**שאלה 1:**

1. הרעיון הכללי: האיבר המינימלי בערימת מקסימום יכול להיות רק באחד העלים, ולכן נשווה בין כל העלים.

ניעזר בשאלה 6.1-7 בספר שבה מוכיחים שהעלים של ערימה בת n איברים הם הצמתים בעלי האינדקסים

*ולכן נוכל לעבור על כל האיברים מסוף המערך המייצג את הערימה עד האינדקס*

נכתוב את השגרה:

FIND\_MIN\_ELEMENT\_IN\_MAX\_HEAP(A)

נוכיח שמתבצעות פחות מ השוואות:

עבור n=1

מתבצעות 0 השוואות (אי אפשר פחות)

עבור n=2

מתבצעות 0 השוואות (עוברים רק על עלה 1)

עבור n=3

מתבצעת השוואה 1 (יש 2 עלים)

...

לכל ערימה יש לכל היותר עלים ולכן מתבצעות לכל היותר השוואות.

(הערה: בסעיף ב לא עליתי על הפתרון האופטימלי (שהוא הפתרון שאני מציג בסעיף ג) אבל עדיין הפתרון שאני מציג כאן אמור לעבוד ולעמוד בדרישות הסיבוכיות, למרות שהפתרון יכול להיות זהה בדיוק כמו סעיף ג)

הרעיון הכללי:

*תחילה נוכיח שהאיבר בגודלו בערימת מקסימום יכול להימצא לכל היותר ברמה ה:*

*נשים לב לנתון מעניין של max heap, איבר ברמה ה מכיל בהכרח אבות קדמונים שלפי הגדרת ערימת מקסימום בהכרח יותר גדולים ממנו, ולכן אינו יכול להיות אחד מ האיברים הכי גדולים בערימה.*

*ולכן בפרט עבור האיבר ה10 הגדול ביותר נמצא לכל היותר ברמה ה10.*

*כעת, נוכל לקחת את כל האיברים שנמצאים עד הרמה ה10 ולהעתיק אותם למערך,*

*מספר האיברים שנמצאים עד הרמה הk הם (כאשר h הוא גובה הרמה הk)*

*בעזרתו נבנה ערמת מקסימום, שבעזרת 10 שליפות ממנה נקבל את האיבר ה10 בגודלו.*

FIND\_10\_ MAX\_ELEMENT\_IN\_MAX\_HEAP(A)

*הסבר זמן ריצה:*

*זמן הריצה של הלולאה הראשונה הוא גם הוא כמספר האיברים עד הרמה ה10 שהוא*

*זמן הריצה של הוא (ע"פ עמוד 111 בספר) אולם במקרה שלנו בגלל שגודל המערך ידוע וקבוע יהיה*

*זמן הריצה של הלולאה השניה הוא לכול היותר כגודל המערך שהגדרנו ולכן גם הוא קבוע ויהיה*

*זמן הריצה של הוא (ע"פ עמוד 119 בספר) אולם במקרה שלנו בגלל שגודל המערך ידוע וקבוע יהיה*

*לכן חיבור של כל זמני הריצה יהיה גם*

*סיבוכיות המקום:*

*סיבוכיות המקום הנדרשת היא מספר קבוע שתלוי ב10 (מספר האיברים עד הרמה ה10 – במקרה הזה )*

*בחרתי שלא לפגוע בערמה ובמערך המקורי ולהשאיר אותו שלם, ולכן נעזרתי במערך עזר בגודל (קבוע ונחשב ) אולם באותה מידה אם היה ניתן ליצור ערימה רק מחלקים מסויימים מA היינו, ובהנחיה שלא איכפת לנו "להרוס" את A יכולים לחסוך גם את זה.*

*הרעיון הכללי:*

*תחילה נסתמך על מה שהוכחנו בסעיף הקודם שהאיבר ה בערימת מקסימום יכול להימצא לכל היותר ברמה ה.*

*כעת, נרצה שבכל איטרציה נמצא את האיבר הk הגדול עד הרמה הk – למרות שלא בטוח שהוא נמצא דווקא ברמה הk אבל כך נוכל להיות בטוח שכיסינו את כל המקרים.*

*לכן נשתמש במבנה עזר נוסף (תור קדימויות) שכל איבר בו מיוצג על ידי מפתח – הערך המקורי מערמת המקסימום, ערך שמקושר למפתח – האינדקס של האיבר בערמת המקסימום לצורך שליפת הבנים בעתיד (בשליפה מתור הקדימויות) כך שאליו כל פעם נכניס את כל האיברים מכל הרמות שעברנו ונשלוף בכל פעם את הגדול ביותר, כך שהערמה המקורית כלל לא תשתנה, ולכל הוצאה נכניס את 2 הבנים של האיבר שהוצאנו לתור הקדימויות כך שנכסה את כל איברי הרמה לאיטרציות הבאות.*

*מכיוון שבכל איטרציה אנחנו מוציאים איבר אחד ומכניסים 2 במשך k פעמים, נצטרך מערך עזר שייצג את התור קדימויות בגדול k+1 (יפורט בהמשך).*

*נעבור לאלגוריתם:*

סיבוכיות המקום:

נחשב כמה מקום דרוש לתור קדימויות:

עבור כל איטרציה – שולפים מהתור איבר אחד ומכניסים 2 – את שני הבנים שלו כלומר:

עבור האיטרציה ה1: שולפים 1 מכניסים 2 => נשארו 2 איברים

עבור האיטרציה 2: שולפים 1 מכניסים 2 => נשארו 3 איברים

..

עבור האיטרציה ה: שולפים 1 מכניסים 2 => נשארו איברים

ולכן נצטרך k+1 איברים (איני יודע איך תור קדימויות ממומש אך אני משער שמאחורי הקלעים נעשה שימוש בעוד מערך אבל זה לא משנה את סיבוכיות המקום בסדר גודל.)

לכן סיבוכיות המקום היא

סיבוכיות הזמן: הלולאה החיצונית רצה k פעמים

בכל איטרציה נשלף האיבר הגדול ביותר מהתור קדימויות בעזרת שעלותה

בנוסף מוכנסים 2 איברים בעזרת שעלותה

ולכן זמן הריצה יהיה

*הרעיון הכללי:*

*תחילה נסתמך על הטענה מעמוד 106 בספר שעבור ערמת מקסימום "העץ מלא לחלוטין בכל רמותיו, פרט אולי לאחרונה, שמלאה משמאל ועד לנקודה מסוימת"*

*כלומר גובה המסלול הימני בערמה הוא כגובה העץ או כגובה העץ פחות אחד.*

*ולכן עבור ערמה בת איברים, גובה המסלול הימני הוא או*

*מהגדרת ערמת מקסימום – המסלול הימני יהיה ממוין (מכיוון שהבן הימני של כל איבר חייב להיות קטן, והמיון מתקבל בצורה רקורסיבית מההגדרה של המסלול הימני בערמה)*

*ולכן החציון של המסלול הימני בערמה נמצא ברמה ה או*

*כעת, ידוע לנו שבן הימני מיוצג על ידי*

*כלומר, הבן הימני של השורש (רמה 1) נמצא באינדקס*

*הבן הימני של הבן הימני של השורש (האיבר הבא במסלול הימני) (רמה 2) נמצא באינדקס*

*הבן הבא (רמה 3) נמצא באינדקס*

*וכך נמצא את הנוסחה של האינדקס של הבן ברמה ה =*

*ולכן אינדקס הבן הימני ברמה של החציון (ה) הוא*

*ופשוט נחזיר את איברי המערך באינדקס הזה - .*

*לא נעשה שום מעבר על הערמה ולכן זמן הריצה הוא*

*וכמובן שסיבוכיות המקום היא גם*

**שאלה 2:**

1. הערך המקסימלי שלא מוביל להפרת תכונות הערמה הוא ההפרש המינימלי בין איבר כל שהוא מאיברי המסלול השמאלי לבן הימני שלו.

נימוק:

ע"פ ההגדרה ערמת מקסימום בהכרח מקיימת את התכונה שהאב גדול משני בניו, ולכן כדי להפר את אחת מתכונות הערמה נצטרך להפר את האי שוויון (בהתאמה למקרה שלנו שהאיברים שמשתנים הם רק מהמסלול השמאלי לכל האורך, ולכן בן שמאלי של איבר מהמסלול השמאלי גם הוא איבר מהמסלול השמאלי ולכן גם הוא קטן באותה מידה ולכן גם הוא אף פעם לא יפר את תכונות הערימה, ולכן נחשוד רק בבן הימני):

האי שוויון שאותו נצטרך להפר הוא: לכל :

*כלומר יצטרך להתקיים לפחות אחד בטווח של שעבורו*

*כידוע לנו מההגדרה*

*ולכן נציב באי שוויון:*

*יצטרך להתקיים לפחות אחד בטווח של שעבורו*

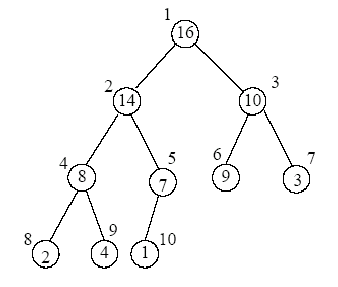
*כלומר*

*ולכן הערך הקטן ביותר של (שהוא ההפרש המינימלי בין איבר כל שהוא מבן איברי המסלול השמאלי לבן הימני שלו) הוא הערך המקסימלי של שלא מפר את תכונות הערימה.*

*או בצורה יותר פורמאלית:*

*נדגים בדוגמא קצרה:*

*נניח ונתונה לנו הערמת מקסימום הבאה:*



*כדי להפר את תכונות הערמת מקסימום עבור d מסויים שמחוסר מאיברי המסלול השמאלי יצטרך להתקיים*

*או או*

*הערך המקסימלי שלא מפר את הערמה נגזר מהאי שוויון האחרון שהוא ההפרש המינימלי בין איבר מהמסלול השמאלי לבן הימני שלו.*

1. *במידה ותכונות הערימה הופרו נדע בדיוק שאחד (או יותר) מאיברי המסלול השמאלי נהיו גדולים יותר מהבנים הימניים שלהם שלו, ולכן נמצא אותם ו"נתקן" את הערימה.*

*תחילה נעבור בלולאה פשוטה על גובה העץ () כדי לעבור על כל איברי המסלול השמאלי*

*לאחר מכן עבור כל איבר מהמסלול השמאלי נבדוק האם הוא זה שמפר את תכונות הערמה, אם כן נפעיל את הפונקציה לתחזוקת הערמה שתפעפע את הבן הימני שנהיה גדול יותר מאביו למקום המתאים לו (שגם היא תהיה בסיבוכיות*

*במקרה הגרוע נקראת בכל פעם השגרה שהסיבוכיות שלה היא*

*הלולאה החיצונית רצה פעמים*

*ולכן הסיבוכיות של השגרה היא*

**שאלה 3:**

1. נתאר את פעולת השגרה PARTITION על המערך

*נבחר את איבר הציר ונאתחל את ערכי המשתנים ההתחלתיים:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *11* | *6* | *2* | *21* | *4* | *7* | *8* | *12* | *5* | *9* | *19* | *13* |

*עבור אין איברים מתחלפים ()*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *11* | *6* | *2* | *21* | *4* | *7* | *8* | *12* | *5* | *9* | *19* | *13* |

*עבור אין איברים מתחלפים ( )*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *11* | *6* | *2* | *21* | *4* | *7* | *8* | *12* | *5* | *9* | *19* | *13* |

*עבור האיברים מתחלפים*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *11* | *6* | *2* | *21* | *4* | *7* | *8* | *12* | *5* | *13* | *19* | *9* |

*עבור האיברים מתחלפים*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *11* | *6* | *2* | *21* | *4* | *7* | *8* | *12* | *19* | *13* | *5* | *9* |

*עבור אין איברים מתחלפים ( )*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *11* | *6* | *2* | *21* | *4* | *7* | *8* | *12* | *19* | *13* | *5* | *9* |

*עבור האיברים מתחלפים*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *11* | *6* | *2* | *21* | *4* | *7* | *13* | *12* | *19* | *8* | *5* | *9* |

*עבור האיברים מתחלפים*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *11* | *6* | *2* | *21* | *4* | *19* | *13* | *12* | 7 | *8* | *5* | *9* |

*עבור האיברים מתחלפים*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *11* | *6* | *2* | *21* | 12 | *19* | *13* | *4* | 7 | *8* | *5* | *9* |

*עבור אין איברים מתחלפים* *( )*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *11* | *6* | *2* | *21* | 12 | *19* | *13* | *4* | 7 | *8* | *5* | *9* |

*עבור האיברים מתחלפים*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *11* | *6* | *13* | *21* | 12 | *19* | *2* | *4* | 7 | *8* | *5* | *9* |

*עבור האיברים מתחלפים*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *11* | *19* | *13* | *21* | 12 | *6* | *2* | *4* | 7 | *8* | *5* | *9* |

*נבצע את ההחלפה האחרונה ונקבל לסיכום*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *12* | *19* | *13* | *21* | 11 | *6* | *2* | *4* | 7 | *8* | *5* | *9* |

1. במקרה שבו כל האיברים שווים זה לזה הערך שיוחזר הוא r, משום שבכל איטרציה של הלולאה תתבצע החלפה ו יקודם בכל פעם עד שבסיום הלולאה והשגרה, ויוחזר .

נוכיח בצורה פורמאלית, נניח שx הוא הערך המשותף ששווה בכל המערך, לכל אינדקס תנאי ההשוואה יתקיים, יקודם, ההחלפה תתבצע ולא תשנה כלום, ובסיום הלולאה הערך של i יהיהויוחזר .

שינוי האלגוריתם:

הרעיון הכללי: שינוי השגרה PARTITION ע"י הוספת מנייה של מספר הפעמים שבהם  *ולבסוף חיסור חצי ממספר הפעמים שזה קרה מהאינדקס של הpivot*

1. שינוי ההשוואה מול הpivot שבשגרה כך שההשוואה תהיה גדול מ- ולא קטן מ-

כלומר שינוי השורה ל -

1. במקרה הגרוע ביותר כלומר במקרה שבו ל יחזיר תמיד את אינדקס ראשון/אחרון והשגרה בכל פעם תחלק את החילוק הכי פחות יעיל שהיא יכולה לחלק ובמקרה זה מספר הקריאות ל יהיה:

*הסבר:*

*נפתור את הנוסחה נסיגה בעזרת שיטת האיטרציה:*

*נציב ונקבל:*

*ולכן התשובה במקרה הגרוע תהיה .*

*עבור המקרה הטוב ביותר* שבו השגרה מחלקת את המערך לבדיוק חצי בכל פעם ובמקרה זה מספר הקריאות ל הוא:

*הסבר:*

*נפתור את נוסחת הנסיגה, נשתמש בשיטת האב:*

*,*

*ולדוגמא עבור מתקיים*

*וע"פ מקרה 1 של משפט האב נקבל:*

*ולכן התשובה גם במקרה הטוב תהיה*

**שאלה 4:**

1. בהנחה שבעיית המיון היא בעיית מיון של קלט מערך כמעט ממוין נוכיח שזמן הריצה של עדיף על זמן הריצה של :

באלגוריתם מיון בחירה עבור איברים כמעט ממוינים הלולאה הפנימית כמעט ולא מתבצעת משום שהיא בודקת ע"י השוואה לאן להכניס את האיבר הבא, ובמקרה שהאיבר במקומו (ממוין) התנאי לא יתבצע ולא נכנס ללולאה.

ולכן עבור מיון בחירה כאשר המערך כמעט ממוין זמן הריצה יהיה

במקרה שלנו מספר ההיפוכים אמור להיות קטן (מערך כמעט ממוין) ולכן זמן הריצה ישאף להיות לינארי.

לעומת זאת עבור כשהמערך כמעט ממוין, הpivot יהיה המספר הכי גדול (או בין ההכי גדולים) והשגרה  *תרוץ בצורה מלאה, כאשר היא כמעט ולא תחלק כלום, וכתוצאה מכך שהיא תחולק בצורה ה"גרועה" ביותר, יהיו קריאות מרובות יותר ל כי בכל פעם השגרה הרקורסיבית תחולק לכמעט כל המערך במקום המקרה האופטימלי שבו היא תחולק באמצע. ולכן אפשר לקרוא לזה המקרה הגרוע של .*

*דוגמא למקרה זה מתוארת בספר בעמוד 125 ונקראת "החלוקה הגרועה ביותר" , במערך כמעט ממוין מדובר בדיוק במקרה הזה שהשגרה תהיה הכי פחות יעילה.*

*בספר מצויין שבמקרה זה זמן הריצה ישאף ל*

1. *1.*

*נבצע מיון מהיר A*

*תחילה לאחר השגרה המערך לא ישתנה:*

*בהתחלה ה ובגלל שכל האיברים קטנים ממנו החלוקה תהיה למערך עם איבר יחיד - 10 (שממוין באופן ריק) ולמערך נפרד עם שאר האיברים.*

*נמשיך עם :*

*ה ובגלל ש9 גדול ממנו המערך יראה בסיום השגרה:*

*כעת החלוקה תהיה (שממוין בצורה דומה - וחלוקה ) ו*

*נמשיך עם*

*ה ובגלל ש7 גדול ממנו המערך יראה בסיום השגרה :*

*כאשר החלוקה תהיה (שממוין בצורה דומה וחלוקה) ו*

*נמשיך עם*

*ה ובגלל ש5 גדול ממנו המערך יראה בסיום השגרה :*

*כאשר החלוקה תהיה (שממוין בצורה דומה - וחלוקה) ו*

*נמשיך*

*ה ובגלל ש3 גדול ממנו המערך יראה בסיום השגרה:*

*כאשר החלוקה תהיה (שממוין בצורה דומה וחלוקה) ו*

*ובסיום המערך יהיה ממוין.*

*2.*

*ננסה להבין איך מתבצעת החלוקה בכל פעם והאם החלוקים היא לגדלים קבועים שעל פיהם נוכל להסיק את סיבוכיות זמן הריצה.*

*בקריאה הראשונה, השגרה מחלקת את תת המערך לאחד בגודל ואחד בגודל 0 (משום שה שהוא גם האיבר הגדול ביותר (עבור n זוגי).*

*כעת, בכל קריאה ל השגרה תחלק את תת המערך לאחד בגודל איברים ואחד בגודל איבר 1.*

*הוכחה: אחרי כל קריאה ל תת המערך מכיל את כל האיברים מ1 ועד ל הקודם, ובגלל שתת המערך הימני מורכב מאיברים זוגיים וממויינים בסדר עולה, ה הבא שיבחר הוא ה (ה הנוכחי פחות 2) כשבכל פעם, בתת מערך הנוכחי יש רק איבר אחד שגדול מה הזה – האיבר האי זוגי הכי גדול – שהוא גם האיבר שבין ה הנוכחי ל הקודם (שהוא פשוט ה הנוכחי פחות 2)*

*לדוגמא במקרה שה הקודם היה 8 אז כל האיברים בתת המערך הנוכחי קטנים מ8 וה הבא שיבחר יהיה 6 כאשר האיבר היחיד שיהיה גדול יותר הוא 7.*

*בסיום השגרה האיבר הגדול יעבור לצד ימין ושאר המערך לא ישתנה בצד שמאל.*

*הקריאה הבאה לתיצור שוב איזור של איבר 1 בצד ימין ואיזה של איברים בצד שמאל שהם n האיברים המקוריים ללא ה והאיבר האי זוגי הבודד שהיה גדול מה.*

*החלוקה הזו תתבצע בצורה קבוע לכל הקריאות הבאות ולכן:*

*בפעם הראשונה (על מערך בגודל 0) ובכל שאר הפעמים (על מערך בגודל 1) יחזרו ללא שינוי ולכן זמן הריצה יהיה* 𝜃(1)

*החלוקה בכל פעם תיקח* 𝜃(n)

*ולכן זמן הריצה הסופי יהיה*

*נחשב אותו בעזרת שיטת האיטרציה:*

*ועבור :*

*וכאשר תת המערך השמאלי יהיה עם איבר 1:*

*ולכן*

*נציב ונקבל:*

*נשים לב שהחלק השמאלי הוא סכום סדרה חשבונית שעולה ב-2 בכל פעם ולכן:*

*ולכן זמן הריצה יהיה* *.*

**שאלה 5:**

1. *במקרה של משקלות לכל*

*כלומר לכל איבר יש את אותו המשקל, וכל בדיוק מגיעים להגדרה של חציון רגיל שאפשר להסתכל עליו כחציון משוקלל כשמשקל כל האיברים בו שווה.*

*נוכיח בצורה יותר פורמאלית:*

*נניח ש הוא האיבר של שקטן מ , וידוע לנו שכל המשקלים קבועים ושווים ל עבור על*

*ולכן נקבל*

*ומצד השני*

*הערך היחיד של שיגרום לאי שוויון ולאי שוויון להתקיים הוא כאשר*

*וזה גם החציון הרגיל*

1. *תחילה להעביר את כל האיברים למערך ולבצע עליו ()*

*לאחר שהאיברים ממוינים, נוכל להגדיר את כסכום המשקולות של i האיברים הראשונים במערך.*

*נעבור על המערך הממוין מתחילתו ובכל פעם נגדיר את על ידי הוספת המשקל של האיבר הבא במערך הממוין.*

*וכך נחשב את ונעצור עד שנמצא עבורו וגם*

*ואז החציון המשוקלל יהיה .*

*(המעבר האחרון על המערך הממוין מתבצע פעם אחת כלומר (*

1. *בצורה דומה מאוד לאלגוריתם SELECT המקורי, רק שהערך i שיועבר כפרמטר יהיה החציון של המשקולות (שהוא למעשה ) כך שבכל פעם יתבצע חישוב של ו ובדיקה האם אחד מהשניים גדול מ – כל עוד זה יתקיים, תתבצע רקורסיה על חלק קטן יותר (בדיוק המהלך של האלגוריתם SELECT המקורי) וכך עד שאחד מהם יקיים את התנאי ונקבל את החציון המשוקלל.*

*הרעיון: שגרה רקורסיבית, במקרה והמערך שבקלט קטן או = 2 אז מציאת החציון בקלות ישירות.*

*אחרת, מציאת החציון הנמוך בעזרת אלגוריתם select שנקרא לpartition סביבו (הוא יהיה הpivot) , כעת חישוב משקל החלוקות הימנית והשמאלית ו*

*במידה ו וגם אז החציון המשוקלל הוא*

*אחרת החציון המשוקלל בחלק שהמשקולת שלו גדולה יותר ועוברים אליו בצורה רקורסיבית.*