פרטי המגיש:  
שם: יניב גולדשטיין  
תעודת זהות: 207542903  
כתובת: תמר 11, הרצליה

ממ"ן 13 – אלגוריתמים – (20417)

שאלה 1:

1. נריץ את אלגוריתם ה FFT, כאשר
   1. נחלק את הפולינום לגורמים באינדקסים הזוגיים והאי-זוגיים.
      1. עבור אינדקסים אי-זוגיים :
      2. עבור אינדקסים זוגיים :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *פולינום \ ערך השורש* | *-i* | *-1* | *i* | *1* |
|  | *-3+4i* | *3* | *-3-4i* | *-1* |
|  | *-3* | *1* | *-3* | *1* |
|  | *-4* | *-2* | *-4* | *-2* |

* + 1. לכל אחד – נציב ערכים לפי שורשי היחידה הפרמיטיביים (עבור n=4 נקבל: )
  1. תיאור ריצת האלגוריתם:
  2. Call
     1. Call
        1. Call
           1. Return -1
        2. Call
           1. Return 2
        3. Return
     2. Call
        1. Call
           1. Return -3
        2. Call
           1. Return 1
        3. Return
     3. Loop 1
     4. Loop 2:
     5. return

1. בצורה דומה נריץ FFT על התוצאה מסעיף א'
   1. חלוקה הפולינום לגורמים באינדקסים הזוגיים והאי-זוגיים.
      1. עבור אינדקסים אי-זוגיים :
      2. עבור אינדקסים זוגיים :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *פולינום \ ערך השורש* | *-i* | *-1* | *i* | *1* |
|  | *4i* | *-8* | *12i* | *-4* |
|  | *4* | *2* | *4* | *2* |
|  | *8i* | *-6* | *8i* | *-6* |

* + 1. לכל אחד – נציב ערכים לפי שורשי היחידה הפרמיטיביים (עבור n=4 נקבל: )
  1. תיאור ריצת האלגוריתם:
  2. Call
     1. Call
        1. Call
           1. Return -1
        2. Call
           1. Return 3
        3. Return
     2. Call
        1. Call
           1. Return
        2. Call
           1. Return
        3. Return
     3. Loop 1
     4. Loop 2:
     5. return

שאלה 2:

* הנחות בשאלה
  1. שני המספרים המוכפלים שווי אורך (לשניהם ייצוג בינרי של n ביטים).
  2. שני המספרים המוכפלים חיוביים (ובפרט אי-שליליים)
  3. לאחר חלוקת הקלטים לn/k בלוקים בגודל k – ההכפלות שמתבצעות בשלבי הביניים אינן מגדילות את אורכם של המספרים.
* רעיון האלגוריתם
  + נחלק את הקלט בגודל n סיביות לn/k בלוקים שונים בגודל k סיביות כל אחד.
    - .
    - כאשר x,y הם פולינומים בבסיס 2, ו בהתאמה - מייצגים את הבלוק ה-i בגודל k לאחר החלוקה.
    - הבחירה בבסיס 2 תהיה קלה תודות להנחות 1-2.
  + נריץ את אלגוריתם הFFT על x,y בנפרד, נקבל לכל פולינום n/k נקודות שמייצגות אותו.
  + נכפול את תוצאות השלב הקודם לקבלת וקטור המכפלה, נסמנו ב Z.
    - לכל מ2n/k הנקודות שקיבלנו בשלב הקודם נחשב :
  + נריץ INVERSE-FFT על תוצאות המכפלה מהשלב הקודם ונקבל את המקדמים של הפולינום Z.
  + נגיע לפולינום עצמו Z ע"י סכימה של המקדמים .
  + המרה לבסיס שלם לפי המבוקש.
  + החזרת תוצאת ההמרה.
* נכונות האלגוריתם
  + נגזרת מתוך ההמרת מקדמי הפולינומים בין בסיסים ונכונות ה FFT.

כמו כן, ע"פ הנחה מס' 3 אין צורך לטפל במקרים בהם הכפלות מגדילות את מספר הסיביות בבלוק (דבר שמאפשר לנו להמשיך ולהכפיל סדרי גודל של בלוקים בגודל k בתוך הרקורסיה של הFFT.)

* חישוב סיבוכיות:
  + חלוקה של הקלט לn/k בלוקים שונים ~ ניתן לביצוע תוך כדי מעבר לינארי על איברי הקלט ופתיחה של בלוק חדש לאחר שקיבלנו k איברים בבלוק הקיים. ~
  + ביצוע הרצת FFT על x,y:
    - קלט בגודל 2n סיביות.
    - בכל קריאה רקורסיבית אנחנו מכפילים 2 בלוקים בגודל k ולכן ~ .
    - לפי הנדרש בשאלה עלינו להציב .
    - שימוש בשיטת האב – מקרה 2 מורחב 🡨
  + לכל אחת מ2n/k הנקודות מתבצעת הכפלה בין 2 בלוקים בגודל k 🡨 .
  + הרצת INVERSE-FFT, אותם השיקולים בדומה לביצוע FFT שבוצעו לעיל - .
  + סכימת פרמטרי הפולינומים שע"פ עמוד 257 בספר מתבצעת בזמן O(n).
  + סה"כ 🡨

שאלה 3:

יהי f פולינום ותהי נקודה עליו.

נגדיר וקטור A כך :

A מכיל את כל המקדמים של לכל הנגזרות האפשריות בf.

ווקטור B כך:

לכל קוראדינטה במונה נמצאת החזקה של ובמכנה עצרת גובה החזקה.

נכפול בין הוקטורים A ו B ע"י שימוש ב FFT. בוקטור התוצאה - Vנקבל את כל המחוברים האפשריים שמרכיבים את הנגזרות של f. אם נרצה לחשב את ערך הגזרת הk-ית בנקודה נחשב:

חישוב סיבוכיות:

* בניית הוקטורים A,B – כל אחד בגודל n+1 ייקח לנו O(n) זמן לבנות את שניהם.
* השתמשנו בכפל פולינומים ע"י FFT (2 הרצות FFT , ועוד INVERSE-FFT). .
  + המרה של הפולינומים A,B לתצורת DFT; הרצת FFT^-1 וחלוקה ב2n.
* סה"כ 🡨

מש"ל

שאלה 4:

בדומה לתיאור של דביר בסרטון-המוקלט מס' 7 בו מתואר האלגוריתם של שטראסן –

האלגוריתם המתואר הוא רקורסיבי ומפרק כל בעייה ל7 תתי בעיות מסדר גודל של חצי מהבעייה המקורית (), בכל בעייה מופיעה בדיוק פעולת **כפל אחת** **ו1-2 פעולות מסוג חיבור\חיסור**.

פעולות החיבור \ חיסור מעל מטריצות לוקחות זמן עבור כל איבר במטריצה (מתוקף הגדרת חיבור\חיסור של מטריצות), ועל כן מתבצעות בסדר גודל של .  
**ומכיוון שמדובר על מספר בודד של פעולות חיבור \ חיסור – הרי שזוהי גם הסיבוכיות הנלווית לכל קריאה רקורסיבית.**

מכאן נקבל את נוסחאת הנסיגה:

נשתמש במשפט האב:

* 1. מדובר במקרה א' של שיטת האב

מש"ל