Control Óptimo

Fatiha Nejjari

SAC, ESAII, UPC

Introducción

- Las técnicas de control optimo conforman una de las ramas del control automático mas importantes en el desarrollo de las estrategias modernas de control mas utilizadas hoy en día.

Introducción

- la ubicación de los polos en un sistema dinámico controlado viene determinada por las especificaciones de control.
- Típicamente las especificaciones de control vienen dadas por las condiciones del problema. El problema a su vez, responde a unos índices de desempeño relacionados con la cantidad de energía necesaria para controlar el sistema, así como a limitaciones relacionadas con la máxima cantidad de energía aplicable al sistema de forma instantánea.

Introducción

- Estos índices son traducidos por el diseñador a especificaciones como tiempo de subida, sobrepico máximo, tiempo de establecimiento, etc. y a partir de ellos se diseña un sistema que aproxima un sistema de segundo orden aplicando la idea de los polos dominantes.

Objetivos del Control Óptimo

- Conocer mecanismos de diseño en base a optimización de funciones.
- Entender el proceso crítico de la elección del índice de desempeño.
- Diseñar reguladores óptimos.

Control óptimo

- Para el control óptimo, las especificaciones de control son formuladas en una *función de coste. La función de coste (también conocida como figura de mérito, índice de desempeño, etc.), es una función que penaliza el "mal" comportamiento del sistema, es decir cuanto más lejos este el sistema de la situación deseada, mayor será el valor de la función de coste.*

Control óptimo

- Objetivo del controlador óptimo: minimizar la función de coste.
- Se estudiará el diseño de sistemas de control por realimentación de estado con funciones de coste cuadráticas.
- Existen otras funciones de coste, pero la más popular es la cuadrática por su fácil derivación y por estar directamente relacionada con el contenido energético de un sistema.

Control óptimo cuadrático LQR

Fatiha Nejjari

ESAII/UPC

Formulación del problema

- La formulación del problema de control óptimo requiere:
  - Un modelo matemático del proceso a ser controlado
  - La propuesta de las restricciones físicas del problema
  - La especificación de un criterio de desempeño

Regulador LQR

Caso continuo

Problema con Horizonte finito

- El problema puede ser planteado como la necesidad de calcular la mejor entrada *u(t), que permita llevar el sistema de un estado inicial x(t_0), a un estado final x(t_f), en un tiempo t_f-t_0 .*
- El problema es equivalente a minimizar la función:

$$J = \tfrac{1}{2} x(t_f)^T P_f x(t_f) + \tfrac{1}{2} \int_{t_o}^{t_f} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt$$

con las siguientes restricciones:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$u(t) = -K(t)x(t)$$

Problema con Horizonte finito

- Las matrices P_f, *Q y R son matrices positivas definidas, generalmente diagonales o cuando menos simétricas, que determinan la importancia de cada parámetro dentro de la función de coste.*
- P_f *indica la importancia del estado final,*
- *Q la importancia de los estados durante la transición y*
- *R la importancia de la entrada.*
- *La formulación del problema utilizando una matriz R distinta de cero, tiene particular importancia en la práctica ya que esta matriz nos limitará el valor de la entrada u, aplicada al sistema.*

Problema con Horizonte finito

- El problema con las restricciones dadas puede ser formulado como una optimización sin restricciones utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange,

$$\dot{\lambda}^T = -\frac{\partial H}{\partial x}; \quad \lambda(t_f) = P_f x(t_f)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u},$$

donde,

$$H = \tfrac{1}{2}x^T Q x + \tfrac{1}{2}u^T R u + \lambda^T (Ax + Bu)$$

calculando las derivadas indicadas se obtiene:

$$\dot{\lambda} = -Qx - A^T\lambda$$

$$0 = Ru + B^T\lambda \rightarrow u = -R^{-1}B^T\lambda$$

Problema con Horizonte finito

- El problema se puede plantear como un sistema de ecuaciones diferenciales con dos puntos como condición de frontera

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$x(t_o) \rightarrow \text{dado}$$

$$\lambda(t_f) = P_f x(t_f)$$

$$\lambda(t) = P(t)x(t)$$

o la ecuación diferencial,

$$(\dot{P} + PA + A^T P - PBP^{-1}B^T P + Q)x = 0$$

$$\text{dado que } x \neq 0 \text{ entonces}$$

$$\dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q$$

ecuación matricial de Riccati.

Problema con Horizonte finito

- Esta ecuación se puede resolver utilizando el método del *barrido. El método consiste en integrar en sentido inverso (desde t_f hasta t_o) la ecuación de Riccati con valor "inicial" $\lambda(t_f)=P(t_f)x(t_f)$, hasta obtener $P(t_o)$ y ya que $x(t_o)$ es conocido será posible calcular $\lambda(t_0)=P(t_0)x(t_0)$.*
- Con estos valores iniciales se puede integrar la ecuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}$$

y obtener los valores de $\lambda(t)$ *y calcular la entrada óptima como,*

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1}B^T \lambda(t) \\ &= -R^{-1}B^T P(t)x(t) \\ u(t) &= -K(t)x(t) \end{aligned}$$

La entrada óptima está dada por una realimentación de estado variable en el tiempo.

Problema con Horizonte Infinito

- En el problema con horizonte infinito se asume que el tiempo $t_f=\infty$*.*
- Asuma que $P(t,t_f)$ es solución de la ecuación

$$\dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q$$

con condiciones de frontera $P(t_f,t_f)=0$

Entonces se puede decir que $\lim_{t_f \to \infty} P(t,t_f) = \overline{P}$ *existe y además es constante.*

Entonces la ecuación de Riccati se convierte en la ecuación algebraica de Riccati, de la forma:

$$\overline{P}A + A^T\overline{P} - \overline{P}BR^{-1}B^T\overline{P} + Q = 0$$

y la ley de control será una matriz $K = R^{-1}B^T\overline{P}$ invariante en el tiempo.

Problema con Horizonte Infinito

- La existencia de una solución *P única para la ecuación de Riccati está garantizada si* (*A,B) es estabilizable y (Q, A) es detectable.*

- *Además esta solución estabiliza el sistema, ya que los valores propios de la matriz, el sistema*

$$A - BR^{-1}\overline{P}$$

se encuentran en la parte izquierda del plano complejo.

Solución de la ecuación algebraica de Riccati.

- La ecuación algebraica de Riccati se puede escribir como:

$$\overline{P}A + A^T\overline{P} - \overline{P}BR^{-1}B^T\overline{P} + Q = \begin{bmatrix} \overline{P} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \overline{P} \end{bmatrix} = 0$$

- Tenemos una matriz de 2*nx2n asociada a la ecuación de Riccati: matriz de Hamilton,*

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

Solución de la ecuación algebraica de Riccati.

- Algunas propiedades importantes de la matriz de Hamilton:
  - Los valores propios de *H son simétricos con respecto al eje imaginario.*
  - Existen las matrices X_1 , $X_2 \in \Re^{nxn}$, *y* X_1 *es invertible de forma que la matriz formada por* X_1 *y* X_2 *son los vectores propios de la matriz H, si (A, B) es estabilizable y (Q, A) detectable.*

$$H\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\Lambda$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \ \mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$$

Entonces la solución de la ecuación de Riccati se obtiene por descomposición de *H en sus espacios propios, y la solución es de la forma:*

$$\overline{P} = X_2 X_1^{-1}$$

Control óptimo: Uso de Matlab

- El control optimo (**LQR**:linear quadratic regulator) proporciona una solución de **compromiso** entre las prestaciones (**error x**) del mismo y el **esfuerzo de control** (u).
- La forma estándar minimiza el índice:

$$J = \int (x^T Q x + u^T R u)\, dt$$

donde **Q y R son matrices de ponderación** seleccionadas por el diseñador, usualmente diagonales.

Función de Matlab: ***K = LQR (A,B,Q,R)***

Control Óptimo

- **Ejemplo de control optimo LQR.**
  Control óptimo de la posición de un satélite

$$x'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Error $\mathbf{x_1 = \theta}$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a)\ R = 0.1$ % Control "caro"

$b)\ R = 10$ % Control "barato"

$\theta = x_1$;
$d\theta/dt = x_2 \Rightarrow$

$x'_1 = x_2$

$x'_2 = T(t)/J = u$

$(x^T Q x + u^T R u)$

Control Óptimo

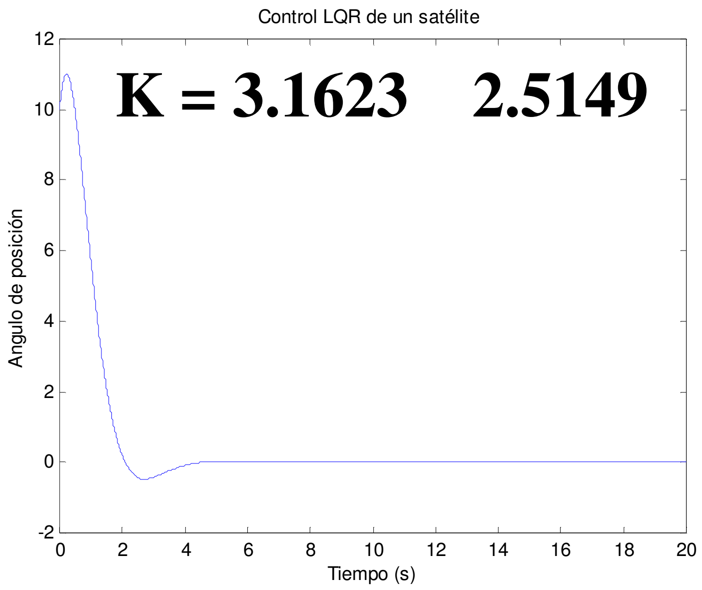
- **Ejemplo de control optimo LQR.**
  Control de la posición de un satélite

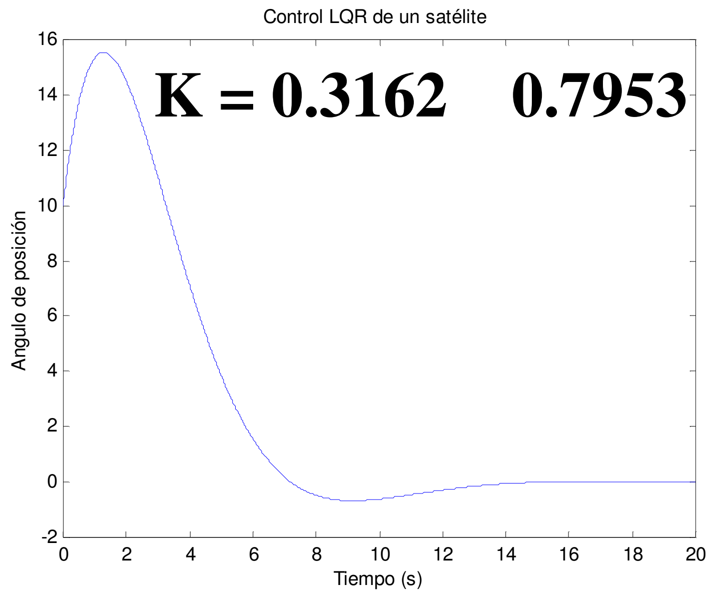
```
% EJEMPLO  MATLAB:
A=[0 1;0 0]; B=[0;1];
C=[1 0]; D=[0];
Q=[1 0;0 0];
R=0.1 ;   % Control caro
% R=10;  % Control barato
K=lqr(A,B,Q,R)
```

```
% SIMULACIÓN
t=0:0.01:20;  % Tiempo
u=0*t;            % Entrada nula
x0 = [10 10];  % Estado inicial
[y,x]= lsim(A-B*K,B,C,D,u,t,x0);
plot(t,y);
title('Control LQR de un satélite
');
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Angulo de posición');
```

Control Óptimo

- **Ejemplo de control optimo LQR. Control de la posición de un satélite**





Opción cara

R=0.1

Opción barata

R=10

Regulador LQR

Caso discreto

Control Optimo en Sistemas Discretos

- Se considera un sistema de control definido por

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$
$$y_k = Cx_k + Du_k$$

X_k = Vector de estado (vector-n)

U_k = vector de control (vector-r)

A = matrix de nxn

B = matriz de nxr

- Problema a resolver: Encontrar la secuencia de control u_k que lleve al sistema de la condición inicial $x_i=x_0$ al estado final $x_N=x_f$, minimizando el funcional cuadrático.

Horizonte Finito

- En este caso tenemos el sistema descrito por:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \qquad x_0 \text{ conocido}$$

- El problema de control consiste en hallar las entradas u_k, *k=1...,N de forma tal que la función de coste*

$$J_N = \frac{1}{2} x_N^T P x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \right]$$

sea mínima.

Horizonte Finito

$$J_N = \frac{1}{2} x_N^T P x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \right]$$

Q, matriz Hermítica (o matriz real simétrica) definida positiva o semidefinida positiva de nxn

R, matriz Hermítica (o matriz real simétrica) definida positiva de rxr

P, matriz Hermítica (o matriz real simétrica) definida positiva o semidefinida positiva de nxn

Q, R y P se seleccionan para la importancia relativa de la contribución en el desempeño debida al vector de estado. Pueden seleccionarse para penalizar ciertos estados/entradas más que otros.

$x_N^T P x_N$ Penaliza el error en alcanzar el estdo final deseado

- Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange para integrar las restricciones del problema, la función de coste se convierte en:

$$J_N = \frac{1}{2} x_N^T P x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + \lambda_{k+1}^T (-x_{k+1} + A x_k + B u_k) \right]$$

Donde λ_k *son nuevamente los multiplicadores de Lagrange.*

Derivando la función de coste con respecto a u_k λ_{k+1} *y* x_k *e igualando a cero se obtiene:*

$$\frac{\partial J_N}{\partial u_k} = u_k^T R + \lambda_{k+1}^T B = 0$$

$$\frac{\partial J_N}{\partial \lambda_{k+1}} = -x_{k+1} + A x_k + B u_k = 0$$

$$\frac{\partial J_N}{\partial x_k} = x_k^T Q - \lambda_k^T + \lambda_{k+1}^T A = 0$$

$$\frac{\partial J_N}{\partial x_N} = P x_N - \lambda_N = 0$$

- Planteando el problema como un sistema de ecuaciones de diferencia con condiciones dos condiciones de frontera tenemos:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^T A^{-T} Q & -BR^{-1}B^T A^{-T} \\ -A^{-T}Q & A^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_0 &\rightarrow \text{dado} \\ \lambda_N &= Px_N \\ \lambda_k &= P_k x_k \end{aligned}$$

La entrada óptima del sistema estará dada por:

$$\begin{aligned} Ru_k &= -B^T P_{k+1} x_{k+1} \\ Ru_k &= -B^T P_{k+1}(Ax_k + Bu_k) \\ (R + B^T P_{k+1} B)u_k &= -B^T P_{k+1} A x_k \\ u_k &= -S_{k+1}^{-1} B^T P_{k+1} A x_k \\ \text{donde} \qquad S_K &= R + B^T P_k B \end{aligned}$$

- Reemplazando se obtiene,

$$P_k x_k = A^T P_{k+1} x_{k+1} + Q x_k$$
$$P_k x_k = A^T P_{k+1} (A x_k + B u_k) + Q x_k$$

$$\left[P_k - A^T \left(P_{k+1} + P_{k+1} B S_{k+1}^{-1} B^T P_{k+1}\right) A - Q\right] x_k = 0, \forall k.$$

Ya que $x_k \neq 0$ entonces,

$$P_k = A^T \left(P_{k+1} + P_{k+1} B S_{k+1}^{-1} B^T P_{k+1}\right) A + Q.$$ Ecuación de diferencia de Riccati

Usando el método del “barrido”, resolvemos a partir de las condiciones de frontera. Del estado final

$$\lambda_N = P x_N = P_N x_N$$

se pueden calcular todos los valores de P_k *hasta* P_0.

- La entrada estará descrita como una realimentación de estado,

$$u_k = -K_k x_k$$

Donde

$$K_k = (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A$$

El coste óptimo será

$$J_N^{\min} = \frac{1}{2} x_0^T P x_0$$

Horizonte infinito

- Para el caso de horizonte infinito en sistemas discretos, se asume que P_K *alcanza una condición de estado estable y entonces la función de realimentación queda descrita por:*

$$u_k = -Kx_k$$

$$K = (R + B^T \overline{P} B)^{-1} B^T \overline{P} A$$

$\overline{P}$ *satisface la ecuación algebraica de Riccati,*

$$\overline{P} = A^T \left[\overline{P} + \overline{P} B (R + B^T \overline{P} B)^{-1} B^T \overline{P} \right] A + Q$$

El coste óptimo será $$J_N^{\min} = \frac{1}{2} x_o^T \overline{P} x_0$$

Ejemplo:

Simulamos el sistema:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Con el controlador óptimo que minimiza el coste:

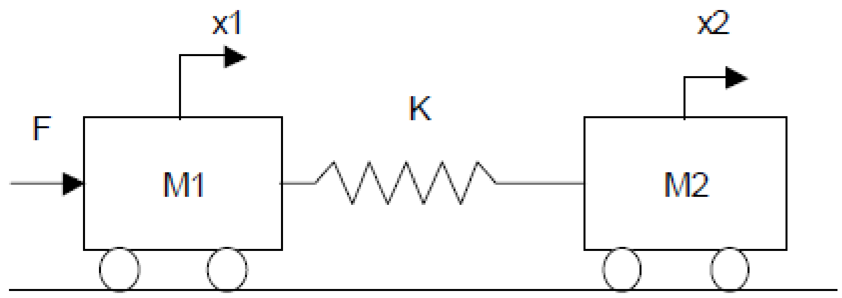
$$J = \tfrac{1}{2} x_{10}^T \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} x_{10} + \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{9} x_k^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} x_k + 2 u_k^2$$

Codigo Matlab

```
% coste
Q=[2 0;0 0.1];R=2;S=diag([5,5]);
k=10;
% Sistema
A=[2 1;-1 1];B=[0;1];x0=[2;-3];
% Solucion de la ecuacion de Riccati
while k>=1
K(k,:)=inv(R+B'*S*B)*B'*S*A;
S=(A-B*K(k,:))'*S*(A-B*K(k,:))+Q+K(k,:)'*R*K(k,:);
k=k-1;
end
% Simulacion del sistema realimentado
x(:,1)=x0;
for k=1:10
x(:,k+1) = A*x(:,k)-B*K(k,:)*x(:,k);
end
```

Carros Acoplados con Unión Flexible

- Consideramos un sistema compuesto por dos carros con masas M_1 *y* $M_{2.}$
- Los carros están unidos a través de un resorte con constante *K . El carro de la izquierda tiene un motor eléctrico que permite aplicar una fuerza F al sistema.*
- *El objetivo del sistema de control es reducir la oscilación del segundo carro cuando el primero cambia de posición, se espera un tiempo de establecimiento de 1 segundo y un sobrepico menor al 10%.*
- *Como instrumentación hay instalados en cada carro un potenciómetro que permite medir el desplazamiento.*



- El modelo del sistema será:

$$M_1\ddot{x}_1 = F - K(x_1 - x_2)$$

$$M_2\ddot{x}_2 = K(x_1 - x_2)$$

$$F = \frac{K_m K_g}{R_a r_1} V - \frac{K_m{}^2 K_g{}^2}{R_a r^2{}_1}\dot{x}_1$$

M_1	Masa del carro uno = 0.98 Kg
M_2	Masa del carro dos = 0.58 Kg
K	Constante del resorte = 45.9 N/m
x_1, x_2	Posición de los carros 1 y 2 respectivamente
F	Fuerza aplicada al carro uno (N)
V	Voltaje aplicado al motor que acciona el carro uno

K_m, K_g, R_a, r_1 Constantes debidas al motor y la transmisión.

- Las ecuaciones del sistema serán:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -46.84 & -7.4 & 46.84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 79.13 & 0 & -79.13 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.73 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} V$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1.73 & -12.8 & 13.7 \\ 1.73 & -12.8 & 13.70 & 498.2538 \\ 0 & 0 & 0 & 136.89 \\ 0 & 0 & 136.89 & -1013 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -46.8 & -7.4 & 46.84 & 0 \\ 79.13 & 0 & -79.13 & 0 \\ 346.6 & 7.92 & -346.62 & 46.84 \\ 0 & 79.13 & 0 & -79.13 \end{bmatrix}$$

Hacemos un análisis de controlabilidad y observabilidad

El rango de ambas matrices es cuatro lo que indica que el sistema es totalmente controlable y observable.

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = [1]$$

La matriz *P que satisface la ecuación algebraica de Riccati es*

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 470.46 & 30.46 & -69.92 & 29.72 \\ 30.46 & 2.7 & -4.61 & 1.62 \\ -69.92 & -4.61 & 195.33 & 3.43 \\ 29.72 & 1.62 & 3.43 & 3.82 \end{bmatrix}$$

y la matriz *K de realimentación construida a partir de la solución de Riccati*

$$K = \begin{bmatrix} 52.69 & 4.68 & -7.97 & 2.8 \end{bmatrix}$$

Los polos del sistema serán: $-1.9521 \pm 10.6106i, \ -5.7951 \pm 4.1151i$

BIBLIOGRAFÍA

- SISTEMAS REALIMENTADOS DE CONTROL. Dázzo and Houpis. Paraninfo. Madrid 1976
- DISCRETE TIME CONTROL SYSTEMS. Ogata K. Prentice Hall, Englewood Cliffs. New Jersey 1995
- AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS. Kuo B.C. Prentice Hall, Englewood Cliffs. New Jersey 1995
- DIGITAL CONTROL SYSTEMS ANALYSIS AND DESING. Philips, CL. and Nagle, HT. Prentice Hall, Englewood Cliffs. New Jersey 1995