UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

REPORTE: ACTIVIDAD 1
Taller de Investigación

Gil Estéfano Rodríguez Rivera

NUA: 390906 ge.rodriguezrivera@ugto.mx

30 de agosto de 2021

1. ¿Por qué se relaciona el tensor de Einstein con el tensor de Energía-Momento?

En la versión newtoniana de la gravedad, el campo gravitacional interactúa con la masa de una manear que se describe con la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \tag{1.1}$$

En el caso de una partícula puntual, la solución es $\phi = -\frac{Gm}{r}$. Que es de donde se deduce la Ley de Gravitación de Newton.

Se parte de la idea de que la gravedad influye en la materia por medio de un espacio curvo. Sin embargo, en términos relativistas, el concepto de masa no tiene un papel privilegiado. La analogía relativista apropiada de ese concepto es el tensor de energía-momento $\mathbf{T}$, pues no muestra preferencia hacia algún marco de referencia específico.

Dado que el tensor métrico $\mathbf{g}$ tendrá una relación estrecha con el campo gravitacional, el análogo a la ecuación de Poisson (1.1) es:

$$\mathbf{O}(\mathbf{g}) = k\mathbf{T}$$

Donde $\mathbf{O}$ es un operador diferencial y k es una constante.

Como $\mathbf{T}$ es un tensor de rango dos, $\mathbf{O}$ también debe de ser un tensor de rango dos que contenga una combinación de la métrica y sus dos primeras derivadas. Se sabe que la siguiente combinación del tensor de Ricci $R^{\alpha\beta}$ y de su escalar R cumple con las condiciones dadas:

$$O^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta}R + \Lambda g^{\alpha\beta} \tag{1.2}$$

Donde μ y Λ son constantes.

Para determinar μ, se usará el *Principio de Equivalencia de Einstein*, al inferir la conservación local de la energía y momento:

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \tag{1.3}$$

De esto se sigue que:

$$O^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \tag{1.4}$$

Como la derivada covariante de la métrica es 0, entonces se infiere que:

$$(R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R)_{;\beta} = 0 \tag{1.5}$$

Comparando esta igualdad con las identidades de Bianchi, se puede ver que $\mu = -1/2$ y se puede inferir que $O^{\alpha\beta}$ es $G^{\alpha\beta}$, el tensor de Einstein. Todo esto, claro, si se supone el Principio de Equivalencia.

El análogo de la ecuación de Poisson es:

$$G^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = kT^{\alpha\beta} \tag{1.6}$$

2. ¿Por qué se puede agregar la constante cosmológica?

En términos de primeros principios, no hay un argumento que permita definir el parámetro Λ que aparece en la ecuación (1.6). Esto es porque el procedimiento basado en el Principio de Equivalencia usado para identificar $\mathbf{O}$ con $\mathbf{G}$ requiere de hacer una derivada covariante, pero el término que acompaña es 0 frente a esa derivación. Por eso, la conservación local de la energía y el momento no dependen de Λ ni viceversa; ésta propiedad de conservación no impone una restricción sobre Λ.

Que se considere o no el término $\Lambda g^{\alpha\beta}$ dependerá de suposiciones extra, pero nada impide que, incluso, se fije $\Lambda = 0$ y se opte por una ecuación que sólo contenga a $\mathbf{G}$ y a $\mathbf{T}$.

3. Un ejemplo

- Tomar las ecuaciones de Einstein (en su versión covariante) y usar la métrica dada. Las funciones $\lambda(r)$ y $\nu(r)$ son funciones que solamente dependen de la coordenada r. Encontrar las ecuaciones diferenciales para las funciones en el caso particular en el que las componentes del tensor de energía momento son cero. Son cuatro ecuaciones dado que para esta métrica el tensor de Ricci es diagonal.

La métrica a usar es:

$$ds^2 = -e^{2\lambda}dt^2 + e^{2\nu}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\phi^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{3.1}$$

Es decir, la métrica es diagonal:

$$(g_{\mu\nu}) = diag(-e^{-2\lambda}, e^{2\nu}, r^2, r^2sin^2\theta) \tag{3.2}$$

Cosa que implica que su versión covariante sea la diagonal de los inversos multiplicativos de cada entrada. Esto es:

$$(g^{\mu\nu}) = diag(-e^{2\lambda}, e^{-2\nu}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2}csc^2\theta) \tag{3.3}$$

Antes de encontrar las ecuaciones para λ y ν, se debe calcular el tensor de Ricci. Para esto, primero se calcularán los símbolos de Christoffel.

3.1. Cálculo de símbolos de Christoffel

Por definición, los símbolos de Christoffel son:

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ak}\Big(g_{ck,b} + g_{bk,c} - g_{bc,k}\Big) \tag{3.4}$$

Sin embargo, como la métrica es diagonal, la expresión anterior se puede simplificar, para ya no necesitar una suma de términos sobre el ínidice k:

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{aa}\Big(g_{ca,b} + g_{ba,c} - g_{bc,a}\Big) \tag{3.5}$$

Ahora, se presentan los cálculos de los símbolos de Christoffel. Note que por usar una métrica diagonal, no tiene sentido calcular símbolos de Christoffel con todos sus índices distintos: necesariamente debe haber un par de índices iguales. Además, por la construcción de los símbolos de Christoffel y la característica de la métrica (que sólo depende de r y θ), se puede ver que las únicas combinaciones de índices que producen un símbolo no nulo son aquellas que contengan dos índices iguales (que van a corresponder al elemento de la diagonal de la métrica) y además un índice que corresponda a una variable que produzca una derivada distinta de cero al operar sobre el elemento de la diagonal. Es decir, los símbolos no nulos serán Γ^t_{tr}, Γ^r_{tt}, Γ^r_{rr}, $\Gamma^r_{\theta\theta}$, $\Gamma^r_{\phi\phi}$, $\Gamma^\theta_{r\theta}$, $\Gamma^\theta_{\phi\phi}$, $\Gamma^\phi_{r\phi}$, $\Gamma^\phi_{\theta\phi}$ así como sus permutaciones en los índices inferiores (que es redundante mencionar pues los símbolos de Christoffel son simétricos ante el intercambio de ese par de índices).

- $\Gamma^t_{tr} = \frac{1}{2}g^{tt}\Big(g_{rt,t} + g_{tt,r} - g_{tr,t}\Big) = \frac{1}{2}(-e^{2\lambda})\Big((-2\lambda')(-e^{-2\lambda})\Big) = -\lambda'$
- $\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}g^{rr}\Big(g_{tr,t} + g_{tr,t} - g_{tt,r}\Big) = \frac{1}{2}e^{-2\nu}(-(-2\lambda')(-e^{-2\lambda})) = -\lambda' e^{-2(\lambda+\nu)}$
- $\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}g^{rr}\Big(g_{rr,r} + g_{rr,r} - g_{rr,r}\Big) = \frac{1}{2}e^{-2\nu}(2\nu' e^{2\nu}) = \nu'$
- $\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{rr}\Big(g_{\theta r,\theta} + g_{\theta r,\theta} - g_{\theta\theta,r}\Big) = \frac{1}{2}e^{-2\nu}(-2r) = -re^{-2\nu}$
- $\Gamma^r_{\phi\phi} = \frac{1}{2}g^{rr}\Big(g_{\phi r,\phi} + g_{\phi r,\phi} - g_{\phi\phi,r}\Big) = \frac{1}{2}e^{-2\nu}(-2rsin^2\theta) = -re^{-2\nu}sin^2\theta$
- $\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\Big(g_{\theta\theta,r} + g_{r\theta,\theta} - g_{r\theta,\theta}\Big) = \frac{1}{2}(\frac{1}{r^2})(2r) = \frac{1}{r}$
- $\Gamma^\theta_{\phi\phi} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\Big(g_{\phi\theta,\phi} + g_{\phi\theta,\phi} - g_{\phi\phi,\theta}\Big) = \frac{1}{2}(\frac{1}{r^2})(-2r^2 sin\theta cos\theta) = -\frac{1}{2}sin(2\theta)$
- $\Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\Big(g_{\phi\phi,r} + g_{r\phi,\phi} - g_{r\phi,\phi}\Big) = \frac{1}{2}(\frac{1}{r^2}csc^2\theta)(2rsin^2\theta) = \frac{1}{r}$
- $\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\Big(g_{\phi\phi,\theta} + g_{\theta\phi,\phi} - g_{\theta\phi,\phi}\Big) = \frac{1}{2}(\frac{1}{r^2}csc^2\theta)(2r^2 sin\theta cos\theta) = cot\theta$

3.2. Cálculo del tensor de Ricci

Por definición, el tensor de Ricci es:

$$R_{ab} = \Gamma^x_{ab,x} - \Gamma^x_{xa,b} + \Gamma^x_{xy}\Gamma^y_{ab} - \Gamma^x_{yb}\Gamma^y_{xa} \tag{3.6}$$

Ahora se presenan los cálculos de las componentes del tensor de Ricci:

- $R_{tt} = \Gamma^x_{tt,x} - \Gamma^x_{xt,t} + \Gamma^x_{xy}\Gamma^y_{tt} - \Gamma^x_{yt}\Gamma^y_{xt} = \Gamma^r_{tt,r} - 0 + \Gamma^x_{xr}\Gamma^r_{tt} - \Gamma^x_{rt}\Gamma^r_{xt} - \Gamma^x_{tt}\Gamma^t_{xt}$
  $= \Gamma^r_{tt,r} + \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^\phi_{\phi r}\Gamma^r_{tt} - \Gamma^t_{rt}\Gamma^r_{tt} - \Gamma^r_{rt}\Gamma^r_{rt} - \Gamma^r_{tt}\Gamma^t_{rt}$

Note que el cálculo puede tornarse muy extenso (y sólo se han presentado los términos a sustituir de la primer componente del tensor de Ricci). Para facilitar el proceso de cálculo, se hizo uso de la librería *EinsteinPy* de Python. A continuación de muestra el Notebook de **Google Colab**: `https://colab.research.google.com/drive/1qUbBNLA17ZXSTtLqOw2nkV5fJhTSPMQv?usp=sharing`. Así como el repositorio de GitHub `https://github.com/gilesitorr/Taller_de_Investigacion/tree/main/Actividad_1`.

Ahora sí se presentan las componentes del tensor de Ricci no nulas:

- $R_{tt} = \frac{1}{r}\Bigg(r(\lambda')^2 + r\lambda'\nu' - r\lambda'' - 2\lambda'\Bigg)e^{-2(\lambda+\nu)}$
- $R_{rr} = -(\lambda')^2 - \lambda'\nu' + \lambda'' + \frac{2}{r}\lambda'$
- $R_{\theta\theta} = \Bigg(r\lambda' + r\nu' + e^{2\nu} - 1\Bigg)e^{-2\nu}$
- $R_{\phi\phi} = \Bigg(r\lambda' + r\nu' + e^{2\nu} - 1\Bigg)e^{-2\nu}sin^2\theta$

3.3. Cálculo del escalar de Ricci

Por definición, el escalar de Ricci es:

$$R = g^{ab}R_{ab} \tag{3.7}$$

Usando nuevamente *EintsteinPy*, se obtuvo que el resultado es

$$R = \frac{2}{r^2}\Bigg(- r^2(\lambda')^2 - r^2\lambda'\nu' + r^2\lambda'' + 2r\lambda' + 2r\nu' + e^{2\nu} - 1\Bigg)e^{-2\nu}$$

3.4. Cálculo del tensor de Einstein

Por definición, el tensor de Einstein es:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R \tag{3.8}$$

A continuación, se presentan las componentes no nulas del tensor de Einstein:

- $G_{tt} = \frac{1}{r^2}\Bigg(2r\nu' + e^{2\nu} - 1\Bigg)e^{-2(\lambda+\nu)}$
- $G_{rr} = \frac{1}{r^2}\Bigg(- 2r\lambda' - e^{2\nu} + 1\Bigg)$
- $G_{\theta\theta} = -r\Bigg(- r(\lambda')^2 - r\lambda'\nu' + r\lambda'' + \lambda' + \nu'\Bigg)e^{-2\nu}$
- $G_{\phi\phi} = -r\Bigg(- r(\lambda')^2 - r\lambda'\nu' + r\lambda'' + \lambda' + \nu'\Bigg)e^{-2\nu}sin^2\theta$

3.5. Las ecuaciones de λ y ν

Dado que el tensor de energía-momento es nulo, se tiene que las ecuaciones de Einstein tienen la siguiente forma:

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0$$

Por lo que las cuatro ecuaciones que λ y ν deben cumplir son:

- $G_{tt} + \Lambda g_{tt} = \frac{1}{r^2}\bigg(2r\nu' + e^{2\nu} - 1\bigg)e^{-2(\lambda+\nu)} - \Lambda e^{-2\lambda} = 0$

$$\implies (2r\nu' + e^{2\nu} - 1)e^{-2\nu} - \Lambda r^2 = 0$$

- $G_{rr} + \Lambda g_{rr} = \frac{1}{r^2}\bigg(-2r\lambda' - e^{2\nu} + 1\bigg) + \Lambda e^{2\nu} = 0$

$$\implies \Lambda r^2 e^{2\nu} - 2r\lambda' - e^{2\nu} + 1 = 0$$

- $G_{\theta\theta} + \Lambda g_{\theta\theta} = -r\bigg(-r(\lambda')^2 - r\lambda'\nu' + r\lambda'' + \lambda' + \nu'\bigg)e^{-2\nu} + \Lambda r^2 = 0$

$$\implies \Lambda r e^{2\nu} + r(\lambda')^2 + r\lambda'\nu' - r\lambda'' - \lambda' - \nu' = 0$$

- $G_{\phi\phi} + \Lambda g_{\phi\phi} = -r\bigg(-r(\lambda')^2 - r\lambda'\nu' + r\lambda'' + \lambda' + \nu'\bigg)e^{-2\nu}sin^2\theta + \Lambda r^2 sin^2\theta = 0$

$$\implies \Lambda r e^{2\nu} + r(\lambda')^2 + r\lambda'\nu' - r\lambda'' - \lambda' - \nu' = 0$$

Note que sólo se cuentan con dos ecuaciones, pues la de los dos primeros puntos son idénticas asi como las de los dos últimos puntos lo son. Por lo tanto, se tiene un sistema de dos ecuaciones diferenciales con dos incógnitas. Es decir:

$$\Lambda r^2 e^{2\nu} - 2r\lambda' - e^{2\nu} + 1 = 0 \tag{3.9}$$

$$\Lambda r e^{2\nu} + r(\lambda')^2 + r\lambda'\nu' - r\lambda'' - \lambda' - \nu' = 0 \tag{3.10}$$

4. Referencias

- SCHUTZ, B. (2009). *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press. Second edition.