# Atividade 1 – Condução Unidimensional Permanente

Gilberto Ribeiro Pinto Júnior – RA 203324

Agosto de 2022

## 1 Enunciado

Determinar a distribuição de temperaturas ao longo de uma aleta de seção transversal uniforme retangular de dimensões $L = 1$ m, $P = 0.4$ m e $A_c = 0.01$ m$^2$ cuja condutividade térmica é $k = 100$ W/m · K submetida à uma temperatura em sua base de $T_b = 300$ °C e estando em um ambiente cuja temperatura é $T_\infty = 20$ °C e coeficiente de transferência de calor por convecção médio é $h = 10$ W/m$^2$ · K. O perfil de temperaturas deve ser determinado analiticamente e numericamente empregando o Método dos Volumes Finitos para 5 e 10 nós.

## 2 Resolução

Realizando um balanço de energia em um elemento infinitesimal da aleta, obtém-se a seguinte equação diferencial para a determinação do perfil de temperaturas ao longo de seu eixo $x$ (BERGMAN; LAVINE, 2017):

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA_c}(T - T_\infty) = 0 \tag{1}$$

cujas condições de contorno adotas são a temperatura fixa na base da aleta (condição de Dirichlet):

$$T(0) = T_b \tag{2}$$

e a transferência de calor por convecção em sua extremidade (condição de Neumann):

$$-k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = h\left[T(L) - T_\infty\right] \tag{3}$$

Dessa forma, pode-se obter o perfil de temperaturas ao longo do eixo da aleta através de uma solução analítica ou de uma solução numérica.

### 2.1 Solução analítica

Conforme apresentado em Bergman e Lavine (2017), a Equação 1 é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem que se torna homogênea ao se realizar a seguinte transformação de variável:

$$\theta(x) \equiv T(x) - T_\infty \tag{4}$$

resultando em

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \tag{5}$$

em que

$$m^2 \equiv \frac{hP}{kA_c} \tag{6}$$

A solução geral da Equação 5 é

$$\theta(x) = \mathbb{C}_1 e^{mx} + \mathbb{C}_2 e^{-mx} \tag{7}$$

cujas constantes são determinadas ao se avaliarem as condições de contorno das Equações 2 e 3 empregando a transformação de variável da Equação 4:

$$\theta(0) \equiv \theta_b \tag{8}$$

$$-k\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = h\theta(L) \tag{9}$$

Substituindo a Equação 7 nas Equações 8 e 9, obtêm-se, respectivamente

$$\theta_b = \mathbb{C}_1 + \mathbb{C}_2 \tag{10}$$

e

$$h\left(\mathbb{C}_1 e^{mL} + \mathbb{C}_2 e^{-mL}\right) = km\left(\mathbb{C}_2 e^{-mL} - \mathbb{C}_1 e^{mL}\right) \tag{11}$$

que, após algumas manipulações algébricas, chega-se à solução analítica da Equação 1 para o perfil de temperaturas:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x) + \frac{h}{mk}\sinh m(L-x)}{\cosh mL + \frac{h}{mk}\sinh mL} \tag{12}$$

### 2.2 Solução numérica

A solução numérica será realizada empregando o Método dos Volumes Finitos que consiste em integrar as equações de conservação em diversos volumes de controles contíguos na qual o domínio fora subdividido. A integração é aproximada através de esquemas de discretização e as variáveis são calculadas nos nós de tais volumes (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Para o caso em questão, a equação de conservação é a Equação 1 que será integrada em VCs idênticos de tamanho $\Delta V = A_c\Delta x$:

$$\begin{aligned}
\int_{\text{VC}} \frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right) dV - \int_{\text{VC}} m^2 (T - T_\infty)\, dV = 0 \\
\int_{\text{SC}} \frac{dT}{dx}\, dA - \int_{\text{VC}} m^2 (T - T_\infty)\, dV = 0 \\
A_c\left.\frac{dT}{dx}\right|_e - A_c\left.\frac{dT}{dx}\right|_w - m^2 (T - T_\infty)\,\Delta V = 0 \\
\left.\frac{dT}{dx}\right|_e - \left.\frac{dT}{dx}\right|_w - m^2 (T - T_\infty)\,\Delta x = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

A Equação 13 pode ser discretizada para cada um dos $n$ nós centrados nos volumes de controle. Adotando diferenças centrais como esquema de discretização, obtém-se para $1 < i < n$:

$$\frac{T_E - T_P}{\Delta x} - \frac{T_P - T_W}{\Delta x} - m^2 \left(T_P - T_\infty\right) \Delta x = 0 \quad (14)$$

Já para $i = 1$, é necessário aplicar a condição de contorno da Equação 2 para determinar o fluxo na superfície da base da aleta ($w$). Assim:

$$\frac{T_E - T_P}{\Delta x} - \frac{T_P - T_b}{\frac{\Delta x}{2}} - m^2 \left(T_P - T_\infty\right) \Delta x = 0 \quad (15)$$

Do mesmo modo, necessita-se empregar a condição de contorno na superfície da extremidade da aleta (Equação 3) para determinar o fluxo nessa região ($e$), desta vez discretizada também por diferenças centrais, como a seguir:

$$-k \frac{T_f - T_P}{\frac{\Delta x}{2}} = h \left(T_f - T_\infty\right) \quad (16)$$

em que a temperatura assumida na extremidade da aleta $T_f$ é determinada reordenando a Equação 16:

$$T_f = \frac{T_P + \frac{h}{k}\frac{\Delta x}{2} T_\infty}{1 + \frac{h}{k}\frac{\Delta x}{2}} \quad (17)$$

Dessa forma, obtém-se para $i = n$:

$$\frac{T_f - T_P}{\frac{\Delta x}{2}} - \frac{T_P - T_W}{\Delta x} - m^2 \left(T_P - T_\infty\right) \Delta x = 0 \quad (18)$$

As Equações 14, 15 e 18 podem ser reorganizadas para assumir a seguinte forma geral:

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u \quad (19)$$

com

$$a_P = a_W + a_E - S_P \quad (20)$$

cujos coeficientes são encontrados na Tabela 1.

| Nó | $a_W$ | $a_E$ | $S_P$ | $S_u$ |
|---|---|---|---|---|
| $i = 1$ | 0 | $\frac{1}{\Delta x}$ | $-m^2\Delta x - \frac{2}{\Delta x}$ | $m^2 T_\infty \Delta x + \frac{2}{\Delta x} T_b$ |
| $1 < i < n$ | $\frac{1}{\Delta x}$ | $\frac{1}{\Delta x}$ | $-m^2\Delta x$ | $m^2 T_\infty \Delta x$ |
| $i = n$ | $\frac{1}{\Delta x}$ | 0 | $-m^2\Delta x - \frac{1}{\frac{k}{h} + \frac{\Delta x}{2}}$ | $m^2 T_\infty \Delta x + \frac{T_\infty}{\frac{k}{h} + \frac{\Delta x}{2}}$ |

**Tabela 1:** Expressões para os coeficientes das Equações 19 e 20.

Assim, para cada nó $i$ existe uma equação algébrica que retorna o valor de $T_P$, mas que depende de tal valor para os nós adjacentes ($T_W$ e $T_E$). Logo, é necessário resolver simultaneamente todas as equações algébricas por meio de um sistema de equações caracterizado por uma matriz tridiagonal. Para $n = 5$, o sistema de equações é representado como a seguir:

$$\begin{bmatrix} a_{P,1} & -a_{E,1} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{W,2} & a_{P,2} & -a_{E,2} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{W,3} & a_{P,3} & -a_{E,3} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{W,4} & a_{P,4} & -a_{E,4} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{W,5} & a_{P,5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{u,1} \\ S_{u,2} \\ S_{u,3} \\ S_{u,4} \\ S_{u,5} \end{bmatrix} \quad (21)$$

## 2.3 Resultados e discussão

Os cálculos foram realizados no software de computação numérica *Octave* e em uma planilha eletrônica desenvolvida no *Excel*. As Tabelas 2 e 3 apresentam, respectivamente, os valores das temperaturas calculados numérica e analiticamente para 5 e 10 nós igualmente espaçados juntamente a seus desvios relativos. A princípio, percebe-se que um maior número de volumes de controle, ou seja, uma malha mais fina, produz resultados mais exatos, como pode ser observado nos menores valores de desvio relativo encontrados para $n = 10$ quando comparados com $n = 5$. Como exemplo, a temperatura na extremidade da aleta $T_f$, calculada pela Equação 17, divergiu em 0.92% da solução analítica para $n = 5$ enquanto, para $n = 10$, o desvio foi de 0.23%. Isso demonstra que um refinamento da malha tende a produzir uma solução numérica mais próxima da analítica e, por conseguinte, dos valores reais.

| $x$ (m) | $T_{\text{numérico}}$ (°C) | $T_{\text{analítico}}$ (°C) | Desvio relativo |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 246.921 | 251.083 | 1.66% |
| 0.3 | 177.070 | 179.479 | 1.34% |
| 0.5 | 132.350 | 133.734 | 1.03% |
| 0.7 | 105.607 | 106.431 | 0.77% |
| 0.9 | 92.560 | 93.142 | 0.62% |
| *1.0* | *91.842* | *91.002* | *0.92%* |

**Tabela 2:** Temperaturas calculadas numérica e analiticamente para 5 nós ao longo do eixo $x$ da aleta.

| $x$ (m) | $T_{\text{numérico}}$ (°C) | $T_{\text{analítico}}$ (°C) | Desvio relativo |
|---|---|---|---|
| 0.05 | 273.053 | 274.269 | 0.44% |
| 0.15 | 229.280 | 230.209 | 0.40% |
| 0.25 | 193.879 | 194.585 | 0.36% |
| 0.35 | 165.434 | 165.969 | 0.32% |
| 0.45 | 142.805 | 143.210 | 0.28% |
| 0.55 | 125.089 | 125.397 | 0.25% |
| 0.65 | 111.576 | 111.813 | 0.21% |
| 0.75 | 101.726 | 101.914 | 0.18% |
| 0.85 | 95.145 | 95.302 | 0.16% |
| 0.95 | 91.570 | 91.713 | 0.16% |
| *1.00* | *91.214* | *91.002* | *0.23%* |

**Tabela 3:** Temperaturas calculadas numérica e analiticamente para 10 nós ao longo do eixo $x$ da aleta.

Pode-se também afirmar que o Método dos Volumes Finitos empregando diferenças centrais como esquema de discretização foi satisfatório em calcular as temperaturas ao longo do eixo da aleta, uma vez que o maior desvio relativo obtido foi de 1.66% para o primeiro nó na malha grossa. Isso é corroborado pelo fato de que a discretização por diferenças centrais possui precisão de segunda ordem e boa estabilidade quando adequadamente empregada em situações onde se predomina a difusão, como é o caso em questão (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

A Figura 1 apresenta o perfil de temperaturas obtido analiticamente através da Equação 12 e aqueles obtidos numericamente cujas coordenadas estão elencadas nas Tabelas 2 e 3, já a Figura 2 mostra os desvios relativos para as temperaturas determinadas em cada nó das soluções numéricas com 5 e 10 volumes de controle. Nota-se que, para o mesmo valor de $n$, os maiores desvios estão localizados na região próxima à base da aleta e que, nesta mesma região, estão situados os maiores gradientes de temperatura. Um refinamento local da malha próximo à base seria capaz de reduzir tais desvios, sendo possível utilizar ainda o mesmo número de nós uma vez que o espaçamento entre eles próximo à extremidade da aleta poderia ser incrementado, diferente do que ocorre na presente solução em que o tamanho dos volumes de controle foi mantido uniforme. Em outras palavras, um bom refino da malha em regiões de elevados gradientes de determinada variável dependente é necessário para garantir uma boa precisão dos resultados.

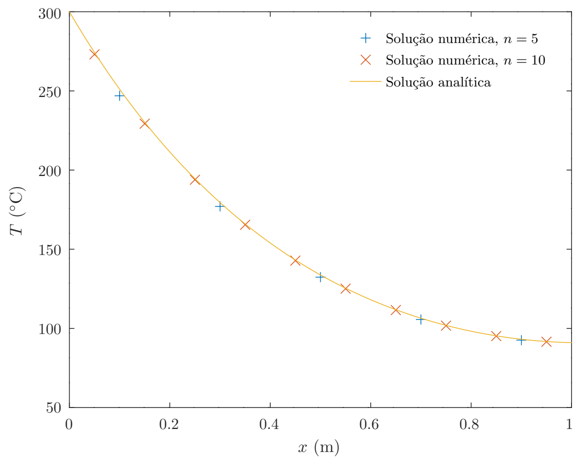


**Figura 1:** Perfil de temperatura no interior da aleta determinado analítica e numericamente para 5 e 10 volumes de controle.

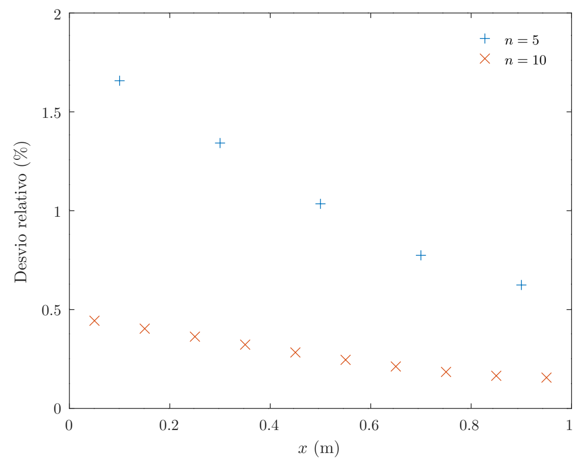


**Figura 2:** Desvio relativo entre as temperaturas determinadas analítica e numericamente para 5 e 10 volumes de controle.

À vista disso, conclui-se que o Método dos Volumes Finitos mostrou-se satisfatório para a solução do problema físico em análise e que a escolha de um esquema de discretização adequado e de uma boa malha é de suma importância para obtenção de bons resultados numéricos.

# Referências


BERGMAN, Theodore L.; LAVINE, Adrienne S. **Fundamentals of Heat and Mass Transfer**. 8. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2017. 992 p. ISBN 978-1-119-32042-5.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method**. 2. ed. [S.l.]: Pearson Education Limited, 2007. ISBN 978-0-13-127498-3.


# Apêndice A – Código usado para a solução numérica

A solução numérica empregando o Método dos Volumes Finitos foi realizada utilizando o seguinte código desenvolvido no software *Octave*:

```
% Parâmetros globais
global L P Ac Tb Tinf k h m2
L    = 1;          %m
P    = 0.4;        %m
Ac   = 0.01;       %m2
Tb   = 300;        %°C
Tinf = 20;         %°C
k    = 100;        %W/m.K
h    = 10;         %W/m2.K
m2 = (h*P)/(k*Ac);
% Função para a solução numérica do perfil de temperatura
function [x,T,A,B] = aleta_numerico(n)
    global L P Ac Tb Tinf k h m2
    dx = L/n;
    x  = linspace(dx/2,L-dx/2,n)';
    A  = zeros(n,n);
    for i = 1:n
        if i == 1
            aW       = 0;
            aE       = 1/dx;
            Sp       = -m2*dx-2/dx;
            Su       = m2*Tinf*dx+2*Tb/dx;
            A(i,i+1) = -aE;
        elseif i == n
            aW       = 1/dx;
            aE       = 0;
            Sp       = -m2*dx-1/(k/h+dx/2);
            Su       = m2*Tinf*dx+Tinf/(k/h+dx/2);
            A(i,i-1) = -aW;
        else
            aW       = 1/dx;
            aE       = 1/dx;
            Sp       = -m2*dx;
            Su       = m2*Tinf*dx;
            A(i,i+1) = -aE;
            A(i,i-1) = -aW;
        end
            aP     = aW+aE-Sp;
            A(i,i) = aP;
            B(i)   = Su;
    end
    B = B';
    T = A\B;
    % x(end+1) = L;
    % T(end+1) = (T(end)+((h/k)*(dx/2))*Tinf)/(1+(h/k)*(dx/2));
end
% Função para a solução analítica do perfil de temperatura
function T = aleta_analitico(x)
    global L Tb Tinf k h m2
    m           = sqrt(m2);
    theta_b     = Tb-Tinf;
    theta_ratio = (cosh(m*(L-x))+(h/(m*k))*sinh(m*(L-x)))./(cosh(m*L)+(h/(m*k))*sinh(m*L));
    theta       = theta_b*theta_ratio;
    T           = theta+Tinf;
end
% Saída
n1            = 5;
n2            = 10;
[x1,T1,A1,B1] = aleta_numerico(n1);
[x2,T2,A2,B2] = aleta_numerico(n2);
x             = [0:0.001:L]';
T             = aleta_analitico(x);
desvio        = @(n,a) abs(n-a)./a*100;
% Gráficos
fig1 = figure(1);
plot(x1,T1,'+',x2,T2,'x',x,T)
legend(sprintf('Solução numérica, $n=%d$',n1),sprintf('Solução numérica, $n=%d$',n2),'Solução analítica')
legend box off
xlabel('$x$ (m)'), ylabel('$T$ ($^\circ$C)')
print(fig1,'fig_gr_perfil_aleta_regime_permanente','-dpdflatexstandalone'), hold off
system('pdflatex fig_gr_perfil_aleta_regime_permanente')
fig2 = figure(2)
plot(x1,desvio(T1,aleta_analitico(x1)),'+')
hold on
plot(x2,desvio(T2,aleta_analitico(x2)),'x')
legend(sprintf('$n=%d$',n1),sprintf('$n=%d$',n2))
legend box off
xlabel('$x$ (m)'), ylabel('Desvio relativo (\%)')
print(fig2,'fig_gr_desvio_aleta_regime_permanente','-dpdflatexstandalone'), hold off
system('pdflatex fig_gr_desvio_aleta_regime_permanente')
system('rm *inc.pdf *.aux *.log *.tex')
```