שאלה 1

(לא ציינו בשאלה מה הבעיה שהאלגוריתם פותר, אני מניח שמדובר במיון)

שמורת לולאה עבור הלולאה בשורות 3-8:

בתחילת האיטרציה ה־i של הלולאה, ואחרי סיום ביצוע כל הלולאה:  
(א) האיבר במקום A[i] גדול או שווה לכל האיברים בתת המערך A[1..i].  
(ב) אם swap=FALSE, תת המערך A[1..i] ממויין.  
(ג) המערך A מכיל את אותם איברים כמו לפני ביצוע הלולאה (אולי בסדר שונה). אין שום שינוי באיברים A[j+1..length[A]].

הוכחה:

אתחול: בתחילת האיטרציה הראשונה i=1 ולא בוצע שום שינוי, לכן (א), (ב) ו־(ג) נכונים באופן טריוויאלי.

תחזוקה:  
נניח שהטענה מתקיימת עבור i.  
\* אם A[i]≤A[i+1], לא יתבצע דבר במהלך האיטרציה.  
(א) A[i] הוא הערך הגדול ביותר בתת המערך A[1..i] (ע"פ ההנחה), A[i]≤A[i+1] ולכן בסיום האיטרציה ה־i A[i+1] הוא הערך הכי גדול בתת המערך A[1..i+1].  
(ב) אם swap=FALSE לאחר ביצוע האיטרציה, אז swap היה FALSE לפני ביצוע האיטרציה (אין בלולאה השמה שיכולה לשנותו ל־FALSE) ולכן אזי תת המערך A[1..i] ממויין (ע"פ ההנחה), ובגלל ש־A[i]≤A[i+1], תת המערך A[1..i+1] ממויין.  
(ג) לא השתנה המערך לכן ברור שטענה (ג) נשמרת.  
לכן הטענה מתקיימת עבור i+1.  
\* אם A[i]>A[i+1], תתבצע החלפה בין A[i] ו־A[i+1], והשמה של TRUE ל־swap.  
(א) לפני ביצוע ההחלפה A[i] הוא הערך הגדול ביותר בתת המערך A[1..i] (ע"פ ההנחה), ובנוסף A[i]>A[i+1]. לכן לאחר ביצוע ההחלפה A[i+1] יהיה הערך הגדול ביותר בתת המערך A[1..i+1].  
(ב) הטענה מתקיימת לאחר ביצוע האיטרציה כי swap=TRUE.  
(ג) תת המערך A[1..j] הכיל את האיברים שהיו בו לפני ביצוע הלולאה (ע"פ ההנחה), ובוצעה החלפה בין A[i], A[i+1] ששניהם בתחום A[1..j]. בתת המערך A[j+1..length[A]] לא התבצע שינוי. לכן גם לאחר ביצוע האיטרציה A יכיל את אותם איברים שהיו בו לפני ביצוע הלולאה, ושינוי סדר יהיה רק בתוך j האיברים הראשונים.  
לכן הטענה מתקיימת עבור i+1.

סיום:  
לאחר ביצוע הלולאה, המערך A מכיל את אותם איברים כמו לפני הביצוע, הערך הגדול ביותר בתת המערך A[1..j] נמצא ב־A[j], ולא בוצע שינוי בתת המערך A[j+1..length[A]].  
אם swap=FALSE, תת המערך A[1..j] ממויין.

שמורת לולאה עבור הלולאה בשורות 1-10:

בתחילת כל איטרציה של הלולאה, ואחרי סיום ביצוע הלולאה, תת המערך A[j+1..length[A]] ממויין וכל איבריו גדולים או שווים לכל איברי A[1..j], והמערך A מכיל את אותם איברים כמו לפני ביצוע האלגוריתם.

הוכחה:

אתחול: בתחילת האיטרציה הראשונה j=length[A] לכן A[j+1..length[A]] הוא תת מערך באורך 0 ולכן מתקיימת טענת המיון וההשוואה לאיברי A[1..j]. כמו כן לא בוצע שום שינוי למערך A ולכן הוא מכיל את אותם איברים כמו לפני ביצוע האלגוריתם.

תחזוקה: נניח שהטענה מתקיימת בתחילת איטרציה מסויימת.  
מתבצעת הלולאה הפנימית, לאחריה i=j, ולפי שמורת הלולאה שניסחנו עבור הלולאה הפנימית, לא בוצע שינוי באיברי A[j+1..length[A]], איברי A[1..j] הם סידור של אותם האיברים שהיו שם בתחילת האיטרציה, A[j] גדול או שווה לכל איבר בתת המערך A[1..j]. A[j] קטן או שווה לכל איברי A[j+1..length[A]], והם ממויינים (ע"פ ההנחה). לכן תת המערך A[j..length[A]] ממויין וכל איבריו גדולים או שווים לכל איברי A[1..j-1].

סיום: סיום הלולאה (והאלגוריתם כולו) יכולה להתבצע בשתי דרכים:  
א. פקודת return בשורה 10, כאשר swap=FALSE.  
במקרה זה, ע"פ שמורת הלולאה הפנימית, A[1..j] ממויין, וע"פ שמורת הלולאה החיצונית, A[j+1..length[A]] ממויין וכל איבריו גדולים או שווים לכל איברי A[1..j], והמערך A מכיל את אותם איברים כמו לפני ביצוע האלגוריתם.  
ב. סיום רגיל של הלולאה, כאשר j=0.  
במקרה זה, ע"פ שמורת הלולאה החיצונית, A[1..length[A]] ממויין והמערך A מכיל את אותם איברים כמו לפני ביצוע האלגוריתם.

מכאן שבכל דרך שהאלגוריתם מסתיים, המערך A ממויין ומכיל את אותם איברים כמו לפני ביצוע האלגוריתם.

שאלה 2

א.

שורות 1, 2, 3, 10 מבצעות מספר קבוע של צעדים. נוכיח שגם הלולאה בשורות 4-10 מסתיימת לאחר מספר סופי של צעדים:  
כאשר הלולאה מתחילה y מכיל את הערך שבקלט b שהוא מספר טבעי (בגלל שורה 2).  
בתוך הלולאה, מתבצעת קריאה לשגרה ODD שמבצעת מספר סופי של פעולות, ולאחר מכן בהתאם לתוצאה מתבצעות מספר סופי של פעולות (שורות 6-7 או שורות 8-9). אם מתבצעת שורה 6, הערך של y יורד ב־1, ואם מתבצעת שורה 8 (זה קורה רק כאשר y זוגי) הערך של y נחתך לחצי. בכל מקרה הערך של y קטן לפחות ב־1. לכן הלולאה תסתיים לאחר b איטרציות לכל היותר.  
לכן ביצוע כל השגרה מסתיים לאחר מספר סופי של צעדים.

ב.

שמורת לולאה עבור הלולאה בשורות 4-9:

בתחילת כל איטרציה של הלולאה, ואחרי סיום ביצוע הלולאה, x⋅y+z=a⋅b.

הוכחה:

אתחול: לפני תחילת האיטרציה הראשונה מתבצע אתחול x🡨a, y🡨b, z🡨0, לכן x⋅y+z=a⋅b.

תחזוקה: נניח שהטענה נכונה בתחילת איטרציה מסויימת. נסמן את הערכים של x, y, z בסוף האיטרציה בסימונים x', y', z' בהתאמה.  
השגרה ODD מחזירה 0 אם y זוגי, 1 אם y אי זוגי.  
בלולאה מופעלת השגרה ODD על הערך של y, ולאחר מכן מתבצע שינוי בערכי המשתנים בהתאמה:  
\* אם y אי זוגי, x'🡨x, y'🡨y-1, z'🡨z+x אז  
x'⋅y'+z'=x⋅(y-1)+(z+x)=x⋅y+z  
\* אם y זוגי, x'🡨2x, y'🡨y/2, z'🡨z אז  
x'⋅y'+z'=2⋅x⋅y/2+z=x⋅y+z  
בכל מקרה לאחר ביצוע האיטרציה x'⋅y'+z'=a⋅b.

סיום: לאחר סיום הלולאה, y=0 ו־x⋅y+z=a⋅b. לכן z=a⋅b, והאלגוריתם מחזיר ערך נכון.

ג.

זמן הריצה הוא

הוכחה:  
  
שורה 1 -   
שורה 2 -   
שורה 3 -   
שורה 4 - מספר האיטרציות הוא ( הוא מספר הספרות 1 במספר b) כי y מתחיל כ־b, כאשר הספרה הימנית ביותר היא 1, מפחיתים את המספר ב־1 ובאיטרציה הבאה מוחקים אותה, כאשר הספרה הימנית ביותר היא 0, מוחקים אותה. סדר הגודל הוא   
שורה 5 - (השגרה ODD.) בדיקה אם המספר זוגי אפשר לבצע ב־.  
שורה 6 -   
שורה 7 - - z ו־x גדלים במהלך ביצוע האלגוריתם עד לגודל (כי ערך z מגיע ל a⋅b)  
שורה 8 -   
שורה 9 - - z ו־x גדלים במהלך ביצוע האלגוריתם עד לגודל (כי ערך z מגיע ל a⋅b)  
שורה 10 -

לסיכום, הגורם הדומיננטי הוא הלולאה המתבצעת פעמים וזמן הריצה של כל איטרציה שלה הוא . לכן זמן הריצה הוא

שאלה 3

א.

מיון-הכנסה של רשימה אחת באורך k ייקח , לכן מיון של רשימות כאלה ייקח .

ב.

ננסח אלגוריתם שממזג תת רשימות במערך A בזמן במקרה הגרוע:

MERGE\_n\_k(A, n, k)

1. if
2. return
3. merges🡨
4. for i🡨1 to merges
5. MERGE(A, , , )
6. MERGE\_n\_k(A, n, k\*2)

הסבר: האלגוריתם מחלק את A לזוגות סמוכים של תת רשימות באורך k, וממזג כל זוג בעזרת השגרה המוכרת MERGE. לאחר מכן הוא פועל שוב באופן רקורסיבי על תתי הרשימות החדשות (ארוכות פי 2) עד שכל המערך ממויין. (הנחתי ש־ שלם לצורך הפשטות, אפשר להאריך את n לאורך כזה בלי שתשתנה התוצאה של ניתוח זמן הריצה)  
זמן ריצה: הלולאה בשורות 4-5 מתבצעת בזמן כי היא מבצעת MERGE בחלקים על כל המערך, וזמן הביצוע של MERGE לינארי באורך הקטע למיזוג (). הקריאה הרקורסיביות מתבצעת פעמים, כי k מוכפל ב־2 כל פעם עד שהוא עובר את . לכן זמן הריצה הוא

ג.

לכן האלגוריתם עדיף כאשר הוא לכל היותר .

ד.

יש לקבוע את k כאורך המקסימלי של מערך עבורו מיון הכנסה מהיר יותר ממיון מיזוג.

שאלה 4

הוכחת

נתבונן ב , .  
לכל ,  
לכן ע"פ הגדרה

הוכחת

לכן ננסה להוכיח   
 חסומה מלמעלה (תרגיל א.2-1, עמ' 278 בספר הלימוד)  
כלומר קיים כך ש לכל .  
נתבונן ב , .  
לכל ,  
  
לכן ע"פ הגדרה

הוכחת

בהתאם להערה הקודמת, ננסה להוכיח   
נתבונן ב , .  
לכל ,  
  
לכן ע"פ הגדרה,

הוכחת

נתבונן ב , .  
לכל ,  
  
לכן ע"פ הגדרה,   
 (משפט 3.18 בספר הלימוד), לכן   
ע"פ טרנזיטיביות,

הוכחת

(טענה במדריך הלמידה)  
לכן קיימים , , כך שלכל ,  
  
לכן

הוכחת

(ע"פ עמ' 34 במדריך הלמידה)  
לכן   
לכן   
  
לכן   
מסקנה:

הוכחת

(ע"פ עמ' 34 במדריך הלמידה)  
לכן קיימים , כך שלכל ,  
  
לכן ע"פ הגדרה,

הוכחת

ע"פ טענה במדריך הלמידה,   
מכאן שקיים כך שלכל ,  
  
לפי שאלה ב-5 במדריך הלמידה, , לכן .  
לכן ולכן

הוכחת

לכל , ,  
  
  
לפי טענה במדריך הלמידה,   
לכן קיימים , כך שלכל ,

ולפי הטענה שהוכחנו,   
לכן