מבחנים

2012b

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. ההסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם ניקוד חלקי גם אם בחרתם תשובה לא נכונה.

(7 נק') א. α,β הם פסוקים מורכבים. בלוח אמת משותף שלהם יש שורות שבהן שניהם מקבלים ערך **T** ויש שורות שבהן שניהם מקבלים ערך **F** .

יש בלוח גם שורות שבהן α מקבל ערך **T** ו- β מקבל ערך **F**,

אבל אין בלוח אף שורה בה α מקבל **F** ו- β מקבל **T** .

מהאמור כאן נובע:

[1] $\alpha \to \beta$ הוא טאוטולוגיה **[2]** $\alpha \to \beta$ הוא סתירה

[3] $\beta \to \alpha$ הוא טאוטולוגיה **[4]** $\beta \to \alpha$ הוא סתירה

[5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה

(6 נק') ב. A היא קבוצת הפונקציות של **N** לקבוצה $\{0,1\}$, המקיימות:

לכל n **זוגי**, $f(n) = 0$ (אין דרישה מיוחדת מ- $f(n)$ כאשר n הוא אי-זוגי).

עוצמתה של A היא:

[1] מספר סופי **[2]** $\aleph_0$ **[3]** C

[4] גדולה מ- C **[5]** לא ניתן לקבוע מהנתונים את עוצמת A

(6 נק') ג. משפט 1.6 ב"תורת הגרפים" אומר:

"גרף בעל לפחות שני צמתים הוא דו-צדדי **אם ורק אם** אין בו מעגל באורך אי-זוגי".

נזכור שביער, ובפרט בעץ, אין מעגלים כלל.

איזו מהאמירות הבאות נכונה?

[1] כל יער על יותר מצומת אחד הוא גרף דו-צדדי.

[2] הטענה הקודמת אינה נכונה, אבל כל עץ על יותר מצומת אחד הוא גרף דו-צדדי.

[3] עץ על מספר אי-זוגי של צמתים לעולם **אינו** גרף דו-צדדי.

[4] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

חלק ב׳: ענו על שלש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב׳ כולו: 81 נקודות

שאלה 2

בכל סעיפי השאלה $A = \mathbf{N} - \{0,1\}$ (הטבעיים ללא 0 ו- 1), ו- D הוא יחס מעל A המוגדר כך:

$(a,b) \in D$ אםם b מתחלק ב- a ללא שארית.

לפי ״תורת הקבוצות״ עמ׳ 90 שאלה 3.14, D הוא יחס **סדר-חלקי** מעל A.

(7 נק׳) א. האם D הוא **סדר-מלא** מעל A? הוכח את תשובתך.

(10 נק׳) ב. הוכח שהסגור הסימטרי של D **אינו** יחס סדר-חלקי מעל A.

(10 נק׳) ג. **הוכח או הפרך:** $DD^{-1} = D^{-1}D$ (הכפל הוא כפל יחסים).

שאלה 3

תהיינה $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{1,2,3,4,5,6\}$.

(6 נק׳) א. כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של X ל- Y קיימות?

(21 נק׳) ב. כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של X ל- Y מקיימות את התנאי:
לכל $i \in X$, $f(i) \neq i$. הדרכה: הכלה והפרדה.

שאלה 4

מצאו את מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24$ במספרים טבעיים,

כאשר שלושה מהמשתנים מתחלקים ב- 3 ושני האחרים **אינם** מתחלקים ב- 3.

לא נתון איזה מהמשתנים מתחלקים ב- 3.

אפשר להיעזר בפונקציה יוצרת אבל אין הכרח. **יש להגיע לתשובה סופית מספרית**.

הדרכה: כל מספר טבעי הוא מאחת הצורות: $3k, 3k+1, 3k+2$, כאשר $k \in \mathbf{N}$.

תזכורת: 0 הוא מספר טבעי והוא מתחלק ב- 3.

שאלה 5 בעמוד הבא

שאלה 5

תהי $A=\{1,2,3\}$ ותהי $V=A\times A$.

הגרף G מוגדר כך: קבוצת הצמתים של G היא הקבוצה V הנתונה למעלה.

למשל הזוג הסדור $(2,1)$ הוא צומת של G.

בין צומת (a,b) לצומת (c,d) יש קשת אם ורק אם $a+b\neq c+d$.

למשל **יש** קשת בין $(2,1)$ לבין $(2,2)$, **ואין** קשת בין $(2,2)$ ל- $(1,3)$.

(5 נק׳) א. הוכח ש- G קשיר.

(6 נק׳) ב. מה דרגת הצומת $(1,1)$ ומה דרגת הצומת $(2,3)$?

(8 נק׳) ג. כמה קשתות יש ב- G ? הוכח.

(8 נק׳) ד. הוכח שאין ב- G מסלול אוילר (לא מסלול אוילר פתוח ולא מעגל אוילר).

בהצלחה!

2012ב – מועד 86

.1

א. $\alpha \to \beta$ הוא טאוטולוגיה. הסבר: שורות בהן שניהם T, ברור ש-$\alpha \to \beta$ הוא T. כנ"ל בשורות בהן שניהם F. בשורות בהן אלפא הוא T, ובטא הוא F, גם הוא מקבל ערך T. לא קיימים מקרים אחרים – ולכן $\alpha \to \beta$ מקבל ערך T בכל שורה. בכל טענה כאן מסתמכים על לוח האמת של הקשר "חץ".

ב. C. הסבר: נתאים באופן חח"ע ועל לכל פונקציה כמתואר בשאלה פונקציה מקבוצת המספרים הטבעיים האי-זוגיים לקבוצה $\{0,1\}$ (מדוע היא חח"ע ועל?). עוצמת קבוצת המספרים הטבעיים האי-זוגיים היא $\aleph_0$ (בנייה קלה של פונקציה חח"ע ועל). לכן, על פי הגדרת חזקת עוצמות, עוצמת קבוצת הפונקציות המדוברת היא $2^{\aleph_0} = C$

ג. כל יער על יותר מצומת אחד הוא גרף דו-צדדי. ביער אין מעגל ובפרט אין בו מעגל באורך אי-זוגי, ומכיוון שנתון שיש בו לפחות שני צמתים, הוא דו-צדדי.

.2

א. D אינו סדר מלא מעל A.

נתבונן ב-7 וב-5.

אכן, 7 אינו מתחלק ב-5, ו-5 אינו מתחלק ב-7, ולכן $(5,7) \notin D, (7,5) \notin D$. כמו כן מתקיים $5,7 \in A$, כלומר, D אינו משווה בין כל שני איברים ב-A, ולכן, על פי הגדרת סדר מלא מעל קבוצה, D אינו סדר מלא מעל A.

ב. על פי "תורת הקבוצות", הסגור הסימטרי של יחס R הוא $R \cup R^{-1}$.

לכן, הסגור הסימטרי של D הוא $D \cup D^{-1}$.

נתבונן ב-3,6.

אכן, 6 מתחלק ב-3 ולכן $(3,6) \in D$, ומתקיים (על פי הגדרת רלציה הפוכה) $(6,3) \in D^{-1}$, ועל פי הגדרת איחוד, $(6,3) \in D \cup D^{-1}$.

כמו כן מתקיים $3,6 \in A$, כלומר, מצאנו $a,b \in A$ המקיימים $aDb \wedge bDa \wedge a \neq b$, ולכן על פי הגדרת רלציה אנטיסימטרית, $D \cup D^{-1}$ אינה אנטיסימטרית, ולכן היא אינה סדר חלקי מעל A.

ג. הטענה איננה נכונה, ונביא דוגמה נגדית. נתבונן ב-3,2. אכן, $3,2 \in A$, וכמו כן מתקיים $6 \in A$, וכן ש-6 מתחלק ב-3 וב-2.

לכן, על פי הגדרת D, $(2,6),(3,6) \in D$, ועל פי הגדרת רלציה הפוכה, $(6,2) \in D$.

לכן, על פי הגדרת כפל רלציות, $(3,2) \in D \cdot D^{-1}$. נניח בשלילה שמתקיים $(3,2) \in D^{-1} \cdot D$. כלומר, קיים $a \in A$ כך שמתקיים $(3,a) \in D^{-1}, (a,2) \in D$, כלומר $(a,3) \in D$. על פי הגדרת D, נובע ש-3 מתחלק ב-a, אך 3 הוא מספר ראשוני,

וכן $a \neq 1$, ולכן a=3. עם זאת, צריך גם להתקיים 2 מתחלק ב-a, אך 2 אינו מתחלק ב-3, והגענו לסתירה. כלומר, $(3,2) \notin D^{-1} \cdot D$.

.3

א. עבור כל $x \in X$, עלינו להתאים לו איבר אחד מ-Y, ולאיבר הבא להתאים מ-Y לא כולל האיבר שהותאם כבר. לכן יש לנו (על פי עיקרון הכפל) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

ב. נשתמש בעיקרון ההכלה וההפרדה.

תהי U קבוצת הפונקציות החד-חד ערכיות של X ל-Y. ע״פ סעיף א׳, $|U| = 360$.

תהי F_i קבוצת הפונקציות החד-חד ערכיות של X ל-Y המקיימות $f(i) = i$. נחשב את F_i בדומה לחישוב בסעיף א׳: כל איבר יקבל אחד מהאיברים הנותרים מהקבוצה Y. כלומר, $|F_i| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

נחשב חיתוכים בזוגות: $F_i \cap F_j$ היא קבוצת הפונקציות החד-חד-ערכיות של X ל-Y המקיימות $f(i) = i, f(j) = j$. בדומה לחישוב קודם, עבור $i, j \in X, i \neq j$ $|F_i \cap F_j| = 4 \cdot 3 = 12$.

בדומה נחשב חיתוכים בשלשות: עבור $i, j, k \in X$, כולם שונים זה מזה, $|F_i \cap F_j \cap F_k| = 3$.

אם כל איבר הולך לעצמו, הפונקציה היא אחת: $|F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4| = 1$.

כעת, נחשב את S_i, כפי שהוא מוגדר בפרק על עיקרון ההכלה וההפרדה.

$S_1 = 4 \cdot |F_i| = 240$.

$S_2 = \binom{4}{2} \cdot |F_i \cap F_j| = 72$.

$S_3 = \binom{4}{3} \cdot |F_i \cap F_j \cap F_k| = 12$.

$S_4 = 1$.

$F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$ היא קבוצת הפונקציות החח״ע של X ל-Y המקיימות: קיים $i \in X$ כך ש-$f(i) = i$, ולכן אנו מחפשים את $|F_1' \cap F_2' \cap F_3' \cap F_4'|$. על פי עיקרון ההכלה וההפרדה,

$|F_1' \cap F_2' \cap F_3' \cap F_4'| = 360 - 240 + 72 - 12 + 1 = 181$, וזו התשובה הסופית.

4. נשתמש בפונקציה יוצרת לפתרון הבעיה. נניח ב.ה.כ. ששלושת המשתנים הראשונים הם אלו שמתחלקים ב-3. אז הפונקציה היוצרת המתאימה היא:

$(1+x^3+x^6+\dots)^3\cdot(x+x^2+x^4+x^5+x^7+x^8+\dots)^2$, ומחפשים בה את המקדם של x^{24}.

$$\begin{aligned}
&(1+x^3+x^6+\dots)^3\cdot(x+x^2+x^4+x^5+x^7+x^8+\dots)^2 =\\
&=(1+x^3+x^6+\dots)^3\cdot(x(1+x)+x^4(1+x)+x^7(1+x)+\dots)^2=\\
&=(1+x^3+x^6+\dots)^3\cdot((1+x)\cdot(x+x^4+x^7+\dots))^2=\\
&=(1+x^3+x^6+\dots)^3\cdot(x+x^4+x^7+\dots)^2\cdot(1+x)^2=\\
&=(1+x^3+x^6+\dots)^3\cdot x^2\cdot(1+x^3+x^6+\dots)^2\cdot(1+2x+x^2)=\\
&=(1+x^3+x^6+\dots)^5\cdot(1+2x+x^2)\cdot x^2
\end{aligned}$$

כעת, אנו מחפשים בעצם את המקדם של x^{22} בפיתוח של הפונקציה $(1+x^3+x^6+\dots)^5\cdot(1+2x+x^2)$. נעשה התאמות בין המקדמים בסוגריים משמאל לסוגריים מימין.

עבור 1, נחפש את המקדם של x^{22} בביטוי $(1+x^3+x^6+\dots)^5$. לא ניתן להגיע ל-22 על ידי חיבור מספר גורמים שמתחלקים ב-3, ולכן המקדם של x^{22} בביטוי הוא 0.

עבור $2x$, נחפש את המקדם של x^{21} בביטוי $(1+x^3+x^6+\dots)^5$. נסמן $y=x^3$, ונחפש את המקדם של y^7 בביטוי $(1+y+y^2+\dots)^5$. על פי נוסחה (iii) בממ"ן 15, המקדם של y^7 בביטוי הוא $D(5,7)=\binom{11}{4}=330$. נכפול את התוצאה במקדם של x בסוגריים משמאל, ונקבל 660.

עבור x^2, נחפש את המקדם של x^{20} בביטוי $(1+x^3+x^6+\dots)^5$, אך שוב – המקדם הזה שווה 0.

סך הכל קיבלנו 660.

כעת, נכפול את התוצאה במספר האפשרויות לבחור את שלושת המשתנים שמתחלקים ב-3, וזהו $\binom{5}{3}=10$.

סך הכל, מספר הפתרונות של המשוואה המקיימים את ההגבלות הנתונות הם 6600.

5.

א. יהיו $(a,b),(c,d)\in V$. נוכיח שקיים מסלול בין (a,b) ל-(c,d), וכך נוכיח (על פי הגדרת גרף קשיר), שהגרף הוא קשיר.

אם $a+b\neq c+d$, אז על פי הגדרת G קיימת קשת ביניהם ובוודאי קיים מסלול ביניהם.

אם $a+b=c+d$, נגדיר e כך: אם $d=3$, e=1. אחרת, e=d+1. ברור ש-$e\in A$.

מתקיימים $e \neq d$ ולכן מתקיים $c+d \neq c+e$, ולכן על פי הגדרת הגרף G, יש ביניהם קשת. כמו כן מתקיים $a+b \neq c+e$ ולכן יש ביניהם קשת. כלומר, יש קשת בין (a,b) ל-(c,e) ובין (c,e) ל-(c,d), ולכן קיים מסלול בין (a,b) ל-(c,d).

כלומר, בכל מקרה קיים מסלול בין (a,b) ל-(c,d), ולכן על פי הגדרת גרף קשיר, G הוא קשיר. מ.ש.ל.

ב. (1,1): עלינו למצוא את מספר הזוגות הסדורים שסכומם שונה מ-2. מספר הזוגות הסדורים הכולל הוא 9. כעת, 2=1+1, ולכן אין קשת עם (1,1). בכל זוג אחר האיבר הראשון יהיה גדול מ-1 או השני, ובפרט הסכום יהיו גדול מ-2. לכן יש קשת עם כל אחד מהצמתים האחרים, כלומר דרגתו היא 8.

(2,3): עלינו למצוא את מספר הזוגות הסדורים שסכומם שונה מ-5. שוב, מספר הזוגות הסדורים הכולל הוא 9. זוגות סדורים שסכומם הוא 5 יהיו: (2,3), (3,2), ולכן איתם אין קשת. עם שאר הצמתים יש קשת, ולכן דרגתו היא 7.

ג. קבוצת הצמתים היא $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

הצומת היחיד שסכומו 2 הוא (1,1). ולכן הוא שכן של כל שאר הצמתים, ודרגתו 8.

הצמתים שסכומם הוא 3 הם (1,2), (2,1), ולכן הם אינם נמצאים זה עם זה בשכנות, אך כל אחד מהם שכן של כל שאר הצמתים. לכן דרגת כל אחד מהם היא 7.

הצמתים שסכומם הוא 4 הם (1,3),(2,2),(3,1). לכן דרגת כל אחד מהם היא 6.

הצמתים שסכומם הוא 5 הם (2,3),(3,2), ולכן דרגת כל אחד מהם היא 7.

הצומת היחיד שסכומו 6 הוא (3,3), ולכן דרגתו 8.

סכום הדרגות הוא אם כן, 62=8+14+18+14+8.

על פי מסקנה 1.3, מספר הקשתות בגרף הוא מחצית מסכום הדרגות בגרף, ולכן מספר הקשתות בגרף G הוא 31.

ד. בסעיף הקודם מצאנו שדרגת הצמתים (2,3),(3,2) (1,2), (2,1) היא אי-זוגית, ולכן בפרט יש בו יותר משני צמתים מדרגה אי-זוגית. לכן, אין בו מסלול אוילר, ואין בו מעגל אוילר.

2013a

חלק א׳: שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. <u>רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס</u>.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נקי) **א.** נתבונן בטענות הבאות:

A: **לכל סנדלר קיים אדם, שכל הנעלים שלו עברו תיקון אצל הסנדלר הזה.**

P: לכל אדם קיים סנדלר, שלא תיקן אף נעל של אותו אדם.

Q: לכל סנדלר קיים אדם, שאף אחת מהנעלים שלו לא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

R: לכל סנדלר קיים אדם, שלפחות נעל אחת שלו לא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

S: קיים סנדלר כך שלכל אדם יש לפחות נעל אחת שלא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

T: קיים סנדלר שמעולם לא תיקן שתי נעלים של אותו אדם.

מבין הטענות P,Q,R,S,T, הטענה השקולה **<u>לשלילת</u>** A היא:

[1] P **[2]** Q **[3]** R **[4]** S **[5]** T

(7 נקי) **ב.** תהי $A=\{(x,y)\ |\ x,y\in\mathbf{R},\ \ x-y=7.25\ ,\ \ x+y\in\mathbf{N}\ \}\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

עוצמת A היא:

[1] 0 **[2]** מספר סופי כלשהו שאינו 0 **[3]** $\aleph_0$

[4] C **[5]** אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נקי) **ג.** G הוא גרף פשוט על קבוצת הצמתים $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. נתון ש- G הוא **אוילרי**.

עוד נתון שאין ב- G קשת בין 1 ל- 2, אין קשת בין 2 ל- 3 ואין קשת בין 1 ל- 3.

נוסיף ל- G את 3 הקשתות הללו. הגרף שנקבל הוא:

[1] אוילרי.

[2] אינו אוילרי, אבל יש בו מסלול אוילר שאינו מעגל.

[3] אינו אוילרי, ואין בו מסלול אוילר שאינו מעגל.

[4] ייתכן שהוא אוילרי וייתכן שלא – תלוי בגרף המקורי G.

[5] כלל לא ייתכן ש- G המקורי הוא אוילרי, כי לפי הנתון הוא לא קשיר.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו : 81 נקודות

שאלה 2

נסמן $A=\{1,2,3,\ldots,10\}$. תהי $M = P(A)-\{\varnothing\} = \{X \mid X\subseteq A,\ X\neq\varnothing\}$.

להלן שני יחסים (רלציות) מעל M.

היחס T מוגדר כך : $(X,Y)\in T$ אם ורק אם $\{X,Y\}$ היא **חלוקה** של A.

היחס K מוגדר כך : $(X,Y)\in K$ אם ורק אם $\min(X) \geq \max(Y)$.

(6 נק') א. האם T הוא יחס שקילות מעל M ?

(7 נק') ב. האם K רפלקסיבי ?

(7 נק') ג. האם K אנטי-סימטרי ?

(7 נק') ד. האם K טרנזיטיבי ?

הוכח את תשובותיך.

הבהרה : $\min(X)$ הוא האיבר הקטן ביותר ב- X , $\max(Y)$ הוא האיבר הגדול ביותר ב- Y.

שאלה 3

חמשה אנשים מוכשרים (נקרא להם א,ב,ג,ד,ה) נדרשו לבצע ארבע משימות שונות (להלחין שיר, לפתֵח אפליקציה לאייפון, לנהל משא ומתן עם האוצר, לחדֵש את סימון השביל הכחול בנחל ערוגות). הם סיכמו שכל משימה תבוצע על ידי צוות של שני אנשים.

(5 נק') א. בכמה דרכים ניתן להגדיר צוותים לביצוע כל המשימות?
אין דרישה שכולם יעבדו.
למשל, לגיטימי שהצוות {א,ב} יבצע את כל המשימות.

(20 נק') ב. בכמה דרכים ניתן להגדיר צוותים לביצוע כל המשימות, כאשר אסור שמישהו יתחמק לגמרי מעבודה? כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה.

בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 4

תהי A קבוצה בת 12 איברים. נתבונן בפונקציות של A ל- A שיש להן התכונה הבאה:

לכל $a \in A$, $f(f(f(a))) = a$ אך $f(f(a)) \neq a$.

(6 נקי) א. הוכיחו שפונקציה f כזו היא חד-חד-ערכית ועל.

(21 נקי) ב. כמה פונקציות כאלה קיימות? הגיעו לתשובה מספרית.

שאלה 5

יהי G גרף פשוט בעל שני רכיבי קשירות. בכל אחד מרכיבי הקשירות יש לפחות 3 צמתים.

הוכיחי שהגרף **המשלים** של G ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4) אינו מישורי.

בהצלחה!

תקציר פתרון מועד 82 סמסטר 2013א

תשובה 1

א: [4] S

ב: [2] $\aleph_0$

ג: חכו לפתרון הממ"ח...

תשובה 2

א. לא (אינו רפלקסיבי ואינו טרנזיטיבי)

ב. לא

ג. כן: אם $(X,Y)\in K$ וגם $(Y,X)\in K$ אז בהכרח יש ב- X רק איבר אחד ו- $X=Y$.

ד. כן

תשובה 3

ראו פתרון ממ"ן 14

תשובה 4

א. על: מהנתון כל אבר a של A מתקבל כתמונה של $f(f(a))$.

חח"ע: אם $f(a)=f(b)$ אז $f(f(a))=f(f(b))$ ואז $f(f(f(a)))=f(f(f(b)))$

ומכאן לפי הנתון $a=b$.

ב. $(11\cdot 10)\cdot(8\cdot 7)\cdot(5\cdot 4)\cdot(2\cdot 1)=246,400$

או $\frac{12!}{(3!)^4 4!}\cdot 2^4=\frac{12!}{3^4 4!}=246,400$

תשובה 5

יהיו x,y,z צמתים שונים ברכיב קשירות אחד ויהיו a,b,c צמתים שונים ברכיב הקשירות השני.

במשלים של G, כל אחד מהצמתים x,y,z מחובר בקשת לכל אחד מהצמתים a,b,c.

המשלים מכיל אפוא עותק של הגרף הדו-צדדי $K_{3,3}$.

לפי שאלה 3ב בפרק 5 בתורת הגרפים, $K_{3,3}$ אינו מישורי.

לכן גרף שמכיל אותו אינו יכול להיות מישורי (מדוע?).

2013b

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק') **א.** α, β הם פסוקים. בלוח אמת משותף שלהם, בכל שורה שבה α מקבל ערך **F**, גם β מקבל ערך **F**. אין מידע על שורות אחרות בלוח. לפיכך:

[1] הפסוק $(\neg\alpha)\vee(\neg\beta)$ הוא טאוטולוגיה.

[2] הפסוק $\alpha \to \beta$ הוא טאוטולוגיה והפסוק $\beta \to \alpha$ גם הוא טאוטולוגיה.

[3] $\alpha \to \beta$ הוא טאוטולוגיה, אבל $\beta \to \alpha$ לא חייב להיות טאוטולוגיה.

[4] $\beta \to \alpha$ הוא טאוטולוגיה, אבל $\alpha \to \beta$ לא חייב להיות טאוטולוגיה.

[5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

(7 נק') **ב.** נתונות 100 קבוצות $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$, שכולן חלקיות לקבוצת הממשיים **R**.

נתון שלכל i ($1 \le i \le 100$), **<u>המשלים</u>** של A_i ב- **R** הוא קבוצה בת-מניה.

נסמן $A = \bigcap_{1\le i\le 100} A_i$. נסמן ב- B את **<u>המשלים</u>** של A ב- **R**. עוצמת B היא:

[1] 0 **[2]** מספר סופי כלשהו שאינו 0

[3] $\aleph_0$ **[4]** C

[5] התשובה תלויה בבחירת הקבוצות $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$.

(6 נק') **ג.** בגרף הדו-צדדי המלא $K_{6,6}$ קיימות $6!$ דרכים שונות ליצור זיווג מושלם.

נזרוק מהגרף $K_{6,6}$ קשת אחת (הצמתים שבקצות הקשת נשארים בגרף).

כמה זיווגים מושלמים ניתן להגדיר בגרף שהתקבל?

[1] ללא שינוי: $6!$

[2] $5!$

[3] $6! - 1$

[4] $6! - 5!$

[5] בגרף שהתקבל אין זיווג מושלם.

חלק ב׳: ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב׳ כולו : 81 נקודות

שאלה 2

תהי U קבוצה בת 10 אברים ותהי $B \subseteq U$, $|B| = 3$.

בעזרת B נגדיר חלוקה π_B של $P(U)$:

בחלוקה π_B , קבוצות $X, Y \in P(U)$ הן באותה מחלקה אם ורק אם $X \cap B = Y \cap B$.

שימו לב: זו לא חלוקה של U אלא חלוקה של $P(U)$.

קל לראות שזו אכן חלוקה של $P(U)$, אינכם נדרשים להוכיח זאת.

(9 נק׳) א. הוכיחו: אם $X, Y \subseteq B$ ו- $X \neq Y$,

אז בחלוקה π_B , X,Y **אינם** באותה מחלקת שקילות.

(18 נק׳) ב. כמה מחלקות שקילות יש בחלוקה π_B ?

הוכיחו את תשובתכם בפירוט.

שאלה 3

נתבונן בסדרות באורך 6, שהאברים שלהן לקוחים מהקבוצה $\{1,2,3,4,5,6\}$.

דוגמאות לסדרות כאלה: (*i*) 113124 (*ii*) 464612 (*iii*) 222666 .

(5 נק׳) א. כמה סדרות כאלה יש?

(22 נק׳) ב. מיצאו בכמה מהסדרות האלה נמצאות שלוש הספרות 1,2,3 .

הספרות 4,5,6 יכולות אבל לא חייבות להימצא.

דוגמא (*i*) למעלה מקיימת תנאי זה, דוגמאות (*ii*), (*iii*) לא מקיימות אותו.

בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

את סעיף ב׳ כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה.

שאלה 4

(4 נקי) א. בהינתן $n \geq 1$, מה מספר הפתרונות של המשוואה $x+y+z=n$,
כאשר x,y,z הם שלמים **גדולים מאפס**?

(3 נקי) ב. בהינתן $n \geq 1$, מה מספר הפתרונות של המשוואה $u+v=n$,
כאשר u,v הם שלמים **גדולים מאפס**?

(20 נקי) ג. כמה פתרונות יש למשוואה $(x+y+z)\cdot(u+v)=36$,
כאשר x,y,z,u,v הם שלמים **גדולים מאפס**?
דוגמא לפתרון של המשוואה: $x=y=u=v=1\ ,\ z=16$
יש להגיע לתשובה סופית מספרית. הדרכה: כדאי לחלק למקרים.

שאלה 5

על קבוצת צמתים V מוגדרים חמישה גרפים שונים G_1,G_2,G_3,G_4,G_5 , שכל אחד מהם הוא גרף **דו-צדדי**. החלוקה של V לשני צדדים **אינה** בהכרח אותה חלוקה בחמשת הגרפים:
הצדדים של G_1 הם A_1,B_1 , הצדדים של G_2 הם A_2,B_2 , וכן הלאה.
כמובן לכל $1 \leq i \leq 5$, $A_i \cup B_i = V$, $A_i \cap B_i = \varnothing$.
נסמן ב- G את האיחוד של חמשת הגרפים: קבוצת הצמתים של G היא V, וקבוצת הקשתות של G היא איחוד קבוצות הקשתות של הגרפים G_1,G_2,G_3,G_4,G_5 (כדי ש- G יהיה פשוט, אם קיבלנו בין שני צמתים יותר מקשת אחת, נזרוק את הכפילויות ונשאיר קשת יחידה).

(10 נקי) א. לכל $v \in V$ נתאים **סדרה** של חמש אותיות A,B . נדגים את ההתאמה:
אם v שייך לקבוצות A_1,B_2,B_3,A_4,A_5 , אז הסדרה המותאמת לו תהיה $ABBAA$.
כללית: במקום ה- i בסדרה של v תופיע האות A אם $v \in A_i$,
ותופיע האות B אם $v \in B_i$.
הוכיחו:
אם לצמתים $v,w \in V$ מותאמת אותה סדרה של אותיות, אז **אין** ב- G קשת בין v ל- w.

(17 נקי) ב. מהסעיף הקודם נובע שמספר הצביעה של G הוא לכל היותר:
32 / 25 / 10 / 120 / 5 / 2
מצאו את התשובה הנכונה **והוכיחו אותה בפירוט.**

בהצלחה!

תקציר פתרון בחינה e1 סמסטר 2013ב

שאלה 1

א: [4]. מהנתון נובע (למעשה שקול לנתון) שבכל שורה שבה β הוא אמת, α הוא אמת.
קל לתת דוגמאות נגדיות לטענות האחרות.

ב: **[3]**. המשלים של A הוא איחוד המשלימים, זהו איחוד בר-מניה של קבוצות בנות מניה.

ג: **[4]**. זרקנו זיווגים בהם לזוג מסוים נקבע שידוך זה עם זה.
לכן זרקנו $5!$ זיווגים ונותרו $6! - 5!$.

שאלה 2

א. אם $X, Y \subseteq B$, $X \neq Y$ אז $X \cap B = X \neq Y = Y \cap B$.

ב. לפי סעיף א יש יש **לפחות** $|P(B)| = 8$ מחלקות.
כל $X \in P(U)$ נמצא במחלקת שקילות יחד עם $X \cap B \in P(B)$ ולכן אלה **כל** המחלקות.

הוכחה מתוחכמת יותר, בעזרת "העתק טבעי":
החלוקה שהוגדרה מושרית על ידי פונקציה $f : P(U) \to P(B)$, $f(X) = X \cap B$.
קל לראות ש-f היא על (סיבה דומה לנימוק של סעיף א) ,
ולכן מטענות בספר נובע שמספר מחלקות השקילות הוא $|P(B)| = 8$.

שאלה 3

א. 6^6

ב. הכלה והפרדה: $6^6 - 3\cdot 5^6 + 3\cdot 4^6 - 1\cdot 3^6 = 11{,}340$

שאלה 4

א. כמספר הפתרונות של $x + y + z = n - 3$ בשלמים אי-שליליים: $D(3, n-3) = \binom{n-1}{2}$.

אם $n < 3$ ביטוי זה הוא 0, אבל חובה לציין זאת בתשובה (להוריד נקודה למי שלא ציין).

ב. $n-1$ כאשר $n \geq 2$, אחרת 0. (להוריד נקודה למי שלא ציין זאת).

ג. האפשרויות הן: $18\cdot 2,\ 12\cdot 3,\ 9\cdot 4,\ 6\cdot 6,\ 4\cdot 9,\ 3\cdot 12$.

לכן התשובה: $415 = \binom{17}{2}\cdot 1 + \binom{11}{2}\cdot 2 + \binom{8}{2}\cdot 3 + \binom{5}{2}\cdot 5 + \binom{3}{2}\cdot 8 + \binom{2}{2}\cdot 11$

שאלה 5

א. אם u,v שייכים לאותו צד בגרף G_i אז אין ביניהם קשת ב- G_i .
אם זה נכון לכל i, אז אין ביניהם קשת ב- G.

ב. נצבע כל צומת בצבע שהוא סדרת 5 האותיות שלו.
מהגדרת צביעה נאותה ומסעיף א - זו צביעה נאותה. לכן ניתן לצבוע את G ב- 32 צבעים.

חלק א׳: שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר : כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק׳) **א.** α,β הם פסוקים, וידוע שהפסוק $\alpha \vee \beta$ הוא טאוטולוגיה. לפיכך :

[1] α הוא טאוטולוגיה ו- β הוא טאוטולוגיה.

[2] לפחות אחד מהפסוקים α,β הוא טאוטולוגיה.

[3] הפסוק $(\neg\alpha)\vee(\neg\beta)$ הוא סתירה.

[4] הפסוק $\alpha \leftrightarrow \beta$ הוא סתירה.

[5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

(7 נק׳) **ב.** תהיינה A,B,C קבוצות **בנות מניה**, החלקיות לקבוצת הממשיים $\mathbf{R}$.

נסמן : $D = A' \cap B' \cap C'$ (המשלימים הם יחסית ל- $\mathbf{R}$). עוצמת D היא :

[1] 0 **[2]** $\aleph_0$ **[3]** C

[4] עוצמה מסוימת, שאינה אף אחת משלוש הנ״ל.

[5] התשובה תלויה בבחירת הקבוצות A,B,C .

(6 נק׳) ג. G הוא גרף דו-צדדי. סכום דרגות הצמתים השייכים לצד אחד של G הוא 36 וסכום דרגות הצמתים השייכים לצד השני של G הוא 32.

[1] יש גרף דו-צדדי כזה, פשוט וקשיר.

[2] יש גרף דו-צדדי כזה, קשיר אבל לא פשוט.

[3] יש גרף דו-צדדי כזה, פשוט אבל לא קשיר.

[4] יש גרף דו-צדדי כזה, לא פשוט ולא קשיר.

[5] לא ייתכן גרף דו-צדדי כזה.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

תהי $P_0(\mathbf{N})$ קבוצת הקבוצות החלקיות **<u>הסופיות</u>** ולא-ריקות של $\mathbf{N}$.

לכל $X \in P_0(\mathbf{N})$, נסמן ב- $\min(X)$ את המספר הקטן ביותר ב- X ,

וב- $\max(X)$ את המספר הגדול ביותר ב- X .

נגדיר יחס E מעל $P_0(\mathbf{N})$:

עבור $A, B \in P_0(\mathbf{N})$, $(A, B) \in E$ אם ורק אם $\min(A) + \max(B) = \min(B) + \max(A)$.

(10 נק') א. הוכיחו ש- E הוא יחס שקילות מעל $P_0(\mathbf{N})$.

(10 נק') ב. מצאו פונקציה $f : P_0(\mathbf{N}) \to \mathbf{N}$ **המשרה** את יחס השקילות E הנ"ל ,

כלומר מקיימת: לכל $A, B \in P_0(\mathbf{N})$, $(A, B) \in E$ אם"ם $f(A) = f(B)$.

(7 נק') ג. הוכיחו או הפריכו:

אם $A, B, C \in P_0(\mathbf{N})$ ו- $(A, B) \in E$ אז $(A \cup C, B \cup C) \in E$.

הערה: אפשר לפתור את סעיף ב לפני סעיף א.

שאלה 3

ששה חברים טסו לטיול בגאורגיה.

המקומות שלהם במטוס היו: שורות 1, 2, 3, בכל שורה כסאות A,B (כסאות סמוכים זה לזה).

בטיסה חזרה הם קיבלו בדיוק אותם מקומות, אבל אף אחד לא היה מוכן לשבת ליד (כלומר באותה שורה עם) מי שישב לידו בדרך הלוך.

בכמה דרכים הם יכולים להתיישב בטיסה חזרה לארץ?

הבהרות:

* את סידור הישיבה בטיסה מישראל לגאורגיה אפשר לקחת כנתון שאין בו בחירה.

* יש חשיבות למושבים: מצב בו דינה יושבת בכסא A1 שונה ממצב בו היא יושבת בכל כסא אחר.

* אין דרישה שכל אחד יישב בכסא שונה מהכסא בו הוא ישב בטיסה לגאורגיה.

שאלה 4

יהי a_n מספר הסדרות באורך n , שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0,1,2\}$,

ואין בהן הופעות של הרצף 22 ואין בהן הופעות של הרצף 12.

דוגמאות לסדרות **מותרות** באורך 5 : 00211 (הרצף 21 מותר), 11111 (אין בעיה).

דוגמאות לסדרות **אסורות** באורך 5 : 00221 (יש הופעה של 22), 00121 (יש הופעה של 12).

(12 נקי) א. רשמי בעזרת חישוב ישיר את $a_0\,, a_1, a_2$. רשמי יחס נסיגה עבור a_n (יש לנמק.
הצעה : נוח לנתח את מבנה הסדרה מהקצה הימני שלה ולא מהקצה השמאלי).
בדקי שהערכים שרשמת עבור $a_0\,, a_1, a_2$ מתאימים ליחס הנסיגה.

(15 נקי) ב. פתרי את יחס הנסיגה וקבלי נוסחה מפורשת עבור a_n .
בדקי את הנוסחה שקיבלת ע"י השוואה עם הערך של a_2 שקיבלת בסעיף א.

שאלה 5

יהיו $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ שני עצים על אותה קבוצת צמתים V.

לכל $v\in V$ תהי $d_1(v)$ הדרגה של v ב- G_1 ותהי $d_2(v)$ הדרגה של v ב- G_2 .

הוכיחו כי קיים $v\in V$ עבורו $d_1(v)+d_2(v)\le 3$.

הדרכה : חשבו את סכום כל הדרגות בשני העצים.

בהצלחה!

שאלה 1

א: **[5]**. דוגמא נגדית לסעיפים א,ב, ג: $p \vee \neg p$. דוגמא נגדית לסעיף ד: $p \quad (p \to p) \vee p$.

ב: **[3]**. איחוד המשלימים הוא בר-מניה. לפי משפט בפרק 5, המשלים של קבוצה בת-מניה בתוך קבוצה אינסופית כלשהי X, עוצמתו היא כעוצמת X.

ג: [5]

שאלה 2

א, ב: דרך מהירה: לפתור קודם את סעיף ב ולהסתמך עליו לפתרון א:

הפונקציה היא $f(X) = \max(X) - \min(X)$. מכאן נובע מייד סעיף א.

לחלופין, צריך לעבוד קצת בסעיף א:

רפלקסיביות וסימטריות מיידיות. טרנזיטיביות דורשת טיפה עבודה.

ג. לא. דוגמא נגדית: $A = \{1\},\ B = \{2\},\ C = \{3\}$.

שאלה 3

הכלה והפרדה. קצת דומה לחישוב של אי-סדר מלא, טיפה אחרת.

ללא הגבלה יש $6!$ סידורים.

נסמן ב- A_i $(i = 1,2,3)$ את קבוצת הסידורים בהם זוג i שהיה יחד קודם הוא שוב יחד.

$|A_i|$: יש 3 אפשרויות לבחור לזוג i שורה. בתוך השורה יש להם 2 אפשרויות להתיישב.

כעת יש $4!$ סידורים לשאר החברים.

$|A_i \cap A_j|$: אם שני זוגות נשארים זוגות בהכרח הזוג השלישי נשאר זוג. כלומר חיתוך של שתי קבוצות שווה לחיתוך של שלושתן. נחשב אפוא את החיתוך המשולש:

יש $3!$ אפשרויות לבחור שורות ל- 3 הזוגות. בתוך השורות יש להם 2^3 אפשרויות לשבת.

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$: כאמור.

תשובה: $6! - 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4! + 3 \cdot 6 \cdot 8 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 384$

שאלה 4

א. $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 9 - 2 = 7$.

נסתכל בסדרה באורך $n+1$.

אם היא מסתיימת ב- 0 או ב- 1, לפניהם יכולה לבוא כל סדרה חוקית באורך n.

אם היא מסתיימת ב- 2 , לפניו בהכרח בא 0, ולפניו כל סדרה חוקית באורך $n-1$.

לכן $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$.

ב. $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ <= $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$ <= $a_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$

מתנאי ההתחלה מקבלים $A, B = (1 \pm \sqrt{2}) / 2$.

$$a_n = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right)$$

שאלה 5

$$\sum_{v\in V}\left(d_1(v) + d_2(v)\right) = \sum_{v\in V} d_1(v) + \sum_{v\in V} d_2(v)$$

$$= 2E_1 + 2E_2$$

$$= 2(|V|-1) + 2(|V|-1) = 4|V| - 4$$

אילו לכל $v \in V$ היה $d_1(v) + d_2(v) \geq 4$, היה בהכרח $\sum_{v\in V}\left(d_1(v)+d_2(v)\right) \geq 4|V|$,

בסתירה למה שקיבלנו.

חלק א׳: שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק׳) **א.** α,β הם פסוקים, וידוע שהפסוק $\alpha \wedge \beta$ הוא סתירה. מכאן נובע:

[1] α הוא סתירה ו- β הוא סתירה.

[2] בדיוק אחד משני הפסוקים α,β הוא סתירה.

[3] התשובות הקודמות אינן נכונות,
אבל לפחות אחד משני הפסוקים α,β הוא סתירה.

[4] התשובות הקודמות אינן נכונות,
אבל הפסוק α שקול לשלילתו של הפסוק β.

[5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

(7 נק׳) **ב.** A,B הן קבוצות. f,g הן פונקציות של A ל- B.

$f : A \to B$ היא פונקציה חד-חד-ערכית **שאינה** על.

$g : A \to B$ היא פונקציה חד-חד-ערכית ועל.

(להסיר ספקות: זו אינה טעות, שתי הפונקציות בהן מדובר הן של A ל- B).

מכאן נובע:

[1] $|A| = |B|$ והקבוצות A,B הן אינסופיות.

[2] $|A| = |B|$ אבל A,B לא חייבות להיות אינסופיות.

[3] $|A| \le |B|$ ומהנתון לא ניתן לקבוע אם $|A| < |B|$ או $|A| = |B|$.

[4] מצב כזה לא ייתכן – יש סתירה בנתונים.

[5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק׳) **ג.** G הוא גרף (לא חייב להיות פשוט) על 55 צמתים, מתוכם:

20 צמתים בעלי דרגה 1, 15 צמתים בעלי דרגה 2,

10 צמתים בעלי דרגה 3, 10 צמתים בעלי דרגה 4.

מספר הקשתות ב- G הוא:

[1] 54 **[2]** 60 **[3]** 120 **[4]** 240

[5] אין די נתונים כדי לקבוע את מספר הקשתות.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו : 81 נקודות

שאלה 2

בכרך "תורת הקבוצות" בעמ' 94, שאלה 3.25א, מוכח שיחס ההכלה $\subseteq$ הוא סדר-חלקי מעל כל קבוצה של קבוצות.

תהי $A=\{1,2,3,4\}$ ותהי K קבוצת כל היחסים (הרלציות) **האנטי-סימטריים** מעל A.

לפי האמור, K סדורה בסדר-חלקי לגבי הכלה. השאלה מתייחסת לסדר-חלקי זה.

(7 נק') א. הראה שיש ב- K אבר קטן ביותר - מיהו? הוכח שהוא הקטן ביותר.

(10 נק') ב. מצא אבר מקסימלי ב- K. הוכח שהוא מקסימלי.

(10 נק') ג. הוכח שאין ב- K אבר גדול ביותר.

שאלה 3

מצאי את מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ בטבעיים,

כאשר אף אחד מהמשתנים אינו שווה ל- 3.

0 הוא מספר טבעי. כדאי לפתור בעזרת הפרדה והכלה. יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 4

יהי a_n מספר הסדרות באורך n, שאבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,\ldots,8\}$, והמקיימות את התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים **זוגיים** זה בסמוך לזה.

למשל אם $n = 5$ הסדרה 11263 אינה מותרת, מכיון ש- 2 מופיע ליד 6.

גם הסדרה 11223 אסורה, כי יש שתי הופעות צמודות של 2.

(10 נק') א. מצאו יחס נסיגה (יחס רקורסיה) עבור a_n. נמקו!

רשמו את $a_0,\ a_1,\ a_2$. בדקו שהערך שרשמתם עבור a_0 מתאים ליחס הנסיגה שרשמתם.

(17 נק') ב. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור a_n. ביטויים כגון $\sqrt{48}$ יש להעביר לצורה כגון $4\sqrt{3}$, <u>ואין</u> להציב במקומם קירובים עשרוניים כגון 6.93 .

שאלה 5 בעמוד הבא

שאלה 5

תהי $A=\{1,2,3\}$. גרף G מוגדר כך:

קבוצת הצמתים של G היא $V=A\times A$. למשל הזוג הסדור $(2,1)$ הוא צומת של G.

הקשתות של G: בין צומת (a,b) לצומת (c,d) יש קשת אם ורק אם $a+b\neq c+d$.

למשל **יש** קשת בין $(2,1)$ לבין $(2,2)$, **ואין** קשת בין $(2,2)$ ל- $(1,3)$.

(5 נקי) א. הוכח ש- G קשיר.

(6 נקי) ב. מה דרגת הצומת $(1,1)$ ומה דרגת הצומת $(2,3)$?

(8 נקי) ג. כמה קשתות יש ב- G? הוכח.

(8 נקי) ד. הוכח שאין ב- G מסלול אוילר (לא מסלול אוילר פתוח ולא מעגל אוילר).

בהצלחה!

תקציר פתרון בחינה e3 סמסטר 2013ב

שאלה 1

א. [5] .

ב. [1].

ג. [2] . מספר הקשתות הוא חצי מסכום הדרגות.

שאלה 2

א. היחס הריק הוא אנטי-סימטרי.

ב. למשל $\{(x,y)\in A\times A \mid x\le y\}$. הוא מקסימלי כי לא ניתן להוסיף אף זוג בלי לקלקל את האנטי-סימטריות.

ג. די להראות שיש יותר ממקסימלי אחד. דוגמא יכולה להיות וריאציה קטנה על היחס של סעיף ב, או היחס $\{(x,y)\in A\times A \mid x\ge y\}$, או משהו אחר.

שאלה 3

$|U|=D(5,10)$.

$|A_i|=D(4,7)$

$|A_i\cap A_j|=D(3,4)$

$|A_i\cap A_j\cap A_k|=D(2,1)$

שאלה 4

א. נבדוק כיצד בנויה סדרה באורך n המקיימת את הנדרש.

נתבונן באיבר האחרון של הסדרה :

* אם הוא אי-זוגי (4 אפשרויות), אז קטע הסדרה הקודם לו הוא **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-1$ (a_{n-1} אפשרויות).

* אם הוא זוגי (4 אפשרויות) אז לפניו בא מספר אי-זוגי (4 אפשרויות), ולפניו **סדרה חוקית כלשהי** באורך $n-2$ (a_{n-2} אפשרויות).

קיבלנו : $a_n=4a_{n-1}+16a_{n-2}$.

תנאי התחלה :

$a_0=1$ (הסדרה הריקה מקיימת את התנאים! נוח להיעזר ב- a_0 לסעיף ב),

$a_1=8$,

$a_2=8^2-4^2=48$ (כל הזוגות פחות זוגות של מספרים זוגיים),

לבדיקה, מיחס הנסיגה : $a_2=4a_1+16a_0=4\cdot 8+16=48$.

ב. המשוואה האפיינית: $\lambda^2 - 4\lambda - 16 = 0$. פתרונותיה: $2 \pm 2\sqrt{5}$.

לפיכך $a_n = A\cdot(2+2\sqrt{5})^n + B\cdot(2-2\sqrt{5})^n$.

בהצבת תנאי ההתחלה נקבל לאחר קצת סידור: $A+B=1$, $(A+B)+\sqrt{5}(A-B)=4$.

נציב את המשוואה הראשונה בשנייה: $(A-B) = 3/\sqrt{5} \;=\; 3\sqrt{5}/5$.

נחבר ונחסר משוואה זו מהמשוואה $A+B=1$ ונקבל:

$$B = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \quad , \quad A = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} .$$

כלומר

$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\cdot(2+2\sqrt{5})^n \;+\; \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\cdot(2-2\sqrt{5})^n$$

אם רוצים, אפשר לרשום זאת גם כך:

$$a_n = \left((1+\frac{3}{\sqrt{5}})\cdot(1+\sqrt{5})^n \;+\; (1-\frac{3}{\sqrt{5}})\cdot(1-\sqrt{5})^n \right)\cdot 2^{n-1}$$

שאלה 5

א. בין כל שני צמתים שאינם שכנים יש מסלול באורך 2 .

ב. הסכומים השונים האפשריים הם: 2,3,4,5,6 .

מספר הצמתים מכל סוג הוא, בהתאמה: 1,2,3,2,1 .

הדרגות הן, בהתאמה: 8,7,6,7,8 .

ג. $(1\cdot 8 + 2\cdot 7 + 3\cdot 6 + 2\cdot 7 + 1\cdot 8)/2 = 62/2 = 31$

ד. יש ארבעה צמתים בעלי דרגה אי-זוגית: $(2,3)$, $(3,2)$, $(1,2)$, $(2,1)$.

2013c

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק') א. α,β הם פסוקים מורכבים. בלוח אמת משותף שלהם יש שורות שבהן שניהם מקבלים ערך **T** ויש שורות שבהן שניהם מקבלים ערך **F**.

יש בלוח גם שורות שבהן α מקבל ערך **T** ו- β מקבל ערך **F**,

אבל אין בלוח אף שורה בה α מקבל **F** ו- β מקבל **T**.

מהאמור כאן נובע:

[1] $\alpha \to \beta$ הוא טאוטולוגיה **[2]** $\alpha \to \beta$ הוא סתירה

[3] $\beta \to \alpha$ הוא טאוטולוגיה **[4]** $\beta \to \alpha$ הוא סתירה

[5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה

(7 נק') **ב.** $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

לכל n טבעי, נסמן $I_n = \{x \in \mathbf{R} \mid n < x < n+1\}$.

לכל n טבעי, תהי A_n קבוצה של מספרים ממשיים המקיימת:

$A_n \subseteq I_n$, $|A_n| = \aleph_0$. עוצמת הקבוצה $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ היא:

[1] $\aleph_0$

[2] C

[3] עוצמה אינסופית שאינה $\aleph_0$ ואינה C.

[4] לא קיימות קבוצות A_n כאלה.

[5] קיימות קבוצות כאלה, אבל לא ניתן לענות על השאלה מתוך הנתונים.

(6 נק') **ג.** בפרק 1 ב"תורת הגרפים" מופיע האיפיון הבא של גרף דו-צדדי:

"גרף בעל לפחות שני צמתים הוא דו-צדדי **אם ורק אם** אין בו מעגל באורך אי-זוגי".

נזכור שביער, ובפרט בעץ, אין מעגלים כלל.

איזו מהאמירות הבאות נכונה?

[1] כל יער על יותר מצומת אחד הוא גרף דו-צדדי.

[2] הטענה הקודמת אינה נכונה, אבל כל עץ על יותר מצומת אחד הוא גרף דו-צדדי.

[3] עץ על מספר אי-זוגי של צמתים לעולם **אינו** גרף דו-צדדי.

[4] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו : 81 נקודות

שאלה 2

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים (תזכורת : בקורס זה אפס הוא מספר טבעי).

$\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים : $\mathbf{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$.

בכל סעיף קבעו אם היחס (הרלציה) שהוגדר בו הוא יחס שקילות. **הוכיחו את תשובותיכם**.

(6 נקי) א. היחס J המוגדר מעל $\mathbf{Z}$:

$(x,y)\in J$ אםם קיים $n\in\mathbf{N}$ כך ש- $x-y=5n$.

(7 נקי) ב. היחס K המוגדר מעל $\mathbf{Z}$:

$(x,y)\in K$ אםם קיים $n\in\mathbf{Z}$ כך ש- $x-y=5n$.

(7 נקי) ג. היחס M המוגדר מעל $\mathbf{Z}$:

$(x,y)\in M$ אםם קיים $n\in\mathbf{Z}$ כך ש- $x+y=5n$.

(7 נקי) ד. היחס L המוגדר מעל $\mathbf{Z}$:

$(x,y)\in L$ אםם קיים $n\in\mathbf{Z}$ כך ש- $x-y=5n$ או שקיים $n\in\mathbf{Z}$ כך ש- $x-y=2n$.

שאלה 3

תהיינה $X=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{1,2,3,4,5,6\}$.

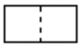
(6 נקי) א. כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של X ל- Y קיימות ?

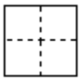
(21 נקי) ב. כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של X ל- Y מקיימות את התנאי :

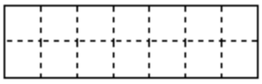
לכל $i\in X$, $f(i)\neq i$. הדרכה : הכלה והפרדה.

בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 4

בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×1 : 

ומספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×2 : 

עלינו לרצף מלבן שממדיו $n\times 2$:
(בציור $n=7$). 

בלוק של 2×1 אפשר להניח כרצוננו "שוכב" או "עומד". אסור לחרוג מגבולות המלבן.

יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

לדוגמא, $a_2 = 3$: שני בלוקים 2×1 שוכבים, או שני בלוקים 2×1 עומדים,

או בלוק אחד של 2×2.

(10 נקי) א. רשום יחס נסיגה עבור a_n (הסבר אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

(10 נקי) ב. פתור את יחס הנסיגה.

(7 נקי) ג. חשב את a_4 בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א׳,
ומתוך הנוסחה המפורשת שקיבלת בסעיף ב׳.

שאלה 5

תהי $A=\{1,2,3\}$ ותהי $V=A\times A$.

גרף G מוגדר כך: קבוצת הצמתים של G היא הקבוצה V הנתונה למעלה.

למשל הזוג הסדור $(2,1)$ הוא צומת של G.

בין צומת (a,b) לצומת (c,d) יש קשת אם ורק אם $(a+b)-(c+d) = \pm 1$.

למשל **יש** קשת בין $(2,1)$ לבין $(2,2)$,

אין קשת בין $(2,2)$ ל- $(1,3)$ **ואין** קשת בין $(2,3)$ לבין $(1,2)$.

(6 נקי) א. הוכיחי ש- G קשיר.

(6 נקי) ב. מה דרגת הצומת $(1,1)$ ומה דרגת הצומת $(1,2)$?

(8 נקי) ג. כמה קשתות יש ב- G ? הוכיחי.

(7 נקי) ד. האם יש ב- G מעגל אוילר? הוכיחי.

בהצלחה!

תקציר פתרון מועד א קיץ 2013

תשובה 1

א: [3]

ב: [1]

ג: [1]

תשובה 2

א. לא, כי הוא לא סימטרי.

ב. כן.

ג. לא, כי הוא לא רפלקסיבי (וגם לא טרנזיטיבי).

ד. לא, כי הוא לא טרנזיטיבי (תנו דוגמא המראה שהוא לא).

תשובה 3

א. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

ב. סטנדרטי. בהכלה והפרדה מתקבל

$$(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) - 4 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3) + 6 \cdot (4 \cdot 3) - 1 \cdot (4 \cdot 3) + 1$$

תשובה 4

א. $a_0 = 1$ (סדרה ריקה! נוח להיעזר ב- a_0 לסעיף ב)

$a_1 = 1$ (רק בלוק 1×2 עומד אפשרי)

$a_2 = 3$ בלוק של 2×2 , או שני בלוקים 1×2 עומדים, או שני בלוקים 1×2 שוכבים).

יחס נסיגה: נתבונן בריצוף באורך $n+1$.

* אם הוא מסתיים בבלוק 1×2 עומד, אז .....

* אם הוא מסתיים בבלוק של 2×2, אז לפני הבלוק הזה יכול לבוא כל ריצוף באורך $n-1$, כלומר....

* אם הוא מסתיים בבלוק 1×2 שוכב, אז בהכרח מדובר בשני בלוקים 1×2 שוכבים זה מעל זה. לפניהם יכול לבוא ....

בסה"כ קיבלנו: $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$

נבדוק שזה תואם את תנאי ההתחלה שרשמנו..... .

ב. המשוואה האפיינית: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. פתרונותיה: $2 , -1$.

לפיכך $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$.

בהצבת a_1 , a_0 נקבל: $A + B = 1$, $2A - B = 1$.

מחיבור שתי משוואות אלה $3A = 2$, כלומר $A = 2/3$. מכאן $B = 1/3$.

לפיכך $a_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3}(-1)^n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + (-1)^n\right)$

נבדוק את עצמנו עבור אחד האברים בסדרה...

תשובה 5

א. להתקדם בהדרגה מסכום לסכום...

ב. הסכומים השונים האפשריים הם: 2,3,4,5,6 .
מספר הצמתים מכל סוג הוא, בהתאמה: 1,2,3,2,1 .
הדרגות הן, בהתאמה: 2,4,4,4,2 .

ג. $(1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2)/2 = 16$

ד. כן: הגרף קשיר וכל הצמתים בעלי דרגה זוגית.

חלק א׳: שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק׳) א. α,β הם פסוקים מורכבים. ידוע שהפסוק $\alpha \to \beta$ **<u>אינו</u>** טאוטולוגיה.

L הוא לוח אמת משותף של α,β. מהאמור נובע:

[1] **בכל** שורה של L שבה α מקבל ערך **T**, β מקבל **F**.

[2] **בכל** שורה של L שבה β מקבל ערך **T**, α מקבל **F**.

[3] **יש** ב- L שורה בה α מקבל ערך **T** ו- β מקבל **F**.

[4] **יש** ב- L שורה בה β מקבל ערך **T** ו- α מקבל **F**.

[5] אף אחת מהטענות הקודמות אינה נכונה.

(7 נק׳) ב. A היא קבוצת הפונקציות של $\mathbf{N}$ לקבוצה $\{0,1\}$, המקיימות:

לכל n **זוגי**, $f(n) = 0$ (אין דרישה מיוחדת מ- $f(n)$ כאשר n הוא אי-זוגי).

עוצמתה של A היא:

[1] מספר סופי **[2]** $\aleph_0$ **[3]** C

[4] גדולה מ- C **[5]** לא ניתן לקבוע מהנתונים את עוצמת A

(6 נק׳) ג. G הוא הגרף הדו-צדדי המלא $K_{3,5}$ (״תורת הגרפים״ הגדרה 1.5).

G הוא אפוא גרף על 8 צמתים.

מספר הקשתות בגרף **<u>המשלים</u>** של G (״תורת הגרפים״ הגדרה 1.4), הוא:

[1] 8 **[2]** 13 **[3]** 15

[4] 30 **[5]** אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה

חלק ב׳: ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב׳ כולו : 81 נקודות

שאלה 2

בכל סעיפי השאלה $A = \{n \in \mathbf{N} \mid 2 \le n \le 12\}$ ו- D הוא יחס מעל A המוגדר כך :

$(a,b) \in D$ אםם b מתחלק ב- a ללא שארית.

לפי ״תורת הקבוצות״ עמ׳ 90 שאלה 3.14, D הוא יחס **סדר-חלקי** מעל A.

א. מצאו את כל האברים ב- A (אם יש כאלה), שהם אברים **מינימליים** לגבי היחס D.

בסעיפים ב, ג נתבונן במכפלת היחסים D, D^{-1} (כפל רלציות).

ב. מצאו $a,b \in A$ כך ש- $(a,b) \in DD^{-1}$ אבל $(a,b) \notin D^{-1}D$.

ג. מצאו $c,d \in A$ כך ש- $(c,d) \in D^{-1}D$ אבל $(c,d) \notin DD^{-1}$.

בכל הסעיפים - הוכיחו את תשובותיכם!

שאלה 3

במכולת יש ארבעה סוגי קרטיבים : לימון, אננס, דובדבן ומשמש.

יש במכולת רק 11 קרטיבים מכל סוג, סה״כ 44 קרטיבים.

בכמה דרכים אפשר לבחור 26 קרטיבים מתוך 44 הקרטיבים האלה ?

אין חשיבות לסדר הבחירה. קרטיבים בעלי אותו טעם נחשבים זהים.

אפשר לפתור בעזרת הכלה והפרדה, אפשר בעזרת פונקציה יוצרת ואפשר בכל דרך אחרת.

יש להגיע לתשובה סופית מספרית, ולא ע״י חיבור ידני של עשרות מחוברים.

שאלה 4

נתון $k \ne 0$. סדרה מסוימת מקיימת את יחס הנסיגה (יחס רקורסיה) :

$a_{n+2} = -4ka_{n+1} + 12k^2 a_n$. ידוע כי $a_1 = 8k$, $a_0 = 0$.

(21 נק׳) א. פתרו את יחס הנסיגה ורשמו ביטוי מפורש עבור a_n .

את הביטוי עליכם להביא לצורה : $a_n = (\text{משהו}) \cdot k^n$,

כאשר הביטוי שבסוגרים תלוי ב- n אך אינו תלוי ב- k .

(6 נק׳) ב. חשבו בשתי דרכים את a_2 (התשובה כמובן תלויה ב- k).

שאלה 5

יהי G גרף פשוט בעל שני רכיבי קשירות. בכל אחד מרכיבי הקשירות יש לפחות 3 צמתים.

הוכיחו שהגרף **המשלים** של G (״תורת הגרפים״ הגדרה 1.4) אינו מישורי.

בהצלחה!

תקציר פתרון מועד ב קיץ 2013

תשובה 1

א: [3]

ב: [3]

ג: [2]

תשובה 2

א. המינימליים הם 2,3,5,7,11

ב. למשל $(2,3)$, כי מצד אחד $(6,3) \in D^{-1}$, $(2,6) \in D$

ומצד שני אין ב- A גורם משותף ל- 2,3 .

ג. למשל $(6,9)$, כי מצד אחד $(3,9) \in D$, $(6,3) \in D^{-1}$

ומצד שני אין ב- A כפולה משותפת ל- 6,9 .

תשובה 3

סטנדרטי. בין אם בהכלה והפרדה או בפונקציה יוצרת, מתקבל בסוף

$$D(4,26) - 4D(4,14) + 6D(4,2)$$

תשובה 4

א. $\lambda^2 + 4k\lambda - 12k^2 = 0$ <= $\lambda = 2k, -6k$ <= $a_n = A(2k)^n + B(-6k)^n$.

$0 = a_0 = A + B$, $8k = a_1 = 2kA - 6kB = 2k(A - 3B)$

<= $8k = 2k(A + 3A) = 8kA$ <= $A = 1,\ B = -1$,

$$a_n = (2k)^n - (-6k)^n = \left(2^n - (-6)^n\right) \cdot k^n$$

ב. $a_2 = (2^2 - (-6)^2)k^2 = -32k^2$

תשובה 5

הגרף המשלים מכיל את $K_{3,3}$.

2014a

חלק א׳: שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. <u>רשמו את התשובות בתוך המחברת</u>.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק׳) א. להלן ציטוט משיר ישן של אילן ואילנית:

P: **לכל אדם, כוכב יש בשמיים, כוכב המתגלה עם רדת יום.**

(להסיר ספק, הביטוי ״כוכב יש בשמיים״ הוא דרך פואטית לומר ״יש כוכב בשמיים״)

איזה מהטענות הבאות שקולה ל**<u>שלילת</u>** P ?

[1] לכל אדם כוכב יש בשמיים, כוכב שאינו מתגלה עם רדת יום.

[2] לכל אדם, אם יש לו כוכב בשמיים אז הכוכב הזה לא מתגלה עם רדת יום.

[3] לאף אדם אין בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום.

[4] יש אדם שאין לו בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום.

[5] יש בשמיים כוכב המתגלה עם רדת יום אבל אינו שייך לאף אדם.

(7 נק׳) **ב.** $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים, $\mathbf{Z}$ היא קבוצת המספרים השלמים.

נסמן $A = (\mathbf{R}\times\mathbf{Z}) \cup (\mathbf{Z}\times\mathbf{R})$, ויהי B **המשלים** של A ב- $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

עוצמת B היא:

[1] 0 **[2]** מספר סופי כלשהו שאינו 0

[3] $\aleph_0$ **[4]** C

[5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק׳) **ג.** בגרף פשוט G, מסלול מסוים הוא בעת ובעונה אחת מעגל אוילר ומעגל המילטון.

מכאן נובע:

[1] G הוא מעגל פשוט.

[2] G הוא מעגל, אבל הוא לא חייב להיות מעגל פשוט.

[3] G הוא גרף פשוט, אבל הוא לא חייב להיות מעגל.

[4] G הוא גרף בעל מספר זוגי של צמתים.

[5] לא ייתכן גרף כזה.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו : 81 נקודות

שאלה 2

השאלה מתייחסת לפעולת ההפרש הסימטרי $\oplus$, שהוגדרה בכרך "תורת הקבוצות" בשאלה 1.22 בעמ' 27 .

(5 נק') א. תהיינה X,Y קבוצות המוכלות בקבוצה אוניברסלית כלשהי.

הוכיחו : $(X \oplus Y)' = (X \cap Y) \cup (X' \cap Y')$.

(15 נק') ב. נגדיר יחס β מעל $P(\mathbf{N})$:

עבור $X, Y \subseteq \mathbf{N}$: $(X,Y) \in \beta$ **אםם** $1 \notin X \oplus Y$.

הוכיחו ש- β הוא יחס שקילות מעל $P(\mathbf{N})$.

(7 נק') ג. לכמה מחלקות שקילות מחלק β את $P(\mathbf{N})$? הוכיחו. תארו את המחלקות.

שאלה 3

תהיינה $B = \{\mathrm{a,b,c,d,e,f,g}\}$, $A = \{1,2,3,4,5\}$.

מיצאו כמה פונקציות $f : A \to B$ מקיימות את התנאי :

שלוש האותיות a,b,c נמצאות בתמונה של f

(במלים אחרות, כל אחת מהאותיות a,b,c מתקבלת על-ידי הפעלת f על איבר כלשהו של A).

ייתכן בהחלט שאברים נוספים ב- B מתקבלים גם הם.

דוגמאות :

(*i*) הפונקציה השולחת את כל אברי A אל האות b **אינה** מקיימת את התנאי.

(*ii*) הפונקציה f המוגדרת כך : $f(1) = f(2) = \mathrm{a}$, $f(3) = \mathrm{b}$, $f(4) = \mathrm{g}$, $f(5) = \mathrm{c}$

מקיימת את התנאי.

כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה. אין הכרח להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 4

יהי a_n מספר הסדרות (או המחרוזות) באורך n , שאבריהן לקוחים מהקבוצה $\{a,b,c,1,2\}$
והמקיימות בעת ובעונה אחת את כל התנאים הבאים :
לא מופיע בסדרה הרצף $a1$, לא מופיע הרצף $b2$, ולא מופיע רצף של שתי סִפרות.

דוגמאות לסדרות חוקיות באורך 4 :
$aaaa$, $abb1$, $1aaa$ (הרצף $1a$ מותר).

דוגמאות לסדרות **לא חוקיות** באורך 4 :
$aaa1$ (הופעה של $a1$), $11cc$ (רצף של סִפרות), $c121$ (רצף של סִפרות).

(10 נק׳) א. מצאו יחס נסיגה עבור a_n (נמקו!) ומצאו תנאי התחלה מספיקים.

(13 נק׳) ב. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור a_n .

(4 נק׳) ג. חשבו בשתי דרכים את a_4 .

שאלה 5

תהי $A=\{1,2,3,4\}$. G הוא גרף פשוט המוגדר כך : קבוצת הצמתים של G היא $P(A)$.
למשל הקבוצה $\{1,3,4\}$ היא צומת של G והקבוצה הריקה היא צומת אחרת של G.
בין צמתים X, Y של G יש קשת אם ורק אם

$X \subseteq Y$ ו- $1 \le |Y-X| \le 2$ **או** $Y \subseteq X$ ו- $1 \le |X-Y| \le 2$.

למשל, יש קשת בין $\{1\}$ ל- $\{1,3\}$, יש קשת בין $\{1\}$ ל- $\{1,2,3\}$
אין קשת בין $\{1\}$ ל- $\{1,2,3,4\}$ **ואין** קשת בין $\{1\}$ ל- $\{2,3\}$.

א. לכל אחד מחמשת הצמתים הבאים, חשבו את הדרגה שלו :
$\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2\}$, $\{1\}$, $\varnothing$.

ב. חשבו את מספר הקשתות ב- G .

ג. הוכיחו ש- G **אינו** גרף דו-צדדי.

ד. הוכיחו ש- G **אינו** מישורי.

הערה :
מטעמי סימטריה מובן שאם X,Y הם צמתים ב- G ו- $|X|=|Y|$ אז $\deg(X)=\deg(Y)$.
ניתן להסתמך על טענה זו ללא הוכחה.

בהצלחה!

מתמטיקה בדידה תקצירי פתרונות בחינות 2014א

תקציר פתרון מועד 82

שאלה 1

א. [4]   ב. [4] C ג. [1] G הוא מעגל פשוט.

שאלה 2

א. אלגברה של קבוצות. הגדרת ההפרש הסימטרי בספר היא $(X-Y)\cup(Y-X)$.

ב. רפלקסיבי וסימטרי: קל. טרנזיטיבי: נניח $(X,Y)\in\beta$ וגם $(Y,Z)\in\beta$.
לפי סעיף א, $1\in(X\cap Y)\cup(X'\cap Y')$ וגם $1\in(Y\cap Z)\cup(Y'\cap Z')$.
מכאן בהפרדה למקרים או בתמרון אלגברי, $1\in(X\cap Z)\cup(X'\cap Z')$.

ג. שתי מחלקות: הקבוצות ש- 1 שייך אליהן והקבוצות ש- 1 לא שייך אליהן.

שאלה 3

הכלה והפרדה: $7^5-3\cdot6^5+3\cdot5^5-4^5$

שאלה 4

א. משמעות התנאים: לפני אות יכול לבוא כל תו, לפני 1 יכול לבוא רק b או c , לפני 2 יכול לבוא רק a או c.

נסתכל בסדרה באורך $n+1$.

אם התו האחרון הוא אות (3 אפשרויות) אז לפניו יכולה להיות כל סדרה חוקית באורך n.

אם התו האחרון הוא 1 אז לפניו.... ולפני זה כל סדרה חוקית.... אם התו האחרון הוא 2....

יחס נסיגה: $a_{n+1}=3a_n+2\cdot2a_{n-1}$.

תנאי התחלה: $a_0=1$ (הסדרה הריקה עומדת בתנאים) , $a_1=5$.

מי שלא בטוח לגבי a_0 יחשב: $a_2=25-6=19$.

ב. משוואה אפיינית: $\lambda^2-3\lambda-4=0$. פתרונותיה: $\lambda=4,-1$.

לכן פתרון יחס הנסיגה הוא מהצורה $a_n=A\cdot4^n+B\cdot(-1)^n$. נציב תנאי התחלה וכו'...

ג. .....

שאלה 5

א. נמיין את הצמתים לפי גודל: קבוצה ריקה, 4 קבוצות בגודל 1, 6 קבוצות בגודל 2, 4 קבוצות בגודל 3 , והקבוצה A.

בהתאם, $\deg(\varnothing)=\deg(A)=4+6=10$, $\deg(\{1\})=\deg(\{1,2,3\})=1+6=7$, $\deg(\{1,2\})=3+3=6$.

ב. $(2\cdot10+2\cdot4\cdot7+6\cdot6)/2=50$

ג. הצמתים $\{1,2\}$, $\{1\}$, $\varnothing$ מהווים משולש בגרף , לכן הוא לא יכול להיות דו-צדדי

ד. מסקנה 5.4 בפרק "תורת הגרפים" אומרת שבגרף מישורי פשוט על n צמתים יש לכל היותר $3n-6$ קשתות.
זה לא מתקיים כאן.

חלק א׳: שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק׳) **א.** הסימון $K(x)$ פירושו ״ל- x יש תכונה מסוימת, הנקראת K״.

הסימון $L(x)$ פירושו ״ל- x יש תכונה מסוימת, הנקראת L״.

יהי p הפסוק $\forall x\big(K(x) \to L(x)\big)$.

לאיזה מהפסוקים הבאים שקולה **שלילת** p ?

[1] $\exists x\big(K(x) \to \neg L(x)\big)$

[2] $\forall x \neg \big(K(x) \to L(x)\big)$

[3] $\exists x\big((\neg L(x)) \to (\neg K(x))\big)$

[4] $\exists x\big(K(x) \wedge \neg L(x)\big)$

[5] $\exists x(\neg K(x)) \to \exists x(\neg L(x))$

(7 נק׳) **ב.** לכל $n \in \mathbf{N}$ יהי $I_n = \{x \in \mathbf{R} \mid n < x < n + 0.5\}$.

נסמן $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} I_n$. עוצמת A היא:

[1] מספר סופי כלשהו **[2]** $\aleph_0$ **[3]** C

[4] 2^C **[5]** אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק׳) **ג.** גרף G הוא יער בעל 3 רכיבי קשירות. הצמתים x,y,z נמצאים ברכיבי קשירות שונים של G (כל אחד מהם ברכיב קשירות אחר).

נוסיף ל- G קשת בין x ל- y וקשת בין y ל- z. הגרף המתקבל הוא:

[1] גרף לא קשיר שאינו יער

[2] יער שאינו עץ

[3] גרף קשיר שאינו עץ

[4] עץ

[5] יש יותר מתשובה אחת אפשרית, כדי לענות נדרש מידע נוסף.

חלק ב׳: ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב׳ כולו: 81 נקודות

שאלה 2

להלן יחסים (רלציות) שונים המוגדרים מעל $P(\mathbf{N})$.

בכל אחד מהסעיפים א- ג, קבעו אם היחס המוגדר באותו סעיף הוא:

(*i*) רפלקסיבי? **(*ii*)** סימטרי? **(*iii*)** טרנזיטיבי? **נמקו בקצרה כל תשובה**.

(9 נק׳) א. היחס R המוגדר כך: $(X,Y) \in R$ אסם $1 \in X \cap Y$.

(9 נק׳) ב. היחס S המוגדר כך: $(X,Y) \in S$ אסם $1 \in X - Y$.

(9 נק׳) ג. היחס T המוגדר כך: $(X,Y) \in T$ אסם $\{X,Y\}$ היא **חלוקה** של $\mathbf{N}$.

שאלה 3

נסמן $B = \{5,6,7,8,9\}$, $A = \{1,2,3,4\}$. תהי $K \subseteq A \times B$ ויהי $a \in A$.

נאמר ש- a **מופיע** ב- K אם ורק אם קיים $b \in B$ כך ש- $(a,b) \in K$.

למשל בקבוצה $K = \{(2,5),(2,6),(3,5),(4,9)\}$, מופיעים 2,3,4 בעוד ש- 1 אינו מופיע.

(7 נק׳) א. בכמה קבוצות K החלקיות ל- $A \times B$ **לא מופיע** המספר 1 ?

(20 נק׳) ב. בכמה קבוצות K החלקיות ל- $A \times B$ **מופיעים** שלושת המספרים 1,2,3 ?

כדאי להיעזר בהכלה והפרדה. אין הכרח להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 4

בכל סעיפי השאלה $A=\{1,2,3,4,5,6\}$.

(8 נק׳) א. מצאי כמה פונקציות f של A ל- A הן בעלות התכונה הבאה:

לכל $x \in A$, $x + f(x)$ הוא מספר **זוגי** .

(8 נק׳) ב. מצאי כמה פונקציות f של A ל- A הן בעלות התכונה הבאה:

לכל $x \in A$, $x \cdot f(x)$ מתחלק ב- 3 ללא שארית.

(3 נק׳) ג. כמה פונקציות של A ל- A מקיימות בעת ובעונה אחת את התכונה של סעיף א והתכונה של סעיף ב ?

(6 נק׳) ד. כמה פונקציות של A ל- A מקיימות לפחות אחת מהתכונות שבסעיפים א, ב?

יש לנמק את התשובות. בכל הסעיפים יש להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 5

תהי $A=\{1,2,3,4,5\}$. G הוא גרף פשוט המוגדר כך:

קבוצת הצמתים של G היא $P(A)$.

למשל הקבוצה $\{1,3,5\}$ היא צומת של G והקבוצה הריקה היא צומת אחרת של G.

בין צמתים X, Y של G יש קשת אם ורק אם

$X \subseteq Y$ ו- $|Y-X|=1$ **או** $Y \subseteq X$ ו- $|X-Y|=1$.

למשל, יש קשת (אחת ויחידה) בין $\{1,3,5\}$ ל- $\{1,3,4,5\}$,

אין קשת בין $\{1,3,5\}$ ל- $\{1,2,3,4,5\}$ **ואין** קשת בין $\{1,3,5\}$ ל- $\{2,3,4,5\}$.

(7 נק׳) א. הוכיחו שלכל הצמתים ב- G אותה דרגה.

(7 נק׳) ב. חשבו את מספר הקשתות ב- G .

(6 נק׳) ג. הוכיחו ש- G הוא גרף דו-צדדי (הציגו חלוקה של הצמתים לשני צדדים).

(7 נק׳) ד. הוכיחו ש- G אינו מישורי (כדאי להיעזר בסעיפים הקודמים).

הערה: קל לראות ש- G קשיר. ניתן להסתמך על כך ואינכם נדרשים להוכיח זאת.

בהצלחה!

תקציר פתרון מועד 84

שאלה 1

א. [4] $\exists x\big(K(x) \wedge \neg L(x)\big)$

ב. [3] C

ג. [4] עץ.

שאלה 2

אתם מוזמנים לפתור בפורום – לא קשה.

שאלה 3

א. כמספר הקבוצות החלקיות ל- $(A-\{1\})\times B$, כלומר 2^{15} .

ב. הכלה והפרדה: $2^{20}-3\cdot 2^{15}+3\cdot 2^{10}-2^{5}$

שאלה 4

א. $3^3\cdot 3^3=27^2$

ב. $6^2\cdot 2^4=36\cdot 16$

ג. לכל מספר יש כעת מעט מאד תמונות אפשריות. על ידי בדיקה ישירה: $1\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 1\cdot 3=18$

ד. א + ב פחות ג .

שאלה 5

א. אם X הוא צומת ו- $|X|=k$ אז מ- X יוצאות k קשתות "כלפי מטה" ו- $5-k$ קשתות "כלפי מעלה", בסה"כ 5 קשתות.

ב. 80

ג. יש קשת רק בין צומת שהיא קבוצה בגודל זוגי לבין צומת שהיא קבוצה בגודל אי-זוגי.

ד. שאלה 3א בפרק "תורת הגרפים" אומרת שבגרף מישורי פשוט וקשיר על n צמתים יש לכל היותר $2n-4$ קשתות. זה לא מתקיים כאן.

חלק א׳: שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק׳) **א.** הסימון $K(x)$ פירושו "ל- x יש תכונה מסוימת, הנקראת K".

הסימון $L(x)$ פירושו "ל- x יש תכונה מסוימת, הנקראת L".

יהי p הפסוק $\neg\forall x\big(K(x) \leftrightarrow L(x)\big)$.

לאיזה מהפסוקים הבאים שקול p ?

[1] $\forall x \neg\big(K(x) \leftrightarrow L(x)\big)$ **[2]** $\forall x\ \big(K(x) \leftrightarrow \neg L(x)\big)$

[3] $\exists x(\neg K(x)) \leftrightarrow \exists x(\neg L(x))$ **[4]** $\exists x\big(K(x) \wedge \neg L(x)\big)$

[5] $\exists x\ \Big(\big(K(x) \wedge \neg L(x)\big) \vee \big(L(x) \wedge \neg K(x)\big)\Big)$

(7 נק׳) **ב.** $\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים, $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

נסמן $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$.

תהי $A = \{\ (x,y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \ \mid\ x \cdot y \in \mathbf{N}\ \}$. עוצמת A היא:

[1] מספר סופי כלשהו **[2]** $\aleph_0$ **[3]** C

[4] 2^C **[5]** אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק׳) **ג.** K_n הוא הגרף המלא על n צמתים. נתבונן באיחוד זר של K_5 עם K_3:

גרף בעל 8 צמתים, שיש לו שני רכיבי קשירות: רכיב קשירות אחד הוא עותק של K_5 ורכיב הקשירות השני הוא עותק של K_3.

נוסיף לגרף זה קשתות: נחבר בקשת כל צומת של K_5 עם כל צומת של K_3.

הגרף המתקבל הוא:

[1] K_8, והוא דו-צדדי: צד אחד - הצמתים של K_5, צד שני - הצמתים של K_3.

[2] K_8, והוא דו-צדדי, אבל הצדדים שלו אינם אלה שהוזכרו בסעיף הקודם.

[3] K_8, והוא אינו דו-צדדי. **[4]** גרף דו-צדדי שאינו K_8.

[5] גרף שאינו דו-צדדי ואינו K_8.

חלק ב׳: ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב׳ כולו: 81 נקודות

שאלה 2

(13 נק׳) א. יהי R_1 יחס (רלציה) אנטי-סימטרי מעל $A = \{1,2,3\}$

ויהי R_2 יחס אנטי-סימטרי מעל $B = \{1,2,3,4,5\}$.

מצאו את הטענה הנכונה מבין 1 – 4 **<u>והוכיחו אותה</u>**. $R_1 \cup R_2$ הוא:

(1) יחס אנטי-סימטרי מעל B.

(2) יחס מעל B שאינו אנטי-סימטרי.

(3) יחס מעל B שיכול להיות אנטי-סימטרי ויכול לא להיות אנטי-סימטרי.

(4) אינו יחס מעל B.

(14 נק׳) ב. יהי E_1 יחס שקילות מעל $A = \{1,2,3\}$

ויהי E_2 יחס שקילות מעל $B = \{1,2,3,4,5\}$.

מצאו את הטענה הנכונה מבין 1 – 4 **<u>והוכיחו אותה</u>**. $E_1 \cup E_2$ הוא:

(1) יחס שקילות מעל B.

(2) יחס מעל B שאינו יחס שקילות מעל B.

(3) יחס מעל B שיכול להיות שקילות מעל B, ויכול לא להיות שקילות מעל B.

(4) אינו יחס מעל B.

למנוע עגמת נפש:

שאלות 2.27, 2.40 בכרך ״תורת הקבוצות״ עוסקות במצב שונה מזה המתואר כאן.

שאלה 3

במערכת מחשב מסוימת המשתמש נדרש לבחור סיסמא שתקיים את הדרישות הבאות:

אורך הסיסמא הוא 6 או 7 תוים. התוים המותרים הם:

26 האותיות הלטיניות הקטנות a-z, 26 האותיות הלטיניות הגדולות A-Z, עשר הספרות 0-9.

יש אפוא 62 תוים מותרים.

סיסמא חייבת להכיל לפחות אות קטנה אחת, לפחות אות גדולה אחת ולפחות ספרה אחת.

כמה סיסמאות חוקיות שונות אפשר ליצור?

אין צורך להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 4

תהי B קבוצת המחרוזות באורך 4 , הבנויות בעזרת האותיות a,b,c,d,e . למשל $aeeb \in B$.

(3 נק׳) א. כמה אברים יש ב- B ?

סעיפים ב,ג,ד,ה של השאלה עוסקים ביחס שקילות מעל B, המוגדר כך :

שתי מחרוזות השייכות ל- B ייקראו שקולות אם **קבוצת** האותיות המופיעות במחרוזת האחת **שווה לקבוצת** האותיות המופיעות במחרוזת השניה.

למשל $aeee$ שקולה ל- $aaee$ ושקולה ל- $eaaa$,

מכיון שלכל אחת מהמחרוזות האלה, קבוצת האותיות המופיעות בה היא $\{a,e\}$.

אינכם נדרשים להוכיח שזהו יחס שקילות.

(6 נק׳) ב. כמה מחלקות שקילות יש?

(6 נק׳) ג. כמה אברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת $abcd$?

(6 נק׳) ד. כמה אברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת $aaab$?

(6 נק׳) ה. כמה אברים יש במחלקת השקילות שאליה שייכת המחרוזת $aabc$?

הוכיחו את תשובותיכם.

שאלה 5

יהי G גרף פשוט, שיכול להיות קשיר או לא קשיר.

a,b הם צמתים שונים ב- G, שהמסלול **הקצר ביותר** ביניהם הוא באורך 3 או יותר

(תזכורת : אורך מסלול הוא מספר הקשתות במסלול). ייתכן שאין כלל מסלול בין a,b.

$\overline{G}$ הוא הגרף **המשלים** של G (״תורת הגרפים״ הגדרה 1.4).

(6 נק׳) א. הוכיחו שב- $\overline{G}$, הצמתים a,b נמצאים באותו רכיב קשירות.

(21 נק׳) ב. הוכיחו ש- $\overline{G}$ הוא קשיר.

בהצלחה!

תקציר פתרון מועד 93

שאלה 1

א [5]   ב [3]   ג [3]

שאלה 2

בשני החלקים התשובה היא 3, קל לתת דוגמאות למצבים השונים.

שאלה 3

ראו פתרון מטלה בסמסטר זה

שאלה 4

א. 4^5

ב. 31 (כמספר הקבוצות החלקיות פרט לקבוצה הריקה).

ג. $4!$

ד. $2^4 - 2 = 14$

ה. $3 \cdot 4 \cdot 3 = 24$.

שאלה 5

א. ב- $\bar{G}$ יש ביניהם קשת.

ב. ב- $\bar{G}$ כל צומת אחר מחובר בקשת ל- a או ל- b ,
כי אם ב- $\bar{G}$ הוא אינו מחובר לאף אחד מהם אז ב- G הוא מחובר לשניהם וזה מסלול באורך 2 .

2014b

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר : כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק') א. הפסוקים הבאים עוסקים ביחס (רלציה) R מעל קבוצה כלשהי.

איזה מהפסוקים מביע את הטענה ש- R הוא יחס טרנזיטיבי?

[1] $\forall x \forall y \exists z \big(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)\big)$

[2] $\forall x \forall y \forall z \big((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)\big)$

[3] $\big(\exists x \exists y R(x,y) \wedge \exists y \exists z R(y,z)\big) \;\rightarrow\; \exists x \exists z R(x,z)$

[4] $\big(\forall x \forall y R(x,y) \wedge \forall y \forall z R(y,z)\big) \;\rightarrow\; \forall x \forall z R(x,z)$

[5] $\big(\exists x \exists y \exists z (R(x,y) \wedge R(y,z))\big) \;\rightarrow\; R(x,z)$

(7 נק') **ב.** **N** היא קבוצת המספרים הטבעיים, **R** היא קבוצת המספרים הממשיים.

תהי B קבוצת כל הפונקציות של **N** ל- **R** . עוצמת B היא :

[1] מספר סופי כלשהו **[2]** $\aleph_0$ **[3]** C

[4] 2^C **[5]** אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק') **ג.** G הוא גרף קשיר על 8 צמתים. **דרגות** הצמתים הן : $2,2,3,4,4,5,6,6$.

מכאן נובע :

[1] **יש** ב- G מעגל אוילר. **יש** ב- G גם מסלול אוילר שאינו מעגל.

[2] **יש** ב- G מעגל אוילר. **אין** ב- G מסלול אוילר שאינו מעגל.

[3] **אין** ב- G מעגל אוילר. **יש** ב- G מסלול אוילר שאינו מעגל.

[4] **אין** ב- G מעגל אוילר. **אין** ב- G מסלול אוילר שאינו מעגל.

[5] כדי לדעת איזה מהאפשרויות 1 – 4 מתקיימת נדרש עוד מידע על G.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו : 81 נקודות

שאלה 2

בסעיפים א, ב : R הוא יחס סדר-חלקי מעל הקבוצה $A=\{1,2,3,4,5\}$.

עוד נתון ש- 1 הוא אבר מינימלי ביחס R **ויחד עם זה** 1 הוא גם אבר מקסימלי ביחס R.

(8 נק') א. **תנו דוגמא** ליחס סדר חלקי R מעל A הנ"ל, המקיים תנאים אלה.
כתשובה אפשר לתאר את היחס מילולית או לשרטט דיאגרמת הסה שלו
או לרשום את כל הזוגות העומדים ביחס.
אינכם נדרשים להוכיח שהיחס שהבאתם הוא סדר חלקי ושהוא עומד
בתנאים (אבל כמובן אם משהו מאלה לא מתקיים יאבד הניקוד בסעיף זה).

(11 נק') ב. **הוכיחו כללית** (לא רק עבור הדוגמא שהבאתם בסעיף הקודם) שאם R מקיים
את התנאים שבתחילת השאלה, אין ב- R אבר גדול ביותר ואין ב- R אבר קטן
ביותר.

(8 נק') ג. האם קיים יחס סדר-חלקי S מעל $A=\{1,2,3,4,5\}$, כך ש- 1 הוא
אבר גדול ביותר ביחס S **ויחד עם זה** 1 הוא גם אבר קטן ביותר ביחס S ?
אם יש יחס כזה – תנו דוגמא. אם אין – הוכיחו שאין.

שאלה 3

במערכת מחשב מסוימת, סיסמת משתמש היא באורך של **לפחות 3 תוים ולכל היותר 100 תוים**.
התוים המותרים : a-z, A-Z, 0-9 (יש אפוא $26+26+10=62$ תוים מותרים).
סיסמא חייבת להכיל **לפחות אות קטנה אחת, לפחות אות גדולה אחת ולפחות ספרה אחת**.

ביום מסוים, באג מוזר בתהליך בדיקת הסיסמא גרם לכך שבכניסה למערכת **לא היתה התייחסות לסדר התוים ולא היתה התייחסות לחזרות**. למשל, המערכת לא הבחינה בין הסיסמאות BA1Aa11, aAB1, 1AAAABBBaa, כי בשלושתן מופיעים בדיוק אותם תוים.
עוד דוגמאות : נניח שהסיסמא של משה היא **abAB122**. באותו יום מוזר :
אם משה הקליד בטעות 22aAaBb1b , המערכת קיבלה אותו.
אם משה הקליד בטעות abAB123, המערכת לא קיבלה אותו, כי התו 3 לא נמצא בסיסמא שלו.
אם משה הקליד בטעות abAB11, המערכת לא קיבלה אותו, כי חסר התו 2 שנמצא בסיסמא שלו.

כמה סיסמאות שונות היו אפשריות **בפועל** באותו יום? "אפשריות בפועל" משמע **סיסמאות שהמערכת לא מבחינה ביניהן נחשבות כאותה סיסמא**.
מדובר רק על סיסמאות חוקיות, המקיימות את הדרישות שבתחילת השאלה.
כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה. אין הכרח להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 4

(8 נק׳) א. נרשום את הפיתוחים הבאים :

$$g(x)=\frac{1}{(1-x)^{10}}=\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \qquad f(x)=(1-x)^9=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

מצאו את a_i ואת b_i, לכל i טבעי.

(16 נק׳) ב. נשים לב ש- $f(x)\cdot g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (*)

יהי $k\in\mathbf{N}$. את המקדם של x^k בפונקציה $f(x)\cdot g(x)$ אפשר לחשב בשתי דרכים :

- מתוך אגף שמאל של (*), ע״י כפל פונקציות יוצרות.
- מתוך אגף ימין של (*), בפיתוח הידוע של $\dfrac{1}{1-x}$.

השוו את שתי התוצאות וקבלו זהות מהצורה $? \;=\; \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{?}{?}\cdot D(?\,,?)$.

(3 נק׳) בדקו את הזהות שקיבלתם עבור המקרה $k=1$.

שאלה 5

גרף T הוא **עץ** על שמונה צמתים.

הוסיפו ל- T שתי קשתות (לא הוסיפו צמתים).

אחרי הוספת שתי הקשתות התקבל גרף פשוט, שכמובן אינו עץ. נקרא לו G .

הוכיחו שהגרף **המשלים** של G אינו מישורי

(״גרף משלים״ הוגדר בחוברת ״תורת הגרפים״, הגדרה 1.4) .

בהצלחה!

תקציר פתרון מועד 85 סמסטר 2014ב

שאלה 1

א. [2] ב. [3] ג. [3]

שאלה 2

א. למשל יחס הזהות. כללית, כל יחס שבו 1 עומד ביחס רק עם עצמו.

ב. 1 אינו גדול ביותר: אילו 1 היה גדול ביותר הוא היה גדול מ- 2, כלומר 2 היה קטן מ- 1, ואז 1 לא היה מינימלי.

אף אבר **אחר** בקבוצה אינו גדול ביותר: אילו היה כזה, הוא היה גדול מ- 1, ואז 1 לא היה מקסימלי.

בדומה לגבי קטן ביותר.

ג. גדול ביותר הוא בפרט מקסימלי, קטן ביותר הוא בפרט מינימלי.

לכן מסעיף ב' נובע מיד שלא ייתכן S כזה.

שאלה 3

באותו יום מה שנבדק הוא בעצם **קבוצת** התוים בסיסמא. מכיון שאורך סיסמא הוא עד 100, כל קבוצה של תוים מתוך 62 התוים אפשרית, ובלבד שתכיל אות קטנה, אות גדולה וספרה.

מכאן בהכלה והפרדה: $2^{62}-(2\cdot 2^{36}+2^{52})+(2\cdot 2^{26}+2^{10})-1$

שאלה 4

א. $a_i=(-1)^i\binom{9}{i}$, $b_i=D(10,i)=\binom{9+i}{i}$.

ב. $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{9}{i}D(10,k-i)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{9}{i}\binom{9+k-i}{9}=1$

עבור $k=1$ מקבלים $10-9=1$.

שאלה 5

מכיון ש- T הוא עץ, מספר הקשתות שלו הוא $8-1=7$.

מספר קשתות G הוא אפוא 9.

מספר הקשתות בגרף המשלים של G הוא $\binom{8}{2}-9=28-9=19$.

מסקנה 5.4 בתורת הגרפים אומרת שמספר הקשתות בגרף מישורי הוא לכל היותר $3n-6=18$.

לכן המשלים של G אינו מישורי.

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר : כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק') א. הפסוק $\forall x\forall y\forall z\left((R(x,y)\wedge R(y,z))\rightarrow R(x,z)\right)$ מביע את הטענה ש- R הוא יחס טרנזיטיבי.

איזה מהפסוקים הבאים מביע את הטענה ש- R <u>**אינו**</u> טרנזיטיבי?

[1] $\forall x\forall y\forall z\left(\neg R(x,y)\wedge\neg R(y,z)\wedge\neg R(x,z)\right)$

[2] $\forall x\forall y\forall z\left((R(x,y)\wedge R(y,z))\rightarrow\neg R(x,z)\right)$

[3] $\forall x\forall y\exists z\left(R(x,y)\wedge R(y,z)\wedge\neg R(x,z)\right)$

[4] $\exists x\exists y\exists z\left((\neg R(x,y)\wedge\neg R(y,z))\rightarrow\neg R(x,z)\right)$

[5] $\exists x\exists y\exists z\left(R(x,y)\wedge R(y,z)\wedge\neg R(x,z)\right)$

(7 נק') **ב.** $\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים, $\mathbf{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

תהי B קבוצת כל הפונקציות של $P(\mathbf{N})$ ל- $P(\mathbf{R})$. עוצמת B היא :

[1] אפס (אין פונקציות כאלה) **[2]** C **[3]** 2^C

[4] עוצמה גדולה מ- 2^C **[5]** אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק') **ג.** G הוא יער על קבוצה של 10 צמתים, ויש לו בדיוק שני רכיבי קשירות.

x,y הם צמתים השייכים לרכיבי קשירות **שונים** של G. ניצור גרף חדש על-ידי כך ש"נדביק" את x ל- y : שניהם ייחשבו כעת כצומת אחד; קבוצת הקשתות השכנות לצומת זה היא איחוד קבוצת הקשתות שהיו שכנות ל- x עם קבוצת הקשתות שהיו שכנות ל- y. הצמתים של G פרט ל- x,y והקשתות של G שאינן שכנות ל- x או ל- y נשארים כולם ללא שינוי בגרף החדש. קיבלנו גרף חדש על 9 צמתים. גרף זה הוא :

[1] יער שאינו עץ **[2]** עץ **[3]** K_9, גרף מלא על 9 צמתים

[4] גרף שאינו יער (ובפרט אינו עץ) ואינו K_9

[5] כדי לדעת איזה מהאפשרויות 1 – 4 מתקיימת נדרש עוד מידע על G.

חלק ב׳: ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב׳ כולו : 81 נקודות

שאלה 2

בכל סעיפי השאלה A היא קבוצה סופית לא ריקה ו- f היא פונקציה של A ל- A המקיימת :
לכל $x \in A$, $f(f(x)) = x$.

(7 נק׳) א. הוכיחו ש- f היא **על** A .

(7 נק׳) ב. הוכיחו ש- f היא חד-חד-ערכית.

(13 נק׳) ג. באותם נתונים, המופיעים לפני סעיף א, נגדיר מעל A יחס E , כך :
$(x, y) \in E$ אם ורק אם $x = y$ **או** $f(x) = y$.
הוכיחו ש- E הוא יחס שקילות מעל A.

שאלה 3

יהי n מספר טבעי כלשהו ותהי $A = \{1,2,3, \dots ,n + 3\}$.
נתבון בקבוצות X המקיימות $\{1,2,3\} \subseteq X \subseteq A$.

(6 נק׳) א. חשבו בצורה פשוטה וקלה, ללא שימוש בהכלה והפרדה או כלים מתוחכמים אחרים, כמה קבוצות X כאלה קיימות. התשובה היא ביטוי התלוי ב- n. כמובן - נמקו.

(17 נק׳) ב. חשבו מחדש את מספר הקבוצות הללו בדרך שונה : בעזרת הכלה והפרדה. התחילו במספר **כל** הקבוצות החלקיות של A והמשיכו משם בחיסור וחיבור של ביטויים מתאימים.

(4 נק׳) ג. הראו שהתשובה שקיבלתם בסעיף ב מתלכדת עם התשובה שקיבלתם בסעיף א.

שאלה 4

בכל סעיפי השאלה, **כל המשתנים** x_i **הם מספרים טבעיים**.

בשני הסעיפים **יש להגיע לתשובה מספרית**. תזכורת: בקורס זה 0 הוא מספר טבעי.

(5 נק׳) א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 12$.

(22 נק׳) ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24$ (*)

כאשר נתון: $x_1 + x_2 + x_3 > x_4 + x_5 + x_6$.

הדרכה לסעיף ב: פתרון של המשוואה (*) מקיים בדיוק אחד משלושת התנאים הבאים:

$$x_1 + x_2 + x_3 > x_4 + x_5 + x_6$$

$$x_4 + x_5 + x_6 > x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6$$

שאלה 5

G הוא גרף פשוט על קבוצת הצמתים $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

בין כל שני צמתים שונים i,j המקיימים $1 \le i \le 4$ וגם $1 \le j \le 4$ יש קשת של G.

בין כל שני צמתים שונים i,j המקיימים $5 \le i \le 9$ וגם $5 \le j \le 9$ יש קשת של G.

בנוסף על כל הקשתות הללו יש ב- G **עוד בדיוק חמש קשתות**.

יהי $H = \overline{G}$ הגרף המשלים של G.

א. הוכיחי ש- H הוא דו-צדדי.

ב. חשבי את מספר הקשתות של H .

ג. בהנחה ש- H קשיר, הוכיחי ש- H אינו מישורי.

בהצלחה!

תקציר פתרון מועד 87 סמסטר 2014ב

שאלה 1

א. [5] ב. [3] ג. [2]

שאלה 2

א. יהי $x \in A$. עלינו להראות שיש לו מקור. נסמן $y = f(x)$.

בשל הנתון $f(f(x)) = x$ מתקיים $f(y) = x$.

מצאנו אבר ב- A (האבר $y = f(x)$) שתמונתו היא x .

ב. יהיו $x_1, x_2 \in A$ כך שמתקיים $f(x_1) = f(x_2)$.

נפעיל את f בשני האגפים ונקבל $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$.

מהנתון $f(f(x)) = x$, קיבלנו $x_1 = x_2$.

ג. רפלקסיביות וסימטריות – קל.

טרנזיטיביות: לפרק לארבעה מקרים ולהראות שבכל אחד מהם מתקיים הנדרש.

שאלה 3

א. 2^n

ב. $2^{n+3} - 3 \cdot 2^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} - 2^n$

ג. חישוב

שאלה 4

א. $D(3,12)$

ב. אם המספר המבוקש הוא x אז מטעמי סימטריה $2x + \left(D(3,12)\right)^2 = D(6,24)$.

מכאן $x = \left(D(6,24) - \left(D(3,12)\right)^2\right) / 2 = \binom{29}{5} - \binom{14}{2}^2 = 118,755 - 91 = 118,664$

שאלה 5

א. הצדדים של H הם $\{5,6,7,8,9\}$, $\{1,2,3,4\}$.

ב. ב- G יש $\binom{4}{2} + \binom{5}{2} + 5 = 6 + 10 + 5 = 21$ קשתות.

לכן ב- H יש $\binom{9}{2} - 21 = 36 - 21 = 15$ קשתות.

המשפט של מועד א' אינו עוזר כאן כי $3n - 6 = 21$ כך ש- 15 קשתות לא מתנגש עם חסם זה. אבל בהמשך הפרק בתורת הגרפים (שאלה 3) מראים שלגרף מישורי פשוט, קשיר **ודו-צדדי** מספר הקשתות הוא לכל היותר $2n - 4$, משמע אצלנו 14.