חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(6 נק') **א.** את הפסוק **"הפונקציה f היא חד-חד-ערכית"** (כאשר x,y מסמנים איברים בתחום של f) ניתן להצרין כך:

[1] $\forall x \forall y((x \neq y) \wedge (f(x) \neq f(y)))$

[2] $\forall x \forall y((f(x) = f(y)) \rightarrow (x = y))$

[3] $\forall x \forall y((f(x) \neq f(y)) \rightarrow (x \neq y))$

[4] $\forall x \exists y((x \neq y) \rightarrow (f(x) = f(y)))$

(7 נק') **ב.** מסמנים כרגיל ב- $\mathbf{N}$ את קבוצת המספרים הטבעיים ב- $\mathbf{Q}$ את קבוצת המספרים הרציונליים וב- $\mathbf{R}$ את קבוצת המספרים הממשיים.

נתונה סדרה $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ של קבוצות **שונות זו מזו** כך ש- $\mathbf{R} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$. אז:

[1] קיים $n \in \mathbf{N}$ כך ש- $|A_n \cap \mathbf{Q}| = \aleph_0$

[2] קיים $n \in \mathbf{N}$ כך ש- $|A_n \cap [0,1]| > \aleph_0$.

[3] קיים $n \in \mathbf{N}$ כך ש- $|A_n| = \aleph_0$.

[4] $|\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n| < \aleph$.

(6 נק') **ג.** G הוא גרף **מישורי פשוט** על 5 צמתים שבו הדרגה של כל צומת היא גדולה מ- 2.

אז:

[1] קיים גרף G המקיים את נתוני השאלה שהוא דו-צדדי

[2] קיימים לפחות שני צמתים שהם בעלי דרגה 3

[3] קיים ב- G מסלול אוילר שאינו מעגל

חלק ב׳: ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב׳ כולו : 81 נקודות

שאלה 2

נתונה $A = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ (קבוצת המספרים הממשיים השונים מ- 0).

על הקבוצה $B = A \times A$ מגדירים R כך : לכל $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in B$,

$(x_1,y_1)R(x_2,y_2)$ אם ורק אם $x_1x_2 > 0$ וגם $y_1y_2 > 0$.

(9 נקי) א. הוכיחו ש- R יחס שקילות על $B = A \times A$

(9 נקי) ב. מיצאו את מספר מחלקות השקילות של R והדגימו שני איברים שונים בכל מחלקה.

(9 נקי) ג. נתבונן ביחס S המוגדר על $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ כך : $(x_1,y_1)S(x_2,y_2)$ אם ורק אם $x_1x_2 \geq 0$ וגם $y_1y_2 > 0$. הוכיחו ש- S אינו יחס שקילות על $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

שאלה 3

תהי A קבוצת כל המחרוזות שבהן מופיעות הספרות 1,2,3 בלבד. נסמן :

a_n מספר המחרוזות ב- A שהן באורך n וסכום הספרות שלהן זוגי.

b_n מספר המחרוזות ב- A שהן באורך n וסכום הספרות שלהן אי-זוגי.

למשל את המחרוזת 213 סופרים כשמחשבים את a_3 ואת המחרוזת 2131 סופרים ב- b_4 .

(9 נקי) א. עבור כל $n \geq 2$ הביעו את a_n בעזרת a_{n-1} ו- b_{n-1} וגם את b_n בעזרת a_{n-1} ו- b_{n-1} .

(9 נקי) ב. מיצאו נוסחת נסיגה עבור a_n .

הדרכה : השוויון הראשון מסעיף א׳ מאפשר להביע את b_{n-1} בעזרת a_n ו- a_{n-1} ולכן גם את b_n בעזרת a_{n+1} ו- a_n . הציבו אותם במקום b_{n-1} ו- b_n בשוויון השני מסעיף א׳)

(9 נקי) ג. חשבו את a_1 ואת a_2 ומיצאו נוסחה כללית ל- a_n .

שאלה 4

(14 נקי) א. רישמו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{10} = n$$

כאשר $x_1,x_2,\ldots,x_{10} \in \{0,3\}$ ו- $y_1,y_2,\ldots,y_{10} \in \{0,1,2\}$.

פשטו את הביטוי בעזרת : $1+x+x^2 = (1-x^3)/(1-x)$ ו- $(1+x^3)(1-x^3) = 1-x^6$.

(13 נקי) ב. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה מסעיף א׳ כאשר $n = 7$.

שאלה 5

בשאלה זו נתייחס לגרף פשוט וקשיר $G = (V,E)$ שבו קבוצת הצמתים היא $V = \{1,2,3,\ldots,n\}$.

ידוע שבגרף G קיימת הקשת $e = \{1,2\}$ ושהגרף $T = (V, E \setminus \{e\})$ הוא עץ.

(9 נקי) א. הוכיחו שאם G אוילרי אז G הוא מעגל.

(9 נקי) ב. רישמו סדרת פרופר של T במקרה ש- G הוא גרף אוילרי. נמקו את הטענה.

(9 נקי) ג. הראו שאם G ~~המילטוני~~ אז G אינו בהכרח מעגל. הדגימו זאת עבור $n = 4$.

מסלול
המילטון

בהצלחה !