**ממן 12 – מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות – ברנדס איתי**

**שאלה 1:**

נבנה ראשית מכונת-טיורינג עזר שתכריע את השפה

כך:

על קלט A כאשר A הוא אוטומט סופי דטרמיניסטי:

1. בראשית כל המצבים של A לא מסומנים.
2. נתחיל מהמצב ההתחלתי של A.
3. כל עוד אנחנו נמצאים במצב לא מסומן:
   1. נסמן את המצב שאנחנו בו עכשיו.
   2. אם המצב הוא מצב מקבל, נזכור זאת.
   3. ננחש באיזה מעבר לעבור (עם אי-דטרמיניזם).
4. כעת (כשאנו נתקלים במצב מסומן), אם נתקלנו במצב מקבל, אז *נקבל*. אחרת, נמחוק את הסימונים שעשינו בענף החישוב האי-דטרמיניסטי הזה, ו*נדחה*.

למעשה מה שאנחנו עושים במכונה זו זה מחפשים לולאות בA שמכילות בתוכן איזשהו מצב מקבל. אם כך המצב, ניתן לייצר שפה אינסופית, ולכן המכונה מחזירה 1. אחרת, ללא לולאות שמכילות מצב מקבל, לא ניתן ליצור שפה אינסופית, ואכן המכונה מחזירה 0.

נבחין שהמכונה איננה "נתקעת", שכן מספר הענפים האי-דטרמיניסטים הוא סופי (במקרה הגרוע ענפים כאשר מספר המצבים בA), ובכל ריצה אנו מסמנים מצבים ומפסיקים כשנתקלים במצבים מסומנים, ולכן לא נתקע במצב של לולאה שבה אין מצב מקבל.

לפיכך לא רק מזהה את , אלא ממש מכריעה אותו.

נבנה גם מכונת טיורינג שתספור את מספר המילים השונות באוטומט סופי דטרמיניסטי A המקיים :

על קלט A כאשר A הוא אוטומט סופי דטרמיניסטי כך ש:

1. נגדיר משתנה מונה.
2. בראשית כל המצבים של A לא מסומנים.
3. נתחיל מהמצב ההתחלתי של A.
4. כל עוד אנחנו נמצאים במצב לא מסומן:
   1. נסמן את המצב שאנחנו בו עכשיו.
   2. אם המצב הוא מצב מקבל, נוסיף למונה 1.
   3. ננחש באיזה מעבר לעבור (עם אי-דטרמיניזם).
5. נחזיר את ערך המונה.

(ניתן להחזיר את ערך המונה, לדוגמה, ע"י הצבתו בסרט העבודה, והתוכנית שתקרא לה תוכל לקרוא את סרט העבודה)

נבחין שהמכונה איננה "נתקעת", שכן מספר הענפים האי-דטרמיניסטים הוא סופי (במקרה הגרוע ענפים כאשר מספר המצבים בA), ובכל ריצה אנו מסמנים מצבים ומפסיקים כשנתקלים במצבים מסומנים, ולכן לא נתקע במצב של לולאה אינסופית.

כעת נפנה לפתירת התרגיל. נגדיר מכונת טיורינג שתכריע את כך:

על קלט כאשר ו הם אוטומטים סופים דטרמיניסטיים:

1. נריץ את , ונריץ גם את .
2. אם מקבל, *נדחה*.
3. אם מקבל, *נקבל*.
4. אחרת, סימן שהשפות של A וB שתיהן סופיות.
5. נריץ את ו.
6. אם , *נקבל*. אחרת, *נדחה*.

המכונה מקבלת כאשר סופי ו אינסופי (שורות 1-3), או כש2 השפות הסופיות ו (שורות 4-6).

המכונה דוחה כאשר אינסופי (שורות 1-2), או כש2 השפות הסופיות

ו (שורות 4-6).

השפות ו שתיהן כריעות, ולכן גם כריעה.

*לפיכך שהגדרנו עונה על תנאי השאלה.*

**שאלה 2:**

*עלינו להראות שהפונקציה היא התאמה של ו- . במילים אחרות, עלינו להראות ש היא פונקציה חד-חד-ערכית ועל.*

**הוכחת חד-חד-ערכיות:**

נראה שלכל מתקיים .

נניח בשלילה ש. נניח בלי הגבלת הכלליות ש. נחלק את 2 האגפים ב ונקבל:

נבחין שהאגף הימני והכופל באגף השמאלי הם מספרים אי-זוגיים. מתקיים ולכן הנכפל באגף השמאלי הוא מספר זוגי. מספר-זוגי כפול מספר אי-זוגי הוא מספר זוגי, בסתירה לאי-זוגיות אגף ימין, ו*לכן, .*

*כעת נציב בנוסחה לעיל ונקבל:*

*ולכן, . לפיכך הפונקציה היא חד-חד-ערכית.*

**הוכחת על:**

נראה שלכל קיים כך ש .

נגדיר .

נסתכל על כל המספרים כבינאריים, ונבין מה המשמעות של כל חלק במשוואה הסופית.

החלק מייצג את m בבינארית, כאשר מבצעים הסטה (offset) שמאלית לm, ואז מציבים 1 במקום החדש שנוצר.

לאחר מכן, החלק מבצע הסטה של החלק הקודם בn מקומות, ומציב 0 בכל המקומות החדשים שנוצרו.

לכן, לכל , נמצא שמקיימים באופן הבא:

1. *נוסיף 1 ל ע"מ שנוכל לעבוד על במקום עם אותם ערכי .*
2. *נתייחס ל כמספר בינארי. נספור את מספר האפסים הרצופים מהספרה הימנית ביותר, עד שנתקל ב1, או עד שהגענו לסוף המספר. את מספר האפסים שראינו נגדיר כ. אם הגענו לסוף המספר, נגדיר את ונצא.*
3. *נדלג על הספרה 1.*
4. *נספור את מספר הספרות שנשארו עד שנגמר המספר. את מספר הספרות שראינו נגדיר כ.*

נבחין ש הם מספרי מונה (counter), לכן ברור שהם נמצאים ב.

כמו כן, הוא ב, ולכן לאחר הוספת 1 בשלב 1 נקבל מספר שהוא כמובן עדיין ב, לכן קיים לו ייצוג בינארי חיובי תקין.

לכן – היא פונקציה על.

לפיכך, הפונקציה היא חד-חד-ערכית ועל, ולכן היא התאמה, כהגדרתה בהגדרה 4.12 בספר.

**שאלה 3:**

נניח שיימצא אלגוריתם פלאי להכרעת השפה . לפיכך, קיימת מכונת טיורינג שמכריעה את השפה .

נגדיר מכונת טיורינג שתכריע את כך:

על קלט כאשר זו מכונת טיורינג ו היא מילה כלשהי:

1. נגדיר מכונת טיורינג שתהיה זהה ל מלבד כך שבפונקציית המצבים , כל כניסה למצב תוחלף בכניסה למצב .
2. נריץ את עם הקלט .
3. אם מקבל, *נקבל*. אם דוחה, *נדחה*.

נבחין שבשלב 1 אנו מגדירים מכונת טיורינג שקיימים בה מעברים רק למצב קבלה. כך למעשה מתקיים ש מחזירה 1 בכל פעם ש מחזירה ערך כלשהו, או שאיננה עוצרת כלל. זוהי מכונה שמזהה את  *אך לא מכריעה אותה (שכן היא לא עוצרת על כל הקלטים). בעזרת ההרצה בשלב 2 נוכל לגרום לאי-העצירה להפוך ל0 (דחיה). אם כן:*

ובכך הצלחנו למצוא מכונת טיורינג המכריעה את השפה , כנדרש.

**שאלה 4:**

סעיף א:

נראה שהיא שפה מזוהת-טיורינג.

נגדיר מכונת טיורינג שתזהה את כך:

על קלט כאשר זו מכונת טיורינג:

1. נגדיר מכונת טיורינג שתהיה זהה ל מלבד:
   1. אם המכונה M משתמשת בסימן רווח לשימוש פנימי כלשהו, שאיננו כדי לסמן את סוף סרט העבודה, נשתמש במקום בסימן אחר כלשהו, לדוגמא . נעדכן גם את פונקציית המעברים בהתאם.
   2. במקום מעבר ל, נעביר לקבוצת מצבים חדשה שנגדיר שמטרתה היא לבדוק האם סרט העבודה ריק (מכיל רק רווחים). אם הוא ריק, נעבור ל. אחרת, נעבור ל.
2. נריץ את עם הקלט .
3. אם מקבל, *נקבל*. אם דוחה, *נדחה*.

ברור שרק כש, מכונת טיורינג S תחזיר 1, שכן היא מריצה את x על עצמה, ואז בודקת האם הסרט ריק, ורק אם כן, מחזירה 1.

ולכן, L היא שפה מזוהת-טיורינג.

סעיף ב':

נניח בשלילה שL שפה כריעה. לכן, קיימת מכונת-טיורינג שמכריעה את השפה L.

נבנה מכונת טיורינג S כך:

על קלט כאשר זו מכונת טיורינג:

1. *נריץ את D עם הקלט M.*
2. *אם D מקבל,* נדחה*.*
3. *אחרת, נמחק את תוכן סרט העבודה (ע"י הכנסת רווחים במקום הערכים הנוכחיים), ואז* נקבל*.*

*נבחין שהמכונה S עוצרת, שכן D עוצרת.*

*כעת נבחן מה יקרה כשנריץ :*

*אם , אז לפי הגדרת השפה L, עוצר במצב מקבל. אך לפי הגדרת S שלנו, עוצר במצב דוחה.*

*אם , אז לפי הגדרת השפה L, עוצר במצב דוחה, או שסרט העבודה איננו ריק. אך לפי הגדרת S שלנו, עוצר במצב מקבל, וסרט העבודה ריק.*

*סתירה. לפיכך, לא קיימת* מכונת-טיורינג שמכריעה את השפה L, וניתן להגיד שL איננה שפה כריעה.

**שאלה 5:**

סעיף א:

ניתן להשתמש במשפט Rice. יהי שפת הקידודים של מכונות טיורינג שיש בשפה שהן מקבלות פחות מ-50 מילים.

קיימת מכונת טיורינג המקיימת (לדוגמה, מכונה שדוחה את כל הקלטים, ואז ).

קיימת גם מכונת טיורינג המקיימת (לדוגמה, מכונה שמקבלת את כל הקלטים, ואז ).

לפיכך – איננה קבוצה טריוויאלית.

בנוסף, אם 2 מכונות מקיימות , אז שתיהן נמצאות יחדיו באם ושתיהן לא נמצאות באם .

לפיכך מתקיימים תנאי משפט Rice, ולפיכך בעיית השייכות ל-איננה כריעה. כמובן ש ולכן גם A איננה כריעה.

סעיף ב:

לא ניתן להשתמש במשפט Rice. זאת משום שתכונת השייכות לB היא מכונות הטיורינג שמקבלות מילה תוך 1,000 צעדים בדיוק. זוהי הינה תכונה הנוגעת למימוש של מכונת טיורינג, ולא תכונה של השפה שהמכונה מזהה. ניתן לבנות 2 מכונות טיורינג, אחת בעלת 1,000 צעדים, ואחרת בעלת כל מספר אחר של צעדים, שיכריעו את אותה השפה. נגדיר כך 2 מכונות טיורינג :

הגדרת :

על קלט w כאשר w היא מילה:

1. נזיז את הראש הקורא-כותב 999 פעמים ימינה.
2. ע"י מעבר למצב – *נקבל*.

מתקיים , ומספר הצעדים שמבצע הוא 1,000 (999 צעדים בשלב 1 וצעד נוסף בשלב 2). לפיכך, .

הגדרת :

על קלט w כאשר w היא מילה:

1. ע"י מעבר למצב – *נקבל*.

מתקיים , ומספר הצעדים שמבצע הוא 1. לפיכך, .

מתקיים ו אך , בניגוד לדרישות משפט Rice.

סעיף ג:

ניתן להשתמש במשפט Rice. יהי שפת הקידודים של מכונות טיורינג שהשפה שהן מזהות היא כריעה.

קיימת מכונת טיורינג המקיימת (לדוגמה, מכונה שדוחה את כל הקלטים).

קיימת גם מכונת טיורינג המקיימת (לדוגמה, המזהה את , שהיא איננה שפה כריעה לפי משפט 4.11).

לפיכך – איננה קבוצה טריוויאלית.

בנוסף, אם 2 מכונות מקיימות , אז שתיהן נמצאות יחדיו באם כריעה ושתיהן לא נמצאות באם לא כריעה.

לפיכך מתקיימים תנאי משפט Rice, ולפיכך בעיית השייכות ל-איננה כריעה. כמובן ש ולכן גם איננה כריעה.

**שאלה 6:**

*נגדיר אוטומט חסום לינארית שיכריע את השפה .*

*נוכל לעשות זאת ע"י הרצת סימולציה של פונקציית המצבים על אותיות הקלט, ונקבל אם קיים מסלול חישוב על מילה שמסתיים במצב מקבל כלשהו. אחרת, נדחה.*

*נוכל להגדיר אוטומט חסום לינארית D כך:*

על קלט כאשר הוא אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי וw היא מילה:

1. נעתיק את המילה לסרט העבודה.
2. נסמן את המצב ההתחלתי של .
3. נסרוק את התווים שבמילה תו תו. על כל תו :
   1. לכל מצב מסומן , נמחק את הסימון, ונחשב את כל המצבים שיש מעבר אליהם בפונקציית המצבים בקריאת . נסמן את כל המצבים ה הללו.
4. אם קיים מצב מקבל בקבוצת המצבים המסומנים, *נקבל*. אחרת, *נדחה*.

*נבחין שבכל שלב בלולאה שבשורה 3, קבוצת המצבים המסומנים מציינים את קבוצת המצבים שניתן להגיע אליהם מהמצב ההתחלתי בקריאת כל התווים , כאשר הוא מספר התו שאנו סורקים כרגע.*

*לכן, ברור שכשנסיים לקרוא את , אם נמצא בקבוצת המצבים המסומנים מצב מקבל, סימן שקיים מסלול חישוב על שמסתיים במצב מקבל. אחרת, לא קיים מסלול חישוב שמוביל מהמצב ההתחלתי למצב מקבל בקריאת , ולכן האוטומט דוחה. האוטומט מכריע את השפה כהלכה.*

*נבחין גם שבמהלך הפעולה, העתקנו את המילה לסרט העבודה, ורצנו עליה בלבד, מבלי להזדקק לכמות זיכרון גדולה יותר (חוץ מהצורך לסמן מצבים, שהוא בכל אופן, בסה"כ מכפיל את מספר המצבים בהשוואה לאוטומט B המקורי ולא יחסי לגודל הקלט). המקום הנדרש לינארי בגודל הקלט, ולכן זהו אוטומט חסום לינארית תקין.*

**שאלה 7:**

*מוגדרת השפה* .

*סעיף א':*

*נגדיר רדוקציית מיפוי של ל- :*

*על קלט כאשר הוא מכונת טיורינג ו היא מילה:*

1. *נבנה מכונת טיורינג חדשה:*

על קלט x:

1. הרץ את על . (התעלם מהקלט x)
2. אם M מקבלת, נקבל. אחרת, נדחה.
3. *נחזיר את .*

נבחין שאם , אז תקבל כל מילה ב, ולכן .

ולהפך, אם , אז לא תקבל שום קלט ולכן .

ברור גם שהרדוקציה שמצאנו היא פונקציה חשיבה.

*לפיכך מצאנו רדוקציית מיפוי מתאימה, ומתקיים .*

*סעיף ב':*

*נגדיר רדוקציית מיפוי של ל- :*

*על קלט כאשר הוא מכונת טיורינג ו היא מילה:*

1. *נבנה מכונת טיורינג חדשה:*

על קלט x:

* 1. הרץ את על למשך צעדים, או עד שהיא עוצרת (המוקדם מבניהם).
  2. אם M מקבלת תוך או פחות צעדים, נדחה. אחרת, נקבל.

1. *נחזיר את .*

נבחין שאם , אז קיים איזשהו מספר צעדים דרוש ע"מ ש יקבל את , ואז לכל מילה באורך המקיימת הגרסה הערוכה של מכונה תקבל, ואז המכונה החדשה תדחה. לכל מילה באורך המקיימת המכונה הערוכה M תדחה, ולכן המכונה תקבל. יש מספר מילים סופיות בעלות אורך קטן מ, ולכן .

ולהפך, אם , אף מספר צעדים לא "מספיק" ע"מ ש*M* יקבל את w, ולכן לכל קלט, הערוכה תדחה, ו תקבל כל מילה ב, ולכן .

ברור גם שהרדוקציה שמצאנו היא פונקציה חשיבה.

*לפיכך מצאנו רדוקציית מיפוי מתאימה, ומתקיים .*

*סעיף ג':*

בסעיף ב' הוכחנו ש. מהגדרת רדוקציית מיפוי אנו מקבלים ש מאותה רדוקציה. נניח בשלילה ש מזוהת-טיורינג. לפי משפט 5.28 נקבל שגם מזוהת-טיורינג, בסתירה למשפט 4.23, בו הוכח ש איננה מזוהת-טיורינג.

לכן - לא מזוהת-טיורינג.

בסעיף א' הוכחנו ש. מהגדרת רדוקציית מיפוי אנו מקבלים ש מאותה רדוקציה. נניח בשלילה שמזוהת-טיורינג. לפי משפט 5.28 נקבל שגם מזוהת-טיורינג, בסתירה למשפט 4.23, בו הוכח ש איננה מזוהת-טיורינג.

לכן - לא מזוהת-טיורינג.