

Ejercicio 1

Dibuje la frontera óptima para el proceso verdadero, dentro de muestra, y fuera de muestra. Para esto asuma lo siguiente:

- Considere un retorno esperado del 100% en los tres casos, i.e., $\mu = (1, \dots, 1)'$
- Suponga $\Sigma = I$
- Modele la matriz de covarianza muestral \mathbf{S} como una matriz aleatoria del ensemble de Wishart con $\sigma = 0.2$

Para el caso $p = 100$, $n = 200$

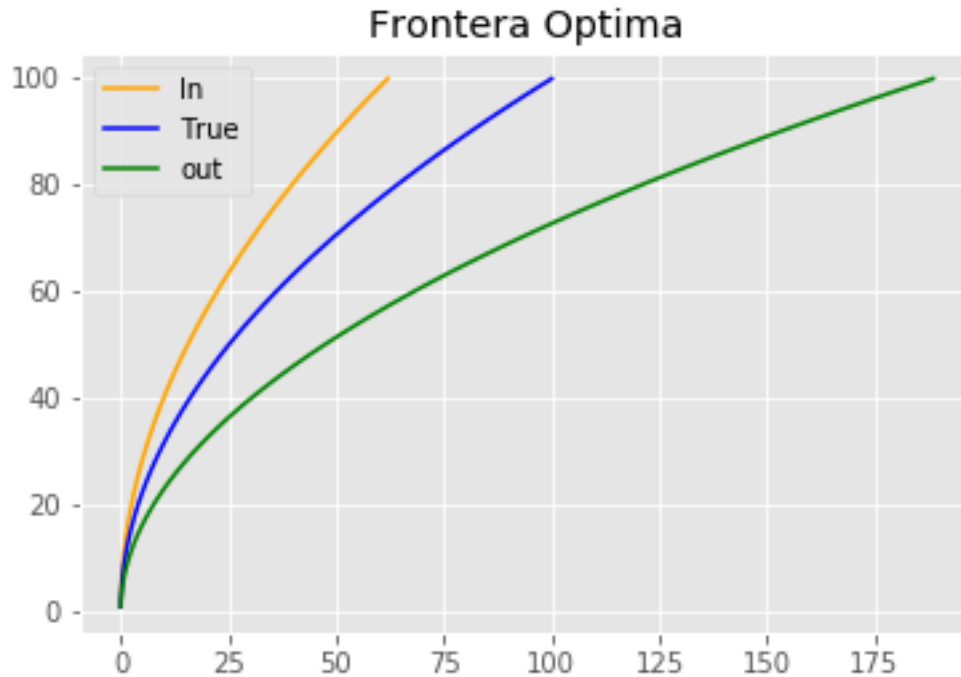


Figure 1: Retorno esperado del portafolio (eje x) respecto al riesgo (eje y)

La figura 1, muestra la frontera óptima verdadera, dentro de la muestra y fuera de la muestra.

Responder las siguientes preguntas:

1) ¿El comportamiento depende de p , n ó $c = p/n$?

Para verificar lo anterior, se vuelve a calcular la frontera óptima variando n y p .

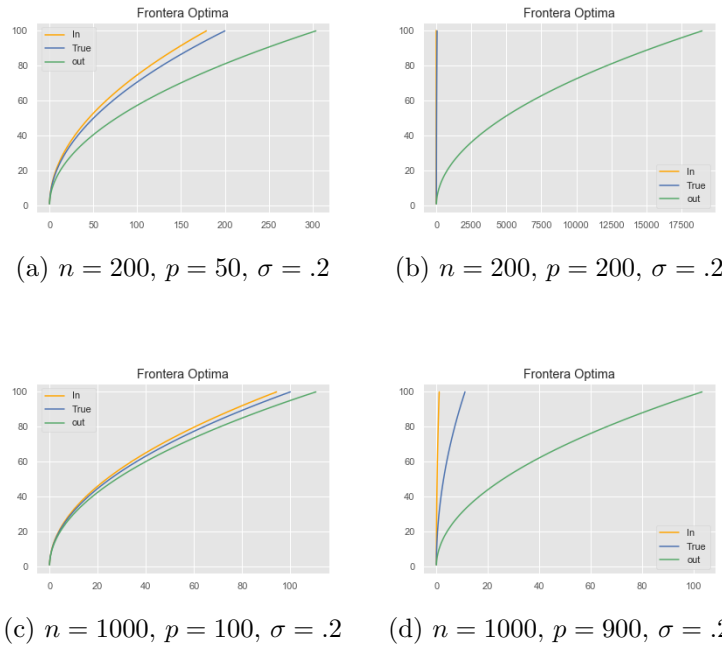


Figure 2: Variación de parámetros p y n

La figura 2, presenta la variación de los parámetros mencionados:

- En el gráfico (a), se disminuye el número de activos p , se observa que el riesgo dentro de la muestra se acerca al verdadero
- En el gráfico (b), $c = p/n$ es uno, como consecuencia las frontera verdadera y dentro de la muestra son inelásticas ante variaciones del riesgo.
- En el gráfico (c), la longitud del activo es mucho más grande que el número de activos. Como consecuencia, el riesgo fuera y dentro de la muestra tienden al riesgo verdades.
- En el gráfico (d), el número de activos tiende a la longitud de de cada uno n , incrementando la brecha entre el riesgo dentro de la muestra respecto al de fuera de la muestra.

En resumen, variaciones de los parámetros tienen efectos en la forma de la frontera óptima; i) con p cerca de n , el riesgo actual y verdadero, no muestran interés en el riesgo, solo muestran interés en las ganancias; ii) con p menor a n , se tiene mayor información para la estimación de la frontera óptima.

2) ¿Cambia el comportamiento de los resultados al variar el valor de σ ?

Se varía el valor de σ , la figura 3 muestra los resultados.

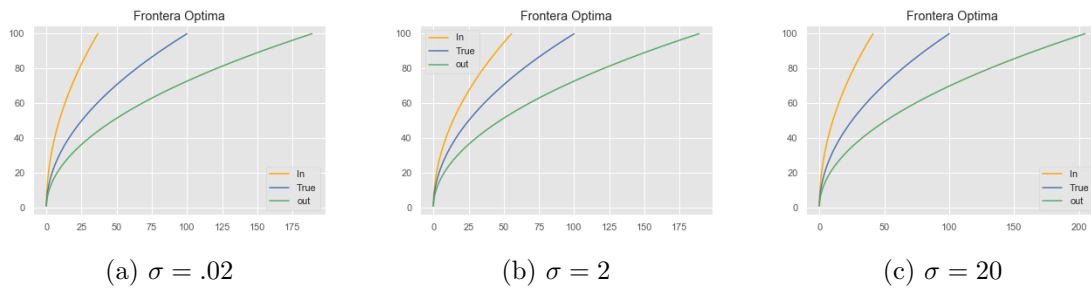


Figure 3: Variación de parámetro σ

A valores extremos disminuye la elasticidad de la ganancia respecto al riesgo, cuando el riesgo tiende a incrementar.

3) ¿Cambia el comportamiento ante otra elección del valor del retorno esperado del portafolio μ ?

Se varía el vector de los retornos esperados μ_i ; la figura 4 presenta los resultados.

Se varia de dos maneras:

- Generando números enteros aleatorios del 1 al 10 (figura 4a)
- Generando números enteros aleatorios del 1 al 100 (figura 4b)

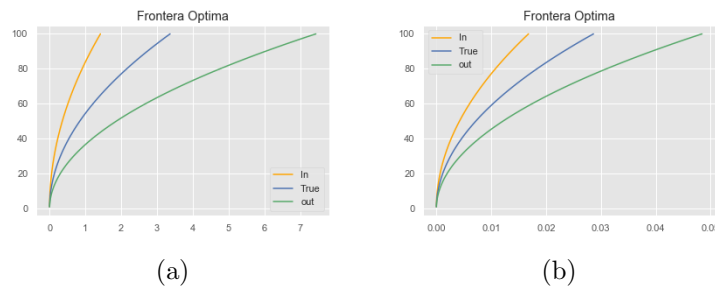


Figure 4: Variación de parámetro μ

El gráfico (a) muestra el caso (i), con valor de los retornos en un rango pequeño, el riesgo fuera de la muestra sobrestima el riesgo; a mayor retorno, mayo el riesgo.

El gráfico (b) muestra el caso (ii), donde el *trade-off* entre ganancia y riesgo fuera y dentro de la muestra tienden al riesgo verdadero.

Ejercicio 2

Para el caso de $p = 40$ indicadores financieros globales, considerando los retornos de $n = 400$ días de transacción, se obtiene el siguiente comportamiento:

Aplicar el siguiente procedimiento:

- 1) Obtenga una muestra de variables financieras en el contexto de alta dimensionalidad
- 2) Utilice el método propuesto en: “Random matrix theory and financial correlations (L. Laloux et. al. 2000)” para limpiar la matriz de correlación y mejorar la frontera óptima dentro y fuera de muestra. En especifico, implemente e metodología utilizada para generar la figura 2 que se muestra en el artículo.
- 3) Explique resultados

Datos

- Se toman las series de yahoo finanzas
- Se utiliza python la biblioteca *yfinance* para descargar las series Son 40 Precio Activos de longitud 400, conformado por el periodo ”2017-04-20 a 2018-12-30”
- Datos con frecuencia diaria
- Los datos perdidos se omiten (i.e., se elimina el día para todos los activos)

La tabla 1, muestra el nombre de los 40 activos con los que se trabaja.

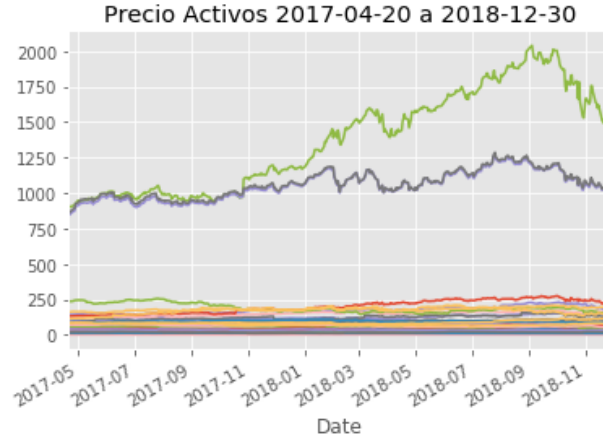
Table 1: Indicadores financieros

Acciones	Acciones	Acciones	Acciones	Acciones
AMD	AAPL	BAC	AMZN	T
GOOG	MO	DAL	AA	AXP
DD	BABA	ABT	UA	AMAT
AMGN	AAL	AIG	ALL	ADBE
GOOGL	ACN	ABBV	MT	LLY
AGN	APA	ADP	APC	AKAM
NLY	AEP	ATVI	ADSK	ADM
BMH.AX	WBA	ARNA	LUV	ACAD

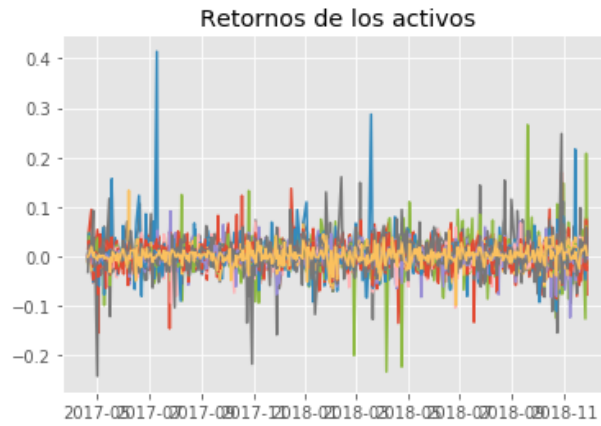
Se hace uso de los retornos, el calculo es el siguiente:

$$Return = \log(X_t) - \log(X_{t-1})$$

La figura 5a, muestra el precio de los activos; la figura 5b, se presenta el retorno de los activos.



(a) Precio de los activos



(b) Retornos de los activos

Figure 5: Variables financieras

Metodología

Se utiliza la metodología propuesta en: “Random matrix theory and financial correlations (L. Laloux et. al. 2000). En el se hace una corrección a la matriz de covarianza de las series neutralizando en cierto sentido los valores propios con menor relevancia.

Para limpiar la matriz de covarianza y calcular la frontera óptima, sin ruido, se utiliza el resultado límite de la ley de Marcenko-Pastur:

$$\rho(\lambda) = \frac{\sqrt{((\lambda_{max} - \lambda)(\lambda - \lambda_{min}))}}{2\pi c\lambda}$$

con cotas dadas por:

$$\lambda_{min}^{max} = (1 \pm \sqrt{c})^2$$

La ley de Marcenjo-Pastur representa la función de densidad espectral en el caso asintótico. La densidad se observa en la figura 6.

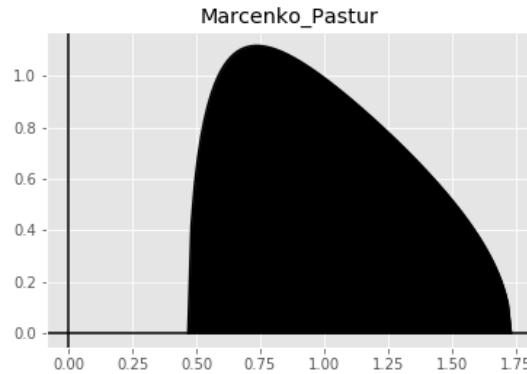


Figure 6: Función de densidad espectral Marcenko Pastur

Lo que sigue es dividir nuestras series en dos:

- La primera parte; $p = 20$ y $n_1 = 200$ (In-sample)
- La segunda parte; $p = 20$ y $n_2 = 200$ (Out-sample)
- Se connota como C^1 a la matriz de covarianza sin limpiar de la primera parte; (i.e., dentro de la muestra)
- Se connota como C^2 a la matriz de covarianza sin limpiar de la segunda parte; (i.e., fuera de la muestra)
- Se connota como \hat{C}^1 a la matriz de covarianza limpia de la primera parte; (i.e., dentro de la muestra)
- Se connota como \hat{C}^2 a la matriz de covarianza limpia de la segunda parte; (i.e., fuera de la muestra)

Lo que se hace es tomar la matriz de covarianza para la primera y segunda mitad (i.e., C^1 y C^2), y se contrastan sus valores propios respecto a la función de densidad espectral. Los valores más alejados de la cota, son los valores propios más grandes; de esta manera, se sustituye el valor de aquellos que caen dentro de la ley Marcenko Pastur, por una constante, sea a .

¿Qué valor de a se debe tomar?. De acuerdo a Laloux et. al. (2000), aquel valor que percierbe la traza de la matiz de covariaza. En este caso $a = 1$, para aquellos valores propios que se encuentran dentro de la función de distribución espectral.

Primera mitad de los datos

Se utiliza C^1 , se calculan sus valores propios y se contrastan respecto a la ley de Marcenko-Pastur. La figura 7a, muestra aquellos valores propios que caen dentro y fuera de la distribución. Se toman los más grandes y al resto se le sustituye con valor de a .

La figura 7b, es la figura 7a, pero sin mostrar los valores propios de la matriz de covarianza que caen dentro de la densidad espectral.

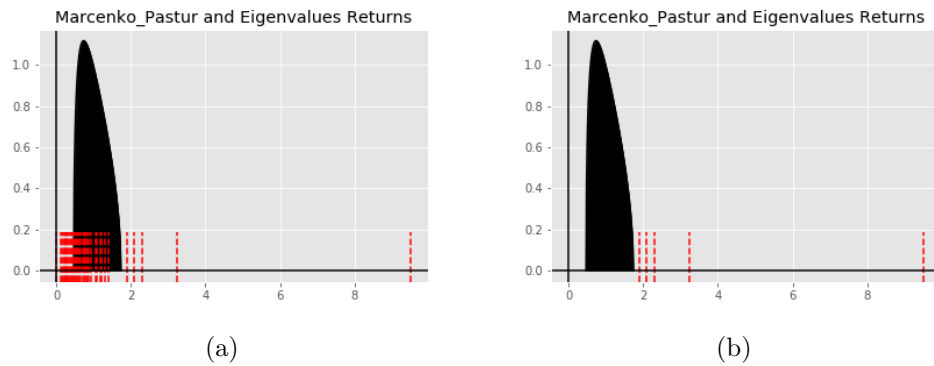


Figure 7: Marcenko Pastur y Valores propios de la matriz de covarianza de los retornos

Con la matriz de covarianza limpia, \hat{C}^1 , se calcula la Frontera Optima dentro de la muestra y se compara con la frontera que se estima en base a la matriz de covarianza sucia C^1 .

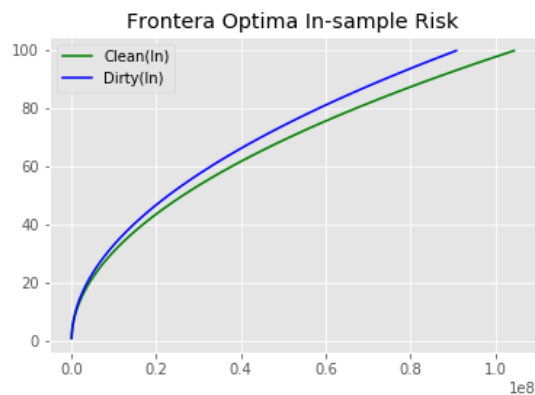


Figure 8: Riesgo dentro de la muestra

En la figura 8, se muestra lo mencionado. Se observa que la frontera dentro de la muestra,

estimada con la matriz de covarianza limpia, elimina ligeramente la subestimación del riesgo respecto al retorno del portafolio.

Segunda mitad de los datos

Se estima de forma similar la frontera óptima fuera de la muestra, limpiando C^2 , y estimando con \hat{C}^2 .

La figura 9a y 9b, muestran los valores propios de C^2 que caen dentro y fuera de la densidad espectral. Se utilizan los tres valores propios fuera de la densidad, el resto de sustituye con un valor a .

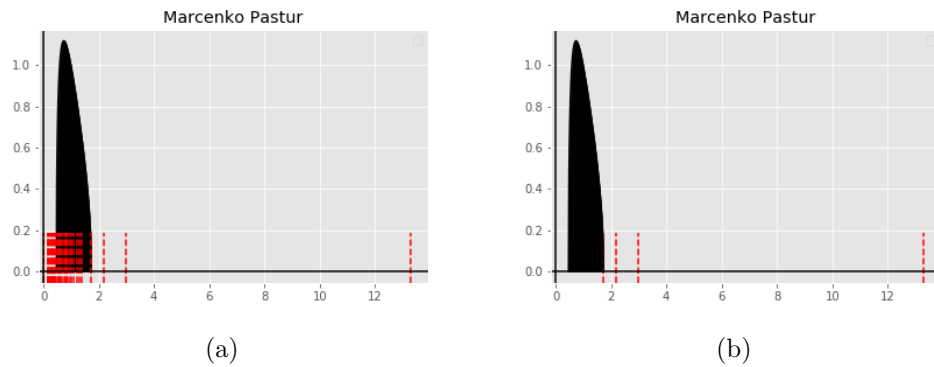


Figure 9: Marcenko Pastur y Valores propios de la matriz de covarianza de los retornos

La figura 10, muestra la frontera óptima fuera de la muestra, estimada con \hat{C}^2 . Se observa que la frontera ya limpia deja de sobrestimar el riesgo respecto al retorno.

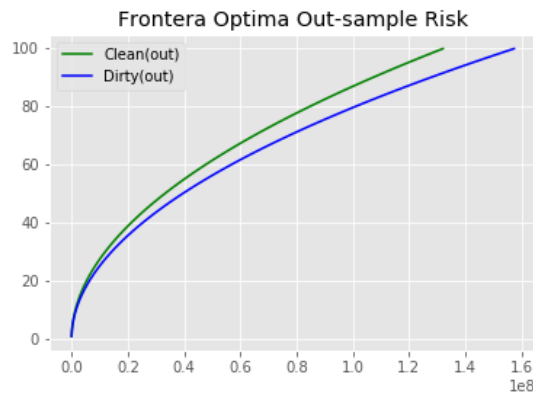


Figure 10: Riesgo fuera de la muestra

Resultado

La figura 11, contrasta la estimación de la frontera óptima dentro y fuera de la muestra utilizando la matriz de covarianza limpia (C^1 y \hat{C}^2) y sucia (C^1 y C^2).

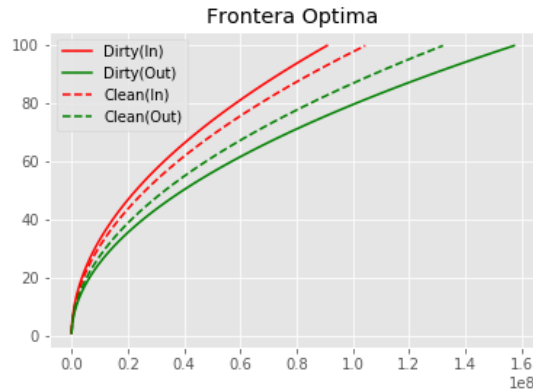


Figure 11: Ajustada de acuerdo a L. Laloux et. al. 2000

Se observa que las fronteras ajustadas con la metodología de Laloux et. al. (2000), ajustan mejor la relación entre retorno y riesgo, por un lado se subestima menos cuando es el caso de fuera de la muestra; y se sobrestima menos cuando es el caso dentro de la muestra. Por último, el que la brecha de las fronteras dentro y fuera de la muestra tiendan a disminuir, indica una mejor estimación del riesgo verdadero.

Ejercicio 3

Resuelva las ecuaciones de Painlevé numericamente para encontrar la distribución Tracy-Widom para $\beta = 1, 2$. Se recomienda seguir la sección 2.4 de "Random Matrix Theory and its Innovative Applications".

El código se encuentra en el archivo "Tarea 5 Hairo Ulises Miranda Belmonte.py", en la sección "Ejercicio 3".

Se sigue la sección 2.4 del trabajo sugerido, en el caso de la ley Traicy-Widom para $\beta = 2$, se traduce el código de matlab a python. En el caso de ley Traicy-Widom para $\beta = 1$, se modifican ciertos parámetros para obtener la función de distribución y al tomar derivada la función de densidad.

Lo que se tiene es lo siguiente; se realiza una cierta suposición de la matriz de covarianza de alguna matriz, con elementos diferentes de la identidad, pero queremos suponer que pertenece a una distribución wishart, para eso, se observa la función de densidad del valor propio más

grande de la matriz de covarianza de interés. Para estimar la función de densidad se utiliza el resultado donde se aproxima con la distribución de Tracy-Widom.

Se implementa el cálculo para estimar la densidad con la distribución de Tracy-Widom; la figura 12, muestra la estimación de la función de densidad con $\beta = 2$, y una simulación para un ensamble GUE, simulando 5000 matrices hermitianas simetrizadas de tamaño 100×100 . Se obtienen sus valores propios y se toma el más grande para cada simulación. Al realizar el histograma, se tiene el resultado de una buena aproximación a la distribución Tracy-Widom, por ende la densidad estimada se realiza de forma correcta.

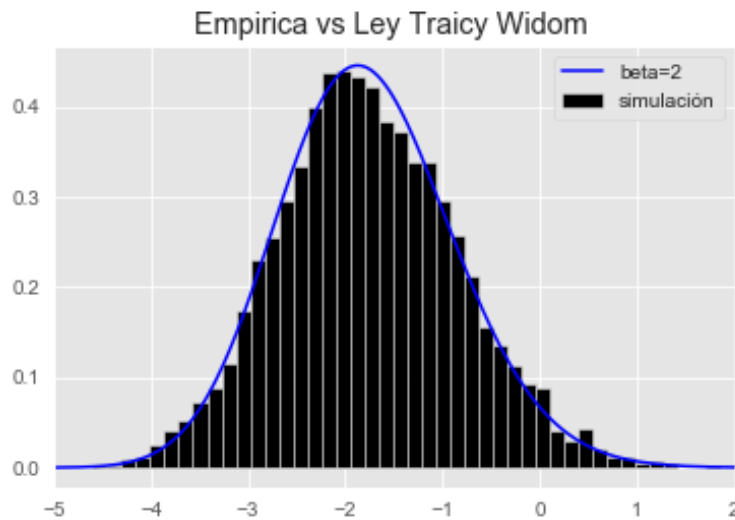


Figure 12: Densidad del valor propio de una matrix Hermitiana respecto a la ley de Tracy Widom

La figura 13, muestra la función de distribución y densidad de Tracy-Widom, para $\beta = 1$ y $\beta = 2$. El código de la implementación se encuentra disponible en la sección "Ejercicio 3".¹

¹Nota: en base a la función de densidad y distribución se resuelve el ejercicio 4, calculando la probabilidad de que un valor propio grande se encuentre dentro de cierta cota. La figura 13a, permite realizar este resultado al calcular el área bajo la curva de cierta región.

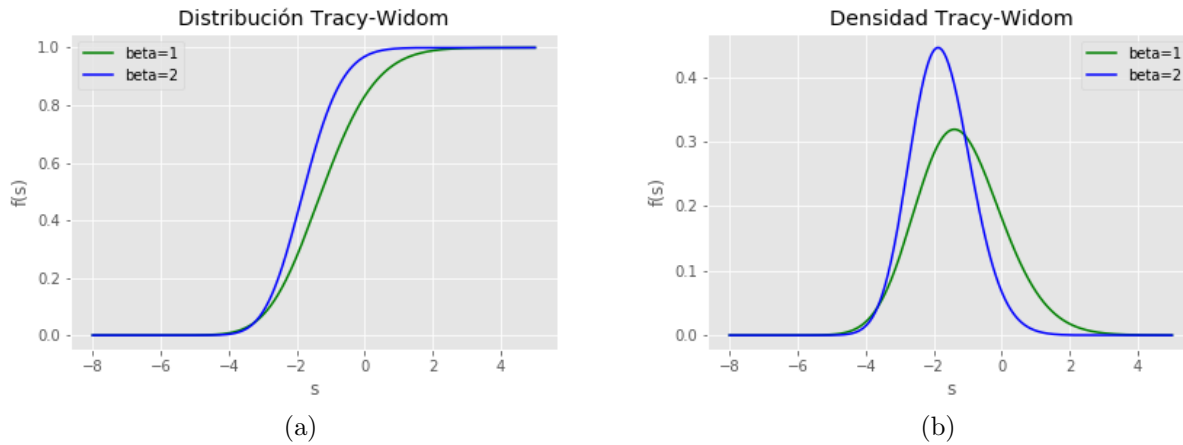


Figure 13: Distribución y Densidad Tracy-Widom

Ejercicio 4

Suponga que una muestra de $n = 10$ con covariables $p = 10$ viene de una población con distribución $N_{10}(0, \Sigma)$, y encontramos que el valor propio más grande de la muestra es de $\hat{\lambda}_1 = 4.3$

1) ¿Este valor es consistente con la $H_o = W_{10}(10, I)$ aún y cuando el valor de 4.3 cae fuera del soporte $[0, 4]$ de la distribución de Marcenko-Pastur?

Se busca comprobar si $\lambda = 4.3$, tiene consistencia sobre la hipótesis nula, $H_o = W_{10}(10, I)$, dado a que proviene de una distribución $N_{10}(0, \Sigma)$ con una matriz de covarianza Σ que podría ser distinta a la matriz identidad.

En la figura 14, se muestra la distribución de densidad espectral dada por el caso límite de Marcenko Pastur, con cotas ya mencionadas $[0, 4]$, al graficar la posición del valor propio más grande de la matriz que distribuye $N_{10}(0, \Sigma)$, observemos que cae fuera de la distribución.

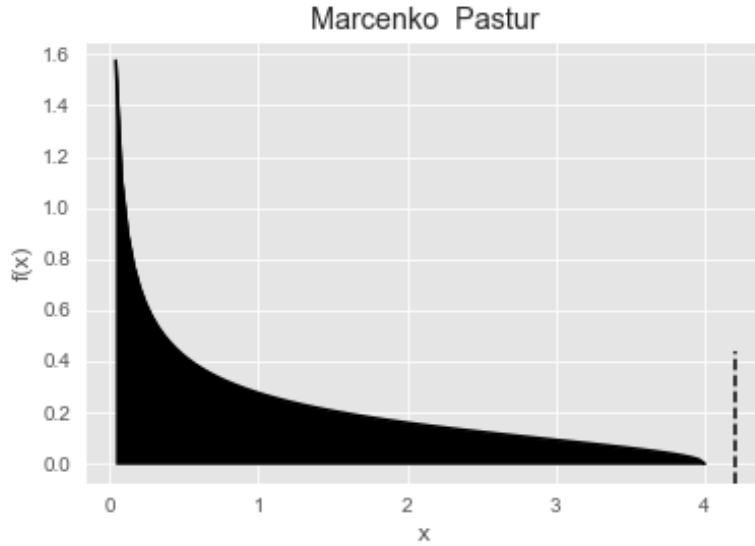


Figure 14: Valor propio más grande $\lambda = 4.2$

Para ver la consistencia, se hace uso de los resultados del ejercicio número 3, ya que para ver las hipótesis:

$$H_O : \Sigma = I$$

vs

$$H_A : \Sigma \neq I$$

Se necesita la aproximación a la distribución del valor propio , ya que el valor propio más grande debe de encontrarse por encima de cierta cota sobre la hipótesis nula

$$P\{\lambda > t | H_o = Wp(n, I)\}$$

Para aproximar la distribución del valor propio más grande sobre la hipótesis nula, se tiene el siguiente resultado:

$$P\{n\lambda \leq \mu_{np} + \sigma_{np}s | H_o\} \longrightarrow F_\beta(s)$$

con F_β como la ley de Traicy-Widom. En este caso $\beta = 1$, dado que el valor propio proviene de una matriz aleatoria cuyos elementos distribuyen $N_{10}(0, \Sigma)$, y no se hace referencia del uso de complejos.

donde la aproximación a primer orden viene dada por:

$$\mu_{np} = (\sqrt{(n)} + \sqrt{(p)})^2$$

$$\sigma_{np} = \mu_{np} \left(\frac{1}{\sqrt{(n)}} + \frac{1}{\sqrt{(p)}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

De esta forma, se necesita la construcción de la tabla que exprese la función de distribución, para obtener la probabilidad del valor crítico, que en este caso es el valor propio más grande, utilizando la aproximación de primer orden:

$$s = \frac{\lambda - \mu_{np}}{\sigma_{np}}$$

Entonces, en base al ejercicio 3, con la función acumulada estimada y de densidad Traicy-Widom (figura 13), basta con solo calcular el área bajo la curva para obtener el valor crítico, sea s , y obtener el p-valor para contrastar respecto a diferentes niveles de significanos.

La figura 15 (a), presenta la distribución Traicy-Widom con aproximación de primer orden, con valor crítico $s = 0.058$, y su p-valor de 0.157 (área en rojo).

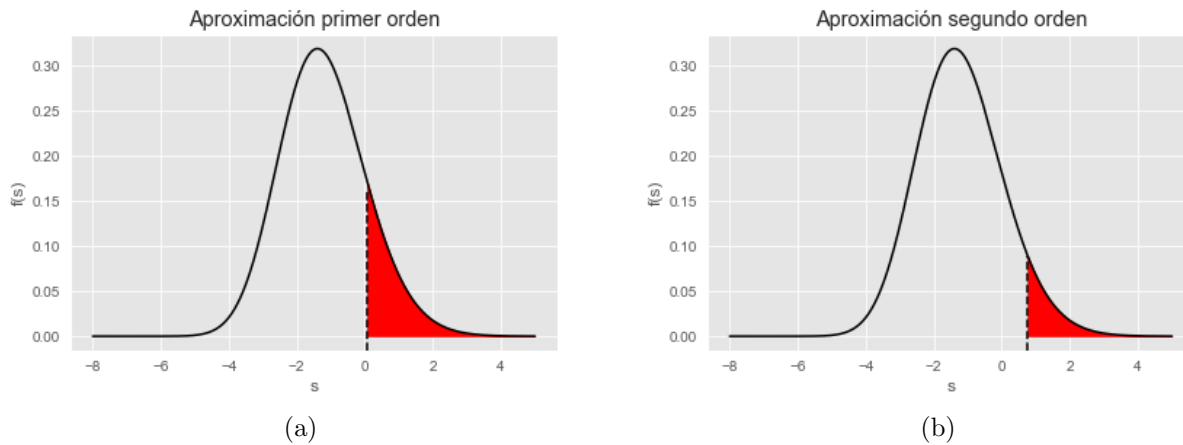


Figure 15: Ley Tracy-Widom prueba $\lambda = 4.2$

3) Rechace o acepte H_0 bajo un nivel de significancia del 1%, 5% y 10%

En base a la tabla 2, podemos contesar la pregunta 1 y 3 para el caso de una aproximación de primer orden. Donde, se busca no rechazar sobre la nula, indicando que la matriz de

covarianza de donde fue calculado el $\lambda = 4.2$, proviene de una distribución con la identidad como la matriz de covarianza. Por lo tanto, este valor es consistente con la $H_o = W_{10}(10, I)$ ²

Se puede ver, que para un nivel de significancia del 0.1, .05 y .01, no se rechaza la hipótesis nula, por lo tanto, $H_o : \Sigma = I$, se cumple bajo la aproximación de primer orden.

2) Utilizando la aproximación a 2do orden calcule la probabilidad de encontrar un valor más extremo a 4.3

Con la aproximación de segundo orden se obtienen mejor razón de convergencia de la densidad del valor propio más grande bajo la hipótesis nula, respecto a la densidad Traicy-Widom (i.e., $O(p^{-\frac{1}{3}})$ a $O(p^{-\frac{2}{3}})$).

al igual que la aproximación de primer orden, la de segundo :

$$P\{n\lambda \leq \mu_{np} + \sigma_{np}s | H_o\} \longrightarrow F_{\beta}(s) | Ce^{cs} p^{-\frac{2}{3}}$$

donde la diferencia radica en modificar los valores de escalamiento:

$$\mu_{np} = (\sqrt{n - \frac{1}{2}} + \sqrt{p - \frac{1}{2}})^2$$
$$\sigma_{np} = (\sqrt{n - \frac{1}{2}} + \sqrt{p - \frac{1}{2}}) \left(\frac{1}{\sqrt{n - \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{p - \frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

La figura 15 (b), muestra la distribución Traicy Widom, calculada en el ejercicio pasado, donde se marca el valor crítico, bajo la aproximación de segundo orden, con valor de $s = 0.749$, y p-valor de 0.068 (área en rojo).

3) Rechace o acepte H_o bajo un nivel de significancia del 1%, 5% y 10%

Con base a la tabla 3, podemos contestar la pregunta 2 y 3 para el caso de una aproximación de segundo orden. Se puede ver, que para un nivel de significancia del .1 y .05, no se rechaza la hipótesis nula sin embargo, para un nivel del .01, se tiene evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula.

4) ¿Cuáles son sus conclusiones?

²En caso de responder sí en la columna "No Rechazar", se estará diciendo que el valor crítico es mayor al valor α , por lo tanto, no se tiene evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula, por ende $H_o : \Sigma = I$, se cumple.

Table 2: Prueba de hipótesis: aproximación primer orden de distribución Tracy-Widom F_1

p-valor	α	No Rechazar
0.157	0.1	Sí
0.157	0.05	Sí
0.157	0.01	Sí

Table 3: Prueba de hipótesis: aproximación segundo orden de distribución Tracy-Widom F_1

p-valor	α	No Rechazar
0.068	0.1	Sí
0.068	0.05	Sí
0.068	0.01	No

En conclusión, bajo la aproximación de primer orden, el valor de $\lambda = 4.2$, es consistente con la $H_o = W_{10}(10, I)$, inclusive cuando el valor se encuentra fuera del soporte $[0, 4]$, de la distribución Marcenko-Pastur, perteneciendo a un conjunto de matrices que distribuyen como wishart.³

Github Documento :

<https://github.com/hairo1421/Maestria-Computo-Estadistico/blob/master/05%20-%20Tercer%20Semestre%20Temas%20en%20Estad%C3%ADstica/Matrices%20Aleatorias/Tarea%205%20Widom-%20Hairo%20Ulises%20Miranda%20Belmonte.pdf>

Github Código :<https://github.com/hairo1421/Maestria-Computo-Estadistico/blob/master/05%20-%20Tercer%20Semestre%20Temas%20en%20Estad%C3%ADstica/Matrices%20Aleatorias/Tarea%205%20Widom-%20Hairo%20Ulises%20Miranda%20Belmonte.py>

³El código con el cual se calculan los p-valores se encuentra en el archivo "Tarea 5 Hairo Ulises Miranda Belmonte.py", en el apartado "Ejercicio 4".