# Tugas Besar 1 IF 2123 Aljabar Linier dan Geometri Sistem Persamaan Linier, Determinan, dan Aplikasinya Semester I Tahun 2021/2022



# **KELOMPOK TANPA NAMA**

# Anggota Kelompok:

Mahesa Lizady	13520115
Muhammad Alif Putra Yasa	13520135
Muhammad Gilang R.	13520137

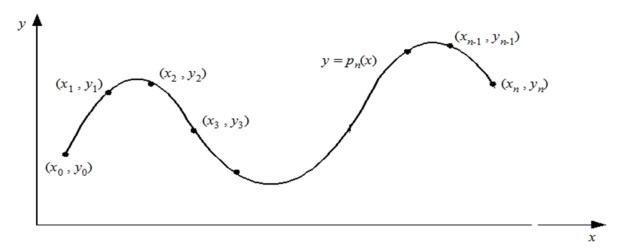
## BAB 1 Deskripsi Masalah

Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. Anda sudah mempelajari berbagai metode untuk menyelesaikan SPL, termasuk menghitung determinan matriks. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan (x = A-1b), dan kaidah Cramer (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

Di dalam Tugas Besar 1 ini, anda diminta membuat satu atau lebih library aljabar linier dalam Bahasa Java. Library tersebut berisi fungsi-fungsi seperti eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, menentukan balikan matriks, menghitung determinan,kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Selanjutnya, gunakan library tersebut di dalam program Java untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang dimodelkan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi, dan persoalan regresi. Penjelasan tentang interpolasi dan regresi adalah seperti di bawah ini.

# I. Interpolasi Polinom

Persoalan interpolasi polinom adalah sebagai berikut: Diberikan n+1 buah titik berbeda, (x0, y0), (x1, y1), ..., (xn, yn). Tentukan polinom pn(x) yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga yi = pn(xi) untuk i = 0, 1, 2, ..., n.



Setelah polinom interpolasi pn(x) ditemukan, pn(x) dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di sembarang titik di dalam selang [x0, xn]. Polinom interpolasi derajat n yang menginterpolasi titik-titik (x0, y0), (x1, y1), ..., (xn, yn). adalah berbentuk pn(x) = a0 + a1x + a2x2 + ... + anxn. Jika hanya ada dua titik, (x0, y0) dan (x1, y1), maka polinom yang menginterpolasi kedua titik tersebut adalah p1(x) = a0 + a1x yaitu berupa persamaan garis lurus. Jika tersedia tiga titik, (x0, y0), (x1, y1), dan (x2, y2), maka polinom yang menginterpolasi ketiga titik tersebut adalah p2(x) = a0 + a1x + a2x2 atau persaman kuadrat dan kurvanya berupa parabola. Jika tersedia empat titik, (x0, y0), (x1, y1), (x2, y2), dan (x3, y3), polinom yang menginterpolasi keempat titik tersebut adalah p3(x) = a0 + a1x + a2x2 + a3x3, demikian seterusnya. Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n untuk n yang lebih tinggi asalkan tersedia (n+1) buah titik data. Dengan

menyulihkan (xi, yi) ke dalam persamaan polinom pn(x) = a0 + a1x + a2x2 + ... + anxn untuk i = 0, 1, 2, ..., n, akan diperoleh n buah sistem persamaan lanjar dalam a0, a1, a2, ..., an,

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0$$

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1$$

$$\dots$$

$$a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n$$

Solusi sistem persamaan lanjar ini, yaitu nilai a0, a1, ..., an, diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari. Sebagai contoh, misalkan diberikan tiga buah titik yaitu (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513). Tentukan polinom interpolasi kuadratik lalu estimasi nilai fungsi pada x = 9.2. Polinom kuadratik berbentuk p2(x) = a0 + a1x + a2x2. Dengan menyulihkan ketiga buah titik data ke dalam polinom tersebut, diperoleh sistem persamaan lanjar yang terbentuk adalah

$$a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 = 2.0794$$
  
 $a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 = 2.1972$   
 $a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 = 2.2513$ 

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan a0 = 0.6762, a1 = 0.2266, dan a2 = -0.0064. Polinom interpolasi yang melalui ketiga buah 2 titik tersebut adalah p2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x2. Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada x = 9.2 dapat ditaksir sebagai berikut: p2(9.2) = 0.6762 + 0.2266(9.2) - 0.0064(9.2)2 = 2.2192.

# II. Regresi Linier Berganda

Regresi Linear (akan dipelajari lebih lanjut di Probabilitas dan Statistika) merupakan salah satu metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan Interpolasi Polinom. Meskipun sudah ada rumus jadi untuk menghitung regresi linear sederhana, terdapat rumus umum dari regresi linear yang bisa digunakan untuk regresi linear berganda, yaitu.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap βi dapat digunakan Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression sebagai berikut:

$$nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} + \dots + b_k \sum_{i=1}^n x_{ki} = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$b_0 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} + \dots + b_k \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{ki} = \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$b_0 \sum_{i=1}^n x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{ki} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{ki} x_{2i} + \dots + b_k \sum_{i=1}^n x_{ki}^2 = \sum_{i=1}^n x_{ki} y_i$$

Sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

# **BAB 2 Teori Singkat**

#### 1. Eliminasi Gauss

Solusi sebuah SPL diperoleh dengan menerapkan OBE pada matriks augmented sampai terbentuk matriks eselon baris atau matriks eselon baris tereduksi. Jika berakhir pada matriks eselon baris maka disebut metode eliminasi Gauss Nyatakan SPL dalam bentuk matriks augmented. Kemudian Terapkan OBE pada matriks augmented sampai terbentuk matriks eselon baris

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix} \sim \text{OBE} \sim \begin{bmatrix} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

Pecahkan persamaan yang berkoresponden pada matriks eselon baris dengan teknik penyulihan mundur (backward substitution)

#### 2. Eliminasi Gauss-Jordan

Merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss. Operasi baris elementer (OBE) diterapkan pada matriks augmented sehingga menghasilkan matriks eselon baris tereduksi.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \sim \text{OBE} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

Tidak diperlukan lagi substitusi secara mundur untuk memperoleh nilai-nilai variabel. Nilai variabel langsung diperoleh dari matriks augmented akhir.

### 3. Determinan

Menghitung determinan dari sebuah matriks dapat dilakukan dengan reduksi baris atau menggunakan ekspansi kofaktor.

### a. Reduksi Baris

Determinan matriks A dapat diperoleh dengan melakukan OBE pada matriks A sampai diperoleh matriks segitiga (segitiga bawah atau atas)

$$[A] \stackrel{\text{OBE}}{\sim} [\text{matriks segitiga bawah}]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{OBE}} \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & a'_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

maka 
$$\det(A) = (-1)^p a'_{11} a'_{22} \dots a'_{nn}$$

### b. Ekspansi Kofaktor

Misalkan A adalah matriks berukuran n x n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Didefinisikan:

Mij = minor entri aij

= determinan upa-matriks (submatrix) yang elemen-elemennya tidak berada pada baris i dan kolom j

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = \text{kofaktor entri } a_{ij}$$

#### 4. Matriks Balikan

Misalkan A adalah matriks persegi berukuran n x n. Balikan (inverse) matriks A adalah A-1 sedemikian sehingga AA-1 = A-1A = I (Matriks Identitas). Matriks identitas adalah matriks persegi yang elemen-elemen pada diagonal utamanya 1 dan elemen-elemen diluar diagonal utama bernilai 0. Syarat dari bisa-tidaknya dibuat matriks balikan dari sebuah matriks (inversible) adalah matriks tersebut merupakan matriks persegi dan determinan matriks tersebut tidaklah 0. Balikan matriks A dapat dihitung dengan menggunakan metode reduksi baris atau menggunakan ekspansi kofaktor

#### Matriks Kofaktor

Matriks Kofaktor terdiri dari determinan dari minor dari sebuah matriks. Mij atau minor entri aij merupakan determinan upa-matriks (submatrix) yang elemen-elemennya tidak berada pada baris i dan kolom j. Misalkan A adalah matriks n x n dan Cij adalah kofaktor entri aij. Maka matriks kofaktor dari A adalah

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

# 6. Matriks Adjoin

Matriks adjoin merupakan transpose dari matriks kofaktor dari sebuah matriks. Transpose merupakan operasi yang menukar semua baris dengan semua kolom pada sebuah matriks. Adjoin dari Matriks A didefinisikan dengan adj(A).

# 7. Kaidah Cramer

sebuah sistem persamaan linear Ax = b dapat diselesaikan dengan mengubah A menjadi sebuah matriks. Untuk setiap xn , nilai dari xn adalah nilai determinan dari An dibagi dengan determinan dari A . An adalah matriks A dengan kolom ke-n ditukar dengan nilai-nilai pada b.

# 8. Interpolasi Polinom

jika terdapat n-jumlah titik pada sebuah bidang datar, dapat dicari sebuah polinom yang menghubungkannya yaitu

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

Dengan menyulihkan (xi, yi) ke dalam persamaan polinom di atas y = pn(x) untuk i = 0, 1, 2, ..., n, akan diperoleh n + 1 buah persamaan lanjar dalam a0, a1, a2, ..., an,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n &= y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_2^n &= y_2 \\ \dots & \dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n &= y_n \end{aligned}$$

Solusi sistem persamaan lanjar ini diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss maupun Gauss Jordan

# 9. Regresi Linier Berganda

Analisis regresi linear berganda adalah Salah satu bentuk analisis regresi linier di mana variabel bebasnya lebih dari satu. Dengan menggunakan metode gauss terhadap spl yang terbentuk dapat ditentukan regresinya

# BAB 3 Implementasi Pustaka dan Program dalam Java

1. Main.java void main(String[] args) { Mengeksekusi program } 2. Menu.java Method yang terdapat dalam Menu.java: int mainMenu() { mencetak ke layar fitur fitur utama program } int submenu\_spl() { mencetak ke layar sub menu dari fitur spl } int submenu\_determinan() { mencetak ke layar sub menu dari fitur determinan } int submenu\_invers() { mencetak ke layar sub menu dari fitur invers } int input() { mencetak ke layar pilihan input data yang digunakan } 3. Matrix.java Atribut yang terdapat di Matrix.java: Double[][] data; { Berisi Matrix } Integer colNum; { Berisi jumlah kolom } Integer rowNum; { Berisi jumlah baris } Scanner sc = new Scanner(System.in);

Method yang terdapat dalam Matrix.java:

```
Matrix(Double[][] input);
{ Konstruktor Matrix dari array of Double }
Matrix(int inputRow, int inputCol, Double init);
{ Konstruktor Matrix dari jumlah kolom dan jumlah baris,
  Matrix berukuran inputRow x inputCol dengan semua nilai
  di Matrix bernilai init }
Matrix(int inputRow, int inputCol);
{ Sama seperti konstruktor di atas, tetapi menginisialisasi
  isi Matrix dengan null }
Matrix();
{ Konstruktor kosong }
void display();
{ I.S. Matrix berisi
  F.S. Matrix didisplay ke layar }
void deepclone(Matrix M);
{ I.S. Matrix self berisi dan berdimensi sama dengan M
  F.S. Matrix M berisi sama dengan Matrix self }
boolean isSquare();
{ Menentukan apakah Matrix persegi }
Matrix transpose();
{ Mentranspose Matrix }
Double determinant(int row);
{ Determinan menggunakan metode Ekspansi Kofaktor
  di baris row dengan Implementasi yang sama dengan
  detEksKof di Determinan.java }
Double determinant();
{ Sama seperti fungsi di atas tetapi row = 0 }
Matrix subMatrix(int rowIdx, int colIdx);
{ Menghasilkan Matrix dengan baris rowIdx dan kolom
  colIdx dihilangkan }
Matrix minor();
```

```
{ Menghasilkan minor dari Matrix }
  Matrix cofactor();
  { Menghasilkan kofaktor dari Matrix }
  void readMatrix();
   { Mengisi Matrix self dari keyboard. Apabila belum
    diinisialisasi, meminta jumlah baris dan kolom lalu
    mengisi Matrix }
  parseFile();
   { Mengisi Matrix self dari file. User akan diminta
    untuk memasukkan path ke file melalui keyboard }
  int fileRowNum(String path);
   { Menghasilkan jumlah baris dari sebuah file Matrix }
  int fileColNum(String path);
   { Menghasilkan jumlah kolom dari sebuah file Matrix }
4. SPL.java
  Method yang terdapat dalam SPL.java:
  void SWAP(Double a, Double b);
  { Menukar suatu variable bertipe data double }
  void FillMatrix();
  { Mengisi/menginput matriks inputan dari keyboard atau dari
  file.txt }
  void Gauss_elimination(int m, int n, Matrix MATRIKS);
  { Melakukan operasi gauss elimination }
  void Gauss_Jordan_elimination(int m, int n, Matrix MATRIKS);
  { Melakukan iterasi lanjut dari gauss elimination berupa
  subtitusi penyulihan }
  int banyaknya_baris_nol(Matrix MATRIKS, int n, int m);
   { Menghitung banyaknya baris yang seluruh kolomnya bernilai
  nol }
```

```
boolean Apakah_ada_Solusi(int n, int m, Matrix MATRIKS);
   { Memeriksa apakah SPL tersebut memiliki solusi atau tidak,
  jika tidak memiliki solusi maka terdapat suatu baris yang
  mengandung nilai nol dari kolom pertama sampe koloim }.
  int BanyaknyaVariabel_Parametrik(int m, int n, Matrix
  MATRIKS);
   { Menghitung banyaknya variabel parametrik dari suatu solusi
  SPL }
  hasilOutput Gauss_Solution(int m, int n, Matrix MATRIKS);
  { Melakukan proses subtitusi/penyulihan terhadap hasil dari
  gauss elimination, kemudian akan dihasilkan solusi dari SPL
  yang diberikan user }
  hasilOutput SPL_Matriks_balikan(int m, int n, Matrix MATRIKS);
   { Melakukan proses operasi X = A^{-1} * B, kemudian disertai
  output dari SPL yang dihasilkan }
  hasilOutput SPL_Cramer(int m, int n, Matrix MATRIKS);
  { Melakukan proses pencari Solusi SPL dengan metode cramer
   (dengan meninjau determinan dari matriks augmented), kemudian
  disertai output berupa solusi dari SPL yang diberikan user }
5. Determinan.java
  Method yang terdapat dalam Determinan.java:
  boolean isZero(Double a)
   { Pembandingan Double dan Zero dengan
    toleransi sebesar epsilon }
  Matrix removeCol(Matrix M, int idxCol)
   { Menghasilkan Matrix baru, yang berisi Matrix
    M dengan kolom idxCol dihilangkan }
  Matrix removeRow(Matrix M, int idxRow)
   { Menghasilkan Matrix baru, yang berisi Matrix
    M dengan baris idxRow dihilangkan }
  Matrix removeRowCol(Matrix M, int idxRow, int idxCol)
   { Menghasilkan Matrix baru, yang berisi Matrix
    M dengan baris idxRow dan kolom idxCol dihilangkan }
```

```
Double detEksKof(Matrix M)
  { Menghitung determinan Matrix dengan metode
    Ekspansi Kofaktor }
  void rowSwap(Matrix M, int idx1, int idx2)
  { Menukar posisi baris idx1 dan idx2 di M }
  void addMultiOfRow(Matrix M, int idxMain, int idxSecond,
  Double k)
   { Menambahkan baris idxMain dengan k kali baris idxSecond di
    Matrix M }
  HasilSeg toSegBawah(Matrix MAwal)
   { Membentuk Matrix baru yaitu Matrix MAwal yang diubah
    menjadi Matrix segitiga bawah. Output berupa class HasilSeg
    yang memiliki atribut Matrix dan Swap }
  HasilSeg toSegAtas(Matrix MAwal)
   { Membentuk Matrix baru yaitu Matrix MAwal yang diubah
    menjadi Matrix segitiga atas. Output berupa class HasilSeg
    yang memiliki atribut Matrix dan Swap }
  Double detOBE(Matrix M)
   { Menghitung determinan Matrix dengan metode
    Operasi Baris Elementer }
6. Determinan$HasilSeg
  Atribut pada class HasilSeg:
  Matrix matrix;
  { Berisi matrix yang telah diubah menjadi Matrix Segitiga
  Atas/Bawah }
  int swap;
  { Berisi berapa banyak pertukaran baris yang dilakukan }
  Metode pada class HasilSeg:
  HasilSeg(Matrix mat, int swp)
   { Konstruktor dari Matrix dan swap }
```

# 7. MatriksBalikan.java

Method yang terdapat dalam MatriksBalikan.java: Matrix transpose(Matrix M) { Menghasilkan transpose matriks dari M } Matrix copy(Matrix M) { Menghasilkan Matriks yang merupakan salinan dari Matriks M } boolean IsIdentitas(Matrix M) { Menghasilkan True jika Matriks M merupakan Matriks Identitas} void multiplycons(Matrix M, Double k) { Mengalikan setiap elemen matriks dengan konstanta k } Matrix MergeIdentitas(Matrix M) { Menghasilkan matriks dengan besar kolom 2 kali lipat yang merupakan gabungan matriks M dan matriks Identitas} Matrix SplitColIdentitas(Matrix M) { Menghasilkan Matriks dengan Memisahkan setengah ukuran kolom sebelah kiri yang merupakan matriks Identitas sehingga didapatkan matriks hasil OBE } boolean isHaveInversKof(Matrix M) { Menghasilkan true jika determinan Matriks tidaklah nol } Matrix InversAdjoin(Matrix M) {Menghasilkan Matrix Balikan dengan menggunakan metode Adjoin} boolean isHaveInversGaussJordan(Matrix M) { Menghasilkan true jika setelah dilakukan gauss jordan jika setengah ukuran kolom sebelah kiri matriks M merupakan matriks Identitas } int indeks0(int i, Matrix M) { Menghasilkan indeks dengan nilai 0 paling ujung di sebuah baris i Matriks M }

```
void satuan(int i, Matrix M)
  { Membuat elemen tidak 0 pada baris i di Matrix M menjadi satu
  utama }
  void Gauss(Matrix M)
   { Melakukan Metode Gauss pada Matrix M }
  int indeks1(int i, Matrix M)
   { menghasilkan indeks pada baris i pada Matriks M yang
  bernilai 1 di awal baris }
  void reduksiJordan(int i, int i1, Matrix M)
   { Melakukan Fase mundur (backward phase) pada baris di Matrix
  sehingga}
  void GaussJoran(Matriks M)
  { dilakukan Metode GaussJordan agar dihasilkan nilai 0 diatas
  satu utama }
  hasilOutput P_InversGaussJordan(Matrix M)
   { hasil Output yang akan ditampilkan di menu }
  hasilOutput P_InversAdjoin(Matrix M)
   { hasil Output yang akan ditampilkan di menu }
8. HasilOutput.java
  Atribut dalam HasilOutput.java:
  ArrayList<String> output = new ArrayList<String>();
  { Array dinamis yang akan menyimpan semua output }
  Method yang terdapat dalam HasilOutput.java:
  void add(String s)
  { Menambahkan String s ke Array output }
  void addHasil(hasilOutput res)
   { Menambahkan HasilOutput res ke self.output }
  void display()
   { Mendisplay Array ke layar }
```

```
void toFile()
{ Menyimpan Array ke file. Pengguna akan diminta
  untuk memasukkan path ke file melalui keyboard }
9. Interpolasi.java
```

Method yang terdapat dalam Interpolasi.java void readTitik(Matrix M) { Membaca titik-titik yang akan dicari persamaan interpolasinya sebanyak n. dengan n merupakan jumlah titik yang akan diinput dari pengguna } Double pangkat(int i, Double x) { menghasilkan pangkat i dari x } Matrix createInterpolasi(Matrix M) { Menghasilkan Matriks Interpolasi dari titik-titik yang sebelumnya sudah dibaca } Matrix SplitHasilInterpolasi(Matrix M) { menghasilkan matriks yang merupakan hasil Interpolasi } Interp(Matrix M) { Melakukan interpolasi, memanggil method createInterpolasi, Gauss Jordan di file MatriksBalikan.java, dan SplitHasilInterpolasi, sehingga didapatkan Matriks Hasil Interpolasi } hasil Output solution(Matrix M) { Menghasilkan fungsi Interpolasi dalam bentuk  $f(x) = a + bx^2$ +...} hasilOutput estimate(Matrix M, double x) { Menghasilkan nilai taksiran dari x terhadap fungsi interpolasi f(x) } Double findY(Double x, Matrix M) { Menghasilkan nilai taksiran x pada persamaan Interpolasi f(x)

# 10. Regresi\_linier\_berganda.java

Method yang digunakan sebagai berikut.

```
void SWAP(Double a, Double b)
{ Berisi method yang digunakan untuk menukar elemen, method
ini bisa digunakan untuk array maupun matriks juga }
hasilOutput RegresiLinear(int inputType)
{ berisi metode-metode untuk menyelesaikan masalah yang
berkaitan dengan regresi linier berganda. Kemudian di akhir
disertai output dari persamaan regresi dan nilai taksiran yang
dihasilkan }
```

# **Bab 4 Eksperimen**

# Dengan Gauss Elimination

1a.

```
MEMU

1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1

Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 1

1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan jumlah Baris: 4
Masukkan Jumlah Baris: 4
Masukkan Jumlah Kolom: 5
Matrix:
1 1 - 1 - 1 1
2 5 - 7 - 5 - 2
2 - 1 1 3 4
5 2 - 4 2 6
Tidak Ada Solusi
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test1_gauss_elimination.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 1a.1

# **Dengan Gauss Jordan Elimination**

```
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 2
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 4
Masukkan Jumlah Kolom: 5
Matrix:
1 1 -1 -1 1
2 5 -7 -5 -2
2 -1 1 3 4
5 2 -4 2 6
Tidak Ada Solusi
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test1_gauss_jordan_elimination.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 1a.2

# **Dengan Metode Matriks Balikan**

```
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 3
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 4
Masukkan Jumlah Kolom: 5
Matrix:
2 5 -7 -5 -2
2 -1 1 3 4
5 2 -4 2 6
Matriks Singular
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test1_metode_matriks_balikan.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 1a.3

## **Dengan Kaidah Cramer**

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan: 4
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 4
Masukkan Jumlah Kolom: 5
Matrix:
2 -1 1 3 4
5 2 -4 2 6
Matriks Singular
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test1_cramer.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 1a.4

Pada SPL, jika menggunakan metode Gauss Elimination ataupun Gauss Jordan Elimination, maka jika matriks hasil operasinya terdapat baris yang kolom ke 1 sampai kolom ke-n - 1 nya semuanya nol dan kolom ke-n nya tidak nol, maka komputer akan mengeluarkan pesan "tidak ada solusi". jika tidak, maka Matriks epsilon baris yang telah didapat dari operasi gauss atau gauss jordan yang dihasilkan akan dieksekusi lebih lanjut untuk mencari solusi dari SPL tersebut, yaitu dengan metode substitusi/penyulihan pada matriks eselon baris tereduksi maupun tidak tereduksi. Pada kasus ini, terdapat baris dari matriks eselon baris yang dihasilkan melanggar aturan tersebut, sehingga SPL ini tidak memiliki solusi. Untuk metode cramer dan metode balikan, matriks inputan di cek dulu apakah determinannya nol atau tidak tidak, jika nol maka akan langsung mengeluarkan pesan "Matriks singular", jika tidak maka matriks akan dieksekusi lebih lanjut. Pada kasus ini, determinan dari matriks = 0, sehingga komputer akan mengeluarkan pesan "Matriks singular".

# 1b. **Dengan Gauss Elimination**

```
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
 Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 1
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 4
Masukkan Jumlah Kolom: 6
Matrix:
1 -1 0 0 1 3
110-306
2 -1 0 1 -1 5
-1 2 0 -2 -1 -1
Solusinya:
X 1 = 3.0 - a 2
X_2 = 1.5 + 0.5a_2
X_3 = a_1
X_4 = -1.0 + a_2
X_5 = a_2
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test2 gauss elimination.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 1b.1

#### **Gauss Jordan Elimination**

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 2
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 4
Masukkan Jumlah Kolom: 6
Matrix:
1 -1 0 0 1 3
110-306
2 -1 0 1 -1 5
-1 2 0 -2 -1 -1
Solusinya:
X_1 = 3.0 + a_2
X_2 = 2.0a_2
X_3 = a_1
X_4 = -1.0 + a_2
X_5 = a_2
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test2_gauss_jordan_elimination.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 1b.2

#### **Metode Matriks Balikan**

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1

Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 3

1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1

Masukkan Jumlah Baris: 4
Masukan Jumlah Baris: 4
Masukkan Jumlah Kolom: 6
Matrix:
1 -1 0 0 1 3
1 1 0 -3 0 6
2 -1 0 1 -1 5
-1 2 0 -2 -1 -1
Maaf tidak bisa memakai metode ini, silahkan pakai metode gauss elimination atau gauss jordan elimination Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test2_metode_matriks_balikan.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 1b.3

### Kaidah Cramer

```
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan: 4
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 4
Masukkan Jumlah Kolom: 6
Matrix:
1 1 0 -3 0 6
2 -1 0 1 -1 5
-1 2 0 -2 -1 -1
Maaf tidak bisa memakai metode ini, silahkan pakai metode gauss elimination atau gauss jordan elimination
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test2_kaidah_cramer.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 1b.4

Perhatikan bahwa m  $\neq$  n - 1, sehingga tidak bisa menggunakan metode matriks balikan dan kaidah cramer. Karena tidak menggunakan metode cramer maka akan langsung diberikan pesan "Maaf tidak bisa memakai metode ini, silahkan pakai metode gauss elimination atau gauss jordan elimination". Namun, untuk eliminasi gauss elimination dan gauss jordan elimination masih bisa dipakai untuk menyelesaikan SPL-nya. Pada kasus ini, dengan menerapkan gauss elimination sehingga diperoleh matriks eselon baris yaitu :

```
1.0
    -1.0
            0.0
                  0.0
                        1.0
                                3.0
                        -0.5
0.0
            0.0 - 1.5
                               1.5
      1.0
0.0
      0.0
            0.0
                      -1.0 -1.0
                1.0
      0.0
0.0
            0.0
                  0.0
                         0.0
                                0.0
```

Sehingga dengan subtitusi/penyulihan, maka akan diperoleh solusi seperti gambar 1b.1.

Jika menggunakan Gauss Jordan Elimination, akan diperoleh:

```
1.0
     0.0
          0.0
               0.0 - 1.0
                           3.0
0.0
    1.0
          0.0 \quad 0.0 \quad -2.0
                           0.0
0.0
     0.0
          0.0 1.0 -1.0 -1.0
0.0
     0.0
                           0.0
          0.0
              0.0
                      0.0
```

Sehingga dengan subtitusi/penyulihan, maka akan diperoleh solusi seperti gambar 1b.2.

```
MENU
 1. Sistem Persamaan Linier
 2. Determinan

    Beterinis
    Matriks Balikan
    Interpolasi Polinom
    Regresi linier berganda
    Keluar

Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
 3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 1
1. Input dari Keyboard
 2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 3
Masukkan Jumlah Kolom: 7
0 1 0 0 1 0 2
0 0 0 1 1 0 -1
0 1 0 0 0 1 1
0 1 0 0 0 1 1

Solusinya:

X_1 = a_1

X_2 = 2.0

X_3 = a_2

X_4 = -1.0

X_5 = 1.0 + a_3
 X_6 = a_3
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: testc_metode_eliminasi_gauss.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 1c.1

### **Metode Gauss-Jordan Elimination**

```
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 2
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 3
Masukkan Jumlah Kolom: 7
Matrix:
0100102
000110-1
0100011
Solusinya:
X_1 = a_1
X_2 = 1.0 - a_3
X_3 = a_2
X_4 = -2.0 - a_3
X_5 = 1.0 + a_3
X_6 = a_3
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test1c_metode_gauss_jordan_elimination.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 1c.2

#### Metode Matriks Balikan

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1

Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 3

1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilhan: 1

Masukkan Jumlah Baris: 3

Masukkan Jumlah Baris: 3

Masukkan Jumlah Kolom: 7

Matrix:
0 1 0 0 1 0 2
0 0 0 1 1 0 -1
0 1 0 0 0 1 1

Maaf tidak bisa memakai metode ini, silahkan pakai metode gauss elimination atau gauss jordan elimination simpan ke file? (y/n): y
File Path: test1c_metode_matriks_balikan.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 1c.3

#### Kaidah Cramer

```
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 4
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 3
Masukkan Jumlah Kolom: 7
Matrix:
0100102
000110-1
0100011
Maaf tidak bisa memakai metode ini, silahkan pakai metode gauss elimination atau gauss jordan elimination
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test1c_kaidah_cramer.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 1c.4

Dengan cara yang sama dengan test case 1b, untuk metode matriks balikan dan kaidah cramer tidak bisa dipakai untuk menyelesaikan SPL pada kasus ini. Namun, solusi SPL bisa ditentukan dengan memakai metode Gauss Elimination atau Gauss Jordan Elimination. Dengan Gauss Elimination, diperoleh matriks eselon baris sebagai berikut.

```
0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 2.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 0.0 -1.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0
```

Kemudian matriks eselon baris tersebut akan dikenakan substitusi/penyulihan, sehingga diperoleh hasil yang sama seperti gambar 1c.1

Untuk metode Gauss Jordan Elimination, diperoleh matriks eselon baris tereduksi sebagai berikut.

```
0.0 1.0
        0.0
             0.0
                 0.0
                     1.0 1.0
0.0
    0.0
        0.0 1.0
                 0.0
                     1.0 - 2.0
0.0
                     -1.0 1.0
    0.0
        0.0
             0.0
                 1.0
```

Kemudian matriks eselon baris tersebut akan dikenakan substitusi/penyulihan, sehingga diperoleh hasil yang sama seperti gambar 1c.2

Perhatikan bahwa meskipun secara kasat mata x\_2 dan x\_4 yang dihasilkan oleh metode gauss elimination dan gauss jordan elimination berbeda. Namun, karena bentuknya berupa variabel parametrik, secara aljabar bisa dibuktikan bahwa sebenarnya kedua solusi sama.

## 1d. Gauss Elimination

```
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 1
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 6
Masukkan Jumlah Kolom: 7
0.5 0.333333333333333 0.25 0.2 0.16666666666666 0.1428571428571429 0
0.33333333333333 0.25 0.2 0.16666666666666 0.1428571428571429 0.125 0
0.2\ 0.1666666666666667\ 0.1428571428571429\ 0.125\ 0.1111111111111111\ 0.1\ 0
Solusinya:
X_1 = 35.9999999847802
X_2 = -629.999999566915
X 3 = 3359.999999708951
X_4 = -7559.999999248051,
X_{5} = 7559.99999917505,
X 6 = -2771.9999996766783
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test1d_gauss_elimination
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 1d.1

#### **Metode Gauss Jordan Elimination**

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
   Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
 Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan

    Metode matriks balikan
    Kaidah Cramer

Masukan pilihan : 2

    Input dari Keyboard
    Input dari File txt

Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 6
Masukkan Jumlah Kolom: 7
Matrix:
1 0.5 0.333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666666 1
0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666 0.1428571428571429 0
0.333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666 0.1428571428571429 0.125 0
0.25 0.2 0.16666666666666 0.1428571428571429 0.125 0.111111111111111 0
0.2 0.16666666666666 0.1428571428571429 0.125 0.11111111111111 0.1 0
Solusinya
X_1 = 35.99999999847773,
X_2 = -629.9999999566912,
X_3 = 3359.999999708951,
X_4 = -7559.999999248051,
X_5 = 7559.99999917505,
X 6 = -2771.9999996766783
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test1d_gauss_jordan.txt
Penyimpanan berhasil!
```

#### Gambar 1d.2

#### Metode Matriks Balikan

```
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan

    Interpolasi Polinom
    Regresi linier berganda

6. Keluar
Masukan pilihan : 1
 Pilih metode untuk menvelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan

    Metode matriks balikan
    Kaidah Cramer

Masukan pilihan : 3

    Input dari Keyboard
    Input dari File txt

Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 6
Masukkan Jumlah Kolom: 7
1 0.5 0.33333333333333 0.25 0.2 0.166666666666666666 1
0.5 0.3333333333333 0.25 0.2 0.16666666666666 0.1428571428571429 0
0.333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666 0.1428571428571429 0.125 0
X_1 = 35.9999999847885
A_1 = 53.999999947683

X_2 = -629.9999999566953

X_3 = 3359.999997089526

X_4 = -7559.9999992480525

X_5 = 7559.99999917505
X_{6} = -2771.9999996766783
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test1d_matrikd_balikan.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 1d.3

#### Kaidah Cramer

```
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
 3. Matriks Balikan

    Interpolasi Polinom
    Regresi linier berganda

Masukan pilihan : 1
 Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier

    Metode eliminasi Gauss
    Metode eliminasi Gauss-Jordan

3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 4

    Input dari Keyboard
    Input dari File txt

Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 6
Masukkan Jumlah Kolom: 7
Matrix:
1 0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.166666666666667 1
0.5 0.33333333333333 0.25 0.2 0.16666666666667 0.1428571428571429 0
0.333333333333333 0.25 0.2 0.16666666666667 0.1428571428571429 0.125 0
0.25 0.2 0.16666666666666667 0.1428571428571429 0.125 0.111111111111111 0
 0.2 0.1666666666666667 0.1428571428571429 0.125 0.111111111111111 0.1 0
 0.166666666666667 \ 0.1428571428571429 \ 0.125 \ 0.111111111111111 \ 0.1 \ 0.0909090909090909 \ 0 \\
X 1 = 35.9999999856245
 X_2 = -629.9999999598704
X 3 = 3359.999999705091
 X_4 = -7559.999999258531
 X_{5}^{-} = 7559.999999187963
 X 6 = -2771.999999682325
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test1d_kaidah_cramer.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 1d.4

Perhatikan bahwa untuk Gauss Elimination, Gauss Jordan Elimination, dan metode matriks balikan diperoleh hasil yang sama. Namun, kalau dengan kaidah cramer bisa diperoleh hasil yang sedikit berbeda pada angka dibelakang komanya. Perbedaan tersebut dikarenakan program menghitung determinan dari matriks inputannya terlebih dahulu. Pada perhitungan tersebut jika nilai yang dihasilkan desimal yang memiliki lebih dari 7 angka dibelakang koma, maka computer akan membulatkannya ke 7 angka dibelakang koma yang terdekat. Untuk metode gaus elimination

```
MENU

1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1

Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 1

1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1

Masukkan Jumlah Baris: 4
Masukkan Jumlah Boris: 4
Masukkan Jumlah Kolom: 5
Matrix:
1 -1 2 -1 -1
2 1 -2 -2 -2
-1 2 -4 1 1
3 0 0 -3 -3
Solusinya:
X.1 = -1.0 + a_2
X.2 = 0.0
X.3 = a_1
X.4 = a_2
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test2_gauss_jordan.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 2a.1

### **Metode Gauss Jordan Elimination**

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 2
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 4
Masukkan Jumlah Kolom: 5
Matrix:
1 -1 2 -1 -1
2 1 -2 -2 -2
-1 2 -4 1 1
3 0 0 -3 -3
Solusinya:
X_1 = -1.0 + a_2
X_2 = 0.0
X_3 = a_1
X 4 = a 2
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test2a_gauss_jordan_elimination.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 2a.2

#### Metode Matriks Balikan

```
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 3

    Input dari Keyboard
    Input dari File txt

Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 4
Masukkan Jumlah Kolom: 5
Matrix:
3 0 0 -3 -3
Matriks Singular
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test2a_matriks_balikan.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 2a.3

#### Kaidah Cramer

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 4
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 4
Masukkan Jumlah Kolom: 5
Matrix:
1 -1 2 -1 -1
2 1 -2 -2 -2
-1 2 -4 1 1
3 0 0 -3 -3
Matriks Singular
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test2a_cramer.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 2a.4

Jika dengan metode Gauss Elimination, maka diperoleh matriks eselon baris sebagai berikut.

```
1.0 -1.0 2.0 -1.0 -1.0
```

```
      0.0
      1.0
      -2.0
      0.0
      0.0

      0.0
      0.0
      0.0
      0.0
      0.0

      0.0
      0.0
      0.0
      0.0
      0.0
```

Dengan cara yang sama, jika dengan metode Gauss Jordan Elimination, maka akan diperoleh matriks eselon baris tereduksi sebagai berikut.

Sehingga bila diterapkan susbtitusi/penyulihan, maka akan diperoleh output seperti digambar 2a.1. dan 2a.2

### 2b. Metode Gauss Elimination

```
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 1

    Input dari Keyboard
    Input dari File txt

Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 6
Masukkan Jumlah Kolom: 5
2 0 8 0 8
0 1 0 4 6
-4 0 6 0 6
0 -2 0 3 -1
2 0 -4 0 -4
0 1 0 -2 0
Solusinya :
X_1 = 0.0,
X_2 = 2.0,
X_3 = 1.0,
X_4 = 1.0
N_4 = 1.0
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test2b_gauss_elimination.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 2b.1

# **Metode Gauss Jordan Elimination**

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 2
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 6
Masukkan Jumlah Kolom: 5
Matrix:
20808
01046
-40606
0 -2 0 3 -1
2 0 -4 0 -4
0 1 0 -2 0
Solusinya:
X_1 = 0.0,
X_2 = 2.0,
X_3 = 1.0,
X_4 = 1.0
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test2b_gauss_jordan_elimination.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 2b.2

#### **Metode Matriks Balikan**

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1

Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 3

1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1

Masukkan Jumlah Baris: 6
Masukkan Jumlah Boris: 6
Masukkan Jumlah Kolom: 5
Matrix:
2 0 8 0 8
0 1 0 4 6
-4 0 6 0 6
0 -2 0 3 -1
2 0 -4 0 -4
0 1 0 -2 0

Maaf tidak bisa memakai metode ini, silahkan pakai metode gauss elimination atau gauss jordan elimination Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test2b_matriks_balikan.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 2b.3

#### Kaidah Cramer

```
1. Sistem Persamaan Linier
   Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
Masukan pilihan : 4
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 6
Masukkan Jumlah Kolom: 5
Matrix:
20808
01046
-40606
0 -2 0 3 -1
2 0 -4 0 -4
0 1 0 -2 0
Maaf tidak bisa memakai metode ini, silahkan pakai metode gauss elimination atau gauss jordan elimination
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test2b_kaidah_cramer.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 2b.4

Perhatikan bahwa m  $\neq$  n -1, sehingga tidak bisa memakai metode matriks balikan dan kaidah cramer. Namun, solusinya bisa ditentukan dengan menggunakan metode Gauss Elimination ataupun Gauss Jordan Elimination.

Dengan metode Gauss Elimination, diperoleh matriks eselon baris sebagai berikut.

```
0.0
          4.0
               0.0
                    4.0
0.0
                    6.0
     1.0
          0.0
               4.0
0.0
                    1.0
     0.0
          1.0
               0.0
0.0
     0.0
          0.0
               1.0
                    1.0
     0.0
0.0
          0.0 0.0
                    0.0
0.0
     0.0
          0.0
               0.0
                    0.0
```

Dengan metode Gauss Jordan Elimination, diperoleh matriks eselon baris tereduksi sebagai berikut.

```
1.0
     0.0
          0.0
               0.0
                     0.0
0.0
     1.0
          0.0
               0.0
                    2.0
0.0
     0.0
          1.0
               0.0
                    1.0
0.0
     0.0
          0.0
               1.0
                    1.0
0.0
     0.0
          0.0
               0.0
                     0.0
0.0
                     0.0
     0.0
          0.0
               0.0
```

Sehingga dengan metode substitusi/penyulihan maka diperoleh solusi SPL yang ditunjukkan oleh gambar 2b.1 dan 2b.2.

```
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 1
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 4
Masukkan Jumlah Kolom: 5
Matrix:
8 1 3 2 0
29-1-21
10643
Solusinya :
X_1 = -0.2243243243243243,
X_2 = 0.18243243243243246,
X_3 = 0.7094594594594594,
X_4 = -0.25810810810810797
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test3a_gauss_elimination.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 3a.1

## **Metode Gauss Jordan Elimination**

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 2
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 4
Masukkan Jumlah Kolom: 5
Matrix:
8 1 3 2 0
2 9 -1 -2 1
1 3 2 -1 2
10643
Solusinya :
X_1 = -0.2243243243243243
X_2 = 0.18243243243243246,
X_3 = 0.7094594594594594,
X_4 = -0.25810810810810797
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test3a_gauss_jordan_elimination.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 3a.2

#### Metode Matriks Balikan

```
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 3
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 4
Masukkan Jumlah Kolom: 5
Matrix:
8 1 3 2 0
2 9 -1 -2 1
1 3 2 -1 2
10643
X_1 = -0.2243243243243243
X_2 = 0.18243243243243243
X_3 = 0.7094594594594593
X_4 = -0.25810810810810814
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test3a_matriks_balikan.txt
Penyimpanan berhasil!
```

#### Gambar 3a.3

#### Kaidah Cramer

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 4
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 4
Masukkan Jumlah Kolom: 5
Matrix:
8 1 3 2 0
2 9 -1 -2 1
1 3 2 -1 2
10643
X_1 = -0.22432432432432414
X_2 = 0.1824324324324324
X_3 = 0.7094594594594594
X_4 = -0.25810810810810797
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test3a_kaidah_cramer.txt
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 3a.4

Sama seperti test casae 1b, untuk dengan menggunakan kaidah cramer, terjadi pembulatan pada determinan yang dihasilkan, sehingga hasilnya pun sedikit berbeda jika dibandingkan dengan metode gauss elimination, gauss jordan elimination, dan metode matriks balikan. Hasilnya bisa dilihat di gambar 3a.1, 3a.2, 3a.3, dan 3a.4.

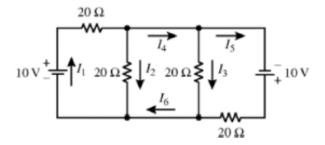
3b. Biila diterapkan Gauss Elimination, diperoleh sebagai berikut.

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 1
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 12
Masukkan Jumlah Kolom: 10
Matrix:
00000011113
00011100015
1110000008
0 0 0.04289 0 0.04289 0.75 0.04289 0.75 0.61396 14.79
0 0.25 0.91421 0.25 0.91421 0.25 0.91421 0.25 0 14.31
0.61396 0.75 0.04289 0.75 0.04289 0 0.04289 0 0 3.81
00100100118
01001001012
1001001006
0.04289 0.75 0.61396 0 0.04289 0.75 0 0 0.04289 10.51
0.91421 0.25 0 0.25 0.91421 0.25 0 0.25 0.91421 16.13
0.04289 0 0 0.75 0.04289 0 0.61396 0.75 0.04289 7.04
Tidak Ada Solusi
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test3b_spl
Penyimpanan berhasil!
```

Gambar 3b.

4

Tentukan arus yang mengalir pada rangkaian listrik di bawah ini:



Dengan menggunakan kvl dan kcl, maka dari soal tersebut dapat dideduksikan persamaan sebagai berikut.

$$20I_{1} + 20I_{2} = 10....(1)$$

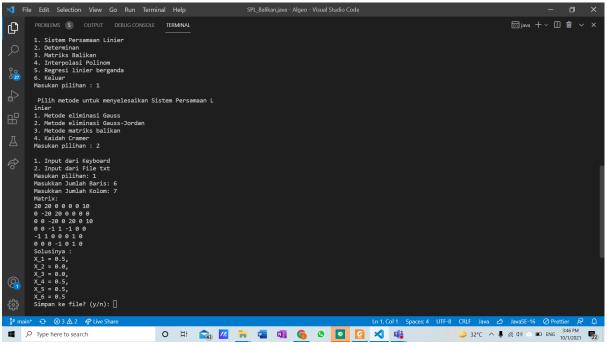
$$-20I_{2} + 20I_{3} = 0....(2)$$

$$-20I_{3} + 20I_{5} = 10....(3)$$

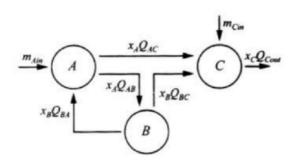
$$I_{4} - I_{3} - I_{5} = 0....(4)$$

$$I_{6} - I_{1} + I_{2} = 0....(5)$$

$$I_{6} - I_{4} = 0.....(6)$$



5



Dengan laju volume Q dalam  $m^3/s$  dan input massa  $m_{in}$  dalam mg/s. Konservasi massa pada tiap inti reaktor adalah sebagai berikut:

A: 
$$m_{A_{in}} + Q_{BA}x_B - Q_{AB}x_A - Q_{AC}x_A = 0$$
  
B:  $Q_{AB}x_A - Q_{BA}x_B - Q_{BC}x_B = 0$   
C:  $m_{C_{in}} + Q_{AC}x_A + Q_{BC}x_B - Q_{C_{out}}x_C = 0$ 

Tentukan solusi  $x_A$ ,  $x_B$ ,  $x_C$  dengan menggunakan parameter berikut :  $Q_{AB} = 40$ ,  $Q_{AC} = 80$ ,  $Q_{BA} = 60$ ,  $Q_{BC} = 20$  dan  $Q_{Cout} = 150$  m<sup>3</sup>/s dan  $m_{Ain} = 1300$  dan  $m_{Cin} = 200$  mg/s.

Dengan mensubstitusikan variabel yang diketahui di soal maka diperoleh:

```
60x_B - 120x_A = -1300 \dots (1)

40x_A - 80x_B = 0 \dots (2)

80x_A + 20x_B - C150x_C = -200 \dots (3)
```

Dengan menggunakan salah satu dari 4 metode penyelesaian SPL, maka diperoleh solusi seperti yang ditunjukkan oleh gambar berikut.

```
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 1
Pilih metode untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Masukan pilihan : 1
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
Masukkan Jumlah Baris: 3
Masukkan Jumlah Kolom: 4
Matrix:
-120 60 0 -1300
40 -80 0 0
80 20 -150 -200
Solusinya:
X_1 = 14.4444444444444446
X_2 = 7.2222222222223
X_3 = 10.0
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test5_eliminasi_gauss.txt
Penyimpanan berhasil!
```

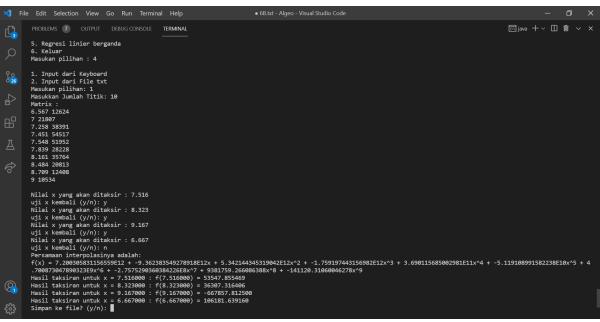
Gambar 5

6a.

Gambar 6a

# Didapatkan:

6b.



#### Gambar 6b

## Didapatkan:

```
f(x) = f(x) = 7.200305831156559E12 + -9.362383549278918E12x + 5.342144345319042E12x^2 + -1.759197443156982E12x^3 + 3.690115685002981E11x^4 + -5.119108991582238E10x^5 + 4.700873047890323E9x^6 + -2.7575290360384226E8x^7 + 9381759.266086388x^8 + -141120.31060046278x^9
```

# 6c.

### Gambar 6c

### Didapatkan:

```
f(x) = 2.035257249999997x + -3.5526817708333174x^2 + 3.2371145833333075x^3 + -1.4212662760416517x^4 + 0.23625651041666387x^5
```

```
x = 1.000000, f(1.000000) = 0.534680

x = 1.800000, f(1.800000) = 0.575969
```

7.

Diberikan sekumpulan data sesuai pada tabel berikut ini.

Table 12.1: Data for Example 12.1

Nitrous	Humidity,	Temp.,	Pressure,	Nitrous	Humidity,	Temp.,	Pressure,
Oxide, $y$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	Oxide, $y$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	<b>29.6</b> 0	0.95	54.9	70.9	29.37

Source: Charles T. Hare, "Light-Duty Diesel Emission Correction Factors for Ambient Conditions," EPA-600/2-77-116. U.S. Environmental Protection Agency.

Gunakan Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression untuk mendapatkan regresi linear berganda dari data pada tabel di atas, kemudian estimasi nilai Nitrous Oxide apabila Humidity bernilai 50%, temperatur 76°F, dan tekanan udara sebesar 29.30.

Dari data-data tersebut, apabila diterapkan Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression, maka diperoleh sistem persamaan linear sebagai berikut.

```
\begin{aligned} 20b_0 + 863.1b_1 + 1530.4b_2 + 587.84b_3 &= 19.42 \\ 863.1b_0 + 54876.89b_1 + 67000.09b_2 + 25283.395b_3 = 779.477 \\ 1530.4b_0 + 67000.09b_1 + 117912.32b_2 + 44976.867b_3 = 1483.437 \\ 587.84b_0 + 25283.395b_1 + 44976.867b_2 + 17278.5086b_3 = 571.1219 \end{aligned}
```

Dengan menggunakan menu regresi linier maka diperoleh persamaan regresi dan hasil taksirannya yang ditunjukkan oleh gambar berikut.

```
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks Balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar
Masukan pilihan : 5
1. Input dari Keyboard
2. Input dari File txt
Masukan pilihan: 1
n (Banyak percobaan): 20
k (Banyak variabel bebas): 3
72.4 76.3 29.18 0.90
41.6 70.3 29.35 0.91
34.3 77.1 29.24 0.96
35.1 68.0 29.27 0.89
10.7 79.0 29.78 1
12.9 67.4 29.39 1.10
8.3 66.8 29.69 1.15
20.1 76.9 29.48 1.03
72.2 77.7 29.09 0.77
24.0 67.7 29.60 1.07
23.2 76.8 29.38 1.07
47.4 86.6 29.35 0.94
31.5 76.9 29.63 1.10
10.6 86.3 29.56 1.10
11.2 86.0 29.48 1.10
73.3 76.3 29.40 0.91
75.4 77.9 29.28 0.87
96.6 78.7 29.29 0.78
107.4 86.8 29.03 0.82
54.9 70.9 29.37 0.95
50 76 29.30
Persamaan regresi :
Y = -3.5077781408835103 X_1 - 0.002624990745878327 X_2 + 7.989410472218274E-4 X_3 + 0.15415503019830143 X_4
Nilai taksiran : -175.41084233798037
Simpan ke file? (y/n): y
File Path: test_regresi_linier.txt
Penyimpanan berhasil!
```

# BAB 5 Kesimpulan

# A. Kesimpulan

Matriks merupakan sekumpulan nilai yang disusun berdasarkan baris dan kolom, serta ditempatkan di dalam tanda kurung. Dalam Sistem Persamaan Linear kita dapat mengubahnya menjadi matriks kemudian menyelesaikannya dengan menggunakan metode-metode yang ada. Solusi dari Sistem Persamaan Linear dapat berupa solusi unik, solusi parametrik, dan tidak ada solusi. Pada Matriks terdapat determinan yang dapat dihitung dengan cara kofaktor dan operasi baris elementer. Balikan dari matriks dapat kita hitung dengan adjoin dari matriks atau dengan operasi baris elementer. Interpolasi polinom merupakan salah satu aplikasi dari sistem persamaan linear untuk prediksi data sesuai dengan data yang telah dimiliki sebelumnya atau untuk menyederhanakan sebuah fungsi. Dengan memanfaatkan metode eliminasi gauss kita bisa mendapatkan regresi linear berganda. Semua hal tersebut dapat diimplementasikan dalam program java

# B. Saran Pengembangan

Program java yang dibuat hanya berupa text-based saja, tidak menggunakan GUI, mungkin dapat digunakan GUI agar input atau output lebih rapi dan lebih mudah dipahami.

### C. Refleksi

Dengan adanya tugas besar 1 Aljabar Linear dan Geometri, dapat melatih skill programing yang dimiliki masing-masing individu dan melatih kerja sama atau berkolaborasi dalam kelompok. Dengan adanya keterbatasan waktu, Kami telah berusaha secara maksimal untuk menyelesaikan tugas yang diberikan.

# **REFERENSI**

Slide Bahan Ajar Mata Kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri oleh Rinaldi Munir https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2021-2022/algeo21-22.htm