אותות ומשתנים אקראיים 67652

עבודת MATLAB #2

פרק 1 - שערוך בערוץ תקשורת עם הפרעות

יהא $\underline{X}$ וקטור אקראי בגודל 4×1 כך שאיבריו מפולגים i.i.d. כך ש־X_i מקבל ערכים ± 1 בהסתברות שווה. כל איבר בוקטור הוא למעשה שידור של ביט מידע יחיד. וקטור אקראי זה עובר דרך ערוץ לינארי דטרמיניסטי, שימודל על ידי מכפלה במטריצה $\mathbf{H}$ בגודל 4×4, ובמוצא הערוץ מתווסף רעש גאוסי $\underline{N}$ שאיבריו מפולגים i.i.d. עם הפילוג

$$\underline{N} \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \mathbf{I}_4\right)$$

ו־$\underline{X}$, $\underline{N}$ בלתי תלויים סטטיסטית. נסמן את מוצא המערכת ב־$\underline{Y}$ כאשר מתקיים

$$\underline{Y} = \mathbf{H}\underline{X} + \underline{N}$$

בתרגיל נבחן דרכים שונות לשערוך המידע המשודר בערוץ ($\underline{X}$).

חלק 1 - שערוך לינארי אופטימלי

1) מצאו ביטוי אנליטי למשערך ה־LMMSE של $\underline{X}$ מתוך $\underline{Y}$ (בטאו תשובתכם במונחי $\underline{Y}$, $\mathbf{H}$ ו־σ^2).

2) מצאו ביטוי אנליטי למטריצת קוואריאנס שגיאת משערך ה־LMMSE $\underline{Y}$ (בטאו תשובתכם במונחי $\mathbf{H}$ ו־σ^2).

3) בסעיף זה נתון כי:

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_1=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0.01 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(א) בתת סעיף זה הניחו כי $\sigma^2=1$. בצעו סימולציית מונטה־קרלו למשערך ה־LMMSE של $\underline{\mathrm{X}}$ מתוך $\underline{\mathrm{Y}}$ כדי לשערך את מטריצת קוואריאנס שגיאת השערוך. חשבו את הקוואריאנס המתקבל במקרה זה מהפיתוח האנליטי וביצעו השוואה של התוצאה עם תוצאת הסימולציה.

הנחיות לביצוע תת הסעיף:

- לצורך שערוך מטריצת קוואריאנס השגיאה, בצעו מיצוע של מטריצות השגיאות האמפיריות. אם ביצעת m ניסויים, ובניסוי ה־$1\le i\le m$ התקבל וקטור שגיאה $\underline{\mathrm{E}}^{(i)}$, אזי מטריצת השגיאה האמפירית בניסוי ה־i הוא

$$\mathbf{C}_i=\underline{\mathrm{E}}^{(i)}\cdot\left(\underline{\mathrm{E}}^{(i)}\right)^T$$

השיערוך המבוקש הוא לפיכך $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mathbf{C}_i$.

- כדי להגריל את הוקטור $\underline{\mathrm{X}}$ ניתן להעזר בפקודה `randsrc`.
- כדי להגריל את הרעש הגאוסי $\underline{\mathrm{N}}$ היעזרו בפקודה `randn`.

(ב) בצעו סימולציית מונטה־קרלו למשערך של $\underline{\mathrm{X}}$ מתוך $\underline{\mathrm{Y}}$ והפעילו על המשערך את כלל ההחלטה לביט המתואר בכדי לשערך את הסתברות השגיאה הממוצעת לביט כפונקציה של יחס האות לרעש שיוגדר באופן הבא:

$$\mathrm{SNR}=10\cdot\log\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\quad[\mathrm{dB}]$$

את התוצאה יש להציג על גבי גרף חצי לוגריתמי ב־MATLAB. לצורך פענוח הביטים ב־$\underline{\mathrm{X}}$ נגדיר את כלל ההחלטה לביט באופן הבא:

$$\hat{X}_i=\begin{cases}1 & ,\text{if } \hat{X}_{LMMSE,i}\ge 0\\ -1 & ,\text{else}\end{cases}$$

כאשר $\hat{X}_{LMMSE,i}$ הינו האיבר ה־i במשערך ה־LMMSE ואילו $\hat{X}_i$ הינו ההחלטה על הביט ה־i ששודר ב־$\underline{\mathrm{X}}$.

שימו לב: הסתברות השגיאה הממוצעת לביט הינה

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{error}\right) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\mathbb{P}\left(\hat{X}_i \neq X_i\right).$$

הנחיות לביצוע תת הסעיף:

- בחרו את ה־SNR להיות בתחום $[0, 40]$ dB (היעזרו בפקודה `linspace`).
- בצעו לפחות 2000 הרצות לכל SNR בכדי לשערך את הסתברות השגיאה.
- את גרף הסתברות השגיאה כתלות ב־SNR יש להציג בסקאלה חצי לוגריתמית. לצורך כך העזר בפקודה `semilogy`.

4) חזרו על סעיף 3), כאשר כעת נתון כי:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

5) חזור על סעיף 3), כאשר כעת נתון כי:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

האם ניתן לבצע את השערוך? נמקו את תשובתכם.

פרק 2 - תהליך Autoregressive (AR) ליניארי

נתון תהליך אקראי AR ליניארי מסדר 1 המוגדר על ידי:

$$X[n] = \frac{1}{2}X[n-1] + W[n], \quad n \geq 1$$

כאשר $X[0] = 0$ ועבור כל $n \geq 1$, $W[n]$ משתנה אקראי בדיד המקבל ערכים $\{-1, 1\}$ בהסתברות שווה, בלתי תלוי סטטיסטית ב־$X[n]$.

1) חשבו את הפילוגים של $X[1]$ ושל $X[2]$.

2) הוכיחו כי לכל $n \geq 1$, $X[n]$ מתפלג אחיד בקבוצה הבדידה

$$\mathcal{S}_n = \{-a_n, -a_n + \Delta_n, -a_n + 2\Delta_n, \ldots, a_n - \Delta_n, a_n\}$$

וחשבו את Δ_n, a_n לכל n. רמז : העזרו בסעיף 1 כדי למצוא ניחוש ל־Δ_n, a_n. את שאר הטענה ניתן להוכיח באינדוקציה.

3) הראו כי:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= 2 \\ \lim_{n\to\infty} \Delta_n &= 0 \end{aligned}$$

לרשותכם באתר הקורס קובץ ה genAR.m שמאפשר לייצר פונקציות מדגם של תהליך אקראי AR. שימו לב שאפשר גם להשתמש בו וקטורית (אבל לא מוכרחים) .

4) בעזרת MATLAB ציירו שש פונקציות מדגם של $X[n]$ בתחום $1 \leq n \leq 200$

5) בצעו סימולציית מונטה־קרלו עבור הפונקצית צפיפות של הדגימות הבאות של $X[n]$ (לקבלת תוצאות טובות כדאי לקחת דגימות מאוחרות יחסית):

$$X[1], X[2], X[3], X[n_1], X[n_2], X[n_3], \quad 3 < n_1 < n_2 < n_3$$

6) מתוך התבוננות הסימולציה, לאיזה פילוג רציף מתקרב הפילוג של $X[n]$ כאשר $n \to \infty$? הסבירו זאת לאור ממצאכם בסעיף 2 ו־3.

7) כעת נרצה לחקור את ההתנהגות הסטטיסטית של התהליך, כאשר $X[0]$ הוא משתנה אקראי (במקום $X[0] = 0$). ניקח את הפילוג הרציף $X[0] \sim \mathrm{U}[2, 3]$ (פילוג אחיד רציף בין 2 לבין 3). חזרו על סעיפים 5 ו־6 עבור תנאי התחלה זה. נסו להסביר את הדמיון בתוצאות. (רמז: כדאי להציג את $X[n]$ כסכום של שני תהליכים אקראיים).