**חישוביות ממ"ן 12**

**שם המגיש:** רועי דימינטשטיין

**ת.ז:** 302792361

**שאלה 1**



יש להוכיח כי השפה G כריעה.

רעיון ההוכחה

יהי  ביטוי רגולרי אשר השפה אותה הוא מתאר היא כל המילים ש111 אינה תת-מילה שלהן – זה מה שצריך לבדוק

. נבנה מ"ט  שתבנה 3 אוטומטים:

1. DFA בשם  עבור 
2. DFA בשם  עבור R
3. DFA בשם  ששפתו היא החיתוך בין השפה של והשפה של 

לבסוף  תיעזר במכונה T המתוארת בעמוד 196 בספר ומכריעה את השפה על מנת להכריע האם  או במילים אחרות, האם השפה של ריקה.  תענה כמו T מאחר ו <R> הוא תיאור של ביטוי רגולרי אשר כל המילים בו מכילות 111 אם ורק אם השפה שלו ריקה מכל המילים הנמצאות בשפה של שהן כל המילים שלא מכילות 111 ולכן החיתוך צריך להיות ריק במידה ו <R> הוא ביטוי כזה

תיאור המכונה

 על קלט <R> כאשר R ביטוי רגולרי:

1. בנה את  - DFA כמתואר מעלה
2. בנה את  - DFA המזהה את השפה של R
3. בנה את  - DFA ששפתו היא חיתוך השפות של ו 
4. הרץ את T, מ"ט המכריעה את , על  וענה כמוהה

סופיות ונכונות

1. סופיות בניית  - בסופו של דבר זהו אוטומט שעובר על המילה בקלט ומקבל רק אם הוא לא ראה רצף של 3 '1'-ים. מאחר ומכונה זאת לא משתנה בהתאם לקלט ניתן להחזיק את המידע לסימלוץ שלה ממש באמצעות מצבים של 
2. סופיות בניית  - תהליך בניית אוטומט המזהה ביטוי רגולרי הוא תהליך סופי ומתואר בעמוד 67 בספר הלימוד. בספר מתוארת בניה של NFA אך מתוארת גם המרה מ NFA ל DFA ובכל מקרה, גם NFA היה עובד לצורך הפתרון
3. סופיות בניית  - מחלקת השפות הרגולריות סגורה תחת פעולת החיתוך . אוטומט C ששפתו היא החיתוך של שפת אוטומט A עם שפת אוטומט B הוא אוטומט המריץ את A וגם את B על הקלט ומקבל אמ"מ שניהם מקבלים – ניתן לייצר אוטומט כזה במספר סופי של צעדים
4. סופיות הרצת T- המכונה T היא decider לכן הרצתה על  תסתיים לאחר מספר סופי של צעדים בקבלה או דחייה
5. נכונות
   1. כיוון ראשון:  🡸 קיימת לפחות מילה אחת  בשפה של R שלא מכילה 111 🡸  מאחר והיא בשפה של R ויש בה 111 לכן היא גם בשפה של  🡸  🡸  🡸  תדחה
   2. כיוון שני:  🡸 לא קיימת אף מילה בשפה של R שלא מכילה 111 🡸  כי כל המילים בשפה של  לא מכילות 111 🡸  🡸  תקבל
   3. בסה"כ מתקבל ש  מקבלת אם ורק אם  כנדרש

שאלה 2

סעיף א

 אלפבית אינסופי בן מנייה. האם קבוצת כל המחרוזות הסופיות מעל  היא קבוצה בת מנייה?

התשובה היא כן. נציג מנייה של הקבוצה המתוארת.

סימונים

נסמן ב  את תת הקבוצה של המחרוזות  באורך m לכל היותר ועושות שימוש בלכל היותר n האותיות הראשונות לפי סדר לקסיקוגרפי באלפבית כך שמתקיים m + n = i לכל i >1 וטבעי

טענה 1

לכל w סופית מעל  קיים לפחות  אחד כך ש 

הוכחה

תהי w מחרוזת סופית כלשהי מעל . w

אם w היא המילה הריקה אזי היא נמצאת בכל  מאחר וההגדרה שללכל i תכיל גם מחרוזות באורך 0 המשתמשת ב0 אותיות.

אחרת, w סופית ו  בת מנייה ולכן קיימת בה אות מקסימאלית מבחינת סדר לקסיקוגרפי ביחס לשאר האותיות המרכיבות אותה, נסמן את האינדקס הלקסיקוגרפי שלה ב n. נסמן את האורך של w באות m. לפי הבנייה של הקבוצות  נקבל כי  וזאת מאחר והקבוצה  מכילה את כל המילים מאורך לכל היותר m המשתמשות בלכל היותר n האותיות הראשונות ב 

טענה 2

 היא קבוצה סופית לכל 

הוכחה

לכל  עשויות להיות מספר התאמות של m ו n כך ש m+n=i. עבור m ו n מסויימים קיימות  מחרוזות שונות כי המחרוזת באורך m ובכל "מקום" יכולה להיות אחת מבין n אותיות או אף אות. מאחר ו m,n < i ו i בעצמו הוא מספר סופי אז  גם הוא סופי. קיימים i-1 צירופים שונים של m,n עבור i>1. נשים לב כי קיים הקשר m=i-n ולכן מספר המחרוזות הקיימות ב  הוא  שהוא מספר סופי לכל i סופי

הוכחת הטענה העיקרית – הקבוצה המתוארת בת מנייה

מטענה 1 ניתן להסיק כי מנייה על איברי הקבוצות  ללא חזרות שקולה למנייה על קבוצת המחרוזות הסופיות מעל  מאחר וכל w סופית מעל תמצא באחת הקבוצות האלה.

מטענה 2 הסקנו כי  היא קבוצה סופית לכל  ולכן ניתן "פשוט" לעבור על איברי  באופן סדרתי עבור כל  () כאשר אנחנו מתעלמים ממחרוזות שכבר ראינו, להתאים לכל מחרוזת "חדשה" מספר טבעי לפי הסדר ובכך למנות את כל המחרוזות הסופיות מעל 

סעיף ב

 אלפבית סופי בעל יותר מאות אחת. האם קבוצת כל המחרוזות האינסופיות מעל  היא קבוצה בת מנייה?

התשובה היא לא.

ניתן להראות זאת באמצעות דוגמא המוכרת לנו – המספרים הממשיים כאשר



בדוגמת הממשיים גם הוא אלפבית סופי בעל יותר מאות אחת וקבוצת המחרוזות האינסופיות מעליו שהיא קבוצת המספרים הממשיים אינה בת מנייה ולכן הטענה הכללית אינה יכולה להיות נכונה

שאלה 3

סעיף א

נראה כי כל אחד משלושת השלבים של M הוא בהכרח סופי ועוצר לכל קלט:

1. כל מחרוזת w נמצאת במקום ה i לפי סדר לקסיקוגרפי עבור i כלשהו. לכן על M יהיה לייצר את כל המחרוזות לפי הסדר הלקסיקוגרפי עד שתגיע למחרוזת השווה ל w. תהליך זה בהכרח סופי כי בהכרח קיים ה i הזה עבור כל w
2. מריצים את המונה E בדיוק i הדפסות כאשר i הוא מספר סופי כפי שתיארנו עבור השלב הקודם ולכן גם שלב זה סופי ותמיד יסתיים
3. A בהכרח עוצרת על כל קלט כי E יצר אותה וE הוא מונה של השפה אשר מכילה אך ורק מ"ט שעוצרות לכל קלט

סעיף ב

לפי סעיף א M עוצרת לכל קלט ולכן  מאחר ו E הוא מונה של השפה במהלך ההדפסות שלו הוא ידפיס כל מ"ט ב ולכן קיים גם j כלשהו עבורו E ידפיס <M>

סעיף ג

כאשר נריץ את M על המחרוזת ה j לפי סדר לקסיקוגרפי, לפי סעיף ב המונה בשלב 2 ידפיס את <M> ולאחר מכן בשלב 3 נריץ שוב את M על w ונענה ההפך ממנה וכאן נגיע לסתירה כי אם M תקבל את w בשלב 3 אז M תדחה באופן כללי ולהפך ומכאן שההנחה שקיים המונה E שגוייה ובכך גם ש מזוהה טיורינג

שאלה 4

הציגו רדוקציה של  ל 

רעיון הרדוקציה

בבעיה הנוכחית יש להשתמש בכך שקיימת מ"ט R כלשהי המכריעה את ולהראות שניתן להכריע בעזרתה את . ז"א, לקבל קלט  ובאמצעות R לענות האם M עוצרת על w. נייצר מכונה  שמקבלת את הקלט , משנה את M למ"ט M' מתאימה ומריצה את R על (<M'>,w) ולפי התשובה של R,  תדע מה לענות

תיאור המכונה

 על קלט (<M>,w):

1. בנה מכונה M' הזהה למכונה M למעט השינוי שכל מצבי ה reject של M הם מצבי accept של M' ניסוח לא טוב: במקום לעבור ל-qreject עוברים ל-qaccept
2. הרץ את R על (<M'>,w) וענה כמוהה

נכונות

1. כיוון ראשון:  🡸 M עוצרת על w, או דוחה או מקבלת 🡸 M' בטוח מקבלת את w משום שהיא מתנהגת כמו M פרט לעובדה שגם עבור המקרים בהם M דוחה, היא מקבלת 🡸  תקבל
2. כיוון שני:  🡸 M לא עוצרת על w 🡸 M' גם היא לא תעצור כי היא זהה ל M למעט המקרים בהם M עוצרת 🡸  תדחה

בסופו של דבר קיבלנו מצב בו  אם ורק אם  מקבלת. בנוסף  עוצרת לכל קלט משום שהמשמעות של השלב הראשון היא בסה"כ שינוי הקידוד של מצבי הדחייה של M, אם הם קיימים למצבי קבלה והשלב השני הוא הרצת R שעל פי ההנחה הוא decider ולכן עוצר תמיד

מתקבל על ידי הרדוקציה שאם כריעה על ידי decider R, ניתן להכריע את בסתירה למה שאנחנו יודעים

שאלה 5

עבור כל שפה נבדוק האם מתקיימים 2 התנאים עבור משפט RICE – האם היא טריוויאלית והאם השייכות לשפה נקבעת רק על סמך השפה המזוהה

1. 
2. השפה לא טריוויאלית, M1 המקבלת כל מילה לא נמצאת בה ו M2 המקבלת רק את המילה הריקה כן נמצאת בה
3. נניח שקיימות  כך ש ונבדוק האם  גורר  ולהפך. ואכן קל לראות שהתנאי מתקיים משום ש  אומר ש  ומאחר ולפי ההנחה  נקבל שגם  ולכן . מצד שני אם  אז  ומאחר ולפי ההנחה  נקבל שגם  ולכן 

התנאים מתקיימים ולכן אפשר להוכיח ש A לא כריעה בעזרת משפט RICE

1. 

השלב השני לא מתקיים ולא ניתן להוכיח ש B לא כריעה עם משפט RICE.

נראה עם דוגמא נגדית: תהי  מ"ט כך שעבור כל קלט היא סופרת 1000 צעדים בהם היא רק מזיזה את הראש ימינה ושמאלה ולאחר מכן מקבלת ותהי  מ"ט הפועלת באופן דומה רק מקבלת אחרי 1001 צעדים במקום 1000.

מתקיים  כי היא מקבלת כל מילה תוך 1000 צעדים מעצם הגדרתה ובנוסף גם מתקיים  כי שתיהן מקבלות את כל המילים מעל האלפבית אבל  לכן השייכות לשפה לא נקבעת רק על סמך השפה המזוהה ולכן התנאי השני של משפט RICE לא מתקיים ולא ניתן להשתמש בו על מנת להוכיח את אי כריעות השפה

1. 
2. השפה לא טריוויאלית. קידוד M1 הדוחה כל מילה נמצא בשפה משום שהשפה הריקה ניתנת להכרעה באמצעות M1 עצמה. מצד שני קידוד M2 שהיא מ"ט המזהה את אינו נמצא בשפה משום ש לא ניתנת להכרעה
3. נניח שקיימות  כך ש ונבדוק האם  גורר  וגם בכיוון השני.

כיוון ראשון:  🡸  כריעה 🡸 קיימת מ"ט M' המכריעה את  🡸 משום ש , M' מכריעה גם את  🡸  כי  מ"ט ו  כריעה – M' מכריעה אותה

כיוון שני:  🡸  לא כריעה 🡸 משום ש , גם  לא כריעה (אחרת יכולנו להשתמש במכונה המכריעה אותה כדי להכריע את ) 🡸  כי  לא כריעה

התנאים מתקיימים ולכן אפשר להוכיח ש A לא כריעה בעזרת משפט RICE

שאלה 6



נתאר LBA  המכריע את:

 על קלט w:

1. סמן את המצב ההתחלתי
2. סמן את האות הראשונה בקלט
3. בצע:
   1. מצא את האות המסומנת הימנית ביותר בקלט (האחרונה שסומנה ויש לעבד) נקרא לה a ומצא את set המצבים המסומנים (המצבים הנוכחיים של B) נקרא להם qSet
   2. לפי פונקציית המעברים של B בדוק מה הוא set המצבים האפשריים הבאים לפי a וכל אחד מהמצבים הנמצאים ב qSet. נקרא להם qSetNext
   3. הורד את הסימון מהמצבים ב qSet ובמקום סמן את המצבים ב qSetNext
   4. בדוק האם קיימת עוד אות בקלט אחרי a. אם כן, סמן אותה ועבור ל 3. אחרת עבור ל 4
4. אם אחד מהמצבים המסומנים הוא מצב מקבל של B, קבל. אחרת, דחה

הערות:

1. מבחינת התכנות הסימונים מבלי צורך בזכרון נוסף, ניתן לסמן בצורה אחת את qSet, בצורה אחרת את qSetNext (לדוגמא סימון qSet עם נקודה אחת ו qSetNext עם 2 נקודות) ואז לבצע את הורדת הסימון מ qSet וסימון בצורה הראשונה של qSetNext
2. מבחינת היכולת לבדוק בסעיף d שאין עוד אות לעבד – אם נזוז ימינה ונראה אות מסומנת, ז"א שהגענו לסוף הזכרון ופשוט נשארנו במקום

נכונות

1. הכרעת : המכונה המתוארת מעלה מסמלצת את B על הקלט w. בכל שלב היא מחזיקה את סט המצבים אליהם ניתן להגיע ע"י עיבוד הקלט עד כה. לאחר עיבוד על הקלט, יהיו מסומנים כל המצבים הסופיים מהענפים השונים של B אליהם ניתן להגיע במהלך עיבוד הקלט. אם אחד מהם הוא מצב מקבל, ז"א שקיים ענף א"ד המוביל אליו ולכן המכונה תקבל. אחרת, תדחה
2.  היא אוטומט חסום לינארית: בכל שלב השינויים היחידיים ש  מבצעת בסרט הם סימון האותיות בקלט וסימון המצבים הנוכחיים אליהם עשוי להגיע ה NFA אותו קיבלה בקלט. מאחר ו  קיבלה את B ואת w כקלט על הסרט שלה, כל המצבים של B, פונקציית המעברים ו w אותם היא צריכה בשביל לבצע בדיקות וסימונים כבר נמצאים על הסרט ולכן אין ל  צורך בכתיבת מידע נוסף על הסרט והיא איננה חורגת מגבולות הקלט על הסרט. לכן היא LBA

שאלה 7

סעיף א

יש להציג 

נציג פונקציה f חשיבה כך ש . נראה מ"ט  המחשבת את f

 על קלט (<M>,w):

1. בנה מ"ט M'. המכונה M' על קלט x:
   1. הרץ את M על w
   2. ענה כמו M
2. החזר את <M'>

 תמיד עוצרת כי היא פשוט בונה מ"ט ומחזירה אותה ולכן f חשיבה

נכונות

1. כיוון ראשון:  🡸 M מקבלת את w 🡸 M' מתעלמת מהקלט שלה ועונה כמו M על w ולכן M' מקבלת כל קלט 🡸 <M'> קידוד של מ"ט ו L(M') אינסופית 🡸 
2. כיוון שני:  🡸 או ש M דוחה את w או שM לא עוצרת על w 🡸 M' מתעלמת מהקלט שלה ועונה כמו M על w ולכן M' לא מקבלת אף קלט 🡸 <M'> קידוד של מ"ט ו L(M') היא קבוצה ריקה 🡸 

סעיף ב

יש להציג 

נציג פונקציה f חשיבה כך ש . נראה מ"ט  המחשבת את f

 על קלט (<M>,w):

1. בנה מ"ט M'. המכונה M' על קלט x:
   1. הרץ את M על w במשך |x| צעדים
   2. אם M דחתה את w או פשוט לא קיבלה ב |x| צעדים האלה, קבל
   3. אם M קיבלה את w באחד מ |x| הצעדים, דחה
2. החזר את <M'>

 תמיד עוצרת כי היא פשוט בונה מ"ט ומחזירה אותה ולכן f חשיבה

נכונות

1. כיוון ראשון:  🡸 M מקבלת את w לאחר i צעדים עבור i טבעי כלשהו 🡸 M תקבל את w באחד מהצעדים שלה עבור כל x שמקיים |x| >= i 🡸 M' עושה ההפך ולכן היא תקבל כל x כך ש |x|<i ותדחה כל x כך ש |x|>=i 🡸 L(M') זה כל המילים x כך ש |x|<i כאשר i קיים וסופי 🡸 L(M') סופי 🡸 
2. כיוון שני:  🡸 M דוחה או פשוט לא מקבלת את w לכל i צעדים שנריץ אותה 🡸 M' תגיע לקבל בשלב ב' עבור כל x בקלט 🡸 M' תקבל כל קלט 🡸 השפה של M' אינסופית 🡸 

סעיף ג

1. לפי סעיף א: 

בשיעור ראינו כי רדוקציית מיפוי בין שתי שפות גוררת שקיימת רדוקציית מיפוי בין השפות המשלימות (עם אותה פונקציה חשיבה..) ולכן מתקבל .

ידוע כי אם מתקיים אזי אם A לא מזוהה טיורינג, גם B לא מזוהה טיורינג. מאחר וידוע גם כי  לא מזוהה טיורינג, נקבל שגם לא מזוהה טיורינג

1. נעשה את אותו "טריק" רק לפי הממצאים מסעיף ב: 

שוב אם נסתכל על השפות המשלימות נקבל ש  ושוב מאחר ו לא מזוהה טיורינג, נקבל שגם לא מזוהה טיורינג