ממן 12

# שאלה 1

1. נפתור באמצעות הנוסחה לפונקציה שחיכות בעמוד 45 במדריך הלימוד, שיטת האב מקרה 3 מורחב, נסמן

ניראה כי מקרה 1 מתקיים לכן הפתרון הוא:

1. נפתור לפי שיטת עכרה-באזי, נבדוק תחילה שתנאי השיטה מתקיים

נמצא את נגזרת הפונקציה

1. נפתור באמצעות הנוסחה לפונקציה שחיכות בעמוד 45 במדריך הלימוד, שיטת האב מקרה 3 מורחב, נסמן . ניתן לראות כי מתקיים

לכן הפתרון הוא:

1. נפתור באמצעות שיטת האיטרציה

קיבלנו סכום של 2 טורים, הטור השמאלי נקרא טור הרמוני ומתכנס ל(על פי עמוד 271 בספר הלימוד). הטור הימני מתכנס למספר קבוע(בעיית באזל) ולכן הפתרון הוא

1. נחלק את שני האגפים ב

נגדיר ונסמן את הפונקציה , נציב

נשתמש בשיטת האב, ניראה כי מקרה 1 מתקיים(בגלל החילוק)

# שאלה 2

1. **כיוון אחד:** נניח שהמערך הוא מערך מונז', נוכיח שהביטוי הבא מתקיים:

ההוכחה היא טריוויאלית משום שמדובר במקרה פרטי של מערך מונז'.

**כיוון שני:** נוכיח על השורות באמצעות אינדוקציה שהביטוי הבא מתקיים עבור כל k

נראה שמקרה בסיס של האינדוקציה נכון עבור בהתאם לנתון.

נניח כי הביטוי נכון עבור .

נוכיח כי הביטוי נכון עבור ומתקיים:

על פי הנתון, נציב

נחבר את שני האי-שוויוניים

*נבצע את אותה הוכחה על העמודות: נוכיח על העמודות באמצעות אינדוקציה שהביטוי הבא מתקיים עבור כל*

מקרה בסיס של האינדוקציה, עבור בהתאם לנתון, נכון

נניח כי הביטוי נכון עבור .

נוכיח כי הביטוי נכון עבור ומתקיים:

על פי הנתון:

נחבר את שני האי-שוויוניים

*הוכחנו עבור השורות ועבור העמודות בנפרד, משילוב 2 הוכחות אלה ניתן להסיק כי המערך A הוא מערך מונז'.*

1. להחליף את איבר מ22 ל24.
2. נוכיח בסתירה, נניח כי קיימים המקיימים . לכן לפי ההגדרה של מערך מונז' אמור להתקיים הביטוי הבא:

כמו כן לפי ההגדרה של הפונקציה מתקיים:

מכאן נובע:

מחיבור האי שוויונים נקבל את השוויון הבא

משום ש הם איברי מינימום, על איברי אגף ימין להיות שווים לאיברי אגף שמאל. נניח שמתקיים :

קיבלנו סתירה משום ש לא יתכן שהנקודות יתלכדו.

*נניח שמתקיים:*

אבל גם זה לא יתכן משום שנקבל שהנקודות מתלכדות אך לפי הנתון בתחילת השאלה אנו יודעים שלא מדברים על אותם נקודות. לכן קיבלנו סתירה והוכחנו כי מתקיים לכל מערך מונז':

1. בהמשך לסעיף ג',

אם ידוע לנו כי אינדקס המינימום בשורה הוא ובשורה הוא ניתן להסיק כי אינדקס המינימום של השורה נמצא בינהם , סה"כ נצטרך לעבור תאים במקרה הגרוע על מנת למצוא את המינימום באותו מקטע, פעמים(מספר השורות האי-זוגיות). נסכום את העבודה:

1. יש לנו שגרה שבכל פעם קוראת לעצמה עם חצי מהשורות ובנוסף עושה עבודה של להשלמת המשימה. לכן נוסחת הנסיגה שלנו תיראה כך:

נפתור באמצעות שיטת האיטרציה:

# שאלה 3

1. *כמות האיברים בכל רמה היא . כל איבר על מנת לדעת אם צריך לבצע שינוי מקום מבצע 2 השוואות כתלות בגובה שלו בעץ. נקבל את המשוואה הבאה:*

נשתמש בנוסחה לחישוב סדרה הנדסית ונקבל:

קיבלנו שבמקרה הגרוע ביותר יתבצעו לכל היותר השוואות.

1. נניח שאנחנו מדברים על המקרה הגרוע של השגרה build-max-heap כאשר המערך ממויין בסדר עולה. בגובה 1 תתבצע ההשוואה . בגובה 2 יתבצעו 2 השוואות , לאחר מכן עוד שתיים בין .

תתבצע החלפה בין 2 ל8 ולאחר מכן עוד השוואה אחת .  
בגובה 3 יתבצעו שתי השוואות נוספות , יתבצע חילוף בין 1 ל8 ואז 1 יצטרך לבצע עוד 2 השוואות על מנת לחלחל לתחתית משום שהוא המינימום. סה"כ קיבלנו 10 השוואות.

1. (אני מציין את הרעיון על ערמת מקסימום אבל מדובר באותו רעיון גם עבור ערמת מינימום) נחלק את 8 האיברים לזוגות ונבצע השוואה בניהם, סה"כ בנתיים השתמשנו ב4 השוואות.

ניקח 2 איברים שאחרי השוואה ראינו שהם האיברים הגדולים יותר בזוג ונבצע בניהם השוואה, באמצעות השוואה זאת נוכל לבנות עץ בן 4 צמתים(הגדול מבניהם יהיה השורש של התת-ערמה). נעשה את אותו הדבר על 4 האיברים הנותרים.

נקבל 2 ערמות מקסימום בעלות 4 צמתים כל אחת בעזרת 6 השוואות.

כעת נבצע השוואה נוספת בין השורשים של שתי הערמות, האיבר הגדול ביותר מבניהם יהיה השורש של הערמה.

באותה ערמה שנמצא המקסימום נבצע השוואה נוספת כדי לדעת איזה איבר יהיה שורש התת ערמה החדשה אחרי שהוצאנו את השורש הקודם להיות המקסימום. סה"כ 8 השוואות.

1. נחלק את המערך ל2 מערכים בני 8 איברים, באמצעות הרעיון מהסעיף הקודם נבנה את הערמות בעזרת 8 השוואות. סה"כ כרגע 16 השוואות. נבדוק בין 2 השורשים מי יהיה השורש של הערמה הסופית. נסתכל על הערמה של האיבר הגדול בהשוואה, נעשה השוואה בין 2 איברים שהיו תחתיו, במקרה הגרוע הצד הלא שלם של הערמה הוא יהיה האיבר הגדול ולכן נצטרך לבצע עוד השוואה כדי לאזן את הערמה. סה"כ 19 השוואות.

# שאלה 4

הרעיון: נשתמש ב2 ערמות אשר ערמה אחת תכיל את האיברים הגדולים מהחציון וערמה שניה תכיל את המספרים הקטנים מהחציון. את הערמה של המספרים הגדולים מהחציון נגדיר כmin-heap, את הערמה של המספרים הקטנים מהחציון נגדיר כmax-heap.

בכל הזנה נשמור שההפרש בין 2 הערמות לא יהיה גדול מ1, במקרה שערמה אחת גדולה מערמה שניה נעביר מהערמה הגדולה יותר את השורש לערמה השניה.

כל אחת מהערמות הנ"ל נשכפל ונעשה בהתאם max-heapify או min-heapify. סה"כ 4 ערמות כאשר כל 2 עם איברים זהים אך סדר שונה. בנוסף יהיה מערך עם מצביעים לכל האיברים לתיאום בין הערמות המשוכפלות.

נניח שאנחנו מדברים על 2 הערמות של האברים הקטנים מהחציון(אותו הדבר תקף גם על האברים הגדולים מהחציון רק הפוך): בערמה שמסודרת כmax-heap השורש הוא האיבר הקרוב ביותר לחציון. בערמה min-heap השורש הוא האיבר הקטן ביותר מהרשימה שהוזנה.

השגרה BUILD: מבצעת את הפעולות הנ"ל, נצטרך לבצע 4 פעמים את הפעולה build-heap אשר לפי הספר עמוד 113 היא פעולה לינארית. לכן סיבוכיות הזמן תיהיה כנדרש.

*השגרה INSERT: נבדוק אם האיבר גדול או קטן מהחציון ונשתמש בheap-insert לערמה המתאימה, עמוד 117, סיבוכיות הזמן של heap-insert היא O(lg n) ולכן גם הסיבוכיות של השגרה הנ"ל.*

*השגרה DEL-MAX: ניגש לערמות עם האיברים הגדולים מהחציון, נילך לערמה שמגודרת כmax-heap ונמחוק את השורש בעזרת השגרה heap-extract-max לפי הספר עמוד 116. בעזרת מערך המצביעים שלנו נמחק את הmax מהמערך המשוכפל בעזרת השגרה decrease-key כך שהאיבר יבעבע לשורש ואז נמחק בעזרת heap-extract-min. מדובר ב3 שגרות שסיבוכיות הזמן של כל אחת מהן הוא המבוצעות בצורה לינארית לכן סיבוכיות הזמן היא כנדרש.*

*השגרה DEL-MIN: מבצעת את אותו הדבר כמו DEL-MAX רק הפוך. ולכן השגרה גם כן בעל סיבוכיות O(lg n)*

*השגרה DEL-MID: נבצע בדיקה על גודל הערמות, אם קיימת ערמה גדולה יותר סימן שיש מספר אי זוגי של איברים ולכן בערמה הגדולה יותר נמחק את השורש. במקרה והערמות זהות בגודל סימן שיש מספר זוגי של איברים אז זה לא משנה לנו איזה מאיזה ערמה למחוק את השורש, לכן נבחר אחת באקראי. במקרה והערמה של המספרים הגדולים מהחציון גדולה יותר נמחק את השורש מהערמה שמסודרת min-heap, במקרה והערמה של המספרים הקטנים מהחציון גדולה יותר נמחק את השורש מהערמה שמסודרת כmax-heap. בעזרת מערך המצביעים נמחק גם כן במערך המשוכפל. פעולה זאת היא בעצם heap-extract-min/max בהתאם ולכן סיבוכיות הזמן של השגרה הנ"ל היא .*

*הערה: אני יוצא מנקודת הנחה שקיימות שיגרות שלא במסגרת הקורס/החומר הנלמד שיטפלו בבעיות כמו תיאום בין הערמות הכפולות בעזרת המערך מצביעים וכו'. זה הפתרון הכי טוב שהצלחתי להגיע אליו.*