פרטי המגיש:  
שם: יניב גולדשטיין  
תעודת זהות: 207542903  
כתובת: תמר 11, הרצליה

ממ"ן 12 – אלגוריתמים – (20417)

שאלה 1:

1. הטענה : אם כל הצלעות ב שימושיות , אז מסלול מזערי.  
   הוכחה: נוכיח באינדוקציה על אורך המסלול.  
     
   בסיס האינדוקציה: כאשר אורך המסלול הוא 0 () – מכיוון שהמסלול מתחיל מs ומסתיים ב v 🡨 אזי , ועל כן .  
   בנוסף נתון כי לכל הקשתות בגרף יש משקלים חיוביים, ולכן כל מסלול אחר יקיים: , ועל פי ההגדרה בשאלה - מסלול מזערי.  
     
   צעד האינדוקציה: נניח נכונות עבור אורך מסלול n ונוכיח על n+1.  
   יהי מסלול מזערי כך ש וכל קשת בו היא שימושית, נסתכל על מסלול באורך n בו אותו נסמן כך ש .  
   על פי הנחת האינדוקציה כל קשת במסלול שמישה וע"פ ההגדרה כל צלע בו מסיימת מסלול מזערי כלשהו המתחיל בs ומסתיים ב u. תהי e קשת כזו ונסמן את המסלול המזערי ב .  
   אם נניח בשלילה ש כאשר נוריד את הקשת e מ-2 המסלולים נקבל ש:   
   אבל הוא מסלול מזערי (כך יצרנו אותו), ועל כן אנחנו מקבלים סתירה 🡨 🡨 המסלול מזערי כנדרש.

מש"ל

1. הטענה: אם יש צלע לא שימושית ב (אחת או יותר) – אז אינו מסלול מזערי.  
   הוכחה: יהי מסלול בו קיימת קשת לא שימושית, נסמנה ב e.  
   ע"פ ההגדרה לא קיים מסלול s-v בו e היא הקשת האחרונה במסלול (לפי סעיף א' – מסלול זה גם אינו מזערי), נסמן מסלול זה ב , ואת הוריאציה המזערית שלו ב כך ש: .  
     
   אם נגדיר מסלול חדש בין ל באמצעות הקשת נקבל מסלול s-v המקיים:

והרי שהראנו כי אינה מזערית.

1. הטענה מסלול כמעט מזערי – אז מופיעה בו צלע לא שימושית אחת ויחידה  
   הוכחה: ראשית כל, במסלול יש לפחות קשת לא שימושית אחת לפי סעיף א' (אחרת היינו מניחים בשלילה שאין לו ומקבלים שהוא מסלול מזערי בסתירה לנתון). נוכיח שקיימת בדיוק קשת אחת כזו.  
   נניח בשלילה שהמסלול כמעט מזערי וקיימות 2 קשתות לא שימושיות השונות זו מזו אותן נסמן ב: .

*נניח בלי הגבלת הכלליות ש נמצאת לפני במסלול .* כך שמתקיים

:

המסלול מכיל את הקשת ולכן לפי סעיף ב' הוא אינו מסלול מזערי, נסמן את המסלול המזערי מx2-v באמצעות: כך ש .

נגדיר מסלול חדש שיהיה המזערי שיעבור בין הצמתים s-x1-x2-v :

אמנם קיבלנו מסלול מזערי, אך מסלול זה מכיל את הקשת ועל כן לפי סעיף ב' אינו מזערי 🡨 ועל כן - אינו כמעט מזערי (שכן קיימים לפחות 2) מסלולים שמשקלן קטן יותר ממנו. 🡨 סתירה.

מש"ל

1. הטענה אם הצלע הלא שימושית היחידה במסלול כמעט מזערי אז הרישא של אותה נסמן ב וגם הסיפא של של אותה נסמן ב הן מסלולים מזעריים.  
   הוכחה: נסתכל על כל הקשתות במסלול אותן נסמן בE , הרי ש הקשתות האחרות שמרכיבות את המסלולים , הן קשתות שימושיות, ולכן מסלולים אלו הן מסלולים מזעריים לפי סעיף א'.
2. רעיון האלגוריתם:
   1. נסמן את הגרף הנתון ב G. נשתמש באלגוריתם *דייקסטרה למציאת מסלול מזערי בגרף החל מs, בין היתר העץ שנקבל יבדיל את כל הקשתות השימושיות בG.*
   2. *לאחר מכן נבצע תיוג (בדומה להוכחות באוטומטים) ליצירת 2 תתי-גרפים שונים G’, G’’ שיכילו קשתות שימושיות בלבד.*
   3. *נבנה גרף חדש H מעל G’, G’’ שיקבל מסלול s-v רק אם הוא עובר דרך קשת לא שימושית אחת בדיוק.*
   4. *התוצאה תהיה מסלול כמעט מזערי בגרף G לפי סעיפים ג' ו-ד'.*

תיאור האלגוריתם:

* 1. נסמן את הגרף הנתון ב G=(V,E) (נזכור כי נתונים לנו הקודקודים s,t) ונפעיל עליו *את אלגוריתם דייקסטרה (עמוד 149 בספר) החל מהצומת s. 🡨 נקבל את עץ המסלולים המזעריים אותו נסמן ב T.*
  2. *קיבלנו כי:*
     1. – הקשתות השימושיות ב G.
     2. – הקשתות שאינן שימושיות בG
  3. נגדיר 2 תתי גרפים חדשים:
     1. , כאשר E’ מורכבת מכל הקשתות השימושיות שהן חלק מהגרף המקורי, כאשר לכל , .
     2. בצורה דומה עבור
  4. נגדיר כעת גרף נוסף , המכיל את הקשתות והצמתים של G’ , G’’ ונוסף עליהן את כל הקשתות הלא שימושיות של G, כאשר לכל ,
  5. כעת נפעיל שוב את *אלגוריתם דייקסטרה אך הפעם על s’ והמטרה שלנו היא להגיע לt’’.*
     1. *אם הצלחנו – נחזיר את המסלול שעברנו ללא סימוני התיוגים.*
     2. *אחרת – נחזיר הודעה שלא קיים מסלול כנדרש.*

נכונות האלגוריתם:

* 1. מ*אלגוריתם דייקסטרה החל מצומת s מתקבל עץ מסלולים מזעריים T, ועל כן כל מסלול הוא מסלול מזערי כאשר .*
  2. *לפי סעיף ב' (שקילות לוגית ~ אם P מסלול מזערי אז אין צלע לא שימושית) הרי שכל הצלעות בT הן שימושיות, אם הייתה צלע שימושית ב אזי היה מסלול מזערי הכולל אותה. ולכן:*
     1. – הקשתות השימושיות ב G.
     2. – הקשתות שאינן שימושיות בG
  3. בניית הגרפים G’, G’’ מתבצעת באמצעות קשתות שימושיות בלבד, ועל כן כל מסלול בהן למעשה מהווה תת-מסלול ב G (שכן הן בנויות מתוך קשתות שהיו במקור בG), ולפי סעיף ב' – מדובר במסלולים מזעריים בתוך תתי הגרפים הללו.
  4. בניית הגרף H מאלצת את המסלול החדש להכיל בדיוק קשת לא שימושית אחת, גם קשתות גרף זה נבנות מעל הקשתות המקוריות בG, ולכל כל מסלול בגרף H קיים בG.
  5. באמצעות הרצה נוספת של *אלגוריתם דייקסטרה החל מצומת s’ – אנחנו סורקים את כל האפשרויות השונות למסלול זה.* 
     1. אם קיים מסלול כנדרש *ע"י החיוב של קשת לא שימושית אחת בדיוק ב אנחנו מקבלים שמסלול זה הוא כמעט מזערי לפי סעיף ד'.*
     2. *אחרת – לא קיים מסלול כמעט מזערי.*

סיבוכיות האלגוריתם

* 1. שימוש ב*אלגוריתם דייקסטרה* לסריקת G ~
  2. שימוש ב*אלגוריתם דייקסטרה* לסריקת H ~
     1. ב H מספר הקשתות והצמתים הוא לכל היותר מספר הצמתים שנמצא בG.
  3. סה"כ -

שאלה 2:

רעיון האלגוריתם:

* 1. נוכיח כי בT’ יש בדיוק 2 רכיבי קשירות.
  2. נבצע סריקת BFS על כל רכיב קשירות בנפרד, ונחבר ביניהם באמצעות קשת הקיימת בE’, מחברת בין 2 רכיבי הקשירות והיא בעלת המשקל המינימלי.
  3. התוצאה תהיה עץ פורס מינימלי של G’.

תיאור האלגוריתם:

* 1. נגדיר 2 משתני סביבה:
     1. – זוכר את משקל הקשת המנימלית בין רכיבי הקשירות השונים, מאותחל לנציב חיובי ()
     2. - זוכר את הקשת המנימלית בין רכיבי הקשירות השונים, מאותחל ל NULL.
  2. נבחר צומת כלשהיא בעץ T’ , נבצע ממנה סריקת BFS ונסמן את העץ שקיבלנו ב .
  3. נבחר צומת בT’ שאיננה שייכת לעץ , נבצע ממנה סריקת BFS ונסמן את העץ שקיבלנו ב .
  4. עבור כל קשת e ב T’ כך ש: , (או להפך – שכן הגרף לא מכוון)
     1. אם
  5. בסוף התהליך, נוסיף את הקשת mine לT’ ובכך נקבל את הגרף הפורס המינימלי.

נכונות האלגוריתם:

* 1. **בעץ T’ יש בדיוק 2 רכיבי קשירות שונים**מצד אחד, T הוא עץ ועל כן אין לו מעגלים. אם נסיר קשת כלשהיא מT הרי שנקבל 2 רכיבי קשירות שונים.  
     מצד שני, אם נניח שיש ב'T לפחות 3 רכיבי קשירות – הרי שהוספה של הקשת שהחסרנו לו תחזיר חזרה את T שהוא כאמור גרף קשיר. והרי הוספה של קשת יכולה לחבר 2 צמתים לכל היותר, כך שהעץ T יהיה מורכב מ 2 רכיבי קשירות וזו בסתירה לנתון שהוא קשיר.
  2. **תיקון הגרף 'T לגרף פורש שאינו בהכרח מזערי**לאחר שקיבלנו את העצים מהרצת BFS על רכיבי הקשירותו השונים - המטרה שלנו היא לחבר ביניהם כך שלא יווצרו מעגלים.  
     מהיותם עצים ב לא קיים מעגל (משפט 3.2 בספר), ועלינו להקפיד שהוספת הקשת ביניהן לא תיצור אחד.  
     נניח בשלילה שהוספת הקשת (x,y) סוגרת מעגל x-w-z-y הרי ש(w,z) היא קשת בין וזו בסתירה לכך שאילו 2 רכיבי קשירות שונים.   
     🡨 הוספת קשת בין הופכת את הגרף לגרף פורש של G’.  
     תמיד תהיה קיימת קשת שתאפשר קישוריות בין שכן נתון כי G’ קשירה.
  3. **תיקון הגרף T’ לגרף פורש מזערי**מתוך כל הקשתות האפשרויות בין בחרנו את הקשת בעלת המשקל הנמוך ביותר, נסמן אותה ב e’.  
     לפי משפט החתך (4.17 בספר) נסיק כי e’ מוכלת בהכרח בעץ הפורש המינימלי של G’.  
     עם זאת , עדיין עלינו להוכיח שהוספה של e’ לT’ תהפוך אותו לגרף פורש מזערי, נניח שגם לאחר הכנסת e’ ל T’ קיים עץ אחר S שהוא הפורש המזערי של G’, ועל כן: .  
     e’ הוא חתך ולכן נפריד את S ל2 רכיבי קשירות: .

נחליף את הקשת של החתך e’ בקשת e שהייתה הקשת המקורית שהסירו בשאלה מ T

לכאורה, המצב חזר לקדמותו, , אך קיבלנו אי-שיוויון 🡨 וזו סתירה, שכן כל גודל שווה לעצמו.  
לכן *הוא עץ פורש מזערי של .*

סיבוכיות האלגוריתם

* 1. שימוש ב*אלגוריתם BFS* לסריקת G ~
  2. מעבר על כל הקשתות של T’ למציאת המינימום ~
  3. G’ הוא גרף קשיר ולכן מתקיים עבורו
     1. גם שאר הגרפים בשאלה קשירים או כמעט קשירים (תוספת של קשת אחת, ולכן סדר הגודל של המשוואה נשאר קבוע) ומתקיים
  4. סה"כ -

שאלה 3:

עלינו למצוא נוסחא בעלת הקריטריונים הבאים:

1. הנוסחא מהצורה 3CNF.
2. הרצת האלגוריתם החמדן שמתואר בשאלה עליה מחזיר False
3. הנוסחא ספיקה, כלומר קיימת הצבה עבורה הנוסחא תחזיר True.

נציג את הנוסחא ולאחר מכן נסביר מדוע כל 3 הקריוטריונים מתקיימים:

הנוסחא מורכבת מ-4 פסוקיות עם קשרי **וגם** בניהם, לכל פסוקית יש 3 ליטרלים שמחוברים בקשרי **או**, ולפי ההגדרה בממן 11 – הנוסחא אכן מהצורה 3CNF. 🡨 מתקיים קריטריון 1.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| משתנה | מספר מופעים | מספר מופעים לשלילה |
| x | 3 | 2 |
| y | 2 | 1 |
| w | 2 | 1 |
| z | 2 | 1 |
| k,m,n,I,j | 1 | 0 |
| q,p | 2 | 0 |

נסכום את מספר המופעים של כל ליטרל, לעומת מספר המופעים של שלילתם:

ראינו כי לכל אחד מהמשתנים יש יותר מופעים בצורתו החיובית מאשר בשלילתו,  
קודם כל יהיו 3 מופעים של X ולכן נבצע השמה X=T, לאחר מכן יהיו 2 מופעים של Y ושל Z במקומות נפרדים, ולכן נוסיף להשמה את Y=Z=T מה שייחייב את הפסוקית להיות שלילית תמיד ובכך לא לספק את הביטוי.  
  
כלומר האלגוריתם החמדן המתואר בשאלה יבצע את ההשמה: וערך שרירותי בליטרלים נניח בהצבה שהם T.  
ולאחר ההשמה נקבל:

והרי שהשמת האלגוריתם החמדן מחזיר לנו False על הנוסחא, כנדרש בקריטריון 2.

נראה שקיימת השמה המספקת את הנוסחא, נסתכל על ההשמה:

ולכן הנוסחא ספיקה, ומתקיים קריטריון 3.

לסיכום: הראנו כי כל 3 הקריטריונים בשאלה מתקיימים, ועל כן האלגוריתם החמדן המתואר בשאלה נכשל במציאת השמה ספיקה לנוסחא.

**מש"ל**

שאלה 4:

הטענה: לכל עץ מושרש בינרי לחלוטין קיימת סדרת שכיחויות כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא .

הוכחה: עצי הופמן הם עצים בינרים לחלוטין שכל צומת בהם מכיל מספר אותיות יחד כאשר מיקום הצמתים בעץ הבינרי תלוי בשכיחות של האותיות שמיוצגות על ידו בקידוד מסויים.

יהי עץ בינרי לחלוטין, נסמן . ולכל נגדיר את שכיחות הצומת - .

נוכיח את הטענה באמצעות אינדוקציה על עומק העץ:

* בסיס האינדוקציה: d=0 🡨 לעץ יש רמה אחת בה נמצא השורש, ואכן מתקיים .  
  עץ הופמן של הסדרה יכלול גם הוא עץ עם עלה אחד ולכן יהיה זהה לT.
* הנחת האינדוקציה: לכל עץ בינרי לחלוטין לו עומק מירבי של , אחד מעצי הופמן של סדרת השכיחויות הוא .
* צעד האינדוקציה: נוכיח שעבור עצים בינריים לחלוטין בעומק d+1 קיים עץ הופמן לסדרת השכיחויות שזהה ל T.
  + יהי עץ בינרי לחלוטין בעומק , הרי שקיים לפחות צומת אחד ששייך לעומק המקסימלי, נסמן אותו ב v.
  + T הוא עץ בינרי לחלוטין ולכן לv יש אח מאותו p[v], נסמן אותו ב u.
  + ניצור עץ חדש מעל T, כאשר לכל 2 אחים בעומק d+1 נוסיף את השכיחויות שלהן לאב שלהן, כמתואר באלגוריתם הופמן בספר, נסמן את העץ החדש בS.
    - כך שלכל בעומק d+1 נוסיף לאב הקדמון המינימלי המשותף להם את שדה השכיחות שלהם
    - את העלים u,v נמחק מהעץ S.
  + הגענו למצב בו הסרנו את כל העומק ה d+1 כאשר שימרנו את התכונה של סדרת השכיחויות, שכן לכל צומת עדיין מתקיים , בפרט עבור i=d.
  + עומק העץ הנוכחי הוא d, ולפי הנחת האינדוקציה 🡨 קיים עץ הופמן לסדרת השכיחויות הזהה ל S.
  + מתוך S נוכל לבנות חזרה את T באמצעות בנייה הפוכה לזו שבה בנינו את S, כך שלכל צומת בעומק d (או לחלק מהן) נחלק את השכיחות בצורה שווה בין 2 הילדים שלהם, ובכך נייצר עץ הופמן תקין.
  + הרי שאחת מהאפשרויות השונות תייצר את T ובכך מצאנו עץ הופמן זהה לT בעומק d+1 וצעד האינדוקציה הושלם.
* **מש"ל**