בחינה 2

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים.

חלק א׳ הוא שאלת חובה. בחלק ב׳ יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות:

שאלה 1 שבחלק א׳ ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב׳.

אם בחלק ב׳ תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* **בחלק ב׳ של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת ״אוסף תרגילים פתורים״. אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א׳: שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק׳) **א.** נתבונן בטענה: אם לאברהם יש שכל, אז אם אברהם שותה הוא לא נוהג.

טענה זו שקולה לטענה:

[1] אם לאברהם אין שכל אז אם אברהם שותה הוא נוהג.

[2] אם לאברהם אין שכל אז הוא שותה ונוהג.

[3] אם אברהם שותה ונוהג – אין לו שכל.

[4] אם אברהם שותה ולא נוהג – יש לו שכל.

[5] אם אברהם נוהג ולא שותה – יש לו שכל.

(7 נק׳) **ב.** כזכור אנו מסמנים $C = |\mathbf{R}|$. נסמן $d = |P(\mathbf{R})|$.

d^C שווה ל-

[1] $\aleph_0$

[2] C

[3] d

[4] 2^d

[5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

(6 נק׳) **ג.** בגרף המלא K_6 קיימות דרכים שונות ליצור זיווג מושלם.

כמה דרכים כאלה יש, כלומר כמה זיווגים מושלמים ניתן להגדיר ב- K_6 ?

[1] 3

[2] 6

[3] 15

[4] 36

[5] 64

[6] 720

חלק ב׳: ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב׳ כולו: 81 נקודות

שאלה 2

R הוא יחס מעל קבוצה A, ונתון $RR^{-1} = I_A$.

כידוע, במצב כזה $R^{-1}R$ אינו חייב להיות שווה ל- I_A.

בשאלה זו נבדוק איזה תכונות יש במצב כזה ל- $R^{-1}R$. בשני הסעיפים נתון $RR^{-1} = I_A$.

(18 נק׳) א. הוכיחו ש- $R^{-1}R$ הוא סימטרי וטרנזיטיבי.

הדרכה: נוח להוכיח סעיף זה בעזרת תכונות אלגבריות של יחסים.

(9 נק׳) ב. בנוסף לנתון $RR^{-1} = I_A$, נתון כעת גם ש- $Range(R) = A$.

הוכיחו ש- $R^{-1}R$ הוא יחס שקילות מעל A.

שאלה 3

תהיינה $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

(6 נק׳) א. כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של X ל- Y קיימות?

(21 נק׳) ב. מצאו כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של X ל- Y מקיימות את התנאי הבא:

לכל $i \in X$, $f(i) \neq i$. הדרכה: הכלה והפרדה.

שאלה 4

נתון $p \neq 0$.

סדרה מסוימת מקיימת את יחס הנסיגה (יחס רקורסיה): $a_{n+2} = 6p \cdot a_{n+1} - 5p^2 \cdot a_n$

עם תנאי התחלה: $a_0 = 0$, $a_1 = 8p$.

פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור a_n .

את הביטוי שקיבלתם עליכם להביא לצורה: $a_n = (\text{משהו}) \cdot p^n$,

כאשר הביטוי שבסוגרים תלוי ב- n אך **אינו** תלוי ב- p .

שאלה 5

יהי G גרף פשוט, שקבוצת הצמתים שלו היא V.

נניח שצבענו את G צביעה נאותה, בצבעים הלקוחים מקבוצת צבעים A .

$\bar{G}$ הוא הגרף המשלים של G (הגדרה 1.4, עמ' 12 בחוברת "תורת הגרפים").

בלי קשר לצביעה של G, צבענו את $\bar{G}$ צביעה נאותה, בצבעים הלקוחים מקבוצת צבעים B.

(10 נק') א. לכל $v \in V$ נתאים **זוג סדור** של צבעים: הראשון בזוג הוא הצבע של v בצביעה של G והשני בזוג הוא הצבע של v בצביעה של $\bar{G}$.
הוכיחו שבהתאמה זו, אין שני צמתים שונים שמותאם להם אותו זוג סדור של צבעים.

(7 נק') ב. נסחו את הטענה של סעיף א כטענה על **חד-חד-ערכיות** של פונקציה (פונקציה מהיכן להיכן?)

(10 נק') ג. יהי $n = |V|$. מהסעיפים הקודמים נובעת אחת הטענות הבאות. מצאו איזו, והוכיחו אותה.

(1) $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \le n$

(2) $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \ge n$

(3) $\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \le n$

(4) $\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \ge n$

צביעה נאותה ומספר הצביעה, $\chi(G)$, הוגדרו שניהם בפרק 6 בחוברת "תורת הגרפים".

בהצלחה!

פתרון בחינה 2

תשובה 1

א: [3]

הסבר: נסמן

ב- α את הפסוק " לאברהם יש שכל "

ב- β את הפסוק " אברהם שותה "

וב- γ את הפסוק " אברהם נוהג "

הפסוק המביע את הטענה "אם לאברהם יש שכל, אז אם אברהם שותה הוא לא נוהג" הוא:

$\varphi = \alpha \to (\beta \to (\neg\gamma))$

על-ידי שימוש בשקילות $p \to q \equiv (\neg p) \vee q$ ובכללי דה מורגן נקבל:

$\varphi \equiv (\neg\alpha) \vee (\beta \to (\neg\gamma)) \equiv (\neg\alpha) \vee (\neg\beta) \vee (\neg\gamma) \equiv \neg(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)$

נרשום כעת את הפסוקים הרשומים כתשובות אפשריות:

[1] אם לאברהם אין שכל אז אם אברהם שותה הוא נוהג:

$(\neg\alpha) \to (\beta \to \gamma) \equiv \alpha \vee (\beta \to \gamma) \equiv \alpha \vee (\neg\beta) \vee \gamma$

[2] אם לאברהם אין שכל אז הוא שותה ונוהג.

$(\neg\alpha) \to (\beta \wedge \gamma) \equiv \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$

[3] אם אברהם שותה ונוהג – אין לו שכל.

$(\beta \wedge \gamma) \to (\neg\alpha) \equiv (\neg(\beta \wedge \gamma)) \vee (\neg\alpha) \equiv (\neg\beta) \vee (\neg\gamma) \vee (\neg\alpha)$

[4] אם אברהם שותה ולא נוהג – יש לו שכל.

$((\beta \wedge (\neg\gamma)) \to \alpha \equiv (\neg(\beta \wedge (\neg\gamma)) \vee \alpha \equiv (\neg\beta) \vee \gamma \vee (\alpha)$

[5] אם אברהם נוהג ולא שותה – יש לו שכל.

$(\gamma \wedge (\neg\beta)) \to \alpha \equiv (\neg(\gamma \wedge (\neg\beta)) \vee \alpha \equiv (\neg\gamma) \vee \beta \vee (\alpha)$.

מכאן ברור שהתשובה הנכונה היא **[3]**

ב: $d = 2^{|\mathbf{R}|} = 2^{|\mathbf{R}\times\mathbf{R}|} = 2^{|\mathbf{R}||\mathbf{R}|} = (2^{|\mathbf{R}|})^{|\mathbf{R}|} = |P(\mathbf{R})|^{|\mathbf{R}|} = d^C$ ולכן התשובה היא [3]

ג: [3] כמספר החלוקות של קבוצה בת 6 אברים לשלוש מחלקות של שני אברים כל אחת.

תשובה 2

א. סימטרי: נכון כללית $(R^{-1}R)^{-1} = R^{-1}R$

טרנזיטיבי: תנאי לטרנזיטיביות של יחס T הוא: $(T)^2 \subseteq T$.

אצלנו $(R^{-1}R)^2 = R^{-1}RR^{-1}R = R^{-1}I_AR = R^{-1}R$

ב. נותר רק להראות ש- $R^{-1}R$ רפלקסיבי.

יהי $x \in A$. מהנתון על הטווח, קיים y כך ש- $(y,x) \in R$.

מתקיים אפוא גם $(x,y) \in R^{-1}$. משני אלה יחד, לכן $(x,x) \in R^{-1}R$.

תשובה 3 (השאלה הופיעה במספרים אחרים לפני כמה מועדים)

א. $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

ב. תהי U קבוצת הפונקציות החד-חד-ערכיות של X ל- Y. $|U| = 840$.

לכל $i \in X$, תהי A_i קבוצת הפונקציות החד-חד-ערכיות של X ל- Y המקיימות $f(i) = i$.

המספר שאנו נדרשים לחשב הוא $|A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4'|$.

או במלים אחרות $|(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)'|$.

נכין נתונים לשימוש בהכלה והפרדה. נתחיל בחישוב $|A_1|$.

אם התמונה של 1 חייבת להיות 1, אז כדי לקבוע פונקציה חד-חד-ערכית של X ל- Y נותר לנו לבחור תמונות עבור 2,3,4. תמונות אלה צריכות להבחר מתוך הקבוצה $Y - \{1\}$, והן צריכות להיות שונות זו מזו. מספר האפשרויות לעשות זאת הוא כמספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של קבוצה בת 3 איברים לקבוצה בת 6 איברים, כלומר $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

מובן כי אותה תוצאה נכונה לא רק ל- A_1 אלא לכל אחת מהקבוצות A_i.

משמע: $|A_i| = 120$, ויש לנו 4 קבוצות A_i.

בצורה דומה, $|A_i \cap A_j| = 5 \cdot 4 = 20$ $(i \neq j)$. יש לנו 6 חיתוכים כאלה.

בדומה, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 4$ (i,j,k שונים זה מזה). יש לנו 4 חיתוכים כאלה.

ולבסוף, יש פונקציה אחת ויחידה השולחת כל איבר ב- X לעצמו: $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$.

מעקרון ההכלה וההפרדה, מספר הפונקציות המבוקש הוא

$$840 - 4 \cdot 120 + 6 \cdot 20 - 4 \cdot 4 + 1 = 465$$

תשובה 4

יחס הנסיגה לינארי הומוגני. המשוואה האופיינית: $\lambda^2 - 6p\lambda + 5p^2 = 0$.

פתרונותיה: $\lambda = p,\ 5p$. פתרון כללי ליחס הנסיגה: $a_n = Ap^n + B(5p)^n$.

תנאי התחלה: $0 = A + B$, $k = A \cdot p + B \cdot 5p = 8p \;=>\; A + 5B = 8$.

מכאן: $B = 2$, $A = -2$. כלומר $a_n = 2(5^n - 1) \cdot p^n$

תשובה 5 (המקור הוא הספר של שי גירון ושוני דר)

א. נניח ש- $v_1,v_2 \in V$ צמתים שונים בגרף. מתאימים להם שני זוגות של צבעים $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ כאשר $a_1,a_2 \in A$ ו- $b_1,b_2 \in B$. אם v_1,v_2 סמוכים ב- G אז הם נצבעים שצבעים שונים כלומר $a_1 \neq a_2$. ואם v_1,v_2 אינם סמוכים ב- G אז הם סמוכים ב- $\overline{G}$, לכן הם נצבעים שם בצבעים שונים כלומר $b_1 \neq b_2$. מכאן שבכל מקרה $(a_1,b_1) \neq (a_2,b_2)$ ולכן ההתאמה הנתונה היא חד-חד-ערכית.

ב. נגדיר $f:V \to A\times B$ כך: לכל $v \in V$, $f(v)=(a,b)$ כאשר $a \in A$ הוא הצבע שבו נצבע v בגרף G ו- $b \in B$ הוא הצבע v בגרף שבו נצבע $\overline{G}$. הטענה שהוכחנו בסעיף א' היא ש- f היא פונקציה חד-חד-ערכית.

ג. מאחר ש- $f:V \to A\times B$ היא חד-חד-ערכית, נובע שהעוצמה של V אינה גדולה מזו של $A\times B$ במילים אחרות $|A\times B| \geq |V|$. זה מבטיח ש- $|A|\cdot|B| \geq n$ ומאחר שמספר הצביעה של G הוא $|A|$ ומספר הצביעה של $\overline{G}$ הוא $|B|$ נקבל ש- $\chi(G)\cdot\chi(\overline{G}) \geq n$.