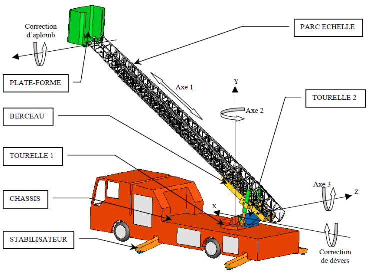
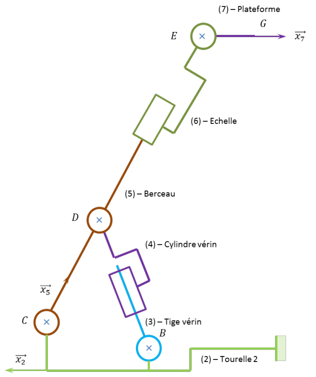
CI 2 – CINÉMATIQUE : MODÉLISATION, PRÉVISION ET VÉRIFICATION DU COMPORTEMENT CINÉMATIQUES DES SYSTÈMES

CHAPITRE 5 – ÉTUDE GRAPHIQUE DES MOUVEMENTS PLANS

Système EPAS



Schématisation 3D



Modélisation plane

On s'intéresse au déploiement de l'Échelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle. Lors de cette phase, les tourelles sont bloquées. Le mouvement de l'échelle est réalisé grâce à la sortie de la tige du vérin.

Ce mouvement à la particularité d'être "plan". En effet, les liaisons qui constituent le mécanisme ne génèrent que des mouvements dans le plan $\left(\overrightarrow{x};\overrightarrow{y}\right)$. Dans ce cas, il est possible d'utiliser des outils graphiques pour déterminer les vitesses de déplacement des solides.

Problématique

PROBLÉMATIQUE :
– Comment déterminer graphiquement les vitesses des solides dans les systèmes mécaniques ?

Savoir

SAVOIRS :
– Étudier les mouvements en utilisant l'équiprojectivité, la composition des vitesses, les notions de centre instantané de rotation, de base et de roulante.

Ce document est en évolution permanente. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.

1 Cinématique plane

Définition

Problème plan

Soient deux solides S_1 et S_2 en mouvement l'un par rapport à l'autre auxquels on associe les repères $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$. Le problème est dit plan lorsque

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{0}$$

Le mouvement est alors contenu dans le plan $\mathcal{P}\left(\overrightarrow{x_1};\overrightarrow{y_1}\right)$.

1.1 Forme du torseur cinématique pour des mouvements plans

Résultat

Torseur cinématique

Lorsqu'un mouvement a lieu dans le plan $\left(\overrightarrow{x};\overrightarrow{y}\right)$, le torseur cinématique associé au mouvement est de la forme :

$$\left\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \sim & u_x \\ \sim & u_y \\ \omega_z & \sim \end{array}\right\}_{O,\mathcal{R}}$$

Exemple

Donner les torseurs associés aux liaisons suivantes dans le plan $\left(\overrightarrow{x};\overrightarrow{y}\right)$.

$\mathcal{L}(3/2)$	$\mathcal{L}(4/3)$	Sphère cylindre de normale $\overrightarrow{x}$	Sphère cylindre de normale $\overrightarrow{z}$

1.2 Représentation du vecteur vitesse

Définition

Le vecteur vitesse est représenté par un glisseur. Ce glisseur est caractérisé par :

- une direction ;
- un sens ;
- une norme ;
- un point d'application.

En cinématique graphique, déterminer le vecteur vitesse revient à déterminer les glisseurs de chacun des points.

Exemple

Représentation d'un glisseur

1.3 Champ des vitesses pour un solide en translation

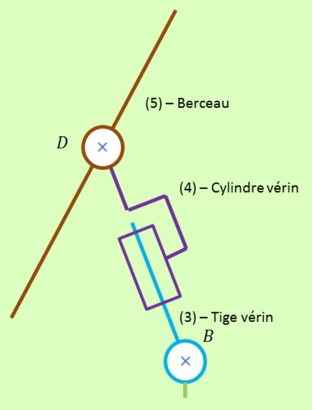
Résultat

Soit un solide S_2 en translation par rapport à un solide S_1. Connaissant $\overrightarrow{V(A \in S_2/S_1)}$, on a :

$$\forall M \in S_2, \overrightarrow{V(M \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{V(A \in S_2/S_1)}$$

Exemple

Tracer $\overrightarrow{V(B \in 3/4)}$ et $\overrightarrow{V(D \in 4/3)}$.



1.4 Champ des vitesses pour un solide en rotation

Résultat

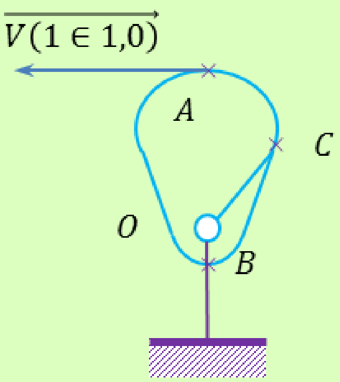
Soit un solide S_2 en rotation par rapport à un solide S_1. Soit O le centre de la liaison. On a donc, $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \omega \overrightarrow{z}$, ω étant une vitesse de rotation exprimée en rad/s. Soit un point A appartenant au plan $\mathscr{P}\left(\overrightarrow{x_0};\overrightarrow{y_0}\right)$ tel que $\overrightarrow{OA} = r\overrightarrow{x_1}$

D'après la relation du champ de moment,

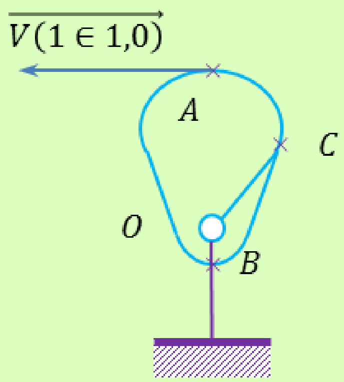
$$\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)} = \overrightarrow{V(O\in S_2/S_1)} + \overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = r\omega\overrightarrow{y_1}$$

Exemple

Tracer $\overrightarrow{V(B\in 1/0)}$



Tracer $\overrightarrow{V(C\in 1/0)}$



Donner $||\overrightarrow{\Omega(1/0)}||$

1.5 Notion de point appartenant à deux solides

Résultat

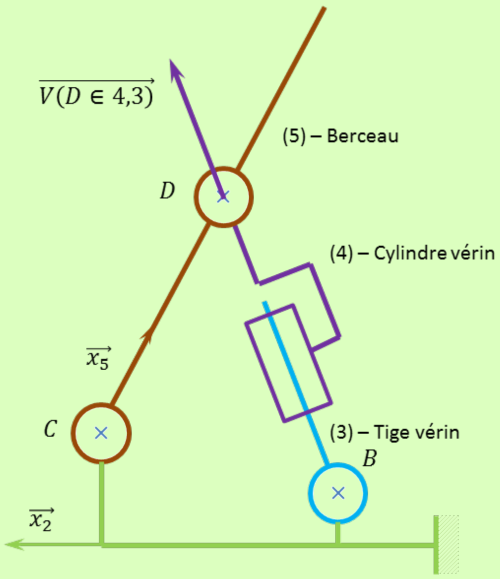
Soient deux solides S_1 et S_2. La liaisons entre les deux solides est de centre A et ne permet aucune translation dans $\mathscr{P}$. Soit S_0 le bâti. On a alors :

$$\overrightarrow{V(A\in S_2/S_0)} = \underbrace{\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{V(A\in S_1/S_0)}$$

Exemple

Déterminer $\overrightarrow{V(D\in 5/3)}$ et $\overrightarrow{V(D\in 5/2)}$.

Exemple



2 Résolution des problèmes graphiques en utilisant l'équiprojectivité

Résultat

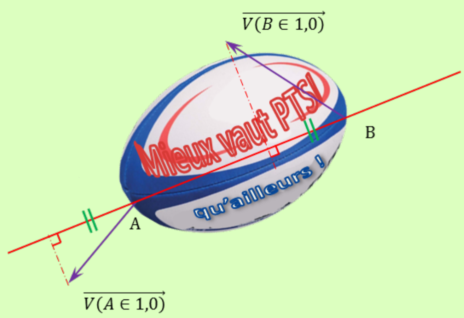
Equiprojectivité

Soit un solide S_1 en mouvement par rapport à un repère fixe $\mathscr{R}_0$. Soient deux points A et B appartenant au solide S_1. On démontre qu'à chaque instant t :

$$\overrightarrow{V(A \in S_1/\mathscr{R}_0)} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V(B \in S_1/\mathscr{R}_0)} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Exemple

Interprétation graphique



Démonstration

D'après la relation du champ de moment,

$$\overrightarrow{V(B\in S_1/\mathscr{R}_0)} = \overrightarrow{V(A\in S_1/\mathscr{R}_0)} + \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{V(B\in S_1/\mathscr{R}_0)}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V(A\in S_1/\mathscr{R}_0)}\cdot\overrightarrow{AB} + \underbrace{\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}\right)\cdot\overrightarrow{BA}}_{=\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BA}\right)\cdot\overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}=\overrightarrow{0}}$$

CQFD

Méthode

1. Identifier les données connues :
   – fréquence de rotation des moteurs ;
   – vitesse de déplacement des vérins ...
2. Tracer les vecteurs vitesses connus en respectant l'échelle
3. Identifier la direction du vecteur vitesse aux points caractéristiques du mécanisme
4. Utiliser la décomposition du vecteur vitesse si besoin
5. Tracer le vecteur vitesse final en utilisant l'équiprojectivité
6. Mesurer la norme du vecteur vitesse et comparer avec le cahier des charges.

3 Résolution des problèmes graphiques en utilisant les centres instantanés de rotation

Définition

Glisseur

Soit le torseur suivant :

$$\{\mathscr{V}(S_2/S_1)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}\\ \overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}\end{array}\right\}_A$$

$\{\mathscr{V}\}$ est un glisseur si et seulement si :
– $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}\neq\overrightarrow{0}$;
– il existe un point A tel que $\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}\neq\overrightarrow{0}$;
– $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}\cdot\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}=\overrightarrow{0}$.

Résultat

Centre instantané de rotation - CIR

En conséquence, en cinématique plane, le torseur cinématique est un glisseur. Il existe donc un point I tel $\overrightarrow{V(I\in S_2/S_1)}=\overrightarrow{0}$.

I_{21} est appelé le centre instantané de rotation du solide 1 par rapport au solide 2.

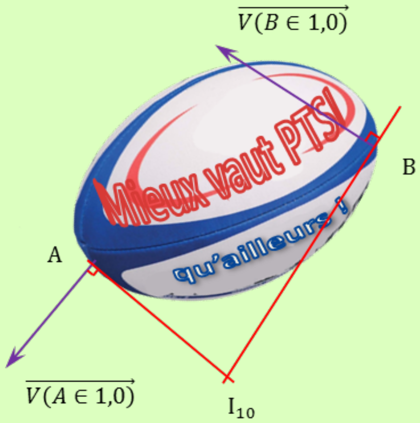
Résultat

Construction du CIR

$\overrightarrow{V(A \in S_2/S_1)}$ et $\overrightarrow{V(B \in S_2/S_1)}$ étant connu, I_{12} est à l'intersection des perpendiculaires aux vecteurs vitesses en A et en B.

Exemple

Interprétation graphique



Remarque

- Pour un solide en translation, le CIR n'existe pas.
- Pour un solide en rotation autour d'un point fixe, le CIR est au centre de la liaison.
- Le CIR change à chaque instant.

Définition

Base et roulante

Soit un solide S_1 en mouvement dans un solide $\mathscr{R}_0$. On appelle base la trajectoire du CIR par rapport à $\mathscr{R}$. On appelle roulante la trajectoire du CIR par rapport à S_1.

Théorème

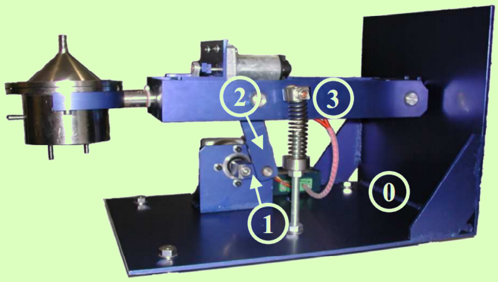
Soient 3 solides S_1, S_2 et S_3 en mouvement plan. I_{12}, I_{23} et I_{13} sont alignés

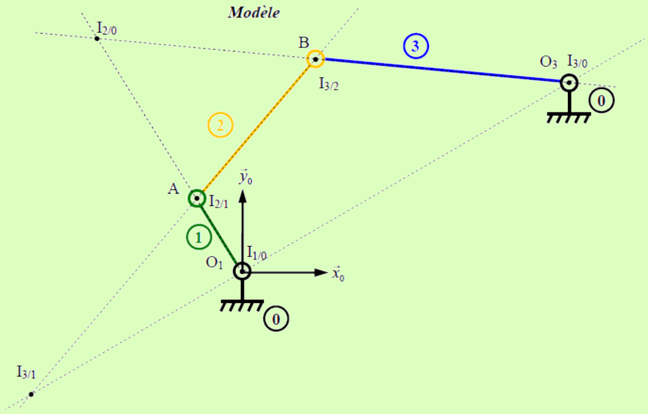
Résultat

L'alignement des CIR peut permettre de déterminer la direction d'un vecteur vitesse.

Agitateur médical

Système à double excentrique (transformation d'un mouvement de rotation continue en rotation discontinue). Les solides S_1 et S_3 sont en liaison pivot avec le bâti S_0. La bielle S_2 est en liaison pivot avec S_1 et S_3.





Mouvement de 1/0 rotation autour de l'axe $(O_1, \overrightarrow{z_0})$: CIR $I_{1/0} = O_1$. Liaison 2/1 pivot d'axe $(A, \overrightarrow{z_0})$: CIR $I_{2/1} = A$: CIR $I_{2/0}$ est sur l'axe (O_1A).

Mouvement de 3/0 rotation autour de l'axe $(O_3, \overrightarrow{z_0})$: CIR $I_{3/0} = O_3$. Liaison 3/2 pivot d'axe $(B, \overrightarrow{z_0})$: CIR $I_{3/2} = B$: CIR $I_{2/0}$ est sur l'axe (O_3B).

On en déduit $I_{2/0}$ intersection entre les droites (O_3B) et (O_1A).

On connaît le CIR $I_{1/0} = O_1$ et le CIR $I_{3/0} = O_3$ par conséquent le CIR $I_{3/1}$ est sur l'axe (O_1O_3).

On connaît le CIR $I_{3/2} = A$ et le CIR $I_{2/1} = B$ par conséquent le CIR $I_{3/1}$ est sur l'axe (AB).

On en déduit $I_{3/1}$ intersection entre les droites (O_1O_3) et (AB).

Exemple