

בחינה 1

מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.

* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.

* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.

* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס.
בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(6 נק') א. נתבונן בטענות הבאות:

A : לכל סנדלר קיים אדם, שכל הנעלים שלו עברו תיקון אצל הסנדלר הזה.

P : לכל אדם קיים סנדלר, שלא תיקן אף נעל של אותו אדם.

Q : לכל סנדלר קיים אדם, שאף אחת מהנעלים שלו לא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

R : לכל סנדלר קיים אדם, שלפחות נעל אחת שלו לא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

S : קיים סנדלר כך שלכל אדם יש לפחות נעל אחת שלא עברה תיקון אצל סנדלר זה.

T : קיים סנדלר שמעולם לא תיקן שתי נעלים של אותו אדם.

מבין הטענות P, Q, R, S, T , הטענה השקולה לשלילת A היא:

P [1] Q [2] R [3] S [4] T [5]

(7 נק') ב. תהי $A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, x - y = 7.25, x + y \in \mathbf{N}\} \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

עוצמת A היא:

0 [1] מספר סופי כלשהו שאינו 0 [2] \aleph_0 [3]

C [4] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה. [5]

(6 נק') ג. G הוא גרף פשוט וקשיר על קבוצת הצמתים $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

נתון ש- G הוא אוילרי.

עוד נתון שאין ב- G קשת בין 1 ל-2, אין קשת בין 2 ל-3 ואין קשת בין 1 ל-3.

נוסיף ל- G את 3 הקשתות הללו. הגרף שנקבל הוא:

[1] אוילרי.

[2] אינו אוילרי, אבל יש בו מסלול אוילר שאינו מעגל.

[3] אינו אוילרי, ואין בו מסלול אוילר שאינו מעגל.

[4] ייתכן שהוא אוילרי וייתכן שלא – תלוי בגרף המקורי G .

[5] כלל לא ייתכן ש- G המקורי הוא אוילרי, כי לפי הנתון הוא לא קשיר.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

נסמן $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. תהי $M = P(A) - \{\emptyset\} = \{X \mid X \subseteq A, X \neq \emptyset\}$.
להלן שני יחסים (רלציות) מעל M .
היחס T מוגדר כך: $(X, Y) \in T$ אם ורק אם $\{X, Y\}$ היא חלוקה של A .
היחס K מוגדר כך: $(X, Y) \in K$ אם ורק אם $\min(X) \geq \max(Y)$.
(6 נק') א. האם T הוא יחס שקילות מעל M ?
(7 נק') ב. האם K רפלקסיבי?
(7 נק') ג. האם K אנטי-סימטרי?
(7 נק') ד. האם K טרנזיטיבי?
הוכח את תשובתיך.

הבהרה: $\min(X)$ הוא האיבר הקטן ביותר ב- X , $\max(Y)$ הוא האיבר הגדול ביותר ב- Y .

שאלה 3

חמשה אנשים מוכשרים (נקרא להם א, ב, ג, ד, ה) נדרשו לבצע ארבע משימות שונות (להלחין שיר, לפתח אפליקציה לאייפון, לנהל משא ומתן עם האוצר, לחדש את סימון השביל הכחול בנחל ערוגות). הם סיכמו שכל משימה תבוצע על ידי צוות של שני אנשים.
(5 נק') א. בכמה דרכים ניתן להגדיר צוותים לביצוע כל המשימות?
אין דרישה שכולם יעבדו.
למשל, לגיטימי שהצוות $\{א, ב\}$ יבצע את כל המשימות.
(20 נק') ב. בכמה דרכים ניתן להגדיר צוותים לביצוע כל המשימות, כאשר אסור שמישהו יתחמק לגמרי מעבודה? כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה.
בשני הסעיפים יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 4

תהי A קבוצה בת 12 איברים. נתבונן בפונקציות של A ל- A שיש להן התכונה הבאה:
לכל $a \in A$, $f(f(f(a))) = a$ אך $f(f(a)) \neq a$.

(6 נק') א. הוכיחו שפונקציה f כזו היא חד-חד-ערכית ועל.

(21 נק') ב. כמה פונקציות כאלה קיימות? הגיעו לתשובה מספרית.

שאלה 5

יהי G גרף פשוט בעל שני רכיבי קשירות. בכל אחד מרכיבי הקשירות יש לפחות 3 צמתים.
הוכיחי שהגרף המשלים של G ("תורת הגרפים" הגדרה 1.4) אינו מישורי.

בהצלחה!

תקציר פתרון בחינה 1

תשובה 1

א: S [4]

ב: \aleph_0 [3]

ג: [1] נשאר אוילרי, כי לכל אחד מ-3 הצמתים הוספנו בדיוק 2 קשתות.

תשובה 2

א. לא (אינו רפלקסיבי ואינו טרנזיטיבי)

ב. לא

ג. כן: אם $(X, Y) \in K$ וגם $(Y, X) \in K$ אז בהכרח יש ב- X רק איבר אחד, ו- $X = Y$.

ד. כן

תשובה 3

א. לכל משימה יש $\binom{5}{2} = 10$ דרכים לבחור צוות. לארבע המשימות: 10^4 דרכים.

ב. A_i : קבוצת הבחירות של צוותים בהן אדם i מתחמק מעבודה.

$$\binom{5}{2}^4 - 5 \cdot \binom{4}{2}^4 + \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2}^4 - \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2}^4 \quad \text{הכלה והפרדה:}$$

תשובה 4

תשובה

- א. f היא על מפני שלכל $a \in A$ קיים $x \in A$ כך ש- $f(x) = a$ (פשוט ניקח $x = f(f(a))$).
- פונקציה מקבוצה סופית לעצמה שהיא על חייבת להיות גם חד-חד-ערכית (שכן אם f לא חד-חד-ערכית אז לפחות לשניים מאיברי A יש אותה תמונה, ואז מספר האיברים ב- $f(A)$ יהיה 11 לכל היותר. אבל אז f לא על!).
- ב. נשים לב שאם פונקציה המקיימת את התנאי הנתון אז לכל $a \in A$, $f(f(f(a))) = a$ ו- $f(f(a)) \neq a$ או $f(a) \neq a$ וגם $f(f(a)) \neq f(a)$ (אחרת נקבל סתירה לתנאי הנתון). נניח ש- f אחת הפונקציות המקיימות את תנאי השאלה. נסתכל $a \in A$. מאחר ש- $f(a) \neq a$, הרי שיש בדיוק 11 אפשרויות לבחור את התמונה של a (את $f(a)$) ומאחר ש- $f(f(a)) \neq f(a)$, נותרו בדיוק 10 אפשרויות לבחירת התמונה של $f(a)$ (כלומר של $f(f(a))$). אבל על פי תנאי השאלה, לתמונה של $f(f(a))$ יש רק אפשרות אחת (שכן $f(f(f(a))) = a$). סיכום ביניים: יש $11 \cdot 10$ אופציות להגדיר את f על שלושת האיברים $a, f(a), f(f(a))$.
- נותרו עוד 9 איברים בקבוצה. נבחר איבר b מתוכם. שיקול דומה מראה שיש $8 \cdot 7$ אפשרויות להגדיר את f על שלושת האיברים $b, f(b), f(f(b))$.

באופן דומה, עם נבחר איבר c מתוך 6 האיברים הנותרים נקבל שיש $5 \cdot 4$ אפשרויות להדיר את f על שלושת האיברים $c, f(c), f(f(c))$, ולבסוף אם נבחר איבר c מתוך 3 האיברים האחרונים, נקבל עוד $2 \cdot 1$ אפשרויות להגדיר את f על $d, f(d), f(f(d))$. מפני שבכל אחד מהשלבים, היו פתוחות לבחירה כל האופציות של השלב הבא, נקבל שמספר האפשרויות לבחירת f הוא מכפלת כל האפשרויות שהיו בכל שלב כלומר:

$$(11 \cdot 10) \cdot (8 \cdot 7) \cdot (5 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 1) = 246,400.$$

שיקול אחר, המסתמך על אותו רעיון של בניית פונקציה f על-ידי חלוקת הקבוצה ל-4

$$\frac{12!}{(3!)^4 4!} \cdot 2^4 = \frac{12!}{3^4 4!} = 246,400$$

מוביל לתוצאה $a, f(a), f(f(a))$ מהסוג

(יש לשים לב בכל שלשה יש שתי אופציות סידור שונות אך אין חשיבות לסדר שבין השלושת השונות).

תשובה 5

יהיו x, y, z צמתים שונים ברכיב קשירות אחד ויהיו a, b, c צמתים שונים ברכיב הקשירות השני. במשלים של G , כל אחד מהצמתים x, y, z מחובר בקשת לכל אחד מהצמתים a, b, c . המשלים מכיל אפוא עותק של הגרף הדו-צדדי $K_{3,3}$.

לפי שאלה בחוברת, $K_{3,3}$ אינו מישורי.

גרף שמכיל אותו אינו יכול להיות מישורי.