1) Sean $X \sim$ Binomial (n_1, p_1) y $Y \sim$ Binomial (n_2, p_2) ①
$\delta = p_2 - p_1$. Use la prior $f(p_1, p_2) = 1$ para hallar la posterior $f(\delta \mid x^n)$. Halle media posterior y densidad posterior de δ.

Binomial (n_1, p_1)

Sea $X_1 \sim$ Binomial (n_1, p_1) y $Y \sim$ Binomial (n_2, p_2)

$\delta = p_2 - p_1$ es lo que queremos estimar

Sea la prior $f(p_1, p_2) = 1$.

La posterior se define como

$f(p_1, p_2 \mid X, Y) \propto p_1^{x}(1-p_1)^{n_1 - x} \cdot p_2^{y}(1-p_2)^{n_2 - y}$

Nota $\binom{n_1}{x}$, $\binom{n_2}{y}$ salen como la constante de integración

Note que (p_1, p_2) viven en el rectangulo y tambien la posterior

$$f(p_1, p_2 \mid x, y) = f(p_1 \mid x) \cdot f(p_2 \mid y)$$

Se pueden separar y considerar como independientes.

$\therefore$ $p_1 \perp p_2$ independientes bajo la posterior.

También

$p_1|x \sim Beta(x+1, n_1-x+1)$

$$\frac{\Gamma(x+1+n_1-x+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n_1-x+1)} p_1^{(x+1)-1}(1-p_1)^{(n_1-x+1)-1}$$

kernel de integración

$p_2|y \sim Beta(y+1, n_2-y+1)$

$$\frac{\Gamma(y+1+n_2-y+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(n_2-y+1)} p_2^{(y+1)-1}(1-p_2)^{(n_1-y+1)-1}$$

Por lo tanto

Posterior

$$f(p_1,p_2|y_1,y_2) \propto p_1^{x}(1-p_1)^{n_1-x}\cdot p_2^{y}(1-p_2)^{n_2-y}$$

entonces al ser indep bajo posteriori

la media o densidad la estimaremos

$f(p_1|x_1)$ su valores puntuales es

$$\frac{x+1}{x+1+n_1-x+1} = \frac{x+1}{n_1+2}$$ | es distribución

$f(p_2|y)$ su media es

$$\frac{y+1}{y+1+n_2-y+1} = \frac{y+1}{n_2+2}$$

→ continúa

Si queremos la media de $J(p_1, p_2)$ ③

$$E(J) = \int_0^1 \int_0^1 J(p_1, p_2) f(p_1, p_2 \mid x, y)$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (p_2 - p_1)\left[p_1^{x}(1-p_1)^{n_1-x} \cdot p_2^{y}(1-p_2)^{n_2-y}\right] dp$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left[p_1^{x}(1-p_1)^{n_1-x} \cdot p_2^{2y}(1-p_2)^{n_2-y}\right] - p_1^{2x}(1-p_1)^{n_1-x} p_2^{y}(1-p_2)^{n_2-y}\Big] dp_2\, d$$

Y si quisiéramos la densidad posterior de J tendríamos que tener la posterior CDF

$$F(c \mid x, y) = P(J < c \mid x, y) = \int_A f(p_1, p_2 \mid x, y)$$

con $A = \{p_1, p_2 : p_2 - p_1 \leq c\}$

y diferenciar F. pero es complicado por lo tanto realizamos simulación en R.

[ver R].

2)

$X_1, \ldots, X_n \; N(\mu, 1)$

$f(\mu|x^n) \propto L(\mu) f(\mu)$ donde $L(\mu) = f(x, \mu)$

$f(\mu) = 1$

$$f(\mu|x^n) \propto \prod \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i - \mu)^2}\right] \cdot 1$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}$$

$\mu | x^n \sim N(\mu, 1)$

d) Sea $\theta = e^{\mu}$. Halle densidad posterior

θ.

$\theta = e^{\mu}$

$$H(\theta|x^n) = P(\Theta \leq \theta | x^n) = P(e^{\mu} \leq \theta | x^n)$$

$$= P(\mu \leq \log(\theta) | x^n)$$

$$= \int_{-\infty}^{\log(\theta)} f(\mu|x^n)\, d\mu$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-1/2 \sum_{i}^{n} x_i^2} \int_{-\infty}^{\log(\theta)} e^{-1/2(-\mu^2)}\, d\mu$$

x_m $h(\theta|x^n) = H'(\theta|x^n)$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\Sigma x_i^2} \left(e^{+\frac{2\log(\theta)n}{2}} \right) \left(\frac{\partial (\log(\theta))}{\partial\theta} \right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\Sigma x_i^2} \left(\theta n \right) \left(\frac{\partial (\log\theta)}{\partial\theta} \right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\Sigma x_i^2} (\theta n) \left(\frac{1}{\theta} \right)$$

En el pacel $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\Sigma x_i^2}$ puede quedar fuera.

Y si observamos

$$\int_0^{\log(\theta)} e^{-y^2 n/2} \, dy$$

va a aproximarse a una exponencial