

נ

א

*iv קומברנטוררקה*

האוניברסיטה

**תנאי שימוש בקובץ הדיגיטלי:**

1. הקובץ הוא לשימושך **האישי** בלבד. פרטים מזהים שלך מוטבעים בקובץ בצורה גלויה ובצורה סמויה.
2. השימוש בקובץ הוא אך ורק למטרות לימוד, עיון ומחקר אישי.
3. העתקה או שימוש בתכנים נבחרים מותרת בהיקף העומד בכללי  
   השימוש ההוגן, המפורטים בסעיף 19 לחוק זכות יוצרים 2007.  
   במקרה של שימוש כאמור חלה חובה לציין את מקור הפרסום.
4. הנך רשאי/ת להדפיס דפים מחומר הלימוד לצורכי לימוד, מחקר ועיון אישיים. אין להפיץ או למכור תדפיסים כלשהם מתוך חומר הלימוד.

האוניברסיטה ר. **9** ת **1** ח ר.

מתמטיקה  
דיסקרטית

iv. קומבינטוריקה

אברהם גימבורג

פרוסי אברהם גינזבורג - ראש הצוות

צוות הפיתוח:

אורה מאור

יוסי קאופמן

יועצים: פרופ' מרצל הרצו ג - אוניברסיטת תל-אביב

פרוסי עמירם יהוז־אי - אוניברסיטת תל-אביב

ד"ר ורדה ליברמן - האוניברסיטה הפתוחה

רחל אהרון־שריקי

איורים:

גרפיקה:

עיצוב עטיפה:

אבי חתם

גילה ברון

מהדורה מתוקנת, +\*199

**20276**

isbn **965-302-535-x** מסת״ב

© תשמ •־ט— **1989.** כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

בית ההחנאה לאור של האוניבוסיטה הפתוחה. רח־ קלאוזנר **16.** רמת־אביב. ת״ד **39528.** תל־אביב **61592.**

**The Open University of Israel. 16 Klausncr St.. Ramat-Aviv. P.O.Box 3932K, Tel-Aviv. 61392.**

**Printed in Israel.**

תוכן

מבוא פרק 1 עקרון החיבור ועקרון הכפל

* 1. [כמה בעיות ספירה פשוטות 4](#bookmark6)
  2. עקרון החיבור 7
  3. עקרון הכפל 11

פרק 2 חליפות, תמורות וצירופים

* 1. [חליפות ותמורות 18](#bookmark10)

2.1.1 תמורות 23

* 1. צירופים 27
  2. [חליפות ותמורות עם חזרות 39](#bookmark12)
  3. [צירופים עם חזרות 47](#bookmark14)

[2.5 מבחר בעיות 55](#bookmark16)

פרק 3 הבינום של ניוטון; המקדמים הבינומ״ם

[3-1 נוסחת הבינום; משולש פסקל 66](#bookmark21)

[3-2 תכונות של המקדמים הבי נומי ים 70](#bookmark23)

[3-2.1 פיתוח מולטי נומי 79](#bookmark25)

פרק 4 עקרון ההכלה וההפרדה

* 1. [הגדרות ודוגמאות 80](#bookmark29)
  2. [המקרה הכללי 86](#bookmark31)

[4.2.1 אי-סדר מלא 90](#bookmark33)

[4.2.2 הפונקציה של אוילר 92](#bookmark35)

[4.2.3 משוואות לינאריות עם פתרונות במספרים שלמים 94](#bookmark37)

* 1. [המקרה הכללי - המשך 97](#bookmark39)

פרק 5 עקרון שובך היונים - הגדרה ושימושים

פרק 6 רקורסיה

6.1 הגדרה ודוגמאות

6.2 פתרון בעיות קומבינטוריות באמצעות ו־קורסיה

6.3 פתרון של יחסי רקורסיה לינאריים

פרק 7 פונקציות יוצרות

7-1 הגדרה של פונקציה יוצרת

*2.ך* שימושים של פונקציות יוצרות למציאת מספר הפתרונות של משוואות לינאריות

3\*7 שימוש בפונקציות יוצרות לחישובים במקדמי□ בי נומי ים

4.*ך* פונקציות <וצרות מעריכיות

7-5 שימוש בפונקציות יוצרות לפתרון יחסי רקורסיה

104

107

112

117

121

123

134

138

142

146

תשובות לשאלות

מבוא

הקומבינטוריקה עוסקת בבחינת סידורים שונים של עצמים (או איברים), שמספרם סופי בדרך כלל, בתוך קבוצות; על סידור כזה לקיים תכונות מסוימות, המוגדרות בתנאי הבעיה הנידונה.

בקשר לסידורים שכאלה, מתעוררות בדרך כלל שתי שאלות:

1. האם הסידור המבוקש אפשרי, כלומר האם ניתן לבנות סידור אשר יקיים את התנאים המגבילים הנתונים?

2. מהו מספר הסידורים השוגים (אם הם אפשריים כמובן), המקיימים את אותם התנאים?

להלן דוגמה לשאלה הראשונה:

נתונים ריבוע של 3x3 משבצות ותשעת המספרים 9,...,1. יש לסדר את המספרים הללו בתוך משבצות הריבוע, כך שלשלושת המספרים שבכל שורה, עמודה, ואלכסון יהיה אותו הסכום. האם סידור כזה אפשרי?

הפתרון הבא היה ידוע כבר לפני אלפי שנים:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

בעיה קלאסית נוספת מאותו סוג היא: האם אפשר לכסות לוח שחמט שהוצאו ממנו שתי המשבצות שבקצות אחד האלכסונים, באמצעות אבני דומינו, שכל אחת מהן מכסה בדיוק שתי משבצות של הלוח?

נסה לענות על שאלה זו. אם תתקשה, תוכל לפנות לתשובה שבסוף היחידה (עמוד 146).

ודוגמה לשאלה השניה:

בכיתה 10 בנים ו-8 בנות. יש לבחור משלחת של הכיתה, שתכלול שני בנים ובת אחת. מהו מספר המשלחות השונות האפשריות? (כאן ברור שה"סידור" אפשרי.)

תחילה נמצא כמה זוגות בנים ניתן לבחור. את הבן הראשון אפשר לבחור ב-10 אופנים. לאחר שהוא נקבע, בוחרים את הבן השני - זאת אפשר לעשות ב־9 אופנים (כי נשארו 9 בנים). לכאורה, יש 90=9’10 אפשרויות לבחור שני בנים למשלחת. אבל, בדרך הנ״ל כל זוג בני □ מופיע פעמיים: אם בוחרים תחילה את *a* ואחר כך את *b,* מקבלים אותו זוג שמתקבל, כאשר בוחרים תחילה את *b* ואחר כך את a. לכן, יש רק 90

זוגות שונים של בנים. לכל זוג כזה של בנים אפשר לצרף אחת מ-8 הבנות, ולכן מספר המשלחות השונות הוא 360=8־45 .

יכולנו לפתור את הבעיה על-ידי רשימת כל המשלחות האפשריות. אם בכתה היו 4 בנים *a,b,c,d* ו-2 בנות ?/,a היינו רושמים:

זוגות הבנים האפשריים: *ab,ac,ad,bc,bd,cd*

המשלחות האפשריות:

*aba., ab/i, aca, acfr, ado., ad/3,bca, bc/3, bda., bdfi, cda., cdfi*

ובסך הכל 12 משלחות. מספר זה מתקבל גם כאשר מחשבים את מספר המשלחות לפי המתכונת הקודמת: 12=2•^^ .

גם במקרה של הכיתה שבה 10 בנים ו-8 בנות ניתן לערוך רשימה מסוג זה, אם כי הדבר עלול להיות די מייגע. אבל, אם בבית הספר יש 400 בנים ו-500 בנות, ויש לבחור מתוכם 2 בנים ובת אחת - מספר האפשרויות הוא 39.900,000 (בדוק!). לרשום את המשלחות האפשריות ולספור אותן - זו משימה בלתי אפשרית למעשה. הקומבינטוריקה, כפי שהדגמנו, מציידת אותנו בכלים המאפשרים למצוא את מספר המשלחות, בלי לרשום אותן במפורט ולספרן אחת אחת.

פרקי הקומבינטוריקה, אות□ נלמד בקורס זה, יעסקו בעיקר בבעיות מהסוג השני, כלומר בבעיות ספירה. אנו ניגע אמנם רק בחלק מן התחום, אבל ג□ הוא יהווה ללא ספק אתגר רציני ומעניו ללומד, ויעזור לו בהמשך לימודיו במדעי המחשב, בסטטיסטיקה ובענפי מתמטיקה אחרים.

נמליץ מאד לסטודנט לעיין ביחידה "קומבינטוריקה" בקורס מתמטיקה תיכונית - השלמות, 62205. זו יכולה לשמש מבוא מצוין לחלק זה של הקורס הנוכחי. במקרים מסוימים תהיה אף חפיפה של ממש, כאשר אנו משתמשים כאן בחומר מיחידה זו.

ועוד הערה אחרונה בדברי מבוא אלה: על פי רוב קל ופשוט להציג בעיות קומבינטוריות, אבל לעתים קשה מאד לפתרן. לטיפול בבעיות אלה כמעט שאין צורך בידע מוקדם - חשבון ומעט אלגברה מבית הספר מספיקים בדרך כלל. אבל אל יטעו אותך עובדה זו ופשטות הצגת הבעיה - פתרונה עלול לדרוש תחכום מתמטי רב. הדרך הבדוקה להשתלט על הנושא, וכנראה היחידה, היא על-ידי פתרון בעיות רבות ככל האפשר - או בקיצור, על-ידי שימוש בנייר ובעפרון (ליתר דיוק, בהרבה נייר ובהרבה עפרונות). זו הדרך בלימוד מתמטיקה בכלל, ובקומבינטוריקה בפרט.

עקרון החיבור ועקרון הכפל

1.1 כמה בעיות ספירה פשוטות

בסעיף זה נציג דוגמאות לבעיות ספירה פשוטות. אם כי הדברים נראים אולי מידיים, טוב יעשה הלומד אם יפתור את כולן - והכוונה לפתרון מלא, כלומר עד לקבלת תשובה מספרית - גם במקרים בהם הדרך לפתרון נראית ידועה וברורה.

שאלה 1.1

1. כמה מספרים שלמים יש בין 32 ל־87 -
2. לא-כולל שני המספרים ה נ"ל?
3. כולל שני המספרים הנ״ל?
4. כמה מספרים שלמים יש בין המספרים השלמים !מ ו-2א (72?>!!?), כולל שני מספרים אלה?
5. מהו מספר האיברים בסדרה m,m+l*,m+2,...,m+k ?*

התשובה בעמוד 146

שאלה 1.2

1. המספר הגדול ביותר בין 312 מספרים שלמים עוקבים הוא 747. מהו המספר הקטן ביותר ביניהם?
2. מהו המספר ה־47 בסדרה •••.75.76,77 ?

התשובה בעמוד 146

שאלה 1.3

1. כמה מספרים שלמים, שמתחלקי ם ב־13, יש ביו 7 ל-3000 ?
2. כמה מבין המספרים האלה אינם מתחלקים ב־5 ?

התשובה בעמוד 146

שאלה 1.4

בליגה מסוימת של כדורגל יש 12 קבוצות. מהו מספר המשחקים בכל מחזור? מהו מספר המשחקים שכל קבוצה תשחק בעונה, א□ היא משחקת פעמיים עם כל קבוצה אחרת? מהו המספר הכולל של משחקים שיתקיימו בעונה?

התשובה בעמוד 147

שאלה 1.5

לאיש אחד *ך* זוגות גרביים שחורות ו־9 זוגות גרביים חומות. הוא מוציא גרב אחר גרב מהמגרה באופן אקראי. מהו מספר הגרביים המינימלי שעליו להוציא מהמגרה כדי להיות בטוח שיהיו ביניהן א. שתי גרביים שחורות? ב. שתי גרביים חומות? ג. שתי גרבי ים מאותו צבע?

התשובה בעמוד 147

שאלה 1.6

בחדר 4 דלתות. מה מספר האפשרויות השונות להיכנס לחדר בדלת אחת ולצאת בדלת אחרת?

התשובה בעמוד 147

שאלה 1.7

חנות מוכרת חולצות של שלושה יצרנים, ב־7 מידות וב-6 צבעים (המידות והצבעים זהים עבור כל היצרנים). כמה סוגים שונים של חולצות ניתן לקנות בחנות זו? כמה זוגות שונים של חולצות מסוגים שונים אפשר לקנות בחנות זו?

התשובה בעמוד 147

שאלה 1.8

בכיתה מסוימת 20 תלמידים לומדים פיסיקה, ו־14 תלמידים לומדים כימיה. 5 תלמידים אינם לומדים אף אחד משני המקצועות. קבע את מספר התלמידים בכיתה בכל אחד מהמקרים הבאים:

1. אין תלמידים הלומדים פיסיקה וכימיה גם יחד.
2. 6 תלמידים לומדים את שני המקצועות.
3. כל תלמיד הלומד כימיה, לומד גם פיסיקה.

התשובה בעמוד 147

שאלה 1.9

כמה מספרים שונים זה מזה אפשר לרשום בעזרת הספרות 3,2,1, כאשר במספר אין 2 ספרות שוות. (הצעה: רשום את כל המספרים האלה, וספור).

התשובה בעמוד 147

שאלה 1.10

1. נתונות שתי קבוצות: {1,2,3,4,5,6,7,8,9*} = A*

{2,4,6,8,10,12,14,16,18} = *B* מהו מספר האיברים בכל אחת מהקבוצות *B-A ,A-B ,Ar\B ,AuB ?*

1. רשום את כל התת-קבוצות, בנות 5 איברים, של הקבוצה

{1,2,3.4,5,6}=C•

1. רשום את כל התת-קבוצות בנות 2 איברים, של הקבוצה C לעיל.

התשובה בעמוד 148

שאלה 1.11

בכיתה 18 בנים ו-16 בנות. מהו מספר המשלחות השונות בנות 2 תלמידים שאפשר לבחור בכיתה זו:

1. אם בוחרים רק בנים.
2. אם בוחרים רק בנות.
3. אם בוחרים בן אחד ובת אחת.
4. אם בוחרים 2 תלמידים בלי להתייחס למינם.

התשובה בעמוד 148

שאלה 1.12

1. רשום את כל האפשרויות להושיב ארבעה אנשים *a,b,c,d* על ספה. מה מספרן?
2. רשום את כל האפשרויות להושיב את ארבעת האנשים הללו סביב שולחן עגול. מהו מספר האפשרויות?
3. מהו מספר האפשרויות לחלק את ארבעת האנשים לשתי קבוצות, באחת איש אחד ובאחרת שלושה אנשים?
4. מהו מספר האפשרויות לחלק את ארבעת האנשים לשתי קבוצות בנות 2 אנשים כל אחת?
5. מהו מספר האפשרויות לשלוח 2 אנשים מהקבוצה הזו לביצוע משימה מסוימת, ואת השניים האחרים לביצוע משימה אחרת, שונה מקודמתה?

התשובה בעמוד 148

השאלות שבסעיף הקוד□ שימשו "תרגילי חימום". לפתרון חלק מהן

השתמשת בודאי בעקרון החיבור: עקרון החיבור

אם בקבוצה !I/ יש *nx* איברים ובקבוצה 12/ יש *n2* איברים, והקבוצות

*<-A2* זרות זו לזו, אזי בקבוצה tjU/l2/ יש n!+n2 איברים.

ניסוח אחר של עיקרון פשוט זה הוא:

אם אפשר לבחור "משהו" אחד שנסמנו *!a* ב-ןת אופנים, ו"משהו" אחר שנסמנו *a2* ב-2מ אופנים, הרי לבחירת אחד מן השניים (או או a2) יש n!+n2 אופנים.

העיקרון הזה, הנראה מובן מאליו, הוא כלי חשוב לפתרון בעיות

ספירה רבות.

שאלה 1.13 (פתורה) ■ ־־ -

1. בכיתה אחת 30 תלמידים, ובאחרת 28. מהו מספר התלמידים בשתי הכיתות?
2. מהו מספר האפשרויות לבחור תלמיד אחד מבין תלמידי שתי הכיתות האלה, לביצוע תפקיד מסוים?

פתרו ן

1. כיוון שמניחים כי אין תלמידים השייכים לשתי הכיתות בעת ובעונה אחת, מקבלים (על-ידי שימוש בעקרון החיבור, נוסח ראשון) כי בשתי הכיתות 58=30+28 תלמידים.
2. מספר האפשרויות לבחור תלמיד אחד מן הכיתה הראשונה הוא 30, ומספר האפשרויות לבחור תלמיד אחד מן הכיתה השניה הוא 28. כיוון שבוחרים תלמיד אחד בלבד (או מהכיתה הראשונה או מהכיתה השניה, אבל לא משתיהן יחד), הרי מספר האפשרויות הוא (לפי עקרון החיבור, נוסח שני): 58=30+28 .

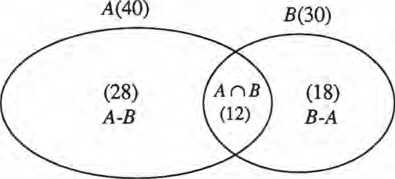
שאלה 1.14 (פתורה) • ■ - - ■

ממשאל שנערך באספה מסוימת של דוברי אנגלית ודוברי צרפתית עלה, כי 40 אנשים מדברים אנגלית ו־30 אנשים מדברים צרפתית. כמה אנשים נוכחו באספה?

פתרו ן

האם היו שם 70=40+30 אנשים? לא ברור. ייתכן מאד שהיו שם אנשים דוברי שתי השפות, והללו נספרו פעמיים. הקבוצות *A* של דוברי אנגלית ו-8 של דוברי צרפתית אינן בהכרח זרות זו לזו. לכן אין אפשרות להפעיל את עקרון החיבור (שהרי דרשנו שהקבוצות יהיו זרות זו לזו).

בבדיקה נוספת התברר, כי נוכחו באספה 12 אנשים דוברי שתי השפות. מהו מספר האנשים באספה? ניעזר בדיאגרמת ו ן (ראה חלק I של הקורס):



הקבוצה *ArB* (דוברי אנגלית וצרפתית גם יחד) היא בעלת 12 איברים. נוכל לחלק את כל הנוכחים באספה לשלוש קבוצות זרות זו לזו:

1. דוברי אנגלית, שאינם דוברי צרפתית (8ח1/)-4, כלומר 4-8,

שמניינם 28=40-12 איש.

1. דוברי צרפתית, שאינם דוברי אנגלית (8ח4)-8, כלומר *B-A,*

שמניינם 18=30-12 איש.

1. דוברי שתי השפות גם יחד. כאמור, זו הקבוצה *ArB* המונה 12 אנשים.

לפי עקרון החיבור (הקבוצות הן זרות) מספר האנשים באספה היה -

58 = 12 + 18 + 28

לתוצאה זו אפשר היה להגיע גם אחרת: אם נחבר את מספר דוברי האנגלית (שביניהם יש גם כמה דוברי צרפתית) למספר דוברי הצרפתית (שביניהם גם כמה דוברי אנגלית), נקבל 70=40+30 . אבל, ספרנו פעמיים את דוברי שתי השפות. לכן יש להחסיר את מספרם (12) פעם אחת, ומקבלים כמו קודם 58=12־70 .

בפתרון האחרון השתמשנו בנוסחה:

**|8**ח**24|-|8| + |24| = |4uB|**

אותה היכרנו בחלק **I** של הקורס (להזכירך, **|j|** הוא מספר איברי הקבוצה הסופית **4).** לנוסחה זו ולהכללות שלה נחזור בהמשך.

אפשר להכליל את עקרון החיבור למספר כלשהו של קבוצות זרות זו לזו:

אם בקבוצה **!I/** יש *nY* איבהעם, בקבוצה *A2* יש *n2* איברים, וכך הלאה עד הקבוצה **24k** שבה יש *nk* איברים, וכל הקבוצות האלה זרות זו לזו, אזי המספר הכולל של איברי כל הקבוצות הללו הוא **2+...+nk**מ+ .

את עקרון החיבור נקבל כהכללה של ניסיון, שאינה דורשת הוכחה.

את הנוסחה עבור **|4uB| ,** כאשר הקבוצות *A* ו-**8** אינן זרות זו לזו, אפשר להוכיח בעזרת עקרון החיבור, אם מחלקים את *AuB* לשלוש קבוצות זרות זו לזו:

A-B **, 524־ , /InB**

אז העיקרון תופש, ואנו יכולים לרשום:

**|AuB| = |24-B| + |B-4| + |24nB|**

(f)

נשתמש שנית בעקרון החיבור, ונרשום:

**|24-B| + |24nB| , |B| =** |b-24 **| + |24nB| ־ |24| (if)**

מ-^) ו-(££) נובע:

**|8**ח**24|- |8| + 241| = |24uB| = |24|-|24nB| + |B|-|24nB| + |24nB|**

בהמשך לא ניתן תמיד הוכחה מלאה של טענה מהסוג לעיל. אולם, נזהיר את הלומד: לעתים קורה, שפתרונות "מובנים מאליהם" של בעיות קומבינטור\*ות הם פתרונות מוטעים. ביצוע הוכחה מדויקת הוא, תמיד, הכלי הטוב ביותר לגילוי טעות שכזו.

שאלה 1.15

1. כמה מספרים בני 2 ספרות שונות, המתחילים ב־5 או ב־7, אפשר ליצור מהספרות 1,2,4,5,7,8,9 ?
2. כמה מספרים בני 2 ספרות שונות, הקטנים מ־50, אפשר ליצור מהספרות הנ״ל?

התשובה בעמוד 148

שאלה 1.16

מתוך 250 תלמידים, 220 משתתפים בשיעורי התעמלות ו-90 משתתפים בשיעורי מוסיקה. כמה תלמידים משתתפים גם בשיעורי התעמלות וגם בשיעורי מוסיקה, אם ידוע כי כל תלמיד חייב ללמוד לפחות אחד משני מקצועות אלה?

התשובה בעמוד 149

שאלה 1.17

כמה מספרים שלמים, שאינם מתחלקים לא ב־5 ולא ב־7, יש בין 1 ל-100 (כולל 100)?

התשובה בעמוד 149

שאלה 1.18

בקופסה יש 70 כדורים: 20 לבנים, 20 כחולים, 20 אדומים, 8 ירוקים ו-2 צהובים. מוציאים באקראי כדורים מן הקופסה, בלי להחזירם. מהו המספר הקטן ביותר של כדורים שיש להוציא, כדי להיות בטוחים שיהיו ביניהם לפחות 10 כדורים מאותו הצבע?

התשובה בעמוד 149

שאלה 1.19

C-1 *B ,A* הן קבוצות. נתון:

, 40 = |70 , |C ־ |3| , 50 = |A|

8 ־ |0ח3ח4| , 22 = |0ח8| , 20 ־ |3| = 25 , |4nCח4|

מצא את |4uBuC|.

התשובה בעמוד 149

פתחנו את הסעיף הקודם בבחירת איבר אחד מתוך 2 קבוצות זרות זו לזו. את הסעיף שלפנינו נפתח בבחירת 2 איברים מתוך 2 קבוצות כאלה, אחד מכל קבוצה. לעניין זה נציג את עקרון הכפל: אם אפשר לבחור את האיבר *!a* ב־^ אופנים, ולאחר כל בחירה כזו

אפשר לבחור את האיבר *a2* ב־2מ אופנים, אזי לבחירת שניהם בסדר עקרון הכפל

הנ״ל (!a ולאחריו a2) יש n!n2 אפשרויות.

שאלה 1.20 (פתורה)

מתוך 10 ספרי אלגברה ו-6 ספרי גיאומטריה יש לבחור שני ספרים, אחד מכל מקצוע. כמה זוגות שונים כאלה אפשר לבחור?

פתרון

נבחר ספר אלגברה. ניתן לעשות זאת ב־10 אופנים (כי יש בסך הכל 10 ספרים כאלה). לאחר מכן נבחר ספר גיאומטריה. זאת ניתן לעשות ב-6 אופנים, ללא כל תלות בספר האלגברה שבחרנו. לכן, מספר הבחירות האפשריות של ספר אלגברה וספר גיאומטריה, כלומר מספר הזוגות השונים האפשריים הוא, לפי עקרון הכפל:

60 = 10-6

גם לו היינו בוחרים את הספרים בסדר הפוך, היינו מגיעים לאותו מספר של זוגות ספרים, כי גם בחירת ספר אלגברה איננה תלויה בבחירה קודמת של ספר גיאומטריה.

שאלה 1.21 (פתורה) בכיתה של 30 תלמידים בוחרים ועד, המורכב משני תלמידים. מהו מספר הועדים האפשרי?

פתרון

נבצע את בחירת הועד בצורה הבאה: תחילה נבחר חבר אחד לועד ־ זאת ניתן לעשות ב-30 אופנים. לאחר מכן נבחר את החבר השני, מתוך 29 התלמידים שנשארו ־ זאת ניתן לעשות ב־29 אופנים. לפי עקרון הכפל, מספר האפשרויות לבחור שני תלמידים לועד הוא לכאורה 29\*30. אולם, בדרך זו, כל זוג של תלמידים מתקבל פעמיים כועד 29• סך

אפשרי. לכן מספר הועדים השונים היא 435 = <- .

אם השאלה היתה כמה ועדים, המורכבים מיושב ראש וממזכיר, אפשר לבחור בכיתה הנ״ל, התשובה היתה 870=29־30 , כי במקרה כזה הזוגות (a,b) ו- *(b,a)* מתארים שני ועדים שונים.

בפתרון שאלה 1.21 הראינו שיש צורך להיזהר בהפעלת העיקרון, גם בעצם הפעלתו וגם בבדיקת התוצאה. גם הדוגמה הבאה תראה שבבעיות קומבינטוריות אין לטפל בצורה אוטומטית. חייבים לחזור ולבדוק את הפתרון ואת הפעלת העקרונות שבהם משתמשים.

שאלה 1.22 (פתורה) ■■ ■ ■

כמה מלים בנות שתי אותיות, שלפחות אחת מהן היא א', אפשר ליצור מהאותיות א',ב',ג י ו-ד'?

הערה: מלה היא סדרה סופית של אותיות (לאו דוקא שונות) מתוך האלפבית הנתון.

פתרו ן

בבעיה זו אנו מתעניינים במלים המכילות לפחות א' אחת. נמקם תחילה את ה-א' במלה. יש לכך שתי אפשרויות - א' כאות הראשונה, ו-א י כאות השניה. לאחר מכן נמלא את המקום האחר. שם אין לנו כבר הגבלה. כלומר, כל אחת מ-4 האותיות יכולה לתפוס מקום זה. אם נפעיל את עקרון הכפל ללא בדיקה, נאמר שיש 8=4־2 אפשרויות. מספר האותיות קטן וגם אורך המלה אינו גדול, ואנו יכולים לבדוק מיד את התוצאה. נרשום את כל המלים המתאימות לתנאי השאלה: אא, אב, אג, אד, בא, גא, דא. קיבלנו רק 7 מלים. התוצאה 8 שגויה, והשגיאה נובעת מכך שהמלה אא נספרה קודם פעמיים: פעם כאשר קבענו את אי במקום הראשון ופעם כאשר קבענו את א' במקום השני.

ומה עם עקרון הכפל עצמו? האם הוא הכזיב? העיקרון לא הכזיב - אין הוא מתאים למקרה זה. העיקרון אומר, שאם אפשר לבחור את !a ב־!מ אופנים ואת a2 ב-2מ אופנים, ניתן לבחור את !a ו-2מ ב-2מ1מ אופנים. דבר זה נכון גם כאן: את המקום עבור א' אפשר לבחור ב-2 אופנים, ואת האות השניה אפשר לבחור כל פעם ב-4 אופנים. לכן, את 2 הבחירות אפשר באמת לבצע ב- 8=4־2 אופנים. אבל השאלה לא היתה בכמה אופנים אפשר לבצע את שתי הבחירות. השאלה היתה כמה מלים בנות 2 אותיות, המכילות את א' לפחות פעם אחת, אפשר ליצור. בין

כל הבחירות האפשריות היו 2 שהניבו אותה מלה אא. לכן, לאחר שהשתמשנו בעקרון הכפל למציאת מספר הבחירות האפשריות של האותיות (וזאת חישבנו נכון בעזרתו), היה עלינו לבדוק את התוצאה מבחינת התאמתה לשאלה.

למעשה, היינו זקוקים במקרה זה לשני העקרונות. עקרון הכפל נותן לנו 4=4־1 מלים, כאשר האות א' היא במקום הראשון, ו- 4=1־4 מלים, כאשר האות א' היא במקום השני. כעת, לפי עקרון החיבור, עלינו לחבר את מספרי המלים בשתי הקבוצות, אם הן זרות זו לזו. כיוון שהן אינן זרות זו לזו (המלה אא היא משותפת), יש להחסיר את מספר המלים שבחיתוך של שתי הקבוצות. אנו מקבלים 7=1־4+4, וזוהי התוצאה הנכונה.

קיימת עוד דרך לפתרון השאלה, שבה שני העקרונות ממלאים את תפקידיהם בהצלחת. רעיון הפתרון מבוסס על כך, שכדי למצוא את מספר המלים המכילות אות א' אחת לפחות, אפשר להחסיר מהמספר הכולל של מלים בנות שתי אותיות את מספר המלים שאין בהן אף אות א' אחת.

את מספר המלים בנות 2 אותיות נמצא לפי עקרון הכפל: את האות הראשונה במלה אפשר לבחור ב-4 אופנים; את האות השניה אפשר גם כן לבחור ב־4 אופנים. לכן, מספר המלים בנות 2 אותיות, אותן אפשר ליצור מהאותיות א',ב',גי,ד', הוא 16=4-4 .

כמה מהן אינן מכילות את האות אי? נפעיל שנית את עקרון הכפל. את האות הראשונה במלה כזו אפשר לבחור ב־3 אופנים (מתוך האותיות ב',גי,די) והוא הדין באות השניה. מספר המלים בנות 2 אותיות, שאינן מכילות את האות א', הוא אפוא 9=3\*3 •

עתה נפעיל את עקרון החיבור: נסמן ב־4 את קבוצת המלים בנות 2 אותיות המכילות אות א' אחת לפחות, וב-5 את קבוצת המלים שאינן מכילות את האות אי. מתקיים בבירור *<AnB=<t,* ומצאנו 16=|8ט4| ו־ 9=|5|. לכן (לפי עקרון החיבור):

Ml = |4uB|-|b| = 16-9 = 7

לאור הדיון בשאלה 22 1 ננסח את עקרון הכפל פעם נוספת, ואף

נרחיבו ליותר משתי ב,,־רות.

עקרון הכפל (נוסח שני):

אם ניתן לבצע תהליך מסוים *ב->1* שלבים עוקבים, כך שיש !n תוצאות בשלב הראשון, *n2* תוצאות בשלב השני, ... ו->1ח תוצאות בשלב ה-#, ואם כל הצירופים האפשריים של תוצאות *k* השלבים, לתוצאה של התהליך כולו, שונים זה מזה, אזי לתהליך יש n1n2...nk תוצאות שונות.

בפתרון שאלה 1.22 פירקנו את התהליך לשני שלבים. בשלב הראשון היו 2 תוצאות, ובשלב השני 4 תוצאות. אבל, לא כל הצירופים של תוצאות שני השלבים היו שונים. לכן, הפעלה "מכנית" של עקרון הכפל הביאה לתוצאה שגויה.

הערה: גם את עקרון הכפל נקבל כתוצאה ניסיונית.

להלן עוד דוגמאות לשימוש בעקרונות הכפל והחיבור.

שאלה 1.23 (פתורה) =

על מדף מונחים 10 ספרים שונים באנגלית, 8 ספרים שונים בצרפתית ו-12 ספרים שונים בעברית. יש לבחור מתוכם 2 ספרים, כך שיהיו בשפות שונות. בכמה אופנים ניתן לבצע זאת?

פתרו ן

אם זוג הספרים יכלול ספר באנגלית וספר בצרפתית, הרי מספר האפשרויות לבחור אותו, כלומר מספר הזוגות השונים של ספרים כאלה הוא, לפי עקרון הכפל, 80=10-8 . באופן דומה יש 120=12-10 זוגות שונים של ספרים שאחד מהם בעברית והשני באנגלית, ו- 96=12-8 זוגות שונים של ספרים שאחד מהם בעברית והשני בצרפתית. כל 3 הקבוצות של זוגות הספרים זרות זו לזו. לכן, לפי עקרון החיבור, יש לנו בסך הכל -

296 = 96 + 120 + 80

זוגות אפשריים של ספרים.

שאלה 1.24 (פתורה) =

בכמה אופנים אפשר להעמיד שני צריחים מאותו צבע על לוח שחמט, כך שהאחד לא יוכל להכות את האחר?

פתרו ו

תחילה נעמיד צריח אחד על הלוח - ניתן להציבו על כל אחת מ־64 המשבצות. צריח, העומד על משבצת מסוימת, שולט על השורה ועל העמודה שנחתכות במשבצת הזו, כלומר על 15 משבצות (כולל זו שעליה הוא עומד). לכן נוכל להעמיד את הצריח השני על כל אחת מ־ 49=64-15 המשבצות הנותרות, בלי שיוכלו להכות זה את זה. לפי עקרון הכפל, יש לגו 64-49 אפשרויות להצבת שני הצריחים. אולם, כיוון שלצריחים אותו הצבע, כל אפשרות נמנית פעמיים. לכן, מספר האופנים השונ ים הוא 1568=64-49-| .

שאלה 1.25

בבית מסוים 7 כניסות. בכמה אופנים שונים אפשר להיכנס ולצאת מהבית, בלי לעבור פעמיים באותה כניסה? מהו מספר האופנים להיכנס ולצאת, אם מסירים הגבלה זו?

התשובה בעמוד 149

שאלה 1.26

1. כמה מלים שונות באורך 4 אפשר להרכיב מ-4 אותיות *a,b,c,d,* כאשר כל אות יכולה להופיע יותר מפעם אחת במלה?
2. כמה מלים (שונות) מתחילות ב-ב> או ב-6?
3. כמה מלים (שונות) אפשר ליצור, אם כל אות יכולה להופיע רק פעם אחת במלה?
4. כמה מלים (שונות) מתחילות *ב-ס* או ב־?2, עם ההגבלה ב־ג)?

התשובה בעמוד 150

שאלה 1.27

בחנות נעליים יש 21 סוגי נעלי נשים, כל אחד ב-8 מידות וב־6 צבעים, י־7 סוגים של נעלי גברים, כל אחד ב־9 מידות וב־3 צבעים. כמה סוגי נעליים שונים בחנות הנ״ל?

התשובה בעמוד 150

שאלה 1.28

1. בכמה מספרים בין 1,000 ל-10,000 מופיעות הספרות 3,5.7.8 בלבד?
2. בכמה מספרים בתחום הזה מופיעות הספרות 0,3.5.7.8 בלבד?

התשובה בעמוד 150

שאלה 1.29

1. כמה מספרים, בני 4 ספרות לכל היותר, אפשר ליצור מהספרות 1,2,3.4,5 ?
2. כמה ממספרים אלו הם אי-זוגיים?

התשובה בעמוד 150

שאלה 1.30

את עקרון החיבור אפשר לנסח כך:

עבור קבוצות סופיות זרות זו לזו *A* ו-8 מתקיים |auB|=|4|+|b|.

את עקרון הכפל אפשר לנסח כך:

עבור קבוצות סופיות *A* ו-3 מתקיים |XxB| = |/11 • |b| .

הסבר מדוע ניסוחים אלה מבטאים את העקרונות הנ״ל, כפי שנוסחו

קודם.

התשובה בעמוד 151

שאלה 1.31

כמה מלים בנות 4 אותיות אפשר ליצור מהאותיות a,b,c,d,e,f,g,h,

כאשר:

1. כל אות יכולה להופיע יותר מפעם אחת במלה (בחירת האותיות עם

החז רה) .

1. כל אות יכולה להופיע לכל היותר פעם אחת במלה (בחירת

האותיות בלי החזרה).

הערה: את בנית המלים ב-א) אפשר לתאר כך: בוחרים אות, מתוך 8 בחירה עם החזרה האותיות הנתונות, ורושמים אותה בתחילת המלה (במקום הראשון).

מחזירים את האות לקבוצת האותיות, ובוחרים שוב אות (אפשר כמובן

גם לבחור את האות שהוחזרה). זו תהיה האות השניה במלה. וכך הלאה. בניה כזו של מלים מכונה בשם בחירת (של האותיות) עם החזרת.

את בנית המלים ב-ב) אפשר לתאר באופן הבא:

בוחרים אות עבור

בחירה בלי החזרה

המקום הראשון במלה, ואיו מחזירים אותה לקבוצת האותיות. מתוך האותיות שנותרו בוחרים אות עבור המקום השני, וכך הלאה. בחירה כזו של אותיות נקראת בחירה בלי החזרה.

בהמשך עוד תהיה לנו הזדמנות לחזור למושגים אלה של בחירה עם החזרה ובחירה בלי החזרה.

התשובה בעמוד 151

שאלה 1.32

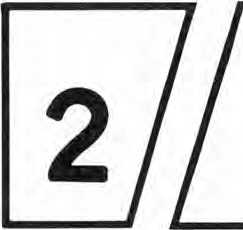
1. יהיו *{B* ■ {1,2,3} . *A - {a,b,c,d,e.*

כמה פונקציות *שונות f:A-B* (/ היא פונקציה של *A* לתוך B) יש?

1. הכלל את הבעיה למקרה H|=n ו- s|=k|.

התשובה בעמוד 151

עקרונות החיבור והכפל ישרתו אותנו בפתרון בעיות רבות, אם כי לא תמיד יבוטא הדבר בצורה מפורשת.



חליפות, תמורות וצירופים

2.1 חליפות ותמורות

תהי נתונה קבוצה של *n* איברים. את האיברים האלה אנו מייצגים, בדרך כלל, באמצעות המספרים מ-1 עד *n.* במלים אחרות, אנו מסתכלים

בקבוצה (ח 1,2,3} . n»-k סדורה מתוך *n* האיברים הנ״ל, שבה חליפה

כל האיברים שונים זה מזח, נקראת חליפה של *k* איברים מתוך מ.

לפיכך, חליפות של 3 איברים מתוך *n* איברי הקבוצה הן למשל (מ,2,1), (3.1,5), או (2־מ,1־ח,מ), אבל לא (2,1,2) אי (5,5.5) (בדוגמאות אלה מניחים 5<מ).

שתי &-יות (ar *,a2.....*ak) ו- (*b! ,b2 ,...* ,bk) שוות זו לזו, אם ורק אם *al-bl* לכל *l<t<k.* לכן, שתי חליפות של *k* איברים מתוך *n* שונות זו מזו כאשר הן נבדלות בהרכבן או - אם הרכבן שווה - בסדר האיברים שלהן.

בהמשך נרשום את החליפות ללא הסוגריים (למשל: 3,1,5 אי 2-n,n-l,n), עם פסיקים בין האיברים או בלעדיהם.

את מספר החליפות של *k* איברים מתוך *n* נסמן *1-(P(n,k.*

P(n,l) = *n* (מדוע?)

כדי לבנות חליפה של 2 איברים מתוך ת, נבחר תחילה את האיבר הראשון בחליפה זו. זאת אפשר לעשות ב־מ אופנים. כיוון שהאיברים בחליפה חייבים להיות שונים, לא נחזיר את האיבר שבחרנו לקבוצה, ונבחר את האיבר השני של החליפה מתוך 1-מ האיברים שנשארו - זאת אפשר לעשות ב-1-מ אופנים. לפי עקרון הכפל, מספר החליפות השונות שניתן ליצור בדרך זו הוא (n(n-l. ומכאן -

(P(n,2) = n(n-l

שים לב, שבנית החליפות שביצענו היא מקרה טיפוסי של תהליך מפורק לשלבים, ושכל הצירופים האפשריים של תוצאות 2 השלבים נותנים חליפות שונות. לכן מוצדק כאן השימוש בעקרון הכפל.

באופו דומה נקבל: (2-P(n,3) ■ n(n-l)(n

כי את האיבר השלישי בחליפה בוחרים מתוך 2-ח האיברים שנותרו לאחר בחירת שני האיברים הראשונים.

ובאופן כללי, אחרי שנבחר את 1-k האיברים הראשונים של חליפה בת *k* איברים, נוכל לבחור את האיבר k-n-« מתוך n-(k-l)=n-k+l האיברים הנותרים. אפשר לעשות זאת ב-1+&-מ אופנים. הנוסחה עבור *P(n,k)* תהיה אפוא:

(1+n(n-l)... (n-k *־־ {P(n,k*

*P(n,k)* הוא מכפלה של *k* גורמים, שהאחרון בהם (הימני ביותר) הוא k+l־*P(n,k) .* n-(k-l)= n מוגדר, כמובן, עבור *. l<k<n*

להלן בעיה טיפוסית של חישוב מספר חליפות:

שאלה 2.1 (פתורה) —

בכיתה 30 תלמידים. יש לבחור ועד המורכב מ־3 תלמידים, אחד הוא יו״ר, שני גזבר ושלישי מזכיר. כמה ועדים כאלה ניתן לבחור?

פתרו ן

כל ועד הוא חליפה של 3 מתוך 30. זהות התלמידים והסדר של השלושה קובעים את הועד (כי הרי אלה שני ועדים שונים - א' הוא יוייר, ב' גזבר ו-ג' מזכיר, או אי הוא גזבר, ב’ מזכיר ו־ג' יו״ר). לכן, מספר הוועדים השונים הוא כמספר החליפות השונות של 3 איברים מתוך 30, כלומר:

P(3O,3) • 30-29-28 = 24,360

שאלה 2.2 (פתורה)

לפי תור שנקבע בהגרלה, 5 כלות בוחרות חתנים מתוך 8 גברים. כמה זוגות שונים יכולים להיווצר כתוצאה מבחירה זו?

פתרו ן

כל בחירה כמתואר היא חליפה של 5 מתוך 8: שתי בחירות יהיו שונות, אם 5 החתנים שנבחרו אינם זהים או, אם הם זהים, אם ה□ נבחרו בסדר שונה. לכן, מספר הזוגות האפשריים הוא:

6720 ״ 5-4־6־8-7 - (8,5)P

שאלה 2.3 (פתורה) ■

רשום את כל החליפות בנות 3 איברים, מתוך הקבוצה בה 5 איברים {1,2,3,4,5}.

פתרו ן

מספר החליפות הוא 60=3\*4־5=(5,3)P . להלן רשימתן:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1** | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 |  | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | **1** | 3 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 4 | 2 | 1 | 4 | 1 | 4 | 2 |  | 4 | 1 | 2 | 2 | 4 | 1 | 4 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 5 | 2 | 1 | 5 | 1 | 5 | 2 |  | 5 | 1 | 2 | 2 | 5 | 1 | 5 | 2 | 1 |
| 1 | 3 | 4 | 3 | 1 | 4 | 1 | 4 | 3 |  | 4 | 1 | 3 | 3 | 4 | 1 | 4 | 3 | 1 |
| 1 | 3 | 5 | 3 | 1 | 5 | 1 | 5 | 3 |  | 5 | 1 | 3 | 3 | 5 | **1** | 5 | 3 | 1 |
| 1 | 4 | 5 | 4 | 1 | 5 | 1 | 5 | 4 |  | 5 | 1 | 4 | 4 | 5 | 1 | 5 | 4 | 1 |
| 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 | 3 |  | 4 | 2 | 3 | 3 | 4 | 2 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | 3 | 5 | 3 | 2 | 5 | 2 | 5 | 3 |  | 5 | 2 | 3 | 3 | 5 | 2 | 5 | 3 | 2 |
| 2 | 4 | 5 | 4 | 2 | 5 | 2 | 5 | 4 |  | 5 | 2 | 4 | 4 | 5 | 2 | 5 | 4 | 2 |
| 3 | 4 | 5 | 4 | 3 | 5 | 3 | 5 | 4 |  | 5 | 3 | 4 | 4 | 5 | 3 | 5 | 4 | 3 |
| ברשימה | | מופיעות, | | | אב ו, | 60 | חל י | | פות | . הרשימה נבנתה | | | | | כד. | שבכל | | שורה |
| רשומות  מבחי נת | | החלי  הסדר | פות השוות מבחי נח  שלהם. לדוגמא זו | | | | | | נ הרכב האיברים, עוד נחזור בהמשך. | | | | | אך | שונות | | זו | מז ו |

שאלה 2.4

חשב:

1. (7.3)P ב) (10,4)P ג) (4,P(n ד) (P(5,l

ה) (5,5)P.

התשובה בעמוד 151

הוכח באמצעות הנוסחה (הוכחה אלגברית) ובאמצעות נימוק המבוסס על פירוש הנוסחאות (הוכחה קומבינטורית):

א) (P(n,l) + P(m,l) « P(n+m,l

ב) (1-P(n,n) = P(n,n

התשובה בעמוד 151

שאלה 2.6

א) כמה מספרים בין 1,000 ל-10,000 חם בעלי ספרות אי-זוגיות בלבד, שכולן שונות זו מזו (כלומר, מורכבים מספרות שונות מתוך הספרות 1,3.5.7.9 )?

1. כמה מספרים בתחום הזה בעלי ספרות זוגיות שונות? (גם 0 היא ספרה זוגית).

התשובה בעמוד 152

שאלה 2.7

כמה מספרים שלמים ח, שכל ספרותיהם שונות זו מזו, מקיימים את אי-השוויון 65,000<ת ?

התשובה בעמוד 152

שאלה 2.8

1. מהו מספר החליפות של 4 איברים מתוך 6 האותיות

*? a,b,c,d,e,f*

1. כמה מתוך החליפות הנ״ל מתחילות *ב-ס7*
2. כמה מתוך החליפות הנ״ל מכילות את a?

התשובה בעמוד 153

שאלה 2.9

חשב:

א) (ןק>ח)

ב)

P(m+n,m-n+2)+P(m+n,m-n+l) P(m+n,m-n)

P(n-l,k-l)*•P(n-k,n-k)*

P(n-l,n-l)

התשובה בעמוד 153

שאלה 2.10 (פתורה) ■■—״

הוכח את הנוסחה

*P(n,k)* - P(n-l,k) + kP(n-l.k-l)

1. על-ידי שימוש באלגברה.
2. על-ידי שיקולים קומבינטורי ים.

פתרו ן

1. = (P(n-l,k)+kP(n-l,k-l
2. ...(n-l-k+l)+k(n-l)(n-2)...(n-l-k+l+l) =־n-l)(n) =

• (k+l־= (n-1)(n-2)...(n-k)+k(n-l)(n-2)...(n

= (n-1)*(n-2)..*.(n-k+1)*(n-k+k) ־*

*(P(n,k* ־ (n(n-l)...(n-k+l ־

1. את החליפות של *k* איברים מתוך *n* אפשר למיין לשני סוגים: חליפות שאין בהן איבר מסוים *a,* וחליפות שיש בהן a. מספר החליפות מהסוג הראשון הוא (P(n-l,k.

את החליפות מהסוג השני נבנה כך. תחילה נמצא את כל החליפות *של 1-k* איברים (ללא a) מתוך 1-n. מספרן (P(n-l,k-l. מכל חליפה כזו אפשר לבנות חליפה אחת של k *איברים, המכילה את a,* אם שמים בה את *a* במקום הראשון; חליפה נוספת של *k* איברים תתקבל, כאשר נשים את *a* במקום השני; וכך הלאה עד המקום *k-rt.* לפיכך, כל חליפה כזו של *1-k* איברים מתוך 1-n היא "מקור" ל-& חליפות *של k* איברים מתוך מ, המכילות את האיבר *a.* המספר הכולל של חליפות, המתקבלות בדרך זו, הוא (1-kP(n-1,k. אלה הן כל החליפות של *k* איברים מתוך n, המכילות את a. (הוכח שאין כאן שתי חליפות שוות, והוכח גם שכל החליפות עם *a* מתקבלות).

הנוסחה המבוקשת מתקבלת על-ידי סיכום מספר החליפות משני הסוגים (שימוש בעקרון החיבור).

חליפה של n איברי□ מתוך n (כלומר חליפה המכילה את כל האיברים תמורה

של הקבוצה) נקראת תמורה של n איברים. תמורה של n איברים היא אפוא סידור של n איברים בשורה. שתי תמורות שכאלה שונות זו מזו רק בסדר האיברים שלהן ולא בזהותם.

בכל שורה של החליפות, שבשאלה 2.3, רשמנו למעשה את כל התמורות

של 3 האיברים שבאותה השורה. למשל, עבור 123 כל התמורות הן:

321 ,312 ,231 ,213 ,132 ,123

הנה תמורות אחדות של 5 איברים: 32415 ,53421 ,14352 .5^123

את מספר התמורות של *n* איברים אפשר למצוא בעזרת הנוסחה עבור מספר החליפות:

־ ((n-2))(n-(n-l)־P(n,n) = n(n-l)(n-2)...(n

1־2...(2-n(n-l)(n =

נחזור וננמק נוסחה זו באופן קומבינטורי;

את האיבר הראשון של התמורה אפשר לקבוע ב-מ אופנים, את האיבר השני ב-1-מ אופנים, את השלישי ב-2-מ אופני□ וכך הלאה. למקום שלפני האחרון נשארות רק 2 אפשרויות, ולמקום האחרון נשאר איבר אחד. לפנינו בניה רב שלבית *(n* שלבים), והיא מתאימה לעקרון הכפל. מספר האפשרויות, כלומר מספר התמורות, הוא מכפלת כל המספרים מ-1 עד מ.

את (P(n,n מסמנים ב-(מ)ק.

את המכפלה 1־2...(1-ח)מ מסמנים ב-!מ (במלים: *n* עצרת).

כך, למשל, 6־2-1־3=ז3 , 720=1׳2־3־4'5־6=!6 , 1=11 .

מסיבות שונות נוח להגדיר 1=!0 .

שאלה 2.11 (פתורה) =

בכמה אופני□ אפשר להושיב 6 אורחי□ על ספה?

פתרו ן

כל "הושבה" כזו היא תמורה של 6 איברים, ומספר התמורות האלה הוא 720 ־ !6 = (6)P.

®אלה 2.12 (פתורה) ===^=^==^^=^=^==

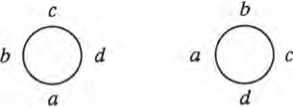
בכמה אופנים אפשר להושיב 6 אורחים סביב שולחן עגול, כאשר אין הבדל בין המקומות סביב השולחן מנקודת ראותם של האורחים?

פתרון

יהי *a* אחד האורחים. נושיב אותו במקום כלשהו ליד השולחן. כיוון שהשולחן עגול ואין, כאמור, הבדל בין המקומות סביבו, הרי אין חשיבות באיזה מקום a יושב. שאר 5 האורחים מתיישבים אז למעשה על ספסל (אמנם מעוגל), המורכב משאר 5 הכסאות. מספר האפשרויות השונות לעשות זאת הוא P(5)=5!=12O •

הערה:

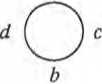
להבהרת הפתרון חשוב, למשל, על שולחן עגול וסביבו 4 כסאות, בהם נושיב 4 אורחים 4 . *a,b,c,d* אפשרויות הישיבה המתוארות באיור הבא, הן אכן זהות מנקודת הראות של האורחים:



*a* תמיד רואה משמאלו את *b,* ומימינו את *d* וכך הלאה. לעומת

זאת הסידור הבא, למשל, שונה מהקודמים:

a



ב. באופן כללי, מספר האפשרויות להושיב *n* אורחים סביב שולחן

עגול הוא !(1-מ).

שאלה 2.13

רשום את כל התמורות של האיברים *a,b,c,d, e* המתחילות ב-2>. הבדל מהן את התמורות המתחילות *3-dc.*

התשובה בעמוד 153

כאשר בתמורה של *n* מספרי□ *n* 1,2 לא נשמר סדר עולה (משמאל

לימין), מדברי□ על הפרות סדר בתמורה. כל הופעה של מספר לפני מספר קטן ממנו נקראת חפרת סדר. לדוגמה: בתמורה 31528764 יש הפרת סדר

הפרות סדר כדלקמן: 3 לפני 1. 3 לפני 2; 5 לפני 2. 5 לפני 4; 8 לפני 7, 8 לפני 6. 8 לפני 4; *ך* לפני 6, *ך* לפני 4; 6 לפני 4.

בסך הכל 10 הפרות סדר.

1. מהו מספר הפרות הסדר בתמורות הבאות:

51286743 , 17425683

1. רשו□ את כל התמורות של 1,2,3,4 , ומצא בכל אחת מהן את מספר הפרות הסדר. בכמה מהן יש מספר וו גי של הפרות סדר?
2. בצע בכל אחת מהתמורות שב-א) טרנספוזיציה, דהיינו החלפה הדדית בין מקומותיהם של שני איברים, והיווכח שזוגיות מספר הפרות הסדר השתנתה בכל מקרה עם ביצוע הטרנספוזיציה.
3. נסה להוכיח ש-ג) נכון באופן כללי, כלומר, שהזוגיות של מספר הפרות הסדר, בתמורה מסוימת, שונה מן הזוגיות של מספר הפרות הסדר, בתמורה המתקבלת ממנה על-ידי טרנספוזיציה.
4. הראה שא□ נבצע בשתי תמורות שונות של מ איברי□ את אותה הטרנספוזיציה, נקבל שוב 2 תמורות שונות.
5. הוכח כי מספר התמורות הזוגיות (כלומר, התמורות שבהן יש מספר זוגי של הפרות סדר) של *n* איברי□ שווה למספר התמורות האי-זוגיות של אותם האיברים, וכי כל אחד ממספרים אלו הוא '״!•

התשובה בעמוד 154

שאלה 2.15

מהו מספר התמורות *של n* מספרים *n* 1,2 שבהן המספרים 1

ו ־2:

1. נמצאים זה ליד זה.
2. אינם נמצאים זה ליד זה.
3. מהו מספר התמורות *של n* המספרים הללו, שבהן המספרים 1,2,3 נמצאים כולם בסמיכות?

התשובה בעמוד 155

שאלה 2.16

1. מושיבים *ך* זוגות סביב שולחן עגול. מהו מספר האפשרויות להושיבם, כך שבין כל שתי נשים ישב גבר?
2. חזור על השאלה, כאשר מושיבים את כולם על ספסל בן 14

מקומות.

התשובה בעמוד 155

שאלה 2.17

הוכח:

1. באופן אלגברי.
2. על-ידי נימוק קומבינטורי (יהיה לך יותר נוח לענות על השאלה, אם תרשום את הנוסחה בצורה (P(n)=P(n,k)P(n-k ).

התשובה בעמוד 155

שאלה 2.18

בכמה מספרים בין 1000 ל־9999 כל הספרות שונות זו מזו?

התשובה בעמוד 156

שאלה 2.19

1. בכמה אופנים אפשר להושיב 10 אנשים על ספסל, אם 1 a־b יושבים תמיד זה ליד זה ו-<£ ו-3> אינם מסכימים לשבת זה ליד זה?
2. בכמה אופנים אפשר להושיב 10 אנשים על ספסל, אם 4 מהם יושבים כקבוצה (כלומר, אף אחד מהאנשים האחרים אינו מפריד בין אף שניים מהארבעה)?

התשובה בעמוד 156

נתונה קבוצה של *n* איברים. תת-קבוצה בעלת *k* איברים של קבוצה זו

נקראת צירוף של *k* איברים מתוך *n.* צירוף

שני צירופים של *k* איברים מתוך מ שונים זה מזה, אם הם תת־קבוצות שונות, כלומר, לפחות איבר אחד מופיע באחד מהם ואינו מופיע באחר.

לדוגמה, אם 4=ח (הקבוצה היסודית היא {^.1.2,3}):

הצירופים של איבר אחד מתוך 4 הם: {4} ,{3} ,{2} ,{1}

הצירופים של 2 איברים מתוך 4 הם: {1.4} .{1.3} ,{1,2}

{3,4} ,{2,4} ,{2.3}

הצירופים של שלושה איברים מתוך 4! הם: {1,2,4} .{1,2,3}

{2.3.4} ,{1,3.4}

יש רק צירוף אחד של ארבעה איברים מתוך 4: {2,3.4,!}

שים לב: לשם קיצור נשמיט את הסוגריים ואת הפסיקים המפרידים בין איברי הקבוצות, ונרשום את איברי הקבוצות בלבד. למשל, במקום הצירוף {1,2,4} נרשום 124, ונזכור שכאשר סדרה זו מסמנת צירוף, איו משמעות לסדר האיברים.

באופן כללי: עבור כל מ, יש רק צירוף אחד של *n* איברים מתוך מ, ו-ת צירופים של איבר אחד מתוך *n.*

מספר הצירופים *של k* איברים מתוך *n* מסומן ב-(^,מ)ם או ב-|£ (קרא: *n סלל k* או *k* מתוך מ). בסימון זה, אם כן:

1 = (C(n,l) = n . C(n,n

מכל צירוף של k איברים מתוך ת, אפשר לבנות !k חליפות של *k* איברים מתוך מ: אלה הן כל התמורות של *k* האיברים שבצירוף (במקרה של חליפה, בניגוד למקרה של צירוף, יש כזכור חשיבות לסדר האיברים).

ראה למשל, את רשימת כל החליפות של 3 איברים מתוך 5, המופיעה בפתרון שאלה 2.3. העמודה הראשונה של הרשימה מורכבת מכל הצירופים של 3 איברים מתוך 5, וכל שורה מורכבת מכל 6=!3 התמורות של 3 איברי הצירוף. הלוח כולו מכיל, כאמור, את כל החליפות של 3 איברים מתוך 5.

מספר האיברים בלוח שווה למכפלת מספר השורות (5,3)C במספר העמודות (3)P- לפיכך:

(5.3)C(5.3)’P(3) = P

**0** האורברסיטה נמה**9**ת **1** ח ה

Gilad Barnea

באופן כללי מקבלים באותה צורה בדיוק:

*C(n,k)‘P(k) = P(n,k)*

ומכאן ־ = (C(n.k

אן; = (c(n>k ־־

עבור 4=n מקבלים:

2־3־^ 41] • 4-3 a

!4 41

?4־4

י 3־2־1 " 2 ’ [3J־1

התוצאות זהות בהתאמה למספר הצירופים של 1, 2,

3 ו-4 איברים

מתוך 4, אותם בנינו ישירות לעיל.

דוגמאות נוספות:

495 = 9־10־11־124־3־2•!

12

4

6־7־8־9־10

5־4־3־2־1

[10'

I 5.

יש לשים לב לכך, שמספר הגורמים במונה שווה למספר הגורמים במכנה.

שאלה 2.20

הוכח שמכפלת כל *k* מספרים עוקבים מתחלקת ב־!^.

התשובה בעמוד 156

הבה נחשב:

nl n(n-l)...*(n-k\*l) k ־ k\*

n(n-l)...(n-k+1) (n-k)(n-k-1)1־2־...־  
k! ' (n-k)!

n! \_ n(n-l)... (k+l)k!

k!(n-k)I ~ k!(n-k)! =

n(n-l)... (n-(n-k)■\*•!) = *n '*

(n-k)! = [n-k

שהרי: n-(n-k)+l=k+l .

קיבלנו נוסחה חשובה מאד:

*C(n,k) = C(n,n-k) - . ׳*

*׳ ' ' ki(n-k)'.*

*או,* בכתיב אחר:

n!  
k!*(n-k)!*

כך, למשל,

!10 10-9-8-7-6-5-4-3-2-1 10-9-8 \_ 101

" !7\*!3 " 4-5-6-7־2-3־1־1-2-3 “ 1-2-3 ־ [3

י10] \_ 4‘6-5‘8-7־10-9

.7 " 6-7־1-2-34-5 ־

כאשר *k* גדול ממחצית מ, נוח להשתמש בשוויון האחרון. למשל:

12] = 12-11-10-9 \_ 12-11-10-9-8-7-6-5 \_ 121]

4] \* 1-2-3-4 8־6-7'4-5־1-2-3 [8 I

נחליף אותו מיד

15

13

ולכן, כאשר נרצה להבא לחשב את

ונבצע אז את החישוב. בדומה:

= 105

100

99.

100'

1.

= 100

את השוויון היסודי

אפשר גם להוכיח באופן קומבינטורי:

כאשר בוחרים k איברים מתוך n, נקבעים ממילא גם *n-k* האיברים שלא נבחרו. לכל תת-קבוצה של k איברים מתוך n מותאמת בדרך זו תת-קבוצה של *n-k* איברים מתוך מ, והתאמה זו היא חד-חד-ערכית. מכאן השוויון

רישום מספר זה ל־ (n-k).

*n  
n-k*

בצורה

n!

ץ־ץ־ב ,־ך־ן מדגיש את

k!(n-k)!

הסימטריה

הנוסחה עבור

תיתן את התוצאה המוכרת:

n!  
n!0!

ההגדרה 1=!0 משאירה את תקפות הנוסחה גם למקרה *0=k* . באופן דומה, נסכים כי

*n*

.°

ברור, שמבחינה קומבינטורית אין מובן ל­צירוף שאי ן בו איברי□.

הסכם נוסף, נוח להמשך, הוא:

*n  
n+m*

כי אין טע□ לדבר על

אפשר לראות ”צירוף” זה כתת-קבוצה הריקה של קבוצת מ האיברים, ובכך תימוכין נוספים

להסכם 1 =

כלומר, אם *n<k,* אזי

*n  
n+m*

*n*

*n-n-m*

נרשום:



גם אלה הסכמים חשבוניים, המתיישבים ע□ הנוסחאות שפותחו עד כה. אין כמובן משמעות קומבינטורית לצירוף של מספר שלילי של איברים, או לצירוף של 10 איברים מתוך 6.

נעבור לשאלות בהן יודגמו המושגים שנדו נו לעיל.

שאלה 2.21 (פתורה) - ■—

בכיתה 30 תלמידים. יש לבחור 2 תלמידי□ למשלחת מסוימת. כמה משלחות שונות אפשר לבחור?

פתרו ן

מספר המשלחות האפשריות הוא כמספר הצירופים של 2 מתוך 30 (מספר התת-קבוצות של 2 איברים מתוך 30). כאן רק חשוב מי נכנס למשלחת; לסדר הבחירה אין חשיבות. לכן התשובה היא:

435 = 9^0! ־

1-2

ס3

2

על מדף מונחים 10 ספרים שונים בעברית, ו-8 ספרים שונים באנגלית. בכמה אופנים אפשר לבחור מתוך ספרים אלה חבילה המכילה

3 ספרים בעברית ו־3 ספרים באנגלית?

פתרון

האפשרויות לעשות זאת הוא

10 (מספר התת-קבוצות של 3

תחילה נבחר 3 ספרים בעברית. מספר כמספר הצירופים של 3 איברים מתוך איברים מתוך ה-10):

10

3

= 10-9-8 ,  
1-2-3

את הספרים באנגלית אפשר לבחור ב-

81

3J

אופנים. כל שלישיה של ספרים בעברית וכל שלישיה של ספרים באנגלית מהוות יחד חבילה אחת, וכל החבילות הנבנות בדרך זו שונות זו מזו. לכו, המספר הכולל של חבילות שונות ניתן לחישוב בעזרת עקרון הכפל: 6720=120-56 .

שאלה 2.23

בחינה מורכבת משני חלקים: בראשון 4 שאלות ובשני 6 שאלות. על הסטודנט לענות על 2 שאלות מכל חלק. בכמה אופנים שונים יוכל הסטודנט לבחור את השאלות עליהן יענה?

התשובה בעמוד 157

שיקול קומבינטור\* יוביל אותנו לנוסחה חשובה נוספת. נניח

למצוא את מספר הצירופים של 5 איברים מתוך 12 איברים 12]

שברצוננו נתונים, מתוך 12

\_ . יהא *a* אחד מ-12 האיברים. את כל הצירופים של 5

אפשר לחלק לשתי קבוצות: צירופים שאינם מכילים את a

וצירופים המכילים את *a.*

שאינם מכילים את a הוא כמספר הצירופים של 5

מספר הצירופים,

מתוך 11,

11

5

לכן, מספר

כיוון שכל

המכיל את a, מכיל עוד 4 מתוך 11 האיברים הנותרים. 11 4 \*

הצירופים האלה הוא

צירוף של 5 מתוך 12

חייב להיות או בין אלה שמכילים

את a, או בין אלה שאינם מכילים

איברים מתוך 12 הוא הסכום

11

4

את a, הרי סך כל הצירופים של 5 111

\*51

. כלומר:

נבדוק שוויון

קומבינטורי ים, באופן

H-10-9-8 \_  
1-2-3 •4 330

ואכן

אפשר

שאלה

11־

4

זה.

חשבוני

792

להכליל את הדיון הזה,

n-1 k-1

2.24

11

5

שאותו

12

5

כרגע

משיקולים

= 792

12-11-10-9-8  
1-2-3-4-5

= 462

11-1O-9-8-7

1-2-3-4-5

־ 330 + 462

ולקבל את הנוסחה החשובה

n-1  
k

12

5

11

5

הבאה:

הוכח

דומה

לזה שבו השתמשנו לעיל.

התשובה בעמוד 157

נוכיח את הנוסחה באמצעים אלגבריים:

(n-1)(n-2)...(n-k) (n-1)(n-2)...(n-k+1) \_

k! (k-1)!

• [(n-k+k)] =

(n-l)(n-2).. .(n-k+1) " k!

*k\*

לנוסחה זו נחזור בפרק הדן במקדמים בי נומי ים.

n-1 *k-1*

n-1  
*k*

את הנוסחה הזו בעזרת שיקולים קומבינטורי ים, כלומר, בנימוק

שאלה 2.25 (פתורה) כמה מלי□ שונות, בנות 9 אותיות, אפשר ליצור מ־7 a-,□ ו-2 א־ים?

פתרון

אם נקבע במלה את המקומות, בהם מופיעים שני ה-&-ים, מקומות ה-ס-ים יקבעו ממילא. לכן, מספר המלים השונות הוא:

36 • ־

5°־ 2\*1 2

שאלה 2.26 (פתורה)

3 נשים י־5 גברים מתחלקים לשתי קבוצות, בנות 4 אנשים כל אחת, כך שבכל קבוצה יש לפחות אישה אחת. מהו מספר האפשרויות העומדות לרשותם?

פתרון

לאחר שנבחרת קבוצה אחת, נקבעת ממילא השניה (כל ה-4 שנשארו). כיוון שבכל קבוצה חייבת להיות לפחות אישה אחת, הרי שבכל חלוקה הקבוצה האחת תכיל אישה אחת והקבוצה האחרת תכיל 2 נשים. לכן, מספר הקבוצות השונות, שבהן אישה אחת, הוא מספר החלוקות האפשריות.

כל אחת משלוש הנשים יכולה להיכנס לקבוצה הראשונה. את הקבוצה

הזו יש להשלים ב־3 גברים הצירופים של 3 מתיר 5 הוא

, אותם אפשר

=10

2] 1-2

השונות, שיש בהן אישה אחת, הוא 30=10־3

לבחור מתוך 5. מספר . לכן, מספר הקבוצות . כאמור, זה גם מספר

החלוקות האפשריות, לפי דרישות השאלה.

שאלה 2.27 (פתורה) — ■ יש לחלק 4 נשים ו-10 גברים לשתי קבוצות בנות *ך* אנשים, כך שבכל קבוצה תהיה לפחות אישה אחת. מהו מספר האפשרויות לעשות זאת?

פתרו ן

מספר הקבוצות שבהן אישה אחת הוא, בדומה לשאלה הקודמת:

840 . 7־8־9־10.; = 101] n. [101 x

4־3־2•! 4 [4 ] 4 [6 ]

בקבוצה המשלימה קבוצה כזו יש 3 נשים ו-4 גברים. כל זוג קבוצות כזה יוצר, כאמור, חלוקה אחת.

מספר הקבוצות שבהן יש 2 נשים הוא:

101 \_ 4-3 1O-9-8-7-6

5] “ 1-2 ’ 1-2-3-4-5

האפשרויות לבחור 2 נשים מתוך ה-4, ו- \_ כ , לבחור את 5 הגברים המשלימים את 2 הנשים לקבוצה.

כאשר 2 הוא מספר

הוא מספר

האפשר ו י ו ת

תהא *(axa2bYb2b-ibttbC* קבוצה כזו. הקבוצה המשלימה היא *0 a-^a^b^byb^b^by* (הנשים מסומנות ב־ס, הגברים ב-&). זו אחתהחלוקות. ביו 1512 הקבוצות שבהן שתי נשים, נמצאת גם הקבוצה a3a4b6b7b8b9b10 שאותה משלימה הקבוצה a1a2b1b2b3b4b5 . שתיהקבוצות האלה יוצרות אותה חלוקה כמו קודם. לכן, אם כי מספר הקבוצות השונות שיש בהן 2 נשים הוא כפי שמצאנו 1512, מספר החלוקות השונות של 14 אנשים ל־2 קבוצות, שכל אחת מהן מכילה 2 נשים י־5 גברים, הוא 1512-756־1 .

מספר החלוקות הכולל האפשרי בתנאי השאלה הוא אפוא 1596 - 840+756 .

אם השיקול בפתרון שאלה 2.27 אינו ברור לך, עיין בדוגמאות הבאות העוסקות בחלוקות מהסוג הנ״ל.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| אנו מחלקים את *a,b,c,d* ל-2 | קבוצ | ות | , אחת בת איבר אחד ואחת בת 3 |
| איברים. מספר האפשרויות הוזי | =4 | 4  1 | , ואלה הן: |
| קבוצה בת איבר אחד |  | הקבוצה המשלימה, בת 3 איברים | |
| a |  |  | bed |
| b |  |  | acd |
| c |  |  | abd |
| d |  |  | abc |

וכעת, נחלק את אותה הקבוצה ל-2 קבוצות בנות 2 איברים כל אחת.

4-3

2־1

המספר של קבוצות כאלה הוא

|  |  |
| --- | --- |
| קבוצה בת 2 איברים | הקבוצה המשלימה, בת 2 איברים |
| ab | cd |
| ac | bd |
| ad | be |
| be | ad |
| bd | ac |
| cd | ab |

החלוקות השונות הן *ab,cd; ac,bd; ad,be,* כלומר 3=6־| . הסבר!

הדבר יובלט עוד יותר בדוגמה הבאה. נחלק את הקבוצה *a,b,c,d,e,f* ל־3 קבוצות - באחת איבר אחד, בשניה 2 איברים, ובשלישית 3 איברים.

6 1

אופנים

את הקבוצה הראשונה אפשר לבחור ב- 6=

5

2

לאחר שנבחרה הראשונה, ב- 10=

אופנים. את

השלישית כבר

אוטומטית. כל החלוקות האלה שונות. לכן, המספר הכולל של

השניה, נקבעת

חלוקות

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| בחירת הקבוצה הראשונה | בחירת הקבוצה השניה | הקבוצה השלישית המשל י מה |
| a | be bd be bf cd ce cf de df ef | def cef cdf cde bef bdf bde bef bee bed |

וכך הלאה.

מהסוג הזה הוא 60=10־6 .

כעת נמצא את מספר החלוקות האפשריות של הקבוצה שלנו ל־3 קבוצות,

כל אחת בת שני איברים.

נבחר קודם קבוצה אחת בת שני איברים. זאת אפשר

אופנים. את הקבוצה השניה צריך לבחור לאחר מכן

הנותרים.

זאת אפשר לעשות

ב- 6=

אופנים.

לעשות ב־ 15= 2 מתוך 4 האיברים

הקבוצה השלישית

נקבעת באופן אוטומטי (2 האיברים הנותרים). לכאורה יש לנו כאן 90=15-6 חלוקות שונות. נרשום אותן:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| הקבוצה השלישית | הקבוצה השניה | הקבוצה הראשונה |
| ef | cd |  |
| df | ce |  |
| de | cf | ab |
| cf | de |  |
| ce | df |  |
| cd | ef |  |
| ef | bd |  |
| df | be |  |
| de | bf |  |
| bf | de | ac |
| be | df |  |
| bd | ef |  |
|  |  |  |

כאן מופיעים עוד 11 בלוקים כאלה, שבהם הקבוצה הראשונה היא אחד מן הזוגות הבאים:

*ad, ac, af, be, bd, be, bf, cd, ce, cf, de*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| ce | ab |  |
| be | ac |  |
| be | ae |  |
| ae | be | df |
| ac | be |  |
| ab | ce |  |
| cd | ab |  |
| bd | ac |  |
| be | ad | ef |
| ad | be |  |
| ac | bd |  |
| ab | cd |  |

בבלוק הראשון מופיעה החלוקה *ab,cd,ef* פעמיים. היא מופיעה גם בבלוק האחרון פעמיים, והיא מופיעה גם פעמיים בבלוק המתחיל *1-cd.* חלוקה זו מופיעה 6 פעמים ברשימה שלנו. מספר זה הוא כמספר התמורות של שלוש הקבוצות 3!=6 : *ab,cd,ef .*

הוא הדין בכל חלוקה אחרת. לכן, מספר החלוקות השונות הוא 31-90-15 .

מן הראוי לשים לב, שכאן דובר על החלוקות השונות של הקבוצה *a,b,c,d,e,f* ל־3 קבוצות בנות 2 איברים כל אחת, כאשר לא נאמר דבר על "תפקידי" הקבוצות. לו היו אלה 6 עצמים, שיש לחלקם ל־3 תאים שונים, שניים לכל תא (ואז סדר הבחירה של הקבוצות חשוב - בגלל השוני שבין התאים), החלוקות *db,cd,ef* ו- *cd,ab,ef ,* למשל, היו שונות. לכן, מספר החלוקות השונות לתאים שונים הוא 90.

שאלה 2.28

הראה, כי מספר האפשרויות לחלק קבוצה בת 60 איברים שונים ל־3 קבוצות בנות 8 איברים כל אחת, 4 קבוצות בנות 5 איברים כל אחת, שתי קבוצות בנות 6 איברים כל אחת, קבוצה אחת בת 3 איברים וקבוצה אחת בת איבר אחד הוא;

1] 41] ןס.נ 6113111

16] ן21] ן26]ן31 6

ל ל

!2•!4־!3

52

8

60

8

!60 =

!1-!3-!2־2(!6)-!4-4(!5)-!3-3(!8)

התשובה בעמוד 157

שאלה 2.29

הוכח כי ניתן לחלק מ2 איברים ל־מ זוגות ב- ! אופנים.

2n •n!

התשובה בעמוד 158

שאלה 2.30

1. בכמה אופנים אפשר לבחור ועד של שלושה תלמידים בכיתה בת 32 תלמידים?
2. כמה ועדים שונים כאלה ניתן לבחור, אם מחלקים בין שלושת הנבחרים תפקידים: יו״ר, מזכיר, גזבר?
3. כמה ועדים כאלה ניתן לבחור, כאשר תלמיד *x* אינו מוכן להיבחר אם תלמיד y נבחר?

התשובה בעמוד 158

שאלה 2.31

בכמה אופנים אפשר לארוז 10 ספרים שונים בשתי קופסאות, אם בכל אחת יש מקום ל-6 ספרים? בדוק שני מקרים:

1. אין מבחינים בין הקופסאות.
2. מבחינים בין הקופסאות.

התשובה בעמוד 158

שאלה 2.32

1. במישור סומנו 18 נקודות, כך שאין שלוש מהן הנמצאות על ישר אחד. כמה ישרים נקבעים על-ידי נקודות אלה (כידוע, שתי נקודות שונות קובעות ישר)?
2. מתוך 18 נקודות במישור, 7 נמצאות על ישר אחד, ומן הנותרות איו שלוש הנמצאות על ישר אחד. מהו מספר הישרים הנקבעים על-ידי נקודות אלה?

התשובה בעמוד 158

שאלה 2.33

1. כמה "ידיים״ שונות של ברידג' יכול שחקו לקבל? (בחפיסה 52 קלפים, מהם מקבל כל שחקו ברידגי 13 קלפים - אלה מהווים את "יד הברידג שלו.)
2. בכמה אופנים שונים יכולים הקלפים להתחלק בין 4 שחקני ברי דג י, כאשר אין מבחינים בין השחקנים?

התשובה בעמוד 159

שאלה *!2.31*

כמה שלשות של מספרים שונים ניתן להרכיב מן המספרים 20,...,1,2, אם אין אף שלשה שמכילה שני מספרים עוקבים?

התשובה בעמוד 159

שאלה 2.35

1. בכמה אופנים אפשר לשים 6 עצמים שונים ב-10 תאים שונים, כך שבאף תא לא יהיה יותר מעצם אחד?
2. חזור על השאלה עבור *k* עצמים ו-מ תאים, כאשר *k<n .*

התשובה בעמוד 159

2.3 חליפות ותמורות עם חזרות

בסעיף זה נדון בחליפות ובתמורות, שבהן איבר יכול להופיע יותר מפעם אחת.

יהיו נתונים *n* איברים. יוצרים חליפה בת *k* איברים, שבה כל איבר

יכול להופיע מספר רצוני של פעמים (אך לא יותר *k-n* פעמים, כמובן). חליפה כזו נקראת חליפה עם חזרות של *k* איברים מתוך מ. חליפה עם חזרות

דוגמה: החליפות עם חזרות, של 2 איברים מתוך חמישה איברים

1,2,3,4,5 , הן:

,33 ,32 ,31 ,25 ,24 ,23 ,22 ,21 ,15 ,14 ,13 ,12 ,11

55 ,54 ,53 ,52 ,51 ,45 ,44 ,43 ,42 ,41 ,35 ,34

סך הכל 25 חליפות.

שתי חליפות כאלה נבדלות, כמו קודם, או בהרכב האיברים שלהן או

בסדרם. כדי למצוא מהו מספר החליפות עם חזרות של *k* איברים מתוך

מ, נעמיד את האיברים לפי סדר:

במקום הראשון בחליפה יכול לעמוד כל אחד מ-ת האיברים, כן במקום

השני, כן במקום השלישי וכך הלאה, עד למקום ה-^-י, שגם בו יכול

לעמוד כל אחד מ־מ האיברים. כל האפשרויות האלה שונות זו מזו.

לכן, לפי עקרון הכפל, המספר הכולל של חליפות כאלה, כלומר, מספר

החליפות עם חזרות של *k* איברי□ מתוך *n* הוא:

n\*n•...•n =

nk

*k* פעם•□

שים לב: כאשר דובר על חליפות של *k* איברי□ מתוך n, בלי חזרות, דרשנו *k<n* . לעומת זאת, במקרה של חליפות עם חזרות, ייתכן גם *k>n* , כפי שנדגים בשאלות להלן.

שאלה 2.36 (פתורה) \_ .. ■ -

כמה סימני□ שוני□ אפשר להצפין באמצעות סידורים שונים של 7 אפסים ואחדים, בשורה בת 7 מקומות? רשום את הסידורים השוני□ של 0 ו-1 בשורה בת 4 מקומות.

פתרו ן

דוגמה לסידור של 0 ו-1 בשבעה מקומות היא 0100101, או 1111111. כל סידור כזה הוא חליפה עם חזרות של 7 איברים מתוך 2, שהם 0 ו-1 (כאן 2=מ ו- *1-k* ). מספר החליפות האלה הוא 128=27 . לסידורים של 4 אפסי□ ואחדים יש 16=24 אפשרויות:

,0111 ,0110 ,0101 ,0100 ,0011 ,0010 ,0001 ,0000  
1111 ,1110 ,1101 ,1100 ,1011 ,1010 ,1001 ,1000

שאלה 2.37 (פתורה) ■

מהו מספר האפשרויות לחלק *k עצמים שונים לתוך n* תאים שונים, כאשר אין הגבלה על תכולת התאים?

פתרו ן

ניתן לשים כל עצם בכל אחד מ-ת התאים. כלומר, *n* אפשרויות לכל עצם ועצם. כיוון שאין תלות בין האפשרויות, הרי מספרן הוא nk.

אפשר להסביר זאת גם כך:

התאי□ שונים זה מזה. נמספר אותם *n* 1,2 . לכל עצם, מתוך *k*

העצמים, נתאים את מספר התא שלתוכו הוא מוכנס. לכן, כל סידור של עצמי□ בתאי□ הוא בחירה (עם חזרות) של *k* שמות מתוך *n* השמות של התאים. כלומר, הוא חליפה עם חזרות של *k* איברי□ מתוך ת. המספר של חליפות כאלה הוא nk.

דוגמה: נניח שיש לני 3 תאים 1,2,3 . ל-2 עצמי□ a ו-&, אנו יכולים להתאים את זוגות "השמות" הבאים:

33 ,32 .31 ,23 ,22 ,21 ,13 ,12 ,11

כאשר, למשל, 13 פירושו ש-1> בתא 1 ו-& בתא 3, 22 פירושו ש-□ ו-& הם בתא 2 וכך הלאה. מספר האפשרויות הוא 9=32 .

תיאור חלופי לכל הסידורים האפשריים הוא כדלקמן:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| תא 3 | תא 2 | תא 1 |  |
|  |  | ab | 11 (1 |
|  | b | a | 12 (2 |
| b |  | a | 13 (3 |
|  | a | b | 21 (4 |
|  | ab |  | 22 (5 |
| b | a |  | 23 (6 |
| a |  | b | 31 (7 |
| a | b |  | 32 (8 |
| ab |  |  | 33 (9 |

פתרון שאלה 2.37 הוא דוגמה לכך, שלעתים נוח לשנות את ניסוח הבעיה: במקום לדבר על חלוקת עצמים לתוך תאים אנו מדברים על סימון עצמים במספרי התאים.

מאלה 2.38 (פתורה) ■

מטילים שלוש קוביות שונות (שחורה, אדומה ולבנה). כמה תוצאות שונות אפשר לקבל בהטלה כזו?

פתרו ן

כל קוביה יכולה להראות שישה מספרים מ-1 עד 6. הקוביות הן שונות, כך שההטלה 1 שחור, 2 אדום ו־4 לבן, למשל, שונה מההטלה 1 אדום 2 שחור ו-4 לבן וכוי. לכן, לפי עקרון הכפל, מספר התוצאות השונות הוא 216=6־6\*6 .

התוצאה הזו מתקבלת גם כאשר מפרשים כל תוצאה של הטלת הקוביות כחליפה, עס חזרות, של 3 איברים מתוך 6. מספרן הוא 216=63 . תוצאה כזו היא חליפה, כי הקוביות שונות זו מזו - קובעים גם שלושת המספרים המתקבלים וגם סדרם.

שאלה 2.39 (פתורח)

חזור על שאלה 2.38, כאשר הקוביות זהות.

פתרו ן

במקרה זה אין חשיבות לסדר המספרים המתקבלים. כלומר, לא נבדיל בין התוצאות 123. 213 וכוי. כדי לפתור את השאלה נבדוק את כל המקרים הבאים:

1. התוצאות בכל שלוש הקוביות זהות (למשל 111, 222 וכוי). יש 6 אפשרו י ות כאלה.
2. בשתי קוביות נתקבלו מספרים שווים, ובשלישית מספר שונה (למשל: 133.113.225; אנו מבדילים, כמובן, ביו H3 ל־133). המספר של תוצאות כאלה הוא כמספר החליפות של 2 מתוך 6, כלומר 5130■6 .
3. כל שלושת המספרים שונים זה מזה. כיוון שסדר המספרים אינו חשוב (שהרי הקוביות זהות), המספר של תוצאות כאלה הוא כמספר 4־6-5 ו6 הצירופים של *3 מתוד & כלומר 2°=*~~3־2•1~~= 3 ’

סך כל האפשרויות השונות בהטלת שלוש קוביות זהות הוא אפוא 56=20\*6+30 .

לבעיה זו נחזור בהמשך.

שאלה 2.40

1. כמה מספרים בני 6 ספרות אפשר ליצור מהספרות 1,2,3,4 ?
2. כמה מספרים כאלה אפשר ליצור מכל 10 הספרות?
3. כמה מספרים בני 10 ספרות אפשר לרשום בעזרת הספרות 1,2,3, אם הספרה 3 מופיעה בכל אחד מהם פעמיים בדיוק?

התשובה בעמוד 160

הבה נחזור בצורה כללית על ההבדל בין חליפה בלי חזרות לחליפה עם חזרות:

את הבניה של חליפה בלי חזרות של *k* איברים מתוך מ, אפשר לתאר בצורה הבאה: נתונה קבוצה של n איברים (an a!,a2}, בוחרים

איבר כלשהו !a כאיבר ראשון בחליפה, לאחר מכן בוחרים מתוך 1

האיברים הנותרים את האיבר *ai* כאיבר שני בחליפה, לאחר מכן **2**

בוחרים ם- *2-n* האיברים הנותרים את כאיבר שלישי בחליפה, 3

וכך הלאה, עד לבחירתו של האיבר !a, שהוא האיבר ה-&-« (האחרון) k

בחליפה, מתוך (n-(k-l האיברים שנותרו (אחרי שבחרנו את *1-k* האיברים הראשונים של החליפה). החליפה המתקבלת היא:

<2! ... a!

12 k

.P(n,k)=n(n-1)...(n-k+1) מספר החליפות השונות מסוג זה הוא

כאשר מדובר על חליפות עם חזרות, הבחירה נעשית באופן דומה, חוץ מפרט חשוב אחד והוא, שלאחר בחירת כל איבר מתוך *n* האיברים הנתונים מחזירים אותו אליהם, והבחירה הבאה נעשית שוב מתוך כל *n* האיברים הנתונים. לכן ייתכן שהאיבר שייבחר שני ישווה לראשון, וכך הלאה. מספר הבחירות האפשריות הוא במקרה זה:

= וזי...\*n\*n

*k* כעסים

בשני המקרים מקפידים לשמור על הסדר של האיברים, על פי סדר בחירתם. שתי קבוצות שוות של איברים, שהסדר הפנימי בהן שונה (כלומר שנבחרו בסדר שונה), נותנות שתי חליפות (בלי חזרות או עם חזרות, תלוי במקרה) שונות.

שאלה 2.41 (פתורה) - ■

כמה סידורים שונים של דגלים אפשר לקבל מ-4 דגלים כחולים, 2 דגלים לבני□ י־3 דגלים אדומים, כאשר כל הדגלים מופיעים בכל סידור?

נסח את הבעיה הכללית המתאימה לזו, ופתור אותה.

פתרו ן

זו בעיה שבה אנו מבקשים ליצור תמורות מ־ 9=4+2+3 איברים, כאשר

יש ביניהם איברים זהים. באופן כללי, השאלה היא מהו מספר תמורה עם חזרות התמורות עם חזרות של k,♦k2+...+kh=n איברים שביניהם kj איברים זהים, k2 איברים (אחרים) זהים, וכך הלאה, עד לקבוצה האחרונה של kh איברים זהים. מספר זה מסומן ב- ( kh P(n;kj ,k2.

ראשית נפתור את בעית הדגלים. בעזרת פתרון זה נקבל את הפתרון לבעיה הכללית.

סידור אחד של תשעת הדגלים נבדל מסידור אחר שלהם אך ורק במקומות שבהם נמצאים דגלים מאותו צבע, כלומר במקומות שבהם נמצאים 4 הדגלים הכחולים (כ), 2 הדגלים הלבנים (ל) י ־3 הדגלים האדומים (א) (בין המקומות מ-1 עד 9).

סידור אחד אפשרי הוא: כאאלאכלככ

סידור אחר: אככלאלאככ וכך הלאה.

נקבע את המקומות של הדגלים הכחולים תחילה.

אנו יכולים לעשות של הדגלים הלבנים. עדיין, כלומר ב־5 . הדגלים האדומים

אופנים. לאחר מכן נקבע את המקומות לסדר רק באותם המקומות הפנויים

ב־ 4

אותם אפשר

5 המקומות שנשארו. מספר האפשרויות לכך הוא ׳ יתפסו את 3 המקומות הנותרים. לפי עקרון הכפל, מספר האפשרויות השונות לסידור הדגלים הוא:

[91

[51., = 9-8-75 . 6־J+

2] 1-2-3-4 12־

1^1 = , ■21 . = 1260 1•2•3 4!2!3!

אפשר להוכיח בדיוק באותו אופן את הנוסחה עבור המקרה הכללי:

!מ »

p(";k1’k2 M = kj!k2!• ...•kh!

נוכיח נוסחה זו גם בדרך אחרת. נניח שאנו מוסיפים סימן כלשהו

ל-^ן האיברים הזהים, כדי להבדיל ביניהם. אם איברים אלה הם *למשל* כולם ב>-ים, נסמנם באמצעות אינדקס:

**נ ak** *a1'a2*

כך נעשה גם *ל-2.>1* האיברים הבאים: אם אלה הם &-ים, נקבל -

*bx ,b2,...,by*

*2*

וכך הלאה. עתה *יש לנו n* איברים שונים, ומספר התמורות השונות שלהם הוא **!71.**

את כל התמורות האלה נוכל לחלק למחלקות, כך שבמחלקה אחת נמצאות כל אותן התמורות שבהן ה-ס-ים (עם האינדקסים) נמצאים ב-^ן מקומות מסוימים (למשל ב־!^ המקומות הראשונים), והסידור של כל

שאר האיברים זהה בכל התמורות של המחלקה. מספר התמורות מחלקה כזו הוא *!kx,* ומספר המחלקות השונות הוא אם נמחק כעת את האינדקסים של ה-ס-ים, כל התמורות במחלקה אחת יהיו זהות ויהפכו לסידור אחד של 71 איברים, שביניהם יש *kx*

**71!**

־ kJ

איברים שווים (וכל השאר שונים).

המספר של סידורים כאלה

הוא

כמספר המחלקות, כלומר

**71!**

־ kJ

נטפל עתה ב-א-ים באותו האופן. נסתכל במחלקות של תמורות, אשר בהן ה-&-ים (עם האינדקסים) נמצאים *k2-3* מקומות מסוימים, ושההבדל ביניהן הוא אך ורק בסדר השונה של ה-&-ים האלה. מספר

הסידורים בכל מחלקה כזו הוא !k2, אם נמחק את האינדקסים של ה-א-ים

ומספר המחלקות הוא

כל התמורות במחלקה

אחת יהיו

זהות ויהפכו לסידור אחד של *n* איברים, בהם *kx* איברים זהים מסוג

אחד, *<-k2* איברים זהים מסוג אחר. מספר הסידורים מסוג זה יהיה **!71**

כמספר המחלקות, כלומר *r-,*—r*—ן .*

!kjk2

כך נמשיך הלאה ונקבל, לבסוף, את הנוסחה שרשמנו לעיל עבור תמורות עם חזרות.

שאלה 2.42 (פתורה)

1. כמה מספרים בני 6 ספרות אפשר ליצור מהספרות 2. 3 ו־7?
2. כמה מהם הם מספרים זוגיים?
3. בכמה מהמספרים הללו מופיעות 2 ספרות 2, 2 ספרות 3 ו-2 ספרות 7?
4. כמה מהמספרים האחרונים הם זוגיים?

פתרו ן

1. מספר המספרים הללו הוא כמספר החליפות עם חזרות באורך 6, מתוך שלוש הספרות 2,3,7 . (שני מספרים בעלי אותן ספרות, אך רשומות בסדר שונה, הם שונים כמובן.) מספר המספרים הוא אפוא 729=36 .
2. במספר זוגי מה נ"ל, הספרה האחרונה היא 2. אנו חופשים לבחור את 5 הספרות האחרות מתוך הספרות 2,3,7 כרצוננו, ולכן מספר המספרים הזוגיים האפשריים יהיה 243=35 .
3. מספר המספרים, שבהם כל ספרה מופיעה פעמיים בדיוק, הוא -z ו 6

כמספר התמורות, עם חזרותי של ° ספרות כאלה °^=~~!2!2!2 ׳~~

1. ביו 90 המספרים, הזוגיים הם אלה שמסתיימים ב-2. מספרם הוא כמספר התמורות עם חזרות שאפשר ליצור מספרה אחת 2, שתי ספרות 3 ושתי ספרות *ך* (אלה הן הספרות הנמצאות ב־5 המקומות , ’5

הראשונים של המספר), כלומר °^=~~!1!2!2 ’~~

שאלה 2.43 (פתורה) ־ •

כמה מספרים גדולים מ־4,000,000 בנויים משתי ספרות 7, ספרה 5 אחת, שלוש ספרות 3 וספרה 2 אחת?

פתרו ן

המספרים המבוקשים חייבים להתחיל ב־5 או ב־7, למשל 5233377 או 7325373•

מספר המספרים המתח<ל ב“5 הוא 6° ־ ~~?2!3־!T ’~~

ז 6

מספר המספרים המתחיל ב־7 הוא ~~120 =~~ ~~־;ן; ן זך־ן־ן ;~~

סך כל המספרים הוא (לפי עקרון החיבור) 180 = 60+120 .

שאלה 2.44 —

1. מהו מספר התמורות שאפשר לבנות מהאותיות של המלה

*•aabadaddaa*

1. מהו מספר התמורות שאפשר לבנות מהאותיות הבאות:

*a,a,a,a,b,b,b,c,c,c,c,c,d,e,e,e*

התשובה בעמוד 160

שאלה 2.45

בעיר מסוימת יש רשת רחובות ניצבים זה לזה (ראה איור).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | B |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
| A |  |  |  |  |  |

- מזרחה

ז

צפונה

כדי לעבור מ-!/ ל-5 בדרך קצרה ככל האפשר, יש ללכת 4 בלוקים מזרחה, ו־3 בלוקים צפונה.

מהו מספר המסלולים השונים האפשריים לטיול כזה? הכלל את התוצאה.

התשובה בעמוד 160

2.4 צירופי□ עם חזרות

צירוף של *k* איברים מתוך *k<n) n*) הוא, כזכור, תת־קבוצה *(\ל k* איברים מתוך n האיברים השונים הנתונים. מספר הצירופים האלה הוא

נרחיב עתה את המושג הזה לצירופים עם חזרות.

יהיו נתונים *n* סוגי עצמים, כאשר העצמים מכל סוג זהים ומספרם בלתי מוגבל. (אלה יכולים להיות, למשל, כדורים בצבעים שונים: אדומים, שחורים, לבנים וכוי, כל סוג במספר גדול כרצוננו.)

בוחרים מתוך העצמים האלה *k* עצמים: *kY* עצמים מהסוג הראשון, *k2* עצמים מהסוג השני וכוי, עד kn עצמים מהסוג ה-מ-י. *k^,... ,k2,kx* יכולים להשתנות מבחירה לבחירה, אבל עליהם לקיים תמיד k!+k2 +...+kn=k . כל בחירה כזו נקראת צירוף עם חזרות של *k* איברים מתוך *n* סוגים של איברים.

צירוף עם חזרות

כל *}k* מקיים *k . O^k^tk* עצמו יכול להיות קטן, שווה או גדול מ-ת.

שני צירופים נחשבים שונים, כאשר כלשהו בצירוף אחד שונה מה-^ן המתאים בצירוף השני, כלומר כאשר בין שני הצירופים יש

שוני במספר של עצמים מסוג מסוים (הא□ יכול להיות מצב שיהיה שוני רק בסוג אחד?). כמו במקרה של צירופי□ בלי חזרות, גם כאן אין חשיבות לסדר האיברים שנבחרו בכל מובן שהוא (למשל, סדר הבחירה מן הסוגים וכדו').

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| דוגמה: להלן רשימת כל הצירופ | ים עם חזרות של 5 איברים מתוך 3 | |
| סוגים: |  |  |
| סוג 1 | סוג 2 | סוג 3 |
| 0 | 0 | 5 |
| 0 | 1 | 4 |
| 0 | 2 | 3 |
| 0 | 3 | 2 |
| 0 | 4 | 1 |
| 0 | 5 | 0 |
| 1 | 0 | 4 |
| 1 | 1 | 3 |
| 1 | 2 | 2 |
| 1 | 3 | 1 |
| 1 | 4 | 0 |
| 2 | 0 | 3 |
| 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 0 |
| 3 | 0 | 2 |
| 3 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 0 |
| 4 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 |
| יש כאן 21 אפשרו יות. כ | :לומר, יש | נ2 צירופים עם חזרות של |
| 5 איברי□ מתוך 3 סוגיב | של איברים. | |

את מספר הצירופים ע□ חזרות *של k* איברים מתוך *n* סוגי□ של איברים נסמן ב- (D(n,k.

שאלה 2.46

הראה על-ידי ספירה, כי עבור כל k -

1+D(l,k) = 1 , D(2,k) « k

התשובה בעמוד 160

אם בצירוף מסוים יש !k איברים מהסוג הראשון, *k2* איברים מהסוג השני וכוי, מתקיים כאמור השוויון k■^♦. . . פירוש

הדבר, שמספר הצירופים השונים עם חזרות, אותם ניתן לבחור, שווה למספר הפתרונות השונים של המשוואה zn = k+. . , שבה כל

zt הוא מספר טבעי, כלומר מספר שלם לא-שלילי. כל מ-יה (סדורה)

של מספרים טבעיים, המקיימים את המשוואה, היא פתרון. מספר ה־מ-יות השונות האלה הוא מספר הפתרונות. לדוגמה: עבור 2=מ יש לקי ים את המשוואה:

Zj♦z2 \* *k*

וזאת אפשר לעשות ב-1^ אופנים:

0 =z!= 0 , z2= k ; z!= 1 , z2 = k-1 ; ... ; z,/ k , z2 לפיכך 1+D(2,k)=k כפי שרשמנו בשאלה 2.46.

אם נדע מהו מספר הפתרונות במקרה הכללי, תהיה לנו נוסחה עבור

.D(n,k)

מתברר שלמציאת נוסחה עבור (D(n,k, נוח לתאר את הבעיה של מציאת צירופים עם חזרות בצורה אחרת. אפשר לראות את קביעת הצירוף כפיזור (חלוקה) של k עצמים זהים ב־מ תאים שונים, בעלי קיבול בלתי מוגבל, כאשר לתא הראשון נכנסים kt עצמים, לתא השני k2 עצמים וכוי, עד לתא ה-ח-י, שלתוכו נכנסים *^k* עצמים. ברור כי חייב להתקיים kj+k2♦...+^\* k , כאשר כל !k הוא מספר שלם המה ” ° •

בסך הכל ייצגנו את אותה הבעיה בשלוש צורות:

1. בחירה של k עצמים מתוך *n* סוגי עצמים, כאשר כל העצמים השייכים לאותו סוג זהים.
2. פתרון המשוואה z1+z2+...+zn« k , שבה הנעלמים יכולים להיות רק מספרים שלמים לא-שליליים (כלומר, מספרים טבעי ים).
3. פיזור k עצמים זהים לתוך *n* תאים שונים.

**Q** האומכרסיטה ס&הפת**1** ח ה

מספר הפתרונות של כל אחת מבעיות אלו, שהן למעשה בעיה אחת המיוצגת על-ידי 3 מודלים שונים, מסומן ב-(&,ח)0.

הבה נדגים את פתרון הבעיה עבור 5=k י־ 3=ח . נשתמש לשם כך במודל השלישי, המדבר על חלוקת 5 עצמים זהים ל־3 תאים שונים - תא ראשון, תא שני ותא שלישי - המסודרים בסדר זה משמאל לימין. נסמן את 5 העצמים במספרים סידוריים:



כיוון שהעצמים זהים, נוכל להניח כי לאותו תא נכנסים עצמים סמוכים בשורה הזו. במלים אחרות, נוכל לבנות את התאים סביב העצמים, על-ידי סימון מחיצות (המחיצות שבין התאים) בין העצמים. אם, למשל, לתא הראשון נכנסו 2 עצמים, לתא השני עצם אחד, ולתא השלישי 2 עצמים, נוכל לתאר זאת כך:

תא שלישי

תא שני

תא ראשו ן

אם בתא הראשון שמנו 0 עצמים, בשני את כל 5 העצמים ובשלישי 0 עצמים נתאר זאת כך:

תא שלישי

תא שני

תא ראשו ן

וכך הלאה. התאים נקבעים על-ידי 4 מחיצות, שתיים חיצוניות קבועות, ושתיים פנימיות ניידות. חלוקת העצמים בין התאים תיקבע עם קביעת המקומות של 2 המחיצות הפנימיות. לדוגמה: אם קובעים את המחיצות הפנימיות כמו באיור להלן -

תא שלישי

תא

שני

תא ראשון

התא הראשון מכיל 3 עצמים, השני ריק והשלישי מכיל 2 עצמים.

כל קביעה אחרת של 2 המחיצות הפנימיות קובעת חלוקת עצמים אחרת בין שלושת התאים השונים, ולהפך. קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין הקביעות האפשריות של המחיצות לבין החלוקות. לכן, מספר הקביעות

5 העצמים הזהים ביו 3 התאים השונים, כלומר (3.5)D•

מהו מספר האפשרויות לסדר את 2 המחיצות הפנימיות? מספר זה שווה למספר הסידורים בשורה אחת של 5 עצמים ו-2 מחיצות, דהיינו למספר הסידורים של 7 איברים משני סוגים: 5 זהים מסוג אחד (העצמים) ו-2 זהים מסוג שני (המחיצות הפנימיות). בסעיף הקודם ראינו, כי מספר זה שווה ל-

זהו, אגב, אותו מספר שקיבלנו בעמוד 48 על-ידי ספירה ישירה.

נחזור עתה למקרה הכללי. אם רוצים לפזר *k* עצמים זהים בתוך *n* תאים שונים, צריך לקבוע (כמו בדוגמה לעיל) את המיקום של 1-n המחיצות הפנימיות בין התאים. כל קביעה כזו מתארת פיזור אחד, ואחד בלבד, של *k* העצמים ב- n התאים, ולהפך: לכל פיזור כזה מתאימה קביעה אחת של המחיצות הפנימיות שבין התאים.

קביעה של 1-n המחיצות הפנימיות ביו *k* העצמים היא בעצם סידור-בשורה של 1-n מחיצות זהות ו->ן עצמים זהים. מספר הסידורים האלה הוא:

*(n-1+k)! \_* fn-1+kl \_ fn-l+k'

(n־l)!k! " *k* n-1

הראי נו אפוא כי ־

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| D(n,k) = | n-l+k k | = | n-l+k' n-1 |  |

שאלה 2.47 ןפתןרהן .

מטילים 3 קוביות זהות. מהו מספר התוצאות השונות שאפשר לקבל (השווה שאלה 2.39)?

פתרו ן

כל קוביה יכולה לתת 6 תוצאות: 1,2,3.4,5,6 . כל תוצאה של הטלת 3 קוביות היא, בעצם, "פיזור" של 3 הקוביות בין 6 התוצאות הללו (שישה תאים, המסומנים ב־ 1,2,3,4,5,6) . לכן זו הבעיה של פיזור של 3 עצמים זהים ב-6 תאים שונים, שאותה אנו יודעים לפתור:

**Q** האיניכרסיטה

**GO** הפת!חה

6־8-7 81] 31\*1־6]

56 ־ ~~2-3■!~~ “3 3 = (6,3)D

תוצאה זו קיבלנו בשאלה 2.39, על-ידי ספירת כל האפשרויות.

®אלה 2.48 (פתורה)

בוחרים ארבע פעמים מספר בין 1 ל-10 (כולל 1 ו-10).

1. כמה בחירות כאלה אפשריות, אם מתחשבים בסדר הבחירה?
2. כמה בחירות שונות אפשריות, אם אין חשיבות לסדר הבחירה?
3. בכמה בחירות, מהסוג האחרון, סכום המספרים שנבחרו הוא זוגי?

פתרו ן

1. אם יש חשיבות לסדר הבחירה, כל בחירה היא חליפה עם חזרות של 4 מתוך 10. המספר של חליפות כאלה הוא 10,000=104 .
2. אם אין חשיבות לסדר הבחירה, כל בחירה היא צירוף עם חזרות של 4 עצמים מתוך 10 סוגים של עצמים (זהים בכל סוג) ומספר הצירופים האלה הוא -

715 = 13] = 4+J־10] = (10,4)D

1. כדי שסכום המספרים שנבחרו יהיה זוגי, הבחירה חייבת להכיל או 0, או 2 או 4 מספרים אי-זוגיים.

אם היא מכילה 0 מספרים אי-זוגיים, בחרנו (עם חזרות) את כל 4 המספרים מתוך 5 המספרים הזוגיים 2,4,6,8,10 . זאת אפשר לעשות ב- 70= ® = 4\*D(5,4)= 5’J אופנים.

4 מספרים אי-ז ו גי ים אפשר לבחור (עם חזרות) בדיוק במספר כזה של אופנים (מתוך 1,3.5,7,9 )•

לבסוף, 2 מספרים זוגיים ו-2 מספרים אי-זוגיים אפשר לבחור (עם חזרות) על-ידי כך שבוחרים באופן בלתי תלוי 2 מספרים זוגיים (עם חזרות) ו-2 מספרים אי-זוגיים (עם חזרות). מספר הבחירות הוא לפי עקרון הכפל:

225 2] " 2+2‘5 ־ 2+2־5 = (5,2)D(5,2)-D

סך כל האפשרויות הוא אפוא 365=70+225\*70 .

במקרה זה היה יותר נוח לענות על השאלה אם היינו מוצאים תחילה את מספר הבחירות, שבהן סכום המספרים הוא אי-זוגי. כל

בחירה כזו חייבת להכיל מספר אי-זוגי אחי י־3 מספרים זוגיים, אי 3 מספרים אי-זוגיים ומספר זוגי אחד. מטעמי סימטריה, בשני המקרים יש מספר זהה של בחירות, השווה ל­

175־ [^]•5■ [3^־5]•5

לכן, מספר הבחירות שבהן סכום המספרים שנבחרו אי-ז ו גי הוא 350'2-175 , ומספר הבחירות שבהן הסכום זוגי הוא 365=350־715 , כפי שקיבלנו לעיל.

מאלה 2.49 (פתורה) מהו מספר הפתרונות השלמים הלא-שליליים (להלן נקרא להם פתרונות בטבעיים) של המשוואה:

16 5־ \* 4־ \* x2 + x-j +

פתרו ן

זו בעיה של חלוקת 16 עצמים זהים ל־5 תאים שונים. מספר החלוקות, כלומר מספר פתרונות המשוואה, הוא:

4845 = 7^.18• 19• 20 ־

כ 1-2-3-4

20

4

16\*1־5

1־5 .

D(5.16) ־

שאלה 2.50 (פתורה) בכמה אופנים אפשר לפזר *k* עצמים זהים ב־מ תאים שונים. כך שכל תא יכיל עצם אחד לפחות? (במקרה זה n<k) .

פתרו ן

כל העצמים זהים, כך שנוכל להתחיל את החלוקה בכך שנכניס לכל תא עצם אחד. שלב זה ניתן לעשות באופן אחד בלבד. את שאר *k-n* העצמים נפזר ב- *n* התאים כרצוננו. מספר האופנים שאפשר לעשות זאת, כפי שראי נו, הוא:

לפ

*k-1*

n-1

k-1 *k-n*

n-l+k-n  
*k-n*

D(n.k-n) =

עקרון הכפל, המספר הכולל של האפשרויות הוא אפוא -

*k-1 n-1*

*k-1*

n-1

1•

מאלה 2.51

את הבעיה שבשאלה 2.50 אפשר גם לפתור באופן הבא, המודגם עבור *8\*k* ו־ 3=ה . נתבונן באיור:

8|7|6|5|4|3|2|1

חלוקה של 8 עצמים זהים ביו 3 תאים שונים, כך שבכל תא יהיה עצם אחד לפחות, שקולה להשארת 2 מחיצות בלבד מתוך 7 המחיצות שבין העצמים. הסבר זאת, ומצא את מספר האפשרויות במקרה הנדון.

קבל את הנוסחה שבפתרון שאלה 2.50, על-ידי הכללת השיקול, שהובא כאן, לכל *k* ו-מ (k>n).

התשובה בעמוד 160

שאלה 2.52

מצא את מספר הפתרונות, בשלמים חיוביים, של המשוואה -

k ־ x! + x2 + ... ♦ xn

רמז: השווה עם שני התרגילים הקודמים.

התשובה בעמוד 161

שאלה 2.53

מצא את מספר הפתרונות של המשוואה -

xt + x2 ♦ x-j + X4 ♦ = 22

א) בטבעיים ב) בשלמים חיוביים.

התשובה בעמוד 161

שאלה 2.54

הראה שלשתי המשוואות הבאות יש אותו מספר של פתרונות בטבעיים:

x!+ x2+ x3+ x4+ x5+ x6 = 8 (1

x!+ x2+ x3+ x4+ x5+ x6 + x7+ x8+ x9 = 5 (2

התשובה בעמוד 161

שאלה 2.55

מהו מספר האפשרויות לקנות 10 עטים, אם ידוע שאפשר להשיגם ב-4 צבעים שונים?

התשובה בעמוד 161

שאלה 2.56

כמה מספרים שלמים יש בין 1 ל-10,000, כך שסכום □פרותיהם שווה ל־9?

התשובה בעמוד 162

שאלה 2.57

1. בכמה אופנים אפשר לחלק 18 מכתבים זהים ביו 5 תיבות דואר שונות?
2. חזור על השאלה, במקרה שבכל תיבה צריכים לשים 2 מכתבים לפחות.

התשובה בעמוד 162

2.5 מבחר בעיות

בסעיפים הקודמים הובאו נוסחאות ושיטות שונות לפתרון בעיות קומבינטוריות, והודגמו פתרונות של תרגילים רבים בנושאים השונים. ללומד, אשר עקב אחרי הדיון ופתר את השאלות, ברור כבר בודאי, כי אמנם כבודן של הנוסחאות השונות במקומו מונח, אבל השימוש הישיר בהן בפתרון בעיות רבות אינו מידי כל כך. לעתים עלינו להיעזר בפירוק הבעיה לכמה מקרים, לפעמים עלינו להסתייע בספירה ישירה של האפשרויות הנבדקות בבעיה, ולעתים עלינו לחפש דרכי פתרון מיוחדות המותאמות לבעיה מסוימת. בעיות רבות ניתנות לפתרון בשיטית שונות, ולכו מדי פעם אנו חוזרי□ לאותה בעיה בפרקים שונים של החומר.

הקושי, אך גם היופי, של בעיות קומבינטוריות, הוא ברבגוניות שלהן, ביכולתן להפתיע כל פעם מחדש, ובצורך להפעיל כושר המצאה רב כדי לפתרן. תכונה זו היא למעשה סימן היכר של המתמטיקה כולה, שבולט במיוחד בבעיות קומבינטוריות, דוקא בגלל פשטות ניסוחן. בסעיף זה נביא מבחר של דוגמאות פתורות ושל תרגילים להנאתך, הלומד.

שאלה 2.58 (פתורה) =^=^^=^==

מצא את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה ־

25 = ,/x!+ x2 + x3 + X

המקיימים: 25>Q<x!<25 , 3<x2<25 . 0<x3<25 , 8<x4

פתרו ן

במקרה זה נוח להציג את הבעיה בצורה הבאה: יש לפזר 25 עצמים זהים בתוך 4 תאים שונים, כך שבתא השני יהיו לפחות 3 עצמים, ובתא הרביעי יהיו לפחות 8 עצמים. נשים תחילה 3 עצמים בתא השני, ו-8 עצמים בתא הרביעי. את שאר 14=(3+8)־25 העצמים נחלק כרצוננו בין 4 התאים. זאת אפשר לעשות ב-(4,14)ס אופנים, וזו גם התשובה לשאלה:

680־ ־ [ף} • [״£־״] ־ (•׳!.•׳)«

יכולנו לטפל בבעיה גם בצורה אחרת. נציב במשוואה הנתונה:

8 +4ע . 3ע \**V! • xzs V2\** 3 . x3 ■!»

ונקבל: 14 3+ xע \*2ע + !ע

כל פתרון בטבעיים של משוואה זו מתאים באופן חד-חד-ערכי לפתרון של המשוואה המקורית, המקיים את ההגבלות שהיטלנו. המשך הפתרון כמו קודם.

הבה נרשום נוסחה כללית עבור מספר פתרונות של משוואות כמו זו שבשאלה 2.58, עם תנאים מגבילים מהסוג שנתנו שם.

מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה -

X!+ x2 +

הוא, כפי שכבר רשמנו לא פעם,

n-1+k  
*k*

.D(n,k)=

אם הפתרונות צריכים להיות שלמים, המקיימים:

Xi>a! , x2>a2 xn>an

אנו יכולים להציב:

Xj= ע!+ a! , x2= 2ע+ a2 xn= j/n+ an

נקבל אז את המשוואה:

*2\* ... \* yn - k - ar a2- ... - an*ע +!ע

ונרשום את מספר הפתרונות בטבעיים שלה:

n, , . [n-l+k-a, *-a-,-.. .*-a\_

״ J״1 | = (an־...-D(n,k-a1-a2

הערה: אם 0>*k-a{~a2-..*.-an אין. כמובן, פתרונות בטבעיים למשוואה הנ״ל.

דוגמה: מספר הפתרונות של המשוואה -

Xj+ X2+ Xj+ =1

בשלמים גדולים או שווים מ- 3־, הוא:

560 = ~~3~~~~4~~~~'^~~~~16~~~~i =~~ ־ 3!1+3+3\*3\*3) = 4"Jl>)ס

שאלה 2.59

מהו מספר הפתרונות של המשוואה

8 = ^4+ x! ץ1 +x!x2

1. כאשר הפתרונות הם מספרים שלמים, המקיימים (££5>1)

עבור *t* אחד לפחות.

1. כאשר הפתרונות הם שלמים המקיימים -

5:ג3£־ ,2<x!, *7<x2 ,* -4<x3 , 0<x4

התשובה בעמוד 162

שאלה 2.60

1. רשום את כל הפתרונות בשלמים של המשוואה 15=x1+x2 , המקיימים: 2®>3• x1£^~ •
2. מהו מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה ־

22 ־ 4! +Xj+ x2+ x3

המקיימים 5<x1“ י 2lx2“ י 1<!4 . 3£x3 ?

התשובה בעמוד 162

שאלה 2.61 (פתורה) =

מהו מספר האפשרויות לחלק *k* עצמים שונים ל-מ תאים שונים, אם לתא ה־1־י (ה>/>1) יש להכניס kt עצמים, 1^1k1 = k? לסדר העצמים

בתוך התא אין חשיבות.

פתרו ן

k י .fe1. k-kx

*kx* העצמים שיוכנסו לתא הראשון. זאת ניתן לעשות ב- (שים לב: העצמים הם שונים). לאחר מכן נבחר מתוך

נבחר את

אופנים.

העצמים שנשארו את

*k-kx*

2

אופנים.

*k2* העצמים שיוכנסו לתא השני. זאת אפשר לעשות

וכך נמשיך הלאה. לפי עקרון הכפל מספר

האפשרויות הכולל הוא:

*k-k!* [k-k! *~k2 . k2 . .*



*kl (k-k^l*

k1!(k-k1)! ' k2!(k-k!-k2)!

1״fc

*l״k* •־' !(3־!-;־<-,־!-־!)! נ־|

k!

1ז ✓2 ז ׳ *k* ז Kj . K2 • • • • Kn .

הנוסחה האחרונה זהה לנוסחה שקיבלנו עבור מספר התמורות עם חזרות. תן הסבר קומבינטורי לפתרון של הבעיה.

רמז: לאחר ש-^ העצמים מוכנסים לתא ה-1 אין יותר חשיבות לסדר שלהם בתוך התא.

שאלה 2.62

1. מהו מספר האפשרויות לחלק 12 איש לשלושה צוותים בני 4 אנשים כל אחד, כאשר לכל צוות תפקיד שונה?
2. כנ״ל, פרט לכך שאין מבדילים בין תפקידי הצוותים. (כאן מדובר בחלוקה של קבוצה של 12 איש ל־3 קבוצות בנות 4 אנשים כל אחת. השווה לשאלה 2.27.)

התשובה בעמוד 162

שאלה 2.63

מהו מספר האפשרויות לחלק כיתה של 42 תלמידים ביו 6 מתרגלים, כך ששני מתרגלים יעבדו עם 8 תלמידים כל אחי. 3 עם 7 תלמידים כל אחד, והמתרגל השישי יעבוד עם 5 תלמידים (אנו מבחינים בין המתרגלים).

התשובה בעמוד 163

שאלה 2.64

בכיתה של 18 תלמידים יש לבחור שלוש ועדות: אחת של 3 תלמידים, שניה של 4 תלמידים, ושלישית של 5 תלמידים. לכל ועדה תפקיד משלה.

א) מהו מספר הבחירות השונות, אם אסור לאותו תלמיד לכהן ביותר מועדה אחת?

ב) מהו מספר הבחירות השונות אם אין הגבלה כזו?

התשובה בעמוד 163

שאלה 2.65 (פתורה) ~~- י־~~

מהו מספר האפשרויות לפזר *k* עצמים שונים ב- *n* תאים שונים, כאשר יש חשיבות לסדר בו מופיעים העצמים בתוך התא?

פתרו ן

נקבע תמורה כלשהי של *k* העצמים, ובהתאם לה נסדר אותם בשורה. עתה

נפזר

שבין

את *k* העצמים בתוך *n* התאים, על-ידי מיקום המחיצות

התאים. זאת אפשר לעשות ב-

n-1+k  
*k*

אופנים. כיוון

פעולה אפשר לחזור עם כל תמורה אחרת של *k* העצמים, וכל

הפנימיות שעל אותה הסידורים

האלה שונים זה מזה בתנאי הבעיה, הרי המספר הכולל של האפשרויות

fn-l+k , ,

הוא , *. kl*

*\_ k*

גישה שונה במקצת לפתרון שאלה זו היא כדלקמן:

לאחר פיזור *k* העצמים, אפשר לראות אותם ואת 1-n המחיצות הפנימיות של התאים, כסידור של n-1+k איברים. מספר הסידורים השונים שלהם הוא !(n-1+k). על כל סידור של *k* העצמים, יש !(1-n) סידורים של מחיצות. אחרי שנזהה את כל המחיצות הפנימיות, מספר הסידורים השונים של *k* העצמים יהיה ! . התוצאה זהה לזו

!(1-n)

שקיבלנו לעיל.

שאלה 2.66

הראה שיש

שונים *(n<k*

k-1

n-1

k!

אפשרויות לפזר k עצמים שונים בתוך n תאי□

, כך שכל תא יכיל עצם אחד לפחות, ולסדר העצמים בתוך

התא יש חשיבות.

התשובה בעמוד 163

שאלה 2.67

הראה

אי נם

שא□ בבעיה הקודמת משתנים), הרי מספר

התאים זהים (פרט לזאת, כל שאר התנאים

האפשרויות הוא

k![k-l ‘ n![n-1

התשובה בעמוד 163

שאלה 2.68 (פתורה חלקית)

1. בכמה אופנים אפשר לפזר 5 כדורים שוני□ ב-4 תאים שוני □ המסומנים ב-4,3,2,1?

התשובה בעמוד 163

1. מהו מספר האפשרויות לעשות זאת, כאשר רק התאי□ 1 ו-2 מכילי□ כדורים, ובכל אחד משניהם כדור אחד לפחות?

פתרון (של חלק ב)

את חמשת הכדורים אפשר לפזר בשני התאים ב־ 32=25 אופנים. בין אלה נכללות גם האפשרויות שתא 1 הוא ריק וכל הכדורים הם בתא 2, ולהפך - שתי אפשרויות שאינן מותרות בתנאי הבעיה. לכן נשארות 30=32-2 אפשרויות.

שאלה 2.69

בכמה אופנים אפשר לתאר את המספר 30,030 כמכפלה של 3 גורמים שלמים, שכל אחד מהם גדול מ-1? לסדר הגורמים אין חשיבות.

התשובה בעמוד 164

שאלה 2.70 (פתורה) - -

באלף־בית העברי 22 אותיות. מלה בת ארבע אותיות מעל הא״ב הזה היא כל רביעיה סדורה של אותיות מהא״ב. בכמה מלים כאלה מופיעות 2 (או יותר) אותיות זהות?

פתרו ו

המספר הכולל של מלים שונות, בנות ארבע אותיות, הוא 224. מספר המלים שכל 4 האותיות שלהן שונות הוא (22,4)P. לכן מספר המלים, שיש בהן 2 אותיות זהות לפחות (אלה הן המלים המכילות זוג של אותיות זהות, שני זוגות של אותיות זהות, שלישיה של אותיות זהות, או רביעיה של אותיות זהות), הוא:

58696 = 19•20־21•22 -224

נספור מלים אלה בצורה מפורשת:

מספר המלים שבכל אחת מהן מופיעות 4 אותיות זהות הוא 22.

מספר המלים שיש בהו 3 אותיות זהות הוא 1848=4-22-21 (22 הוא מספר האותיות השונות שבשלישיות, 21 הוא מספר האותיות היכולות להשלים שלישיה ו-4 הוא מספר המקומות שבהם אפשר לרשום את האות הרביעית השונה משלוש האותיות השוות).

מספר המלים שיש בהן שני זוגות של אותיות שוות:

מספר האפשרויות לקבוע את האותיות המשתתפות בשני הזוגות *122*

הוא

4’

2] \*

2 ; מספר המקומות השונים אותם בוחר הזוג הראשון הוא 6=

לכן המספר הכולל של מלים כאלה הוא 386!\*״ "■2 22 .

מספר המלים שיש בהן זוג אחד של אותיות שוות:

22־P(21,2)

= 22-21-20-6 = 55.440

נמק!

וכעת נחבר: 58,696 = 55440 + 1386 + 1848 + 22

הפתרון הראשון היה פשוט בהרבה. השני נתן לנן הזדמנות לחזור פעם נוספת על מספר רעיונות שנדו נו לעיל.

שאלה 2.71 נתון האלף־בית {0,1,2}=£ .

g£ היא קבוצת המלים באורך 8 מעל אלף־בית זה.

1. מהו מספר המלים ב־£8?
2. כמה מלי□ מתוכן מכילות בדיוק ארבע אותיות 0 וארבע אותיות 2?
3. כמה מלים מתוכן מכילות בדיוק שלוש אותיות 1?
4. כמה מלים מתוכן מכילות לפחות 0 אחד, 1 אחד ו-2 אחד?

התשובה בעמוד 164

שאלה 2.72

בכמה אופנים ניתן להושיב 10 אנשים על ספסל בן 10 מקומות, כך ששניים מסוימים מהם, אי ו-ב', לא ישבו זה ליד זה?

שני החישובים הבאים סופרים את מספר האפשרויות האלה;

!2-8-8 + !8־8-7 = !2-9 - !10

נמק כל אחד מהם באופן קומבינטור,.

התשובה בעמוד 164

שאלה 2.73 (פתורה) = . — . \_ . - - -

מהו מספר האפשרויות להושיב 6 זוגות סביב שולחן עגול, אם כל הגברים יושבים זה ליד זה וכל הנשים יושבות זו ליד זו?

פתרו ן

אפשר להושיב גם את הגברים ב-!6 אופנים, וגם את הנשים ב-!6 אופנים. כיוון שהשולחן עגול, אין חשיבות לסדר של הקבוצות. לכן מספר האפשרויות הוא 518.400־2(!6) .

לו כל אלה היו יושבים על ספסל, צריך היה לכפול את התוצאה שקיבלנו ב- 2. מדוע?

שאלה 2.74

בכמה אופנים אפשר להושיב 6 זוגות סביב שולחן עגול, כך שכל שני בני זוג ישבו זה ליד זה?

התשובה בעמוד 165

שאלה 2.75

1. יש לחלק **12** תלמידים ו-**4** מורים לשתי קבוצות, שכל אחת מהן תכלול **6** תלמידים ו**־2** מורים. מהו מספר האפשרויות לעשות זאת?
2. מהו מספר האפשרויות, כאשר בקבוצה אחת **6** תלמידים ו־**3** מורים ובשניה **6** תלמידים ומורה אחד?

התשובה בעמוד 165

שאלה 2.76 (פתורה) — - ■ בכמה אופנים ניתן לבחור **5** נעליים מהיד **9** זוגות נעליים, כך שלא ייבחר אף זוג?

פתרו ן

בוחרים קודם **5** זוגות מהיד **9** זוגות הנעליים. זאת ניתן לעשות

ב-

אופנים.

מכל זוג שנבחר, לוקחים נעל אחת. זאת ניתן לעשות

זוג, וב־**25** אופנים ל־**5** הזוגות. כך מקבלים **5**

ב-**2** אופנים לכל

נעליים, שאין ביניהן אף זוג. בדרך זו ייבחרו כל החמישיות האפשריות של נעליים כאלה. נמק! מספר החמישיות המקיימות את דרישות השאלה הוא אפוא **4032=25• ?־ .**

שאלה 2.77

בכמה אופנים אפשר לחלק **5** תפוחים, **6** תפוזים י **־7** אגסים ביו **3** ילדים? (מניחים כי פירות מאותו סוג זהים).

רמז: אין קשר בין חלוקת פרי זה או אחר. כל אחד אפשר לחלק לחוד.

התשובה בעמוד 166

שאלה 2.78

**12** תלמידים מתחלקים ל־**3** קבוצות, בנות **4** תלמידים כל אחת. מהו מספר החלוקות שבהן התלמידים *x* ו-ע יהיו בקבוצות שונות?

התשובה בעמוד 166

שאלה 2.79

מטילים *n* קוביות זהות. מהו מספר התוצאות האפשריות של ניסוי כזה?

התשובה בעמוד 166

שאלה 2.80

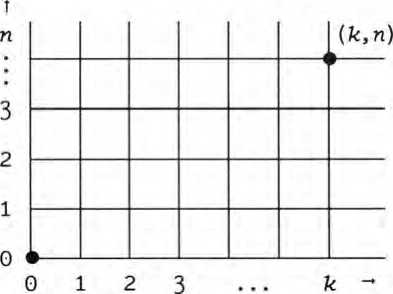
נתונים 3 כדורים לבנים, 1 שחור, 1 ירוק, 1 צהוב. בחר מתוכם 4 כדורים וסדר אותם בשורה.

מהו מספר האפשרויות לעשות זאת, אם 2 סידורים נחשבים שונים, כאשר הם שונים בהרכבם או בסדר הכדורים? (הכדורים הלבנים זהים).

התשובה בעמוד 166

שאלה 2.81 (פתורה) ■ ־

נתונה רשת מלבנית (ראה איור ):



ברשת זו מתקדמים מהנקודה (0,0) אל הנקודה (k,n) בצעדים באורך 1, ימינה או למעלה בלבד (אין חזרות שמאלה או למטה). מהו מספר האופנים השונים להגיע מ-(0,0) אל (k,n)?

פתרו ן

כדי להגיע מ-(0,0) אל (k,n) יש לעשות *k* צעדים ימינה, ו-מ צעדים

בסך הכל *k+n* צעדים באורך 1. מסלול אחד שונה מחברו בכך

למעלה,

שפונים ימינה בנקודות אחרות. בסך הכל עוברים k+n הצטלבויות

(כולל (0,0) וללא (k.M)),

וב^ מהן יש לפנות ימינה. לכן

מספר

המסלולים השונים הוא

k+n  
k

(השווה לשאלה 2.45).

שאלה 2.82

הכלל את הבעיה הקודמת ל־3 ממדים. מהו מספר המסלולים בין שתי נקודות ברשת תלת-ממדית כזו, אם המעבר מאחת לשניה דורש 6 הזזות ימינה, 4 הזזות קדימה ו־7 הזזות למעלה? (בהזזה מתכוונים למהלך של צעד אחד).

התשובה בעמוד 167

שאלה 2.83

במישור מסומנות *n* נקודות. *m* מהן נמצאות על ישר אחד, ואף שלוש מהשאר אינן על ישר אחד. מהו מספר המשולשים הנקבעים במישור על-ידי נקודות אלו?

התשובה בעמוד 167

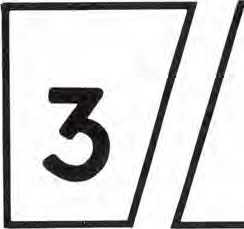
שאלה 2.84

השתמש בשיקול קומבינטורי להוכחת העובדה, שהמספרים הבאים הם מספרים שלמים:

א) !1& ב) 13211

2n •^n 2n

התשובה בעמוד 167



5 .2] ־

המחובר הראשון בתוצאה יהיה x5 - הוא מתקבל כשכופלים את כל 5  
a5 - מכפלת

ה-1-ים. המחובר האחרון

האיברים x4a נקבל כאשר נכפול 4 1-ים ו-a

כל חמשת ה-ס-ים.

אחד, כפי שנעשה

פעמים - כמספר הבחירות של 4 גורמים (שמהם

את

*5'*

4

x

מתוך 5 הגורמים. לכן, בתוצאה יתקבל המחובר

נקבעים שאר המחוברים, ומתקבלת התוצאה

לוקחים את המחובר

הבאה, שנוהגים לקרוא לה

. באופן דומה

הבינום של ניוטון;

המקדמים הבינומיים

3.1 נוסחת הבינום, משולש פסקל

לחישוב הביטו י:

(x+a)5 = (x+a)(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)

"נפתח" את הסוגריים במכפלה שמימין לסימן השוויון. לפני שנכנס איברים דומים, יהיו בידנו 32 = 25 איברים, כל אחד מן הצורה 1\*1a5!, כאשר 5>x2a3 .0<i, למשל, יתקבל בכל פעם שנכפול זה בזה2 1־ים י ־3 ס-ים, כלומר מכל מכפלה של המחוברים x מתוך 2 גורמים והמחוברים *a* מתוך 3 הגורמים הנותרים. מכפלה כזו תופיע | פעמים, כמספר הבחירות האפשריות של 2 הגורמים - שמהם לוקחים את

5 הגורמים. בתוצאה שתתקבל, לאחר כינוס האיברים הדומים, יופיע לכן המחובר x2a3

מתוך

פיתוח הבינום:

פיתוח הב,נום

(x+a)5

x5 +

4 x a+

xJa +

5|+3״2^51

x aJ +

4 5

xa +aJ

באותה שיטה בדיוק מתקבלת נוסחת הבינום הכללית:

(x+a)n

xn +

*n  
n-1*

**n-1**

n n-2

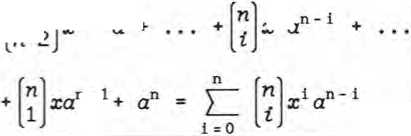
i ״ x a

**\_2 \_n - 2**

X a

**״n - 2 2״ . X a +**

+ 1a־"!





המקדם של xn הוא

והמקדם של an הוא 1=

שים לב:

נוכיח את נוסחת הבינום גם בעזרת אינדוקציה.

עבור n«l מקבלים: x+a)1 = x+a)

עבור *2=n* מקבלים: x+a)2 \* x2+2xa+a2)

הנוסחה מתקיימת עבור l־n ועבור 2-n (מספיק, כמובן, לבדוק את קי ומה עבור 1-n ).

נניח כי הנוסחה נכונה עבור מ, וננסה להוכיח על סמך הנחה זו שהיא נכונה עבור 1+n.

נחשב:

+an (x+a)

!1'1a"'1

*n  
t-1*

(x+a)n(x+a)

xn "ra+.

*n  
n-1*

(x+a)n

xn +

­ו■ antl

1־1\*״1a!

*n  
t-1*

!1a"’1'1

מכל המחוברים שבתוצאה (לפני כינוס

איברים

xn\*1

דומים), רשמנו את

המחובר הראשון, את המחובר האחרון שמופיעה בהם החזקה 11. בעמוד

ואת המחוברים "הט׳פוסיים"

32 הוכחנו את הזהות

n+1  
*i*

n  
*t-1*

לכן נוכל לסכם את שני המחוברים הטיפוסיים ולרשום:

n+1 x x

*. x a + ... + a*

'1 ־־ x+a)n.l)

וזו בדיוק הנוסחה המתקבלת עבור x+a)n), כאשר מציבים בה 1+n במקום n. הוכחת הנוסחה, בעזרת אינדוקציה, הושלמה.

נדגים את השימוש בנוסחה:

" «7x 71 7 ,,5ד 7 ■5\_2\_ 7 7 7 ,2״

= x + .־ x a+ \_ *x'a + >. x a + - x a + \_ x a + . xa* +a oj [9J [4J [3] [2

(x+a)7

= x7+7x6a+21x5*a2*♦35xia3+35x3a4 +21x2a5+7xa6+a7

בקורס זה אנו מעוניינים בעיקר בתכונות המקדמים המופיעים בפיתוח הבינום. מקדמים אלו נקראים מקדמים בינומיים. כבר היכרנו אותם קודם, כאשר עסקנו בצירופים, וכן הוכחנו שתי תכונות חשובות שלהם:

מקדמים בי נומי ים

(1)

(2)

*n  
n-l*

n+1 *k t*

לכל 0<i<n . שים לב: הגדרנו n *n*

גם 1=

*n*

f-1

עבור כל *n,* כולל

שני שוויונות אלה מתיישבים עם הנוסחה

*n  
n-n*

התכונה (2) מאפשרת לחשוב את המקדמים הבי נומי ים באמצעות *מבנה*

הנקרא משולש פסקל. אנו בונים אותו בצורה הבאה:

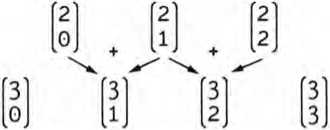
משולש פסקל

01

0]

׳1׳

0





בהתאם

לסכום

n+1 i

n f-1

לתכונה

שני האיברים הרשומים מעליו

כל איבר פנימי במשולש שווו (בדוק מספר מקרים!). האיברים

שבצדי המשולש שווים כל אחד ל-1.

בשורה ה-מ-ית של משולש פסקל רשומים המקדמים של

פיתוח הבינום

x+a)n) (השורה המכילה את

נחשבת כשורה 0) .

נבנה לדוגמה את המשולש עד 10=n .

n1 0 ־

n-1 11

n-2 121

n- 3 13 3 1

n- 4 14 6 4 1

n- 5 1 5 10 10 5 1

n= 6 1 6 15 20 15 6 1

n- 7 1 7 21 35 35 21 7 1

n= 8 1 8 28 56 70 56 28 8 1

n1 9 36 84 126 126 84 36 9 1 9 ־

n1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1 10־

שים לב, שהמספרים המופיעים במשולש פסקל סימטריים ביחס לגובה המשולש, המורד מקדקודו העליון:

*n י  
n־t.*

שאלה 3.1

פתח את הביטויים הבאים:

א) 8(x+a) ב) 4(3\*2x) ג) 9(x-a) התשובה בעמוד 168

שאלה 3.2

1. מהו המקדם של x7aA בפיתוח 11(x+a) ?
2. מהו המקדם של x6a6 בפיתוח 12(x+a) ? התשובה בעמוד 168

שאלה 3-3

כמה איברים רציונליים יש בפיתוח 80(^♦5/ץ) ? התשובה בעמוד 168

שאלה 3-4

רשום את 4 השורות הבאות בהמשכו של משולש פסקל שבראש העמוד.

התשובה בעמוד 168

שאלה 3.5

1. על-ידי שימוש במשולש פסקל, הראה:

31\_[4

וכו י

1. הכלל את התוצאה.

התשובה בעמוד 169

3.2 תכונות של המקדמים הבינומ״ם

בסעיף זה נוכיח תכונות שונות של המקדמי□ הבינומיים. ההוכחות יהיו בחלקן אלגבריות, ובחלקן קומבינטוריות. לעתי□ אף ניתן הוכחות משני הסוגים.

אם נציב בפיתוח של x=l (x+a)n ו- a=l, נקבל:

n-1

*n  
n-2*

סכו□ המקדמי□ הבי נומי <□ בפיתוח x+a)n) הוא אפוא ”2. אפשר ג□ לקבל תוצאה זו א□ שמים לב לכך, כי מספר המחוברים (לפני כינוס האיברים הדומים) במכפלה (x+a) (x\*a).. ■ (x+a) הוא 2n (כל

ו׳ פעמים

סוגריים תורמים איבר אחד, ראשון או שני, לכל מחובר).

שאלה 3-6

כזכור, מספר התת-קבוצות השונות בנות *k* איברים של קבוצה *A* בעלת *n* איברים הוא 7 .

בהסכמה עם כך שלקבוצה יש תת-קבוצה

שים לב: לפי ההגדרה 1=

ריקה אחת.

על-ידי שימוש בנ"ל הוכח, שמספר התת-קבוצות השונות של קבוצה *A* בעלת n איברי□ הוא ”2.

התשובה בעמיד 169

שאלה 3-7

1. בשאלון מסוים יש **10** שאלות, לכל שאלה **2** תשובות אפשריות, כן או לא. בכמה אופנים שונים יכול הנשאל לענות על השאלון, א□ עלי ו להשיב על כולו?
2. חזור על השאלה, אם הנשאל יכול גם להימנע מלענות על שאלה כלשהי.

התשובה בעמוד 170

שאלה 3-8

1. מצא את מספר הפונקציות השונות **{0,1}׳~4:/ ,** כאשר מ=|**24|.**
2. מהו מספר הפונקציות השונות **{0,1,2,3.4}-M/** כאשר **11 =n?|?** הכלל את התוצאה.

בשני המקרים הכוונה היא לפונקציות של **4 ... .**

התשובה בעמוד 170

אם נציב בפיתוח הבינום **z=l (z+a)n** ו- **a=-l** נקבל:

מכאן

שו וה

למשל,

+ (־Dn

נובע,

לסכום

n-1

n-2 *n*

*2*

**n***n~3*

**n  
n-2**

*n  
n-1*

1-

כי

סכום המקדמים

המקדמים שבמקומות

*6-n* נקבל:

6

.5.

6  
.3

הבי גומי ים שבמקומות האי-זוגי ים

הזוגיים

[6  
4

7=ת:

[7]  
6

[7  
.3

'7

5

שאלה 3.9

הוכח:



**2n'1-n**

*n  
n-1*

*\* (n-1)*

**2**

רמז: הוכח תחילה

**n-1**

**k-1**

התשובה בעמוד 170

שאלה 3.10

הוכח את הזהות:

רמז: חשוב על 2 דרכים שונות לקביעת מספר האפשרויות לבחור *k* איברים מתוך *n* איברים נתונים, *<-h* איברים מתוך *k* האיברים שנבחרו (h<k<n).

התשובה בעמוד 170

שאלה 3.11

שווה ל­אם כן, הוכח. אם לא, תן נימוק קומבי נטורי מדוע אין לחשב את מספר הבחירות *של h* איברים מתוך מ, על-ידי כך שמוצאים את מספר הבחירות של *k* איברים מתוך *n* וכופלים מספר זה במספר האפשרויות לבחור *h* איברים מתוך *k* האיברים שנבחרו (h<k<n).

האם

התשובה בעמוד 171

שאלה 3-12 (פתורה)

הוכח את הזהות:



*m+n  
k*

*n  
k-i*

m i

בהמשך נכנה לעתים זהו יות מסו! זה בשם זהויות בינומיות.

זהות

באגף

ימין רשום מספר הצירופים *של k*

איברים מתוך *m+n* איברים.

נחלק

את *m+n* איברים אלו לשתי קבוצות:

האחת בת

בת *n*

איברים. באגף השמאלי של הזהות,

המחובר

מתאר

(לפי עקרון הכפל) את מספר התת-תקבוצות

*m* איברים והשניה *n*

.3־’ 13J [k

בנות *k* איברים,

למשל,

ששלושה מהם נלקחו מקבוצת *m* האיברים, י־ 3־k *m* 0

האיברים. בדומה,

המחובר

מתאר את מספר

נלקחו מקבוצת *n*

התת-קבוצות בנות

פתרו ן

זו נוח יותר להוכיח בדרך קומבינטורית, מאשר בדרך אלגברית.

*k* איברים, שכולם *n*

*k-i*

מתאר

נלקחו מקבוצת *n* האיברים. באופן כללי, המחובר את מספר התת-קבוצות בנות *k* איברים (של הקבוצה

כולה, בת m+n איברים), המורכבות *i-n* איברים השייכים לקבוצת *m* האיברים ומ~ *k-t* איברים השייכים לקבוצת *n* האיברים.

הסכום באגף השמאלי מונה אפוא את כל התת-קבוצות בנות *k* איברים מתוך m+n האיברים. לכן, האגף השמאלי של הזהות שווה לאגף הימני

שלה.

**ח**

*k*

אם *m* או *n* קטנים *k-n,* הגורמים המכילים

הערה:

*n<k* מגדירים ס-

. לפיכך בזהות

*n k*

או

שבשאלה ז ו, מוסיפים 0

בהמשך נביא הוכחה אלגברית של זהות זו.

שאלה 3-13 (פתורה)

1ת2

2J

הוכח:

פתרו ן

כאן נוח יותר להשתמש באלגברה: את השוויון אפשר לרשום בצורה -

2 (*2n(2n-l) \_* 2«(n-l

1-2 1-2

נפתח את הסוגריים, *ונקבל 2n2-n = n2-n+n2* , והזהות הוכחה.

שאלה 3.14

מצא הוכחה קומבינטורית לשוויון שבשאלה האחרונה (3-13). לשם כך, חלק קבוצה בעלת *2n* איברים לשתי קבוצות, בנות n איברים כל אחת, וחשב - בשתי דרכים - את מספר זוגות האיברים שאפשר לבנות מקבוצה בת *2n* איברים.

התשובה בעמוד 171

שאלה 3.15

הוכח את הזהות:

nl + [n-1] + [n-2 kJ + [ k J \* [ k

k+1  
*k*

kl w [n\*l  
kJ “ [k\*l

התשובה בעמוד 171



שאלה 3.16

הוכח את הזהו<ות:

א)

m+n m+k

*m n*

**f]***[k+i*

**m**

**0־1**

התשובה בעמוד 172

בשאלות הבאות נכיר שיטות נוספות לטיפול בזהויות בינומיות.

שאלה 3-17 (פתורה) הוכח:

nl [n+1

0J \* I 1 I

*n+k  
k*

n+k+1  
*k*

פתרו ן

נתבונן בקטע של משולש פסקל:

n

.°

n+1  
0

n+1

1

n+1  
2

n+2  
0

n+2

1

n+2  
2

n+2  
3

n+3  
0

n+3

n+3  
2

n+3  
3

n+3  
4

n+4

0

n+4

1

n+4  
2

n+4

3

n+4  
4

לפי תכונות המשולש נקבל, למשל:

n+4] \_ [n+3 2

n+3'

3 .

n+2

1

n+21 [n+3

. 3 ־

n+1  
0

n+1  
1

n+1  
1

n+2  
2

n+2

2

n+3

3 .

n+3

. 3 .

זוהי הוכחת הנוסחה עבור 3=k ו-מ כלשהו. ההוכחה עבור *k* כלשהו (ו-ת כלשהו) זהה לגמרי (השווה גס לשאלה 5־3).

שאלה 3.18

הוכח את הזהות:

n] [n+1

W I <

n+m  
*k*

n+m+1

. k+1 .

*n*k\*l

השתמש במשולש פסקל. תו גם הוכחה בעזרת אינדוקציה.

התשובה בעמיד 173

שאלה 3-19 (פתורה) ■ ■■ הוכח את הזהות שבשאלה 3-12:

m

I

*n  
k-i*

m+n  
*k*



בדרך אלגברית.

פתרון

נשתמש כאן באינדוקציה על *n* (עבור *k-> m* כלשהם).

עבור 0=n

ml [0] Im'

הוגדר כ-1.

מקבלים באגף השמאלי מחובר אחד

, המתקבל כאשר *t=k.* עבור *i<k*

בלבד שונה מ־0, הוא ° הוא 0, רק n



n k-i

n+1 k-i

ml *n*

kJ[k-l-k

הביטו י

ר r *n n* k-l-kj"[-1

n k-l-i

הוא 0 לפי ההגדרה, ולפי הנחת האינדוקציה

עבור 0־n גם באגף ימין רשום

כלומר,

הזהות נכונה עבור

0=ח.

נניח שהזהות נכונה עבור מ, וננסה על סמך הנחה זו להוכיחה עבור

1+ת:

*n  
k-i-1*

מקבלים אפוא -

0־1

*m* n+1 f *[k-t*

*m+n m+n k k-1*

m+n+1  
*k*

בכך הוכחנו את הזהות באמצעות אינדוקציה. כלי זה יעיל מאד להוכחת זהויות בינומיות.

נדגים שיטה נוספת לטיפול בזהויות בינומיות.

נצא מהשוויון:

(l+x)m’n = (l+x)ra(l+x)n

המקדם של xk בפיתוח האגף השמאלי הוא .

באגף הימני,

נפתח

את הסוגרים ונרכז את המכפלות שבהן במופיע xk:

xk

המקדם של

k-2 X

*n  
k-2*

xk באגף הימני הוא

x2

אפוא

xk1־

*n  
k-1*

xk +

*n  
k-1*

*n  
k-2*

השוואת המקדמים של xk בשני האגפים נותנת -

*m+n  
k*

m

*n  
k-t*



זו אינה אלא הזהות של השאלה האחרונה, 3.19, אותה הוכחנו כאן בפעם השלישית.

לעתים נוח להשתמש בפעולות של החשבון האי נפיניטסימלי להוכחת זהו יות בי נומיות

הלומדים, אשר המושגים נגזרת ואינטגרל זרים להם, יכולים לפסוח על הקטע הזה, בלי שהדבר יפריע להם בהמשך.

נרשום את הפיתוח

**1 n** ת . **.2** ח ת] . ת \_ **1.—\n/**

**J\*• ■■■ \*x**־] י ••• **[2]1[!]1 M ־** י1\*1,

נגזור את שני אגפי השוויון הזה, לפי המשתנה x:

1 - ת

♦71X

**J-l X**

x+3

n(bx)”1־

נציב

ונקבל את הזהות (שהוכחנו בשאלה 3.9)

n-2"1־

.. +n

**♦ ... + <**

\*3‘

+2•

בדו גמה הבאה

נשתמש באינטגרציה. נצא

מהשוויון

*xn*

z1\* ... \*(-1)

(־l)1

x2-

(l-z)n-l

נחשב את האי נטגרל

(המסוים)

של שני

אגפי השוויון,

בגבולות מ-0

עד 1. באגף השמאלי

מקבלים:

'־

(l-x)"\*1

באגף הימני מקבלים:

xn.l

... +(-l)n

... ♦ (-D

x3 3

*n*

n+1 |n

-l)nA־

••• \* (1(!־TTT

1 [n

3 2

In

2 1

נשווה את

שתי

התוצאות, ונעביר את 1- לאגף השני

אנו מקבלים את

הזהות:

1  
n+1

**n 1** ת  
n+1 [n

**1** *n*

3 [2.

נבדוק את

הזהות

עבור 3=מ:

1(3

שאלה 3.20

חשב את הסכומים:

א)

1 =2

\_ 31 1[3

3 [2] 5[3

1-I3

1 2 1

רסיטה

n i



התשובה בעמוד 174

שאלה 3.21

הוכח:

2 2[2f4bf6[6f••• n ־•• W 3bJ 5[5J

דזתשובה בעמוד 175

שאלה 3.22 (פתורה) חשב את הסכום:

[n

[0

פתרון

נרשום את הסכום בצורה הבאה:

n

2

2n+2

n-1



שאלה 3.23

חשב את הסכום:

.♦(f+1)

(1\*ה)\*



התשובה בעמוד 175

שאלה 3.24

n-1  
*k*

(k\*D

*n*k+1

א) הוכח:

ב) מהו הפירוש הקומבינטורי של שוויון זה?

התשובה בעמוד 175

3.2.1 פיתוח מולטינומ׳

®אלה 3-25

1. חשב את 5(a+b+c).
2. הראה, על-ידי שיקול קומבינטורי, כי -

(a+b+c)n

־ LI

0£l,j.k<n 1♦j♦k־n

n!

Z!J!k!

a\* bJ ck

את הרשו□ מתחת לסימן הסכום יש לפרש בצורה הבאה: *t,j,k* מקבלי□ את הערכים של כל הפתרונות השלמים הלא-שליליים האפשריים של המשוואה f+J+k-n.

התשובה בעמוד 176 ®אלה 3.26

הראה על-ידי שיקול קומבינטור’:

**ן** *ךן*

2 x3 X/> x5־ 11 !x1+x2+x3+x4+x5) ■ ) *! t2! t3)*

11.12.13.14.15<n>°11.12.13.i4.15\*n

כאשר 5>,i2,<3,t4 מקבלים את הערכים האפשריים של כל הפתרונותבטבעיים של המשוואה f!+r2+f3+f4+f5=n .

התשובה בעמוד 176

שאלה 3.27

רשום את הפיתוחים הבאים:

1. 4(a+b+c+d)
2. 3(x+y+z+u+u)

התשובה בעמוד 176

שאלה 3.28

1. מצא את סכום מקדמי הפיתוח 7(x!♦x2\*x3\*x4).
2. מהו המקדם של האיבר a3b2c2de4 בפיתוח 12(a+b+c+d+e)?
3. מהו המקדם של האיבר b5c7 בפיתוח הביטוי האחרון?
4. מהו המקדם של האיבר d12 בפיתוח הזה?

התשובה בעמוד 177

**0** האוניברסיטה

**GO** ה פ**1n** ח ה

Gilad Barnea

עקרון ההכלה וההפרדה 4

4.1 הגדרות ודוגמאות

כפי שלמדנו, אם !4 ו *-A2* הן שתי קבוצות סופיות אזי -

|42ח!4|־|42|\*|!4|

שוו •ו ו זה הוכרו ברזלק **I** של הקורס, בתשובה **1.12,** וכבר השתמשנו בו בחלק זה בעמוד **8.**

(להזכירך, |4| הוא מספר איברי הקבוצה הסופית 4).

עבור שלוש קבוצות 42,43,!4 מצאנו:

= |43ט42ט!4|

1 3^2^14 \*(43ח42|-|43ח!14־1 042!14־1431♦|42|\*| !4| "

שתי נוסחאות אלו אינן אלא מקרי□ פרטיי□ של נוסחה כללית לחישוב מספר האיברים של איחוד קבוצות, לפי מספר האיברים שיש בכל אחת מהן ובכל החיתוכים האפשריים שלהן (חיתוכי□ של כל שתיים מהן, חיתוכי□ של כל שלוש מהן וכך הלאה). נוסחה זו, אותה נוכיח בהמשך, מבטאת את עקרון ההכלה וההפרדה.

לפני שניגש לטיפול בנוסחה הכללית נדון בכמה דוגמאות.

טאלה 4.1 (פתורה) ■ — . .

במועדון מסוים, על כל חבר לשחק ברידג' או גולף. ידוע כי 30 מחברי המועדון ה□ שחקני ברי דג י, ו-42 ה□ שחקני גולף. 20 מחברי המועדון משחקים בשני המשחקים. מהו מספר חברי המועדון?

פתרו ן

נסמן ב־!4 את קבוצת שחקני הברידג' (חלק מהם משחק ג□ גולף), וב-42 את קבוצת שחקני הגולף (חלק מהם משחק גם ברידג'). לפי הנתון, 30=|!4| ו-42־־|42|. נוסף לכך ידוע, כי 20=|42ח!4|.

אנו מחפשי□ את המספר הכולל של חברי המועדון, כלומר את |4!u42|.

כדי למצוא מספר זה, נחבר את מספר שחקני הברידג' למספר שחקני הגולף. אולם, בדרך זו סופרים פעמיים את שחקני שני המשחקים, ולכן עלינו להחסיר את מספרם מהסכום שקיבלנו. מספר חברי המועדון הוא, א□ כן:

52 = 20־30+42 = 1 042^1־1 142 + 1!^ = |4!uA2|

לעתים כל הקבוצות, שבהן עוסקים, הן תת-הבוצות של קבוצה כוללת אחת *U.* במקרה כזה נוכל לרשום עבור כל קבוצה 4 שבדיון ע=׳4ט4 . כיוון ש- 0=׳ 404 , הרי לפי עקרון החיבור | ׳ 14+ 41| = *\u* |. עבור כל 2 קבוצות 42,41 מקבלים לפי כלל דה־מורגן:

כזכור, *י A* הוא המשל,□ *של A נ־(1, כלומר U-A,* ראה ס׳ניף **1.4** כחלק *1* של הקורס שלנו.

^4ח;4 ־ ’(4jU42)

ולכן:

| 42ס 4! | -142 | + |4t|־ |17| ־ 421^1171-14 ־ |'(42ט41)| = |׳4ה;4|

עבור שלוש קבוצות נקבל באותו אופן:

־ |׳4ח׳4ס׳4|

3 2 1 י

|43ה42ח !14־1420431♦ | 42 | + |4!n43ח41| + |43|־| 42|־| !4|־|ע| = בשאלה הבאה נדגים את השימוש בצורה זו של הנוסחה, לחישוב מספר האיברים של איחוד קבוצות.

שאלה 4.2 (פתורה) -

בקבוצה של 100 תלמידים 30 מנגנים, 25 מציירים ו־8 גם מנגנים וגם מציירים. מהו מספר התלמידים, בקבוצה, זו שאינם מנגנים ואי נם מציירים?

פתרו ן

אם נסמן: !4 ־ קבוצת התלמידים המנגנים,

*A2* ־ קבוצת התלמידים המציירים;

אזי ^4 היא קבוצת התלמידים שאינם מנגנים,

ו־ r היא קבוצת התלמידים שאינם מציירים.

^04^4 היא קבוצת התלמידים שגם אינם מנגנים וגם אינם מציירים.

**Q** האוניברסיטה כמחפת! ח ה

מספרם:

421+h1M21|־11!/|־|/1| -

53 ־ 8\*100-30-25 -

53 תלמידים בקבוצה הנתונה אינם מנגנים ואינם מציירים.

שאלה 4.3

כמה מספרים ביו 1 ל-3000 אינם מתחלקים לא ב־3 ולא ב־5?

התשובה בעמוד 177

שאלה 4.4

כמה מספרים ביו 1 ל-3000 אינם מתחלקים לא ב־3, לא ב־5 ולא ב־7?

התשובה בעמוד 177

שאלה 4.5

רשום נוסחה עבור 441ט*Av*u/l2u43|, הדומה לזו שרשמנו עבור | 43ט42ט !I/ | .

התשובה בעמוד 177

שאלה 4.6

בבית ספר מסוים יש 200 לומדי צרפתית או איטלקית, או שתי השפות הללו. ידוע שבבית הספר יש 150 לומדי צרפתית י־70 לומדי איטלקית. מהו מספר לומדי שתי השפות?

התשובה בעמוד 178

שאלה 4.7

בכמה מספרים בני 4 ספרות יש לפחות ספרה אחת 2, ספרה אחת 3 וספרה אחת 4?

התשובה בעמוד 178

שאלה 4.8 (פתורה) -

מהו מספר התמורות של הספרות 1,2,4,6 אשר הספרה הראשונה שבהן גדולה מ-1 או שהספרה האחרונה שבהן קטנה מ־3 ?

פתרון

נסמן: *U* - קבוצת כל התמורות של הספרות 1,2,4,6; 24=!4=|U|.

4r - קבוצת התמורות שבהן הספרה הראשונה גדולה מ-1;18^3\*3=^14 (במקום הראשון בתמורה כזו יכולה להופיע כל אחת מהספרות 2,4,6 ).

*A2* - קבוצת התמורות שבהן הספרה האחרונה קטנה מ־3;12״!2-3»|42|.

הקבוצה 2^4 מכילה את כל התמורות, שבהן הספרה הראשונה גדולה מ-1 והספרה האחרונה קטנה מ־3.

אם הספרה האחרונה היא 1, הספרה הראשונה יכולה להיות כל אחת מהספרות הנותרות. לפיכך, יש 6=31 תמורות כאלה. אם הספרה האחרונה היא 2, במקום הראשון יכולות להופיע הספרות 4 ו-6 בלבד, ומספר התמורות שכאלה הוא 4=!2\*2. לכן 10=4\*6=1 2^,14.

הקבוצה 42ט,4 היא הקבוצה המבוקשת. מספר איבריה הוא:

20 = 18+12-10 = |42ח41|-|42|\*|,4| = |42ט,4|

נרשום את כל התמורות.של 4 הספרות הנתונות, שמקיימות את תנאי הבעיה, ונבדוק בדרך זו את הפתרון שלנו:

,2641 ,2614 ,2461 ,2416 .2164 ,2146} ־ ,4

,4621 ,4612 ,4261 ,4216 ,4162 ,4126

{6421 ,6412 ,6241 ,6214 ,6142 ,6124

,6421 ,6241 ,4621 ,4261 ,2641 ,2461} = 42

{6412 ,6142 ,4612 ,4162 ,1642 ,1462

התמורות המודגשות בקו הן התמורות בחיתוך ^4. מספרן הוא 10.

לו נשאלנו על מספר התמורות של 1,2,4,6 , אשר הספרה הראשונה שבהן אינה גדולה מ-1 והספרה האחרונה אינה קטנה מ־3, אפשר היה לחשב זאת באמצעות הנוסחה:

|42ח41|\*|42|־|41|־|ע| ־ |׳4ה;4|

4 = 12+10־18־24 ־

אלה הן התמורות 1624 ,1426 ,1264 ,1246 .

טאלה 4.9 (פתורה) ■ ■

כמה מספרים שלמים וחיוביים, הקטנים מ־30, זרים ל־30?

תזכורת: שני מספרים שלמים זרים זה לזה, אם אין להם מחלק משותף פרט ל-1.

פתרו ן

5• 3•2=30 , לכן המספרים שאינם זרים ל-30 חייבים להתחלק באחד מן הגורמים 5.3.2 לפחות.

נסמן: 12/ - קבוצת השלמים ביו 1 ל־30, המתחלקים ב-2 (כל המספרים

15־21\*1

הזוגיים בין 2 ל־30);

d3 - קבוצת השלמים ביו 1 ל-30, המתחלקים ב־3; 10= | l-4-j

15/ - קבוצת השלמים ביו 1 ל-30, המתחלקים ב־5י 6=|5^|

A2M3 היא קבוצת כל המספרים השלמים ביו 1 ל־30, המתחלקים גםב-2 וגם ב־3, כלומר מתחלקים ב-6. 5=|43ה42|. באופן דומה נמצא 3־|45ח2\*| ו- 2=|45ה3\*|.

לבסוף, 1\*|45ה43ה42| ;החיתוך מורכב מהמספר 30 בלבד).

אנו רוצים לדעת, מהו מספר המספרים השלמים ביו 1 ל־30 הזרים ל-30. קבוצת המספרים הללו היא הקבוצה ׳4ח׳4ח׳42 (המספרים שאינם מתחלקים לא ב-2, לא ב־3 ולא ב־5), ומספר איבריה הוא:

־ |׳1/ח׳4ח׳\*|

1 2 3 5'

~ |l/H\*2H\*3H\*5H\*2"\*3H\*2"\*5l + l\*3M5H\*2n\*3"\*5l ־

= 3O-15-1O-6+5+3+2-1 « 8

שמונת המספרים האלה הם 1,7.11,13.17.19.23.29, אלה הם (ובמקרה שלנו זה לא במקרה) המספר 1 והמספרים הראשוניים הקטנים מ-30, פרט ל-2, 3 י־5 כמובן.

טאלה 4.10

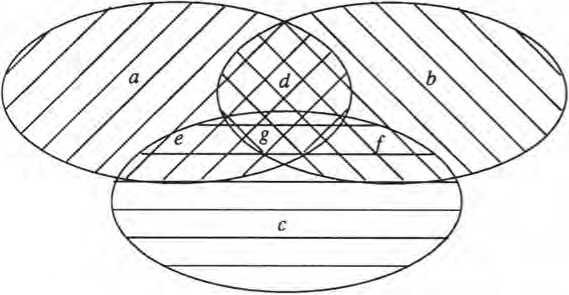
כמה מספרים שלמים וחיוביים קטנים מ־1001 זרים ל-1001?

התטובח בעמוד 179

בבית ספר, שבו לומדי□ 120 ילדים, התקיימו בשנת הלימודי□ שלושה טיולים: א', ב' ו-ג'. לטיול אי יצאו 40 תלמידים, לטיול ב' יצאו 40 תלמידים וגם לטיול ג' יצאו 40 תלמידים. 20 תלמידי□ יצאו רק לטיול א', 20 תלמידי□ יצאו רק לטיול ב', ו־15 תלמידי□ יצאו רק לטיול ג י. 10 תלמידים יצאו לטיולי□ א' ו-ב י. כמה תלמידים יצאו לשלושת הטיולים, וכמה תלמידים לא יצאו לאף טיול?

פתרו ן

לפתרון הבעיה ניעזר בדיאגרמת ו ן (ראה איור).



שלושת האזורים מתארי□ את הקבוצות של משתתפי טיול א', ב' ו-ג', בהתאמה. נסמן את השטחי□ השונים של הדיאגרמה באמצעות אותיות, אשר יסמנו גם את מספר האיברים (התלמידים) שבכל שטח (קבוצה).

נתרגם את נתוני הבעיה למשוואות:

1. a+d+e+g = 40
2. *b+d+f+g* = 40
3. *c+e+f+g -* 40
4. *a* 20 ״
5. *b* 20 ־
6. *c* = 15
7. d+g = 10
8. *U =* 120

אנו מחפשים את g, ואת המשלים של איחוד כל הקבוצות המסומנות באותיות *a-n* עד g. לשם כך נפתור את המשוואות.

נציב במשוואה (i) את הנתונים (vll)-i (iv) -

(ix)

20+10+e =40 => *e* = 10

ת ה **in** ה פ **GO**

Gilad Barnea

ובמשוואה (ii) את הנתונים (vii) ,(v) -

10 » / <- 40־־ /\*20+10 (x)

מהמשוואה (iii) מקבלים (בעזרת x ,ix ,vi):

5 ־■ 40 «> *g* ־ 15+10+10+g

מספר התלמידים במשלים לכל הקבוצות הנ״ל הוא:

120 - (a+b+c+d+e+/+g)

כלומר:

35 ־ (10\*10\*10\*20+15\*20)-120

שאלה 4.12

מתוך 30 ילדים, 20 לומדים ציור, 14 לומדים מוסיקה ו-10 לומדים ריקוד. אף ילד אינו לומד את כל שלוש האמנויות, ו-8 ילדים אינם לומדים אף אחת מהן. כמה ילדים לומדים מוסיקה וריקוד?

התשובה בעמוד 179

4.2 המקרה הכלל•

את הדוגמאות ואת הנוסחאות, שהובאו בסעיף הקודם, אפשר להרחיב ל-מ קבוצות כלשהן 41,42,...,4n .

עבור 4=n מקבלים (ראה שאלה 4.5):

= | 4^ט13?ט42ט !4|

\* | 44ח 143 ~ | 44ח 42- | ־\* | 43ה 2^ | \_| 44ח !1? | ־ | 4 jח ן 42 | - | *A*ח Aj | ~

- | 44 | ♦ |>12r^43rv44ח43ח !4-| \* | 44ח42ח ג4| + | 43ח42ח ן24| +

| 44ח43ח42ח ן4| -

לפני שניגש להוכחת הנוסחה הכללית, נבדוק מקרה פרטי זה.

נניח כי איבר מסוים *a* שייך רק לקבוצה X3.

ב-2441ט3^ט42״ט !^| הוא נספר בדיוק פעם אחת, כמו כל איבר אחר ששייך לאחת - או יותר - מן הקבוצות הנ״ל.

באגף הימני של השוויון לעיל, *a* נספר בדיוק פעם אחת ב-|3^|. הוא אינו שייך לאף אחד מהחיתוכים שבאגף הימני, ולכן גם אינו נספר שם.

נניח שאיבר *b* נמצא בכל 4 הקבוצות. באגף שמאל הוא נספר, כמובן, פעם אחת.

באגף ימין הוא נספר פעם אחת בכל אחד מן הביטויים, לכן בסך הכל הוא נספר -

1 ־ 4-6+4-1

כלומר, פעם אחת כפי שדרוש.

נניח עוד, שאיבר c מופיע ב-!^, *A2* ו־43.

באגף שמאל הוא נספר פעם אחת.

באגף ימין הוא מופיע פעם אחת בכל אחד מהביטויים 411|, |12/|, |13/|, 43| , |/JjfL43| , |A1n421ה42| ו- |43ח42ח41|. בסך הכל -

1 - 1\*3־3

כלומר, פעם אחת כפי שאכן דרוש.

הדוגמה הזו מובילה לניסוח מטפס ההכלה וההפרדה, לגבי מ קבוצות סופיות *Al,A2,...,An* , ולהוכחתו.

לניסוח המשפט נשתמש בסימנים הבאים:

סכום מספרי האיברים בכל *n* הקבוצות:

סכום מספרי האיברים בכל

סכום מספרי האיברים בכל

חיתוכים של שתי קבוצות מתוך ה-ה;

S2 = ) I*A* j rv4j |

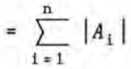
חיתוכים של שלוש קבוצות מתוך ה-וז:

S3 = ) rv4j n4״k |

1<1<J <k<n

מספר האיברים בחיתוך כל *n* הקבוצות:

Sn = |^xnA2n.. .r\*4n |



משפט ההכלה וההפרדה נתונות *n* קבוצות סופיות *AX,A2,...,An .*

מספר איברי קבוצת האיחוד 41u42u...u4n הוא:

n

12411 משפט ההכלה וההפרדהM2U.. .4ט" | = S! -S2♦S3-S4♦. . .+(-l)n\* 1S1־1(!-) ( = ״S!

1•!

הוכחה יהא a איבר כלשהו, המופיע *2-h* קבוצות מתוך ה־מ הנתונות.

באגף השמאלי של הנוסחה, *a* נספר פעם אחת.

באגף

כלומר

ימין: ב-^,  
*h* פעמים, או

*a* נספר בכל אותן *h*

1 \*

הקבוצות

בהן הוא מופיע,

ב-52,

*a* נספר פעם

אחת בכל חיתוך

של

הוא מופיע, ורק בחיתוכים האלה.

*h*2

נספר כאן

(X • ^3 ~

שבהן הוא

יש

2 קבוצות

*h*

*2*

מתוך *h-n,* שבהן

חיתוכים כאלה, ולכן a

פעמים.

נספר פעם אחת בכל חיתוך

של

מופיע, ורק בחיתוכים האלה.

*h*.3

כך נמשיך עד שנגיע ל־511, ששם *a* נספר

3 קבוצות מתוך

*h* 3

*h* הקבוצות,

יש

חיתוכים

כאלה, ולכן

*a* נספר כאן

פעמים.

בדיוק פעם אחת

- בחיתוך *h*

הקבוצות שבהן הוא מופיע.

ב-1)״3, 2,Sh וכוי *a* לא נספר כלל, כיוון שבכל אוסף של יותר *h-a* קבוצות יש קבוצה אחת לפחות שאינה מכילה את a, ולכן החיתוך של הקבוצות האלה אינו מכיל את a.

מספר הפעמים ש- *a* נספר באגף הימני, הוא אפוא:

h-1 *h*h

כי עבור כל *h* מתקיים: כלומר, *a* נספר גם באגף הימני פעם אחת, כדרוש. הדבר נכון עבור כל איבר שהוא ועבור כל *h* שהוא, ולכן הנוסחה הוכחה.

ראה עמוד **71.**

את הנוסחה שבמשפט אפשר גם לרשום בצורה:

|4׳M׳n...rwT| = | ע| -S! +S2-S3+

+(־l)nSn

הוכח את הנוסחה האחרונה.

התשובה בעמוד 180

הערה: השם עקרון ההכלה וההפרדה מקורו בהכלה ובהוצאה (הפרדה) לסירוגין של חיתוכים "עוקבים" של הקבוצות שבדיון (באנגלית:

inclusion-exclusion principle).

להלן יודגמו שימושים שונים של המשפט.

שאלה 4.14 (פתורה) = מטילים *n* קוביות שונות.

1. מהו מספר התוצאות של ההטלה?
2. מהו מספר התוצאות האפשריות, בהן מופיע כל אחד מהמספרים 1 עד 6 לפחות פעם אחת?

פתרון

1. 6n
2. נסמן ב-^" עד את קבוצות התוצאות של ההטלות שבהן המספרים 1 עד 6, בהתאמה, אינם מופיעים.

עבור *כל t* מ-1 עד 6 מתקי’□ 5) Hilx5n תוצאות אפשריות בכל קוביה).

עבור כל זוג 6>1<£<J מתקיים 4l(MJ|=4n|.

עבור כל שלישיה מתקיים "3= |1!rvljru4k?|.

באופן דומה, מספר האיברים בחיתוך של כל ארבע קבוצות שונות הוא "2.

בחיתוך של חמש קבוצות שונות יש רק איבר אחד (כל תוצאות ההטלות שוות זו לזו, ושוות למספר השישי שנשאר) .

מספר האיברים בחיתוך כל הקבוצות הוא 0.

לכן, המספר המבוקש של האפשרויות הוא:

6 ־n-65־n\* (51 •4n-[51 •3n♦ [51 •2n1• 51]־ 123456' *(2 J* (3 J I" J [5.

= 6n-65־n+15’4n-203־n+152־n-6

שאלה 4.15

הוכח שמספר האפשרויות לפזר *n* כדורים שונים באופן שלפחות תא אחד ישאר ריק, הוא k-i)n) .

*.3-k* תאים שונים,

רמז: הפתרון אנלוגי לפתרון השאלה הקודמת.

התשובה בעמוד 180

4.2.1 אי-סדר מלא

תמורה של *n* מספרים מ,...,1,2 נקראת אי-סדר מלא, אם אף מספר אינו נמצא במקומו. למשל התמורה הבאה:

אי-סדר מלא

12 3 4 5 6

2 3 4 5 6 1

היא אי-סדר מלא. וכן גם התמורה הבאה:

6 5 4 3 2 1

5 3 6 14 2

לעומת זאת, התמורה 2431 אינה אי-סדר מלא, כי היא משאירה את המספר 3 במקומו.

עקרון ההכלה וההפרדה מאפשר למצוא מהו מלא.

מספר התמורות שהן אי-סדר

נסמן ב-41י את קבוצת התמורות, שבהן המספר *i* נשאר במקומו. !(m-I)\*)^! (שים לב: ייתכן שגם מספרים אחרים נשארים במקומותיהם בתמורות האלה).

XjMj היא קבוצת כל התמורות, שבהן שני המספרים *i* נשארים במקומותיהם (אולי גם מספרים אחרים, אבל *I* ו-^ בהכרח). מספר איברי הקבוצה הזו הוא כמספר התמורות של *2-n* מספרים, כלומר !(2-ת).

באופן דומה !(3-41rvlJn4k| = (n| וכוי.

קבוצת התמורות, שהן אי-סדר מלא (אף מספר אינו נשאר במקומו), היא:

׳ 4״ח.. .ח׳ 4ח׳ 4

1 *2* n

ומספר האיברים בקבוצה הזו, בהתאם לעקרון ההכלה וההפרדה, הוא:

nl-n(n-l)!♦ (n-2)!-[” (n1־ ” "(1־)♦...♦!(3־

אבל -

nl, , >, n! , .v, n!

לכן המספר המבוקש הוא:

\*י,,\* !3 ~ !2 + !1 “ 1 !מ

עבור *n* גדול, הביטוי בסוגריים קרוב מאד ל-1^, ואנו מקבלים כקירוב טוב למספר התמורות של ח איברים, שהן אי-סדר מלא, את המספר !ת37.ס׳—.

אם המספר **e** אינו סוכר לך, מצא את הגדרתו (ואת חישובו) בקורס חשבון אינפיניטסימלי, למשל, או בקורס חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי למדעים.

שאלה 4.16

מזכירה שמה *n* מכתבים ב־מ מעטפות ממוענות, בלי לקרוא את הכתובות. מהו מספר האפשרויות שאף מכתב לא יגיע לתעודתו?

התשובה בעמוד 181

שאלה 4.17

מהו מספר האפשרויות לבחור 5 קלפים מתוך 52 הקלפים שבתפיסה, כך שיהיה ביניהם לפחות קלף אחד מכל אחד מארבעת הסוגים?

התשובה בעמוד 181

שאלה 4.18

מפזרים 25 כדורים זהים בין 6 תאים שונים. מהו מספר התוצאות, שבהן כל אחד משלושת התאים הראשונים מכיל לכל היותר 6 כדורים?

התשובה בעמוד 182

שאלה 4.19

מהו מספר התמורות של המספרים מ-1 עד 10, שבהן אף מספר אי-ז ו גי

אינו נמצא במקומו? (המספרים הזוגיים יכולים להיות בכל מקום

שהוא).

התשובה בעמוד 183

4.2.2 הפונקציה של אוילר

נסמן ב-(ח)0, כאשר {0}-n€N, את מספר המספרים השלמים החיוביים הקטנים מ־מ והזרים ל־מ.

פונקציה זו נקראת הפונקציה טל אוילר. להלן כמה ערכים שלה, עבור 71-«ם שונים:

| n הפונקציה של אוילר | (ה)5 | המספרים השלמים *k,* הזרים ל-ה והמקיימים l<k<n |
| --- | --- | --- |
| 2 | 1 | 1 |
| 5 | 4 | 1. 2, 3, 4 |
| 12 | 4 | 1, 5. 7. 11 |
| 120 | 32 | 1, 7. U. 13. 17, 19. 23, 29, 31.  37, 41, 43, 47. 49, 53. 59. 61, 67. 71. 73. 77. 79. 83. 89. 91.  97. 101, 103, 107. 109. 113. 119 |

תזכורת: נוספו־ הוא זי­ל •וז, א□ המסלק המשותף הגדול ביותר שלו ושל **n** הוא **1.**

נחשב את (120)5 בעזרת עקרון ההכלה וההפרדה. (השווה לשאלות

4.9 ו-4.10.)

נפרק את 120 לגורמים ראשוניים: 5״3\*23 - 120

נסמן ב-43,42י,45 את קבוצות השלמים בין 1 ל-120 המתחלקים ב-2, ב־־3 וב־5, בהתאמה. מתקיים:

24־^־|45| ; 42|-^-60 ; |A3|-^-4O|

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 43ח42 היא | קבוצת | השלמים | בין 1 | ל-120 המתחלקים גם ב-2 וגם ב־3, |
| כלומר ב־6. | מכאן: | 20 | 120  T “ | = |43ח42| |
| וכו: |  | 12 | 120  10 \* | ־ |45ח42| |
|  |  | 8 | 120  15 ’ | 1^3^5 1 ~ |

לבסוף, 42M3M5 היא קבוצת השלמים בין 1 ל-120, המתחלקים ב-2, ב־3 וב־5 . 2. 3 י ־5 הם שלושה מספרים זרים זה לזה. לכן, מספר מתחלק בשלושתם, אם ורק אם הוא מתחלק במכפלתם 2\*3‘5x3O . מכאן:

4 \* = 151/ח43ח42|

שווה למספר האיברים בקבוצה **׳ru4׳4'rv4** (אלה אינם *מתחלקים* **5 3 2**

**(120)5**

לא ב-**2,**

מ-**1,** עם

לא ב־**3** ולא ב־**5 -** לכן אין להם מחלקים משותפים, גדולים

**120).** לפי הנוסחה:

**32 • 24+20+12+8-4־40־120-60** ■י **|׳4**ח׳**4**ר>׳**4| '5 3 2** י

(השווה לטבלה של *(e(n* לעיל).

אם הגורמים הראשוניים של *n* הם **pk P! ,P2** (כל אחד מספר

רצוני של פעמים), הרי מספר שלם מסוים בין **1** ל-ת זר ל־מ, אם ורק

אם אף

אחד

מהגורמים הראשוניים

הללו אי נו מחלק אותו.

*A. אם*

היא

קבוצת השלמים בי ן **1**

(מן הראוי

לציין שבין

שו נה *pL-n.* הגדרנו ב-1ק, בלי להתייחס לכך ראשוני ים אחרים של ח).

את

ל*-n* המתחלקים ב-1ק, אזי יש גם מספרים המתחלקים ב־נק כקבוצת כל המספרים בין **1** ל-ת המתחלקים אם חלק מהם מתחלק או אינו מתחלק בגורמים

איברי

**rv4j** היא וגם כ־גק.

קבוצת המספרים השלמים בין **1** ל־מ המתחלקים גם ב-ןק לכו,

בגלל העובדה

**pj-1** *pl-v* הם מסברים ראשוניים -

*n*

P!Pj

וכך הלאה,

שלושה ויותר

גורמים ראשו ני ים של

ח.

המספרים השלמים

בין **1** ל-מ,

הזרים ל-ת, הם אלה

שאינם מתחלקים

באף כלומר,

המספרים שבקבוצה

׳ nd.. .ח׳ 4ח׳ 24 2 k ־

לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מספר (השווה לדיון עבור **120=**מ ):

האיברים **(0(n**

בקבוצה זו הוא

pi 1<1tr<kp^pj

1<1<J <h<kP1PJPh

k

PlP2---Pk

-+ K —  
p! 1<17T<kp!pJ

1 <i <j <h<kP1PJPh

k

P1P2•••Pk

i-)(l - ±-) .. ־ 1}מ • Pl P2

**1**

Pk

האוניברסיטה

Gilad Barnea



מאלה 4.20

הוכח את המעבר האלגברי האחרון בחישוב הנ״ל. התשובה בעמוד 183

עבור 120=ה נמצא בעזרת הנוסחה האחרונה: **4 12 1 1 1**

32 - ־•־•120-i ־ (l-i)(־־0(120) = 120(l-i)(l

שאלה 4.21 חשב:

א) (30)0

ב) (1001)0

(השוה לתוצאות בשאלות 4.9 ו-4.10.)

ג) (7־5־2-3)0 - (210)0

ד) (7־52־32•23)0 - (12,600)0

ה) (1,000,000)0

התשובה בעמוד 183

4.2.3 משוואות לינאריות עם פתרונות במספרים שלמי□

בשאלה 2.58 מצאנו, כי מספר הפתרונות של המשוואה -

x! + x2 + ... + xn 1 *k*

שהם מספרים שלמים המקיימים -

\*2>a2 «n>an

הוא:

n-l+k-a.-a,-...-an] .

״ - (D(n,k-a1-a2-...-an

את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה הזו, המקיימים תנאים מהצורה הבאה:

• a21I21b2’ ••• • anlXnl^n

אפשר למצוא על-ידי שימוש בעקרון ההכלה וההפרדה.

שאלה 4.22 (פתורה) — ■

מצא את מספר הפתרונות השלמים של המשווא־ז:

25 - x! + x2 + x3+ x4

המקיימים 10>0<x2£8 , ~2<x3<3 , 6<x4 , •

פתרו ן

נעבור למשתנים חדשים על־ידי ההצבה:

*x1=yl^l , x2=y2 , Xj=y3~2 ,* x4=y4+6

נציב אותם במשוואה הנתונה, ונקבל:

20 = 4ע\*3ע+2ע+!ע

הנעלמים במשוואה שהתקבלה חייבים לקיים את התנאים הבאים:

4>4ע>0 , 5>3ע>0 , 8>2ע>0 . 5>!ע>0

נסמן ב-^ את קבוצת הפתרונות בטבעיים של המשוואה שקיבלנו, המקיימים את התנאי *6<!y* (בפתרונות שב-ן!/ אין שום הגבלות על המשתנים האחרים, פרט לכך שיהיו מספרים טבעיים). ב-42" נסמן את קבוצת הפתרונות בטבעיים *המקיימים 9<y2,* ב־43> את אלה המקיימים 6<3ע, וב-244 את אלה המקיימים 5<4ע (כמו עבור גם עבור *A2,* 13/ ו-44 ההגבלות היחידות הן אלה שפורטו).

הפתרונות המקיימים את דרישות השאלה מהווים את הקבוצה -

**׳, ׳ 4**ר! ׳ **׳ 4״**

**4 3 12**

למציאת מספר איברי הקבוצה הזו נחשב את הערכים הדרושים לנו

להצבה בנוסחה של עקרון ההכלה וההפרדה:

ס־־ ־ ־ ף1:ד

(4,20-6)d = ן

Hi

אנו משתמשים כאן בנוסחה שפותחה בעקבות שאלה 2.58.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 4-1+11  4-1 |  | 14  3. | = 364 |
| 4-1+14 4-1 | = | 17 . 3. | = 680 |
| 4-1+15 4-1 |  | 18' . 3, | 816 ־ |

H2I = D(4,209־) =

|A3| = D(4,20-6) ־

H4 I = D(4,2O5־) =

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| = (4,20-6-9)42| = Dח^| | 4-1+5  . 4-1 . | **»** | 8  .3. | 56 ־ |
| = (4,20-6-6)D ־ |43ח!4| | 4-1+8 . 4-1 | **s** | 11  . 3 | = 165 |
| H!n44| ־ d(4,20-6-5) = | 4-1+9 . 4-1 | **=** | 12  . 3 | = 220  « |
| = (6־4,20-9)D ־ i42rv431| | 4-1+5 . 4-1 . |  | 8  .3. | - 56 |
| = (5־9־4,20)D ־ |44ח242| | 4-1+6 . 4־I . |  | 9 .3. | 84 ־ |
| |-43n441 « D(4,20-6-5) = | 4-1+9 . 4-1 | **=** | 12 . 3 | = 220 |

מבין 4 החיתוכים של שלוש קבוצות, 3 אינם ריקים:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| H!nA2M4 | | = D(4,20-6-9-5) = | י4-1+0  3 . | 3 | ■3'  .3. | = 1 |
| |41n43ru44 | | = D(4,20-6-6-5) = | 4-1+3 . 3 | **=** | '6  ג3. | = 20 |
| |d2M3ru44 | | = (6-5־4,20-9)d = | 4-1+0  . 3 | **=** | י3.3. | = 1 |

החיתוך של כל 4 הקבוצות הוא ריק.

מספר האיברים בקבוצה האוניברסלית *U* הוא:

*ן2 = 2°\*!־4* = (4,20)ס = ןען

= 1771

וכעת נוכל לחשב בעזרת נוסחת ההכלה וההפרדה:

= 364-680-816+56+165+220+56+84־680־1771 =

10 = 220-1-20-1+

נרשום את 10 הפתרונות (ב-ע-ים):

(5,8,5,2), (5,8,4,3), (5.8,3,il). (5,7.5,3)

(5,7,4,4), (5,6,5.4), (4,8,5,3). (4,8,4,4)

(1♦,7.5,1!), (3,8,5,4)

שאלה 4.23

מצא את מספר המספרים בני 7 ספרות, שסכו□ ספרותיהם הוא 19 (אין

להתחיל מספר ב-0).

התשובה בעמוד 184

שאלה 4.24

הראה כי מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה Xj+x2+x3+xA+x5=k ,

המקיימים (1,2,3.4,5=£), הוא:

k+4  
4

5 [k־b+3 lj 4

21+<2£־4] 51

.2ll4 J

fk3־t׳+l

I

'51 fc-4b

Ml

k-5b-l . 4



הכלל את התוצאה למשוואה ב־מ משתנים.

התשובה בעמוד 185

**4.3** המקרה הכללי - המשך

נוכיח עתה עבור עקרון ההכלה וההפרדה נוסחה כללית יותר מזו שרשמנו בסעיף הקודם, ונדגים כמה משימושיה.

תהי נתונה קבוצה *U* של מ איברים, אשר כל אחד מה□ יכול לקיים אחת, שתיים, שלוש וכוי מהתכונות *Pt ,P2,...,Pt,* או לא לקיים אף אחת מהן .

**(W(Pj** הוא מספר איברי **U,** המקיימים את התכונה *Pt* (ואולי גם תכונות נוספות).

הסימון שאנו משתמש<ם בו הוא הסימון המקובל בספרי קומבינטוריקה. הדנים בנושא זה.

**(W(PiPJ** הוא מספר איברי **U,** המקיימים את שתי התכונות **Pj** ו- **P** גם יחד (ואולי גם תכונות נוספות).

**(W(PjPjPk** הוא מספר איברי **U,** המקיימים את שלוש התכונות **Pj, ,Pk ,P** (ייתכן שהם מקיימים גם תכונות נוספות); וכך הלאה.

(/?)W מסמן את מספר איברי U, שאינם מקיימים את התכונה !P (אין שום התייחסות לתכונות אחרות).

(PkPh׳W(PjPj מסמן את מספר איברי *U,* שכל אחד מהם מקיים את התכונות 1 *Pl*־Ph ואינו מקיים את התכונות Pj ו->1? (גם כאן, בלי להתחייב בקשר לתכונות האחרות).

וכך הלאה.

שאלה 4.25

הוכח שבסימון לעיל:

א) (*n* - W(PJ - W(Pj) ♦ W(P!Pj ־ (׳W(P/Pj

ב) ♦ (W(P!) - W(Pj) - W(Pk *־ n* ־ (;WfP/PJP

(W(PxPj) ♦ W(PtPk) + W(PjPk) - W(PtPjPk ♦

התשובה בעמוד 185

שאלה 4.26

הכלל את הנוסחאות המופיעות בשאלה 4.25.

התשובה בעמוד 185

נסמן W(rH את מספר האיברים, שכל אחד מקיים לפחות r תכונות

כלשהן מתוך *t* התכונות Pt PltP2:

W(r)= w(p1 p1 )

1 2 r

כאשר לסכום תורמות כל

התת־קבוצות {*tx ,t2 ,...*,ir} של

*{t* 1,2}. למשל:

*(t* מחוברים)

W(l) = W(P1)+W(P2)\*...+W(Pt)

W(2) ־ W(P1P2)\*W(P1P3)\*...\*W(Pt\_!Pt) (מחוברים \* )

וכך הלאה. מסמנים גם W(0)=n .

יש לשים לב, שאיבר עשוי להיספר כמה פעמים באותו (W(r, שהרי (W(r אינו בהכרח מספר האיברים המקיימים בדיוק *r* תכונות. למשל: כל איבר המקיים את !P ואת P2 ונספר ב-(2^?)^ יכול לקיים עוד תכונות, ולכן נספור אותו גם באיברים אחרים של הסכום (2)W.

לציון מספר האיברים המקיימים בדיוק תכונה אחת, שתי תכונות, שלוש תכונות וכוי משתמשים בסימון הבא:

**(E(m** הוא מספר איברי *U,* המקיימים כל אחד בדיוק **m** תכונות כלשהן מתוך *t* התכונות.

כל אחד מהאיברים הנספרים ב-(ןק)£ יכול לקיים **m** תכונות שונות, ללא הגבלה. ההתחייבות היא רק על כך שיקיים בדיוק **m** תכונות.

בהתאם להגדרה זו ולסימונים הקודמים מקבלים:

**(׳?...^E(0) = WCP/P**

**(0)E** הוא מספר האיברים שאינם מקיימים אף תכונה.

את מספר האיברים, המקיימים תכונה אחת בלבד, אפשר לרשום כך:

**( P...׳P׳P׳W(P + ... +(׳P...׳P P׳W(P +(׳P...׳P׳E(l) = W(P P 123 t '123 t 123 t' ׳ '**

כלומר, כמספר האיברים המקיימים את **Pj** ואינם מקיימים אף תכונה אחרת + מספר האיברים המקיימים את **P2** ואינם מקיימים אף תכונה אחרת, וכך הלאה.

מספר האיברים, המקיימים (כל אחד מהם) את *כל t* התכונות, הוא:

*(E(t)* **= W(P1P2...Pt**

הסימון שהוצג כאן מאפשר לנו לנסח את עקרון ההכלה וההפרדה בצורה כללית, כדלקמן:

משפט

**E(m)**

W(m+1)+ *m W(m+2}-*

W(t)

הוכחה

יהי *a* איבר של *U,* ונניח ש-׳ס מקיים בדיוק *q* תכונות מתוך *t* התכונות הנתונות.

אם *q<m* , האיבר **a** אינו נספר באגף שמאל של השוויון שבמשפט. אבל הוא גם אינו נספר באגף הימני, כי שם נספרים רק איברים המקיימים *m* תכונות לפחות (למשל: **(2+W(m** כולל את כל האיברים המקיימים **2+m** תכונות לפחות, ועליהם *a* איננו נמנה).

אם *a , q=m* נספר פעם אחת באגף שמאל. הוא נספר פעם אחוז בלבד גם

באגף ימיו, שכן הוא מופיע רק במחובר

כאשר *PL***q**

,P 1

*P* הו אותן *q*

q

התכונות

... !W(m)^ W(Pt P **2 1**

אשר *a* מקיים.

אם *q>m,* האיבר *a*

אי

נו נספר באגף

השמאלי

באגף

הימני

*a* נספר

**(»)E** הרי הוגדר כמספר איבריו שיל *U* המקיימים בדיוק **m** תכו נוח.

^(a W(m נספר

פעמים, אותם

נרשום בצורה

ההמשך

W(m+1) -ב

W(m+2) -ב

m+1  
*m*

m+2  
*m*

נעצור לרגע

למשל, הוא מספר

המקי ים

מתוך *q*2+m

m

*a* נספר

*a* נספר

להסביר

האיברים

q  
m+1

<7  
m+2

m+1  
*m*

m+2  
m

פעמים

פעמים

כיצד מתקבלים מספרים

המקיימים 2+m

תכונות

אלו

W(m+2)

*q* תכונות, מקיים את כל הצירופים

התכונות הללו. המספר של צירופים

הוא

המקדם של (2+W(m בביטוי

לכו

ימי ו הוא

כך ממשיכים

W(q+l)-3

ימיו, נתון

האפשריים

כאלה הוא

שבאגף ימין

מספר הפעמים ש-ס נספר

q  
m+2

m+2

׳״ .

ל־3+מ, 4+m וכן הלאה

(2+W(q וכוי)

על-ידי הסכום

נשתמש עתה בזהות

*q-m  
h*

במחובר (2+W(m

של 2+m תכונות q

2+\* (m

וחייבים

m+2  
m

הגורם

לכפול

שבאגף

מספר

Q  
m+2

ן— הוכחת הזהות:

q!m!h!*(q-m~h)!*

q] (q׳״־

m *h*

עד *q* (ברור

הפעמים

*m+h  
m*

ש-2>

ש-׳ס

אינו

נספר

נספר

באגף

q  
m+1

Q  
m+h

m+1  
m

*ql t (m+h)!* (m+h)!*(q-m-h)!* m!*•hl*

. (q״־»)! = m!(q-m)! h!(q-m-h)!

q m+h

לגבי כל אחד מאיברי הסכום אנו מקבלים:



לאחר שנחבר, נוציא

*q-m q-m*

*q-m*0

<7 *m*

<7 *m*

*q-m*1

*q-m  
2*

<7

<7 *m*

*q-m q-m*

m+1  
*m*

m+2  
m

<7  
m+1

*(J*m+2

*<1*

*q.*

לפני הסוגריים, ונקבל בסופו של דבר:

*q-m*2

*q-m*1

*q-m . °*



בהתאם לזהות הידועה

הסכום בסוגריים הוא 0. לכן, סכום הפעמים

סכום זה הריהו פ״תווז הב<נו□ **״■־1(1-1),** ראה עמוד **71.**

שהאיבר a נספר באגף הימני הוא 0.

בזה הוכחה הנוסחה שבמשפט.

אם נציב בנוסחה 0=m , כלומר, נשאל על (0)E, שהוא מספר איברי *U* שאינם מקיימים אף תכונה מהתכונות השונות שבדיון, נקבל -

(\*)1W(!־) + ... ♦ (3)W(l) + W(2) - W - מ־ (0)E

הנוסחה שקיבלנו היא בדיוק נוסחת עקרון ההכלה וההפרדה, כפי שהכרנוה קודם. הנוסחה של המשפט האחרון היא אפוא הכללה של עקרון ההכלה וההפרדה.

שאלה 4.27 (פתורה) ... .

מפזרים *k* כדורים שונים ב-ה תאים שונים. מה מספר האפשרויות בהן יישארו בדיוק m תאים ריקים?

פתרו ן

נסמן: !? היא התכונה: התא הראשון נשאר ריק.

*P2* היא התכונה: התא השני נשאר ריק.

*Pn* היא התכונה: התא ה-מ-י נשאר ריק.

אנו מחפשים את **(E(m** (מספר הפי זורים שבהם מתקיימות בדיוק *m* תכונות מהנ"ל, כלומר נשארים בדיוק *m* תאים ריקים.) כדי להשתמש בנוסחה:

**E(m)**

**W(771)־**

**771+1  
77!**

**W(m+1)+**

**771+2  
77!**

**W(m+2)־**

*n-m* מ *m*

**W(n)**

נרשום את **(W(h,** כאשר *m<h<n,* בצורה -

W(h) = *" (n-h)k*

(הסבר: *h* תאים נשארים ריקים - יש אפשרויות לבחור אותם.

לאחר בחירת *h* התאים, מפזרים את *k* הכדורים השונים ב- *n-h* התאים האחרים - זאת ניתן לעשות ב-^(ו/-ח) אופנים שונים. בפיזור כזה

גם תאים נוספים יכולים להישאר ריקים, אבל מצב כזה איננו מפריע, כי **(W(h** סופר את מספר הפי זורים שבהם מובטח שלפחות *h* תאים נשארים ריקים (שים לב שחלק מהפיזורים נספרים יותר מפעם אחת) ־ ואין כל התייחסות לתאים אחרים).

נציב בנוסחה את הביטויים המתאימים עבור **(W(h,** ונקבל:

n n

*n-n)k*



עבור *m=n* נקבל **0=(E(n,** ואכן אי אפשר לפזר את הכדורים כך שכל התאים יישארו ריקים.

שאלה 4.28 בכמה אופנים אפשר לחלק *n* מכתבים ל-ה מעטפות ממוענות (מכתב אחד לכל מעטפה), כך שבדיוק **!77** מכתבים יגיעו לתעודתם?

בדוק את המקרים הפרטיים: **0=!77** (ראה שאלה **4.16),** *m=n* ו- **m=n-l.**

התשובה בעמוד 186

שאלה 4.29

בכמה סדרות באורך **4,** המורכבות מן הספרות **0, 1** ו- **2,** מופיעה הספרה **1** בדיוק פעמיים? בכמה סדרות כאלה היא מופיעה לפחות פעמיים?

התשובה בעמוד 187

מהו מספר הסדרות הבינאריות באורך 4, שבהן כל 1 מופיע ליד 1 אחר? (הערה: סדרה בינארית היא סדרה המורכבת מ-0 ו-1).

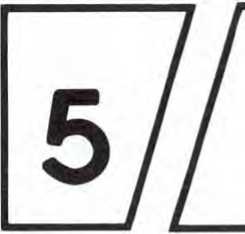
פתרו ן

נסמן ב־!? את התכונה הבאה של סדרות באורך 4: בסדרה מופיע 1 במקום ה->-י, ואין לידו 1 אחר. אזי:

0+0-(0+1+0\*1+1\*0)+(2+22\*22+2)-24 ־ *(^U(P^P^P^P*7 ־ 3+(4+2+2+4)־16 ־

7 הסדרות האלה הן:

1111 ,0111 ,1110 ,0011 ,0110 ,1100 ,0000



עקרון שובך היונים ־

הגדרה ושימושים

אמצעי שימושי לפתרון בעיות ספירה רבות הוא העיקרון הבא:

עקרו ן שובך היונים

*A* ל־מ מחלקות, קיימת לפחות מחלקה אחת

בחלוקה של קבוצה סופית

אשר מספר איבריה גדול מ-

או שווה ל-

*n n*

שאלה 5-1

הוכח את הטענה לעיל.

התשובה בעמוד 187

הערה: העיקרון נקרא עקרון שובך היונים, כי הוא מנוסח לעתים כך: אם 1+n יונים נכנסות לשובך המחולק ל־מ תאים, הרי בתא אחד לפחות יש יותר מיונה אחת.

שאלה 5.2

אם ידוע שמספר השערות על ראשו של בן אדם אינו עולה על | מיליון, הוכח כי בישראל יש לפחות שני אנשים בעלי אותו מספר

שערות על הראש.

התשובה בעמוד 187

שאלה 5.3

הוכח שבין כל שלושה מספרים שלמים יש שניים שסכומם הוא מספר זוגי.

התשובה בעמוד 188

מאלה 5.4

1. לפחות אחד משני עצמים *yl-y* xt הוא בעל תכונה P, לפחות אחד משני עצמים *y2~> x2* הוא בעל תכונה *P,* לפחות אחד משני עצמים 3! ו־3ע הוא בעל תכונה *P.* הוכח: לפחות שניים מבין xlfx2,x3 או לפחות שניים מביו 3ע,2ע,1ע הם בעלי התכונה *P.*
2. הנתונים כמו לעיל, וכן גם עבור הזוגות ו'5־ ו־5ע.

הוכח שלפחות שלושה מביו xt ,x2,x3,x4,x5 או לפחות שלושה מביו *y{ ,y2 ,y3,yu ,y5* הם בעלי התכונה P.

התשובה בעמוד 188

שאלה 5-5

הסכום של תשעה מספרים טבעיים הוא 90.

1. הוכח כי יש ביניהם שלושה מספרים שסכומם הוא לפחות 30.
2. הוכח כי יש ביניהם ארבעה מספרים שסכומם הוא לפחות 40.

התשובה בעמוד 188

שאלה 5.6

*A* היא תת-קבוצה בת 25 מספרים מתוך הקבוצה {150 1,2,3}.

הוכח כי יש ב-4 שני זוגות זרים (כקבוצות) זה לזה *של מספרים, כך* שסכום המספרים בזוג הראשון שווה לסכום המספרים בזוג השני.

התשובה בעמוד 188

שאלה 5.7

הוכח כי אפשר לתאר כל מספר רציונלי כשבר עשרוני מחזורי אי נסופי.

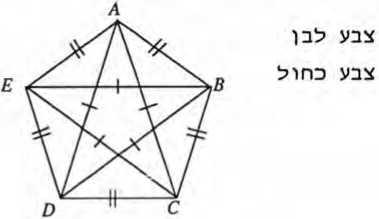
התשובה בעמוד 189

שאלה 5-8 (פתורה) נתונות 6 נקודות במישור, שאף שלוש מהן אינן נמצאות על ישר אחד. מחברים כל שתי נקודות בקטע ישר. צובעים כל קטע באחד משני צבעים, לבן או כחול. הוכח כי בכל צביעה כזו נוצר לפחות משולש אחד שכל צלעותיו צבועות באותו צבע.

הערה: משולש כזה נקרא משולש כרומטי.

פתרו ן

נראה תחילה, שאם מספר הנקודות היא 5 (ובודאי כאשר הוא קטן מ־5) לא חייב להתקבל בדרך זו משולש כרומטי. ראה איור:



ף מספר המשולשים השונים כאן הוא 10= ׳ הצלעות אינן צבועות באותו צבע.

ובאף אחד מהם שלוש

נוכיח כי עבור 6 נקודות המצב שונה. ראה איור:



מ-71 יוצאים 5 קטעים. לכן, לפי עקרון שובך היונים, לפחות 3 מהם צריכים להיות בעלי צבע אחד (נאמר לבן). בגלל הסימטריה אפשר להניח שאלה הם למשל הקטעים *AC ,AB* ו-4£ (בחרנו קטעים אלה באופן שרירותי). נתבונן בקטעים *CE ,BC* ו-BE. אם אחד מהם לבן, יש לנו משולש כרומטי (אם למשל *CE* לבן, אזי המשולש *ACE* הוא משולש כרומטי). אם כולם כחולים, אזי המשולש *BCE* הוא כרומטי. בזה השלמנו את ההוכחה.

שאלה 5-9

במישור נתונות 17 נקודות, שאף שלוש מהן אינן על ישר אחד. הקטעים המחברים כל שתי נקודות נצבעו באופן כלשהו באחד משלושת הצבעים לבן, כחול או צהוב. הוכח שבמבנה שנתקבל יש לפחות משולש כרומטי אחד.

התשובה בעמוד 189

רקורסיה

6.1 הגדרה ודוגמאות

בחלק I של הקורס דנו בהגדרה רקורסיבית ואמרנו: קבוצת איברים מוגדרת באופן רקורסיבי אם:

(1) איברים אחדים של הקבוצה מוגדרים בצורה מפורשת (הם משמשים כבסים הרקורסיה או כערכים תחיל’ים).

(2) האיברים הנותרים של הקבוצה מוגדרים באמצעות האיברים שכבר הוגדרו (כלומר, כל האיברים שבבסיס הרקורסיה ואלה שכבר הוגדרו באמצעותם).

גם בחלק II וגם בחלק III של הקורס הובאו הגדרות רקורסיביות של קבוצות. מתברר ששימוש בהגדרות רקורסיביות הוא אמצעי רב עוצמה גם לפתרון בעיות קומבינטוריות. בבעיות אלו נעסוק לרוב בהגדרת פונקציה של מספרים טבעיים. כאן היחס הרקורסיבי נראה בדרך כלל כד: גודל מסוים (איבר של סדרה, מספר אפשרויות של ניסוי קומבינטורי, וכדומה) הוא פונקציה (n)/ של משתנה טבעי *n* (שלם לא שלילי).

שם. סוף סעיר **3-5.**

במקום לומר הגדרח רקורסיבית נאמר לעתים הגדרה באמצעות נוסחת נסיגה, יחס רקורסיבי, יחס רקורסיה, או פשוט נאמר הגדרה באמצעות רקורסיה.

יחס רקורסיבי קושר את *(f(n* עם אחד, או יותר, מן הערכים (k)/, כאשר {1-מ,...,0,1,2}k6 בצורה כזו, שאם ערכים אלה ידועים

ניתן לחשב באמצעות היחס הזה את (ח)/. נוסף לכך נתונים ערכי *(f(n* עבור ערכים מסוימים של *n* - אלה הם הערכים התחיליים של הרקורסיה.

במקרים שונים דרושות קבוצות שונות של ערכים תחילי ים. לדוגמה:

1. בסדרה גיאומטרית יחס הרקורסיה הוא:

n-1)•q)/ = (מ)/

כאשר q הוא מספר נתון (מנת הסדרה). אם הערך התחילי הוא (I)/, אזי: 3)=/(2)•q=/(l)•q2 , /(2)=/(1)•q)/ וכוי.

דוגמה נוספת של יחס רקורסיבי היא הזהות הבינומית -

**.2**

משתני□ *n*

נוכל לרשום

**71-1 k-1**

כאן הגודל עליו מדובר,

*\~-k.* אם *נשתמש 3-(C(n,k*



, הוא פונקציה של *2* לסימון המקדם הבינומי,

את יחס הרקורסיה כך:

**(1-C(71-l,k) + 0(71-1,k ־ (C(n,k**

זו הנוסוזז בה השתמשנו לבני<ת משולש פסקל.

הערכים התחיליים הם **1=(1?,71)0 , 1=(71,0)0** עבור כל **n** טבעי; — נתונים כאן אינסוף ערכים תחיליים.

והנה דוגמאות לשימוש ברקורסיה לפתרון בעיות קומבינטוריות.

בדוגמה הראשונה אנו מבקשים למצוא את מספר המלים מעל האלף־בית **{0,1},** שאין בהן שני אפסים סמוכים. נקרא למלים כאלה מלים מותרות.

נסמן ב-(**71)/** את מספר המלים המותרות באורך ת. כך, למשל, עבור **1=71** יש **2** מלי□ כאלה: **0** ו-**1,** לכן **2=(1)/ .** באורך **2** יש **3** מלים מותרות: **01, 10** ו-**11,** כלומר **3=(2)/ .** באורך **3,** המלים המותרות הו:

**111 ,110 ,101 ,011 ,010**

ולכו **5=(3)/ •**

אם מלה מותרת באורך **71** מתחילה ב-**1,** אזי **71-1** הספרות הבאות של מלה זו מהוות מלה מותרת באורך **71-1.** לפיכך יש **(71-1)/** מלים מותרות באורך **71** המתחילות ב-**1.**

א□ מלה מותרת באורך **71** מתחילה ב-**0,** הספרה השניה שלה חייבת להיות **1,** וההמשך הוא מלה מותרת כלשהי באורך **71-2.** לכן מספר המלים המותרות באורך מ המתחילות ב-**0** הוא **(71-2)/.**

כיוון שכל מלה חייבת להתחיל ב-**1** או ב-**0,** מתקיים:

**(2**־מ)/+(**1-**מ)/ = (ח)/

זהו יחס רקורסיה המאפשר לחשב את **(71)/** עבור כל **71,** אם ניתן בסיס הרקורסיה.

ספרנו ומצאנו כי **2=(1)/** י־ **3=(2)/ .** זה בסיס הרקורסיה במקרה שלפנינו. את ערך **(71)/,** עבור כל **71** אחר, אפשר כבר לרג׳וב:

5 = 2\*3 ־ (Z(3) = /(2)\*/(l 8־3?־ (2)/\*(3)/ = 1O)/ וכו י.

נרשום את 8 המלים המותרות באורך 4. אפשר לבנותן באותה דרך שבה מצאנו את יחס הרקורסיה. המלים המתחילות ב-1 (אנו נעזרים ברשימת המלים המותרות באורך 3):

1111 , 1110 , 1101 , 1011 , 1010

המלים המתחילות ב-0 (הספרה השניה חייבת להיות 1, ואחר כך אנו נעזרים ברשימת המלים המותרות באורך 2):

0111 , 0110 , 0101

אלה כל 8 המלים המותרות באורך 4.

נרשום את סדרת ערכי הפונקציה (מ)/:

... ,89 .55 ,21 ,13 ,8 ,5 ,3 .2

סדרה זו, המצטיינת בכך שכל מספר בה הוא סכום שני המספרים

הקודמים לו, נקראת סדרת פיבונציי. הסדרה נחקרת רבות במתמטיקה את ההיכרות הראשינה עם הסדרה הזו עשינו

ולה שימושים מעניינים ומגוונים. בחלק 1. סעיר 3-5.

הערה: את סדרת פיבונציי מתחילים בדרך כלל ב- 1=(0)/, 1=(1)/ ,

ומקבלים את הסדרה:

... ,89 .55 ,^3 ,21 ,13 ,8 .5 ,3 ,2 ,1 ,1

הדוגמה הבאה עוסקת בספירת תמורות שהן אי-סדר מלא, כלומר, תמורות של *n* מספרים *n* 1,2 , שאף מספר בהן אינו במקומו

(ראה עמוד 90). אנו נראה איך אפשר למצוא את מספר התמורות האלה בעזרת רקורסיה.

נסמן ב-״ע את מספר התמורות (של *n* מספרים) שהן אי-סדר מלא.

12

21

1 = 2ע

123

231.

123

312

:2 = 3ע

נניח כי התמורה היא אי-סדר מלא, וכי *ar=k.* אם

1 מופיע במקום ה-&-<, אזי מספר האפשרויות לסדר את שאר *2-n* המספרי□ (כול□ פרט ל-1 ול-&), כך שאף אחד לא יופיע במקומו הטבעי• הוא 2-Dn•

אם 1 אינו מופיע במקום *k-n-' ,* יש לסדר את המספרי □ 1,2,...*,k-1,k+1,... ,n* ב-(1-מ) המקומות 2,3,...,n , כך שאף אחד מן המספרי□ האלה לא יהיה במקומו, ו-1 לא יהיה במקו□ *.'-k-n* אך אין זה אלא כמו לסדר את המספרי□ מ,...,2,3, •.., *k* במקומות *n* 2,3 , כך שאף אחד לא יהיה במקומו *(k* החליף כאן את 1, *<-k*

אסור להיות במקום ה-&-< אך גם ל-1 היה אסור להיות שם). מספר התמורות האלה הוא 1\_Dn. לכן, מספר התמורות, שהן אי-סדר מלא, ושבהן *k* מופיע במקום הראשיו, הוא

כיוון שבמקום הראשון יכול להופיע כל אחד מ- 1-n המספרי □ *n* 2,3 , מקבלים את נוסחת הנסיגה:

(1-״פ\*2.״פ)(1־*Dn* = (n

נוהגים להגדיר D0»l . מצאנו כי 0=!D. לכן: 1=(1+0) (2-l)־D2.

שים לב: את *D2* ספרנו גם באופן ישיר, כך שהתוצאה עבור *D2* אינה מושפעת מההגדרה השרירותית של 0ס. להפך, הגדרת *Do* נקבעת על-ידי הערך של *D2,* שנספר כאמור ישירות.

2 = (1\*0)(1־3) = 3פ

D4 = (4-1)(1+2) = 9

וכך הלאה.

לא מצאנו כאן אמנם נוסחה מפורשת עבור *Dn,* אבל אנו יכולים לחשב את Dn עבור כל n.

בעמוד 91 הוכחנו כי -

״י1־1 ‘ ־ז5 \* n־ f1י" ־ ־®

נוכל עתה להוכיח נוסחה זו מחדש, הפעם על-ידי שימוש ביחס הרקורסיה. נשתמש לשם כך באינדוקציה על מ.

עבור 0=מ מקבלים 1 = Do

עבור n=l מקבלי□ 0 = (ץץ - 1)!1 = !D

נניח כי הנוסחה מתקיימת עבור כל מספר טבעי הקטן מ-1+א. עבור נחשב לפי יחס הרקורסיה: n+1

Dn.1 = ״ (״פ + 1-״ע)מ

״(1-).,..- ץ| . - 1]ז(1-מ)}מ .■\* ■jfjlfff] .

. n! [!. 1\_. 1. 1.],.

♦ ,(!.״ן 1 1־ ♦ ,! ־ ! !n -

־ {[st ’י1־' \* זץ!^) ‘־״(!־)••״־ זז • זז ־ I1״\*

1)[1 - If. If.״)}ו״.

״•״’1־‘•sM) ■־"’1־׳‘

1-. 1.

1! 2!

(n+1)! 1

את האיבר האחרון מימיו נוכל לרשום גם כך:

1 ffifff־"(1-) . f| ״<!־){ !(1.״) ־ ״■(1-)

ולאחר שנציב זאת בביטוי הקודם נקבל:

Stttt),־״’1־'♦ 1>"st־>+ 1’"(Arr־’•-־ It \* זז ־ 1]'11•״>

וזו בדיוק הנוסחה עבור Dn, כאשר מציבים בה 1+n במקום n.

הוכחנו אפוא את הנוסחה עבור *Dn.*

נזכיר בקיצור, בהזדמנות זו, דברים שכבר נאמרו בחלק I של הקורס על הדמיון והשוני בין רקורסיה לאינדוקציה. יחס רקורסיה משמש לחישוב ערכים של פונקציה, לרוב של המשתנה הטבעי, בהתבסס על תנאים תחילי ים נתונים. משפט האינדוקציה משמש כלי להוכחת טענות במתמטיקה, המתייחסות לרוב לביטויים ולתכונות הקשורים למספרים טבעי ים.

אמרנו, כי יחס הרקורסיה מאפשר לחשב את ערכי (n)/ עבור כל n, אם נתונים תנאים תחיליים מתאימים. ומה בדבר נוסחה מפורשת עבור (n)/? במקרים לא מעטים אין קושי למצוא ביטוי כזה בעזרת יחס הרקורסיה. למשל:

א□ n+l)=/(n)*•q*)/ ו- l)=a)/ נוכל לרשום מיד - *x־f{n)=aqn*

נוסחה שנמצאה בדרך זו יש, כמובן, להוכיח. עושים זאת לרוב בעזרת אי נדוקציה.

שאלה 6.1

הוכח את הנוסחה האחרונה.

התשובה בעמוד 190

יש מקרים שבהם קשה יותר למצוא נוסחה מפורשת עבור (n)/, מתוך יחס הרקורסיה, ולפעמים אין הדבר ניתן כלל. בכל אופן, אם אנו משערים בצורה זו או אחרת (על-ידי ניחוש, או על-ידי חישוב) מהו הביטוי עבור (מ)/, אפשר לנסות להוכיח את השערתנו זו, וזאת כאמור עושים לרוב בעזרת אינדוקציה.

6.2 פתרון בעיות קומבינטוריות באמצעות רקורסיר.

רקורסיה, כפי שציינו בסעיף הקודם, היא כלי מתאים לפתרון בעיות קומבינטוריות רבות. דבר זה נדגים בסעיף שלפנינו.

שאלה 6.2 (פתורה) ■ - - — -

כדי למצוא את המספר הגדול ביותר *M* ואת המספר הקטן ביותר *m,* בקבוצה של *n* מספרים, אפשר להשתמש בתהליך הבא:

מחלקים את הקבוצה לשתיים כך:

אם *n* הוא מספר זוגי, מחלקים את הקבוצה לשתי תת-קבוצות, כל אחת בת | איברים. אם *n* הוא מספר אי-ז ו גי, מחלקים את הקבוצה לשתי תת-קבוצות, כמעט שו ות בגודלן, אחת בת ־־^ מספרים והשניה בת— מספרים.

עתה מוצאים את המספר הגדול ביותר ואת המספר הקטן ביותר *{7n,* בתת-קבוצה אחת, ובהתאמה את *n2* ו-2זק בתת-קבוצה השניה. משווים את עם *M2,* והגדול ביניהם הוא *N.* אחר כך משווים את *mx* עם *m2,* והקטן ביניהם הוא *m.*

סמן ב-״ס את מספר ההשוואות (בין שני מספרים), הדרוש למציאת *M* ו-ומ, עבור קבוצה בת *n* מספרים. מצא יחס רקורסיה לחישוב an, כאשר משתמשים בתהליך המתואר.

פתרי ן

יחס הרקורסיה עבור 4<ת וזוגי: 2+2/an » 2an

יחס הרקורסיה עבור n אי-זוגי: 2+ג an = a j♦a

*2 2*

התנאים התחילי ים הם: 0\*= !a ו- a2=l .

שני יחסי הרקורסיה שרשמנו כאן, בצירוף התנאים התחילי ים, מאפשרים לחשב את מספר ההשוואות, הדרוש למציאת *M* ו־ *m* בקבוצה נתונה של *n* מספרים.

שאלה 6.3 (פתורה) ■- - ,

מהו מספר האפשרויות לפזר n כדורים זהים בתוך k תאים שונים, כך שבכל תא יהיו לפחות 2 כדורים ולכל היותר 4 כדורים?

פתרו ן

נסמן *3-(a(n,k* את מספר האפשרויות לבצע את הפיזור המבוקש.

אם נשים 2 כדורים בתא הראשון, הרי עבור *1-k* התאים האחרים יישארו 2-n כדורים, ומספר האפשרויות לפזרם שם - תוך שמירה על תנאי הבעיה - הוא (a(n-2,k-l.

אם בתא הראשון 3 כדורים, מספר האפשרויות לפזר את הכדורים, בתנאי הבעיה, הוא (l־3,k־a(n.

אם בתא הראשון 4 כדורים, מספר האפשרויות לפזר את הכדורים הוא

.a(n-4,k-l)

לכן נוכל לרשום את יחס הרקורסיה:

(l)+a(n-4,k-l־3.k־a(n,k) = a(n-2,k-l)+a(n

התנאים התחילי ים הם:

1 ־ (4,1)0 , 1 ־ (3.1)0 , 1 ־ (2,1)0

ו־ 0=(1*,a(n* עבור *כל n* אחר. כמו כן:

0 • (1,2)0 = (2,2)0 = (3.2)0

נחשב לדוגמה:

a(4,2) = a(2,l)+a(l,l)+a(0,l) = 1

a(5,2) = a(3»l)+a(2,l)+a(l,l) =1+1=2

a(4,3) = a(2,2)+a(l,2)+a(0,2) = 0

a(5,3) • a(3,2)+a(2,2)+a(l,2) = 0

a(6,3) • a(4,2)+a(3,2)+a(2,2) = 1

a(7,3) = a(5,2)+a(4,2)+a(3.2) =2+1=3

a(8,3) = a(6,2)+a(5.2)+a(4,2) = ?

כדי למצוא את (8,3)a עלינו לקבוע תחילה את (6,2)a:

a(6,2) = a(4,l)+a(3.1)+a(2,l) = 3 a(8,3) = 3+2+1 = 6

ומכאן

וכך הלאה.

במקרה זה, יחס הר־קוו־סיה מכיל שני *משתנים* k-1 *n*, ויש להתקדם בהדרגה עם שניהם כדי לחשב את *(a(n,k* עבור *k-1 n* נתונים.

במקרה הזה אין לנו "ניחוש" מתאים לנוסחה מפורשת עבור *(a(n,k.*

שאלה 6.4 (פתורה) ־

נתי ו an=2an\_1+5 , a0=l . מצא ביטוי עבור an, והוכח את נכונותו.

פתרו ן

זו דוגמה פשוטה, יחסית, למציאת נוסחה עבור an. נעשה זאת בדרך הבאה:

<\*2 ״ ״an.1+5 = 2(2an.2+5)+5 = 22an.2+2«5+5 =  
= 22(2an\_3+5)+2-5+5 = 23an\_3+(22+2+l)5

אפשר לנסות ולשער:

an = 2na0+(2n"1+2n2 = 5\*(2+1+...+2־n•a0+5(2n־l)

השתמשנו כאן בנוסחה עבור הסכום של סדרה גיאומטרית:

2+...+2+l = - 2n-l־“1+2־2n

נציב את הערך הנתון של 0ב>, ונקבל את הנוסחה המשוערת:

5־5 = 6-2n־an = 2n+5\*2n

הדגשנו את המלה משוערת, כיוון שהנוסחה חזו היא בגדר השערה בלבד, כל עוד לא הוכחנו אותה. את נכונות השערתנו נוכיח בעזרת אי נדוקציה.

עבור 0=n מקבלים: 1 “ 5־1־6 - a0

נניח את נכונות הנוסחה עבור מ. לפי יחס הרקורסיה הנתון:

5־2n.l־6 = 10+5־1<2n־6 = 5+(5-מ2־6)2 ־ an41

זו בדיוק הנוסחה עבור 1\*ת, אם נשתמש בנוסחתנו המשוערת. לכן, ההשערה ש־ 5־2n־6=an הוכחה כנכונה.

שאלה 6.5

מצא יחס רקורסיה עבור מספר האפשרויות למתוח קו קרשים באורך *n* מטר מקרשים לבנים (כל אחד באורך 2 מטר), צהובים (כל אחד באורך 2 מטר) וירוקים (כל אחד באורך של מטר אחד).

התשובה בעמוד 190

שאלה 6.6

מצא יחס רקורסיה עבור מספר האזורים הנוצרים במישור על-ידי *n* מעגלים שכל אחד מהם נחתך עם כל אחד אחר, ואף שלושה מעגלים אינם נחתכים בנקודה אחת.

התשובה בעמוד 190

שאלה 6.7

מצא יחס רקורסיה עבור מספר אפשרויות הבחירה של *k* עצמים מ־מ סוגי עצמים, כאשר מותר לבחור מכל סוג מספר כלשהו של עצמים.

התשובה בעמוד 191

שאלה 6.8 (פתורה)

מצא יחס רקורסיה עבור מספר הסדרות הבינאריות באורך n, שיש להן k זוגות של 1-<ם צמודים ואין להן אף זוג של 0-<ם צמודים. (לדוגמה, עבור 6=n ו- *3\**111011 : *k* או 101111 ; עבור 6=n ו- 2-110110 : k או 011011 וגם 101110).

פתרו ן

נסמן *.3-(a0(n,k* את מספר הסדרות המקיימות את תנאי הבעיה והמתחילות ב-0, וב-(ז/,ה)1ס את מספר הסדרות המקיימות את התנאים והמתחילות ב-1. אזי מתקיים:

a0*(n,k) -* a! (n-1*,k)*

כי אחרי ה-0 חייב לבוא 1. כלומר, אחרי ה-0 יש לנו סדרה באורך 1-מ המתחילה ב-1, והמקיימת את תנאי השאלה. כמו כן מתקיים:

a^n.k) = a0(n-l,k) + *a1(n-l,k-l)*

המחובר הראשון מתאים למקרה שבו הסדרה מתחילה ב-10, והמחובר השני מתאים למקרה שבו הסדרה מתחילה ב-11.

קיבלנו מערכת של שני יחסי רקורסיה, עבור שתי הפונקציות (a0(n,k <~(a!*(n,k.*

לא נרשום כאן את כל התנאים התחיליים. לעומת זאת, נחשב ערך אחד של הפונקציה, את (5.2)ax:

= (3.0)!a,(3,2)\*a0(3.1)\*a ־ (a!(5.2) = a0(4,2)+a1(4,l

(ao(2,2)+a1(2,l)\*a1(2,l)+a1(3.O =

לא נמשיך בפיתוח זה. את כל המקרים הפרטיים שבנוסחה נמצא באופן ישיר. כל הסדרות הבינאריות באורך 2 הן 00,01,10,11 . מכאן:

(הסדרה 11) 1 = (2,1)!0 , a ־ (2,2)a0 (הסדרה 10) 1 = (2,0)!0 (2,1) = 0 , aב> (הסדרה 01) 1 = (a!(2,2) = 0 , ao(2,O

כמו כן !־(3,0^0 וזוהי הסדרה 101. לכן -

3 ־ (5.2)!a

ואלה 3 הסדרות הבינאריות: 10111 , 11101 , 11011.

שאלה 6.9

מצא יחס רקורסיה עבור מספר הסדרות הבינאריות באורך מ, שאין בהן

2 אפסי□ סמוכים.

התשובה בעמוד 192

שאלה 6.10

מצא יחס רקורסיה עבור מספר האפשרויות (a(n,k לבחור *k* מספרים

מ־מ המספרים *n* 1,2 , כך שלא יבחרו שני מספרים עוקבים.

*a(n,k)*

n-k+1  
*k*

הוכח כי:

התשובה בעמוד 192

6.3 פתרון של יחם• רקורסיה לינאר״ם

בסעיף זה נדגים שיטה למציאת נוסחה עבור פונקציה (מ)/, הנתונה באמצעות יחס רקורסיה לינארי. תהיה זו רק הדגמה, בלי בדיקת כל המקרים האפשריים, ובלי פיתוח התיאוריה של הנושא. תלמידים המכירים את שיטות הפתרון של משוואות דיפרנציאליות לינאריות (ראה קורס במשוואות דיפרנציאליות) יגלו דמיון רב בין הדברים.

יחס הרקורסיה הבא -

(n) = ^/(n-l) + *c2f(n-2) + ... + ckf(n-k*)/ <חס רקורסיה לינאר׳

נקרא יחס רקורסיה לינארי.

למציאת נוסחה מפורשת עבור (ח)/, מציבים ?ס=(מ)/ . מקבלים:

a? = Cjoc”'1 + *c2cf'2 ♦ ... +* ck0J'"k

נצמצם ב-\*1־?a ונקבל:

0 = ck ־ ... - 2'\**1 - c2a*־‘?ak - do משוואה אופיינית

משוואה זו מכונה המשוואה האופיינית של יחס הרקורסיה. אם כל פתרונותיה הם מספרים שונים ^0, ..., 02, ף0 , מקבלים את (מ)/ כצירוף הלי נארי -

4k0£ ♦ ... ♦ £ס12/ + ף410 - (n)/

את הקבועים 4k X! קובעים לפי התנאים התחילי ים.

נדגים את האמור כאן באמצעות יחס הרקורסיה:

( 5״1\*> . 2=1 ( a0-״\*> ־ 2-an " 2an

נציב *?0\*aa,* ונקבל:

1־ ?2 -a־ ?an « 2a

נצמצם ב־2’?0 ונקבל את המשוואה הריבועית:

a2+0.-2 ’ 0

למשוואה זו 2 פתרונות שונים: 2־־2ס , 1־04. בצירוף הלינארי an=4+B(-2)n נציב את התנאים התחיליים:

2 » 0 , a0 x 2 , X+B = מ

5 » 1 , a! - 5 . *A-2B* - מ

מכאן: 3־=4 ו- B=-l . הפתרון של יחס הרקורסיה הוא אפוא -

2)n־) ־ 3 = an

שאלה 6.11 (פתורה) - ■ ־ ־

מהו מספר הסדרות באורך ה, הבנויות מהספרות 0,1,2, שאיו בהן ספרות עוקבות שוות?

פתרו ן

מטעמי סימטריה, יש אותו מספר של סדרות, הממלאות את תנאי השאלה, שמתחילות ב־0, ב-1, או ב-2. נסמן מספר זה ב־״ס. אם הסדרה מתחילה ב-0, במקום השני חייב לבוא 1 או 2. לכן יחס הרקורסיה עבור an הוא ־

2an-l ־ ״a

התנאי התחילי הוא . a!=l

לפנינו יחס רקורסיה לינארי. נציב ?an=a , ונקבל: 1\*?a? = 2a

מכאן, 2»a , והפתרון הוא an=A-2n .

נציב n«l *ונקבל* 4-2״=1 , כלומר . הפתרון עבור an הוא,

א□ כן, 1-an»2n . כיוון שהסדרה יכולה להתחיל ב-0, ב־1, או ב־2, הרי מספר הסדרות המקיימות את תנאי השאלה הוא 1-“2־3. עבור 3=מ , למשל, נקבל את 12=22־3 הסדרות הבאות:

201 101 010

202 102 020

210 120 012

212 121 021

שאלה 6.12 (פתורה) מצא ביטוי מפורש עבור האיבר ה-מ-י של סדרת פיבונציי.

פתרון

כזכור, סדרת פיבונציי (ראה עמוד 109) מוגדרת על-ידי יחס

הרקורסיה ע□ התנאי□ התחילי ים a0=a1=l .

נציב ?an=a . אחרי צמצום ב־2'?0 ונקבל את המשוואה -

*a?-0-1* = 0

שפתרונה הוא:

1±71

2

°4.2

מכאן

2



נציב את התנאים התחיליים:

?1 + 8 = 1

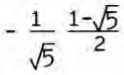
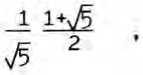
0=ה

n=l

הפתרון של שתי המשוואות האלה הוא:

A =

B ־

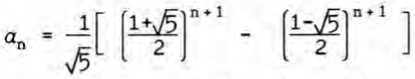


מכאן:

a4

1^.1

נבדוק ביטוי זה עבור a4, למשל:



1 1

160^ » 5



ברור שקשה לנחש את הביטוי המפורש עבור האיבר הכללי של סדרת פיבונציי.

פונקציות יוצרות



נפתח פרק זה בהגדרה פורמלית של פונקציה יוצרת, ובדיון פורמלי במושג זה. בהמשך נראה איך ניתן להיעזר בו לפתרון בעיות קומבי נטוריות.

7.1 הגדרה של פונקציה יוצרת

תהא נתונה סדרה של מספרים, סופית או אינסופית -

*a0,alta2, ...* ,an, ...

הביטוי (הסופי או האינסופי בהתאמה):

a0 + axx + *a2x2 ♦ ... + anxn + ...*

נקרא הפונקציה היוצרת של הסדרה הנתונה. עבור סדרה סופית, הפונקציה היוצרת, כפי שהוגדרה לעיל, היא פולינום במשתנה אחד x.

עבור סדרה אינסופית, נתייחס לביטוי - ... + a0 + *arx + a2x2 + ... +* anxn פונקציה יוצרת

בצורה פורמלית, בלי לברר מהו המשתנה 1 (האם הוא מספר ממשי או מספר מרוכב) ואם הסכום האינסופי מתכנס או לאו. כך, למשל: נרשום ־ ...♦x) = a0+a!x+a2x2\*...♦anxn)/

ונגזור - ...+1"*f'(x) =* a!♦2a2x+..•+nanxn

אם - ...+x) = a0+a1x+a2x2+...+anxn)/

ו- ...+g(x) = b0+b1x+b2x2+...+bnxn

נחבר -

/(x)\*g(x) = a0+b0+(a1+b1)x+...+(an+bn)xn+...

וגם נכפול -

...\*2!(aobo + faobj+ajbJx+faobj+c^bj+ajbo ־ (x)g(x)/

וכל זאת, כאמור, בלי לבדוק התכנסות ובלי לנקוט כל אמצעי זהירות אחר, הידוע מהחשבון האי נפיניטסימלי, והמצדיק ביצוע פעולה מן הפעולות הללו ומתן מובן לתוצאות. נחזור ונדגיש אפוא שאנו רואים בפונקציה היוצרת, כלומר ב- ...+a0+a!x+a2x2+...+anxn , ביטוי פורמלי גרידא, ומניחים ־ לצורך הטיפול בו - שכל הדרישות להתכנסות, לגזירות וכוי מתקיימות.

דוגמאות

1. הפונקציה היוצרת של הסדרה 1,2,1 היא -

/(x) = l+2x+x2 = (1+x)2

2. הפונקציה היוצרת של הסדרה

1J2] ״]’

/(!) = 1+ J x+^2 12\*\*

3^ הפונקציה היוצרת של הסדרה האינסופית ...,1,1,1 היא -

/(x) = 1+x+x2♦ ••• = ]4^

זהו סכום של טור גיאומטרי אינסופי. כידוע, הפונקציה

1-x

מתארת את הטור הרשום כאן עבור 1>|1|. אך כפי שאמרנו לעיל, איננו מתעניינים כאן אם x אכן קטן בערכו המוחלט מ-1. אנו רושמים - (!)/ , בלי לעסוק כלל בערכו של x. אם נגזור את (x)/ נקבל:

/׳(x) = l+2x+3x2+... =

(I2(־־

וזאת אומרת, שהפונקציה היא פונקציה יוצרת של הסדרה

,׳ , , 2(־־I)

—האינסופית ••• .1,2,3 .

7.2 שימושים של פונקציות יוצרות למציאת מספר הפתרונות של

משוואות לינאריות

בסעיף זה נדגים שימושים של פונקציות יוצרות לפתרון בעיות קומבינטוריות, ובפרט, למציאת מספר הפתרונות בשלמים של משוואות לי נאריות.

מאלה 7-1 (פתורח) ־ - ■■ ■

מצא את כל הפתרונות בטבעיים של המשוואה **3=2\*+1\* •**

פתרון

ברור כי 3>!0<t וגם 3>0<t2.

נסתכל בפונקציה -

*f(x) =* (!0+X1+x2+x3)(x°+x!♦x2+x3) =

. \ 0 *2* . 1 1 . 2\_ 0\_ *ו* . « 0\_ 1״ 1\_ 0\_ > . 0\_ 0— -

X X +(X X *♦X X* J + (X X +X X ♦X x )♦ =

♦(1!+(x°x3+x1x2+x2x1+x3x°)+(x1z3\*z2z2♦z3

= x2x3+x3x2)+X3X3)+  
l+2x+3x2+i»x3\*3xA+2z5+z6 ־

זוגות המעריכים בביטוי °x°x3+x1x2+x2x1+x3x מייצגים את כל הפתרונות האפשריים של המשוואה הנתונה: (3.0), (2,1), (1,2) י־ (0.3).

הביטוי בסוגריים הראשונים *3-(*0♦x1+x2+x3) - *f(x*!) - "מספק", באמצעות המעריכים של !, את כל הערכים האפשריים *של tr* בין 0 ל־3 (שהרי *tx* הוא מספר שלם, המקיים 3>0<tt) . באופן דומה, הביטוי בסוגריים השניים - אותו ביטוי - "מספק", באמצעות המעריכים של 1, את כל הערכים האפשריים של t2. אנו מחפשים את כל הזוגות האפשריים של המעריכים שסכומם שווה ל־3 - אלה יתאימו לכל הצירופים האפשריים של ערכים של tj ו-£2 המהווים פתרון של המשוואה הנתונה. מספר הזוגות האפשריים של המעריכים, שסכומם שווה ל־3, הוא בדיוק המקדם של x3 ב־(1)/.

אם אנו מעוני י נים למצוא את כל הפתרונות במספרים טבעיים של המשוואה -

\* t2 \* ^3 + ^4 = 6

נלך בדרך דומה לזו שבה פתרנו את שאלה 7.1. נבנה את הפונקציה -

(l+x+x2+x3+x4 +x5+x6)(l+x+x2+x3+x4 +x5+x6)

*fix)*

המעריכים מייצגי□ את כל הערכים האפשריים של **t2** בפתרון המשוואה המעריכים מייצגים את כל הערכים האפשריים של **!t** בפתרון המשוואה

(1+x+x2 +x3 +x4 +x5 +x6)(1+x+x2+x3♦x4 +x5 +x6)

המעריכים מייצגים את כל הערכי□ האפשריים של **,/t** בפתרון המשוואה המעריכים מייצגים את כל הערכי□ האפשריים של **tj** בפתרון המשוואה י

= (l+x+x2+x3+x4+x5+x6)4

נחפש בביטוי זה את המקדם של x6.

:x6 להלן שתי דוגמאות של מכפלות השוות ל־

*x-x2 ‘z2 •x = xk* t!=l, t2=2, *t^\*2,* t4=l

!•x4•!•!2 = x6 t1=0, t2«4, *t^-0,*

וכוי. נחפש את המקדם של x6 בצורה הבאה -

*f{x)* = (1+x+x2+x3+x4+x5+x6)2(1+x+x2+x3+x4+x5+x6)2 = = (l+2x+3x2+4x3+5x4♦6x5+7x6+ •••)•

•(l+2x+3x2+4x3+5x4+6x5+7x6+ ...)

האיברים שלא רשמנו אינם מעניינים, כי המעריכים שלהם גדולים מ-6.

כעת לא קשה למצוא את המקדם של &x:

7\*12+15+16+15+12+7 = 84

וזה גם מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה הנתונה.

שאלה *2.ך* (פתורה) — •

מהו מספר הפתרונות במספרים שלמים של המשוואה -

tj + t2 + ^3 + ^4 ”” 6

המקיימים את התנאים הבאים:

4£5\*>0 . 3£3\*>0 . 3>2\*>0 . 1>!»>0

פתרון

גם כאן נבנה פולינום, אשר המקדם של x6 שבו יתן את מספר הפתרונות. אך כיוון ש־!£ יכול להיות רק 0 או 1, תרומתו לפולינום הזה חייבת להצטמצם לחזקות 0 ו-1 בלבד. כלומר, את מייצג הגורם 1\*1. את *t2* ואת t3 יכולים לייצג שני גורמים זהים, השווים ל־ 3!♦1+x+x2 (בכל אחד מהגורמים האלה, המעריכים מקבלים את הערכים ביו 0 ל־3, כמו הנעלמים המתאימים במשוואה). את ייצג הגורם 1+x+x2 ♦x3+x4+x5 . לפיכך הפולינום הוא -

(f(x) = (1+x)(1+x+x2+x3)2(1+x+x2+x3+x4+x5

אנו מחשבים את המקדם של x6 ב־(!)/. נרשום:

= (f(x) = (1+x)(1+x+x2+x3)2(1+x+x2+x3+x4+x5 = [(1+x+x2♦x3)2[(1+x)(1+x+x2+x3+x4+x5) =

(1+2x+3x2+4x3+3x4+2x5+x6)(l+2x+2x2+2x3+2x4 +2x5+x6) =

המקדם של x6 הוא: 30 = 1+4+6+8+6+4+1

למשוואה שבשאלה, עם התנאים הנתונים, 30 פתרונות. למשל:

!1•x2•!•!2 = 16 *t2-2,* t3=l, t4”2

x° •x° •x1 •x5 = x6 t1”0, t2=0, t3\*l, tz,=5

וכו י.

חזור ועיין בפולי נום שרשמנו כדי לפתור את שאלה 7.2:

*(f(x)* = (1+x)(1+x+x2+x3)2(1+x+x2♦x3+x4+x5

שם התעניינו במקדם של x6. מה מתארים המקדמים של החזקות האחרות?

מה מייצג, למשל, המקדם של x8?

מכפלה אחת השווה ל-8! היא 2!•1•!3•x2!. היא מייצגת פתרון אפשרי במספרים טבעיים של המשוואה -

(2, t4-2״1• £2x3. t3״1\*) 8 t!+t2+t3+t4 x

המכפלה 1!•0■!1•x3! מייצגת פתרון אחר של המשוואה הזו -

^"4\* .3=t!=0, t2=l, t3

וכך הלאה.

הגורם 1+1 יכול לתרום רק *°x* או x1 למכפלה ששווה ל-8!. לכן tj, המיוצג ב-(!)/ על-ידי הגורם 1+x, יקיים 1>!€>0. באופן דומה, *t2* ו־±3, המיוצגים על-ידי הגורמים l+z+x2+x3 כל אחד, יקיימו 3>2\*>0. 3>1 ,0<t3־t4 יקיים 5>4\*>0.

לכן, המקדם של x8 ב-(1)/ שווה למספר הפתרונות במספרים טבעיים, המקיימים את ההגבלות הנ״ל, של המשוואה 8=t2+t3+t4+ .

באופן דומה מקבלים, כי המקדם של 12 ב-(!)/ הזה מתאר את מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה 2=t1+t2+t3+t4 , המקיימים את אותן ההגבלות. המקדם הזה היא 9=2+4+3 . והפתרונות:

הבה נכליל את שאלה *2.ך* ואת הדיון בעקבותיה:

כדי למצוא את מספר הפתרונות במספרים שלמים של המשוואה:

t! + t2 ♦ ... + tn ־ k

שמקיימים את ההגבלות l<f<n) 0<ti<hj), יש לחשב את המקדם של xk

בפולינום -

b. b b

/(x) = (1+X+...+X )(1+X+...+X )...(1+X+...+X )

x))/ היא פונקציה יוצרת עבור הסדרה -

••• י ak a0.a!.a2

כאשר ak הוא מספר הפתרונות במספרים שלמים של המשוואה הנ״ל, המקיימים את ההגבלות הנתונות.

1. מצא את מספר הפתרונות במספרים שלמים של המשוואה -

” 3^ + 2^+

המקיימים 5>0<tt<3 ,0<t2<l ,0<t3.

1. מצא את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה *^=^t1+t2+t* , עם ההגבלות הנ"ל.
2. כנ״ל עבור המשוואה 9\*=t1+t2+t3 .

התטובה בעמוד 193

כזכור, מספר הפתרונות במספרים טבעיים של משוואות מסוג זה, שבו אנו עוסקים כאן, הוא כמספר הצירופים עם חזרות, המקיימים תנאים מגבילים מסוימים. לדוגמה: מספר האפשרויות לבחור 7 פירות מתוך 4 תפוחים, 2 אגסים ו־4 תפוזים הוא כמספר הפתרונות במספרים טבעיים של המשוואה -

7 = tj+t2+t3

כאשר 4>0<t!<4 *,0<t2<2* ,0<t3• כדי למצוא מספר זה, נרשום את הפונקציה הי וצרת -

*2( f(x) \** (l+1+x2 ) (1+x+x2♦x3+x4 ראה מאלה 7.1.

ונמצא בה את המקדם של x7.

טאלה 7.4

סיים את פתרון הבעיה האחרונה.

התשובה בעמוד 194

אם אנו רוצים למצוא את מספר הפתרונות במספרים טבעיים של המשוואה t!+t2+t3+...+tn=k, בלי הגבלות נוספות על הנעלמים, אנו רושמים את הפונקציה היוצרת -

*°(...+f(x)* = (l+x+x2+x3+x4

ומחפשים את המקדם של xk בפונקציה הזו. אולם, עבור כל *k* נתון כל t! מקיים OCt^k, ולכן אפשר להסתפק בפונקציה:

/(x) = (1+x+x2♦..•+xk)n

ההגבלות על ה-41-ים יכולות גם להיות מסוג אחר. לדוגמה:

שאלה 7.5 (פתורה) ■ ־־ ־־

מצא את מספר הפתרונות במספרים טבעיים של המשוואה -

12 = t1+t2+t3

כאשר 2>!*t2* ,0<t חייב להיות מספר זוגי ו־3ז הוא אחד המספרים 1, 5 אי 7.

פתרון

לפי הדיון לעיל אפשר לראות, כי יש למצוא את המקדם של x12 בפונקציה הי וצרת -

/(x) = (l+x+x2)(l+x2\*x4+x6+x8+x10+x12)(x+z5\*x7)

נמק את הדבר ומצא את מספר הפתרונות המבוקש.

=====^======== המשך התשובה בעמוד 194

שאלה 6*.ך*

בנה פונקציה יוצרת לחישוב מספר הפתרונות במספרים טבעיים של המשוואה -

המקיימים 7>!\*>3 עבור 1,2,3.4=; ו-€1 אי-זוגי 1־tt זוגי.

התשובה בעמוד 194

שאלה 7.7

א) בנה פונקציה יוצרת לחישוב מספר האפשרויות לפזר *k* עצמים זהים לתוך 6 תאים שונים, כך שבכל תא יהיו לכל היותר 3 עצמים.

כ) חזור על השאלה, כאשר בכל תא יהיו לפחות 2 עצמים.

ג) חזור פעם נוספת על השאלה, כאשר בשניים מן התאים יהיו בכל אחד לא פחות מ-2 עצמים ולא יותר מ־5 עצמים, ובשני תאים אחרים לא יהיה בכל אחד יותר מעצם אחד.

התשובה בעמוד 195

שאלה 7.8

בכיתה 32 תלמידים, הבוחרים מזכיר כיתה מהיד 3 מועמדים. בנה פונקציה יוצרת, שבאמצעותה אפשר למצוא את מספר התוצאות האפשריות של הבחירות.

התשובה בעמוד 195

מצא פונקציה יוצרת למציאת מספר הצירופים עם חזרות *^ל k* איברים מתוך מ סוגי□ של איברים.

פתרו ן

הפונקציה היוצרת היא “(...+l+x+x2+x3) והמקדם של xk הוא n . פרט את הפתרון.

. 1-. n

— ■ המשך התשובה בעמוד 195

שאלה 7-10 (פתורה) מצא את המקדם של xk בביטוי -

/(!) = (l+x+x2+x3+...)n

ידוע:

מכאן אנו מוצאים -

פתרו ן

= l+x+x2+x3♦

למי שלא למדו חשבון דיפרנציאלי - תוכלו לפסוח על הפתרון הזה. בשאלה הקודמת נתקבלה התוצאה באמצעות שיקול קומבי נטורי.

(1-x)״

נשתמש בפיתוח טיילור עבור (x)/ סביב הנקודה 0=x. נחשב את הנגזרת ה-^-ית של (x)/:

~~. \*~~~~141~~~~'t~~~~,~~~~'~~ ־ (2— , r<x— !־ד/ 2‘l-x)n+1 (l-x)n)

*(1-n(n-H).. .(n^k* ־־ (k,(x>/ . ...

l-x)n4k) המקדם של xk בפיתוח הוא -

1-*n\*k-l} \_* [n+k) • • • - וס/(><)</\_!

k! “ k ׳ ' ׳־!k

(בשאלה הקודמת הגענו לתוצאה זו בעזרת שיקול קומבינטורי) . אנו יכולים אפוא לרשום:

/(!) = (l+x+x2+x3♦...)n =

שאלה 7.11

מצא פונקציה יוצרת לקביעת מספר האפשרויות להטיל *n* קוביות שונות, כך שסכום התוצאות יהיה *k.*

התשובה בעמוד 195

שאלה 7-12 (פתורה) ■■

הראה כי הפונקציה היוצרת למציאת מספר הפתרונות במספרים טבעיים של המשוואה k-־t1+t2+t3, המקיימים 0<t!<t2<t3, היא:

( ... +1+x+x2+x3+ ... )(l+x2+x4+x6+ ... )(l+x3+x6+x9)

פתרו ן

*t2* חייב להיות לא קטן מ-1\*. נרשום t2=t1+u2 ונדרוש 0<u2.באותו אופן נציב t3=t2+u3=t!+u2+u3 , כאשר 0<u3. נציב את הביטויים עבור t2 ו־3\* במשוואה, ונקבל:

t1+t1+u2+t1+u2+u3 *- k*

כלומר:

3t1+2u2+u3 = *k*

אנו צריכים למצוא את מספר הפתרונות של המשוואה האחרונה. על הפתרונות אין הפעם שום הגבלות (פרט לכך, כמובן, שהפתרונות חייבים להיות מספרים טבעיים). קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין קבוצת הפתרונות של המשוואה הזו לבין קבוצת הפתרונות של המשוואה המקורית (הוכח!).

עבור המשוואה 3t!+2u2+u3=k בונים את הפונקציה היוצרת

/(x) = (l+x3+x6+...)(l+x2+x4♦...)(1+x+x2♦...)

3t. 2u u-

כל מכפלה של חזקות של x, הנותנת xK, היא מהצורה x •x •x

(וכאמור 3t!+2u2+u3=k ). הגורם הראשון במכפלה כזו תורם למעריך של xk את החלק של (הכפול ב־3), *השני את החלק של u2* (הכפול ב-2) והשלישי את החלק של u3. מספר המכפלות השוות ל-‘1!, כלומר המקדם של xk בפיתוח של (x)/, הוא מספר הפתרונות של המשוואה חג "ל.

מאלה 7-13

מצא פונקציה יוצרת למציאת מספר האופנים השוני□ לשלם *k* אגורות במטבעות של אגורה אחה, 5 אגורות, 10 אגורות י ־50 אגורות.

התשובה בעמוד 196

שאלה 1\*7-1 (פתורה) ========^==^^^=^^^:

מצא פונקציה יוצרת למציאת מספר האפשרויות לחלק *kv* כדורים אדומים *<-k2* כדורים לבני□ ל-6 תאי□ שונים, כאשר באף תא אין יותר מ-2 כדורי□ אדומים.

פתרו ן

חלוקות הכדורי□ משני הצבעים אינן תלויות זו בזו. לכן אפשר לפתור את הבעיה על-ידי יצירת פונקציה יוצרת של שני משתנים *x* ו-ע, כאשר המקדם של xklyk2 הוא מספר האפשרויות המבוקש.

הפונקציה היא:

6(...+l\*x\*x2)6(l+y+y2) ־ *(f(x,y*

המשך בפתרון השאלה עבור 9\*fe1 י־ k2xH .

שאלה 7-15

מהו מספר האפשרויות לפזר 25 כדורים זהים בשבעה תאים שונים, א□ בתא הראשון יכולים להיות לכל היותר 10 כדורים?

התשובה בעמוד 196

==^==^==== (שאלה 7-16 (פתורה ב­ x20 מצא את המקדם של

/(!) = (x+x2+x^+x4♦!5 ) (x2+x^+x4♦. .. )5

פתרו ן

נוציא את הגורם המשותף למחוברי כל אחד מזוגות הסוגריים, ו נרשום:

/(x) = x11(1+x+x2)(1+x+x2♦...)5 =

\_ -11.1“®5. 1 - ~5\/1 "\-6>

*= X* •ך \* *= X* •(1־X )(1~X)

עלינו למצוא, אם כן, את המקדם של x9 במכפלה -

6־(6-x5(l-x־(6 = (l-x־(l-x5)(l-x)

כלומר, עלינו למצוא את המקדם של x9 □־6‘(1-x), ולהחסיר ממנו את המקדם של x4 ב-6־(1-1). לפי שאלה 7-10 מקבלים:

1876 = 2002-126 ’ ^]־[^] = [+\*] ־[19] ־ ף־4+6|\_ף-9+6

שאלה 17.*ך*

מצא את המקדם של x10 ב -

4(x) = (1+x+x2+x3+x4+x5)/

התשובה בעמוד 196

שאלה 7.18

מהו מספר האפשרויות להטיל 10 קוביות שונות, כך שסכום התוצאות יהיה 25?

התשובה בעמוד 196

שאלה 7-19 (פתורה) =  ~~י ■~~

נבדוק את מספר האפשרויות לתאר את המספר 6 כסכום של מספרים טבעיים חיוביים, כאשר לסדר המחוברים אין חשיבות.

אנו מוצאים את 11 האפשרויות הבאות:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1+1+1+1+1+1 | 1+1+1+3 | 2+4 |
| 1+1+1+1+2 | 1+2+3 | 1\*5 |
| 1+1+2+2 | 3\*3 | 6 |
| 2+2+2 | 1+1+4 |  |

הצע דרך לקבוע מספר זה, בלי לבדוק את כל האפשרויות.

פתרו ן

בכל חלוקה מופיעים מחוברים 1, *t2* מחוברים 2, t3 מחוברים 3, t4 מחוברים 4, t5 מחוברים 5 t6-1 מחוברים 6 (לא יכולים כמובןלהופיע מחוברים גדולים מ־6). חייב להתקיים השוויון:

t1+2t2+3t3+4t4+5t5+6t6 = 6

כאשי 611\*״ 5\*. 4\*>0י 2>0<\*2<3 .0<t3. •

נרשום את הפונקציה היוצרת:

•(x) = (l+x+x2+x3+x4+x5+x6)(l+x2+x4+x6)(l+x3+x6)/ (l+x4)(l+x5)(l+x6)•

נחפש את המקדם של x6. נפתח סוגריים (בכל מקרה *ער xb* בלבד):

• (...♦x) = (l+x+2x2+2x3+3x4+3x5+4x6♦...)(l+x3+x4+x6)/

= (...+l+x5+x6)•

(...♦l+x+2x2+2x3♦3x4♦3®5 \*4x6 + ...)(1+x3 +x4♦x5+2x6) =

המקדם של x6 במכפלה זו הוא 11=2+1+2+2+4 .

השאלה הזו מדגימה שיטה כללית למציאת מספר תיאורים אפשריים של מספר טבעי גדול מ-0, כסכום של מספרים טבעיים גדולים מ-0.

שאלה 7-20

מהו מספר האפשרויות לרשום את המספר 8 כסכום של מספרים טבעיים גדולים מ-0 ושונים זה מזה?

התשובה בעמוד 197

שאלה 7-21 (פתורה) — —

הראה שמספר התיאורים של מ, כסכום של 3 מספרים טבעיים, שווה למספר התיאורים של *2n,* כסכום של שלושה מספרים טבעיים שכל אחד מהם קטן מ-ח.

פתרו ן

כדי למצוא את מספר התיאורים של מ, כסכום של 3 מספרים שלמים חיוביים, נשתמש בפונקציה היוצרת:

3(1־״x+x2+...+xn)3 = x3(l+x+x2+ ... +X) = (!)/

יש למצוא את המקדם של xn בפונקציה (!)/ זו.

כדי למצוא את מספר התיאורים של ת2, כסכום של 3 מספרים שלמים חיוביים קטנים מ-ת, נבנה פונקציה יוצרת:

הא**1**ח**1**דסיטה **Q** ה **n 1 n 0** ה **GO**

Gilad Barnea

g(x) = (x+x2+ ... ♦x"3(1־ = *x*

את המקדם של x2n בפונקציה (g(x זו.

יש למצוא

.3

*1)3 = x*־x11♦ ..

/(x) = x

המקדם של

x3(l3־xn\* ... )(1+x+x2♦

xn ב-(!)/ שווה למקדם של 3\*xn ב-3(...+l+x+x2) והוא -

n-1

2

n-1

n-3

3־l+n3־  
n3־

נפנה עתה

x3(l-3xn1+3־x2n2־-x3n׳(3־(l+x+x2\*...)3

?1־"\*־3 fl.

1-x

g(x) = x

המקדם של

x2n בביטוי זה

הוא

(n-2)(n-1)  
2

(2n-l)(2n-2) nn(n-l)  
2 ‘ 3 2

ואכן הוא

שווה למקדם של

xn ב-(1)/.

בצע ביתר

פירוט את חישוב המקדמים.

7.3 שימוש בפונקציות יוצרות לחישובים במקדמים בינומ״ם

נביא דוגמאות אחדות של חישובים במקדמים בי נומי ים בעזרת פונקציות יוצרות.

שאלה *22.ך* (פתורה) חשב את הסכום:

n+1  
*k*

*n+2  
k*

*n+m  
k*

פתרו ן

נרשום

(l+x)n

l+nx+ ..

xk +

ח.

(1+x)־ 1\*״ l+(n+l)x+ ...

(l+x)n+m « l+(n+m)x+ ...

n+1  
*k*

n+m  
*k*

xk +

+xn\*

+In\*m

נחבר את הביטויים המופיעים באגף השמאלי של מערכת המשוואות. אנו מקבלים פונקציה יוצרת, עבור הסכום שבשאלה. סכום זה הוא המקדם ak של xk בפוגקציה הי וצרת הזו. אם כן:

־ /(x) = (l+x)n+(l+x)n\*1+...+(l+x)n\*m

־ ['״(1+l+x)n[l+(l+x) + ... + (l) =

־ [l־1\*n[(l\*x)ro(־\*l)| ״ ~~i-i-f~~~~41~~~~־~~~~1~~ ״(\*♦I) =

־ i[(l+x)ntm\*1־(l+x)n]

המקדם של xk n+f *k*

שבשאלה

ב-(!)/ הוא

0» 1

*n*k+1

n+m+1  
k+1

זה גם ערכו של הסכום

שאלה 7-23 (פתורה) חשב את הסכום

*2n n*

*2n-l  
n*

2 2n-2 *n*

+ 2”

פתרו ן

נפעל בדומה לתרגיל

הקודם

אנו

רושמים

A.

*X ♦*

*2n n*

(l+x)2n

xn +

2n־l *n*

2(l+x)21־״

xn +

*2n-2  
n*

♦22

22(l+x)2n22 = 2־+

2n

/(x) = (l+x)2n+2(l+x)2n'1+2[[1]](#footnote-1)(l+x)2n\*2♦...+2n(l+x)n ־־

1+x  
2

1+x

2

2n-l

2n-2

1+x

2

כדי להקל על המשך החישוב, נוסיף ל-(!)/ את הסכום -

י fl+xl"1] 1־+x  
. [ 2 J [2

החזקות של **1,** המופיעות בסכום הזה, ל-(!)/ לא תשנה את המקדם של xn. כך מקבלים פונקציה יוצרת

נמוכות מ-״**1,** ולכן הוספתו

חדשה:

1 ♦1ז2 *1)*

1+X

2

1-1

f 1 \*״׳I 2n ♦ 1

1+x

g(x)

22n\*1-|1+ 2n+l

(l+x+x2+...)

22n+1-l-

2n+l

1

2n+l

2

2n+l *n*

נשים לב עתה, שנוסף לאיבר הראשון (משמאל), בסכום מופיעים בדיוק מחצית המקדמים (לפי הסדר) של הפיתוח l+x)2n.l). סכום מחצית המקדמים של פיתוח זה הוא כידוע 22n.l•^, ואנו יכולים לרשום את את הסכום בצורה:

22 n \* 1 *\_ ^2n*י 1 \_ 1 ♦ 22 n

בסך הכל קיבלנו, כי הסכום שבשאלה הוא 22n

שאלה 7.24

הוכח את התוצאה, שקיבלנו בתשובה לשאלה 7.23, באמצעות אי נדוקציה.

התשובה בעמוד 197

להלן כמה שאלות נוספות, שעניינן בנית פונקציות יוצרות לפתרון בעיות קומבי נטוריות.

שאלה 7-25

בכמה אופנים אפשר לבחור י׳ 3 דגלים מתוך *2n* דגלים אדומים, *2n* דגלים כחולים ו-ה2 דגלים לבנים?

התשובה בעמוד 198

שאלה 7-26 (כתורה) מהו מספר האפשרויות לבחור *k* ספרות מתוך {0,1,2}, בתנאי ש-0 ייבחר מספר זוגי של פעמים ושאר הספרות ייבחרו מספר רצוני של פעמים?

פתרו ן

הפונקציה היוצרת כאן היא:

= 2(...+x) = (l+x2+x4+x6+...){l+x+x2)/

1 . 1 = 2(1-x2 (1-x

לחישוב המקדם של xk נוח לרשום את (x)/ בצורה הבאה: (...♦x) = (l+x2♦!4♦!6♦...)(l+2x+3x2+4x3)/

עבור *k* זוגי מקבלים: = ak

עבור *k* אי-ז ו גי מקבלים: ~ ak

פרט את החישובים הדרושים לקבלת התוצאה לעיל.

כאשר עבור כל 0<t!<9 *i.*

הוכח כי:

(l+x+x2+ ... ♦x9)(l+x10♦ ... ♦x90)(1+x100+ ... ♦x900)• ...

שוה ל־ —^-ך, והסק מכאן, שהתיאור של מספר טבעי בשיטה העשרונית, 1־1

אותו רשמנו לעיל, הוא יחיד.

התשובח בעמוד 199

7.4 פונקציות יוצרות מעריכיות

עבור הסדרה ...,an a0,a! מגדירים פונקציה יוצרת מעריכית:

12 xn

...+ -an^j+...+ *־ (x)\** פונקציה יוצרת

מעריכית

בסעיף זה נדגים שימושים אחדים של פונקציה יוצרת זו.

הבה נרשום את הפיתוח הבינומי בצורה:

l)fj■ \*־1♦^ ♦ n(n ־ l\*x)n)

ץ^!מ♦ ... ♦ -P(n,k)^j+ ... + ץ|(2-מ) (+ n(n-l

על פי ההגדרה, הפונקציה h(x)\*(l+x)n משמשת פונקציה יוצרת

מעריכית של סדרת מספרי החליפות:

P(n,0),P(n,l),P(n,2) P(n,n)

נכליל תוצאה זו למקרה של חליפות עם חזרות.

נניח כי אנו מעוניינים לקבוע את מספר החליפות של 12 מתוך הספרות 1,2,3,4,5.6 כאשר על 1 ו-2 להופיע לכל היותר פעמיים בחליפה, על 3 ו-4 לפחות פעם אחת. על 5 לפחות פעמיים ועל 6 להופיע מספר זוגי של פעמים בחליפה.

לו חיפשנו את מספר הצירופים הממלאים את התנאים האלה, היינו משתמשים, כמו בסעיף הקודם, בפונקציה היוצרת "הרגילה" -

/(x) = (1+x+x2)2(x+x2+x3+...)2(x2+x3+x4+...)(l+x2+x4+x6♦...)

המקדם של x12 ב-(!)/ שווה למספר הצירופים השונים, עם חזרות, המקיימים את הדרישות. אבל בבעיה הנוכחית מדובר על חליפות, כלומר, על הסידורים השונים של הספרות בכל הצירופים השונים.

נניח כי אחד הצירופים הללו הוא 113345556666 . זו תוצאת הכפל של שישה איברים, אחד מכל אחד מששת הפולינומים, כדלקמן:

*2’x3* •x4=x־x2 •1° *•x2 •x*. את 12 הספרות שבצירוף הזה אפשר להתמירי 12

~~ב~~~~' !4!3!1!2!ס!2~~ אופנים. כדי לקבל מספר זה כמקדם בפונקציהיוצרת, נשתמש בפונקציה יוצרת מעריכית:

2וr 2 ו 2 ו

**m** ך ־\*•ך ־\*•ך\* rpJ

- vU •U 4 <Az •A\* vU

h(x) =

1 i! 2f 1 1! 2? if 2! \* ע

**' —2 \_3 2 \_3** *■J\**

*X X X X* X X

1! 2! 3! ” J [2! 3! 4T \* ”

**\_2 \_\_4 \_6**

**1 x x x**

\* 2! \* 5T \* 6!

הפולינומים הרשומים כאן מתקבלים מהפולינומים הרשומים *3-(f(x* לעיל, כאשר מחלקים שם כל x1 ב- !Z .

מכפלת ששת האיברים, שנתנה את הצירוף 113345556666 ,תיראה כעת:

**2 0 2 3 4 12**

x x x \_ x . g . ® \_ x

2! ’ 0! ‘ 2! 1 ’ ז3 ‘ !1 יH = 2!•0!•2!•1!•3!•4! =

12! x12

!12 ‘ !4•!3•!1•!2•!0•!2 י

בשלב האחרון כפלנו וחילקנו ב-!12, כדי לקבל את מספר החליפות הנדרש.

המסקנה מכל החישוב שעשינו חזרות המקיימות את תנאי בפונקציה היוצרת המעריכית

היא, שכדי למצוא את מספר החליפות עם **12** \*ד

הבעיה, יש למצוא את המקדם של 12— !12

(Hx (ס’ם לב: של *~~־ !22~~* ולא של x12) .

באופן דומה נסיק, כי מספר החליפות עם חזרות *של k* איברים מתוך *n xk*

קבוצות איברים, כל אחד במספר רצוי, שווה למקדם של בפונקציה

הי וצרת המעריבית -

2 —3 n— •ר

”\*\* 1Y + 2T + 3T + ^ = (שנ)ז^

הביטוי בסוגריים הוא, כידוע, ex. לכן:

kX  
n k!



*המקדם של 3-(h(x* הוא *nk,* שכזכור הוא אכן מספר החליפות *המבוקש.*

שאלה *23. ך* (פתורה) רשום פונקציה יוצרת מעריכית, למציאת מספר האפשרויות לסדר *k* כדורים שונים בשלושה תאים שונים, כך שבתא הראשון יהיה לפחות כדור אחד ובשני התאים האחרים מספר הכדורים הוא רצוני.

פתרו ן

הכדורים שונים, לכן לפנינו מקרה של ר איברים מתיך 3 סוגים נתונים (3 התאים) ־

ליפות עם חזרות של *k* לכל כדור בוחרים תא.

*x2*

*h(x) =* ־\*־ :ג +

h(z) נרשום את *.h(x)-3*

הפונקציה היוצרת המעריכית היא כאן -

2ו 3 2 זו 3

xJ . *x x xJ*

3! ”־J [ 1! 2! 3! ”\*]

xk

מספר החליפות המבוקש הוא המקדם של —

k

:בצורה הבאה

*h(x) ־* (ex-l)(ex)2 = e3x-e2x =

. [!+ 3־ + mi + + 1311־ + \_

1! 2! ־־’ k! ־'־

’ 2x (2x)2 (2x)k י

“ 1I! 2! ־־’ k! "־

*xk*

•3k2־k המקדם של — הוא

2 כדורים שונים ב־3 תאים, עם התנאי שבתא) k=2 כך, למשל, עבור הראשון מוכרח להיות כדור) מספר האפשרויות הוא 5=22־32 . ואלה הן [הכדורים מסומנים ב-ל (לבן) ו-א (אדום)]:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | תא 1 | תא 2 | תא 3 |
| (1  (2  (3  (4  (5 | ל א ל א א,ל | א  ל | א  ל |

מצא את מספר האפשרויות לחלק 8 ספרים שונים בין 4 ילדים, אם הילד הראשון מקבל לפחות 2 ספרים.

התשובה בעמוד 200

שאלה 7-31 (פתורה) -

מצא את מספר המלים באורך *k,* אותן אפשר ליצור מעל האלף־בית {0,1,2,3.4}, כך שהמספר הכולל של 0-ים ו-1-ים. בכל אחת מהן, יהיה זוגי.

פתרו ן

נבנה פונקציה יוצרת מעריכית באופן הבא: נחלק את המלים המבוקשות לכאלה שיש להן מספר זוגי של 0-ים ומספר זוגי של 1-ים, ולמלים שבהן יש מספר אי-זוגי של 0-ים ומספר אי־זוגי של 1-ים. מספר המלים המבוקשות הוא סכום מספרי המלים בשתי הקבוצות. נרשום:

h(x)

5! +

-x 2ר

•(ex)3

2•(ex)3

2x) = |(e5x+ex)־2e2x+2e)-^ =

^1 x

המקדם של *1-(h(x* היא וזה מספר המלים המבוקשות.

נדגים עבור *k=l* ו- *2=k :*

עבור fc«l נקבל 3=(5+1)| , והמלים ה( 2,3.4 •

עבור *2=k* נקבל 13=(25+1)^ , והמלים הן:

00,01,10,11,22,23,24,32,33.34.42,43.44

7.5 שימוש בפונקציות יוצרות לפתרון יחסי רקורסיה

לעתים אפשר להשתמש בפונקציות יוצרות, כדי למצוא ביטויים מפורשים עבור הפונקציות המוגדרות על-ידי יחס רקורסיה. להלן דוגמאות אחדות.

סדרת פיבונציי, שבה עסקנו כבר מספר פעמים, מוגדרת על-ידי יחס הרק ורם יה -

an=an-l\*a2-״ < a0י !־ V1 )

.הפונקציה היוצרת של סדרת פיבונציי /(x)«a0+a1x+a2x2+... תהא

נרשום

/(x) = ) cqx1 = 1+x + ) a!!1 « 1+x + ) (a1-i+a1-2)xl ״

J1־

+ X2 ) dj xJ =  
J־o

l+x+x(/(x)-l)+x2/(x) = l+x/(x)+x2/(x)

מכאן

המקדם של xk בפיתוח של הביטוי האחרון הוא המספר ה־»ן-י בסדרת פיבונצ•י.

הערה: אפשר להציג את הפיתוח שעשינו כאן גם כך: נרשום

2-״1 \* a-״a

נכפול את השוויון הראשון ב-2!, את השני ב-3!, וכן הלאה, ונחבר. אנו מקבלים:

a2x2 ♦a-jX3♦ ... +anxn+ ... =

13 + ... +an.2xn+ ...ןד>\*012מ+ ... += a!x2+a2x3+ ... +an\_1xn

א□ נזכור־ ש- ... + x)=a0+a1x-t-a2x2)/ , וכן ש- a0=l ו- , aj'l נוכל לרשום:

x)-l-x = x[/(x)-l]+x2/(x))/

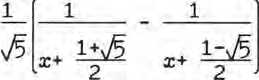
כלומר - 1= (/(x)(l-x-x2

ו

או, כפי שקיבלנו לעיל: = (!)/

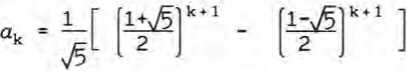
x2־l-x

כדי למצוא את המקדם של xk בפיתוח של (!)/, נפרק את (!)/ לשברים חלק י י ם. מקבל י ם:



ראח הקורס בחשבי ן א«נפ«ניטסימלי, או כחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי למדעים.

את כל אחד מן השברים אפשר לרשום כטור גיאומטרי אינסופי, והמקדם ak של xk ב-(!)/ הוא -



כפי שכבר מצאנו בשאלה 6.12.

השלם את כל הצעדים שעליהם דילגנו בחישוב לעיל.

שאלה 32.*ך* (פתורה)  ~~■■ י י~~

לכמה אזורים מחלקים *n* ישרים מישור, אם כל שני ישרים נחתכים, אבל אף שלושה ישרים אינם נפגשים בנקודה אחת?

פתרו ן

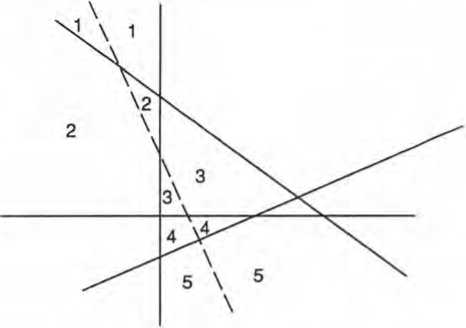
נבנה נוסחת רקורסיה עבור המספר המבוקש *an.*

אפס ישרים מחלקים את המישור לאזור 1, לכן a0=l .

ישר אחד מחלק את המישור ל-2 אזורים, לכן 2=!a .

נניח ש-1-א ישרים מחלקים את המישור ל-ן.^ אזורים. הישר ה-א-י חותך את כל 1-א הישרים, וכיוון שאף שלושה ישרים אינם נחתכים בנקודה אחת, הישר ה-מ-י מתחלק על-ידי נקודות החיתוך עם 1-א הישרים ל-א קטעים (שניים מהם אינסופיים). כל אחד מהקטעים האלה

מחלק אזור, שהיה מוגדר קודם לכן, ל-2 אזורים, כך שנוספים *n* אזורים חדשים. ראה, כדוגמה, את האיור עבור 4=7-1? . הישר הנוסף, החמישי, הוא הישר המקווקו. הוא חותך את ארבעת הישרים ומתחלק ל־5 קטעים, שכל אחד מהם מחלק אזור קיים של המישור ל-2 אזורים חדשים (אזורים אלו מסומנים ב-1,1, 2,2. 3.3, 4,4 י־5.5).



מהשיקול הזה אנו מקבלים את יחס הרקורסיה:

למציאת ביטוי עבור an, נשתמש בפונקציה יוצרת -

/(x) = a0 + ajX + a2x2 ♦ ...

**00 00 00**

/(x) = *Y~* a!!1 = a0 + y~ arx‘ = a0 + ) (a!.!♦\*)!1 =

**1־1 1־1 0־1**

**00 00**

= ~a0 \* EZ a!-1Xl ♦ *Y =*

**00 00**

1’a0 + x ) ajXJ + *x ) lx1 =*

**1־1 0־j**

” 1

a0=l והסכום 1'Z tx1 שווה ל (ראה עמוד 122), לכן:

1־1 2(®־(I

/(\*) = 1 + x/(x) ♦ ~~g~~~~(1~~~~1~~~~;c)~~~~2~~

מכאן

ו­

(l-x)/(x) = 1 + —-—-  
(1-x)2

*m* ־ ib \*

1 1 (l-x)J

המקדם של xn ב-(1)/ הוא +an=l .

זו היתה דוגמה נוספת לשימוש בפונקציה יוצרת.

נעיר, שאת הביטוי עבור an אפשר כאן למצוא בדרך פשוטה בהרבה.

נרשום:

an = an-l+n ’ an\_2+(n־l)+n = an.3+(n-2)+(n-1)+ת

= ... = a0+l+2+...+(n-2)+(n-l)+n = 1 \*

(השתמשנו בעובדה ש- a0=l ). המדקדקים מוזמנים להוכיח נוסחה זו בעזרת אי נדוקציה.

שאלה 7-33

נתון יחס הרקורסיה: 1=2 + (n+1) • a0=2 • a1-״a ־ 1-״2a = ״a

מצא פונקציה יוצרת עבור הסדרה ... ,a0,alta2 .

מצא ביטוי מפורש עבור an.

התשובה בעמוד 200

**תשובה לשאלה שבמבוא**

תשובות לשאלות

אל הלומד: בתשובות הניתנות בזח, דרך הפתרון אינה בהכרח הדרך היחידה.

**השאלה בעמוד 1**

הדבר אינו ניתן: כל אבן דומינו מכסה משבצת לבנה אחת ומשבצת שחורה אחת; בלוח שהוצאו ממנו המשבצות שבקצות אחד האלכסונים יש 32 משבצות ־־

מהצבע האחד ו־30 משבצות מהצבע האחר.

**השאלה בעמוד 4**

54 » 32־(1־87)

56 ־ (1־32)־87

1\*1מ“2מ

(m+k)-m+l ■ *k+1*

**השאלת בעמוד 4**

4 • 312־747+1 ־ 2+1 • 312 , *x*־747

121 ״ 1־47+75 ״ ע , 47״ 75+1-ע

**תשאלח בעמוד 4**

**תשובה 1.1**

א1)

א2)

ב)

ג)

**תשובה 1.2**

א) 36 ב)

**תשובת 1.3**

1. קבוצת המספרים המתחלקים ב־13, שנמצאים בתחום הנתון, מהווים את הסדרה החשבונית:

13+13-k 13 , 13+13-1 , 13+13-2

כאשר 3000>(. 13(l+k

*k-n* הגדול ביותר המקיים אי-שוויון זה הוא 229-k , כך שמספר איברי הסדרה הוא 230, וזה המספר המבוקש.

1. מספר השלמים בתחום הנתון, המתחלקים גם ב־5 וגם ב־13, שווה למספר השלמים בתחום זה שמתחלקים ב־65. אנו מוצאים, כמו לעיל, שמספר זה הוא 46.

לכן, מספר השלמים בתחום הנתון, שמתחלקים ב- 13 אך אינם מתחלקים ב- 5, הוא: 184 - 46־230 .

12

בכל מחזור *6\*?—* משחקים. כל קבוצה משחקת נגד שאו־ 11 הקבוצות פעמיים, ולכן היא משחקת 22 משחקים. סך המשחקים המתקיימים בעונה *הוא* 132=22־6 .

תשובה 1.5 השאלה בעמוד 5

1. במקרה הגרוע ביותר, האיש יוציא ראשית את כל 18 הגרביים החומות, ולכן הוא זקוק ל- 20 הוצאות.
2. משיקולים דומים: 16=2\*7-2 .
3. 3, כי ביו 3 גרביים חייבות להיות שתיים מאותו צבע.

השאלה בעמוד 5

תשובה 1.6

יש 4 אפשרויות לבחור את דלת הכניסה. על כל אחת מאפשרויות אלו, יש 3 אפשרויות לבחור את דלת היציאה ולכן התשובה היא 12=3־4 (שים לב שאיו צורך לחלק ב- 2, כי יש הבדל בין תפקידיהן של שתי הדלתות - כניסה או יציאה).

תשובה 1.7

השאלה בעמוד 5

126 = 3־7-6

7875 . “

סוגים שונים של חולצות:

זוגות שונים של חולצות מסוגים שונים:

תשובה 1.8 השאלה בעמוד 5

א) 39= 20+14+5

ב) ב- 20+14 סופרים פעמיים את ששת התלמידים הלומדים גם פיסיקה

וגם כימיה. לכן הפתרון הוא: 33=6־39 או 33=5+(14-6)+20 .

20+5 = 25

ג)

תשובה 1.9

השאלה בעמוד 6

15 = 1־3-2 + 2־3 + 3

**3** ספרות **2** ספרות ספרה אחת

ה פתוחה **GO**

Gilad Barnea

תשובה 1.10 השאלה בעמוד 6

1. לשתי הקבוצות 4 איברים משותפים. לכל אחת 9 איברים. לכן:

5 ־־ |4-8| ־־ |8-4| , 4 ־ |8ח4!| , 14 = (4־9)+9 = |8ט4|

1. ,{1,2,3.5,6},(1,2.3,4,6}.(1,2,3,4,5}

{2,3,4,5,6},{1,3,4,5,6},{1,2,4,5.6}

1. ,{2,6},{2,5},{2,4},(2.3},{1,6},{1,5} ,{1,4},{1,3},{1,2}

{5,6},{4,6},{4,5},{3.6},{3.5},{3,4}

תשובה 1.11 השאלה בעמוד 6

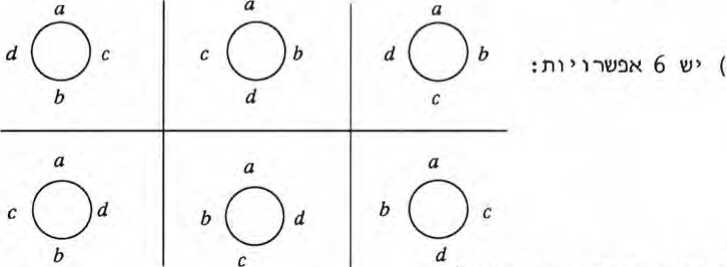
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| א) | !53 | ב) | 120 | 16-15 2 |
| ג) | 18-16 = 288 | ד) | 561 | 31^3 . 2 |

השאלה בעמוד 6

תשובה 1.12

א) יש 24 אפשרויות (1־2־4-3). הנה שתיים מהן: *a,b,c,d ; b,d,a,c .*

ג) מספר האפשרויות הוא 4.



1. 3 (ah ו-cd, או *bd-> ac,* או *ad* ו-be)
2. 6=2־3 (כי כל קבוצה יכולה לקבל כל תפקיד)

תשובה 1.15 השאלה בעמוד 10

1. ב־5 מתחילים 6 מספרים בני 2 ספרות שונות. הוא הדיו ב־7. וביחד - 12 מספרים.
2. המספרים המבוקשים הם אלה המתחילים ב-1, 2 ו-4. בסך הכל יש 18(=6־3) מספרים כאלה.

נסמן ב-4" את קבוצת התלמידים המשתתפים בשיעורי התעמלות, וב-5 את קבוצת התלמידים המשתתפים בשיעורי מוסיקה.

לפי הנתון 310=220+90= |13+ 41-|, ו־ 250=|5ט1/|. בעזרת הנוסחה |5ח1/|-|8| + |4| = |5ט4| נמצא את מספר התלמידים המשתתפים בשני

המקצועות:

60 = 310-250 = |עט4|-|8|+|4| ־ |5ח4|

השאלה בעמוד 10

תשובה 1.17

מספר המספרים המתחלקים ב־5 הוא מספר המספרים המתחלקים מספר המספרים המתחלקים לכן, מספר המספרים בין הוא 68=(20+14-2)-100

ב־7 הוא

ב־5 וב־7 הוא 2

1 ל-100

20=100:5 .

*^ך:98 .*

(35 ו-70).

שאינם מתחלקים לא ב־5 ולא ב־7

תשובה 1.18 השאלה בעמוד 10

במקרה הגרוע ביותר אפשר להוציא 2 כדורים צהובים, 8 ירוקים, 9 לבנים, 9 כחולים ו־9 אדומים. כל זה ־ 37 הוצאות בסך הכל - בלי להוציא 10 כדורים באותו צבע. ההוצאה הבאה תעלה בהכרח כדור שצבעו לבן, כחול או אדום, כך שיהיו אז 10 כדורים באותו צבע. לכן יש להוציא 38(\*37+1) כדורים, כדי להבטיח שיהיו ביניהם 10 בצבע זהה.

תשובה 1.19 השאלה בעמוד 10

= |0ח5ח4| + |0| - |BnCח4| - |5ח4| - |0| ♦ 81| + 11/| = |0ט8ט4|

101 = 50+70+40-25-20-22+8 =

תשובה 1.25 השאלה בעמוד 15

יש הבחנה בין כניסה בדלת א' ויציאה בדלת ב', לביו כניסה ב-ב' ויציאה ב-א'. לכן, מספר האפשרויות - אם אסור לעבור באותה דלת פעמיים - הוא 42=6־7 .

אם מותר לעבור פעמיים באותה דלת, מספר האפשרויות היא 49=7־7 •

תשובה 1.26 השאלה בעמוד 15

1. במקום הראשון - 4 אפשרויות, כן בשני וכוי. לכן, מספר המלים הוא 256»44 .
2. מספר המלים המתחילות ב-a הוא 64=43 , וכן מספר המלים המתחילות ב-&. לכן, מספר המלים המתחילות ב-ב> או *3-b* הוא 128=64-2 .
3. במקום הראשון - 4 אפשרויות. בשני - 3, בשלישי - 2, ברביעי - 1 (האות שנותרה). לכן, מספר האפשרויות הוא 24=2-1׳4-3 .
4. יש 6(=2-1־3) מלים שונות זו מזו שמתחילות ב-ב>, ו-6 כאלה המתחילות ב־&. לכן, יש 12 מלים המתחילות ב-ב> או ב-<£, שבהן אף אות אינה מופיעה פעמיים.

תשובה 1.27 השאלה בעמוד 15

1197 = 1008+189 = 3־9־6+7־21-8

תשובה 1.28 השאלה בעמוד 16

1. כל אלה הם מספרים בני 4 ספרות, שכל ספרה מהארבע הנתונות יכולה להופיע בהם פעם אחת או יותר. לכן מספר המספרים השונים, הממלאים את דרישת השאלה, הוא 256=44 .
2. אלה הם מספרים בני 4 ספרות, מתוך הספרות הנתונות, שאינם מתחילים ב-0. לכן, במקום הראשון יכולה להופיע כל אחת מ-4 הספרות השונות מ-0. במקומות האחרים יכולה להופיע כל אחת מ־5 הספרות הנתונות. המספר הכולל של האפשרויות הוא, אם כן: 500=5־5־4-5 .

תשובה 1.29 השאלה בעמוד 16

1. מספרים בני ספרה אחת ־ 5, בני שתי ספרות ־ 25=52 , בני שלוש ספרות ־ 125“53 , ובני ארבע ספרות ־ 625=54 . בסך הכל יש 780 מספרים הממלאים את תנאי השאלה.
2. האי-זוגיים הם אלה המסתיימים ב־1, 3 או 5. מספרם:

468 = 3־3+5-3+52-3+53

תשיבה 1.30 השאלה בעמיד 16

אם הקבוצות *A* ו-8 זרות זי לזו, הרי מספר האיברים *1-AvB* הוא סכום מספרי האיברים של שתיהן (אין איברים משותפים, ולכן בדרך זו אין סופרים שום איבר פעמיים).

מספר הזוגות הסדורים (a,b), כלומר, מספר תוצאות ניסוי, המתבטא בבחירה קודם מתוך *A* ואחר כך מתוך *B,* הוא מספר האיברים במכפלה הקרטזית 4x8.

תשובה 1.31 השאלה בעמוד 16

א) 4096 » 84 ב) 1680 » 8-7-6-5

תשובה 1.32 השאלה בעמוד 17

1. (a)/ יכול לקבל אחד מתוך 3 ערכים (1, 2 או 3), הוא הדין לגבי (c) ,/(b)/ וכוי. לכן מספר הפונקציות השונות הוא 243=35 .
2. מספר הפונקציות השונות של *A* לתוך 8, M-B/, הוא *kn* (כל איבר של *A* יכול לקבל אחד מתוך *k* ערכים שונים).

תשובה 2.4 השאלה בעמוד 20

א) 210 • 5\*6־7 ב) 5040 " 9-8-7-1O

1. (3-n(n-l)(n-2)(n ד) 5 ה) 120

תשובה 2.5 השאלה בעמוד 21

א) בדרך אלגברית: (P(n,l) + P(m,l) = *n* ♦ m = P(n+m,l

בדרך קומבינטורית: (P(n+m,l הוא מספר החליפות בנות איבר

אחד מתוך קבוצה בגודל n\*m. כלומר, זהו מספר האפשרויות לבחור איבר אחד מקבוצה בגודל n+m.

אך מספר אפשרויות הבחירה השונות הוא הסכום של מספר האפשרויות לבחור איבר אחד מ-ח האיברים הראשונים, (2,1,...,מ) ושל מספר האפשר ו י ות לבחור איבר אחד מ-זק האיברים האחרונים, (1+n ח7). סכום זה הוא (P(n,l)+P(m,l .

ב) בדרך אלגברית: = 1\*2‘3• ... •(2-P(n,n) = *n•*(n-1)•(n

(1-P(n,n ־ 2־3• ... •(2-n•(n-1)•(n =

בדרך קומבינטורית: כפי שראינו בדוגמת הוועד שכולל יו״ר, סגן וגזבר (שאלה 2.1), (P(n,n הוא מספר האפשרויות לבחור מתוך *n* אנשים ועד של *n* אנשים בעלי תפקידים שוני□ זה מזה.

(P(n.n-l הוא מספר האפשרויות לבחור מתוך *n* האנשים ועד של 1-n אנשי□ בעלי תפקידי□ שונים. במקרה זה נשאר אד□ אחד מחוץ לוועד, אך אפשר לראותו כבעל תפקיד נוסף, שונה *n-1-n* התפקידים הקודמים. לכן מספר זה, (P(n.n-l, זהה למספר האפשרויות לבחור ועד, אשר ל־מ חבריו יש *n* תפקידים שונים, דהיינו: (P(n,n.

הערה: הנימוק שהעלינו אינו תופש ל-(2-מ,מ)?. במקרה כזה נותרים שני אנשים בעלי תפקידים זהים - להיות מחוץ לוועד.

תשובה 2.6 השאלה בעמוד 21

1. 120 ־ 2־4-3־5 = P(5.M
2. במקום הראשון יכולה להופיע כל ספרה מתוך 4 הספרות: 2,4,6,8. בשלושת המקומות הנותרים יכולה להופיע כל אחת מתוך 4 הספרות: ה־3 שלא נבחרו למקום הראשון, ו-0. הפתרון הוא אם כן:

96 = 3-2־4-4 = (4,3)4-P

השאלה בעמוד 21

תשובה 2.7

מספר המספרי□ בעלי 6 ספרות שונות (שאינם מתחילי□ ב-0) הוא (9.5)P־9, בעלי 7 ספרות - (9.6)P־9, בעלי 8 ספרות ־ (9,7)P־9, בעלי 9 ספרות ־ (9.8)9‘P ובעלי 10 ספרות ־ (9.9)P־9■

במספרים גדולים יותר, יש בהכרח לפחות 2 ספרות שוות.

יש עוד לבדוק את מספר המספרי□ בעלי 5 ספרות, הגדולים מ-65,000. אלה המתחילים ב־9.8,7 ־ P(9,M־3. אלה המתחילים ב-6, הספרה השניה בהם היא אי 5 או 7 או 8 אי 9 ומספרם היא (8,3)P־4־1.

המספר המבוקש הוא אפוא:

9(P(9.5)\*P(9.6)+P(9.7)+P(9.8)+P(9.9))\*3־P(9.4)\*4-P(8,3)

א) 360 = 3־6-5-4 = (6,4)P

ב) 60 = 3־4־5 ־ (5.3)P

1. מספר החליפות שאינן מכילות את a הוא P(5.4)=12O . לכן, מספר החליפות המכילות את *a* הוא 240=360-120 .

21 השאלה בעמוד תשובה 2.9

P(m,n) = *m•*(m-1)•...•(m-n+1) א) באופן כללי

P(m+n,m-n+2)+P(m+n,m-n+l)

P(m+n,m-n)

. (m+n)(m+n-1)...*(m+n-m+n-2+1)+(m+n)*(m+n-1)...(m+n-m+n-1+1)  
(m+n)(m+n-1)...(m+n-m+n+1)

*\_ (m+n)*(m+n-1)...(2n-l)+(m+n)*(m+n-1)..*■ 2n \_

(m+n)(m+n-1)...(2n+l)

= 2n2)־n-l)+2n = 4n2

P(n־l,k-1)•P(n-k,n־k) \_

P(n-l.n-l) '

(n-1)(n-2)..,(n-l-k+1+1)•*(n-k)!*

־ (n-1)!

(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)! .

־ (n-1)! 1 ״

כאשר השתמשנו בסימון 1־2...(2-n!=n(n-l)(n .

תשובה 2.13 השאלה בעמוד 24

מספר התמורות המתחילות ב^> הוא 24. למשל:

*dabce, dabec, ... ,decba*

*:dc-3.* מתוכן, 6 תמורות מתחילות

*dcabe, dcaeb, dcbae, dcbea, dceab, dceba*

תשובה 2.14 השאלה בעמוד 25

1. ב־51286743 יש 13 הפרות סדר.

ב־17425683 יש 10 הפרות סדר.

1. יש 24 תמורות, מהן 12 עם מספר זוגי (כולל 0) של הפרות סדר.
2. למשל: ב־51286743 נעשה את הטרנספוזיציה (5.7). נקבל 71286543; מספר הפרות הסדר כאן הוא 16.
3. תהא נתונה התמורה *t! t2...a...b...tn\_*j*tn* , כאשר *b,a* וכל ה־נ/-ים הם מספרים שונים מתוך *n* 1,2 (שמספרם הכולל הוא

כמובן ת).

נניח שבתמורה זו יש *t* הפרות סדר. נעשה טרנספוזיציה (6,a).

כל הפרות הסדר בגין האיברים השונים מ-2> ו-6 נשמרות. כמו כן נשמרות כל הפרות הסדר שבין *a* ו-6 לבין המספרים שקודמים ל-מ ולבין אלה שמופיעים אחרי *b* בתמורה הנתונה.

נניח שביו *a ל^ (בלי a* ו-6) יש *k* מספרים, a מהם קטנים מ-2> ו-3/ מהם גדולים מ-א. אחרי הטרנספוזיציה (כלומר, החלפה הדדית במקומות של *a* ו-6), k-a המספרים הגדולים מ־מ יופיעו לפני a, *k-fi-i* המספרים הקטנים מ-& יופיעו אחרי 6. לכן, מספר הפרות הסדר בין a ו-<2 לבין המספרים שביניהם ישתנה ב-

(a+£-[ (k-a.) + (k-£) ] ■ 2(a+/8-k

לקבלת השינוי הכולל במספר הפרות הסדר יש להוסיף עוד ±1, כי אם *a* ו-6 היו בסדר עולה לפני הטרנספוזיציה הם לא יהיו בסדר אחריה, ולהפך. בסך הכל, הטרנספוזיציה תגרום לשינוי מספר הפרות הסדר ב- 2(a.+/3-k)±l , וזה מספר אי-זוגי. במלים אחרות, הטרנספוזיציה תשנה את הזוגיות של מספר הפרות הסדר.

1. נרשום שתי תמורות שונות: f1i2...a...b...fn\_1<n

*• ■ J1J2*

נבצע טרנספוזיציה *(a,b)* בשתיהן.

אם 2 התמורות שוות במיקום של *b-> a*, הן תשארנה שונות זו מזו. אם הן שונות במיקום ה־׳ס, לאחר הטרנספוזיציה הן יהיו שונות במיקום ה־6; ואם הן שונות במיקום ה-6, התוצאות יהיו שונות במיקום ה-ס.

בכל מקרה, התוצאות לאחר הטרנספוזיציה יהיו שונות.

1. נניח כי בין !n התמורות יש *k* תמורות זוגיות שונות, ו- *n\~k*

תמורות אי-זוגיות שונות. נבצע בכל התמורות את אותה הטרנספוזיציה. כל תמורה זוגית תהפוך לאי-זוגית ושתי תמורות זוגיות שונות יהפכו ל-2 תמורות אי-זוגיות שונות, כך שבסך הכל נקבל שוב את כל !n התמורות, כשבהן *n'.-k* זוגיות ו-& אי-זוגיות. כלומר: *k<n'.-k* ו- n!-k<k . לכן *nl-k=k* ו- !k=|n . כלומר, מספר התמורות הזוגיות שווה למספר התמורות 2 1

האי-זוגיות וכל אחד משני המספרים האלה הוא !7/1.

תשובה 2.15 השאלה בעמוד 25

1. אם שני מספרים מתוך *n* נמצאים זה ליד זה, הרי למעשה מתמירים רק 1-n איברים. מספר התמורות של 1-n איברים הוא !(1-n), אבל כיוון שאפשר להחליף בין המקומות של 1 ו-2, הרי מספר התמורות של n מספרים l,2,...,n, שבהן 1 ו-2 נמצאים זה ליד זה, הוא !(1-מ)2.
2. !(n!-2(n-l
3. נתמיר ראשית 2-n איברי□ 1,2,3) ,4,...,n) . לאחר מכן נקבע סידור פנימי לאיבר "3,2,1". בסך הכל יש !3•!(2-n) תמורות.

השאלה בעמוד 26

תשובה 2.16

1. מושיבים את אחת הנשים במקום מסוים ליד השולחן (כיוון שהשולחן עגול, אין חשיבות היכן). את שאר 6 הנשים אפשר להושיב ב-!6 אופנים. בין הנשים אפשר להושיב את הגברים ב-!7 אופנים. לכן, מספר האפשרויות הוא (ואין הבדל, כמובן, אם מושיבים קודם את הגברים): 3.628,800=!6־!7 .

ב)

2-7!7! = 50.803.200

במקרה זה יש הבחנה במקום "הראשון". כופלים ב-2, כיוון שאפשר

להתחיל (בצד אחד של הספסל) בהושבת אישה או בהושבת גבר.

26 השאלה בעמוד תשובה 2.17

P(n,k) ־ n(n-l)...(n-k+l) א) ־־

\_ n(n-l)•...•(n-k+1)•(n-k)! n! P(n)  
(n-k)! ’ (n-k)! = P(n-k)

**Q** האותכרסיטה  
**nGO** פתוחה

Gilad Barnea

1. אפשר לבנות את כל התמורות *של n* איברים על-ידי כך שמתחילים, בזו אחר זו, בחליפה של *k* איברים מתוך *n* (אלה יהוו את *k* האיברים הראשונים של התמורה), ומצרפים לכל חליפה כזו את כל התמורות *של n-k* האיברים הנותרים. לכן (P(n)=P(n,k)P(n-k .

השאלה בעמוד 26

תשובה 2.18

במקום הראשון של כל מספר כזה אפשר לרשום כל אחת מ־9 הספרות השונות מ-0, במקום השני כל אחת מ־9 הספרות הנותרות (כולל 0), במקום השלישי כל אחת מ-8 הספרות הנותרות, ובמקום הרביעי כל אחת *מ-ך* הספרות הנותרות. מספר האפשרויות הוא 734536־8־9־9 .

השאלה בעמוד 26

תשובה 2.19

1. אם מושיבים את *b* במקום הראשון (קצה הספסל), *a* הוא בהכרח במקום השני. את שאר האנשים אפשר להושיב ב-!8 אופנים. הוא הדין אם מושיבים *את b* במקום האחרון (קצהו האחר של הספסל). אם *b* אינו בקצה הספסל, כלומר, הוא בכל מקום אחר מתוך 8 המקומות הנותרים, הרי *a* הוא או משמאלו או מימינו, ומצידו האחר אחד *מ-ך* אנשים. בשאר *ך* המקומות אפשר לקבוע תמורה כלשהי של 7 האנשים הנותרים. בסך הכל, מספר האפשרויות הוא:

645,120 » !16-8 3 (1+7)!2-8 3 ז7־2-7־8+!2-8

1. 120,960=!6•!4־7 ; ה־7 כאן סופר את המקום בשורה שבו מתחיל הרצף של ארבעתם.

ניתוח נוסף לבעיה: נביט על הארבעה כעל גוף אחד, והרי לנו 7 גופים שיסודרו בשורה ב־ז7 אפשרויות. עכשיו, סידור פנימי של הארבעה: !4, ובסך הכל: !4־!7 .

השאלה בעמוד 28

תשובה 2.20

נסמן ב-ה את הגדול בין *k* המספרים העוקבים. מכפלתם היא:

n(n-l)(n-2)...(n-k+1)

אם נחלק מספר זה ב-!^, נקבל את הנוסחה עבור

וכידוע

הוא מספר שלם. לכן המכפלה שרשמנו מתחלקת ב-!&.

תשובה 2.23

= 90

^¥3.6 . 2־1 1-2

4'

2

השאלה בעמוד 31

יהי *a* אחד מ-ה האיברים.

שאינם מכילים את a, הוא

הוא [1-k •

אבל, כל צירוף של *k* מתוך המספר הכולל ? של צירו

נבחר קודם 8 איברים לקבוצה הראשונה ביו 3 הקבוצות בנות 8 אופנים. את 8 האיברים '52 8

60'  
8

הבאים נבחר מתוך 52 הנותרים - זאת אפשר לעשות ב-

איברים כל אחת. זאת אפשר לעשות ב-

אופנים,

תשובה 2.24 השאלה בעמוד 32

מספר הצירופים *של k* איברי□ מהיד מ,

1 \_ ’

, ומספר הצירופים המכילים את *a*

n או שמכיל או שאינו מכיל את a. לכן, ׳ים של *k* מתוך n הוא סכום שני המספרים הנ"ל, כרשום בנוסחה.

השאלה בעמוד 37

תשובה 2.28

וכך הלאה. מספר האפשרויות לבצע את כל הבחירות, לפי הסדר הרשום בשאלה, הוא מכפלת כל האפשרויות האלה. זה הביטוי הרשום במונה. כיוון שיש 3 קבוצות של 8 איברים, נקבל כל 3 קבוצות כאלה ב-!3 תמורות שונות (ראה שאלות קודמות). כמו כן יש 4 קבוצות של 5 איברים, לכן צריך ג□ לחלק ב-!4; ויש שתי קבוצות של 6 איברים, ולכן יש גם לחלק ב-!2. כך מתקבל כל הביטוי בשורה העליונה של הנוסחה.

השורה התחתונה מתקבלת מן העליונה על-ידי חישוב פשוט, אך גם לה יש הסבר קומבי נטורי:

אפשר לחלק לקבוצות כך - נעמיד את כל ה-60 בשורה. את 8 הראשונים נכניס לקבוצה ראשונה, את 8 "השניים" נכניס לקבוצה שניה, וכוי. יש !60 אפשרויות להעמידם בשורה. ואולם, חלוקה כלשהי נספרת בשיטה זו מספר פעמים: א) בכל קבוצה בגודל נספרו !*kl* פעמים הסידורים הפנימיים. ב) אין הבדל בין קבוצות בגודל זהה. לכן, אם למשל יש שלוש קבוצות בגודל 8, ספרנו !3 פעמים כל אפשרות. מסקנה: את ה־!60 יש לחלק -

א. ב־ !1!23(!6)4(!5)3(!8) ו- ב. ב- !2 !4 !3 .

ומכאן, הפתרון השני אף הוא ברור אינטואיטיבית.

כמו בשאלה הקודמת, מקבלים -

תשובה 2.29

השאלה בעמוד 37

כאן אפשר להסביר ישירות את אגף ימיו: מעמידים *2n* אנשים בשורה, ומוציאים מהם בזה אחר זה זוגות, כשאין חשיבות לא לסדר הזוגות ולא לסדר הפנימי של כל זוג.

השאלה בעמוד 38

תשובה 2.30

׳׳> 4960־ 2^2H2 ־ [33

ב) 29760 " 32-31-30 = (32,3)P

ג) בחלק זה מניחים שאין מחלקים תפקידים בין אנשי הוועד. אם כך, מספר הוועדים שבהם x ו-ע מופיעים ביחד הוא 30 (*y* ,x ועוד אחד מ־30 התלמידים האחרים). לכן מספר הוועדים, שבהם x ו-ע אינם מופיעים ביחד, הוא 4930=30־4960 .

השאלה בעמוד 38

תשובה 2.31

א)

ניתן לארוז בקופסה אחת 4 ספרים, ובשניה 6 ספרים; זאת

לעשות ב-

אופנים. כמו כן ניתן

הקופסאות 5 ספרים, וזאת אפשר לעשות ב­

לאו­ ו ז

1 [10 2I 5.

בכל אחת

אופנים.

אפשר

משתי

בסד

הכל, מספר האופנים, בהם ניתן לארוז את הספרים, הוא אם כן:

10-9-8-7-6 1 + 10-9-8-7 1-2-3-4-5 '2 + 4־1-2-3

כשמבחינים בין הקופסאות, יש

הספרים. לכן מספר האופנים הוא

חשיבות לקופסה שבה אורזים

. 2[1®]♦[1®J=672

את

תשובה 2.32 השאלה בעמוד 38

1. מספר הישרים הוא כמספר הזוגות האפשריים של נקודות, כלומר 153= 12 •
2. 11 הנקודות הנותרות (אלה שאינן ביו ה־7 שעל ישר אחד) קובעות

ישרים. כל אחת *מ-ך* הנקודות, הנמצאות כולן על ישר אחד,

קובעת ישר עם כל אחת מ-11 הנקודות. באופן זה נקבעים 77־11־7 ישרים. לכל אלה יש להוסיף את הישר־ שעליו נמצאות 7 הנקודות. מספר הישרים הנקבעים הוא אפוא: 133=1\*77«-״1121 .

השאלה בעמוד 38

תשובה 2.33

52

13

391 [26

13 [13

13

13

השאלה בעמוד 39

תשובה 2.34

20

3

השלשות

אחת הדרכים למצוא את התשובה לשאלה היא לחסר

השונות, אותן ניתן לקבל מ-20 המספרים העוקבים, את השלשות (השונות) המכילות 2 מספרים עוקבים לפחות. מכל זוג מספרים עוקבי□ 19) i,i\*l *1-1,2)* ניתן להרכיב 18 שלשות, כלומר

19־18 שלשות מכל הזוגות העוקבים. אולם, בין השלשות הללו אנו מונים כל שלשה 2+f,£+l,f פעמיים (גם עם הזוג f,f+l וגם עם הזוג 2+f+l.f ). לכן, מספר השלשות, המכילות 2 מספרים עוקבי□ לפחות, הוא: 18-18־19 (כאשר 18 הוא מספר השלשות *1,1+1,1+2 ).*

201

מכאן שהפתרון הוא: 816 = (18־18־19) -

תשובה 2.35 השאלה בעמוד 39

א) בכל תא, או שיהיה עצם אחד, או שלא יהיה אף עצם. נבחר את 6 התאים שבהם נשים את העצמים. דבר זה ניתן להיעשות ב­אופנים.

כיוון שהעצמים שונים, יש חשיבות לסדר שלהם. לכן, מספר האפשרויות לשי□ את 6 העצמים ב-10 תאים הוא:

•6! \*Jr\* 10151.200 " 5־6־7־8’9־

10

6

דרך אחרת היא לסדר את העצמים בזה אחר זה בתוך התאים השונים: לראשון - 10 אפשרויות, לשני ־ 9 אפשרויות וכך הלאה. על פי עקרון הכפל, מספר האפשרויות הוא (10,6)P .

•k! = n(n-l)...*(n-k+1)* = P(n,k)

תשובה 2.40 השאלה בעמוד 42

1. 4096 = 46
2. 900,000 = 105־9 (כי הספרה הראשונה חייבת להיות שונה מ-0).

הספרה 3 פעמיים בתוך המספר. זאת ניתן לעשות על כל אפשרות כזו, 2 אפשרויות לכל אחד מ-8 במספר. בסך הכל: 11,520=28• .

ג) נמקם ראשית את ב־ אופנים. המקומות שנותרו

תשובה 2.44 השאלה בעמוד 46

1. במלה 10 אותיות: 6 מהן a, אחת *b* י־3 הן d. מספר התמורות (מלים) שניתו להרכיב מהו הוא: °^=~~ז°3!6 ’~~
2. באופן דומה נמצא שמספר התמורות הוא:

~~60~~~~°•~~~~801~~~~•~~~~210~~ ~~" !3!75־3־5~~7

השאלה בעמוד 47

תשובה 2.45

מספר המסלולים השונים הוא כמספר הסידורים השונים של 4 צעדים !7

בכיוון מזרח י־3 צעדים בכיוון צפון: 35“”!ץ!4 י

תשובה 2.46 השאלה בעמוד 49

*k* איברים מסוג אחד אפשר לבחור באופן אחד בלבד, זאת אומרת -

1 ■ (D(l,k

*k* איברים משני סוגים אפשר לבחור באופן הבא:

(0,(k (0,k),(l,k-l),(2,k-2)

כאן יש 1+k אפשרויות. כלומר: 1+D(2,k) = k

השאלה בעמוד 54

תשובה 2.51

על פי התיאור שבשאלה, אגו מחלקים תחילה את העצמים בין 8 תאים ־ אחד בכל תא. אחר כך, על־ידי הסרת מחיצות אנו מאחדים תאים, כלומר, הופכים 2 תאים או יותר לתא אחד. בדרך זו אנו מבטיחים, שבכל תא יהיה עצם אחד לפחות. אנו גם שומרים על השוני בין התאים (תא ראשו ן, שני, ... ).

להסיר 5 מחיצות, כלומר יש להשאיר *2* מחיצות. את אלה האחרונות

7

אפשר לבחור ב- 21= *י*

אופנים .

במקרה הכללי יש לנו *k* עצמים. בתחילה יש לנו *k* תאים, או *1-k*

מחיצות פנימיות. אנו רוצים להישאר עם n תאים, כלומר, עם 1-n

מחיצות פנימיות. מספר האפשרויות לבחור 1-n מחיצות אלו הוא 1-k

, , כנוסחה שהופיעה בפתרון השאלה הקודמת (2.50).

תשובה 2.52 השאלה בעמוד 54

כיוון שכל פתרון חייב להיות בשלמים חיוביים, הרי הבעיה זהה לזו של חלוקת *k* עצמים זהים ביו n תאים שונים, כך שבכל אחד יהיה עצם אחד לפחות.

מספר האפשרויות, כלומר מספר פתרונות המשוואה, שהם שלמים

k-1

חיובי ים, הוא אפוא , .

n-1

תשובה 2.53

א)

ב)

5’5-12| = [24] = 14950

= 5985

21

4

22-1

1־5

השאלה בעמוד 54

תשובה 2.54

השאלה בעמוד 54

מספר הפתרונות בטבעיים של משוואה 1) -

13

5

6-1+8'

. 1־6 .

שווה לזה של משוואה 2) -

131 \_ [13'

8] 5.

5\*1־9 . 1־9

השאלה בעמוד 54

תשובה 2.55

ניתן להציג את השאלה גם כך: מהו מספר האפשרויות לפזר 10 עצמים

זהים ב-4 תאים שונים?

התשובה היא:

286 - [ף ■

4-1+10

1־4

תשובה 2.56 השאלה בעמוד 55

נוכל לרשום מספר כזה בצורה *^axa2aya* , כאשר כל aj הוא ספרה ביו 0 ל־9, וסכומם חוא 9 (למשל 0009, 1026 וכוי).

כל מספר כזה הוא אפוא פתרון, במספרים טבעיים, של המשוואה 9=x! +x2+x3+x4 . המספר של פתרונות כאלה הוא:

תשובה 2.57

השאלה בעמוד 55

א)

22] \_ 1+181־5'

4 " 1־5 .

ב) תחילה נשים בכל תיבה 2 מכתבים (אפשרות אחת בלבד). את 8 המכתבים הנותרים יש לחלק ביו 5 תיבות דואר שונות. מספר האופנים שניתן לעשות זאת הוא התשובה לשאלה:

95!z ־

12

1+8־5  
1־5

תשובה 2.59 השאלה בעמוד 57

א) יש 5 פתרונות כאלה (למשל (0,0,0,0,8)).

ב) 210 =

1+61־5

1 J־5

D(5,8-27+4+3־) = D(5,6) =

תשובה 2.60

השאלה בעמוד 57

■״ 3]-[1iH־^•1־2)

פתרונות, והם:

,(0,15),(1,16-),(2,17-),(3.18־).(4,19־)

(1,14),(2,13),(3.12),(4,11),(5,10),(6,9),(7,8), (8,7).(9.6),(10,5).(11.4),(12,3)

ב) 3276 =

28

3

'1־3־4-1+22+5+2  
4-1

תשובה 2.62 השאלה בעמוד 58

f8 ו12׳

4] H

41 = (W = 34650

ב) כאן סדר הבחירה של 3 הצוותים אינו חשוב, ולכן:

1 [121 [8  
3! [ 4J [4

4'

4

= 5775

תשובה 2.63

השאלה בעמוד 59

51 w 42!

5J ' 8!8!7!7ז5!7ז

'261 [191 [12’

.7] 7J (7,

421 [34

8 1-8

תשובה 2.64

השאלה בעמוד 59

א)

ב)

11

5

15

4

ו18׳

[5 .

181

18 . 3

18 . 3

תשובה 2.66

השאלה בעמוד 60

נקבע תמורה

כלשהי של *k* העצמים. נסדר את העצמים בשורה

בהתאם

לתמורה זו

ונכניס ביניהם *1-k* מחיצות. כדי להישאר

עם *n*

תאים

צריך להשאיר 1-n מחיצות מתוך *1-k* מחיצות אלו. זאת

ב- 1;־־׳

n-1

האפשרויות לפזר את העצמים, בתנאי הבעיה, הוא

אפשר

לעשות

אופנים. כיוון שיש !k תמורות שונות *1-k 1-n*

הרי

מספר

*k\*

תשובה 2.67 השאלה בעמוד 60

אם n התאים זהים, כל פיזור שנדרש בשאלה מופיע !n פעמים בין הפיזורים שבשאלה 2.66 (כמספר התמורות של התאים). לכן יש לחלק את התוצאה של שאלה 2.66 ב-!מ.

דו גמה: יהיו 7=k י־ 3=n .

נבדוק, למשל, את התמורה 1234567 עם החלוקה לתאים 45167|123. אנו מבחינים, שישנה גם התמורה 1236745 עם החלוקה 45|123I67, וגם התמורה 4512367 עם החלוקה 67|451123, וכו 123|67|45. 45|123|67, ו־ 123|45|67. בסך הכל יש 6=ז3 תמורות עם אותה החלוקה (אם איננו מבחינים בי ן התאים).

שים לב: בשאלה זו לסדר של העצמים בתאים יש חשיבות. לכן —החלוקה 76|45|213, למשל, שונה מהחלוקות הקודמות.

תשובה 2.68 השאלה בעמוד 60

א) את הכדור הראשון אפשר לשים בכל אחד מ-4 התאים, הוא הדין בשני וכוי. מכאן, שבסך הכל יש 1024»45 אפשרויות.

תשובה 2.69

השאלה בעמוד 60

13־11־7־5־3־2 ־ 30,030

כל הגורמים הראשוניים של 30,030 שונים זה מזה, וכל מכפלה של

תת-קבוצה אחת מהם שונה ממכפלה של תת-קבוצה אחרת. לכן, הבעיה זהה לזו של פיזור 6 עצמים שונים ב־3 תאים זהים (סדר הגורמים אינו חשוב), כאשר כל תא חייב להכיל לפחות עצם אחד.



נעשה זאת תחילה בצורה 1,1,4 שני, ו-4 עצמים בתא שלישי), (מחלקים ב-2 כי בשני תאים יש

(כלומר עצם 1 בתא אחד, עצם 1 בתא

מספר שווה של עצמים).

מספר האפשרויות הוא

1 [6  
2[!

אם נחלק את העצמים בצורה

60־ I בצורה

! . לבסוף (ואין

2,2,2 נוכל לעשות

1,2,3 - נוכל לעשות זאת ב-60 אופנים:

יותר אפשרויות), אם נחלק את 4

זאת ב־15 אופנים: 15= 2

העצמים '6]\_1

2| !3 י

תשובה 2.71

א)

יש לקבוע אם המיקום של 4 האפסים (או ארבע ה-2): 70

את שלושת ה-1 אפשר למקם

ממלאים ב-0 וב-2 ב- 32=25

כ- 56-[|' אופנים.

אופנים. את שאר

לכן, מספר המלים

8

־ [4

המק ומות

שבה ן י ש

לכן, המספר הכולל של אפשרויות הוא 90=15+60+15 .

השאלה בעמוד 61

38 = 6561

שלושה 1 בדיוק הוא 1792=32־56 .

ד) ממספר המלים הכולל נחסיר את מספר המלים שאינן ממלאות את תנאי השאלה. מספר המלים ללא 0 הוא 256=28 , מספר המלים ללא 1 הוא 256=28, ומספר המלים ללא 2 הוא 256=28 . בסך הכל 768=256־3 . מספר המלים ללא 0 ו-1 הוא 1, מספר המלים ללא 0 ו-2 הוא 1 ומספר המלים ללא 1 ו-2 הוא 1. כל אלה נכללו כבר בסכום האחר ו ן.

לכן, מספר המלים שמכילות לפחות 0 אחד, 1 אחד ו-2 אחד הוא 5796=6561-768+3 .

השאלה בעמוד 62

תשובה 2.72

!10 הוא מספר הסידורים בשורה של 10 אנשים, בלי תנאים כלשהם.

מספר האפשרויות, שבהן א' ו-ב’ יושבים זה ליד זה הוא !9־2 (הם

מהווים "עצם" אחד, אבל בכל סידור של 9 העצמים יש שת, אפשרויות לסידורם הפנימי, איב' ו-ביא'). לכן, מספר האפשרויות שאי ו-ב י לא ישבו בסמוך הוא !9־8=(2־10)!9«!9־2-!10 .

את המספר הזה אפשר לחשב גם כך:

אם א' יושב במקום הראשון, לידו יכול לשבת אחד מתוך 8 אנשים. את כל השאר, כולל ב', מסדרים ב־!8 אופנים במקומות הנותרים. הוא הדין אם א' יושב במקום האחרון. אפשרויות אלה, שביחד הן !8־2-8, כוללות גם את אלה בהן ב' יושב במקום הראשון או במקום האחרון.

אם א' יושב במקום פנימי כלשהו, משמאלו אפשר להושיב אחד משמונת האחרים, כלומר 8 אפשרויות, ומימינו אפשר להושיב אחד מ־7 הנותרים, כלומר 7 אפשרויות. את שבעת האנשים הנותרים, כולל ב', אפשר להושיב ב־!7 אופנים. יש 8 מקומות פנימיים. לכן המספר הכולל של אפשרויות אלו הוא *.&• ך-8=.'ך• Q-8'l .*

סך כל האפשרויות הוא אפוא !9־8=9־!8־8=!8־7־8+!8־8־2 , כפי שקיבלנו קודם.

השאלה בעמוד 62

תשובה 2.74

נקבע את מקומה של אחת הנשים. בעלה יוכל לשבת או משמאלה או מימינה (2 אופנים). שאר 5 הזוגות יכולים להסתדר ב־!5 אופנים, אבל כל אחד מזוגות אלו יכול לשבת בסדר אב או בא. לכן, המספר הכולל של האפשרויות הוא 7680=!5־^2־2 .

ולחלופין - אפשר לקבוע את מקומו של אחד הזוגות. יתר הזוגות יתיישבו ב־!5 אופנים. כל זוג כשלעצמו יכול לשבת ב־2 אופנים. סך

*f,*

הכל !5־ 2 אפשרויות, כקודם.

השאלה בעמוד 63

תשובה 2.75

־4־

2 אופנים. מספר האפשרויות הוא המכפלה של המספרים האלה חלקי 2,

א) אפשר לבחור 6 תלמידים ב­

12

6

אופנים, ו-2 מורים

כי בצורה שספרנו, כל צירוף של

ש י שה תלמ ידים

מורים

ב)

מופיע פעמיים (פעם כשנבחרו,

לכן, מספר האפשרויות השונות

= 3696

ופעם

הוא:

כשנשארו לאחר הבחירה).

4

2

= 2772

12

6

12

6

השאלה בעמוד 63

תשובה 2.77

הבעיה היא של פיזור עצמים זהים ב־3 תאים שונים:

את

התפוחים אפשר לחלק ב­

7 \_ 1+5־3

2 ־ ־

1־3

אופנים,

את

האגסים אפשר לחלק ב­

9 \_ 1+7־3

2 ־ ־

1־3

אופנים,

את

התפוזים אפשר לחלק ב­

8] 1+61־3 ־ '[ 1־3

אופנים,

מספר האפשרויות הוא אפוא 21,168=

תשובה 2.78

71.(91

2] [2]

השאלה בעמוד 63

את הרכב הקבוצה שבה *נמצא x* ניתן לקבוע ב-  
3 תלמידים מתוך 10 הנותרים - *ללא x* ו-/1).  
עתה נקבע את הקבוצה שבה *נמצא y.* זאת ניתן

10

3

אופנים (

לעשות ב­

יש לבחור

אופנים

(בוחרים 3 מתוך 7 שנשארו, אחרי שנבחרו ה-4 ו־ע).

הקבוצה השלישית מורכבת מהתלמידים הנותרים.

71) 101

לכן מספר החלוקות השונות הוא 00^2= 3 .

היותם של *x* בקבוצה אחת *<-y* באחרת מאפיינת את הקבוצות. לכן אין כאן צורך לחלק ב־31, כמו במקרה שבו מחלקים 12 תלמידים ל־3 קבוצות בנות 4 תלמידים כל אחת, ללא דרישות מיוחדות.

תשובה 2.79 השאלה בעמוד 64

(השווה לשאלה 2.47).

תשובה 2.80 השאלה בעמוד 64

נפתור את הבעיה על-ידי כך שנספור את כל האפשרויות באופן ישיר.

1. נניח כי נבחרו 3 כדורים לבנים וכדור מצבע אחר. רביעיה כזו אפשר לסדר ב-4 אופנים.

כיוון שהכדור הרביעי נבחר מתוך 3 כדורים שונים, הרי בסך הכל יש לנו 12=4־3 אפשרויות לסידור ארבעת הכדורים כאשר שלושה מהם הם כדורים לבנים.

1. אם נבחר 2 כדורים לבנים ו-2 כדורים מצבעים אחרים (אחד מכל ’4

צבע). נוכל לסדרם ב~ 12=~~!1 !1 !2~~ אופנים.

לבנים אפשר לבחור ב־ 3=[| אפשרויות לסידור 4 הכדורים

את השניים שאי נם

לכן יש 36=3-12

אופנים.

, כאשר 2 מהם

לבנים.

1. לבסוף, אם נבחר כדור לבן אחד י־3 הכדורים האחרים הם מצבעים אחרים (ושונים זה מזה) - אפשר לסדר את 4 הכדורים ב- 24= !4 אופנים.

בסך הכל יש 72=12+36+24 סידורים של 4 כדורים מתוך 6 הכדורים הנתונים.

השאלה בעמוד 65

תשובה 2.82

כל מסלול כולל 6 צעדים ימינה, 4 צעדים קדימה מעלה.

י־7 צעדים כלפי נוכל, למשל, לפנות ב-6 צמתים ימינה וב-4 צמתים קדימה, ובשאר *ך* הצמתים ללכת כלפי מעלה. עלינו לעבור 17 צמתים בסך הכל. צירופים אפשריים של 6 צמתים שבהם נפנה (או נמשיך ללכת) ימינה, ו­

ללכת) קדימה. מספר הדרכים השונות הוא אפוא:

יש

[171  
6

צירופים אפשריים ל-4 צמתים שבהם נפנה

(או נמשיך

080•י,08 ■''־6H17T־ 171 '1i

השאלה בעמוד 65

תשובה 2.83

כל שלוש נקודות, שאינן על ישר אחד, קובעות משולש.

משולשים.

*n-m* הנקודות שאינן על ישר אחד קובעות כל 2 מתוך *m* הנקודות שעל ישר אחד קובעות משולש עם כל נקודה אחרת, שאיננה עליו. המספר של משולשים כאלה הוא (1ק-ה)• 2 .

כל נקודה מתוך ה-1ק שעל הישר קובעת משולש עם כל זוג נקודות



שמחוץ

המספר

לישר. המספר של משולשים כאלה הוא

הכולל של המשולשים הוא אפוא

*n-m  
2*

*n-m*

2

.m-

(n-m)+m•

n-m 3

תשובה 2.84 השאלה בעמוד 65

1. יהיו נתונים *n* זוגות של איברים זהים *...aa,bb,cc* . מספר התמורות שאפשר ליצור מהם הוא:

» . !(2n)

2! . . . 2! 2n ״ !2

מ פעמים

^־n^■ הוא מספר שלם, כי מספר של תמורות חייב להיות שלם.

1. באופן דומה: *n* שלשות של איברים זהי□ *...aaa,bbb,ccc* אפשר לסדר ב" ; — אופנים, וכמספר של תמורות, מספר

**n** פעם“ם

זה חייב להיות שלם.

69 השאלה בעמוד תשובה 1־3

(x+a)8 =x8 +8x7a+28x8*a2*♦56x3a3+70x4a4 +56x3a5 +28x2a8 +8xa7 +a8 (א

(2x\*3)4 = (2x)4+4-(2x)3-3\*6-(2x)2-32\*4-2x\*33\*34 = (ב

= 16x4+96x3+216x2+216x+81

(x-a)9 = x99־x8a+36x7*a2*-84x6a3+126x5a4-126x4a5+84x3a6ג) ־

36־x2a7 +9xa8-a9

תשובה 3.2 השאלה בעמוד 69

1. ס33 ־ *ך1*
2. 924= 1g]

תשובה 3-3 השאלה בעמוד 69

>80-1ן

80 *k*

הוא רציונלי, כאשר

4|k (ואזי כמובן

האיבר

2|80-k) . לכן מספר האיברים הרציונליים בפיתוח הזה הוא 20.

תשובה 3-4 השאלה בעמוד 69

"מחצית" השורה במשולש פסקל היא:

462 330 165 55 11 1 11 ־ מ

924 792 495 220 66 12 1 12 = מ

n = 13 1 13 78 286 715 1287 1716

3432 3003 2002 1001 364 91 14 1 14 ־ מ

א) ראה את משולש פסקל.

בהמשך לרמז:

6־

3

־4

2

’4

1

ב) ההכללה של א­­

במקום

האיבר הראשון

ואז

נמשיך

n+k+1  
k

( משמאל )

כך איבר אחר איבר:

n+k+1  
k

n+k  
k

n+k  
k

נרשום

n+k *k-1*

השוויון האחרון (מימין) אינו *אלא*

משולש פסקל.

אפשר להוכיח זאת באינדוקציה:

השוויון נכון *ל- k=l*

n+2

נניח שהנוסחה נכונה ל-&,

ונוכיח

n+2  
2

n+1  
1

n+1  
0

n+2

1

n+1  
1

n+1

0

n+k+2  
k+1

זו בדיוק

.k

תשובה 3.6

n+k+1  
k+1

n+k+1  
k

התוצאה שתתקבל,

אם

n+3

2

תכונה (2),

n+k+1  
k

n+1  
1

n+1  
0

ל־1+&:

n+k+1  
k+1

n+f  
*t*

n+2  
2

n+2

1

ששמשה לבניית

נציב בנוסחה הראשונה

השאלה

n+i

*I*

n+1  
1

n+f  
*i*

k. 1

1+k במקום

בעמוד 70

כל תת-קבוצה של 4 בת k איברים היא צירוף של k איברים מתוך n n k ־

איברי הקבוצה *A.* המספר של צירופים כאלה הוא

המספר הכולל

של התת-קבוצות של *A* הוא לפיכך:

סכום זה אינו אלא סכום המקדמים

של פיתוח הבינום x+a)n), השווה

ל-"2.

תשובה 7 •3 השאלה בעמוד 71

א) 1024 ־ 210

ב) 59049 = 310 (כי יש 3 אפשרויות תגובה לכל שאלה)

תשובה 3-8 השאלה בעמוד 71

1. לכל xC4 יש שתי אפשרויות: 0=(x)/ או x)=l)/ ; וכיוון שב-1/ יש *n* איברים, סך האפשרויות להגדיר פונקציה *f* הוא 2\*2•...•2«2n ־*n* פעמים
2. 5n• ובאופן כללי, מספר הפונקציות השונות של קבוצה *A* בעלת *n* איברים, לתוך קבוצה *B* בעלת *k* איברים, הוא *kn.*

השאלה בעמוד 71

תשובה 3-9

נפעל בהתאם לרמז, ונוכיח:

־ k'n'■ = ״ 1-־-?-)■I! = ״

n-1 k-1

k!(n-k)! (k-1)![n-l-(k-l)]!

+n

k0־

n-1 n-1

n-1  
1

n-1

0

,n-1

n-1 n-1

n-1

1

n-1  
0

כי הביטוי בסוגריים המרובעים אינו אלא פיתוח הביניים 1-x+a)n)

עבור x=a=l , כלומר 1-2n.

תשובה 3.10

השאלה בעמוד 72

א)

(”־M!

(k-h)![n-h-(k-h)]!

nHkl \_ n! k! n!

kJ [hj " *k'. (n-k)'h'. (k-h)*־ h!(n-h)!

*n-h k-h*

ב) מספר האפשרויות לבצע את

הנאמר

ברמז לשאלה הוא

לבחירת k איברים מתוך n k *h*

יש

אפשרו יות לבחירת

n k

*h* איברים מתוך k

יש

אפשרויות; *על*

כל

אחת

מהן

אולם, אפשר למצוא את מספר האפשרויות לבחירת *k* איברים מתוך *n*

ואחר כך *h* איברים מתוך *k-n* שנבחרו, ג□ בדרך הבאה:

תחילה בוחרים *h* איברים כלשהם מתוך *n.* לאחר מכן

משלימים את

הקבוצה שנבחרה *k-b* איברים, על-ידי

*n-h* האיברים שנותרו. ניתן לעשות זאת ב­

בחירת *k-h* איברים מתו  
n  
*h*

*n-h k-h*

אופנים.

השאלה בעמוד 72

תשובה 3.11

התשובה שלילית. למשל: 120 = = ך1

אבל . 0״2 . 10-9-8-7-6. 51] 101]

x״־׳- כ !2־ !3 !5 3 15

אם נבחר תחילה קבוצה של *k* איברים, ומתוכה נבחר קבוצה של *h*

איברים (h<k), הרי *אותם h* האיברים יופיעו בקבוצות שונות *של k ' ׳ n'*

k

יותר מפעם אחת. בדוגמה שהבאנו, כל שלשה

איברים, כך שבביטוי

תיספר קבוצת *h* האיברים המסוימת

מסוימת של איברים תופיע

ב- 21= 2ר

קבוצות שונות בנות 5 איברים כל אחת, ואכן-

120-21 = 2520

תשובה 3.14

השאלה בעמוד 73

מספר הזוגות השונים שאפשר לבחור מקבוצה בת *2n* איברים הוא

[2n

\* [ 2

לחלופין, ניתן לקבל את כל הזוגות האלה גם באופן הבא: נחלק את

*2n* האיברים ל-2 קבוצות, בנות אלו אפשר לבחור זוגות. "מעורבים" - איבר של הקבוצה

הכל מקבלים

זוגות שונים

*n* איברים כל אחת. מכל אחת מקבוצות כמו כן אפשר לבחור *n2* זוגות האחת ואיבר של הקבוצה האחרת. בסך

ומכאן השוויון שבשאלה.

תשובה 3.15

השאלה בעמוד 73

נוכיח את הזהות באינדוקציה.

יהיה נתון *k,* ונוכיח שלכל *k<n* הנוסחה נכונה. (ודאי שהיא נכונה ל-מ<:ג, כי בשני הצדדים של השוויון רשום אז 0.)

בדיקה עבור *k* = מ:

1ה ז J" k ־ n

n+11 [n\*l  
k+lj ] [n\*l

n־k

**Q** האוניברסיטה

**GO** ח פת **n1** ה

Gilad Barnea



מעבר אינדוקטיבי (נניח נכונות ל- n, ונוכיח ל- 1+n):

הוכחנו כבר

ואנו

על סמך הנחת

ובכך הוכחה

*לכל k,* הר

תשובה 3.16

א) נרשום

a-1  
*b*

לרשום

*a-1*

*b-1*

(תכונה

*n+1*

k+1

של המקדמים הבי נומי**<0)**

n+1  
*k*

(n+l)+l  
k+1

האי נדוקציה

על המחובר הימני

הזהות לכל

שבזאת הושלמה

(x+a)n(x+a)n

n-1  
*k*

ההוכחה.

(x+a)2n

המקדם של xn באגף שמאל

הוא

2n

באגף ימין נקבל

+an

\_n - 2 \_2 .

X a +

xn'1a+

xan1־+an

המקדם של

n+1  
*k*

שההוכחה נכונה

השאלה בעמוד 74

(x+a)n(x+a)n = [ xn+

n  
n-1

x2 an 2־

*n  
n-2*

xn +

xn בביטוי זה הוא סך מכפלות

המקדמים של x

בסוגריים הראשו נים

ב-1־"! בסוגריים השניים

(0<i<n)

n

J'.

0־1

לכו

אחרת

*m=k=n.* אנו

2n n

היא להשתמש בזהות

מקבלים מיד

0־1

n  
*n-i*

n  
n-2

*n*n-1

שהוכחנו בשאלה

0־1

2n n

3.12

ב) הפעם נרשום:

(x+a)m(x+a)n

ת ♦ ווו \ \_

x+a)

המקדם של am‘k

באגף שמאל הוא

*m+n  
m+k*

, ובאגף ימי ן:

*m  
m-1*

*n*k+1

x2 a"1 2־ +

\_n - k - 2 \_k ♦ 2 . .

x a +...+a

*n*k+2

המקדם של

am\*k הוא

n  
k+f

וזו

0־ 1

תשובה 3.18

*m  
m-2*

xn2־a2+...+

*n*k+2

n  
k+2

(x+a)m(x+a)

*m  
m-2*

*n*k+1

xn'1 a+

n  
k+1

*m  
m-1*

השאלה בעמוד 75

נעביר את האיבר הימני ביותר לאגף שמאל, ונקבל (בעזרת פסקל):

משולש

אם נעביר עתה את

*n+m*k

n+m  
k

n+m  
k

n+m  
k

n+m+1  
k+1

n+m  
k

n+m k+1

*n  
k+1*

לאגף ימי ן,

הוכחה בעזרת אינדוקציה (על m) .

בדיקה:

*n+2  
k*

n+2  
k

*n+2  
k*

k+1

n+1  
k

n+1'  
k

n+2 k+1

n+1

k+1

n  
k+1

נקבל את השוויון המבוקש.

*n*k+1

n+1

k+1

**Q** האומברסיטה  
**nGO** פתוחה

Gilad Barnea

ביטו י

תשובה

א)

ג)

לגבי 1+m, על סמך הנחת

n+m+1  
*k*

*n*k+1

*n*k+1

האינדוקציה על *m:*

n+m+1  
k+1

n+m+2  
k+1

n+m+1  
*k*

n+m  
*k*

n+1  
*k*

זה יתקבל באגף הימני של הזהות, א□ נחליף

3.20

נרשום:

an"3x3 + ...+

\_n - 2 \_2 .

*a. X +*

, ״ 1 - *־\*־a* x

את

*m* ב-1+ןק.

השאלה בעמוד 77

את השוויון הזה נגזור פעמיים, לפי *x.* נקבל:

xn2־

נציב

an"3x+...+n(n-l)

*n*

3.

an2־2+3־

a=l ו־ x=l בשני אגפי השוויון

+ ...+n(n-l)

+4-3

נעשה אינטגרציה בגבולות

מ־0 עד 1

xn

מקבל י ם:

מכאן

נחשב את

1  
f+1

0־1

n(n-l)(x+a)n\*2 = 2-1

2־3\*

n(n-l)2־n2-1 ־ 2־

0־ 1

של השוויון:

+ 1 ־־ n

xn\*1 n+1

*x3*

*n*

21 3

0־1

1  
n+1

1 *n*

3 [2

2n

22 +

3n = (l+2)n

נרשום:

x3 +

מ \_2.

3

*X'*

*X+*

נגזור לפי *x*

1-3

+2

״(l-x)"1־

נציב במשוואה האחרונה x=l

נעביר את המחוברים

השליליים לאגף

השמאל <, ו נקבל

+3

+5

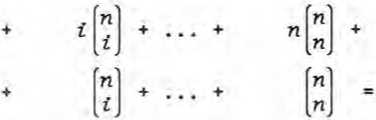
+4

+6

בעמוד 77 (ובתשובה לשאלה 3-9) הוכחנו, שסכום שני האגפים שבשוויון האחרון הוא 1■"2-n. לכן, כל אחד מהם שווה ל-2־”2-ת.

השאלה בעמוד 78

תשובה 3.23



(2׳-2n‘1(n ־ 1+2n־n-2n ־

השאלה בעמוד 78

תשובה 3.24

n (”ז ח־ « (k+1) nl = (k+1) א) מ

n-1  
k

nk!(n-1-k)! 1 (k+1)!(n-k-1)! ׳[k+1 1

ב) תהיה נתונה

1+k איברים,

קבוצה בת *n* איברים. מספר

הוא

*n*k+1

אפשר לבנות

בצורה הבאה:

התת-קבוצות שלה, בנות

את כל התת-קבוצות האלה

ומצרפים לכל קבוצה

n-1 k

קבוצות של 1+k

קובעים 1-n איברים, בוחרים מהם k איברים, שנבחרה את האיבר שנשאר בחוץ. מקבלים כך איברים. אם משאירים בחוץ כל פעם איבר אחר, מקבלים בסך הכל n קבוצות של 1+k איברים. אבל, כל תת-קבוצה כזו נספרת 1+k פעמים (פעם אחת כאשר מצרפים את האיבר הראשון שלה, פעם

שניה כאשר מצרפים את האיבר השני,

התת-קבוצות השונות, בנות 1+k איברים

וכד

הוא

. מכאן השוויון שבשאלה.

הלאה). לכן

1 [n-1

,k+1”[ k

מספר

השו וה

Q הא1גיכרסיטה פת1 ח ה

Gilad Barnea

תשובה 3.25

השאלה בעמוד 79

נתחיל בפתרון חלק ב של השאלה.

(a+b+c)n = (a+b+cHa+b+c)... (a-t-b+c) ז n פעמי□

מכפלה זו מורכבת מכל האיברים האפשריים שצורת□ a1bJck, כאשר f+J+k = *n* . איבר כזה מופיע, כאשר עם פתיחת הסוגרים בוחרים מתוך *I* סוגריים את הגורם a, מתוך *j* סוגריים את הגורם b, ומתוך *k* הסוגריים הנותרים את הגורם c. כל בחירה כזו היא בעצם סידור *אפשרי של i* גרים, *j* ^<ם *<-k* ס-ים (כאשר כקודם *. ( i+j+k=n* המספר של סידורים כאלה הוא כמספר התמורות עם חזרות מהאיברים ן מ 41!

הנ"ל, דהיינו , זה המקדם של האיבר a1bJck בפיתוח של

*lij’.ki*

*.(a+b+c)n*

מספר האיברים בפיתוח 5(a+b+c) הוא, כאמור, כמספר הפתרונות 71 בטבעיים של המשוואה 5=f+J+k והוא כידוע 21= ׳

\_ 5\*1־3  
5

לא נרשום את כולם. הנה איברים אחדים של הפיתוח:

——a3b2 = 10a3b3 3!2!O!

~~1!2!2!~~*ab2g2 3 ־Qab2*

תשובה 3.26

השאלה בעמוד 79

ראה פתרון שאלה 3.25.

תשובה 3.27

השאלה בעמוד 79

1. מספר איברי הפיתוח היא: 35 = *י =*

איברים אחדים של הפיתוח:

~~j~~abcd = 24abcd , !;kc2d = l^bc2d . ז . , b4

. 71) 5-1+31

1. מספר איברי הפיתוח הוא: 25= = י

למשל:

2 2 י3 ■׳״ ־/ !3 ר

• •. . ע ע3 = ״ ע7נז2 י u ’ = byuv ’ bxzv

א) נציב x!=x2=x3=x4«l , ונקבל שסכום מקדמי הפיתוח הוא -

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | = 16.384 | 47 |
|  | = 831,600 | 12! |
| ב1 | 3!2!2!1!4! |
| ג) | = 792 | 12!  5!7! |
| ד) | 1 |  |

תשובה 4.3 השאלה בעמוד 82

נסמן ב-4 את קבוצת המספרים בין 1 ל-3000 המתחלקים ב־3, וב-8 את קבוצת המספרים ביו 1 ל-3000 המתחלקים ב־5. 1000=|4|, 600=|8|, 200=|8ח4| (המספרים המתחלקים ב־15״3-5)•

מספר המספרים, שאינם מתחלקים, לא ב־3 ולא ב־5, הוא:

1600 = 600+200־1000־3000 = 1^'nB'l

תשובה 4.4 השאלה בעמוד 82

ראה תשובה לשאלה הקודמת. כאן יש להוסיף את C, קבוצת המספרים ביו 1 ל-3000 שמתחלקים ב־7.

429 > > 428 לכו: 428 ־ |C|

29 > 22^ > 28 ; 86 > > 85 ; 142 < < 1U3

לכן: 28 = |0ח3ח1/| , 85 = |tnC| = 142 , |BnC/|

והתשובה היא:

1371 = 28־428+200+142+85־600־3000-1000 = |’4'nB'nC|

תשובה 4.5 השאלה בעמוד 82

1/1! u/l2Uj43Ui44 | =

= 1^11\*1^2 1-

־ I ־ Hi | ־ Hl rvl4 I - |/1243-ח I - |/1244ח I - |43r^4 I + ♦ H1042nA31 + Hi14/ח43ח12/| + 141/ח13/ח !14 | 44ח42ר׳ |- ~H1 n/,2rb43r144 I

תשובה 4.6 השאלה בעמוד 82

נסמן: 1< - קבוצת לומדי צרפתית, *B* - קבוצת לומדי איטלקית.

200 - |8ט«/| . 70 ־־ |4| = 150 , |B|

20 » 200־70\*150 ־ |24nB| = H| + |8|-|/1uB|

תשובה 4.7 השאלה בעמוד 82

נסמן ב-4 את קבוצת המספרים בגי 4 ספרות, שאינם מכילים את הספרה 2 - מספרם הוא 5832״9־9־9־8 (מספר כזה אינו מתחיל ב-0).

באופן דומה, א□ B היא קבוצת המספרים בני 4 ספרות שאינם מכילים את 3, ו-0 קבוצת המספרים בני 4 ספרות שאינם מכילים את 4, אז גם

5832 ־ |B| ־ |C|

BoC *,Ar£ ,AnB* הן קבוצות המספרים שאין בהם הספרות 2 ו־3, 2 ו־4. 3 ו-4, בהתאמה. מספר האיברים שלהן:

3584 - 8־8-8־7 » |HnB| = |4nC| » |BnC

מספר האיברים בקבוצת המספרים בני 4 ספרות, שאיו בהם לא 2, לא 3 ולא 4 (במקום הראשון של מספר כזה יכולה לעמוד כל אחת מ-6 הספרות 1,5,6,7,8,9 ובמקומות האחרים כל אחת מ-6 הספרות האלה ו-0):

2058 ״ 7־7־7־6 = |4nBnC|

קבוצת המספרים, שיש בהם לפחות ספרה אחת 2, ספרה אחת 3 וספרה אחת 4, היא 'I'nB'nC/. מספר איברי הקבוצה הזו הוא:

" |lAnBnC־|H'nB'nC'l = l7-H|-|B|-|c|\*HnB| + HnC| + |BnC

198 ־ 2058 ־ 3584־3 + 5832־3 - 9000 =

שיטה אחרת לפתור שאלה זו, ואולי אף פשוטה יותר, היא לבנות את המספרים המבוקשים: עליהם להכיל 2, 3 ו-4, ועוד ספרה אחת. אם 2,3,4 הן שלוש הספרות הראשונות - אפשר לסדרן ב-6 אופנים. נשלים את המקום האח־ון באחת *מ-ך* הספרות האחרות. יש 42 מספרים כאלה. הוא הדין כאשר הספרות 2,3,4 הן במקומות 1,2,4 או במקומות 1,3,4 . כאשר 2,3,4 הן במקומות 2,3,4 שבמספר, אפשר להשלים את המקום הראשון באחת מ-6 ספרות בלבד (לא ב-0). לכן, בסך הכל יש 162=36\*42+42\*42 מספרים כאלה.

אלה הם המספרים המכילים בדיוק ספרה אחת 2, ספרה אחת 3, ספרה

אחת 4 וספרה אחת אחרת. להם יש להוסיף את אלה המכילים רק את הספרות 4,3,2, כשאחת מהן מופיעה פעמיים. אם לאחר העמדת הספרות 4,3,2 במקומן נשים במקום הרביעי (4 אפשרויות) אחת מ־3 ספרות אלו, נקבל עוד 72\*3־4-6 מספרים. אבל, כל מספר כזה מופיע כאן פעמיים (למשל: 2342 מופיע גם על-ידי השלמת 234 ב-2 מימיו, וגם על־ידי השלמת 342 ב-2 משמאל; המספר 3442 מתקבל על-ידי השלמת 2 34 במקום השלישי ב-4 או 42 3 ב-4 במקום השני; וכך הלאה). לכן, מספר המספרים השונים מסוג זה הוא 36=72־| . בסך הכל יש 198=162+36 מספרים שונים בני 4 ספרות, המכילים לפחות ספרה 2 אחת, ספרה 3 אחת וספרה 4 אחת.

תשובה 4.10 השאלה בעמוד 84

הפירוק של 1001 לגורמים ראשוניים: 13\*11־7 = 1001

דרך הפתרון היא זו שבפתרון השאלה הקודמת (4.9). מקבלים:

720 = 1־7\*11\*77+13־91־1001-143

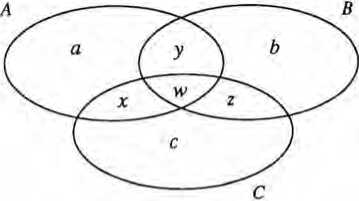
השאלה בעמוד 86

תשובה 4.12

*A* היא קבוצת הילדים הלומדים מוסיקה, B קבוצת הילדים הלומדים ציור ו-0 קבוצת הילדים הלומדים *ריקוד.* נתוני השאלה הם:

U=3o , H|=20 , |8|=14 , |c|=10 , |/5nBnC|=0 , l^’nB'nC’ |=8

נשתמש בדיאגרמת ו ן. לפי הנתון נוכל לרשום מיד:

0 = w

20 = i) a+x+jy)

14 - ii) *b+y+z)*

10 = iii) c+x+z)

22 = iv) a+b+c+x+ty+z)

אנו מחפשים את z.

נחבר את שלוש המשוואות (a+b+c+2(x+y+z) = 44 :(iii),(ii),(i

נחסיר מהתוצאה האחרונה את משוואה (iv), ונקבל 22=x+y+z . לכן 0=a+b+c , וכיוון שכולם מספרים לא-שליליים, הרי *0=a=b=c .*

מן המשוואות (ill),(ii),(i) נשאר אפוא:

20 = /v) x+j)

14 = vi) *y+z)*

10 = vii) x+z)

מחיסוו־ (viii) x-z = 6 :(v)-n (vi)

מחיסור (z = 2 :(vii)-D (viii

2 ילדים לומדים, אם כן, מוסיקה וריקוד.

השאלה בעמוד 89

תשובה 4.13

*= ׳ (U =* (A1u^2u. . **.Ui4n)u(X1uA2u.. .uAn (״4**״ח.**. .XjU^u.. .u4n )u(4( M^n) =**

כיוון ששתי הקבוצות המופיעות בסוגריים זרות זו לזו, הרי­

ווח. + |4jUA2u..**.uAn**| = |ע|

ומכאן:

n

^־1(u| - Q-i| ־ mJ.. - |ע| ־ mJ...ח’|a;m

בהסתמך על הנוסחה שהוכחה במשפט ההכלה וההפרדה.

תשובה 4.15 השאלה בעמוד 90

נסמן ב-!4 את מספר הפי זורים שבהם התא הראשון נשאר ריק. לכל כדור מותאם במקרה זה אחד מ- 1-k התאים הנותרים. זאת אפשר לעשות ב-ת(1-^ אופנים, כלומר:

fk-1)a ־

באופן דומה, אם *A2* מסמן את קבוצת הפיזורים, שבהם התא השני נשאר ריק, מקבלים l)n־d2 | = (k| , וכך הלאה עד 71k.

הקבוצה X!M2 היא קבוצת הפיזורים שבהם שני התאים (הראשון והשני) נשארים ריקים.

I^mJ = (k-2)n

(לכל כדור צריך להתאים אחד מ- *2-k* התאים הנותרים.)

"4ט ט42ט!4 היא קבוצת הפיזורים, שבהם לפחות אחד התאים נשאר

ריק. מספר איבריה הוא המספר המבוקש בשאלה, והוא מתקבל בעזרת משפט ההכלה וההפרדה:

-|42|+...\*|4k|\*| ג4| ־ !^..ע^!\*!

\* 2 I ~ 1\*1 °\* 3 I l\*k•1 0\*k I \*י׳ 1\*1 “

השאלה בעמוד 91

תשובה 4.16

האפשרות, שאף מכתב לא יגיע לתעודתו, היא תמורה של *n* מספרים (מכתבים), שבה אף מספר אינו רשום במקומו הטבעי. לכן, מספר האפשרויות האלה כמספר מקרי אי-הסדר המלא של *n* איברים, והוא:

ו 1 > / .1 1.1 »r .

1 [[2]](#footnote-2) ~ 1! 2! "3! \* 'n! J!מ

השאלה בעמוד 91

תשובה 4.17

נסמן ב־!4 את קבוצת "הבחירות" של 5 קלפים מתוך 52 הקלפים, שאין וסך

בהן אף קלף מסוג 1. קבוצה זו מונה '׳־ אפשרויות (יש 39 (ל .

קלפים מ־3 הסוגים האחרים). באופן דומה 42, 43 ו-44 הן קבוצות הבחירות של 5 קלפי□ מתוך ה-52, שאיו בהן קלפים מהסוגים 2, 3 ו־4, בהתאמה, ומספר איבריהן:

39

5.

H4I ־ 1 3\*1 = 1 2\*1

באופן דומה

13

5

= 31 4ה *A*! n42 |,

וחיתוך כל 4

הקבוצות הוא ריק.

בקבוצה 4£ה^4ח42ה'41 יש כל הבחירות, שבכל אחת מהן יש לפחות קלף אחד מכל סוג. לכן התשובה לשאלה היא:

685,464 . 391 + [426 \_ ^jfl3] ן2\_| = 441ח43ח42ח]4|

. ל I כ) ל ל J ל- J I

דרך אחרת לפתור שאלה זו היא כדלקמן:

נבחר תחילה 4 קלפים, כולם מסוגים שונים. זאת אפשר לעשות ב־134 אופנים. נשלים את הבחירה על-ידי הוספת קלף אחד מתוך 48 הקלפים הנותרים. לכאורה מקבלים 48־134 בחירות אפשריות. אבל, כל אחת מבחירות אלו מופיעה פעמיים. לדוגמה: נניח שהבחירה של 4 הקלפים היתה a!) *ala2a3a!t* מסמן קלף מסוג f) , ולהם הוספנו את הקלף *b2* מסוג 2. אותה בחירה 62 020304ן0 מתקבלת גם כאשר בוחרים תחילה את הקלפים *^ס3ס2^ס* מ-4 הסוגים השונים, ומוסיפים להם את הקלף a2. לכן, מספר האפשרויות השונות לבחור 5 קלפים מתוך 52, כך שבבחירה יהיו קלפים מכל הסוגים, הוא 685,464=48•134•^ .

השאלה בעמוד 91

תשובה 4.18

נסמן ב־!^ את קבוצת הפיזורים של 25 כדורים זהים ב-6 תאים שונים, כך שבתא הראשון יהיו לפחות 7 כדורים. | 4j| הוא מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה 25=x1+x2+x3+x4+x5+x6 , כאשר 7<!x, כלומר, מספר הפתרונות בטבעיים (בלי הגבלה כלשהי)

(היצבנו *7+x1=yl* ) . מספר

של המשוואה 18=j/1+x2+x3+x4+x5+x6 זה הוא -

*2I* = 33.649

6-1+18

6-1

באותו אופן, אם *A2* ו־3^ הן קבוצות הפיזורים של 25 הכדורים ב-6 התאים שבהם התאים השני והשלישי, בהתאמה, מכילים לפחות 7

כדורים, הרי H21 = H3 lx33,649 • | 24jrv42| הוא מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה -

y1+y2+I3+x4+x5+x6 = 11

היינו:

4,368 ־

16

. 5.

6-1+11  
6-1

כך גם נמצא, ש-31^41rv42n| הוא המספר

R =126

ל

6-1+4  
6-1

מספר האפשרויות לפיזור הכדורים, ללא כל הגבלות, הוא -

142,506 ־־ [3°] ־ [25\*6Z1 9] 1־0

לכן, פתרון השאלה הוא ־־

54,537 = 142,506-3-33,649+3-4,368-126 =

נסמן ב-!4 את קבוצת התמורות של 10,...,1,2 , שבהן 1 נשאר במקומו; !9=Hi I •

נסמן ב־נ4, 45, 47 ו־?4 את קבוצות התמורות שביי( 3. 5. 7 י־9. בהתאמה, נשארים במקומותיהם. כל אחת מקבוצות אלה אף היא בעלת !9 איברים.

!8=|4tn43|, וכן עבור כל חיתוך של שתיים מן הקבוצות לעיל. בחיתוך של שלוש מן הקבוצות לעיל יש !7 איברים, בחיתוך של 4 מהן יש !6 איברים, ובחיתוך של כל הקבוצות יש !5 איברים (כל המספרים 1.3.5.7.9 נשארים במקומותיהם, ואנו יכולים לתמר רק את המספרים הזוגיים).

תמורה, שבה אף מספר אי-זוגי אינו במקומו, שייכת לקבוצה

^4ח(.4ח43ח43ח)4. מספר איברי הקבוצה הזו הוא:

J 6t5־!

5

2

10!-5-9!+

= 2,170,680



תשובה 4.20 השאלה בעמוד 94

נחשב את המכפלה -

— ־ 1] ... — - 1] 1— - 1]

I P1J P2J I PkJ

בסכום שיתקבל, בכל אחד מהמחוברים יופיע 1n־lk כפול *m* גורמים מהצורה (עם >-ים שונים), כאשר 0<m<k. עבור מ/מסוים, סימן הגורם הזה הוא l)m-), וסכום כל המחוברים שיש להם *אותו m* הוא:

(־l)m

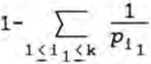
1£1!<12<.

זה, המתאימים לכל ה- ™־ים

בסכום כולו יופיעו 1+k איברים מסוג האפשרים. לכן המכפלה שווה ל־

1

PijPi2



תשובה 4.21

א)

השאלה בעמוד 94

8 ־ |־1 |־1] |-1 30 = (5־2-3)\* ־ (30)0

ג)

תשובה

= 720

= 2880

4.23

13־1

= 48

1־I

1~

= 400,000

־1 1001 = (13־7-11)0 = (1001)0

|־1 |־1 7־5־2-3 = (7־5־3־2)0

|־1 7’52־32־23 = (7־52־32•23)0

1,000,000 1

0(1,000,000) =

השאלה בעמוד 97

מספר המספרי□ בני 7 ספרות, שסכום □פרותיהם הוא 19 (ושאינם מתחילים ב-0), הוא כמספר הפתרונות בשלמים של המשוואה -

19 = X!+ X2+ X3+ X/,+ X5+ Xfc + x7

המקיימים: 9>7!>0 9>12>0 י 9>1 <x1

מספר הפתרונות האלה הוא כמספר הפתרונות בשלמים של המשוואה -

18 = 7^ + 5ע + 4ע +3ע +2ע + !ע

המקיימים: 9>0<y!<8 » *0<1/2<3 , ... ,* 0<y7

בדומה לפתרון שאלה 4.22. נסמן ב-^ את קבוצת הפתרונות של

המשוואה ב־ע־ים, שבהם 9<!ע . מתקיים:

5005 • [16] • (9’?-17’7] = Mil

כמו כן נסמן ב־!^ (7 2,3 *= I)* את קבוצת הפתרונות של

המשוואה ב-ע-ים, שבהם 10<^1 . עבור כל *I* כזה מתקיים:

\_\_\_\_ 141] 101־1+18־7] 1. ।

3003 = 6 = 1־7 = Mi I

אין למשוואה זו פתרונות כאלה, שבהם 9<!ע ואחד הנעלמים האחרים גדול מ-10 או שווה ל-10, כלומר, 0= עבור 7>l<i<J (כמובן שגם יתר החיתוכים ריקים).

מספר הפתרונות (הכולל) בטבעיים של המשוואה הוא ־

134596 “ 26 " 8!־7"7

לכן מספר הפתרונות שעליו נשאלנו הוא:

|4{nAJn...nA|| = 134596113.573 = 5005־3003־6־

פתרון השאלה דומה לפתרון שאלה 4.22 (לגבי המשוואה ב־ע-ים), אך כאן, על כל

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| המשתנים יש אותה ההגבלה (5,...,l־i). | |  |  |
| נסמן ב-,4 את | קבוצת הפתרונות הטבעיים של המשוואה | הנתונה, עם | המגבלה |
| היחידה z^b+l. | ואז עבור כל 5) *i* 1=£) מתקיים: |  |  |
|  | 1.1 [5-l\*k־(b+l)l . fk־b\*31  111 I 51־ J I 4 J |  |  |
| כל חיתוך של 2 1 | קבוצות *,A* ו- .4. מקי ים: |  |  |
| ומספר החיתוכים | 51)  של 2 קבוצות כאלה הוא K. |  |  |
| באופן כללי. מספר האיברים בכל חיתוך של *m* קבוצות (5.. fk-mb\*4-ml \_ ((!♦&)«־k׳'׳l־I5 4 j ] ץ 1־5 1 | | יהיה (m־l,.. |  |
| ומספר החיתוכים | 151  של *m* קבוצות כאלה הוא M , |  |  |
| והואיל והקבוצה | 4\*k1)  האוניברסלית U מקיימת: " | I 51־' J ' | **|u|** |
| נקבל לפי עקרון | ההכלה וההפרדה את התוצאה שבשאלה. |  |  |
| הכללת התוצאה למשוואה ב־מ משתנים תהיה: | | ־"] [;]־«-׳ | **n**  **m •0** |

השאלה בעמוד 98

תשובה 4.25

א) נסמן ב־!!/ את קבוצת איברי *U* המקיימים את התכונה **Pj** (ואולי גם תכו נות נוספות). אזי:

**(W(Pt) . | = WCPiPj ־ | Hi**

בסימון זה, הנוסחה הרשומה בשאלה אינה אלא הנוסחה:

**Htl- Hjl \* Mi^jl ־ |17| ־** H/mjI

שאותה כבר הוכחגו.

ב) בדומה לפתרון חלק א). הנוסחה הכתובה בחלק זה של השאלה היא

הנוסחה עבור 3 קבוצות (דהיינו ל- | 4 / rv4 J/|) .

השאלה בעמוד 98

תשובה 4.26

נסמן את התכונות שבנוסחה ב- **PltP2,...,Pk .** אזי:

*^(P{P^..P^) =* n £2 ־ w<pi ) 1 < 1 <k

\* EZ WCP^j) -

1 <i <j <k

£2 wfp^jPj \* ... \* (-!)^(PjPj.,.?,) l£i <J <h< k

השאלה בעמיד 102

תשובת 4.28

נסמן ב־!? *(l<i<n)* את התכונה שהמכתב ח-£-« מגיע לתעודתו. מספר הפיזורים המקיימים תכונה זו הוא !(1-מ) = (WfPj (פרט למכתב ה-£-י, כל המכתבים יכולים להתחלק "כרצונם"). ובסך הכל, מספר הפי זורים שבהם מכתב אחד מגיע לתעודתו הוא:

־ (!w(p ם

W(l)

וכן הלאה.

באופן דומה: !(2-ח)»(W(PtPj

אנו שואלים על (E(m, כלומר על מספר החלוקות של המכתבים, שבהם מתקיימות בדיוק m מהתכונות שהזכרנו - בדיוק *m* מכתבים מגיעים לתעודתם. נשתמש בנוסחה ונקבל:

E(m)

W(m)-

m+1  
m

W(m+1)+

m+2  
*m*

W(m+2)-

(n-m)!-

m+1  
m

*n*m+1

(n-m-1)!+

*m+2  
m*

*n  
m+2*

(n-m-2)!-



עבור 0=m מקבלים -

קיבלנו את מספר המקרים, שבהם אף מכתב לא יגיע לתעודתו (כפי

שמצאנו בפתרון שאלה 4.16.

עבור m=n מקבלים -

E(n) = (n-n)! = 1

ואכן, יש רק אפשרות אחת שכל המכתבים יגיעו לתעודתם.

E(n-l) •0 ־ !10”] 1,” ]־!11,” ־

עבור m=n-l מקבלים -

[n-1j [n-ij

ואכן, לא ייתכן המקרה, שבדיוק 1-n מכתבים יגיעו לתעודתם, שהרי אז גם המכתב האחרון חייב להגיע לתעודתו.

תשובה 4.29 השאלה בעמוד 102

נסמן *P^i* את התכונה, שבסדרה באורך 4, המורכבת מן הספרות הנתונות, 1 מופיע במקום n־t־׳. מספר הסדרות בעלות התכונה הזו הוא: 33=(W(P1 (בכל אחד משלושת המקומות האחרים יכול להופיע 0, 1 או 2). באופן דומה נקבל 32=(W(P1PJPk)=3 , W(PiPj ו- 1״(W(P1P2P3P4.

מספר הסדרות, שבהן הספרה 1 מופיעה בדיוק פעמיים, הוא:

\* 1י 4 2 \*3' 3 1 ־32' 2 ’ 2 + (3)W(2)-[| W ־ (2)E

24 ־ 36+6־54 =

את המספר הזה קל מאד לקבל גם בספירה ישירה:

מספר הסדרות

מהצורה llab , כאשר *a* ו-נ2 יכולים להיות 0 או 2, הוא 4; ו4ז האפשרויות השונות לסדר שתי ספרות 1 בסדרה הוא 6= 2 .

מספר לכו, מספר

המספר הכולל של הסדרות, שיש בהן בדיוק 2 ספרות 1, הוא 24.

הסדרות, שיש בהן בדיוק 3 ספרות 1, הוא 8=2־ .

מספר הסדרות שכל ספרותיהן 1 הוא 1.

לכן, מספר הסדרות, שיש בהן לפחות שתי ספרות 1, הוא 33=24+8+1.

תשובה 5-1 השאלה בעמוד 104

**n**

נניח כי במחלקה *i* יש xt איברים, כלומר |x|־. S z1

11 n 141 I4I

אם עבור כל *1- I*—\*-> .!,אזי x. < n•1—L £ , כלומר 4! > ,, E x **1** *n* י **1 1 n־1 • 111•**

1.4 I

והגענו לסתירה. לכן חייב להיות לפחות *t* אחד כזה, ש- -1—. x.>J *n*

תשובה 5-2 השאלה בעמוד 104

מספר השערות על ראשו של אדם אינו קטן מ-0, ואינו גדול מ־1/4 מיליון. בישראל יש יותר מ־ 1/4 מיליון+1 (+1 עבור הקרחים)

אנשים. ולכן >1 , ולפי עקרון שובך היונים,

בישראל יש לשני אנשים לפחות אותו מספר שערות.

השאלה בעמוד 104

תשובה 5.3

בין שלושה מספרי□ חיוביים שלמי□ יש לפחות שני מספרי□ זוגיים, או לפחות שני מספרים אי-זוגיים. הסכום של שני מספרים זוגיים הוא מספר זוגי, וכן גם הסכום של שני מספרים אי-זוגיים. כך שבכל המקרי□ לפחות לשניים יש סכום זוגי.

תשובה 4־5 השאלה בעמוד 105

1. אם בשלישיה x!,x2,x3 אף אחד אינו מקיים את *P,* אזי שלושת ה-ע-ים מקיימים תכונה זו. אם רק x אחד, למשל x3, מקיים את התכונה P, אזי *yx* ו-2ע מקיימים אותה. אם שני 1-ים אי 3 1-ים מקיימים את *P,* אין מה להוכיח.
2. הפתרון בדומה לחלק הקוד□ של השאלה: מראים שאם יש פחות מ־־3 1-ים המקיימים את *P,* חייבי□ להיות לפחות שלושה ע-ים המקיימים את *P.*

תשובה 5-5 השאלה בעמוד 105

1. בדרך השלילה: נסדר את 9 המספרי□ לפי הגודל:

a9 £ ־ • • £ a1 — *a2*

א□ 30>a7+a8+a9 , אז י גם 30>a4+a5+a8 , וגם 30>a1+a2+a3, וסכו□ כל תשעת המספרים קטן מ-90. זאת בסתירה לנתון.

1. בדרך השלילה: נסדר את המספרי□ לפי הגודל. 10>atj , כי אחרת הסכום a!+a2+a3+a4 הוא לפחות 40. א□ 40>a6+a7+a8+ag אזי גם 40>a2+a3+a4+a5 , וסכום כל תשעת המספרים קטן מ- 90(=10+40+40), בסתירה לנתון.

תשובה 6־5 השאלה בעמוד 105

אם סכום המספרים בזוג האחד שווה לסכום המספרי□ בזוג השני, הזוגות זרי□ או זהים. כי א□ הזוגות ה□ (a,b) ו-(0,ס) וקיים a+b=a+c , אזי b=c , כלומר הזוגות זהים.

מספר הסכומים השוני□ של שני מספרים שוני□ מתוך {150,...,1,2} הוא לכל היותר 297 (כל המספרים ביו 3(=1+2) ל־ 299(=149+150), כולל שני מספרים אלה). מספר הזוגות השונים שאפשר ליצור מ־25 251)

מספרי□ שונים הוא 300= . לכן מוכרחים להיות ביניהם שני

זוגות לפחות, שיש להם אותו סכום של מספרים. כפי שראינו לעיל, שני זוגות כאלה חייבים להיות זרים.

תשובה 7 •5 השאלה בעמוד 105

נרשום את המספר הרציונלי בצורת שבר מצומצם ונחלק את *p* ב-ן>. השאריות העוקבות המתקבלות בחילוק זה יכולות להיות מתוך הקבוצה {1־ן> 0,1,2}. כיוון שזו קבוצה סופית, אחרי *q* צעדי חילוק,

לכל היותר, מוכרחים לחזור לשארית שהיתה כבר קודם, וממקום זה ואילך השאריות חוזרות על עצמן באופן מחזורי.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 2 | 4 |
| לדוגמה, נהפוך את | - ואת | " לשבר י ם עשר ו נ < י ם:  15 |
| 15 | ♦ L | 2 LZ |
| 0.2666... | 40 | 20 0.285714 ... |
|  | 30 | 14 |
|  | — | — |
|  | 100 | 60 |
|  | 90 | 56 |
|  | 100 | 40 |
|  | 90 | 35 |
|  | 10 | 50 |
|  | •  « | 49 |
|  |  | 10 |
|  |  | 7 |
|  |  | — |
|  |  | 30 |
|  |  | 28 |

*2*

השאלה בעמוד 106

תשובה 5-9

תהא *A* נקודה אחת מתוך ה־17.

מ-4 יוצאים 16 קטעים, המחברים אותה עם שאר 16 הנקודות. כיוון ש־ 5<16/3, הרי לפי עקרון שובך היונים, לפחות 6 מן הקטעים האלה צבועים בצבע אחד, נאמר לבן.

נסמן את הנקודות, אליהן מגיעים ששה קטעים אלו, B1 ,B2,B3,B4,B5*,Be*. אם אחד הקטעים המחברים שתיים מהן (למשל Bx ו-32) לבן, יש לגו משולש כרומטי *(AB1B2).* אם אף קטע מאלה

המחברים כל שתיים מ-6 הנקודות אינו לבן, כלומר כולם צבועים בכחול או בצהוב, אנו חוזרים לשאלה הקודמת (5.8). שם הוכחנו, כי במקרה כזה חייב להיות משולש כרומטי בין המשולשים הנוצרים על-ידי 6 נקודות אלה.

השאלה בעמוד 112

תשובה 6.1

עבור 1=מ מקבלים ב>=(1)/ . נניח שהנוסחה נכונה עבור מ, ונוכיח על סמך הנחה זו שהנוסחה נכונה גם עבור 1+n.

*lq = aqn־״*1) = *f(n)q = a-q*+ה)/

וזו הנוסחה המתאימה עבור 1+.n

השאלה בעמוד 115

תשובה 6.5

נסמן ב-(ת)/ את מספר האפשרויות למתוח קו קרשים באורך *n* מטרים. הקרש הראשון יכול להיות או ירוק או לבן או צהוב. אם הקרש הראשון הוא ירוק (י), אז מספר האפשרויות למתוח קו קרשים לאורך 1-n המטרים הנותרים הוא (1-n)/. אם הקרש הראשון הוא לבן (ל) או צהוב (צ), מספר האפשרויות למתוח קו קרשים לאורך *2-n* המטרים הנותרים הוא (2-n)/. מכאן נובע יחס הרקורסיה:

(2-n-1) + 2/(n)/ = (מ)/

התנאים התחיליים הם: 3 = (2)/ , 1 = (I)/

נמצא את (3)/: 5 = (1)/2+(2)/ = (3)/

ואלה 5 הקווים: ייי,יצ , צי , יל , לי

וכן: 11 = (2)/2\*(3)/ = (4)/

11 הקווים הם: יייי , צי י,לי י,יצי,ילי,ייצ,צצ,לצ,ייל,צל,לל

תשובה 6.6 השאלה בעמוד 115

נסמן ב-(מ)/ את מספר האזורים הנוצרים על-ידי n מעגלים. אם נוסיף עוד מעגל, הוא יחתוך את כל המעגלים שישנם, אך לא יחתוך אף פעם שני מעגלים באותה נקודה. מעגל נוסף כזה מתחלק אפוא ל-ה2 קשתות על-ידי המעגלים האחרים, כשכל אחת מהן מחלקת אזור קיים ל-2 אזורים. מכאן מקבלים את יחס הרקורסיה:

/(n+1) = /(n) + 2n

התנאי התחילי הוא - 2=(1)/

נמצא: 4 = 2+2 = (2)/ , ואכן

8־4+4־ (3)/ , ואכו ־

1

14 ־ 8+6 ־ (4)/ , 22 = 14+8 = (5)/ וכוי.

תשובה 6.7 השאלה בעמוד 115

נסמן *1-(f(n,k* את מספר האפשרויות לבחור של *k* עצמים מ-ת סוגי עצמים, כאשר מכל סוג אפשר לבחור מספר כלשהו של עצמים.

נבנה יחס רקורסיה עבור *(f(n,k* באופן הבא:

את *n* סוגי העצמים נפריד ל- 1-n סוגים וסוג אחד נוסף.

את "הבחירות" השונות *של k* העצמים, מתוך *n* הסוגים, אפשר לבצע כד:

*k* בחירות מתוך 1-n הסוגים, מספרן הוא (n-l,k)/.

בחירת 1-k עצמים מתוך 1-n הסוגים, והוספת איבר מהסוג הנוסף - המספר של בחירות כאלה הוא (1-n-1,k)/.

בחירת 2-k עצמים מתוך 1-n הסוגים והוספת 2 איברים מהסוג הנוסף.

המספר של בחירות כאלה הוא (2-n-1,k)/, וכך הלאה.

הבחירה האחרונה מורכבת מעצמים מהסוג הנוסף בלבד.

לפיכך מקבלים את יחס הרקורסיה:

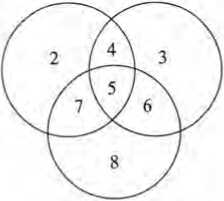
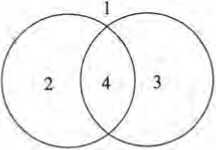
/(n.k) = /(n-l,k)+/(n-l,k-l)+/(n-l,k-2)+ ... +/(n-l,l)+l

/(n,l) = n , /(l.k) התנאים התחיליים - 1 ־

האו^**1**דסיטה **Q**

**1** ח ה **no** ה **GO**

Gilad Barnea



7(3.2) 2)/+(2,2)/ ־,l)+l לדוגמה: ־

= /(1,2)\*/(1,1)+1+/(2,1)+1 = 1+1+1+2+1 = 6

:ו-י>, אלה הן 6 הבחירות *b ,a* אם סוגי העצמים הם

*aa, ab, ac, bb, be, cc —*

השאלה בעמוד 117

תשובה 6.9

נסמן ב-(ת)/ את מספר הסדרות הבינריות באורך *n.* כמו כן נסמן *ב-(1ז)0?* את מספר הסדרות הבינריות באורך *n* המקיימות את הדרישה שבבעיה ומתחילות ב-0, וב-(ת)€1 את מספר הסדרות האלה המתחילות ב-1. אם כן מתקיים:

(f0(n) + f\(n = (מ)/

אם הסדרה באורך *n* מתחילה ב-0, הספרה הבאה חייבת להיות 1, ולכן: (1-f0(n) = fx(n

אם הסדרה באורך n מתחילה ב-1, הספרה הבאה יכולה להיות או 0 או 1. לכן:

fjn) = f0 (n-l)+fx(n-1)

משלושת השוויונות האחרונים נובע:

(1-1ז) f(n) = f\ (n-l)+f0 (n\*l)+f1

הואיל ו- (2-f^n-l) = f(n, מקבלים את יחס הרקורסיה: (2-f(n) = f(n-l)+f(n

התנאים התחיליים הם: 3=(2)/ , 2=(1)/.

תשובה 6.10 השאלה בעמוד 117

(a(n,k מסמן את מספר האפשרויות לבחור *k* מספרים מתוך n המספרים n 1,2 , כך שאיו ביניהם שני מספרים עוקבים.

אם ביו k המספרים שנבחרו נבחר המספר 1, יתר 1-k המספרים נבחרו מתוך 2-n המספרים n 3.^ . מספר האפשרויות לכך הוא

a(n-2,k-l).

אם 1 לא נבחר ביו k המספרים, הרי שנבחרו k מספרים מתוך 1-n המספרים 2,3....,n . מספר האפשרויות לכך הוא (a(n-l,k.

נוכל לרשום אפוא עבור 2<n:

(a(n,k) = a(n-2,k-l) ♦ a(n-l,k

הס -

לכל 1<מ: a(n,l) \* *n*

ול- n\*l *לכל* a(n,k) « 0 *tk>n*

נחשב לדוגמה את (7.3)ב>:

a(7,3) = a(5,2)+a(6.3)

a(5,2) = a(3,l)+a(4,2)«3\*a(2,l)+a(3.2)«3\*2+a(l,l)+a(2,2)6־

a(6,3) = a(4,2)+a(5,3)=3+a(3.2)+a(4,3)3״\*l+a(2,2)+a(3,3)=4

נוכיח באי נדוקציה ש-

עבור n=l :

k=l *k>l*

n-k+1  
*k*

*a(n,k) =*

a(l,k) =

נניח את נכונות הנוסחה עבור *n*

ונחשב את (a(n+l,k לפי יחס

הרקורסיה:

*a(n+l,k)* = a(n-l,k-l)+a(n,k)=

n-k+11  
k J

n-k+1  
k-1

*n-k+1  
k*

n-k+2  
*k*

כלומר, הנוסחה נכונה גם עבור 1+n.

תשובה 7-3 השאלה בעמוד 127

1. נמצא את המקדם של x7 בפולי נום -

*= (f(x)* = (1+x+x2+x3)(1+x)(1+x+x2♦x3+x4+x5 (l+2x+2x2+2x3+x4)(1+x+x2+x3+x4+x5) =

המקדם של x7 הוא: 5 = 2+2+1 . כלומר, יש חמישה פתרונות, ואלו הם:

|  |  |
| --- | --- |
| **CM**  **4^**  **r-i** |  |
| ריז ת**1** ת**1**  «-» ס >-י ס •-י  ריז ר\*ז ו\> עז | 1  2  3  4  5 |

1. המקדם של x4 בפולי נום שרשמנו ב-א הוא: . 8 ־ 1+2+2+2+1

כלומר, יש 8 פתרונות.

1. המקדם של 19 בפולי נום שב-א הוא 1. יש אפוא פתרון אחד המקיים אם תנאי הבעיה: 3 . t2“l • t3x5״!t •

תשובה 7-4 השאלה בעמוד 127

( 4 ♦4x5+3x6+2x7+x8:נ2+413+5!21+3\*1)( x) = (1+x+x2)/

המקדם של x7 היא 9«2+3+4. כלומר, יש 9 אפשרויות לבחור פירות בתנאים שבבעיה.

תשובה 7-5 (המשך) השאלה בעמוד 128

t1+t2\*^3 =

מעריכי החזקות, בכל אחד מן הגורמים שבפונקציה היוצרת, מייצגים את הערכים האפשריים עבור כל פתרון, בהתאמה.

2>!t! :0<t יכול לקבל את הערכים 2,1,0, ולכן ”יתרום" את הגורם 1+x+x2 .

12>t2, זוגי: *t2* יכול לקבל את הערכים 12,10,8,6,4,2,0, ולכן "יתרום" את הגורם l+x2+x4+x6+x8+x10+x12 .

5.7,t3=l , ויתרום את הגורם x+x5+x7 .

הפונקציה היוצרת תהיה אפוא:

(x) = (l+x+x2)(l+x2+x4+x6+x8+x10+x12)(x+x5+x7)/

מכיוו:ן ש-2\* זוגי, t3 אי-זוגי ו־ t!\*t2+t3 זוגי, הרי ש-4» אי-זוגי, כלומר 1. ולבעיה 3 פתרונות:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **\*2** | **\*3** |
| **1**  **1**  **1** | **10**  **6**  **4** | **1**  **5**  **7** |

תשובה *6.ך* השאלה בעמוד 128

/(x) = (x3+x5+x7)(x3+x4+x5+x6+x7)2(x4♦x6)

תשובה 7-7 השאלה בעמוד 128

1. 6(*f(x)* = (l+x+x2+x3
2. (12 < 10)6 (k־x) - (x2+x3\*...\*xk)/
3. 2(4־x) = (x2\*x3+x4+x5)2(l+x)2(l+x\*x2+x3\*...+xk)/

שים לב: בשני הסעיפים האחרונים של התשובה אפשר להמשיך עד לחזקה xk או יותר. אנו עצרנו באותה חזקה, המבטיחה שכל החזקות של x, עד xk, יתקבלו במלואן.

תשובה 7-8 השאלה בעמוד 128

אנו מניחים שכל תלמיד מה-32 מצביע בעד מועמד אחד. אם המועמד הראשון קיבל *tr* קולות, השני *t2* והשלישי t3, הרי 32=t1+t2+t3 . עלינו למצוא את המקדם של x32 בפולי נום:

/(x) = (l+x+x2+...+x32)3

תשובה 7-9 (המשך) השאלה בעמוד 129

נסמן *2-ti* את מספר האיברים מסוג *i* שנבחרו. מכל מ הסוגים נבחרו בסך הכל *k* איברים, כלומר:

n

& » t!+t2+ ... ♦tn ־־ &

עלינו למצוא אפוא פונקציה יוצרת למציאת מספר הפתרונות בטבעיים של משוואה זו, המקיימים *0<tl<k.* בעיה זו פתרנו כזכור. הפונקציה היוצרת היא x)=(l+x+x2+...)n)/ , ובה אנו מחפשים את המקדם של

xk. אולם, את מספר הפתרונות האלה כבר חישבנו בסעיף71” 1 + Zd

2.4 בדרך ולכן זהו

קומבינטורית, ומצאנו (עמוד 51) שהוא שווה ל- . ,

•3-n . המקדם של xk.

תשובה 7-H השאלה בעמוד 130

התוצאות בהטלת כל קוביה הן בין 1 ל-6. עלינו למצוא את מספר הפתרונות של המשוואה tn=k♦.. , כאשר כל 6>!l<t.

הפונקציה הי וצרת היא:

x+x2+x3+x4+x5+x6)n) ־ (x)/

ומחפשים את המקדם של xk בפולי נום זה.

תשובה 7.13 השאלה בעמוד 131

השאלה זהה למציאת מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה -

tj+5t2+^-Qt3\*5Ot4 = fc

אנו מחפשים את המקדם של xk בפולינום:

•(...♦l+x+x2+...)(l+x5+x10+x15+...)(l+x10+x20) = (!)/

**( . ..♦1+X5°+X100)•**

השאלה בעמוד 131

תשובה 7.15

הפונקציה היוצרת המתאימה היא

/(x) = (l+x+x2+x3+x4♦x5+x6+x7+x8+x9+x10)(l+x+x2+x3+...)6

עלינו למצוא את המקדם של x25 בפונקציה זו. לשם כך נרשום את

(x)/ בצורה:

= 1־s11 1 = 1-x11

(l-x11)(!-!)7־ =

1-x (1-x)6 (l־x)7

= (1-x11)(l+x+x2+x3+x4♦...)7 = = (1-X11)

(ראה פתרון שאלה 7.10). המקדם של x25 בפיתוח זה הוא:

38.760\_736.281 . 1201 1311 . ף-״.7] 7.25-11ס [ם j [ 14 J

697,521

תשובה 17.*ך* השאלה בעמוד 132

נרשום: . . , 4ן6— ר

4(...♦2־\*־\*1)4(6־־1) ־־ W ־ (f(x

המקדם של 110 במכפלה זו הוא -

[131 7]״I 3J [3J

146 ־ 286-140 =

4+10-11 " [4+4-1

10 J [ 4

תשובה 7-18 השאלה בעמוד 132

/(x) = (x+x2+x3+x4+x5+x8)10 =

= X10(l+x+x2+x3+x4+x5)10 -

= x10(l-x6)10(l+x+x2+...)10

המקדם של x25 בביטוי זה הוא:

2,HiM3

1־10+3 . 3

10

2

1־10+9]״ 11־10+15

. 15 J [ 9

= 1,307,504-486,200+720 = 822,024

תשובה 7-20 השאלה בעמיד 133

נספור את האפשרויות לרשום 8 בצורה המבוקשת:

סכום של מספר אחד: 8

סכום של 2 מספרים שוגים: 3\*5 ,6+2 ,7+1

סכום של 3 מספרים שונים: 1\*4+3 ,5+2+1

סכום של 4 מספרים שונים: אין

מספר האפשרויות הכולל הוא אפוא 6.

נפתור עתה את הבעיה על-ידי שימוש בפונקציה יוצרת. כיוון שכל מחובר יכול להופיע לכל היותר פעם אחת, הרי המחובר 1 מיוצג בפונקציה היוצרת על-ידי הגורם (1+x), המחובר 2 על-ידי (1+x2), וכך הלאה עד המחובר 8, המיוצג על-ידי 1+x8. מספר האפשרויות לתאר את 8 כסכום מספרים טבעיים גדולים מ-0 ושונים זה מזה הוא, לכן, המקדם של 18 בפונקציה היוצרת ־

= (1+x)(1+x2)(1+x3)(1+x4)(1+x5)(1+x6)(1+x7)(1+x8) ־ (x)/

= (15!♦8!♦l+x+x2+x3)(l+x3+x4+x7)(1+x5+x6+x'1)(1+x7) =

•(—+l+x+x2+2x3+2x4+2x5+2x6+2x7+x8) =

(...♦1+x5 +x6♦x7+x8)•

המקדם של x8 כאן הוא 6 = 1+2+1+1+1

השאלה בעמוד 136

תשובה 7.24

עלינו להוכיח:

עבור 1=מ נקבל:

1'22 ־ 2+2 = 2 J +

כלומר, הנוסחה מתקיימת.

נניח שהנוסחה נכונה עבור n, ונרשום את הסכום עבור 1+n:



2-מ2

. n+1.

2n) -3 2n-l

n+1 J n+1

2n-l +22 2n-l n-1 n-2

2n2]24+[3־n-3

n3־J n-4

3 2n3־ n

+2

**2**

2n-2  
n

**+22**

2n+21 [2n+l

n+1J [ n+1

,4 [2n-3 n+1

,4 [2n-2 n+1

+2

2n-l n+1

האמצעי התקבל

בסוגריים מימין ב-1:

3[2n-2 n+1

2n n+1

על

זהו

*2n* n-1

2n-2 n-3

2n-l *n*

2n-l n+1

+22

2n n

[2n+21 \_ l 11+מ

2n-2  
n-2

2n

n+1

+23

2n+2 n+1

+ 2-22n

סמך הנחת האינדוקציה.

חלק מן הסכום שאותו

2n+2 n+1

נסמן את הסכום

אנו רוצים לחשב

(ראה לעיל). נרשום אפוא:

2n+21

n+1J

2n+l

n+1.

+r

22n ♦ 2

2n+l n+1.

מכאן -

נציב את הביטוי הזה במקום המתאים בסכום המבוקש (עבור 1+n),

ונקבל את ערכו של הסכום:

2n+21 \_(2n+l] \_2n\*2 n[2n+l'  
n+1] n+1] d ך n+1

2n+21\_ f2n+l'  
n+1] [ n+1

\_2n.2 + (2n+2)! 2-(2n+l)! \_ \_2n.2

(n+l)!(n+l)! (n+l)!n! ־

ביטוי זה מקבלים אם מציבים בנוסחה 1+n במקום n. מכאן, שהנוסחה

הוכחה (בעזרת אינדוקציה).

תשובה 7-25 השאלה בעמוד 137

השאלה הזו שקולה לשאלה: מהו מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה tj +t2+t3,=3n, כאשר i = 1,2,3) *0<tl<2n).*

C

נבנה את הפונקציה היוצרת -

*f(x)* = (1+X+®2♦...+3(“2־

ונחפש בה את המקדם של x3n:

/(\*) =

fl-x2“‘1!3

־-1

:2“\*1 )3 (1+x+x2♦...)3 =

= (l-3x2n\*1+..-)-(l+x\*x2+•••)3

המקדם של “3־ הוא:

3\*33 3\_ 1־מ\*n-l-l

3n n-1

3n+2! \_[n+l

2 J"3[ 2

31~~23L?.tl)n~~ x l(9n24.9n+2\_3n2.\_3n) s ~~י~~~~,~~~~־ ”13 =~~

= |(6n2+6n+2) = 3n2+3n+l

עבור n=l מקבלים 7=3+3\*l אפשרויות. הנה הן:

ללב, לככ, כלא, ללא, ככא, לאא, כאא

תשובה 7-27 השאלה בעמוד 137

לפי ההגדרה של פונקציה יוצרת:

...+k־k\*1♦ak־1\_+ak 3\*־2+a3־a2+־a0+a1 = (־)/ ומכאן -

...♦aj-a!)x2 + ...+(ak-ak\_1)xk)♦־(x)(l-x) = a0+(a!-a0)/ = (־)g כלומר, לפי ההגדרה, *(g(x* היא הפונקציה היוצרת של הסדרה:

••••a0 •a1"a0 »a2“a1

137 השאלה בעמוד תשובה 7-28

1) = (־)/+x+x2♦...♦9־)(I♦9°־♦...\*° 1־)(I♦90°־...♦100־)•... =

I-10־ I-100־ I-1 1000־

= TT ־ ־ ־

= 1+x+x2+13+ ...

הפונקציה (־)/ היא פונקציה יוצרת למציאת מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה ה=...+tj+100t2־t0+10 (התיאור העשרוני של ה).

המספר של פתרונות כאלה הוא המקדם של “־ ב-(־)/, וכפי שאנו רואים, מקדם זה שווה תמיד ל-1. לכן יש תמיד פתרון אחד למשוואה זו, כלומר, תיאור המספר הטבעי בשיטה העשרונית הוא יחיד.

**Q** תאתיכרסיטה  
**nGO** פת **1** ח ה

Gilad Barnea

השאלה בעמוד 141

תשובה 7.30

השאלה שקולה לזו שבשאלה 7-29• הפונקציה היוצרת היא הפעם:

h(x) =

x2 X3 x42!+3!+4!

4 x2 X3

1+x+2!+3!

־ (ex-x-l)e3x ־

e4x-xe3x-e3x

1! 2!

של ץ| בביטוי

המקדם

זה הוא -

1,  
1! 2!



41,479 = 65,536-17,496-6,561 = 38־37־48-8

תשובה 7-33 השאלה בעמוד 145

תהי ... +x) = a0+a!x+a2x2)/ הפונקציה היוצרת עבור an. נרשום:

**00** סס

= 1!!Oji1 = a0+ajX + ) a ( ־־ (x)/  
**2־1 0־1**

= a0+a!x+ J (2a1\_1-a1\_2+(f+l))x1 = **i2־ 00 00 00 00**

= 2+x + 2 ) al\_1xl- ) a1\_2x1+ ) fx1♦ ) x1 =

**2־1 2־1 2־1 2־1**

**00 00 00 00**

= 2+1+ 2x aj \_ j x1'1 - x2 ) *al\_2xi~2 ♦ ) txl + )* x1 =

**2־1 2־1 2־1 2־1**

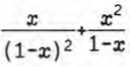
**00 00**

= 2+x+2x(/(x)-a0 )-x2/(x)+ x J tx11־ ♦ x2 ) x12־ =

**12־1 2־**

= 2+x+2x/(x)-4x-x2/(x)+x[-^—^ - =

f(x)(2x-x2)+2-4x+



מכאן:

/(x) = — +———+ 2־^x =

(1-x)4 (l-x)3 (1-x)2

= x(l+x+x2+...)4+x2(1+x+x2♦...)3+(2-4x)(l+x+x2+...)2

המפורש עבור an ניתן על ידי המקדם של xn:

הביטו י

an

4+n-l-l] [3+n-2-11 2f2+n-l  
n-1 n-2 n

-4

2+n-l-l  
n-1

n]+2fn+1l-4 [n

n+2

. 3 ,

2J [ 1 J [1

(n+2)(n+1)n  
**6**

File #0002912 belongs to Gilad Barnea- do not distribute

**20283 מתמטיקה דיסקרטית - יח׳ 4**

**תיקונים והערות לכרך ״קומבינטוריקה״ (מקורס 20276)**

כדאי לרשום את התיקונים בגוף הספר.

עמי 36 באמצע העמוד, אחרי המלים ״אחד מן הזוגות הבאים :״ , בתחילת הרשימה במקום ad , ac צ״ל ad, ae .

עמי 57 שאלה 2.59 : בסעיף א בלבד, במקום "שלמים" צ״ל "טבעיים".

עמי 62 שאלה 2.71 סעיף ד: הניסוח אינו ברור. צ״ל

״כמה מלים מתוכן מכילות את כל 3 התווים 2,1,0 זי׳

עמי 96 לקראת סוף העמוד, אחרי השורה "וכעת נוכל לחשב בעזרת נוסחת ההכלה וההפרדה",

מימין למספר 84 צ״ל.סימן ׳+׳ ולא סימן ׳=׳ .

עמי 133 שאלה 7.20 : יש להוסיף "ללא חשיבות לסדר".

עמי 133 שאלה 7.21: יש להוסיף "עם חשיבות לסדר" בשני התיאורים, וכן במקום "טבעיים" צ״ל "טבעיים חיוביים".

עמי 160 תשובה 2.44 ב: במקום 210,801,600 צ״ל 201,801.600 .

עמי 168 תשובה 3.3 : במקום 20 צ״ל 21.

עמי 175 תשובה 3.23 : המעבר לשורה האחרונה הוא בעזרת שאלה 3.9.

עמי 176 תשובה 3.25 : בשורה הלפני אחרונה, במקום 3א/>10 צ״ל V־10a .

עמי 176 תשובה 3.27ב, התוצאה המספרית היא 35 ולא 25.

עמי 177 תשובה 4.5 שורה לפני אחרונה, חסר סימן + באמצע השורה, בין שני מחוברים.

עמי 184 תשובה 4.23 : בשורה האחרונה במקום 113,573 צ״ל 111,573.

עמי 197 פתרון שאלה 7.18: ״ . ן12)

במקום המחובר 36• I צ״ל •45

מק״ט 20283-7555

מרס 2008

*מתמטיקה דיסקרטית*

1. תורת הקבוצות
2. מבנים אלגבריים
3. לוגיקה מתמטית

iv קומבינטוריקה

isbn 965-302-535-x מסת״ב

נעבור עתה למשוואה אופיינית שיש לה פתרונות שאינם שונים זה מזה. אם ףס מופיע *m* פעמים כפתרון של המשוואה האופיינית, מתאימים לו את !מהביטויים ף\* 10nm, ..., ^ס2!?, ףסת, ף0 .

לדוגמה, אם יחס הרקורסיה הוא ־

( 1״!an = K1-K-2 ( a0=Q • a

מקבלים אחרי ההצבה של ?a וצמצום ב-2־?ס את המשוואה -

0 - 4+a2-4a

למשוואה ריבועית זו שני פתרונות שווים: 2=2 ףס . לכן נחפש פתרון של יחס הרקורסיה מן הצורה:

2n־n־2n+B־4 ־ an

נציב את התנאים התחילי ים:

0 , 0 *\* A*״מ *n=l ,* 1 » *2A + 2B* מכאן |=B , והפתרון ליחס הרקורסיה הוא:

**1 —** מל\*. — \_

**2־an = = n**

נבדוק עביר 3״מ . לפי הנוסחה האחרונה, 12=22־3=3ס . כך גם נקבל לפי חישוב. באמצעות יחס הרקורסיה:

4 = 0־1-4■4 = 0ס4-גס4 = *a2*

12 = 1־4-4־4 = !40־402 = a3

בזה נסתפק. אלה היו רק דוגמאות אחדות שעסקו כולן ביחסי רקורסיה מיוחדים (לינאריים) בלבד. קיימות גם שיטות אחרות למציאת נוסחה מפורשת עבור (מ)/ הנתון על-ידי יחס רקורסיה, אבל יש מקרים שבהם אין לנו כל שיטה המאפשרת זאת.

2n(l+x)n

הסכום המבוקש הוא המקדם an של xn בפונקציה היוצרת:

2 **\_ p2n.l**

1+X

" 2

המקדם של xn ב-(1)0 הוא:

1. שאלה 7-27

   אם (!)/ היא הפונקציה היוצרת של הסדרה ak *a0,al,a2 ,*

   הראה כי (x־x)(l)/ היא הפונקציה היוצרת של הסדרה

   ...,!\_a0 ,a!-a0 ,a2■(^ ,... ,ak-ak .

   התשובה בעמוד 199

   שאלה 7-28

   בשיטה העשרונית, מספר טבעי מתואר בצורה:

   ... ♦ 100t2 \* ך104 + n = t0 [↑](#footnote-ref-1)
2. בקבוצה *AlcA2* מופיעות כל הבחירות שבהן אין קלפים לא מסוג 26

   ולא מסוג 2. מספר הבחירות האלה הוא \_ . [↑](#footnote-ref-2)