Hairo Ulises Miranda Belmonte (1)

Preguntas con opción multiple

1) Los algoritmos númericos deben ser:
   d) Todos los anteriores
2) El análisis numérico tenemos que anal...
   b) errores de redondeo
3) Si x = 10 con el error relativo 0.01...
   a) 1 (ver ejercicio)
4) Cuál de los siguientes métodos iterativo...
   a) Método de Newton

5) Para algunos métodos de búsqueda...
   b) tasa de convergencia es - $e_k \log_{10}(0.1)$
6) El método bisección...
   a) puede converger cuando el método de Newton no puede.
7) En aplicaciones realistas a gran escala...
   c) calculando el criterio de eliminación
8) Una matriz A es singular si
   d) no tiene el inverso.
9) Si la eliminación gaussiana para una ecu....
   d) nada se puede concluir de A
10) El recuento de operaciones de resolver un sistema...
   a) n^2
11) La complejidad de la eliminación gaussiana con...
   d) $O(n^4)$
12) La complejidad de computar la factorización LU...
   c) $O(n^3)$
13) Si tenemos que resolver $Ax = b$ muchas...
   b) utilizar la descomposición LU
14) Si A no tiene factorización LU entonces
   a) A es singular.

82/16/8 4 2 1
1 1 0 1 0 1

0010110

(2)

15) El número de condición de una matriz A...
c) Determinar la relación entre error en A y error en b
16) Dados n+1 pares de datos, un pol...
b) n
17) Dado los puntos [a, f(a)], [b, f(b)] el...
d) $f_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$
18) La máquina almacena...
c) 1.5
19) Una computadora...
b) 2^{-4}
20) ¿Cuál es más preciso en integración...
d) Cuadratura de Gauss

Apendice Ejercicio de preguntas

3) $x = 10$

$\varepsilon_r = 0.01$

$\varepsilon_a = \tilde{x} - x$

$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{x}$

Entonces

$0.01 = \frac{\tilde{x}}{10}$

$\tilde{x} = 10.1$

comprobando

$\varepsilon_a = \tilde{x} - x = .1$

$\varepsilon_r = \frac{.1}{10} = .01$

$\varepsilon_a \to x^2/2$

$\varepsilon_a = \frac{(10.1)^2}{2} - \frac{(10)^2}{2} = 1.005$

redondeando $= \varepsilon_a = \underline{\underline{1}}$

18) $(0\,010110)_2$

$\underset{+}{0} \quad \underbrace{010}_{\text{exp}} \quad \underbrace{0110}_{\text{mantisa}}$

$0 \quad 1 \quad 0$

$0\times4 \quad 1\times2 \quad 0\times1 = 2$

$2^{-1} + 2^{-2} = 2^{-3}$

$2(2^{-3} + 2^{-2}) = 1.5$

Ejercicios Prácticos

1) Sea A una matriz. $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 12 & 5 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

(a) Demuestre que A no tiene una descomposición de LU

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 12 & 5 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

- El elemento $a_{22} = 0$ por lo tanto la reducción a matriz triangular falla $\therefore$ A no tiene factorización LU. necesita pivoteo.

(b) intercambiar las filas de A y encontrar LU

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 12 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 12 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 12 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\xrightarrow{-2R_1 + R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ entonces

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ +2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$PA = LU$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 12 & 5 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) resuelva el sistema de ecuaciones

$$b = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 17 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 35 \end{bmatrix} \begin{matrix} = y_1 \\ = y_2 \\ = y_3 \end{matrix}$$

$y_1 = 9$

$-9 + y_2 = -4$

$y_2 = 5$

$-2(9) + y_3 = 17$

$y_3 = 35$

$Ux = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 35 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 35$

$3x_2 + (35) = 5$

$x_2 = -10$

$x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9$

$x_1 = 9 - 6(-10) - 2(35) = -1$

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 35 \end{pmatrix}$$

2) Realizar ortogonalización Gram-schmidth

$u_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$u_2 = a_2 - (a_2 e_1) e_1$

$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$v_3 = a_3 - (a_3 e_1)e_1 - (a_3 e_2)e_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \left(4/\sqrt{2}\right)\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

comprobando

$$e_1 \cdot e_2 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$e_1 \cdot e_3 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$e_2 \cdot e_3 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

8

3) Encuentra la descomposición de $A = QR$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = a_2 - [a_2 e_1] e_1$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = QR$$

$$Q^T A = R$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = QR$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Hallar la solucion de mínimos cuadrados

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se utiliza ecuación normal

$$A'A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A'A = LDL' = LD^{1/2}D^{1/2}L'$$

$-1/2\, R_1 + R_2 \to R_2$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D^{1/2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$L' = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$T = LD^{1/2}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$

$T^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$

Resolviendo sistema

$Ty = A^t b$

$A^t b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

Por foward substitution

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

$y_1 = 5$

$y_1 + \sqrt{5} y_2 = 10$

$y_2 = (10 - 5)/\sqrt{5}$

$$y = \begin{pmatrix} 5 \\ 2.236068 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$L^T x = y$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

back substitution

$$x_2 = \sqrt{5}/\sqrt{5} = 1$$

$$2x_1 + x_2 = 5$$

$$2x_1 = 5 - 1$$

$$x_1 = 4/2 = \underline{2}$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to x_1 \\ \to x_2 \end{matrix}$$

5) ¿Por qué la aplicación de la descomposición LU sin pivoteo utilizando eliminación gaussiana de la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-7} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

aumenta inestabilidad numérica?

Sea $\varepsilon = 10^{-7}$ Por facilidad

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ si no pivoteamos

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{-1/\varepsilon R_1 + R_2 \to R_2}{\sim} \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1-1/\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1-1/\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & -1/\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & -1/\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq A$$

obteniendo pivote pequeño, ha ocasionado pérdida de información en la matriz al transformar.

Qué sucede al utilizar pivoteo?

$$-\varepsilon R_1 + R_2 \to R_2$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} = PA$$

con

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

compara número de condición de la ~~matriz~~ A y los de U y L.

CASO 1

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-7} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1e^{-7} & 1 \\ 0 & -9999 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1e^{-7} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1e^{7} & 1 \end{pmatrix}$$

rowsum

$K(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$

$\|A\| = \max\{1, 2\} = 2$

$\|A^{-1}\|_\infty = \max\{0, 1\} = 1$

- $\boxed{K(A) = 2}$

$K(U) = \|U\|_\infty \cdot \|U^{-1}\|_\infty$

$\|U\|_\infty = \max\{1, 999999\} = 999999$

$\|U^{-1}\|_\infty = \max\{1e^{7}, 1e^{-07}\} = 1e^{7}$

- $\boxed{K(U) = 9.999e^{+12}}$

$K(L) = \|L\|_\infty \cdot \|L^{-1}\|_\infty$

$\|L\|_\infty = \max\{1, 1 \cdot e^{7}\} = 1e^{7}$

$\|L^{-1}\|_\infty = \max\{1, 1e^{7}\} = 1e^{7}$

- $\boxed{K(L) = 1e^{7} \cdot 1e^{7} = 1e^{14}}$

U y L inestable cuando pivote es 10^{-7}

CASO 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-7} & 1 \end{pmatrix}$ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-7} & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -10^{-7} & 1 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.999999 \end{pmatrix}$

$\|A\|_\infty = \max\{2, 1\} = 2$

$\|A^{-1}\|_\infty = \max\{2, 1\} = 2$

$\boxed{K(A) = 2 \cdot 2 = 4}$

$\|U\|_\infty = \max\{2, 0.9999\} = 2$

$\|U^{-1}\|_\infty = \max\{2, 1\} = 1$

$\boxed{K(U) = 2}$

$\|L\|_\infty = \max\{1, 1\} = 1$

$\|L^{-1}\|_\infty = \max\{1, 1\} = 1$

$\boxed{K(L) = 1}$

A con pivote está lejos de ser singular.

6) Trasformar A en tridiagonal utilizando
(i) Householder y (ii) rotación givens.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

↳ simetrica

i)

$V_1 = a_1 - \alpha c_1 \qquad \alpha_1 = \|a_1\| = \sqrt{4^2+3^2}$
$= 5$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1 \;\; 3)}{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$H_1 = \begin{matrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & -0.8 \end{matrix}$$

$$H_1 A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 5.4 \\ 0 & 2.8 \end{pmatrix}$$

$$A_2 H_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5.4 & 2.8 \end{pmatrix}$$

$$A \; H_2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5.4 & 2.8 \\ 0 & 2.8 & 7 \end{pmatrix}$$

11) Givens rotation

tangente $= a_2/a_1 = 3/4$

Seno $= 3/\sqrt{16} = .6$

Coseno $= 4/\sqrt{16} = .8$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & .8 & -.6 \\ 0 & .6 & .8 \end{pmatrix}$$

$$G_1^{-1} = G_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & .8 & .6 \\ 0 & -.6 & .8 \end{pmatrix}$$

Where

$$G_1^{-1} A G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & .8 & .6 \\ 0 & -.6 & .8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & .8 & -.6 \\ 0 & .6 & .8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 5 & 7.32 & 0.76 \\ 0 & 0.76 & 5.68 \end{pmatrix}$$

18

7) Consideremos las matrices

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Encuentra solución de mínimos cuadrados

$$Ax = b$$
$$QRx = b$$
$$Rx = Q^T b$$

Entonces

$$Q^T b = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 1/\sqrt{2} \qquad x = \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$2x_1 + 1/\sqrt{2} = 2/\sqrt{2}$$

$$x_1 = \frac{1/\sqrt{2}}{2},$$

$$x_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

8) ¿Cómo se representa 7.75 en IEEE 754-32 bits?

a) C 7.75

entero

4	2	1
1	1	1

7 - 4 = 3
3 - 2 = 1
1 - 1 = 0

decimal

.75 × 2 = 1.5   1
.5 × 2 = 1   1
0 × 2 = 0   0
0 × 2 = 0   0

7.75 = 111.11000

= 1.1111000 × 2^2

(e - 127) = 2   e = 129

Representación IEEE

exponente el binario

128	64	32	16	8	4	2	1
1	0	0	0	0	0	0	1

129 - 128 = 1
1 - 1 = 0

0 | 10000001 | 11110000000000000000000

signo   exponente   mantisa

a punto flotante

$1 + (2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}) = 1 + 2^{-10}$

exponente $= 129$

$(1 + 2^{-10}) \times 2^{129} \cong 6.813 \times 10^{38}$

a) # entero positivo máximo del sistema

0 11111110 11111111111111111111111

signo exponente significand

$l_{10} = (-1)^s (1.f) 2^{e-2}$

entonces $1 + (1 - 2^{-23}) = 2 - 2^{-23}$

y exponente $= (254 - 127) = 127$

más largo $= (2 - 2^{-23}) \times 2^{127} \cong 3.403 \times 10^{38}$

b) # positivo más pequeño

0 00000001 00000000000000000000000

signo exponente m significand

significand $= 1.0$

exponente $= 1 - 127 = -126$

más pequeño $= 2^{-126} \cong 1.1755 \times 10^{-38}$

c) ¿Qué # entero subnormal máximo?

el # subnormal más largo es

$0.99999998 \times 2^{-126} \simeq 1.1755 \times 10^{-38}$

el cual se acerca al entero positivo más pequeño.

d) ¿Qué # entero subnormal mínimo?

0 00000000 000000000000000000000000

signo expo significand

$\rightarrow 2^{-23} \times 2^{-126} = 2^{-149} \simeq 1.403 \times 10^{-45}$

$(-1)^s (f) 2^e$

e) ¿Qué es valor de epsilon de máquina?

en 32 bit - IEEE con 23 bit de significand

$\varepsilon_{machine} = 2^{-23} = 1.19 \times 10^{-7}$