קומבינטוריקה

עקרון הכפל ועקרון החיבור

עבור מקרים המקיימים "וגם" נפעיל את עקרון הכפל.

עבור מקרים המקיימים "או" נפעיל את עקרון החיבור.

לדוגמא:

מספר הפונקציות מקבוצה $A=\{1,2,3,4,5\}$ ל $B=\{a,b,c,d\}$.

עפ"י הגדרת פו' אפשר לסמן גם כך $\underbrace{a}_{f(1)}\ \underbrace{a}_{f(2)}\ \underbrace{b}_{f(3)}\ \underbrace{c}_{f(4)}\ \underbrace{d}_{f(5)}$ את מספר האפשרויות . בסימון זה ניתן לראות את ההקבלה למציאת מחרוזת בת 5 איברים המורכבת מהתווים של הקבוצה B.

אוסף כל הפונקציות מ A ל B מסומן על ידי B^A וחישוב מספר האיברים בקבוצה זו הוא : $|B^A|=|B|^{|A|}$.

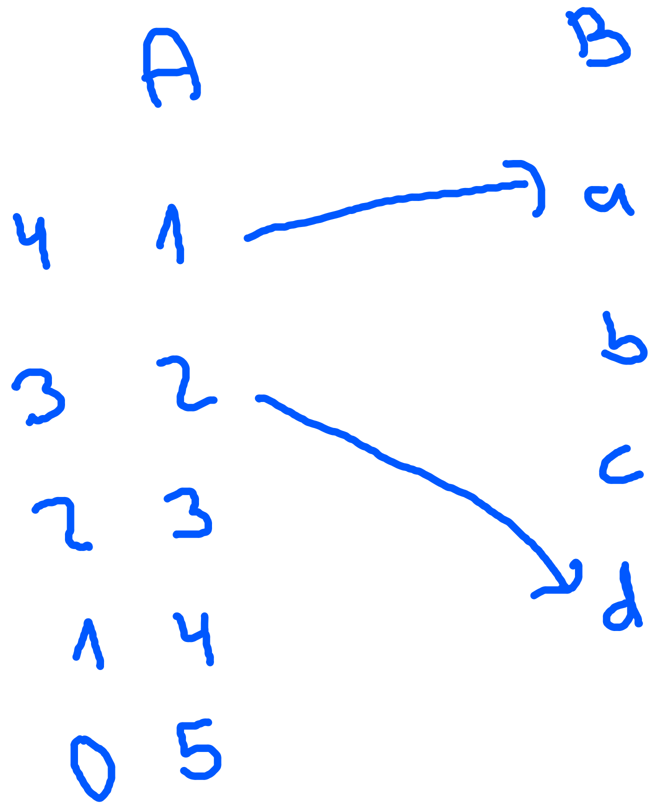
#	A	B
4	1	a
4	2	b
4	3	c
4	4	d
4	5	

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$$

$$|B^A| = |B|^{|A|} = 4^5$$

$$B^A = \{ f : A \to B \mid \text{פו'}\ f \}$$

תרגיל : רשום את מספר הפונקציות החח"ע מקבוצה $A=\{1,2,3,4,5\}$
ל $B=\{a,b,c,d\}$



$$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0=0$$

$C_1 \cdot C$

$4! \cdot 4^1$

A N

B

$$
\begin{array}{ccccc}
A & & B & & \\
1 & \longrightarrow & a & & 5 \\
2 & \longrightarrow & b & & 4 \\
3 & \longrightarrow & c & & 3 \\
4 & \longrightarrow & d & & 2 \\
5 & & & &
\end{array}
$$

$b-a+1$ a b

הגדרות:

הגדרה: **חליפה** (וריאציה (variation היא k-יה סדורה מתוך n איברים עם חשיבות לסדר וללא חזרות. ומסמנים

$$P(n,k)=\underbrace{\overset{n-0}{\underset{0}{n}}\cdot\underset{1}{(n-1)}\cdot\underset{2}{(n-2)}\cdots\overset{n-(k-1)}{\underset{k-1}{(n-k+1)}}}_{k\ \text{מקומות}}\quad,\quad k\le n$$

$n=4$

לדוגמא: לסדר 4 כדורים בצבעים שונים ב 3 תאים שונים כאשר בכל תא מותר להניח בדיוק כדור אחד.

$k=3$

ק   כ   י   3

$\# \ \underline{4}\cdot\underline{3}\cdot\underline{2}=24$

ק   י   3   3   י   ק

הגדרה: **תמורה** (פרמוטציה permutation) היא מספר האפשרויות לסידור קבוצה של n איברים בשורה.

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 = n!\,.$$

$n=3$

לדוגמא: לסדר 3 כדורים בצבעים שונים בשורה

1 2 3

2 1 3

__ __ __

\# 3 2 1

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$

הגדרה : **צירופים** (קומבינציה) הם מספר האפשרויות לבחור k מתוך n , ללא חזרות וללא חשיבות לסדר, הוא

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)\cdots 1}{(n-k)!}$$

nCr

$$C(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ומתקיים

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

תרגיל צירופים

מה מספר תתי הקבוצות של $A=\{1,2,3,4,5\}$ המכילות בדיוק 2 איברים.

$\{3,5\}=\{5,3\}$

$\{3,3\}=\{3\}$

$$\binom{5}{2}={}_5C_2=\frac{5!}{2!\,3!}=10$$

בחירת ועד $n=5$ $k=2$

שמתוכו 1 יבחר ליו"ר ואחד למשמרת על יוכ.

$$\underbrace{\binom{5}{2}}_{=10} \cdot \binom{2}{1}\binom{1}{1}$$

אותה בעיה $n=20$ $k=7$

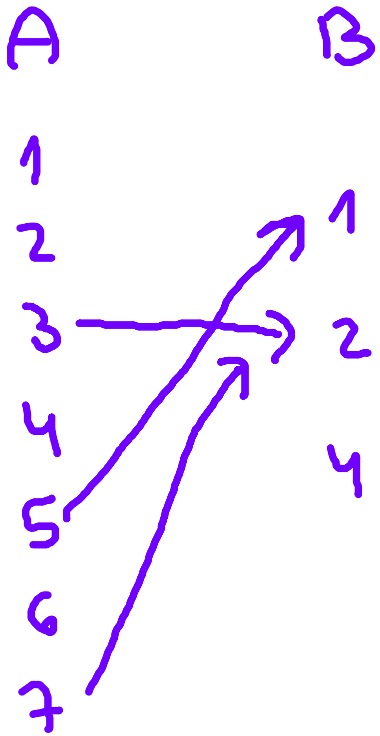
$$\underbrace{\binom{20}{7}}\cdot\binom{7}{1}\binom{6}{1}$$

נבחר 7 לועד

תרגיל דומה (ועם זאת שונה) שאלה 3 ממן 14 . את השאלה בממן מומלץ לפתור עם הכלה והפרדה.

נניח ש $A=\{1,2,\dots,7\}$

מצאו את מספר הפונקציות $f:A\rightarrow \overbrace{\{1,2,4\}}^{B}$ המקבלות כל אחד מהערכים $i\in\{1,2,4\}$ בדיוק i פעמים.



$$\binom{7}{1}\underbrace{\binom{6}{2}}_{15}\binom{4}{4}=7\cdot 15\cdot 1=\dots\dots$$

$$\frac{7!}{2!4!}$$

$$6C_2=15$$

$1\times$ "1"

$2\times$ "2"

$4\times$ "4"

7

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \dots\ \_}_{\text{7 מקומות}}$$

תרגיל

בכמה אופנים שונים ניתן לסדר את המילה Mississippi

1. ללא הגבלה. בשתי שיטות אחת בחלוקה במספר החזרות של תווים, והשניה על ידי בחירת מקומות לתווים.
2. כאשר pp חייבים להופיע ברצף

_ M _ . . . _

$1 \times M$ ✓

$4 \times i$

$4 \times S$

$2 \times p$

11

$$\frac{11!}{4!\,4!\,2!} = \binom{11}{1}\binom{10}{4}\binom{6}{4}\binom{2}{2} = \frac{11!}{1!\,\cancel{10!}} \cdot \frac{\cancel{10!}}{4!\,\cancel{6!}} \cdot \frac{\cancel{6!}}{4!\,2!}$$

$$\frac{10!}{4!\,4!} = \text{[illegible]}$$

(2)

$1 \times M$

$4 \times i$

$4 \times S$

$1 \times PP$

$\overline{10}$

צירופים עם חזרות: חלוקה של k עצמים זהים ב n תאים שונים

$$D(n,k)=\binom{n-1+k}{k}=\binom{n-1+k}{n-1}$$

$n=3$ $k=5$

לדוגמא בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 5 כדורים זהים ל 3 תאים שונים שונים

O|O|OOO $\frac{7!}{2!5!}=\binom{7}{5}=\binom{7}{2}$ ||OOOOO

2 × "1"

5 × "0"

n תאים ע' n-1 מחיצות

ולדוגמא כמה פתרונות טבעיים יש למשוואה $\underbrace{x_1+x_2+x_3}_{\text{3 תאים שונים}} = 5$

5 יח' בודדות זהות

_ _ | _ _ | _ _ _

תרגיל

נתונה קבוצה של כדורים בצבעים: אדום כחול צהוב ירוק. בכמה דרכים ניתן לבחור 8 כדורים מהקבוצה ללא חשיבות לסדר הבחירה. נניח שיש לפחות 8 כדורים מכל צבע.

x_1 - אדום
x_2 - כחול
x_3 - צהוב
x_4 - ירוק

$$x_1+x_2+x_3+x_4=8$$

$$D(4,8)=\binom{11}{8}=\frac{11!}{8!\,3!}=165$$

תרגיל

נתונה קבוצה של כדורים בצבעים: אדום כחול צהוב ירוק. בכמה דרכים ניתן לבחור 8 כדורים מהקבוצה ללא חשיבות לסדר הבחירה.
בהנחה שיש רק 6 כדורים אדומים, 6 כחולים 5 צהובים ו 4 ירוקים וצריכים לבחור לפחות צבע אחד מכל אחד מהכדורים.

אדום - $x_1 \le \cancel{6}\ 5$

כחול - $x_2 \le \cancel{6}\ 5$

צהוב - $x_3 \le \cancel{5}\ 4$

ירוק - $x_4 \le \cancel{4}\ 3$

נבחר כדור 1 מכל צבע

ונותר לבחור 4 כדורים.

כלומר פתרון של המשוואה

$$x_1+x_2+x_3+x_4=4$$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 4$ ← אפשרות יחידה להפחית

$$D(4,4)-1=\binom{7}{4}-1=34$$

אם היו רק 2 ריקים $x_4 \le 2$

נחשב את כל האפשרויות $x_4 = 3$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 3 = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$D(3,1) = \binom{3}{1} = 3$$

$$\underbrace{D(4,4) - 1 - 3}$$

$$|\ \ |\ \ |3$$

$$D(4,3)\cdot D(3,1)=\binom{6}{3}\binom{3}{1}=60$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4=3 \qquad y_1+y_2+y_3=1$$

תרגיל

מה מספר הפתרונות בטבעיים זוגיים של השוויון

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

נגדיר $x_i = 2y_i$ $\quad i = 1, \dots, 4$

עבור כל אחד, $y_i \in \mathbb{N}$ מתקיים x_i זוגי.

ונקבל משוואה שקולה:

$$2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 = 12$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$$

$$D(4,6) = \binom{9}{6} =$$ מחשבון...

תרגיל

מה מספר הפתרונות הטבעיים של אי השיוויון

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 22$$ שקול לפתרון

$$\underbrace{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} + x_5 = 22$$

22	0
21	1
20	2
⋮	⋮
0	22

$\sum_{i=1}^{4} x_i = 0$

או +

$\sum_{i=1}^{4} x_i = 1$

או +

⋮

$\sum_{i=1}^{4} x_i = 22$

$D(5,22) =$

$\binom{26}{22} =$ מחשבון

תרגיל מסכם ל כדורים שונים/זהים ותאים שונים/זהים

1. 4 כדורים זהים ל 3 תאים שונים: $D(3,4)$
2. 4 כדורים שונים ל 3 תאים שונים: מספר הפונקציות מהכדורים לתאים.
3. 4 כדורים זהים ל 3 תאים זהים: נחשב לפי מספר תאים ריקים
4. 4 כדורים שונים ל 3 תאים זהים: ...לפי מספר תאים ריקים

תרגיל – כמו 4 א ו- ג מתוך 14

מפזרים 15 כדורים זהים ב 5 תאים שונים.

א. חשבו את מספר הפיזורים שבהם בשני התאים הראשונים מכילים ביחד לפחות 9 כדורים.

ב. מה התשובה לסעיף א' אם הכדורים שונים זה מזה.

תרגיל

מה מספר היחסים הרפלקסיביים מעל הקבוצה $A = \{1,2,3\}$.

ניתן, אם רוצים, להשתמש בנוסחה $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$

נוסחה לפתירת $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ עבור שלמים המקיימים $x_1 \geq a_1$, $x_2 \geq a_2$, ..., $x_n \geq a_n$

נציב $x_1 = y_1 + a_1,$ $x_2 = y_2 + a_2$, ..., $x_n = y_n + a_n$

ונקבל את המשוואה $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = k - a_1 - a_2 - \cdots - a_n$

נפתור

$$D(n, k - a_1 - a_2 - \ldots - a_n) = \binom{n - 1 + k - a_1 - a_2 - \ldots - a_n}{n-1}$$

שאלה 4

(5 נק׳) **א.** **מהו מספר המחרוזות באורך 11 הבנויות מ- 7 הופעות של 0 ו- 4 הופעות של 1 ? למשל 11000100001 היא מחרוזת כזו.**

(11 נק׳) **ב.** **בכמה מהמחרוזות שבסעיף א אין הופעות צמודות של 1, כלומר אין הופעה של המחרוזת ״11״ ? הדרכה לפתרון מהיר: חשבו על ספרות 0 כעל מחיצות.**

(11 נק׳) **ג.** **מצאו כמה קבוצות X מקיימות: $X \subseteq \{1,2,3\ldots,11\}$, $|X| = 4$,**

וב- X לא נמצאים אף שני מספרים שההפרש ביניהם הוא 1

(במלים אחרות, לכל i טבעי, אם $i \in X$ אז $i+1 \notin X$).

הדרכה: היעזרו בסעיפים הקודמים. אפשר להיעזר במושג ״פונקציה אופיינית״ (״תורת הקבוצות״ עמ׳ 85).

שאלה 3

מצאו את מספר הפתרונות במספרים טבעיים של **מערכת המשוואות**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = n \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3n \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 + 3x_7 + 3x_8 = 10n \end{cases}$$

התשובה היא ביטוי התלוי ב- n. שימו לב : מבוקש מספר הפתרונות של המערכת, לא מספרי הפתרונות של כל משוואה בנפרד. במלים אחרות, השאלה היא כמה סדרות $(x_1,x_2,\ldots,x_8)$ של מספרים טבעיים מקיימות **בבת-אחת** את שלוש הדרישות.

הדרכה : פרקו את הדרישות לדרישות נפרדות על קבוצות זרות של משתנים.

אין צורך בפונקציות יוצרות כדי לענות על השאלה.

תזכורת : בקורס זה 0 הוא מספר טבעי.

ארגון התשובה : תשובה סופית המכילה סכומים רבֵּי-איברים לא תתקבל.

אין להשאיר בתשובה ביטויים כגון $D(a,b)$. אפשר להשאיר ביטויים כגון $\binom{a}{b}$.

אם מתקבל הביטוי $\binom{a}{1}$ יש לפשט אותו.