**שאלה 1:**

* 1. עבור מיון הכנסה
  2. עבור מיון מיזוג

1. במקרה הגרוע ביותר שבו המערכים ממוינים בסדר הפוך: כמובן שעדיף מיון מיזוג

נחשב עבור אלו ערכי  *מיון מיזוג מתחיל להיות עדיף על מיון הכנסה:*

*תחילה נבדוק עבור אלו ערכי n מתקיימת המשוואה*

*נקבל את הערכים (התקבל אחרי הרבה ניסויים של מספרים!)*

*נבדוק ונוודא את הטווחים שביניהם.*

*(אין מה לעסוק במקרה בו )*

*עבור מיון מיזוג = 0 בעוד מיון הכנסה = 4 ולכן מיון הכנסה עדיף*

*עבור מיון מיזוג = 22055.97835 ומיון הכנסה = 21904 ולכן עדיין מיון הכנסה עדיף*

*עבור מיון מיזוג = 22423.74729 ומיון הכנסה = 22500 וכאן כבר מיון מיזוג עדיף*

*ומכיוון שאין עוד ערכים שבהם המשוואה "מתהפכת" נסתמך על כך שזה מה שיקרה עד האינסוף.*

1. *במקרה הטוב בו המערך ממוין בסדר עולה:*

*עבור מיון הכנסה:*

*הלולאה הפנימית תבצע 0 איטרציות בכל פעם ולכן למעשה לא תתבצע אף פעם, ולכן נניח שכל איטרציה בלולאה החיצונית מבצעת פעולות, אז*

1. *במקרה הטוב בו המערך ממוין בסדר עולה:*

*עבור מיון מיזוג:*

***הפרד:*** *צעד זה קבוע ונשאר*

***משול:*** *צעד זה לא משתנה גם במקרה הטוב שבו המערך ממויין משום שהוא פותר בצורה רקורסיבית דומה ללא התחשבות בסידור המערך ולכן גם הוא נשאר*

***צרף:*** *צעד זה קבוע ונשאר*

*לכן, ראינו שבמיון מיזוג אין הבדל בשום שלב של האלגוריתם וניתוח האלגוריתם שמתחשב בכך שהמערך ממוין בסדר עולה (עבור המקרה הטוב ביותר) ולכן זמן הריצה נשאר*

1. *השינוי: בדיקה במעבר על כל המערך האם הוא ממוין, ואם כן – לא לבצע את המיון.*

*הסבר: העלות של בדיקה האם מערך ממוין היא ולכן אם במקרה הטוב, המערך ממוין אז תמיד הבדיקה תצליח ולא נצטרך למיין את המערך עם העלויות הכרוכות בכך, ולכן זמן סדר גודל זמן הריצה תמיד ישאר זה של בדיקת מיון המערך שהוא*

*נשים לב שבאלגוריתם של מיון הכנסה שמתואר בספר מתבצעת כבר בדיקה, והיעילות של אלגוריתם זה במקרה הטוב הוא כבר*

*בשאר האלגוריתמים קל להוסיף את הבדיקה*

**שאלה 2:**

1. *לאחר הרצה יבשה במספר מקרים התקבל שבכל המספרים שנמצאים באינדקסים הפריקים (כלומר שאינם ראשוניים) מתאפסים.*

*נוכיח את הטענה בעזרת שמורות הלולאות.*

*נתחיל בלולאה הפנימית:*

*בתחילת כל איטרציה של לולאת ה-for עבור אינדקס j חיצוני שעבורו מתקיים והאינדקס של הלולאה הפנימית הוא j, התת מערך מורכב מאיברים שערכם 0 בכל האינדקסים שמתחלקים בi כלומר האינדקסים שבהם הוא גורם (בהגדרה המתמטית כגורם של מספר פריק – אחד מאיברי ההכפלה) של ערך האינדקס*

*אתחול:*

*שמורת הלולאה נכונה לפני האיטרציה הראשונה.*

*כאשר תת המערך מורכב מ2 איברים קבועים*

*ובגלל ש 0 לא יכול לשמש כגורם ע"פ ההגדרה - שמורת הלולאה מתקיימת.*

*תחזוקה:*

*אם שמורה הלולאה נכונה לפני איטרציה של הלולאה אז היא נכונה גם לפני האיטרציה הבאה.*

*נניח ששמורה הלולאה נכונה לפני האיטרציה הנוכחית, כלומר התת מערך מורכב מאיברים שערכם 0 באינדקסים שבהם הוא גורם (בהגדרה המתמטית כגורם של מספר פריק – אחד מאיברי ההכפלה) של ערך האינדקס*

*הלולאה תאפס את הערך בשנמצא באינדקס הפריק שמורכב מהגורמים (כלומר עבור האינדקס הפריק הגורמים הם ו-ולכן*

*ולכן איטרציה של הלולאה משמרת את שמורת הלולאה*

*סיום:*

*כאשר הלולאה מסתיימת, שמורת הלולאה נשארת נכונה.*

*התנאי שעוצר את הלולאה הוא*

*משום שהלולאה מגדילה את ב1 כל איטרציה, בהכרח נגיע ל לפי שמורת הלולאה התת מערך מורכב מאיברים שערכם 0 באינדקסים שבהם הוא גורם (בהגדרה המתמטית כגורם של מספר פריק – אחד מאיברי ההכפלה) של ערך האינדקס ולכן המערך מכיל ערכי 0 בכל האינדקסים שבהם הוא גורם של ערך האינדקס*

*הבחירה ב מספיקה, משום שלא ייתכן מספר שגדול מ שישמש כגורם (שוב, במובן המתמטי) למספר שקטן מ.*

*כעת נעבור ללולאה החיצונית:*

*בתחילת כל איטרציה של לולאת ה-for עבור אינדקס המערך מורכב מאיברים שערכם 0 באינדקסים הפריקים בין 1 ל*

*אתחול:*

*שמורת הלולאה נכונה לפני האיטרציה הראשונה.*

*עבור , 1 אינו פריק, ולכן אין איברים פריקים בין 1 לi ושמורה הלולאה מתקיימת (באופן ריק).*

*תחזוקה:*

*אם שמורה הלולאה נכונה לפני איטרציה של הלולאה אז היא נכונה גם לפני האיטרציה הבאה.*

*נניח ששמורה הלולאה נכונה לפני האיטרציה הנוכחית, כלומר המערך מורכב מאיברים שערכם 0 באינדקסים הפריקים בין 1 ל .כעת נחלק למקרים:  
במידה ו אז ערך האינדקס i הוא מספר פריק, משום שהוא אופס בשלב כל שהוא, על ידי הלולאה הפנימית, ולכן כל הערכים באינדקסים שהוא משמש להם כגורם (אחד מגורמי המכפלה של ערך האינדקס) כבר מאופסים משום שהם אופסו על ידי אחד הגורמים של i*

*במידה ו הלולאה הפנימית מאתחלת את כל הערכים בA שנמצאים באינדקס שבו i משמש כגורם, ומאפסת אותם (הוכחנו את נכונות הלולאה הפנימית).*

*ולכן איטרציה של הלולאה משמרת את שמורת הלולאה.*

*סיום:*

*כאשר הלולאה מסתיימת, שמורת הלולאה נשארת נכונה.*

*התנאי שעוצר את הלולאה הוא*

*משום שהלולאה מגדילה את ב1 כל איטרציה, בהכרח נגיע ל לפי שמורת הלולאה המערך מורכב מאיברים שערכם 0 באינדקסים הפריקים בין 1 ל ולכן המערך מכיל ערכי 0 בכל האינדקסים הפריקים שלו.*

*הבחירה ב מספיקה, משום שלא ייתכן מספר שגדול מ שישמש כגורם (שוב, במובן המתמטי) למספר שקטן מ.*

1. *זמן הריצה של השגרה (בסדר גודל) הוא*

*הסבר: הלולאה החיצונית מתבצעת פעמים שבסדר גודל מדובר ב*

*הלולאה הפנימית מתקיימת רק עבור אינדקסים שערך המערך במקומם הוא 0 כשהערך הוא 0 רק עבור אינדקסים פריקים.*

*ולכן הלולאה הפנימית תתבצע כמספר המספרים הפריקים בטווח זה = לגודל טור ההופכיים הראשוניים.*

*לפי התשובה בפורום שבמקרה זה מספיק למצוא חסם עליון הדוק ככל הניתן, ומכיוון שניתן לחסום את טור ההופכיים של המספרים הראשוניים ע"י טור המספרים ההרמוני נשתמש בחסם של טור המספרים ההרמוני מהנספח בעמוד 275 בספר שהוא ולכן גם הלולאה הפנימית חסומה מלמעלה ע"י*

*ולכן בסך הכל זמן הריצה של השגרה הוא .*

**שאלה 3:**

*תחילה נכתוב את הנתונים שבהם אנחנו בטוחים לגבי כל פונקציה:*

*נימוק: פונקציה פולינומית () חיובית גדלה מהר מאשר פונקציה פולילוגריתמית ()*

*נימוק: אנחנו מסתכלים על הפונקציה רק בערכים שמתקרבים לאינסוף, ולכן מתעלמים מהמצבים בהם*

*כעת ננסה להסיק מסקנות על היחסים ביניהם*

***טענה:***

*הוכחה:*

*הוכחה: ע"פ עמוד 47 בספר למעלה ולכן:*

*ולכן*

***טענה:***

*הוכחה:*

*הוכחה: השוויון האחרון נובע מעמוד 34 במדריך הלמידה, כלומר מכך ש נובע גם*

*ולכן*

***טענה:***

*הוכחה: נובע מטרנזיטיביות ומהטענות הקודמות שהוכחנו ( ו ).*

***טענה:***

*הוכחה:*

*נימוק: וכלל מאינפי*

*ולכן*

***טענה:***

*הוכחה:*

*תחילה נניח שn אי זוגי ולכן ומרפלקסיביות נקבל.*

*כעת נניח שn זוגי : ו*

*ובנוסף*

*נימוק: (המעבר האחרון) (אינפי 1 ) ואז כלל (אינפי 1)*

*ולכן: ובפרט מההגדרה*

***טענה:***

*הוכחה: נניח תחילה שn זוגי ובנוסף נניח שהוא גדול מ2 => n פריק. ובמקרה זה*

*ומרפלקסיביות נקבל*

*כעת נניח שn אי זוגי:*

*תחילה נניח שn ראשוני => ו*

*ומכיוון ש*

*נקבל מההגדרה ש ובפרט*

*כעת נניח שn פריק => ו*

*ומכיוון ש*

*ומההגדרה*

*ולכן הוכחנו בכל המקרים את הטענה ש.*

***טענה:*** *לכל*

*הוכחה:*

*עבור :  
 ועבור n מספיק גדול*

*ומכיוון נקבל ע"פ ההגדרה*

*עבור :*

*נובע מטרנזיטיביות ומהטענות שהוכחנו ש ו*

*עבור :*

*נובע מטרנזיטיביות ומהטענות שהוכחנו ש ו*

*עבור :*

*נובע מטרנזיטיביות ומהטענות שהוכחנו ש ו*

*עבור :*

*נובע מטרנזיטיביות ומהטענות שהוכחנו ש ו*

***טענה:*** *לא ניתן לקבוע יחס בין ל*

*הוכחה: נניח n זוגי => ו*

*במקרה זה*

*כלומר עבור n זוגי מתקיים ובפרט ע"פ ההגדרה מתקיים*

*כעת נניח n אי זוגי => ו*

*נימוק למעבר האחרון: ע"פ לופיטל (אינפי 1)*

*כלומר עבור n אי זוגי מתקיים ובפרט ע"פ ההגדרה מתקיים*

*ומכיוון שתכונות הזוגיות והאי זוגיות נמשכות עד אינסוף, לא ניתן לקבוע יחס קבוע בין ל*

*נוכיח את זה בצורה יותר פורמאלית:*

*מ עבור ערכים זוגיים נובע ע"פ ההגדרה ש:*

*לכל קיים כך שלכל כך ש זוגי מתקיים*

*מ עבור ערכים אי זוגיים נובע ע"פ ההגדרה ש:*

*לכל קיים כך שלכל כך ש אי זוגי מתקיים*

*וכעת יהי*

*לעולם לא נוכל למצוא שמקיים שלכל יתקיים אחד היחסים הנל, משום שהמספרים הזוגיים והאי זוגיים ממשיכים עד אינסוף.*

*לכן לסיכום הוכחנו:*

*לכל ולכן לכל*

*מטרנזיטיביות קל לראות ולהשלים את מה שחסר:*

*ולסיכום סופי:*

*(בין ובין לא ניתן לקבוע יחס)*

*לכל*

**שאלה 4:**

תחילה נכתוב את הפונקציות בצורה אחרת ע"פ עמוד 33 במדריך הלמידה:

לכן ננסה להתחיל להרכב סידור שמקיים את תנאי השאלה:

נתחיל עם ו:

*נימוק למעבר האחרון: וכלל מאינפי 1*

*ולכן ע"פ ההגדרה ובפרט*

*כעת נמשיך עם ו :*

ננסה להציב ונקבל

*נימוק למעבר האחרון: (ע"פ לופיטל)*

*ולכן ע"פ ההגדרה ובפרט*

*כעת נמשיך עם ו :*

ננסה להציב ונקבל

אז לכל y>0 מתקיים:

(אפשר גם ע"י גבולות: )

*ולכן ע"פ ההגדרה ובפרט*

*כעת נמשיך עם ו :*

*נימוק: המעבר האחרון משום ש מאינפי 1 מכלל*

*ולכן ע"פ ההגדרה ובפרט*

*כעת נמשיך עם ו :*

*תחילה קל להסיק שלכל*

*ולכן*

*כעת מכיוון ש: (המעבר האחרון מנומק בפירוט בהוכחות קודמות)*

*אז ע"פ ההגדרה ובפרט*

*ולכן מטרנזיטיביות נקבל*

*כעת נמשיך עם ו :*

*תחילה ובפרט*

*כעת:*

*ולכן ע"פ ההגדרה ובפרט*

*ומטרנזיטיביות נסיק*

*כעת נמשיך עם ו :*

*המעברים בעזרת לופיטל, המעבר האחרון גם בעזרת לופיטל ()*

*ולכן ע"פ ההגדרה ובפרט*

*כעת נמשיך עם ו :*

*המעבר האחרון ע"פ כלל מאינפי 1*

*ולכן ע"פ ההגדרה ובפרט*

*כעת נמשיך עם ו :*

*חישוב עזר: נחשב את*

*נימוק: ולכן*

*המעבר האחרון- חוק השרשרת*

*ולכן ע"פ ההגדרה ובפרט*

*כעת נמשיך עם ו :*

*כעת נפשט את הביטוי*

*ע"פ חוקי חזקות*

*ע"פ חוק הלוגריתמים ולכן*

*ע"פ חוק =>*

*ונמשיך בעזרת לופיטל:*

*ולכן ע"פ ההגדרה ובפרט*

*כעת נמשיך עם ו :*

*כעת נחשב את :*

*חישובי עזר:*

*(אינפי 1 אריתמטיקה של גבולות ו)*

*חישובי עזר:*

*נימוקים: פעמים לופיטל, ואריתמטיקה של גבולות*

*לכן לסיכום*

*ולכן על פי כלל :*

*ולכן ע"פ ההגדרה ובפרט*

*כעת נמשיך עם ו :*

*נחשב את :*

*מהנוסחה נקבל*

*נימוק: מכך ש*

*כעת נקבל*

*נימוק: מאינפי 1 מכלל*

*ולכן ע"פ ההגדרה ובפרט*

*כעת נמשיך עם ו :*

*כעת נחשב את :*

*נימוק למעבר האחרון: אריתמטיקה של גבולות, כלל השרשרת ()*

*נימוק למעבר האחרון: אריתמטיקה של גבולות, כלל מאינפי 1*

*ולכן ע"פ ההגדרה ובפרט*

*כעת נמשיך עם ו :*

*נוכיח את המעבר האחרון על ידי הוכחה ש*

*ואת זה נוכיח על ידי כלל ועל ידי הוכחה ש*

*חישוב עזר: נוכיח ש*

*חישוב עזר: נוכיח ש*

*נציב*

*ולכן*

*ולכן ע"פ ההגדרה ובפרט*

*לסיכום, הסדר הוא:*

מכיוון שהוכחנו את כל היחסים בצורה של אז בפרט לא יתכנו 2 פונקציות באותן מחלקות שקילות, ולכן נגדיר מחלקות שקילות:

מחלקה 1:

**שאלה 5:**

*נשתמש במשפט האב, נשים לב ש:*

*ובנוסף:*

*ולכן*

*ולכן:*

*וע"פ מקרה 2 של משפט האב נקבל:*

1. *לכל*

*נשתמש במשפט אב, נשים לב ש:*

*ובנוסף:*

*, לכל*

*נחלק למקרים:*

*תחילה נניח :*

*,*

*ולדוגמא עבור מתקיים*

*וע"פ מקרה 1 של משפט האב נקבל:*

*כעת נניח :*

*במקרה זה מתקיים נבחר לדוגמא ונקבל*

*בנוסף נחפש שמקיים עבור ערכי n מספיק גדולים מתקיים:*

*זה מתקיים עבור ומאחר ש זה יתקיים לכל c שמקיים את התנאי*

*וע"פ מקרה 3 של משפט האב נקבל:*

*כעת נניח :  
במקרה זה מתקיים*

*ולפי מקרה 2 של משפט האב נקבל:*

*כעת נניח :*

*במקרה זה מתקיים ולכן נבחר לדוגמא ונקבל:*

*ולפי מקרה 1 של משפט האב נקבל:*

*נשתמש במשפט אב, נשים לב ש:*

*ובנוסף:*

*ולכן*

*וכעת נשים לב:*

*ולכן ע"פ מקרה 2 המורחב של משפט האב נקבל:*

נבצע החלפת משתנים:

, כלומר : , ונקבל:

*נגדיר* פונקציה חדשה כך ש:  *ונקבל:*

*נשתמש במשפט אב, נשים לב ש:*

*ובנוסף:*

*וכעת נשים לב:*

*ולכן ע"פ מקרה 2 המורחב של משפט האב נקבל:*

*ולכן מאחר שו*

*נקבל ש*

*(או בכתיב קצר )*

נבצע החלפת משתנים:

, כלומר : , ונקבל:

*נגדיר* פונקציה חדשה כך ש:  *ונקבל:*

*נשתמש במשפט אב, נשים לב ש:*

*ובנוסף:*

*ולכן:*

*וע"פ מקרה 2 של משפט האב נקבל:*

*וכעת מאחר שו*

*נקבל ש*

*נחלק ב ונשים לב:*

*כעת נסמן*

*ונקבל*

נבצע החלפת משתנים:

, כלומר : , נסמן

*ונקבל:*

*נשתמש במשפט אב, נשים לב ש:*

*ובנוסף:*

*כעת נבחר לדוגמא*

*ומכיוון ש*

*אז ובפרט*

*ולכן עבור מתקיים .*

*כעת עבור ולכן לכל*

*וע"פ מקרה 3 של משפט האב נקבל:*

*ולכן*

*ולכן לסיום:*