Tarea 3

La presentación vence el 30 de abril.

1. Escriba la ventaja y desventaja de metodo de (a) LU de eliminación Gaussiana; (b) decomposición cholesky; (c) ortogonalización de Gram-Schmidt; (d) reflexiones de Householder; (e) rotaciones de Givens; (f) Jacobi; (g) Gauss-Seidel; (h) SOR; (i) Algoritmo de Arnoldi; (j) Algoritmo de Lanczos; (k) GMRES y (l) gradiente conjugado.

2. Escriba la ventaja y desventaja de método de (a) bisección; (b) punto fijo; (c) newton; (d) secante; y (e) Broyden.

3. (i) ¿Cuáles de las siguientes matrices son ortogonales?

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \sqrt{2/2} & \sqrt{2/2} \\ -\sqrt{2/2} & \sqrt{2/2} \end{bmatrix}$

(ii) Si Q es un matriz orthogonal de dimension 2×2 asi que $Q\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$, ¿Cuál debe ser el valor de α?

4. Considere la siguiente matriz *A*, cuya factorización LU deseamos calcular utilizando la eliminación de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \\ 0 & -10 & -3 \end{bmatrix}$$

¿Cuál será el elemento pivote inicial si

(a) no se utiliza pivote?
(b) Se utiliza pivote parcial?
(c) Se utiliza el pivote completo?

5. Determine la transformación de Householder que aniquila a todos menos la primera entrada del vector [1 1 1 1]^T. Específicamente, si

$$\left(1 - 2\frac{vv^T}{v^T v}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$ cuáles son los valores de α y *v*?

6. Demuestra que la matriz de producto cruzado A^TA es exactamente singular en aritmética de punto flotante si

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \in & 0 \\ 0 & \in \end{bmatrix}$, donde $\in$ es un número positivo más pequeño que $\sqrt{\in_{maq}}$ en un sistema de punto flotante dado. Demuestra que si $A = QR$ es la factorización QR para esta matriz A, entonces R es no singular, incluso en la aritmética de punto flotante.

7. Sea x la solución al problema lineal de mínimos cuadrados $Ax \cong b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sea $r = b - AX$ el vector residual correspondiente. ¿Cuál de los siguientes tres vectores es un valor posible de r ? ¿Por qué?

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

8. (a) ¿Cuál es la norma euclidiana del vector residual mínimo para los siguientes problemas lineales de mínimos cuadrados?

(i) $\begin{bmatrix} 0.16 & 0.10 \\ 0.17 & 0.11 \\ 2.02 & 1.29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0.28 \\ 3.31 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) ¿Cuál es la solución vector x para este problema? También resuelva el problema (i) de los mínimos cuadrados de nuevo, pero esta vez use el lado derecho ligeramente perturbado.

$$b = \begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.25 \\ 3.33 \end{bmatrix}$$

(c) Compara sus resultados de las partes a y b. ¿Puede explicar esta diferencia?

9. ¿Cuál es la solución exacta *x* al problema de los mínimos cuadrados lineales como una función de $\in$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \in & 0 & 0 \\ 0 & \in & 0 \\ 0 & 0 & \in \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resuelve este problema de mínimos cuadrados usando cada uno de los siguientes métodos: (a) ecuaciones normales (b) Householder QR (c) Rotaciones de Givens QR (d) Ortogonalización de Gram-Schmidt.

10. Resuelve el siguiente sistema de ecuación lineal usando los siguientes métodos:

$$\begin{aligned} x + z &= 6 \\ z - 3y &= 7 \\ 2x + y + 3z &= 15 \end{aligned}$$

.

(a) Factorización LU; (b) ecuaciones normales (c) Householder QR (d) Rotaciones de Givens QR (e) Ortogonalización de Gram-Schmidt, (f) Jacobi (g) Gauss-Seidel (h) Sobrerelajación sucesiva (SOR), (i) GMRES, y (j) Gradiente Conjugado.

Por favor, muestre todos los pasos intermedios.

También por favor encuentre el inverso de A usando el teorema de Cayley-Hamilton.

11. (a) Resuelve *tanh* (*x*) = *0* por el método de Newton y estudie los detalles intermedios del algoritmo. Comience con x_0 = 1.08. Grafica la tangente en cada iteración del método de Newton. Luego repita los cálculos y el trazado cuando x_0 = 1.09. Explica lo que observas.

(b) Resuelve el mismo problema (*tanh* (*x*) = *0*) mediante método de Secante con el valor inicial x_0 = 1.08 y x_1 = 1.09. Explica lo que observas.

(c) Resuelve el problema *tanh* (*x*) = *0* con el método de combinación del bisección y newton entre un intervalo inicial [-10, 15]. Explica lo que observas.

Ayuda: Por favor vea http://hplgit.github.io/prog4comp/doc/pub/p4c-sphinx-Matlab/._pylight007.html#th-exer-newton-failure.

12. Realice el análisis de sensibilidad y condicionamiento para las siguientes funciones: (a) x^2-2x+1=0, (b) x^3- 3X^2 + 3x-1=0, (c) x^2-5x+6=0.