בחינה 3 (במתכונת ישנה !)

מבנה הבחינה:

* יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
* משקל כל שאלה 25% .
* אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* **<u>יש לנמק כל תשובה</u>, גם אם זה לא נאמר במפורש בשאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
* **אפשר גם להסתמך על טענות מהמדור "עזרים ללמידה" באתר הקורס.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קראו בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

תהי M קבוצת היחסים (הרלציות) מעל $A = \{1,2,3\}$.

(7 נק׳) א. מהי $|M|$?

(18 נק׳) ב. נגדיר יחס S מעל M (שימו לב, מעל M ולא מעל A):

עבור $R_1 , R_2 \in M$: $(R_1 , R_2) \in S$ אםם $R_1R_2 = R_2R_1$.

הוכיחו ש- S <u>אינו</u> יחס שקילות מעל M.

שאלה 2

בעמ׳ 27 בכרך ״תורת הקבוצות״ הגדרנו פעולה של הפרש סימטרי בין שתי קבוצות.
להלן נסיון לא מוצלח להגדיר הפרש סימטרי בין **עוצמות**.
מצאו מה לא תקין בהגדרה הבאה.

בהנתן עוצמות k,m (לא בהכרח שונות זו מזו),
תהיינה A,B קבוצות המקיימות $|A| = k$, $|B| = m$.
נגדיר: $k \oplus m = |A \oplus B|$.
הגדרה כזו אינה אפשרית. עליכם להסביר מה הבעיה בהגדרה, ולהראות ע״י דוגמא שההגדרה אינה תקינה. הדרכה: ראו ההגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות.

שאלה 3

ברשותנו כדורים אדומים, כדורים כחולים, כדורים ירוקים וכדורים לבנים, מכל צבע בדיוק 10 כדורים. בכמה דרכים ניתן לבחור מתוכם 24 כדורים, ללא חשיבות לסדר הבחירה?
כדורים בעלי אותו צבע נחשבים זהים.
יש להגיע לתשובה סופית מספרית, ולא ע״י חישוב סכום של עשרות גורמים.
אפשר להיעזר בפונקציה יוצרת, אפשר בעזרת הכלה והפרדה, כל דרך נכונה תתקבל.

שאלה 4

תהי $A = \{1,2,3,4,5\}$.

נסמן $A^3 = A \times A \times A$, קבוצת הסדרות באורך 3 שאבריהן לקוחים מ- A.

(3 נק׳) א. כמה פונקציות של A^3 לקבוצה $\{0,1\}$ קיימות?

(11 נק׳) ב. נגדיר יחס שקילות מעל A^3 : שתי שלשות סדורות ייקראו שקולות אם הן שוות, או נבדלות רק בסידור האיברים בשלשה. דוגמאות:

$(1,2,3)$ שקולה ל- $(2,1,3)$.

$(1,2,2)$ שקולה ל- $(2,1,2)$, אך **אינה** שקולה ל- $(1,1,2)$.

כמה מחלקות שקילות יש? נמקו.

(11 נק׳) ג. לכמה פונקציות של A^3 לקבוצה $\{0,1\}$ יש התכונה הבאה:

לכל $a, b, c \in A$ (a,b,c לאו דווקא שונים זה מזה) מתקיים:

$$f(a,b,c) = f(a,c,b) = f(b,a,c) = f(b,c,a) = f(c,a,b) = f(c,b,a)$$

הדרכה לסעיף ג׳ : היעזרו בסעיף ב׳. יש לנמק.

אפשר גם להיעזר במושג ״פונקציה אופיינית״, שהוגדר בעמ׳ 85 בכרך ״תורת הקבוצות״.

שאלה 5

יהיו $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$ שני עצים על אותה קבוצת צמתים V.

לכל $v \in V$ תהי $d_1(v)$ הדרגה של v ב- G_1 ותהי $d_2(v)$ הדרגה של v ב- G_2 .

הוכיחו כי קיים $v \in V$ עבורו $d_1(v) + d_2(v) \le 3$.

הדרכה: חשבו את סכום כל הדרגות בשני העצים.

בהצלחה!

פתרון בחינה 3

שאלה 1

א. $2^9 = 512$

ב. היחס רפלקסיבי וסימטרי אבל אינו טרנזיטיבי.
כדי להראות שאינו טרנזיטיבי מוצאים R_1, R_2, R_3 כך ש- R_1, R_2 מתחלפות
(כלומר $R_1 R_2 = R_2 R_1$), R_2, R_3 מתחלפות, אבל R_1, R_3 לא מתחלפות.
דרך נוחה לעשות זאת:
מוצאים R_1, R_3 **כלשהן שאינן מתחלפות** ובוחרים את R_2 להיות I_A או להיות $\varnothing$.
אפשר כמובן גם אחרת.

שאלה 2

הבעיה בהגדרה היא שתוצאת הפעולה תלויה בבחירת הנציגים (הקבוצות A, B).
את הבעיה אפשר להראות אפילו בקבוצות סופיות:
נחשב את $1 \oplus 1$ בשתי דרכים:
נבחר $A = B = \{1\}$. מתקיים $|A| = |B| = 1$. לכן ניתן לחשב בעזרת A, B את $1 \oplus 1$.
מההגדרה שבשאלה(!) נקבל: $1 \oplus 1 = |A \oplus B| = |\varnothing| = 0$.
מצד שני, נבחר $A = \{1\}$, $B = \{2\}$.
מתקיים $|A| = |B| = 1$. לכן ניתן לחשב בעזרת A, B את $1 \oplus 1$:
מההגדרה שבשאלה(!) נקבל: $1 \oplus 1 = |A \oplus B| = |\{1,2\}| = 2$.
קיבלנו שתי תוצאות שונות, משמע הגדרת הפעולה תלויה בנציגים ולכן אינה חוקית.

אפשר כמובן גם להביא דוגמאות מסובכות יותר, כולל כאלה בהן כל הקבוצות שונות זו מזו, וכולל דוגמאות בקבוצות אינסופיות.

המפתח להבנת השאלה הוא הבנת ההגדרות של חיבור, כפל וחזקה של עוצמות, כולל ההערה שמופיעה מיד אחרי כל אחת מהן. מי שלא קרא והבין לפחות אחת או שתיים מההגדרות הללו, סביר שלא ענה נכון. על מה ירדו נקודות:
מי שכתב: "לא ניתן להגדיר פעולה על עוצמות בעזרת בחירה של קבוצות"
- לא נכון, הרי חיבור, כפל וחזקה הוגדרו בדיוק בצורה כזו. על כך ירדו הרבה נקודות.
מי שכתב: "בעצם ההגדרה בשאלה היא $k \oplus m = (k - m) + (m - k)$ "
- לא נכון, זו ממש לא ההגדרה. על כך ירדו הרבה נקודות.
מי שהביא דוגמא אחת ובמקום דוגמא שניה אמר שמצד שני "ברור" ש- $k \oplus k = 0$, בלי שהוכיח זאת מתוך ההגדרה שבשאלה
- זה לא ברור מאליו, זה דורש הוכחה מתוך ההגדרה כמו כאן למעלה. על כך ירדו מעט נקודות.

שאלה 3

נחשוב על הצבעים הנתונים כמיוצגים על ידי 4 תאים שונים. נפזר 24 מקלות זהים.
מספר המקלות שנופלים בתא של הצבע הירוק הוא מספר הכדורים הירוקים מתוך ה- 24 וכו'
לכן השאלה הופכת למציאת מספר הפיזורים של 24 מקלות זהים ב- 4 תאים שונים כאשר מספר המקלות בכל תא לא יעלה על 10. במילים אחרות מדובר במספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24$ כאשר $x_1, x_2, x_3, x_4 \le 10$

מספר כל הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24$ הוא $D(4,24)$

לכל $1 \le i \le 4$ נסמן ב- A_i את קבוצת הפתרונות שבהם $x_i > 10$.

פתרון בעזרת עקרון ההכלה וההפרדה:

מספר הפתרונות האלה שווה למספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$.

לכן $|A_i| = D(4,13)$

לכל $1 \le i \ne j \le 4$, מספר הפתרונות השייכים ל- $A_i \cap A_j$ שווה למספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ לכן $|A_i \cap A_j| = D(4,2)$.

ברור שהחיתוך של שלוש קבוצות שונות מהסוג A_i הוא ריק ולכן לפי עקרו ההכלה וההפרדה מקבלים שמספר הפתרונות המבוקש (וגם מספר הבחירות שעליו נשאלנו בשאלה הזו) הוא:

$$D(4,24) - \binom{4}{1}D(4,13) + \binom{4}{2}D(4,2) = D(4,24) - 4D(4,13) + 6D(4,2) = 745$$

פתרון בעזרת פונקציה יוצרת:

הפונקציה היוצרת המתאימה לפתרון השאלה היא $f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})^4$ ועלינו למצוא את המקדם של x^{24}.

לשם ככך נרשום:

$$f(x) = \left(\frac{1 - x^{11}}{1 - x}\right)^4 = (1 - x^{11})^4 \frac{1}{(1 - x)^4}$$

לפי בינום ניוטון עבור $(1 - x^{11})^4$ ולפי הנוסחה $\frac{1}{(1 - x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} D(n,k)x^k$ עבור $n = 4$ נקבל:

$$f(x) = \left[1 - \binom{4}{1}x^{11} + \binom{4}{2}x^{22} - \binom{4}{3}x^{33} + \binom{4}{4}x^{44}\right]\left(\sum_{k=0}^{\infty} D(4,k)x^k\right).$$

המקדם של x^{24} הוא:

$$D(4,24) - \binom{4}{1}D(4,13) + \binom{4}{2}D(4,2).$$

שאלה 4

יש שאלה זהה כמעט לגמרי בחוברת "אוסף תרגילים פתורים" , עמ' 9 שאלה 4.
מי שראה זאת ונעזר בפתרון ששם, כמובן זה מקובל.

א. 2^{125}

ב. $D(5,3) = \binom{7}{3} = 35$

ג. פונקציה מקיימת את הדרישה בסעיף זה **אם ורק אם** היא מקבלת ערך קבוע בתוך כל מחלקת שקילות. לכן מספר הפונקציות המקיימות את התנאי הוא כמספר הפונקציות של **קבוצת מחלקות השקילות** לקבוצה $\{0,1\}$: 2^{35} .

שאלה 5

נסמן $|V| = n$.

$$\sum_{v\in V}\left(d_1(v) + d_2(v)\right) = \sum_{v\in V} d_1(v) + \sum_{v\in V} d_2(v)$$

$$= 2E_1 + 2E_2 = 2(n-1) + 2(n-1) = 4n - 4$$

(השלימו נימוקים).

כעת, אילו לכל v היה $d_1(v) + d_2(v) \geq 4$ אז הסכום $\sum_{v\in V}\left(d_1(v) + d_2(v)\right)$ היה לפחות $4n$.

מכיון שהוא פחות מ- $4n$, חייב להיות לפחות צומת אחד עבורו $d_1(v) + d_2(v) \leq 3$.