|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| מתמטיקה דיסקרטית 20283 | פתרון ממ"ן 12 | סתיו 2009א |

תשובה 1

א. הכלה בכיוון אחד: יהי , נראה ש- :

מכיוון ש- , אז מהגדרת מכפלה קרטזית, . מכאן ומהנתון בשאלה:

. מהגדרת איחוד ,  או .

בכל מקרה, מהגדרת מכפלה מקבלים  וגם . לפיכך .

הכלה בכיוון שני: יהי , נראה ש- :

**מכיוון שנתון ש- B אינה ריקה**, יהי . אז , לכן מהגדרת איחוד,

. מכאן ומהנתון בשאלה, , ולפי הגדרת מכפלה

בפרט . ההוכחה עבור B - בדומה. לפיכך .

משני הכיוונים מתקבל השוויון המבוקש.

**הערה:** ההנחה בשאלה כי אינן ריקות היא חיונית: אם למשל  אז **לכל**

קבוצה B יתקיים:  , כלומר הטענה **אינה נכונה** במקרה זה !

יש לשים לב שאכן אנו משתמשים בהוכחה בהנחה ששתי הקבוצות אינן ריקות, אחרת יסתבר ש"הוכחנו" טענה שאינה נכונה ! זו הסיבה לכך שהוכחת הכיוון השני נוסחה בזהירות, ולא "במכה אחת" עבור A ו- B.

ב. לא נכון. דוגמא נגדית "קטנה":  ,  (השלימו הפרטים !).

קל גם לתת דוגמאות שבהן C אינה ריקה.   
ראו גם אתר הקורס, שאלוני רב-ברירה, שאלון "תורת הקבוצות - יחסים", שאלה 2.

תשובה 2

א. לא. דוגמא נגדית: אבל (מדוע?)

ב. לא. וגם אבל .

ג. נכון. הוכחה: נניח בשלילה ש- X אינה אינסופית, משמע X היא קבוצה סופית.

נראה את  **N** כקבוצה אוניברסלית בדיון זה (אפשרי כי כל הקבוצות שבדיון חלקיות ל- **N** ).

הנתון פירושו ש- היא קבוצה סופית.

במלים אחרות (מהגדרת משלים) היא קבוצה סופית.

לפי נוסחה בתחתית עמ' 22 בספר, איחוד של קבוצה והמשלים שלה הוא הקבוצה האוניברסלית. כלומר . (המשך ההוכחה בעמ' הבא)

אמרנו ש- X ו- שתיהן סופיות. לפני נוסחה בראש עמ' 17 בספר, הגודל של איחוד שתי קבוצות **סופיות** (!) זרות הוא סכום הגדלים של שתי הקבוצות האלה.   
לכן (עבור X , **סופיות** ! )

הסכום של שני מספרים טבעיים הוא מספר טבעי, לכן הוא מספר טבעי, כלומר היא קבוצה סופית. מצד שני **N**  כמובן אינה סופית.   
לכן השוויון אינו אפשרי.   
הגענו לסתירה, לכן הנחת השלילה אינה נכונה. לפיכך X היא אינסופית, כמבוקש.

ד. לא. דוגמא נגדית: נקח את X להיות קבוצת הטבעיים הזוגיים (השלימו את ההוכחה).

ה. נניח וגם , עלינו להראות כי .

כמו בפתרון סעיף ג, נקח את **N** להיות הקבוצה האוניברסלית.

ההנחות שלנו אומרות ש- היא קבוצה סופית ו- היא קבוצה סופית.

ננסח את ההנחות האלה מחדש בעזרת הזהות  (עמ' 23 בספר הלימוד):

היא קבוצה סופית, ו- היא קבוצה סופית.

החיתוך של קבוצה סופית עם קבוצה **כלשהי** הוא קבוצה סופית (כי החיתוך חלקי לקבוצה הסופית ממנה התחלנו). לכן גם וגם הן קבוצות סופיות.

כעת, לפי שאלה 3 א בממ"ן 11, האיחוד של שתי קבוצות אלה הוא .

איחוד שתי קבוצות סופיות הוא קבוצה סופית (ר' פתרון סעיף ג כאן).   
לכן היא סופית, משמע היא סופית, משמע כמבוקש.

ו. לא. נראה קבוצות X,Y,Z כך ש- וגם , אבל .

תהי Y קבוצת הטבעיים הזוגיים, ותהי קבוצת הטבעיים האי-זוגיים.

(השלימו בעצמכם את החישוב).

תשובה 3

א. דוגמא אפשרית:  . אז:  .

 אינו טרנזיטיבי כי  ו-  הם איברים שלו, אך  אינו איבר שלו.

ב. בדומה לסעיף הקודם, נקח  . (המשך בעמ' הבא)

אז  , וכללית  ().

בפרט: 

מהסתכלות **באיחוד** היחסים  הנ"ל עבור  נראה כי 1 מותאם לכל אחד מהאיברים פרט ל- 1, 2 מותאם לכל אחד מהאיברים פרט ל- 2, וכו'.

במלים אחרות:  .

יחס זה אינו טרנזיטיבי כי למשל כי  ו-  הם איברים שלו, אך  אינו איבר שלו.

ג. נקח  . אז, בדומה לפתרון שאלה 4, ובדומה לסעיף הקודם כאן,  . לכן .

לכל n שנקח, יחס זה אינו טרנזיטיבי, כי למשל  ו-  הם איברים שלו, אך  אינו איבר שלו. הסגוֹר הטרנזיטיבי של R דורש אפוא איחוד של כל החזקות של R .

למעוניינים: הראו שהסגוֹר הטרנזיטיבי של R, שהוא איחוד כל החזקות של R , הוא:  .

כלומר הראו שהסגוֹר הטרנזיטיבי של R הוא היחס > הרגיל מעל **N** !

תשובה 4

מהגדרת E , שני איברים של A השייכים לאותה מחלקה עומדים ביחס E זה לזה,

ושני איברים של A שאינם באותה מחלקה אינם עומדים ביחס E זה לזה.

לכן, אם נרשום , כאשר באגף ימין אלו 5 המחלקות,

אז מתקיים:  .

זהו איחוד זר (איחוד של קבוצות זרות) , לכן





ראו בעניין זה גם החוברת "אוסף תרגילים פתורים" עמ' 4 שאלה 4ב.

איתי הראבן