האוניברסיטה הפתוחה

כ"ז בתשרי תשפ"א

15

מס' שאלון - 492

באוקטובר 2020

סמסטר 2020ג

מס' מועד 85

20476 / 4

שאלון בחינת גמר

20476 - מתמטיקה בדידה

משך בחינה: 4 שעות

בשאלון זה **3** עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים:

חלק א: שאלת חובה. את התשובה לכל סעיף כתבו במחברת בלבד.

חלק ב: עליכם לענות על שלוש מתוך ארבע השאלות.
אם תענו על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

שימו לב:

* בחלק ב יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד, וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
* אם ברצונכם להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליכם לחזור ולהוכיחן.
* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרתם אותם.

בהצלחה !!!

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק') **א.** להלן האותיות a,b,p מסמנות מספרים טבעיים חיוביים כאשר $p \geq 2$.

את הפסוק "p מספר ראשוני" ניתן להצרין כך:

[1] $\forall a \forall b((p = ab) \wedge ((a = 1) \vee (b = 1)))$

[2] $\forall a \forall b((a = 1) \vee (b = 1) \vee (p \neq ab))$

[3] $\forall a \forall b(((a \neq 1) \vee (b \neq 1)) \rightarrow (p \neq ab))$

[4] $\forall a \forall b(((a = 1) \vee (b = 1)) \rightarrow (p \neq ab))$.

(7 נק') **ב.** $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים, $\mathbf{Q}$ קבוצת הרציונליים.

אם $A \subseteq \mathbf{R}$ ואם לכל $a,b \in \mathbf{R}$ כך ש- $a < b$ מתקיים $|A \cap (a,b)| = \aleph_0$ אז

[1] $|A| > \aleph_0$

[2] $|\mathcal{P}(A)| = |\mathbf{R}|$

[3] $|(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cap A| \geq \aleph_0$

[4] $|A \cap \mathbf{Q}| \geq \aleph_0$

(6 נק') **ג.** לאחר מחיקת כמה קשתות (בלי למחוק צמתים) בגרף **פשוט לא מישורי ומתוייג** G התקבל עץ עם סדרת פרופר $(2,3,4,3)$.

[1] הדרגה של כל צומת ב- G היא 3.

[2] הדרגה של כל צומת ב- G היא 4.

[3] G הוא המילטוני.

[4] G אינו אוילרי.

[5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

חלק ב׳: ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב׳ כולו : 81 נקודות

שאלה 2

נתונה $A = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbf{N},\ 0 \le x \le y \le 5\}$. על הקבוצה A מגדירים יחסים R,S כך :

לכל $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A$, $(x_1,y_1)R(x_2,y_2)$ אם ורק אם $x_1+y_1 = x_2+y_2$,

לכל $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A$, $(x_1,y_1)S(x_2,y_2)$ אם ורק אם $x_1+y_1 < x_2+y_2$,

(13 נק׳) א. הראו ש- R הוא יחס שקילות ורשמו באופן מפורט את מחלקות השקילות שלו.

(14 נק׳) ב. הראו ש- S הוא יחס סדר. קבעו אם הוא סדר חלקי או מלא ומיצאו בו את כל האיברים המינימליים והמקסימליים.

שאלה 3

(14 נק׳) א. חשבו את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 = 13$ המקיימים $x_i \ne 3$ לכל $1 \le x_i \le 7$

הסבירו את התשובה.

(13 נק׳) ב. מיצאו את המקדם של x^{13} בפיתוח לטור חזקות של $(1+x^{12})\left(\dfrac{1}{1-x} - x^3\right)^7$.

נמקו את התשובה

שאלה 4

(13 נק׳) א. מיצאו את מספר המספרים בעלי 5 ספרות שבהם מכפלת הספרות היא 180. (למשל 19451 ו- 22335 הם מספרים כאלה) נמקו את התשובה.

(14 נק׳) ב. נתונה קבוצה A כך ש- $|A|=10$. מיצאו את מספר הקבוצות מהצורה $\{B,C\}$ כאשר $B,C \subseteq A$, $|B|=5$ ו- $|B \cap C|=1$.

שאלה 5

נתון גרף **קשיר ופשוט** $G=(V,E)$ על n צמתים שבו ממוצע הדרגות של הצמתים גדול מ- 2.

(9 נק׳) א. הוכיחו ש- $|E| > n$

(9 נק׳) ב. הוכיחו שקיימים ב- G לפחות שני מעגלים שונים.

(9 נק׳) ג. הוכיחו שלא חייבים להיות יותר משני מעגלים שונים ב- G .

בהצלחה!

מבחן בהגשה
2020 א'
מועד א' (85)
עמוד 1
203627310

(2) (3)

$A=\{(x,y) \mid x,y\in \mathbb{N},\ 0\le x\le y\le 5\}$

R: for each $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A$,

$(x_1,y_1)R(x_2,y_2) \iff x_1+y_1=x_2+y_2$

2 . . . . $\iff x_1+y_1 < x_2+y_2$

R יחס שקילות (רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי)

רפלקסיבי ✓

R רפלקסיבי מכיוון שכל זוג מספרים טבעיים עומד בתנאי: $a+b=a+b$*
ומכיוון שהגדרת יחס רפלקסיבי על הקבוצה A היא שכל a ב-A עומד ב-aRa,
נסיק ש-R רפלקסיבי. *ולא רק מספרים טבעיים, אלא גם כל $0\le x\le y\le 5$ עומדים בתנאי

סימטרי ✓

יחס הוא סימטרי אם לכל $\langle a,b\rangle\in A$ שעומדים ביחס, גם $\langle b,a\rangle$ עומדים בו.
מכיוון שכל שני זוגות של מספרים טבעיים עומדים בתנאי הזה:
אם $a+b=c+d$, אז $c+d=a+b$
וכן כל שני זוגות של מספרים טבעיים שכל זוג (a,b) עונה לתנאי: $0\le a\le b\le 5$
נסיק ש-R סימטרי.

טרנזיטיבי ✓

יחס T על X הוא טרנזיטיבי אמ"מ לכל x,y,z ב-X מתקיים $xTy\wedge yTz\to xTz$.
יחס השוויון של המספרים הטבעיים הוא טרנזיטיבי שכן אם $y=x$ וגם $z=y$ אזי בהכרח $z=x$. תכונה זו תקפה בפרט למספרים הטבעיים בין 0 ל-5 וכן לכל סכום של מספרים טבעיים בטווח זה, ולכן R טרנזיטיבי.
הוכחנו ש-R רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי, ולכן הוא יחס שקילות.

מחלקות השקילות של R:

מחלקת שקילות כלשהי $[a]$ של $a\in A$ היא קבוצת כל האיברים ב-R שמקיימים: $\{x\in R \mid x R a\}$. מכיוון שאיברי A הינם זוגות של מספרים טבעיים בין 0 ל-5, (המעשה – כל זוגות המספרים הנ"ל), ו-R מצביע על כל זוגות הזוגות שסכומם שווה (סכומם נע בין 0 ל-10, כי $10=5+5$, $0=0+0$), אזי מחלקות השקילות של R הן כל ההגדרות שאפשר לסכום שני מספרים טבעיים $0\le x\le y\le 5$ לכדי מספר $0\le sum\le 10$.

מבחן בבדידה
2020
מועד (85)
עמוד 2
203627310

בל המשך

חלון מחלקות השקילות של R:

$$\Big(\{(0,0)\}, \{(0,1)\}, \{(0,2),(1,1)\},$$
$$\{(0,3),(1,2)\}, \{(0,4),(1,3),(2,2)\},$$
$$\{(0,5),(1,4),(2,3)\}, \{(1,5),(2,4),(3,3)\},$$
$$\{(2,5),(3,4)\}, \{(3,5),(4,4)\}, \{4,5\}, \{5,5\} \Big)$$