CI 3 – CIN : Étude du comportement cinématique des systèmes

Chapitre 7 – Torseurs

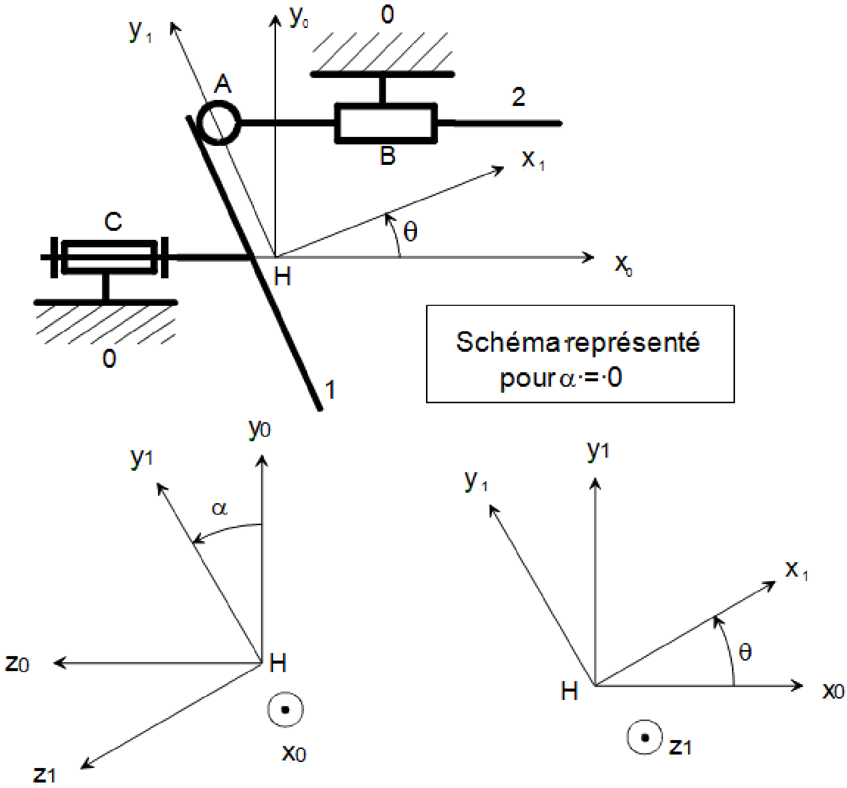
Travaux Dirigés

Exercice 1 – Came plate

D'après ressources de Jean-Pierre Pupier.

La came plate 1 tourne et transmet un mouvement de translation alternatif à la pièce 2. Il y a une liaison sphère – plan de centre A.

- On associe au bâti 0 un repère $\mathscr{R}_0 = \left(H, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0},\right)$.
- On associe à la came plate 1 un repère $\mathscr{R}_1 = \left(H, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$.
- On pose $\alpha = \left(\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}\right)$.
- Un repère $\mathscr{R}'_1$ est également lié à 1 : $\mathscr{R}'_1 = \left(H, \overrightarrow{x'_1}, \overrightarrow{y'_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$.
- Ce repère est tel que $\overrightarrow{x'_1}$ est perpendiculaire à la surface plane de 1 sur laquelle appuie la sphère.
- On pose $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x'_1}\right)$. θ est constant.
- On associe à la pièce 2 un repère $\mathscr{R}_2 = \left(A, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$.
- On pose $\overrightarrow{HA} = R\overrightarrow{y_0} + \lambda\overrightarrow{x_0}$ où R est constant et λ variable.



Question 1

Exprimer les torseurs $\{\mathscr{V}(1/0)\}$ et $\{\mathscr{V}(2/0)\}$. Préciser les noms de ces deux types de torseurs.

Correction

Les solides 1 et 0 sont en liaison pivot de centre C et d'axe $(A, \overrightarrow{x_0})$. En conséquence, on a :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\alpha}\overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{V(C\in 1/0)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{C,\mathcal{R}_0}$$

Les solides 2 et 0 sont en liaison glissière d'axe $\overrightarrow{x_0}$. En conséquence, on a :

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(B\in 2/0)} = \dot{\lambda}\overrightarrow{x_0} \end{array} \right\}_{C,\mathcal{R}_0}$$

Le torseur $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ est un glisseur.
Le torseur $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ est un couple.

Question 2
Exprimer le torseur $\{\mathcal{V}(2/1)\}$.

Correction

Les solides 2 et 1 sont en liaison ponctuelle d'axe $(A, \overrightarrow{x'_1})$. En conséquence, on a :

$$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega(2/1)} = \omega_x\overrightarrow{x'_1} + \omega_y\overrightarrow{y'_1} + \omega_z\overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{V(A\in 2/1)} = v_y\overrightarrow{y'_1} + v_z\overrightarrow{z'_1} \end{array} \right\}_{A,\mathcal{R}'_1}$$

Question 3
Trouver la relation entre $\dot{\lambda}$ *et* $\dot{\alpha}$.

Correction

D'après la composition du torseur cinématique, on a :

$$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \{\mathcal{V}(2/0)\} + \{\mathcal{V}(0/1)\} \Longleftrightarrow \{\mathcal{V}(2/1)\} = \{\mathcal{V}(2/0)\} - \{\mathcal{V}(1/0)\}$$

Afin d'utiliser la relation de décomposition, il est nécessaire d'exprimer les torseurs au même point. Choisissons le point A :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(A\in 2/0)} &= \overrightarrow{V(B\in 2/0)} + \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{\Omega(2/0)} \\ &= \overrightarrow{V(B\in 2/0)} = \dot{\lambda}\overrightarrow{x_0} \text{ car } \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(A\in 1/0)} &= \overrightarrow{V(C\in 1/0)} + \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{\Omega(1/0)} \\ &= \left(-R\overrightarrow{y_0} - \lambda\overrightarrow{x_0} - L\overrightarrow{x_0} + \right)\wedge\dot{\alpha}\overrightarrow{x_0} \\ &= R\dot{\alpha}\overrightarrow{z_0} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{V(A\in 2/1)} = \overrightarrow{V(A\in 2/0)} - \overrightarrow{V(A\in 1/0)} = \dot{\lambda}\overrightarrow{x_0} - R\dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}$$

Projetons $\overrightarrow{V(A\in 2/1)}$ dans $\mathcal{R}'_1$:

Correction

- $\overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{x_1} = \cos\theta\,\overrightarrow{x'_1} - \sin\theta\,\overrightarrow{y'_1}$;
- $\overrightarrow{z_0} = \cos\alpha\,\overrightarrow{z_1} + \sin\alpha\,\overrightarrow{y_1} = \sin\alpha\sin\theta\,\overrightarrow{x'_1} + \sin\alpha\cos\theta\,\overrightarrow{y'_1} + \cos\alpha\,\overrightarrow{z'_1}$.

D'où :

$$\overrightarrow{V(A\in 2/1)} = \dot{\lambda}\left(\cos\theta\,\overrightarrow{x'_1} - \sin\theta\,\overrightarrow{y'_1}\right) - R\dot{\alpha}\left(\sin\alpha\sin\theta\,\overrightarrow{x'_1} + \sin\alpha\cos\theta\,\overrightarrow{y'_1} + \cos\alpha\,\overrightarrow{z'_1}\right)$$

D'après la question précédente, $\overrightarrow{V(A\in 2/1)}\cdot\overrightarrow{x'_1} = 0$. Au final,

$$\dot{\lambda}\cos\theta - R\dot{\alpha}\sin\alpha\sin\theta = 0 \Longleftrightarrow \dot{\lambda}\cos\theta = R\dot{\alpha}\sin\alpha\sin\theta \Longleftrightarrow \dot{\lambda} = R\dot{\alpha}\sin\alpha\tan\theta$$

Question 4

Trouver l'expression de λ et exprimer la course de 2 par rapport à 0.

Correction

En intégrant l'expression précédente, on a : $\lambda = -R\cos\alpha\tan\theta + k$ avec k constante. En conséquence, lorsque $\alpha = 0$ alors $\lambda = -R\tan\theta + k$. Or, d'après la modélisation, lorsque $\alpha = 0, \lambda = -R\tan\theta$. On a donc $k = 0$ et :

$$\lambda(t) = -R\cos\alpha(t)\tan\theta$$

La pièce 2 parcourt sa course complète lorsque α varie de 0 à π. On a donc :

$$c = |\lambda(\pi) - \lambda(0)| = |-R\tan\theta - R\tan\theta| = 2R\tan\theta$$

Question 5

Trouver la vitesse de glissement $\overrightarrow{V(A\in 2/1)}$ dans $\mathscr{B}'_1$ sans faire intervenir λ (et sa dérivée).

Correction

On a vu que :

$$\overrightarrow{V(A\in 2/1)} = -\dot{\lambda}\sin\theta\,\overrightarrow{y'_1} - R\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\theta\,\overrightarrow{y'_1} - R\dot{\alpha}\cos\alpha\,\overrightarrow{z'_1}$$

En utilisant la question 3, on a :

$$\overrightarrow{V(A\in 2/1)} \quad = \quad -R\dot{\alpha}\sin\alpha\tan\theta\sin\theta\,\overrightarrow{y'_1} - R\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\theta\,\overrightarrow{y'_1} - R\dot{\alpha}\cos\alpha\,\overrightarrow{z'_1}$$