# בחינה 9

**מבנה הבחינה**:

בבחינה שני חלקים.

**חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.**

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות:

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

**משך המבחן:** 3 שעות.

**חומר עזר:** כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

---

**שימו לב:**

* **בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.**
* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**

---

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

## חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

**שאלה 1**

**בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף.** רשמו את התשובות בתוך המחברת.

**בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה.** אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק') א. להלן ציטוט משיר ישן של אילן ואילנית:

$P$: **לכל אדם, כוכב יש בשמיים, כוכב המתגלה עם רדת יום.**

(להסיר ספק, הביטוי "כוכב יש בשמיים" הוא דרך פואטית לומר "יש כוכב בשמיים")

איזה מהטענות הבאות שקולה ל**שלילת** $P$ ?

**[1]** לכל אדם כוכב יש בשמיים, כוכב שאינו מתגלה עם רדת יום.

**[2]** לכל אדם, אם יש לו כוכב בשמיים אז הכוכב הזה לא מתגלה עם רדת יום.

**[3]** לאף אדם אין בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום.

**[4]** יש אדם שאין לו בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום.

**[5]** יש בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום אבל אינו שייך לאף אדם.

(7 נק') **ב.** $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים, $\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים.

נסמן $A=(\mathbf{R}\times\mathbf{Z})\cup(\mathbf{Z}\times\mathbf{R})$, ויהי $B$ **המשלים** של $A$ ב- $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

עוצמת $B$ היא:

**[1]** 0 **[2]** מספר סופי כלשהו שאינו 0

**[3]** $\aleph_0$ **[4]** $C$

**[5]** אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק') **ג.** בגרף פשוט $G$, מסלול מסוים הוא בעת ובעונה אחת מעגל אוילר ומעגל המילטון.

מכאן נובע:

**[1]** $G$ הוא מעגל פשוט.

**[2]** $G$ הוא מעגל, אבל הוא לא חייב להיות מעגל פשוט.

**[3]** $G$ הוא גרף פשוט, אבל הוא לא חייב להיות מעגל.

**[4]** $G$ הוא גרף בעל מספר זוגי של צמתים.

**[5]** לא ייתכן גרף כזה.

## חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו : 81 נקודות

### שאלה 2

השאלה מתייחסת לפעולת ההפרש הסימטרי $\oplus$ , שהוגדרה בכרך "תורת הקבוצות" בשאלה 1.22 בעמ' 27 .

(5 נק') א. תהיינה $X,Y$ קבוצות המוכלות בקבוצה אוניברסלית כלשהי.

הוכיחו : $(X\oplus Y)'=(X\cap Y)\cup(X'\cap Y')$ .

(15 נק') ב. נגדיר יחס $\beta$ מעל $P(\mathbf{N})$ :

עבור $X,Y\subseteq \mathbf{N}$ : $(X,Y)\in\beta$ אםם $1\notin X\oplus Y$ .

הוכיחו ש- $\beta$ הוא יחס שקילות מעל $P(\mathbf{N})$ .

(7 נק') ג. לכמה מחלקות שקילות מחלק $\beta$ את $P(\mathbf{N})$ ? הוכיחו. תארו את המחלקות.

### שאלה 3

תהי $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ . מיצאו כמה פונקציות $f:A\to A$ מקיימות את התנאי :

שלושת המספרים 1,2,3 נמצאים בתמונה של $f$

(במלים אחרות, כל אחד מהמספרים 1,2,3 מתקבל על-ידי הפעלת $f$ על אבר כלשהו של $A$).

ייתכן בהחלט שאברים נוספים ב- $A$ מתקבלים גם הם.

דוגמאות :

(*i*) הפונקציה השולחת את כל אברי $A$ ל- 1 **אינה** מקיימת את התנאי.

(*ii*) פונקציית הזהות, השולחת כל אבר לעצמו, מקיימת את התנאי.

(*iii*) הפונקציה $f$ המוגדרת כך : $f(6)=3$ , $f(5)=2$ , $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1$

מקיימת את התנאי.

כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה. אין הכרח להגיע לתשובה מספרית.

**שאלה 4**

יהי $a_n$ מספר הסדרות (או המחרוזות) באורך $n$, שאבריהן לקוחים מהקבוצה $\{a,b,c,1,2\}$ והמקיימות בעת ובעונה אחת את כל התנאים הבאים:

לא מופיע בסדרה הרצף $a1$, לא מופיע הרצף $b2$, ולא מופיע רצף של שתי ספַרות.

דוגמאות לסדרות חוקיות באורך 4:

$aaaa$, $abb1$, $1aaa$ (הרצף $1a$ מותר).

דוגמאות לסדרות **לא חוקיות** באורך 4:

$aaa1$ (הופעה של $a1$), $11cc$ (רצף של ספַרות), $c121$ (רצף של ספַרות).

(10 נק') א. מצאו יחס נסיגה עבור $a_n$ (נמקו!) ומצאו תנאי התחלה מספיקים.

(13 נק') ב. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור $a_n$.

(4 נק') ג. חשבו בשתי דרכים את $a_4$.

**שאלה 5**

תהי $A=\{1,2,3,4\}$. $G$ הוא גרף פשוט המוגדר כך: קבוצת הצמתים של $G$ היא $P(A)$.

למשל הקבוצה $\{1,3,4\}$ היא צומת של $G$ והקבוצה הריקה היא צומת אחרת של $G$.

בין צמתים $X,Y$ של $G$ יש קשת אם ורק אם

$X \subseteq Y$ ו- $1 \le |Y-X| \le 2$ **או** $Y \subseteq X$ ו- $1 \le |X-Y| \le 2$.

למשל, יש קשת (אחת ויחידה) בין $\{1\}$ ל- $\{1,3\}$,

יש קשת (אחת ויחידה) בין $\{1\}$ ל- $\{1,2,3\}$

**אין** קשת בין $\{1\}$ ל- $\{1,2,3,4\}$ **ואין** קשת בין $\{1\}$ ל- $\{2,3\}$.

(5 נק') א. לכל אחד מחמשת הצמתים הבאים, חשבו את הדרגה שלו:

$\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2\}$, $\{1\}$, $\varnothing$.

(8 נק') ב. חשבו את מספר הקשתות ב- $G$.

(7 נק') ג. הוכיחו ש- $G$ **אינו** גרף דו-צדדי.

(7 נק') ד. הוכיחו ש- $G$ **אינו** מישורי.

**הערה**:

מטעמי סימטריה מובן שאם $X,Y$ הם צמתים ב- $G$ ו- $|X|=|Y|$ אז $\deg(X)=\deg(Y)$.

ניתן להסתמך על טענה זו ללא הוכחה.

**בהצלחה!**

**שאלה 1**

א. [4] ב. [4] $C$ ג. [1] $G$ הוא מעגל פשוט.

**שאלה 2**

א. אלגברה של קבוצות. הגדרת ההפרש הסימטרי בספר היא $(X-Y)\cup(Y-X)$ .

ב. רפלקסיבי וסימטרי : קל. טרנזיטיבי : נניח $(X,Y)\in\beta$ וגם $(Y,Z)\in\beta$ .
לפי סעיף א, $1\in(X\cap Y)\cup(X'\cap Y')$ וגם $1\in(Y\cap Z)\cup(Y'\cap Z')$ .
מכאן בהפרדה למקרים או בתמרון אלגברי, $1\in(X\cap Z)\cup(X'\cap Z')$.

ג. שתי מחלקות : הקבוצות ש- 1 שייך אליהן והקבוצות ש- 1 לא שייך אליהן.

**שאלה 3**

נסמן ב- $U$ את קבוצת כל הפונקציות מ- $A$ ל- $A$ ועבור $1\le i\le 3$ נסמן ב- $B_i$ את קבוצת כל הפונקציות מ- $A$ ל- $A-\{i\}$ .

אז $B_1\cup B_2\cup B_3$ היק קבוצת כל הפונקציות אשר **לפחות** אחד מבין המספרים $1,2,3$ לא נמצא בתמונה שלהן ולכן

$U-(B_1\cup B_2\cup B_3)$ היא קבוצת כל הפונקציות אשר כל המספרים $1,2,3$ נמצאים בתמונה שלהן.

נשים לב ש- $|U|=6^6$, $|B_i|=5^6$, שעבור $i\neq j$, $B_i\cap B_j$ היא קבוצת כל הפונקציות מ- $A$ ל- $A-\{i,j\}$ לכן

$|B_i\cap B_j|=4^6$ ובאופן דומה, $|B_1\cap B_2\cap B_3|=3^6$.

לכן לפי עקרון ההכלה וההפרדה התשובה היא : $|U-(B_1\cup B_2\cup B_3)|=6^6-3\cdot 5^6+3\cdot 4^6-3^6$

**שאלה 4**

א. משמעות התנאים : לפני אות יכול לבוא כל תו, לפני 1 יכול לבוא רק $b$ או $c$ , לפני 2 יכול לבוא רק $a$ או $c$.

נסתכל בסדרה באורך $n+1$ .

אם התו האחרון הוא אות (3 אפשרויות) אז לפניו יכולה להיות כל סדרה חוקית באורך $n$.

אם התו האחרון הוא 1 אז לפניו.... ולפני זה כל סדרה חוקית.... אם התו האחרון הוא 2....

יחס נסיגה : $a_{n+1}=3a_n+2\cdot 2a_{n-1}$ .

תנאי התחלה : $a_0=1$ (הסדרה הריקה עומדת בתנאים) , $a_1=5$ .

מי שלא בטוח לגבי $a_0$ יחשב : $a_2=25-6=19$ .

ב. משוואה אפיינית : $\lambda^2-3\lambda-4=0$ . פתרונותיה : $\lambda=4,-1$ .

לכן פתרון יחס הנסיגה הוא מהצורה $a_n=A\cdot 4^n+B\cdot(-1)^n$ . נציב תנאי התחלה וכו'...

ג. מחשבים בעזרת יחס הנסיגה הנתון ופעם נוספת על ידי הצבת $n=4$ בנוסחה שמצאנו בסעיף ב'

**שאלה 5**

א. נמיין את הצמתים לפי גודל : קבוצה ריקה, 4 קבוצות בגודל 1, 6 קבוצות בגודל 2, 4 קבוצות בגודל 3 , והקבוצה $A$.

בהתאם, $\deg(\varnothing)=\deg(A)=4+6=10$ , $\deg(\{1\})=\deg(\{1,2,3\})=1+6=7$ , $\deg(\{1,2\})=3+3=6$ .

ב. $(2\cdot 10+2\cdot 4\cdot 7+6\cdot 6)/2=50$

ג. הצמתים $\{1,2\}$ , $\{1\}$ , $\varnothing$ מהווים משולש בגרף , לכן הוא לא יכול להיות דו-צדדי

ד. מסקנה 5.4 בפרק "תורת הגרפים" אומרת שבגרף מישורי פשוט על $n$ צמתים יש לכל היותר $3n-6$ קשתות.
זה לא מתקיים כאן.