



כ"ח בתמוז תש"ף

מס' שאלון - 490

20

ביולי 2020

מס' מועד 82

סמסטר 2020ב

20476 / 4

שאלון בחינת גמר

20476 - מתמטיקה בדידה

משך בחינה: 4 שעות

בשאלון זה 3 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים:

חלק א: שאלת חובה. את התשובה לכל סעיף כתבו בקובץ הבחינה.

חלק ב: עליכם לענות על שלוש מתוך ארבע השאלות.
אם תענו על יותר מ-3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

שימו לב:

- * בחלק ב יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
- * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד, וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
- * אם ברצונכם להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליכם לחזור ולהוכיחן.
- * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרתם אותם.

בהצלחה !!!

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך הקובץ.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

6 נק') א. את הפסוק "בין כל שני מספרים שונים קיים מספר נוסף השונה משניהם" ניתן להצריך כך:

$$\forall x \forall y ((x < y) \wedge \exists z ((x < z) \wedge (z < y))) \quad [1]$$

$$\forall x \forall y ((\forall z ((z \leq x) \vee (y \leq z))) \rightarrow \neg(x < y)) \quad [2]$$

$$\forall x \forall y \forall z ((x < y) \rightarrow ((x < z) \wedge (z < y))) \quad [3]$$

$$\forall x \forall y \forall z ((x < z) \wedge (z < y)) \quad [4]$$

7 נק') ב. \mathbb{R} היא קבוצת המספרים הממשיים, \mathbb{Q} היא קבוצת המספרים הרציונליים.

$$\text{אם } A \subseteq \mathbb{R} \text{ ואם } |\mathbb{R} \setminus A| = \aleph_0 \text{ אז}$$

$$A \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R} \quad [1]$$

$$\text{לכל } a, b \in \mathbb{R} \text{ כך ש- } a < b \text{ מתקיים } (a, b] \cap A \neq \emptyset \quad [2]$$

$$|A \setminus \mathbb{Q}| < |A| \quad [3]$$

$$|A \setminus [0, 1]| < |A| \quad [4]$$

6 נק') ג. $(1, 2, 3, 2, 1)$ היא סדרת פרופר של עץ T .

$$\text{מספר הצמתים של } T \text{ הוא } 5 \quad [1]$$

$$\text{מספר העלים של } T \text{ הוא } 4 \quad [2]$$

$$\text{לכל שני צמתים של } T \text{ שאינם עלים יש דרגות שונות זו מזו.} \quad [3]$$

$$\text{אין ב- } T \text{ צומת שדרגתו גדולה מ-2.} \quad [4]$$

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

על הקבוצה $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ נתונים שני יחסים R, S המוגדרים כך: לכל $A, B \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$
 ARB אם ורק אם $\{1,2\} \setminus A = \{1,2\} \setminus B$ ו- ASB אם ורק אם $\{1,2\} \setminus A \subset \{1,2\} \setminus B$.
 א. קבעו (ללא הוכחה) אם אחד מהיחסים הוא יחס שקילות ואם התשובה חיובית, מיצאו את מחלקות השקילות שלו.
 ב. קבעו (ללא הוכחה) אם אחד היחסים הוא יחס סדר חלקי או מלא ואם התשובה חיובית, מיצאו את האיברים המינימליים והמקסימליים בקבוצה הסדורה שגיליתם.

שאלה 3

9 נק' א. רישמו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה
 $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ כאשר $x_1, x_2, \dots, x_k \in \{1,2,3\}$ (רמז: $1+x+x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$)
 9 נק' ב. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה מסעיף א' כאשר $n = 14$, $k = 7$.
 9 נק' ג. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה מסעיף א' כאשר $n = 14$, $k = 7$.
 וכאשר יש לכל היותר 3 נעלמים ששווים ל-3.

שאלה 4

בשאלה זו נתונה $A = \{1,2,3,4,5,6\}$.
 14 נק' א. מיצאו את מספר הפונקציות $f: A \rightarrow A$ המקיימות $f(i) \neq i$ לכל $i \in \{1,2,3,4\}$.
 13 נק' ב. מיצאו את מספר הפונקציות $f: A \rightarrow A$ המקיימות $|f^{-1}[\{i\}]| = i$ לכל $i \in \{1,2,3\}$.

שאלה 5

נתון הגרף $G = (A, E)$ שבו $A = \{1,2,3,4,6,12\}$ ולכל $a, b \in A$ הקבוצה $\{a, b\}$ היא קשת ב- E אם ורק אם $a \neq b$ ו- a מחלק את b או b מחלק את a .
 9 נק' א. מיצאו את הדרגות של כל צומתי הגרף ואת מספר הצלעות שלו.
 9 נק' ב. ידוע ש- G הוא גרף מישורי (לא צריך להוכיח!). מיצאו את מספר הפאות שלו.
 9 נק' ג. הוכיחו ש- $G_1 = (A, E \cup \{4,6\})$ אינו מישורי. רמז: בדקו את התת-גרף של G_1 שצמתיו הם $A = \{1,2,4,6,12\}$.

בהצלחה !