

{S100359105II~

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(6 נק') א. להלן האותיות a, b, p מסמנות מספרים טבעיים חיוביים כאשר $p \geq 2$.

את הפסוק " p מספר ראשוני" ניתן להצריך כך:

$$\forall a \forall b ((p = ab) \wedge ((a = 1) \vee (b = 1))) \quad [1]$$

$$\forall a \forall b ((a = 1) \vee (b = 1) \vee (p \neq ab)) \quad [2]$$

$$\forall a \forall b (((a \neq 1) \vee (b \neq 1)) \rightarrow (p \neq ab)) \quad [3]$$

$$\forall a \forall b (((a = 1) \vee (b = 1)) \rightarrow (p \neq ab)) \quad [4]$$

(7 נק') ב. \mathbf{R} היא קבוצת המספרים הממשיים, \mathbf{Q} קבוצת הרציונליים.

אם $A \subseteq \mathbf{R}$ ואם לכל $a, b \in \mathbf{R}$ כך ש- $a < b$ מתקיים $|A \cap (a, b)| = \aleph_0$ אז

$$|A| > \aleph_0 \quad [1]$$

$$|\mathcal{P}(A)| = |\mathbf{R}| \quad [2]$$

$$|(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cap A| \geq \aleph_0 \quad [3]$$

$$|A \cap \mathbf{Q}| \geq \aleph_0 \quad [4]$$

(6 נק') ג. לאחר מחיקת כמה קשתות (בלי למחוק צמתים) בגרף פשוט לא מישורי ומתוייג

G התקבל עץ עם סדרת פרופר $(2, 3, 4, 3)$.

[1] הדרגה של כל צומת ב- G היא 3.

[2] הדרגה של כל צומת ב- G היא 4.

[3] G הוא המילטוני.

[4] G אינו אוילרי.

[5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

נתונה $A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq y \leq 5\}$. על הקבוצה A מגדירים יחסים R, S כך:
לכל $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$, אם ורק אם $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, $(x_1, y_1) R (x_2, y_2)$
לכל $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$, אם ורק אם $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$, $(x_1, y_1) S (x_2, y_2)$
(13 נק') א. הראו ש- R הוא יחס שקילות ורשמו באופן מפורט את מחלקות השקילות שלו.
(14 נק') ב. הראו ש- S הוא יחס סדר. קבעו אם הוא סדר חלקי או מלא ומיצאו בו את כל האיברים המינימליים והמקסימליים.

שאלה 3

(14 נק') א. חשבו את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 13$ המקיימים $x_i \neq 3$ לכל $1 \leq x_i \leq 7$
הסבירו את התשובה.

(13 נק') ב. מיצאו את המקדם של x^{13} בפיתוח לטור חזקות של $(1+x^{12}) \left(\frac{1}{1-x} - x^3\right)^7$.

נמקו את התשובה

שאלה 4

(13 נק') א. מיצאו את מספר המספרים בעלי 5 ספרות שבהם מכפלת הספרות היא 180.
(למשל 19451 ו-22335 הם מספרים כאלה) נמקו את התשובה.
(14 נק') ב. נתונה קבוצה A כך ש- $|A|=10$. מיצאו את מספר הקבוצות מהצורה $\{B, C\}$ כאשר $B, C \subseteq A$, $|B|=5$ ו- $|B \cap C|=1$.

שאלה 5

נתון גרף קשיר ופשוט $G = (V, E)$ על n צמתים שבו ממוצע הדרגות של הצמתים גדול מ-2.
(9 נק') א. הוכיחו ש- $|E| > n$
(9 נק') ב. הוכיחו שקיימים ב- G לפחות שני מעגלים שונים.
(9 נק') ג. הוכיחו שלא חייבים להיות יותר משני מעגלים שונים ב- G .

בהצלחה!