Estadística Inferencial (Tarea 2)

Hairo Ulises Miranda Belmonte

11 de septiembre de 2018

Ejercicio 1

Una pareja decide tener hijos hasta el nacimiento de la primera niña. Calcule la probabilidad de que tenga más de 4 hijos. Suponga que las probabilidades de tener niño o niña son iguales. ¿Cuál es el tamaño de la familia?

Probabilidad de tener más de 4 hijos sin que se presente el nacimiento de una niña.

$$P(X > 4)$$

Con una $p = \frac{1}{2}$ de que se tenga una niña.

El problema se puede atacar con la distribución geométrica, expresando lo anterior como:

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= 1 - P(X \leq 4) \\ &= 1 - \sum_{x=1}^{4} (0.5)(0.5)^{x-1} \\ P(X = 1) &= 0.5 \\ P(X = 2) &= 0.25 \\ P(X = 3) &= 0.125 \\ P(X = 4) &= 0.0625 \\ 1 - 0.9375 &= 0.0625 \end{aligned}$$

La probabilidad de tener más de cuatro niños sin antes presentarse el nacimiento de una niña es de 0.0625. Dicha probabilidad, como se observa, no es lo suficientemente alta, esto indica que para una familia tener más de cuatro hijos y que ninguno de los anteriores allá sido una niña es poco probable.

El tamaño de esta familia es:

$$E(x) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.5} = 2 + 2 = 4$$

No obstante, al valor esperado le sumamos dos, que son el papá y la mamá. La familia, por lo tanto, consta de 4 integrantes en promedio.

Ejercicio 2

Cuando una máquina no se ajusta adecuadamente tiene una probabilidad 0.15 de producir un artículo defectuoso. Diariamente, la máquina trabaja hasta que se producen 3 artículo defectuosos. Se detiene la máquina y se revisa para ajustarla.¿Cuál es la probabilidad de que una máquina mal ajustada produzca 5 o más artículos antes de que sea detenida? ¿Cuál es el número promedio de artículos que la máquina producirá antes de ser detenida?

El problema se puede abordar con la binomial negativa.

$$P(X \geq 5) = 1 - (P(X = 3) + P(X = 4))$$

$$= 1 - \sum_{x=3}^{4} \binom{x-1}{3-1} (0.15)^3 (1-0.15)^{x-3}$$

$$P(X = 3) = \binom{3-1}{3-1} (0.15)^3 (1-0.15)^0 = 0.003375$$

$$P(X = 4) = \binom{4-1}{3-1} (0.15)^3 (1-0.15)^1 = 0.008606$$

$$= 1 - \sum_{x=3}^{4} \binom{x-1}{3-1} (0.15)^3 (1-0.15)^{x-3} = 0.9880$$

Esto quiere decir, que la probabilidad de que produzca más de 5 artículos sin antes detenerse es de 0.9880, lo cual es muy probable de que no interrumpa el proceso de producción.
EL número promedio de artículos que producira la maquina antes de detenerse es de:

$$E(x) = \frac{r}{p} = \frac{3}{0.15} = 20$$

Se espera que el número promedio que la maquina producirá sea alrededor de 20.

Ejercicio 3

Los empleados de una compañía de aislantes son sometidos a pruebas para detectar residuos de asbesto en sus pulmones. Se le ha pedido a la compañía que envíe a tres empleados cuyas pruebas resulten positivas, a un centro médico para realizarles más análisis. Si se sospecha que el 40 porciento de los empleados tienen residuos de asbesto en sus pulmones, encuentre la probabalidad de que deban ser analizados 10 trabajadores para poder encontrar a 3 con resultado positivo.
El problema es un caso en el cual para no examinar a n sujetos solamente se toma algunos, con el fin de solo aplicar dichos estudios a una proporción menor, y en caso de que de esa muestra alguno cuente con dicha enfermedad, entonces, se hará un estudio más exhaustivo. Estos eventos pueden aproximarse con una binomial negativa.
Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$P(X = 10) = \binom{10-1}{3-1} (0.40)^3 (1-0.40)^{10-3} = 0.064497$$

La probabilidad de que deban ser analizados 10 trabajadores para poder encontrar a 3 con resultados positivo es de 0.064. Esto quiere decir, que se necesitaría un estudio más exhaustivo con un número más grande de muestra, dado que la probabilidad fue aproximadamente del 6 %.

Ejercicio 6

Considera X una v.a. con función de distribución F y función de densidad f, y sea A un intervalo de la línea real R. Definimos la función indicadora 1A(x):
Sea Y = 1A(X). Encuentre una expresión para la distribución acumulada de Y .

$$1A(X) = 1 six \in A$$

$$1A(X) = 1 six \in A^c$$

$$f(x) =$$

$$\begin{cases} P(x) & x \in A \\ 1 - P(A) & x \in A^c \end{cases}$$

$$F(x) =$$

$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - P(A) & 0 < x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$Y = F_x(x) = 1 - P(x)$$

$$F_y(y) = 1 - F_x(x)$$

Ejercicio 7

Entre las más famosas de todas las lluvias de meteoros eststán las Perseidas, que ocurren cada año a principios de agosto. En algunas áreas, la frecuencia de Perseidas visibles promedian seis por cada cuarto de hora. El modelo de probabilidad que describe a Y , el número de meteoros que una persona ve en un cuarto de hora, tiene la función de probabilidad

$$f_Y(y) = \frac{e^{-6}6^y}{y!}$$

$$y = 0, 1, ...$$

Encuentre la probabilidad de que una persona vea en un cuarto de hora determinado al menos la mitad de los meteoros que esperaría ver.
Se plantea la probabilidad:

$$P(Y > E(Y)/2)$$

El valor esperado de la distribución poisson es:

$$E(Y) = \lambda = 6/2 = 3$$

De esta forma, la probabilidad que se plantea es:

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y < 3)$$

Esto es:

$$P(Y = 0) = \frac{e^{-6}6^0}{0!} = 0.002478$$

$$P(Y = 1) = \frac{e^{-6}6^1}{1!} = 0.014872$$

$$P(Y = 2) = \frac{e^{-6}6^2}{2!} = 0.004461$$

$$\sum_{y=0}^{2} = \frac{e^{-6}6^y}{y!} = 0.061668$$

$$1 - \sum_{y=0}^{2} = \frac{e^{-6}6^y}{y!} = 0.9380312$$

La probabilidad de que una persona vea en un cuarto de hora al menos la mitad de los meteoros que espera ver es de 93.8 %.

Ejercicio 8

Las calificacones de un estudiante de primer semestre en un examen de química se describen por la densidad de probabilidad

$$f_y(y) = 6y(1 - y)$$

$$0 \leq y \leq 1$$

donde y representa la proporción de preguntas que el estudiante contesta correctamente.

Cualquier calificación menor a 0.4 es reprobatoria. Responda lo siguiente:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante repruebe?

b) Si 6 estudiantes toman el examen, ¿cuál es la probabilidad de exactamente 2 reprueben?
a) La probabilidad de que un alumno repruebe es:

$$\int_0^{0.40} (6y(1 - y))dy$$

$$= \int_0^{0.40} (6y - 6y^2)dy$$

$$= \frac{6y^2}{2} - \frac{6y^3}{3}$$
$$= 3y^2 - 2y^3|_0^{.40}$$
$$= 0.48 - 0.128 = 0.352$$

La probabilidad de que un estudiante repruebe es del 35.2 %.

La probabilidad de que dos estudiantes de 6 que toman el examen reprueben, se puede representar con la distribución binomial. En el cual, el numero de ensayos (o intentos) son los 6 estudiantes que presenten el examen, y los éxitos, dos estudiantes que reprueben.

Al ser eventos independientes, por lo tanto, la binomial con una probabilidad de éxito (no pasar el examen) es del .352, - esta probabilidad de que un alumno repruebe en un examen se calcula en el inciso anterior- el cual se utiliza en el siguiente calculo de probabilidad.

$$P(X = 2) = \binom{6}{2}(0.352)^2(1 - 0.352)^4 = 0.3277$$

Entonces, la probabilidad de que dos estudiantes de seis que presentan un examen reprueben es de: 32.7 %.