קורס 20407

סמסטר 2015ב

מועד א' (83)

**מבנה הבחינה**: בבחינה חמש שאלות.

עליכם לענות על **ארבע** מתוך חמש השאלות.

לכל השאלות משקל שווה.

**הנחיות**: כל תשובה צריכה להתחיל בעמוד **חדש**.

**אין** לכתוב בצבע אדום.

**אין** לכתוב בעיפרון.

אפשר להשתמש בכל עובדה או תוצאה המופיעה בספר הלימוד או במדריך הלמידה, ללא הוכחה או הסבר. חובה להוכיח או להסביר כל טענה אחרת.

יש להתחיל כל תשובה בעמוד **חדש** (או לפחות להשאיר 5 שורות בין תשובות לשאלות שונות).

אין צורך לכתוב פסֵידוקוד, אלא אם הדבר נדרש במפורש.

**שאלה 1**

(15 נק') **א.** נתון מערך  ממוין של שלמים שונים זה מזה.

כתבו אלגוריתם המחפש אינדקס  כך שיתקיים . השגרה תחזיר את  אם הוא קיים, או 0 אחרת; זמן הריצה הנדרש שלה הוא . השגרה תיכתב בפסֵידוקוד.

(10 נק') **ב.** פתרו את נוסחת הנסיגה הבאה:



**פתרון:**

**א'** נשתמש בסוג של חיפוש בינרי מותאם למצב. נשים קודם לב כי: אם , אזי  לכל , ואם , אזי  לכל . נכתוב שגרה רקורסיבית (ניתן לכתוב גם שגרה איטרטיבית):



קריאת ההפעלה



כמו עבור שגרת החיפוש הבינרי, גם כאן זמן הריצה הינו .

**ב'** לא ניתן להפעיל את שיטת האב, מכיוון שהשגרה לא משתלב באף אחד משלושת המקרים. לכן נשתמש בשיטה האיטרטיבית.



או בצורה אחרת,



אחרי ביצוע סכומים בשני האגפים מ- עד ל- , מתקבל



לכן,



**שאלה 2**

נתון מערך של מספרים . אנו מציעים גרסה של האלגוריתם מיון-מהיר הפועלת באופן הבא: לפני כל קריאה לשגרת החלוקה עבור תת-מערך באורך , מחליפים בין  האיברים הראשונים לבין  האיברים האחרונים.

(12 נק') **א.** מהו זמן הריצה של תהליך המיון החדש אם המערך הנתון ממוין בסדר עולה?

(13 נק') **ב.** מהו זמן הריצה של תהליך המיון החדש אם המערך הנתון הינו  ?

**פתרון:**

**א'** נניח שמדובר במערך . אם , עלינו למיין את המערך ; אחרת, אם , עלינו למיין את המערך . במקרה הראשון, איבר הציר הוא  ומתקבלת החלוקה ; במקרה השני, איבר הציר הוא  ומתקבלת החלוקה . במקרה הראשון, שני התת-מערכים ממוינים; במקרה השני, התת-מערך הראשון ממוין, השני כמעט ממוין. לכן זמן הריצה של האלגוריתם עבור המערך הנתון הינו .

**ב'** עלינו למיין את המערך. בשלב הראשון, איבר הציר הוא  ומתקבל המערך . בשלב השני, איבר הציר הוא  ומתקבל המערך . לכן כל חלוקה לאורך התהליך תהיה בלתי-מאוזנת. לכן זמן הריצה של האלגוריתם עבור המערך הנתון הינו .

**שאלה 3**

(15 נק') **א.** הציעו מבנה נתונים שבאמצעותו ניתן לבצע את הפעולות הבאות בזמנים הנדרשים ( מציין את מספר האיברים של ; הניחו שמפתחות המבנה הם מספרים):

: הכנסת איבר בעל המפתח  ל-; זמן הריצה ****;

: מחיקת האיבר שנכנס אחרון מהמבנה ; זמן הריצה ****;

: החזרת המפתח המינימלי של ; זמן הריצה ****;

: הוספת הערך הממשי לכל איברי המבנה ; זמן הריצה ****.

(10 נק') **ב.** האם ניתן להחליף את הפעולה  בפעולה

: מחיקת האיבר בעל המפתח המינימלי של ; זמן הריצה **** ?

הסבירו את תשובתכם.

**פתרון:**

**א'** המבנה  יהיה מורכב ממחסנית  וממשתנה נפרד . במצב ההתחלתי, המחסנית ריקה והמשתנה  מכיל את הערך . כל תא במחסנית מכיל את ערך המפתח ומצביע אל האיבר המינימלי במחסנית. ערך כל איבר במחסנית הינו הסכום של הערך המפתח השמור במחסנית והערך . תאור הפעולות:

: מכניסים למחסנית את הערך ; מוסיפים לו מצביע אל האיבר בעל המפתח המינימלי (אם האיבר שנכנס הוא המינימלי, אזי הוא מצביע אל עצמו);

: מוחקים מהמחסנית את הערך שנכנס אחרון; מחזירים את הערך בתוספת ;

: מחזירים את ערך המפתח שאליו מצביע האיבר החדש ביותר, בתוספת ;

: מוסיפים ל- את הערך .

ברור שזמן הריצה של כל פעולה הינו ****.

**ב'** החלפת הפול  בפעולה  מאפשרת בזמן ****, מאפשרת לנו למיין את כל איברי המבנה בזמן לינארי, בסתירה למשפט 8.1.

**שאלה 4**

נתון עץ חיפוש בינרי  שבו מאוחסנים המפתחות ; נניח שצורתו שרשרת לינארית של בנים שמאליים (המפתח  בשורש, וכל מפתח  בבן השמאלי של הצומת בעל המפתח , ). ברצוננו להפוך את העץ  לעץ חיפוש בינרי מאוזן, באמצעות פעולות סיבוב ימניות ושמאליות של עצי חיפוש בינריים בלבד. נתון בנוסף כי ,  (זה מאפשר לבנות את  כעץ מאוזן מושלם).

(15 נק') **א.** תארו את בניית העץ  במקרה , כלומר, .

(10 נק') **ב.** הרחיבו את תאור הבנייה למקרה הכללי.

**הכוונה:** התחילו במציאת אותו צומת של , העומד להפוך לשורש של .

**פתרון:**

**א'** מכיוון שהעץ מאוזן מושלם, השורש שלו יהיה הצומת בעל המפתח 4.

מבצעים סדרת סיבובים: קודם סיבובים ימניים ב-7, ב-6, ב-5; אחר-כך, סיבובב-3 וסיבוב שמאלי ב-5.

**ב'** אם , , מבצעים סיבוב ימני בין הזוג .

במקרה הכללי, בתהליך רקורסיבי: בכל צומת מ- עד  מבצעים סיבוב ימני; מתקבל עץ בינרי עם השורש ב-, כאשר התת-עץ השמאלי הוא שרשרת לינארית של בנים שמאליים, והתת-עץ הימני הוא שרשרת לינארית של בנים ימניים. מפעילים את בניית התת-עץ השמאלי באופן רקורסיבי ואחר-כך את בניית התת-עץ הימני באופן דומה (כאשר הסיבובים השמאליים והימניים מתחלפים ביניהם).

**שאלה 5**

הציעו מבנה נתונים  שבאמצעותו ניתן לממש את כל אחת מהפעולות הבאות בסיבוכיות המבוקשת ( מציין את מספר המפתחות השונים זה מזה; המספר הכולל של מפתחות יכול להיות גדול יותר):

: הכנסת איבר בעל המפתח  למבנה ; זמן הריצה:;

: מחיקת אחד האיברים בעלי המפתחות ; זמן הריצה:;

: הגדלת המפתח  בכמות  (עבור כל האיברים בעלי אותו מפתח ); זמן הריצה:;

: החזרת שכיחות המפתח  הנכנס אחרון למבנה ; זמן הריצה:;

: החזרת ערך המפתח בעל השכיחות הגבוהה ביותר; זמן הריצה:.

**הערה:** מבנה הנתונים יכול להיות מורכב ממספר מבנים יסודיים.

**פתרון:**

המבנה  יהיה מורכב מעץ אדום-שחור  , ערמת מכסימום  ותור . כל מפתח  מגדיר צומת ב-, צומת ב- ואיבר ב-. שלושת האיברים מחוברים ביניהם בעזרת מצביעים דו-כיווניים. בכל צומת ב- נמצא מצביע אל רשימה מקושרת של איברים בעלי אותו מפתח . כל מפתח בערמה הינו השכיחות של מפתח  כלשהו ב-. איברי התור הסודרים לפי זמן הכניסה.

תאור הפעולות:

: מבצעים חיפוש בעץ אחר המפתח ; אם המפתח  לא קיים בעץ , יוצרים צומת חדש ב-, עם רשימה של איבר אחד; יוצרים צומת חדש ב-, בעל המפתח 1 (בשורה האחרונה); אחרת, אם המפתח  כן קיים בעץ , מוסיפים את האיבר החדש לרשימה של המפתח ; בצומת המתאים ב- מוסיפים 1 למפתח ומבצעים ; בשני המקרים, מוסיפים איבר חדש בסוף התור ; זמן הריצה הכולל הוא .

: מבצעים חיפוש בעץ אחר המפתח ; אם המפתח  לא קיים בעץ , אין מה להמשיך; אחרת, מורידים איבר אחד מהרשימה של המפתח ; בצומת המתאים ב- מורידים 1 מהמפתח; אם המפתח 0, מוחקים את הצומת (גם ב-, גם ב-); אחרת, מבצעים ; זמן הריצה הכולל הוא .

: בהנחה שהמפתח  קיים בעץ , מוחקים את הצומת שלו מ- ומ-; מחליפים את המפתח  במפתח  ומכניסים אותו מחדש; אם המפתח  כבר קיים, ממזגים את שני הצמתים ומגדילים את השכיחות ב- וגם מבצעים ; אחרת, מכניסים צומת חדש ל- ול-, מכניסים את  בסוף התור ; זמן הריצה הכולל הוא .

: מחזירים את המפתח של  המתאים למפתח  שבסוף התור ; זמן הריצה .

: מחזירים את מפתח השורש של ; זמן הריצה .