

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחרת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(6 נק') **א.** את הפסוק "בין כל שני מספרים שונים קיים מספר נוסף השונה משניהם" ניתן להצדיק כך:

$$\forall x \forall y ((x < y) \wedge \exists z ((x < z) \wedge (z < y))) \quad [1]$$

$$\forall x \forall y ((x < y) \rightarrow (\neg \forall z ((z \leq x) \vee (y \leq z)))) \quad [2]$$

$$\forall x \forall y ((x < y) \rightarrow \forall z ((x < z) \wedge (z < y))) \quad [3]$$

$$\forall y (\exists x \exists z ((x < y) \wedge (y < z))) \quad [4]$$

(7 נק') **ב.** אם $A \subseteq \mathbf{R}$ ואם $|A| = |\mathbf{R}|$ אז

$$|\mathbf{R} \setminus A| \leq \aleph_0 \quad [1]$$

$$(a, b] \subseteq A \text{ קיימים } a < b, a, b \in \mathbf{R} \text{ כך ש-} \quad [2]$$

$$|A \cap (\mathbf{R} \setminus Q)| < |\mathbf{R} \setminus Q| \quad [3]$$

$$|(n, n+1] \cap A| > |\mathbf{Z}| \text{ קיים } n \in \mathbf{Z} \text{ כך ש-} \quad [4]$$

(6 נק') **ג.** תהי A קבוצת כל הקבוצות בנות שלושה איברים שחלקיות ל- $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

נסמן ב- $G = (A \cup B, E)$ הגרף הדו-צדדי המוגדר כך: לכל $S \in A$ יש קשת בין S

לבין המספר הקטן ביותר של S וגם לבין המספר הגדול ביותר של S .

(אין קשתות אחרות שיוצאות מ- S). אז:

$$[1] \text{ קיים ב- } G \text{ זיווג המזווג כל צומתי } A, \text{ שבו } \{1, 2, 3\} \text{ מזווג ל- } 1$$

$$[2] \text{ קיים ב- } G \text{ זיווג המזווג כל צומתי } A, \text{ שבו } \{1, 2, 3\} \text{ מזווג ל- } 3$$

$$[3] \text{ יש רק דרך אחת לזווג את כל צומתי } A.$$

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

על הקבוצה $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ נתונים שני יחסים R, S המוגדרים כך: לכל $A, B \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$

ARB אם ורק אם $A \cup \{1,2\} = B \cup \{1,2\}$ ו- ASB אם ורק אם $A \cup \{1,2\} \subset B \cup \{1,2\}$.

(הערה לתלמידים מסמסטרס קודמים בלבד: אתם יכולים להשתמש בהגדרה הבאה עבור S :

ASB אם ורק אם $A = B$ או $A \cup \{1,2\} \subset B \cup \{1,2\}$). תלמידי 2019, אנא התעלמו מהערה זו)

א. קבעו (ללא הוכחה) אם אחד מהיחסים הוא יחס שקילות ואם התשובה חיובית, מיצאו את מחלקות השקילות שלו.

ב. קבעו (ללא הוכחה) אם אחד היחסים הוא יחס סדר חלקי או מלא ואם התשובה חיובית, מיצאו את האיברים המינימליים והמקסימליים בקבוצה הסדורה שגיליתם.

שאלה 3

9 נק') א. רישמו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

כאשר כל הנעלמים הם מספרים שלא מתחלקים ב-3. (לא לשכוח, 0 מספר טבעי והוא מתחלק ב-3)

(רמז לפישוט: אפשר להוציא את $x + x^2$ כגורם משותף מהסכום האינסופי).

9 נק') ב. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה מסעיף א' כאשר $k = 4$, $n = 12$.

9 נק') ג. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה מסעיף ב' כאשר $x_i \neq 4$ לכל $1 \leq i \leq 4$.

שאלה 4

בקבוצה A יש 18 סימנים: 12 אותיות ועוד 6 ספרות.

נסמן ב- a_n את מספר המחרוזות באורך n , שאיבריהן הם סימנים מתוך A , והן בעלות התכונה

שמימין לכל אות חייבת להופיע ספרה. למשל כל מחרוזות באורך 1 שבה אות אחת וכל מחרוזות

באורך גדול יותר שבה יש שתי אותיות סמוכות זו לזו היא פסולה. את a_0 מגדירים כ-1.

7 נק') א. מיצאו בעזרת חישוב ישיר את a_1, a_2 .

7 נק') ב. מיצאו יחס נסיגה ל- a_n ובדקו שהערכים של a_0, a_1, a_2 מתאימים ליחס הנסיגה.

13 נק') ג. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת עבור a_n .

שאלה 5

T הוא עץ על 7 צמתים שבו שני צמתים בעלי דרגה 3 ו- G הוא גרף פשוט המתקבל על ידי חיבור אחד העלים של העץ T לכל העלים האחרים שלו.

9 נק') א. רישמו סדרת פרופר מתאימה לעץ T (לא צריך לרשום יותר מסדרה אפשרית אחת)

9 נק') ב. הראו (אפשר בשרטוט) ש- G הוא גרף מישורי ומיצאו את מספר הפיאות שלו בעזרת נוסחת אוילר.

9 נק') ג. האם קיים ב- G מעגל אוילר או מסלול אוילר? נמקו את התשובה.

בהצלחה!