**ממ"ן 12**

**שאלה 1**

**א.**

נשתמש במשפט שיטת האב:

a=2 , b=4 ,

לכן מתקיים מקרה (2) שבו , ולכן:

**ב.**

נשתמש במשפט שיטת האב:

a=5 , b=5 ,

לכן מתקיים מקרה (1) שבו קיים כך ש: , ולכן:

**ג.**

נשתמש במשפט שיטת האב:

a=6 , b=6 ,

לכן מתקיים מקרה (2) שבו , ולכן:

**ד.**

נשתמש במשפט שיטת האב:

a=8 , b=4 ,

לכן מתקיים מקרה (3) שבו קיים כך ש: , ובנוסף:

קיים c<1 המקיים:

**( מתקיים לדוגמא עבור c=0.1, מכיוון שמתקיים :**

)

ולכן נקבל:

**ה.**

נבצע החלפת משתנים:

, כלומר : , ונקבל:

נגדיר פונקציה חדשה כך ש:

כלומר:

נשתמש במשפט שיטת האב:

a= , b=2 ,

לכן מתקיים מקרה (3) שבו קיים כך ש: ,

ובנוסף:

קיים c<1 המקיים:

(כמובן שמתקיים לכל )

ולכן:

ולכן

**ו.**

........

שורה ה i -

נדרוש כלומר: --> --> -->

-->

ו T(2) = 1

ונקבל:

קטן מ 1 לכל i>0 , ולכן:

**שאלה 2**

**א.**

כיוון אחד:

נבדוק עבור i,j = 1 , במקרה זה נקבל:

A[1,1] + A[2,2] ≤ A[1,2] + A[2,1]

*ואכן מקיים את ההגדרה של מערך מונז'.*

*הנחת האינדוקציה : נניח כי עבור כל i ו j המקיימים :*

*i=1,2,...,m-2 , j=1,2,...,n-2 מתקיים השווין:*

A[i,j] + A[i+1,j+1] ≤ A[i,j+1] + A[i+1,j] -- (1)

נבדוק האם מתקיים השווין:

**A[i,j] + A[i+2,j+2] ≤ A[i,j+2] + A[i+2,j]**

*נשים לב כי ע"פ הנחת האינדוקציה, מתקיים גם עבור i+1 ו j+1 :*

A[i+1,j+1] + A[i+2,j+2] ≤ A[i+1,j+2] + A[i+2,j+1] --- (2)

נחבר את (1) ו- (2) ונקבל:

A[i,j] + 2\*A[i+1,j+1] + A[i+2,j+2] ≤ ( A[i+1,j] + A[i+2,j+1] ) + ( A[i,j+1] + A[i+1,j+2] )

---(3)

ע"פ הנחת האינדוקציה, השווין מתקיים גם עבור i+1 ו j , וגם עבור i ו j+1 :

( A[i+1,j] + A[i+2,j+1] ) ≤ A[i+1,j+1] + A[i+2,j]

( A[i,j+1] + A[i+1,j+2] )≤A[i,j+2] + A[i+1,j+1]

נציב במשוואה (3) ונקבל:

A[i,j] + 2\*A[i+1,j+1] + A[i+2,j+2] ≤ A[i+1,j+1] + A[i+2,j] *+* A[i,j+2] + A[i+1,j+1]

כלומר:

A[i,j] + **2\*A[i+1,j+1]** + A[i+2,j+2] ≤ A[i+2,j] *+* A[i,j+2] + **2\*A[i+1,j+1]**

נצמצם ונקבל:

A[i,j] + A[i+2,j+2] ≤ A[i,j+2] + A[i+2,j]

**מ.ש.ל**

לכן הוכחת האינדוקציה נכונה, והנוסחא הנ"ל מגדירה מערך מונז'.

כיוון שני:

אם המערך הוא מערך מונז', אז לכל:

מתקיים:

**A[i,j] + A[k,l] ≤ A[i,l] + A[k,j]**

נבחר k=i+1 ו l = j+1 ונקבל:

**A[i,j] + A[i+1,j+1] ≤ A[i,j+1] + A[i+1,j]**

**מ.ש.ל**

**ב.**

*נשנה את האיבר A[2,3] , לערך: A[2,3]=5*

**ג.**

נגדיר את f(i) להיות האינדקס של העמודה השמאלית ביותר שבה נמצא איבר מינימלי של שורה i

יהי .

נניח בשלילה שקיים i€[1,m] המקיים .

עקב כך ש מינימאלי בשורה i , מתקיים השווין :

(אין טעם לדבר על אי שווין חלש בשורה של המינימאליות, כי f(i) הוא האינדקס של העמודה השמאלית ביותר , כלומר אם יש איברים משמאלו, הם בהכרח יותר קטנים ממנו. )

עקב כך ש מינימאלי בשורה i+1 , מתקיים השווין :

*ולכן, מחיבור המשוואות נקבל:*

*נציב: l=f(i) ו j=f(i+1) ( כך שמתקיים l>j כנדרש) , וגם k=i+1 ( גם כן, k>i כנדרש )*

*ונקבל:*

*עבור f(i)= f(i+1) +1 , כלומר l=j+1 נקבל:*

*בסתירה להגדרתו של מערך מונז' !*

*ולכן הנחת השלילה שגויה, ולכל* i€[1,m] מתקיים .

***ד.***

*נתונים לנו האינדקסים הזוגיים:*

*f(2),f(4),f(8) .... f(m-1) (בהנחה של n אי זוגי על מנת להסתכל על המקרה הגרוע).*

*ע"פ הוכחת סעיף ג', נוכל על כל חיפוש של שורה אי זוגית i, לחפש רק בתאים שבין:*

*(בהנחה ש )*

*ו בהנחה ש או בהנחה ש*

*בעזרת חיפוש ליניארי.*

*המקרה הגרוע מתרחש באופן הבא:*

*החיפוש שאנחנו מחפשים הוא ליניארי.*

*ולכן, כאשר מתרחש המצב שבו אנו נאלצים כל חיפוש לבדוק האם , ואז בודקים עבור כל שאר האיברים אשר*

*אנחנו בעצם עוברים על כל העמודות של המטריצה, משמע מבצעים n השוואות.*

*ובנוסף, עקב הבדיקה החוזרת של על כל תא, אנחנו מבצעים גם השוואות.*

*כלומר:*

***ה.***

*לפי סעיף ד', לקחנו תת מערך של A המכיל שורות.*

*ומצאנו שכל מציאת אינדקס נעשת ב*

*לכן נוסחת הנסיגה תהיה :*

כלומר, בשורה ה i:

נבחר , כלומר , כלומר

ונקבל:

ולכן:

מ.ש.ל

**שאלה 3**

דבר ראשון, נגדיר את השגרה Min-Heampify(A,i).

השגרה Min-Heampify מבצעת על ערימת מינימום בדיוק את מה שמבצעת השיטה Max-Heampify על ערימת מקסימום (בספר).

יעילות השגרה זהה, כלומר O(lg n)

כנ"ל השגרה ex-Min , ביעילות של o(lg n)

**א.**

נחשב את הגובה של ערימה בעלת k איברים:

\*מעוגל כלפי מטה\*

1. נגדיר מערך חדש A בגודל

2. בעזרת לולאה שרצה מ 1 עד , נבצע כל פעם את שגרת find(t,i) כך זה i שווה לאינדקס הלולאה, ובכל שלב בלולאה, נעתיק את האיבר שמצאנו למערך A.

3. נשתמש במיון בועות כדי למיין את מערך A.

4. נדפיס את k האיברים הראשונים במערך שנוצר ( פלט - k האיברים הקטנים ביותר בערמה )

הסבר קצר:

ע"י העתקת ה k איברים הראשונים, אנחנו לא בהכרח מעתיקים את האיברים הקטנים ביותר, לכן נעתיק את כל העלים בגובה של האיבר ה k, וכך ברגע שנמיין נוכל להחזיר את ה k איברים הראשונים אשר בוודאות הכי קטנים בערמה.

הערה : למרות שאת המיון אנחנו עושים על מערך בגודל , עדיין מדובר על יעילות של k^2 מכיוון שגודל המערך נבדל בקבוע מהגודל k.

( בערימה שגובהה H ישנם: )

יעילות השגרה:

1. זכרון נוסף כך ש c קבוע מסויים : O(k+c), יעילות O(1)

2. O(k\*lg k)

3. O(k^2)

4. O(k) - מתבצע בעזרת לולאה.

ולכן, בעזרת O(k) זכרון, שרץ בזמן O(k^2) , הצלחנו לממש את הפלט של הדפסת k האיברים הקטנים ביותר בערמה, וללא שינוי של הערמה.

**ב.**

1. נגדיר מערך חדש בגודל k.

2. בעזרת לולאה שרצה מ 1 עד k , נבצע כל פעם את השגרה ex-Min, ונכניס את האיברים המוחזרים למערך k שיצרנו.

3. נדפיס את המערך שנוצר ( פלט - k האיברים הקטנים ביותר בערמה )

4. נעבור שוב בלולאה שרצה מ 1 עד k ונבצע כל פעם שגרה Min-Heampify(A,i), כלומר נכניס את האיברים מחדש לערמה.

יעילות השגרה:

1. זכרון נוסף O(k), יעילות O(1)

2. O(k\*lg k)

3. O(k) - מתבצע בעזרת לולאה.

4. O(k\*lg k)

ולכן, בעזרת O(k) זכרון, שרץ בזמן O(k\*lg k) , הצלחנו לממש את הפלט של הדפסת k האיברים הקטנים ביותר בערמה, וללא שינוי של הערמה.

**ג.**

עבור n גדול דיו, נוכל לבחור להקטין את ה heap size להיות , ובכך לדאוג שה"החלקה" כלפי מטה תתבצע ביעילות של:

1. נגדיר משתנה עזר בשם Save.

2. בעזרת לולאה אשר נעה בין 1 ל k נבצע כל פעם את השגרה ex-Min.

בכל ריצה של הלולאה, נכניס את המשתנה המוחזר למשתנה Save, ונדפיס את הערך.

נדפיס את הערך , ונכניס אותו בחזרה לערמה, מבלי לבצע Heampify

3. בסיום הלולאה, נבצע Build-Min-Heam כללי ונחזיר את הערמה לקדמותה.

הסבר קצר:

מכיוון ש n גדול דיו, וקבענו את ה heap size להיות , אנחנו בעצם ממיינים רק רמות ולא n רמות, ולכן למרות שאנחנו מכניסים את האיברים מחדש לערמה, אנו דואגים לא למיין אותם תוך כדי הלולאה.

יעילות השגרה:

1. זכרון נוסף O(1), יעילות O(1)

2.

3. O(n) - לא מכלילים את התיקון.

ולכן, בעזרת O(1) זכרון, שרץ בזמן O() , הצלחנו לממש את הפלט של הדפסת k האיברים הקטנים ביותר בערמה, וללא שינוי של הערמה ( לא כולל תיקון הערמה )

**שאלה 4**

עלינו להרכיב מבנה נתונים S המבצע את הפעולות הבאות:

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

: בניית המבנה  מרשימה לא ממוינת  בת  איברים; זמן ריצה: ;

: הכנסת מפתח חדש לתוך המבנה ; זמן ריצה: ;

: מחיקת האיבר המכסימלי מהמבנה *S*; זמן ריצה: ;

: מחיקת האיבר המינימלי מהמבנה *S*; זמן ריצה: ;

: הגדלת ערך האיבר שאליו מצביע  עד הערך ; זמן ריצה: ;

: הקטנת ערך האיבר שאליו מצביע  עד הערך ; זמן ריצה: ;

: הגדלת כל מפתחות המבנה *S* בקבוע ; זמן ריצה: .

\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*

**תיאור המבנה נתונים:**

נבנה 2 ערמות מאותה רשימה L:

ערמת מקסימום, וערמת מינימום, כך שיהיה לנו מצביעים על איברים מתאימים בשתי הערמות.

בנוסף, נבצע תחזוקה לכל מפתח בערמה, כך שנפחית מכל ערך שיוכנס, את ערך תא הסכום d (שבהתחלה יוגדר כ 0), כך שאם נרצה להחזיר את הערך למשתמש, פשוט נחזיר את הערך בתא ועוד ערך תא הסכום d . בצורה כזאת ברגע שנביא ל d ערך מסויים, כל המפתחות יוחזרו פלוס הערך שלו - כלומר דאגנו לשנות את כל התאים על חשבון שינוי בודד של ערך תא הסכום.

**תיאור הפעולות:**

BUILD(L,S)

1. נקח את הרשימה L הנתונה, ונבנה ממנה ערימת מקסימום וערימת מינימום.

2. נמתח מצביעים בין האיברים המתאימים בכל ערימה.

3. נאפס את הערך בתא הסכום ל 0

סה"כ זמן ריצה : - בניית ערימות נעשה בזמן ליניארי.

*INSERT(S,z)*

*1. נפחית מהמפתח החדש את הערך המופיע בתא הסכום.*

*2. נכניס אותו לערימת המקסימום ולערימת המינימום.*

*3. נבצע תיקון לערימות*

*סה"כ זמן ריצה: - כזמן הכנסה של ערימה.*

*DEL-MAX(S)*

1. נמצא איבר מקסימאלי בערימת המקסימום.

2. בעזרת המצביע נמצא את התא המתאים לו בערימת המינימום.

3. נמחק את שני התאים.

4. נתקן את שני הערימות.

*סה"כ זמן ריצה: - מציאת המקסימום נעשת ב ואילו התיקון נעשה ב*

*DEL-MIN(S)*

1. נמצא איבר מינימאלי בערימת המינימום.

2. בעזרת המצביע נמצא את התא המתאים לו בערימת המקסימום.

3. נמחק את שני התאים.

4. נתקן את שני הערימות.

*סה"כ זמן ריצה: - מציאת המינימום נעשת ב ואילו התיקון נעשה ב*

INCR-KEY(S,p)

1. נמצא את האיבר p בערימת המקסימום. ( שגרת find)

2. בעזרת המצביע נמצא את התא המתאים לו בערימת המינימום.

3. נשנה את שני התאים לערך nk

4. נבצע "גלגול כלפי מעלה" בערימת המקסימום, ו "החלקה כלפי מטה" בערימת המינימום.

*סה"כ זמן ריצה:*

DECR-KEY(S,p)

1. נמצא את האיבר p בערימת המקסימום. ( שגרת find)

2. בעזרת המצביע נמצא את התא המתאים לו בערימת המינימום.

3. נשנה את שני התאים לערך nk

4. נבצע "החלקה כלפי מטה" בערימת המקסימום, ו "גלגול כלפי מעלה" בערימת המינימום.

*סה"כ זמן ריצה:*

ADD-ALL(d,S)

1. נשנה את ערך תא הסכום ל d החדש שהתקבל כפרמטר.

*סה"כ זמן ריצה: - הטיפול נעשה בתחזוקה ולכן משפיע כבר על כל המפתחות.*

תמיר אביב,

305652000