

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE LORENA

GILBERTO RIBEIRO PINTO JÚNIOR

Análise experimental e simulação numérica da transferência de calor em  
aletas de seção transversal uniforme, em regime estacionário, utilizando o  
*software OpenFOAM*

Lorena  
2021



GILBERTO RIBEIRO PINTO JÚNIOR

**Análise experimental e simulação numérica da transferência de calor em  
aletas de seção transversal uniforme, em regime estacionário, utilizando o  
*software OpenFOAM***

Trabalho de conclusão de curso apresentado  
à Escola de Engenharia de Lorena da Universidade de São Paulo como requisito parcial  
para conclusão da Graduação do curso de Engenharia Química.

Orientador: Prof. Dr. Lucrécio Fábio dos Santos.

Lorena  
2021

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Automatizado  
da Escola de Engenharia de Lorena,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Pinto Júnior, Gilberto Ribeiro  
Análise experimental e simulação numérica da transferência de calor em aletas de seção transversal uniforme, em regime estacionário, utilizando o software OpenFOAM / Gilberto Ribeiro Pinto Júnior; orientador Lucrécio Fábio dos Santos. - Lorena, 2021.  
85 p.

Monografia apresentada como requisito parcial para a conclusão de Graduação do Curso de Engenharia Química - Escola de Engenharia de Lorena da Universidade de São Paulo. 2021

1. Cfd. 2. Método dos volumes finitos. 3. Openfoam. 4. Transferência de calor conjugada. 5. Aletas piniformes. I. Título. II. Santos, Lucrécio Fábio dos, orient.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus por me conceder o dom da vida e me dar forças para enfrentar os obstáculos nela presentes.

À minha mãe Ângela Aparecida Ribeiro e à minha avó Irene do Carmo Ribeiro por minha criação regada a amor, zelo e ensinamentos.

À minha irmã Giovanna Ribeiro dos Santos por todo amor e carinho.

À Done Julianna Pálinkás e ao João Antero Monteiro Filho por sempre me darem suporte nos meus estudos.

Aos meus amigos e familiares por sempre me incentivarem a seguir meus sonhos e me proporcionarem bons momentos.

Aos amigos, em especial, que fiz durante minha graduação por sempre me apoiarem e animarem, tornando essa etapa de aprendizado também prazerosa.

Ao Prof. Dr. Lucrécio Fábio dos Santos por me dar a oportunidade e me orientar na realização deste trabalho, cujo tema sempre achei fascinante.

À Escola de Engenharia de Lorena – USP e ao seu corpo docente por me acolherem e me moldarem em um profissional através de todo o aprendizado transmitido.



*“Se eu vi mais longe,  
foi por estar sobre  
ombros de gigantes.”*

---

(NEWTON, 1675)



## RESUMO

PINTO JÚNIOR, Gilberto Ribeiro. **Análise experimental e simulação numérica da transferência de calor em aletas de seção transversal uniforme, em regime estacionário, utilizando o software OpenFOAM.** 2021. 85 p. Monografia (Graduação em Engenharia Química) — Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, Lorena, 2021.

A compreensão dos fenômenos de transferência de calor é de extrema importância nas diversas áreas de engenharia, como na troca térmica entre dois fluidos em um trocador de calor ou no resfriamento de microprocessadores por meio de dissipadores de calor, permitindo estender a vida útil destes equipamentos. Pode-se melhorar essa troca térmica ao se aumentar a área superficial de um material através do uso de superfícies estendidas denominadas aletas. À vista disso, o presente trabalho visou analisar numérica e experimentalmente a transferência de calor em aletas piniformes de seção transversal circular uniforme, em regime estacionário. Para tanto, mediram-se as temperaturas ao longo de três aletas de um trocador de calor disponível no Laboratório de Engenharia Química da Escola de Engenharia de Lorena (USP), ao passo que a transferência de calor nessas aletas foi analisada numericamente com o *software* livre de fluidodinâmica computacional OpenFOAM, utilizando o método dos volumes finitos. Tais aletas possuem comprimento de 62 cm: duas delas são de aço inox AISI 316 de 9,5 mm e 16 mm de diâmetro e a outra é de alumínio puro, com diâmetro de 9,5 mm. Os resultados obtidos na simulação numérica foram condizentes com os experimentais, visto que a maior diferença entre os perfis de temperatura foi de 0,21% e entre as taxas de transferência de calor, 16%, o que permitiu a validação do modelo numérico. Verificou-se, através da simulação numérica e do critério de informação de Akaike para os dados experimentais, que as condições de contorno aplicadas na extremidade da aleta não influenciaram significativamente nos resultados. Ademais, foi proposta uma expressão para estimar a taxa de transferência de calor de uma aleta similar às utilizadas neste trabalho a partir do conhecimento desta grandeza de outra aleta. Para os valores numéricos, as estimativas apresentaram diferenças de até 2%, enquanto as estimativas dos valores experimentais divergiram em 11% entre o par de aletas consideradas infinitas e atingiram a diferença de 31% quando foi utilizada como base a aleta que não possuía o comprimento mínimo para ser classificada desta forma.

**Palavras-chave:** CFD. Método dos volumes finitos. OpenFOAM. Transferência de calor conjugada. Aletas piniformes.



## ABSTRACT

PINTO JÚNIOR, Gilberto Ribeiro. **Experimental analysis and numerical simulation of the steady-state heat transfer on uniform cross-sectional fins with OpenFOAM.** 2021. 85 p. Monography (Graduation in Chemical Engineering) — Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, Lorena, 2021.

The understanding of the heat transfer phenomena is extremely important in several engineering areas, such as the thermal exchange between two fluids in a heat exchanger or the cooling of microprocessors through heat sinks, allowing to extend the useful life of these equipments. This heat exchange can be improved by increasing the surface area of the material through the use of extended surfaces called fins. In view of that, the present work aimed to analyze numerically and experimentally the steady-state heat transfer on uniform circular cross-sectional pin fins. For this purpose, temperatures were measured along three fins of a heat exchanger available at the Chemical Engineering Laboratory of the Escola de Engenharia de Lorena (USP), while the heat transfer on these fins was numerically analyzed through the free CFD software OpenFOAM, using the finite volume method. These fins have a length of 62 cm: two of them are 9.5 mm and 16 mm diameter AISI 316 stainless steel fins and the other one is made of pure aluminum, with a diameter of 9.5 mm. The results obtained in the numerical simulation were consistent with the experimental ones since the biggest difference between the temperature profiles was 0.21% and between the heat transfer rates, 16%, which allowed the validation of the numerical model. It was verified, through the numerical simulation and the Akaike information criterion for the experimental data, that the boundary conditions applied at the fin tip didn't significantly influence the results. Furthermore, an expression was proposed to estimate the heat transfer rate of a fin similar to those used in this work based on the knowledge of this magnitude from another fin. For the numerical values, the estimates showed differences of up to 2%, while the estimates of the experimental values diverged by 11% between the pair of fins considered infinite and reached a difference of 31% when the fin used as a basis did not have the minimum length to be classified in this way.

**Keywords:** CFD. Finite volume method. OpenFOAM. Conjugated heat transfer. Pin fins.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Exemplo de uma malha 2D usada para calcular o fluxo ao redor de um canal cilíndrico. . . . .	31
Figura 2.2 – Volume de controle unidimensional. . . . .	33
Figura 2.3 – Volume de controle tridimensional hexaédrico. . . . .	35
Figura 2.4 – Visão geral da estrutura do OpenFOAM. . . . .	39
Figura 2.5 – Balanço de energia para uma superfície estendida. . . . .	41
Figura 3.1 – Trocador de calor por aletas usado no experimento. . . . .	47
Figura 3.2 – Vista superior do trocador de calor por aletas. . . . .	48
Figura 3.3 – Malha grosseira para o caso de convecção na extremidade utilizada até o início do estado estacionário. . . . .	50
Figura 3.4 – Malha fina para o caso de convecção na extremidade utilizada no estado estacionário. . . . .	50
Figura 4.1 – Perfis de temperatura obtidos numericamente e temperaturas medidas no trocador de calor por aletas. . . . .	57
Figura 4.2 – Visão lateral da distribuição de temperaturas nas proximidades da aleta. . . . .	60
Figura 4.3 – Visão frontal da distribuição de temperaturas nas proximidades da aleta em $z = 0,01$ m, $z = 0,05$ m, $z = 0,10$ m e $z = 0,15$ m. . . . .	60
Figura 4.4 – Distribuição de temperaturas na seção transversal em $z = 0,01$ m de cada aleta. . . . .	61
Figura 4.5 – Variação da massa específica do ar nas proximidades da base da aleta em $z = 0,05$ m e em $x = 0$ m. . . . .	62
Figura 4.6 – Campo de velocidades do fluido em $z = 0,05$ m. . . . .	62
Figura 4.7 – Campo de velocidades do fluido em $x = 0$ . . . . .	63
Figura 4.8 – Comparação entre as taxas de transferência de calor obtidas numérica e experimentalmente. . . . .	64
Figura 4.9 – Taxa de transferência de calor ao longo da simulação. . . . .	65
Figura A.1 – Caminhos para os dicionários usados na simulação. . . . .	75
Figura A.2 – Esquema de discretização para a região do fluido: <i>fvSchemes</i> . . . . .	76
Figura A.3 – Solucionadores lineares e tolerâncias para as variáveis da região do fluido: <i>fvSolution</i> . . . . .	77
Figura A.4 – Esquema de discretização para a região do sólido: <i>fvSchemes</i> . . . . .	78
Figura A.5 – Solucionadores lineares e tolerâncias para as variáveis da região do sólido: <i>fvSolution</i> . . . . .	78
Figura A.6 – Condições iniciais e de contorno para a temperatura na região do sólido: <i>T</i> . . . . .	79

Figura A.7–Condições iniciais e de contorno para a temperatura na região do fluido: $T$ .	80
Figura A.8–Condições iniciais e de contorno para $p_{rgh}$ , $\mathbf{u}$ , $\kappa$ , $\omega$ , $\alpha_t$ e $\nu_t$ na região do fluido: $p\_rgh$ , $U$ , $k$ , $omega$ , $alphat$ e $nut$ .	80
Figura A.9–Condições iniciais e de contorno para a pressão em ambas as regiões: $p$ .	81
Figura A.10–Propriedades termofísicas do ar e do alumínio: <i>thermophysicalProperties</i> .	81
Figura A.11–Entradas do dicionário <i>controlDict</i> .	82
Figura A.12–Entradas dos dicionários localizados no diretório <i>constant</i> .	82

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Expressões para $a_{nb}$ , $F$ e $D$ . . . . .	35
Tabela 2.2 – A função $A( Pe )$ para diferentes esquemas. . . . .	36
Tabela 2.3 – Distribuição de temperaturas e taxa de transferência de calor para aletas de seção transversal uniforme. . . . .	43
Tabela 2.4 – Interpretação para os valores de $\Delta_i$ . . . . .	45
Tabela 3.1 – Diâmetros e materiais de construção de cada aleta do trocador de calor. . . . .	48
Tabela 3.2 – Número de células e parâmetros de qualidade das malhas utilizadas.	51
Tabela 3.3 – Solucionadores lineares e tolerâncias relativa e absoluta para as variáveis em cada região. . . . .	53
Tabela 3.4 – Propriedades termofísicas dos metais que compõem as aletas a 300 K.	53
Tabela 3.5 – Propriedades termofísicas do ar a 300 K. . . . .	54
Tabela 4.1 – Temperatura ao longo do eixo das aletas A, B e C. . . . .	55
Tabela 4.2 – Resultados obtidos através da regressão não-linear dos dados experimentais. . . . .	56
Tabela 4.3 – Temperaturas obtidas numérica, analítica e experimentalmente no orifício 8 ( $z = 0,605$ m). . . . .	58
Tabela 4.4 – Resultados obtidos da simulação numérica. . . . .	64
Tabela 4.5 – Número de Rayleigh e parâmetros usados na Equação 4.2 para as aletas A, B e C. . . . .	66
Tabela 4.6 – Comparação entre as taxas de transferência reais e estimadas pela Equação 4.2 para cada aleta. . . . .	66
Tabela 4.7 – Parâmetros de desempenho das aletas A, B e C. . . . .	67
Tabela B.1 – Constantes da Equação B.4 para a convecção natural em um cilindro longo horizontal. . . . .	84



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AIC	Critério de Informação de Akaike
BIC	Critério Bayesiano de Schwartz
CAD	<i>Computer Aided Design</i>
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
EEL	Escola de Engenharia de Lorena
GAMG	<i>Geometric-Algebraic Multi-Grid</i>
MVF	Método dos Volumes Finitos
OpenFOAM	<i>Open Source Field Operation and Manipulation</i>
PID	Proporcional Integral Derivativo
PISO	<i>Pressure Implicit with Splitting of Operators</i>
QUICK	<i>Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinetics</i>
RANS	<i>Reynolds Averaged Navier-Stokes</i>
SIMPLE	<i>Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations</i>
SST	<i>Shear Stress Transport</i>
TRV	Teste da Razão de Verossimilhança
TVD	<i>Total Variation Diminishing</i>
USP	Universidade de São Paulo
VC	Volume de controle
VTK	<i>Visualisation Toolkit</i>



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras latinas

$A$	Área
$A_c$	Área da seção transversal da aleta
$A_{c,b}$	Área da seção transversal da base da aleta
$A_f$	Área superficial da aleta
$A_s$	Área superficial do elemento diferencial
$AIC$	Parâmetro de Akaike
$AIC_c$	Parâmetro de Akaike corrigido
$c_p$	Calor específico à pressão constante
$D$	Diâmetro da aleta
$D$	Condutância difusiva
$F$	Fluxo mássico convectivo
$g$	Aceleração da gravidade
$h$	Entalpia
$\bar{h}$	Coeficiente médio de transferência de calor por convecção
$i$	Energia interna
$k$	Condutividade térmica do material da aleta
$k_F$	Condutividade térmica do fluido
$K$	Número de parâmetros de um modelo
$L$	Comprimento da aleta
$MM$	Massa molar
$n$	Tamanho de uma amostra
$\overline{Nu}$	Número de Nusselt médio
$p$	Pressão

$p_{\text{rgh}}$	Pressão hidrostática
$P$	Perímetro do elemento diferencial
$Pe$	Número de Peclet
$Pr$	Número de Prandtl
$q_{\text{conv}}$	Taxa de transferência de calor por convecção
$q_f$	Taxa de transferência de calor na aleta
$q_f^*$	Taxa de transferência de calor estimada na aleta
$q_{\max}$	Taxa máxima de transferência de calor na aleta
$q_z$	Taxa de transferência de calor na aleta na direção $z$
$R_{t,f}$	Resistência térmica da aleta
$Ra$	Número de Rayleigh
$S$	Termo fonte
$\bar{S}$	Termo fonte médio no volume de controle
$t$	Tempo
$T$	Temperatura
$T_b$	Temperatura na base da aleta
$T_f$	Temperatura do filme
$T_s$	Temperatura na superfície da aleta
$T_L$	Temperatura na extremidade da aleta
$T_\infty$	Temperatura do fluido
$\mathbf{u}$	Vetor de velocidade
$u$	Velocidade na direção $x$
$v$	Velocidade na direção $y$
$V$	Volume
$w$	Velocidade na direção $z$

## Letras gregas

$\alpha$	Difusividade térmica
$\alpha_t$	Difusividade térmica turbulenta
$\beta$	Coeficiente de expansão térmica
$\Gamma$	Coeficiente de difusão
$\Delta_i$	Diferença entre os parâmetros de Akaike
$\varepsilon_f$	Efetividade da aleta
$\eta_f$	Eficiência da aleta
$\theta$	Parâmetro de ponderação da discretização do termo de acúmulo
$\theta$	Parâmetros de um modelo
$\theta$	Diferença entre a temperatura da aleta e a temperatura do fluido
$\theta_b$	Diferença entre a temperatura da base da aleta e a temperatura do fluido
$\kappa$	Energia cinética turbulenta
$\mu$	Viscosidade dinâmica
$\mu_{\text{eff}}$	Viscosidade dinâmica efetiva
$\mu_t$	Viscosidade dinâmica turbulenta
$\nu$	Viscosidade cinemática
$\nu_t$	Viscosidade cinemática turbulenta
$\rho$	Massa específica
$\phi$	Variável dependente
$\Phi$	Função de dissipação
$\omega$	Taxa de conversão de energia cinética turbulenta a energia interna



# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	23
1.1	Objetivo Geral . . . . .	23
1.1.1	Objetivos Específicos . . . . .	23
2	REVISÃO DA LITERATURA . . . . .	25
2.1	Fluidodinâmica computacional (CFD) . . . . .	28
2.1.1	Propriedades dos métodos numéricos . . . . .	29
2.1.2	Método dos volumes finitos . . . . .	30
2.1.3	Discretização da equação de conservação . . . . .	33
2.1.4	Esquemas de discretização . . . . .	36
2.2	OpenFOAM . . . . .	39
2.3	Abordagem analítica para a condução de calor em uma aleta de seção transversal uniforme . . . . .	41
2.3.1	Parâmetros de desempenho em aletas . . . . .	42
2.4	Critério de Informação de Akaike . . . . .	44
3	MATERIAIS E MÉTODOS . . . . .	47
3.1	Experimento no trocador de calor por aletas . . . . .	47
3.2	Simulação numérica no OpenFOAM . . . . .	49
3.2.1	Criação e manipulação da malha . . . . .	49
3.2.2	Configuração dos dicionários do OpenFOAM . . . . .	51
3.2.2.1	<i>Condições iniciais e de contorno</i> . . . . .	51
3.2.2.2	<i>Esquemas de discretização das equações de conservação</i> . . . . .	52
3.2.2.3	<i>Solucionadores lineares e tolerâncias</i> . . . . .	52
3.2.2.4	<i>Propriedades termofísicas</i> . . . . .	53
3.2.2.5	<i>Outros dicionários</i> . . . . .	54
3.2.3	Simulação propriamente dita . . . . .	54
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO . . . . .	55
4.1	Temperaturas obtidas no trocador de calor por aletas . . . . .	55
4.2	Análise estatística dos dados obtidos experimentalmente . . . . .	55
4.3	Resultados obtidos numericamente . . . . .	56
4.3.1	Perfis de temperatura no interior da aleta . . . . .	57
4.3.1.1	<i>Comprimento mínimo para consideração de aleta infinita</i> . . . . .	59
4.3.2	Distribuição de temperaturas nas proximidades da aleta . . . . .	59
4.3.3	Distribuição de temperaturas na seção transversal da aleta . . . . .	61
4.3.4	Campo de velocidades no meio . . . . .	61

<b>4.3.5</b>	<b>Taxa de transferência de calor na aleta . . . . .</b>	<b>63</b>
<i>4.3.5.1</i>	<i>Relação entre as taxas de transferência de calor de duas aletas . . . . .</i>	<i>65</i>
<i>4.3.5.2</i>	<i>Parâmetros avaliativos do desempenho das aletas . . . . .</i>	<i>67</i>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>69</b>
 <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>		<b>71</b>
<b>APÊNDICE A – PRINCIPAIS DICIONÁRIOS UTILIZADOS NA SIMULAÇÃO . . . . .</b>		<b>75</b>
<b>APÊNDICE B – DESENVOLVIMENTO DA RELAÇÃO ENTRE <math>q_f</math> PARA DUAS ALETAS . . . . .</b>		<b>83</b>

# 1 INTRODUÇÃO

O estudo e a compreensão dos princípios de transferência de calor é de extrema relevância na atualidade devido a sua grande aplicabilidade nas diversas áreas de engenharia química, de petróleo e gás, mecânica, elétrica, civil dentre outras. Pode-se observar sua aplicação na troca térmica entre fluidos em um trocador de calor, na seleção de revestimento de barreira térmica em motores de turbina a gás, no uso de dissipadores térmicos usados para resfriamento de microprocessadores e outros (BERGMAN; LAVINE, 2017).

Essa última aplicação é um exemplo em que a troca térmica, mais especificamente o resfriamento, desempenha um importante papel, visto que é capaz de estender a vida útil de equipamentos que necessitam manter sua temperatura em determinado valor para funcionar adequadamente. Para melhorar a troca térmica, pode-se aumentar a área superficial do equipamento, que pode ser feito através de superfícies estendidas denominadas aletas (BERGMAN; LAVINE, 2017; KREITH; MANGLIK; BOHN, 2010).

Dessa forma, o conhecimento dos fenômenos de transferência de calor no interior e nas proximidades de uma aleta em operação permite otimizar os efeitos de troca térmica. Pode-se investigar esses fenômenos experimentalmente, porém, com os avanços na área computacional, tornou-se possível analisar esse tipo de problema com o uso da modelagem e simulação numérica com *softwares* de fluidodinâmica computacional (do inglês *Computational Fluid Dynamics*, CFD), como ANSYS CFX, FLUENT, PHOENICS, STAR-CD e OpenFOAM (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Esse último, por ser um *software* livre, de código aberto, possibilita ao usuário final acessar seu código para alterar ou até criar novas rotinas para resolver problemas de CFD (The OpenFOAM Foundation, 2020).

## 1.1 Objetivo Geral

O presente trabalho teve como objetivo geral analisar, numérica e experimentalmente, a transferência de calor em aletas de seção transversal uniforme, em regime estacionário, utilizando o método dos volumes finitos (MVF), com o *software* de fluidodinâmica computacional: OpenFOAM.

### 1.1.1 Objetivos Específicos

Foram propostos os seguintes objetivos específicos:

- a) desenvolver um modelo numérico capaz de simular a transferência de calor na aleta de seção transversal uniforme, em regime estacionário;
- b) determinar numericamente o perfil de temperatura ao longo da aleta e, assim, estabelecer a taxa de transferência de calor associada a ela;
- c) validar o modelo numérico pela comparação dos resultados extraídos numericamente com os dados obtidos experimentalmente no trocador de calor por aletas disponível no Laboratório de Engenharia Química da Escola de Engenharia de Lorena (EEL) – Universidade de São Paulo (USP).

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Diversos trabalhos envolvendo a análise numérica e experimental de aletas (ou dissipadores de calor) são encontrados na literatura. Tais trabalhos buscam otimizar a taxa de transferência de calor, determinar perfil de temperaturas e coeficientes convectivos ou correlações (PARK; OH; LIM, 2006; SILVA *et al.*, 2019; HEMPIJID; KITTICHAIKARN, 2020; SAHEL *et al.*, 2021). Outros trabalhos, abordando transferência de calor ou não, também utilizaram como ferramenta o *software* livre OpenFOAM para realizar a análise numérica com MVF de diversos sistemas e processos na área de engenharia química, mecânica, eletrônica dentre outras (FONTOURA, 2013; GOMES, 2015; LOKSUPAPAIBOON; SUVANJUMRAT, 2021). A revisão a seguir elenca alguns trabalhos que integram esses elementos em sua composição.

Ledezma e Bejan (1996) investigaram, no âmbito numérico e experimental, a convecção natural e forçada sobre um dissipador de calor de placa aletado. Tal investigação constituiu na análise quantitativa da orientação do conjunto de aletas em relação ao campo gravitacional na convecção natural e forçada, e na inclinação das aletas na placa relativa ao fluxo incidente. Em todas as configurações, os resultados obtidos da simulação numérica do fluxo e da transferência de calor foram validados através de dados experimentais como, por exemplo, a condutância térmica global que foi aumentada quando o topo das aletas foi inclinado frente ao fluxo incidente.

Park, Oh e Lim (2006) analisaram numericamente, utilizando volumes finitos através da ferramenta de CFD Fluent, a transferência de calor em uma placa aletada a fim de otimizar suas dimensões. Objetivou-se minimizar a queda de pressão no escoamento condicionado à geometria e à temperatura máxima do ar. Na análise do sistema, foram desconsiderados os efeitos de transferência de calor por radiação, contudo, consideraram-se os efeitos de turbulência sobre o escoamento, lançando mão do modelo  $k - \varepsilon$  padrão e do método Kriging para a interpolação dos resultados. Os autores conseguiram, com o modelo proposto, determinar as dimensões ideais para as aletas.

Neto, Garcia e Rivas (2009) avaliaram a condução de calor em sólidos em casos de uma, duas e três dimensões, em regime transitório e estacionário, em que as equações de conservação foram discretizadas através do método dos volumes finitos utilizando MATLAB em uma malha uniforme. A modelagem unidimensional apresentou desvios em torno de 2%, enquanto os casos em duas dimensões acusaram erros de 0,1% ao serem comparados a simulações feitas em Fluent. Verificou-se a necessidade de refinar a malha nos modelos tridimensionais visto que eles apresentaram distorções geométricas, resultando em erros maiores.

Fontoura (2013) propôs um modelo de fluidodinâmica computacional, utilizando OpenFOAM, a fim de compreender as condições de formação de coque no interior de

tubos na linha de operação após o forno de preaquecimento na indústria petroquímica. O autor utilizou o modelo  $k - \varepsilon$  para representar a turbulência, dois modelos de vaporização para retratar a mudança de fase e uma rede cinética para descrever o craqueamento térmico. Assim, conseguiu-se obter os perfis de velocidades, temperaturas e concentrações das fases líquida e gasosa ao longo do interior do tubo.

Gomes (2015) utilizou o método dos volumes finitos, juntamente ao *software* de CFD OpenFOAM, para realizar uma análise numérica da transferência de calor por convecção natural em dissipadores de calor com aletas planas e retangulares orientadas horizontalmente, dependente ou não do tempo. Com essa análise, obtiveram-se informações do sistema referentes à velocidade, à vorticidade, aos campos de temperaturas e ao coeficiente médio de transferência de calor por convecção natural próximo ao dissipador. Esse último apresentou diferenças médias menores que 9% em relação a valores experimentais e a valores obtidos a partir de correlações empíricas encontradas na literatura.

Yang *et al.* (2017) investigaram, numérica e experimentalmente, o desempenho na transferência de calor em dissipadores de microcanais com aletas de cinco geometrias diferentes para sua área transversal, submetidos a um fluxo de água em sua superfície. As simulações em CFD apresentaram as mesmas tendências que os resultados experimentais, obtidos a partir da litografia profunda por ultravioleta e por imagens térmicas por infravermelho. Concluiu-se que o formato da aleta exerceu grande influência em equilibrar a queda de pressão e a taxa de transferência de calor a fim de atingir melhores desempenhos no resfriamento do dissipador de calor.

Yogesh *et al.* (2018) analisaram o fator de atrito e a transferência de calor de um trocador de calor de tubo aletado possuindo tubos elípticos que variavam em relação a sua orientação e razão de elipticidade (0,6 a 0,8). A validação numérica dos resultados obtidos através do programa ANSYS Fluent foi feita comparando-os com dados da literatura. Os autores observaram que o fator de atrito, o fator Colburn e a eficiência do trocador de calor eram afetados com a variação dos dois parâmetros.

Gupta, Saha e Roy (2019) investigaram a transferência de calor, utilizando um modelo tridimensional desenvolvido em CFD, em um dissipador de aletas com perfurações que variavam em número (1, 2 ou 3) e em forma (quadrado ou círculo). Os autores calcularam o desempenho térmico para cada caso e compararam os resultados com um dissipador com aletas de seção transversal quadrada, mas sem perfurações, operando em mesmas condições. Resultados numéricos indicaram que os dissipadores com aletas perfuradas apresentaram melhor desempenho térmico que aqueles com aletas não perfuradas.

Silva *et al.* (2019) utilizaram MVF com o *software* OpenFOAM para estudar a convecção natural em dissipadores de calor com aletas retangulares posicionadas horizontalmente. Os valores de número do Nusselt médio e do coeficiente de transferência de calor por convecção médio adquiridos numericamente foram comparados com

resultados experimentais e obtidos por correlações empíricas, apresentando diferenças inferiores a 10%. Baseado nesses resultados, os autores propuseram uma correlação para o número de Nusselt para valores de número de Rayleigh compreendidos entre  $4,6 \times 10^4$  e  $5,8 \times 10^5$ .

Hempjid e Kittichaikarn (2020) buscaram otimizar a transferência de calor entre um líquido de refrigeração e um dissipador de calor utilizando o *software* de fluidodinâmica computacional ANSYS-Fluent. Para a otimização, foram analisados os efeitos da direção do fluxo na entrada e na saída do dissipador de calor, variando seu tipo (V ou I) e seu ângulo de entrada ( $0^\circ$  a  $90^\circ$ ). Concluiu-se que a configuração do dissipador de calor que resultou no melhor desempenho térmico (tipo-V e ângulo de  $75^\circ$ ) apresentou uma distribuição uniforme de baixas temperaturas em sua base, advindo do efeito causado pelo ângulo ou pela posição da superfície de calor, o que induziu a formação de grandes vórtices em sua entrada.

Loksupapaiboon e Suvanjumrat (2021), utilizando OpenFOAM, estudaram os modelos de turbulência de duas equações para o fluxo de baixa turbulência devido à convecção natural dentro de uma cavidade retangular. Dentre estes modelos, foram analisados  $k - \varepsilon$ ,  $k - \omega$ , RNG  $k - \varepsilon$ ,  $k - \omega$  SST e *Realizable k - ε*. Os resultados das simulações foram comparados com dados experimentais da literatura cujo número de Rayleigh atingido foi de  $1,58 \times 10^9$ . Concluiu-se que o modelo  $k - \omega$  garantiu a melhor predição para o fluxo turbulento gerado pela convecção natural.

Sahel *et al.* (2021) realizaram um estudo numérico que examinou o desempenho hidrotérmico de dissipadores de calor de aletas piniformes hemisféricas submetidas a condições de escoamento completamente turbulento, de modo a determinar sua melhor configuração. Foi investigado o aumento do fator de desempenho hidrotérmico, *HTPF*, do dissipador ao se utilizar seis tipos de padrões de perfurações diferentes da aleta hemisférica. O valor mais elevado de *HTPF* obtido foi 1,98 para o caso da aleta com o maior número de perfurações, apresentando um aumento de 122,94% nesse parâmetro e uma diminuição de 76% do volume ocupado do dissipador de calor se comparado ao de aletas cilíndricas usado como referência.

Tariq *et al.* (2021) investigaram o efeito de múltiplas perfurações em dissipadores de calor de aletas de placas planas através de simulação numérica cujo modelo foi validado experimentalmente. Os resultados da simulação mostraram que tais dissipadores com perfurações apresentaram maior coeficiente de transferência de calor e menor queda de pressão se comparado aos dissipadores de placas planas sem perfurações. Junto a essas vantagens, soma-se o fato de que, para uma mesma troca térmica, é reduzida a massa da aleta em virtude das perfurações.

## 2.1 Fluidodinâmica computacional (CFD)

Segundo Versteeg e Malalasekera (2007), fluidodinâmica computacional, CFD, é a análise de sistemas envolvendo fluxo de fluidos, transferência de calor e fenômenos associados, como reações químicas, por meio de simulações computacionais. Citam-se, como exemplos de seu uso, a análise de turbomáquinas, de resfriamentos de microcircuitos, de operações unitárias em processos químicos, de fluxos sanguíneos através de artérias e veias dentre outros.

O uso do CFD apresenta diversas vantagens, dentre elas: o baixo custo, se comparado ao custo de investigações experimentais do problema tratado; a rapidez que se pode estudar um processo, podendo realizar diversos testes em um curto período de tempo, o que não poderia ser comumente feito através de experimentos; a habilidade de estudar sistemas em que experimentos controlados são difíceis de se conduzir ou que estejam sob condições de perigo para sua realização; a obtenção de uma grande quantidade de informações do sistema (perfil de temperatura, taxa de transferência de calor, pressão, velocidade etc.) em todo um domínio de interesse (PATANKAR, 1980; VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

O funcionamento de um *software* CFD passa por três etapas principais: pré-processamento, solução e pós-processamento (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). A etapa de pré-processamento ocorre quando o usuário fornece informações ao *software* como: o modelo geométrico e sua discretização por meio de uma malha; a modelagem do fenômeno químico e físico através das equações de conservação apropriadas, das propriedades do fluido, de hipóteses simplificadoras e de condições inicial e de contorno; e da determinação de critérios de convergência (JATOBÁ, 2016).

Já na etapa de solução, realizada pelo *software* (ANSYS CFX, FLUENT, PHOENICS, STAR-CD e OpenFOAM, por exemplo), ocorre a discretização das equações de conservação através de algum método iterativo de solução numérica como, por exemplo, o das diferenças finitas, o dos elementos finitos ou o dos volumes finitos (FERZIGER; PERIC, 2002).

Na etapa de pós-processamento, o usuário analisa os resultados com os recursos gráficos, como a visualização do domínio geométrico, de campos de vetores, de superfícies bi e tridimensionais, dentre outros (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Nessa etapa é quando se revisa o modelo matemático e as hipóteses simplificadoras, se necessário (JATOBÁ, 2016).

Como mencionado, o método das diferenças finitas é um dos métodos iterativos de solução numérica usados em problemas de CFD. Conforme Ferziger e Peric (2002), ele consiste em discretizar as equações de conservação na forma diferencial ao substituir as derivadas parciais por interpolações em termos dos valores nodais das funções. Assim, obtém-se uma equação algébrica para cada nódulo da malha. Apesar de sua aplicabili-

dade, esse método necessita que se tome medidas especiais para que a propriedade de conservação seja garantida, além de ser restrito a geometrias não tão complexas.

O método dos elementos finitos compartilha algumas características com o MVF, abordado na subseção 2.1.2. Ele divide o domínio em elementos finitos, geralmente não estruturados, dentro dos quais a solução é aproximada por uma função linear, de forma a assegurar a continuidade da solução através dos limites dos elementos. Destaca-se que as equações de conservação são multiplicadas por uma função peso antes de serem integradas por todo o domínio e, assim, gerar um conjunto de equações algébricas não-lineares. Este método possui a grande vantagem de ser aplicável a qualquer geometria arbitrária (FERZIGER; PERIC, 2002).

### 2.1.1 Propriedades dos métodos numéricos

Segundo Ferziger e Peric (2002), os métodos de solução numérica devem possuir certas propriedades desejadas para seu devido funcionamento. Tais propriedades estão summarizadas a seguir:

- a) consistência: um método numérico é dito consistente quando o erro de truncamento, que é a diferença entre a equação discretizada e a exata, anula-se à medida que o espaço de tempo de um passo a outro da simulação e/ou o volume da célula da malha geométrica tendem a zero (MOUKALLED *et al.*, 2016). Entretanto, mesmo que o método seja consistente, não necessariamente sua solução será igual à da equação diferencial. Para isso, o método também deve ser estável;
- b) estabilidade: um método é considerado estável quando ele não amplia os erros que aparecem durante o processo de solução numérica. Para métodos iterativos, um método estável é aquele que não diverge (FERZIGER; PERIC, 2002);
- c) convergência: considera-se um método numérico convergente se a solução das equações discretizadas tendem ao valor exato da equação diferencial ao passo que o tamanho da célula da malha se aproxima de zero (FERZIGER; PERIC, 2002);
- d) conservação: o método numérico deve respeitar, local e globalmente, as leis de conservação, visto que as equações a serem resolvidas são conservativas. O método dos volumes finitos, por sua definição, garante a propriedade de conservação tanto para um volume de controle individual quanto para o domínio como um todo (FERZIGER; PERIC, 2002). Contudo, outros métodos de discretização não conservativos podem se tornar estáveis e consistentes e, então, resultar em soluções corretas ao se utilizar malhas com o refinamento

adequado;

- e) limitação: a solução numérica deve se situar dentro dos limites apropriados. Desta maneira, concentrações, por exemplo, precisam estar entre 0% e 100%, e quantidades que não podem ser negativas (massa, densidade, temperatura etc.) devem permanecer maiores que zero por toda a simulação (FERZIGER; PERIC, 2002). No estado estacionário e na ausência de fontes, o valor de uma propriedade deve se manter limitada a seus valores de contorno (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007);
- f) precisão: a solução numérica de um fenômeno físico é apenas uma aproximação de sua solução exata e, quanto mais próximo aquela está desta, mais preciso é o método numérico. Entretanto, na maioria das vezes, a solução exata é desconhecida para o problema a ser resolvido. Assim, uma alternativa para se mensurar a precisão é através do erro de truncamento (MOUKALLED *et al.*, 2016).

### 2.1.2 Método dos volumes finitos

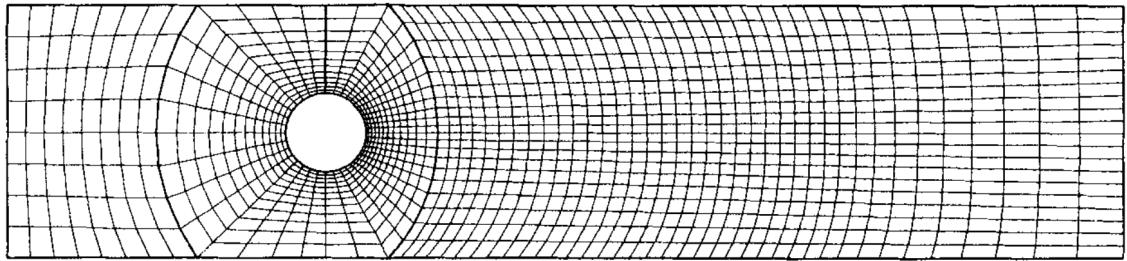
Dentre os métodos de solução numérica, como o das diferenças finitas e o dos elementos finitos, destaca-se o método dos volumes finitos para a solução de problemas de fluidodinâmica computacional. Ferziger e Peric (2002, p. 36, tradução nossa) elucidam que

O método dos volumes finitos usa a forma integral das equações de conservação como seu ponto de partida (Equação 2.7). O domínio de solução é subdividido em um número finito de volumes de controles contíguos, e as equações de conservação são aplicadas a cada um destes. No centroide de cada volume de controle situa-se um nódulo computacional no qual os valores das variáveis são calculados. Usa-se interpolação para expressar esses valores na superfície do volume de controle em termos dos valores nodais. As integrais de volume e superfície são aproximadas usando fórmulas de quadratura apropriadas. Como resultado, obtém-se uma equação algébrica para cada volume de controle, na qual aparecem os valores de nódulos vizinhos (Equação 2.16).

Tal método pode acomodar qualquer tipo de malha (Figura 2.1), sendo, então, apropriado para geometria complexas. A malha define somente as fronteiras do volume de controle e não necessariamente está relacionada a um sistema de coordenadas. O método é conservativo por construção, logo as integrais de superfície, que representam os fluxos convectivos e difusivos, são as mesmas para os volumes de controles que compartilham fronteiras.

A seguir, estão reunidas as equações na forma conservativa que constituem o sistema que governa o fluxo de um fluido Newtoniano compressível e a transferência de calor no tempo e nas três dimensões (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007):

**Figura 2.1** – Exemplo de uma malha 2D usada para calcular o fluxo ao redor de um canal cilíndrico.



Fonte: Ferziger e Peric (2002, p. 28).

a) conservação de massa, ou equação da continuidade;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1)$$

b) conservação da quantidade de movimento para as componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$ ;

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot (\mu \nabla u) + S_{M_x} \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla \cdot (\mu \nabla v) + S_{M_y} \quad (2.2b)$$

$$\frac{\partial (\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} w) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla \cdot (\mu \nabla w) + S_{M_z} \quad (2.2c)$$

c) conservação de energia;

$$\frac{\partial (\rho i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} i) = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi + S_i \quad (2.3)$$

Em que  $\rho$  é a massa específica;  $p$  é a pressão;  $\mathbf{u}$  é o vetor velocidade;  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as velocidades nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente;  $\mu$  é a viscosidade dinâmica;  $i$  é a energia interna;  $\Phi$  é a função de dissipação;  $S$ , independente do índice, é o termo fonte.

Além destas equações de conservação, o sistema pode ter seu escoamento descrito por outras equações provindas de um modelo de turbulência, como o  $\kappa - \omega$ :

$$\frac{\partial (\rho \kappa)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \kappa) = \nabla \cdot (\mu_{\text{eff},\kappa} \nabla \kappa) + S_\kappa \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial (\rho \omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \omega) = \nabla \cdot (\mu_{\text{eff},\omega} \nabla \omega) + S_\omega \quad (2.4b)$$

em que  $\kappa$  é a energia cinética turbulenta,  $\omega$  é a taxa na qual a energia cinética turbulenta é convertida em energia interna por unidade de volume e tempo, enquanto  $\mu_{\text{eff}}$  é a viscosidade efetiva, resultado da contribuição da viscosidade dinâmica  $\mu$  e da viscosidade dinâmica turbulenta  $\mu_t$ .

Dentre os modelos de turbulência existentes que resolvem as equações de Navier-Stokes com Média de Reynolds (RANS), aqueles com maior popularidade em aplicações industriais são os de duas equações. Estes modelos, como o  $\kappa - \varepsilon$  e o  $\kappa - \omega$ , são fundamentados em amortecer a viscosidade turbulenta  $\mu_t$  próximo a paredes através do uso de funções de amortecimento que tendem a zero, à medida que a distância até a parede diminui. Contudo, o modelo de turbulência  $\kappa - \omega$  de Wilcox (2006) não segue essa regra, visto que suas equações podem ser integradas por toda a parede sem a necessidade de empregar tais funções (MOUKALLED *et al.*, 2016).

As equações diferenciais 2.1 a 2.4 compartilham grande similaridade em relação a suas variáveis dependentes e podem ser generalizadas a uma equação apenas, introduzindo o termo  $\phi$ , que denota a variável dependente (massa, concentração química, entalpia, temperatura, componente de velocidade etc.) em questão (PATANKAR, 1980; VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007):

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi \quad (2.5)$$

em que  $\Gamma$  representa o coeficiente de difusão e  $S_\phi$  é o termo fonte, sendo específicos para cada variável dependente  $\phi$ . Assim, a Equação 2.5 pode ser denominada equação do transporte para a propriedade  $\phi$  do fluido.

O primeiro e o segundo termo do primeiro membro da Equação 2.5 quantificam os termos de acúmulo (transiente) e convectivo, respectivamente. Já o primeiro e o segundo termo do segundo membro da Equação 2.5 representam os termos difusivo e fonte, nesta ordem.

Ao integrar a Equação 2.5 em um volume de controle ( $VC$ ) tridimensional e aplicar o teorema da divergência de Gauss nos termos convectivo e difusivo, reescrevendo-os como uma integral sobre a superfície  $A$  do volume de controle, obtém-se a equação de conservação na forma integrada para uma variável dependente  $\phi$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{VC} \rho\phi \, dV \right) + \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho\mathbf{u}\phi) \, dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma\nabla\phi) \, dA + \int_{VC} S_\phi \, dV \quad (2.6)$$

que, integrada no intervalo de tempo  $\Delta t$ , resulta em

$$\begin{aligned} \int_{VC} \left[ \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) \, dt \right] \, dV + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho\mathbf{u}\phi) \, dA \right] \, dt \\ = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma\nabla\phi) \, dA \right] \, dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} S_\phi \, dV \, dt \quad (2.7) \end{aligned}$$

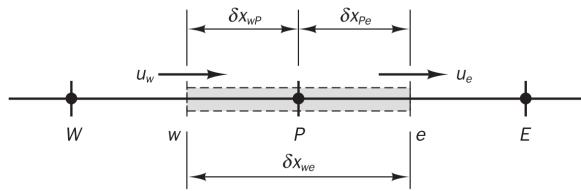
A partir da Equação 2.7, o *software* de CFD realiza sua discretização para cada variável dependente  $\phi$ , pelo método dos volumes finitos, e gera a solução do sistema algébrico formado.

### 2.1.3 Discretização da equação de conservação

Para exemplificar a discretização da Equação 2.5, será considerado o escoamento transiente unidimensional, na direção  $x$ , no volume de controle representado na Figura 2.2 (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). O escoamento entra pela face  $w$  com velocidade  $u_w$  e sai pela face  $e$  com velocidade  $u_e$ . A discretização é caracterizada ao calcular o valor da variável  $\phi$  no nódulo  $P$ , localizado no centroide do volume de controle em questão. A equação de conservação diferencial para este problema é simplificada a

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + S \quad (2.8)$$

**Figura 2.2** – Volume de controle unidimensional.



Fonte: Versteeg e Malalasekera (2007, p. 135).

Primeiramente, integra-se a Equação 2.8 no volume de controle e em relação ao tempo, de  $t$  a  $t + \Delta t$ , como na Equação 2.7:

$$\begin{aligned} \int_w^e \left[ \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt \right] dV + \int_t^{t+\Delta t} [(\rho u A\phi)_e - (\rho u A\phi)_w] dt \\ = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \Gamma A \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_w \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta V dt \quad (2.9) \end{aligned}$$

em que  $A$  é a área da face do volume de controle,  $\Delta V = A\Delta x$  é seu volume ( $\Delta x = \delta x_{we}$ ), e  $\bar{S}$  é a média do termo fonte.

Neste exemplo, será utilizada diferença central como esquema de discretização para os termos difusivo e convectivo. Deste modo:

$$\begin{aligned} \int_w^e \left[ \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt \right] dV + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \rho_e u_e A_e \left( \frac{\phi_P + \phi_E}{2} \right) - \rho_w u_w A_w \left( \frac{\phi_W + \phi_P}{2} \right) \right] dt \\ = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \Gamma_e A_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_{PE}} - \Gamma_w A_w \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\delta x_{WP}} \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta V dt \quad (2.10) \end{aligned}$$

Para a integração em relação ao tempo, será generalizada uma aproximação através de um parâmetro de ponderação  $\theta$ , que varia de 0 a 1. Assim, a integral  $I_\phi$  da

variável  $\phi_P$  pode ser escrita como

$$I_\phi = \int_t^{t+\Delta t} \phi_P dt = [\theta\phi_P + (1-\theta)\phi_P^0] \Delta t \quad (2.11)$$

em que  $\phi_P$  representa a variável dependente no tempo  $t + \Delta t$  e  $\phi_P^0$ , no tempo  $t$  (PATANKAR, 1980; VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

Definindo as variáveis  $F$  e  $D$ , que representam, respectivamente, o fluxo mássico convectivo e a condutância difusiva como

$$F \equiv \rho u A \quad (2.12a)$$

$$D \equiv \frac{\Gamma}{\delta x} A \quad (2.12b)$$

e integrando a Equação 2.10, com o termo fonte linearizado a  $S_u + S_p\phi_P$  e a massa específica  $\rho$  considerada constante, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\rho(\phi_P - \phi_P^0) \Delta V}{\Delta t} + \theta & \left[ F_e \left( \frac{\phi_P + \phi_E}{2} \right) - F_w \left( \frac{\phi_W + \phi_P}{2} \right) \right] + \\ & (1-\theta) \left[ F_e \left( \frac{\phi_P^0 + \phi_E^0}{2} \right) - F_w \left( \frac{\phi_W^0 + \phi_P^0}{2} \right) \right] \\ & = \theta [D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)] + \\ & (1-\theta) [D_e(\phi_E^0 - \phi_P^0) - D_w(\phi_P^0 - \phi_W^0)] + \\ & S_u + \theta S_p \phi_P + (1-\theta) S_p \phi_P^0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Agrupando convenientemente alguns termos, a Equação 2.13 pode ser escrita como

$$\begin{aligned} a_P \phi_P &= a_E [\theta \phi_E + (1-\theta) \phi_E^0] + a_W [\theta \phi_W + (1-\theta) \phi_W^0] + \\ & [a_P^0 - (1-\theta)(a_E + a_W + \Delta F - S_p)] \phi_P^0 + S_u \end{aligned} \quad (2.14)$$

em que

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \quad (2.15a)$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \quad (2.15b)$$

$$a_P^0 = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} \quad (2.15c)$$

$$a_P = a_P^0 + \theta(a_E + a_W + \Delta F - S_p) \quad (2.15d)$$

$$\Delta F = F_e - F_w \quad (2.15e)$$

A Equação 2.14 pode ser adaptada para um volume de controle tridimensional, como o representado na Figura 2.3, ao generalizar os coeficientes relativos aos nódulos

vizinhos como  $a_{nb}$ , definidos na Tabela 2.1 em função do número de Peclet, de acordo com o esquema de discretização adotado (Tabela 2.2).<sup>1</sup> Deste modo

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} [\theta \phi_{nb} + (1 - \theta) \phi_{nb}^0] + [a_P^0 - (1 - \theta) (\sum a_{nb} + \Delta F - S_p)] \phi_P^0 + S_u \quad (2.16)$$

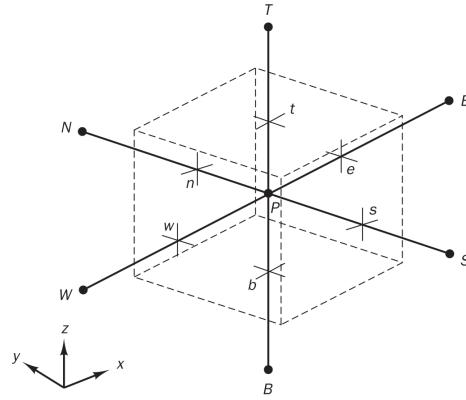
em que

$$a_P^0 = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} \quad (2.17a)$$

$$a_P = a_P^0 + \theta (\sum a_{nb} + \Delta F - S_p) \quad (2.17b)$$

$$\Delta F = F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b \quad (2.17c)$$

**Figura 2.3** – Volume de controle tridimensional hexaédrico.



Fonte: Versteeg e Malalasekera (2007, p. 131).

**Tabela 2.1** – Expressões para  $a_{nb}$ ,  $F$  e  $D$ .

Nódulo vizinho	$a_{nb}$	$F$	$D$
$W$	$D_w \cdot A( Pe_w ) + \llbracket F_w, 0 \rrbracket$	$\rho_w u_w A_w$	$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$
$E$	$D_e \cdot A( Pe_e ) + \llbracket -F_e, 0 \rrbracket$	$\rho_e u_e A_e$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$
$S$	$D_s \cdot A( Pe_s ) + \llbracket F_s, 0 \rrbracket$	$\rho_s u_s A_s$	$\frac{\Gamma_s}{\delta y_{SP}} A_s$
$N$	$D_n \cdot A( Pe_n ) + \llbracket -F_n, 0 \rrbracket$	$\rho_n u_n A_n$	$\frac{\Gamma_n}{\delta y_{PN}} A_n$
$B$	$D_b \cdot A( Pe_b ) + \llbracket F_b, 0 \rrbracket$	$\rho_b u_b A_b$	$\frac{\Gamma_b}{\delta z_{BP}} A_b$
$T$	$D_t \cdot A( Pe_t ) + \llbracket -F_t, 0 \rrbracket$	$\rho_t u_t A_t$	$\frac{\Gamma_t}{\delta z_{PT}} A_t$

Fonte: Adaptado de Patankar (1980), Versteeg e Malalasekera (2007).

<sup>1</sup> O operador  $\llbracket A, B \rrbracket$ , utilizado nas Tabelas 2.1 e 2.2 e adotado em Patankar (1980), retorna o maior valor entre  $A$  e  $B$ .

**Tabela 2.2** – A função  $A(|Pe|)$  para diferentes esquemas.

Esquema	Fórmula para $A( Pe )$
Diferença central	$1 - 0,5 Pe $
Upwind	1
Híbrido	$\llbracket 0, 1 - 0,5 Pe  \rrbracket$
Lei da potência	$\llbracket 0, (1 - 0,1 Pe )^5 \rrbracket$
Exponencial (exato)	$\frac{ Pe }{e^{ Pe } - 1}$

Fonte: Patankar (1980, p. 95).

O número de Peclet  $Pe$  para uma célula de tamanho  $\delta x$  é definido como a razão entre as forças de convecção e as forças de difusão (PATANKAR, 1980):

$$Pe \equiv \frac{F}{D} \equiv \frac{\rho u \delta x}{\Gamma} \quad (2.18)$$

#### 2.1.4 Esquemas de discretização

Existem diversos esquemas de discretização para os termos das equações de conservação. Eles variam em relação a sua ordem de precisão e alguns são mais adequados em determinada situação que outros. Conforme Patankar (1980), os métodos de discretização devem obedecer as seguintes regras para que a simulação apresente solução adequada:

- a) a consistência nas faces de um volume de controle deve ser mantida, ou seja, um fluxo que atravessa uma face comum a dois volumes de controle adjacentes deve ser representado pela mesma expressão na equação discretizada de cada um dos volumes;
- b) todos os coeficientes,  $a_P$  e os vizinhos  $a_{nb}$ , da equação discretizada, como a Equação 2.16, devem ser positivos;
- c) ao considerar o termo fonte linearizado a  $S_u + S_p \phi_P$ , o coeficiente angular  $S_p$  deve ser sempre menor ou igual a zero;
- d)  $a_P = \sum a_{nb}$  para situações em que as equações diferenciais se mantêm satisfeitas depois de uma constante ser adicionada à variável dependente.

A seguir, serão apresentados alguns esquemas de discretização para os termos difusivo e convectivo, como os elencados na Tabela 2.2.

A aproximação por diferença central, adotada no exemplo de discretização na subseção 2.1.3, é fundamentada na formulação da série de Taylor (PATANKAR, 1980). Ela computa os valores da variável dependente nas faces de uma célula através da interpolação linear dos nódulos adjacentes à face. Para o volume de controle da

Figura 2.2, tem-se

$$\phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2} \quad (2.19a)$$

$$\phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2} \quad (2.19b)$$

Contudo, para  $|Pe| \geq 2$ , os coeficientes  $a_{nb}$  passam a não ser mais todos positivos, fazendo com que a solução se torne instável. Desta forma, a aproximação por diferença central pode ser considerada estável e precisa de segunda ordem somente quando  $|Pe| < 2$ , tornando-a útil para situações onde a convecção não impera sobre a difusão. Nota-se que o refinamento da malha pode contornar este problema, visto que diminui  $\delta x$ , porém, aumentando o custo computacional (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

O esquema de discretização *upwind* considera a direção do fluxo ao determinar a variável dependente na face da célula, fazendo com que o valor de  $\phi$  seja igual ao do nóculo precedente em relação ao escoamento. Assim, ainda para o volume de controle de Figura 2.2:

$$\phi_e = \phi_P \quad \text{se} \quad F_e > 0 \quad (2.20a)$$

$$\phi_w = \phi_E \quad \text{se} \quad F_e < 0 \quad (2.20b)$$

Este esquema, em relação à precisão, é considerado de primeira ordem com base no erro de truncamento da série de Taylor. Seus coeficientes, por definição, sempre serão positivos, satisfazendo os requisitos de limitação e contribuindo para a estabilidade da solução. Contudo, quando o fluxo não está alinhado à malha, a solução pode apresentar difusão numérica (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

Spalding (1972) desenvolveu o esquema de discretização híbrido, que replica a aproximação por diferença central, de segunda ordem de precisão, quando  $|Pe| < 2$ , e equivale ao esquema *upwind*, de primeira ordem de precisão, quando  $|Pe| \geq 2$ . Esse esquema une as características favoráveis dos anteriores: é completamente conservativo, incondicionalmente limitado, e produz soluções fisicamente realísticas e estáveis.

O esquema da lei da potência compartilha as mesmas vantagens que o híbrido, produzindo resultados mais precisos que ele. Nesse esquema, a difusão é anulada quando  $|Pe| \geq 10$ , como no híbrido, e o fluxo é representado como uma expressão polinomial quando  $|Pe| < 10$  (PATANKAR, 1980).

Existem outros esquemas de discretização mais complexos para os termos difusivo e convectivo, como o exponencial, o QUICK (*Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinetics*) e os esquemas da classe TVD (*Total Variation Diminishing*) (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

Em relação à discretização do termo temporal, citam-se os esquemas explícito, completamente implícito<sup>2</sup> e Crank-Nicolson.

---

<sup>2</sup> O esquema já é considerado implícito quando  $\theta \neq 0$ .

O esquema explícito é adotado quando  $\theta = 0$  na Equação 2.16, conduzindo a

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb}^0 + \left[ a_P^0 - \left( \sum a_{nb} + \Delta F - S_p \right) \right] \phi_P^0 + S_u \quad (2.21)$$

em que

$$a_P^0 = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} \quad (2.22a)$$

$$a_P = a_P^0 \quad (2.22b)$$

Nota-se que  $\phi_P^0$  prevalece durante todo o passo de tempo  $\Delta t$  até  $t + \Delta t$ , quando passa a ser  $\phi_P$ , e que  $\phi_P$  é obtido explicitamente a partir de  $\phi_{nb}^0$ , sem a necessidade de se resolver as equações simultaneamente. Contudo, o coeficiente de  $\phi_P^0$ , considerado como vizinho de  $\phi_P$  na direção do tempo, pode se tornar negativo, conduzindo a resultados não realísticos (PATANKAR, 1980). Para uma malha unidimensional, o seguinte requisito deve ser satisfeito para que isso não aconteça:

$$\Delta t < \frac{\rho (\Delta x)^2}{2\Gamma} \quad (2.23)$$

O esquema completamente implícito é caracterizado quando  $\theta = 1$ , simplificando a Equação 2.16 a

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + a_P^0 \phi_P^0 + S_u \quad (2.24)$$

em que

$$a_P^0 = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} \quad (2.25a)$$

$$a_P = a_P^0 + \sum a_{nb} + \Delta F - S_p \quad (2.25b)$$

Observa-se que o novo valor  $\phi_P$  prevalece por todo passo de tempo  $\Delta t$  e, como  $\phi_P$  é obtido a partir de  $\phi_{nb}$ , torna-se necessária a resolução de um sistema de equações a cada passo de tempo. Como todos os coeficientes da Equação 2.24 são positivos, esse esquema de discretização é incondicionalmente estável para qualquer  $\Delta t$ . Entretanto, por ser de primeira ordem de precisão no tempo, pequenos passos de tempo são necessários para garantir resultados precisos (PATANKAR, 1980).

Nota-se que a Equação 2.24 passa a ser a discretização da equação de conservação no estado estacionário quando  $\Delta t \rightarrow \infty$ :

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + S_u \quad (2.26)$$

em que

$$a_P = \sum a_{nb} + \Delta F - S_p \quad (2.27)$$

Quando  $\theta = 0,5$ , o esquema de discretização do termo temporal é conhecido como Crank-Nicolson e a Equação 2.16 torna-se

$$a_P \phi_P = \frac{1}{2} \sum a_{nb} \left( \phi_{nb} + \phi_{nb}^0 \right) + \left[ a_P^0 - \frac{1}{2} \left( \sum a_{nb} + \Delta F - S_p \right) \right] \phi_P^0 + S_u \quad (2.28)$$

em que

$$a_P^0 = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} \quad (2.29a)$$

$$a_P = a_P^0 + \frac{1}{2} \left( \sum a_{nb} + \Delta F - S_p \right) \quad (2.29b)$$

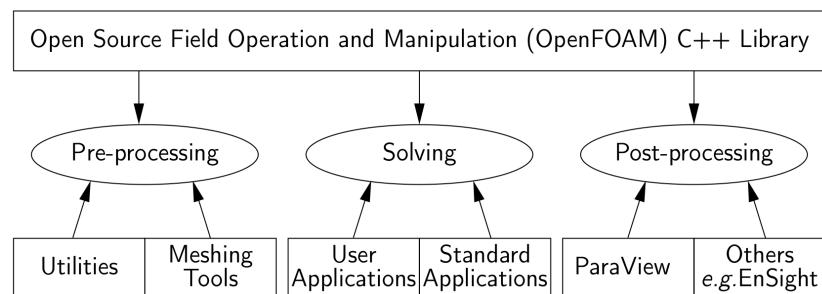
O esquema de Crank-Nicolson é considerado implícito e necessita que as equações discretizadas sejam resolvidas simultaneamente a cada passo de tempo. Por ser baseado na aproximação por diferença central, é um esquema de discretização de segunda ordem de precisão no tempo, sendo mais preciso que o esquema completamente implícito. Apesar de incondicionalmente estável, é necessário garantir que todos os coeficientes da equação discretizada sejam positivos para que resultados realísticos e limitados sejam obtidos (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Assim, para uma malha unidimensional:

$$\Delta t < \frac{\rho (\Delta x)^2}{\Gamma} \quad (2.30)$$

## 2.2 OpenFOAM

*Open Source Field Operation and Manipulation*, OpenFOAM, é uma biblioteca de C++ com aplicações conhecidas como *solvers* (responsáveis por solucionar problemas fluidodinâmicos) e *utilities* (responsáveis por manipular informações de entrada e saída) (The OpenFOAM Foundation, 2020). Tal *software* de código aberto apresenta as três etapas comuns de um *software* de CFD, sendo que as etapas de pré e pós-processamento são acessados pelo usuário através de suas *utilities*. A visão geral da estrutura do OpenFOAM é apresentada na Figura 2.4.

**Figura 2.4** – Visão geral da estrutura do OpenFOAM.



Fonte: The OpenFOAM Foundation (2020, p. 17).

Como exemplos de *solvers*, destacam-se: o *laplacianFoam*, que resolve equações de Laplace simples, como a difusão térmica em um sólido; o *pimpleFoam* e o *simpleFoam*, que solucionam escoamento de fluidos Newtonianos incompressíveis em regimes transitório e estacionário, respectivamente; e o *chtMultiRegionFoam*, *solver* utilizado nas simulações deste trabalho, capaz de resolver o escoamento, transitório ou estacionário, de fluidos tanto quanto a condução de calor em sólidos, considerando a transferência de calor conjugada entre as regiões, os efeitos de empuxo e os modelos de turbulência, radiação e reações químicas. O OpenFOAM também abrange *solvers* dedicados à solução de problemas envolvendo escoamentos compressíveis, multifásicos e de sistemas particulados, combustão, eletromagnetismo, análise de estresse em sólidos, e métodos discretos, como a simulação direta de Monte Carlo (The OpenFOAM Foundation, 2020).

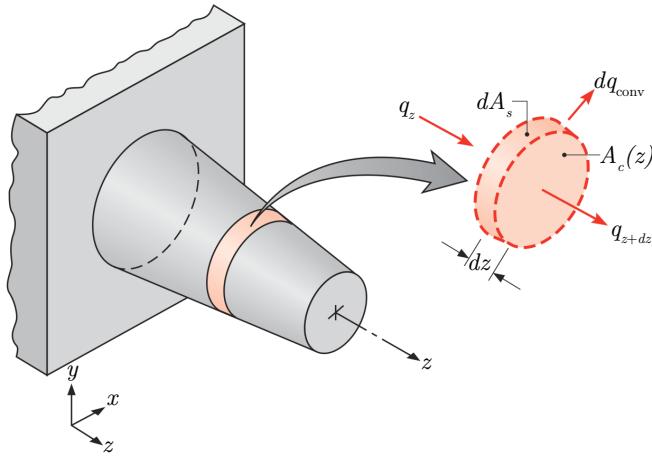
Os utilitários do OpenFOAM, *utilities*, são responsáveis pela realização de atividades de pré e pós-processamento e também pela geração, manipulação e conversão de malhas. Citam-se, como exemplos utilitários para a geração e manipulação de malhas: o *blockmesh*, capaz de produzir malhas para domínios geométricos simples; o *topoSet*, que permite determinar regiões com características distintas em uma malha gerada; o *splitMeshRegions*, responsável por dividí-la em múltiplas regiões, determinadas pelo utilitário anterior; o *checkMesh*, que gera um relatório sobre a validade da malha, trazendo informações como a quantidade de células de cada tipo (hexaédricas, tetraédricas, poliédricas etc.), a não-ortogonalidade, a distorção e a razão de aspecto da malha; e o *renumberMesh*, capaz de renomear a lista de células a fim de deixar as matrizes dos sistemas de equações lineares o mais diagonal possível, consequentemente, aumentando a velocidade de resolução, principalmente nas primeiras iterações (The OpenFOAM Foundation, 2020).

Quanto aos utilitários de pré e pós-processamento, destacam-se: o *foamSetupCHT*, responsável por configurar o diretório de um caso a ser simulado baseado em um diretório modelo contendo informações como as propriedades dos materiais, as condições iniciais e de contorno e os esquemas de discretização; o *decomposePar*, que divide o domínio em partes a serem resolvidas paralelamente em múltiplos núcleos de processamento e que serão reunidas pelo utilitário *reconstructPar* após findada a simulação. O utilitário *postProcess* consegue extrair diversas informações da simulação, sendo estas definidas por uma série de opções como, por exemplo, *wallHeatFlux*, que calcula a taxa de transferência de calor na superfície de um sólido e *vorticity*, que computa a vorticidade do fluido. Além dos utilitários do OpenFOAM, outra principal ferramenta de pós-processamento utilizada para visualizar os resultados da solução numérica é o ParaView, software de código aberto que utiliza a *Visualisation Toolkit* (VTK) como seu motor de renderização e processamento de dados (The OpenFOAM Foundation, 2020).

## 2.3 Abordagem analítica para a condução de calor em uma aleta de seção transversal uniforme

Para a abordagem analítica do problema proposto neste trabalho, foram feitas as seguintes considerações: a temperatura é uniforme ao longo de cada seção transversal da barra, considerando assim um fluxo de calor unidimensional; as propriedades físicas do material, como sua condutividade térmica  $k$ , são constantes em toda sua extensão; os efeitos de radiação podem ser omitidos; e o coeficiente médio de transferência de calor por convecção  $\bar{h}$  é considerado constante sobre toda a superfície.

**Figura 2.5** – Balanço de energia para uma superfície estendida.



Fonte: Adaptado de Bergman e Lavine (2017, p. 146).

Ao aplicar o balanço de energia no elemento diferencial da Figura 2.5, obtém-se o seguinte (BERGMAN; LAVINE, 2017; KREITH; MANGLIK; BOHN, 2010):

$$q_z = q_{z+dz} + dq_{\text{conv}} \quad (2.31)$$

em que  $q_z$  e  $q_{z+dz}$  são as taxas de transferência de calor que entram e saem, respectivamente, do elemento diferencial na direção  $z$  e  $dq_{\text{conv}}$  é a taxa de transferência de calor por convecção que parte da superfície da aleta.

Da Lei de Fourier, sabe-se que

$$q_z = -kA_c \frac{dT}{dz} \quad (2.32)$$

em que  $A_c$  é a área da seção transversal, que pode variar,  $k$  é a condutividade térmica do material e  $T$  é a temperatura. Uma vez que a taxa de condução em  $z + dz$  pode ser expressa, por meio da Série de Taylor, da seguinte forma

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{dq_z}{dz} dz \quad (2.33)$$

e após substituir (2.32) em (2.33), tem-se que

$$q_{z+dz} = -kA_c \frac{dT}{dz} - k \frac{d}{dz} \left( A_c \frac{dT}{dz} \right) dz \quad (2.34)$$

A taxa de transferência de calor por convecção pode ser expressa como a seguir

$$dq_{\text{conv}} = \bar{h}dA_s(T - T_\infty) = \bar{h}Pdz(T - T_\infty) \quad (2.35)$$

em que  $dA_s$  é a área superficial do elemento diferencial,  $P$  é seu perímetro e  $\bar{h}$  é o coeficiente médio de transferência de calor por convecção. Ao substituir as Equações 2.32, 2.34 e 2.35 no balanço de energia (Equação 2.31) obtém-se

$$\frac{d}{dz} \left( A_c \frac{dT}{dz} \right) - \frac{\bar{h}P}{k} (T - T_\infty) = 0 \quad (2.36)$$

que pode ser escrita na seguinte forma

$$\frac{d^2T}{dz^2} + \left( \frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dz} \right) \frac{dT}{dz} - \frac{\bar{h}P}{kA_c} (T - T_\infty) = 0 \quad (2.37)$$

Para aletas de seção transversal uniforme, como é o caso da geometria abordada neste trabalho, a Equação 2.37 pode ser simplificada a

$$\frac{d^2T}{dz^2} - \frac{\bar{h}P}{kA_c} (T - T_\infty) = 0 \quad (2.38)$$

visto que  $A_c$  e  $P$  são constantes, logo  $dA_c/dz = 0$ .

As soluções desta equação diferencial ordinária, para cada condição de contorno aplicada à extremidade da aleta na forma do perfil de temperaturas, estão condensadas na Tabela 2.3, juntamente à taxa de transferência de calor na aleta para cada caso.

Definem-se:

$$\theta \equiv T - T_\infty \quad (2.39a)$$

$$\theta_b = \theta(0) = T_b - T_\infty = T(0) - T_\infty \quad (2.39b)$$

$$m^2 \equiv \frac{\bar{h}P}{kA_c} \quad (2.39c)$$

$$M \equiv \theta_b \sqrt{\bar{h}P k A_c} \quad (2.39d)$$

Com as expressões obtidas na Tabela 2.3, é possível representar analiticamente o perfil de temperaturas ao longo do eixo  $z$  na aleta, partindo das hipóteses de regime estacionário e ausência de gradiente de temperatura em cada seção transversal.

### 2.3.1 Parâmetros de desempenho em aletas

Como já mencionado, as aletas têm a função de aumentar a troca térmica através da ampliação da área superficial de algum material. Alguns meios de avaliar

**Tabela 2.3** – Distribuição de temperaturas e taxa de transferência de calor para aletas de seção transversal uniforme.

Condição de contorno ( $z = L$ )	Distribuição de temperatura $\theta/\theta_b$	Taxa de transferência de calor da aleta $q_f$
Convecção: $\bar{h}\theta(L) = -k \frac{d\theta}{dz} \Big _{z=L}$	$\frac{\cosh m(L-z) + \left(\frac{\bar{h}}{mk}\right) \sinh m(L-z)}{\cosh mL + \left(\frac{\bar{h}}{mk}\right) \sinh mL} M \frac{\sinh mL + \left(\frac{\bar{h}}{mk}\right) \cosh mL}{\cosh mL + \left(\frac{\bar{h}}{mk}\right) \sinh mL}$ (2.40)	
Adiabático: $\frac{d\theta}{dz} \Big _{z=L} = 0$	$\frac{\cosh m(L-z)}{\cosh mL}$ (2.42)	$M \tanh mL$ (2.43)
Temperatura prescrita: $\theta(L) = \theta_L$	$\frac{\left(\frac{\theta_L}{\theta_b}\right) \sinh mz + \sinh m(L-z)}{\sinh mL}$ (2.44)	$M \frac{\cosh mL - \frac{\theta_L}{\theta_b}}{\sinh mL}$ (2.45)
Aleta infinita ( $L \rightarrow \infty$ ): $\theta(L) = 0$	$e^{-mz}$ (2.46)	$M$ (2.47)

Fonte: Adaptado de Bergman e Lavine (2017, p. 150).

o desempenho de uma aleta é a determinação de sua efetividade, sua eficiência e sua resistência térmica.

A efetividade de uma aleta  $\varepsilon_f$  é definida como a razão entre a taxa de transferência de calor na aleta  $q_f$  e a taxa de transferência de calor obtida, caso não houvesse a aleta, por uma superfície mantida à temperatura constante  $T_b$ . O cálculo de  $\varepsilon_f$  se dá por

$$\varepsilon_f = \frac{q_f}{\bar{h}A_{c,b}\theta_b} \quad (2.48)$$

em que  $A_{c,b}$  é a área da seção transversal na base da aleta. Geralmente, é justificado o uso de aletas quando  $\varepsilon_f \gtrsim 2$ , sendo possível aumentar sua efetividade ao se utilizar materiais com alta condutividade térmica, como alumínio e cobre, ou ao manter a razão entre o perímetro e a área transversal da aleta a maior possível. Analisando a Equação 2.48, percebe-se também que uma aleta apresentará maior efetividade ao ser inserida em um meio onde o coeficiente de transferência de calor por convecção é pequeno (BERGMAN; LAVINE, 2017).

Já a eficiência de uma aleta  $\eta_f$  é definida pela razão entre sua taxa de transferência de calor atual  $q_f$  pela taxa transferência de calor máxima, obtida se ela estivesse totalmente à temperatura de sua base  $T_b$ . Logo

$$\eta_f \equiv \frac{q_f}{q_{\max}} = \frac{q_f}{\bar{h}A_f\theta_b} \quad (2.49)$$

em que  $A_f$  é a área superficial da aleta (BERGMAN; LAVINE, 2017).

Outro parâmetro, útil para representar a aleta como um elemento de um circuito térmico, é a resistência térmica  $R_{t,f}$ , calculada por

$$R_{t,f} = \frac{\theta_b}{q_f} \quad (2.50)$$

## 2.4 Critério de Informação de Akaike

Segundo Bozdogan (1987), a seleção e a avaliação de um modelo que descreva adequadamente um conjunto de dados é de grande relevância para se analisar uma infinidade de fenômenos. Busca-se por um modelo que melhor explique a variável resposta, mas que seja o mais parcimonioso possível, isto é, que possua o menor número de parâmetros a serem estimados. Dentre os principais critérios de seleção de um modelo, citam-se o Teste da Razão de Verossimilhança (TRV), o Critério Bayesiano de Schwartz (BIC) e o Critério de Informação de Akaike (AIC).

Esse último avalia a adequabilidade do modelo ao relacionar a distância esperada de Kullback-Leibler com o logaritmo da função de verossimilhança maximizada, considerando a polarização provocada pelo número de parâmetros estimados, consequentemente, desfavorecendo modelos mais complexos (AKAIKE, 1974).

O critério de informação de Akaike é útil para selecionar o melhor modelo dentro de um conjunto. Contudo, se todos os modelos em questão descreverem erroneamente o fenômeno, ainda assim o critério definirá o melhor entre eles, mesmo que este não consiga representar bem a realidade. Dessa forma, deve-se assegurar que o conjunto de modelos candidatos estejam bem fundamentados (BURNHAM; ANDERSON, 2002).

O parâmetro  $AIC$  é determinado por

$$AIC = -2 \log (\mathcal{L}(\hat{\theta}|y)) + 2K \quad (2.51)$$

em que  $\log (\mathcal{L}(\hat{\theta}|y))$  é o máximo do logaritmo da função de verossimilhança do modelo com os parâmetros  $\theta$  e  $K$  é o número de parâmetros estimados. Caso o tamanho da amostra  $n$  seja pequeno se comparado ao número de parâmetros estimados ( $n/K < 40$ ), é recomendado utilizar o valor corrigido de  $AIC$ , obtido ao multiplicar o termo  $2K$  da Equação 2.51 por  $n/(n - K - 1)$ . Logo,  $AIC_c$  é calculado por

$$AIC_c = -2 \log (\mathcal{L}(\hat{\theta}|y)) + 2K \left( \frac{n}{n - K - 1} \right) \quad (2.52)$$

equivalente a

$$AIC_c = AIC + \frac{2K(K + 1)}{n - K - 1} \quad (2.53)$$

O valor individual de  $AIC$  ou de  $AIC_c$  não carrega consigo alguma interpretação relevante. Entretanto, a diferença  $\Delta_i$  entre o  $AIC_i$  de um modelo  $i$  e o menor valor

de  $AIC$  no conjunto permite uma rápida comparação entre os modelos e, portanto, determinar o nível de suporte empírico que cada um possui em relação aos dados experimentais (BURNHAM; ANDERSON, 2002). A Tabela 2.4 elenca as possíveis interpretações para os valores de  $\Delta_i$ , calculado por

$$\Delta_i = AIC_i - AIC_{\min} \quad (2.54)$$

Nota-se que  $\Delta_i$  pode ser utilizado tanto para  $AIC$  quanto para  $AIC_c$  e que o melhor modelo estimado é aquele que  $\Delta_i \equiv \Delta_{\min} = 0$ .

**Tabela 2.4** – Interpretação para os valores de  $\Delta_i$ .

$\Delta_i$	Nível de suporte empírico do modelo $i$
0 – 2	Substancial
4 – 7	Consideravelmente baixo
> 10	Essencialmente nenhum

Fonte: Burnham e Anderson (2002, p. 70).



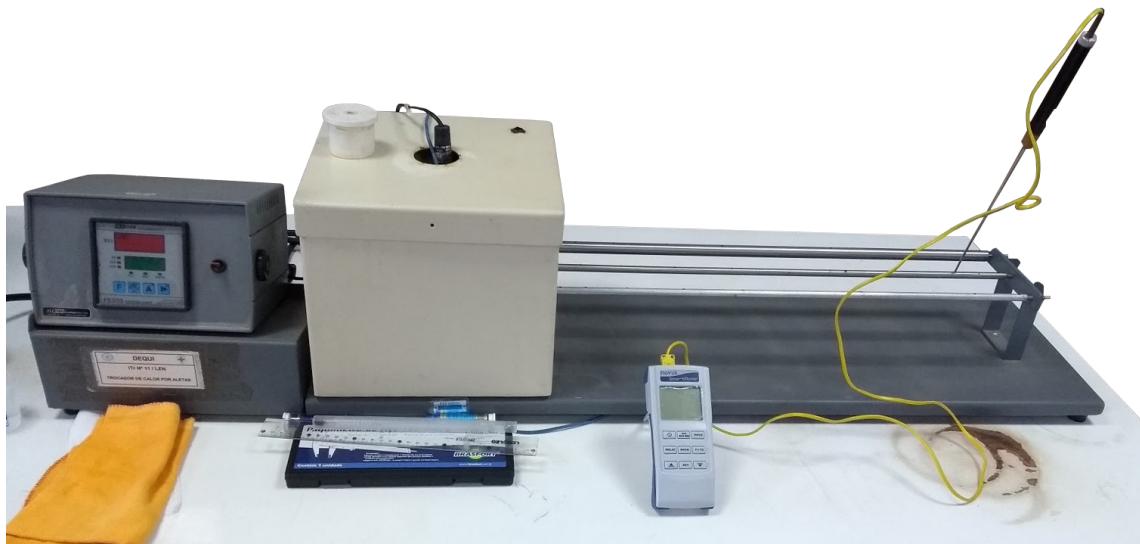
### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

Este trabalho teve como objetivo avaliar quantitativamente a transferência de calor em aletas piniformes de seção transversal uniforme, posicionadas horizontalmente e submetidas à temperatura constante em sua base. Para isto, foi realizado um experimento em um trocador de calor por aletas e foram feitas simulações no *software* livre de fluidodinâmica computacional OpenFOAM. Tais procedimentos são detalhados a seguir.

#### 3.1 Experimento no trocador de calor por aletas

Para a realização da parte experimental, foi utilizado, como aparato experimental, um trocador de calor composto por três aletas piniformes de seção transversal circular uniforme disponível no Laboratório de Engenharia Química da Escola de Engenharia de Lorena (USP), ilustrado na Figura 3.1.

**Figura 3.1** – Trocador de calor por aletas usado no experimento.



Fonte: Autor.

As três aletas horizontais são de mesmo comprimento (620 mm). Contudo, seus diâmetros, medidos por um paquímetro, e materiais de construção variam conforme é indicado na Tabela 3.1. O aparato experimental possui um banho de aquecimento que se encontra em contato com a água e com a aleta. A água foi aquecida por uma resistência de 500 W e sua temperatura foi monitorada por um controlador PID (Proporcional Integral Derivativo), minimizando o erro de sinal. A temperatura do banho de aquecimento foi fixada em  $70^{\circ}\text{C} \pm 0,5^{\circ}\text{C}$ .

**Tabela 3.1** – Diâmetros e materiais de construção de cada aleta do trocador de calor.

Aleta	Diâmetro (mm)	Material de construção
A	16	Aço inox AISI 316
B	9,5	Aço inox AISI 316
C	9,5	Alumínio puro

Fonte: Autor.

A Figura 3.2 mostra a vista superior do trocador de calor, destacando os rótulos utilizados para nomear cada aleta, sendo eles: A para a aleta de aço inox AISI 316 com 16 mm de diâmetro; B para a aleta de aço inox AISI 316 com 9,5 mm de diâmetro; C para a aleta de alumínio puro com 9,5 mm de diâmetro. Observam-se também oito orifícios ao longo de cada aleta, onde foram avaliadas as temperaturas durante o regime estacionário.

**Figura 3.2** – Vista superior do trocador de calor por aletas.

Fonte: Autor.

A princípio, foi mensurada a temperatura ambiente e, em seguida, foi verificado o início do regime permanente ao se medir com um termopar a temperatura no orifício 4 de cada aleta, em intervalos de 10 minutos, até que não houvesse mais variação perceptível desta grandeza. Constatado o estado estacionário, iniciaram-se as medições da temperatura em todos os orifícios de cada aleta. Posicionou-se o termopar no orifício 1, considerado a posição inicial da aleta, e anotou-se a temperatura após 3 minutos. Então, banhou-se o termopar em água para diminuir sua temperatura e, assim, minimizar possíveis erros na verificação do próximo orifício. Esse procedimento foi repetido para cada um dos oito orifícios, em cada uma das três aletas. Posteriormente, foi realizada mais uma leva de medições em todas elas, como descrito anteriormente, caracterizando uma duplicata.

## 3.2 Simulação numérica no OpenFOAM

As simulações numéricas da transferência de calor nas aletas, similares àquelas presentes no trocador de calor utilizado na parte experimental deste trabalho, foram realizadas no *software* OpenFOAM v8 em uma máquina virtual com o sistema operacional Ubuntu 20.04 LTS instalado, 4 Gb de memória RAM e 4 núcleos de processamento Intel Core i5-9300H de 2,4 GHz disponíveis.

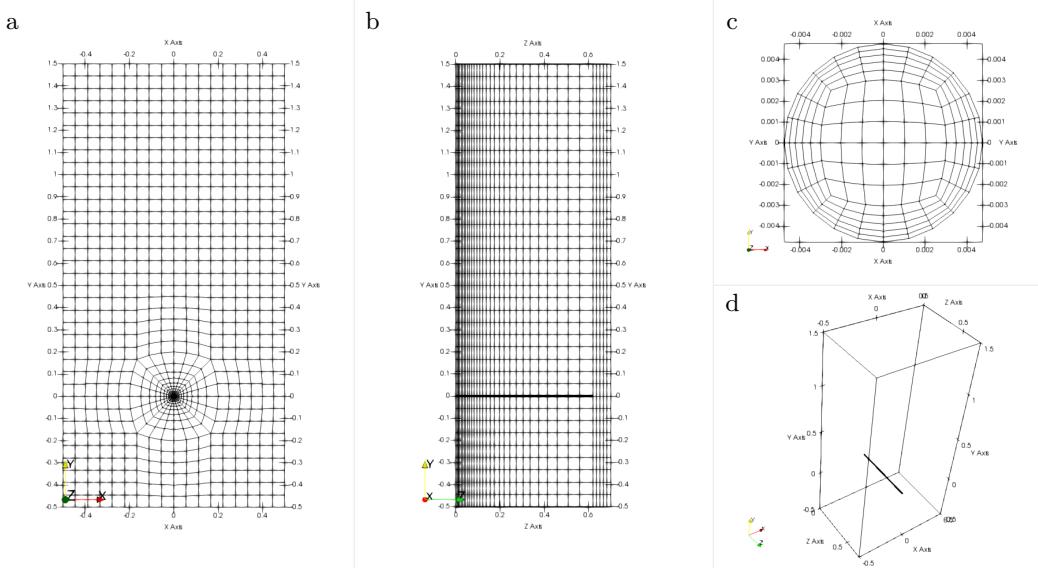
### 3.2.1 Criação e manipulação da malha

Devido à simplicidade do domínio geométrico, não foi necessária a utilização de um *software* de desenho assistido por computador, CAD, para a criação do modelo geométrico: um cilindro de metal (aço inox AISI 316 ou alumínio puro) em um meio fluido (ar). O utilitário *blockMesh* foi o suficiente para realizar essa função e para discretizar o domínio, dividindo-o em um número finito de células hexaédricas, ao seguir os parâmetros determinados no dicionário *blockMeshDict*. Já os utilitários *topoSet* e *splitMeshRegions* foram responsáveis por, respectivamente, determinar e dividir as regiões delimitadas pela aleta e pelo meio.

A geometria da malha foi determinada no dicionário *blockMeshDict* da seguinte forma: o centro da base da aleta foi fixado em (0, 0, 0) e, a partir dele, foi gerado um círculo no plano *Oxy* de diâmetro igual a de sua respectiva aleta, indicado na Tabela 3.1; a partir do círculo, foi extrudado um cilindro de 62 cm de comprimento no sentido positivo do eixo *z*; o meio foi representado por um paralelepípedo de dimensões 1 m × 2 m × (0,62 m ou 0,70 m); as bordas laterais do meio, na direção do eixo *x*, distam 0,5 m da aleta; as bordas inferiores e superiores, na direção do eixo *y*, distam 0,5 m e 1,5 m (equivalente a 93,75 vezes o diâmetro da aleta A), respectivamente; a borda próxima à extremidade da aleta dista 8 cm desta para o caso de convecção na extremidade e é adjacente a ela nos demais casos.

Na simulação durante o regime transitório, utilizou-se uma malha mais grosseira, mas que permitiu um tempo de processamento relativamente menor. A Figura 3.3 exibe essa malha para o caso de convecção na extremidade. Destaca-se seu refinamento próximo à superfície da aleta (Figuras 3.3a e 3.3c) e próximo a sua base (Figura 3.3b), regiões onde se encontram maiores gradientes de temperatura. A Figura 3.3d mostra a visão isométrica do domínio geométrico, evidenciando a dimensão da aleta frente à do meio utilizado. Após alcançado o estado estacionário, essa malha foi substituída por uma mais fina (Figura 3.4), onde outra etapa da simulação foi executada.

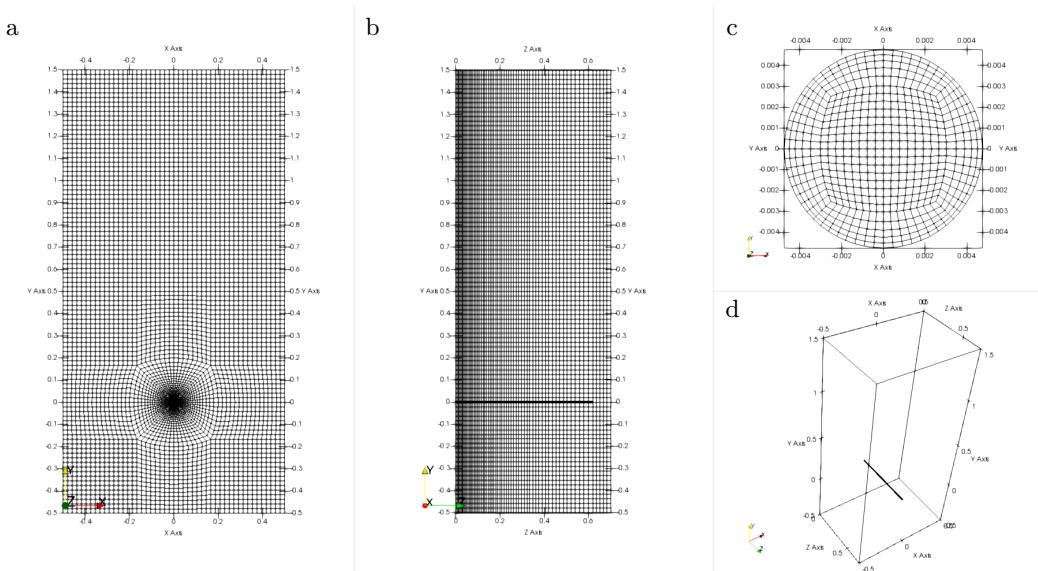
**Figura 3.3** – Malha grosseira para o caso de convecção na extremidade utilizada até o início do estado estacionário.



Fonte: Autor.

Legenda: (a) Visão frontal da região do fluido. (b) Visão lateral da região do fluido. (c) Seção transversal da aleta. (d) Visão isométrica do domínio geométrico.

**Figura 3.4** – Malha fina para o caso de convecção na extremidade utilizada no estado estacionário.



Fonte: Autor.

Legenda: (a) Visão frontal da região do fluido. (b) Visão lateral da região do fluido. (c) Seção transversal da aleta. (d) Visão isométrica do domínio geométrico.

Ambas as malhas possuem somente células hexaédricas com baixo percentual de não-ortogonalidade, o que permitiu utilizar um esquema de discretização para o termo Laplaciano das equações de conservação que fosse preciso, mas que não perdesse seu caráter limitado. O número de células não hexagonais e os valores máximos de

não-ortogonalidade, distorção e razão de aspecto de ambas as malhas, obtidos através do utilitário *checkMesh*, estão apresentados na Tabela 3.2.

**Tabela 3.2** – Número de células e parâmetros de qualidade das malhas utilizadas.

Malha	Caso	Número de células	Não-ortogonalidade máxima	Distorção máxima	Razão de aspecto máxima
Grosseira	CE	36960	23,45%	1,027	171,79
Grosseira	EA, AI	31680	23,45%	1,027	171,79
Fina	CE	453440	35,99%	0,521	71,96
Fina	EA, AI	418560	35,99%	0,521	71,96

Fonte: Autor.

Legenda: CE - Convecção na extremidade. EA - Extremidade adiabática. AI - Aleta infinita.

### 3.2.2 Configuração dos dicionários do OpenFOAM

Para dar início à simulação do problema em questão, foi preciso prover ao OpenFOAM certas informações na forma de entradas em determinados arquivos de texto, denominados dicionários. As principais entradas para a configuração do caso são: as condições iniciais e de contorno para cada região; os esquemas de discretização das equações de conservação; os solucionadores lineares dos sistemas de equações e as tolerâncias para a convergência de cada variável; e as propriedades termofísicas dos materiais empregados. Os principais dicionários utilizados nas simulações estão elencados no Apêndice A.

#### 3.2.2.1 Condições iniciais e de contorno

A fim de se resolver as equações de conservação por meio de simulação numérica, é mandatório a determinação de condições iniciais e de contorno desde o princípio. Desta forma, foi necessário informar tais valores ao *software* por meio dos dicionários apropriados de cada variável, em cada região estudada.

Para o meio, as principais condições iniciais em seu interior foram  $T = T_{\infty} = 295 \text{ K}$ ,  $\mathbf{u} = \vec{0} \text{ m/s}$  e  $p = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Já as condições de contorno foram configuradas de modo que o sistema fosse considerado fechado e cujos valores das variáveis na borda fossem fixados nos mesmos valores iniciais adotados.

Para a aleta, a condição inicial em seu interior também foi  $T = T_{\infty} = 295 \text{ K}$  ao passo que, em sua superfície, as condições de contorno foram:

- a) temperatura da base da aleta,  $T_b = T(0)$ , igual àquela medida no orifício 1 para cada uma;

- b) extremidade da aleta submetida a cada uma das três condições de contorno a seguir, conforme Bergman e Lavine (2017):
  - convecção na extremidade, em que  $\bar{h}(T_L - T_\infty) = -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L}$ ;
  - extremidade adiabática, em que  $\frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = 0$ ;
  - aleta infinita, em que  $T_L = T_\infty$ ;
- c) superfície ao redor da aleta submetida à convecção natural.

Desta forma, foi necessário realizar nove simulações, sendo três referentes a cada condição de contorno na extremidade para cada uma das três aletas.

### 3.2.2.2 Esquemas de discretização das equações de conservação

Os esquemas de discretização utilizados neste trabalho são similares àqueles adotados como padrão em *softwares* comerciais, considerados, em termos gerais, de segunda ordem para precisão e completamente limitados (Wolf Dynamics, 2020). Tais esquemas foram inseridos nos dicionários *fvSchemes* de cada região, possuindo entradas referentes aos termos das equações diferenciais.

Para o termo temporal, foi definido o esquema *CrankNicolson 0.5*, que mescla primeira e segunda ordem de precisão. Para o termo difusivo, foi utilizado o esquema de discretização *cellLimited Gauss linear 0.5* para a região do fluido e *Gauss linear* para a região do sólido. Já para o termo convectivo, somente a região do fluido teve esquemas de discretização determinados: *Gauss linearUpwind* para  $\mathbf{u}$ ,  $\kappa$  e  $\omega$  e *Gauss limitedLinear 1* para as demais variáveis. O esquema concernente ao termo Laplaciano, altamente dependente da qualidade da malha, principalmente de sua não-ortogonalidade, foi *Gauss linear limited 1*.

### 3.2.2.3 Solucionadores lineares e tolerâncias

Foi necessário determinar os solucionadores lineares responsáveis pela resolução dos sistemas de equações algébricas e definir os critérios de convergência para as variáveis nos dicionários *fvSolution* de cada região. O solucionador multi-grid GAMG (*Geometric-Algebraic Multi-Grid*) foi utilizado para resolver a pressão hidrostática  $p_{\text{rgh}}$ . Já os solucionadores gradientes bi-conjugados de Newton-Krylov, PCG e PBiCGStab, foram utilizados para a resolução da massa específica do ar  $\rho$ , do campo de velocidades  $\mathbf{u}$  e das quantidades transportadas  $h$ ,  $i$ ,  $\kappa$  e  $\omega$ .

Em relação aos critérios de convergência, foram definidos o mínimo de 3 iterações e os valores para as tolerâncias, relativa e absoluta, para a resolução de cada variável, em que a tolerância relativa da última iteração sempre era alterada para 0. Os solucionadores

lineares e as tolerâncias adotadas para cada variável foram determinados de acordo com o recomendado em Wolf Dynamics (2020) e estão listados na Tabela 3.3.

**Tabela 3.3** – Solucionadores lineares e tolerâncias relativa e absoluta para as variáveis em cada região.

Região	Variável	Solucionador linear	Tolerância relativa	Tolerância absoluta
Fluido	$\rho$	PCG	0	$1 \times 10^{-7}$
Fluido	$p_{\text{rhs}}$	GAMG	0,01	$1 \times 10^{-6}$
Fluido	$\mathbf{u}, h, i, \kappa, \omega$	PBiCGStab	0,001	$1 \times 10^{-8}$
Sólido	$h, i$	PCG	0,1	$1 \times 10^{-7}$

Fonte: Autor

Ainda em *fvSolution*, foi informada a utilização do algoritmo PIMPLE, combinação entre os algoritmos PISO (*Pressure Implicit with Splitting of Operators*) e SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*), para a resolução do acoplamento pressão-velocidade, com número de corretores igual a 2 e número de corretores não-ortogonais igual a 1.

### 3.2.2.4 Propriedades termofísicas

Foi necessário informar certas propriedades termofísicas dos materiais que constituíam a aleta e o meio que a envolvia no dicionário *thermophysicalProperties*. Elas foram retiradas de Bergman e Lavine (2017) e avaliadas como constantes a 300 K, temperatura inclusa no intervalo alcançado por esta grandeza durante as simulações. As propriedades elencadas para os metais das aletas foram a massa molar  $MM$ , o calor específico  $c_p$ , a condutividade térmica  $k$  e a massa específica  $\rho$ , summarizadas na Tabela 3.4. Para o ar, foi necessário informar a massa molar  $MM$ , o calor específico  $c_p$ , a viscosidade dinâmica  $\mu$  e o número de Prandtl  $Pr$ , reunidos na Tabela 3.5.

**Tabela 3.4** – Propriedades termofísicas dos metais que compõem as aletas a 300 K.

Material	$MM$ (g/mol)	$c_p$ (J/kg·K)	$k$ (W/m·K)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Aço inox AISI 316	56,4	468	13,4	8238
Alumínio puro	26,982	903	237	2702

Fonte: Bergman e Lavine (2017, p. 899).

**Tabela 3.5** – Propriedades termofísicas do ar a 300 K.

$MM$ (g/mol)	$c_p$ (J/kg·K)	$\mu$ (kg/m·s)	$Pr$
28,97	1007	$1,846 \times 10^{-5}$	0,707

Fonte: Bergman e Lavine (2017, p. 911).

### 3.2.2.5 Outros dicionários

No dicionário *momentumTransport*, informou-se a utilização do modelo de turbulência  $\kappa - \omega$  SST (*Shear Stress Transport*), adotado na simulação numérica, e, em *transportProperties*, definiu-se o modelo de transporte para fluidos newtonianos. Já no dicionário *g*, definiu-se o valor da aceleração da gravidade como  $\mathbf{g} = -9,81\hat{j}$  m/s<sup>2</sup>. Em *materialProperties*, determinou-se o material utilizado em cada região, cujas propriedades termofísicas foram informadas em *thermophysicalProperties*. Informaram-se os tempos de início e término da simulação e os intervalos de processamento (*deltaT*) e de escrita no dicionário *controlDict*.

### 3.2.3 Simulação propriamente dita

Após a criação e a manipulação da malha grosseira e a devida configuração dos dicionários do caso, executou-se o utilitário *renumberMesh* para renumerar a lista de células da malha, tornando a matriz de resolução das variáveis mais diagonal possível e, assim, diminuindo o tempo de processamento. O sistema foi decomposto em quatro partes, por meio do utilitário *decomposePar*, para que a simulação ocorresse em paralelo nos quatro núcleos de processamento disponíveis. Então, executou-se o solver *chtMultiRegionFoam*, que iniciou a simulação numérica, perdurando até o momento em que se atingisse o regime estacionário, caracterizado quando taxa de transferência de calor na aleta, computada pela função *wallHeatFlux*, deixasse de variar perceptivelmente, ou seja, quando sua inclinação no gráfico  $q_f \times t$  tendesse a 0. Findada a simulação, as quatro partes do sistema processado foram reunidas em uma através do utilitário *reconstructPar*.

Verificado então o regime estacionário, o campo de variáveis da primeira malha foi mapeado e interpolado como condição inicial para a malha fina através do utilitário *mapFields*. Assim, executou-se o mesmo procedimento para a simulação na nova malha, obtendo resultados mais precisos.

A manipulação dos resultados foi feita na ferramenta de pós-processamento ParaView e os gráficos foram gerados no software gnuplot.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os dados coletados no experimento foram analisados estatisticamente através do *software* Wolfram Mathematica e comparados com os resultados numéricos obtidos na simulação realizada no OpenFOAM.

### 4.1 Temperaturas obtidas no trocador de calor por aletas

Na parte experimental, a temperatura ambiente  $T_\infty$  medida foi de 22 °C (295 K) e as temperaturas, obtidas em duplicata, de cada um dos oito orifícios das três aletas (A, B e C) encontram-se na Tabela 4.1.

**Tabela 4.1** – Temperatura ao longo do eixo das aletas A, B e C.

Orifício	Posição (m)	$T_A$ (K)	$T_B$ (K)	$T_C$ (K)
1	0,000	$319,70 \pm 0,28$	$314,25 \pm 0,21$	$326,85 \pm 0,35$
2	0,033	$311,50 \pm 0,28$	$306,40 \pm 0,14$	$321,50 \pm 0,99$
3	0,086	$303,95 \pm 0,07$	$300,35 \pm 0,07$	$316,25 \pm 0,35$
4	0,159	$299,20 \pm 0,00$	$297,45 \pm 0,07$	$310,00 \pm 0,00$
5	0,238	$297,30 \pm 0,00$	$296,40 \pm 0,00$	$305,75 \pm 0,21$
6	0,388	$296,10 \pm 0,00$	$295,85 \pm 0,07$	$300,65 \pm 0,07$
7	0,542	$296,00 \pm 0,00$	$295,85 \pm 0,07$	$298,55 \pm 0,21$
8	0,605	$296,15 \pm 0,07$	$295,80 \pm 0,00$	$298,15 \pm 0,07$

Fonte: Autor.

### 4.2 Análise estatística dos dados obtidos experimentalmente

Utilizando a função *NonlinearModelFit* do *software* Wolfram Mathematica, foi possível avaliar os modelos para o perfil de temperatura propostos para uma aleta de seção transversal uniforme segundo a condição de contorno adotada em sua extremidade. Dentre as condições elencadas na Tabela 2.3, foram analisados os modelos dos perfis de temperatura para quando é considerada a convecção na extremidade da aleta (Equação 2.40), quando a extremidade é considerada adiabática (Equação 2.42) e quando a aleta é considerada infinita (Equação 2.46).

A regressão não-linear realizada pela função *NonlinearModelFit* possibilitou computar o coeficiente médio de transferência de calor por convecção  $\bar{h}$ , único parâmetro desconhecido dos modelos, para as aletas A, B e C, considerando as três condições de contorno abordadas. A partir deste valor, foi possível calcular a taxa de transferência

de calor  $q_f$  na aleta, através das Equações 2.41, 2.43 e 2.47. Computaram-se, também, os valores de  $AIC_c$ ,  $\Delta_i$  e  $R^2$  para cada um dos modelos em cada aleta. Os resultados obtidos através da regressão não-linear estão listados na Tabela 4.2.

**Tabela 4.2** – Resultados obtidos através da regressão não-linear dos dados experimentais.

Aleta	Condição de contorno	$\bar{h}$ (W/m <sup>2</sup> ·K)	$q_f$ (W)	$AIC_c$	$\Delta_i$	$R^2$
A	Convecção na extremidade	6,9559	0,75810	22,6312	0,0116	0,999995
A	Extremidade adiabática	6,9547	0,75803	22,6196	0	0,999995
A	Aleta infinita	6,9707	0,75890	22,7518	0,1322	0,999995
B	Convecção na extremidade	6,6727	0,26475	21,7615	0,0008	0,999996
B	Extremidade adiabática	6,6725	0,26475	21,7608	0	0,999996
B	Aleta infinita	6,6756	0,26481	21,7723	0,0116	0,999996
C	Convecção na extremidade	12,7828	2,53628	9,2298	0	0,999999
C	Extremidade adiabática	12,8126	2,53902	9,2788	0,0490	0,999999
C	Aleta infinita	11,5476	2,42345	21,6134	12,3836	0,999996

Fonte: Autor.

Respeitando os critérios elencados na Tabela 2.4, nota-se que os perfis de temperatura para ambas as aletas de aço inox AISI 316 (aletas A e B) são bem representados pelos três modelos, visto que  $\Delta_i \leq 2$  para todos eles. O modelo que considera a extremidade da aleta adiabática é, dentre os demais, o que melhor descreve ambas as situações, já que  $\Delta_i = 0$ . Para a aleta de alumínio puro (aleta C), o melhor modelo que se ajusta a seu perfil de temperatura é aquele que considera a convecção em sua extremidade. Contudo, a condição de aleta infinita deveria ser descartada como um modelo apto a representar seu perfil de temperatura, pois  $\Delta_i > 10$ . Como os três modelos analisados compartilham o mesmo número de parâmetros ( $K = 1$ ), os valores de  $AIC_c$  computados para cada aleta diferem entre si devido apenas a quanto bem cada modelo se ajusta aos dados experimentais.

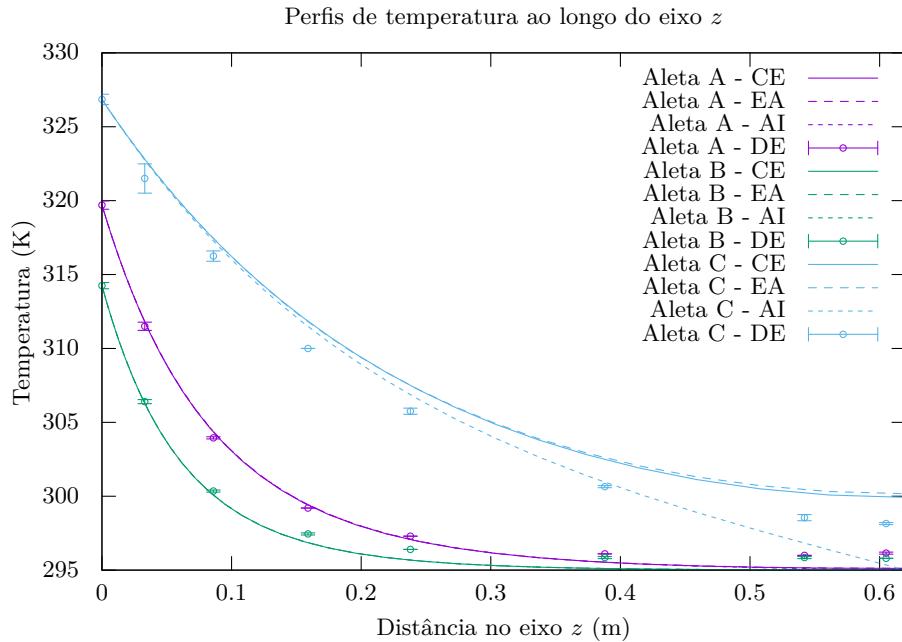
### 4.3 Resultados obtidos numericamente

Findadas as simulações no *software* OpenFOAM para as aletas A, B e C, submetidas às três condições de controle em suas extremidades, foram obtidos como resultados: os perfis de temperatura no interior da aleta tão bem como em sua proximidade; a taxa de transferência de calor  $q_f$  na aleta e seus parâmetros de desempenho; o coeficiente médio de transferência de calor por convecção  $\bar{h}$ ; a distribuição de temperatura na seção transversal da aleta na região de maiores gradientes de temperatura; o campo de massa específica e de velocidades no meio.

### 4.3.1 Perfil de temperatura no interior da aleta

A Figura 4.1 apresenta os perfis de temperatura obtidos numericamente da simulação da transferência de calor nas três aletas, cada qual com sua extremidade sob uma das três condições de contorno abordadas. Nela também estão apresentadas as temperaturas obtidas experimentalmente para cada aleta, listadas na Tabela 4.1.

**Figura 4.1** – Perfil de temperatura obtidos numericamente e temperaturas medidas no trocador de calor por aletas.



Fonte: Autor.

Legenda: CE - Convecção na extremidade. EA - Extremidade adiabática. AI - Aleta infinita. DE - Dados experimentais.

A princípio, percebe-se diferença mínima entre os perfis de temperatura de condições de contorno distintas para uma mesma aleta. À exceção do perfil para a aleta de alumínio puro (aleta C) quando considerada infinita, cuja temperatura de sua extremidade é forçadamente igual à do ambiente devido à característica de sua condição de contorno ( $L \rightarrow \infty, T_L \rightarrow T_\infty$ ). Isso é consoante ao que foi discutido na seção 4.2, em que apenas este caso apresentou  $\Delta_i > 10$ , sendo o único modelo que não deveria ser adotado para descrever a distribuição de temperaturas ao longo do eixo da aleta de alumínio puro, diferente dos demais casos, que obtiveram  $\Delta_i \leq 2$ . Observa-se essa mesma similaridade de resultados entre as condições de contorno de uma mesma aleta para a taxa de transferência de calor e para o coeficiente médio de transferência de calor por convecção.

Nota-se que os perfis obtidos numericamente se aproximam bastante dos valores experimentais para as aletas de aço inox AISI 316 (aletas A e B), principalmente nos

cinco primeiros orifícios. Isso ocorre até o momento em que a curva passa a ser assintótica a  $T = T_{\infty} = 295$  K, onde os dados experimentais (orifícios 6 a 8) apresentam valores superiores ao resultado numérico, na ordem de 1 K. Já na aleta C, para os modelos de condição de contorno com  $\Delta_i \leq 2$ , os perfis de temperatura obtidos numericamente apresentaram valores superiores aos experimentais em toda a extensão da aleta, em que a diferença entre eles aumenta proporcionalmente com a distância no eixo  $z$ .

A temperatura aplicada na base de cada aleta influenciou no seu perfil de temperatura, assim como a condutividade térmica  $k$  e o diâmetro da aleta. A alta condutividade térmica do alumínio puro explica o perfil de temperatura mais elevado para a aleta C, ao passo que o diâmetro difere os perfis entre as aletas de aço inox AISI 316, em que a aleta A, com o maior diâmetro, apresentou temperaturas maiores que a aleta B ao longo do eixo  $z$ .

Visto que as maiores disparidades entre as temperaturas obtidas, numérica e experimentalmente, encontram-se no orifício 8 ( $z = 0,605$  m), pôde-se calcular o desvio médio relativo entre esses valores e, assim, averiguar a validade da solução numérica para os perfis de temperatura. A Tabela 4.3 traz, para a posição  $z = 0,605$  m, a temperatura medida experimentalmente, a temperatura obtida numericamente para a condição de contorno de convecção na extremidade da aleta e a temperatura calculada analiticamente pelo modelo referente à mesma condição de contorno, descrito na Equação 2.40, usando o parâmetro  $\bar{h}$  obtido através da regressão não-linear dos dados experimentais (Tabela 4.2).

**Tabela 4.3** – Temperaturas obtidas numérica, analítica e experimentalmente no orifício 8 ( $z = 0,605$  m).

Aleta	$T_{8,\text{experimental}}$ (K)	$T_{8,\text{numérico}}$ (K)	$T_{8,\text{analítico}}$ (K)	Desvio Relativo
A	296,15	295,12	295,04	0,05%
B	295,80	295,01	295,00	0,04%
C	298,15	299,96	298,28	0,21%

Fonte: Autor.

Observa-se que o maior desvio médio relativo entre as três temperaturas obtidas foi de 0,21% na aleta de alumínio puro, mostrando que a solução numérica é válida para a determinação do perfil de temperatura ao longo do eixo da aleta. Percebe-se que as maiores diferenças de temperatura ocorrem entre as obtidas numérica e experimentalmente, o que poderia ser minimizado caso se admitisse também a transferência de calor por radiação.

Optou-se por utilizar a condição de contorno de convecção na extremidade, pois é o modelo que melhor representa o perfil da aleta C e possui nível substancial de suporte empírico para descrever os perfis das aletas A e B, além de que há uma diferença mínima entre os resultados obtidos para esta condição e as demais cujos modelos possuem  $\Delta_i \leq 2$ . Portanto, também foi adotada essa condição de contorno para apresentar os demais resultados deste trabalho.

#### 4.3.1.1 Comprimento mínimo para consideração de aleta infinita

É possível estimar o comprimento mínimo de uma aleta para que seu perfil de temperatura seja precisamente aproximado ao de uma aleta infinita através da proposição de algum requisito válido. Neste trabalho, foi considerada infinita a aleta que possuísse comprimento mínimo que satisfizesse a seguinte relação, adaptada de Bergman e Lavine (2017):

$$\frac{\theta(L)}{\theta_b} = e^{-mL} < \lambda \quad (4.1)$$

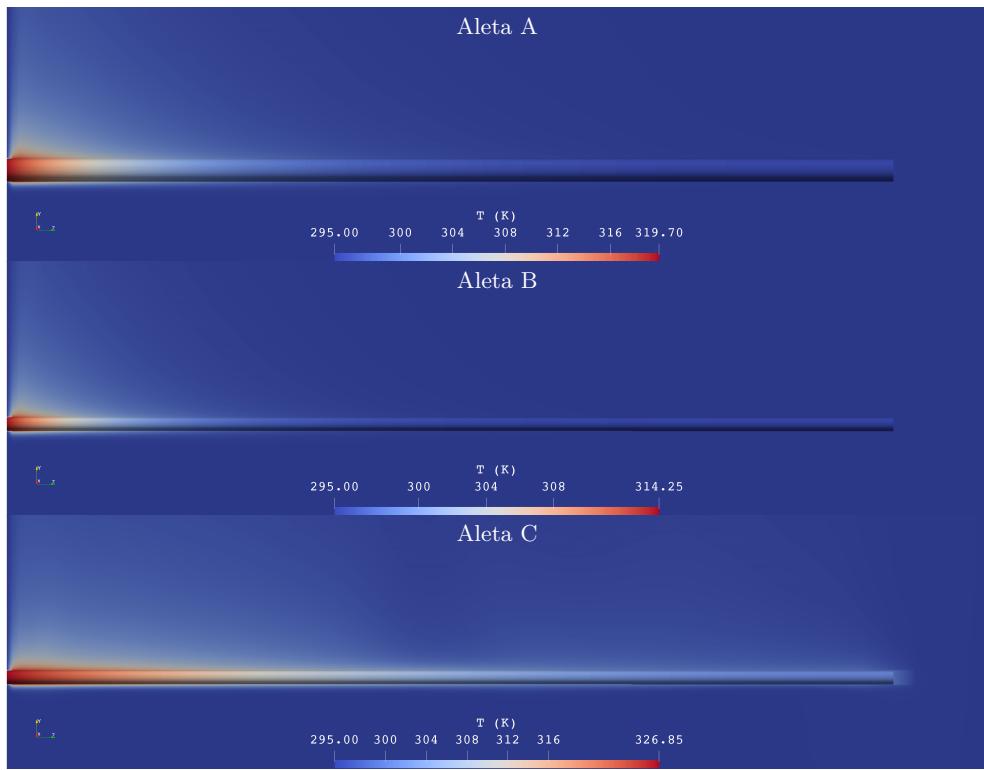
Para  $\lambda = 0,01$ , o comprimento mínimo das aletas A, B e C seria, respectivamente, 0,404 m, 0,318 m e 0,966 m. Estreitando esse requisito a  $\lambda = 0,001$ , os novos comprimentos seriam, na mesma ordem, 0,606 m, 0,477 m e 1,450 m. Assim, apenas a aleta C apresentou comprimento inferior ( $L = 0,620$  m) ao mínimo necessário para ser considerada infinita, o que corrobora com o fato de apenas seu perfil de temperatura não ser bem descrito pelo modelo de aleta infinita.

#### 4.3.2 Distribuição de temperaturas nas proximidades da aleta

A Figura 4.2 mostra a distribuição de temperaturas próxima às aletas A, B e C no plano  $x = 0$ . Ao redor da base, observa-se um aumento na temperatura do ar, a qual vai diminuindo ao longo do eixo  $z$ . Nas aletas de aço inox AISI 316 (A e B), o ar atinge a temperatura ambiente próximo de sua extremidade. Já na aleta de alumínio puro (C), a temperatura do ar nesta região é superior à do ambiente. Isso ocorre pois, diferentemente das aletas A e B, a extremidade da aleta C não se estabiliza na temperatura ambiente (Figura 4.1), atingindo valores superiores, o que faz com que a temperatura do ar nesta região também se eleve.

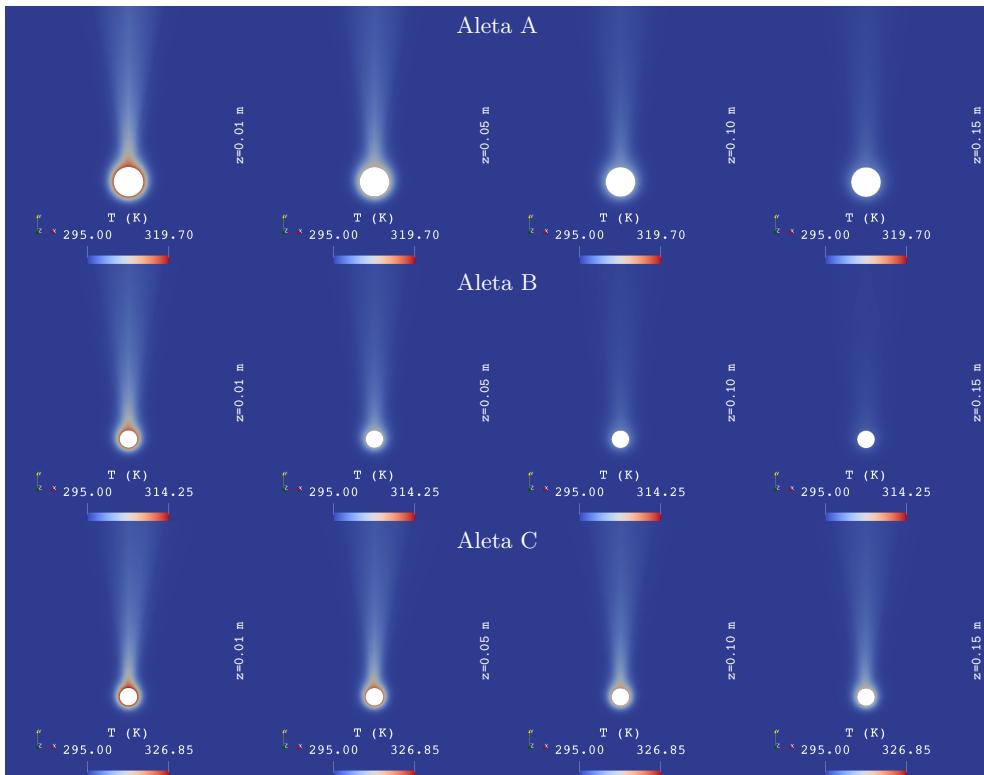
A Figura 4.3 mostra as visões em corte da distribuição de temperaturas do meio próximo às aletas A, B e C nos planos  $z = 0,01$  m,  $z = 0,05$  m,  $z = 0,10$  m e  $z = 0,15$  m. Nota-se o formato característico da camada limite térmica ao redor da aleta, iniciando na sua parte inferior e circundando-a até ocorrer o descolamento da camada limite na parte superior, gerando uma pluma que se dissipa à medida que o fluido ascende. Ao passo que a temperatura superficial da aleta vai diminuindo ao longo do eixo  $z$ , a espessura da camada limite térmica ao seu redor também diminui: nas aletas A e B, observa-se que a camada limite passa a se tornar quase imperceptível a partir de  $z = 0,15$  m, enquanto ela ainda é bastante presente na aleta C, neste mesmo plano, devido à alta temperatura superficial ao longo do eixo  $z$ .

**Figura 4.2** – Visão lateral da distribuição de temperaturas nas proximidades da aleta.



Fonte: Autor.

**Figura 4.3** – Visão frontal da distribuição de temperaturas nas proximidades da aleta em  $z = 0,01\text{ m}$ ,  $z = 0,05\text{ m}$ ,  $z = 0,10\text{ m}$  e  $z = 0,15\text{ m}$ .

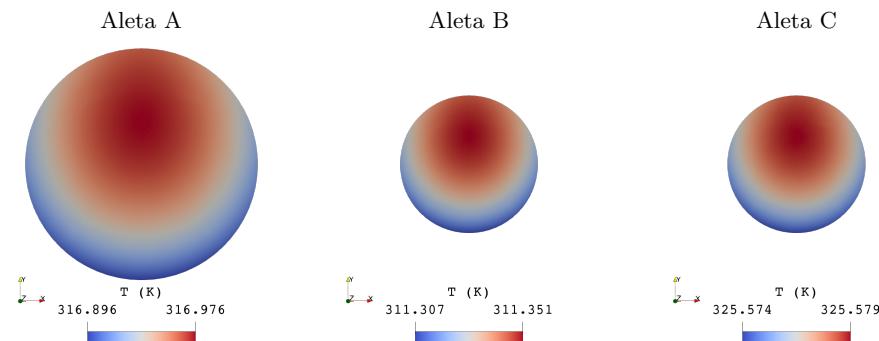


Fonte: Autor.

### 4.3.3 Distribuição de temperaturas na seção transversal da aleta

A modelagem dos perfis de temperatura em uma aleta de seção transversal uniforme (seção 2.3) considera a temperatura constante em cada seção. À vista disso, investigou-se a variação desta grandeza ao longo da seção transversal em  $z = 0,01$  m, próximo às regiões de maiores gradientes de temperatura. Dentre as três, aquela que apresentou maior amplitude de temperatura nesta seção foi a aleta A, com diferença relativa de 0,025%. Este valor diminui monotonicamente ao longo da aleta até sua extremidade, permitindo assumir a hipótese de temperatura constante na seção transversal. O fato de a aleta A possuir a maior diferença de temperatura na seção é condizente com a Lei de Fourier (Equação 2.32), visto que ela possui o maior diâmetro e a menor condutividade térmica. Na Figura 4.4 percebe-se que, apesar da pequena diferença, as maiores temperaturas no corte em  $z = 0,01$  m se concentram na parte superior.

**Figura 4.4** – Distribuição de temperaturas na seção transversal em  $z = 0,01$  m de cada aleta.



Fonte: Autor.

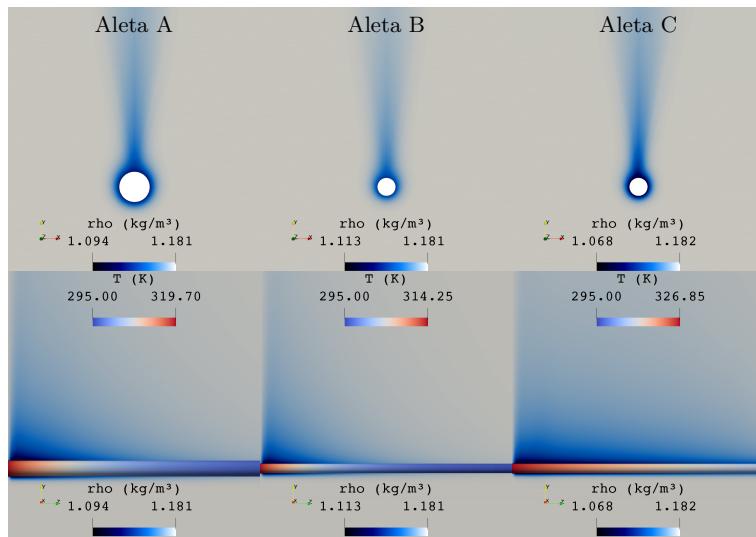
### 4.3.4 Campo de velocidades no meio

A Figura 4.5 mostra a variação da massa específica do ar nas proximidades de cada aleta. Observa-se que quanto mais próximo da aleta, menor é o valor da massa específica e à medida que o ar se afasta, este valor aumenta. Este gradiente gera forças de empuxo fazendo com que o fluido ascenda, iniciando um processo de convecção natural. Nota-se que a distribuição da massa específica ao redor da aleta toma a mesma forma da camada limite térmica (Figura 4.3) pois ela varia conforme a temperatura. A maior diferença de massa específica ocorreu em torno da aleta C, diminuindo em 9,6%.

O fluxo ascendente gerado pelas forças de empuxo é ilustrado nas Figuras 4.6 e 4.7, que mostram o campo de velocidades no plano  $z = 0,05$  m e  $x = 0$ , respectivamente. Para as aletas A e B, observa-se um fluxo laminar que se origina da aleta até atingir a borda superior do sistema fechado, onde ele é direcionado para as bordas laterais e

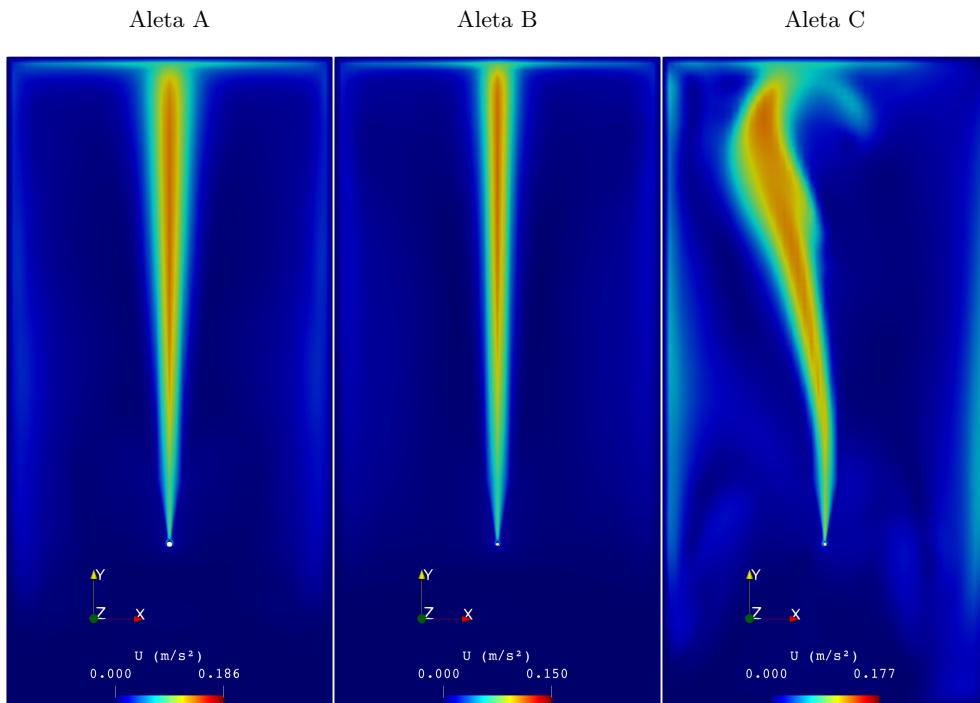
desce adjacente a elas. Contudo, para a aleta C, identifica-se que o fluxo possui caráter turbulento. Apesar deste comportamento, a recirculação causada devido ao sistema fechado não afetou significativamente a distribuição de temperaturas nas aletas e em suas proximidades, pois as linhas de corrente chegam a elas em velocidade quase nula e temperatura ambiente, conforme foi contastado por Gomes (2015).

**Figura 4.5** – Variação da massa específica do ar nas proximidades da base da aleta em  $z = 0,05$  m e em  $x = 0$  m.



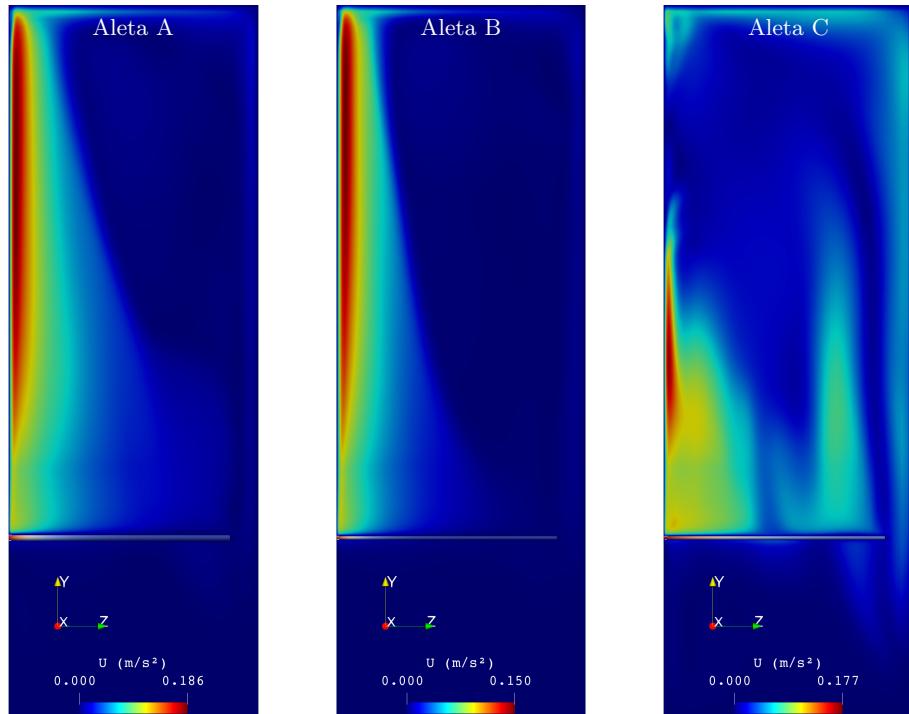
Fonte: Autor.

**Figura 4.6** – Campo de velocidades do fluido em  $z = 0,05$  m.



Fonte: Autor.

**Figura 4.7** – Campo de velocidades do fluido em  $x = 0$ .



Fonte: Autor.

#### 4.3.5 Taxa de transferência de calor na aleta

Através do utilitário de pós-processamento *wallHeatFlux*, computou-se a taxa de transferência de calor  $q_f$  na superfície da aleta. A partir desse valor e por meio das Equações 2.41, 2.43 e 2.47, calculou-se o coeficiente médio de transferência de calor por convecção  $\bar{h}$ . Assim, foi possível comparar estas duas grandezas obtidas numericamente com seus respectivos valores calculados a partir de dados experimentais (Tabela 4.2).

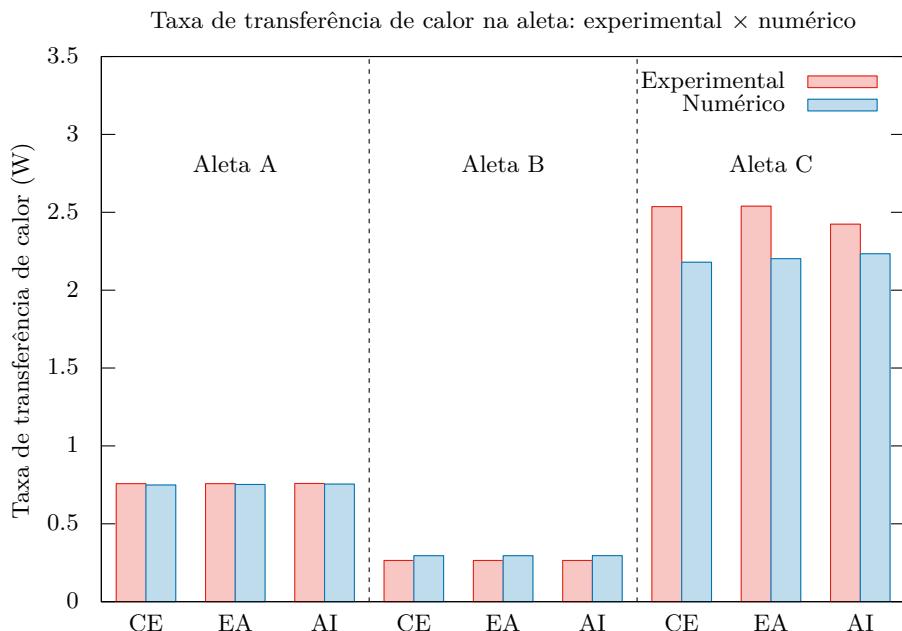
Os resultados destas duas grandezas, computados através da simulação, e seus respectivos desvios relativos encontram-se na Tabela 4.4. Notam-se as diferenças de cerca de 1%, 10% e 16% para as aletas A, B e C, respectivamente. Em relação ao coeficiente médio de transferência de calor por convecção, a aleta A apresentou diferença relativa em torno de 2%. Contudo, uma discrepância de aproximadamente 20% e 32% entre os resultados foi observada para as aletas B e C, nesta ordem. Desta forma, pode-se afirmar que a simulação numérica apresentou resultados satisfatoriamente próximos aos experimentais para  $q_f$ , mas se pode fazer a mesma afirmação apenas para a aleta A em relação aos valores de  $\bar{h}$ .

**Tabela 4.4** – Resultados obtidos da simulação numérica.

Aleta	Condição de contorno	$q_f$ (W)	$DR_{q_f}$	$\bar{h}$ (W/m <sup>2</sup> ·K)	$DR_{\bar{h}}$
A	Convecção na extremidade	0,74936	1,17%	6,7841	2,53%
A	Extremidade adiabática	0,75233	0,76%	6,8421	1,65%
A	Aleta infinita	0,75493	0,53%	6,8912	1,15%
B	Convecção na extremidade	0,29542	10,38%	8,3047	19,65%
B	Extremidade adiabática	0,29537	10,37%	8,3003	19,61%
B	Aleta infinita	0,29562	10,42%	8,3162	19,73%
C	Convecção na extremidade	2,17944	16,37%	9,5629	33,67%
C	Extremidade adiabática	2,20243	15,28%	9,7597	31,28%
C	Aleta infinita	2,23358	8,50%	9,8087	17,73%

Fonte: Autor.

A comparação entre as taxas de transferência de calor, obtidas numérica e experimentalmente em cada aleta para cada condição de contorno, está mais bem representada na Figura 4.8. Primeiramente, observa-se que a taxa de transferência de calor é maior na aleta C, seguida pelas aletas A e B, nesta ordem. A aleta C apresentou maior valor de  $q_f$  em virtude da elevada condutividade térmica do alumínio puro e o maior diâmetro da aleta A fez com que sua taxa de transferência de calor fosse maior que a de B.

**Figura 4.8** – Comparação entre as taxas de transferência de calor obtidas numérica e experimentalmente.

Fonte: Autor.

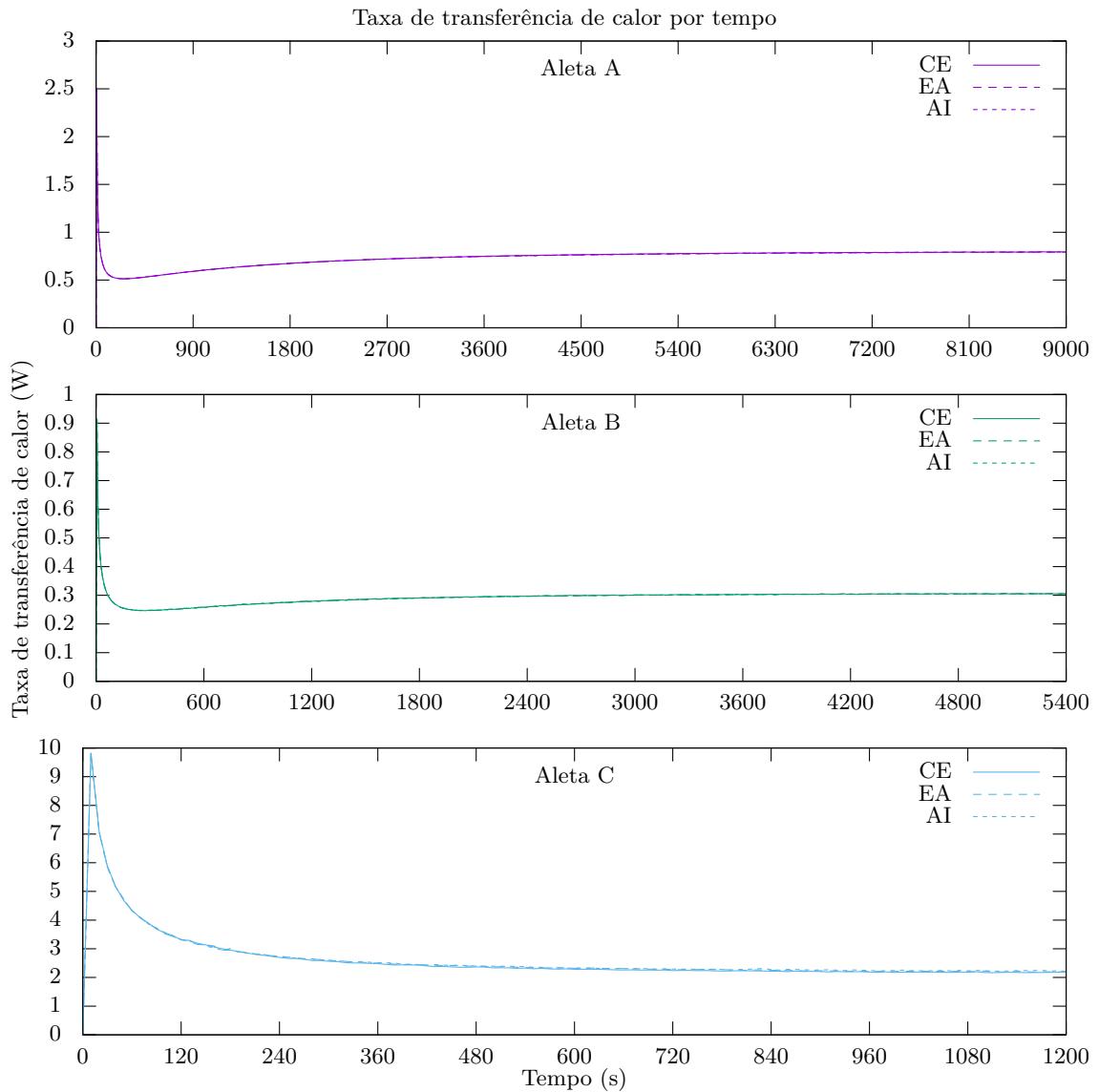
Legenda: CE - Convecção na extremidade. EA - Extremidade adiabática. AI - Aleta infinita.

Similar ao comportamento discutido na subseção 4.3.1, para uma mesma aleta, todas as condições de contorno apresentaram valores de  $q_f$  muito próximos, com exceção da aleta C quando considerada infinita, cuja taxa de transferência de calor é menor que

as demais condições.

A Figura 4.9 mostra a evolução da taxa de transferência de calor durante a simulação até se estabilizar, indicando o início do regime estacionário. Percebe-se que cada aleta atingiu tal estado em tempos diferentes.

**Figura 4.9** – Taxa de transferência de calor ao longo da simulação.



Fonte: Autor.

Legenda: CE - Convecção na extremidade. EA - Extremidade adiabática. AI - Aleta infinita.

#### 4.3.5.1 Relação entre as taxas de transferência de calor de duas aletas

Com o conhecimento dos valores de  $q_f$  para cada aleta, foi possível verificar a existência de alguma relação entre eles ao se alterar, de uma aleta para outra, seu material de construção, seu diâmetro e a diferença entre a temperatura aplicada em sua

base com a do ambiente. A partir da relação proposta no Apêndice B (Equação B.11), equacionou-se a seguinte expressão para estimar a taxa de transferência de calor de uma aleta  $q_{f,j}^*$  através da taxa de transferência de calor conhecida de outra aleta  $q_{f,i}$ :

$$q_{f,j}^* = q_{f,i} \cdot \left( \frac{\theta_{b,j}}{\theta_{b,i}} \right)^{1,094} \cdot \left( \frac{k_j}{k_i} \right)^{0,5} \cdot \left( \frac{D_j}{D_i} \right)^{1,282} \quad (4.2)$$

Os expoentes da Equação 4.2 foram obtidos ao utilizar  $n = 0,188$  na Equação B.11, visto que o valor de  $Ra_D$  para todas as aletas, considerando as hipóteses do Apêndice B, situou-se no intervalo  $[10^2, 10^4]$ . A Tabela 4.5 traz os valores dos parâmetros  $\theta_b$ ,  $k$  e  $D$ , além do número de Rayleigh para as aletas A, B e C.

**Tabela 4.5** – Número de Rayleigh e parâmetros usados na Equação 4.2 para as aletas A, B e C.

Aleta	$\theta_b$ (K)	$k$ (W/m·K)	$D$ (m)	$Ra_D$
A	24,70	13,4	0,0160	$4,52 \times 10^3$
B	19,25	13,4	0,0095	$7,44 \times 10^2$
C	31,85	237	0,0095	$1,21 \times 10^3$

Fonte: Autor.

Na Tabela 4.6, encontra-se o arranjo referente às aletas A, B e C para a taxa de transferência de calor estimada  $q_{f,j}^*$  da aleta  $j$  a partir da taxa de transferência conhecida  $q_{f,i}$  da aleta  $i$ . Foi computada a diferença relativa entre o valor estimado e o valor real da taxa de transferência de calor  $q_{f,j}$ . Os cálculos foram realizados tanto para os resultados experimentais quanto para os numéricos, considerando a condição de contorno de convecção na extremidade da aleta.

**Tabela 4.6** – Comparaçāo entre as taxas de transferência reais e estimadas pela Equação 4.2 para cada aleta.

Resultado	Aleta $i$	Aleta $j$	$q_{f,i}$ (W)	$q_{f,j}$ (W)	$q_{f,j}^*$ (W)	Diferença Relativa
Experimental	A	B	0,75810	0,26475	0,29583	11,74%
Experimental	B	A	0,26475	0,75810	0,67846	10,51%
Experimental	B	C	0,26475	2,53628	1,93150	23,85%
Experimental	C	B	2,53628	0,26475	0,34765	31,31%
Experimental	A	C	0,75810	2,53628	2,15823	14,91%
Experimental	C	A	2,53628	0,75810	0,89089	17,52%
Numérico	A	B	0,74936	0,29542	0,29242	1,02%
Numérico	B	A	0,29542	0,74936	0,75706	1,03%
Numérico	B	C	0,29542	2,17944	2,15527	1,11%
Numérico	C	B	2,17944	0,29542	0,29874	1,12%
Numérico	A	C	0,74936	2,17944	2,13334	2,12%
Numérico	C	A	2,17944	0,74936	0,76555	2,16%

Fonte: Autor.

Em relação aos resultados numéricos, a Equação 4.2 estimou a taxa de transferência de calor de uma aleta, a partir do conhecimento desta grandeza de outra, com precisão satisfatória de até 2%. Já para os resultados experimentais, percebe-se que as

menores diferenças relativas, na ordem de 11%, ocorrem na estimativa entre o par de aletas A e B, enquanto estimativas envolvendo a aleta C atingiram diferenças relativas de 17%, quando utilizada para estimar o valor de  $q_f$  da aleta A, e 31%, ao ser usada para estimar tal grandeza para B. Isto pode ser explicado pelo fato de que a aleta C não possui o comprimento mínimo para ser considerada infinita conforme o critério proposto na subseção 4.3.1.1, diferentemente das aletas A e B. Erros experimentais também podem ser uma causa para este resultado.

#### 4.3.5.2 Parâmetros avaliativos do desempenho das aletas

A partir das taxas de transferência de calor obtidas da análise experimental e da simulação numérica, calcularam-se a efetividade  $\varepsilon_f$ , a eficiência  $\eta_f$  e a resistência térmica  $R_{t,f}$  das aletas A, B e C utilizando as Equações 2.48, 2.49 e 2.50, respectivamente. Esses parâmetros estão elencados na Tabela 4.7, calculados a partir de ambos os resultados: experimental e numérico.

**Tabela 4.7** – Parâmetros de desempenho das aletas A, B e C.

Aleta	Resultado	$\varepsilon_f$	$\eta_f$	$R_{t,f}$
A	Experimental	21,95	14,07%	32,58
A	Numérico	22,24	14,26%	32,96
B	Experimental	29,08	11,10%	72,71
B	Numérico	26,07	9,95%	65,16
C	Experimental	87,89	33,54%	12,56
C	Numérico	100,95	38,52%	14,61

Fonte: Autor.

Como esperado, a aleta C apresentou as maiores efetividade e eficiência e a menor resistência térmica devido à alta condutividade térmica do alumínio puro. Entre as aletas de aço inox AISI 316, a aleta A manifestou menores valores para  $\varepsilon_f$  e  $R_{t,f}$  e maiores para  $\eta_f$  em virtude de possuir um maior diâmetro que a aleta B.



## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi possível analisar a transferência de calor em aletas piniformes de seção transversal uniforme, no estado estacionário, em que se obtiveram os perfis de temperatura e as taxas de transferência de calor de cada uma. Isso foi factível tanto experimentalmente, ao usar um trocador de calor por aletas como aparato experimental, quanto numericamente, através do modelo numérico desenvolvido no *software* de fluidodinâmica computacional OpenFOAM, usando o método dos volumes finitos.

O uso deste último destacou a aplicabilidade dos métodos numéricos, em especial daqueles usados em CFD, para o estudo de diversos fenômenos físicos de maneira rápida, segura, controlada e com baixos custos se comparados a investigações experimentais.

Ambos os resultados, experimentais e numéricos, evidenciaram como a transferência de calor na aleta foi afetada de acordo com suas dimensões e seu material de construção, assim como a influência exercida pela condição de contorno aplicada em sua extremidade no desenvolvimento do modelo numérico. Especificamente, pôde-se concluir que:

- a) à exceção da aleta cujo comprimento não atingiu o mínimo necessário para ser considerada infinita, todas as condições de contorno aplicadas nas extremidades das aletas (convecção na extremidade, extremidade adiabática e aleta infinita) apresentaram resultados muito próximos e seus respectivos modelos demonstraram nível substancial de suporte empírico para descrever o perfil de temperatura, conforme o Critério de Informação de Akaike;
- b) a simulação numérica apresentou perfis de temperatura e taxas de transferência de calor condizentes com os dados experimentais. A maior diferença entre as temperaturas experimentais e numéricas foi de 0,21% enquanto, para a taxa de transferência de calor, foi de 16%;
- c) a variação de temperatura em uma seção transversal foi ínfima ao ponto de se poder considerar a hipótese de temperatura constante nesta no processo de modelagem do perfil de temperatura na aleta, em estado estacionário;
- d) a relação proposta para estimar a taxa de transferência de calor de uma aleta a partir do valor conhecido desta grandeza de outra aleta provou-se satisfatória para os resultados numéricos, apresentando diferenças de até 2%. Já para os resultados experimentais, as diferenças foram aproximadamente de 11% para o par de aletas cujo comprimento era maior que o mínimo para ser considerada infinita. As estimativas utilizando a aleta que não satisfez o comprimento mínimo atingiram diferenças de até 31%;

- e) a alta condutividade térmica do alumínio puro fez com que a aleta feita deste material apresentasse perfil de temperatura elevado e maior taxa de transferência de calor em relação às aletas de aço inox AISI 316;
- f) para aletas de mesmo material, aquela com maior diâmetro mostrou maiores temperaturas ao longo de seu eixo, assim como maior taxa de transferência de calor;
- g) os parâmetros de desempenho das aletas também foram influenciados pela condutividade térmica e pelo diâmetro da aleta.

Desta forma, foi possível validar o modelo numérico desenvolvido no OpenFOAM para simular a transferência de calor nas aletas do aparato experimental usado neste trabalho. A partir desse modelo, pode-se realizar a mesma análise em aletas similares, de dimensões e materiais de construção distintos e/ou submetidas a condições iniciais e de contorno diferentes, apenas alterando as devidas entradas nos dicionários do *software*.

## REFERÊNCIAS

- AKAIKE, Hirotugu. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 19, n. 6, p. 716–723, dec 1974. ISSN 0018–9286. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/1100705/>>. Acesso em: 5 jun 2021.
- BERGMAN, Theodore L.; LAVINE, Adrienne S. **Fundamentals of Heat and Mass Transfer**. 8. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2017. 992 p. ISBN 978-1-119-32042-5.
- BOZDOGAN, Hamparsum. Model selection and Akaike's Information Criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions. **Psychometrika**, v. 52, n. 3, p. 345–370, sep 1987. ISSN 0033–3123. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/BF02294361>>. Acesso em: 7 jun 2021.
- BURNHAM, Kenneth P.; ANDERSON, David R. **Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach**. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 2002. 488 p. ISBN 0-387-95364-7.
- FERZIGER, Joel H.; PERIC, Milovan. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. 3. ed. Berlin: Springer, 2002. 368 p. ISBN 3-540-42074-6.
- FONTOURA, Diener Volpin Ribeiro. **Desenvolvimento de um modelo tridimensional bifásico para a predição de formação de coque no interior de tubos de fornos de pré-aquecimento de petróleo**. 176 p. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Química, Campinas, 2013. Disponível em: <<http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/266687>>. Acesso em: 20 abr 2021.
- GOMES, Lorenzo Alfonso Caliari de Neves. **Estudo da Transferência de Calor por Convecção Natural em Dissipadores Usando OpenFOAM**. 95 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2015. Acesso em: 19 abr 2021.
- GUPTA, Deepa; SAHA, Probir; ROY, Somnath. Numerical Investigation on Heat Transfer Enhancement with Perforated Square Micro-Pin Fin Heat Sink for Electronic Cooling Application. In: **2019 IEEE 21st Electronics Packaging Technology Conference (EPTC)**. IEEE, 2019. p. 241–246. ISBN 978-1-7281-3835-0. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/9026623/>>. Acesso em: 22 abr 2021.
- HEMPIJID, Thanathorn; KITTICHAIKARN, Chawalit. Effect of heat sink inlet and outlet flow direction on heat transfer performance. **Applied Thermal Engineering**, Elsevier, v. 164, n. October 2019, p. 114375, 1 2020. ISSN 1359–4311. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1359431119305630>>. Acesso em: 29 abr 2021.
- JATOBÁ, Livia Flavia Carletti. **Introdução à CFD usando o OpenFOAM**. 2016. Disponível em: <<http://www.liviajatoba.com/uploads/8/3/6/7/8367135/intro-of-07-2016-ljatoba.pdf>>. Acesso em: 2 maio 2021.
- KREITH, Frank; MANGLIK, Raj M.; BOHN, Mark S. **Principles of Heat Transfer**. 7. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2010. v. 2. 87 p. ISBN 9780495667704.

LEDEZMA, Gustavo; BEJAN, Adrian. Heat sinks with sloped plate fins in natural and forced convection. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 39, n. 9, p. 1773–1783, 6 1996. ISSN 0017–9310. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0017931095002979>>. Acesso em: 17 abr 2021.

LOKSUPAPAIBOON, Kittipos; SUVANJUMRAT, Chakrit. Assessment of turbulence models for low turbulent natural convection heat transfer in rectangular enclosed cavity using OpenFOAM. **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**, v. 1137, n. 1, p. 012044, may 2021. ISSN 1757–8981. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/1137/1/012044>>. Acesso em: 17 jun 2021.

MORGAN, Vincent T. The Overall Convective Heat Transfer from Smooth Circular Cylinders. In: **Advances in Heat Transfer**. [s.n.], 1975. v. 11, n. C, p. 199–264. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0065271708700753>>. Acesso em: 27 jun 2021.

MOUKALLED, Fadl; MANGANI, L; DARWISH, Marwan *et al.* **The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics**. Cham: Springer International Publishing, 2016. v. 113. 791 p. (Fluid Mechanics and Its Applications, v. 113). ISBN 978-3-319-16873-9. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-16874-6>>. Acesso em: 15 jun 2021.

NETO, João Batista Caldas; GARCIA, Ezio Castejon; RIVAS, Gustavo Adolfo Ronceros. Modelo computacional para análise da condução de calor. In: **Anais do 15º Encontro de Iniciação Científica e Pós-Graduação do ITA**. [S.l.: s.n.], 2009. p. 12.

NEWTON, Isaac. |Correspondência|: Destinatário: Robert Hooke. 1675.

PARK, Kyoungwoo; OH, Park-Kyoun; LIM, Hyo-Jae. The application of the CFD and Kriging method to an optimization of heat sink. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 49, n. 19-20, p. 3439–3447, 9 2006. ISSN 0017–9310. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0017931006002055>>. Acesso em: 17 abr 2021.

PATANKAR, Suhas V. **Numerical heat transfer and fluid flow**. Washington, DC: Hemisphere Publishing Corp., 1980. 210 p. ISBN 0-89116-522-3.

SAHEL, Djamel; BELLAHCENE, Lahcene; YOUSFI, Aissa; SUBASI, Abdussamet. Numerical investigation and optimization of a heat sink having hemispherical pin fins. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 122, n. February, p. 105133, mar 2021. ISSN 0735–1933. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0735193321000270>>. Acesso em: 22 jun 2021.

SILVA, Vilson Altair da; GOMES, Lorenzo Alfonso Caliari de Neves; SILVA, Ana Lúcia Fernandes de Lima e; SILVA, Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e. Analysis of natural convection in heat sink using OpenFOAM and experimental tests. **Heat and Mass Transfer, Heat and Mass Transfer**, v. 55, n. 8, p. 2289–2304, 8 2019. ISSN 0947–7411. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s00231-019-02574-5>>. Acesso em: 27 abr 2021.

SPALDING, Dudley Brian. A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 4, n. 4, p. 551–559, jul 1972. ISSN 0029–5981. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nme.1620040409>>. Acesso em: 5 jul 2021.

TARIQ, Adeel; ALTAF, Khurram; AHMAD, Syed Waqar; HUSSAIN, Ghulam; RATLAMWALA, T.A.H. Comparative numerical and experimental analysis of thermal and hydraulic performance of improved plate fin heat sinks. **Applied Thermal Engineering**, v. 182, n. January 2020, p. 115949, jan 2021. ISSN 1359–4311. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1359431120334311>>. Acesso em: 21 jun 2021.

The OpenFOAM Foundation. **OpenFOAM v8 User Guide**. 2020. Disponível em: <<https://cfd.direct/openfoam/user-guide>>. Acesso em: 15 abr 2021.

VERSTEEG, Henk Kaarle; MALALASEKERA, Weeratunge. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method**. 2. ed. [S.l.]: Pearson Education Limited, 2007. ISBN 978-0-13-127498-3.

WILCOX, David C. **Turbulence Modeling for CFD**. 3. ed. La Cânada: Dcw Industries, Incorporated, 2006. ISBN 978-1-928729-08-2.

Wolf Dynamics. **OpenFOAM Introductory Training**. 2020. Disponível em: <<http://www.wolfdynamics.com/training/introOF8/all.pdf>>. Acesso em: 2 maio 2021.

YANG, Dawei; WANG, Yan; DING, Guifu; JIN, Zhiyu; ZHAO, Junhong; WANG, Guilian. Numerical and experimental analysis of cooling performance of single-phase array microchannel heat sinks with different pin-fin configurations. **Applied Thermal Engineering**, v. 112, p. 1547–1556, 2 2017. ISSN 1359–4311. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S135943111631571X>>. Acesso em: 21 abr 2021.

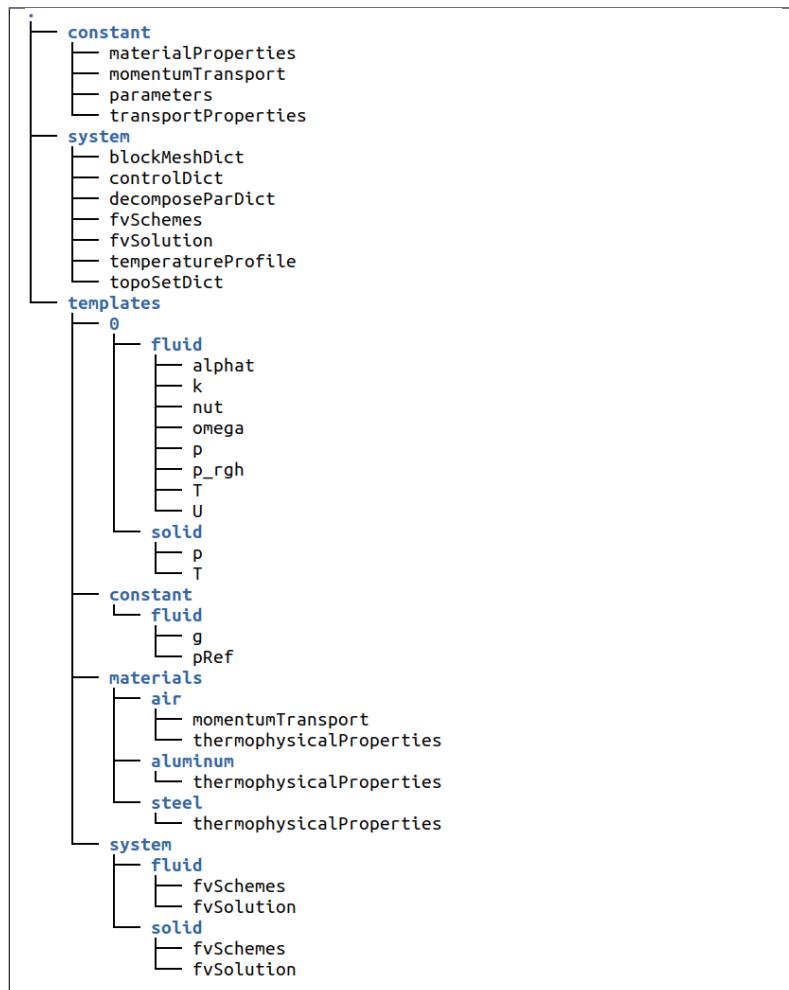
YOGESH, Siddhant Singh; SELVARAJ, Arun Saco; RAVI, Dinesh Kumar; RAJAGOPAL, Thundil Karuppa Raj. Heat transfer and pressure drop characteristics of inclined elliptical fin tube heat exchanger of varying ellipticity ratio using CFD code. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Elsevier Ltd, v. 119, p. 26–39, 4 2018. ISSN 0017–9310. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0017931017321543>>. Acesso em: 25 abr 2021.



## APÊNDICE A – PRINCIPAIS DICIONÁRIOS UTILIZADOS NA SIMULAÇÃO

A configuração de uma simulação numérica no *software* OpenFOAM se dá pela alocação adequada de arquivos de texto, denominados dicionários, contendo informações pertinentes em diretórios específicos. Para o caso deste trabalho, os diretórios estão organizados na forma como está apresentada na Figura A.1. Os principais dicionários e suas entradas estão listados a seguir.<sup>1</sup>

**Figura A.1** – Caminhos para os dicionários usados na simulação.



Fonte: Autor.

O dicionário *fvSchemes* contém entradas acerca dos esquemas de discretização usados para cada termo das equações de conservação, como explicado na subseção 3.2.2.2. Já o dicionário *fvSolution* possui entradas que definem as tolerâncias, absoluta e relativa, para cada variável, assim como os solucionadores lineares e seus precondicionadores,

<sup>1</sup> Todos os dicionários usados nas simulações deste trabalho encontram-se em:  
<https://github.com/Gilberto-17/tcc-2021-openfoam.git>

se necessário (subseção 3.2.2.3). Em *fvSolution*, também é indicado o algoritmo de resolução do acoplamento pressão-velocidade.

Na Figura A.2 estão as entradas do dicionário *fvSchemes* e, na Figura A.3, encontram-se as entradas para o dicionário *fvSolution*, ambos localizados no diretório *templates/system/fluid*. Estes dicionários são referentes à região do fluido.

**Figura A.2** – Esquema de discretização para a região do fluido: *fvSchemes*.

```

dttSchemes
{
    default          CrankNicolson 0.5;
}
gradSchemes
{
    default          cellLimited Gauss linear 0.5;
    grad(U)          cellLimited Gauss linear 1;
}
divSchemes
{
    default          none;
    div(phi,U)       Gauss linearUpwindV grad(U);
    div(phi,k)       Gauss linearUpwind grad(k);
    div(phi,omega)   Gauss linearUpwind grad(omega);
    div(phi,e)       Gauss limitedLinear 1;
    div(phi,h)       Gauss limitedLinear 1;
    div(phi,K)       Gauss limitedLinear 1;
    div(phi,Ekp)    Gauss limitedLinear 1;
    div(phid,p)     Gauss upwind;
    div((phi|interpolate(rho)),p) Gauss upwind;
    div(((rho*nuEff)*dev2(T(grad(U))))) Gauss linear;
}
laplacianSchemes
{
    default          Gauss linear limited 1;
}
interpolationSchemes
{
    default          linear;
}
snGradSchemes
{
    default          limited 1;
}
fluxRequired
{
    default          no;
    P                ;
}
wallDist
{
    method meshWave;
}

```

Fonte: Autor.

**Figura A.3** – Solucionadores lineares e tolerâncias para as variáveis da região do fluido: *fvSolution*.

```

solvers
{
    "(rho|rhoFinal)"
    {
        solver          PCG;
        preconditioner DIC;
        tolerance      1e-07;
        relTol         0;
        minIter        3;
    }
    p_rgh
    {
        solver          GAMG;
        tolerance      1e-06;
        relTol         0.01;
        smoother       GaussSeidel;
        maxIter        100;
        minIter        3;
    }
    p_rghFinal
    {
        $p_rgh;
        relTol         0;
    }
    "(U|h|e|k|omega)"
    {
        solver          PBiCGStab;
        preconditioner DILU;
        tolerance      1e-08;
        relTol         0.001;
        minIter        3;
    }
    "(U|h|e|k|omega)Final"
    {
        $U;
        relTol         0;
    }
}
PIMPLE
{
    momentumPredictor   yes;
    nCorrectors        2;
    nNonOrthogonalCorrectors 1;
    pRefCell           0;
    pRefValue          0;
}
relaxationFactors
{
    equations
    {
        ".*"            1;
    }
}

```

Fonte: Autor.

Para a região do sólido, representada pela aleta, o dicionário *fvSchemes* está configurado como na Figura A.4, enquanto o dicionário *fvSolution* possui as entradas indicadas na Figura A.5. Ambos dicionários estão situados no diretório *templates/system/solid*.

**Figura A.4** – Esquema de discretização para a região do sólido: *fvSchemes*.

```

ddtSchemes
{
    default          CrankNicolson 0.5;
}
gradSchemes
{
    default          Gauss linear;
}
divSchemes
{
    default          none;
}
laplacianSchemes
{
    default          Gauss linear limited 1;
}
interpolationSchemes
{
    default          linear;
}
snGradSchemes
{
    default          limited 1;
}

```

Fonte: Autor.

**Figura A.5** – Solucionadores lineares e tolerâncias para as variáveis da região do sólido: *fvSolution*.

```

solvers
{
    "(h|e)"
    {
        solver          PCG;
        preconditioner DIC;
        tolerance       1e-07;
        relTol          0.1;
        minIter         3;
    }

    "(h|e)Final"
    {
        $h;
        relTol          0;
    }
}

PIMPLE
{
    nNonOrthogonalCorrectors 0;
}

relaxationFactors
{
    equations
    {
        ".*"           1;
    }
}

```

Fonte: Autor.

As condições iniciais e de contorno para a região do sólido estão localizadas no diretório *templates/0/solid*. No dicionário *T* (Figura A.6), foram inseridas as entradas relativas à temperatura constante da base da aleta  $T_b$ , representada pelo subdicionário *cylinderBottom*, e à convecção natural em sua superfície lateral, indicada por *solid\_to\_fluid*. As condições de contorno na extremidade da aleta são configuradas ao se remover o comentário referente a cada uma. Desta forma, a aleta é considerada infinita ao usar as entradas *type fixedValue* e *value uniform \$Tinfty* no subdicionário *cylinderTop*; com extremidade adiabática ao usar a entrada *type zeroGradient*; com extremidade sujeita à convecção natural ao remover tal subdicionário.

**Figura A.6** – Condições iniciais e de contorno para a temperatura na região do sólido: *T*.

```
#include "$FOAM_CASE/constant/parameters"
dimensions      [0 0 0 1 0 0];
internalField   uniform $Tinfty;
boundaryField
{
    cylinderBottom
    {
        type      fixedValue;
        value    uniform $Tb;
    }

    /*
    // Extremidade adiabática
    cylinderTop
    {
        type      zeroGradient;
    }
    */

    /*
    // Aleta infinita
    cylinderTop
    {
        type      fixedValue;
        value    uniform $Tinfty;
    }
    */

    /*
    // Convecção na extremidade
    */

    solid_to_fluid
    {
        type      compressible::turbulentTemperatureCoupledBaffleMixed;
        value    $internalField;
        kappa   kappa;
        Tnbr   T;
    }
}
```

Fonte: Autor.

A Figura A.7 traz as entradas para o dicionário *T*, localizado no diretório *templates/0/fluid*, definindo as condições iniciais e de contorno para o meio de  $T = T_\infty$ .

Já a Figura A.8 elenca, para a região do fluido, as entradas para as condições iniciais e de contorno de  $p_{rgh}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\kappa$ ,  $\omega$ ,  $\alpha_t$  (difusividade térmica turbulenta) e  $\nu_t$  (viscosidade cinemática turbulenta), definidas, respectivamente, nos dicionários *p\_rgh*, *U*, *k*, *omega*, *alphat* e *nut*, também situados no diretório *templates/0/fluid*.

**Figura A.7** – Condições iniciais e de contorno para a temperatura na região do fluido:  $T$ .

```
#include "$FOAM_CASE/constant/parameters"
dimensions [0 0 0 1 0 0 0];
internalField uniform $Tinfinity;
boundaryField
{
    ".*Border"
    {
        type fixedValue;
        value $internalField;
    }
    fluid_to_solid
    {
        type compressible::turbulentTemperatureCoupledBaffleMixed;
        neighbourFieldName T;
        kappa kappa;
        Tnbr T;
        value $internalField;
    }
    #includeEtc "caseDicts/setConstraintTypes"
}
```

Fonte: Autor.

**Figura A.8** – Condições iniciais e de contorno para  $p_{rgh}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\kappa$ ,  $\omega$ ,  $\alpha_t$  e  $\nu_t$  na região do fluido:  $p_{rgh}$ ,  $U$ ,  $k$ ,  $\omega$ ,  $\alpha_t$  e  $\nu_t$ .

// p_rgh	// U
#include "\$FOAM_CASE/constant/parameters" dimensions [1 -1 -2 0 0 0 0]; internalField uniform 0; boundaryField {     ".*"     {         type fixedFluxPressure;         value \$internalField;     }     #includeEtc "caseDicts/setConstraintTypes" }	dimensions [0 1 -1 0 0 0 0]; internalField uniform (0 0 0); boundaryField {     ".*"     {         type noSlip;     }     #includeEtc "caseDicts/setConstraintTypes" }
// k	// omega
dimensions [0 2 -2 0 0 0 0]; internalField uniform 1.5e-06; boundaryField {     ".*"     {         type kqRWallFunction;         value \$internalField;     }     #includeEtc "caseDicts/setConstraintTypes" }	dimensions [0 0 -1 0 0 0 0]; internalField uniform 0.094; boundaryField {     ".*"     {         type omegaWallFunction;         value \$internalField;     }     #includeEtc "caseDicts/setConstraintTypes" }
// alphat	// nut
dimensions [1 -1 -1 0 0 0 0]; internalField uniform 0; boundaryField {     ".*"     {         type compressible::alphatWallFunction;         value \$internalField;     }     #includeEtc "caseDicts/setConstraintTypes" }	dimensions [0 2 -1 0 0 0 0]; internalField uniform 0; boundaryField {     ".*"     {         type nutkWallFunction;         value \$internalField;     }     #includeEtc "caseDicts/setConstraintTypes" }

Fonte: Autor.

Ambas as regiões compartilham as mesmas entradas para o dicionário *p* (Figura A.9), correspondente às condições iniciais e de contorno da pressão.

**Figura A.9** – Condições iniciais e de contorno para a pressão em ambas as regiões: *p*.

```
#include "$FOAM_CASE/constant/parameters"
dimensions      [1 -1 -2 0 0 0];
internalField   uniform $p0;
boundaryField
{
    ./*
    {
        type     calculated;
        value    $internalField;
    }
    #includeEtc "caseDicts/setConstraintTypes"
}
```

Fonte: Autor.

As propriedades termofísicas dos materiais foram inseridas no dicionário *thermophysicalProperties*, localizado no diretório referente ao material que, por sua vez, está situado em *templates/materials*. Na Figura A.10, são mostradas as entradas do dicionário *thermophysicalProperties* relativo ao ar e ao alumínio. As entradas relativas ao aço inox AISI 316 seguem a mesma configuração do alumínio e suas propriedades estão elencadas na Tabela 3.4.

**Figura A.10** – Propriedades termofísicas do ar e do alumínio: *thermophysicalProperties*.

// air/thermophysicalProperties	// aluminum/thermophysicalProperties
<pre>thermoType {     type          heRhoThermo;     mixture       pureMixture;     transport     const;     thermo        hConst;     equationOfState perfectGas;     specie        specie;     energy         sensibleEnthalpy; } mixture {     specie     {         nMoles      1;         molWeight   28.97;      // [g/mol]     }     thermodynamics     {         Cp          1007;      // [J/kg.K]         Hf          0;     }     transport     {         mu          1.846e-05; // [kg/m.s]         Pr          0.707;     } }</pre>	<pre>thermoType {     type          heSolidThermo;     mixture       pureMixture;     transport     constIso;     thermo        eConst;     equationOfState rhoConst;     specie        specie;     energy         sensibleInternalEnergy; } mixture {     specie     {         nMoles      1;         molWeight   26.982; // [g/mol]     }     transport     {         kappa       237;      // [W/m.K]     }     thermodynamics     {         Hf          0;         Cv          903;      // [J/kg.K]     }     equationOfState     {         rho         2702;     // [kg/m^3]     } }</pre>

Fonte: Autor.

A Figura A.11 apresenta as entradas do dicionário *controlDict*, localizado no diretório *system*, responsável por determinar o *solver*, o tempo de início e fim da simulação, os espaços de tempo *deltaT*, a precisão de escrita dos dados entre outros parâmetros.

**Figura A.11** – Entradas do dicionário *controlDict*.

```

application          chtMultiRegionFoam;
startFrom           latestTime;
startTime            0;
stopAt               endTime;
endTime              1200;
deltaT                0.01;
writeControl         runTime;
writeInterval        5;
purgeWrite           0;
writeFormat          ascii;
writePrecision       8;
writeCompression     off;
timeFormat           general;
timePrecision        6;
runTimeModifiable   true;
adjustTimeStep       yes;
maxCo                 1.0;
maxDeltaT             0.05;

```

Fonte: Autor.

A Figura A.12 traz os dicionários situados no diretório *constant*, que são: *materialProperties*, que determina o material para cada região do modelo geométrico; *momentumTransport*, que define o modelo de turbulência a ser utilizado, no caso, *kOmegaSST*, baseado no modelo  $\kappa - \omega$ ; *transportProperties*, onde foi definido o modelo de transporte de um fluido newtoniano; *parameters*, dicionário criado pelo usuário para definir os principais parâmetros físicos do problema (na Figura A.12, estão as entradas referentes à aleta de alumínio puro).

**Figura A.12** – Entradas dos dicionários localizados no diretório *constant*.

// materialProperties	// momentumTransport
fluid	simulationType RAS;
{	RAS
type        fluid;	{
material    air;	model            kOmegaSST;
}	turbulence     on;
solid	printCoeffs    on;
{	}
type        solid;	
material    aluminum;	
}	
// transportProperties	// parameters
transportModel Newtonian;	d                  0.0095;
nu               1.589e-05;	L                  0.6200;
	Tb               326.85;
	Tinfty         295;
	p0               1e5;

Fonte: Autor.

## APÊNDICE B – DESENVOLVIMENTO DA RELAÇÃO ENTRE $q_f$ PARA DUAS ALETAS

De acordo com as Equações 2.41, 2.43, 2.45 e 2.47, a taxa de transferência de calor em uma aleta de seção transversal uniforme, em estado estacionário, pode ser escrita da seguinte forma

$$q_f = M \cdot f(m, \bar{h}, k) \quad (\text{B.1})$$

em que  $f(m, \bar{h}, k)$  varia de acordo com a condição de contorno na extremidade da aleta e, como já descrito na seção 2.3,  $\bar{h}$  é o coeficiente médio de transferência de calor por convecção,  $k$  é a condutividade térmica do material da aleta e  $m$  é definido pela Equação 2.39c.

Porém, percebe-se, tanto pelos resultados experimentais quanto pelos numéricos deste trabalho, que a diferença entre os valores de  $q_f$  obtidos em condições de contorno diferentes para uma mesma aleta é mínima. Sua magnitude é devido ao fator  $M$ , fazendo com que  $f(m, \bar{h}, k)$  tenda a 1. Desta forma, a taxa de transferência de calor não dependeria da condição de contorno aplicada em sua extremidade e seu cálculo seria simplificado a

$$q_f \approx M \quad (\text{B.2})$$

Ressalta-se que  $f(m, \bar{h}, k) \rightarrow 1$  à medida que  $L \rightarrow \infty$ , ou seja, quanto maior for o comprimento  $L$  da aleta, a ponto de ela ser considerada infinita, mais exata será a aproximação de (B.2).

Outra hipótese que pode ser feita é considerar a aleta piniforme estudada neste trabalho como um cilindro longo horizontal isotérmico cuja temperatura superficial  $T_s$  seria aproximada a

$$T_s \approx \frac{T_b + T_\infty}{2} \quad (\text{B.3})$$

Deste modo, o número de Nusselt médio  $\overline{Nu}_D$  para a convecção natural ao redor da aleta pode ser calculado de acordo com a expressão sugerida por Morgan (1975)

$$\overline{Nu}_D = \frac{\bar{h}D}{k_F} = C \cdot Ra_D^n \quad (\text{B.4})$$

em que  $D$  é o diâmetro da aleta,  $k_F$  é a condutividade térmica do meio fluido,  $Ra_D$  é o número de Rayleigh,  $C$  e  $n$  são determinados na Tabela B.1 de acordo com o valor de  $Ra_D$ , calculado por

$$Ra_D = \frac{g\beta(T_s - T_\infty) D^3}{\nu\alpha} \quad (\text{B.5})$$

em que  $g$  é o módulo da aceleração da gravidade,  $\beta$  é o coeficiente de expansão térmica,  $\nu$  é a viscosidade cinemática e  $\alpha$  é a difusividade térmica, todos referentes ao meio, avaliados na temperatura do filme  $T_f \equiv \frac{(T_s + T_\infty)}{2}$ .

**Tabela B.1** – Constantes da Equação B.4 para a convecção natural em um cilindro longo horizontal.

$Ra_D$	$C$	$n$
$10^{-10}$ – $10^{-2}$	0,675	0,058
$10^{-2}$ – $10^2$	1,02	0,148
$10^2$ – $10^4$	0,850	0,188
$10^4$ – $10^7$	0,480	0,250
$10^7$ – $10^{12}$	0,125	0,333

Fonte: Morgan (1975).

Assim, é possível escrever  $Ra_D$  em função de  $\theta_b$  substituindo (B.3) em (B.5):

$$\begin{aligned} Ra_D &= \frac{g\beta \left( \frac{T_b + T_\infty}{2} - T_\infty \right) D^3}{\nu\alpha} \\ &= \frac{g\beta (T_b - T_\infty) D^3}{2\nu\alpha} \\ &= \frac{g\beta\theta_b D^3}{2\nu\alpha} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Substituindo (B.6) em (B.4) e explicitando  $\bar{h}$ , conduz-se a

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{k_F}{D} \cdot C \cdot \left( \frac{g\beta\theta_b D^3}{2\nu\alpha} \right)^n \\ &= \left[ C \cdot k_F \cdot \left( \frac{g\beta}{2\nu\alpha} \right)^n \right] \cdot \theta_b^n \cdot D^{3n-1} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Deste modo, pode-se substituir (B.7) em (B.2), escrevendo  $q_f$  em termos de  $\theta_b$ ,  $k$  e  $D$ :

$$\begin{aligned} q_f &\approx \theta_b \sqrt{\bar{h} P k A_c} \\ &\approx \theta_b \left\{ \left[ C \cdot k_F \cdot \left( \frac{g\beta}{2\nu\alpha} \right)^n \right] \cdot \theta_b^n \cdot D^{3n-1} \cdot (\pi D) \cdot k \cdot \left( \frac{\pi D^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \frac{\pi}{2} \left[ C \cdot k_F \cdot \left( \frac{g\beta}{2\nu\alpha} \right)^n \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \theta_b^{\frac{n}{2}+1} \cdot k^{\frac{1}{2}} \cdot D^{\frac{3n}{2}+1} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Considerando as propriedades termofísicas do fluido constantes no intervalo de temperaturas  $[T_\infty, T_b]$ , pode-se escrever a Equação B.8 como

$$q_f \approx \mathbb{C} \cdot \theta_b^{\frac{n}{2}+1} \cdot k^{\frac{1}{2}} \cdot D^{\frac{3n}{2}+1} \quad (\text{B.9})$$

em que

$$\mathbb{C} \equiv \frac{\pi}{2} \left[ C \cdot k_F \cdot \left( \frac{g\beta}{2\nu\alpha} \right)^n \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.10})$$

Então, para duas aletas piniformes longas de seção transversal circular uniforme,  $i$  e  $j$ , posicionadas horizontalmente e cujos valores de  $Ra_D$  estejam no mesmo intervalo

---

indicado na Tabela B.1, pode-se estimar a razão entre as taxas de transferência de calor de cada uma através da Equação B.11

$$\frac{q_{f,j}}{q_{f,i}} = \left( \frac{\theta_{b,j}}{\theta_{b,i}} \right)^{\frac{n}{2}+1} \cdot \left( \frac{k_j}{k_i} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{D_j}{D_i} \right)^{\frac{3n}{2}+1} \quad (\text{B.11})$$