Triângulos e quadriláteros

Tipos de ângulos

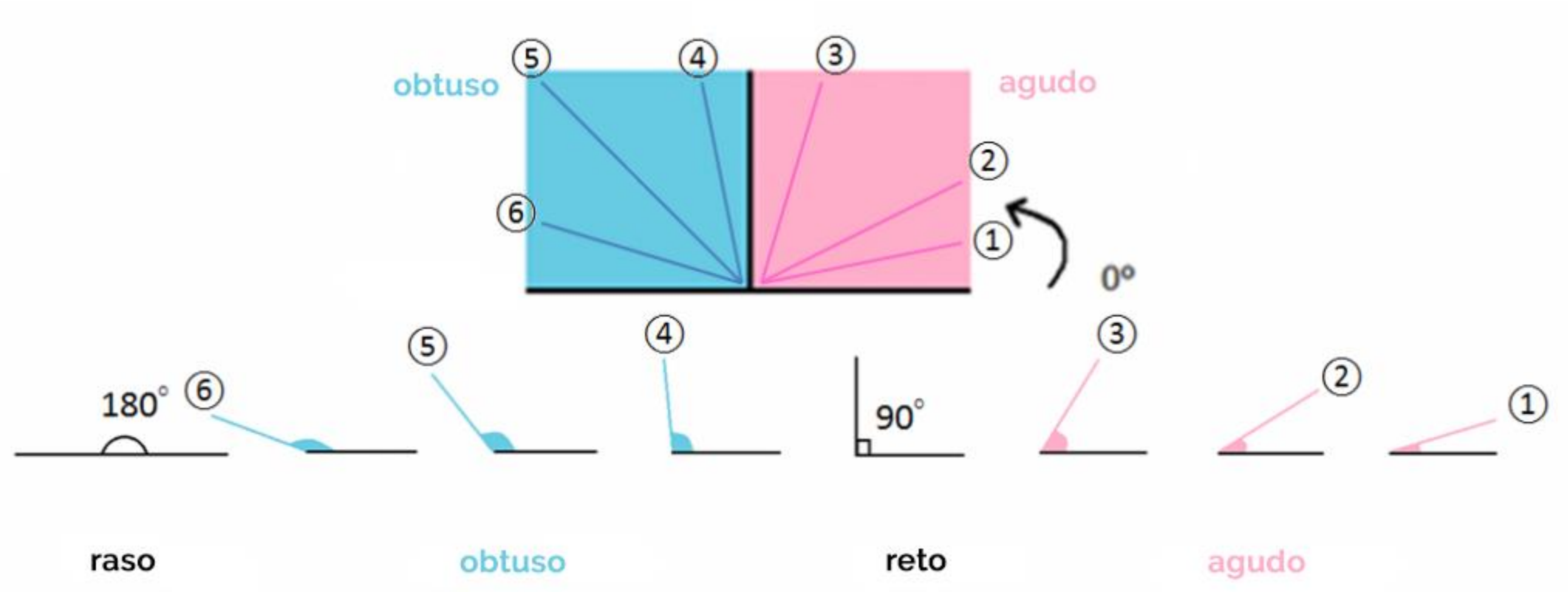
Ângulo agudo Mede menos de 90° e mais de 0°.

Ângulo reto Mede 90° e seus lados são sempre perpendiculares um ao outro.

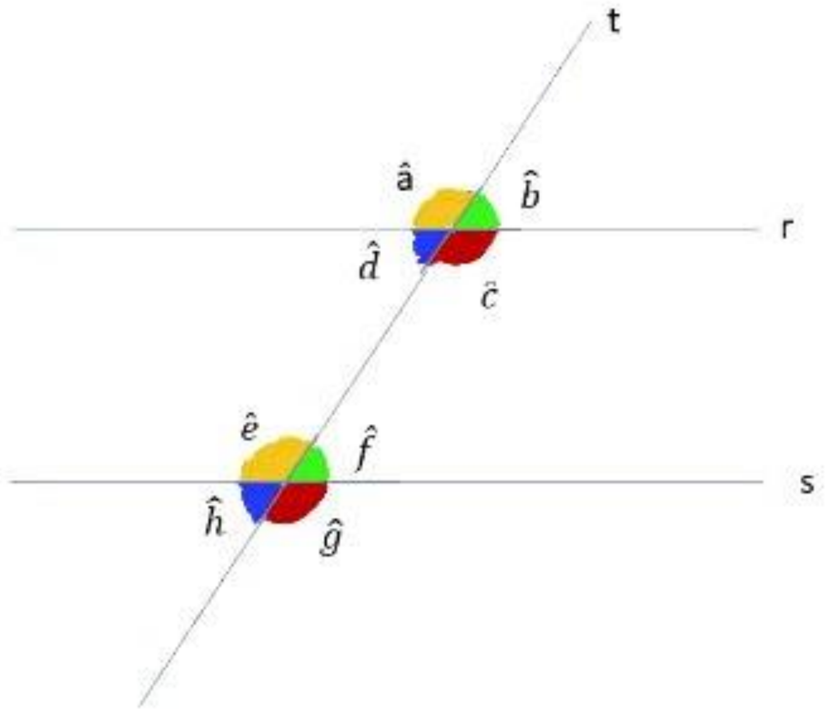
Ângulo obtuso Maior que 90° e menor que 180°.

Ângulo raso Mede 180°, como se uníssemos dois ângulos retos.

Diferentes tipos de ângulos
Uma imagem torna tudo mais fácil!
Observe que todos os ângulos dentro da **área rosa** são agudos, e todos os da **área azul** são obtusos.



Dois ângulos que ocupam a mesma posição nas retas paralelas são chamados de **correspondentes**. Eles apresentam a mesma medida (ângulos congruentes). Os pares de ângulos com a mesma cor representados abaixo são correspondentes.



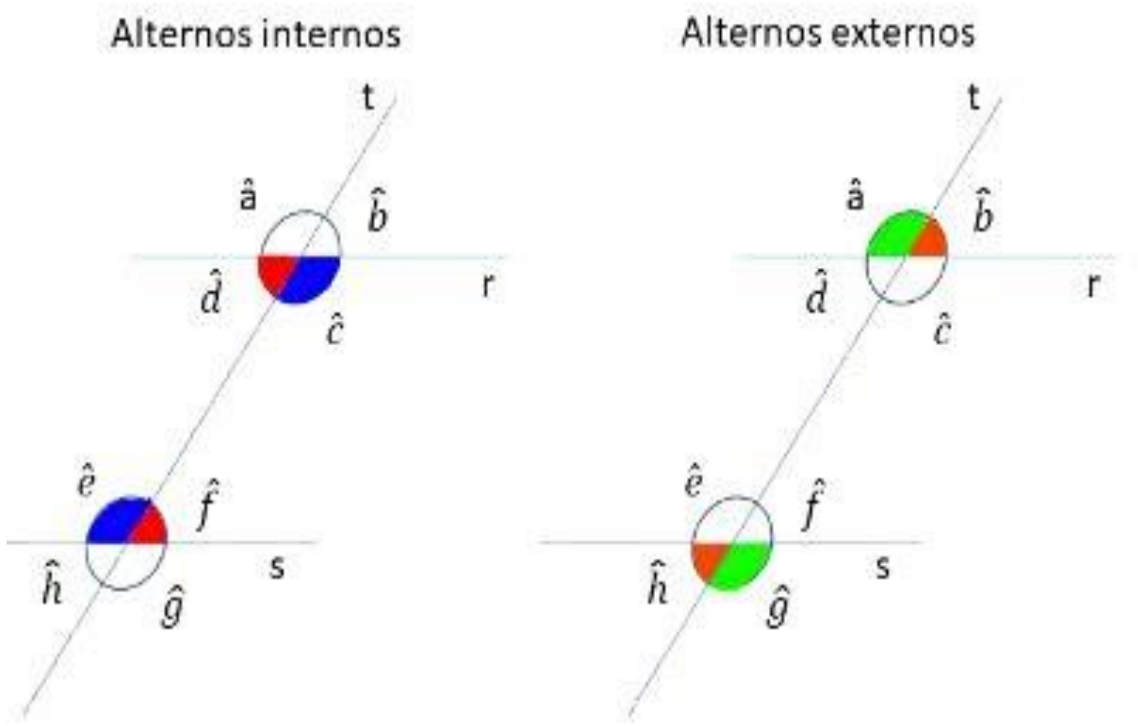
Na figura, os ângulos correspondentes são:

- $\hat{a}$ e $\hat{e}$
- $\hat{b}$ e $\hat{f}$
- $\hat{c}$ e $\hat{g}$
- $\hat{d}$ e $\hat{h}$

Ângulos Alternos

Os pares de ângulos em lados opostos da reta transversal são chamados de alternos. Esses ângulos também são congruentes.

Os ângulos alternos podem ser internos, quando estão entre as retas paralelas e externos, quando estão fora das retas paralelas.



Na figura, os ângulos alternos internos são:

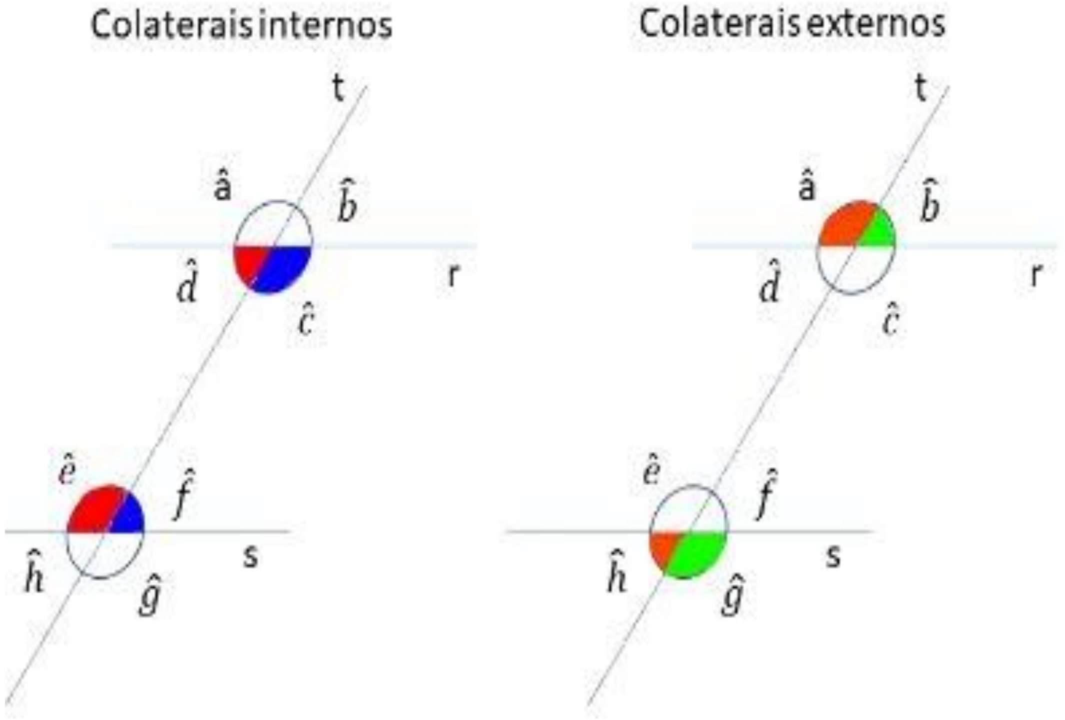
- $\hat{c}$ e $\hat{e}$
- $\hat{d}$ e $\hat{F}$

Os ângulos alternos externos são:

- $\hat{a}$ e $\hat{g}$
- $\hat{b}$ e $\hat{h}$

Ângulos colaterais

São os pares de ângulos que estão do mesmo lado da reta transversal. Os ângulos colaterais são suplementares (somam 180º). Também podem ser internos ou externos.



Na figura, os ângulos colaterais internos são:

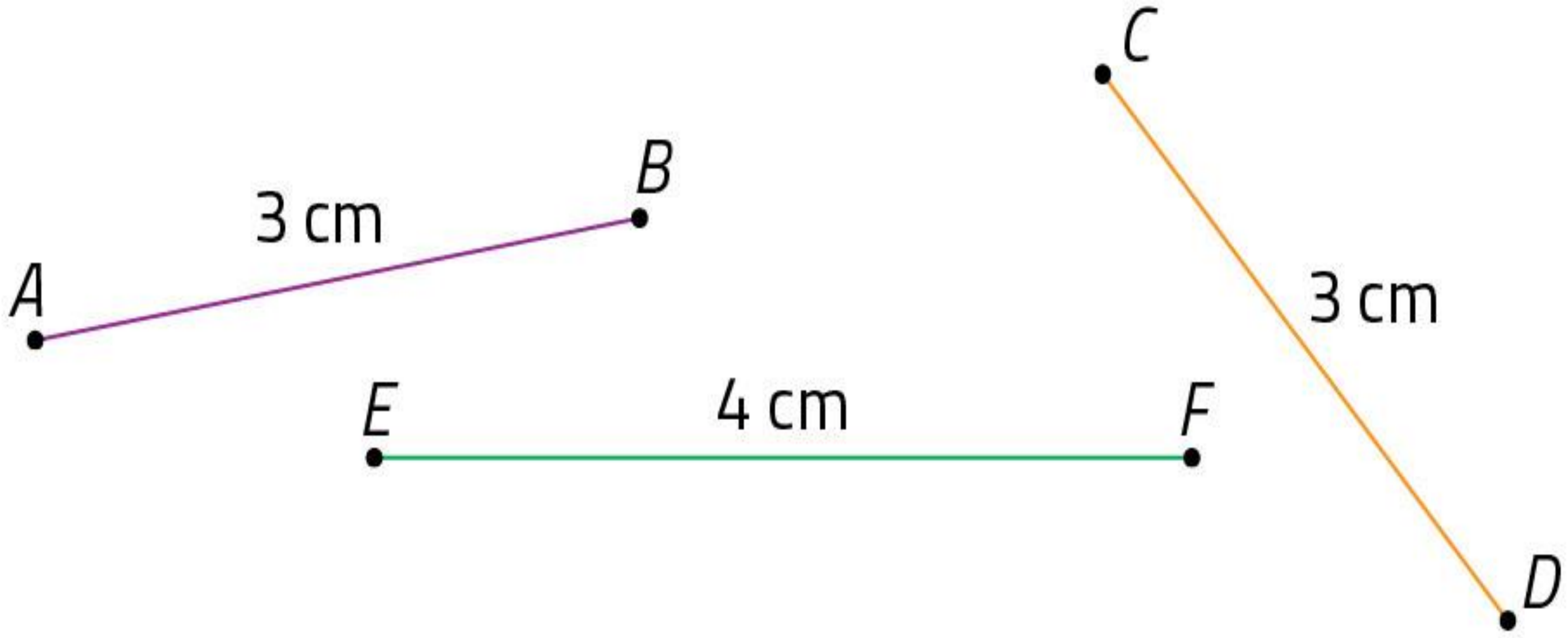
- $\hat{d}$ e $\hat{e}$
- $\hat{c}$ e $\hat{f}$

Os ângulos colaterais externos são:

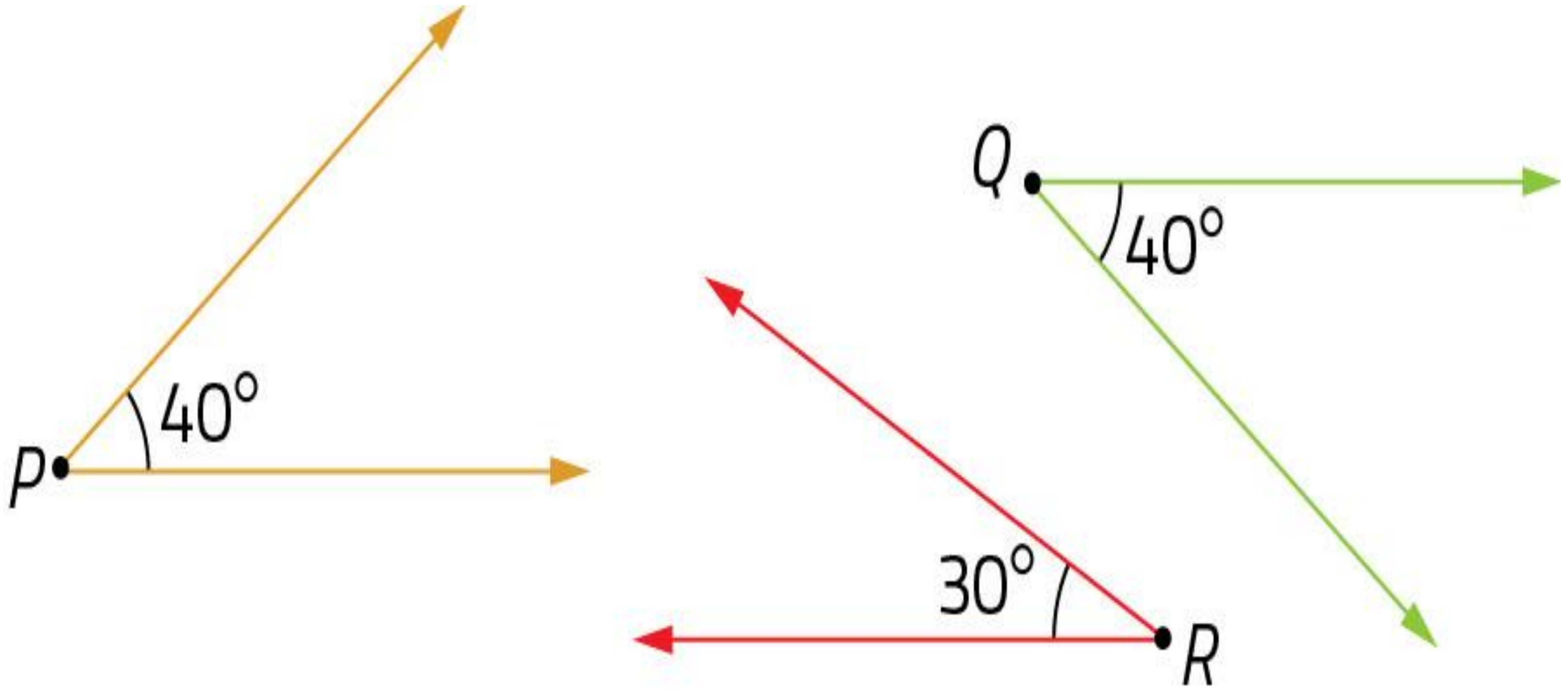
- $\hat{a}$ e $\hat{h}$
- $\hat{b}$ e $\hat{g}$

Figuras congruentes

Entre estes segmentos de reta, são congruentes $\overline{AB}$ e o $\overline{CD}$. Indicamos assim: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

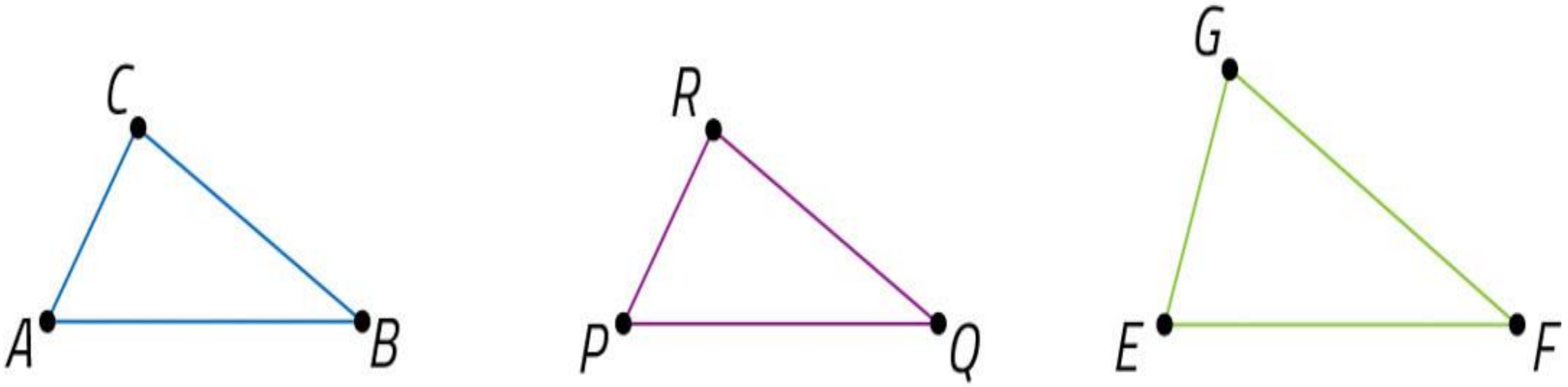


Entre estes ângulos, são congruentes $\hat{P}$ e o $\hat{Q}$. Indicamos assim: $\hat{P} \cong \hat{Q}$



Congruência de triângulos

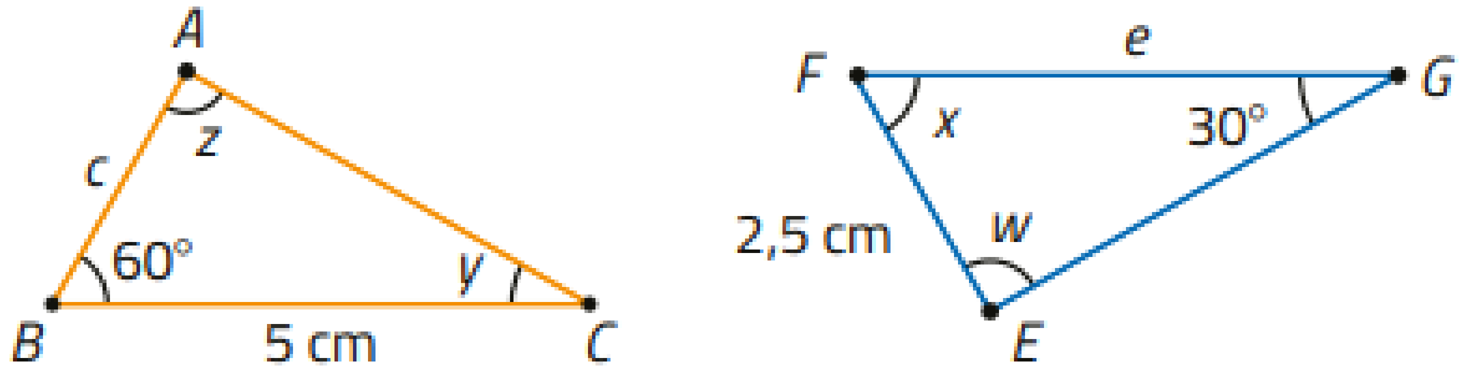
Destes 3 triângulos, temos que 2 deles podem coincidir por meio de um movimento no plano. Quais são eles? Vamos descobrir.



- Os triângulos ABC e PQR são congruentes. Indicamos assim: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.
- A, B e C são os vértices correspondentes aos vértices P, Q e R, respectivamente.
- $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ $\overline{AC} \cong \overline{PR}$ $\overline{BC} \cong \overline{QR}$ $\hat{A} \simeq \hat{P}$ $\hat{B} \simeq \hat{Q}$ $\hat{C} \simeq \hat{R}$

- A congruência dos 6 elementos de 2 triângulos (3 lados e 3 ângulos) determina a congruência dos triângulos.
- A congruência de 2 triângulos determina a congruência dos 6 elementos deles.
- Quando falamos em ângulos do triângulo, fica subentendido que são os ângulos internos dele.

Os triângulos ABC e EFG são congruentes ($\Delta ABC \cong \Delta EFG$). Determine as medidas indicadas pelas letras c, z, y, e, x, w.



Se rotacionarmos o ΔEFG, veremos que:

$e \cong 5$

$c \cong 2{,}5$

$x \cong 60°$

$y \cong 30°$

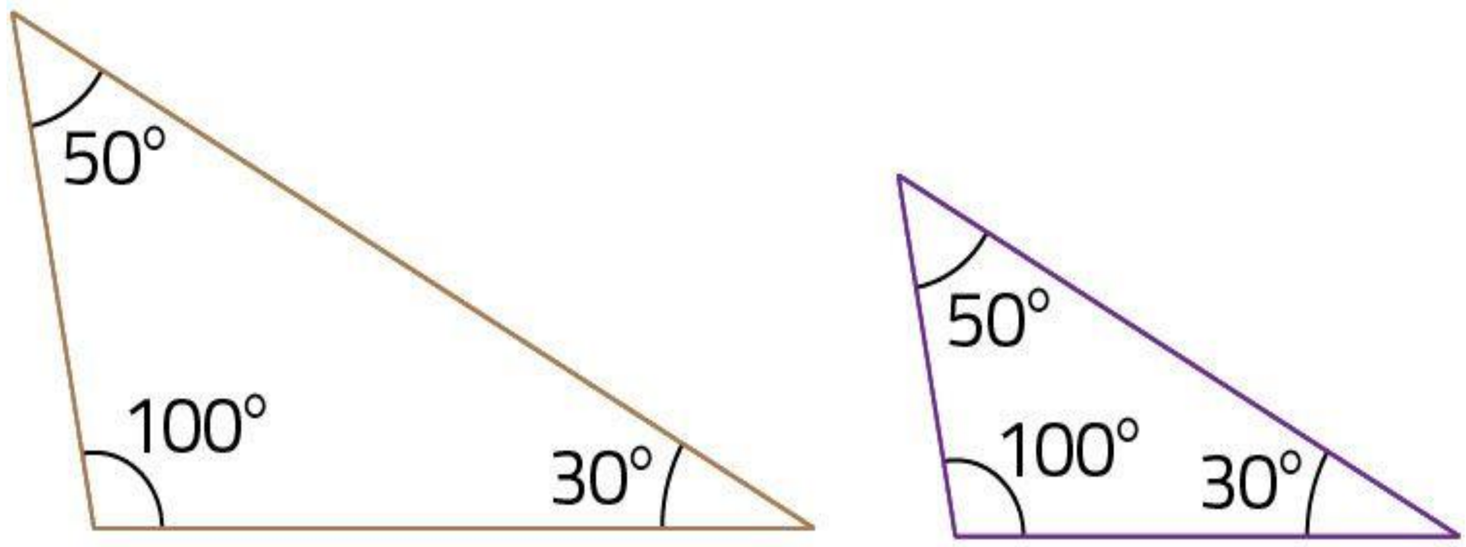
$z \cong w$

Sabemos que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180° então,

180°-60°-30°= 90°, logo z=w=90°

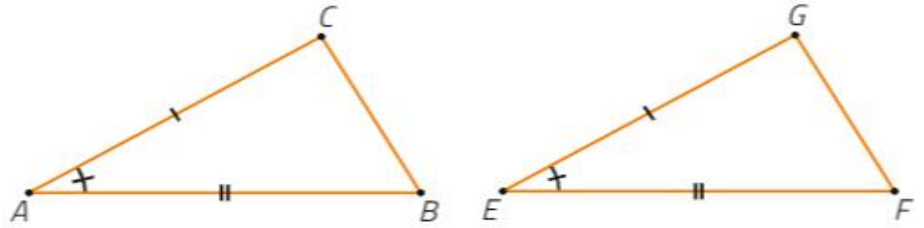
Casos de congruência de triângulos

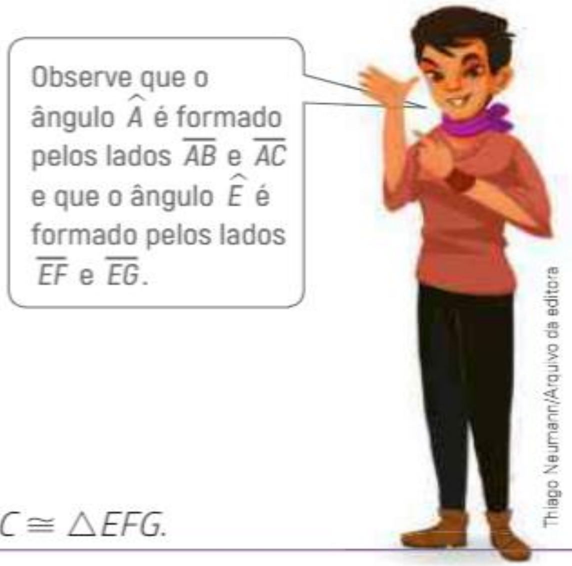
- A congruência dos 3 ângulos não garante a congruência dos triângulos.



1º caso: **LAL (lado, ângulo, lado)**

Dois triângulos são congruentes quando têm 2 lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes.

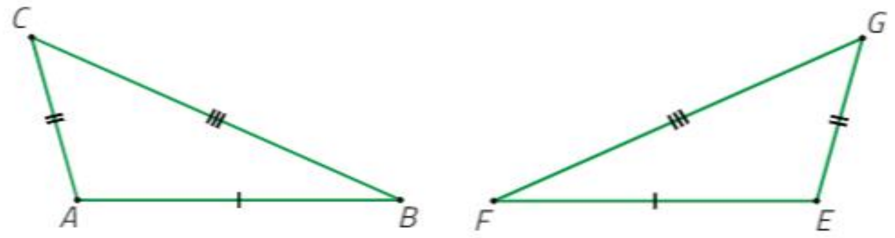


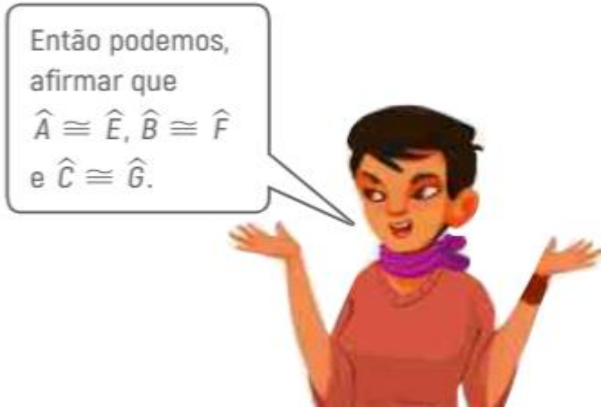


Se $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\hat{A} \cong \hat{E}$ e $\overline{AC} \cong \overline{EG}$, então podemos garantir que $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

2º caso: **LLL (lado, lado, lado)**

Dois triângulos são congruentes quando têm os 3 lados respectivamente congruentes.

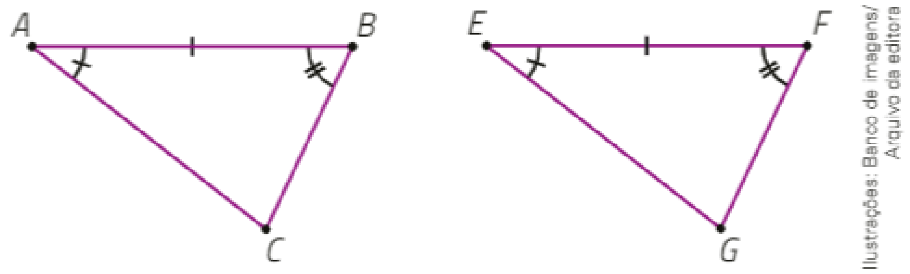




Se $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{EG}$ e $\overline{BC} \cong \overline{FG}$, então $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

3º caso: **ALA (ângulo, lado, ângulo)**

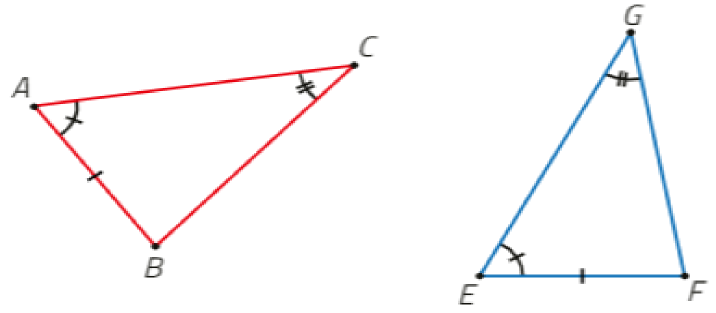
Dois triângulos são congruentes quando têm 1 lado e os 2 ângulos adjacentes a ele respectivamente congruentes.



Se $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\hat{A} \cong \hat{E}$ e $\hat{B} \cong \hat{F}$, então $\hat{C} \cong \hat{G}$, $\overline{AC} \cong \overline{EG}$ e $\overline{BC} \cong \overline{FG}$ e, portanto, $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

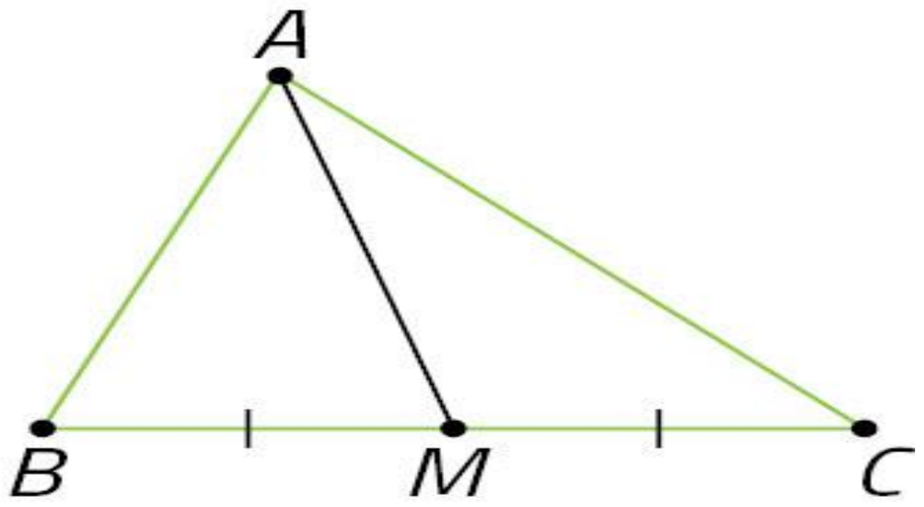
4º caso: **LAA_o (lado, ângulo, ângulo oposto)**

Dois triângulos são congruentes quando têm 1 lado, 1 ângulo adjacente a esse lado e o ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes.



Se $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\hat{A} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{G}$, então $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

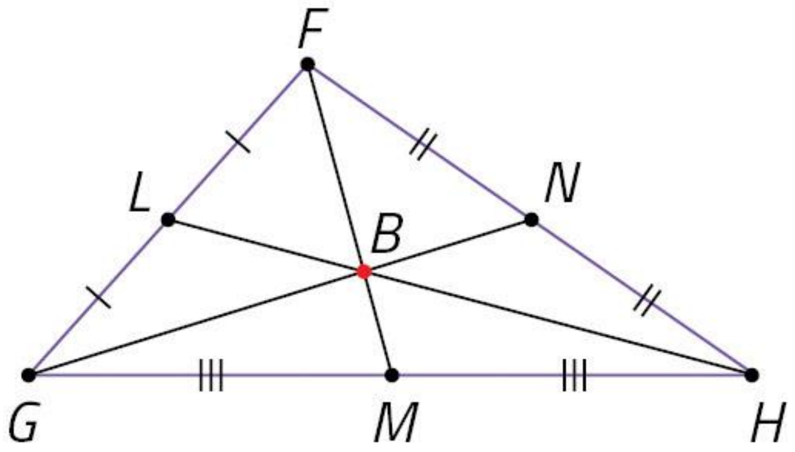
Mediana de um triângulo
Observe o $\triangle ABC$.
O ponto M é o **ponto médio** do lado , ou $\overline{BC}$ seja, $\overline{BM} \cong \overline{CM}$.
O segmento de reta $\overline{AM}$ é uma **mediana** do $\triangle ABC$.



A **mediana de um triângulo** é o segmento de reta que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice.

Baricentro de um triângulo

Veja o que acontece com as 3 medianas do $\triangle$ *FGH*: elas se intersectam em um mesmo ponto, chamado de **baricentro** do triângulo.



Os segmentos de reta $\overline{FM}$, $\overline{GN}$ e $\overline{HL}$ são as medianas do $\triangle FGH$.

O ponto *B*, intersecção das 3 medianas, é o baricentro do $\triangle FGH$.

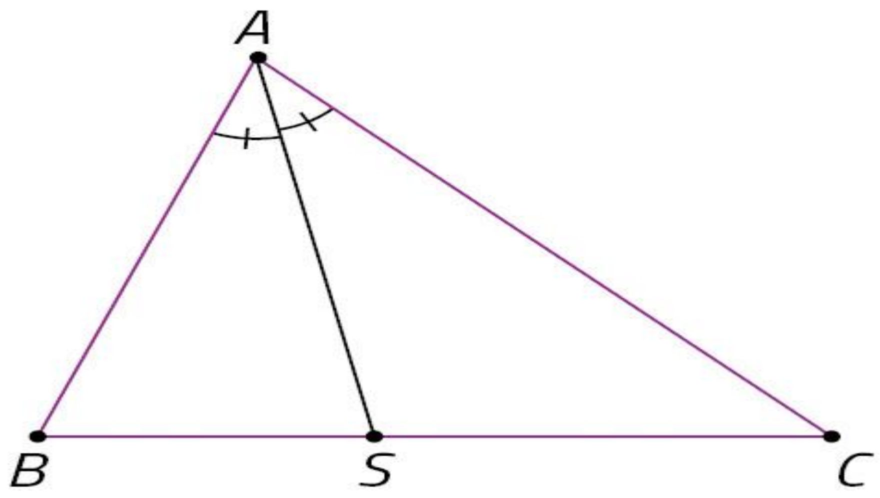
O baricentro de qualquer triângulo divide a mediana **na razão de 1 para 2**.

Por exemplo, no $\triangle FGH$ dado acima, de baricentro *B*, temos:

$$\frac{MB}{FB} = \frac{NB}{GB} = \frac{LB}{HB} = \frac{1}{2}$$

Em todo triângulo, as 3 medianas se intersectam em um mesmo ponto, chamado de baricentro do triângulo.

Bissetriz do ângulo interno de um triângulo
Observe o $\triangle ABC$.
O segmento de reta $\overline{AS}$ divide o ângulo interno $\hat{A}$ em 2 ângulos congruentes (ou seja, $B\hat{A}S \cong C\hat{A}S$), e o ponto S pertence lado $\overline{BC}$.
O segmento de reta $\overline{AS}$ é a **bissetriz** do ângulo interno do $\triangle ABC$.

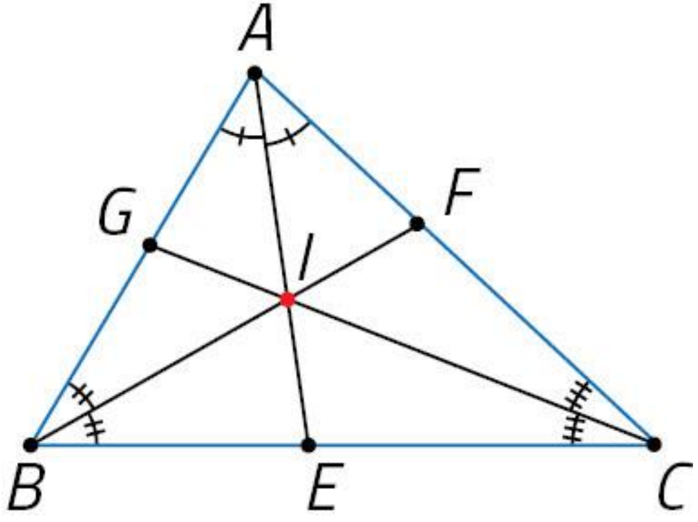


A **bissetriz de um ângulo interno de um triângulo** é o segmento de reta que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo interno desse vértice em 2 ângulos congruentes e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice.

Incentro de um triângulo

Veja o que acontece com as 3 bissetrizes dos ângulos internos do $\triangle ABC$: elas se intersectam em um mesmo ponto, chamado de **incentro** do triângulo.

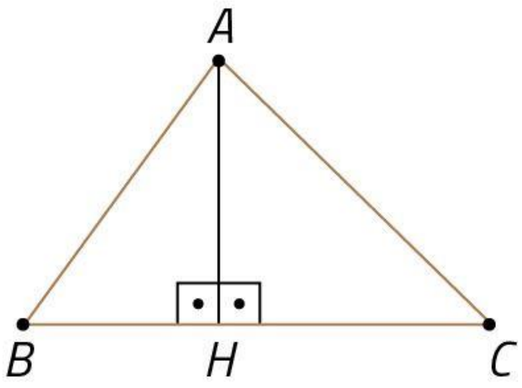
O segmento de reta $\overline{AE}$ é bissetriz do ângulo $\hat{A}$ do $\triangle ABC$, o segmento de reta $\overline{BF}$ é bissetriz do ângulo $\hat{B}$ e o segmento de reta $\overline{CG}$ é bissetriz do ângulo $\hat{C}$. O ponto *I*, intersecção das 3 bissetrizes, é o incentro do △ABC.

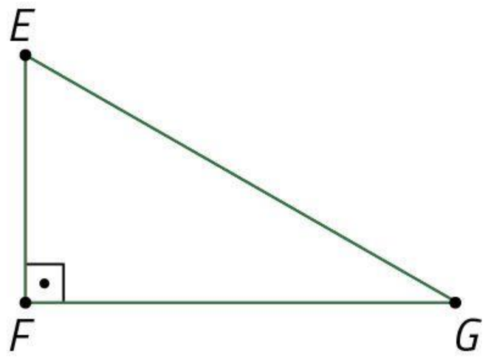


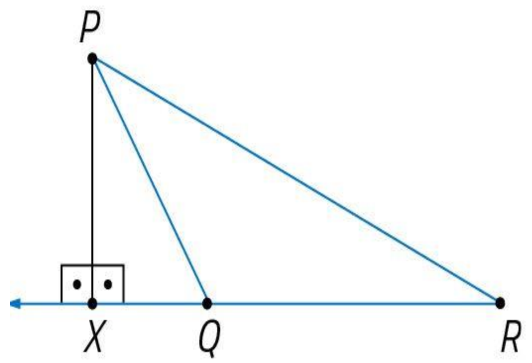
Em todo triângulo, as 3 bissetrizes dos ângulos internos se intersectam em um mesmo ponto, chamado de incentro do triângulo.

Altura de um triângulo

A **altura de um triângulo** é o segmento de reta com uma extremidade em um vértice do triângulo e a outra extremidade no lado oposto ou no prolongamento dele, formando ângulos retos com esse lado ou com o prolongamento dele.







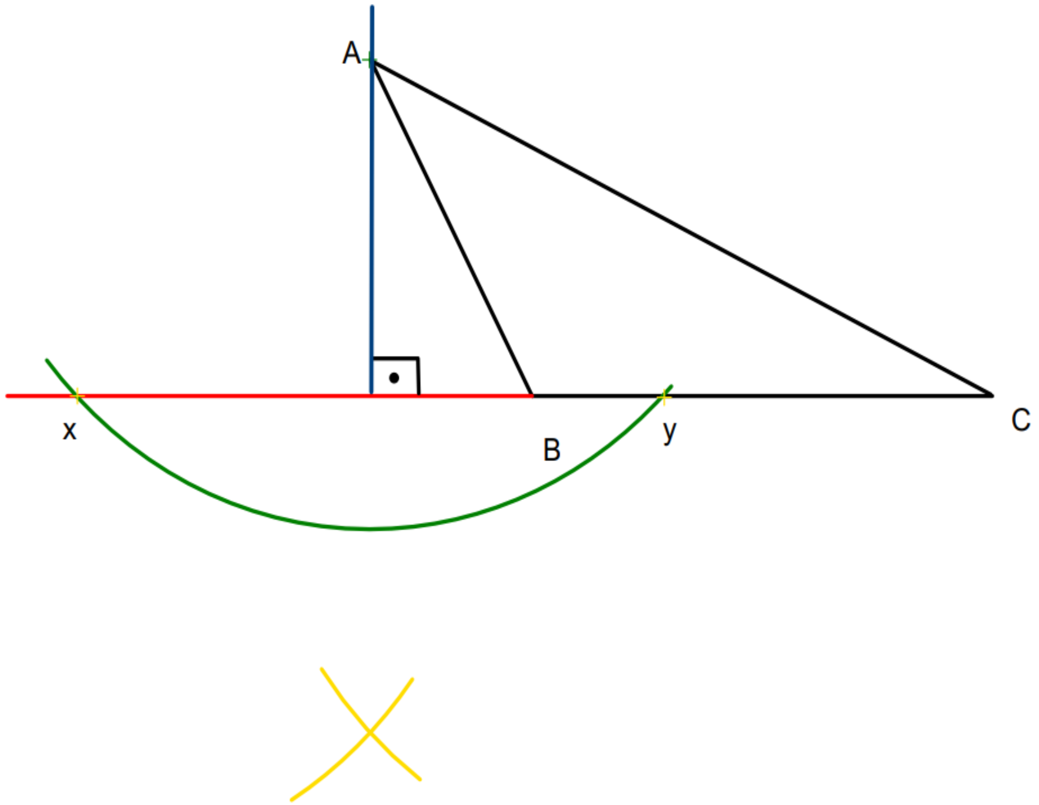
O segmento de reta $\overline{AH}$ é uma altura do ΔABC relativa ao lado $\overline{BC}$.

O lado $\overline{EF}$ é uma altura do ΔEFG relativa ao lado $\overline{FG}$.

O segmento de reta $\overline{PX}$ é uma altura do ΔPQR relativa ao lado $\overline{QR}$.

Traçado da altura do triângulo obtusângulo
“A construção das alturas de cada lado do triângulo resultará no ortocentro”

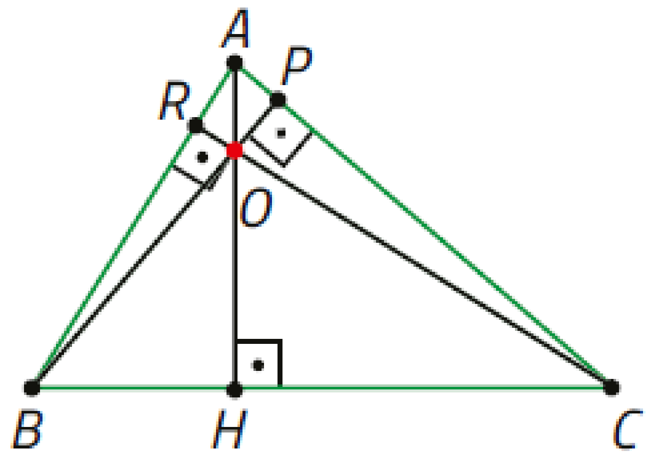
Traçar a reta auxiliar em vermelho
Traçar um arco(em verde) com ponta seca em A, encontar os pontos x e y
Com ponta seca em x depois em y traçar os arcos em amarelos
Unir A com os arcos amarelos, linha azul, observe que a linha azul forma 90° com a linha vermelha



Ortocentro de um triângulo

Observe os triângulos. Em cada um deles, estão traçadas as 3 alturas.

Observe o triângulo acutângulo ΔABC



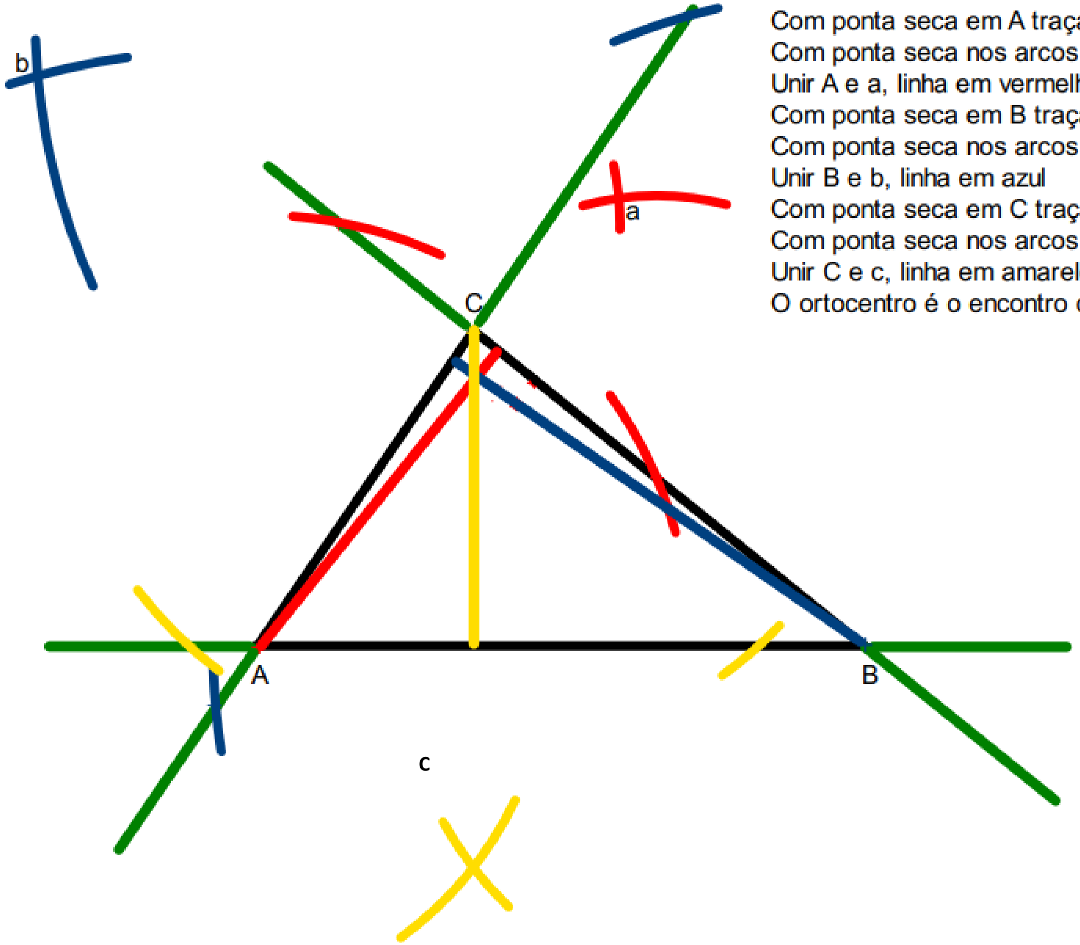
Os segmentos de reta $\overline{AH}$, $\overline{BP}$ e $\overline{CR}$

são as alturas desse triângulo. $\triangle ABC$

As 3 alturas se intersectam no ponto O, chamado de **ortocentro** do

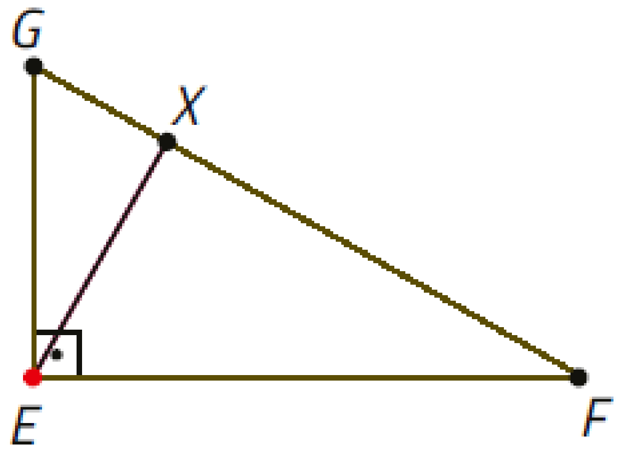
Neste caso, o ortocentro é interno ao triângulo.

Traçado do ortocentro



Estender todas as arestas do triângulo acutângulo
Com ponta seca em A traçar os arco vermelhos
Com ponta seca nos arcos vermelhos traçar o ponto a
Unir A e a, linha em vermelho
Com ponta seca em B traçar os arco azuis
Com ponta seca nos arcos azuis traçar o ponto b
Unir B e b, linha em azul
Com ponta seca em C traçar os arco amarelos
Com ponta seca nos arcos amarelos traçar o ponto c
Unir C e c, linha em amarelo
O ortocentro é o encontro das 3 linhas

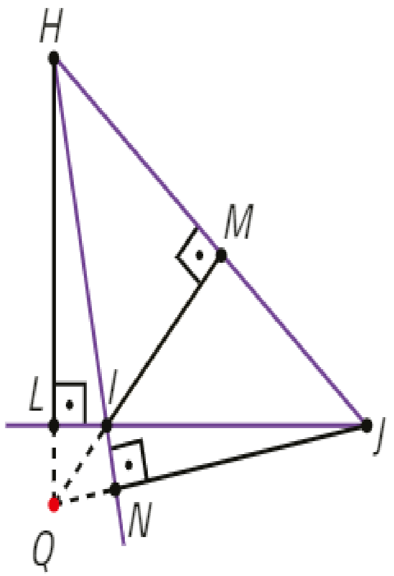
O triângulo ΔEFG é retângulo



Os segmentos de reta $\overline{GE}$, $\overline{EX}$ e $\overline{FE}$ são as alturas desse triângulo.

O ponto E é o ortocentro do $\triangle EFG$, pois é comum às 3 alturas dele.

Neste caso, o ortocentro é o vértice do ângulo reto.



O $\triangle HIJ$ é obtusângulo.

Os segmentos de reta $\overline{HL}$, $\overline{IM}$ e $\overline{JN}$ são as alturas desse triângulo.

O ponto Q, **ortocentro** do $\triangle HIJ$, é a intersecção dos prolongamentos das 3 alturas.

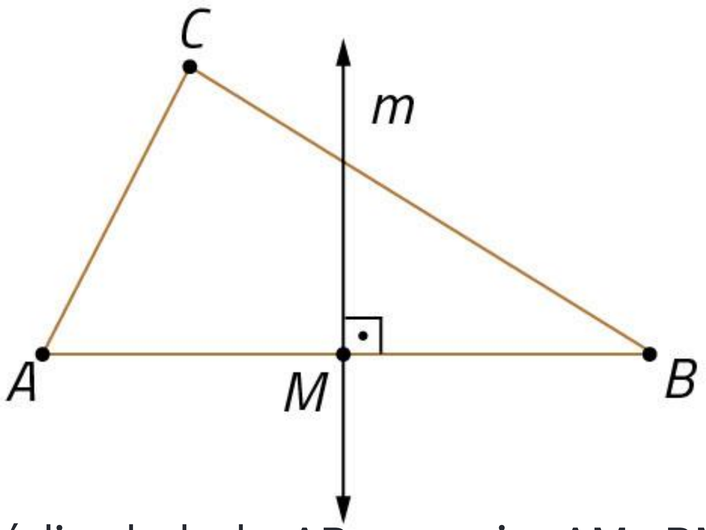
Neste caso, o ortocentro é externo ao triângulo.

Em todo triângulo, as 3 alturas ou os prolongamentos delas se intersectam em um mesmo ponto, chamado de ortocentro do triângulo.

Mediatriz do lado de um triângulo

Você já estudou, no capítulo 2, o que é a mediatriz de um segmento de reta e aprendeu a construí-la, com régua e compasso. Agora vamos estudar esse conceito aplicado aos lados de um triângulo.

Observe o △ *ABC*.



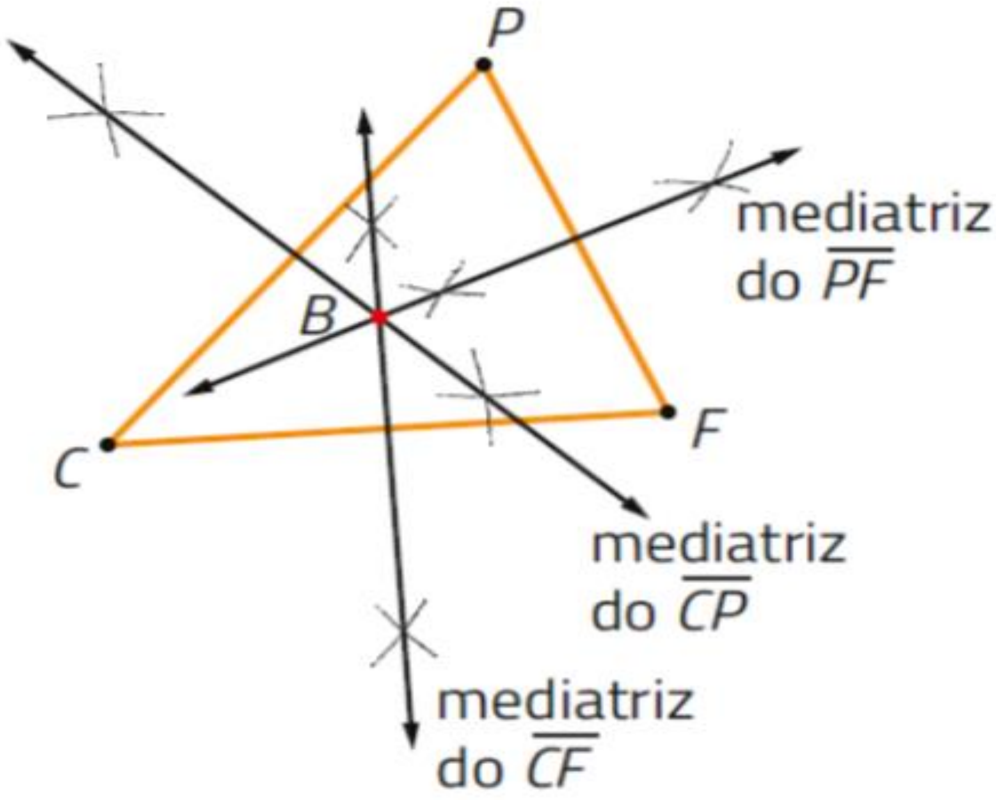
O ponto *M* é o ponto médio do lado AB, ou seja, AM≅BM.

A reta *m* passa pelo ponto médio *M* e é perpendicular ao lado AB.

A reta *m* é a **mediatriz** do lado AB do △*ABC*.

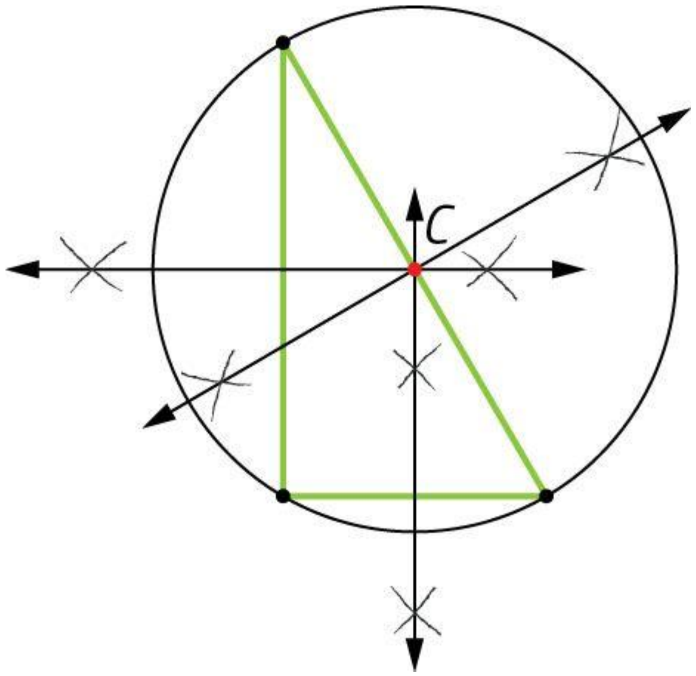
A **mediatriz de um lado de um triângulo** é a reta perpendicular a esse lado e que passa pelo ponto médio dele.

Circuncentro de um triângulo



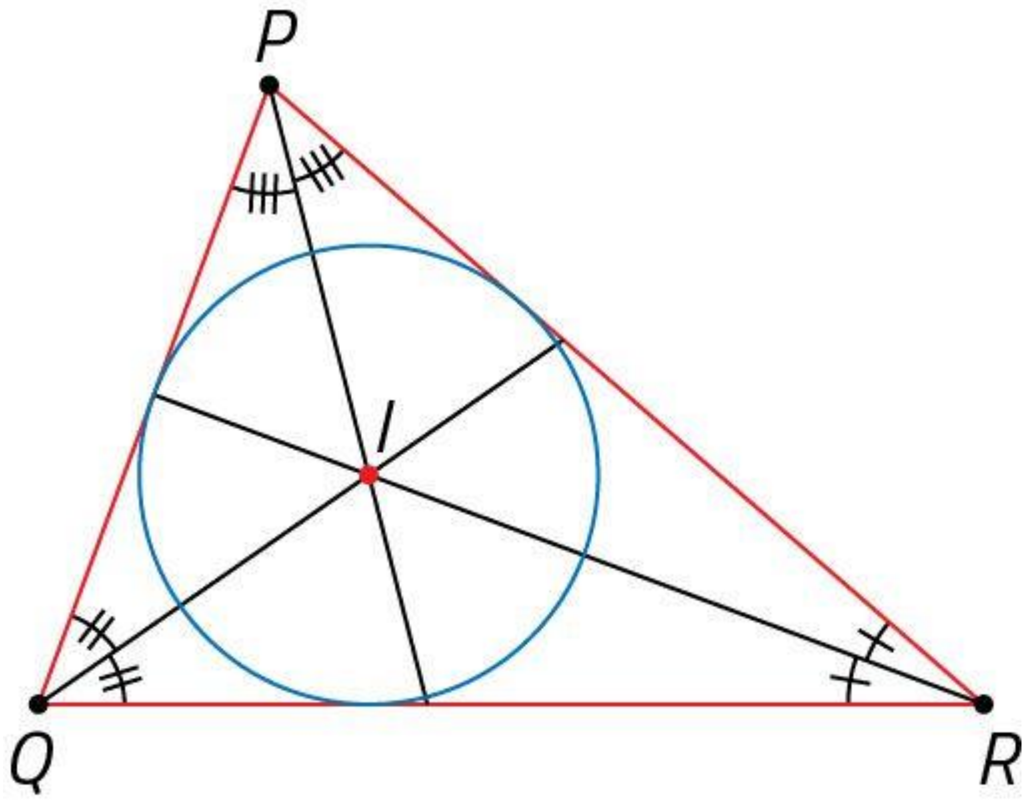
O ponto *B*, intersecção das mediatrizes dos lados do $\triangle PFC$, é chamado de **circuncentro** do triângulo.

Em todo triângulo, as 3 mediatrizes dos lados se intersectam em um mesmo ponto, chamado de circuncentro do triângulo.



O circuncentro está sobre o triângulo.

O **incentro** está interno ao triângulo.

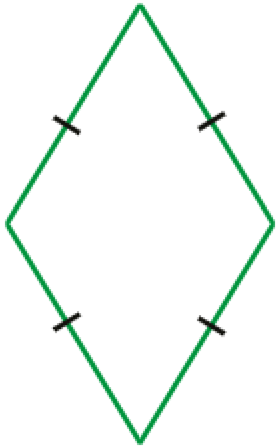


Quadrilátero é todo polígono de 4 lados.

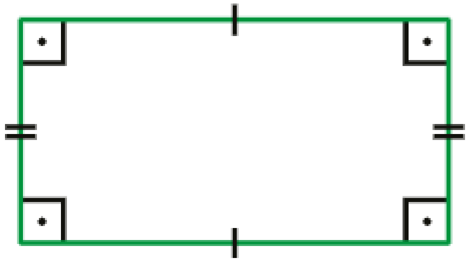
Alguns quadriláteros recebem nomes de acordo com a posição relativa dos lados deles. Relembre esses tipos de quadrilátero e veja alguns exemplos.

Paralelogramos

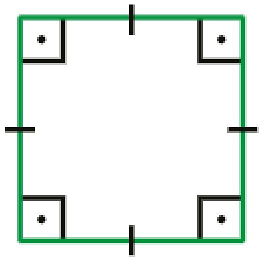
Paralelogramo qualquer.



Losango.

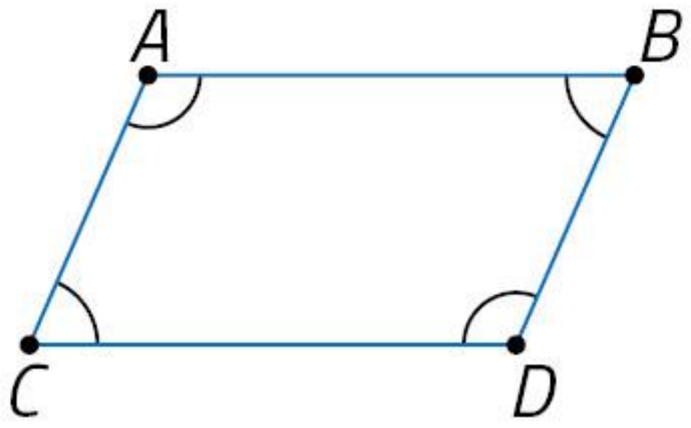


Retângulo.



Quadrado.

Paralelogramo é todo quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

Propriedades dos paralelogramos:

1ª Propriedade:

Em todo paralelogramo, 2 ângulos opostos são congruentes (têm medidas de abertura iguais) e 2 ângulos não opostos são suplementares (a soma das medidas de abertura é igual a 180°).

Se ABCD é um paralelogramo,

$\overline{AB} // \overline{CD}$ e a transversal $\overline{AD}$, concluímos que

$$m(\hat{a}) + m(\hat{d}) = 180°$$

$\overline{AB} // \overline{CD}$ e a transversal BC, concluímos que

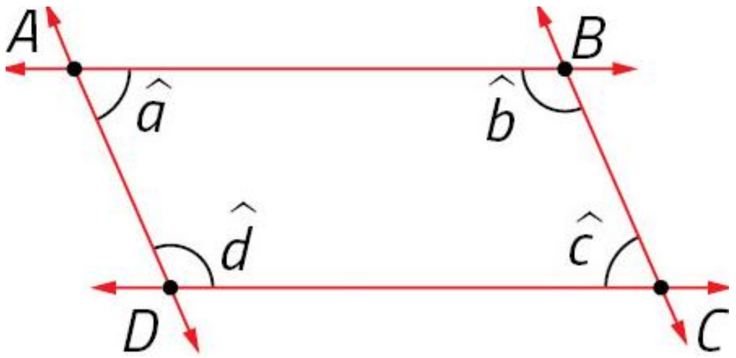
$$m(\hat{b}) + m(\hat{c}) = 180°$$

$\overline{AD} // \overline{BC}$ e a transversal AB, concluímos que

$$m(\hat{a}) + m(\hat{b}) = 180°$$

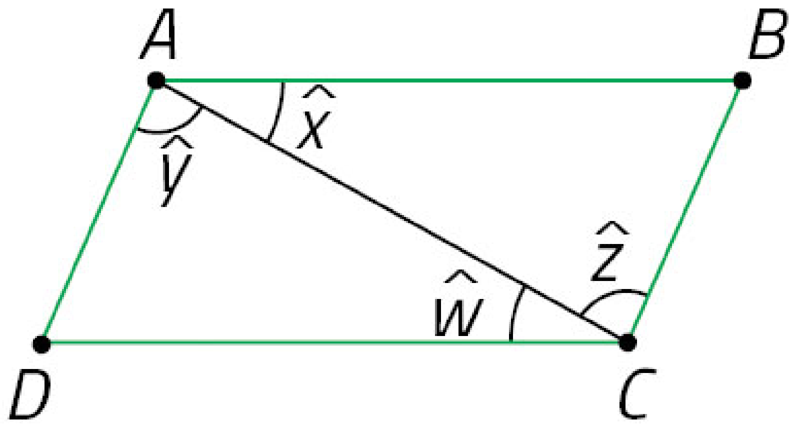
$\overline{AD} // \overline{BC}$ e a transversal CD, concluímos que

$$m(\hat{c}) + m(\hat{d}) = 180°$$



2º Propriedade:

Em todo paralelogramo, os lados opostos são congruentes.



Traçamos $\overline{AC}$.
No ΔABC e no ΔADC, temos:
$\hat{x} = \hat{w}$ (medidas de abertura dos ângulos alternos internos, com $\overline{AB} // \overline{DC}$);
$\hat{y} = \hat{z}$ (medidas de abertura dos ângulos alternos internos, com $\overline{AD} // \overline{BC}$);
$\overline{AC} \cong \overline{AC}$(lado comum dos triângulos).
Pelo caso, ALA, concluímos que $\Delta ABC \cong \Delta ADC$. Logo, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

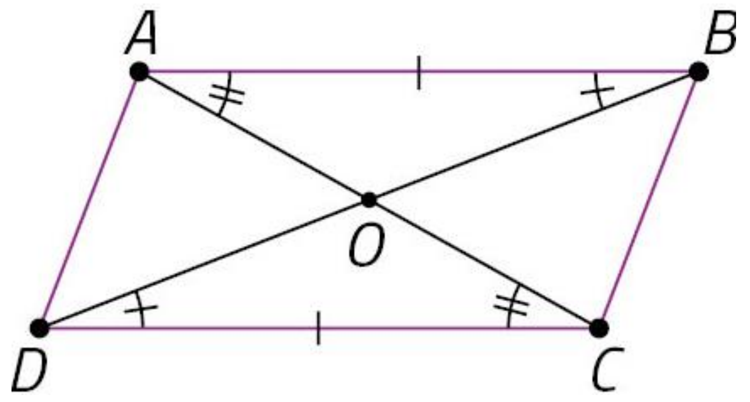
3ª Propriedade:

Em todo paralelogramo, as diagonais se intersectam no ponto médio delas.

Considerando o paralelogramo $ABCD$ e as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$, obtemos o ponto O de intersecção das diagonais.

Pelo caso ALA, temos $\Delta AOB \cong \Delta COD$.

Da congruência desses triângulos, deduzimos que $\overline{AO} \cong \overline{CO}$ e $\overline{BO} \cong \overline{DO}$, ou seja, o ponto O é o ponto médio de cada diagonal.

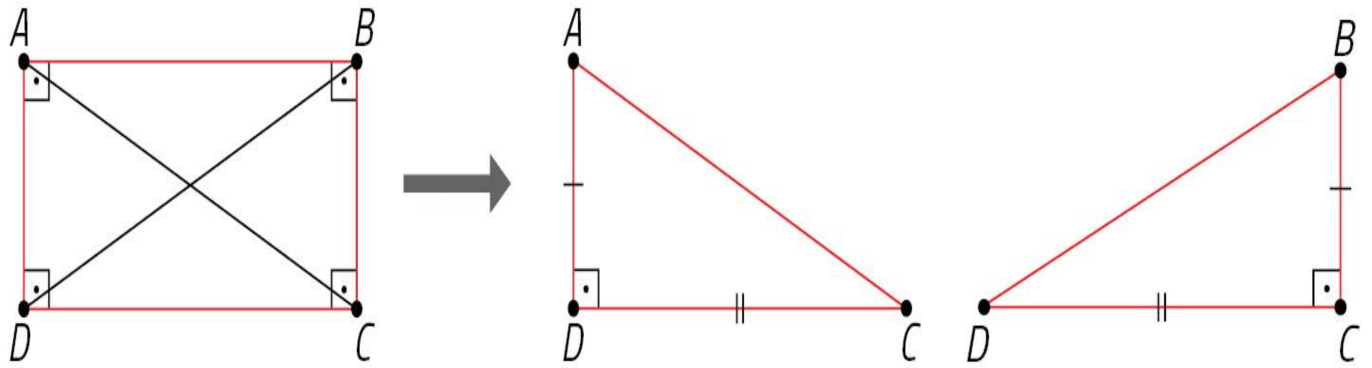


Propriedade dos retângulos

Propriedade dos retângulos (paralelogramos que têm os 4 ângulos internos retos).
As diagonais de um retângulo são congruentes.

Demonstração

Considerando este retângulo *ABCD*, devemos demonstrar que AC≅BD.



Analisando os elementos do $\triangle ADC$ e do $\triangle BCD$, temos:

- $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (são lados opostos de um retângulo, que é um paralelogramo);
- $\hat{D} \cong \hat{C}$ (são ângulos retos);
- $\overline{DC} \cong \overline{DC}$ (lado comum dos triângulos).

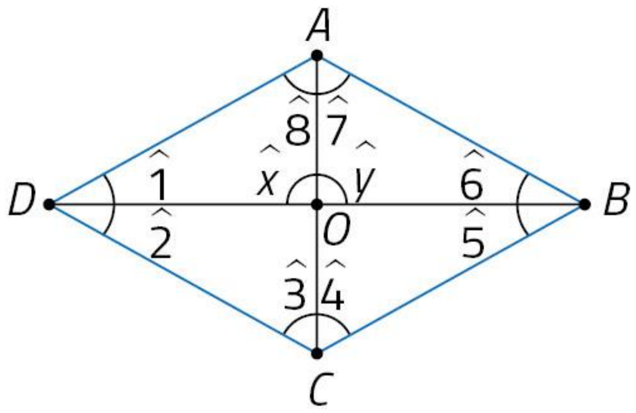
Pelo caso LAL, temos $\triangle ADC \cong \triangle BCD$ e, portanto, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Propriedade dos losangos

Agora, acompanhe a demonstração de uma propriedade dos losangos (paralelogramos que têm os 4 lados congruentes).

As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos do losango.

Considere este losango ABCD.



<u>1ª parte</u>

O △AOB e o △AOD têm:

$\overline{AB} \cong \overline{AD}$ *(são lados do losango);*

$\overline{OB} \cong \overline{OD}$ *(O é ponto médio da diagonal, pois o losango é um paralelogramo);*

$\overline{AO} \cong \overline{AO}$ *(lado comum dos triângulos).*

Pelo caso LLL, temos △AOB ≅ △AOD e, então, m(x) = m(y).

Como $m(\hat{x}) + m(\hat{y}) = 180°$, *obtemos* $m(\hat{x}) = 90°$, *e* $m(\hat{y}) = 90°$, .

Logo, e são perpendiculares entre si.

<u>2ª parte</u>

O △ABC e o △ADC têm:

$\overline{AB} \cong \overline{AD}$ *(são lados do losango);*

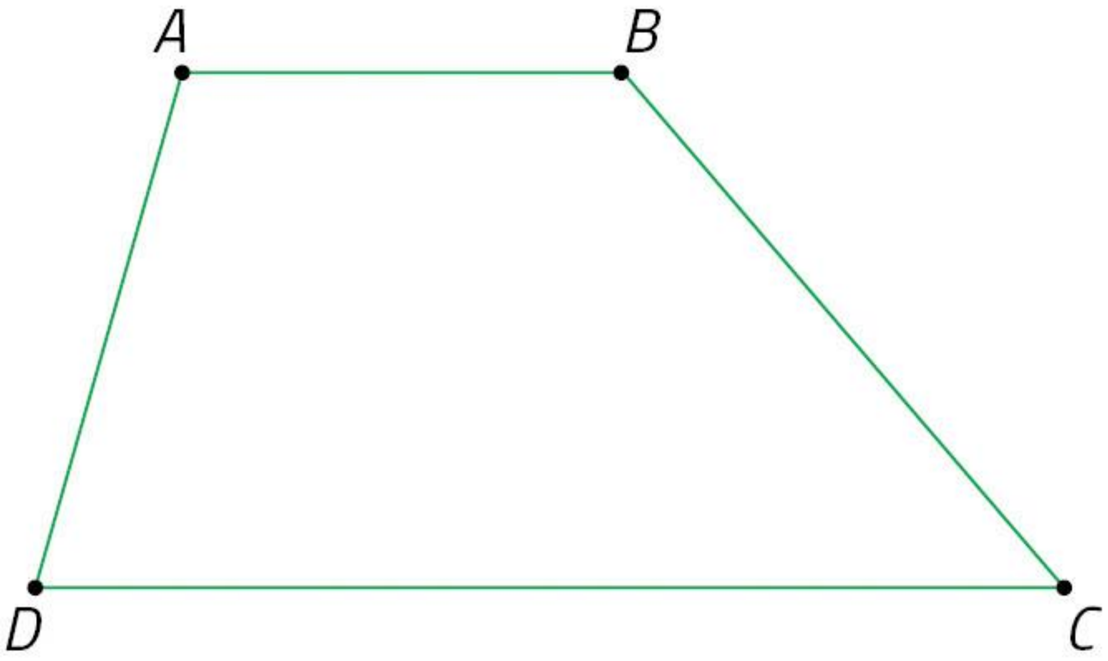
$\overline{AC} \cong \overline{AC}$ *(lado comum dos triângulos).*

Pelo caso LLL, temos △ABC ≅ △ADC e, então, $\hat{7} \cong \hat{8}$ *e* $\hat{4} \cong \hat{3}$.

Então, $\overline{AC}$ *está sobre as bissetrizes de* $\hat{A}$ *e de* $\hat{C}$.

Da mesma maneira, usando o △ABD e o △CBD, podemos demonstrar que $\hat{1} \cong \hat{2}$ *e* $\hat{6} \cong \hat{5}$, *ou seja, a diagonal* $\overline{BD}$ *está sobre as bissetrizes de* $\hat{B}$ *e* $\hat{D}$.

Trapézio é todo quadrilátero que tem apenas 2 lados paralelos (base maior e base menor).

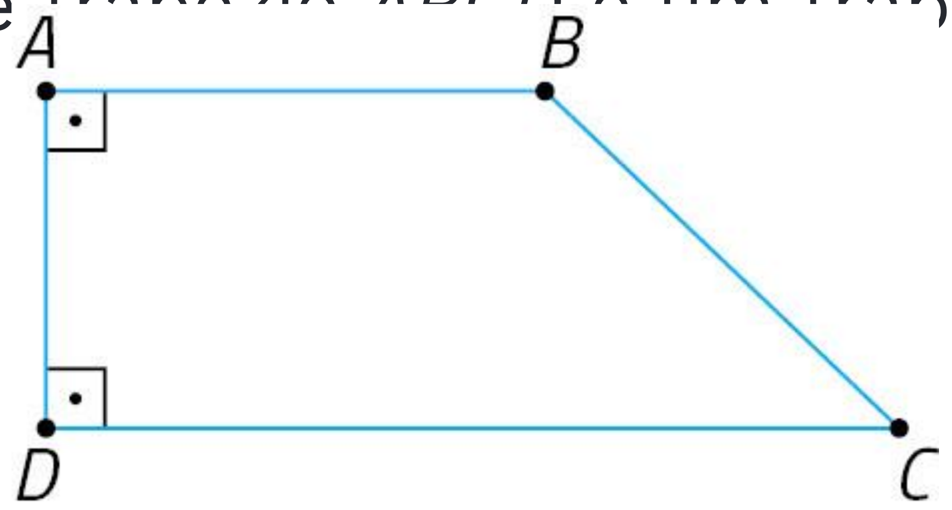


$\overline{AB}$: base menor
$\overline{CD}$: base maior
$\overline{AB} // \overline{CD}$

Trapézio retângulo é aquele que tem 2 ângulos internos retos.

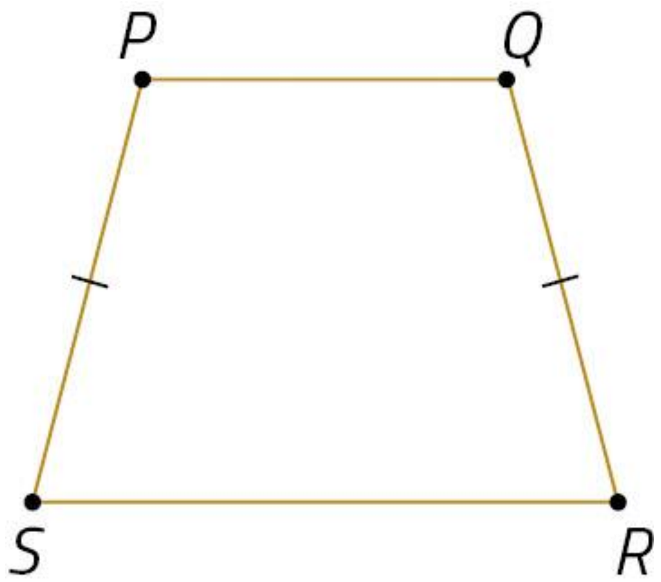
No trapézio retângulo, um dos lados que não é base é perpendicular às 2 bases.

Por exemplo, este trapézio *ABCD* é um trapézio retângulo.



$\hat{A}$ e $\widehat{D}$ são ângulos retos ($\overline{AD} \perp \overline{AB}$ e $\overline{AD} \perp \overline{DC}$).
$\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são as bases do trapézio *ABCD*.

Trapézio isósceles é aquele que tem os 2 lados não paralelos congruentes, isto é, de medidas de comprimento iguais.

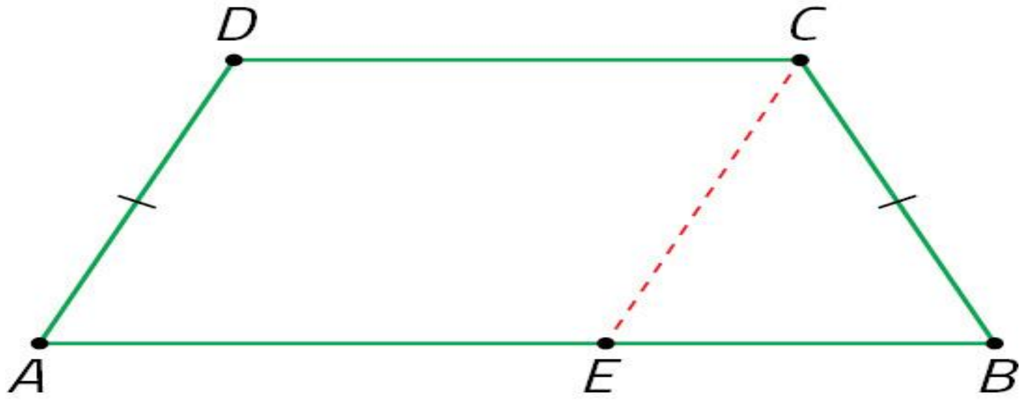


$\hat{P} \cong \hat{Q}, \hat{S} \cong \hat{R}$ e PR≅SQ
PQRS é um trapézio isósceles de bases $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$.
Então, $\overline{PS} \cong \overline{QR}$.

Demonstração

1ª parte

Considerando este trapézio isósceles *ABCD*, traçamos o segmento de reta CE paralelo ao lado AD. Obtemos, assim, o paralelogramo *ADCE*.



Nesses quadriláteros, temos:

- $\overline{DA} \cong \overline{CE}$ (lados opostos do paralelogramo);
- $\overline{CE} \cong \overline{CB}$ (pois $\overline{DA} \cong \overline{CB}$ e $\overline{DA} \cong \overline{CE}$) e, então, o triângulo *CEB* é isósceles.

No triângulo isósceles *CEB*, temos $C\hat{E}B \cong C\hat{B}E$(**I**). No paralelogramo *ADCE*, temos $D\hat{A}E \cong C\hat{E}B$(**II**).

De **I** e **II**, concluímos que $D\hat{A}E \cong C\hat{E}B$, ou seja, no trapézio isósceles *ABCD*, $\hat{A} \cong \hat{B}$.

No trapézio isósceles *ABCD*, temos ainda que:

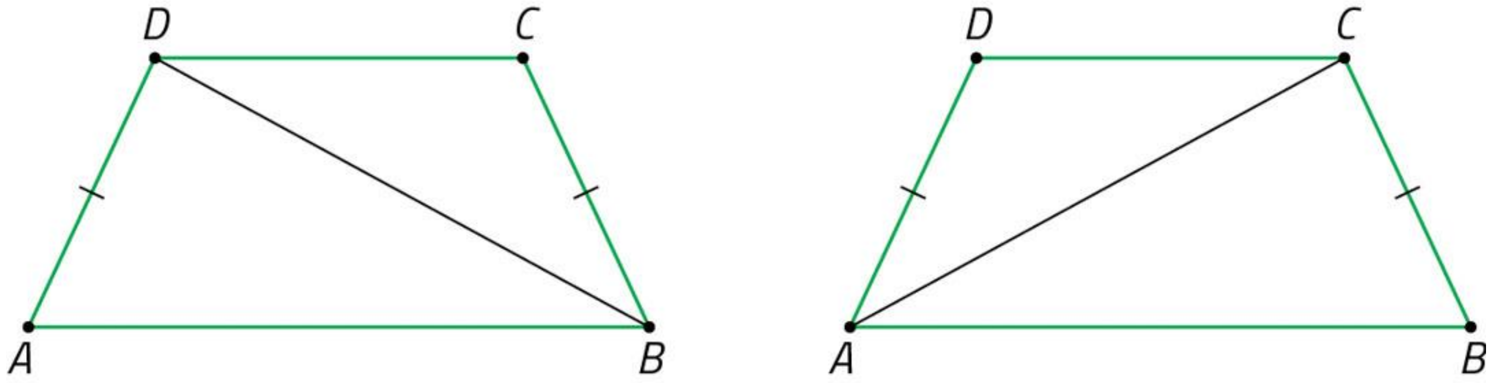
- $m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180° \Rightarrow m(\hat{D}) = 180° - m(\hat{A}) = 180°$;
- $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180° \Rightarrow m(\hat{C}) = 180° - m(\hat{B}) \Rightarrow m(\hat{C}) = 180° - m(\hat{A})$.

De onde concluímos que $m(\hat{C}) = m(\hat{D})$, ou seja, $\hat{C} \cong \hat{D}$.

2ª parte

Considerando o mesmo trapézio isósceles *ABCD*, traçamos as diagonais BD e AC.

Obtemos, assim, os triângulos *DBC* e *ACD*.



Nesses triângulos, temos que:

•$\overline{DC}$ é lado comum;

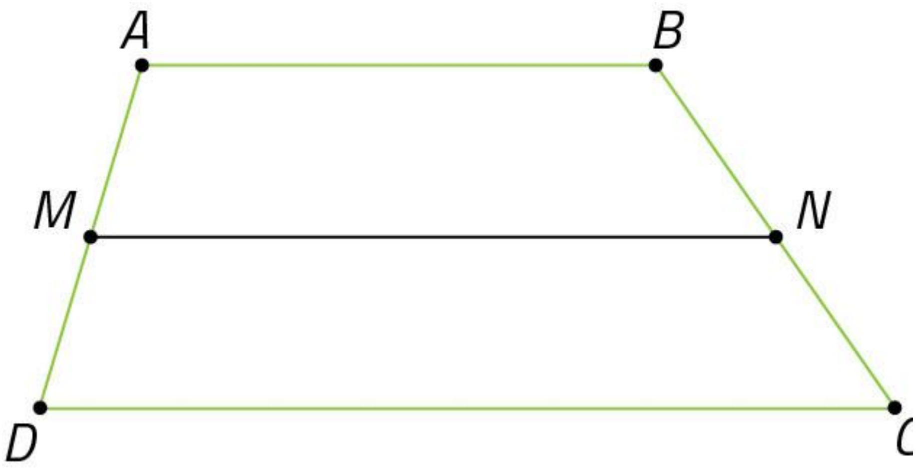
•$D\hat{C}B \cong A\widehat{D}C$ (como demonstrado na 1ª parte);

•$\overline{BC} \cong \overline{AD}$ (pois o trapézio *ABCD* é isósceles).

Então, pelo caso LAL, triângulos *DBC* e *ACD* são congruentes e concluímos que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$.

Base média de um trapézio

Observe este trapézio $ABCD$, no qual $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as bases e M e N são os pontos médios dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.



Em todo trapézio, a medida de comprimento da base média é igual à média aritmética das medidas de comprimento das bases maior e menor do trapézio.

Assim, neste trapézio $ABCD$ temos:

$$MN = \frac{AB + CD}{2}$$