**ממן 13 – מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים – ברנדס איתי ת.ז.**

**שאלה 1:**

מקרא צבעים:

* איבר הציר – pivot - אדום
* הגוש שכל איבריו קטנים או שווים לערך הpivot - צהוב
* הגוש שכל איבריו גדולים או שווים לערך הpivot - ירוק
* גוש שעדיין לא עובד – ללא רקע
* גוש שלא רלוונטי לקריאה הרקורסיבית עצמו (מחוץ לגבולות r, p) - אפור

*ראשית מתבצעת קריאה לPARTITION(A, p=1, r=15):*

*נבחר את איבר הציר , ונקבע את ערכי המשתנים התתחלתיים .*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | p,j |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | r |
|  | 60 | 70 | 80 | 90 | 19 | 19 | 5 | 29 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 |

*הלולאה מתקדמת מאינדקס j עד מבלי לענות על התנאי , ולכן הלולאה ממשיכה לאיטרציה הבאה.*

*בלולאה שבה , לראשונה מתקיים . לכן i מקודם ב-1, והאיברים*

*מתחלפים:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p, i |  |  |  | j |  |  |  |  |  |  |  |  |  | r |
|  | 19 | 70 | 80 | 90 | 60 | 19 | 5 | 29 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 |

*האינדקס j מתקדם ל, שם שוב מתקיים התנאי . לכן i מקודם ב-1, והאיברים*

*מתחלפים:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p | i |  |  |  | j |  |  |  |  |  |  |  |  | r |
|  | 19 | 19 | 80 | 90 | 60 | 70 | 5 | 29 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 |

*האינדקס j מתקדם ל, שם שוב מתקיים התנאי . לכן i מקודם ב-1, והאיברים*

*מתחלפים:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  | i |  |  |  | j |  |  |  |  |  |  |  | r |
|  | 19 | 19 | 5 | 90 | 60 | 70 | 80 | 29 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 |

*האינדקס j מתקדם ל, שם שוב מתקיים התנאי . לכן i מקודם ב-1, והאיברים*

*מתחלפים:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  | i |  |  |  | j |  |  |  |  |  |  | r |
|  | 19 | 19 | 5 | 29 | 60 | 70 | 80 | 90 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 |

*האינדקס j מתקדם ל, שם שוב מתקיים התנאי . לכן i מקודם ב-1, והאיברים*

*מתחלפים:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  | i |  |  |  | j |  |  |  |  |  | r |
|  | 19 | 19 | 5 | 29 | 10 | 70 | 80 | 90 | 60 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 |

*האינדקס j מתקדם ל, שם שוב מתקיים התנאי . לכן i מקודם ב-1, והאיברים*

*מתחלפים:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  | i |  |  |  | j |  |  |  |  | r |
|  | 19 | 19 | 5 | 29 | 10 | 15 | 80 | 90 | 60 | 70 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 |

*האינדקס j מתקדם ל, שם שוב מתקיים התנאי . לכן i מקודם ב-1, והאיברים*

*מתחלפים:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  |  | i |  |  |  | j |  |  |  | r |
|  | 19 | 19 | 5 | 29 | 10 | 15 | 19 | 90 | 60 | 70 | 80 | 21 | 25 | 29 | 30 |

*האינדקס j מתקדם ל, שם שוב מתקיים התנאי . לכן i מקודם ב-1, והאיברים*

*מתחלפים:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  |  |  | i |  |  |  | j |  |  | r |
|  | 19 | 19 | 5 | 29 | 10 | 15 | 19 | 21 | 60 | 70 | 80 | 90 | 25 | 29 | 30 |

*האינדקס j מתקדם ל, שם שוב מתקיים התנאי . לכן i מקודם ב-1, והאיברים*

*מתחלפים:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  |  |  |  | i |  |  |  | j |  | r |
|  | 19 | 19 | 5 | 29 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 70 | 80 | 90 | 60 | 29 | 30 |

*האינדקס j מתקדם ל, שם שוב מתקיים התנאי . לכן i מקודם ב-1, והאיברים*

*מתחלפים:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  |  |  |  |  | i |  |  |  | j | r |
|  | 19 | 19 | 5 | 29 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 80 | 90 | 60 | 70 | 30 |

*כעת הגענו לסוף הלולאה, משום ש, והלולאה מפסיקה. כעת נותר רק להחליף את ו- :*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  |  |  |  |  | i |  |  |  | j | r |
|  | 19 | 19 | 5 | 29 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

וכעת השגרה תחזיר את אינדקס של איבר הציר, כך שכל האיברים משמאלו קטנים-שווים ממנו, וכל האיברים מימינו גדולים-שווים ממנו. איבר זה הוא .

כעת השגרה QUICKSORT תפצל את המערך ל2 תתי מערכים ותקרא לכל אחד בקריאה רקורסיבית:

* *PARTITION(A, p=1, r=10)*
* *PARTITION(A, p=12, r=15)*

*כעת מתבצעת קריאה לPARTITION(A, p=1, r=10):*

*נבחר את איבר הציר , ונקבע את ערכי המשתנים התתחלתיים .*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | p, j |  |  |  |  |  |  |  |  | r |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 29 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

*הלולאה מתחילה מאינדקס ומקיימת את התנאי , לכן i מקודם ב-1, והאיברים*

*מתחלפים (וכך למעשה המערך לא משתנה):*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p,i, j |  |  |  |  |  |  |  |  | r |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 29 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

*האינדקס j מתקדם ל, שם שוב מתקיים התנאי . לכן i מקודם ב-1, והאיברים*

*מתחלפים:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p | i,j |  |  |  |  |  |  |  | r |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 29 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

*למעשה, משום שכל האיברים קטנים או שווים מהpivot, ימשיך התהליך הנ"ל עד לסוף הלולאה:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  |  |  |  | i,j | r |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 29 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

*ואז יתחלפו ו- , כשבריצה האחרונה הם כאמור, אותו ערך, ולכן לא משתנה דבר.*

*הערך החוזר מן השגרה הוא אינדקס הpivot,* .

כעת השגרה QUICKSORT תפצל את המערך ל2 תתי מערכים ותקרא לכל אחד בקריאה רקורסיבית, עד שיתקבלו בקריאות הרקורסיביות תתי-מערכים בגודל 0, שעבורם הרקורסיה נעצרת ולא מתבצע דבר (שכן תת-מערך בגודל 0 הוא כמובן ממוין במובן הריק).

בהסבר כאן נמנע גם מחישוב הרקורסיה תתי-מערכים מגודל 1, שכן גם הם ממוינים מעצם היותם בעלי איבר בודד.

**מעתה אציין את המשך הפיתרון בפחות פירוט, שכן כבר נימקתי את הטכניקות השונות קודם לכן.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | p, j |  |  |  |  |  |  |  | r |  |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 29 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  | i, j |  |  |  |  |  | r |  |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 29 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  | i | j |  |  |  |  | r |  |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 29 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  | i | j |  |  |  | r |  |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 10 | 29 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  | i | j |  |  | r |  |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 10 | 15 | 29 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  | i | j |  | r |  |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 10 | 15 | 19 | 29 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  |  | i | j | r |  |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 10 | 15 | 19 | 21 | 29 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  |  | i | j | r |  |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | p, j |  |  |  |  |  |  | r | r |  |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  |  | i,j | r |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | p, j |  |  |  |  |  |  | r |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  |  | i,j | r |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  | i,j | r |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  | i,j | r |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | p, j |  |  |  | r |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | p,j | j |  |  | r |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | p | j |  |  | r |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 19 | 19 | 5 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p,i |  | j |  | r |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 5 | 19 | 19 | 10 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p | i |  | j | r |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 5 | 10 | 19 | 19 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p | i |  | j | r |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 5 | 10 | 15 | 19 | 19 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p, i, j | r |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 5 | 10 | 15 | 19 | 19 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | p, j, r |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 5 | 10 | 15 | 19 | 19 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | i | p,j | r |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 5 | 10 | 15 | 19 | 19 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | p,i,j | r |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 5 | 10 | 15 | 19 | 19 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | i | p,j |  |  | r |
|  | 5 | 10 | 15 | 19 | 19 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | p,i | j |  | r |
|  | 5 | 10 | 15 | 19 | 19 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 60 | 90 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | p | i | j | r |
|  | 5 | 10 | 15 | 19 | 19 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 60 | 70 | 90 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | p | i | j | r |
|  | 5 | 10 | 15 | 19 | 19 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 60 | 70 | 80 | 90 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | i | p,j | r |  |  |
|  | 5 | 10 | 15 | 19 | 19 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 60 | 70 | 80 | 90 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | p,i,j | r |  |  |
|  | 5 | 10 | 15 | 19 | 19 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 60 | 70 | 80 | 90 |

*ובסיום הריצות נקבל:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 5 | 10 | 15 | 19 | 19 | 19 | 21 | 25 | 29 | 29 | 30 | 60 | 70 | 80 | 90 |

*והמערך אכן ממוין.*

**שאלה 2:**

1. *נראה נכונות השגרה DIJKSTRA-PARTITION.*

*ראשית נבחר איבר x 🡨A[p] בתור איבר Pivot, שסביבו יחולק התת-מערך. השגרה רצה ומחלקת את המערך לארבע קבוצות, שיתכן שחלקם ריקים או חופפים בחלקם:*

1. *p.. – האיזור שכל איבריו קטנים או שווים לערך איבר הPivot.*
2. *i, j, i+1..j-1 – האיזור שלא ידוע עדיין היחס בין איבריו לאיבר ה-Pivot.*
3. *– האיזור שכל איבריו שווים לערך איבר ה-Pivot.*
4. *– האיזור שכל איבריו גדולים או שווים לערך איבר ה-Pivot.*

*נגדיר את* ***שמורת הלולאה****: בתחילת כל איטרציה של הלולאה בשורות 4-13, לכל אינדקס k במערך,*

1. *אם אז .*
2. *אם אז .*
3. *אם אז .*

*נראה ששמורת הלולאה מתקיימת לפני הכניסה לאיטרציה הראשונה, שהיא מתוחזקת במהלך כל איטרציה, ושהיא מבטאת תכונה שאפשר להראות על פיה את נכונות האלגוריתם ביציאה הסופית מן הלולאה.*

***אתחול****: לפני הכניסה לאיטרציה הראשונה, .*

*אין ערכים בין p ל- , שכן ,*

*אין ערכים בין j ל-i שכן ,*

*ואין ערכים בין ל-r שכן .*

*לפיכך, התנאים 1,2,3 שבשמורת הלולאה מתקיימים במובן הריק.*

***תחזוקה****: נניח שבתחילת האיטרציה k+1 מתקיימת שמורת הלולאה.*

*נבחין שמתקיים , אחרת לא הינו נכנסים לאיטרציה (שורה 13).*

*הלולאה בשורות 5-6 מקדמת את i ב-1 כל עוד .*

*נקרא לערך של i לפני שורה 5 , ולערך של i אחרי שורה 6 .*

*משום שהנחנו שמתקיים תנאי 1 בשמורת הלולאה עבור כל איברי k כך ש , ומשום שמתקיים תנאי 1 גם עבור כל איברי (שכן אחרת הלולאה לא היתה מתקדמת, שכן שורה 5 לא תתקיים), נקבל שכעת תנאי 1 בשמורת הלולאה מתקיים לכל k כך ש .*

*הלולאה בשורות 7-8 מפחיתה את j ב-1 כל עוד .*

*נקרא לערך של j לפני שורה 7 , ולערך של i אחרי שורה 8 .*

*משום שהנחנו שמתקיים תנאי 3 בשמורת הלולאה עבור כל איברי k כך*

*ש, ומשום שמתקיים תנאי 3 גם עבור כל איברי (שכן אחרת הלולאה לא היתה מתקדמת, שכן שורה 7 לא תתקיים), נקבל שכעת תנאי 3 בשמורת הלולאה מתקיים לכל k כך ש , ובכך מתקיים תנאי 3 בשמורת הלולאה גם עבור ערך j החדש.*

*כעת, לאחר הרצת שורה 8, אנו מגיעים למצב שבו (שילוב תנאי היציאה של 2 הלולאות בשורות 5-8).*

*נפריד ל2 מקרים:*

1. *אם אז האיטרציה מסתיימת.*

*(\*) משום שתנאים 1 ו-3 של שמורת הלולאה מתקיימים כפי שהוכחנו, מובטח לנו ש:*

1. *לכל k המקיים מתקיים .*
2. *לכל k המקיים מתקיים .*

*ולכן לכל k המקיים מתקיים לפי א' ולפי ב' , ולכן ומתקיים גם תנאי 2 של שמורת הלולאה.*

1. *אם אז לאחר שורה 10, מוחלפים ו-, ולכן עכשיו ,*

*ולכן לאחר שמקדמים ומפחיתים ב-1 את ערכי i ו-j בהתאמה בשורות 11-12, כל הערכים במקומות p..i-2 ו- j+2..r מקיימים את תנאים 1 ו-3 בהתאמה לפי שמורת הלולאה, והראנו כעת שהמקומות i-1 ו- j+1 מקיימים גם הם את תנאים 1 ו-3 בהתאמה. לכן מתקיימים שוב תנאים 1 ו-3 שבשמורת הלולאה.*

*כעת, אם , מתקיים תנאי 2 באופן ריק.*

*אם , אז לפי הוכחה זהה ל(\*) נקבל שמתקיים גם תנאי 2 של שמורת הלולאה.*

*לפיכך מתקיימת שמורת הלולאה גם באיטרציה ה-k+1.*

***סיום:*** *בסיום . המערך מחולק כעת ל3 חלקים, יתכן שחלקם ריקים:*

1. *p..j – האיזור שכל איבריו קטנים או שווים לערך איבר הPivot.*
   * *כי אם אז ואז לכל k המקיים מתקיים תנאי 1.*
2. *– האיזור שכל איבריו שווים לערך איבר ה-Pivot.*
   * *כי מתקיים תנאי 2.*
3. *– האיזור שכל איבריו גדולים או שווים לערך איבר ה-Pivot.*
   * *כי אם אז ואז לכל k המקיים מתקיים תנאי 3.*

*נבחין גם שמספר האיברים בקבוצה 2 הם 0 או 1, ולא יותר מכך. ניתן לראות זאת ע"י כך שהמצב של יכול להגיע לאחר 3 מצבים:*

* + *לאחר ש, והלולאות הפנימיות בשורות 5-8 רצות פעם אחת כל אחת, ואז מתקיים והשגרה מסתיימת כאשר מספר האיברים בקבוצה הוא 0.*
  + *לאחר ש, והלולאות הפנימיות בשורות 5-8 לא רצות, ואז שורות 11-12 מעבירות למצב של ואז השגרה מסתיימת, ואז מספר האיברים בקבוצה הוא 0.*
  + *לאחר ש ואז שורות 11-12 מעבירות למצב של ואז השגרה מסתיימת, ואז מספר האיברים בקבוצה הוא 1.*

*לכן המערך מקיים חלוקה נכונה והשגרה פועלת נכון.*

*ב. כן. פירוש הדבר הוא שהמיון יתבצע סביב איבר ציר אחר. למעשה אין האיבר ציר חייב להיות האיבר הראשון או האחרון, הוא יכול להיות כל איבר במערך. בסעיף הקודם הוכחנו את נכונות שמורת הלולאה עבור ערך איבר ציר כלשהו, ללא תלות במיקום שלו במערך.*

*ג. נניח שכל האיברים שונים זה מזה.*

***כאשר המערך ממוין בסדר עולה****, איבר הציר, שהוא גם האיבר A[p] במערך, מהווה מינימום במערך. הלולאה מתחילה לרוץ עם .*

*לא מתקיים ולכן הלולאה הפנימית בשורות 5-6 איננה רצה.*

*מתקיים לכל ערכי k המקיימים (שכן x מינימום) ולכן הלולאה הפנימית בשורות 7-8 תרוץ עד ל ושם תעצור (שכן ).*

*בסוף שורה 8 מתקיים ולכן התנאי בשורה 9 מתקיים, תתבצע חלופה בין A[p] לבין עצמו (ולכן לא יתבצע דבר למעשה), והאינדקסים i,j יקודמו ויופחתו ב-1 בהתאמה.*

*כעת , מתקיים והלולאה בשורות 4-13 לא ממשיכה לאיטרציה נוספת. הערכים i,j החדשים חוזרים.*

***לסיכום, לא היה שינוי במערך עצמו, וחזרו הערכים .***

***כאשר המערך ממוין בסדר יורד****, האיבר A[p] במערך, מהווה מקסימום במערך. הלולאה מתחילה לרוץ עם .*

*לא מתקיים ולכן הלולאה הפנימית בשורות 5-6 איננה רצה.*

*גם לא מתקיים שכן x מקסימום ולכן בכל המערך אין איבר גדול ממנו.*

*בשורות 9-12 מוחלפים האיברים A[p], A[r] והאינדקסים i,j מקודמים ומופחתים ב-1 בהתאמה.*

*כעת .*

*מתקיים לכל ערכי k המקיימים (שכן x מקסימום) ולכן הלולאה הפנימית בשורות 5-6 תרוץ עד ל ושם תעצור (שכן , לאחר ההחלפה שבוצעה קודם לכן).*

*לא מתקיים שכן x מקסימום ולכן בכל המערך אין איבר גדול ממנו.*

*מתקיים כעת , ולכן והתנאי בשורה 9 לא מתקיים, והתנאי בשורה 13 אכן מתקיים, ולכן השגרה מסתיימת ומוחזרים הערכים i,j.*

***לסיכום, היתה החלפה של האיבר הראשון והאחרון במערך, כל שאר המערך נשאר במקומו, וחזרו הערכים .***

*ד. בסעיף א' הראנו שהשגרה DIJKSTRA-PARTITION מחלקת את המערך ל3 חלקים:*

1. *p..j – האיזור שכל איבריו קטנים או שווים לערך איבר הציר.*
2. *– האיזור שכל איבריו שווים לערך איבר הציר.*
3. *– האיזור שכל איבריו גדולים או שווים לערך איבר הציר.*

*לכן אם נבצע קריאה רקורסיבית למיון של איברי p..j ושל i..r, ונקבל תת-מערך ממוין במקום עבור כל אחד מהם, יתקיים שאיברי קבוצה 1 יהיו קטנים או שווים לאיברי קבוצה 2 שהם קטנים או שווים לאיברי קבוצה 3, ולכן המערך שיתקבל יהיה מערך ממוין.*

*נבחין שתנאי היציאה מהרקורסיה הוא כאשר , שאז המערך p..r הוא מערך מגודל 0 או 1, שהוא מערך ממוין מעצם הגדרתו.*

*על פניו יתכן מצב שבו בחלוקה, הקבוצה 2 ריקה, ואחת מן הקבוצות 1,3 ריקה גם היא. במצב זה, המערך המלא כולו ישלח לקריאה הרקורסיבית הבאה, ונגיע ללולאה אינסופית. אך מצב זה אינו אפשרי משום שהשגרה DIJKSTRA-PARTITION חוזרת רק כאשר , ולכן אם קבוצה 2 ריקה, אף אחת מהקבוצות 1 ו-3 לא יהיו ריקות. ואם הקבוצה 2 איננה ריקה, הרי שהמערך קטן בהליך הרקורסיה, ולכן במצב זה איננו מגיעים ללולאה אינסופית.*

*לפיכך בהליך חלוקת הרקורסיה, אחד מהקבוצות 1,2,3 בהכרח קטן, ולפיכך בסוף נגיע לתנאי העצירה (כאשר תתי-המערכים יהיו מגודל 0 או 1) והשגרה תעצור.*

*כאשר זה יקרה, נקבל מערך ממוין בסדר עולה.*

*ה.* ***ננתח ראשית את זמן הריצה של השגרה DIJKSTRA-PARTITION:***

*שורות 1-3 ו-14 רצות בזמן קבוע ולכן זמן הריצה יקבע לפי זמן הריצה של הלולאה החיצונית בשורות 4-13:*

*האינדקסים i ו-j מקודמים ומופחתים ב-1 בהתאמה, עד אשר הם "נפגשים ועוברים אחד את השני", ז"א, מתחילים מ- ומתקדמים עד ש-.*

*מספר פעולות הקידום וההפחתה יחד הם לכל היותר n+1 (ומקרה קיצון זה אפשרי כאשר באיטרציה האחרונה ואז שורות 11-12 מבצעות עוד פעולת קידום ופעולת הפחתה).*

*על כל קידום/הפחתה בשורה 6 מתבצעת גם השוואה בשורה 5,*

*על כל קידום/הפחתה בשורה 8 מתבצעת גם השוואה בשורה 7,*

*ועל כל קידום והפתחה בשורה 11-12 מתבצעת גם השוואה בשורה 9 והחלפה בשורה 10.*

*לכן ניתן להעריך את מספר הריצות של פעולות ההשוואה וההחלפה גם הם בn+1, פלוס המקרים הבאים:*

1. *המקרה שבו התנאי של שורה 9 לא מתקיים – ואז אנו יוצאים מהלולאה. סיבוכיות קבועה.*
2. *פעולת ההשוואה בשורות 5 ו-7 המתרחשת כאשר התנאי לא מתקיים, ולכן איננו נספר אל מול פעולת קידום/הפתחה. מדובר בריצה של 2 שורות קוד לכל איטרציה של הלולאה החיצונית. הלולאה החיצונית רצה במקרה הטוב מספר קבוע של איטרציות (כאשר המערך כבר ממוין, לדוגמא), ובמקרה הגרוע רצה כ פעמים (שכן כל איטרציה מבצעת לפחות 2 פעולות קידום/הפחתה, אלא אם זו האיטרציה האחרונה).*

*לכן ניתן להעריך את מספר הפעולות בשגרה כ:*

***כעת נפנה לניתוח זמן הריצה של השגרה DIJKSTRA-QUICKSORT.***

*זמן הריצה של מיון מהיר תלוי במידת האיזון של החלוקה. ככל שהחלוקה יותר מאוזנת, כך האלגוריתם מהיר יותר.*

*נציין שעבור כל המקרים, החלוקה אורכת זמן כפי שהוכח, המיזוג לוקח זמן , ו- שכן מיון מערך ריק לוקח זמן קבוע.*

***המקרה הגרוע*** *מתרחש כאשר מתבצעות החלוקות הגרועה ביותר בלבד. הנ"ל מתרחש כאשר לקבוצה 1 נבחרים n-1 איברים, והאיבר בודד מגיע אל קבוצה 2 או 3, או כאשר לקבוצה 3 נבחרים n-1 איברים ואז האיבר הבודד מגיע אל קבוצה 1 או 2. נניח שחלוקה גרועה ביותר זו מתקבלת בכל קריאה רקורסיבית.*

*לכן הנוסחה הרקורסיבית היא:*

*בעמוד 125 בספר הלימוד, בפסקה "החלוקה הגרועה ביותר", הוכח שהסיבוכיות של הנוסחה הרקורסיבית הזו היא .*

***המקרה הטוב*** *מתרחש כאשר מתבצעות החלוקות הטובות ביותר בלבד. הנ"ל מתרחש כאשר לקבוצה 2 נבחר איבר 1 (זהו המקסימום האפשרי, כפי שהוכח בסעיף ב'), ול2 הקבוצות הנותרות נבחר ו-*  איברים.

*נוסחת הנסיגה לזמן הריצה יהיה במקרה זה:*

*בעמוד 125 בספר הלימוד, בפסקה "החלוקה הטובה ביותר", הוכח שהסיבוכיות של הנוסחה הרקורסיבית הזו היא .*

***במקרה הממוצע*** *מתרחשת תערובת של חלוקות "טובות" ו"גרועות", אשר מפוזרות באקראי על פני כל העץ. לצורך פשטות ההוכחה נניח שהחלוקות הטובות והגרועות מופיעות לסירוגין, כפי שהוצג בספר בעמודים 126-127 בפסקה "הסבר אינטואטיבי למקרה הממוצע" (הסבר יותר מפורט לגבי מדוע ההקלה הזאת לא פוגמת בסיבוכיות נמצאת בהוכחה ההסתברותית שבעמודים 130-132 תחת הסעיף "תוחלת זמן הריצה").*

*אם ניקח חלוקה גרועה שלאחריה מתרחשת חלוקה טובה, נקבל חלוקה חדשה שמכילה בתוכה 2 חלוקות, אשר חלוקתן לוקחת והמיזוג לוקח זמן .*

*החלוקה תתבצע ל2 תתי-בעיות, הראשונה בגודל איברים והשניה בגודל*  איברים.

*מכאן שגם הפעם מתקיים, כמו במקרה הטוב,*

*והסיבוכיות היא עדיין , אם כי הקבוע החבוי בסימן O הוא מעט גדול יותר.*

**שאלה 3:**

*מקרא הצבעים זהה לשל שאלה 1.*

*המערך A הוא:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 60 | 70 | 80 | 90 | 24 | 11 | 5 | 9 | 14 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 |

*נריץ QUICKSELECT(A, p=1, r=15, i=7):*

*ראשית מתבצעת קריאה PARTITION(A, p=1, r=15). זהו אותו PARTITION שהראנו את אופן פעולתו בצורה מפורטת בשאלה 1, ולכן הפעם נציג את החישובים ללא הסברים מפורטים:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | p,j |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | r |
|  | 60 | 70 | 80 | 90 | 24 | 11 | 5 | 9 | 14 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p,i |  |  |  | j |  |  |  |  |  |  |  |  |  | r |
|  | 24 | 70 | 80 | 90 | 60 | 11 | 5 | 9 | 14 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p | i |  |  |  | j |  |  |  |  |  |  |  |  | r |
|  | 24 | 11 | 80 | 90 | 60 | 70 | 5 | 9 | 14 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  |  |  |  |  | i |  |  |  | j | r |
|  | 24 | 11 | 5 | 9 | 14 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 80 | 90 | 60 | 70 | 30 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  |  |  |  |  | i |  |  |  | j | r |
|  | 24 | 11 | 5 | 9 | 14 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

*וערך החלוקה שחוזר מן השגרה הוא q=11.*

*לאחר שורה 4, . פירוש הדבר הוא שאיבר הציר הוא האיבר ה-k הקטן ביותר במערך, כלומר, קיימים בדיוק k-1 איברים הקטנים ממנו.*

*אך האיבר שאנו מעוניינים בו הוא ערך המיקום ה-7, כלומר, האיבר השביעי הקטן ביותר במערך.*

*משום ש, נפנה לחפש את ערך המיקום ה-7 בקבוצה הראשונה של המערך, ז"א, זאת שקטנה מאיבר הציר.*

*נריץ QUICKSELECT(A, p=1, r=10, i=7), שיקרא ל- PARTITION(A, p=1, r=10):*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | p,j |  |  |  |  |  |  |  |  | r |  |  |  |  |  |
|  | 24 | 11 | 5 | 9 | 14 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p,i,j |  |  |  |  |  |  |  |  | r |  |  |  |  |  |
|  | 24 | 11 | 5 | 9 | 14 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  |  |  |  | i,j | r |  |  |  |  |  |
|  | 24 | 11 | 5 | 9 | 14 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

*וערך החלוקה שחוזר מן השגרה הוא q=10.*

*, וזה עדיין לא ערך המיקום ה-7 שמעניין אותנו.*

*משום ש, נריץ QUICKSELECT(A, p=1, r=9, i=7), שיקרא ל- PARTITION(A, p=1, r=9):*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | p,j |  |  |  |  |  |  |  | r |  |  |  |  |  |  |
|  | 24 | 11 | 5 | 9 | 14 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  |  |  | i,j | r |  |  |  |  |  |  |
|  | 24 | 11 | 5 | 9 | 14 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

*וערך החלוקה שחוזר מן השגרה הוא q=9.*

*, וזה עדיין לא ערך המיקום ה-7 שמעניין אותנו.*

*משום ש, נריץ QUICKSELECT(A, p=1, r=8, i=7), שיקרא ל- PARTITION(A, p=1, r=8):*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | p,j |  |  |  |  |  |  | r |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 24 | 11 | 5 | 9 | 14 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p,i | j |  |  |  |  |  | r |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 11 | 24 | 5 | 9 | 14 | 15 | 19 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  | i | j | r |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 11 | 5 | 9 | 14 | 15 | 19 | 24 | 21 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | p |  |  |  |  | i | j | r |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 11 | 5 | 9 | 14 | 15 | 19 | 21 | 24 | 25 | 29 | 30 | 90 | 60 | 70 | 80 |

*וערך החלוקה שחוזר מן השגרה הוא q=7.*

*, והפעם זה ערך המיקום ה-7 שמעניין אותנו. לפי שורה 6, נחזיר את הערך של המיקום ה-7, הרי הוא A[q]=21.*

**שאלה 4:**

*נתון . נניח שהשגרה BLACK-BOX(A,p,r,i) מוצאת את ערך המיקום ה- בזמן לינארי במקרה הגרוע בכל מערך בגודל (הפרמטר מוטמע בתוך הקופסא השחורה).*

*נכתוב אלגוריתם שישתמש בשגרה זו ע"מ לפתור את בעיית הבחירה בזמן לינארי.*

BB-INDEX(A, p, r, i)

1 val 🡨BLACK-BOX(A, p, r, i)

2 for i🡨1 to length[A]

3 do if A[i] == val

4 return i

QUICKSORT-INDEX(A, p, r, i)

1 ► This is the quicksort subroutine defined at the beginning of page 122 in the book.

2 QUICKSORT(A, p, r)

3 return A[]

SELECT-BB(A, p, r, m, i)

1 if p==r

2 then return A[p]

3 n 🡨r-q+1

4 if

5 then q 🡨BB-INDEX(A, p, r,)

6 else

7 then q🡨QUICKSORT-INDEX(A, p, r,)

8 exchange A[q] <-> A[r]

9 q 🡨PARTITION(A, p, r)

10 k 🡨q-p+1

11 if i == k

12 then return A[q]

13 elseif i<k

14 then return SELECT-BB(A, p, q-1, m, i)

15 else return SELECT-BB(A, q+1, r, m, i-k)

***השגרה BB-INDEX:***

*הסבר האלגוריתם בקצרה: משום שהשגרה BLACK-BOX מחזירה את ערך המיקום ה-, ומשום שאנו מעוניינים באינדקס של ערך המיקום המדובר, נשתמש בשגרה BB-INDEX. השגרה סורקת את איברי המערך עד שמגיעה לערך המיקום ואז מחזירה את האינדקס שלו. השגרה שימושית רק למצבים בהם , ובשאר המצבים השגרה לא תחזיר ערך תקין.*

*ניתוח זמן הריצה: זמן הריצה, ודאי, לינארי, שכן השגרה BLACK-BOX רצה בזמן לינארי במקרה הגרוע, וגם הלולאה בשורות 2-4 רצות בזמן לינארי בזמן הגרוע. סיבוכיות הזמן של BB-INDEX היא .*

***השגרה QUICKSORT-INDEX:***

*הסבר האלגוריתם בקצרה: השגרה BB-INDEX שימושית רק למצבים בהם . כאשר , נבצע מיון מהיר ואז נבחר את המיקום ה-iי. (כאשר המערך ממוין, גישה לאינדקס i זהה לגישה לערך המיקום ה-i).*

*ניתוח זמן הריצה (בהתחשב בכך ש): השגרה QUICKSORT רצה במקרה הגרוע ב-*, כמצוין בעמוד 125 בספר הלימוד תחת הפסקה "החלוקה הגרועה ביותר". *מכיוון ש-m הינו פרמטר קבוע, ומתקיים , הרי שגם קבוע, ומתקבל ש-QUICKSORT-INDEX רץ בזמן קבוע.*

***השגרה SELECT-BB:***

*הסבר האלגוריתם בקצרה: השגרה SELECT-BB פותרת את בעיית הבחירה, ז"א, מקבלת מערך ומיקום i ומחזירה את ערך המיקום ה-i במערך.*

*בשורות 1-2 אנו מטפלים במצב של מערך בגודל 1, ומחזירים את הערך היחיד בו.*

*בשורה 3 אנו מחשבים את אורך המערך שאנחנו רצים עליו בהרצה זו.*

*אם , ירוצו שורות 4-5 ,ואנו קוראים לשגרה BB-INDEX* בעזרת הפרמטר . משום שהשגרה BB-INDEX מחזירה את אינדקס ערך המיקום ה-, למעשה נקבל את אינדקס ערך המיקום ה-, הלא הוא אינדקס החציון, כמוגדר בעמוד 152 בהגדרת ערך המיקום – פסקה ראשונה.

אם ,ירוצו שורות 6-7, ואנו קוראים לשגרה QUICKSORT-INDEX בעזרת הפרמטר , שזהו שוב אינדקס החציון, כמוגדר בעמוד 152 בהגדרת ערך המיקום – פסקה ראשונה. השגרה מחזירה את ערך המיקום ה-i.

בשורות 8-9 אנו מחליפים את האיבר האחרון עם איבר החציון, ואז מפעילים את השגרה PARTITION, ובכך מבצעים חלוקה סביב החציון. לאחר שלב זה, המערך יהיה מחולק ל3 חלקים: האיזור שקטן מערך החציון, האיזור ששווה לערך החציון (המכיל רק את איבר החציון), והאיזור שגדול מערך החציון.

בשורות 10-15 אנו בודקים האם *אינדקס החציון הוא i. אם כן, נחזיר את ערכו. אחרת, אם i נמצא לפני אינדקס החציון, נפעיל את השגרה רקורסיבית רק על החלק הראשון (מp עד i-1). ואחרת, i נמצא אחרי אינדקס החציון, ואז נפעיל את השגרה רקורסיבית רק על החלק השני (מi+1 עד r).*

*ניתוח זמן הריצה:*

*בהתאם לתנאי שבשורה 4, תרוץ שורה 5 או 7. זמן הריצה של שורות 5 ו-7 לינאריות, כשל זמן הריצה של השגרה BB-INDEX ו-QUICKSORT-INDEX בהתאמה, שהוכחנו קודם לכן.*

*זמן הריצה של שורה 9 גם היא לינארית, כשל זמן הריצה של השגרה PARTITION, כפי שהוכח בעמוד 89 במדריך הלמידה, בפתרון שאלה ה-5.*

*אם אורך תת המערך הוא , אז כל אחת מהקריאות הרקורסיביות בשורות 14-15 רצה על תת מערך בגודל הקטן מ.*

*כל שאר השורות שלא ציינו במפורש רצות בזמן קבוע.*

*לסיכום, סיבוכיות החלוקה היא , סיבוכיות הטיפול בתת-בעיה בגודל קטן מ גדולה או שווה ל-, וסיבוכיות צירוף הפתרונות היא , ולכן:*

*נזהה שהיא מהתבנית של משפט האב (פרק 4 עמוד 63), עם הפרמטרים*

*(k איזשהו מספר קבוע). משום ש*  *קטן אסימפטומטית מ-, נראה שמתאים להשתמש בסעיף 3 של תנאי האב למציאת הסיבוכיות.*

עבור מתקיים וגם מתקיים התנאי רגולריות עבור , משום שאז מתקיים *, ולכן לפי סעיף 3 של תנאי האב נקבל ש, ומשום ש- נקבל ש:*

אך משום שסיבוכיות החלוקה לינארית, ברור ש-, ועל כן מתקבל .

**שאלה 5:**

1. נניח בשלילה שקיים כך שלסדרה S בת איברים קיימים לכל הפחות ארבעה מספרים החוזרים על עצמם יותר מ פעמים.

יהי האיברים החוזרים על עצמם יותר מ פעמים, ו מספר הפעמים בו הם חוזרים על עצמם (). מתקיים כמובן שסך מספר הפעמים שמופיעים כל אחד מהמספרים הללו, קטן או שווה למספר האיברים הכללי בS, שהיא סדרה בת איברים. לכן:

(\*) כי , ומספר הפעמים הוא ודאי מספר חיובי שלם, ולכן .

וקיבלנו שזו ודאי סתירה.

לכן, הטענה לא נכונה, ומתקיים שב-S קיימים לכל היותר שלושה מספרים החוזרים על עצמם יותר מ פעמים.

1. ראשית נגדיר את השגרה SELECT המפורטת בעמודים 157-158 במדריך הלמידה:

► Modified Partition Subroutine that’s getting the pivot index as a parameter

PARTITION-Q5(A, p, r, k)

exchange A[k] <-> A[r]

► This is the regular partition algorithm from page 122 in the book.

return PARTITION(A, p, r)

► Modified Insertion Sort Subroutine that’s getting the start and end indexes as parameters.

INSERTION-SORT-Q5(A, p, r)

for j🡨p+1 to r

► The body of the loop is the same as the original algorithm from the end of

► page 14 in the book.

do key 🡨 A[j]

i 🡨 j-1

while i>0 and A[i] > key

do A[i+1] 🡨A[i]

i 🡨 i-1

A[i+1] 🡨key

► SELECT algorithm in time in worst case. Translated from the first half of page 158 in the ► book.

SELECT(A, p, r, j)

for i🡨p to r in steps of 5

do end 🡨i+4

► if we overflow, it means we’re in the last group, which has less than 5 items.

if end > r

then end 🡨r

INSERTION-SORT-Q5(A,i,end)

► the median index

median\_idx 🡨

► Now, we exchange items so that the k-group median will be in A[p+(k-1)].

► idx is numbered from 1.

k\_group\_idx 🡨 +1

exchange A[median\_idx] <-> A[p+k\_group\_idx-1]

groups\_count 🡨

► Now we have all the medians between p and p+(groups\_count)-1.

► We run select recursively for all the medians, looking for the medians’ median

► in .

q 🡨 SELECT(A, p, p+(groups\_count)-1, )

q 🡨 PARTITION-Q5(A, p, r, q)

k 🡨 q-p+1

if j == k

then return A[q]

elseif j < k

then return SELECT(A, p, q-1, j)

else

then return SELECT(A, q+1, r, j-k)

וכעת נגדיר את השגרה SELECT-Q5 שנתבקשנו לכתוב בתרגיל. השגרה מקבלת מערך A ומחזירה מערך תשובות ומספר תשובות שהתקבלו.

SELECT-Q5(A)

1 ► answer array

2 ans\_array 🡨create\_array(3)

3 ans\_array\_idx 🡨0

4 ► our threshold. We want to find items that show more often than the threshold.

5 threshold 🡨

6 ► ord\_stat is short for order statistics

7 ord\_stat\_1 🡨 SELECT(A, 1, length[A],)

8 ord\_stat\_2 🡨 SELECT(A, 1, length[A],)

9 ord\_stat\_3 🡨 SELECT(A, 1, length[A],)

10 cnt1 🡨cnt2 🡨cnt3 🡨0

11 for i🡨1 to length[A]

12 do if A[i] == ord\_stat\_1

13 then cnt1 🡨cnt1 + 1

14 do if A[i] == ord\_stat\_2

15 then cnt2 🡨cnt2 + 1

16 do if A[i] == ord\_stat\_3

17 then cnt3 🡨cnt3 + 1

18 if cnt1 > threshold

19 then ans\_array\_idx 🡨 ans\_array\_idx + 1

20 ans\_array[ans\_array\_idx] 🡨 ord\_stat\_1

21 if cnt2 > threshold

22 then ans\_array\_idx 🡨 ans\_array\_idx + 1

23 ans\_array[ans\_array\_idx] 🡨 ord\_stat\_2

24 if cnt3 > threshold

25 then ans\_array\_idx 🡨 ans\_array\_idx + 1

26 ans\_array[ans\_array\_idx] 🡨 ord\_stat\_3

27 return ans\_array, ans\_array\_idx

*הסבר האלגוריתם*: בתרגיל הקודם הוכחנו שקיימים ב-S לכל היותר שלושה מספרים החוזרים על עצמם יותר מ- פעמים. נעזר באלגוריתם בחירה. נבחין שאם A היא הקבוצה הממוינת של S, אז ערך המיקום ה-i ב-S הוא הערך של .

לפיכך, במקום למיין את הרשימה (ב) ואז לגשת לאיבר נוכל לגשת לערך המיקום ה-iי (ב).

כל מספר המופיע פעמים או יותר, יוצר ב-A רצף של (או יותר) ערכים זהים. לכן, אם נחלק את המערך ל4 חלקים שווים (או כמעט שווים), ונפנה אל , בודאות נגיע למספרים האלה.

נבחין ש:

1. בין אינדקס 1 (כולל) לאינדקס (לא כולל) במערך קיימים איברים.
2. בין אינדקס לאינדקס (לא כולל קצוות) במערך קיימים איברים.
3. בין אינדקס לאינדקס (לא כולל קצוות) במערך קיימים איברים.
4. בין אינדקס (לא כולל) לאינדקס (כולל) במערך קיימים איברים.

*יהי x מספר אשר יוצר* ב-A רצף של לפחות , ערכים זהים.

ברור שלא ניתן לשים אותו באחת מן הקבוצות 1,2,3,4, שכן הקבוצות קטנות מדי (טריוויאלי עבור 1,2,3, עבור קבוצה 4 מתקיים ).

לכן אם *x מספר אשר יוצר* ב-A רצף של לפחות ערכים זהים, הוא בהכרח נמצא באחד המקומות .

ערכי מיקום אלה אינם בהכרח פתרונות, אך הם חשודים ככאלה. עלינו לספור כמה פעמים הם מופיעים במערך.

בשורות 1-3 אנו מאתחלים את מערך התשובות.

בשורה 5 אנו מחשבים את הסף, כאשר אנו מעוניינים למצוא את המספרים שמספר הפעמים שהם מופיעים במערך גדול מסף זה.

בשורות 7-9 אנו משתמשים בשגרת הSELECT שהגדרנו ע"מ למצוא את ערכי המיקומים.

בלולאה בשורות 10-17 אנו רצים על המערך וסופרים כמה פעמים מופיעים המספרים החשודים כתשובות.

בשורות 18-26 אנחנו בודקים האם מספר הפעמים שהם מופיעים עבר את הסף. אם כן, המספר מתווסף למערך הפתרונות.

ובשורה 27 אנו מחזירים את מערך הפתרונות ואת מספר הפתרונות שנמצא.

*ניתוח זמן הריצה*:

שורות 1-5 רצות בזמן קבוע.

שורות 7-9 רצות כל אחד בזמן של כפי שהוכח בעמוד 159.

מספר האיטרציות בלולאה בשורות 10-17 הוא כגודל המערך – n.

בכל איטרציה אנו מבצעים מספר קבוע של פעולות, ולכן הלולאה כולה רצה בזמן של .

השורות 18-27 רצות בזמן קבוע.

לפיכך, השגרה כולה רצה בזמן של .