קורס 20407

סמסטר 2014ב

מועד א' (81)

**מבנה הבחינה**: בבחינה חמש שאלות.

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות.

לכל השאלות משקל שווה.

**הנחיות**: כל תשובה צריכה להתחיל בעמוד **חדש**.

**אין** לכתוב בצבע אדום.

**אין** לכתוב בעיפרון.

אפשר להשתמש בכל עובדה או תוצאה המופיעה בספר הלימוד או במדריך הלמידה, ללא הוכחה או הסבר. חובה להוכיח או להסביר כל טענה אחרת.

אין צורך לכתוב פסֵידוקוד, אלא אם הדבר נדרש במפורש.

**שאלה 1**

נתונות שתי קבוצות של מספרים  ו- בעלות  ו- איברים בהתאמה.

הציעו מבנה נתונים המאפשר לממש את השגרה , המחזירה את ההפרש הסימטרי  בזמן .תארו את השגרה ונתחו את זמן ריצתה.

**פתרון:**

מעבירים את הקבוצה  למערך באורך  ואת הקבוצה  למערך באורך .

נניח כי  ולכן  . ממיינים את המערך  באמצעות מיון אופטימלי, בזמן  . עבור כל איבר של , מבצעים חיפוש בינרי ב-; זמן ריצה . כל איבר של  שלא נמצא ב- יוצא לפלט; בסוף, מצרפים לפלט גם את איברי . זמן ריצה כולל .

**שאלה 2**

כתבו גרסה של מיון-הכנסה, כאשר הקלט נשמר במחסנית. זמן הריצה הנדרש עדיין  . מותר להשתמש בשתי מחסניות עזר.

**פתרון:**

נסמן ב- את מחסנית הקלט וב-, את שתי מחסניות העזר. מעבירים את  האיברים העליונים של  ל-. לכל , , מתבצע התהליך הבא: מעבירים כל האיברים הנמצאים ב- למחסנית ; אחר-כך, מעבירים את האיברים מ- חזרה ל-, ביחד עם האיבר העליון של , כאשר בדרך מתבצע מיזוג איבר זה בתוך הסדרה הממוינת. זמן הריצה של כל השגרה הינו .

**שאלה 3**

האם קיים עץ אדום-שחור המכיל:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (5 נק') | א. | 3 צמתים שחורים ו-4 צמתים אדומים; |
| (5 נק') | ב. | 4 צמתים שחורים ו-3 צמתים אדומים; |
| (5 נק') | ג. | 5 צמתים שחורים ו-2 צמתים אדומים; |
| (10 נק') | ד. | 6 צמתים שחורים וצומת אחד אדום. |

**בכל מקרה תנו דוגמה, או הוכיחו שעץ כזה לא קיים.**

**הערה:** הכוונה לצמתים פנימיים בלבד.

**פתרון:**

**א'** השורש ושני בניו שחורים; לכל בן של השורש, שני בנים אדומים.

**ב'** השורש ובן אחד שחורים, הבן השני אדום. שני בניו של הבן השחור, אדומים; שני בניו של הבן האדום, שחורים.

**ג'** השורש שחור, שני בניו אדומים; לכל בן של השורש, שני בנים שחורים.

**ד'** לא ניתן לבנות עץ כזה (אילו היה אפשר לצבוע את השורש באדום, זה היה נותן לנו פתרון).

נתאר מצב כללי, כאשר יש לנו עץ אדום-שחור בעל גובה השחור , ובתוכו צומת אדום יחיד (שלא יכול להיות השורש). במצב זה, כל מסלול מהשורש לעלה, שלא עובר דרך הצומת האדום, מכיל  צמתים פנימיים; המסלולים האחרים, אלה שכן עוברים דרך הצומת האדום, מכילים כל אחד  צמתים פנימיים. נסמן ב- את מספר הצמתים הפנימיים במסלול מהצומת האדום לעלה. המספר הכולל של צמתים פנימיים בעץ הינו .

אם , אזי ; מכיוון ש-, למשוואה הזאת אים פתרון בשלמים.

**שאלה 4**

הציעו מבנה נתונים  שבאמצעותו ניתן לממש כל אחת מהפעולות הבאות בסיבוכיות המבוקשת:

: חיפוש אחר המפתח  במבנה ; זמן הריצה:;

: הכנסת המפתח  למבנה ; זמן הריצה:;

: מחיקת עותק כלשהו של המפתח  מהמבנה ; זמן הריצה:;

: החזרת ערך המפתח בעל השכיחות הגבוהה ביותר; זמן הריצה:;

: החזרת ערך המפתח בעל רישום הזמן ה- הקטן ביותר; זמן הריצה:.

**הערות:**  הוא מספר המפתחות השונים ב-; אחרי כל הכנסת עותק של המפתח **,** רישום הזמן של  משתנה (לפי זמן ההכנסה של העותק החדש), כלומר, רישום הזמן של מפתח הוא זמן ההכנסה של העותק החדש ביותר שלו.

**שאלה 5**

מבנה נתונים  מורכב מערמת מינימום ראשית  בגודל  ומ- ערמות מינימום , . לכל , האיבר  מכיל מצביע אל שורש הערמה . לכל , ערך השורש  משמש גם כמפתח ב-. נסמן ב- את הגודל המכסימלי בין כל הערמות ,.

**א'** כתבו את שגרת הכנסת מפתח חדש עבור המבנה  (הכנסה ל- או לאחת הערמות ).

**ב'** כתבו את שגרת מחיקת המינימום עבור המבנה  (מחיקה מ- או מאחת הערמות ).

לכל אחת משתי הפעולות, נתחו את זמן הריצה כפונקציה של  ו-.