בחינה 4 (מתכונת ישנה!)

מבנה הבחינה:

* יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
* משקל כל שאלה 25% .
* אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* **<u>יש לנמק כל תשובה</u>, גם אם זה לא נאמר במפורש בשאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
* **אפשר גם להסתמך על טענות מהמדור "עזרים ללמידה" באתר הקורס.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קראו בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

נגדיר שני יחסים (רלציות) S,T מעל $P(\mathbf{N})$: עבור $X,Y \subseteq \mathbf{N}$,

$(X,Y) \in S$ אם ורק אם $1 \in X \oplus Y$ או $X = Y$.

$(X,Y) \in T$ אם ורק אם $1 \notin X \oplus Y$.

(הסימן $\oplus$ מציין הפרש סימטרי, הוא הוגדר בכרך "תורת הקבוצות", שאלה 1.22 בעמ' 27)

(8 נק') א. הראו כי S אינו יחס שקילות מעל $P(\mathbf{N})$.

(9 נק') ב. הראו כי T הוא יחס שקילות מעל $P(\mathbf{N})$.

(8 נק') ג. לכמה מחלקות שקילות מחלק T את $P(\mathbf{N})$? הוכיחו. תארו את המחלקות.

שאלה 2

(12 נק') א. כידוע, קבוצת המספרים הרציונליים היא בת-מניה.
הוכיחו שקבוצת המספרים הממשיים **שאינם** רציונליים, עוצמתה C.

(13 נק') ב. תהי A קבוצת כל אותם מספרים ממשיים אשר הריבוע או החזקה השלישית
שלהם הם מספרים טבעיים : $A = \{x \in \mathbf{R} \mid (x^2 \in \mathbf{N}) \vee (x^3 \in \mathbf{N})\}$.
מהי עוצמת A ? הנה דוגמאות לאיברים של A : 1, -17 , $-\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$.

שאלה 3

חמשה אנשים מוכשרים (נקרא להם א,ב,ג,ד,ה) נדרשו לבצע ארבע משימות שונות (להלחין שיר, לפתֵח אפליקציה לאייפון, לנהל משא ומתן עם האוצר, לחדֵש את סימון השביל הכחול בנחל ערוגות). הם סיכמו שכל משימה תבוצע על ידי צוות של שני אנשים.

(5 נק') א. בכמה דרכים ניתן להגדיר צוותים לביצוע כל המשימות?
אין דרישה שכולם יעבדו.
למשל, לגיטימי שהצוות {א,ב} יבצע את כל המשימות.

(20 נק') ב. בכמה דרכים ניתן להגדיר צוותים לביצוע כל המשימות, כאשר אסור שמישהו יתחמק לגמרי מעבודה? כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה.

בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 4

תהי B קבוצת המחרוזות באורך 5 , הבנויות בעזרת האותיות a,b,c,d,e (לא כל האותיות חייבות להופיע). למשל $aaeeb \in B$.

נגדיר יחס שקילות מעל B : שתי מחרוזות ייקראו שקולות אם **קבוצת** האותיות המופיעות במחרוזת האחת **שווה** לקבוצת האותיות המופיעות במחרוזת השניה.

למשל $aeeee$ שקולה ל- $aaeee$ ושקולה ל- $eaaae$,

מכיון שלכל אחת מהמחרוזות האלה, קבוצת האותיות המופיעות בה היא $\{a,e\}$.

סעיפים ב,ג,ד,ה עוסקים ביחס השקילות הזה. אינכם נדרשים להוכיח שזהו יחס שקילות.

(4 נק׳) א. כמה אברים יש ב- B ?

(6 נק׳) ב. כמה מחלקות שקילות יש ?

(5 נק׳) ג. כמה אברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת $abcde$?

(5 נק׳) ד. כמה אברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת $aaaab$?

(5 נק׳) ה. כמה אברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת $aabcd$?

הוכיחו את תשובותיכם.

שאלה 5

G הוא גרף פשוט **ולא קשיר** על n צמתים ($n \geq 2$).

יש ב- G בדיוק שני צמתים בעלי דרגה זוגית.

הוכיחו שבגרף **המשלים** של G יש מסלול אוילר שאינו מעגל.

נמקו **בצורה מדויקת** כל צעד בהוכחה.

הגרף המשלים הוגדר בחוברת ״תורת הגרפים״, הגדרה 1.4 בעמ׳ 12 .

בהצלחה!

תקציר פתרון בחינה 4

שאלה 1

א. S אינו טרנזיטיבי (הוא כן רפלקסיבי וסימטרי).

ב. לגבי T : רפלקסיבי וסימטרי קל להראות.

הוכחה שהוא טרנזיטיבי: נניח $1 \notin X \oplus Y$ וגם $1 \notin Y \oplus Z$.

ההנחה $1 \notin X \oplus Y$ פירושה: $1 \notin X \cup Y$ **או** $1 \in X \cap Y$ (מדוע?)

בדומה נפרק את ההנחה $1 \notin Y \oplus Z$.

הנתון $1 \notin X \oplus Y$ וגם $1 \notin Y \oplus Z$ מתפרק אפוא ל- 4 אפשרויות.

נבדוק כל אחת מהן בנפרד, ונגלה שבכל אחת מהן $1 \notin X \oplus Z$ (השלימו).

לפיכך T טרנזיטיבי.

ג. בדיוק שתי מחלקות: במחלקה אחת נמצאות כל הקבוצות של מספרים טבעיים ש- 1 הוא אבר שלהן ובמחלקה השניה כל הקבוצות של מספרים טבעיים ש- 1 לא אבר שלהן.

שאלה 2

א. מתקבל מיידית מתוך משפט 5.13ב בחוברת "פרק 5 בתורת הקבוצות".

ב. $\aleph_0$ (לכל מספר טבעי יש שני שורשים ריבועיים ושורש שלישי יחיד).

שאלה 3

א. לכל משימה יש $\binom{5}{2} = 10$ דרכים לבחור צוות. לארבע המשימות: 10^4 דרכים.

ב. A_i : קבוצת הבחירות של צוותים בהן אדם i מתחמק מעבודה.

הכלה והפרדה: $\binom{5}{2}^4 - 5 \cdot \binom{4}{2}^4 + \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2}^4 - \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2}^4$

שאלה 4

א. יש 5^5 מחרוזות כאלה מפני שבכל מחרוזת יש 5 מקומות ובכל מקום יכולה להופיע כל אחת מן האותיות a,b,c,d,e.

ב. כל מחלקה נקבעת לחלוטין על ידי קבוצת האותיות אחת מתוך a,b,c,d,e (כל המילים שבהן מופיעות אך ורק האותיות מאותה קבוצה הן באותה מחלקה). לכן מספר המחלקות שווה למספר הקבוצות **הלא ריקות** של אותיות מתוך a,b,c,d,e (כי בכל מחרוזת חייבים להשתמש באות אחת לפחות.

מספר כל הקבוצות הלא ריקות שחלקיות לקבוצה בעלת 5 איברים הוא $2^5 - 1 = 31$.

ג. במחלקת השקילות של המחרוזת $abcde$ מופיעות אך ורק המחרוזות באורך 5 שבהן מופיעות כל האותיות a,b,c,d,e לכן מספר המחרוזות במחלקה זו שווה למספר כל התמורות על 5 עצמים, כלומר שווה ל- $5!$.

ד. במחלקת השקילות של $aaaab$ נמצאות אך ורק המחרוזות שבהן מופיעות שתי האותיות a,b (כאשר כל אחת משתי האותיות מופיעה לפחות פעם אחת).

מספר המילים באורך 5 הכתובות באותיות a,b הוא 2^5 אך בתוכן יש שתי מילים שבהן אחת האותיות לא מופיעה כלל ($aaaaa$ ו- $bbbbb$).

לכן מספר המחרוזות במחלקה של $aaaab$ הוא $2^5 - 2 = 30$.

ה. במחלקה של $aabcd$ נמצאות כל המחרוזות שבהן כל אחת מהאותיות a,b,c,d מופיעה לפחות פעם אחת. הדרישה הזו מחייבת אות אחת מבין הארבע להופיע פעמיים ואת שלוש אחרות להופיע פעם אחת. מספר המחרוזות שבהן a מופיעה פעמיים ושאר האותיות פעם אחת הוא כמספר התמורות עם חזרות של a,a,b,c,d וזה שווה ל- $\frac{5!}{2!}$.

יש 4 אפשרויות לבחירת האות שתופיע פעמיים לכן מספר החרוזות במחלקה של $aabcd$ הוא: $4 \cdot \frac{5!}{2!} = 2 \cdot 5! = 240$

שאלה 5

G אינו קשיר , לכן $\overline{G}$ קשיר (שאלה 4 בפרק 1 בתורת הגרפים).

מהנתון, ב- G יש בדיוק $n-2$ צמתים בעלי דרגה אי-זוגית.

מספר הצמתים בעלי דרגה אי-זוגית בגרף הוא זוגי (שאלה 1 בפרק 1 בתורת הגרפים).

לכן $n-2$ הוא זוגי.

לפיכך $n-1$ הוא אי-זוגי.

בכל גרף, לכל צומת v, $\deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) = n-1$.

מכאן ומכיוון ש- $n-1$ הוא אי-זוגי, נקבל שהזוגיות של דרגת צומת ב- G הפוכה מהזוגיות של הדרגה שלו ב- $\overline{G}$ (כלומר אם האחד זוגי השני אי-זוגי ולהיפך).

לכן ב- $\overline{G}$ יש בדיוק שני צמתים בעלי דרגה אי-זוגית.

הראינו ש- $\overline{G}$ מקיים את תנאי שאלה 1 בפרק 3 בתורת הגרפים, לכן יש בו מסלול אוילר לא סגור.