Atividade 2 – Condução Unidimensional Transiente

Gilberto Ribeiro Pinto Júnior – RA 203324

Agosto de 2022

1 Enunciado

Determinar as distribuições de temperaturas em diversos tempos ao longo de uma aleta de seção transversal uniforme retangular de dimensões $L = 1$ m, $P = 0.4$ m e $A_c = 0.01$ m^2 cuja condutividade térmica é $k = 100$ W/m·K submetida à uma temperatura em sua base de $T_b = 300$ °C e estando em um ambiente cuja temperatura é $T_\infty = 20$ °C e coeficiente de transferência de calor por convecção médio é $h = 10$ W/m$^2 \cdot$ K. O tempo necessário para se atingir o regime permanente deve ser determinado através da solução numérica empregando o Método dos Volumes Finitos para pelo menos 3 passos de tempo distintos e para 5 e 10 nós.

2 Resolução

Realizando um balanço de energia em um elemento infinitesimal da aleta, obtém-se a seguinte equação diferencial para a determinação do perfil de temperaturas ao longo de seu eixo x considerando sua variação com o tempo:

$$\rho A_c c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k A_c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - hP\left(T - T_\infty\right) \tag{1}$$

que pode ser reescrita como

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - n^2\left(T - T_\infty\right) \tag{2}$$

com

$$n^2 = \frac{hP}{A_c c_p} \tag{3}$$

cujas condições de contorno adotas são a temperatura fixa na base da aleta (condição de Dirichlet):

$$T(x=0) = T_b \tag{4}$$

e a transferência de calor por convecção em sua extremidade (condição de Neumann):

$$-k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = h\left[T(x=L) - T_\infty\right] \tag{5}$$

e a condição inicial é de que a aleta está em equilíbrio térmico com o ambiente:

$$T(t=0) = T_\infty \tag{6}$$

Dessa forma, pode-se obter o perfil de temperaturas ao longo do eixo da aleta através de uma solução numérica.

2.1 Solução numérica

A solução numérica será realizada empregando o Método dos Volumes Finitos que consiste em integrar as equações de conservação em diversos volumes de controles contíguos na qual o domínio fora subdividido. A integração é aproximada através de esquemas de discretização e as variáveis são calculadas nos nós de tais volumes (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Para o caso em questão, a equação de conservação é a Equação 1 que será integrada em VCs idênticos de tamanho $\Delta V = A_c \Delta x$ e no intervalo de t a $t + \Delta t$:

$$\underbrace{\int_t^{t+\Delta t}\int_{\mathrm{VC}} \rho \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t}_{\text{(i)}} = \underbrace{\int_t^{t+\Delta t}\int_{\mathrm{VC}} \frac{k}{c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t}_{\text{(ii)}} - \underbrace{\int_t^{t+\Delta t}\int_{\mathrm{VC}} n^2\left(T - T_\infty\right)\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t}_{\text{(iii)}} \tag{7}$$

O termo (i) da Equação 7 representa o termo de acúmulo e é integrado como a seguir, considerando ρ constante:

$$\int\limits_{\mathrm{VC}} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \rho \frac{\partial T}{\partial t} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}V = \int\limits_{\mathrm{VC}} \rho \left(T_P - T_P^0\right) \, \mathrm{d}V = \rho \left(T_P - T_P^0\right) \Delta V = \rho \left(T_P - T_P^0\right) A_c \Delta x \tag{8}$$

sendo T_P a temperatura no nó P em $t + \Delta t$ e T_P^0 a temperatura no mesmo nó no tempo t, anterior a um passo Δt.

Já o termo (ii), denominado como termo difusivo, é integrado da seguinte forma, considerando k e c_p constantes:

$$\int\limits_{t}^{t+\Delta t} \int\limits_{\mathrm{VC}} \frac{k}{c_p} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \mathrm{d}V \, \mathrm{d}t = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \int\limits_{\mathrm{SC}} \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \, \mathrm{d}A \, \mathrm{d}t = \frac{k}{c_p} A_c \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \left(\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_e - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_w \right) \mathrm{d}t \tag{9}$$

Para a integração no tempo dos termos (ii) e (iii), é generalizada uma aproximação através de um parâmetro de ponderação θ, que varia de 0 a 1. Assim, a integral I_T da temperatura T_P pode ser escrita como

$$I_T = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} T_P \, \mathrm{d}t = \left[\theta T_P + (1-\theta) T_P^0\right] \Delta t \tag{10}$$

A Equação 9 pode ser discretizada para cada um dos n nós centrados nos volumes de controle. Adotando diferenças centrais como esquema de discretização, obtém-se para $1 < i < n$:

$$\frac{k}{c_p} A_c \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta x} - \frac{T_P - T_W}{\Delta x}\right) \mathrm{d}t = \frac{k A_c}{c_p \Delta x} \left[\theta \left(-2T_P + T_E + T_W\right) + (1-\theta)\left(-2T_P^0 + T_E^0 + T_W^0\right)\right] \Delta t \tag{11}$$

Já para $i = 1$, é necessário aplicar a condição de contorno da Equação 4 para determinar o fluxo na superfície da base da aleta (w). Assim:

$$\frac{k}{c_p} A_c \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta x} - \frac{T_P - T_b}{\frac{\Delta x}{2}}\right) \mathrm{d}t = \frac{k A_c}{c_p \Delta x} \left[\theta \left(-3T_P + T_E\right) + (1-\theta)\left(-3T_P + T_E\right) + 2T_b\right] \Delta t \tag{12}$$

Do mesmo modo, necessita-se empregar a condição de contorno na superfície da extremidade da aleta (Equação 5) para determinar o fluxo nessa região (e). Dessa forma, obtém-se para $i = n$:

$$\begin{aligned} &\frac{k}{c_p} A_c \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \left(\frac{T_f - T_P}{\frac{\Delta x}{2}} - \frac{T_P - T_W}{\Delta x}\right) \mathrm{d}t = \\ &\quad \frac{k A_c}{c_p \Delta x} \left\{\theta \left[\left(-\frac{2h\Delta x}{2k + h\Delta x} - 1\right) T_P + T_W\right] + (1-\theta)\left[\left(-\frac{2h\Delta x}{2k + h\Delta x} - 1\right) T_P^0 + T_W^0\right] + \frac{2hT_\infty \Delta x}{2k + h\Delta x}\right\} \Delta t \end{aligned} \tag{13}$$

uma vez que a temperatura assumida na extremidade da aleta T_f é determinada reordenando a Equação 5 discretizada por diferenças centrais:

$$T_f = \frac{2kT_P + hT_\infty \Delta x}{2k + h\Delta x} \tag{14}$$

Por fim, o termo (iii), considerado como termo fonte, é integrado a:

$$\int\limits_{t}^{t+\Delta t} n^2 \left(T - T_\infty\right) \Delta V \, \mathrm{d}t = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} n^2 \left(T - T_\infty\right) A_c \Delta x \, \mathrm{d}t = n^2 \left[\theta T_P - (1-\theta) T_P^0 - T_\infty\right] A_c \Delta x \Delta t \tag{15}$$

Substituindo as Equações 8, 15 e, para cada i específico, as Equações 11, 12 ou 13 na Equação 7, obtém-se a seguinte forma geral da equação discretizada:

$$a_P T_P = \theta a_W T_W + \theta a_E T_E + \underbrace{(1-\theta)\, a_W T_W^0 + (1-\theta)\, a_E T_E^0 + \left[a_P^0 - (1-\theta)\left(a_W + a_E - S_P\right)\right] T_P^0 + S_u}_{B} \tag{16}$$

com

$$a_P^0 = \frac{\rho \Delta x}{\Delta t} \tag{17}$$

$$a_P = a_P^0 + \theta \left(a_W + a_E - S_P\right) \tag{18}$$

cujos coeficientes são encontrados na Tabela 1.

Nó	a_W	a_E	S_P	S_u
$i = 1$	0	$\frac{k}{c_p \Delta x}$	$-n^2 \Delta x - \frac{2k}{c_p \Delta x}$	$n^2 T_\infty \Delta x + \frac{2k}{c_p \Delta x} T_b$
$1 < i < n$	$\frac{k}{c_p \Delta x}$	$\frac{k}{c_p \Delta x}$	$-n^2 \Delta x$	$n^2 T_\infty \Delta x$
$i = n$	$\frac{k}{c_p \Delta x}$	0	$-n^2 \Delta x - \dfrac{2hk}{c_p(2k + h\Delta x)}$	$n^2 T_\infty \Delta x + \dfrac{2hk}{c_p(2k + h\Delta x)} T_\infty$

Tabela 1: Expressões para os coeficientes das Equações 16 e 18.

Assim, para cada nó i existe uma equação algébrica que retorna o valor de T_P, mas que depende de tal valor para os nós adjacentes (T_W e T_E) e/ou de seus valores no passo de tempo anterior (T_P^0, T_W^0 e T_E^0). Logo, é necessário resolver simultaneamente todas as equações algébricas por meio de um sistema de equações caracterizado por uma matriz tridiagonal quando $\theta > 0$. Para $n = 5$, o sistema de equações é representado como a seguir:

$$\begin{bmatrix} a_{P,1} & -\theta a_{E,1} & 0 & 0 & 0 \\ -\theta a_{W,2} & a_{P,2} & -\theta a_{E,2} & 0 & 0 \\ 0 & -\theta a_{W,3} & a_{P,3} & -\theta a_{E,3} & 0 \\ 0 & 0 & -\theta a_{W,4} & a_{P,4} & -\theta a_{E,4} \\ 0 & 0 & 0 & -\theta a_{W,5} & a_{P,5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{bmatrix} \tag{19}$$

em que B são os termos agrupados como indicado na Equação 16.

2.2 Resultados e discussão

Os cálculos foram realizados no software de computação numérica *Octave*. Foi adotado para a discretização temporal o esquema completamente implícito, ou seja, fazendo $\theta = 1$. Assim, cada novo valor de T_P prevalece por todo passo de tempo Δt e, como T_P é obtido a partir de T_W e T_E, torna-se necessária a resolução de um sistema de equações a cada passo de tempo.

O critério de convergência empregado para se considerar que o regime estacionário tenha sido alcançado foi o cálculo do resíduo absoluto máximo entre os valores de temperaturas de cada passo e aqueles calculados numericamente na Atividade 1, em que a equação de conservação discretizada não compreendia o termo de acúmulo (Tabelas 2 e 3). A tolerância adotada para o resíduo foi de 0.001 °C.

x (m)	$T_{\text{numérico}}$ (°C)	$T_{\text{analítico}}$ (°C)
0.1	246.921	251.083
0.3	177.070	179.479
0.5	132.350	133.734
0.7	105.607	106.431
0.9	92.560	93.142

Tabela 2: Temperaturas calculadas numérica e analiticamente para 5 nós ao longo do eixo x da aleta.

x (m)	$T_{\text{numérico}}$ (°C)	$T_{\text{analítico}}$ (°C)
0.05	273.053	274.269
0.15	229.280	230.209
0.25	193.879	194.585
0.35	165.434	165.969
0.45	142.805	143.210
0.55	125.089	125.397
0.65	111.576	111.813
0.75	101.726	101.914
0.85	95.145	95.302
0.95	91.570	91.713

Tabela 3: Temperaturas calculadas numérica e analiticamente para 10 nós ao longo do eixo x da aleta.

A Tabela 4 apresenta o tempo necessário para a simulação numérica atingir o estado estacionário t_{ss} conforme o critério de convergência estabelecido para distintos passos de tempo Δt, variando de 0.05 s até 1000 s, e para os 5 e 10 volumes de controle. Já a Figura 1 mostra, em escala logarítmica, a diferença entre t_{ss} de determinado Δt e t_{ss} de $\Delta t = 0.05$ s. A princípio, percebe-se que, à medida que Δt diminui, t_{ss} também decrementa até convergir em determinado valor. Observa-se que, quando $\Delta t \leqslant 1$, as diferenças entre tais valores limitam-se às unidades, diferente do que ocorre quando $\Delta t > 1$. Ressalta-se ainda que, mesmo para passos de tempo elevados, como aqueles maiores que 100, a solução numérica ainda converge aos valores de temperatura determinados para o regime permanente.

Tais observações são justificadas uma vez que, no esquema completamente implícito ($\theta = 1$), todos os coeficientes da Equação 16 são positivos, tornando tal esquema incondicionalmente estável para qualquer valor de Δt. Entretanto, por ser de primeira ordem de precisão no tempo, pequenos valores de Δt são necessários para garantir resultados precisos (PATANKAR, 1980). Vale apontar que, assumindo o esquema de discretização completamente implícito e a situação de estado estacionário ($\Delta t \to \infty$), a Equação 16 torna-se aquela desenvolvida apenas para o regime permanente (Atividade 1):

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u \tag{20}$$

com

$$a_P = a_W + a_E - S_P \tag{21}$$

cujos coeficientes são aqueles encontrados na Tabela 1 multiplicados por $\frac{c_p}{k}$.

Por fim, verifica-se também que a quantidade de nós usados na discretização espacial influencia no valor de t_{ss}, inferindo-se que, quanto mais fina a malha, mais próximo do real se torna tal valor. Para $t_{\text{ss}} \leqslant 1$, por exemplo, a diferença entre os tempos de convergência até o estado estacionário de $n = 5$ e $n = 10$ é de cerca de 323 s.

Δt (s)	t_{ss} (s), $n = 5$	t_{ss} (s), $n = 10$
1000	145000.00	144000.00
500	141500.00	141500.00
200	139800.00	139400.00
100	139100.00	138800.00
50	138800.00	138500.00
20	138620.00	138280.00
10	138550.00	138220.00
5	138515.00	138195.00
2	138496.00	138174.00
1	138490.00	138167.00
0.5	138486.50	138163.50
0.2	138484.40	138161.80
0.1	138483.80	138161.20
0.05	138483.50	138160.90

Tabela 4: Tempo necessário para se alcançar o estado estacionário para cada valor de Δt adotado para 5 e 10 volumes de controle.

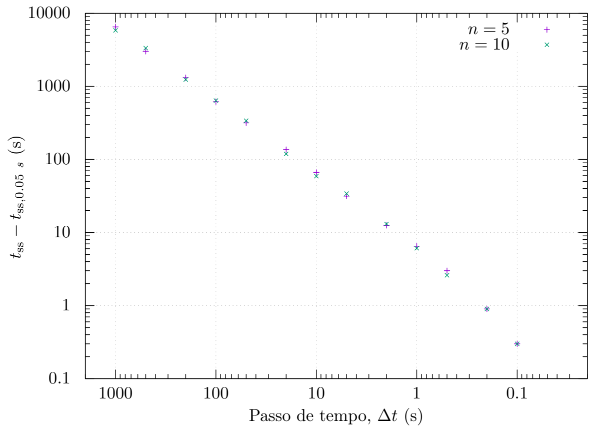

Figura 1: Diferença entre t_{ss} de determinado Δt e t_{ss} de $\Delta t = 0.05$ s para 5 e 10 volumes de controle.

A Figura 2 traz os perfis de temperaturas para diferentes tempos de um caso com $n = 100$ volumes de controle e passo de tempo de $\Delta t = 1$ s. Percebe-se que as maiores variações de temperatura ocorrem nos primeiros momentos, como até cerca de 10 h. Após, a aleta passa a convergir mais paulatinamente para o estado estacionário. A Figura 3 também mostra tal comportamento ao apresentar o resíduo entre as temperaturas a cada tempo com aquelas determinadas na solução numérica para o regime permanente para quando $\Delta t = 0.1$ s.

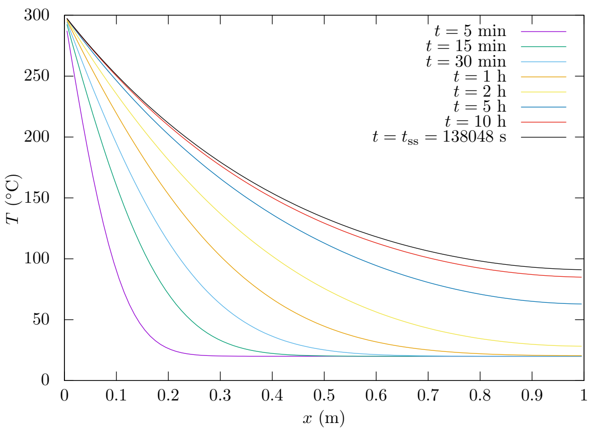

Figura 2: Perfis de temperaturas na aleta para diversos tempos de um caso com $n = 100$ e $\Delta t = 1$ s.

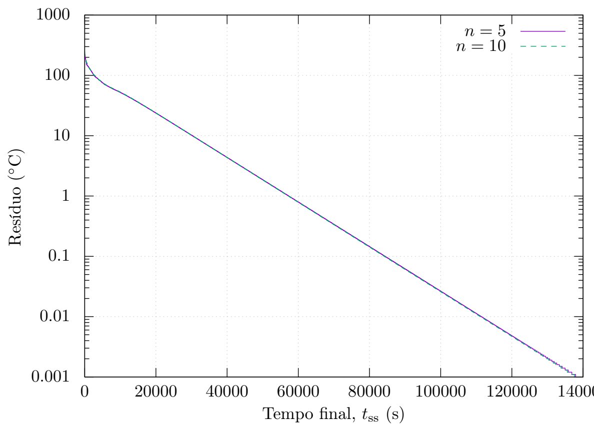

Figura 3: Resíduo em função do tempo decorrido para simulação com passo de tempo $\Delta t = 0.1$ s para 5 e 10 volumes de controle.

Dessa forma, conclui-se que o emprego do esquema de discretização completamente implícito é capaz de convergir para o regime permanente mesmo com passos de tempo elevados, contudo tais valores devem ser pequenos para garantir uma solução numérica precisa, assim como o faz um bom refinamento da malha.

Referências

PATANKAR, Suhas V. **Numerical heat transfer and fluid flow**. [S.l.]: Hemisphere Publishing Corp., 1980. 210 p. ISBN 0-89116-522-3.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method**. 2. ed. [S.l.]: Pearson Education Limited, 2007. ISBN 978-0-13-127498-3.

Apêndice A – Códigos usados para a solução numérica

A solução numérica empregando o Método dos Volumes Finitos foi realizada utilizando o seguintes códigos desenvolvidos no software *Octave* em sua versão 6.4.0:

```
clear all, close all, clc, clf
% Parâmetros globais
global L P Ac Tb Tinf cp rho k h
L    = 1;              %m
P    = 0.4;            %m
Ac   = 0.01;           %m2
Tb   = 300;            %ºC
Tinf = 20;             %ºC
cp   = 1000;           %J/kg.K
rho  = 7800;           %kg/m3
k    = 100;            %W/m.K
h    = 10;             %W/m2.K
% Parâmetros de entrada
theta = 1;
tol   = 1E-3;
% Saída
for n = [5 10]
    for dt = [1000 500 200 100 50 20 10 5 2 1 0.5 0.2 0.1 0.05]
        tic
        [xss,Tss] = aleta_permanente(n);
        [x,t,T,r] = aleta_transiente(theta,n,dt,tol,Tss);
        elapsed_time = toc
        name = sprintf('theta-%.1f_n-%d_dt-%.4f_tol-%.1E_tf-%.4f',theta,n,dt,tol,t(end));
        save(sprintf('%s.mat',name));
    endfor
endfor
```

```
function [x,T] = aleta_permanente(n)
    global L P Ac Tb Tinf k h
    m2 = (h*P)/(k*Ac);
    dx = L/n;
    x  = linspace(dx/2,L-dx/2,n)';
    A  = zeros(n,n);
    for i = 1:n
        if i == 1
            aW       = 0;
            aE       = 1/dx;
            Sp       = -m2*dx-2/dx;
            Su       = m2*Tinf*dx+2*Tb/dx;
            A(i,i+1) = -aE;
        elseif i == n
            aW       = 1/dx;
            aE       = 0;
            Sp       = -m2*dx-1/(k/h+dx/2);
            Su       = m2*Tinf*dx+Tinf/(k/h+dx/2);
            A(i,i-1) = -aW;
        else
            aW       = 1/dx;
            aE       = 1/dx;
            Sp       = -m2*dx;
            Su       = m2*Tinf*dx;
            A(i,i+1) = -aE;
            A(i,i-1) = -aW;
        endif
            aP     = aW+aE-Sp;
            A(i,i) = aP;
            B(i)   = Su;
    endfor
```

```
    T = A\B';
endfunction
```

```
function [x,t,T,r] = aleta_transiente(theta,n,dt,tol,Tss)
    global L P Ac Tb Tinf cp rho k h
    n2     = (h*P)/(cp*Ac);
    dx     = L/n;
    x      = linspace(dx/2,L-dx/2,n)';
    A      = zeros(n,n);
    j      = 1;
    t(j)   = 0;
    T0     = Tinf*ones(n,1);
    T(:,j) = T0;
    res    = @(a,b) max(abs(a-b));
    r(j)   = res(T(:,j),Tss);
    while res(T(:,j),Tss) > tol
        for i = 1:n
            if i == 1
                aW       = 0;
                aE       = k/(cp*dx);
                Sp       = -n2*dx-2*k/(cp*dx);
                Su       = n2*Tinf*dx+2*k/(cp*dx)*Tb;
                Tw0      = 0;
                Te0      = T(i+1,j);
                A(i,i+1) = -theta*aE;
            elseif i == n
                aW       = k/(cp*dx);
                aE       = 0;
                Sp       = -n2*dx-2*h*k/(cp*(2*k+h*dx));
                Su       = n2*Tinf*dx+2*h*k/(cp*(2*k+h*dx))*Tinf;
                Tw0      = T(i-1,j);
                Te0      = 0;
                A(i,i-1) = -theta*aW;
            else
                aW       = k/(cp*dx);
                aE       = k/(cp*dx);
                Sp       = -n2*dx;
                Su       = n2*Tinf*dx;
                Tw0      = T(i-1,j);
                Te0      = T(i+1,j);
                A(i,i+1) = -theta*aE;
                A(i,i-1) = -theta*aW;
            endif
                aP0    = rho*dx/dt;
                aP     = aP0+theta*(aW+aE-Sp);
                Tp0    = T(i,j);
                A(i,i) = aP;
                B(i)   = (1-theta)*aW*Tw0+(1-theta)*aE*Te0+(aP0-(1-theta)*(aW+aE-Sp))*Tp0+Su;
        endfor
        t(j+1)   = t(j)+dt;
        T(:,j+1) = A\B';
        r(j+1)   = res(T(:,j+1),Tss);
        disp(sprintf('n = %d | dt = %.4f | r = %.4E | t = %.4f',n,dt,r(j+1),t(j+1)))
        j++;
    endwhile
    r = r';
    t = t';
    T = T';
endfunction
```