**שאלה 1 סעיף א'**

**הערה בקשר לארבעת הסעיפים:  
ניעזר בשגרות המופיעות בספר הלימוד על ערמת מקסימום, ונתאים אותן לערמת מינימום.**

בסדר, רעיון טוב לציין אילו שינויים יחול באלגוריתמים המקוריים.

נצייר את השינויים החלים בעץ בעת ביצוע השגרה:

המילוי האדום מסמן את האינדקס הלולאה  
המילוי הירוק מסמן את הערך שאיתו צריך להחליף (המינימום מבין השלושה)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 49 | 14 | 18 | 64 | 66 | 28 | 15 | 55 | 33 | 45 |

45;

33

55

64

66

28

15

49

14

18

45;

33

55

64

66

28

15

14

14

18

45;

33

55

64

66

28

14

49

15

18

45;

33

55

64

66

28

14

49

15

18

45;

14

55

64

66

28

15

49

33

18

14;

15

55

64

66

28

18

49

33

45

בסדר

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 49 | 33 | 45 | 64 | 66 | 28 | 18 | 55 | 15 | 14 |

**שאלה 1 סעיף ב'**

הסבר השגרה

כיוון שבערמת מינימום האיברים הכי גדולים נמצאים בעלים, שכן אם ניקח איבר שהוא לא עלה אז בהכרח יש איבר אחריו שיותר גדול ממנו עד שנגיע לעלה (דבר זה נובע מהגדרת הערמה), לכן מספיק לרוץ רק על העלים בכדי למצוא את המקסימום בערמה, העלים נמצאים בחצי האחרון של המערך ולכן מספר ההשוואות המקסימלי שנבצע הוא .

נרוץ בלולאת מחצי המערך ועד סופו, נגדיר משתנה בשם , כל פעם נשווה את הערכים שבמערך, ונשמור את המקסימום במשתנה , כאשר נגיע לסוף המערך, במשתנה יהיה הערך הגדול ביותר שבערמה. בסדר

השגרה תקבל את המערך .

סיבוכיות האלגוריתם

אנחנו רצים על חצי מערך בגודל ומבצעים פעולות קבועות (השוואה והשמה), לכן סיבוכיות זמן הריצה שווה . בסדר

**שאלה 1 סעיף ג'**

הסבר השגרה

נבדוק את 2 מצבי הקיצון שבהם המספר השביעי בגודלו יכול להיות:

1. המצב המינימלי – האיבר נמצא ברמה השניה של העץ.

הוא לא יכול להיות ברמה יותר נמוכה כי אין מספיק מספרים, ברמה 1 יש רק 3 מספרים וכאשר נעבור לרמה השניה, מתווספים עוד 4 מספרים (סה"כ הגענו ל 7 מספרים) ושם הוא יכול להימצא.  
תמונה להמחשה:

\*הערך 7 יכול להיות בכל מקום ברמה השניה. בסדר

1

2

3

7

6

5

4

1. המצב המקסימלי – האיבר נמצא ברמה השישית של העץ.

נניח לצורך פשטות ההסבר שכל המספרים שנמצאים במסלול השמאלי של העץ קטנים מכל שאר הצמתים שבעץ, לכן האיבר השביעי בגודלו יהיה חייב להיות בסוף המסלול השמאלי, כיוון שאנחנו מתחילים לספור את רמות העץ מ 0, האיבר השביעי בגודלו יהיה ברמה השישית.

המטרה בניתוח המצב הנ"ל היא להגיע הכי רחוק מהשורש, וזאת אפשר לעשות רק אם נרד כל פעם לבן הבא (נעלה ברמות). בסדר  
תמונה להמחשה:

\*העיגולים השחורים הם המשך העץ שלא רלוונטי (כל המספרים גדולים מ 7).

1

10

2

3

13

12

11

30

4

40

5

50

6

60

7

65

מצאנו כי האיבר השביעי בגודלו יכול להיות בין האיבר לבין האיבר . בסדר

נרוץ בלולאת מאינדקס 4 ועד אינדקס 127 ונשמור את המספרים במערך חדש שיצרנו: שורות 1 – 4.3  
נמיין אותו בעזרת מיון הכנסה: שורה 5  
נחזיר את הערך הנמצא במקום השביעי של המערך: שורה 6

השגרה תקבל את המערך .

סיבוכיות האלגוריתם

אנחנו רצים על קלט קבוע ( מספרים) ומבצעים פעולות קבועות (השוואה והשמה), גם פעולת המיון (שורה 5) נעשית על קלט קבוע ולכן סיבוכיות זמן הריצה שווה . בסדר

**שאלה 1 סעיף ד'**

בדומה לחישוב שביצענו בסעיף ג', האיבר השביעי בגודלו במסלול הימני נמצא במקום ה 127 במערך. בסדר

**שאלה 2 סעיף א'**

הסבר השגרה

לאחר הוספת הקבוע לאיברי הערמה, ידוע לנו שיש "שתי ערמות חוקיות" אחת בתוך השניה.  
הערמה הראשונה היא כל איברי הערמה המקורית שלא נגענו בהם.  
הערמה השניה היא הערמה "החדשה" (לאחר הוספת הקבוע ) שהיא ערמה חוקית שהרי היחס בין האבות לבנים נשמר (כי הוספנו את אותו קבוע לכל האיברים).  
לכן נתרכז בתפר שבין הערמות שזהו צומת .  
לאחר הוספת הקבוע יכול להיות שהאבא של צומת מפר את חוקיות הערמה ולכן נצטרך להפעיל את שגרת לתיקון הערמה (כמו שאמרנו קודם הצד של צומת חוקי מתוקף הוספת אותו הערך לכל האיברים, והצד השני לצומת גם חוקי מתוקף הנתון שהערמה חוקית, לכן נוכל להשתמש בשגרה כי מובטח לנו שיש רק צומת אחד שמפר את חוקיות הערמה).  
במידה שהאבא של צומת לא מפר את הערמה – הערמה חוקית לחלוטין ללא צורך בתיקון.  
לכן, נתחיל לקרוא לשגרה מהאבא של צומת , ונמשיך לקרוא לה עד שנגיע לשורש העץ, עם אותם הטיעונים המוזכרים מעלה.

השגרה תקבל את המערך , ואת הצומת . בסדר

סיבוכיות האלגוריתם

זמן הריצה של שגרת שווה ל .

גובה הערמה הינו , צומת הנבחר נמצא בגובה .  
ולכן, אנחנו רצים על צמתים.

על כל צומת מתבצע שגרת .

לכן, זמן הריצה של השגרה הוא . בסדר

**שאלה 2 סעיף ב'**

הסבר השגרה

נגדיר מערך חדש , נמחק בעזרת שגרת העזר את כל התת ערמה המושרשת ב (כולל ) ונשמור אותה במערך , לאחר מכן, נוסיף מחדש את כל האיברים שבמערך לערמה בעזרת השגרה .

שגרת העזר תקבל את המערך ואינדקס שממנו צריך להתחיל למחוק צמתים (אינדקס ).

השגרה הראשית תקבל את המערך , צומת ואת גובה הצומת.

בסדר

1. /\* B שמירת המקסימום כל פעם במערך\*/

סיבוכיות האלגוריתם

זמן הריצה של שגרת שווה ל עבור מחיקת צומת אחד (לפי שאלה ד-16, עמוד 79 במדריך הלמידה).

אנחנו מוחקים צמתים, ולכן, זמן הריצה הוא .

זמן הריצה של שגרת שווה ל עבור הכנסת צומת אחד (לפי עמוד 117 בספר הלימוד).

אנחנו מכניסים צמתים, ולכן, זמן הריצה הוא .

לכן, זמן הריצה הכולל של האלגוריתם הוא . בסדר

**שאלה 2 סעיף ג'**

מקרה קבוע

ולכן השגרה מסעיף ב' עדיפה.

*שגרה ראשונה:*

*שגרה שנייה:*

*לכן במקרה זה השגרה השנייה עדיפה.*

בסדר

מקרה

ולכן שתי השגרות זהות אסימפטוטית. בסדר

מקרה

ולכן השגרה מסעיף א' עדיפה. בסדר

שגרה ראשונה:

שגרה שנייה:

לכן במקרה זה השגרה הראשונה עדיפה.

מקרה קבוע

נסמן,

ולכן השגרה מסעיף א' עדיפה. בסדר

שגרה ראשונה:

שגרה שנייה:

לכן במקרה זה השגרה הראשונה עדיפה.

**שאלה 3**

ראשית נסביר במילים את תכונת המערך:

עבור כל שני איברים, אם האיבר השמאלי גדול מהאיבר הימני אז האיברים סמוכים.

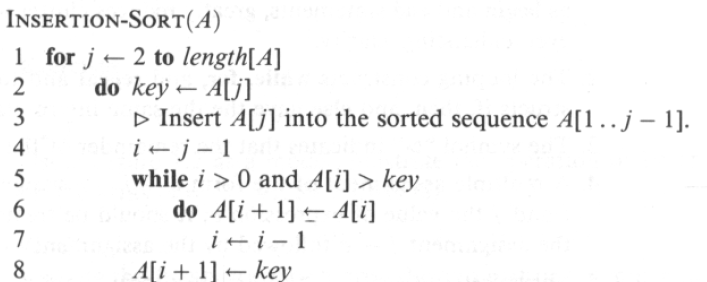
באופן שקול, אם האיברים לא סמוכים אז האיבר השמאלי קטן / שווה לאיבר הימני.

כלומר, אם מצאנו איבר שמאלי הגדול מהאיבר הסמוך לו מצד ימין, בהכרח () כל האיברים הבאים שמצד ימין גדולים ממש מאותו האיבר השמאלי (כי אם היה בהמשך המערך מצד ימין איבר שיותר קטן מהאיבר השמאלי הוא היה מפר את תכונת המערך).

דוגמה למערך המקיים את התכונה

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 160 | 150 | 100 | 95 | 85 | 90 | 80 | 70 | 59 | 60 | 39 | 40 | 10 | 20 |

בסדר

מיון הכנסה

השגרה מבצעת החלפת מיקום איברים לפי השוואת איברים סמוכים.

שורה 4 בשגרה היא בדיוק התוצאה של התנאי במשפט שבשאלה,  
כי .

בנוסף, לולאת ה while שבשורות 5 – 7, תמיד תתבצע פעם אחת בלבד (התנאי השני תמיד יהיה לאחר האיטרציה הראשונה) משום שלא יכול להיות עוד איבר שמאלי (שורה 7) הגדול מהאיבר ולא סמוך אליו, לפי ().

כיוון שלולאת ה , מתבצעת פעם אחת בלבד, וכל שאר הפקודות נמשכות זמן ריצה של , וקורות פעמים (בגלל לולאת ה שבשורה 1), נקבל שזמן הריצה הוא .

בסדר

מיון מיזוג

אין לתכונת המערך משמעות לזמן הריצה של מיון מיזוג כיוון שגם במקרה הטוב בו המערך ממויין כבר השגרה כל פעם תחלק את המערך ל 2 ותמזג מחדש, לכן, זמן הריצה של מיון מיזוג הוא .

בסדר

מיון מהיר

*המערך יכול להיות ממויין ועדיין לשמור על תכונתו, זהו המקרה הגרוע של מיון מהיר ולכן נקבל שזמן הריצה הוא .*

בסדר

**שאלה 4 סעיף א'**

**הערה בקשר ל 2 הסעיפים:  
התייחסתי למקרה הגרוע ביותר אך לא למקרה בו המערך מכיל את אותו המספר (כי לא נתון שהמספרים שונים, אך גם זה מקרה גרוע) אשר במקרה זה, לא משנה איזה איבר נבחר תמיד סיבוכיות זמן הריצה תהיה ריבועית.**

בסדר

המקרה הגרוע הוא המקרה בו בתת מערך נמצאים כל האיברים המינימליים במערך המקורי, הקריאה הרקורסיבית הראשונה תהיה קריאה ריקה כי תמיד תיפול בתנאי העצירה, והקריאה השניה תקרא לשגרה על כל שאר המערך מלבד איבר הציר.

נקבל כי השגרה מיון מהיר תבצע זמן ריצה של .

עבור מציאת המינימום נדרש זמן ריצה של .

עבור כל מינימום, לשגרה נדרש זמן ריצה של , והמינימום מוריד מהמערך איבר אחד לכן נשארים עם איברים.

התוצאה לנוסחת הנסיגה היא .

בסדר

**שאלה 4 סעיף ב'**

כאשר מחלקים את המערך ל 4, נקבל כי כל חלק הוא 25% מהמערך, אנחנו מתעלמים מהרבע הראשון של המערך (התת מערך מתחיל מאינדקס ), ומתעלמים גם מהרבע אחרון של המערך (התת מערך מסתיים באינדקס ), ולכן התת מערך הינו 50% מהמערך המקורי.

ברגע שנמצא את החציון ושגרת תסיים, המקרה הגרוע יהיה כאשר כל שאר האיברים שנמצאים מחוץ לתת מערך יהיו גדולים או קטנים מהחציון, ולכן בעצם החציון יחלק את המערך המקורי חלוקה של 25% מול 75%.

זמן הריצה של שגרת הוא .

לכן נוסחת הנסיגה היא .

ניעזר בשיטת עץ הרקורסיה:

נחשב את הגובה של העץ:

המסלול הארוך ביותר בעץ הוא המסלול הימני, ולכן הוא יהיה החסם העליון.

לכן גובה העץ הוא , בנוסף בכל רמה מתבצעת עבודה.

ולכן מתקיים, .

בסדר

המסלול הקצר ביותר בעץ הוא המסלול השמאלי, ולכן הוא יהיה החסם התחתון.

לכן גובה העץ הוא , בנוסף בכל רמה מתבצעת עבודה.

ולכן מתקיים, .

לסיכום, מתקיים כי האלגוריתם רץ בזמן ריצה של .

בסדר

**שאלה 5**

הסבר השגרה

נגדיר מערך חדש בגודל , נמצא את ערך המיקום הראשון () ואת ערך המיקום האחרון (), ונרוץ על כל האיברים במערך המקורי, כל איבר הגדול מערך המיקום הראשון וקטן מערך המיקום האחרון נשמור במערך .

לאחר מכן, נמיין את המערך B.

השגרה תקבל את המערך .

סיבוכיות האלגוריתם

זמן הריצה של השגרה הוא .

לולאת ה שבשורה 4 מבצעת פעולות ולכן זמן הריצה שלה הוא .

זמן הריצה של מיון ערמה הוא , כי המיון מתבצע על המערך אשר יש בו איברים.

נבדוק את הביטוי .

ולכן זמן הריצה של השגרה כולה הוא .

בסדר