CI 3 – CIN : ÉTUDE DU COMPORTEMENT CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES

CHAPITRE 5 – CINÉMATIQUE DU SOLIDE INDÉFORMABLE

Savoir

Savoirs :

–

Ce document est en évolution permanente. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.

1 Avant propos

1.1 Notion de solide indéformable

1.2 Notion de point appartenant à un solide

2 Trajectoire d'un point appartenant à un solide

3 Vitesse d'un point appartenant à un solide

3.1 Définition du vecteur vitesse

Définition

Vitesse d'un point appartenant à un solide

Soit un solide S_0 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_0$ $\left(O_0, \overrightarrow{i_0}; \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0}\right)$. Soit un solide S_1 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1$, $\left(O_1, \overrightarrow{i_1}; \overrightarrow{j_1}; \overrightarrow{k_1}\right)$. Le solide S_1 est en mouvement par rapport au solide S_0.

Soit un point P appartenant au solide S_1. La vitesse du point P appartenant au solide S_1 par rapport au solide S_0 se calcule donc ainsi :

$$\overrightarrow{V(P\in S_1/S_0)}(t) = \left[\frac{d\overrightarrow{OP(t)}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

Définition

Attention

– Attention à respecter rigoureusement la notation.
– La vitesse dépend du point d'application.

Remarque

Lorsqu'un point est confondu pour deux solides (centre d'une liaison pivot ou d'une liaison rotule par exemple) les vitesses sont égales ainsi, ici :

$$\overrightarrow{V(0_2 \in S_1/S_0)}(t) = \overrightarrow{V(0_2 \in S_2/S_0)}(t)$$

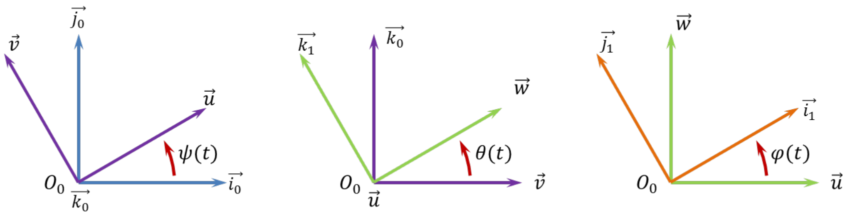
Remarque

Dérivée d'un vecteur

Exemple

3.2 Vecteur instantané de rotation

Soit un avion S_1 repéré par le repère $\mathcal{R}_1\left(O_1, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$ en mouvement libre par rapport à un repère $\mathcal{R}_0\left(O_0, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0}\right)$. La position de l'avion dans l'espace est repéré par le vecteur $\overrightarrow{O_0O_1} = x(t)\overrightarrow{i_0} + y(t)\overrightarrow{j_0} + z(t)\overrightarrow{j_0}$ ainsi que par les angles d'Euler.



Calculons la vitesse du point O_1 par rapport à $\mathcal{R}_0$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} &= \left[\frac{d\overrightarrow{O_0O_1}(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} \\
&= \left[\frac{d\left(x(t)\overrightarrow{i_0} + y(t)\overrightarrow{j_0} + z(t)\overrightarrow{j_0}\right)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\left(x(t)\overrightarrow{i_0}\right)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{d\left(y(t)\overrightarrow{j_0}\right)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{d\left(z(t)\overrightarrow{k_0}\right)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} \\
&= x(t)\underbrace{\left[\frac{d\,\overrightarrow{i_0}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{0}} + \left[\frac{dx(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}\overrightarrow{i_0} + y(t)\underbrace{\left[\frac{d\,\overrightarrow{j_0}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{0}} + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}\overrightarrow{j_0} + z(t)\underbrace{\left[\frac{d\,\overrightarrow{k_0}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{0}} + \left[\frac{dz(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}\overrightarrow{k_0} \\
&= \dot{x(t)}\overrightarrow{i_0} + \dot{y(t)}\overrightarrow{j_0} + \dot{z(t)}\overrightarrow{k_0}
\end{aligned}$$

Soit P un point appartenant à l'avion tel que $\overrightarrow{O_1P} = a\,\overrightarrow{i_1} + b\,\overrightarrow{j_1} + c\,\overrightarrow{k_1}$. Calculons la vitesse du point P par rapport à $\mathcal{R}_0$:

$$\overrightarrow{V(P\in S_1/S_0)} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{O_0P}(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\dfrac{d\left(\overrightarrow{O_0O_1}+\overrightarrow{O_1P}\right)(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} = \underbrace{\left[\dfrac{d\overrightarrow{O_0O_1}(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{V(O_1\in S_1/S_0)}} + \left[\dfrac{d\overrightarrow{O_1P}(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

Calculons donc $\left[\dfrac{d\overrightarrow{O_1P}(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}$:

$$\begin{aligned}
\left[\dfrac{d\overrightarrow{O_1P}(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} &= \left[\dfrac{d\left(a\,\overrightarrow{i_1}+b\,\overrightarrow{j_1}+c\,\overrightarrow{j_1}\right)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}\\
&= a\left[\dfrac{d\,\overrightarrow{i_1}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} + \underbrace{\left[\dfrac{da}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{0}}\overrightarrow{i_1} + b\left[\dfrac{d\,\overrightarrow{j_1}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} + \underbrace{\left[\dfrac{db}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{0}}\overrightarrow{j_1} + c\left[\dfrac{d\,\overrightarrow{k_1}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} + \underbrace{\left[\dfrac{dc}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{0}}\overrightarrow{k_1}\\
&= a\left[\dfrac{d\,\overrightarrow{i_1}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} + b\left[\dfrac{d\,\overrightarrow{j_1}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} + c\left[\dfrac{d\,\overrightarrow{k_1}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}
\end{aligned}$$

Pour dériver les vecteurs $\overrightarrow{i_1}$, $\overrightarrow{j_1}$ et $\overrightarrow{k_1}$ dans la base $\mathcal{R}_0$ il faut les exprimer dans $\mathcal{R}_0$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{i_1} &= \cos\varphi(t)\overrightarrow{u} + \sin\varphi(t)\overrightarrow{w}\\
&= \cos\varphi(t)\left(\cos\psi(t)\overrightarrow{i_0} + \sin\psi(t)\overrightarrow{j_0}\right) + \sin\varphi(t)\left(\cos\theta(t)\overrightarrow{v} + \sin\theta(t)\overrightarrow{k_0}\right)\\
&= \cos\varphi(t)\left(\cos\psi(t)\overrightarrow{i_0} + \sin\psi(t)\overrightarrow{j_0}\right) + \sin\varphi(t)\left(\cos\theta(t)\left(\cos\psi(t)\overrightarrow{j_0} - \sin\psi(t)\overrightarrow{i_0}\right) + \sin\theta(t)\overrightarrow{k_0}\right)\\
&= \left(\cos\varphi(t)\cos\psi(t) - \sin\varphi(t)\cos\theta(t)\sin\psi(t)\right)\overrightarrow{i_0} + \left(\cos\varphi(t)\sin\psi(t) + \sin\varphi(t)\cos\theta(t)\cos\psi(t)\right)\overrightarrow{j_0} + \sin\varphi(t)\sin\theta(t)\overrightarrow{k_0}\\
\overrightarrow{j_1} &=\\
\overrightarrow{k_1} &=
\end{aligned}$$

3.3 Champ des vecteurs vitesses des points d'un solide

4 Accélération d'un point appartenant à un solide

Références