**ממן 11 – מבוא לתורת החישוביות והסיבוכיות – ברנדס איתי**

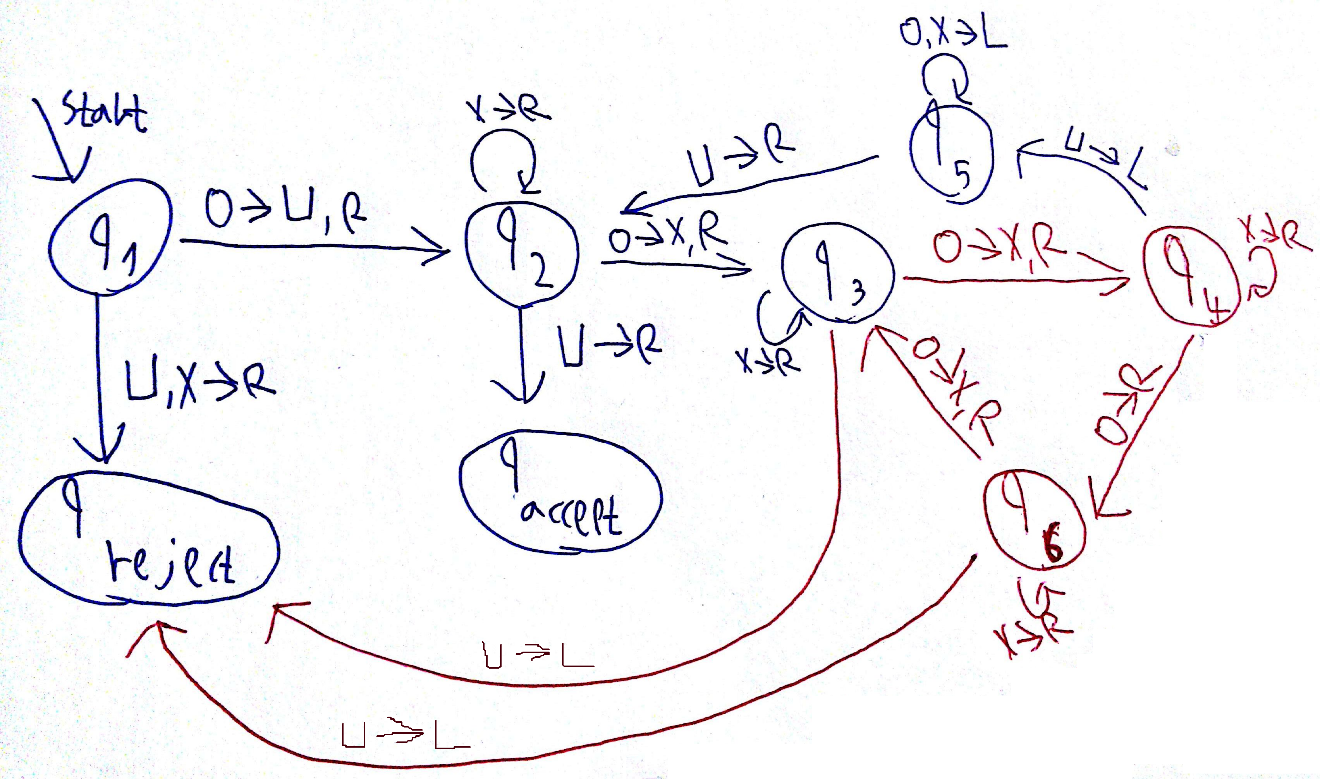
**שאלה 1:**

אנו מתבקשים לבנות מכונת טיורינג שתכריע את השפה .

נגדיר מכונת טיורינג כאשר:

וטבלת המעברים מוגדרת באמצעות התרשים הבא:

(מעברים ומצבים מדוגמא 3.9 מסומנים בכחול, מעברים ומצבים חדשים מסומנים באדום)



מבחינה לוגית, הפיתרון דומה מאוד לדוגמא 3.9, רק שבמקום לסמן בx כל 0 שני, אנחנו מסמנים בx כל 0 שני ושלישי (במעברים ), ובכך כאשר נגיע לקצה הסרט אנו נקטין בכל איטרציה בשני שליש, ונשאיר רק שליש ממספר האפסים המקורי.

אם במצב זה התברר שראינו רק 0 אחד עד כה, סימן שמספר האפסים מתחלק ב3, ואנו מקבלים (מצב ).

אחרת, ישנם 3 מצבים אפשריים:

* – עברנו על מספר אפסים שהמודולו שלו הוא 2. במצב כזה אנו דוחים, כי אם מספר האפסים מתחלק ב3, לא יתכן שהגענו למודולו שהוא 2. (מעבר )
* – עברנו על מספר אפסים שהמודולו שלו הוא 0. לא נתקלנו בסתירה ואנו פונים למצב שיחזיר אותנו לראשית הסרט, ואז נחזור לאיטרציה נוספת באמצעות .
* – עברנו על מספר אפסים שהמודולו שלו הוא 1. במצב כזה אנו דוחים, כי אם מספר האפסים מתחלק ב3, לא יתכן שהגענו למודולו שהוא 1. (מעבר )

שאר המצבים מתנהגים בדיוק כמו דוגמא 3.9.

השתמשנו בפתרון ב8 מצבים, ולכן הוא עומד בדרישת התרגיל – להשתמש במקסימום 9 מצבים.

**שאלה 2:**

1. *מכונה מכריעה מגיעה ל עבור כל מילה ששייכת לשפה, ומגיעה ל עבור כל מילה שלא שייכת לשפה.*

*משום שאנו רוצים להכריע את השפה הריקה, עלינו להעביר ל על כל מילה.*

*לשם כך נבנה מכונה בעלת שני מצבים, , ונגדיר את המצב ההתחלתי להיות .*

1. *מכונה מזהה מגיעה ל עבור כל מילה ששייכת לשפה, ומגיעה ל או לא עוצרת עבור כל מילה שלא שייכת לשפה.*

*הדרישה הפעם היא שמכונת הטיורינג תזהה את השפה הריקה, אך לא תכריע אותה.*

*במילים אחרות, עלינו לדאוג שישנם מילים שלא בשפה, והמכונה לא תעצור עליהן.*

*נבנה מכונה שאיננה עוצרת עבור כל מילה (משום שהשפה שמזהים היא השפה הריקה, וכל מילה איננה בשפה).*

*למכונה יהיו שלושה מצבים: , ונגדיר את המצב ההתחלתי להיות .*

*במצב , על קריאת כל תו נכתוב את אותו תו על הסרט, נחזור למצב ונבקש מהראש הקורא-כותב לפנות שמאלה (ובכך למעשה הראש יתקע במקום ולא ישנה את מצבו).*

*המכונה איננה עוצרת על שום קלט, ולכן היא מזהה את הקבוצה הריקה אך איננה מכריעה אותה.*

**שאלה 3:**

מודל מכונת טיורינג בעלת אינסוף מצבים הוא בעל יותר כוח ממודל מכונת טיורינג בעלת מספר מצבים סופי. **למעשה, מודל שכזה הוא חזק כ"כ שהוא יכול להכריע כל שפה L מעל כל שיהיה.**

לכל שפה L מעל כלשהו זה נוכל לבנות מכונת טיורינג בעלת אינסוף מצבים שתכריע את L כך:

אלפבית הסרט יהיה הסטנדרטי: .

לכל יהיה מצב במכונה שלנו עם השם (לדוגמא, כאשר ). ישנם אינסוף מצבים, אך המודל שלנו מסוגל להכיל אינסוף מצבים, אז אין בעיה מבחינה זו.

המצב ההתחלתי יהיה . אם המילה הריקה נמצאת בשפה, נעביר בקריאת רווח אל . אם היא לא נמצאת בשפה, נעביר בקריאת רווח אל . בקריאת נעביר ל.

כל שאר המצבים יוגדרו כך: עבור מצב ,

* אם w נמצאת בשפה, נעביר בקריאת רווח אל .
* אם היא לא נמצאת בשפה, נעביר בקריאת רווח אל .
* בקריאת נעביר אל .

**כך הגדרנו מכונה המסוגלת להכריע כל שפה L מעל כל .**

בתרגיל 4.23 בפרק 4 בספר הלימוד (עמוד 210) מתוארת בעיה שאיננה ניתנת לזיהוי-טיורינג. **במילים אחרות, לא קיימת מכונת טיורינג שמקבלת את השפה של בעיה זו.**

**למרות זאת,** כמו שהראנו, **מכונת טיורינג בעלת אינסוף מצבים מסוגלת לקבל את שפה זו.**

*כמובן שהנ"ל לא סותר את התזה של צ'רץ'-טיורינג, שכן מודל של מכונת טיורינג בעלת אינסוף מצבים איננה מודל חישובי מציאותי, ומוגדר אחרת מהגדרת מכונת הטיורינג הקלאסית.*

**שאלה 4:**

עלינו לתאר מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית שתזהה את השפה הבאה:

נגדיר מכונת-טיורינג M עם ו הפועלת כך:

לכל מילת קלט w,

1. הצב, באופן לא דטרמיניסטי, סמן כוכב מעל אחד מסמלי ה# (כך שיהיה ). אם בסריקה נגיע לתו רווח ועדיין לא מיקמנו את הסמן, נדחה.
2. מימין ל# שסומן בכוכב, נסמן, באופן לא דטרמיניסטי, סמל # נוסף. אם בסריקה נגיע לתו רווח ועדיין לא מיקמנו את הסמן, נדחה.
3. נשווה את 2 המחרוזות שנמצאות מימין ל2 סימני ה המסומנים, ע"י השוואה של ה0ים וה1ים בתנועת זיגזג (הלוך ושוב).
4. אם בנקודה כלשהי נגלה תו שונה, נדחה. אחרת, נקבל את המחרוזת. (נבחין שהסיום של המחרוזת הימנית עלול להסתיים ב# או ברווח, ולכן ספציפית כאשר במחרוזת השמאלית נתקל ב#, נבדוק במחרוזת הימנית האם היא שווה ל# או לרווח.)

בגלל האי-דטרמיניזם של מכונת הטיורינג, מספיקה הסתעפות אחת מוצלחת ע"מ שכל המכונה תקבל.

בכך השתמשנו באי-דטרמיניזם כדי לבנות מכונת טיורינג פשוטה יותר.

**שאלה 5:**

אנו מתבקשים להגדיר מונה לשפה .

מבחינה רעיונית, אנו הולכים לייצר כל מילה , ולהציב אותה בסרט העבודה, כאשר התו הראשון בסרט יהיה סימן רווח (ע"מ שנדע שהגענו לתחילת הסרט), לאחר מכן תוצב המחרוזת w, ובסופה רווח נוסף שיסמן את סופה.

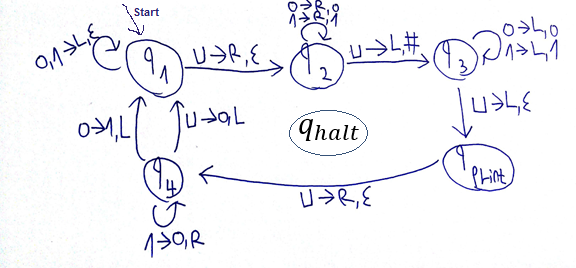
כאשר נרצה להדפיס המחרוזת, נלך לראשית הסרט, נסרוק את איבריה ונדפיס אותם לסרט הפלט, נדפיס את התו # ואז נסרוק את המחרוזת בסדר הפוך, כאשר גם אז נכניס כל איבר לסרט הפלט. בסופו של דבר המחרוזת תודפס, כנדרש.

לאחר מכן נפנה שוב לייצור מילה הבאה בתור (בסדר מילוני כאשר קוראים משמאל לימין), נדפיס אותה, וחוזר חלילה.

נגדיר מונה כאשר:

* אלפבית סרט הפלט
* אלפבית סרט העבודה

וטבלת המעברים מוגדרת באמצעות התרשים הבא:



נסביר את מטרות המצבים:

* הם מצבים שמטרתם להכין את סרט הפלט כך שיהיה מוכן להדפסה תקינה של המחרוזת עבור מחרוזת w שברצוננו להדפיס.
* כאשר נרצה להדפיס מחרוזת שנמצאת בסרט העבודה, נעבור למצב . מטרתו היא להעביר את הראש הקורא-כותב לתחילת הסרט. לאחר מכן הוא עובר למצב .
* סורק את סרט העבודה, מקצהו השמאלי ועד שנתקל בסופו (בתו רווח), כאשר הוא מעתיק לסרט הפלט כל תו שהוא נתקל בו. בסופו הוא עובר למצב ומעתיק # לסרט הפלט. סרט הפלט יכיל לאחר שלב זה את המחרוזת w#.
* סורק את המחרוזת בסדר הפוך, מהסוף עד להתחלה (כאשר נתקל בתו רווח), כאשר הוא מעתיק לסרט הפלט כל תו שהוא נתקל בו. כך למעשה הוא מוסיף לסרט הפלט את המחרוזת . בסופו הוא עובר למצב ומודפסת המחרוזת שנמצאת בסרט הפלט - , כנדרש.
* לאחר ההדפסה אנו עוברים מעבירים את הראש הקורא-כותב לתחילת המחרוזת, ועוברים למצב , שהוא מצב שאחראי על קידום המחרוזת למחרוזת הבאה בסדר המילוני (בקריאה משמאל לימין). באופן מפתיע מספיק רק מצב אחד לקידום זה:
  + אם אנו נתקלים ב0, אנו משנים אותו ל1 ועוברים להדפיס את המחרוזת (מעבר ל).
  + אם אנחנו נתקלים ב-1, אנו משנים אותו ל-0, פונים ימינה בסרט העבודה, וחוזרים לאותו מצב (שכן כעת יש שארית ועלינו להוסיף גם לאיבר הבא 1).
  + אם הגענו לרווח, הרי שהגענו לסוף המחרוזת ובהכרח כל המחרוזת היתה מלאה באחדים בהתחלה, וכעת היא מלאה באפסים. פירוש הדבר הוא שסיימנו להדפיס את כל המחרוזות הקיימות מעל הא"ב באורך הנוכחי, ועלינו להתחיל להדפיס את סדרת המחרוזות שאורכן גדול ב-1. נעשה זאת ע"י כתיבת 0 במקום הרווח ונעבור להדפיס את המחרוזת (מעבר ל). אנו מדפיסים את המחרוזות בסדר מילוני (משמאל לימין) ולכן מחרוזת שמלאה באפסים היא אכן הראשונה שתודפס באורך החדש.

נבחין גם שהמונה מתחיל במצב ובכך למעשה מבצע הדפסה של המחרוזת הריקה.

ברור כעת שהמונה E מחשב פנימית כל מילה w ב, ומדפיס אותה למדפסת בצורת .

**שאלה 6:**

*עלינו להוכיח ששפה A היא מזוהת-טיורינג אם ורק אם יש מונה שמפיק את A, וכל מילה בA מודפסת ע"י המונה* ***פעם אחת ויחידה****.*

*כיוון =>:*

*שפה A היא מזוהת-טיורינג, ולכן לפי משפט 3.21, קיים מונה E שמונה את כל המילים (יתכן שעם חזרות).*

*נבנה מונה E’ בדרך הבאה:*

אלפבית הסרט יהיה: .

*נבצע את הפעולות הבאות אינסוף פעמים:*

*נבצע סימולציה על E.*

*כאשר מE תודפס המחרוזת הראשונה , נבדוק האם אחת מן המחרוזות:*

* + *\_w\_*
  + *\_w#*
  + *#w\_*
  + *#w#*

*נמצאת איפשהו בסרט המונה (בסריקה מהתחלת הסרט עד סימן הרווח הראשון).*

*אם לא – נדפיס את w ונוסיף לסוף הסרט המונה (במקום סימן הרווח הראשון) את המחרוזת #w.*

*כך, בכל איטרציה, אם המילה החדשה לא הופיע בעבר, המונה החדש ידפיס אותה, וירשום אותה בסרט ע"מ לזכור לא להדפיס אותה עוד בעתיד.*

*אם המילה הופיעה כבר, היא לא תודפס בשנית.*

*וכך בנינו מונה ש שמפיק את A, וכל מילה בA מודפסת ע"י E’ פעם אחת ויחידה.*

*כיוון <=:*

*מונה שמפיק את A וכל מילה בA מודפסת ע"י המונה פעם אחת, הוא בפרט מונה שמפיק את A. לפי משפט 3.21 השפה היא מזוהת-טיורינג.*

*ובכך הוכחנו ששפה A היא מזוהת-טיורינג אם ורק אם יש מונה שמפיק את A, וכל מילה בA מודפסת ע"י המונה פעם אחת ויחידה.*

**שאלה 7:**

יש להראות שלכל שפה מזוהת-טיורינג אינסופית יש תת-שפה אינסופית כריעה.

*יהי L שפה מזוהת-טיורינג אינסופית. לפי משפט 3.21, קיים מונה E שמפיק את כל המילים (בסדר כלשהו, יתכן שעם חזרות).*

*נבנה מונה E’ שידפיס את השפה בסדר הסטנדרטי:*

1. *נבצע סימולציה על E.*
2. *כאשר תודפס ממנה המחרוזת הראשונה , נשמור אותה בצד בתור . כמו כן, נדפיס את למדפסת.*
3. *נבצע את הפעולות הבאות אינסוף פעמים:*
   1. *נבצע סימולציה על E.*
   2. *כאשר תודפס ממנה מחרוזת w, נבדוק האם (לפי הסדר הסטנדרטי של מחרוזות). אם כן, נדפיס את w למדפסת ונגדיר .*

*נבחין שL היא שפה אינסופית, ולכן אורך המילים בשפה איננו חסום ולכל w קיימת מילה v שגדולה ממנו (לפי הסדר הסטנדרטי של המחרוזות). לפיכך – השפה של המונה E’, , היא אינסופית.*

*מכיוון שE’ מונה את המילים לפי הסדר הסטנדרטי של מחרוזות, לפי שאלה 3.13, השפה שהוא מפיק, , היא כריעה.*

*כמו כן ברור ש, שכן כל המילים שמודפסות מ E’ הן מחרוזות מתוך L (אם כי יתכן שלא כולן).*

*וכך הראנו שלכל שפה מזוהת-טיורינג אינסופית L קיימת תת-שפה ש אינסופית כריעה.*