**ממ"ן 12 – מתמטיקה בדידה סמסטר קיץ 2016ג**

משה חמיאל  
ת"ז 308238716

**שאלה 1**

1. הוכחת חח"ע:  
   הפונק' אינה חח"ע מאחר ויכולה להיות תמונה זהה ל-2 מקורות.  
   לדוגמא, עבור המקורות (1,3) ו-(3,0) מתקבלת התמונה 9 אבל :

הוכחת "על":

יהא

עבור כל מתקיים:

*הראנו שיש מקור לכל*  ולכן הפונקציה f היא 'על'.

1. נתונה הפונקציה ,

נוכיח כי לכל ,

מתוך אסוציאטיביות ההפרש הסימטרי (עמ' 27 בספר שאלה 1.22):

הפרש סימטרי בין קבוצה לעצמה שווה לקבוצה הריקה (בהמשך לאותה שאלה בספר):

הפרש סימטרי עם הקבוצה הריקה שווה לקבוצה עצמה (המשך לאותה שאלה בספר):

מה שהיה להוכיח.

1. הפונקציה היא חח"ע, נוכיח:

נשתמש במה שהוכחנו בסעיף ב': .

נראה כי אם לשני מקורות יש את אותה התמונה אז הם שווים,  
זאת אומרת – נראה כי אם g(X)=g(Y) אז X=Y.

נתון:

נפעיל את הפונקציה g על 2 האגפים:

מתוך ההוכחה של סעיף ב' , ולכן:

הוכחת על:

נוכיח כי לכל יש כך ש-

על-פי ההוכחה של סעיף ב':

מצאנו כי לכל יש מקור (g(X)) ולכן הפונקציה g היא "על".

מש"ל.

**שאלה 2**

1. *נתון כי E הוא יחס שקילות שנוצר מהעתק טבעי של הפונקציה f (המופיעה בשאלה 1א).   
   מתוך ההגדרה של E שני איברים של ZxZ נמצאים ביחס E זה לזה אםם יש להם את אותה התמונה בפונקציה f.  
   יחס שקילות זה שנוצר מהעתק טבעי של הפונקציה f משרה חלוקה של למחלקות כמספר התמונות של הפונקציה f.*

*זאת אומרת שכל איבר ב שנשלח לתמונה כלשהי נמצא ביחס* עם שאר האיברים שנשלחים לאותה תמונה, מה שיוצר מחלקת שקילות על-פי התמונה ב-Z.

*מאחר וכבר בשאלה 1 הוכחנו כי הפונקציה f היא "על" – מס' התמונות/מחלקות השקילות הוא כמספר האיברים ב-Z. מאחר ומספר האיברים בZ הוא אינסופי – מס' מחלקות השקילות גם הוא אינסופי.*

1. *מחלקת השקילות של (0,0) היא 0.*

*לכל מתקיים:*

*ז"א – לכל ניתן למצוא בן-זוג בZ כך שהתמונה היא 0. מאחר ומספר האיברים ב-Z הוא אינסופי - מספר האיברים במחלקת השקילות של (0,0) גם הוא אינסופי.*

1. *נתון כי (m,n) נמצא באותה מחלקת שקילות עם (0,0), מה שאומר שהתמונה של f(m,n) שווה לתמונה של (0,0) שווה ל-0:*

*נראה כי התמונה של f(a,b) ושל f(a+m,b+n) שוות:*

*מאחר ומהנתון הוכחנו כי 3m+2n=0, נוכל להציב:*

מאחר ול-f(a,b) ול- f(a+m,b+n) אותה התמונה, מתוך ההגדרה של ההעתק הטבעי – הם נמצאים באותה מחלקת שקילות. מש"ל.

1. נראה כי לכל מחלקת שקילות יש אינסוף איברים.

תהא מחלקת השקילות שנגזרה מהתמונה f(a,b)=0.

הוכחנו בסעיף ב' שמחלקת שקילות זאת היא אינסופית.

*תהא מחלקת שקילות כלשהי הנגזרת מהתמונה f(a,b)=x, ולכן, קיים לפחות איבר אחד (a,b) כך שהתמונה f(a,b)=x.*

*לפי ההוכחה של סעיף ג',*  עבור כל

מאחר ומחלקת השקילות היא אינסופית, ניתן להצמיד אינסוף זוגות איברים ל(a,b) וליצור אינסוף איברים חדשים שהתמונה שלהם תהיה שווה לx. ולכן מחלקת השקילות היא אינסופית.

מכאן כל מחלקות השקילות אליהן מחלקת E את ZxZ הן אינסופיות.

**שאלה 3**

1. *K מכילה את כל יחסי השקילות מעל A.  
   יחס הוא קבוצה של זוגות סדורים ולכן עבור כל יחס מתקיים .  
   ע"פ הגדרת האיבר הקטן ביותר, רק שהקבוצה הריקה לא שייכת ל K כי היחס הריק לא רפלקסיבי האיבר שנמצא ביחס משמאל עם כל איברי הקבוצה הוא האיבר הקטן ביותר.  
   מאחר וע"פ הנתון K הוא יחס סדר-חלקי לגבי הכלה והוכחנו הכלה של בכל איברי K -> הוא האיבר הקטן ביותר בקס"ח (K, ).  
     
   AxA, מתוך הגדרת המכפלה הקרטזית, מכיל את כל האיברים מהצורה ולכן הוא רפלקסיבי (עבור כל ), סימטרי (עבור כל אם a(AXA)b אז b(AXA)a) וטרנזיטיבי (עבור כל אם a(AxA)b וגם b(AxA)c אז a(AxA)c).  
   מכאן AxA היא מחלקת שקילות מעל A ולכן .  
   מתוך ההגדרה של AxA, כל קבוצה של איברים מהסוג מוכלת בAxA. ולכן – עבור כל , .  
   מאחר וע"פ הנתון K היא יחס סדר-חלקי לגבי הכלה והוכחנו הכלה של כל איברי K ב-AxA -> AxA הוא האיבר הגדול ביותר בקס"ח (K, ).*
2. *ב*
   1. *עבור איבר קטן ביותר  
      M היא קבוצה של יחסים סופיים מעל N פרט ליחס הריק (נתון).  
      ניקח לדוגמא את הקבוצה הבאה שהיא איבר של M: {(2,4)}. קבוצה זאת מכילה איבר אחד בלבד, ולכן, פרט לקבוצה הריקה שאינה חלק מ-M, אין אף יחס אחר שמוכל בו. לכן {(2,4)} הוא איבר מינימאלי ב-M.  
        
      נוכל לקחת עוד יחסים בעלי איבר אחד ולהראות באותה צורה שגם הם מינימאליים. לפי שאלה 3.21 שבעמ' 93 בספר, בקבוצה בה יש איבר קטן ביותר – יש רק איבר מינימאלי אחד. מאחר ומצאנו ב-M יותר מאיבר מינימאלי אחד – אין ב-M איבר קטן ביותר.  
        
      עבור איבר גדול ביותר-  
      נניח בשלילה ש-B הוא איבר מקסימאלי ב-M. מתוך ההגדרה של M, B הוא יחס סופי מעל NxN. NxN היא קבוצה אינסופית ולכן B הוא חלקי ל-NxN. ניקח איבר אחד בNxN שאינו בB ונוסיף אותו ל-B. הקבוצה שקיבלנו גם היא סופית ולכן גם היא איבר ב-M. מאחר והיא מכילה ממש את B, היא לא מוכלת ב-B – מה שסותר את היות B איבר מקסימאלי ב-M.  
      מאחר ואין איבר מקסימאלי ב-M – אין איבר גדול ביותר ב-M.*
   2. *לפי ההסבר ב-i – יש איברים מינימאליים ב-M והם כל היחסים הסופיים מעל NxN בעלי איבר אחד, הם מינימאליים מאחר והיחס הריק אינו נכלל ב-M. הם אינם קטנים ביותר מאחר ויש איבר קטן ביותר רק אם יש איבר מינימאלי אחד (לפי שאלה 3.21 בספר).*
   3. *כמו שהוכחנו ב-i – ב-M אין איבר מקסימאלי מאחר וM מכילה קבוצות סופיות מעל קבוצה אינסופית ותמיד נוכל להוסיף אליה איבר וליצור קבוצה שאינה מוכלת בקבוצה המקורית, מה שסותר את הגדרת האיבר המקסימאלי.*

**שאלה 4**

1. *עלינו להוכיח כי*

**בדיקה**:

עבור n=1:

עבור n=2:

**מעבר**:

נניח שהטענה נכונה עבור n, ז"א נניח כי:

*נוכיח כי הטענה נכונה גם עבור n+1, ז"א נוכיח כי:*

*נפתח את אגף שמאל:*

*מהנחת האינדוקציה נציב ונקבל:*

*נקבץ איברים:*

*=*

*מהגדרת f*  ולכן:

*הוכנו כי הטענה נכונה עבור n+1.*

*מתוך הבדיקה והוכחת המעבר נובע שהטענה נכונה לכל .*