UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

REPORTE: ACTIVIDAD 2

Taller de Investigación

Gil Estéfano Rodríguez Rivera

NUA: 390906 ge.rodriguezrivera@ugto.mx

12 de septiembre de 2021

1. Resolviendo las ecuaciones diferenciales

En la actividad pasada (https://github.com/gilesitorr/Taller_de_Investigacion/tree/main/Actividad_1) se obtuvieron un par de ecuaciones diferenciales para las funciones $\lambda(r)$ y $\nu(r)$ de la siguiente métrica diagonal:

$$ds^2 = -e^{-2\lambda}dt^2 + e^{2\nu}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1.1}$$

Donde se supuso que el tensor de energía-momento es nulo en las ecuaciones de Einstein.

Las ecuaciones obtenidas son:

$$(2r\nu' + e^{2\nu} - 1)e^{-2\nu} - \Lambda r^2 = 0 \tag{1.2}$$

$$\Lambda r^2 e^{2\nu} - 2r\lambda' - e^{2\nu} + 1 = 0 \tag{1.3}$$

$$\Lambda r e^{2\nu} + r(\lambda')^2 + r\lambda'\nu' - r\lambda'' - \lambda' - \nu' = 0 \tag{1.4}$$

Note que multiplicando la ecuación (1.2) por $e^{2\nu}$ y sumando esa nueva expresión con la ecuación (1.3), se obtiene lo siguiente:

$$\left(2r\nu' + e^{2\nu} - 1 - \Lambda r^2 e^{2\nu}\right) + \left(\Lambda r^2 e^{2\nu} - 2r\lambda' - e^{2\nu} + 1\right) = 0$$

$$\implies 2r(\nu' - \lambda') = 0 \implies \nu = \lambda + c_1 \tag{1.5}$$

Antes de proseguir, es necesario tener en mente la siguiente relación (por la regla de la cadena):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\bigg(r(e^{-2\nu}-1)\bigg) = e^{-2\nu} - 1 + r(-2\nu' e^{-2\nu}) = -(2r\nu' e^{-2\nu} + 1 - e^{-2\nu}) \qquad (1.6)$$

Haciendo uso de la relación (1.6) en la ecuación (1.2), se obtienen lo siguiente:

$$-\bigg(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\bigg(r(e^{-2\nu}-1)\bigg) + \Lambda r^2\bigg) = 0 \implies r(e^{-2\nu}-1) = -\frac{\Lambda}{3}r^3 + c_2$$

$$\implies e^{2\nu} = \bigg(1 + \frac{c_2}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\bigg)^{-1} \qquad (1.7)$$

Por lo tanto, la métrica (1.1) obtiene la siguiente forma:

$$ds^2 = -\alpha\bigg(1 + \frac{c_2}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\bigg)dt^2 + \bigg(1 + \frac{c_2}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\bigg)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2 \quad (1.8)$$

Donde se hizo uso de que $\nu = \lambda + c_1$ y se definió $\alpha = e^{c_1}$.

Se comparará la métrica de la ecuación (1.8) con la ecuación **(8.60)** de **Schutz (2009)**, que es el límite Newtoniano (con simetría esférica, por lo que $d\phi^2 = d\theta^2 = 0$) de la gravedad de Einstein. Es decir, se compara con la siguiente expresión:

$$ds^2 = -\bigg(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\bigg)dt^2 + \bigg(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\bigg)dr^2$$

Ojo: Notará que en el libro se usa $dx^2 + dy^2 + dz^2$ en lugar de dr^2 así como en el libro se usa $G = c = 1$.

Haciendo la comparación, se observa que en el límite Newtoniano, es necesario hacer que $\Lambda \to 0$. Con lo anterior, se determina que $\alpha = 1$ (es decir $c_1 = 0$) así como $c_2 = -2GM/c^2$.

Por lo tanto, la ecuación final de la métrica (1.1) es:

$$ds^2 = -\bigg(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\bigg)dt^2 + \bigg(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\bigg)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2 \quad (1.9)$$

Si se fijase $\Lambda = 0$, la métrica resultante sería la conocida **métrica de Schwarzschild**.

2. Referencias

- SCHUTZ, B. (2009). *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press. Second edition.