פרטי המגיש:  
שם: יניב גולדשטיין  
תעודת זהות: 207542903  
כתובת: תמר 11, הרצליה

ממ"ן 15 – אלגוריתמים – (20417)

שאלה 1:

עלינו להציג דוגמה הכוללת את שתי התכונות הבאות:

1. במהלך הרצת Edmonds-karp על הרשת ישנן 2 איטרציות שונות בהן תוספת הזרימה דרך e זהה לקיבול השיורית של e.
2. הצלע e מחברת בגרף המקורי בין 2 קוקודים שמרחקם מהמקור s שונה.

האיור בעמוד הבא. (בחירות האלגו' בשלבים ב', ד' ו-ו' צבועות באדום).

* נסמן את הקשת .
* הרצת אלגו' Edmonds-Karp מילולית:
  + נשים לב כי באיטרציה הראשונה, יבחר אלגו' Edmonds-Karp את המסלול . מסלול באורך 3.
  + באיטרציה השנייה יבחר המסלול , מסלול באורך 7
  + ובאיטרציה השלישית יבחר המסלול: , מסלול באורך 11.
* בכל שלב – הבחירה בוצעה לפי אלגו' Edmonds-Karp – כלומר נבחר המסלול הקצר ביותר.
* כלל הקשתות ובניהן הקשת e בעלת משקל של '1', ועל כן כאשר בחר האלגו' באיטרציה השנייה והשלישית לעבור דרך e – הרי שביצע תוספת של זרימה הזהה לקיבולת השיורית של e 🡨 כנדרש **בתנאי ii.**
* הרי שהקשת e נבחרה פעמיים במהלך ריצת האלגו' – כנדרש **בתנאי i.**
* **מש"ל**

A picture containing text, map

Description automatically generated

שאלה 2:

זרימה חוקית בשאלה זו מודרת ע"י 2 חוקים: חוק שימור הזרימה כפי שמובא בספר וחוק קיבולת חדש, עבורו לכל קשת e שהיא חלק מהזרימה החוקית צריך להתקיים: .

1. נוכיח שאם קיימת זרימה חוקית כלשהיא בגרף – אזי קיימת זרימה חוקית גדולה כרצוננו.
   * תהי f זרימה חוקית כלשהיא בגרף, נסמן ב את הקשתות שמרכיבות את זרימה זו לפי סדר זרימתן.
   * לפי נתוני השאלה – מכיוון שf היא זרימה חוקית , אזי לכל מתקיים: .
   * יהי , ונגדיר זרימה חדשה f’ מתוך f כאשר לכל תוגדר

* + - 1. ועל כן – מתקיים **חוק הקיבולת** כפי שמוגדר בשאלה זו.
  + תהיינה צמתים עבורן
    1. בכך שאנחנו מגדילים את הזרימה בכל קשת באזי כאשר נסתכל על צומת u כלשהיא – כמות הזרימה שתיכנס אליה מתוך הקשת היא ואותה הכמות תצא ממנה בקשת – ובכך נשמר האיזון של **חוק שימור הזרימה**.
    2. הערה: נשים לב שבחרנו קשת ספציפית שנכנסת ל u וקשת אחת ספציפית שיוצאת ממנה, אם היינו מוסיפים לכלל הקשתות – הרי שהיה יכול לקרות מצב בו ל u תיכנס זרימה של ותצא ממנו זרימה של .

בכך שאנחנו משתמשים במסלול ידוע מראש – אנחנו מכסים את מקרה-קצה זה.

* + הראנו כי באמצעות הזרימה הנתונה f נוכל **להגדיר** זרימה f’ **גדולה כרצוננו** (לכל )
  + הערה: נשים לב כי גודל הזרימה בקשתות אינו חייב להיות מספר שלם במקרה זה, אך מכיוון שעדיין מתקיימים הקריטריונים הנתונים בשאלה – מדובר בזרימה חוקית תקינה.
  + **מש"ל**
  + רעיון האלגוריתם:
    - כל שעלינו לעשות הוא למצוא זרימה חוקית **כלשהיא** ברשת.
    - נשתמש בסריקת BFS כדי למצוא מסלול בין s ל t. נסמנו בM.
    - נגדיר את להיות הקיבולת המקסימלית מבין כלל הקשתות במסלול.
    - נגדיר זרימה f שתורכב מעל המסלול M כאשר בכל קשת תוזרם mcap
  + תיאור האלגוריתם:
    1. נבצע סריקת BFS על הצומת t; נסמן את עץ הסריקה בT.
    2. נבדוק האם הצומת s מופיע בT.
       - אם לא – נחזיר False מהאלגוריתם (לא קיימת זרימה חוקית)
       - אם כן – נסמן את המסלול מt ל s ב M.
    3. נעבור על כל הקשתות בM – ונמצא את הקשת לה הקיבולת המקסימלית  
        , נסמן אותה ב .
    4. נגדיר זרימה f לכל כך: .
    5. נחזיר את f
  + נכונות האלגוריתם
    1. שימוש בסריקת BFS למציאת מסלול בין s לt. בפרט נקבל את המסלול הקצר ביותר, במידה ולא קיים מסלול שכזה – הרי שלא ניתן ליצור זרימה חוקית ברשת. ע"ס הנכונות של BFS שמובא בספר.
    2. בכך שאנחנו מגדירים את הקשת בעלת **הקיבולת הגדולה** ביותר כזרימה בכל אחת מהקשתות של M – אנחנו למעשה אוכפים לכל
       - (1) – תנאי הקיבולת המובא בשאלה זו.
    3. **זרימה חוקית –** 
       - כפי שתיארנו לעיל – כל קשת מקיימת 🡨 **חוק הקיבולת מתקיים.**
       - לכל קשת במסלול – כמות הזרימה שנכנסת אליה זהה לזו שיוצאת ממנה – מכיוון שהערכים סטטים ושווים ל mcap. כל קשת אחרת בגרף לא מוזרם דבר (= 0) 🡨 **חוק שימור הזרימה מתקיים.**
       - ועל כן הזרימה חוקית כנדרש.
  + חישוב סיבוכיות
    1. תהי n מספר הצמתים וm מספר הקשתות בגרף
    2. ביצוע BFS על הצומת T 🡨
    3. מציאת ערך המקסימום מבין קשתות , במקרה הגרוע 🡨
    4. הגדרת זרימה f ל קשתות , במקרה הגרוע 🡨
    5. סה"כ :
  + רעיון האלגוריתם:
    1. נעזר בסעיף ב' כדי למצוא מסלול זרימה חוקי כלשהו f ברשת.
    2. הזרימה שמצאנו אינה בהכרח המינימלית, במידה והיא אינה מינימלית – הרי שיש ביניהן פער. אותו ננסה למצוא בדרך השלילה.
    3. נגדיר גרף חדש בו הקיבולות יהיו ההפרשים בין ערכי הזרימה של f לבין הקיבולת המקורית. ונמצא את הזרימה המקסימלית בגרף זה באמצעות פורד-פולקרסון.
    4. וכך נקבל את הזרימה המינימלית.
  + תיאור האלגוריתם:
    1. יהי גרף הרשת הנתון בשאלה.
    2. נריץ את האלגו' מהסעיף הקודם לקבלת מסלול זרימה חוקי ברשת, נסמן אותו בf.
    3. נגדיר גרף חדש
       1. כאשר הצמתים והקשתות זהים לאלו של G.
       2. הגדרת הקיבולת לקשתות תשתנה
          1. לכל נגדיר .
    4. נריץ את אלגו' אדמונד-קארפ למציאת זרימה מקסימלית בגרף G’ נסמנה ב .
    5. נגדיר זרימה מינימלית כך :
       1. לכל *ולקשת הנוצרה ממנו* נגדיר
    6. נחזיר את
  + נכונות האלגוריתם
    1. **זרימה חוקית -** 
       1. הזרימה f חוקית (לפי השאלה) ע"ס הוכחת הנכונות של סעיף ב'.
       2. הזרימה חוקית (לפי הספר)
          1. שימור הזרימה מתקיים ב
          2. חוק הקיבולת תקף גם כן:
       3. הזרימה חוקית (לפי השאלה)
          1. שימור הזרימה נשמר בין המעברים של
          2. חוק הקיבולת נשמר
    2. **זרימה מינימלית –** 
       1. נניח בשלילה שהזרימה אינה מינימלית, ולכן קיים זרם במסלול שמונע מאיתנו להגיע לפיתרון האופטימלי.
       2. לפיכך – בשלב גרף ההפרשים G’ קיבלנו זרימה שאינה מקסימלית.
       3. וזו סתירה לאלגו' אדמונד-קראפ (שמחזיר את הזרימה המקסימלית)
       4. ועל כן הזרימה מינימלית.
  + חישוב סיבוכיות
    1. תהי n מספר הצמתים וm מספר הקשתות בגרף
    2. ריצת האלגו' מסעיף ב' 🡨
    3. בניית גרף חדש G’ 🡨
    4. ריצת אדמונד-קאמפ על גרף G’ 🡨
    5. בניית הזרימה מתבצע על מעבר על הקשתות 🡨
    6. סה"כ

שאלה 3:

1. רעיון האלגוריתם

לאחר שהגדלנו את הקיבולת של ב-1 - נפצל למקרים:

* 1. הזרימה המקסימלית לא תשתנה 🡨 אז נוכל להסיק כי הגדלת הקיבולת של לא השפיעה.
  2. הזרימה המקסימלית תגדל ב-1 🡨 הגדלת הקיבולת השפיעה וכעת זורם דרך זרם נוסף על שהיה שם קודם לכן. (אם נניח בשלילה שהזרם גדל במקום אחר – הרי שהוא היה יכול לזרום שם גם קודם לכן וזו סתירה למציאת הקיבולת המקסימלית של פורד-פולקרסון בתחילת הסעיף)
  3. הזרימה המקסימלית תגדל ביותר מ-1 🡨 לא ייתכן, נניח בשלילה שהזרימה גדלה ביותר מ-1 , אזי קיים מסלול שיפור שלא עובד דרך - ולכן היה יכול לעבור לפני השינוי בקיבולת. סתירה – לפורד-פולקרסון.

הרעיון יהיה להשתמש באלגו' אדמונד-קארפ כדי לחשב את הזרימה המקסימלית החדשה.

תיאור האלגוריתם

הרצת אלגו' אדמונד-קארפ והחזרת הערך שקיבלנו.

נכונות האלגוריתם

מיידית מתוך נכונות אלגו' אדמונד-קראפ

חישוב סיבוכיות

תהי n מספר הצמתים ברשת ו m מספר הקשתות בה.  
במקרה הראשון – לא בוצע כל שינוי ולכן השתמשנו רק בסריקת הBFS של אלגו' אדמונד-קארפ ~ .  
במקרה השני – קיים בדיוק מסלול שיפור אחד, ולכן אלגו' אדמונד-קארפ ירוץ איטרציה אחת. כזכור בכל איטרציה אנחנו סוקרים את הרשת באמצעות BFS ומבצעים את ייעול הזרימה על המסלול הקצר ביותר, נתון שפעולות חיסור\חיבור\השוואה של קיבולת\זרימה הן אלמנטריות ולכן ~ .

סה"כ כנדרש.

1. רעיון האלגוריתם

לאחר שהקטנו את הקיבולת של ב-1 - נפצל למקרים:

* 1. הזרימה ב קטנה או שווה לקיבולת החדשה 🡨 אז נוכל להסיק כי הקטנת הקיבולת של השפיעה. ומסלול הזרימה שלנו תקין.
  2. הזרימה ב לא השתנתה 🡨 הרי שמתקיים (כאשר f’ היא הזרימה החדשה) ולכן חוק הקיבולת לא מתקיים.
     1. נתקן את הזרימה במסלול ע"י זיהוי המסלול והורדה של 1 בכל קשת שמרכיבה אותו.
  3. נריץ אדמונד-קארפ (שוב מדובר בסיבוכיות לינארית בדומה לסעיף הקודם).

תיאור האלגוריתם

* 1. יהי גרף מכוון עם מקור ויעד עם קיבולות שלמות ועם קשת   
     , כאשר .
  2. נבדוק האם *:*
     1. אם לא – הזרימה תקינה.
     2. אחרת – יש בעייה בזרימה – נפנה לתקן אותה.
        1. נבצע סריקת BFS מs ל u. נשמור מסלול מתאים ב
        2. נבצע סריקת BFS מv ל t. נשמור מסלול מתאים ב
        3. נגדיר מסלול חדש R בתור
        4. נגדיר זרימה חדשה f’ בה לכל קשת במסלול R נקטין את הזרימה ב1.
  3. הרצת אלגו' אדמונד-קאמפ

נכונות האלגוריתם

* + במצב בו הקטנת הקיבול של לא נוגדת את חוק הקיבול – הזרימה שלנו תקינה ומירבית.  
    נניח בשלילה שישנו מסלול שיפור – הרי שמסלול זה קיים גם בגרף המקורי (שכן רק הורדנו קיבול של קשת) – וזו סתירה לכך שf מירבית.  
      
    במצב ההפוך – הקשת אינה מקיימת את חוק הקיבול (מכיוון שהזרימה בה גדולה ב-1 מאשר הקיבולת שלה [כל מצב אחר לא ייתכן]). נשים לב שהזרימה דרך חיובית ולכן קיים מסלול . אנחנו מחפשים את מסלול זה באמצעות BFS ומגדירים זרימה חדשה f’ בה לכל קשת הקטנו את הזרימה ב1.

כעת, קיבלנו מצב בו הזרימה תקינה. אך הזרימה המירבית אינה חייבת לזרום דווקא דרך , לפיכך כדי לחשב אותה – נשתמש באלגו' אדמונד-קאמפ בדומה לסעיף הקודם.

חישוב סיבוכיות

תהי n מספר הצמתים ברשת ו m מספר הקשתות בה.  
שורה 2 – הקטנת הקיבולת ~   
שורה 3 -   
 BFS עבור s-u ~

BFS עבור v-t ~

שורה 4 - קיים בדיוק מסלול שיפור אחד, ולכן אלגו' אדמונד-קארפ ירוץ איטרציה אחת. כזכור בכל איטרציה אנחנו סוקרים את הרשת באמצעות BFS ומבצעים את ייעול הזרימה על המסלול הקצר ביותר, נתון שפעולות חיסור\חיבור\השוואה של קיבולת\זרימה הן אלמנטריות ולכן ~ .

סה"כ כנדרש.

שאלה 4:

* נתונים
  + *יהיו נוסחת 3-CNF*
  + *כל אחד מהמשתנים מופיע בדיוק בשלוש פסוקיות שונות בנוסחת 3-CNF.*
  + *מספר הפסוקיות בנוסחה הוא .*
* רעיון האלגוריתם
  + נגדיר גרף דו-צדדי , כאשר צד אחד X ייצג את כל המשתנים השונים, והצד השני Y ייצג את הפסוקיות, נחבר קשת בין איבר בX ל Y אם המשתנה מופיע בפסוקית זו. לכלל הקשתות תוגדר קיבולת 1.
    - *,*
  + - - שכן כל משתנה חבר בשלוש בפסוקיות שונות
    - - שכן כל פסוקית מכילה 3 משתנים שונים.
    - ולכן מתקיים השוויון .
  + לכן נוכל להשתמש במשפט הול (*משפט 7.40 בספר*) [ראה הערה בהמשך] ולהסיק שקיים שידוך מושלם בין צידי הגרף, כאשר ניתן למצוא אותו באמצעות אלגו' פורד-פולקרסון כך:
    - נייצר G’ ובה 2 צמתים חדשים s,t . נחבר את כל המשתנים ל s עם קשתות בקיבול **.** ואת כל הפסוקיות לt עם קשתות בקיבול 1.
    - ע"פ הכלל שהחתך המינימלי שקול לזרימה המקסימלית – הרי שכאשר נסתכל על החתך של המשתנים עם s או החתך של הפסוקיות עם t נראה שהחתך המינימלי שווה ל |X|=|Y|.
    - משמעות המצב הזה היא שיוך של כל משתנה לפסוקית אחת בלבד. כל שנותר הוא לתת למשתנה את ערכו כך שהפסוקית תסופק.
    - בכך שכל פסוקית תלויה במשתנה אחר – לא נקבל סתירה בין השמות שונות של אותו המשתנה, וכך נקבל פיתרון לבעיה כולה.
  + הערה: משפט הול טוען כי קיימים 2 מצבים, זיווג מושלם כפי שהשתמשנו בהוכחת למעלה **או** *ישנה תת-קבוצה המקיימת .*
    - נוכיח בשלילה כי אפשרות זו אינה מתקיימת –
    - נניח שקיימת *תת-קבוצה המקיימת .*
    - A *תת קבוצה של משתנים וקבוצת הצמתים הסמוכים לצמתים בA כלומר – קבוצת הפסוקיות שמכילה את המשתנים מA.*
    - *אבל נתון שכל משתנה נמצא בדיוק ב 3 פסוקיות ב ולכן מתקיים 🡨 סתירה.*
* תיאור האלגוריתם
  + בניית הגרף G כמתואר לעיל
  + הרצת אלגו' פורד-פולקרסון למציאת זיווג מקסימלי בגרף דו-צדדי.
  + נעבור על כל התאמה בזיווג שקיבלנו.
    - אם 🡨  *.*
    - *אחרת .*
  + *נחזיר את ההשמה .*
* נכונות האלגוריתם
  + מתואר לעיל
* חישוב סיבוכיות
  + יהי n מספר הפסוקיות 🡨 ולכן מספר הליטרלים הוא 3n.
  + בניית הגרף G’ בזמן
  + הרצת פורד-פולקסון לפי משפט הול בזמן של
  + מעבר על n התאמות ~
    - ביצוע פעולה השמה – זמן קבוע
  + סה"כ