**ממ"ן 13 – מתמטיקה בדידה סמסטר קיץ 2016ג**

משה חמיאל  
ת"ז 308238716

**שאלה 1**

א.

נתון:

מכאן שקיימת פונקציה חח"ע ועל.

ע"פ פילוג החיתוך מעל האיחוד וע"פ הג' המשלים (עמ' 26 בספר):

ע"פ עמ' 25 בספר, , ולכן:

ע"פ הגדרת הפילוג זהו איחוד זר, זאת אומרת:

באופן דומה:

נגדיר פונקציה כך:

הפונקציה הזאת תקינה כי

נראה כי הפונקציה היא חח"ע:

יהיו ,

נפריד לארבעה מקרים:

**מקרה 1:**

ע"פ הגדרת g: f(a)=f(b)

מאחר ונתון כי f היא חח"ע –> a=b

**מקרה 2:**

ע"פ הגדרת g:

ע"פ הגדרת f:

לעומת זאת, ע"פ הגדרת g:

ע"פ הנתון -

ולכן, במקרה 2, לא ייתכן מצב בו g(a)=g(b)

**מקרה 3:**

נתון: g(a)=g(b)

ע"פ הגדרת g: a=b

**מקרה 4:**

זהה למקרה 2, לא ייתכן מצב בו g(a)=g(b)

הוכחנו כי לא ייתכן מצב בו g(a)=g(b) כך ש ולכן הפונקציה g היא חח"ע.

הוכחת "על":

הראנו קודם כי:

נראה כי עבור כל איבר ב-B יש מקור ב-A תחת הפונקציה g:

עבור כל

ע"פ הגדרת g:

נתון כי f היא "על" B-A

ולכן – עבור כל קיים מקור ב-A תחת הפונק' g.

עבור כל

ע"פ הגדרת g:

היא פונקציית זהות על (שולחת כל איבר לעצמו) ולכן היא "על" .

הראנו כי לכל קיים מקור ב-A תחת הפונקציה g ולכן הפונקציה g היא "על" B.

מש"ל.

ב.

הראנו למעלה כי ,

וכן, ,

מכאן, מאחר ו- A,B סופיות ונתון לנו כי |A|=|B|:

הוא כמות האיברים המשותפים שירדה בחיסור של B מ-A

מאחר ו-|A|=|B| נחליף ביניהם במשוואה:

הוא כמות האיברים המשותפים שירדה בחיסור של A מ-B ולכן:

חיסרנו עוצמות, זוהי פעולה המוגדרת רק עבור עוצמות סופיות ולכן יכולנו להשתמש בה במקרה שלנו.

מש"ל

ג.

לדוגמא:

נגדיר:

N – היא קבוצת המספרים הטבעיים

N\* - היא קבוצת המספרים הטבעיים **הזוגיים**.

כידוע, עוצמת שתי הקבוצות היא .

לכן:

נבדוק:

*מתקבלת קבוצת המספרים הטבעיים האי-זוגיים שכידוע גם עוצמתא היא*

*מש"ל:*

**שאלה** *2:*

*נתון:*

*ע"פ כלל דה-מורגן בתורת הקבוצות:*

*נתון כי הוא בר מניה,*

*ע"פ ההוכחה בעמ' 102 בספר – איחוד של קבוצות בנות מניה גם אם לא בהכרח זרות גם הוא בר מניה.*

*ולכן עוצמת B היא*

**שאלה** *3:*

*נתבונן במשלים של D:*

*ע"פ כללי דה-מורגן:*

*הוא איחוד של קבוצות בנות-מניה.*

*ע"פ ההוכחה בעמ' 102 בספר – איחוד של קבוצות בנות מניה גם אם לא בהכרח זרות גם הוא בר מניה.*

*לכן:*

*ע"פ הגדרת השאלה - , וע"פ הנתון שהוכחנו ,*

*לפי משפט 5.13ב' בספר:*

*ע"פ הגדרת המשלים:*

*ולכן נציב:*

*מש"ל.*

**שאלה** *4:*

*נראה שהגדרת ה"הפרש הסימטרי" על עוצמות שבשאלה לא תקינה מאחר ויש תלות בבחירת הנציגים:*

*נבחר לדוגמא את הקבוצות הבאות:*

*לכן על-פי ההגדרה:*

*מכאן, עבור k=3 ו-m-2:*

*לעומת זאת, עבור הקבוצות הבאות:*

*לכן על-פי ההגדרה:*

*מכאן, עבור k=3 ו-m-2:*

*הראנו שעבור נציגים שונים מתקבלת תוצאה שונה ולכן ההגדרה לא תקינה.*

**שאלה** *5:*

*א.*

נגדיר:

היא קבוצת כל הפונקציות מ-M ל-K1 ובהתאם היא קבוצת כל הפונקציות מ-M ל-K2*.*

נתון כי

*לפי שאלה 5.1א בספר קיימת קבוצה חלקית של*  שעוצמתה שווה לעוצמת . מאחר ואנחנו יכולים לבחור את הקבוצות המייצגות באופן חופשי כל עוד הן בעלות העוצמות הנדרשות,

בלי הגבלת הכלליות נבחר כך ש- .

ע"פ הגדרת חזקה של עוצמות, היא עוצמת קבוצת הפונקציות מ-M ל-  
ו- היא עוצמת קבוצת הפונקציות מ-M ל-

מאחר ו- כל האיברים של הם גם איברים של   
ולכן פונקציה של *M ל- היא גם פונקציה של M ל-.  
כלומר, קבוצת הפונקציות* של *M ל- מוכלת בקבוצת הפונקציות של M ל-.*

*לכן, ע"פ שאלה 5.1ב בספר,*

*מאחר ו- :*

*מש"ל.*

*ב.*

***צד אחד:***

*נוכיח כי*

ע"פ סעיף א' של שאלה זאת:

ע"פ טענה 5.28 בספר , ולכן:

**צד שני:**

ע"פ סעיף א' של שאלה זאת:

לפי משפט 5.26 בספר, , ולכן:

על פי שני האי-שיוויונים, על פי משפט קנטור ברנשטיין מתקבל:

מש"ל