CI 3 – CIN : Étude du comportement cinématique des systèmes

Chapitre 2 – Géométrie dans l'espace

Exercices d'application

D'après ressources de Jean-Pierre Pupier.

Exercice 1

Soit un repère $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$. On donne les coordonnées dans $\mathscr{R}$ des points suivants correspondants respectivement à l'origine et à l'extrémité des vecteurs :

- $\overrightarrow{V_1}$: point $A_1 : (2,1,0)$, point $B_1 : (3,1,0)$;
- $\overrightarrow{V_2}$: point $A_2 : (1,-3,0)$, point $B_2 : (-2,-1,0)$;
- $\overrightarrow{V_3}$: point $A_3 : (1,1,0)$, point $B_3 : (3,2,0)$;
- $\overrightarrow{V_4}$: point $A_4 : (-1,2,0)$, point $B_4 : (1,1,0)$.

Question 1
Calculer les composantes de chaque vecteur dans la base $\mathscr{B}$ associée au repère $\mathscr{R}$.

Question 2
Calculer la norme de chaque vecteur.

Question 3
Calculer la somme de ces quatre vecteurs dans la base $\mathscr{B}$.

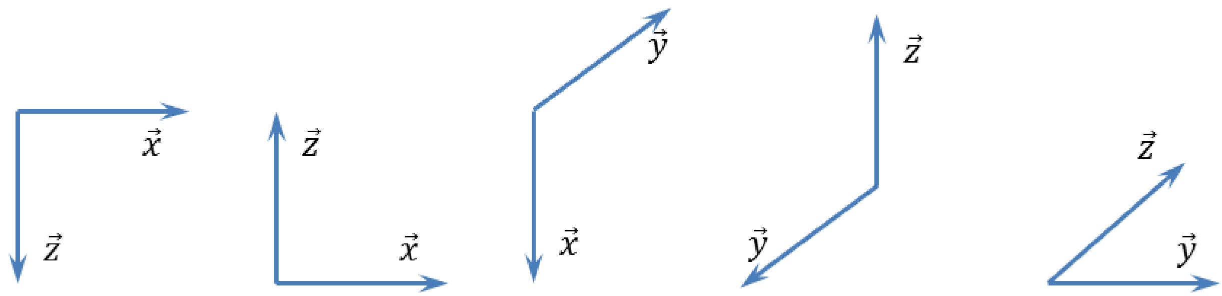
Question 4
Écrire les composantes du vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{V_2}$ et de même sens dans la base $\mathscr{B}$.

Question 5
Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3} \cdot \overrightarrow{V_4}$.

Question 6
Calculer les produits vectoriels $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3} \wedge \overrightarrow{V_4}$.

Exercice 2

Question 1
Dessiner le troisième vecteur de la base orthonormée directe $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$.



Question 2

Exprimer les produits des vecteurs de base d'une base orthonormée directe.

$$\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} \quad \overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y} \quad \overrightarrow{y}\cdot\overrightarrow{z} \quad \overrightarrow{y}\wedge\overrightarrow{z} \quad \overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{z} \quad \overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{z}$$

Question 3

Calculer le cosinus puis l'angle α formé par les vecteurs $\overrightarrow{V_1}=\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}_{\mathscr{B}}$ *et* $\overrightarrow{V_2}=\begin{bmatrix}3\\-2\\3\end{bmatrix}_{\mathscr{B}}$.

Question 4

Calculer le sinus puis l'angle γ formé par les vecteurs $\overrightarrow{V_1}=\begin{bmatrix}1\\4\\8\end{bmatrix}_{\mathscr{B}}$ *et* $\overrightarrow{V_2}=\begin{bmatrix}-2\\5\\3\end{bmatrix}_{\mathscr{B}}$.

Question 5

Calculer l'angle entre $\overrightarrow{V}=10\overrightarrow{x}+8\overrightarrow{y}+6\overrightarrow{z}$ *et le vecteur de base* $\overrightarrow{x}$.

Exercice 3

Question 1

Représentez un repère orthonormé $\mathscr{R}=\left(O,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$ *en vue orthogonale ($\overrightarrow{y}$ vertical, $\overrightarrow{x}$ horizontal, $\overrightarrow{z}$ vers «nous»), puis un repère orthonormé* $\mathscr{R}_1=\left(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z}\right)$ *tel que* $\alpha=\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{x_1}\right)$. *Mettez un point M tel que* $\overrightarrow{OM}=a\overrightarrow{x_1}$ *avec* $a>0$.

Question 2

Exprimer les composantes de $\overrightarrow{OM}$ en projection sur la base $\mathscr{B}$ liée au repère $\mathscr{R}$.

Question 3

Exprimer $\overrightarrow{z}\wedge\overrightarrow{OM}$. Vous l'exprimerez en projection sur la base $\mathscr{B}$ puis dans $\mathscr{B}_1$ (utiliser plusieurs méthodes).

Exercice 4

On donne les coordonnées de trois points dans le repère orthonormé $\mathscr{R}=\left(D,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$:

$$A:(3,2,0) \quad B:(0,3,2) \quad C:(2,3,0)$$

Question 1

Calculez les composantes du vecteur $\overrightarrow{V}$ de norme 1000 colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et de même sens.

Question 2

Calculez le moment au point A du pointeur $(D, \overrightarrow{D})$ où $\overrightarrow{D} = (200, 300, -100)_{\mathcal{B}}$.

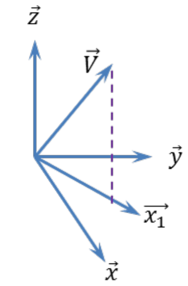
Question 3

Calculez le moment au point E milieu de AB, du pointeur $(D, \overrightarrow{D})$.

Question 4

Calculez le moment par rapport à l'axe δ (orienté de A vers B) du pointeur $(D, \overrightarrow{D})$.

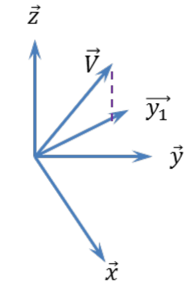
Exercice 5



Question 1

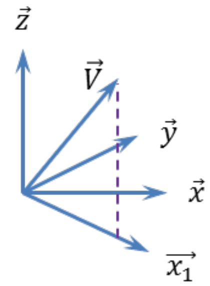
On note $\mathcal{B} = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$, $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z})$, $\alpha = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_1}\right)$, $\beta = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{V}\right)$.

Exprimer les composantes scalaires sous formes de colonnes du vecteur $\overrightarrow{V}$ en projection sur la base $\mathcal{B}_1$ puis sur la base $\mathcal{B}$ et ceci en fonction de la norme de $\overrightarrow{V}$ notée simplement V et des angles orientés α et β.



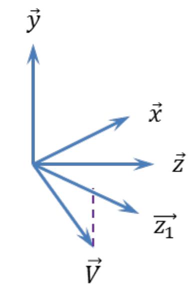
Question 2

Même question avec $\mathcal{B} = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$, $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z})$, $\alpha = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_1}\right)$, $\beta = \left(\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{V}\right)$.



Question 3

Même question avec $\mathcal{B} = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$, $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z})$, $\alpha = \left(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{V}\right)$, $\beta = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_1}\right)$.

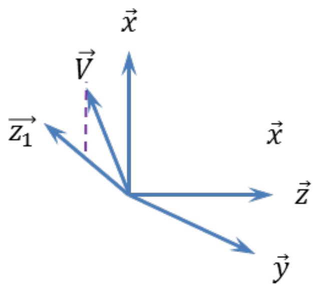


Question 4

Même question avec $\mathcal{B} = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$, $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z_1})$, $\alpha = \left(\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{V}\right)$, $\beta = \left(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{z_1}\right)$.

Question 5

Même question avec $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$, $\mathscr{B}_1 = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$, $\alpha = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{V}\right)$, $\beta = \left(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{z_1}\right)$.



Question 6

Même question avec $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$, $\mathscr{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z}\right)$, $\alpha = \left(\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{V}\right)$, $\beta = \left(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y_1}\right)$.