תרגיל מסכם ל כדורים שונים/זהים ותאים שונים/זהים

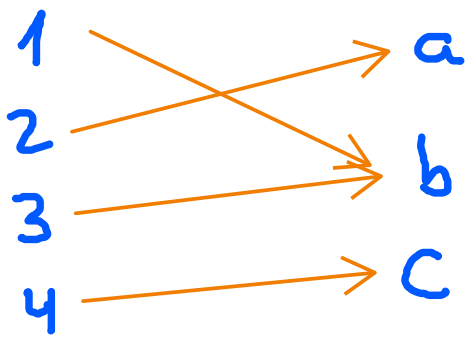
$x_1 + x_2 + x_3 = 4$ $\binom{6}{4} = D(3,4)$

1. 4 כדורים זהים ל 3 תאים שונים:
2. 4 כדורים שונים ל 3 תאים שונים: מספר הפונקציות מהכדורים לתאים.
3. 4 כדורים זהים ל 3 תאים זהים: נחשב לפי מספר תאים ריקים
4. 4 כדורים שונים ל 3 תאים זהים: ...לפי מספר תאים ריקים

2

A = כדורים תחום

B = תאים טווח



$|B^A| = |B|^{|A|} = 3^4$

(3) 4 בדורות עם 3 תאים בכל דור

# אפשרויות	סיכה	# התאים הבודדים
1	00 0 0	0
		+
2	000 0 /	1
	00 00 /	+
1	0000 / /	2
4		

4 כדורים שונים ל 3 תאים 5 הים

1 2 3 4

תאים ריקים

0

טיולה

1 2 3

יהיו 2 כדורים

בתא ים שונים ריק

ושניים כדורים

1

7

000 0 + + 00 00 +

$\binom{4}{1}=\binom{4}{3}=4$

$\binom{4}{2}\cdot\frac{1}{2}=3$

0000 + +

2

הוא בשרוולים

$\binom{4}{2}=6$

$\frac{1}{14}$

תרגיל – כמה 4 אבן ל- ב מאמן 14

מפזרים 10 כדורים זהים ב 5 תאים שונים.

$D(5,10) = \binom{14}{10} = 1001$

$\underbrace{x_1+x_2}_{8}+x_3+x_4+x_5=10$

11 9

11 10

א. חשבו את מספר הפיזורים שבהם בשני התאים הראשונים מכילים ביחד לפחות 8 כדורים.

ב. מה התשובה לסעיף א' אם הכדורים שונים זה מזה.

(א)

אפשרות 1:

$\begin{cases} x_1+x_2=8 \\ x_3+x_4+x_5=2 \end{cases}$ לכל

$D(2,8)\cdot D(3,2) = \binom{9}{8}\binom{4}{2} = 9\cdot 6 = 54$

+

אפשרות 2:

$\begin{cases} x_1+x_2=9 \\ x_3+x_4+x_5=1 \end{cases}$ לכל

$D(2,9)\cdot D(3,1) = \binom{10}{9}\binom{3}{1} = 10\cdot 3 = 30$

+

אפשרות 3:

$\begin{cases} x_1+x_2=10 \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$ לכל

$D(2,10)\,D(3,0) = \binom{11}{10}\binom{2}{0} = 11\cdot 1 = 11$

95

דוגמה

כדורים	שלשלים	
1	x_1	8 $\quad$ $\lvert$מחרוזות$\rvert = \lvert B^A \rvert$
2	x_2	
3		
⋮	x_3	$\binom{10}{8} 2^8 \cdot 3^2$
	x_4	
10	x_5	$\binom{10}{9} 2^9 \cdot 3^1$
		$\binom{10}{10} 2^{10} \cdot 3^0$

ב) נבחר 8 כדורים מתוך 10 $\binom{10}{8}$ שיתולקו ל

x_1, x_2, מספר החלוקות כמספר הפרמ' 2^8

ואת יתר הכדורים מתוך ה 10 נחלק בין

x_3, x_4, x_5 ונקבל את מספר הפרמ' 3^2

ולכן $\binom{10}{8} 2^8 \, 3^2$

באופן דומה עבור $x_1+x_2=9$ כאשר 9 הכדורים

שונים

$\binom{10}{9} 2^9 \cdot 3^1$

ועבור סכום של 10 בתנאים הראשונים

$\binom{10}{10} 2^{10} \cdot 3^0$

$$\underbrace{\binom{10}{8} 2^8 \cdot 3^2} + \underbrace{\binom{10}{9} 2^9 \cdot 3^1} + \underbrace{\binom{10}{10} 2^{10} \cdot 3^0} = \text{מתעניין}$$

דוגמה

$D(n,k) \quad D(m,t)$

$\underbrace{_\ _\ \cdots\ _}_{n}$

$D(2,8)\cdot D(5,2)$

$\underbrace{x_1\ x_2 \qquad y_1\ y_2\ y_3 \cdots y_5}_{7 \text{ תאים שונים.}}$

$$\begin{cases} x_1+x_2=n \\ \cancel{x_1+x_2}^{\,n}+x_3+x_4=2n \\ \cancel{x_1+x_2}_{\,n}+\cancel{x_3+x_4}_{\,n}+x_5=3n \end{cases}$$

בכמה דרכים אפשר לחלק
את המחרוזת
לתאים כך
שבכל תא יהיו
אותיות
מהמחרוזת

עקרון ההכלה וההפרדה

כל האפשרויות יסומנו ב U ומקרים מסויימים יסומנו ב A_i

i- כמספר המקרים לפי נתוני השאלה.

דוגמא

נסמן ב:

U מספר הסטודנטים במחלקה למוסיקולוגיה

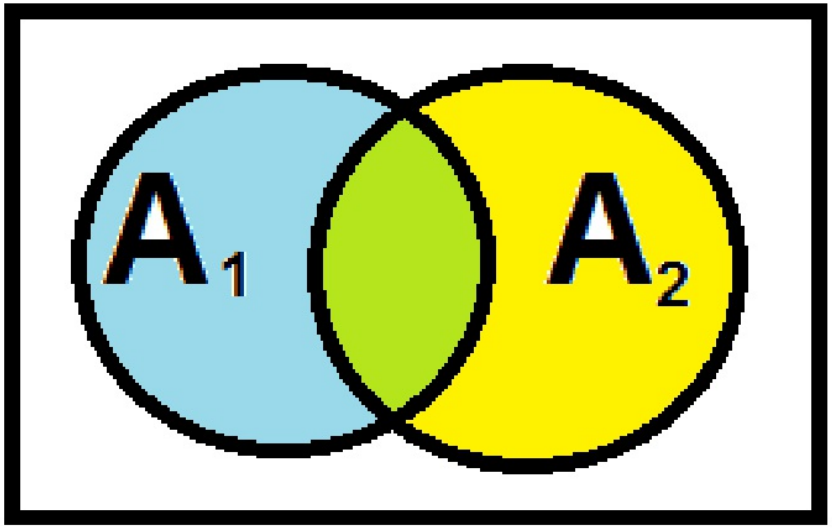
A_1 קבוצת הסטודנטים שמנגנים בפסנתר

A_2 קבוצת הסטודנטים שמנגנים בכינור.

$A_1 \cup A_2$ היא קבוצת הסטודנטים שמנגנים בפסנתר או בכינור.

לפי עקרון ההכלה וההפרדה :

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$



X^c הסימן X' הינו סימון חלופי $A_1^c \cap A_2^c$

ולכן, עבור $A_1' \cap A_2'$ שהיא קבוצת הסטודנטים שאינם מנגנים בפסנתר ושאינם מנגנים בכינור. את מספרם אפשר לחשב לפי ההכלה וההפרדה כך:

$$|A_1' \cap A_2'| = |(A_1 \cup A_2)'| = |U| - |A_1 \cup A_2|$$
$$= \underbrace{|U| - (\,|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|)}_{\text{חלופי}}$$

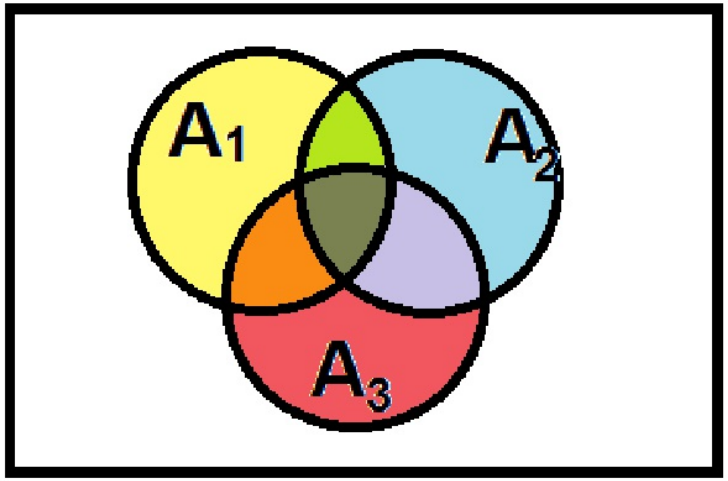
ועבור שלושה מקרים:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|$$

$$+ \underbrace{|A_1 \cap A_2 \cap A_3|}$$

החלק המעניין
ב הקרולר



|u| - (הכלה והפרדה)

וכך ניתן להמשיך ולהכליל את מספר המקרים...

המרחב הכללי $U=$

תרגיל כמו 24 מתוך 14

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15$ $D(5,15)$

מפזרים 15 כדורים זהים ב 5 תאים שונים. חשבו את מספר הפיזורים שבהם אין אף תא שבו 5 כדורים בדיוק.

נפתיר לפי הכלה והפרדה

A_i – ב x_i יש פחות מ 5 כדורים. $i=1..5$

$\underline{A_1}$: $x_1=5$

$5+x_2+x_3+x_4+x_5=15$

$x_2+x_3+x_4+x_5=10$

$D(4,10)=\binom{13}{10}$

כל יתר המקרים לכל $i=1..5$ $|A_i|=\binom{13}{10}=286$

$5\cdot|A_1|=1430$

$\underline{A_1 \cap A_2}$: $x_1 = 5$, $x_2 = 5$

$$5 + 5 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$$

$$x_3 + x_4 + x_5 = 5$$

$$D(3,5) = \binom{7}{5} = 21$$

באופן דומה $\binom{7}{5} = |A_i \cap A_j|$ $i \neq j$ $5,5$ $i,j = 1 \dots 5$

ו"ש $\binom{5}{2} = 10$ מינומים פעילים

$\underline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}$: $5 + 5 + 5 + x_4 + x_5 = 15$

$$x_4 + x_5 = 0$$

$$D(2,0) = \binom{1}{0} = 1$$

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1$ בחיתוך זוגות

לכל i,j,k שונים זה מזה $i,j,k = 1,\dots,5$

יש $\binom{5}{3} =$ חיתוכים כאלו

$\underline{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4}$: $5+5+5+5+x_5=15$

$x_5=-5$ אין פתרון כי אז $x_1=5, x_2=5, x_3=5, x_4=5$

0 אפשרויות.

לחיתוך זוגות יש חיסון של 5 קבוצות מתאפס.

$$\underbrace{\binom{19}{15}}_{|U|} - \left(5\cdot\binom{13}{10} - \binom{5}{2}\binom{7}{5} + \binom{5}{3}\cdot 1\right) = \text{מתשיבים}$$

תרגיל כמו שאלה 1א ממן 14 והדרכה ל ב' ו ג'

מהו מספר המחרוזות באורך n מהתווים a,b,c כאשר התו b חייב להופיע ~~לפחות פעם אחת~~ בדיוק t פעמים, כאשר $1 \le t \le n$.

$t \times b$

$$\underbrace{_\ \ \underline{b}\ \ \underline{b}\ \ \dots\ \ _}_{n \text{ מקומות}}$$

2 2

סדר $\binom{n}{t}$

ניתן $n-t$ מקומות סדר הופעות של a,c

ומספר האפשרויות למילוי כולה 2^{n-t}

ולכן הפתרון $\binom{n}{t}\cdot 2^{n-t}$

הכוונה של פרק שאלה 1

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ $n = 10$

b b b a c a c a c b

$B = \{1, 2, 3, 10\}$ $B, C \subseteq A$

$C = \{5, 7, 9\}$

"a" - האיבר לא נמצא ב B או C

"b" - המקום i המתאים $\Leftarrow$ $i \in B$

"c" - " " " $\Leftarrow$ $i \in C$

סימון הדגלים

$\langle B, C \rangle \neq \langle C, B \rangle$ $\{B, C\} = \{C, B\}$

הבינום של ניוטון

לדוגמה :

$$(x+a)^2=\binom{2}{0}a^2+\binom{2}{1}xa+\binom{2}{2}x^2=a^2+2xa+x^2$$

$$(x+a)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i a^{n-i}$$

עבור סכום המקדמים הבינומיים בלבד, נציב $a=x=1$ ונקבל :

$$2^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}$$

$$(a-x)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-x)^i a^{n-i}=\sum \boxed{(-1)^i\binom{n}{i}a^{n-i}}\,x^i$$

$$(-x)^i=((-1)\cdot x)^i=(-1)^i x^i$$ לפי תוכן תצקור

תרגיל כמו שאלה 2 מן 14

הוכיחו ש $\sum_{k=0}^{n} \frac{1^k+(-1)^k}{2}\binom{n}{k}3^k = \frac{4^n+(-2)^n}{2}$

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k a^{n-k}$$

$x=-3$, $a=1$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(1^k+(-1)^k)\binom{n}{k}3^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}3^k + (-1)^k\binom{n}{k}3^k\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k\cdot 1^{n-k}} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 3^k\right) = \frac{1}{2}\left((3+1)^n + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-3)^k 1^{n-k}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(4^n + (-3+1)^n\right) = \frac{4^n+(-2)^n}{2}$$

שימו לב: בטעות דיברנו מה על ההוכחה של תרגיל מלפני קצת נפרד שמטרה שדרך הטוקדיה לו כדאית בתרגיל זה.

$$\sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i$$

$$\sum_{n=0}^{k} c\, a_n = c \sum_{n=0}^{k} a_n$$

תרגיל - נוסחה לחישוב מספר פונקציות העל

הוכח שמספר הפונקציות מ A על B כאשר $|A| = n$, $|B| = k$ הוא

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$$

עקרון שובך היונים:

אם יש m תאים בשובך לתוכם יש להכניס $m+1$ יונים, בוודאות יהיה תא אחד שבו יהיו לפחות שתי יונים.

ובכללי: אם יש m תאים בשובך ולתוכם יש להכניס n יונים בוודאות יהיה תא אחד שיהיו בו לפחות $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ (הערך השלם העליון) יונים.

תרגיל ממבחן

A היא קבוצה בת 9 איברים, החלקית לקבוצה $\{4,5,6,\ldots,60,61\}$.

א. הראה כי קיימות (לפחות) שתי תת-קבוצות שונות של A, שסכום איבריהן שווה.
(הדרכה : עקרון שובך היונים).

שים לב שהשאלה מתייחסת לתת-קבוצות של הקבוצה הלא-ידועה A,
לא לתת-קבוצות כלשהן של $\{4,5,6,\ldots,60,61\}$!

ב. הראה כי קיימות (לפחות) שתי קבוצות **זרות** כאלו.
הדרכה : נובע בקלות מסעיף א' ללא שיקולים קומבינטוריים!

הדרכה לשאלה 1א ממן 15

נתונה f מ A ל A ומספר האיברים ב A הוא n

א. שימו לב שלפו' f יש לכל היותר n תמונות שונות.

וכן $f^k: A \to A$

אם נפעיל את f למעלה מ n פעמים, למשל n+1 , בוודאי נחזור על אחת התמונות.

ב. אם f חח"ע אז עבור $f(a) = f(b)$ מתקיים $a = b$.

ולפי סע' א' עבור $f^i(a) = f^j(a)$ כאשר $1 \le i < j \le n+1$

מתקיים $f\left(f^{i-1}(a)\right) = f\left(f^{j-1}(a)\right)$

ולכן $f^{i-1}(a) = f^{j-1}(a)$ וכך הלאה...

שימו לב שמדובר בהכוונה ועדיין יש לנסח תשובה פורמלית עם נימוקים מלאים

ਟੈਸਟਾਂ ਤੋਂ ਅਭਿਆਸਾਂ ਦੀ ਕਲੈਕਸ਼ਨ

שאלה 4

לפנינו שישה כדים שונים (ממוספרים 1,..., 6) ו- 30 כדורים **זהים**.

יש לשים את כל הכדורים בכדים, כאשר בכל כד חייב להיות **לפחות** כדור אחד, ויחד עם זה אסור שמספר הכדורים בכד יהיה בדיוק 7. במלים אחרות:

אפשר שיהיו בכד יותר מ- 7 כדורים, אפשר פחות מ- 7, אבל לא בדיוק 7 ולא 0.

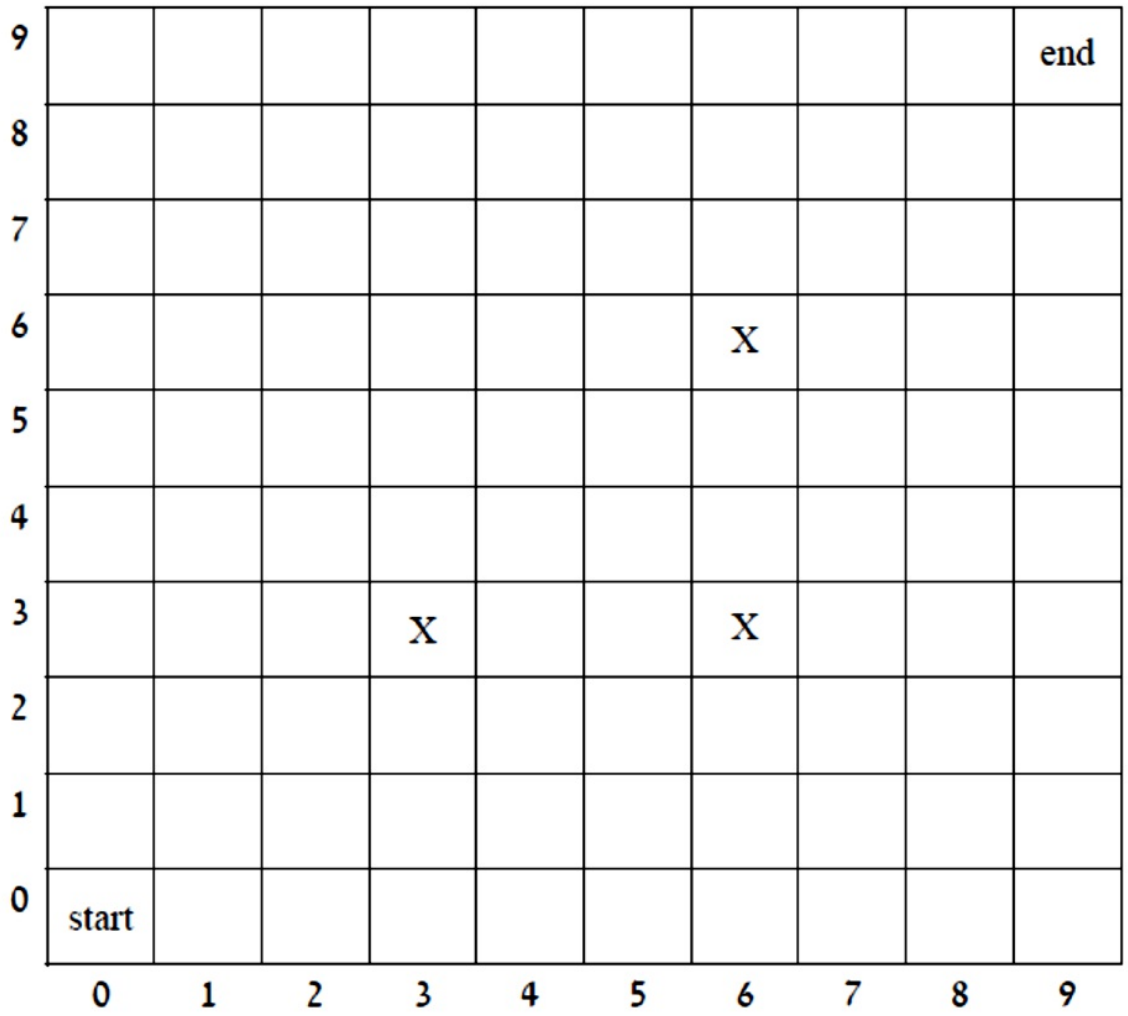
בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

הדרכה: ראשית טפלו בדרישה שיש בכל כד כדור אחד לפחות.

אחרי כן, באיסור על 7 כדאי לטפל בעזרת הכלה והפרדה.

שאלה 3

לפנינו לוח של 10×10 משבצות. שחקן מתחיל במשבצת השמאלית תחתונה ומתקדם עד למשבצת הימנית עליונה, כאשר בכל צעד הוא נע משבצת אחת ימינה **או** משבצת אחת למעלה. מסלול אפשרי לדוגמא 3 צעדים למעלה, 4 ימינה , 6 למעלה 5 ימינה.



המשך השאלה בעמוד הבא...

המשך...

(5 נקי') א. הוכיחו שמספר המסלולים האפשריים הוא $\binom{18}{9}$.

(22 נקי') ב. כמה מסלולים אפשריים אם אסור לעבור דרך אף אחת משלוש המשבצות המסומנות ב- X ? המסלול שבדוגמא בפתח השאלה אינו חוקי כעת כי הוא עובר דרך המשבצת (3,3) המסומנת ב- X . **יש להגיע לתשובה מספרית.**

כדי לחסוך חישובים חוזרים כדאי לשמור בצד ערכים של ביטויים שחוזרים על עצמם.

שאלה 3

תהיינה $B = \{a,b,c,d,e,f,g\}$, $A = \{1,2,3,4,5\}$.

מיצאו כמה פונקציות $f : A \to B$ מקיימות את התנאי :

שלוש האותיות a,b,c נמצאות בתמונה של f

(במלים אחרות, כל אחת מהאותיות a,b,c מתקבלת על-ידי הפעלת f על אבר כלשהו של A).

ייתכן בהחלט שאברים נוספים ב- B מתקבלים גם הם.

דוגמאות :

(*i*) הפונקציה השולחת את כל אברי A אל האות b **אינה** מקיימת את התנאי.

(*ii*) הפונקציה f המוגדרת כך : $f(1) = f(2) = a,\ f(3) = b\ ,\ f(4) = g\ ,\ f(5) = c$

מקיימת את התנאי.

כדאי לפתור בעזרת הכלה והפרדה. אין הכרח להגיע לתשובה מספרית.

שאלה ממבחן בנושא שובך יונים

שאלה 3

תהי U קבוצה סופית בת n איברים.

תהי $B \subseteq P(U)$ (כלומר B היא קבוצה של תת-קבוצות של U). עוד נתון כי $|B| > 2^{n-1}$.

(10 נק') א. יהי $a \in U$. הוכח כי קיימת קבוצה $A \in B$ כך ש- $a \in A$.

(15 נק') ב. יהי $a \in U$. הוכח כי קיימת קבוצה A המקיימת את התנאים הבאים:

$a \in A$, והקבוצות A ו- $A - \{a\}$ שייכות שתיהן ל- B.

הדרכה: חלק את אברי $P(U)$ לזוגות והשתמש בעקרון שובך היונים.

שאלה ממבחן בנושא שובך יונים

שאלה 4

(17 נק') א. מתוך 1000 המספרים שבתחום $1 \le n \le 1000$ מישהו בחר 501 מספרים שונים. הוכיחו שבקבוצת 501 המספרים שנבחרו, בהכרח יש שני אברים שונים a,b כך ש- a מתחלק ב- b ללא שארית.

הדרכה: כל מספר טבעי חיובי n ניתן להציג באופן יחיד כך: $n = 2^k \cdot b$ ....

(10 נק') ב. אדם פזיז ניסה ליישם את ההוכחה של סעיף א' על בחירה של 501 מספרים שונים מתוך 1000 המספרים שבתחום $701 \le n \le 1700$. הוא טען שגם במקרה זה בקבוצת 501 המספרים שנבחרו, בהכרח חייבים להיות שני אברים שונים a,b כך ש- a מתחלק ב- b ללא שארית. הוא הוכיח זאת באותה דרך של סעיף א'. מצאו את הטעות בהוכחה במקרה זה (אין הכרח למצוא דוגמא נגדית לטענה, אתם מתבקשים רק להסביר מדוע אותה הוכחה לא עובדת במקרה זה).