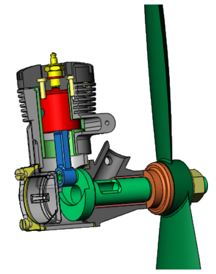
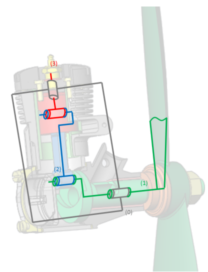
CI 3 – CIN : Étude du comportement cinématique des systèmes

Chapitre 4 – Étude des chaînes fermées : Détermination des lois Entrée – Sortie

Trainer Solo Sport [1]



Modèle CAO d'un moteur de modélisme [2]



Modélisation par schéma cinématique

Savoir

Savoirs :
– Rés-C1.1 : Fermeture géométrique.

Ce document est en évolution permanente. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.

1 Chaînes – Rappel . . . 1
2 Détermination des lois entrées – sorties . . . 2
2.1 Introduction . . . 2
2.2 Fermeture de chaîne angulaire . . . 2
2.3 Fermeture de chaîne géométrique . . . 3
2.4 Particularité géométrique du mécanisme . . . 4
2.5 Mécanismes homcinétiques . . . 6

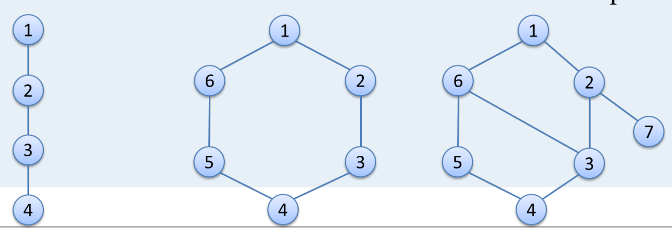
1 Chaînes – Rappel

Définition

Graphe de structure – Chaînes

Graphe qui permet d'avoir une vue d'ensemble du mécanisme :
– les classes d'équivalences sont schématisées par des cercles avec un repère (celui défini précédemment) ;
– les liaisons sont schématisées par des traits qui relient les cercles.
On définit 3 types de chaînes :

Les chaînes ouvertes — Les chaînes fermées — Les chaînes complexes



Définition

2 Détermination des lois entrées – sorties

2.1 Introduction

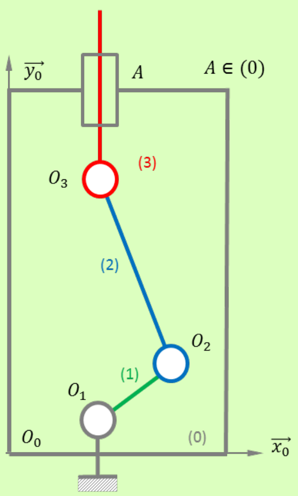
Dans certains mécanismes, par exemple ceux de transformation de mouvement, les paramètres géométriques peuvent être liés. On choisit donc un paramètre pilote dont on se fixe la valeur ou la loi de variation et par résolution du système d'équations (non linéaire en général donc résolution numérique), on peut trouver le paramètre de sortie.

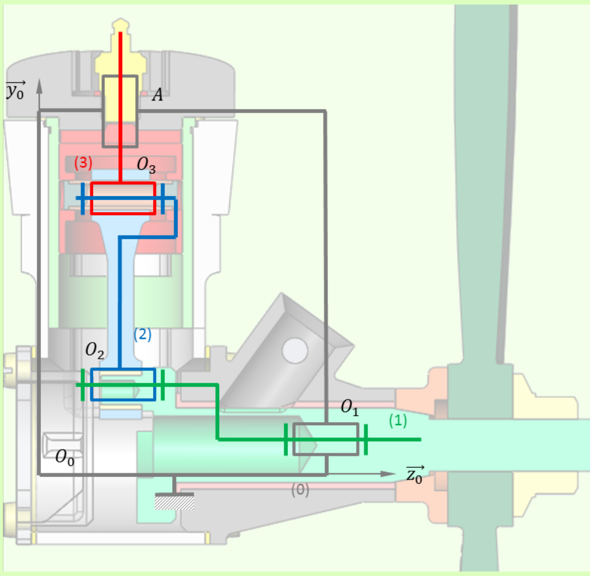
On s'intéresse donc à l'expression du paramètre de sortie en fonction du paramètre d'entrée. Il n'est donc pas nécessaire, après avoir fixé le paramètre pilote, de calculer tous les autres paramètres variables mais seulement celui de sortie.

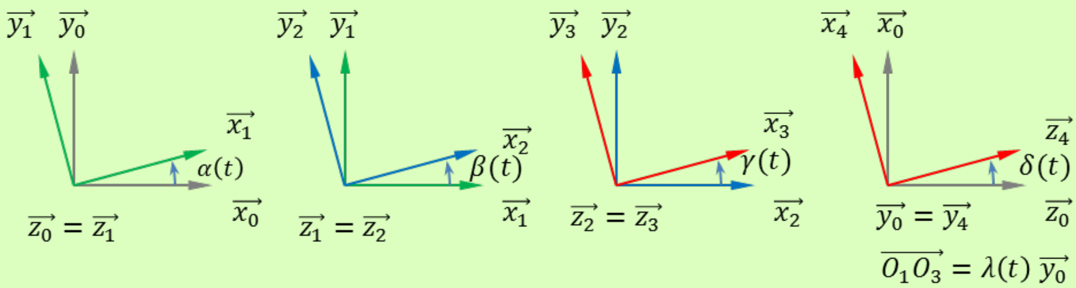
2.2 Fermeture de chaîne angulaire

Exemple

Moteur de modélisme – Paramétrage







Exemple

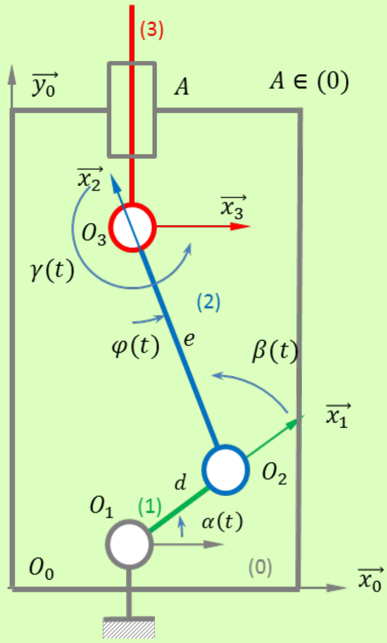
Position du point O_1 par rapport au point O_0 dans le repère $\mathscr{R}_0$: $\overrightarrow{O_0O_1} = a\,\overrightarrow{x_0} + b\,\overrightarrow{y_0} + c\,\overrightarrow{z_0}$

Position du point O_2 par rapport au point O_1 dans le repère $\mathscr{R}_1$: $\overrightarrow{O_1O_2}(t) = d\,\overrightarrow{x_1}$

Position du point O_3 par rapport au point O_2 dans le repère $\mathscr{R}_2$: $\overrightarrow{O_2O_3} = e\,\overrightarrow{x_2}$

Exemple

Moteur de modélisme – Fermeture angulaire



Le système a été paramétré ci-dessus.
On peut définir l'angle $\varphi(t)$ ainsi :

$$\gamma(t) = \pi + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi(t)\right) = \frac{3\pi}{2} - \varphi(t)$$

Dans le triangle $O_1O_2O_3$, la somme des angles est π, on a donc :

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha(t)\right) + (\pi - \beta(t)) + \varphi = \pi \Longleftrightarrow \left(\frac{\pi}{2} - \alpha(t)\right) + (\pi - \beta(t)) + \frac{3\pi}{2} - \gamma(t) = \pi$$

$$2\pi - \alpha(t) - \beta(t) - \gamma(t) = 0$$

2.3 Fermeture de chaîne géométrique

Méthode

Calcul de la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée

Un système se présentant sous forme d'une chaîne de solide fermée a pour but de transformer un mouvement. On s'intéresse alors pour cela à la relation cinématique liant le mouvement d'entrée du système et le mouvement de sortie. On écrit pour cela une **fermeture de chaîne géométrique**. Pour cela :

1. paramétrer le mécanisme ;
2. identifier la grandeur d'entrée et de sortie ;
3. à l'aide du théorème de Chasles, exprimer le vecteur nul en fonction des vecteurs liant le centre de chacune des liaisons ;
4. projeter la relation vectorielle sur une des bases ;
5. combiner les relations pour exprimer la sortie en fonction de l'entrée ;
6. dériver si besoin pour avoir le lien entre les vitesses.

Méthode

Méthodes pour manipuler les systèmes équations :

1. Pour supprimer λ : on met les deux équations sous la forme $\lambda =$ et on fait le rapport des deux équations.

Méthode

2. Pour supprimer φ : on met une équation sous la forme $\cos\varphi =$ et la seconde sous la forme $\sin\varphi =$ et on utilise la relation $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.
3. Dans d'autres cas, on peut avoir à utiliser l'expression de la tangente.

Exemple

Dans le cas d'un système bielle-manivelle comme le moteur de modélisme, on veut connaître la vitesse de rotation de l'hélice $\dot{\alpha}(t)$ en fonction de la vitesse de translation du piston $\dot{\lambda}(t)$.

La fermeture géométrique est donc la suivante :

$$\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_1} = \overrightarrow{0}$$
$$\Longleftrightarrow d\overrightarrow{x_1} + e\overrightarrow{x_2} - \lambda(t)\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{0}$$

Exprimons $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{x_2}$ dans la base $\mathcal{R}_0$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overrightarrow{x_1} & = & \cos\alpha(t)\overrightarrow{x_0} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{x_2} & = & \cos\beta(t)\overrightarrow{x_1} + \sin\beta(t)\overrightarrow{y_1} \\ & = & \cos\beta(t)\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{x_0} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{y_0}\right) + \sin\beta(t)\left(\cos\alpha(t)\overrightarrow{y_0} - \sin\alpha(t)\overrightarrow{x_0}\right) \end{array}\right.$$

En projetant l'équation vectorielle sur $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$ on a :

$$\left\{\begin{array}{l} d\cos\alpha + e\cos\beta\cos\alpha - e\sin\beta\sin\alpha = 0 \\ d\sin\alpha + e\cos\beta\sin\alpha + e\sin\beta\cos\alpha - \lambda = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d\cos\alpha + e\cos(\beta+\alpha) = 0 \\ d\sin\alpha + e\sin(\beta+\alpha) - \lambda = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e\cos(\beta+\alpha) = -\dfrac{d\cos\alpha}{e} \\ e\sin(\beta+\alpha) = \dfrac{\lambda - d\sin\alpha}{e} \end{array}\right.$$

En passant au carré et en sommant les deux expressions, on a donc :

$$\left(\frac{d\cos\alpha}{e}\right)^2 + \left(\frac{\lambda - d\sin\alpha}{e}\right)^2 = 1 \Longleftrightarrow d^2\cos^2\alpha + \lambda^2 + d^2\sin^2\alpha - 2d\lambda\sin\alpha = e^2$$

$$\Longleftrightarrow d^2 + \lambda^2 - 2d\lambda\sin\alpha = e^2$$

Pour exprimer λ en fonction de α, il faut donc résoudre une équation du second degré. Pour exprimer α en fonction de λ, la méthode est directe.

2.4 Particularité géométrique du mécanisme

Méthode

Calcul de la loi Entrée – Particularité géométrique

Lorsque le mécanisme a une particularité géométrique qui se traduit sous la forme d'une relation vectorielle, on traduit cette dernière à l'aide du paramétrage.

Exemple

Système bielle-manivelle

Reprenons l'exemple du système bielle - manivelle précédent. La particularité géométrique que l'on peut remarquer, est que la bielle 2 est de longueur constante e. Cela peut permettre de retrouver la loi entrée-sortie plus rapidement :

$$\overrightarrow{O_2O_3} = \overrightarrow{O_1O_3} - \overrightarrow{O_1O_2}$$
$$e\,\overrightarrow{x_2} = \lambda\,\overrightarrow{y_0} - d\,\overrightarrow{x_1}$$

Puis en élevant les deux membres au carré (scalaire) :

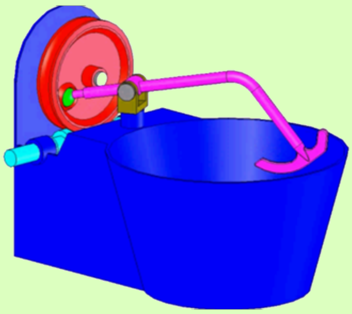
$$e^2\overrightarrow{x_2}.\overrightarrow{x_2} = \left(\lambda\,\overrightarrow{y_0} - d\,\overrightarrow{x_1}\right).\left(\lambda\,\overrightarrow{y_0} - d\,\overrightarrow{x_1}\right)$$
$$e^2 = \lambda^2 + d^2 - 2\lambda d\sin\alpha$$

On retrouve bien la même loi entrée-sortie.

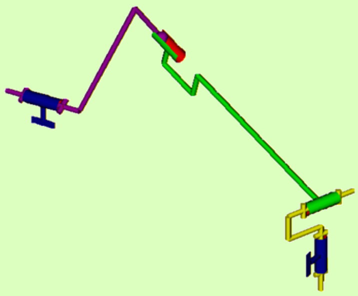
Exemple

Mélangeur

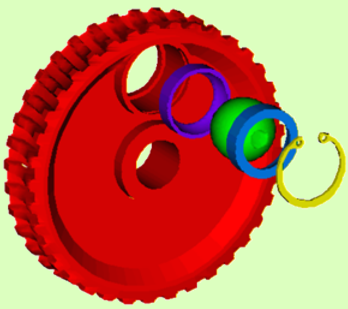
Mécanisme en situation



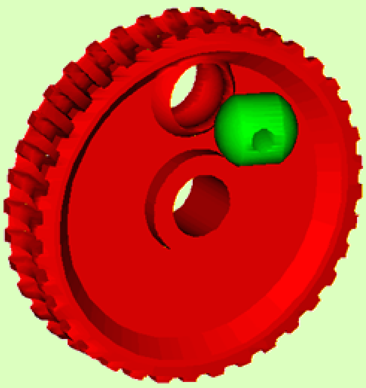
Modélisation cinématique



Réalisation de la liaison linéaure annulaire 1

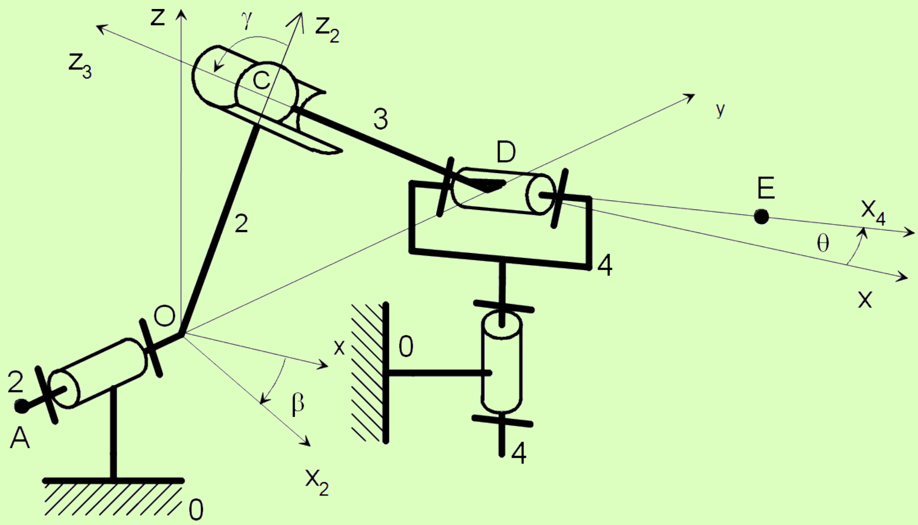


Réalisation de la liaison linéaure annulaire 2



La pièce 2 tourne entraînant à la sortie un mouvement de rotation oscillant de 4.

Exemple



On donne :
- soit $\mathscr{R}$ le repère lié au solide 0 considéré comme fixe. $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$;
- soit $\mathscr{R}_2$ le repère lié au solide 2. $\mathscr{R}_2 = \left(O, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z_2}\right)$. On pose $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_2}\right) = \beta$;
- soit $\mathscr{R}_3$ tel que $\mathscr{R}_3 = \left(D, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3}\right)$. On pose $\left(\overrightarrow{z_2}, \overrightarrow{z_3}\right) = \gamma$ (constant) ;
- soit $\mathscr{R}_4$ le repère lié au solide 4. $\mathscr{R}_4 = \left(D, \overrightarrow{x_4}, \overrightarrow{y_4}, \overrightarrow{z}\right)$. On pose $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_4}\right) = \theta$.

Le mécanisme est tel que : $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ constamment (solides indéformables).

1. Faire le graphe de structure du mécanisme.
2. Tracer en vue orthogonale, les trois dessins permettant le passage de $\mathscr{R}$ à $\mathscr{R}_2$, de $\mathscr{R}_2$ à $\mathscr{R}_3$ et de $\mathscr{R}$ à $\mathscr{R}_4$.
3. Écrire une relation géométrique traduisant la non déformation de 3 et qui permet d'établir une relation entre un axe de $\mathscr{R}_3$ à un axe de $\mathscr{R}_4$.
4. Développer cette relation et trouver la loi entrée sortie : $\theta = f(\beta, \gamma)$.
5. Dériver cette relation par rapport au temps pour trouver la vitesse de sortie $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta(t)}{dt}$ en fonction de la vitesse d'entrée $\dot{\beta}$, β et γ.

Exemple

2.5 Mécanismes homcinétiques

On dispose très souvent d'un moteur ayant une vitesse de rotation constante (condition recherchée pour éviter des à-coups et des vibrations) alimentant l'entrée d'un mécanisme.

Dans le cas où le mécanisme réduit ou augmente la vitesse (réducteur ou multiplicateur), ou simplement la transporte en changeant son orientation (accouplement, joint de Cardan ou de Oldham), on se pose la question de savoir si le système mécanique n'introduit pas des à -coups donc des vibrations à cause de sa structure propre, ceux-ci venant d'une vitesse variable de façon cyclique en sortie.

Références

[1] Trainer Solo Sport, *Avio et Tiger*, http://www.net-loisirs.com/trainer-solo-sport-p1155.html.

[2] Université Bretagne Sud, *Moteur de modélisme* http://foad.univ-ubs.fr/file.php/1355/TP_meca3d/Moteur_modelisme.zip.

[3] Jean-Pierre Pupier – Paramétrage – PTSI – Lycée Rouvière Toulon.