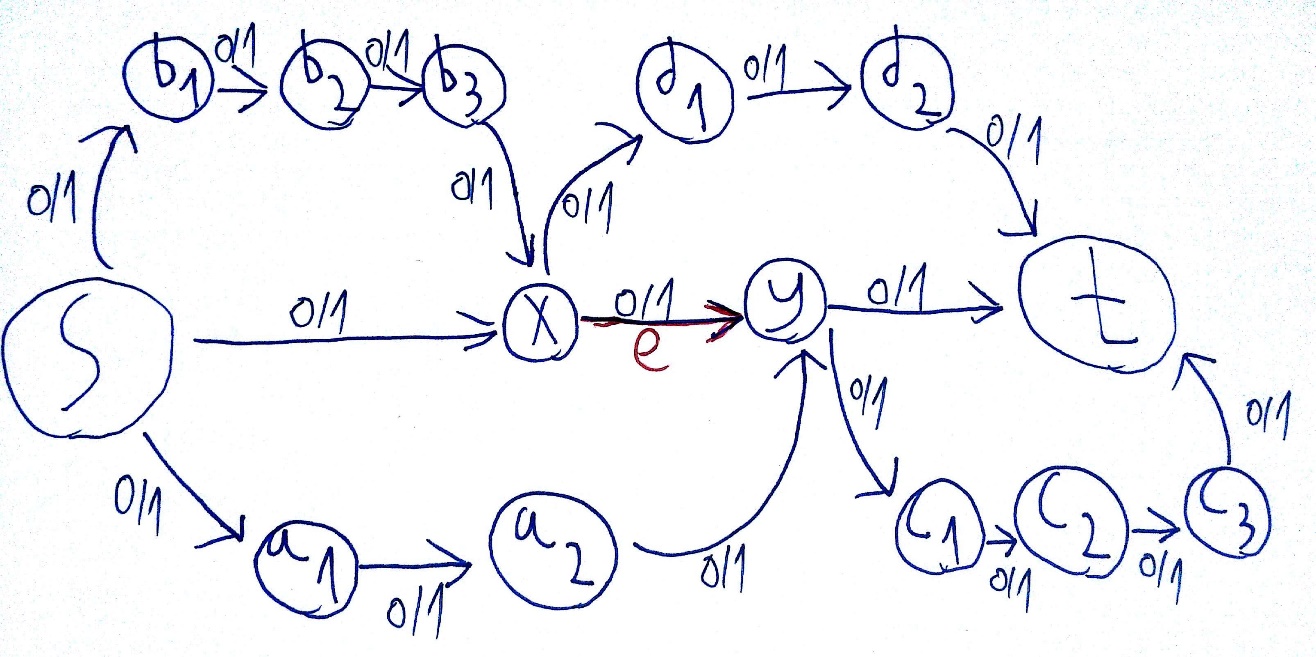
**ממן 15**

**1)**

**

*בהרצת אלגוריתם אדמונדס-קרפ, באיטרציה ראשונה ישופר המסלול , באיטרציה שניה , ובאיטרציה שלישית .*

*הקשת מקבלת תוספת זרימה הזהה לקיבולת השיורית שלה (1) ב2 איטרציות שונות (איטרציה ראשונה ושלישית). בנוסף, המרחק מx לt ומy לt שונה.*

**2)א)**

*נתונה לנו זרימה חוקית ברשת. כל מקיים , לפי הנתון.*

*נניח שברצוננו להגדיל את הזרימה בערך כלשהו.*

*כעת לכל קשת נגדיר:*

*נבחין שמשום ש, בהכרח מתקיים ולכן .*

*נראה שמתקיים חוק שימור הזרימה עבור הזרימה החדשה. ידוע שלכל צומת מתקיים:*

*ולכן:*

*ולכן גם הזרימה החדשה מקיימת את חוק שימור הזרימה, ולכן היא זרימה חוקית. כמו כן, מתקיים:*

*ולכן הזרימה החדשה גדולה מהזרימה הקודמת ב, כפי שרצינו.*

*נבחין שהזרימה ו/או ערכי הזרימה עלולים להיות לא שלמים, ולכן לא מובטח שהאלגוריתמים בספר בכלל יעצרו בריצות עליהם, אך זה עדיין לא משנה את העובדה שהזרימה היא זרימה תקינה.*

**ב)**

**הרעיון המרכזי של האלגוריתם**:

*ראשית נוכל להגדיר את הזרימה בכל קשת בתור הקיבולת המינימלית שלה. כך מתקיים כלל אילוצי הקיבול (ההפוך, במקרה זה, שכן החסם הוא חסם מלעיל).*

*אך כלל שימור הזרימה איננו מתקיים, ועלינו לתקן את הזרימה כך שתקיים את כלל זה.*

*נוכל ללכת עם כיוון הזרימה אל t (מהצמתים הכי רחוקים ממנו ועד לצמתים הצמודים לt) ולתקן צמתים שאינם s,t עבורם ע"י הגדרת .*

*כעת, נוכל ללכת עם כיוון הזרימה מs (מהצמתים הכי רחוקים ממנו ועד לצמתים הצמודים לs) ולתקן צמתים שאינם s,t עבורם ע"י הגדרת .*

*את הסריקות הדרושות נוכל לבצע בעזרת BFS. בסיום כל הצמתים והקשתות יקיימו זרימה תקינה.*

**האלגוריתם**:

1. לכל נגדיר .
2. נבצע סריקת הפוכה מהצומת t (ז"א, באיטרציה הראשונה נחפש קשתות המגיעות אל t, וכן הלאה). עבור כל צומת שאנו סורקים נדאג גם לשמור את ואת הצמתים מרמת העומק הקודם שיש להן קשתות אל .

נעבור על הצמתים שאינם s,t בסדר לפי עומקם בעץ ה שיתקבל, בסדר עומק יורד.

לכל צומת, אם  *נבצע (אם ).*

1. סריקת הפוכה מהצומת s. עבור כל צומת שאנו סורקים נדאג גם לשמור את ואת הצמתים מרמת העומק הקודם שיש להן קשתות אל .

נעבור על הצמתים שאינם s,t בסדר לפי עומקם בעץ ה שיתקבל, בסדר עומק יורד.

לכל צומת, אם  *נבצע .*

*הזרימה המתקבלת היא זרימה חוקית ברשת.*

**ננמק את נכונות האלגוריתם לפתרון הבעיה:**

*בשלב 1 מוגדרת זרימת כל קשת בתור הקיבולת המינימלית שלה. כך מתקיים כלל אילוצי הקיבול (ההפוך, במקרה זה, שכן החסם הוא חסם מלעיל). נבחין שבמהלך כל האלגוריתם, אין אנו מחסירים מזרימת קשת כלשהי (רק מגדילים או משאירים אותו הדבר), ולכן כלל זה אינו נשבר במהלך כל הריצה, ולכן הוא נכון גם בסופה.*

*את כלל שימור הזרימה אנו מתקנים בשלבים 2 ו-3.*

*בשלב 2 אנו עוברים את כל הצמתים, מהרחוקים ביותר מ ועד הקרובים ביותר אליו, ובכל פעם מתקנים את כמות הזרם* ***היוצאת*** *מהצומת, אם יש צורך. משום שאנו מתקנים את כמות הזרם היוצאת מן צמתים הרחוקים ביותר עד לצמתים הקרובים ביותר, הערכים מפעפעים כראוי, שכן כאשר רמת עומק מחושבת כהלכה, ניתן לחשב את רמת עומק (ניתן להוכיח זאת באינדוקציה על עומק עץ ה המתקבל). בסוף שלב זה, אין צמתים* שאינם s,t *המקיימים (\*).*

*בשלב 3 אנו מבצעים סריקה על כל הצמתים, הרחוקים ביותר מs ועד הקרובים ביותר אליו, ומתקנים בכל פעם את כמות הזרם* ***הנכנסת*** *לצומת, אם יש צורך. גם כאן ניתן להראות באינדוקציה על עומק עץ ה שסדר תיקון הצמתים מבטיח שהערכים יפעפעו כראוי. בסוף שלב זה, אין צמתים* שאינם s,t *המקיימים (\*\*).*

*כעת, בסיום, מ(\*) ומ(\*\*) מתקבל שלכל שאיננו s,t מתקיים , וזהו כלל שימור הזרימה.*

*לפיכך, הזרימה הינה חוקית.*

**ננתח את סיבוכיות זמן הריצה:**

*יהי מספר הצמתים ב, וm מספר הקשתות ב.*

*אתחול זרימת הקשתות נעשה ב.*

*הרצת 2 סריקות בעלות של לפי ספר הלימוד. את המידע הנלווה בסריקות שלנו ניתן לחשב בזמן קבוע אם יתבצע בצורה יעילה, ולכן הוא איננו מוסיף לזמן הריצה של סריקת ה.*

*במהלך פעולות התיקונים בשלבים 2 ו3 נעבור במקרה הגרוע על איברים בסה"כ, ולכן זמן הריצה הוא .*

*סה"כ זמן ריצה של .*

**ג)**

**הרעיון המרכזי של האלגוריתם**:

*ראשית, נוכל להשתמש באלגוריתם מסעיף ב' ולמצוא זרימה חוקית ברשת. כעת, בין הזרימה החוקית שמצאנו לבין הזרימה המינימלית יש פער כלשהו. אנו מעוניינים לפרמל את הפער הזה, למצוא את המקסימום שלו, ולחסר אותו מן הזרימה החוקית שמצאנו. בדרך זו נקבל את הזרימה המינימלית החוקית.*

*את הפער הזה נוכל לפרמל בתור גרף חדש , בעל אותם צמתים, אך עם קיבול קשתות שיוגדר כהפרש בין הזרימה () לבין חסם המלעיל שהוגדר לו . נבחין שההפרש אי-שלילי, שכן מתקיים .*

*כעת נוכל להריץ אלגוריתם למציאת זרימה מקסימלית. בכך נמצא את המקסימום החוקי לפער.*

*כעת כל שנותר הוא להחסיר את זרימת הפער מהזרימה המקורית , ואת התשובה נשמור בזרימה חדשה . משום ש2 הזרימות חוקיות, וזרימת הפער לא תקטין את הזרימה המקורית אל מתחת לחסם המלעיל, נקבל זרימה מינימלית חוקית ברשת.*

**האלגוריתם**:

1. נשתמש באלגוריתם מסעיף ב' ונמצא זרימה חוקית ברשת (לא בהכרח מינימלית).
2. נגדיר גרף שצמתיו וקשתותיו יהיו זהים לשל המקורית, ואת הקיבולות נגדיר כך: לכל בגרף המקורי, *ולקשת הנוצרה ממנו*, נגדיר קיבול

.

1. נריץ אלגוריתם למציאת זרימה מקסימלית בגרף עם הקיבולים .
2. לכל בגרף המקורי, *ולקשת הנוצרה ממנו*, ונגדיר .

*הזרימה המתקבלת היא זרימה מינימלית חוקית ברשת.*

**ננמק את נכונות האלגוריתם לפתרון הבעיה:**

*נראה שהזרימה חוקית:*

*הזרימה משלב 1 חוקית, כפי שכבר הוכח בסעיף ב'.*

*הזרימה , שנבנית בשלבים 2-3, היא זרימה חוקית, שכן אלגוריתם מציאת זרימה מקסימלית יחזיר זרימה חוקית.*

*בשלב 4 אנו למעשה לוקחים את הזרימה ומבטלים ממנה את החלק בזרימה ש אחראי עליו. פעולה זה תביא זרימה תקנית מבחינת כלל שימור הזרימה, אך יתכן שתהרוס את אילוצי הקיבול בדוגמה שלנו. אך נראה שלמעשה גם אילוצי הקיבול לא נפגעים, והחסם המלרע מתקיים:*

*נבחין שלפי הבניה שלנו, מתקיים לכל ולקשת הנוצרה ממנו:*

*ומשום שבזרימה מתקיים כמובן , נקבל:*

*ולכן גם אילוצי הקיבול מתקיימים בזרימה, והחסמים המלרעיים מתקיימים.*

*נראה שהזרימה מינימלית:*

*אם נניח בשלילה שהזרימה איננה מינימלית, אז נקבל שקיים זרם מיותר במסלול שהתקבל. פירוש הדבר שבגרף ההפרשים , הזרימה המקסימלית שחושבה איננה מקסימלית, וקיים מסלול שיפור שהוא הזרם המיותר. אך זוהי סתירה, שכן אלגוריתם הזרימה המקסימלית מחזיר זרימה מקסימלית ללא שום מסלולי שיפור. לכן, הזרימה מינימלית.*

*לפיכך, הזרימה הינה זרימה מינימלית חוקית.*

**ננתח את סיבוכיות זמן הריצה:**

*יהי מספר הצמתים ב, וm מספר הקשתות ב.*

*האלגוריתם מסעיף ב' ייקח זמן ריצה של , כפי שכבר הוכח בסעיף ב'.*

*בניית הגרף החדש תיקח זמן של .*

*את מציאת הזרימה המקסימלית בגרף נבחר לממש בעזרת אלגוריתם אדמונדס-קרפ (עמוד 149 בספר הלימוד), ולכן זמן הריצה שלו יהיה .*

*חישוב הזרימה בשלב 4 ייקח זמן של .*

***סה"כ זמן ריצה של .***

**3)א)**

ראשית, נגדיל את הקיבולת של ב-1.

נתון ש היא זרימה מרבית, ושהקיבולות כולן שלמות. נבחין שאם מגדילים את הקיבולת של קשת ב-1, הזרימה המקסימלית תגדל ב-1, או שתשאר אותו הדבר. אם הזרימה המקסימלית היתה גדלה ב-2 או יותר, המשמעות היא שהזרימה החדשה גדלה ב-1 לפחות דרך מסלול שיפור שאיננו מכיל את , בסתירה להיות זרימה מרבית, שאיננה מכילה מסלולי שיפור. (\*)

נשתמש באלגוריתם אדמונדס-קרפ ע"מ לקבל את הזרימה המקסימלית החדשה.

*יהי מספר הצמתים ב, וm מספר הקשתות ב.*

ישנן 2 אופציות:

1. לא קיים מסלול שיפור, ולכן הזרימה המקסימלית איננה גדלה. סיבוכיות זמן הריצה היא כשל סריקת , ז"א, .
2. קיים מסלול שיפור אחד, ולכן אלגוריתם אדמונדס-קרפ ירוץ איטרציה אחת. לפי ספר הלימוד (ע"מ 150 בספר הלימוד), זמן הריצה של איטרציה אחת היא כשל סריקת , ז"א,

.

לא יתכנו יותר ממסלול שיפור אחד בריצת האלגוריתם, כי אז נקבל שהזרימה המקסימלית גדלה בלפחות 2, בסתירה ל(\*).

לסיכום, זמן הריצה של אלגוריתם אדמונדס-קרפ בסיטואציה זו הוא לינארי בגודל הגרף.

**ב)**

**הרעיון המרכזי של האלגוריתם**:

נקטין את הקיבולת של ב-*1. אם הזרימה ב קטנה או שווה מהקיבולת החדשה, הזרימה נשארת תקינה, וכמובן עדיין מרבית.*

*אחרת, עלינו לתקן את הזרימה כדי שתעמוד בתנאי הקיבול. נמצא את המסלול מs לt שעובר דרך ונקטין את הזרימה בכל קשת בו ב-1. כתוצאה מכך הזרימה קטנה ב1, אך כעת היא זרימה תקינה.*

*יתכן שהזרימה כעת היא איננה מרבית, שכן יתכן שקיים מסלול שיפור שאיננו מכיל את . נשתמש באלגוריתם אדמונדס-קרפ כדי לקבל זרימה מרבית. האלגוריתם ירוץ איטרציה אחת, כמו בסעיף א', ולכן הסיבוכיות תשאר לינארית.*

**האלגוריתם**:

יהי גרף מכוון עם מקור ויעד עם קיבולות שלמות ועם קשת

.

1. נקטין את הקיבולת של ב-1: .
2. אם *:*
   1. *נמצא מסלול מs ל-u בעזרת סריקת החל מ-s ועד שנתקל בצומת u.*
   2. *נמצא מסלול מv ל-t בעזרת סריקת הפוכה החל מ-t ועד שנתקל בצומת v. נהפוך את המסלול בסופו.*
   3. *נגדיר מסלול המוגדר מחיבור המסלולים ו בעזרת הקשת .*
   4. *נקטין את זרימת כל קשת במסלול ב-1. נקרא לזרימה החדשה .*
   5. *נריץ את אלגוריתם אדמונדס-קרפ על . נקרא לזרימה החדשה שמתקבלת מהאלגוריתם .*

*הזרימה המתקבלת היא זרימה מרבית חוקית ברשת.*

**ננמק את נכונות האלגוריתם לפתרון הבעיה:**

*אם בעקבות הקטנת הקיבולת, עדיין מתקיים תנאי הקיבול, הרי שאין לנו מה לשפר – הזרימה תקינה והיא מרבית, שכן הזרימה בגרף המקורי מרבית, וכאן רק הקטנו קיבולת ולכן לא יתכן שקיים מסלול שיפור כלשהו (אם היה מסלול שיפור, הוא היה קיים גם בגרף המקורי, בסתירה להיות זרימה מרבית).*

*אנו מזהים את המסלול מs לt העובר דרך (בהכרח קיים כזה כי הזרימה המקורית דרך היא חיובית, לכן קיים מסלול מs לt). אנו מחסרים מזרימת כל קשת 1. ברור שתנאי הקיבול האחרים לא נפגעים, שכן אנו רק מחסרים מהזרימה. בנוסף, כעת מתקיים , ולכן הקשת עומדת כעת בתנאי הקיבול. כעת היא זרימה תקינה.*

*עם זאת, בעקבות התיקון הנ"ל, יתכן שקיים כעת מסלול שיפור שאיננו כולל את . כמו בסעיף א', נריץ את אלגוריתם אדמונדס-קרפ. משום שהזרימה קטנה ב-1, והזרימה הקודמת היתה מירבית, כמובן שלאחר הקטנת הקיבולת של יתכן שהזרימה תשאר קטנה ב-1, או תגדל ב-1 בחזרה לזרימה הקודמת שלה. לא יתכן שהזרימה תגדל ב2, כי אז נקבל זרימה שתהיה גדולה יותר מהזרימה המקורית, למרות שהקיבולות קטנות או שוות מהזרימה המקורית.*

*לפיכך, קיים לכל היותר מסלול שיפור אחד, ולכן* אלגוריתם אדמונדס-קרפ ירוץ איטרציה אחת *בעלות של סריקת , ז"א, , כפי שצוין בסעיף א'.*

**ננתח את סיבוכיות זמן הריצה:**

*יהי מספר הצמתים ב, וm מספר הקשתות ב.*

*הקטנת הקיבולת בשלב 1 לוקחת זמן קבוע.*

*2 סריקות רצות בזמן של .*

*הקטנת זרימת כל קשת במסלול אורכת זמן של או , תלוי איך ממומש מבנה הנתונים שבו נציב את המסלול .*

*אלגוריתם אדמונדס-קרפ ירוץ במשך* איטרציה אחת *בעלות של סריקת , ז"א, , כפי שצוין בסעיף א'.*

*סה"כ זמן ריצה של .*

**4)**

*יהי נוסחת 3-CNF כמתואר בשאלה.*

*נתון שכל אחד מהמשתנים מופיע בדיוק בשלוש פסוקיות שונות בנוסחת 3-CNF. לכן, מספר הפסוקיות בנוסחה הוא גם . נגדיר:*

*(\*) נגדיר גרף לא-מכוון חדש שצמתיו יהיו , ואת הקשתות נבנה באופן הבא: לכל פסוקית , אם נמצא בפסוקית (בחיוב או בשלילה), ניצור קשת .*

*בגרף למעשה יהיו קשתות בין הליטרלים לבין הפסוקיות שהם מופיעים בהם. כמו כן, כמובן שזהו גרף דו-צדדי (צד ראשון X וצד שני Y), ומתקיים .*

*לפי משפט הול (משפט 7.40 בספר הלימוד), מתקיימים אחד מ2 התנאים הבאים:*

1. *לגרף יש זיווג מושלם, ולכן לכל תת-קבוצה מתקיים .*
2. *ישנה תת-קבוצה המקיימת .*

*אך אפשרות ב' איננה אפשרית. נראה זאת בהוכחה בשלילה.*

*נניח בשלילה שקיימת תת-קבוצה המקיימת .*

*A היא תת-קבוצה של ליטרלים, ומהווה את קבוצת הצמתים הסמוכים לצמתים בA, או, במילים אחרות, את קבוצת הפסוקיות המכילות בפועל את הליטרלים מA.*

*אך כל ליטרל בA נמצא בדיוק ב3 פסוקיות ב, ולכן ודאי מתקיים* , בסתירה להנחת השלילה.

לכן אפשרות א' היא היחידה שאפשרית, ומתקבל שלגרף יש זיווג מושלם. במילים אחרות, קיימת התאמה חד-חד ערכית בין ליטרל אחד לבין פסוקית אחת. משום ש היא נוסחת CNF, אז בהינתן הזיווג , המשמעות היא שנוכל לספק את הפסוקית ע"י כך שנציב ערך אמת מתאים ב (נציב אמת אם הליטרל מופיע בצורת חיוב, ושקר אם הליטרל מופיע בצורת שלילה).

משום שהזיווג הוא גם קשת בגרף שבנינו, מתקיים ש הוא ליטרל ב, ולכן הצבת הערך המתאים ב ודאי מספקת את .

סדרת הצבות זאת קיימת תמיד כאשר קיים זיווג מושלם. בסוף סדרת ההצבות, הנוסחה תהיה ספיקה, כנדרש.

נפרמל את האלגוריתם:

**האלגוריתם**:

1. *נבנה את הגרף כמתואר ב(\*).*
2. *נשתמש באלגוריתם פורד-פולקרסון למציאת זיווג מקסימלי בגרף דו-צדדי, כמתואר בפרק 7.5 בספר הלימוד. משום ש, זיווג זה הוא מושלם.*
3. *נעבור על כל התאמה*  בזיווג המושלם*. אם , נגדיר . אחרת, סימן ש, ואז נגדיר .*
4. *נחזיר את ההשמה .*

*ההשמה שהוחזרה מספקת את הנוסחה .*

**ננמק את נכונות האלגוריתם לפתרון הבעיה:**

*הוסבר בתחילת השאלה.*

**ננתח את סיבוכיות זמן הריצה:**

*יהי מספר הפסוקיות ב (וגם מספר הליטרלים ב). (נציין כי הקלט הוא בגודל ).*

בניית הגרף ניתנת לבניה בקלות בעזרת 2 ריצות על הנוסחה , בזמן ריצה של .

אלגוריתם פורד-פולקרסון רץ בזמן של .

השמת ערכי לוקחת זמן ריצה לינארי.

***סה"כ זמן ריצה של .***