בחינה 5

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות:

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- **בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
- **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
- **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
- **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. <u>רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס</u>.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק') **א.** להלן ציטוט משיר ישן של אילן ואילנית:

P: **לכל אדם, כוכב יש בשמיים, כוכב המתגלה עם רדת יום.**

איזה מהטענות הבאות שקולה ל<u>**שלילת**</u> P ?

[1] לכל אדם כוכב יש בשמיים, כוכב שאינו מתגלה עם רדת יום.

[2] לכל אדם, אם יש לו כוכב בשמיים אז הכוכב הזה לא מתגלה עם רדת יום.

[3] לאף אדם אין בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום.

[4] יש בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום אבל אינו שייך לאף אדם.

[5] יש אדם שאין לו בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום.

(7 נק') **ב.** נסמן $A=\{(x,n) \mid x\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{N}\} \cup \{(n,x) \mid n\in\mathbf{N},\ x\in\mathbf{R}\}$.

ונסמן $B=(\mathbf{R}\times\mathbf{R})-A$.

עוצמת B היא:

[1] 0 **[2]** $\aleph_0$ **[3]** C **[4]** 2^C

[5] עוצמה כלשהי שנמצאת בין $\aleph_0$ ל- C.

(6 נק') **ג.** G הוא עץ מתויג על 8 צמתים (התגים הם כמקובל המספרים $1,2,3,\ldots,8$).

סדרת Prüfer של G היא $(3,7,2,2,x,2)$ כאשר $x\in\{1,2,3,\ldots,8\}$.

לפיכך:

[1] $x=2$

[2] $x\neq 2$

[3] לא ייתכן: זה לא האורך המתאים עבור סדרת Prüfer של G.

[4] אורך הסדרה מתאים אבל אף ערך של x לא נותן סדרת Prüfer חוקית.

[5] x יכול להיות כל מספר שנרצה בקבוצה $\{1,2,3,\ldots,8\}$.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו : 81 נקודות

שאלה 2

(7 נק') א. יהיו R, R_1, S, S_1 יחסים (רלציות) מעל קבוצה A.

הוכיחו כי אם $R_1 \subseteq R$ ו- $S_1 \subseteq S$ אז $R_1S_1 \subseteq RS$.

(14 נק') ב. הוכיחו כי אם R, S הם יחסים טרנזיטיביים מעל A, המקיימים $RS = SR$,

אז גם RS טרנזיטיבי. נמקו בפירוט כל צעד. סעיף א יכול לסייע.

נוח להוכיח סעיף זה בעזרת תכונות אלגבריות של יחסים, ללא התבוננות באברי היחס.

(6 נק') ג. תהי $A = \{1,2\}$. תנו דוגמה ליחסים R, S מעל A, כך שארבעת היחסים

R, S , RS, SR הם טרנזיטיביים אבל $RS \neq SR$.

שאלה 3

נסמן $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3\}$.

(5 נק') א. מהו מספר הפונקציות של B לקבוצה $A \times A$?

(22 נק') ב. מהו מספר הפונקציות f של B לקבוצה $A \times A$, המקיימות :

לכל $a \in A$ קיים $x \in B$ כך ש- a מופיע (כאיבר הימני או כאיבר השמאלי)

בזוג הסדור $f(x)$?

דוגמאות :

הפונקציה f המוגדרת כך : $f(1) = (1,2)$, $f(2) = (3,4)$, $f(3) = (1,1)$

מקיימת את הדרישה.

הפונקציה g המוגדרת כך : $g(1) = (1,2)$, $g(2) = (2,1)$, $g(3) = (1,1)$

אינה מקיימת את הדרישה,

כי 3, 4 אינם נמצאים באף אחד מהזוגות $(1,2), (2,1), (1,1)$.

בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 4

יהי a_n מספר הסדרות באורך n, שאבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,\ldots,7\}$, והמקיימות את התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים **זוגיים** זה בסמוך לזה.

למשל, עבור $n=5$, הסדרה $(1,1,2,6,3)$ **אינה** מקיימת את התנאי, כי 2 מופיע ליד 6.

גם הסדרה $(1,1,2,2,3)$ אסורה, כי יש שתי הופעות צמודות של 2.

(10 נק׳) א. רשום את $a_0,\ a_1,\ a_2$. מצא יחס נסיגה (יחס רקורסיה) עבור a_n.
בדוק ש- $a_0,\ a_1,\ a_2$ שרשמת מתיישבים עם יחס הנסיגה שמצאת.

(17 נק׳) ב. פתור את יחס הנסיגה וקבל ביטוי מפורש עבור a_n.
בדוק את הביטוי שקיבלת, עבור $n=2$.

שאלה 5

יהי G גרף פשוט, שיכול להיות קשיר או לא קשיר.

a,b הם צמתים שונים ב- G, שהמסלול **הקצר ביותר** ביניהם הוא באורך 3 או יותר

(תזכורת: אורך מסלול הוא מספר הקשתות במסלול). ייתכן שאין כלל מסלול בין a,b.

$\overline{G}$ הוא הגרף **המשלים** של G ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4).

(6 נק׳) א. הוכיחי שב- $\overline{G}$, הצמתים a,b נמצאים באותו רכיב קשירות.

(21 נק׳) ב. הוכיחי ש- $\overline{G}$ הוא קשיר.

בהצלחה!

תקציר פתרון בחינה 5

תשובה 1

א. [5]   ב. [3]   ג. [5]

תשובה 2

א. יהי $(a,b) \in R_1S_1$. משמע קיים $c \in A$ כך ש- $(a,c) \in R_1$ $(c,b) \in S_1$.

$R_1 \subseteq R$, לכן $(a,c) \in R$. $S_1 \subseteq S$, לכן $(c,b) \in S$.

שוב מהגדרת כפל יחסים, קיבלנו $(a,b) \in RS$.

ב. הוכחת טענה זו ע"י התבוננות באיברי היחסים אינה קלה.

ההוכחה האלגברית פשוטה למדי: לפי עמ' 52 בספר, T טרנזיטיבית אסם $T^2 \subseteq T$.

עלינו להוכיח אפוא כי $(RS)^2 \subseteq RS$. נחשב:

(הגדרת חזקה של רלציה)	$(RS)^2 = (RS)(RS)$
(כפל רלציות הוא אסוציאטיבי: משפט 2.8)	$= R(SR)S$
(נתון $RS = SR$)	$= R(RS)S$
(שוב אסוציאטיביות והגדרת חזקה)	$= R^2S^2$
(סעיף א, בצירוף העובדה שהיחסים הטרנזיטיביים R,S מקיימים $R^2 \subseteq R$, $S^2 \subseteq S$)	$\subseteq RS$

ג. דוגמה 1: $R = \{(1,2)\}$, $S = \{(2,1)\}$.   דוגמה 2: $R = \{(1,2)\}$, $S = \{(1,1)\}$.

תשובה 3 (השאלה הופיעה במטלה בסמסטר קודם. היא דומה לשאלה ממועד א2 אבל אחרת: שם התמונות היו זוגות לא סדורים).

א. $(4 \cdot 4)^3 = 16^3 = 4{,}096$

ב. תהי U קבוצת **כל** הפונקציות של B ל- $A \times A$. מהסעיף הקודם $|U| = 4{,}096$.

עבור $i = 1,2,3,4$, תהי F_i קבוצת הפונקציות f השייכות ל- U, אשר i **אינו** נמצא כאיבר ימני ואינו נמצא כאיבר שמאלי **באף אחד** מהזוגות שבתמונת f.

למשל הפונקציה g בדוגמא שבגוף השאלה שייכת ל- F_3 וגם ל- F_4.

אנו מחפשים את גודל הקבוצה $U - \bigcup_{i=1}^{4} F_i$.

את F_1 ניתן לראות כקבוצת הפונקציות של B לקבוצה $\{2,3,4\} \times \{2,3,4\}$.

לכן, בדומה לסעיף א, $|F_1| = (3 \cdot 3)^3 = 729$.

בדומה מובן כי עבור $i = 1,2,3,4$, $|F_i| = 729$.

חיתוכים בזוגות:

את $F_1 \cap F_2$ ניתן לראות כקבוצת הפונקציות של B לקבוצה $\{3,4\} \times \{3,4\}$.

לכן $|F_1 \cap F_2| = (2 \cdot 2)^3 = 64$.

מובן כי לכל $i \neq j$ זהו גם $|F_i \cap F_j|$. יש 6 חיתוכים בזוגות

חיתוכים משולשים:

כל חיתוך כזה הוא קבוצת הפונקציות של B לקבוצה בת איבר אחד. יש בדיוק פונקציה אחת השולחת את כל אברי B לאיבר קבוע. לכן עבור i,j,k שונים זה מזה, $|F_i \cap F_j \cap F_k| = 1$.

יש 4 חיתוכים משולשים.

החיתוך $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$ הוא ריק.

מעקרון ההכלה וההפרדה,

$$\left| U - \bigcup_{i=1}^{4} F_i \right| = |U| - 4|F_i| + 6|F_1 \cap F_2| - 4|F_1 \cap F_2 \cap F_3|$$

$$= 4{,}096 - 4 \cdot 729 + 6 \cdot 64 - 4 \cdot 1 = 1{,}560$$

תשובה 4 (השאלה הופיעה במטלה בסמסטר קודם עם המספרים 1 – 8 במקום 1 - 7**).**

א. נבדוק כיצד בנויה סדרה באורך n המקיימת את הנדרש.

נתבונן באיבר האחרון של הסדרה:

* אם הוא אי-זוגי (4 אפשרויות), אז קטע הסדרה הקודם לו הוא **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-1$ (a_{n-1} אפשרויות).
* אם הוא זוגי (3 אפשרויות) אז לפניו בא מספר אי-זוגי (4 אפשרויות), ולפניו **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-2$ (a_{n-2} אפשרויות).

קיבלנו: $a_n = 4a_{n-1} + 12a_{n-2}$.

תנאי התחלה:

$a_0 = 1$ (הסדרה הריקה מקיימת את התנאים),

$a_1 = 7$,

$a_2 = 7^2 - 3^2 = 40$ (כל הזוגות פחות זוגות של מספרים זוגיים),

לבדיקה, מיחס הנסיגה: $a_2 = 4a_1 + 12a_0 = 4 \cdot 7 + 12 = 40$.

ב. המשוואה האפיינית: $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$. פתרונותיה: 6, -2 .

לפיכך $a_n = A\cdot 6^n + B\cdot(-2)^n$.

בהצבת תנאי ההתחלה: $A+B=1$, $6A-2B=7$.

מכאן $A=9/8$, $B=-1/8$.

כלומר $a_n = \frac{9}{8}\cdot 6^n - \frac{1}{8}\cdot(-2)^n$.

בדיקה: $a_2 = \frac{9}{8}\cdot 6^2 - \frac{1}{8}\cdot(-2)^2 = \frac{9\cdot 36-4}{8} = 40$

תשובה 5

א. מכיון שאין ביניהם קשת ב- G, יש ביניהם קשת ב- $\overline{G}$.

ב. יהי x צומת השונה מ- a,b .

לא ייתכן שב- G קיימת קשת ax **וגם** קשת xb , כי זהו מסלול באורך 2 בין a ל- b .

כלומר ב- G , או שאין קשת ax או שאין קשת xb .

לכן ב- $\overline{G}$ יש קשת ax או שיש קשת xb .

משמע x הוא באותו רכיב קשירות עם a או עם b . אבל לפי א' זהו אותו רכיב קשירות.