הבינום של ניוטון

$(x+a)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}xa + \binom{2}{2}x^2 = a^2 + 2xa + x^2$

$$(x+a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i a^{n-i}$$

עבור סכום המקדמים הבינומיים בלבד, נציב $a = x = 1$ ונקבל :

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

תרגיל כמו שאלה 2א מתוך 14

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

הוכיחו ש $\frac{4^n+(-2)^n}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1^k+(-1)^k}{2} \binom{n}{k} 3^k = L$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} (1^k + (-1)^k) \binom{n}{k} 3^k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} 3^k + (-1)^k \binom{n}{k} 3^k \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k \cdot 1^{n-k}}_{x=3 \quad a=1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 3^k \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left((3+1)^n + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-3)^k \cdot 1^{n-k}}_{x=-3 \quad a=1} \right) = \frac{1}{2} \left(4^n + (-3+1)^n \right)$$

$$= \frac{4^n + (-2)^n}{2}$$

תרגיל כמו שאלה 2א ממן 14

לא כדאי! תגלו למה בעוד מספר צמודים

אינדוקציה על n

הוכיחו ש $\frac{4^n+(-2)^n}{2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\binom{n}{k}3^k$

בסיס האינדוקציה:

$n=0$

$$\sum_{k=0}^{0}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\binom{0}{k}3^k=\frac{4^0+(-2)^0}{2}$$

$$\frac{1^0+(-1)^0}{2}\binom{0}{0}3^0=\frac{2}{2}\cdot\frac{0!}{0!\,0!}\cdot 1=1 = 1=\frac{1+1}{2}=\frac{4^0+(-2)^0}{2}\ \checkmark$$

בגלל ש n מופיע באיבר הכללי של הטור נצטרך עוד מספר שלבים בהסיס

כך שנוכל לכתוב **שלא** מתקיים שוויון

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\binom{n}{k}3^k \neq \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\binom{n-1}{k}3^k\right)+\frac{1^n+(-1)^n}{2}3^n$$

$\underline{n=1}$:
$$\frac{1^0+(-1)^0}{2}\binom{1}{0}3^0+\frac{1^1+(-1)^1}{2}\binom{1}{1}3^1=\frac{4^1+(-2)^1}{2}$$

$\underline{n=2}$:
$$\underbrace{\frac{1^0+(-1)^0}{2}\binom{2}{0}3^0+\frac{1^1+(-1)^1}{2}\binom{2}{1}3^1}_{\text{שווה מהלל עבור } n=1 \text{ - הוצאות המרקר}}+\frac{1^2+(-1)^2}{2}\binom{2}{2}3^2=\frac{4^2+(-2)^2}{2}$$

לכן נשתמש בנוסחה $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ עמ' 32 ביחידות הלימוד

נניח שהגענו עד $n-1$ וכן
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\binom{n-1}{k}3^k=\frac{4^{n-1}+(-2)^{n-1}}{2}$$

צעד האינדוקציה: נוכיח שמתקיים עבור $n-1$ ונקבל נכונות—
עבור n. נוכיח
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1^k+(-1)^k}{2}\binom{n}{k}3^k=\frac{4^n+(-2)^{n-1}}{2}$$

1

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1^k+(-1)^k}{2}\binom{n}{k}3^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1^k+(-1)^k}{2}\left(\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right)3^k =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1^k+(-1)^k}{2}\binom{n-1}{k}3^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{1^k+(-1)^k}{2}\binom{n-1}{k-1}3^k =$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1^k+(-1)^k}{2}\binom{n-1}{k}3^k}_{\text{הנחת האינדוקציה}} + \underbrace{\frac{1^n+(-1)^n}{2}\underbrace{\binom{n-1}{n}}_{=0}3^k}_{a_n=0 \text{ לפי הנתון}} + \underbrace{\frac{1^0+(-1)^0}{2}\overbrace{\binom{n-1}{-1}}^{=0}3^0}_{a_0=0 \text{ לפי הנתון}} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} \frac{1^k+(-1)^k}{2}\binom{n-1}{k-1}3^k = \frac{4^{n-1}+(-2)^{n-1}}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1^{k+1}+(-1)^{k+1}}{2}\binom{n-1}{k}3^{k+1} =$$

$$\frac{4^{n-1}+(-2)^{n-1}}{2} + 3\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1^k-(-1)^k}{2}\binom{n-1}{k}3^k$$

כי:

$$1^k = 1^{k+1}$$

$$(-1)^{k+1} = (-1)\cdot(-1)^k$$

$$3^{k+1} = 3\cdot 3^k$$

$$\frac{4^{n-1}+(-2)^{n-1}}{2} + 3\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1^k-(-1)^k}{2}\binom{n-1}{k}3^k}_{}$$

$3\cdot\frac{4^{n-1}-(-2)^{n-1}}{2}$ ואם נוכיח שביטוי זה שווה ל

אז

$$\frac{4^{n-1}+(-2)^{n-1}}{2} + 3\cdot\frac{4^{n-1}-(-2)^{n-1}}{2} = \frac{4^{n-1}+3\cdot 4^{n-1}+(-2)^{n-1}-3(-2)^{n-1}}{2} =$$

$$= \frac{4\cdot 4^{n-1}+(-2)(-2)^{n-1}}{2} = \frac{4^n+(-2)^n}{2}$$

וסיימנו.

כלומר נותר "רק" להוכיח $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1^k-(-1)^k}{2}\binom{n-1}{k}3^k = \frac{4^{n-1}-(-2)^{n-1}}{2}$