

בחינה 8

מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש

בפירוש בגוף השאלה.

* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של

הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת

"אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות

שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.

* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי

אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.

* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים

של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחרת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(6 נק') א. α, β הם פסוקים. נתון שהפסוק $\alpha \wedge \beta$ הוא סתירה. מכאן נובע:

- [1] α הוא סתירה ו- β הוא סתירה.
- [2] בדיוק אחד משני הפסוקים α, β הוא סתירה.
- [3] התשובות הקודמות אינן נכונות, אבל לפחות אחד משני הפסוקים α, β הוא סתירה.
- [4] התשובות הקודמות אינן נכונות, אבל הפסוק α שקול לשלילתו של הפסוק β .
- [5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

(7 נק') ב. A היא קבוצת הפונקציות של N לקבוצה $\{0,1\}$, המקיימות את התנאים הבאים:

- לכל מספר אי-זוגי n , $f(n) = 1$.
- לכל n המתחלק ב-4, $f(n) = 0$.
- עבור שאר המספרים אין הגבלה לגבי הערך של f . עוצמתה של A היא:

- [1] מספר סופי
- [2] \aleph_0
- [3] C
- [4] גדולה מ- C
- [5] לא ניתן לקבוע מהנתונים את עוצמת A

(6 נק') ג. G הוא גרף פשוט על 32 צמתים, המוגדר כך:

- צומת של G הוא מחרוזת באורך 5 הבנויה מהאותיות a, b .
- למשל, המחרוזת $aabab$ היא צומת של G . גם $aaaaa$ היא צומת של G .
- צמתים x, y מחוברים בקשת אם ורק אם המחרוזות x, y מתלכדות (כלומר זהות) **פרט למקום אחד בלבד במחרוזת.**
- למשל, יש קשת בין הצומת $aabab$ לצומת $abbab$, כי המחרוזות הללו נבדלות זו מזו רק במקום אחד (האות השניה במחרוזת).
- מספר הקשתות של G הוא:

- [1] 64
- [2] 80
- [3] 128
- [4] 144
- [5] 160

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

- בכל אחד מהסעיפים, קבעו אם קיים יחס (רלציה) כזה מעל הקבוצה $\{1,2,3,4\}$.
- אם קיים – הביאו דוגמא. אם לא קיים – הוכיחו שלא קיים.
- 6 נק' א. סימטרי, טרנזיטיבי, לא ריק ולא רפלקסיבי.
- 7 נק' ב. טרנזיטיבי, לא סימטרי ולא אנטי-סימטרי.
- 7 נק' ג. יחס רפלקסיבי R המקיים: $R \cap R^2 \neq R$.
- 7 נק' ד. סדר חלקי שבו קיים אבר קטן ביותר וקיימים בדיוק שני אברים מקסימליים.

שאלה 3

מצאי את מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ בטבעיים, כאשר אף אחד מהמשתנים אינו שווה ל-4 ואף אחד מהמשתנים אינו שווה ל-5. 0 הוא מספר טבעי. כדאי לפתור בעזרת הפרדה והכלה. יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 4

- א. (5 נק') מהו מספר המחרוזות באורך 11 הבנויות מ-7 הופעות של 0 ו-4 הופעות של 1? למשל 11000100001 היא מחרוזת כזו.
- ב. (11 נק') בכמה מהמחרוזות שבסעיף א אין הופעות צמודות של 1, כלומר אין הופעה של המחרוזת "11"? הדרכה לפתרון מהיר: חשבו על ספרות 0 כעל מחיצות.
- ג. (11 נק') מצאו כמה קבוצות X מקיימות: $|X| = 4$, $X \subseteq \{1,2,3,\dots,11\}$, וב- X לא נמצאים אף שני מספרים שההפרש ביניהם הוא 1 (במילים אחרות, לכל i טבעי, אם $i \in X$ אז $i+1 \notin X$).
- הדרכה: היעזרו בסעיפים הקודמים. אפשר להיעזר במושג "פונקציה אופיינית" ("תורת הקבוצות" עמ' 85).

שאלה 5

בגרף פשוט G קיים מעגל אוילר, וקיים ב- G גם מעגל המילטון. האם בהכרח קיים ב- G מסלול שהוא בעת ובעונה אחת מעגל אוילר ומעגל המילטון? אם כן – הוכיחו בפירוט. אם לא – תני דוגמא נגדית מנומקת.

בהצלחה!

תקציר פתרון בחינה 8

שאלה 1

- א. [5] . מי שענה [4] יקבל קצת נקודות...
 ב. [3].
 ג. [2] . דרגת כל צומת היא 5, לכן מספר הקשתות $32 \cdot 5 / 2 = 80$.

שאלה 2

- א. כן: $\{(1,1)\}$
 ב. כן: $\{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1), (3,4)\}$
 ג. לא: לפי טענה המופיעה יחד עם הגדרת רפלקסיביות, יחס רפלקסיבי מקיים $R \subseteq R^2$.
 ד. כן: V עם נקודה באמצע אחת הצלעות.

שאלה 3

- פתרונות ללא הגבלה: $D(4,9) = \binom{12}{3} = 220$.
 A_i : קבוצת הפתרונות בהם $x_i = 5$. B_i : קבוצת הפתרונות בהם $x_i = 4$.
 * $|A_i| = D(3,4) = \binom{6}{2} = 15$, יש 4 כאלה.
 * $i \neq j \implies |A_i \cap A_j| = \emptyset$.
 * $|B_i| = D(3,5) = \binom{7}{2} = 21$, יש 4 כאלה.
 * $i \neq j \implies |B_i \cap B_j| = D(2,1) = \binom{2}{1} = 2$ (ברור גם ללא הנוסחה). יש 6 כאלה.
 * חיתוך 3 B -ים שונים הוא ריק.
 * $i \neq j \implies |A_i \cap B_j| = 1$, יש 12 כאלה.
 טעות מקובלת – לומר שאין צורך כי הם נכללים בקבוצות הקודמות...
 פרט לאלה אין עוד חיתוכים.

תשובה: $220 - 4 \cdot (15 + 21) + 6 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 100$

שאלה 4

א. $\binom{11}{4}$

ב. 7 המחיצות מגדירות 8 תאים,

עלינו לבחור 4 מתוכם בלי חזרות ובלי חשיבות לסדר: $\binom{8}{4}$

ג. הפונקציה האפיינית של קבוצה חוקית X בתוך $\{1, 2, 3, \dots, 11\}$ היא בדיוק מחרוזת חוקית מסעיף ב, ולהיפך. לכן זו אותה תשובה.

שאלה 5

דוגמא נגדית: בגרף המלא K_5 כל הדרגות זוגיות, לכן יש מעגל אוילר.

ברור שיש מעגל המילטון.

אבל מעגל אוילר לא יכול להיות מעגל המילטון, כי מסלול באורך 10 לא יכול לעבור דרך כל צומת פעם אחת בלבד (או כי האורך של מעגל המילטון הוא 5).