



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

Gabriel Inácio Barboza

**Descobrimento de Parâmetros em Modelos
Epidemiológicos Compartmentais usando Redes
Neurais Informadas pela Física**

Vitória, ES

2025

Gabriel Inácio Barboza

**Descobrimento de Parâmetros em Modelos
Epidemiológicos Compartmentais usando Redes Neurais
Informadas pela Física**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Informática.

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Centro Tecnológico

Programa de Pós-Graduação em Informática

Orientador: Prof. Dr. Isaac Pinheiro dos Santos

Vitória, ES

2025

Gabriel Inácio Barboza

Descobrimto de Parâmetros em Modelos Epidemiológicos Compartmentais usando Redes Neurais Informadas pela Física/ Gabriel Inácio Barboza. – Vitória, ES, 2025-

28 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Isaac Pinheiro dos Santos

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Espírito Santo – UFES
Centro Tecnológico

Programa de Pós-Graduação em Informática, 2025.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. I. Souza, Vítor Estêvão Silva. II. Universidade Federal do Espírito Santo. IV. Descobrimto de Parâmetros em Modelos Epidemiológicos Compartmentais usando Redes Neurais Informadas pela Física

CDU 02:141:005.7

Gabriel Inácio Barboza

Descobrimento de Parâmetros em Modelos Epidemiológicos Compartmentais usando Redes Neurais Informadas pela Física

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Informática.

Trabalho aprovado. Vitória, ES, 25 de setembro de 2014:

Prof. Dr. Isaac Pinheiro dos Santos
Orientador

Professor
Convidado 1

Professor
Convidado 2

Vitória, ES
2025

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis malesuada laoreet leo at interdum. Nullam neque eros, dignissim sed ipsum sed, sagittis laoreet nisi.

Agradecimentos

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis malesuada laoreet leo at interdum. Nullam neque eros, dignissim sed ipsum sed, sagittis laoreet nisi. Duis a pulvinar nisl. Aenean varius nisl eu magna facilisis porttitor. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut mattis tortor nisi, facilisis molestie arcu hendrerit sed. Donec placerat velit at odio dignissim luctus. Suspendisse potenti. Integer tristique mattis arcu, ut venenatis nulla tempor non. Donec at tincidunt nulla. Cras ac dignissim neque. Morbi in odio nulla. Donec posuere sem finibus, auctor nisl eu, posuere nisl. Duis sit amet neque id massa vehicula commodo dapibus eu elit. Sed nec leo eu sem viverra aliquet. Nam at nunc nec massa rutrum aliquam sed ac ante.

Vivamus nec quam iaculis, tempus ipsum eu, cursus ante. Phasellus cursus euismod auctor. Fusce luctus mauris id tortor cursus, volutpat cursus lacus ornare. Proin tristique metus sed est semper, id finibus neque efficitur. Cras venenatis augue ac venenatis mollis. Maecenas nec tellus quis libero consequat suscipit. Aliquam enim leo, pretium non elementum sit amet, vestibulum ut diam. Maecenas vitae diam ligula.

Fusce ac pretium leo, in convallis augue. Mauris pulvinar elit rhoncus velit auctor finibus. Praesent et commodo est, eu luctus arcu. Vivamus ut porta tortor, eget facilisis ex. Nunc aliquet tristique mauris id sollicitudin. Donec quis commodo metus, sit amet accumsan nibh. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus.

*“Science is a differential equation. Religion is a boundary condition.
(Alan Turing)”*

Resumo

Desde 2020, com o surto de COVID-19, uma grande quantidade de dados foram coletados sobre a dispersão desta doença. Para entender como doenças se propagam e ajudar tomadores de decisão na criação de políticas para conter o avanço e mitigar os efeitos que doenças contagiosas trazem são empregados modelos que explicam o comportamento de tais doenças. Modelos compartimentais baseados em equações diferenciais ordinárias são comumente aplicados para a modelagem de fenômenos epidemiológicos por sua simplicidade, facilidade de análise, e pela existência de métodos numéricos capazes de resolver estes sistemas. Com o avanço de áreas como aprendizado de máquina e ciência de dados, foram desenvolvidas técnicas de descobrimento de equações em grandes bases de dados. Uma dessas técnicas, são as redes neurais informadas pela física, que atuam como um ajustador de curvas regularizado por equações que regem o fenômeno ao incorporá-las na função de perda da rede. Elas podem ser aplicadas para a solução numérica de equações diferenciais, mas também para a solução de problemas inversos envolvendo equações diferenciais, utilizando dados reais e sintéticos. Neste trabalho, são aplicadas redes neurais informadas pela física para o descobrimento de parâmetros que compõem os modelos compartimentais. São realizados experimentos com dados sintéticos para averiguar a capacidade das redes neurais informadas pela física de resolver problemas inversos e testar a resiliência dos métodos a ruídos. Em seguida, são utilizados dados reais para extrair o valor de infectiosidade ao longo do tempo.

Palavras-chaves: Redes Neurais Informadas pela Física. Epidemiologia. Modelos Compartimentais. Problemas Inversos.

Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis malesuada laoreet leo at interdum. Nullam neque eros, dignissim sed ipsum sed, sagittis laoreet nisi. Duis a pulvinar nisl. Aenean varius nisl eu magna facilisis porttitor. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut mattis tortor nisi, facilisis molestie arcu hendrerit sed. Donec placerat velit at odio dignissim luctus. Suspendisse potenti. Integer tristique mattis arcu, ut venenatis nulla tempor non. Donec at tincidunt nulla. Cras ac dignissim neque. Morbi in odio nulla. Donec posuere sem finibus, auctor nisl eu, posuere nisl. Duis sit amet neque id massa vehicula commodo dapibus eu elit. Sed nec leo eu sem viverra aliquet. Nam at nunc nec massa rutrum aliquam sed ac ante.

Vivamus nec quam iaculis, tempus ipsum eu, cursus ante. Phasellus cursus euismod auctor. Fusce luctus mauris id tortor cursus, volutpat cursus lacus ornare. Proin tristique metus sed est semper, id finibus neque efficitur. Cras venenatis augue ac venenatis mollis. Maecenas nec tellus quis libero consequat suscipit. Aliquam enim leo, pretium non elementum sit amet, vestibulum ut diam. Maecenas vitae diam ligula.

Fusce ac pretium leo, in convallis augue. Mauris pulvinar elit rhoncus velit auctor finibus. Praesent et commodo est, eu luctus arcu. Vivamus ut porta tortor, eget facilisis ex. Nunc aliquet tristique mauris id sollicitudin. Donec quis commodo metus, sit amet accumsan nibh. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus.

Duis elementum dictum tristique. Integer mattis libero sit amet pretium euismod. Curabitur auctor eu augue ut ornare. Integer bibendum eros ullamcorper rhoncus convallis. Pellentesque non pretium ligula, sit amet bibendum eros. Nam venenatis ex felis, quis blandit nunc auctor sit amet. Maecenas ut eros pharetra, lobortis neque id, fermentum arcu. Cras neque dui, rhoncus feugiat leo id, semper facilisis lorem. Fusce non ex turpis. Nullam venenatis sed ligula ac lacinia.

Keywords: Physics Informed Neural Networks. Epidemiology. Compartmental Models. Inverse Problems.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação gráfica das PINNs. Fonte: elaborada pelos autores. . . .	16
Figura 2 – Grafo para o <i>SIR</i> . Fonte: elaborada pelos autores.	17
Figura 3 – Na primeira. Fonte: elaborada pelos autores.	20
Figura 4 – Na primeira. Fonte: elaborada pelos autores.	20
Figura 5 – Na primeira. Fonte: elaborada pelos autores.	21
Figura 6 – Na primeira. Fonte: elaborada pelos autores.	21
Figura 7 – Na primeira. Fonte: elaborada pelos autores.	22
Figura 8 – Na primeira. Fonte: elaborada pelos autores.	22

Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores das métricas de erro (MSE , norma \mathcal{L}_2 e norma \mathcal{L}_∞) para as soluções aproximadas pela rede neural, em comparação com as soluções analíticas.	21
Tabela 2 – Valores das métricas de erro (MSE , norma \mathcal{L}_2 e norma \mathcal{L}_∞) para as soluções aproximadas pela rede neural, em comparação com as soluções analíticas.	22

Lista de abreviaturas e siglas

PINNs	Physics Informed Neural Networks
DA	Diferenciação Automática
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
MEF	Método de Elementos Finitos
MDF	Método de Diferenças Finitas
SIR	Susceptible-Infected-Removed
SEIR	Susceptible-Exposed-Infected-Removed
SEIRD	Susceptible-Exposed-Infected-Removed-Deceased
MSE	Mean Square Error
RMSE	Root Mean Square Error
MLP	Multi-layer Perceptron
EINNs	Epidemiology Informed Neural Networks
DINNs	Deceased Informed Neural Networks
AWGN	Additive White Gaussian Noise

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	REVISÃO DA LITERATURA	15
2.1	Redes Neurais Informadas pela Física	15
2.2	Modelos Compartimentais	16
2.3	Problemas Inversos	17
2.4	Aplicação de PINNs com Modelos Compartimentais	17
3	PROPOSTA DO TRABALHO	18
3.1	Estimativa de parâmetros	18
3.2	Testes com Dados Sintéticos	18
3.3	Testes com Dados Sintéticos Ruidosos	18
3.4	Testes com Base de Dados Reais	19
3.4.1	Bases de dados do DataSUS	19
3.4.2	Tratamento dos Dados	19
3.4.3	Arquitetura da Rede	19
3.4.4	Correlação com a Temperatura	19
4	AVALIAÇÃO DO TRABALHO	20
4.1	Testes com Dados Sintéticos	20
4.2	Testes com Dados Ruidosos	21
4.3	Testes com Base de Dados Reais	22
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	23
	REFERÊNCIAS	24
	APÊNDICES	28

1 Introdução

Pelo teorema da aproximação universal, demonstrado primeiramente para redes com largura arbitrária com função sigmóide por (CYBENKO, 1989), e para redes com no mínimo uma camada escondida por (HORNIK; STINCHCOMBE; WHITE, 1989) atesta que redes neurais com uma largura suficientemente grande é capaz de aproximar qualquer função. Em (GRIPENBERG, 2003) é demonstrado a mesma propriedade para redes com profundidade arbitrária e largura fixa.

A aplicação de redes neurais para a solução numérica de equações diferenciais podem ser encontradas em trabalhos dos anos 90 como (LAGARIS; LIKAS; FOTIADIS, 1998), (MEADE; FERNANDEZ, 1994) e (PSICHOGIOS; UNGAR, 1992), e recentemente, em (JUNIOR; SANTOS, 2021), entretanto, foi apenas com (RAISSI; PERDIKARIS; KARNIADAKIS, 2019) e a introdução do conceito das *Physics Informed Neural Networks* (PINNs) que se renovou o interesse em aplicar redes neurais para a solução de problemas científicos. PINNs podem ser compreendidas como uma técnica avançada de regularização que, ao incorporar as equações que compõem um modelo à função de perda da rede neural. A grande diferença da abordagem das PINNs em relação a propostas anteriores, é tratar não apenas as equações que compõem o modelo como residuais a serem minimizados, mas também incorporar as condições de fronteira e iniciais.

Esta abordagem foi possível apenas com o desenvolvimento de técnicas de diferenciação automática, pode-se citar (WENGERT, 1964) para *forward accumulation*, e (LINNAINMAA, 1976) para *inverse accumulation*, como alguns dos primeiro trabalhos a propor esta técnica. Entretanto, foi sua incorporação à bibliotecas como PyTorch (PASZKE et al., 2019) e TensorFlow (ABADI et al., 2016), facilitando em muito o uso de funções de perda mais complexas, que o uso de redes neurais para a solução de equações diferenciais se tornou atrativa.

PINNs foram aplicados para diversos problemas de engenharia, por exemplo, escoamento de fluxos incompressíveis (JIN et al., 2021), problemas epidemiológicos como (SHAIER; RAISSI; SESHAIYER, 2022), problemas de formação de padrões em modelos de reação-difusão (GIAMPAOLO et al., 2022)...

No artigo original, são utilizados *Multi-layer Perceptrons* (MLPs) como arquitetura das redes, mas há propostas com utilizando outras arquiteturas. Uma proposta utilizando redes neurais convolucionais pode ser encontrada em (SHI; ZENG; LIANG, 2024). Uma proposta utilizando PINNs combinado com métodos Bayesianos pode ser encontrada em (YANG; MENG; KARNIADAKIS, 2021), esta abordagem é particularmente interessante para problemas inversos, ao transformar a estimativa dos parâmetros numa distribuição,

no lugar de um valor fixo.

Modelos compartimentais baseados em equações diferenciais foram primeiramente introduzidos por (KERMACK; MCKENDRICK, 1927), ao proporem o modelo *Susceptible-Infected-Removed* (SIR). Baseados neste trabalho seminal, foram propostos outros modelos com mais mais compartimentos como o *SEIRD* (GILES, 1977) que inclui um compartimento para indivíduos que foram expostos a doença, ainda não manifestaram sintomas. Outro exemplo é o *SIRV* (SCHLICKEISER; KRÖGER, 2021) que inclui um compartimento para vacinados.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 2 são formalizados os conceitos de PINNs e modelos compartimentais; no capítulo 3 é detalhado o método proposto por este trabalho e são definidos os experimentos para averiguar a efetividade do método; no capítulo 4 são apresentados os resultados e é feita uma avaliação dos mesmos; por fim, no capítulo 5 são apresentadas as conclusões.

2 Revisão da Literatura

Neste capítulo é feita uma revisão dos principais conceitos utilizados neste trabalho, além de apresentar fundamentos para uma compreensão mais profunda dos mesmos.

2.1 Redes Neurais Informadas pela Física

Apresentadas em (RAISSI; PERDIKARIS; KARNIADAKIS, 2019), PINNs podem ser entendidas como uma forma avançada de regularização, ou como um problema de otimização que transforma as condições de fronteira e iniciais em penalizações para a função custo. PINNs são capazes de resolver problemas no seguinte formato:

$$\mathcal{D}(u(\mathbf{x}, t); \boldsymbol{\lambda}) = f(u, \mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, t \in I, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{B}(u(\mathbf{x}, t)) = g(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, t \in I, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{I}(u(\mathbf{x}, t_0)) = q(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.3)$$

Em que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é o domínio espacial limitado pela fronteira Γ ; d é a dimensão do domínio espacial; $T = [t_0, t_f]$ é o intervalo de tempo, sendo $t_0 < t_f$; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ é um vetor de coordenadas espaciais; t denota o tempo; $u = u(\mathbf{x}, t)$ denota a solução desconhecida do problema; $\boldsymbol{\lambda}$ é um vetor de parâmetros das equações; \mathcal{D} é um operador diferencias associado às equações; f é um termo fonte ou sorvedouro; \mathcal{B} and \mathcal{I} são operadores representando, respectivamente, as condições de fronteira e iniciais; por fim, g e q são funções conhecidas que definem essas condições.

A equação 2.4 define o termo da função de perda que engloba todos as equações que compõem o modelo. Trata-se de um treinamento não-supervisionado que busca minimizar o residual definido.

$$\mathcal{L}_{\text{física}}(\boldsymbol{\theta}) = \omega_{\text{domínio}} \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\theta}) + \omega_{\text{fronteira}} \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\theta}) + \omega_{\text{inicial}} \mathcal{L}_{\mathcal{I}}(\mathbf{x}, t_0, \boldsymbol{\theta}) \quad (2.4)$$

Sendo $\omega_{\text{domínio}}$, $\omega_{\text{fronteira}}$ e ω_{inicial} pesos atribuídos a cada um dos residuais. Caso haja dados disponíveis, é feito um treinamento supervisionado utilizando tais dados. A função de perda final da rede neural é então definida pela equação 2.5.

$$\mathcal{L}_{\text{total}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{L}_{\text{física}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) + \omega_{\text{dados}} \mathcal{L}_{\text{dados}}(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.5)$$

Aqui vale mencionar que esta não é a única forma de distribuir os pesos da loss, a implementação da biblioteca *DeepXDE* (LU et al., 2021) permite atribuir pesos diferentes a cada condição inicial e de fronteira. Então o problema passa a ser encontrar os conjuntos θ^* de parâmetros e vieses da rede, e o conjunto λ^* de parâmetros das equações, que minimiza a função 2.5.

$$(\theta^*, \lambda^*) = \arg \min_{\theta, \lambda} \mathcal{L}_{\text{total}}(\theta, \lambda), \quad (2.6)$$

Existem muitos métodos de otimização para encontrar os argumentos da equação 2.6. Pode-se citar o método de primeira ordem *Adam* (KINGMA; BA, 2014) e o método quase-newtoniano *BFGS*, ou como comumente usado, a sua versão para ambientes de pouca memória, o *L-BFGS* (LIU; NOCEDAL, 1989).

A figura 1 mostra uma representação gráfica das PINNs.

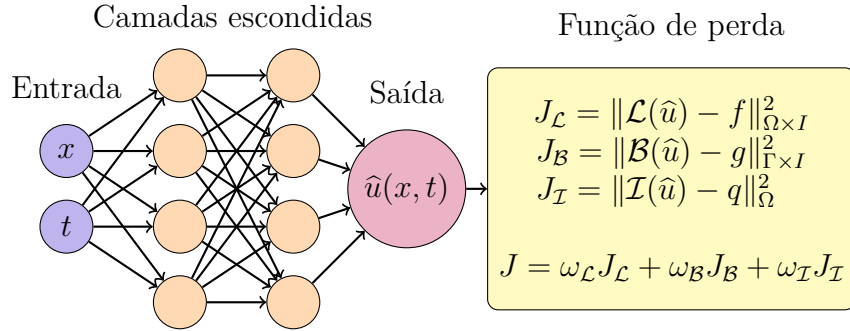


Figura 1 – Representação gráfica das PINNs. Fonte: elaborada pelos autores.

A formulação acima vale tanto para problemas diretos, quanto para problemas inversos

2.2 Modelos Compartimentais

R_0 número básico

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} \quad (2.7)$$

Apresentado no trabalho seminal de (KERMACK; MCKENDRICK, 1927), o modelo *SIR* é definido pelo conjunto de equações 2.8, 2.9 e 2.10.

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t), \quad t > t_0, \quad (2.8)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \quad t > t_0, \quad (2.9)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t), \quad t > t_0, \quad (2.10)$$

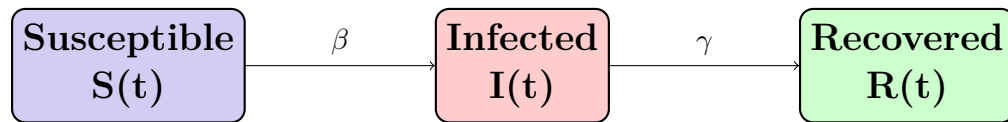


Figura 2 – Grafo para o *SIR*. Fonte: elaborada pelos autores.

O modelo pode ser entendido com um grafo... A figura 2 ilustra o modelo *SIR*.

2.3 Problemas Inversos

Problemas inversos são mal-postos...

Identificabilidade de um modelo...

2.4 Aplicação de PINNs com Modelos Compartimentais

()

Modelos de ordem fracionária (LI et al., 2025)

Sir reação-difusão (BERTAGLIA et al., 2022)

Um exemplo utilizando redes neurais recorrentes pode ser encontrado em (RODRIGUEZ et al., 2023)

3 Proposta do Trabalho

Nesta seção é apresentada a proposta para a estimativa dos parâmetros do modelo compartimental e os testes para averiguar a efetividade do método.

3.1 Estimativa de parâmetros

Os modelos compartimentais possuem parâmetros de transmissão e mortalidade fixos, considerando que estes modelos foram pensados apenas para dar uma projeção de como uma epidemia evoluirá. Entretanto, medidas de afastamento social são capazes de alterar o parâmetro de transmissão ao longo do tempo. Utilizando (LONG; KHALIQ; FURATI, 2021) como inspiração, é proposto obter o parâmetro β como uma função em função do tempo. A rede neural deverá se ajustar a um $\beta(t)$. A taxa de mortalidade de uma doença permanece constante caso não haja um plano de vacinação, logo não há a necessidade de estimá-lo.

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta(t)S(t)I(t), \quad t > t_0, \quad (3.1)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta(t)S(t)I(t) - \gamma I(t), \quad t > t_0, \quad (3.2)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t), \quad t > t_0, \quad (3.3)$$

3.2 Testes com Dados Sintéticos

Para averiguar se o método proposto funcionará bem com dados reais, será feito primeiramente um teste com dados sintéticos obtidos a partir da solução do modelo compartimental utilizando o método de Runge-Kutta de 4º ordem implementado na biblioteca *SciPy* (VIRTANEN et al., 2020).

$$\beta(t) = \sin(t/12) + \beta_{min} \quad (3.4)$$

3.3 Testes com Dados Sintéticos Ruidosos

Segundo (RAISSI; PERDIKARIS; KARNIADAKIS, 2019), PINNs são resilientes a dados ruidosos. Para testar se PINNs são capazes de ajustar a adicionar ruído gaussiano aos dados sintéticos. A equação 3.5 descreve este processo.

$$Z_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \quad (3.5)$$

$$\mathcal{N}_t = \mathcal{C}_t + Z_t \quad (3.6)$$

3.4 Testes com Base de Dados Reais

3.4.1 Bases de dados do DataSUS

3.4.2 Tratamento dos Dados

Janela móvel de 7 dias como em (HAN et al., 2024), (LONG; KHALIQ; FURATI, 2021) e (SHAMSARA; KÖNIG; PFEIFER, 2025) para suavizar o ruído

Pesos ajustáveis entre a loss física e a loss dos dados como em (HAN et al., 2024), (LONG; KHALIQ; FURATI, 2021) e (SHAMSARA; KÖNIG; PFEIFER, 2025)

Segundo (BONFANTI et al., 2024), PINNs não generalizam bem fora do domínio de treinamento. PINNs podem estimar os parâmetros para fora do domínio de treinamento como em (MILLEVOI; PASETTO; FERRONATO, 2024).

Assim como em (GHOSH et al., 2023), fazer testes com lacunas nos dados para testar a resiliência do método.

3.4.3 Arquitetura da Rede

Baseando-se em (SHAIER; RAISSI; SESHAIYER, 2022), o número de camadas escolhido foi...

Como em (MILLEVOI; PASETTO; FERRONATO, 2024), aplicar uma *hard-constraint* na rede neural ao utilizar nos nós de saída uma função de ativação que retorna apenas valores positivos.

3.4.4 Correlação com a Temperatura

4 Avaliação do Trabalho

4.1 Testes com Dados Sintéticos

A figura 4 mostra o valor de beta ao longo do tempo.

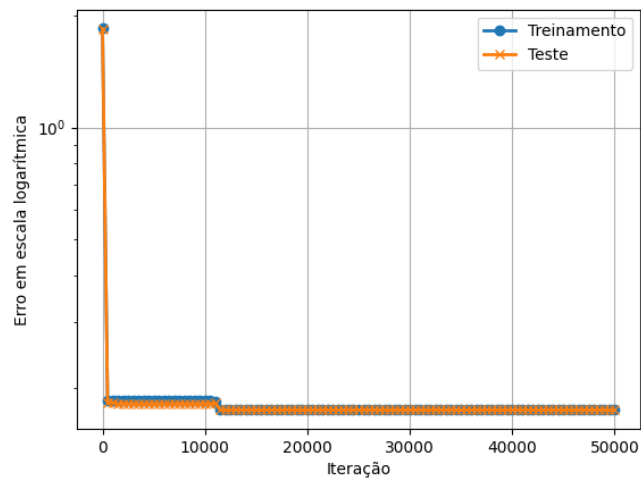


Figura 3 – Na primeira. Fonte: elaborada pelos autores.

A figura 4 mostra o valor de beta ao longo do tempo.

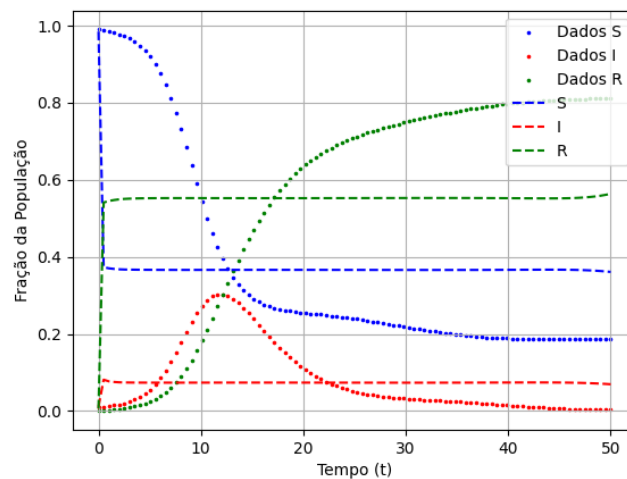


Figura 4 – Na primeira. Fonte: elaborada pelos autores.

A figura 5 mostra o valor de beta ao longo do tempo.

A tabela 1 mostra os valores para

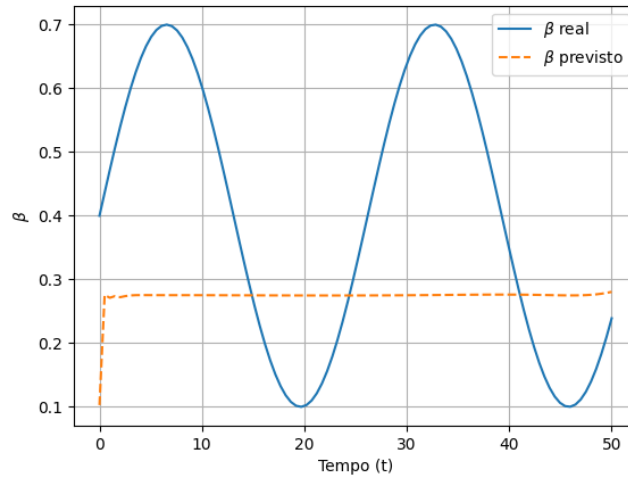


Figura 5 – Na primeira. Fonte: elaborada pelos autores.

Tabela 1 – Valores das métricas de erro (MSE , norma \mathcal{L}_2 e norma \mathcal{L}_∞) para as soluções aproximadas pela rede neural, em comparação com as soluções analíticas.

Compartimento	Métricas		
	MSE	\mathcal{L}_2	\mathcal{L}_∞
S	$8,628 \times 10^{-6}$	$2,444 \times 10^{-3}$	$1,182 \times 10^{-2}$
I	$1,005 \times 10^{-6}$	$1,252 \times 10^{-2}$	$4,81 \times 10^{-3}$
R	$1,997 \times 10^{-6}$	$4,913 \times 10^{-3}$	$8,635 \times 10^{-3}$

4.2 Testes com Dados Ruidosos

A figura 4 mostra o valor de beta ao longo do tempo.

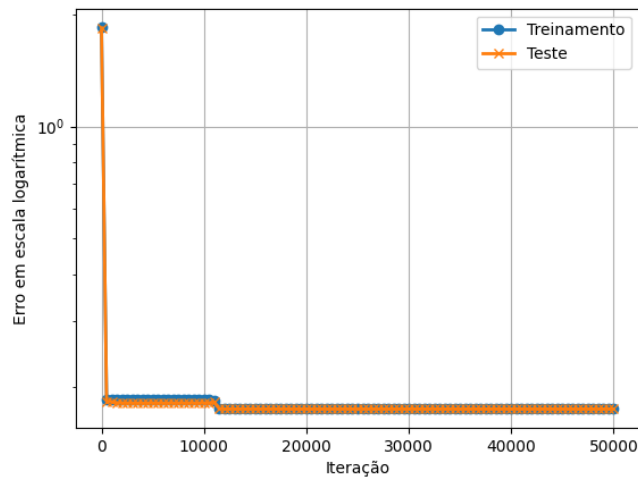


Figura 6 – Na primeira. Fonte: elaborada pelos autores.

A figura 7 mostra o valor de beta ao longo do tempo.

A figura 8 mostra o valor de beta ao longo do tempo.

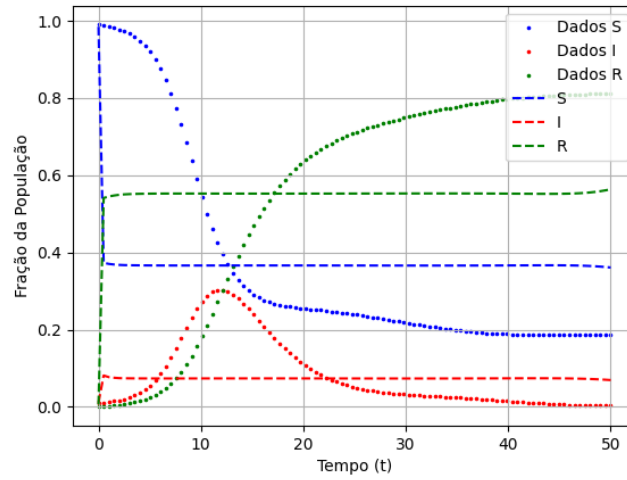


Figura 7 – Na primeira. Fonte: elaborada pelos autores.

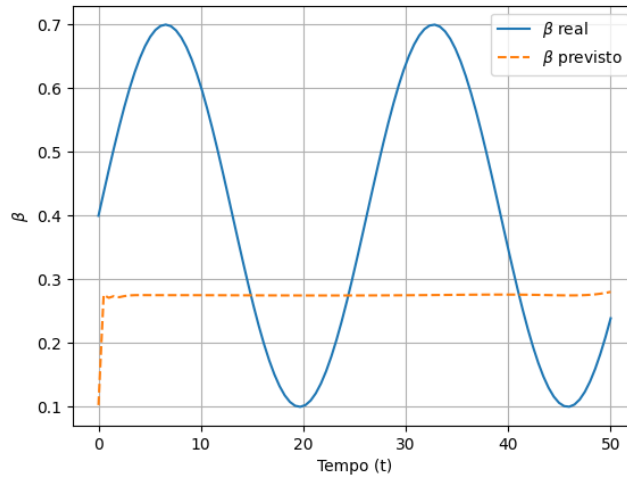


Figura 8 – Na primeira. Fonte: elaborada pelos autores.

A tabela 2 mostra os valores para

Tabela 2 – Valores das métricas de erro (MSE , norma \mathcal{L}_2 e norma \mathcal{L}_∞) para as soluções aproximadas pela rede neural, em comparação com as soluções analíticas.

Compartimento	Métricas		
	MSE	\mathcal{L}_2	\mathcal{L}_∞
velocidade u	$8,628 \times 10^{-6}$	$2,444 \times 10^{-3}$	$1,182 \times 10^{-2}$
velocidade v	$1,005 \times 10^{-6}$	$1,252 \times 10^{-2}$	$4,81 \times 10^{-3}$
pressão p	$1,997 \times 10^{-6}$	$4,913 \times 10^{-3}$	$8,635 \times 10^{-3}$

4.3 Testes com Base de Dados Reais

5 Considerações Finais

Aplicar PINNs Bayesianas ([YANG; MENG; KARNIADAKIS, 2021](#)) para estimar o desvio padrão do $\beta(t)$.

Referências

ABADI, M. et al. Tensorflow: A system for large-scale machine learning. *12th USENIX symposium on operating systems design and implementation (OSDI 16)*, p. 265–283, 2016. Citado na página 13.

BERTAGLIA, G. et al. Asymptotic-preserving neural networks for multiscale hyperbolic models of epidemic spread. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 32, n. 10, p. 1949 – 1985, 2022. Cited by: 17; All Open Access, Green Open Access. Disponível em: <<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85140742473&doi=10.1142%2fS0218202522500452&partnerID=40&md5=170623db80cb3dca5ce350b87afb42f1>>. Citado na página 17.

BONFANTI, A. et al. On the generalization of PINNs outside the training domain and the hyperparameters influencing it. *Neural Computing and Applications*, v. 36, n. 36, p. 22677–22696, dez. 2024. ISSN 1433-3058. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00521-024-10178-2>>. Citado na página 19.

CYBENKO, G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, v. 2, p. 303–314, 1989. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02551274>>. Citado na página 13.

GHOSH, S. et al. Understanding the implications of under-reporting, vaccine efficiency and social behavior on the post-pandemic spread using physics informed neural networks: A case study of china. *PLOS ONE*, v. 18, 11 2023. Citado na página 19.

GIAMPAOLO, F. et al. Physics-informed neural networks approach for 1D and 2D Gray-Scott systems. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, Springer, v. 9, n. 1, p. 1–17, maio 2022. Disponível em: <<https://hal.science/hal-04456081>>. Citado na página 13.

GILES, P. The mathematical theory of infectious diseases and its applications. *Journal of the Operational Research Society*, v. 28, n. 2, p. 479–480, jul. 1977. ISSN 1476-9360. Disponível em: <<https://doi.org/10.1057/jors.1977.92>>. Citado na página 14.

GRIPENBERG, G. Approximation by neural networks with a bounded number of nodes at each level. *Journal of Approximation Theory*, v. 122, n. 2, p. 260–266, 2003. ISSN 0021-9045. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021904503000789>>. Citado na página 13.

HAN, S. et al. Approaching epidemiological dynamics of covid-19 with physics-informed neural networks. *Journal of the Franklin Institute*, v. 361, n. 6, 2024. Cited by: 12; All Open Access, Green Open Access. Disponível em: <<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85186494686&doi=10.1016%2fj.jfranklin.2024.106671&partnerID=40&md5=c6f62df7ebafa637a85e89ac5ee26f45>>. Citado na página 19.

HORNIK, K.; STINCHCOMBE, M.; WHITE, H. Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural Networks*, v. 2, n. 5, p. 359–366, 1989. ISSN 0893-6080.

Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893608089900208>>. Citado na página 13.

JIN, X. et al. Nsfnets (navier-stokes flow nets): Physics-informed neural networks for the incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, v. 426, p. 109951, 2021. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999120307257>>. Citado na página 13.

JUNIOR, W. G.; SANTOS, I. P. Solving differential equations using feedforward neural networks. In: GERVASI, O. et al. (Ed.). *Computational Science and Its Applications – ICCSA 2021*. Cham: Springer International Publishing, 2021. p. 385–399. ISBN 978-3-030-86973-1. Citado na página 13.

KERMACK, W. O.; MCKENDRICK, A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, v. 115, n. 772, p. 700–721, 1927. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 16.

KINGMA, D. P.; BA, J. Adam: A method for stochastic optimization. *International Conference on Learning Representations*, 2014. Citado na página 16.

LAGARIS, I. E.; LIKAS, A.; FOTIADIS, D. I. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations. *IEEE Transactions on Neural Networks*, v. 9, n. 5, p. 987–1000, Sep. 1998. ISSN 1045-9227. Citado na página 13.

LI, R. et al. Dynamic analysis and data-driven inference of a fractional-order seihdr epidemic model with variable parameters. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 230, p. 1 – 19, 2025. Cited by: 0. Disponível em: <<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85208764841&doi=10.1016%2fj.matcom.2024.10.042&partnerID=40&md5=5df06da84bff8326ce9e8e000816f191>>. Citado na página 17.

LINNAINMAA, S. Taylor expansion of the accumulated rounding error. *BIT Numerical Mathematics*, v. 16, n. 2, p. 146–160, jun. 1976. ISSN 1572-9125. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01931367>>. Citado na página 13.

LIU, D. C.; NOCEDAL, J. On the limited memory BFGS method for large scale optimization. *Mathematical Programming*, v. 45, p. 503–528, 1989. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01589116>>. Citado na página 16.

LONG, J.; KHALIQ, A.; FURATI, K. Identification and prediction of time-varying parameters of covid-19 model: a data-driven deep learning approach. *International Journal of Computer Mathematics*, v. 98, n. 8, p. 1617 – 1632, 2021. Cited by: 33; All Open Access, Green Open Access. Disponível em: <<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85106627387&doi=10.1080%2f00207160.2021.1929942&partnerID=40&md5=803b3e59fc4241f274b002aae280c6ef>>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.

LU, L. et al. Deepxde: A deep learning library for solving differential equations. *SIAM Review*, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 63, n. 1, p. 208–228, jan. 2021. ISSN 1095-7200. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/19M1274067>>. Citado na página 16.

MEADE, A. J.; FERNANDEZ, A. A. The numerical solution of linear ordinary differential equations by feedforward neural networks. *Math. Comput. Model.*, Elsevier Science Publishers B. V., v. 19, n. 12, p. 1–25, 1994. Citado na página 13.

MILLEVOI, C.; PASETTO, D.; FERRONATO, M. A physics-informed neural network approach for compartmental epidemiological models. *PLoS Computational Biology*, v. 20, n. 9, 2024. Cited by: 2; All Open Access, Gold Open Access, Green Open Access. Disponível em: <<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85203432916&doi=10.1371%2fjournal.pcbi.1012387&partnerID=40&md5=5fc619838ca1b408adc707c6a90ac0a8>>. Citado na página 19.

PASZKE, A. et al. Pytorch: An imperative style, high-performance deep learning library. In: *Advances in Neural Information Processing Systems*. [S.l.: s.n.], 2019. p. 8024–8035. Citado na página 13.

PSICHOGIOS, D. C.; UNGAR, L. H. A hybrid neural network-first principles approach to process modeling. *AIChE Journal*, v. 38, n. 10, p. 1499–1511, 1992. Citado na página 13.

RAISSI, M.; PERDIKARIS, P.; KARNIADAKIS, G. E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 378, p. 686–707, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 13, 15 e 18.

RODRIGUEZ, A. et al. Einns: Epidemiologically-informed neural networks. In: *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. [S.l.: s.n.], 2023. v. 37. Citado na página 17.

SCHLICHEISER, R.; KRÖGER, M. Analytical modeling of the temporal evolution of epidemics outbreaks accounting for vaccinations. *Physics*, v. 3, n. 2, p. 386–426, 2021. ISSN 2624-8174. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2624-8174/3/2/28>>. Citado na página 14.

SHAIER, S.; RAISSI, M.; SESHAIYER, P. Data-driven approaches for predicting spread of infectious diseases through dinns: Disease informed neural networks. *Letters in Biomathematics*, v. 9, n. 1, p. 71 – 105, 2022. Cited by: 18. Disponível em: <<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85136169389&partnerID=40&md5=2f5c407588258f3d630368da396af06a>>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 19.

SHAMSARA, E.; KÖNIG, F.; PFEIFER, N. An informed deep learning model of the omicron wave and the impact of vaccination. *Computers in Biology and Medicine*, v. 191, 2025. Cited by: 0. Disponível em: <<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-105002151013&doi=10.1016%2fj.compbiomed.2025.109968&partnerID=40&md5=b1244c15295694df7ec626c4394d6c0d>>. Citado na página 19.

SHI, P.; ZENG, Z.; LIANG, T. Physics-informed convnet: Learning physical field from a shallow neural network. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 132, p. 107911, 2024. ISSN 1007-5704. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570424000972>>. Citado na página 13.

VIRTANEN, P. et al. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, v. 17, p. 261–272, 2020. Citado na página 18.

WENGERT, R. E. A simple automatic derivative evaluation program. *Commun. ACM*, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 7, n. 8, p. 463–464, ago. 1964. ISSN 0001-0782. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/355586.364791>>. Citado na página 13.

YANG, L.; MENG, X.; KARNIADAKIS, G. E. B-pinns: Bayesian physics-informed neural networks for forward and inverse pde problems with noisy data. *Journal of Computational Physics*, v. 425, p. 109913, 2021. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999120306872>>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 23.

Apêndices