

Projekt 2 na M'AI

Autorzy: Piotr Ginalski, Jakub Sęk, Łukasz Wodnicki

Naszym zadaniem jest napisanie funkcji znajdującej minimum funkcji. Jednocześnie poszukujemy metod, które nie zakładają różniczkowalności naszej funkcji oraz mogące mieć wiele minimum lokalnych. W szczególności jako test bierzemy funkcję

$$L^k(x) = x^2(\sin kx + 2).$$

Najpierw dokonamy wizualizacji naszej funkcji.

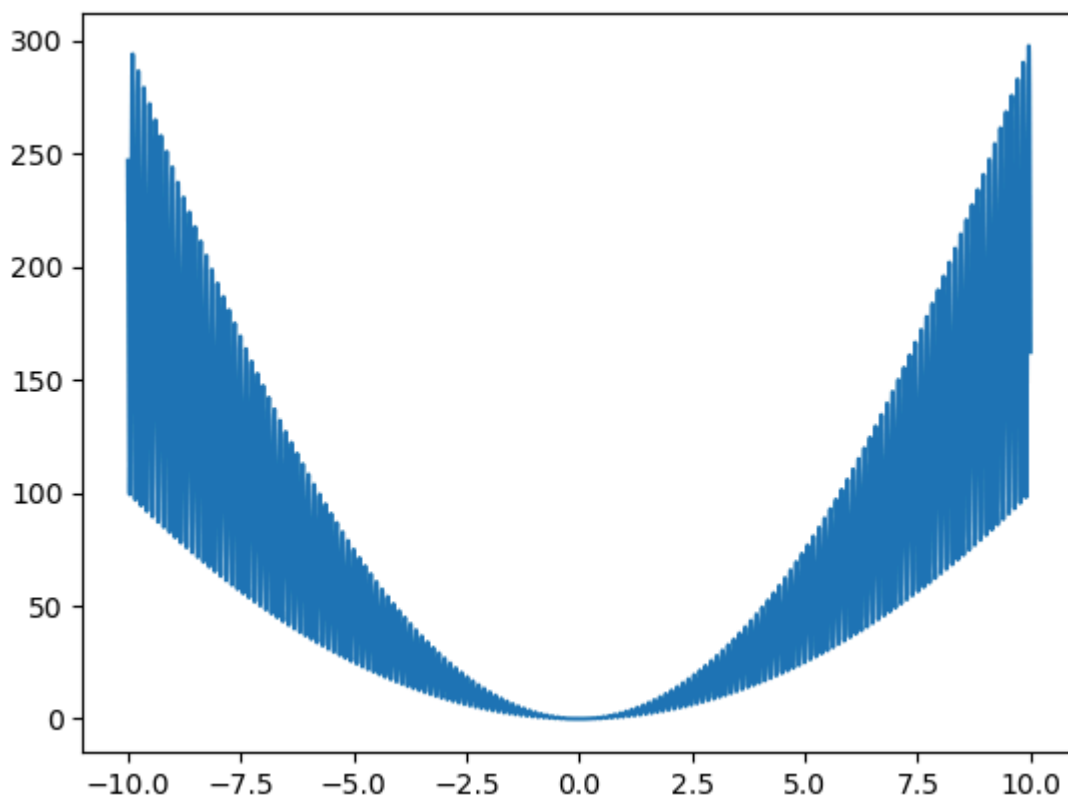
```
In [1]: import matplotlib.pyplot as plt #użyjemy tylko na potrzeby wizualizacji, podobnie pyplota
import random
import math
```

```
# Definicja funkcji celu
def L(k, x):
    return x * x * (math.sin(k * x) + 2)
```

```
In [2]: number_of_points = 10000
k = 50

x_list = [-10 + 20*k/number_of_points for k in range(0, number_of_points)]
y_list = [L(k, x) for x in x_list]

plt.plot(x_list, y_list)
plt.show()
```



Jak widzimy nasza funkcja ma wiele minimów lokalnych. Przejdźmy do opisu metody, której użyjemy do znalezienia minimum tej funkcji.

Algorytm Symulowanego Wyżarzania

Niech $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją, której minimum chcemy znaleźć.

1. Inicjalizacja

- Wybierz początkowe rozwiązanie $x^{(0)} \in X$ (np. losowo).
- Ustaw początkową temperaturę $T_0 > 0$.
- Zdefiniuj schemat schładzania, np. wykładniczy:

$$T_{k+1} = \alpha T_k, \quad \alpha \in (0, 1).$$

2. Główna pętla

Powtarzaj dla $k = 0, 1, 2, \dots$, aż do spełnienia warunku stopu:

1. Generacja sąsiada

$$x' = x^{(k)} + \delta, \quad \delta \sim \mathcal{U}(-\varepsilon, \varepsilon).$$

2. Ocena różnicy energii

$$\Delta = f(x') - f(x^{(k)}).$$

3. Kryterium akceptacji

$$x^{(k+1)} = \begin{cases} x', & \text{jeśli } \Delta \leq 0, \\ x' & \text{z prawdopodobieństwem } \exp\left(-\frac{\Delta}{T_k}\right), \\ x^{(k)}, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

4. Schładzanie

$$T_{k+1} = \alpha T_k.$$

5. Sprawdzenie warunku stopu

Przykładowe warunki:

- k osiągnęło maksymalną liczbę iteracji,
- T_k spadło poniżej zadanej minimalnej wartości,
- przez ostatnie ℓ iteracji nie było akceptacji lepszego rozwiązania.

3. Zwrócenie wyniku

Po zakończeniu pętli zwróć najlepsze x znalezione w trakcie, tzn.

$$x^* = \arg \min_{0 \leq i \leq k} f(x^{(i)}).$$

Przejdźmy do samego kodu. Zamierzamy szukać minimum, póki nie znajdziemy czegoś mniejszego niż 10^{-6} (minimum to 0). Następnie zwrócimy liczbę kroków potrzebną do znalezienia tego minimum (jeśli zostało ono osiągnięte) lub 50000 jeśli to się nie stało. Definiujemy nieco inny schemat schładzania -- domyślnie na danej temperaturze wykonujemy 200 kroków (czyli 200 losowań o danym prawdopodobieństwie przejścia). Dodatkowo aktualna temperatura będzie określała maksymalną odległość sąsiada.

```
In [3]: def sa_steps(k, init_temp=2.0, n = 50000, alpha=0.85, steps_per_temp=200, threshold=1e-6):
    x = random.uniform(-10, 10)
    best_val = L(k, x)
    T = init_temp
    steps = 0 #inicjalizacja
    while n > steps: #naszym kryterium stopu jest maksymalna liczba kroków lub próg
        for _ in range(steps_per_temp):
            dx = random.uniform(-1, 1) * T
            x_new = min(max(x + dx, -10), 10) #generacja sąsiada
            v_new = L(k, x_new)
            steps += 1 # każdy krok = jedna ewaluacja nowego x
            if v_new < best_val:
                best_val = v_new
            if v_new < threshold: # warunek stopu, minimum jest w 0
                return x, steps
            v_curr = L(k, x)
            if v_new < v_curr or random.random() < math.exp((v_curr - v_new) / T):
                x = x_new
            T *= alpha

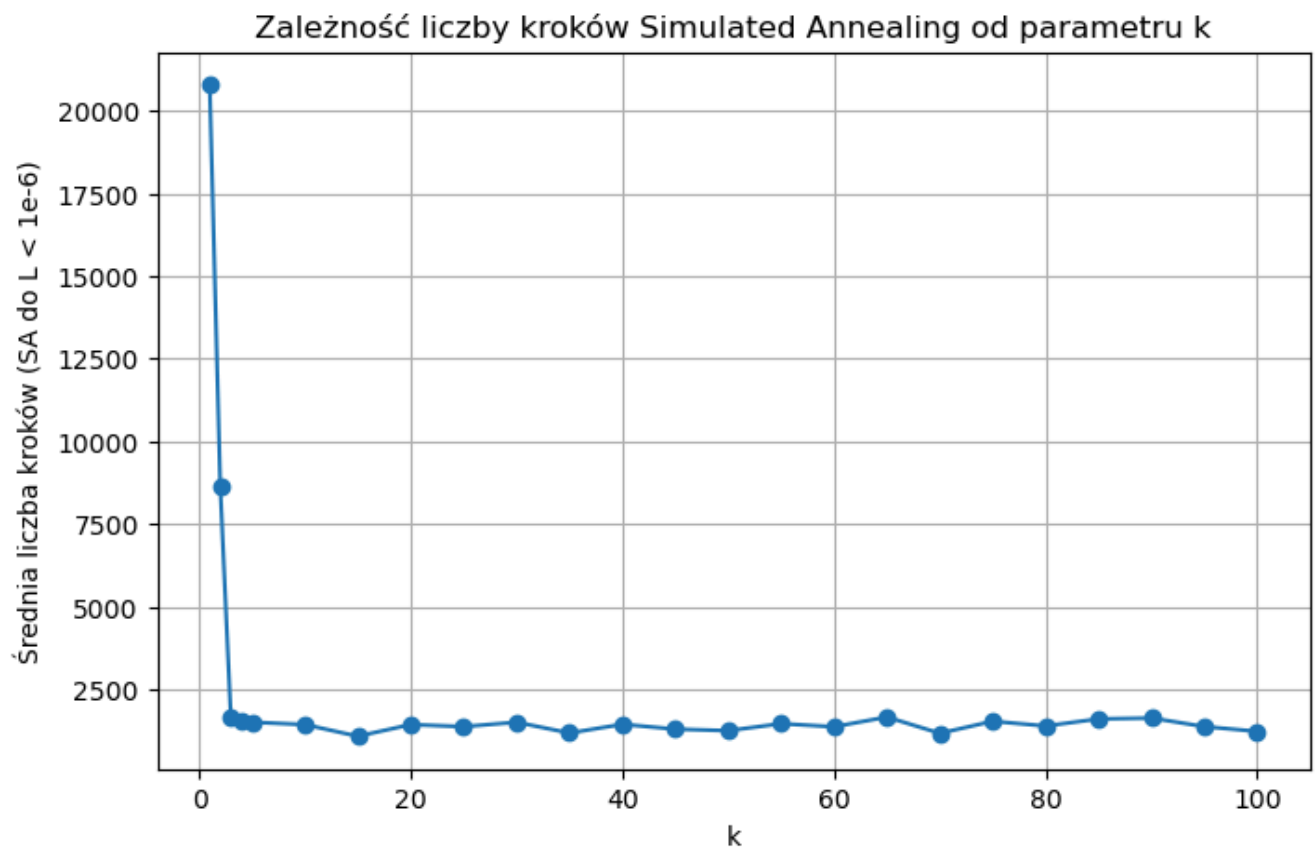
    return x, steps
```

I ostatecznie, możemy zbadać zależność N vs K.

```
In [4]: random.seed(42)
k_vals = [1, 2, 3, 4] + [5*k for k in range(1, 21)]
trials = 20

# Obliczanie średniej liczby kroków dla każdego k
avg_steps = []
for k in k_vals:
    mean = 0
    steps_list = [sa_steps(k)[1] for _ in range(trials)]
    for value in steps_list:
        mean += value
    mean = mean / trials
    avg_steps.append(mean)

# Rysowanie wykresu
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(k_vals, avg_steps, marker='o', linestyle='--')
plt.xlabel('k')
plt.ylabel('Średnia liczba kroków (SA do L < 1e-6)')
plt.title('Zależność liczby kroków Simulated Annealing od parametru k')
plt.grid(True)
plt.show()
```



```
In [5]: df = dict(zip(k_vals, avg_steps))
```

```
df
```

```
Out[5]: {1: 20781.65,
 2: 8621.9,
 3: 1640.25,
 4: 1545.55,
 5: 1509.8,
 10: 1436.7,
 15: 1084.45,
 20: 1436.95,
 25: 1375.85,
 30: 1508.0,
 35: 1182.45,
 40: 1445.05,
 45: 1299.55,
 50: 1253.5,
 55: 1464.65,
 60: 1371.4,
 65: 1664.95,
 70: 1173.6,
 75: 1537.05,
 80: 1394.95,
 85: 1607.95,
 90: 1634.6,
 95: 1375.65,
 100: 1231.6}
```

Podsumowanie

Ostatecznie, możemy odnotować zbieżność naszej metody dla $K > 3$ w około stałej liczbie kroków. Warto jeszcze zestawzić naszą metodę z naiwną metodą Monte Carlo.

```

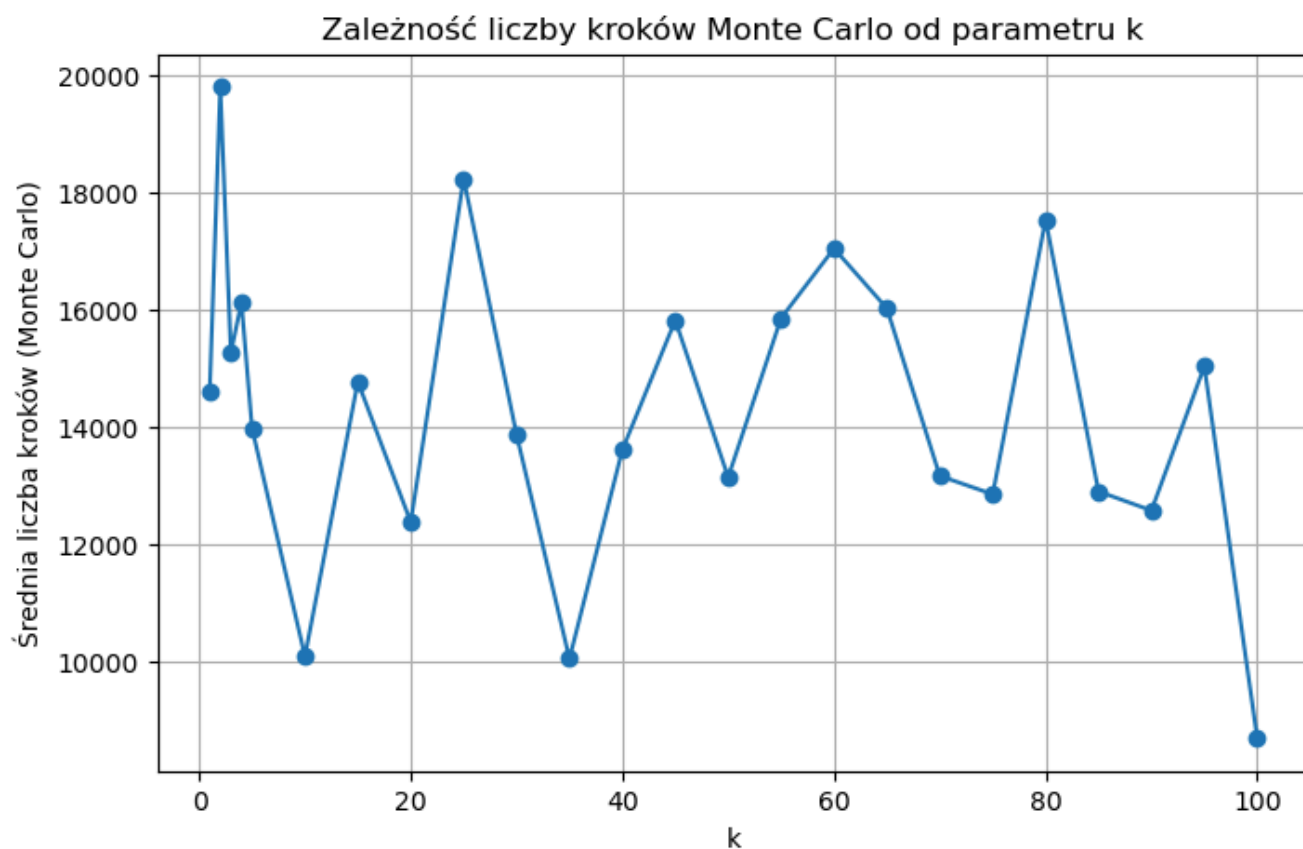
In [6]: def monte_carlo(k, n = 50000, threshold = 1e-6):
        steps = 0
        for _ in range(n):
            steps += 1
            x = random.uniform(-10, 10)
            if L(k,x) < threshold:
                return x, steps
        return x, steps

random.seed(42)
k_vals = [1, 2, 3, 4] + [5*k for k in range(1, 21)]
trials = 20

# Obliczanie średniej liczby kroków dla każdego k
avg_steps = []
for k in k_vals:
    mean = 0
    steps_list = [monte_carlo(k)[1] for _ in range(trials)]
    for value in steps_list:
        mean += value
    mean = mean / trials
    avg_steps.append(mean)

# Rysowanie wykresu
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(k_vals, avg_steps, marker='o', linestyle='-')
plt.xlabel('k')
plt.ylabel('Średnia liczba kroków (Monte Carlo)')
plt.title('Zależność liczby kroków Monte Carlo od parametru k')
plt.grid(True)
plt.show()

```



```

In [7]: df = dict(zip(k_vals, avg_steps))

df

```

```
Out[7]: {1: 14608.35,  
        2: 19811.9,  
        3: 15267.2,  
        4: 16130.25,  
        5: 13981.15,  
        10: 10084.35,  
        15: 14773.65,  
        20: 12376.9,  
        25: 18242.4,  
        30: 13871.4,  
        35: 10043.1,  
        40: 13611.0,  
        45: 15823.25,  
        50: 13143.25,  
        55: 15859.2,  
        60: 17050.2,  
        65: 16026.1,  
        70: 13165.0,  
        75: 12851.75,  
        80: 17540.45,  
        85: 12900.2,  
        90: 12574.2,  
        95: 15035.95,  
        100: 8684.35}
```

Zatem obserwujemy istotną poprawę w zmniejszeniu ilości próbkowań z funkcji!