition היא הבעיה הבאה:

**הקלט לבעיה:** קבוצת מספרים a1, a2, …, an

**השאלה:** האם ניתן לחלק את קבוצת המספרים לשלוש תת-קבוצות כך שסכום המספרים בכל אחת מהתת-קבוצות יהיה בדיוק  ?

הוכיחו שבעיית ה- 3-Partition היאNP-שלמה.

**שאלה 5 (20 נקודות)**

להלן מופיע אלגוריתם למציאת כיסוי ע"י צמתים של גרף G = (V, E):

(1) V' ← φ, E' ← E

(2) כל עוד E' ≠ φ בצע:

(2.1) בחר קשת כלשהי (u, v) ב- E';

(2.2) הוסף ל- V'את הצמתים u ו-v;

(2.3) מחק מ- E'את כל הקשתות הנוגעות ב-u או ב-v;

(3) החזר את V'.

### א. הסבירו מדוע הקבוצה V' שמחזיר האלגוריתם מהווה כיסוי ע"י צמתים של הגרף.

ב. הוכיחו שהאלגוריתם משיג יחס קירוב של 2; כלומר, מספר הצמתים בכיסוי שמוצא האלגוריתם

גדול פי שניים לכל היותר ממספר הצמתים בכיסוי המינימלי.

**שאלה 6 (10 נקודות)**

א. הגדירו את המחלקה co-P.

ב. הוכיחו כי P = co-P.