**ממן 12**

1) א)

נוכיח באינדוקציה עבור n=0 גודל מסלול הוא 0 ולכן מתקיים s=v לכן  מכיוון שלכל קשת בגרף משקלים חיוביים ברור שכל מסלול אחר  יקיים  ולכן  הוא מסלול מזערי.

נניח נכונות עבור n נוכיח עבור n+1:

 וכל קשת שנמצאת בו היא שימושית נסתכל על מסלול שאורכו n נסמנו ב  על פי ההנחה מכיוון שכל הקשתות בו שמישות הוא מסלול מזערי, נסמן e ששייכת למסלול זה לכן לפי ההגדרה היא צלע אחרונה באיזשהו מסלול מזערי  נניח בשלילה ש  לכן אם נוריד משתי האגפים את e נוצרת סתירה כי זה סותר את הגדרת המסלול המזערי  לכן הגענו לסתירה ומתקיים 

ב)

נסמן את הצלע הלא שימושית ב e לכן היא לא צלע אחרונה במסלול מזערי שנסמנו לכן קיים מסלול  המקיים , נגדיר מסלול חדש שמחבר את המסלולים עם הקשת (y,v)

נקבל  ולכן  לא מזערי.

ג) משום ש כמעט מזערי ןלפי סעיף א', קיימות בו קשתות לא שימושיות.

נניח בשלילה שקיימות במסלול 2 קשתות שונות לא שימושיות ו. *נניח בלי הגבלת הכלליות ש נמצאת לפני במסלול .* אז מתקיים :

נתבונן על המסלול החלקי . הוא מכיל את הקשת הלא שימושית ולכן, לפי סעיף ב', הוא לא מזערי.

אם כן, קיים מסלול אחר שהוא כן מזערי, ולכן .

נגדיר מסלול חדש שמורכב מחיבור המסלולים ו-. מתקיים:

לסיכום, . אך מכילה בתוכה את הקשת הלא שימושית , ולכן לפי סעיף ב', הוא לא מזערי, בסתירה לכך ש הוא כמעט מזערי, וכל מסלול בעל משקל קטן ממש ממנו הוא מזערי.

ולכן, אם כמעט מזערי, אז קיימת בו צלע לא שימושית אחת ויחידה.

*ד)*

שאר הקשתות הן קשתות שימושיות, מסלול הרישא של מ-s ל-, נקרא לו , מכיל רק קשתות שימושיות (שכן כל קשת בו היא ב) ולכן לפי סעיף א', מסלול מזערי.

מאותו טיעון בדיוק, מסלול הסיפא של מ- ל-, נקרא לו , הוא גם מסלול מזערי.

ה)

**הרעיון המרכזי של האלגוריתם**:

*נשתמש ראשית באלגוריתם דייקסטרה מצומת s לכל שאר הצמתים. נקבל בחזרה עץ המסלולים המזעריים T המושרש ב-s. נקבל חלוקה של קשתות G לקשתות שנמצאות בT וקשתות שלא נמצאות בה. קשתות שנמצאות בG ובT גם יחד הן קשתות שימושיות, וקשתות שנמצאות בG בלבד הן קשתות לא-שימושיות.*

*כעת ניצור גרף חדש בו ניצור חלוקה ל2 חלקים, כאשר בכל חלק יהיה העתק של הקשתות השימושיות ב יחד עם העתקים של כל הצמתים שמחוברים אליהן (בסימוני תג ותגיים ע"מ שנוכל להבדיל הצמתים של 2 החלקים).*

*בין שני חלקי הגרף נחבר עם קשתות לא-שימושיות מG, ועל הגרף המשולב שנקבל נריץ שוב את האלגוריתם של דייקסטרה.*

*נקבל בחזרה עץ מסלולים מזעריים , שבו נחפש מסלול מצומת לצומת .*

*אם קיים כזה, זהו המסלול שאנו מחפשים. זהו מסלול מזערי ב, אך הוא מכיל באופן מלאכותי בדיוק קשת לא שימושית אחת (בחיבור מ ל) ולכן, אם נמחק את סימוני התגים והתגיים מהמסלול המתקבל נקבל מסלול בעל קשת לא-שימושית בודדת ב, ולכן זהו מסלול כמעט מזערי.*

**האלגוריתם**:

*נפעיל את אלגוריתם דייקסטרה (עמוד 149 בספר הלימוד) על הגרף מצומת s לשאר הצמתים, ונקבל בחזרה את עץ המסלולים המזעריים T.*

*נגדיר:*

* *– קבוצת הקשתות השימושיות ב.*
* *- קבוצת הקשתות הלא-שימושיות ב.*

*נגדיר גרף חדש בדרך הבאה:*

* לכל
  + ניצור צמתים ב (אם אינן קיימות כבר).
  + ניצור קשתות ו- ב (אם אינן קיימות כבר).
* לכל ניצור קשתות ב.

נפעיל את אלגוריתם דייקסטרה בשנית על מצומת לצומת . אם קיים מסלול כזה, נחזיר אותו לאחר שנמחק ממנו את סימוני התגים והתגיים. אם לא, נחזיר שלא קיים מסלול כזה.

**ננמק את נכונות האלגוריתם לפתרון הבעיה:**

*נשתמש ראשית באלגוריתם דייקסטרה מצומת s לכל שאר הצמתים. נקבל עץ המסלולים המזעריים T המושרש ב-s. לכל צומת , המסלול היחיד מs ל-v הוא מסלול מזערי. לפי סעיף ב' נקבל שכל הקשתות שנמצאות ב הן למעשה שימושיות. כל שאר הקשתות, שהכנסנו ל, הן קשתות לא-שימושיות.*

*הגרף החדש משרה חלוקה בין 2 תתי-גרף (נקרא להם ו) שמכילים כל אחד קשתות שימושיות בלבד, וכמו כן חיבור מ ל בעזרת קשתות לא-שימושיות בלבד.*

*לפיכך, כאשר נחפש מסלול מזערי ב* מצומת לצומת , ולמעשה נחפש מסלול מ שבתת-גרף  *המכיל קשתות שימושיות בלבד, דרך אחת הקשתות הלא-שימושיות המחברות בין ל, אל שנמצא בתת-גרף המכיל קשתות שימושיות בלבד.*

*במילים אחרות, מסלול כזה, אם קיים, יכיל בדיוק קשת לא-שימושית אחת, וכל שאר הקשתות יהיו בהכרח שימושיות, ולכן, לפי ההגדרה, הוא מסלול כמעט-מזערי.*

*נבחין שמסלול כזה לא תמיד קיים. במצב זה, אין מסלול כמעט-מזערי מs’ לt’’.*

*כעת, בהינתן מסלול כמעט-מזערי , ניתן לחשב את בקלות ע"י מחיקת סימוני התג והתגיים. כמובן שמסלול זה גם קיים בגרף המקורי, שכן בנינו אותו בצורה זו.*

**ננתח את סיבוכיות זמן הריצה:**

אנו מריצים פעמיים את אלגוריתם דייקסטרה, בעלות של (לפי משפט 4.15 בעמוד 153 בספר הלימוד).

בנוסף לכך, זמן בניית הגרף החדש הוא לינארי.

*סה"כ זמן ריצה .*

*2)*

*נתון עץ פורש מזערי של גרף לא מכוון קשיר . נגדיר גרפים חדשים שזהים ל מלבד כך שהושמטה מהם קשת . קשיר. עלינו למצוא אלגוריתם שיתקן את כך שיהיה עץ פורש מזערי של .*

**הרעיון המרכזי של האלגוריתם**:

*סריקת BFS של כל אחד מרכיבי הקשירות, ואז נעבור על כל הקשתות שקצה אחד שלהן ברכיב של , וקצה שני שלהן ברכיב של . מכל קשתות אלה נחפש את זה בעל המשקל המינימלי, את הקשת המינימלית הזו נוסיף ל ונקבל עץ פורש מזערי.*

**האלגוריתם**:

*בראשית נאתחל את .*

*נמצא את שני רכיבי הקשירות ב, ע"י בחירת צומת כלשהי, והרצת סריקת BFS ממנה תוך כדי סימון במערך .*

*כעת נבחר צומת אחרת, שטרם סומנה, ונריץ סריקת BFS ממנה תוך כדי סימון במערך .*

*לכל אשר קצה אחד שלו נמצא ב* וקצה שני שלו נמצא ב:

* אם :

בסיום נוסיף את קשת min\_verticle אל . כעת הוא עץ פורש מזערי של .

**ננמק את נכונות האלגוריתם לפתרון הבעיה:**

*נראה שהסרת הקשת מהעץ יוצרת בדיוק 2 רכיבי-קשירות שונים:*

*לפני הסרת הקשת קשירה (מעצם הגדרתה כעץ), והסרה של קשת אחת מעץ תגרום לו להתנתק בהכרח ל2 חלקים קשירים שונים.*

*אם נניח בשלילה שהגרף החדש נשאר קשיר, סימן שיש מסלול אחר מ ל-, ולכן ב המקורי יש מעגל, בניגוד להגדרת עץ.*

*אם נניח בשלילה שבגרף החדש יש לפחות 3 רכיבי-קשירות, אז כאשר נחזיר את הקשת לגרף, נקבל בחזרה את המקורי, אך עם לפחות 2 רכיבי קשירות (שכן כל קשת בודדת יכולה לחבר עד 2 רכיבי קשירות יחדיו), בסתירה להיות עץ.*

*נראה שניתן לתקן את הגרף לגרף פורש (לא בהכרח מזערי) עבור :*

*אנו מחפשים להוסיף ל איזשהי קשת מ שתחבר מרכיב הקשירות לרכיב הקשירות .*

*אנו מריצים סריקת BFS על כל אחד מרכיבי הקשירות ע"מ לזהות את רכיבי הקשירות .*

*כל קשת כזאת, מאיבר כלשהו ב לאיבר כלשהו ב תהפוך את הגרף לגרף קשיר.*

*כמו כן, ו שניהם עצים, שכן הם תתי-גרפים של T המקורית שהוא עץ בעצמו. בפרט, כל אחד מהם, לפי משפט 3.2 בעמוד 84 בספר הלימוד, לא מכיל מעגל.*

*כמובן שחיבור של קשת בין מאיבר כלשהו ב לאיבר כלשהו ב לא תיצור שום מעגל בגרף החדש.*

*לפיכך, לאחר הוספת קשת כזאת ל הוא יהפוך לגרף פורש עבור , שכן זהו עץ שכל צומת בו נגישה-הדדית.*

*נבחין שבהכרח קיימים קשתות כאלה, שכן נשארה קשירה.*

*נראה שניתן לתקן את הגרף לגרף פורש* ***מזערי*** *עבור :*

*מבין כל הקשתות האפשריות להפיכת לגרף פורש עבור , נבחר את הקשת בעלת המשקל המינימלי.*

*הקשת המחברת בין 2 רכיבי קשירות שונים, והיא בעלת המשקל המינימלי משאר הקשתות המחברות בין רכיבי הקשירות השונים, ולכן לפי תכונת החתך (משפט 4.17 בעמוד 157 בספר הלימוד), נקבל שכל עץ פורש מזערי של מכיל בהכרח את . (המשפט מנוסח לגבי קשתות שבהן מובטח שלכל הקשתות בגרף יש משקלים שונים, אך בספר הוסבר שהמשפט נכון גם למצב שבו לקשתות יש משקלים זהים, כפי שיתכן בתרגיל זה).*

*לפיכך, הגרף הפורש המזערי של מכיל בהכרח את , אך נשאלת השאלה האם להוסיף אותו ל יהפוך אותו לגרף פורש מזערי? באופן תאורטי יתכן שבהתאם למצב החדש, קיימת קבוצת קשתות שונה שתגדיר גרף פורש בעלות קטנה יותר. נוכיח שלא כך המצב:*

*אנו מכניסים את ל.*

*נניח בשלילה שקיים עץ אחר שהוא עץ פורש מזערי של , ומתקיים*

*לפי תכונת החתך, . אם נסיר את מ נקבל 2 חלקי קשירות,*

*אם כן, מתקיים:*

*כעת נחליף ב את הקשת בקשת . כמו כן נחסיר את משני אגפי האי-שוויון, ונוסיף את . כעת מתקיים:*

*אך העץ החדש (לאחר החלפת ב-) הוא לא מאחר העץ T המקורי, שכן הצמתים זהים, החלפנו את הקשת ב ואז החלפנו את הקשת ב ובכך למעשה החזרנו את המצב לקדמותו. מתקיים .*

*קיבלנו , בסתירה לכללי האריתמטיקה. לכן, לא קיים עץ אחר שהוא עץ פורש מזערי של , ומתקיים .*

*לפיכך, הוא אכן עץ פורש מזערי של .*

**ננתח את סיבוכיות זמן הריצה:**

זמן הריצה של סריקת העץ לפי BFS הוא לפי עמוד 99 בספר הלימוד.

זמן הריצה של מעבר על כל הקשתות ב הוא .

כל שאר הפעולות רצות בזמן קבוע.

עם זאת, לפי עמוד 94 בספר הלימוד, בכל גרף קשיר מתקיים מתקיים , וכל הגרפים באלגוריתם הם קשירים (או כמעט קשירים, ז"א, תוספת של קשת אחת היתה הופכת אותם לקשירים) ולכן מתקיים .

*סה"כ זמן ריצה .*

3)

נגדיר את נוסחת 3-CNF הבאה:

נפעיל את האלגוריתם החמדן שמוצע בתרגיל ונראה שהאלגוריתם נכשל מפיק כפלט השמה לא מספקת, למרות שהנוסחה כן ספיקה

נספור את מספר המופעים של כל תווית. נגדיר ב את מספר המופעים של התווית בנוסחה .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 2 | 4 | 4 | 3 |  |
| 1 | 2 | 1 | 1 |  |

האלגוריתם החמדן בוחר השמות שממקסמת את מספר הפסוקיות המסופקות החדשות. ז"א, במקרה שלנו, יגדיר . באופן אוטומטי מוגדר גם .

לפיכך הנוסחה מקיימת:

*וההשמה לא מספקת, עם זאת, קיימת השמה שכן מספקת את :*

*נגדיר , שבעקבותיהם מוגדרים , ואז הנוסחה*  מקיימת:

*ואכן הנוסחה ספיקה, לפיכך, האלגוריתם החמדן לא טוב דיו, שכן קיימת נוסחת 3-CNF עליה האלגוריתם נכשל, שכן הנוסחה ספיקה, אבל האלגוריתם מפיק כפלט השמה לא מספקת.*

*4)*

נראה שלכל עץ מושרש בינרי לחלוטין קיימת סדרת שכיחויות כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא .

יהי עץ בינרי לחלוטין עם צמתים. לכל עלה נגדיר שכיחות באופן הבא:

נוכל להוכיח שלסדרת שכיחויות זו יש עץ הופמן שהוא עצמו באינדוקציה על עומק העץ .

הנחת האינדוקציה: לכל עץ בינרי לחלוטין שעומקו המירבי הוא , אחד מעצי הופמן של סדרת השכיחויות הוא .

בדיקה כאשר : אם העומק הוא 0 סימן שב יש עלה אחד, וסדרת השכיחויות מכילה את האיבר הבודד . כמובן שעץ הופמן של סדרה זו הוא גם בעל עלה אחד, ולכן הוא זהה ל.

נוכיח את נכונות טענת האינדוקציה עבור עץ בעומק ונוכיח את נכונותה עבור עץ בעומק :

יהי עץ בינרי לחלוטין עם עומק של . לפיכך, קיים לפחות צומת אחד המקיים . לפי עמוד 185 בספר הלימוד, משום שT הוא עץ בינרי לחלוטין, ל יש אח שהוא גם עלה, וגם הוא מקיים .

נשכפל את ל .

כל עוד קיים צומת כך ש :

נמצא את אחיו , ונציב באב שלהן את סכום השכיחויות שלהם: . את העלים עצמם נמחק מן העץ .

נבחין שכל האבות לשעבר (אלה שהצבנו בהם את סכום השכיחויות של הבנים בעומק ) הם בעומק (שכן הם אבות של צמתים בעומק ), והשכיחות שלהם היא . *זה תואם את סדרת השכיחויות .*

*כמו כן, כבר לא קיימים צמתים בעומק , שכן כולם אוחדו לעומק , ולכן כעת עומק העץ הוא .*

*קיבלנו ש כעת הוא עץ בינרי לחלוטין בעומק שמקיים את סדרת השכיחויות .*

*לפי הנחת האינדוקציה, יש עץ הופמן של סדרת שכיחויות זו הזהה ל.*

*נוכל לבנות ממנו את המקורית ע"י פעולה הפוכה לזאת שביצענו ב*הוכחה *– הוספת 2 בנים לחלק (או כל) הצמתים בעומק . ישנן אפשרויות רבות לבחירת העלים שנבצע להם הרחבה, וכל בחירה כזאת תוביל לעץ בינרי שונה שהוא עץ הופמן תקין. אחת מן האפשרויות הללו תיצור את המקורית* בכך השלמנו את צעד האינדוקציה, לפיכך, לכל עץ מושרש בינרי לחלוטין קיימת סדרת שכיחויות כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא .