Università degli Studi di Trieste

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Tesi di laurea in
MATEMATICA

Tecnologia della dimostrazione

Sviluppo di uno scenario di verifica automatica

Relatore:

Prof. Eugenio Omodeo

Laureando:

Gil Vegliach

Correlatore:

Prof. Sergio Invernizzi

Anno accademico 2009-2010

INDICE

1 INTRODUZIONE

Nel corso della storia le dimostrazioni si sono fatte via via più lunghe e complesse. La prima proposizione degli Elementi di Euclide, la costruzione di un triangolo equilatero dato un lato, riempiva poche righe (Euclide [2010]). Le dimostrazioni delle proposizioni non occupavano in generale più di una pagina. I teoremi di oggi invece si estendono su svariati articoli tecnici, ognuno lungo decine di pagine. Si prenda ad esempio il teorema dell'indice di Atiyah-Singer[1] oppure la più recente classificazione dei gruppi semplici finiti[2]. Come possiamo essere sicuri che queste dimostrazioni siano corrette? Come può aiutarci la tecnologia in questo compito?

Nel presente lavoro parleremo di proof-checking, cioè il processo di usare del software per controllare le dimostrazioni. Una dimostrazione scritta in un linguaggio formale viene data in pasto a un verificatore automatico, il quale la controlla e ci dice se tutto è filato liscio oppure se qualcosa non va. In quest'ultimo caso viene generato un diagnostico con gli errori commessi, errori che potranno venir corretti prima di una nuova esecuzione del verificatore.

Come particolare verificatore automatico useremo Ref, un software sviluppato da Jacob T. Schwartz e E.Omodeo. Ref è un verificatore automatico basato sulla teoria degli insiemi.

In Ref svilupperemo uno scenario che caratterizza la compattezza di uno spazio topologico attraverso le intersezioni di insiemi chiusi.

Per quanto semplice, questo risultato è un primo passo verso l'integrazione di un preesistente scenario sul teorema di Stone sulla rappresentazione delle algebre di Boole con tutte le informazioni topologiche del caso (Stone [1936]).

1 la dimostrazione del celeberrimo teorema dell'indice Atiyah-Singer compiuta negli anni '60 era divisa in quattro lunghi articoli negli Annals of Mathematics e usava un sacco di strumenti da altre fonti

2 il teorema di classificazione dei gruppi semplici finiti è talmente lungo da essere chiamato *teorema enorme*

2

PERCHÉ VERIFICARE LE DIMOSTRAZIONI?

La prima volta che una persona è introdotta al concetto di dimostrazione questo viene spiegato più o meno così

> *ragionamento deduttivo che partendo da certe ipotesi verifica una tesi, la cui validità è dovuta alla coerenza del ragionamento*

In pratica una dimostrazione è un certificato di garanzia, una prova inconfutabile della validità della nostra tesi. Perché controllare il certificato allora? Nessuno si preoccupa degli errori d'ortografia nella garanzia di un cellulare, ma la matematica è una cosa diversa. La matematica parla di certezza, una certezza derivata dal fatto di costruire i propri concetti tramite un rigoroso procedimento logico-deduttivo, partendo da pochi assiomi ritenuti veri.

In teoria uno potrebbe scommettere la casa sulla correttezza della classificazione dei gruppi finiti semplici. In teoria funziona. In pratica nessuno lo farebbe mai: noi matematici commettiamo spesso degli errori. Basta un segno invertito, una lettera scritta male o qualche piccola svista ed ecco partire una serie di deduzioni errate. Su queste deduzioni costruiamo intere teorie, magari le pubblichiamo, finché ci accorgiamo del nostro errore. Il nostro castello concettuale distrutto dalla rimozione di un solo mattone.

Gli errori possono infiltrarsi anche in ciò che non vediamo. Spesso un passaggio ci sembra ovvio e sicuramente non vale la pena verificare tutte le parti, perciò non le scriviamo. E abbiamo i nostri buoni motivi per questo comportamento: quando Alfred North Whitehead e Bertrand Russel provarono a scrivere tutti i passaggi anche solo di una parte elementare della matematica, produssero un libro di 2000 pagine (Whitehead e Russell [2009]). Lo stesso Russell ammise ad un amico

> *non credo che alcun essere umano lo leggerà mai per intero*

Tra piccole sviste e passaggi dimenticati la nostra sicurezza comincia a vacillare. Come possiamo essere sicuri che il nostro lavoro sia corretto?

La soluzione di oggi si basa sul peer-review, la revisione dei pari. Un articolo, prima di esser pubblicato, viene inviato anonimamente ai referee, anonimi arbitri che lavorano nel nostro stesso campo. I referee credono che il materiale sia corretto e che contenga della sostanza? Sì, allora il giornale si occupa di pubblicare l'articolo. La correttezza viene dunque ad essere un processo sociale, un processo che soffre degli stessi svantaggi del fattore umano visti sopra: piccoli errori possono sfuggire, e piccoli errori portano a grandi disastri.

Per fortuna i nostri punti deboli sembrano essere coperti dalla tecnologia. Il computer, benché sprovvisto di alcuna intelligenza propria, è molto veloce nel controllare una miriade di passi semplici. Se una dimostrazione potesse essere scritta nei suoi passi più elementari, un computer potrebbe facilmente verificarne la correttezza.

Questa è l'idea del proof-checking: scrivere una dimostrazione in tutti i suoi dettagli e poi farla controllare a un computer. In tutti i suoi dettagli significa ridurre una dimostrazione a livello di logica proposizionale, in cui le regole di inferenza sono semplici e indiscutibili: la validità è garantita. Controllarla a computer significa meccanizzare quello che è il peer-review di oggi: il fattore umano può esser impiegato nel discutere il senso e l'utilità delle dimostrazioni invece che perder tempo sulla parte logica.

Per capire come il computer possa aiutarci in questo compito vedremo alcuni esempi di errori storici e come la tecnologia ci sia venuta in aiuto.

il teorema dei 4 colori, il teorema più verificato della storia

Nel 1852 Francis W. Guthrie, laureato al University College di Londra, propose il seguente problema al fratello Frederick (Krantz [2007]):

> *Immagina una mappa sulla superficie della terra, una mappa suddivisa in regioni. Non ci sono fiumi o laghi a dividere le regioni, né altre zone d'acqua. L'unica regola è che ogni regione sia un'unica massa contigua senza buchi. In qualità di cartografi, vorremmo colorare la mappa in modo che nessuna regione adiacente abbia lo stesso colore. Quanti colori dobbiamo comprare? Quanti colori dobbiamo comprare per colorare una qualsiasi mappa?*

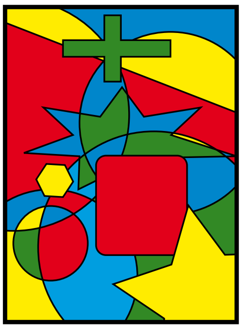
Il problema passò di man in mano a molti matematici illustri: primo tra tutti Augustus De Morgan, [1] un professore di Guthrie, poi W. R. Hamilton [2] e infine A. Cayley [3] ne parlò in una pubblicazione del 1878. Le voci arrivarono fino a Göttingen dove Felix Klein[4] dichiarò che l'unica ragione per cui il problema era irrisolto era che nessun matematico capace ci aveva ancora lavorato. Lui ci provò e fallì. Ma la storia non finisce qui: nel 1879 A. Kempe[5] pubblicò una soluzione. La dimostrazione resistette per undici anni quando P.Heawood[6] trovò un errore. Purtroppo l'errore di Kempe non era eliminabile anche se Heawood riuscì a tirare fuori molti concetti carini, come ad esempio il numero cromatico di una superficie. Un altro tentativo fallito fu a opera del matematico Tait: dimostrazione presentata nel 1880, errore trovato nel 1891 da Peterson.

Dopo tutti questi tentativi falliti il teorema dei quattro colori diventava celebre: contributi parziali furono dati da Birkhoff, Franklin, Heesch e Stromquist ma nessuna dimostrazione completa era ancora conosciuta.

Così quando nel 1974 Kenneth Appel[7] e Wolfgang Haken[8] annunciarono di avere una dimostrazione la notizia si scontrò

1 Augustus De Morgan, 1806–1871. È l'autore delle famose leggi di De Morgan
2 William Rowan Hamilton, 1805-1865. È l'autore del teorema di Cayley-Hamilton
3 Arthur Cayley, 1821-1895
4 Felix Klein, 1849-1925
5 Alfred Bray Kempe, 1845-1922
6 Percy John Heawood,1861-1955
7 Kenneth Ira Appel, 1932–
8 Wolfgang Haken, 1928–

con un pubblico incerto e dubbioso. Era forse questa la volta buona? La tecnica di Appel e Haken era di ridurre la casistica di mappe a 1936 configurazioni fondamentali, dimostrando individualmente il teorema per ogni configurazione. Fin qui niente di eccezionale, tranne per il fatto che le 1936 configurazione erano state dimostrate dai supercomputer dell'università dell'Illinois, in circa 1200 ore di computer-time. Nessun essere umano sarebbe mai riuscito a controllare una dimostrazione così lunga e complicata e molto si dibattè se questa fosse una dimostrazione filosoficamente accettabile. Finora per quanto una dimostrazione fosse stata una lunga e intricata sequenza di passaggi logici era sempre stato possibile che un altro essere umano la controlli.



4-colorazione

I piccoli errori trovati nel programma negli anni a venire – sempre prontamente corretti – contribuirono ad aumentare i sospetti.

Nel 1994 Paul Seymour e il suo gruppo all'università di Princeton trovarono un nuovo algoritmo più stabile per dimostrare il teorema. L'approccio soffriva dei stessi problemi di quello di Appel e Haken ma nel 2004 Gonthier, uno scienziato alla Microsoft Research a Cambridge, usò un proof assistant per controllare la dimostrazione (Gonthier [2008]). La dimostrazione non era stata controllata da un essere umano ma almeno era stata controllata [9].

Una domanda però sorse spontanea: Se il verificatore avesse dei bug la verifica non sarebbe stata valida. La correttezza della dimostrazione sarebbe nuovamente incerta. Come possiamo escludere questa eventualità?

```
Variable R : real_model.
Theorem four_color : (m : (map R))
(simple_map m) -> (map_colorable (4) m). Proof.
Exact (compactness_extension four_color_finite). Qed.
```

Enunciato del teorema dei 4-colori scritto da Gonthier in Coq v7.3.1

La risposta di Gonthier fu servirsi di un verificatore con un kernel il più corto possibile, con il minor numero possibile di assiomi e di regole d'inferenza. Anche se il software non sarà mai in grado di garantire la certezza assoluta la dimostrazione del teorema dei quattro colori diventò così una delle dimostrazioni più scrupolosamente verificate della storia, citazione di Hales.

Hales è un professore di Pittsburgh che fu direttamente coinvolto nel proof-checking quando dimostrò la congettura di Keplero nel '98.

la congettura di Keplero

La congettura di Keplero nasce ingenuamente da una domanda di Sir Walter Releigh [10], al matematico inglese Thomas Harriot:

9 In cosa differisce l'uso del computer di A.& H. da quello di Gonthier? Usiamo una metafora, supponiamo di dover mostrare $1+1=2$ usando un computer. A.&H. avrebbero lanciato l'applicazione *Calcolatrice* ed eseguito il conto. Gonthier avrebbe assiomatizzato l'aritmetica, dimostrato che il successore di 1 sia 2 e controllato il tutto con un software ad hoc

10 Sir Walter Releigh, 1552-1618. Navigatore, corsaro e poeta inglese

"qual è il modo più efficiente per disporre le palle di cannone sul ponte della mia nave" La domanda risultò di notevole interesse matematico e fu passata da Harriot a Johannes Kepler [11] che la pubblicò nel 1611 in un libricino intitolato *Strena seu de nive sexangula* (Sul fiocco di neve e sei angoli)

Messa in uno stile più matematico la domanda non riguardava l'artiglieria ma suonava più o meno così: qual è il modo più efficiente possibile di impacchettare sfere uguali nello spazio?

Può sembrare più astratto ma il problema è in pratica quello che si trova ad affrontare un fruttivendolo ogni giorno: disporre il maggior numero di arance nel minor spazio possibile.

Facile da enunciare, ma non altrettanto da risolvere questo problema ha una lunga storia: i primi contributi furono dati nel caso bidimensionale da Carl Friedrich Gauss e Axel Thue.

Gauss provò che la disposizione regolare che garantisce la densità più alta è il reticolo esagonale. Thue provò che il reticolo esagonale garantisce la densità più alta sia tra le disposizioni regolari, sia tra quelle irregolari (1890).

Il passo successivo verso una soluzione fu fatto dal matematico ungherese László Fejes Tóth [12]. Nel 1953 Fejes Tóth mostrò che il problema di determinare la massima densità di tutte le disposizioni di sfere, regolari ed irregolari, poteva essere ridotto a un numero finito, anche se molto grande, di calcoli. Questo significava che era possibile, almeno in linea di principio, trovare una dimostrazione per esaustione. Un computer sufficientemente potente avrebbe potuto fornire un approccio pratico alla risoluzione del problema.

Nel frattempo vennero fatti tentativi per trovare un estremo superiore per la massima densità di un qualunque impacchettamento di sfere. Il matematico inglese Claude Ambrose Rogers stabilì un limite superiore di circa 78% nel 1958, e tentativi successivi fatti da altri matematici ridussero leggermente questo valore, che era comunque di molto superiore alla densità dell'impacchettamento cubico, cioè 74%. Furono anche prodotte dimostrazioni errate. L'architetto e geometra statunitense Buckminster Fuller affermò di essere in possesso di una dimostrazione nel 1975, ma si scoprì poco dopo che non era corretta. Nel 1993 Wu-Yi-Hsiang, all'University of California, Berkeley pubblicò un articolo in cui affermava di aver dimostrato la congettura di Keplero usando metodi geometrici. Alcuni esperti affermarono di non aver trovato motivazioni sufficienti per alcune delle sue affermazioni. Sebbene non fosse stato trovato nulla di scorretto nel lavoro di Hsiang, la maggioranza del mondo matematico si trovò d'accordo nell'affermare che la dimostrazione di Hsiang era incompleta. Uno dei critici più attivi fu proprio il nostro Thomas Hales, che all'epoca stava lavorando a una sua dimostrazione.

Seguendo l'approccio suggerito da Fejes Tóth, Thomas Hales, all'epoca all'University of Michigan, determinò che la massima densità di tutti gli impacchettamenti poteva essere trovata minimizzando una funzione di 150 variabili. Nel 1992, assistito dal suo allievo laureato Samuel Ferguson, diede inizio a un

11 Johannes Kepler (Giovanni Keplero), 1571-1630
12 László Fejes Tóth, 1915-2005

programma di ricerca per applicare sistematicamente i metodi della programmazione lineare alla ricerca di un limite inferiore per il valore di questa funzione relativo a un insieme di più di 5000 differenti configurazioni di sfere. Se, per ognuna di queste configurazioni, fosse riuscito a trovare un limite inferiore che superasse il valore relativo all'impacchettamento cubico, allora la congettura di Keplero sarebbe stata dimostrata. La ricerca di tutte queste limitazioni inferiori avrebbe richiesto la soluzioni di circa 100.000 problemi di programmazione lineare. Quando presentò i progressi del suo progetto nel 1996, Hales affermò di essere in vista della fine, ma che avrebbe avuto ancora bisogno di un anno o due. Nell'agosto del 1998 Hales annunciò che la dimostrazione era completa: 250 pagine di annotazioni e 3 gigabyte di programmi per computer, dati e risultati.

Hales non mandò la sua dimostrazione a una rivista qualsiasi, mandò la sua dimostrazione agli Annals of Mathematics. Gli Annals of Mathematics (Annali della matematica) è la rivista matematica più prestigiosa al mondo e, come ci si aspetterebbe, è quella con le regole di pubblicazione più rigide. Non considera articoli troppo lunghi, cerca solo problemi di effettivo interesse e pubblica solamente scritti in forma tradizionale. In breve, la dimostrazione di Hales non rispettava nessun standard della rivista. Ciononostante Robert MacPherson, il Managing Editor della rivista, era interessato alle dimostrazioni fatte a computer. Credeva che il computer potesse risolvere i soliti vecchi problemi. E così considerò lo scritto. Fu istituita una commissione di dodici referee e nel 2003, dopo quattro anni di lavoro, il capo della commissione Gábor Fejes Tóth (figlio di László Fejes Tóth) annunciò che la commissione era certa al 99% che la dimostrazione era corretta, ma che non poteva garantire la correttezza di tutti i calcoli fatti al computer.

Hales decise che certa al 99% non era abbastanza. Così iniziò il progetto FlysPecK, dove le lettere F, P e K sono le iniziali delle parole che compongono la frase *Formal Proof of Kepler*. La sua stima è che ci vorranno 20 anni-persona di lavoro, cioè un lavoro di 20 anni per una singola persona, oppure 10 anni per due persone. Ora progetto sembra essere a metà strada. L'importanza di questo anedotto riesiede nel fatto che nonostante la dimostrazione sia considerata sufficientemente corretta da una rivista prestigiosa come gli Annals of Mathematics lo stesso Hales non è soddisfatto. Se possiamo citare con disinvoltura i teoremi contenuti negli Elementi di Euclide è perché la matematica si basa su certezze assolute. E così, per ottenere la certezza assoluta, Hales si rivolse al mondo dei verificatori automatici.

Un altro esempio in cui i proof-assistant giocarono un ruolo decisivo fu quando il professore del Lynchburg College, Thomas Nicely, scoprì un bug nell'istruzione di divisione del primo pentium della Intel nel '94. Questa volta non si trattava di astratti teoremi matematici ma di migliaia di computer nel mondo che ogni giorno sbagliavano di fare le divisioni. L'errore compariva soltanto dopo svariate cifre decimali ed era sfuggito agli ingegneri della Intel. Nessun problema, dunque, per dividere il conto di una pizza, ma da un computer non ci si può aspettare questa

il bug nei Pentium

superficialità.

E la Intel l'aveva capito: quando Nicely mandò il suo report nell'ottobre del '94, l'azienda già si era accorta da qualche mese del problema, ma aveva segretamente taciuto fino ad allora. Cosa sarebbe successo se il grande pubblico si fosse accorto che i loro processori sbagliavano? Il danno economico sarebbe stato enorme.

Nicely aveva bisogno del computer nelle sue ricerche sui numeri primi: stava enumerando tabelle di numeri primi, coppie e triplette di primi quando notò delle discrepanze nei risultati. Le discrepanze erano cominciate quando era stato introdotto il primo Pentium nell'arsenale computazionale. Nicely continuò ad inviare mail i suoi colleghi e amici chiedendo se anche loro risconstrassero lo stesso problema.

E così pian piano la storia si diffuse: comparsa in un articolo del Electronic Engineering Times il 7 novembre 1994, fu successivamente mandata in onda dalla CNN il 21 novembre dello stesso anno. La notizia ormai era giunta al grande pubblico tanto che il bug si conquistò addirittura un nome–laddove di solito i bug sono catalogati con un banale numero di identificazione: Pentium FDIV bug, dove FDIV è l'istruzione per la Floating-point DIVISION nel linguaggio assembly x86.

Un duro colpo per la Intel, un danno economico e d'immagine. Molti utenti reclamarono la sostituzione del loro processori.

Intel rispose con un colpo d'ingegno: dopo aver ritirato i processori difettosi li trasformò in graziosi portachiavi con sopra incisa una citazione di Andy Grove, uno dei fondatori della stessa Intel:

> *Bad companies are destroyed by crises*
> *good companies survive them*
> *great companies are improved by them*

E così da quel giorno, un po' per tenere fede alla frase ad effetto, un po' per il colpo subito costato 475.000.000$, Intel migliorò sul serio: si affidò a software di verifica automatica per gli algoritmi dei suoi processori. (La intel usa HOL light, lo stesso verificatore del teorema dei quattro colori di Hales, vedi articolo di Geuvers [2009])

3 COS'È UN PROOF ASSISTANT?

Un proof assistant è un programma che serve per formalizzare teorie matematiche. Formalizzare una teoria matematica significa esprimerla in un linguaggio logico-formale elaborabile da un computer, includendo tutti i teoremi, dimostrazioni e definizioni di cui la teoria stessa ha bisogno. Ogni dettaglio deve essere incluso: vietato etichettare un passaggio come ovvio o lasciarlo al lettore.

Nella pratica un proof assistant legge un lungo file di testo, comprendente migliaia di righe di enunciati e definizioni e dice se il contenuto è corretto. Il file di input si chiama proof script, e la modalità di lavoro si dice batch. Il proof assistant fa il lavoro di un diligente ragioniere, ma invece che verificare pian piano una miriade di conti, verifica per noi una lunga catena di inferenze logiche.

Ogni proof assistant è distinto dalla sue caratteristiche, tra le più importanti c'è la sintassi. La sintassi determina il modo in cui l'utente scriverà le dimostrazioni e può essere procedurale o dichiarativa.

Una dimostrazione in stile dichiarativo è strutturata in blocchi. Ogni blocco dichiara una serie di affermazioni ognuna derivante dalle precedenti. Il sistema è responsabile di riempire i dettagli di basso livello tra i vari passaggi. In sostanza, l'utente dice al verificatore *dove vuole arrivare*. Questo sistema, usato ad esempio da Mizar e Isabelle, è il modo naturale di pensare dei matematici, ma è poco efficiente e produce dimostrazioni molto prolisse.

Una dimostrazione in stile procedurale contiene invece tutti i passaggi. Ogni passaggio è come un comando di basso livello al proof assistant. In sostanza, l'utente dice al proof assistant *cosa vuole fare*. Questo è lo stile adottato da Gonthier quando formalizzò la dimostrazione del teorema dei quattro colori in Coq (Wiedijk [2007]).

Quale sia il miglior approccio è in fase di discussione: laddove uno stile dichiarativo e classico assomiglia molto al modo naturale di pensare di un matematico, produce dimostrazioni molto lunghe e tediose. Uno stile procedurale è meno naturale, ma permette di scrivere meno, fattore chiave in dimostrazioni lunghe come quella del teorema dei quattro colori. Per una discussione si veda l'articolo di F. Wiedijk (Wiedijk [2007])

La prima volta che si utilizza un proof assistant, subito ci si rende conto del livello di dettaglio necessario: leggi insiemistiche considerate ovvie come la distributività dell'intersezione rispetto l'unione oppure le leggi di De Morgan vanno dimostrate passo a passo (vedi appendice), e in generale ogni dimostrazione è cinque volte più lunga della sua controparte informale. Per questo è di fondamentale importanza la costruzione di una libreria standard con i risultati più comuni della matematica: ciò permetterebbe di non dover riscrivere ogni volta i risultati più comuni.

Un progetto in questa direzione si può trovare al sito (Wiedijk [2010]). È una specie di top 100 della matematica, una lista di 100 teoremi ben noti di cui ogni matematico riconoscerebbe il valore. I teoremi spaziano in complessità e difficoltà: si parte dall'irrazionalità di radice di 2 al teorema fondamentale dell'algebra, passando per il teorema del punto fisso di Brouwer e per la disuguaglianza media geometrica vs media aritmetica. Lo scopo è creare una lista standard di teoremi da formalizzare, un fermo punto di partenza su cui poi costruire altri teoremi. La stato attuale del progetto (settembre 2010) copre l'84% dei teoremi, nello specifico abbiamo i seguenti risultati:

Verificatore	% th. formalizzati
Hol Light	75
Mizar	51
Coq	49
C-CoRN	10
Isabelle	46
ProofPower	42
PVS	15
nqthm/ACL2	12
NuPRL/MetaPRL	8

Nella lista, notiamo che la maggior parte del lavoro è stata fatta per i primi tre verificatori. Non è un caso, infatti questi sono i proof assistant più diffusi: Hol light, Mizar e Coq. Ne faremo un rapido confronto, in cui emergeranno altre funzionalità che può avere un verificatore.

Hol *light*

Hol light (High Order Logic) è un dimostratore interattivo discendente dal progetto LCF (Logic for Computable Functions), un altro dimostratore automatico sviluppato da Robert Milner nel 1972. Hol è interattivo, cioè i comandi possono essere immessi uno alla volta, senza ricorrere alla modalità batch. La sintassi è dichiarativa, usa la logica classica e quindi ben si presta per chi è alle prime armi.

Il punto forte di Hol Light è la leggerezza: solo dieci regole d'inferenza e un kernel da meno di 500 righe di codice. I sostenitori sono così soddisfatti di questa caratteristica che stamparono delle magliette con il codice sorgente in toto in segno di propaganda.

Mizar

Mizar è un sistema sviluppato da Trybulec a partire dal 1973 all'università di Bialystock. Il linguaggio di Mizar ricalca quello della matematica informale: è dichiarativo come Hol, ed è basato su una teoria degli insiemi tipo Zermelo Fraenkel.

Lo progetto Mizar prevede non solo lo sviluppo del software, ma anche lo sviluppo di una libreria di articoli matematici formali, chiamata Mizar Mathematics Library (MML). Attualmente (o meglio al tempo della pubblicazione dell'articolo Mizar: An impression, di Freek Wiedijk) la libreria contiene 587 articoli, occupanti uno spazio totale di 41 megabyte.

Coq

Coq non solo fa il verificatore ma può anche descrivere specifiche formali per lo sviluppo software o essere usato come linguaggio funzionale di programmazione. È stato sviluppato in Francia, nel progetto TypiCal (ex progetto LogiCal) in sinergia dalla INRIA, dalla École Polytechnique, dalla Paris-Sud 11 University e dalla CNRS.

Coq implementa un linguaggio d'ordine superiore chiamato Gallina. Gallina è un linguaggio funzionale tipato basato sul calcolo delle costruzioni induttive, cioè una variante d'ordine superiore del lambda calcolo tipizzato sviluppata da Thierry Coquand. Coq è stato utilizzato da Gonthier nella dimostrazione del teorema dei quattro colori, la dimostrazione formale più lunga fino ad oggi.

Dopo questa carrellata sui maggiori verificatori, vediamo come funziona il nostro verificatore Ref. In Ref svilupperemo i proof-script che ci porteranno verso il teorema di Stone.

Tre pionieri. . .

1954	M.Davis implementa l'algoritmo di Presburger per l'addizione aritmetica nel computer "Johniac" all'Institute for Advanced Study. Johniac dimostrò che la somma di due numeri pari è pari iniziando l'era della dimostrazione a computer
1956	Inizia la formalizzazione dei Principia Mathematica di Russel e White. Entro la fine del 1959, la procedura di Wang aveva generato dimostrazioni per ogni teorema del calcolo predicativo contenuta nel libro
1968	N.G de Bruijn progetta il primo programma per verificare dimostrazioni matematiche. Il programma di nome *Automath* controllò ogni proposizione di un testo che Landau scrisse per la figlia sulla costruzione dei numeri con i tagli di Dedekind

[1]

1 tabella presa da Hales [2008]

4 IL VERIFICATORE REFEREE

Ætnanova, Refeeree o più semplicemente Ref, è un verificatore automatico basato sulla teoria degli insiemi sviluppato da Jacob T. Schwartz (Omodeo *et al.* [2006]). Funziona nel seguente modo: l'utente scrive la propria dimostrazione su un file, la carica sul web e lancia il verificatore. Il verificatore si preoccuperà di processare l'intero file–lavora in modalità batch–e ritornerà la pagina dei tempi di verifica e degli eventuali errori.

Un errore sintattico fermerà immediatamente il verificatore: il parser non riconoscerebbe più gli altri comandi. Un errore logico permetterà comunque al verificatore di terminare l'esecuzione, generando una lista diagnostica con i problemi da correggere. In questa ottica Ref è più vicino a un compilatore di un linguaggio di programmazione che ad un interprete: possiamo dargli in pasto molte righe alla volta piuttosto che doverlo lanciare dopo ogni comando.

Un tipico scenario in Ref contiene un mix delle seguenti cose: teoremi più dimostrazioni, definizioni, teorie. Ogni dimostrazione può citare solamente teoremi già verificati, che precedano l'attuale teorema in fase di verifica. Stessa sorte per le definizioni: gli oggetti da usare devono essere stati definiti precedentemente.

Quando abbiamo un sostanziale numero di teoremi e definizioni possiamo riunirli in una teoria, cioè in una struttura di livello più alto che serve a modularizzare il lavoro. Le teorie conferiscono un tocco del secondo ordine su un sistema che altrimenti si baserebbe su una logica del primo. Esempi di teorie possono essere la teoria sugli spazi topologici (topologicalSpace) o quella sul principio d'induzione finita (finiteInduction).

Illustriamo ora le caratteristiche di Ref tramite una dimostrazione esemplificativa.

5 DIMOSTRARE IN REF

Prendiamo il seguente semplice teorema

TEOREMA 1:

$$\bigcup\{Y \cap X : X \in \mathcal{C}\} = Y \cap \bigcup\{X : X \in \mathcal{C}\}$$

Il teorema dice che l'intersezione binaria d'insiemi distribuisce sull'unione arbitraria di insiemi. Niente di difficile. Il nostro compito è tradurre la dimostrazione standard in una formale digeribile da REF.

Il primo passo è scrivere l'enunciato in modo formale. Nell'enunciato compare l'unione di una collezione d'insiemi e poiché REF non ha un simbolo built-in per tale scopo, la nostra prima missione è fornire questa definizione. Questo può essere fatto semplicemente con le seguenti righe

```
Def unionset: [unionset di una famiglia d'insiemi]
Un(C) := { w: Y in C, w in Y }
```

La sintassi è molto naturale e ricalca la definizione che si può trovare in un libro di matematica. Le specifiche dell'istruzione Def, come si può leggere nel manuale, sono

Def definitionName: symbolName(params): definisce il simbolo symbolName: può essere una costante, una funzione o un predicato

Ora possiamo scrivere l'enunciato del teorema

```
Theorem 1: [distrib. dell'intersezione sull'unione]
Un({ Y * X : X in C }) = (Y * Un(C)). Proof:
Suppose_not(Y0,C0)  ==>  AUTO
    Tsomehow  ==> false
Discharge ==> QED
```

Qui notiamo le prime caratteristiche vere e proprie di REF: i teoremi vengono annunciati dalla parola Theorem, segue un numero o un nome identificativo e un facoltativo commento tra parentesi quadre. Scritto l'enunciato si mette un punto "." e quindi la parola chiave Proof:. Dopodiché si inizia la dimostrazione vera e propria.

Le dimostrazioni si dividono in passi. Ogni passo ha la seguente struttura: Hint $\Rightarrow$ Expr. Hint indica il meccanismo inferenziale usato, Expr è la conclusione parziale che abbiamo raggiunto.

Il primo passo in una dimostrazione è sempre la negazione della tesi, cioè la dimostrazione è "per assurdo". L'Hint che serve allo scopo è la Suppose_not. Questa istruzione, come la sua cugina Suppose, apre una sottodimostrazione (in questo caso la dimostrazione principale) e svolge lo stesso ruolo che le espressioni *supponiamo che non...* e *supponiamo che...* svolgerebbero in un ordinario testo matematico.

La dicitura seguente, AUTO, svolge il compito più naturale che viene suggerito dall'Hint prima della freccia ($\Rightarrow$). In questo caso nega automaticamente la tesi.

Ogni sottodimostrazione deve essere chiusa da una Discharge che scarica le ipotesi temporanee e mostra le conclusioni raggiunte. Nel caso si chiuda la Suppose_not della dimostrazione principale, la conclusione raggiunta sarà la fine della dimostrazione, segnalata con la parola chiave QED. Da questo momento il teorema sarà utilizzabile nella dimostrazione di altri teoremi.

Capita spesso di dover scrivere degli enunciati e di dimostrarli solo in seguito: in questa situazione la prassi è scrivere una riga del tipo

```
Tsomehow  ==> false
```

Questa riga cita un inesistente teorema somehow che dovrebbe portare a una contraddizione. In questo modo possiamo concentrarci sui teoremi più importanti lasciando in sospeso i lemmi accessori.

Prima di vedere la dimostrazione matematica e trasformarla in una di Ref, riportiamo le specifiche delle istruzioni fin qui utilizzate

- Suppose: introduce un'ipotesi e relativa sottodimostrazione

- Discharge: chiude una sottodimostrazione

- Suppose_not: versione particolare della suppose per le dimostrazioni per assurdo. È sempre il primo passo in una dimostrazione

- AUTO: introduce della assunzioni in modo implicito che vengono ricavate automaticamente dall'Hint utilizzata

- QED: chiude una dimostrazione e rende citabile il teorema

Faremo un parallelo tra dimostrazione usuale e formale. Questo aiuterà il lettore sia a capire come funziona Ref partendo da un punto di vista a lui noto, sia a sviluppare le dimostrazioni per conto proprio. La dimostrazione usuale suonerebbe più o meno così

Dimostrazione. "$\subseteq$": Sia $z \in \bigcup\{Y \cap X : X \in \mathcal{C}\}$, per definizione di unione abbiamo $\exists X_0 \in X : z \in Y \cap X_0$.

Dato che $Y \cap X_0 \subseteq Y \cap \bigcup\{X : X \in \mathcal{C}\}$ otteniamo $z \in Y \cap \bigcup\{X : X \in \mathcal{C}\}$.

"$\supseteq$": Sia $z \in Y \cap \bigcup\{X : X \in \mathcal{C}\}$, per definizione di intersezione ed unione abbiamo: $z \in Y \wedge \exists X_0 \in X : z \in X_0$.

Quindi $z \in Y \cap X_0$ e dato che $Y \cap X_0 \subseteq \bigcup\{X \cap Y : X \in \mathcal{C}\}$ otteniamo $z \in \bigcup\{X \cap Y : X \in \mathcal{C}\}$ □

Tuttavia Ref accetta solo dimostrazioni per assurdo e quindi dovremmo modificare leggermente la nostra dimostrazione. La lunghezza non varia di molto.

Dimostrazione. "$\not\subseteq$": Dato che vale "$\not\subseteq$" abbiamo che $\exists z : z \in \bigcup\{Y \cap X : X \in \mathcal{C}\} \wedge z \notin Y \cap \bigcup\{X : X \in \mathcal{C}\}$.

Per definizione di unione abbiamo $\exists X_0 \in X : z \in Y \cap X_0$. Assurdo perché $Y \cap X_0 \subseteq \bigcup\{X : X \in \mathcal{C}\}$

"$\not\supseteq$": Dato che vale "$\not\supseteq$" abbiamo che $\exists z : z \in Y \cap \bigcup\{X : X \in \mathcal{C}\} \wedge z \notin \bigcup\{Y \cap X : X \in \mathcal{C}\}$

Per definizione di intersezione ed unione abbiamo $z \in Y \wedge \exists X_0 \in \mathcal{C} : z \in X_0$, dunque $z \in Y \cap X_0$. Assurdo perché $Y \cap X_0 \subseteq \bigcup\{Y \cap X : X \in \mathcal{C}\}$ □

Ora possiamo finalmente arrivare alla dimostrazione formale. Riportiamo lo scenario completo, per provarlo basta copiarlo nel dimostratore.

```
--BEGIN HERE
Def unionset: [unionset di una famiglia d'insiemi]
Un(C) := { w: Y in C, w in Y }

Theorem 1: [distrib. dell'intersezione sull'unione]
Un({ Y * X : X in C }) = (Y * Un(C)). Proof:
Suppose_not(Y0,C0)  ==> Stat0: AUTO
   z-->Stat0 ==> AUTO
   Use_def(Un({ Y0 * X : X in C0 })) ==> AUTO

   SIMPLF ==> Un({ Y0 * X : X in C0 })
              = { w: X in C0, w in (Y0 * X) }
   Use_def(Un(C0)) ==> AUTO

   Suppose ==> (z notin (Y0 * Un(C0)))
         & Stat1: (z in { w: X in C0, w in (Y0 * X) })

      (X0,w)-->Stat1 ==> (z in (Y0 * X0)) & (X0 in C0)
         & Stat3: (z notin { w: X in C0, w in X })

      (X0,z)-->Stat3 ==> false
   Discharge ==> (z in Y0)
         & (z notin Un({Y0 * X : X in C0 }))
         & Stat4: (z in { w: X in C0, w in X })

   (X1,w1)-->Stat4 ==> (z in X1) & (X1 in C0)
         & Stat5: (z notin { w: X in C0, w in (Y0 * X)})
   (X1,z)-->Stat5 ==> false
Discharge ==> QED
--END HERE
```

La prima riga è una novità: ogni scenario completo inizia con la riga

```
--BEGIN HERE
```

Questo comando fa partire il verificatore. Un'istruzione simile per fermarlo compare alla fine

```
--END HERE
```

L'istruzione per metterlo in stand-by sarebbe

```
--PAUSE HERE
```

ma non ne avevamo bisogno in uno scenario così corto.

Le righe seguenti, come abbiamo già visto, sono la definizione di unione e l'enunciato del teorema. Un'altra novità compare dopo la Suppose_not: prima della parola AUTO figura un'etichetta. Un'etichetta battezza un passo della dimostrazione con un nome, nome che si potrà usare per sostituire variabili all'interno del passo stesso. Infatti, nella riga successiva, introduciamo un elemento z nello Stat_0, con

```
 z --> Stat0 ==> AUTO
```

Lo Stat_0 negava la tesi, cioè diceva che i due insiemi erano diversi. Inserire un elemento z in questo Stat significa trovare un z che differenzia i due insiemi.

Un uso più avanzato delle etichette è la restrizione del contesto in cui operano le regole d'inferenza. Ad esempio, quando operiamo con una ELEM (inferenza insiemistica elementare), l'istruzione tenta di derivare la conclusione voluta prendendo a ipotesi tutti i passaggi precedentemente dimostrati. Con un'opportuna restrizione del contesto suggeriamo alla ELEM le ipotesi specifiche che le servono. È facile dare questo tipi di suggerimenti: basta scrivere (Stat_x), dove Stat_x è lo statment che indica l'ipotesi cercata. Così facendo acceleriamo parecchio la verifica, ma lo sforzo vale la fatica solamente se lo scenario è di una certa consistenza: per questo motivo non abbiamo incluso questa tecnica in questa dimostrazione.

L'istruzione Use_def che troviamo subito sotto espande la definizione di unione. L'espansione delle definizioni è necessaria per dire al verificatore come sono fatti gli oggetti che stiamo usando: per dire che un elemento sta nell'unionset bisogna prima sapere com'è fatto l'unionset.

Ref non può indovinare il simbolo da espandere tra l'enorme numero di possibilità disponibili, ma con dati sufficienti può espandere la definizione di un simbolo dato senza doverla riscriverla esplicitamente. Questo è il senso della parola chiave AUTO: diamo un simbolo e dei parametri su cui lavora il simbolo a una Use_def e Ref espande per noi la definizione

Da qui in poi la dimostrazione formale ricalcalca quella standard. La prima Suppose tratta il caso "$\not\subseteq$" : a destra della freccia abbiamo la nostra ipotesi con le definizione espanse.

Riprendiamo in mano le sostituzioni, vedremo come le gestisce Ref. Quando affermiamo un'appartenenza come

```
Stat1: z in { w: X in C0, w in (Y0 * X) }
```

Ref traduce l'espressione in una formula con quantificatore esistenziale:

```
Stat1: (EXISTS X,w|(z=w) & (X in C0) & (w in (Y0 * X)))
```

Ora il senso di

```
(X0,w) -->Stat1 ==> (z in (Y0 * X0)) & (X0 in C0)
```

dovrebbe essere chiaro: al posto della variabili quantificate creiamo due costanti (X_0, w) che hanno le proprietà a destra della barra, i.e. $z = w \wedge X_0 \in \mathcal{C}_0 \wedge w \in Y_0 \cap X_0$. Eseguendo un ragionamento basato sulla teoria degli insiemi, come se avessimo richiamato una ELEM, otteniamo la conclusione a destra della freccia, i.e. $z \in Y_0 \cap X_0 \wedge X_0 \in \mathcal{C}$

La seconda sostituzione è essenzialmente diversa. Quando affermiamo la non-appartenenza

```
Stat3: (z notin { w: X in C0, w in X })
```

Ref traduce l'espressione in una formula con quantificatore universale:

```
(FORALL X,w | (z /= w) or (X notin C0) or (w notin X))
```

La sostituzione

```
(X0,z) --> Stat3 ==> false
```

dunque non crea dei nuovi nomi di costante come sopra, ma inserisce quelli già esistenti nella formula a destra della barra. Il false dopo la freccia indica che siamo arrivati a una contraddizione.

La seconda parte della dimostrazione è analoga, tranne per un'unica cosa ancora da notare: Ref non può riutilizzare i nomi delle costanti definite in sottodimostrazioni. Dunque non possiamo più usare X_0 e w come nomi, ma dobbiamo inventarne di nuovi, X_1 e w_1.

A conclusione del capitolo riportiamo la descrizione delle ultime istruzioni più importanti.

In particolare la ELEM è di fondamentale importanza: esegue ragionamenti insiemistici elementari e viene automaticamente richiamata dopo ogni istruzione. Per questo motivo non compare nella nostra dimostrazione: viene tacitamente adoperata dopo le sostituzioni.

THEORY e ENTER_THEORY sono le direttive per creare ed accedere alle teorie. Senza creare inutili teorie giocattolo qui, le spiegheremo più avanti quando parleremo di algebre booleane e del teorema di Stone.

- ELEM : dimostrazione usando ragionamenti elementari sugli insiemi

- EQUAL : dimostrazione usando sostituzioni di uguali-per-uguali

- $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n) \rightarrow \mathsf{Stat}_n$: introduce espressioni e/o costanti nell'etichetta Stat_n

- $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n) \rightarrow \mathsf{Ttheorem}$: introduce espressioni e/o costanti nel teorema theorem

- Use_def(symbol): espande la definizione di un simbolo

- Loc_def symbolName(params): simile a Use_def, ma la definizione dura soltanto una dimostrazione

- THEORY theoryName : introduce una nuova teoria, presentando i nuovi simboli di funzione e i nuovi simboli di costante assunti dalla teoria e gli eventuali presupposti che gli argomenti della teoria devono soddisfare

- ENTER_THEORY theoryName : definisce l'inizio del contesto di una teoria, dove vengono date le definizioni e le dimostrazioni interne alla teoria stessa

- APPLY : deriva delle conclusioni da teoremi precentemente provati in una teoria. Svolge anche compiti di meccanismo definitorio di alto livello

6 VERSO IL TEOREMA DI STONE...

Lo scopo del mio lavoro era trovare un modo per unire i risultati precedenti sulle algebre booleane ai risultati elementari di topologia, in vista della dimostrazione del teorema di Stone. Il teorema di Stone dice

TEOREMA 2: *Ogni algebra booleana B è isomorfa all'algebra dei sottoinsiemi chiusaperti del suo spazio di Stone $S(B)$. Per ogni algebra booleana B il suo spazio di Stone $S(B)$ è uno spazio di Hausdorff compatto e totalmente sconnesso.*

Il teorema di Stone si può dividere in due grosse parti: la prima dice che ogni algebra booleana è isomorfa ad un campo d'insiemi, la seconda che questo campo d'insiemi è un particolare spazio topologico. Un preesistente scenario conteneva già la dimostrazione della prima parte ma mancava della seconda. Occorreva sviluppare una teoria degli spazi topologici che contenesse gli enunciati utili per il nostro scopo. Ma la topologia è vasta, sviluppare la teoria nella sua interezza sarebbe lungo e senza scopo: cosa ci serve per la dimostrazione formale del teorema di Stone?

Per capirlo dobbiamo fare tre cose:

- capire cosa abbiamo già in mano, i.e. vedere la teoria delle algebre booleane in REF
- studiare la dimostrazione classica e vedere dove entra in gioco la topologia
- implementare in REF la parte topologica

Prima di iniziare però, riportiamo velocemente qualche definizione sulle algebre booleane, sugli spazi topologici e sugli spazi di Stone. Il lettore che le ricorda può tranquillamente saltarle.

DEFINIZIONE 1: *Un'algebra booleana è un reticolo completo distributivo con unità. Un reticolo è una coppia $(L, \leq)$ in cui L è un insieme, $\leq$ è un ordinamento parziale su L e per ogni coppia $x, y \in L$ esistono il* sup, *denotato con $x \vee y$, e l'*inf, *denotato con $x \wedge y$. Completo significa che ogni sottoinsieme di L limitato superiormente deve avere il* sup. *Distribuitivo significa che per ogni $x, y, z \in L$ vale*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Avere un'unità 1 significa che $1 \in L$ e per ogni $x \in L$ vale $x \leq 1$

DEFINIZIONE 2: *Lo spazio di Stone $S(B)$ di un'algebra booleana B è definito come l'insieme degli omomorfismi da B in $\mathbf{2}$, dove $\mathbf{2}$ è l'algebra booleana con due elementi. Definiamo ora la base per la topologia del teorema di Stone: sia $x \in B$ consideriamo l'insieme $S_x(B)$ degli omomorfismi che mandano x in $1 \in \mathbf{2}$. La collezione $\{S_x(B) : x \in B\}$ è la nostra base. Infine uno spazio topologico è di Hausdorff quando ogni* *sua coppia di punti può esser separata da intorni disgiunti. Uno spazio topologico è connesso quando ha sconnessioni. Una sconnessione è una coppia di aperti disgiunti e non vuoti che uniti insieme danno tutto lo spazio. Uno spazio topologico è totalmente sconnesso quando le uniche componenti connesse sono i singoletti e l'insieme vuoto. Uno spazio topologico è compatto quando da ogni suo ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito.*

7

ALGEBRE BOOLEANE IN REF

Siamo al primo passo del nostro piano di battaglia: capire la teoria già sviluppata in Ref. Nel farlo spiegheremo velocemente come funzionano le teorie. Riportiamo il codice per la teoria delle algebre booleane.

Theory $\mathsf{booleanAlgebra}(\mathsf{bb}, \mathsf{U} \cdot \mathsf{V}, \mathsf{U} + \mathsf{V} + \mathsf{ee})$

-- assunzioni di non vacuità

$\mathsf{ee} \in \mathsf{bb}$
$\mathsf{ee} \neq \mathsf{ee}, \mathsf{ee}$

-- proprietà di chiusura

$\langle \forall \mathsf{x}, \mathsf{y} \mid \{\mathsf{x}, \mathsf{y}\} \subseteq \mathsf{bb} \rightarrow \mathsf{x} \cdot \mathsf{y} \in \mathsf{bb} \rangle$
$\langle \forall \mathsf{x}, \mathsf{y} \mid \{\mathsf{x}, \mathsf{y}\} \subseteq \mathsf{bb} \rightarrow \mathsf{x} + \mathsf{y} \in \mathsf{bb} \rangle$

-- leggi associative

$\langle \forall \mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z} \mid \{\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}\} \subseteq \mathsf{bb} \rightarrow \mathsf{x} \cdot (\mathsf{y} \cdot \mathsf{z}) = (\mathsf{x} \cdot \mathsf{y}) \cdot \mathsf{z} \rangle$
$\langle \forall \mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z} \mid \{\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}\} \subseteq \mathsf{bb} \rightarrow \mathsf{x} + (\mathsf{y} + \mathsf{z}) = (\mathsf{x} + \mathsf{y}) + \mathsf{z} \rangle$

-- leggi distributive

$\langle \forall \mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z} \mid \{\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}\} \subseteq \mathsf{bb} \rightarrow (\mathsf{x} + \mathsf{y}) \cdot \mathsf{z} = (\mathsf{z} \cdot \mathsf{y}) + (\mathsf{z} \cdot \mathsf{x}) \rangle$

-- zero additivo

$\langle \forall \mathsf{x}, \mathsf{y} \mid \{\mathsf{x}, \mathsf{y}\} \subseteq \mathsf{bb} \rightarrow (\mathsf{x} + \mathsf{x}) = (\mathsf{y} + \mathsf{y}) \rangle$

-- legge di auto-eliminazione

$\langle \forall \mathsf{x}, \mathsf{y} \mid \{\mathsf{x}, \mathsf{y}\} \subseteq \mathsf{bb} \rightarrow \mathsf{x} + (\mathsf{y} + \mathsf{x}) = \mathsf{y} \rangle$

-- idempotenza della moltiplicazione

$\langle \forall \mathsf{x} \mid \mathsf{x} \in \mathsf{bb} \rightarrow \mathsf{x} \cdot \mathsf{x} = \mathsf{x} \rangle$

-- unità moltiplicativa

$\Rightarrow (\mathsf{cmp}_\Theta, \mathsf{Ideal}_\Theta, \mathsf{BooHom}_\Theta, \mathsf{hh}_\Theta, \mathsf{phi}_\Theta)$

[...]

$\langle \forall \mathsf{x}, \mathsf{y} \mid \mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathsf{bb} \rightarrow \mathsf{phi}_\Theta \upharpoonright \mathsf{x} \cdot \mathsf{y} = \mathsf{phi}_\Theta \upharpoonright \mathsf{x} \cap \mathsf{phi}_\Theta \upharpoonright \mathsf{y} \;\&\; \mathsf{phi}_\Theta \upharpoonright (\mathsf{x} + \mathsf{y}) = \mathsf{phi}_\Theta \upharpoonright \mathsf{x} \triangle \mathsf{phi}_\Theta \upharpoonright \mathsf{y} \rangle$
$\mathsf{phi}_\Theta \upharpoonright \mathsf{ee} = \bigcup \mathbf{range}(\mathsf{phi}_\Theta) \;\&\; \mathsf{phi}_\Theta \upharpoonright \mathsf{zz}_\Theta = \emptyset \;\&\; \mathsf{phi}_\Theta \upharpoonright \mathsf{ee} \neq \mathsf{phi}_\Theta \upharpoonright \mathsf{zz}_\Theta$
$\langle \forall \mathsf{x} \mid \mathsf{x} \in \mathsf{bb} \rightarrow \mathsf{phi}_\Theta \upharpoonright \mathsf{cmp}_\Theta(\mathsf{x}) = \mathsf{phi}_\Theta \upharpoonright \mathsf{ee} \setminus \mathsf{phi}_\Theta \upharpoonright \mathsf{x} \rangle$
$\mathsf{One\_1\_map}(\mathsf{phi}_\Theta) \;\&\; \mathbf{domain}(\mathsf{phi}_\Theta) = \mathsf{bb}$
$\mathsf{BooHom}_\Theta(\mathsf{phi}_\Theta)$

End booleanAlgebra

Le teorie sono dei meccanismi designati per agevolare lo sviluppo di dimostrazioni su larga scala, cioè proprio quello che ci serve per sviluppare il nostro scenario. Una teoria si dichiara con la parola chiave THEORY a cui seguono il nome e i parametri su cui si basa la teoria stessa. I parametri in questo caso sono il supporto (bb), le due operazioni ($\cdot$ e $+$) e l'unità moltiplicativa (ee). L'unità additiva invece è implicita poiché viene ricavata dalle assunzioni della teoria. Le assunzioni sono le righe che seguono la dichiarazione della teoria fino alla freccia $\Rightarrow$ e corrispondono agli assiomi delle algebre booleane.

Enunciata una teoria con i suoi parametri e scritti gli assiomi otteniamo i simboli specifici della teoria (cmp_{Θ}, Ideal_{Θ}, BooHom_{Θ}, hh_{Θ}, phi_{Θ}), contraddistinti con un $_{\Theta}$, e una serie di teoremi verificati da tutti gli oggetti istanziati da tale teoria.

I simboli specifici di una teoria devono essere dimostrati dentro il contesto della teoria. Stessa sorte per i teoremi di una teoria. Per entrare nel contesto di una teoria possiamo usare la parola chiave ENTER_THEORY (si veda il capitolo 5 per la sintassi dell'istruzione): i simboli e i teoremi qui definiti saranno visibili solamente all'interno di tale ambito. Entrati in un contesto, abbiamo a disposizione anche tutti gli assunti di una teoria. Gli assunti possono essere usati come ipotesi aggiuntive richiamandoli con l'istruzione Assump.

Abbiamo abbreviato la lista (lunghissima) dei teoremi sulle algebre booleane per evidenziare unicamente quelli importanti per il teorema di Stone.

Il primo dice che l'immagine di ogni prodotto è intersezione delle immagini dei fattori e che l'immagine della somma booleana è la differenza simmetrica delle immagini degli addendi. Sono le proprietà esplicitate caratteristiche di un omomorfismo: servono per mettere in luce che il codominio sia un campo d'insiemi.

Il secondo dice che l'unità moltiplicativa ee dell'algebra corrisponde al massimo insieme nel codominio dell'omorfismo e che l'unità additiva zz_{Θ} corrisponde all'insieme vuoto.

Il terzo dice l'operazione di complemento booleano corrisponde alla complementazione insiemistica.

Il quarto dice che phi_{Θ} è iniettiva e il quindi che phi è un omomorfismo booleano.

Questi quattro teoremi uniti assieme implicano il teorema di Stone in cui campo d'insiemi è l'immagine dell'omomorfismo phi_{Θ}.

Non ci dilungheremo a commentare altri risultati della teoria, in quanto per usarla ci basta conoscere i suoi assiomi e le sue proprietà. Questo infatti è un altro vantaggio delle teorie: creare scatole chiuse che possono essere usate senza conoscerne il contenuto. Il lettore interessato potrà consultare lo scenario completo in appendice.

il lemma di Zorn

Una cosa interessante da notare, anche se non è stata esplicitamente scritta, è il lemma di Zorn. La dimostrazione del teorema di Stone richiede la proprietà d'esistenza di un ideale massimale, teorema che richiede il lemma di Zorn. Ciò è ovviamente stato dimostrato nella parte della teoria delle algebre booleane ma sarebbe prolisso ora mostrarne tutte le dipendenze (da notare in particolare l'uso dell'induzione transfinita). Si possono trovare i dettagli in appendice e nel libro di Schwartz (Dunford e Schwartz [1958])

Il lemma di Zorn in REF è enunciato così

THEOREM 412: [Zorn's lemma]

$$\langle \forall x \subseteq T \mid \langle \forall u \in x, v \in x \mid u \supseteq v \vee v \supseteq u \rangle \rightarrow \langle \exists w \in T, \forall y \in x \mid w \supseteq y \rangle \rangle$$
$$\rightarrow \langle \exists y \in T, \forall x \in T \mid \neg(x \supseteq y \;\&\; x \neq y) \rangle.$$

L'uso di questo lemma, equivalente all'assioma della scelta, rende la dimostrazione non costruttiva.

8 La dimostrazione classica del teorema di Stone

Siamo al secondo passo del nostro piano di battaglia: capire la dimostrazione del teorema di Stone. Per la dimostrazione del teorema ci ispiriamo al testo di Schwartz (Dunford e Schwartz [1958]) che riportiamo brevemente

Dimostrazione della parte topologica. [. . .] Ci rimane da mostrare che $S(B)$ può essere topologizzato in maniera che gli insiemi $S_x(B)$ al variare di $x \in B$ siano esattamente i sottoinsiemi chiusaperti di $S(B)$.

ecco cosa ci serve

↓

Prendiamo un omomorfismo $h \in S(B)$: per le proprietà dell'algebra booleana **2** abbiamo che $h(xy) = 1$ se e solo se $h(x) = 1$ e $h(y) = 1$. Da questo, usando la definizione di $S_{xy}(B)$ otteniamo la proprietà $S_{xy}(B) = S_x(B) \cap S_y(B)$. Inoltre per definizione di omomorfismo è facile verificare che vale anche la proprietà $S_1(B) = S(B)$. Queste due proprietà messe insieme permettono facilmente di verificare la definizione di base per la collezione $\{S_x(B) : x \in B\}$.

totale sconnessione

Mostriamo che ogni insieme della base è un chiusaperto: da ciò segue che $S(B)$ è totalmente sconnesso. Dato che ogni tale insieme è aperto per definizione basta mostrare che è anche chiuso, i.e. che è il complementare di un aperto. Questo segue da $S(B) - S_x(B) = S_{x+1}(B)$, visto che un omomorfismo h fa 1 su x se e solo se fa 0 su $x + 1$. Dunque $S(B)$ è totalmente sconnesso.

caratterizzazione della compattezza

Mostriamo che $S(B)$ è compatto: per farlo useremo la caratterizzazione con la proprietà delle intersezioni finite (vedi Munkres [2000], p.169). Dato che ogni chiuso in $S(B)$ è intersezione di insiemi in $\{S_x(B) : x \in B\}$ è sufficiente mostrare che:
se $A_1 \subseteq B$ tale che per ogni $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq B$ valga $\bigcap_{i=1}^n S_{x_i}(B) \neq \emptyset$ allora deve valere $\bigcap_{x \in A1} S_x(B) \neq \emptyset$. Per un lemma precedente[1] esiste $h_1 \in S(B)$ con $h_1(x) = 1$, $x \in A_1$ tale che h_1 appartiene a ogni $S_x(B)$, $x \in A_1$. Dunque $S(B)$ è compatto.

leggi di De Morgan

Mostriamo che ogni $G \subseteq S(B)$ chiusaperto è della forma $S_x(B)$ per qualche $x \in B$. Dato che G è aperto è unione arbitraria di elementi della base. Dato che G è anche chiuso in uno spazio compatto, G è compatto e dunque basta un numero finito di elementi della base. Abbiamo ottenuto $G = S_{x_1}(B) \cup \ldots \cup S_{x_n}(B)$ Ora basta dimostrare che ogni unione binaria di elementi della base può esser scritta come un unico elemento della base. Per questo ci serve la seguente proprietà di $S(B)$: denotato il complementare in $S(B)$ con una barra verticale, vale $\overline{S_x(B)} = S_{x+1}(B)$. Grazie alle leggi di De Morgan vale

1 Più che un lemma era un'affermazione presente nella prima parte della dimostrazione. Si può trovare nel libro di Schwart a pagina 42. L'affermazione dice: se $B_1 \subseteq B$ tale che $0 \notin B_1$ e $x, y \in B_1 \Rightarrow xy \in B_1$ allora esiste un omomorfismo $h_1 : B \to \mathbf{2}$ tale che $\forall x \in B_1 \, . \, h_1(x) = 1$

$$
\begin{aligned}
S_x(B) \cup S_y(B) &= \overline{\overline{S_x(B)} \cap \overline{S_y(B)}} \\
&= \overline{S_{x+1}(B) \cap S_{y+1}(B)} \\
&= \overline{S_{(x+1)(y+1)}(B)} \\
&= S_{(x+1)(y+1)+1}(B)
\end{aligned}
$$

da cui segue che G è della forma $S_x(B)$ per qualche $x \in B$.

□

Nei graffiti a lato notiamo i prerequisiti del teorema di Stone: l'uso dei concetti di totale sconnessione, e di una teoria sugli spazi topologici in generale, il teorema sulla caratterizzazione della compattezza e le leggi di De Morgan.

Per iniziare ho caratterizzato la compattezza. Non è stato semplicissimo, mi ha impegnato parecchi giorni ed è emersa una forte dipendenza dalle leggi di De Morgan. Le leggi di De Morgan sono state implementate strada facendo. Per motivi di tempo non sono riuscito a gestire la parte sulla connessione, che ultimerebbe la parte topologica verso il teorema di Stone. Vediamo come ho proceduto.

9 LA PARTE TOPOLOGICA: CARATTERIZZIAMO LA COMPATTEZZA

Tradizionalmente uno spazio topologico X si dice compatto se da ogni suo ricoprimento aperto si riesce ad estrarre un sottoricoprimento finito. Nella dimostrazione di Stone si usa però una caratterizzazione sulle intersezioni. Riprendiamo un attimo le definizioni dal Munkres (Munkres [2000])

DEFINIZIONE 3: *Una collezione $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi di X è detta avere la proprietà delle intersezioni finite (FIP dall'inglese Finite Intersection Property) sse per ogni sottocollezione finita $\{C1, \dots, C_n\}$ di $\mathcal{C}$ l'intersezione $C_1 \cap \dots \cap C_n$ è non vuota.*

Questa definizione porta al seguente teorema

TEOREMA 3: *Sia X una spazio topologico. Allora X è compatto se e solo se per ogni collezione $\mathcal{C}$ di chiusi in X che hanno la FIP vale $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$*

FIP

Dimostrazione. Data una collezione $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X definiamo $\mathcal{C} = \{X - A : A \in \mathcal{A}\}$.

Valgono le seguenti affermazioni

- $\mathcal{A}$ è una collezione di aperti se e solo se $\mathcal{C}$ è una collezione di chiusi
- la sottocollezione $\{A_i\}$ di $\mathcal{A}$ ricopre $\mathcal{A}$ se e solo se l'intersezione dei corrispettivi elementi $C_i = X - A_i$ è vuota

leggi di De Morgan

La prima affermazione segue dalle definizioni, la seconda dalla legge di De Morgan: $X - (\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in J}(X - A_\alpha)$.

Prendendo il contrapositivo della definizione di compattezza abbiamo: "X è compatto sse data $\mathcal{A}$ collezione di aperti, se nessuna sua sottocollezione finita ricopre X allora neanche $\mathcal{A}$ ricopre X.

Usando le due affermazioni su quest'ultimo enunciato otteniamo la tesi. $\square$

Come notiamo immediatamente abbiamo bisogno di un predicato che definisca la FIP e della definizione di ricoprimento. In REF si traduce così

DEF : [Ricoprimento] $\mathsf{Covers}(\mathsf{C}, \mathsf{X}) \leftrightarrow_{\text{Def}} \bigcup \mathsf{C} = \mathsf{X}$
DEF : [Proprietà intersezioni finite]
$\mathsf{HasFip}(\mathsf{C}) \leftrightarrow_{\text{Def}} \{\mathsf{D} \subseteq \mathsf{C} \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{D})\ \&\ \mathsf{D} \neq \emptyset\ \&\ \mathsf{inters}(\mathsf{D}) = \emptyset\} = \emptyset$

È interessante notare come abbiamo definito la FIP: REF è basato sulla teoria degli insiemi per cui gestisce con naturalezza le sostituizioni nei set-former. Riscrivendo la FIP come insieme vuoto aiuteremo il dimostratore quando farà delle sostituzioni di variabili alla ricerca di una contraddizione.

$$\begin{array}{ll} \text{def. tradizionale:} & \forall\mathcal{D}.\ \mathcal{D}\subseteq\mathcal{C}\ \text{finita} \Rightarrow \bigcap\mathcal{D}\neq\emptyset \\ & \downarrow \\ \text{doppia negazione:} & \neg(\exists\mathcal{D}.\ \mathcal{D}\subseteq\mathcal{C}\wedge\mathcal{D}\ \text{finita}\wedge\bigcap\mathcal{D}=\emptyset) \\ & \downarrow \\ \text{def. per insiemi:} & \{\ \mathcal{D}\subseteq\mathcal{C}|\mathcal{D}\ \text{finita}\wedge\bigcap\mathcal{D}=\emptyset\ \}=\emptyset \end{array}$$

La definizione di compattezza ricalca invece quella classica

DEF : [compattezza] $\mathsf{IsCompact}_\Theta(\mathsf{support}_\Theta) \leftrightarrow_{\text{Def}}$
$\langle\forall u\subseteq \mathsf{open}\mid \mathsf{Covers}(u,\mathsf{support}_\Theta)\longrightarrow\langle\exists d\subseteq u\mid \mathsf{Finite}(d)\ \&\ \mathsf{Covers}(d,\mathsf{support}_\Theta)\rangle\rangle$

Anche un predicato può far parte di una teoria: infatti il predicato $\mathsf{IsCompact}_\Theta$ possiede un curioso pedice $_\Theta$.

Riportiamo la dimostrazione formale

THEOREM topologicalSpace$_{20}$: [caratterizz. della compattezza]
$\mathsf{IsCompact}_\Theta(\mathsf{support}_\Theta)$
$\leftrightarrow \langle\forall c\subseteq \mathsf{closed}_\Theta\mid c\neq\emptyset\ \&\ \mathsf{HasFip}(c)\longrightarrow \mathsf{inters}(c)\neq\emptyset\rangle$. PROOF:
Suppose_not $\Rightarrow$ AUTO

Suppose $\Rightarrow$ $\mathsf{IsCompact}_\Theta(\mathsf{support}_\Theta)\ \&$
Stato : $\neg\langle\forall c\subseteq \mathsf{closed}_\Theta\mid c\neq\emptyset\ \&\ \mathsf{HasFip}(c)\longrightarrow \mathsf{inters}(c)\neq\emptyset\rangle$
$\langle c_0\rangle\hookrightarrow$*Stato* $\Rightarrow$ $c_0\subseteq\mathsf{closed}_\Theta\ \&\ c_0\neq\emptyset\ \&\ \mathsf{HasFip}(c_0)\ \&\ \mathsf{inters}(c_0)=\emptyset$
Use_def(HasFip) $\Rightarrow$ *Stat1* : $\{x\subseteq c_0\mid \mathsf{Finite}(x)\ \&\ x\neq\emptyset\ \&\ \mathsf{inters}(x)=\emptyset\}=\emptyset$

Use_def($\mathsf{IsCompact}_\Theta$) $\Rightarrow$ *Stat2* : $\langle\forall u\subseteq\mathsf{open}\mid\mathsf{Covers}(u,\mathsf{support}_\Theta)\longrightarrow$
$\langle\exists d\subseteq u\mid\mathsf{Finite}(d)\ \&\ \mathsf{Covers}(d,\mathsf{support}_\Theta)\rangle\rangle$

Loc_def $\Rightarrow$ *Stat22* : $u_0=\{\mathsf{support}_\Theta\backslash k : k\in c_0\}$

-- $c_0=\emptyset$

Suppose $\Rightarrow$ $u_0=\emptyset$
$\langle z_0\rangle\hookrightarrow$*Stat22* $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ $u_0\neq\emptyset$

$\langle c_0\rangle\hookrightarrow$*TtopologicalSpace*$_{13}$ $\Rightarrow$ $u_0\subseteq\mathsf{open}$
$\langle u_0\rangle\hookrightarrow$*Stat2* $\Rightarrow$ $\mathsf{Covers}(u_0,\mathsf{support}_\Theta)\rightarrow\langle\exists d\subseteq u_0\mid\mathsf{Finite}(d)\ \&\ \mathsf{Covers}(d,\mathsf{support}_\Theta)\rangle$

$\langle c_0\rangle\hookrightarrow$*TtopologicalSpace*$_{14}$ $\Rightarrow$ $\mathsf{Covers}(\{\mathsf{support}_\Theta\backslash k : k\in c_0\},\mathsf{support}_\Theta)$
EQUAL $\Rightarrow$ $\mathsf{Covers}(u_0,\mathsf{support}_\Theta)$
ELEM $\Rightarrow$ *Stat3* : $\langle\exists d\subseteq u_0\mid\mathsf{Finite}(d)\ \&\ \mathsf{Covers}(d,\mathsf{support}_\Theta)\rangle$

$\langle d_0\rangle\hookrightarrow$*Stat3* $\Rightarrow$ $d_0\subseteq u_0\ \&\ \mathsf{Finite}(d_0)\ \&\ \mathsf{Covers}(d_0,\mathsf{support}_\Theta)$
$\langle d_0\rangle\hookrightarrow$*TtopologicalSpace*$_{16}$ $\Rightarrow$ $\mathsf{inters}(\{\mathsf{support}_\Theta\backslash k : k\in d_0\})=\emptyset$
$\langle d_0\rangle\hookrightarrow$*TtopologicalSpace*$_{15}$ $\Rightarrow$ $d_0\neq\emptyset$

Loc_def $\Rightarrow$ *Stat4* : $k_0=\{\mathsf{support}_\Theta\backslash k : k\in d_0\}$
EQUAL $\Rightarrow$ $\mathsf{inters}(k_0)=\emptyset$

Suppose $\Rightarrow$ $k_0=\emptyset$

$\langle b_0\rangle\hookrightarrow Stat4 \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ $k_0 \neq \emptyset$

-- $d_0 \subseteq u_0$ ed $u_0 \subseteq$ open

$\langle d_0\rangle\hookrightarrow TtopologicalSpace_{11} \Rightarrow \langle \forall w \in d_0 \mid w \subseteq support_\Theta\rangle$
$\langle d_0\rangle\hookrightarrow TtopologicalSpace_{18} \Rightarrow Finite(\{support_\Theta\setminus k : k \in d_0\})$
EQUAL $\Rightarrow Finite(k_0)$

$\langle d_0, u_0\rangle\hookrightarrow TtopologicalSpace_{19} \Rightarrow \{support_\Theta\setminus k : k \in d_0\} \subseteq \{support_\Theta\setminus k : k \in u_0\}$
EQUAL $\Rightarrow k_0 \subseteq \{support_\Theta\setminus k : k \in u_0\}$
EQUAL $\Rightarrow k_0 \subseteq \{support_\Theta\setminus k : k \in \{support_\Theta\setminus k : k \in c_0\}\}$
SIMPLF $\Rightarrow k_0 \subseteq \{support_\Theta\setminus(support_\Theta\setminus k) : k \in c_0\}$

-- $c_0 \subseteq closed_\Theta$

$\langle c_0\rangle\hookrightarrow TtopologicalSpace_{11} \Rightarrow \langle \forall w \in c_0 \mid w \subseteq support_\Theta\rangle$
$\langle c_0\rangle\hookrightarrow TtopologicalSpace_{17} \Rightarrow k_0 \subseteq c_0$

$\langle k_0\rangle\hookrightarrow Stat1 \Rightarrow$ false;

Discharge $\Rightarrow \neg IsCompact_\Theta(support_\Theta)\ \&$
$Stat5 : \langle \forall c \subseteq closed_\Theta \mid c \neq \emptyset\ \&\ HasFip(c) \rightarrow inters(c) \neq \emptyset\rangle$
Use_def($IsCompact_\Theta$) $\Rightarrow$
$Stat6 : \neg\langle \forall u \subseteq open \mid Covers(u, support_\Theta) \rightarrow \langle \exists d \subseteq u \mid Finite(d)\ \&\ Covers(d, suppo$
$\langle u_1\rangle\hookrightarrow Stat6 \Rightarrow$
$u_1 \subseteq open\ \&\ Covers(u_1, support_\Theta)\ \&\ \neg\langle \exists d \subseteq u_1 \mid Finite(d)\ \&\ Covers(d, support_\Theta)\rangle$

Loc_def $\Rightarrow Stat7 : c_1 = \{support_\Theta\setminus k : k \in u_1\}$
$\langle u_1\rangle\hookrightarrow TtopologicalSpace_{12} \Rightarrow \{support_\Theta\setminus k : k \in u_1\} \subseteq closed_\Theta$
EQUAL $\Rightarrow c_1 \subseteq closed_\Theta$

$\langle u_1\rangle\hookrightarrow TtopologicalSpace_{15} \Rightarrow u_1 \neq \emptyset$
Suppose $\Rightarrow c_1 = \emptyset$
$\langle b_1\rangle\hookrightarrow Stat7 \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow c_1 \neq \emptyset$

$\langle c_1\rangle\hookrightarrow Stat5 \Rightarrow HasFip(c_1) \rightarrow inters(c_1) \neq \emptyset$
ELEM $\Rightarrow inters(c_1) = \emptyset \rightarrow \neg HasFip(c_1)$
$\langle u_1\rangle\hookrightarrow TtopologicalSpace_{16} \Rightarrow inters(\{support_\Theta\setminus k : k \in u_1\}) = \emptyset$
EQUAL $\Rightarrow \neg HasFip(c_1)$

Use_def(HasFip) $\Rightarrow Stat8 : \{x \subseteq c_1 \mid Finite(x)\ \&\ x \neq \emptyset\ \&\ inters(x) = \emptyset\} \neq \emptyset$
ELEM $\Rightarrow Stat9 : \neg\langle \exists d \subseteq u_1 \mid Finite(d)\ \&\ Covers(d, support_\Theta)\rangle$
$\langle x_1\rangle\hookrightarrow Stat8 \Rightarrow x_1 \subseteq c_1\ \&\ Finite(x_1)\ \&\ x_1 \neq \emptyset\ \&\ inters(x_1) = \emptyset$

Loc_def $\Rightarrow Stat10 : d_1 = \{support_\Theta\setminus k : k \in x_1\}$

ELEM $\Rightarrow x_1 \subseteq c_1$
$\langle x_1, c_1\rangle\hookrightarrow TtopologicalSpace_{19} \Rightarrow \{support_\Theta\setminus k : k \in x_1\} \subseteq \{support_\Theta\setminus k : k \in c_1\}$
EQUAL $\Rightarrow d_1 \subseteq \{support_\Theta\setminus k : k \in \{support_\Theta\setminus k : k \in u_1\}\}$
SIMPLF $\Rightarrow \{support_\Theta\setminus k : k \in \{support_\Theta\setminus k : k \in u_1\}\} = \{support_\Theta\setminus(support_\Theta\setminus k) : k \in u_1$

-- $u_1 \subseteq open$

$\langle u_1\rangle\hookrightarrow TtopologicalSpace_{11} \Rightarrow \langle \forall w \in u_1 \mid w \subseteq support_\Theta\rangle$
$\langle u_1\rangle\hookrightarrow TtopologicalSpace_{17} \Rightarrow \{support_\Theta\setminus k : k \in \{support_\Theta\setminus k : k \in u_1\}\} = u_1$

EQUAL $\Rightarrow$ $d_1 \subseteq u_1$

-- $c_1 \subseteq \text{closed}_\Theta\ x_1 \subseteq c_1$

$\langle x_1 \rangle \hookrightarrow$ *TtopologicalSpace*$_{11}$ $\Rightarrow$ $\langle \forall w \in x_1 \mid w \subseteq \text{support}_\Theta \rangle$
$\langle x_1 \rangle \hookrightarrow$ *TtopologicalSpace*$_{18}$ $\Rightarrow$ $\text{Finite}(\{\text{support}_\Theta \setminus k : k \in x_1\})$
EQUAL $\Rightarrow$ $\text{Finite}(d_1)$

$\langle x_1 \rangle \hookrightarrow$ *TtopologicalSpace*$_{14}$ $\Rightarrow$ $\text{Covers}(\{\text{support}_\Theta \setminus k : k \in x_1\}, \text{support}_\Theta)$
EQUAL $\Rightarrow$ $\text{Covers}(d_1, \text{support}_\Theta)$

$\langle d_1 \rangle \hookrightarrow$ *Stat9* $\Rightarrow$ false;

Discharge $\Rightarrow$ QED

La dimostrazione formale a differenza di quella classica divide l'implicazione in due parti. Questa scelta è dovuta a leggere asimmetrie.

Ad esempio una collezione vuota $\mathcal{U}$ non può ricoprire il supporto (teorema topologicalSpace$_{15}$) ma cosa si può dire dell'intersezione di una collezione vuota $\mathcal{C}$?

il problema di $\bigcap\emptyset$

Nella dimostrazione vista sopra la collezione $\mathcal{C}$ era formata prendendo i complementari degli insiemi di $\mathcal{U}$, dunque se $\mathcal{U}$ era vuota anche $\mathcal{C}$ lo era. Ma mentre l'unionset di una collezione vuota è facile da definire (se andiamo a vedere la definizione di Un data in precedenza si vede che è vuoto), l'intersezione è più problematica.

Nella topologia generale l'intersezione vuota viene posta per definizione uguale al supporto. Questo prevede che ci sia un insieme "grande" dal quale partire, una specie di insieme universo. Un insieme universo funziona bene in un ambito ristretto quale la topologia, ma REF si occupa di tutta la teoria degli insiemi e nella teoria degli insiemi un insieme universo è un problema.

Il problema nasce dal paradosso del barbiere, enunciato da Russel nel 1918. Sia U l'insieme universo e $R = \{X \in U : X \notin X\}$, vale $R \in R$? In un linguaggio più pittoresco ci si chiede: "In un villaggio c'è un unico barbiere. Il barbiere rade tutti (e solo) gli uomini che non si radono da sé. Chi rade il barbiere?" Questa frase porta inevitabilmente a una contraddizione che esclude l'esistenza dell'insieme universo.

Per la nostra dimostrazione è un problema. Vediamo come possiamo risolverlo. L'intersezione arbitraria l'abbiamo definita così, non essendo un operatore built-in di REF

DEF : [Intersezione unaria]
$\text{inters}(C) \leftrightarrow_{\text{Def}} \{z \in \text{arb}(C) \mid \langle \forall y \in C \mid z \in y \rangle\}$

Con questa definizione l'intersezione di una collezione vuota è vuota. Infatti *arb* è una funzione predefinita che sceglie un elemento di un insieme, ma se l'insieme di partenza è vuoto torna vuoto. Partendo da una $\mathcal{C} = \emptyset$ otteniamo che non ci sono $z \in \text{arb}(\mathcal{C})$ e anche l'intersezione risulta vuota. Ora, se entrambe $\mathcal{U}$ e $\mathcal{C}$ sono vuote, la prima non ricopre X ma la seconda ha intersezione vuota. Ma questo va contro la prima affermazione della dimostrazione del teorema della compattezza!

Come possiamo dimostrare l'enunciato formalmente allora? Gestendo con dei condizionali il caso dell'intersezione vuota. Il tutto si traduce nell'aggiungere una serie di ipotesi nel lemmi precedenti e in un condizionale *if...then...else* nelle leggi di De Morgan.

Per la parte restante la dimostrazione ricalca quella standard, solamente è specificato ogni dettaglio. Per questioni di stile ho diviso la dimostrazione in blocchi: l'ultima riga mostra la conclusione a cui si voleva arrivare, di solito per citare un lemma o un teorema.

9.1 Le leggi di De Morgan

La caratterizzazione della compattezza che abbiamo visto usa inevitabilmente la seconda legge di De Morgan. Ci si potrebbe stupire che Ref non includa dei teoremi così basilari, ma pensandoci un attimo ci si rende conto che non è poi così strano dato che non erano definite nemmeno le unioni e le intersezioni arbitrarie d'insiemi.

La maggior difficoltà con le leggi di De Morgan è gestire l'intersezione vuota. Abbiamo già parlato del problema quindi ci limiteremo a riportare la dimostrazione formale. Come si vede abbiamo usato un condizionale if... then... else.

Theorem 23*a*: [seconda legge di De Morgan]
$X \setminus \bigcup Y = \textbf{if } Y = \emptyset \textbf{ then } X \textbf{ else } \bigcap(\{X \setminus z : z \in Y\}) \textbf{ fi}$. Proof:
$\mathsf{Suppose\_not}(x_0, y_0) \Rightarrow$ Auto

-- Ragionando per assurdo, cominciamo semplificando il lato destro della disuguaglianza e con l'escludere la possibilità che il controesempio x_0, y_0 possa avere $y_0 = \emptyset$. Da ciò segue subito che $\{x_0 \setminus z : z \in y_0\} \neq \emptyset$.

$\langle y_0 \rangle \hookrightarrow T3f \Rightarrow y_0 \neq \emptyset \;\&\; Stat1 : x_0 \setminus \bigcup y_0 \neq \bigcap(\{x_0 \setminus z : z \in y_0\})$
$\mathsf{Suppose} \Rightarrow Stat2 : \{x_0 \setminus z : z \in y_0\} = \emptyset$
$\langle \textbf{arb}(y_0) \rangle \hookrightarrow Stat2 \Rightarrow \mathsf{false}$; $\mathsf{Discharge} \Rightarrow$ Auto

-- Richiamando la prima legge di De Morgan, troviamo che $x_0 \cap \bigcap(\{x_0 \setminus z : z \in y_0\}) = x_0 \setminus \bigcup \{x_0 \cap z : z \in y_0\}$.

$\langle x_0, \{x_0 \setminus z : z \in y_0\} \rangle \hookrightarrow T23 \Rightarrow x_0 \cap \bigcap(\{x_0 \setminus z : z \in y_0\}) =$
$x_0 \setminus \bigcup \{x_0 \setminus z : z \in \{x_0 \setminus z : z \in y_0\}\}$
$\mathsf{SIMPLF} \Rightarrow \{x_0 \setminus z : z \in \{x_0 \setminus z : z \in y_0\}\} = \{x_0 \setminus (x_0 \setminus z) : z \in y_0\}$
$\mathsf{Suppose} \Rightarrow Stat3 : \{x_0 \setminus (x_0 \setminus z) : z \in y_0\} \neq \{x_0 \cap z : z \in y_0\}$
$\langle c_0 \rangle \hookrightarrow Stat3(Stat3\star) \Rightarrow \mathsf{false}$;
$\mathsf{Discharge} \Rightarrow \{x_0 \setminus (x_0 \setminus z) : z \in y_0\} = \{x_0 \cap z : z \in y_0\}$
$\langle x_0, y_0 \rangle \hookrightarrow T3h \Rightarrow x_0 \setminus \bigcup \{x_0 \cap z : z \in y_0\} = x_0 \setminus \bigcup y_0$
$\mathsf{EQUAL} \Rightarrow x_0 \cap \bigcap(\{x_0 \setminus z : z \in y_0\}) = x_0 \setminus \bigcup y_0$

-- Il lato sinistro di quest'ultima uguaglianza si semplifica in inters ({xo-z: z in yo}), il che contraddice il passo Stat1.

$\mathsf{Suppose} \Rightarrow \quad \mathit{Stat4}: \bigcap(\{x_0 \backslash z : z \in y_0\}) \not\subseteq x_0 \cap \bigcap(\{x_0 \backslash z : z \in y_0\})$
$\langle c_1 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat4}(\mathit{Stat4}\star) \Rightarrow$
$\quad \mathit{Stat5}: c_1 \in \bigcap(\{x_0 \backslash z : z \in y_0\}) \;\&\; c_1 \notin x_0$
$\mathsf{Use\_def}(\bigcap) \Rightarrow$
$\quad \mathit{Stat6}: c_1 \in \{z \in \mathbf{arb}(\{x_0 \backslash z : z \in y_0\}) \mid \langle \forall y \in \{x_0 \backslash z : z \in y_0\} \mid z \in y \rangle\}$
$\mathsf{Loc\_def} \Rightarrow \quad a = \mathbf{arb}(\{x_0 \backslash z : z \in y_0\})$
$\langle\ \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat6}(\mathit{Stat6}) \Rightarrow \quad \mathit{Stat7}: a \in \{x_0 \backslash z : z \in y_0\} \;\&\; c_1 \in a$
$\langle z_0 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat7}(\mathit{Stat5}, \mathit{Stat7}\star) \Rightarrow \quad \mathsf{false}; \qquad \mathsf{Discharge} \Rightarrow \quad \mathsf{false}$
$\mathsf{Discharge} \Rightarrow$ QED

La dimostrazione cita due teoremi: il 3f e il3h. I teoremi sono delle leggi di distributività dell'unione arbitraria, prima rispetto la differenza e poi rispetto all'intersezione.

Theorem $3f$: $(Y \subseteq \{\emptyset\} \leftrightarrow \bigcup Y = \emptyset) \;\&\; (Y \in Z \rightarrow \bigcup Z = Y \cup \bigcup(Z \setminus \{Y\}))$.
Theorem $3h$: $\bigcup \{X \cap z : z \in Y\} = X \cap \bigcup Y$.

10

RISULTATI FINALI E SVILUPPI FUTURI ...

Siamo in conclusione del lavoro: cosa abbiamo ottenuto e cosa resta da fare?

cosa abbiamo ottenuto. . .

L'obiettivo finale era creare uno scenario indipendente in Ref che includesse un risultato non banale. Il risultato che abbiamo scelto è il teorema di rappresentazione di Stone. Questo teorema ha il pregio di essere un risultato non puramente insiemistico, cioè mostra come Ref possa essere usato in contesti al di fuori dalla teoria degli insiemi, ma allo stesso tempo non richiede grandi prerequisiti, come la costruzione dei reali in un teorema d'analisi.

In questa ottica abbiamo ripreso in mano le teorie delle algebre booleane sviluppate precedentemente e abbiamo iniziato a sviluppare il primo concetto topologico che ci serviva: la compattezza.

In particolare, riprendendo la dimostrazione di Schwartz, è risultato fondamentale darne una caratterizzazione alternativa. Questa caratterizzazione utilizza insiemi chiusi invece che aperti perché la base dello spazio Stone si comporta bene rispetto alle intersezioni, cioè vale $S_{xy}(B) = S_x(B) \cap S_y(B)$.

Per dimostrare questa caratterizzazioni abbiamo definito degli operatori su unioni e intersezioni arbitrarie e quindi dimostrato le leggi di De Morgan e di altri lemmi insiemistici.

. . . cosa resta da fare

Cosa manca ora? Come accennato nel capitolo apposito bisogna integrare la teoria degli spazi topologici con i concetti di connessione e di spazio di Hausdorff. L'integrazione dovrebbe essere fatta modellando i concetti di connessione e spazio di Hausdorff su predicati come $\mathsf{IsCompact}_\Theta$. Ottenuti questi due predicati avremo bisogno di alcuni lemmi, come il fatto che uno spazio di Hausdorff compatto con una base di chiusaperti sia automaticamente totalmente sconnesso.

Dimostrati tutti i lemmi che ci servono e integrati nella teoria topologicalSpace potremmo finalmente finire la dimostrazione del teorema di Stone.

DUNFORD, N. e SCHWARTZ, J. T. (1958), *Linear Operators, Part I General Theory*, Interscience Publishers. (Citato alle pagine 29 e 31.)

EUCLIDE (2010), «Gli elementi di Euclide, Libro I», URL `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI1.html`, online, controllata in settembre 2010. (Citato a pagina 5.)

GEUVERS, H. (2009), «Proof assistants: History, ideas and future», *Sadhana Journal*, vol. 34. (Citato a pagina 12.)

GONTHIER, G. (2008), «Formal Proof—The Four-Color Theorem», *Notices of the AMS*, vol. 55 (11). (Citato a pagina 9.)

HALES, T. C. (2008), «Formal Proof», *Notices of the AMS*, vol. 55 (11). (Citato a pagina 15.)

KRANTZ, S. G. (2007), *The Proof is in the Pudding. The Changing Nature of Mathematical Proof*, Springer. (Citato a pagina 8.)

MUNKRES, J. (2000), *Topology (2nd edition)*, Prentice Hall. (Citato alle pagine 31 e 33.)

OMODEO, E. G., CANTONE, D., POLICRITI, A. e SCHWARTZ, J. T. (2006), «A Computerized Referee», in STOCK, O. e SCHAERF, M., curatori, «Reasoning, Action and Interaction in AI Theories and Systems — Essays Dedicated to Luigia Carlucci Aiello», vol. 4155, p. 117–139, Springer. (Citato a pagina 17.)

STONE, M. H. (1936), «The Theory of Representations of Boolean Algebras», *Transactions of the American Mathematical Society*, (40), p. 37–111. (Citato a pagina 5.)

WHITEHEAD, A. N. e RUSSELL, B. (2009), *Principia Matematica*, vol. 1–3, Merchant Books. (Citato a pagina 7.)

WIEDIJK, F. (2007), «The QED Manifesto Revisisted», *STUDIES IN LOGIC, GRAMMAR AND RHETORIC 10 (23)*. (Citato a pagina 13.)

WIEDIJK, F. (2010), «Formalizing 100 Theorems», URL `http://www.cs.ru.nl/~freek/100/`. (Citato a pagina 14.)

THEOREM 1*a*. $\mathsf{S} \supseteq \mathsf{X} \rightarrow \mathcal{P}\mathsf{X} \cup \{\emptyset, \mathsf{X}\} \subseteq \mathcal{P}\mathsf{S}$. PROOF:

Suppose_not$(s_0, x_0) \Rightarrow$ AUTO

Set_monot $\Rightarrow$ $\{x : x \subseteq x_0\} \subseteq \{x : x \subseteq s_0\}$

Use_def$(\mathcal{P}) \Rightarrow$ *Stat1* : $\emptyset \notin \{x : x \subseteq s_0\} \vee x_0 \notin \{x : x \subseteq s_0\}$

$\langle \emptyset, x_0 \rangle \hookrightarrow$ *Stat1* $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

THEOREM 1*b*. $\mathcal{P}\emptyset = \{\emptyset\}$ & $\mathcal{P}\{\mathsf{X}\} = \{\emptyset, \{\mathsf{X}\}\}$. PROOF:

Suppose_not$(x_0) \Rightarrow$ AUTO

Suppose $\Rightarrow$ $\mathcal{P}\emptyset \neq \{\emptyset\}$

$\langle \emptyset, \emptyset \rangle \hookrightarrow T1a \Rightarrow$ *Stat0* : $\mathcal{P}\emptyset \not\subseteq \{\emptyset\}$

$\langle y_0 \rangle \hookrightarrow$ *Stat0*(*Stat0*$\star$) $\Rightarrow$ *Stat1* : $y_0 \in \mathcal{P}\emptyset$ & $y_0 \notin \{\emptyset\}$

$\langle \emptyset, y_0 \rangle \hookrightarrow T1$ (*Stat1*$\star$) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ $\mathcal{P}\{x_0\} \neq \{\emptyset, \{x_0\}\}$

$\langle \{x_0\}, \{x_0\} \rangle \hookrightarrow T1a \Rightarrow$ *Stat2* : $\mathcal{P}\{x_0\} \not\subseteq \{\emptyset, \{x_0\}\}$

$\langle y_1 \rangle \hookrightarrow$ *Stat2* $\Rightarrow$ *Stat3* : $y_1 \in \mathcal{P}\{x_0\}$ & $y_1 \notin \{\emptyset, \{x_0\}\}$

$\langle \{x_0\}, y_1 \rangle \hookrightarrow T1$ (*Stat3*$\star$) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

THEOREM 3*a*. $\mathsf{Z} = \{\mathsf{X}, \mathsf{Y}\} \rightarrow \bigcup \mathsf{Z} = \mathsf{X} \cup \mathsf{Y}$ & $\bigcup \{\mathsf{Y}\} = \mathsf{Y}$. PROOF:

Suppose_not$(z_0, x_0, y_0) \Rightarrow$ AUTO

-- La seconda parte dell'enunciato di questo teorema discende direttamente dalla prima e potremmo posporne la dimostrazione; preferiamo invece trattare per primo questo caso speciale per illustrare una linea dimostrativa lievemente diversa e più semplice.

Suppose $\Rightarrow$ $\bigcup\{y_0\} \neq y_0$

Use_def$(\bigcup) \Rightarrow$ $\{z : y \in \{y_0\}, z \in y\} \neq y_0$

SIMPLF $\Rightarrow$ $\{z : z \in y_0\} \neq y_0$

ELEM $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ *Stat0* : $z_0 = \{x_0, y_0\}$ & $\bigcup z_0 \neq x_0 \cup y_0$

-- Nell'altro caso, cioè sotto l'assurda ipotesi che $z_0 = \{x_0, y_0\}$ & $\bigcup z_0 \neq x_0 \cup y_0$, due citazioni del Theorem 3 ci pemettono di ricavare da $z_0 = \{x_0, y_0\}$ che $x_0 \subseteq \bigcup z_0$ ed $y_0 \subseteq \bigcup z_0$

$\langle x_0, z_0 \rangle \hookrightarrow T3 \Rightarrow$ AUTO

$\langle y_0, z_0 \rangle \hookrightarrow T3 \Rightarrow$ AUTO

-- Una terza citazione dello stesso Theorem 3 ci permette di ricavare da $\bigcup z_0 \neq x_0 \cup y_0$ che qualche elemento di $z_0 = \{x_0, y_0\}$ non è incluso in $x_0 \cup y_0$, il che è palesemente assurdo.

$\langle x_0 \cup y_0, z_0 \rangle \hookrightarrow T3$ (*Stat0*$\star$) $\Rightarrow$ *Stat1* : $\neg\langle \forall y \in z_0 \mid y \subseteq x_0 \cup y_0 \rangle$

$\langle v \rangle \hookrightarrow$ *Stat1*(*Stat0*, *Stat0*$\star$) $\Rightarrow$ $v \in \{x_0, y_0\}$ & $v \not\subseteq x_0 \cup y_0$

$(Stat1\star)$Discharge $\Rightarrow$ QED

THEORY imageOfDoubleton $(f(X), x_0, x_1)$
END imageOfDoubleton

ENTER_THEORY imageOfDoubleton

-- the image of a doubleton is a doubleton or singleton

THEOREM imageOfDoubleton. $\{f(v) : v \in \emptyset\} = \emptyset \; \& \; \{f(v) : v \in \{x_0\}\} = \{f\}(x_0) \; \& \; \{f(v) : v \in \{x_0, x_1\}\} = \{f(x_0), f(x_1)\}$. PROOF:

Suppose_not() $\Rightarrow$ AUTO
SIMPLF $\Rightarrow$ *Stat1* : $\{f(v) : v \in \{x_0, x_1\}\} \neq \{f(x_0), f(x_1)\}$
$\langle c \rangle \hookrightarrow Stat1(Stat1\star) \Rightarrow$ $c \in \{f(v) : v \in \{x_0, x_1\}\} \neq c \in \{f(x_0), f(x_1)\}$
Suppose $\Rightarrow$ *Stat2* : $c \notin \{f(v) : v \in \{x_0, x_1\}\}$
$\langle x_0 \rangle \hookrightarrow Stat2(Stat1\star) \Rightarrow$ $c = f(x_1)$
$\langle x_1 \rangle \hookrightarrow Stat2(Stat1\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ *Stat3* : $c \in \{f(v) : v \in \{x_0, x_1\}\} \; \& \; c \notin \{f(x_0), f(x_1)\}$
$\langle x' \rangle \hookrightarrow Stat3 \Rightarrow$ $x' \in \{x_0, x_1\} \; \& \; f(x') \notin \{f(x_0), f(x_1)\}$
Suppose $\Rightarrow$ $x' = x_0$
EQUAL $\Rightarrow$ $f(x_0) \notin \{f(x_0), f(x_1)\}$
$(Stat3\star)$Discharge $\Rightarrow$ $x' = x_1$
EQUAL $\Rightarrow$ *Stat4* : $f(x_1) \notin \{f(x_0), f(x_1)\}$
$(Stat4\star)$Discharge $\Rightarrow$ QED

ENTER_THEORY Set_theory

-- unione di unione

THEOREM *3b*. $\bigcup(\bigcup X) = \bigcup\{\bigcup y : y \in X\}$. PROOF:

Suppose_not(x_0) $\Rightarrow$ AUTO
Use_def$(\bigcup)$ $\Rightarrow$ $\{z : y \in \{u : v \in x_0, u \in v\}, z \in y\} \neq \{s : r \in \{\bigcup y : y \in x_0\}, s \in r\}$
SIMPLF $\Rightarrow$ *Stat1* : $\{z : v \in x_0, u \in v, z \in u\} \neq \{s : y \in x_0, s \in \bigcup y\}$
$\langle z_0 \rangle \hookrightarrow Stat1 \Rightarrow$ *Stat2* : $z_0 \in \{z : v \in x_0, u \in v, z \in u\} \neq z_0 \in \{s : y \in x_0, s \in \bigcup y\}$
Suppose $\Rightarrow$ *Stat3* : $z_0 \in \{z : v \in x_0, u \in v, z \in u\} \; \& \; z_0 \notin \{s : y \in x_0, s \in \bigcup y\}$
Use_def$(\bigcup v_0)$ $\Rightarrow$ AUTO
$\langle v_0, u_0, z, v_0, z_0 \rangle \hookrightarrow Stat3(Stat2\star) \Rightarrow$ *Stat4* :
$z_0 \notin \{z : u \in v_0, z \in u\} \; \& \; v_0 \in x_0 \; \& \; u_0 \in v_0 \; \& \; z_0 \in u_0$
$\langle u_0, z_0 \rangle \hookrightarrow Stat4(Stat4\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ *Stat5* : $z_0 \in \{s : y \in x_0, s \in \bigcup y\}$
Use_def$(\bigcup y_0)$ $\Rightarrow$ AUTO
$\langle y_0, s_0 \rangle \hookrightarrow Stat5(Stat5\star) \Rightarrow$ *Stat6* : $z_0 \in \{s : u \in y_0, s \in u\} \; \& \; y_0 \in x_0$
$\langle u_1, s_1 \rangle \hookrightarrow Stat6(Stat5, Stat2\star) \Rightarrow$ *Stat7* : $z_0 \notin \{z : v \in x_0, u \in v, z \in u\} \; \& \; z_0 \in u_1 \; \& \; u_1 \in y_0$
$\langle y_0, u_1, z_0 \rangle \hookrightarrow Stat7(Stat6\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

-- additività e monotonicità dell'unione monadica

THEOREM 3c. $\bigcup(X \cup Y) = \bigcup X \cup \bigcup Y \ \& \ (Y \supseteq X \rightarrow \bigcup Y \supseteq \bigcup X)$. PROOF:

Suppose_not$(x_0, y_0) \Rightarrow$ AUTO

Suppose $\Rightarrow \bigcup(x_0 \cup y_0) \neq \bigcup x_0 \cup \bigcup y_0$

$\langle \{x_0, y_0\} \rangle \hookrightarrow T3b \Rightarrow \bigcup(\bigcup \{x_0, y_0\}) = \bigcup \{\bigcup v : v \in \{x_0, y_0\}\}$

APPLY $\langle\,\rangle$ imageOfDoubleton$(f(X) \mapsto \bigcup X, x_0 \mapsto x_0, x_1 \mapsto y_0) \Rightarrow$

$\{\bigcup v : v \in \{x_0, y_0\}\} = \{\bigcup x_0, \bigcup y_0\}$

$\langle \{x_0, y_0\}, x_0, y_0 \rangle \hookrightarrow T3a \Rightarrow \bigcup \{x_0, y_0\} = x_0 \cup y_0$

$\langle \{\bigcup x_0, \bigcup y_0\}, \bigcup x_0, \bigcup y_0 \rangle \hookrightarrow T3a \Rightarrow \bigcup \{\bigcup x_0, \bigcup y_0\} = \bigcup x_0 \cup \bigcup y_0$

EQUAL $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow \bigcup(x_0 \cup y_0) = \bigcup x_0 \cup \bigcup y_0 \ \& \ y_0 = x_0 \cup y_0 \ \& \ \bigcup y_0 \not\supseteq \bigcup x_0$

EQUAL $\Rightarrow \bigcup y_0 = \bigcup x_0 \cup \bigcup y_0$

Discharge $\Rightarrow$ QED

-- Anche se può apparire inutilmente contorto, l'enunciato del teorema che segue ha il pregio della versatilità ; visto che, per semplice citazione, può essere utilmente declinato in almeno tre modi:

$$\bigcup(X \cup \{Y\}) = Y \cup \bigcup X\,,$$

$$Y \in Z \rightarrow \bigcup Z = Y \cup \bigcup(Z \setminus \{Y\})\,,$$

$$Z \neq \emptyset \rightarrow \bigcup Z = \mathbf{arb}(Z) \cup \bigcup(Z \setminus \{\mathbf{arb}(Z)\})\,.$$

-- unione di unione, 2

THEOREM 3d. $Y \in Z \ \& \ X \in \{Z, Z \setminus \{Y\}\} \rightarrow \bigcup Z = Y \cup \bigcup X$. PROOF:

Suppose_not$(y_0, z_0, x_0) \Rightarrow$ AUTO

ELEM $\Rightarrow z_0 = x_0 \cup \{y_0\}$

EQUAL $\Rightarrow \bigcup(x_0 \cup \{y_0\}) \neq y_0 \cup \bigcup x_0$

$\langle \emptyset, \emptyset, y_0 \rangle \hookrightarrow T3a \Rightarrow$ AUTO

$\langle x_0, \{y_0\} \rangle \hookrightarrow T3c \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

THEOREM 3e. $\bigcup(X \cup \{Y\}) = Y \cup \bigcup X$. PROOF:

Suppose_not$(x_0, y_0) \Rightarrow$ AUTO

$\langle y_0, x_0 \cup \{y_0\}, x_0 \rangle \hookrightarrow T3d\ (\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

THEOREM 3f. $(Y \subseteq \{\emptyset\} \leftrightarrow \bigcup Y = \emptyset) \ \& \ \big(Y \in Z \rightarrow \bigcup Z = Y \cup \bigcup(Z \setminus \{Y\})\big)$. PROOF:

Suppose_not$(x_0, z_0) \Rightarrow$ AUTO

Suppose $\Rightarrow x_0 \subseteq \{\emptyset\} \neq \bigcup x_0 = \emptyset$

Use_def$(\bigcup x_0) \Rightarrow$ AUTO

Suppose $\Rightarrow x_0 \subseteq \{\emptyset\}$

ELEM $\Rightarrow$ *Stat1* : $\{z : y \in x_0, z \in y\} \neq \emptyset$

$\langle y_0, z_1 \rangle \hookrightarrow Stat1 \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ *Stat2* : $x_0 \not\subseteq \{\emptyset\} \ \& \ \{z : y \in x_0, z \in y\} = \emptyset$

$\langle y_1, y_1, \mathbf{arb}(y_1)\rangle \hookrightarrow Stat2 \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ $x_0 \in z_0 \,\&\, \bigcup z_0 \neq x_0 \cup \bigcup(z_0 \setminus \{x_0\})$
$\langle x_0, z_0, z_0 \setminus \{x_0\}\rangle \hookrightarrow T3d\ (\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

THEOREM $3g$. $Z \neq \emptyset \to \bigcup Z = \mathbf{arb}(Z) \cup \bigcup(Z \setminus \{\mathbf{arb}(Z)\})$. PROOF:
Suppose_not$(z_0) \Rightarrow$ AUTO
$\langle \mathbf{arb}(z_0), z_0, z_0 \setminus \{\mathbf{arb}(z_0)\}\rangle \hookrightarrow T3d \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

THEORY doubleUnion$(f(X), x_0)$
END doubleUnion

ENTER_THEORY doubleUnion

-- double union of a setformer
THEOREM doubleUnion. $\bigcup(\bigcup\{f(w) : w \in x_0\}) = \bigcup\{\bigcup f(w) : w \in x_0\}$. PROOF:
Suppose_not$() \Rightarrow$ AUTO
$\langle \{f(w) : w \in x_0\}\rangle \hookrightarrow T3b \Rightarrow$ $\bigcup\{\bigcup v : v \in \{f(w) : w \in x_0\}\} \neq \bigcup\{\bigcup f(w) : w \in x_0\}$
SIMPLF $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED
ENTER_THEORY Set_theory

-- distributività dell'intersezione sull'unione
THEOREM $3h$. $\bigcup\{X \cap z : z \in Y\} = X \cap \bigcup Y$. PROOF:
Suppose_not$(x_0, y_0) \Rightarrow$ $Stat0:$ AUTO
$\langle c_1\rangle \hookrightarrow Stat0 \Rightarrow$ $c_1 \in \bigcup\{x_0 \cap z : z \in y_0\} \neq c_1 \in x_0 \cap \bigcup y_0$
Use_def$(\bigcup\{x_0 \cap z : z \in y_0\}) \Rightarrow$ AUTO
SIMPLF $\Rightarrow$ $\bigcup\{x_0 \cap z : z \in y_0\} = \{w : z \in y_0, w \in x_0 \cap z\}$
Use_def$(\bigcup y_0) \Rightarrow$ AUTO
Suppose $\Rightarrow$ $Stat1: c_1 \in \{w : z \in y_0, w \in x_0 \cap z\} \,\&\, c_1 \notin x_0 \cap \bigcup y_0$
$\langle z_1, w\rangle \hookrightarrow Stat1 \Rightarrow$ $c_1 \in x_0 \cap z_1 \,\&\, z_1 \in y_0 \,\&\, Stat3: c_1 \notin \{w : y \in y_0, w \in y\}$
$\langle z_1, c_1\rangle \hookrightarrow Stat3 \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ $Stat5: c_1 \in \{w : y \in y_0, w \in y\} \,\&\, c_1 \in x_0 \,\&\, c_1 \notin \bigcup\{x_0 \cap z : z \in y_0\}$
$\langle y_2, c\rangle \hookrightarrow Stat5 \Rightarrow$ $c_1 \in x_0 \,\&\, c_1 \in y_2 \,\&\, y_2 \in y_0 \,\&\, Stat6: c_1 \notin \{w : z \in y_0, w \in x_0 \cap z\}$
$\langle y_2, c_1\rangle \hookrightarrow Stat6 \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

-- intersezione monadica
DEF intersection. $\bigcap(X) =_{\mathrm{Def}} \{z \in \mathbf{arb}(X) \mid \langle \forall y \in X \mid z \in y\rangle\}$

-- prima legge di De Morgan
THEOREM 23. $X \setminus$ **if** $Y = \emptyset$ **then** X **else** $\bigcap(Y)$ **fi** $= \bigcup\{X \setminus z : z \in Y\}$. PROOF:
Suppose_not$(x_0, y_0) \Rightarrow$ AUTO

-- Ragionando per assurdo, cominciamo semplificando il lato destro della disuguaglianza e con l'escludere la possibilità che il controesempio x_0, y_0 possa avere $y_0 = \emptyset$.

Use_def $(\bigcup\{x_0 \backslash z : z \in y_0\}) \Rightarrow$ AUTO
SIMPLF $\Rightarrow$ $\bigcup\{x_0 \backslash z : z \in y_0\} = \{z : w \in y_0, z \in x_0 \backslash w\}$
Loc_def $\Rightarrow$ $w_1 = \mathbf{arb}(y_0)$
Suppose $\Rightarrow$ $y_0 = \emptyset$
$\langle \{x_0 \backslash z : z \in y_0\} \rangle \hookrightarrow T3f \Rightarrow$ $\mathit{Stat1}: \{x_0 \backslash z : z \in y_0\} \neq \emptyset$
$\langle z_1 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat1} \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ $\mathit{Stat2}: x_0 \backslash \bigcap(y_0) \neq \{z : w \in y_0, z \in x_0 \backslash w\}$ & $w_1 \in y_0$

-- Escluso quel caso banale, l'assurda ipotesi si è ridotta alla disuguaglianza che leggiamo qui sopra. Sia e_0 un elemento che differenzia i due membri della disuguaglianza.

$\langle e_0 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat2} \Rightarrow$ $e_0 \in x_0 \backslash \bigcap(y_0) \neq e_0 \in \{z : w \in y_0, z \in x_0 \backslash w\}$
Use_def $(\bigcap(y_0)) \Rightarrow$ AUTO

-- Se e_0 appartiene al primo membro (e dunque non al secondo), allora è chiaro che deve appartenere a un generico elemento w_1 di y_0 ...

Suppose $\Rightarrow$ $e_0 \in x_0 \backslash \bigcap(y_0)$
$(\mathit{Stat2}\star)$ELEM $\Rightarrow$ $\mathit{Stat3}: e_0 \notin \{z \in \mathbf{arb}(y_0) \mid \langle \forall y \in y_0 \mid z \in y \rangle\}$ & $e_0 \in x_0$ & $\mathit{Stat4}: e_0 \notin \{z : w \in y_0, z \in x_0 \backslash w\}$
Suppose $\Rightarrow$ $e_0 \notin w_1$
$\langle w_1, e_0 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat4}(\mathit{Stat2}\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO

-- ... ma di qui a una contraddizione il passo è breve.

$\langle w_1 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat3} \Rightarrow$ $\mathit{Stat5}: \neg\langle \forall w \in y_0 \mid e_0 \in w \rangle$
$\langle w_2 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat5} \Rightarrow$ $w_2 \in y_0$ & $e_0 \notin w_2$
$\langle w_2, e_0 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat4} \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ $\mathit{Stat6}: e_0 \in \{z : w \in y_0, z \in x_0 \backslash w\}$ & $e_0 \notin x_0 \backslash \bigcap(y_0)$

-- Consideriamo ora l'altro caso, che e_0 appartenga al secondo membro ma non al primo. Di nuovo giungeremo a una contraddizione, col che la dimostrazione sarà completa.

$\langle w_0, z_0 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat6} \Rightarrow$ $\mathit{Stat7}: e_0 \in \{z \in \mathbf{arb}(y_0) \mid \langle \forall y \in y_0 \mid z \in y \rangle\}$ & $w_0 \in y_0$ & $e_0 \in x_0 \backslash w_0$
$\langle\ \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat7} \Rightarrow$ $\mathit{Stat8}: \langle \forall y \in y_0 \mid e_0 \in y \rangle$
$\langle w_0 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat8}(\mathit{Stat7}\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

-- seconda legge di De Morgan
THEOREM 23*a*. $X \backslash \bigcup Y =$ **if** $Y = \emptyset$ **then** X **else** $\bigcap(\{X \backslash z : z \in Y\})$ **fi**. PROOF:
Suppose_not $(x_0, y_0) \Rightarrow$ AUTO

-- Ragionando per assurdo, cominciamo semplificando il lato destro della disuguaglianza e con l'escludere la possibilità che il controesempio x_0, y_0 possa avere $y_0 = \emptyset$. Da ciò segue subito che $\{x_0 \backslash z : z \in y_0\} \neq \emptyset$.

$\langle y_0 \rangle \hookrightarrow T3f \Rightarrow$ $y_0 \neq \emptyset$ & *Stat1*: $x_0 \backslash \bigcup y_0 \neq \bigcap(\{x_0 \backslash z : z \in y_0\})$
Suppose $\Rightarrow$ *Stat2*: $\{x_0 \backslash z : z \in y_0\} = \emptyset$
$\langle \mathbf{arb}(y_0) \rangle \hookrightarrow Stat2 \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ Auto

-- Richiamando la prima legge di De Morgan, troviamo che $x_0 \cap \bigcap(\{x_0 \backslash z : z \in y_0\}) = x_0 \backslash \bigcup \{x_0 \cap z : z \in y_0\}$.

$\langle x_0, \{x_0 \backslash z : z \in y_0\} \rangle \hookrightarrow T23 \Rightarrow$ $x_0 \cap \bigcap(\{x_0 \backslash z : z \in y_0\}) =$
$x_0 \backslash \bigcup \{x_0 \backslash z : z \in \{x_0 \backslash z : z \in y_0\}\}$
SIMPLF $\Rightarrow$ $\{x_0 \backslash z : z \in \{x_0 \backslash z : z \in y_0\}\} = \{x_0 \backslash (x_0 \backslash z) : z \in y_0\}$
Suppose $\Rightarrow$ *Stat3*: $\{x_0 \backslash (x_0 \backslash z) : z \in y_0\} \neq \{x_0 \cap z : z \in y_0\}$
$\langle c_0 \rangle \hookrightarrow Stat3(Stat3\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ $\{x_0 \backslash (x_0 \backslash z) : z \in y_0\} = \{x_0 \cap z : z \in y_0\}$
$\langle x_0, y_0 \rangle \hookrightarrow T3h \Rightarrow$ $x_0 \backslash \bigcup \{x_0 \cap z : z \in y_0\} = x_0 \backslash \bigcup y_0$
EQUAL $\Rightarrow$ $x_0 \cap \bigcap(\{x_0 \backslash z : z \in y_0\}) = x_0 \backslash \bigcup y_0$

-- Il lato sinistro di quest'ultima uguaglianza si semplifica in inters ({x0-z: z in y0}), il che contraddice il passo Stat1.

Suppose $\Rightarrow$ *Stat4*: $\bigcap(\{x_0 \backslash z : z \in y_0\}) \not\subseteq x_0 \cap \bigcap(\{x_0 \backslash z : z \in y_0\})$
$\langle c_1 \rangle \hookrightarrow Stat4(Stat4\star) \Rightarrow$ *Stat5*: $c_1 \in \bigcap(\{x_0 \backslash z : z \in y_0\})$ & $c_1 \notin x_0$
Use_def$(\bigcap) \Rightarrow$ *Stat6*: $c_1 \in \{z \in \mathbf{arb}(\{x_0 \backslash z : z \in y_0\}) \mid \langle \forall y \in \{x_0 \backslash z : z \in y_0\} \mid z \in y \rangle\}$
Loc_def $\Rightarrow$ $a = \mathbf{arb}(\{x_0 \backslash z : z \in y_0\})$
$\langle\ \rangle \hookrightarrow Stat6(Stat6) \Rightarrow$ *Stat7*: $a \in \{x_0 \backslash z : z \in y_0\}$ & $c_1 \in a$
$\langle z_0 \rangle \hookrightarrow Stat7(Stat5, Stat7\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ false
Discharge $\Rightarrow$ Qed

Theorem 23b. $\bigcap(X) = \mathbf{if}\ X \subseteq \{\mathbf{arb}(X)\}\ \mathbf{then}\ \mathbf{arb}(X)\ \mathbf{else}\ \mathbf{arb}(X) \cap \bigcap(X \backslash \{\mathbf{arb}(X)\})\ \mathbf{fi}$. Proof:
Suppose_not$(x_0) \Rightarrow$ Auto
Use_def$(\bigcap(x_0)) \Rightarrow$ Auto
Suppose $\Rightarrow$ $x_0 = \emptyset$
ELEM $\Rightarrow$ $\mathbf{arb}(x_0) = \emptyset$ & $\{z \in \emptyset \mid \langle \forall y \in x_0 \mid z \in y \rangle\} = \emptyset$ & $\bigcap(x_0) \neq \emptyset$
EQUAL $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ Auto
Suppose $\Rightarrow$ *Stat1*: $x_0 = \{\mathbf{arb}(x_0)\}$
ELEM $\Rightarrow$ *Stat2*: $\{z : z \in \mathbf{arb}(x_0) \mid \langle \forall y \in x_0 \mid z \in y \rangle\} \neq \{z : z \in \mathbf{arb}(x_0)\}$
$\langle e \rangle \hookrightarrow Stat2(Stat2\star) \Rightarrow$ $\langle \forall y \in x_0 \mid e \in y \rangle \neq e \in \mathbf{arb}(x_0)$
Suppose $\Rightarrow$ *Stat3*: $\neg \langle \forall y \in x_0 \mid e \in y \rangle$
$\langle y \rangle \hookrightarrow Stat3(Stat1\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ *Stat4*: $\langle \forall y \in x_0 \mid e \in y \rangle$ & $e \notin \mathbf{arb}(x_0)$

$\langle \mathbf{arb}(x_0) \rangle \hookrightarrow Stat4(Stat1\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ $Stat0:\ \mathbf{arb}(x_0 \setminus \{\mathbf{arb}(x_0)\}) \in x_0 \setminus \{\mathbf{arb}(x_0)\}\ \&\ \mathbf{arb}(x_0) \cap \bigcap(x_0 \setminus \{\mathbf{arb}(x_0)\}) \neq \bigcap(x_0)$
Use_def $(\bigcap(x_0 \setminus \{\mathbf{arb}(x_0)\})) \Rightarrow$ AUTO
Suppose $\Rightarrow$ $Stat5:\ \bigcap(x_0) \not\subseteq \mathbf{arb}(x_0) \cap \bigcap(x_0 \setminus \{\mathbf{arb}(x_0)\})$
$\langle z_0 \rangle \hookrightarrow Stat5 \Rightarrow$ $Stat6:\ z_0 \in \{z \in \mathbf{arb}(x_0) \mid \langle \forall y \in x_0 \mid z \in y \rangle\}\ \&\ z_0 \notin \mathbf{arb}(x_0) \cap \bigcap(x_0 \setminus \{\mathbf{arb}(x_0)\})$
$\langle\ \rangle \hookrightarrow Stat6 \Rightarrow$ $Stat7:\ \langle \forall y \in x_0 \mid z_0 \in y \rangle\ \&\ z_0 \notin \bigcap(x_0 \setminus \{\mathbf{arb}(x_0)\})$
$\langle \mathbf{arb}(x_0 \setminus \{\mathbf{arb}(x_0)\}) \rangle \hookrightarrow Stat7(Stat0\star) \Rightarrow$ $Stat8:$
$z_0 \notin \{z \in \mathbf{arb}(x_0 \setminus \{\mathbf{arb}(x_0)\}) \mid \langle \forall y \in x_0 \setminus \{\mathbf{arb}(x_0)\} \mid z \in y \rangle\}\ \&\ z_0 \in \mathbf{arb}(x_0 \setminus \{\mathbf{arb}(x_0)\})$
$\langle z_0 \rangle \hookrightarrow Stat8(Stat8\star) \Rightarrow$ $Stat9:\ \neg\langle \forall y \in x_0 \setminus \{\mathbf{arb}(x_0)\} \mid z_0 \in y \rangle$
$\langle w_2 \rangle \hookrightarrow Stat9 \Rightarrow$ $w_2 \in x_0 \setminus \{\mathbf{arb}(x_0)\}\ \&\ z_0 \notin w_2$
$\langle w_2 \rangle \hookrightarrow Stat7(Stat5\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ $Stat10:\ \mathbf{arb}(x_0) \cap \bigcap(x_0 \setminus \{\mathbf{arb}(x_0)\}) \not\subseteq \bigcap(x_0)$
$\langle z_1 \rangle \hookrightarrow Stat10 \Rightarrow$ $Stat11:\ z_1 \notin \{z \in \mathbf{arb}(x_0) \mid \langle \forall y \in x_0 \mid z \in y \rangle\}\ \&\ z_1 \in \mathbf{arb}(x_0) \cap \bigcap(x_0 \setminus \{\mathbf{arb}(x_0)\})$
$\langle w_3 \rangle \hookrightarrow Stat11(Stat11\star) \Rightarrow$ $Stat12:\ \neg\langle \forall y \in x_0 \mid z_1 \in y \rangle$
$\langle y_0 \rangle \hookrightarrow Stat12(Stat12\star) \Rightarrow$ $y_0 \in x_0\ \&\ z_1 \notin y_0$
$(Stat0\star)$ELEM $\Rightarrow$ $Stat13:\ z_1 \in \{z \in \mathbf{arb}(x_0 \setminus \{\mathbf{arb}(x_0)\}) \mid \langle \forall y \in x_0 \setminus \{\mathbf{arb}(x_0)\} \mid z \in y \rangle\}$
$\langle\ \rangle \hookrightarrow Stat13 \Rightarrow$ $Stat14:\ \langle \forall y \in x_0 \setminus \{\mathbf{arb}(x_0)\} \mid z_1 \in y \rangle$
$\langle y_0 \rangle \hookrightarrow Stat14(Stat0\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

-- Tradizionalmente, la finitezza viene definita a partire dalla nozione di cardinalità di un insieme: un insieme è finito se la sua cardinalità precede il primo ordinale limite. Come scorciatoia, per poter giungere senza troppo lavoro a un'accettabile elaborazione formale della finitezza, adottiamo qui la seguente definizione (ispirata dall'articolo "Sur les ensembles fini" di Tarski, 1924): un insieme è finito se ogni famiglia non vuota di suoi sottoinsiemi possiede un elemento minimale rispetto all'inclusione. Per esprimere questo concetto succintamente, ci conviene sfruttare l'operatore di 'insieme potenza' definito all'inizio.

-- proprietà di finitezza

DEF Fin. $\mathsf{Finite}(X) \leftrightarrow_{\text{Def}} \langle \forall g \in \mathcal{P}(\mathcal{P}X) \setminus \{\emptyset\}, \exists m \mid g \cap \mathcal{P}m = \{m\} \rangle$

-- monotonicità della finitezza

THEOREM 25. $Y \supseteq X\ \&\ \mathsf{Finite}(Y) \to \mathsf{Finite}(X)$. PROOF:
Suppose_not$(y_0, x_0) \Rightarrow$ AUTO
$\langle y_0, x_0 \rangle \hookrightarrow T1a\ (\star) \Rightarrow$ $\mathcal{P}y_0 \supseteq \mathcal{P}x_0$
Use_def (Finite) $\Rightarrow$ $Stat1:\ \neg\langle \forall g \in \mathcal{P}(\mathcal{P}x_0) \setminus \{\emptyset\}, \exists m \mid g \cap \mathcal{P}m = \{m\} \rangle\ \&\ \langle \forall g' \in \mathcal{P}(\mathcal{P}y_0) \setminus \{\emptyset\}, \exists m \mid g' \cap \mathcal{P}m = \{m\} \rangle$
$\langle \mathcal{P}y_0, \mathcal{P}x_0 \rangle \hookrightarrow T1a\ (\star) \Rightarrow$ $\mathcal{P}(\mathcal{P}y_0) \supseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}x_0)$
$\langle g_0, g_0 \rangle \hookrightarrow Stat1(Stat1\star) \Rightarrow$ $\neg\langle \exists m \mid g_0 \cap \mathcal{P}m = \{m\} \rangle\ \&\ \langle \exists m \mid g_0 \cap \mathcal{P}m = \{m\} \rangle$
Discharge $\Rightarrow$ QED

-- finitezza dell'unione di due finiti

THEOREM 25a. $\mathsf{Finite}(X)\ \&\ \mathsf{Finite}(Y) \to \mathsf{Finite}(X \cup Y)$. PROOF:

$\mathsf{Suppose\_not}(x_0, y_0) \Rightarrow$ AUTO

-- Ragionando per assurdo, siano x_0 ed y_0 insiemi finiti la cui unione non è finita. Allora vi sarà un insieme non vuoto g_0 di sottoinsiemi di $x_0 \cup y_0$ sprovvisto di elemento minimale rispetto all'inclusione.

$\mathsf{Use\_def}(\mathsf{Finite}) \Rightarrow$ *Stat1* :
$\neg\langle\forall g \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x_0 \cup y_0)) \setminus \{\emptyset\}, \exists m \mid g \cap \mathcal{P}m = \{m\}\rangle$ & *Stat2* :
$\langle\forall g' \in \mathcal{P}(\mathcal{P}x_0) \setminus \{\emptyset\}, \exists m \mid g' \cap \mathcal{P}m = \{m\}\rangle$ & *Stat3* : $\langle\forall gq \in \mathcal{P}(\mathcal{P}y_0) \setminus \{\emptyset\}, \exists m \mid gq \cap \mathcal{P}m = \{m\}\rangle$
$\langle g_0\rangle \hookrightarrow$ *Stat1* $\Rightarrow$ *Stat4* : $\neg\langle\exists m \mid g_0 \cap \mathcal{P}m = \{m\}\rangle$ & $g_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x_0 \cup y_0)) \setminus \{\emptyset\}$

-- Indichiamo con g_1 l'insieme delle intersezioni $x_0 \cap v$ con v che varia in g_0. Poichè g_0 non è vuoto, neanche g_1 può esserlo.

$\mathsf{Loc\_def} \Rightarrow$ *Stat5* : $g_1 = \{x_0 \cap v : v \in g_0\}$
$\mathsf{Suppose} \Rightarrow$ *Stat6* : $x_0 \cap \mathbf{arb}(g_0) \notin \{x_0 \cap v : v \in g_0\}$
$\langle\mathbf{arb}(g_0)\rangle \hookrightarrow$ *Stat6(Stat4)* $\Rightarrow$ false; $\mathsf{Discharge} \Rightarrow$ *Stat7* : $x_0 \cap \mathbf{arb}(g_0) \in g_1$

-- Allora, visto che abbiamo supposto x_0 finito e visto che g_1 è formato da sottoinsiemi di x_0, g_1 avrà un elemento minimale m_1.

$\mathsf{Suppose} \Rightarrow$ $g_1 \notin \mathcal{P}(\mathcal{P}x_0)$
$\mathsf{Use\_def}(\mathcal{P}) \Rightarrow$ *Stat8* : $g_1 \notin \{y : y \subseteq \{z : z \subseteq x_0\}\}$
$\langle g_1\rangle \hookrightarrow$ *Stat8(Stat8⋆)* $\Rightarrow$ *Stat9* : $g_1 \nsubseteq \{z : z \subseteq x_0\}$
$\langle x_1\rangle \hookrightarrow$ *Stat9(Stat5, Stat9⋆)* $\Rightarrow$ *Stat10* : $x_1 \in \{x_0 \cap v : v \in g_0\}$ & $x_1 \notin \{z : z \subseteq x_0\}$
$\langle v_1, x_0 \cap v_1\rangle \hookrightarrow$ *Stat10(Stat10⋆)* $\Rightarrow$ false; $\mathsf{Discharge} \Rightarrow$ AUTO
$\langle g_1\rangle \hookrightarrow$ *Stat2(Stat7⋆)* $\Rightarrow$ *Stat11* : $\langle\exists m \mid g_1 \cap \mathcal{P}m = \{m\}\rangle$
$\langle m_1\rangle \hookrightarrow$ *Stat11(Stat11)* $\Rightarrow$ $g_1 \cap \mathcal{P}m_1 = \{m_1\}$

-- Indichiamo con g_2 l'insieme delle intersezioni $y_0 \cap v$ con v che varia sugli elementi di g_0 la cui intersezione con x_0 è m_1. Poichè almeno un tale v in g_0 ci dev'essere, anche g_2 non può essere vuoto.

$\mathsf{Loc\_def} \Rightarrow$ *Stat12* : $g_2 = \{y_0 \cap v : v \in g_0 \mid x_0 \cap v = m_1\}$
$\mathsf{Suppose} \Rightarrow$ *Stat13* : $\{y_0 \cap v : v \in g_0 \mid x_0 \cap v = m_1\} = \emptyset$
$\mathsf{ELEM} \Rightarrow$ *Stat14* : $m_1 \in \{x_0 \cap v : v \in g_0\}$
$\langle v_0\rangle \hookrightarrow$ *Stat14* $\Rightarrow$ AUTO
$\langle v_0\rangle \hookrightarrow$ *Stat13(Stat14⋆)* $\Rightarrow$ false; $\mathsf{Discharge} \Rightarrow$ AUTO

-- Pertanto, visto che abbiamo supposto y_0 finito e visto che g_2 che è formato da sottoinsiemi di y_0, g_2 avrà un elemento minimale m_2.

$\mathsf{Suppose} \Rightarrow$ $\quad Stat15: \ g_2 \notin \mathcal{P}(\mathcal{P}y_0)$
$\mathsf{Use\_def}(\mathcal{P}) \Rightarrow$ $\quad Stat16: \ g_2 \notin \{y : \ y \subseteq \ \{z : \ z \subseteq y_0\}\}$
$\langle g_2 \rangle \hookrightarrow Stat16(Stat16\star) \Rightarrow$ $\quad Stat17: \ g_2 \not\subseteq \ \{z : \ z \subseteq y_0\}$
$\langle x_2 \rangle \hookrightarrow Stat17(Stat12, Stat17\star) \Rightarrow$ $\quad Stat18: \ x_2 \in \{y_0 \cap v : \ v \in g_0 \mid x_0 \cap v = m_1\} \ \& \ x_2 \notin \{z : \ z \subseteq y_0\}$
$\langle v_2, y_0 \cap v_2 \rangle \hookrightarrow Stat18(Stat18\star) \Rightarrow$ $\quad \mathsf{false};$ $\qquad \mathsf{Discharge} \Rightarrow$ $\quad$ AUTO
$\langle g_2 \rangle \hookrightarrow Stat3(Stat11\star) \Rightarrow$ $\quad Stat19: \ \langle \exists m \mid g_2 \cap \mathcal{P}m = \{m\} \rangle$
$\langle m_2 \rangle \hookrightarrow Stat19(Stat19\star) \Rightarrow$ $\quad g_2 \cap \mathcal{P}m_2 = \{m_2\}$

-- Vedremo ora che $m_1 \cup m_2$ è minimale in g_0, contro l'assurda ipotesi con cui eravamo partiti. Cominciamo con l'osservare che $m_1 \cup m_2$ appartiene in effetti a g_0, dal momento che coincide con un elemento w_0 di g_0 che ha con x_0 l'intersezione m_1 e con y_0 l'intersezione m_2.

$(Stat12\star)\mathsf{ELEM} \Rightarrow$ $\quad Stat20: \ m_2 \in \{y_0 \cap v : \ v \in g_0 \mid x_0 \cap v = m_1\}$
$\langle w_0 \rangle \hookrightarrow Stat20(Stat20, Stat4\star) \Rightarrow$ $\quad m_2 = y_0 \cap w_0 \ \& \ w_0 \in g_0 \ \& \ x_0 \cap w_0 = m_1 \ \& \ g_0 \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(x_0 \cup y_0)\big)$
$\mathsf{Use\_def}(\mathcal{P}) \Rightarrow$ $\quad Stat21: \ g_0 \in \{y : \ y \subseteq \ \{z : \ z \subseteq x_0 \cup y_0\}\}$
$\langle y_1 \rangle \hookrightarrow Stat21(Stat20\star) \Rightarrow$ $\quad Stat22: \ w_0 \in \{z : \ z \subseteq x_0 \cup y_0\}$
$\langle z_1 \rangle \hookrightarrow Stat22(Stat20\star) \Rightarrow$ $\quad w_0 = m_1 \cup m_2$

-- Poichè w_0 non è minimale in g_0, indichiamone con w_1 un sottoinsieme stretto che appartenga a g_0, per cui risulterà che o $x_0 \cap w_1$ è sottoinsieme stretto di $x_0 \cap w_0$ oppure $y_0 \cap w_1$ lo è di $y_0 \cap w_0$.

$\langle w_0, w_0 \rangle \hookrightarrow T1a \ (Stat20\star) \Rightarrow$ $\quad w_0 \in g_0 \cap \mathcal{P}w_0$
$\langle w_0 \rangle \hookrightarrow Stat4(Stat22\star) \Rightarrow$ $\quad Stat23: \ g_0 \cap \mathcal{P}w_0 \not\subseteq \ \{w_0\}$
$\mathsf{Use\_def}(\mathcal{P}w_0) \Rightarrow$ $\quad$ AUTO
$\langle w_1 \rangle \hookrightarrow Stat23(Stat23\star) \Rightarrow$ $\quad Stat24: \ w_1 \in \{y : \ y \subseteq w_0\} \ \& \ w_1 \neq w_0 \ \& \ w_1 \in g_0$
$\langle y_2 \rangle \hookrightarrow Stat24(Stat20\star) \Rightarrow$ $\quad w_1 \subseteq w_0 \ \& \ x_0 \cap w_1 \neq m_1 \lor y_0 \cap w_1 \neq m_2$

-- Consideriamo dapprima l'eventualità che $x_0 \cap w_1 \neq x_0 \cap w_0$. Facile vedere che un siffatto elemento, inficiando la minimalità di $m_1 = x_0 \cap w_0$ in g_1, ci porterebbe a una contraddizione.

$\mathsf{Suppose} \Rightarrow$ $\quad x_0 \cap w_1 \neq m_1$
$\mathsf{Suppose} \Rightarrow$ $\quad x_0 \cap w_1 \notin g_1$
$\mathsf{EQUAL} \ \langle Stat5 \rangle \Rightarrow$ $\quad Stat25: \ x_0 \cap w_1 \notin \{x_0 \cap v : \ v \in g_0\}$
$\langle w_1 \rangle \hookrightarrow Stat25(Stat24, Stat24\star) \Rightarrow$ $\quad \mathsf{false};$ $\qquad \mathsf{Discharge} \Rightarrow$ $\quad$ AUTO
$\mathsf{Use\_def}(\mathcal{P}m_1) \Rightarrow$ $\quad$ AUTO
$(Stat11\star)\mathsf{ELEM} \Rightarrow$ $\quad Stat26: \ x_0 \cap w_1 \notin \{z : \ z \subseteq m_1\}$
$\langle x_0 \cap w_1 \rangle \hookrightarrow Stat26(Stat20\star) \Rightarrow$ $\quad \mathsf{false};$ $\qquad \mathsf{Discharge} \Rightarrow$ $\quad Stat27: \ x_0 \cap w_1 = m_1 \ \& \ y_0 \cap w_1 \neq m_2$

-- Consideriamo allora l'eventualità che $y_0 \cap w_1 \neq y_0 \cap w_0$ mentre $x_0 \cap w_1 = x_0 \cap w_0$. In questo caso verrebbe inficiata la minimalità di $m_2 = y_0 \cap w_0$ in g_2; in questo caso la contraddizione non ha vi e d'uscita e ci fornisce la conclusione che stavamo cercando attraverso l'argomento per assurdo.

Suppose $\Rightarrow$ $y_0 \cap w_1 \notin g_2$
EQUAL $\langle$ *Stat12* $\rangle \Rightarrow$ *Stat28* : $y_0 \cap w_1 \notin \{y_0 \cap v : v \in g_0 \mid x_0 \cap v = m_1\}$
$\langle w_1 \rangle \hookrightarrow$ *Stat28*(*Stat24*, *Stat27*$\star$) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO
Use_def ($\mathcal{P}m_2$) $\Rightarrow$ AUTO
(*Stat19*$\star$)ELEM $\Rightarrow$ *Stat29* : $y_0 \cap w_1 \notin \{z : z \subseteq m_2\}$
$\langle y_0 \cap w_1 \rangle \hookrightarrow$ *Stat29*(*Stat20*$\star$) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

-- finitezza dei singoletti

THEOREM 25*b*. $\mathsf{Finite}(\{X\})$ & $\mathsf{Finite}(\emptyset)$. PROOF:
Suppose_not (x_0) $\Rightarrow$ AUTO
$\langle \{x_0\}, \emptyset \rangle \hookrightarrow T25$ $\Rightarrow$ $\neg\mathsf{Finite}(\{x_0\})$
Use_def (Finite) $\Rightarrow$ *Stat1* : $\neg\langle \forall g \in \mathcal{P}(\mathcal{P}\{x_0\}) \setminus \{\emptyset\}, \exists m \mid g \cap \mathcal{P}m = \{m\} \rangle$
$\langle g_0 \rangle \hookrightarrow$ *Stat1* $\Rightarrow$ *Stat2* : $\neg\langle \exists m \mid g_0 \cap \mathcal{P}m = \{m\} \rangle$ & $g_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}\{x_0\}) \setminus \{\emptyset\}$
Use_def ($\mathcal{P}$) $\Rightarrow$ *Stat3* : $g_0 \in \{y : y \subseteq \mathcal{P}\{x_0\}\}$
$\langle x_0 \rangle \hookrightarrow T1b$ $\Rightarrow$ AUTO
$\langle y_0 \rangle \hookrightarrow$ *Stat3*(*Stat2*$\star$) $\Rightarrow$ *Stat4* : $g_0 \neq \emptyset$ & $g_0 \subseteq \{\emptyset, \{x_0\}\}$
Suppose $\Rightarrow$ $\emptyset \in g_0$
$\langle \emptyset \rangle \hookrightarrow$ *Stat2*(*Stat3*$\star$) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ $g_0 = \{\{x_0\}\}$
$\langle \{x_0\} \rangle \hookrightarrow$ *Stat2*(*Stat3*$\star$) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

-- finitezza delle paia

THEOREM 25*c*. $Z = \{X, Y\} \rightarrow \mathsf{Finite}(Z)$. PROOF:
Suppose_not (z_0, x_0, y_0) $\Rightarrow$ AUTO
$\langle x_0 \rangle \hookrightarrow T25b$ $\Rightarrow$ AUTO
$\langle y_0 \rangle \hookrightarrow T25b$ $\Rightarrow$ AUTO
$\langle \{x_0\}, \{y_0\} \rangle \hookrightarrow T25a$ $\Rightarrow$ $\mathsf{Finite}(\{x_0\} \cup \{y_0\})$ & $\{x_0\} \cup \{y_0\} = \{x_0, y_0\}$
EQUAL $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

THEORY finiteInduction $(s_0, P(S))$
Finite(s_0) & P(s_0)
END finiteInduction

ENTER_THEORY finiteInduction

THEOREM finiteInduction$_1$. $\langle \exists m \mid \{s \subseteq s_0 \mid P(s)\} \cap \mathcal{P}m = \{m\} \rangle$. PROOF:
Suppose_not() $\Rightarrow$ AUTO

Assump $\Rightarrow$ $\mathsf{Finite}(s_0)\ \&\ P(s_0)$

Use_def (Finite) $\Rightarrow$ $\mathit{Stat1}:\ \langle \forall g \in \mathcal{P}(\mathcal{P}s_0)\setminus\{\emptyset\}, \exists m \mid g \cap \mathcal{P}m = \{m\}\rangle$

$\langle \{s \subseteq s_0 \mid P(s)\} \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat1} \Rightarrow$ $\{s \subseteq s_0 \mid P(s)\} \notin \mathcal{P}(\mathcal{P}s_0)\setminus\{\emptyset\}$

Suppose $\Rightarrow$ $\mathit{Stat2}:\ s_0 \notin \{s \subseteq s_0 \mid P(s)\}$

$\langle s_0 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat2} \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ $\{s \subseteq s_0 \mid P(s)\} \notin \mathcal{P}(\mathcal{P}s_0)$

Use_def ($\mathcal{P}$) $\Rightarrow$ $\mathit{Stat3}:\ \{s \subseteq s_0 \mid P(s)\} \notin \{y : y \subseteq \{z : z \subseteq s_0\}\}$

$\langle \{s \subseteq s_0 \mid P(s)\} \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat3} \Rightarrow$ $\mathit{Stat4}:\ \{s \subseteq s_0 \mid P(s)\} \not\subseteq \{z : z \subseteq s_0\}$

$\langle s_1 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat4} \Rightarrow$ $\mathit{Stat5}:\ s_1 \in \{s : s \subseteq s_0 \mid P(s)\}\ \&\ s_1 \notin \{z : z \subseteq s_0\}$

$\langle s, s_1 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat5}(\mathit{Stat5}\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

APPLY $\langle v1_\Theta : \mathsf{fin}_\Theta \rangle$ Skolem$\Rightarrow$

THEOREM finiteInduction$_0$. $\{s \subseteq s_0 \mid P(s)\} \cap \mathcal{P}\mathsf{fin}_\Theta = \{\mathsf{fin}_\Theta\}$.

-- insieme finito minimale soddisfacente P

THEOREM finiteInduction$_2$. $S \subseteq \mathsf{fin}_\Theta \rightarrow s_0 \supseteq S\ \&\ \mathsf{Finite}(S)\ \&\ (P(S) \leftrightarrow S = \mathsf{fin}_\Theta)$. PROOF:

Suppose_not (s_1) $\Rightarrow$ AUTO

TfiniteInduction$_0$ $\Rightarrow$ $\{s \subseteq s_0 \mid P(s)\} \cap \mathcal{P}\mathsf{fin}_\Theta = \{\mathsf{fin}_\Theta\}$

ELEM $\Rightarrow$ $\mathit{Stat1}:\ \mathsf{fin}_\Theta \in \{s \subseteq s_0 \mid P(s)\}$

$\langle\ \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat1} \Rightarrow$ $\mathsf{fin}_\Theta \subseteq s_0\ \&\ P(\mathsf{fin}_\Theta)$

Assump $\Rightarrow$ $\mathsf{Finite}(s_0)$

$\langle s_0, \mathsf{fin}_\Theta \rangle \hookrightarrow T25 \Rightarrow$ $\mathsf{Finite}(\mathsf{fin}_\Theta)$

$\langle \mathsf{fin}_\Theta, s_1 \rangle \hookrightarrow T25 \Rightarrow$ $P(s_1) \neq s_1 = \mathsf{fin}_\Theta$

Suppose $\Rightarrow$ $s_1 = \mathsf{fin}_\Theta$

EQUAL $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ $s_1 \notin \{s \subseteq s_0 \mid P(s)\} \cap \mathcal{P}\mathsf{fin}_\Theta\ \&\ P(s_1)$

Suppose $\Rightarrow$ $s_1 \notin \mathcal{P}\mathsf{fin}_\Theta$

Use_def ($\mathcal{P}$) $\Rightarrow$ $\mathit{Stat2}:\ s_1 \notin \{y : y \subseteq \mathsf{fin}_\Theta\}$

$\langle s_1 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat2} \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ $\mathit{Stat3}:\ s_1 \notin \{s \subseteq s_0 \mid P(s)\}$

$\langle s_1 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat3} \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

ENTER_THEORY Set_theory

DISPLAY finiteInduction

THEORY finiteInduction $(s_0, P(S))$

$\mathsf{Finite}(s_0)\ \&\ P(s_0)$

$\Rightarrow$ (fin_Θ)

$\langle \forall S \mid S \subseteq \mathsf{fin}_\Theta \rightarrow \mathsf{Finite}(S)\ \&\ s_0 \supseteq S\ \&\ (P(S) \leftrightarrow S = \mathsf{fin}_\Theta)\rangle$

END finiteInduction

-- Illustriamo l'utilità del principio d'induzione finita or ora introdotto dimostrando che l'unione di una famiglia finita d'insiemi finiti è finita. In modo analogo, ma più semplice, si dimostrerà che gli aperti di uno spazio topologico sono chiusi rispetto all'intersezione monadica di famiglie finite (visto che sono chiusi rispetto all'intersezione diadica).

-- l'unione di una famiglia finita di insiemi finiti è finita

THEOREM 25*d*. $\mathsf{Finite}(\mathsf{F}) \rightarrow \mathsf{Finite}\big(\bigcup\{\mathsf{v} \in \mathsf{F} \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\}\big)$. PROOF:

Suppose_not$(\mathsf{f}_0) \Rightarrow$ AUTO

APPLY $\langle \mathsf{fin}_\ominus : \mathsf{f}_1 \rangle$ finiteInduction$\Big(\mathsf{s}_0 \mapsto \mathsf{f}_0, \mathsf{P}(\mathsf{S}) \mapsto \neg\mathsf{Finite}\big(\bigcup\{\mathsf{v} \in \mathsf{S} \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\}\big)\Big) \Rightarrow$

$Stat1: \ \big\langle \forall \mathsf{S} \mid \mathsf{S} \subseteq \mathsf{f}_1 \rightarrow \mathsf{f}_0 \supseteq \mathsf{S} \ \& \ \mathsf{Finite}(\mathsf{S}) \ \& \ \Big(\neg\mathsf{Finite}\big(\bigcup\{\mathsf{v} \in \mathsf{S} \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\}\big) \leftrightarrow \mathsf{S} = \mathsf{f}_1\Big)\big\rangle$

$\langle \mathsf{f}_1 \rangle \hookrightarrow Stat1(Stat1\star) \Rightarrow \quad \mathsf{Finite}(\mathsf{f}_1) \ \& \ \neg\mathsf{Finite}\big(\bigcup\{\mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\}\big)$

Loc_def $\Rightarrow \quad \mathsf{a} = \mathbf{arb}(\mathsf{f}_1)$

Suppose $\Rightarrow \quad \mathsf{f}_1 = \emptyset$

ELEM $\Rightarrow \quad \{\mathsf{v} \in \emptyset \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\} = \emptyset$

EQUAL $\Rightarrow \quad \{\mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\} = \emptyset$

$\big\langle \{\mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\} \big\rangle \hookrightarrow T3f \Rightarrow \quad \bigcup\{\mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\} = \emptyset$

$\langle \emptyset \rangle \hookrightarrow T25b \Rightarrow \quad \mathsf{Finite}(\emptyset)$

EQUAL $\langle Stat1 \rangle \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO

$(Stat1)$ELEM $\Rightarrow \quad Stat2: \ \mathsf{a} \in \mathsf{f}_1$

Suppose $\Rightarrow \quad Stat3: \ \{\mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\} \neq \mathbf{if}\ \mathsf{Finite}(\mathsf{a})\ \mathbf{then}\ \{\mathsf{a}\}\ \mathbf{else}\ \emptyset\ \mathbf{fi} \cup \{\mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \setminus \{\mathsf{a}\} \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\}$

$\langle \mathsf{e} \rangle \hookrightarrow Stat3(Stat3\star) \Rightarrow \quad \mathsf{e} \in \{\mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\} \leftrightarrow \mathsf{e} \notin \mathbf{if}\ \mathsf{Finite}(\mathsf{a})\ \mathbf{then}\ \{\mathsf{a}\}\ \mathbf{else}\ \emptyset\ \mathbf{fi} \cup \{\mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \setminus \{\mathsf{a}\} \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\}$

Suppose $\Rightarrow \quad Stat4: \ \mathsf{e} \in \{\mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\}$

$\langle\ \rangle \hookrightarrow Stat4(Stat3\star) \Rightarrow \quad Stat5: \ \mathsf{e} \notin \{\mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \setminus \{\mathsf{a}\} \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\} \ \& \ \mathsf{e} \in \mathsf{f}_1 \ \& \ \mathsf{Finite}(\mathsf{e}) \ \& \ \mathsf{e} \notin \mathbf{if}\ \mathsf{Finite}(\mathsf{a})\ \mathbf{then}\ \{\mathsf{a}\}\ \mathbf{else}\ \emptyset\ \mathbf{fi}$

$\langle \mathsf{e} \rangle \hookrightarrow Stat5(Stat5\star) \Rightarrow \quad \mathsf{e} = \mathsf{a} \ \& \ \neg\mathsf{Finite}(\mathsf{a})$

EQUAL $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO

Suppose $\Rightarrow \quad \mathsf{e} \in \mathbf{if}\ \mathsf{Finite}(\mathsf{a})\ \mathbf{then}\ \{\mathsf{a}\}\ \mathbf{else}\ \emptyset\ \mathbf{fi}$

$(Stat3\star)$ELEM $\Rightarrow \quad Stat6: \ \mathsf{e} \notin \{\mathsf{v}: \ \mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\} \ \& \ \mathsf{e} = \mathsf{a} \ \& \ \mathsf{Finite}(\mathsf{a})$

$\langle \mathsf{a} \rangle \hookrightarrow Stat6(Stat6, Stat2\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO

Set_monot $\Rightarrow \quad \{\mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\} \supseteq \{\mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \setminus \{\mathsf{a}\} \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\}$

$(Stat3\star)$Discharge $\Rightarrow$ AUTO

$(Stat2\star)$ELEM $\Rightarrow \quad \{\mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\} = \mathbf{if}\ \mathsf{Finite}(\mathsf{a})\ \mathbf{then}\ \{\mathsf{a}\}\ \mathbf{else}\ \emptyset\ \mathbf{fi} \cup \{\mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \setminus \{\mathsf{a}\} \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\}$

$\big\langle \mathbf{if}\ \mathsf{Finite}(\mathsf{a})\ \mathbf{then}\ \{\mathsf{a}\}\ \mathbf{else}\ \emptyset\ \mathbf{fi}, \{\mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \setminus \{\mathsf{a}\} \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\} \big\rangle \hookrightarrow T3c \Rightarrow$ AUTO

EQUAL $\Rightarrow \quad Stat7: \ \neg\mathsf{Finite}\big(\bigcup \mathbf{if}\ \mathsf{Finite}(\mathsf{a})\ \mathbf{then}\ \{\mathsf{a}\}\ \mathbf{else}\ \emptyset\ \mathbf{fi} \cup \bigcup\{\mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \setminus \{\mathsf{a}\} \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\}\big)$

$\langle \mathsf{f}_1 \setminus \{\mathsf{a}\} \rangle \hookrightarrow Stat1(Stat2, Stat2\star) \Rightarrow \quad \mathsf{Finite}\big(\bigcup\{\mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \setminus \{\mathsf{a}\} \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\}\big)$

$\big\langle \bigcup \mathbf{if}\ \mathsf{Finite}(\mathsf{a})\ \mathbf{then}\ \{\mathsf{a}\}\ \mathbf{else}\ \emptyset\ \mathbf{fi}, \bigcup\{\mathsf{v} \in \mathsf{f}_1 \setminus \{\mathsf{a}\} \mid \mathsf{Finite}(\mathsf{v})\} \big\rangle \hookrightarrow T25a\ (Stat7\star) \Rightarrow \quad Stat8: \ \neg$
$\mathsf{Finite}\big(\bigcup \mathbf{if}\ \mathsf{Finite}(\mathsf{a})\ \mathbf{then}\ \{\mathsf{a}\}\ \mathbf{else}\ \emptyset\ \mathbf{fi}\big)$

$\langle \mathsf{a} \rangle \hookrightarrow T25b \Rightarrow \quad \mathsf{Finite}(\emptyset) \ \& \ \mathsf{Finite}(\{\mathsf{a}\})$

Suppose $\Rightarrow \quad \neg\mathsf{Finite}(\mathsf{a})$

$\langle \emptyset \rangle \hookrightarrow T3f\ (Stat7\star) \Rightarrow \quad \mathbf{if}\ \mathsf{Finite}(\mathsf{a})\ \mathbf{then}\ \{\mathsf{a}\}\ \mathbf{else}\ \emptyset\ \mathbf{fi} = \emptyset \ \& \ \bigcup\emptyset = \emptyset$

EQUAL $\langle Stat8 \rangle \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO

$\langle \emptyset, \emptyset, a \rangle \hookrightarrow T3a\ (Stat7\star) \Rightarrow$ **if** Finite(a) **then** $\{a\}$ **else** $\emptyset$ **fi** $= \{a\}\ \&\ \bigcup\{a\} = a$

EQUAL $\langle Stat8 \rangle \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

THEORY finiteImage$(s_0, f(X))$

Finite(s_0)

END finiteImage

ENTER_THEORY finiteImage

THEOREM finiteImage. Finite$(\{f(x) : x \in s_0\})$. PROOF:

Suppose_not() $\Rightarrow$ AUTO

-- Possiamo dimostrare l'enunciato utilizzando l'induzione finita. Supponendo per assurdo che s_0 abbia, tramite la funzione globale $f(X)$, immagine infinita, prendiamo un s_1 finito e minimale rispetto all'inclusione che abbia, del pari, immagine $\{f(x) : x \in s_1\}$ infinita. Si vede facilmente che $s_1 \neq \emptyset$, per cui togliendo ad s_1 un elemento a, troviamo che $\{f(x) : x \in s_1 \setminus \{a\}\}$ è finito per la supposta minimalità di s_1. Visto che l'unione di due insiemi finiti è finita, avremo che $\{f(x) : x \in s_1 \setminus \{a\}\} \cup \{f\}(a)$ è finita e dunque differisce da $\{f(x) : x \in s_1\}$.

Assump $\Rightarrow$ Finite(s_0)

APPLY $\langle fin_\Theta : s_1 \rangle$ finiteInduction$\big(s_0 \mapsto s_0, P(S) \mapsto \neg$Finite$(\{f(x) : x \in S\})\big) \Rightarrow$

$Stat1 : \langle \forall S \mid S \subseteq s_1 \rightarrow \text{Finite}(S)\ \&\ s_0 \supseteq S\ \&\ \big(\neg\text{Finite}(\{f(x) : x \in S\}) \leftrightarrow S = s_1\big)\rangle$

$\langle s_1 \rangle \hookrightarrow Stat1 \Rightarrow$ $\neg$Finite$(\{f(x) : x \in s_1\})$

Loc_def $\Rightarrow$ $Stat0 : a = \mathbf{arb}(s_1)$

$\langle f(a) \rangle \hookrightarrow T25b \Rightarrow$ Finite$(\{f\}(a))\ \&\ $Finite$(\emptyset)$

Suppose $\Rightarrow$ $s_1 = \emptyset$

ELEM $\Rightarrow$ $\{f(x) : x \in \emptyset\} = \emptyset$

EQUAL $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO

$(Stat0)$ELEM $\Rightarrow$ $Stat2 : s_1 \setminus \{a\} \subseteq s_1\ \&\ s_1 \setminus \{a\} \neq s_1$

Suppose $\Rightarrow$ $\{f(x) : x \in s_1\} = \{f(x) : x \in s_1 \setminus \{a\}\} \cup \{f\}(a)$

$\langle s_1 \setminus \{a\} \rangle \hookrightarrow Stat1(Stat2\star) \Rightarrow$ Finite$(\{f(x) : x \in s_1 \setminus \{a\}\})$

$\langle \{f(x) : x \in s_1 \setminus \{a\}\}, \{f\}(a) \rangle \hookrightarrow T25a\ (Stat1\star) \Rightarrow$

Finite$(\{f(x) : x \in s_1 \setminus \{a\}\} \cup \{f\}(a))$

EQUAL $\langle Stat1 \rangle \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO

-- Ma in realtà $\{f(x) : x \in s_1 \setminus \{a\}\} \cup \{f\}(a)$ ed $\{f(x) : x \in s_1\}$ sono uguali: in effetti $a \in s_1$ e dunque $f(a) \in \{f(x) : x \in s_1\}$; inoltre, per monotonicità $\{f(x) : x \in s_1 \setminus \{a\}\} \subseteq \{f(x) : x \in s_1\}$ ed infine ...

Set_monot $\Rightarrow$ $\{f(x) : x \in s_1 \setminus \{a\}\} \subseteq \{f(x) : x \in s_1\}$
Suppose $\Rightarrow$ *Stat3* : $f(a) \notin \{f(x) : x \in s_1\}$
$\langle a \rangle \hookrightarrow Stat3(Stat2, Stat2\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ *Stat4* : $\{f(x) : x \in s_1\} \not\subseteq \{f(x) : x \in s_1 \setminus \{a\}\} \cup \{f\}(a)$

-- ... è facile vedere che $\{f(x) : x \in s_1\} \subseteq \{f(x) : x \in s_1 \setminus \{a\}\} \cup \{f\}(a)$, ...

$\langle b \rangle \hookrightarrow Stat4(Stat4\star) \Rightarrow$ *Stat5* : $b \in \{f(x) : x \in s_1\}$ & $b \notin \{f(x) : x \in s_1 \setminus \{a\}\} \cup \{f\}(a)$
$\langle x_0 \rangle \hookrightarrow Stat5(Stat5\star) \Rightarrow$ $f(x_0) \notin \{f(x) : x \in s_1 \setminus \{a\}\}$ & $x_0 \in s_1$ & $f(x_0) \neq f(a)$
Suppose $\Rightarrow$ $x_0 = a$
EQUAL $\langle Stat5 \rangle \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ *Stat6* : $f(x_0) \notin \{f(x) : x \in s_1 \setminus \{a\}\}$ & $x_0 \neq a$ & $x_0 \in s_1$
$\langle x_0 \rangle \hookrightarrow Stat6(Stat6\star) \Rightarrow$ false; -

-- il che ci porta alla contraddizione cercata.

Discharge $\Rightarrow$ QED

ENTER_THEORY Set_theory

-- Per dimostrare l'esistenza di un insieme infinito introduciamo, a partire dall'insieme predefinito s_inf e da una correlata nozione prk di pseudo-rango, l'insieme nats dei numeri naturali intesi alla von Neumann.

-- una funzione globale che associa un naturale di von Neumann a qualunque insieme
DEF pseudoRank. $prk(X) =_{Def} \mathbf{arb}(\{prk(y) \cup \{prk\}(y) : y \in X \mid X = \{y\}$ & $y \in s\_inf\})$

-- numeri naturali
DEF natural_numbers. $nats =_{Def} \{prk(x) : x \in s\_inf\}$

-- esistenza di un insieme infinito
THEOREM 10045. $\neg Finite(nats)$. PROOF:
Suppose_not() $\Rightarrow$ AUTO
Use_def(Finite) $\Rightarrow$ *Stat0* : $\langle \forall g \in \mathcal{P}(\mathcal{P}nats) \setminus \{\emptyset\}, \exists m \mid g \cap \mathcal{P}m = \{m\} \rangle$

-- Se per assurda ipotesi nats fosse un insieme finito, ogni famiglia non vuota di suoi sottoinsiemi finiti avrebbe un elemento minimale. Ciò sarebbe vero in particolare per la famiglia

$$g_0 = \{nats\backslash n : n \in nats\} ,$$

poichè in effetti, come subito verificheremo, a tale famiglia appartiene nats ed è inoltre chiaro che tutti i suoi elementi sono sottoinsiemi di nats.

Loc_def $\Rightarrow$ $\quad$ *Stat1* : $g_0 = \{nats\backslash n : n \in nats\}$

-- Richiamiamo che $s\_inf \neq \emptyset$, in base all'assioma che riguarda questa costante; perciò risulta $prk(\mathbf{arb}(s\_inf)) = \emptyset$ e dunque $\emptyset \in nats$ e dunque $nats \in g_0$.

Suppose $\Rightarrow$ $\quad nats \notin g_0$
EQUAL $\Rightarrow$ $\quad$ *Stat2* : $nats \notin \{nats\backslash n : n \in nats\}$
$\langle\emptyset\rangle\hookrightarrow$*Stat2*(*Stat2*$\star$) $\Rightarrow$ $\quad \emptyset \notin nats$
Use_def (nats) $\Rightarrow$ $\quad$ *Stat3* : $\emptyset \notin \{prk(x) : x \in s\_inf\}$
Assump $\Rightarrow$ $\quad s\_inf \neq \emptyset$
Use_def (prk) $\Rightarrow$ $\quad prk(\mathbf{arb}(s\_inf)) = \mathbf{arb}(\{prk(y) \cup \{prk\}(y) : y \in \mathbf{arb}(s\_inf) \mid \mathbf{arb}(s\_inf) = \{y\} \,\&\, y \in s\_inf\})$
$\langle\mathbf{arb}(s\_inf)\rangle\hookrightarrow$*Stat3*(*Stat3*) $\Rightarrow$ $\quad$ *Stat4* : $\{prk(y) \cup \{prk\}(y) : y \in \mathbf{arb}(s\_inf) \mid \mathbf{arb}(s\_inf) = \{y\} \,\&\, y \in s\_inf\} \neq \emptyset$
$\langle y_0\rangle\hookrightarrow$*Stat4*(*Stat4*) $\Rightarrow$ $\quad$ false; $\quad$ Discharge $\Rightarrow$ $\quad$ AUTO
Suppose $\Rightarrow$ $\quad g_0 \notin \mathcal{P}(\mathcal{P}nats)$
Use_def ($\mathcal{P}$) $\Rightarrow$ $\quad$ *Stat5* : $g_0 \notin \{x : x \subseteq \{y : y \subseteq nats\}\}$
$\langle g_0\rangle\hookrightarrow$*Stat5*(*Stat5*$\star$) $\Rightarrow$ $\quad$ *Stat6* : $g_0 \not\subseteq \{y : y \subseteq nats\}$
$\langle s_0\rangle\hookrightarrow$*Stat6*(*Stat1*, *Stat1*$\star$) $\Rightarrow$ $\quad$ *Stat7* : $s_0 \in \{nats\backslash n : n \in nats\} \,\&\, s_0 \notin \{y : y \subseteq nats\}$
$\langle n_1, nats\backslash n_1\rangle\hookrightarrow$*Stat7*(*Stat7*$\star$) $\Rightarrow$ $\quad$ false; $\quad$ Discharge $\Rightarrow$ $\quad$ AUTO
$\langle g_0\rangle\hookrightarrow$*Stat0*(*Stat1*$\star$) $\Rightarrow$ $\quad$ *Stat8* : $\langle \exists m \mid g_0 \cap \mathcal{P}m = \{m\}\rangle$
$\langle m_0\rangle\hookrightarrow$*Stat8*(*Stat1*, *Stat1*$\star$) $\Rightarrow$ $\quad \{nats\backslash n : n \in nats\} \cap \mathcal{P}m_0 = \{m_0\}$
(*Stat8*$\star$)ELEM $\Rightarrow$ $\quad$ *Stat9* : $m_0 \in \{nats\backslash n : n \in nats\}$
$\langle n_0\rangle\hookrightarrow$*Stat9*(*Stat9*$\star$) $\Rightarrow$ $\quad n_0 \in nats \,\&\, m_0 = nats\backslash n_0$
Use_def (nats) $\Rightarrow$ $\quad$ *Stat10* : $n_0 \in \{prk(x) : x \in s\_inf\}$
$\langle x_0\rangle\hookrightarrow$*Stat10*(*Stat10*$\star$) $\Rightarrow$ $\quad n_0 = prk(x_0) \,\&\, x_0 \in s\_inf$
Assump $\Rightarrow$ $\quad$ *Stat11* : $\langle \forall x \in s\_inf \mid \{x\} \in s\_inf\rangle$
$\langle x_0\rangle\hookrightarrow$*Stat11*(*Stat10*$\star$) $\Rightarrow$ $\quad \{x_0\} \in s\_inf$
Suppose $\Rightarrow$ $\quad prk(\{x_0\}) \notin nats$
Use_def (nats) $\Rightarrow$ $\quad$ *Stat12* : $prk(\{x_0\}) \notin \{prk(x) : x \in s\_inf\}$
$\langle \{x_0\}\rangle\hookrightarrow$*Stat12*(*Stat11*$\star$) $\Rightarrow$ $\quad$ false; $\quad$ Discharge $\Rightarrow$ $\quad$ AUTO
Suppose $\Rightarrow$ $\quad$ *Stat13* : $prk(\{x_0\}) \neq prk(x_0) \cup \{prk\}(x_0)$
Use_def (prk) $\Rightarrow$ $\quad prk(\{x_0\}) = \mathbf{arb}(\{prk(y) \cup \{prk\}(y) : y \in \{x_0\} \mid \{x_0\} = \{y\} \,\&\, y \in s\_inf\})$
(*Stat13*$\star$)ELEM $\Rightarrow$ $\quad$ *Stat14* : $\{prk(x_0) \cup \{prk\}(x_0)\} \neq \{prk(y) \cup \{prk\}(y) : y \in \{x_0\} \mid \{x_0\} = \{y\} \,\&\, y \in s\_inf\}$
Suppose $\Rightarrow$ $\quad$ *Stat15* : $prk(x_0) \cup \{prk\}(x_0) \notin \{prk(y) \cup \{prk\}(y) : y \in \{x_0\} \mid \{x_0\} = \{y\} \,\&\, y \in s\_inf\}$
$\langle x_0\rangle\hookrightarrow$*Stat15*(*Stat10*$\star$) $\Rightarrow$ $\quad$ false; $\quad$ Discharge $\Rightarrow$ $\quad$ AUTO

$\langle c_0 \rangle \hookrightarrow Stat14(Stat14\star) \Rightarrow$ $Stat16:$ $c_0 \in \{prk(y) \cup \{prk\}(y) : y \in \{x_0\} \mid \{x_0\} = \{y\} \,\&\, y \in s\_inf\} \,\&\, c_0 \neq prk(x_0) \cup \{prk\}(x_0)$
$\langle y_1 \rangle \hookrightarrow Stat16(Stat10\star) \Rightarrow$ $x_0 = y_1 \,\&\, prk(y_1) \cup \{prk\}(y_1) \neq prk(x_0) \cup \{prk\}(x_0)$
EQUAL $\langle Stat16 \rangle \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO
$(Stat8\star)$ELEM $\Rightarrow$ $Stat17:$ $prk(\{x_0\}) \in nats \,\&\, \{x_0\} \in s\_inf \,\&\, nats \backslash prk(\{x_0\}) \subseteq m_0 \,\&\, nats \backslash prk(\{x_0\}) \notin \{nats \backslash n : n \in nats\} \cap \mathcal{P} m_0$
Suppose $\Rightarrow$ $nats \backslash prk(\{x_0\}) \notin \mathcal{P} m_0$
Use_def $(\mathcal{P}) \Rightarrow$ $Stat18:$ $nats \backslash prk(\{x_0\}) \notin \{y : y \subseteq m_0\}$
$\langle nats \backslash prk(\{x_0\}) \rangle \hookrightarrow Stat18(Stat17\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ $Stat19:$ $nats \backslash prk(\{x_0\}) \notin \{nats \backslash n : n \in nats\}$
$\langle prk(\{x_0\}) \rangle \hookrightarrow Stat19(Stat17\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

-- esistenza di un insieme infinito, 2

THEOREM 10046. $\neg Finite(s\_inf)$. PROOF:
Suppose_not() $\Rightarrow$ AUTO
APPLY $\langle\ \rangle$ finiteImage$(s_0 \mapsto s_inf, f(X) \mapsto prk(X))$ $\Rightarrow$ $Finite(\{prk(x) : x \in s\_inf\})$
$T10045 \Rightarrow$ $\neg Finite(nats)$
Use_def(nats) $\Rightarrow$ $nats = \{prk(x) : x \in s\_inf\}$
EQUAL $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

-- In sede di prima verifica delle precedenti dimostrazioni sulla finitezza era stato impiegato il nome di predicato 'Fin' del tutto sconosciuto a Ref, onde evitare possibili interferenze, nelle dimostrazioni, di meccanismi built-in. Aggirata in questo modo una questione metodologica, si poi tornati al nome consueto. Accenniamo un altro concetto importante correlato a quello di finitezza, la cui definizione è inevitabilmente ricorsiva: Una strada percorribile, per una definizione della finitezza ereditaria è la seguente:

$$trCl(X) =_{Def} X \cup \bigcup \{trCl(y) : y \in X\} ,$$

$$HFinite(H) =_{Def} Finite(trCl(H)) ,$$

Altra strada percorribile, che qui prescegliamo (senza tuttavia svilupparla), è la seguente:

-- finitezza ereditaria

DEF HFin. $HerFinite(X) \leftrightarrow_{Def} Finite(X) \,\&\, \langle \forall x \in X \mid HerFinite(x) \rangle$

-- Theory of finite intersection closedness.

THEORY fic(ss)
$\langle \forall x, y \mid \{x, y\} \subseteq ss \rightarrow x \cap y \in ss \rangle$
END fic

ENTER_THEORY fic

-- We will now derive the finite intersection closedness property from the doubleton intersection closedness property.

-- finite intersection closedness

THEOREM fic_1. $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{ss} \,\&\, \mathsf{Finite}(\mathsf{F}) \,\&\, \mathsf{F} \neq \emptyset \to \bigcap(\mathsf{F}) \in \mathsf{ss}$. PROOF:

Suppose_not$(\mathsf{f}_1) \Rightarrow$ $\big(\mathsf{f}_1 \subseteq \mathsf{ss} \,\&\, \mathsf{Finite}(\mathsf{f}_1) \,\&\, \mathsf{f}_1 \neq \emptyset\big) \,\&\, \bigcap(\mathsf{f}_1) \notin \mathsf{ss}$

-- Arguing by contradiction, consider an inclusion minimal f_0 which violates the claim of this theorem. f_0 cannot be singleton, else $\big\{\mathsf{v} \in \mathbf{arb}(\mathsf{f}_0) \mid \big\langle \forall \mathsf{w} \in \mathsf{f}_0 \mid \mathsf{v} \in \mathsf{w}\big\rangle\big\} = \mathbf{arb}(\mathsf{f}_0)$ would belong to ss; but then, since

$$\big\{\mathsf{v} \in \mathbf{arb}(\mathsf{f}_0) \mid \big\langle \forall \mathsf{w} \in \mathsf{f}_0 \mid \mathsf{v} \in \mathsf{w}\big\rangle\big\} = \mathbf{arb}(\mathsf{f}_0) \cap \big\{\mathsf{v} \in \mathbf{arb}(\mathsf{f}_0 \setminus \{\mathbf{arb}(\mathsf{f}_0)\}) \mid \big\langle \forall \mathsf{w} \in \mathsf{f}_0 \setminus \{\mathbf{arb}(\mathsf{f}_0)\} \mid \mathsf{v} \in \mathsf{w}\big\rangle\big\}$$

is the intersection of two sets in ss, it must belong to ss by an assumption of the present THEORY, which leads to a contradiction.

ELEM $\Rightarrow$ $\mathsf{Finite}(\mathsf{f}_1)$

-- Use_def (Fin) $\Rightarrow$ Finite (f1)

ELEM $\Rightarrow$ $\bigcap(\mathsf{f}_1) \notin \mathsf{ss}$

APPLY $\langle \mathsf{fin}_\Theta : \mathsf{f}_0 \rangle$ finiteInduction$\Big(\mathsf{s}_0 \mapsto \mathsf{f}_1, \mathsf{P}(\mathsf{S}) \mapsto \big(\bigcap(\mathsf{S}) \notin \mathsf{ss} \,\&\, \mathsf{S} \neq \emptyset\big)\Big) \Rightarrow$

Stat1 : $\big\langle \forall \mathsf{S} \mid \mathsf{S} \subseteq \mathsf{f}_0 \longrightarrow \mathsf{f}_1 \supseteq \mathsf{S} \,\&\, \mathsf{Finite}(\mathsf{S}) \,\&\, \big(\bigcap(\mathsf{S}) \notin \mathsf{ss} \,\&\, \mathsf{S} \neq \emptyset \leftrightarrow \mathsf{S} = \mathsf{f}_0\big)\big\rangle$

$\langle \mathsf{f}_0 \rangle \hookrightarrow$ *Stat1* $\Rightarrow$ $\mathsf{f}_1 \supseteq \mathsf{f}_0 \,\&\, \mathsf{Finite}(\mathsf{f}_0) \,\&\, \big(\bigcap(\mathsf{f}_0) \notin \mathsf{ss} \,\&\, \mathsf{f}_0 \neq \emptyset \leftrightarrow \mathsf{f}_0 = \mathsf{f}_0\big)$

ELEM $\Rightarrow$ $\bigcap(\mathsf{f}_0) \notin \mathsf{ss}$

Suppose $\Rightarrow$ $\mathsf{f}_0 = \{\mathbf{arb}(\mathsf{f}_0)\}$

Use_def$(\bigcap) \Rightarrow$ $\big\{\mathsf{v} \in \mathbf{arb}(\mathsf{f}_0) \mid \big\langle \forall \mathsf{w} \in \mathsf{f}_0 \mid \mathsf{v} \in \mathsf{w}\big\rangle\big\} \notin \mathsf{ss}$

Suppose $\Rightarrow$ *Stat2* : $\big\{\mathsf{v} \in \mathbf{arb}(\mathsf{f}_0) \mid \big\langle \forall \mathsf{w} \in \mathsf{f}_0 \mid \mathsf{v} \in \mathsf{w}\big\rangle\big\} \nsubseteq \mathbf{arb}(\mathsf{f}_0)$

$\langle \mathsf{v}_0 \rangle \hookrightarrow$ *Stat2* $\Rightarrow$ $\mathsf{v}_0 \notin \mathbf{arb}(\mathsf{f}_0) \,\&\,$ *Stat3* : $\mathsf{v}_0 \in \big\{\mathsf{v} \in \mathbf{arb}(\mathsf{f}_0) \mid \big\langle \forall \mathsf{w} \in \mathsf{f}_0 \mid \mathsf{v} \in \mathsf{w}\big\rangle\big\}$

$\langle\ \rangle \hookrightarrow$ *Stat3* $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ *Stat4* : $\mathbf{arb}(\mathsf{f}_0) \nsubseteq \big\{\mathsf{v} \in \mathbf{arb}(\mathsf{f}_0) \mid \big\langle \forall \mathsf{w} \in \mathsf{f}_0 \mid \mathsf{v} \in \mathsf{w}\big\rangle\big\}$

$\langle \mathsf{v}_1 \rangle \hookrightarrow$ *Stat4* $\Rightarrow$ $\mathsf{v}_1 \in \mathbf{arb}(\mathsf{f}_0) \,\&\,$ *Stat5* : $\mathsf{v}_1 \notin \big\{\mathsf{v} \in \mathbf{arb}(\mathsf{f}_0) \mid \big\langle \forall \mathsf{w} \in \mathsf{f}_0 \mid \mathsf{v} \in \mathsf{w}\big\rangle\big\}$

$\langle \mathsf{v}_1 \rangle \hookrightarrow$ *Stat5* $\Rightarrow$ *Stat6* : $\neg\big\langle \forall \mathsf{w} \in \mathsf{f}_0 \mid \mathsf{v}_1 \in \mathsf{w}\big\rangle$

$\langle \mathsf{w}_0 \rangle \hookrightarrow$ *Stat6* $\Rightarrow$ $\mathsf{w}_0 \in \mathsf{f}_0 \,\&\, \mathsf{v}_1 \notin \mathsf{w}_0$

ELEM $\Rightarrow$ $\mathsf{w}_0 = \mathbf{arb}(\mathsf{f}_0)$

ELEM $\Rightarrow$ false; -

Discharge $\Rightarrow$ *Stat7* : $\mathsf{f}_0 \neq \{\mathbf{arb}(\mathsf{f}_0)\}$

$\langle f_0 \rangle \hookrightarrow T23b \Rightarrow \quad \bigcap(f_0) = \mathbf{arb}(f_0) \cap \bigcap(f_0 \setminus \{\mathbf{arb}(f_0)\})$
Assump $\Rightarrow \quad Stat8: \langle \forall x, y \mid \{x, y\} \subseteq ss \rightarrow x \cap y \in ss \rangle$

-- ELEM $\Rightarrow$ (f0-{arb (f0)}) = f0

$\langle f_0 \setminus \{\mathbf{arb}(f_0)\} \rangle \hookrightarrow Stat1(Stat7) \Rightarrow \quad \bigcap(f_0 \setminus \{\mathbf{arb}(f_0)\}) \in ss$

$\langle f_0 \rangle \hookrightarrow Stat1 \Rightarrow \quad f_1 \supseteq f_0$
ELEM $\Rightarrow \quad \{\mathbf{arb}(f_0), \bigcap(f_0 \setminus \{\mathbf{arb}(f_0)\})\} \subseteq ss$

$\langle \mathbf{arb}(f_0), \bigcap(f_0 \setminus \{\mathbf{arb}(f_0)\}) \rangle \hookrightarrow Stat8 \Rightarrow \quad \mathbf{arb}(f_0) \cap \bigcap(f_0 \setminus \{\mathbf{arb}(f_0)\}) \in ss$
ELEM $\Rightarrow \quad \bigcap(f_0) \in ss$
ELEM $\Rightarrow \quad$ false; -
Discharge $\Rightarrow \quad$ QED

-- weaker formulation of doubleton intersection closedness

THEOREM fic_2. $\langle \forall x \in ss, y \in ss, u \in x \cap y, \exists z \in ss \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x \cap y \rangle$. PROOF:
Suppose_not $\Rightarrow \quad Stat1: \neg\langle \forall x \in ss, y \in ss, u \in x \cap y, \exists z \in ss \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x \cap y \rangle$
$\langle x_0, y_0, u_0 \rangle \hookrightarrow Stat1 \Rightarrow \quad Stat2: \neg\langle \exists z \in ss \mid u_0 \in z \,\&\, z \subseteq x_0 \cap y_0 \rangle \,\&\, x_0, y_0 \in ss \,\&\, u_0 \in x_0 \cap y_0$
Assump $\Rightarrow \quad Stat3: \langle \forall x, y \mid \{x, y\} \subseteq ss \rightarrow x \cap y \in ss \rangle$
$\langle x_0, y_0 \rangle \hookrightarrow Stat3(Stat2\star) \Rightarrow \quad x_0 \cap y_0 \in ss$
$\langle x_0 \cap y_0 \rangle \hookrightarrow Stat2 \Rightarrow \quad$ false; Discharge $\Rightarrow \quad$ QED

ENTER_THEORY Set_theory

DISPLAY fic

THEORY fic(ss)
$\langle \forall x, y \mid \{x, y\} \subseteq ss \rightarrow x \cap y \in ss \rangle$
$\Rightarrow$
$\langle \forall f \mid f \subseteq ss \,\&\, \mathsf{Finite}(f) \,\&\, f \neq \emptyset \rightarrow \bigcap(f) \in ss \rangle$
$\langle \forall x \in ss, y \in ss, u \in x \cap y, \exists z \in ss \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x \cap y \rangle$
END fic

-- Specialized variant of the preceding theory on finite intersection closedness, for the case when the given family of sets is known to be closed under unionset formation.

THEORY ficu(open)
$\{x \subseteq open \mid \bigcup x \notin open\} = \emptyset$
$\langle \forall x \in open, y \in open, u \in x \cap y, \exists z \in open \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x \cap y \rangle$
END ficu

ENTER_THEORY ficu

-- We will attain the finite intersection closedness property through the doubleton intersection closedness property.

-- doubleton intersection closedness

THEOREM ficu_1. $\{X, Y\} \subseteq \mathsf{open} \rightarrow X \cap Y \in \mathsf{open}$. PROOF:

Suppose_not$(x_0, y_0) \Rightarrow$ AUTO

-- It plainly holds that

$$x_0 \cap y_0 = \bigcup \{z : z \in \mathsf{open}, u \in x_0 \cap y_0 \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x_0 \cap y_0\} ,$$

because the right-hand side of this equality is the unionset of subsets of the left-hand side and, on the other hand, for each $u_0 \in x_0 \cap y_0$, the set $\{z : z \in \mathsf{open} \mid u_0 \in z \,\&\, z \subseteq x_0 \cap y_0\}$ is included in the right hand side and has u_0 as a member.

Suppose $\Rightarrow$ $x_0 \cap y_0 \not\supseteq \bigcup \{z : z \in \mathsf{open}, u \in x_0 \cap y_0 \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x_0 \cap y_0\}$

$\langle x_0 \cap y_0, \{z : z \in \mathsf{open}, u \in x_0 \cap y_0 \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x_0 \cap y_0\} \rangle \hookrightarrow T3\ (\star) \Rightarrow$ *Stat1* : $\neg$
$\langle \forall x \in \{z : z \in \mathsf{open}, u \in x_0 \cap y_0 \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x_0 \cap y_0\} \mid x \subseteq x_0 \cap y_0 \rangle$

$\langle x_1 \rangle \hookrightarrow$ *Stat1*(*Stat1*$\star$) $\Rightarrow$ *Stat2* : $x_1 \in \{z : z \in \mathsf{open}, u \in x_0 \cap y_0 \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x_0 \cap y_0\} \,\&\, x_0 \cap y_0 \not\supseteq x_1$

$\langle z, u \rangle \hookrightarrow$ *Stat2*(*Stat2*$\star$) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO

Suppose $\Rightarrow$ *Stat3* : $x_0 \cap y_0 \not\subseteq \bigcup \{z : z \in \mathsf{open}, u \in x_0 \cap y_0 \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x_0 \cap y_0\}$

Use_def$(\bigcup \{z : z \in \mathsf{open}, u \in x_0 \cap y_0 \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x_0 \cap y_0\}) \Rightarrow$ AUTO

$\langle u_0 \rangle \hookrightarrow$ *Stat3*(*Stat3*$\star$) $\Rightarrow$ *Stat4* :
$u_0 \notin \{u : z' \in \{z : z \in \mathsf{open}, u \in x_0 \cap y_0 \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x_0 \cap y_0\}, u \in z'\} \,\&\, u_0 \in x_0 \cap y_0$

Assump $\Rightarrow$ *Stat5* : $\langle \forall x \in \mathsf{open}, y \in \mathsf{open}, u \in x \cap y, \exists z \in \mathsf{open} \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x \cap y \rangle$

$\langle x_0, y_0, u_0 \rangle \hookrightarrow$ *Stat5* $\Rightarrow$ *Stat6* : $\langle \exists z \in \mathsf{open} \mid u_0 \in z \,\&\, z \subseteq x_0 \cap y_0 \rangle$

$\langle z_0 \rangle \hookrightarrow$ *Stat6*(*Stat6*$\star$) $\Rightarrow$ $z_0 \in \mathsf{open} \,\&\, u_0 \in z_0 \,\&\, z_0 \subseteq x_0 \cap y_0$

$\langle z_0, u_0 \rangle \hookrightarrow$ *Stat4*(*Stat6*$\star$) $\Rightarrow$ *Stat7* : $z_0 \notin \{z : z \in \mathsf{open}, u \in x_0 \cap y_0 \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x_0 \cap y_0\}$

$\langle z_0, u_0 \rangle \hookrightarrow$ *Stat7*(*Stat6*$\star$) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ *Stat8* : $\bigcup \{z : z \in \mathsf{open}, u \in x_0 \cap y_0 \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x_0 \cap y_0\} \notin \mathsf{open}$

Assump $\Rightarrow$ *Stat9* : $\{x \subseteq \mathsf{open} \mid \bigcup x \notin \mathsf{open}\} = \emptyset$

$\langle \{z : z \in \mathsf{open}, u \in x_0 \cap y_0 \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x_0 \cap y_0\} \rangle \hookrightarrow$ *Stat9*(*Stat8*$\star$) $\Rightarrow$ *Stat10* :
$\{z : z \in \mathsf{open}, u \in x_0 \cap y_0 \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x_0 \cap y_0\} \not\subseteq \mathsf{open}$

$\langle z_1 \rangle \hookrightarrow$ *Stat10*(*Stat10*$\star$) $\Rightarrow$ *Stat11* : $z_1 \in \{z : z \in \mathsf{open}, u \in x_0 \cap y_0 \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x_0 \cap y_0\} \,\&\, z_1 \notin \mathsf{open}$

$\langle z_2, u_2 \rangle \hookrightarrow$ *Stat11*(*Stat11*$\star$) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

-- At this point, finite intersection closedness follows by straightforward application of the THEORY fic.

APPLY $\langle\, \rangle$ fic(ss $\mapsto$ open)$\Rightarrow$

-- finite intersection closedness

THEOREM ficu$_2$. $\langle \forall f \mid f \subseteq \mathsf{open}\ \&\ \mathsf{Finite}(f)\ \&\ f \neq \emptyset \rightarrow \bigcap(f) \in \mathsf{open}\rangle$.

ENTER_THEORY Set_theory

DISPLAY ficu

THEORY ficu(open)

$\{x \subseteq \mathsf{open} \mid \bigcup x \notin \mathsf{open}\} = \emptyset$

$\langle \forall x \in \mathsf{open}, y \in \mathsf{open}, u \in x \cap y, \exists z \in \mathsf{open} \mid u \in z\ \&\ z \subseteq x \cap y\rangle$

$\Rightarrow$

$\langle \forall x, y \mid \{x, y\} \subseteq \mathsf{open} \rightarrow x \cap y \in \mathsf{open}\rangle$

$\langle \forall f \mid f \subseteq \mathsf{open}\ \&\ \mathsf{Finite}(f)\ \&\ f \neq \emptyset \rightarrow \bigcap(f) \in \mathsf{open}\rangle$

END ficu

-- Nozioni basilari sulle 'mappe', intese semplicemente come insiemi di coppie, sulle funzioni e sulle biiezioni.

-- Map range

DEF maps · 4. $\mathbf{range}(X) =_{\mathrm{Def}} \{x^{[2]} : x \in X\}$

-- Map

DEF maps · 5. $\mathsf{Is\_map}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \langle \forall p \in X \mid p = [p^{[1]}, p^{[2]}]\rangle$

-- Single-valued map predicate

DEF maps · 6. $\mathsf{Svm}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathsf{Is\_map}(X)\ \&\ \langle \forall p \in X, q \in X \mid p^{[1]} = q^{[1]} \rightarrow p = q\rangle$

-- One-one map predicate

DEF maps · 7. $\mathsf{One\_1\_map}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathsf{Svm}(X)\ \&\ \langle \forall p \in X, q \in X \mid p^{[2]} = q^{[2]} \rightarrow p = q\rangle$

-- Restrictions of one-one maps are one-one

THEOREM 58. $\mathsf{One\_1\_map}(F) \rightarrow \mathsf{One\_1\_map}(F_{|S})$. PROOF:

Suppose_not(f, s) $\Rightarrow$ *Stat0*: $\mathsf{One\_1\_map}(f)\ \&\ \neg \mathsf{One\_1\_map}(f_{|s})$

Use_def (One_1_map(f)) $\Rightarrow$ AUTO

Use_def (Svm(f)) $\Rightarrow$ AUTO

Use_def (Is_map(f)) $\Rightarrow$ AUTO

EQUAL $\Rightarrow$ *Stat1*: $\langle \forall x \in f \mid x = [x^{[1]}, x^{[2]}]\rangle\ \&\ \langle \forall x \in f, y \in f \mid x^{[1]} = y^{[1]} \rightarrow x = y\rangle\ \&\ \langle \forall x \in f, y \in f \mid x^{[2]} = y^{[2]} \rightarrow x = y\rangle$

Use_def (|) $\Rightarrow$ *Stat2*: $f_{|s} = \{p \in f \mid p^{[1]} \in s\}$

Set_monot $\Rightarrow$ $\{p \in f \mid p^{[1]} \in s\} \subseteq \{p \in f \mid \mathsf{true}\}$

(*Stat0*$\star$)ELEM $\Rightarrow$ *Stat3*: $f_{|s} \subseteq f\ \&\ \neg \mathsf{One\_1\_map}(f_{|s})$

Suppose $\Rightarrow$ $\neg \langle \forall x \in f_{|s} \mid x = [x^{[1]}, x^{[2]}]\rangle$

(*Stat1*$\star$)ELEM $\Rightarrow$ *Stat4*: $\neg \langle \forall x \in f_{|s} \mid x = [x^{[1]}, x^{[2]}]\rangle\ \&\ \langle \forall x \in f \mid x = [x^{[1]}, x^{[2]}]\rangle$

$\langle x_1, x_1\rangle \hookrightarrow Stat4(Stat3\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO
Suppose $\Rightarrow$ $\neg\langle \forall x \in f_{|s}, y \in f_{|s} \mid x^{[1]} = y^{[1]} \to x = y\rangle$
$(Stat1\star)$ELEM $\Rightarrow$ $Stat5: \neg\langle \forall x \in f_{|s}, y \in f_{|s} \mid x^{[1]} = y^{[1]} \to x = y\rangle \,\&\, \langle \forall x \in f, y \in f \mid x^{[1]} = y^{[1]} \to x = y\rangle$
$\langle x_2, y_2, x_2, y_2\rangle \hookrightarrow Stat5(Stat3\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO
Suppose $\Rightarrow$ $\neg\langle \forall x \in f_{|s}, y \in f_{|s} \mid x^{[2]} = y^{[2]} \to x = y\rangle$
$(Stat1\star)$ELEM $\Rightarrow$ $Stat6: \neg\langle \forall x \in f_{|s}, y \in f_{|s} \mid x^{[2]} = y^{[2]} \to x = y\rangle \,\&\, \langle \forall x \in f, y \in f \mid x^{[2]} = y^{[2]} \to x = y\rangle$
$\langle x_3, y_3, x_3, y_3\rangle \hookrightarrow Stat6(Stat3\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO
Use_def $(\text{One\_1\_map}(f_{|s})) \Rightarrow$ AUTO
Use_def $(\text{Svm}(f_{|s})) \Rightarrow$ AUTO
Use_def $(\text{Is\_map}(f_{|s})) \Rightarrow$ AUTO
$(Stat3\star)$Discharge $\Rightarrow$ QED

-- Monotonicity of range and domain sets

THEOREM 65. $F \subseteq G \to \mathbf{range}(F) \subseteq \mathbf{range}(G) \,\&\, \mathbf{domain}(F) \subseteq \mathbf{domain}(G)$. PROOF:
Suppose_not$(f, g) \Rightarrow$ AUTO
Set_monot $\Rightarrow$ $\{x^{[1]} : x \in f\} \subseteq \{x^{[1]} : x \in g\}$
Set_monot $\Rightarrow$ $\{x^{[2]} : x \in f\} \subseteq \{x^{[2]} : x \in g\}$
Use_def$(\mathbf{domain}) \Rightarrow$ $\mathbf{domain}(f) \subseteq \mathbf{domain}(g)$
Use_def$(\mathbf{range}) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

-- Map image elements belong to the map range

THEOREM 71. $X \in \mathbf{domain}(F) \to F{\upharpoonright}X \in \mathbf{range}(F)$. PROOF:
Suppose_not$(x_0, f) \Rightarrow$ AUTO
Use_def$(\mathbf{domain}(f)) \Rightarrow$ AUTO
Use_def$(\mathbf{range}(f)) \Rightarrow$ AUTO
Use_def$(\upharpoonright) \Rightarrow$ $Stat1: x_0 \in \{p^{[1]} : p \in f\} \,\&\, \mathbf{arb}(f_{|\{x_0\}})^{[2]} \notin \{p^{[2]} : p \in f\}$
Use_def$(|) \Rightarrow$ $f_{|\{x_0\}} = \{p \in f \mid p^{[1]} \in \{x_0\}\}$
$\langle p_0\rangle \hookrightarrow Stat1(Stat1\star) \Rightarrow$ $Stat2: x_0 = p_0{}^{[1]} \,\&\, p_0 \in f$
EQUAL $\Rightarrow$ $Stat3: \mathbf{arb}(\{p \in f \mid p^{[1]} \in \{p_0{}^{[1]}\}\})^{[2]} \notin \{p^{[2]} : p \in f\}$
$\langle \mathbf{arb}(\{p \in f \mid p^{[1]} \in \{p_0{}^{[1]}\}\})\rangle \hookrightarrow Stat3(Stat3\star) \Rightarrow$ $Stat4:$
$\mathbf{arb}(\{p \in f \mid p^{[1]} \in \{p_0{}^{[1]}\}\}) \notin f$
Suppose $\Rightarrow$ $Stat5: p_0 \notin \{p \in f \mid p^{[1]} \in \{p_0{}^{[1]}\}\}$
$\langle p_0\rangle \hookrightarrow Stat5(Stat2, Stat2\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO
Loc_def $\Rightarrow$ $a = \mathbf{arb}(\{p \in f \mid p^{[1]} \in \{p_0{}^{[1]}\}\})$
$(Stat4)$ELEM $\Rightarrow$ $Stat6: a \in \{p \in f \mid p^{[1]} \in \{p_0{}^{[1]}\}\} \,\&\, a \notin f$
$\langle\,\rangle \hookrightarrow Stat6(Stat6\star) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

-- Map image formula

THEOREM 74. $\mathsf{Svm}(\mathsf{F}) \,\&\, \mathsf{P} \in \mathsf{F} \to \mathsf{F}\!\upharpoonright\!\mathsf{P}^{[1]} = \mathsf{P}^{[2]}$. PROOF:

Suppose_not(f, p_0) ⇒ AUTO

Use_def(Is_map(f)) ⇒ AUTO

Use_def(Svm) ⇒ *Stat0*: $\langle \forall q \in f \mid q = [q^{[1]}, q^{[2]}] \rangle \,\&\,$ *Stat1*: $\langle \forall q \in f, p \in f \mid q^{[1]} = p^{[1]} \to q = p \rangle \,\&\, p_0 \in f \,\&\, f\!\upharpoonright\! p_0{}^{[1]} \neq p_0{}^{[2]}$

Use_def(↾) ⇒ $f\!\upharpoonright\! p_0{}^{[1]} = \mathbf{arb}\big(f_{|\{p_0{}^{[1]}\}}\big)^{[2]}$

$\langle p_0 \rangle \hookrightarrow$*Stat0*(*Stat0*⋆) ⇒ *Stat2*: $p_0 = [p_0{}^{[1]}, p_0{}^{[2]}] \,\&\, p_0 \in f \,\&\, \mathbf{arb}\big(f_{|\{p_0{}^{[1]}\}}\big)^{[2]} \neq p_0{}^{[2]}$

Use_def(|) ⇒ *Stat3*: $f_{|\{p_0{}^{[1]}\}} = \{p \in f \mid p^{[1]} \in \{p_0{}^{[1]}\}\}$

Suppose ⇒ *Stat4*: $p_0 \notin \{p \in f \mid p^{[1]} \in \{p_0{}^{[1]}\}\}$

$\langle p_0 \rangle \hookrightarrow$*Stat4*(*Stat2*, *Stat2*⋆) ⇒ false; Discharge ⇒ AUTO

Set_monot ⇒ $\{p \in f \mid p^{[1]} \in \{p_0{}^{[1]}\}\} \subseteq \{p \in f \mid \mathsf{true}\}$

Loc_def ⇒ $p_1 = \mathbf{arb}\big(f_{|\{p_0{}^{[1]}\}}\big)$

(*Stat3*)ELEM ⇒ *Stat5*: $p_1 \in \{p \in f \mid p^{[1]} \in \{p_0{}^{[1]}\}\} \,\&\, p_1 \in f$

$\langle\,\rangle \hookrightarrow$*Stat5*(*Stat5*⋆) ⇒ *Stat6*: $p_1{}^{[1]} = p_0{}^{[1]}$

$\langle p_0, p_1 \rangle \hookrightarrow$*Stat1*(*Stat0*, *Stat5*, *Stat6*⋆) ⇒ $p_1 = p_0$

EQUAL ⟨*Stat2*⟩ ⇒ false; Discharge ⇒ QED

THEORY Must_be_svm$(b(X), s, u)$

END Must_be_svm

ENTER_THEORY Must_be_svm

-- Single-valued map former

THEOREM Must_be_svm · 1. $\mathsf{Svm}(\{[x, b(x)] : x \in s\}) \,\&\, \mathbf{domain}(\{[x, b(x)] : x \in s\}) = s \,\&\, \mathbf{range}(\{[x, b(x)] : x \in s\}) = \{b(x) : x \in s\} \,\&\, (u \in s \to \{[x, b(x)] : x \in s\}\!\upharpoonright\! u = b(u))$. PROOF:

Suppose_not() ⇒ AUTO

Suppose ⇒ *Stat1*: $\neg \mathsf{Svm}(\{[x, b(x)] : x \in s\})$

Use_def$\big(\mathsf{Is_map}(\{[x, b(x)] : x \in s\})\big)$ ⇒ AUTO

Use_def(Svm) ⇒

$\neg\big(\langle \forall q \in \{[x, b(x)] : x \in s\} \mid q = [q^{[1]}, q^{[2]}] \rangle \,\&\, \langle \forall q \in \{[x, b(x)] : x \in s\}, p \in \{[x, b(x)] : x \in s\} \mid q^{[1]} = p^{[1]} \to q = p \rangle\big)$

Suppose ⇒ *Stat2*: $\neg\langle \forall q \in \{[x, b(x)] : x \in s\} \mid q = [q^{[1]}, q^{[2]}] \rangle$

$\langle q_0 \rangle \hookrightarrow$*Stat2*(*Stat2*⋆) ⇒ *Stat3*: $q_0 \in \{[x, b(x)] : x \in s\} \,\&\, q_0 \neq [q_0{}^{[1]}, q_0{}^{[2]}]$

$\langle x_0 \rangle \hookrightarrow$*Stat3*(*Stat3*) ⇒ false; Discharge ⇒ *Stat4*: $\neg\langle \forall q \in \{[x, b(x)] : x \in s\}, p \in \{[x, b(x)] : x \in s\} \mid q^{[1]} = p^{[1]} \to q = p \rangle$

$\langle q_1, p_1 \rangle \hookrightarrow$*Stat4*(*Stat4*⋆) ⇒ *Stat5*:

$q_1, p_1 \in \{[x, b(x)] : x \in s\} \,\&\, q_1{}^{[1]} = p_1{}^{[1]} \,\&\, q_1 \neq p_1$

$\langle x_1, x_2 \rangle \hookrightarrow$*Stat5*(*Stat5*) ⇒ $x_1 = x_2 \,\&\, b(x_1) \neq b(x_2)$

EQUAL ⟨*Stat5*⟩ ⇒ false; Discharge ⇒ AUTO

Suppose $\Rightarrow$ *Stat6*: $\mathbf{domain}(\{[x, b(x)] : x \in s\}) \neq s$
Use_def (**domain**) $\Rightarrow$ $\{p^{[1]} : p \in \{[x, b(x)] : x \in s\}\} \neq s$
SIMPLF $\langle$*Stat6*$\star\rangle$ $\Rightarrow$ *Stat7*: $\left\{[x, b(x)]^{[1]} : x \in s\right\} \neq s$
$\langle e \rangle \hookrightarrow$ *Stat7*(*Stat7*$\star$) $\Rightarrow$ $e \in \left\{[x, b(x)]^{[1]} : x \in s\right\} \neq e \in s$
Suppose $\Rightarrow$ *Stat8*: $e \in \left\{[x, b(x)]^{[1]} : x \in s\right\}$
$\langle x_3 \rangle \hookrightarrow$ *Stat8*(*Stat7*$\star$) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ *Stat9*: $e \notin \left\{[x, b(x)]^{[1]} : x \in s\right\}$ & $e \in s$
$\langle e \rangle \hookrightarrow$ *Stat9*(*Stat9*$\star$) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO
Suppose $\Rightarrow$ *Stat10*: $\mathbf{range}(\{[x, b(x)] : x \in s\}) \neq \{b(x) : x \in s\}$
Use_def (**range**) $\Rightarrow$ $\{p^{[2]} : p \in \{[x, b(x)] : x \in s\}\} \neq \{b(x) : x \in s\}$
SIMPLF $\langle$*Stat10*$\star\rangle$ $\Rightarrow$ *Stat11*: $\left\{[x, b(x)]^{[2]} : x \in s\right\} \neq \{b(x) : x \in s\}$
$\langle c \rangle \hookrightarrow$ *Stat11*(*Stat11*) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ *Stat14*: $u \in s$ & $\{[x, b(x)] : x \in s\} \upharpoonright u \neq b(u)$
Use_def ($\upharpoonright$) $\Rightarrow$ $\mathbf{arb}\left(\{[x, b(x)] : x \in s\}_{|\{u\}}\right)^{[2]} \neq b(u)$
Use_def ($|$) $\Rightarrow$ $\{[x, b(x)] : x \in s\}_{|\{u\}} = \{p \in \{[x, b(x)] : x \in s\} \mid p^{[1]} \in \{u\}\}$
SIMPLF $\langle$*Stat14*$\star\rangle$ $\Rightarrow$ $\{p \in \{[x, b(x)] : x \in s\} \mid p^{[1]} \in \{u\}\} = \left\{[x, b(x)] : x \in s \mid [x, b(x)]^{[1]} \in \{u\}\right\}$
EQUAL $\langle$*Stat14*$\rangle$ $\Rightarrow$ $\mathbf{arb}\left(\left\{[x, b(x)] : x \in s \mid [x, b(x)]^{[1]} \in \{u\}\right\}\right)^{[2]} \neq b(u)$
Loc_def $\Rightarrow$ *Stat15*: $a = \mathbf{arb}\left(\left\{[x, b(x)] : x \in s \mid [x, b(x)]^{[1]} \in \{u\}\right\}\right)$
Suppose $\Rightarrow$ *Stat16*: $\left\{[x, b(x)] : x \in s \mid [x, b(x)]^{[1]} \in \{u\}\right\} = \emptyset$
$\langle u \rangle \hookrightarrow$ *Stat16*(*Stat14*, *Stat16*) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO
(*Stat15*)ELEM $\Rightarrow$ *Stat17*: $a \in \left\{[x, b(x)] : x \in s \mid [x, b(x)]^{[1]} \in \{u\}\right\}$
$\langle x_4 \rangle \hookrightarrow$ *Stat17*(*Stat17*) $\Rightarrow$ $x_4 = u$ & $a^{[2]} = b(x_4)$
EQUAL $\langle$*Stat14*$\rangle$ $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

ENTER_THEORY Set_theory

DISPLAY Must_be_svm

THEORY Must_be_svm $(b(x), s, u)$
$\Rightarrow$
Svm $(\{[x, b(x)] : x \in s\})$ & $\mathbf{domain}(\{[x, b(x)] : x \in s\}) = s$ & $\mathbf{range}(\{[x, b(x)] : x \in s\}) = \{b(x) : x \in s\}$ & $(u \in s \rightarrow \{[x, b(x)] : x \in s\} \upharpoonright u = b(u))$
END Must_be_svm

-- Doubletons as maps

THEOREM 92. $\mathsf{Is\_map}(\{[X,Y],[Z,W]\})$ & $\mathbf{domain}(\{[X,Y],[Z,W]\}) = \{X,Z\}$ & $\mathbf{range}(\{[X,Y],[Z,W]\}) = \{Y,W\}$ & $(X \neq Z \rightarrow \mathsf{Svm}(\{[X,Y],[Z,W]\}))$. PROOF:

Suppose_not$(x_0, y_0, z_0, w_0) \Rightarrow$ AUTO

Suppose $\Rightarrow$ $\neg\mathsf{Is\_map}(\{[x_0,y_0],[z_0,w_0]\})$

Use_def(Is_map) $\Rightarrow$ *Stat1*: $\neg\langle\forall p \in \{[x_0,y_0],[z_0,w_0]\} \mid p = [p^{[1]}, p^{[2]}]\rangle$

$\langle p_1\rangle \hookrightarrow$ *Stat1*(*Stat1*) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO

Suppose $\Rightarrow$ *Stat2*: $\mathbf{domain}(\{[x_0,y_0],[z_0,w_0]\}) \neq \{x_0,z_0\}$

Use_def($\mathbf{domain}(\{[x_0,y_0],[z_0,w_0]\})$) $\Rightarrow$ AUTO

Suppose $\Rightarrow$ *Stat3*: $x_0 \notin \{p^{[1]} : p \in \{[x_0,y_0],[z_0,w_0]\}\}$

$\langle [x_0,y_0]\rangle \hookrightarrow$ *Stat3*(*Stat3*$\star$) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO

Suppose $\Rightarrow$ *Stat4*: $z_0 \notin \{p^{[1]} : p \in \{[x_0,y_0],[z_0,w_0]\}\}$

$\langle [z_0,w_0]\rangle \hookrightarrow$ *Stat4*(*Stat4*$\star$) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO

(*Stat2*$\star$)ELEM $\Rightarrow$ *Stat5*: $\mathbf{domain}(\{[x_0,y_0],[z_0,w_0]\}) \not\subseteq \{x_0,z_0\}$

$\langle e\rangle \hookrightarrow$ *Stat5*(*Stat2*$\star$) $\Rightarrow$ *Stat6*: $e \in \{p^{[1]} : p \in \{[x_0,y_0],[z_0,w_0]\}\}$ & $e \notin \{x_0,z_0\}$

$\langle p\rangle \hookrightarrow$ *Stat6*(*Stat6*) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO

Use_def($\mathsf{Svm}(\{[x_0,y_0],[z_0,w_0]\})$) $\Rightarrow$ AUTO

Suppose $\Rightarrow$ *Stat7*: $\mathbf{range}(\{[x_0,y_0],[z_0,w_0]\}) \neq \{y_0,w_0\}$

Use_def($\mathbf{range}(\{[x_0,y_0],[z_0,w_0]\})$) $\Rightarrow$ AUTO

Suppose $\Rightarrow$ *Stat8*: $y_0 \notin \{q^{[2]} : q \in \{[x_0,y_0],[z_0,w_0]\}\}$

$\langle [x_0,y_0]\rangle \hookrightarrow$ *Stat8*(*Stat8*$\star$) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO

Suppose $\Rightarrow$ *Stat9*: $w_0 \notin \{q^{[2]} : q \in \{[x_0,y_0],[z_0,w_0]\}\}$

$\langle [z_0,w_0]\rangle \hookrightarrow$ *Stat9*(*Stat9*$\star$) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO

(*Stat7*$\star$)ELEM $\Rightarrow$ *Stat10*: $\mathbf{range}(\{[x_0,y_0],[z_0,w_0]\}) \not\subseteq \{y_0,w_0\}$

$\langle d\rangle \hookrightarrow$ *Stat10*(*Stat7*$\star$) $\Rightarrow$ *Stat11*: $e \in \{q^{[1]} : q \in \{[x_0,y_0],[z_0,w_0]\}\}$ & $e \notin \{x_0,z_0\}$

$\langle q\rangle \hookrightarrow$ *Stat11*(*Stat11*) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ *Stat12*: $\neg\langle\forall p \in \{[x_0,y_0],[z_0,w_0]\}, q \in \{[x_0,y_0],[z_0,w_0]\} \mid p^{[1]} = q^{[1]} \rightarrow p = q\rangle$ & $x_0 \neq z_0$

$\langle p_0, q_0\rangle \hookrightarrow$ *Stat12*(*Stat12*) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

-- Doubletons as maps, 2

THEOREM 93. $X \neq Z \rightarrow \{[X,Y],[Z,W]\}\upharpoonright X = Y$. PROOF:

Suppose_not$(x, z, y, w) \Rightarrow$ AUTO

Use_def($\upharpoonright$) $\Rightarrow$ $\mathbf{arb}\left(\{[x,y],[z,w]\}_{|\{x\}}\right)^{[2]} \neq y$

Use_def($|$) $\Rightarrow$ $\{[x,y],[z,w]\}_{|\{x\}} = \{p \in \{[x,y],[z,w]\} \mid p^{[1]} \in \{x\}\}$

EQUAL $\Rightarrow$ $\mathbf{arb}(\{p \in \{[x,y],[z,w]\} \mid p^{[1]} \in \{x\}\})^{[2]} \neq y$

Suppose $\Rightarrow$ *Stat1*: $\{p \in \{[x,y],[z,w]\} \mid p^{[1]} \in \{x\}\} = \emptyset$

$\langle [x,y]\rangle \hookrightarrow$ *Stat1*(*Stat1*) $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ *Stat2*: $\{p : p \in \{[x,y],[z,w]\} \mid p^{[1]} \in \{x\}\} \neq \emptyset$

Loc_def $\Rightarrow$ $a = \mathbf{arb}(\{p \in \{[x,y],[z,w]\} \mid p^{[1]} \in \{x\}\})$

(*Stat2*)ELEM $\Rightarrow$ *Stat3*: $a \in \{p \in \{[x,y],[z,w]\} \mid p^{[1]} \in \{x\}\}$

$\langle\,\rangle\hookrightarrow$*Stat3(Stat3⋆)* $\Rightarrow$ *Stat4*: $a \in \{[x,y],[z,w]\}$ & $a^{[1]} = x$
EQUAL $\Rightarrow$ *Stat5*: $a^{[2]} \neq y$ & $x \neq z$
(*Stat4*, *Stat5*)Discharge $\Rightarrow$ QED

-- Domain of restriction

THEOREM 94. $\mathbf{domain}(F_{|S}) = \mathbf{domain}(F) \cap S$. PROOF:
Suppose_not(f,s) $\Rightarrow$ AUTO
Use_def$(|)$ $\Rightarrow$ *Stat0*: $\mathbf{domain}(\{q \in f \mid q^{[1]} \in s\}) \neq \mathbf{domain}(f) \cap s$
Use_def$(\mathbf{domain})$ $\Rightarrow$ $\{p^{[1]} : p \in \{q \in f \mid q^{[1]} \in s\}\} \neq \{p^{[1]} : p \in f\} \cap s$
SIMPLF $\Rightarrow$ *Stat1*: $\{p^{[1]} : p \in f \mid p^{[1]} \in s\} \neq \{p^{[1]} : p \in f\} \cap s$
$\langle e\rangle\hookrightarrow$*Stat1(Stat1⋆)* $\Rightarrow$ *Stat2*: $e \in \{p^{[1]} : p \in f \mid p^{[1]} \in s\} \neq e \in \{p^{[1]} : p \in f\} \cap s$
Suppose $\Rightarrow$ *Stat3*: $e \in \{p^{[1]} : p \in f \mid p^{[1]} \in s\}$
$\langle p_0\rangle\hookrightarrow$*Stat3(Stat2⋆)* $\Rightarrow$ *Stat4*: ${p_0}^{[1]} \notin \{p^{[1]} : p \in f\}$ & $p_0 \in f$
$\langle p_0\rangle\hookrightarrow$*Stat4(Stat4⋆)* $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ *Stat5*: $e \in \{p^{[1]} : p \in f\}$ & $e \notin \{p^{[1]} : p \in f \mid p^{[1]} \in s\}$ & $e \in s$
$\langle p_1, p_1\rangle\hookrightarrow$*Stat5(Stat5⋆)* $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

-- Cartesian Product

DEF maps · 8. $X \times Y =_{\text{Def}} \{[x,y] : x \in X, y \in Y\}$

-- Subsets of Cartesian products

THEOREM 141. $Y \subseteq S \times T \leftrightarrow$ Is_map(Y) & $\mathbf{domain}(Y) \subseteq S$ & $\mathbf{range}(Y) \subseteq T$. PROOF:

-- This follows trivially from the fact that a map is a set each of whose elements x is a pair $[x^{[1]}, x^{[2]}]$

Suppose_not(y_0, s, t) $\Rightarrow$ AUTO
Use_def$(\times)$ $\Rightarrow$ *Stat0*: $y_0 \subseteq \{[x,y] : x \in s, y \in t\} \neq$ Is_map(y_0) & $\mathbf{domain}(y_0) \subseteq s$ & $\mathbf{range}(y_0) \subseteq t$
Suppose $\Rightarrow$ *Stat1*: $y_0 \subseteq \{[x,y] : x \in s, y \in t\}$
Suppose $\Rightarrow$ *Stat2*: $\mathbf{domain}(y_0) \not\subseteq s$
Use_def$(\mathbf{domain})$ $\Rightarrow$ *Stat3*: $\{x^{[1]} : x \in y_0\} \not\subseteq s$
$\langle p\rangle\hookrightarrow$*Stat3* $\Rightarrow$ *Stat4*: $p \in \{x^{[1]} : x \in y_0\}$ & $p \notin s$
$\langle a\rangle\hookrightarrow$*Stat4(Stat1⋆)* $\Rightarrow$ *Stat5*: $a \in \{[x,y] : x \in s, y \in t\}$ & $a^{[1]} \notin s$
$\langle x_1, y_1\rangle\hookrightarrow$*Stat5(Stat5)* $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO
Suppose $\Rightarrow$ *Stat6*: $\mathbf{range}(y_0) \not\subseteq t$
Use_def$(\mathbf{range})$ $\Rightarrow$ *Stat7*: $\{x^{[2]} : x \in y_0\} \not\subseteq t$
$\langle q\rangle\hookrightarrow$*Stat7* $\Rightarrow$ *Stat8*: $q \in \{x^{[2]} : x \in y_0\}$ & $q \notin t$
$\langle b\rangle\hookrightarrow$*Stat8(Stat1⋆)* $\Rightarrow$ *Stat9*: $b \in \{[x,y] : x \in s, y \in t\}$ & $b^{[2]} \notin t$
$\langle x_2, y_2\rangle\hookrightarrow$*Stat9(Stat9)* $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ AUTO
Use_def(Is_map(y_0)) $\Rightarrow$ AUTO
(*Stat0⋆*)ELEM $\Rightarrow$ *Stat10*: $\neg\langle\forall p \in y_0 \mid p = [p^{[1]}, p^{[2]}]\rangle$

$\langle p_0 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat10}(\mathit{Stat1}\star) \Rightarrow \quad \mathit{Stat11}: \ p_0 \in \{[x,y]: x \in s, y \in t\} \ \& \ p_0 \neq [p_0{}^{[1]}, p_0{}^{[2]}]$

$\langle x_3, y_3 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat11}(\mathit{Stat11}) \Rightarrow \quad \text{false}; \qquad \text{Discharge} \Rightarrow \quad \text{AUTO}$

$\text{Use\_def}(\text{Is\_map}(y_0)) \Rightarrow \quad \text{AUTO}$

$\text{Use\_def}(\mathbf{domain}(y_0)) \Rightarrow \quad \text{AUTO}$

$\text{Use\_def}(\mathbf{range}(y_0)) \Rightarrow \quad \text{AUTO}$

$(\mathit{Stat0}\star)\text{ELEM} \Rightarrow \quad \mathit{Stat12}:$

$y_0 \not\subseteq \{[x,y]: x \in s, y \in t\} \ \& \ \langle \forall p \in y_0 \mid p = [p^{[1]}, p^{[2]}] \rangle \ \& \ \{q^{[1]} : q \in y_0\} \subseteq s \ \& \ \{q^{[2]} : q \in y_0\} \subseteq t$

$\langle p_1, p_1 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat12}(\mathit{Stat12}\star) \Rightarrow \quad \mathit{Stat13}: \ p_1 \notin \{[x,y]: x \in s, y \in t\} \ \& \ p_1 \in y_0 \ \& \ p_1 = [p_1{}^{[1]}, p_1{}^{[2]}]$

$\langle p_1{}^{[1]}, p_1{}^{[2]} \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat13}(\mathit{Stat13}\star) \Rightarrow \quad p_1{}^{[1]} \notin s \vee p_1{}^{[2]} \notin t$

$\text{Suppose} \Rightarrow \quad p_1{}^{[1]} \notin s$

$(\mathit{Stat12}\star)\text{ELEM} \Rightarrow \quad \mathit{Stat14}: \ p_1{}^{[1]} \notin \{q^{[1]} : q \in y_0\}$

$\langle p_1 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat14}(\mathit{Stat13}\star) \Rightarrow \quad \text{false}; \qquad \text{Discharge} \Rightarrow \quad \text{AUTO}$

$(\mathit{Stat12}\star)\text{ELEM} \Rightarrow \quad \mathit{Stat15}: \ p_1{}^{[2]} \notin \{q^{[2]} : q \in y_0\}$

$\langle p_1 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat15}(\mathit{Stat13}\star) \Rightarrow \quad \text{false}; \qquad \text{Discharge} \Rightarrow \quad \text{QED}$

-- Covering

DEF Set_2. $\mathsf{Covers}(X, Y) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \bigcup X = Y$

-- Fin intersection property

DEF Set_3. $\mathsf{HasFip}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \{x \subseteq X \mid \mathsf{Finite}(x) \,\&\, x \neq \emptyset \,\&\, \mathsf{inters}(x) = \emptyset\} = \emptyset$

-- Teoria di base sugli spazi topologici

THEORY topologicalSpace(open)

$\{x \subseteq \mathsf{open} \mid \bigcup x \notin \mathsf{open}\} = \emptyset$

$\langle \forall x \in \mathsf{open}, y \in \mathsf{open}, u \in x \cap y, \exists z \in \mathsf{open} \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x \cap y\rangle$

$\bigcup \mathsf{open} \neq \emptyset$

END topologicalSpace

ENTER_THEORY topologicalSpace

-- support

DEF $\mathsf{topologicalSpace}_0$. $\mathsf{support}_\Theta =_{\mathrm{Def}} \bigcup \mathsf{open}$

-- compactness

DEF $\mathsf{topologicalSpace}_1$. $\mathsf{IsCompact}_\Theta(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \langle \forall u \subseteq \mathsf{open} \mid \mathsf{Covers}(u, X) \rightarrow \langle \exists d \subseteq u \mid \mathsf{Finite}(d) \,\&\, \mathsf{Covers}(d, X)\rangle\rangle$

-- closed sets

DEF $\mathsf{topologicalSpace}_2$. $\mathsf{closed}_\Theta =_{\mathrm{Def}} \{\mathsf{support}_\Theta \backslash u : u \in \mathsf{open}\}$

-- intersection

DEF $\mathsf{topologicalSpace}_3$. $\mathsf{int}_\Theta(X) =_{\mathrm{Def}}$ **if** $X = \emptyset$ **then** $\mathsf{support}_\Theta$ **else** $\mathsf{inters}(X)$ **fi**

APPLY $\langle\,\rangle$ $\mathsf{ficu}(\mathsf{open} \mapsto \mathsf{open}) \Rightarrow$

-- finite intersection closedness

THEOREM $\mathsf{topologicalSpace}_0$. $\langle \forall x, y \mid \{x, y\} \subseteq \mathsf{open} \rightarrow x \cap y \in \mathsf{open}\rangle \,\&\, \langle \forall f \mid f \subseteq \mathsf{open} \,\&\, \mathsf{Finite}(f) \,\&\, f \neq \emptyset \rightarrow \mathsf{inters}(f) \in \mathsf{open}\rangle$.

THEOREM $\mathsf{topologicalSpace}_{10}$. $\mathsf{support}_\Theta \neq \emptyset$. PROOF:

Suppose_not $\Rightarrow$ AUTO

Assump $\Rightarrow$ $\bigcup \mathsf{open} \neq \emptyset$

Use_def$(\mathsf{support}_\Theta) \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

THEOREM $\mathsf{topologicalSpace}_{11}$. $a \subseteq \mathsf{open} \vee a \subseteq \mathsf{closed}_\Theta \rightarrow \langle \forall w \in a \mid w \subseteq \mathsf{support}_\Theta\rangle$. PROOF:

Suppose_not$(a_0) \Rightarrow$ AUTO

ELEM $\Rightarrow$ *Stat0*: $\neg\langle \forall w \in a_0 \mid w \subseteq \mathsf{support}_\Theta\rangle$

$\langle w_0\rangle \hookrightarrow$ *Stat0* $\Rightarrow$ $w_0 \in a_0 \,\&\, w_0 \not\subseteq \mathsf{support}_\Theta$

Suppose $\Rightarrow$ $a_0 \subseteq \text{open}$
Use_def(support$_\Theta$) $\Rightarrow$ *Stat1* : $w_0 \not\subseteq \bigcup \text{open}$
$\langle x_0 \rangle \hookrightarrow$ *Stat1* $\Rightarrow$ $x_0 \in w_0 \,\&\, x_0 \notin \bigcup \text{open}$
Use_def($\bigcup$) $\Rightarrow$ *Stat2* : $x_0 \notin \{w : y \in \text{open}, w \in y\}$
$\langle w_0, x_0 \rangle \hookrightarrow$ *Stat2* $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ $a_0 \subseteq \text{closed}_\Theta$
Use_def(closed$_\Theta$) $\Rightarrow$ *Stat3* : $w_0 \in \{\text{support}_\Theta \backslash u : u \in \text{open}\}$
$\langle u_0 \rangle \hookrightarrow$ *Stat3* $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

THEOREM topologicalSpace$_{12}$. $u \subseteq \text{open} \rightarrow \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in u\} \subseteq \text{closed}_\Theta$. PROOF:
Suppose_not(u_0) $\Rightarrow$ $u_0 \subseteq \text{open} \,\&\,$ *Stat0* : $\{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in u_0\} \not\subseteq \text{closed}_\Theta$
$\langle k_0 \rangle \hookrightarrow$ *Stat0* $\Rightarrow$ *Stat1* : $k_0 \in \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in u_0\} \,\&\, k_0 \notin \text{closed}_\Theta$
$\langle k_1 \rangle \hookrightarrow$ *Stat1* $\Rightarrow$ $k_1 \in u_0 \,\&\, k_0 = \text{support}_\Theta \backslash k_1$
Use_def(closed$_\Theta$) $\Rightarrow$ *Stat2* : $\text{closed}_\Theta = \{\text{support}_\Theta \backslash u : u \in \text{open}\}$
$\langle k_2 \rangle \hookrightarrow$ *Stat2* $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED
THEOREM topologicalSpace$_{13}$. $c \subseteq \text{closed}_\Theta \rightarrow \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in c\} \subseteq \text{open}$. PROOF:
Suppose_not(c_0) $\Rightarrow$ $c_0 \subseteq \text{closed}_\Theta \,\&\,$ *Stat0* : $\{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in c_0\} \not\subseteq \text{open}$
$\langle k_0 \rangle \hookrightarrow$ *Stat0* $\Rightarrow$ *Stat1* : $k_0 \in \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in c_0\} \,\&\, k_0 \notin \text{open}$
$\langle k_1 \rangle \hookrightarrow$ *Stat1* $\Rightarrow$ $k_1 \in c_0 \,\&\, k_0 = \text{support}_\Theta \backslash k_1$

Use_def(closed$_\Theta$) $\Rightarrow$ $\text{closed}_\Theta = \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in \text{open}\}$
ELEM $\Rightarrow$ *Stat2* : $k_1 \in \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in \text{open}\}$
$\langle k_2 \rangle \hookrightarrow$ *Stat2* $\Rightarrow$ $k_1 = \text{support}_\Theta \backslash k_2 \,\&\, k_2 \in \text{open}$
EQUAL $\Rightarrow$ $k_0 = \text{support}_\Theta \backslash (\text{support}_\Theta \backslash k_2)$

-- $k_0 = \text{support}_\Theta \cap k_2$

$\langle \{k_2\} \rangle \hookrightarrow T$topologicalSpace$_{11}$ $\Rightarrow$ *Stat3* : $\langle \forall w \in \{k_2\} \mid w \subseteq \text{support}_\Theta \rangle$
$\langle k_2 \rangle \hookrightarrow$ *Stat3* $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

THEOREM topologicalSpace$_{14}$. $c \neq \emptyset \,\&\, \text{inters}(c) = \emptyset \rightarrow \text{Covers}(\{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in c\}, \text{support}_\Theta)$. PROOF:
Suppose_not(c_0) $\Rightarrow$ AUTO
Use_def(Covers) $\Rightarrow$ $\bigcup \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in c_0\} \neq \text{support}_\Theta$

$\langle \text{support}_\Theta, c_0 \rangle \hookrightarrow T23$ $\Rightarrow$ $\text{support}_\Theta \backslash \text{inters}(c_0) = \bigcup \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in c_0\}$
EQUAL $\Rightarrow$ $\text{support}_\Theta = \bigcup \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in c_0\}$
Use_def(Covers) $\Rightarrow$ $\text{Covers}(\{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in c_0\}, \text{support}_\Theta)$
ELEM $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED
THEOREM topologicalSpace$_{15}$. $\text{Covers}(u, \text{support}_\Theta) \rightarrow u \neq \emptyset$. PROOF:

Suppose_not(u_0) $\Rightarrow$ AUTO
Use_def(Covers) $\Rightarrow$ $\bigcup u_0 = \mathsf{support}_\Theta$
$\langle u_0 \rangle \hookrightarrow T3f$ $\Rightarrow$ $\mathsf{support}_\Theta = \emptyset$
Use_def$(\mathsf{support}_\Theta)$ $\Rightarrow$ $\mathsf{support}_\Theta = \bigcup \mathsf{open}$
EQUAL $\Rightarrow$ $\bigcup \mathsf{open} = \emptyset$
Assump $\Rightarrow$ $\bigcup \mathsf{open} \neq \emptyset$
ELEM $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

THEOREM topologicalSpace$_{16}$. $\mathsf{Covers}(u, \mathsf{support}_\Theta) \rightarrow \mathsf{inters}(\{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in u\}) = \emptyset$. PROOF:
Suppose_not(u_0) $\Rightarrow$ AUTO
$\langle u_0 \rangle \hookrightarrow T$topologicalSpace$_{15}$ $\Rightarrow$ $u_0 \neq \emptyset$
Use_def(Covers) $\Rightarrow$ $\bigcup u_0 = \mathsf{support}_\Theta$
$\langle \mathsf{support}_\Theta, u_0 \rangle \hookrightarrow T23a$ $\Rightarrow$ $\mathsf{support}_\Theta \backslash \bigcup u_0 = \mathsf{inters}(\{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in u_0\})$
ELEM $\Rightarrow$ $\mathsf{support}_\Theta \backslash \bigcup u_0 = \emptyset$
EQUAL $\Rightarrow$ $\mathsf{inters}(\{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in u_0\}) = \emptyset$
ELEM $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

THEOREM topologicalSpace$_{17}$. $\langle \forall w \in u \mid w \subseteq \mathsf{support}_\Theta \rangle \rightarrow \{\mathsf{support}_\Theta \backslash (\mathsf{support}_\Theta \backslash k) : k \in u\} = u$. PROOF:
Suppose_not(u_0) $\Rightarrow$ $Stat1: \{\mathsf{support}_\Theta \backslash (\mathsf{support}_\Theta \backslash k) : k \in u_0\} \neq \{k : k \in u_0\}$ & $\langle \forall w \in u_0 \mid w \subseteq \mathsf{support}_\Theta \rangle$
$\langle k_0, k_0 \rangle \hookrightarrow Stat1$ $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED
THEOREM topologicalSpace$_{18}$. $\langle \forall w \in u \mid w \subseteq \mathsf{support}_\Theta \rangle \rightarrow (\mathsf{Finite}(u) \leftrightarrow \mathsf{Finite}(\{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in u\}))$. PROOF:
Suppose_not(u_0) $\Rightarrow$ AUTO
Suppose $\Rightarrow$ $\mathsf{Finite}(u_0)$
APPLY $\langle\ \rangle$ finiteImage$(s_0 \mapsto u_0, f(K) \mapsto \mathsf{support}_\Theta \backslash K)$ $\Rightarrow$ $\mathsf{Finite}(\{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in u_0\})$
Discharge $\Rightarrow$ $\mathsf{Finite}(\{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in u_0\})$ & $\neg \mathsf{Finite}(u_0)$
$\langle u_0 \rangle \hookrightarrow T$topologicalSpace$_{17}$ $\Rightarrow$ $\{\mathsf{support}_\Theta \backslash (\mathsf{support}_\Theta \backslash k) : k \in u_0\} = u_0$
SIMPLF $\Rightarrow$ $\{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in \{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in u_0\}\} = u_0$
APPLY $\langle\ \rangle$ finiteImage$(s_0 \mapsto \{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in u_0\}, f(K) \mapsto \mathsf{support}_\Theta \backslash K)$ $\Rightarrow$
$\mathsf{Finite}(\{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in \{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in u_0\}\})$
EQUAL $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED
ENTER_THEORY topologicalSpace

THEOREM topologicalSpace$_{19}$. $d \subseteq u \rightarrow \{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in d\} \subseteq \{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in u\}$. PROOF:
Suppose_not(d_0, u_0) $\Rightarrow$ $d_0 \subseteq u_0$ & $Stat0: \{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in d_0\} \not\subseteq \{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in u_0\}$
$\langle w_0 \rangle \hookrightarrow Stat0$ $\Rightarrow$ $Stat1: w_0 \in \{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in d_0\}$ & $w_0 \notin \{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in u_0\}$
ELEM $\Rightarrow$ $Stat2: w_0 \notin \{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in u_0\}$
$\langle k_0 \rangle \hookrightarrow Stat1$ $\Rightarrow$ $w_0 = \mathsf{support}_\Theta \backslash k_0$ & $k_0 \in d_0$
ELEM $\Rightarrow$ $k_0 \in u_0$
$\langle k_0 \rangle \hookrightarrow Stat2$ $\Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ QED

-- characterization of compactness

THEOREM topologicalSpace$_{20}$. $\mathsf{IsCompact}_\Theta(\mathsf{support}_\Theta) \leftrightarrow \langle \forall c \subseteq \mathsf{closed}_\Theta \mid c \neq \emptyset \,\&\, \mathsf{HasFip}(c) \rightarrow \mathsf{inters}(c) \neq \emptyset \rangle$. PROOF:

Suppose_not([]) $\Rightarrow$ AUTO

Suppose $\Rightarrow$ $\mathsf{IsCompact}_\Theta(\mathsf{support}_\Theta) \,\&\, \mathit{Stat0}: \neg\langle \forall c \subseteq \mathsf{closed}_\Theta \mid c \neq \emptyset \,\&\, \mathsf{HasFip}(c) \rightarrow \mathsf{inters}(c) \neq \emptyset \rangle$

$\langle c_0 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat0} \Rightarrow$ $c_0 \subseteq \mathsf{closed}_\Theta \,\&\, c_0 \neq \emptyset \,\&\, \mathsf{HasFip}(c_0) \,\&\, \mathsf{inters}(c_0) = \emptyset$

Use_def(HasFip) $\Rightarrow$ $\mathit{Stat1}: \{x \subseteq c_0 \mid \mathsf{Finite}(x) \,\&\, x \neq \emptyset \,\&\, \mathsf{inters}(x) = \emptyset\} = \emptyset$

Use_def($\mathsf{IsCompact}_\Theta$) $\Rightarrow$ $\mathit{Stat2}: \langle \forall u \subseteq \mathsf{open} \mid \mathsf{Covers}(u, \mathsf{support}_\Theta) \rightarrow \langle \exists d \subseteq u \mid \mathsf{Finite}(d) \,\&\, \mathsf{Covers}(d, \mathsf{support}_\Theta) \rangle \rangle$

Loc_def $\Rightarrow$ $\mathit{Stat22}: u_0 = \{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in c_0\}$

-- $c_0 = \emptyset$

Suppose $\Rightarrow$ $u_0 = \emptyset$

$\langle z_0 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat22} \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ $u_0 \neq \emptyset$

$\langle c_0 \rangle \hookrightarrow T\mathsf{topologicalSpace}_{13} \Rightarrow$ $u_0 \subseteq \mathsf{open}$

$\langle u_0 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat2} \Rightarrow$ $\mathsf{Covers}(u_0, \mathsf{support}_\Theta) \rightarrow \langle \exists d \subseteq u_0 \mid \mathsf{Finite}(d) \,\&\, \mathsf{Covers}(d, \mathsf{support}_\Theta) \rangle$

$\langle c_0 \rangle \hookrightarrow T\mathsf{topologicalSpace}_{14} \Rightarrow$ $\mathsf{Covers}(\{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in c_0\}, \mathsf{support}_\Theta)$

EQUAL $\Rightarrow$ $\mathsf{Covers}(u_0, \mathsf{support}_\Theta)$

ELEM $\Rightarrow$ $\mathit{Stat3}: \langle \exists d \subseteq u_0 \mid \mathsf{Finite}(d) \,\&\, \mathsf{Covers}(d, \mathsf{support}_\Theta) \rangle$

$\langle d_0 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat3} \Rightarrow$ $d_0 \subseteq u_0 \,\&\, \mathsf{Finite}(d_0) \,\&\, \mathsf{Covers}(d_0, \mathsf{support}_\Theta)$

$\langle d_0 \rangle \hookrightarrow T\mathsf{topologicalSpace}_{16} \Rightarrow$ $\mathsf{inters}(\{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in d_0\}) = \emptyset$

$\langle d_0 \rangle \hookrightarrow T\mathsf{topologicalSpace}_{15} \Rightarrow$ $d_0 \neq \emptyset$

Loc_def $\Rightarrow$ $\mathit{Stat4}: k_0 = \{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in d_0\}$

EQUAL $\Rightarrow$ $\mathsf{inters}(k_0) = \emptyset$

Suppose $\Rightarrow$ $k_0 = \emptyset$

$\langle b_0 \rangle \hookrightarrow \mathit{Stat4} \Rightarrow$ false; Discharge $\Rightarrow$ $k_0 \neq \emptyset$

-- $d_0 \subseteq u_0$ ed $u_0 \subseteq \mathsf{open}$

$\langle d_0 \rangle \hookrightarrow T\mathsf{topologicalSpace}_{11} \Rightarrow$ $\langle \forall w \in d_0 \mid w \subseteq \mathsf{support}_\Theta \rangle$

$\langle d_0 \rangle \hookrightarrow T\mathsf{topologicalSpace}_{18} \Rightarrow$ $\mathsf{Finite}(\{\mathsf{support}_\Theta \backslash k : k \in d_0\})$

EQUAL $\Rightarrow$ $\mathsf{Finite}(k_0)$

$\langle d_0, u_0\rangle \hookrightarrow T\text{topologicalSpace}_{19} \;\Rightarrow\; \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in d_0\} \subseteq \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in u_0\}$
$\text{EQUAL} \Rightarrow\; k_0 \subseteq \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in u_0\}$
$\text{EQUAL} \Rightarrow\; k_0 \subseteq \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in c_0\}\}$
$\text{SIMPLF} \Rightarrow\; k_0 \subseteq \{\text{support}_\Theta \backslash (\text{support}_\Theta \backslash k) : k \in c_0\}$

-- $c_0 \subseteq \text{closed}_\Theta$

$\langle c_0\rangle \hookrightarrow T\text{topologicalSpace}_{11} \;\Rightarrow\; \langle \forall w \in c_0 \mid w \subseteq \text{support}_\Theta\rangle$
$\langle c_0\rangle \hookrightarrow T\text{topologicalSpace}_{17} \;\Rightarrow\; k_0 \subseteq c_0$

$\langle k_0\rangle \hookrightarrow Stat1 \Rightarrow\; \text{false}; \;$ -

$\text{Discharge} \Rightarrow\; \neg\text{IsCompact}_\Theta(\text{support}_\Theta) \;\&\; Stat5 : \langle \forall c \subseteq \text{closed}_\Theta \mid c \neq \emptyset \;\&\; \text{HasFip}(c) \rightarrow \text{inters}(c) \neq \emptyset\rangle$
$\text{Use\_def}(\text{IsCompact}_\Theta) \Rightarrow\; Stat6 : \neg\langle \forall u \subseteq \text{open} \mid \text{Covers}(u, \text{support}_\Theta) \rightarrow \langle \exists d \subseteq u \mid \text{Finite}(d) \;\&\; \text{Covers}(d, \text{support}_\Theta)\rangle\rangle$
$\langle u_1\rangle \hookrightarrow Stat6 \Rightarrow\; u_1 \subseteq \text{open} \;\&\; \text{Covers}(u_1, \text{support}_\Theta) \;\&\; \neg\langle \exists d \subseteq u_1 \mid \text{Finite}(d) \;\&\; \text{Covers}(d, \text{support}_\Theta)\rangle$

$\text{Loc\_def} \Rightarrow\; Stat7 : c_1 = \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in u_1\}$
$\langle u_1\rangle \hookrightarrow T\text{topologicalSpace}_{12} \;\Rightarrow\; \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in u_1\} \subseteq \text{closed}_\Theta$
$\text{EQUAL} \Rightarrow\; c_1 \subseteq \text{closed}_\Theta$

$\langle u_1\rangle \hookrightarrow T\text{topologicalSpace}_{15} \;\Rightarrow\; u_1 \neq \emptyset$
$\text{Suppose} \Rightarrow\; c_1 = \emptyset$
$\langle b_1\rangle \hookrightarrow Stat7 \Rightarrow\; \text{false}; \quad \text{Discharge} \Rightarrow\; c_1 \neq \emptyset$

$\langle c_1\rangle \hookrightarrow Stat5 \Rightarrow\; \text{HasFip}(c_1) \rightarrow \text{inters}(c_1) \neq \emptyset$
$\text{ELEM} \Rightarrow\; \text{inters}(c_1) = \emptyset \rightarrow \neg\text{HasFip}(c_1)$
$\langle u_1\rangle \hookrightarrow T\text{topologicalSpace}_{16} \;\Rightarrow\; \text{inters}(\{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in u_1\}) = \emptyset$
$\text{EQUAL} \Rightarrow\; \neg\text{HasFip}(c_1)$

$\text{Use\_def}(\text{HasFip}) \Rightarrow\; Stat8 : \{x \subseteq c_1 \mid \text{Finite}(x) \;\&\; x \neq \emptyset \;\&\; \text{inters}(x) = \emptyset\} \neq \emptyset$
$\text{ELEM} \Rightarrow\; Stat9 : \neg\langle \exists d \subseteq u_1 \mid \text{Finite}(d) \;\&\; \text{Covers}(d, \text{support}_\Theta)\rangle$
$\langle x_1\rangle \hookrightarrow Stat8 \Rightarrow\; x_1 \subseteq c_1 \;\&\; \text{Finite}(x_1) \;\&\; x_1 \neq \emptyset \;\&\; \text{inters}(x_1) = \emptyset$

$\text{Loc\_def} \Rightarrow\; Stat10 : d_1 = \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in x_1\}$

$\text{ELEM} \Rightarrow\; x_1 \subseteq c_1$
$\langle x_1, c_1\rangle \hookrightarrow T\text{topologicalSpace}_{19} \;\Rightarrow\; \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in x_1\} \subseteq \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in c_1\}$
$\text{EQUAL} \Rightarrow\; d_1 \subseteq \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in u_1\}\}$
$\text{SIMPLF} \Rightarrow\; \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in u_1\}\} = \{\text{support}_\Theta \backslash (\text{support}_\Theta \backslash k) : k \in u_1\}$

-- $u_1 \subseteq$ open

$\langle u_1 \rangle \hookrightarrow T$topologicalSpace$_{11}$ $\Rightarrow$ $\langle \forall w \in u_1 \mid w \subseteq \text{support}_\Theta \rangle$
$\langle u_1 \rangle \hookrightarrow T$topologicalSpace$_{17}$ $\Rightarrow$ $\{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in \{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in u_1\}\} = u_1$
EQUAL $\Rightarrow$ $d_1 \subseteq u_1$

-- $c_1 \subseteq \text{closed}_\Theta$ $x_1 \subseteq c_1$

$\langle x_1 \rangle \hookrightarrow T$topologicalSpace$_{11}$ $\Rightarrow$ $\langle \forall w \in x_1 \mid w \subseteq \text{support}_\Theta \rangle$
$\langle x_1 \rangle \hookrightarrow T$topologicalSpace$_{18}$ $\Rightarrow$ $\text{Finite}(\{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in x_1\})$
EQUAL $\Rightarrow$ $\text{Finite}(d_1)$

$\langle x_1 \rangle \hookrightarrow T$topologicalSpace$_{14}$ $\Rightarrow$ $\text{Covers}(\{\text{support}_\Theta \backslash k : k \in x_1\}, \text{support}_\Theta)$
EQUAL $\Rightarrow$ $\text{Covers}(d_1, \text{support}_\Theta)$

$\langle d_1 \rangle \hookrightarrow$ *Stat9* $\Rightarrow$ false; -

Discharge $\Rightarrow$ QED
ENTER_THEORY Set_theory

DISPLAY topologicalSpace

THEORY topologicalSpace(open)
$\{x \subseteq \text{open} \mid \bigcup x \notin \text{open}\} = \emptyset$
$\langle \forall x \in \text{open}, y \in \text{open}, u \in x \cap y, \exists z \in \text{open} \mid u \in z \,\&\, z \subseteq x \cap y \rangle$
$\bigcup \text{open} \neq \emptyset$
$\Rightarrow$
$\text{support}_\Theta \neq \emptyset$
END topologicalSpace