בחינה לדוגמה 12

חלק א׳: שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתים.

(6 נק׳) **א.** לכל שלושה פסוקים α,β,γ מתקיים:

[1] $(\alpha \to \beta) \to \gamma \equiv \alpha \to (\beta \to \gamma)$.

[2] $(\alpha \to \beta) \to \gamma$ גורר טאוטולוגית את $\alpha \to (\beta \to \gamma)$.

[3] $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ גורר טאוטולוגית את $(\alpha \to \beta) \to \gamma$.

(7 נק׳) **ב.** נתונות קבוצות A,B כך ש- $|A \cup B| = |A|$. אז:

[1] $|A| > |B|$.

[2] $|A| \le |\mathcal{P}(B)|$

[3] $|B| < |\mathcal{P}(A)|$

[4] אם A אינסופית אז $|A \times B| = |A|$.

(6 נק׳) **ג.** מספר העצים על 6 צמתים המתויגים ב- $1,2,3,4,5,6$ שבהם יש צומת בעל דרגה 4 הוא

[1] 30

[2] 15

[3] 40

[4] כל התשובות הקודמות שגויות

חלק ב׳: ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב׳ כולו: 81 נקודות

שאלה 2

על הקבוצה $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ נתונים שני יחסים R,S המוגדרים כך: לכל $A,B\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$
ARB אם ורק אם $A\setminus\{1,4\}=B\setminus\{1,4\}$ ו- ASB אם ורק אם $A\setminus\{1,4\}\subset B\setminus\{1,4\}$.

(14 נק׳) א. קבעו (ללא הוכחה) מי מהיחסים הנתונים הוא יחס שקילות. מיצאו את מחלקות השקילות שלו.

(13 נק׳) ב. קבעו (ללא הוכחה) מי מהיחסים הוא יחס סדר. קבעו אם הוא סדר חלקי או מלא (נמקו את התשובה!) ומיצאו את האיברים המינימליים והמקסימליים שלו.

שאלה 3

בשאלה זו נתייחס לפתרונות המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=n$ כאשר x_1,x_2,x_3 **מספרים טבעיים שמתחלקים ב- 3** ו- x_4,x_5,x_6,x_7 **מספרים טבעיים שאינם מתחלקים ב- 3**.

(14 נק׳) א. מיצאו פונקציה יוצרת המתאימה למציאת מספר פתרונות המשוואה.

(13 נק׳) ב. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה כאשר $n=13$.

(הדרכה: אפשר להוציא את $(x+x^2)^4$ כגורם משותף בפונקציה היוצרת).

שאלה 4

תהי A קבוצת כל המחרוזות שבהן מופיעות הספרות $1,2,3,4,5$ בלבד. נסמן:

a_n מספר המחרוזות ב- A שהן באורך n **וסכום הספרות** שלהן **זוגי**.

b_n מספר המחרוזות ב- A שהן באורך n **וסכום הספרות** שלהן **אי-זוגי**.

למשל את המחרוזת 215 סופרים כשמחשבים את a_3 ואת המחרוזת 4131 סופרים ב- b_4.

(9 נק׳)א. עבור כל $n\ge 2$ הביעו את a_n בעזרת a_{n-1} ו- b_{n-1} וגם את b_n בעזרת a_{n-1} ו- b_{n-1}.

(9 נק׳)ב. מיצאו נוסחת נסיגה עבור a_n.

הדרכה: השוויון הראשון מסעיף א׳ מאפשר להביע את b_{n-1} בעזרת a_n ו- a_{n-1} ולכן גם את b_n בעזרת a_{n+1} ו- a_n. הציבו אותם במקום b_{n-1} ו- b_n בשוויון השני מסעיף א׳).

(9 נק׳)ג. חשבו את a_1 ואת a_2 ומיצאו נוסחה כללית ל- a_n.

שאלה 5

נתון גרף מישורי פשוט בעל 7 צמתים ו- 10 פאות שבו דרגות הצמתים הן $6,6,4,4,4,k,k$

(9 נק׳) א. מיצאו את המספר k. נמקו את התשובה (רמז: משפט אוילר)

(9 נק׳) ב. הוכיחו שהגרף הוא המילטוני. נמקו את התשובה.

(9 נק׳) ג. האם קיים בגרף מעגל אוילר או מסלול אוילר שאינו מעגל? נמקו את התשובה.

בהצלחה

בחינה לדוגמה 12

חלק א'

תשובה 1

1 א

התשובה הנכונה היא **[2]**.

נראה שבכל מצב ש- $(\alpha \to \beta) \to \gamma$ אמת, גם $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ אמת.

לשם כך נניח בדרך השלילה שקיים מצב שבו $(\alpha \to \beta) \to \gamma$ אמת אך $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ שקר.

כדי ש- $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ יהיה שקר חייבים ש- α יהיה אמת ו- $\beta \to \gamma$ יהיה שקר לכן בהכרח β אמת ו- γ שקר. אבל אם α אמת ו- β אמת אז $\alpha \to \beta$ אמת ומאחר ש- γ שקר נקבל ש- $(\alpha \to \beta) \to \gamma$ שקר. מכאן שלא קיים מצב שבו $(\alpha \to \beta) \to \gamma$ אמת ו- $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ שקר ולכן $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ גורר טאוטולוגית את $(\alpha \to \beta) \to \gamma$.

הערה, במצב שבו כל הפסוקים α,β,γ הם שקריים, $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ הוא אמת אבל $(\alpha \to \beta) \to \gamma$ הוא שקר. מצב זה מצביע על כך ש- $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ לא גורר טאוטולוגית את $(\alpha \to \beta) \to \gamma$ ולכן טענה **[3]** וזה מראה כמובן שגם טענה **[1]** היא לא נכונה.

1 ב

התשובה הנכונה היא **[3]**.

מאחר ש- $B \subseteq A \cup B$ מתקיים כמובן ש- $|B| \le |A \cup B|$ ולכן מהנתון נובע ש- $|B| \le |A|$.

ממשפט קנטור ידוע ש- $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ לכן $|B| < |\mathcal{P}(A)|$.

הנה דוגמאות שמפריכות את שאר הטענות:

[1] $A = B = \varnothing$. אז $|A \cup B| = |A| = 0$ אך **לא מתקיים** $|A| > |B|$.

[2] $A = \{1,2\}, B=\varnothing$. אז $|A \cup B| = |A| = 2$ אבל $|\mathcal{P}(B)| = 1$ לכן **לא מתקיים** $|A| \le |\mathcal{P}(B)|$.

[4] אם $A = \mathbf{N}, B=\varnothing$ אז A אינסופית ו- $|A \cup B| = |A|$ אבל $|A \times B| = |\mathbf{N} \times \varnothing| = 0$ לכן **הטענה שגויה**.

1ג

התשובה הנכונה היא **[4]**.

לכל עץ מתוייג על 6 צמתים יש סדרת פרופר באורך 4. לצומת בעל דרגה 4 יש בדיוק 3 הופעות בסדרה מה שמשאיר מקום להופעה אחת בלבד של צומת אחר (שהוא) בעל דרגה 2.

מספר הסדרות המתאימות לעצים הנתונים שווה למספר המילים באורך 4 שכתובות בסימנים x,x,x,y כאשר $x,y \in \{1,2,3,4,5,6\}$. יש $6 \cdot 5 = 30$ אופציות לבחירת הזוג x,y (יש חשיבות לסדר הבחירה מפני שלסימנים x,y יש מספר הופעות שונה בכל מילה). מספר המילים ביסמינים x,x,x,y הוא $4 = \frac{4!}{3! \cdot 1!}$ ולכן מספר העצים (או של הסדרות פרופר) הוא $30 \cdot 4 = 120$.

חלק ב'

תשובה 2

א. R הוא יחס שקילות (לא קשה לבדוק שזה יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי).

למציאת מחלקות השקילות נחפש עבור כל $A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ את מחלקת השקילות שלו

כלומר את קבוצת האיברים $X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ המקיימים ARX. נסמן את המחלקה של A

ב- $[A]$ ברור שאם איבר B שייך למחלקה של A אז $[A]=[B]$ לכן אין ועם לחפש גם את

המחלקה של B אלא נעבור לאיברים שלא נמצאים במחלקה זו.

מחלקת השקילות של $\varnothing$ היא:

$[\varnothing]=\{X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \mid XR\varnothing\}=\{X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \mid X \setminus \{1,4\}=\varnothing \setminus \{1,4\}\}$.

מאחר ש- $\varnothing \setminus \{1,4\}=\varnothing$ מקבלים ש-

$[\varnothing]=\{X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \mid X \setminus \{1,4\}=\varnothing\}=\{\varnothing,\{1\},\{4\},\{1,4\}\}$

(וזו כמובן גם מחלקת השקילות של כל אחד מהאיברים $\{1\},\{4\},\{1,4\}$).

$\{2\}$ לא שייך למחלקה הנ"ל לכן נחפש את מחלקת השקילות שלו:

$[\{2\}]=\{X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \mid XR\{2\}\}=\{X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \mid X \setminus \{1,4\}=\{2\} \setminus \{1,4\}\}$

מאחר ש- $\{2\} \setminus \{1,4\}=\{2\}$ מקבלים ש-

$[\{2\}]=\{X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \mid X \setminus \{1,4\}=\{2\}\}=\{\{2\},\{1,2\},\{2,4\},\{1,2,4\}\}$

(וזו גם מחלקת השקילות של כל אחד מהאיברים $\{1,2\},\{2,4\},\{1,2,4\}$)

$\{3\}$ לא שייך לשתי המחלקות הקודמות. מחלקת השקילות של- $\{3\}$ היא:

$[\{3\}]=\{X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \mid XR\{3\}\}=\{X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \mid X \setminus \{1,4\}=\{3\} \setminus \{1,4\}\}$

מאחר ש- $\{3\} \setminus \{1,4\}=\{3\}$ מקבלים ש-

$[\{3\}]=\{X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \mid X \setminus \{1,4\}=\{3\}\}=\{\{3\},\{1,3\},\{3,4\},\{1,3,4\}\}$

(וזו גם מחלקת השקילות של כל אחד מהאיברים $\{1,3\},\{3,4\},\{1,3,4\}$)

$\{2,3\}$ לא שייך לשלוש המחלקות הקודמות. מחלקת השקילות של- $\{2,3\}$ היא:

$[\{2,3\}]=\{X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \mid XR\{2,3\}\}=\{X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \mid X \setminus \{1,4\}=\{2,3\} \setminus \{1,4\}\}$

מאחר ש- $\{2,3\} \setminus \{1,4\}=\{2,3\}$ מקבלים ש-

$[\{2,3\}]=\{X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \mid X \setminus \{1,4\}=\{2,3\}\}=\{\{2,3\},\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$

ארבע המחלקות שמצאנו מכילות את כל איברי הקבוצה $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ ולכן אלה הן כל

מחלקות השקילות של היחס R (והן אכן מגדירות חלוקה של $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$)

ב. S הוא יחס סדר (בדיקת האנטי – רפלקסיביות והטרנזיטיביות היא פשוטה למדי)

S הוא לא סדר מלא כי למשל הוא לא משווה בין $\{2\}$ ו- $\{3\}$.

מתקיים: $\{2\} \setminus \{1,4\}=\{2\}$ ו- $\{3\} \setminus \{1,4\}=\{3\}$.

לכן $\{2\} \setminus \{1,4\} \not\subset \{3\} \setminus \{1,4\}$ וגם $\{3\} \setminus \{1,4\} \not\subset \{2\} \setminus \{1,4\}$ כלומר $\{3\} \not S \{2\}$ וגם $\{2\} \not S \{3\}$.

קבוצה $M \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ היא איבר מקסימלי לפי היחס S אם לא קיים $X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$

כך ש- MSX ז"א $M \setminus \{1,4\} \subset X \setminus \{1,4\}$ וזה יקרה כאשר ההפרש $M \setminus \{1,4\}$ הוא הקבוצה הכי "גדולה" שאפשר, כלומר כאשר $M \setminus \{1,4\} = \{2,3\}$.

לכן האיברים המקסימליים ב- $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ לפי S הם: $\{2,3\},\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}$.

קבוצה $m \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ היא איבר מינימלי לפי היחס S אם לא קיים $X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ כך ש- XSm ז"א $X \setminus \{1,4\} \subset m \setminus \{1,4\}$ וזה יקרה כאשר ההפרש $M \setminus \{1,4\}$ הוא הקבוצה הכי "קטנה" שאפשר, כלומר כאשר $m \setminus \{1,4\} = \varnothing$.

לכן כל האיברים המינימליים ב- $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ לפי היחס S הם: $\varnothing,\{1\},\{4\},\{1,4\}$.

תשובה 3

א. לכל אחד מהנעלמים x_1, x_2, x_3 נתאים בפונקציה היוצרת את הביטוי $(1 + x^3 + x^6 + \cdots)$ כדי שערכי המשתנים אלה יהיו מספרים שמתחלקים ב- 3 (לא לשכוח, גם 0 מתחלק ב- 3).

לכל אחד מהנעלמים x_4, x_5, x_6, x_7 את הביטוי $(x + x^2 + x^4 + x^5 \cdots)$ שיבטיח כי ערכי המשתנים אלה יהיו מספרים שלא מתחלקים ב- 3.

לכן הפונקציה היוצרת המתאימה היא: $f(x) = (1 + x^3 + x^6 + \cdots)^3 (x + x^2 + x^4 + x^5 \cdots)^4$.

כדי לקבל ביטוי פשוט ככל אפשר, נשים לב ש- $\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + \cdots$ ו-

$$x + x^2 + x^4 + x^5 + \cdots = (x + x^2) + (x + x^2)x^3 + (x + x^2)x^6 + \cdots =$$

$$= (x + x^2)(1 + x^3 + x^6 + \cdots) = (x + x^2) \cdot \frac{1}{1-x^3}$$

מכאן ש- $f(x) = \frac{1}{(1-x^3)^3}(x + x^2)^4 \cdot \frac{1}{(1-x^3)^4} = \frac{x^4(1+x)^4}{(1-x^3)^7}$

לסיכום, מספר הפתרונות בטבעיים למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = n$ המקיימים את תנאי השאלה הוא המקדם של x^n בפיתוח של $f(x) = \frac{x^4(1+x)^4}{(1-x^3)^7}$ לטור חזקות.

ב. עלינו למצוא את המקדם של x^{13} בפיתוח של הפונקציה של $f(x) = \frac{x^4(1+x)^4}{(1-x^3)^7}$ וזה בעצם המקדם של x^9 בפיתוח של $\frac{(1+x)^4}{(1-x^3)^7}$.

כידוע $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{6+k}{k} x^k = (1 + x + x^2 + \cdots)^7 = \frac{1}{(1-x)^7}$. נציב x^3 במקום x ונקבל ש-

$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{6+k}{k} x^{3k} = \frac{1}{(1-x^3)^7}$ ומכאן שעלינו למצוא את המקדם של- x^9 בביטוי:

$$\frac{(1+x)^4}{(1-x^3)^7}=(1+x)^4\sum_{k=0}^{\infty}\binom{6+k}{k}x^{3k}=(1+4x+6x^2+4x^3+x^4)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{6+k}{k}x^{3k}$$

נקבל שמקדם זה הוא: $1\cdot\binom{6+3}{3}+4\cdot\binom{6+2}{2}=\binom{9}{3}+4\cdot\binom{8}{2}=196$

וזה גם מספר הפתרונות המבוקש.

תשובה 4

א. נביע תחילה את a_n על ידי הפרדת הסדרות הסדרות באורך n שבהן סכום הספרות זוגי לשני סוגים:

סוג 1: הסדרות שבהן הספרה שמאלית ביותר היא זוגית כלומר 2 או 4. בשני המצבים האלה $n-1$ הספרות הנותרות יכולות להיות כל סדרה באורך $n-1$ שבה סכום הספרות הוא זוגי. לכן יש $2a_{n-1}$ סדרות כאלה.

סוג 2: הסדרות שבהן הספרה שמאלית ביותר היא אי-זוגית כלומר 1, 3 או 5. בשלושת המצבים האלה $n-1$ הספרות הנותרות יכולות להיות כל סדרה באורך $n-1$ שבה סכום הספרות הוא אי-זוגי. לכן יש $3b_{n-1}$ סדרות כאלה.

נסכם ונקבל ש- $a_n=2a_{n-1}+3b_{n-1}$.

נביע כעת את b_n על ידי הפרדת הסדרות באורך n שבהן סכום הספרות אי-זוגי לשני סוגים:

סוג 1: הסדרות שבהן הספרה שמאלית ביותר היא זוגית כלומר 2 או 4. בשני המצבים האלה $n-1$ הספרות הנותרות יכולות להיות כל סדרה באורך $n-1$ שבה סכום הספרות הוא אי-זוגי. לכן יש $2b_{n-1}$ סדרות כאלה.

סוג 2: הסדרות שבהן הספרה שמאלית ביותר היא אי-זוגית כלומר 1, 3 או 5. בשלושת המצבים האלה $n-1$ הספרות הנותרות יכולות להיות כל סדרה באורך $n-1$ שבה סכום הספרות הוא זוגי. לכן יש $3a_{n-1}$ סדרות.

נסכם ונקבל ש- $b_n=3a_{n-1}+2b_{n-1}$.

ב. מהשוויון $a_n=2a_{n-1}+3b_{n-1}$ נקבל ש- $b_{n-1}=\frac{1}{3}(a_n-2a_{n-1})$ (*).

על-ידי החלפת n ב- $n+1$ בשוויון (*) נקבל: $b_n=\frac{1}{3}(a_{n+1}-2a_n)$ (**).

כעת בעזרת (*) ו- (**) נוכל להחליף את b_{n-1} ואת b_n בשוויון $b_n=3a_{n-1}+2b_{n-1}$ ולקבל נוסחת נסיגה ל- a_n: $\frac{1}{3}(a_{n+1}-2a_n)=3a_{n-1}+\frac{2}{3}(a_n-2a_{n-1})$.

נבודד את a_{n+1} בשוויון הנ"ל ונקבל: $a_{n+1}=4a_n+5a_{n-1}$

ג. הסדרות באורך 1 שבהן סכום הספרות זוגי הן 2 ו- 4 לכן $a_1=2$.

הסדרות באורך 2 שבהן סכום הספרות זוגי הן מהצורה xy כאשר $x,y\in\{2,4\}$ (יש 4 סדרות כאלה) או $x,y\in\{1,3,5\}$ (יש 9 סדרות כאלה). לכן $a_2=13$.

המשוואה האופיינית המתאימה לנוסחת הנסיגה $a_{n+1}=4a_n+5a_{n-1}$ היא $x^2-4x-5=0$

הפתרונות שלה הם $x_1=5, x_2=-1$.

לכן $a_n=\alpha\cdot 5^n+\beta\cdot(-1)^n$ כאשר $a_1=2$ ו- $a_2=13$. לכן על ידי הצבת $n=1$ ו- $n=2$ נקבל:

$5\alpha-\beta=2$ ו- $25\alpha+\beta=13$. מכאן ש- $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$ ו- $a_n=\frac{1}{2}(5^n+(-1)^n)$

שאלה 5

א. נסמן את הגרף $G=(V,E)$.

ניעזר בנוסחת אוילר לגרפים מישוריים וקשירים: $f=m-n+2$.

לפי הנתון הגרף מישורי. בנוסף מספר הצמתים הוא 7 וקיים צומת בעל דרגה 6. צומת זה חייב להיות סמוך לששת הצמתים האחרים ברף, לכן הגרף קשיר ואפשר להשתמש במשפט אוילר.

ידוע מהנתון ש- $f=10$ ו- $n=7$ מכאן ש- $10=m-7+2$ ולכן $m=15$.

מצד שני ידוע ש- $\sum_{v\in V}\deg_G(v)=2|E|=2m$ לכן $6+6+4+4+4+k+k=2\cdot 15$.

מכאן מקבלים ש- $k=3$.

ב. עלינו להוכיח שקיים מעגל המילטון ב- G. דרגות הצמתים בגרף הן $6,6,4,4,4,3,3$.

הערות: משפט אור מבטיח שהגרף המילטוני אם סכום הדרגות של כל שני צמתים לא צמודים הוא לפחות 7. אבל בגרף יש שני צמתים בעלי דרגה 3. לכן רק אם הצמתים האלה סמוכים ניתן להשתמש במשפט אור. גם משפט דירק לא עוזר מפני שהוא דורש כי הדרגה של כל צומת תהיה גדולה או שווה 3.5 וזה לא מתקיים כאן.

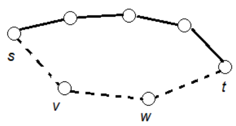
אופציה שנראית מעניינת יותר היא להשתמש בתוצרה של שאלה 6 שבסעיף 3.2 המטיחה שאם מספר הצמתים אי-זוגי (כמו במקרה שלנו) והדרגה של כל צומת היא לפחות $\frac{7}{2}-1=2.5$ (וגם זה מתקיים במקרה שלנו) אז יש ב- G מסלול המילטון.

אבל מסלול המילטון אינו בהכרח מעגל. לכן דרוש שיקול נוסף, או פשוט שיקול אחר.

מאחר שהגרף פשוט, צומת v בעל דרגה 6 מחובר לכל אחד מששת הצמתים האחרים. אם נמחק אותו ואת הקשתות הסמוכות לו נקבל גרף בעל 6 צמתים שבו הדרגות הן:

$5,3,3,3,2,2$.

בגרף החדש יש הצמת w שדרגתו 5 מחוברת לכל אחד מחמשת הצמתים האחרים. לכן אם נמחק אותו ואת הקשתות הסמוכות לו נקבל גרף בעל 6 צמתים שבו הדרגות הן: $2,2,2,1,1$.



(אגב, מצאנו כאן ששני הצמתים שהיו בעלי דרגה 3 ב- G אינם סמוכים זה לזה בגרף המקורי לכן לא ניתן להשתמש במשפט אור לפתרון השאלה)

הגרף האחרון הוא מסלול פשוט המחבר את שני הצמתים s,t בעלי דרגה 1 ועובר בדיוק פעם אחת דרך כל אחד משלושת הצמתים האחרים. המסלול קיים כמובן גם בגרף המקורי.

בגרף המקורי קיימים גם שני הצמתים v,w בעלי דרגה 6 שמחקנו קודם. אלה צמתים שמחוברים לכל צומת אחר בגרף. לכן קיימת קשת בין v ל- s וגם קשת בין w ל- t. המסלול שמצאנו כך בין v,w עובר פעם אחת בדיוק דרך כל צומת של G ולכן הוא מסלול המילטוני.

אבל ב- G יש גם קשת בין v ו- w. היא משלימה את המסלול למעגל המילטוני.

ג. לפי משפט 3.1 **הגרף אינו אוילרי** מפני שלא כל דרגות הצמתים שלו הן זוגיות.

מסד שני רק שניים מן הצמתים שלו הם בעלי דרגה אי-זוגית לכן לפי שאלה 1 בהמשכו של אותו משפט, **קיים בגרף מסלול אוילר**.