

Unesp

Departamento de Matemática e Computação - DMC

PósMAC

Relatório 1º Trabalho Prático

Aluno: Gilmar Francisco de Oliveira Santos

Professora Responsável: Analice Costacurta Brandi

Abril

2020

Conteúdo

1	Resumo	1
2	Métodos Numéricos para Solução de PVI's	2
2.1	Método de Euler	2
2.2	Métodos de Runge-Kutta	4
3	Métodos Numéricos para Solução de PVFs	6
3.1	Métodos de Diferenças Finitas	6
3.1.1	Problemas Lineares	6
3.1.2	Problemas Não-Lineares	7
4	Solução Trabalho Prático	9
4.1	Exercício 01	9
4.2	Exercício 02	16
4.3	Exercício 03	18
4.4	Exercício 04	21
	Bibliografia	25

1 Resumo

Trabalho prático visando o exercício de métodos numéricos para solução de problemas de valor inicial e de fronteira, construção, conceitos de convergência, estabilidade e erros de aproximação.

A análise numérica e computacional é uma área da Matemática na qual se encontram vários e diversificados métodos que se constituem em ferramentas para se determinar, exata ou aproximadamente, soluções numéricas de problemas modelados matematicamente. Em um campo de aplicação mais amplo, a busca de soluções aproximadas tem sido muito importante na resolução destes problemas quando não existe a possibilidade de resolvê-los por técnicas exatas.

Neste trabalho a linguagem Python3 é utilizada na implementação dos métodos numéricos. Python é uma linguagem de programação interpretada, orientada à objeto, de alto nível e de semântica dinâmica. Possui tipagem dinâmica, é rápida, e sua simplicidade a torna atraente e produtiva.

Possui uma infinidade de bibliotecas e hoje é uma das linguagens mais utilizadas no mundo. Para computação científica Python possui ótimas bibliotecas, as utilizadas neste trabalho serão: NumPy(processamento rápido de matrizes) e Matplotlib(plotagem de gráficos).

2 Métodos Numéricos para Solução de PVI

Uma equação diferencial não tem uma solução única, então tipicamente é adicionada uma condição inicial a equação, a mesma ficando na seguinte forma

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

onde x_0 representa o tempo/posição inicial e y_0 o valor inicial. Juntados a equação e a condição inicial, temos o chamado **Problema de Valor Inicial(PVI)**.

2.1 Método de Euler

Este é o mais simples e mais antigo dos métodos numéricos utilizados na solução particular de equações diferenciais, foi criada no séc.XVIII pelo matemático Leonhard Euler(1707–1783).

O método de Euler foi criado por volta do ano de 1768, este método é conhecido como método da reta secante ou método de Euler.

Considerando um PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

O método de Euler é baseado na expansão da função $y(x)$ em series de Taylor, assim, pode-se expandir a função $y(x)$ na vizinhança do ponto x_n , até a ordem 1, podemos então escrever:

$$y(x_n + h) \cong y(x_n) + h.y'(x_n)$$

como $(x_n + h) = x_{n+1}$ e $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$ temos:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h.f(x_n, y(x_n))$$

tomando $n = 0$ obtemos:

$$y(x_1) = y(x_0) + h.f(x_0, y(x_0))$$

Portanto o método de Euler aproxima o valor y_1 do valor exato $y(x_1)$ no ponto x_1 . Ao continuar repetindo esse procedimento para os pontos x_2, \dots, x_n , onde $n = 1, 2, \dots$,

com N de um intervalo $I = [a, b]$ temos as aproximações y_2, \dots, y_n dos valores exatos $y(x_2), \dots, y(x_n)$, obtendo de modo geral a fórmula:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Análise da Convergência

Aplicando o método de Euler a um problema de valor inicial, o erro computado pela solução satisfaz a seguinte desigualdade

$$|y(t_n) - y_n| \leq \frac{Mh}{2L} (e^{L(t_n - t_0)} - 1)$$

onde L é a constante de Lipschitz para f e M é o limitante superior de $y''(t)$. Esse limitante do erro indica que a solução numérica converge para a solução exata em $h \rightarrow 0$, ou seja

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq (T - t_0)/h} |y(t_n) - y_n| = 0$$

Para que um método numérico seja convergente, o mesmo deve obedecer a duas propriedades. A primeira é a **Consistência** que implica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq (T - t_0)/h} |\tau(t)| = 0$$

onde $\tau_n(h)$ é o erro de truncamento local em t_n .

Consistência do método de Euler

Dado o formato geral de um método de passo simples

$$y_{n+1} = y_n + \Phi(t - n, y_n, h)$$

para alguma função contínua $\Phi(t, y, h)$, definimos o erro de truncamento local desse método de passo simples como

$$\tau(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \Phi(t, y(t), 0)$$

Para o método de Euler temos que $\Phi(t_n, y_n, h) = f(x_n, y(x_n))$, logo o limite é satisfeito e o método é consistente.

A segunda é a **Estabilidade**, um método é dito estável, se existe uma constante α para qual quaisquer duas soluções numéricas

$$|y_n - y_n| \leq e^{\alpha(T - t_0)} |y_0 - y_0|$$

Tendo então um método consistente e estável, temos que ele também será **convergente**. Podemos então obter o seguinte limite para o erro global $e_n = y(t_n) - y_n$:

$$|e_n| \leq \left(\frac{e^{L_\Phi(T-t_0)} - 1}{L_\Phi} \right) \max_{0 \leq m \leq n-1} |\tau_m(h)|$$

Sendo L_Φ a constante de Lipschitz para Φ . Como o método é consistente, segue que quando $h \rightarrow 0$ e $n \rightarrow \infty$ de tal maneira que $t_0 + nh = t$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |e_n| = 0$$

Ainda seguindo o caso do método de Euler, temos

$$\Phi(t, y, h) = f(t, y), \quad \tau(h) = \frac{h}{2} f''(\tau), \quad \tau \in (t_0, T)$$

Existe uma constante K tal que

$$|\tau_n(h)| < Kh, \quad 0 \leq h \leq h_0$$

Para um h_0 suficientemente pequeno. De modo geral a ordem de acurácia de um método de passo simples é dada por p , para qualquer solução suficientemente suave $y(t)$, onde existem constantes K e h_0 tais que

$$\tau_n(h) < Kh^p, \quad 0 \leq h \leq h_0$$

Temos então que o método de Euler é de primeira ordem.

2.2 Métodos de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta são métodos de passo simples, ou seja, y_{i+1} é determinado usando apenas de x_i e y_i .

Um método de Runge-Kutta de ordem p não requer o cálculo de qualquer derivada de f , mas depende de outra função Φ que é definida avaliando f em diferentes pontos.

Especificamente, os métodos de Runge-Kutta são dados por:

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots$$

em que Φ é uma função de x e y que depende indiretamente de f e do tamanho do passo h .

O método de Euler, obtido considerando Φ , é um método de Runge-Kutta de ordem $p = 1$.

Método de Runge-Kutta de ordem 2

O método de Heun, também conhecido por método de Euler modificado, é um método de Runge-Kutta de ordem 2. No método de Heun, definimos

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad i = 0, 1, \dots$$

em que $k_1 = f(x_i, y_i)$ e $k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1)$ ou de forma equivalente

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))), \quad i = 0, 1, \dots$$

Observe que esse é um método de Runge-Kutta com

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) + f(x + h, y + hf(x, y)))$$

Método de Runge-Kutta de ordem 4

O método de Runge-Kutta de ordem 4 é dado por:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

onde

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_1 \frac{h}{2}) \\ k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_2 \frac{h}{2}) \\ k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3) \end{cases}$$

3 Métodos Numéricos para Solução de PVFs

3.1 Métodos de Diferenças Finitas

Usando de um PVC como mostrado anteriormente, tira proveito dos métodos para PVIs, porém não pode ser facilmente generalizado para PVCs em maiores dimensões espaciais. Então consideremos uma outra abordagem, onde a primeira e segunda derivadas da solução $y(x)$ são aproximadas pelas diferenças finitas.

O intervalo $[a, b]$ é discretizado em $N + 1$ subintervalos de mesmo tamanho, onde $h = \frac{(b-a)}{N+1}$, onde cada $x_i = a + ih$. Denotamos por y_i uma aproximação para a solução em x_i , ou seja, $y_i \approx y(x_i)$. Assumindo que $y(x)$ é diferenciável até a quarta ordem, aproximamos y' e y'' em cada $x_i, i = 1, 2, \dots, N$, pelas Diferenças Finitas

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{2h} - \frac{h^2}{6}y'''(\eta_i)$$
$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i)$$

onde η_i e ξ_i estão em $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Substituindo essas diferenças finitas no PVC e aplicando as condições de contorno, temos obtemos então um sistema de equações

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

para esses valores da solução em cada x_i , nos quais o erro de truncamento local é da ordem de $O(h^2)$.

3.1.1 Problemas Lineares

Considerando EDOs lineares do tipo

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

O sistema de equações abaixo também é linear, e podemos expressar da forma matriz-vetor

$$Ay = r,$$

Onde A é uma matriz tridiagonal, dado que as aproximações de y' e y'' em x_i usam apenas y_{i-1}, y_i e y_{i+1} , e r é um vetor que inclui os valores de $r(x)$ na malha, assim como termos adicionais para as condições de contorno:

$$a_{ii} = 2 + h^2q(x_i), i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\begin{aligned}
a_{i,i+1} &= -1 + \frac{h}{2}p(x_i), i = 1, 2, \dots, N-1, \\
a_{i+1,i} &= -1 - \frac{h}{2}p(x_{i+1}), i = 1, 2, \dots, N-1, \\
r_1 &= -h^2r(x_1) + 1 + \frac{h}{2}p(x_1)\alpha, \\
r_i &= -h^2r(x_i), i = 2, 3, \dots, N-1 \\
r_N &= -h^2r(x_N) + 1 - \frac{h}{2}p(x_N)\beta,
\end{aligned}$$

O sistema de equações é garantido ter uma única solução se A for diagonalmente dominante, que é o caso quando $q(x) \geq 0$ e $h < 2/L$, onde L é o limite superior de $|p(x)|$.

3.1.2 Problemas Não-Lineares

No caso da EDO ser não-linear, devemos resolver um sistema de equações não lineares da forma

$$F(y) = 0$$

onde $F(y)$ é uma função vetorial com funções coordenadas $f_i(y)$, para $i = 1, 2, \dots, N$, que são definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
F_1(y) &= y_2 - 2y_1 + \alpha - h^2 f(x_1, y_1, \frac{y_2 - \alpha}{2h}), \\
F_2(y) &= y_3 - 2y_2 + y_1 - h^2 f(x_2, y_2, \frac{y_3 - y_1}{2h}), \\
&\vdots \\
F_{N-1}(y) &= y_N - 2y_{N-1} + y_{N-2} - h^2 f(x_{N-1}, y_{N-1}, \frac{y_N - y_{N-2}}{2h}), \\
F_N(y) &= \beta - 2y_N + y_{N-1} - h^2 f(x_N, y_N, \frac{\beta - y_{N-1}}{2h}).
\end{aligned}$$

Esse sistema de equações pode ser solucionado aproximadamente por um método iterativo, como o Método de Newton ou Método da Secante. Se o Método de Newton for utilizado, então pela regra da cadeia, as entradas da matriz Jacobiana $J_F(y)$, uma matriz tridiagonal, será definida como segue:

$$\begin{aligned}
J_F(y)_{ii} &= \frac{\partial f_i}{\partial y_i} = -2 - h^2 f_y(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}), \quad i = 1, 2, \dots, N \\
J_F(y)_{i,i+1} &= \frac{\partial f_i}{\partial y_{i+1}} = 1 - \frac{h}{2} f_{y'}(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}), \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\
J_F(y)_{i,i-1} &= \frac{\partial f_i}{\partial y_{i-1}} = 1 + \frac{h}{2} f_{y'}(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}), \quad i = 2, 3, \dots, N
\end{aligned}$$

onde, para conveniência, usamos $y_0 = \alpha$ e $y_{N+1} = \beta$. Então em cada iteração do método de Newton, o sistema de equações

$$J_F(y^{(k)})S_{k+1} = -F(y^{(k)})$$

é resolvido de modo a obter a próxima iteração

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + S_{k+1}$$

da iteração anterior. Um "chute" inicial é a função linear única que satisfaz as condições de contorno,

$$y^{(0)} = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x - a),$$

onde x é o vetor de coordenadas x_1, x_2, \dots, x_N

4 Solução Trabalho Prático

4.1 Exercício 01

Aproxime a solução do PVI

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 2y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

utilizando os métodos de Euler e Runge-Kutta de 4ª ordem. Escolha apropriadamente h e ilustre graficamente a convergência.

Para escolher apropriadamente o passo, h , a ser utilizado, devemos analisar para qual valor de h temos o menor erro absoluto, dado que os erros de truncamento local começam a se mostrar significativos a partir desse h mínimo, isso é evidenciado pelo gráfico do erro vs h , quando os valores de erro começam a aumentar e não mais diminuir. Na figura 1. podemos visualizar em azul as variações do somatório dos erros absolutos para diferentes tamanhos de passo:

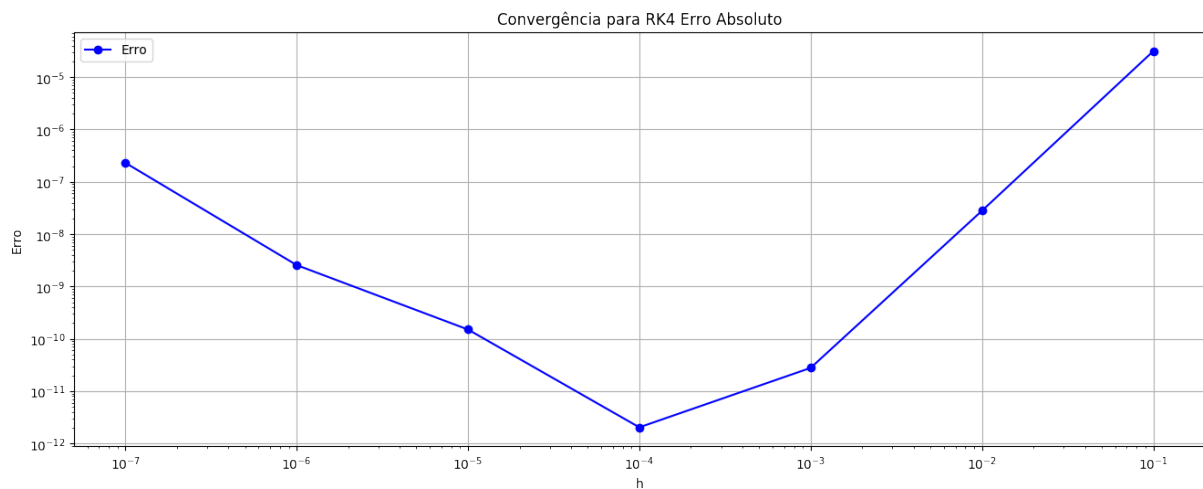


Figura 1: Erro Absoluto para Runge-Kutta 4ª em $h \in [10^{-7}, 10^{-1}]$

Com isso podemos observar claramente que o valor adequado para o passo h é 10^{-4} , com isso obtemos a melhor aproximação:

a) Plote a solução para diferentes valores de h e compare com a solução analítica da equação diferencial dada por $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Calcule os erros das aproximações

Para a resolução desse item, foram tomados os seguintes valores de h , [...], onde h representa o tamanho do passo a ser utilizado nos métodos de Euler Explícito e Runge-Kutta 4ª ordem, temos as seguintes equações de diferenças obtidas:

Método de Euler Explícito:

$$y_{i+1} = y_i + h\left(\frac{1}{1+x^2} - 2y_i^2\right)$$

Runge-Kutta 4ª ordem:

$$\begin{aligned} k_{1_i} &= \frac{1}{1+x^2} - 2y_i^2 \\ k_{2_i} &= \frac{1}{1+(x_i+0.5h)^2} + 2(y_i+0.5hk_{1_i})^2 \\ k_{3_i} &= \frac{1}{1+(x_i+0.5h)^2} + 2(y_i+0.5hk_{2_i})^2 \\ k_{4_i} &= \frac{1}{1+(x_i+h)^2} - 2(y_i+hk_{3_i})^2 \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(k_{1_i} + 2k_{2_i} + 2k_{3_i} + k_{4_i}) \end{aligned}$$

A seguir temos as soluções numéricas para cada valor de h e seus respectivos erros absolutos:

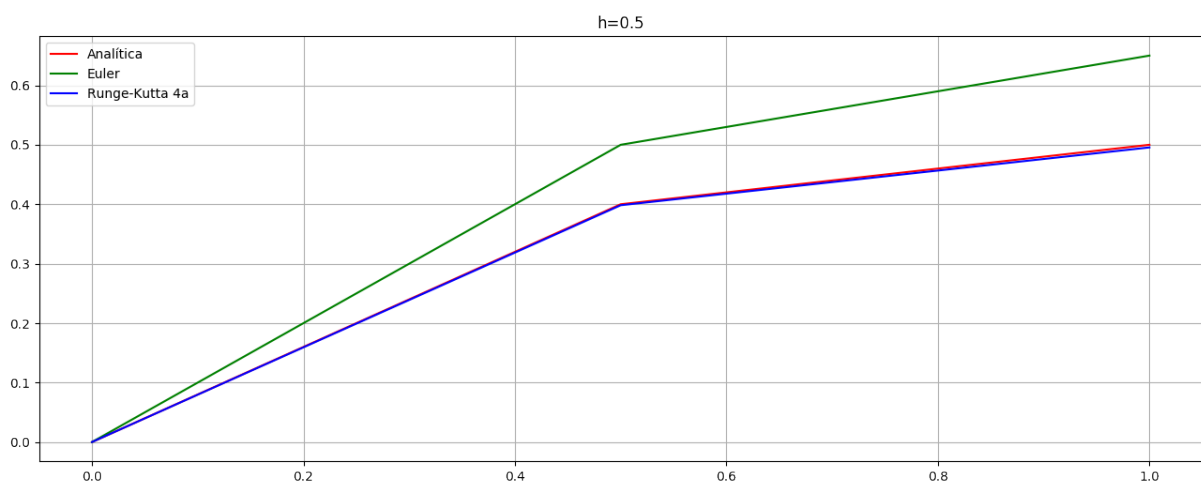


Figura 2: Comparação da solução numérica para Euler Exercício e Runge-Kutta 4ª para $h = 0.5$

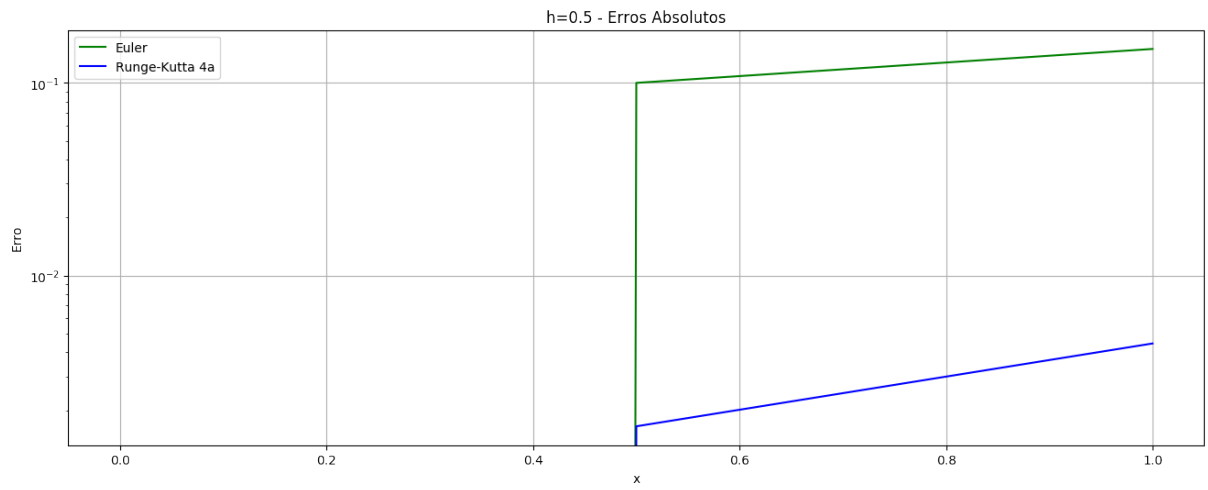


Figura 3: Comparação do erro absoluto da solução numérica para Euler Exercício e Runge-Kutta 4ª com $h = 0.5$

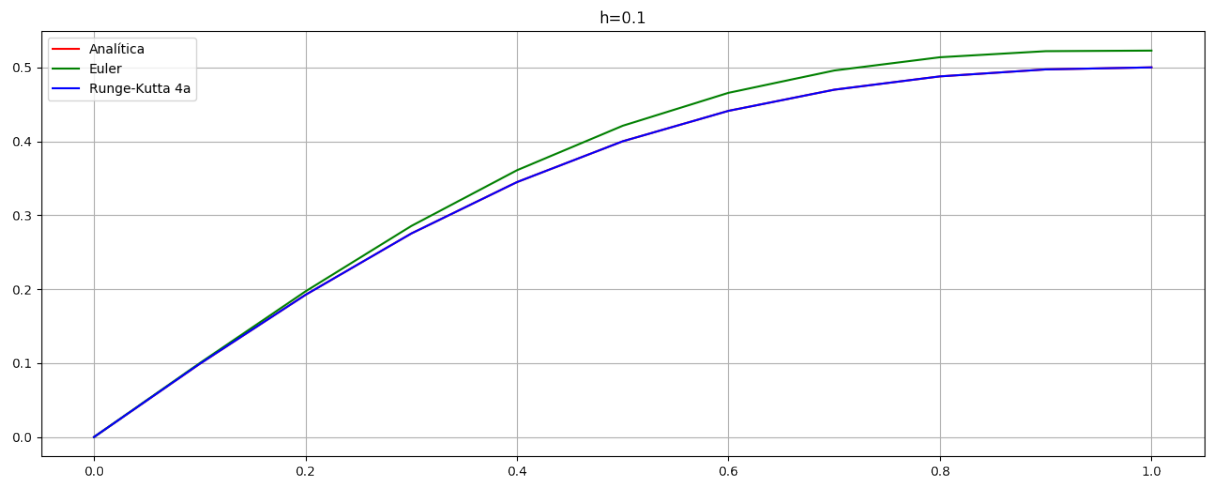


Figura 4: Comparação da solução numérica para Euler Exercício e Runge-Kutta 4ª para $h = 0.1$

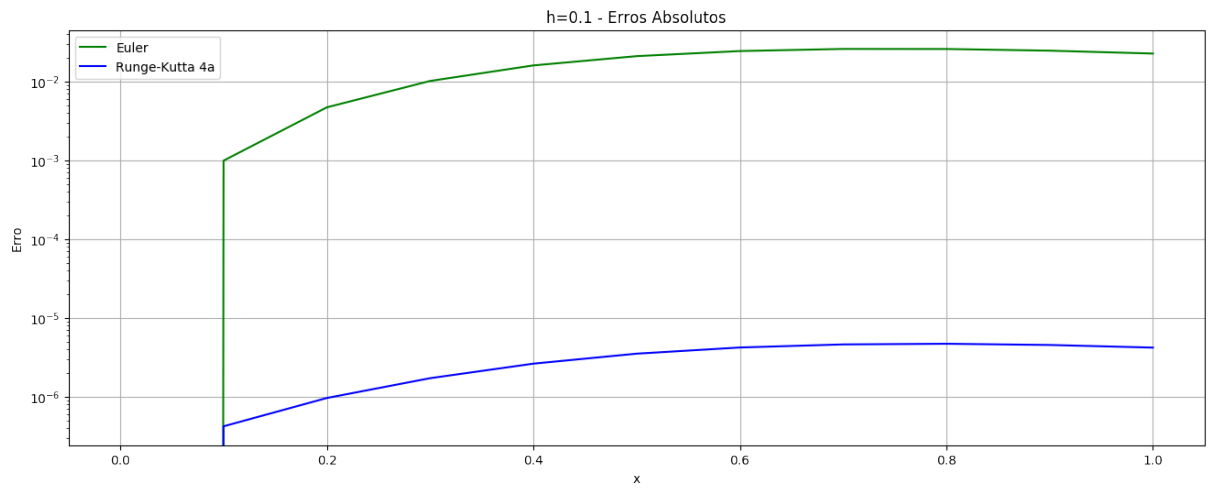


Figura 5: Comparação do erro absoluto da solução numérica para Euler Exercício e Runge-Kutta 4ª com $h = 0.1$

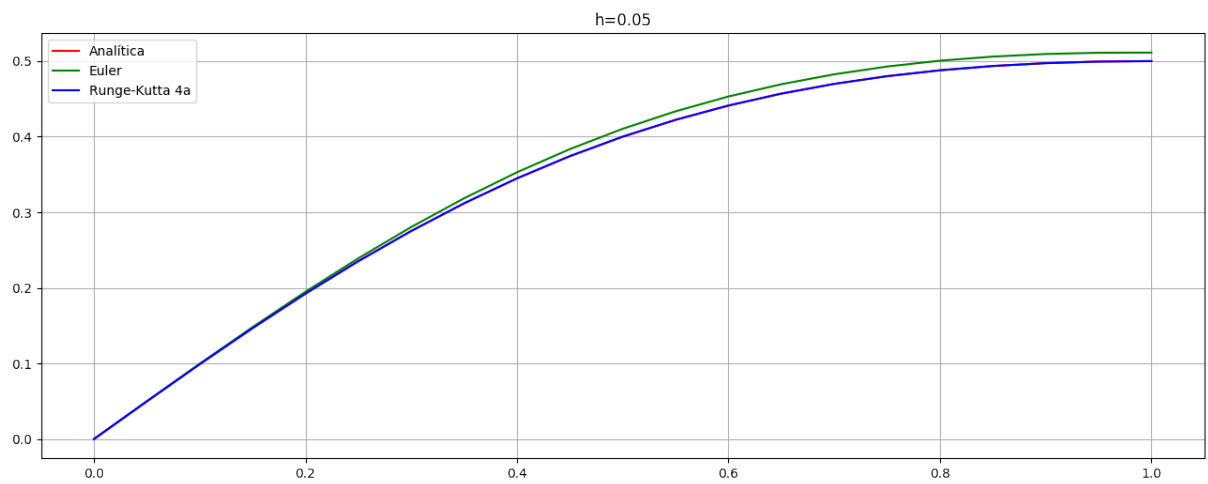


Figura 6: Comparação da solução numérica para Euler Exercício e Runge-Kutta 4ª para $h = 0.05$

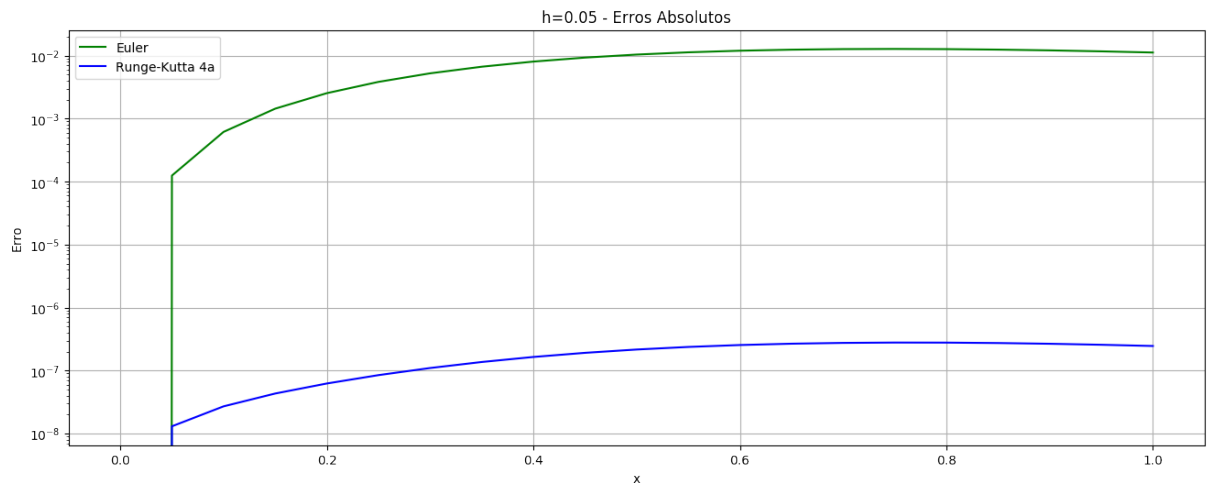


Figura 7: Comparação do erro absoluto da solução numérica para Euler Exercício e Runge-Kutta 4ª com $h = 0.05$

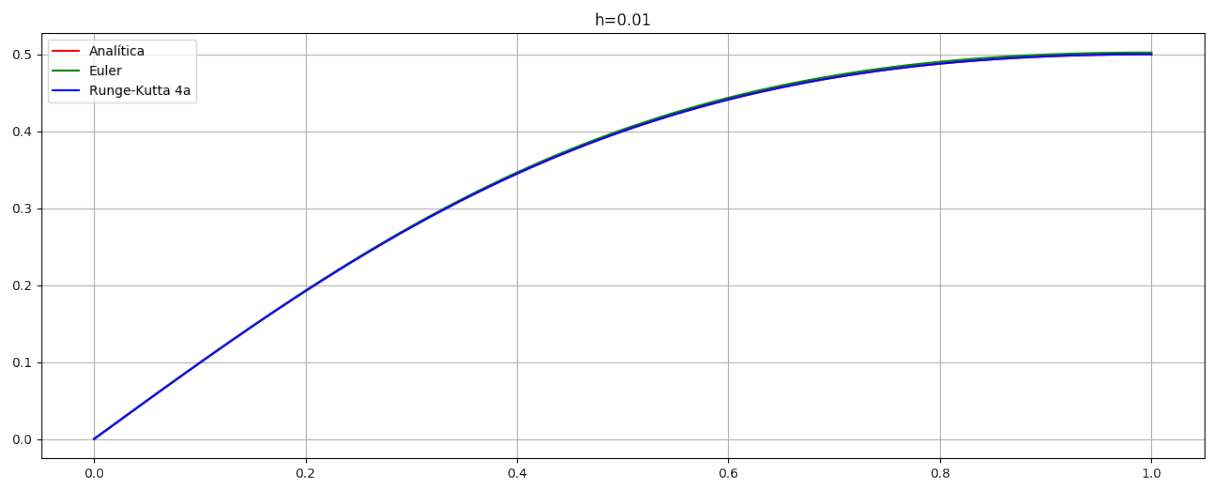


Figura 8: Comparação da solução numérica para Euler Exercício e Runge-Kutta 4ª para $h = 0.01$

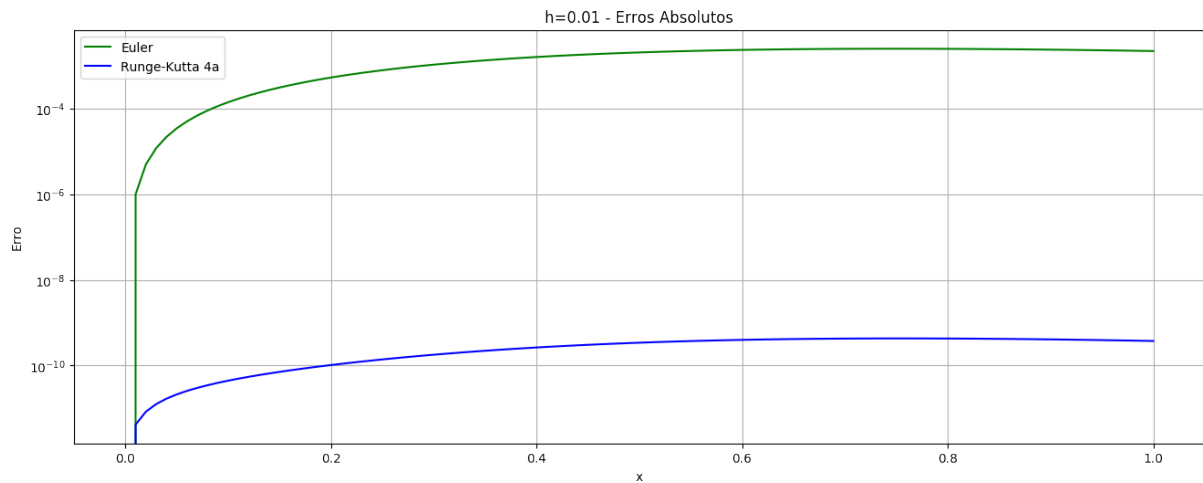


Figura 9: Comparação do erro absoluto da solução numérica para Euler Exercício e Runge-Kutta 4ª com $h = 0.01$

Podemos observar claramente pelos gráficos que para o método de Runge-Kutta 4ª ordem, mesmo em malhas grosseiras como $h = 0.5$ ou $h = 0.1$ o mesmo já se mostra muito próximo da solução exata. Enquanto que o método de Euler Explícito precisa de uma malha bem mais fina, como $h = 0.01$ para ficar tão próximo da solução analítica.

b) Repita o exercício anterior utilizando o método de Euler com diferentes valores de h , de tal forma que a solução seja tão próxima da solução obtida via método de Runge-Kutta quanto possível.

Para solucionar esse item adotemos a abordagem de comparar o máximo erro absoluto encontrado na malha em Runge-Kutta($4.681064296852E - 6$) e em Euler para critério comparativo. Fixando um $h = 0.1$ para Runge-Kutta podemos notar que o valor de h necessário para que o método de Euler seja tão próximo ao de Runge-Kutta quanto possível é de $h = 6.103515625E - 6$.

c) Compare o número de iterações, para esse exercício, entre o método de Euler e o de Runge-Kutta.

Tomando como base o exercício anterior, devemos analisar quantas vezes tivemos de reduzir a ordem de magnitude de h para que a solução de Euler fosse o mais próxima possível para a solução de Runge-Kutta com $h = 0.1$. Dividindo o tamanho da malha por 2 a cada nova iteração obtemos que foram necessárias 14 iterações para que isso fosse

possível. O trecho de código a seguir foi utilizado para realizar as iterações:

”while *ite* < 1000 and *err* > *maior*:”

Iteração	Erro Máximo
0	2.59466097E-02
1	1.27688580E-02
2	6.48382972E-03
3	3.18486803E-03
4	1.56868340E-03
5	7.83415048E-04
6	3.92091360E-04
7	1.95834881E-04
8	9.78265881E-05
9	4.89097085E-05
10	2.44563470E-05
11	1.22273524E-05
12	6.11332167E-06
13	3.05664683E-06

Tabela 1: Iterações e respectivos valores de erro máximo obtidos pelo método de Euler

4.2 Exercício 02

Resolva numericamente o PVI definido no intervalo $[0, 1]$:

$$\begin{cases} y'(x) = -y + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

para diferentes valores de h . E discuta a convergência e a estabilidade do método numérico utilizado em questão.

Resolvendo pelo Método de Euler Explícito temos :

$$y_{i+1} = y_i + h(-y_i + x_i)$$

Simplificando a equação de diferenças anterior temos:

$$y_{i+1} = (1 - h)y_i + hx_i$$

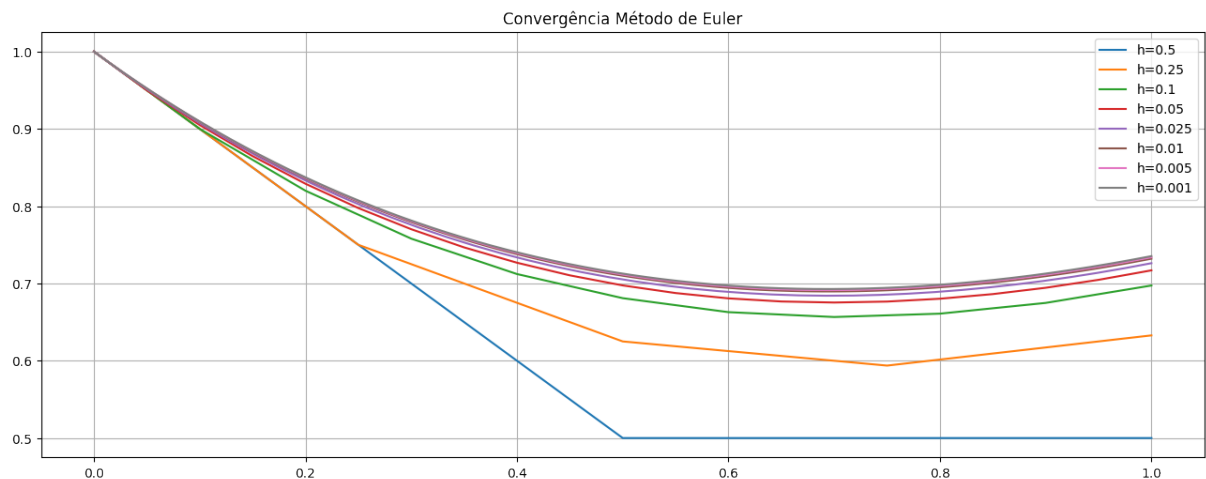


Figura 10: Solução numérica para Euler Explícito com $h = [0.5, 0.25, 0.1, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005, 0.001]$

Convergência: Um método numérico é convergente se o erro global e_n converge para zero quando $n \rightarrow \infty$, de maneira que x_n permanece fixo. O fato da sequência ser convergente não implica que ela converge para um limite que é a solução da equação diferencial.

Erro de Truncamento Local (ETL): Pode também ser interpretado como um erro cometido no passo atual, sem levar em consideração os erros dos passos anteriores.

No método de Euler Explícito temos

$$y'(x_i) = f(x_i, y_i) - \frac{h}{2}y''(\xi_i)$$

Se $h \rightarrow 0$ a equação de diferenças aproxima-se da equação diferencial $ETL \rightarrow 0$ então o método é consistente.

A ordem de consistência de um método está relacionada com sua ordem de convergência. E essa ordem é um indicativo da velocidade de convergência e assim um método com erro $O(h^2)$ deve convergir mais rápido que outro com $O(h)$. Portanto, um método com ordem mais alta, produz aproximações mais precisas, teoricamente. Como visto na seção sobre o método de Euler, ele é de ordem 1.

Zero-Estabilidade: Um método é dito ser zero-estável se as soluções básicas da equação de diferenças associada, tomando $f(x, y) = 0$ são limitadas.

As soluções básicas da equação de diferenças são dadas pelas raízes do polinômio característico a ele associado.

Teorema (Equivalência de Lax): No PVI para EDO um método baseado em diferenças finitas é convergente se, e somente se, é consistente e zero-estável.

Para o método de Euler Explícito temos que $e_{i+1} - e_i = h\lambda e_i \Rightarrow e_{i+1} = (1 + h\lambda)e_i \Rightarrow$ estabilidade para $-2 \leq h\lambda \leq 0$ (condicionalmente estável)

$$|1 + h\lambda| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 1 + h\lambda \leq 1 \Rightarrow -2 \leq h\lambda \leq 0$$

4.3 Exercício 03

Considere o seguinte PVF definido no intervalo $[0, 1]$:

$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 2x \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Aplique o método de diferenças finitas, utilizando diferenças centrais para as derivadas, e resolva numericamente esta equação.

Usando as diferenças centrais para a aproximar o valor de y'' temos

$$y'' = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$$

e usando novamente das diferenças centrais para a aproximar o valor de y' temos

$$y' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

agora substituindo na equação diferencial do PVF, temos

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + y_i = 2x_i$$

agrupando os termos comuns

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{x_i}{2h}\right)y_{i-1} + \left(-\frac{2}{h^2} + 1\right)y_i + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{x_i}{2h}\right)y_{i+1} = 2x_i$$

definindo

$$\begin{cases} a_i = -\frac{2}{h^2} + 1 \\ b_i = \frac{1}{h^2} - \frac{x_i}{2h} \\ c_i = \frac{1}{h^2} + \frac{x_i}{2h} \\ r_i = 2x_i \end{cases}$$

obtemos

$$b_i y_{i-1} + a_i y_i + c_i y_{i+1} = r_i$$

com a equação anterior, construímos um sistema linear com i variando de 1 a N.

$$\begin{cases} b_1 y_0 + a_1 y_1 + c_1 y_2 = r_1 \\ b_2 y_1 + a_2 y_2 + c_2 y_3 = r_2 \\ \dots \\ b_{N-1} y_{N-2} + a_{N-1} y_{N-1} + c_{N-1} y_N = r_{N-1} \\ b_N y_{N-1} + a_N y_N + c_N y_{N+1} = r_N \end{cases}$$

sendo b_1y_0 o contorno da esquerda e c_Ny_{N+1} o contorno da direita temos:

$$\begin{cases} a_1y_1 + c_1y_2 = r_1 - b_1y_0 \\ b_2y_1 + a_2y_2 + c_2y_3 = r_2 \\ \dots \\ b_{N-1}y_{N-2} + a_{N-1}y_{N-1} + c_{N-1}y_N = r_{N-1} \\ b_Ny_{N-1} + a_Ny_N = r_N - c_Ny_{N+1} \end{cases}$$

escrevendo o sistema de forma matricial

$$\begin{bmatrix} a & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a & c_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & b_{N-1} & a & c_{N-1} \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & b_N & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 - b_1y_0 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_{N-1} \\ r_N - c_Ny_{N+1} \end{bmatrix}$$

Como a matriz obtida é tridiagonal(esparsa) podemos resolver o sistema utilizando algoritmos eficientes como o Algoritmo de Thomas, esse algoritmo só considera os valores não nulos da matriz, de modo a economizar diversas operações de ponto flutuante, acelerando muito na solução do problema. Utilizando os $h = [0.1 \ 0.05 \ 0.01]$ obtemos os gráficos a seguir:

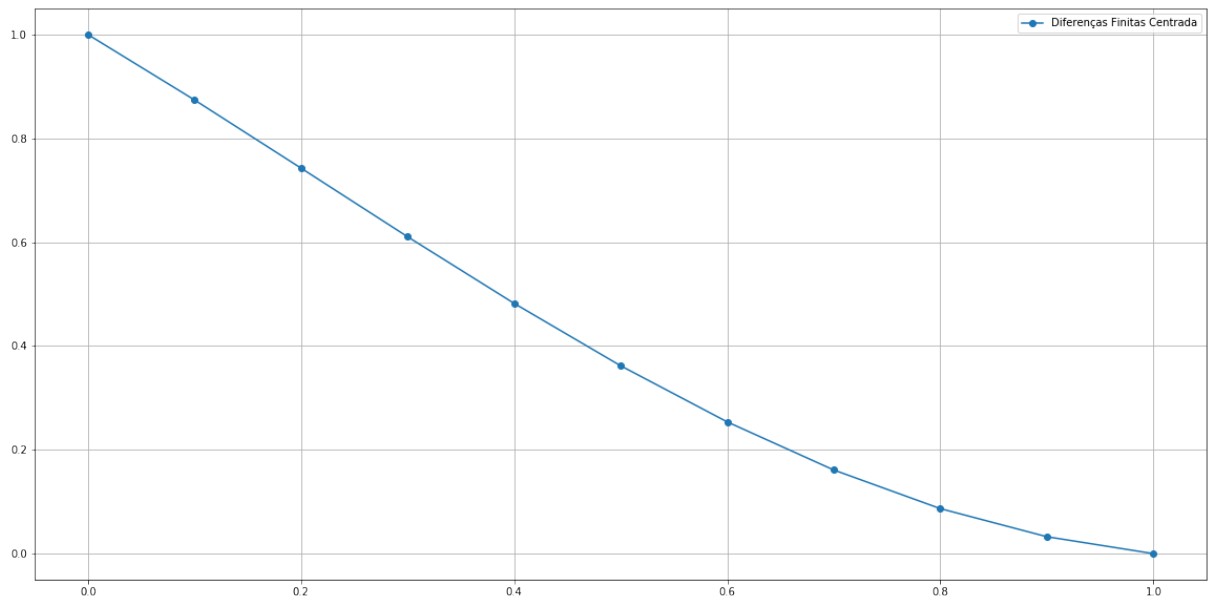


Figura 11: Solução numérica do PVF usando o método das Diferenças Finitas Centrais com $h = 0.1$

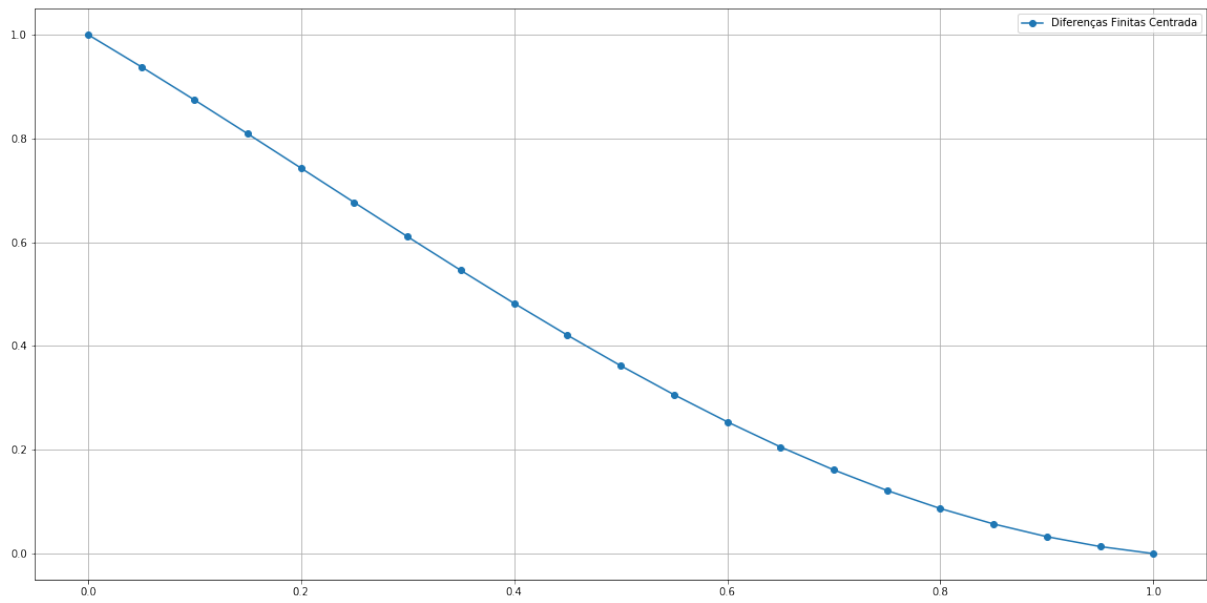


Figura 12: Solução numérica do PVF usando o método das Diferenças Finitas Centrais com $h = 0.05$

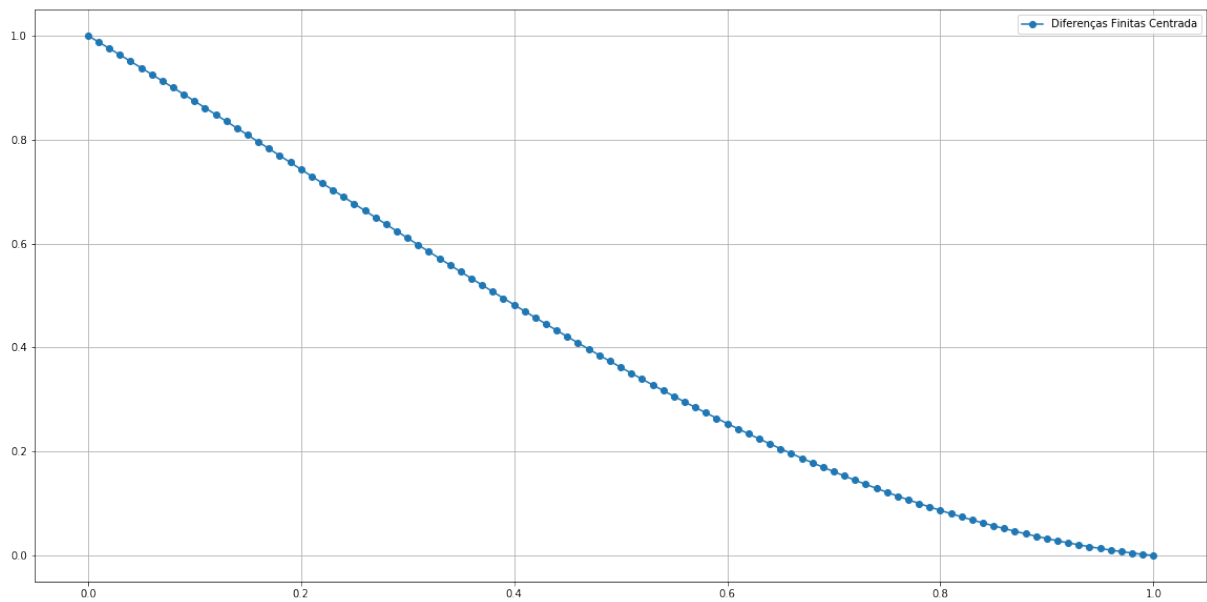


Figura 13: Solução numérica do PVF usando o método das Diferenças Finitas Centrais com $h = 0.01$

4.4 Exercício 04

Resolva numericamente o PVF definido no intervalo $[0, 1]$:

$$\begin{cases} y'' - y' + xy = e^x(x^2 + 1) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = e \end{cases}$$

Aplique o método de diferenças finitas, utilizando as fórmulas avançada, atrasada e centrada para as derivadas, e discuta as soluções aproximadas encontradas.

Aplicando a fórmula das diferenças avançadas para y'

$$y' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

temos que a equação diferencial fica

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right) + x_i y_i = e^x(x^2 + 1)$$

agrupando os termos comuns

$$\left(\frac{1}{h^2}\right)y_{i-1} + \left(-\frac{2}{h^2} + \frac{1}{h} + x_i\right)y_i + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h}\right)y_{i+1} = e^x(x^2 + 1)$$

definindo

$$\begin{cases} a_i = -\frac{2}{h^2} + \frac{1}{h} + x_i \\ b_i = \frac{1}{h^2} \\ c_i = \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h} \\ r_i = e^x(x^2 + 1) \end{cases}$$

obtemos

$$b_i y_{i-1} + a_i y_i + c_i y_{i+1} = r_i$$

aplicando o mesmo procedimento do exercício 3. podemos escrever de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_0 & c & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & a_1 & c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & a_2 & c & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & b & a_{N-1} & c \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & b & a_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 - by_0 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_{N-1} \\ r_N - cy_{N+1} \end{bmatrix}$$

Aplicando a fórmula das diferenças atrasadas para y'

$$y' = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

temos que a equação diferencial fica

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) + x_i y_i = e^x(x^2 + 1)$$

agrupando os termos comuns

$$\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}\right)y_{i-1} + \left(-\frac{2}{h^2} - \frac{1}{h} + x_i\right)y_i + \left(\frac{1}{h^2}\right)y_{i+1} = e^x(x^2 + 1)$$

definindo

$$\begin{cases} a_i = -\frac{2}{h^2} - \frac{1}{h} + x_i \\ b_i = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} \\ c_i = \frac{1}{h^2} \\ r_i = e^x(x^2 + 1) \end{cases}$$

obtemos

$$b_i y_{i-1} + a_i y_i + c_i y_{i+1} = r_i$$

aplicando o mesmo procedimento do exercício 3. podemos escrever de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_0 & c & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & a_1 & c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & a_2 & c & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & b & a_{N-1} & c \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & b & a_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 - by_0 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_{N-1} \\ r_N - cy_{N+1} \end{bmatrix}$$

Aplicando a fórmula das diferenças centradas para y' obtemos algo semelhante ao exercício 3 onde

$$\begin{cases} a_i = -\frac{2}{h^2} + x_i \\ b_i = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} \\ c_i = \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} \\ r_i = e^x(x^2 + 1) \end{cases}$$

com forma matricial equivalente a das diferenças anteriores. Resolvemos os sistemas lineares usando o Algoritmo de Thomas com $h = [0.2 \quad 0.1 \quad 0.4]$.

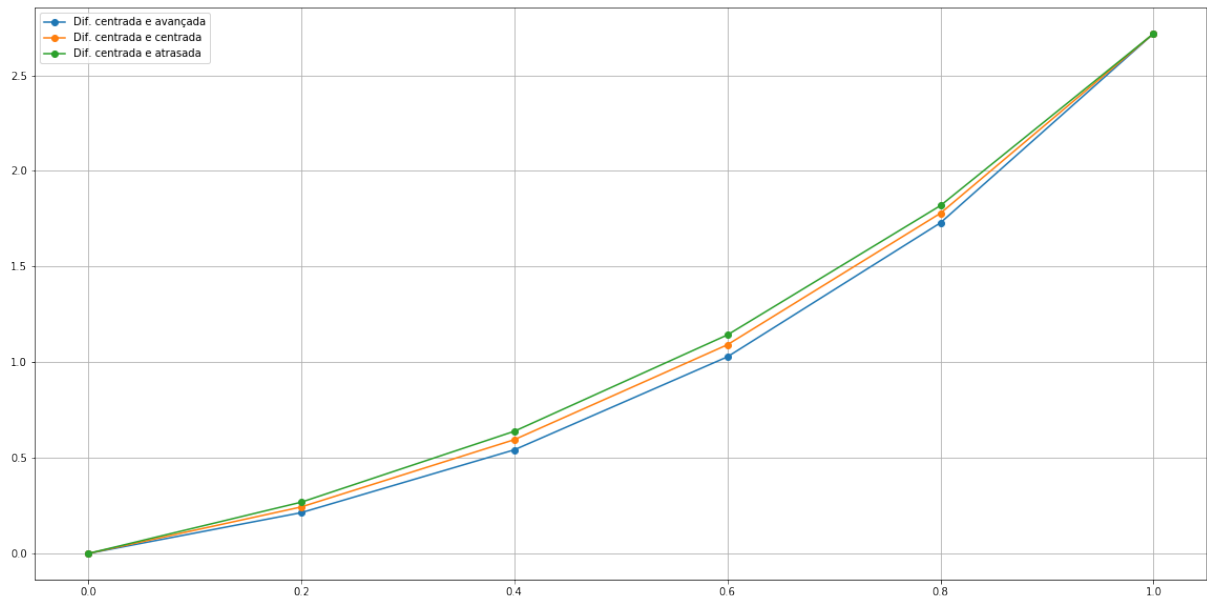


Figura 14: Solução numérica do PVF usando o método das Diferenças Finitas com $h = 0.2$

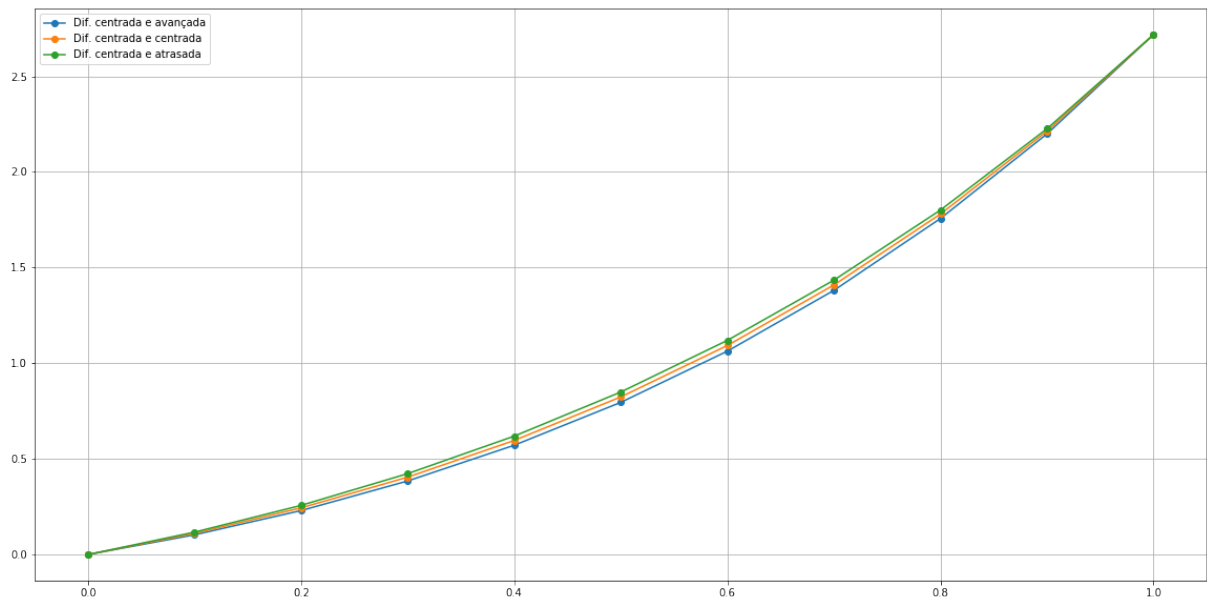


Figura 15: Solução numérica do PVF usando o método das Diferenças Finitas com $h = 0.1$

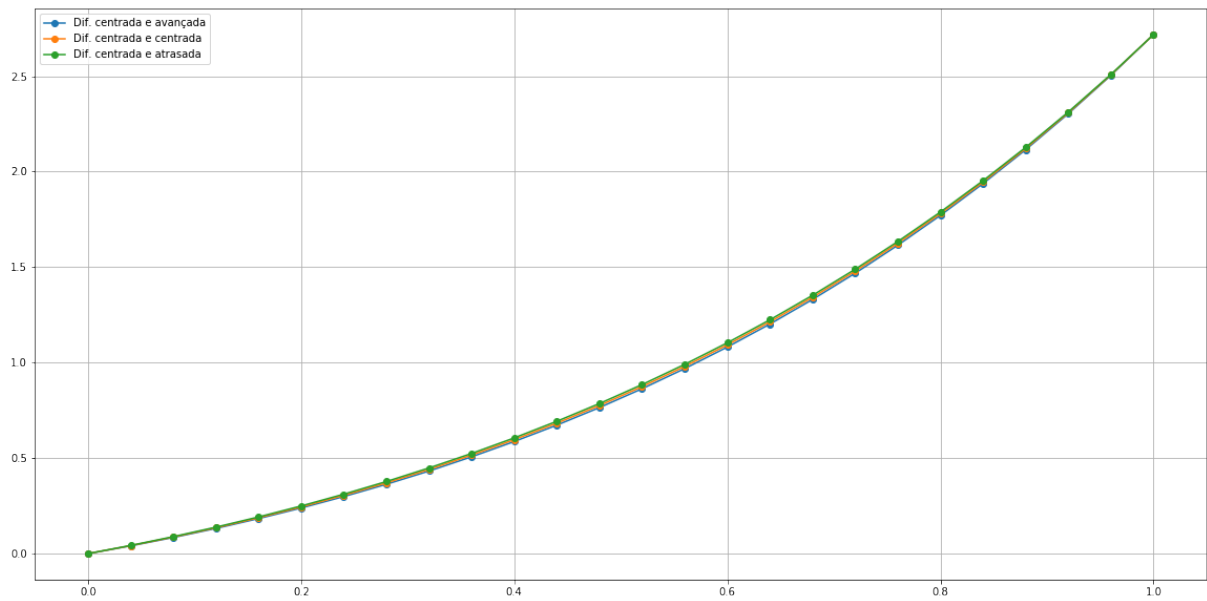


Figura 16: Solução numérica do PVF usando o método das Diferenças Finitas com $h = 0.04$

Pelos gráficos presentes nas Figs 14, 15 e 16 podemos notar que a medida que refinamos a malha, as soluções para avançada e atrasada tendem a se aproximar da centrada, que como era de se esperar, obtém a melhor solução mesmo para malhas mais grossas. Essa aproximação se deu de maneira relativamente rápida, dado que o termo mais relevante é o da segunda derivada e essa é calculada via diferenças centradas para todos os 3 métodos.

Outro item a ser destacado é o fato da diferença atrasada ter ficado acima das diferenças avançadas, isso se deve ao fato de que o coeficiente de y' é -1 .

Bibliografia

AGUIRRE, L. A. Introdução à Identificação de Sistemas, Técnicas Lineares e Não lineares Aplicadas a Sistemas Reais. Belo Horizonte, Brasil, EDUFMG. 2004.

Boyce et al,Elementary Differential Equations and Boundary Value ,WILEY, 2017, ISBN: 978-1-119-16975-8

U.M. Ascher, C. Greif,A First Course in Numerical Methods, SIAM,2011