בחינה 7

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים.

חלק א׳ הוא שאלת חובה. בחלק ב׳ יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות:

שאלה 1 שבחלק א׳ ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב׳.

אם בחלק ב׳ תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* **בחלק ב׳ של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת ״אוסף תרגילים פתורים״. אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק') **א.** הפסוק $\forall x\forall y\forall z\big((R(x,y)\wedge R(y,z))\rightarrow R(x,z)\big)$ מביע את הטענה ש- R הוא יחס טרנזיטיבי.

איזה מהפסוקים הבאים מביע את הטענה ש- R **אינו** טרנזיטיבי?

[1] $\forall x\forall y\forall z\big(\neg R(x,y)\wedge\neg R(y,z)\wedge\neg R(x,z)\big)$

[2] $\forall x\forall y\forall z\big((R(x,y)\wedge R(y,z))\rightarrow\neg R(x,z)\big)$

[3] $\forall x\forall y\exists z\big(R(x,y)\wedge R(y,z)\wedge\neg R(x,z)\big)$

[4] $\exists x\exists y\exists z\big((\neg R(x,y)\wedge\neg R(y,z))\rightarrow\neg R(x,z)\big)$

[5] $\exists x\exists y\exists z\big(R(x,y)\wedge R(y,z)\wedge\neg R(x,z)\big)$

(7 נק') **ב.** $\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים, $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

תהי B קבוצת כל הפונקציות של $P(\mathbf{N})$ ל- $P(\mathbf{R})$. עוצמת B היא:

[1] אפס (אין פונקציות כאלה) **[2]** C **[3]** 2^C

[4] עוצמה גדולה מ- 2^C **[5]** אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק') **ג.** G הוא יער על קבוצה של 10 צמתים, ויש לו בדיוק שני רכיבי קשירות.

x,y הם צמתים השייכים לרכיבי קשירות **שונים** של G. ניצור גרף חדש על-ידי כך ש"נדביק" את x ל- y: שניהם ייחשבו כעת כצומת אחד; קבוצת הקשתות השכנות לצומת זה היא איחוד קבוצת הקשתות שהיו שכנות ל- x עם קבוצת הקשתות שהיו שכנות ל- y. הצמתים של G פרט ל- x,y והקשתות של G שאינן שכנות ל- x או ל- y נשארים כולם ללא שינוי בגרף החדש. קיבלנו גרף חדש על 9 צמתים. גרף זה הוא:

[1] יער שאינו עץ **[2]** עץ **[3]** K_9, גרף מלא על 9 צמתים

[4] גרף שאינו יער (ובפרט אינו עץ) ואינו K_9

[5] כדי לדעת איזה מהאפשרויות 1 – 4 מתקיימת נדרש עוד מידע על G.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו : 81 נקודות

שאלה 2

בכל סעיפי השאלה A היא קבוצה סופית לא ריקה ו- f היא פונקציה של A ל- A המקיימת :
לכל $x \in A$, $f(f(x)) = x$.

(7 נק') א. הוכיחו ש- f היא **על** A .

(7 נק') ב. הוכיחו ש- f היא חד-חד-ערכית.

(13 נק') ג. באותם נתונים, המופיעים לפני סעיף א, נגדיר מעל A יחס E , כך :
$(x, y) \in E$ אם ורק אם $x = y$ **או** $f(x) = y$.
הוכיחו ש- E הוא יחס שקילות מעל A.

שאלה 3

יהי n מספר טבעי כלשהו ותהי $A = \{1, 2, 3, \ldots, n+3\}$.

נתבון בקבוצות X המקיימות $\{1, 2, 3\} \subseteq X \subseteq A$.

(6 נק') א. חשבו בצורה פשוטה וקלה, ללא שימוש בהכלה והפרדה או כלים מתוחכמים אחרים, כמה קבוצות X כאלה קיימות. התשובה היא ביטוי התלוי ב- n.
כמובן - נמקו.

(17 נק') ב. חשבו מחדש את מספר הקבוצות הללו בדרך שונה : בעזרת הכלה והפרדה.
התחילו במספר **כל** הקבוצות החלקיות של A והמשיכו משם בחיסור וחיבור של ביטויים מתאימים.

(4 נק') ג. הראו שהתשובה שקיבלתם בסעיף ב מתלכדת עם התשובה שקיבלתם בסעיף א.

שאלה 4

בכל סעיפי השאלה, **כל המשתנים** x_i **הם מספרים טבעיים**.

בשני הסעיפים **יש להגיע לתשובה מספרית**. תזכורת: בקורס זה 0 הוא מספר טבעי.

(5 נק׳) א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 12$.

(22 נק׳) ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24$ (*)
כאשר נתון: $x_1 + x_2 + x_3 > x_4 + x_5 + x_6$.

הדרכה לסעיף ב: פתרון של המשוואה (*) מקיים בדיוק אחד משלושת התנאים הבאים:

$$x_1 + x_2 + x_3 > x_4 + x_5 + x_6$$

$$x_4 + x_5 + x_6 > x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6$$

שאלה 5

G הוא גרף פשוט על קבוצת הצמתים $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

בין כל שני צמתים שונים i,j המקיימים $1 \le i \le 4$ וגם $1 \le j \le 4$ יש קשת של G.

בין כל שני צמתים שונים i,j המקיימים $5 \le i \le 9$ וגם $5 \le j \le 9$ יש קשת של G.

בנוסף על כל הקשתות הללו יש ב- G **עוד בדיוק חמש קשתות**.

יהי $H = \bar{G}$ הגרף המשלים של G.

א. הוכיחי ש- H הוא דו-צדדי.

ב. חשבי את מספר הקשתות של H .

ג. בהנחה ש- H קשיר, הוכיחי ש- H אינו מישורי.

!בהצלחה

פתרון בחינה 7

שאלה 1

א. [5]   ב. [3]   ג. [2]

שאלה 2

א. יהי $x \in A$. עלינו להראות שיש לו מקור. נסמן $y = f(x)$.

בשל הנתון $f(f(x)) = x$ מתקיים $f(y) = x$.

מצאנו אבר ב- A (האבר $y = f(x)$) שתמונתו היא x .

ב. יהיו $x_1, x_2 \in A$ כך שמתקיים $f(x_1) = f(x_2)$.

נפעיל את f בשני האגפים ונקבל $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$.

מהנתון $f(f(x)) = x$, קיבלנו $x_1 = x_2$.

ג. לפי הנתון, לכל $x, y \in A$, כדי שיתקיים xEy מספיק שיתקיים **לפחות אחד מבין שני התנאים:** $x = y$ או $f(x) = y$ **.**

לכן לכל $x \in A$ מתקיים xEx (מפני ש- $x = x$) ולכן היחס **רפלקסיבי.**

נניח כעת ש- xEy . לפי הגדרת היחס E קיימות שתי אפשרויות:

1. $x = y$ ואז ברור שמתקיים גם yEx .
2. $f(x) = y$ ואז $f(f(x)) = f(y)$. אבל $f(f(x)) = x$. לכן $f(y) = x$ ולכן yEx .

מכאן שלכל $x, y \in A$ אם xEy אז yEx לכן E **סימטרי**

וכעת נניח ש- xEy ו- yEz .

1. אם $x = y$ או $y = z$ אז ברור שמתקיים xEz .
2. אם x, y, z שונים זה מזה אז לפי הגדרת E חייב להתקיים $f(x) = y$ ו- $f(y) = z$ לכן $f(f(x)) = f(y) = z$ ומאחר ש- $f(f(x)) = x$ נקבל ש- $x = z$ ולכן xEz .

כך קיבלנו שלכל $x, y, z \in E$, אם xEy ו- yEz אז xEz לכן E **טרנזיטיבי.**

לכן E יחס שקילות.

שאלה 3

א. 2^n

ב. $2^{n+3} - 3 \cdot 2^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} - 2^n$

ג. חישוב

שאלה 4

א. מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3=12$ שווה למספר הפיזורים של 12 עצמים זהים ב- 3 תאים שונים ולכן שווה ל- $D(3,12)$.

ב. כל פתרון $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=24$ מקיים בדיוק אחד משלושת התנאים הבאים:

1. $x_1+x_2+x_3>x_4+x_5+x_6$

2. $x_4+x_5+x_6>x_1+x_2+x_3$

3. $x_1+x_2+x_3=x_4+x_5+x_6$

אנו רוצים לספור את מספר הפתרונות המקיים את תנאי (1). נסמן אותו ב- x.

נשים לב שמספר הפתרונות המקיימים את תנאי (2) שווה למספר הפתרונות המקיימים את תנאי (1) (כי זה אותו אי-שוויון עם שמות אחרים לנעלמים).

כל פתרון $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ המקיים תנאי (3) הוא בעצם פתרון של המערכת

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=12 \\ x_4+x_5+x_6=12 \end{cases}.$$

עבור שלושת המקומות הראשונים (x_1,x_2,x_3) יש $D(3,12)$ אפשרויות (כמספר פתרונות המשוואה $x_1+x_2+x_3=12$).

גם עבור שלושת המקומות האחרונים (x_4,x_5,x_6) יש $D(3,12)$ אפשרויות (כמספר פתרונות המשוואה $x_4+x_5+x_6=12$).

לכן מספר הפתרונות המקיימים תנאי (3) הוא $D(3,12)^2$.

מספר הפתרונות המקיימים אחד משלושת התנאים הנ״ל שווה למספר כל הפתרונות של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=24$ שהוא $D(6,24)$.

לסיכום, מאחר שהתנאים (1), (2) ו- (3) מתארים את קבוצת פתרונות המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=24$ כאיחוד של שלוש קבוצות זרות זו לזו נקבל:

$$D(6,24)=2x+D(3,12)^2.$$

לפיכך שהתשובה לסעיף זה היא:

$$x=\frac{D(6,24)-\left(D(3,12)\right)^2}{2}=\frac{1}{2}\left[\binom{29}{5}-\binom{14}{2}^2\right]=\frac{118,755-8281}{2}=55237$$

שאלה 5

א. הצדדים של H הם $\{5,6,7,8,9\}$, $\{1,2,3,4\}$.

ב. ב- G יש $\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+5=6+10+5=21$ קשתות.

לכן ב- H יש $\binom{9}{2}-21=36-21=15$ קשתות.

המשפט של מועד א׳ אינו עוזר כאן כי $3n-6=21$ כך ש- 15 קשתות לא מתנגש עם חסם זה. אבל בהמשך הפרק בתורת הגרפים (שאלה 3) מראים שלגרף מישורי פשוט, קשיר **ודו-צדדי** מספר הקשתות הוא לכל היותר $2n-4$, משמע אצלנו 14.