חלק א׳: שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר : כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק׳) **א.** את הפסוק ״בין כל שני מספרים שונים קיים מספר נוסף השונה משניהם״ ניתן להצרין כך :

[1] $\forall x \forall y((x<y) \wedge \exists z((x<z) \wedge (z<y)))$

[2] $\forall x \forall y((x<y) \rightarrow (\neg \forall z((z \le x) \vee (y \le z)))$

[3] $\forall x \forall y((x<y) \rightarrow \forall z((x<z) \wedge (z<y)))$

[4] $\forall y(\exists x \exists z((x<y) \wedge (y<z)))$.

(7 נק׳) **ב.** אם $A \subseteq \mathbf{R}$ ואם $|A| = |\mathbf{R}|$ אז

[1] $|\mathbf{R} \setminus A| \le \aleph_0$

[2] קיימים $a,b \in \mathbf{R}$, $a<b$ כך ש- $(a,b] \subseteq A$

[3] $|A \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})| < |\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}|$

[4] קיים $n \in \mathbf{Z}$, כך ש- $|(n,n+1] \cap A| > |\mathbf{Z}|$

(6 נק׳) **ג.** תהי A קבוצת כל הקבוצות בנות שלושה איברים שחלקיות ל- $B=\{1,2,3,4\}$.

נסמן ב- $G=(A \cup B, E)$ הגרף הדו-צדדי המוגדר כך : לכל $S \in A$ יש קשת בין S לבין המספר הקטן ביותר של S וגם לבין המספר הגדול ביותר של S .

(אין קשתות אחרות שיוצאות מ- S). אז :

[1] קיים ב- G זיווג המזווג כל צומתי A , שבו $\{1,2,3\}$ מזווג ל- 1

[2] קיים ב- G זיווג המזווג כל צומתי A , שבו $\{1,2,3\}$ מזווג ל- 3

[3] יש רק דרך אחת לזווג את כל צומתי A .

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

על הקבוצה $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ נתונים שני יחסים R,S המוגדרים כך: לכל $A,B\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$

ARB אם ורק אם $A\cup\{1,2\}=B\cup\{1,2\}$ ו- ASB אם ורק אם $A\cup\{1,2\}\subset B\cup\{1,2\}$.

(**הערה לתלמידים מסמסטרים קודמים בלבד**: אתם יכולים להשתמש בהגדרה הבאה עבור S: ASB אם ורק אם $A=B$ או $A\cup\{1,2\}\subset B\cup\{1,2\}$). **תלמידי 2019ב, אנא התעלמו מהערה זו**)

א. קבעו (ללא הוכחה) אם אחד מהיחסים הוא יחס שקילות ואם התשובה חיובית, מיצאו את מחלקות השקילות שלו.

ב. קבעו (ללא הוכחה) אם אחד היחסים הוא יחס סדר חלקי או מלא ואם התשובה חיובית, מיצאו את האיברים המינימליים והמקסימליים בקבוצה הסדורה שגיליתם.

שאלה 3

(9 נק') א. רישמו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ כאשר כל הנעלמים הם מספרים שלא מתחלקים ב- 3.

(לא לשכוח, 0 מספר טבעי והוא מתחלק ב- 3)

(רמז לפישוט: אפשר להוציא את $x+x^2$ כגורם משותף מהסכום האינסופי).

(9 נק') ב. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה מסעיף א' כאשר $k=4$, $n=12$.

(9 נק') ג. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה מסעיף ב' כאשר $x_i\neq 4$ לכל $1\le i\le 4$.

שאלה 4

בקבוצה A יש 18 סימנים: 12 אותיות ועוד 6 ספרות.

נסמן ב- a_n את מספר המחרוזות באורך n, שאיבריהן הם סימנים מתוך A, והן בעלות התכונה שמימין לכל אות **חייבת** להופיע ספרה. למשל כל מחרוזת באורך 1 שבה אות אחת וכל מחרוזת באורך גדול יותר שבה יש שתי אותיות סמוכות זו לזו היא פסולה. את a_0 מגדירים כ- 1.

(7 נק') א. מיצאו בעזרת חישוב ישיר את a_1,a_2.

(7 נק') ב. מיצאו יחס נסיגה ל- a_n ובדקו שהערכים של a_0,a_1,a_2 מתאימים ליחס הנסיגה.

(13 נק') ג. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n.

שאלה 5

T הוא עץ על 7 צמתים שבו שני צמתים בעלי דרגה 3 ו- G הוא גרף פשוט המתקבל על ידי חיבור אחד העלים של העץ T לכל העלים האחרים שלו.

(9 נק') א. רישמו סדרת פרופר מתאימה לעץ T (לא צריך לרשום יותר מסדרה אפשרית אחת)

(9 נק') ב. הראו (אפשר בשרטוט) ש- G הוא גרף מישורי ומיצאו את מספר הפיאות שלו בעזרת נוסחת אוילר.

(9 נק') ג. האם קיים ב- G מעגל אוילר או מסלול אוילר? נמקו את התשובה.

בהצלחה!

פתרון בחינה 11

תשובה 1

א. התשובה הנכונה היא **[2]**.

ב. התשובה הנכונה היא **[4]** מפני שאם לכל $n \in \mathbf{Z}$ מתקיים $|(n,n+1] \cap A| \le |\mathbf{Z}|$ אז כל הקבוצות $(n,n+1] \cap A$ הן בנות מניה ואז גם $\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}(n,n+1] \cap A$ קבוצה בת מניה (כאיחוד של מספר בן מניה של קבוצות בנות מניה).

אבל $A = \mathbf{R} \cap A = \left(\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}(n,n+1]\right) \cap A = \bigcup_{n\in\mathbf{Z}}(n,n+1] \cap A$ בסתירה לנתון.

דוגמאות שמפריכות את שאר הסעיפים :

[1] $A = \mathbf{R}$. [2] $A = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. [3] $A = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$

ג. התשובה הנכונה היא [2]

תשובה 2

א. היחס R הוא יחס שקילות (קל לבדוק שהיחס הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי)

לכל איבר של $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$, נמצא את מחלקת השקילות שלו.

מחלקת השקילות של $\varnothing$ היא קבוצת כל הקבוצות $X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ המקיימות $XR\varnothing$ ז"א $X \cup \{1,2\} = \varnothing \cup \{1,2\}$ כלומר $X \cup \{1,2\} = \{1,2\}$.

לכן מחלקת השקילות של $\varnothing$ היא : $[\varnothing] = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

נבחר כעת איבר שלא נמצא במחלקה הקודמת, למשל $\{3\}$. אז $[\{3\}] = \{X \subseteq \{1,2,3,4\} \mid X \cup \{1,2\} = \{3\} \cup \{1,2\}\}$.

לכן עלינו לחפש כל הקבוצות $X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ כך ש- $X \cup \{1,2\} = \{1,2,3\}$.

לכן מחלקת השקילות של $\{3\}$ היא : $\{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} = [\{3\}]$.

נבחר כעת איבר ב- $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ שלא שייך למחלקות מקודם, למשל את $\{4\}$. באופן דומה נקבל שמחלקת השקילות של $\{4\}$ היא : $\{\{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}\} = [\{4\}]$.

שלוש המחלקות שמצאנו לא מכסות את $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ כי למשל הקבוצה $\{3,4\}$ לא שייכת לאף אחת מהן. מחלקת השקילות שלה היא קבוצת כל הקבוצות $X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ המקיימות $X \cup \{1,2\} = \{1,2,3,4\}$. לכן :

$\{\{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\} = [\{3,4\}]$.

ארבע המחלקות שמצאנו מכסות את $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ (והן מגדירות חלוקה של $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$)

לכן אלה כל מחלקות השקילות של היחס R .

ב. היחס S הוא יחס סדר (קל לבדוק שהוא אנטי- רפלקסיבי וטרנזיטיבי).
האיברים המינימליים הם כל הקבוצות $X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ שעבורן לא קיים איבר $Y \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ כך ש- $Y \cup \{1,2\} \subset X \cup \{1,2\}$.
ברור שאם $X \subseteq \{1,2\}$ אז $X \cup \{1,2\} = \{1,2\}$ ואז לא ייתכן ש- $Y \cup \{1,2\} \subset \{1,2\}$.
לכן כל אחת מהקבוצות $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$ היא איבר מינימלי ב- $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ לגבי היחס S.
כל קבוצה אחרת $X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ מכילה את 3 או את 4 ואז $\emptyset \cup \{1,2\} \subset X \cup \{1,2\}$
כלומר $\emptyset S X$ ולכן X לא איבר מינימלי.
מכאן ש- $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$ הם **כל האיברים המינימליים** ב- $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ לגבי היחס S.
למציאת האיברים המקסימליים נשים לב שאם $X \cup \{1,2\} = \{1,2,3,4\}$ אז לא קיים $Y \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ כך ש- $X \cup \{1,2\} \subset Y \cup \{1,2\}$ ולכן X איבר מקסימלי. לכן כל הקבוצות $\{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}$ הן איברים מקסימליים ב- $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ לגבי היחס S.
כל קבוצה אחרת $X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ לא מכילה את 3 או את 4 ואז
$X \cup \{1,2\} \subset \{3,4\} \cup \{1,2\}$ כלומר $XS\{3,4\}$ ולכן X לא איבר מקסימלי.
מכאן ש- $\{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}$ הם **כל האיברים המקסימליים** ב- $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ לגבי היחס S.

תשובה 3

א. לכל משתנה במשוואה מתאים הטור האינסופי שבו מופיעות רק חזקות של x עם מעריך שלא מתחלק ב- 3 :

$$x + x^2 + x^4 + x^5 + x^7 + x^8 + \cdots = (x + x^2) + x^3(x + x^2) + x^6(x + x^2) + \cdots =$$
$$= (x + x^2)(1 + x^3 + x^6 + \cdots) = x(1 + x)\frac{1}{1 - x^3}$$

מאחר שיש k משתנים כאלה, הפונקציה היוצרת המתאימה היא :

$$f(x) = \left[x(1 + x)\frac{1}{1 - x^3}\right]^k = x^k(1 + x)^k \frac{1}{(1 - x^3)^k}.$$

ב. עלינו למצוא את מספר הפתרונות בטבעיים של $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ כאשר אף משתנה לא מתחלק ב- 3. לפי סעיף א', מספר זה שווה למקדם של x^{12} בפונקציה היוצרת :
$f(x) = x^4(1 + x)^4 \frac{1}{(1 - x^3)^4}$ כלומר למקדם של x^8 בפיתוח של $(1 + x)^4 \frac{1}{(1 - x^3)^4}$.

נפתח את $(1 + x)^4$ לפי נוסחת הבינום, נציב x^3 במקום x בפיתוח $\frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{i=1}^{\infty} \binom{3+i}{3} x^i$

ונקבל :

$$(1+4x+6x^2+4x^3+x^4)\left(\binom{3}{3}+\binom{4}{3}x^3+\binom{5}{3}x^6+\binom{6}{3}x^9+\cdots\right)$$

המקדם של x^8 בביטוי הנ"ל הוא: $60=6\binom{5}{3}$ וזו גם התשובה לסעיף זה.

ג. עלינו למצוא את מספר פתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=12$ כאשר אף משתנה לא מתחלק ב- 3 ואף אחד מהם לא שווה ל- 4. ניעזר בעקרון ההכלה וההפרדה.

לכל $1\le i\le 4$ נסמן ב- A_i את קבוצת הפתרונות שבהם $x_i=4$.

מספר הפתרונות של שבהם כל המשתנים שונים מ- 4 הוא $60-|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_3|$.

ניעזר בעקרון ההכלה וההפרדה. (גם שונים מ-4 וגם לא מתחלקים ב-3)

A_1 היא קבוצת הפתרונות בטבעיים של המשוואה $4+x_2+x_3+x_4=12$ כלומר של $x_2+x_3+x_4=8$ כאשר אף משתנה לא מתחלק ב- 3. לפי שיקול דומה לזה מסעיף ב' זה מספר פתרונות המשוואה הוא המקדם של x^8 בפונקציה היוצרת $x^3(1+x)^3\dfrac{1}{(1-x^3)^3}$ כלומר המקדם של x^5 בפיתוח של $(1+x)^3\dfrac{1}{(1-x^3)^3}$ לטור חזקות. הפיתוח הוא:

$$(1+3x+3x^2+x^3)\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}x^3+\binom{4}{2}x^6+\cdots\right).$$

המקדם של x^5 הוא $9=3\binom{3}{2}$. לכן $|A_1|=9$ ובאופן דומה $|A_i|=9$ לכל $1\le i\le 4$.

$A_1\cap A_2$ היא קבוצת הפתרונות בטבעיים של המשוואה $4+4+x_3+x_4=12$ כלומר של $x_3+x_4=4$ כאשר אף משתנה לא מתחלק ב- 3. לא קשה לראות שיש רק פתרון אפשרי אחד=1 אבל אם בכל זאת נתעקש להתמיד עם שימוש בפונקציה יוצרת הרי שעלינו למצוא את המקדם של x^4 בפונקציה היוצרת $x^2(1+x)^2\dfrac{1}{(1-x^3)^2}$ כלומר המקדם של x^2 בפיתוח של $(1+x)^2\dfrac{1}{(1-x^3)^2}$ לטור חזקות. הפיתוח הוא $(1+2x+x^2)\left(\binom{1}{1}+\binom{2}{1}x^3+\binom{3}{1}x^6+\cdots\right)$

והמקדם של x^2 הוא 1. לכן $|A_1\cap A_2|=1$ ובאופן דומה $|A_i\cap A_j|=1$ לכל $1\le i<j\le 4$.

$A_1\cap A_2\cap A_3$ היא קבוצת הפתרונות בטבעיים של המשוואה $4+4+4+x_4=12$ כלומר של $x_4=0$ כאשר אף משתנה לא מתחלק ב- 3. מאחר ש- 0 מתחלק ב- 3 הרי שזו קבוצה ריקה וכך שאת החיתוכים של שלוש קבוצות שונות כאלה.

לסכום, לפי עקרון ההכלה וההפרדה מספר הפתרונות המקיימים את תנאי הסעיף הזה הוא:

$$60-\left(\binom{4}{1}\cdot 9-\binom{4}{2}\cdot 1\right)=30.$$

תשובה 4

א. הסדרות המותרות באורך 1 הן רק אלה המורכבות מספרה אחת, לכן $a_1 = 6$.

הסדרות המותרות באורך 2 הן אלה המורכבות משתי ספרות ($6 \cdot 6$ אפשרויות) ואלה שבהן אות שלימינה ספרה ($12 \cdot 6$ אפשרויות) לכן $a_2 = 36 + 72 = 108$

ב. נניח $n \geq 2$ והספור את a_n על ידי הפרדה לשני מקרים :

1. **הסימן הימני הוא ספרה** (6 אפשרויות). מימין לספרה יכולה לבוא כל סדרה מותרת באורך $n-1$ (a_{n-1} אפשרויות) . לכן מצאנו $6a_{n-1}$ סדרות שבהן הסימן הימני הוא ספרה.

2. **הסימן הימני הוא אות** (12 אפשרויות). מימין לאות יכולה לבוא רק ספרה (6 אפשרויות) ומימין לספרה יכולה לבוא כל סדרה מותרת באורך $n-2$ (a_{n-2} אפשרויות) . לכן מצאנו

$6 \cdot 12 \cdot a_{n-2} = 72a_{n-2}$ סדרות שבהן הסימן הימני הוא אות.

שני המקרים הנ״ל ממצים את כל הסדרות במותרות באורך n לפיכך :

$a_n = 6a_{n-1} + 72a_{n-2}$.

מאחר ש- $a_0 = 1$ ו- $a_1 = 6$ עבור $n = 2$ בנוסחת הנסיגה נקבל ש-

$a_2 = 6a_1 + 72a_0 = 36 + 72 = 108$ כמו שקיבלנו גם קודם.

ג. המשוואה האופיינית היא $x^2 - 6x - 72 = 0$ ופתרונותיה $x_1 = 12$, $x_2 = -6$.

לכן קיימים α, β כך ש- $a_n = \alpha 12^n + \beta(-6)^n$

כאשר $a_0 = \alpha + \beta = 1$ ו- $a_1 = \alpha 12 + \beta(-6) = 6$. פתרון המערכת הזו (בנעלמים α, β) הוא : $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$. לכן $a_n = \frac{2}{3} \cdot 12^n + \frac{1}{3} \cdot (-6)^n$ לכל $n \geq 2$.

תשובה 5

א. לעץ T בעל 7 צמתים (המתוייגים ב- $1,2,3,4,5,6,7$) יש סדרת פרופר באורך 5 .

כל צומת בעל דרגה 3 של T מופיע בה פעמיים לכן נותר מקום לצומת נוסף להופיע פעם אחת (וזה יהיה צומת בעל דרגה 2, כאשר ארבעת הצמתים הנוספים לא מופיעים כלל בסדרה ולכן הם עלים)

סדרת פרפר כזו של עץ כזה היא למשל $(1,1,2,2,3)$.

ב. כפי שראינו דרגות הצמתים בעץ T הן $1,1,1,1,2,3,3$. מספר הקשתות ב- T הוא 6 (כמספר הצמתים פחות 1). אם נחבר עלה מסוים לכל אחד משלושת העלים האחרים, הדרגה שלו תדגל ב- 3 ודרגות שאר העלים יגדלו ב- 1 , כאשר הדרגות של שאר הצמתים לא משתנות. מספר הקשתות יגדל ב- 3.

לכן בגרף G יש $n = 7$ צמתים בעלי דרגות $4,2,2,2,2,3,3$ ו- $m = 9$ קשתות. גרף זה לא

מכיל העדנה של K_5 (כי אין בו 5 צמתים בעלי דרגה 4 או יותר) וגם לא העדנה של $K_{3,3}$) כי אין בו 6 צמתים בעלי דרגה 3 או יותר). לכן לפי משפט קורטובסקי, G הוא מישורי ולפי משפט אוילר, מספר הפאות של G הוא $f = m - n + 2 = 9 - 7 + 2 = 4$.

ג. לא כל הצמתים של G הם בעלי דרגה זוגית, לכן G אינו גרף אוילרי (אין בו מעגל אוילר) אבל מפני שיש לו בדיוק שני צמתים בעלי דרגה אי-זוגית **קיים בו מסלול אוילר** (שאינו מעגל).