CI 3 – CIN : Étude du comportement cinématique des systèmes

Chapitre 6 – Cinématique du point immatériel dans un solide en mouvement

Travail Dirigé : Étude d'un variateur à billes

Ressources de Jean-Pierre Pupier.

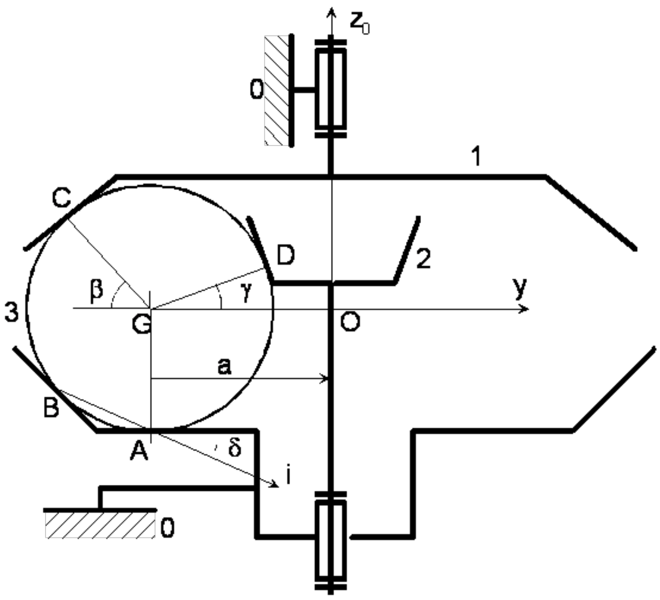
Mise en situation

Ce réducteur à billes comporte plusieurs billes de rayon R identiques à la bille 3 représentée ici.

3 roule sans glisser aux points A et B sur le bâti **0** (**0** forme une sorte d'assiette dans laquelle roulent les billes) puis en C sur le solide **1** qui est l'arbre de sortie puis en D sur le solide **2** qui est l'arbre d'entrée.

Un moteur actionne **2**, l'adhérence en D met la bille en mouvement dans «l'assiette», le point C a donc une vitesse, on récupère cette vitesse par adhérence en C, ce qui fait tourner l'arbre de sortie **1**.

- $\mathcal{R}_0 = \left(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ lié au bâti **0**.
- $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z_0}\right)$ tel que $\overrightarrow{GO} = a\,\overrightarrow{y}$. ($G$ centre de la sphère). Ce repère n'est lié à aucun solide mais tous les points sont dans le plan $\left(O, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z_0}\right)$. Il sera donc très utile.
- $\mathcal{R}_1 = \left(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_0}\right)$ lié à **1**.
- $\mathcal{R}_2 = \left(O, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_0}\right)$ lié à **2**.
- On pose : $\left(\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}\right) = \psi$ et $\left(\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_2}\right) = \theta$, les angles β, γ et δ sont constants.
- $\overrightarrow{i}$ est porté direction AB.



Question 1

*Trouver l'axe instantané de rotation du mouvement (axe central) de **3** par rapport à **0**. Il faudra justifier. Cet axe instantané de rotation est-il de direction fixe dans **0** ?*

Correction

La condition de roulement sans glissement au point A se traduit par $\overrightarrow{V(A \in 3/0)} = \overrightarrow{0}$.

La condition de roulement sans glissement au point B se traduit par $\overrightarrow{V(B \in 3/0)} = \overrightarrow{0}$.

A et B sont donc des points où la norme du vecteur vitesse est minimale. Ce sont donc des points centraux. La droite (AB) est donc un axe central. En conséquence, $\forall P \in (AB)$, alors, $\overrightarrow{V(P \in 3/0)} = \overrightarrow{0}$.

Les points de contact A et B étant mobiles, la droite (AB) n'a donc pas une direction fixe dans $\mathcal{R}_0$.

Question 2

Justifier l'écriture du vecteur $\overrightarrow{\Omega(3/0)} = \omega\,\overrightarrow{i}$ (avec ω composante scalaire du vecteur $\overrightarrow{\Omega(3/0)}$).

Correction

L'axe central étant de même direction que la résultante du torseur, on a donc nécessairement $\overrightarrow{\Omega(3/0)} = \omega\,\overrightarrow{i}$.

Question 3

Exprimer la relation entre $\dot{\psi}$ et ω issue du roulement sans glissement en C. On utilisera comme base de projection la base associée au repère $\mathscr{R}$.

Correction

D'après la relation de roulement sans glissement au point C on a $\overrightarrow{V(C\in 3/1)}=\overrightarrow{0}$. En conséquences, $\overrightarrow{V(C\in 3/1)}=\overrightarrow{V(C\in 3/0)}+\overrightarrow{V(C\in 0/1)}=\overrightarrow{V(C\in 3/0)}-\overrightarrow{V(C\in 1/0)}=\overrightarrow{0}$.

D'une part, calculons $\overrightarrow{V(C\in 3/0)}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V(C\in 3/0)} &= \overrightarrow{V(A\in 3/0)}+\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{\Omega(3/0)}\\ &= \left(R\cos\beta\,\overrightarrow{y}-R\left(1+\sin\beta\right)\overrightarrow{z_0}\right)\wedge\omega\,\overrightarrow{i}\\ &= \left(R\cos\beta\,\overrightarrow{y}-R\left(1+\sin\beta\right)\overrightarrow{z_0}\right)\wedge\omega\left(\cos\delta\,\overrightarrow{y}-\sin\delta\,\overrightarrow{z_0}\right)\\ &= -R\omega\cos\beta\sin\delta\,\overrightarrow{x}+R\omega\left(1+\sin\beta\right)\cos\delta\,\overrightarrow{x}\end{aligned}$$

D'une part, calculons $\overrightarrow{V(C\in 1/0)}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V(C\in 1/0)} &= \overrightarrow{V(O\in 3/0)}+\overrightarrow{CO}\wedge\overrightarrow{\Omega(1/0)}\\ &= \left(\left(R\cos\beta+a\right)\overrightarrow{y}-R\sin\beta\,\overrightarrow{z_0}\right)\wedge\dot{\psi}\,\overrightarrow{z_0}\\ &= \dot{\psi}\left(R\cos\beta+a\right)\overrightarrow{x}\end{aligned}$$

Au final,

$$\overrightarrow{V(C\in 3/1)}=\overrightarrow{0}\Longleftrightarrow -R\omega\cos\beta\sin\delta\,\overrightarrow{x}+R\omega\left(1+\sin\beta\right)\cos\delta\,\overrightarrow{x}-\dot{\psi}\left(R\cos\beta+a\right)\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$$

Et donc :

$$-R\omega\cos\beta\sin\delta+R\omega\left(1+\sin\beta\right)\cos\delta-\dot{\psi}\left(R\cos\beta+a\right)=0$$

Question 4

Exprimer la relation entre $\dot{\theta}$ et ω issue du roulement sans glissement en D. On utilisera comme base de projection la base associée au repère $\mathscr{R}$.

Correction

D'après la relation de roulement sans glissement au point D on a $\overrightarrow{V(D\in 2/3)}=\overrightarrow{0}$. En conséquences, $\overrightarrow{V(D\in 2/3)}=\overrightarrow{V(D\in 2/0)}+\overrightarrow{V(D\in 0/3)}=\overrightarrow{V(D\in 2/0)}-\overrightarrow{V(D\in 3/0)}=\overrightarrow{0}$.

D'une part, calculons $\overrightarrow{V(D\in 3/0)}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V(D\in 3/0)} &= \overrightarrow{V(A\in 3/0)}+\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{\Omega(3/0)}\\ &= \left(-R\cos\beta\gamma y-R\left(1+\sin\gamma\right)\overrightarrow{z_0}\right)\wedge\omega\,\overrightarrow{i}\\ &= \left(-R\cos\beta\gamma y-R\left(1+\sin\gamma\right)\overrightarrow{z_0}\right))\wedge\omega\left(\cos\delta\,\overrightarrow{y}-\sin\delta\,\overrightarrow{z_0}\right)\\ &= R\omega\cos\gamma\sin\delta\,\overrightarrow{x}+R\omega\left(1+\sin\gamma\right)\cos\delta\,\overrightarrow{x}\end{aligned}$$

D'une part, calculons $\overrightarrow{V(D\in 2/0)}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V(D\in 2/0)} &= \overrightarrow{V(O\in 2/0)}+\overrightarrow{DO}\wedge\overrightarrow{\Omega(2/0)}\\ &= \left(\left(-R\cos\gamma-a\right)\overrightarrow{y}-R\sin\delta\,\overrightarrow{z_0}\right)\wedge\dot{\theta}\,\overrightarrow{z_0}\\ &= \dot{\theta}\left(a-R\cos\gamma\right)\overrightarrow{x}\end{aligned}$$

Au final,

$$\overrightarrow{V(D\in 2/0)}=\overrightarrow{0}\Longleftrightarrow\dot{\theta}\left(a-R\cos\gamma\right)\overrightarrow{x}-R\omega\cos\gamma\sin\delta\,\overrightarrow{x}-R\omega\left(1+\sin\gamma\right)\cos\delta\,\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$$

Correction

Et donc :

$$\dot{\theta}\left(a-R\cos\gamma\right)-R\omega\cos\gamma\sin\delta-R\omega\left(1+\sin\gamma\right)\cos\delta=0$$

Question 5

Déduire des deux réponses précédentes le rapport de réduction $\dfrac{\dot{\theta}}{\dot{\psi}}$.

Correction

On a vu que :

$$-R\omega\cos\beta\sin\delta+R\omega\left(1+\sin\beta\right)\cos\delta-\dot{\psi}\left(R\cos\beta+a\right)=0\Longleftrightarrow\dot{\psi}\left(R\cos\beta+a\right)=R\omega\left(-\cos\beta\sin\delta+\left(1+\sin\beta\right)\cos\delta\right)$$

$$\dot{\theta}\left(a-R\cos\gamma\right)-R\omega\cos\gamma\sin\delta-R\omega\left(1+\sin\gamma\right)\cos\delta=0\Longleftrightarrow\dot{\theta}\left(a-R\cos\gamma\right)=R\omega\left(\cos\gamma\sin\delta+\left(1+\sin\gamma\right)\cos\delta\right)$$

En conséquence :

$$\frac{\dot{\theta}}{\dot{\psi}}=\frac{R\omega\left(\cos\gamma\sin\delta+\left(1+\sin\gamma\right)\cos\delta\right)}{R\omega\left(-\cos\beta\sin\delta+\left(1+\sin\beta\right)\cos\delta\right)}\cdot\frac{\left(R\cos\beta+a\right)}{\left(a-R\cos\gamma\right)}$$

$$\Longleftrightarrow\frac{\dot{\theta}}{\dot{\psi}}=\frac{\cos\gamma\sin\delta+\cos\delta+\sin\gamma\cos\delta}{-\cos\beta\sin\delta+\cos\delta+\sin\beta\cos\delta}\cdot\frac{\left(R\cos\beta+a\right)}{\left(a-R\cos\gamma\right)}$$

$$\Longleftrightarrow\frac{\dot{\theta}}{\dot{\psi}}=\frac{\sin\left(\gamma+\delta\right)+\cos\delta}{\sin\left(\beta-\delta\right)+\cos\delta}\cdot\frac{\left(R\cos\beta+a\right)}{\left(a-R\cos\gamma\right)}$$