תרגיל בית 5

$$k(x,y) := (x\cdot y+1)^3 = (x^T y+1)^3$$ (a. (1

$x, y \in \mathbb{R}^2$

$$(x^T y+1)^3 = (x_1y_1+x_2y_2+1)^3$$

$$= (x_1y_1+x_2y_2+1)(x_1y_1+x_2y_2+1)^2$$

$$= (x_1^2y_1^2 + x_1x_2y_1y_2 + x_1y_1$$
$$+ x_2^2y_2^2 + x_1x_2y_1y_2 + x_2y_2$$
$$+ x_1y_1 + x_2y_2 + 1)(x_1y_1+x_2y_2+1)$$

$$= (x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 +$$
$$2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 1)(x_1y_1+x_2y_2+1)$$

$$= x_1^3y_1^3 + x_1x_2^2y_1y_2^2 + 2x_1^2x_2y_1^2y_2$$
$$+ 2x_1^2y_1^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_1y_1$$
$$+ x_1^2x_2y_1^2y_2 + x_2^3y_2^3 + 2x_1x_2^2y_1y_2^2$$
$$+ 2x_1x_2y_1y_2 + 2x_2^2y_2^2 + x_2y_2$$
$$+ x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2$$

$$+ 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= x_1^3y_1^3 + x_2^3y_2^3 + 3x_1x_2^2y_1y_2^2 \\ &+ 3x_1^2x_2y_1^2y_2 + 3x_1^2y_1^2 + 3x_2^2y_2^2 \\ &+ 6x_1x_2y_1y_2 + 3x_1y_1 + 3x_2y_2 + 1 \end{aligned}}$$

נגדיר

$$\psi(x) := \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ \sqrt{3}\, x_1^2x_2 \\ \sqrt{3}\, x_1x_2^2 \\ \sqrt{3}\, x_1^2 \\ \sqrt{3}\, x_2^2 \\ \sqrt{6}\, x_1x_2 \\ \sqrt{3}\, x_1 \\ 3\, x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \varphi(x), \psi(y) \rangle = k(x,y)$$

b.) $\psi(x)$ הכי מלאה ה- rational varieties של X בערך

שמכילים את המקדמים של האיברים ב- $\psi(x)$.

c.) אנחנו חוסכים 10 מכפלות (יש 10 איברים כפל ויותר

את $\psi(x)$ ל- $(X\in\mathbb{R}^2$ בשימוש ב- $K(x,y)$ לא לפני

$.<\psi(x),\psi(y)>$

d.)

$$f(x,y)=2x-y$$

$$g(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

$$L(x,y)=2x-y+\lambda\left(\frac{x^2}{4}+y^2-1\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}L(x,y)=2+\frac{\lambda}{2}x=0 \rightarrow x=-\frac{4}{\lambda}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}L(x,y)=-1+2\lambda y=0 \rightarrow y=\frac{1}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}L(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2-1=0 \rightarrow \frac{\left(-\frac{4}{\lambda}\right)^2}{4}+\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2-1$$

$$\rightarrow \frac{4}{\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}=1 \quad /\cdot 4\lambda^2$$

$$\rightarrow \quad 16 + 1 = 4\lambda^2$$

$$\frac{17}{4} = \lambda^2$$

$$\rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

ולכן, עבור

$\lambda_1 = \frac{\sqrt{17}}{2}$, $x_1 = \frac{-8}{\sqrt{17}}$, $y_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \frac{8}{\sqrt{17}}$, $y_2 = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

נקבל נקודות מינימום ומקסימום של $f(x,y)$ תחת האילוץ של

$$g(x,y) = 1$$

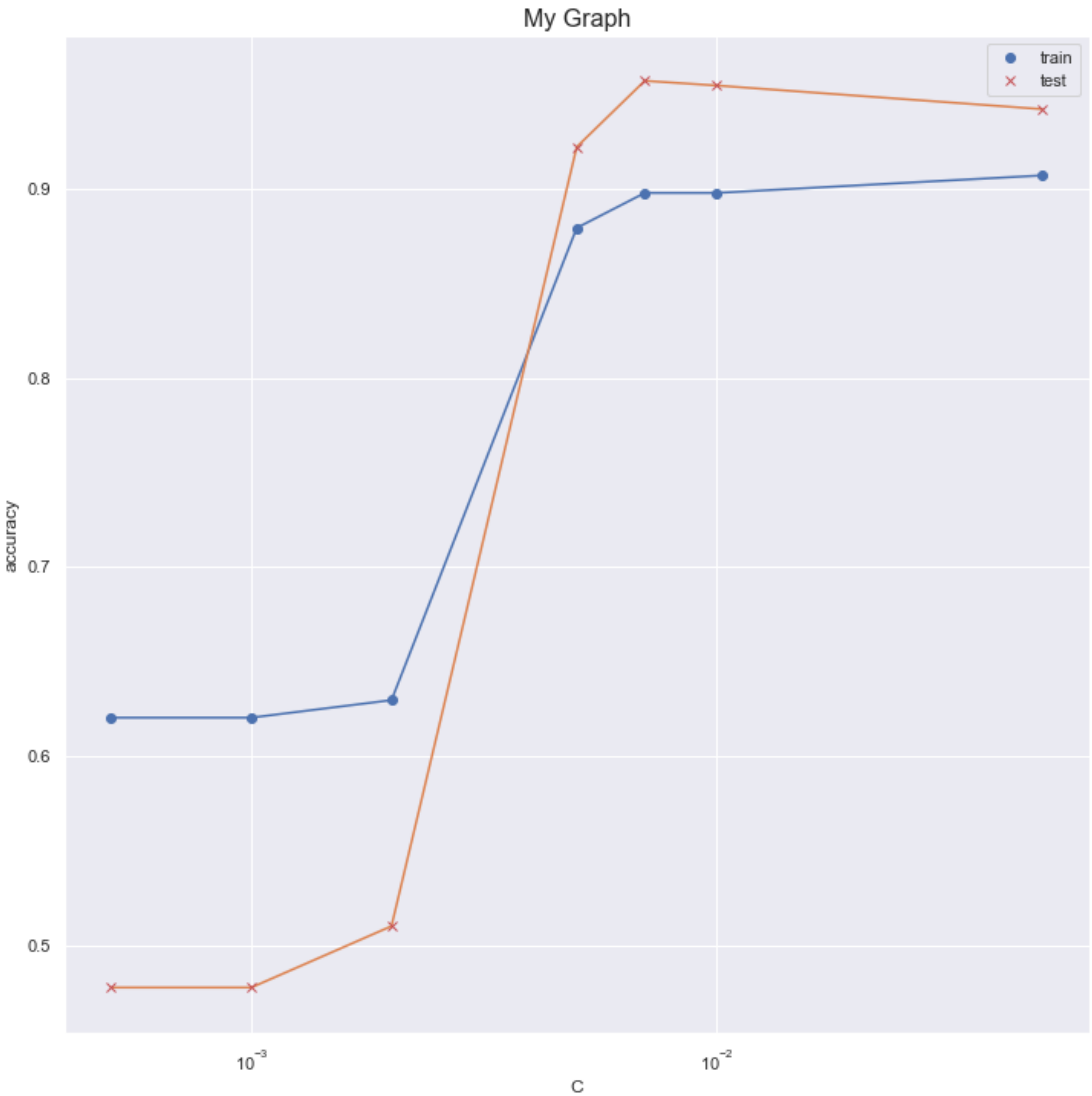
$$f(x_1,y_1) = 2x_1 - y_1 = -\frac{16}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{-17}{\sqrt{17}} = -\sqrt{17}$$

$$f(x_2,y_2) = 2x_2 - y_2 = 16\sqrt{\frac{1}{17}} + \sqrt{\frac{1}{17}} = 17\sqrt{\frac{1}{17}} = \sqrt{17}$$

לכן נסיק, x_1,y_1 מינימום של f ו- x_2,y_2 מקסימום של
f, שכן $f(x_1,y_1) < f(x_2,y_2)$

$\blacksquare$

5



3)

$X = \mathbb{R}^2$

$u := \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad w := \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad v := (0,-1)$

$$C = H = \left\{ h(r) = \left\{ (x_1,x_2) \;\middle|\; \begin{matrix} (x,y)\cdot u \le r \\ (x,y)\cdot w \le r \\ (x,y)\cdot v \le r \end{matrix} \right\} \right\} \quad s.t. \quad r>0$$

$$(x,y)\in h(r) \to \begin{cases} (x,y)\cdot u = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2} \le r \\ (x,y)\cdot w = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2} \le r \\ (x,y)\cdot v = -y \le r \end{cases}$$

בהינתן סט אימון $D:=\{x_i\}_{i=1}^m$ ו- $c\in C$ כך ש-

יש $r\geq 0$ שעבורו $c = h(r)$. נרצה למצוא את $h\in H$

כך ש- h עקבי עם c. נבחין שלכל $r_1<r_2$ מתקיים $h(r_1)\subseteq h(r_2)$

נגדיר L לומד קונסיסטנטי בצורה הבאה:

- נאתחל משתנה $\hat{r}=0$
- כעת לכל x_i דגימה בסט האימון בהינתן $x_i\in\mathbb{R}^2$,

אם $c(x_i)=True$ אז נחשב את $x_i^T v$, $x_i^T w$, $x_i^T u$

- נגדיר $r_i := \max(\{x_i^T u, x_i^T w, x_i^T v\})$

נבחין ש- $x_i \in h(r_i)$. שכן $x_i^T y \le c \le r_i$ לכל $y \in \{u,w,v\}$

- אם $r_i > \hat{r}$ נעדכן השמה $\hat{r} \leftarrow r_i$.

אחרת $r_i \le \hat{r} \to x_i \in h(r_i) \subseteq h(\hat{r})$

- נסיים לעבור על m הדגימות ב- D ונקבל:

$$c(x_i) = True \to x_i \in h(\hat{r}),\ \forall i.$$

- נגדיר את h להיות $h := h_{\hat{r}}(x) : \mathbb{R}^2 \to \{0,1\}$

$$h_{\hat{r}}(x) = \begin{cases} 1 & x^T u \le \hat{r} \\ & x^T w \le \hat{r} \\ & x^T v \le \hat{r} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- נניח $c(x_j) = 0$ $x_j \in D$. כך ש- $c = h(r)$, עבור $r \in \mathbb{R}$ כלשהו.

$x_j \notin h(r) \to \exists y \in \{u,v,w\}$ st. $x_j^T y = r' > r$

. נבחין ש- $\hat{r} \le r$, שכן $h(\hat{r}) \subseteq h(r)$

לכן, $\hat{r} \le r < r'$. $[x_j^T y > r']$

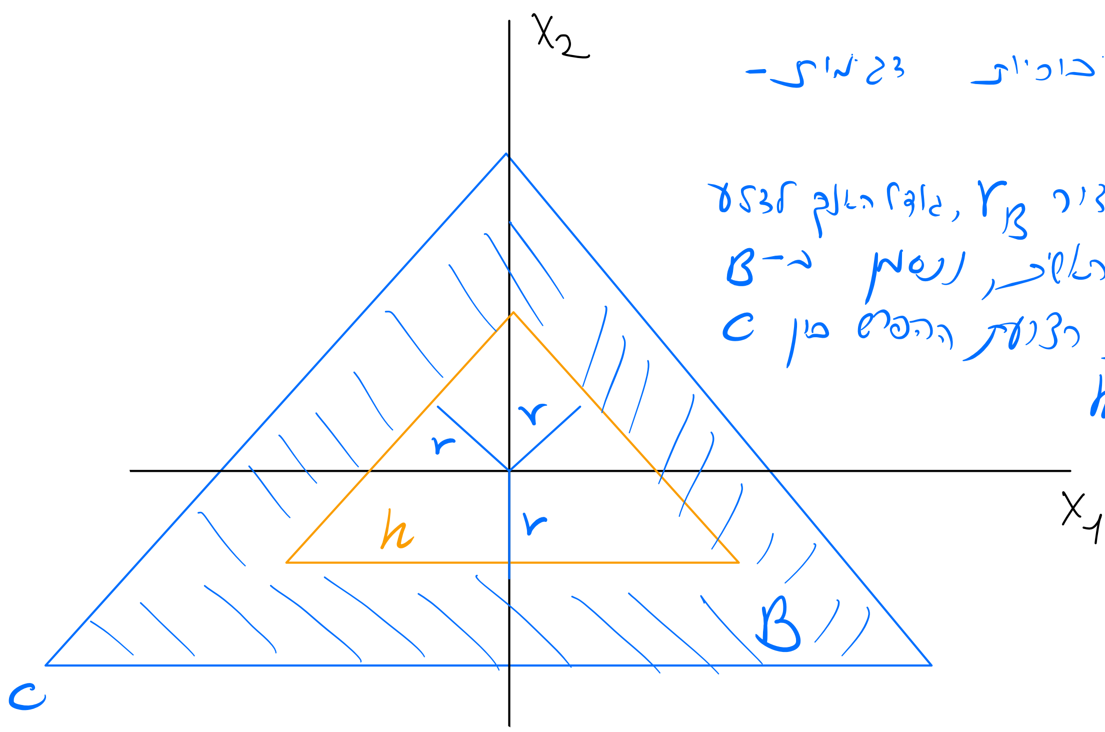
מהגדרה של $h := h_{\hat{r}}$ מתקיים $h(x_j) = h_{\hat{r}}(x_j) \overset{\downarrow}{=} 0$

וסה"כ קיבלנו $\forall x\in D$ $h(x)=c(x)$.

- סיבוכיות זמן - לכל דגימה מבצעים 3 חישובי מכפלה פנימית בזמן קבוע + מינימום בין 3 איברים + השוואה אחת וזמן $O(1)$ לדגימה וסה"כ $O(m)$ עבור m דגימות.

- סיבוכיות דגימות -

נגדיר r_B, גודל האנך לצלע מהראשית, נסמן ב-B את רצועת ההפרש בין c ל-h



יהי $\varepsilon>0$. נגדיר r_B כך ש-

$P(B)\le\varepsilon \wedge \forall\, r_B<r_{B'}$ מתקיים $P(B')>\varepsilon$

נבחין $\exists\, d\in D \wedge d\in B \to \hat{r}\le r_\varepsilon \to h_{\hat{r}}\subseteq h_{r_\varepsilon}$

ומכיוון ש $P(B)=\varepsilon$ נסיק ש-$h_{\hat{r}}$ טועה בהסתברות $<\varepsilon$.

הדרך היחידה לקבל טעות $> \varepsilon$ היא שקיימת d שכזו.

לכן, אם אין d שכזו ב-D, הטעות האפשרית קטנה מ-ε.

$$P(\{D \in X^m : Err(L(D), c) > \varepsilon\}) \le P(\forall d \in D.\ d \notin B) = (1-\varepsilon)^m \le e^{-\varepsilon m}$$

[אף דגימה לא נופלת ב-B]

ומכאן נסיק:

$$m \ge \frac{\ln \frac{1}{\delta}}{\varepsilon} \longrightarrow e^{-\varepsilon m} \le e^{-\ln(\frac{1}{\delta})} = e^{\ln(\delta)} = \delta$$

$$m \ge \frac{\ln(\frac{1}{\delta})}{\varepsilon}$$

לכן עבור $\boxed{m(\varepsilon,\delta) := \frac{\ln \frac{1}{\delta}}{\varepsilon}}$ נקבל ש-h טועה ב-ε

מהדגימות בסיכוי לכל היותר δ.

4) נסמן $\hat{p} = \frac{r}{n} = 0.2$, $n := 1000$

נחשב את רווח הסמך עבור $\alpha = 0.05$ ע"י $(\hat{p} - 2\hat{\sigma}, \hat{p} + 2\hat{\sigma})$

$$2\hat{\sigma} := \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{1000}} = 0.02$$

וכן נאמר ש: $P(\hat{p} \in (0.18, 0.22)) = 0.95$

כלומר, בסיכוי של 95% ערך הטעות האמיתית המקסימלית

הוא 0.22