CI 3 – CIN : Étude du comportement cinématique des systèmes

Chapitre 7 – Le Torseur

Torseur cinématique – Torseur des petits déplacements

Savoir

Savoirs :

– Mod– C11.1 : déplacement des points d'un solide : repère lié à un solide, paramètres géométriques linéaires et angulaires définissant la position d'un solide par rapport à un autre, déplacements et petits déplacements d'un solide, torseur des petits déplacements ;
– Mod– C11.3 : torseur cinématique caractérisant le mouvement d'un solide ;
– Mod–C11–S7 : écrire le torseur cinématique caractérisant le mouvement d'un solide.

Ce document est en évolution permanente. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.

1 Définitions

1.1 Torseurs

Définition

Un torseur est constitué :

– d'un vecteur résultant $\overrightarrow{R}$;
– d'un champ de vecteur $\mathscr{M}$ tel que pour tout couples de points (A, B) on a :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_B} = \overrightarrow{\mathscr{M}_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}$$

Cette relation est appelée relation caractéristique des torseurs ou relation de Varignon.

Réciproquement, tout champ de vecteurs qui vérifie la relation de Varignon pour tout couple de points A et B, le vecteur $\overrightarrow{R}$ étant indépendant du bipoint (A, B), est le champ de vecteurs d'un torseur.

1.2 Expression en un point

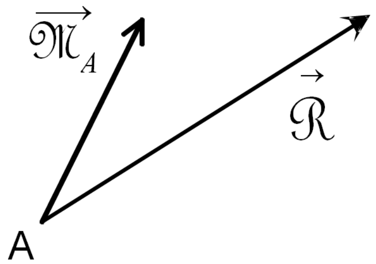
Si le champ de vecteurs est connu en un point, on peut le connaître en tout autre point en utilisant la relation de Varignon. Le torseur sera donc noté :

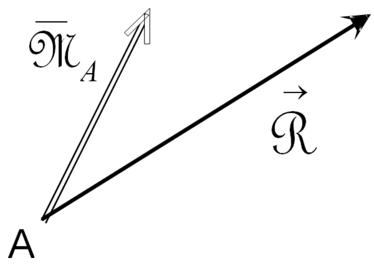
$$\{\mathscr{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}_A} \end{array} \right\} \text{ au point } A, \quad \{\mathscr{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}_B} \end{array} \right\} \text{ au point } B \text{ avec}$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_B} = \overrightarrow{\mathscr{M}_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}$$

On appelle :

- $\overrightarrow{R}$ la résultante du torseur ;
- $\overrightarrow{\mathscr{M}_A}$ le moment au point A du torseur. Ce nom est donné par analogie avec la définition du moment en un point d'un pointeur ;
- $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{\mathscr{M}_A}$ sont les éléments de réduction du torseur. Ce sont deux vecteurs dont on peut faire une représentation graphique au point A :





1.3 Notation des torseurs

Les torseurs sont utilisés en cinématique, statique, dynamique, métrologie, *etc*. Le torseur est exprimé en général par une lettre majuscule significative de ce que l'on étudie. Cette lettre est encadrée d'accolades :

$$\{\mathscr{T}\},\{\mathscr{V}(2/1)\},\{\mathscr{F}(1\rightarrow 2)\},\{\mathscr{U}(1/2)\},\{\mathscr{C}(1/2)\},\{\mathscr{D}(1/2)\}$$

- $\{\mathscr{T}\}$: torseur général ;
- $\{\mathscr{V}(2/1)\}$: torseur cinématique ;
- $\{\mathscr{F}(1\rightarrow 2)\}$: torseur statique ;
- $\{\mathscr{U}(1/2)\}$: torseur des petits déplacements ;
- $\{\mathscr{C}(1/2)\}$: torseur cinétique ;
- $\{\mathscr{D}(1/2)\}$: torseur dynamique.

Pour travailler sur ces torseurs, il est plus commode de le faire avec ses éléments de réduction. Le moment dépend du point d'expression. Il faut donc que la notation précise bien ce point :

$$\{\mathscr{T}\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}_A}\end{array}\right\}\quad\text{ou}\quad\{\mathscr{T}\}=\left\{\overrightarrow{R},\overrightarrow{\mathscr{M}_A}\right\}$$

$$\{\mathscr{T}\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R}\\ 3\overrightarrow{x}+2\overrightarrow{y}\end{array}\right\}_A\quad\text{ou}\quad\{\mathscr{T}\}=\left\{\overrightarrow{R},3\overrightarrow{x}+2\overrightarrow{y}\right\}_A$$

Le point A apparaît à l'intérieur ou à l'extérieur des accolades (par exemple, en indice à gauche ou à droite des accolades).

On peut aussi exprimer des éléments de réduction en projection sur une même base $\mathscr{B}$ et les écrire en colonne en précisant bien la base de projection :

$$\{\mathscr{T}\}=\left\{\begin{array}{cc}-6 & 3\\ a & 2\\ 1 & 0\end{array}\right\}_{A,\mathscr{B}}$$

Les six composantes des éléments de réduction sont appelées les coordonnées pluckériennes du torseur.

1.4 Invariants

Définition

Invariants

On appelle invariants d'un torseur, des quantités qui restent constantes quel que soit le point de calcul.

Définition

Invariant vectoriel

C'est la résultante du torseur.

Définition

Invariant scalaire

$$I = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}_A}$$

Démonstration

Exprimons $\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}_B}$, en utilisant le moment au point A pour prouver que I est bien invariant.

$$\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}_B} = \overrightarrow{R} \cdot \left[\overrightarrow{\mathcal{M}_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}\right] = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}_A} + \underbrace{\overrightarrow{R} \cdot \left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}\right)}_{\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}_A} = I$$

1.5 Axe central

Définition

Un point K de l'espace est central pour le torseur $\{T\}$ si la résultante est colinéaire au moment en ce point :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_K} = k\,\overrightarrow{R}$$

avec k est appelé pas du torseur.

On démontre que l'ensemble des points centraux pour le torseur considéré est une droite appelée axe central.

L'axe central est parallèle à $\overrightarrow{R}$.

1.6 Moment central

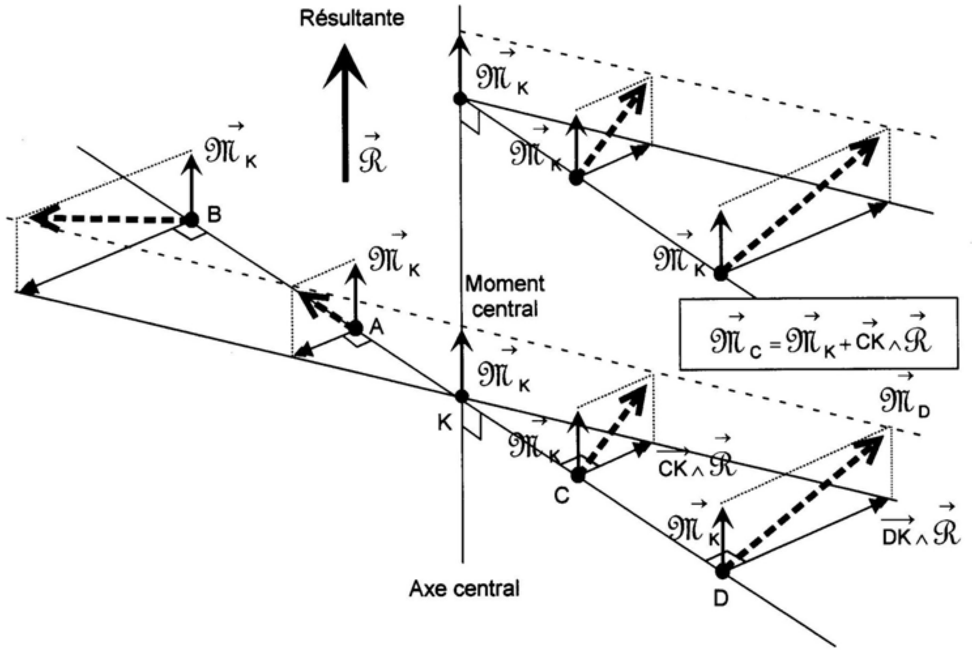
Définition

Le moment central $\overrightarrow{\mathcal{M}_K}$ est la valeur du moment d'un torseur en un point central K.

Propriétés

1. Le moment central est invariant pour deux points de l'axe central.
2. La norme du moment central est la norme minimale des moments.

1.7 Représentation spatiale d'un torseur



1.8 Équiprojectivité du champ de vecteurs d'un torseur

Pour un torseur on a $\overrightarrow{\mathscr{M}_B} = \overrightarrow{\mathscr{M}_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}$. Multiplions cette expression par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathscr{M}_B} \cdot \overrightarrow{AB} &= \left(\overrightarrow{\mathscr{M}_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathscr{M}_A} \cdot \overrightarrow{AB} + \underbrace{\left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}\right) \cdot \overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{0}} \\
&= \overrightarrow{\mathscr{M}_A} \cdot \overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

Ceci est la relation donnée lors du cours sur le calcul vectoriel pour un champ équiprojectif.

2 Torseurs particuliers

2.1 Couple

Définition

Torseur couple

Un torseur possédant une résultante nulle est appelé couple.

$$\{\mathscr{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}_A} \end{array} \right\}_A$$

Propriété

Le moment d'un torseur couple est inchangé lorsqu'on l'exprime en un autre point. On peut donc le noter plus simplement : $\{\mathscr{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}} \end{array} \right\}$. (Dans ce cas, la notation du point n'est pas indispensable.)

Démonstration

En appliquant la relation caractéristique des torseurs on trouve :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_B} = \overrightarrow{\mathscr{M}_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R} = \overrightarrow{\mathscr{M}_A} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{\mathscr{M}_A}$$

2.2 Glisseur

Définition

Glisseur

Un glisseur est un torseur qui a sa résultante non nulle et son invariant scalaire nul.

Propriété

L'invariant scalaire nul entraîne : $I = \overrightarrow{\mathscr{M}_K} \cdot \overrightarrow{R} = 0$.

Démonstration

Montrons que le moment central est nul :

Si K est un point central $\overrightarrow{\mathscr{M}_K} = k\,\overrightarrow{R}$. En conséquence, $I = k\,\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{R} = 0$ et donc $k = 0$. $\overrightarrow{\mathscr{M}_K}$ est donc égal au vecteur nul.

En un point central, un glisseur peut donc se mettre sous la forme :

$$\{\mathscr{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_K$$

On trouve donc un point central d'un glisseur en cherchant un point où le moment est nul.

En d'autres points que les points centraux le glisseur prend une forme normale.

$$\{\mathscr{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}_B} \end{array} \right\}_B$$

Pour un torseur écrit sous cette forme, seul le calcul de l'invariant scalaire permet de savoir s'il s'agit d'un glisseur ou non.

2.3 Torseur nul

Définition

Les éléments de réduction d'un torseur nul sont nuls en tout point :

$$\{0\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

3 Opérations sur les torseurs

3.1 Égalité

Deux torseurs $\{\mathscr{T}_1\}$ et $\{\mathscr{T}_2\}$ sont égaux si :

- leurs résultantes sont égales ;
- il existe un point A tel que les moments en ce point soient égaux. En conséquence, les moments sont égaux en tout autre point de l'espace.

On note :

$$\{\mathscr{T}_1\} = \{\mathscr{T}_2\}$$

3.2 Addition

Considérons deux torseurs définis au même point A : $\{\mathscr{T}_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}_{1,A}} \end{array} \right\}_A$ et $\{\mathscr{T}_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}_{2,A}} \end{array} \right\}_A$.

La somme de ces deux torseurs notée $\{\mathscr{T}\} = \{\mathscr{T}_1\} + \{\mathscr{T}_2\}$ est telle que :

- $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2}$;
- $\overrightarrow{\mathscr{M}_A} = \overrightarrow{\mathscr{M}_{1,A}} + \overrightarrow{\mathscr{M}_{2,A}}$.

3.3 Multiplication par un scalaire

Définition

On définit le produit d'un scalaire k par un torseur $\{\mathscr{T}\}$ comme suit :

$$\{\mathscr{T}_1\} = k\,\{\mathscr{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} k\,\overrightarrow{R} \\ k\,\overrightarrow{\mathscr{M}} \end{array} \right\}$$

3.4 Comoment de deux torseurs

Définition

Considérons deux torseurs définis au même point A :

$$\{\mathscr{T}_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}_{1,A}} \end{array} \right\}_A \quad \text{et} \quad \{\mathscr{T}_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}_{2,A}} \end{array} \right\}_A$$

Le comoment de ces deux torseurs est noté $c = \{\mathscr{T}_1\} \cdot \{\mathscr{T}_2\}$.

$$c = \{\mathscr{T}_1\} \cdot \{\mathscr{T}_2\} = \overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}_{2,A}} + \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}_{1,A}}$$

Définition

.

Le comoment de deux torseurs est un scalaire.

Propriété

Le comoment ne dépend pas du point de calcul.

Démonstration

Calculons le comoment de ce même torseur en utilisant les éléments de réduction en un autre point B et introduisons ensuite le point A dans son expression.

$$\begin{aligned}
c=\{\mathscr{T}_1\}\cdot\{\mathscr{T}_2\} &= \overrightarrow{R_1}\cdot\overrightarrow{\mathscr{M}_{2,A}}+\overrightarrow{R_2}\cdot\overrightarrow{\mathscr{M}_{1,A}}\\
&= \overrightarrow{R_1}\cdot\left(\overrightarrow{\mathscr{M}_{2,B}}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_2}\right)+\overrightarrow{R_2}\cdot\left(\overrightarrow{\mathscr{M}_{1,B}}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_1}\right)\\
&= \overrightarrow{R_1}\cdot\overrightarrow{\mathscr{M}_{2,B}}+\overrightarrow{R_1}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_2}\right)+\overrightarrow{R_2}\cdot\overrightarrow{\mathscr{M}_{1,B}}+\overrightarrow{R_2}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_1}\right)\\
&= \overrightarrow{R_1}\cdot\overrightarrow{\mathscr{M}_{2,B}}+\overrightarrow{R_1}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_2}\right)+\overrightarrow{R_2}\cdot\overrightarrow{\mathscr{M}_{1,B}}-\overrightarrow{R_1}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_2}\right)\\
&= \overrightarrow{R_1}\cdot\overrightarrow{\mathscr{M}_{2,B}}+\overrightarrow{R_2}\cdot\overrightarrow{\mathscr{M}_{1,B}}
\end{aligned}$$

4 Torseur cinématique

4.1 Définition

Soient S_1 et S_2 deux solides en mouvement l'un par rapport à l'autre dans un repère $\mathscr{R}_0$. On peut donc définir $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}$. Par ailleurs, En un point P de $\mathscr{R}_0$, on peut donc définir $\overrightarrow{V(P\in S_2/S_1)}$.

On a vu que $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}$ est un vecteur invariant (car il ne dépend pas d'un point).

Par ailleurs, pour tout couple de points A et B, on a

$$\overrightarrow{V(B\in S_2/S_1)}=\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}+\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}$$

Définition

Torseur cinématique

On note $\{\mathscr{B}(S_2/S_1)\}$ le torseur cinématique caractérisant le mouvement entre S_2 et S_1 et on a :

$$\{\mathscr{V}(S_2/S_1)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}\\ \overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}\end{array}\right\}_A$$

- $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}$ est la résultante du torseur cinématique.
- $\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}$ est le moment au point A du torseur cinématique.

4.2 Torseurs cinématiques des liaisons usuelles

Partant de la définition du torseur cinématique et de la connaissance du comportement cinématique des liaisons, il est aisé d'écrire le torseur associé à chacune des liaisons.

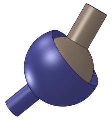
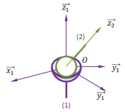
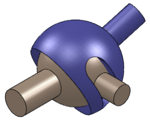
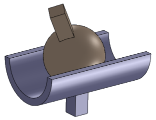
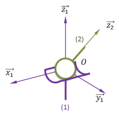
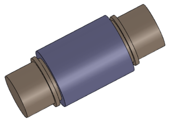
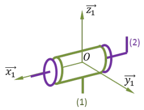
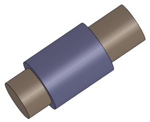
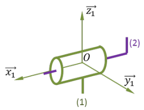
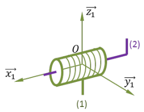
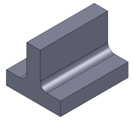
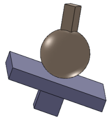
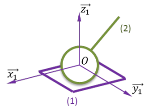
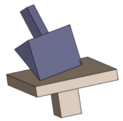
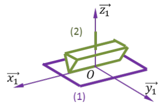
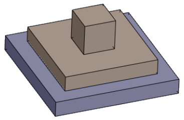
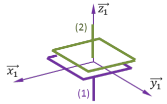
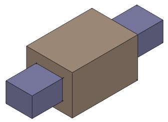
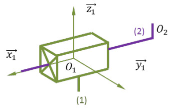
	Schéma spatial	Torseur cinématique
		$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}_{-}$
		$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}_{-}$
		$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}_{-}$
		$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}_{-}$
		$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}_{-}$
Liaison glissière hélicoïdale		$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}_{-}$

	Schéma 3d	Torseur cinématique
		$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}_{-}$
		$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}_{-}$
		$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}_{-}$
		$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}_{-}$
		$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}_{-}$

4.3 Composition du torseur cinématique

Résultat

Composition du torseur cinématique

Le vecteur vitesse et le vecteur instantané pouvant être décomposés, on a donc :

$$\{\mathscr{V}(S_n/S_0)\} = \{\mathscr{V}(S_n/S_{n-1})\} + \ldots + \{\mathscr{V}(S_1/S_0)\}$$

Ou encore :

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S_n/S_0)} \\ \overrightarrow{V(A \in S_n/S_0)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S_n/S_{n-1})} \\ \overrightarrow{V(A \in S_n/S_{n-1})} \end{array} \right\}_A + \ldots + \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} \\ \overrightarrow{V(A \in S_1/S_0)} \end{array} \right\}_A$$

5 Torseur des petits déplacements

5.1 Définition

Le torseur cinématique est un outil permettant de modéliser les « grands déplacements » entre deux solides. Cependant, dans une liaison cinématique, peuvent exister de petits déplacements comme les jeux.

Les petits déplacements sont notés ainsi :
- δu_x petit déplacement en translation suivant l'axe $\overrightarrow{x}$;
- δu_y petit déplacement en translation suivant l'axe $\overrightarrow{y}$;
- δu_z petit déplacement en translation suivant l'axe $\overrightarrow{z}$;
- $\delta \theta_x$ petit déplacement en rotation autour de l'axe $\overrightarrow{x}$;
- $\delta \theta_y$ petit déplacement en rotation autour de l'axe $\overrightarrow{y}$;
- $\delta \theta_z$ petit déplacement en rotation autour de l'axe $\overrightarrow{z}$.

Définition

Torseur des petits déplacements

On note $\{\mathscr{U}(S_2/S_1)\}$ le torseurs des petits déplacements existants entre deux solides S_2 et S_1. On a :

$$\{\mathscr{U}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \delta\theta_x \overrightarrow{x} + \delta\theta_y \overrightarrow{y} + \delta\theta_z \overrightarrow{z} \\ \delta u_x \overrightarrow{x} + \delta u_y \overrightarrow{y} + \delta u_z \overrightarrow{z} \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{cc} \delta\theta_x & \delta u_x \\ \delta\theta_y & \delta u_y \\ \delta\theta_z & \delta u_z \end{array} \right\}_{P,\mathscr{R}}$$

5.2 Torseurs des petits déplacements des liaisons usuelles

Partant de la définition du torseur des petits déplacements et de la connaissance du comportement cinématique des liaisons, il est aisé d'écrire le torseur associé à chacune des liaisons.

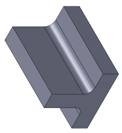
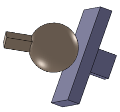
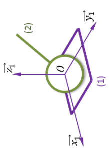
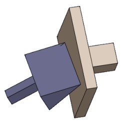
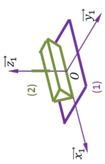
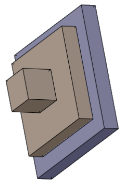
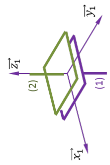
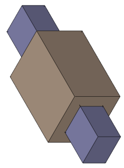
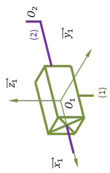
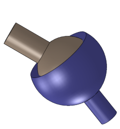
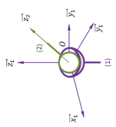
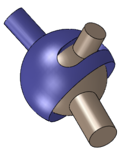
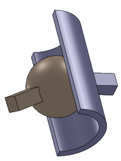
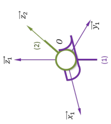
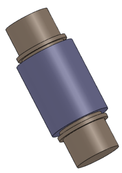
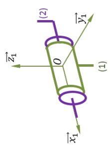
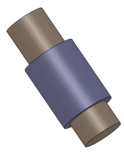
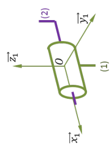
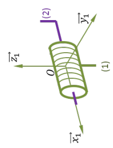
	Schéma 3d	Torseur petits dep.
		$\{\mathcal{U}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}$
		$\{\mathcal{U}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}$
		$\{\mathcal{U}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}$
		$\{\mathcal{U}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}$
		$\{\mathcal{U}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}$

	Schéma 3d	Torseur petits dép.
		$\{\mathcal{U}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}$
		$\{\mathcal{U}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}$
		$\{\mathcal{U}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}$
		$\{\mathcal{U}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}$
		$\{\mathcal{U}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}$
Liaison glissière hélicoïdale		$\{\mathcal{U}(S_2/S_1)\} = \left\{ \quad \right\}$

Références

[1] Jean-Pierre Pupier, Les Torseurs, Cours de mécanique, lycée Rouvière.