

# Datacommunicatie 2

Professor: Peter Hanselaer & Nobby Stevens

**Lennart VAN DAMME**

**Stiaan UYTTERSPROT**  
**Maxim DEWEIRDT**  
**Gilles CALLEBAUT**

©Copyright Lennart Van Damme

Zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de auteur(s) is overnemen, kopiëren, gebruiken of realiseren van deze uitgave of gedeelten ervan verboden.

# Inhoudsopgave

<b>1 Inleiding</b>	<b>1</b>
1.1 Signalen sturen . . . . .	2
<b>2 Licht als elektromagnetische golf</b>	<b>3</b>
2.1 Oscillaties . . . . .	3
2.2 Golven . . . . .	3
2.3 Vlakke golven . . . . .	5
2.4 Golf vergelijking . . . . .	6
2.4.1 Fasor . . . . .	6
2.4.2 Probleem . . . . .	7
2.5 Elektromagnetische golven . . . . .	8
2.5.1 Uitwerking Maxwell voor vlakke golven . . . . .	8
2.5.2 Het bepalen van $c$ . . . . .	9
2.5.3 Voorstelling van een elektromagnetische golf . . . . .	10
2.5.4 Polarisatie . . . . .	11
2.5.5 Elektromagnetische spectrum . . . . .	11
2.6 Impedantie . . . . .	12
2.6.1 Bepalen van de impedantie . . . . .	12
2.7 Power Density . . . . .	14
2.8 Interactie met het medium . . . . .	15
2.8.1 Golflengte . . . . .	15
2.8.2 Absorptie . . . . .	15
2.9 Superpositie van golven . . . . .	18
2.9.1 Interferentie . . . . .	19
2.9.2 Staande golven . . . . .	21
2.9.3 Groepsnelheid . . . . .	21
<b>3 Reflectie en Refractie in een medium</b>	<b>24</b>
3.1 Algemene Benadering . . . . .	24
3.1.1 Geometrie . . . . .	24
3.1.2 Elektrische velden . . . . .	25

3.1.3	Grens condities . . . . .	26
3.2	Richtingen van reflectie- en refractiegolven . . . . .	26
3.2.1	De wet van Snellius . . . . .	26
3.2.2	Bespreking . . . . .	28
3.2.3	Toepassingen . . . . .	29
3.3	Groottes van reflectie- en refractiegolven . . . . .	31
3.3.1	Amplitude coëfficient van reflectie en transfer . . . . .	31
3.3.2	Formules van Fresnel . . . . .	32
3.3.3	Vermogen coëfficienten . . . . .	32
3.3.4	Bespreking . . . . .	33
3.3.5	Toepassingen . . . . .	38
3.4	Uitdovend veld . . . . .	39
3.4.1	Veld penetratie . . . . .	39
3.4.2	Toepassing: fibre koppeling . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Optische golfgeleiders en fibres</b>	<b>41</b>
4.1	Numerical aperture . . . . .	41
4.2	Vlakke golfgeleiders . . . . .	42
4.2.1	Aantal modes in vlakke golfgeleiders . . . . .	45
4.2.2	Amplitude bij vlakke golfgeleiders . . . . .	46
4.3	Cylindrische golfgeleiders . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Attenuatie en Dispersie</b>	<b>49</b>
5.1	Inleiding . . . . .	49
5.2	Attenuatie . . . . .	49
5.2.1	Klassificatie . . . . .	49
5.2.2	Intrinsieke attenuatie . . . . .	50
5.2.3	Buiging . . . . .	53
5.2.4	Koppeling . . . . .	55
5.3	Dispersie . . . . .	55
5.3.1	Intermodal . . . . .	55
5.3.2	Materiaal . . . . .	57
5.3.3	Waveguide . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Datatransmissie</b>	<b>60</b>
6.1	Invloed van het fysische medium . . . . .	61
6.2	Basebandsignalen . . . . .	61
6.3	Opfrissing . . . . .	62
6.3.1	Fourrier getransformeerde vermenigvuldigd met cosinus . . . . .	62
6.3.2	Transferfunctie . . . . .	63

6.4 Ruis . . . . .	63
6.4.1 AWGN . . . . .	63
6.5 Matched Filter . . . . .	64
<b>7 Multimedia Networking</b> . . . . .	<b>65</b>
7.1 Multimedia Networking Applications . . . . .	65
7.1.1 Properties of Video . . . . .	65
7.1.2 Properties of Audio . . . . .	66
7.1.3 Types of Multimedia Network Applications . . . . .	66
7.2 Streaming Stored video . . . . .	67
7.2.1 UDP Streaming . . . . .	68
7.2.2 HTTP Streaming . . . . .	68
7.2.3 Adaptive Streaming en DASH . . . . .	70
7.2.4 Content Distribution Networks (CDN) . . . . .	71
7.2.5 Case Studies: Netflix, YouTube en Kankan . . . . .	73
7.3 Voice-over-IP . . . . .	75
7.3.1 Limitations of the Best-Effort IP Service . . . . .	75
7.3.2 Removing Jitter at the Receiver for Audio . . . . .	76
7.3.3 Recovering from Packet Loss . . . . .	77
7.3.4 Case Study: VoIP with Skype . . . . .	79
7.4 Protocols for Real-Time Conversational Applications . . . . .	81
7.4.1 RTP . . . . .	81
7.4.2 SIP . . . . .	82
7.5 Network Support for Multimedia . . . . .	85
7.5.1 Dimensioning Best-Effort Networks . . . . .	86
7.5.2 Providing Multiple Classes of Service . . . . .	87
7.5.3 Diffserv . . . . .	93
7.5.4 Per-Connection Quality-of-Service (QoS) Guarantees: Resource Reservation and Call Admission . . . . .	94
7.6 Summary . . . . .	95
<b>A Wiskundige begrippen</b> . . . . .	<b>97</b>
A.1 Determinant . . . . .	97
A.1.1 Definitie . . . . .	97
A.1.2 2x2 matrix . . . . .	97
A.1.3 3x3 matrix . . . . .	98
A.1.4 Divergent van een vectorveld . . . . .	98
A.1.5 Laplacian . . . . .	98
A.1.6 Rotor van een vectorveld . . . . .	99
A.2 Formules uit de fysica . . . . .	99

A.2.1 Maxwell . . . . .	99
A.2.2 Samenvatting van golfeigenschappen . . . . .	100
<b>B Verder uitwerking</b>	<b>101</b>
B.1 Uitwerking partiële afgeleiden van de fasor van de golfuitdrukking in $y$ -richting en $z$ -richting . . . . .	101
B.2 Uitwerking Maxwell vergelijking voor een vlakke golf in $x$ -richting . . . . .	101
B.2.1 Uitwerking van (A.5b) . . . . .	101
B.2.2 Uitwerking van (A.5c) . . . . .	102
B.2.3 Uitwerking van (A.5d) . . . . .	102
<b>C Formularium</b>	<b>103</b>
C.1 Inleiding . . . . .	103
C.2 Licht als elektromagnetische golf . . . . .	103
C.3 Reflectie en Refractie in een medium . . . . .	105

# Lijst van figuren

1.1	Bit transport en bandbreedte . . . . .	2
2.1	Golf als film en foto . . . . .	4
2.2	Voorbeeld radiogolven . . . . .	5
2.3	Reden benaming vlakke golf . . . . .	6
2.4	Voorstelling van een elektromagnetische golf . . . . .	10
2.5	Polaristatie . . . . .	11
2.6	Elektromagnetische spectrum . . . . .	11
2.7	$\vec{E}$ en $\vec{H}$ in fase . . . . .	13
2.8	Absorptie in het medium . . . . .	16
2.9	Interferentie . . . . .	19
2.10	default . . . . .	20
2.11	Samengestelde golf . . . . .	22
3.1	Voorstelling vectoren invallende golven in een medium . . . . .	24
3.2	Analoog aan figuur 3.1 op pagina 24, maar in een ander perspectief . . . . .	25
3.3	Prisma . . . . .	27
3.6	Fata morganna . . . . .	30
3.7	Zonnecel . . . . .	30
3.8	Modules (3.8a) en fase (3.8b) van de amplitude reflectiecoëfficiënten bij $n_1 = 1$ en $n_2 = 1,5$ . . . . .	35
3.9	Vermogen coëfficiënt voor $n_1 = 1$ en $n_2 = 1,5$ . . . . .	35
3.10	Modules (3.10a) en fase (3.10b) van de amplitude reflectiecoëfficiënten bij $n_1 = 1,5$ en $n_2 = 1$ . . . . .	38
3.11	Vermogen coëfficiënt voor $n_1 = 1,5$ en $n_2 = 1$ . . . . .	38
3.12	Gepolariseerde zonnebril . . . . .	39
3.13	Fibre koppeling . . . . .	40
4.1	Numerieke aperatuur . . . . .	41
4.2	Vlakke waveguides . . . . .	42
4.3	Modes in vlakke golfgeleiders . . . . .	43
4.4	Oplossing van de resonantievoorwaarde . . . . .	44

4.5 Vergelijking orde $m$ . . . . .	47
4.6 Voorplantings methoden cilindrische golfgeleider . . . . .	47
4.7 Elektrisch veld in cirulaire fibre . . . . .	48
5.1 Effecten van attenuatie en dispersie . . . . .	49
5.2 Variatie in attenuatie afhangelijk van $\lambda$ . . . . .	51
5.3 Voorstelling van scattering . . . . .	52
5.4 Soorten buigingen in een fibre . . . . .	54
5.5 Resultaat van buigingen . . . . .	54
5.6 Modes in een fibre (gebruikt om snelheid te bepalen) . . . . .	56
5.7 Voorstelling van de pulsverbreding . . . . .	56
5.8 Waarden voor $D_m$ . . . . .	58
5.9 $n_g$ en $n$ in functie van $\lambda$ . . . . .	58
6.1 Blokschema voor datatransmissie . . . . .	60
6.2 Basebandsignalen . . . . .	62
6.3 Matched filter . . . . .	64
7.1 Streaming stored video over HTTP/TCP . . . . .	69
7.2 Analysis of client-side buffering for video streaming . . . . .	69
7.3 DNS redicts a user's request to a CDN server . . . . .	72
7.4 Using IP anycast to route clients to closest CDN cluster . . . . .	73
7.5 Netflix video streaming platform . . . . .	74
7.6 Packet loss for different fixed playout delays . . . . .	77
7.7 Piggybacking lower-quality redundant information . . . . .	78
7.8 Sending interleaved audio . . . . .	79
7.9 Skype peers . . . . .	80
7.10 RTP header fields . . . . .	81
7.11 SIP call establishment when Alice knows Bob's IP address . . . . .	83
7.12 Example of a SIP INVITE message . . . . .	84
7.13 Session initiation, involving SIP proxies and registrars . . . . .	85
7.14 Competing audio and HTTP applications . . . . .	87
7.15 Policing (and marking) the audio and HTTP traffic classes . . . . .	88
7.16 Logical isolation of audio and HTTP traffic classes . . . . .	89
7.17 FIFO queuing abstraction . . . . .	89
7.18 The FIFO queue in operation . . . . .	90
7.19 Priority queuing model . . . . .	90
7.20 Operation of the priority queue . . . . .	90
7.21 Operation of the two-class round robin queue . . . . .	91
7.22 Weighted fair queuing (WFQ) . . . . .	91

7.23 The leaky bucket policer . . . . .	92
7.24 $n$ multiplexed leaky bucket flows with WFQ scheduling . . . . .	93
7.25 A simple DiffServ network example . . . . .	93
7.26 Two competing audio applications overloading the R2-to-D2 (hihi) link [R1-R2 link] . .	95
A.1 Regel van Sarrus . . . . .	98

# Lijst van tabellen

7.1	Overzicht van bit-rate van drie multimedia apps . . . . .	65
7.2	Audio payload types supported by RTP . . . . .	81
7.3	Some video payload types supported by RTP . . . . .	82
7.4	Three network-level approaches to supporting multimedia applications . . . . .	86
A.1	Samenvatting van golfeigenschappen . . . . .	100
A.2	Snelheid van geluid in verschillende media . . . . .	100

# Hoofdstuk 1

## Inleiding

Een van de belangrijkste items in datacommunicatie is de bitrate. We willen namelijk zo snel mogelijk onze data verstuurd krijgen. Het is daarbij tevens belangrijk op te merken dat de bitrate hoger moet voor bepaalde toepassingen. We kijken hiervoor naar telefonie en naar HDTV (1920x1020):

### Voorbeeld: Bitrate voor spraak

Voor spraak hebben we frequenties nodig van 20 Hz tot 20 kHz. Binnen deze frequentieband is de mens in staat te horen. Om een digitaal signaal te bekomen uit een analoog signaal dient het gesampled te worden. Om te weten aan welke frequentie gesampled moet worden kan gebruik gemaakt worden van het Nyquist theorema, te zien in formule (1.1).

$$f_s \geq 2 f_{max} \quad (1.1)$$

Dit theorema stelt dat de sample frequentie minstens 2 maal zo groot moet zijn als de hoogste frequentie in het oorspronkelijke signaal. Voor spraak krijgen we dan de samplefrequentie  $f_s = 40\text{kHz}$ . Voor spraak zien we echter dat we maximaal 4 kHz nodig hebben, dus de samplefrequentie nodig in praktische toepassingen wordt 8 kHz. Voor telefonie gebruiken we 8 bit om onze data voor te stellen. Hierdoor krijgen we volgende bitrate nodig voor telefonie:

$$8\text{ bits} \times 8\text{ kHz} = 64 \frac{\text{bits}}{\text{s}}$$

Kijken we nu naar HDTV met een frame rate van 32 fps, dan krijgen we volgende bitrate<sup>a</sup>:

$$1920 \times 1080 \times 3 \times 32 \times 8 = 1,592 \frac{\text{Gbit}}{\text{s}}$$

Door comprimeren en technieken ontwikkeld binnen de IT sector kan deze bitrate beperkt worden tot ongeveer een 30 Mbit per seconde.

---

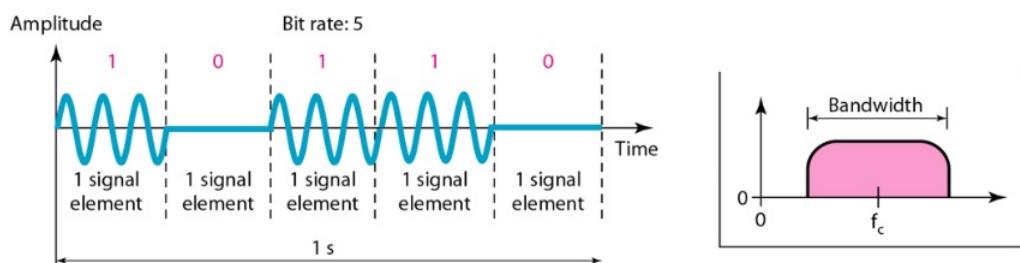
<sup>a</sup>Elke pixel heeft drie kleuren en deze kleuren hebben elk 256 tinten, dit zorgt ervoor dat er 8 bit nodig is per kleur.

De nood aan bits per seconde is groot hedendaags. Hiervoor zijn enkele verklaringen:

- Onze levensstijl is veranderd door de groei van het Internet en ons internetgebruik
- Meer en meer toepassingen vragen meer bandbreedte
- PC's hebben meer opslagcapaciteit en de processing power is enorm toegenomen.
- Er is een grote keuze aan applicaties die remote kunnen benaderd worden en grote databanken met veel informatie vragen ook veel bandbreedte.

## 1.1 Signalen sturen

Hoe sturen we nu bits door? Simpel, we versturen het bit signaal vermenigvuldigd met een carriersignaal met een bepaalde carrierfrequentie  $f_c$ . Dit zorgt ervoor dat bij een 1 in het bit signaal het carriersignaal volledig wordt verzonden. Bij een 0 zal er een signaal verstuurd worden met een amplitude gelijk aan nul. Dit is deels te zien in 1.1. Het is ook nodig de bandbreedte te verhogen om aan een hogere bitrate te kunnen komen. Dit kunnen we doen door de carrierfrequentie te verhogen.



**Figuur 1.1:** Bit transport en bandbreedte

Als we de carrierfrequentie blijven opdrijven dan krijgen we eigenlijk te maken met licht. De frequentie is dan zo hoog dat we met elektrische signalen niet meer toekomen. Het gebruik van licht en fiber heeft bepaalde voordelen:

**Lange afstand transmissie** In vergelijking met koperdraden, zijn er in fiber minder transmissieverliezen. Dit zorgt ervoor dat data over langere afstand kan verzonden worden.

**Grote informatie capaciteit** Fiber heeft een grotere bandbreedte dan koper, zodat er meer info verstuurd kan worden over een fysische lijn.

**Kleine grootte en laag gewicht** Fiber draden zijn relatief klein en wegen weinig.

**Immuun aan elektrische interferentie** Fiber is een diëlectricum. Hierdoor is het immuun aan elektromagnetische interferentie etc.

**Verbeterde veiligheid** Er zijn geen aardingen nodig bij fiber, alsook geen potentiële hoge spanningen.

**Verhoogde signaal beveiliging** Een signaal blijft binnen de fiber en er is een coating die het licht niet binnen of buiten laat.

## Hoofdstuk 2

# Licht als elektromagnetische golf

### 2.1 Oscillaties

Een oscillatie van een bepaalde waarde is een verandering van die waarde in de tijd over een bepaalde periode. Wanneer deze oscillatie beschreven kan worden door middel van een sinus of cosinus spreken we van een harmonische oscillatie. Deze kan beschreven worden door volgende vorm:

$$u(t) = U \cos(\omega t + \phi) \quad (2.1)$$

Hierbij is  $\omega$  gelijk aan de pulsatie, fasesnelheid, cirkelfrequentie.

### 2.2 Golven

Een golf is de voortplanting van een oscillatie met een snelheid  $c^1$ . Een golf heeft een golflengte. Dit is de afstand die een golf aflegt in één periode. Algemeen krijgen we volgende belangrijke formule:

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f} \quad (2.2)$$

De frequentie van een golf is afhankelijk van de bron van de golf, niet van het medium waarbinnen de golf zich bevindt. De golflengte daarentegen is wel afhankelijk van het medium.

Als we een algemene uitdrukking willen voor een golf dienen we vergelijkingen (2.3a) en (2.3b) samen te voegen. Formule 2.3a drukt uit dat de waarde van de golf op een bepaalde plaats  $x$  op het tijdstip  $t$  gelijk is aan de waarde die gevonden wordt in de oorsprong, op het tijdstip  $t - \frac{x}{c_x}$ .

$\frac{x}{c_x}$  is de tijd die de golf nodig heeft om op de plaats  $x$  te komen. Formule (2.3b) beschrijft dat er een oscillatie is in de oorsprong die voldoet aan (2.1).

$$u(x, t) = u\left(0, t - \frac{x}{c_x}\right) \quad (2.3a)$$

---

<sup>1</sup>c is hierbij niet perse gelijk aan de lichtsnelheid

$$u(0, t) = U \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.3b)$$

Bepalen we nu de uitdrukking voor een golf in één dimensie:

$$u\left(0, t - \frac{x}{c_x}\right) = U \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_x}\right) + \varphi\right]$$

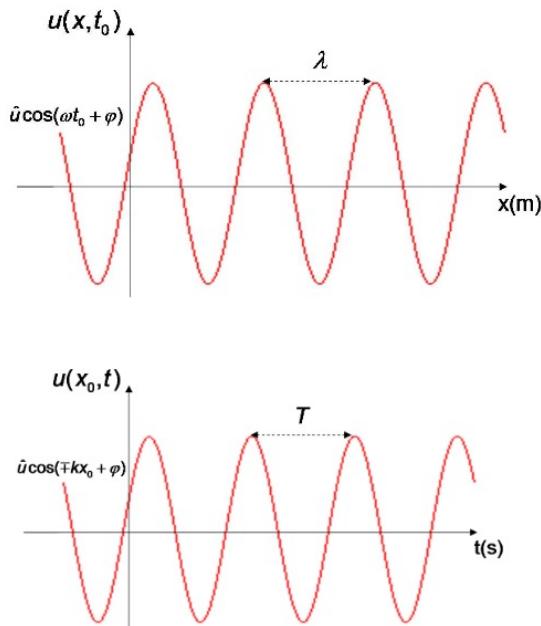
Gebruik makend van 2.3a op de pagina hiervoor.

$$u(x, t) = U \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_x}\right) + \varphi\right]$$

$$u(x, t) = U \cos(\omega t \pm kx + \varphi) \quad (2.4a)$$

$$k = \frac{\omega}{c_x} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.4b)$$

We kunnen twee standpunten innemen als we naar een golf kijken. We kunnen enerzijds zeggen dat een golf een variatie in plaats is op een bepaald moment in de tijd. Anderzijds kunnen we zeggen dat een golf een tijdelijke variatie is. Wanneer we spreken over tijdsvariatie, hebben we het over variaties in de periode van de golf. Bij afstandsvariaties zijn het variaties in de golflengte van de golf. Een samenvatting van golfeigenschappen is te vinden in A.2.2 op pagina 100.



**Figuur 2.1:** Golf als film en foto

**Voorbeeld:** Radiogolven

We bereken hier de snelheid waarmee radiogolven zich voortplanten. Hier voor maken we gebruik van de figuur 2.2. Dit is het schema in een oude radio om af te stemmen op radiostations. Hierop is te zien dat de golflengte  $\lambda = 300m$  en ze zich op een frequentie van  $f = 10^6 Hz = 1MHz$  bevindt. De snelheid van een golf kunnen we nu bepalen door gebruik te maken van formule (2.2)

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$$c = \lambda \cdot f = 300m \cdot 1MHz = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 300.000 \frac{km}{s}$$

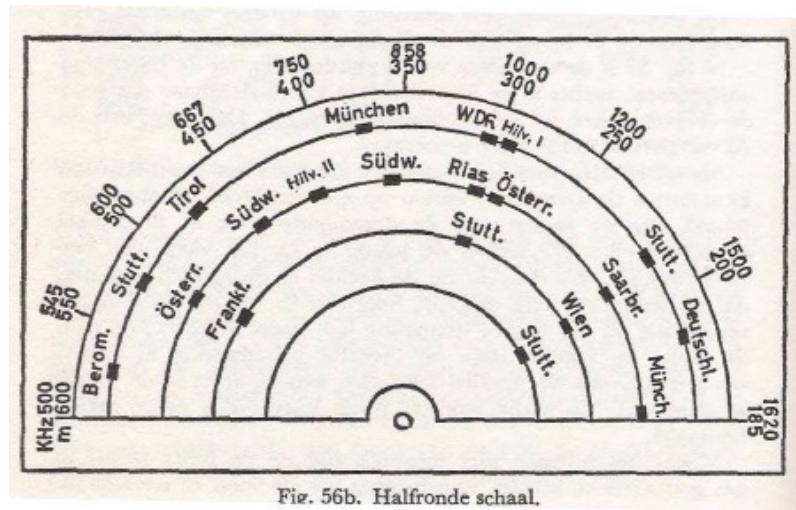


Fig. 56b. Halfronde schaal.

Figuur 2.2: Voorbeeld radiogolven

## 2.3 Vlakke golven

De uitdrukking voor een vlakke golf is te zien in (2.6).

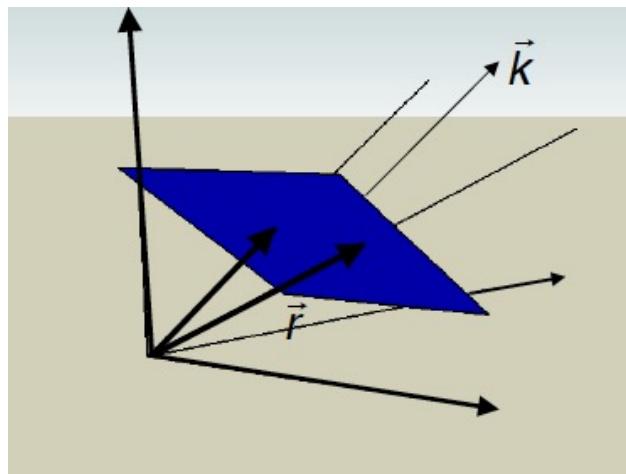
$$u(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \quad (2.6)$$

Hierbij is  $\vec{k}$ , de golfvector gelijk aan:

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c^2} \cdot \vec{c} \quad (2.7)$$

De reden waarom we over vlakke golven spreken is de volgende:

De golfvector  $\vec{k}$  staat loodrecht op een vlak waarbinnen alle punten van de golf dezelfde fase hebben.  $\vec{k}$  wijst dus in dezelfde richting als de voortplanting. Dit is te zien in figuur 2.3 op de volgende pagina



**Figuur 2.3:** Reden benaming vlakke golf

## 2.4 Golf vergelijking

De algemene golfvergelijking is te zien in formule (2.8). Elke golf moet voldoen aan deze uitdrukking<sup>2</sup>.

$$\nabla^2 \cdot u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

### 2.4.1 Fasor

We gebruiken fasoren om wiskundige berekeningen makkelijker te maken. De fasor notatie wordt gebruikt om harmonische functies voor te stellen door middel van een complexe exponentiële uitdrukking. We geven een voorbeeld met de cos zodanig dat het berekenen van een fasor duidelijk wordt.

#### Voorbeeld: Fasoren

De reële functie  $u$  heeft als functievoorschrift:

$$u = \cos(\Phi)$$

De fasor van  $u$ ,  $\bar{u}$ , wordt dan:

$$\bar{u} = e^{j\Phi}$$

Om van de fasor  $\bar{u}$  naar de reële functie  $u$  terug te gaan, dienen we volgende relatie toe te passen.

$$u = \Re(e^{j\Phi}) = \Re(\cos \Phi + i \sin \Phi) = \cos(\Phi)$$

<sup>2</sup>Extra info over de laplacian  $\nabla^2$  is te vinden in A.1.5 op pagina 98

### 2.4.2 Probleem

We gaan controleren of de fasor van een vlakke golf met constante amplitude voldoet aan de golfvergelijking, dewelke te zien is in formule (2.8).

De fasor van een vlakke golf met constante amplitude kunnen we bepalen door gebruik te maken van de vergelijking voor een vlakke golf, gegeven door formule (2.6) en van wat er beschreven staat in 2.4.1 op de vorige pagina. Dit leidt tevens tot de oplossing van het probleem.

$$\bar{u} = A \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi)} \quad (2.9)$$

We dienen nu de laplacian uit te rekenen met de fasor van  $u$ , bekomen in (2.9). Hierna kunnen we de bekomen uitdrukking vergelijken met de algemene vergelijking

$$\nabla^2 \cdot \bar{u} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

Om deze berekening te kunnen maken, dienen we eerst de tweede partiële afgeleide in elke richting  $x$ ,  $y$  en  $z$  te bepalen. We doen dit enkel voor de  $x$ -richting<sup>3</sup>.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= A \cdot (-j k_x) \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi)} = -j \cdot k_x \cdot A \cdot \bar{u} \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} &= A \cdot (-j k_x)^2 \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi)} = (-j \cdot k_x)^2 \cdot A \cdot \bar{u} \end{aligned} \quad (2.11a)$$

Als we dit weten, dan moeten we de tweede partiële afgeleide naar de tijd kennen van  $\bar{u}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= A \cdot j \omega \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi)} = j \cdot \omega \cdot A \cdot \bar{u} \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} &= A \cdot (j \omega)^2 \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi)} = (j \cdot \omega)^2 \cdot A \cdot \bar{u} \end{aligned} \quad (2.12a)$$

Wanneer we de uitdrukkingen (2.10), (2.12a), (2.11a) en de uitdrukkingen gevonden in (B.1) sammennemen, dan krijgen we volgende uitdrukking.

$$\begin{aligned} (-j \cdot k_x)^2 \bar{u} + (-j \cdot k_y)^2 \bar{u} + (-j \cdot k_z)^2 \bar{u} &\stackrel{?}{=} \frac{1}{c^2} (j \cdot \omega)^2 \cdot \bar{u} \\ (-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2) \cdot \bar{u} &= \frac{-\bar{u} \cdot \omega^2}{c^2} \\ (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) &= \frac{\omega^2}{c^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

<sup>3</sup>Berekeningen voor  $y$  en  $z$  zijn te vinden in B.1 op pagina 101

We zien dus dat deze gelijkheid opgaat. De grootte van de golfvector  $\vec{k}$  is namelijk gelijk aan de waarde van het golfgetal  $k^4$ .

$$\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\omega}{c} \quad (2.14)$$

## 2.5 Elektromagnetische golven

Hoe komen elektromagnetische golven tot stand?

Kijken we naar een lading  $+q$  in rust, dan ondervinden we rond deze lading een statisch elektrisch veld  $\vec{E}^5$ . Dit veld  $\vec{E}$  wordt als volgt beschreven:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r}$$

Dit is echter niet wat we wensen. Om een elektromagnetische golf te bekomen moeten het elektrische- en magnetische veld  $(\vec{E}, \vec{H})$  beiden veranderen in plaats en tijd.

Als we nu de lading met een constante snelheid laten bewegen, dan verandert het elektrische veld  $\vec{E}$  zowel in tijd als in ruimte, maar het geproduceerde magnetische veld verandert nog niet in de tijd. Om dit te bekomen dient de lading  $+q$  versneld te worden. Eenmaal de lading versneld wordt spreken we over elektromagnetische golven geproduceerd door de lading  $+q$ . Als we dus een wisselspanning gebruiken krijgen we elektromagnetische golven.

### 2.5.1 Uitwerking Maxwell voor vlakke golven

We gaan nu formule (A.5a), te vinden in A.2.1 op pagina 99 uitwerken voor een vlakke golf<sup>6</sup>. We beschouwen hierbij een vlakke golf die zich in de  $x$ -richting voortplant. Hierdoor zijn  $k_y = 0$  en  $k_z = 0$ . Het materiaal waarbinnen de golf zich bevindt is niet geleidend, waardoor  $\rho = 0$  en dus ook  $\sigma = 0$ . Doordat het materiaal niet geleidend is, vloeit er dus ook geen stroom door het materiaal  $j = 0$ .

$$E_x = \hat{E} \cdot \cos(\omega t - k_x x + \varphi_{e_x}) \quad (2.15)$$

Formule (A.5a) is als volgt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Deze uitdrukking werken we nu verder uit gebruik makend van de definitie van een rotor, gegeven in A.1.6 op pagina 99, hier uit volgt:

$$\text{rot}(\vec{E}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

<sup>4</sup>Formule voor het golfgetal te vinden in 2.4b op pagina 4

<sup>5</sup>Hierbij verandert  $\vec{E}$  niet in de tijd

<sup>6</sup>Voor de uitwerking van alle vergelijkingen verwijzen we graag naar B.2 op pagina 101

$$-\vec{e}_y \frac{\partial E_z}{\partial x} + \vec{e}_z \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} - \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} - \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{H}_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases}$$

Als we alle vergelijkingen van Maxwell gaan uitwerken voor (2.15), dan bekomen we de volgende vergelijkingen:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (2.17a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (2.17b)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (2.17c)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (2.17d)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad (2.17e)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \quad (2.17f)$$

Wat kunnen we hier nu uit afleiden?

1. Het magnetisch veld in de  $x$ -richting verandert niet met de tijd.
2. De  $y$ -componenten hangen af van de  $z$ -componenten.
3. Het elektrische veld  $\vec{E}$  en het magnetische veld  $\vec{H}$  staan loodrecht op elkaar.
4. Elektromagnetische golven zijn transversaal, aangezien  $E_x = 0$  en  $H_x = 0$ , de trilling staat hierdoor loodrecht op de voorplantingsrichting.

### 2.5.2 Het bepalen van $c$

We gaan een uitdrukkingen vinden voor  $c$  door formule (2.17a) en formule (2.17d) (welke de oplossingen zijn van Maxwell voor een vlakke golf) te gebruiken. We gaan eerst formule (2.17d) nogmaals afleiden naar  $x$ , en formule (2.17a) nogmaals afleiden naar  $t$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial x} \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{c^2} = \epsilon \mu$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r}}$$

Stellen we nu:

$$c_v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}}} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \quad (2.18a)$$

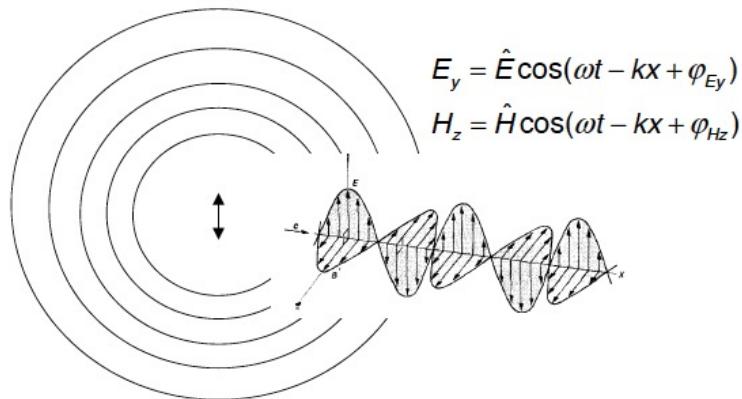
Dit is de snelheid van een golf in vacuüm. Hierdoor krijgen we:

$$c = \frac{c_v}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c_v}{n} \quad (2.18b)$$

Hierbij stelt  $n$  de brekingsindex voor van het materiaal. We zien dus dat de brekingsindex afhankelijk is van de vervormbaarheid van het materiaal. Deze vervormbaarheid is gegeven door  $\epsilon_r$ <sup>7</sup> en door  $\mu_r$ <sup>8</sup>

### 2.5.3 Voorstelling van een elektromagnetische golf

We hebben in subsectie 2.5.1 op pagina 8 bepaald dat de golven van  $\vec{E}$  loodrecht staan op die van  $\vec{H}$ . Dit is voorgesteld in figuur 2.4



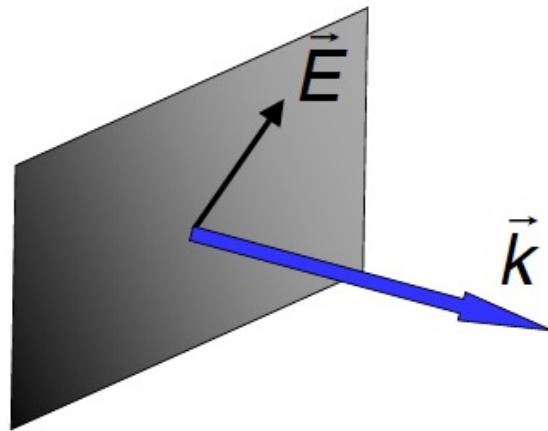
**Figuur 2.4:** Voorstelling van een elektromagnetische golf

<sup>7</sup>Elektrische permittiviteit.

<sup>8</sup>Magnetische permeabiliteit.

### 2.5.4 Polarisatie

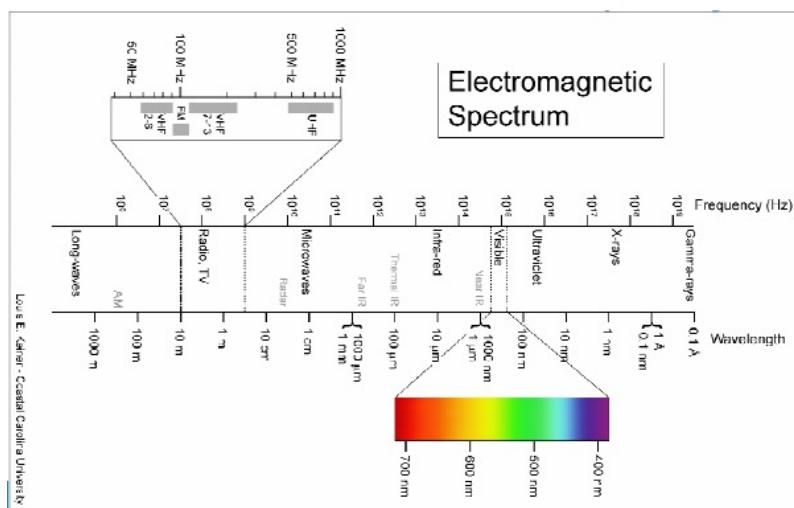
Het elektrische veld  $\vec{E}$  staat ook loodrecht op de veldvector  $\vec{k}$ . Wanneer de beweging van  $\vec{E}$  rond  $\vec{k}$  voorspelbaar is dan noemen we de golf gepolariseerd. Met voorspelbaar bedoelen we draaien in dezelfde richting, onder dezelfde hoek blijven. De staat van de polarisatie is volledig bepaald door de faseconstante van beide componenten. Indien de beweging van  $\vec{E}$  rond  $\vec{k}$  niet voorspelbaar is, noemen we de golf niet gepolariseerd.



Figuur 2.5: Polaristatie

### 2.5.5 Elektromagnetische spectrum

Een beeld van het elektromagnetische spectrum is te zien in figuur 2.6. Hierop is te zien dat het zichtbare licht maar een klein deeltje is van het spectrum. Hoe verder we naar rechts gaan in het spectrum, hierbij bedoelen we naar hogere frequenties, hoe slechter de golven zijn voor de gezondheid.



Figuur 2.6: Elektromagnetische spectrum

## 2.6 Impedantie

Een impedantie wordt in het algemeen gedefinieerd als:

$$\text{impedantie} = Z = \frac{\text{oorzaak}}{\text{gevolg}} \quad (2.19)$$

Willen we dit doen voor een golf, dan stoten we op enkele problemen. Wat nemen we als oorzaak voor de elektromagnetische golf? Nemen we het elektrische veld  $\vec{E}$  of het magnetische veld  $\vec{H}$ ? We zeggen dat het elektrische veld  $\vec{E}$  de oorzaak is van de elektromagnetische golf, omdat we een lading laten versnellen om de golf te bekomen. Als  $\vec{E}$  de oorzaak is, dan is  $\vec{H}$  het gevolg. Als we nu de impedantie  $Z$  willen bepalen, dan bekomen we volgende uitdrukking:

$$Z = \frac{\vec{E}}{\vec{H}}$$

Deze uitdrukking voor de impedantie is mathematisch niet oplosbaar. We kunnen twee vectoren niet delen door elkaar. Om toch een uitdrukking te krijgen voor de impedantie kunnen we de  $y$ -component van  $\vec{E}$  en de  $z$ -component van  $\vec{H}$  delen door elkaar. Dit omdat we vanuit Maxwell weten dat de  $z$ -component van  $\vec{H}$  afhankelijk is van de  $y$ -component van  $\vec{E}$ <sup>9</sup>. We krijgen dan:

$$Z = \frac{E_y}{H_z} = \frac{\hat{E}_y \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{E_y})}{\hat{H}_z \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{H_z})}$$

Deze uitdrukking voor de impedantie heeft ook nog een probleem, de impedantie is namelijk afhankelijk van de tijd. Om dit te vermijden, schakelen we over naar fasoren<sup>10</sup>. We krijgen nu:

$$Z = \frac{\bar{E}_y}{\bar{H}_z} = \frac{\hat{E}_y e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{E_y})}}{\hat{H}_z e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{H_z})}} = \frac{\hat{E}_y}{\hat{H}_z} e^{i(\varphi_{E_y} - \varphi_{H_z})} \quad (2.20)$$

We kunnen een complex getal voorstellen door de modulus en het argument van het complex getal. De modulus en argument zijn gelijk aan:

$$|Z| = \frac{\hat{E}_y}{\hat{H}_z} \quad \arg(Z) = \varphi_{E_y} - \varphi_{H_z} \quad (2.21)$$

### 2.6.1 Bepalen van de impedantie

We gaan nu de waarde voor de impedantie van een golf uitrekenen<sup>11</sup>. Hiervoor vertrekken we van formule (2.17c). Het enige wat dient te gebeuren is over stappen op fasoren. We krijgen dan:

$$\frac{\partial \bar{H}_z}{\partial x} = -\epsilon \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial t} \quad (2.22a)$$

Als we weten dat:

<sup>9</sup>Te zien in subsectie 2.5.1 op pagina 8

<sup>10</sup>Extra uitleg te vinden in 2.4.1 op pagina 6

<sup>11</sup>De golf verplaatst zich in vacuüm.

$$\bar{H}_z = \hat{H}_z e^{i(\omega t - k_x \cdot x + \varphi_{H_z})}$$

$$\bar{E}_y = \hat{E}_y e^{i(\omega t - k_x \cdot x + \varphi_{E_y})}$$

Dan worden de afgeleiden:

$$\frac{\partial \bar{H}_z}{\partial x} = -(ik_x) \cdot \bar{H}_z$$

$$\frac{\partial \bar{E}_y}{\partial t} = -\epsilon(i\omega) \cdot \bar{E}_y$$

Als we bovenstaande afgeleiden invullen in de vergelijking (2.22a), dan krijgen we:

$$k_x \cdot \bar{H}_z = \epsilon \cdot \omega \cdot \bar{E}_y$$

$$Z = \frac{\bar{E}_y}{\bar{H}_z} = \frac{k_x}{\epsilon \omega}$$

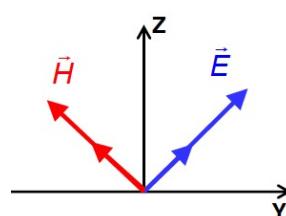
Rekening houdend met de formules uit A.2.2 op pagina 100, kunnen we een waarde geven aan de impedantie.

$$Z = \frac{1}{\epsilon c} = \mu c$$

Aangezien we het hebben over een golf in vacuüm, kunnen we  $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$  herleiden tot  $\mu_0$ . Hierdoor krijgen we dat:

$$Z = \mu_0 \cdot c = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 376 \Omega \quad (2.22b)$$

Indien het argument van de impedantie gelijk is aan nul, dan werken  $\vec{E}$  en  $\vec{H}$  in fase, vermits zowel  $\vec{E}$  als  $\vec{H}$  maximaal, minimaal kunnen zijn. Dit is te zien in figuur 2.7.



**Figuur 2.7:**  $\vec{E}$  en  $\vec{H}$  in fase

## 2.7 Power Density

We kunnen het vermogen dat overgedragen wordt door een elektromagnetische golf uitdrukken doormiddel van de Poynting vector. De Poynting vector is als volgt gedefinieerd<sup>12</sup>:

$$\vec{S}(t) = \vec{E} \otimes \vec{H} \quad (2.23)$$

Het is onmogelijk om aan deze vector een waarde te geven voor elk tijdstip. Daarom wordt het tijdsgemiddelde genomen. Hierdoor vervalt het vectorproduct. We krijgen dan:

$$\begin{aligned} <|\vec{S}|> &= <|\vec{E} \otimes \vec{H}|> \\ <|\vec{S}|> &= <|\vec{E} \vec{H}|> \\ <|\vec{S}|> &= \frac{1}{|Z|} <|\vec{E}|^2> \\ <|\vec{S}|> &= \epsilon c <|\vec{E}|^2> \end{aligned} \quad (2.24a)$$

We kijken nu in een voorbeeld na waarom we net het vermogen van een golf gaan uitdrukken in termen van het elektrische veld, en niet in termen van het magnetische veld.

### Voorbeeld: Lorentz kracht

We willen weten welke component het meest doorweegt in de Lorentz kracht.  
De Lorentz kracht is gegeven door:

$$\vec{F} = q \left[ \vec{E} + \mu (\vec{v} \otimes \vec{H}) \right] \quad (2.25a)$$

We weten dat:

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \mu \cdot c$$

We vergelijken nu  $|\vec{E}|$  met  $\mu |\vec{v}| \otimes |\vec{H}|$

$$\begin{aligned} |\vec{E}| &\leftrightarrow \mu |\vec{v}| \otimes |\vec{H}| \\ |\vec{E}| &\leftrightarrow \mu |\vec{v}| \frac{|\vec{E}|}{\mu \cdot c} \\ 1 &\leftrightarrow \frac{|\vec{v}|}{c} \end{aligned}$$

We zien dus dat het magnetische veld pas een rol begint te spelen als het even snel gaat als de lichtsnelheid. Indien dit het geval is, treden er andere fysische fenomenen op die buiten de scope van deze cursus vallen.

<sup>12</sup>⊗ is de vectorvermenigvuldiging.

## 2.8 Interactie met het medium

Het medium heeft invloed op de golflengte en er kan absorptie optreden bij het medium.

### 2.8.1 Golflengte

We hebben reeds aangetoond dat de voortplantingssnelheid van een golf afhankelijk is van het medium. Dit is te zien in formule (2.18b). Kijken we nu naar de vergelijking voor een component van  $\vec{E}$ , dan kunnen we zien dat de snelheid van de golf terug komt in het golfgetal. We hebben namelijk:

$$E_y = \hat{E}_y \cos(\omega t - kx + \Phi)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c} f$$

Houden we nu rekening met formule (2.18b). Dan kunnen we zeggen dat:

$$k = \frac{2\pi f}{c_v} n \quad (2.26a)$$

Voeren we nu een  $k_v$  in, dit is het golfgetal voor een golf in vacuüm. Dan kunnen we vergelijking (2.26a) anders schrijven:

$$k = k_v \cdot n$$

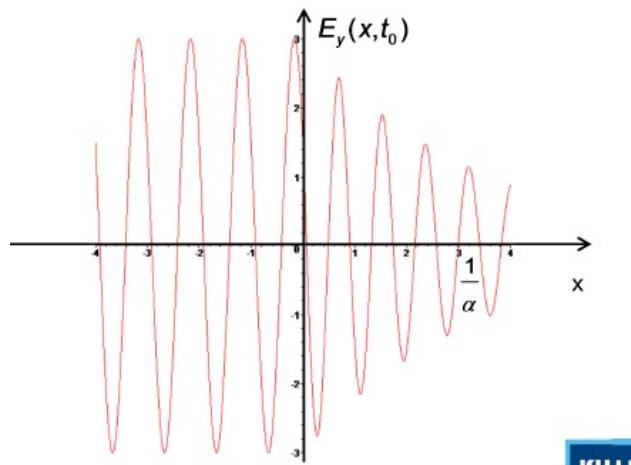
Dit kunnen we nu in onze vergelijking voor de componenten van  $\vec{E}$  en ook de componenten van  $\vec{H}$  brengen. Als voorbeeld nemen we terug de  $y$ -component van het elektrische veld:

$$E_y = \hat{E}_y \cos(\omega t - k_v n x + \Phi)$$

### 2.8.2 Absorptie

Wanneer we licht doorheen een medium sturen zien we dat het elektrische- en het magnetische veld afnemen naarmate we ons verder in het medium stellen. Dit is te zien in figuur 2.8 op de pagina hierna. Een parameter die de mate van absorptie weergeeft voor een materiaal is de parameter  $\alpha$ . Deze  $\alpha$  is een materiaal parameter, en is dus afhankelijk van materiaal tot materiaal.

$\alpha$  kunnen we bepalen door te kijken wanneer het elektrische- of het magnetische veld afgenumen is tot 63% van zijn originele sterkte. Wanneer we die plaats kennen, dan is deze  $x$  gelijk aan  $\frac{1}{\alpha}$  en zo de waarde van  $\alpha$  bepalen. Merken we nog op dat de waarde  $\frac{1}{\alpha}$  de skin depth genoemd wordt voor een materiaal.



Figuur 2.8: Absorptie in het medium

De absorptie in het materiaal gebeurt op een exponentiële manier. Wanneer we hiermee rekening houden kunnen we de vergelijking voor een component van het elektrische- of magnetische veld uitbreiden. We geven hier het voorbeeld met de  $y$ -component van het elektrische veld  $\vec{E}$ .

$$E_y(x, t) = E_0 \cdot e^{-\alpha x} \cdot \cos(\omega t - k_v \cdot n \cdot x + \varphi) \quad (2.27a)$$

Stappen we over op fasoren, dan krijgen we:

$$\bar{E}_y = E_0 \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{i(\omega t - k_v \cdot n \cdot x + \varphi)}$$

$$\bar{E}_y = E_0 \cdot e^{i(\omega t - (k_v \cdot n - i \cdot \alpha) \cdot x + \varphi)}$$

$$\bar{E}_y = E_0 \cdot e^{i(\omega t - k_v (n - i \cdot \frac{\alpha}{k_v}) \cdot x + \varphi)}$$

$$\bar{E}_y = E_0 \cdot e^{i(\omega t - k_v \cdot \bar{n} \cdot x + \varphi)} \quad (2.27b)$$

$$\bar{E}_y = E_0 \cdot e^{i(\omega t - \bar{k} \cdot x + \varphi)} \quad (2.27c)$$

We kunnen nu de complexe brekingsindex definiëren  $\bar{n}$  als volgt:

$$\bar{n} = n - i \frac{\alpha}{k_v} \quad (2.27d)$$

In formule (2.27c) staat  $\bar{k}$  voor het complexe golftal van een vlakke golf. De waarde van  $\bar{k}$  wordt gegeven door de volgende vergelijking:

$$\bar{k} = k_v \cdot \left( n - i \cdot \frac{\alpha}{k_v} \right) \quad (2.27e)$$

Hierbij is:

$$k_v = \frac{2\pi}{\lambda_n} \quad (2.27f)$$

We kunnen hieruit besluiten dat de fasor van een gedempte golf identiek is aan die van een ongedempte golf, maar met  $n$  vervangen door  $\bar{n}$ .

**Voorbeeld:** Complexe reflectie voor Silicium

Gegeven is de complexe brekingsindex  $\bar{n}$  van Silicium voor groen licht ( $\lambda_v = 548\text{ nm}$ )  $4,05 - i0,028$ . We willen nu de skin depth berekenen voor Si. We weten uit formule (2.27d) dat:

$$\bar{n} = n - i \frac{\alpha}{k_v}$$

Hierdoor kunnen we dus stellen dat:

$$\frac{\alpha}{k_v} = 0,028$$

We kunnen nu de skin depth berekenen:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,028 \cdot k_v}$$

We moeten nu enkel  $k_v$  vervangen door  $\frac{2\pi}{\lambda_v}$ :

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,028 \cdot \frac{2\pi}{\lambda_v}} = \frac{1}{0,028 \cdot \frac{2\pi}{548 \cdot 10^{-9}}} = 3,11 \mu\text{m}$$

---

<sup>a</sup>Deze gelijkheid is te zien in formule (2.27f)

**Voorbeeld:** Golfvergelijking voor een golf in geleidend medium, zonder stroombron  
We vertrekken van de formule A.5c op pagina 99. Aangezien er we geen rekening moeten houden met de stroom, dan  $j = 0$ . Formule (A.5c) kunnen ze dan herleiden tot:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \quad (2.28a)$$

De uitwerking van deze gelijkheid is analoog aan de uitwerking die gevonden kan worden in B.2.2 op pagina 102. Hierbij dient enkel nog rekening gehouden te worden met de term van  $\sigma \vec{E}$ . We krijgen dan volgende geleidheid

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma \cdot E_y \quad (2.28b)$$

We hebben nood aan formule 2.17b op pagina 9 om tot een uitdrukking voor de algemene golfvergelijking, 2.8 op pagina 6, te komen.

Nu dienen we (2.28b) nogmaals af te leiden naar  $t$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma \cdot E_y \right] \\ -\frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} = \epsilon \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \sigma \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.28c)$$

en (2.17b) nogmaals af te leiden naar  $x$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \right] \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t x} \end{aligned} \quad (2.28d)$$

Nu dienen we enkel nog (2.28c) en (2.28d) samen te voegen, hierdoor kunnen we de term  $\frac{\partial^2 H_z}{\partial t x}$  en dan krijgen we:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (2.28e)$$

## 2.9 Superpositie van golven

Algemeen is de superpositie van golven de som van beide golven. Het resultaat is terug een golf met als uitdrukking de volgende:

$$u = \hat{u}_1 \cos(\phi_1) + \hat{u}_2 \cos(\phi_2) \quad (2.29)$$

Stel nu dat  $\hat{u}_1 = \hat{u}_2$ , dan kunnen we (2.29) herschrijven tot:

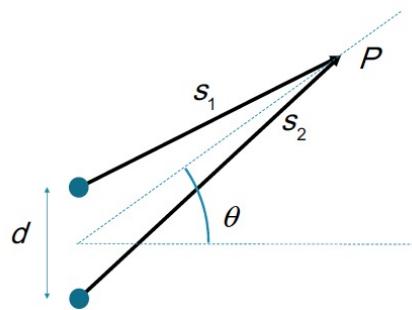
$$u = 2 \hat{u} \cos \left( \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \cos \left( \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) \quad (2.30)$$

Hier kunnen nu drie besprekingen over gedaan worden:

1. Interferentie van golven: beide golven lopen in dezelfde richting en hebben dezelfde frequentie en snelheid.
2. Staande golven: de golven lopen in tegengestelde richting.
3. De golven hebben een verschillende frequentie en een verschillende snelheid.

### 2.9.1 Interferentie

Algemene voorstelling voor interferentie:



**Figuur 2.9:** Interferentie

We krijgen voor beide golven een uitdrukking voor  $\phi$ .

$$\phi_1 = \omega t - ks_1 + \varphi_1 \quad (2.31a)$$

$$\phi_2 = \omega t - ks_2 + \varphi_2 \quad (2.31b)$$

Gebruik makend van formule 2.30 op de vorige pagina kunnen we schrijven:

$$u = 2\hat{u} \cos \left( \frac{\omega t - ks_1 + \varphi_1 + \omega t - ks_2 + \varphi_2}{2} \right) \cos \left( \frac{\omega t - ks_2 + \varphi_2 - \omega t + ks_1 - \varphi_1}{2} \right)$$

Werken we dit nog verder uit dan krijgen we:

$$\begin{aligned} u &= 2\hat{u} \cos \left( \omega t - k \frac{s_1 + s_2}{2} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \cos \left( -k \frac{s_2 - s_1}{2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \\ u &= 2\hat{u} \cos (\omega t - k \langle s \rangle + \langle \varphi \rangle) \cos \left( -k \frac{\Delta s}{2} + \frac{\Delta \varphi}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.31c)$$

We krijgen in het punt \$P\$ te zien in figuur 2.9 een harmonische oscillatie met een amplitude gelijk aan:

$$2\hat{u} \cos \left( -k \frac{\Delta s}{2} + \frac{\Delta \varphi}{2} \right) \quad (2.31d)$$

We kunnen nu gaan kijken wanneer deze amplitude minimaal en maximaal is. We gaan er telkens van uit dat dat het faseverschil  $\Delta\varphi = 0$ . De amplitude is minimaal als:

$$\cos \left( k \frac{\Delta s}{2} \right) = 0$$

$$\frac{k \Delta s}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi \Delta s}{\lambda} = \pi$$

$$\Delta s = \frac{\lambda}{2} \quad (2.32a)$$

De amplitude is dus minimaal wanneer het weglengte verschil tussen twee golven gelijk is aan een halve golflengte.

De amplitude is maximaal als:

$$\cos \left( k \frac{\Delta s}{2} \right) = 1 \text{ of } -1$$

$$\frac{k \Delta s}{2} = m\pi$$

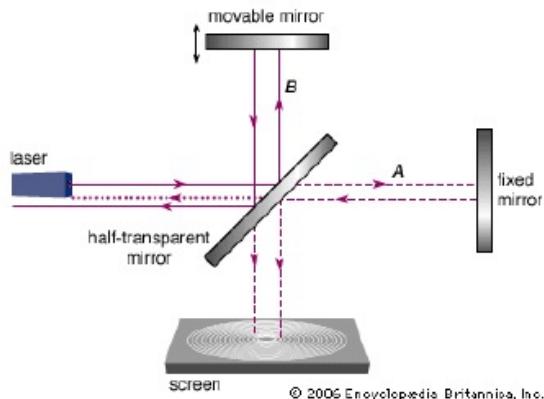
$$\frac{2\pi \Delta s}{2\lambda} = m\pi$$

$$\Delta s = m\lambda$$

$$d \sin \theta_{max} = m\lambda$$

$$\sin \theta_{max} = m \frac{\lambda}{d} \quad (2.33a)$$

**2.9.1.0.1 Michelson interferometer** Een bekende toepassing van interferentie is de Michelson interferometer. De resolutie van de interferometer is gelijk aan en kwart van een golflengte.



Figuur 2.10: default

Door gebuikt te maken van een spiegel onder  $45^\circ$  wordt er op de detector een samengestelde golf gevonden. Door de interferentie van de twee golven kunnen we minieme weglengte verschillen meten.

### 2.9.2 Staande golven

Voor staande golven lopen de golven in tegengestelde richting. De uitdrukking voor  $\phi$  voor elke golf wordt:

$$\phi_1 = \omega t - kx + \varphi_1 \quad (2.34a)$$

$$\phi_2 = \omega t + kx + \varphi_2 \quad (2.34b)$$

Er weer van uit gaande dat de amplitudes van de golven gelijk zijn, kunnen we terug vergelijking (2.30) gebruiken:

$$u = 2\hat{u} \cos \left( \frac{\omega t - kx + \varphi_1 + \omega t + kx + \varphi_2}{2} \right) \cos \left( \frac{\omega t + kx + \varphi_2 - \omega t + kx - \varphi_1}{2} \right)$$

Verder uitwerken geeft:

$$\begin{aligned} u &= 2\hat{u} \cos \left( \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \cos \left( kx + \frac{\Delta\varphi}{2} \right) \\ u &= 2\hat{u} \cos (\omega t + \langle \varphi \rangle) \cos \left( kx + \frac{\Delta\varphi}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.35a)$$

### 2.9.3 Groepsnelheid

Bij dit fenomeen spreken we over golven met een verschillende snelheid. Hierbij worden de uitdrukkingen voor  $\phi$  voor elke golf:

$$\phi_1 = \omega_1 t - k_1 x + \varphi_1 \quad (2.36a)$$

$$\phi_2 = \omega_2 t - k_2 x + \varphi_2 \quad (2.36b)$$

We gaan er weer maar eens van uit dat de amplitudes van de golven even groot zijn. Hierdoor kunnen we formule (2.30) nogmaals gebruiken, en krijgen we met vervanging van  $\phi_1$  en  $\phi_2$ :

$$u = 2\hat{u} \cos \left( \frac{\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1 + \omega_2 t - k_2 x + \varphi_2}{2} \right) \cos \left( \frac{\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2 - \omega_1 t + k_1 x - \varphi_1}{2} \right)$$

Het verder uitwerken geeft dan:

$$\begin{aligned} u &= 2\hat{u} \cos \left( \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t - \frac{k_2 + k_1}{2} x + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \right) \cos \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} - \frac{k_2 - k_1}{2} x + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \\ u &= 2\hat{u} \cos (\langle \omega \rangle t - \langle k \rangle x + \langle \varphi \rangle) \cos \left( \frac{\Delta\omega}{2} - \frac{\Delta k}{2} x + \frac{\Delta\varphi}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.37a)$$

We krijgen eigenlijk een signaal dat in amplitude gemoduleerd is. Er ontstaan zogenaamde groepjes, en deze groepjes verplaatsen zich met een bepaalde snelheid. We willen nu weten op welke plaatsen de snelheid van een groepje maximaal is. Dit is wanneer  $\cos \left( \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) = 1$ , dus wanneer:

$$\phi_2 - \phi_1 = \Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot x_+ + \varphi_2 - \varphi_1 = 2m\pi$$

$$x_+ = \frac{\Delta t + \Delta\varphi - 2m\phi}{\Delta k} \quad (2.38)$$

De groepsnelheid wordt nu gegeven door:

$$v_g = \frac{dx_+}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (2.39)$$

Wanneer de snelheden van de golven gelijk is, dan spreken we over niet-dispersieve golven:

$$c_1 = c_2 = v_g$$

Wanneer de snelheden niet gelijk zijn, dan spreken we over dispersieve golven:

$$c_1 \neq c_2 \neq v_g$$

We kunnen de uitdrukking voor de groepsnelheid veralgemenen:

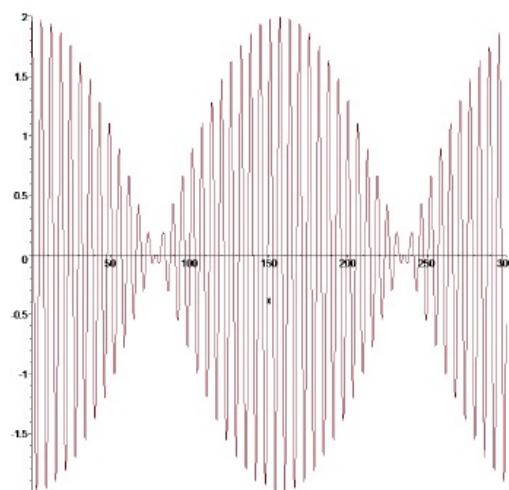
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (2.40a)$$

De groepsnelheid in functie van  $f$  en  $\lambda$

$$v_g = -\lambda^2 \frac{df}{d\lambda} \quad (2.40b)$$

De groepsnelheid in functie van  $c$  en  $\lambda$

$$v_g = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} \quad (2.40c)$$



**Figuur 2.11:** Samengestelde golf

**Voorbeeld:** Puls door gebruik van Gaussiaan

Om een puls te versturen moeten we moeten we het signaal dat te zien is in figuur 2.11 op de vorige pagina moduleren met een Gaussiaanse enveloppe. Deze enveloppe functie wordt gegeven door de formule:

$$F(0, t) = e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

De breedte van deze enveloppe is gegeven door  $\sigma$ . Het pulsje wordt dan gegeven door:

$$E_y(0, t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \cdot F(0, t)$$

De fasor van de puls is dan gegeven door:

$$\bar{E}(0, t) = E_0 \cdot e^{i\omega_0 t} \cdot e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

We willen nu het spectrum bepalen van zo een pulsje. Hiervoor dienen we een Fourier analyse uit te voeren. We moeten dus volgende integraal bepalen.

$$E_y(t) = \frac{1}{2\pi} \int C(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Hierbij is  $C(\omega)$  gelijk aan:

$$C(\omega) = \int E_y(t) \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$$

We kunnen dan schrijven dat:

$$C(\omega) = \int E_0 \cdot e^{i(\omega_0 - \omega)t} \cdot e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$$

Als we weten dat:

$$\int e^{i\omega t} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{-\omega^2}{4\alpha}}$$

Dan kunnen we schrijven dat:

$$C(\omega) = E_0 \int e^{i\omega_0 t} e^{-\alpha t^2} dt$$

$$C(\omega) = E_0 \sqrt{2\pi} \cdot \sigma e^{\frac{-(\omega_0 - \omega)\sigma^2}{2}}$$

Dit is een Gaussiaan rond  $\omega_0$ . Kijken we nu naar het bandbreedtheorema:

$$\sigma_\omega \cdot \sigma_t = 1 \quad (2.41)$$

Dit theorema legt het verband tussen de breedte van een puls in het tijdsdomein en de breedte van die puls in het frequentiedomein. Als we dus een korte puls geven in het tijdsdomein, dus als we  $\sigma_t$  klein nemen, dan krijgen we een breed spectrum, dus een grote  $\sigma_\omega$ .

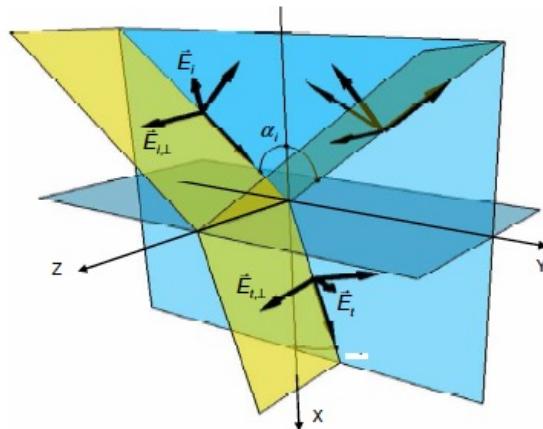
# Hoofdstuk 3

## Reflectie en Refractie in een medium

### 3.1 Algemene Benadering

#### 3.1.1 Geometrie

Er zijn twee media, het eerste medium heeft een brekingsindex gelijke aan  $n_1$  en het tweede medium heeft een brekingsindex gelijk aan  $n_2$ . We kiezen het  $yz$ -vlak als het vlak waarbinnen de overgang tussen de twee media plaats vindt. Zo wordt de  $x$ -as evenwijdig met de normaal op het medium en staat de  $z$ -as loodrecht op het  $yz$ -vlak. Het een en ander is voorgesteld in figuur 3.1. Het invalsvlak wordt bepaald door twee vectoren, de normaal op het oppervlak van het medium en  $\vec{k}_i$  van de invallende golf, zijde  $\vec{k}_i$ .

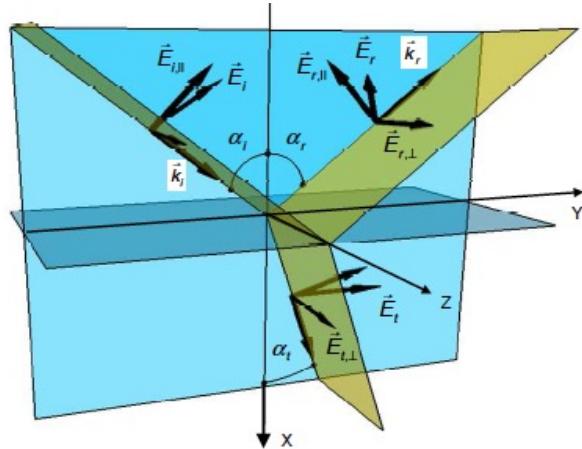


Figuur 3.1: Voorstelling vectoren invallende golven in een medium

De invalshoek  $\alpha_i$  is de hoek tussen de golfvector  $\vec{k}_i$  en de normaal op het oppervlak van het medium. De hoek  $\alpha_i$  ligt steeds tussen  $0^\circ$  en  $90^\circ$ .

De bijdrage van het elektrische veld  $\vec{E}$  en het magnetische veld  $\vec{H}$  parallel met het scheidingsvlak moet continu zijn. Dit impliceert dat er een gereflecteerde golf en een gebroken golf moet zijn, en beide moeten in het invalsvlak liggen. We geven nu beide golven het subscript  $t$  als we over de gebroken golf gesprekken en het subscript  $r$  als we over de gereflecteerde golf spreken. Dit geeft aanleiding tot een transferhoek  $\alpha_t$ , gelijk aan de hoek tussen de gebroken golf en de normaal op

het invalsvlak en aan een reflectiehoek  $\alpha_r$ , gelijk aan de hoek tussen de gereflecteerde golf en de normaal op het invalsvlak. De frequentie voor alledrie de golven is gelijk, maar de golflengte niet, aangezien deze meebepaald wordt door het medium.



**Figuur 3.2:** Analoog aan figuur 3.1 op de pagina hiervoor, maar in een ander perspectief

Aangezien elektromagnetische golven transversale golven zijn, staan alle elektrische velden loodrecht op de golfvector. Elke veld vector heeft dan een bijdrage loodrecht op het invalsvlak, aangeduid met  $\perp$  en een bijdrage evenwijdig met het invalsvlak  $\parallel$ .

### 3.1.2 Elektrische velden

We kunnen het elektrisch veld ontbinden in componenten evenwijdig met het invalsvlak en loodrecht op het invalsvlak. We krijgen dan:

$$\bar{E}_{i,\perp} = \hat{E}_{i,\perp} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r} + \varphi_{i,\perp})} \quad (3.1a)$$

$$\bar{E}_{i,\parallel} = \hat{E}_{i,\parallel} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r} + \varphi_{i,\parallel})} \quad (3.1b)$$

$$\bar{E}_{r,\perp} = \hat{E}_{r,\perp} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r} + \varphi_{r,\perp})} \quad (3.1c)$$

$$\bar{E}_{r,\parallel} = \hat{E}_{r,\parallel} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r} + \varphi_{r,\parallel})} \quad (3.1d)$$

$$\bar{E}_{t,\perp} = \hat{E}_{t,\perp} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r} + \varphi_{t,\perp})} \quad (3.1e)$$

$$\bar{E}_{t,\parallel} = \hat{E}_{t,\parallel} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r} + \varphi_{t,\parallel})} \quad (3.1f)$$

### 3.1.3 Grens condities

De grens condities kunnen als volgt neergeschreven worden:

$$(\hat{E}_{i,y} + \hat{E}_{r,y} = \hat{E}_{t,y})_{x=0} \quad (3.2a)$$

$$(\hat{E}_{i,z} + \hat{E}_{r,z} = \hat{E}_{t,z})_{x=0} \quad (3.2b)$$

$$(\hat{H}_{i,y} + \hat{H}_{r,y} = \hat{H}_{t,y})_{x=0} \quad (3.2c)$$

$$(\hat{H}_{i,z} + \hat{H}_{r,z} = \hat{H}_{t,z})_{x=0} \quad (3.2d)$$

Het komt er op neer dat netto gezien er niets verloren gaat wanneer er contact is met een ander medium.

## 3.2 Richtingen van reflectie- en refractiegolven

### 3.2.1 De wet van Snellius

We gaan formule 3.2b gebruiken omdat de  $z$ -componenten van de fasoren gelijk is aan de loodrechte componenten beschreven in 3.1 op de pagina hiervoor<sup>1</sup>.

$$(\hat{E}_{i,\perp} + \hat{E}_{r,\perp} = \hat{E}_{t,\perp})_{x=0} \quad (3.3)$$

Als we de uitdrukkingen gevonden in 3.1 op de vorige pagina combineren met formule (3.3) krijgen we:

$$\hat{E}_{i,\perp} \cdot e^{j(\omega t - k_{i,y} \cdot y + \phi_{i,\perp})} + \hat{E}_{r,\perp} \cdot e^{j(\omega t - k_{r,y} \cdot y - k_{r,z} \cdot z + \phi_{r,\perp})} = \hat{E}_{t,\perp} \cdot e^{j(\omega t - k_{t,y} \cdot y - k_{t,z} \cdot z + \phi_{t,\perp})} \quad (3.4)$$

De gelijkheid gevonden in (3.4) moet voldaan zijn voor elke waarde van  $y$  en  $z$ . Deze gelijkheid toont dus ook dat de frequentie van de golven gelijk moeten zijn. Verder kunnen we nog concluderen dat:

- De  $z$ -componenten van de golfvectoren van de gereflecteerde en van de gebroken golf moet nul zijn. Dus de gereflecteerde en de gebroken golf liggen beiden in het invalsvlak.
- De  $y$ -componenten van de drie golfvectoren moeten gelijk zijn. Dus

$$k_{r,y} = k_{i,y}$$

en

$$k_{t,y} = k_{i,y}$$

---

<sup>1</sup>De andere drie formules zouden tot dezelfde resultaten leiden

We kunnen dus verder zeggen dat:

$$k_r \sin \alpha_r = k_i \sin \alpha_i$$

$$k_t \sin \alpha_t = k_i \sin \alpha_i$$

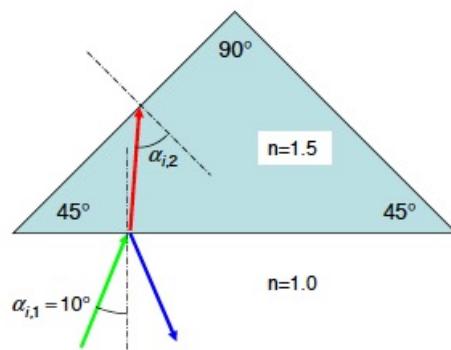
We kunnen de lengte van de  $k$  vector uitdrukken in termen van de brekingsindex:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_v} \cdot n$$

We krijgen van volgende twee vergelijking die bekend staan als de wetten van Snellius

$$\alpha_i = \alpha_r \quad (3.5)$$

$$n_1 \sin \alpha_i = n_2 \sin \alpha_t \quad (3.6)$$



**Figuur 3.3:** Prisma

**Voorbeeld:** Prisma

We hebben een lichtstraal die invalt in een prisma van glas, brekingsindex  $n = 1.5$ , onder een hoek  $\alpha_{i,1} = 10^\circ$ . Dit is voorgesteld in figuur 3.3 op de pagina hiervoor. Door nu gebruik te maken van de wet van Snellius kunnen we de brekingshoek  $\alpha_{t,1}$  bepalen.

$$n_1 \sin \alpha_{i,1} = n_2 \sin \alpha_{t,1}$$

$$\alpha_{t,1} = \arcsin \left( \frac{\sin 10^\circ}{1,5} \right)$$

$$\alpha_{t,1} = 6,65^\circ$$

Het licht dat nu in het prisma zit, breekt terug met de rand. We zouden verwachten dat het licht terug gebroken wordt en uit het prisma treedt. Het licht valt nu in onder een hoek gelijk aan  $\alpha_{i,2} = 45^\circ + 6,65^\circ = 51,65^\circ$ . We controleren dit door gebruik te maken van de wet van Snellius:

$$n_2 \sin \alpha_{i,2} = n_1 \sin \alpha_{t,2}$$

$$\alpha_{t,2} = \arcsin \left( \frac{1,5 \cdot \sin 51,65^\circ}{1} \right)$$

$$\alpha_{t,2} = \arcsin 1,17$$

We zien dat we de arcsin moeten bepalen van een getal dat groter is dan 1. In het reële vlak is dit niet mogelijk. We moeten concluderen dat er interne reflectie optreedt. De lichtstraal die gebroken zou worden, zal nu evenwijdig met het oppervlak lopen, omdat de straal niet uit het materiaal geraakt.

We kunnen nu eens verder denken wat er verder gebeurt met de lichtstraal, want reflectie treedt nog steeds op. De reflectie hoek is  $\alpha_{r,2} = 51,65^\circ$ . De gereflecteerde lichtstraal valt nu in op de andere zijkant van het prisma. Hier zal terug interne reflectie optreden. Aan de andere zijde van het prisma treedt er dus ook geen licht straal naar buiten. De gereflecteerde lichtstraal zal nu op de rechte zijde van het prisma invallen. Kan de lichtstraal nu wel naar buiten?

$$n_2 \sin \alpha_{i,3} = n_1 \sin \alpha_{t,3}$$

$$\alpha_{t,3} = \arcsin \left( \frac{1,5 \cdot \sin 0^\circ}{1} \right)$$

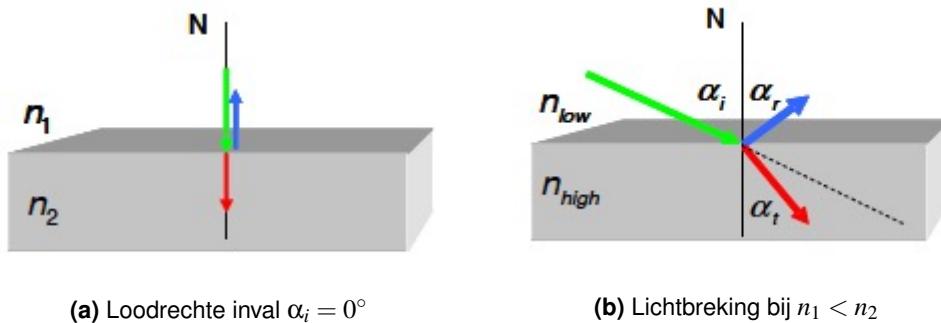
$$\alpha_{t,3} = \arcsin 0 = 0^\circ$$

We zien dus dat de licht straal loodrecht op het scheidingsvlak naar buiten treedt. Een licht straal die invalt onder een hoek, wordt eigenlijk gereflecteerd perfect loodrecht op het scheidingsoppervlak. We hebben dus een perfecte spiegel met dit prisma.

### 3.2.2 Bespreking

We kunnen nu bepaalde gevallen van de invalshoek  $\alpha_i$  bekijken. Bij loodrechte inval  $\alpha_i = 0^\circ$  liggen de gereflecteerde en de gebroken golf evenwijdig met de normaal op het invalsvlak. Dit is

voorgesteld in figuur 3.4a.

(a) Loodrechte inval  $\alpha_i = 0^\circ$ (b) Lichtbreking bij  $n_1 < n_2$ 

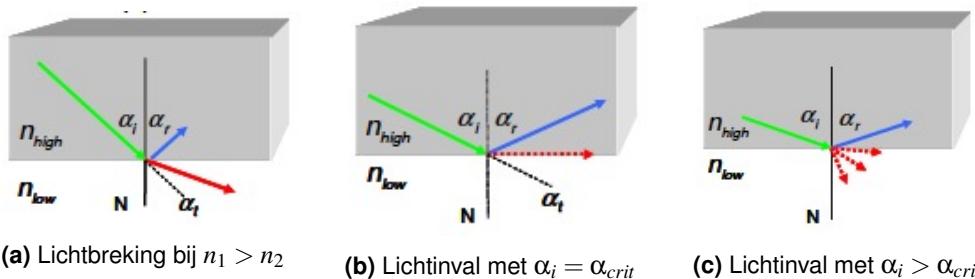
De rest van de besprekking is opgedeeld in twee gevallen. In het eerste geval is  $n_1 < n_2$ . In dit geval zal de brekinkshoek steeds kleiner zijn dan de invalshoek. Dit is makkelijk in te zien doormiddel van de wet van snellius. Een voorbeeld is gegeven in figuur 3.4b. Dit wordt breking naar de normaal toe genoemd omdat  $\alpha_r < \alpha_i$ .

In het volgende geval is  $n_1 > n_2$ . Hierbij wordt de lichtstraal gebroken van de normaal weg. We krijgen dus  $\alpha_r > \alpha_i$ , maar we moeten een speciale hoek in acht nemen, namelijk de hoek waarvoor  $\alpha_r = 90^\circ$ . Deze hoek wordt de kritieke hoek  $\alpha_{crit}$  genoemd. Bij deze hoek is er geen gebroken licht meer in het tweede medium, maar de lichtstraal loopt parallel met het scheidingsvlak. We kunnen nu een uitdrukking vinden voor de kritieke hoek  $\alpha_{crit}$

$$n_1 \cdot \sin \alpha_{crit} = n_2 \cdot \sin 90^\circ$$

$$\alpha_{crit} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (3.7a)$$

Dit fenomeen noemen we interne reflectie. We mogen niet concluderen dat er geen elektrische velden meer aanwezig zijn in het tweede medium. Hier wordt verder op in gegaan in sectie Uitdovend veld op pagina 39.

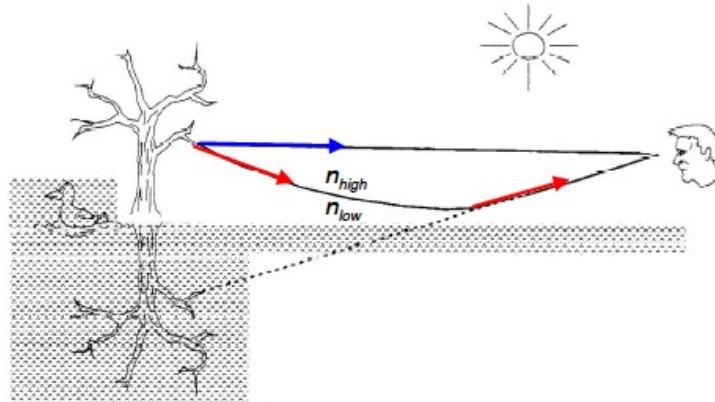
(a) Lichtbreking bij  $n_1 > n_2$ (b) Lichtinval met  $\alpha_i = \alpha_{crit}$ (c) Lichtinval met  $\alpha_i > \alpha_{crit}$ 

### 3.2.3 Toepassingen

#### 3.2.3.1 Fata morganna

Dit natuurfenomeen treedt op wanneer de temperatuur van de grond zeer hoog is. Wanneer dit het geval is zal de temperatuur van de lucht tegen de grond groter zijn dan de temperatuur van de lucht in hogere luchtlagen. Hierdoor is de brekingsindex van de lucht dicht tegen de grond

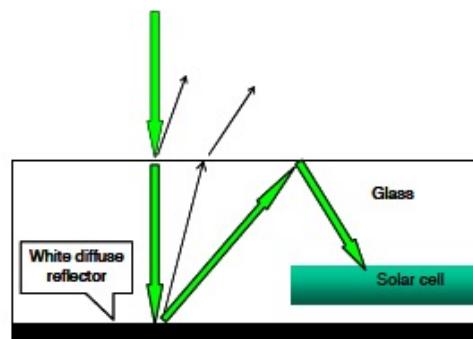
kleiner dan die van de lucht in hogere luchtlagen. Dit is te zien in figuur 3.6. De boom reflecteert invalrend licht in alle richtingen. Een lichtstraal die naar beneden gaat, komt van een medium met een grote brekingsindex in een medium met een kleinere brekingsindex. Deze lichtstraal kan dus totaal gereflecteerd worden als ze invalt onder een hoek groter of gelijk aan de kritische hoek. De kritische hoek zelf zal zeer laag zijn, aangezien het verschil in brekingsindex klein zal zijn. Het natuurfenomeen is dus te zien op verre afstanden. Doordat het oog zowel het direct beeld als het virtuele spiegelbeeld ontvangt, krijgen we de illusie dat er een spiegel oppervlak is.



Figuur 3.6: Fata morganna

### 3.2.3.2 Zonnecel

In figuur 3.7, bevindt een zonnecel zich tussen een front glasje en een witte reflecterende laag die diffusie in de hand werkt. Licht dat invalt wordt gereflecteerd in alle richtingen. De gereflecteerde lichtstralen die invallen onder een hoek kleiner dan de kritische hoek zullen kunnen ontsnappen, maar de gereflecteerde lichtstralen die invallen onder een hoek groter dan de kritische hoek blijven gevangen in het glas en kunnen nu misschien op de zonnecel invallen.



Figuur 3.7: Zonnecel

### 3.3 Groottes van reflectie- en refractiegolven

#### 3.3.1 Amplitude coëfficient van reflectie en transfer

Om het gereflecteerde en het gebroken veld te kunnen vergelijken met het invallende veld, kijken we naar de verhouding van de corresponderende fasoren aan het grensoppervlak. De loodrechte en de evenwijdige componenten geven volgende componenten:

$$R_{\perp} = \left( \frac{\bar{E}_{r,\perp}}{\bar{E}_{i,\perp}} \right)_{x=0} \quad (3.8a)$$

$$R_{\parallel} = \left( \frac{\bar{E}_{r,\parallel}}{\bar{E}_{i,\parallel}} \right)_{x=0} \quad (3.8b)$$

$$T_{\perp} = \left( \frac{\bar{E}_{t,\perp}}{\bar{E}_{i,\perp}} \right)_{x=0} \quad (3.8c)$$

$$T_{\parallel} = \left( \frac{\bar{E}_{t,\parallel}}{\bar{E}_{i,\parallel}} \right)_{x=0} \quad (3.8d)$$

Hierbij is:

- $R_{\perp}$  de amplitude coëfficiënt van de reflectie loodrecht met het invalsvlak.
- $R_{\parallel}$  de amplitude coëfficiënt van de reflectie evenwijdig met het invalsvlak.
- $T_{\perp}$  de amplitude coëfficiënt van de transfer loodrecht met het invalsvlak.
- $T_{\parallel}$  de amplitude coëfficiënt van de transfer evenwijdig met het invalsvlak.

Deze waarden zijn in het algemeen complexe grootheden. Combineren we nu de uitdrukkingen (3.8a), (3.8b), (3.8c) en (3.8d) met de formules gevonden in 3.1.2 op pagina 25, dan krijgen we:

$$R_{\perp} = \left( \frac{\bar{E}_{r,\perp}}{\bar{E}_{i,\perp}} \right)_{x=0} = \frac{\hat{E}_{r,\perp}}{\hat{E}_{i,\perp}} \cdot e^{i(\varphi_{r,\perp} - \varphi_{i,\perp})} \quad (3.9a)$$

$$R_{\parallel} = \left( \frac{\bar{E}_{r,\parallel}}{\bar{E}_{i,\parallel}} \right)_{x=0} = \frac{\hat{E}_{r,\parallel}}{\hat{E}_{i,\parallel}} \cdot e^{i(\varphi_{r,\parallel} - \varphi_{i,\parallel})} \quad (3.9b)$$

$$T_{\perp} = \left( \frac{\bar{E}_{t,\perp}}{\bar{E}_{i,\perp}} \right)_{x=0} = \frac{\hat{E}_{t,\perp}}{\hat{E}_{i,\perp}} \cdot e^{i(\varphi_{t,\perp} - \varphi_{i,\perp})} \quad (3.9c)$$

$$T_{\parallel} = \left( \frac{\bar{E}_{t,\parallel}}{\bar{E}_{i,\parallel}} \right)_{x=0} = \frac{\hat{E}_{t,\parallel}}{\hat{E}_{i,\parallel}} \cdot e^{i(\varphi_{t,\parallel} - \varphi_{i,\parallel})} \quad (3.9d)$$

### 3.3.2 Formules van Fresnel

De formules van Fresnel geven een uitdrukking voor  $R_{\perp}$ ,  $R_{\parallel}$ ,  $T_{\perp}$  en  $T_{\parallel}$ .

$$R_{\perp} = \frac{Z_2 \cos \alpha_i - Z_1 \cos \alpha_t}{Z_2 \cos \alpha_i + Z_1 \cos \alpha_t}$$

$$R_{\parallel} = \frac{Z_1 \cos \alpha_i - Z_2 \cos \alpha_t}{Z_1 \cos \alpha_i + Z_2 \cos \alpha_t}$$

$$T_{\perp} = 1 + R_{\perp}$$

$$T_{\parallel} = \frac{Z_2}{Z_1} (1 + R_{\parallel})$$

Zoals gezien in sectie 2.6 op pagina 12 kunnen we de karakteristieke impedantie in elk medium schrijven als:

$$Z_1 = \mu c_1 = \mu \frac{c_v}{n_1}$$

$$Z_2 = \mu c_2 = \mu \frac{c_v}{n_2}$$

Door deze uitdrukkingen te combineren met de algemene Fresnel formules, kunnen we de brekingsindex van elk medium in rekening brengen. We krijgen dan:

$$R_{\perp} = \frac{n_2 \cos \alpha_i - n_1 \cos \alpha_t}{n_2 \cos \alpha_i + n_1 \cos \alpha_t} \quad (3.12a)$$

$$R_{\parallel} = \frac{n_1 \cos \alpha_i - n_2 \cos \alpha_t}{n_1 \cos \alpha_i + n_2 \cos \alpha_t} \quad (3.12b)$$

$$T_{\perp} = 1 + R_{\perp} \quad (3.12c)$$

$$T_{\parallel} = \frac{n_2}{n_1} (1 + R_{\parallel}) \quad (3.12d)$$

### 3.3.3 Vermogen coëfficiënten

Omdat de frequentie van zichtbare elektromagnetische golven zo hoog is, is het onmogelijk de elektrische - en magnetische velden te gaan meten in het tijddomein. We kunnen enkel het vermogen experimenteel gaan benaderen. Hiervoor hebben we spectrale vermogen reflectiecoëfficiënten  $r_{\perp}$  en  $r_{\parallel}$  nodig, alsook de spectrale vermogen transfercoëfficiënten  $t_{\perp}$  en  $t_{\parallel}$  nodig. Deze coëfficiënten worden als volgt bepaald:

$$r_{\perp} = \left( \frac{\Phi_{r,\perp}}{\Phi_{i,\perp}} \right)_{x=0}$$

$$r_{\parallel} = \left( \frac{\Phi_{r,\parallel}}{\Phi_{i,\parallel}} \right)_{x=0}$$

$$t_{\perp} = \left( \frac{\Phi_{t,\perp}}{\Phi_{i,\perp}} \right)_{x=0}$$

$$t_{\parallel} = \left( \frac{\Phi_{t,\parallel}}{\Phi_{i,\parallel}} \right)_{x=0}$$

In deze uitdrukkingen is  $\Phi$  het optische vermogen in Watt. Wanneer we de uitdrukking van de Poynting vector,  $\vec{S}$ , mee in rekening brengen kunnen we de vermogen coëfficiënten in verband brengen met de amplitude coëfficiënten uit subsectie 3.3.1 op pagina 31. We krijgen dan:

$$r_{\perp} = \frac{\Phi_{r,\perp}}{\Phi_{i,\perp}} = \frac{\langle \vec{S}_{r,\perp} \rangle}{\langle \vec{S}_{i,\perp} \rangle} = |R_{\perp}|^2 \quad (3.14a)$$

$$r_{\parallel} = \frac{\Phi_{r,\parallel}}{\Phi_{i,\parallel}} = \frac{\langle \vec{S}_{r,\parallel} \rangle}{\langle \vec{S}_{i,\parallel} \rangle} = |R_{\parallel}|^2 \quad (3.14b)$$

$$t_{\perp} = 1 - r_{\perp} \quad (3.14c)$$

$$t_{\parallel} = 1 - r_{\parallel} \quad (3.14d)$$

Fase verschillen worden niet in rekening gebracht, omdat het hier gaat om een tijdsuitmiddeling<sup>2</sup>. Dit komt dus neer op een RMS-waarde. Om het total vermogen te bepalen van de gereflecteerde golf, moeten we dus kennis hebben van zowel de bijdragen van de loodrechte component als van de evenwijdige component.

$$\Phi_r = \Phi_{r,\perp} + \Phi_{r,\parallel}$$

$$\Phi_r = r_{\perp} \cdot \Phi_{i,\perp} + r_{\parallel} \cdot \Phi_{i,\parallel} \quad (3.15)$$

### 3.3.4 Besprekking

#### 3.3.4.1 Case 1: $n_1 < n_2$

Het verloop van de amplitude coëfficiënten en de vermogen coëfficiënten is gegeven in de figuren 3.8 op pagina 35 en 3.9 op pagina 35. Deze curven zijn bepaald voor  $n_1 = 1$  en  $n_2 = 1,5$ .

**Loodrechte inval, dus  $\alpha_i = 0^\circ$**  Bij loodrechte inval is  $\alpha_r = 0^\circ$  en wegens Snellius is  $\alpha_t = 0^\circ$ . Hierdoor krijgen we amplitude coëfficiënten:

$$R_{\perp} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - 1,5}{1 + 1,5} = \frac{-0,5}{2,5} = -0,2$$

$$R_{\parallel} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = \frac{1,5 - 1}{1,5 + 1} = \frac{0,5}{2,5} = 0,2$$

We zien dus dat de gereflecteerde loodrechte golfcomponent en de invallende loodrechte golfcomponent in tegenfase zijn, aangezien geldt dat:

$$\arg(R_{\perp}) = \varphi_{r,\perp} - \varphi_{i,\perp} = \pi$$

Dit is te zien omdat  $R_{\perp}$  negatief is.

---

<sup>2</sup>Voor meer informatie, zie sectie 2.7 op pagina 14

**Evenwijdige inval, dus  $\alpha_i = 90^\circ$**  Hierbij is  $\alpha_r = 90^\circ$  en via Snellius kunnen we  $\alpha_t$  bepalen:

$$n_1 \sin \alpha_i = n_2 \sin \alpha_t$$

$$\sin \alpha_t = \frac{n_1}{n_2}$$

We krijgen dan in Fresnell:

$$R_{\perp} = \frac{n_1 \cos \alpha_i - n_2 \cos \alpha_t}{n_1 \cos \alpha_i + n_2 \cos \alpha_t}$$

Aangezien  $\cos 90^\circ = 0$ .

$$R_{\perp} = -1$$

$$R_{\parallel} = -1$$

**Inval onder de Brewster hoek  $\alpha_{Br}$**  De Brewster hoek is de hoek waarbij de coëfficient  $R_{\parallel} = 0$ .

We kunnen dan uit formule 3.12b op pagina 32 en wetende dat  $R_{\parallel} = 0$  schrijven dat:

$$n_2 \cdot \cos \alpha_{Br} = n_1 \cdot \cos \alpha_t$$

Snellius geldt natuurlijk ook nog, dus we kunnen nog schrijven dat:

$$n_1 \cdot \sin \alpha_{Br} = n_2 \cdot \sin \alpha_t$$

Vermenigvuldigen we dan beide uitdrukkingen met elkaar, dan krijgen we:

$$n_1 n_2 \cdot \cos \alpha_{Br} \cdot \sin \alpha_{Br} = n_1 n_2 \cdot \cos \alpha_t \cdot \sin \alpha_t$$

Als we linker en rechterzijde vermenigvuldigen met twee, dan kunnen we de formule van de dubbele hoek toepassen en dan krijgen we:

$$\sin(2\alpha_{Br}) = \sin(2\alpha_t)$$

Deze gelijkheid gaat op als de hoeken voldoen aan de volgende gelijkheid:

$$2\alpha_{Br} = \pi - 2\alpha_t$$

Dus:

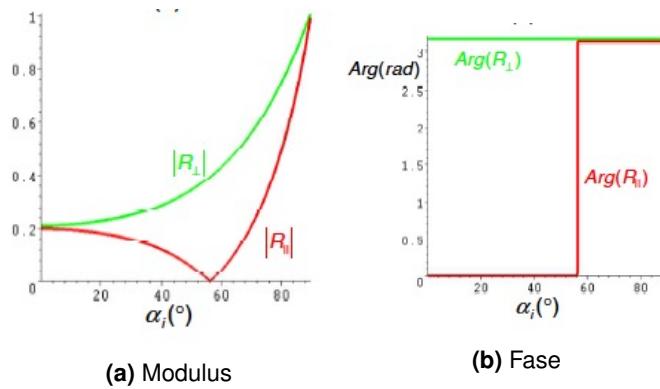
$$\alpha_{Br} = \frac{\pi}{2} - \alpha_t$$

Schrijven we nu Snellius uit:

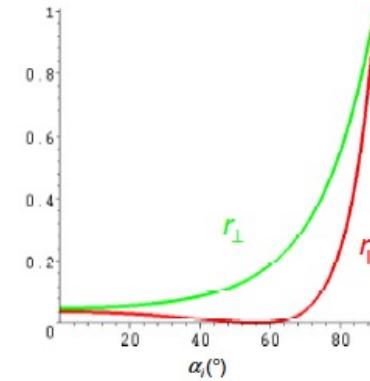
$$n_1 \cdot \sin \alpha_{Br} = n_2 \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_{Br} \right) = n_2 \cdot \sin \alpha_t$$

Zetten we de sinus om in een cosinus dan kunnen we zeggen dat de Brewster hoek gelijk is aan:

$$\alpha_{Br} = \arctan \left( \frac{n_2}{n_1} \right) \quad (3.17)$$



**Figuur 3.8:** Modules (3.8a) en fase (3.8b) van de amplitude reflectiecoëfficiënten bij  $n_1 = 1$  en  $n_2 = 1,5$



**Figuur 3.9:** Vermogen coëfficiënt voor  $n_1 = 1$  en  $n_2 = 1,5$

**Voorbeeld:** Percentage gereflecteerd vermogen

Welk percentage van inkomende vermogen wordt gereflecteerd op een luchtblas oppervlak voor een ongepolariseerde lichtstraal invallend onder een hoek van  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  en de Brewsterhoek. Als  $\alpha_i = 0^\circ$  dan weten we uit het bovenstaande dat  $R_{\parallel} = 0.2$  en  $R_{\perp} = -0.2$ . Uit deze parameters kunnen we de vermogen coëfficienten bepalen:

$$r_{\parallel} = 0.04$$

$$r_{\perp} = 0.04$$

Het vermogen wordt gegeven door:

$$\Phi_r = \Phi_{r,\parallel} + \Phi_{r,\perp}$$

$$\Phi_r = r_{\parallel} \Phi_{i,\parallel} + r_{\perp} \Phi_{i,\perp}$$

Het licht is niet gepolariseerd, het vermogen wordt dus in alle richtingen evenveel overgedragen.

$$\begin{aligned}\Phi_r &= r_{\parallel} \frac{\Phi_i}{2} + r_{\perp} \frac{\Phi_i}{2} \\ \Phi_r &= 0,04 \Phi_i\end{aligned}$$

Wanneer  $\alpha_i = 30^\circ$  dan moeten we  $R_{\parallel}$  en  $R_{\perp}$  bepalen. We bepalen eerst  $\alpha_t$ :

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_t \rightarrow \alpha_t = \arcsin \left( \frac{\sin 30^\circ}{1,5} \right) = 19,5^\circ$$

Gebruik makend van de formules van Fresnel wordt  $R_{\parallel}$ :

$$R_{\parallel} = \frac{\cos(30^\circ) - 1,5 \cos(19,5^\circ)}{1,5 \cos(30^\circ) + \cos(19,5^\circ)} = 0,16$$

En  $R_{\perp}$ :

$$R_{\perp} = \frac{1,5 \cos(30^\circ) - \cos(19,5^\circ)}{1,5 \cos(30^\circ) + \cos(19,5^\circ)} = -0,24$$

De vermogen coëfficienten worden dan:

$$r_{\parallel} = 0.026$$

$$r_{\perp} = 0.057$$

Het vermogen:

$$\begin{aligned}\Phi_r &= r_{\parallel} \frac{\Phi_i}{2} + r_{\perp} \frac{\Phi_i}{2} \\ \Phi_r &= 0,0415 \Phi_i\end{aligned}$$

Bij de Brewster hoek is  $R_{\parallel} = 0$  en  $R_{\perp} = -0,38$ . (Dit wordt bekomen op analoge wijze als hierboven). Hierdoor wordt:

$$r_{\perp} = 0.15$$

En wordt het vermogen:

$$\begin{aligned}\Phi_r &= 0 + r_{\perp} \frac{\Phi_i}{2} \\ \Phi_r &= 0,075 \Phi_i\end{aligned}$$

### 3.3.4.2 Case 2: $n_1 > n_2$

Het verloop van de amplitude coëfficiënten en de vermogen coëfficiënten is gegeven in de figuren 3.10 op de pagina hierna en 3.11 op de volgende pagina.

**Loodrechte inval, dus  $\alpha_i = 0^\circ$**  Dezelfde redenering kan gebruikt worden als in het eerste geval.

We krijgen enkel

$$R_\perp = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1,5 - 1}{1,5 + 1} = 0,2$$

$$R_\parallel = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} = \frac{1 - 1,5}{1,5 + 1} = -0,2$$

**Evenwijdige inval, dus  $\alpha_i = 90^\circ$**  Dit geval is gelijk aan het eerste geval. Hier geldt ook dat:

$$R_\perp = -1$$

$$R_\parallel = -1$$

**Invalshoek gelijk aan de Brewster hoek** We merken op dat de uitdrukking voor de Brewster hoek dezelfde blijft, enkel zal deze nu steeds kleiner zijn dan  $45^\circ$ .

**Invalshoek gelijk aan de kritische hoek  $\alpha_{crit}$**  Bij de kritische hoek geldt dat  $\alpha_t = 90^\circ$ . Hierdoor worden de coëfficiënten beiden gelijk aan 1. Wat gebeurt er nu als de invalshoek groter wordt dan de kritische?

Wanneer de invalshoek groter wordt dan de kritische hoek wordt de sinus van  $\alpha_t$  groter dan 1. Dit is enkel mogelijk wanneer we gebruik maken van complexe getallen. We kunnen deze inderdaad gebruiken aangezien de coëfficiënten complexe grootheden zijn. We moeten  $\cos \alpha_t$  bepalen om een uitdrukking te krijgen voor de coëfficiënten.

$$\begin{aligned}\cos \alpha_t &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_t} \\ \cos \alpha_t &= \pm j \sqrt{\sin^2 \alpha_t - 1} \\ \cos \alpha_t &= \pm j \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha_t - 1}\end{aligned}\tag{3.18a}$$

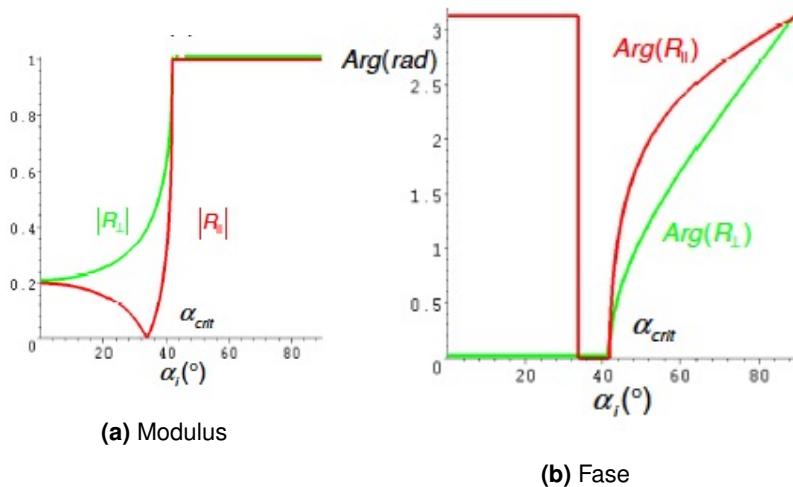
Het verloop van de fase gaat van  $0^\circ$  tot  $180^\circ$  voor beide coëfficiënten. Voor de amplitude van de loodrechte coëfficent krijgen we:

$$\begin{aligned}|R_\perp|^2 &= \left| \frac{n_1 \cos \alpha_i \mp j n_2 \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha_i - 1}}{n_1 \cos \alpha_i \pm j n_2 \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha_i - 1}} \right|^2 \\ |R_\perp|^2 &= \left| \frac{n_1 \cos \alpha_i \mp j n_2 \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha_i - 1}}{n_1 \cos \alpha_i \pm j n_2 \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha_i - 1}} \right|^2\end{aligned}$$

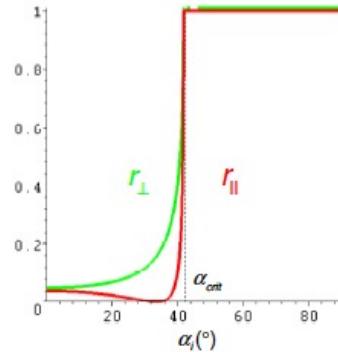
$$|R_{\perp}|^2 = \frac{n_1^2 \cos^2 \alpha_i + n_2^2 \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha_i - 1}{n_1^2 \cos^2 \alpha_i + n_2^2 \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha_i - 1}$$

$$|R_{\perp}|^2 = 1$$

Dit is het wiskundige bewijs voor totale interne reflectie.



**Figuur 3.10:** Modulus (3.10a) en fase (3.10b) van de amplitude reflectiecoëfficiënten bij  $n_1 = 1,5$  en  $n_2 = 1$



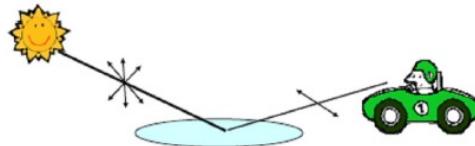
**Figuur 3.11:** Vermogen coëfficiënt voor  $n_1 = 1,5$  en  $n_2 = 1$

### 3.3.5 Toepassingen

#### 3.3.5.1 Gepolariseerde zonnebril

Uit figuur 3.9 op pagina 35 is duidelijk te zien dat de bijdrage tot het totale vermogen van de loodrechte component steeds hoger is dan de parallelle component. Als het invallende licht ongepolariseerd is dan is de loodrechte en de evenwijdige bijdrage aan het totaal vermogen gelijk. Het gereflecteerde licht zal dan dominant zijn in de loodrechte richting. Wanneer we nu de zonnebril

polariseren met de doorlaat as evenwijdig met het invalsvlak, kunnen we de grote vermogens componenten filteren uit het totale invallend vermogen.



**Figuur 3.12:** Gepolariseerde zonnebril

## 3.4 Uitdovend veld

### 3.4.1 Veld penetratie

Boven de kritische hoek wordt er geen vermogen doorgegeven aan het tweede medium omdat de Pointing vector nul is. Maar  $T_{||}$  en  $T_{\perp}$  zijn niet gelijk aan nul, dit geeft aanleiding tot een elektrisch veld dat wel binnendringt in het tweede medium. Dit is mogelijk omdat de Pointing vector een tijdsuitmiddeling is. Dus deze kan nul zijn, terwijl de velden dit eigenlijk niet zijn. We bekijken nu de loodrechte component van  $\bar{E}_{t,\perp}$ .

$$\begin{aligned}\bar{E}_{t,\perp} &= \hat{E}_{r,\perp} \cdot e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r} + \varphi_{t,\perp})} \\ \bar{E}_{t,\perp} &= |T_{\perp}| \hat{E}_{i,\perp} \cdot e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r} + \varphi_{t,\perp} + \arg T_{\perp})}\end{aligned}$$

Het scalair product van de twee vectoren kunnen we uitschrijven en dan krijgen we:

$$\bar{E}_{t,\perp} = |T_{\perp}| \hat{E}_{i,\perp} \cdot e^{j(\omega t - k_2 \cdot \cos \alpha_t \cdot x - k_2 \cdot \sin \alpha_t \cdot y + \varphi_{t,\perp} + \arg T_{\perp})}$$

In deze vergelijking is  $\cos \alpha_t$  een complex getal dat gevonden kan worden door gebruik te maken van formule 3.18a op pagina 37. We kunnen dan schrijven dat:

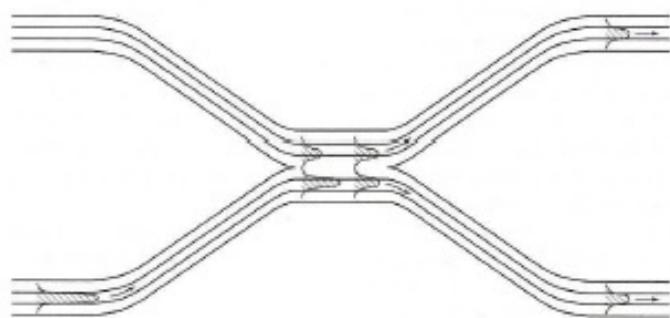
$$\bar{E}_{t,\perp} = |T_{\perp}| \hat{E}_{i,\perp} \cdot e^{\pm k_2 \cdot \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha_i - 1} x} \cdot e^{j(\omega t \cdot x - k_2 \cdot \sin \alpha_t \cdot y + \varphi_{t,\perp} + \arg T_{\perp})} \quad (3.21)$$

Deze vergelijking beschrijft een vlakke golf die voortbeweegt in de  $y$ -richting met een amplitude die afhankelijk is van de  $x$ -coördinaat. In de  $x$ -richting gedraagt het elektrische veld zich als een gedempte golf. Deze heeft een "skind depth" die gegeven wordt door:

$$\frac{\lambda_v}{2\pi \sqrt{n_1^2 \cdot \sin^2 \alpha_i - n_2^2}} \quad (3.22)$$

### 3.4.2 Toepassing: fibre koppeling

Bij deze toepassing wordt het uitdovend veld gebruikt om een signaal van de ene fibre over te brengen naar een andere fibre. Dit is voorgesteld in figuur 3.13 op de pagina hierna



**Figuur 3.13:** Fibre koppeling

## Hoofdstuk 4

# Optische golfgeleiders en fibres

### 4.1 Numerical aperture

De opstelling voor de volgende berekeningen is te zien in figuur 4.1. Om licht in de fiber te krijgen dient  $\alpha_{i,1} > \alpha_{crit}$  te zijn. Ook moet  $\sin \alpha_{i,2} \geq \frac{n_c}{n_f}$  en dus  $\cos \alpha_{t,1} \geq \frac{n_c}{n_f}$ . Dit laatste kunnen we schrijven als:

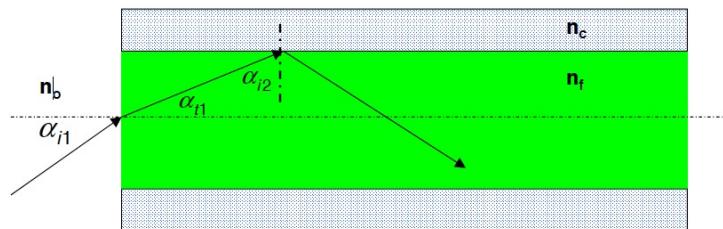
$$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{t,1}} \geq \frac{n_c}{n_f} \quad (4.1)$$

Schrijven we snellius bij de inval in de fibre:

$$n_0 \cdot \sin \alpha_{i,1} = n_f \cdot \sin \alpha_{t,1} \quad (4.2)$$

Voegen we nu (4.1) en (4.2), dan krijgen we:

$$\sqrt{1 - \frac{n_0^2 \sin^2 \alpha_{i,1}}{n_f^2}} \geq \frac{n_c}{n_f} \quad (4.3)$$



**Figuur 4.1:** Numerieke aperatuur

Verder uitwerken levert ons:

$$1 - \frac{n_0^2 \sin^2 \alpha_{i,1}}{n_f^2} \geq \frac{n_c^2}{n_f^2}$$

$$n_f^2 - n_0^2 \sin^2 \alpha_{i,1} \geq n_c^2$$

$$n_0^2 \sin^2 \alpha_{i,1} \leq n_f^2 - n_c^2$$

$$n_0 \sin \alpha_{i,1} \leq \sqrt{n_f^2 - n_c^2}$$

We noemen  $\sqrt{n_f^2 - n_c^2} = NA$ , de numerieke aperatuur.

**Voorbeeld:** Numerieke aperatuur

Bereken de numerieke aperatuur van een glas fibre (1,5) omringt door lucht.

$$\sqrt{1,5^2 - 1} = 1,12 = NA$$

Bekijken we de transmissie:

$$1 \sin \alpha_{i,1} < 1,12$$

We zien dus dat er altijd transmissie zal zijn.

We kunnen nu nog enkele waarden definiëren. Steunend op het feit dat het verschil tussen  $n_f$  en  $n_c$  klein is kunnen we het genormaliseerde brekingsindex verschil  $\Delta$  berekenen.

$$\Delta = \frac{n_f^2 - n_c^2}{2n_f^2} \quad (4.4)$$

De numerieke aperatuur kan dan geschreven:

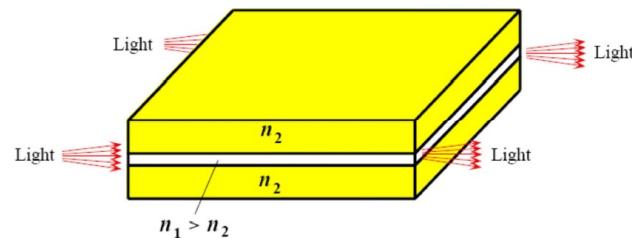
$$NA = n_f \sqrt{2\Delta} \quad (4.5)$$

Als nu  $n_f \cong n_c$ , dan wordt  $\Delta$  ongeveer:

$$\Delta \cong \frac{n_f - n_c}{n_f} \cong \frac{n_f - n_c}{n_c}$$

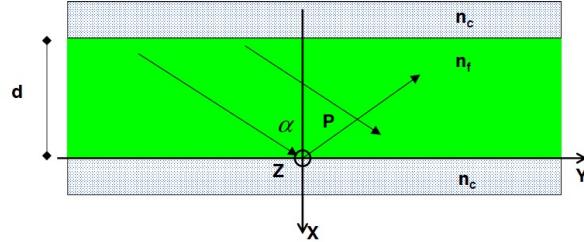
## 4.2 Vlakke golfgeleiders

We gebruiken vlakke golfgeleiders omdat dit makkelijker is om uit te leggen. De algemene structuur is te zien in figuur 4.2



Figuur 4.2: Vlakke waveguides

Door reflectie ontstaan er staande golven binnen in de fibre. Bij enkele resonantiepieken spreken we over modes. We gaan nu de reflectie in het punt P van figuur 4.3 berekenen.



**Figuur 4.3:** Modes in vlakke golfgeleiders

$$\bar{E}_P = \hat{E}_+ e^{i\phi_+} + \hat{E}_- e^{i\phi_-} \quad (4.6)$$

Hierbij is:

$$\begin{cases} \phi_+ = \omega t - \vec{k}_+ \cdot \vec{r} + \varphi_+ \\ \phi_- = \omega t - \vec{k}_- \cdot \vec{r} + \varphi_+ \end{cases}$$

Het scalair product van de vectoren uitschrijven geeft:

$$\begin{cases} \phi_+ = \omega t - k_f \cos \alpha \cdot x - k_f \sin \alpha \cdot y + \varphi_+ \\ \phi_- = \omega t + k_f \cos \alpha \cdot x - k_f \sin \alpha \cdot y + \varphi_- \end{cases}$$

Aan  $x = 0$  is er totale reflectie.

$$|R_{\perp}| = 1 \rightarrow \hat{E}_+ = \hat{E}_- = \hat{E}$$

$$\arg(R_{\perp}) = (\phi_r - \phi_i)_{x=0}$$

$$\Rightarrow (\phi_- - \phi_+)_{x=0} = \varphi_- - \varphi_+ = \arg R_{\perp}$$

$$\Rightarrow \varphi_- = \arg R_{\perp} + \varphi_+$$

We kunnen nu formule (4.6) verder uitwerken:

$$\begin{aligned} \bar{E}_P &= \hat{E} \cdot e^{j(\omega t - k_f \cos \alpha \cdot x - k_f \sin \alpha \cdot y + \varphi_+)} + \hat{E} \cdot e^{j(\omega t + k_f \cos \alpha \cdot x - k_f \sin \alpha \cdot y + \varphi_- + \arg R_{\perp})} \\ \bar{E}_P &= \hat{E} \cdot e^{j(\omega t - k_f \sin \alpha \cdot y + \varphi_+)} \left[ e^{-j \cdot k_f \cos \alpha \cdot x} + e^{j \cdot k_f \cos \alpha \cdot x \cdot \arg R_{\perp}} \right] \end{aligned}$$

We weten dat:

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

Dan kunnen we schrijven dat:

$$\bar{E}_P = \hat{E} \cdot e^{j(\omega t - k_f \sin \alpha \cdot y + \varphi_+ + \frac{\arg R_{\perp}}{2})} \left[ e^{-j \cdot k_f \cos \alpha \cdot x + \frac{\arg R_{\perp}}{2}} + e^{j \cdot k_f \cos \alpha \cdot x \cdot \arg R_{\perp}} \right]$$

Deze uitdrukking beschrijft een lopende golf in de  $y$ -richting met een amplitude die afhankelijk is van de  $x$ -richting, de plaats in de fibre. Merk op dat we nog geen resonantie hebben.

De resonantie voorwaarde is de volgende. Bij  $x = -d$  is het faseverschil terug  $\arg R_{\perp}$ , dus totale reflectie.

$$\begin{aligned} x = -d : |R_{\perp}| &= 1 \text{ en } \arg R_{\perp} = (\phi_r - \phi_i)_{x=-d} \\ \Rightarrow \arg R_{\perp} + 2\pi &= (\phi_r - \phi_i)_{x=-d} \end{aligned}$$

We kunnen nu schrijven dat:

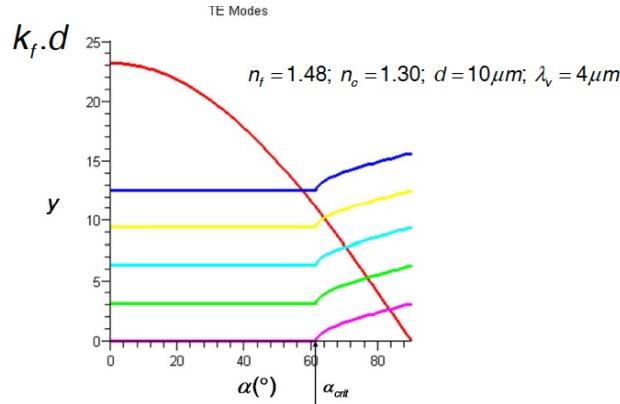
$$\begin{cases} \phi_{+_{x=-d}} = \omega t + k_f \cdot \cos \alpha \cdot d - k_f \cdot \sin \alpha_y + \phi_+ \\ \phi_{-_{x=-d}} = \omega t - k_f \cdot \cos \alpha \cdot d - k_f \cdot \sin \alpha_y + \phi_- \end{cases}$$

$$(\phi_+ - \phi_-)_{x=-d} = 2k_f \cos \alpha x - \arg R_{\perp} = \arg R_{\perp} + m2\pi$$

De resonantie voorwaarde wordt dan:

$$k_f \cos \alpha d = \arg R_{\perp} (\alpha) + m\pi \quad (4.7)$$

Staande golven zullen dus overleven wanneer er voldaan is aan voorwaarde (4.7). De uitdrukking  $\arg R_{\perp}$  is afhankelijk van de hoek  $\alpha$ . We moeten enkel nog voorwaarde (4.7) kunnen oplossen. Dit gebeurt op een grafische manier, gegeven in figuur (4.4)



**Figuur 4.4:** Oplossing van de resonantievoorwaarde

Voor  $m \ll$  is de  $\alpha$  altijd het grootst. Dit resulteert in een platte zig-zag functie als verplaatsingsfunctie van een lichtstraal binnen de fibre. Naarmate  $m$  groter wordt, wordt  $\alpha$  kleiner, en krijgen we een fellere zig-zag functie.

We merken nog op dat twee soorten modes hebben.

- Modes voor  $R_{\perp}$ , deze noemen we de TE-modes (Transversaal Elektrisch).
- Modes voor  $R_{\parallel}$ , deze noemen we de TM-modes (Transversaal Magnetisch).

### 4.2.1 Aantal modes in vlakke golfgeleiders

We berekenen het aantal modes in de fibre.

$$\begin{aligned}
 (N - 1)\pi &< k_f \cos \alpha_{crit} d < N\pi \\
 \Rightarrow N &> \frac{k_f \cos \alpha_{crit} d}{\pi} > N - 1 \\
 \Rightarrow N &> \frac{k_f}{\pi} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{crit}} d > N - 1 \\
 \Rightarrow N &> \frac{k_f}{\pi} \sqrt{1 - \frac{n_c^2}{n_f^2}} d > N - 1 \\
 \Rightarrow N &> \frac{k_v}{\pi} \cdot n_f \frac{\sqrt{n_f^2 - n_c^2}}{n_f} d > N - 1 \\
 \Rightarrow N &> \frac{k_v \cdot NA \cdot d}{\pi} > N - 1
 \end{aligned}$$

We kunnen nu zeggen dat:

$$N = INT \left( \frac{k_v \cdot NA \cdot d}{\pi} \right) + 1 \quad (4.8)$$

$$N = \left\lfloor \frac{k_v \cdot NA \cdot d}{\pi} \right\rfloor + 1 \quad (4.9)$$

We definiëren het  $V$ -getal van een vlakke golfleider.

$$V\text{-getal} = k_v \cdot \frac{d}{2} \cdot NA \sim \frac{d}{\lambda_v} \quad (4.10)$$

Het  $V$ -getal heeft dus te maken met de verhouding tussen  $d$  en  $\lambda$ . Als  $d \gg \lambda$  dan is het  $V$ -getal klein. Wanneer  $d \approx \lambda$  is, dan is het  $V$ -getal groot. Het aantal modes in een fibre kan dan anders geschreven worden.

$$N = \left\lfloor \frac{2V}{\pi} \right\rfloor + 1 \quad (4.11)$$

Voor een mono fibre is  $N = 1$

$$\Rightarrow \frac{2V}{\pi} < 1 \Rightarrow V < \frac{\pi}{2}$$

**Voorbeeld:** Toepassing van het aantal modes

Er is gegeven dat:  $n_f = 1,48; n_c = 1,46; d = 100\mu m; \lambda_v = 1,0\mu m$ . We willen nu volgende parameter berekenen:  $V, N$  en de maximum dikte voor een single-mode fibre.

1. Berekenen van het V-getal:

$$\begin{aligned} V &= k_v \cdot \frac{d}{2} \cdot NA = \frac{2\pi}{\lambda_v} \cdot \frac{d}{2} \cdot \sqrt{n_f^2 - n_c^2} \\ \Rightarrow V &= \frac{2\pi \cdot 100\mu m}{1,0\mu m \cdot 2} \cdot \sqrt{1,48^2 - 1,46^2} \\ \Rightarrow V &= 76,18 \end{aligned}$$

2. Berekenen van het aantal modes:

$$\begin{aligned} N &= \left\lfloor \frac{2 \cdot V}{\pi} \right\rfloor + 1 \\ \Rightarrow N &= \left\lfloor \frac{2 \cdot 76,18}{\pi} \right\rfloor + 1 \\ N &= 49 \end{aligned}$$

3. Berekenen van de dikte voor een single-mode fibre:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot V}{\pi} &< 1 \\ \Rightarrow \frac{2 \cdot k_v \cdot \frac{d}{2} \cdot NA}{\pi} &< 1 \\ \Rightarrow d &< \frac{2\pi}{NA \cdot k_v} \\ \Rightarrow d &< \frac{\pi}{\sqrt{n_f^2 - n_c^2} \cdot 2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_v}} \\ \Rightarrow d &< \frac{\lambda_v}{2 \sqrt{n_f^2 - n_c^2}} = 2,06\mu m \end{aligned}$$

### 4.2.2 Amplitude bij vlakke golfgeleiders

De amplitude wordt in het algemeen gegeven door:

$$2 \cdot \hat{E}_\perp \cdot \left| \cos \left( k_f \cdot \cos \alpha \cdot x + \frac{\arg R_\perp}{2} \right) \right|$$

Door de resonantie voorwaarde 4.7 op pagina 44 kunnen we dit nu herschrijven tot:

$$2 \cdot \hat{E}_\perp \cdot \left| \cos \left( \frac{\arg R_\perp + m\pi}{d} + \frac{\arg R_\perp}{2} \right) \right|$$

Opmerkingen:

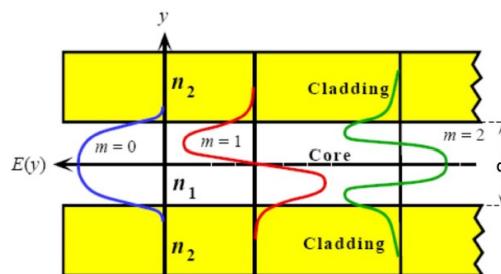
- Op  $x = 0$  en  $x = -d$ , is de absolute waarde van het veld hetzelfde, namelijk:

$$2 \cdot \hat{E}_{+, \perp} \cdot \left| \cos \left( \frac{\arg R_{\perp}}{2} \right) \right|$$

- Op  $x = -\frac{d}{2}$  is het veld nul als  $m$  oneven is en maximaal als  $m$  even is.

We zien ook dat het uitdovende veld belangrijker wordt naarmate de orde  $m$  verhoogt (figuur 4.5). Dit heeft twee redenen:

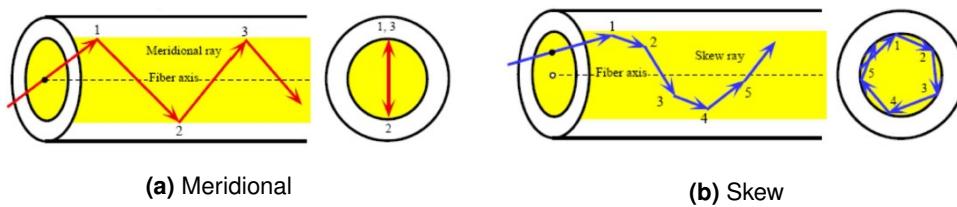
- Er is een hogere initiële amplitude
- Een hogere penetratie diepte



Figuur 4.5: Vergelijking orde  $m$

### 4.3 Cylindrische golfgeleiders

Er zijn hierbij staande golven en resonantie in twee dimensies. Er zijn ook twee mogelijkheden voor golven om zich voort te planten in de fibre. Deze zijn te zien in figuur 4.6. De wiskunde om deze fenomenen te beschrijven is veel moeilijker (Bessel functies).



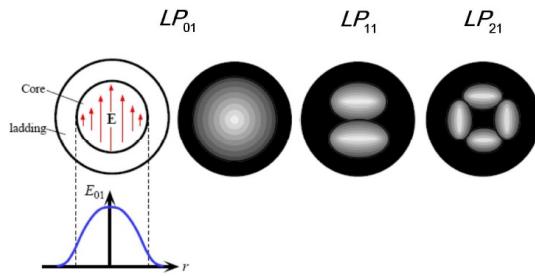
(a) Meridional

(b) Skew

Figuur 4.6: Voorplantings methoden cilindrische golfgeleider

Het elektrische veld binnen de fibre is lineair gepolariseerd, en wordt beschreven door twee parameters ( $LP_{lm}$ ):

- $m$ : Deze parameter is gerelateerd aan de interne reflectiehoek zoals bij vlakke golfgeleiders.
- $l$ : Gerelateerd aan het aantal skew lichtstralen in de fibre. (maximaal  $2l$ ).



**Figuur 4.7:** Elektrisch veld in cirulaire fibre

Het  $V$ -getal voor een circulaire golfgeleider is analoog aan dat van een vlakke golfgeleider, en wordt gegeven door:

$$V_{fibre} = k_v \cdot R \cdot NA$$

Het aantal modes wordt nu gegeven door de volgende uitdrukking:

$$N_{fibre} \cong \frac{V^2}{2}$$

Voor een single-mode moet:

$$V < 2.405$$

**Voorbeeld:** Cylindrische golfgeleider

Er is gegeven dat  $n_f = 1.48$ ;  $n_c = 1.46$ ;  $R = 50\mu m$ ,  $\lambda_v = 1.0\mu m$ . Gevraagd is  $V$ ,  $N$  en de diameter voor een single mode fibre.

1. Berekenen van het  $V$ -getal:

$$V = k_v \cdot R \cdot NA = \frac{2\pi}{\lambda_v} \cdot R \cdot NA$$

$$\Rightarrow V = \frac{2\pi}{1.0\mu m} \cdot 50\mu m \cdot \sqrt{1.48^2 - 1.46^2} = 76.18$$

2. Het aantal mogelijke modes:

$$N \cong \frac{V^2}{2} = \frac{76.16^2}{2} = 2901.69 \approx 2901$$

3. Diameter voor single-mode:

$$V < 2.405$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_v} \cdot R \cdot NA < 2.405$$

$$\Rightarrow R < \frac{2.405 \cdot 1.0\mu m}{2\pi \cdot \sqrt{1.48^2 - 1.46^2}} = 1.6\mu m$$

# Hoofdstuk 5

## Attenuatie en Dispersie

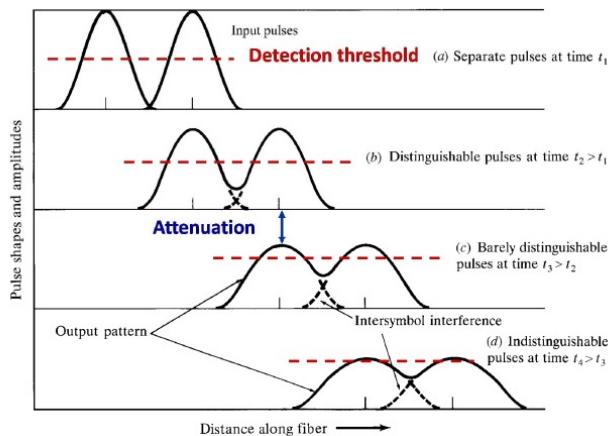
### 5.1 Inleiding

Enkele definities:

**Attenuatie** Het verminderen van optisch vermogen van een puls door het voortplanten in een fibre.

**Dispersie** Het verbreden van een optische puls door het voortplanten in een fibre.

Beide factoren zijn de hoofdreden voor verliezen van informatie bij optische communicatie. Het effect van de beide factoren is te zien in figuur 5.1.



Figuur 5.1: Effecten van attenuatie en dispersie

We zien dus in figuur 5.1 dat na het optreden van attenuatie en dispersie er intersymbol interferentie kan optreden, wat resulteert in informatieverlies.

### 5.2 Attenuatie

#### 5.2.1 Klassificatie

Er zijn drie vormen van attenuatie:

1. Intrinsieke attenuatie:
  - Absorptie door het materiaal
  - Scattering
2. Attenuatie door buiging van de fibre.
3. Attenuatie door het koppelen van twee fibres.

### 5.2.2 Intrinsieke attenuatie

#### 5.2.2.1 Definitie

Intrinsieke attenuatie laat zich zien in de vorm van een constante  $\alpha$  in de uitdrukkingen van het elektrische en magnetische veld. (In onze verdere besprekung zullen we ons beperken tot het elektrische veld  $E_{\perp}$ ).

$$E_{\perp}(x, t) = E_0 \cdot e^{-\alpha x} \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_{\perp}) \quad (5.1)$$

$$\Phi_e(x, t) = \Phi_0 \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot x} \quad (5.2)$$

In de formules (5.1) en (5.2) is te zien dat attenuatie zich laat uitdrukken in een term  $\alpha$  die afhankelijk van het materiaal en constant is. Deze constante hangt meestal af van de golflengte  $\lambda$ . Deze afhankelijkheid hangt sterk af van de onzuiverheden in het materiaal.

#### 5.2.2.2 Absorptie door het materiaal

Het vermogen uitgedrukt in vergelijking (5.2) verschilt over verschillende decades, daarom gaan we voor het vergelijken van twee vermogens over naar niveaus, dit maakt het iets duidelijker. Deze niveaus worden uitgedrukt in  $dB$ . Dit resulteert in volgende gelijkheid:

$$\Delta L_{\Phi}(dB) = 10 \log \frac{\Phi_{e,2}}{\Phi_{e,1}}$$

We weten nog dat  $10 \log(2)$  overeenkomt met een waarde van  $3dB$ . Het overschakelen naar  $dB$ , en dus een logaritmische schaal, zorgt ervoor dat we niet zomaar twee niveaus kunnen optellen met elkaar. Om dit te doen moeten we gebruik maken van volgende formule:

$$L_1 + L_2 = \text{Max}(L_1, L_2) + 10 \log(1 + 10^{-0,1 \Delta L}) \quad (5.3)$$

Hierbij is  $\Delta L = L_{max} - L_{min}$ .

We tonen nu aan dat het verlies van optisch vermogen lineair is met de afstand afgelegd in de fibre en we zullen ook de absorptie uitdrukken in  $\frac{dB}{km}$ .

$$\Phi = \Phi_0 e^{-2 \cdot \alpha \cdot x}$$

$$L_\Phi = 10 \log \left( \frac{\Phi}{\Phi_{ref}} \right) = 10 \log \left( \frac{\Phi_0}{\Phi_{ref}} e^{-2.\alpha.x} \right)$$

$$\Rightarrow L_\Phi = 10 \log \left( \frac{\Phi_0}{\Phi_{ref}} \right) + 10 \log (e^{-2.\alpha.x})$$

$$\Rightarrow L_\Phi = L_{\Phi_0} - 20.\alpha.\log (e).x$$

We zien een duidelijk lineair verband met de afstand  $x$ . De vermindering in  $dB$  per meter is gelijk aan:

$$20.\alpha.\log (e)$$

Het  $dB$  verlies voor een kilometer is dan:

$$20.\alpha.\log (e).1000 = 8685.89.\alpha \quad (5.4)$$

#### Voorbeeld: Kleine oefening

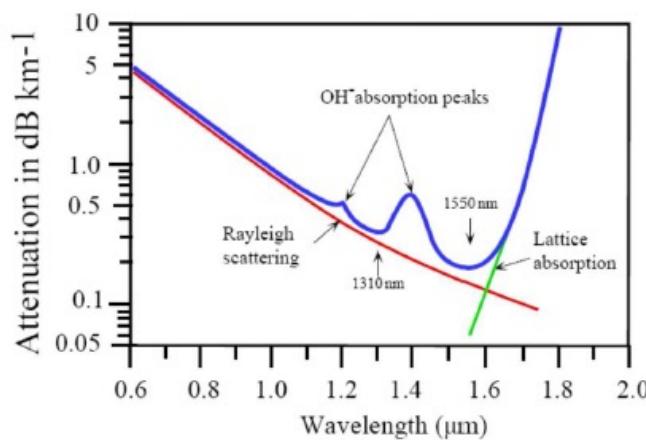
Gegeven zijn twee vermogen niveau's van twee pulsen,  $L_{\Phi_1} = 50 dB$  en  $L_{\Phi_2} = 57 dB$ . De vraag is wat de som is van beide niveau's. Wat is het vermogenniveau van de resulterende puls? We moeten hier dus duidelijk gebruik maken van formule 5.3 op de vorige pagina. We kunnen al het volgende concluderen:

$$Max(L_1, L_2) = L_{\Phi_2} = 57 dB$$

Als we nu het resulterende vermogenniveau bepalen krijgen we:

$$L_{\Phi_{result}} = L_{\Phi_2} + 10 \cdot \log (1 + 10^{-0,1 \cdot \Delta L})$$

$$L_{\Phi_{result}} = 57 dB + 0.79 dB = 57,79 dB$$



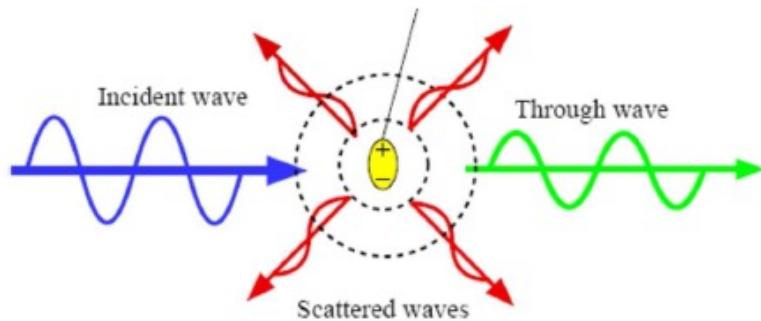
**Figuur 5.2:** Variatie in attenuatie afhangelijk van  $\lambda$

In figuur 5.2 is duidelijk te zien dat attenuatie afhankelijk is van de golflengte  $\lambda$ .

### 5.2.2.3 Scattering

In figuur 5.3 is het proces van scattering te zien. Hierbij wordt er een deel van de invallende golf verdeeld door inval op een verstrooier. Er zijn twee vormen van scattering:

- **Mie scattering** waarbij  $\lambda <$  diameter van de verstrooier.
- **Ray scattering** waarbij  $\lambda >$  diameter van de verstrooier.



**Figuur 5.3:** Voorstelling van scattering

Door niet-uniforme smelt bij het maken van glasvezel kunnen er fouten optreden in de vezel, die aanleiding geven tot scattering. Ray scattering wordt gegeven door de volgende formule:

$$\alpha_{Ray}(dB.km^{-1}) = \frac{0.9}{[\lambda (\mu m)]^4} \quad (5.5)$$

Het is steeds de kleinste golflengte die verstrooid wordt.

**Voorbeeld:** Scatting

We hebben een laser met een vermogen van  $1\text{mW}$  bij een golflengte  $\lambda = 1.31\mu\text{m}$ . Een fotodetector heeft minstens  $1\text{nW}$  nodig om een duidelijk signaal te kunnen detecteren. Wat is de maximale afstand die de fibre mag hebben, opdat de detector een duidelijk signaal kan onderscheiden.

We kunnen al berekenen hoeveel vermogen er verloren mag gaan:

$$\Delta L(\text{dB}) = 10 \cdot \log \left( \frac{10^{-3}}{10^{-9}} \right) = 60 \text{dB}$$

We bepalen nu  $\alpha_{Ray}$  voor de laser, gebruik makend van formule (5.5).

$$\alpha_{Ray} = \frac{0.9}{1.3^4} = 0.306 \frac{\text{dB}}{\text{km}}$$

We rekenen verder met  $0.4 \frac{\text{dB}}{\text{km}}$  omdat Ray scattering een ondergrens is, zoals te zien in figuur 5.2 op pagina 51. De maximale lengte van de fiber is dan:

$$\frac{60 \text{dB}}{0.4 \frac{\text{dB}}{\text{km}}} = 150 \text{km}$$

We doen nu hetzelfde maar voor een laser die werkt bij  $1.55\mu\text{m}$ .

$$\alpha_{Ray} = \frac{0.9}{1.55^4} = 0.156 \frac{\text{dB}}{\text{km}}$$

We nemen  $0.2 \frac{\text{dB}}{\text{km}}$ , weer voor dezelfde reden.

$$\frac{60 \text{dB}}{0.2 \frac{\text{dB}}{\text{km}}} = 300 \text{km}$$

**5.2.2.4 Banden**

**Short Wavelength Band** Deze band bevindt zich rond  $800 - 900\text{nm}$  en werd vooral gebruikt in de jaren 70.

**Medium Wavelength Band** Bevindt zich rond  $1250 - 1350\text{nm}$  en werd gebruikt tijdens de jaren 80. Binnen deze band bevinden zich de meeste van de hedendaagse toepassingen.

**Long Wavelength Band** Tussen de  $1450 - 1600\text{nm}$  bevindt zich de laagste attenuatie.

**Voorbeeld:** Bandbreedte medium band

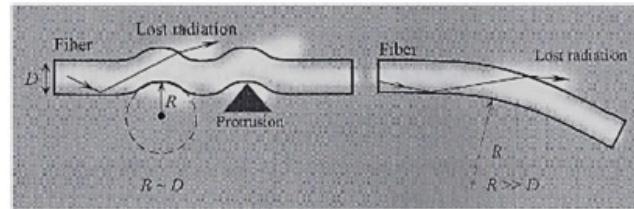
We berekenen nu de bandbreedte voor de medium band. We kennen de golflengten  $\lambda_1 = 1250\text{nm}$  en  $\lambda_2 = 1350\text{nm}$ . Dit resulteert in frequenties gelijk aan  $f_1 = 239,9\text{THz}$  en  $f_2 = 222,1\text{THz}$ . De bandbreedte is dan:

$$BB = (239.9 - 222.1)\text{THz} = 17,8\text{THz}$$

**5.2.3 Buiging**

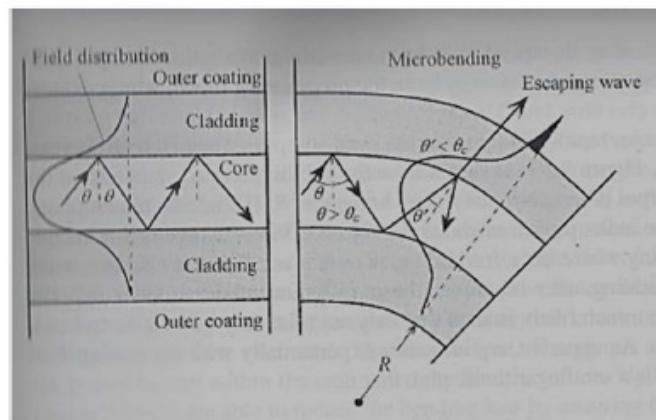
Er zijn twee soorten buigingen, beide te zien in figuur 5.4 op de volgende pagina:

- Microbuiging: De kromtestraal  $R$  van de buiging is ongeveer gelijk aan de diameter  $D$  van de fibre.
- Macrobuiging: De kromtestraal  $R$  van de buiging is veel groter dan de diameter  $D$  van de fibre.



**Figuur 5.4:** Soorten buigingen in een fibre

Er zal steeds verlies optreden als de invalhoek kleiner wordt dan de kritische hoek. Maar zelfs als de hoek groter wordt dan de kritische hoek kan het uitdovende veld verliezen introduceren. De hoogste modes zijn het meest aangetast en het aantal modes kan zelfs dalen.



**Figuur 5.5:** Resultaat van buigingen

Een semi empirische formule is gegeven in (5.6):

$$\alpha_B \left( \frac{dB}{buiging} \right) = A \cdot e^{\frac{R}{R_c}} \quad (5.6)$$

#### Voorbeeld: Bepalen van $\alpha_B$

We weten dat  $A = 370 \frac{dB}{buiging}$  en  $R_c = 1.56 \text{ mm}$ . Gevraagd is nu om  $\alpha_B$  te bepalen bij een buiging van  $90^\circ$  en een kromming van  $R = 5 \text{ mm}$ , dus een macrobuiging.

Aangezien het hier gaat om een kwart van een buiging, een hele buiging is  $360^\circ$ , moeten we  $A$  delen door 4. We krijgen dan een  $\alpha_B$  gelijk aan:

$$\alpha_B = \frac{370}{4} \cdot e^{-\frac{5 \text{ mm}}{1.56 \text{ mm}}} = 3,75 \text{ dB}$$

### 5.2.4 Koppeling

Er zijn een aantal koppelingen mogelijk van fibres, en ze geven allemaal verliezen. Bij een "fusion splice" treden verliezen op lager dan  $0.1 \text{ dB}$ . Deze koppelingen bestaan er uit dat twee fibres gefuseerd worden door opwarming.

Bij een "butt join" worden twee fibers zeer dicht bij elkaar geplaatst. Hier treden volgende verliezen op:

- Fresnel verliezen.
- Verliezen door slecht te allignerken.

**Voorbeeld:** Fresnell verliezen bij een butt join

We berekenen de verliezen in  $\text{dB}$  van een butt join van fibre naar lucht ( $n_f = 1.48$ ).

$$|R_{\parallel}| = |R_{\perp}| = \left| \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right|$$

$$r_{\perp} = r_{\parallel} = |R|^2 = 0,037$$

Hierdoor is er bij het verlaten van de eerste fiber 96,3% transmissie. Er treden natuurlijk ook terug Fresnell verschijnselen op bij het binnentrede van de tweede fibre. Hierbij zal er terug ongeveer 4% gereflecteerd worden, wat er voor zorgt dat er in totaal ongeveer 92% transmissie is, wat resulteert in een verlies van ongeveer  $0,33 \text{ dB}$ .

## 5.3 Dispersie

De propagatie snelheid en de index van reflectie hangen af van de golflengte. Als we weten dat optische input steeds een eindige bandbreedte heeft, zal de transit tijd van elke spectrale bijdrage aan de input anders zijn. Dit resulteert in puls verbreding, in het tijdsdomein. Dit is te zien in figuur 5.7 op de pagina hierna.

### 5.3.1 Intermodal

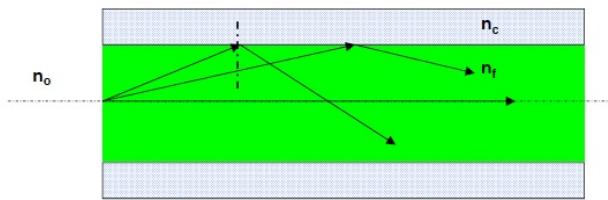
We kijken nu naar de latency tussen verschillende modes binnen de fibre. We berekenen het tijdsverschil tussen de snelste en traagste mode. We weten dat de snelheid waarmee een lichtstraal zich verplaatst binnen de fibre gelijk is aan:

$$v_{lat} = c_f \cdot \sin \alpha = \frac{c_v}{n_f} \cdot \sin \alpha$$

Dan wordt de transit tijd  $\tau$  van een lichtstraal gelijk aan:

$$\tau = \frac{L}{v_{lat}}$$

We krijgen dan voor de snelste en traagste mode:



**Figuur 5.6:** Modes in een fibre (gebruikt om snelheid te bepalen)

$$\begin{cases} \tau_{snel} = \frac{L}{c_f} = \frac{L}{c_v} \cdot n_f \\ \tau_{traag} = \frac{L}{c_f \cdot \sin \alpha_{crit}} = \frac{L}{c_v \cdot \frac{n_c}{n_f}} \end{cases}$$

Het tijdsverschil is dan:

$$\Delta\tau = \tau_{traag} - \tau_{snel} = \frac{L \cdot n_f}{c_v} \cdot \left( \frac{n_f}{n_c} - 1 \right) = \frac{L \cdot n_f}{c_v} \cdot \left( \frac{n_f - n_c}{n_c} \right)$$

Als we nu gebruik maken van de definitie van de genormaliseerde brekingsindex  $\Delta$  te zien in formule 4.4 op pagina 42, dan kunnen we schrijven.

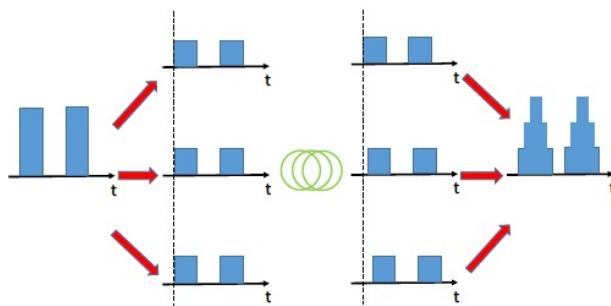
$$\Delta\tau = \frac{L \cdot n_f}{c_v} \cdot \Delta$$

We weten dat:

$$\Delta = \frac{NA^2}{2 \cdot n_f^2}$$

Dus we kunnen schrijven dat:

$$\Delta\tau = \frac{L}{c_v} \cdot \frac{(NA)^2}{2 \cdot n_f}$$



**Figuur 5.7:** Voorstelling van de pulsverbreding

**Voorbeeld:** Puls verbreding

We moeten de puls verbreding bepalen voor een multimodefibre (MMF) van 1 km met een  $n_f = 1,50$  en een genormaliseerde brekingsindex  $\Delta = 0.01$ . Gebruik makend van de bovenstaande formules krijgen we:

$$\Delta\tau = \frac{1.10^3 m \cdot 1,50 \cdot 0,01}{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} = 50 \text{ ns}$$

### 5.3.2 Materiaal

Als we 1 mode beschouwen en we bekijken de spectrale bandbreedte van de lichtbron dan is de propagatie snelheid van een golfpakket gelijk aan  $v_g$ , golflengte afhankelijk. Dit brengt met zich mee dat de transit tijd  $\tau$  ook golflengte afhankelijk wordt. We definiëren een materiaal dispersie coëfficiënt  $D_m$ .

$$d\tau = L \cdot D_m \cdot d\lambda_v \quad (5.7)$$

$$D_m = \frac{d\tau}{L \cdot d\lambda} \quad (5.8)$$

$$[D_m] = \text{ps} \cdot \text{km}^{-1} \cdot \text{nm}^{-1}$$

We gaan nu een formule bepalen voor  $D_m$ . We weten nog uit vorige hoofdstukken dat:

$$v_g = -\lambda^2 \cdot \frac{df}{d\lambda} \quad (5.9)$$

Als we nu de uitdrukkingen voor  $\lambda = \frac{\lambda_n}{n}$  en  $f = \frac{c_v}{\lambda_n}$  beiden differentiëren naar de golflengte, dan krijgen we voor beide uitdrukkingen:

$$\begin{cases} d\lambda = \frac{d\lambda_v}{n} - \frac{\lambda_v}{n^2} \cdot dn \\ df = -\frac{c_v}{\lambda_v^2} d\lambda_v \end{cases}$$

De combinatie van deze uitdrukkingen in vergelijking (5.9) geeft dan:

$$v_g = \frac{c_v}{n - \lambda_v \cdot \frac{dn}{d\lambda_v}} = \frac{c_v}{n_g}$$

We kunnen dit nu samen brengen met vergelijking 5.8:

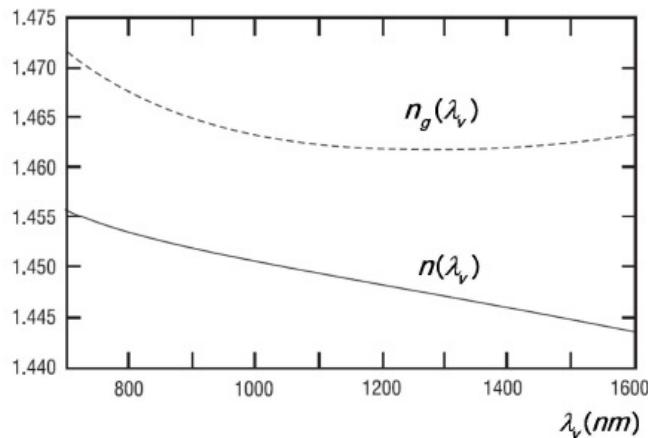
$$D_m = \frac{d}{d\lambda_v} \left( \frac{n_g}{c_v} \right)$$

Dit verder uitwerken levert de uitdrukking voor  $D_m$ .

$$D_m = -\frac{\lambda_v}{c_v} \cdot \frac{d^2 n}{d\lambda_v^2} \quad (5.10)$$

Enkele waarden voor  $D_m$  zijn gegeven in figuur 5.8 op de volgende pagina.

$\lambda_v(nm)$	$n(\lambda_v)$	$n_g(\lambda_v)$	$D_m(ps/nm\cdot km)$
700	1.45561	1.47154	-172.902
750	1.45456	1.46924	-135.313
800	1.45364	1.46744	-106.609
850	1.45282	1.46601	-84.2077
900	1.45208	1.46489	-66.382
950	1.45139	1.46401	-51.9441
1000	1.45075	1.46332	-40.0577
1050	1.45013	1.46279	-30.1214
1100	1.44954	1.46241	-21.6951
1150	1.44896	1.46214	-14.4511
1200	1.44839	1.46197	-8.14213
1250	1.44783	1.46189	-2.57872
1300	1.44726	1.46189	2.38579
1350	1.44670	1.46196	6.86631
1400	1.44613	1.46209	10.9539
1450	1.44556	1.46229	14.7211
1500	1.44498	1.46253	18.2268
1550	1.44439	1.46283	21.5187
1600	1.44379	1.46318	24.6358

**Figuur 5.8:** Waarden voor  $D_m$ **Figuur 5.9:**  $n_g$  en  $n$  in functie van  $\lambda$ 

### 5.3.3 Waveguide

We weten dat:

$$v_{lat} = c_f(\lambda) \cdot \sin \alpha$$

Maar de oplossing van de resonantie vergelijking is ook afhankelijk van de golflengte.

$$k_f \cdot \cos \alpha \cdot d = \arg R_\perp + m \cdot \pi$$

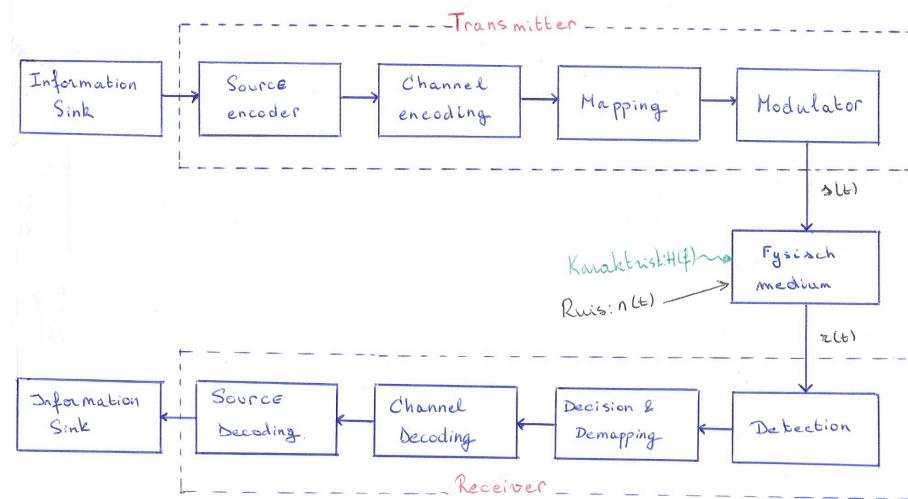
Dit zorgt ervoor dat de modes aangetast kunnen worden door het verschil in snelheid van de

verschillende modes onderling.

# Hoofdstuk 6

## Datatransmissie

In dit hoofdstuk worden enkele aspecten beschreven van datatransmissie. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van het algemene blokschema te zien in figuur 6.1.



**Figuur 6.1:** Blokschema voor datatransmissie

- **Source encoder:** Zorgt ervoor dat de informatie in zo weinig mogelijk bits verkregen wordt (vb. encoderen van een pagina).
- **Channel encoding:** Extra bits bij de bitstroom plaatsen (voor foutcontrole vb. forward error correction).
- **Modulator:** Binnen gekregen bits voorstellen als een golf of elektrische stroom. Dit is nodig om de bits te versturen over een medium.
  - **Baseband:** Grootste deel van de energie zit rond DC (vb: Twisted pair).

- Passband: Grootste deel van de energie bevind zich rond een bepaalde carrier frequentie  $f_c$  (vb: vrije ruimte, telefonier, meerdere signalen want bandbreedte is groot  $\Rightarrow$  moduleren op verschillende frequenties).
- Detection: Geeft een parameter  $r$  waarop een keuze gemaakt moet worden voor de mapping.
- Ruis: De ruis is niet deterministisch. Ruis komt meer voor bij het demoduleren v/h signaal. Hierbij moet het signaal typisch versterkt worden.

## 6.1 Invloed van het fysische medium

$\tau$  is de propagatie tijd tussen de communicatoren. Maar wat is nu de ideale transferfunctie,  $H(f)$  voor het fysische medium? We weten dat:

$$r(t) = s(t - \tau) \quad (6.1)$$

En dat:

$$r(t) = s(t) * h(f)$$

De Fourier getransformeerde van deze uitdrukking en van uitdrukking (6.1) geeft:

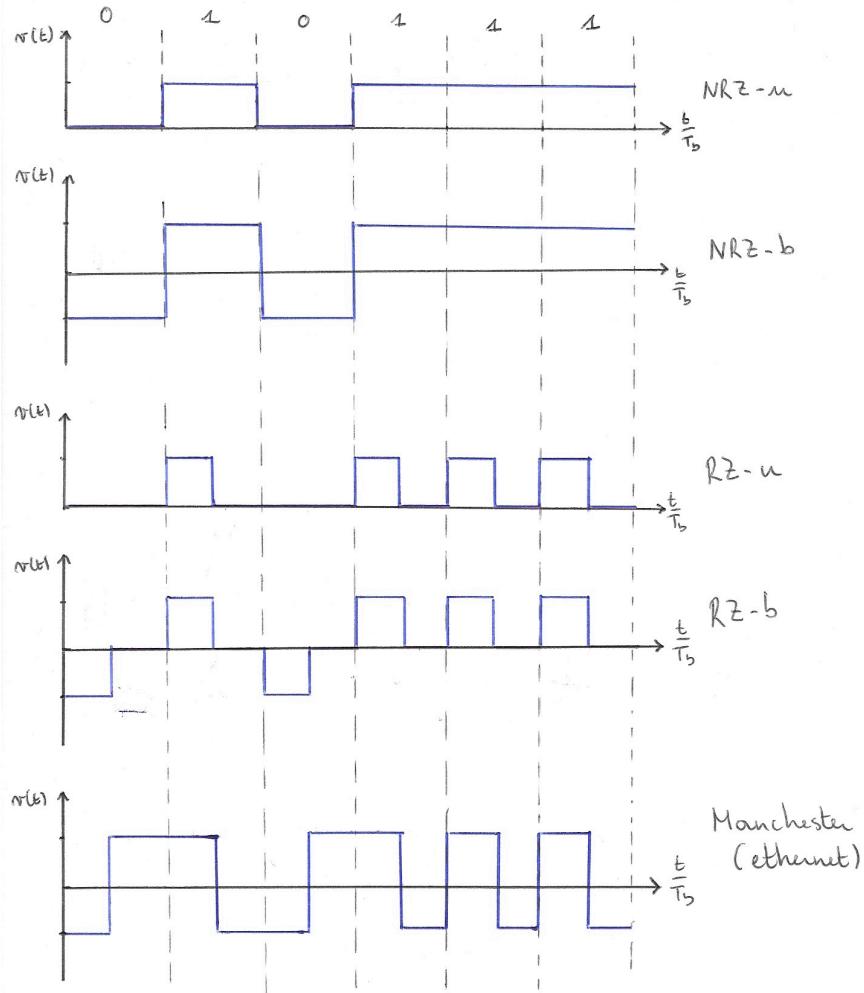
$$\begin{cases} R(f) = S(f) \cdot e^{-j\omega\tau} \\ R(f) = S(f) \cdot H(f) \end{cases}$$

We kunnen afleiden dat voor een ideale medium de transferfunctie moet voldoen aan  $H(f) = e^{-j\omega\tau}$ . De ideale transferfunctie heeft dus een amplitude gelijk aan 1 en een faseverloop dat lineair afnemend is met de frequentie.

Als we  $H(f)$  kennen dan kunnen we anticiperen op het medium door gebruik te maken van een equalizer. De transferfunctie van deze equalizer is dan gelijk aan  $H^{-1}(f)$ . Merken we op dat we kunnen anticiperen op het gedrag van het medium, maar niet op het gedrag van de ruis.

## 6.2 Basebandsignalen

Er zijn verschillende mogelijkheden voor basebandsignalen. Enkele mogelijkheden zijn gegeven in figuur 6.2 op de volgende pagina

**Figuur 6.2:** Basebandsignalen

Bij Non Return to Zero (NRZ) - bipolair, hebben ze geen DC waarde. Dit is goed want de DC-component kan niet gebruikt worden voor transmissie, aangezien deze onveranderlijk is in de tijd.

Als we een puls hebben in het tijdsdomein, dan geeft dit een sinc-functie in het frequentiedomein. De eerste nuldoorgang voor een sinc-functie is bij  $f = \frac{1}{\tau}$ . Dus hoe kleiner de puls is, hoe groter de bandbreedte is.

## 6.3 Ofrassing

### 6.3.1 Fourrier getransformeerde vermenigvuldigd met cosinus

Stel:

$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = \Phi(j\omega)$$

Dan is:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{F}\{f(t) \cos \omega_c t\} \\ & \mathfrak{F}\left\{\frac{f(t)}{2} \cdot e^{j\omega_c t}\right\} + \mathfrak{F}\left\{\frac{f(t)}{2} \cdot e^{-j\omega_c t}\right\} \\ & \frac{1}{2} [\Phi(j(\omega + \omega_c)) + \Phi(j(\omega - \omega_c))] \end{aligned}$$

### 6.3.2 Transferfunctie

We weten dat:

$$T\{x(t)\} = y(t)$$

We kunnen  $x(t)$  nog anders schrijven:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Passen we de transformatie  $T$  nu toe op deze uitdrukking dan krijgen we:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) T\{\delta(t - \tau)\} d\tau \\ &\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau) d\tau \\ &\Rightarrow y(t) = x(t) * h(t) \end{aligned}$$

Praktisch is de puls niet oneindig smal. Dus hebben we geen perfecte delta-functie. Hieruit volgt dat  $h(t)$  niet direct af te leiden is. We moeten een frequentie analyse maken van  $x(t)$  en dan steunen op de volgende uitdrukking om de transferfunctie van het medium te weten te komen.

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) \Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

## 6.4 Ruis

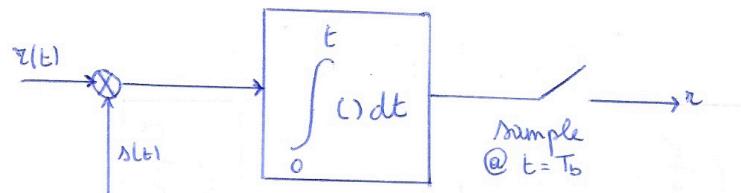
Ruis is niet deterministisch, dus we kunnen enkel metingen doen op bepaalde tijdstippen en de ruis statistisch gaan benaderen. We weten dat de ruis op elke tijdstip Gaussiaans verdeeld is.

### 6.4.1 AWGN

- Noise: Niet gewenst signaal dat niet deterministisch is.  $n(t)$  is samplefunctie van een random proces.
- Gaussian:  $E[n(t)] = 0$ : Kans op positieve of negatieve spanning moet dezelfde zijn.
- White: Er is geen correlatie tussen meetpunten in het tijdsdomein. De autocorrelatie functie is in het tijdsdomein een deltafunctie. Wit omdat van alle frequenties hierin zitten. Er is geen verband tussen twee samples.
- Additieve:  $r(t) = s(t) + n(t)$   
Normaal gezien hebben we volgende gelijkheid:  $r(t) = h(t) * s(t) + n(t)$

## 6.5 Matched Filter

Het schema voor een matched filter is gegeven in figuur 6.3.



**Figuur 6.3:** Matched filter

Algemeen vertrekken we vanuit de gelijkheid:

$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (6.2)$$

Vermenigvuldigen we nu met  $s(t)$ , dan krijgen we:

$$r(t) \cdot s(t) = s^2(t) + n(t) \cdot s(t) \quad (6.3)$$

Nu is  $\mathfrak{T} = \int_0^t s^2(t) dt$  het vermogen dat doorgestuurd is. Definiëren we nu de volgende coëfficiënten:

$$r = \int_0^{T_b} r(t) \cdot s(t) dt$$

$$n = \int_0^{T_b} n(t) \cdot s(t) dt$$

We krijgen dan de volgende uitdrukking:

$$r = \mathfrak{T} + n \quad (6.4)$$

Stel nu dat  $-s(t)$  opgestuurd is, dan krijgen we:

$$r = -\mathfrak{T} + n$$

- $r > 0 \Rightarrow s$  positief doorgestuurd
- $r < 0 \Rightarrow s$  negatief doorgestuurd

# Hoofdstuk 7

## Multimedia Networking

### 7.1 Multimedia Networking Applications

We definiëren een multimedia netwerk applicatie als een netwerk applicatie die gebruik maakt van audio en/of video.

#### 7.1.1 Properties of Video

De meest opvallende eigenschap van video is waarschijnlijk de **hoge bit rate**. Video streaming verbruikt veruit de meeste bandbreedte van alle multimedia apps. Een overzichtje is te zien in tabel 7.1.

	Bit-rate	Bytes verstuurd in 67 minuten
<b>Facebook</b>	160 kbps	80 MB
<b>Muziek</b>	128 kbps	64 MB
<b>Video</b>	2 Mbps	1 GB

Tabel 7.1: Overzicht van bit-rate van drie multimedia apps

Belangrijke zaken waar rekening mee gehouden moet worden bij het ontwerpen van een video applicatie, zijn volgende zaken:

- Hoge bit-rate
- Video kan gecomprimeerd worden. We boeten in aan video kwaliteit om bandbreedte te winnen. Twee mogelijkheden van redundancy, die beiden bereikt kunnen worden door **video compressie** :
  1. *Spatial redundancy*: Redundancy binnen een gegeven beeld. Als bijvoorbeeld een beeld vooral bestaat uit wit ruimte, dan kunnen we makkelijk het beeld comprimeren zonder in te moeten boeten aan beeldkwaliteit.

2. *Temporal redundancy*: Beperkt de herhaling tussen opeenvolgende beelden. In plaats van elke pixel te encoderen, aangeven van waar tot waar bijvoorbeeld dezelfde kleur aangehouden moet blijven. Of we kunnen het verschil ten opzichte van de vorige pixel gaan encoderen in plaats van de volledige pixel.
- Het is mogelijk om door compressie meerdere versies van eenzelfde video te bekomen, elke video zal dan een andere videokwaliteit hebben. De gebruiker kan dan beslissen welke kwaliteit van video hij wilt, dit afhankelijk van zijn eigen bandbreedte.
  - Door het vorige is het mogelijk om "on-the-fly" de best gepaste video kwaliteit aan een bepaalde gebruiker met een bepaalde bandbreedte aan te bieden.

### 7.1.2 Properties of Audio

Voor audio hebben we een lagere bandbreedte nodig dan voor video. Audio beschikt wel over specifieke eigenschappen die beter begrepen worden als we weten hoe er van analoog naar digitaal geluid gegaan wordt.

- Analoog signaal wordt gesampled aan een bepaalde sample rate.
- Elk sample is dan afgerond naar een bepaalde waarde. Dit heet **kwantiseren**. Meestal wordt een macht van twee gebruikt.
- Elke kwantisering wordt voorgesteld door een bepaald aantal bits. De bitrepresentatie van alle samples worden dan samengebracht, om het digitale signaal te bekomen.

De basis encodingstechniek is **pulse code modulation (PCM)**. Bij PCM wordt een sampeling rate gebruikt van 8000 samples per seconde en elk sample wordt voorgesteld door 8 bits. Dit resulteert dus in een bitsnelheid van:

$$8000 \frac{\text{samples}}{\text{seconde}} \times 8 \text{ bits} = 64 \text{ kbps}$$

Deze techniek wordt weinig gebruikt voor het Internet. Zoals bij video wordt er ook bij audio aan compressie gedaan. **MPEG 1 layer 3**, meer bekend als **MP3** is vaak gebruikt. Audio is gevoeliger voor glitches.

### 7.1.3 Types of Multimedia Network Applications

#### 7.1.3.1 Streaming Stored Audio and Video

Er zijn drie key features bij het streamen van stored media.

1. Streaming: De client zal aan het afspelen zijn op één locatie in de media terwijl hij tezelfdertijd data ontvangt voor het later afspelen.
2. Interactiviteit: De client moet kunnen pauzeren, herpositioneren, etc.
3. Continue afspeelsnelheid: De data moet op voorhand toekomen om een correcte afspeelsnelheid te kunnen bekomen.

De belangrijkste prestatie parameter is de gemiddelde throughput. De gemiddelde throughput van de streaming applicatie moet op zijn minst gelijk zijn aan de bit rate van de video zelf.

Voor stored video wordt de video opgeslagen in een CDN (besproken in 7.2.4 op pagina 71). Er zijn ook veel P2P video streaming apps.

### 7.1.3.2 Conversational Voice- and Voice-over-IP

Timing en tolerantie van data loss zijn belangrijke eigenschappen van conversational voice and video applicaties. Timing is belangrijk omdat audio en video conversational applications zeer **delay-sensitive** zijn. Aan de andere kant zijn deze applicaties **loss-tolerant**. Er mogen tijdelijke glitches optreden bij de audio/video, deze kunnen soms zelfs gedeeltelijk of volledig opgelost worden. De karakteristieken van dit soort applicaties zijn duidelijk anders dan die van elastische data applicaties zoals Web browsing, e-mail, etc. Voor elastische applicaties zijn lange delays irritant, maar zijn ze niet direct schadelijk voor de applicatie. De volledigheid en de integriteit van de getransfereerde data is belangrijker dan het timing aspect van de transfer.

### 7.1.3.3 Streaming Live Audio and Video

Dit is gelijk aan het traditioneel broadcasten van radio en televisie, enkel dat de transfer nu plaats vindt over het Internet. Deze applicaties hebben vaak vele gebruikers die dezelfde audio/video programmas ontvangen op hetzelfde moment. Dit kan efficiënt gebeuren door gebruik te maken van IP multicasting technieken, multicast verdeling wordt meer en meer bekomen door application-layer multicasting (gebruik makend van P2P en CDNs) of door meerdere aparte unicast streams. We moeten er weer voor zorgen dat de gemiddelde throughput groter is dan de rate waaraan de video geconsumeerd wordt.

Omdat het event live is, is delay ook iets dat in achtig dient genomen te worden.

## 7.2 Streaming Stored video

Streaming van video wordt onderverdeeld in drie categoriën:

- UDP streaming
- HTTP streaming
- Adaptive HTTP streaming

Het merendeel van de streaming applicaties gebruikt HTTP streaming of adaptive HTTP streaming. Een gemeenschappelijke eigenschap is het extensieve gebruik van client-side buffering om het effect van wisselende end-to-end delays te verminderen, afhankelijk van de bandbreedte tussen de server en de client. Wanneer de video bij de client aankomt, zal deze niet direct afgespeeld worden, eerst wordt er een reserve opgebouwd in de applicatie buffer.

**Client buffering** heeft twee belangrijke voordelen.

1. Opvagen van server-to-client delay.
2. Wanneer de bandbreedte tussen server-client daalt, dan zal de client nog steeds de gewenste afspeelsnelheid genieten.

### 7.2.1 UDP Streaming

De server stuurt video aan een tempo gelijk aan de client's video consumption rate over UDP. UDP zelf heeft geen congestion control mechanisme. De server kan pakketten in het netwerk pompen aan de consumption rate van de video zonder rekening te houden met de rate-control mechanismen van TCP. Voor de chunks video doorgegeven worden naar UDP, zal de server de video chunks encapsuleren in pakketen speciaal ontworpen voor audio en video, gebruik makend van Real-Time Transport Protocol (RTP). De client en de server hebben, parallel, een controleconnectie samen met de dataconnectie. Via deze connectie worden commando's doorgestuurd omtrent status van beide eindpunten.

Dit heeft drie duidelijk minpunten:

1. Het is onmogelijk om een inschatting te maken van de bandbreedte tussen de server en de client. Hierdoor is het mogelijk geen continue playout te hebben aan de client side.
2. Deze methode heeft een media control server nodig (RTSP). Deze server processt de client-to-server requests om zo de status van de client te weten te komen.
3. Veel firewalls blokkeren UDP trafiek.

### 7.2.2 HTTP Streaming

Video is stored in a HTTP server as an ordinary file with a specific URL. The video will be sent as quickly as TCP congestion control and flow control will allow. On the client side, bytes are collected in the clients application buffer. When this buffer exceeds a predetermined threshold, the client application begins playback. The server-to-client transmission rate can vary due to TCP's congestion control mechanisms.

The TCP congestion control and reliable-data transfer mechanisms do not necessarily preclude continuous playout when client buffering and prefetching (discussed in the next section) are used. The use of HTTP over TCP also allows the video to traverse firewalls and NATs more easily. Streaming over HTTP also obviates the need for a media control server, such as an RTSP server, reducing the cost of a large-scale deployment over the Internet.

#### 7.2.2.1 Prefetching video

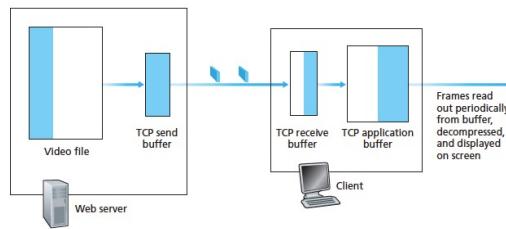
The client can attempt to download the video at a rate *higher* than the consumption rate, thereby **prefetching** video frames that are to be consumed in the future.

#### 7.2.2.2 Client Application Buffer and TCP Buffers

Figure 7.1 illustrates the interaction between client and server for HTTP streaming.

**Server side** Portion of the video file in white has already been sent into the server's socket, while the darkened portion is what remains to be sent. In figure 7.1, because the TCP send buffer is shown full, the server is prevented from sending more bytes.

**Client side** Reads bytes from the TCP receive buffer. At the same time, the client application periodically grabs video frames from the client application buffer, decompresses the frames, and displays them on the user's screen.



**Figuur 7.1:** Streaming stored video over HTTP/TCP

What if the client pauses?

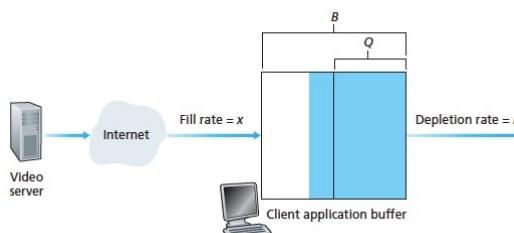
Bits are removed from the client application buffer, even though bits are continuing to enter the buffer from the server. This will create "back"pressure. Once the client's TCP receive buffer becomes full, bytes can no longer be removed from the server TCP send buffer, so it also becomes full. The server cannot send and is forced to stop transmitting, in which case the server will be blocked until the user resumes the video.

To determine the resulting rate, note that when the client application removes  $f$  bits, it creates room for  $f$  bits in the client application buffer, which in turn allows the server to send  $f$  additional bits. Therefore, *a full client application buffer indirectly imposes a limit on the rate that video can be sent from server to client when streaming over HTTP*.

### 7.2.2.3 Analysis of Video Streaming

As shown in figure 7.2 let us denote some stuff.

- $B$  is the size (in bits) of the client's application.
- $Q$  is the number of bits that must be buffered before the client begins playout.
- $r$  is the consumption rate.
- $x$  is the rate at which the server sends data.



**Figuur 7.2:** Analysis of client-side buffering for video streaming

Lets say that the video frame rate is 30 frames/sec, and each frame is compressed into 100,000 bits, then  $r = 3 Mbps$ . We will ignore TCP's send and receive buffers and at  $t = 0$  the application buffer is empty.

The questions are:

1. At what time  $t = t_p$  does the playout begin?
2. At what time  $t = t_f$  does the client application buffer becomes full?

Now here are the answers, oh God:

1. There are *no* bits removed from this buffer before playout begins. Thus,  $t_p = \frac{Q}{x}$ .
2. Calculating  $t_f$  gives two situations:
  - If  $x < r$  then the client buffer will never become full. The buffer will eventually become empty and the video will freeze until the buffer is again filled till  $Q$  bits.  
*Thus, when the available rate in the network is less than the video rate, playout will alternate between periods of continuous playout and periods of freezing.*
  - If  $x > r$  and when we start at  $t = t_p$ , the buffer will increase from  $Q$  to  $B$  at a rate of  $x - r$ . So that makes  $t_f = t_p + \frac{B-Q}{x-r}$ .  
*We note that when the available rate in the network is more than the video rate, after initial buffering delay, the user will enjoy continuous playout until the video ends.*

#### 7.2.2.4 Early Termination and Repositioning the Video

We can reposition by using the **HTTP byte-range header** in the HTTP GET request message. We can specify the specific range of bytes we want to receive. When we reposition to a new position, we will send a new HTTP request, indicating the byte-range (in the header) from which bytes in the file the server should send data.

But when we reposition, we waste the buffer that is stacked up and therefore waste bandwidth.

#### 7.2.3 Adaptive Streaming en DASH

HTTP stream has a major shortcoming:

All clients receive the same encoding of the video, despite the large variations in the amount of bandwidth available to the client, both across different clients and also over time.

In **Dynamic Adaptive streaming over HTTP (DASH)** the video is encoded into several different versions, with each a different bit rate and, correspondingly, a different quality level.

DASH allows clients with different access rates to stream video at different encoding rates. On the other hand, DASH allows clients to adapt to the available bandwidth if the end-to-end bandwidth changes during the session.

The video versions are saved in a HTTP server which has a **manifest file**. This file provides a URL for each version along with its bit rate. The client first requests the manifest file and learns about the various versions. The client then selects one chunk at a time by specifying a URL and a byte range in an HTTP GET request message for each chunk. The client should also run a *rate determination algorithm* to select the chunk to request next.

Benefits of DASH:

- DASH can often achieve continuous playout at the best possible quality level without frame freezing or skipping.

- It improves server-side scaling because the client runs a rate determination algorithm.
- The client can use the HTTP byte-range request to precisely control the amount of prefetched video that it buffers locally.

### 7.2.4 Content Distribution Networks (CDN)

We could build one single massive data center to store all the audio and video, but this has three major drawbacks.

1. If the client is far from the data center, then packets will have to pass through various ISPs and will get slowed by the slowest link in the chain.
2. A popular video will likely be sent many times over the same network connection links. This will lead to a waste of bandwidth and we will be paying the provider ISP for sending the *same* bytes into the Internet over and over again.
3. Single point of failure.

All major video-streaming companies make use of **Content Distribution Networks (CDNs)**. A CDN manages servers in multiple geographically distributed locations, stores copies of the videos in its servers and attempts to direct each user request to a CDN location that will provide the best user experience.

There are two different server placement philosophies:

**Enter Deep** We enter deep into the access networks of Internet Service Providers, by deploying a server cluster in access ISPs all over the world. Akamai uses this strategy with clusters in approximately 1,700 locations. The goal is to get close to end users, thereby improving user-perceived delay and throughput by the number of links and routers between the end user and the CDN cluster from which it receives content.

**Bring Home** This approach is taken by Limelight and it *brings the ISPs home* by building large clusters at a smaller number of key locations and connecting these clusters using a private high-speed network. Instead of getting inside the access ISPs, these CDNs typically place each cluster at a location that is simultaneously near the Point of Presence (PoP).

CDN replicates content across its clusters. Many CDNs do not push videos to their clusters but instead use a simple pull strategy: If a client requests a video from a cluster that is not storing the video, then the cluster retrieves the video and stores a copy locally while streaming the video to the client at the same time.

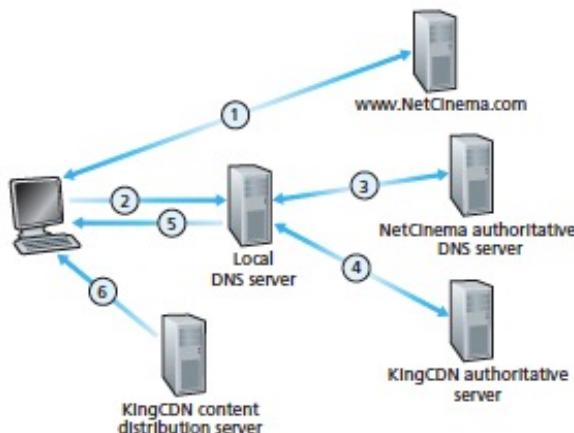
#### 7.2.4.1 CDN Operation

When a browser in a user's host is instructed to retrieve a specific video (identified by a URL), the CDN must intercept the request so that

1. It can determine a suitable CDN server cluster for that client at that time.
2. It can redirect the client's request to a server in that cluster.

Most CDNs take advantage of DNS to intercept and redirect requests. Suppose a content provider, NetCinema, employs the third-party CDN company, KingCDN, to distribute its videos to its customers. This can be seen in figure 7.3 and we will discuss this figure.

1. The user visits the Web page at NetCinema.
2. When the user clicks on the link for the video, the user's host sends a DNS query for video.netcinema.com.
3. The user's Local DNS Server (LDNS) relays the DNS query to an authoritative DNS server for NetCinema, which observes the string "video" in the hostname video.cinema.com. To "hand over" the DNS query to KingCDN instead of returning an IP address, the NetCinema authoritative DNS server returns from the LDNS a hostname in the KingCDN's domain, for example, a1105.kingcdn.com.
4. From this point on, the DNS query enters into KingCDN's private DNS infrastructure. The user's LDNS then sends a second query, now for a1105.kingcdn.com, and KingCDN's DNS system eventually returns the IP address of a KingCDN content server to the LDNS. It is thus here, within the KingCDN's DNS system, that the CDN server from which the client will receive its content is specified.
5. The LDNS forwards the IP address of the content-serving CDN node to the user's host.
6. Once the client receives the IP address for a KingCDN content server, it establishes a direct TCP connection with the server at that IP address and issues an HTTP GET request for that video. If DASH is used the server will first send to the client a manifest file with a list of URLs, one for each version of the video, and the client will dynamically select chunks from the different versions.



**Figuur 7.3:** DNS redirects a user's request to a CDN server

#### 7.2.4.2 Cluster Selection Strategies

This are mechanisms for dynamically directing clients to a server cluster or a data center within the CDN. CDNs generally employ proprietary cluster selection strategies.

**Geographically closest** Assign the client to the cluster that is geographically closer. LDNS IP address is mapped to a geographical location.

This approach works reasonably well for a large fraction of the clients, but there are some problems:

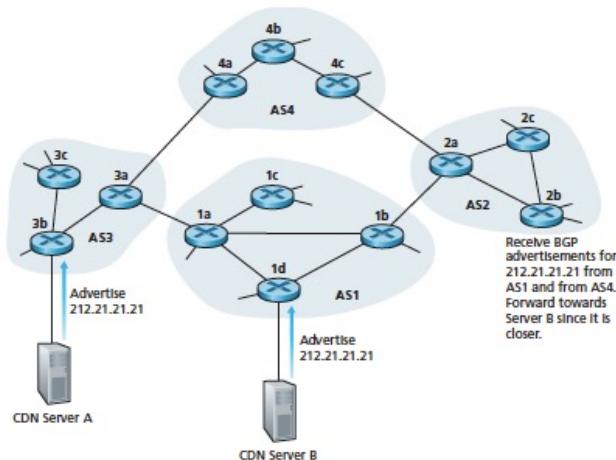
- Some end-users are configured to use remotely located LDNSs, in which case the LDNS location may be far from the client's location.
- Ignores the variation in delay and available bandwidth over time of Internet paths.

**Real-time measurements** Used to take in account the real time parameters of a connection. This has one drawback and that is that many LDNSs are configured to not respond to such probes. There is an alternative: Use the characteristics of recent and ongoing traffic between the clients and the CDN servers. We can use SYNACK and client-to-server ACK.

**IP anycast** Having the routers in the Internet route the client's packets to the "closest" cluster, as determined by BGP. As shown in figure 7.4, the CDN company assigns the same IP address to each of its clusters, and uses standard BGP to advertise this IP address from each of its different cluster locations.

When a BGP router receives multiple route advertisements for this same IP address, it treats these advertisements as providing different paths to the same physical location. The BGP router will then pick the "best" route to the IP address according to its local route selection mechanism.

This has the advantage of finding the cluster that is closest to the client rather than the cluster that is closest to the client's LDNS, but this does not take into account the dynamic nature of the Internet over short time scales.



Figuur 7.4: Using IP anycast to route clients to closest CDN cluster

## 7.2.5 Case Studies: Netflix, YouTube en Kankan

### 7.2.5.1 Netflix

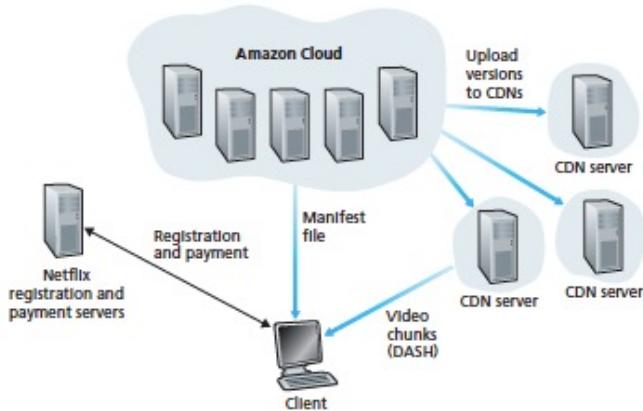
Netflix makes extensive use of third-party cloud services and CDNs. Techniques for video distribution are using a CDN and adaptive streaming over DASH. Figure 7.5 at page 74, shows the basic

architecture of the Netflix video-streaming platform. The four major components are:

1. Registration and payment servers
2. The Amazon cloud
3. Multiple CDN providers
4. Clients

Netflix's own hardware infrastructure maintains the registration and payment servers. The other services are run by employing machines (or virtual machine) in the Amazon cloud. The functions done by these servers are:

- *Content registration*: Netflix receives studio master versions of movies and uploads them to hosts in the Amazon cloud.
- *Content processing*: Amazon cloud creates many different formats for each movie. A different version is created for each of these formats and at multiple bit rates, allowing for adaptive streaming over HTTP over DASH.
- *Uploading versions to the CDNs*



**Figuur 7.5:** Netflix video streaming platform

Netflix employs *three* third-party CDN companies at the same time—Akamai, Limelight, and Level-3. Web pages for browsing the Netflix video library are served from servers in the Amazon cloud. When a client selects a movie, it obtains a manifest file. This file contains ranked CDNs and the URL for different versions of the movie. The ranking of the CDNs is determined by Netflix, and may change from one streaming sessions to the next. The client will select the CDN that is ranked highest in the manifest file. The procedures described in sections 7.2.3 at page 70 and 7.2.4 at page 71 are then deployed.

### 7.2.5.2 YouTube

Google does not employ third-party CDNs but instead uses its own private CDN to distribute YouTube videos. Google uses DNS to redirect a customer request to a specific cluster as described in section 7.2.4 at page 71. The cluster strategy is to direct the clients to the cluster for which the RTT between client and cluster is the lowest. If a video is not located in the cluster then a HTTP redirect message is used.

YouTube uses HTTP streaming as described in section 7.2.2 at page 68. YouTube does not employ adaptive streaming (such as DASH), but instead requires the user to manually select a version. By using the HTTP byte range request, YouTube can limit the flow of transmitted data after a target amount of video is prefetched.

Uploaders also upload their videos from client to server over HTTP. The complete processing takes place within Google data centers.

### 7.2.5.3 Kankan

This approach uses P2P delivery instead of client-server. This streaming is very similar to BitTorrent file downloading. When a peer wants to see a video, it contacts a tracker (which may be centralized or peer-based using a DHT). This peer then requests chunks of the video file in parallel from these other peers that have the file. Requests are preferentially made for chunks that are to be played back in the near future in order to ensure continuous playback.

Kankan uses UDP whenever possible, leading to massive amounts of UDP traffic within China's Internet.

## 7.3 Voice-over-IP

### 7.3.1 Limitations of the Best-Effort IP Service

Best-effort services are services that make their best effort to move each datagram from source to destination as quickly as possible but make no promises whatsoever about getting the packet to the destination within some delay bound or about a limit on the percentage of packet loss. The focus will be on application-layer techniques. A chunk and a special header are encapsulated in a UDP segment, via a call to the socket interface.

Some packets can be lost and most packets will not have the same end-to-end delay. We must take more care in determining 1. when to play back a chunk, and 2. what to do with a missing chunk.

#### 7.3.1.1 Packet Loss

The UDP segment is encapsulated in an IP datagram. We can lose packets due to full buffers in routers.

We can eliminate loss by sending over TCP. But, retransmission mechanisms are often considered unacceptable for conversational real-time audio applications such as VoIP. Furthermore, TCP congestion control can result in a reduction of the TCP sender's transmission rate to a rate that is lower than the receiver's drain rate possibly leading to buffer starvation.

We can use Forward Error Recovery (FEC) to conceal packet loss. Redundant information is transmitted along with the original information so that some of the lost original data can be recovered

from the redundant information.

### 7.3.1.2 End-to-End Delay

**End-to-end delay** is accumulation of transmission, processing, and queuing delays in routers; propagation delay in links; and end-system processing delays. End-to-end delays smaller than  $150\text{ msec}$  are not perceived by a human listener; delays exceeding  $400\text{ msec}$  can seriously hinder the interactivity in voice communication.

### 7.3.1.3 Packet Jitter

The time from when a packet is generated at the source until it is received at the receiver can fluctuate from packet to packet. This phenomenon is called **jitter**. Jitter can often be removed by using **sequence numbers**, **timestamps** and a **playout delay**.

## 7.3.2 Removing Jitter at the Receiver for Audio

The receiver should attempt to provide periodic playout of voice chunks in the presence of random network jitter. Can be done by combining the following two mechanisms:

1. *Prepending each chunk with a **timestamp**.*
2. *Delaying playout of chunks at the receiver.* The playout delay of the received audio chunks must be long enough so that most of the packets are received before their scheduled playout times.

### 7.3.2.1 Fixed Playout Delay

The receiver attempts to play out each chunk exactly  $q\text{ msec}$  after the chunk is generated. So if a chunk is timestamped at the sender at time  $t$ , the receiver plays out the chunk at time  $t + q$ .

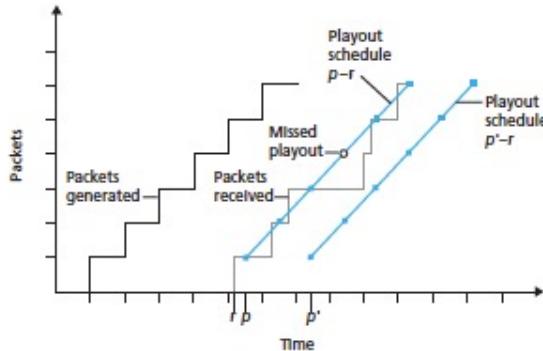
What is a good choice for  $q$ ? VoIP can support delays up to about  $400\text{ msec}$ , although it is more satisfying to use smaller values of  $q$ . But if  $q$  is made smaller than  $400\text{ msec}$ , then many packets may miss their scheduled playback times due to the network-induced packet jitter. It is preferable to use a large  $q$ ; on the other hand, if delays are small and variations in delay are also small, it is preferable to use a small  $q$ , perhaps less than  $150\text{ msec}$ .

Trade-off between the playback delay and packet loss is illustrated in figure 7.6.

### 7.3.2.2 Adaptive Playout Delay

We estimate the network delay and the variance of the network delay, and the playout delay accordingly at the beginning of each talk spurt. We now describe a generic algorithm that the receiver can use to adaptively adjust its playout delays.

- $t_i$  = the timestamp of the  $i$ th packet = the time the packet was generated by the sender.
- $r_i$  = the time packet  $i$  is received by the receiver.



**Figuur 7.6:** Packet loss for different fixed playout delays

- $p_i$  = the time packet  $i$  is played by the receiver.

The end-to-end network delay of the  $i$ th packet is  $r_i - t_i$ . Let  $d_i$  denote an estimate average network delay upon reception of the  $i$ th packet.

$$d_i = (1 - u) d_{i-1} + u (r_i - t_i)$$

where  $u$  is a fixed constant (for example,  $u=0,01$ ). Thus  $d_i$  is a smoothed average of the observer network delays  $r_1 - t_1, \dots, r_i - t_i$ . A similar idea is used to estimate round-trip times in TCP.

Let  $v_i$  denote the estimate of the average deviation of the delay from the estimated average delay.

$$v_i = (1 - u) v_{i-1} + u |r_i - t_i - d_i|$$

The estimates  $d_i$  and  $v_i$  are calculated for every packet received although they are used only to determine the playout point for the first packet in any talk spurt.

If packet  $i$  is the first packet of a talk spurt, its playout time,  $p_i$ , is computed as:

$$p_i = t_i + d_i + K v_i$$

where  $K$  is a positive constant (for example,  $K = 4$ ). The purpose of the  $K v_i$  term is to set the playout time far enough into the future so that only a small fraction of the arriving packets in the talk spurt will be lost due to late arrivals.

Let,

$$q_i = p_i - t_i$$

be the length of time from when the first packet in the talk spurt is generated until it is played out. If packet  $j$  also belongs to this spurt, it is played out at time

$$p_j = t_j + q_i$$

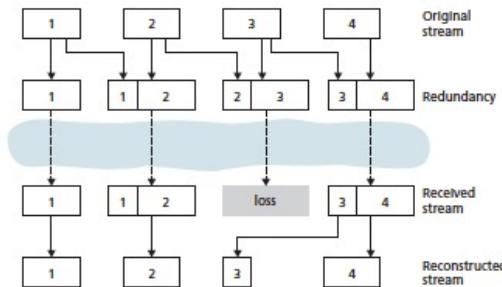
### 7.3.3 Recovering from Packet Loss

We define packet loss in broad sense: A packet is lost either if it never arrives at the receiver or if it arrives after its scheduled playout time. Retransmitting lost packets may not be feasible in a real-time conversational application such as VoIP. Two types of loss anticipation schemes are **forward error correction (FEC)** and **interleaving**.

### 7.3.3.1 Forward Error Correction (FEC)

We add redundant information to the original packet stream. We can use this information to construct approximations or exact versions of some of the lost packets. We outline two simple FEC:

1. We send redundant information every  $n$  original chunks. The redundant info contains exclusive OR-ing the  $n$  original chunks. If any one packet of the group of  $n + 1$  packets is lost, the receiver can fully reconstruct the lost packet. But if two or more packets get lost, we cant reconstruct. By keeping  $n + 1$ , the group size, small, a large fraction of the lost packets can be recovered when loss is not excessive. However, the transmission rate increases by a factor  $\frac{1}{n}$  using this technique. Furthermore, this simple scheme increases the playout delay, as the receiver must wait to receive the entire group of packets before it can begin playout.
2. Send a lower-resolution audio stream as the redundant info. As shown in figure 7.7, the sender constructs the  $n$ th packet by taking the  $n$ th chunk from the nominal stream and appending to it the  $(n - 1)$ st chunk from the redundant stream.

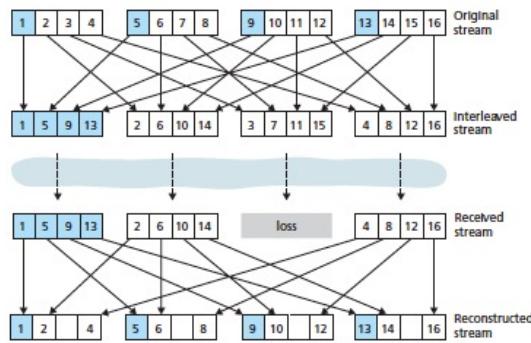


**Figuur 7.7:** Piggybacking lower-quality redundant information

The receiver can conceal the loss playing out the low-bit rate encoded chunk that arrives with the subsequent packets. The receiver only has to receive two packets before playout. By appending more low-bitrate chunks to each nominal chunk, the audio quality at the receiver becomes acceptable for a wider variety of harsh best-effort environments. The additional chunks increase the transmission bandwidth and the playout delay.

### 7.3.3.2 Interleaving

A VoIP application can send interleaved audio. As shown in figure 7.8, the sender resequences units of audio data before transmission, so that originally adjacent units are separated by a certain distance in the transmitted stream.



**Figuur 7.8:** Sending interleaved audio

The method is low on overhead, but has the disadvantage that it increases latency. A major advantage is that it does not increase the bandwidth requirements of a stream.

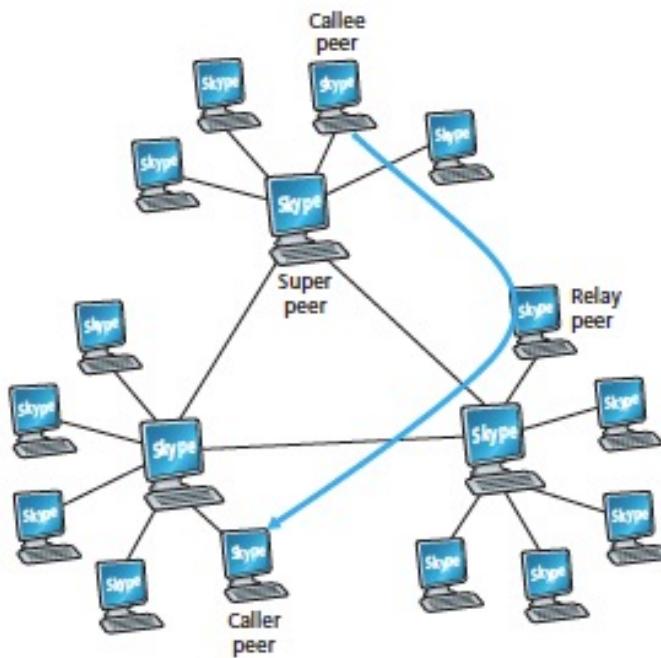
### 7.3.3.3 Error Concealment

Produce a replacement for a lost packet that is similar to the original. This works for small loss rates.

1. Simplest method is copying the previously received packet, packet repetition.
2. Interpolation can be used as well, but by using this method we increase the computational intensity.

### 7.3.4 Case Study: VoIP with Skype

For both voice and video, the Skype clients have at their disposal many different codes which are capable of encoding the media at a wide range of rates and qualities. By default, Skype sends audio and video packets over UDP. However control packets are sent over TCP, and media packets are also sent over TCP when firewalls block UDP streams. Skype uses FEC for loss recovery for both voice and video streams sent over UDP. The Skype client also adapts the audio and video streams it sends to current network conditions, by changing video quality and FEC overhead. Skype uses P2P techniques in many innovative ways. Two important functions are user location and NAT traversal.



Figuur 7.9: Skype peers

As shown in figure 7.9, the peer (hosts) in Skype are organized into a hierachial overlay network, with each peer classifier as a super peer or an ordinary peer. Skype maintains an index that maps usernames to current IP addresses. These indexes are distributed over the super peers.

P2P techniques are also used in Skype **relays**, which are useful for establishing calls between hosts in home networks. Recall that a NAT prevents a host from outside the home network from initiating a connection to a host within the home network. If *both* Skype callees have NATs, neither can accept a call. Super peers and relays solve this problem.

Suppose that Alice signs in, then she is assigned to a non-NATed super peer and initiates a session to that super peer. The same happens for Bob. When Alice wants to call Bob, she informs her super peer, who in turn informs Bob's super peer. If Bob accepts the call, the two super peers select a third non-NATed super peer, to relay data between Alice and Bob.

In multi-party audio conference calls each user sends its audio stream to the conference initiator. The initiator combines the audio streams into one stream and then sends a copy of each combined stream to each other  $N - 1$  participants. This reduces the number of streams to  $2(N - 1)$ , instead of  $N(N - 1)$ .

With multi-video calls, each participant's video stream is routed to a server cluster, which in turn relays to each participant the  $N - 1$  streams of the  $N - 1$  other participants. The reason for this is, that the upstream bandwidth are significantly lower than downstream link bandwidths in most access links, the upstream links may not be able to support the  $N - 1$  streams with P2P approach.

## 7.4 Protocols for Real-Time Conversational Applications

### 7.4.1 RTP

#### 7.4.1.1 RTP Basics

RTP typically runs on top of UDP. The sending side precedes each chunk of the audio data with an **RTP header** that includes the type of audio encoding, a sequence number and a timestamp. The header is normally 12 bytes long. The audio chunks along with the RTP header form the **RTP packet**.

If an application incorporates RTP, then the application will more easily interoperate with other networked multimedia applications. It should be emphasized that RTP does not provide any mechanism to ensure timely delivery of data or provide other quality-of-service (QoS) guarantees. RTP allows each source (for example, a camera or a microphone) to be assigned its own independent RTP stream of packets. RTP packets are not limited to unicast applications.

#### 7.4.1.2 RTP Packet Header Fields



Figuur 7.10: RTP header fields

Figure 7.10, the four main RTP packet header fields are the payload type, sequence number, timestamp, and source identifier fields. The payload type is 7 bits long. It indicates the type of audio encoding that is being used. Table 7.2 lists some of the audio payload types currently supported by RTP. For video streams, the payload types are used to indicate the type of video encoding. Table 7.3 lists some of the video payload types currently supported by RTP.

Payload-Type Number	Audio Format	Sampling Rate	Rate
0	PCM μ-law	8 kHz	64 kbps
1	1016	8 kHz	4.8 kbps
3	GSM	8 kHz	13 kbps
7	LPC	8 kHz	2.4 kbps
9	G.722	16 kHz	48-64 kbps
13	MPEG Audio	90 kHz	-
15	G.728	8 kHz	16 kbps

Tabel 7.2: Audio payload types supported by RTP

Payload-Type Number	Video Format
<b>26</b>	Motion JPEG
<b>31</b>	H.261
<b>32</b>	MPEG 1 video
<b>33</b>	MPEG 2 video

**Tabel 7.3:** Some video payload types supported by RTP

The other importatn fields are:

- *Sequence number field* (16 bits long). Increments by one for each RTP packet sent. Used to detect packet loss and to restore packet sequence.
- *Timestamp field* (32 bits long). Reflects the sampeling of the first byte in the RTP data packet. We can use timestamps to remove jitter and provide synchronous playout at the receiver.
- *Synchronization source identifier (SSRC)* (32 bits long). Identifies the source of the RTP stream. Each stream in an RTP session has a distinct SSRC. It's a number that the source assisgns randomly when the new stream is started.

### 7.4.2 SIP

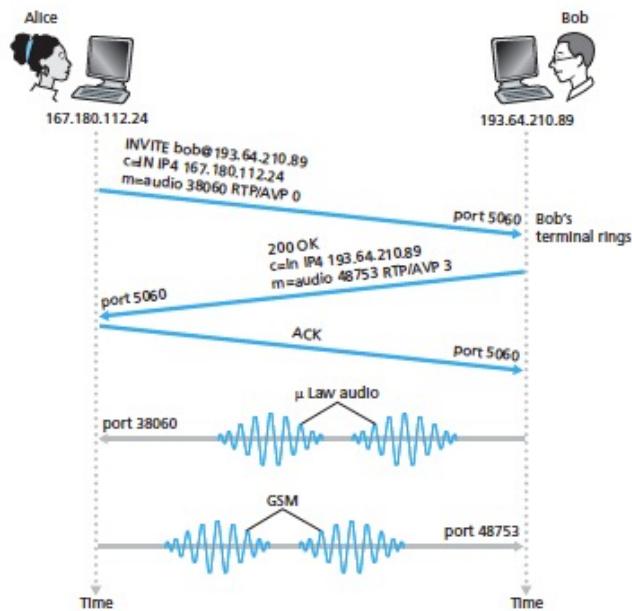
Session Initiation Protocol does the following:

- Establish calls between a caller and a callee over an IP network.
- Mechanisms for the caller to determine the current IP address of the callee. Users do not have a single, fixed IP address because they may be assigned addresses dynamically.
- Mechanisms for call management, such as adding new media streams during the call, changing the encoding, ...

#### 7.4.2.1 Setting Up a Call to a Known IP Address

In figure 7.11 we see that an SIP session begins. by sending an INVITE message. This message is send over UDP to port 5060 for SIP (these messages can also be send over TCP). The message includes and identifier for Bob, an indication of Alice's current IP address, an indication that Alice desires to receive audio, which is to be the encoded format (encapsulated in RTP), indication that she want to receive the RTP packets on port 38060.

Bob sends a SIP response message to port 5060 on Alice her device. This message includes a 200 OK as well as an indication of his IP address, his desired encoding and packetization for reception, and his port number to which the audio packets should be sent.



**Figuur 7.11:** SIP call establishment when Alice knows Bob's IP address

Key characteristics:

1. SIP is an out-of-band protocol: The SIP messages are sent and received in sockets that are different from those used for sending and receiving the media data.
2. ASCII-readable
3. All messages are to be acknowledged.

If Bob does not have a PCM  $\mu$ -law codec for encoding audio, Bob would respond with a 600 Not Acceptable and list in the message all codec he has available.

#### 7.4.2.2 SIP Addresses

SIP addresses resemble e-mail addresses. Example `sip:bob@domain.com`

#### 7.4.2.3 SIP Messages

An example of a SIP message can be seen in figure 7.12. The INVITE line includes the SIP version. Whenever an SIP message passes through an SIP device, it attaches a Via header, which indicates the IP address of the device. The SIP message includes a From header line and a To header line. It includes a Call-ID, which uniquely identifies the call. A Content-Type header line, which defines the format used to describe the content contained in the SIP message. The Content-Length header line provides the length in bytes of the content in this message.

```
INVITE sip:bob@domain.com SIP/2.0
Via: SIP/2.0/UDP 167.180.112.24
From: sip:alice@hereway.com
To: sip:bob@domain.com
Call-ID: a2e3a@pigeon.here way.com
Content-Type: application/sdp
Content-Length: 885

c=IN IP4 167.180.112.24
m=audio 38060 RTP/AVP 0
```

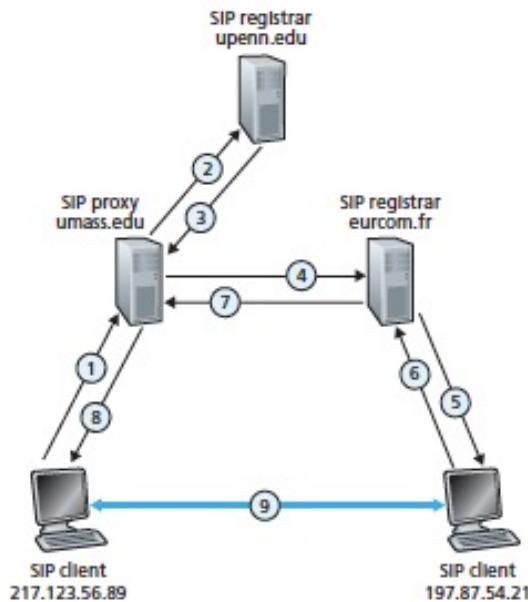
**Figuur 7.12:** Example of a SIP INVITE message

#### 7.4.2.4 Name Translation and User Location

We discuss this by using an example, shown in figure 7.11. Suppose that Alice knows only Bob's e-mail address, bob@domain.com, and that this is the same address used for SIP-based calls. Alice needs to obtain the IP address. She will create an INVITE message that begins with INVITE bob@domain.com SIP/2.0 and sends this to an **SIP proxy**. The SIP reply might include the IP address, but it might include something address to a voicemail box or something else.

Every SIP user has an associated **SIP registrar**. Whenever a user launches an SIP application on a device, the application sends an SIP register message to the registrar, informing the registrar of its current IP address. It is worth noting that the registrar is analogous to a DNS authoritative name server.

We proceed with the example. The proxy server of Alice will simply need to forward Alice's INVITE message to Bob's registrar/proxy. The registrar/proxy could then forward the message to Bob's current SIP device. Finally, Bob, having now received Alice's INVITE message, could send an SIP response to Alice.



**Figuur 7.13:** Session initiation, involving SIP proxies and registrars

Now lets consider example 7.13, in which `jim@umass.edu`, currently working on `217.123.56.89`, wants to initiate a Voice-over-IP (VoIP) session with `keith@upenn.edu`, currently working on `197.87.54.21`.

1. Jim sends an INVITE message to the umass SIP proxy.
2. The proxy does a DNS lookup on the SIP registrar `upenn.edu` and then forwards the message to the registrar server.
3. Because `keith@upenn.edu` is no longer registered at the `upenn` registrar, the `upenn` registrar sends a refiret response, indicatin that it should try `keith@eurecom.fr`.
4. The umass proxy sends an INVITE message to the eurecom SIP registrar.
5. The eurocom registrar knows the IP address of `keith@eurecom.fr` and forwards the INVITE message to the host `197.87.54.21`, which is running Keith's SIP client.
6. An SIP response is sent back through registrars/proxies to the SIP client on `217.123.56.89`.
7. Media is sent directly between the two clients.

## 7.5 Network Support for Multimedia

- *Making the best of best-effort service.* The application-level mechanisms and infrastructure that we studied in Sections 7.2 through 7.4 can be successfully used in a well-dimensioned network where packet loss and excessive end-to-end delay rarely occur. Will be discussed in Section 7.5.1.

- *Differentiated service.* With **differentiated service**, one type of traffic might be given strict priority over another class of traffic when both types of traffic are queued at a router. Required new mechanisms for packet marking, packet scheduling, and more. Will be discussed in Section 7.5.2.
- *Per-connection Quality-of-Service (QoS) Guarantees.* Each instance of an application explicitly reserves end-to-end bandwidth and thus has a guaranteed end-to-end performance. A **hard guarantee** means the application will receive its requested quality of service (QoS) with certainty. A **soft guarantee** means the application will receive its requested quality of service with high probability.
  1. We need a protocol that reserves link bandwidth on the paths from the senders to their receivers.
  2. New scheduling policies in the router queues so that per-connection bandwidth reservations can be honored.
  3. Applications must give the network a description of the traffic that they intend to send into the network and the network will need to police each application's traffic to make sure that it abides by that description.

Approach	Granularity	Guarantee	Mechanisms	Complexity	Deployment to date
Making the best of best-effort service	All traffic treated equally	none, or soft	Application layer support, CDNs, overlays, network-level resource provisioning	minimal	everywhere
Differentiated service	Different classes of traffic treated differently	none, or soft	packet marking, policing, scheduling	medium	some
Per-connection Quality-of-Service (QoS) Guarantees	each source-destination pair	soft or hard, once flow is admitted	packet marking, policing, scheduling; call admission and signaling	high	little

**Tabel 7.4:** Three network-level approaches to supporting multimedia applications

### 7.5.1 Dimensioning Best-Effort Networks

Providing enough link capacity throughout the network congestion, and its consequent packet delay and loss, never (or only very rarely occurs). The question of how much capacity to provide on network links in a given topology to achieve a given level of performance is often known as **bandwidth provisioning**. The even more complicated problem is how to design a network topology, **network**

### dimensioning.

There are some issues must be addressed in order to predict application-level performance between two network en points, and thus provision enough capatity to meet an application's performance requirements.

- *Models of traffic demand between network end points.*
- *Well-defined performance requirements.*
- *Models to predict end-to-end performance for a given workload model, and techniques to find a minimal cost bandwidth allocation that will result in all user requirements being met.*

### 7.5.2 Providing Multiple Classes of Service

Perhaps the simplest enhancement to the one-size-fits-all best-effort service in today's Internet is to divide traffic into classes, and provide different levels or service to these classes or traffic. Recall the type-of-service field in the IPv4 header.

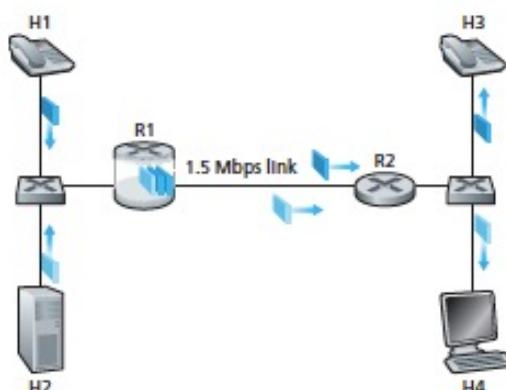
#### 7.5.2.1 Motivating Scenarios

Figure 7.14 shows a simple network scenario in which two application packet flows originate on Hosts H1 and H2 on one LAN and are destined for Hosts H3 and H4 on another LAN. A 1Mbps audio application shere the 1.5 Mbps link between R1 and R2 with a HTTP Web-browsing application that is downloading a Web page from H2 to H4.

In the best-effort Internet, packets are moxed in the output queue at R1 and (typically) transmitted in a first-in-first-out (FIFO) order. A burst of packets from the Web server could fill up the queue, causing the IP audio packets to be excessively delayed or lost due to buffer overflow at R1.

We can solve this by given a strict priority to the audio packets. This was the original goal of the type-of-service (ToS) field in IPv4. Results in a first insight:

**Insight 1: Packet marking** allows a router to distinguish among packets belonging to different classes of traffic.



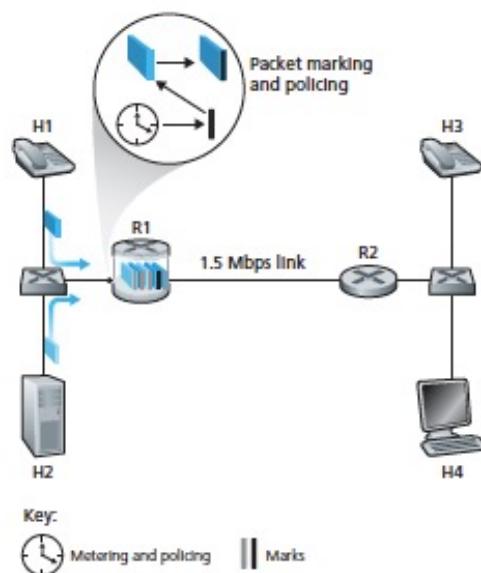
Figuur 7.14: Competing audio and HTTP applications

Now suppose that the router is configured to give priority to packets marked as belonging to the 1 Mbps audio application. What happens if the audio application starts sending packets at a rate of 1.5 Mbps or higher? The HTTP packets will starve, that is, they will not receive any service on the R1-to-R2 link. Ideally, one wants a degree of isolation among classes of traffic so that one class of traffic can be protected from the other. This protection could be implemented at different places in the network—at each and every router, at the first entry of the network, or at inter-domain network boundaries,...

**Insight 2:** It is desirable to provide a degree of **traffic isolation** among classes so that one class is not adversely affected by another class of traffic that misbehaves.

There are two broad approaches that can be taken.

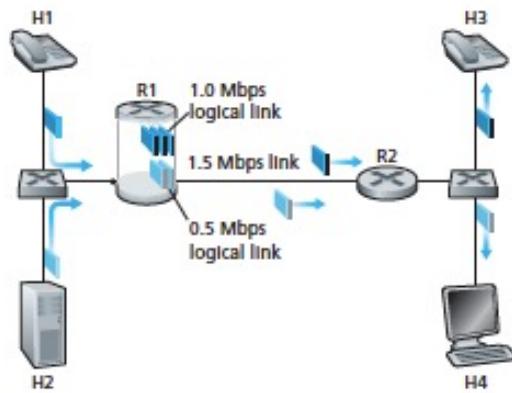
1. Perform **traffic policing**, as shown in figure 7.15. If a traffic class or flow must meet certain criteria, then a policing mechanism can be put into place to ensure that these criteria are indeed observed. The leaky bucket mechanism is the most widely used policing mechanism. In figure 7.15, the packet classification and marking mechanism (Insight 1) and the policing mechanism (Insight 2) are both implemented.



**Figuur 7.15:** Policing (and marking) the audio and HTTP traffic classes

2. Link-layer packet-scheduling mechanism to explicitly allocate a fixed amount of link bandwidth to each class. An example is shown figure 7.16. In this case, the audio and HTTP flows see a logical link with capacity 1.0 and 0.5 Mbps, respectively.

**Insight 3:** While providing isolation among classes or flows, it is desirable to use resources (for example, link bandwidth and buffers) as efficiently as possible.



**Figuur 7.16:** Logical isolation of audio and HTTP traffic classes

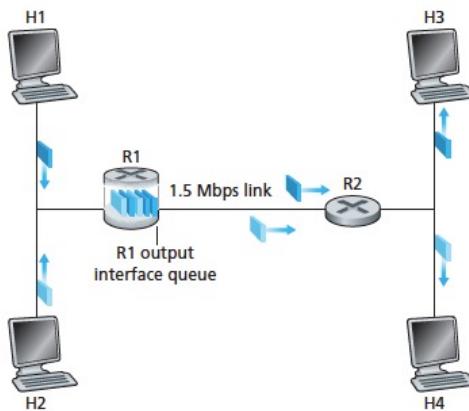
### 7.5.2.2 Scheduling Mechanisms

The manner in which queued packets are selected for transmission on the link is known as the **link-scheduling discipline**.

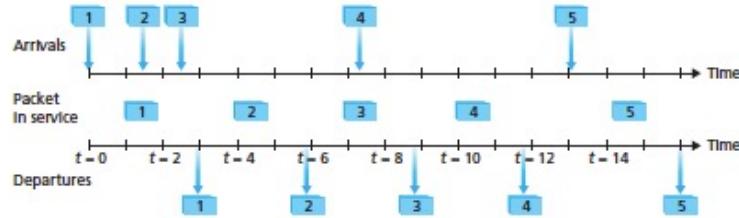
**7.5.2.2.1 First-In-First-Out (FIFO)** Figure 7.17 shows the queuing model abstractions for FIFO. Packets arriving at the link output queue wait for transmission if the link is currently busy transmitting another packet. If there is no sufficient buffering space, a **packet-dropping policy** then determines whether the packet will be dropped (lost) or whether other packets will be removed from the queue to make space for the arriving packet.

The FIFO scheduling discipline selects packets for link transmission in the same order in which they arrived at the output link queue.

Figure 7.18 shows the FIFO queue in operation.



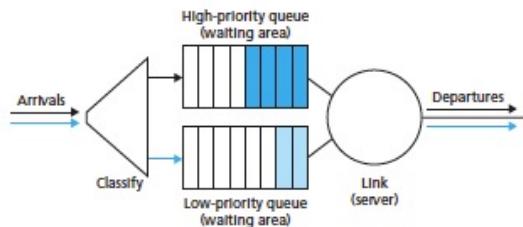
**Figuur 7.17:** FIFO queuing abstraction



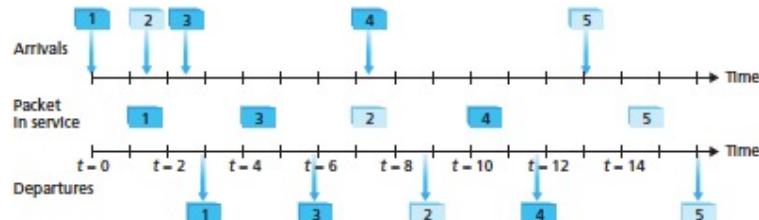
Figuur 7.18: The FIFO queue in operation

**7.5.2.2.2 Priority Queuing** Packets arriving at the output link are classified into priority classes at the output queue, as shown in figure 7.19. Priority class may depend on an explicit marking that it carries in its packet header, its source or destination IP address, its destination port number, or other criteria. Each priority class has its own queue. The priority queuing discipline will transmit a packet from the highest priority class that has a nonempty queue. The choice among packets *in the same priority class* is typically done in a FIFO manner.

Figure 7.20 illustrates the operation of a priority queue with two priority classes. Packets 1, 3 and 4 belong to the high priority class, and packets 2 and 5 to the low-priority class.



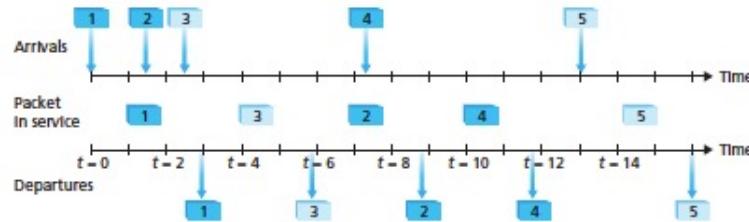
Figuur 7.19: Priority queueing model



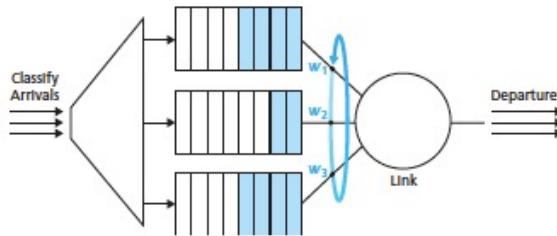
Figuur 7.20: Operation of the priority queue

**7.5.2.2.3 Round Robin and Weighted Fair Queuing (WFG)** Under the **round robin queuing discipline**, packets are sorted into classes as with priority queuing. A round robin scheduler alternates service among the classes. In its simplest form of round robin scheduler, a class 1 packet is transmitted, followed by a class 2 packet, followed by a class 1 packet and so on. A work conserving queuing discipline will never allow a link to remain idle whenever there are packets (of any class) queued for transmission. A **work-conserving round robin discipline** that looks for a packet of

a given class but finds none will immediately check the next class in the round robin sequence. Figure 7.21 illustrates the operation of two-class round robin queue.



**Figuur 7.21:** Operation of the two-class round robin queue



**Figuur 7.22:** Weighted fair queuing (WFQ)

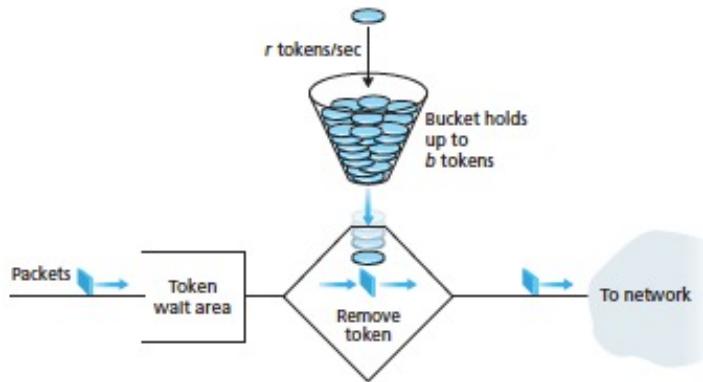
**Weighted fair queuing (WFQ)** is illustrated on figure 7.22. Arriving packets are classified and queued in the appropriate per-class waiting area. A WFQ scheduler will serve classes in a circular way. WFQ is also a work-conserving queuing discipline and thus will immediately move on to the next class in the service sequence when it finds an empty class queue.

Each class may receive a *differential* amount of service in any interval of time. Each class,  $i$ , is assigned a weight,  $w_i$ . During any interval of time during which there are class  $i$  packets to send, class  $i$  will then be guaranteed to receive a fraction of service equal to  $\frac{w_i}{\sum w_j}$ , where the sum in the denominator is taken over all classes that also have packets queued for transmission. In the worst case, class  $i$  is still guaranteed to receive a fraction  $\frac{w_i}{\sum w_j}$  of the bandwidth. For a link with transmission rate  $R$ , class  $i$  will always achieve a throughput of at least  $R \cdot \frac{w_i}{\sum w_j}$ . WFQ plays a central role in QoS architectures.

### 7.5.2.3 Policing: The Leaky Bucket

What aspects of a flow's packet rate should be policed? There are three important policing criteria:

- *Average rate*. Crucial issue here is the interval of time over which the average rate will be policed.
- *Peak-rate*. A peak-rate constraint limits the maximum number of packets that can be sent over a shorter period of time.
- *Burst size*. Limit the maximum number of packets that can be sent into the network over an extremely short interval of time.



**Figuur 7.23:** The leaky bucket policer

As shown in figure 7.23, a leaky bucket consists of a bucket that can hold up to  $b$  tokens. New tokens, are always being generated at a rate of  $r$  tokens per second. If the bucket is filled with less than  $b$  tokens when a token is generated, the newly generated token is added to the bucket; otherwise the newly generated token is ignored, and the token bucket remains full with  $b$  tokens.

Before a packet is transmitted into the network, it must first remove a token from the token bucket. If the token bucket is empty, the packet must wait for a token.

Because there can be at most  $b$  tokens in the bucket, the maximum burst size for a leaky-bucket-policed flow is  $b$  packets.

Because the token generation rate is  $r$ , the maximum number of packets that can enter the network of *any* interval of time of length  $t$  is  $rt + b$ . Thus, the token generation rate,  $r$ , serves to limit the long-term average rate at which packets can enter the network.

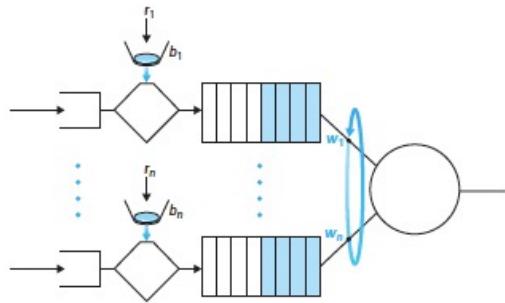
**7.5.2.3.1 Leaky Bucket + Weighted Fair Queuing = Provable Maximum Delay in a Queue**  
 Let's consider a router's output link that multiplexed  $n$  flows, each policed by a leaky bucket with parameter  $b_i$  and  $r_i = 1, \dots, n$ , using WFQ scheduling. The term *flow* refers to the set of packets that are not distinguished from each other by the scheduler.

Each flow,  $i$ , is guaranteed to receive a share of the link bandwidth equal to at least  $R \cdot \frac{w_i}{\sum w_j}$ , where  $R$  is the transmission rate of the link in packets/sec.

What is the maximum delay that a packet will experience while waiting for service in the WFQ (that is, after passing through the leaky bucket)?

Let us focus on flow 1's bucket, which is initially full. A burst of  $b_1$  packets then arrives to the leaky bucket policer for flow 1. These packets remove all the tokens and then join the WFQ waiting area for flow 1. Since these  $b_1$  packets are served at a rate of at least  $R \cdot \frac{w_i}{\sum w_j}$  packets/sec. The maximum delay  $d_{max}$  is now:

$$d_{max} = \frac{b_1}{R \cdot \frac{w_i}{\sum w_j}}$$

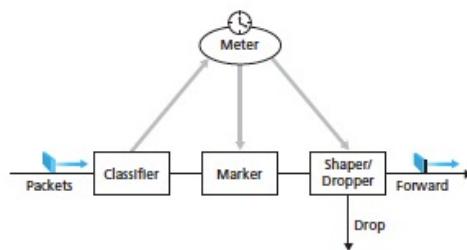


**Figuur 7.24:**  $n$  multiplexed leaky bucket flows with WFQ scheduling

### 7.5.3 Diffserv

Provides service differentiation—that is, the ability to handle different classes of traffic in different ways within the Internet in a scalable manner. Scalability arises from the fact that millions of simultaneous source-destination traffic flows may be present at a backbone router. The Diffserv architecture consists of two sets of functional elements:

- *Edge functions: packet classification and traffic conditioning.* Arriving packets are marked. The differentiated service (DS) field in the IPv4 and IPv6 packet header is set to some value. The definition of the DS field is intended to supersede the earlier definition of the IPv4 type-of-service field and the IPv6 traffic class fields. The mark that a packet receives identifies the class to traffic to which it belongs.
- *Core function: forwarding.* A DS-marked packet is forwarded onto its next hop according to the so-called per-hop behavior (PHB) associated with that packet's class. The per-hop behavior influences how a router's buffers and link bandwidth are shared among the competing classes of traffic. Per-hop behavior will be based only on packet markings, that is, the class of traffic to which a packet belongs.



**Figuur 7.25:** A simple Diffserv network example

Figure 7.25 provides a logical view of the classification and marking functions within the edge router. Packets arriving to the edge router are first classified. Classifier will select packets based on the values of one or more packet header fields and steers the packet to the appropriate marking function.

An end user may have agreed to limit its packet-sending rate to conform to a declared **traffic profile**. As long as the user sends packets into the network in a way that conforms the negotiated

traffic profile, the packets receive their priority marking and are forwarded along their route to the destination. If the traffic profile is violated, out-of-profile packets might be marked differently, might be shaped or might be dropped at the network edge.

The role of the **metering function** is to compare the incoming packet flow with the negotiated traffic profile and to determine whether a packet is within the negotiated traffic profile.

The second key component involves the per-hop behavior. It is defined as "a description of the externally observable forwarding behavior of a Diffserv node applied to a particular Diffser behavior aggregate". There are some important considerations:

- PHB can result in different classes of traffic receiving different performance
- Does not mandate any particular mechanism for achieving these behavior.
- Differences in performance must be observable and hence measurable.

There are two PHBs that have been defined:

**Expedited forwarding:** The departure rate of a class of traffic from a router must equal or exceed a configured rate.

**Assured forwarding:** Divides traffic into four classes, where each AF class is guaranteed to be provided with some minimum amount of bandwidth and buffering.

There are some observations regarding the service model of Diffserv.

1. Typically an end-to-end service must be fashioned from multiple ISPs sitting between communicating end systems. All ISPs between the end systems must not only provide this service, but must also cooperate and make settlements in order to offer end customers true end-to-end service.
2. If diffserv were actually in place and the network ran at only moderate load, most of the time there would be no perceived difference between a best-effort service and a Diffserv service.

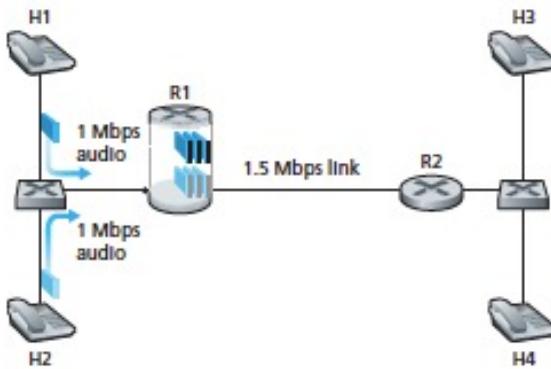
#### 7.5.4 Per-Connection Quality-of-Service (QoS) Guarantees: Resource Reservation and Call Admission

Even with classification and marking, isolation of flows, and sharing of unused bandwidth (of which there is none), this is clearly a losing proposition. Given that the two applications in figure 7.26 cannot both be satisfied simultaneously, what should the network do?

One of the application flows should be blocked. The telephone network is an example of a network that performs such call blocking.

By explicitly admitting, the network can guarantee that admitted flows will be able to receive their requested QoS. Implicit in the need to provide a guaranteed QoS to a flow is the need for the flow to declare its QoS requirements. This is called **call admission**, and is the fourth insight.

**Insight 4:** If sufficient resources will not always be available, and QoS is to be *guaranteed*, a call admission process is needed in which flows declare their QoS requirements and are then either admitted to the network (at the required QoS) or blocked from the network (if the required QoS cannot be provided by the network).



**Figuur 7.26:** Two competing audio applications overloading the R2-to-D2 (hihi) link [R1-R2 link]

There is need for some new network mechanisms:

- *Resource reservation*
- *Call admission*. The network must have a mechanism for calls to request and reserve resources. A call making a call admission request will be denied admission, that is, be blocked, if the requested resources are not available.
- *Call setup signaling*. A call be able to reserve sufficient resources at each and every network router on tis source-to-destination path to ensure that its end-to-end QoS requirement is met. A signaling protocol is needed to coordinate these various activities, **RSVP**.

There has been almost no extended deployment. There are many possible reasons.

- Simple application-level mechanisms that we studied in sections 7.2 through 7.4, combied with proper network dimensioning (section 7.5.1) provide "good enough"best-effort network service for multimedia applications.
- The added complexity and cost of deploying and managing a network that provides per-connection quality of service guarantees may be judges by ISPs to be simply too high given predicted customer revenues for that service.

## 7.6 Summary

Multimedia networking is one of the most exciting developments in the Internet today. People throughout the world are spending less time in front of their radios ans televisions, and are instead turning to the Internet to receive audio and video transmission, both live and prerecorded. This trend will certainly continue as high-speed wireless Interner access becomes more and more prevalent. Moreover, with sites like YouTube, users have become producers as well as consumers of multimedia Internet content. In addition to video distribution, the Internet is also being used to transport phone calls. In fact, over the next 10 years, the Internet, along with wireless Internet access, may make the traditional circuit-switchced telephone system a thing of the past. VoIP not only provides phone service inexpensively, but also provides numerous value-added services, such

as video conferencing; online directory services, voice messaging, and integration into social networks such as Facebook and Google+.

In Section 7.1, we described the intrinsic characteristics of video and voice, and then classified multimedia applications into three categories: 1. streaming stores audio/video, 2. conversational voice/voice-over-IP, and 3. streaming live audio/video.

In Section 7.2 we studied streaming stored video in some depth. For streaming video applications, prerecorded videos are placed on servers, and users send requests to these servers to view the videos on demand. We saw that streaming video systems can be classified into three categories: UDP streaming, HTTP streaming, and adaptive HTTP streaming. Although all three types of systems are used in practice, the majority of today's systems employ HTTP streaming and adaptive HTTP streaming. We observed that the most important performance measure for streaming video is average throughput. In Section 7.2 we also investigated CDNs, which help distribute massive amounts of video data to users around the world. We also surveyed the technology behind three major Internet video-streaming companies: Netflix, YouTube and Kankan.

In Section 7.3, we examined how conversational multimedia applications, such as VoIP, can be designed to run over a best-effort network. For conversational multimedia, timing considerations are important because conversational applications are highly delay-sensitive. On the other hand, conversational multimedia applications are loss-tolerant—occasional loss only causes occasional glitches in audio/video playback, and these losses can be often partially or fully concealed. We saw how a combination of client buffers, packet sequence number, and timestamps can greatly alleviate the effect of network-induced jitter. We also surveyed the technology behind Skype, one of the leading voice- and voice-over-IP companies. In Section 7.4, we examined two of the most important standardized protocols for VoIP, namely, RTP and SIP.

In Section 7.5, we introduced how several network mechanisms (link-level scheduling disciplines and traffic policing) can be used to provide differentiated service among several classes of traffic.

## Bijlage A

# Wiskundige begrippen

### A.1 Determinant

#### A.1.1 Definitie

De determinant van een vierkante matrix  $A$  is een getal dat afhangt van de elementen van  $A$ . Als de vierkante matrix gegeven is door:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Als elementen reële of complexe getallen zijn, wordt de determinant van  $A$  aangeduid door:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

#### A.1.2 2x2 matrix

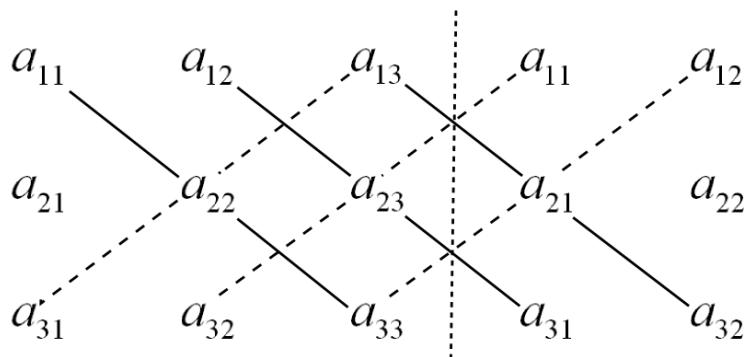
De determinant van een  $2 \times 2$  matrix wordt bekomen door volgende bewerking:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bd$$

### A.1.3 3x3 matrix

De determinant van een  $3 \times 3$  matrix kan worden bepaald door middel van de regel van Sarrus A.1.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (\text{A.1})$$



Figuur A.1: Regel van Sarrus

### A.1.4 Divergent van een vectorveld

We kunnen de divergent van een vector in drie dimensie als volgt bepalen<sup>1</sup>:

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

De divergent kan schreven worden met behulp van de nabla-operator  $\vec{\nabla}$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

De nabla operator is gedefinieerd als volgt<sup>2</sup>:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (\text{A.2})$$

### A.1.5 Laplacian

De Laplacian  $\Delta$  kan geschreven worden in termen van de nabla-operator  $\vec{\nabla}$ , wiens definitie gegeven is in (A.2).

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$$

<sup>1</sup>we laten de algemene formuleren van de divergent buiten beschouwing

<sup>2</sup>in cartesische coördinaten

We kunnen de Laplacian dus uitrekenen als volgt<sup>3</sup>:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A.3})$$

### A.1.6 Rotor van een vectorveld

We laten de definitie van een rotor buiten beschouwing. We focussen ons enkel op de manier om deze te berekenen in cartesische coördinaten. De rotor kan beschreven worden met behulp van de nabla-operator  $\vec{\nabla}$ :

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

Dit komt in drie dimensie overeen met volgende symbolische determinant:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Formules uit de fysica

### A.2.1 Maxwell

De vier formules van Maxwell leggen de basis van het elektromagnetisme. Er wordt gebruik gemaakt van de begrippen divergent en rotor bij deze formules. Uitleg kan respectievelijk gevonden worden in A.1.4 op de pagina hiervoor en A.1.6

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (\text{A.5a})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{A.5b})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + j \quad (\text{A.5c})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (\text{A.5d})$$

---

<sup>3</sup>methode in cartesische coördinaten

### A.2.2 Samenvatting van golfeigenschappen

Ruimte	Ruimte Tijd	Tijd
$\lambda$	$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$	$T$
$\sigma = \frac{1}{\lambda}$	$c = \frac{f}{\sigma} = \lambda f$	$f = \frac{1}{T}$
$k = 2\pi\sigma$	$c = \frac{\omega}{k} = \lambda f$	$\omega = 2\pi f$

**Tabel A.1:** Samenvatting van golfeigenschappen

De snelheid van een golf stijgt wanneer de densiteit van het medium stijgt waarbinnen de golf zich verplaatst. Dit is te zien in tabel A.2

	$c \left( \frac{m}{s} \right)$
Lucht ( $0^\circ\text{C}$ )	331
Water ( $15^\circ\text{C}$ )	1450
Ijzer ( $20^\circ\text{C}$ )	5130

**Tabel A.2:** Snelheid van geluid in verschillende media

## Bijlage B

# Verder uitwerking

### B.1 Uitwerking partiële afgeleiden van de fasor van de golfuitdrukking in $y$ -richting en $z$ -richting

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = A \cdot -jk_y \cdot e^{j \cdot (\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \phi)} = -j \cdot k_y \cdot A \cdot \bar{u}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = A \cdot (-jk_y)^2 \cdot e^{j \cdot (\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \phi)} = (-j \cdot k_y)^2 \cdot A \cdot \bar{u} \quad (\text{B.1a})$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = A \cdot -jk_z \cdot e^{j \cdot (\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \phi)} = -j \cdot k_z \cdot A \cdot \bar{u}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = A \cdot (-jk_z)^2 \cdot e^{j \cdot (\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \phi)} = (-j \cdot k_z)^2 \cdot A \cdot \bar{u} \quad (\text{B.2a})$$

### B.2 Uitwerking Maxwell vergelijking voor een vlakke golf in $x$ -richting

#### B.2.1 Uitwerking van (A.5b)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

Gebruik makend van A.1.4 op pagina 98 en wetende dat  $\rho = 0$  aangezien fiber niet elektrisch geleidt:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0$$

Er is enkel verandering in de  $x$ -richting, dus:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \quad (\text{B.3a})$$

### B.2.2 Uitwerking van (A.5c)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Gebruik makend van A.1.6 op pagina 99:

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \vec{e}_x + \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \vec{e}_y + \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \vec{e}_z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{array} \right.$$

### B.2.3 Uitwerking van (A.5d)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

Er is enkel verandering in de  $x$ -richting, dus:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$$

# Bijlage C

## Formularium

### C.1 Inleiding

Nyquist Theorema

$$f_s \geq 2 f_{max} \quad (\text{C.1})$$

### C.2 Licht als elektromagnetische golf

Voorstelling oscillatie:

$$u(t) = U \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{C.2})$$

Verband golflengte en periode/frequentie:

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f} \quad (\text{C.3})$$

Golfgetal:

$$k = \frac{\omega}{c_x} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{C.4})$$

Golfgetal in vacuüm:

$$k_v = \frac{2\pi}{\lambda_n} \quad (\text{C.5})$$

Golfvector:

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c^2} \cdot \vec{c} \quad (\text{C.6})$$

Golfvergelijking:

$$\nabla^2 \cdot u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{C.7})$$

Maxwell vergelijkingen:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (\text{C.8a})$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (\text{C.8b})$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (\text{C.8c})$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (\text{C.8d})$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad (\text{C.8e})$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \quad (\text{C.8f})$$

Snelheid van een golf:

$$c = \frac{c_v}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c_v}{n} \quad (\text{C.9})$$

Modulus en argument van de impedantie van een golf:

$$|Z| = \frac{\hat{E}_y}{\hat{H}_z} \quad \arg(Z) = \varphi_{E_y} - \varphi_{H_z} \quad (\text{C.10})$$

Poynting vector:

$$\vec{S}(t) = \vec{E} \otimes \vec{H} \quad (\text{C.11})$$

Tijds gemiddelde van de Poynting vector:

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \epsilon c \langle |\vec{E}|^2 \rangle \quad (\text{C.12})$$

Golfgetal afhankelijkheid van het medium:

$$k = k_v \cdot n \quad (\text{C.13})$$

Complexe brekingsindex:

$$\bar{n} = n - i \frac{\alpha}{k_v} \quad (\text{C.14})$$

Complex golfgetal:

$$\bar{k} = k_v \cdot \left( n - i \cdot \frac{\alpha}{k_v} \right) \quad (\text{C.15})$$

Algemene vorm superpositie van twee golven:

$$u = 2 \hat{u} \cos \left( \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \cos \left( \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) \quad (\text{C.16})$$

Interferentie

- Weglengte verschil voor minimum:

$$\Delta s = \frac{\lambda}{2} \quad (\text{C.17})$$

- Maximum:

$$\sin \theta_{max} = m \frac{\lambda}{d} \quad (\text{C.18})$$

Groepssnelheid:

$$v_g = \frac{d \omega}{d k} \quad (\text{C.19})$$

### C.3 Reflectie en Refractie in een medium

Wetten van Snellius:

$$\alpha_i = \alpha_r \quad (\text{C.20})$$

$$n_1 \sin \alpha_i = n_2 \sin \alpha_t \quad (\text{C.21})$$

Kritische hoek:

$$\alpha_{crit} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{C.22})$$

FACULTEIT INDUSTRIELE INGENIEURSWETENSCHAPPEN  
TECHNOLOGIECAMPUS GENT  
Gebroeders De Smetstraat 1  
9000 GENT, België  
tel. + 32 92 65 86 10  
fax + 32 92 25 62 69  
[iiw.gent@kuleuven.be](mailto:iiw.gent@kuleuven.be)  
[www.iiw.kuleuven.be](http://www.iiw.kuleuven.be)



LID VAN  
**ASSOCIATIE  
KU LEUVEN**