# שאלה 1

א.

אם שפה co-finite אז המשלימה שלה סופית.

נבנה מ"ט שמכריעה את , המכונה משווה את הקלט שלה מאורך לכל אחת מהמילים ,

*הזמן לכל השוואה הוא כפולה של ובסה"כ זמן הריצה במקרה הגרוע .*

*אם הקלט ב- אז המכונה דוחה ואחרת מקבלת, כלומר זו מכונה מכריעה בזמן ל- ולכן .*

*ב.*

*למשל מעל , השפה , השפה .*

*מובן ששתיהן אינסופיות.*

*כדי להכריע את יש צורך לקרוא רק את התו הראשון בקלט, לכן .*

*ג.*

*למשל ניקח את השפה (כמובן שהיא רגולרית).*

*נניח בשלילה ש-.*

*ותהי מ"ט שמכריעה את בזמן .*

*אז קיים קבוע כך שזמן הריצה של להכרעת כל קלט קטן או שווה ל-.*

*כלומר יכול להתיחס לכל היותר ל- התוים הראשונים בקלט.*

*לכן התשובות שלה עבור וגם עבור הן זהות משום ש- התוים הראשונים שלהן זהים, אבל מילה אחת בשפה והשניה לא בשפה בסתירה לכך ש- מכריעה את השפה בזמן .*

*קיבלנו סתירה ולכן .*

# שאלה 2

א.

גודל הקלט, , קטן או שווה למספר המצבים כפול גודל א"ב הקלט .

ניתן לבנות DFA לזיהוי מילים באורך גדול או שווה ל- בזמן .

ניתן לבנות את DFA המכפלה M’ בזמן .

ניתן לבדוק האם בזמן פולינומיאלי ב- (משפט 7.14), היינו פולינומיאלי ב-.

נבצע את הבדיקה הזו ונחזיר תשובה זהה.

אם אז חייבת להיות מילה כך ש-, אחרת מספר המילים ב- חסום בקבוע .

לכן DFA המכפלה ימצא ש- ולכן מכונת הטיורינג תדחה את .

אם אז לא קיימת מילה כך ש-, אחרת לפי למת הניפוח יש עוד אינסוף מילים בשפה.

לכן DFA המכפלה ימצא ש- ולכן מכונת הטיורינג תקבל את .

בנינו מ"ט שמכריעה את השפה בזמן פולינומיאלי ולכן היא ב-.

ב.

מספר הצמתים והקשתות בגרף הקלט חסומים בגודל הקלט.

מספר הקבוצות של 7 קודקודים בגרף הוא ב-.

בדיקה אם קבוצה של 7 קודקודים מכסה את כל הקשתות מתבצעת בזמן לינארי.

בסה"כ ניתן לבדוק בצורה נאיבית אם קלט הוא בשפה בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט.

# שאלה 3

א.

מאמת עבור :

ידוע כי כריעה ותהי מ"ט אשר מכריעה אותה.

המאמת שלנו בהנתן קלט יפעיל את על ועל ויקבל אם"ם התוצאות שונות (בפרט נובע , לפחות על ).

ב.

גודל הקלט תלוי בייצוג של אבל זמן הריצה תלוי גם ב- שלא תלויה בגודל הקלט שהוא |<M1,M2>| ולכן זמן הריצה לא פונקציה של גודל הקלט ובפרט לא פולינומיאלי בגודל הקלט.

ג.

לו היה מתקיים היה נובע כי קיימת מטל"ד המכריעה את אבל מכונה כזו ניתן להמיר למ"ט אשר מכריעה את ומכונה כזו ניתן להמיר למכונה אשר מכריעה את (הופכים מצבים מקבלים לדוחים ולהפך).

נראה כי לא כריעה ובכך נראה ש .

ידוע ש- לא כריעה, נראה ובכך נוכיח ש- לא כריעה.

בהנתן קלט ל- נכתוב על הסרט כאשר דקדוק אשר מייצר את .

אם אז ואז .

אם אז ואז .

מ.ש.ל.

# שאלה 4

א.

ההוכחה לא טובה משום שגודל מסמך האישור וגם זמן הריצה של המאמת אקספוננציאלים בגודל הקלט (בהנחה והקלט מיוצג בבסיס 2 ומעלה).

ב.

ידוע שניתן להכריע אם קלט הוא ראשוני בזמן פולינומיאלי.

נבנה מאמת אשר מקבל את הקלט המקורי בתוספת מספר ראשוני בתחום המתאים.

המאמת יבדוק שהמספר הנוסף הוא בתחום הרצוי (בזמן לינארי) ורק אם כן יבדוק שהוא ראשוני ויקבל רק אם שני התנאים מתקבלים.

מאחר והמספר השלישי בתחום החוקי נובע שהוא גם בגודל לינארי בגודל הקלט ולכן זמן הריצה של בדיקת הראשוניות שלו פולינומיאלי בגודל הקלט ולכן זמן הריצה של המאמת פולינומיאלי.

ג.

אם יוכח אז מאחר ו- קיימת מכונה שמכריעה את בזמן פולינומיאלי, לכן יש מכונה שמכריעה את בזמן פולינומיאלי ולכן ב-, כלומר ב-.

ד.

אי אפשר להצדיק טענה כזו, הוכחה שגויה ש- אין פירושה ש-.

מצב שני אם אז בפרט ואין חשיבות לתגלית עבור השאלה האם .

# שאלה 5

בהנתן קלט כאשר .

לכל ניצור 4 פסוקיות:

יהיו .

נגדיר .

אז הפסוקיות הן:

זמן הריצה פה לינארי בגודל הקלט (משום שניתן ליצור את כל הביטוי כל הסרט במעבר אחד) או לכל היותר פולינומיאלי.

הוכחת נכונות:

בהנתן הצבה כלשהי ראשית נראה שהביטוי שמופק ספיק:

מובן שבהצבה המקורית מקבל ערך אמת, לכן כל 4 הפסוקיות שמופקות לכל מתאמתות ולכן הביטוי מקבל ערך אמת.

כעת נראה שלא תיתכן הצבה אחרת שעבורה הביטוי אמיתי:

נניח בשלילה שקיימת הצבה שונה שעבורה הביטוי מקבל ערך אמת ויהי אינדקס עבורו מקבל ערך אמת שונה בהצבה זו.

אז הוא שקרי בהצבה זו.

לכן כל 4 הפסוקיות הבאות אמיתיות בהצבה זו:

אבל אם אז פסוקית 4 שקרית, אם אז פסוקית 2 שקרית, אם אז פסוקית 3 שקרית ואם אז פסוקית 1 שקרית ובכל אופן לא יתכן שכל 4 הפסוקיות אמיתיות בהצבה הזו, כלומר הגענו לסתירה.

ניתן להסיק שאין הצבה אחרת שמאמתת את הביטוי.

# שאלה 6

א.

הרדוקציה פועלת כמו שהיא כתובה בספר, אין צורך ממשי להצטמצם ל-.

זמן הריצה של הרדוקציה הוא לכל היותר כי לכל ליטרל צריך לעבור כל הקלט כדי לבחור אילו קשתות ליצור (וצריך ללכת הלוך ושוב על הסרט בזמן הכתיבה).

ב.

הרדוקציה פועלת כמו שהיא כתובה בספר, אין צורך ממשי להצטמצם ל-.

זמן הריצה של הרדוקציה: אנו עוברים על כל הפסוקיות ובודקים באילו נוסחאות הוא או שלילתו מופיעים ויוצרים לכל היותר 2 קשתות לכל פסוקית. כלומר גודל הגרף הוא ריבועי ביחס לגודל הקלט וכולל מסעות לכתיבת זמן הריצה .

ג.

הרדוקציה לא עובדת כמו שהיא, למשל עבור , הפסוק ספיק אבל נקבל את הבעיה הבאה ל-SUBSET-SUM שאין לה פתרון:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 4 | 3 | 2 | 1 |  |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | Y1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | Z1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | Y2 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | Z2 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | Y3 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | Z3 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | Y4 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | Z4 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | g1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | h1 |
| **3** | **1** | **1** | **1** | **1** |  |

כל פתרון יכלול בדיוק 4 מבין 8 השורות הראשונות בטבלה, אך משמע שסכום העמודה האחרונה לפחות 4 ולא יתכן שהוא יהיה 3 (גם אם תהיה גרירה יש 11 שורות ואין אפשרות שסכום העמודה יהיה 13).

(לעומת זאת אם נשנה את המספר 3 בשורה האחרונה ל- וניצור לכל פסוקית לא רק שורות כדוגמת ולא רק את שתי השורות ו- ונתייחס (רעיונית, אבל צריך להמיר לבסיס אחר וסופי) למספרים בתור מספרים בבסיס כמספר השורות ועוד אחד  
() אז הרדוקציה תעבוד.)

# שאלה 7

רדוקציה: בהנתן קלט נכתוב על הסרט .

הוכחת נכונות:

:

נניח אז יש קבוצה כך שכל קשת נוגעת בקודקוד מהקבוצה.

לכן לא יתכן שישנה קשת בין שני קודקודים בקבוצה משום שאז הקשת לא הייתה נוגעת ב-.

לכן בגרף המשלים, , תהיה קשת בין כל שני קודקודים בקבוצה שגודלה .

כלומר הקבוצה היא קליקה בגודל בגרף .

ולכן .

:

נניח , אז יש קבוצה של קודקודים שיש בין כל שניים מהם קשת ב-.

נסמל את שאר הקודקודים בתור, . בגרף , שהוא המשלים של כל קשת חייבת לגעת בקבוצה , אחרת זו קשת בין שני קודקודים שהם חלק מהקליקה ב-, אבל אז נובע שב- אין בין הקודקודים קשת וזו סתירה. לכן היא כיסוי בקודקודים של בגודל , כלומר .

זמן ריצה:

חישוב מתבצע בזמן לכל היותר (לכל זוג קודקודים שונים, מחפשים האם הייתה להם קשת בגרף המקורי ואם לא אז כותבים להם קשת על הסרט).

חישוב מתבצע בזמן לכל היותר.

בסה"כ זמן הריצה של הרדוקציה פולינומיאלי כפי שנדרש.

# שאלה 8

א.

בהנתן קלט נעדכן את הסרט ל- נסיר מ- כל קשת מהצורה וכל קשת מהצורה לכל .

זמן הריצה הוא לינארי בגודל הקלט בהנחה וייצוג הקשתות במטריצת סמיכויות, ובכל אופן פולינומיאלי בגודל הקלט.

נכונות:

: נניח , אז קיים מסלול המילטוני s,…,t ב-.

לא יתכן כי המסלול משתמש בקשתות שנכנסות ל- משום שהוא מבקר פעם אחת בכל קודקוד ו- הקודקוד הראשון.

לא יתכן כי המסלול משתמש בקשתות שיוצאות מ- משום שהוא מבקר פעם אחת בכל קודקוד ו- הקודקוד האחרון.

כלומר המסלול ההמילטוני עדיין תקף לאחר הקשתות שהוסרו בתור מסלול המילטוני ב-.

לכן

: נניח , אז קיים מסלול המילטוני ,…, ב-.

לא יתכן משום שאחרת נקבל בשלילה שישנה במסלול קשת כאשר הקודקוד שקודם ל- במסלול ההמילטוני, בסתירה לכל שהסרנו את כל הקשתות הללו מ-.

לא יתכן משום שאחרת נקבל בשלילה שישנה במסלול קשת כאשר הקודקוד הבא במסלול ההמילטוני אחרי , בסתירה לכל שהסרנו את כל הקשתות הללו מ-.

כלומר המסלול ההמילטוני ב- מתחיל ב- ומסתיים ב- ולכן

ב.

הראינו בסעיף א' ש- היא משום שממשפט 7.46, היא -שלמה, נשאר להראות ש-.

נראה מאמת פולינומיאלי עבור :

בהנתן קלט :

1. נוודא כי רשימה של קודקודים המוכלת ב- ושכל קודקוד מופיע בה בדיוק פעם אחת, אחרת נדחה.
2. נוודא שבין כל זוג קודקודים עוקבים ב- ישנה קשת ב-, אחרת נדחה.
3. נקבל.

זמן הריצה של הצעד I , של צעד II או , של צעד III ושל צעד IV .

בסה"כ זמן ריצה פולינומיאלי כנדרש.

ג.

בהנתן קלט נוסיף שני קודקודים חדשים לגרף , בה"כ ו-, ולכל נוסיף קשתות .

הפלט יהיה .

זמן הריצה הוא בהנחה ומשתמשים ברשימת סמיכויות ובכל אופן פולינומיאלי בגודל הקלט.

נכונות:

:

נניח , אז קיים מסלול המילטוני ,…, ב-.

קיימות קשתות וגם ב-.

לכן קיים מסלול המילטוני ב-

ולכן .

:

נניח , אז קיים מסלול המילטוני ב-.

המסלול ללא הקודקוד הראשון והאחרון הוא מסלול המילטוני ב-,

ולכן