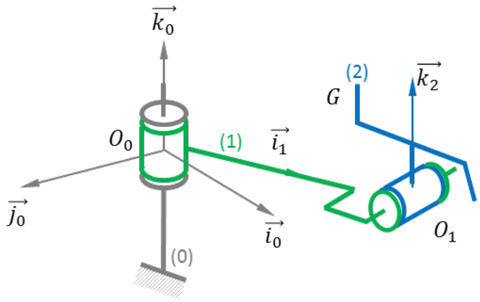
CI 3 – CIN : Étude du comportement cinématique des systèmes

Chapitre 5 – Cinématique du solide indéformable

Centrifugeuse humaine développée par le CNRS / MEDES [?]



Modélisation cinématique

Savoir

Savoirs :

–

Ce document est en évolution permanente. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.

1 Avant propos

1.1 Notion de solide indéformable

1.2 Notion de point appartenant à un solide

2 Trajectoire d'un point appartenant à un solide

Définition

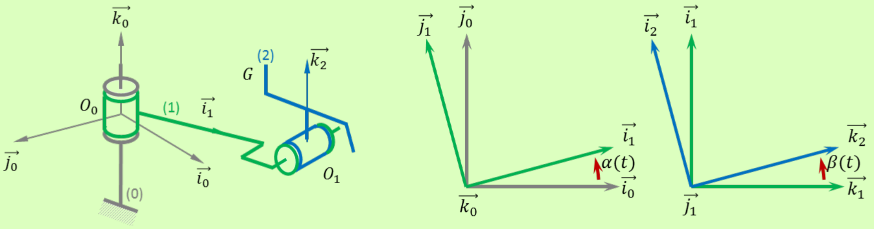
Trajectoire d'un point dans l'espace

Soit un point P se déplaçant dans un repère $\mathcal{R}_0$. La trajectoire du point P est définie par la courbe $\mathcal{C}(t)$ paramétrée par le temps t. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \overrightarrow{OM(t)} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = x(t)\overrightarrow{x_0} + y(t)\overrightarrow{y_0} + z(t)\overrightarrow{z_0}$$

Centrifugeuse

Le paramétrage de la centrifugeuse est donnée ci dessous :



Les paramètres constants du système sont les suivants :
- $\overrightarrow{O_0O_1} = a\,\overrightarrow{i_1}$
- $\overrightarrow{O_1G} = b\,\overrightarrow{i_2} + c\,\overrightarrow{k_2}$

La trajectoire du point G dans le repère $\mathcal{R}_0$ est donnée par le vecteur

$$\overrightarrow{O_0G}(t) = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1G} = a\,\overrightarrow{i_1} + b\,\overrightarrow{i_2} + c\,\overrightarrow{k_2}$$

Il faut alors projeter les vecteurs dans $\mathcal{R}_0$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O_0G}(t) &= a\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right) + b\left(\cos\beta(t)\overrightarrow{i_1} - \sin\beta(t)\overrightarrow{k_1}\right)\\
&= a\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right) + b\left(\cos\beta(t)\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right) - \sin\beta(t)\overrightarrow{k_0}\right)\\
&= \begin{bmatrix} a\cos\alpha(t) + b\cos\beta(t)\cos\alpha(t) \\ a\sin\alpha(t) + b\cos\beta(t)\sin\alpha(t) \\ -\sin\beta(t) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0}
\end{aligned}$$

On a ainsi l'équation paramétrique de la position du point G.

Exemple

3 Vitesse d'un point appartenant à un solide

3.1 Le vecteur vitesse

3.1.1 Définition

Vitesse d'un point appartenant à un solide

Soit un solide S_0 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_0$ $\left(O_0, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0}\right)$. Soit un solide S_1 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1$, $\left(O_1, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$. Le solide S_1 est en mouvement par rapport au solide S_0.

Soit un point P appartenant au solide S_1. La vitesse du point P appartenant au solide S_1 par rapport au solide S_0 se calcule donc ainsi :

$$\overrightarrow{V(P\in S_1/S_0)}(t) = \left[\frac{d\,\overrightarrow{O_0P(t)}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

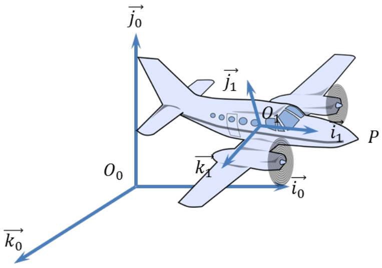
Définition

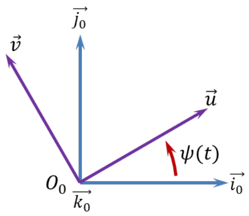
Attention

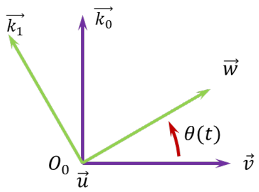
- Attention à respecter rigoureusement la notation.
- La vitesse dépend du point d'application.
- Attention, « dériver un vecteur par rapport à une base » est différent de « exprimer un vecteur dans une base».

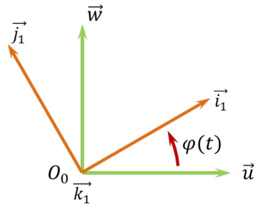
3.1.2 Calcul du vecteur vitesse – Application directe

Soit un avion S_1 repéré par le repère $\mathcal{R}_1\left(O_1, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$ en mouvement libre par rapport à un repère $\mathcal{R}_0\left(O_0, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0}\right)$. La position de l'avion dans l'espace est repéré par le vecteur $\overrightarrow{O_0O_1} = x(t)\overrightarrow{i_0} + y(t)\overrightarrow{j_0} + z(t)\overrightarrow{j_0}$ ainsi que par les angles d'Euler.









Calculons la vitesse du point O_1 par rapport à $\mathcal{R}_0$:

$$\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0O_1}(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

Remarque

Pour dériver le vecteur $\overrightarrow{O_0O_1}(t)$ par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ une méthode consiste en exprimer le vecteur $\overrightarrow{O_0O_1}(t)$ dans $\mathcal{R}_0$ puis en dériver chacune des composantes.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} &= \left[\frac{d\left(x(t)\overrightarrow{i_0} + y(t)\overrightarrow{j_0} + z(t)\overrightarrow{j_0}\right)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\left(x(t)\overrightarrow{i_0}\right)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{d\left(y(t)\overrightarrow{j_0}\right)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{d\left(z(t)\overrightarrow{k_0}\right)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} \\
&= x(t)\left[\frac{d\,\overrightarrow{i_0}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{dx(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}\overrightarrow{i_0} + y(t)\left[\frac{d\,\overrightarrow{j_0}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}\overrightarrow{j_0} + z(t)\left[\frac{d\,\overrightarrow{k_0}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{dz(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}\overrightarrow{k_0}
\end{aligned}$$

On a :

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{i_0}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} = \begin{bmatrix}\frac{d1}{dt}\\ \frac{d0}{dt}\\ \frac{d0}{dt}\end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{0}$$

Il est est de même pour $\left[\frac{d\,\overrightarrow{j_0}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}$ et $\left[\frac{d\,\overrightarrow{k_0}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}$.

Remarque

– La dérivée d'un vecteur fixe $\overrightarrow{V}$ exprimé dans une base $\mathcal{B}_i$ par rapport à $\mathcal{B}_i$ est nul. Ainsi, $\left[\dfrac{d\,\overrightarrow{i_i}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_i} = \overrightarrow{0}$.

– On note par un $\cdot$ la dérivée d'une fonction par rapport au temps : $\left[\dfrac{dx(t)}{dt}\right] = \dot{x}(t)$.

Au final, on a donc :

$$\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} = \dot{x}(t)\overrightarrow{i_0} + \dot{y}(t)\overrightarrow{j_0} + \dot{z}(t)\overrightarrow{k_0}$$

Exemple

Centrifugeuse

Calculer $\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)}$.

Par définition,

$$\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0O_1}(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\left(a\,\overrightarrow{i_1}\right)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} = a\left[\frac{d\,\overrightarrow{i_1}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d\,\overrightarrow{i_1}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} &= \left[\frac{d\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}\right)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\cos\alpha(t)\overrightarrow{i_0}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{d\sin\alpha(t)\overrightarrow{j_0}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}\\
&= \frac{d\cos\alpha(t)}{dt}\overrightarrow{i_0} + \cos\alpha(t)\underbrace{\left[\frac{d\,\overrightarrow{i_0}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{0}} + \frac{d\sin\alpha(t)}{dt}\overrightarrow{i_0} + \sin(t)\underbrace{\left[\frac{d\,\overrightarrow{j_0}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{0}}\\
&= -\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t)\overrightarrow{i_0} + \dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t)\overrightarrow{j_0} = \dot{\alpha}(t)\overrightarrow{j_1}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} = \begin{bmatrix} -a\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t) \\ a\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ a\dot{\alpha}(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

Dans les deux cas, $\overrightarrow{O_0O_1}(t)$ est dérivé par rapport $\mathcal{R}_0$ mais il s'exprime différemment dans $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$.

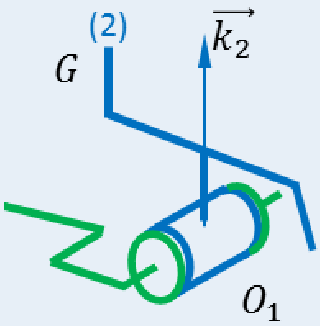
Remarque

Lorsqu'un point est confondu pour deux solides et qu'il n'y a pas de mouvement relatif entre les solides, (centre d'une liaison pivot ou d'une liaison rotule par exemple) les vitesses sont égales ainsi, ici :

$$\overrightarrow{V(0_1 \in S_1/S_0)}(t) = \overrightarrow{V(0_1 \in S_2/S_0)}(t)$$

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{V(0_1 \in S_1/S_2)}(t) = \overrightarrow{0}$$



3.1.3 Détermination du vecteur vitesse dans les liaisons cinématiques

Résultat

Lorsque il n'y a pas de degré de liberté de translation dans une liaison, la vitesse au centre de la liaison est nulle. Ainsi :

- si les solides S_1 et S_2 sont en liaison rotule de centre O alors $\overrightarrow{V(O \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{0}$;
- si les solides S_1 et S_2 sont en liaison pivot de centre O alors $\overrightarrow{V(O \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{0}$;
- si les solides S_1 et S_2 sont en liaison rotule à doigt de centre O alors $\overrightarrow{V(O \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{0}$.

Exemple

Centrifugeuse humaine

Dans ce cas, on peut affirmer que :

$$\overrightarrow{V(O_0 \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V(O_1 \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{0}$$

Attention : ces relations ne sont vraies qu'au centre des liaisons et pour les mouvements entre les deux solides participant à la liaison.

3.2 Vecteur instantané de rotation

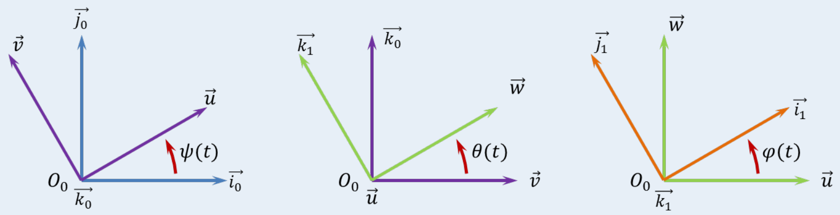
3.2.1 Définition

Définition

Vitesse instantané de rotation entre deux solides – Vecteur taux de rotation

Soit un solide S_0 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_0$ $\left(O_0, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0}\right)$. Soit un solide S_1 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1$, $\left(O_1, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$. Le solide S_1 est en mouvement par rapport au solide S_0.

Les rotations entre le solide 1 et le solide 2 sont paramétrés par les angles d'Euler $\psi(t)$, $\theta(t)$ et $\varphi(t)$.



On appelle vecteur instantané de rotation entre les solides S_0 et S_1 le vecteur

$$\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\psi(t)}\overrightarrow{k_0} + \dot{\theta(t)}\overrightarrow{u} + \dot{\varphi(t)}\overrightarrow{k_1}$$

$\dot{\psi(t)}$, $\dot{\theta(t)}$ et $\dot{\varphi(t)}$ sont en rad/s.

Remarque

- On note sans distinction $\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}$.
- Le vecteur instantané de rotation est indépendant du point d'application.
- On a la relation suivante :

$$\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = -\overrightarrow{\Omega(S_0/S_1)}$$

3.2.2 Détermination du vecteur vitesse instantané de rotation dans les liaisons cinématiques

Résultat

Lorsque il y a pas des degrés de liberté de rotation dans une liaison et que ces degrés de liberté sont paramétrés, on a :

- si les solides S_1 et S_2 sont en liaison pivot de centre O, d'angle α et d'axe $\overrightarrow{k}$ alors $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \dot{\alpha}\,\overrightarrow{k}$;
- si les solides S_1 et S_2 sont en liaison glissière d'axe $\overrightarrow{z}$, $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \overrightarrow{0}$;
- si les solides S_1 et S_2 sont en liaison rotule de centre O, et d'orientations $(\psi, \overrightarrow{k})$, $(\theta, \overrightarrow{u})$, $(\varphi, \overrightarrow{k_1})$, alors $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \dot{\psi}\,\overrightarrow{k} + \dot{\theta}\,\overrightarrow{u} + \dot{\varphi}\,\overrightarrow{k_1}$;
- ...

Exemple

Centrifugeuse

On a :

$$\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\alpha}\,\overrightarrow{k_0} \qquad \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \dot{\beta}\,\overrightarrow{j_1}$$

3.3 Dérivation vectorielle

Résultat

Dérivation vectorielle

Soient S_0 et S_1 deux solides en mouvements relatifs et $\mathscr{R}_0$ et $\mathscr{R}_1$ les repères orthonormés directs associés. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de l'espace. On note $\overrightarrow{\Omega(\mathscr{R}_1/\mathscr{R}_0)}$ le vecteur instantané de rotation permettant d'exprimer les rotations entre chacune des deux bases.

La dérivée d'un vecteur dans une base mobile se calcule donc ainsi :

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{v}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0} = \left[\frac{d\,\overrightarrow{v}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(\mathscr{R}_1/\mathscr{R}_0)} \wedge \overrightarrow{v}$$

Exemple

Centrifugeuse

Calcul de $\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)}$.

On rappelle que :

$$\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} = a\left[\frac{d\,\overrightarrow{i_1}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}$$

Le calcul de $\left[\frac{d\,\overrightarrow{i_1}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}$ peut donc être réalisé ainsi :

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{i_1}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0} = \underbrace{\left[\frac{d\,\overrightarrow{i_1}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_1}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\alpha}\,\overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\alpha}\,\overrightarrow{j_1}$$

Ainsi

$$\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} = a\dot{\alpha}\,\overrightarrow{j_1}$$

3.4 Champ du vecteur vitesse dans un solide en mouvement

3.4.1 Mise en évidence

Reprenons le cas d'un avion en déplacement dans le ciel . Soit P un point appartenant à l'avion tel que $\overrightarrow{O_1P} = a\,\overrightarrow{i_1} + b\,\overrightarrow{j_1} + c\,\overrightarrow{k_1}$.

Calculons la vitesse du point P par rapport à $\mathcal{R}_0$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V(P \in S_1/S_0)} &= \left[\frac{d\overrightarrow{O_0P}(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\left(\overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1P}\right)(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} \\
&= \overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1P}(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}
\end{aligned}$$

Calculons maintenant $\left[\frac{d\overrightarrow{O_1P}(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}$:

$$\left[\frac{d\overrightarrow{O_1P}(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1P}(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} \wedge \overrightarrow{O_1P}(t)$$

$\overrightarrow{O_1P}$ étant fixe dans le repère $\mathcal{R}_1$, $\left[\frac{d\overrightarrow{O_1P}(t)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{0}$.

Au final,

$$\overrightarrow{V(P \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} + \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} \wedge \overrightarrow{O_1P}(t) = \overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} + \overrightarrow{PO_1}(t) \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$$

3.4.2 Résultat

Résultat

Champ du vecteur vitesse dans un solide – Formule de Varignon

Soient A et B deux points appartenant à un solide S_1 en mouvement par rapport à S_0. Le champ des vecteurs vitesses est donc déterminé ainsi :

$$\overrightarrow{V(B \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(A \in S_1/S_0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$$

Remarque

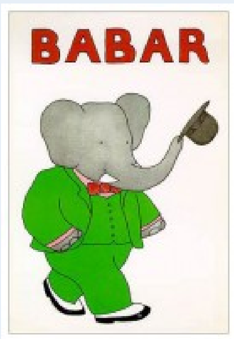
Moyen mnémotechnique

Comme la dérivée vectorielle, l'utilisation de cette formule est indispensable en mécanique en général et en cinématique en particulier.

On verra par la suite que le vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ est appelé **R**ésultante du torseur cinématique.

En conséquence, en utilisant le moyen mnémotechnique on a :

$$\overrightarrow{V(\mathbf{B} \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(\mathbf{A} \in S_1/S_0)} + \overrightarrow{\mathbf{BA}} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}}_{\mathbf{R}}$$



Remarque

Utilisation du champ de vecteur

La formule du champ de vecteur est utilisée à chaque fois que la vitesse est connue en un point d'un solide et qu'on veut la calculer en un point appartenant à un autre point d'un même solide.

Exemple

Centrifugeuse

Calcul de $\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)}$.

S_1 et S_0 sont en liaison pivot de centre O_0, on a donc : $\overrightarrow{V(O_0 \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{0}$.

En conséquence,

$$\overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(O_0 \in S_1/S_0)} + \overrightarrow{O_1O_0} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \overrightarrow{0} - a\,\overrightarrow{i_1} \wedge \left(\dot{\alpha}\,\overrightarrow{k_0}\right) = a\dot{\alpha}\,\overrightarrow{j_1}$$

3.4.3 Équiprojectivité du champ des vecteurs vitesses

Résultat

Equiprojectivité

Soit un solide S_1 en mouvement par rapport à un repère fixe $\mathscr{R}_0$. Soient deux points A et B appartenant au solide S_1. On démontre qu'à chaque instant t :

$$\overrightarrow{V(A \in S_1/\mathscr{R}_0)} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V(B \in S_1/\mathscr{R}_0)} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Remarque

Cette propriété sera très utilisée en cinématique graphique lors de l'étude des mouvements plans.

4 Composition des mouvements

4.1 Composition du vecteur vitesse

Résultat

Composition du vecteur vitesse

Soit un solide S_1 en mouvement par rapport à un repère $\mathscr{R}_0$ et un solide S_2 par rapport au solide S_1. Pour chacun des points A appartenant au solide S_2, on a :

$$\overrightarrow{V(A \in S_2/\mathscr{R}_0)} = \overrightarrow{V(A \in S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(A \in S_1/\mathscr{R}_0)}$$

Démontrons ce résultat. O_1 est le centre de la liaison entre $\mathcal{R}_0$ et S_1. O_1 est donc fixe dans le repère $\mathcal{R}_0$. O_2 est le centre de la liaison entre S_1 et S_2. A appartient à S_2.

$$\overrightarrow{V(A\in S_2/\mathcal{R}_0)}=\left[\frac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}=\left[\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}+\left[\frac{d\overrightarrow{O_2A}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}=\overrightarrow{V(O_2\in S_1/\mathcal{R}_0)}+\left[\frac{d\overrightarrow{O_2A}}{dt}\right]_{S_1}+\overrightarrow{\Omega(S_1/\mathcal{R}_0)}\wedge\overrightarrow{O_2A}$$

$$\overrightarrow{V(A\in S_2/\mathcal{R}_0)}=\underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{O_2A}}{dt}\right]_{S_1}}_{\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}}+\underbrace{\overrightarrow{V(O_2\in S_1/\mathcal{R}_0)}+\overrightarrow{AO_2}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/\mathcal{R}_0)}}_{\overrightarrow{V(A\in S_1/\mathcal{R}_0)}}$$

On a donc bien :

$$\overrightarrow{V(A\in S_2/\mathcal{R}_0)}=\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}+\overrightarrow{V(A\in S_1/\mathcal{R}_0)}$$

Remarque

- $\overrightarrow{V(A\in S_2/\mathcal{R}_0)}$ est appelé vecteur vitesse absolu ;
- $\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}$ est appelé vecteur vitesse relatif ;
- $\overrightarrow{V(A\in S_1/\mathcal{R}_0)}$ est appelé vecteur vitesse d'entraînement.

Résultat

Généralisation

La décomposition du vecteur vitesse peut se généraliser avec n solides :

$$\overrightarrow{V(A\in S_n/S_0)}=\overrightarrow{V(A\in S_n/S_{n-1})}+...+\overrightarrow{V(A\in S_1/S_0)}$$

4.2 Composition du vecteur instantané de rotation

Résultat

Composition du vecteur vitesse

Soit un solide S_1 en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$ et un solide S_2 par rapport au solide S_1. On a :

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/\mathcal{R}_0)}=\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}+\overrightarrow{\Omega(S_1/\mathcal{R}_0)}$$

Pour démontrer ce résultat, prenons un vecteur $\overrightarrow{v}$:

$$\left[\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right]_{S_1}=\left[\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right]_{S_2}+\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}\wedge\overrightarrow{v}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right]_{S_1}=\left[\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}+\overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_0/S_1)}\wedge\overrightarrow{v}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}=\left[\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right]_{S_2}+\overrightarrow{\Omega(S_2/\mathcal{R}_0)}\wedge\overrightarrow{v}\Longleftrightarrow\left[\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}-\left[\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right]_{S_2}=\overrightarrow{\Omega(S_2/\mathcal{R}_0)}\wedge\overrightarrow{v}$$

En faisant la soustraction des deux premières expressions on obtient :

$$\overrightarrow{0} = \left[\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right]_{S_2} - \left[\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0} + \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} \wedge \overrightarrow{v} - \overrightarrow{\Omega(\mathscr{R}_0/S_1)} \wedge \overrightarrow{v} = \left[\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right]_{S_2} - \left[\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0} + \left(\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} - \overrightarrow{\Omega(\mathscr{R}_0/S_1)}\right) \wedge \overrightarrow{v}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0} - \left[\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right]_{S_2} = \left(\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} + \overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}\right) \wedge \overrightarrow{v}$$

En utilisant la dernière relation on a donc :

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/\mathscr{R}_0)} \wedge \overrightarrow{v} = \left(\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} + \overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}\right) \wedge \overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega(S_2/\mathscr{R}_0)} = \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} + \overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}$$

Résultat

Généralisation

La décomposition du vecteur instantané de rotation peut se généraliser avec n solides :

$$\overrightarrow{\Omega(S_n/S_0)} = \overrightarrow{\Omega(S_n/S_{n-1})} + \ldots + \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$$

4.2.1 Exemple

Exemple

Centrifugeuse

Calcul de $\overrightarrow{V(G \in S_2/S_0)}$.

On a :

$$\overrightarrow{V(G \in S_2/S_0)} = \overrightarrow{V(G \in S_2/S_1)} + \overrightarrow{V(G \in S_1/S_0)}$$

Calculons $\overrightarrow{V(G \in S_1/S_0)}$:

$$\overrightarrow{V(G \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(O_1 \in S_1/S_0)} + \overrightarrow{GO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = a\dot{\alpha}\overrightarrow{j_1} - \left(b\,\overrightarrow{i_2} + c\,\overrightarrow{k_2}\right) \wedge \left(\dot{\alpha}\,\overrightarrow{k_0}\right)$$

$$\overrightarrow{V(G \in S_1/S_0)} = a\dot{\alpha}\,\overrightarrow{j_1} + b\dot{\alpha}\sin(\beta + \pi/2)\,\overrightarrow{j_1} + c\dot{\alpha}\sin\beta\,\overrightarrow{j_1} = \dot{\alpha}\left(a + b\cos\beta + c\sin\beta\right)\overrightarrow{j_1}$$

Par ailleurs calculons $\overrightarrow{V(G \in S_2/S_1)}$:

$$\overrightarrow{V(G \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{V(O_1 \in S_2/S_1)} + \overrightarrow{GO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = -\left(b\,\overrightarrow{i_2} + c\,\overrightarrow{k_2}\right) \wedge \left(\dot{\beta}\,\overrightarrow{j_1}\right) = -\dot{\beta}\left(b\,\overrightarrow{k_2} - c\,\overrightarrow{i_2}\right)$$

Au final,

$$\overrightarrow{V(G \in S_2/S_0)} = \dot{\alpha}\left(a + b\cos\beta + c\sin\beta\right)\overrightarrow{j_1} - \dot{\beta}\left(b\,\overrightarrow{k_2} - c\,\overrightarrow{i_2}\right)$$

Il est aussi possible de calculer $\overrightarrow{V(G \in S_2/S_0)}$ ainsi :

$$\overrightarrow{V(G \in S_2/S_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0G}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}$$

5 Accélération d'un point appartenant à un solide

5.1 Définition

Définition

Accélération d'un point appartenant à un solide

Soit un solide S_0 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_0$ $\left(O_0, \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{k_0}\right)$. Soit un solide S_1 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1$, $\left(O_1, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$. Le solide S_1 est en mouvement par rapport au solide S_0.

Soit un point P appartenant au solide S_1. L'accélération du point P appartenant au solide S_1 par rapport au solide S_0 se calcule donc ainsi :

$$\overrightarrow{\Gamma(P\in S_1/S_0)(t)} = \left[\frac{d\left(\overrightarrow{V(P\in S_1/S_0)}(t)\right)}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

5.2 Champ d'accélération d'un solide en mouvement

On a vu que $\overrightarrow{V(B\in S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(A\in S_1/S_0)} + \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$. En dérivant cette expression on a donc :

$$\overrightarrow{\Gamma(B\in S_1/S_0)} = \overrightarrow{\Gamma(A\in S_1/S_0)} + \left[\frac{d\overrightarrow{BA}}{dt}\right]_{S_0}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} + \overrightarrow{BA}\wedge\left[\frac{d\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}}{dt}\right]_{S_0}$$

B et A sont des points du solide S_1. On a donc :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{BA}}{dt}\right]_{S_0} = \underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{BA}}{dt}\right]_{S_1}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}\wedge\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(B\in S_1/S_0)} = \overrightarrow{\Gamma(A\in S_1/S_0)} + \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}\wedge\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} + \overrightarrow{BA}\wedge\left[\frac{d\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}}{dt}\right]_{S_0}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(B\in S_1/S_0)} = \overrightarrow{\Gamma(A\in S_1/S_0)} + \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}\wedge\overrightarrow{AB} + \left[\frac{d\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}}{dt}\right]_{S_0}\wedge\overrightarrow{AB}$$

Résultat

Le champ des accélérations n'est donc pas un champ de moment.

5.3 Composition des accélérations

On a vu que la vitesse d'un solide S_2 par rapport à $\mathcal{R}_0$ au point A pouvait s'exprimer ainsi (paragraphe **??**, page **??**) :

$$\overrightarrow{V(A\in S_2/\mathcal{R}_0)} = \underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{O_2A}}{dt}\right]_{S_1}}_{\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}} + \underbrace{\overrightarrow{V(O_2\in S_1/\mathcal{R}_0)} + \overrightarrow{AO_2}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/\mathcal{R}_0)}}_{\overrightarrow{V(A\in S_1/\mathcal{R}_0)}}$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{V(A\in S_2/\mathscr{R}_0)}=\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}+\overrightarrow{V(O_2\in S_1/\mathscr{R}_0)}+\overrightarrow{AO_2}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}$$

Calculons l'accélération du point :

$$\overrightarrow{\Gamma(A\in S_2/\mathscr{R}_0)}=\left[\frac{d\overrightarrow{V(A\in S_2/\mathscr{R}_0)}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(A\in S_2/\mathscr{R}_0)}=\left[\frac{d\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}+\left[\frac{d\overrightarrow{V(O_2\in S_1/\mathscr{R}_0)}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}+\left[\frac{d\overrightarrow{AO_2}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}+\overrightarrow{AO_2}\wedge\left[\frac{d\overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\frac{d\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}}{dt}\right]_{S_1}+\overrightarrow{\Omega(S_2/\mathscr{R}_0)}\wedge\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}$$

$$\Longleftrightarrow\left[\frac{d\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}=\overrightarrow{\Gamma(A\in S_2/S_1)}+\overrightarrow{\Omega(S_2/\mathscr{R}_0)}\wedge\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{V(O_2\in S_1/\mathscr{R}_0)}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}=\overrightarrow{\Gamma(O_2\in S_1/\mathscr{R}_0)}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AO_2}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}=\left[\frac{d\overrightarrow{AO_2}}{dt}\right]_{S_1}+\overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}\wedge\overrightarrow{AO_2}=\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}+\overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}\wedge\overrightarrow{AO_2}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma(A\in S_2/\mathscr{R}_0)} &= \overrightarrow{\Gamma(A\in S_2/S_1)}+\overrightarrow{\Omega(S_2/\mathscr{R}_0)}\wedge\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}+\overrightarrow{\Gamma(O_2\in S_1/\mathscr{R}_0)}+\overrightarrow{V\left(A\in S_2/S_1\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}\right)}\\ &+ \overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}\wedge\overrightarrow{O_2A}+\left[\frac{d\overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}\wedge\overrightarrow{O_2A}\end{aligned}$$

Par ailleurs d'après le paragraphe précédent,

$$\overrightarrow{\Gamma(A\in S_1/\mathscr{R}_0)}=\overrightarrow{\Gamma(O_2\in S_1/\mathscr{R}_0)}+\overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}\wedge\overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}\wedge\overrightarrow{O_2A}+\left[\frac{d\overrightarrow{\Omega(S_1/\mathscr{R}_0)}}{dt}\right]_{\mathscr{R}_0}\wedge\overrightarrow{O_2A}$$

Au final,

$$\overrightarrow{\Gamma(A\in S_2/\mathscr{R}_0)}=\overrightarrow{\Gamma(A\in S_2/S_1)}+\underbrace{2\overrightarrow{\Omega(S_2/\mathscr{R}_0)}\wedge\overrightarrow{V(A\in S_2/S_1)}}_{\overrightarrow{\Gamma(A\in S_1/\mathscr{R}_0)_{Cor}}}+\overrightarrow{\Gamma(A\in S_1/\mathscr{R}_0)}$$

Résultat

On ne peut donc pas composer les accélérations. On appelle :
- $\overrightarrow{\Gamma(A\in S_2/\mathscr{R}_0)}$: accélération absolue ;
- $\overrightarrow{\Gamma(A\in S_2/S_1)}$: accélération relative ;
- $\overrightarrow{\Gamma(A\in S_1/\mathscr{R}_0)}$: accélération absolue ;
- $\overrightarrow{\Gamma(A\in S_1/\mathscr{R}_0)}_{Cor}$: accélération de Coriolis.

Références

[1] Centrifugeuse humaine – CNRS Photothèque/Sébastien Godefroy et MEDES, *Avio et Tiger*, http://www.medes.fr/home_fr/fiche-centrifugeuse/mainColumnParagraphs/0/document/Presentation%20centrifugeuse%2018.12.07.pdf.