

בחינה 10

מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

* בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.

* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.

* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.

* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות במחברת, לא בטופס.
בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(6 נק') א. הסימון $K(x)$ פירושו "ל- x יש תכונה מסוימת, הנקראת K ".

הסימון $L(x)$ פירושו "ל- x יש תכונה מסוימת, הנקראת L ".

יהי p הפסוק $\forall x(K(x) \rightarrow L(x))$.

לאיזה מהפסוקים הבאים שקולה **שלילת** p ?

[1] $\exists x(K(x) \rightarrow \neg L(x))$

[2] $\forall x \neg (K(x) \rightarrow L(x))$

[3] $\exists x((\neg L(x)) \rightarrow (\neg K(x)))$

[4] $\exists x(K(x) \wedge \neg L(x))$

[5] $\exists x(\neg K(x)) \rightarrow \exists x(\neg L(x))$

(7 נק') ב. לכל $n \in \mathbf{N}$ יהי $I_n = \{x \in \mathbf{R} \mid n < x < n + 0.5\}$.

נסמן $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} I_n$. עוצמת A היא:

[1] מספר סופי כלשהו [2] \aleph_0 [3] C

[4] 2^C [5] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

(6 נק') ג. גרף G הוא יער בעל 3 רכיבי קשירות. הצמתים x, y, z נמצאים ברכיבי קשירות שונים של G (כל אחד מהם ברכיב קשירות אחר).

נוסיף ל- G קשת בין x ל- y וקשת בין y ל- z . הגרף המתקבל הוא:

[1] גרף לא קשיר שאינו יער

[2] יער שאינו עץ

[3] גרף קשיר שאינו עץ

[4] עץ

[5] יש יותר מתשובה אחת אפשרית, כדי לענות נדרש מידע נוסף.

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

להלן יחסים (רלציות) שונים המוגדרים מעל $P(N)$.

בכל אחד מהסעיפים א-ג, קבעו אם היחס המוגדר באותו סעיף הוא:

(i) רפלקסיבי? (ii) סימטרי? (iii) טרנזיטיבי? **נמקו בקצרה כל תשובה.**

9 נק' א. היחס R המוגדר כך: $(X, Y) \in R$ אם $1 \in X \cap Y$.

9 נק' ב. היחס S המוגדר כך: $(X, Y) \in S$ אם $1 \in X - Y$.

9 נק' ג. היחס T המוגדר כך: $(X, Y) \in T$ אם $\{X, Y\}$ היא חלוקה של N .

שאלה 3

נסמן $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. תהי $K \subseteq A \times B$ ויהי $a \in A$.

נאמר ש- a **מופיע** ב- K אם ורק אם קיים $b \in B$ כך ש- $(a, b) \in K$.

למשל בקבוצה $K = \{(2, 5), (2, 6), (3, 5), (4, 9)\}$, מופיעים 2, 3, 4 בעוד ש-1 אינו מופיע.

7 נק' א. בכמה קבוצות K החלקיות ל- $A \times B$ **לא מופיע** המספר 1?

20 נק' ב. בכמה קבוצות K החלקיות ל- $A \times B$ **מופיעים** שלושת המספרים 1, 2, 3?

כדאי להיעזר בהכלה והפרדה. אין הכרח להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 4

בכל סעיפי השאלה $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- (8 נק') א. מצאי כמה פונקציות f של A ל- A הן בעלות התכונה הבאה:
לכל $x \in A$, $x + f(x)$ הוא מספר זוגי.
- (8 נק') ב. מצאי כמה פונקציות f של A ל- A הן בעלות התכונה הבאה:
לכל $x \in A$, $x \cdot f(x)$ מתחלק ב-3 ללא שארית.
- (3 נק') ג. כמה פונקציות של A ל- A מקיימות בעת ובעונה אחת את התכונה של סעיף א והתכונה של סעיף ב?
- (6 נק') ד. כמה פונקציות של A ל- A מקיימות לפחות אחת מהתכונות שבסעיפים א, ב? **יש לנמק את התשובות. בכל הסעיפים יש להגיע לתשובה מספרית.**

שאלה 5

- תהי $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. G הוא גרף פשוט המוגדר כך:
 קבוצת הצמתים של G היא $P(A)$.
 למשל הקבוצה $\{1, 3, 5\}$ היא צומת של G והקבוצה הריקה היא צומת אחרת של G .
 בין צמתים X, Y של G יש קשת אם ורק אם
 $X \subseteq Y$ ו- $|Y - X| = 1$ או $Y \subseteq X$ ו- $|X - Y| = 1$.
 למשל, יש קשת (אחת ויחידה) בין $\{1, 3, 5\}$ ל- $\{1, 3, 4, 5\}$,
אין קשת בין $\{1, 3, 5\}$ ל- $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ **ואין** קשת בין $\{1, 3, 5\}$ ל- $\{2, 3, 4, 5\}$.
- (7 נק') א. הוכיחו שלכל הצמתים ב- G אותה דרגה.
- (7 נק') ב. חשבו את מספר הקשתות ב- G .
- (6 נק') ג. הוכיחו ש- G הוא גרף דו-צדדי (הציגו חלוקה של הצמתים לשני צדדים).
- (7 נק') ד. הוכיחו ש- G אינו מישורי (כדאי להיעזר בסעיפים הקודמים).
- הערה: קל לראות ש- G קשיר. ניתן להסתמך על כך ואינכם נדרשים להוכיח זאת.

בהצלחה!

תקציר פתרון בחינה 10

שאלה 1

א. $\exists x(K(x) \wedge \neg L(x))$ [4]

ב. C [3]

ג. [4] עץ.

שאלה 2

אתם מוזמנים לפתור בפורום – לא קשה.

שאלה 3

א. כמספר הקבוצות החלקיות ל- $(A - \{1\}) \times B$, כלומר 2^{15} .

ב. הכלה והפרדה: $2^{20} - 3 \cdot 2^{15} + 3 \cdot 2^{10} - 2^5$

שאלה 4

א. $3^3 \cdot 3^3 = 27^2$

ב. $6^2 \cdot 2^4 = 36 \cdot 16$

ג. לכל מספר יש כעת מעט מאוד תמונות אפשריות. על ידי בדיקה ישירה: $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 18$

ד. א + ב פחות ג.

שאלה 5

א. אם X הוא צומת ו- $|X| = k$ אז מ- X יוצאות k קשתות "כלפי מטה" ו- $5 - k$ קשתות "כלפי מעלה",
בסה"כ 5 קשתות.

ב. 80

ג. יש קשת רק בין צומת שהיא קבוצה בגודל זוגי לבין צומת שהיא קבוצה בגודל אי-זוגי.

ד. שאלה 3א בפרק "תורת הגרפים" אומרת שבגרף מישורי פשוט וקשיר על n צמתים יש לכל היותר $2n - 4$ קשתות.
זה לא מתקיים כאן.