UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

REPORTE: ACTIVIDAD 4

Taller de Investigación

Gil Estéfano Rodríguez Rivera

NUA: 390906 ge.rodriguezrivera@ugto.mx

14 de noviembre de 2021

1. Las ecuaciones de Einstein para un fluido perfecto y estático

1.1. Resultados previos relevantes

Para estudiar las ecuaciones de Einstein, es necesario tener en cuenta la métrica del espacio-tiempo con el que se trabaja para definir magnitudes como el tensor de Einstein. En el siguiente trabajo se estudiará la métrica $g_{ab} = diag(e^{2\lambda}, -e^{2\nu}, -r^2, -r^2 sin^2\theta)$. Para esta métrica, el tensor de Einstein G_{ab} tiene la siguiente forma:

- $G_{00} = \frac{1}{r^2}\left(2r\nu' + e^{2\nu} - 1\right)e^{2(\lambda-\nu)} = \frac{e^{2\lambda}}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r(1-e^{-2\nu})\right)$
- $G_{11} = \frac{1}{r^2}\left(2r\lambda' - e^{2\nu} + 1\right)$
- $G_{22} = r\left(r(\lambda')^2 - r\lambda'\nu' + r\lambda'' + \lambda' - \nu'\right)e^{-2\nu}$
- $G_{33} = r\left(r(\lambda')^2 - r\lambda'\nu' + r\lambda'' + \lambda' - \nu'\right)e^{-2\nu}sin^2\theta$

Donde el resto de las componentes son nulas. Estos resultados son análogos a los mostrados en la primera actividad, misma que se encuentra en el siguiente enlace: https://github.com/gilesitorr/Taller_de_Investigacion/tree/main/Actividad_1. Los cálculos hechos se muestran el el siguiente Notebook: https://colab.research.google.com/drive/1XLmD3Htkj22KD6mZL93NnRXqYrQx093e?usp=sharing.

El tensor de energía momento T_{ab} de un fluido perfecto y estático es:

- $T_{00} = \rho e^{2\lambda}$
- $T_{11} = pe^{2\nu}$

- $T_{22} = pr^2$
- $T_{33} = pr^2 sin^2\theta$

Donde el resto de las componentes son nulas por la diagonalidad de la métrica y el *no-movimiento* del fluido. Estos se muestran en la tercera actividad, misma que se encuentra en el siguiente enlace: https://github.com/gilesitorr/Taller_de_Investigacion/tree/main/Actividad_3. De hecho, se puede inferir que para tal fluido, se cumple la siguiente relación:

$$p' = -(\rho + p)\lambda' \tag{1.1}$$

1.2. Las ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones de Einstein sin constante cosmológica se definen de la siguiente forma:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Donde G es la constante de gravitación de Newton, en unidades donde $c = 1$.

La ecuación de Einstein para G_{00} es la siguiente:

$$G_{00} = \frac{e^{2\lambda}}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r(1-e^{-2\nu})\Big) = 8\pi G\rho e^{2\lambda} = 8\pi G T_{00}$$

$$\implies \frac{1}{2r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r(1-e^{-2\nu})\Big) = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}m(r) = 4\pi G\rho \tag{1.2}$$

Donde se define $m(r) = \frac{1}{2}r(1-e^{-2\nu})$.

La ecuación de Einstein para G_{11} es la siguiente:

$$G_{11} = \frac{1}{r^2}\Big(2r\lambda' - e^{2\nu} + 1\Big) = 8\pi G p e^{2\nu} = 8\pi G T_{11}$$

$$\implies \lambda' = \frac{r}{2}\left(\frac{1}{r^2}(e^{2\nu}-1) + 8\pi G p e^{2\nu}\right)$$

$$= \frac{e^{2\nu}}{2r^2}\Big(r(1-e^{-2\nu}) + 8\pi G p r^3\Big) = \frac{e^{2\nu}}{r^2}\Big(m(r) + 4\pi G p r^3\Big)$$

Usando que $2m(r) = r(1-e^{-2\nu}) \implies e^{-2\nu} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \implies e^{2\nu} = \frac{r}{r-2m(r)}$, se obtiene lo siguiente:

$$\lambda' = \frac{m(r) + 4\pi G p r^3}{r(r-2m(r))} \tag{1.3}$$

1.2.1. Un caso particular: la solución de Schwarzschild

Si el espacio-tiempo estudiado es vacío, se introducen las condiciones de que $\rho = p = 0$ (en las unidades correspondientes).

Si se sustituyen estos valores específicos de la presión y la densidad en la ecuación (1.2), se obtiene lo siguiente:

$$m' = 0$$

Que implica que $m(r) = m$ es una constante.

La m constante en la ecuación (1.3) da como resultado una función cuya integral es sencila (por medio de fracciones parciales):

$$\lambda' = \frac{m}{r(r-2m)} = \frac{1}{2(r-2m)} - \frac{1}{2r}$$

$$\implies \lambda = \frac{1}{2}ln(r-2m) - \frac{1}{2}lnr = \frac{1}{2}ln\left(\frac{r-2m}{r}\right)$$

$$\implies e^{2\lambda} = \frac{r-2m}{r} = 1 - \frac{2m}{r} \tag{1.4}$$

Que es la solución de Schwarzschild para las ecuaciones de Einstein en el vacío. Es decir, la ecuación del fluido perfecto estático se reduce en su caso trivial a la solución apropiada.

1.3. La ecuación de Volkov-Oppenheimer-Tolman

Si se despeja para λ' en la ecuación (1.1) y se sustituye esa relación en (1.3), se obtiene la siguiente ecuación:

$$p' = -\frac{(p+\rho)(m(r) + 4\pi Gpr^3)}{r(r-2m(r))} \tag{1.5}$$

Esta es la ecuación que da nombre a esta subsección.

2. La presion de una estrella

Sea ρ una constante en una región $r < R$ y 0 para $r > R$. Esta condición y la ecuación (1.2) implica lo siguiente:

$$m' = 4\pi G\rho r^2$$

- $r < R$, $m(r) = \frac{4}{3}\pi G r^3 \rho$

- $r > R$, $m(r) = \frac{4}{3}\pi G R^3 \rho = M$

2.1. La presión central

Es posible resolver la ecuación (1.5) para $r < R$ y una presión central p_c asociada a $r = 0$:

$$p' = -\frac{(p+\rho)(4\pi G p r^3 + \frac{4}{3}\pi G r^3 \rho)}{r(r - 2\frac{4}{3}\pi G r^3 \rho)} = -\frac{4}{3}\pi G r \frac{(p+\rho)(3p+\rho)}{1 - \frac{8}{3}\pi G r^2 \rho}$$

$$\implies \int_{p_c}^{p} \frac{d\hat{p}}{(\hat{p}+\rho)(3\hat{p}+\rho)} = -\int_0^r \frac{\frac{4}{3}\pi G r' dr'}{1 - \frac{8}{3}\pi G r'^2 \rho}$$

$$\implies \frac{1}{2\rho} ln\left(\frac{\rho + 3\hat{p}}{\rho + \hat{p}}\right)\Bigg|_{\hat{p}=p_c}^{\hat{p}=p} = \frac{1}{4\rho} ln\left(1 - \frac{8}{3}\pi G r'^2 \rho\right)\Bigg|_{r'=0}^{r'=r}$$

$$\implies ln\left(\frac{\rho+3p}{\rho+p}\right) - ln\left(\frac{\rho+3p_c}{\rho+p_c}\right) = \frac{1}{2} ln\left(1 - \frac{8}{3}\pi G r^2 \rho\right)$$

$$\implies \frac{\rho+3p}{\rho+p} = \left(\frac{\rho+3p_c}{\rho+p_c}\right)\left(1 - \frac{8}{3}\pi G r^2 \rho\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sin embargo, la relación anterior no es tan ilustrativa. Si se sustituye nuevamente $m(r)$, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\rho+3p}{\rho+p} = \left(\frac{\rho+3p_c}{\rho+p_c}\right)\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.1}$$

NOTA: ES MÁS SENCILLO DEJAR LA INTEGRAL DE p' EN TÉRMINOS DE $m(r)$ DESDE EL INICIO, PUES DE HECHO ES UNA INTEGRAL MÁS SENCILLA. SIN EMBARGO, COMO EL PROCEDIMIENTO MOSTRADO ES EL QUE YA SE TENÍA ESCRITO, SE OPTÓ POR NO HACER MODIFICACIONES.

La relación mostrada en la ecuación (2.1) es válida para todos los valores de r, pues lo importante es el valor de $m(r)$ y no la coordenada. Es decir, esa relación se puede evaluar tanto en $r < R$ como en $r > R$.

Para $r > R$, como se mencionó, se cumple que $\rho = 0$, cosa que implica que es el vacío, por lo que se infiere que $p = 0$ en esa zona. Por ende, la ecuación (2.1) afuera de la estrella se reduce a la siguiente expresión:

$$1 = \left(\frac{\rho+3p_c}{\rho+p_c}\right)\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \implies \frac{\rho+p_c}{\rho+3p_c} = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \implies \rho + p_c = (\rho+3p_c)\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\implies p_c\left(1 - 3\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \rho\left(-1 + \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\implies p_c = \rho \frac{\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{1 - 3\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.2}$$

Que es la forma explícita de la presión central de la estrella en términos de su radio R y masa total M.

2.2. La presión en el interior

Para calcular la presión p en el interior de la estrella, se sustituye la relación (2.2) en la fórmula (2.1):

$$\rho + 3p = (\rho + p)\left(\frac{\rho + 3p_c}{\rho + p_c}\right)\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\implies p\left(3 - \left(\frac{\rho + 3p_c}{\rho + p_c}\right)\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \rho\left(\left(\frac{\rho + 3p_c}{\rho + p_c}\right)\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)$$

Utilizando que

$$\frac{\rho + 3p_c}{\rho + p_c} = \frac{1 - 3(1-\frac{2M}{R})^{\frac{1}{2}} + 3\left((1-\frac{2M}{R})^{\frac{1}{2}} - 1\right)}{1 - 3(1-\frac{2M}{R})^{\frac{1}{2}} + (1-\frac{2M}{R})^{\frac{1}{2}} - 1} = \frac{1}{(1-\frac{2M}{R})^{1/2}}$$

y además que $m(r) = \frac{4}{3}\pi G r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi G R^3 r^3 \rho / R^3 = \frac{r^3}{R^3} M$, se obtiene que:

$$p\left(3 - \left(\frac{1}{(1-\frac{2M}{R})^{1/2}}\right)\left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \rho\left(\left(\frac{1}{(1-\frac{2M}{R})^{1/2}}\right)\left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)$$

$$\implies p = \rho\left(\frac{(1-\frac{2Mr^2}{R^3})^{1/2} - (1-\frac{2M}{R})^{1/2}}{3(1-\frac{2M}{R})^{1/2} - (1-\frac{2Mr^2}{R^3})^{1/2}}\right) \tag{2.3}$$

Que es la presión en el interior de la estrella. Note que $p = 0$ cuando $r = R$, que es una condición necesaria para la continuidad de la presión dentro y fuera de la estrella.

2.3. El espacio-tiempo en el interior de la estrella

Con la expresión anterior para p en el interior de la estrella, se puede definir la estructura del espacio-tiempo en esa región con la ecuación (1.1). Note que la ecuación (1.1) se puede reescribir de la siguiente manera en términos de p:

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{\rho+p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} \implies \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}p} = -\frac{1}{\rho+p} \implies \lambda = -ln(\rho+p) + lnc_1$$

$$\implies e^{\lambda} = \frac{c_1}{\rho+p} = \frac{c_1}{\rho\left(1 + \frac{(1-\frac{2Mr^2}{R^3})^{1/2}-(1-\frac{2M}{R})^{1/2}}{3(1-\frac{2M}{R})^{1/2}-(1-\frac{2Mr^2}{R^3})^{1/2}}\right)}$$

$$= \frac{c_1}{\rho}\frac{1}{\left(\frac{3(1-\frac{2M}{R})^{1/2}-(1-\frac{2Mr^2}{R^3})^{1/2}+(1-\frac{2Mr^2}{R^3})^{1/2}-(1-\frac{2M}{R})^{1/2}}{3(1-\frac{2M}{R})^{1/2}-(1-\frac{2Mr^2}{R^3})^{1/2}}\right)}$$

$$= \frac{c_1}{\rho}\frac{3(1-\frac{2M}{R})^{1/2}-(1-\frac{2Mr^2}{R^3})^{1/2}}{3(1-\frac{2M}{R})^{1/2}-(1-\frac{2Mr^2}{R^3})^{1/2}+(1-\frac{2Mr^2}{R^3})^{1/2}-(1-\frac{2M}{R})^{1/2}}$$

$$= \frac{c_1}{\rho}\frac{3(1-\frac{2M}{R})^{1/2}-(1-\frac{2Mr^2}{R^3})^{1/2}}{2(1-\frac{2M}{R})^{1/2}} = \frac{c_1}{\rho}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\frac{2Mr^2}{R^3}}{1-\frac{2M}{R}}}\right)$$

Note que, cuando $r = R$, la ecuación anterior se reduce a $e^{\lambda} = \frac{c_1}{\rho}$.

Ya se ha visto que, cuando se trata del vacío, el cálculo se reduce a la métrica de Schwarzschild. En otras palabras, $e^{\lambda} = \sqrt{1-\frac{2M}{r}}$, cuando $r > R$. Por continuidad, se tiene la siguiente condición de frontera para e^{λ} cuando $r = R$:

$$\frac{c_1}{\rho} = \sqrt{1-\frac{2M}{R}} \implies c_1 = \rho\sqrt{1-\frac{2M}{R}}$$

Con esta condición para c_1, se infiere que e^{λ} en $r < R$ tiene la siguiente forma:

$$e^{\lambda} = \frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{2M}{R}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2Mr^2}{R^3}} \tag{2.4}$$

3. Referencias

- SCHUTZ, B. (2009). *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press. Second edition.