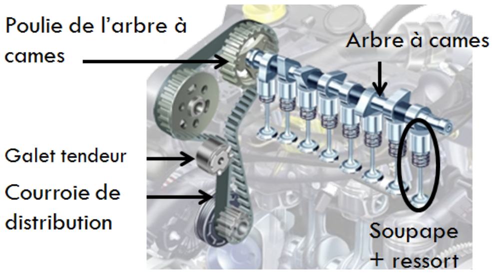
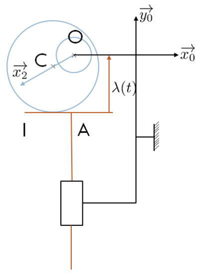
CI 2 – Cinématique : Modélisation, prévision et vérification du comportement cinématiques des systèmes

Chapitre 4 – Cinématique du point dans un mécanisme en mouvement



Modèle CAO d'un arbre à came



Modélisation par schéma cinématique

Dans de nombreux mécanismes, la liaison entre deux solides est modélisée par un contact ponctuel. Cependant, l'écriture du torseur cinématique correspondant au mouvement entre les deux solides n'est pas toujours évidente.

Intéressons nous par exemple au cas d'un système de distribution présent sur les véhicules équipés de moteurs thermiques. Ce système permet l'admission du mélange air+carburant dans la chambre de combustion et l'échappement des gaz brulés par l'intermédiaire de **soupapes**. Ces soupapes ont un mouvement de translation. L'ouverture et la fermeture des soupapes est réglée par l'intermédiaire de **cames** et d'un **arbre à cames**. La rotation de l'arbre à came est effectuée grâce à un entraînement par une courroie directement reliée au **vilebrequin** du moteur.

Problématique

Problématique :
– Comment calculer les éléments du torseur cinématique dans une liaison de type sphère – plan.

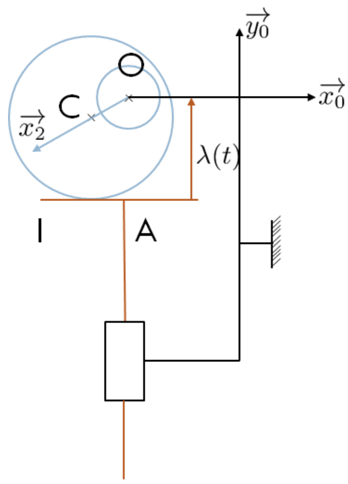
Savoir

Savoirs :
– Connaître les principes de la cinématique des contacts (adhérence ou glissement, roulement et pivotement)

Ce document est en évolution permanente. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.

1 Présentation – Système de distribution

Intéressons nous à la modélisation d'une soupape, notée S_1 en liaison glissière d'axe $(A, \overrightarrow{y_0})$ avec le moteur S_0. La came S_2 est en liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$ avec S_0. S_1 et S_2 sont en contact ponctuel de normale $(I, \overrightarrow{y_0})$.



L'objectif de ce cours est de calculer en I le torseur cinématique suivant :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} \\ \overrightarrow{V(I,S_2/S_1)} \end{array} \right\}_I$$

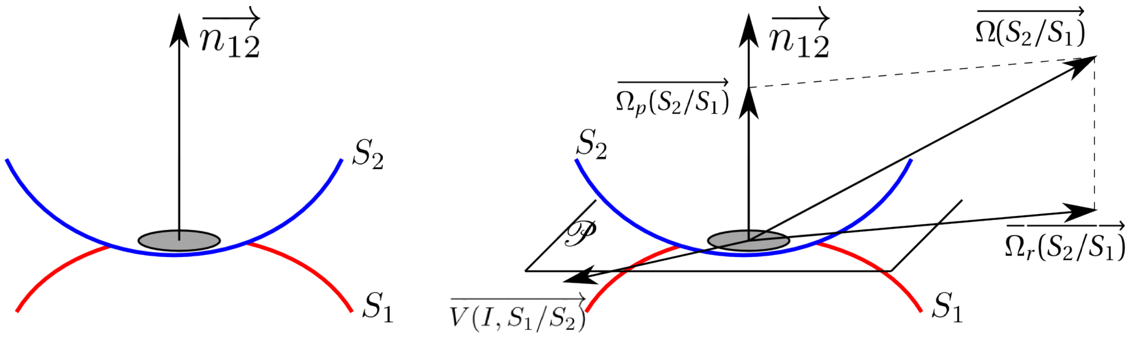
2 Modélisation des vitesses de glissement

2.1 Hypothèses

Considérons deux solides S_1 et S_2 en contact ponctuel.

Définissons alors I le point de contact entre les deux solides et $\overrightarrow{n_{12}}$ la normale de contact. On appelle $\mathcal{P}$ le plan normal à $\overrightarrow{n_{12}}$ en I. Il est tangent à S_1 et S_2.

On note $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} \\ V(I,S_2/S_1) \end{array} \right\}_I$ le torseur cinématique du mouvement relatif de S_2 par rapport à S_1 au point I.



2.2 Vitesses de rotation

On a vu que dans le cas d'un contact ponctuel il existait 3 degrés de libertés de rotation paramétrables par les angles d'Euler. Nous ne cherchons pas ici à calculer directement le vecteur $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}$ en fonction de ces angles.

Cependant, ce vecteur est décomposable en une somme de deux vecteurs.

Le vecteur de pivotement

Ce vecteur est normal au plan $\mathscr{P}$. On le note $\overrightarrow{\Omega_p(S_2/S_1)}$.

Le vecteur de roulement

Ce vecteur est contenu dans le plan $\mathscr{P}$. On le note $\overrightarrow{\Omega_r(S_2/S_1)}$.

Résultat

Vitesse de rotation

La vitesse de rotation se compose donc ainsi :

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \overrightarrow{\Omega_p(S_2/S_1)} + \overrightarrow{\Omega_r(S_2/S_1)}$$

2.3 Vitesse de glissement

2.3.1 Position du point de contact entre solides

Cinématiquement, le point I n'est pas unique. En effet, on peut distinguer l'existence de 3 points différents :
- le point I matériel appartenant au solide S_1 ;
- le point I matériel appartenant au solide S_2 ;
- le point I (non matériel) correspondant au point de contact entre les deux solides.

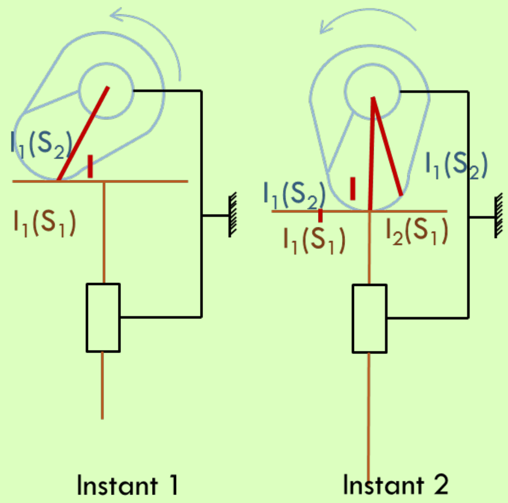
À l'instant t, ces points peuvent être confondus. À $t + dt$ ils peuvent être distincts.

En conséquence :

Résultat

$$\overrightarrow{V(I,S_2/S_0)} \neq \overrightarrow{V(I,S_1/S_0)}$$

Exemple



2.3.2 Définition de la vitesse de glissement

On appelle vecteur vitesse de glissement en I de S_2/S_1 le vecteur $\overrightarrow{V(I,S_2/S_1)}$.

Remarque

On considère qu'il y a toujours contact entre S_1 et S_2 et que les solides sont indéformables. En conséquence :

$$\overrightarrow{V(I,S_2/S_1)} \in \mathscr{P}$$

2.3.3 Condition de roulement sans glissement

Définition

Condition de roulement sans glissement

Dans de très nombreux mécanismes (dans les engrenages, lors du contact entre la roue et le sol *etc*) on peut faire l'hypothèse que le glissement est nul. On a alors :

$$\overrightarrow{V(I,S_2/S_1)} = \overrightarrow{0}$$

Il est alors possible d'identifier des lois de comportement.

2.4 Méthode de calcul de la vitesse de glissement

Le calcul de la vitesse de glissement peut se calculer à l'aide de la procédure suivante.

Méthode

1. Paramétrer le système
2. Décomposer le mouvement : $\overrightarrow{V(I,S_1/S_2)} = \overrightarrow{V(I,S_1/S_0)} + \overrightarrow{V(I,S_0/S_2)}$
3. Calculer $\{\mathscr{V}(S_1/S_0)\}$ au point I
4. Calculer $\{\mathscr{V}(S_2/S_0)\}$ au point I
5. Calculer $\overrightarrow{V(I,S_1/S_2)}$

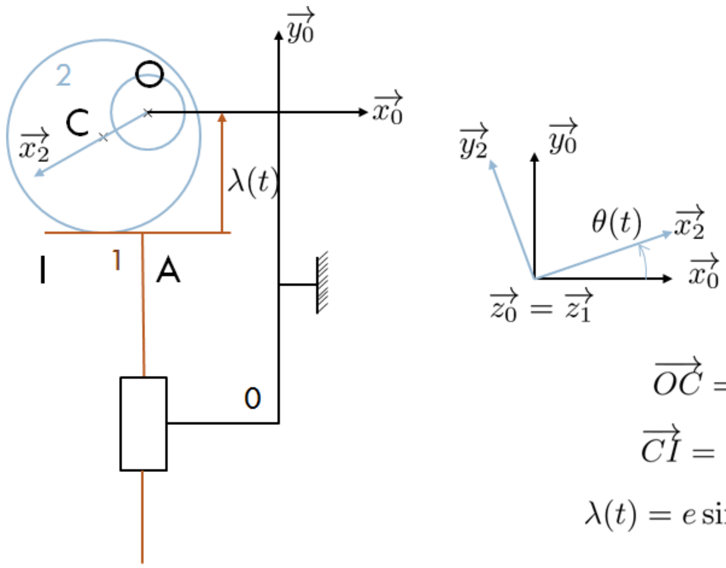
Attention

I **n'est pas un point matériel. Il n'appartient ni à** S_1 **ni à** S_2**. On ne peut donc pas calculer** $\left[\dfrac{\overrightarrow{OI}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}$.

3 Application – Calcul de la vitesse de glissement entre la came et la soupape

Pour le système de distribution composé d'une came, d'une soupape et du moteur, on se propose de calculer la vitesse de glissement entre la soupape et la came.

Paramétrage



$$\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_0}$$

$$\overrightarrow{OC} = e\overrightarrow{x_2}$$

$$\overrightarrow{CI} = -R\overrightarrow{y_0}$$

$$\lambda(t) = e\sin\theta(t) + R$$

Décomposition en mouvements simples

D'après la composition des mouvements, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{V(I,S_2/S_1)} = \overrightarrow{V(I,S_1/S_0)} + \overrightarrow{V(I,S_0/S_2)}}$$

Calcul de $\{\mathscr{V}(S_1/S_0)\}$

Nature du mouvement entre S_1 et S_0 : liaison glissière d'axe $(A, \overrightarrow{y_0})$. On a donc :

$$\{\mathscr{V}(S_1/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(A,S_1/S_0)} = \dfrac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \end{array} \right\}_A$$

Calculons $\overrightarrow{V(A,S_1/S_0)}$:

$$\overrightarrow{V(A,S_1/S_0)} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \frac{d\lambda(t)\overrightarrow{y_0}}{dt} = e\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\overrightarrow{y_0}$$

Calculons alors $\overrightarrow{V(I,S_1/S_0)}$:

$$\overrightarrow{V(I,S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(A,S_1/S_0)} + \underbrace{\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}}_{\overrightarrow{0}}$$

D'où :

$$\boxed{\{\mathscr{V}(S_1/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V(I,S_1/S_0)} = e\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_I}$$

Calcul de $\{\mathscr{V}(S_2/S_0)\}$

Nature du mouvement entre S_2 et S_0 : liaison pivot d'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$. On a donc :

$$\{\mathscr{V}(S_2/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(A,S_2/S_0)} = \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O$$

Calculons $\overrightarrow{V(I,S_2/S_0)}$:

$$\overrightarrow{V(I,S_2/S_0)} = \underbrace{\overrightarrow{V(O,S_2/S_0)}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{IO} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} = \left(R\overrightarrow{y_0} - e\overrightarrow{x_2}\right) \wedge \dot{\theta}\,\overrightarrow{z_0}$$

$$\overrightarrow{V(I,S_2/S_0)} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{x_0} + e\dot{\theta}\,\overrightarrow{y_2}$$

D'où :

$$\boxed{\{\mathscr{V}(S_2/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V(I,S_2/S_0)} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{x_0} + e\dot{\theta}\,\overrightarrow{y_2} \end{array} \right\}_I}$$

Calcul de $\overrightarrow{V(I,S_2/S_1)}$

On a :

$$\overrightarrow{V(I,S_2/S_1)} = \overrightarrow{V(I,S_1/S_0)} + \overrightarrow{V(I,S_0/S_2)}$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{V(I,S_2/S_1)} = \overrightarrow{V(I,S_1/S_0)} - \overrightarrow{V(I,S_2/S_0)}$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{V(I,S_2/S_1)} = e\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\overrightarrow{y_0} - \left(R\dot{\theta}\,\overrightarrow{x_0} + e\dot{\theta}\,\overrightarrow{y_2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{V(I,S_2/S_1)} = e\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\overrightarrow{y_0} - R\dot{\theta}\,\overrightarrow{x_0} - e\dot{\theta}\left(\cos\theta(t)\overrightarrow{y_0} - \sin\theta(t)\overrightarrow{x_0}\right)$$

Au final :

$$\boxed{\overrightarrow{V(I,S_2/S_1)} = \dot{\theta}\left(e\sin\theta(t) - R\right)\overrightarrow{x_0}}$$