

## בחינה 6

### מבנה הבחינה :

בבחינה שני חלקים.

**חלק א' הוא שאלת חובה. בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות.**

בסך הכל יש לענות אפוא על ארבע שאלות :

שאלה 1 שבחלק א' ועוד שלוש מארבע השאלות שבחלק ב'.

אם בחלק ב' תשיב/י על יותר מ- 3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.

**משך המבחן: 3 שעות.**

**חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.**

---

### שימו לב:

\* בחלק ב' של הבחינה יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש

בפירוש בגוף השאלה.

\* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של

הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת

"אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות

שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.

\* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי

אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.

\* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים

של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.

---

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

## חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

### שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

**בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה.** אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבדוק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(6 נק') א. הפסוקים הבאים עוסקים ביחס (רלציה)  $R$  מעל קבוצה כלשהי.

איזה מהפסוקים מביע את הטענה ש-  $R$  הוא יחס טרנזיטיבי?

$$\forall x \forall y \exists z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \quad [1]$$

$$\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)) \quad [2]$$

$$(\exists x \exists y R(x, y) \wedge \exists y \exists z R(y, z)) \rightarrow \exists x \exists z R(x, z) \quad [3]$$

$$(\forall x \forall y R(x, y) \wedge \forall y \forall z R(y, z)) \rightarrow \forall x \forall z R(x, z) \quad [4]$$

$$(\exists x \exists y \exists z (R(x, y) \wedge R(y, z))) \rightarrow R(x, z) \quad [5]$$

(7 נק') ב.  $N$  היא קבוצת המספרים הטבעיים,  $R$  היא קבוצת המספרים הממשיים.

תהי  $B$  קבוצת כל הפונקציות של  $N$  ל-  $R$ . עוצמת  $B$  היא:

$$[1] \text{ מספר סופי כלשהו} \quad [2] \aleph_0 \quad [3] C$$

$$[4] 2^C \quad [5] \text{ אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.}$$

(6 נק') ג.  $G$  הוא גרף קשיר על 8 צמתים. **דרגות** הצמתים הן: 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6.

מכאן נובע:

[1] יש ב-  $G$  מעגל אוילר. יש ב-  $G$  גם מסלול אוילר שאינו מעגל.

[2] יש ב-  $G$  מעגל אוילר. אין ב-  $G$  מסלול אוילר שאינו מעגל.

[3] אין ב-  $G$  מעגל אוילר. יש ב-  $G$  מסלול אוילר שאינו מעגל.

[4] אין ב-  $G$  מעגל אוילר. אין ב-  $G$  מסלול אוילר שאינו מעגל.

[5] כדי לדעת איזה מהאפשרויות 1 – 4 מתקיימת נדרש עוד מידע על  $G$ .

**חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות**  
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

**שאלה 2**

- בסעיפים א, ב:  $R$  הוא יחס סדר-חלקי מעל הקבוצה  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
- עוד נתון ש-1 הוא אבר מינימלי ביחס  $R$  ו**יחד עם זה** 1 הוא גם אבר מקסימלי ביחס  $R$ .
- (8 נק') א. **תנו דוגמא** ליחס סדר חלקי  $R$  מעל  $A$  הנ"ל, המקיים תנאים אלה.  
כתשובה אפשר לתאר את היחס מילולית או לשרטט דיאגרמת הסה שלו או לרשום את כל הזוגות העומדים ביחס.  
אינכם נדרשים להוכיח שהיחס שהבאתם הוא סדר חלקי ושהוא עומד בתנאים (אבל כמובן אם משהו מאלה לא מתקיים יאבד הניקוד בסעיף זה).
- (11 נק') ב. **הוכיחו כללית** (לא רק עבור הדוגמא שהבאתם בסעיף הקודם) שאם  $R$  מקיים את התנאים שבתחילת השאלה, אין ב- $R$  אבר גדול ביותר ואין ב- $R$  אבר קטן ביותר.
- (8 נק') ג. האם קיים יחס סדר-חלקי  $S$  מעל  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , כך ש-1 הוא אבר גדול ביותר ביחס  $S$  ו**יחד עם זה** 1 הוא גם אבר קטן ביותר ביחס  $S$ ?  
אם יש יחס כזה – תנו דוגמא. אם אין – הוכיחו שאין.

**שאלה 3**

- במערכת מחשב מסוימת, סיסמת משתמש היא באורך של **לפחות 3 תווים ולכל היותר 100 תווים**. התווים המותרים:  $a-z$ ,  $A-Z$ ,  $0-9$  (יש אפוא  $26 + 26 + 10 = 62$  תווים מותרים).  
סיסמא חייבת להכיל **לפחות אות קטנה אחת, לפחות אות גדולה אחת ולפחות ספרה אחת**.
- ביום מסוים, באג מוזר בתהליך בדיקת הסיסמא גרם לכך שבכניסה למערכת **לא היתה התייחסות לסדר התווים ולא היתה התייחסות לחזרות**. למשל, המערכת לא הבחינה בין הסיסמאות  $1AAABBBaa$ ,  $aAB1$ ,  $BA1Aa11$ , כי בשלושתן מופיעים בדיוק אותם תווים.  
עוד דוגמאות: נניח שהסיסמא של משה היא  $abAB122$ . באותו יום מוזר:  
אם משה הקליד בטעות  $22aAaBb1b$ , המערכת קיבלה אותו.  
אם משה הקליד בטעות  $abAB123$ , המערכת לא קיבלה אותו, כי התו 3 לא נמצא בסיסמא שלו.  
אם משה הקליד בטעות  $abAB11$ , המערכת לא קיבלה אותו, כי חסר התו 2 שנמצא בסיסמא שלו.
- כמה סיסמאות שונות היו אפשריות **בפועל** באותו יום? "אפשרויות בפועל" משמע **סיסמאות שהמערכת לא מבחינה ביניהן נחשבות כאותה סיסמא**.  
**מדובר רק על סיסמאות חוקיות, המקיימות את הדרישות שבתחילת השאלה**.  
כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה. אין הכרח להגיע לתשובה מספרית.

## שאלה 4

(8 נק') א. נרשום את הפיתוחים הבאים :

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^{10}} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \quad f(x) = (1-x)^9 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

מצאו את  $a_i$  ואת  $b_i$ , לכל  $i$  טבעי.

(16 נק') ב. נשים לב ש- 
$$(*) \quad f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{1-x}$$

יהי  $k \in \mathbb{N}$ . את המקדם של  $x^k$  בפונקציה  $f(x) \cdot g(x)$  אפשר לחשב בשתי דרכים:

- מתוך אגף שמאל של (\*), ע"י כפל פונקציות יוצרות.

- מתוך אגף ימין של (\*), בפיתוח הידוע של  $\frac{1}{1-x}$ .

השוו את שתי התוצאות וקבלו זהות מהצורה  $\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{?}{?} \cdot D(?, ?) = ?$

(3 נק') בדקו את הזהות שקיבלתם עבור המקרה  $k=1$ .

## שאלה 5

גרף  $T$  הוא עץ על שמונה צמתים.

**הוסיפו** ל- $T$  שתי קשתות (לא הוסיפו צמתים).

אחרי הוספת שתי הקשתות התקבל גרף פשוט, שכמובן אינו עץ. נקרא לו  $G$ .

הוכיחו שהגרף **המשלים** של  $G$  אינו מישורי

("גרף משלים" הוגדר בחוברת "תורת הגרפים", הגדרה 1.4).

**בהצלחה!**

## תקציר פתרון בחינה

### שאלה 1

א. [2]      ב. [3]      ג. [3]

### שאלה 2

- א. למשל יחס הזהות. כללית, כל יחס שבו 1 עומד ביחס רק עם עצמו.
- ב. 1 אינו גדול ביותר: אילו 1 היה גדול ביותר הוא היה גדול מ-2, כלומר 2 היה קטן מ-1, ואז 1 לא היה מינימלי.
- אף אבר **אחר** בקבוצה אינו גדול ביותר: אילו היה כזה, הוא היה גדול מ-1, ואז 1 לא היה מקסימלי.
- בדומה לגבי קטן ביותר.
- ג. גדול ביותר הוא בפרט מקסימלי, קטן ביותר הוא בפרט מינימלי.
- לכן מסעיף ב' נובע מיד שלא ייתכן  $S$  כזה.

### שאלה 3

באותו יום מה שנבדק הוא בעצם **קבוצת** התווים בסיסמא. מכיון שאורך סיסמא הוא עד 100, כל קבוצה של תווים מתוך 62 התווים אפשרית, ובלבד שתכיל אות קטנה, אות גדולה וספרה.

$$\text{מכאן בהכלה והפרדה: } 2^{62} - (2 \cdot 2^{36} + 2^{52}) + (2 \cdot 2^{26} + 2^{10}) - 1$$

### שאלה 4

$$\text{א. } b_i = D(10, i) = \binom{9+i}{i}, \quad a_i = (-1)^i \binom{9}{i}$$

$$\text{ב. } \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{9}{i} D(10, k-i) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{9}{i} \binom{9+k-i}{9} = 1$$

עבור  $k=1$  מקבלים  $10-9=1$ .

### שאלה 5

מכיון ש- $T$  הוא עץ, מספר הקשתות שלו הוא  $8-1=7$ .

מספר קשתות  $G$  הוא אפוא 9.

$$\text{מספר הקשתות בגרף המשלים של } G \text{ הוא } \binom{8}{2} - 9 = 28 - 9 = 19$$

מסקנה 5.4 בתורת הגרפים אומרת שמספר הקשתות בגרף מישורי הוא לכל היותר  $3n-6=18$ .  
לכן המשלים של  $G$  אינו מישורי.