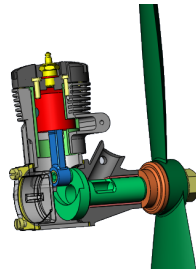


CI 2 – CINÉMATIQUE : MODÉLISATION, PRÉVISION ET VÉRIFICATION DU COMPORTEMENT CINÉMATIQUES DES SYSTÈMES

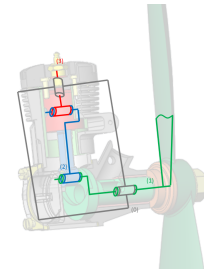
CHAPITRE 2 – CINÉMATIQUE DU POINT DANS UN SOLIDE EN MOUVEMENT



Trainer Solo Sport [1]



Modèle CAO d'un
moteur de modélisme [2]



Modélisation par
schéma cinématique

L'étude des vitesses et des accélérations des points d'un solide est utile pour plusieurs raisons. En phase d'avant projet, par exemple, lors de la phase de conception d'un système mécanique de transmission ou de conversion de mouvement, il est indispensable de connaître la vitesse des solides afin de satisfaire à un cahier des charges.

En phase de dimensionnement des produits, certains composants peuvent être dimensionnés en fonction de la vitesse de fonctionnement du système. Dans d'autres cas, la cinématique est un préalable aux études de dynamique.

Problématique

PROBLÉMATIQUE :

- Comment calculer la vitesse et l'accélération d'un point d'un solide ?
- Comment établir la loi entrée – sortie d'un mécanisme ?

Savoir

SAVOIRS :

- Déterminer la trajectoire d'un point par rapport à un autre solide
- Déterminer les vecteurs vitesse et accélération d'un solide par rapport à un autre solide.
- Dériver des vecteurs

Ce document est en évolution permanente. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.

1	Trajectoire d'un point dans un mécanisme	2
2	Vecteurs vitesses	3
2.1	Vitesse d'un point appartenant à un solide	3
2.2	Vitesse instantanée de rotation	4
2.3	Dérivation vectorielle.....	5
2.4	Calcul de la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée.....	8

3 Accélération d'un point appartenant à un solide 9

1 Trajectoire d'un point dans un mécanisme

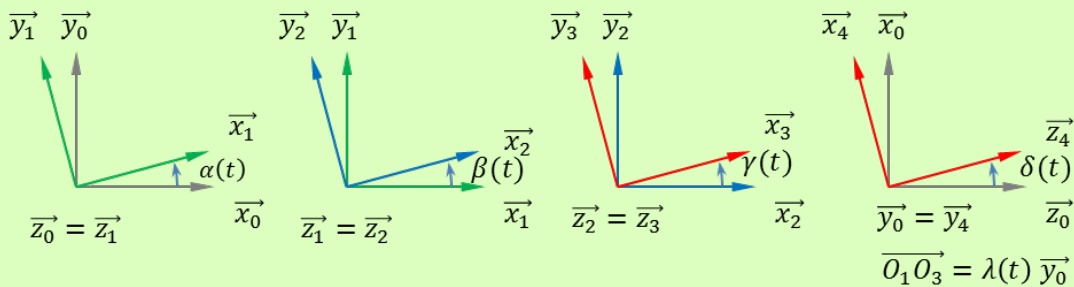
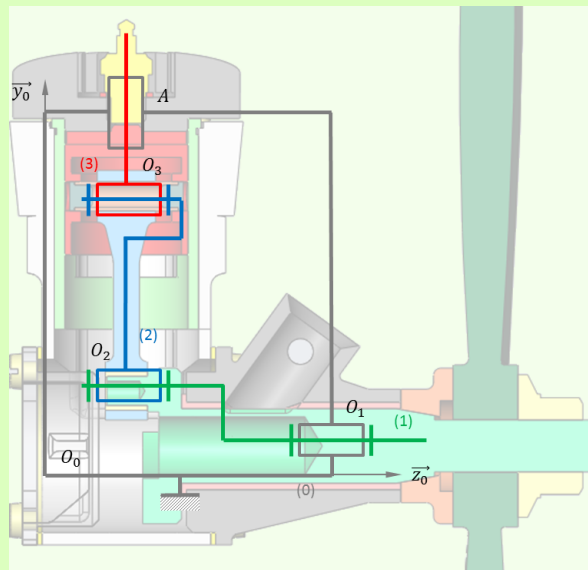
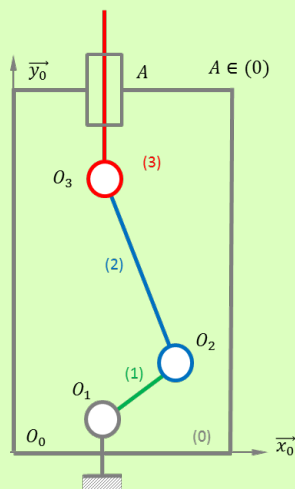
Définition

Trajectoire d'un point dans l'espace

Soit un point P se déplaçant dans un repère \mathcal{R}_0 . La trajectoire du point P est définie par la courbe $\mathcal{C}(t)$ paramétrée par le temps t . On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \overrightarrow{OM(t)} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = x(t)\vec{x}_0 + y(t)\vec{y}_0 + z(t)\vec{z}_0$$

Moteur de modélisme



Exemple

Position du point O_1 par rapport au point O_0 dans le repère \mathcal{R}_0 :

$$\overrightarrow{O_0O_1}(t) = a\vec{x}_0 + b\vec{y}_0 + c\vec{z}_0$$

Exemple

Position du point O_2 par rapport au point O_1 dans le repère \mathcal{R}_1 :

$$\overrightarrow{O_1 O_2}(t) = d \vec{x}_1$$

Le point O_2 est donc immobile dans le repère \mathcal{R}_1 .

Position du point O_2 par rapport au point O_1 dans le repère \mathcal{R}_0 :

$$\overrightarrow{O_1 O_2}(t) = d \vec{x}_1 = d \cos \alpha(t) \vec{x}_0 + d \sin \alpha(t) \vec{y}_0$$

Le point O_2 décrit donc un cercle dans le repère \mathcal{R}_0 .

2 Vecteurs vitesses

2.1 Vitesse d'un point appartenant à un solide

Définition

Vitesse d'un point appartenant à un solide

Soit un solide S_0 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_0 (O_0; \vec{x}_0; \vec{y}_0; \vec{z}_0)$. Soit un solide S_1 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1, (O_1; \vec{x}_1; \vec{y}_1; \vec{z}_1)$. Le solide S_1 est en mouvement par rapport au solide S_0 .

Soit un point P appartenant au solide S_1 . La vitesse du point P appartenant au solide S_1 par rapport au solide S_0 se calcule donc ainsi :

$$\overrightarrow{V(P \in S_1 / S_0)}(t) = \left[\frac{d \overrightarrow{OP}(t)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

Attention

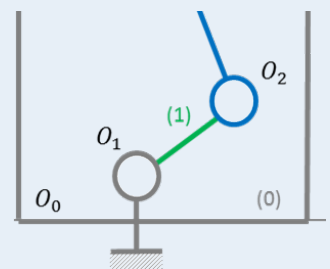


- Attention à respecter rigoureusement la notation.
- La vitesse dépend du point d'application.

Remarque

Lorsqu'un point est confondu pour deux solides (centre d'une liaison pivot ou d'une liaison rotule par exemple) les vitesses sont égales ainsi, ici :

$$\overrightarrow{V(O_2 \in S_1 / S_0)}(t) = \overrightarrow{V(O_2 \in S_2 / S_0)}(t)$$



Expression de la vitesse du point O_2 appartenant à S_2 dans le repère \mathcal{R}_0 .

$$\overrightarrow{V(O_2 \in S_2/S_0)}(t) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0O_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{O_0O_1}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}}_{\vec{0}} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

$$\overrightarrow{V(O_2 \in S_2/S_0)}(t) = \left[\frac{d \, d\vec{x}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = d \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = d \left[\frac{d(\cos \alpha(t)\vec{x}_0 + \sin \alpha(t)\vec{y}_0)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

$$\overrightarrow{V(O_2 \in S_2/S_0)}(t) = d \left[\frac{d \cos \alpha(t)}{dt} \cdot \vec{x}_0 + \cos \alpha(t) \cdot \underbrace{\frac{d\vec{x}_0}{dt}}_{\vec{0}} + \frac{d \sin \alpha(t)}{dt} \cdot \vec{y}_0 + \sin \alpha(t) \cdot \underbrace{\frac{d\vec{y}_0}{dt}}_{\vec{0}} \right]$$

$$\overrightarrow{V(O_2 \in S_2/S_0)}(t) = d \left[-\dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) \cdot \vec{x}_0 + \dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t) \cdot \vec{y}_0 \right] = d \dot{\alpha}(t) \vec{y}_1$$

Exemple

2.2 Vitesse instantanée de rotation

Vitesse instantanée de rotation

Soit un solide S_0 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_0 (O_0; \vec{x}_0; \vec{y}_0; \vec{z}_0)$. Soit un solide S_1 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1, (O_1; \vec{x}_1; \vec{y}_1; \vec{z}_1)$. Le solide S_1 est en mouvement par rapport au solide S_0 .

Les 3 rotations sont paramétrées par les angles d'Euler $(\psi; \vec{z}_0), (\theta; \vec{u}), (\varphi; \vec{z}_1)$.

On appelle $\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$ le vecteur défini ainsi :

$$\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\psi} \cdot \vec{z}_0 + \dot{\theta} \cdot \vec{u} + \dot{\varphi} \cdot \vec{z}_1$$

Définition

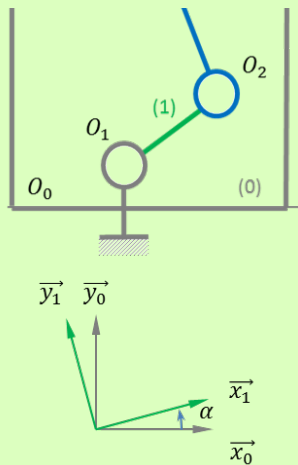
- Attention aux dérivées : $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$ sont les dérivées des positions angulaires. Elles sont donc exprimées en rad/s .
- Le vecteur instantané de rotation est indépendant du point d'application.
- On a la relation suivante :

$$\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = -\overrightarrow{\Omega(S_0/S_1)}$$

Remarque

Exemple

Calcul de $\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)}$



Lorsque deux solides sont en liaison et que cette dernière est paramétrée, la détermination de $\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)}$ est immédiate :

$$\overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0$$

De même,

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/S_1)} = \dot{\beta} \vec{z}_0$$

2.3 Dérivation vectorielle

Calcul de $\overrightarrow{V(O_2 \in S_2/S_0)}(t)$.

On a vu que pour calculer ce vecteur, il était nécessaire de :

1. utiliser le théorème de Chasles pour exprimer le vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$;
2. projeter le vecteur \vec{x}_1 dans le repère \mathcal{R}_0 pour pouvoir le dériver ;
3. dériver ensuite l'expression obtenue.

Cette procédure s'avère donc très calculatoire et va devenir très lourde en calcul dès lors que le nombre de solides et de projections vont se multiplier.

Calculons par exemple $\overrightarrow{V(O_3 \in S_3/S_0)}(t)$.

D'une part,

$$\overrightarrow{V(O_3 \in S_3/S_0)}(t) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1O_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}}_{= \vec{0}} + \left[\frac{d\overrightarrow{AO_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = -\dot{\lambda} \vec{y}_0$$

D'autre part,

$$\overrightarrow{V(O_3 \in S_3/S_0)}(t) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1O_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}}_{\overrightarrow{V(O_2 \in S_2/S_0)}(t)} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_2O_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

Calculons donc $\left[\frac{d\overrightarrow{O_2O_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$.

$$\left[\frac{d\overrightarrow{O_2O_3}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d(f\vec{x}_2)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = f \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

Exemple

Pour dériver \vec{x}_2 , il est alors nécessaire de le projeter dans \mathcal{R}_0 :

$$\vec{x}_2 = \cos \beta \vec{x}_1 + \sin \beta \vec{y}_1 = \cos \beta (\cos \alpha \vec{x}_0 + \sin \alpha \vec{y}_0) + \sin \beta (\cos \alpha \vec{y}_0 - \sin \alpha \vec{x}_0)$$

$$\vec{x}_2 = \cos \beta \cos \alpha \vec{x}_0 + \cos \beta \sin \alpha \vec{y}_0 + \sin \beta \cos \alpha \vec{y}_0 - \sin \beta \sin \alpha \vec{x}_0$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} &= -\dot{\beta} \sin \beta \cos \alpha \vec{x}_0 - \dot{\alpha} \cos \beta \sin \alpha \vec{x}_0 \\ &\quad -\dot{\beta} \sin \beta \sin \alpha \vec{y}_0 + \dot{\alpha} \cos \beta \cos \alpha \vec{y}_0 \\ &\quad +\dot{\beta} \cos \beta \cos \alpha \vec{y}_0 - \dot{\alpha} \sin \beta \sin \alpha \vec{y}_0 \\ &\quad -\dot{\beta} \cos \beta \sin \alpha \vec{x}_0 - \dot{\alpha} \sin \beta \sin \alpha \vec{x}_0 \end{aligned}$$

Reste ensuite à substituer les termes pour calculer $\overrightarrow{V(O_3 \in S_3/S_0)}(t)$.

Cette expression bien que lourde serait néanmoins simplifiable en l'exprimant dans la base adéquate.

NB : dans ce cas, la chaîne de solides est fermée, il faudrait identifier les deux expressions de $\overrightarrow{V(O_3 \in S_3/S_0)}(t)$. Les projections suivant \vec{x}_0 sont donc nulles.

Exemple

En cinématique, le recours à la dérivation dans des bases différentes est systématique. Dans la mesure du possible, on évitera toujours de projeter les vecteurs dans la base fixe. On conservera ainsi des expressions vectorielles simplifiées. La méthode pour calculer des dérivées sera donc la suivante.

Dérivation vectorielle

Soient \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}_1 deux repères orthonormés directs. Soit \vec{v} un vecteur de l'espace. On note $\overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}$ le vecteur instantané de rotation permettant d'exprimer les rotations entre chacune des deux bases.

La dérivée d'un vecteur dans une base mobile se calcule donc ainsi :

$$\left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)} \wedge \vec{v}$$

Résultat

Calcul du produit vectoriel – Méthode analytique

Soient \vec{v}_1 et \vec{v}_2 deux vecteurs exprimés dans \mathcal{R}_0 .

On a alors :

$$\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \sin(\vec{v}_1; \vec{v}_2)$$

Méthode

Le vecteur résultant du produit vectoriel de ces deux vecteurs est orthogonal au plan formé par \vec{v}_1 et \vec{v}_2 .
 \vec{v}_1 , \vec{v}_2 et le vecteur résultant doivent former un trièdre direct.

On a :

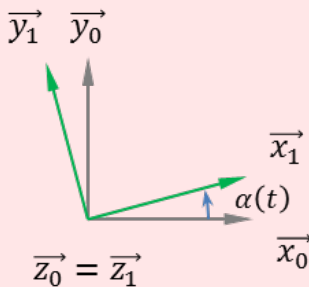
$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} \wedge \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = \begin{bmatrix} v_{1y} v_{2z} - v_{1z} v_{2y} \\ -(v_{1x} v_{2z} - v_{1z} v_{2x}) \\ v_{1x} v_{2y} - v_{1y} v_{2x} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0}$$



Pour réaliser le produit vectoriel, les vecteurs doivent être exprimés dans le même repère.

Calcul du produit vectoriel – Méthode graphique

Cette méthode sera utilisée lors du produit vectoriel entre vecteurs normés. Le calcul du produit vectoriel est alors déduit de la lecture des figures planes :



$$\begin{aligned} \vec{x}_0 \wedge \vec{y}_0 &= \vec{z}_0 \\ \vec{x}_0 \wedge \vec{x}_1 &= \underbrace{+}_{\vec{x}_0 \text{ et } \vec{x}_1} \underbrace{\sin \alpha(t)}_{\text{angle entre } \vec{x}_0 \text{ et } \vec{x}_1} \underbrace{\vec{z}_0}_{\text{Vecteur normal à } \vec{x}_0 \text{ et } \vec{x}_1} \\ \vec{y}_0 \wedge \vec{x}_1 &= -\sin(\pi/2 - \alpha(t)) \vec{z}_0 = -\cos \alpha(t) \vec{z}_0 \end{aligned}$$

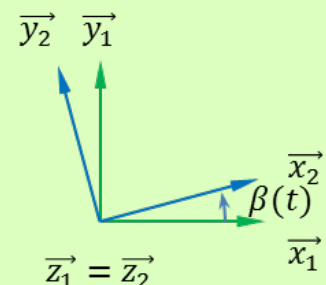
Calcul de $\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$ et $\left[\frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$. On donne :

$$\overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \quad \overrightarrow{\Omega(S_3/S_0)} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta} + \dot{\gamma}) \vec{z}_0$$

$$\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \underbrace{\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_2}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega(S_2/S_0)} \wedge \vec{x}_2 = ((\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0) \wedge \vec{x}_2$$

On utilise alors la seconde figure plane où figurent $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ et \vec{x}_2 .

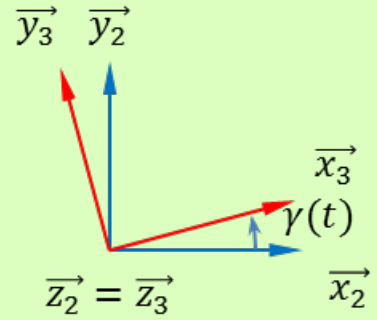
$$\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_2 = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2$$



Exemple

$$\left[\frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \underbrace{\left[\frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_3}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega(S_3/S_0)} \wedge \vec{x}_3$$

$$\left[\frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = ((\dot{\alpha} + \dot{\beta} + \dot{\gamma}) \vec{z}_0) \wedge \vec{x}_3 = (\dot{\alpha} + \dot{\beta} + \dot{\gamma}) \vec{y}_3$$



Méthode

2.4 Calcul de la loi Entrée – Sortie dans une chaîne de solides fermée

Un système se présentant sous forme d'une chaîne de solide fermée a pour but de transformer un mouvement. On s'intéresse alors pour cela à la relation cinématique liant le mouvement d'entrée du système et le mouvement de sortie. On écrit pour cela une **fermeture de chaîne géométrique**. Pour cela :

1. paramétrer le mécanisme ;
2. identifier la grandeur d'entrée et de sortie ;
3. à l'aide du théorème de Chasles, exprimer le vecteur nul en fonction des vecteurs liant le centre de chacune des liaisons ;
4. projeter la relation vectorielle sur une des bases ;
5. combiner les relations pour exprimer la sortie en fonction de l'entrée ;
6. dériver si besoin pour avoir le lien entre les vitesses.

Exemple

Le système a été paramétré.

Dans le cas d'un système bielle-manivelle comme le moteur de modélisme, on veut connaître la vitesse de rotation de l'hélice $\dot{\alpha}(t)$ en fonction de la vitesse de translation du piston $\dot{\lambda}(t)$.

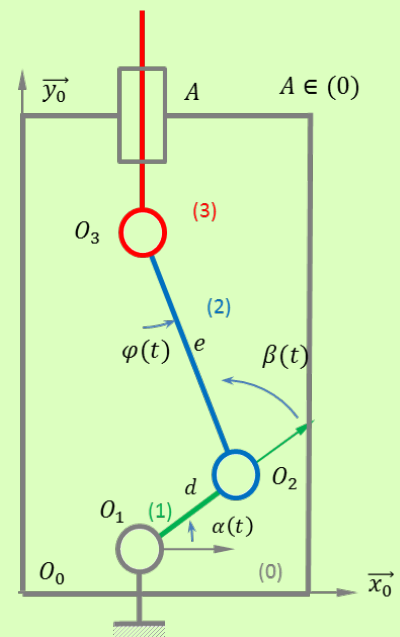
La fermeture géométrique est donc la suivante :

$$\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_1} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow d\vec{x}_1 + e\vec{x}_2 - \lambda\vec{y}_0 = \vec{0}$$

Avant de projeter la relation vectorielle sur le repère \mathcal{R}_0 , exprimons l'angle $\varphi(t)$ en fonction de $\alpha(t)$ et $\beta(t)$:

$$\varphi + (\pi - \beta) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \pi \Leftrightarrow \varphi = \beta + \alpha - \frac{\pi}{2}$$



En projetant l'équation vectorielle sur \vec{x}_0 et \vec{y}_0 on a :

$$\begin{cases} d \cos \alpha - e \sin \varphi = 0 \\ d \sin \alpha + e \cos \varphi - \lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin \varphi = \frac{d \cos \alpha}{e} \\ \cos \varphi = \frac{\lambda - d \sin \alpha}{e} \end{cases}$$

En passant au carré et en sommant les deux expressions, on a donc :

$$\left(\frac{d \cos \alpha}{e} \right)^2 + \left(\frac{\lambda - d \sin \alpha}{e} \right)^2 = 1 \iff d^2 \cos^2 \alpha + \lambda^2 + d^2 \sin^2 \alpha + 2d\lambda \sin \alpha = e^2$$

$$\iff d^2 + \lambda^2 + 2d\lambda \sin \alpha = e^2$$

Pour exprimer λ en fonction de α , il faut donc résoudre une équation du second degré. Pour exprimer α en fonction de λ , la méthode est directe.

Exemple

Méthodes pour manipuler les systèmes équations :

1. Pour supprimer λ : on met les deux équations sous la forme $\lambda =$ et on fait le rapport des deux équations.
2. Pour supprimer φ : on met une équation sous la forme $\cos \varphi =$ et la seconde sous la forme $\cos \varphi =$ et on utilise la relation $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$.
3. Dans d'autres cas, on peut avoir à utiliser l'expression de la tangente.

Méthode

3 Accélération d'un point appartenant à un solide

Accélération d'un point appartenant à un solide

Soit un solide S_0 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_0 (O_0; \vec{x}_0; \vec{y}_0; \vec{z}_0)$. Soit un solide S_1 auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1, (O_1; \vec{x}_1; \vec{y}_1; \vec{z}_1)$. Le solide S_1 est en mouvement par rapport au solide S_0 .

Soit un point P appartenant au solide S_1 . L'accélération du point P appartenant au solide S_1 par rapport au solide S_0 se calcule donc ainsi :

$$\overrightarrow{\Gamma(P \in S_1 / S_0)}(t) = \left[\frac{d \left(\overrightarrow{V(P \in S_1 / S_0)}(t) \right)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

Définition

Calcul de $\overrightarrow{\Gamma(O_2 \in S_1 / S_0)}(t)$

$$\overrightarrow{\Gamma(O_2 \in S_1 / S_0)}(t) = \left[\frac{\overrightarrow{V(O_2 \in S_1 / S_0)}(t)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d \dot{\vec{y}}_1}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

Exemple

Exemple

$$\overrightarrow{\Gamma(O_2 \in S_1/S_0)}(t) = d\ddot{a}\overrightarrow{y_1} - d\dot{a}^2\overrightarrow{x_1}$$

Références

- [1] Trainer Solo Sport, *Avio et Tiger*, <http://www.net-loisirs.com/trainer-solo-sport-p1155.html>.
- [2] Université Bretagne Sud, *Moteur de modélisme* http://foad.univ-ubs.fr/file.php/1355/TP_meca3d/Moteur_modelisme.zip