|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| מתמטיקה דיסקרטית 20283 | פתרון ממ"ן 14 | סתיו 2009א |

תשובה 1

מובן שלא ניתן להגיע למצב כזה בקבוצות סופיות. נקח אפוא קבוצות אינסופיות.

אחרי קצת ניסוי וטעיה אפשר למצוא קבוצות שמקיימות את הנדרש.

למשל, תהי  ותהי  .

אז  (קבוצת המספרים השלמים),

 , .

כל חמש הקבוצות האלה שונות זו מזו . למשל:  
 שייך ל-  ואינו שייך ל- , לכן  .  
בדומה לגבי השאר.

הפונקציה  היא פונקציה חח"ע של A על B. לכן  .

הפונקציה  היא פונקציה חח"ע של A על . לכן  .

מהגדרת העוצמה , עוצמת A היא .

לפי שאלה 4.4 בעמ' 119 בספר, גם  . כלומר  .

נותר להראות שגם  . זה מתקבל למשל משאלה 4.3 סעיף ד (אפשר גם בדרכים אחרות).

תשובה 2

א. בחוברת "אוסף תרגילים פתורים" קבוצה 3 שאלה 10ה', מראים כי קבוצת **הסדרות** **הסופיות** של טבעיים היא בת-מניה. בשאלה שלפנינו עוסקים לא בסדרות אלא בתת-קבוצות של **N**. נתאים לכל קבוצה סופית של מספרים טבעיים - סדרה סופית: פשוט נסדר את אברי הקבוצה בסדר עולה. בכך הגדרנו פונקציה של הקבוצה K שבשאלה אל קבוצת הסדרות הסופיות של טבעיים. פונקציה זו אינה על (**מדוע**?) אך מובן שהיא חד-חד-ערכית.   
לפיכך .

מצד שני, K היא אינסופית, מכיון שהיא מכילה את כל הקבוצות מהצורה , לכל n טבעי.

מכאן לפי משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין  (למעשה אין כאן צורך במשפט הנ"ל, שהוא בגדר "תותח כבד". ניתן להראות בלעדיו, שקבוצה אינסופית המוכלת בקבוצה בת-מניה היא בת מניה).

ב. הפונקציה  המתאימה לכל קבוצה את **המשלים** **שלה**  **ב-** **N** היא חח"ע ועל (**הוכיחו זאת!**). לפיכך  , ולפי סעיף א' עוצמה זו היא .

תשובה 3

א. נשים לב שהקבוצות K,L,M זרות זו לזו, ו- .

כעת, אילו M היתה בת-מניה, היינו מקבלים ש-  היא איחוד של 3 קבוצות זרות בנות-מניה. ע"י שימוש חוזר בשאלה 4.3ד בעמ' 119 בספר (איחוד שתי קבוצות זרות בנות-מניה הוא בר-מניה) היינו מקבלים כי  היא בת-מניה - בסתירה למשפט 5.25 , וכן בסתירה למשפט 5.6 (משפט קנטור). לכן M אינה בת-מניה.

ב. נסמן . מהאמור בתחילת פתרון הסעיף הקודם, .

בנוסף, B היא בת-מנייה, ו-  היא קבוצה אינסופית שאינה בת-מנייה.

הקבוצות , B מקיימות אפוא את תנאי משפט 5.13ב (עמ' 16 בחוברת "פרק 5") עבור הקבוצות A, B בהתאמה.

לכן  .

כאמור , כלומר  .

תשובה 4

א. תהיינה  קבוצות שעוצמותיהן בהתאמה  .

כדי לקצר מעט את ההוכחה ניעזר בשאלה 5.1א, לפיה יש קבוצה חלקית של  ,שעוצמתה , ויש קבוצה חלקית של  שעוצמתה . לכן ב.ה.כ. נניח  , .

כעת מהגדרת כפל עוצמות  ,  .

אבל מהנחתנו ומהגדרת מכפלה קרטזית נקבל .

לכן , בהסתמך על שאלה 5.1ב,  .

ב. מצד אחד,  ולכן בעזרת סעיף א,  .

מצד שני  ולכן בדומה  .

משני הכיוונים יחד, בעזרת קנטור-שרדר-ברנשטיין, נובע המבוקש.

ג. לפי משפט 5.26,  . נציב זאת ונקבל .

במעברים נעזרנו במשפט 5.27ג ובסעיף ב של שאלה זו.

איתי הראבן