

Unesp - Universidade Estadual Paulista

Departamento de Matemática e Computação - DMC

PósMAC

Relatório 2º Trabalho Prático

Aluno: Gilmar Francisco de Oliveira Santos

Professora Responsável: Analice Costacurta Brandi

Abril

2020

Sumário

1	Resumo	1
2	Equações Diferenciais Parciais	2
2.1	Ordem e grau de uma Equação Diferencial Parcial	2
2.2	Equações Parabólicas	3
2.2.1	Método de Euler Explícito	5
2.2.2	Método de Euler Implícito	6
2.2.3	Método de Crank-Nicolson	8
3	Consistência	10
4	Estabilidade	12
4.1	Crítério de Von Neuman	12
5	Problemas Práticos	19
5.1	Problema 1	19
5.2	Problema 2	28
6	Conclusão	36
	Bibliografia	37

1 Resumo

Trabalho prático visando o exercício de métodos numéricos para solução de Equações Diferenciais Parciais(EDPs) do tipo Parabólicas.

A análise numérica e computacional é uma área da Matemática na qual se encontram vários e diversificados métodos que se constituem em ferramentas para se determinar, exata ou aproximadamente, soluções numéricas de problemas modelados matematicamente. Em um campo de aplicação mais amplo, a busca de soluções aproximadas tem sido muito importante na resolução destes problemas quando não existe a possibilidade de resolvê-los por técnicas exatas.

Neste trabalho a linguagem Python3 é utilizada na implementação dos métodos numéricos. Python é uma linguagem de programação interpretada, orientada à objeto, de alto nível e de semântica dinâmica. Possui tipagem dinâmica, é rápida, e sua simplicidade a torna atraente e produtiva.

Possui uma infinidade de bibliotecas e hoje é uma das linguagens mais utilizadas no mundo. Para computação científica Python possui ótimas bibliotecas, as utilizadas neste trabalho serão: NumPy(processamento rápido de matrizes) e Matplotlib(plotagem de gráficos).

2 Equações Diferenciais Parciais

Uma equação diferencial parcial (EDP) é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes x, y, z, t, \dots e derivadas parciais de uma função (variável dependente) $u = u(x, y, z, t, \dots)$. De maneira mais precisa, uma EDP em n variáveis independentes é uma equação que apresenta o seguinte formato:

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_n}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}) = 0 \quad (1)$$

onde $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, sendo Ω um subconjunto aberto de R^n , F é uma função dada e $u(x)$ é a função que se quer determinar.

2.1 Ordem e grau de uma Equação Diferencial Parcial

A ordem de uma equação diferencial parcial é a ordem da mais alta derivada que ocorre na equação e o grau é o expoente da derivada mais alta quando a equação está escrita em uma forma semelhante a uma função polinomial em que as potências fazem o papel das derivadas da ordem respectiva.

Uma diferença importante entre EDOs e EDPs é a informação suplementar necessária para a unicidade de solução. Por exemplo, na solução de uma EDO linear, tem-se uma ou mais constantes arbitrárias: podemos determinar estas constantes impondo condições iniciais, isto é, fixando os valores da solução e de suas derivadas até certa ordem em um determinado ponto; podemos também obter unicidade no caso de intervalos finitos, impondo condições nos extremos, as chamadas condições de contorno. A situação para as EDPs é fundamentalmente diferente: mesmo no caso linear, a solução geral (quando é possível determiná-la), envolve funções arbitrárias das variáveis independentes, de modo que existe um grau de generalidade muito maior com relação à forma da solução. O espaço das variáveis independentes é, neste caso, multidimensional: procuramos soluções definidas em um aberto $\Omega \subseteq R^n$.

Exemplos de Equações Diferenciais Parciais

1. Equação do Calor: $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
2. Equação do Calor: $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$
3. Equação da Onda: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
4. Equação da Onda: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$

5. Equação de Laplace : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
6. Equação de Laplace : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$
7. $\frac{\partial u}{\partial x} = x + y$
8. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \text{sen}(xy)$

No exemplo anterior, as equações dos itens 1, 2, 3, 4 e 5 são de segunda ordem, a do item 6 é de primeira ordem e a do item 7 é de terceira ordem.

2.2 Equações Parabólicas

Representam problemas de evolução (não-estacionários) e não propagam descontinuidades, isto é, a solução de uma equação parabólica é sempre suave dentro do domínio de solução, mesmo quando a condição inicial não é.

Em 2D, temos que x representa a variável espacial e y a variável temporal.

É comum encontrar equações parabólicas do tipo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = s(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r(x, t), & s(x, t) > 0, a < x < b, 0 < t < T \\ u(x, 0) = \varphi(x), & a \leq x \leq b \\ u(a, t) = f(t), & 0 < t < T \\ u(b, t) = g(t), & 0 < t < T \end{cases} \quad (2)$$

A seguir temos a discretização do domínio para resolver numericamente a equação (2):

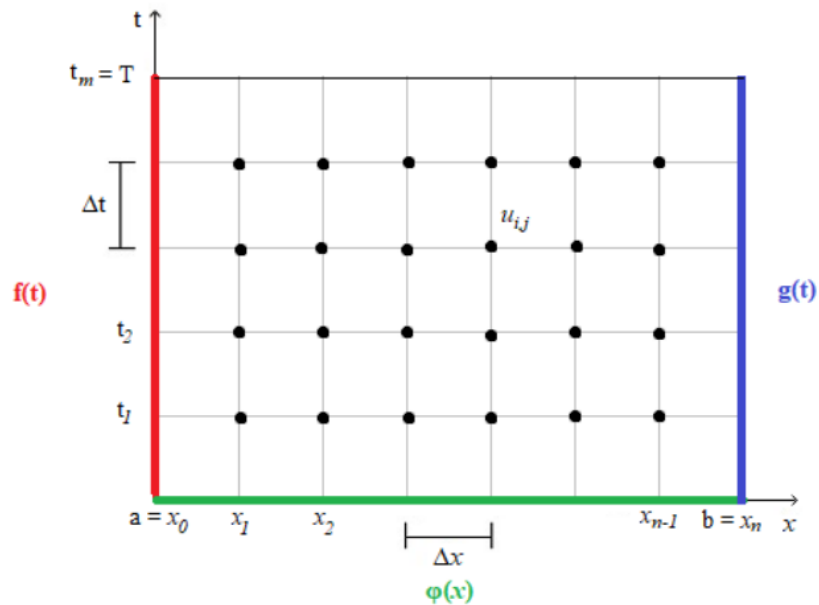


Figura 1: Discretização do domínio para equação geral.

Se $s(x, t)$ é contínua e limitada e $r(x, t, u, u_x)$ é monotonicamente decrescente em u então o problema (2) tem solução única.

Considerando um caso particular de (2), onde $s(x, t) = cte$ e $r(x, t) = 0$, temos então a equação do calor como se segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \alpha > 0, 0 < x < L, 0 < t < T \\ u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = f(t), 0 < t < T \\ u(L, t) = g(t), 0 < t < T \end{array} \right. \quad (3)$$

No caso das equações parabólicas a solução num ponto interior depende de toda condição inicial.

Para podermos construir métodos Numéricos para resolver a equação (3), devemos definir uma discretização como se segue:

$$h = \frac{L}{N}, \quad k = \frac{T}{M}, \quad x_i = ih, \quad t_j = jk$$

Onde N e M são o número de pontos para as discretizações da variável espacial e temporal, respectivamente.

2.2.1 Método de Euler Explícito

Aproximando as derivadas parciais em (3) usando da série de Taylor para construir as diferenças finitas. A derivada temporal é aproximada por diferença avançada no tempo j :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi_i) \quad (4)$$

A derivada espacial é aproximada por diferença centrada de segunda ordem no tempo j :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(t_j, \xi_j) \quad (5)$$

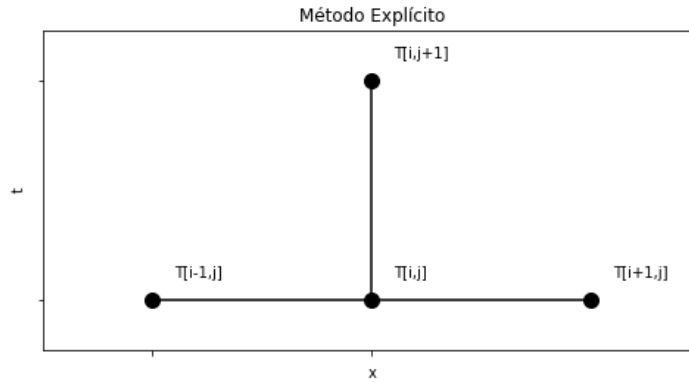


Figura 2: Pontos usados na discretização M. Euler Explícito.

Desprezando o erro de truncamento em (4) e (5) e substituindo em (3), temos:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \alpha \left[\frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} \right]$$

Fazendo $\sigma = \frac{\alpha k}{h^2}$, ficamos com:

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \sigma (u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j)$$

Ficamos então com o método de **Euler Explícito**:

$$u_i^{j+1} = \sigma u_{i-1}^j + (1 - 2\sigma)u_i^j + \sigma u_{i+1}^j \quad (6)$$

onde $\sigma = \frac{\alpha k}{h^2}$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$, $j = 0, 1, \dots, M - 1$

2.2.2 Método de Euler Implícito

Fazendo a derivada temporal em (3) ser aproximada por diferença atrasada no tempo $j + 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi_i) \quad (7)$$

A derivada espacial é aproximada por diferença centrada de segunda ordem no tempo $j + 1$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(t_{j+1}, \xi_{j+1}) \quad (8)$$

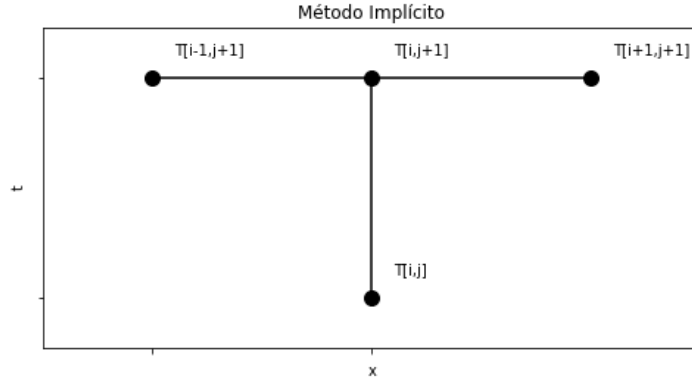


Figura 3: Pontos usados na discretização M. Euler Implícito.

Desprezando o erro de truncamento em (7) e (8) e substituindo em (3), temos:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \alpha \left[\frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2} \right]$$

Fazendo $\sigma = \frac{\alpha k}{h^2}$, ficamos com:

$$u_i^{j+1} = u_i^{j+1} - \sigma (u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1})$$

Ficamos então com o método de **Euler Implícito**:

$$u_i^{j+1} = -\sigma u_{i-1}^{j+1} + (1 + 2\sigma)u_i^{j+1} + \sigma u_{i+1}^{j+1} \quad (9)$$

onde $\sigma = \frac{\alpha k}{h^2}$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$, $j = 0, 1, \dots, M - 1$

A equação (9) sozinha não nos permite determinar os valores de u_i^{j+1} , ao contrário da equação (6). Ocorre então o aparecimento de três incógnitas: u_{i-1}^{j+1} , u_i^{j+1} , u_{i+1}^{j+1} . Portanto,

o valor de $u_i, j+1$ é definido implicitamente pela equação (9). Podemos escrever na forma matricial o sistema de equações na forma $Au = r$:

$$\begin{bmatrix} 1-2\sigma & -\sigma & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\sigma & 1-2\sigma & -\sigma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\sigma & 1-2\sigma & -\sigma & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & -\sigma & 1-2\sigma & -\sigma \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & -\sigma & 1-2\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ u_3^{j+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^{j+1} \\ u_{N-1}^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^j + \sigma u_0^{j+1} \\ u_2^j \\ u_3^j \\ \vdots \\ u_{N-2}^j \\ u_{N-1}^j + \sigma u_N^{j+1} \end{bmatrix}$$

O sistema possui $(N-1)$ equações linearmente independentes e o mesmo número de incógnitas, admitindo, uma única solução. Sua resolução fornece os valores de u_i^{j+1} , em $1 \leq i \leq N-1$

2.2.3 Método de Crank-Nicolson

O método discretiza a equação (3) no ponto $(i, j + \frac{1}{2})$ como segue:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{j+\frac{1}{2}} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\delta t}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^{j+1} \right]$$

Substituindo essas aproximações na equação (3) e reagrupando os termos temos:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\delta t} = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{(\delta x)^2} + \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{(\delta x)^2} \right] \quad (10)$$

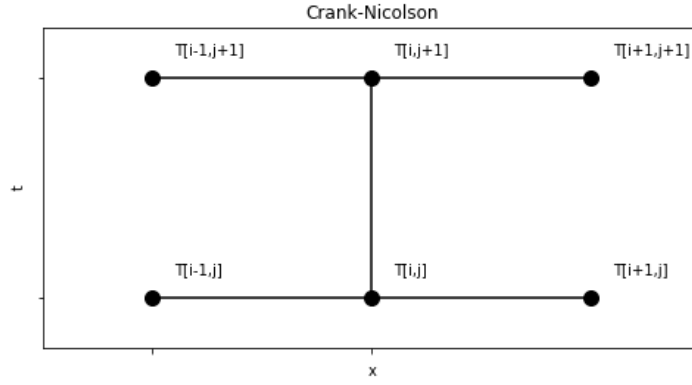


Figura 4: Pontos usados na discretização M. de Crank Nicolson.

Podemos então reescrever (10) como:

$$u_i^{j+1} - u_i^j = \frac{1}{2} \frac{\alpha \delta t}{(\delta x)^2} [u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j + u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}]$$

onde $\sigma = \frac{\alpha \delta t}{(\delta x)^2}$, ficamos então com:

$$-\frac{\sigma}{2} u_{i-1}^{j+1} + (1 + \sigma) u_i^{j+1} - \frac{\sigma}{2} u_{i+1}^{j+1} = \frac{\sigma}{2} u_{i-1}^j + (1 - \sigma) u_i^j + \frac{\sigma}{2} u_{i+1}^j$$

Podemos então escrever a solução aproximada U_i^j como:

$$-\sigma U_{i-1}^{j+1} + (2 + 2\sigma) U_i^{j+1} - \sigma U_{i+1}^{j+1} = \sigma U_{i-1}^j + (2 - 2\sigma) U_i^j + \sigma U_{i+1}^j, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-1.$$

Escrevendo na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2+2\sigma & -\sigma & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\sigma & 2+2\sigma & -\sigma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\sigma & 2+2\sigma & -\sigma & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & -\sigma & 2+2\sigma & -\sigma \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & -\sigma & 2+2\sigma \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^{j+1} \\ U_2^{j+1} \\ U_3^{j+1} \\ \vdots \\ U_{N-2}^{j+1} \\ U_{N-1}^{j+1} \end{bmatrix}}_{U^{j+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2+2\sigma & -\sigma & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\sigma & 2+2\sigma & -\sigma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\sigma & 2+2\sigma & -\sigma & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & -\sigma & 2+2\sigma & -\sigma \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & -\sigma & 2+2\sigma \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^j \\ U_2^j \\ U_3^j \\ \vdots \\ U_{N-2}^j \\ U_{N-1}^j \end{bmatrix}}_{U^j} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma U_0^{j+1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma u_N^{j+1} \end{bmatrix}}_{c^j}$$

Ou utilizando da notação vetorial, podemos escrever

$$AU^{j+1} = BU^j + c^j$$

Para se obter a solução em cada estágio é preciso resolver um sistema tridiagonal. Note que, sendo A diagonalmente dominante, o problema discreto tem solução única. Assim temos:

$$\begin{cases} AU^{j+1} = BU^j + c^j \\ AU^{j+1} = BU^j + c^j + \tau^j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U^{j+1} = A^{-1}BU^j + A^{-1}c^j \\ u^{j+1} = A^{-1}Bu^j + A^{-1}c^j + A^{-1}\tau^j \end{cases} \Rightarrow \\
 \Rightarrow e_{j+1} = (A^{-1}B)e_j + A^{-1}\tau^j \Rightarrow \|e_{j+1}\| \leq \|A^{-1}B\| \|e_j\| + \|A^{-1}\| \|\tau^j\|$$

Logo, se $\|A^{-1}B\| \leq 1$ o método é estável. Como A é inversível, temos estabilidade se todos os autovalores da matriz de amplificação $C = A^{-1}B$ estão no disco unitário. Calculando o erro de truncamento local temos que o método é consistente de ordem 2.

3 Consistência

A seguir iremos verificar a consistência para o Método de Euler Explícito, que acontece de modo análogo no Implícito e consequentemente também no Método de Crank-Nicolson.

Considerando a equação (3) e a aproximação:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \alpha \left[\frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} \right]$$

que leva em (6), usando da série de Taylor e derivando na variável temporal, t , temos:

$$u(x_i, t) = u(x_i, t_j) + (t - t_j) \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{(t - t_j)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi_j)$$

Com $t = t_{j+1}(t_j + k)$

$$u_i^{j+1} = u_i^j + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{(k)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi_j) \quad (11)$$

Já derivando na variável espacial, x , temos:

$$\begin{aligned} u(x, t_j) = u(x_i, t_j) + (x - x_i) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \\ + \frac{(x - x_i)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j) + \frac{(x - x_i)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \end{aligned}$$

Com $x = x_{i-1}(x_i - h)$

$$u_{i-1}^j = u_i^j - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{(h)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) - \frac{(h)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j) + \frac{(h)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \quad (12)$$

Com $x = x_{i+1}(x_i + h)$

$$u_{i+1}^j = u_i^j + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{(h)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{(h)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j) + \frac{(h)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \quad (13)$$

Substituindo (11), (12), (13) em (6), temos:

$$\begin{aligned} u_i^j + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{(k)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi_j) = \\ u_i^j \\ + \sigma \left\{ u_i^j - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{(h)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) - \frac{(h)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j) + \frac{(h)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \right\} \\ - 2u_i^j \\ + \left\{ u_i^j + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{(h)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{(h)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j) + \frac{(h)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \right\} \end{aligned}$$

Podemos então reescrever como:

$$u(x_i, t_j) = \frac{(k)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{h^2}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^*, t_j) \right) \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) - \frac{(k)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi_j) + \alpha \frac{(h)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^*, t_j)$$

onde

$$\text{Equação Original} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j), \quad \text{ETL} = \frac{(k)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi_j) + \alpha \frac{(h)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^*, t_j) \quad (14)$$

Podemos observar que o Erro de Truncamento Local (ETL) é diretamente proporcional a k e h^2 . Logo $ETL \rightarrow 0$, quando $k, h^2 \rightarrow 0 \Rightarrow$ a aproximação é incondicionalmente consistente de ordem 1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

Logo podemos escrever o ETL como:

$$\text{ETL} = -\alpha^2 \frac{k}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, \xi_j) + \alpha \frac{(h)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^*, t_j)$$

Mostrando assim que o erro é diretamente influenciado por $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$. Então conhecendo o comportamento de $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, podemos determinar o comportamento do erro.

4 Estabilidade

Um método é estável se quaisquer erros ou perturbações na solução não são amplificados sem limite. Para problemas transientes a estabilidade do método numérico garante que a solução numérica seja limitada.

Tipos:

1. **Condicionalmente estáveis:** estes métodos devem satisfazer uma (ou mais) condição de estabilidade para fornecer soluções estáveis. Em geral, métodos explícitos pertencem a esse grupo de métodos.
2. **Incondicionalmente estáveis:** não necessitam satisfazer qualquer critério de estabilidade para produzirem soluções estáveis. Em geral, métodos implícitos pertencem a essa categoria.
3. **Incondicionalmente instáveis:** são métodos instáveis e devem ser evitados.

4.1 Critério de Von Neumann

É um critério simples e muito utilizado para determinar a estabilidade de um método numérico. É baseado no princípio da superposição, ou seja, na observação de que o erro global é o somatório de erros mais simples também chamados harmônicos. Esse processo é baseado na expansão de uma função em Série de Fourier. A estratégia do critério de Von Neumann para determinação da estabilidade é a de examinar o resultado da programação de um dado modo de Fourier em uma linha ou estágio subsequente j . Se houver amplificação desse harmônico dizemos que o método é instável, se houve amortecimento será estável.

Considerando a equação diferencial linear:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (15)$$

Se ε é um parâmetro de perturbação, ou seja, $T = \tilde{T} + \varepsilon$, então ε deve satisfazer a equação

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \quad (16)$$

Método de Euler Explícito

Podendo (16) ser aproximada por:

$$\frac{\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j}{\delta t} = \alpha \left[\frac{\varepsilon_{i-1}^j - 2\varepsilon_i^j + \varepsilon_{i+1}^j}{(\delta x)^2} \right] \quad (17)$$

sendo o membro da esquerda aproximado usando diferenças avançadas e o membro da direita usando diferenças centradas. Expandindo $\varepsilon(x)$ numa série de Fourier:

$$e^j(x) = \sum_k \varepsilon_k^j e^{Ikx}, \quad I = \sqrt{-1} \quad (18)$$

Para que o erro não aumente, nenhuma das amplitudes ε_k deve crescer arbitrariamente. Seja k fixo: $\varepsilon^j(x) = \varepsilon_k^j e^{Ikx}$. Então, temos

$$x_i = i\delta x, \quad x_{i+1} = (i+1)\delta x, \quad x_{i-1} = (i-1)\delta x.$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^j &= \varepsilon_j(x_i) = \varepsilon_k^j e^{Iki\delta x} \\ \varepsilon_i^{j+1} &= \varepsilon_{j+1}(x_i) = \varepsilon_k^{j+1} e^{Iki\delta x} \\ \varepsilon_{i-1}^j &= \varepsilon_j(x_{i-1}) = \varepsilon_k^j e^{Ik(i-1)\delta x} = \varepsilon_k^j e^{Iki\delta x} e^{-Ik\delta x} = \varepsilon_k^j e^{-Ik\delta x} \\ \varepsilon_{i+1}^j &= \varepsilon_j(x_{i+1}) = \varepsilon_k^j e^{Ik(i+1)\delta x} = \varepsilon_k^j e^{Iki\delta x} e^{Ik\delta x} = \varepsilon_k^j e^{Ik\delta x} \end{aligned}$$

Substituindo esses valores em (17), temos:

$$\frac{\varepsilon_k^{j+1} e^{Iki\delta x} - \varepsilon_k^j e^{Iki\delta x}}{\delta t} = \alpha \left[\frac{\varepsilon_k^j e^{-Ik\delta x} - 2\varepsilon_k^j e^{Iki\delta x} + \varepsilon_k^j e^{Iki\delta x} e^{Ik\delta x}}{(\delta x)^2} \right]$$

Dividindo essa equação por $e^{Iki\delta x}$, temos:

$$\frac{\varepsilon_k^{j+1} - \varepsilon_k^j}{\delta t} = \alpha \left[\frac{\varepsilon_k^j e^{-Ik\delta x} - 2\varepsilon_k^j + \varepsilon_k^j e^{Ik\delta x}}{(\delta x)^2} \right]$$

colocando ε_k^j em evidência temos:

$$\frac{\varepsilon_k^{j+1} - \varepsilon_k^j}{\delta t} = \alpha \left[\frac{e^{-Ik\delta x} - 2 + e^{Ik\delta x}}{(\delta x)^2} \right] \varepsilon_k^j \quad (19)$$

Podemos então reescrever (19) usando a Identidade e Relações de Euler:

$$\varepsilon_k^{j+1} = \varepsilon_k^j + \alpha \delta t \left[\frac{-2 + e^{Ik\delta x} + e^{-Ik\delta x}}{(\delta x)^2} \right] \varepsilon_k^j$$

onde $-2 + e^{Ik\delta x} + e^{-Ik\delta x} = -2 + 2 \cos(k\delta x)$ e colando ε_k^j em evidência, ficamos então com:

$$\varepsilon_k^{j+1} = \varepsilon_k^j \left[1 + \alpha \frac{\delta t}{(\delta x)^2} (-2 + 2 \cos(k\delta x)) \right]$$

e então $-2 + 2 \cos(k\delta x) = -4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k\delta x}{2} \right)$, ficamos com:

$$\varepsilon_k^{j+1} = \varepsilon_k^j \left[1 + \alpha \frac{\delta t}{(\delta x)^2} \left(-4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k\delta x}{2} \right) \right) \right]$$

Finalmente, dividindo a equação por ε_k^j , temos:

$$\frac{\varepsilon_k^{j+1}}{\varepsilon_k^j} = 1 + \alpha \frac{\delta t}{(\delta x)^2} \left(-4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k\delta x}{2} \right) \right) \quad (20)$$

Impomos $\left| \frac{\varepsilon_k^{j+1}}{\varepsilon_k^j} \right| \leq 1$ ao fator de amplificação, temos então que

$$\begin{aligned} \left| 1 - \frac{4\alpha\delta t}{(\delta x)^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k\delta x}{2} \right) \right| &\leq 1 &\Rightarrow \\ 1 - \frac{4\alpha\delta t}{(\delta x)^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k\delta x}{2} \right) &\geq -1 &\Rightarrow \\ \frac{-4\alpha\delta t}{(\delta x)^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k\delta x}{2} \right) &\geq -2 &\Rightarrow \\ \frac{\alpha\delta t}{(\delta x)^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k\delta x}{2} \right) &\leq \frac{1}{2} &\Rightarrow \\ \text{como } \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k\delta x}{2} \right) &\leq 1 &\Rightarrow \\ \frac{\alpha\delta t}{(\delta x)^2} &\leq \frac{1}{2} &\Rightarrow \\ \delta t &\leq \frac{1}{2} \frac{(\delta x)^2}{\alpha} \end{aligned}$$

Sendo então $\delta t \leq \frac{1}{2} \frac{(\delta x)^2}{\alpha}$ a Condição de Estabilidade segundo Critério de Von Neumann para o método de Euler Explícito.

Método de Euler Implícito

Agora aproximando (16) por:

$$\frac{\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j}{\delta t} = \alpha \left[\frac{\varepsilon_{i-1}^{j+1} - 2\varepsilon_i^{j+1} + \varepsilon_{i+1}^{j+1}}{(\delta x)^2} \right] \quad (21)$$

sendo o membro da esquerda aproximado usando diferenças avançadas e o membro da direita usando diferenças centradas. Expandindo $\varepsilon(x)$ numa série de Fourier:

$$e^j(x) = \sum_k \varepsilon_k^j e^{Ikx}, \quad I = \sqrt{-1} \quad (22)$$

Para que o erro não aumente, nenhuma das amplitudes ε_k não deve crescer arbitrariamente. Seja k fixo: $\varepsilon^j(x) = \varepsilon_k^j e^{Ikx}$. Então, temos

$$x_i = i\delta x, \quad x_{i+1} = (i+1)\delta x, \quad x_{i-1} = (i-1)\delta x.$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^j &= \varepsilon^j(x_i) = \varepsilon_k^j e^{Iki\delta x} \\ \varepsilon_i^{j+1} &= \varepsilon^{j+1}(x_i) = \varepsilon_k^{j+1} e^{Iki\delta x} \\ \varepsilon_{i-1}^{j+1} &= \varepsilon^{j+1}(x_{i-1}) = \varepsilon_k^{j+1} e^{Ik(i-1)\delta x} = \varepsilon_k^{j+1} e^{Iki\delta x} e^{-Ik\delta x} = \varepsilon_i^{j+1} e^{-Ik\delta x} \\ \varepsilon_{i+1}^{j+1} &= \varepsilon^{j+1}(x_{i+1}) = \varepsilon_k^{j+1} e^{Ik(i+1)\delta x} = \varepsilon_k^{j+1} e^{Iki\delta x} e^{Ik\delta x} = \varepsilon_i^{j+1} e^{Ik\delta x} \end{aligned}$$

Substituindo esses valores em (21), temos:

$$\frac{\varepsilon_k^{j+1} e^{Iki\delta x} - \varepsilon_k^j e^{Iki\delta x}}{\delta t} = \alpha \left[\frac{\varepsilon_k^{j+1} e^{Ik\delta x} e^{-Ik\delta x} - 2\varepsilon_k^{j+1} e^{Iki\delta x} + \varepsilon_k^{j+1} e^{Iki\delta x} e^{Ik\delta x}}{(\delta x)^2} \right]$$

Dividindo essa equação por $e^{Iki\delta x}$, temos:

$$\frac{\varepsilon_k^{j+1} - \varepsilon_k^j}{\delta t} = \alpha \left[\frac{\varepsilon_k^{j+1} e^{-Ik\delta x} - 2\varepsilon_k^{j+1} + \varepsilon_k^{j+1} e^{Ik\delta x}}{(\delta x)^2} \right]$$

colocando ε_k^j em evidência temos:

$$(\varepsilon_k^j) \frac{\varepsilon_k - 1}{\delta t} = \alpha \left[\frac{\varepsilon_k e^{-Ik\delta x} - 2\varepsilon_k + \varepsilon_k e^{Ik\delta x}}{(\delta x)^2} \right] \varepsilon_k^j \quad (23)$$

Podemos então reescrever (23) usando a Identidade e Relações de Euler:

$$\varepsilon_k - 1 = \alpha \delta t \left[\frac{\varepsilon_k e^{-Ik\delta x} - 2\varepsilon_k + \varepsilon_k e^{Ik\delta x}}{(\delta x)^2} \right]$$

onde $-2 + e^{Ik\delta x} + e^{-Ik\delta x} = -2 + 2\cos(k\delta x)$ e colando ε_k em evidência, ficamos então com:

$$\varepsilon_k - 1 = \alpha \delta t \varepsilon_k \left[\frac{-2 + 2\cos(k\delta x)}{(\delta x)^2} \right]$$

e então $-2 + 2 \cos(k\delta x) = -4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\delta x}{2}\right)$, ficamos com:

$$\varepsilon_k \left(1 + \alpha \frac{\delta t}{(\delta x)^2} \left(4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\delta x}{2}\right) \right) \right) = 1$$

Temos então que:

$$\varepsilon_k = \frac{1}{\left(1 + \frac{4\alpha\delta t}{(\delta x)^2} \left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{k\delta x}{2}\right) \right) \right)}$$

Impomos $\varepsilon_k \leq 1$ e ficamos com:

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{4\alpha\delta t}{(\delta x)^2} \left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{k\delta x}{2}\right) \right) \right)} \leq 1$$

Logo temos que o método é incondicionalmente estável, para qualquer valor de δt e δx

Método de Crank-Nicolson

Agora aproximando (16) por:

$$\frac{\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j}{\delta t} = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{\varepsilon_{i-1}^j - 2\varepsilon_i^j + \varepsilon_{i+1}^j}{(\delta x)^2} + \frac{\varepsilon_{i-1}^{j+1} - 2\varepsilon_i^{j+1} + \varepsilon_{i+1}^{j+1}}{(\delta x)^2} \right] \quad (24)$$

sendo o membro da esquerda aproximado usando diferenças avançadas e o membro da direita usando diferenças centradas. Expandindo $\varepsilon(x)$ numa série de Fourier:

$$e^j(x) = \sum_k \varepsilon_k^j e^{Ikx}, \quad I = \sqrt{-1} \quad (25)$$

Para que o erro não aumente, nenhuma das amplitudes ε_k deve crescer arbitrariamente. Seja k fixo: $\varepsilon^j(x) = \varepsilon_k^j e^{Ikx}$. Então, temos

$$x_i = i\delta x, \quad x_{i+1} = (i+1)\delta x, \quad x_{i-1} = (i-1)\delta x.$$

$$\varepsilon_i^j = \varepsilon^j(x_i) = \varepsilon_k^j e^{Iki\delta x}$$

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon^{j+1}(x_i) = \varepsilon_k^{j+1} e^{Iki\delta x}$$

$$\varepsilon_{i-1}^{j+1} = \varepsilon^{j+1}(x_{i-1}) = \varepsilon_k^{j+1} e^{Ik(i-1)\delta x} = \varepsilon_k^{j+1} e^{Iki\delta x} e^{-Ik\delta x} = \varepsilon_i^{j+1} e^{-Ik\delta x}$$

$$\varepsilon_{i+1}^{j+1} = \varepsilon^{j+1}(x_{i+1}) = \varepsilon_k^{j+1} e^{Ik(i+1)\delta x} = \varepsilon_k^{j+1} e^{Iki\delta x} e^{Ik\delta x} = \varepsilon_i^{j+1} e^{Ik\delta x}$$

$$\varepsilon_{i-1}^j = \varepsilon^j(x_{i-1}) = \varepsilon_k^j e^{Ik(i-1)\delta x} = \varepsilon_k^j e^{Iki\delta x} e^{-Ik\delta x} = \varepsilon_i^j e^{-Ik\delta x}$$

$$\varepsilon_{i+1}^j = \varepsilon^j(x_{i+1}) = \varepsilon_k^j e^{Ik(i+1)\delta x} = \varepsilon_k^j e^{Iki\delta x} e^{Ik\delta x} = \varepsilon_i^j e^{Ik\delta x}$$

Substituindo esses valores em (24), temos:

$$\frac{\varepsilon_k^{j+1} e^{Iki\delta x} - \varepsilon_k^j e^{Iki\delta x}}{\delta t} = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{\varepsilon_k^j e^{Iki\delta x} e^{-Ik\delta x} - 2\varepsilon_k^j e^{Iki\delta x} + \varepsilon_k^j e^{Iki\delta x} e^{Ik\delta x}}{(\delta x)^2} + \frac{\varepsilon_k^{j+1} e^{Ik\delta x} e^{-Ik\delta x} - 2\varepsilon_k^{j+1} e^{Iki\delta x} + \varepsilon_k^{j+1} e^{Iki\delta x} e^{Ik\delta x}}{(\delta x)^2} \right]$$

Dividindo essa equação por $e^{Iki\delta x}$, temos:

$$\frac{\varepsilon_k^{j+1} - \varepsilon_k^j}{\delta t} = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{\varepsilon_k^j e^{-Ik\delta x} - 2\varepsilon_k^j + \varepsilon_k^j e^{Ik\delta x}}{(\delta x)^2} + \frac{\varepsilon_k^{j+1} e^{Ik\delta x} e^{-Ik\delta x} - 2\varepsilon_k^{j+1} + \varepsilon_k^{j+1} e^{Ik\delta x}}{(\delta x)^2} \right]$$

colocando ε_k^j em evidência temos:

$$(\varepsilon_k^j) \frac{\varepsilon_k - 1}{\delta t} = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{e^{-Ik\delta x} - 2 + e^{Ik\delta x}}{(\delta x)^2} + \frac{\varepsilon_k e^{-Ik\delta x} - 2\varepsilon_k + \varepsilon_k e^{Ik\delta x}}{(\delta x)^2} \right] \varepsilon_k^j \quad (26)$$

Podemos então reescrever (26) usando a Identidade e Relações de Euler:

$$\varepsilon_k - 1 = \frac{\alpha}{2} \delta t \left[\frac{e^{-Ik\delta x} - 2 + e^{Ik\delta x}}{(\delta x)^2} + \varepsilon_k \frac{(e^{-Ik\delta x} - 2 + e^{Ik\delta x})}{(\delta x)^2} \right]$$

onde $-2 + e^{Ik\delta x} + e^{-Ik\delta x} = -2 + 2\cos(k\delta x)$ e colando ε_k em evidência, ficamos então com:

$$\varepsilon_k - 1 = \frac{\alpha}{2} \delta t \left[\frac{-2 + 2\cos(k\delta x)}{(\delta x)^2} + \varepsilon_k \frac{(-2 + 2\cos(k\delta x))}{(\delta x)^2} \right]$$

e então $-2 + 2\cos(k\delta x) = -4\text{sen}^2\left(\frac{k\delta x}{2}\right)$, ficamos com:

$$\varepsilon_k - 1 = \frac{\alpha}{2} \delta t \left[\frac{-4\text{sen}^2\left(\frac{k\delta x}{2}\right)}{(\delta x)^2} + \varepsilon_k \frac{(-4\text{sen}^2\left(\frac{k\delta x}{2}\right))}{(\delta x)^2} \right] \Rightarrow$$

$$\varepsilon_k - 1 = \frac{-4\alpha\delta t}{2(\delta x)^2} \text{sen}^2\left(\frac{k\delta x}{2}\right) - \frac{4\varepsilon_k\alpha\delta t}{2(\delta x)^2} \text{sen}^2\left(\frac{k\delta x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_k + \frac{4\varepsilon_k\alpha\delta t}{2(\delta x)^2} \text{sen}^2\left(\frac{k\delta x}{2}\right) = 1 - \frac{4\alpha\delta t}{2(\delta x)^2} \text{sen}^2\left(\frac{k\delta x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_k \left(1 + \frac{2\alpha\delta t}{(\delta x)^2} \text{sen}^2\left(\frac{k\delta x}{2}\right) \right) = 1 - \frac{2\alpha\delta t}{(\delta x)^2} \text{sen}^2\left(\frac{k\delta x}{2}\right)$$

Temos então que:

$$\varepsilon_k = \frac{1 - \frac{2\alpha\delta t}{(\delta x)^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\delta x}{2}\right)}{1 + \frac{2\alpha\delta t}{(\delta x)^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\delta x}{2}\right)}$$

Impomos $\varepsilon_k \leq 1$ e ficamos com:

$$\frac{1 - \frac{2\alpha\delta t}{(\delta x)^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\delta x}{2}\right)}{1 + \frac{2\alpha\delta t}{(\delta x)^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\delta x}{2}\right)} \leq 1$$

Logo temos que o método é incondicionalmente estável, para qualquer valor de δt e δx

O critério de Von Neumann só deve ser usado quando a equação é linear com coeficientes constantes e, além disso, ignora completamente a influência das condições de fronteira sobre o comportamento da solução da equação de diferenças. Geralmente, a condição de estabilidade deduzida do critério de Von Neumann produz uma condição necessária para a estabilidade, mas não suficiente.

5 Problemas Práticos

5.1 Problema 1

Considere a equação de difusão de calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (27)$$

em que T é a temperatura e α é o coeficiente de difusividade térmica do material. Considere uma barra delgada de comprimento de $10cm$, como mostrada abaixo, isolada termicamente ao longo de seu comprimento, mas que tem suas extremidades mantidas às temperaturas de $T_0 = T_1 = 50^\circ C$.



Figura 5: Barra termicamente isolada.

Supondo a barra inicialmente à temperatura de $T = 0^\circ C$, obtenha a evolução temporal ao longo da barra, utilizando os métodos de Euler explícito e implícito. Faça um gráfico da temperatura da barra em diferentes instantes de tempo para cada um dos métodos. Verifique a consistência e a estabilidade dos métodos numéricos utilizados no exercício.

Para a resolução do problema, vamos supor uma evolução temporal de $50s$ a partir do tempo inicial T_0 . Faremos a análise de 4 casos, com diferentes tamanhos de malhas, discutindo as especificidades de cada método.

Caso 1: $\alpha = 0.5$, $h = 0.1$ e $k = 0.01 \Rightarrow \sigma = 0.5$

Os métodos são incondicionalmente consistentes, como mostrado na seção sobre Consistência. A estabilidade para o Método de Euler Explícito, usando o Critério de Von Neumann é também garantida, pois $\frac{0.5 \cdot 0.01}{(0.1)} \leq \frac{1}{2}$, enquanto que o Implícito é incondicionalmente estável, logo os métodos são convergentes.

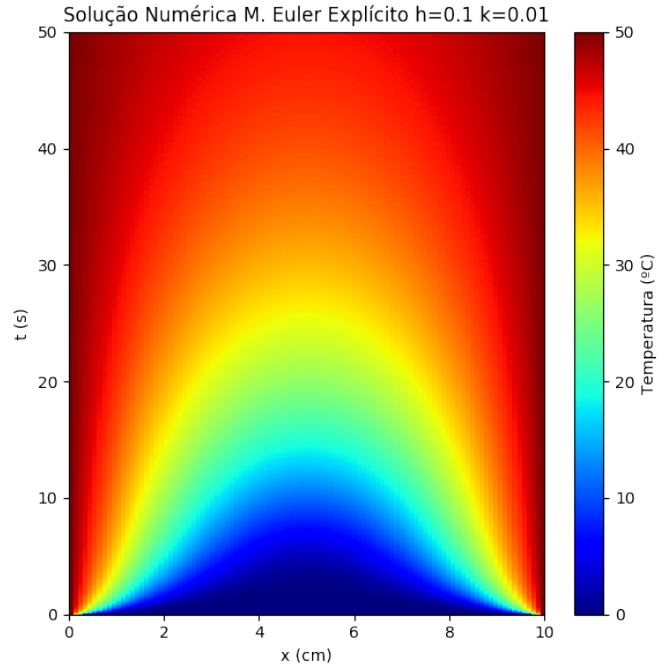


Figura 6: Solução numérica usando Método de Euler Explícito (Caso 1).

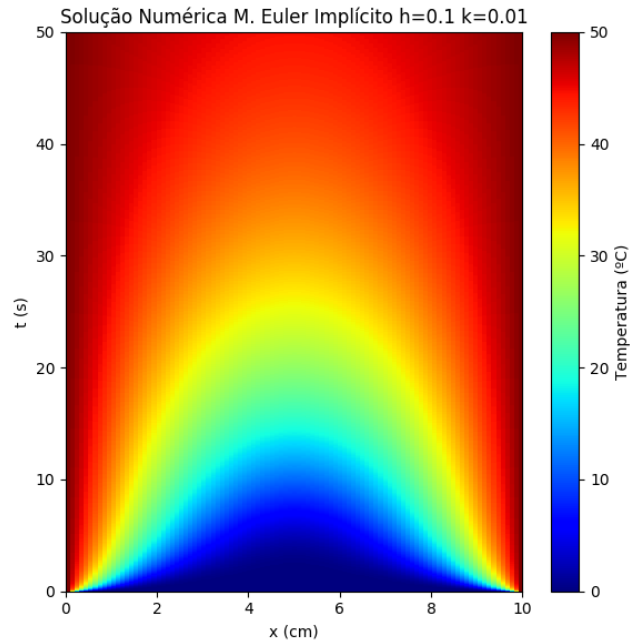


Figura 7: Solução numérica usando Método de Euler Implícito (Caso 1).

Podemos realizar a comparação entre os resultados obtidos pelos dois métodos, como mostra a tabela ou comparando as Figuras, como era esperado, os valores obtidos são muito semelhantes, dado que a ordem do erro para ambos os métodos é a mesma. Na posição $4.5cm$ da barra.

t(s)	M. Euler Explícito	M. Euler Implícito
2.5	0.24	0.26
5	2.89	2.93
10	11.83	11.85
15	20.02	20.04
25	31.69	31.69
35	38.82	38.82
45	43.17	43.17

Tabela 1: Soluções para T_{45} nos tempos 2.5, 5, 10, 15, 25, 35 e 45.

Caso 2: $\alpha = 2$, $h = 0.1$ e $k = 0.0025 \Rightarrow \sigma = 0.5$

Neste caso, aumentamos o valor do coeficiente α em relação ao **Caso 1**, isso nos leva a ter de reduzir o parâmetro k para que a estabilidade para o Método de Euler Explícito, usando o Critério de Von Neumann seja mantida, pois $\frac{2*0.0025}{(0.1)^2} \leq \frac{1}{2}$, de modo a fazer com que o método continue convergindo.

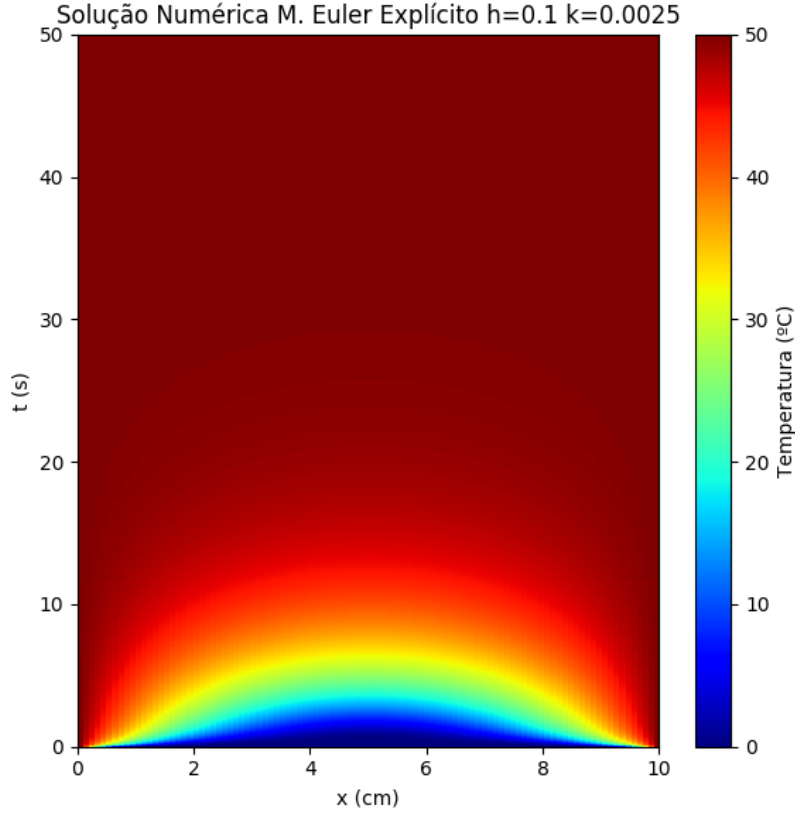


Figura 8: Solução numérica usando Método de Euler Explícito (Caso 2).

Fica evidente pela Fig. 8 que quando aumentamos o coeficiente α demora muito menos para que a temperatura na barra seja elevada. Na tabela temos um comparativo entre os valores obtidos nos tempos 10, 25 e 50. Comparando com a tabela do **Caso 1** podemos notar que conseguimos temperaturas muito mais elevadas, porém a diferença entre os resultados obtidos pelo Método de Euler Explícito e Implícito mantém a mesma ordem. Na posição 4.5cm da barra.

t(s)	M. Euler Explícito	M. Euler Implícito
2.5	11.83	11.85
5	26.56	26.57
10	41.26	41.26
15	46.74	46.74
25	49.54	49.54
35	49.93	49.93
45	49.99	49.99

Tabela 2: Soluções para T_{45} nos tempos 2.5, 5, 10, 15, 25, 35 e 45.

Caso 3: $\alpha = 0.05$, $h = 0.1$ e $k = 0.1 \Rightarrow \sigma = 0.5$

Neste caso, reduzimos o valor do coeficiente α em relação ao **Caso 1**, isso nos leva a poder aumentar o parâmetro k , ou seja, manter uma malha mais grossa, e manter a estabilidade do Método de Euler Explícito, usando o Critério de Von Neumann, pois $\frac{0.05*0.1}{(0.1)^2} \leq \frac{1}{2}$, de modo que o método continua a convergir.

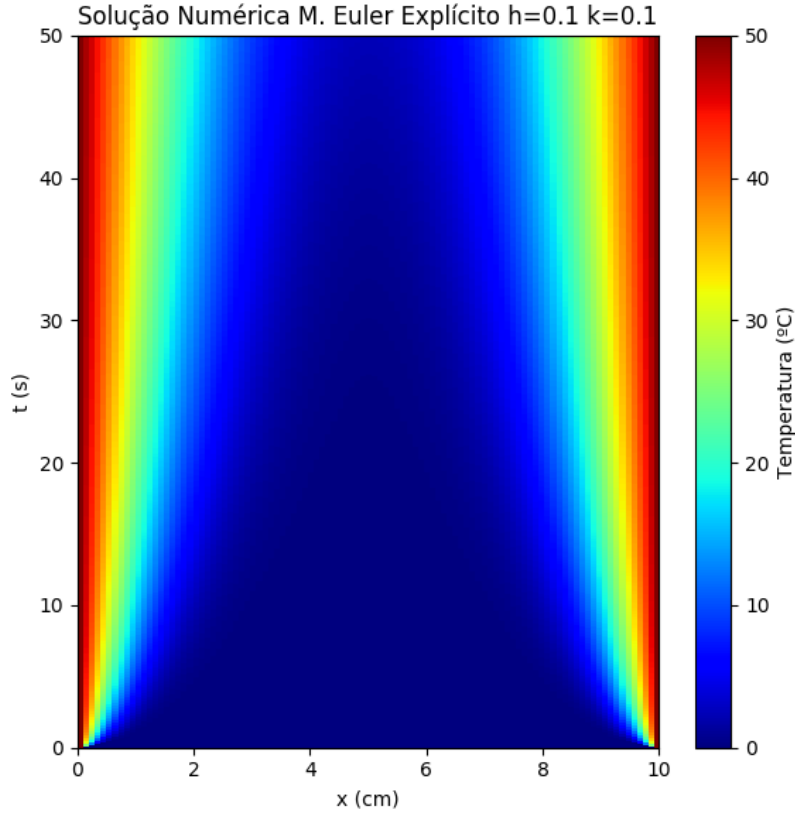


Figura 9: Solução numérica usando Método de Euler Explícito (Caso 3).

Fica evidente pela Fig. 9 que quando reduzimos o coeficiente α demora muito bem mais para que a temperatura na barra seja elevada. Na tabela temos um comparativo entre os valores obtidos nos tempos 10, 15, 25, e 35. Comparando com a tabela do **Caso 1** podemos notar que conseguimos temperaturas muito menores, porém a diferença entre os resultados obtidos pelo Método de Euler Explícito e Implícito se mantém a mesma ordem. Na posição 2.5cm da barra.

t(s)	M. Euler Explícito	M. Euler Implícito
10	15.98	15.92
15	20.79	20.74
25	26.39	26.36
35	29.67	29.65

Tabela 3: Soluções para T_{10} nos tempos 10, 15, 25, 35.

Caso 4: $\alpha = 1$, $h = 0.1$ e $k = 0.1 \Rightarrow \sigma = 10$

Neste caso a estabilidade para o Método de Euler Explícito, usando o Critério de Von Neumann não é garantida, pois $\frac{0.5*0.01}{(0.1)} \geq \frac{1}{2}$, sendo assim é instável para $k = 0.1$, logo o método diverge, gerando resultados não coerentes. Como mostra a Fig 10.

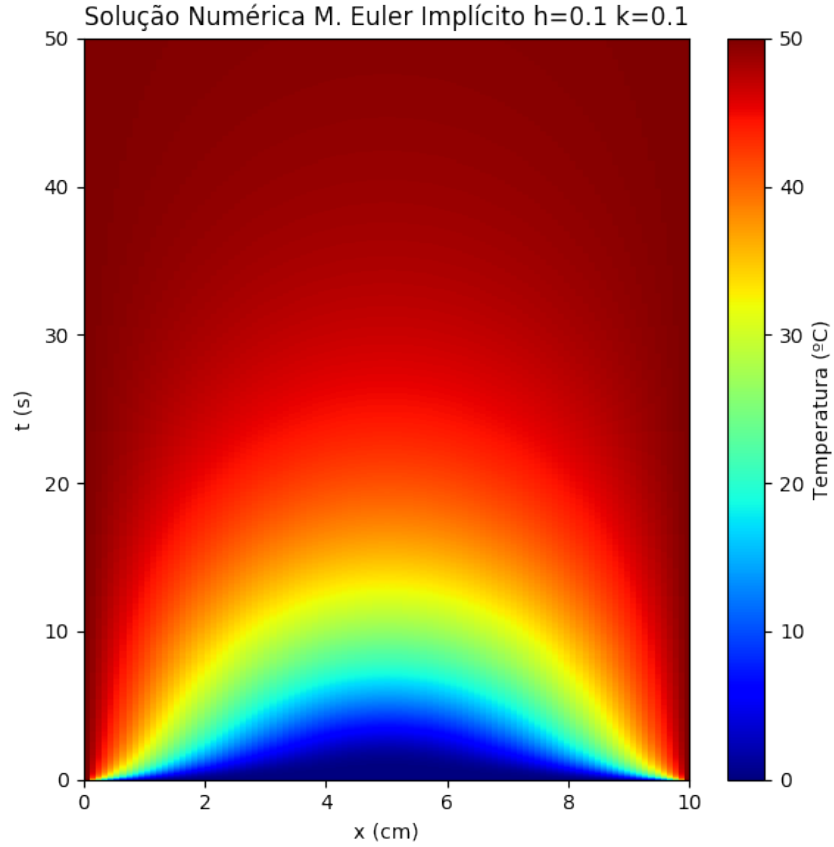


Figura 10: Solução numérica usando Método de Euler Implícito (Caso 4).

Enquanto que o Método de Euler Implícito, o qual é incondicionalmente estável, converge e gera resultados coerentes, evidenciados na figura.

Podemos ainda realizar uma comparação entre os valores obtidos pelos dois métodos, nos tempos 2.5, 5, 10, 19. Como mostra a tabela. Na posição 2.5cm da barra.

t(s)	M. Euler Explícito	M. Euler Implícito
2.5	4.999999e+26	13.51
5	-2.271124e+74	22.52
10	-1.892760e+156	33.30
19	-2.101996e+300	43.10

Tabela 4: Soluções para T_{25} nos tempos 2.5, 5, 10 e 19.

Podemos observar uma variação absurda do resultado, com diferenças na ordem de 10^{300} , essas diferenças só aumentam, conforme o erro se acumula durante as iterações. Os valores superiores a $t = 19s$ começam a estourar os limites para as variáveis de ponto flutuante no método de Euler Explícito.

5.2 Problema 2

Considere uma barra delgada como mostrada na Figura 11, a uma temperatura inicial $T_{init} = 0^\circ C$. A barra possui comprimento $L = 1m$ e sua extremidade direita é colocada à temperatura $T_N = 100^\circ C$, enquanto que a extremidade esquerda é mantida em $T_0 = 0^\circ C$. O coeficiente de difusividade térmica α vale $0.0834m^2/s$. A partir da temperatura no estado inicial, determine a distribuição de temperatura na barra em vários instantes de tempo.

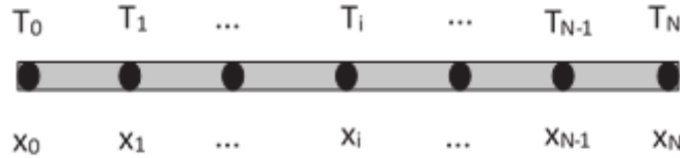


Figura 11: Discretização de uma barra.

Para isso resolva numericamente a equação (3), utilizando os métodos de Euler, Explícito, Implícito e Crank-Nicolson. Compare a solução Numérica com a solução analítica dada por:

$$T(x, t) = \frac{x}{L}T_N + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2T_N}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha t \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \quad (28)$$

Trabalharemos com malhas de modo a fazer o método de Euler Explícito convergir, $\sigma \leq \frac{1}{2}$, e manteremos esta mesma malha tanto para os métodos Implícito e de Crank-Nicolson, quanto para a construção da solução analítica. Para construir a solução analítica em (28) um $n = 100$ será utilizado, o que como será discutido mais a frente, irá gerar um custo de tempo computacional relativamente grande para se construir dependendo da malha utilizada.

Caso 1: $\alpha = 0.0834$, $h = 0.01$ e $k = 0.0003 \Rightarrow \sigma = 0.25$

Podemos notar que as aproximações encontradas tanto pelos Métodos Implícito quanto de Crank-Nicolson não apresentam diferenças visíveis olhando para o gráfico nas Figuras 13, 14 e 15, apenas o Explícito, na Figura 16, que tem mudanças de coloração menos suaves que os outros, o que era esperado já que tem a ordem de seu erro é 1.

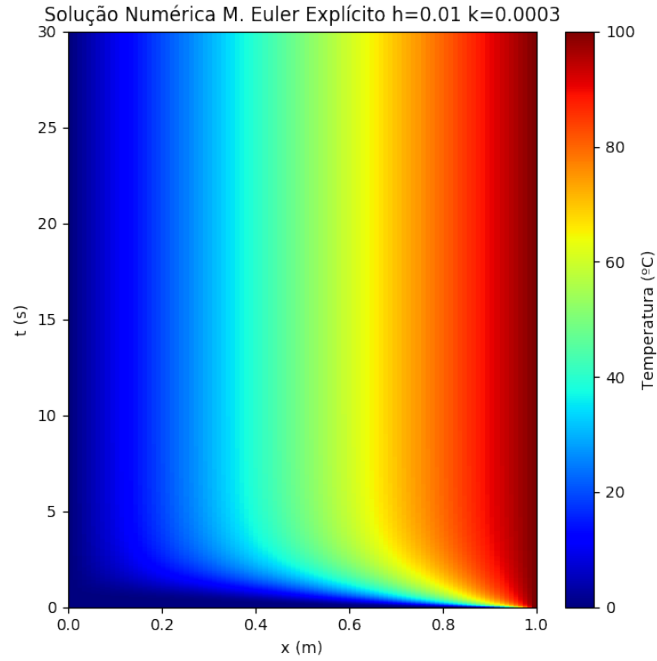


Figura 12: Solução numérica usando Método de Euler Explícito (Caso 1).

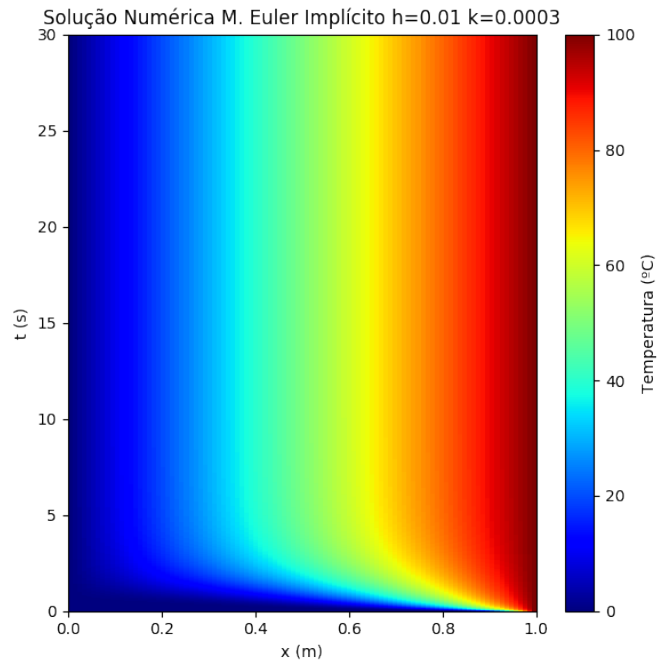


Figura 13: Solução numérica usando Método de Euler Implícito (Caso 1).

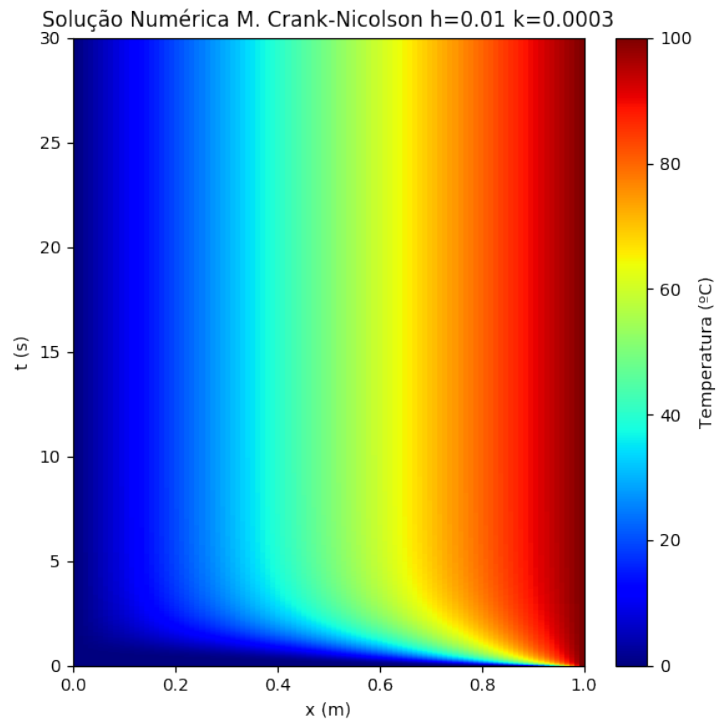


Figura 14: Solução numérica usando Método de Crank-Nicolson (Caso 1).

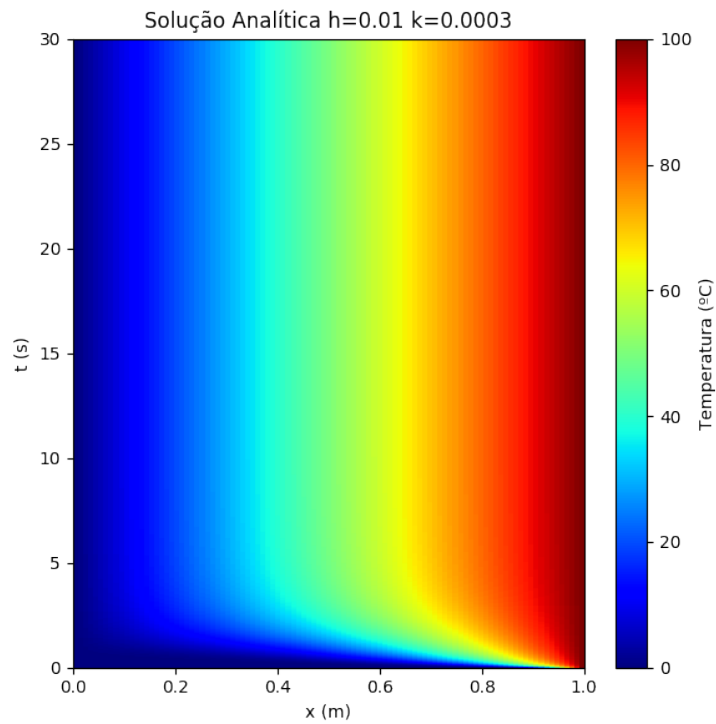


Figura 15: Solução Analítica (Caso 1).

Pelas tabelas podemos observar que os erros para os métodos, excluindo do Explícito são inferiores a 10^{-4} , o que demonstra como as aproximações dos métodos são condizentes com o fenômeno físico real.

t(s)	M. Euler Explícito	M. Euler Implícito	M. Crank-Nicolson	Analítica
0.5s	16.5995	16.6051	16.6053	16.6053
2s	48.3024	48.3004	48.3004	48.3004
5s	59.0122	59.0114	59.0113	59.0113
10s	59.9838	59.9838	59.9838	59.9838

Tabela 5: Comparativo aproximações Numéricas e resultado Analítico (Caso 1), posição 0.6m

Caso 2: $\alpha = 0.0834$, $h = 0.01$ e $k = 0,000003 \Rightarrow \sigma = 0.025$

Neste caso faremos um refinamento da malha em k para 0,00003, mantendo a estabilidade para o Método de Euler Explícito. Podemos notar que as aproximações encontradas tanto pelos Métodos Implícito quanto de Crank-Nicolson novamente não apresentam diferenças visíveis olhando para o gráfico nas Figuras 13, 14 e 15, até mesmo o Explícito, na Figura 16, com este novo refinamento não pode ser diferenciado.

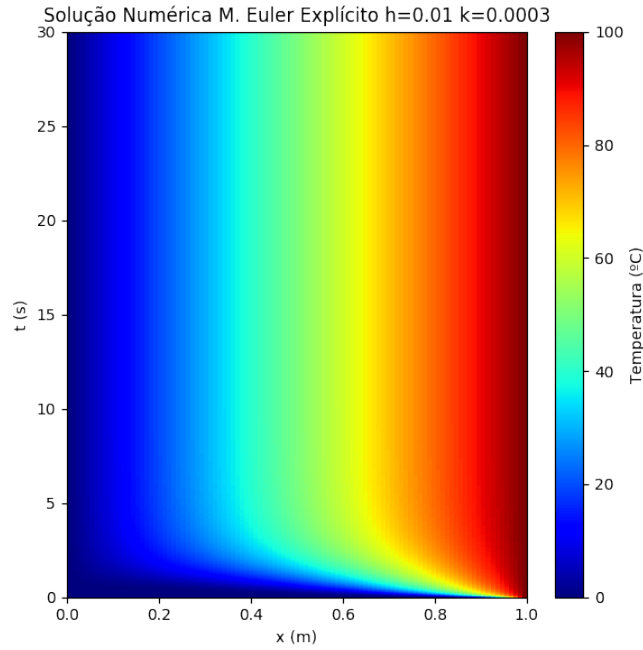


Figura 16: Solução numérica usando Método de Euler Explícito (Caso 1).

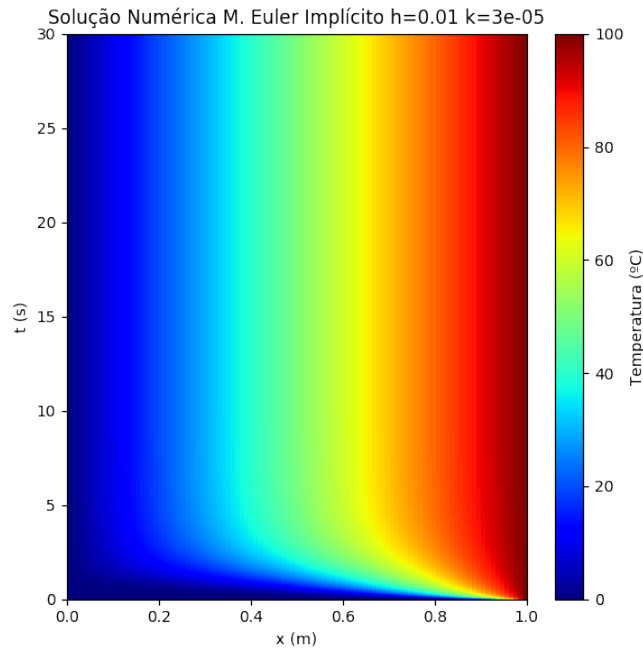


Figura 17: Solução numérica usando Método de Euler Implícito (Caso 2).

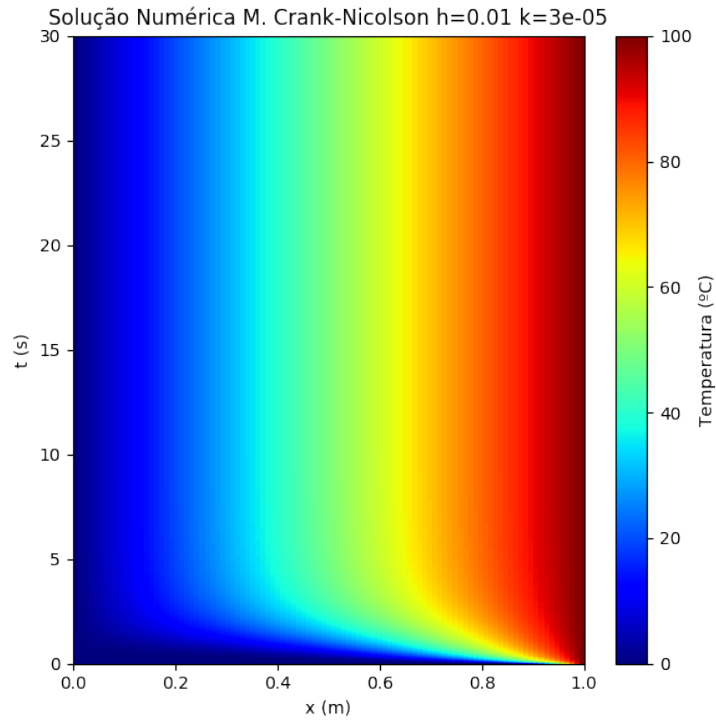


Figura 18: Solução numérica usando Método de Crank-Nicolson (Caso 2).

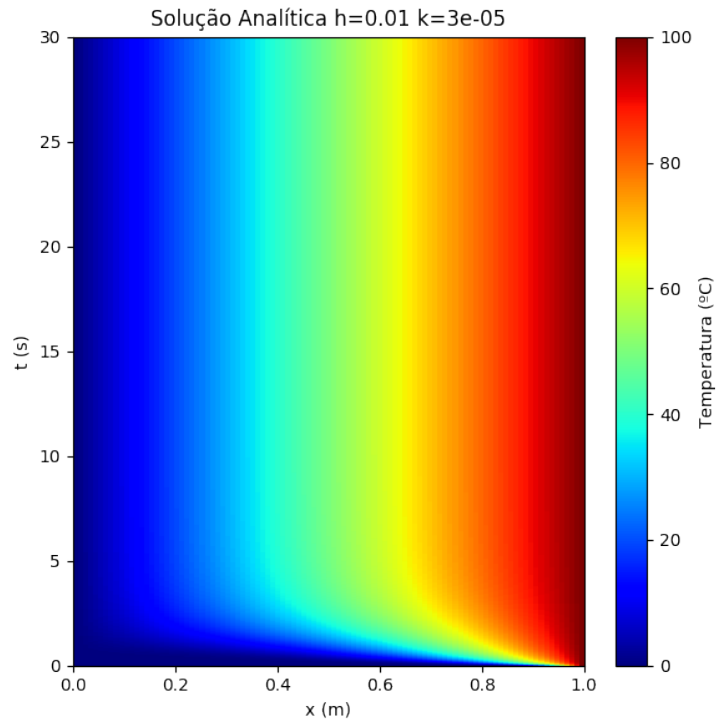


Figura 19: Solução Analítica (Caso 2).

Comparando as figuras do Caso 1 com as do Caso 2, podemos notar que com o refinamento da malha, as aproximações se mostram de maneira mais suave. Pelas tabelas podemos observar que os erros para os métodos, excluindo do Explícito são inferiores a

10^{-4} , o que demonstra como as aproximações dos métodos são condizentes com o fenômeno físico real.

t(s)	M. Euler Explícito	M. Euler Implícito	M. Crank-Nicolson	Analítica
0.5s	16.6040	16.6046	16.6046	16.6046
2s	48.3019	48.3017	48.3017	48.3017
5s	59.0119	59.0118	59.0118	59.0118
10s	59.9838	59.9838	59.9838	59.9838

Tabela 6: Comparativo aproximações Numéricas e resultado Analítico (Caso 2), posição 0.6m

Podemos notar pela Tabela 6, que com esse refinamento da malha, com exceção do Método Explícito, todos os métodos aproximaram a solução analítica com pelo menos 4 casas decimais de precisão. Porém, uma malha com tal refinamento se tornou muito custosa para manter. Por exemplo, reduzindo a malha temporal para 3×10^{-6} já ultrapassa o limite de alocação normal, permitido pela linguagem, sendo necessária uma matriz de 72GB para armazenar apenas a discretização temporal.

Análise do Tempo Computacional dos Casos

Algo interessante a se comparar para esses casos é que o Método Explícito necessita de uma malha mais refinada, para conseguir convergir, porém sua computação é bem mais rápida que os outros métodos, os quais, a pesar de serem independentes de malha, ou seja, incondicionalmente estáveis, os mesmos necessitam resolver um sistema linear a cada passo, então em uma situação prática é interessante analisar as capacidades computacionais das quais se dispõe para fazer a escolha do método computacional mais adequado.

Por exemplo em ambientes com memória de trabalho com capacidade de processamento mais reduzida, o Explícito pode se tornar adequado, enquanto que para ambientes com memória de trabalho mais abundante e/ou disponibilidade de processamentos paralelizados, os métodos que resolvem sistemas lineares podem ser mais adequados, além de gerarem resultados mais acurados, sem contar que a exploração do fato de as matrizes tridiagonais serem esparsas, podem acelerar muito na computação.

	M. Euler Explícito	M. Euler Implícito	M. Crank-Nicolson	Analítica
Caso 1	9.5193s	6.9531s	7.6835s	103.3035s
Caso 2	97.0363s	67.2017s	77.6730s	994.6868s

Tabela 7: Tempo de execução para os Casos 1 e 2

Podemos notar na Tabela 7 que os métodos Implícito e de Crank-Nicolson, mesmo tendo de resolver um sistema linear a cada passo, como citado anteriormente, os mesmos apresentam tempos consideravelmente pequenos, isso se dá a implementação computacional, utilizando recursos fornecidos pela biblioteca Numpy e Scipy, para computação científica, fornecidas pela linguagem Python3. O que se faz interessante notar neste caso é que as soluções numéricas encontradas demoram bem menos tempo para construir a solução para o problema que a própria solução analítica para o problema, que tem uma ordem de custo de tempo 10 vezes maior que os métodos numéricos empregados, logo na prática, os mesmos seriam mais convenientes de serem empregados que a própria solução analítica.

6 Conclusão

O estudo das equações parabólicas, mais especificamente neste caso a equação do calor, nos permitiu analisar vantagens e desvantagens de três métodos numéricos, que utilizam das aproximações de derivadas por diferenças finitas. O Método Explícito é o mais rápido dos três, porém mesmo sendo de ordem 1, assim como o Implícito, demonstra na prática resultados menos precisos. O método de Crank-Nicolson, de ordem 2, apresenta os melhores resultados dos três métodos, porém também é o que demora mais para computar a solução, já que a cada passo faz mais operações com matrizes que o Implícito, sua implementação computacional também deve levar maiores cuidados para ser feita, devido a sua maior complexidade.

No Problema 1, a solução numérica se comportou como esperado, já que com o decorrer do tempo a tendência que se mostrou é a temperatura da barra se estabilizar em $50^{\circ}C$, ou seja, atingir equilíbrio térmico, e que as temperaturas na metade da barra seriam as que demorariam mais para atingir essa temperatura. Desde que as condições de convergência para os métodos fossem empregadas corretamente, os mesmos se mostraram fiéis ao esperado pelas demonstrações teóricas.

No Problema 2, com a solução analítica disponível, foi ainda mais evidente como os métodos numéricos trabalhados, aproximam de maneira coerente ao fenômeno físico real a ser trabalhado, mostrando o comportamento de no decorrer do tempo a barra adquirir uma elevação de temperatura linear, da esquerda para a direita, estando a ponta esquerda mantida a $0^{\circ}C$ e a direita a $100^{\circ}C$. Observamos resultados com erros inferiores a 10^{-4} . Outro aspecto interessante observado, é que para esse caso a solução numérica é computacionalmente mais vantajosa de ser empregada que a própria solução analítica.

Bibliografia

CUMINATO, José Alberto; MENEGUETTE, Messias. Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

AGUIRRE, L. A. Introdução à Identificação de Sistemas, Técnicas Lineares e Não lineares Aplicadas a Sistemas Reais. Belo Horizonte, Brasil, EDUFMG. 2004.

Boyce et al,Elementary Differential Equations and Boundary Value ,WILEY, 2017, ISBN: 978-1-119-16975-8

U.M. Ascher, C. Greif,A First Course in Numerical Methods, SIAM,2011