Estimação pontual e intervalo de confiança

Gilberto Pereira Sassi

Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

Tabela 1: Encontrar o valor do parâmetro dos modelos de probabilidade.
Seja $x_1, \ldots, x_m$ os valores observados de uma variável quantitativa X em uma amostra, então:

Amostra	Distribuição	Parâmetros	Estimador
$X_1, \ldots, X_m$	$U_D[j, k]$ $f(x) = \dfrac{1}{k - j + 1}, \quad x = j, \ldots, k$	j k	$\hat{j} = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ $\hat{k} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$
$X_1, \ldots, X_m$	$b(n, p)$ $f(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$	p n conhecido	$\hat{p} = \dfrac{\bar{x}}{n} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{n \cdot m}$
$X_1, \ldots, X_m$	$Bernoulli(p)$ $f(x) = p^x \cdot (1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$	p	$\hat{p} = \bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}$
$X_1, \ldots, X_m$	$Poison(\lambda)$ $f(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \cdots$	λ	$\hat{\lambda} = \bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}$
$X_1, \ldots, X_m$	$U[a, b]$ $f(x) = \dfrac{1}{b - a}, \quad x \in [a, b]$	a b	$\hat{a} = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ $\hat{b} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$
$X_1, \ldots, X_m$	$Exponencial(\alpha)$ $f(x) = \alpha \exp(-\alpha x), \quad x \geq 0$	α	$\hat{\alpha} = \dfrac{1}{\bar{x}} = \dfrac{m}{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}$
$X_1, \ldots, X_m$	$Normal(\mu, \sigma^2)$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\dfrac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ, σ^2	$\hat{\mu} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}$ $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{(x_1 - \hat{\mu})^2 + (x_2 - \hat{\mu})^2 + \cdots + (x_m - \hat{\mu})^2}{m - 1}$

Exemplo – Bernoulli

Um pesquisador está interessado em estudar a prevalência de um certa patologia. Para isso, ele coletou uma amostra em três etapas:

1. Na primeira etapa, ele coletou 5 pacientes e dois estavam infectados;
2. Na segunda etapa, ele coletou 8 pacientes e 4 estavam infectados;
3. Na terceira etapa, ele coletou 10 pacientes e 3 estavam infectados.

Qual a prevalência desta patologia na população?

Solução: Nesse caso, temos que

- Sucesso: o paciente estar infectado;
- Probabilidade de sucesso: é a prevalência e precisamos estimar.

Neste caso, temos uma variável aleatória com Distribuição Bernoulli. O tamanho final da amostra é $n = 5 + 8 + 10 = 23$ e número de sucessos foi $2 + 4 + 3 = 9$, então a prevalência é aproximada por

$$\hat{p} = \frac{9}{23} = 0,39.$$

Exemplo – Exponencial

Um profissional de saúde acompanhou 15 pacientes com certa patologia em estado avançado e observou o tempo em dias até o óbito obtendo os valores da tabela 2.

Tempo até o óbito	80	327	95	146	3	82	4	1152	226	173

Tabela 2: Tempo (em dias) até óbito.

Qual o modelo de probabilidade adequado neste contexto? Qual o parâmetro da distribuição que você escolheu? Qual um paciente em estado crítico com esta patologia viver mais de 180 dias?

Solução: O tempo até um evento (o óbito nesse caso) é modelado usando a distribuição exponencial. O tempo médio até o óbito é

$$\bar{x} = \frac{80 + 327 + 95 + 146 + 3 + 82 + 4 + 1152 + 226 + 173}{10} = 228,8,$$

e a taxa do modelo exponencial é aproximada por $\hat{\alpha} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{228,8} = 0,004.$
A probabilidade de um paciente em estado crítico sobreviver mais de 180 dias é

$$\begin{aligned} P(X \geq 180) &= 1 - P(X < 180) \\ &= 1 - \Big(1 - \exp(-0.004 \cdot 180)\Big) \\ &= \exp(-0,004 \cdot 180) \\ &= 0,49. \end{aligned}$$

Organização dos intervalos de confiança

1. **Distribuição normal:**
   1. Intervalo de confiança para média quando variância é conhecida (intervalos Z);
   2. Intervalo de confiança para média quando variância é desconhecida (intervalos t);
   3. Intervalo de confiança para variância;
2. **Distribuição exponencial:**
   1. Intervalo de confiança para o tempo médio de vida ou duração;
3. **Grandes amostras (tamanho da amostra $\geq$ 40):**
   1. Intervalo de confiança para proporção para distribuição Bernoulli;
   2. Intervalo de confiança para outras distribuições.

Estimação intervalar para média μ Distribuição normal com σ^2 conhecida

Objetivo

Agora queremos encontrar um intervalo de valores plausíveis para o parâmetro μ, ou seja, queremos encontrar a e b tal que $a < \mu < b$ com uma medida de *precaução ou prudência* γ, ou seja, se repetirmos o experimento ou a amostragem, 95% das amostras produziriam um intervalo que contém o parâmetro.

Chamamos (a, b) de intervalo de confiança e acreditamos que este intervalo está correto com uma medida de *precaução ou prudência* γ. Chamamos γ de coeficiente de confiança.

Suponha que você conhece o desvio padrão σ populacional da variável aleatória contínua X com distribuição normal. Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra de tamanho n da variável X, então o intervalo de confiança para a média populacional μ com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$ é dado por

$$IC(\mu; \gamma) = \left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x}; z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x}\right)$$

em que $\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\gamma+1}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2}$. Algumas vezes, usamos a notação $\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Interpretação do coeficiente de confiança

Gostaríamos de reforçar que o intervalo de confiança é um processo de generalização de uma amostra para toda população. Existe uma possibilidade dessa generalização estar errada como ilustrado na Tabela 3.

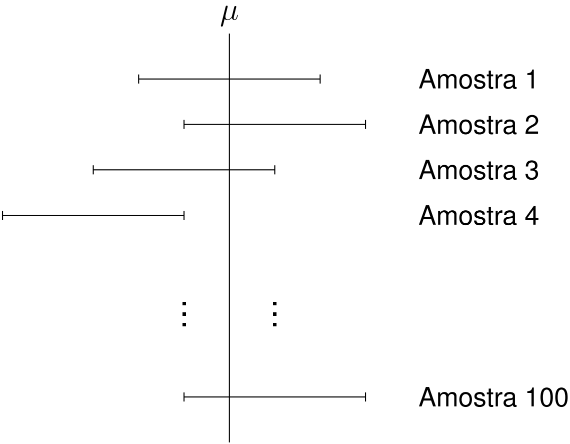
Tabela 3: Intervalos de confiança e amostras de uma população com distribuição normal com média populacional $\mu = 1,75$ e desvio padrão $\sigma = 0,1$.

μ		Amostra					a	b	$a < \mu < b$?
1,75	Amostra 1	2,050	1,909	1,893	1,858	1,651	1,785	1,960	Não
	Amostra 2	1,667	1,909	1,958	1,771	2,028	1,779	1,954	Nao
	Amostra 3	1,835	1,905	1,995	1,805	1,820	1,784	1,960	Não
σ	Amostra 4	1,824	1,870	1,965	1,637	1,711	1,714	1,889	Sim
0,1	Amostra 5	1,773	1,796	1,895	1,872	1,812	1,742	1,917	Sim
	Amostra 6	1,741	1,885	1,896	1,629	1,664	1,675	1,851	Sim

Na Tabela 3, o intervalo de confiança com coeficiente de confiança $\gamma = 0,95$ pode ou não conter a média populacional. O importante é que 95% dos intervalos de confiança vão conter a média populacional já que $\gamma = 0,95$. Ou seja, de 100 intervalos de confianças de distintas amostras, aproximadamente 95 intervalos vão conter a média populacional. Ilustramos esta ideia na Figura 1.

Interpretação do coeficiente de confiança

Figura 1: Interpretação do coeficiente de confiança.



Exemplo

Suponha que os comprimentos de jacarés de um certa raça tenham variância $\sigma^2 = 0,01m^2$. Uma amostra de dez animais foi coletada e forneceu uma média de $1,69m$. Construa um intervalo de confiança com coeficiente de confiança $\gamma = 0,95$. Construa um intervalo de confiança para a média da população de jacarés com coeficiente de confiança $\gamma = 99\%$.

Solução:

- Para $\gamma = 95\%$. Primeiramente precisamos encontrar $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, ou seja, $\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$. Logo $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$. Então, o intervalo de confiança para a altura média do jacaré é

$$IC(\mu, 95\%) = \left(-1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,01}{10}} + 1,69; 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,01}{10}} + 1,69\right) = (1,63; 1,75).$$

  Ou seja, com coeficiente de confiança 95%, a altura média do jacaré está entre $1,63m$ e $1,75m$.

- Para $\gamma = 99\%$. Primeiramente precisamos encontrar $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, ou seja, $\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2} = 0,995$ e $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,58$. Então, o intervalo de confiança para a altura média do jacaré é

$$IC(\mu, 95\%) = \left(-2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,01}{10}} + 1,69; 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,01}{10}} + 1,69\right) = (1,60; 1,77).$$

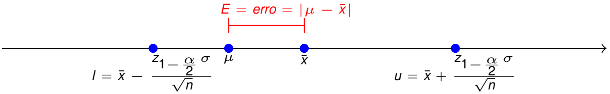
  Ou seja, com coeficiente de confiança 99%, a altura média do jacaré está entre $1,60m$ e $1,77m$.

Escolha do tamanho da amostra

Precisão da estimativa

Quando usamos $\bar{x} = \frac{x_1 \cdots + x_n}{n}$ para aproximar μ, o erro $E = |\bar{x} - \mu|$ é menor ou igual a $\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}$ com coeficiente de confiança $\gamma = 100(1 - \alpha)\%$.conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2: Erro quando usamos $\bar{x}$ para aproximar μ



Note que $\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}$ aumenta quando aumentamos γ (ou diminuímos α). Dizemos que $\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}$ é a precisão da estimativa de μ.

Tamanho da amostra

Quando conhecemos o desvio padrão σ da população de distribuição normal e fixamos $\gamma = 1 - \alpha$, então, para ter um erro máximo de E ao aproximar μ por $\bar{x}$, o tamanho da amostra precisa ter no mínimo

$$n = \left\lceil \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{E} \right)^2 \right\rceil,$$

em que $\lceil x \rceil$ é "x é o primeiro inteiro depois de x" e E é o erro máximo tolerável especificado pelo pesquisador.

Escolha do tamanho da amostra

Exemplo

Uma fábrica de automóveis tem uma linha de produção que produz pistões com diâmetro que tem distribuição normal com desvio padrão $\sigma = 3cm$. Qual o tamanho da amostra para termos um erro máximo de $0.5cm$ com coeficiente de confiança $\gamma = 99\%$ ao aproximarmos μ?

Solução

Primeiro encontramos o quantil da distribuição normal $\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$, ou seja, $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,58$, então

$$
\begin{aligned}
n &= \left\lceil \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma}{E} \right)^2 \right\rceil \\
&= \left\lceil \left(\frac{2,58 \cdot 3}{1} \right)^2 \right\rceil \\
&= 240.
\end{aligned}
$$

Intervalo unilateral de confiança para μ Distribuição normal com σ^2 conhecida

Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória contínua com distribuição normal com média μ e variância conhecida σ^2.

Limite superior de confiança

Ao nível de significância $\gamma = (1 - \alpha)100\%$, o limite superior de confiança para média é dada por

$$\mu \leq \bar{x} + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

em que $\Phi\left(z_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha$.

Limite inferior de confiança

Ao nível de significância $\gamma = (1 - \alpha)100\%$, o limite inferior de confiança para média é dada por

$$\bar{x} + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu,$$

em que $\Phi\left(z_{\alpha}\right) = \alpha$.

Intervalo unilateral de confiança para μ

Exemplo

Um engenheiro civil está analisando a força compressiva de um concreto. De estudos anteriores, a força compressiva é normalmente distribuída com variância $\sigma^2 = 1000(psi)^2$. Uma amostra com 12 espécimes tem média $\bar{x} = 3250psi$. Ache um limite inferior para a força compressiva com coeficiente de confiança $\gamma = 99\%$.

Solução

Primeiro precisamos achar o quantil da distribuição normal $\Phi(z_\alpha) = \alpha = 0,01$. Usando a tabela da distribuição normal, temos que $z_\alpha = -2,33$, e o intervalo unilateral para μ com coeficiente de confiança $\gamma = 99\%$ é dado por:

$$
\begin{aligned}
IC(\mu,\gamma) &= \left(\bar{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \infty\right) \\
&= \left(3250 - 2,33 \cdot \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{12}}; \infty\right) \\
&= (3228,73; \infty)
\end{aligned}
$$

Ou seja, com coeficiente de confiança de 99%, a média populacional da força compressiva é no mínimo $3228,73psi$.

Estimação intervalar para média μ Distribuição normal com σ^2 desconhecida

Suponha que você sabe que a variável contínua X com distribuição normal e não conhecemos o desvio padrão σ. Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra de tamanho n da variável X com média $\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ e variância amostral $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$, então a distribuição amostral de

$$T = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{S},$$

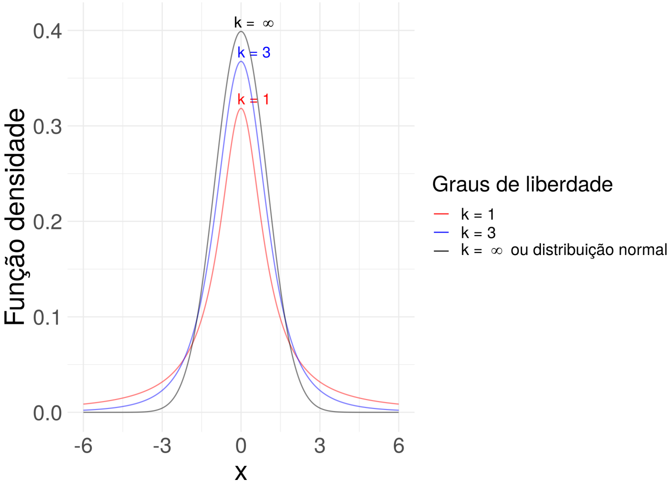
segue um modelo probabilidade que chamamos t-Student com $k = n - 1$ graus de liberdade, em que a função densidade é dada por

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k}} \cdot \frac{1}{\left[\Gamma\left(\left(\frac{x^2}{k}\right)^2 + 1\right)\right]^{\frac{k+1}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A ideia é que, ao substituirmos σ por s, precisamos considerar a incerteza de usar s ao invés de σ e valores mais afastados de μ são mais prováveis para $T = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{S}$ do que para $\frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}$.

Estimação intervalar para média μ Distribuição normal com σ^2 desconhecida

Figura 3: Distribuição t-Student e normal.



Estimação intervalar para média μ Distribuição normal com σ^2 desconhecida

Suponha que você sabe que a variável contínua X com distribuição normal e não conhecemos o desvio padrão σ. Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra de tamanho n da variável X com média $\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ e variância $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$, então o intervalo de confiança com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$ é dada por

$$IC(\mu, \gamma) = \left(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right),$$

em que $P\left(t_{n-1} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, em que t_{n-1} é a distribuição t-Student com $n - 1$ graus de liberdade.

Estimação intervalar para média μ Distribuição normal com σ^2 desconhecida

Exemplo

A força de compressão de um concreto é normalmente distribuída e um engenheiro civil precisa encontrar um intervalo de confiança para a força de compressão média e para isso coletou uma amostra com 12 espécimes de concreto e obteve a seguinte amostra: 2216, 2237, 2249, 2204, 2225, 2301, 2281, 2263, 2318, 2255, 2275, 2295. Use o coeficiente de confiança $\gamma = 0.99$.

Solução

Primeiro calculamos o quantil da distribuição t-Student com $n-1$ com graus de liberdade através de $P(t_{n-1} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}) = P(t_{11} \leq t_{0,995;11}) = 0,995$, então $t_{0,995;11} = 3,106$. A média e o desvio padrão são dadas por

$$\bar{x} = 2259,917 \text{ e } s = 35,56929.$$

E o intervalo de confiança com coeficiente de confiança $\gamma = 0.99$ é

$$\begin{aligned} IC(\mu, 99\%) &= \left(\bar{x} - t_{0,995;11}\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{0,995;11}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \left(2259,917 - 3,106 \cdot \frac{35,56929}{\sqrt{12}}; 2259,917 + 3,106 \cdot \frac{35,56929}{\sqrt{12}}\right) \\ &= (2228,024; 2291,809) \end{aligned}$$

Ou seja, com coeficiente de confiança $\gamma = 99\%$, a média populacional da força compressiva está entre $2228,024$*psi* e $2291,809$*psi*.

Intervalo unilateral de confiança para μ Distribuição normal com σ^2 desconhecida

Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória contínua com distribuição normal com média μ e variância desconhecida σ^2 e variância amostral $s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_1-\bar{x})^2}{n-1}$.

Limite superior de confiança

Ao nível de significância $\gamma = (1-\alpha)100\%$, o limite superior de confiança para média é dada por

$$\mu \leq \bar{x} + t_{1-\alpha;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}},$$

em que $P\left(t_{n-1} \leq t_{1-\alpha;n-1}\right) = 1-\alpha$, em que t_{n-1} é uma variável aleatória com distribuição t-Student com $n-1$ graus de liberdade.

Limite inferior de confiança

Ao nível de significância $\gamma = (1-\alpha)100\%$, o limite inferior de confiança para média é dada por

$$\bar{x} - t_{\alpha;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu,$$

em que $P\left(t_{n-1} \leq t_{\alpha;n-1}\right) = \alpha$, em que t_{n-1} é uma variável aleatória com distribuição t-Student com $n-1$ graus de liberdade.

Intervalo unilateral de confiança para μ

Exemplo

Uma marca de margarina foi analisada para determinar o nível (em porcentagem) de ácido graxo poliinsaturado. De estudos anteriores, os pesquisadores podem assumir a normalidade dos dados. Seis potes de margarina desta marca foi coletada com os seguintes níveis (em porcentagem) de ácido graxo poliinsaturado: 6,8; 17,2; 17,4; 16,9; 16,5; 17,1. Encontre um limite inferior para a porcentagem média de ácido graxo poliinsaturado com coeficiente de confiança $\gamma = 95\%$.

Solução

A média e o desvio padrão são dados por

$$\bar{x} = 16,98 \qquad s = 0,32,$$

e o quantil $P(t_{n-1} \leq t_{\alpha;n-1}) = P(t_5 \leq t_{\alpha;5}) = 5\%$ da distribuição t-Student $k = n - 1 = 5$, ou seja, $t_{0,05;5} = -2,015$. Então,

$$\begin{aligned} IC(\mu, 95\%) &= \left(\bar{x} + t_{\alpha;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}; \infty\right) \\ &= \left(16,98 - 2,015 \cdot \frac{0,32}{\sqrt{6}}; \infty\right) \\ &= (16,71; \infty). \end{aligned}$$

Ou seja, com coeficiente de confiança $\gamma = 95\%$, a média populacional da porcentagem de ácido graxo poliinsaturado nos potes de margarina é no mínimo 16,71.

Estimação intervalar para σ^2
Distribuição normal

Distribuição Qui-quadrado

Imagine que temos uma amostra $x_1, \ldots, x_n$ de uma variável aleatória contínua X com distribuição normal com média μ e variância σ^2, e considere a variância amostral $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$. Então a quantidade

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2},$$

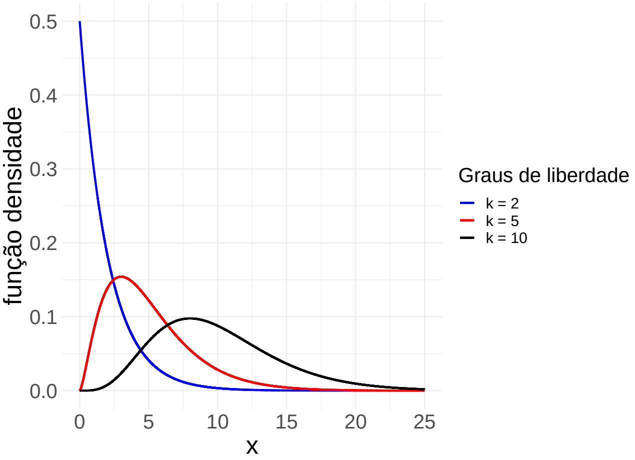
tem distribuição amostral que chamamos de *qui-quadrado* com $k = n - 1 > 0$ graus de liberdade.
Função densidade de probabilidade da distribuição qui-quadrado com $k > 0$ graus de liberdade:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \qquad x > 0.$$

$\mu = k$ e $\sigma^2 = 2k$.

Estimação intervalar para σ^2
Distribuição normal

Figura 4: Função de densidade.



Estimação intervalar para σ^2
Distribuição normal

Suponha que você sabe que a variável aleatória contínua X com distribuição normal e não conhecemos o desvio padrão σ. Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra de tamanho n da variável X com média $\bar{x} = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ e variância $s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}$, então o intervalo de confiança para σ^2 com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$ é dada por

$$IC(\sigma^2, \gamma) = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}; \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}} \right)$$

em que $P\left(\chi^2_{n-1} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}\right) = \frac{\alpha}{2}$ e $P\left(\chi^2_{n-1} \leq \chi^2_{\frac{1-\alpha}{2};n-1}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, em que χ^2_{n-1} é a distribuição qui-quadrado com $n-1$ graus de liberdade.

Intervalo de confiança para σ^2

Exemplo

Um rebite está sendo construído para ser inserido em um buraco. Uma amostra aleatória com $n = 15$ peças é selecionada, e o diâmetros dos buracos foram medidos. O desvio padrão amostral é dado por $s = 0,008ml$. Construa o intervalo de confiança para σ^2 com coeficiente de confiança $\gamma = 99\%$.

Solução

Primeiro encontramos os quantis da distribuição qui-quadrado $\chi^2_{n-1} = \chi^2_{15-1} = \chi^2_{14}$.

- $P\left(\chi^2_{14} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};14}\right) = \frac{\alpha}{2} = \frac{0,01}{2} = 0,005$ e $\chi^2_{0,005;14} = 4,075$;
- $P\left(\chi^2_{14} \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};14}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,01}{2} = 0,995$ e $\chi^2_{0,995;14} = 31,319$.

Então,

$$
\begin{aligned}
IC(\sigma^2;\gamma) &= \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};14}}; \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};14}}\right) \\
&= \left(\frac{(15-1)0,008^2}{31,319}; \frac{(15-1)0,008^2}{4,075}\right) \\
&= (0,00003; 0,00022).
\end{aligned}
$$

Ou seja, com coeficiente de confiança $\gamma = 99\%$, então a variância está entre $0,00003$ e $0,00022$.

Intervalo unilateral de confiança para σ^2

Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória contínua com distribuição normal com média μ, variância desconhecida σ^2 e variância amostral $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_1 - \bar{x})^2}{n-1}$.

Limite superior de confiança

Ao nível de significância $\gamma = (1 - \alpha)100\%$, o limite superior de confiança para variância é dada por

$$\sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha;n-1}},$$

em que $P\left(\chi^2_{n-1} \leq \chi^2_{\alpha;n-1}\right) = \alpha$, em que χ^2_{n-1} é uma variável aleatória com distribuição qui-quadrado com $n-1$ graus de liberdade.

Limite inferior de confiança

Ao nível de significância $\gamma = (1 - \alpha)100\%$, o limite inferior de confiança para média é dada por

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha;n-1}} \leq \sigma^2,$$

em que $P\left(\chi^2_{n-1} \leq \chi^2_{1-\alpha;n-1}\right) = 1 - \alpha$, em que χ^2_{n-1} é uma variável aleatória com distribuição qui-quadrado com $n-1$ graus de liberdade.

Intervalo unilateral de confiança para σ^2

Exemplo

A porcentagem de titânio numa liga de aço usada na construção de naves aeroespaciais tem distribuição normal, e um engenheiro coletou 51 barras de aço com desvio padrão amostral $s = 0,37$. Construa um limite superior para o desvio padrão populacional da porcentagem de titânio numa liga de aço com coeficiente de confiança $\gamma = 95\%$.

Solução

Primeiro encontramos o quantil, ou seja, $P\left(\chi^2_{n-1} \leq \chi^2_{\alpha;n-1}\right) = P\left(\chi^2_{50} \leq \chi^2_{0,05;50}\right) = 0,05$ e $\chi^2_{0,05;50} = 34,764$. Então, temos que

$$\begin{aligned} IC(\sigma^2;\gamma) &= \left(0; \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha;n-1}}\right) \\ &= \left(0; \frac{50 \cdot 0,37^2}{34,764}\right) \\ &= (0; 0,197) \end{aligned}$$

Ou seja, com coeficiente de confiança $\gamma = 95\%$, a variância populacional da porcentagem de titânio na liga de aço é no máximo $0,197$.

Estimação intervalar para μ

Suponha que você sabe que a variável contínua X com distribuição exponencial e não conhecemos a média μ e taxa de decaimento $\lambda = \frac{1}{\mu}$. Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra de tamanho n da variável X com média $\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, é possível provar que a distribuição da quantidade $2\frac{1}{\mu} n\bar{x}$ tem distribuição qui-quadrado com $2n$ graus de liberdade. Então, o intervalo de confiança para μ com coeficiente de confiança $\gamma = (1 - \alpha)100$, é dado por

$$IC(\mu; \gamma) = \left(\frac{2n\bar{x}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};2n}}; \frac{2n\bar{x}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};2n}} \right),$$

em que $P\left(\chi^2_{2n} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};2n}\right) = \frac{\alpha}{2}$ e $P\left(\chi^2_{2n} \leq \chi^2_{\frac{1-\alpha}{2};2n}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, em que χ^2_{2n} tem distribuição qui-quadrado com $2n$ graus de liberdade.

Estimação intervalar para μ

Exemplo

Um fabricante de lâmpadas afirma que a duração média, pelo menos, 20000 horas. Um consumidor cético comprou 10 lâmpadas e verificou o tempo de vida de cada lâmpada. Os dados obtidos foram: 4272,61; 1464,02; 9765,54; 3308,58; 3237,83; 987,60; 4094,58; 17491,86; 4908,06 e 9403,13. Com coeficiente de confiança $\gamma = 99\%$, este consumidor deve acreditar no fabricante de lâmpadas?

Solução

Primeiro calculamos a média $\bar{x} = 5893,381$.
Em seguida, calculamos os quantis da distribuição qui-quadrado:

- $P\left(\chi^2_{2n} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};2n}\right) = P\left(\chi^2_{20} \leq \chi^2_{\frac{0,01}{2};20}\right) = \frac{0,01}{2}$ e $\chi^2_{0,005;20} = 7,434$;
- $P\left(\chi^2_{2n} \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};2n}\right) = P\left(\chi^2_{20} \leq \chi^2_{1-\frac{0,01}{2};20}\right) = 1 - \frac{0,01}{2} = 0,995$ e $\chi^2_{0,995;20} = 39,997$.

Então, o intervalo de confiança para μ com coeficiente de confiança $\gamma = 99\%$ é dada por

$$\begin{aligned} IC(\mu,\gamma) &= \left(\frac{2n\bar{x}}{\chi^2_{0,995;20}}; \frac{2n\bar{x}}{\chi^2_{0,005;20}}\right) \\ &= \left(\frac{2\cdot 10\cdot 5893,381}{39,997}; \frac{2\cdot 10\cdot 5893,381}{7,434}\right) \\ &= (2.946,91; 15855,21) \end{aligned}$$

Ou seja, com coeficiente de confiança $\gamma = 99\%$, o tempo médio de duração da lâmpada está entre $2.946,91$ e $15855,21$ horas.

Intervalo unilateral de confiança para μ
Distribuição exponencial com média μ e taxa de decaimento $\lambda = \frac{1}{\mu}$

Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória contínua com distribuição exponencial com média μ e e taxa de decaimento $\lambda = \frac{1}{\mu}$ e variância amostral $\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Limite superior de confiança

Ao nível de significância $\gamma = (1 - \alpha)100\%$, o limite superior de confiança para média é dada por

$$\mu \leq \frac{2n\bar{x}}{\chi^2_{\alpha;2n}},$$

em que $P\left(\chi^2_{2n} \leq \chi^2_{\alpha;2n}\right) = \alpha$, em que χ^2_{2n} é uma variável aleatória com distribuição qui-quadrado com $2n$ graus de liberdade.

Limite inferior de confiança

Ao nível de significância $\gamma = (1 - \alpha)100\%$, o limite inferior de confiança para média é dada por

$$\frac{2n\bar{x}}{\chi^2_{1-\alpha;2n}} \leq \mu,$$

em que $P\left(\chi^2_{2n} \leq \chi^2_{1-\alpha;2n}\right) = 1 - \alpha$, em que χ^2_{2n} é uma variável aleatória com distribuição qui-quadrado com $2n$ graus de liberdade.

Intervalo unilateral de confiança para μ Distribuição exponencial com média μ e taxa de decaimento $\lambda = \frac{1}{\mu}$

Exemplo

Um fabricante afirma que o tempo de vida de um ventilador usado na montagem de computadores *desktop* duram, em média, no mínimo 10.000 horas (conforme especificações de um órgão regulador). Este órgão regulador coletou 50 computadores do mercado e verificou quando tempo cada um dos ventiladores aguentaram e obteve uma média de 1953,063 horas. Ao nível de significância $\gamma = 90\%$, o fabricante está cumprindo as especificações do regulador?

Solução

Primeiro calculamos o quantil da distribuição qui-quadrado, ou seja, $P(\chi^2_{2n} \leq \chi^2_{\alpha;2n}) = P(\chi^2_{100} \leq \chi^2_{0,1;100}) = 0,9$ e $\chi^2_{0,1;100} = 82,358$. Então, temos que

$$\begin{aligned} IC(\mu, \gamma) &= \left(0; \frac{2n\bar{x}}{\chi^2_{0,1;100}}\right) \\ &= \left(0; \frac{2 \cdot 50 \cdot 1953,063}{82,358}\right) \\ &= (0; 2380,536)\,. \end{aligned}$$

Ou seja, com coeficiente de confiança com $\gamma = 90\%$, a média populacional de tempo de duração dos ventiladores não segue as especificações do regulador.

Intervalo de confiança para proporção p Amostras grandes e distribuição Bernoulli

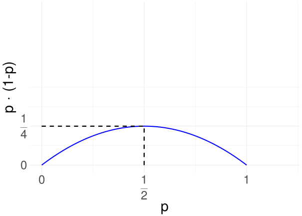
Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra de uma distribuição Bernoulli em que $n \geq 40$. Podemos aproximar a proporção p por $\hat{p} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$. Usando o teorema central do limite, temos que a quantidade $\frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{p \cdot (1-p)}$ tem distribuição normal padrão $N(0, 1)$. Então o intervalo de confiança com coeficiente de confiança $\gamma = (1 - \alpha)100\%$ seria dado por

$$IC(p; \gamma) = \left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{p \cdot (1-p)}{\sqrt{n}} + \hat{p}; z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{p \cdot (1-p)}{\sqrt{n}} + \hat{p} \right).$$

em que $\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. Note que $p \cdot (1-p) \leq \frac{1}{4}$, conforme ilustrado na Figura 5, e então

$$IC(p; \gamma) = \left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}} + \hat{p}; z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}} + \hat{p} \right).$$

Figura 5: Ilustração da desigualdade $p \cdot (1-p) \leq \frac{1}{4}$.



Intervalo de confiança para proporção p Amostras grandes e distribuição Bernoulli

Exemplo

Uma equipe de qualidade quer determinar a proporção de circuitos integrados defeituosos produzidos por uma linha de produção. Uma amostra com 300 circuitos é testada com 13 circuitos defeituosos. Construa um intervalo de confiança para a proporção de circuitos defeituosos usando coeficiente de confiança $\gamma = 90\%$.

Solução

Primeiramente, calculamos a proporção de circuitos defeituosos: $\hat{p} = \frac{13}{300} = 0,043$.
Em seguida, encontramos o quantil da distribuição normal: $\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95$ e $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,65$.
Então, temos que

$$\begin{aligned} IC(p;\gamma) &= \left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{2\sqrt{n}} + \hat{p}; z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{2\sqrt{n}} + \hat{p}\right) \\ &= \left(-1,65\frac{1}{2\sqrt{300}} + 0,043; 1,65\frac{1}{2\sqrt{300}} + 0,043\right) \\ &= (-0,005; 0,091) = (0; 0,091). \end{aligned}$$

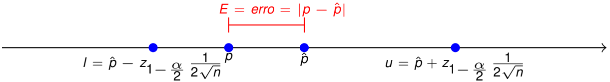
Ou seja, com coeficiente de confiança 90%, a proporção de circuitos integrados defeituosos está entre 0 e 0,091.

Escolha do tamanho da amostra

Precisão da estimativa

Quando usamos $\hat{p} = \bar{x} = \frac{x_1 \cdots + x_n}{n}$ para aproximar p, o erro $E = |\hat{p} - p|$ é menor ou igual a $\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}$ com coeficiente de confiança $\gamma = 100(1 - \alpha)\%$.conforme ilustrado na Figura 6.

Figura 6: Erro quando usamos $\hat{p}$ para aproximar p



Note que $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ aumenta quando aumentamos γ (ou diminuímos α). Dizemos que $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ é a precisão da estimativa de p.

Tamanho da amostra

Quando fixamos $\gamma = 1 - \alpha$, então, para ter um erro máximo de E ao aproximar p por $\hat{p}$, o tamanho da amostra precisa ter no mínimo

$$n = \left\lceil \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2E} \right)^2 \right\rceil,$$

em que $\lceil x \rceil$ é "x é o primeiro inteiro depois de x" e E é o erro máximo tolerável especificado pelo pesquisador. Note que $\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Escolha do tamanho da amostra

Exemplo

Um revendedor afirma que, em um pacote de sementes de alface, 95% das sementes germinarão. Com coeficiente de confiança 99%, qual o número mínimo de sementes que um órgão regulador precisa plantar para checar essa afirmação com erro máximo $E = 1\%$?

Solução

Primeiro calculamos o quantil da distribuição normal padrão $\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \Phi\left(z_{0,995}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$ e $z_{0,995} = 2,58$. Então, o tamanho mínimo da amostra é dada por:

$$
\begin{aligned}
n &= \left\lceil \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2E}\right)^2 \right\rceil \\
&= \left\lceil \left(\frac{2,58}{2 \cdot 0,01}\right)^2 \right\rceil \\
&= \lceil 16,641 \rceil = 17.
\end{aligned}
$$

Com coeficiente de confiança 95% e erro máximo $E = 0,01$, o tamanho mínimo de amostra é $\max(17, 40) = 40$ sementes.

Intervalo unilateral de confiança para p Amostras grandes e distribuição Bernoulli

Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória discreta com distribuição Bernoulli com proporção de sucesso p, em que $n \geq 40$.

Limite superior de confiança

Ao nível de significância $\gamma = (1 - \alpha)100\%$, o limite superior de confiança para proporção é dada por

$$p \leq \hat{p} + z_{1-\alpha} \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

em que $\Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, em que $\hat{p} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Limite inferior de confiança

Ao nível de significância $\gamma = (1 - \alpha)100\%$, o limite inferior de confiança para proporção é dada por

$$z_{\alpha} \frac{1}{2\sqrt{n}} + \hat{p} \leq p,$$

em que $\Phi(z_{\alpha}) = \alpha$, em que $\hat{p} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Intervalo unilateral de confiança para p Amostras grandes e distribuição Bernoulli

Exemplo

O governo federal afirma que no mínimo 40% dos poços artesianos da região nordeste tem água salobra. Um pesquisador da UFBA decide verificar essa afirmação, e analisou a água de 400 poços artesianos em diversos estados da região nordeste e 63 tiveram água salobra. Com coeficiente de confiança $\gamma = 90\%$, qual a proporção máxima de poços artesianos com água salobra na região nordeste? O pesquisador concorda com o governo federal com coeficiente de confiança $\gamma = 90\%$?

Solução

Primeiro calculamos o quantil da distribuição normal padrão $\Phi\left(z_{1-\alpha}\right) = \Phi\left(z_{0,90}\right) = 1 - \alpha = 0,90$ e $z_{0,90} = 1,29$.
A proporção de poços com água salobra é $\hat{p} = \frac{63}{400} = 0,16$. Então, a proporção máxima de poços artesianos com água salobra é

$$\begin{aligned} IC(p,\gamma) &= \left(0; \hat{p} + z_{1-\alpha}\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) \\ &= \left(0; 0,16 + 1,29 \cdot \frac{1}{2 \cdot 20}\right) \\ &= (0; 0,1923). \end{aligned}$$

Ou seja, com coeficiente de confiança $\gamma = 90\%$, a proporção de poços artesianos é no máximo $19,23\%$. Ou seja, o pesquisador da UFBA discorda do governo federal e acredita que a proporção de poços artesianos é bem menor (no máximo $19,23\%$) com coeficiente de confiança $\gamma = 90\%$.

Intervalo de confiança para μ
Amostras grandes e outras distribuições

Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra de tamanho n de uma variável aleatória X com média $\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ e $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_1 - \bar{x})^2}{n-1}$, em que $n \geq 40$. Então, o intervalo de confiança para μ com coeficiente de confiança $\gamma = (1 - \alpha)100\%$ é dado por

$$IC(\mu; \gamma) = \left(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \right),$$

em que $P\left(t_{n-1} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, em que t_{n-1} tem distribuição t-Student com $n-1$ graus de liberdade.

Intervalo de confiança para μ
Amostras grandes e outras distribuições

Exemplo

Imagine uma variável aleatória discreta com suporte $\chi = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e coletamos uma amostra com 15 valores: 1, 5, 5, 0, 1, 5, 5, 0, 1, 1, 1, 1, 4, 0 e 2. Construa um intervalo de confiança para média μ com coeficiente de confiança $\gamma = 95\%$.

Solução

Primeiro calculamos a média e o desvio padrão amostral: $\bar{x} = 2,13$ e $s = 2,03$. Em seguida, encontramos o quantil da distribuição t-Student com $n - 1 = 15 - 1 = 14$ graus de liberdade: $P(t_{14} \leq t_{0,975;14}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$ e $t_{0,975;14} = 2,145$. Então o intervalo de confiança para μ é dado por

$$
\begin{aligned}
IC(\mu, \gamma) &= \left(-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x};\, t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x}\right) \\
&= \left(-t_{0,975;14}\frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x};\, t_{0,975;14}\frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x}\right) \\
&= \left(-2,145\frac{2,03}{\sqrt{15}} + 2,13;\, 2,145\frac{2,03}{\sqrt{15}} + 2,13\right) \\
&= (1,01; 3,25)\,.
\end{aligned}
$$

Ou seja, com coeficiente de confiança $\gamma = 95\%$, a média μ está entre $1,01$ e $3,25$.

Intervalo unilateral de confiança para μ Amostras grandes e outras distribuições

Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória X, em que $n \geq 40$.

Limite superior de confiança

Ao nível de significância $\gamma = (1-\alpha)100\%$, o limite superior de confiança para média é dada por

$$\mu \leq \bar{x} + t_{1-\alpha;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}},$$

em que $P(t_{n-1} \leq t_{1-\alpha;n-1}) = 1-\alpha$, em que t_{n-1} é a distribuição t-Student com $n-1$ graus de liberdade.

Limite inferior de confiança

Ao nível de significância $\gamma = (1-\alpha)100\%$, o limite inferior de confiança para média é dada por

$$\bar{x} + t_{\alpha;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu,$$

em que $P(t_{n-1} \leq t_{\alpha;n-1}) = \alpha$, em que t_{n-1} é a distribuição t-Student com $n-1$ graus de liberdade.

Intervalo unilateral de confiança para μ Amostras grandes e outras distribuições

Exemplo

Um gerente de uma central de *call center* está interessado em estimar o número máximo, em média, de chamadas que a central recebe. Com esse fim, o gerente contou quantas ligações a central recebeu em 20 dias úteis: 94, 98, 109, 102, 78, 105, 102, 97, 91, 95, 103, 93, 129, 115, 114, 110, 90, 103, 106 e 121. Com coeficiente de confiança $\gamma = 99\%$, qual o número máximo, em média, de ligações que a central de *call center* recebe em um dia útil?

Solução

Primeiro calculamos a média e o desvio padrão amostral: $\bar{x} = 102,75$ e $s = 11,72$. Em seguida, encontramos o quantil da distribuição t-Student com $n - 1 = 20 - 1 = 19$ graus de liberdade: $P(t_{19} \leq t_{0,99;19}) = 0,99$ e $t_{0,99;19} = 2,539$. Então o intervalo de confiança para μ é dado por

$$IC(\mu, \gamma) = \left(0; t_{1-\alpha;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x}\right) = \left(0; t_{0,99;19}\frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x}\right)$$
$$= \left(0; 2,359\frac{11,72}{\sqrt{15}} + 102,75\right) = (0; 109,89)\,.$$

Ou seja, com coeficiente de confiança $\gamma = 99\%$, o número máximo de chamadas que chegam, em média, é 110 chamadas.

Resumo para construir intervalo de confiança

Distribuição	Parâmetro	Intervalo	Quantil
Normal	μ	$IC(\mu, 1-\alpha) = \left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x}; z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x}\right)$	$\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$
σ^2 conhecido		$IC(\mu, 1-\alpha) = \left(z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x}; \infty\right)$	$\Phi(z_{\alpha}) = \alpha$
		$IC(\mu, 1-\alpha) = \left(-\infty; z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x}\right)$	$\Phi\left(z_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha$
Normal	μ	$IC(\mu, 1-\alpha) = \left(-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x}; t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x}\right)$	$P\left(t_{n-1} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$
		$IC(\mu, 1-\alpha) = \left(t_{\alpha;n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x}; \infty\right)$	$\mathrm{P}\left(t_{n-1} \leq t_{\alpha;n-1}\right) = \alpha$
		$IC(\mu, 1-\alpha) = \left(-\infty; t_{1-\alpha;n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x}\right)$	$\mathrm{P}\left(t_{n-1} \leq t_{1-\alpha;n-1}\right) = 1 - \alpha$
Normal	σ^2	$IC(\sigma^2; 1-\alpha) = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}; \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}}\right)$	Vide ii.
		$IC(\sigma^2; 1-\alpha) = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha;n-1}}; \infty\right)$	$P\left(\chi^2_{n-1} \leq \chi^2_{1-\alpha;n-1}\right) = 1 - \alpha$
		$IC(\sigma^2; 1-\alpha) = \left(0; \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha;n-1}}\right)$	$P\left(\chi^2_{n-1} \leq \chi^2_{\alpha;n-1}\right) = \alpha$

- i. n é o tamanho da amostra;
- ii. $P\left(\chi^2_{n-1} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}\right) = \frac{\alpha}{2}$ e $P\left(\chi^2_{n-1} \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Resumo para construir intervalo de confiança

Distribuição	Parâmetro	Intervalo	Quantil
Exponencial	μ	$IC(\mu, 1-\alpha) = \left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};2n} \cdot \frac{1}{2n\bar{x}}; \chi^2_{\frac{\alpha}{2};2n} \cdot \frac{1}{2n\bar{x}}\right)$	Vide ii.
		$IC(\mu, 1-\alpha) = \left(\chi^2_{1-\alpha;2n} \cdot \frac{1}{2n\bar{x}}; \infty\right)$	$P\left(\chi^2_{2n} \leq \chi^2_{1-\alpha;2n}\right) = 1-\alpha$
		$IC(\mu, 1-\alpha) = \left(0; \chi^2_{\alpha;2n} \cdot \frac{1}{2n\bar{x}}\right)$	$P\left(\chi^2_{2n} \leq \chi^2_{\alpha;2n}\right) = \alpha$
Bernoulli	p	$IC(p, 1-\alpha) = \left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}} + \hat{p}; z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2\sqrt{n}} + \hat{p}\right)$	$\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\frac{\alpha}{2}$
$n \geq 40$		$IC(p, 1-\alpha) = \left(z_{\alpha} \frac{1}{2\sqrt{n}} + \hat{p}; 1\right)$	$\Phi\left(z_{\alpha}\right) = \alpha$
		$IC(p, 1-\alpha) = \left(0; z_{1-\alpha} \frac{1}{2\sqrt{n}} + \hat{p}\right)$	$\Phi\left(z_{1-\alpha}\right) = 1-\alpha$
Outras distribuições	μ	$IC(\mu; 1-\alpha) = \left(-t_{\frac{\alpha}{2};n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x}; t_{\frac{\alpha}{2};n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x}\right)$	$P\left(t_{n-1} \leq t_{\frac{\alpha}{2};n-1}\right) = 1-\frac{\alpha}{2}$
$n \geq 40$		$IC(\mu; \gamma) = \left(t_{\alpha;n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x}; \infty\right)$	$P\left(t_{n-1} \leq t_{\alpha;n-1}\right) = \alpha$
		$IC(\sigma^2; \gamma) = \left(-\infty; t_{1-\alpha;n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} + \bar{x}\right)$	$P\left(t_{n-1} \leq t_{1-\alpha;n-1}\right) = 1-\alpha$

i. n é o tamanho da amostra;

ii. $P\left(\chi^2_{2n} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};2n}\right) = \frac{\alpha}{2}$ e $P\left(\chi^2_{2n} \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};2n}\right) = 1-\frac{\alpha}{2}$.