# שאלה 1

א.

המכונה תמשיך לנסות לדמות את עצמה (ואת הדימוי של הדימוי של עצמה וכו') על הקלט ותשתמש בעוד ועוד מהסרט עד שתעבור את מגבלת השימוש המותרת ותדחה את הקלט הנ"ל.

ב.

המכונה תמשיך לנסות לדמות את עצמה (ואת הדימוי של הדימוי של עצמה וכו') על הקלט ותשתמש בעוד ועוד ממספר הפעולות המותר עד שתעבור את מגבלת השימוש המותרת ותדחה את הקלט הנ"ל.

# שאלה 2

מלמה 9.6, .

מכך נסיק שקיימת שפה ב- כך ש-.

**לכאורה** היינו יכולים להגיד עכשיו שלו הייתה בעיה כך ש- וגם אז היה נובע שמ- קיימת רדוקצית זמן פולינומיאלי ל- ולכן אך מובן שאין זה נכון משום שהרדוקציה היא רדוקצית זמן פולינומיאלי ולא רדוקצית מקום לוגריתמי ואי אפשר להסיק מהראשונה את קיום השניה.

# שאלה 3

נניח בשלילה .

לפי משפט ההיררכיה ; לכן קיימת שפה כך ש- וגם .

נגדיר שפה

נראה כי .

לפי הנתון קיימת מ"ט שמכריעה את בסיבוכיות מקום .

נבנה מ"ט שתכריע את :

בהנתן קלט , כאשר מילה, מבצעת:

1. בדוק ש-, אחרת דחה.
2. הרץ את על והחזר אותה תוצאה.

נכונות: אם קצרה מידי נדחה בשלב אחד, אחרת , רצה בסיבוכיות מקום , גודל הקלט , לכן רצה בסיבוכיות מקום .

נובע ולפי ההנחה בשלילה נובע .

כעת נראה .

הרדוקציה תפעל כך - בהנתן קלט ל-:

1. 🡨 .
2. חשב 🡨 .
3. כתוב לסרט הפלט .

מובן שזמן הריצה פולינומיאלי.

הנכונות טריוויאלית.

מהרדוקציה נסיק גם ולכן לפי ההנחה בשלילה – כלומר הגענו לסתירה ולכן ההנחה בשלילה אינה נכונה, כלומר .

# שאלה 4

נוכיח שיחס הקירוב של הוא הדוק.

יהי .

נבנה גרף כך ש-, קיים כיסוי מינימאלי בקודקודים ל- כך שמתקיים והאלגוריתם ימצא כיסוי בגודל .

הגרף הוא הגרף הבא:

כלומר הגרף הוא גרף של זוגות אשר מנותקים זה מזה.

אף קשת לא נוגעת באף קשת אחרת, לכן בריצת אף קשת לא נוגעת בקשת מסומנת ולכן יצטרך לסמן את כל הקשתות.

לכן יחזיר את כולו בתור הכיסוי.

לעומת זאת הוא כיסוי מינימאלי בקודקודים בגודל שכן הוא מכיל קודקוד אחד בדיוק מכל קשת וכפי שהסברנו קודם לכן אין קשתות אשר נוגעות זו בזו ולכן אין אפשרות לצמצם את גודל הכיסוי.

# שאלה 5

*א.*

*יהי גרף לא מכוון עם עלויות על הקשתות , המקיים את התנאים לבעיה המטרית של אלגוריתם הסוכן הנוסע, .*

*טענת עזר: לכל כאשר מסלול ו- מתקיים .  
הוכחה באינדוקציה על , עבור מתקיים והנכונות טריוויאלית.  
נניח את נכונות הטענה ל- ונוכיח ל-, יהי מסלול מ- ל- באורך , מטענת האינדוקציה , ומתכונות הגרף ,  
לכן .*

*יהי המעגל ההמילטוני שמחזיר אלגוריתם הקירוב עבור ויהי העפ"מ ששימש לבניית ויהי המעגל שנוצר מהסריקה התחילית של (תחילת עמוד 128 במדריך).  
מובן ש- משום ש- מכיל כל קשת של בדיוק פעמיים.*

*מצד שני ניתן לכתוב את בתור .*

*מטענת העזר .  
ולכן*

*יהי מעגל המילטוני בעל עלות מינימאלית.*

*עלינו להראות . כבר הוכחנו , לכן מספיק להראות , כלומר .*

*נסיר מ- קשת , נקבל עץ פורש של (כי קשיר בעל קשתות). מכיוון שמשקלי הקשתות אי-שליליים מתקיים ולכן .*

*מצד שני הוא עפ"מ ולכן , כלומר .*

*מש"ל.*

*ב.*

*לכל אי זוגי גדול מ- נתבונן בגרף המלא בגודל מעל הצמתים שהמחירים של הקשתות שלו כדלקמן: כל קשת שנוגעת ב- מחירה 1. כל קשת מחירה 1. כל שאר הקשתות מחירן 2.*

*נניח שאלגוריתם הקירוב יקח בתור עפ"מ את , העץ ששורשו וכל שאר הקודקודים בו עם עלים (כלומר כל קשת נוגעת ב-). מובן שזה עפ"מ כי ומשקל כל קשת בגרף לפחות אחד ולכן זהו חסם תחתון למשקל כל עץ.  
מובן שכל סדר סריקה תחילית שמתחיל ב- הוא אפשרי עבור .*

*נניח שסדר הסריקה התחילית לאחר הוא הקודקודים האי זוגיים ואז הזוגיים,*

*אז יהיה . מובן שאין פה קודקודים במעגל מהצורה כי , ורק שתי קשתות נוגעות ב-, לכן .*

*מצד שני יהי מעגל המילטוני , מתקיים כי כל זוג קשת או בין קודקודים עוקבים או נוגעת ב-. מצד שני ברור שמחירו של כל מעגל המילטוני לפחות כי משקל כל קשת לפחות 1. לכן נסיק כי מעגל המילטוני בעל מחיר מינימאלי.*

*כלומר יחס הקירוב של האלגוריתם עבור גרף זה הוא לכל הפחות: .*

*כעת נניח בשלילה שיחס הקירוב של האלגוריתם קטן ממש מ-2, נניח .*

*מובן ש-, לכן קיים כך שלכל מתקיים ובפרט קיים שלם, אי זוגי וגדול מ-5 ונובע: .*

*אבל עבור הגרף שתיארנו יחס הקירוב של האלגוריתם במקרה הזה הוא לכל ה/פחות בסתירה להנחה שלנו שיחס הקרוב הוא .*

# שאלה 6

*א.  
יהי ראשוני.*

***טענת עזר:*** *לכל מתקיים .*

*הוכחה:*

*הרי ש-.*

*נניח בשלילה , אבל הרי ידוע ש- שלם.*

*נסיק כי מצטמצם במכנה של (\*) עם מכפלת תת קבוצה של , אבל אז אנו בעצם אומרים שמכפלת תת-הקבוצה הזו היא בסתירה לכך ש- הוא ראשוני.*

*לכן נסיק .*

***תשובה:***

*עבור 0, .*

*נניח עבור שמתקיים נוכיח שמתקיים .*

*לפי נוסחת בינום מורחבת:*

*מהנחת האינדוקציה ולכן , ומטענת העזר ולכן*

*.*

*נסיק את מה שצריך להוכיח, .*

*ב.*

*יהי ראשוני.*

*יהי אז מסעיף א' .*

*היינו קיים שלם כך ש: .*

*מצד שני מתחלק ב- ולכן מתחלק ב-, אינו גורם של ולכן נסיק כי הוא גורם של , כלומר קיים שלם כך ש: .*

*אז אפשר לכתוב . נחלק ב- ונקבל את מ.ש.ל.:*

# שאלה 7

*א.*

*נניח .*

*אז קיימת מכונת טיורינג אשר מכריעה את בזמן פולינומיאלי, נניח .*

*אלגוריתם כמתבקש בשאלה:*

*בהנתן פסוקית :*

1. *הרץ את על , אם היא דחתה אז החזר "לא".*
2. *לכל משתנה בפסוקית:*
   1. *הרץ את על .*
   2. *אם קיבלה:*
      1. *🡨 .*
      2. *החלף את כל המופעים של ב- בקבוע .*
   3. *אחרת,*
      1. *🡨 .*
      2. *החלף את כל המופעים של ב- בקבוע .*
3. *החזר את .*

*זמן ריצה:*

*במקרה הגרוע אנו מפעילים את על פסוקית בגודל הקלט מספר פעמים שחסום בגודל הקלט ועוד 1 (כי מספר המשתנים חסום בגודל הקלט), כמו כן פולינומיאלית, לכן זמן הריצה אכן פולינומיאלי.*

*נכונות:*

*אם לא ספיקה אז תדחה בשלב 1 ואכן נחזיר "לא".*

*אחרת מובן ש- היא השמה עבור . נראה ש- היא השמה מספקת.*

*נראה ש- מוכלת בכל הריצה בהשמה מספקת כלשהי ולכן כאשר קבועים בה ערכים לכל המשתנים היא השמה מספקת.*

*בתחילה היא ריקה וידוע ש- ספיקה ולכן קיימת לה השמה ומובן ש- מוכלת בה.*

*כעת נניח ש- מוכלת בהשמה מספקת כלשהי בתחילת איטרציה של צעד 3, אז אם קיימת השמה מספרת שבה הרי ש- תקבל ומצד שני מוכלת בהשמה זו ולכן גם בסוף צעד 3, מוכלת בהשמה זו כמו כן החלפת ב- אינה פוגעת בעובדה זו.*

*אחרת תדחה אבל אז מההנחה ש- מוכלת בהשמה מספקת כלשהי נובע מוכלת בהשמה מספרת כלשהי, וגם במקרה זה בסוף צעד 3, מוכלת בהשמה זו כמו כן החלפת ב- אינה פוגעת בעובדה זו.*

*מ.ש.ל.*

*ב.*

*:*

*תהי שפה ב-. אז קיימת לה מכונת , .  
נהפוך ב הטלות מטבע לבחירות לא דטרמיניסטיות נקבל מטל"ד שגם בה הענף הכי עמוק פולינומי לכל היותר, כלומר גם כן פולינומית. נוכיח .*

*עבור אז , בפרט יש מסלול מקבל ל- ולכן גם תקבל את .*

*ועבור אז , בפרט אין מסלול מקבל ל- ולכן גם תדחה את .*

*מ.ש.ל.*

*:*

*מספיק להראות שיש מכונת ל-, שהיא בעיה , שכן מכל בעיה ב- יש רדוקצית זמן פולינומיאלי ל-, אפשר להפעיל אותה ואז להשתמש ב- של (כמובן השגיאה החד כיוונית נשמרת כי הפעלה יחידה) וכך נקבל לכל שפה ב-.*

*נבנה ל-, :*

*בהנתן קלט , נוסחה חוקית:*

*מההנחה נובע שקיימת מכונת ל-, נניח .*

*מלמת ההעצמה נובע שקיימת מכונת ל- עם שגיאה , נניח (ניקח מספר המשתנים ב-).*

1. *לכל משתנה בפסוקית :*
   1. *הרץ את על .*
   2. *אם קיבלה: החלף את כל המופעים של ב- בקבוע .*
      1. *אחרת: החלף את כל המופעים של ב- בקבוע .*
2. *אם אמיתית קבל, אחרת דחה.*

*ניתוח הסתברותי:*

*אם אז אין ל- השמה ששקולה לכל ההחלפות של המשתנים בקבועים אינה מספקת את ובשלב 2 תמיד תדחה.*

*אם ואם לא טועה בכל ההפעלות שלה הרי שבאופן דומה לסעיף א' בשלב 2 תהיה אמיתית ו- תקבל.*

*לכן ההסתברות לקבל היא לפחות גדולה כהסתברות ש- לא תטעה ב- ההפעלות שלה, ולפי Union-Bound נקבל שההסתברות לקבל היא לפחות .*

*מ.ש.ל.*