UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

REPORTE: ACTIVIDAD 3
Taller de Investigación

Gil Estéfano Rodríguez Rivera

NUA: 390906 ge.rodriguezrivera@ugto.mx

23 de octubre de 2021

1. Fluido perfecto y estático

El tensor de energía momento de un fluido perfecto se define de la siguiente manera:

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b - pg_{ab} \tag{1.1}$$

Donde $c = 1$, ρ es la densidad y p es la presión. El cuadrivector de velocidad es $u^a = \gamma(1, u_x, u_y, u_z)$.

En el caso de un fluido estático, $u^a = (\gamma, 0, 0, 0)$, pero note que $\gamma = 1$ porque $\mathbf{u} = 0$. Es decir, se obtiene: $u^a = (1, 0, 0, 0)$.

Se estudia la métrica $g_{ab} = diag(e^{2\lambda}, -e^{2\nu}, -r^2, -r^2 sin^2\theta)$.

Para continuar, se supone que u^a es unitario, es decir, que $u_a u^a = 1$. Como la métrica es diagonal y sólo la componente u^0 de la velocidad es no nula, se obtiene la siguiente propiedad:

$$u_a u^a = g_{ab} u^a u^b = g_{00} u^0 u^0 = u_0 u^0 = 1$$

Es decir, para garantizar que u^a sea unitario, es necesario multiplicarlo por un factor de $e^{-\lambda}$, pues, al realizar el producto $g_{00} u^0 u^0$, estos factores de los u^0 se van a cancelar con $g_{00} = e^{2\lambda}$. Es decir, la forma apropiada de definir la cuadrivelocidad es $u^a = (e^{-\lambda}, 0, 0, 0)$ y $u_a = (e^{\lambda}, 0, 0, 0)$.

Con esta nueva definición de la cuadrivelocidad, se puede calcular el tensor de energía momento T_{ab}:

- $T_{00} = (\rho + p)u_0 u_b - pg_{00} = (\rho + p)e^{2\lambda} - pe^{2\lambda} = \rho e^{2\lambda}$
- $T_{11} = (\rho + p)u_1 u_1 - pg_{11} = 0 - p(-e^{2\nu}) = pe^{2\nu}$
- $T_{22} = (\rho + p)u_2 u_2 - pg_{22} = 0 - p(-r^2) = pr^2$

- $T_{33} = (\rho + p)u_3 u_3 - pg_{33} = 0 - p(-r^2 sin^2\theta) = pr^2 sin^2\theta$

Donde el resto de las componentes son nulas por la diagonalidad de la métrica y la *diagonalidad* del término $u_a u_b$.

Asimismo, para calcular T^{ab} se utiliza que $T^{ab} = g^{ac}g^{bd}T_{cd}$. Donde $g^{ab} = diag(e^{-2\lambda}, -e^{-2\nu}, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 sin^2\theta})$. El cálculo se muestra a continuación:

- $T^{00} = g^{00}g^{00}T_{00} = e^{-2\lambda}e^{-2\lambda}\rho e^{2\lambda} = \rho e^{-2\lambda}$
- $T^{11} = g^{11}g^{11}T_{11} = (-e^{-2\nu})(-e^{-2\nu})pe^{2\nu} = pe^{-2\nu}$
- $T^{22} = g^{22}g^{22}T_{22} = (-r^{-2})(-r^{-2})pr^2 = \frac{p}{r^2}$
- $T^{33} = g^{33}g^{33}T_{33} = (-(rsin\theta)^{-2})(-(rsin\theta)^{-2})pr^2 sin^2\theta = \frac{p}{r^2 sin^2\theta}$

2. Ecuaciones de conservación

Por definición, la **derivada covariante** del tensor T^{ab} es:

$$\boldsymbol{\nabla}_b T^{ab} = \frac{\partial T^{ab}}{\partial x^b} + \Gamma^a_{bi}T^{ib} + \Gamma^b_{bi}T^{ai} \tag{2.1}$$

Por la diagonalidad de T^{ab}, las componentes no nulas de la expresión anterior se simplifican de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\nabla}_b T^{ab} = \frac{\partial T^{a1}}{\partial x^1} + \Gamma^a_{00}T^{00} + \Gamma^a_{11}T^{11} + \Gamma^a_{22}T^{22} + \Gamma^a_{33}T^{33} + \Gamma^0_{0i}T^{ai} + \Gamma^1_{1i}T^{ai} + \Gamma^2_{2i}T^{ai} + \Gamma^3_{3i}T^{ai}$$

Donde el primer término se debe a que todas las funciones dependen de r, es decir, de x^1.

Para la métrica dada, los únicos símbolos de Christoffel no nulos son Γ^0_{01}, Γ^1_{00}, Γ^1_{11}, Γ^1_{22}, Γ^1_{33}, Γ^2_{12}, Γ^2_{33}, Γ^3_{31}, Γ^3_{32}, por lo que la forma expansida del tensor $\boldsymbol{\nabla}_b T^{ab}$ es:

$$\boldsymbol{\nabla}_b T^{ab} = \frac{\partial T^{a1}}{\partial x^1} + \Gamma^a_{00}T^{00} + \Gamma^a_{11}T^{11} + \Gamma^a_{22}T^{22} + \Gamma^a_{33}T^{33} + \Gamma^0_{01}T^{a1} + \Gamma^1_{11}T^{a1} + \Gamma^2_{21}T^{a1} + \Gamma^3_{31}T^{a1} + \Gamma^3_{32}T^{a2} \tag{2.2}$$

En el caso en el que $a = 1$, se tiene el siguiente valor:

$$\boldsymbol{\nabla}_b T^{1b} = \frac{\partial T^{11}}{\partial x^1} + \Gamma^1_{00}T^{00} + \Gamma^1_{11}T^{11} + \Gamma^1_{22}T^{22} + \Gamma^1_{33}T^{33} + \Gamma^0_{01}T^{11} + \Gamma^1_{11}T^{11} + \Gamma^2_{21}T^{11} + \Gamma^3_{31}T^{11} + \Gamma^3_{32}T^{12}$$

Note que $T^{12} = 0$, entonces:

$$\boldsymbol{\nabla}_b T^{1b} = \frac{\partial T^{11}}{\partial x^1} + \Gamma^1_{00}T^{00} + \Gamma^1_{11}T^{11} + \Gamma^1_{22}T^{22} + \Gamma^1_{33}T^{33} + \Gamma^0_{01}T^{11} + \Gamma^1_{11}T^{11} + \Gamma^2_{21}T^{11} + \Gamma^3_{31}T^{11}$$

Los símbolos de Christoffel de interés se muestran a continuación:

- $\Gamma^0_{01} = \lambda'$
- $\Gamma^1_{00} = \lambda' e^{2(\lambda-\nu)}$
- $\Gamma^1_{11} = \nu'$
- $\Gamma^1_{22} = -re^{-2\nu}$
- $\Gamma^1_{33} = -rsin^2\theta e^{-2\nu}$
- $\Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$
- $\Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}$

Sustituyendo los símbolos de Christoffel en la expresión para $\boldsymbol{\nabla}_b T^{1b}$ se obtiene:

$$\boldsymbol{\nabla}_b T^{1b} = \frac{\partial T^{11}}{\partial x^1} + \lambda' e^{2(\lambda-\nu)} T^{00} + \nu' T^{11} - re^{-2\nu} T^{22} - rsin^2\theta e^{-2\nu} T^{33} + \lambda' T^{11} + \nu' T^{11} + \frac{1}{r} T^{11} + \frac{1}{r} T^{11}$$

$$= p' e^{-2\nu} - 2\nu' p e^{-2\nu} + \lambda' e^{2(\lambda-\nu)} T^{00} + \nu' T^{11} - re^{-2\nu} T^{22} - rsin^2\theta e^{-2\nu} T^{33} + \lambda' T^{11} + \nu' T^{11} + \frac{1}{r} T^{11} + \frac{1}{r} T^{11}$$

$$= p' e^{-2\nu} - 2\nu' p e^{-2\nu} + \lambda' e^{2(\lambda-\nu)} \rho e^{-2\lambda} + \nu' p e^{-2\nu} - re^{-2\nu} \frac{p}{r^2} - rsin^2\theta e^{-2\nu} \frac{p}{r^2 sin^2\theta} +$$

$$+ \lambda' p e^{-2\nu} + \nu' p e^{-2\nu} + \frac{1}{r} p e^{-2\nu} + \frac{1}{r} p e^{-2\nu}$$

$$= e^{-2\nu} \left(p' - 2\nu' p + \lambda' e^{2\lambda} \rho e^{-2\lambda} + \nu' p - r\frac{p}{r^2} - rsin^2\theta \frac{p}{r^2 sin^2\theta} + \lambda' p + \nu' p + \frac{1}{r} p + \frac{1}{r} p \right)$$

$$= e^{-2\nu} \left(p' - 2\nu' p + \lambda' \rho + \nu' p - \frac{p}{r} - \frac{p}{r} + \lambda' p + \nu' p + \frac{1}{r} p + \frac{1}{r} p \right)$$

$$= e^{-2\nu} \Big(p' + \lambda'(\rho + p) \Big)$$

Esta expresión se puede igualar a 0 para obtener la ecuación de continuidad $\boldsymbol{\nabla}_b T^{ab} = 0$. Es decir, para $a = 1$:

$$\boldsymbol{\nabla}_b T^{1b} = e^{-2\nu} \Big(p' + \lambda'(\rho + p) \Big) = 0$$

$$\implies (\rho + p)\lambda' = -p' \tag{2.3}$$

3. Referencias

- SCHUTZ, B. (2009). *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press. Second edition.