חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

2019 סמסטר ג מועד א

שאלה 1

אין תשובות

בחרו את התשובה הנכונה בכל סעיף. רשמו את התשובות בתוך המחברת.

בשאלה זו בלבד אין צורך בהוכחה. אפשר (לא חובה) לתת הסבר קצר: כמה מלים, לא יותר משתי שורות. הסבר עשוי לאפשר לבודק לתת לכם נקודה או שתיים גם אם בחרתם תשובה לא נכונה. מצד שני, הסבר שגוי בצורה קיצונית עלול להביא להורדה של נקודה או שתיים.

(6 נק') **א.** את הפסוק **"הפונקציה f היא חד-חד-ערכית"** (כאשר x,y מסמנים איברים בתחום של f) ניתן להצרין כך:

[1] $\forall x \forall y((x \neq y) \wedge (f(x) \neq f(y)))$

[2] $\forall x \forall y((f(x) = f(y)) \rightarrow (x = y))$

[3] $\forall x \forall y((f(x) \neq f(y)) \rightarrow (x \neq y))$

[4] $\forall x \exists y((x \neq y) \rightarrow (f(x) = f(y)))$

(7 נק') **ב.** מסמנים כרגיל ב- $\mathbf{N}$ את קבוצת המספרים הטבעיים ב- $\mathbf{Q}$ את קבוצת המספרים הרציונליים וב- $\mathbf{R}$ את קבוצת המספרים הממשיים.

נתונה סדרה $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ של קבוצות **שונות זו מזו** כך ש- $\mathbf{R} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$. אז:

[1] קיים $n \in \mathbf{N}$ כך ש- $|A_n \cap \mathbf{Q}| = \aleph_0$

[2] קיים $n \in \mathbf{N}$ כך ש- $|A_n \cap [0,1]| > \aleph_0$.

[3] קיים $n \in \mathbf{N}$ כך ש- $|A_n| = \aleph_0$.

[4] $|\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n| < \aleph$.

(6 נק') **ג.** G הוא גרף **מישורי פשוט** על 5 צמתים שבו הדרגה של כל צומת היא גדולה מ- 2.

אז:

[1] קיים גרף G המקיים את נתוני השאלה שהוא דו-צדדי

[2] קיימים לפחות שני צמתים שהם בעלי דרגה 3

[3] קיים ב- G מסלול אוילר שאינו מעגל

חלק ב׳: ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות

משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב׳ כולו : 81 נקודות

שאלה 2

נתונה $A = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ (קבוצת המספרים הממשיים השונים מ- 0).

על הקבוצה $B = A \times A$ מגדירים R כך : לכל $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in B$,

$(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ אם ורק אם $x_1x_2 > 0$ וגם $y_1y_2 > 0$.

(9 נק׳) א. הוכיחו ש- R יחס שקילות על $B = A \times A$

(9 נק׳) ב. מיצאו את מספר מחלקות השקילות של R והדגימו שני איברים שונים בכל מחלקה.

(9 נק׳) ג. נתבונן ביחס S המוגדר על $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ כך : $(x_1, y_1)S(x_2, y_2)$ אם ורק אם $x_1x_2 \geq 0$ וגם $y_1y_2 > 0$. הוכיחו ש- S אינו יחס שקילות על $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

שאלה 3

תהי A קבוצת כל המחרוזות שבהן מופיעות הספרות 1,2,3 בלבד. נסמן :

a_n מספר המחרוזות ב- A שהן באורך n וסכום הספרות שלהן זוגי.

b_n מספר המחרוזות ב- A שהן באורך n וסכום הספרות שלהן אי-זוגי.

למשל את המחרוזת 213 סופרים כשמחשבים את a_3 ואת המחרוזת 2131 סופרים ב- b_4 .

(9 נק׳) א. עבור כל $n \geq 2$ הביעו את a_n בעזרת a_{n-1} ו- b_{n-1} וגם את b_n בעזרת a_{n-1} ו- b_{n-1} .

(9 נק׳) ב. מיצאו נוסחת נסיגה עבור a_n .

הדרכה : השוויון הראשון מסעיף א׳ מאפשר להביע את b_{n-1} בעזרת a_n ו- a_{n-1} ולכן גם את b_n בעזרת a_{n+1} ו- a_n . הציבו אותם במקום b_{n-1} ו- b_n בשוויון השני מסעיף א׳)

(9 נק׳) ג. חשבו את a_1 ואת a_2 ומיצאו נוסחה כללית ל- a_n .

שאלה 4

(14 נק׳) א. רישמו פונקציה יוצרת מתאימה לחישוב מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{10} = n$$

כאשר $x_1, x_2, \ldots, x_{10} \in \{0,3\}$ ו- $y_1, y_2, \ldots, y_{10} \in \{0,1,2\}$.

פשטו את הביטוי בעזרת : $1 + x + x^2 = (1 - x^3)/(1 - x)$ ו- $(1 + x^3)(1 - x^3) = 1 - x^6$.

(13 נק׳) ב. מיצאו את מספר פתרונות המשוואה מסעיף א׳ כאשר $n = 7$.

שאלה 5

בשאלה זו נתייחס לגרף פשוט וקשיר $G = (V, E)$ שבו קבוצת הצמתים היא $V = \{1,2,3,\ldots,n\}$.

ידוע שבגרף G קיימת הקשת $e = \{1,2\}$ ושהגרף $T = (V, E \setminus \{e\})$ הוא עץ.

(9 נק׳) א. הוכיחו שאם G אוילרי אז G הוא מעגל.

(9 נק׳) ב. רישמו סדרת פרופר של T במקרה ש- G הוא גרף אוילרי. נמקו את הטענה.

(9 נק׳) ג. הראו שאם G ~~המילטוני~~ מצלן אז G אינו בהכרח מעגל. הדגימו זאת עבור $n = 4$.

המילטון

בהצלחה!