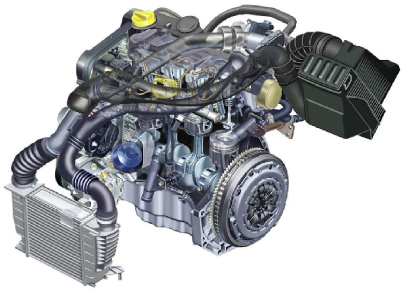
CI 3 – CIN : Étude du comportement cinématique des systèmes

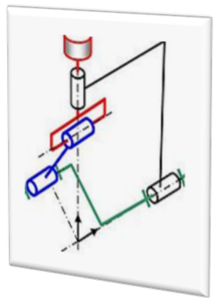
Chapitre 2 – Géométrie dans l'espace

D'après cours de géométrie de Pierrick Soleillant [1].

Effeuillage d'un Renault Clio [2]



Moteur 1.5 dCi K9K 105 ch [2]



Modélisation par schéma cinématique[?]

Problématique :
– M

Savoir

Savoirs :
– M
  – M
  – M

Ce document est en évolution permanente. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.

1 Vecteurs

On postule l'existence d'un ensemble, appelé plan euclidien, et noté $\mathscr{P}$. Ses éléments sont appelés points.

1.1 Définitions

Définition

Vecteurs

Soit $(A;B)$ un couple[1] de points du plan : ce couple définit :
- une direction (celle de la droite (AB)) ;
- un sens (de A vers B) ;
- une longueur (la longueur AB).

On associe à un tel couple un objet appelé **vecteur**, noté $\overrightarrow{AB}$.

Définition

Bipoints ? équipollents ?

1.2 Règles de calcul

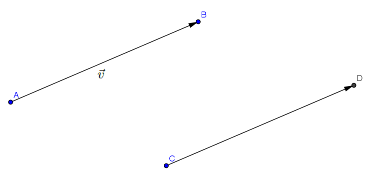
Proposition

Égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur. Les couples de points $(A;B)$ et $(C;D)$ définissent alors un même vecteur. On dit parfois que $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{v}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est dit nul lorsque $A = B$. Le vecteur nul est noté $\overrightarrow{0}$.

Étant donnés un point O et un vecteur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, il existe un unique point M du plan tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OM}$.



1. Attention à l'ordre : A **puis** B.

Proposition

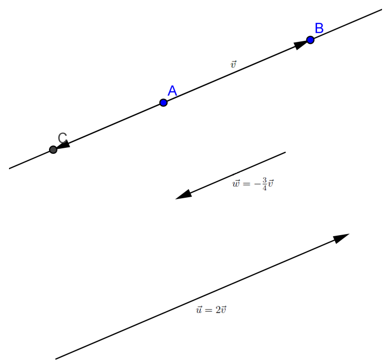
Produit par un réel

Soient A et B deux points distincts et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit le vecteur $\lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ comme le vecteur $\overrightarrow{AC}$ où C est le point de la droite (AB) qui vérifie

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \lambda$$

où $\overline{AC}$ et $\overline{AB}$ sont les mesures algébriques respectives des couples (A, C) et (A, B) dans un repère arbitraire de la droite (AB).

Dans le cas du vecteur nul, on pose $\lambda \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.



Remarque

Mesure algébrique

Soient une droite $\mathscr{D}$, un point origine O sur $\mathscr{D}$ et un point I sur $\mathscr{D}$ tel que $OI = 1$.

Soient M et N deux points de $\mathscr{D}$ d'abscisses respectives x_M et x_N. On appelle mesure algébrique du couple (M, N) (dans cet ordre) dans le repère (O, I), et on note $\overline{MN}$ le réel tel que

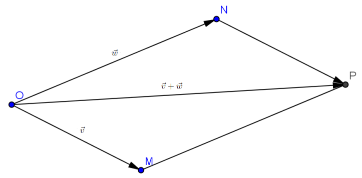
$$\overline{MN} = x_N - x_M$$

Proposition

Addition de deux vecteurs

Soient $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs. On peut les représenter sous la forme $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{ON}$. On définit $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ comme le vecteur $\overrightarrow{OP}$ tel que le quadrilatère $OMPN$ soit un parallélogramme. Ce vecteur $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ ne dépend pas du choix du point O.

Une conséquence essentielle de cette définition de l'addition de vecteurs est la **relation de Chasles** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



Proposition

Norme d'un vecteur

On appelle la norme du vecteur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ la longueur du segment $[AB]$. Elle ne dépend pas du représentant choisi, c'est-à-dire que si C et D sont des points du plan vérifiant aussi $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$, alors on a : $AB = CD$.

2 Modes de repérage dans l'espace

2.1 Repère(s) cartésien(s) de l'espace

Définition

Repère cartésien

On appelle repère cartésien de $\mathscr{E}$ la donnée d'un point O du plan, et de trois vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ non coplanaires.

Le point O est appelé origine du repère, le triplet de vecteurs $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est appelé base du repère.

Remarque

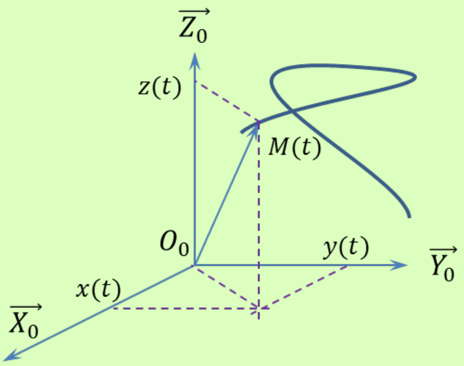
1. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels (x, y, z) vérifiant :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}.$$

Le réel x est appelé abscisse de M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, le réel y est appelé ordonnée de M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et le réel z est appelé cote de M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Enfin, le triplet (x, y, z) est appelé triplet de coordonnées (cartésiennes) de M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
2. On définit, de même, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, comme l'unique triplet de réels (x, y, z) vérifiant $\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$.
3. Si, dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (x, y, z) et $\vec{v}$ a pour coordonnées (x', y', z'), alors $\overrightarrow{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y', z + z')$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, les coordonnées de $\lambda\overrightarrow{u}$ sont $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
4. Étant donnés deux points A et B de l'espace, de coordonnées respectivement (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ (pour s'en assurer, il suffit d'écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$).
5. L'intérêt de munir l'espace euclidien d'un repère cartésien réside dans le fait qu'à chaque point (resp. à chaque vecteur) de l'espace correspond un unique triplet de réels – et réciproquement. Ainsi, on peut exprimer toutes les propriétés des points et des vecteurs que l'on considère par des relations algébriques entre leurs coordonnées... qui ne sont "que" des triplets de réels !

Exemple

Trajectoire en coordonnées cartésiennes



Le point M suit une trajectoire dans le repère $\mathscr{R}_0 = \left(O_0, \overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{Y_0}, \overrightarrow{Z_0}\right)$

$$\overrightarrow{OM(t)} = x(t)\overrightarrow{X_0} + y(t)\overrightarrow{Y_0} + z(t)\overrightarrow{Z_0} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{\mathscr{R}_0}$$

Définition

Repère orthogonal, orthonormal

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère cartésien de l'espace.

On dit que $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ (respectivement la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$) est un repère (respectivement une base) orthogonal(e) lorsque les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont deux à deux orthogonaux.

Lorsque, en outre, $||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}|| = ||\overrightarrow{k}|| = 1$, le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ (respectivement la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$) est dit(e) orthonormé(e).

Remarque

On verra que les propriétés liées à l'orthogonalité, aux distances et aux angles s'expriment plus simplement dans un repère orthonormal que dans un repère plus «quelconque». Ainsi, on se placera souvent dans un repère orthonormé.

2.2 Orientation de l'espace, repères (orthonormés) directs

Soient O un point de l'espace et $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ deux vecteurs orthogonaux et de norme 1. Il existe un unique plan $\mathscr{P}$ contenant O, $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. On voit alors que, si l'on cherche un vecteur $\overrightarrow{k}$ de sorte que $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ soit un repère orthonormé de l'espace, sa direction est imposée : le vecteur $\overrightarrow{k}$ doit être orthogonal au plan $\mathscr{P}$. Reste à préciser son sens : pour cela, on a deux possibilités. On peut, par exemple, choisir $\overrightarrow{k}$ de sorte que la succession $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ soit dans la même configuration spatiale que le triplet (pouce, indexe, majeur) [1] de la main droite (dans cet ordre !). Dans ce cas, on dit que le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est *direct*. Dans le cas contraire, le repère est dit *indirect* ou *rétrograde*. Par ce choix (arbitraire) de classer les repères orthonormés de l'espace en deux catégories (directs ou indirects), on dit qu'on a *orienté* l'espace $\mathscr{E}$.

Remarque

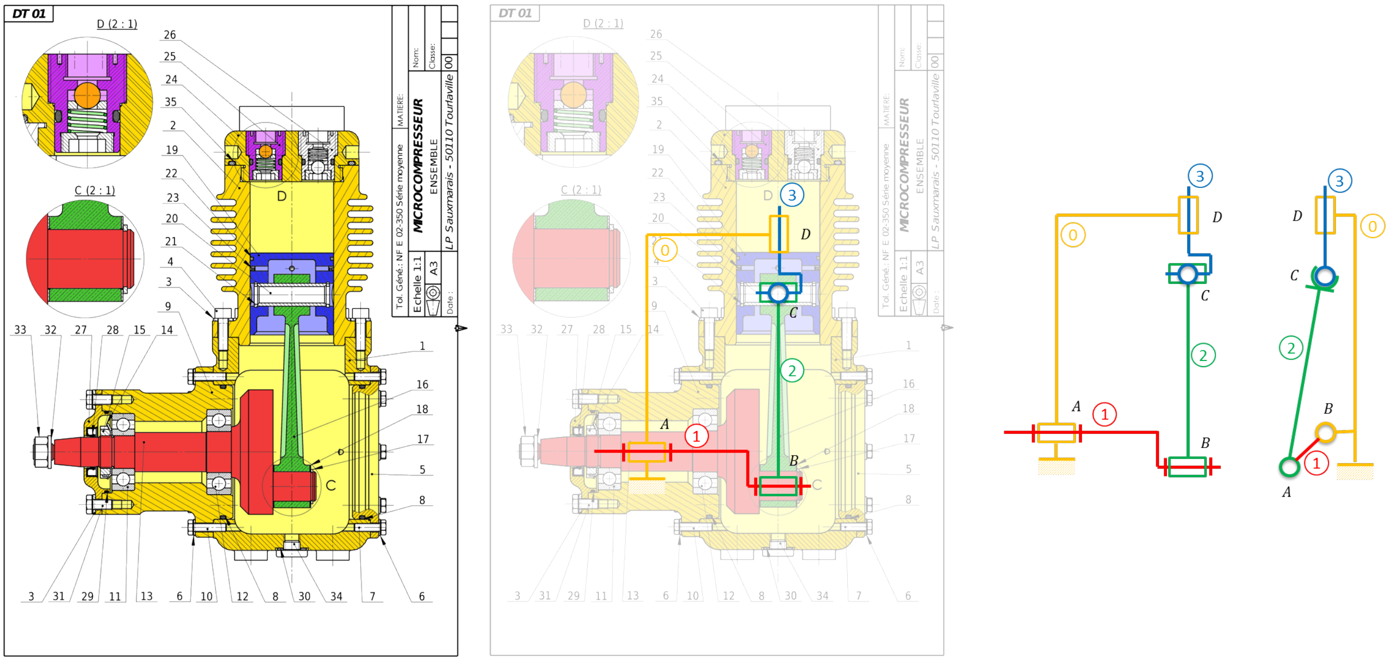
1. On peut également définir la notion de repère direct sans que la base associée soit nécessairement orthonormée : un repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est dit direct lorsque $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est dans la même configuration spatiale que le triplet (pouce, indexe, majeur)... qui peuvent être disposés sans former des directions nécessairement perpendiculaires les unes aux autres. Un repère est dit rétrograde lorsqu'il n'est pas direct.

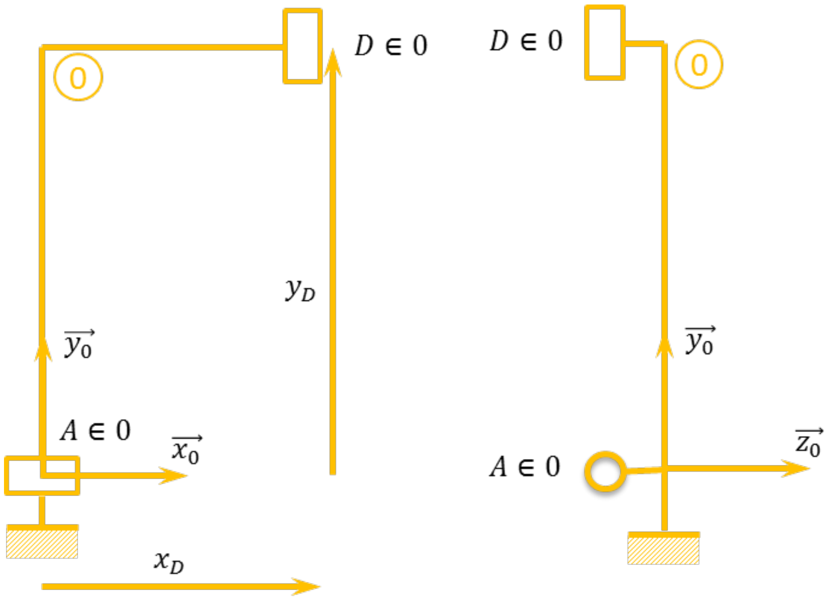
   Dans le premier cas, on dit que le triplet de vecteurs $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une *base directe*, et dans le second, que c'est une *base indirecte* ou *rétrograde*.
2. Signalons que l'orientation de l'espace n'induit pas d'orientation particulière d'un plan de cet espace. Pour orienter un plan $\mathscr{P}$, il suffit d'orienter une droite $\mathscr{D}$ orthogonale à $\mathscr{P}$, en choisissant un vecteur $\overrightarrow{k}$ unitaire de $\mathscr{D}$ (il y a deux possibilités) : une base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de $\mathscr{P}$ sera dite directe pour l'orientation définie par $\overrightarrow{k}$ lorsque la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est directe dans l'espace. On dit alors qu'on a orienté le plan $\mathscr{P}$ par le vecteur normal $\overrightarrow{k}$.

2.3 Exemple

Considérons le cas d'un micromoteur de modélisme modélisé par son schéma cinématique minimal.

1. Le pouce et l'index étant totalement "déployés", tandis que le majeur est levé à la verticale de la paume.

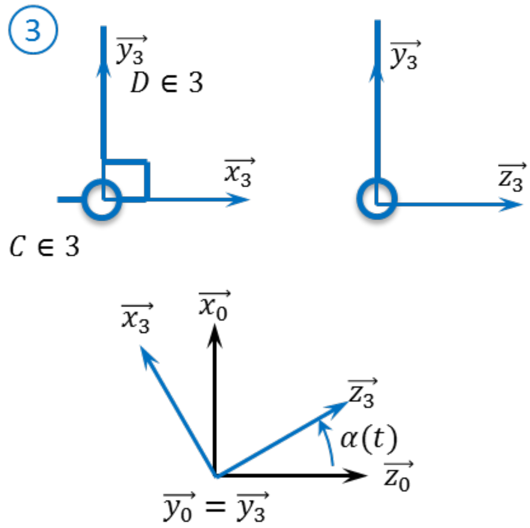




En isolant le bâti 0, il est possible de lui associer un repère orthonormé $\mathcal{R}_0\left(A,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$.

On a $\overrightarrow{AD}=x_D\,\overrightarrow{x_0}+y_D\,\overrightarrow{y_0}$.

On remarque que le point A appartient à la fois aux solides 0 et 1.



On isole le piston 3 et on lui associe la base orthonormée directe $\mathcal{R}_3\left(C, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3}\right)$.

Les pièces 0 et 3 sont en liaison pivot glissant d'axe $\overrightarrow{y_0}$. $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{y_3}$ ayant même direction, même sens et même norme, on a $\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{y_3}$.

En revanche, les pièces 0 et 3 pivotent l'une par rapport à l'autre autour de l'axe $\overrightarrow{y_0}$.

On a

$$\alpha(t) = \left(\widehat{\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z_3}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}}\right)$$

Où $\alpha(t)$ est un angle en radian et t est le temps en secondes.

2.4 Coordonnées cylindriques

Définition

Coordonnées polaires

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé direct du plan euclidien orienté. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u}(\theta) = \cos(\theta)\,\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{v}(\theta) = -\sin(\theta)\,\overrightarrow{i} + \cos(\theta)\,\overrightarrow{j} \end{cases}$$

Le couple $(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$ est appelé base polaire associée à l'angle θ.

Le triplet $(O, \overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$ est appelé repère polaire associé à l'angle θ.

Définition

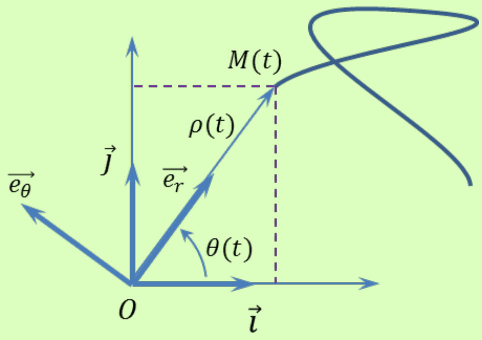
Système de coordonnées polaires

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé direct du plan euclidien orienté.

Pour tout point M du plan, on appelle systèmes de coordonnées polaires de M dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tout couple (r, θ) de réels vérifiant $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u}(\theta)$.

Exemple

Trajectoire en coordonnées polaires



Le point M suit une trajectoire dans le repère $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

$$\overrightarrow{OM(t)} = \rho(t)\overrightarrow{e_r} = \rho(t)\cos\theta(t)\,\overrightarrow{i} + \rho(t)\sin\theta(t)\,\overrightarrow{j}$$

Remarque

1. Contrairement au système de coordonnées d'un point dans un repère cartésien, les coordonnées qui viennent d'être définies ne sont pas uniques.
2. Soit M un point du plan de coordonnées cartésiennes (x,y) dans $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ et de coordonnées polaires (r,θ) dans ce même repère. On a alors :
$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right.$$

Définition

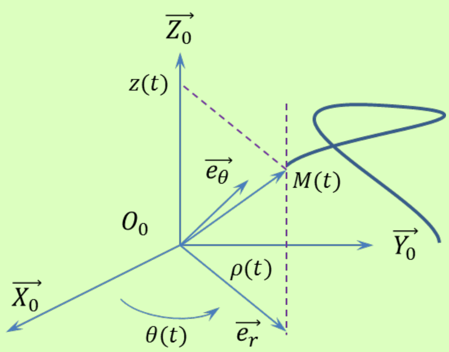
Coordonnées cylindriques

Soit $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ un repère orthonormé de l'espace, et M un point de l'espace.

On appelle *système de coordonnées cylindriques de* M tout triplet (r,θ,z) de réels vérifiant :

1. z est la cote de M dans le repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$;
2. (r,θ) est un système de coordonnées polaires dans le repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ du projeté orthogonal de M sur le plan (xOy).

Exemple

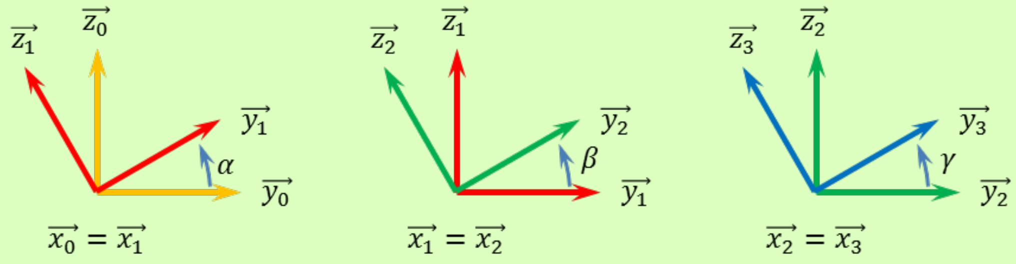


Remarque

1. Ces coordonnées sont particulièrement adaptées pour étudier un point d'un cylindre... d'où leur nom.
2. Si le point M a pour coordonnées cartésiennes (x,y,z) dans $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ et (r,θ,z) pour coordonnées cylindriques, alors on a :
$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{array}\right.$$
3. Comme les coordonnées polaires dans le plan, les coordonnées cylindriques ne sont pas uniques. Plus précisément, on impose l'unicité de celles-ci si on exige $r > 0$ (ce qui exclut tout point de l'axe (Oz)) et $\theta \in]-\pi,\pi]$, par exemple.

Exemple

On donne un paramétrage partiel (voir chapitre 3) du micro moteur.



On note :
- $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}}\right)$ l'angle permettant de passer du repère $\mathscr{R}_0$ au repère $\mathscr{R}_1$;
- $\beta = \left(\widehat{\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}}\right)$ l'angle permettant de passer du repère $\mathscr{R}_1$ au repère $\mathscr{R}_2$;
- $\gamma = \left(\widehat{\overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{y_3}}\right)$ l'angle permettant de passer du repère $\mathscr{R}_2$ au repère $\mathscr{R}_3$.

Exprimer :
- le vecteur $\overrightarrow{y_1}$ dans le repère $\mathscr{R}_0$;
- le vecteur $\overrightarrow{y_2}$ dans le repère $\mathscr{R}_0$;
- le vecteur $\overrightarrow{z_3}$ dans le repère $\mathscr{R}_0$;
- le vecteur $\overrightarrow{z_1}$ dans le repère $\mathscr{R}_3$.

2.5 Coordonnées sphériques

Définition

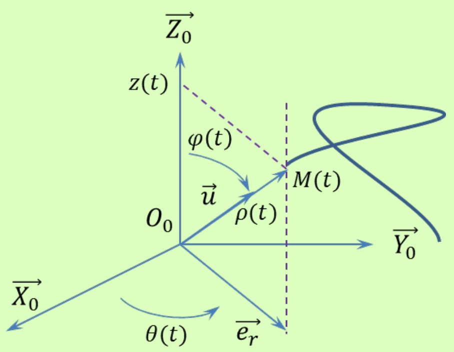
Coordonnées sphériques

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé de l'espace, et M un point de l'espace.

On appelle *système de coordonnées cylindriques de* M tout triplet (r, θ, φ) de réels vérifiant :

1. θ est une mesure dans $[0, \pi]$ de l'angle non orienté $(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{OM})$;
2. $(r\sin(\theta), \varphi)$ est un système de coordonnées polaires dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du projeté orthogonal de M sur le plan (xOy).

Exemple



Remarque

1. Ces coordonnées sont particulièrement adaptées pour étudier un point d'une sphère. En particulier, $|r| = ||\overrightarrow{OM}||$.
2. θ est appelée la *colatitude*, φ la *longitude* et $\frac{\pi}{2} - \theta$ la *latitude* du point M.
3. Si le point M a pour coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et (r, θ, φ) pour coordonnées sphériques, alors on a :

$$\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$$

3 Produit scalaire

3.1 Produit scalaire de deux vecteurs

Définition

Produit scalaire

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et on note le réel $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ le réel :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \begin{cases} ||\overrightarrow{u}|| \cdot ||\overrightarrow{v}|| \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ son non nuls} \\ 0 & \text{si } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

Remarque

Le résultat d'un produit scalaire est un **nombre réel**.

On a, en particulier, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$

Proposition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

3.2 Forme bilinéaire symétrique définie positive

Propositions

1. Pour tout couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs du plan $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.
2. (a) Pour tout triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ de vecteurs du plan, et pour tout couple (λ, μ) de réels on a :
$$\overrightarrow{u} \cdot \left(\lambda \overrightarrow{v_1} + \mu \overrightarrow{v_2}\right) = \lambda \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v_1} + \mu \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v_2}$$
   (b) Pour tout triplet $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs du plan, et pour tout couple (λ, μ) de réels on a :
$$\left(\lambda \overrightarrow{u_1} + \mu \overrightarrow{u_2}\right) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{v}$$
3. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} \geq 0$, et, de plus, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

3.3 Expression du produit scalaire de deux vecteurs en base orthonormée

Proposition

Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé de l'espace, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace, et (x, y, z) et (x', y', z') leurs coordonnées respectives dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

Corollaire

Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé de l'espace, $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace, A et B deux points de l'espace, de coordonnées respectives (x, y, z), (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Alors on a :

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ et } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

4 Produit vectoriel

Dans cette partie, on suppose que l'espace $\mathscr{E}$ est orienté.

4.1 Produit vectoriel de deux vecteurs

Définition

Produit vectoriel de deux vecteurs

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathscr{E}$ orienté.

On appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le vecteur de l'espace, noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, et défini par :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{cases} ||\overrightarrow{u}|| \cdot ||\overrightarrow{v}|| \cdot \sin\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \cdot \overrightarrow{k} & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ne sont pas colinéaires} \\ \overrightarrow{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\overrightarrow{k}$ est un vecteur de norme 1, perpendiculaire au(x) plan(s) défini(s) par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k})$ forme une base directe de l'espace.

Remarque

Le résultat du produit vectoriel est un **vecteur**. Comme tout vecteur il est caractérisé par :
- son sens : dans le sens de $\overrightarrow{k}$;
- sa direction : direction de $\overrightarrow{k}$;
- sa norme : $||\overrightarrow{u}|| \cdot ||\overrightarrow{v}|| \cdot \sin\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$

Proposition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.

1. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$;
2. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base directe de l'espace.

Remarque

En particulier, si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormée directe de l'espace, alors $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$.

4.2 Le produit vectoriel est bilinéaire et anti-symétrique

Proposition

1. Pour tout couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs de l'espace, $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right)$.
2. (a) Pour tout triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ de vecteurs de l'espace, et pour tout couple (λ, μ) de réels, on a :

$$\overrightarrow{u} \wedge (\lambda \overrightarrow{v}_1 + \mu \overrightarrow{v}_2) = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}_1) + \mu(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}_2).$$

   (b) Pour tout triplet $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v})$ de vecteurs de l'espace, et pour tout couple (λ, μ) de réels, on a :

$$(\lambda \overrightarrow{u}_1 + \mu \overrightarrow{u}_2) \wedge \overrightarrow{v} = \lambda\left(\overrightarrow{u}_1 \wedge \overrightarrow{v}\right) + \mu\left(\overrightarrow{u}_2 \wedge \overrightarrow{v}\right).$$

4.3 Expression du produit vectoriel de deux vecteurs en base orthonormée directe

Proposition

Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace, et (x, y, z) et (x', y', z') leurs coordonnées respectives dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Alors les coordonnées de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ sont :

$$(yz' - zy', zx' - xz', xy' - x'y).$$

Méthode

Calcul du produit vectoriel – Méthode analytique

Soient $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ deux vecteurs exprimés dans $\mathcal{R}_0$.

On a alors :

$$||\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}|| = ||\overrightarrow{v_1}|| \cdot ||\overrightarrow{v_2}|| \cdot \sin\left(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}\right)$$

Le vecteur résultant du produit vectoriel de ces deux vecteurs est orthogonal au plan formé par $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et le vecteur résultant doivent former un trièdre direct.

On a :

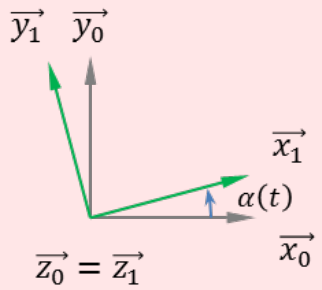
$$\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} \wedge \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = \begin{bmatrix} v_{1y} v_{2z} - v_{1z} v_{2y} \\ -(v_{1x} v_{2z} - v_{1z} v_{2x}) \\ v_{1y} v_{2y} - v_{1y} v_{2x} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0}$$

Pour réaliser le produit vectoriel, les vecteurs doivent être exprimés dans le même repère.

Méthode

Calcul du produit vectoriel – Méthode graphique

Cette méthode sera utilisée lors du produit vectoriel entre vecteurs normés. Le calcul du produit vectoriel est alors déduit de la lecture des figures planes :



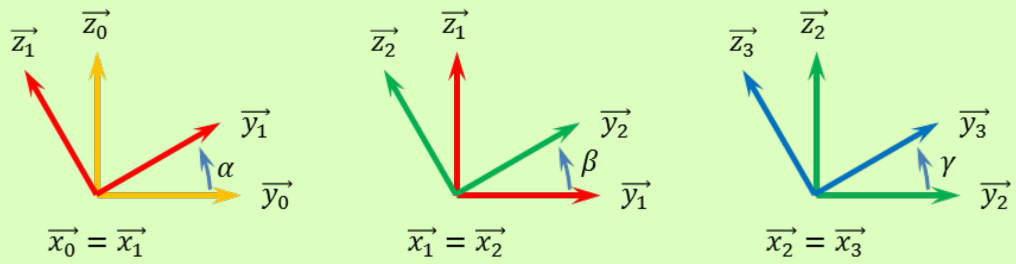
$$\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{z_0}$$

$$\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{x_1} = \underbrace{+}_{\overrightarrow{x_0}\text{ puis }\overrightarrow{x_1}\text{ dans le sens direct}} \underbrace{\sin\alpha(t)}_{\text{angle entre }\overrightarrow{x_0}\text{ et }\overrightarrow{x_1}} \underbrace{\overrightarrow{z_0}}_{\text{Vecteur normal à }\overrightarrow{x_0}\text{ et }\overrightarrow{x_1}}$$

$$\overrightarrow{y_0} \wedge \overrightarrow{x_1} = -\sin(\pi/2-\alpha(t))\,\overrightarrow{z_0} = -\cos\alpha(t)\overrightarrow{z_0}$$

Exemple

On donne un paramétrage partiel (voir chapitre 3) du micro moteur.



Calculer les produits vectoriels suivants :

- $\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{y_0}$;
- $\overrightarrow{y_0} \wedge \overrightarrow{y_1}$;
- $\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_0}$;
- $\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{y_2}$;
- $\overrightarrow{y_2} \wedge \overrightarrow{y_1}$;
- $\overrightarrow{y_3} \wedge \overrightarrow{y_1}$.

4.4 Double produit vectoriel

Attention

Le produit vectoriel n'est pas associatif.

Par exemple, si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormée directe de l'espace, alors :

$$\overrightarrow{i} \wedge \left(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j} \quad \text{alors que} \quad \left(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i}\right) \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{0} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}.$$

Il n'est donc pas licite d'écrire sans parenthèse « $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$ ».

Proposition

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.

Alors $\overrightarrow{u} \wedge \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}\right)\overrightarrow{v} - \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)\overrightarrow{w}$.

5 Produit mixte

Dans cette partie, on suppose que l'espace $\mathscr{E}$ est orienté.

5.1 Produit mixte de trois vecteurs

Définition

Déterminant de trois vecteurs

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.

On appelle produit mixte de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ (ou déterminant) le nombre réel défini par :

$$\operatorname{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right) \cdot \overrightarrow{w}$$

Remarque

1. Si l'un au moins des trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ est nul, alors $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$.
2. Si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormée directe, alors $\operatorname{Det}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}) = \overrightarrow{k}.\overrightarrow{k} = 1$, tandis que si elle est rétrograde, $\operatorname{Det}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}) = (-\overrightarrow{k}).\overrightarrow{k} = -1$.

Proposition

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs non nuls de l'espace.

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$.

Remarque

1. En particulier, pour tout couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs de l'espace, $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ (et aussi $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = 0$ et $\operatorname{Det}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0$).

   En outre, dès que deux des trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires, $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = 0$.
2. La propriété ci-dessus permet de caractériser les bases de l'espace : étant donnés trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace si et seulement si $\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) \neq 0$, et, plus précisément :
   - $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base directe si et seulement si $\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) > 0$;
   - $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base indirecte si et seulement si $\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) < 0$.

Remarque

Interprétation en termes de volume

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace. $|\text{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}|$ est le volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

5.2 Le déterminant est une forme trilinéaire anti-symétrique

Proposition

Pour tout triplet $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ de vecteurs de l'espace, on a : $\text{Det}(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}) = -\text{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$, $\text{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}) = -\text{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$, $\text{Det}(\overrightarrow{w},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}) = -\text{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$.

Autrement dit, le déterminant change de signe quand on échange deux vecteurs.

Remarque

On dit que le déterminant est une application *anti-symétrique*.

Corollaire

Pour tout triplet $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ de vecteurs de l'espace, on a :

$$\text{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \text{Det}(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}) = \text{Det}(\overrightarrow{w},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}).$$

Autrement dit, le produit vectoriel est *invariant par permutation circulaire*.

Références

[1] Pierrick Soleillant, Cours de Mathématiques de CPGE. Rappels de géométrie plane – Géométrie plane élémentaire – Géométrie dans l'espace élémentaire.

[2] Renault, *Au cœur de la technique*, `www.renault.com/fr/Innovation/au-coeur-de-la-technique/Pages/au-coeur-de-la-technique.aspx`.