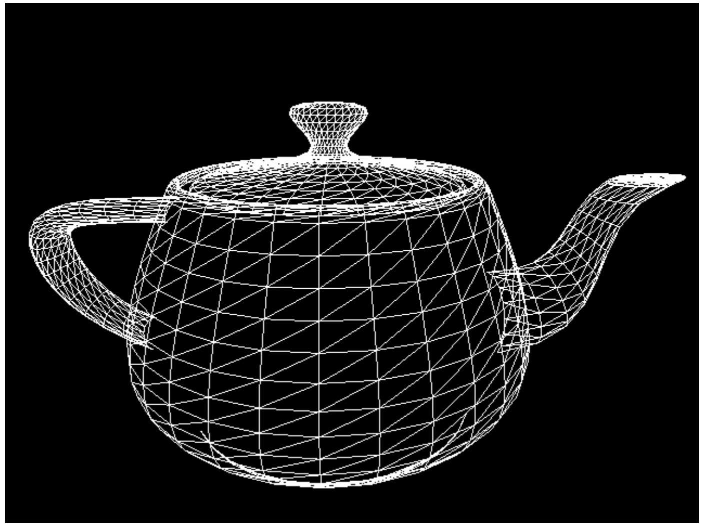
Graphics en Game Technologie

2. Rasterizatie van driehoeken

Robert Belleman
Computational Science Lab
Universiteit van Amsterdam
R.G.Belleman@uva.nl
(voeg a.u.b. “[GGT]” toe aan subject)



Utah teapot

Verzin een tentamenvraag!

- Verzin een tentamenvraag n.a.v. dit college
- Dien in op dit formulier
- Als je vraag wordt gebruikt tijdens een (deel)tentamen ontvang jij een half punt extra op je eindcijfer voor dat (deel)tentamen (bv.: had je een 7, dan krijg je een 7,5)!*

*: Vragen die voorgaande jaren al eens op een (deel)tentamen voor dit vak zijn gesteld zijn van deze regeling uitgesloten.

Rasterizatie van een driehoek

Barycentrische coördinaten

Barycentrische coördinaten

Barycentrische coördinaten gebaseerd op aantal punten

Veel gebruikt bij Graphics, bijvoorbeeld bij:

- driehoek inclusie test: ligt punt in driehoek?
- lineaire interpolatie over driehoek: gegeven 3 hoekpuntkleuren, bepaal kleuren van punt binnen driehoek

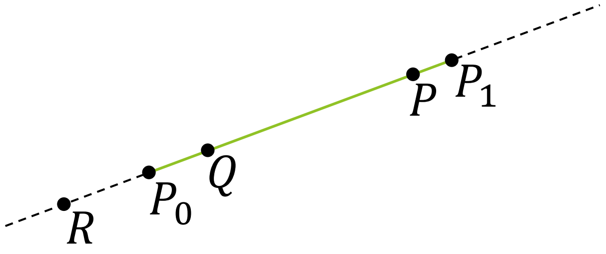
Barycentrische coördinaten van P t.o.v. 2 punten

Barycentrische coördinaten van punt t.o.v. P_0 en P_1 zijn de getallen α, β zó dat:

$P = \alpha P_0 + \beta P_1$ met $\alpha + \beta = 1$ (is lijn)

α, β noemen we ook wel "weegfactoren"

- als $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ dan P op lijnsegment
- anders erbuiten



$$P = 0.25P_0 + 0.75P_1$$
$$Q = 0.66P_0 + 0.34P_1$$
$$R = 1.33P_0 - 0.33P_1$$

Barycentrische coördinaten van P t.o.v. 3 punten

De barycentrische coördinaten van punt t.o.v. P_0, P_1 en P_2 zijn de getallen α, β, γ zó dat:

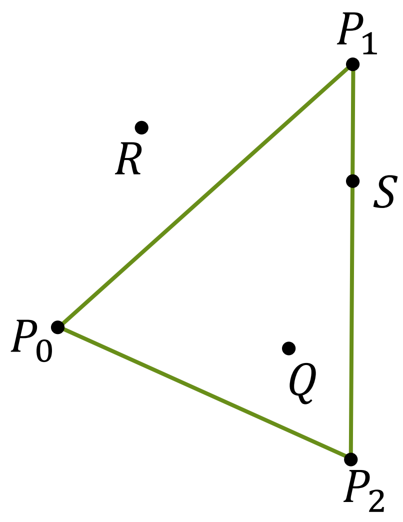
$P = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2$ met de beperking dat $\alpha + \beta + \gamma = 1$

Barycentrische coördinaten gedefinieerd voor alle punten in een vlak

- als $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$ dan ligt P in driehoek
- als één van weegfactoren gelijk nul, dan op rand
- als twee van weegfactoren gelijk nul, dan op hoekpunt
- anders buiten de driehoek

Barycentrische coördinaten van P t.o.v. 3 punten

Alle $P = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2$ met $\alpha + \beta + \gamma = 1$ liggen in vlak



- $Q = 0.25P_0 + 0.25P_1 + 0.5P_2$ in driehoek
  want $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$
- $R = 0.5P_0 + 0.75P_1 - 0.25P_2$ buiten driehoek
  want $\gamma = -0.25 < 0$
- $S = 0P_0 + 0.75P_1 + 0.25P_2$ op rand driehoek
  want $\alpha = 0$
- $P_2 = 0P_0 + 0P_1 + P_2$ in punt driehoek
  want $\alpha = \beta = 0$

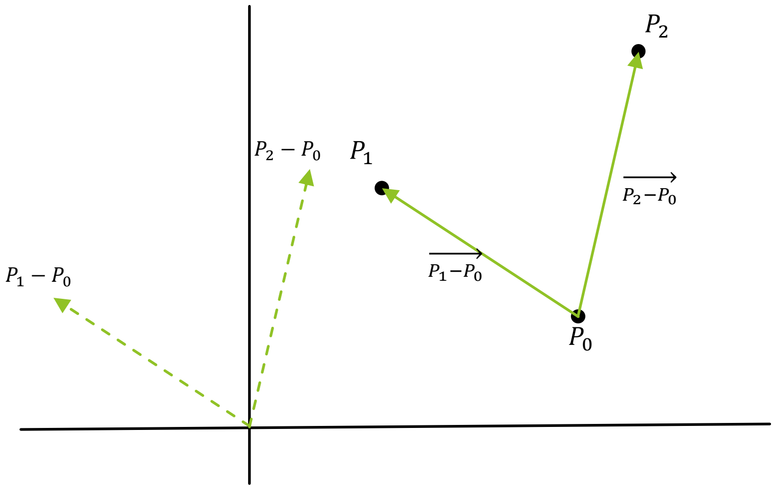
Berekening barycentrische coördinaten in 2D

Gegeven: $P_0 = (x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1)$ en $P_2 = (x_2, y_2)$
Bereken: barycentrische coördinaten (β, γ) van P $(\alpha = 1 - \beta - \gamma)$

$$P = P_0 + \beta(P_1 - P_0) + \gamma(P_2 - P_0) \Rightarrow$$

$$\beta(P_1 - P_0) + \gamma(P_2 - P_0) = P - P_0$$

$$\beta\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$



Twee vergelijkingen met twee onbekenden:

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Berekening barycentrische coördinaten

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Los op: $Ax = b$

1. bekend: A 2×2 matrix met coördinaten 3 gegeven punten
2. bekend: b vector met coördinaten punt P en P_0
3. onbekende: x met β en γ

Berekening barycentrische coördinaten

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Los op: $Ax = b$ met $x = (\beta, \gamma)$ en $\boxed{\alpha = 1 - \beta - \gamma}$

Verschillende manieren:

1. Inverteren matrix A: $A^{-1}b$
2. Regel van Cramer m.b.v. determinanten
3. Geometrische oplossing: $\beta = \frac{f_{20}(x,y)}{f_{20}(x_1,y_1)}, \gamma = \frac{f_{01}(x,y)}{f_{01}(x_2,y_2)}$ met

$$f_{20}(x,y) = (y_2 - y_0)x + (x_0 - x_2)y + x_2 y_0 - x_0 y_2$$
$$f_{01}(x,y) = (y_0 - y_1)x + (x_1 - x_0)y + x_0 y_1 - x_1 y_0$$

Toepassing 1: ligt punt in driehoek?

Gegeven: punt $P = (4, 4)$ en driehoek door $P_0 = (4, 6)$, $P_1 = (2, 1)$ en $P_2 = (6, 3)$
Gevraagd: Ligt P in driehoek?

Bereken barycentrische coördinaten van P t.o.v. P_0, P_1 en P_2:
$P = P_0 + \beta(P_1 - P_0) + \gamma(P_2 - P_0)$

$$\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

$$\beta\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-2 & 2\\-5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 2\\-5 & -3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$

Toepassing 1: ligt punt in driehoek?

- Inverse van $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ is $\frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
  - (voor vierkante matrices)
- $\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} & -\frac{1}{8} \\ \frac{5}{16} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta = 0.25$ en $\gamma = 0.25 \Rightarrow \alpha = 0.5$
- $P = 0.5P_0 + 0.25P_1 + 0.25P_2$
- Som weegfactoren $\alpha + \beta + \gamma = 1$ en $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1 \Rightarrow P$ in driehoek

Toepassing 2: lineaire interpolatie over driehoek

Gegeven: 3 hoekpuntkleuren (c_0, c_1, c_2)

Gevraagd: kleur c van punt P binnen driehoek

1. Bereken barycentrische coördinaten (α, β, γ) van P t.o.v. P_0, P_1 en P_2
2. Kleur c van P is: $c = \alpha c_0 + \beta c_1 + \gamma c_2$

Deze kleurinterpolatie heet Gouraud interpolation

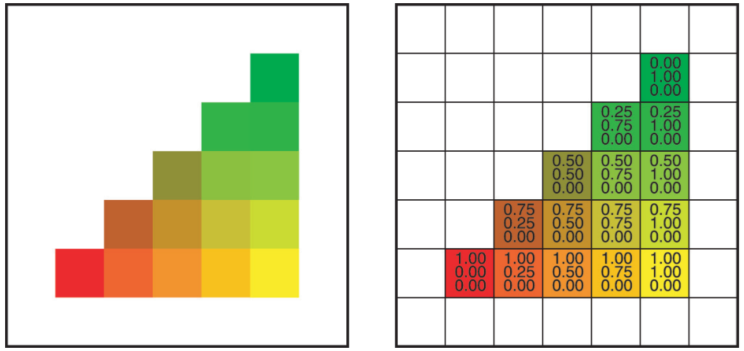


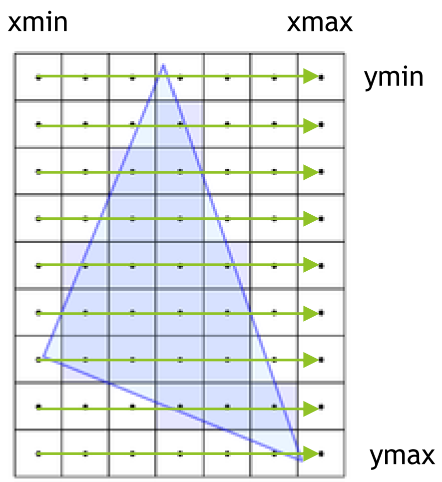
Figure 8.5. A colored triangle with barycentric interpolation. Note that the changes in color components are linear in each row and column as well as along each edge. In fact it is constant along every line, such as the diagonals, as well.

Rasterizatie van een driehoek

Rasterizatie van driehoek

Rasterizatie-algoritme van driehoek

```
for y = ymin to ymax do
    for x = xmin to xmax do
        compute (alpha, beta, gamma) for (x, y)
        if (alpha, beta, gamma tussen 0 en 1) then
            c = alpha c0 + beta c1 + gamma c2
            drawpixel (x, y) with color c
```



Rasterizatie van driehoek

```
bepaal bounding box xmin, xmax, ymin, ymax
for y = ymin to ymax do
    for x = xmin to xmax do
        beta  = f20(x, y) / f20(x1, y1)
        gamma = f01(x, y) / f01(x2, y2)
        alpha = 1 - beta - gamma
        if (alpha, beta, gamma > 0) then  // dan ook < 1
            c = alpha c0 + beta c1 + gamma c2
            drawpixel (x, y) with color c
```

Practicumopgave: maak algoritme incrementeel

Berekening barycentrische coördinaten in 3D

Gegeven: P_0, P_1 en P_2

Bereken: barycentrische coördinaten (α, β, γ) van P

$$P = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2$$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Drie vergelijkingen met drie onbekenden:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Berekening barycentrische coördinaten in 3D

Als $\alpha + \beta + \gamma = 1$, dan P in vlak gedefinieerd door 3 gegeven punten (dan noem je α, β, γ barycentrische coördinaten)

1. Punt P in driehoek $\Leftrightarrow 0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$
2. Als één van de barycentrische coördinaten gelijk 0 is, en andere twee tussen 0 en 1, dan punt op rand driehoek
3. Als twee van de barycentrische coördinaten gelijk 0, en andere is 1, dan punt is een van de hoekpunten

Ligt 3D punt in driehoek?

Gegeven: punt $P = (1.4, 1.0, 0.8)$ en
driehoek door $P_0 = (1, 1, 0)$, $P_1 = (2, 5, 1)$ en $P_2 = (1, -3, 1)$

Gevraagd: Ligt P in driehoek (en dus in vlak door P_0, P_1, P_2)?

Bereken coördinaten van P t.o.v. P_0, P_1en P_2: $P = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 1.0 \\ 0.8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 8 & -1 & -11 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.4 \\ 1.0 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 1$$

Punt P ligt in vlak en in driehoek

Ligt 3D punt in driehoek met weinig rekenwerk

Gegeven: punt $P = (1.4, 1.0, 0.8)$ en
driehoek door $P_0 = (1, 1, 0)$, $\;P_1 = (2, 5, 1)$ en $P_2 = (1, -3, 1)$

Gevraagd: Ligt P in driehoek (en dus in vlak door P_0, P_1, P_2)?

Vlak door P_0, P_1, P_2 is: $P \;=\; P_0 + \lambda(P_1 - \mathrm{P}_0) + \mu(P_2 - \mathrm{P}_0)$

$$\begin{pmatrix} 1.4 \\ 1.0 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Drie vergelijkingen met twee onbekenden

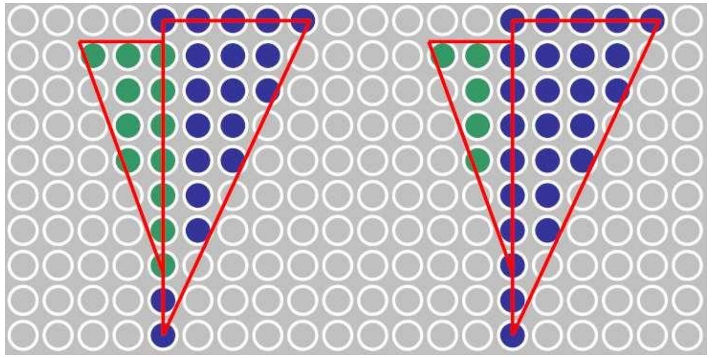
$$\begin{pmatrix}1.4\\1.0\\0.8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix} \rightarrow$$

$1.4 = 1 + \lambda$
$1.0 = 1 + 4\lambda - 4\mu$
$0.8 = \lambda + \mu$

Oplossen levert $\lambda = \mu = 0.4$
$P = P_0 + 0.4(P_1 - P_0) + 0.4(P_2 - P_0)$
$P = 0.2P_0 + 0.4P_1 + 0.4P_2$

Dus P ligt in driehoek

Pixels op rand van driehoek

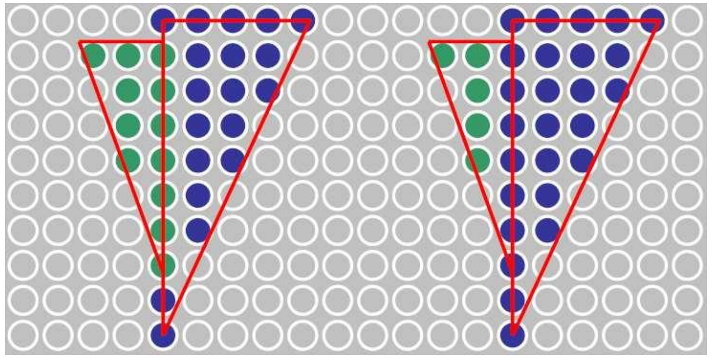


Wat met pixels precies op rand?

Tot welke driehoek behoort rand-pixel?

Beste is pixel toekennen aan één driehoek

Problemen bij rasterisatie van driehoek



- Welke pixels moeten gekleurd worden?
  - Pixels binnen rand van driehoek
- Wat met pixels precies op rand?
  - teken - maar dan maakt de volgorde van driehoeken uit
  - teken niet - maar dan krijg je gaten tussen aangrenzende driehoeken

Speciale afspraak nodig, b.v.
teken pixels op linker of boven rand, maar niet op rechter of beneden rand

Twee driehoeken met gemeenschappelijke rand

Kies off-screen point:

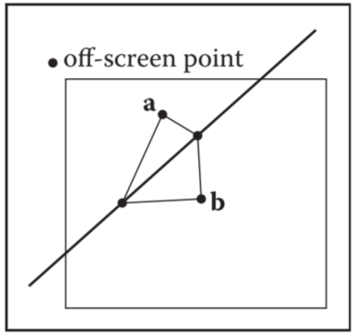


Figure 8.6. The off-screen point will be on one side of the triangle edge or the other. Exactly one of the non-shared vertices **a** and **b** will be on the same side.

rand getekend voor driehoek aan off-screen kant

dus driehoek met a bezit rand

Off-screen kant

Lijn door $(x_1, y_1)\ en\ (x_2, y_2)$:

$$f(x, y) = (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

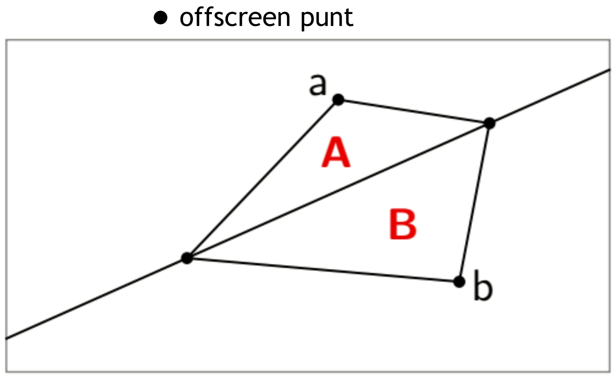
Als $m \in (0, 1]$:

1. punt boven lijn positief
2. punt beneden lijn negatief

Rand tekenen voor A

$f(x_a, y_a) > 0$ en $f(x_{off}, y_{off}) > 0$, omdat $m \in (0, 1]$

Voor alle m:
$f(x_a, y_a)$ en $f(x_{off}, y_{off})$ moeten zelfde teken hebben



Rand tekenen

Gegeven: gemeenschappelijke rand door (x_1, y_1) en (x_2, y_2)

Gevraagd: pixel (x, y) op rand tekenen?

Lijn door (x_1, y_1) en (x_2, y_2):

$$f_{12}(x, y) = (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

1. $\alpha = \frac{f_{12}(x,y)}{f_{12}(x_0,y_0)} = 0$
2. Als $f_{12}(x_0, y_0)f_{12}(x_{off}, y_{off}) > 0$ dan tekenen

Algoritme voor randen driehoeken

$$(x_{off}, y_{off}) = (-1, -1)$$

```
bepaal bounding box xmin, xmax, ymin, ymax
for y = ymin to ymax do
    for x = xmin to xmax do
        beta  = f20(x, y) / f20(x1, y1)
        gamma = f01(x, y) / f01(x2, y2)
        alpha = 1 - beta – gamma
        if (alpha, beta, gamma >= 0) then
            if (alpha > 0 or f12(x0, y0)f12(-1, -1) > 0) and
                (conditie voor beta) and
                (conditie voor gamma) then
                    c = alpha c0 + beta c1 + gamma c2
                    drawpixel (x, y) with color c
```

Aliasing

… en wat je er aan kunt doen: anti-aliasing

Aliasing

Aliasing is probleem in computer graphics omdat resolutie van

- scherm is eindig
- wiskundige modellen die beeld beschrijven zijn oneindig

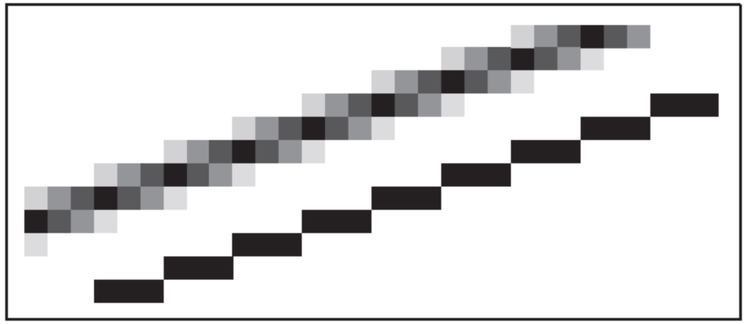


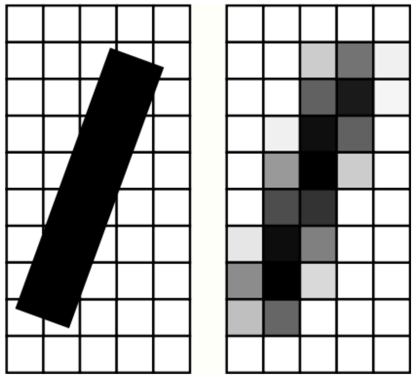
Figure 8.15. An antialiased and a jaggy line viewed at close range so individual pixels are visible.

Details van continue lijn hebben hogere frequentie dan pixels

Anti-aliasing

Probleem van aliasing in beelden verminderen

Box filter: kleur pixel berekenen door overlap tussen rechthoek bepaald door lijn en pixel



Verzin een tentamenvraag!

- Verzin een tentamenvraag n.a.v. dit college
- Dien in op dit formulier
- Als je vraag wordt gebruikt tijdens een (deel)tentamen ontvang jij een half punt extra op je eindcijfer voor dat (deel)tentamen (bv.: had je een 7, dan krijg je een 7,5)!*

*: Vragen die voorgaande jaren al eens op een (deel)tentamen voor dit vak zijn gesteld zijn van deze regeling uitgesloten.