

Método de Diseño-Modelo Alternativo

Gina Torres Guerrero.

26 de noviembre de 2014

1. Difeomorfismo

El modelo alternativo en lazo cerrado que también representa la dinámica de un sistema LTI en dominio discreto con retardo se presenta a través de la siguiente ecuación:

$$x(kh + h) = \hat{\Phi}_{cl}(h, \tau)x(kh) \quad (1)$$

con $\hat{\Phi}_{cl} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ no singular, [1], [2].

Como se estudió en [1] la matriz de lazo cerrado del modelo alternativo (1), contiene n de los $n + 1$ valores propios del sistema del modelo ampliado, [3], y además los polos son complejos no conjugados. La misma matriz de lazo cerrado $\hat{\Phi}_{cl}$ está representada por elementos en el dominio complejo \mathbb{C} , lo cual no es usual en las representaciones de sistemas de control en dominio discreto. Dado que el modelo alternativo proviene de la proyección del modelo ampliado, sabemos que la parte compleja de los elementos de la matriz de lazo cerrado está relacionada implícitamente con el retardo producido, por lo cual este reporte presenta una aproximación de cómo el retardo se relaciona con los polos del sistema y de esta manera llegar a plantear un método de diseño en el que además de elegir los polos del sistema también sea posible seleccionar el retardo deseado, lo cual es novedoso, pues esto significa que se utilizaría tal parámetro con la idea de intentar mejorar el comportamiento del sistema de control, o tan solo como nuevo elemento de diseño para sistemas de control en red con retardos.

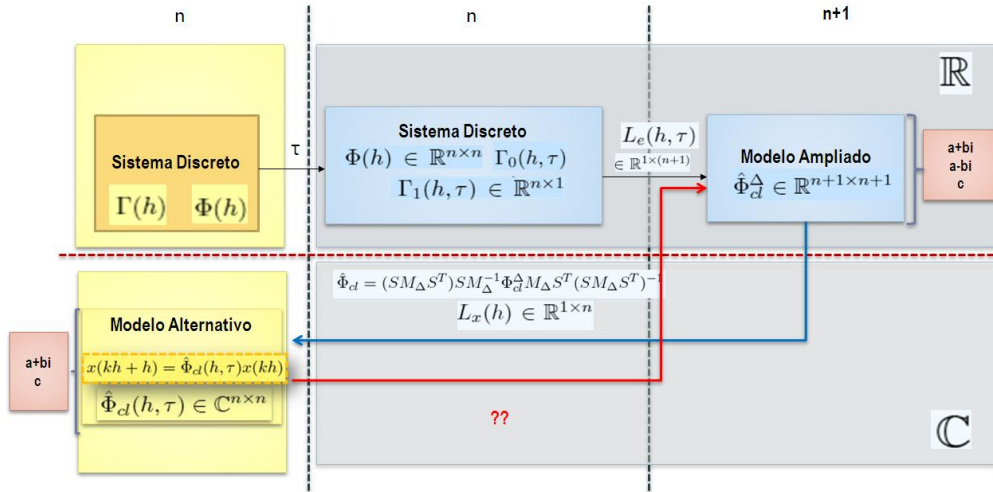


Figura 1: Diagrama Modelo Alternativo-Modelo Ampliado

De acuerdo al diagrama de la Figura 1, partimos de un sistema discreto sin retardo, representado por las matrices $\Phi(h) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma(h) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, dado un retardo ocasionado por ejemplo por el cómputo y transmisión de la ley de control, debemos ampliar el sistema con una variable más la cual representará la ley de control anterior, [3], con el fin de representar tal retardo.

$$\begin{pmatrix} x(kh + h) \\ z(kh + h) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Phi(h) & \Gamma_1(h, \tau) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Phi_{\Delta}} \begin{pmatrix} x(kh) \\ z(kh) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \Gamma_0(h, \tau) \\ I \end{pmatrix}}_{\Gamma_{\Delta}} u(kh) \quad (2)$$

Con el fin de controlar tal sistema se debe considerar una ley de control, la cual contiene además de los estados originales la nueva variable ocasionada por el retardo; la ley de control con ganancia $L_e(h, \tau) \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$ a utilizar se puede diseñar a través de cualquier método de control. Dando lugar a un sistema discreto en lazo cerrado como el siguiente:

$$\begin{pmatrix} x(kh + h) \\ z(kh + h) \end{pmatrix} = \Phi_{cl}^\Delta(h, \tau) \begin{pmatrix} x(kh) \\ z(kh) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Con matriz de lazo cerrado $\Phi_{cl}^\Delta(h, \tau)$. Ésta metodología es la más utilizada para el estudio y análisis de sistemas discretos de control en red con retardos.

Para analizar el origen del modelo alternativo y como se vió en [1], la ley de control utilizada para realimentar un sistema discreto con retardo (menor que el periodo de muestreo) representado por:

$$x(kh + h) = \Phi(h)x(kh) + \Gamma_0(h, \tau)u(kh)\Gamma_1(h, \tau)u(kh - h) \quad (4)$$

supone solo los estados originales del sistema, la cual es:

$$u(kh) = L(h)x(kh) \quad \forall t \in [kh, kh + h) \quad (5)$$

Lo cual partiendo del modelo ampliado supone que la ley de control que nos llevaría al mismo modelo tiene una ganancia de la forma:

$$L_e(h, \tau) = (L_x(h) \quad 0_{1 \times 1}) \quad (6)$$

Esta ley de control da lugar a encontrar el nuevo modelo, como el mostrado en (1), resultando ser una proyección del modelo ampliado, tal proyección también fue analizada y encontrada en [1] y [2].

$$\hat{\Phi}_{cl} = S\Phi_{cl}^\Delta M_\Delta S^T (SM_\Delta S^T)^{-1} \quad (7)$$

Dado que sabemos como llegar del modelo ampliado al modelo alternativo, como se ve en la Figura 1.. Ahora la pregunta que debemos responder es: ¿Cómo podemos pasar del modelo alternativo al modelo ampliado?, (ver Figura 2.).

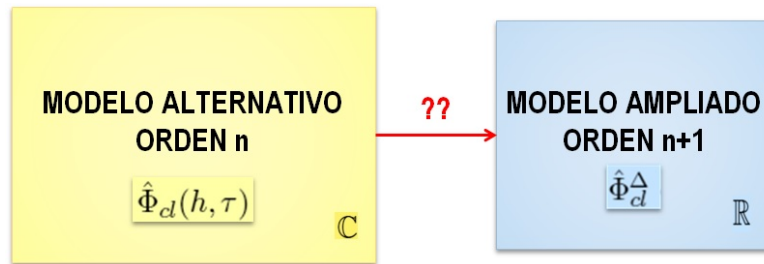


Figura 2: Del Modelo Alternativo al Modelo Ampliado

Ésta pregunta nos lleva a plantearnos de nuevo: De qué forma se relaciona el retardo τ con la parte compleja de los valores propios del modelo ampliado?. Su respuesta nos permitiría determinar si es posible usar tal elemento como parámetro de diseño. Es decir que en últimas se desea saber la dependencia de τ respecto de los polos.

$$\tau = f(\text{polos}) \quad (8)$$

Condiciones de existencia Ya que para llegar al modelo alternativo hemos supuesto desde el modelo ampliado que la componente de la ganancia para la ley de control anterior es cero, (30), se necesita establecer ciertas condiciones de existencia, para saber que para todo:

$$L_e(h, \tau) = \begin{pmatrix} L_x(h) & 0_{1 \times 1} \end{pmatrix}$$

existe realmente una solución que nos permita llegar a obtener el retraso τ . Para ello se analizan los difeomorfismos entre los componentes de tal matriz de ganancias dada por (6) y el retraso τ :

$$f : (L_e(h, \tau)) \rightarrow \tau \quad (9)$$

Por definición un difeomorfismo: Sean A y B conjuntos abiertos de \mathbb{R}^N y f una aplicación de A en B. Se dice que una aplicación $f : A \rightarrow B$ es un difeomorfismo, aplicación regular o cambio de variable si f es biyectiva y tanto f como su inversa f^{-1} son diferenciables. Entonces $J_f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$.

Para analizar los difeomorfismos entre los elementos de la matriz de ganancias representada por (6) y el retraso τ , lo que revisará es si la matriz jacobiana de la matriz tiene determinante igual a 0.

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\det J_f = 0 \quad (11)$$

Lo que nos da como resultado es: si dado una ley de control como (30), buscamos para que valores de $L_e(h, \tau)$ cuyos elementos son $[l_1, l_2, \dots, l_n, l_{n+1}]$ existe solución para el retraso τ cuando el elemento $l_{n+1} = 0$.

Por otro lado la función f para el análisis del difeomorfismo viene dada mediante el diseño de una ley de control por realimentación de estados diseñada por algún método, el cual puede ser el método de la fórmula de Ackermann que veremos a continuación.

2. Fórmula de Ackermann modificada

Para cualquier n que representa el número de estados del sistema ampliado, ecuación (2), en nuestro caso en particular, la fórmula de Ackermann establece que la matriz de ganancia de realimentación de estados está dada por:

$$L_e(h, \tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} C_o^{-1} \phi(\Phi_\Delta) \quad (12)$$

donde la matrix C_o es la matriz de controlabilidad del sistema, la cual es:

$$C_o = \begin{pmatrix} \Phi_\Delta & \Phi_\Delta \Gamma_\Delta & \Phi_\Delta^2 \Gamma_\Delta & \dots & \Phi_\Delta^{n-1} \Gamma_\Delta \end{pmatrix} \quad (13)$$

y $\phi(\Phi_\Delta)$ es el polinomio característico deseado evaluado en Φ_Δ :

$$\phi(\Phi_\Delta) = \Phi_\Delta^n + \alpha_1 \Phi_\Delta^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \Phi_\Delta + \alpha_n I \quad (14)$$

donde α_n son los coeficientes del polinomio característico deseado, es decir el polinomio característico de los polos deseados.

Una forma generalizada de la Fórmula de Ackermann es la siguiente fórmula en la que se determina la inversa de la Matriz de Controlabilidad definida en (13), a través del teorema de *Cayley-Hamilton*, en términos de su determinante, sus trazas y potencias:

$$L_e(h, \tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\det(C_o)} \sum_{s=0}^{n-1} C_o^s \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}} \prod_{l=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k_l+1}}{l^{k_l} k_l!} \text{tr}(C_o^l)^{k_l} \right) \phi(\Phi_\Delta) \quad (15)$$

donde n es la dimensión de la matriz de controlabilidad C_o , y la suma se toma desde s y todos los conjuntos de todos los $k_l \geq 0$ que satisfacen la ecuación lineal diofántica.

$$s + \sum_{l=1}^{n-1} l k_l = n - 1. \quad (16)$$

Al analizar la relación entre los polos deseados y la matriz de ganancias de realimentación $L_e(h, \tau)$ del sistema ampliado (2), teniendo en cuenta que para nuestro nuevo modelo la componente $n + 1$ debido al retardo de la ganancia es 0, $l_{n+1} = 0$, ecuación (6); podremos obtener también una relación entre el retardo del sistema, τ , y los polos deseados.

Entonces de la ecuación (12), teniendo en cuenta (6) tenemos que:

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} C_o^{-1} \phi(\Phi_\Delta) \quad (17)$$

y para obtener la componente $n + 1$ de la matriz de ganancias $L_e(h, \tau)$ definida en (17) que dará lugar a encontrar una relación entre los polos y el retardo del sistema τ , debemos multiplicar por una vector fila para extraer tal componente deseada:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} C_o^{-1} \phi(\Phi_\Delta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Al resolver (18) encontraremos finalmente en función de los polos deseados $\tau(\text{polos})$

A continuación se verá a través de un ejemplo los contenidos aquí expuestos.

2.1. Ejemplo

La ecuación de la dinámica continua del doble integrador, ilustrado en la Figura 3., está descrita por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t - \tau) \quad (19)$$

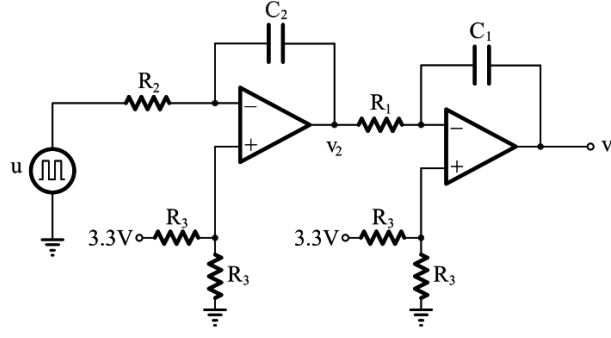


Figura 3: Circuito del Doble Integrador

El sistema en tiempo discreto de acuerdo a la ecuación (2), se define en términos del retraso, τ , como:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{\tau^2}{2} - \tau(\tau-1) \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} + \quad (20)$$

1. **Difeomorfismo: Existencia de solución para el retraso, τ , cuando $L_e(h, \tau) = \begin{pmatrix} L_x(h) & 0_{1 \times 1} \end{pmatrix}$**

En este caso se probará si existe solución para cualquier τ , cuando el controlador con el cual se pretende realimentar el sistema, está definido por la ecuación (6) mediante el cual llegamos al nuevo modelo dado por la ecuación (1).

Para ello entonces se verificará el difeomorfismo entre los elementos de la matriz de ganancias (6) y el retraso, τ .

Entonces, primero se obtiene el sistema del doble integrador en lazo cerrado del sistema dado un controlador que en este caso será:

$$L_e(h, \tau) = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

y definido por (3), cuya matriz de lazo cerrado en términos del retardo τ es:

$$\Phi_{cl}^{\Delta} = \begin{pmatrix} (l_1 * \frac{(\tau-1)^2}{2}) + 1 & (l_2 * \frac{(\tau-1)^2}{2}) + 1 & \frac{\tau^2}{2} - \tau * (\tau-1) \\ -l_1 * (\tau-1) & 1 - l_2 * (\tau-1) & \tau \\ l_1 & l_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

El polinomio característico del sistema en lazo cerrado definido por la matriz de la ecuación (22) es:

$$s^3 + (l_1\tau - l_2 - 0,5l_1 + l_2\tau - 0,5l_1\tau^2 - 2,0)s^2 + (l_2 - 0,5l_1 - 1l_1\tau - 2l_2\tau + l_1\tau^2 + 1)s + (l_2\tau - 0,5l_1\tau^2) \quad (23)$$

Ya que se requiere saber si dada una ganancia $L_e(h, \tau)$ de la forma mostrada en (21) existe solución y puedo encontrar un retraso τ teniendo en cuenta que $L_e(h, \tau)$ tiene tal forma

característica. Lo que es lo mismo encontrar un difeomorfismo entre la ganancia $L_e(h, \tau)$ y el retraso τ del sistema. Se debe analizar en que punto la matriz jacobiana tiene determinante igual a 0. Entonces, se calcula la matriz Jacobiana.

$$J = \begin{pmatrix} -0,5\tau^2 + \tau - 0,5 & \tau - 1 & l_1 + l_2 - 1l_1\tau \\ \tau^2 - \tau - 0,5 & 1,0 - 2\tau & 2l_1\tau - 2,0l_2 - 1,0l_1 \\ -0,5\tau^2 & \tau & l_2 - l_1\tau \end{pmatrix} \quad (24)$$

El determinante de la matriz Jacobiana (24) dá como resultado:

$$\det J_f = l_2 \quad (25)$$

Es decir que si $L_e h, \tau$ tiene la forma:

$$L_e(h, \tau) = (l_1 \quad 0 \quad 0)$$

con $l_2 = 0$, no hay solución para el retraso τ .

2. Fórmula de Ackermann Modificada: Solución para el retardo τ dado $L_e(h, \tau)$.

Ya que se conoce que es posible encontrar un retraso tal que el sistema sea realimentado a través de una matriz de ganancias de la forma expuesta en la ecuación (6), se encontrará tal retraso, τ , a través de la fórmula de ackermann modificada, expuesto en 2.

Entonces, supongamos ahora el sistema del doble integrador definido por el espacio de estados de la ecuación 19:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t - \tau)$$

. donde existe un retardo en la ley de control, τ . Entonces para incluir el retardo en el análisis del sistema el sistema se amplía en el dominio discreto, como en (2), lo cual da lugar al sistema ampliado en el espacio de estados. Si el tiempo de muestreo es $h = 1s$ tenemos que:

$$\begin{pmatrix} x(kh + h) \\ z(kh + h) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{\tau^2}{2} - \tau(\tau - 1) \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Phi_\Delta} \begin{pmatrix} x(kh) \\ z(kh) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{(\tau-1)^2}{2} \\ 1 - \tau \\ 1 \end{pmatrix}}_{\Gamma_\Delta} u(kh) \quad (26)$$

Se desea aplicar una ley de control al sistema del doble integrador presentado en la ecuación anterior (26), a través de una ganancia por realimentación de estados (6), para lo cual se utilizará el método de la fórmula de ackermann, como en la ecuación (12). Para ello se deben definir los polos deseados del sistema, los cuales para este caso son por ejemplo:

$$polos = (0,3 - 0,5i \quad 0,3 + 0,5i \quad 0,4) \quad (27)$$

Teniendo en cuenta la fórmula definida en la ecuación (12)

$$L_e(h, \tau) = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 1) C_o^{-1} \phi(\Phi_\Delta)$$

Tenemos que la matriz de controlabilidad definida por (13), es para este caso:

$$C_o = \begin{pmatrix} 0,5(\tau - 1,0)^2 & 1,5 - 1,0\tau & 2,5 - 1,0\tau \\ 1,0 - 1,0\tau & 1,0 & 1,0 \\ 1,0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

El polinomio característico evaluado en la matriz ampliada Φ_Δ es:

$$\phi(\Phi_\Delta) = \begin{pmatrix} 0,444 & 1,58 & -\tau(0,29\tau - 1,58) \\ 0 & 0,444 & 0,58\tau \\ 0 & 0 & -0,136 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Ambas matrices (29) y (28) dan lugar a una ley de control definida por la ecuación de la fórmula de ackermann, (12) y en términos de el retraso, τ :

$$L_e(h, \tau) = (0,444 \quad 0,444\tau + 0,914 \quad 0,222\tau^2 + 0,914\tau - 0,136) \quad (30)$$

Luego, dado que el sistema ampliado (26) se ha realimentado con una ley de control de la forma (6), el cual se ha obtenido mediante la fórmula de ackermann como en (30), podremos obtener el valor del retraso para el cual dan lugar los polos deseados del sistema; a través de la última componente de la matriz de ganancias que es igual a 0, $l_{n+1} = 0$. Así al resolver de la ecuación (18) se tiene que:

$$\tau = 0,1438s \quad (31)$$

3. CONCLUSIONES

Este reporte muestra un método de diseño que permite encontrar el retraso de un sistema discreto dado los polos deseados, entonces el parámetro τ es ahora parte de los elementos de diseño del sistema. Para ello primero se necesitan saber ciertas condiciones de existencia de solución para el retraso τ . Para esto se prueba si para un sistema discreto en el espacio de estado, controlado a través de una realimentación de estados como la vista en (6) es posible encontrar una solución para τ , lo cual se demuestra mediante el difeomorfismo existente entre los mismos elementos de la matriz de realimentación (6) y el retraso τ . Del ejemplo anterior del sistema doble integrador se probó que existe una solución para el retraso τ siempre y cuando la ley de realimentación de estados no tenga la forma:

$$L_e(h, \tau) = (l_1 \quad 0 \quad 0) \quad (32)$$

Es decir existe solución para el retraso τ siempre y cuando el elemento l_n de la matriz de ganancias sea diferente de 0, $l_2 \neq 0$.

Luego se estableció una metodología de diseño, obteniendo una fórmula derivada de la fórmula de ackermann que se ha llamado *Fórmula de Ackermann Modificada* de la cual se puede encontrar un retraso τ y el controlador para cierto sistema discreto ampliado y considerando que tal controlador tiene la forma establecida en (6). En el caso del ejemplo, el retardo τ dados los polos seleccionados en (27) y una realimentación para el sistema discreto ampliado como en (30) es de $\tau = 0,1438s$.

4. TRABAJOS FUTUROS

- Relacionar estos resultados con el modelo complejo *SOLUCIÓN* Podría probar cómo se representa en términos de k y τ el nuevo modelo a partir del modelo ampliado.
- Probar condiciones de existencia de solución para el retraso τ cuando la ley de control por realimentación de estados $L_e(h, \tau)$ toma una forma diferente, por ejemplo, ahora $L_e(h, \tau)$ tome la forma:

$$L_e(h, \tau) = (l_1 \quad 0 \quad l_n \quad \dots \quad l_{n+1}) \quad (33)$$

SOLUCIÓN Esta respuesta fue obtenida evaluando cuando los diferentes elementos de la matriz de realimentación (30) se hacían 0 para obtener el retraso τ . En el ejemplo del doble integrador lo que se encontró fue que cuando el elemento $l_2 = 0$, dando lugar a una matriz de ganancias del tipo:

$$L_e(h, \tau) = (l_1 \quad 0 \quad l_3) \quad (34)$$

diferente de la evaluada en (30) para la que se encontró un retardo de $\tau = 0,1438s$, el retardo es distinto y nos arroja un valor de $\tau = -0,1896s$ (“adelanto?”). La pregunta que surge y a ser evaluada es ¿si debería dar el mismo retraso?, se esperaría que sí. Y la segunda pregunta ¿es coherente utilizar una ley de control en la que no se consideren los estados originales del sistema? Se evaluará otro ejemplo para analizar ambas preguntas.

5. APÉNDICE

A continuación mostramos el código utilizado para el ejemplo.

1. Calculamos el difeomorfismo entre ley de control a utilizar (6) y el retraso τ . El script del código mostrado es jacobiano.m

```
close all
clear all
syms tau
digits(4)
% Planta del Doble Integrador
A=[0 1;0 0]
B=[0;1]
C=[1 0]
D=[0]
%Discretización
h=1
n=size(A,2)
[phi,gamma]=c2d(A,B,h)

%Modelo ampliado
[A1 B1]=c2d(A,B,tau)
[A2 B2]=c2d(A,B,h-tau)
phiamp=[A1*A2 A2*B1;zeros(1,size(A,2)) 0];
gammaamp=[B2;1];
Cc=[1 zeros(1,n)];
Dd=0;
%Construyendo la K dependiendo de la dimensión de la variable
na=size(phiamp,2)
K=[]
for i=1:na-1
    dat_txt{i} = ['K' num2str(i)]
```

```

end
ks=sym(dat.txt)
K=[ks,0]
phi_cl=phiamp+gammaamp*K
%1. Polinomio característico
%pol=poly(phi_cl) % No funciona para simbólico
syms x
I=eye(na)
pol=(x*I-phi_cl)
dpol=vpa(det(pol))
c=simplify(dpol,'Steps',30) %Polinomio característico
% 2. Sacar los coeficientes que dependen de K1,K2,TAU
[ux,t] = coeffs(c,x) %Coeficientes del polinomio característico
size(ux)
%3. Jacobiano
J=jacobian(ux(2:na+1),[K(1:n),tau])
%4. Difeomorfismo
difeo=simplify(vpa(det(J)))
%*En el caso del ejemplo cuando K2=0 no hay solución para tau, es decir no
%es posible encontrar tau si [K2,K3]=[0,0]. En conclusión es un difeomorfismo para todos
%los valores de K1,K2,K3, excepto para cuando K2=0

```

2. Calculamos el retraso τ a través de la Fórmula de Ackermann Modificada, presentada en la sección 2., escogiendo los polos deseados.

El siguiente script es una función que permite realizar este cálculo, gacker.m.

```

function [k,tau,px] = gacker(A,B,h,polos)
syms k1 k2 tau
global A
global B
global h
global polos
%1. Discretización
h=1
n=size(A,2)
[phi,gamma]=c2d(A,B,h)
%Lo=place(phi,gamma,p);
%Modelo ampliado
[A1 B1]=c2d(A,B,tau)
[A2 B2]=c2d(A,B,h-tau)
phi=A1*A2
gamma0=B2
gamma1=A2*B1

phiamp=[phi gamma1;zeros(1,size(A,2)) 0];
gammaamp=[gamma0;1];
Cc=[1 zeros(1,n)];
Dd=0;
%2. Ackermann
%K=[0 0...1]*Co^(-1)*P(phiamp)*[0;0;...;1]
%donde: P(phiamp) es el polinomio deseado evaluado en la matriz phiamp
%2a. Controlability Matrix
%C=[gammaamp phiamp+gammaamp phiamp^2*gammaamp] %Solo para orden 3
%Dimension checking
na = size(phiamp,1);
nu = size(gammaamp,2);
%co = zeros(n,n*nu);
co(:,1:nu) = vpa(gammaamp);
for k=1:na-1
    co(:,k*nu+1:(k+1)*nu) =phiamp*co(:,(k-1)*nu+1:k*nu);

```

```

end
%2.b Polinomio caracteristico deseado evaluado en phiamp
x=phiamp
px=eye(na,na)
%Polinomio deseado
for j=1:na
    %px=collect((x-p1*eye(3))*(x-p2*eye(3))*(x-p3*eye(3))) %the "alpha" coefficients
    px=eval(px*(x-polos(j)*eye(na)));
end
%2c.Control Gain
k=[zeros(1,n),1]*inv(co)*px
%k=[0 0 1]*inv(co)*px
%tdaux=k*[0;0;1]*
tdaux=k*[zeros(n,1);1]
tau=vpa(solve(tdaux,tau))

```

El ejemplo del doble integrador se prueba mediante el siguiente script que usa la función gacker.m

```

%Script que prueba la función gacker la cual nos permite encontrar el k y
%tau dados ciertos parámetros de nuestro modelo [k1 k2 0], esto para tau<h.
clear all
%Prueba gacker para un doble integrador.
global A
global B
global h
global polos

%Planta del Doble Integrador
A=[0 1;0 0]
B=[0;1]
C=[1 0]
D=[0]
%Periodo de Muestreo
h=1
n=size(A,2)
digits(4)
%Polos deseados
r1a=0.4
r2a=0.3
i2a=0.5
u1=r2a-i2a*i;
u2=r2a+i2a*i;
u3=r1a;
u4=-r1a
polos=[u1 u2 u3];
[k,tau,px]=gacker(A,B,h,polos)
tau=tau(find(tau > 0)) %Encontrar el valor positivo
%Controlador
K=subs(k,tau) %El k3 puede considerarse 0!
%Probar este controlador con el del modelo complejo
%*****Modelo Complejo*****%
d=1
I=eye(n);
Z=zeros(n,d);
S=[I Z]; %Matriz de selección
P=[zeros(1,d+1) eye(1);eye(d+1) zeros(d+1,1)]
%Modelo Ampliado
[A1 B1]=c2d(A,B,tau)
[A2 B2]=c2d(A,B,h-tau)
phi=A1*A2

```

```

gamma0=B2
gamma1=A2*B1
phiamp=[phi gamma1;zeros(1,size(A,2)) 0];
gammaamp=[gamma0;1];
Cc=[1 zeros(1,n)];
Dd=0;
%Matriz de Lazo cerrado
phi_cl=phiamp-gammaamp*K
[M,E]=eig(phi_cl)
%Combinación sin Repetición
k=(factorial(n+d))/(factorial(n)*factorial(d))
Solucion.simplificada2=S*M*E*P^k*S'*(S*M*P^k*S')^(-1);
%*****%

```

Referencias

- [1] G. TORRES, M. VELASCO, P. MARTI, J.M. FUERTES, AND E.X. MARTIN. **An Alternative Discrete-Time Model for Networked Control Systems with time delay less than the sampling period.** In *Industrial Electronics Society, IECON 2013 - 39th Annual Conference of the IEEE*, pages 5626–5631, Nov 2013.
- [2] GINA TORRES. *Desarrollo de un Nuevo Modelo para el Diseño de Controladores de Sistemas con Retraso*. Master's thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 2013.
- [3] KARL JOHAN ÅSTRÖM AND BJORN WITTENMARK. *Computer-controlled systems: theory and design*. Courier Dover Publications, 2011.