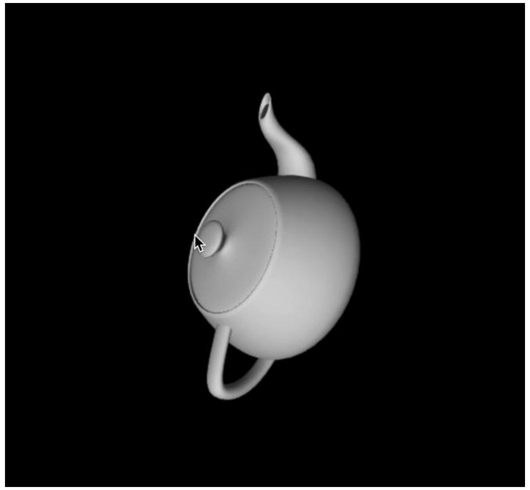
Graphics en Game Technologie

3. Lineaire transformaties

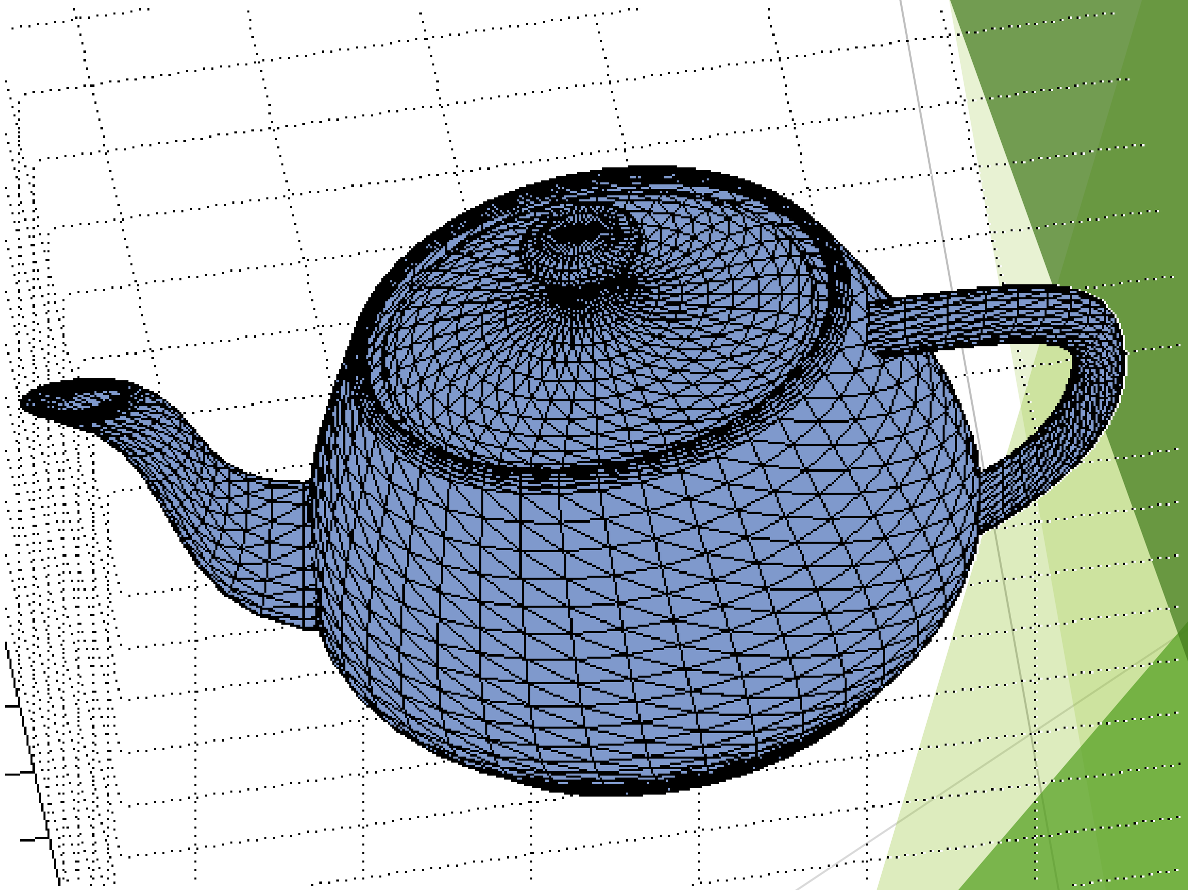
Robert Belleman
Computational Science Lab
Universiteit van Amsterdam
R.G.Belleman@uva.nl
(voeg a.u.b. “[GGT]” toe aan subject)



Utah teapot

Gebruik matrices

- In Graphics worden lineaire transformaties gebruikt
- Deze lineaire transformaties gerepresenteerd in matrixvorm
- Matrixvermenigvuldiging voor schalen, translaties en rotaties



Lineaire transformaties in 2D

Lineaire transformatie in 2D

Definitie: Een afbeelding T van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$ heet een lineaire transformatie als er een 2×2 matrix A bestaat zo dat

$$T(\boldsymbol{p}) = A\boldsymbol{p}$$

voor alle $\boldsymbol{p}$ in $\mathbb{R}^2$.

Matrix A beeldt vector $\boldsymbol{p}$ af op een nieuwe vector $\boldsymbol{p}' = A\boldsymbol{p}$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lineaire transformatie in 2D

$$\boldsymbol{p}' = A\boldsymbol{p}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$

Voorbeeld lineaire transformatie

$$x' = 2x + 3y$$
$$y' = x + 4y$$

Deze afbeelding wordt gerepresenteerd door 2×2 matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Oefening

Gegeven de volgende matrix: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

- Waar worden de volgende vectoren in overgevoerd?

  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Wat doet deze transformatie met het punt (x, y)?
- Dezelfde vraag voor matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2D transformaties

In Graphics zijn meeste transformaties lineair:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

Deze lineaire transformaties gebruikt voor schaling, shear en rotatie

Schaling in matrixvorm

Schaling

$x' = s_x x \qquad y' = s_y y$

Schaling in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \end{pmatrix}$$

Schaling met schalingsmatrix $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}$$

Uniforme schaling in x en y

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

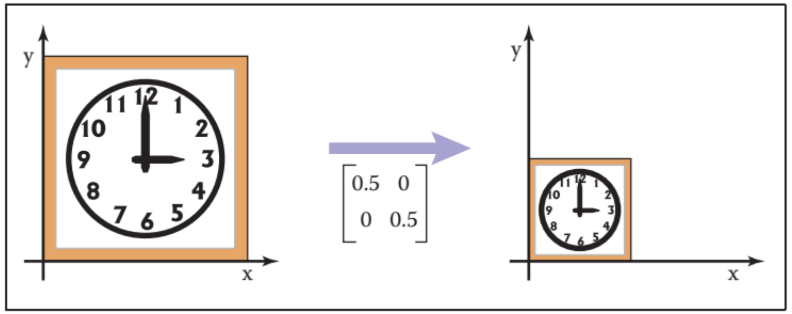


Figure 6.1. Scaling uniformly by half for each axis: The axis-aligned scale matrix has the proportion of change in each of the diagonal elements and zeroes in the off-diagonal elements.

Niet-uniforme schaling in x en y

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$$

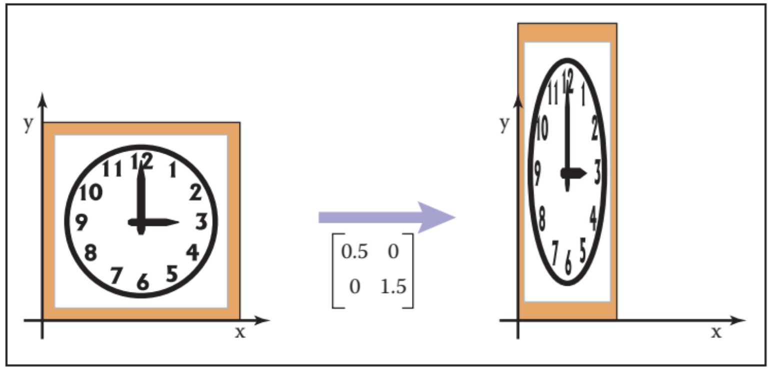


Figure 6.2. Scaling nonuniformly in x and y: The scaling matrix is diagonal with non-equal elements. Note that the square outline of the clock becomes a rectangle and the circular face becomes an ellipse.

Shear in matrixvorm

Horizontale shear

$x' = x + sy \qquad\qquad y' = y$

Horizontale shear in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + sy \\ y \end{pmatrix}$$

Shear met matrix $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}$$

Horizontale shear

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verticale lijnen gaan over in lijnen met hoek 45◦

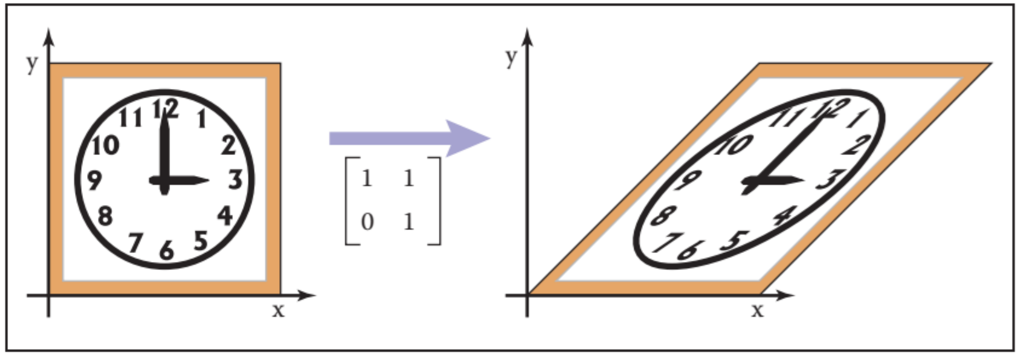


Figure 6.3. An x-shear matrix moves points to the right in proportion to their y-coordinate. Now the square outline of the clock becomes a parallelogram and, as with scaling, the circular face of the clock becomes an ellipse.

Shear in matrixvorm

Verticale shear

$x' = x \qquad\qquad y' = sx + y$

Verticale shear in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ sx + y \end{pmatrix}$$

Shear met matrix $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}$$

Verticale shear

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Horizontale lijnen gaan over in lijnen met hoek 45◦

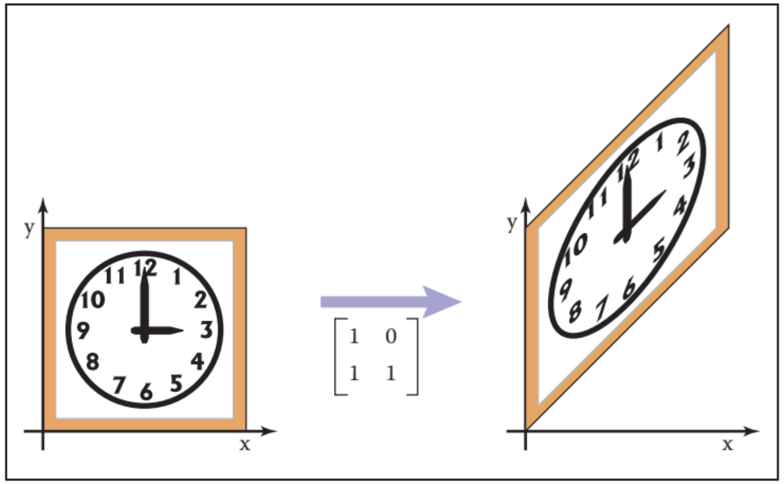
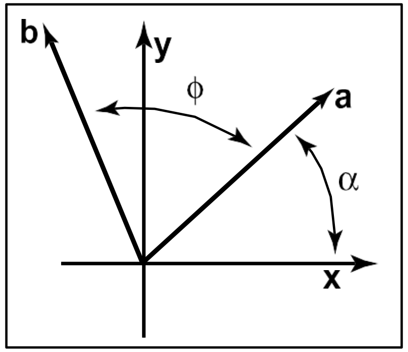


Figure 6.4. A *y*-shear matrix moves points up in proportion to their *x*-coordinate.

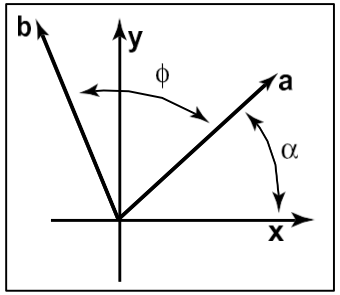
Rotatie in 2D

- Gegeven: vector $a = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$
- Gevraagd: vector $b = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$ na rotatie over hoek φ



Rotatie in 2D

- $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha + \phi) \\ r\sin(\alpha + \phi) \end{pmatrix}$



- $x_b = r\cos(\alpha + \phi) = r\cos\alpha \cos\phi - r\sin\alpha \sin\phi$
- $y_b = r\sin(\alpha + \phi) = r\sin\alpha \cos\phi + r\cos\alpha \sin\phi$

- $x_b = x_a \cos\phi - y_a \sin\phi$
- $y_b = y_a \cos\phi + x_a \sin\phi$

Rotatie in matrixvorm

Rotatie

$$x_b = x_a \cos\phi - \ y_a \sin\phi$$
$$y_b = y_a \ \cos\phi + \ x_a \ \sin\phi$$

Rotatie in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Rotatie met matrix $\boldsymbol{R}$:

$$\mathbf{p}' = \boldsymbol{R}\mathbf{p}$$

Rekenvoorbeeld 2D rotatie

Rotatie over $45°$:

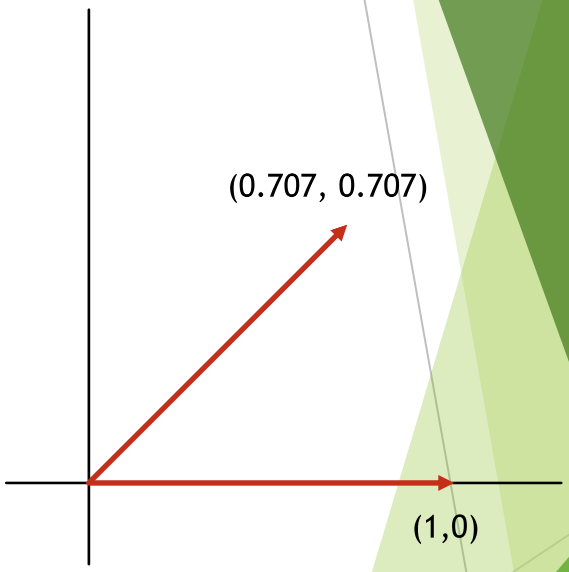
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{pmatrix}$$

Gegeven: vector $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gevraagd: beeldvector $\boldsymbol{p}'$

$$\boldsymbol{p}' = \mathbf{R}\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ tegen klok in



Rotatie tegen klok in

Rotatie tegen de klok in over hoek $\pi/4$

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{pmatrix}$$

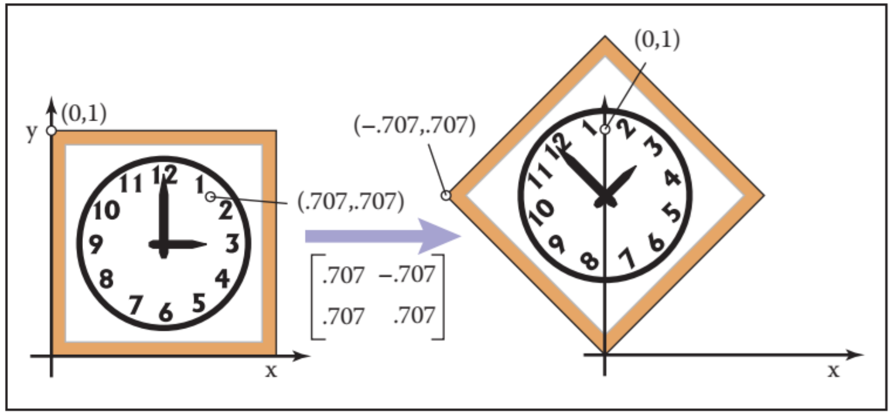


Figure 6.6. A rotation by 45°. Note that the rotation is counterclockwise and that $\cos(45°) = \sin(45°) \approx .707$.

Rotatie met klok mee

Rotatie met klok mee over hoek $-\pi/6$

$$\begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{6}) & -\sin(-\frac{\pi}{6}) \\ \sin(-\frac{\pi}{6}) & \cos(-\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.866 & 0.5 \\ -0.5 & 0.866 \end{pmatrix}$$

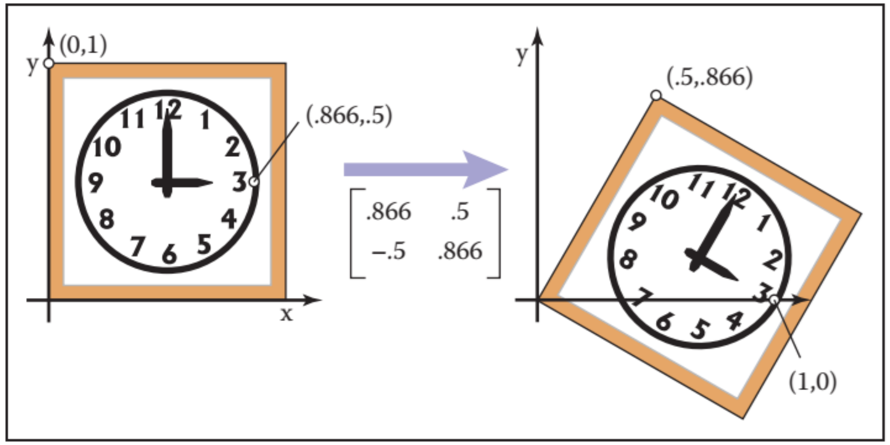


Figure 6.7. A rotation by –30 degrees. Note that the rotation is clockwise and that cos(–30°) ≈ .866 and sin(–30°) = –.5.

Definities: Orthonormaal en orthogonaal

- Een stelsel vectoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zijn orthogonaal als voor elk tweetal vectoren uit dat stelsel geldt dat hun inproduct nul is.
- Een stelsel vectoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zijn orthonormaal als voor elk tweetal vectoren uit dat stelsel geldt dat hun inproduct nul is en als elke vector lengte 1 heeft.
- Een vierkante matrix A heet orthogonaal als $A^T = A^{-1}$

Stelling: De determinant van orthogonale matrix is $+1$ of -1.

Rotatiematrix is orthogonaal met det = 1

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

1. Kolommen van matrix zijn orthogonaal:
$$\cos\phi(-\sin\phi) + \sin\phi\cos\phi = 0$$

2. Elke kolom heeft lengte 1:
$\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = 1$ en $\sqrt{(-\sin\phi)^2 + \cos^2\phi} = 1$

3. Determinant is 1:
$$\det(R) = \cos\phi\cos\phi - (-\sin\phi)\sin\phi = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$$

⇒ rotatiematrix is orthogonale matrix met determinant 1

Oefening

1. Is de volgende matrix orthogonaal? $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$
2. Wat zijn de beeldvectoren van $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ voor $\phi = \pi/6$?
3. Is $\boldsymbol{A}$ een rotatie voor $\phi = \pi/6$?

Antwoorden

1. Is de volgende matrix orthogonaal? $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$

   - Kolommen van de matrix zijn orthogonaal:
     $$\cos\phi\sin\phi + \sin\phi\,(-\cos\phi) = 0$$
   - Elke kolom heeft lengte 1:
     $\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = 1$ en $\sqrt{\sin^2\phi + (-\cos\phi)^2} = 1$

   Dus antwoord is ja.

Antwoorden

2. Wat zijn de beeldvectoren van $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ voor $\phi = \pi/6$?

- $\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ \sin\phi & -\cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ \sin\phi & -\cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}$

Antwoorden

3. Is $\boldsymbol{A}$ een rotatie voor $\phi = \pi/6$?
    - De matrix is orthogonaal, maar $\det(A) = \cos\phi(-\cos\phi) - \sin\phi\sin\phi = -\cos^2\phi - \sin^2\phi = -1$, dus A is geen rotatiematrix.

Spiegeling in matrixvorm

Spiegeling om x-as

$x' = x, \qquad y' = -y$

Spiegeling om x-as in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

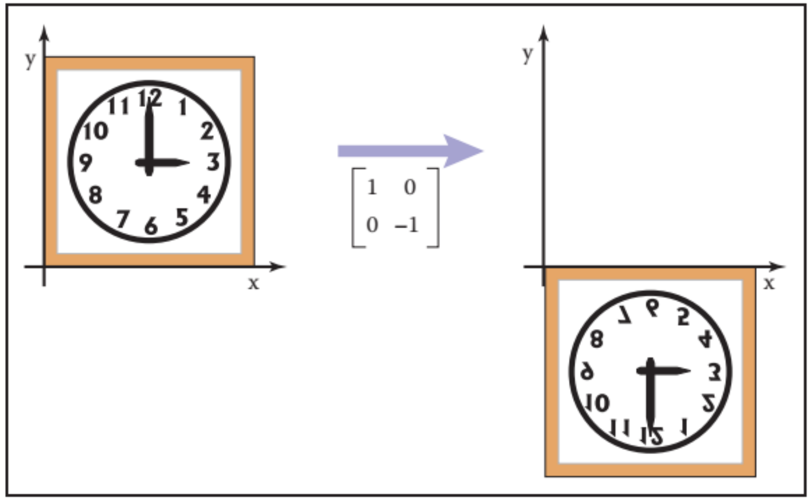


Figure 6.9. A reflection about the x-axis is achieved by multiplying all y-coordinates by -1.

Spiegeling in matrixvorm

Spiegeling om y-as

$x' = -x, \qquad y' = y$

Spiegeling om y-as in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

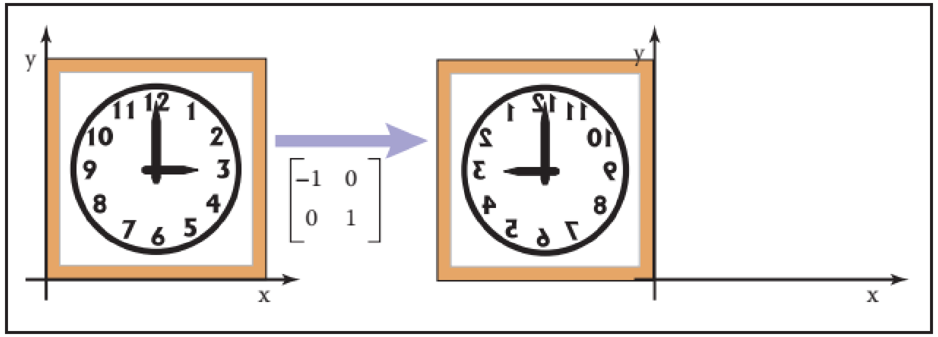


Figure 6.8. A reflection about the y-axis is achieved by multiplying all x-coordinates by -1.

Spiegeling om lijn $y = x$

Spiegeling om lijn $x = y$

$x' = y,$ $y' = x$

Spiegeling om $x = y$ in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Samenstelling van 2D transformaties

In Graphics vaak opeenvolgende transformaties op object

1. Eerst schaling $\mathbf{S}$: $\mathbf{p_2} = \mathbf{Sp_1}$
2. Dan rotatie $\mathbf{R}$: $\mathbf{p3} = \mathbf{Rp_2}$

Andere notatie:

$\mathbf{p_3} = \mathbf{R}(\mathbf{Sp_1}) = \mathbf{RSp_1}$ (eerst $\mathbf{S}$ en dan $\mathbf{R}$)

Product van twee matrices

- Gegeven matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Het product AB is $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
- Wat is BA?
- Het product BA is $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $AB \neq BA$, matrixvermenigvuldiging is niet commutatief

Uitvoeren van productmatrix

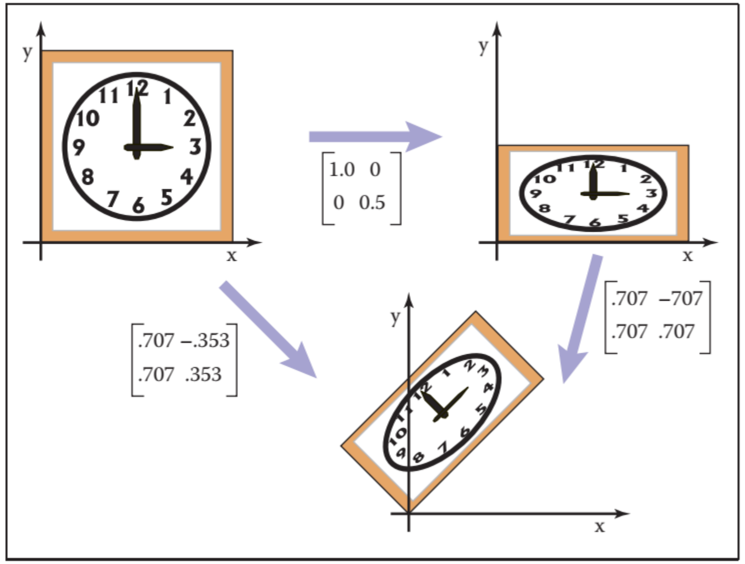


Figure 6.10. Applying the two transform matrices in sequence is the same as applying the product of those matrices once. This is a key concept that underlies most graphics hardware and software.

$$\begin{pmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707 & -0.353 \\ 0.707 & 0.353 \end{pmatrix}$$

Volgorde van transformaties maakt uit

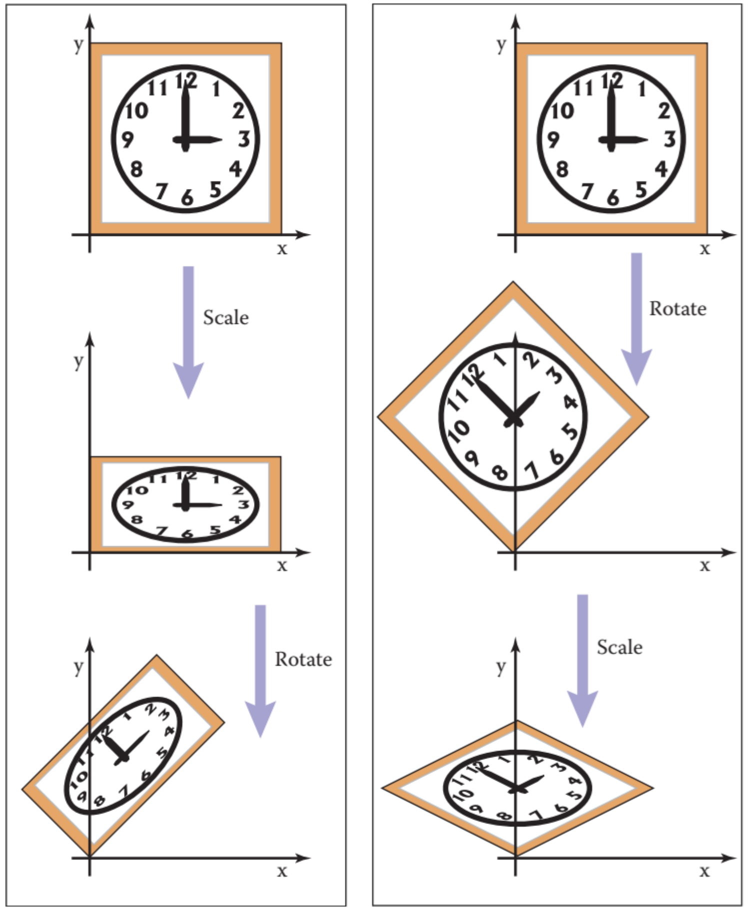


Figure 6.11. The order in which two transforms are applied is usually important. In this example, we do a scale by one-half in y and then rotate by 45°. Reversing the order in which these two transforms are applied yields a different result.

Oefening

1. Wat is $\begin{pmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & -0.7 \\ 0.7 & 0.7 \end{pmatrix}$?
2. Wat is de samengestelde matrix van

   eerst schaling(2, 3), dan rotatie(45°) en dan shear-x(0.2)?
3. Wat is de samengestelde matrix van

   eerst shear-x(0.2), dan schaling(2, 3) en dan rotatie(45°)?

Antwoorden

1. $\begin{pmatrix}1.0 & 0\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.7 & -0.7\\ 0.7 & 0.7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.7 & -0.7\\ 0.35 & 0.35\end{pmatrix}$
2. schaling(2, 3), dan rotatie(45°) en dan shear-x(0.2)

$$\begin{pmatrix}1 & 0.2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.7 & -0.7\\ 0.7 & 0.7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0.2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.4 & -2.1\\ 1.4 & 2.1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.68 & -1.68\\ 1.4 & 2.1\end{pmatrix}$$

3. shear-x(0.2), dan schaling(2, 3) en dan rotatie(45°)

$$\begin{pmatrix}0.7 & -0.7\\ 0.7 & 0.7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0.2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.4 & -2.1\\ 1.4 & 2.1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0.2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.4 & -1.82\\ 1.4 & 2.38\end{pmatrix}$$

N.B.: $ABC = (AB)C = A(BC)$, matrix vermenigvuldiging is associatief.

Oefening

1. Gegeven de volgende afbeelding:
$$x' = y$$
$$y' = x$$
Welke matrix hoort bij deze afbeelding? Wat is deze afbeelding meetkundig gezien?
2. Gegeven de volgende afbeelding:
$$x' = x$$
$$y' = -y$$
Welke matrix hoort bij deze afbeelding? Wat is deze afbeelding meetkundig gezien?
3. Welke matrix correspondeert met afbeelding 1 gevolgd door afbeelding 2?
4. En andersom?
5. Wat doen de afbeeldingen in 3 en 4?

2D transformaties in matrixvorm

- 2D schaling: $\begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \end{pmatrix}$
- 2D x-shear: $\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + sy \\ y \end{pmatrix}$
- 2D y-shear: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + sx \end{pmatrix}$
- 2D rotatie: $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi \end{pmatrix}$
- Een translatie is een veel voorkomende transformatie in Graphics
  Hoe moet dat in matrixvorm?

Translatie

Voor translatie hebben we vector-optelling:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

Hoe noteren we dat in matrixvorm?

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

Met homogene coördinaten matrixvermenigvuldiging

Homogene coördinaten

- Voeg aan elk 2D punt $z = 1$ toe en voeg aan matrix rij en kolom toe:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Translatiematrix T:

$$\boldsymbol{p}' = T\boldsymbol{p}$$

Rekenvoorbeeld 2D translatie

- Translatie met $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$
- Waar gaat $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ in over?

$$\boldsymbol{p}' = T\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2D transformaties in homogene vorm

2D schaling: $\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \\ 1 \end{pmatrix}$

2D x-shear: $\begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + sy \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

2D y-shear: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + sx \\ 1 \end{pmatrix}$

2D rotatie: $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi \\ 1 \end{pmatrix}$

2D translatie: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ 1 \end{pmatrix}$

Voorbeeld

Wat is matrix voor rotatie over 90°om het punt $(2,1)$ (tegen de klok in)?

1. transleer zo dat rotatiecentrum op de oorsprong terecht komt
2. roteer om de oorsprong
3. doe de inverse translatie

De gevraagde transformatie is: $T(2,1)R(90°)T(-2,-1)$:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

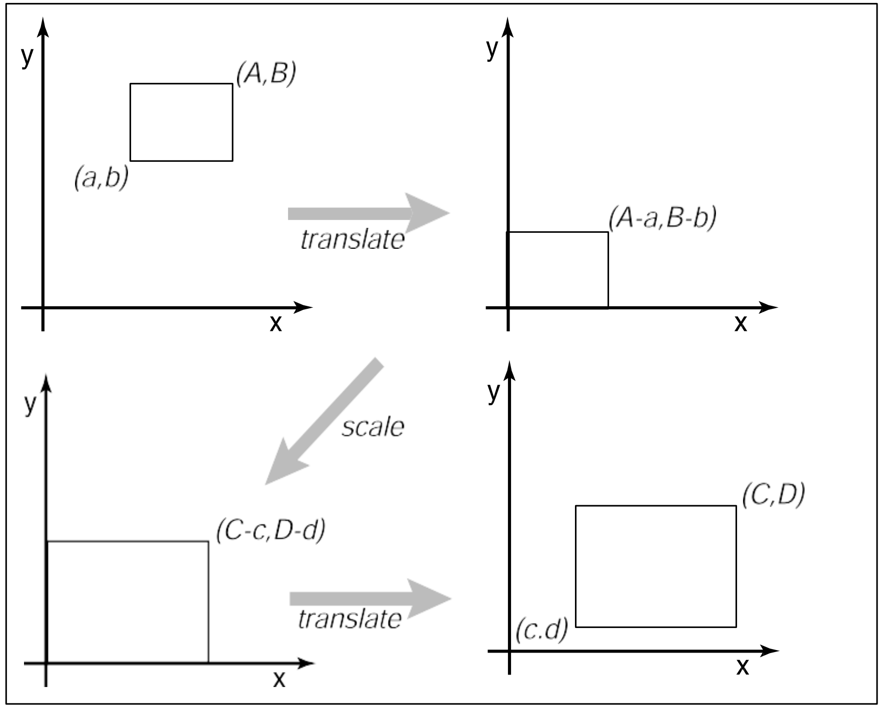
Waar gaat het punt $(3,2)$ in over door deze transformatie?

Opgave

1. Wat is de matrix voor een spiegeling in de lijn $y = -x$?
2. Wat is de matrix voor een spiegeling in de lijn $y = -x + 5$?

2D window transformatie

Voer rechthoek $(a, b)(A, B)$ over in $(c, d)(C, D)$



rechthoek $(a, b)(A, B) \rightarrow (c, d)(C, D)$

- Transleer punt (a, b) naar oorsprong
- Schaal rechthoek naar juiste grootte
- Transleer oorsprong naar (c, d)

- transformatie = transleer (c, d) schaal $(C - c, D - d)$ transleer $(-a, -b)$

rechthoek $(a,b)(A,B) \to (c,d)(C,D)$

- transleer (c,d) schaal $(\frac{C-c}{A-a}, \frac{D-d}{B-b})$ transleer $(-a,-b)$ =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{C-c}{A-a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D-d}{B-b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{C-c}{A-a} & -1 & \frac{cA-Ca}{A-a} \\ 1 & \frac{D-d}{B-b} & \frac{dB-Db}{B-b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse matrix

Definitie: De inverse matrix A^{-1} van een matrix A is de matrix waarvoor geldt: $AA^{-1} = I$

Voorbeeld:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$ omdat

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse van transformaties

1. 2D schaling: $\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \\ 1 \end{pmatrix}$

   Inverse: $\begin{pmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/s_x x \\ 1/s_y y \\ 1 \end{pmatrix}$

2. 2D x-shear: $\begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + sy \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

   Inverse: $\begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - sy \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

Inverse van transformaties

3. 2D rotatie: $$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Inverse: $$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\phi + y\sin\phi \\ -x\sin\phi + y\cos\phi \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. 2D translatie: $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Inverse: $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - d_x \\ y - d_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voorbeeld tentamenvragen

- Waarom worden in Graphics bij transformaties homogene coördinaten gebruikt?
- Welke transformaties zijn er nodig om een rechthoek met hoekpunten (1,1) (linksonder) en $(3,3)$ (rechtsboven) om te zetten naar een rechthoek met hoekpunten $(0,0)$ (linksonder) en $(4,4)$ (rechtsboven)?
- Geef de matrix T die deze transformatie representeert.
- Wat is de inverse matrix van T?
- Waar komt het punt $(2,2)$ terecht als we de inverse van T hierop uitvoeren?

Lineaire transformaties in 3D

3D schaling

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotatie om z-as in 3D

$$\boldsymbol{R}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_z(90°)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rotatie om x- en y-as in 3D

$$\boldsymbol{R}_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

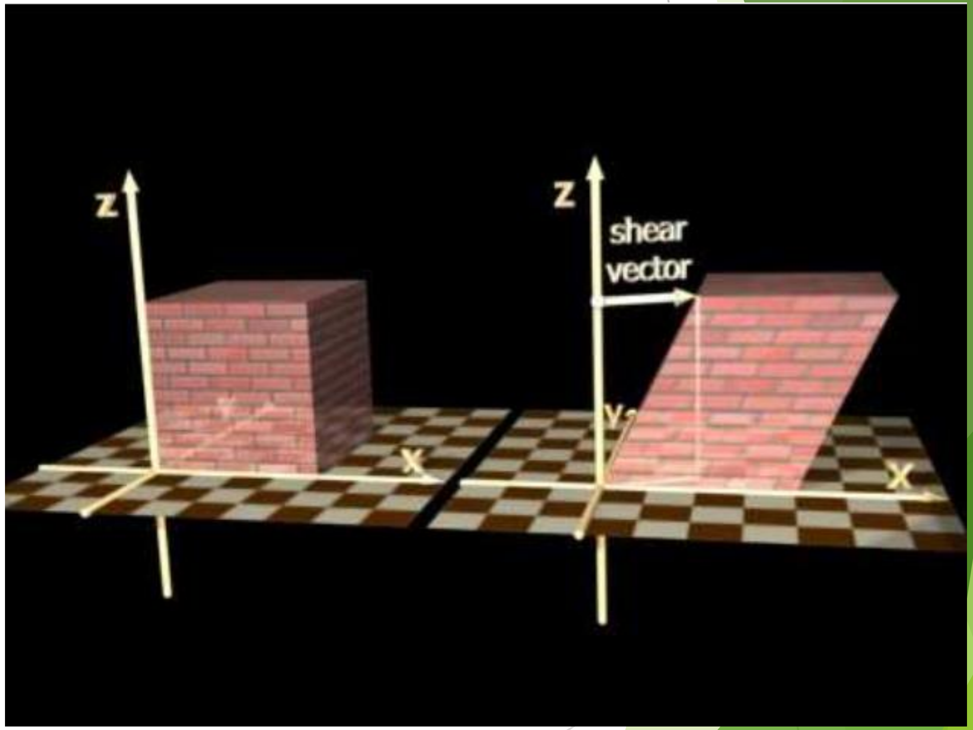
Kolommen van 3×3-matrix loodrecht en eenheidsvectoren

$\Rightarrow$ 3D rotatiematrix is orthogonale matrix

Shear langs x-as

$$\boldsymbol{S}_{d_y,d_z} = \begin{pmatrix} 1 & d_y & d_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 & d_y & d_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + d_y y + d_z z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



3D transformaties in homogene vorm

3D schaling: $\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \\ s_z z \\ 1 \end{pmatrix}$

3D rotatie: $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$

3D x-shear: $\begin{pmatrix} 1 & d_y & d_z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + d_y y + d_z z \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Translatie in homogene vorm

3D translatie: $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ z + d_z \\ 1 \end{pmatrix}$$